ALGEBRA LINEARE

PARTE 1: VETTORI E GEOMETRIA

DEFINIZIONI

1. $\mathbb{R}^n$

L'insieme $\mathbb{R}^n$ è l'insieme delle n-uple formabili con numeri reali.
$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad a_i \in \mathbb{R} \ \forall i\}$

2. VETTORE IN $\mathbb{R}^n$

x è vettore in $\mathbb{R}^n$ se le sue coordinate sono una n-upla di numeri reali.

$$x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (x_1, x_2, \dots x_n) = x, \text{ con } x_i \in \mathbb{R} \ \forall i$$

3. VETTORE UGUALE O OPPOSTO

Due vettori sono uguali se lo sono le loro coordinate.
$a, b \in \mathbb{R}^n$

$$a = b \iff a_i = b_i \quad \forall i$$

Due vettori sono invece opposti se lo sono le loro coordinate e si ha che

$$a + (-a) = 0 \qquad -a = (-a_1, -a_2, \dots -a_n) \ \forall i$$

4. SOMMA DI VETTORI

La somma di due vettori è il vettore che ha per componente i-esima la somma delle componenti i-esime.

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$a - b = a + (-b)$ [la differenza è la somma con l'opposto]

5. PRODOTTO SCALARE·VETTORE (MULTIPLO SCALARE)

Il prodotto tra $\lambda \in \mathbb{R}$ e un vettore è il vettore le cui componenti sono moltiplicate per λ.

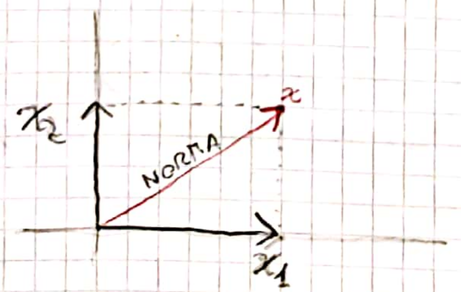
$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

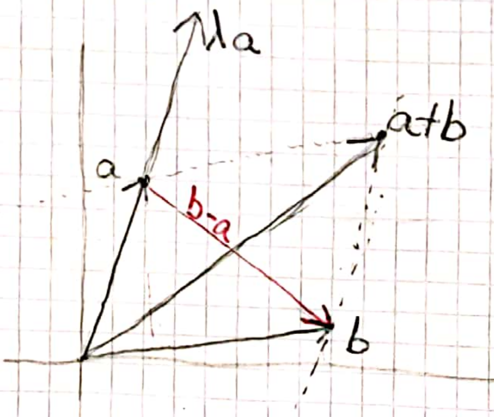
6. NORMA DI UN VETTORE

La "norma", o modulo, di un vettore è la somma delle componenti al quadrato sotto radice.

$$|x| = \left(\sum_1^n x_i^2\right)^{1/2}$$

7. INTERPRETAZIONI GEOMETRICHE





8. PROPRIETÀ DELLA NORMA

$|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$|x| = 0 \iff x = 0$

$|\lambda x| = |\lambda||x|$

$|x+y| \leq |x| + |y|$ [DISUG. TRIANGOLARE]

9. VERSORE

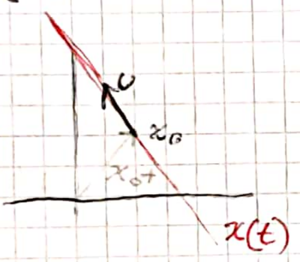
Sia $v \in \mathbb{R}^n$, è definito versore $\tilde{v}$ il vettore con la stessa direzione di v ma di norma 1!

$$\tilde{v} = \frac{1}{|v|} \cdot v \qquad |\tilde{v}| = \left|\frac{v}{|v|}\right| = \frac{|v|}{\|v\|} = \frac{|v|}{|v|} = 1 \ !$$

10. RETTE IN $\mathbb{R}^n$

Sia $u \in \mathbb{R}^n$ e si voglia scrivere l'equazione della retta passante per u. Allora

$x(t) = x_0 + tu$ Identifica tutti i punti della retta al variare di u.



In particolare, sia $v \in \mathbb{R}^n$, se $u = \lambda v$, allora i due vettori hanno la STESSA DIREZIONE

11. POSIZIONI FRA RETTE

$\exists$	$r_1 \cap r_2 = \{\emptyset\}$	$r_1 \cap r_2 \neq \{\emptyset\}$
$u = \lambda v$	PARALLELE	COINCIDENTI
$u \neq \lambda v$	SGHEMBE	INCIDENTI

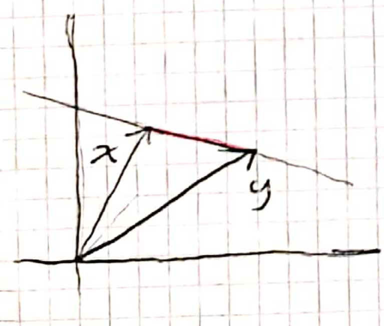
No, non cominciare a immaginare rette sghembe...

12. SEMIRETTA

Una semiretta è identificata dal tempo contato "da un certo punto in poi".

Es→ S_r: $x_0 + tu$, con $t > 0$

13. SEGMENTO



Il segmento che unisce due vettori non è altro che una parte della retta del vettore differenza.

Es→ Seg: $x_0 + t(y - x_0)$ $t \in [0,1]$

(Nell'esempio grafico $x_0 = x$)

14. PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

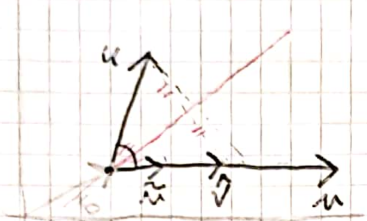
Se seg: $x_0 + t(y - x_0)$ con $t \in [0,1]$, allora il punto medio è identificato da $t = \frac{1}{2}$

In effetti $seg\left(\frac{1}{2}\right) = x_0 + \frac{1}{2}(y - x_0) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x_0 = \boxed{\frac{x+y}{2}}$

E allora $P_M - x = y - P_M$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x+y) - x = y - \frac{1}{2}(x+y) \Rightarrow \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x \quad \checkmark$$

15. BISETTRICE DI UN TRIANGOLO



Ricordando che in un triangolo isoscele bisettrice e mediana coincidono, possiamo scrivere l'equazione della bisettrice come la retta passante per il punto medio di u e $\hat{v}$, dove $\hat{v}$ è un vettore della stessa direzione di v ma con lunghezza $|u|$.

$$Bis: x(t) = x_0 + t\left(\frac{u + \hat{v}}{2}\right)$$

$$\hat{v} = \tilde{v}\,|u| = \frac{v}{|v|}\,|u|$$

→ Versore

16. INTERSEZIONE / COLLISIONE FRA RETTE

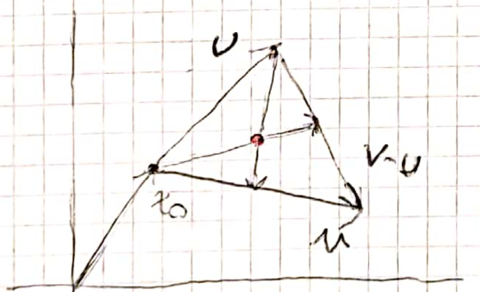
Studiare l'intersezione fra due rette equivale a trovare le soluzioni di

$$\begin{cases} A(t) = x_0 + t(u) \\ B(s) = y_0 + s(v) \end{cases} \Longrightarrow x_0 + tu = y_0 + sv \quad \leftarrow \text{INTERSEZ}$$

$$\text{o} \quad x_0 + tu = y_0 + tv \quad \leftarrow \text{COLLISIONE}$$

17. BARICENTRO DI UN TRIANGOLO

Ricordando che il baricentro di un triangolo è il punto di intersezione delle mediane, si ha che:



1° MEDIANA $\to A(t) = x_0 + t\left(\frac{u+v}{2} - x_0\right)$

2° MEDIANA $\to B(s) = u + s\left(\frac{v + x_0}{2} - u\right)$

$A(t) = B(s)$ se

$$x_0 + t\left(\frac{u+v}{2} - x_0\right) = u + s\left(\frac{v+x_0}{2} - u\right)$$

$$\Rightarrow x_0 + \frac{t}{2}(u+v) - t(x_0) - u - su - \frac{s}{2}(v + x_0) = 0$$

$$\Rightarrow x_0 + \frac{t}{2}u + \frac{t}{2}v - t(x_0) - u - su - \frac{s}{2}v - \frac{s}{2}x_0$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{s}{2} - t\right)x_0 + \left(\frac{t}{2} - 1 - s\right)u + \left(\frac{t}{2} - \frac{s}{2}\right)v = 0$$

$t = s \qquad 1 - \frac{3}{2}t = 0 \qquad t = \frac{2}{3}$

Per $t = s = \frac{2}{3}$, le rette vanno in collisione $\quad \boxed{B = \frac{x_0 + v + u}{3}}$

18. PRODOTTO SCALARE

Siano u e v vettori in $\mathbb{R}^n$, definiamo prodotto scalare uv la somma dei prodotti di componente a componente.

$$uv = \sum_1^n u_i v_i \qquad [uv \in \mathbb{R}]$$

19. PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE

Siano $x, x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n$

$xx \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$xx = 0 \iff x = 0$

$xy = yx$

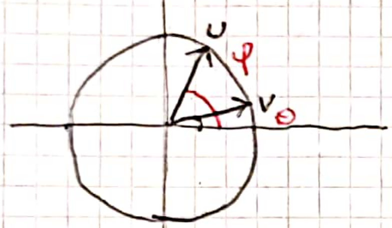
$(x_1 + x_2)y = x_1 y + x_2 y$

$xx = |x|^2$

$|x| = \sqrt{xx}$

20. SIGNIFICATO GEOMETRICO DI PRODOTTO SCALARE

Siano u e v versori in $\mathbb{R}^2$



allora $u = (\cos\theta, \sin\theta)$

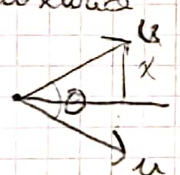
$v = (\cos\varphi, \sin\varphi)$

$\cos(\varphi - \theta) = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi$

$= uv$

Dunque, almeno in $\mathbb{R}^2$, il prodotto scalare è il coseno dell'angolo $\varphi - \theta$

Nello spazio $\mathbb{R}^n$, consideriamo ancora due versori, tale che bisettrice e mediana coincidano:



Per il teorema di pitagora $x = |u| \sin\frac{\theta}{2}$

$[u \text{ versore}] = \sin\frac{\theta}{2} = \frac{|v-u|}{2}$ (Punto medio del vettore $v-u$)

$\cos\theta = \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$

$= 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - 2\frac{|v-u|^2}{4}$

$= 1 - \frac{1}{2}\left(|v|^2 + |u|^2 - 2uv\right)$

$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + uv \quad = uv$

Nel caso di vettori di lunghezza diversa da 1, si ha che $\cos\widehat{uv} = \frac{u}{|u|} \cdot \frac{v}{|v|} = \frac{uv}{|u||v|} = \tilde{u}\tilde{v}$

Concludiamo che il prodotto scalare di due vettori è il coseno dell'angolo che essi formano!

21. DEFINIZIONE DI RETTA

Come conseguenza di 20., due vettori sono ortogonali se e solo se $uv = 0$. A questo punto sia

$ax + by = 0$ l'equazione di una retta, essa è il prodotto scalare

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Di conseguenza la retta è il luogo dei vettori (x, y) perpendicolari a un vettore fisso (a, b).

22. PROIEZIONE DI UN VETTORE SU UN ALTRO

Si definisce proiezione u_v il vettore multiplo di u tale che $(u_u - u) \perp v$!

A livello geometrico $|u_u| = |u||\cos\theta|$, ma per quanto detto nella 20., allora:

$$|u_u| = |u| \cdot \frac{uv}{|u||v|} = \frac{uv}{|v|} \qquad |u_u| \in \mathbb{R}$$

A questo punto dobbiamo ricordarci che, giacendo la proiezione su v, ha la sua stessa direzione e dunque:

$$u_v = \frac{uv}{|v|} \cdot \tilde{v} = \frac{uv}{|v|} \cdot \frac{v}{|v|} = \underbrace{\left(\frac{uv}{|v|^2}\right)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{v}_{\in \mathbb{R}^n}$$

Viene da sé che proiettare un vettore su un suo multiplo non ha alcun significato:

$$(\alpha v)_v = \frac{\alpha vv}{|v|^2} \cdot v = \frac{\alpha |v|^2}{|v|^2} \cdot v = \alpha v \text{ (Restituisce sé stesso)}$$

TEOREMI dimostrazioni non attendibili

1. DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ

TESI → $|uv| \leq |u||v|$

DIMOSTRAZIONE ↓

Partiamo da una disequazione molto semplice

$|u - \lambda v|^2 \geq 0$ Sappiamo che questa è sempre vera!

$\Rightarrow |u|^2 + |\lambda v|^2 - 2|\lambda uv| \geq 0$

$\Rightarrow |u|^2 + |\lambda|^2|v|^2 - 2|\lambda||uv| \geq 0$

$\Delta(u) = 4\lambda^2|uv|^2 - 4|\lambda|^2|v|^2|u|^2$ Il Δ deve essere ≤ 0!

$\rightarrow \cancel{4\lambda^2}|uv|^2 \leq \cancel{4|\lambda|^2}|v|^2|u|^2$

$|uv|^2 \leq |u|^2|v|^2$

$\Rightarrow |uv| \leq |u||v|$

Se $u = \lambda v \Rightarrow |\lambda||vv| = |\lambda||v|^2$, dunque la disuguaglianza vale sempre!

[Se sono allineati $|uv| = |u||v|$]

2. DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

TESI $\rightarrow$ $|x+y| \le |x|+|y|$

Ricordando che $x^2 \le y^2 \Rightarrow x \le y$

$|x+y|^2 \le (|x|+|y|)^2$

$|x|^2+|y|^2+2xy \le |x|^2+|y|^2+2|x||y|$

$2xy \le 2|x||y|$

Ricordando $xy \le |xy| \le |x||y|$, segue la tesi

Schwartz!

Quando $|x+y| = |x|+|y|$?

Se i vettori sono allineati e nello stesso verso $y = \alpha x$

$|x+\alpha x|^2 = (|x|+|\alpha x|)^2$

$|x|^2+|\alpha x|^2+2\alpha x x = |x|^2+|\alpha x|^2+2|x||\alpha x|$

$|x|^2+\alpha^2|x|^2+2|\alpha||x|^2 = |x|^2+\alpha^2|x|^2+2|\alpha||x|^2$ ✓

$|\alpha| = \alpha$ Perché $\alpha > 0$

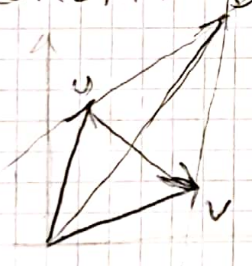
3. TEOREMA DI PITAGORA

TESI $\rightarrow$ $|u+v|^2 = |u|^2+|v|^2$ (Se $\cos \widehat{uv} = 90°$)

DIM $\rightarrow$

$|u+v|^2 = |u|^2+|v|^2+2uv \rightarrow 0$

4. TEOREMA DELLE DIAGONALI



TESI $\rightarrow$ $|u+v|^2+|u-v|^2 = 2(|u|^2+|v|^2)$

DIM $\rightarrow$ $|u+v|^2+|u-v|^2 =$

$= |u|^2+|v|^2+\cancel{2uv}+|u|^2+|v|^2-\cancel{2uv}$

$= 2(|u|^2+|v|^2)$

5. PRIMI RISULTATI SULLE PROIEZIONI

TESI $\rightarrow$ $\begin{cases} (u-u_v)v = 0 \\ |u-u_v| \le |u-\alpha v| \end{cases}$

La differenza tra vettore e proiez. è ortogonale a v.

La proiezione è la distanza minima tra u e v

DIMOSTR $\rightarrow$

$(u-u_v)v = \left(u - \frac{uv}{|v|^2}v\right)v = uv - uv = 0$!

$|u-u_v|^2 \le |\underbrace{u-u_v}_{\perp v}+\underbrace{u_v-\alpha v}_{\lambda v}|^2 \overset{\text{Pit.}}{=} |u-u_v|^2+|u_v-\alpha v|^2$

Dunque $|u-u_v| \le |u-\alpha v| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$|u-u_v| = |u-\alpha v| \iff \alpha v = u_v$

6. DISUGUAGLIANZA GEOMETRICA DI SCHWARTZ

TESI → $|u| \geq |u_M|$

DIM →

$$|u|^2 \geq |u_M|^2 \Rightarrow |u|^2 \geq \left(\frac{uv}{|v|}\right)^2$$

$$\Rightarrow |u|^2 = |\underbrace{u - u_M}_{\lambda v} + \underbrace{u_M}_{\alpha v}|^2 \overset{PIT}{=} |u - u_M|^2 + |u_M|^2 \geq |v_M|^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{|u - u_M|^2 + |u_M|^2}_{|u|^2} \geq |u_M|^2 \quad \checkmark$$

[Allora $|v||u| \geq |uv|$]

spiegare come ci si arriva

PARTE 2: SOTTOSPAZI

DEFINIZIONI

23. SPAZIO/SOTTOSPAZIO VETTORIALE

K^n è uno spazio vettoriale, se presi $a, b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$: $(a+b) \in \mathbb{R}^n$, $ca / cb \in \mathbb{R}^n$. Inoltre valgono le 8 proprietà:

- S_1: $(u+v)+w = u+(v+w)$
- S_2: $0+u = u+0 = u$
- S_3: $1 \cdot u = u$
- S_4: $\exists -u : u+(-u) = 0$
- S_5: $u+v = v+u$
- S_6: $u(v+w) = uv + uw \quad (u \in \mathbb{R})$
- S_7: $(ab)c = a(bc)$
- S_8: $(a+b)v = av + bv \quad (a, b \in \mathbb{R})$

V è un sottospazio vettoriale di K se è sottoinsieme di K e verifica le stesse proprietà!

24. COMBINAZIONE LINEARE

Siano $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, definiamo combinazione lineare la somma dei multipli scalari dei vettori x_i.

$$CL = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = \sum_1^m \alpha_i x_i \quad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{R} \ \forall i$$

25. SPAN

È definito span il sottospazio costituito dalle combinazioni lineari dei vettori generatori:

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle = \left\{ w : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R} \text{ e } w = \sum_1^m \alpha_i x_i \right\}$$

25. EQUAZIONE DEL PIANO

$\varphi: x_0 + \langle u, v \rangle = x_0 + \alpha u + \beta v$

26. COMBINAZIONE AFFINE

Una combinazione $\sum_1^m \alpha_i x_i$ è detta affine se $\sum_1^m \alpha_i = 1$

27. COMBINAZIONE CONVESSA

Una combinazione $\sum_1^m \alpha_i x_i$ è detta convessa se $\alpha_i \in [0,1]\ \forall i$

28. COMPLEMENTO ORTOGONALE

È definito complemento ortogonale dello spazio X l'insieme dei vettori perpendicolare ai generatori di X.

$\langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle^{\perp} = \{ w \in \mathbb{R}^n : w u_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, m \}$

29. INTERSEZIONE FRA SPAZI

Siano X e Y due sottospazi, allora definiamo

$X \cap Y = \{ w : w \in X \text{ and } w \in Y \}$

ES:

$X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle \quad Y = \langle y_1, \dots, y_m \rangle$

$w \in X \Rightarrow w = \sum_1^m \alpha_i x_i$

$w \in Y \Rightarrow w = \sum_1^m \beta_i x_i$

$w \in X \cap Y \Rightarrow \sum_1^m \alpha_i x_i = \sum_1^m \beta_i x_i$

30. VETTORI INDIPENDENTI

Due vettori sono detti indipendenti se e solo se la loro combinazione lineare è nulla se e solo se i coefficienti della combinazione sono tutti nulli

$x_1, \dots, x_m$ INDIPENDENTI $\iff \sum_1^m \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$

31. BASE DI UN SOTTOSPAZIO

L'insieme dei vettori $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ è detto BASE DI X se e soltanto se:

i) $\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle = X$

ii) $x_1, x_2, \dots, x_m$ sono vettori indipendenti

32. BASE CANONICA

È definita base canonica $e_1, e_2, \dots, e_n$ l'insieme dei vettori ortonormali nella forma $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$

$\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n$

33. (A)SSIOMA D'ESISTENZA DI UNA BASE

Sia X un sottospazio di dimensione finita, X ha basi.

34. SPAZIO SOMMA

Siano X e Y spazi vettoriali, definiamo lo spazio somma X+Y come:

$X+Y \{ w : \exists x \in X \text{ e } y \in X \text{ e } w = x + y \}$

35. SOMMA DIRETTA

La somma $X+Y$ è diretta e si dica $X \oplus Y$ se e solo se

$$\begin{cases} X \oplus Y = X + Y \\ \forall x \in X \text{ e } y \in Y, \text{ se } x+y=0 \Rightarrow x=y=0 \end{cases}$$

36. LEMMA FONDAMENTALE

Siano $x_1, \dots, x_n$ base di X e sia $X = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$, allora $n \leq m$

37. LEMMA DI SCAMBIO

Sia $X = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle$, allora, se $v \in X$, $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_m : v = \sum_1^m \alpha_i u_i$ e, in particolare, si può sostituire uno dei generatori con v.

$$u_1 = \frac{1}{\alpha_1}\left(v - \sum_2^m \alpha_i x_i\right) \Rightarrow X = \langle v, x_2, \dots x_m \rangle \quad [v \neq 0]$$

38. DIMENSIONE DI UNO SPAZIO

Chiamiamo dimensione di X il numero di vettori di una sua base.

TEOREMI dimostrazioni non attendibili

7. UNICITÀ DELLE COORDINATE DI UN VETTORE

Sia X uno spazio vettoriale e sia $x_1, x_2, \dots, x_n$ base di X. Allora $\exists!\, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ coordinate del vettore $w \in X$: $w = \sum_1^n \alpha_i x_i$.

DIM/

Per assurdo sia $\begin{cases} w = \sum_1^n \alpha_i x_i \\ w = \sum_1^n \beta_i x_i \end{cases}$ con $\alpha_i \neq \beta_i$ per qualche i

allora $\sum_1^n \alpha_i x_i = \sum_1^n \beta_i x_i \Rightarrow \sum_1^n (\alpha_i - \beta_i) x_i = 0 \underset{\text{IND.}}{\Rightarrow} \alpha_i = \beta_i \;\; \forall i$ ASSURDO

8. SOVRAFFOLLAMENTO DELLA BASE

Sia $x_1, x_2, \dots, x_n$ base di X e sia $\langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle = X$ con $m > n$

TESI → $u_1, u_2, \dots, u_m$ è un sistema dipendente

DIM/

Avendo $X = \langle x_1, x_2, \dots x_n \rangle = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle$

Per il 37. possiamo scambiare n volte da uno spazio all'altro:

$\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow u_1 = \sum_1^n \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \sum_2^n \alpha_i x_i$

$\langle u_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \langle \cancel{x_1}, u_2, \dots, u_m \rangle$

Dopo n scambi si avrà $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle = \langle x_1, \dots, x_n, \dots, u_m \rangle$

e allora $u_{n+1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Finite le } x_i}}{0} + \sum_1^n \alpha_i u_i$, dunque segue la tesi!

9. TEOREMA DELLA DIMENSIONE

TESI → i) Tutte le basi di X hanno lo stesso numero di elementi!

ii) numeroElementi = dim X

DIM ⤓

i) Per assurdo, sia $x_1, x_2, \dots, x_m$ base di X
$y_1, y_2, \dots, y_n$ base di X

Per la 8., deve essere $m \leq n$ e $n \leq m \Rightarrow n = m$!

ii) Per assurdo immaginiamo $\dim X = n$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ indip. ma ipotizziamo $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \subset X$.

Allora $\exists\, y \in X \setminus \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ e quindi y è un vettore indipendente agli altri e si ha che

Se $\sum_1^n \alpha_i x_i + \sum \beta y = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta = 0 \ \forall i$

Ma $y = -\sum_1^n \frac{\alpha_i}{\beta} x_i = \sum_1^n \gamma_i x_i$, dunque $y \in X = \langle x_1, \dots x_n \rangle$

Allo stesso modo, se $\dim X = n$ e $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ allora $x_1, \dots, x_n$ è base di X, altrimenti la base avrebbe meno di n elementi, il che è impossibile.

10. TEOREMA DI COMPLETAMENTO ALLA BASE

Siano $u_1, u_2, \dots, u_k$ vettori indipendenti in X e sia $\dim X = n$, con $n > k$.

TESI → $\exists\, x_{k+1}, \dots, x_n \in X : X = \langle u_1, \dots, u_k, x_{k+1}, \dots, x_n \rangle$

DIM ⤓

Sia $v_1, v_2, \dots, v_n$ una base di X, allora possiamo dire $X = \langle u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$, ma il numero di questi elementi è eccessivo ($n+k > \dim X$).

Sapere che gli u_i sono indipendenti fra loro, e anche gli v_i, ci dice che:

$\exists\, v_1 = \sum_1^n \alpha_i u_i$ e così via, fino a togliere k vettori v_i.

Segue $X = \langle u_1, u_2, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$, tesi!

11. CNS SOMMA DIRETTA (2 SPAZI)

TESI → $X + Y$ diretta $\Leftrightarrow X \cap Y = \{0\}$

DIM ⤓

$\Rightarrow$ Sia $X+Y$ diretto e sia, per assurdo, $w \in X \cap Y$. Allora possiamo dire che:

$$\begin{cases} w = \underset{\in X}{w} + \underset{\in Y}{0} \\ w = \underset{\in X}{0} + \underset{\in Y}{w} \end{cases} \overset{\text{Sottraggo}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} w + 0 = 0 + w \\ w + (-w) = 0 \end{array} \Rightarrow \text{Poiché la somma è diretta } w = -w = 0$$

$$\begin{cases} w + 0 = 0 \\ 0 + w = 0 \end{cases} \Rightarrow w = 0$$

$\Leftarrow$ Se $X \cap Y = \{0\}$, la somma $X+Y$ è diretta
Presi $x \in X$, $y \in Y$
Allora $x + y = 0 \Rightarrow x = -y$, dunque $x \in X \cap Y$
ma $y = -x$, dunque $y \in X \cap Y$
allora $x = y = 0$, e segue la tesi!

12. RIPARTIZIONE DELLA BASE

TESI → Sia $x_1, x_2, \dots, x_m$ base di X. Allora
$$X = \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \oplus \langle x_{k+1}, \dots, x_m \rangle$$
DIM →
La tesi ci dice che ogni elemento $x \in X$ è tale che
$x = \sum_1^k \alpha_i x_i + \sum_{k+1}^m \alpha_i x_i$. Sia ora $x' \in \langle x_1, .., x_k \rangle$ e $x'' \in \langle x_{k+1}, \dots, x_m \rangle$
Allora $x' + x'' = 0$
$\Rightarrow \sum_1^k \alpha_i x_i + \sum_{k+1}^m \alpha_i x_i = 0$
(Visto che inizialmente avevamo una base, ogni singola sommatoria va a 0 se e solo se $\alpha_i = 0 \ \forall i$)
$\alpha_i = 0 \ \forall i \Rightarrow x' = x'' = 0 \Rightarrow$ Tesi!

13. CNS SOMMA DIRETTA (PIÙ SPAZI)

TS → $X + Y + Z$ è diretta $\Leftrightarrow \dim(X+Y+Z) = \dim X + \dim Y + \dim Z$
DIM →
$\Rightarrow$ Siano $x_1, x_2, \dots, x_m$; $y_1, y_2, \dots, y_m$; $z_1, z_2, \dots, z_p$ basi di X, Y e Z.
Allora $X + Y + Z = \langle x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_p \rangle$
Se sono tutti indipendenti, la tesi è dimostrata
Sia $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, allora se $x + y + z = 0$
$\Rightarrow \sum_1^m \alpha_i x_i + \sum_1^m \beta_i y_i + \sum_1^p \gamma_i z_i = 0$
Ma poiché la somma è diretta, e poiché le singole sommatorie sono sistemi indipendenti si ha che
$$\begin{cases} \sum_1^m \alpha_i x_i = 0 \\ \sum_1^m \beta_i y_i = 0 \\ \sum_1^p \gamma_i z_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 0 \ \forall i,$$ da qui la tesi!

??
$\Leftarrow$ Per la ripartizione della base, se
$X + Y + Z = \langle x_1, .., x_m, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_p \rangle$, allora
$\langle x_1, \dots x_m \rangle \oplus \langle y_1, \dots, y_m \rangle \oplus \langle z_1, \dots, z_p \rangle = X + Y + Z$

14. TEOREMA DI GRASSMAN

TESI → $\dim(X+Y) + \dim(X \cap Y) = \dim X + \dim Y$

DIM →

Se $\dim(X \cap Y) = 0$ la somma è diretta e segue la tesi!

Ipotizziamo quindi $\dim(X \cap Y) = k > 0$, $\dim X = n$, $\dim Y = m$

Sia $w_1, \dots, w_k$ base di $X \cap Y$, allora per il teorema 10.

$w_1, \dots, w_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ è base di X

$w_1, \dots, w_k, y_{k+1}, \dots, y_m$ è base di Y

$X+Y = \langle w_1, \dots, w_k, x_{k+1}, \dots, x_n, y_{k+1}, \dots, y_m \rangle$

se tutti questi sono indipendenti, $\dim(X+Y) = n+m-k$ [Tesi]

$$\underbrace{\sum_1^k \alpha_i w_i}_{\in X \cap Y} + \underbrace{\sum_{k+1}^n \beta_i x_i}_{\in X} + \underbrace{\sum_{k+1}^m \gamma_i y_i}_{\in Y} = 0 \quad (*)$$

$w + x + y = 0 \Rightarrow w + x = -y \Rightarrow w + x \in X \cap Y$

$\Rightarrow w + y = -x \Rightarrow w + y \in X \cap Y$

A questo punto, essendo $X = \langle w_1, \dots, w_k \rangle \oplus \langle x_{k+1}, \dots, x_n \rangle$

abbiamo che $(w+y) + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} w+y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Allo stesso modo $Y = \langle w_i \rangle \oplus \langle y_i \rangle$

e dunque $(w+x) + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} w+x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

E dunque, $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 0 \ \forall i$ e segue la tesi!

PARTE 3: MATRICI

DEFINIZIONI

39. MATRICE

Una matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ è definita come l'oggetto a_{ij}, dove i è l'indice di riga che varia da 1 a n, j è l'indice di colonna che varia da 1 a m!

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

40. VETTORE RIGA, VETTORE COLONNA

Un vettore riga è una matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

Un vettore colonna è una matrice $M \in \mathbb{R}^{1 \times m}$

41. TIPI DI MATRICE

- QUADRATA, $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$
- TRIANGOLARE SUPERIORE $\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$
- TRIANGOLARE INFERIORE $\rightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
- DIAGONALE $\rightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$
- IDENTICA $\rightarrow$ $a_{ij} = 1 \quad \forall i = j$, $a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$

42. PROPRIETÀ

Siano $A, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$

allora
$$\begin{cases} (A+B) = (a+b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \\ \lambda A = \lambda a_{ij} \end{cases}$$

$\mathbb{R}^{m \times m}$ è dunque uno spazio vettoriale!

43. CONVENZIONE DI EINSTEIN - LANDAU

Quando alcuni prodotti dipendono da indici, viene sottintesa una sommatoria che li fa variare.

$$u_i v_i = \sum_1^m u_i v_i$$

44. PRODOTTO DI MATRICI

Il prodotto di matrici è possibile solo se la seconda ha per numero di righe il numero di colonne della prima.

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ $\quad B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ $\qquad AB = (ab)_{ij} = a_{ih} b_{hj}$

Si moltiplica scalarmente la prima riga con la prima colonna per avere, ad esempio, l'elemento $(ab)_{11}$!

45. PROPRIETÀ DEL PRODOTTO

1. $AB \neq BA$
2. $(AB)C = A(BC)$
3. $A(B+C) = AB + AC$
4. $AI = IA = A$

Assumendo che i prodotti siano possibili!

46. MATRICE IDENTICA

SiA I la matrice identica tale che

$$(I)_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Allora $\quad AI = IA = A$

$$(AI)_{ij} = A_{ih} I_{hj} = 0 \text{ se } h \neq j$$
$$= A_{ij} \text{ se } h = j$$

$$(IA)_{ij} = I_{ih} A_{hj} = A_{ij} \text{ se } h = i$$
$$= 0 \text{ se } h \neq i$$

47. MATRICE INVERSA

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, è definita matrice inversa sinistra X se accade:

$AX = I$

Si definisce matrice inversa destra Y se accade

$YA = I$

48. EQUAZIONI MATRICIALI

$AX = B$ equivale a risolvere

$$\begin{cases} A X_1 = B_1 \\ A X_2 = B_2 \\ \vdots \\ A X_m = B_m \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & & & \\ A_1 & A_2 & A_3 & B_1 & B_2 & B_3 \end{array}$$

$\uparrow$ Colonne

Incognite: Colonne di X

Nel caso dell'inversa:

$$\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & & & \\ A_1 & A_2 & A_3 & e_1 & e_2 & e_3 \end{array}$$

49. MATRICE TRASPOSTA

$(A^*)_{ij} = A_{ji}$

50. MATRICE SIMMETRICA E AUTOAGGIUNTA

Una matrice è simmetrica se $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i \neq j$

Nel caso in cui $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ si definisce autoaggiunta se $A = \overline{A^*}$ $(a_{ij} = \bar{a}_{ji})$

51. DETERMINANTE (MATRICI QUADRATE)

Il determinante è una funzione: $\mathbb{R}^{m \times m} \to \mathbb{R}$ e gode di alcune proprietà:

- $\det(e_1, e_2, \dots, e_m) = 1$
- $\det(A_1, A_2, \dots, A_m) = -\det(A_2, A_1, \dots, A_m)$ [Alternante]
- $\det(\lambda A_1, \mu A_2, \dots, A_m) = \lambda\mu(A_1, A_2, \dots, A_m)$ [MULTILINEARE]
- $\det(A_1, A_2, A_2, \dots, A_m) = 0$

[Perché $\det(A_1, A_2, A_2, \dots, A_m) = -\det(A_1, A_2, A_2, \dots, A_m)$

52. SVILUPPO DI LAPLACE

$$\det A = \sum_{1}^{m} (-1)^{(i+h)} a_{ih} \cdot \det \tilde{A}$$

$\tilde{A}$ è la matrice ottenuta eliminando i-esima riga e k-esima colonna!

53. CONCETTO DI DETERMINANTE

$$\det A = \sum (-1)^{|\sigma|} \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{m\sigma(m)}$$

dove σ è la funzione permutazioni che indica tutte le possibili combinazioni fra riga e colonna.

$|\sigma|$ è il numero delle INVERSIONI, ovvero il numero delle volte in cui $\sigma(x) > x$

54. PRODOTTO VETTORE (IN $\mathbb{R}^3$)

Si definisce prodotto vettore $a \times b$, con $a, b \in \mathbb{R}^3$, il vettore tale che:

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

55. PROPRIETÀ PRODOTTO VETTORE

- $(u+v) \times w = u \times w + v \times w$ (DISTRIBUTIVO)
- $u \times w = -(w \times u)$ (ANTISIMMETRICO)
  $[a \times a = 0]$
- $(\alpha u + \beta v) \times w = \alpha(u \times w) + \beta(v \times w)$ (BILINEARE)
- È perpendicolare ai fattori $\Rightarrow \begin{cases} u \times w \perp u \\ u \times w \perp w \end{cases}$

56. DISTANZA PUNTO - PIANO IN $\mathbb{R}^3$

$$d = \frac{|x(u \times v)|}{|u \times v|}$$

57. DISTANZA RETTE SGHEMBE IN $\mathbb{R}^3$

$$d = \frac{|(u \times v)(x_0 - y_0)|}{|u \times v|}$$

TEOREMI dimostrazioni non attendibili

15. RELAZIONE CARATTERISTICA DELLA TRASPOSTA

TESI $\rightarrow (Ax)y = x(A^* y)$

DIM $\downarrow$

$$(Ax)y = A_{lj} x_j y_l$$

$$x(A^* y) = x_h (A^*_{hk} y_k) = x_h A_{kh} y_k = A_{kh} x_h y_k$$

16. CNS DETERMINANTE NULLO

TESI → $\det A = 0 \iff A_1, A_2, \dots, A_m$ sono dipendenti

DIM

$\Leftarrow$ se le colonne di una matrice sono dipendenti posso scriverne almeno una in funzione delle altre

Ad esempio $A_1 = \sum_2^m \alpha_i A_i$

E dunque $\det A = \det\left(\sum_2^m \alpha_i A_i, A_2, A_3, \dots, A_m\right)$

$= \sum_2^m \alpha_i \det(A_i, A_2, A_3, \dots, A_m)$ e, scorrendo i da 2 in poi, si annullano tutti e segue la tesi

$\Rightarrow$ se $\det A = 0$, allora

$\det(A_1, A_2, A_3, \dots, A_m) = 0$ Ma essendo ogni vettore A_i esprimibile in funzione della base canonica...

$A_i = \sum_1^m \alpha_i e_i$ e in particolare anche i vettori della base canonica sono esprimibili come

$e_i = A_i k_i$

e allora $\det(e_1, e_2, \dots, e_m) = \det(A_i k_i, A_i k_i, \dots, A_i k_i)$

di questi, eliminando quelli che avrebbero colonne uguali...

$= \det(A_1 k_1, A_2 k_2, \dots, A_m k_m)$

$= (k_1 k_2 \dots k_m) \det(A_1, A_2, \dots, A_m)$

Se per assurdo le colonne fossero indipendenti

$$\underbrace{\det(e_1, e_2, \dots, e_m)}_{\substack{\| \\ 1 \text{ (Assioma)}}} = \underbrace{(k_1 k_2 \dots k_m)\det(A_1, A_2, \dots, A_m)}_{=\ 0 \text{ (Ipotesi)}}$$

ASSURDO!

17. UGUAGLIANZA DI INVERSA DESTRA E SINISTRA

TESI → Se le due inverse esistono, sono uguali!

Siano X e Y l'inversa sinistra e destra della matrice A.

Allora...

$$X = IX = (YA)X = YAX = Y(AX) = YI = Y$$

Segue $X = Y$

18. CNS INVERTIBILITÀ MATRICI

TESI → M è invertibile $\iff$ Le sue ~~colonne~~ righe (19.) sono indip.

DIM ↓

$\Rightarrow$ $\Leftarrow$ Dire che $M = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ è invertibile significa che $\exists X : MX = I$

Ovvero significa che il sistema

(LONGO ?)

$$A_1, A_2, \dots, A_m \,|\, e_1, e_2 \dots e_m$$ ha soluzioni

Viene da sé il fatto che se le colonne fossero dipendenti il sistema non avrebbe soluzioni. (Uscirebbe una riga di 0 uguale a qualcosa diverso da

CONSEGUENZA → M invertibile $\iff \det M \neq 0$

19. RIGHE INDIPENDENTI SE LO SONO LE COLONNE

TESI → Titolo ↑

DIM ↓

Sia $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ le colonne della matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$
Siano $A^1, A^2, A^{III}, \dots, A^m$ le sue righe.

Allora se le righe sono indipendenti deve essere

$$\Sigma A^i x_i = 0 \Rightarrow x_i = 0$$

$$\Sigma A^i x_i = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x \dots + \begin{pmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix} x, \text{ dove } x \in \mathbb{R}^m$$

Sviluppando i prodotti scalari:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_1 + \dots + a_{m1}x_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{1m}x_1 + \dots + a_{mm}x_m = 0 \end{cases}$$

e allora compaiono i vettori colonna!

$$\begin{cases} A_1 X = 0 \\ \vdots \\ A_m X = 0 \end{cases}$$

Dunque X deve essere il vettore nullo.
Per dimostrarlo ricordiamo che, se le colonne sono indipendenti ↓

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_m \rangle = \mathbb{R}^m$$

Allora $X = \sum_1^m \alpha_i A_i$ [È combinazione lineare delle colonne]

$$|x|^2 = X \cdot \sum_1^m \alpha_i A_i = \sum_1^m \alpha_i X A_i = 0 \text{ a tappeto!}$$

Ma $|x|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ e, dunque, se x è il vettore nullo, segue tutto il resto!

20. TEOREMA DI CRAMER

Sia A una matrice $\in \mathbb{R}^{m\times m}$ e si voglia risolvere
$Ax = B$, se $\det A \neq 0$ $\quad x = (x_1, \dots, x_m)$

TESI → $\exists! \; x_i = \dfrac{\det(A_1, \dots A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_m)}{\det A}$

DIM ↓

Se il $\det A$ è $\neq 0$, allora le colonne $A_1, \dots A_m$ sono indipendenti e all'ora possiamo scrivere $b = \sum x_i A_i$ e, grazie alle proprietà del determinante:

$$\det A = \det\left(\sum x_i A_i, A_2, \dots, A_m\right)$$
$$= \sum x_i \det(A_i, A_2, \dots, A_m) \quad [\text{Tutti gli altri sono } 0]$$
$$\Rightarrow x_1 \det(A_1, A_2, \dots, A_m)$$
$$x_1 \det A = \det(B, A_2, \dots, A_m)$$
$$x_1 = \frac{\det(B, A_2, \dots, A_m)}{\det A} \quad [\text{Questo era un esempio con } x_1]$$

PARTE 98 APPLICAZIONI LINEARI

DEFINIZIONI

58. APPLICAZIONE LINEARE

Siano X e Y due spazi vettoriali e sia $\mathcal{A}$ una funzione tale $\mathcal{A}: X \to Y$. Allora $\mathcal{A}$ si dice applicazione lineare se:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) & \text{ADDITIVITÀ} \\ \mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x) & \text{OMOGENEITÀ} \end{cases}$$

59. IMMAGINE DI UN'APPLICAZIONE

L'immagine $\mathcal{A}(x)$ è definita come:

$$\mathcal{A}(x) = \{ y \in Y : \exists x \in X \text{ e } \mathcal{A}(x) = Y \}$$

60. NUCLEO (o KERNEL)

$$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{ x \in X : \mathcal{A}(x) = 0 \}$$

61. [illegible]

Un'applicazione è iniettiva se manda cose diverse in cose diverse, ovvero:

Se $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y) \Rightarrow x = y$

62. APPLICAZIONE SURIETTIVA

Si dice suriettiva un'applicazione $\mathcal{A}: X \to Y$ se
$\mathcal{A}(x) = Y \to \forall y \in Y \; \exists x \in X, \; \mathcal{A}(x) = y$

63. APPLICAZIONE BIETTIVA

Si dice biettiva un'applicazione iniettiva e suriettiva!

64. MATRICE ASSOCIATA

Sia $\mathcal{A}: X \to Y$ e siano $e_1, \dots, e_m$ base di X, $f_1, \dots, f_m$ base di Y

allora $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\sum_1^m x_j e_j) = \sum_1^m x_j \mathcal{A}(e_j)$
$= \sum_1^m x_j \sum_1^m \alpha_{ij} f_i = \sum x_j A_{ij} f_i$

In particolare $\mathcal{A}(e_j) = A_{ij} f_i$. Chiamo A la matrice associata che determina le coordinate dell'immagine che sto cercando.

65. MATRICE CAMBIO BASE

Sia $X = \langle e_1, e_2, \dots, e_m \rangle = \langle e'_1, e'_2, \dots e'_m \rangle$

La matrice soluzione del sistema $e_1, e_2, \dots e_m | e'_1, \dots, e'_m$ è detta matrice cambio base M ed è tale che:

$e'_j = M_{ij} e_i$

A questo punto posso trovare un'altra matrice tale che

$e_h = N_{kh} e'_k = N_{kh} M_{qk} e_q$

$e_h = (MN)_{qh} e_q$, quindi, necessariamente:

$(MN)_{qh} = \begin{cases} 1 & \text{se } h = q \\ 0 & \text{se } h \neq q \end{cases} \Rightarrow (MN)_{qh} = I$ e allora M e N sono una l'inversa dell'altra!

TEOREMI dimostrazioni non attendibili

21. CNS APPLICAZIONE INIETTIVA

TESI $\to$ $\mathcal{A}$ è iniettiva $\iff \ker \mathcal{A} = \{0\}$

DIM $\to$

$\Rightarrow$ Se $\mathcal{A}$ è iniettiva $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y) \Rightarrow x = y$
e allora $\mathcal{A}(x-y) = 0$ identifica tutti gli elementi di $\ker A$, ma essendo $x = y$, $\mathcal{A}(0) = 0$!

$\Leftarrow$ Se $\ker A = \{0\}$, allora $\mathcal{A}(x-y) = 0$ implica che $x = y$ $(x - y = 0)$, che induce l'iniettività!

22. IL KER(A) È UN SOTTOSPAZIO

TESI $\to$ $x_1 + x_2 \in \ker A$, $\lambda x_1 \in \ker A$ $\quad \forall x_1, x_2 \in \ker A$

DIM $\to$

Se x_1 e x_2 appartengono a $\ker A$, si ha che $\mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2) = 0$ e, poiché l'applicazione è lineare deve essere $\mathcal{A}(x_1 + x_2) = 0$, dunque $(x_1 + x_2) \in \ker A$
Se $\mathcal{A}(x_1) = 0$, allora $\lambda \mathcal{A}(x_1) = 0$ e, come prima, allora $\mathcal{A}(\lambda x_1) = 0$, dunque $(\lambda x_1) \in \ker A$
Segue la tesi!

23. TEOREMA GENERATORI DELL'IMMAGINE

Sea $\mathcal{A}: X \to Y$ e sia $x_1, x_2, \dots, x_n$ base di X

TESI $\to$ $\langle \mathcal{A}(x_1), \dots, \mathcal{A}(x_n) \rangle =: \operatorname{Im} \mathcal{A}$

DIM ↓

Sia $a \in X$, allora $a = \sum_1^n \alpha_i x_i$, e, allora:

$\mathcal{A}(a) = \mathcal{A}(\sum_1^n \alpha_i x_i) = \sum_1^n \alpha_i \mathcal{A}(x_i) \in \langle \mathcal{A}(x_i) \rangle$

Di conseguenza non esiste vettore $x \in X$ che non sia appartente a quello span, segue la tesi!

24. TEOREMA DI GRASSMAN (APPLICAZIONI LINEARI)

Sia $\mathcal{A}: X \to Y$ e sia $\dim X < +\infty$, allora

TESI $\to$ $\underset{n}{\dim X} = \underset{k}{\dim \ker A} + \underset{n-k}{\dim A(x)}$

DIM ↓

1° Caso: Se $\dim \ker A = 0$, allora l'applicazione è iniettiva:

$\dim X = \dim A(x)$?

Sia $x_1, \dots, x_n$ base di X, allora $\mathcal{A}(x_1), \dots, \mathcal{A}(x_n)$ è base?

$\sum_1^n \alpha_i \mathcal{A}(x_i) = 0$ solo se $\mathcal{A}(\sum_1^n \alpha_i x_i) = 0$, ovvero solo se $\sum_1^n \alpha_i x_i \in \ker A$, ovvero solo se $\sum_1^n \alpha_i x_i = 0$, ovvero solo se $\alpha_i = 0$ $\forall i$! [Perché $x_1, \dots, x_n$ è base]. Segue la tesi!

2° CASO

Se $\dim \ker A = k > 0$, sia $w_1, \dots, w_k$ base di $\ker A$ allora $w_1, \dots, w_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ è base di X

$$A(x) = \langle \underset{0}{\underset{\downarrow}{\mathcal{A}(w_1)}}, \dots \underset{0}{\underset{\downarrow}{\mathcal{A}(w_k)}}, \mathcal{A}(x_{k+1}), \dots, \mathcal{A}(x_n) \rangle$$

$= \langle \mathcal{A}(x_{k+1}), \dots, \mathcal{A}(x_n) \rangle$ Se sono indipendenti, la tesi è dimostrata!

$\sum_{k+1}^n \alpha_i \mathcal{A}(x_i) = \mathcal{A}(\sum_{k+1}^n \alpha_i x_i) = 0$ se e solo se $\sum_{k+1}^n \alpha_i x_i \in \ker A$. Se vi appartiene, $\sum_{k+1}^n \alpha_i x_i = \sum_1^k \beta_j w_j$

e allora $\sum_{k+1}^n \alpha_i x_i - \sum_1^k \beta_j w_j = 0$

E visto che $X = \langle w_1, \dots, w_k \rangle \oplus \langle x_{k+1}, \dots, x_n \rangle$

Deve essere

$$\begin{cases} \sum_{k+1}^n \alpha_i x_i = 0 \\ \sum_1^k \beta_j w_j = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_i = 0 \ \forall i \ \text{[Tesi]} \\ \beta_j w_j = 0 \ \forall j \end{array}$$

25. LEMMA D'UGUAGLIANZA DI DUE SOTTOSPAZI

Se $W \subseteq Z$, e $\dim W = \dim Z$

TESI $\rightarrow$ $W = Z$

DIM $\downarrow$

Sia $w_1, \dots, w_m$ base di W, allora $\langle w_1, \dots, w_m \rangle = Z$

È dunque $W = Z$!

26. CONSEGUENZE DI CRAMER

Sia $A: X \rightarrow Y$ E sia $A(x)$ l'insieme immagine.

- A È INIETTIVA se $\dim X = \dim A(x)$ $[\ker A = \{0\}]$
- A È SURIETTIVA se $\dim A(x) = \dim Y$ $[A(x) = Y]$
- A È BIETTIVA se $\dim X = \dim A(x) = \dim Y$

27. MATRICE ASSOCIATA

TESI $\rightarrow$ La matrice associata cambia in base alla base!

DIM $\downarrow$

Sia $A: X \rightarrow Y$ e siano $e_1, \dots, e_m$ basi di X $f_1, \dots f_m$
$e'_1, \dots, e'_m$ $f'_1, \dots, f'_m$

Allora $A(e_j) = A_{ij} f_i$ $A(e'_q) = ?\, f'_r$

$e'_q = M_{rq} e_r$ $f'_s = N_{ts} f_t$ $f_s = N^{-1}_{ts} f'_t$

Allora $A(e'_q) = A(M_{rq} e_r) = M_{rq} A(e_r)$
$= M_{rq} A_{ir} f_i = M_{rq} A_{ir} N^{-1}_{vi} f'_v$
$= (N^{-1} A M)_{vq} f'_v$

Dunque la nuova matrice associata è esattamente $N^{-1} A M$

PARTE 5B TEORIA SPETTRALE

DEFINIZIONI

66. OPERATORE / ENDOMORFISMO

Definiamo operatore, o endomorfismo, un'applicazione che manda uno spazio X in sé:
$A: X \rightarrow X$ (D'ora in poi ci riferiremo sempre ad A di questo tipo)

67. OPERATORE DIAGONALE

Si dice che A è diagonale rispetto a $e_1, \dots, e_m$ base di X se la matrice associata A' è diagonale!

68. OPERATORE DIAGONALIZZABILE

Se esiste $e_1, \dots, e_m$ base di X rispetto al quale A è diagonale, allora A è diagonalizzabile!

69. AUTOVALORE

Uno scalare $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore di $\mathcal{A}$ se esistono vettori u tale che:

$\mathcal{A}(u) = \lambda u$ e $\boxed{u \neq 0}$

70. AUTOVETTORE

Se $\exists u \neq 0 : \mathcal{A}(u) = \lambda u$, allora u è detto autovettore (rispetto all'autovalore λ)

71. AUTOSPAZIO

Chiamiamo Autospazio relativo all'autovalore λ lo spazio degli autovettori relativo ad esso (Includendo anche lo 0!)

72. SPETTRO

Si definisce spettro di $\mathcal{A}$ l'insieme dei suoi autovalori!

$S(\mathcal{A}) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{A}(u) = \lambda u, u \neq 0 \}$

73. BASE SPETTRALE

Una base di X fatta da autovettori di $\mathcal{A}$ è detta base spettrale di $\mathcal{A}$.

74. TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Se $P(x)$ è un polinomio non costante,

$\exists z^* \in \mathbb{C} : P(z^*) = 0$

75. POLINOMIO CARATTERISTICO

Chiamiamo P. caratteristico il $\det(A - \lambda I)$, dove A è la matrice associata ad $\mathcal{A}$.

76. OPERATORE AUTOAGGIUNTO

Un operatore si dice autoaggiunto se

$\mathcal{A}(u)v = u\mathcal{A}(v) \quad \forall u, v \in X$

77. PRODOTTO SCALARE IN $\mathbb{C}^m$

Siano $u, w \in \mathbb{C}^m$

allora $uw = \sum^m w_i \overline{v_i}$

78. PROPRIETÀ 77.

1) $vv \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{C}^m$

2) $vv = 0 \iff v = 0$

3) sia $\alpha \in \mathbb{C}$, allora $(\alpha u)w = \sum_1^m \alpha v_i \overline{w_i} = \alpha(vw)$

4) $uv = \overline{vu}$

79. SISTEMA ORTOGONALE

Sia $e_1, \ldots, e_n$ base di X, allora questa è una base ortogonale se

$$e_i e_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \neq 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$

TEOREMI dimostrazioni non attendibili

28. CNS DIAGONALIZZABILITÀ DI $\mathcal{A}$

TESI → $\mathcal{A}$ diagonalizzabile $\iff \exists\, e_1, \dots, e_n$ base spettrale di X

DIM ↓

$\Rightarrow$ Se $\mathcal{A}$ è diagonalizzabile $\exists\, e_1, \dots, e_m$ tale che

$\mathcal{A}(x_j) = A_{ij} x_i$ e $A_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{pmatrix}$

Ma allora se $\mathcal{A}(e_j) = A_{ij} e_i$

$\mathcal{A}(e_j) = 0$ se $i \neq j$

$\mathcal{A}(e_j) = \lambda_j e_j$ se $i = j$

E allora gli e_j sono buoni candidati ad essere autovettori relativi a λ_j e in effetti lo sono perché $e_j \neq 0\ \forall j$.

Se così non fosse $e_1, \dots, e_n$ non sarebbe una base.

Dunque segue la tesi!

$\Leftarrow$ Se $e_1, \dots, e_n$ è base spettrale di X, allora $\mathcal{A}(e_i) = \lambda_i e_i$, $e_i \neq 0$ e allora, visto che $\mathcal{A}(e_i) = M_{ij} e_i$, M è diagonale! Segue la tesi.

29. INDIPENDENZA DI AUTOVETTORI

TESI → Gli autovettori relativi ad autovalori distinti sono indipendenti!

DIM ↓

Sia $u_1, \dots, u_m$ autovettori relativi a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$

Per assurdo ipotizziamo che uno di loro sia dipendente:

Allora $u_1 = \sum_2^m \alpha_i u_i$ e, dunque

$\mathcal{A}(u_1) = \mathcal{A}(\sum_2^m \alpha_i u_i) = \sum_2^m \alpha_i \mathcal{A}(u_i)$

$= \sum_1^m \alpha_i \lambda_i u_i$

$\mathcal{A}(u_1) = \lambda_1 u_1$

dunque deve essere $\lambda_1 u_1 = \sum_2^m \alpha_i \lambda_i u_i$

e ancora $\lambda_1 \sum_2^m \alpha_i u_i = \sum_2^m \alpha_i u_i \lambda_i$

E allora $\sum_2^m \alpha_i (\lambda_1 - \lambda_i) u_i = 0$

Ed essendo u_i autovettore e $\lambda_1 \neq \lambda_i\ \forall i = 2, \dots, m$

si ha che $\alpha_i = 0\ \forall i$

Ma che è un assurdo e dimostra invece l'indipendenza!

30. CONSEGUENZA

Se $\dim X = n$ e $\mathcal{A}$ ha n autovalori distinti $\mathcal{A}$ è diagonalizzabile perché ha una base spettrale!

31. SOMMA DI AUTOSPAZI

TESI → la somma di autospazi è diretta!

DIM: Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ autovalori distinti, allora diremo A^{λ_i} l'autospazio relativo a λ.

Prendiamo ora gli autovettori relativi agli autospazi

$u_1 \in A^{\lambda_1}, \; u_2 \in A^{\lambda_2}, \dots, u_m \in A^{\lambda_m}$

Allora la loro somma $u_1 + u_2, \dots, + u_m = 0$

Se qualcuno di essi fosse $\neq 0$, ad esempio

$u_1 + u_2 = 0 \qquad u_1, u_2 \neq 0$

Sappiamo che non è possibile: essendo autovettori relativi ad autovalori distinti, questi sono indipendenti e dunque

$\sum u_i = 0 \Rightarrow u_i = 0 \;\; \forall i$, e la somma degli autospazi è diretta!

32. CNS DIAGONALIZZABILITÀ (2)

TS: A diagonalizzabile $\Longleftrightarrow \sum \dim A^{\lambda_i} = \dim X$

DIM ↓

$\Longleftarrow$ Siano $u^1_1, \dots, u^1_{m_1}$ base relativa ad A^{λ_1}

$\vdots$

$u^k_1, \dots, u^k_{m_k}$ base relativa a A^{λ_k}

Essendo $\sum \dim A^{\lambda_i} = \dim X$, se riusciamo a dimostrare che i vettori $\{u^j_i\}$ sono indipendenti, allora essi sono una base spettrale.

$$\sum \alpha^1_i u^1_i + \sum \alpha^2_i u^2_i + \dots \sum \alpha^m_i u^m_i = 0$$

Se e solo se (somma diretta)
$$\begin{cases} \sum \alpha^1_i u^1_i = 0 \\ \vdots \\ \sum \alpha^m_i u^m_i = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{INDIPENDENZA}} \begin{cases} \alpha^1_i = 0 & \forall i \\ \vdots \\ \alpha^m_i = 0 & \forall i \end{cases}$$

Ne segue che $\{u^j_i\}$ sono base spettrale di X e quindi è diagonalizzabile!

$\Longrightarrow$

?

33. TEOREMA ESISTENZA AUTOVETTORI

Sia $\mathcal{A}: X \to X$, con $X \subseteq \mathbb{C}^m$, $\dim X < \infty$

TESI $\to$ $\exists \lambda \in \mathbb{C}, u \neq 0 : \mathcal{A}(u) = \lambda u$

DIM $\to$

Sia $e_1, \dots, e_m$ una base di X e sia A_{ij} la matrice associata.

Allora $\underset{\in X}{u} = \sum_1^m u_i e_i$ e quindi

$\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(u_i e_i) = u_i \mathcal{A}(e_i) = u_i \mathcal{A}_{ij} e_i$

$\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}_{ij} u_i e_i = \mathcal{A}_{ij} u$

Dunque se $A_{ij} = \lambda_i$, il teorema è dimostrato.

Ci serve $A_{ij} - \lambda_i = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}-\lambda_1 & \dots & \dots & a_{1m} & \\ \dots & a_{22}-\lambda_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & a_{mm}-\lambda_m & \end{array}\right)$$

Quand'è che questo sistema ha soluzione non nulla?

Quando le colonne sono dipendenti e quindi quando

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Essendo il $\det(A - \lambda I)$ il polinomio caratteristico, per il teorema fondamentale dell'algebra esiste sempre $\lambda \in \mathbb{C}$ e quindi segue la tesi!

34. INVARIANZA DEL POLINOMIO CARATTERISTICO

TESI $\to$ Il polinomio caratteristico non cambia cambiando base!

DIM $\to$

Sia A la matrice associata e M la matrice cambio base.

Allora $A' = M^{-1} A M$

BINET
$\det(AB) = \det A \det B$

$\det(A - \lambda I) = \det(A - M^{-1} \lambda I M)$

$= \det(M^{-1} A M - M^{-1} \lambda I M)$

$= \det(M^{-1}(A - \lambda I) M) = \det(M^{-1} M) \cdot \det(A - \lambda I)$

$= \det(A - \lambda I)$!!!

35. LA MOLTIPLICITÀ DI UN AUTOVALORE

TESI $\to$ $\sum \mu \geq \dim A^{\lambda_0}$

DIM $\to$

Sia $u_1, \dots, u_k$ base di A^{λ_0}

e sia $u_1, \dots, u_k, x_{k+1}, \dots, x_m$ base di X (complet.)

$\mathcal{A}(u_i) = \lambda_0 u_i \quad [1 \leq i \leq k]$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & & 0 & \\ & \lambda_0 & & B \\ 0 & & \ddots \ \lambda_0 & \\ \hline & 0 & & C \end{array}\right)$$

allora $\det A = \lambda_0^k (\det(C))$

$\det(A - \lambda I) = (\lambda_0 - \lambda)^k (\det C - \lambda I)$

e allora

$\sum \mu \geq k = \dim A^{\lambda_0}$

36. CNS DIAGONALIZZABILITÀ (3)

TESI → A diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ i) $\sum \mu_i = \dim X$
ii) $\forall i,\ \mu_i = \dim A^{\lambda_i}$

DIM ↓

$\Rightarrow$ Se A è diagonalizzabile, $\sum \dim A^{\lambda_i} = \dim X$
allora $\dim X = \sum \dim A^{\lambda_i} \leq \sum \mu_i \leq \dim X$
$\Rightarrow \sum \mu_i = \dim X$

$\Leftarrow$ Ma allora $\sum \mu_i - \dim X \leq 0$
e dunque $\sum(\mu_i - \dim A^{\lambda_i}) \leq 0$
Ma $\sum \mu_i \geq \sum \dim A^{\lambda_i}$, dunque $\sum \mu_i = \sum \dim A^{\lambda_i}$!!!

$\Leftarrow$ Se $\begin{cases} \sum \mu_i = \dim X \\ \mu_i = \dim A^{\lambda_i} \end{cases} \Rightarrow \sum \mu_i = \dim X = \dim A^{\lambda_i}$
Segue la tesi per 32.

passaggi sbagliati

37. TEOREMA PROIEZIONE

Sia $x \in X \subseteq \mathbb{C}^n$ e sia $\overline{x} = \sum x_{e_i}$ [Con $e_1, \dots, e_m$ base ORTOGONALE di X]

TESI → $(x - \overline{x}) e_i = 0 \quad \forall i$

DIM ↓

$$\overline{x} = \sum x_{e_i} = \sum \frac{x e_i}{|e_i|^2} \cdot e_i$$

$$(x - \overline{x}) e_i = \left(x - \sum \frac{x e_i}{|e_i|^2} e_i\right) e_j = x e_j - \sum \frac{x e_i}{|e_i|^2} e_i e_j$$

Se $i = j$, $x e_j - x e_j = 0$ [Tesi]

38. UNICITÀ DELLA PROIEZIONE

Se la proiezione esiste, è unica! ← TESI

DIM ↓

Sia $e_1, \dots, e_m$ base di W e siano $v, v' \in W$ tale che
$\begin{cases} (x - v) e_i = 0 \\ (x - v') e_i = 0 \end{cases}$ Allora $(\cancel{x} - v - \cancel{x} + v') e_i = 0$
$(v' - v) e_i = 0 \Longleftrightarrow v' = v$, tesi!

In particolare, se $e_i = v' - v$, allora
$|v' - v|^2 = 0 \Longleftrightarrow v' = v$!

39. ASSIOMA PROIEZIONE

La proiezione esiste sempre su basi ortogonali!

40. ALGORITMO DI GRAM-SCHMIDT

Sia $w_1, \dots, w_k$ base di W

TESI $\Rightarrow \exists\ e_1, \dots, e_k$ base ortogonale di X

DIM ↓

Se $u_1 = e_1$, $\langle e_1 \rangle = \langle u_1 \rangle$

Se $e_2 = u_2 - u_{2(\cdot)}$, allora per il teorema della proiezione

$e_2 \perp \langle e_1 \rangle$

Allora $e_k = u_k - \sum u_{k-i \langle e_{k-i} \rangle} = u_k - u_{k \langle e_1 \dots e_{k-1} \rangle}$

Per il teorema della proiezione $e_k \perp \langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle$

Se andassimo avanti?

Se $u_{k+1} - u_{k \langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle} = 0$, allora $e_{k+1} \in \langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle$

E dunque avremmo trovato un vettore dipendente!

Per il lemma di scambio $\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$, tesi!

41. AUTOVALORI DEGLI OPERATORI AUTOAGGIUNTI

Se $\mathcal{A}$ è autoaggiunta e λ è autovalore di $\mathcal{A}$

TESI $\rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

DIM: Se è autoaggiunta $\mathcal{A}(u)u = u\mathcal{A}(u)$

$\lambda u u = u \lambda u$

$\lambda |u|^2 = \bar{\lambda} |u|^2$ [Essendo $u \neq 0$ perché autovettore...]

$\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

42. DOMINIO E CODOMINIO DEGLI OP. AUTOAGGIUNTI

Sia $\mathcal{A}: X \to X$ autoaggiunta e siano $u_1, \dots, u_k$ autovettori.

TS: Allora $\mathcal{A}: \langle u_1, \dots, u_k \rangle^\perp \to \langle u_1, \dots u_k \rangle^\perp$

DIM $\rightarrow$ Sia $w \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle^\perp$, allora $w u_i = 0$

~~Allora~~ $\mathcal{A}(w) u_i = w \mathcal{A}(u_i) = w \lambda u_i$

$= \lambda w u_i = \lambda w u_i = 0$

Di conseguenza $\mathcal{A}(w) \in \langle u_1 \dots u_k \rangle^\perp$, Tesi.

$[\ wu = 0 \Rightarrow \mathcal{A}(w)u = 0\ ]$

43. ORTOGONALITÀ DEGLI AUTOVETTORI PER $\mathcal{A}$ AUTOAGG.

Sia $u, v \in X$ autovettori distinti di $\mathcal{A}$, autoaggiunti

TESI $\rightarrow uv = 0$

DIM ↓

$u\mathcal{A}(v) = \mathcal{A}(u)v$

$u \lambda v = \varepsilon u v$

$\bar{\lambda} uv = \varepsilon uv \Rightarrow (\lambda - \varepsilon) uv = 0 \Rightarrow uv = 0$

44. MATRICE ASSOCIATA A UNA BASE ORTONORMALE

Se $e_1, \dots, e_n$ è base ortonormale di X

TESI → A autoaggiunta $\iff \mathcal{A}$ autoaggiunto

DIM

$\Rightarrow$ Se $A_{ij} = \bar{A}_{ji}$, siano $u, v \in X$ $\quad u = \sum u_i e_i \quad v = \sum v_i e_i$

allora $\mathcal{A}(u)v = A_{ij} u_j e_i \cdot \bar{v}_h e_h = A_{ij} u_j \bar{v}_h e_i e_h$

$= [h=i] = A_{ij} u_j \bar{v}_i$

$u \mathcal{A}(v) = u_i e_i \bar{A}_{hk} \bar{v}_k e_h = u_i \bar{A}_{hk} \bar{v}_k e_i e_h$

$= [h=i] = \bar{A}_{hk} u_h \bar{v}_k = A_{kh} u_h \bar{v}_k$ $\quad$ [TESI]

$\Leftarrow$ Se $\mathcal{A}(u)v = u \mathcal{A}(v)$

allora $\mathcal{A}(e_i) e_h = e_i \mathcal{A}(e_h)$ $\qquad$ DA RIFARE

$\Rightarrow A_{ij} e_i e_h = e_i \bar{A}_{jh} e_h$

$\Rightarrow [i=h] \; A_{hj} = \bar{A}_{hj} e_i e_h$

$A_{hj} = \bar{A}_{jh}$

45. TEOREMA SPETTRALE ($\mathbb{C}^n$)

Sia $\mathcal{A}: X \to X$ (autoagg!), con $X \subseteq \mathbb{C}^n$ e $\dim X = n > 0$

TESI → $\exists$ base spettrale ortonormale

DIM ↓

$\exists v_1 : \mathcal{A}(v_1) = \lambda_1 v_1 \quad v_1 \neq 0$ (v_1 autovettore)

$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$ [vettore normalizzato]

Per induzione, immaginiamo $u_1, \dots, u_k$ autovettori ortonormali. Allora $\langle u_1, \dots, u_k \rangle \subset X$

Sia $x \in X \setminus \langle u_1, \dots, u_k \rangle$

allora $x - x_{\langle u_1, \dots, u_k \rangle} \neq 0$ e, allora $\langle u_1, \dots, u_k \rangle^\perp \neq \{0\}$

Se $\mathcal{A}: \langle u_1, \dots, u_k \rangle^\perp \to \langle u_1, \dots, u_k \rangle^\perp$

$\exists u_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{|v_{k+1}|}$ tale che $\mathcal{A}(v_{k+1}) = \lambda_{k+1} v_{k+1} \quad v_{k+1} \neq 0$

Ma v_{k+1} è ortogonale ai precedenti, dunque $u_{k+1} \in X$.

Iterando questo procedimento fino a n, abbiamo la nostra base!

Andando avanti $(x - x_{\langle u_1, \dots, u_n \rangle}) = 0$

46. TEOREMA SPETTRALE ($\mathbb{R}^n$)

Sia $\mathcal{A}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ e sia $\mathcal{A}(u) = Au$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica

TESI $\Rightarrow \exists v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ base spettrale ortonormale

DIM.

Sia $u \in X \subseteq \mathbb{C}^n$, allora $u = v + iw$ [Sia u autovettore]

e dunque $\mathcal{A}(v + iw) = \lambda(v + iw) = \lambda v + i\lambda w$

Ma $\mathcal{A}(v) + i\mathcal{A}(w) = Av + iAw = \lambda v + i\lambda w$

Dunque $\begin{cases} \mathcal{A}(v) = \lambda v \\ \mathcal{A}(w) = \lambda w \end{cases}$ Beh, allora o v o w sono diversi da 0 e sono buoni autovettori!

Per induzione siano $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ autovettori.

Come prima, $\exists v_{k+1} \in \mathbb{C}^n$ in $\langle u_1, \dots, u_k \rangle^{\perp}_{\mathbb{C}}$

Però essere $v_{k+1} \perp u_i$?

Se sì $(a + ib)u = 0 \Rightarrow \begin{cases} au = 0 \\ bu = 0 \end{cases}$

A questo punto il nostro $u_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ è proprio a e b!