Soluzioni prova scritta

Ingegneria Informatica 04/06/2025

Esercizio 1

Il primo quesito consiste in 2 **domande a risposta aperta** da 1 punto ciascuna. Per i quesiti 2, 3 e 4 ci si deve esprimere sulla **correttezza o falsità di 6 affermazioni**. Si ottengono 0, 1 e 2 punti in base al numero di risposte corrette, errori o risposte in bianco, secondo lo schema:

6 corrette → 2 punti
5 corrette + 1 errore → 1 punto
5 corrette + 1 bianca → 1 punto
4 corrette + 2 bianche → 1 punto
Tutti gli altri casi → 0 punti

1. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $I \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ la matrice identità e $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ una matrice con autovalori

$$\lambda_1 = -1 + \mathbf{i}, \qquad \lambda_2 = -1 + \frac{1}{2}\mathbf{i}, \qquad \lambda_3 = 3.$$

La **traccia** della matrice $A^2 + I$ è $\boxed{\dfrac{51}{4} - 3\mathbf{i}}$

Il **raggio spettrale** della matrice $(I + A)^{-1}$ è $\boxed{2}$

2. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Siano $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{C}^n$, $y \in \mathbb{C}^m$, **con** $m > n$, allora:

V F Il calcolo di Ax in floating point è affetto da errore algoritmico.

V **F** Il calcolo di Ax in floating point è affetto da errore analitico.

V **F** Calcolare Ax costa $\mathcal{O}(n^2)$.

V F Calcolare $y^H Ax$ (nel modo più efficiente possibile) costa $\mathcal{O}(mn)$.

V **F** Calcolare Axy^H (nel modo più efficiente possibile) costa $\mathcal{O}(mn)$.

V F Calcolare $xy^H A$ (nel modo più efficiente possibile) costa $\mathcal{O}(mn)$.

- N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire **chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi 2, 3 e 4**.

3. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

V **F** A è riducibile.

V F Il grafo di A è fortemente connesso.

V F A è a predominanza diagonale debole.

V **F** A è a predominanza diagonale forte.

V F Per ogni vettore $b \in \mathbb{C}^4$, il metodo di Gauss Seidel sul sistema $Ax = b$ è convergente.

V F Per ogni vettore $b \in \mathbb{C}^4$, il metodo di Jacobi sul sistema $Ax = b$ è convergente.

4. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si consideri una generica formula di quadratura del tipo

$$a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) \approx \int_a^b f(x)\rho(x)dx,$$

e indichiamo con $m \in \mathbb{N}$ il suo grado di precisione.

V F Se $m = 2$ allora la formula di quadratura è interpolatoria.

V F Se $m = 3$ allora la formula di quadratura è interpolatoria.

V **F** Se i pesi a_j sono dati, trovare i nodi x_j per cui m è massimo richiede di risolvere un sistema lineare.

V **F** Se i nodi x_j sono dati, trovare i pesi a_j per cui m è massimo richiede di risolvere un sistema non lineare.

V F Se $m \geq 1$ e $\rho(x) \neq 1$ allora $\int_a^b x\rho(x)dx = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$.

V **F** Se $m = 2$ e $\rho(x) = 1$ allora $\int_a^b x^{\frac{3}{2}}dx = a_0x_0^{\frac{3}{2}} + a_1x_1^{\frac{3}{2}} + a_2x_2^{\frac{3}{2}}$.

Esercizio 2

Dati $k+1$ punti di interpolazione $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$, con $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, il polinomio interpolante nella base Lagrange si scrive come

$$L_k(x) = \sum_{j=0}^{k} y_j \cdot \ell_j(x),$$

dove

$$\ell_j(x) = \prod_{i=0,\ i\neq j}^{k} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

(i) $\boxed{\text{5 Punti}}$ Si implementi, **utilizzando al massimo un ciclo for o while**, una funzione Matlab `valuta_lj` che prende in ingresso

- il vettore x di lunghezza $k+1$ contenente i nodi dell'interpolazione,
- un intero $j \in \{0, \ldots, k\}$,
- un vettore v di lunghezza arbitraria,

e restituisce un vettore w, di lunghezza uguale a quella di v, contenente le valutazioni del polinomio $\ell_j(x)$, sui punti contenuti in v.

(ii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Supponendo di avere a disposizione la funzione `valuta_lj`, si implementi una funzione `valuta_lagrange` che prende in ingresso

- il vettore x di lunghezza $k+1$ contenente i nodi dell'interpolazione,
- una function handle f che rapresenta la valutazione di una funzione da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
- un vettore v di lunghezza arbitraria,

e restituisce un vettore w, di lunghezza uguale a quella di v, contenente le valutazioni del polinomio interpolante $L_k(x)$ rispetto ai nodi $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_k, f(x_k))$, nei punti contenuti in v.

(i)
```
function w = valuta_lj(x, j, v)
    n = length(v);
    w = zeros(n, 1);
```

```
        z = x([1:j, j+2:n]);
        for i = 1:n
            w(i) = prod((v(i) - z) ./(x(j+1) - z));
        end
    end
```

(ii)
```
    function w = valuta_lagrange(x, f, v)
        n = length(x);
        w = zeros(size(v));
        for j = 1:n
            w = w + f(x(j)) * valuta_lj(x, j-1, v);
        end
    end
```

Esercizio 3

Sia data la tabella di valori

x	0	$\frac{\pi}{4}$	π
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.8

e si consideri il problema di determinare la funzione di miglior approssimazione di $f(x)$, nel senso dei minimi quadrati, ottenuta come combinazione lineare delle funzioni modello

$$\varphi_0(x) = \sin(x), \qquad \varphi_1(x) = \cos\left(x + \alpha\frac{\pi}{2}\right),$$

al variare del parametro $\alpha \in [0, 3]$.

(i) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si determini per quali valori di α la soluzione esiste ed è unica e per quali valori di α la soluzione esiste ma non è unica.

(ii) $\boxed{\text{6 Punti}}$ Per i valori di α per cui **la soluzione esiste ma non è unica**, si determini la soluzione di minima norma, ovvero la funzione della forma $c_0 \sin(x) + c_1 \cos(x + \alpha\frac{\pi}{2})$ che risolve il problema ai minimi quadrati e per cui il vettore $[c_0, c_1]$ ha la norma 2 minima.

Si ricorda che:
$\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{4} + \pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4} + \pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(i) La soluzione esiste ed è unica quando $\alpha \neq 1, 3$ ed esiste ma non è unica quando $\alpha \in \{1, 3\}$.

(ii) Per $\alpha = 3$, la soluzione di minima norma è

$$\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos\left(x + \alpha\frac{\pi}{2}\right),$$

per $\alpha = 1$ la soluzione di minima norma è

$$\frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos\left(x + \alpha\frac{\pi}{2}\right).$$

Esercizio 4

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} x - \frac{x^2+y^2}{4} \\ y - \sin(x) \end{bmatrix}$$

e avente come zeri

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix},$$

con $\beta_x \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$ e $\beta_y \in [-1, 0]$.

(i) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Per ognuno degli zeri di f si dica se il metodo di Newton-Raphson è localmente convergente.

(ii) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Per il punto α si dica se il metodo di Jacobi-Newton (Jacobi nonlineare) è localmente convergente.

(i) Newton-Raphson è localmente convergente per entrambe le radici.

(ii) Il jacobiano di $f(x,y)$ è dato da

$$Jf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{2-x}{2} & -\frac{y}{2} \\ -\cos(x) & 1 \end{bmatrix},$$

di conseguenza l'iterazione di punto fisso di Jacobi-Newton è $\begin{bmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{bmatrix} = \Phi(x^{(k)}, y^{(k)})$, dove

$$\Phi(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{2-x} & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{x^2+y^2}{4} \\ y - \sin(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \frac{2x}{2-x}\left(x - \frac{x^2+y^2}{4}\right) \\ \sin(x) \end{bmatrix}.$$

Calcolando il jacobiano di $\Phi(x,y)$ e valutandolo in $\alpha = (0,0)$ si ottiene

$$J\Phi(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

che ha raggio spettrale 0 e quindi Jacobi-Newton risulta localmente convergente ad α.