La teoria spettrale

→ La FORMA QUADRATICA → Polinomio di secondo grado OMOGENEO: $H(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

→ Per le MATRICI DIAGONALI → $a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ → la H assume la forma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$

→ sulla base canonica → $H(e_1) = \lambda_1 1^2 + \lambda_2 0^2 + \dots + \lambda_n 0^2 = \lambda_1$

→ $H(e_n) = \lambda_1 0^2 + \lambda_2 0^2 + \dots + \lambda_n 1^2 = \lambda_n$

Il SEGNO della FORMA QUADRATICA di una MATRICE DIAGONALE

→ $H(x) = \sum_{1}^{n} \lambda_i x_i^2$ e vengono individuati $\lambda = \min_{1..n} \lambda_i$ $\Lambda = \max_{1..n} \lambda_i$

→ Vale la disuguaglianza: $\lambda |x|^2 = \lambda \sum_{1}^{n} x_i^2 = \sum_{1}^{n} \lambda x_i^2 \leq H(x) \leq \sum_{1}^{n} \Lambda x_i^2 = \Lambda \sum_{1}^{n} x_i^2 = \Lambda |x|^2$

$\underbrace{\lambda \leq \lambda_i \quad \Lambda \geq \lambda_i}$

$x_i^2 \geq 0$ → $\lambda |x|^2 \leq H(x) \leq \Lambda |x|^2$

Dalla disuguaglianza segue →

- Se $\lambda > 0$, $H(x) > 0$ se $x \neq 0$ → H si dice DEFINITA POSITIVA
  $H(x) = 0$ se $x = 0$
- Se $\Lambda < 0$, $H(x) < 0$ se $x \neq 0$ → H si dice DEFINITA NEGATIVA
  $H(x) = 0$ se $x = 0$
- Se $\lambda = 0$, $H(x) \geq 0$ $\forall x \in X$ → H si dice SEMIDEFINITA POSITIVA
- Se $\Lambda = 0$, $H(x) \leq 0$ $\forall x \in X$ → H si dice SEMIDEFINITA NEGATIVA
- Se $\lambda < 0$ e $\Lambda > 0$, H si dirà INDEFINITA

Se considerata la base canonica e_i → H assume valori discordi e_i ed e_j, ove $\lambda_i = \lambda$ e $\lambda_j = \Lambda$

→ L'ENDOMORFISMO: $A: X \longrightarrow X$

→ Gli AUTOVALORI: Data $A: X \longrightarrow X$, con dim X finita e non nulla, si dirà AUTOVALORE di A ogni scalare λ per il quale esistono $u \in X$ verificanti: $u \neq 0$, $A(u) = \lambda u$

→ Gli AUTOVETTORI: Ogni soluzione $u \neq 0$ di $A(u) = \lambda u$ si dirà AUTOVETTORE di A relativo a λ

→ Lo SPETTRO: L'insieme degli autovalori di A si dirà SPETTRO di A e si denoterà con $\sigma(A)$

→ Gli AUTOSPAZI: L'insieme degli autovettori relativi a λ, più lo 0 si dirà AUTOSPAZIO di λ, denotato con A^{λ}

→ Osservazione: L'autospazio relativo a λ è un SOTTOSPAZIO di X → $A^{\lambda} = \{\text{soluzioni di } A(u) = \lambda u\}$ → $A^{\lambda} = \text{Ker}(A - \lambda I)$

$0 = (A - \lambda I)_u = A(u) - \lambda u \Longrightarrow A(u) = \lambda u$

→ Applicazione DIAGONALE: Data $A: X \longrightarrow X$ lineare, con dim X finita e non nulla, e fissata una base $u_1, \dots, u_n$ di X, A si dirà DIAGONALE rispetto alla base $u_1, \dots, u_n$ se la sua matrice associata a quella base è diagonale

→ $x = \sum_{1}^{n} x_i v_i \Longrightarrow A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} x_i v_j$ con $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$

→ Applicazione DIAGONALIZZABILE: Se $A: X \longrightarrow X$ è lineare, con dim X finita e non nulla, A si dirà DIAGONALIZZABILE se esiste una base rispetto alla quale A sia diagonale

→ TEOREMA: Condizione necessaria e sufficiente perché A sia diagonalizzabile su X è che X possieda una base formata da autovettori di A, detta anche base spettrale di A

Dimostrazione

Condizione necessaria: $\exists v_1 \dots v_n$ base di X: $A(v_i) = A_{ji} v_j \longrightarrow A_{ji} = \begin{cases} \lambda_i & j = i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

base di partenza, base di arrivo

$\longrightarrow \begin{cases} A(v_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} v_j = A_{ii} v_i & \text{perché } i = j \\ v_i \neq 0 & \text{perché è una base} \end{cases}$

$\longrightarrow$ unico termine che può non essere nullo

↓ ponendo $\lambda_i = A_{ii}$

$\begin{cases} A(v_i) = \lambda_i v_i \\ v_i \neq 0 \end{cases} \longrightarrow$ autovettore che genera base spettrale

Condizione sufficiente: $u_1 \dots u_n$ base di X formata da autovettori di A

└→ Calcoliamo la matrice associata alla base $\{v_1 \dots v_n\}$:

$A(v_i) = A_{ji} v_j \quad \updownarrow = \quad A(v_i) = \lambda_i v_i$

$\sum_{j=1}^{n} A_{ji} v_j = \underbrace{\lambda_i v_i}_{\text{NO sommatoria}} \longrightarrow A_{ji} \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i \\ \lambda_i & \text{se } j = i \end{cases} \longrightarrow A$ diagonale

↓ unico termine potenzialmente $\neq 0$ è il coefficiente di v_i

In sostanza: per diagonalizzare è necessaria una base di autovettori

Esempi

① $\mathring{A}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathring{A}(u) = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$

$\mathring{A}(u) = \lambda u \longrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: A(u) = \lambda u$ con $u \neq 0 \longrightarrow \begin{matrix} v_2 - \lambda v_1 = 0 \\ -v_1 - \lambda v_2 = 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} v_2 = \lambda v_1 \\ v_1 = -\lambda v_2 \end{cases} \longrightarrow v_2 = \lambda(-\lambda v_2) = -\lambda^2 v_2 \longrightarrow v_2(1+\lambda^2) = 0$

Adesso 2 possibili soluzioni

- $\longrightarrow v_2 = 0$, sostituendo: $v_1 = 0 \longrightarrow$ NO
- $\longrightarrow (1+\lambda^2) = 0 \longrightarrow \lambda = \pm i$: ✓

Conclusione: Non esistono autovalori (ed autovettori) in $\mathbb{R}$ ma esistono 2 autovalori in $\mathbb{C}$

② $A(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ $\quad A(u) = \lambda u$

↓

$\begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} v_2 = \lambda v_1 \\ 0 = \lambda v_2 \end{cases}$

se $\lambda \neq 0 \longrightarrow v_2 = 0$ e quindi $v_1 = 0$, $v_1 = \frac{v_2}{\lambda} \longrightarrow (0,0)$ è l'unica soluzione

Se $\lambda = 0 \longrightarrow v_2 = 0$ e quindi v_1 è arbitrario NON PIVOT: $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ sono autovettori $(\alpha \neq 0)$

= per esempio

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \longrightarrow \dim = 1$

↓

NO AUTOVETTORI

→ TEOREMA: Indipendenza di autovettori a due a due distinti

└→ Siano $v_1 \dots v_n$ autovettori di A relativi a $\lambda_1 \dots \lambda_n$ a due a due distinti, Allora $v_1 \dots v_n$ sono indipendenti

Dimostrazione

Dimostrazione PER INDUZIONE su $K \longrightarrow$ se $K=1$ la tesi è vera in quanto autovettore e quindi indipendente

└→ Ogni sistema di n autovettori relativi ad autovalori distinti è indipendente $\longrightarrow$ INDUZIONE: valido per $n+1$ vettori

Dimostrazione per assurdo: supponiamo che sia FALSO, quindi $v_1, \dots, v_{m+1}$ DIPENDENTI, autovettori in autospazi distinti, ma la tesi è VERA per m autovettori

→ Per la dipendenza si ha
- → $v_1 \dots v_m$ indipendenti per $P(m)$
- → $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$ DIPENDENTI
- → $v_{m+1} = \sum_1^m \underset{\neq 0}{\alpha_i} v_i$ → Per la DIPENDENZA

1.a → $A(v_{m+1}) = \lambda_{m+1} v_{m+1} = \lambda_{m+1} \sum_1^m \alpha_i v_i = \sum_1^m \alpha_i \lambda_{m+1} v_i$

1.b → $A\left(\sum_1^m \alpha_i v_i\right) = \sum_1^m \alpha_i \underbrace{A(v_i)}_{\lambda_i v_i} = \sum_1^m \alpha_i \lambda_i v_i$

$\lambda_i v_i$ perché TUTTI AUTOVETTORI

Uguagliando 1.a e 1.b → $\sum_1^m \underbrace{(\lambda_{m+1} - \lambda_i)}_{\text{autovalori} \neq 0} \alpha_i v_i = 0$ → $v_1 \dots v_m$ sono m autovettori indipendenti per $P(m)$ → accade solo se $\alpha_i = 0 \ \forall i = 1 \dots m$

Ne consegue che → $v_{m+1} = \sum_1^m \alpha_i v_i = 0$, il che è ASSURDO poiché v_{m+1} è AUTOVETTORE

→ TEOREMA: Autovettori in autospazi distinti, relativi ad autovalori distinti, sono indipendenti

COROLLARIO: Se $A: X \longrightarrow X$ possiede n autovalori distinti (n = dimensione spazio), allora A è DIAGONALIZZABILE

Dimostrazione

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$ autovalori distinti. Di conseguenza, esistono anche gli autovettori, e quindi: $\forall i = 1 \dots n \ \exists v_i \in X : A(v_i) = \lambda_i v_i$ (No Einstein), $v_i \neq 0$

Supposti $v_1 \dots v_n$ autovettori relativi ad autovalori distinti, e quindi indipendenti → base di X per il th. dei generatori

→ Importante
- → 0 è autovalore di A se $x \neq 0$ → $A(x) = 0 \cdot x = 0$
- → 0 è autovalore di A se $\ker A \neq \{0\}$

→ TEOREMA: La somma di autospazi è DIRETTA

Dimostrazione

Supponiamo di avere $\lambda_1 \dots \lambda_k$ autovalori di A e $A^{\lambda_1} \dots A^{\lambda_k}$ relativi autospazi

Ora supponiamo di prendere $v_1 \in A^{\lambda_1} \dots v_i \in A^{\lambda_i} \dots v_k \in A^{\lambda_k}$, quindi scelto un vettore per ogni spazio voglio provare che se $v_1 + v_2 + \dots + v_i + \dots + v_k = 0$, allora $v_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, k$

Tolti dalla somma $\sum_1^k v_i$ tutti i vettori nulli, se ce ne sono, restano solo $v_{i_1}, \dots v_{i_h}$, autovettori di A, i quali, essendo in autospazi distinti, sono INDIPENDENTI

↓

ASSURDO perché $\sum_{j=1}^h v_{i_j} = 0$ è una COMBINAZIONE NULLA a coefficienti $\neq 0 (=1)$ → Devono essere tutti 0 per l'indipendenza

→ TEOREMA: Condizione necessaria e sufficiente perché A sia diagonalizzabile è che $\sum_{\lambda_i \in \sigma(A)} \dim A^{\lambda_i} = \dim X$, dove $\sigma(A)$ è lo SPETTRO, ovvero l'insieme degli autovalori e λ_i sono autovalori

→ DEFINIZIONE: Una base spettrale è una base di autovalori

→ TEOREMA di ESISTENZA di AUTOVETTORI (spazi invarianti): Sia $A: X \longrightarrow X$ (spazio invariante per A), con X spazio complesso (scalari in $\mathbb{C}$), allora $\exists \, u \neq 0, \lambda \in \mathbb{C} : A(u) = \lambda u$ → esistono autovalori ed autovettori

→ NOTA BENE: $0 < \dim X < +\infty$ → NON 0 in quanto conterrebbe solo 0

Dimostrazione

Sia $v_1 \dots v_m$ una base di X, arbitraria $\longrightarrow$ $X = \underset{\text{Einstein}}{x_i v_i} \ (\Sigma)$, $A(x) = x_i A(v_i) = x_i \underset{\text{Matrice associata}}{A_{ji}} v_j$

$X \neq 0 \iff$ qualche $x \neq 0$ perché $x_i v_i = 0$, e per l'indipendenza di v_i si ha $x_i = 0 \ \forall i$

$$\begin{cases} A(x) = \lambda x \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \overbrace{x_i A_{ji} v_j}^{A(x)} = \overbrace{\lambda x_j v_j}^{\lambda x} \longrightarrow [A_{ji} x_i - \lambda x_j] v_j = 0 \\ x_i \text{ NON tutti nulli} \end{cases}$$

Combinazione nulla di vettori indipendenti $(v_1 \dots v_m)$, da cui: $A_{ji} x_i - \lambda x_j = 0 \ \forall j = 1 \dots m$

$\hookrightarrow$ si hanno m equazioni omogenee nella matrice:

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & \dots & & x_m & \\ \hline A_{11}-\lambda & A_{12} & \dots & A_{1m} & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ A_{m1} & \dots & & A_{mm}-\lambda & 0 \end{array}$$

$A - \lambda I \longrightarrow$ Possiede autovalori se esistono soluzioni non nulle del sistema, e ciò accade se $\det(A - \lambda I) = 0$, che è l'equazione caratteristica di A e le sue soluzioni sono gli autovalori di A.

Per ogni λ autovalore di A si possono determinare le soluzioni non nulle del sistema degli autovalori, cioè $(A - \lambda_i)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ e per ciascuna di tali soluzioni $x = \sum_1^n x_i v_i$ è un autovettore di A in X.

TEOREMA fondamentale dell'algebra: Poiché $\det(A - \lambda I)$ è un polinomio in λ e dato il teorema, ogni polinomio in $\mathbb{C}$ ha soluzioni $P(\lambda) = 0$, e ne segue che in $\mathbb{C}$ esistono autovalori e autovettori

Esempio

$X = \langle \operatorname{senh} t, \cosh t \rangle$ $\qquad (\operatorname{senh} t)' = \cosh t$

$A: X \longrightarrow X \qquad A(v) = v' \qquad (\cosh t)' = \operatorname{senh} t$

$\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$

$\operatorname{senh} t = \frac{1}{2} e^t - e^{-t}$

La derivata prima muta X in sé $\longrightarrow v_1 = \operatorname{senh} t \qquad v_2 = \cosh t \longrightarrow X = \underbrace{x_1 \operatorname{senh} t + x_2 \cosh t}_{\in \langle \operatorname{senh} t, \cosh t \rangle}$

$A(v_1) = (\operatorname{senh} t)' = \cosh t = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2$

$A(v_2) = (\cosh t)' = \operatorname{senh} t = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$

$\dot{A} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$0 = \det(\dot{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \longrightarrow$ equazione caratteristica di $\dot{A}$, quindi i due autovalori distinti sono $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$

Devo trovare gli autovettori sostituendo gli autovalori

$\hookrightarrow \lambda = 1 \longrightarrow (A - 1 \cdot I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow$
$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{0} \end{array} \quad \mathrm{II} = -\mathrm{I}$$
$-x_1 + x_2 = 0$, quindi $x_1 = x_2$ e quindi l'autospazio di $\lambda = 1$ è $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$\hookrightarrow \lambda = -1 \longrightarrow (A + 1 \cdot I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow$
$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array} \quad \mathrm{II} = \mathrm{I}$$
$x_1 = -x_2$ e quindi l'autospazio di $\lambda = -1$ è $\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

Trovo la base spettrale

$\vdash < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > \longleftrightarrow 1 \cdot \sinh t + 1 \cdot \cosh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} + \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} = e^t \longrightarrow$ base spettrale: $\{e^t, e^{-t}\}$

$\llcorner < \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} > \longleftrightarrow -1 \cdot \sinh t + 1 \cdot \cosh t = \dfrac{-e^t + e^{-t} + e^t + e^{-t}}{2} = e^{-t}$

Verifica che sono autovettori: $A(u_1) = (e^t)' = 1 \cdot e^t = e^t \longrightarrow$ Verificato

→ INVARIANZA del POLINOMIO CARATTERISTICO: $\det(M^{-1}AM - \lambda I) = \det M^{-1}(A - \lambda I)M \xrightarrow[\text{Binet: det prodotto = prodotto dei determinanti}]{} \det M^{-1} \det(A - \lambda I) \det M \longrightarrow \det(A - \lambda I)\underbrace{\det(MM^{-1})}_{1}$

Esempio

$\dot{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \dot{A} - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(\dot{A} - \lambda I) = \lambda^2 + 1 \longrightarrow$ ha zeri in $\mathbb{C}$

$\llcorner$ diagonalizzabile: 2 autovalori distinti

→ FATTORIZZAZIONI di POLINOMI: $P(z_i) = 0$, allora $P(z)$ è divisibile per $(z - z_i)$

$\llcorner P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\alpha_1} (\lambda_2 - \lambda)^{\alpha_2} \dots (\lambda_n - \lambda)^{\alpha_n} \longrightarrow \alpha_i$ è la MOLTEPLICITÀ di λ_i

Esempio

$\dot{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \dot{A} - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \det(\dot{A} - \lambda I) = \lambda^{2} \longrightarrow$ molteplicità di $\lambda = 0$

→ TEOREMA: λ è un autovettore di A e μ è la sua molteplicità nell'equazione caratteristica, allora: $\dim A^\lambda \leq \mu(\lambda)$

Dimostrazione:

Sia $u_1 \dots u_n$ una base dell'autospazio di A^λ e sia $u_1 \dots u_k, v_{k+1} \dots v_n$ un completamento ad una base di X.

Calcoliamo la matrice associata ad A e alla base così costruita:

$A(u_1) = \alpha v_1$

$A(v_2) = \alpha v_2$

$$\xrightarrow{k} \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha & 0 & & 0 & \\ 0 & \alpha & & 0 & B \\ 0 & 0 & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & \alpha & \\ \hline 0 & 0 & & 0 & \dot{A} \end{array}\right) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{matrice associata}}}{A} \longrightarrow \left|\begin{array}{cccc|c} \alpha - \lambda & 0 & & 0 & \\ 0 & \alpha - \lambda & & \vdots & B \\ 0 & 0 & \ddots & \alpha - \lambda & \\ \hline 0 & 0 & & 0 & C - \lambda I \end{array}\right|$$

UTILIZZO lo SVILUPPO di LAPLACE: $\underbrace{(\alpha - \lambda)(\alpha - \lambda) \dots (\alpha - \lambda)}_{k \text{ volte}} |C - \lambda I| = (\alpha - \lambda)^k |C - \lambda I| \longrightarrow$ molteplicità ALMENO di k

→ Teorema: CNS perché A sia diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ è che la dimensione di ogni autospazio sia uguale alla sua molteplicità

$\llcorner \forall \lambda \in \sigma(A) \longrightarrow \dim A^\lambda = \mu(\lambda)$

→ Teorema: CNS perché A sia diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ è che $\dim A^\lambda = \mu(\lambda) \quad \forall \lambda \in \sigma(A) + \Sigma \mu(\lambda) = \dim X$

→ Operatori autoaggiunti $\longrightarrow$ Sia X uno spazio euclideo di dimensione finita NON NULLA. $A: X \longrightarrow X$ si dirà autoaggiunto se accade che $\forall u, v \in X$, $A(u)v = uA(v)$

→ Lemma 1: Se A è autoaggiunto su X allora ogni suo autovalore è reale

Dimostrazione

Sia λ l'autovalore della tesi e sia u un suo autovettore qualsiasi.

$\llcorner$ Allora: $A(u)u = (\lambda u)u = \lambda(u \cdot u) = \lambda \|u\|^2 \longrightarrow \lambda \|u\|^2 = \bar{\lambda} \|u\|^2$

($\uparrow$ u autovett.)

A autoagg. $\rightarrow uA(u) = u(\lambda u) = \bar{\lambda}(u \cdot u) = \bar{\lambda} \|u\|^2$

$\llcorner$ sesquilinearità del prodotto scalare in $\mathbb{C}^n$

Poiché $\|u\| \neq 0$ perché u è autovettore, dividendo per $\|u\|^2$ si ha $\lambda = \bar{\lambda}$, cioè $\lambda \in \mathbb{R}$

→ Lemma 2: Siano u e v autovettori relativi ad autovalori distinti. Allora u e v sono ortogonali, cioè $u \cdot v = 0$

Dimostrazione

Hp: $u, v \neq 0$ $\quad A(u) = \lambda u \quad \lambda \neq \mu$

$A(v) = \mu v$

$A(u)v = (\lambda u)v = \lambda(uv) \longrightarrow (\lambda - \mu)(uv) = 0 \Longrightarrow uv = 0$, quindi tesi

$\parallel \longrightarrow$ Autoaggiunto $\quad \mu$ reale per il lemma 1

$u A(v) = u(\mu v) = \bar{\mu} uv = \mu uv$

→ Lemma 3: Supponiamo che u sia autovettore di A autoaggiunto. Allora se $wu = 0 \Longrightarrow A(w)u = 0 \, (\perp)$

$\hookrightarrow W = \langle v \rangle^{\perp} \Longrightarrow A: W \longrightarrow W$

Dimostrazione

$A(w)u = wA(u) = w(\lambda u) = \bar{\lambda} \underbrace{wu}_{=0} = 0$ (auto valore di u)

→ TEOREMA SPETTRALE COMPLESSO: X è uno spazio euclideo complesso, $\dim X < \infty$ e $\dim X > 0$ e $A: X \longrightarrow X$ è autoaggiunta (si indica con A^*). Allora esiste una base ortonormale di X costituita da autovettori di A

Dimostrazione

→ Caso 1: $\dim X = 1$

$A: X \longrightarrow X$, X complesso, $\dim X > 0$, allora $\exists u_1$ autovettore di A, e poniamo $V_1 = \dfrac{u_1}{|u_1|}$

Poiché $\dim X = 1 \Longrightarrow X = \langle V_1 \rangle$ e $\{V_1\}$ è la base ortonormale richiesta

→ Caso generale: Supponiamo vero il teorema per gli spazi di dim K, e proviamolo per quelli di dim $K+1$

$A: X \longrightarrow X$ $\quad \exists u$ autovettore di A, $V = \dfrac{u}{|u|}$

Sia $W = \langle v \rangle^{\perp}$, essendo che $X = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^{\perp} \Longrightarrow \dim \langle v \rangle + \dim W = \dim X = K+1$ e quindi $\dim W = K$ (con $\dim \langle v \rangle = 1$)

Per ipotesi induttiva il teorema è vero per K, purché si verifichi che $A: W \longrightarrow W$

$w \in W \Longleftrightarrow wu = 0 \xRightarrow[\text{lemma III}]{} A(w)u = 0 \Longrightarrow A(w) \in W$ quindi l'ipotesi induttiva è verificata

$\exists$ $V_1, V_2, \dots, V_k$ base di W ortonormale $\longrightarrow \underline{V_1, \dots, V_k, V}$ ortonormale per considerazioni seguenti e $V \perp V_1, V_2, \dots, V_k$ perché essi $\in W = \langle v \rangle^{\perp}$

e poi $|V| = 1 \longrightarrow V$ è un autovettore di A

$\downarrow$

Si hanno $K+1$ autovettori ortonormali in X e quindi indipendenti che, per il teorema dei generatori, generano X e sono la base richiesta

→ Ogni operatore autoaggiunto su uno spazio euclideo complesso di dimensione finita non nulla è diagonalizzabile (con base spettrale ortonormale)

→ TEOREMA: $A: X \longrightarrow X$ è autoaggiunta se e solo se la sua matrice associata ad una base ortonormale qualsiasi di X è autoaggiunta [$A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ in $\mathbb{C}^{m \times m}$ o $A_{ij} = A_{ji}$ in $\mathbb{R}^m$]

Esempio

$$A: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \quad A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & -1 & 2+3i \\ 1+i & 2-3i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ (autovalori reali) $\quad$ matrice autoaggiunta

→ TEOREMA SPETTRALE REALE: Se $A(u) = Au$, $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $A_{ij} = A_{ji}$, allora $\exists$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^m$ formata da autovettori di A

$\hookrightarrow A_{ij} = \bar{A}_{ji}$ (equivalgono in $\mathbb{R}$)

Problema dello studio delle FORME QUADRATICHE

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j \xleftrightarrow[\text{simmetrica}]{\text{ove}} b_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$$

stessa forma quadratica

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\text{autovalori})\, x_i^2$$