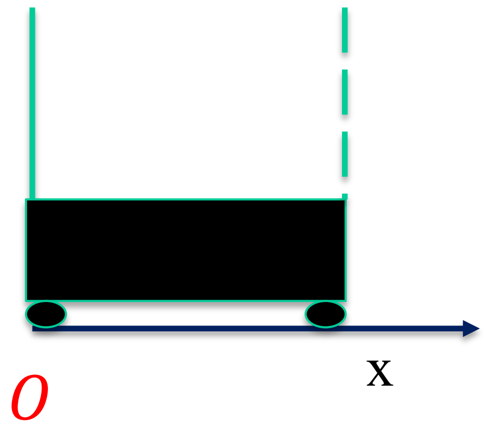
Un uomo di massa m si trova all'estremo sinistro di un carrello di massa M e lunghezza l, in quiete, libero di muoversi su un binario orizzontale. Trascurando l'attrito dinamico e viscoso determinare di quanto si sposta il carrello se l'uomo si reca all'estremo opposto.

Nota: il carrello si sposta quando l'uomo è arrivato nell'estremo opposto.



- Fissiamo un asse x solidale col binario, con origine in O, dove si trova l'uomo
  - Prima e dopo lo spostamento dell'uomo, non ci sono forze lungo x

  P_{CMx}=cost = P^{i}_{CMx}=0 ⇒ x_C=cost

- per la coordinata x di C si avrà a t =0:

$$x_C = \left(\frac{m\times 0+Ml/2}{m+M}\right) = \frac{Ml}{2(m+M)}$$

La coordinata del cm è costante, e quando l'uomo arriva alla fine del carrello esso si è spostato di d:

$$x_C = \left(\frac{mx'_m + Mx'_M}{m+M}\right) = \left(\frac{m(d+l) + M(d+\frac{l}{2})}{m+M}\right)$$

$$\left(\frac{m(d+l)+M(d+\frac{l}{2})}{m+M}\right) = \frac{Ml}{2(m+M)} \qquad d = \frac{-ml}{(m+M)} \qquad d+l = \frac{Ml}{(m+M)}$$

Ricordiamo: Impulso di una forza per un punto materiale

- **impulso di una forza di una forza** $\vec{F}$ fra due istanti di tempo t_0 e t

$$\vec{I}_{t_0 \to t} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} dt'$$

- **Teorema dell'impulso**
  la variazione della quantità di moto di un punto materiale è pari all'impulso totale delle forze esterne:

$$\vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F} \quad dt'$$

Ricordiamo: Impulso di una forza per un sistema di p.m

- Teorema dell'impulso

$$\vec{P}_{CM}(t) - \vec{P}_{CM}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{R}^{(est)} dt' \;= \vec{P}_{TOT}(t) - \vec{P}_{TOT}(t_0)$$

Impulso di una forza

- Forze che vengono esercitate per un tempo limitato sono chiamate forze impulsive
  - Spesso l'intensità di una forza impulsiva ($\vec{F}_{imp}$) è così grande che il suo effetto si apprezza anche se è di breve durata
  - Spesso ogni altra forza, durante quegli istanti, è trascurabile rispetto all'intensità della forza impulsiva

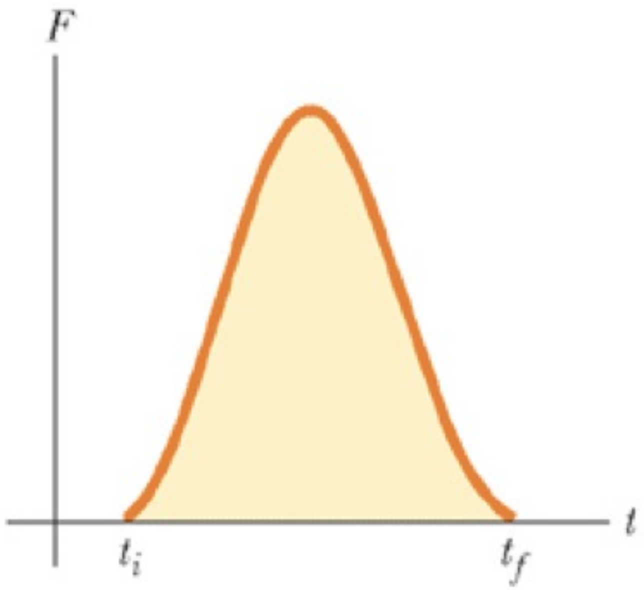
    Es. Martello su chiodo, racchetta su pallina, urti,…
- Quando questo avviene, per il corpo (ad es. il chiodo) che subisce la forza impulsiva, questa diviene la forza dominante per la durata del processo (in genere molto breve)

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathrm{F}}_i^{(est)} \approx \vec{F}_{imp}$$

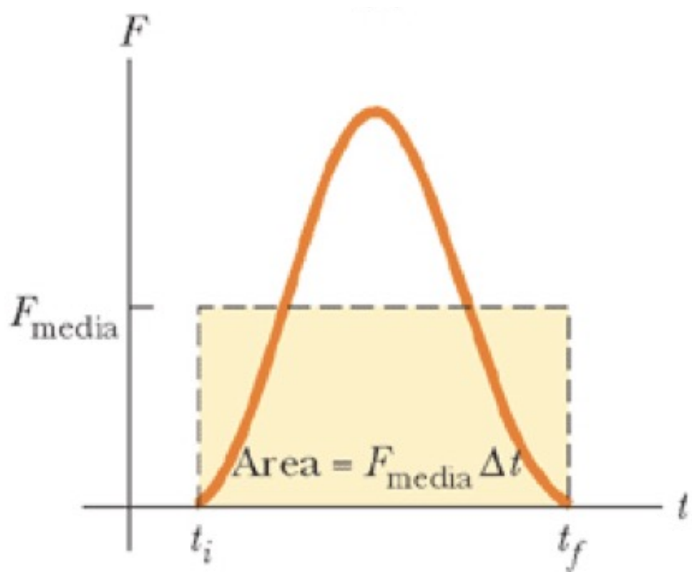
- Se consideriamo un intervallo finito, sia pur breve, **per il singolo corpo soggetto alla forza impulsiva** vale per il teorema dell'impulso:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{imp} dt$$

- A volte si conosce la variazione della quantità di moto di un corpo su cui ha agito la forza impulsiva per un determinato intervallo di tempo, ma non si conosce la forza impulsiva



(a)

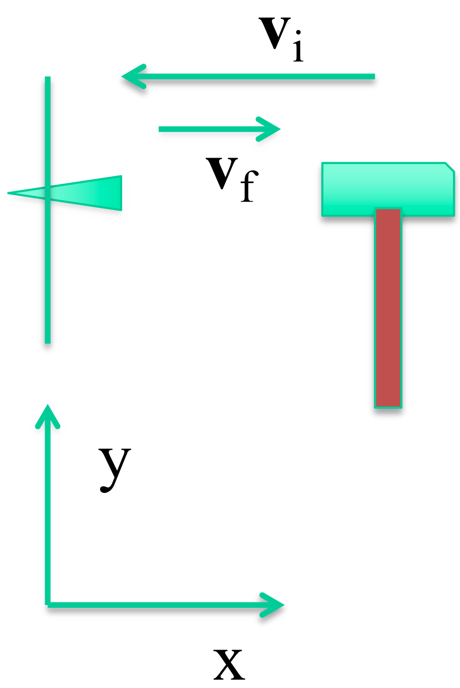


- Si può determinare la forza media impulsiva $<\vec{F}_{imp}>$ che fornirebbe il medesimo impulso se agisse per lo stesso tempo Δt della forza impulsiva

$$<\vec{F}_{imp}> = \frac{\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{imp}\,dt}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Es. di Forza impulsiva

- Martello su chiodo, massa inerziale *m*



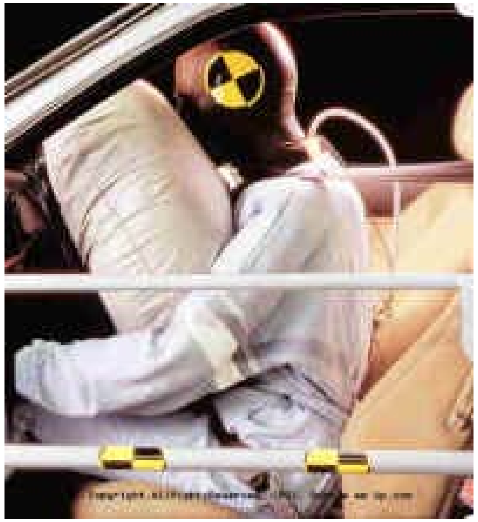
$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \; m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = \mathrm{m}(v_{fx} - v_{ix})\hat{\imath}$$

Impulso della forza media sul chiodo

$$\frac{\mathrm{m}(v_{fx} - v_{ix})\hat{\imath}}{\Delta t} = <\vec{F}>$$

- Se la massa inerziale è *0.5 kg,* se siamo dei bravi carpentieri v_i=5 m/s v_f= 1 m/s per Δt=0.05 s
  - l'intensità della forza media vale F=40 N circa 10 volte il peso del martello stesso

applicazione: air bag



$$\Delta p = \overline{F}\Delta t$$

variazione quantità di moto dell'auto

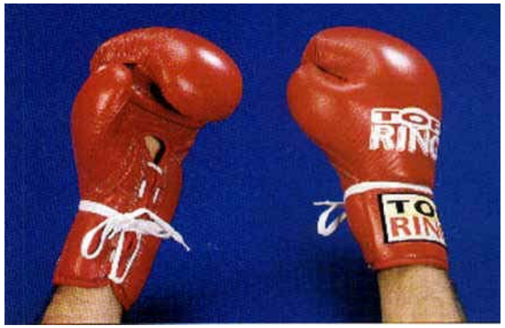
air-bag:

induce variazione quantità di moto in **intervallo** di **tempo più lungo**

$\Rightarrow$ riduce picco di intensità della forza

$\Rightarrow$ riduce traumi

applicazione: guantoni da pugile



$$\Delta p = \overline{F}\Delta t$$

i guantoni aumentano tempo durante il quale la forza è applicata alla testa

$\Rightarrow$ riduce picco di intensità della forza

$\Rightarrow$ riduco accelerazione del cranio

$\Rightarrow$ riduco traumi

N.B. nel XIX secolo di combatteva a **pugni nudi** : maggiori traumi

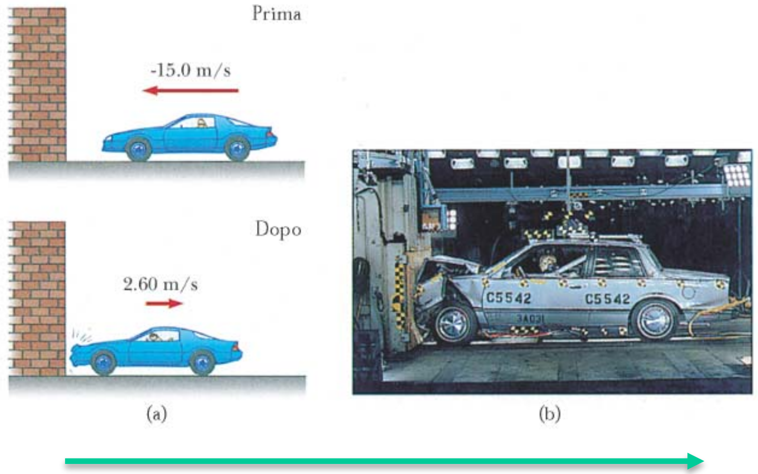
esempio: forza su auto durante un urto

In un test d'urto, un'auto di massa **m=1500 kg** urta contro un muro.

velocità iniziale è $\mathbf{v_i} = -15.0\ \mathbf{i}$ m/s
velocità finale è $\mathbf{v_f} = 2.60\ \mathbf{i}$ m/s.

durata urto $\Delta t = 0.150$ s

determinare **impulso** dovuto all'urto e **forza media** esercitata sull'auto



x

$$\vec{p}_i = m\vec{v}_i = (1500\,kg)(-15.0\,m/s)\vec{i} = -2.25\ 10^4\ \vec{i}\ kg\,m/s$$

$$\vec{p}_f = m\vec{v}_f = (1500\,kg)(2.6\,m/s)\vec{i} = 0.39\,10^4\ \vec{i}\ kg\,m/s$$

$$I = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = (0.39\,10^4\ \vec{i}\ kg\,m/s) - (-2.25\ 10^4\ \vec{i}\ kg\,m/s)$$

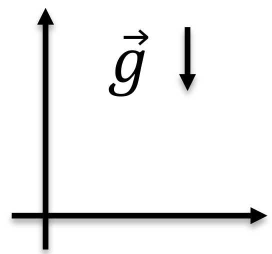
$$= 2.64\,10^4\ \vec{i}\ kg\,m/s$$

Forza media esercitata sull'auto:

$$\overline{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{2.64\cdot 10^4\ \vec{i}\ kg\ m/s}{0.150\,s} = 1.76\,10^5\ \vec{i}\ N$$

Esercizio

Una mozzarella di massa 0.1 kg cade verticalmente e si spiaccica a terra. Al momento dell'impatto la sua velocità ha modulo 10 m/s, ed il tempo dell'urto è $\tau = 0.1$ s.
Calcolare la forza media che il pavimento esercita sulla mozzarella. Assumere per i calcoli g=10 m/s^2



Soluzione

- Applicando il teorema dell'impulso si ha:

$$\vec{I} = \int_0^\tau \vec{F}^{est} dt' = \vec{P}(\tau) - \vec{P}(0) = 0 - (-0.1\times 10)\ \mathrm{kg\ m/s}\ \hat{y} = 1\mathrm{kg\ m/s}\ \hat{y}$$

$\Longrightarrow$indicando con $\vec{F}$ la forza esercitata dalla gravità:

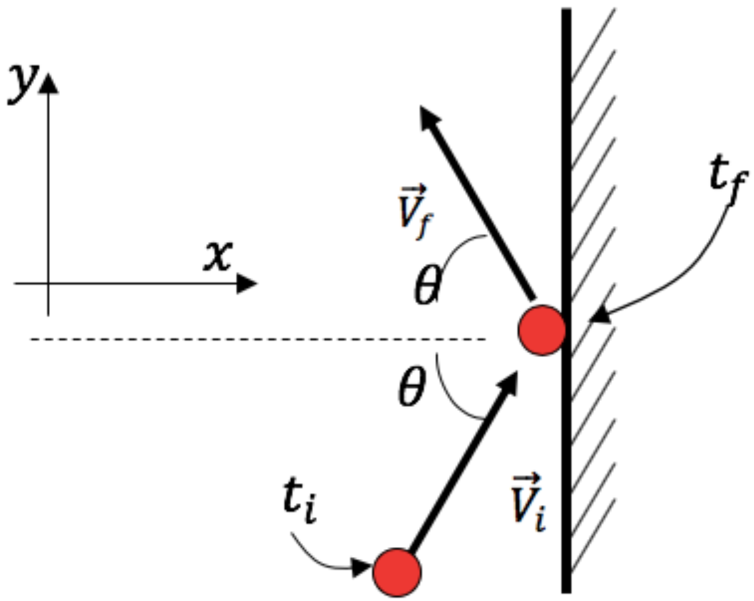
$$\int_0^\tau \vec{F}^{est} dt' = \int_0^\tau \vec{F} dt' + M\vec{g}\,\tau = 1\mathrm{kg\ m/s}\ \hat{y} \quad \Rightarrow \langle\vec{F}\rangle + M\vec{g} = \frac{\vec{I}}{\tau} = 10\ \mathrm{kg\ m}/s^2\ \hat{y}$$

$$\Rightarrow \langle\vec{F}\rangle = 10\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{s^2}\hat{y} + \mathrm{Mg}\ \hat{y} = 10\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{s^2}\hat{y} + 1\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{s^2}\hat{y} = 11\ \mathrm{N}\ \hat{y}$$

- L'impulso totale delle forze è 1 kg m/s, per cui la forza totale media è 11 N ($\langle\vec{F}\rangle$)
  - Nota: poiché la forza di gravità ha modulo ~ 1 N, trascurando la gravità avremmo commesso un errore del 10%
  - Nota: Se τ diminuisce, l'errore commesso nel trascurare la gravità diminuisce

Esercizio

Urto elastico di una pallina di massa M contro il muro. Esprimere l'impulso della parete in base ai dati in Figura. $|\vec{V}_i| = |\vec{V}_f| = V_0$



Soluzione

$$\vec{P}_i = M(V_0 \cos\theta \,, V_0 \sin\theta)$$

$$\vec{P}_f = M(-V_0 \cos\theta \,, V_0 \sin\theta)$$

$$\vec{I} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = M(-2V_0 \cos\theta \,, 0)$$

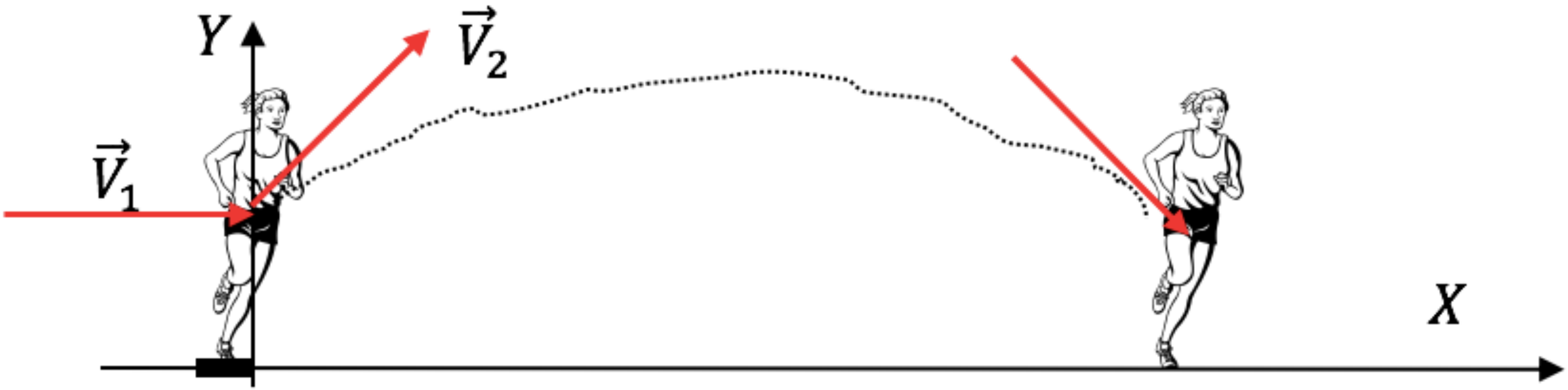
- La somma delle forze medie esterne lungo y è nulla
- mentre il valor medio della componente x è dato da:

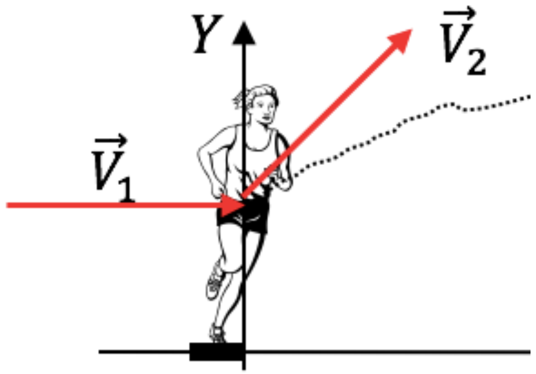
$$\left(\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\right)_x = \left(\frac{\vec{P}_f - \vec{P}_i}{t_f - t_i}\right)_x = \frac{-2MV_0 \cos\theta}{t_f - t_i}$$

Esercizio

Un atleta, di massa $M = 80\ \mathrm{kg}$, effettua un salto in lungo. Al momento della battuta la sua velocità è orizzontale ed ha modulo $|\vec{V}_1| = 10\ \mathrm{m/s}$ ed il tempo di battuta è $\tau = 0.1\ \mathrm{s}$. Subito dopo la battuta la velocità del centro di massa dell'atleta conserva lo stesso modulo, ma è ruotata di 45 gradi verso l'alto.

Calcolare il valore medio della forza (componente orizzontale e verticale) che la pedana effettua sull'atleta durante la battuta.





Calcolare il valore medio della forza (componente orizzontale e verticale) che la pedana effettua sull'atleta durante la battuta. Assumere per i conti g=10 m/s^2

$$\vec{V}_1 = 10\hat{x}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{V}_2 = 10\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + 10\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y}$$

Soluzione

$$\langle\vec{F}\rangle + M\vec{g} = \left(\frac{\vec{P}_2 - \vec{P}_1}{\tau}\right) = M\left(\frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\tau}\right)$$

$$\Rightarrow \langle\vec{F}\rangle = \left(\frac{\vec{P}_2 - \vec{P}_1}{\tau}\right) - M\vec{g} = M\left(\frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\tau}\right) - M\vec{g}$$

$$= \left[\frac{80\left(10\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + 10\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} - 10\hat{x}\right)}{0.1} + 80\cdot 10\hat{y}\right]\text{N}$$

$$= 800\left[10\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\hat{x} + \left(10\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\hat{y}\right]\text{N}$$

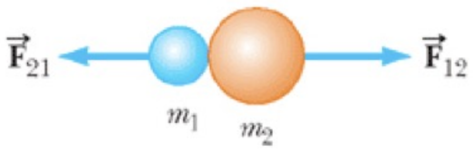
$$= (-2343\ \text{N}, 6441\ \text{N})$$

Collisioni

- Quando due punti materiali si avvicinano l'uno all'altro, la loro mutua interazione produce un cambiamento nel loro stato di moto:
  - ***scambio di quantità di moto***
  - ***scambio energia cinetica***
- Quando la variazione di quantità di moto subita da ciascuna delle due particelle interagenti è notevole, mentre la durata dell'interazione è molto piccola, allora si dice che si è verificato un urto (o una collisione)
- le forze che si sviluppano nella collisione
  - sono **forze impulsive**
  - e sono **interne al sistema dei due corpi che collidono**

queste forze sono cosi intense che durante l'urto possiamo trascurare l'effetto di tutte le altre **forze NON impulsive**

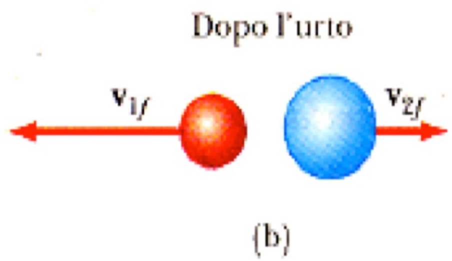
- Le **forze impulsive** sono **forze interne** al sistema in interazione quindi in un processo di urto si **conserva la quantità di moto totale del sistema**



Es: pallina e racchetta da tennis, palla e sponda da biliardo o urto tra palle da biliardo, pallina e racchetta da ping-pong, martello e chiodo ecc.

- Il tempo di collisione è di solito così breve che lo spostamento degli oggetti durante la collisione è trascurabile

Collisioni (2)



- Cerchiamo di schematizzare uno degli esempi precedenti, ad esempio interazione di due palle da biliardo, possiamo pensare che esistono 3 fasi:

1. un'istante prima dell'urto
   - moto **imperturbato** di una palla verso l'altra
2. durante l'urto, in cui avviene l'interazione tra i due corpi
   - quando vengono a contatto, **entrambi tendono ad occupare lo spazio dell'altro** provocando così deformazioni reciproche
   - la deformazione dà origine ad una forza elastica che si oppone alla deformazione stessa e cerca di rimuovere la causa che l'ha prodotta: tende cioè ad allontanare la biglia che ha prodotto la deformazione
   - si produce quindi una brusca variazione nel moto dei due sistemi interagenti
3. un istante dopo l'urto: dopo l'interazione, lo stato di moto continua ad essere di nuovo **imperturbato**

Classificazione degli urti e leggi di conservazione

Gli urti sono classificati come

- **Urti anelastici**
  - K (energia cinetica totale) **non si conserva**
    le forze di deformazione trasformano l'energia meccanica in altre forme
  - $\vec{P}$ (quantità di moto totale) **si conserva** (3 equazioni)

  caso particolare di urto anelastico l'urto perfettamente anelastico in cui i due corpi dopo l'urto restano attaccati

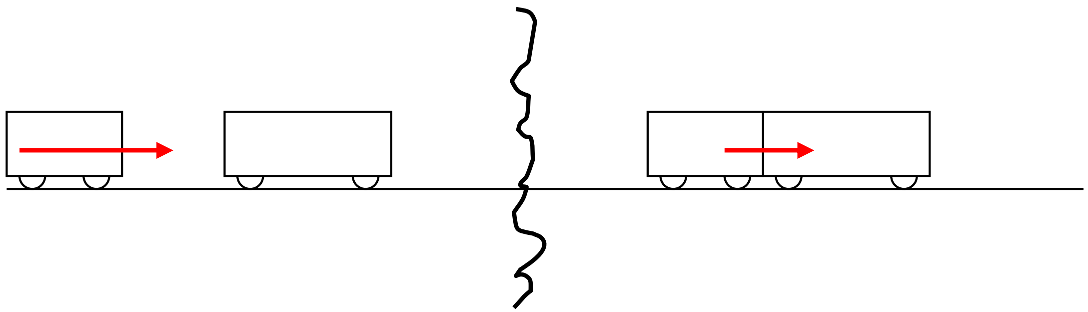
- **Urti elastici**
  - K **si conserva** (1 equazione)
  - $\vec{P}$ **si conserva** (3 equazioni)

Esercizio

Su un binario privo di attrito un carrello A $(M_A = 50\ \mathrm{kg})$, che si muove con una velocità $|\vec{V}_1| = 4\ \mathrm{m/s}$, urta in un tempo $\tau = 0.3\ \mathrm{s}$ un secondo carrello B $(M_B = 150\ \mathrm{kg})$, che è fermo sul binario. Nell'urto i due carrelli si saldano insieme e procedono con una velocita finale $\vec{V}_2$ sul binario. Nell'urto non ci sono forze esterne ai carrelli ad eccezione della gravità e della reazione normale del piano di appoggio.

1) Calcolare $\vec{V}_2$.

2) Calcolare la forza media fra i carrelli durante l'urto.



Soluzione.

1) Calcolare $\vec{V}_2$.

abbiamo solo forze esterne verticali la cui risultante è nulla, il moto prima e dopo l'urto avviene lungo l'asse x, la quantità di moto è conservata

$$1)\quad M_A\vec{V}_1 = (M_A + M_B)\vec{V}_2 \quad \Longrightarrow \vec{V}_2 = \frac{M_A}{M_A + M_B}\vec{V}_1 \Longrightarrow |\vec{V}_2| = 1\ \mathrm{m/s}$$

2) Calcolare la forza media fra i carrelli durante l'urto.

$$\vec{P}(t) - \vec{P}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}^{est} dt'$$

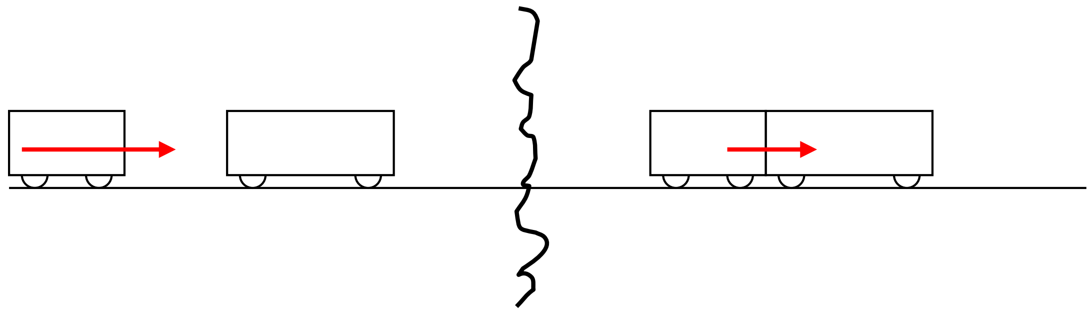
$$2)\ \vec{P}_B(\tau) - \vec{P}_B(0) = \langle \vec{F}_{A\to B}\rangle\tau \ = M_B\ \vec{V}_2 \quad \Longrightarrow \left|\langle \vec{F}_{A\to B}\rangle\right| = \frac{M_B|\vec{V}_2|}{\tau} = 500\ \mathrm{N}$$

Naturalmente si può rispondere alla 2) anche utilizzando il primo carrello:

$$\vec{P}_A(\tau) - \vec{P}_A(0) = \langle \vec{F}_{B\to A}\rangle\tau \quad = M_A\ \vec{V}_2 - M_A\ \vec{V}_1$$

$$\Longrightarrow \left|\langle \vec{F}_{B\to A}\rangle\right| = \frac{M_A(|\vec{V}_1| - |\vec{V}_2|)}{\tau} = 500\ N \ = \left|\langle \vec{F}_{A\to B}\rangle\right|$$

Nota $\langle \vec{F}_{B\to A}\rangle = -\ \langle \vec{F}_{A\to B}\rangle$



i) Nell'urto si conserva l'energia meccanica ?
ii) Quali forze hanno compiuto lavoro sul sistema ?
iii) Sono forze conservative o non conservative ? Interne o esterne ?

Risposte

i) $E_f - E_{in} = K_f - K_{in} = \frac{1}{2}(M_A + M_B)V_2^2 - \frac{1}{2}M_A V_1^2$

$$= \frac{1}{2}(M_A + M_B)\left(\frac{M_A}{M_A + M_B}\right)^2 V_1^2 - \frac{1}{2}M_A V_1^2 = -\frac{1}{2}\frac{M_A M_B}{(M_A + M_B)}V_1^2$$

$\Longrightarrow$ l'energia meccanica non si conserva

ii) Compiono lavoro le forze impulsive interne agenti fra i carrelli durante l'urto

iii) Sono forze **interne non conservative** in quanto **il loro lavoro è negativo**, ed è pari alla diminuzione di energia meccanica

Urti elastici 1-D

- Due palline entrano in contatto (urto) viaggiando lungo la stessa retta (asse *x*)

$\vec{P}_i = \vec{P}_f$

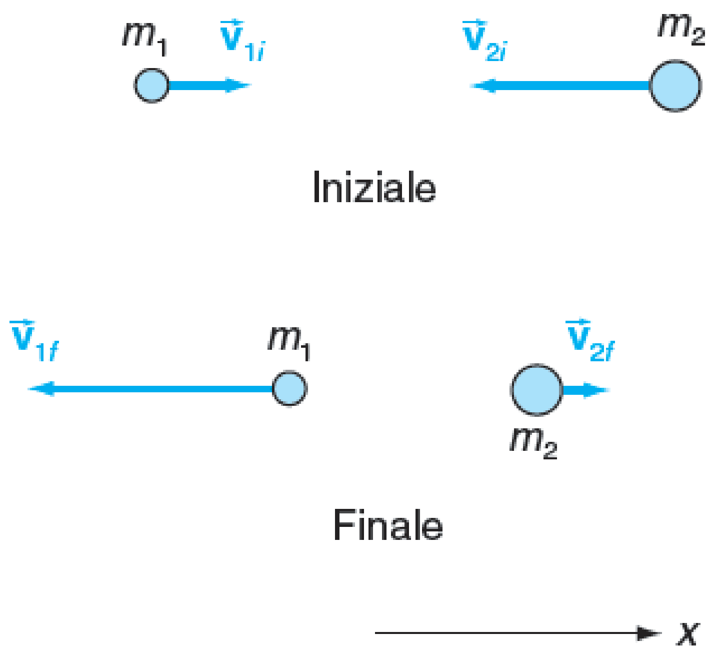
$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$-\Delta\vec{P}_1 = \Delta\vec{P}_2$

$$\boxed{m_1\left(v_{1i} - v_{1f}\right) = m_2\left(v_{2f} - v_{2i}\right)}$$

$K_i = K_f$

$$\boxed{\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2}$$



$$m_1\left(v_{1i}^2 - v_{1f}^2\right) = m_2\left(v_{2f}^2 - v_{2i}^2\right) \qquad m_1\left(v_{1i} - v_{1f}\right)\left(v_{1i} + v_{1f}\right) = m_2\left(v_{2f} - v_{2i}\right)\left(v_{2f} + v_{2i}\right)$$

$$\left(v_{1i} + v_{1f}\right) = \left(v_{2f} + v_{2i}\right) \quad \Rightarrow \left(v_{1i} - v_{2i}\right) = \left(v_{2f} - v_{1f}\right)$$

- La velocità relativa dei due oggetti prima dell'urto è uguale e di segno opposto alla velocità relativa dei due oggetti dopo l'urto

- Ricaviamo quindi i valore delle due velocità dopo l'urto
- Siamo nel caso 1-D *(in generale dovremmo determinare 2 vettori velocità quindi in totale 6 componenti)*

$$\begin{cases} (v_{1i} - v_{2i}) = (v_{2f} - v_{1f}) \\ m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \\ v_{2f} = \left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \end{cases}$$

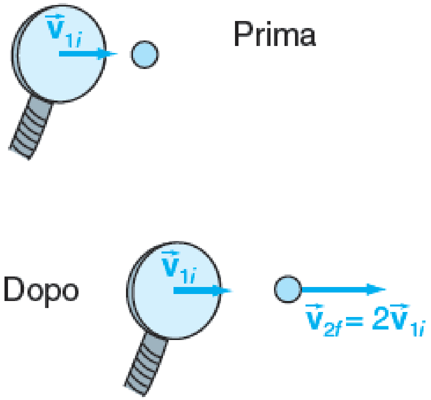
1. Caso particolare: **se le masse inerziali sono identiche $m_1 = m_2$**
   - In questo caso le masse si **scambiano le velocità**

$$\begin{cases} v_{1f} = v_{2i} \\ v_{2f} = v_{1i} \end{cases}$$

2. Caso particolare: **se m_2 è inizialmente in quiete** cioè $v_{2i} = 0$

$$\begin{cases} v_{1f} = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \\ v_{2f} = \left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \end{cases}$$

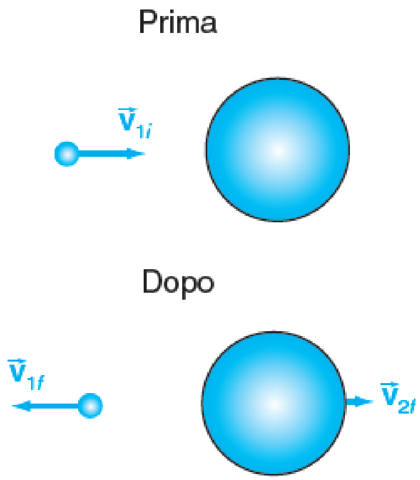
3. Caso particolare: se m_2 **è inizialmente in quiete** cioè $v_{2i}=0$ se le masse inerziali sono $m_1 >> m_2$



$$\begin{cases} v_{1f} = \left(\dfrac{1 - m_2/m_1}{1 + m_2/m_1} \right) v_{1i} \approx v_{1i} \\ v_{2f} = \left(\dfrac{2}{1 + m_2/m_1} \right) v_{1i} \approx 2v_{1i} \end{cases}$$

- **La velocità della massa inerziale maggiore (*m_1*) rimane praticamente invariata, mentre il corpo di piccola massa inerziale (*m_2*)si allontana con una velocità doppia**

4. Caso particolare: se m_2 **è inizialmente in quiete** cioè $v_{2i}=0$ se le masse inerziali sono $m_1 << m_2$



$$\begin{cases} v_{1f} = \left(\dfrac{m_1/m_2 - 1}{m_1/m_2 + 1} \right) v_{1i} \approx -v_{1i} \\ v_{2f} = \left(\dfrac{2\, m_1/m_2}{m_1/m_2 + 1} \right) v_{1i} \approx 0 \end{cases}$$

- **La velocità della massa inerziale maggiore (*m_2*) *in quiete* rimane praticamente invariata (rimane immobile), mentre il corpo di piccola massa inerziale (*m_1*) si allontana con una velocità uguale e contraria**

Urti anelastici: esempio urto perfettamente anelastico

- Gli urti anelastici sono più complicati da trattare, in quanto abbiamo a disposizione **soltanto una equazione per risolvere il problema**, la conservazione ***P***
- **Nel caso di urto perfettamente anelastico dopo l'urto i due corpi procedono assieme attaccati l'uno all'altro, quindi con la stessa velocità v_f**

$$\vec{P} = \text{cost} \Rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \qquad \Rightarrow v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{(m_1 + m_2)}$$

- Quindi sappiamo quanto vale l'unica incognita del problema v_f
- Consideriamo ora l'energia cinetica

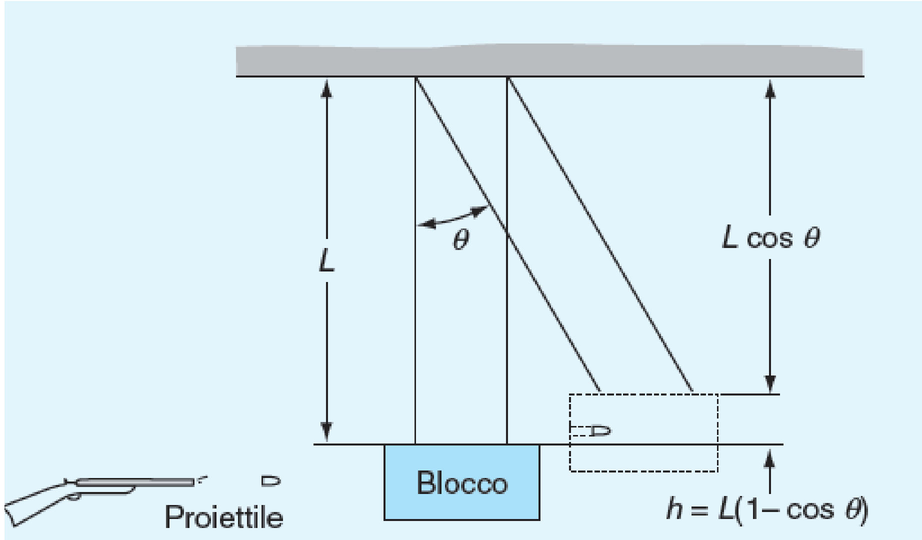
$$K_f - K_i = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(m_1 v_{1i})^2 + (m_2 v_{2i})^2 + 2 m_1 m_2 v_{1i} v_{2i}}{(m_1 + m_2)} - \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1i} - v_{2i})^2 < 0$$

- A seguito dell'urto quindi **è diminuita l'energia cinetica, si è verificata una trasformazione dell' energia in deformazione dei corpi collidenti**

Esempio Urto anelastico: pendolo balistico

- Pendolo costituito da un blocco di materiale sospeso a delle funi (prive di massa)
  - utilizzato per conoscere la velocità dei proiettili
  - il proiettile resta conficcato nel blocco



- l'urto tra proiettile e pendolo è completamente anelastico
  - **condizioni iniziali**

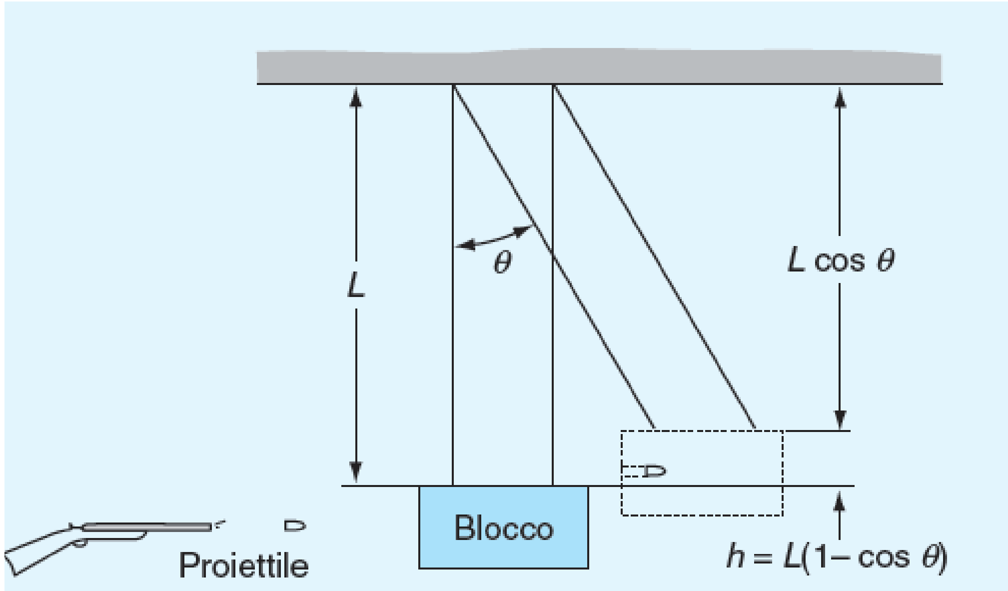
  m_1* massa del proiettile *$v_{1i} > 0$

  m_2* massa del pendolo *$v_{2i} = 0$

- Il sistema è soggetto a
  - forze impulsive che si esplicano durante l'urto
  - **forza peso,** che essendo di intensità **finita** (**non impulsiva**) causa durante l'urto una variazione trascurabile della quantità di moto **Quindi non la consideriamo**
  - **tensione dei fili**, diretta lungo i fili

  Le **<u>forze vincolari possono essere impulsive,</u>** ma in questo caso l'urto avviene in direzione ortogonale ai fili di sospensione, **quindi possiamo trascurare il ruolo di questa forza impulsiva nell'urto**

(2) Esempio Urto anelastico: pendolo balistico



- il proiettile resta conficcato nel blocco

⇒ **dalla conservazione della QM del sistema**, la velocità del sistema un istante dopo l'urto è

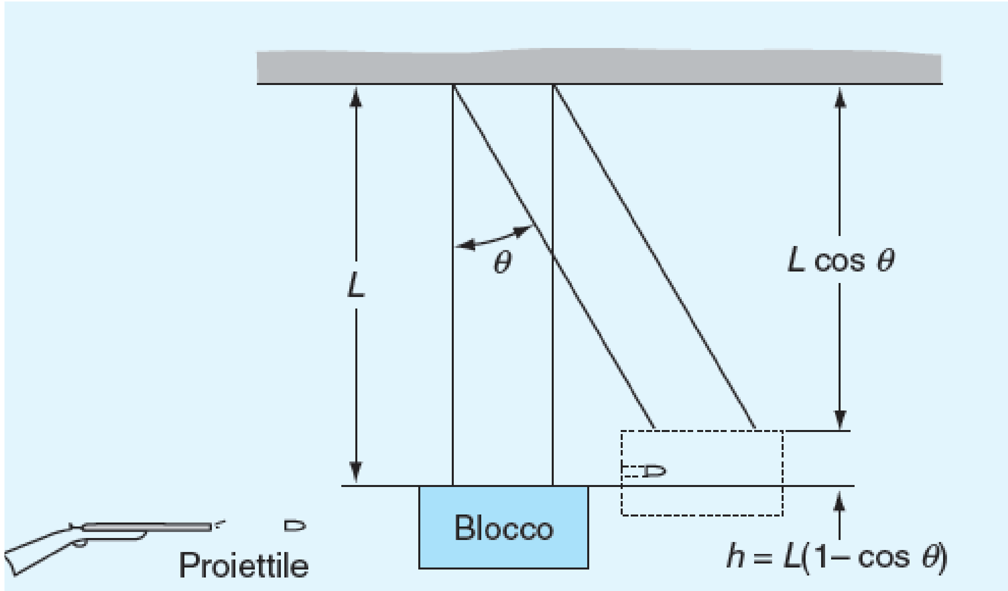
$$v_f = \frac{m_1 v_{1i}}{(m_1 + m_2)}$$

⇒ **Nel processo non si conserva l'energia cinetica (nota: le posizioni sono le stesse un istante prima dell'urto e un istante dopo)**

- Conservazione dell'energia per il successivo moto del blocco con il proiettile conficcato

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = (m_1 + m_2)gh \quad \Rightarrow \frac{(m_1)^2}{(m_1 + m_2)^2} v_{1i}^2 = 2gh \quad \Rightarrow v_{1i} = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2gh}$$

Energia potenziale di un corpo esteso



$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_f^2 = (m_1+m_2)gh$$

$$\Rightarrow \frac{(m_1)^2}{(m_1+m_2)^2} v_{1i}^2 = 2gh$$

$$\Rightarrow v_{1i} = \frac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{2gh}$$

- nell'esercizio precedente abbiamo dato per scontato che l'energia potenziale di un oggetto esteso (blocco + proiettile) è

$$\mathrm{U} = (m_1+m_2)gh$$

- L'energia potenziale gravitazionale di un corpo è la stessa che si otterrebbe se tutta la massa fosse concentrata nel centro di massa
  - Dimostrazione

$$U = \sum_i m_i g h_i = g\left(\sum_i m_i h_i\right) = Mgh_{cm}$$

$$h_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i m_i h_i$$

Urto elastico 1D

- Se diversamente alla nostra ipotesi **l'urto proiettile-blocco** fosse stato **elastico**

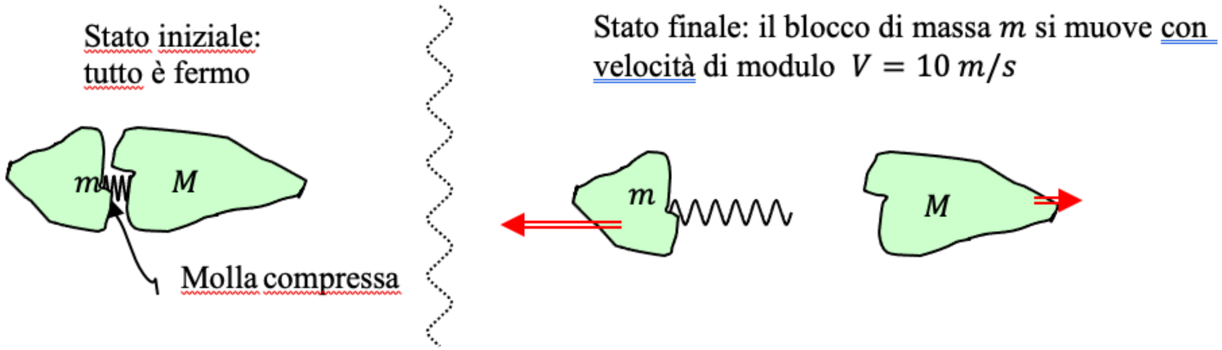
  - Avremmo applicato la **conservazione dell'energia cinetica e della QM** (del CM!) per ricavare le velocità del proiettile e del blocco un istante dopo l'urto

2. Caso particolare: **se m_2 è inizialmente in quiete** cioè $v_{2i}=0$

$$\begin{cases} v_{1f} = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \\ v_{2f} = \left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \end{cases}$$

Esercizio

Due corpi di masse m e M interagiscono tramite una molla fissata al corpo di massa m su un piano orizzontale. Per $t < 0$ il sistema è tenuto in posizione fissa da un operatore esterno, che all'istante $t = 0$ cessa di agire, lasciando la molla libera di espandersi.
Calcolare il lavoro effettuato dalla molla sapendo che $m = 200$ g e $M = 800$ g.



Soluzione

- Dalla conservazione della quantità di moto totale:

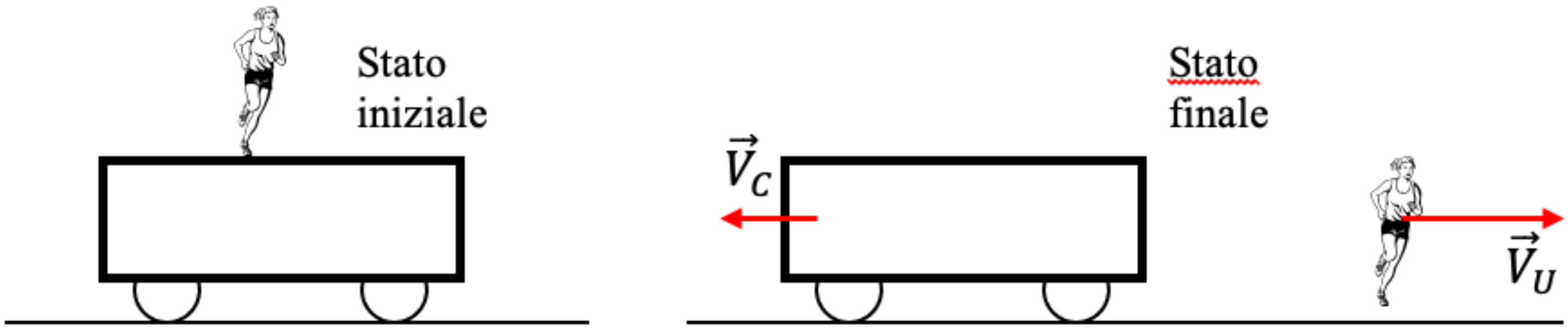
$$m\vec{V}_m + M\vec{V}_M = 0 \Longrightarrow \vec{V}_M = -\frac{m}{M}\vec{V}_m$$

$$L_{molla} = \Delta K = \frac{1}{2}\left(mV_m^2 + MV_M^2\right) = \frac{mV_m^2}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right) = 12.5 \text{ J}$$

- Si noti che **la forza della molla è interna al sistema**

Esercizio

Un carrello di massa $M = 120$ kg è fermo su un binario orizzontale privo di attrito; su di esso si trova un uomo di massa $m = 80$ kg, anch'esso fermo (stato iniziale del sistema uomo + carrello). Ad un certo istante l'uomo salta dal carrello lungo il binario e rispetto a terra la sua velocità subito dopo il salto (quando la sua altezza da terra è ancora quella del carrello) è 2 m/s (stato finale). Quale è la velocità del carrello dopo che l'uomo è saltato?



Anche in questo caso si utilizza il principio di conservazione della quantità di moto:

$$m\vec{V}_U + M\vec{V}_C = \vec{0} \quad \Longrightarrow \vec{V}_C = -\frac{m}{M}\vec{V}_U \quad \Longrightarrow \left|\vec{V}_C\right| = 1.33 \text{ m/s}$$

i) Quanto vale la variazione di energia meccanica del sistema ?
ii) Quali forze hanno compiuto lavoro ?
iii) Sono forze interne o esterne al sistema uomo + carrello ?
iv) Sono forze conservative o non conservative?

Risposte

i) Variazione di energia:

$$E_f - E_{in} = K_f - K_{in} \quad = \frac{1}{2} m V_U^2 + \frac{1}{2} M V_C^2$$

ricordando che $\vec{V}_C = -\frac{m}{M}\vec{V}_U$

$$E_f - E_{in} = \frac{1}{2} m V_U^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right) = 267 \text{ J}$$

ii), *iii*) e *iv*)

Hanno compiuto lavoro le **forze muscolari dell'uomo**, interne e non conservative.

Urto anelastico 2-D

- Anche in questo caso possiamo applicare la conservazione della quantità di moto e ottenere la velocità finale dopo l'urto, del sistema

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = \vec{P}_i = \vec{P}_f = (m_1 + m_2)\vec{v}_f$$

$$\vec{v}_f = \frac{m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}}{(m_1 + m_2)} \quad \text{con componenti} \quad \begin{cases} v_{fx} = \dfrac{m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix}}{(m_1 + m_2)} \\ v_{fy} = \dfrac{m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy}}{(m_1 + m_2)} \end{cases}$$

Nota:

$\vec{P}_i$ e $\vec{P}_f$ coincidono con la quantità del CM prima e dopo l'urto SEMPRE

Urti in 2 dimensioni

Es. tavolo da biliardo: dobbiamo descrivere gli urti che avvengono su un piano o 2-D

- La teoria è sempre la stessa, dobbiamo comunque ricordarci che la quantità di moto ***P*** è una grandezza vettoriale
- La conservazione della QM corrisponde a 2 equazioni in termini delle componenti

$$\vec{P}_{tot} = \text{cost} = \vec{P}_i = \vec{P}_f \qquad \begin{cases} m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} \\ m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy} \end{cases}$$

- Nel caso di urti elastici, si conserva anche l'energia cinetica
- è una sola equazione visto che K è una quantità scalare

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(v_{1ix}^2 + v_{1iy}^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(v_{2ix}^2 + v_{2iy}^2 \right) =$$

$$= K_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(v_{1fx}^2 + v_{1fy}^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(v_{2fx}^2 + v_{2fy}^2 \right)$$

Esame scritto es. 1 del 22/07/2016

Una guida a forma di semicirconferenza ha raggio $R = 1\text{m}$ e massa $M = 3\text{kg}$ e può muoversi su un piano orizzontale liberamente (tra il piano e la guida non c'è attrito).

Un punto materiale di massa $m = 1.6$ kg è vincolato a muoversi al suo interno. La massa m viene lasciata cadere da un'altezza $h = 1.3$ m all'interno della guida (Fig.1). Tutto il sistema è soggetto all'accelerazione di gravità g.

Si calcoli:

a) lo spostamento orizzontale d della guida quando la massa m esce dall'altro lato rispetto a quello da cui è entrata nella guida

$d =$ ....

b) il modulo della velocità della guida quando m passa nel punto più basso della guida stessa

$v_M =$ ....

c) la quantità di moto del sistema quando la massa m si trova a un angolo $\alpha = \pi/4$

$p =$ ....

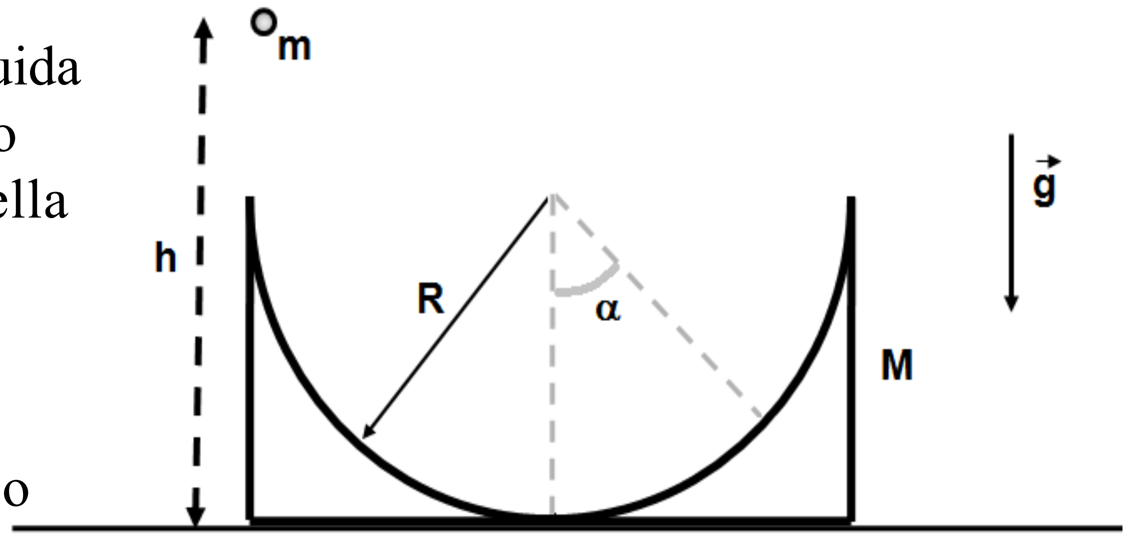


Fig.1

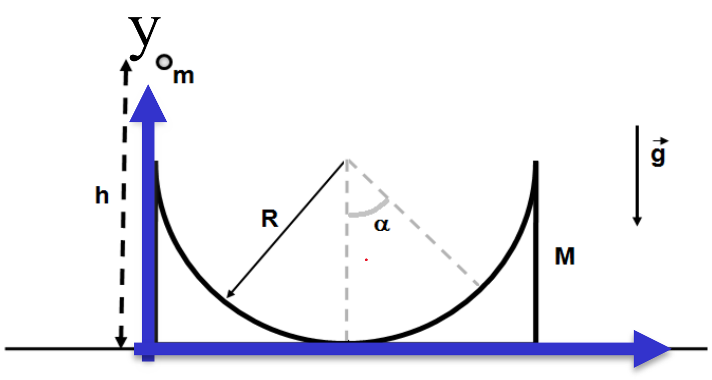


Fig.1

Si calcoli:
a)lo spostamento orizzontale d della guida quando la massa m esce dall'altro lato rispetto a quello da cui è entrata nella guida

$d =$ ....

Sistema costituito da:

- Guida a forma di semicirconferenza
  - R= 1 m
  - M=3 kg
  - Si può muovere orizzontalmente sul piano privo di attrito
- Punto Materiale
  - m=1.6 kg
  - h= 3 m quota da cui cade
  - È vincolato a muoversi all'interno della guida

Considerazioni:

1) Unica forza esterna al sistema $\vec{g}$ che agisce lungo y
2) Non ci sono forze non conservative che compiono lavoro

1) Il sistema conserva la q. m del C. M lungo x e lungo Z
2) Si conserva l'energia meccanica del sistema

1) Il sistema conserva la q.m del C.M lungo x e lungo z

1.a $m v^i_{xm} + M v^i_{xM} = m v^f_{xm} + M v^f_{xM} = 0$

$P^i_{xCM} = P^f_{xCM} = 0 \Rightarrow v_{x\,cm} = 0 \Rightarrow X_{CM} = \text{cost}$

$\Rightarrow X^i_{CM} = X^f_{CM} = \text{Cost} = \dfrac{m\cdot\emptyset + MR}{m+M}$

nota: dalla simmetria della Guida $X^{CM}_G = R$

1.b non ci sono forze lungo z sul sistema, ne' forze lungo z sulla guida

$v^f_{zM} = \text{cost} = v^i_{zM} = 0$

$\underbrace{m v^i_{zm} + M v^i_{zM}}_{p^i_{zCM}} = 0 = \underbrace{m v^f_{zm} + M v^f_{zM}}_{p^f_{zCM}} \Rightarrow v_{zCM} = 0 \Rightarrow Z_{CM} = \text{cost}$

$p^i_{zCM} = p^f_{zCM} = \emptyset$

$(m+M)V^i_{z\,cm} = (m+M)V^f_{zCM} = 0$

La pallina si muove su $xy \Rightarrow v^i_{zm} = v^f_{zm} = 0$

$\Rightarrow M v^i_{zM} = M v^f_{zM} = 0$ $\Rightarrow$ Il blocco si muove lungo x

Inoltre $y_{CM\,Blocco} = \text{cost} \Rightarrow v_{yM} = \emptyset$

Se $z_{CM\ Guida}$ e $y_{CM\ Guida}$ sono costanti $\Rightarrow$ il CM della guida si muove lungo x!

a) Si calcoli lo spostamento orizzontale d della guida quando la massa m esce dall'altro lato rispetto a quello da cui è entrata nella guida

$d =$ ....

Se il moto avviene lungo x per la guida, per uno spostamento d della guida, la pallina si è spostata di 2R + d lungo x quando esce dalla guida per cui:

dalla 1.a $X_{CM_i} = \frac{RM}{m+M} = X_{CM_f} = \frac{M(R+d) + m(2R+d)}{m+M} \Rightarrow (m+M)d + 2mR = 0 \Rightarrow d = -\frac{2mR}{m+M}$

per cui la guida si è spostata verso sinistra. $d = -0.7\ m$

Abbiamo inoltre trovato che durante il moto:

$$\begin{cases} \vec{v}_m = (v_{x\,m}, v_{y\,m}, 0) \\ \vec{v}_M = (v_{x\,M}, 0, 0) \\ \vec{V}_{CM} = \left(0, \frac{m\, v_{ym}}{m+M}, 0\right) \end{cases}$$

C.Q.M C.QM

$(m+M)V^y_{CM} = m\, v_{ym} + M\, v_{yM} = m\, v_{ym}$ poiché $y_{CM\ guida} = cost$

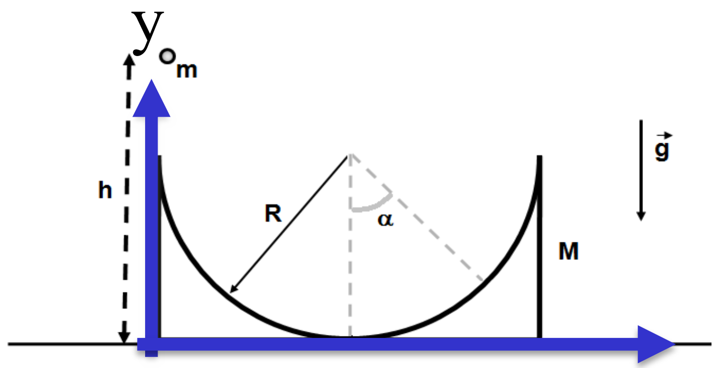


Fig.1

b) Calcolare il modulo della velocità della guida quando m passa nel punto più basso della guida stessa

$v_M =$ ....

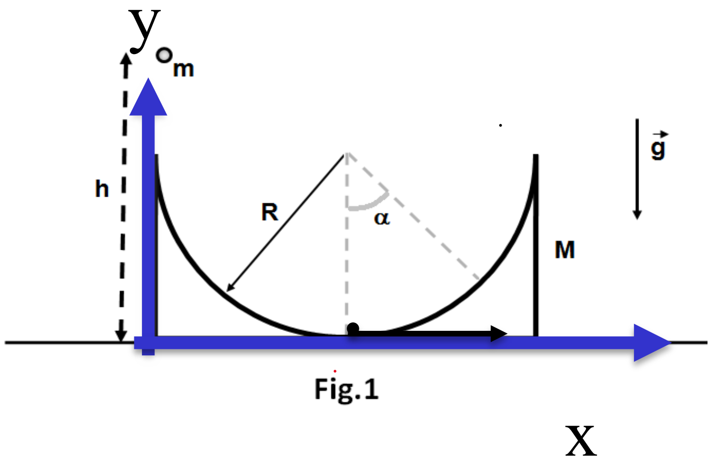


Fig.1

In questo caso $\vec{v}_m = (v_{xm}, 0, 0)$, mentre come prima $\vec{v}_M = (v_{xM}, 0, 0)$

Per determinare $\vec{v}_M$ possiamo usare la

1. conservazione della Q.M. lungo x
2. conservazione dell'energia

① $M v^i_{xM} + m v^i_{xm} = \emptyset = M v_M + m v_m \qquad a) \; v_m = -\frac{M}{m} v_M$

② $mgh = \frac{1}{2} M v_M^2 + \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} M v_M^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{M v_M}{m}\right)^2 = \frac{1}{2} M v_M^2 \left(\frac{m+M}{m}\right)$

$2 m^2 gh = M v_M^2 (m+M) \Rightarrow v_M = \sqrt{\frac{2 m^2 gh}{M(m+M)}} = 2.17 \; m/s$

c) Si calcoli la quantità di moto del sistema quando la massa m si trova a un angolo $\alpha = \pi/4$

$p =$ ………………

La quantità di moto totale del sistema è $\vec{P}_{CM} = (m+M)\vec{V}_{CM}$

$$P_{CM} = \sqrt{P^2_{x\,CM} + P^2_{y\,CM} + P^2_{z\,CM}}$$

Ricordiamo che $\vec{P}_{CM} = (m+M)\vec{V}_{CM} = m\vec{v}_m + M\vec{v}_M = (0, m\, v_{y\,m}, 0)$

c.q.m $\quad v_{yM} = 0 \quad$ c.q.m.

per cui $P_{cm} = m\, v_{y\,m}$ e quindi dobbiamo calcolare $v_{y\,m}$ per $\alpha = \pi/4$

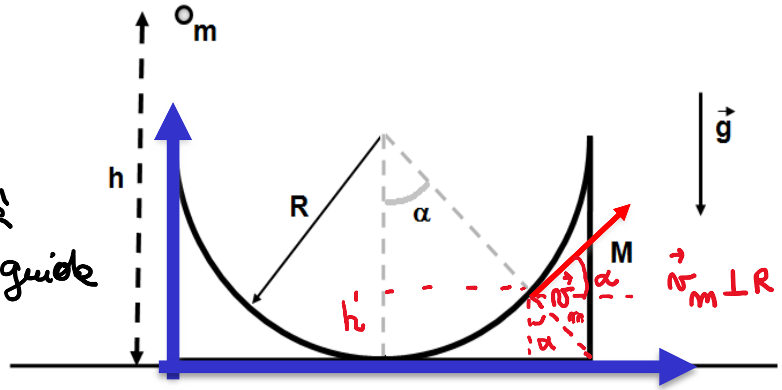
La velocità della pallina rispetto alla guida ha componenti

$\vec{v}_{Rel} = (\omega R\cos\alpha,\ \omega R\sin\alpha)$

per cui nel sistema del laboratorio

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_p &= \dot{x} + \omega R\cos\alpha \\ \dot{y}_p &= \dot{y} + \omega R\sin\alpha \end{aligned}\right\}$$

con $\dot{x}$ velocità del C.M della guida e $\dot{y} = 0$!



Al solito si conserva ① l'energia totale del sistema e ② la quantità di moto del sistema lungo x

① $mgh = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[(\dot{x} + \omega R\cos\alpha)^2 + (\omega R\sin\alpha)^2\right] + mgR(1-\cos\alpha)$

② Dalla conservazione della Q.M lungo x a) $\emptyset = M\dot{x} + m(\dot{x} + \omega R\cos\alpha)$

Quindi abbiamo 2 eq. in 2 incognite (① e ② ω e $\dot{x}$)

Ricordiamo che dobbiamo determinare $P_{cm} = m v_y = m\omega R \sin\alpha$

dalla ② a $\dot{x} = -\dfrac{m\omega R\cos\alpha}{M+m}$

dalla ① $mg(h - R(1-\cos\alpha)) = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(2\omega R\cos\alpha)\dot{x}$

$+ \frac{1}{2}m\omega^2R^2$

Sostituendo $\dot{x}$ dalla ② a $\Rightarrow \frac{1}{2}(m+M)\left(\dfrac{mR\omega\cos\alpha}{m+M}\right)^2 +$

$+ \frac{1}{2}m(2\omega R\cos\alpha)\left(-\dfrac{mR\omega\cos\alpha}{m+M}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2R^2 = mg(h - R(1-\cos\alpha))$

$= \omega^2\left[\frac{1}{2}\dfrac{(mR\cos\alpha)^2}{m+M} + \frac{1}{2}mR^2 - \frac{1}{2}\dfrac{m^2\,2R^2\cos^2\alpha}{m+M}\right] = mg(h - R(1-\cos\alpha))$

$$\omega^2\left[\frac{1}{2}\frac{(mR\cos\alpha)^2}{m+M}+\frac{1}{2}mR^2-\frac{1}{2}\frac{m^2\,2R^2\cos^2\alpha}{m+M}\right]=mg\left(h-R(1-\cos\alpha)\right)$$

moltiplicando $\times\ \dfrac{2(M+m)}{m} \Rightarrow \begin{cases}\omega^2\left(mR^2\cos^2\alpha+(m+M)R^2-2mR^2\cos^2\alpha\right)\\ =\ 2g(m+M)[h-R(1-\cos\alpha)]\end{cases}$

$$\omega=\sqrt{\frac{2g[h-R(1-\cos\alpha)](m+M)}{R^2(m-m\cos^2\alpha+M)}}$$

$$P_{y\,cm}=P_{cm}=m|v_{y\,m}|=m\omega R\sin\alpha=5.53\ Kg\ m/s$$