Grandezze Fisiche, Unità di Misura, Analisi Dimensionale e Stime

Grandezze fisiche e misura

Grandezza Fisica: Qualsiasi ente suscettibile di una precisa definizione quantitativa, quindi di misurazione, che s'introduce per poter dare una descrizione quantitativa di fenomeni fisici e per poter tradurre in equazioni matematiche certi aspetti dei fenomeni o per poter pervenire a un modello matematico dei fenomeni. Esempi:

è una grandezza fisica la <u>temperatura</u>:

- è misurabile (con un termometro), quantificabile ed oggettiva

non è una grandezza fisica la <u>sensazione di caldo o freddo</u>

- non è misurabile, non è quantificabile, è soggettiva

La **misura** di una grandezza fisica si effettua con un dispositivo sperimentale che permette il confronto con una grandezza fisica di riferimento della stessa specie (detta unità di misura). Il risultato di questo confronto è un numero.

Valore di una grandezza

Il *valore* rappresenta l'espressione quantitativa di una grandezza particolare . Esso è dato generalmente sotto forma di una unità di misura moltiplicata per un numero, come nel seguente esempio:

Un corpo ha massa:

$$m = \boxed{3\ \text{kg}}$$

Unità di misura

Grandezza fisica

Valore

Sistema Internazionale

Il sistema di unità più comunemente usato è il Sistema Internazionale (SI). Esso è composto da sette grandezze fondamentali e dalle relative unità di base:

Quantità fondamentale	**Unità di base**
Lunghezza	metro (m)
Massa	chilogrammo (kg)
Tempo	secondo (s)
Corrente elettrica	ampere (A)
Temperatura	kelvin (K)
Quantità di sostanza	mole (mol)
Intensità luminosa	candela (cd)

Definizione di Secondo, Metro e Kilogrammo nel Sistema Internazionale

Diamo definizioni attuali delle tre unità fondamentali: il **secondo** (tempo), il **metro** (lunghezza).e il **kilogrammo** (massa), che sono basate tutte su costanti fondamentali della natura.

1 Il Secondo

Il **secondo** (s) è l'unità base per la misura del tempo. La definizione attuale è la seguente:

Il secondo è la durata di 9 192 631 770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio-133.

2 Il Metro

Il **metro** (m) è l'unità base per la lunghezza. La sua definizione si basa sulla velocità della luce nel vuoto, una costante universale.

Il metro è la lunghezza del percorso percorso dalla luce nel vuoto durante un intervallo di tempo pari a

$$\frac{1}{299\,792\,458}\,\mathrm{s}$$

.

3 Il Kilogrammo

Il **kilogrammo** (kg) è l'unità base per la massa. Fino al 2019, il kilogrammo era definito come la massa del Prototipo Internazionale del Kilogrammo (IPK), un cilindro in platino-iridio conservato a Sèvres (Francia). Tuttavia, per superare le problematiche di instabilità legate ad un artefatto materiale, il SI è stato ridefinito nel 2019. La nuova definizione fissa il valore numerico della **costante di Planck**:

Il kilogrammo è definito fissando il valore numerico della costante di Planck h a $6.626\,070\,15 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$,

Si ricorda che il joule è espresso in unità SI fondamentali tramite la relazione:

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}.$$

Pertanto, possiamo scrivere:

$$h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}.$$

Fissando esattamente h, e considerando che le definizioni di m e s sono basate rispettivamente sulla velocità della luce nel vuoto e sulla radiazione del cesio-133, la definizione del kilogrammo risulta implicitamente determinata dall'equazione sopra.

Grandezze derivate

Le grandezze fisiche derivate sono quelle quantità che si ottengono combinando le grandezze fisiche di base secondo specifiche relazioni matematiche. Esempi:

- **Velocità:** È definita come la lunghezza percorsa divisa per il tempo impiegato (m/s).
- **Accelerazione:** Deriva dalla variazione della velocità rispetto al tempo (m/s^2).
- **Forza:** è data dal prodotto della massa per l'accelerazione ($kg \cdot m/s^2$), e l'unità di misura è il Newton ($1\ N = 1\ kg \cdot m/s^2$).

ogni grandezza fisica è derivata da quelle fondamentali

Dimensioni

La **dimensione di una quantità fisica** esprime la sua dipendenza dalle grandezze fondamentali del Sistema Internazionale (SI) in termini di simboli, senza considerare le unità di misura specifiche.

La meccanica si basa sulle grandezze fondamentali di lunghezza, di massa e di tempo che hanno dimensioni:

$$\dim(\text{lunghezza}) \equiv \text{lunghezza} \equiv L,$$

$$\dim(\text{massa}) \equiv \text{massa} \equiv M,$$

$$\dim(\text{tempo}) \equiv \text{tempo} \equiv T.$$

Dimensioni delle grandezze derivate. Esempi:

La dimensione di una quantità derivata viene espressa come potenze delle dimensioni fondamentali. Ad esempio:

Grandezza Fisica	Formula	Dimensione
Velocità v	$v = \frac{\text{spazio}}{\text{tempo}}$	$[LT^{-1}]$
Accelerazione a	$a = \frac{\text{velocità}}{\text{tempo}}$	$[LT^{-2}]$
Forza F	$F = ma$	$[MLT^{-2}]$
Energia E	$E = Fd$	$[ML^2T^{-2}]$
Potenza P	$P = \frac{E}{t}$	$[ML^2T^{-3}]$
Pressione p	$p = \frac{F}{A}$	$[ML^{-1}T^{-2}]$

Grandezze adimensionali

Una grandezza è *adimensionale* se nell'espressione della dimensione si riducono a zero tutti gli esponenti delle dimensioni delle grandezze di base.

ESEMPI:

- coefficiente di dilatazione termica;
- coefficiente di attrito;
- umidità relativa;
- angolo solido;
- indice di rifrazione.

1 Analisi dimensionale

L'analisi dimensionale è uno strumento che permette di verificare la correttezza delle equazioni e di dedurre le relazioni tra le grandezze fisiche. L'idea di base è che le equazioni che descrivono fenomeni fisici devono essere *omogenee* dal punto di vista dimensionale, ovvero ogni termine in un'equazione deve avere le stesse dimensioni. Ricordiamo che, n meccanica, le dimensioni delle grandezze fisiche sono espresse in termini di:

- L: lunghezza,
- M: massa,
- T: tempo.

Utilizzando l'analisi dimensionale, è possibile stabilire come una grandezza fisica dipenda da altre senza dover necessariamente conoscere la legge fisica completa.

2 Esempio: Periodo del Pendolo Semplice

Consideriamo un pendolo semplice. Si ipotizza che il periodo T dipenda dalla lunghezza L del pendolo e dall'accelerazione di gravità g secondo una relazione del tipo:

$$T \propto L^a\, g^b.$$

Le dimensioni delle quantità coinvolte sono:

- $[T] = T$,
- $[L] = L$,
- $[g] = LT^{-2}$.

Sostituendo le dimensioni nell'espressione ipotizzata:

$$[T] = [L^a\, g^b] = L^a (L\, T^{-2})^b = L^{a+b}\, T^{-2b}.$$

Per l'omogeneità dimensionale occorre che:

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ -2b = 1. \end{cases}$$

Da cui si ricava:

$$b = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad a = \frac{1}{2}.$$

Pertanto, la relazione diventa:

$$T \propto \sqrt{\frac{L}{g}},$$

che è la formula conosciuta per il periodo di un pendolo semplice (valida per piccole oscillazioni).

Analisi dimensionale: altro esempio

- Scriviamo le dimensioni dei due lati dell'equazione:

$$x = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad [L] = \frac{[L]}{[T]^2} \cdot [T]^2$$

(le costanti numeriche non hanno dimensione)

- I fattori $[T]^2$ si cancellano, la dimensione è $[L]$ da entrambe i lati
- L'equazione è *dimensionalmente corretta*
- Equazioni dimensionalmente non corrette *sono sicuramente sbagliate*

Misurazione e Incertezza, Accuratezza, Precisione e Cifre Significative

1 Misurazione e Incertezza

La **misurazione** consiste nell'assegnare un valore numerico a una grandezza fisica mediante strumenti e procedure specifiche. Ogni misurazione presenta un certo grado di **incertezza**, che rappresenta l'intervallo entro cui si può ritenere che il valore reale della grandezza si trovi. Un risultato tipico viene espresso nella forma:

$$x \pm \Delta x,$$

dove x è il valore misurato e Δx è l'incertezza associata.

2 Accuratezza e Precisione

- **Accuratezza:** indica quanto un valore misurato si avvicina al valore reale o accettato. Una misurazione è accurata se il suo valore medio è vicino al valore vero.
- **Precisione:** riguarda la ripetibilità delle misurazioni. Un sistema è preciso se le misurazioni ripetute producono valori molto vicini tra loro, indipendentemente dal fatto che il valore medio sia vicino o meno al valore vero. È possibile, ad esempio, avere un sistema molto preciso ma non accurato, se tutte le misurazioni sono simili tra loro ma sistematicamente errate.

3 Cifre Significative e Relazione con l'Incertezza

Le **cifre significative** sono quelle cifre in un numero che forniscono informazioni affidabili circa il valore misurato. La relazione tra incertezza e cifre significative è fondamentale:

- L'incertezza determina quali cifre del risultato sono affidabili.
- Generalmente, l'ultima cifra riportata nel valore misurato è quella in cui l'incertezza diventa evidente; pertanto, essa rappresenta l'ultima cifra significativa.

Ad esempio, se si ottiene una misura di 12.34 ± 0.05 m, le cifre 1, 2, 3 e 4 sono significative, mentre le cifre successive non possono essere considerate affidabili data l'incertezza espressa.

4 Regole per determinare le cifre significative

- Tutti i numeri diversi da zero sono significativi.
  Ad esempio, 123.45 ha 5 cifre significative.
- Gli zeri tra cifre non nulle sono significativi.
  Ad esempio, 1002 ha 4 cifre significative.
- Gli zeri a sinistra del primo numero diverso da zero non sono significativi.
  Ad esempio, 0.0034 ha 2 cifre significative.
- Gli zeri a destra di un numero con la virgola decimale sono significativi.
  Ad esempio, 12.300 ha 5 cifre significative.

5 Regole sulle Cifre Significative nei Calcoli e Arrotondamenti

Per mantenere la correttezza della precisione in operazioni matematiche con numeri misurati, si adottano alcune regole:

5.1 Addizione e Sottrazione

Nel caso di addizioni e sottrazioni, il risultato deve essere arrotondato in base al numero di cifre decimali del termine con il minor numero di cifre decimali.

Esempio:
Siano

$$a = 3.456 \quad (3\,\text{cifre decimali}), \qquad b = 2.1 \quad (1\,\text{cifra decimale}).$$

La somma è:

$$a + b = 3.456 + 2.1 = 5.556.$$

Poiché il termine con meno cifre decimali è b (1 cifra decimale), il risultato deve essere arrotondato a 1 cifra decimale:

$$a + b \approx 5.6.$$

5.2 Moltiplicazione e Divisione

Per le moltiplicazioni e le divisioni, il risultato finale deve avere tante cifre significative quanti sono quelli del fattore con il minor numero di cifre significative.

Esempio:
Siano

$$c = 2.34 \quad (3\,\text{cifre significative}), \qquad d = 3.0 \quad (2\,\text{cifre significative}).$$

Il prodotto è:

$$c \times d = 2.34 \times 3.0 = 7.02.$$

Il fattore con il minor numero di cifre significative è d (2 cifre), pertanto il risultato deve essere arrotondato a 2 cifre significative:

$$c \times d \approx 7.0.$$

5.3 Arrotondamenti

Le regole per arrotondare un numero sono:

- Se la cifra successiva a quella da arrotondare è minore di 5, la cifra rimane invariata.
- Se la cifra successiva è 5 o maggiore, la cifra da arrotondare viene aumentata di 1.

6 Esempi Pratici

6.1 Esempio 1: Somma di Lunghezze

Supponiamo di misurare due lunghezze:

$$L_1 = 12.345\,\text{cm} \quad (5\,\text{cifre significative}), \qquad L_2 = 3.1\,\text{cm} \quad (2\,\text{cifre significative, 1 cifra decimale}).$$

La somma è:

$$L_{tot} = 12.345 + 3.1 = 15.445\,cm.$$

Considerando il termine con meno cifre decimali (L_2, che ha 1 cifra decimale), il risultato va arrotondato a 1 cifra decimale:

$$L_{tot} \approx 15.4\,\text{cm}.$$

6.2 Esempio 2: Calcolo della Densità

Supponiamo di avere una massa e un volume misurati come:

$$m = 123.4\,\text{g} \quad (4\,\text{cifre significative}), \qquad V = 56.78\,\text{cm}^3 \quad (4\,\text{cifre significative}).$$

La densità ρ è data da:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{123.4}{56.78} \approx 2.173\,g/cm^3.$$

Poiché entrambe le misurazioni hanno 4 cifre significative, il risultato va espresso con 4 cifre significative:

$$\rho \approx 2.173\,g/cm^3.$$

6.3 Esempio 3: Calcolo della Velocità Media

Consideriamo il calcolo della velocità media:

$$v = \frac{s}{t},$$

con:

$$s = 100.0\,\mathrm{m} \quad (4\,\text{cifre significative}), \qquad t = 9.58\,\mathrm{s} \quad (3\,\text{cifre significative}).$$

Il calcolo diretto dà:

$$v \approx \frac{100.0}{9.58} \approx 10.438\,m/s.$$

Il valore t ha 3 cifre significative, pertanto il risultato finale deve essere espresso con 3 cifre significative:

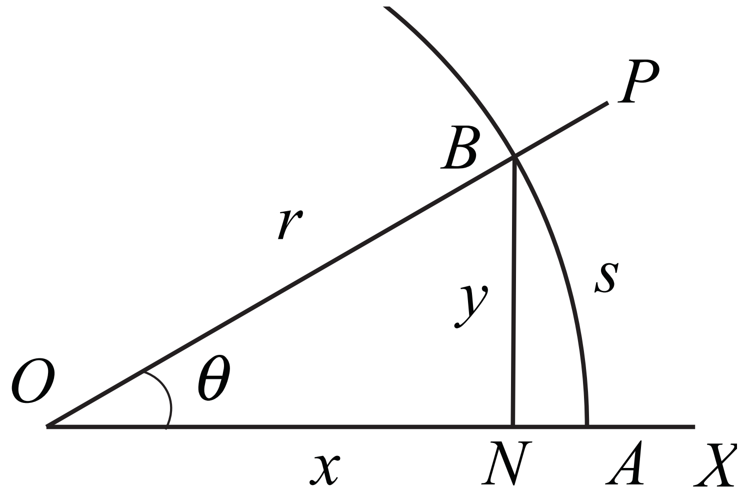
$$v \approx 10.4\,m/s.$$

Altri Sistemi di unità di misura

Dimensione	**Nome dell'unità**	**Definizione**	**Rapporto con le unità SI**
lunghezza	centimetro	1 cm	$= 10^{-2}$ m
massa	grammo	1 g	$= 10^{-3}$ kg
tempo	secondo	1 s	
accelerazione	galileo	1 Gal = 1 cm/s^2	$= 10^{-2}$ m/s^2
forza	dyne	1 dyn = 1 g·cm/s^2	$= 10^{-5}$ N
energia	erg	1 erg = 1 g·cm^2/s^2	$= 10^{-7}$ J
potenza	erg per secondo	1 erg/s = 1 g·cm^2/s^3	$= 10^{-7}$ W
pressione	baria	1 Ba = 1 dyn/cm^2 = 1 g/(cm·s^2)	$= 10^{-1}$ Pa
viscosità	poise	1 P = 1 g/(cm·s)	$= 10^{-1}$ Pa·s

Alcune unità di misura del sistema CGS e rapporto con le unità del sistema SI

Angoli



Le funzioni trigonometriche di base di un angolo θ in un triangolo rettangolo ONB sono:

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r}, \quad \cos(\theta) = \frac{x}{r}, \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}.$$

Radianti e sterandianti

Radianti

È importante familiarizzare con l'uso del *radianti* come unità di misura dell'angolo. Sia θ l'angolo formato dalle rette OX e OP. Disegnando un cerchio di raggio r centrato in O, e indicando con A e B i punti di intersezione di OP e OX con il cerchio (dove $OA = OB = r$), se s è la lunghezza dell'arco AB allora la misura in radianti di θ è data da:

$$\theta = \frac{s}{r}.$$

Quando θ tende a 360°, s tende a $2\pi r$ (la circonferenza del cerchio), da cui

$$360^\circ = 2\pi \,\mathrm{rad}.$$

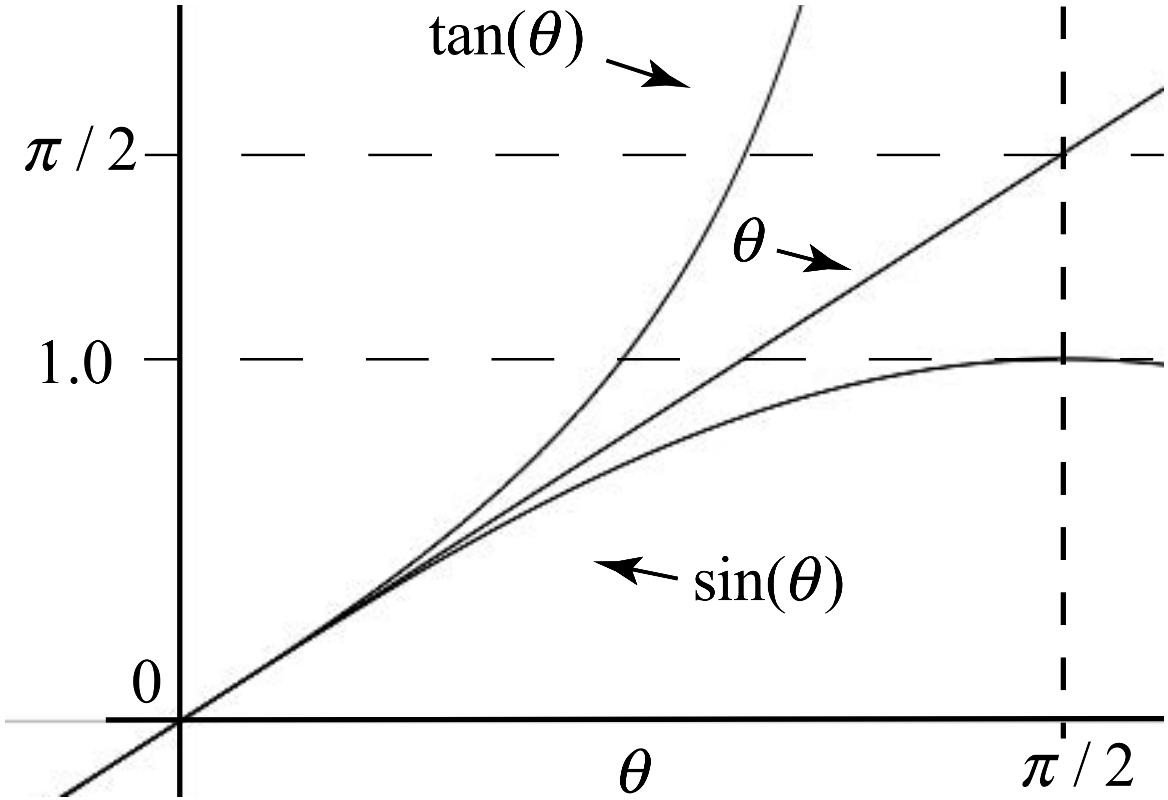
Steradianti

Lo steradiante [sr] è l'unità dell'angolo solido: esso è definito in modo tale che, avendo il vertice al centro di una sfera, intercetta sulla sua superficie un'area pari a quella di un quadrato avente lato lungo quanto il raggio della sfera. Il simbolo convenzionale è Ω. L'angolo solido totale di una sfera è:

$$\Omega_{\mathrm{sph}} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi.$$

Questo risultato è indipendente dal raggio della sfera.

Piccoli angoli



Con riferimento alla figura precedente.

Radianti a Confronto con le Funzioni Trigonometriche

Confrontiamo il comportamento di $\sin(\theta)$, $\tan(\theta)$ e θ per piccoli angoli. Tracciare $\sin(\theta)$, $\tan(\theta)$ e θ (in radianti) per $0 \leq \theta \leq \pi/2$ risulta molto istruttivo. Per piccoli θ i tre valori sono quasi uguali, e una condizione accettabile è $\theta \ll 1$ (in radianti). Ad esempio, dato che $360° = 2\pi\,\text{rad}$ e $57.3° \approx 1\,\text{rad}$, un angolo di $6°$ corrisponde approssimativamente a $0.1\,\text{rad}$.

Nella seguente tabella vengono messi a confronto θ (in radianti), $\sin(\theta)$, $\tan(\theta)$, $(\theta - \sin\theta)/\theta$ e $(\theta - \tan\theta)/\theta$ per $\theta = 0.1$, 0.2, 0.5, $1.0\,\text{rad}$.

θ [rad]	θ [deg]	$\sin(\theta)$	$\tan(\theta)$	$\frac{\theta - \sin\theta}{\theta}$	$\frac{\theta - \tan\theta}{\theta}$
0.1	5.73	0.09983	0.10033	0.00167	-0.00335
0.2	11.46	0.19867	0.20271	0.00665	-0.01355
0.5	28.65	0.47943	0.54630	0.04115	-0.09260
1.0	57.30	0.84147	1.55741	0.15853	-0.55741

Tabella 1: Approssimazione per Angoli Piccoli

Per $\theta = 0.2\,\text{rad}$, $(\theta - \sin\theta)/\theta$ e $(\theta - \tan\theta)/\theta$ sono inferiori a $\pm 1.4\%$. A condizione che θ non sia troppo grande, si può usare l'approssimazione

$$\sin(\theta) \approx \tan(\theta) \approx \theta,$$

nota come approssimazione per angoli piccoli.

Multipli e sottomultipli

Formazione dei multipli e dei sottomultipli delle unità SI.

Alcuni prefissi, anteposti ai simboli delle unità SI, permettono di esprimere i multipli e i sottomultipli secondo quanto riportato nella tabella qui a fianco.

	fattore di moltiplicazione	*prefisso*	*simbolo*
	1 000 000 000 000 000 000 = 10^{18}	exa	E
	1 000 000 000 000 000 = 10^{15}	peta	P
	1 000 000 000 000 = 10^{12}	tera	T
	1 000 000 000 = 10^{9}	giga	G
	1 000 000 = 10^{6}	mega	M
	1 000 = 10^{3}	kilo	k
	100 = 10^{2}	etto	h
multipli	10 = 10^{1}	deca	da
sottomultipli	0,1 = 10^{-1}	deci	d
	0,01 = 10^{-2}	centi	c
	0,001 = 10^{-3}	milli	m
	0,000 001 = 10^{-6}	micro	µ
	0,000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
	0,000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p
	0,000 000 000 000 001 = 10^{-15}	femto	f
	0,000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}	atto	a

Esempi:

1 mm = 1 millimetro = 10^{-3} m
1 GW = 1 gigawatt = 10^{9} W
1 µF = 1 microfarad = 10^{-6} F
1 ns = 1 nanosecondo = 10^{-9} s

1 Stime d'Ordine di Grandezza – Problemi di Fermi

L'approccio delle stime d'ordine di grandezza permette di ottenere, con un ragionamento semplice, una valutazione approssimativa di quantità che sarebbero difficili da misurare esattamente. Questi problemi, noti come problemi di Fermi (dal nome del fisico Enrico Fermi), si basano sul ragionamento logico e sull'uso di unità standard per stimare numeri o grandezze – come il numero di granelli di sabbia in un secchio o la massa dell'acqua sulla Terra – quando la precisione richiesta è entro un ordine di grandezza.

Esempio: Allineare le Monete

Supponiamo di voler disporre delle monete in fila, diametro contro diametro, fino a raggiungere una lunghezza di 1 km. La domanda è: quante monete sono necessarie? E, in che misura la stima è accurata?

Soluzione: In questo caso stiamo stimando una quantità adimensionale (il numero di monete). La relazione di base è:

$$\text{numero di monete} = \frac{\text{distanza totale}}{\text{diametro della moneta}}.$$

Stimiamo il diametro di una moneta circa pari a 2 cm. Pertanto:

$$\text{numero di monete} = \frac{1\,\text{km}}{2\,\text{cm}}.$$

Ricordando che $1\,\text{km} = 10^5\,\text{cm}$, si ha:

$$\text{numero di monete} = \frac{10^5\,\text{cm}}{2\,\text{cm}} = 50\,000 \quad \left(= 5 \times 10^4\right).$$

Se, ad esempio, il diametro reale fosse 1.9 cm, la stima risulterebbe accurata entro circa il 5%. Se invece si fosse stimato 1 cm, l'errore sarebbe stato di un fattore 2, comunque accettabile per questo tipo di problema.

Esempio: Stima della Massa dell'Acqua sulla Terra

Stimare la massa dell'acqua presente sulla Terra.

Soluzione: Consideriamo che la maggior parte dell'acqua si trovi negli oceani. La relazione fondamentale per la massa è:

$$\text{massa} = \rho \times \text{volume}.$$

La densità dell'acqua dolce è $\rho = 1.0\,\text{g/cm}^3$ (l'acqua di mare ha densità leggermente superiore, ma la differenza è trascurabile). Per stimare il volume, si può modellare l'oceano come un guscio sferico che ricopre la Terra, avente raggio R_E e uno spessore medio d.

Il volume approssimativo del guscio sferico è:

$$\text{volume} \approx 4\pi R_E^2\, d.$$

Considerando che gli oceani coprono circa il 75% della superficie terrestre, si ha:

$$\text{volume} \approx 0.75 \times \left(4\pi R_E^2\, d\right).$$

Stimiamo la profondità media $d \approx 1\,\text{km}$ e il raggio della Terra $R_E \approx 6 \times 10^3\,\text{km}$. Quindi, la massa degli oceani è:

$$\text{massa} \approx 1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \times \left[0.75 \times 4\pi \left(6 \times 10^3\,\text{km}\right)^2 \times (1\,\text{km})\right].$$

Convertendo le unità opportunamente e valutando l'espressione, il risultato risulta essere dell'ordine di 3×10^{20} kg.