INSIEME DEI NUM. DI MACCHINA: $F(\beta, m, L, U) = \{x \in \mathbb{R} : x = \text{sign}(x)\beta^e \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \beta^{-j}\}$

RAPPRES. NUM. IN VIRGOLA MOBILE: $x = \text{sign}(x)\beta^e \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \beta^{-j}$

CARDINALITÁ INSIEME NUM. DI MACCHINA: $2 \cdot (U - L + 1) \cdot (\beta^m - \beta^{m-1}) + 1$

NUM PIÚ GRANDE IN F(...): $\beta^U (1 - \beta^{-m})$

NUM PIÚ PICCOLO POSITIVO IN F(...): β^{L-1}

DISTANZA TRA DUE NUM. DI MACCHINA ADIACENTI: $\beta^{i+1-m} = \beta^{e-m}$

TRONCAMENTO: $TR(x) = \text{sign}(x)\beta^e \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \beta^{-j}$

MAX. ERR. ASS. TRONCAMENTO: $|x - TR(x)| \leq \beta^{e-m}$

ARROTONDAMENTO AL PIÚ VICINO: $\begin{cases} TR(x), & \alpha_{m+1} < \beta/2 \\ \text{sign}(x)\beta^e \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \beta^{-j} + \beta^{-m}\right), & \alpha_{m+1} \geq \beta/2 \end{cases}$

MAX. ERR. ASS. ARROT. AL PIÚ VICINO: $|x - RD(x)| \leq \min|x - z| \leq \frac{1}{2}\beta^{e-m}$, $z \in F(...)$

ERRORE RELATIVO: $\varepsilon_x = \frac{\text{ERR. ASS.} \; \delta_x}{|x|}$

PRECISIONE DI MACCHINA: $U = \frac{1}{2}\beta^{-m+1} \geq |\varepsilon_x|$

NUMERI SOTTONORMALI: $x = \text{sign}(x)\beta^L \sum_{j=2}^{m} \alpha_j \beta^{-j}$, MA NON VALE $|\varepsilon_x| \leq U$

ERRORE ASS. NEL CALCOLO DI $f(P_0)$: $\delta_f = f_a(P_1) - f(P_1) + f(P_1) - f(P_0)$

ERRORE REL. NEL CALCOLO DI $f(P_0)$: $\varepsilon_f = \frac{f_a(P_1) - f(P_0)}{f(P_0)} = \frac{\delta_f}{f(P_0)}$

ERRORE ASS. INERENTE: $\delta_d = \sum_{i=1}^{n} |A_{x_i}| \cdot \delta_{x_i}$ dove $|A_{x_i}| = \sup_D \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|$

ERRORE REL. INERENTE: $\varepsilon_d = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{x_i} \cdot \varepsilon_{x_i}$ dove $\gamma_{x_i} = \frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$

MAT. CONVERGENTE: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é converg. se $\lim_{k \to +\infty} A^k = 0 \iff \rho(A) < 1$

RAGGIO SPETTRALE: $\rho(A) := \max_{j=1,\dots,n} |\lambda_j| \in \mathbb{R}_0^+$

PROPRIETÁ AUTOVALORI:

- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, (λ, v) autocoppia per A, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow (\lambda^k, v)$ autocoppia per A^k
- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\det(A) \neq 0$, (λ, v) autocoppia per $A \Rightarrow (\lambda^{-1}, v)$ autocoppia per A^{-1}
- A^{-k}, $k \in \mathbb{N}$ ha autocoppie (λ^{-k}, v)
- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $q \in \mathbb{C}$, (λ, v) autocoppia per $A \Rightarrow (\lambda + q, v)$ autocoppia per $A + q \cdot I$

QUOZIENTE DI RAYLEIGH: $r(x) = \frac{x^* A x}{x^* x}$, $r: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

NORMA p: $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$

NORMA ∞: $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$

NORME EQUIVALENTI: se $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \|x\|_p \leq \|x\|_q \leq \beta \|x\|_p$

NORMA MAT. INDOTTA: se $\|A\|_M = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \neq \{0\}} \dfrac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V} = \sup_{x \in \mathbb{C}^n : \|x\|_V = 1} \|Ax\|_V$

NORME COMPATIBILI: se $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$ $\|Ax\|_V \leq \|A\|_M \cdot \|x\|_V$

NORMA DI FROBENIUS: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2}$

TH DI HIRSH: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\|\cdot\|$ norma mat. $\Rightarrow \rho(A) \leq \|A\|$

PROPRIETÁ NORME:

- $\|A\| < 1$ per una qualche norma $\Rightarrow$ A é convergente
- $|\lambda| = \|A\|$ " " " " $\Rightarrow |\lambda| = \rho(A)$
- $A = A^* \Rightarrow \|A\|_2 = \rho(A)$

RISOLUZIONE SISTEMA LIN. TRAMITE LU: $Ax = b \Leftrightarrow L\overbrace{Ux}^{y} = b \Rightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

NUMERO DI CONDIZIONAMENTO: $\mu(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1$, SE $A = A^*$ $\mu(A)$ É AUTOVAL. DI MODULO MAX FRATTO AUTOVAL. DI MODULO MIN.

JACOBI: $(H_J)_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$,

JACOBI converge se vale una tra le seg. condizioni:
(IDEM GAUSS-SEIDEL)

- $\rho(H_J) < 1$
- A a predom. diag. forte
- A a predom. diag. debole e irriducibile

GAUSS-SEIDEL: $H_{GS} = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ \ast & & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & & -\ast \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$

se A é tridiagonale JACOBI e GAUSS-SEIDEL convergono o divergono insieme

$\rho(H_{GS}) = \rho(H_J)^2$

IN GENERALE C'É CONVERG. DI ORDINE $p \geq 2 \Leftrightarrow$ $0 = \phi'(\alpha) = \phi''(\alpha) = \dots = \phi^{(p-1)}(\alpha)$, $\phi^{(p)}(\alpha) \neq 0$

CONVERGENZE PER ITERAZIONI DI PUNTO FISSO:

- $|\phi'(\alpha)| < 1 \Rightarrow$ converg. locale almeno lineare
- $\phi'(\alpha) = 0 \Rightarrow$ converg. superlineare
- $\phi''(\alpha)$
  - $\neq 0 \Rightarrow$ converg. quadratica $(p = 2)$
  - $= 0 \Rightarrow$ converg. almeno cubica $(p > 2)$

- $0 \le \phi'(x) < 1 \Rightarrow$ converg. locale monotona
- $-1 \le \phi'(x) < 0 \Rightarrow$ converg. locale alternata
- $|\phi'(x)| < 1$ e $\phi'(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ converg. lineare

(*) METODO DI NEWTON: $\phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_0 \text{ DATO} \end{cases}$

LEMMA MOLTEPLICITÁ:
α radice di ordine $r \Leftrightarrow 0 = f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots f^{(r-1)}(\alpha)$, $f^{(r)}(\alpha) \neq 0$

EQ. NON LINEARI IN $\mathbb{R}^m$: $\rho(J\phi(x)) < 1 \Rightarrow \begin{cases} x^{(n)} = \phi(x^{(n-1)}) \\ x^{(0)} \end{cases}$ converge almeno linearmente

$(J\phi(x))_{ij} = \dfrac{\partial \phi_i(x)}{\partial x_j}$

NEWTON-RAPHSON: $\begin{cases} x^{(n+1)} = x^{(n)} - Jf(x^{(n)})^{-1} f(x^{(n)}) \\ x^{(0)} \end{cases}$

CONVERGENZA NEWTON-RAPHSON:
- $\det(Jf(\alpha)) = 0 \Rightarrow$ il metodo converge al piú linearmente
- $\det(Jf(\alpha)) \neq 0 \Rightarrow$ " " " almeno quadraticamente

METODO DI NEWTON SEMPLIFICATO: $\begin{cases} x^{(n+1)} = x^{(n)} - Jf(x^{(0)})^{-1} f(x^{(n)}) \\ x^{(0)} \end{cases}$

METODO DI JACOBI-NEWTON: $\begin{cases} x^{(n+1)} = x^{(n)} - D(x^{(n)})^{-1} f(x^{(n)}) \\ x^{(0)} \end{cases}$

dove D é la diag. di $J(f(x^{(n)}))$: $D(x^{(n)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^{(n)}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x^{(n)}) \end{bmatrix}$

MAT. DI HOUSEHOLDER: $H(U) = I - 2\dfrac{UU^H}{\|U\|_2^2}$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE (O PARABOLICA): $\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_k x_0^k = y_0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_0 + a_1 x_k + \dots + a_k x_k^k = y_k \end{cases}$

$P_k(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$

INTERPOLAZIONE DI LAGRANGE: $\ell_j(x) = \prod_{i \neq j} \left(\dfrac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)$

$P_k(x) = \sum_{j=0}^{k} y_j \ell_j(x)$

INTERPOLAZIONE DI NEWTON: $n_j(x) = \prod_{i=0}^{j} (x - x_i)$

$P_k(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j n_j$, c_j si trovano tramite diff. divise

CONDIZIONI PER POLINOMIO DI INTERP. DI HERMITE:

$H_{2k+1} : \begin{cases} H(x_j) = f(x_j) \\ H'(x_j) = f'(x_j) \\ \forall j = 0, \dots, k \end{cases}$

(*) α radice semplice di $f \Rightarrow$ Newton converge localm. in modo superlin.

$f''(\alpha) = 0 \Rightarrow p \geq 2$

$f''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow p = 2$

MINIMI QUADRATI: $A^TAc = A^Ty$ con $A = \begin{bmatrix} e_0(x_0) & \cdots & e_m(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ e_0(x_k) & \cdots & e_m(x_m) \end{bmatrix}$

Se si approssima con una retta:

$\phi(x) = c_0 + c_1 x$; $e_0(x) = 1$; $e_1(x) = x$

Se si approssima con una parabola:

$\phi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$; $e_0(x) = 1$; $e_1(x)$; $e_2(x^2)$

Per vedere quando la sol. é unica bisogna vedere quando A ha rk max. A ha rk max se esiste almeno una sottomat rkmax × rkmax con det ≠ 0.

La qualitá dell' approssimazione si valuta tramite $\sum_{i=0}^{k} (\phi(x_i) - y_i)^2$

FORMULE DI QUADRATURA:

$J_n(f) := \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$

$E_n(f) := \int_a^b f(x) p(x) dx - J_n(f)$

J_n ha precisione m se: $E_n(1) = E_n(x) = \ldots = E_n(x^m) = 0$, $E_n(x^{m+1}) \neq 0$

FORMULA DEI TRAPEZI:

$J_1(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$, PREC = 1, $E_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12L^2} \cdot f''(\varepsilon)$ $\varepsilon \in (a,b)$

FORMULA DI SIMPSON:

$J_2(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$, PREC = 3, $E_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880L^4} f^{(4)}(\varepsilon)$

Per stimare intervalli di trapezi: $M_2 = \sup_{\varepsilon \in [a,b]} |f''(\varepsilon)|$, $|E| \leq E_1 \cdot M_2 \leq TOL$

COSTI

PROD. SCALARE TRA DUE VETT. $\in \mathbb{C}^n$: $O(n)$

SOMMA TRA DUE VETT.: $O(n)$

PROD. MAT. TRA $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ E $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$: $O(m\cdot n\cdot p)$

PROD. MAT-VETT.: $O(m\cdot n)$

CALCOLO det CON GAUSS: $O(n^3)$

CALCOLO det CON LAPLACE: $O(n!)$

SISTEMA LIN. $n\times n$: $O(n^3)$

SISTEMA LIN. $n\times n$ CON CRAMER: $O(n^4)$

SISTEMA TRAMITE GAUSS: $O(n^3)$

SISTEMA TRAMITE GAUSS-JORDAN: $O(n^3)$ ma > di GAUSS

PRODOTTO MAT-VETT. SE MAT. É SPARSA: $O(n)$

SISTEMI LIN. NEWTON: $O(m^3)$ $m = \#$ incognite

SISTEMI LIN. NEWTON-SEMPLIFICATO: $O(m^2)$

SISTEMI LIN. JACOBI-NEWTON: $O(m)$

FATTORIZZAZIONE LU: $O\left(\frac{2}{3}n^3\right)$

FATTORIZZAZIONE QR: $O\left(4/3\, n^3\right)$