Soluzioni prova scritta

Ingegneria Informatica 16/09/2024

Esercizio 1

Il primo quesito consiste in 2 **domande a risposta aperta** da un punto ciascuna. Per i quesiti 2, 3 e 4 ci si deve esprimere sulla **correttezza o falsità di 6 affermazioni**. Si ottengono 0, 1 e 2 punti in base al numero di risposte corrette, errori o risposte in bianco, secondo lo schema:

6 corrette → 2 punti
5 corrette + 1 errore → 1 punto
5 corrette + 1 bianca → 1 punto
4 corrette + 2 bianche → 1 punto
Tutti gli altri casi → 0 punti

1. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si consideri un metodo iterativo per sistemi lineari della forma

$$x_{m+1} = Hx_m + c, \qquad H \in \mathbb{C}^{n\times n}, \qquad c \in \mathbb{C}^n.$$

Si scriva il codice Matlab/Octave di una funzione `metodo_it` che prende in ingresso la matrice `H`, il vettore `c`, un punto di partenza `x0` ed un numero di iterazioni `k` e restituisce la successione $x_1, x_2, \ldots, x_k$ memorizzata nelle colonne di una matrice $n \times k$.

```
function X = metodo_it(H, c, x0, k)
    X = zeros(size(H, 1), k);
    X(:, 1) = H * x0 + c;
    for j = 2:k
      X(:, j) = H * X(:, j-1) + c;
    end
end
```

2. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e si consideri la successione di matrici

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{k+1} = R_k Q_k, \end{cases}$$

dove Q_k ed R_k formano una fattorizzazione QR della matrice A_k (ovvero $A_k = Q_k R_k$). **Reminder:** questa successione è alla base del metodo QR per il calcolo di autovalori e autovettori.

– N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire **chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi 2, 3 e 4**.

V F Se A è simmetrica allora A_k è simmetrica per ogni $k \in \mathbb{N}$.

V F Se A è tridiagonale allora A_k è tridiagonale per ogni $k \in \mathbb{N}$.

V F Se A è in forma di Hessenberg superiore allora A_k è forma di Hessenberg superiore per ogni $k \in \mathbb{N}$.

V F Le matrici A_k hanno tutte gli stessi autovalori.

V F Le matrici A_k hanno tutte gli stessi autovettori.

V F Le matrici A_k hanno tutte lo stesso numero di condizionamento in norma 2.

3. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\alpha \in \mathbb{R}$ radice di ordine p dell'equazione non lineare $f(x) = 0$, con $0 < p < \infty$.

V F Se $p > 1$ allora $\lim_{x\to\alpha} \frac{|f(x)|}{|x-\alpha|} = 0$.

V F Se $p > 1$ allora $\lim_{x\to\alpha} \frac{|f(x)|}{|x-\alpha|^p} \in (0, \infty)$.

V F Se $p > 1$ allora $\lim_{x\to\alpha} \frac{|f(x)|}{|x-\alpha|^{p+1}} = \infty$.

V F Se $0 < p < 1$ allora $\lim_{x\to\alpha} \frac{|f(x)|}{|x-\alpha|} = \infty$.

V F Nel caso $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $\alpha = 0$ si ha $p = \frac{1}{3}$.

V F Se $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ allora p è sicuramente un numero intero.

4. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $n > 2$,dire in quale delle seguenti situazioni è richiesto di risolvere uno o più sistemi lineari $n \times n$.[1]

V F Applicare 10 iterazioni del metodo delle potenze ad $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

V F Calcolare la fattorizzazione QR di $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

V F Dati n punti $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ trovare la retta che li approssima nel senso dei minimi quadrati.

V F Dati n punti $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ trovare il polinomio di grado al più $n-1$ che li interpola.

[1]La versione originale di questo esercizio coivolgeva $n+1$ punti al posto di n nelle risposte da 3 a 6; questo faceva diventare F le affermazioni 4 e 5 dato che il sistema lineare da risolvere risulta $(n+1) \times (n+1)$. Dato che non si intendeva togliere punti su questa sottigliezza, sono state considerate valide entrambe le configurazioni di risposte FF e VV per le affermazioni 4 e 5; infine si è conteggiato come una risposta giusta e una sbagliata, quando è stato indicato VF o FV.

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ Dati n nodi in $[a, b]$, trovare i pesi della formula di quadratura che approssima $\int_a^b f(x)dx$ usando i nodi dati e massimizza il grado di precisione.

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ Dati n pesi in $[a, b]$, trovare i nodi della formula di quadratura che approssima $\int_a^b f(x)dx$ usando i pesi dati e massimizza il grado di precisione.

Esercizio 2

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \beta & \dots & \beta \\ \alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

una matrice di dimensione $n \times n$, con $n \geq 3$, dipendente dai **parametri complessi** $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, con possibili elementi diversi da zero solo sulla prima riga, sulla diagonale principale e sulla prima sottodiagonale.

(i) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Si dica per quali valori dei parametri α, β il metodo di Gauss Seidel è **applicabile** ad un sistema lineare della forma $Ax = b$ (quindi con matrice dei coefficienti uguale ad A) e si determini la matrice di iterazione H_{GS} (che dipenderà da α e β).

(ii) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Nel caso $\alpha = 1$ dire per quali valori di β, la matrice H_{GS} risulta **convergente**. **Suggerimento:** si divida l'analisi nei casi n pari ed n dispari.

(i) Il metodo di Gauss Seidel è applicabile per qualsiasi scelta dei parametri α, β. La matrice di iterazione è

$$H_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta & \dots & -\beta \\ 0 & \alpha\beta & \dots & \alpha\beta \\ 0 & -\alpha^2\beta & \dots & -\alpha^2\beta \\ 0 & \alpha^3\beta & \dots & \alpha^3\beta \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & (-1)^n\alpha^{n-1}\beta & \dots & (-1)^n\alpha^{n-1}\beta \end{bmatrix}$$

(ii) Per n pari H_{GS} è convergente quando $|\beta| < 1$. Per n dispari H_{GS} è convergente per qualsiasi scelta di β.

Esercizio 3

Sia

$$f(x) = -100 \cdot \frac{(x-1)^2}{x}$$

e si consideri il problema di interpolazione polinomiale sull'intervallo $I = [0.5, 2.5]$.

(i) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Si determini il polinomio di interpolazione nella base di Lagrange su nodi equispaziati in I:

$$0.5 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2.5$$

distanti fra di loro 0.5 (ovvero $x_{i+1} - x_i = 0.5$) e si determini il suo grado.

(ii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si dia un'espressione dell'errore di interpolazione.

(iii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Usando l'espressione del punto precedente si dia una maggiorazione del valore assoluto dell'errore di interpolazione nel punto $x = \frac{3}{4}$.

(i) Il polinomio di interpolazione nella base di lagrange è

$$\begin{aligned} p(x) = &-\frac{100}{3}(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2)\left(x-\frac{5}{2}\right) - \frac{200}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-2)\left(x-\frac{5}{2}\right) \\ &+ \frac{400}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right) - 60\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2) \end{aligned}$$

ed ha grado 4 (si può concludere calcolando il coefficiente di x^4 e verificando che è diverso da zero).

(ii) Dato che f è sufficientemente derivabile, l'errore di interpolazione prende la forma

$$E = -100\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2)\left(x-\frac{5}{2}\right)}{\zeta^6}$$

con $\zeta \in [0.5, 2.5]$.

(iii) Sostituendo $x = \frac{3}{4}$ e prendendo $\zeta = 0.5$, si ottiene $|E| \leq \frac{2625}{4}$.

Esercizio 4

Sia data la funzione
$$f(x) = 3x^4 + x^2 - 2.$$

(i) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si dimostri che $f(x)$ ha un'unica radice reale α nell'intervallo $[-1, -0.5]$.

(ii) Si consideri il metodo di Newton $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ per il calcolo di α:

- $\boxed{\text{1 Punto}}$ si dimostri che il metodo di Newton converge localmente in modo quadratico ad α;
- $\boxed{\text{1 Punto}}$ si calcoli la prima iterazione del metodo di Newton (ovvero x_1) a partire da $x_0 = -1$;
- $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si trovi l'espressione di $\varphi'(x)$;
- $\boxed{\text{2 Punti}}$ Assumendo di sapere che $\varphi'(x)$ è monotona in $[-1, \alpha]$, si dimostri che la successione generata dal metodo di Newton a partire da $x_0 = -1$ converge in modo monotono ad α.

(i) Valutando la funzione negli estremi si vede che almeno una radice esiste; osservando la derivata si deduce che la funzione è strettamente decrescente su I per cui la radice è unica.

(ii)
- La derivata di f non si annulla in α quindi α è necessariamente radice semplice e questo implica la convergenza quadratica locale di Newton.
- $x_1 = -\frac{6}{7}$.
- $\varphi'(x) = \frac{(3x^4+x^2-2)(36x^2+2)}{(12x^3+2x)^2}$
- Dato che $\phi'(\alpha) = 0$, $\varphi'(-1) \in (0, 1)$ e che φ' è monotona, si ha che necessariamente $0 \leq \varphi'(x) < 1$ per ogni $x \in [-1, \alpha]$ e questo implica la convergenza monotona di Newton quando si parte da $x_0 = -1$.