I teorema di König per il momento angolare per CR

- Per un corpo rigido in rotazione con velocità $\vec{\omega}$ attorno ad un asse di simmetria della distribuzione di massa o a un asse ad esso parallelo, il momento angolare del CR rispetto ad un polo fisso O si può scrivere nella forma

$$\vec{L}_0 = M\vec{R}_{CM} \wedge \vec{V}_{CM} + I_{CM}\vec{\omega}$$

momento angolare del CM rispetto al polo

momento angolare dovuto al moto di rotazione attorno al centro di massa

- dove $\vec{R}_{CM}$ è un vettore che va dalla posizione del polo alla posizione del CM

Daremo ora una dimostrazione di questo teorema

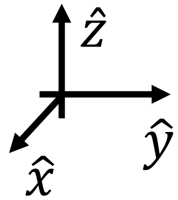
Parte a) della Dimostrazione valida anche per un sistema di PM

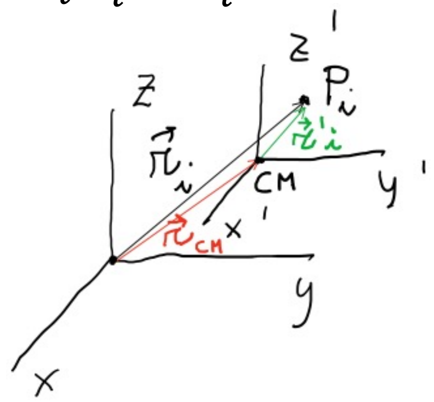
$$\vec{L}_0 = \sum m_i \left(\vec{R}_i \wedge \vec{v}_i\right) = \sum m_i \left(\vec{R}_i{}' + \vec{R}_{CM}\right) \wedge \left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i{}'\right)$$

$$= \left(\sum m_i \vec{R}_i{}'\right) \wedge \vec{V}_{CM} + M\vec{R}_{CM} \wedge \vec{V}_{CM} + \vec{R}_{CM} \wedge \sum m_i \vec{v}_i' + \sum m_i \vec{R}_i' \wedge \vec{v}_i'$$

posizione del CM nel sistema del CM $\vec{0}$

Q.M. del CM nel sistema del CM $\vec{0}$





$$\vec{L}_0 = M\vec{R}_{CM} \wedge \vec{V}_{CM} + \sum m_i \vec{R}_i' \wedge \vec{v}_i'$$

Per inciso facciamo notare che a questo punto della dimostrazione **SENZA necessariamente l'ipotesi di simmetria della distribuzione di massa attorno all'asse di rotazione, per un sistema di PM**

$$\vec{L}_0 = M\vec{R}_{CM} \wedge \vec{V}_{CM} + \sum m_i \vec{R}_i' \wedge \vec{v}_i'$$

- **I Teorema di König per un sistema di PM:** ***Il momento angolare è pari alla somma del momento angolare del CM rispetto al polo e del momento angolare come misurato nel sistema del CM***

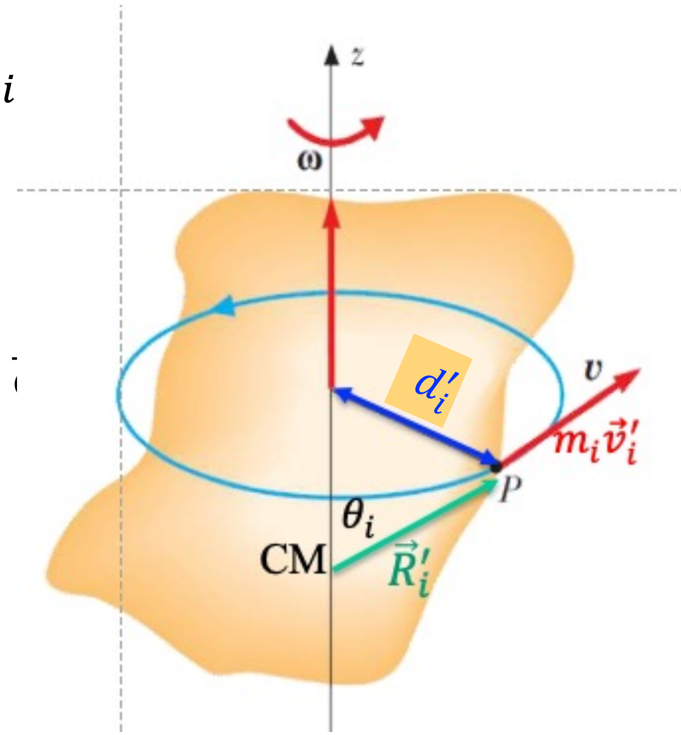
Parte b) della Dimostrazione per un CR

$$\vec{L}_0 = M\vec{R}_{CM} \wedge \vec{V}_{CM} + \sum m_i \vec{R}_i' \wedge \vec{v}_i'$$

- Consideriamo solo l'ultimo termine:

$$\sum m_i \vec{R}_i' \wedge \vec{v}_i' = \sum m_i \vec{R}_i' \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}_i') = \sum m_i [R_i'^2 \vec{\omega} - (\vec{R}_i' \cdot \vec{\omega}) \vec{R}_i']$$

$$= \sum m_i [R_i'^2 \vec{\omega} - \omega R_i' \vec{R}_i' \cos \theta_i$$



- scomponiamo $\vec{R}_i'$ in due componenti
  - una parallela (//), una ortogonale (⊥) a

$$\vec{R}_i' = R_i' \cos \theta_i \hat{\omega} + R_i' \sin \theta_i \hat{u}_{\perp i}$$

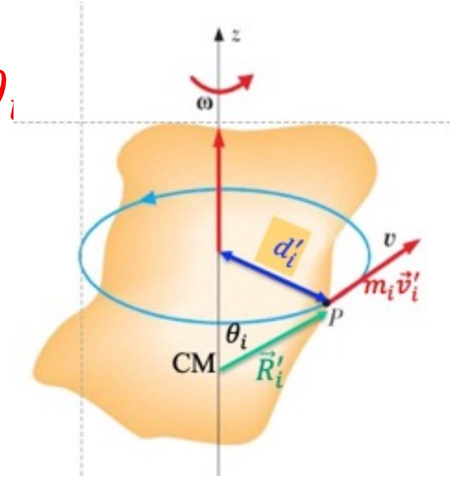
$$\sum m_i \vec{R}_i' \wedge \vec{v}_i' = \sum m_i [R_i'^2 \vec{\omega} - \omega R_i'^2 (\hat{\omega} \cos^2 \theta_i + \hat{u}_{\perp i} \cos \theta_i \sin \theta_i)]$$

Parte b) della Dimostrazione per un CR

$$\sum m_i \vec{R}'_i \wedge \vec{v}'_i = \sum m_i \left[R'^2_i \vec{\omega} - \omega R'^2_i (\hat{\omega} \cos^2\theta_i + \hat{u}_{\perp i} \cos\theta_i \sin\theta_i)\right]$$

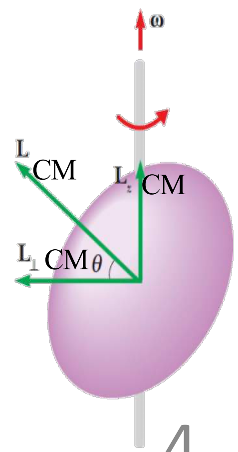
$$= \sum m_i \left[R'^2_i \vec{\omega}(1 - \cos^2\theta_i) - \omega \sum m_i R'^2_i \hat{u}_{\perp i} \cos\theta_i \sin\theta_i\right]$$

$$= \vec{\omega} \sum m_i R'^2_i \sin^2\theta_i - \omega \sum m_i R'^2_i \hat{u}_{\perp i} \cos\theta_i \sin\theta_i$$



- Come già mostrato, anche nel caso del sistema del CM, se la distribuzione di massa non è simmetrica attorno all'asse di rotazione o attorno ad un asse ad esso parallelo il momento angolare ha una componente diretta come l'asse di rotazione e una ad essa ortogonale
- Di conseguenza il secondo termine è nullo se la rotazione avviene attorno a un asse di simmetria della distribuzione di massa del sistema o a un asse ad esso simmetrico
  - Solo in questo caso

$$\sum m_i \vec{R}'_i \wedge \vec{v}'_i \, \vec{\omega} = \sum m_i R'^2_i \sin^2\theta_i = \vec{\omega} \sum m_i d'^2_i = I_{CM} \vec{\omega}$$



Il teorema di König per il momento angolare per CR in rotazione attorno a un asse di simmetria della distribuzione di massa

$$\vec{L}_0 = M\vec{R}_{CM} \wedge \vec{V}_{CM} + \sum m_i \vec{R}_i' \wedge \vec{v}_i'$$

- Nel laboratorio (SDRI) se l'asse di rotazione (A) è un asse di simmetria della distribuzione di massa o è ad esso parallelo

$$\sum m_i \vec{R}_i' \wedge \vec{v}_i' = \vec{\omega} \sum m_i d_i'^2 = I_{CM}\vec{\omega}$$

$$\vec{L}_0 = \vec{L} = I_A\,\vec{\omega} = M\vec{R}_{CM} \wedge \vec{V}_{CM} + I_{CM}\vec{\omega}$$

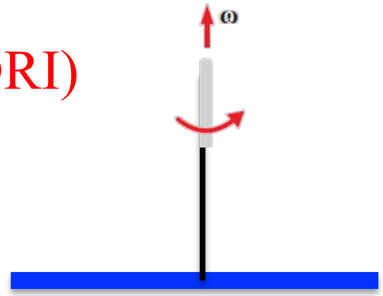
momento angolare del CM rispetto al polo

momento angolare dovuto al moto di rotazione attorno al centro di massa

- Considereremo SOLO casi in cui l'asse di rotazione (A) è un asse di simmetria della distribuzione di massa o è ad esso parallelo

esempio per rotazione attorno a un asse di simmetria della distribuzione di massa o ad esso parallelo

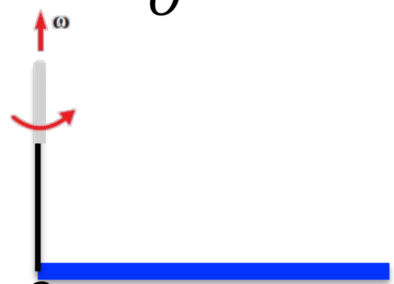
- Asta su un piano orizzontale privo di attrito libera di ruotare attorno a un asse passante per il suo centro di massa viene posta in rotazione con velocità angolare costante
  - la rotazione avviene attorno a un'asse di simmetria di distribuzione della massa
  - il sistema del CM coincide con il sistema del laboratorio (SDRI)



O

$$\vec{L} = I_{CM}\,\vec{\omega} = M\vec{R}_{CM}\,\Lambda\,\vec{V}_{CM} + I_{CM}\vec{\omega} = I_{CM}\,\vec{\omega}$$

- stessa asta sullo stesso piano libera di ruotare attorno a un asse passante per un suo estremo (asse di rotazione parallelo al primo) viene posta in rotazione con velocità angolare costante



O

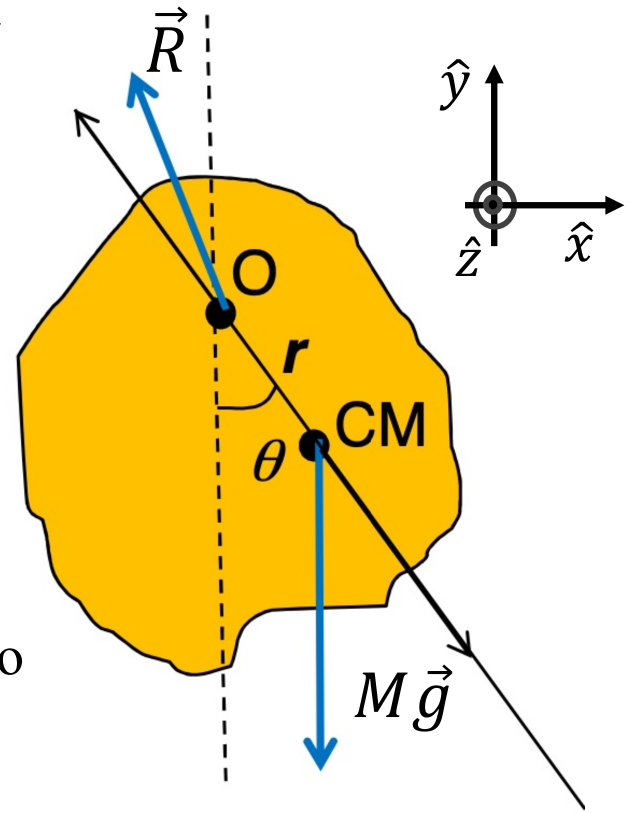
$$\vec{L} = I_O\,\vec{\omega} = \frac{Ml^2}{3}\vec{\omega} = M\vec{R}_{CM}\,\Lambda(\vec{\omega}\Lambda\vec{R}_{CM}) + I_{CM}\vec{\omega}$$

$$= M\vec{\omega}\,R_{CM}^2 + I_{CM}\vec{\omega} = M\vec{\omega}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{Ml^2}{12}\,\vec{\omega}$$

$$= \vec{\omega}\left(M\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{Ml^2}{12}\right) = \frac{Ml^2}{3}\,\vec{\omega}$$

Pendolo fisico o composto

- È costituito da un corpo rigido di forma qualunque e massa M sospeso per un punto che non coincide con il CM
  - il corpo è libero di ruotare attorno ad un asse orizzontale che non passa per il CM, come in figura
- Se spostato dalla posizione di equilibrio stabile esso viene posto in rotazione e oscillazione dalle forze agenti sul sistema



- In assenza di attrito, le forze agenti sul sistema sono
  - Forza peso applicata al CM del corpo
  - Reazione Vincolare

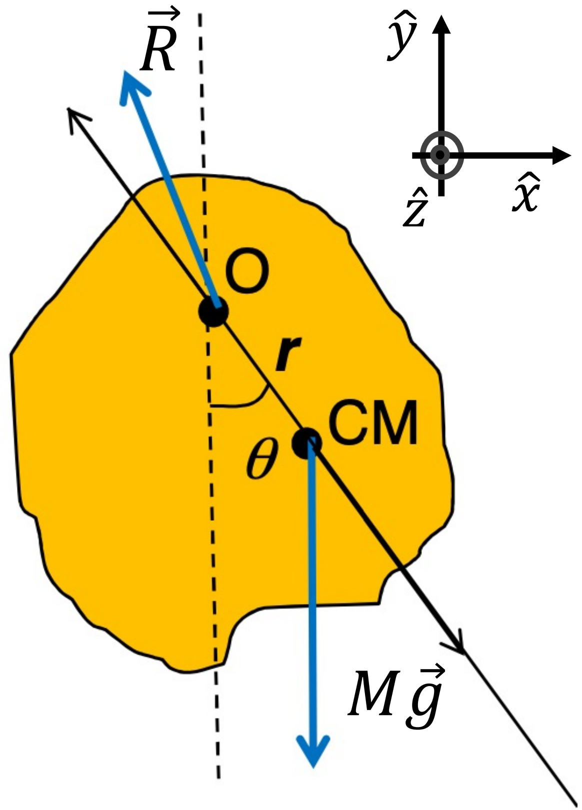
    si esplica sull'asse attorno al quale il corpo è libero di ruotare ed è ad esso ortogonale

- Condizione di equilibrio stabile $\begin{cases} \vec{R} + M\vec{g} = 0 \\ \vec{\tau} = 0 \end{cases}$

- Dalla I cardinale proiettando le forze $\begin{cases} lungo\ x: \ R_x = 0 \\ lungo\ y: \ R_y = Mg \end{cases}$

- II cardinale
  - polo in O per il calcolo dei momenti $\vec{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \vec{R}_{OCM} \wedge M\vec{g} = 0$
  - nullo il contributo della reazione vincolare

- La posizione di equilibrio stabile è quella in cui l'angolo $\theta = 0$



- Per qualunque altra posizione
  - I cardinale

$$\vec{R} + M\vec{g} = M\vec{a}_{CM}$$

  - II cardinale
    - polo in O per il calcolo dei momenti
    - nullo il contributo della reazione vincolare

$$\vec{\tau} = I_O\vec{\alpha} \quad = \vec{R}_{OCM} \wedge M\vec{g}$$

$$\vec{\tau} = I_O\alpha_z\ \hat{z} \quad = -R_{OCM}\ Mg\sin\theta\ \hat{z}$$

$$I_O \alpha_z \, \hat{z} = -R_{OCM} \, Mg sin\theta \, \hat{z} \qquad da \; \alpha_z = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \qquad \Rightarrow I_O \, \ddot{\theta} = -R_{OCM} \, Mg sin\theta$$

- Dall'ultima equazione per $\theta \ll 10^0$, approssimando sinθ con θotteniamo

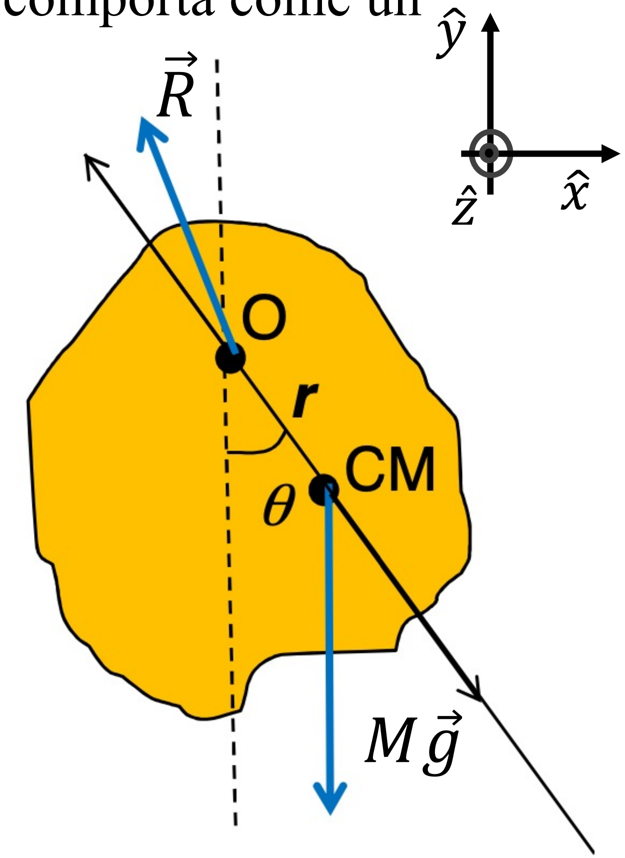
$$\ddot{\theta} + \frac{R_{OCM} Mg}{I_O} \theta = 0$$

- Il pendolo fisico per piccole oscillazioni ($\theta \ll 100$) si comporta come un **oscillatore armonico**
  - con pulsazione Ω (da non confondere con ω ...) e periodo T

$$\Omega = \sqrt{\frac{R_{OCM} Mg}{I_O}} \qquad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{\Omega}$$

$$\theta(t) = A cos(\Omega \mathrm{t} + \phi)$$

  - Note le condizioni iniziali si determina $\theta(t)$



Urti tra corpi rigidi e tra corpi rigidi e punti materiali quando il corpo rigido non è vincolato

- Nell'urto per il sistema si conserva, in assenza di forze esterne impulsive
  - La quantità di moto
  - Il momento angolare, rispetto a qulunque polo
- Se l'urto è elastico si conserva anche l'energia
  - In ogni caso a priori non è noto se l'urto è elastico
  - di conseguenza non si può assumere a priori la conservazione dell'energia meccanica (a meno che non è esplicitamente dichiarato)

quindi in generale in questo tipo di urti non si può a priori assumere che si conserva l'energia cinetica

- **Di certo l'urto è anelastico (completamente anelastico) e l'energia cinetica non si conserva se i corpi restano attaccati nell'urto**

Esame di Fisica Generale del 23/02/2015

Due masse puntiformi $m_1 = 4.0$ kg e $m_2 = 1.5$ kg urtano da versi opposti un'asta di lunghezza $L = 4.2$ m e massa $M = 1.7$ kg (vedere figura sottostante). Le due masse si muovono con velocità di modulo, rispettivamente, $v_1 = 4.2$ m/s e $v_2 = 1.6$ m/s. L'urto (agli estremi dell'asta) è perfettamente anelastico e avviene nello stesso istante per entrambe le masse.

Si calcoli:

a) La velocità del centro di massa subito dopo l'urto e la distanza del centro di massa dal punto O (estremo dell'asta):

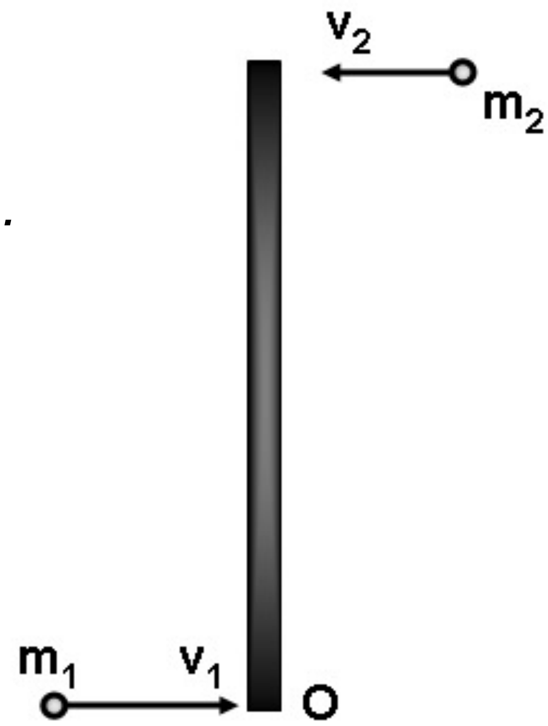
$v_{cm} =$ .... $d_{cm} =$ ....

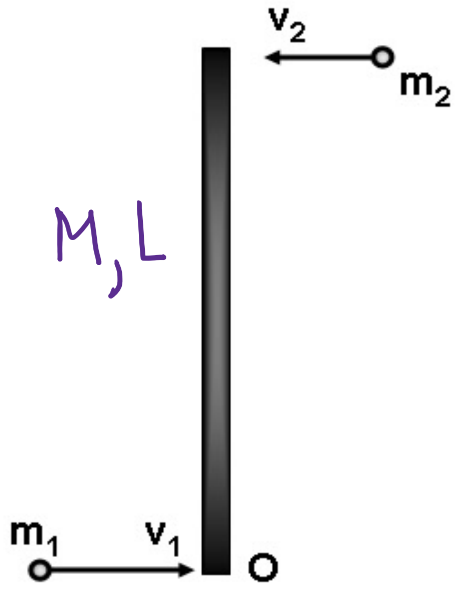
b) Il modulo della velocità angolare del sistema subito dopo l'urto:

$\omega_s =$ ....

c) L'energia meccanica dissipata nell'urto:

$E_{diss} =$ ....





punti materiali $\begin{cases} v_1 = 4{,}2\ m/s \\ v_2 = 1{,}6\ m/s \end{cases}$ $\quad m_1 = 4\ kg \quad m_2 = 1{,}5\ kg$

Asta $\begin{cases} L = 4{,}2\ m \\ M = 1{,}7\ kg \end{cases}$

① m_1 e m_2 urtano contemporaneamente l'asta

② l'urto è anelastico

Nota: dal testo non ci sono forze esterne e il sistema NON È vincolato.

a) Si calcoli la velocità del centro di massa subito dopo l'urto e la distanza del centro di massa dal punto O (estremo dell'asta): v_{cm} = ... d_{cm} = ...

Non essendoci forze esterne $\vec{P}_i^{CM} = \vec{P}_f^{CM} = cost$ (da $(m_1 + m_2 + M)\vec{a}_{cm} = 0$)

$$M_{TOT}\vec{V}^{\,i}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + M\vec{V} = (m_1 + m_2 + M)\vec{v}_{CM} = M_{TOT}\vec{v}^{\,f}_{cm}$$

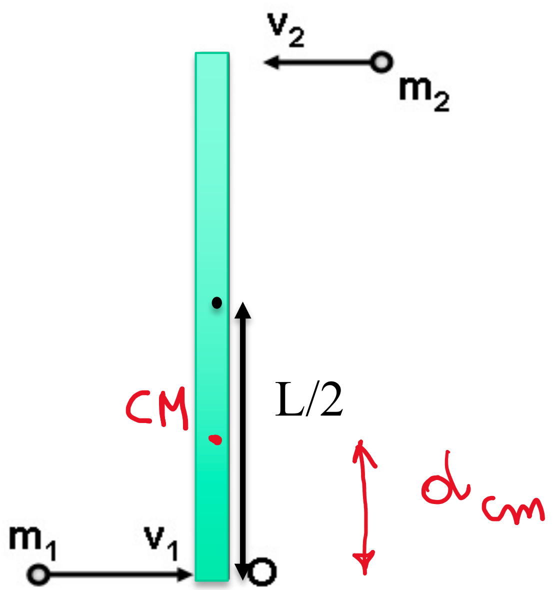
Non essendoci forze esterne $\vec{P}_i^{CM} = \vec{P}_f^{CM} = \text{cost}$ (da $(m_1+m_2+M)\vec{a}_{cm}=0$)

$$M_{TOT}\vec{V}_{cm}^{\,i} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + M\vec{V} = (m_1+m_2+M)\vec{v}_{CM} = M_{TOT}\vec{v}_{cm}^{\,f}$$

$$\vec{V}_{cm} = \text{cost} = \left(\frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1+m_2+M}, 0, 0\right) \Rightarrow V_{cm} = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1+m_2+M}$$

$$V_{cm} = 2\ m/s$$

a)Si calcoli la velocità del centro di massa subito dopo l'urto e la distanza del centro di massa dal punto O (estremo dell'asta): *vcm* = ... *dcm* = ...

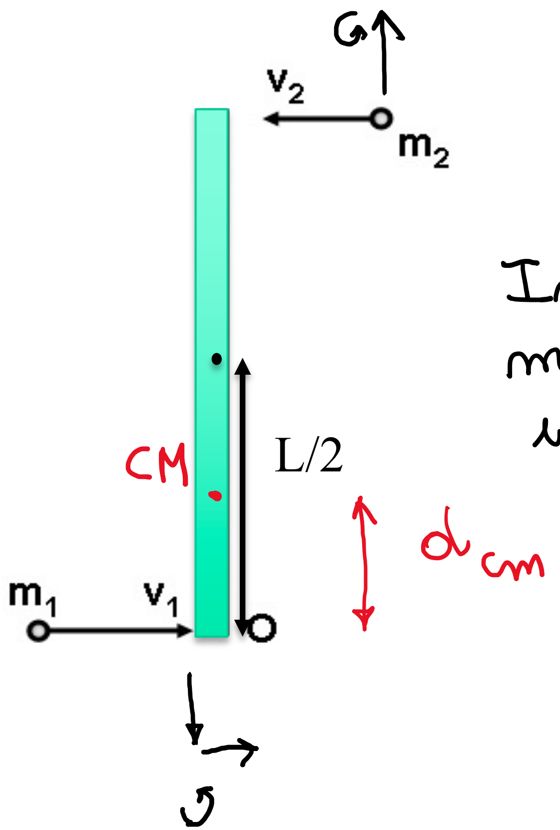


$$d_{cm} = \frac{m_1 \times \emptyset + m_2 L + M L/2}{m_1+m_2+M} = 1{,}37\ m$$

b) Si calcoli il modulo della velocità angolare del sistema subito dopo l'urto: ω_s = ...

Non ci sono forze esterne e il sistema non è vincolato

Se prendiamo come polo il CM $\vec{M}^{CM} = \emptyset \Rightarrow \vec{L}^{CM} = \text{cost}$



Inoltre l'unica componente di $\vec{L}^{CM} \neq 0$ è L_z^{CM}

Indicando con L_{zi}^{CM} e L_{zf}^{CM} le componenti z del momento angolare un'istante prima e un istante dopo l'urto:

$$L_{zi}^{CM} = m_1 v_1 d_{cm} + m_2 v_2 (L - d_{cm})$$

$$= I_z^{CM} \omega_s = L_{zf}^{CM} \Rightarrow \omega_s = \frac{L_{zi}^{CM}}{I_z^{CM}}$$

con $I_z^{CM} = I_{cm}^{ASTA} + M(L/2 - d_{cm})^2 + m_1 d_{CM}^2 + m_2 (L - d_{CM})^2$

con $I_z^{CM} = I_{cm}^{ASTA} + M(L/2 - d_{cm})^2 + m_1 d_{CM}^2 + m_2 (L - d_{CM})^2$

$I_{cm}^{ASTA} = \frac{ML^2}{12} \Rightarrow \omega_s = \frac{L_{zi}^{CM}}{I_z^{CM}} = 1.3\,s^{-1}$

c)Si calcoli l'energia meccanica dissipata nell'urto: E_{diss} = ...

L'urto è anelastico quindi $E_f^{mecc} < E_i^{mecc}$

$E_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + M) v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_z^{CM} \omega_s^2$

$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ note!

$E_f - E_i = -3,4\ J \Rightarrow$ L'energia persa nell'urto è 3,4 J

Urti tra corpi rigidi e tra corpi rigidi e punti materiali quando il CR è vincolato

In presenza di vincoli, nell'urto:

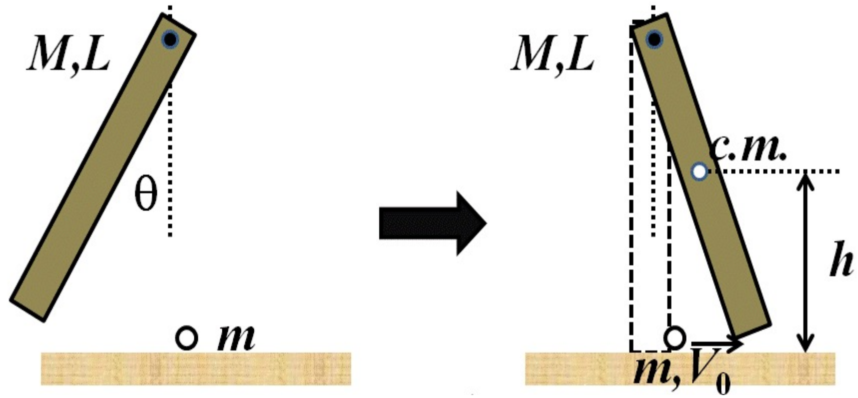
- la quantità di moto non si conserva
  - infatti quando il corpo vincolato è urtato, l'effetto del vincolo è di assorbire parte della QM iniziale del sistema
  - Questo avviene a causa dell'impulso dovuto alla reazione vincolare che sviluppa una reazione impulsiva sul vincolo, del tipo

$$\vec{I} = \int_0^{\tau} \vec{R}(t)dt' = \vec{P}(\tau) - \vec{P}(0) = \vec{P}(\tau)$$

- Il momento angolare si conserva se il polo per il calcolo dei momenti coincide con il vincolo
  - si sviluppano infatti forze impulsive incognite nel vincolo ortogonali all'asse di rotazione attorno al vincolo
  - queste sono le uniche forze che contano nella brevissima durata dell'urto
  - il loro momento è nullo se come polo si sceglie il vincolo
- Se l'urto è elastico si conserva anche l'energia
  - valgono in generale per la conservazione dell'energia le stesse considerazioni fatte per i sistemi non vincolati

Prova scritta 01/07/2016 Esercizio 1. **Non è sulla raccolta www.pi.infn.it/~ciocci**

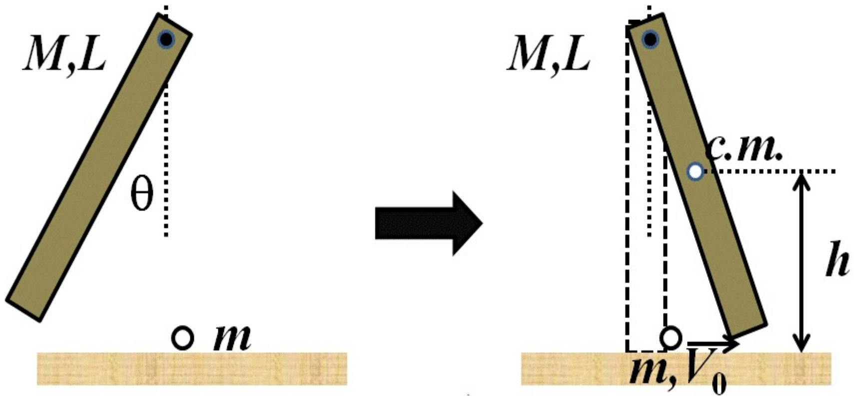
Una sbarra omogenea di lunghezza L e massa M è vincolata a ruotare in un piano verticale attorno ad un asse senza attrito passante per un suo estremo, come in Figura. La sbarra viene ruotata di un angolo $\theta = 30^{o}$ rispetto alla posizione di equilibrio e lasciata libera sotto l'azione della gravità con velocità iniziale nulla. Giunta in posizione verticale la sbarra colpisce una massa m ferma, che a seguito dell'urto inizia a muoversi su un piano orizzontale con attrito, di coefficiente d'attrito dinamico μ_D ignoto. La velocità iniziale (subito dopo l'urto) della massa m è $\vec{V}_0$ e la sbarra dopo l'urto continua a ruotare superando la verticale.



1) Si dimostri che una sola fra le seguenti quantità si conserva sicuramente nell'urto: quantità di moto totale, momento angolare del sistema rispetto all'asse di rotazione, energia meccanica del sistema.

2) Utilizzando la legge di conservazione opportuna determinare la velocità angolare della sbarra subito dopo l'urto e la quota h a cui risale il suo centro di massa ($c.m.$ nella Figura a destra). Qual è il valore massimo di V_0 al di sopra del quale la sbarra rimbalza all'indietro ?

3) Si calcoli la variazione delle grandezze citate nel punto 1) che in generale non si conservano nell'urto, specificando se esistono casi particolari in cui esse o alcune di esse possono conservarsi.
4) Per determinare il modulo della velocità iniziale V_0 si misura la velocità della massa m durante il suo moto sul piano con attrito in due punti: a distanza $l_1 = 1$ m dal punto dell'urto la velocità è $V_1 = 4\ \mathrm{m/s}$, mentre a distanza $l_2 = 2$ m la velocità è $V_2 = 1\ \mathrm{m/s}$. Si calcolino i valori numerici di V_0 e μ_D usando $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.



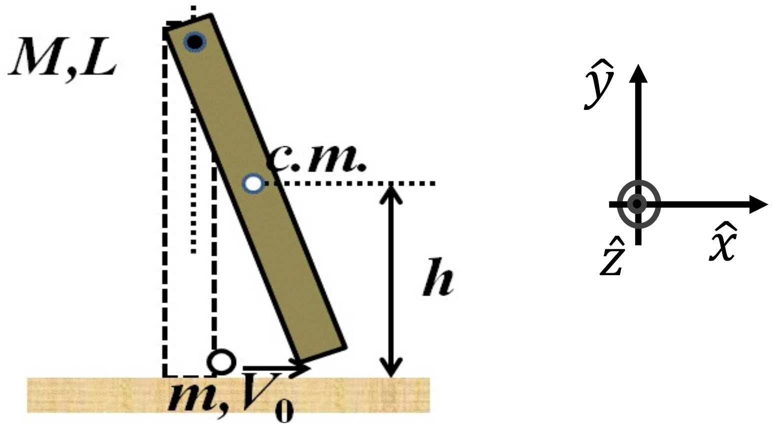
1) Si dimostri che una sola fra le seguenti quantità si <u>conserva sicuramente</u> durante l'urto: quantità di moto totale, momento angolare del sistema rispetto all'asse di rotazione, energia meccanica del sistema.

1) Nell'urto si conserva sicuramente il momento angolare $\vec{L}$ rispetto all'asse di rotazione perché le uniche forze esterne applicate sono la reazione dell'asse (che ha braccio nullo per definizione) e la gravità, che non è impulsiva e la cui direzione nel punto di equilibrio è a braccio nullo.

La quantità di moto totale $\vec{P}$ non si conserva a causa della forza impulsiva esercitata dall'asse di rotazione

L'energia totale E in generale può non conservarsi a causa delle forze interne che si sviluppano durante l'urto.

2) Utilizzando la legge di conservazione opportuna determinare la velocità angolare della sbarra subito dopo l'urto e la quota h a cui risale il suo centro di massa ($c.m.$ nella Figura a destra). Qual è il valore massimo di V_0 al di sopra del quale la sbarra rimbalza all'indietro ?



2) Applichiamo la legge di conservazione del momento angolare un istante prima dell'urto e un istante dopo l'urto: $\vec{L}_i = I\vec{\omega}_i = \vec{L}_f = I\vec{\omega}_f + mLV_0\hat{z}$

dove $I = ML^2/3$ è il momento d'inerzia della sbarra rispetto all'asse di rotazione, $\vec{\omega}_i$ e $\vec{\omega}_f$ sono le velocità angolari della sbarra prima e dopo l'urto e $\hat{z}$ è la direzione dell'asse di rotazione (uscente dallo schermo).

Si ottiene quindi:
$$\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_i - \frac{mLV_0}{M\,L^2/3}\hat{z} = \left(\omega_i - \frac{3mV_0}{ML}\right)\hat{z}$$

La sbarra continua a ruotare nello stesso verso se $\omega_f > 0 \quad \Rightarrow. \; V_0 < \frac{ML}{3m}\omega_i$

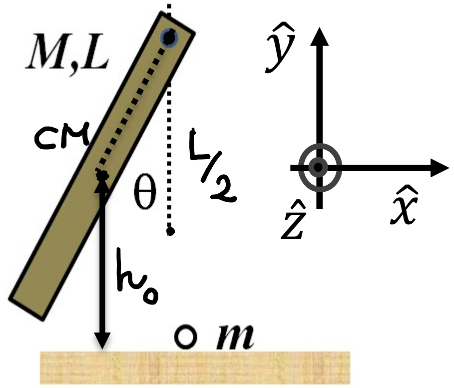
2) Utilizzando la legge di conservazione opportuna determinare la velocità angolare della sbarra subito dopo l'urto....

- Il modulo della velocità angolare della sbarra prima dell'urto ω_i si ricava utilizzando la conservazione dell'energia durante la fase di discesa
  - il centro di massa della sbarra parte da un'altezza

$$h_0 = \frac{L}{2} + \frac{L}{2}(1 - \cos\theta)$$

  - scende fino a

$$h_i = L/2$$



dove abbiamo usato l'indice "0" per l'istante di partenza della sbarra

e mantenuto l'indice "i" per la sbarra in posizione verticale subito prima dell'urto

- Applicando la conservazione dell'energia e considerando che alla quota h_0 , ω è nulla:

$$E_0 = K_0 + U_0 = 0 + Mg\frac{L}{2}[1 + (1 - \cos\theta)] = K_{in} + U_{in} = \frac{1}{2}I\omega_i^2 + Mg\frac{L}{2} \quad \Longrightarrow$$

$$\omega_i^2 = 2\frac{Mg}{M\,L^2/3}\frac{L}{2}(1 - \cos\theta) = \frac{3g}{L}(1 - \cos\theta) \Longrightarrow \omega_i = \sqrt{\frac{3g(1 - \cos\theta)}{L}}$$

dal punto 2): $\vec{\omega}_f = \left(\omega_i - \frac{3mV_0}{ML}\right)\hat{z}$ otteniamo : $\vec{\omega}_f = \left(\sqrt{\frac{3g(1 - \cos\theta)}{L}} - \frac{3mV_0}{ML}\right)\hat{z}$

2) Utilizzando la legge di conservazione opportuna determinare la velocità angolare della sbarra subito dopo l'urto e la quota h a cui risale il suo centro di massa. Qual è il valore massimo di V_0 al di sopra del quale la sbarra rimbalza all'indietro ?

L'altezza massima raggiunta dal centro di massa della sbarra si può calcolare utilizzando il principio di conservazione dell'energia meccanica nel moto successivo all'urto. Infatti:

$$E_i = K_i + U_i = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\omega_f^2 + \frac{MgL}{2} = E_f = K_f + U_f = 0 + Mgh \quad \Rightarrow h = \frac{L}{2}\left(\frac{L\omega_f^2}{3g} + 1\right)$$

Qual è il valore massimo di V_0 al di sopra del quale la sbarra rimbalza all'indietro ?

Avevamo ottenuto:

La sbarra continua a ruotare nello stesso verso se $\omega_f > 0$

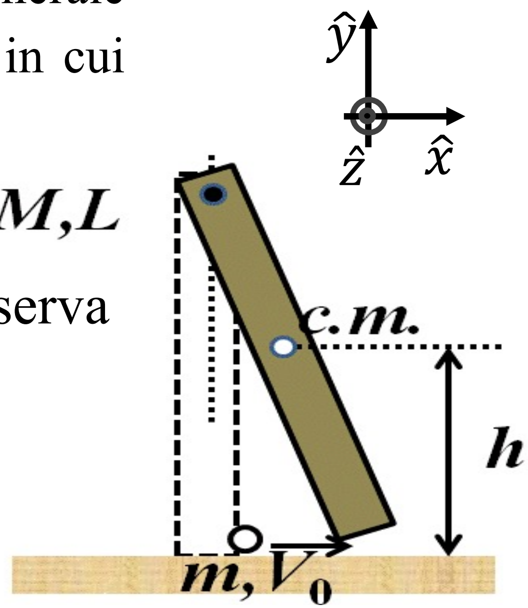
$$\Rightarrow V_0 < \frac{ML}{3m}\omega_i$$

Poichè $\omega_i = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}}$

il valore massimo di V_0 al di sopra del quale la sbarra rimbalza all'indietro è

$$V_{0-max} = \frac{ML}{3m}\omega_i = \frac{ML}{3m}\sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}}$$

3) Si calcoli la variazione delle grandezze citate nel punto 1) che in generale non si conservano nell'urto, specificando se esistono casi particolari in cui esse o alcune di esse possono conservarsi. ($\vec{L}$, $\vec{P}, E_{totale}$)



3)

- La variazione del momento angolare è nulla in quanto si conserva
- La quantità di moto non si conserva
    - un istante prima dell'urto è dovuta solo alla sbarra:

$$\vec{P}_i = (M + m)\vec{V}_{c.m.,i} = M\frac{L}{2}\omega_i\hat{x}$$

- un istante dopo l'urto la quantità di moto comprende sia quella della sbarra, sia quella della massa m, per cui:

$$\vec{P}_f = (M + m)\vec{V}_{c.m.,f} = \left(M\frac{L}{2}\omega_f + mV_0\right)\hat{x} = \left(M\frac{L}{2}\left(\omega_i - \frac{3mV_0}{ML}\right) + mV_0\right)\hat{x}$$

$$= \left(M\frac{L}{2}\omega_i - \frac{3mV_0}{2} + mV_0\right)\hat{x} \quad = \vec{P}_i - \frac{mV_0}{2}\hat{x}$$

$$\Longrightarrow \Delta\vec{P} \equiv \vec{P}_f - \vec{P}_i \quad = -\frac{mV_0}{2}\hat{x}$$

la quantità di moto nell'urto non si può mai conservare a causa della reazione impulsiva che si sviluppa al vincolo

3) Si calcoli la variazione delle grandezze citate nel punto 1) che in generale non si conservano nell'urto, specificando se esistono casi particolari in cui esse o alcune di esse possono conservarsi. ($\vec{L}$, $\vec{P}, E_{totale}$)

- Per quanto riguarda l'energia è ovviamente sufficiente considerare la variazione di energia cinetica, perché quella potenziale non cambia durante l'urto
  - L'energia cinetica iniziale è dovuta solo al moto della sbarra

$$K_i = \frac{1}{2} I\omega_i^2 = \frac{ML^2}{6}\omega_i^2$$

  - mentre quella finale comprende anche il contributo della massa m:

$$K_f = \frac{1}{2} I\omega_f^2 + \frac{m}{2} V_0^2 = \frac{ML^2}{6}\left(\omega_i - \frac{3mV_0}{ML}\right)^2 + \frac{m}{2} V_0^2$$

$$= \frac{ML^2}{6}\left(\omega_i^2 + \frac{9m^2V_0^2}{M^2L^2} - 6\frac{\omega_i m V_0}{ML}\right) + \frac{m}{2}V_0^2 = K_i + \frac{3m^2V_0^2}{2M} - \omega_i m V_0 L + \frac{m}{2}V_0^2$$

$$= K_i + \frac{mV_0^2}{2}\left(\frac{3m}{M} - \frac{2\omega_i L}{V_0} + 1\right) \quad \Longrightarrow \Delta K = K_f - K_i = \frac{mV_0^2}{2}\left(\frac{3m}{M} - \frac{2\omega_i L}{V_0} + 1\right)$$

A parte il caso $V_0 = 0$, che è ovviamente privo di senso, l'energia si può conservare se:

$$\frac{3m}{M} - \frac{2\omega_i L}{V_0} + 1 = 0 \quad \Longrightarrow V_0 = \frac{2\omega_i LM}{(3m + M)}$$

4) Per determinare il modulo della velocità della massa m subito dopo l'urto (V_0) si misura la velocità della massa m durante il suo moto sul piano con attrito (con μ_D incognito) in due punti: a distanza $l_1 = 1$ m dal punto dell'urto la velocità è $V_1 = 4$ m/s, mentre a distanza $l_2 = 2$ m la velocità è $V_2 = 1$ m/s. Si calcolino i valori numerici di V_0 e μ_D usando $g = 10$ m/s^2.

4) Per determinare il coefficiente di attrito dinamico μ_D possiamo immediatamente notare che applicando il teorema dell'energia cinetica nel tratto fra l_1 e l_2, si ha:

$$\frac{m}{2}V_1^2 - \frac{m}{2}V_2^2 = \mu_D mg(l_2 - l_1)$$

$$\Longrightarrow \mu_D = \left(\frac{V_1^2 - V_2^2}{2g(l_2 - l_1)}\right) = 0.75$$

Se ora applichiamo nuovamente lo stesso teorema al tratto fra il punto dell'urto e l_1 otteniamo:

$$\frac{m}{2}V_0^2 - \frac{m}{2}V_1^2 = \mu_D mgl_1$$

$$\Longrightarrow V_0 = \sqrt{V_1^2 + 2\mu_D g l_1} = 5.57 \text{ m/s}$$

Conservazione del momento angolare

- Il momento angolare di un corpo, o di un sistema di particelle, è conservato se la risultante dei momenti delle forze esterne è nulla:

$$\vec{\tau}_{totale} = \frac{d\vec{L}_o}{dt} \quad \Longrightarrow \vec{\tau}_{totale} = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = \overrightarrow{costante}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_f = \vec{L}_i$$

Questo rimane vero anche se la massa si ridistribuisce e il momento d'inerzia cambia durante il processo (sistemi di punti materiali)

- Se l'asse di rotazione rimane fisso, vale la relazione:

$$\vec{L}_f = I_f \vec{\omega}_f = \vec{L}_i = I_i \, \vec{\omega}_i$$

  - La relazione è vettoriale
  - Passando ai moduli:

$$I_f \, \omega_f = I_i \, \omega_i$$

Se $I_f > I_i$, allora $\omega_f < \omega_i$ e viceversa

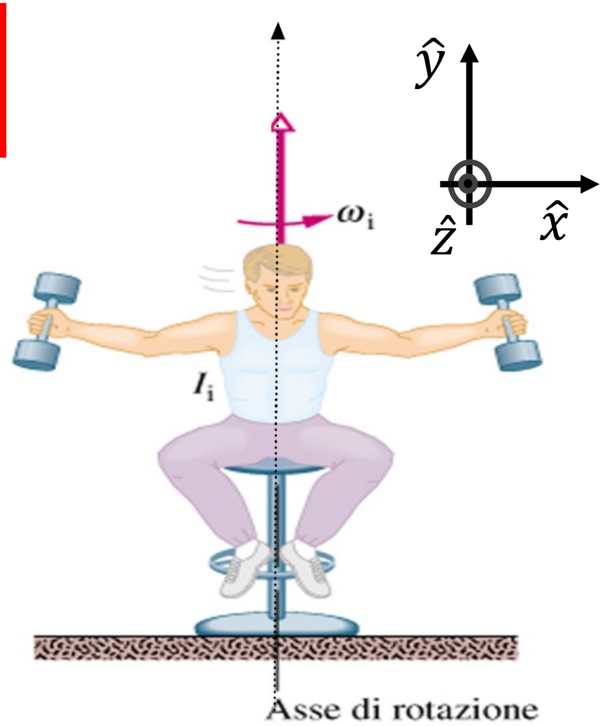
Esempio 1 sistema di punti materiali

- Un uomo, seduto su uno sgabello che può girare attorno ad un asse verticale privo di attrito, tiene nelle mani due pesi.
- Inizialmente l'uomo ha le braccia distese, e lo sgabello viene posto in rotazione con velocità angolare ω_i come schematizzato in fig.a.
- Momento angolare rispetto all'asse di rotazione passante per il CM
  - $\vec{L}_i = I_i \vec{\omega}_i = I_i\ \omega_i\ \hat{y}\ = L_i\ \hat{y}$
- Improvvisamente l'uomo stringe le braccia.
  - la distribuzione delle masse del sistema sgabello più uomo si avvicina all'asse di rotazione

  In tal modo il momento di inerzia del sistema diminuisce
- Poichè sul sistema uomo più sgabello la risultante dei momenti associati alle forze esterne (gravità e reazione vincolare del piano, attrito aria trascurabile) è nulla, **il momento angolare totale del sistema si conserva**

$$\vec{L}_i = L_i\ \hat{y} = I_i\ \omega_i\ \hat{y}\ = \vec{L}_f\ = L_f\ \hat{y} = I_f\ \omega_f\ \hat{y}$$

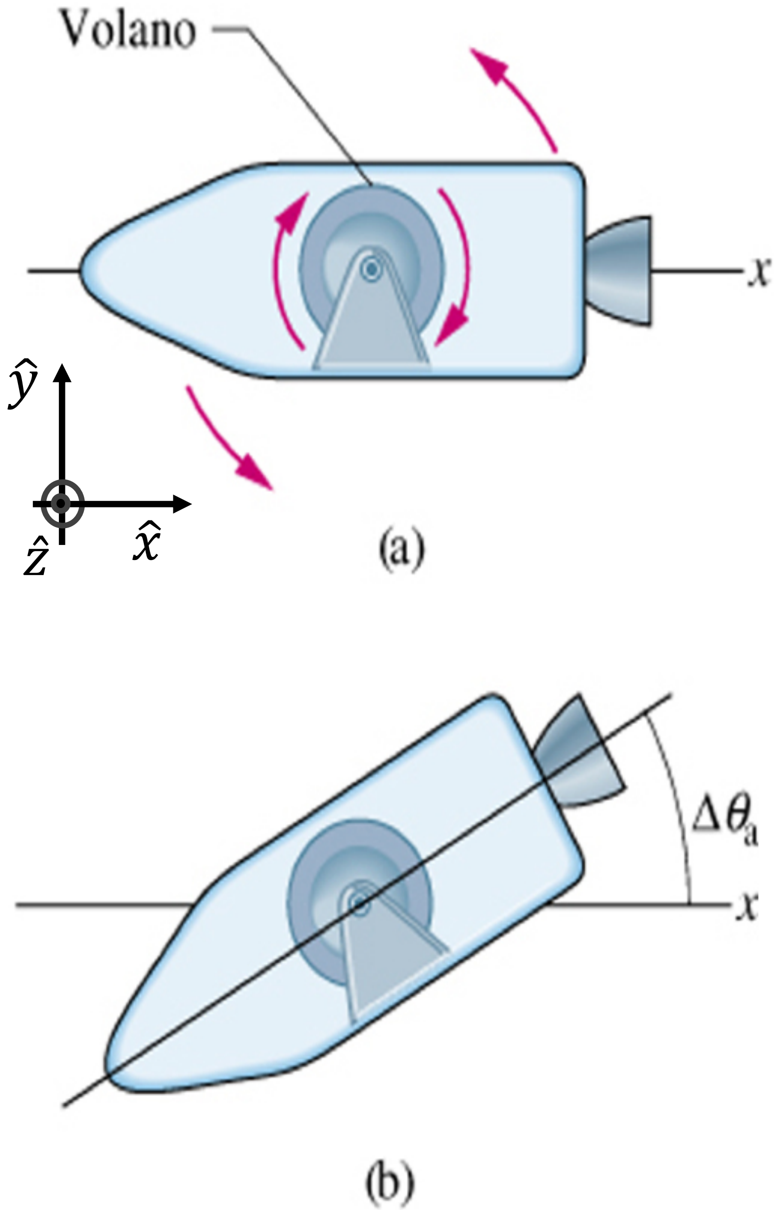
da $I_f < I_i \Rightarrow \omega_f > \omega_i$



(a)

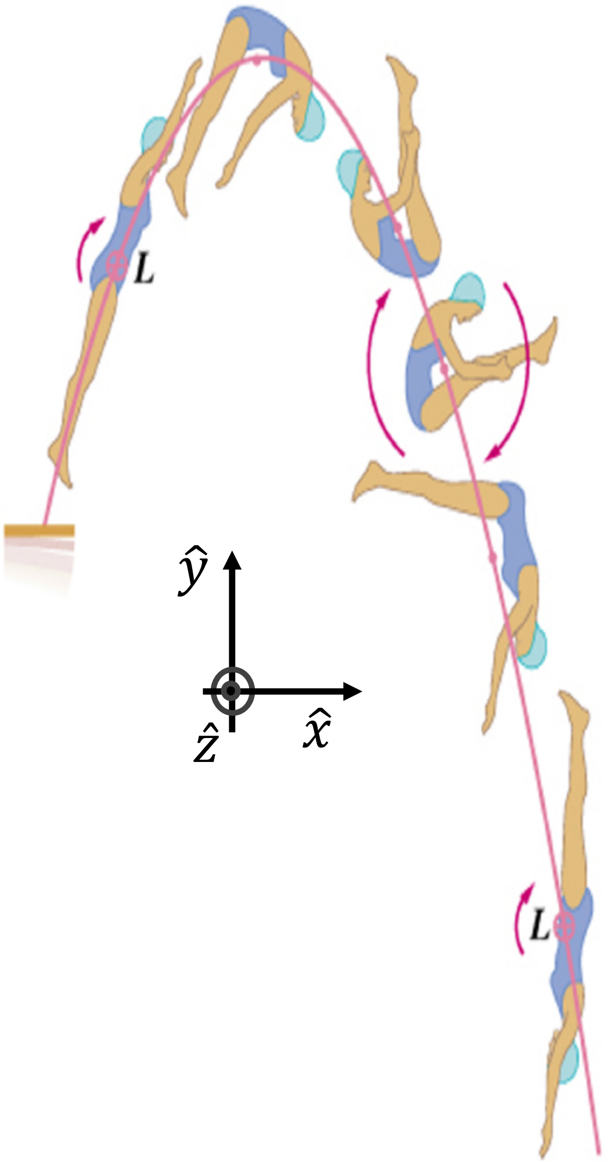
(b)

Come orientare un satellite



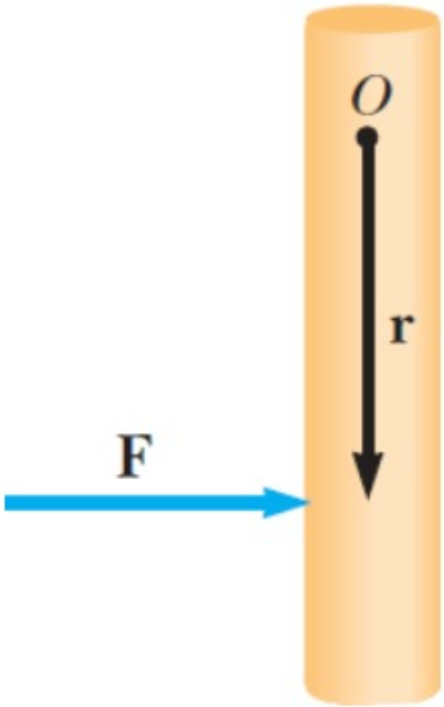
- L' orientazione di un satellite, o di una sonda spaziale, può essere modificata utilizzando dei volani come indicato in modo schematico in figura
- Sul sistema satellite più volano la risultante dei momenti delle forze esterne è nulla: polo nel CM del sistema
- Il momento angolare totale del sistema deve rimanere uguale al valore iniziale, nullo.
- Se si mette in rotazione il volano, il satellite ruoterà in senso opposto per conservare il momento angolare totale del sistema.
  - Se si arresta il volano anche la rotazione del satellite si arresta, ma nel frattempo la sua orientazione è cambiata

Esempio 2 sistema di punti materiali



- Una tuffatrice esegue un salto mortale
- Durante il tuffo il suo centro di massa segue una traiettoria parabolica
- La tuffatrice lascia il trampolino con un momento angolare assiale $L_Z\hat{z} = -|L_Z|\hat{z}$ diverso da zero rispetto ad un asse passante per il suo CM (polo nel CM)
- Durante il tuffo è nulla la risultante del momento delle forze esterne (gravità,Polo nel CM)
- Tirando a se le braccia e le gambe la tuffatrice diminuisce il suo momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione
  - provocando un aumento della sua velocità angolare per conservare il momento angolare
- Al termine del tuffo, la tuffatrice si distende aumentando il suo momento di inerzia
  - facendo diminuire al massimo la sua velocità angolare

Teorema dell'impulso angolare o del momento dell'impulso



- Possiamo scrivere una espressione simile a quella già ricavata per il teorema dell'impulso:

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} \quad dt' = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0)$$

utilizzando i momenti delle forze

- In questo caso abbiamo (**teorema dell'impulso angolare**) :

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{\tau} \quad dt' = \Delta\vec{L} = \vec{L}(t) - \vec{L}(t_0)$$

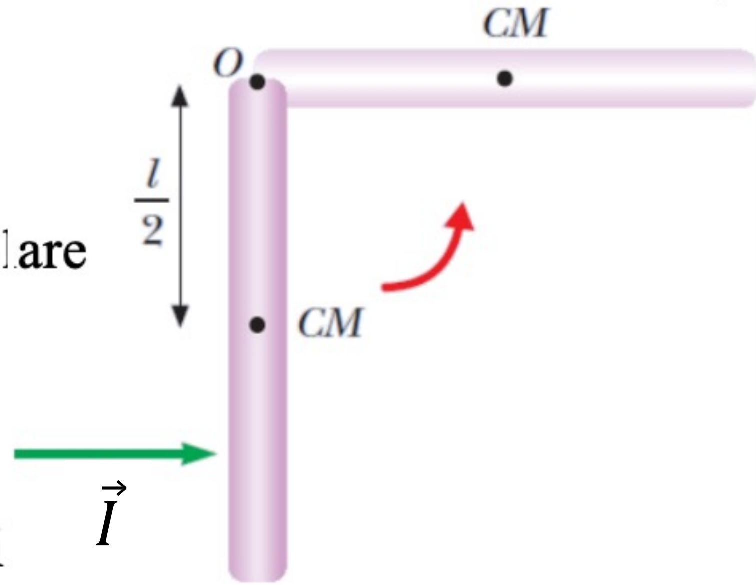
- Assumendo che una forza $\vec{F}$ venga applicata per un intervallo di tempo piccolo (forza impulsiva) a distanza r da un polo O con O appartenente a un corpo rigido

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{\tau} \quad dt' = \int_{t_0}^{t} \vec{r} \wedge \vec{F} \quad dt' \quad = \vec{r} \wedge \int_{t_0}^{t} \vec{F} \quad dt' = \vec{r} \wedge \vec{I} = \Delta\vec{L} \ = \vec{L}(t) - \vec{L}(t_0)$$

La grandezza $\vec{r} \wedge \vec{I}$ è il momento dell'impulso e questo teorema, **teorema del momento dell'impulso**, dimostra che un impulso porta non solo ad una variazione di quantità di moto ma anche di momento angolare.

Impulso angolare su un asta

Si consideri un pendolo composto costituito da un'asta di lunghezza l e massa m,libera di ruotare attorno a un asse orizzontale passante per un suo estremo O. Inizialmente l'asta è ferma in posizione verticale. Determinare l'impulso I da applicare ad una distanza $r \leq l$ da O in modo da far compiere all'asta una rotazione di 90° (e arrivare in orizzontale).



Il momento dell'impulso da applicare rispetto ad O è $\vec{r} \times \vec{I}$, quindi applicando il teorema dell'impulso angolare

$$\vec{r} \times \vec{\mathrm{I}} = \overrightarrow{\Delta L}$$

$$r\, I = I_O\, \omega_f - I_O \omega_i$$

Dove, il momento d'inerzia per un'asta rispetto all'estremo è $I_O = \frac{1}{3} m\, l^2$, inizialmente $\omega_i = 0$, quindi

$$r\, I = \frac{1}{3} m\, l^2 \omega \Rightarrow \omega = \frac{3\, r\, I}{m\, l^2}$$

Possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica rispetto al CM, che in seguito alla rotazione si è sollevato di $\frac{l}{2}$

$$m\, g\, \frac{l}{2} = \frac{1}{2} I_O\, \omega^2$$

Impulso angolare su un asta

$$m\,g\,\frac{l}{2}=\frac{1}{2}I_O\,\omega^2\ \Rightarrow m\,g\,l=I_O\,\omega^2\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{m\,g\,l}{I_O}}\Rightarrow$$

$$\frac{3\,r\,I}{m\,l^2}=\sqrt{\frac{m\,g\,l}{\frac{1}{3}m\,l^2}}$$

$$\frac{3\,r\,I}{m\,l^2}=\sqrt{\frac{3\,g}{l}}\ \Rightarrow$$

$$I=\frac{\sqrt{3g}\ m\,l^2}{3\,r\,\sqrt{l}}=\frac{m\,l}{r}\sqrt{\frac{g\,l}{3}}$$