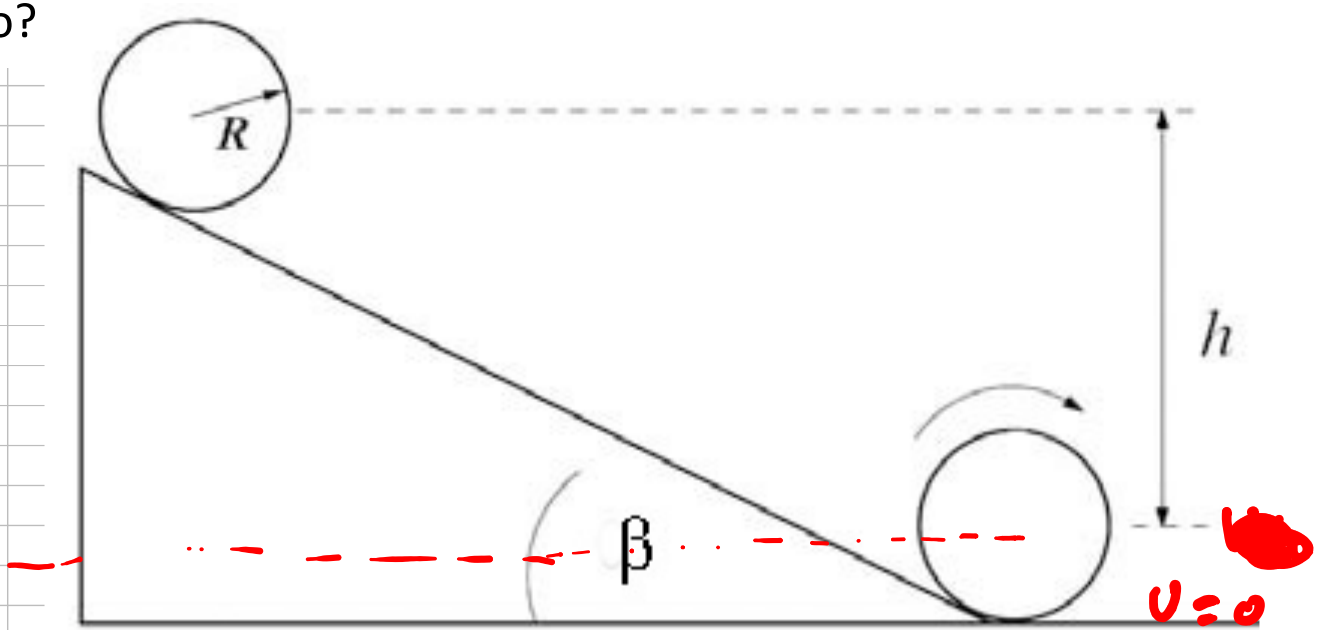
Esercizio

Un cilindro uniforme di raggio R e massa M, con momento d'inerzia rispetto al centro di massa dato da $I_{CM} = 1/2(MR^2)$ parte da fermo e rotola senza slittamento lungo un piano inclinato, con angolo β rispetto all'orizzontale. Il centro di massa del cilindro ha percorso una distanza verticale h quando raggiunge il fondo del piano inclinato. Indichiamo con g la costante di gravità. Il coefficiente di attrito statico tra il cilindro e la superficie è μ_S.

- Qual è la relazione tra la componente dell'accelerazione del centro di massa nella direzione lungo il piano inclinato e la componente dell'accelerazione angolare nel piano della figura?
- Qual è il modulo della velocità del centro di massa del cilindro quando raggiunge il fondo del piano inclinato?



$U_f = 0$ $\qquad$ $U_i = Mgh$

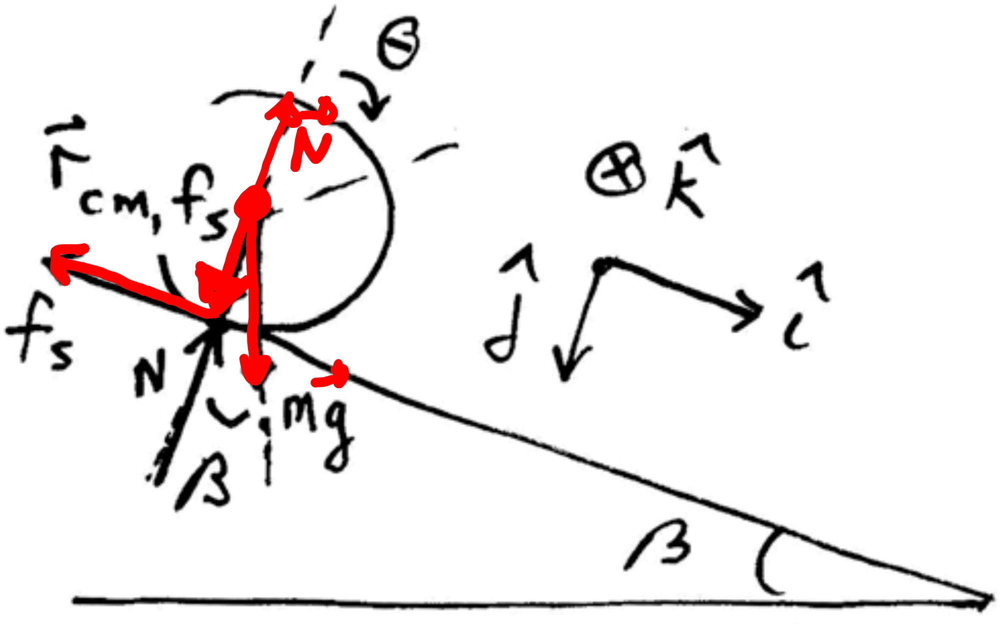
$K_i = 0$ $\qquad$ $K_f = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{I}{2} \omega^2$

$$\frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{I}{2} \omega^2 = Mgh$$

$R\omega = v_{cm}$ $\qquad$ $\omega^2 = \frac{v_{cm}^2}{R^2}$ $\qquad$ $I = \frac{1}{2} M R^2$

$$\frac{3}{4} M v_{cm}^2 = Mgh$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3} g h}$$



Sistema di coordinate e diagramma delle forze per il calcolo del momento torcente rispetto al CM

$$\tau_{cm,f_s} = f_s R$$

$$M\vec{g} + \vec{N} + \vec{f_s} = M\vec{a}$$

$$Mg\sin\beta - f_s = Ma_x$$

$$N - Mg\cos\beta = 0$$

$$I_{cm}\,\alpha_{cm} = \tau_{cm} = f_s R$$

$$\begin{cases} Mg\sin\beta - f_s = Ma \\ I_{cm}\,\alpha = f_s R \\ a = R\alpha \end{cases}$$

(CONDIZIONE DI ROTOLAMENTO)

$$I_{cm} = \frac{1}{2} M R^2$$

$$f_s = \frac{I_{cm}}{R}\alpha = \frac{I_{cm}}{R^2} a = \frac{1}{2} Ma$$

$$\frac{3}{2} Ma = Mg\sin\beta \qquad a = \frac{2}{3} g \sin\beta$$

$x(0) = 0$

$v(0) = 0$

PER IL C.M.

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} a t^2 \\ v(t) = a t \end{cases}$$

D = LONGHEZZA PERCORSA

t_p = TEMPO DI PERCORRENZA DEL PIANO INCLINATO

$$t_p = \frac{1}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{3h}{g}}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{4}{3} g h}$$

$$N = Mg\cos\beta$$

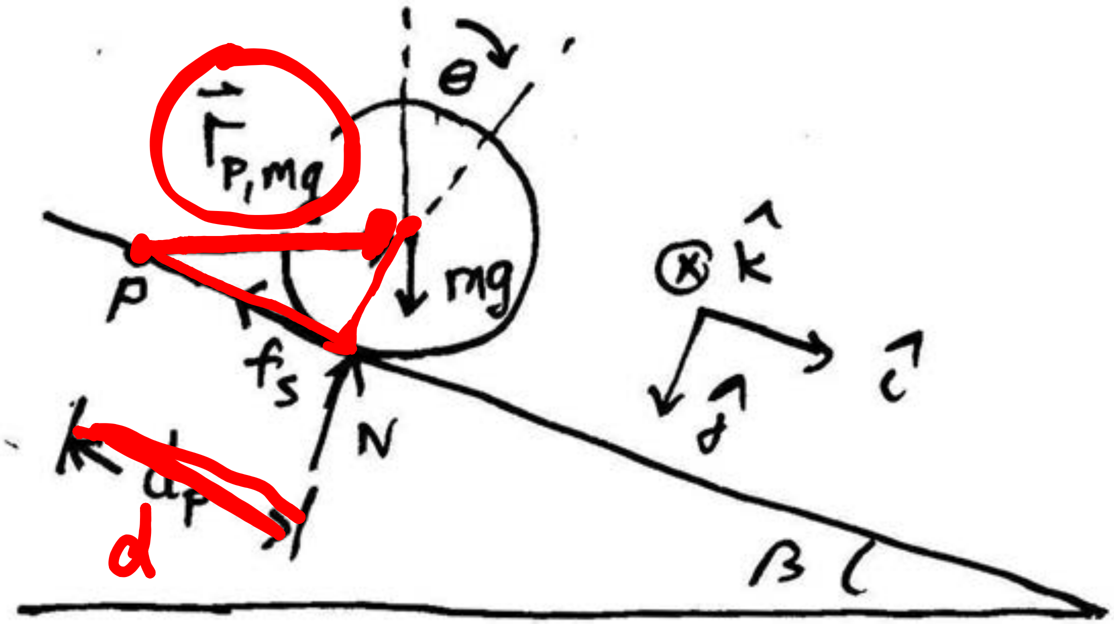
$$f_s = \frac{1}{2} M a$$

$$a = \frac{2}{3} g \sin\beta$$

$$f_s = \frac{1}{3} Mg \sin\beta$$

$$f_s \leq \mu_s Mg \cos\beta$$

$$\mu_s \geq \frac{1}{3} \operatorname{Tg}\beta$$



Sistema di coordinate e diagramma delle forze per il calcolo del momento torcente rispetto al punto fisso P.

VETTORI FORZE

PESO: $$M\vec{g} = Mg\sin\beta\,\hat{i} + Mg\cos\beta\,\hat{j}$$

NORMALE: $$\vec{N} = -N\hat{j}$$

ATTRITO $$\vec{f}_s = -f_s\,\hat{i}$$

VETTORI PUNTI DI APPLICAZIONE

PESO $$\vec{r}_{P,Mg} = d\,\hat{i} - R\,\hat{j}$$

NORMALE $$\vec{r}_{P,N} = d\,\hat{i}$$

ATTRITO $$\vec{r}_{P f_s} = d\,\hat{i}$$

MOMENTI DELLE FORZE RISPETTO A P:

$$\vec{\tau}_{P,Mg} = \left(d\,\hat{i} - R\,\hat{j}\right) \times \left(Mg\sin\beta\,\hat{i} + Mg\cos\beta\,\hat{j}\right) =$$

$$= Mg\left(d\cos\beta + R\sin\beta\right)\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_{P,N} = -Nd\,\hat{k} = -Mgd\cos\beta\,\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_{P,f_s} = 0$$

MOMENTO TORCENTE TOTALE

$$\vec{\tau}_P = \vec{\tau}_{P,Mg} + \vec{\tau}_{P,N} + \vec{\tau}_{P,f_s} =$$

$$= Mg R \sin\beta \,\hat{k}$$

MOMENTO ANGOLARE RISPETTO A P:

$$\vec{L}_P = \vec{L}_{ORBITALE} + \vec{L}_{SPIN}$$

$$\vec{L}_{ORBITALE} = \vec{r}_{P,CM} \times M \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{v}_{CM} = v\,\hat{i} \qquad \vec{r}_{P,CM} = (d\,\hat{i} - R\,\hat{j})$$

$$\vec{L}_{ORBITALE} = -RMv\,\hat{j}\times\hat{i} = MRv\,\hat{k}$$

$$\vec{L}_{SPIN} = I_{CM}\,\omega_z\,\hat{k}$$

$$\vec{L}_P = MRv\,\hat{k} + I_{CM}\,\omega_z\,\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = (MRa + I_{CM}\,\alpha)\,\hat{k} = MgR\sin\beta\,\hat{k}$$

$$M R a + I_{CM} \alpha = M g R \sin\beta$$

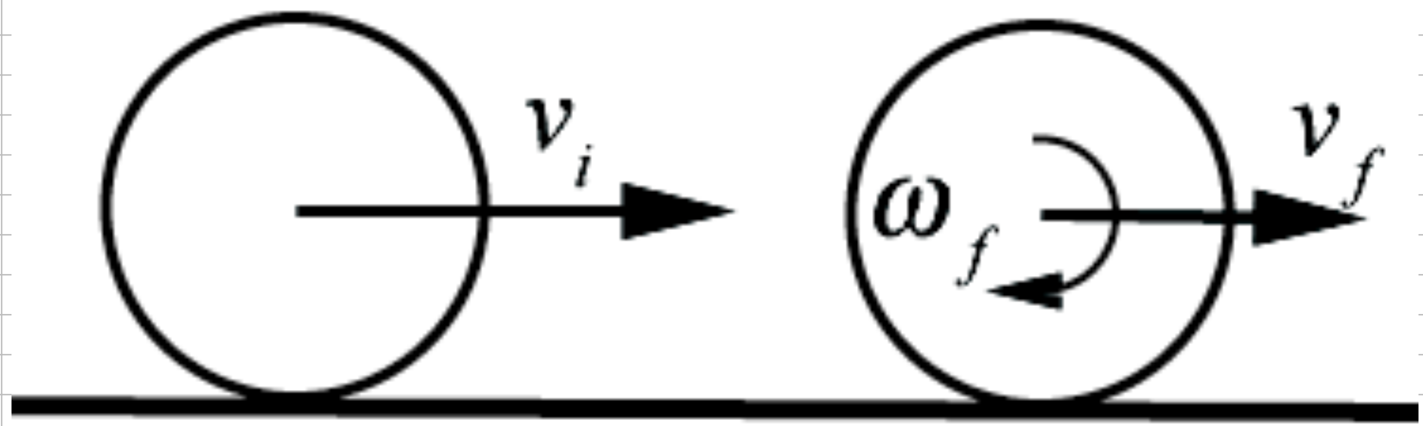
$a = R\alpha$ ROTOLAMENTO

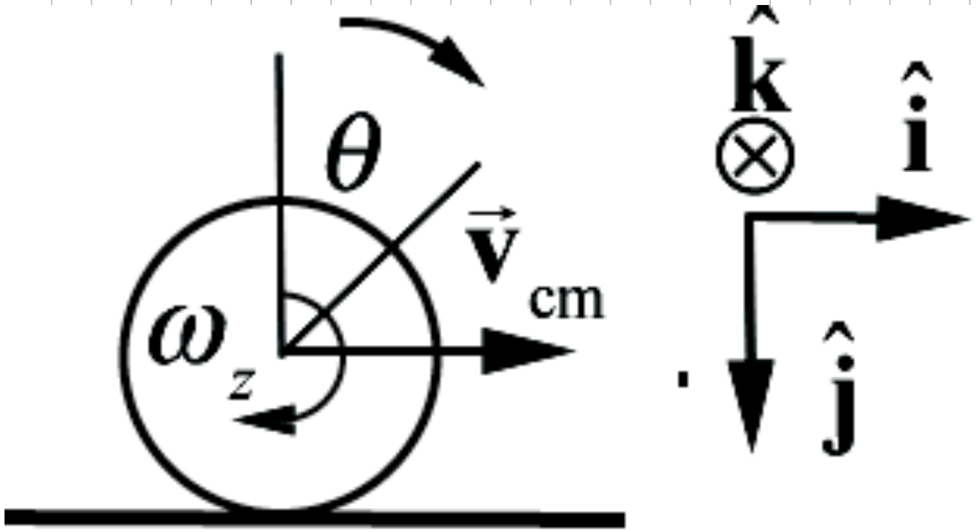
$$M R a + \frac{1}{2} M R^2 \frac{a}{R} = M g R \sin\beta$$

$$a = \frac{2}{3} g \sin\beta$$

Esercizio

Una palla da bowling di massa m e raggio R viene lanciata lungo una corsia.
Inizialmente la velocità è v_i, e la palla scivola senza rotolare. Successivamente, a causa dell'attrito, inizia a rotolare.
Il momento d'inerzia della palla rispetto al proprio centro di massa è $I_{CM} = 2/5(mR^2)$
Utilizzando la conservazione del momento angolare rispetto a un punto (da determinare), trovare la velocità v_f e la velocità angolare ω_f della palla da bowling nel momento in cui inizia a rotolare senza slittare.





Sistema di coordinate per la palla da bowling

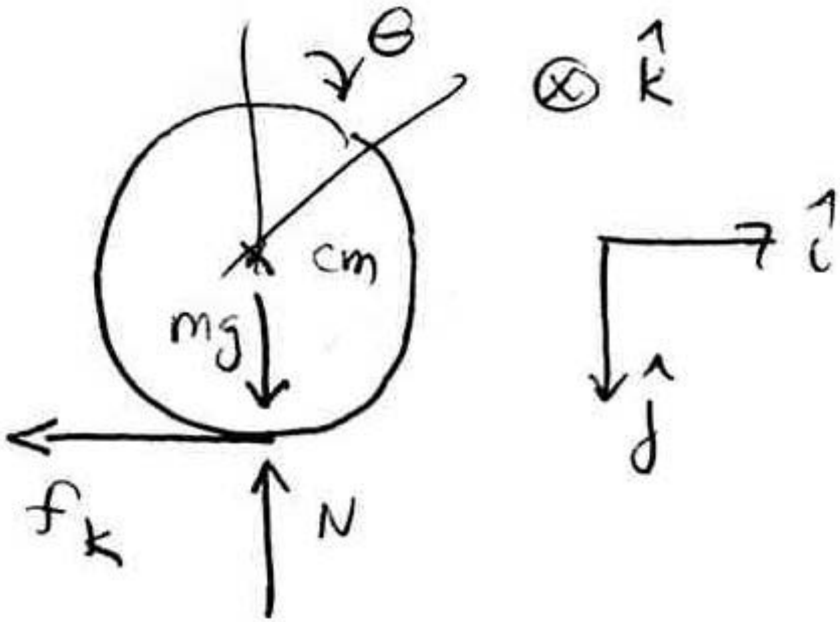
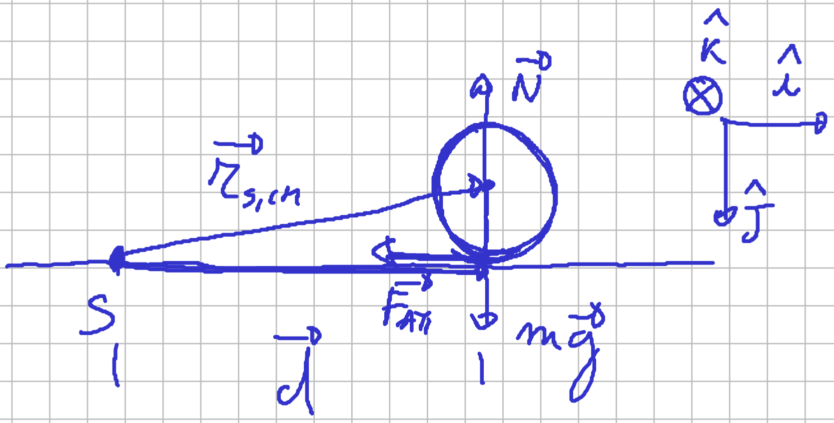


Diagramma delle forze

BOWLING



$\vec{r}_{s,mg} = d\,\hat{i} - R\,\hat{j}$ $\qquad$ $m\vec{g} = mg\,\hat{j}$

$\vec{r}_{s,N} = d\,\hat{i}$ $\qquad$ $\vec{N} = -N\,\hat{j}$

$\vec{r}_{s,F_{ATT}} = d\,\hat{i}$ $\qquad$ $\vec{F}_{ATT} = -F_{ATT}\,\hat{i}$

$\vec{\tau}_{s,mg} = mg\,d\,\hat{k}$ $\qquad$ $\vec{\tau}_{s,N} = -N\,d\,\hat{k}$

$\vec{\tau}_{s,F_{ATT}} = 0$ $\qquad$ $N = mg$

$$\vec{\tau}_s = (mgd - mgd)\,\hat{k} = 0$$

$\vec{\tau}_s = 0 \Rightarrow$ IL MOMENTO ANGOLARE SI CONSERVA

$$\vec{L}_i = \vec{r}_{s,i} \times m\vec{v}_i = \qquad \vec{v}_i = v_i\,\hat{i}$$

$$= \left(d_i\,\hat{i} - R\,\hat{j}\right)\times\left(m v_i\,\hat{i}\right) = m R v_i\,\hat{k}$$

$$\vec{L}_f = \underbrace{\vec{r}_{s,f} \times (m\vec{v}_f)}_{\text{TERMINE ORBITALE}} + \underbrace{I_{cm}\,\omega_f\,\hat{k}}_{\text{TERMINE DI SPIN}}$$

$$\vec{v}_f = v_f\,\hat{i} \qquad \vec{r}_{s,f} = \left(d_f\,\hat{i} - R\,\hat{j}\right)$$

$$\vec{L}_f = m R v_f\,\hat{k} + I_{cm}\,\omega_f\,\hat{k}$$

$$m R v_f + I_{cm}\,\omega_f = m R v_i$$

$$v_f = R\,\omega_f \qquad \text{(ROTOLAMENTO)}$$

$$I_{cm} = \frac{2}{5} m R^2$$

$$\omega_f = \frac{5}{7}\frac{v_i}{R}$$

II MODO DINAMICA

I CARDINALE PER IL C.M.

$$m \vec{a} = \vec{F}_{EXT}$$

$$m a = - F_{ATT} \qquad a = - \frac{F_{ATT}}{m}$$

II CARDINALE INTORNO AL C.M.

$$I_{cm} \vec{\alpha} = \vec{\tau}_{cm}$$

$$R F_{ATT} = I_{cm} \alpha$$

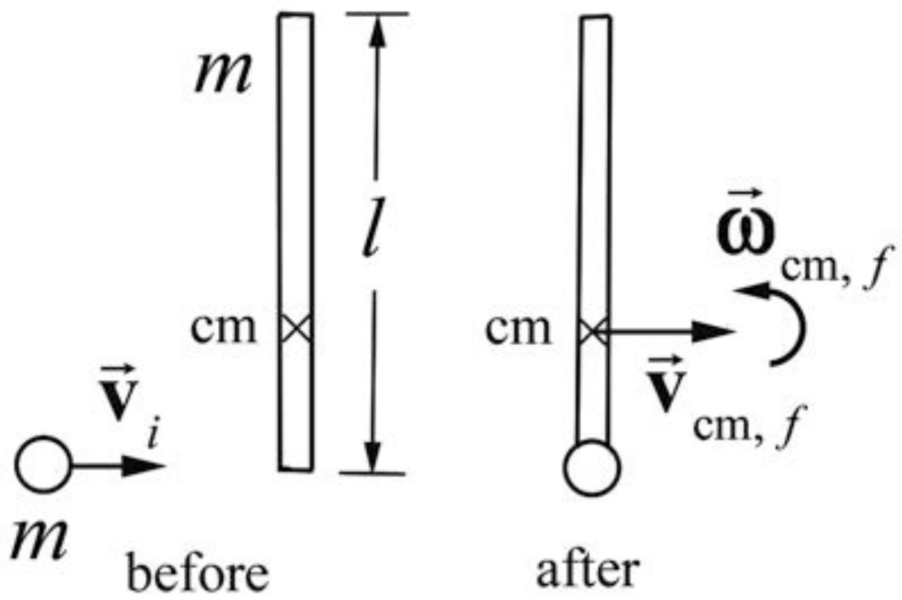
$$\begin{cases} \omega(t) = \alpha t = \dfrac{R F_{ATT}}{I} t \\ v(t) = v_i - \dfrac{F_{ATT}}{m} t \end{cases}$$

AL TEMPO t_f $\qquad v(t_f) = R\, \omega(t_f)$

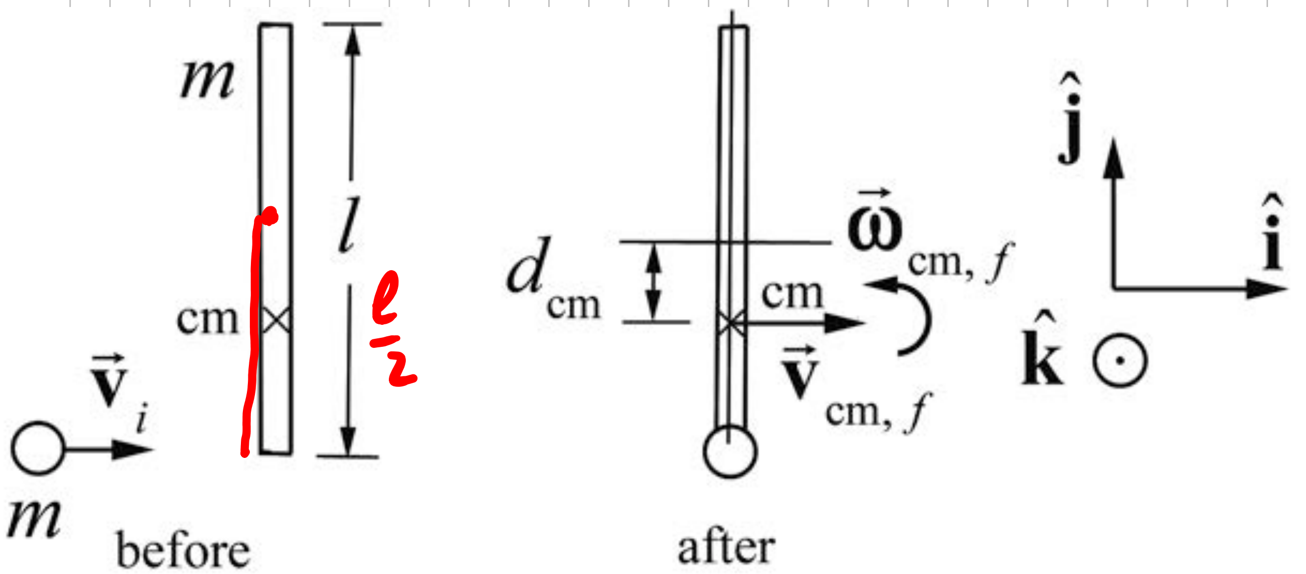
Esercizio

Un bastone di lunghezza l e massa m giace immobile su un piano privo di attrito. Un dischetto di massa m , assimilabile a un punto materiale, con una velocità $\vec{v}_i$ verso il bastone, colpisce un'estremità del bastone rimanendovi attaccato.

- A quale distanza dal punto medio del bastone si trova il centro di massa del sistema bastone-dischetto dopo l'urto?
- Qual è la velocità $\vec{v}_{CM,f}$ del sistema bastone + dischetto dopo l'urto?
  L'energia meccanica si conserva durante l'urto? Spiegare la risposta.
- Qual è la velocità angolare $\vec{\omega}_{CM,f}$ del sistema bastone + dischetto dopo l'urto?
- Qual è lo spostamento del centro di massa del bastone durante una rotazione completa?



Coordinate e posizione del CM



BASTONE - DISCHETTO

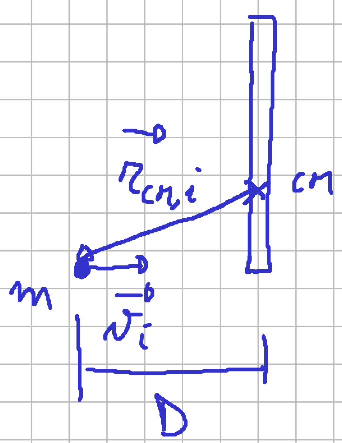
$$y_{cm} = \frac{-m\frac{\ell}{2}}{2m} = -\frac{\ell}{4} \qquad d_{cm} = \frac{\ell}{4}$$

QUANTITÀ DI MOTO

$$\vec{P}_{sis,i} = m\vec{v}_i = m v_i \hat{\imath}$$

$$\vec{P}_{sis,f} = 2m\vec{v}_{cm,f} \qquad \vec{v}_{cm} = \frac{v_i}{2}\hat{\imath}$$

MOMENTO ANGOLARE



$$\vec{r}_{cm,i} = -D\hat{\imath} - \frac{\ell}{4}\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_i = v_i\hat{\imath}$$

$$\vec{L}_{cm\,i} = -m\frac{\ell}{4}v_i\,\hat{\jmath}\times\hat{\imath} = m\frac{\ell}{4}v_i\,\hat{k}$$

$$\vec{L}^{\,o}_{s,f} = I_{cm}\, \omega_{cm,f}\, \hat{k}$$

$$I_{cm}\, \omega_{cm,f} = \frac{m\ell}{4} v_i$$

$$I_{cm} = I_{cm,\,BASTONE} + I_{cm,\,DISCHETTO}$$

$$I_{cm,BASTONE} = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2$$

$$I_{cm,\,DISCHETTO} = m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2$$

$$\omega = \frac{6}{5}\frac{v_i}{\ell}$$

PERIODO $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

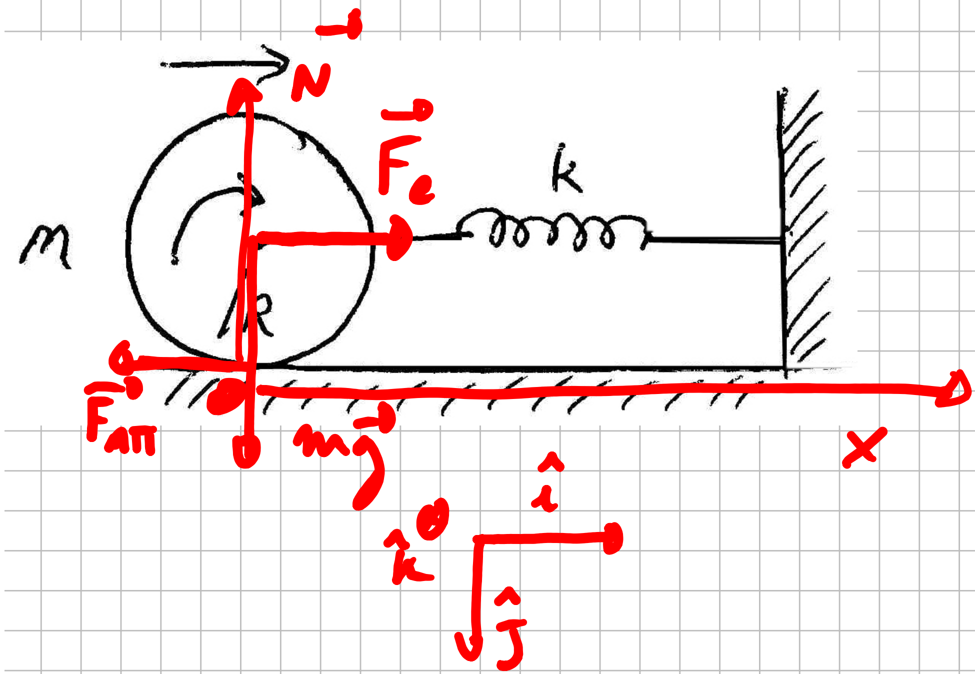
SPOSTAMENTO DEL C.M.

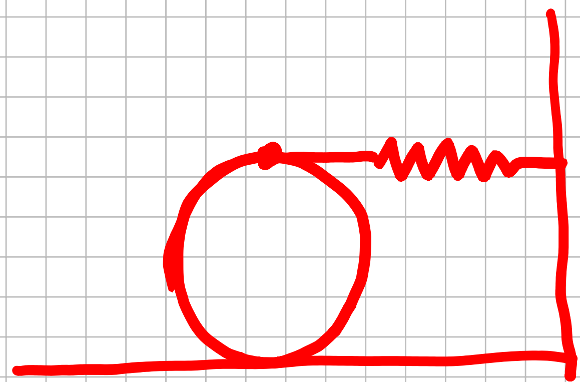
$$X_{cm} = v_{cm} T = 2\pi \frac{v_{cm}}{\omega} = \frac{5\pi\ell}{6}$$

Esercizio

Un cilindro solido di massa m e raggio R è collegato ad una molla orizzontale senza massa, con costante elastica k, in modo che possa rotolare senza slittare lungo una superficie orizzontale. Al tempo t, il centro di massa del cilindro si muove con velocità v_{CM} e la molla è compressa di una distanza x rispetto alla sua lunghezza di equilibrio.

- Qual è il periodo del moto armonico semplice del centro di massa del cilindro?





$$E = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

x = COMPRESSIONE DELLA MOLLA

$$v_{cm} = \dot{x}$$

$$I_{cm} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$v_{cm} = \omega R = R \dot{\theta}$$

$$\dot{x} = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{\dot{x}}{R}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} m \cancel{R^2} \frac{\dot{x}^2}{\cancel{R^2}} + \frac{1}{2} k x^2 =$$

$$= \frac{3}{4} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{3}{2} m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = 0$$

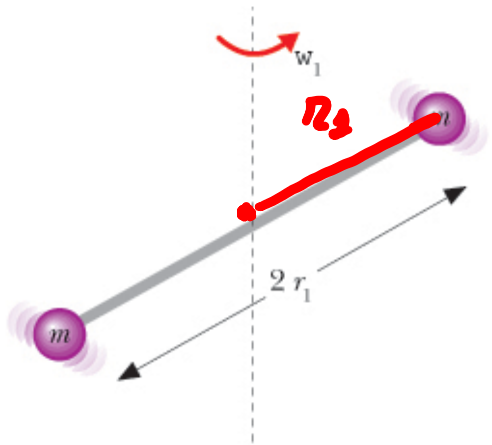
$$\dot{x} = 0$$

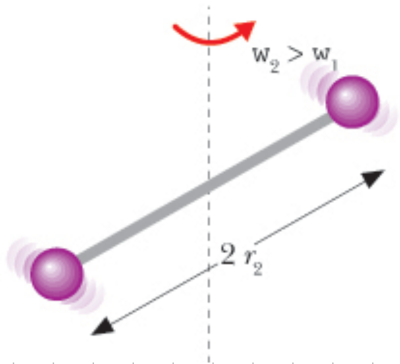
$$\frac{3}{2} m \ddot{x} + k x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{m}{k}}$$

Esercizio





Due sfere uguali di massa m e raggio R, sono collegate con un'asta di lunghezza variabile e momento di inerzia trascurabile. Inizialmente la distanza tra i centri delle sfere è $2r_1$ e la velocità angolare rispetto ad un asse equidistante dalle sfere ha modulo ω_1.

Successivamente la distanza tra le sfere viene ridotta a $2r_2$. Determinare:

- la velocità angolare finale ω_2 del sistema;
- l'energia cinetica finale del sistema.

SFERE A DIST. VAR.

R

$$\vec{L}_i = I_{cm,i}\,\vec{\omega}_i$$

$$I_{cm,i} = 2\left(\frac{2}{5} m R^2 + m r_1^2\right)$$

$$\vec{L}_f = I_{cm,f}\,\vec{\omega}_2$$

$$I_{cm\,f} = 2\left(\frac{2}{5} m R^2 + m r_2^2\right)$$

$$I_{cm,i}\,\omega_1 = I_{cm,f}\,\omega_2$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{I_{cm\,i}}{I_{cm\,f}} = \omega_1 \frac{\left[\frac{2}{5} m R^2 + m r_1^2\right]}{\left[\frac{2}{5} m R^2 + m r_2^2\right]}$$

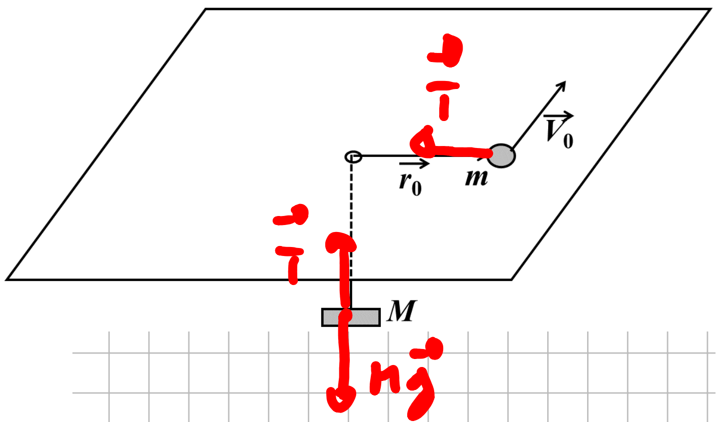
$$> \omega_1$$

$$K_1 = \frac{I_{cm,i}}{2}\,\omega_1^2 \qquad K_2 = \frac{I_{cm,f}}{2}\,\omega_2^2$$

$$K_2 = \frac{I_{cm,f}}{2}\left(\frac{I_{cm,i}}{I_{cm\,f}}\right)^2 \omega_1^2 = \frac{1}{2}\,\frac{I_{cm,i}^2\, I_{cm\,f}}{I_{cm\,f}^2}\,\omega_1^2$$

$$K_2 = \left(\frac{1}{2} I_{cm_i} \omega_1^2 \right) \cdot \frac{I_{cm,i}}{I_{cm,f}} = K_1 \frac{I_{cm,i}}{I_{cm,f}}$$

Esercizio



Su un tavolo senza attrito di dimensioni illimitate è appoggiato un disco di massa m, assimilabile ad un punto materiale. Il disco è connesso, tramite una corda inestensibile di lunghezza l e di massa trascurabile passante per un piccolissimo foro praticato sulla superficie del tavolo, ad un corpo di massa M sospeso sotto al piano del tavolo.

All'istante $t = 0$ il disco si trova ad una distanza r_0 dal foro ed ha una velocità $\vec{V}_0$ la cui direzione forma un angolo di $90°$ con la parte della corda distesa sul tavolo compresa fra il disco ed il foro (schematizzabile come in Figura con un vettore $\vec{r}_0$). Tutti gli attriti sono trascurabili.

- Determinare le quantità che si conservano.
- Calcolare, in funzione di r_0 il valore di V_0 necessario affinché il disco compia un moto circolare uniforme.
- Ricavare, nel caso generale, la relazione fra ω e r.
- Dimostrare che la distanza del disco dal foro è compresa fra un minimo r_{min} ed un massimo r_{max} e quindi che il disco non può precipitare nel foro.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

COORDINATE POLARI RISPETTO AL FORO

$$-T = -m \frac{V_0^2}{r_0}$$

$$V_0^2 = \frac{T r_0}{m} \qquad T = Mg$$

$$V_0^2 = \frac{Mg}{m} r_0$$

PER V_0 GENERICO

PER IL PUNTO MATERIALE:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\omega\hat{\theta}$$

$$\vec{L}_i = \vec{r}_0 \times (m\vec{v}_0) = r_0\hat{r} \times (m\vec{v}_0) =$$

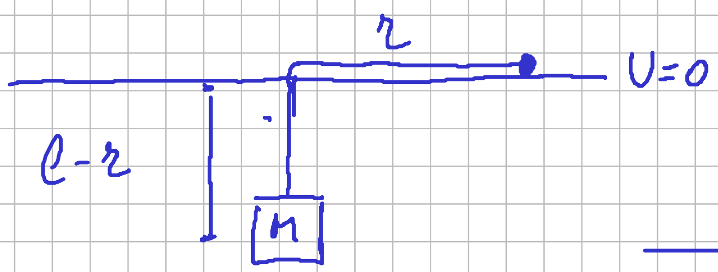
$$= m r_0 \hat{r} \times [\dot{r}\hat{r} + r_0\omega_0\hat{\theta}] =$$

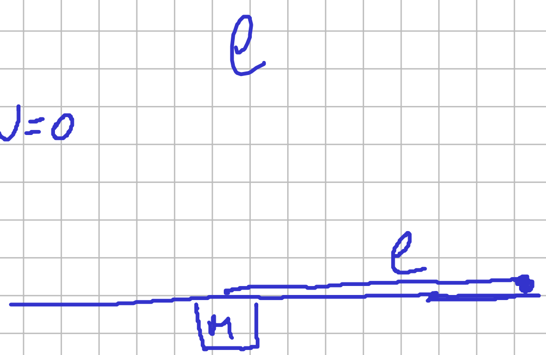
$$= m r_0 v_0 \hat{k} = m r_0^2 \omega_0 \hat{k}$$

$$\vec{L}_{\theta} = r\hat{r} \times (m\vec{v}) = m r^2 \omega \hat{k}$$

$$m r^2 \omega = m r_0^2 \omega_0$$

$$\omega = \frac{r_0^2 \omega_0}{r^2}$$





$$\vec{v}_m = \dot{r}\hat{r} + r\omega\hat{\theta}$$

$$U(r) = -Mg\,(l-r)$$

$$E = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 - Mg\,(l-r)$$

$$v_m^2 = \dot{r}^2 + r^2\omega^2 \qquad v_M^2 = \dot{r}^2$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 - Mg\,(l-r)$$

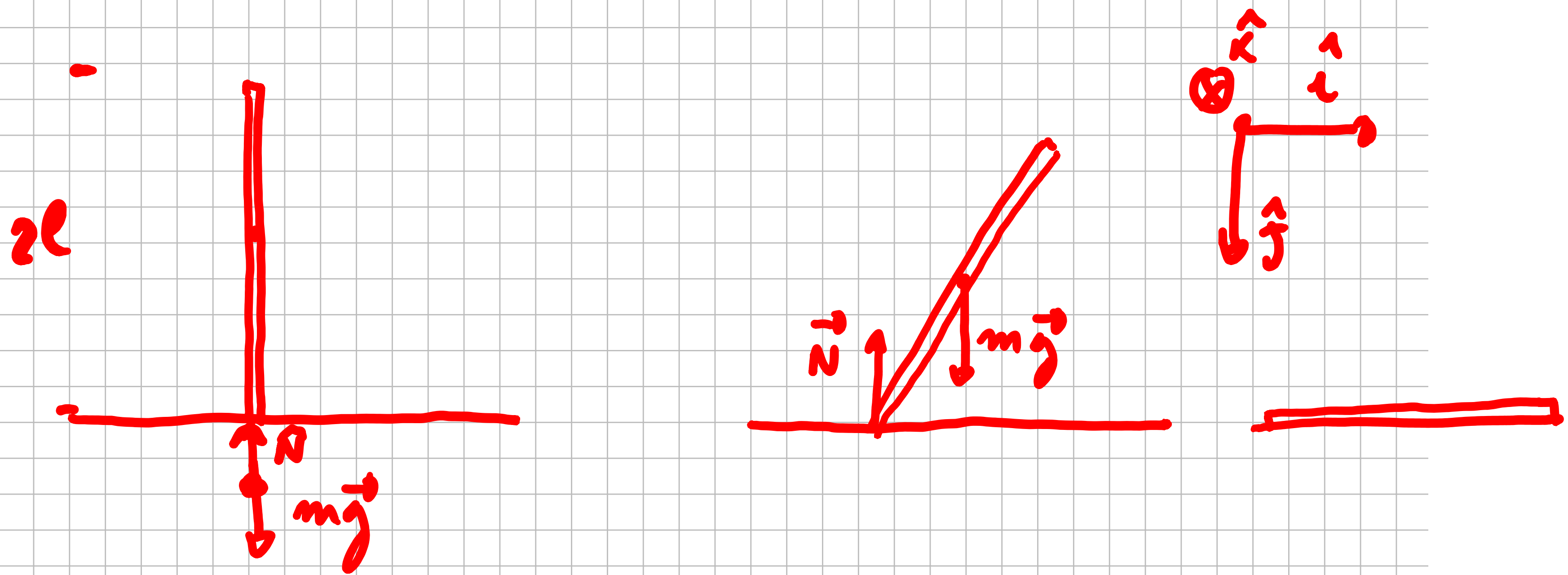
$$\omega^2 = \frac{(r_0 v_0)^2}{r^4}$$ (DALLA CONS. DEL MOMENTO ANGOLARE)

$$E = \frac{1}{2}(m+M)\dot{z}^2 + \frac{1}{2} m \frac{r_0^2 v_0^2}{z^2} + Mgz = \text{cost}$$

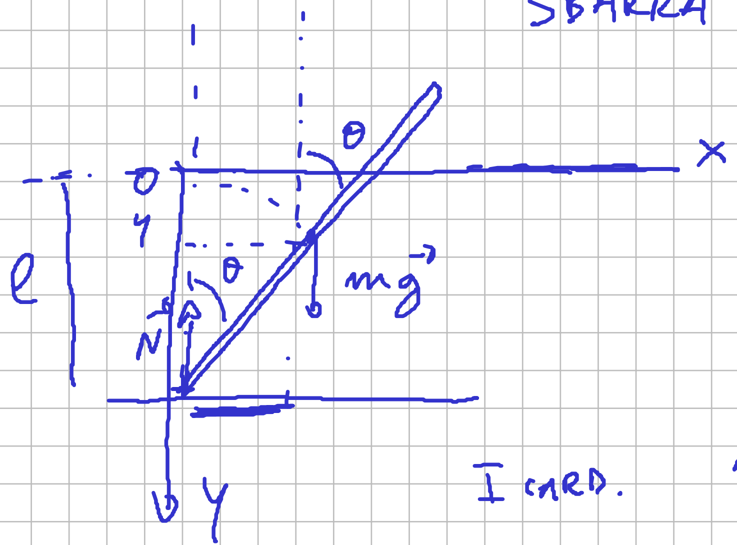
Esercizio

Una sbarra uniforme di massa m e lunghezza $2l$ viene posta verticalmente con una estremità a contatto con un pavimento orizzontale liscio. Se viene leggermente urtata, essa cade. In questo caso calcolare, al momento in cui la sbarra urta il pavimento:

- la reazione all'estremità, subito prima dell'urto;
- la velocita del centro di massa;
- la velocità angolare rispetto al centro di massa.



SBARRA CHE CADE



$$\boxed{y = \ell - \ell\cos\theta}$$

I CARD. $\quad mg - N = m a_{cm} = m\ddot{y}$

II CARD $\quad I\ddot{\theta} = \ell\sin\theta\, N$

CONSERVAZIONE ENERGIA

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}^2 - mg(\ell - \ell\cos\theta) = 0$$

$$y = \ell - \ell\cos\theta \Rightarrow \dot{y} = \ell\sin\theta\,\dot{\theta}$$

$$\ddot{y} = \ell\sin\theta\,\ddot{\theta} + \ell\cos\theta\,\dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta}^2 = \left[\frac{6g(1-\cos\theta)}{\ell(3\sin^2\theta + 1)}\right] \Rightarrow \dot{\theta} = [\quad]^{\frac{1}{2}}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\dot{\theta} = \frac{d}{dt}[\quad]^{\frac{1}{2}}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{N\ell}{2I} \sin\theta$$ (DALLA II CARDINALE)

$$m\ddot{y} = m\left[\ell\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \ell\sin\theta\,\ddot{\theta}\right] = mg - N$$ (I CARDINALE)

$$\dot{\theta}^2 = \left[\frac{6g(1-\cos\theta)}{\ell(3\sin^2\theta+1)}\right]$$ CONS. ENERGIA

$$N = mg\,\frac{\left[3\sin^2\theta + 1 - 6\cos\theta + 6\cos^2\theta\right]}{(3\sin^2\theta+1)^2} =$$

$$= mg\,\frac{\left[7 - 6\cos\theta - 3\sin^2\theta\right]}{(3\sin^2\theta+1)^2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow N = \frac{mg}{4}$$