27/09/2022

INTRODUZIONE

I fenomeni elettromagnetici vengono rappresentati matematicamente tramite campi vettoriali e scalari che sono governati dalle equazioni di Maxwell, le quali forniscono una descrizione matematica completa dell'andamento nello spazio e nel tempo dei campi elettromagnetici.
La soluzione generale di queste equazioni non é semplice, ma si tratta di una procedura risolutiva che in molti casi puó essere evitata.

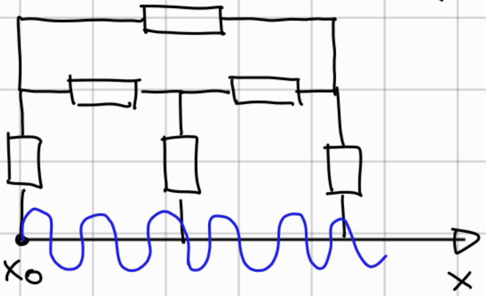
Una di queste situazioni si verifica quando é possibile analizzare un fenomeno elettromagnetico tramite un modello idealizzato denominato circuito elettrico.
La principale ipotesi che rende lecito utilizzare un circuito elettrico per rappresentare fenomeni elettromagnetici é che la lunghezza d'onda $\lambda = \frac{c}{f}$ sia molto maggiore della massima dimensione geometrica del volume in cui avvengono i fenomeni elettromagnetici da esaminare.

EQUAZIONE D'ONDA UNIDIMENSIONALE

(si propaga in un'unica direzione)

$$\xi(x,t) = y \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right)$$

DOVE LE UNICHE VARIABILI SONO x E t

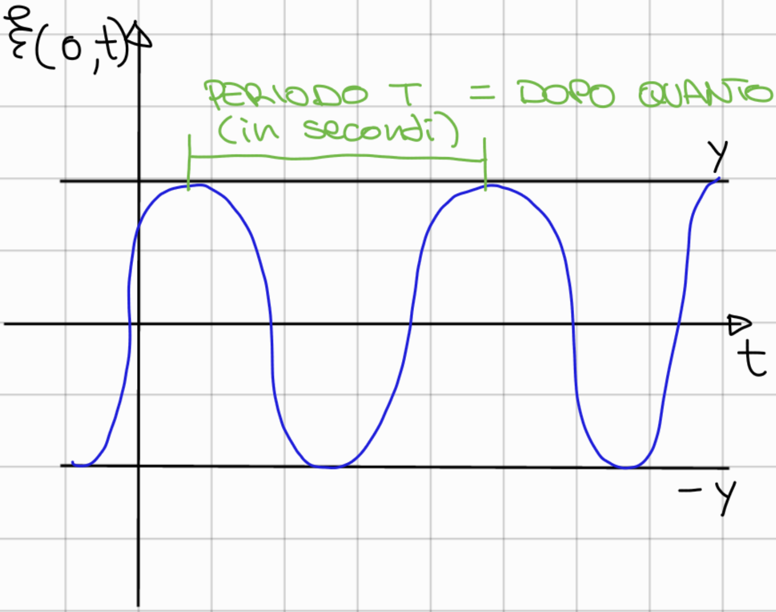


Fissando x in un punto $x_0 = 0$ si ottiene:

$$\xi(x_0, t) = y \sin\left(\cancel{\frac{2\pi}{\lambda} x_0} - \frac{2\pi}{T} t\right)$$

$x_0 = 0$

t RIMANE L'UNICA VARIABILE

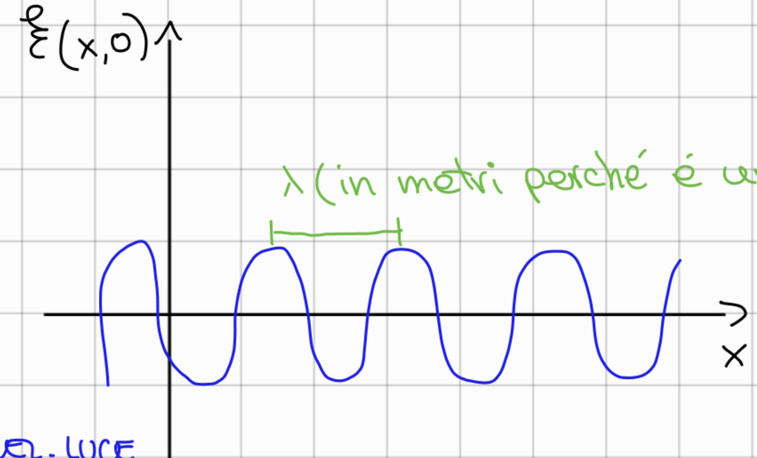


PERIODO T = DOPO QUANTO TEMPO IL SEGNALE SI RIPETE UGUALE A SÉ STESSO

Fissiamo ora $t_0 = 0$:

$$\xi(x, t_0) = y \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \cancel{\frac{2\pi}{T} t_0}\right)$$

$t_0 = 0$



VEL. LUCE

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{300 \cdot 10^6 \ m/s}{50 \ Hz} = 6000 \ Km$$

FREQUENZA

⇒ IL SEGNALE VARIA OGNI 6000 Km NELLO SPAZIO

↓

MA DATE LE DIMENSIONI DEI CIRCUITI DI NOSTRO INTERESSE POSSIAMO IPOTIZZARE IL SEGNALE COSTANTE NELLO SPAZIO

I circuiti di nostro interesse sono a PARAMETRI CONCENTRATI (LUMPED CIRCUITS), come se fossero concentrati in un unico punto, di conseguenza λ risulta trascurabile.

La lunghezza d'onda non é più trascurabile quando:

- λ é vicina a 6000 km
- f non é 50/60 Hz, ma molto più alta per cui il rapporto diventa molto più piccolo

Ipotizzando dunque che il segnale vari solo nel tempo possiamo non usare le equazioni di Maxwell.

PRINCIPALI GRANDEZZE ELETTRICHE

CORRENTE ELETTRICA:

Variazione di carica nel tempo (qtà di carica Δq che attraversa un componente di un circuito in un intervallo di tempo Δt)

$$\boxed{i(t) = \frac{dq(t)}{dt}} \simeq \frac{\Delta q(t)}{\Delta t} = \frac{q(t_2) - q(t_1)}{t_2 - t_1} \quad [A]$$

TENSIONE (o d.d.p):

Lavoro che occorre compiere per spostare una carica q tra due punti A e B di un circuito.

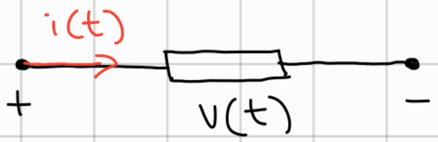
$$\boxed{v_{AB}(t) = \frac{L_{AB}(t)}{q}} \quad [V] \equiv [W/A] \equiv [J/C]$$

- Per la corrente si assume come positivo il verso percorso dalle cariche positive.

- $V_{AB} > 0$ se $V_A > V_B$, cioé se il lavoro compiuto é concorde alle forze del campo elettrico, dunque le cariche si muovono da A verso B.

In genere si ipotizza un verso della corrente, se la quantitá di corrente risulta positiva allora il verso ipotizzato é quello effettivo, altrimenti é opposto. Lo stesso vale per la tensione.

BIPOLO ELETTRICO: elemento costitutivo elementare di un circuito elettrico



Ogni bipolo é caratterizzato da una legge identificativa che lega la tensione tra i morsetti del bipolo e la corrente che attraversa i terminali del bipolo stesso. Questa legge puó essere assegnata in due modi:

$v(t) = f(i(t))$

$i(t) = g(v(t))$

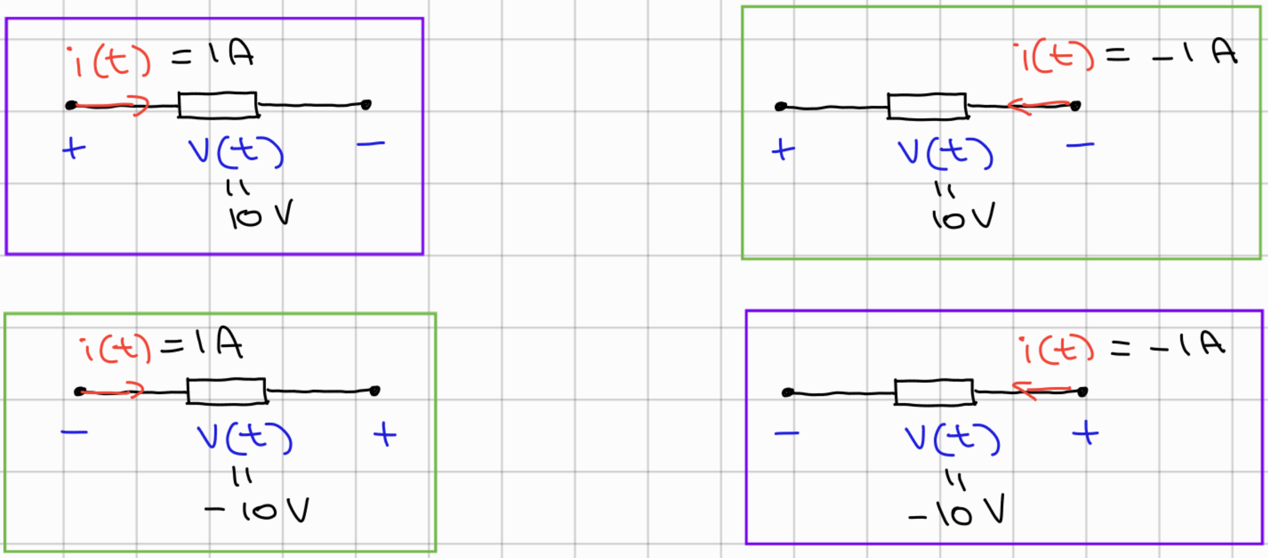
POTENZA ISTANTANEA:

$\boxed{p(t) = v(t) \cdot i(t)}$ $[W] \equiv [V] \cdot [A]$

Varia istante per istante perché é funzione del tempo.

Per un generico bipolo elettrico esistono quattro possibili combinazioni per i riferimenti convenzionali di tensione e corrente:

Es. $i(t) = 1\ A$
$v(t) = 10\ A$

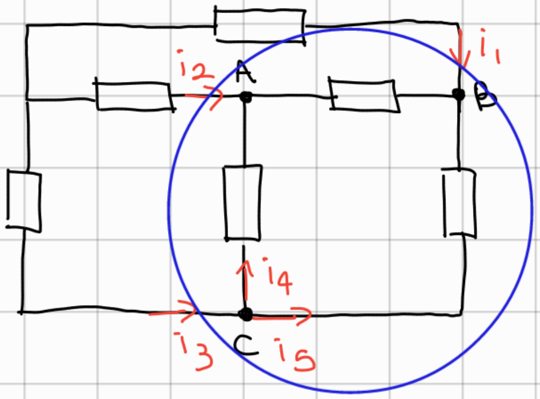


- RIFERIMENTI ASSOCIATI: la corrente entra dal morsetto (+) ed esce dal morsetto (−).
  Si ottiene come potenza positiva $p>0$ la potenza assorbita (o dissipata) dal bipolo.
- RIFERIMENTI NON ASSOCIATI: la corrente entra dal morsetto (−) ed esce dal morsetto (+).
  Si ottiene come potenza positiva $p>0$ la potenza erogata dal bipolo.

ENERGIA:

$$\boxed{w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\, d\tau} \qquad [J] \equiv [W]\cdot[s]$$

PRINCIPI DI KIRCHOFF



RAMO: tratto di circuito in cui si trova un singolo bipolo (in figura n. rami = 6)

NODO: punto in cui si incontrano 3 o più rami (in figura n. nodi = 4)

MAGLIA: percorso chiuso all'interno del circuito dove partendo da un nodo qualsiasi e ritornando ad esso si attraversano tutti i rami che formano il percorso soltanto una volta

I PRINCIPIO DI KIRCHOFF

La somma algebrica delle correnti che scorrono sui rami intersecati da una linea chiusa è uguale a zero. (conservazione del flusso)

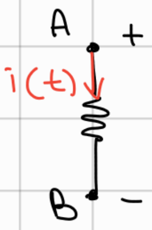
Includendo un solo nodo all'interno della superficie chiusa il principio può essere espresso come segue: "la somma algebrica delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma algebrica delle correnti uscenti".

II PRINCIPIO DI KIRCHOFF

La somma algebrica delle differenze di potenziale lungo una maglia del circuito è uguale a zero.

29/09/2022

RESISTORE (COMPONENTE CIRCUITALE)



Per i resistori si utilizzano i RIFERIMENTI ASSOCIATI

PROPRIETÁ DEI BIPOLI ELETTRICI

- **LINEARITÁ**: un bipolo si dice lineare se la sua equazione costitutiva é lineare, ovvero rappresentabile con una retta passante per l'origine.
  (Un circuito é lineare se tutti i suoi componenti sono lineari)

Verifichiamo la linearitá della resistenza:

I LEGGE DI OHM: $\boxed{V(t) = R \cdot i(t)}$ (R: RESISTENZA)

II LEGGE DI OHM: $\boxed{R = \rho \frac{l}{S}}$ (l: LUNGHEZZA; S: SEZIONE; ρ: RESISTIVITÁ $[\Omega \cdot m]$)

$[V/A] \equiv [\Omega]$

La curva rappresentativa dell'equazione costitutiva della resistenza é una retta passante per l'origine
⟹ LA **RESISTENZA** É **LINEARE**

- **TEMPO INVARIANZA**: un bipolo si dice tempo invariante se la curva rappresentativa della sua equazione costitutiva non varia nel tempo.

Il valore della resistenza puó variare nel tempo a seconda della temperatura, che ne modifica la

resistività.
Nella nostra approssimazione consideriamo però la resistenza costante nel tempo.
=> LA RESISTENZA È TEMPO INVARIANTE

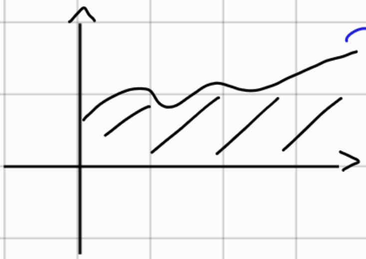
- MEMORIA: un bipolo si dice con memoria se i valori della tensione (o corrente) ai suoi capi ad un certo istante dipendono dai valori assunti dalla corrente (o tensione) negli istanti precedenti.
LA RESISTENZA NON HA MEMORIA (È MEMORY LESS)

- PASSIVITÀ: un bipolo si dice passivo se l'energia w(t), valutata utilizzando riferimenti associati, è sempre maggiore o uguale a zero (in ogni istante di tempo)

Verifichiamo la passività della resistenza:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) \geq 0$$

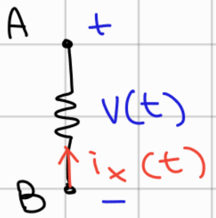
$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} R \cdot i^2(\tau)\, d\tau \geq 0$$



CURVA POTENZA ≥ 0
=> AREA DELLA SEZIONE SOTTO LA CURVA ≥ 0

N.B: Utilizzando i riferimenti non associati (scegliendo la corrente nel verso opposto):

$$v(t) = R \cdot i(t) = -R \cdot i_x(t)$$



$$i(t) = \frac{1}{R} v(t) = G v(t)$$

G = CONDUTTANZA $= \frac{1}{R}$ $\quad [A/V] \equiv [\Omega^{-1}] = [S]$ ← SIEMENS

$$R = \rho \frac{l}{S} \Rightarrow G = \sigma \frac{S}{l}$$

σ = CONDUCIBILITÀ $= \frac{1}{\rho}$

- Cosa accade se $R = 0$?

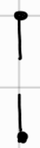
  $R = 0 \Rightarrow v(t) = 0$

→ CORTOCIRCUITO (SIMBOLO CIRCUITALE DI UN RESISTORE CON $R=0$)

Due punti sono collegati in cortocircuito se si trovano allo stesso potenziale ($\Rightarrow$ d.d.p $= 0$)

- Cosa accade se $G = 0$? Cioè quando $R \to \infty$

  $G = 0 \Rightarrow i(t) = G \cdot v(t) = 0$

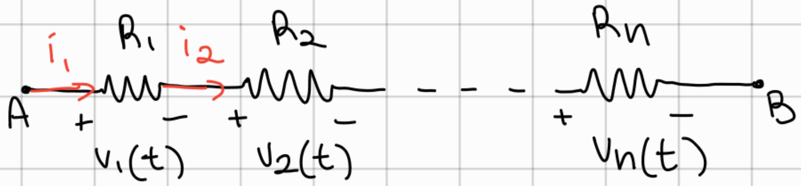


→ CIRCUITO APERTO

RESISTORI IN SERIE

Un numero N qualsiasi si dicono in serie se sono attraversati dalla stessa corrente (questo avviene se fisicamente sono collegati uno all'altro da un solo morsetto).

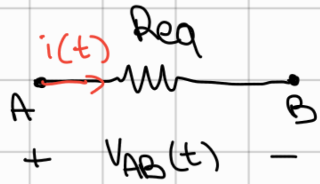
$$i_1 = i_2 = \dots = i_n = i$$



Per il II principio di Kirchhoff:

$$v_{AB}(t) = v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t) =$$
$$= R_1 \cdot i_1(t) + R_2 \cdot i_2(t) + \dots + R_n \cdot i_n(t) =$$
$$= (R_1 + R_2 + \dots + R_n)\, i(t) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} R_j}_{Req} \cdot i(t) = Req \cdot i(t)$$

Il circuito equivalente a quello disegnato sopra sarà dunque:

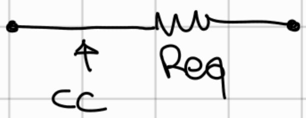


N.B. il circuito è equivalente agli effetti esterni, cioè il resto del circuito rimane invariato

Nel rappresentare Req si sostituisce una delle due resistenze con un cortocircuito:

$Req = R_1 + R_2$

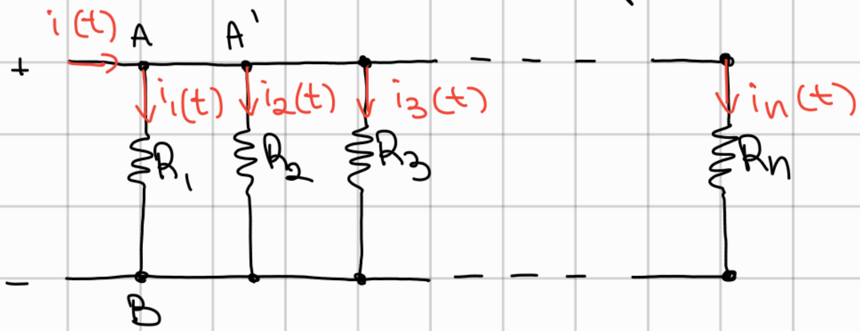
oppure



30/09/2022

RESISTORI IN PARALLELO

Un numero N qualsiasi di resistori si dicono in parallelo se si trovano alla stessa d.d.p.

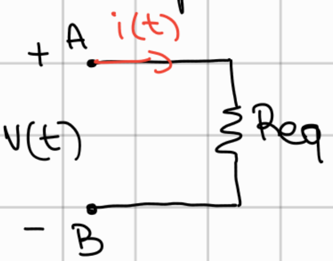


$V_A = V_{A'} = \dots = V_{A^n}$ perché sono collegati in corto circuito.

$V_B \neq V_A$ ma $V_B = V_{B'} = \dots = V_{B^n}$

$\Rightarrow v_{AB}(t) = v_{A'B'}(t) = \dots = v_{A^nB^n}(t)$

Il circuito equivalente a quello riportato sopra sarà:



Applicando il I principio di Kirchoff:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t) =$$

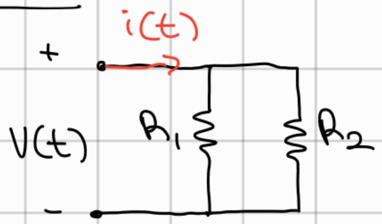
$$= G_1 \cdot v_1(t) + G_2 \cdot v_2(t) + \dots + G_n \cdot v_n(t) =$$

$$= (G_1 + G_2 + \dots + G_n)\, v(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} G_j \cdot v(t) =$$

$$= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}\right) v(t) \Rightarrow v(t) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}\right)^{-1} i(t)$$

ESEMPIO:



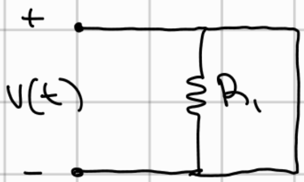
$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- Cosa succede se $R_1 = R_2$ $(= R)$?

$$R_{eq} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

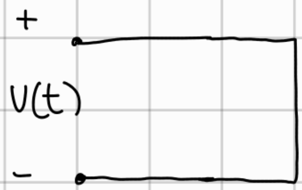
In generale, se ci sono n resistenze: $R_{eq} = \frac{R}{n}$

- Cosa succede se $R_2 = 0$?



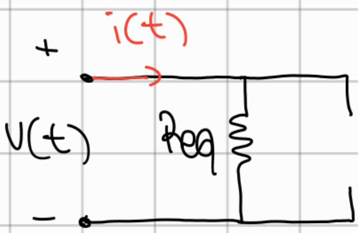
$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot 0}{R_1 + 0} = 0$$

$\equiv$

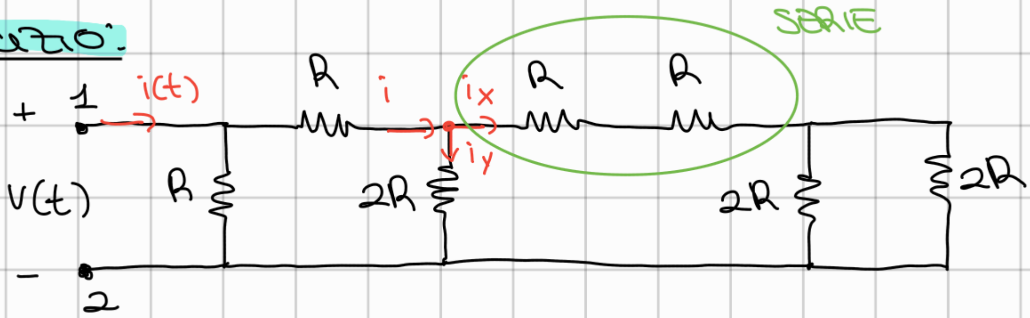


N.B: Un parallelo tra un resistore e un cc è uguale a un cc

Per rappresentare il circuito equivalente si sostituisca una delle due resistenze con un circuito aperto (che si può anche omettere in quanto non è attraversato da corrente)



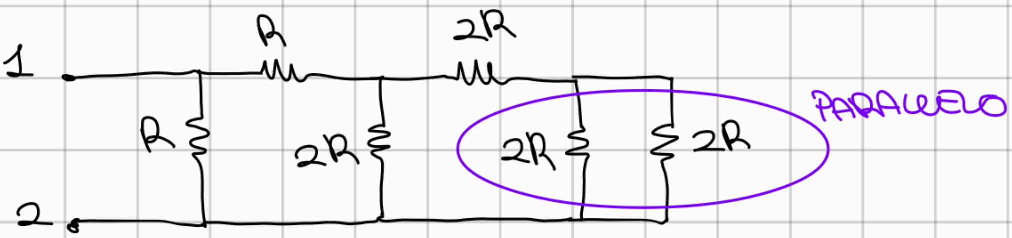
ESERCIZIO:

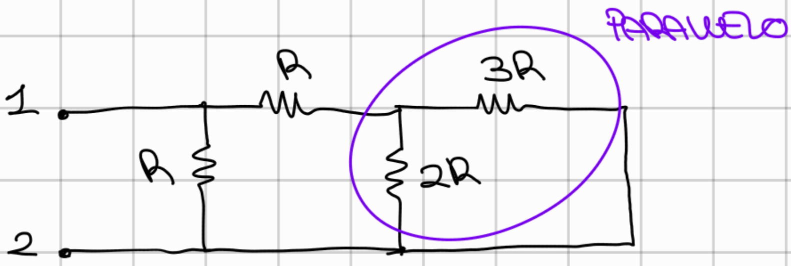


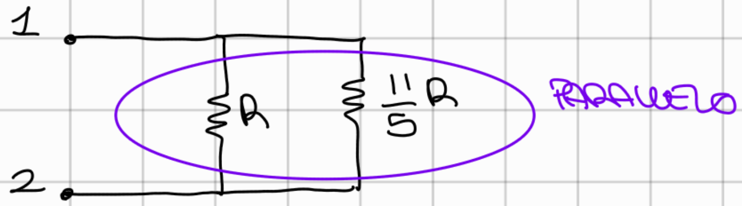
Calcolare la resistenza vista dai morsetti 1 e 2 (i quali sono collegati al resto del circuito che non ci interessa valutare)

STEP:

1) Valutare collegamenti in serie
2) Valutare collegamenti in parallelo
3) Effettuare trasformazioni $\Delta \to Y$ (triangolo → stella) o $Y \to \Delta$ (stella → triangolo)



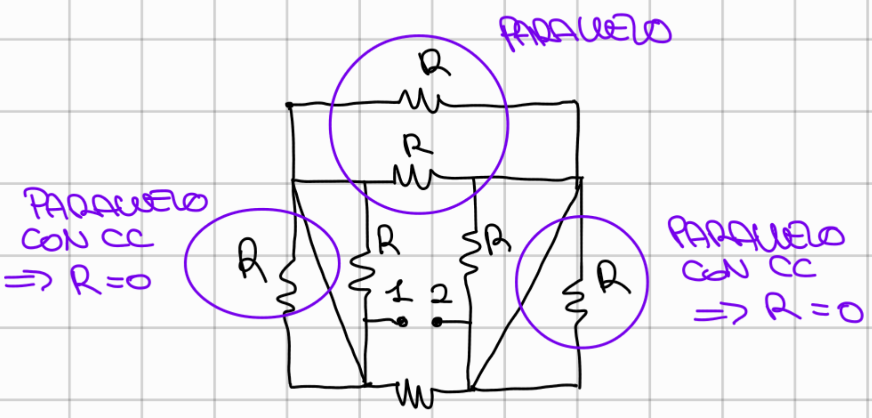


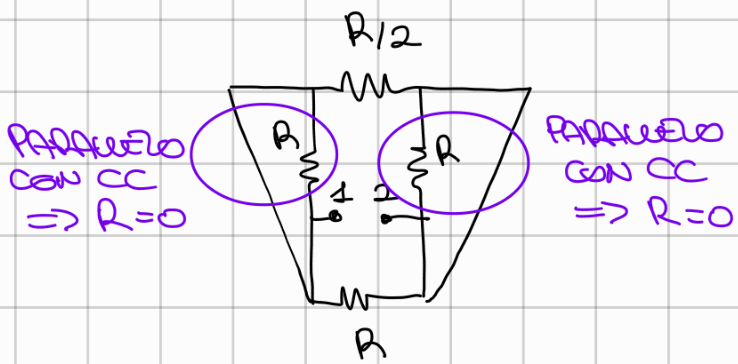


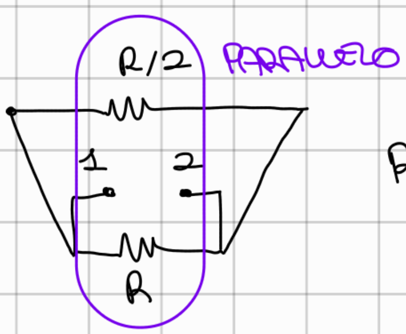
$\frac{11}{16}R$ = RESISTENZA EQUIVALENTE (O VISTA)

N.B: la stesso circuito può corrispondere a diverse R_{eq} in base a quali sono i morsetti dai quali viene vista la R_{eq} da calcolare.

ESERCIZIO: (COMPITINO 2019)
Calcolare la R_{eq} tra i morsetti 1 e 2:



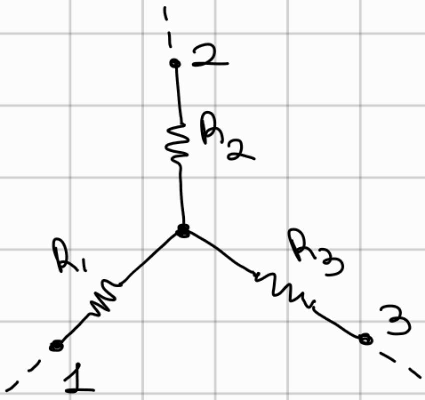




$$R_{eq} = \frac{R \cdot \frac{R}{2}}{R + \frac{R}{2}} = \frac{\frac{R^2}{2}}{\frac{3}{2}R} = \frac{R}{3}$$

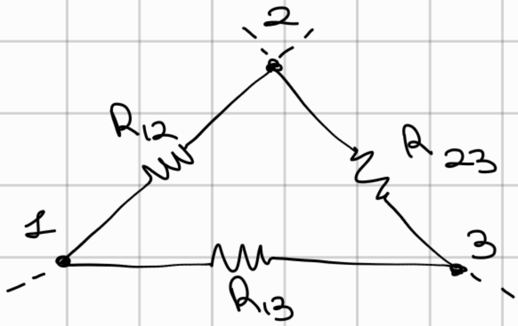
COLLEGAMENTO A STELLA (Y):

Tre resistori sono collegati a stella se hanno 1 morsetto in comune (ma si trovano a potenziali diversi).

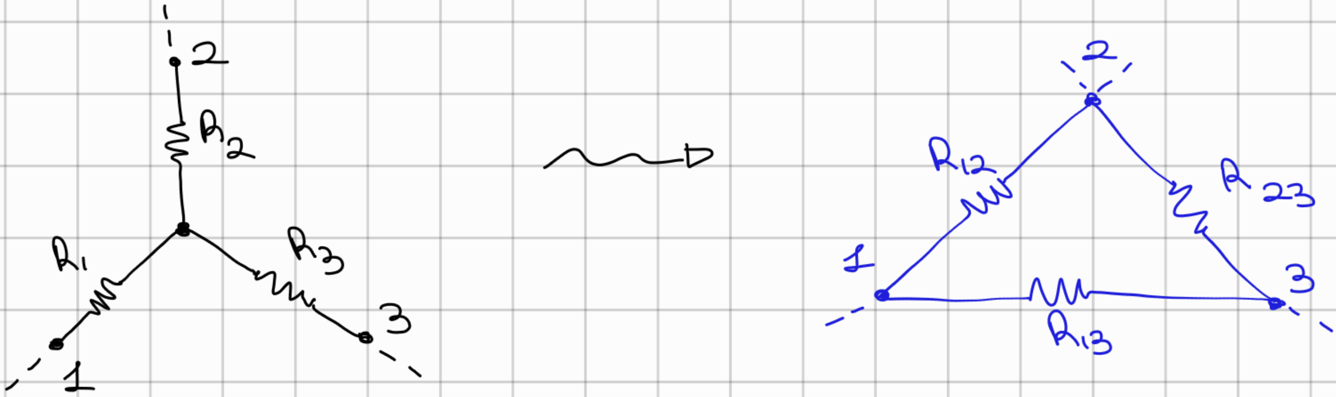


COLLEGAMENTO A TRIANGOLO (Δ):

Tre resistori sono collegati a triangolo se a due a due hanno 1 morsetto in comune.



TRASFORMAZIONE Y → Δ:



$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_3}$$

SE $R_1 = R_2 = R_3$ $(= R)$

$\Rightarrow R_{12} = R_{23} = R_{13} = 3R$

$$R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_1} \quad ; \quad R_{13} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_2}$$

TRASFORMAZIONE $\Delta \to Y$:

$$R_1 = \frac{R_{13}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}}$$

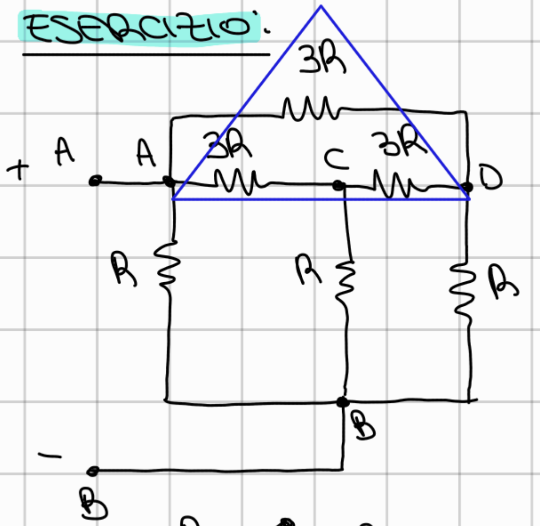
SE $R_{12} = R_{13} = R_{23}$ $(=R)$

$\Rightarrow$ $R_1 = R_2 = R_3 = \frac{R}{3}$

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}}$$

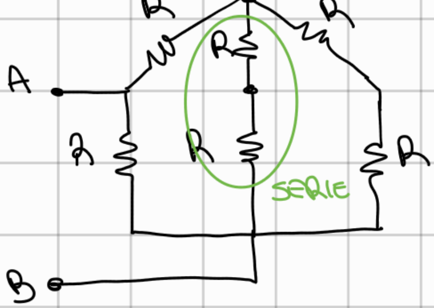
$$R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}}$$

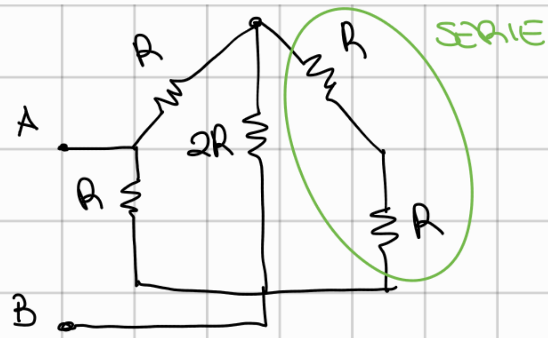
ESERCIZIO:

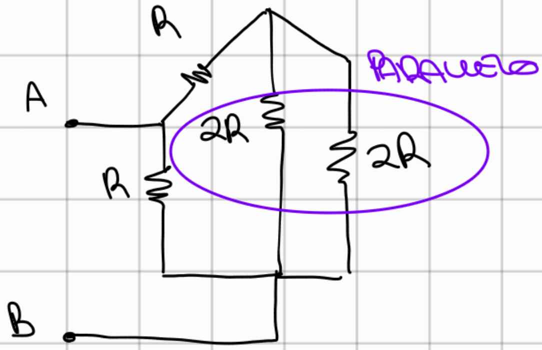


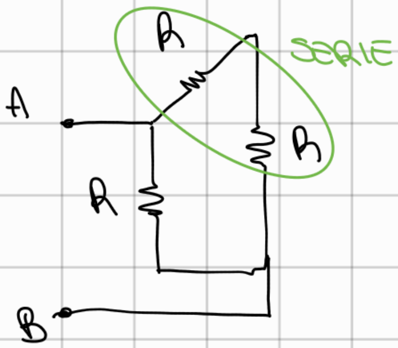
Calcolare la resistenza vista tra i morsetti A e B.

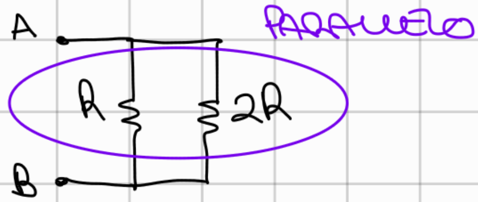
Notiamo che non ci sono né colleg. in serie, né in parallelo. Trasformiamo dunque un triangolo in stella.







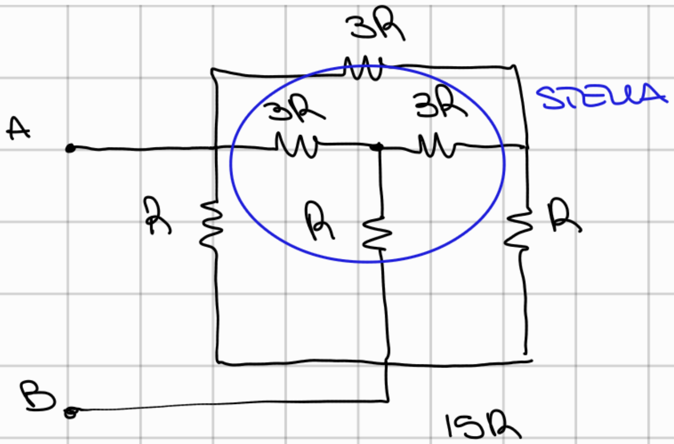


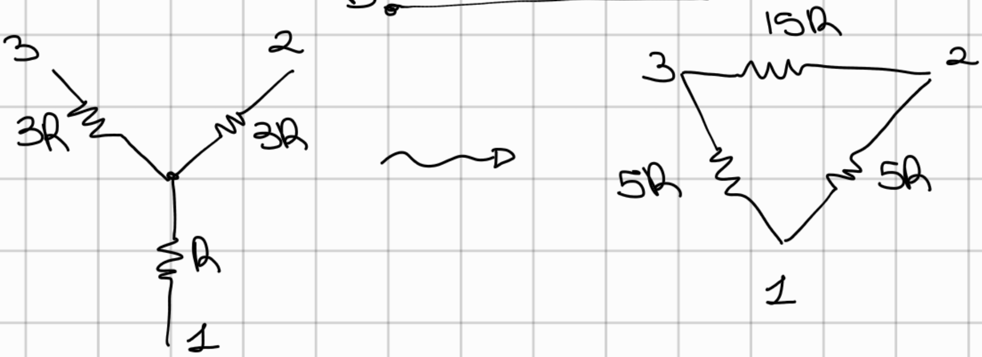


$$R_{eq} = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2R^{\cancel{2}}}{3\cancel{R}} = \frac{2}{3}R$$

N.B: Req non dipende dalle trasformazioni effettuate (perché i nodi dai quali viene visto il circuito rimangono uguali)

Infatti effettuando una diversa trasformazione (vedi pag. seguente) si ottiene lo stesso risultato.

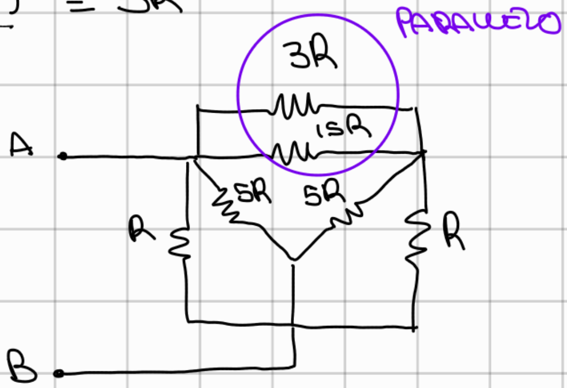




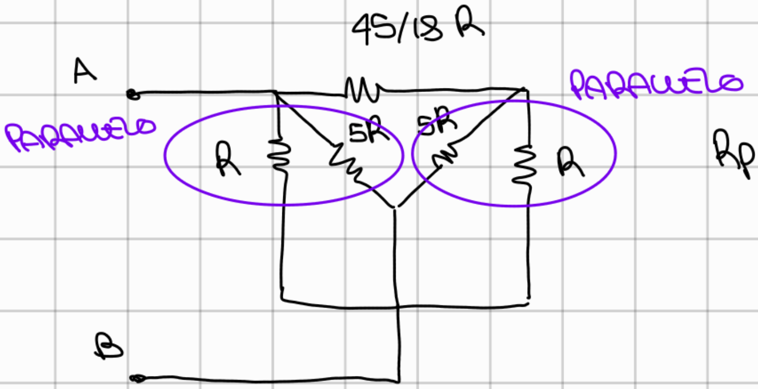
$$R_{12} = \frac{R\cdot 3R + 3R\cdot 3R + R\cdot 3R}{3R} = \frac{\cancel{3R}(5R)}{\cancel{3R}} = 5R$$

$$R_{23} = \frac{3\cancel{R}(5R)}{\cancel{R}} = 15R$$

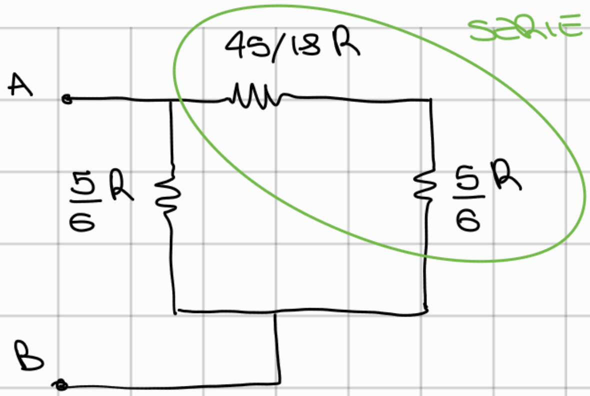
$$R_{13} = \frac{\cancel{3R}(5R)}{\cancel{3R}} = 5R$$



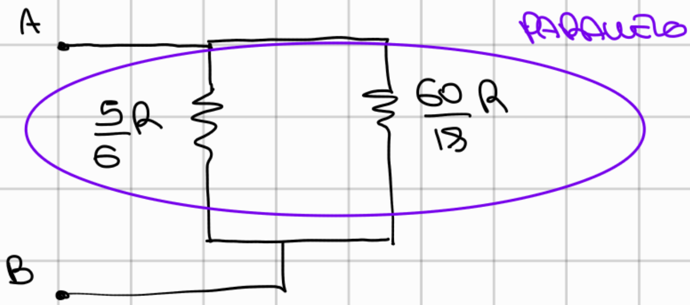
$$R_p = \frac{3R\cdot 15R}{3R+15R} = \frac{45R^{\cancel{2}}}{18\cancel{R}}$$

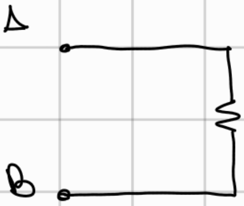


$$R_p = \frac{R\cdot 5R}{R+5R} = \frac{5R^{\cancel{2}}}{6\cancel{R}}$$



$$R_s = \frac{45}{18}R + \frac{5}{6}R = \frac{45+15}{18}R = \frac{60}{18}R$$

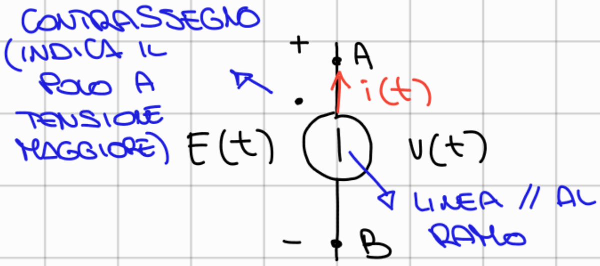


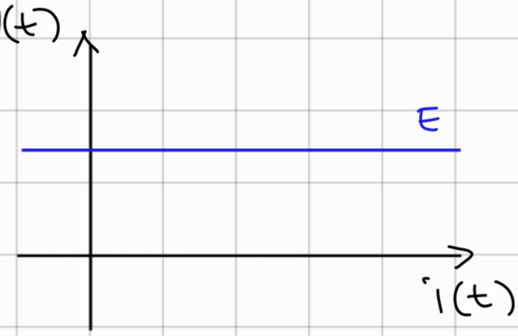


$$R_{eq} = \frac{\frac{5}{6}R \cdot \frac{60}{18}R}{\frac{5}{6}R + \frac{60}{18}R} = 0.\overline{6}R = \frac{2}{3}R$$

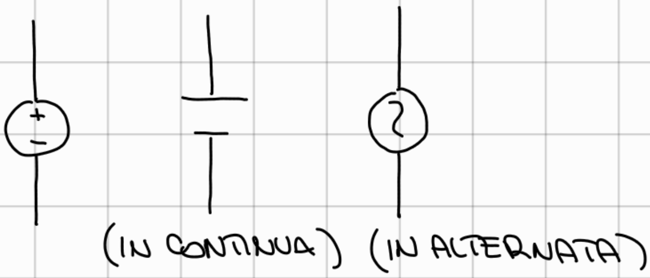
GENERATORE IDEALE DI TENSIONE

Componente circuitale a due morsetti la cui relazione identificativa è rappresentabile con una retta parallela all'asse delle ascisse nel piano tensione corrente.

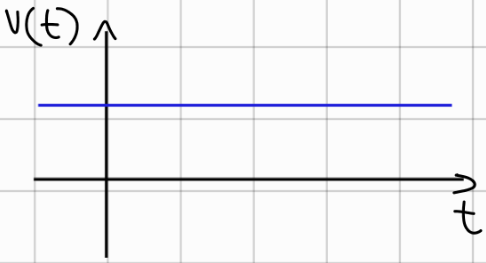




ALTRI SIMBOLI:

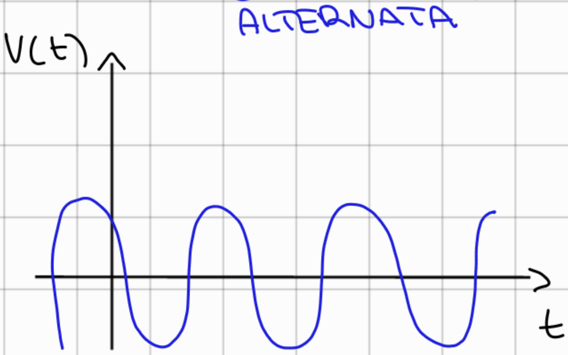


CASO TENSIONE CONTINUA



SEGNALE COSTANTE NEL TEMPO

CASO TENSIONE ALTERNATA



ANDAMENTO SINUSOIDALE: IL SEGNALE SI RIPETE OGNI CINQUANTESIMO DI SECONDO (CIOÈ OGNI 50 Hz)

Il generatore di tensione impone una tensione ai suoi morsetti indipendentemente dal valore della corrente che lo attraversa (la corrente ai suoi capi è indeterminata).

In genere si usano riferimenti <u>non</u> associati, cosicché a una potenza positiva corrisponda una potenza erogata (visto che tipicamente i generatori erogano potenza).

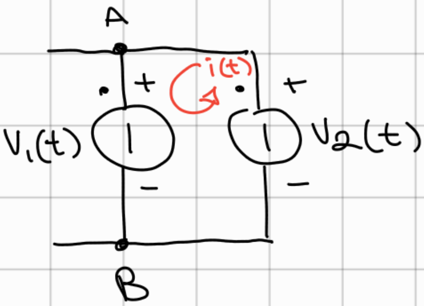
Questo componente circuitale schematizza dispositivi che sono in grado di fornire energia al circuito.

I generatori (ideali) di tensione possono essere collegati esclusivamente in serie.

$v_{AB}(t) = v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_n(t) =$

= somma algebrica delle tensioni dei singoli generatori

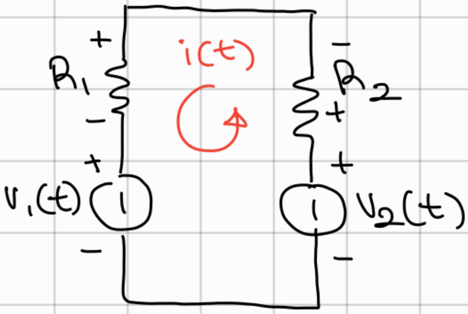
Il collegamento in parallelo può essere effettuato solo se i generatori hanno la stessa tensione, altrimenti si violerebbe il II principio di Kirchhoff:



$v_{AB}(t) = v_1(t) = v_2(t)$

$v_1(t) - v_2(t) = 0 \iff v_1(t) = v_2(t)$

I generatori reali di tensione possono invece essere collegati in parallelo come segue:



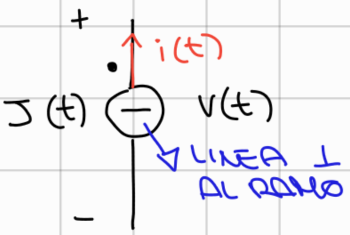
$-v_2(t) + R_2 i(t) + R_1 i(t) + v_1(t) = 0$

$i(t) = \dfrac{v_2(t) - v_1(t)}{R_1 + R_2}$

Se il generatore eroga una tensione pari a zero equivale a un corto circuito.

GENERATORE IDEALE DI CORRENTE

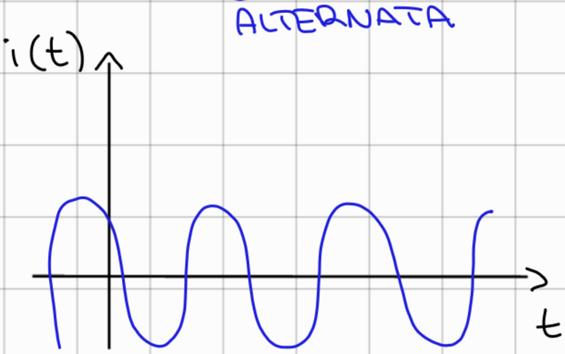
Componente circuitale a due morsetti la cui relazione costitutiva è rappresentabile con una retta parallela all'asse delle ordinate nel piano tensione corrente.



ALTRI SIMBOLI:

CASO CORRENTE CONTINUA

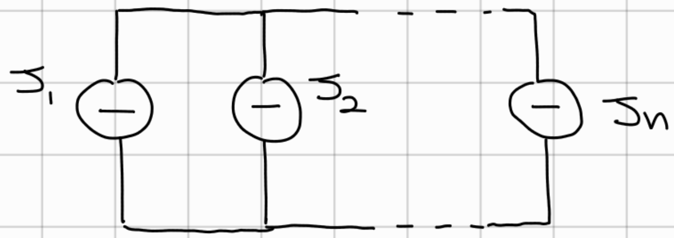
CASO CORRENTE ALTERNATA



Il generatore di corrente impone una corrente nel ramo in cui è posto indipendentemente dal valore della tensione ai suoi morsetti (la tensione ai capi è dunque indeterminata).

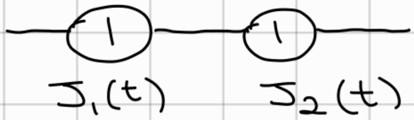
Convenzionalmente si usano riferimenti <u>non</u> associati.

I generatori (ideali) di corrente possono essere collegati esclusivamente in parallelo.



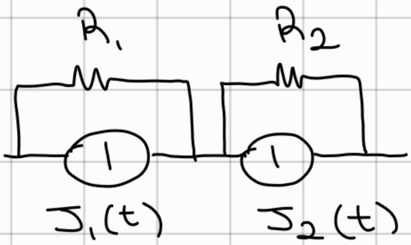
$$J(t) = J_1(t) + J_2(t) + \dots + J_n(t)$$

Il collegamento in serie può essere effettuato solo se i generatori hanno la stessa corrente, altrimenti si violerebbe il I principio di Kirchhoff:



$$J_1(t) - J_2(t) = 0 \iff J_1 = J_2$$

I generatori reali di corrente possono invece essere collegati in serie come segue:



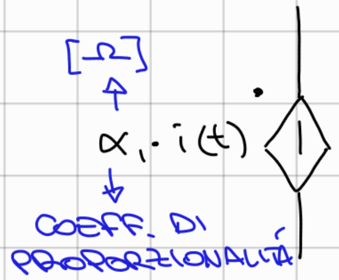
Se il generatore eroga una corrente pari a zero equivale a un circuito aperto.

I generatori illustrati fin ora sono detti GENERATORI INDIPENDENTI, in quanto impongono una tensione o corrente con un andamento temporale assegnato e rappresenta un termine noto del circuito in cui vengono impiegati.

GENERATORI PILOTATI (O DIPENDENTI / CONTROLLATI)

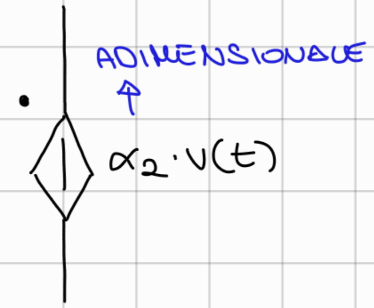
Sono generatori di tensione o corrente che impongono tensioni o correnti determinate da altre tensioni o correnti nel circuito.

GENERATORE DIPEND. DI TENSIONE (CONTROLLATO IN CORRENTE)

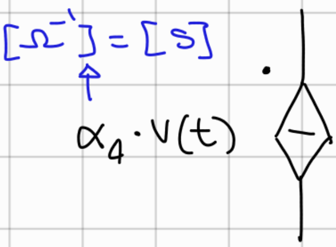


LA TENSIONE DEL GEN. DIPENDE DA UNA CORRENTE i(t) (MOLTIPL. PER UN COEFF α_1) CHE APPARTIENE A UN QUALSIASI RAMO DEL CIRCUITO

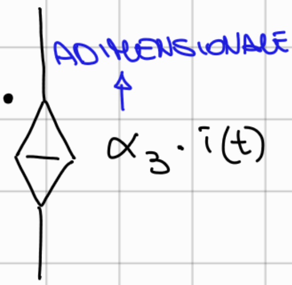
GEN. DIPEND. DI TENSIONE (CONTROLLATO IN TENSIONE)



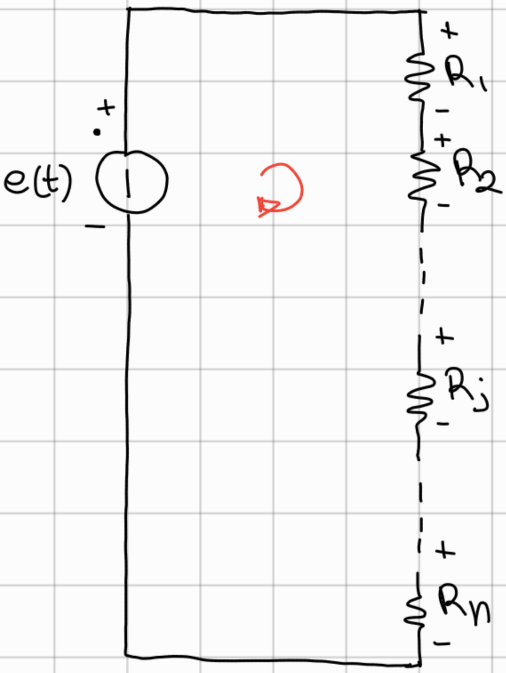
GENERATORE DIPEND. DI CORRENTE (CONTROLLATO IN TENSIONE)



GEN. DIPEND. DI CORRENTE (CONTROLLATO IN CORRENTE)



PARTITORE DI TENSIONE



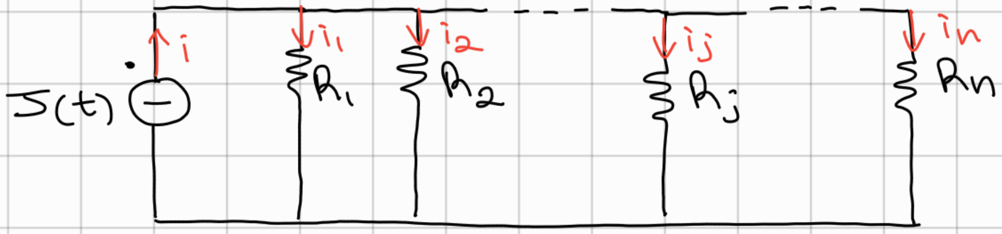
$$-e(t) + R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) + \ldots + R_j i_j(t) + \ldots + R_n i_n(t) = 0$$

$$i(t) = \frac{e(t)}{R_1 + R_2 + \ldots + R_j + \ldots + R_n}$$

$$v_j(t) = R_j \cdot i(t)$$

$$\boxed{v_j = e(t) \frac{R_j}{\sum_{i=1}^{n} R_i}}$$

PARTITORE DI CORRENTE



$$J(t) = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_j(t) + \dots + i_n(t) =$$

$$= G_1 v(t) + G_2 v(t) + \dots + G_j v_j(t) + \dots + G_n v_n(t) =$$

$$= v(t) \cdot \sum_{i=1}^{n} G_i \Rightarrow v(t) = \frac{J(t)}{\sum_{i=1}^{n} G_i}$$

$$\boxed{i_j(t) = G_j v(t) = J(t) \cdot \frac{G_j}{\sum_{i=1}^{n} G_i}}$$

06/10/2022

ESEMPIO (PARTITORE DI CORRENTE)

$$i_1 = J \cdot \frac{1/R_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = J \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = J \cdot \frac{1/R_2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = J \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

CASO $R_1 = R_2 = R$:

$i_1 = \frac{J}{2}$; $i_2 = \frac{J}{2}$

CASO $R_1 = R$; $R_2 = 2R$:

$$i_1 = J \cdot \frac{2R}{3R} = \frac{2}{3} J$$

$$i_2 = J \cdot \frac{R}{3R} = \frac{1}{3} J$$

CASO $R_1 = R$; $R_2 = 0$:

$$i_1 = J \cdot \frac{0}{R_1} = 0$$

$$i_2 = J \cdot \frac{R_1}{R_1} = J$$

$\Rightarrow$ La corrente tende a scegliere il ramo con minore resistenza

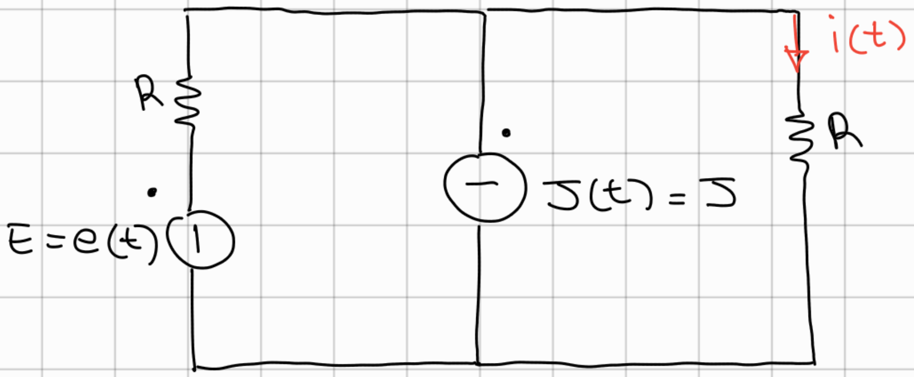
PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Il principio di sovrapposizione degli effetti afferma che è possibile determinare una tensione o corrente in un qualunque ramo di una rete sommando i valori di tensione o corrente in quel ramo che si ottengono facendo agire separatamente i generatori indipendenti della rete.

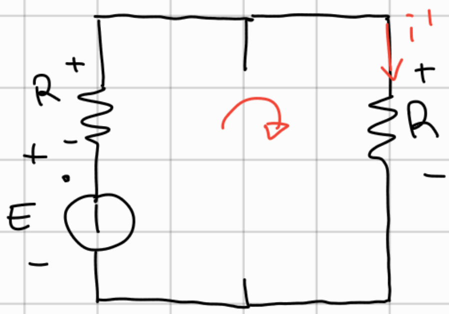
I generatori possono poi essere fatti agire uno alla volta oppure a gruppi.

La grandezza cercata si ottiene quindi studiando tanti circuiti (al massimo pari al numero di generatori della rete) in cui agiscono separatamente i generatori.

ES. Calcolare la corrente nel seguente circuito:



1) Calcoliamo la corrente senza il gen. di corrente



← PARTITORE DI TENSIONE

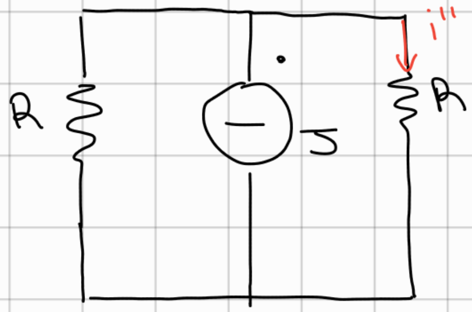
Per il II principio di Kirchhoff:

$-e(t) + Ri'(t) + Ri'(t) = 0$

$-E + 2Ri'(t) = 0$

$\Rightarrow i'(t) = \frac{E}{2R}$

2) Calcoliamo la corrente senza il gen. di tensione:



$$i''(t) = J \cdot \frac{R}{2R} = \frac{J}{2}$$

$$\Rightarrow \quad i(t) = i'(t) + i''(t) = \frac{E}{2R} + \frac{J}{2}$$

La potenza dissipata su R é pari a:

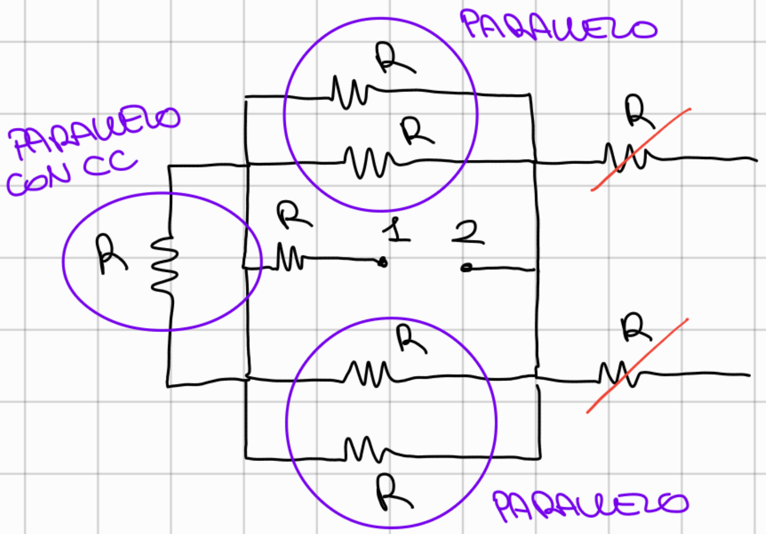
$$P_R = V(t) \cdot i(t) = R \cdot i(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) = R \left[\frac{E}{2R} + \frac{J}{2} \right]^2$$

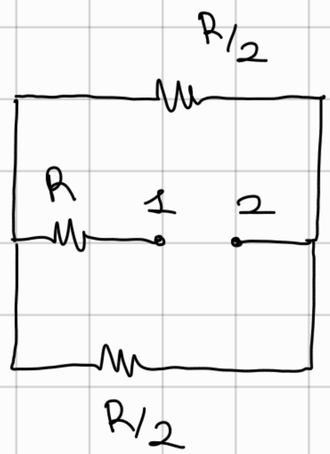
N.B: il principio di sovrapposizione degli effetti si può applicare solo su circuiti lineari.

La potenza non é lineare nella tensione / corrente $\Rightarrow$ non può essere calcolata separatamente con la sovr. degli effetti.

ESERCIZIO Req (COMPITINO 2018):

Calcolare la resistenza vista tra i morsetti 1 e 2:

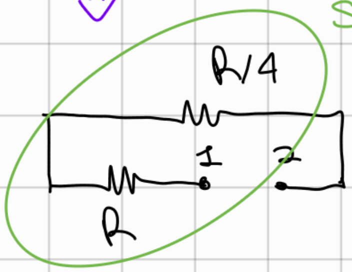




$$\frac{R}{2} \parallel \frac{R}{2}$$

$$\Downarrow$$

SERIE

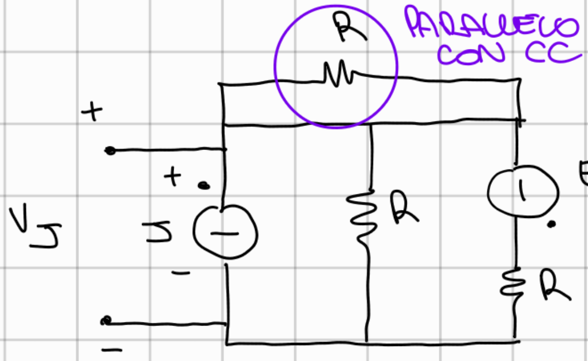


$$R_{eq} = R + \frac{R}{4} = \frac{5}{4} R$$

07/10/2022

ESERCIZIO (COMPITINO 2018):

Calcolare la potenza erogata dal gen. di corrente:

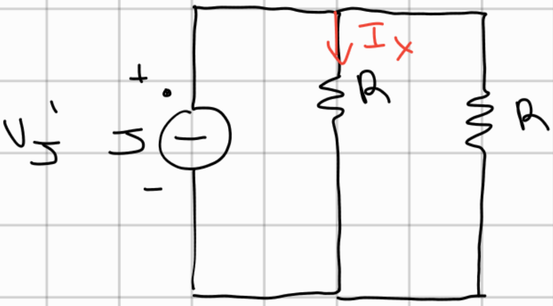


$R = 20\ \Omega$

$E = 10\ V$

$J = 1\ A$

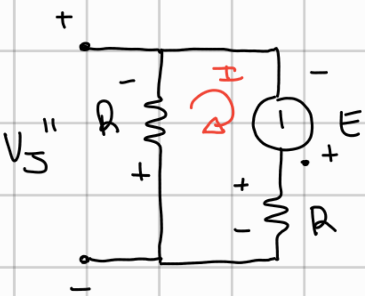
1) Calcoliamo V_J' facendo agire solo il gen. di corrente:



Per la formula del partitore di corrente $I_x = J \cdot \frac{R}{2R} = \frac{J}{2}$

$V_J' = R \cdot I_x = R \cdot \frac{J}{2}$

2) Calcoliamo V_J'' facendo agire solo il gen. di tensione:



Per la formula del partitore di tensione $I = \frac{E}{2R}$

$V_J'' = -RI = -\frac{RE}{2R} = -\frac{E}{2}$

PERCHÉ IL CONTRASSEGNO È IN BASSO

$\Rightarrow V_J = V_J' + V_J'' = \frac{RJ}{2} - \frac{E}{2}$

$P = V_J \cdot i = \left(\frac{RJ}{2} - \frac{E}{2}\right) \cdot J = \frac{20 - 10}{2} \cdot 1 = 5\ W$

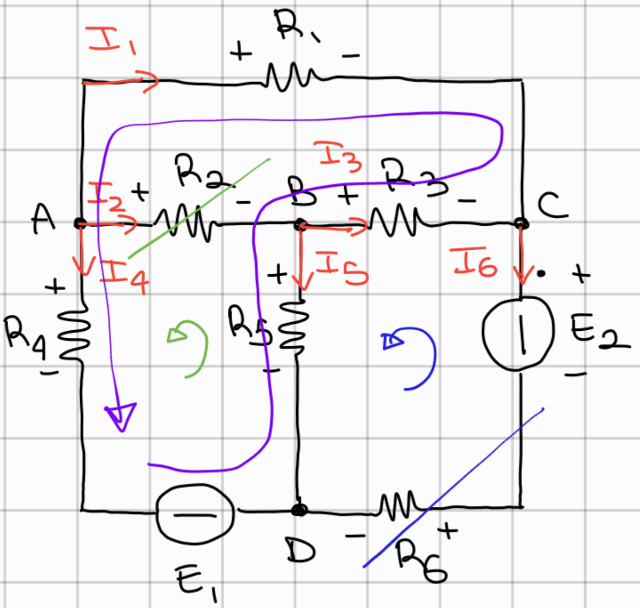
METODO DELLE CORRENTI DI RAMO (O METODO DEL TABLEAU)

Il metodo del tableau é uno dei metodi generali per la risoluzione di un circuito (un circuito si dice risolto se sono state calcolate tutte le correnti e tensioni per ogni ramo).

In particolare questo metodo usa i principi di Kirchoff per ottenere un sistema di equazioni le cui incognite sono le correnti nei rami di una rete.

Formalmente avremmo 2r incognite (r = num. rami), ma ne consideriamo solo r perché una volta ottenute le r correnti le rispettive tensioni possono essere ricavate tramite la I legge di Ohm.

ES.



STEP:

1) Dare un nome ai nodi
2) Dare un nome alle correnti di ramo
3) Scrivere n-1 equazioni ai nodi (n = num. nodi) con il I principio di Kirchoff
4) Scrivere le r-(n-1) equazioni alle maglie con il II principio di Kirchoff

Scegliamo arbitrariamente gli n-1 nodi per i quali applicare il I principio di Kirchhoff:

A: $I_1 + I_2 + I_4 = 0$

B: $I_2 = I_3 + I_5$

C: $I_1 + I_3 = I_6$

Scegliamo arbitrariamente la prima maglia per la quale applicare il II principio di Kirchhoff:

$\circlearrowleft$: $-R_6 I_6 - E_2 - R_3 I_3 - R_5 I_5 = 0$

Utilizziamo il "metodo del taglio", ovvero cancelliamo idealmente un ramo della maglia scelta in precedenza e scegliamo arbitrariamente un'altra maglia nel circuito restante.

$\circlearrowleft$: $E_1 - R_5 I_5 - R_2 I_2 + R_4 I_4 = 0$

Applichiamo nuovamente il metodo del taglio e scegliamo un'altra maglia.

$\circlearrowleft$: $E_1 - R_5 I_5 + R_3 I_3 - R_1 I_1 + R_4 I_4 = 0$

Non ci sono più maglie e abbiamo scritto un sistema di r equazioni linearmente indipendenti, ora possiamo risolverlo.

Per risolvere il sistema $Ax = b$ lo si scrive in forma matriciale; il vettore soluzione sarà $x = A^{-1}b$

A = matrice $r \times r$

x = vettore incognite di dim. $r \times 1$

b = vettore dei termini noti di dim $r \times 1$

$$\begin{array}{ccc} A & x & b \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -R_3 & 0 & R_5 & -R_6 \\ 0 & -R_2 & 0 & R_4 & -R_5 & 0 \\ -R_1 & 0 & R_3 & R_4 & -R_5 & 0 \end{bmatrix} \cdot & \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_2 \\ -E_1 \\ -E_1 \end{bmatrix} \end{array}$$

PRO:

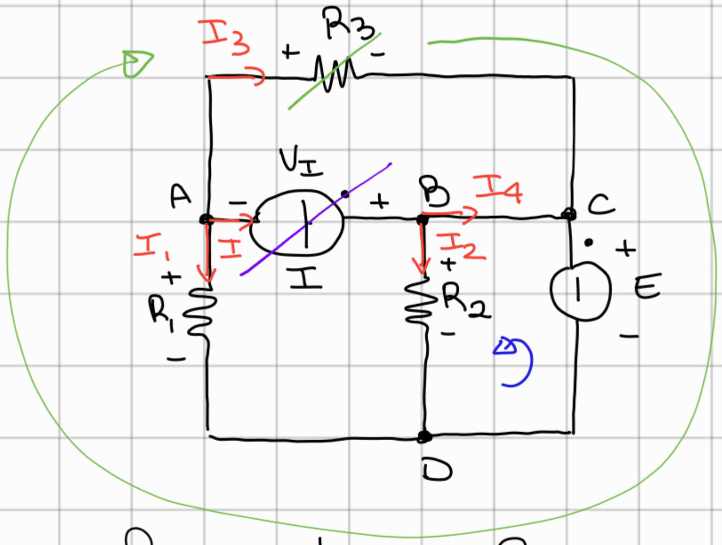
- Il metodo del tableau consente di risolvere qualsiasi circuito

CONTRO:

- Ci obbliga a risolvere l'intero circuito, non solo una parte
- Altri algoritmi sono più convenienti perché usano meno di r equazioni

METODO DEL TABLEAU NEL CASO DI CIRCUITI CON GENERATORI DI CORRENTE

ES



Nel ramo che contiene il generatore di corrente la corrente é giá nota e pari a I, di conseguenza il numero di equazioni totali diventa $r - \underbrace{N_{gc}}_{\text{NUM. GEN. DI CORRENTE}}$.

Applichiamo il I principio di Kirchoff a n-1 nodi:

A: $I + I_1 + I_3 = 0$
B: $I = I_2 + I_4$
C: $I_3 + I_4 = I_5$

Cancelliamo idealmente il ramo contenente il generatore di corrente poiché ai suoi capi la caduta di tensione risulta indeterminata.

Applichiamo ora il II principio di Kirchoff alle $r - N_{gc} - (n-1)$ maglie:

$R_3 I_3 + E - R_1 I_1 = 0$
$E - R_2 I_2 = 0$

$Ax = b \quad \Downarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -R_1 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I \\ I \\ 0 \\ -E \\ -E \end{bmatrix}$$

IL GEN. DI TENSIONE È TRA GLI INGRESSI IN QUANTO GEN. INDIPENDENTE
I GEN. DIPENDENTI INVECE NON SONO INGRESSI DEL SISTEMA

Per calcolare V_I scegliamo un percorso dal + al - di V_I: $V_I = -R_3 I_3$
Tramite I legge di Ohm si ricavano tutte le tensioni: $V_{BD} = R_2 I_2$ ...

OSS i nodi B e C sono collegati in corto circuito, quindi possono essere considerati come unico macro nodo perché sono allo stesso potenziale

In questo caso abbiamo 1 equazione ai nodi in meno e 1 incognita in meno:

A: $I + I_1 + I_3 = 0$

B: $I_1 + I_3 = I_2 + I_5$

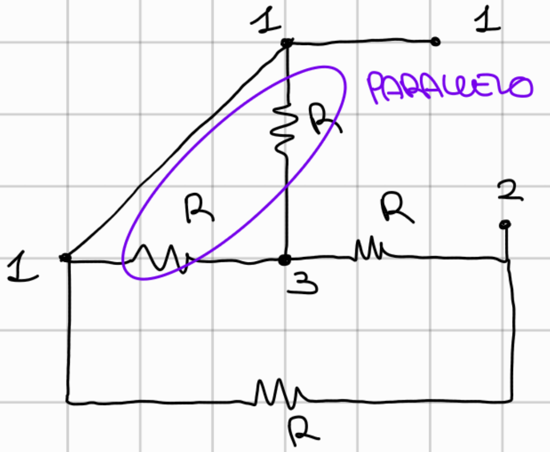
Le equazioni alle maglie rimangono invariate.

Nel caso dovessimo calcolare la corrente sul ramo sul quale abbiamo effettuato il raggruppamento, possiamo applicare il I principio di Kirchoff sul singolo nodo:

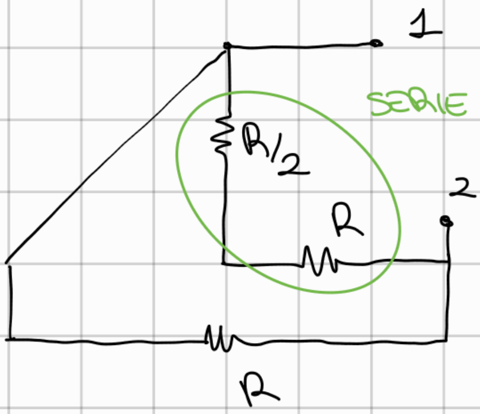
$I_4 = I - I_2$

ESERCIZIO Req:

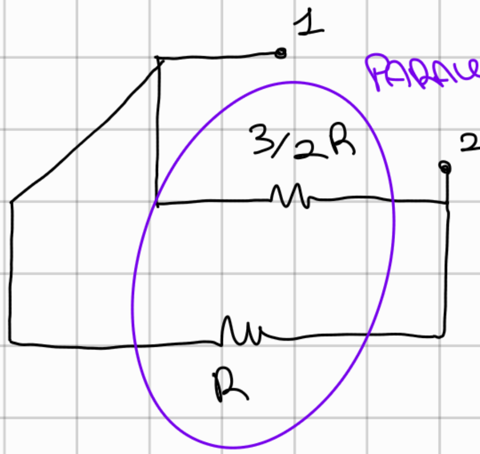
Calcolare la resistenza vista dai morsetti 1 e 2



PARALLELO (SI TROVANO ENTRAMBE TRA I POTENZIALI 1 E 3)



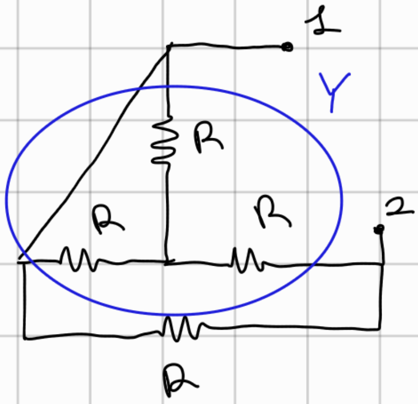
SERIE

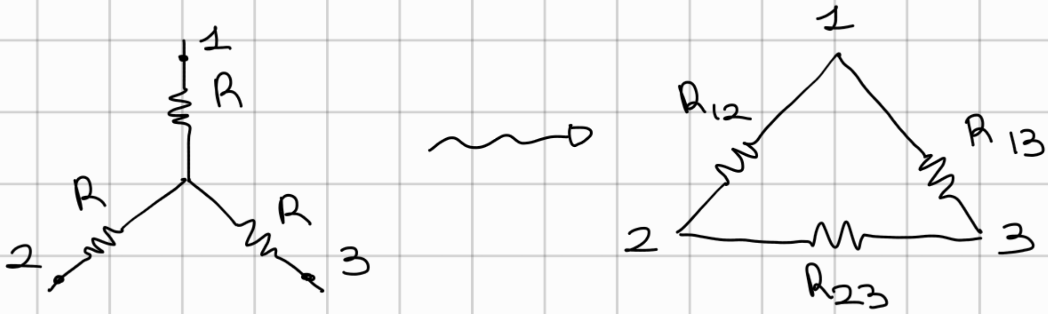


PARALLELO

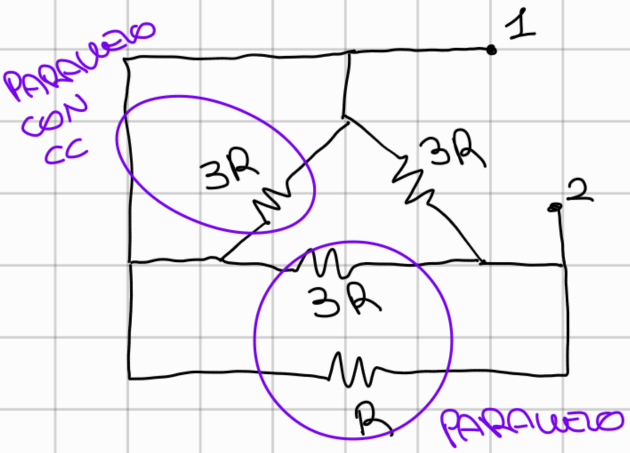
$$R_{eq} = \frac{\frac{3}{2}R^2}{\frac{5}{2}R} = \frac{3}{5}R$$

$Y \to \Delta$:





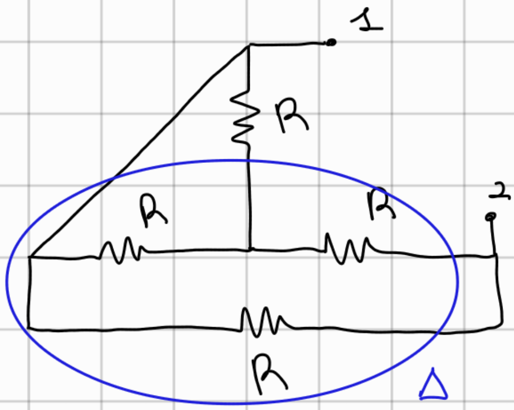
$$R_{12} = \frac{3R^{\cancel{2}}}{\cancel{R}} = 3R = R_{13} = R_{23}$$

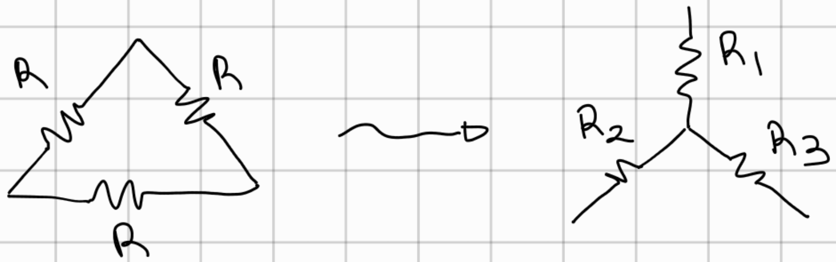


$$R_p = \frac{3R^{\cancel{2}}}{4\cancel{R}} = \frac{3}{4}R$$

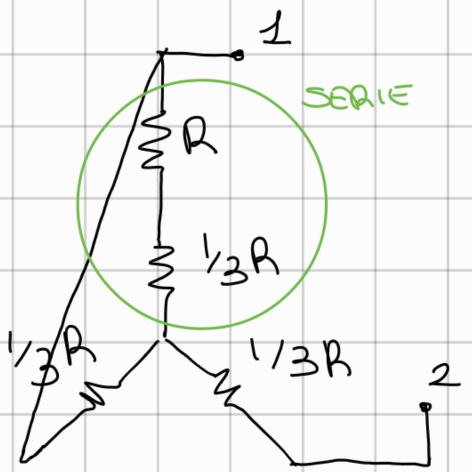
$$R_{eq} = \frac{\frac{3}{4}R \cdot 3R}{\frac{3}{4}R + 3R} = \frac{\frac{9}{4}R^2}{\frac{15}{4}R} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{4}}R^2 \cdot \frac{\cancel{4}}{\underset{5}{\cancel{15}}R} = \frac{3}{5}R$$

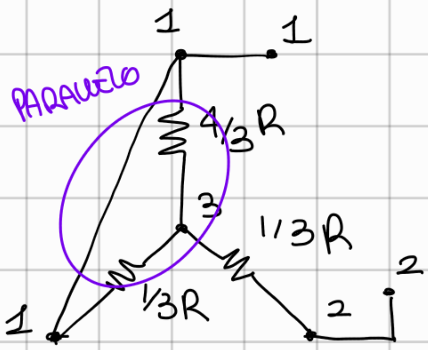
$\Delta \to Y$:

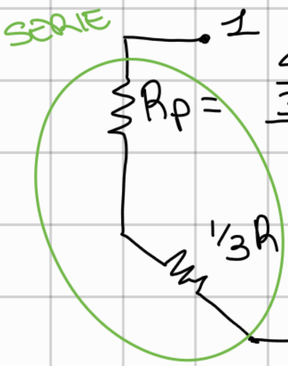




$$R_1 = \frac{R^{\cancel{2}}}{3\cancel{R}} = \frac{1}{3}R = R_2 = R_3$$



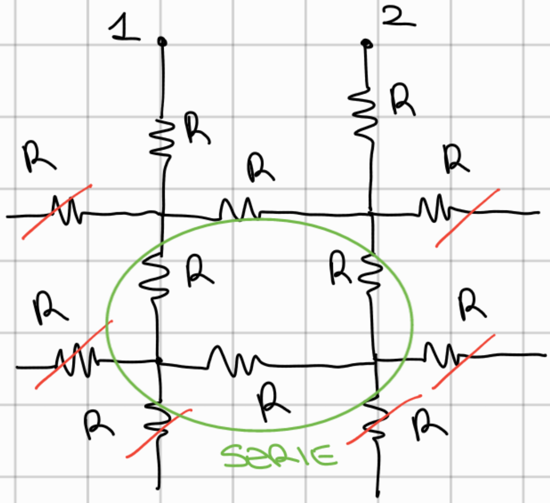


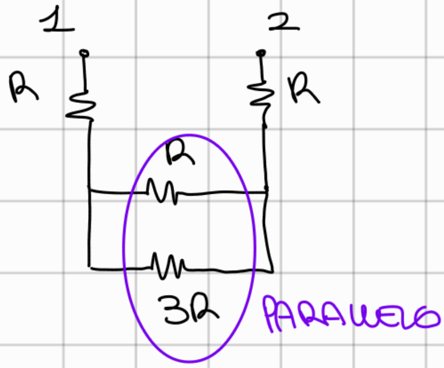


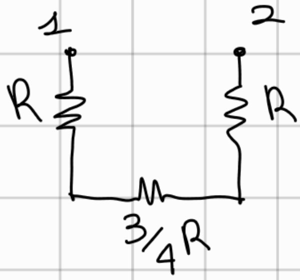
$$R_p = \frac{\frac{4}{3}R \cdot \frac{1}{3}\cancel{R}}{\frac{5}{3}\cancel{R}} = \frac{4}{9}R \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{45}R = \frac{4}{15}R$$

$$R_{eq} = \frac{4}{15}R + \frac{1}{3}R = \frac{\cancel{9}^{\,3}}{\cancel{15}_{\,5}}R = \frac{3}{5}R$$

ESERCIZIO Req:



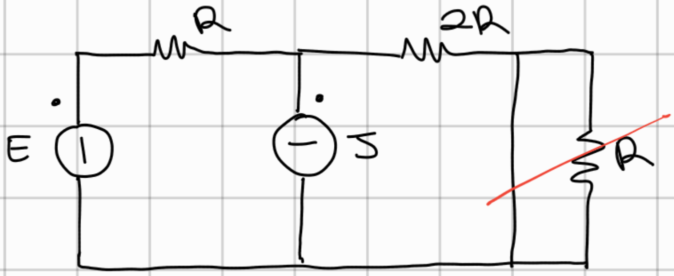




$$R_{eq} = 2R + \frac{3}{4}R = \frac{11}{4}R$$

ESERCIZIO

Calcolare la potenza dissipata sulla resistenza 2R.



$R = 10\ \Omega$

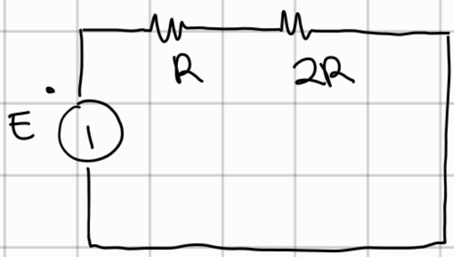
$E = 12\ V$

$J = 2A$

$P_{2R} = ?$

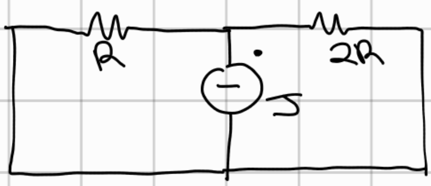
- TRAMITE SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Facendo agire solo il gen. di tensione:



$$i'(t) = \frac{E}{3R}$$

Facendo agire solo il gen. di corrente:



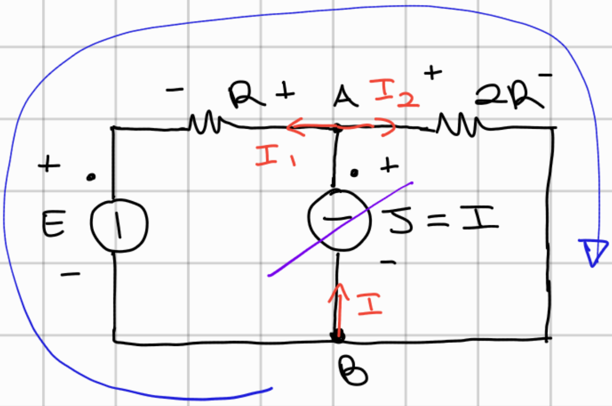
$$i''(t) = J \cdot \frac{\frac{1}{2R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = J \cdot \frac{\frac{1}{2R}}{\frac{3}{2R}} =$$

$$= J \cdot \frac{1}{2R} \cdot \frac{2R}{3} = \frac{J}{3}$$

$$i = i' + i'' = \frac{E}{3R} + \frac{J}{3}$$

$$P_{2R} = V \cdot i = 2R \cdot i^2 = 2R\left[\frac{E}{3R} + \frac{J}{3}\right]^2 = 22.8 \text{ W}$$

- TRAMITE METODO DEL TABLEAU



$$A:\ I - I_1 - I_2 = 0$$

$$\circlearrowright:\ -E - RI_1 + 2RI_2 = 0$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -R & 2R \end{bmatrix}} \underset{x}{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} I \\ E \end{bmatrix}} \qquad A^{-1} = \frac{1}{2R+R}\begin{bmatrix} 2R & 1 \\ R & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & \frac{1}{3R} \\ -1/3 & \frac{1}{3R} \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3R} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3R} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}I + \frac{E}{3R} \\ \frac{1}{3}I + \frac{E}{3R} \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \overbrace{\frac{2}{3}I + \frac{E}{3R}}^{1.73 \text{ A}} \ ; \quad I_2 = \overbrace{\frac{1}{3}I + \frac{E}{3R}}^{1.06 \text{ A}} \Rightarrow V_{2R} = 2RI_2 = 21.3 \text{ V}$$

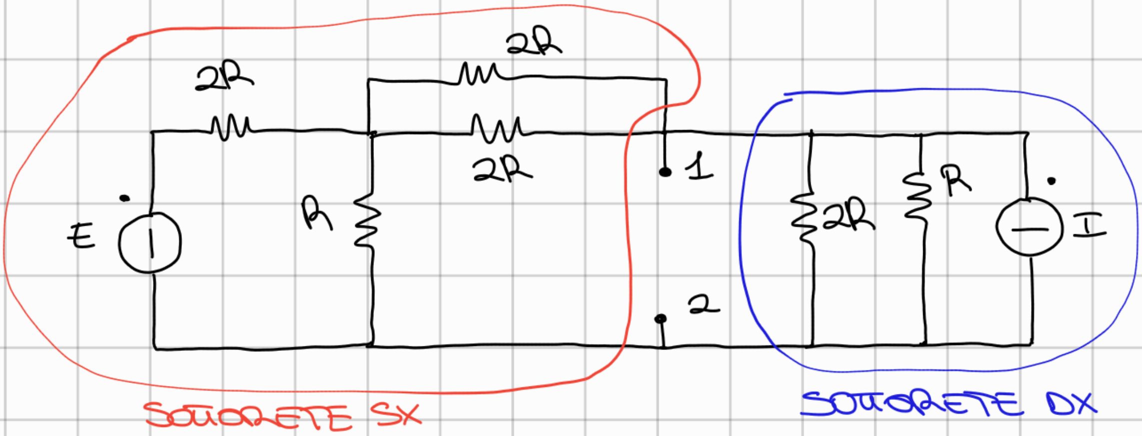
$$P = V_{2R} \cdot i = V_{2R} \cdot \frac{V_{2R}}{2R} = \frac{V_{2R}^2}{2R} = 22.8 \text{ W}$$

11/10/2022

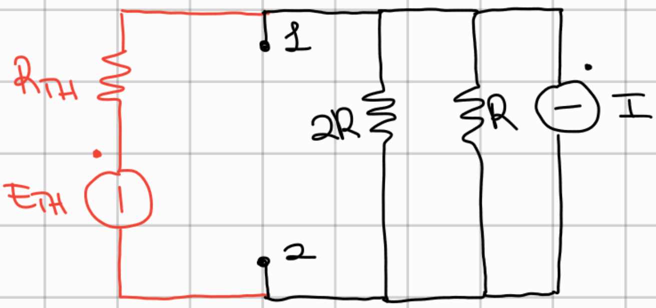
TEOREMA DI THEVENIN

In presenza di una sottorete lineare e isolata accessibile tramite due morsetti è possibile trovare un circuito equivalente ad essa composto da un generatore di tensione con in serie una resistenza.

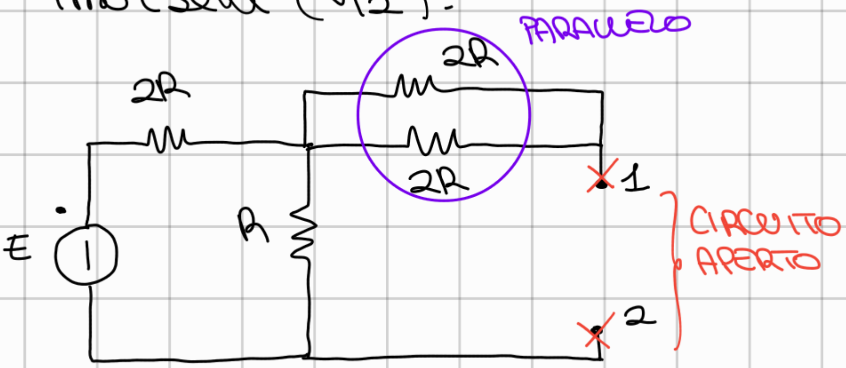
ES

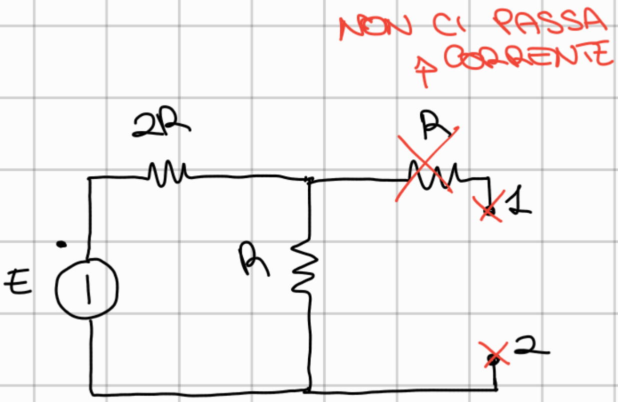


Troviamo l'equivalente di Thevenin per la sottorete di SX, ovvero:



1) Calcoliamo la tensione di Thevenin E_{TH} che equivale alla tensione a vuoto tra i due morsetti (V_{12}):



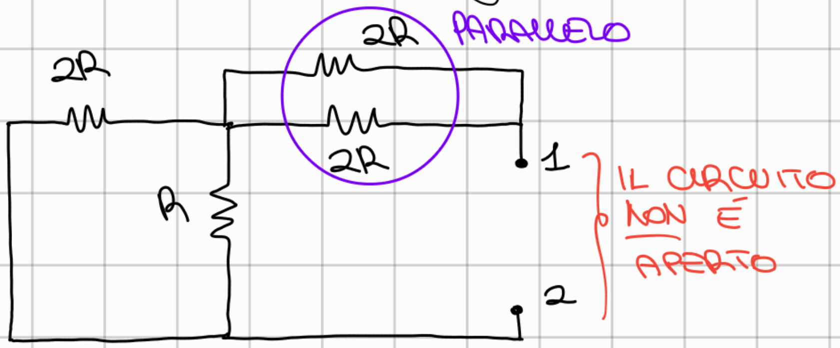


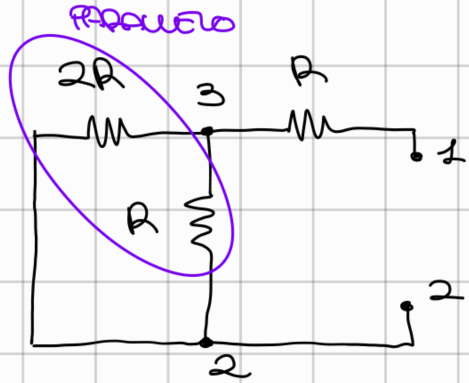
Per la formula del partitore di tensione:

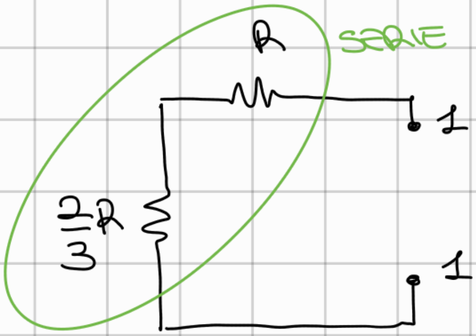
$$V_{12} = E_{TH} = E \cdot \frac{R}{2R+R} = \frac{E}{3}$$

N.B. affinché $V_{12} = E_{TH}$ é necessario che il contrassegno sia dal lato del morsetto 1, altrimenti $V_{12} = -E_{TH}$

2) Calcoliamo la resistenza di Thevenin R_{TH}, ovvero la resistenza vista tra i morsetti dopo aver disattivato tutti i generatori indipendenti

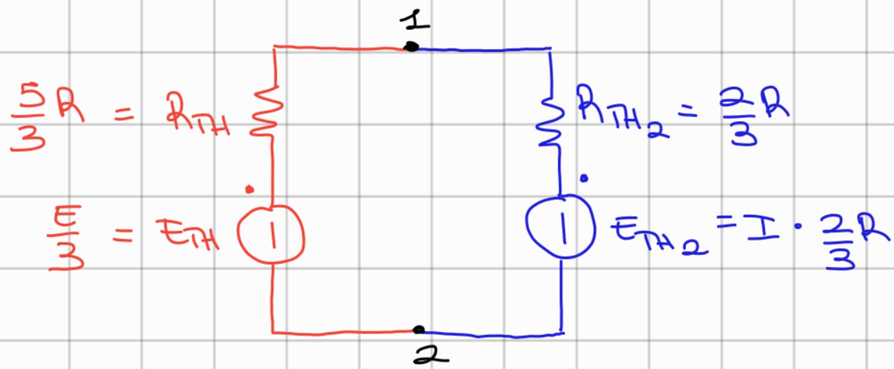






$$R_{eq} = R_{TH} = \frac{2}{3}R + R = \frac{5}{3}R$$

Calcoliamo ora l'equivalente di Thevenin della sottorete dx:

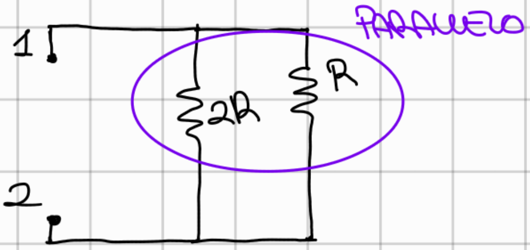


1) Calcoliamo E_{TH2}:

Per la formula del partitore di corrente:

$$E_{TH2} = I \cdot \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}} = I \cdot \frac{2}{3} R$$

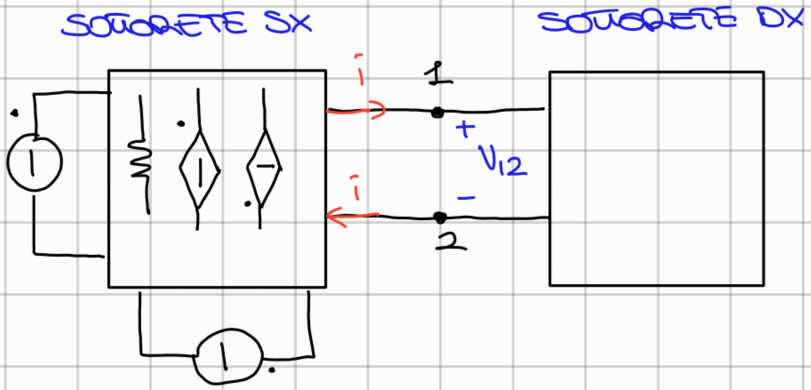
2) Calcoliamo R_{TH2}:



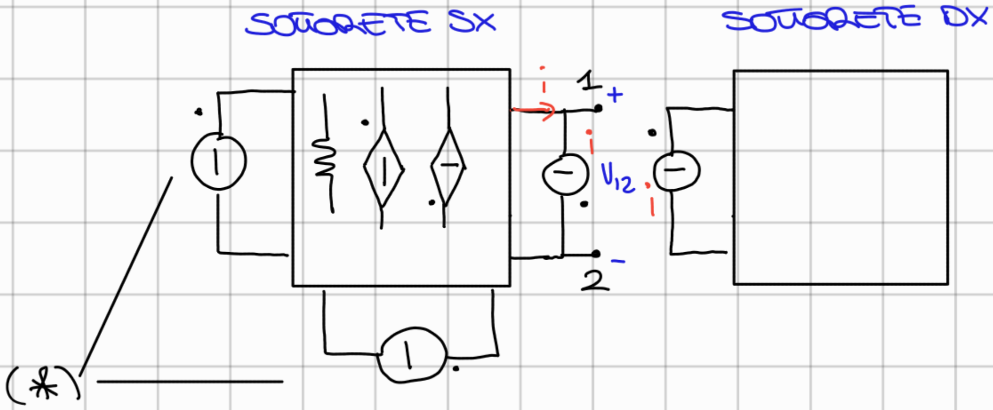
$$R_{TH2} = \frac{2R^{\cancel{2}}}{3\cancel{R}} = \frac{2}{3} R$$

DIMOSTRAZIONE TH DI THEVENIN

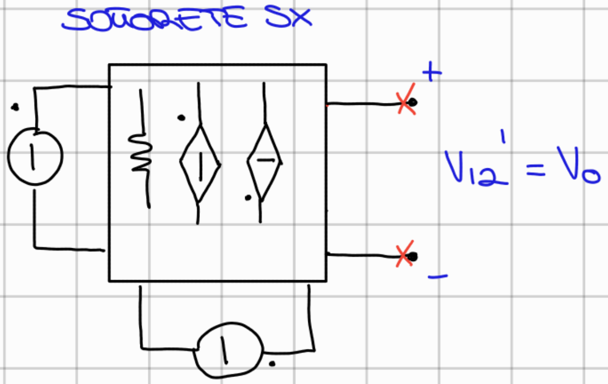
Schematizziamo il circuito da semplificare come segue, inserendo all'interno delle sottoreti i vari componenti circuitali che possono essere presenti.
Disegniamo all'esterno i generatori indipendenti in quanto andranno disattivati per il calcolo di R_{TH}.



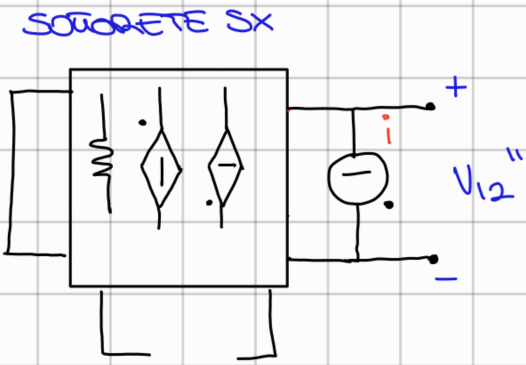
Separiamo ora le due sottoreti inserendo due generatori di corrente che erogano una corrente pari a i (in modo che tutto rimanga invariato agli effetti esterni).



Possiamo calcolare V_{12} tramite il principio di sovrapposizione degli effetti come $V_{12}' + V_{12}''$ dove V_{12}' é la tensione ai capi del gen. di corrente quando mantengo attivi tutti i gen. indipendenti della rete (*) e disattivo solo quello di corrente:

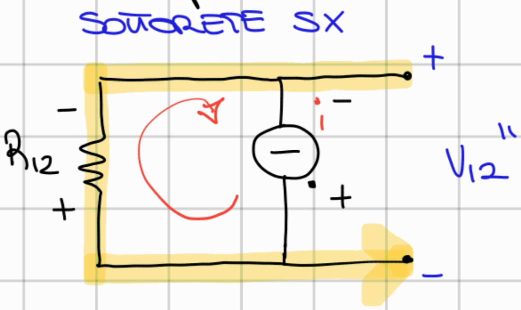


mentre V_{12}'' é la tensione ai capi del gen. di corrente quando disattivo tutti i gen. indipendenti e mantengo attivo solo il gen. di corrente:



Il circuito che resta in questo caso é puramente resistivo, o comunque passivo.

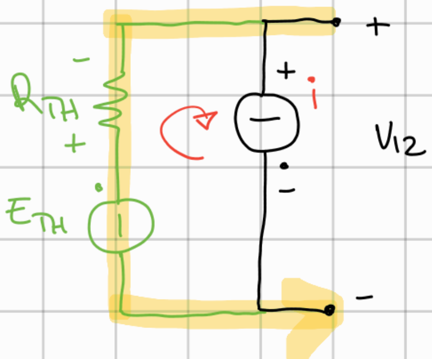
Chiamiamo R_{12} la resistenza equivalente tra i morsetti 1 e 2 dopo aver disattivato i gen. indipendenti



e calcoliamo V_{12}'' facendo un percorso dal + al - di V_{12}'':

$V_{12}'' = -R_{12} \cdot i \quad \Rightarrow V_{12} = V_0 - R_{12} \cdot i$

Per il th di Thevenin possiamo sostituire la sottorete da semplificare con un gen. di tensione con in serie una resistenza:



Calcoliamo nuovamente V_{12}:

$V_{12} = -R_{TH} \cdot i + E_{TH}$

Affinché la tensione ai capi dell'equiv. di Thevenin sia la stessa di prima è necessario che:

$E_{TH} = V_0$ e $R_{TH} = R_{12}$ C.V.D.

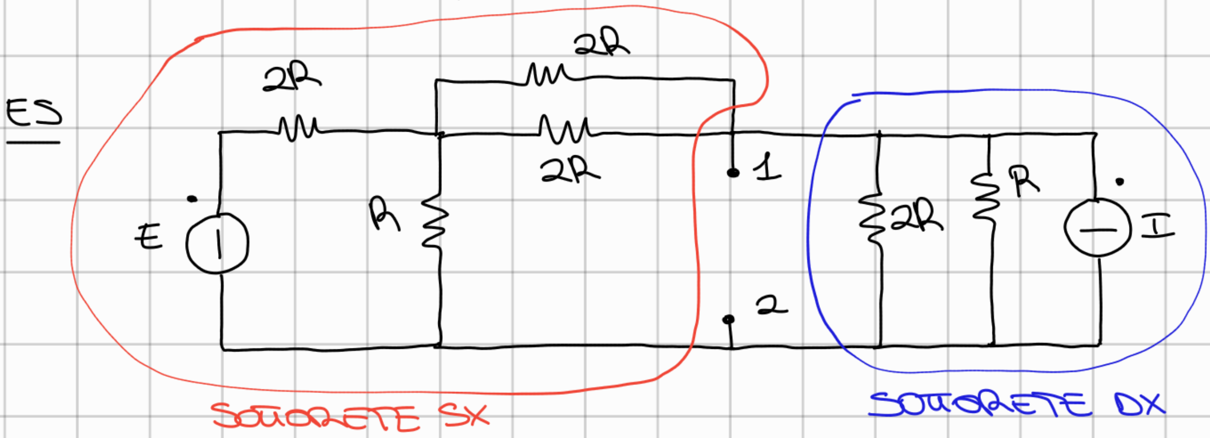
Riguardo le ipotesi del teorema:

- sottorete lineare: altrimenti non avremmo potuto applicare il principio di sovrapposizione degli effetti
- sottorete isolata: se ci sono gen. pilotati, la grandezza pilota deve trovarsi all'interno della stessa sottorete

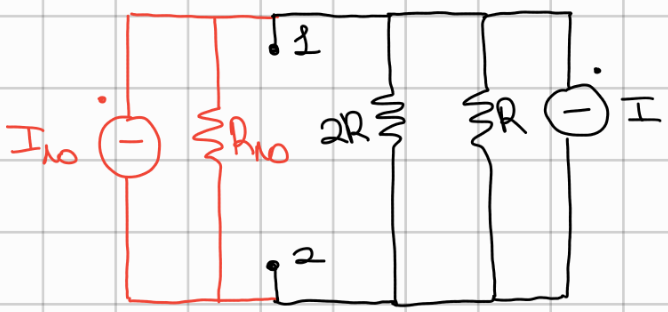
TEOREMA DI NORTON

In presenza di una sottorete lineare e isolata accessibile tramite due morsetti è possibile trovare un circuito equivalente ad essa composto da un generatore di corrente con in parallelo una resistenza.

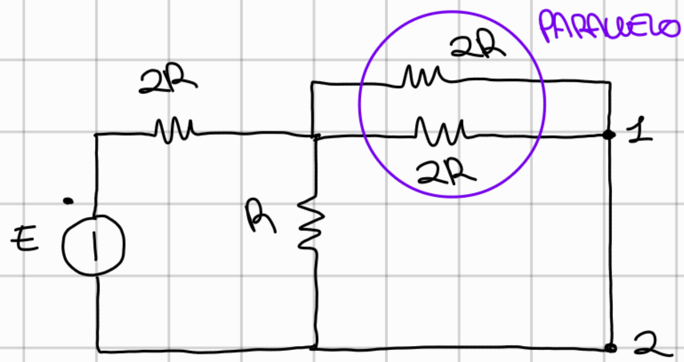
ES



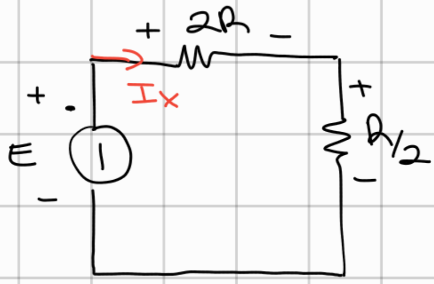
Troviamo l'equivalente di Norton per la sottorete di sx, ovvero:



1) Calcoliamo I_{NO}, ovvero la corrente che scorre sul ramo ottenuto cortocircuitando i morsetti 1 e 2:



Se calcolassimo il parallelo tra R e R perderemmo il ramo su cui scorre I_{NO}.
Possiamo però notare che $I_x = \frac{1}{2} I_{NO}$ in quanto si ripartisce in parti uguali sui due rami in parallelo.
A questo punto non è più un problema perdere il ramo tra i morsetti 1 e 2 perché possiamo ricavare I_{NO} dalla precedente relazione.

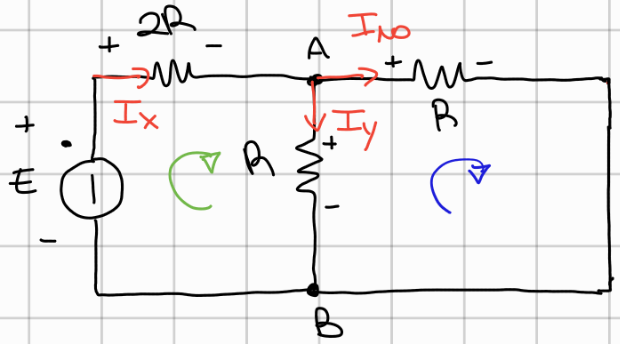


PARTITORE DI TENSIONE ⇒

$$I_x = \frac{E}{2R + \frac{R}{2}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{E}{R}$$

$$I_{NO} = 2 \cdot I_x = \frac{E}{5R}$$

Altrimenti, per trovare I_{NO} avremmo potuto utilizzare il metodo del tableau:



A: $I_x = I_{NO} + I_y$

$R I_{NO} - R I_y = 0$

$2R I_x + R I_y - E = 0$

$$\begin{cases} I_x = I_{NO} + I_y \\ R I_{NO} - R I_y = 0 \\ 2R(I_{NO} + I_y) + R I_y - E = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_x = I_{NO} + I_y \\ R I_{NO} - R I_y = 0 \\ 2R I_{NO} + 3R I_y - E = 0 \end{cases}$$

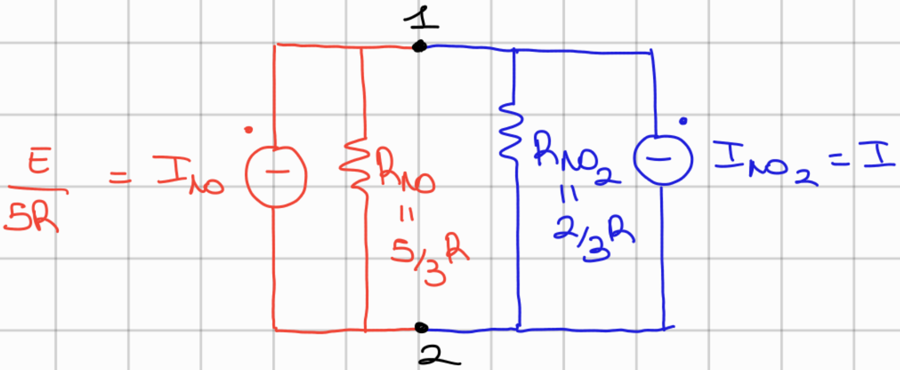
$$\begin{cases} I_x = I_{NO} + I_y \\ I_{NO} = I_y \\ 5R I_y - E = 0 \end{cases} \Rightarrow I_y = I_{NO} = \frac{E}{5R}$$

Valgono le seguenti relazioni:

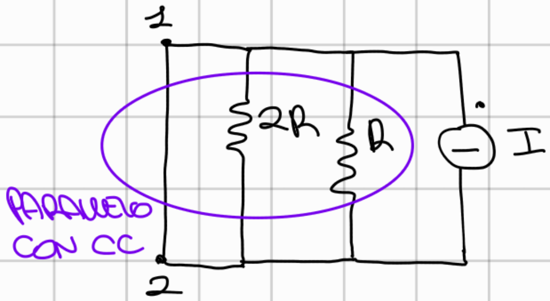
$R_{TH} = R_{NO}$

$$\boxed{I_{NO} = \frac{E_{TH}}{R_{TH}} = \frac{E_{TH}}{R_{NO}}}$$

Troviamo l'equiv. di Norton per la sottorete di dx:



1) Calcoliamo I_{NO2}:

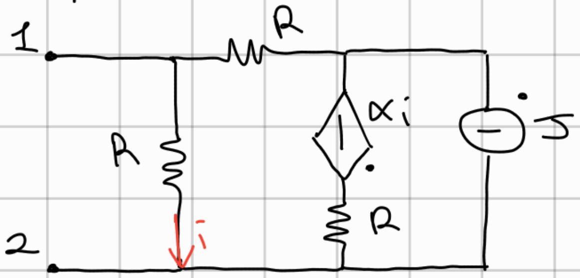


$I_{NO_2} = I$

$R_{NO_2} = R_{TH_2} = \frac{2}{3} R$

ESERCIZIO

Calcolare l'equiv. di Norton tra i morsetti 1 e 2.

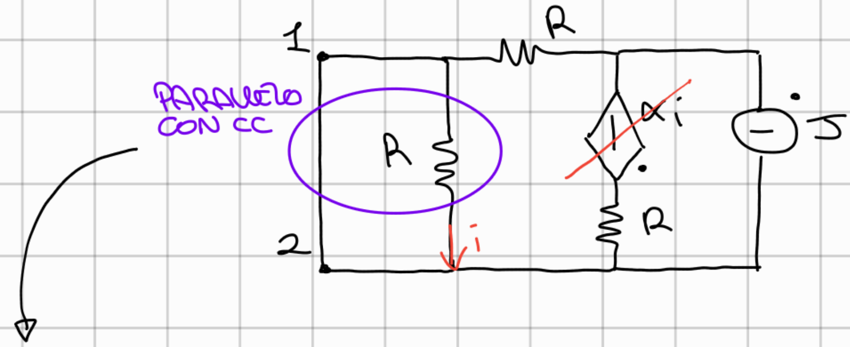


$R = 5\,\Omega$

$\alpha = 5\ V/A$

$J = 1A$

1) Calcolare I_{NO}



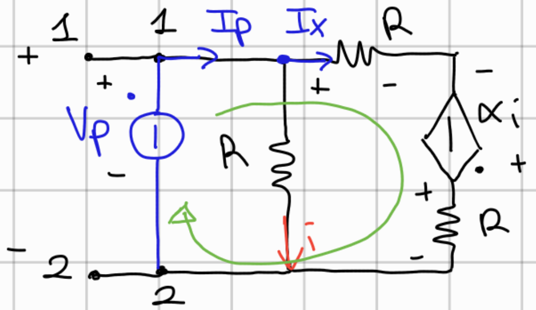
$\Rightarrow i = 0 \Rightarrow \alpha i = 0$ quindi il gen. pilotato si può eliminare

PARTITORE DI CORRENTE ⇒

$$I_{No} = J \cdot \frac{1/R}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}} = \frac{J}{R} \cdot \frac{R}{2} = \frac{J}{2} = 0.5A$$

2) Calcolare R_{No}

Si disattivano i gen. indipendenti e si inserisce un gen. ideale di prova tra i morsetti 1 e 2 (gen. di tensione o corrente a scelta).



Inserendo un gen. di tensione l'incognita diventa I_p, inserendo un gen. di corrente V_p (nel secondo caso si può risolvere con il metodo del tableau).

$$R_{12} = \frac{V_p}{I_p}$$

Per il I principio di Kirchhoff:

$$I_p = i + I_x = \underbrace{\frac{V_p}{R}}_{\text{I LEGGE DI OHM}} + I_x = \frac{V_p}{R} + \frac{1+\alpha/R}{2R} V_p$$

Per il II principio di Kirchhoff:

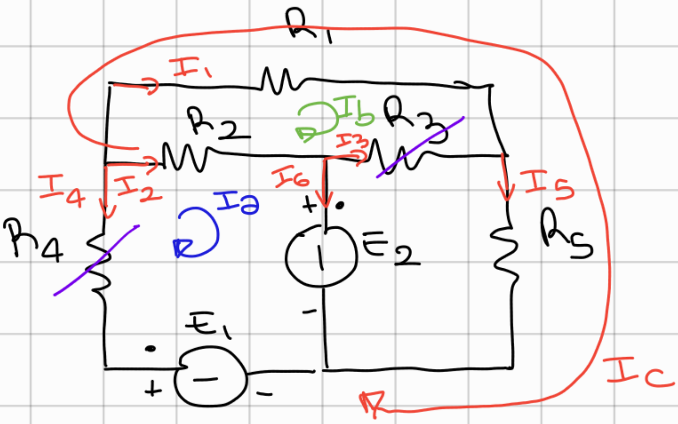
$$-V_p + RI_x - \alpha i + RI_x = 0 \Rightarrow I_x = \frac{V_p + \frac{\alpha V_p}{R}}{2R} = \frac{1+\frac{\alpha}{R}}{2R} V_p$$

$\frac{V_p}{R}$

$$R_{No} = R_{12} = \frac{V_p}{I_p} = \frac{V_p}{\frac{V_p}{R} + \frac{1+\alpha/R}{2R} V_p} = 2.5\,\Omega$$

13/10/2022

METODO DELLE CORRENTI DI MAGLIA



1) Si sceglie una prima maglia e si da un nome alla corrente di maglia (corrente fittizia) dopodiché si procede scegliendo le altre tramite metodo del taglio.

2) $I_a: (R_4 + R_2) I_a - R_2 I_b - R_2 I_c + E_2 - E_1 = 0$

$I_b: (R_1 + R_2 + R_3) I_b + R_1 I_c + R_2 I_c - R_2 I_a = 0$

$I_c: (R_1 + R_2 + R_5) I_c + R_1 I_b + R_2 I_b - R_2 I_a - E_2 = 0$

TOTALE $r-(n-1)$ equazioni

3) Si risolve il sistema $Ax = b$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_4+R_2 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_1+R_2+R_3 & R_1+R_2 \\ -R_2 & R_1+R_2 & R_1+R_2+R_5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} E_1 - E_2 \\ 0 \\ E_2 \end{bmatrix}}_{b}$$

4) Si ricavano le effettive correnti di ramo:

$I_1 = I_b + I_c$

$I_2 = I_a - I_b - I_c$

$I_3 = -I_b$

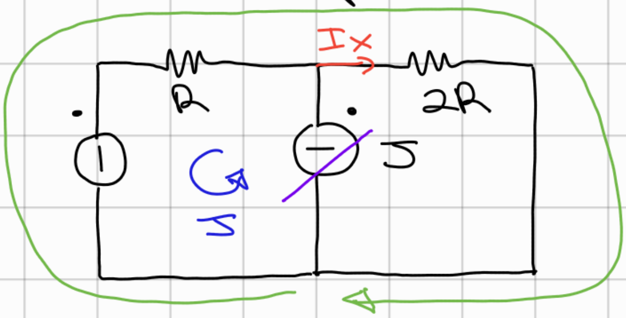
$I_4 = -I_a$

$I_5 = I_c$

$I_6 = I_a - I_c$

ESERCIZIO

Calcolare la potenza dissipata su 2R



Si può risolvere con il principio di sovrapposizione degli effetti, con il metodo delle correnti di ramo o con il metodo delle correnti di maglia.

Utilizzando il metodo delle correnti di maglia si sceglie come prima maglia la maglia che include il generatore di corrente, dopodiché si elimina il ramo su cui si trova il gen.

Dunque, nel caso siano presenti gen. di corrente il num. di equazioni diventa $r-(n-1)-N_{gc}$

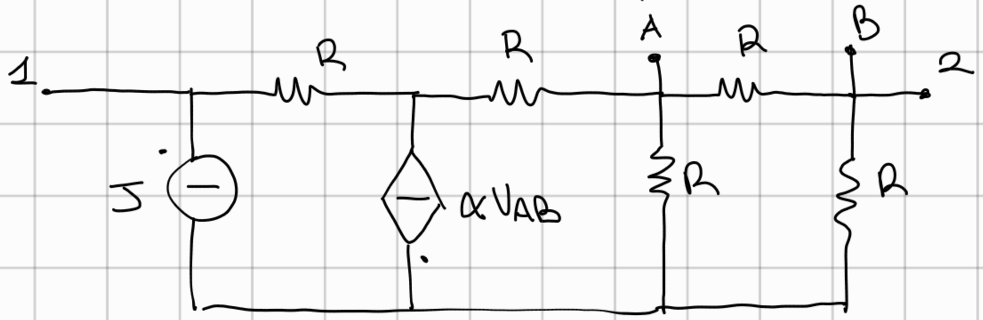
$$(R+2R)I_x - RJ - E = 0 \Rightarrow I_x = \frac{RJ+E}{3R}$$

$$P = 2R \cdot I_x^2 = \frac{2}{9R} \cdot (RJ+E)^2$$

14/10/2022

ESERCIZIO

Calcolare il circuito equivalente di Thevenin.

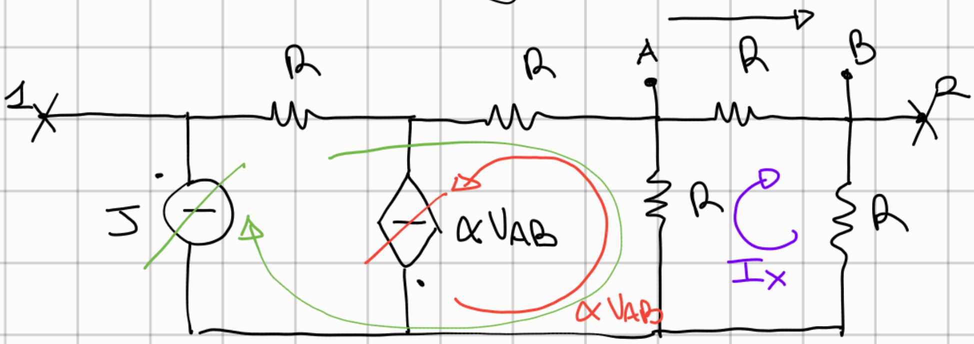


$J = 1\,A$

$R = 10\,\Omega$

$\alpha = 0.2\,A/V$

1) Calcoliamo la tensione di Thevenin tramite correnti di maglia:



$3RI_x - RJ + R\alpha V_{AB} = 0$

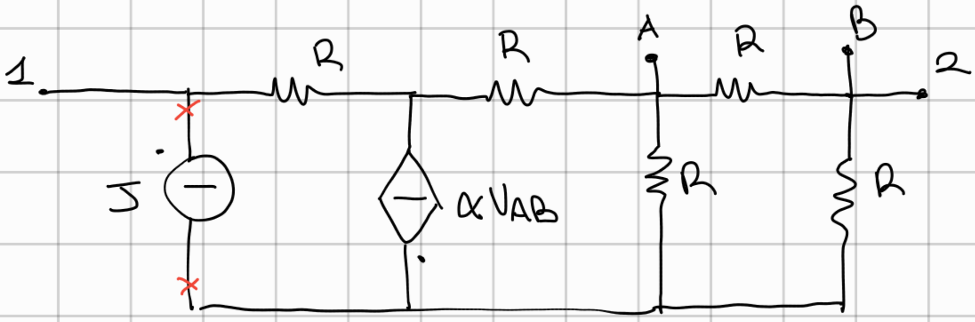
$V_{AB} = RI_x$

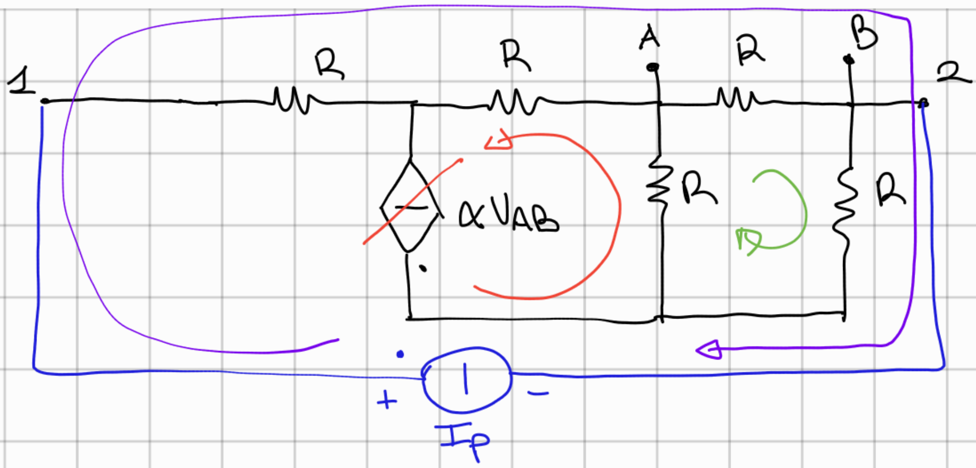
$3RI_x - RJ + \alpha R^2 I_x = 0$

$$I_x = \frac{RJ}{3R + \alpha R^2} = \frac{10}{30+20} = 0.2\,A$$

$$V_{12} = RJ + R(J - \alpha R \cdot 0.2) + R \cdot 0.2 = 18\,V = V_{TH}$$

2) Calcoliamo la resistenza di Thevenin:





$$R_{TH} = \frac{V_p}{I_p} = \frac{8R}{5} = 16\,\Omega$$

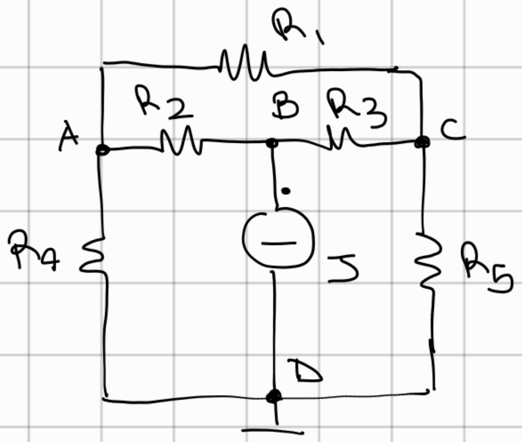
$$\begin{cases} 3\cancel{R}I_x + \alpha V_{AB}\cancel{R} + \cancel{R}I_p = 0 \\ V_{AB} = R(I_x + I_p) \end{cases}$$

$$3I_x + \alpha R(I_x + I_p) + I_p = 0 \Rightarrow I_x = \frac{-\alpha R I_p - I_p}{3 + \alpha R} = -\frac{3}{5} I_p$$

$$V_p = RI_p + R(I_p - \alpha R(I_x + I_p)) + R\left(I_p - \frac{3}{5} I_p\right) = \frac{8}{5} RI_p$$

METODO DELLE TENSIONI DI NODO

ES



$r < n \Rightarrow$ meno incognite calcolando le tensioni nei nodi

1) Si sceglie un nodo a piacimento e si stabilisce che in quel nodo $V = 0$ (in questo caso scegliamo D)
2) Si scrive 1 equazione per nodo con a sinistra dell' uguale la somma delle correnti entranti nel nodo generate dai generatori di corrente

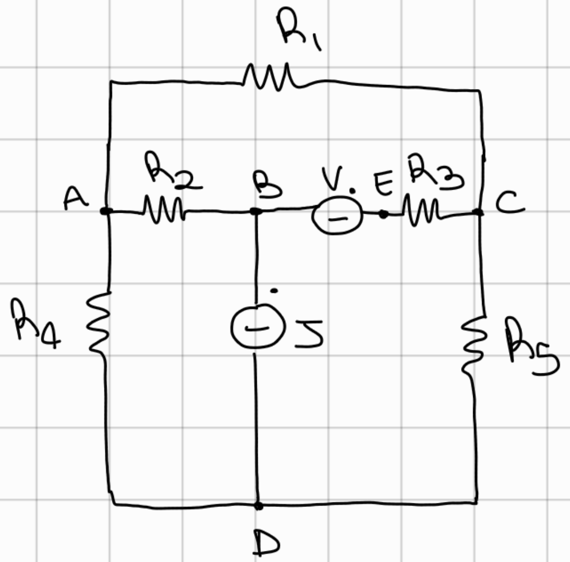
$$A: \quad 0 = V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_1}\right) - V_B\left(\frac{1}{R_2}\right) - V_D\left(\frac{1}{R_4}\right)$$

$$B: \quad J = V_B\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - V_A\left(\frac{1}{R_2}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_3}\right)$$

$$C: \quad 0 = V_C\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) - V_A\left(\frac{1}{R_1}\right) - V_B\left(\frac{1}{R_3}\right) - V_D\left(\frac{1}{R_5}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J \\ 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO

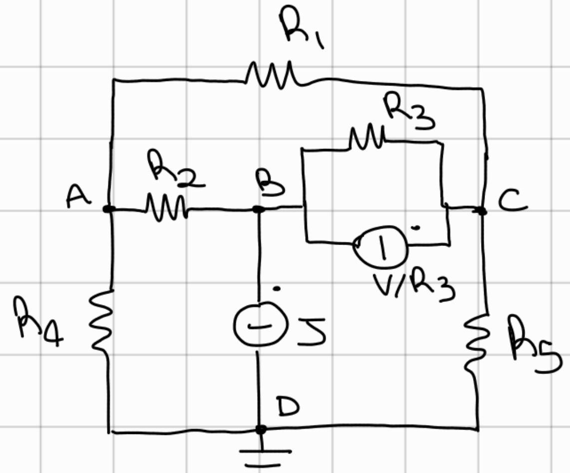


METODO DELLE TENSIONI DI NODO

N.B.: in presenza di generatori ideali di tensione si mette a massa uno dei nodi collegati direttamente al generatore.
In questo modo, trovandosi il nodo scelto a tensione nulla, l'altro nodo si trova a tensione nota, eliminando un'incognita

In presenza di un generatore reale di tensione è possibile considerare un nodo fittizio tra il generatore e la resistenza.
In questo caso si metterebbe a massa B e la tensione in E risulterebbe nota.

Altrimenti si può trasformare il generatore nel suo equivalente di Norton:



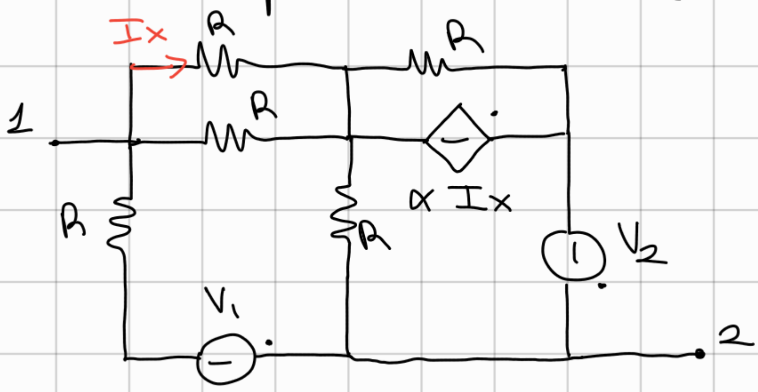
$$A: \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SOMMA CORRENTI ENTRANTI IN A} \\ \text{0 PERCHÉ NON CI SONO GEN. DI CORRENTE}}}{0} = V_A\underbrace{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right)}_{\text{SOMMA DELLE CONDUTTANZE CHE HANNO UN NODO IN A}} - V_C\underbrace{\left(\frac{1}{R_1}\right)}_{R_1 \text{ COLLEGA A AL NODO C}} - V_B\underbrace{\left(\frac{1}{R_2}\right)}_{R_2 \text{ COLLEGA A AL NODO B}} - \underbrace{\cancel{V_D\left(\frac{1}{R_4}\right)}}_{= 0 \text{ PERCHÉ } V_D = 0}$$

$$B: \quad J - \frac{V}{R_3} = V_B\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) - V_A\left(\frac{1}{R_2}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_3}\right)$$

$$C: \quad \frac{V}{R_3} = V_C\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right) - V_A\left(\frac{1}{R_1}\right) - V_B\left(\frac{1}{R_3}\right) - \cancel{V_D\left(\frac{1}{R_5}\right)}$$

ESAME 07/01/2022:

Determinare l'equiv. Norton tra i morsetti 1 e 2



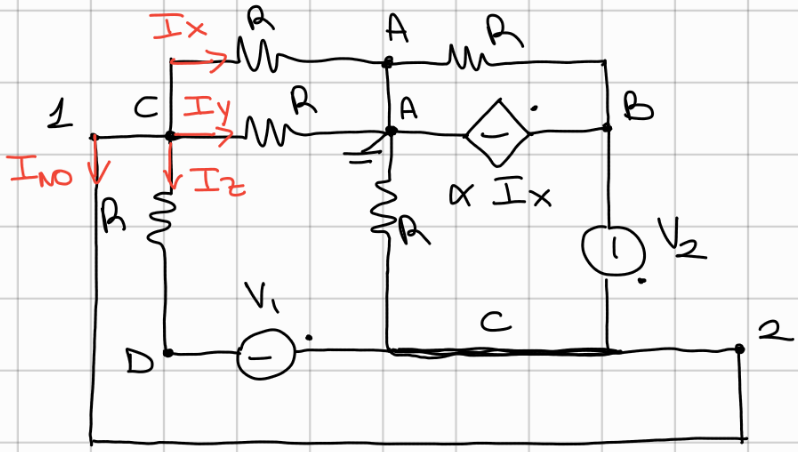
$V_1 = 10\,V$

$V_2 = 20\,V$

$R = 10\,\Omega$

$\alpha = 5\,V/A$

1) Calcoliamo I_{No}:



$V_A = 0$

$V_B = \alpha I_x = 20V$

$V_C = \alpha I_x + V_2$

$= 40V$

METODO DELLE TENSIONI DI NODO

Calcolando I_x conosciamo la tensione in tutti i nodi.

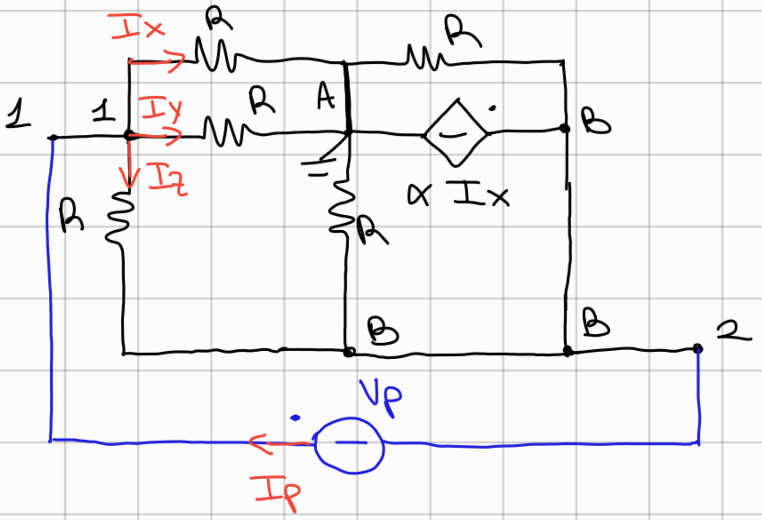
$$I_x = \frac{V_C - V_A}{R} = \frac{\alpha I_x + V_2}{R} \Rightarrow R I_x - \alpha I_x = V_2$$

$$5 I_x = 20V \Rightarrow I_x = 4A$$

Per trovare I_{NO} possiamo applicare il I principio di Kirchhoff al nodo C.

$$I_{NO} = -(I_x + I_y + I_z) = -\left(4 + \underbrace{\frac{V_C - V_A}{R}}_{I_x = 4A} + \underbrace{\frac{V_C - \overbrace{V_D}^{V_C - V_1}}{R}}_{1A}\right) = -9A$$

2) Calcoliamo R_{NO} disattivando tutti i gen. indipendenti



$V_A = 0$

$V_B = \alpha I_x = \cancel{\alpha}\frac{V_p}{\cancel{8}} = V_p$

$V_1 = V_B + V_p = 2V_p$

Il generatore pilotato non ci consente di calcolare R_{NO} solo tramite serie/parallelo; é necessario inserire un generatore di prova (di tensione o corrente a scelta) tra 1 e 2.

METODO DELLE TENSIONI DI NODO

In questo caso, per conoscere la tensione al nodo 1 conviene inserire un gen. di prova di tensione.

$$I_x = \frac{V_1 - V_A}{R} = \frac{\alpha I_x + V_p}{R} \Rightarrow (R-\alpha) I_x = V_p \Rightarrow I_x = \frac{V_p}{(R-\alpha)} = \frac{V_p}{5}$$

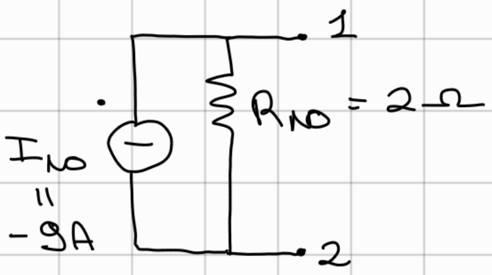
Calcoliamo ora I_p scegliendola uscente dal contrassegno.

$$R_{NO} = \frac{V_p}{I_p} = \frac{V_p}{\frac{1}{2} V_p} = 2\ \Omega$$

$$I_p = I_x + I_y + I_z = \frac{V_p}{5} + \frac{V_p}{5} + \frac{V_1 - V_B}{R} = \frac{2V_p}{5} + \frac{2V_p - V_p}{10} =$$

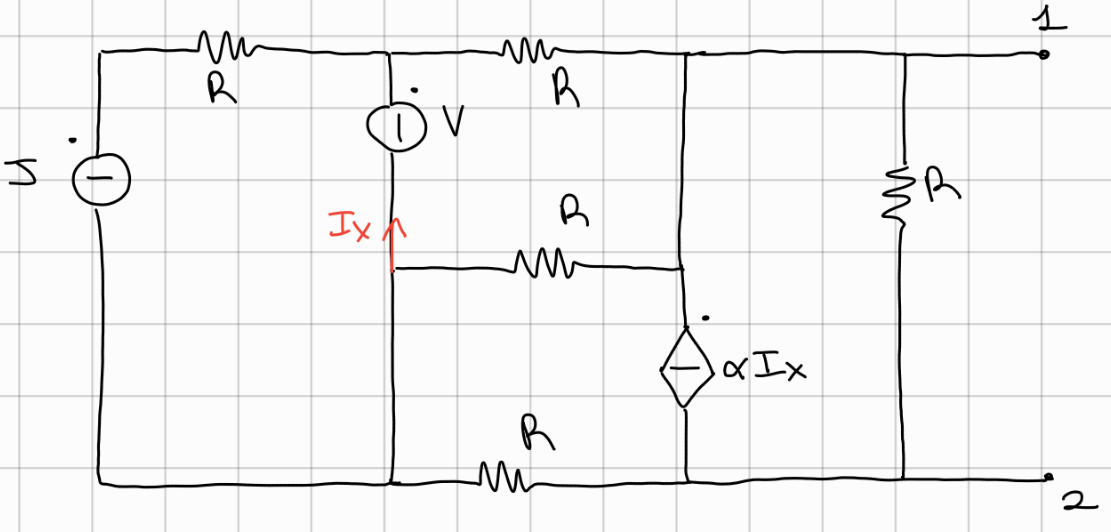
$$= \frac{4V_p + V_p}{10} = \frac{5V_p}{10} = \frac{1}{2} V_p$$

EQUIVALENTE NORTON



ESAME 14/02/2022:

Calcolare l'equiv. di Norton:



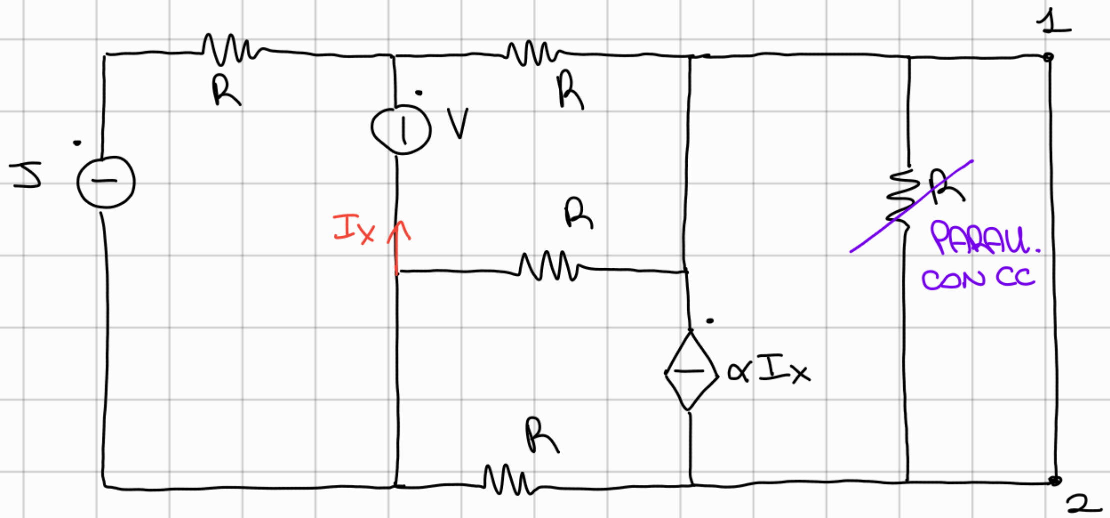
J = 2A

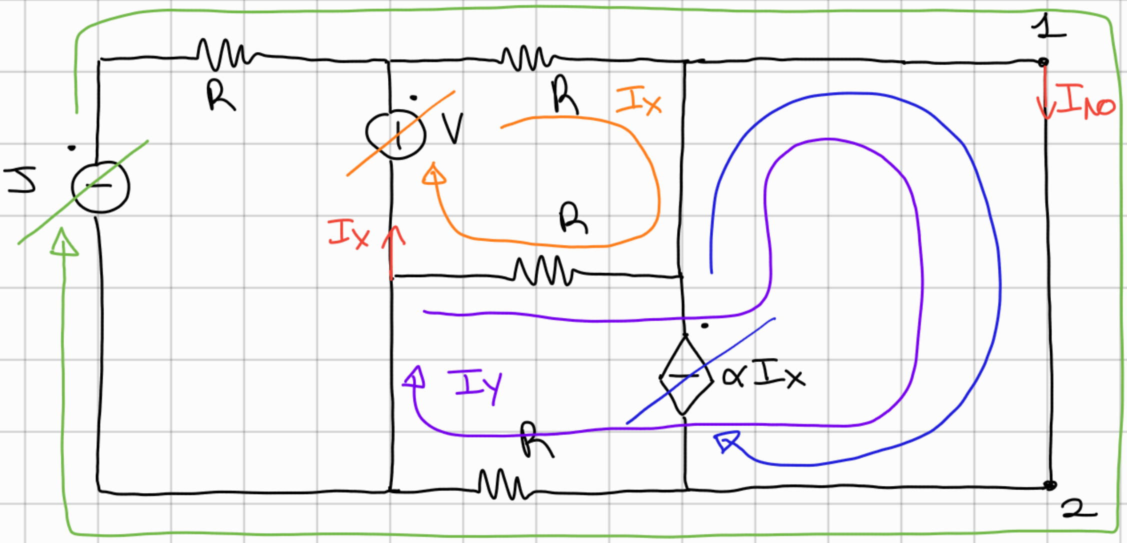
V = 30 V

R = 20 Ω

α = 0.5

1) Calcoliamo I_{No}:





METODO DELLE CORRENTI DI MAGLIA

Si hanno 4 maglie − 2 gen. di corrente = 2 eq.

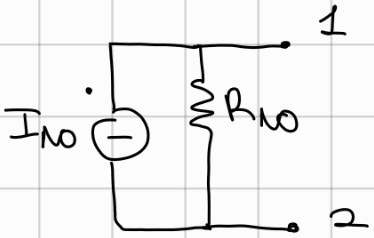
$\circledR$: $2RI_x + RJ - RI_y - V = 0 \Rightarrow 4RI_y + 2RIJ + RJ - RI_y - V = 0$

$\circledR$: $2\cancel{R}I_y - \cancel{R}I_x + \cancel{R}J = 0 \Rightarrow I_x = 2I_y + J = -3 + 2 = -1\,A$

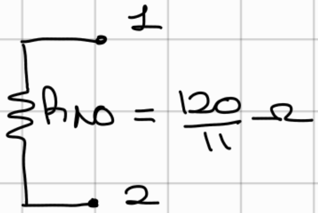
$$I_y = \frac{V - 3RJ}{3R} = \frac{30 - 120}{60} = -1.5\,A$$

$$I_{NO} = J + I_y + \alpha I_x = 2 - 1.5 - 0.5 = 0\,A$$

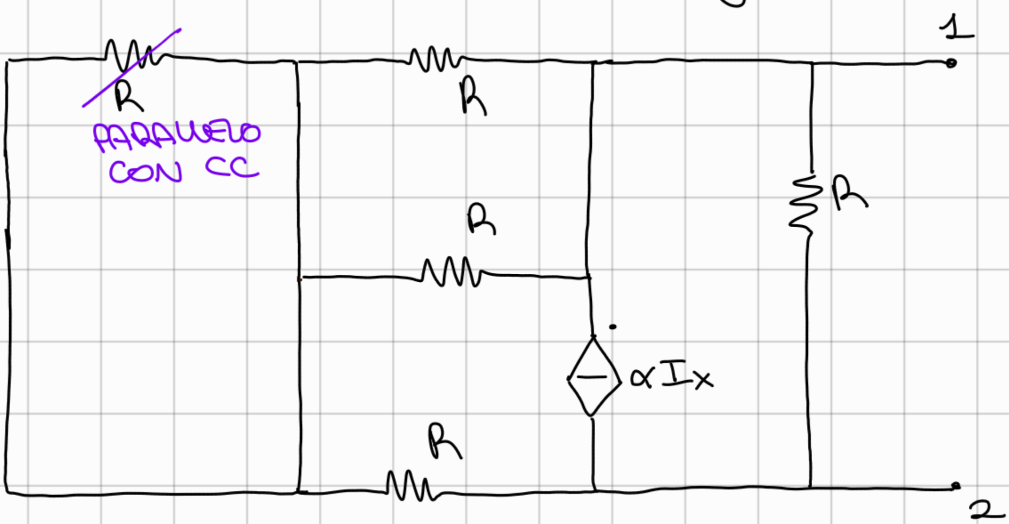
EQUIVALENTE NORTON

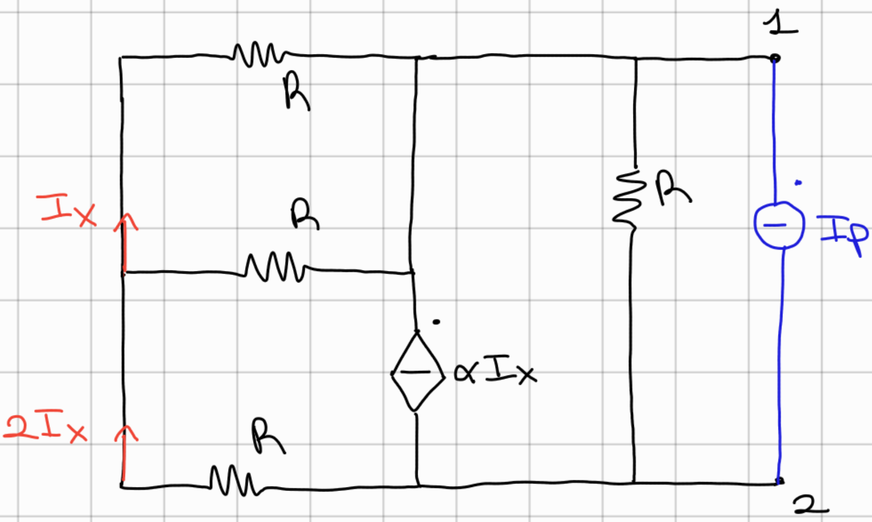


$I_{NO} = 0A \Rightarrow$

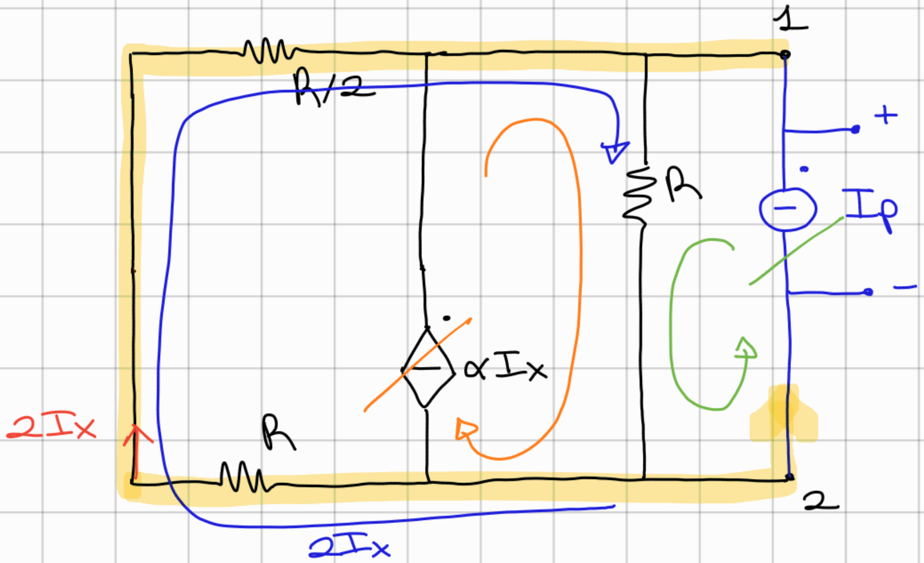


2) Calcoliamo R_{NO} disattivando i gen. indipendenti:





METODO DELLE CORRENTI DI MAGLIA



3 maglie - 2 gen. di corrente = 1 eq.

$$\circlearrowright : \cancel{2} I_x \left(\frac{5}{\cancel{2}} R \right) + R I_p + R \alpha I_x = 0$$

$$5 R I_x + R I_p + \frac{1}{2} R I_x = 0$$

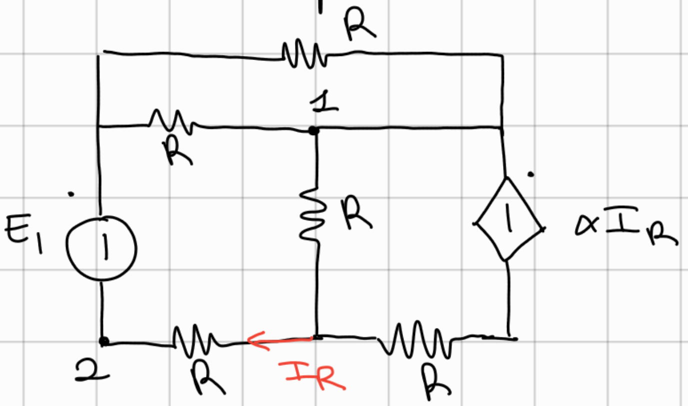
$$\frac{11}{2} I_x = - I_p \Rightarrow I_x = - \frac{2}{11} I_p$$

$$V_p = - \frac{3}{2} R \cdot 2 I_x = - 3R \left(- \frac{2}{11} I_p \right) = \frac{6}{11} R I_p$$

$$R_{NO} = \frac{V_p}{I_p} = \frac{6}{11} R I_p \cdot \frac{1}{I_p} = \frac{6}{11} R = \frac{120}{11} \ \Omega$$

ESAME 22/07/2022:

Calcolare l'equiv. di Norton:

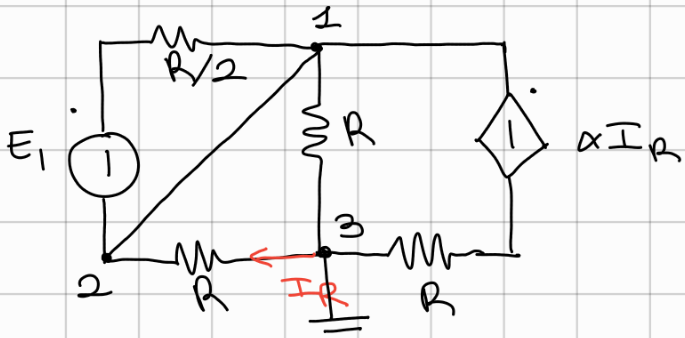


$E = 20V$

$R = 10\ \Omega$

$\alpha = 10\ \frac{V}{A}$

1) Calcoliamo I_{NO}:

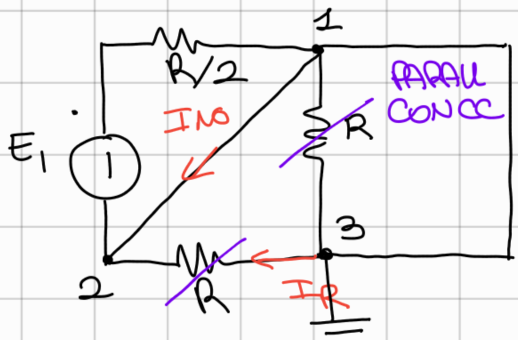


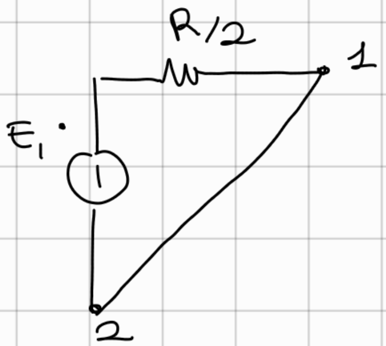
$V_3 = 0$

$V_1 = V_2 = \alpha I_R$

METODO DELLE TENSIONI DI NODO

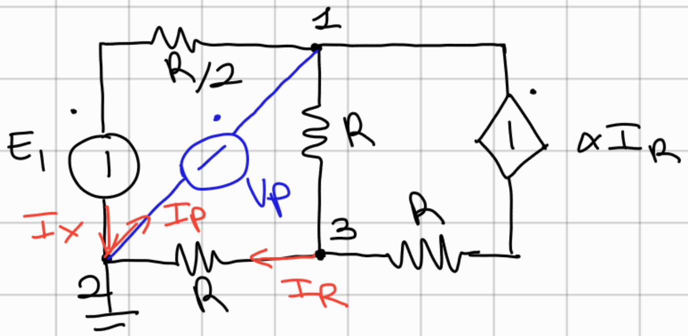
$$I_R = \frac{V_3 - V_2}{R} = -\frac{V_2}{R} = -\frac{\cancel{\alpha} I_R}{\cancel{R}} \Rightarrow I_R = 0$$





$$I_{NO} = \frac{E_1}{R_2} = \frac{20}{5} = 4A$$

2) Calcoliamo R_{NO}



$V_2 = 0$

$V_1 = V_p$

METODO DELLE TENSIONI DI NODO

$$3: \quad -\frac{\alpha I_R}{R} = V_3\left(\frac{3}{R}\right) - \cancel{V_2\left(\frac{1}{R}\right)} - V_1\left(\frac{1}{R}\right) - V_1\left(\frac{1}{R}\right) =$$

$$-\alpha I_R = 3V_3 - V_p - V_p \Rightarrow 2V_p = 3V_3 + \frac{\alpha}{R}V_3 = 4V_3 \Rightarrow V_3 = \frac{V_p}{2}$$

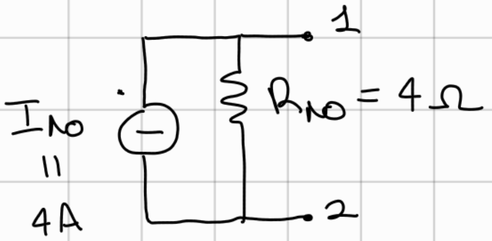
$$I_R = \frac{V_3 - V_2}{R} = \frac{V_3}{R}$$

Applichiamo il I principio di Kirchoff al nodo 2:

$$I_x + I_R = I_p = \frac{V_p}{R/2} + \frac{V_p/2}{R} = \frac{2V_p}{R} + \frac{V_p}{2R} = \frac{4V_p + V_p}{2R} = \frac{5V_p}{2R}$$

$$R_{NO} = \frac{V_p}{I_p} = \frac{V_p}{\frac{5}{2R}V_p} = \frac{2}{5}R = 4\ \Omega$$

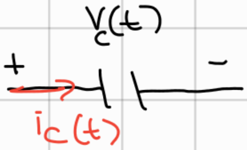
EQUIVALENTE DI NORTON



20/10/2022

CONDENSATORE

SIMBOLO CIRCUITALE:



SI SCELGONO RIF. ASSOCIATI

$$q(t) = C \cdot v(t)$$

↳ CAPACITÀ

$$C = \varepsilon \frac{S}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{S}{d}$$

$\varepsilon_0 \to 8.85 \cdot 10^{-12}$ [F/m]

[C/V] = [F]

$mF = 10^{-3}$

$\mu F = 10^{-6}$

nF

- LINEARITÀ ✓
- TEMPO INVARIANZA ✓
- CON MEMORIA ✓

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d(C v(t))}{dt} = \boxed{\frac{C\, dv_c(t)}{dt} = i_c(t)}$$

$$\boxed{v_c(t)} = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{C} i(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i(\tau) d\tau$$

$$\boxed{= v_c(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i(\tau) d\tau}$$

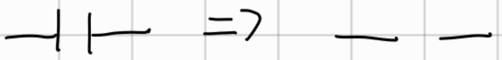
- PASSIVO ✓

$$p(t) = v_c(t) \cdot i_c(t) = v_c(t) \cdot \frac{C\, dv_c(t)}{dt} \gtrless 0$$

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} C v_c(\tau) \frac{dv_c(\tau)}{d\tau} d\tau = C \int_{-\infty} v_c(\tau) d v_c(\tau) =$$

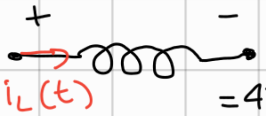
$$= \frac{1}{2} C \left(v_c^2(t) - \cancel{v_c^2(-\infty)} \right) \geq 0$$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

 in tensione continua un condens. degenera in un circuito aperto

INDUTTORE

SIMBOLO CIRCUITALE:



SI SCELGONO RIF. ASSOCIATI

FLUSSO

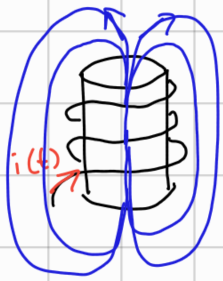
$$\Phi(t) = L\, i(t) \quad (*)$$

INDUTTANZA

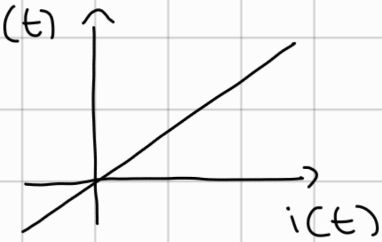
$$L = \mu \frac{S}{L} N^2 = \mu_0 \cdot \mu_r \frac{S}{L} N^2 \; [H]$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \, [H/m]$

Henry



- LINEARITÀ ✓



(*) IN ASSENZA DI ALTRI CAMPI MAGNETICI

- TEMPO INVARIANTE ✓
- CON MEMORIA ✓

$$v_L(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{dLi_L(t)}{dt} = \boxed{L\frac{di_L(t)}{dt} = v_L(t)}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(\tau)\,d\tau = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v_L(\tau)\,d\tau$$

- PASSIVO ✓

$$p(t) = v_L(t)\, i_L(t) = L \cdot i_L(t) \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \gtrless 0$$

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} L\, i_L(\tau) \frac{di_L(\tau)}{\cancel{d\tau}} \cancel{d\tau} = L\int_{-\infty}^{t} i_L(\tau)\, di_L(\tau) =$$

$$= \frac{1}{2} L \left(i_L^2(t) - \cancel{i_L^2(-\infty)} \right) \geq 0$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

L'INDUTTORE IN CONTINUA È UN CC

21/10/2022

INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI

$$\Phi_1 = \underbrace{\Phi_{1,1}}_{\substack{\text{FLUSSO}\\ \text{1° INDUTTORE}\\ \text{CAUSATO DAL}\\ \text{1° INDUTTORE}}} \pm \underbrace{\Phi_{1,2}}_{\substack{\text{FLUSSO}\\ \text{1° INDUTTORE}\\ \text{CAUSATO DAL}\\ \text{2° INDUTTORE}}} = L_1 \cdot i_1(t) \pm \underset{[H]}{M} i_2(t)$$

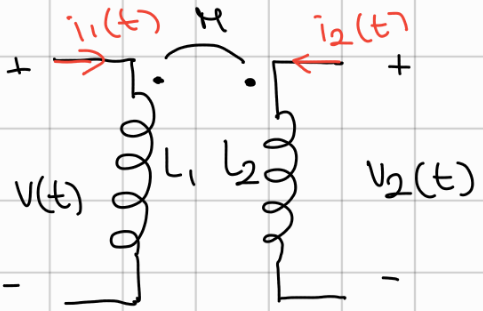
MUTUA INDUTTANZA (TIENE CONTO DELLA GEOMETRIA RELATIVA DEI DUE INDUTTORI)

$$\Phi_2 = \Phi_{22} \pm \Phi_{21} = \underbrace{L_2}_{\text{AUTO-INDUTTANZA}} \cdot i_2(t) \pm M i_1(t)$$

$$v_1(t) = \frac{d\Phi_1(t)}{dt} = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt}$$

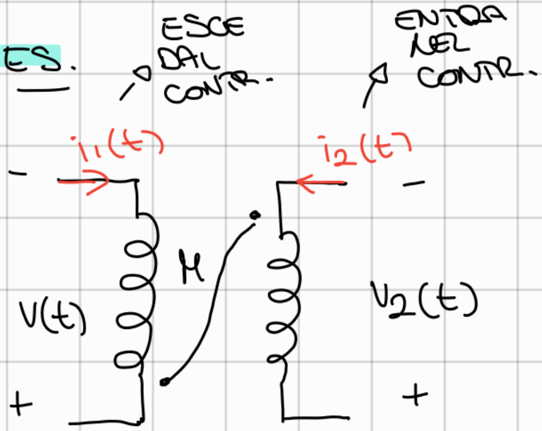
$$v_2(t) = \frac{d\Phi_2(t)}{dt} = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \frac{di_1(t)}{dt}$$

SIMBOLO CIRCUITALE:



LA POS. DEI CONTRASS. SERVE A DET. IL SEGNO DELLA CADUTA DI MUTUA ENTRAMBE I ENTRANTI O USCENTI RISPETTO AL CONTRASSEGNO ALLORA LA CADUTA DI MUTUA HA LO STESSO SEGNO DELLA CADUTA DI AUTO

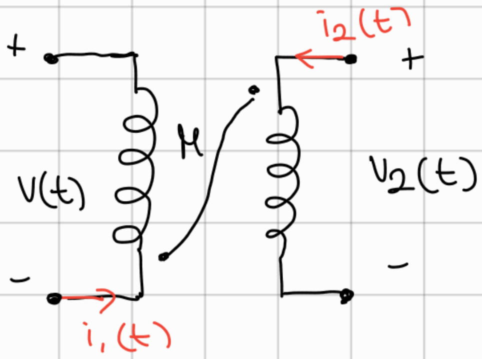
ES.



$$v_1(t) = -L_1 \frac{d_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$v_2(t) = -L_2 \frac{d_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt}$$

ES



$$V_1(t) = -L_1\frac{d_1(t)}{dt} - \frac{M di_2(t)}{dt}$$

$$V_2(t) = +L_2\frac{d_2(t)}{dt} + \frac{M di_1(t)}{dt}$$

$$p(t) = V_1(t)i_1(t) + V_2(t)i_2(t)$$

$$p(t) = L_1 i_1(t)\frac{di_1(t)}{dt} \pm M i_1(t)\frac{di_2(t)}{dt} + L_2 i_2(t)\frac{di_2(t)}{dt} \pm M i_2(t)\frac{di_1(t)}{dt}$$

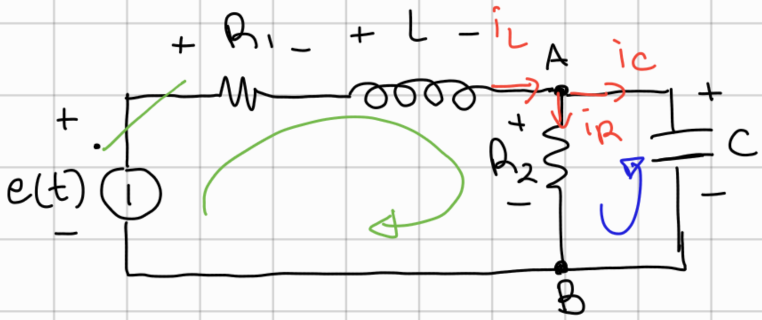
$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} L_1\cdot i_1(\tau)\frac{di_1(\tau)}{d\tau}d\tau + \int_{-\infty}^{t} L_2 i_2(\tau)\frac{di_2(\tau)}{d\tau}d\tau \pm$$

$$\pm\, \underbrace{M\int_{-\infty}^{t} i_1(\tau)\frac{di_2(\tau)}{d\tau}d\tau + i_2(\tau)\frac{di_1(\tau)}{d\tau}d\tau}_{M\int_{-\infty}^{t} d(i_1(\tau)i_2(\tau))}$$

$$w(t) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2}L_2 i_2^2(t) \pm M\cdot i_1(t)i_2(t) \geq 0 \qquad M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{L_1}\,i_1(t) - \sqrt{L_2}\,i_2(t)\right)^2$$

$\Rightarrow$ due indutt. mutuam. accoppiati sono elem. passivi

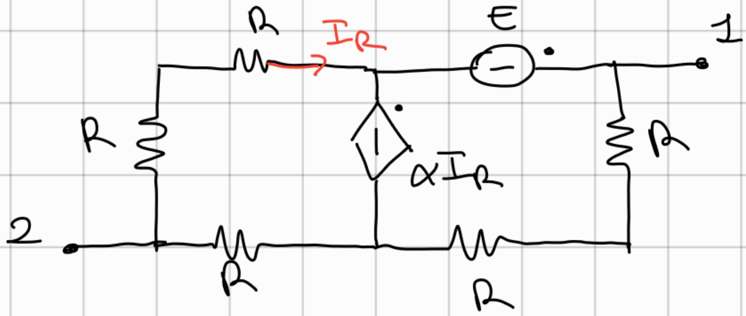


$e(t) = 50 \sin(100t)$

CORRENTI DI RAMO:

$$
\begin{cases}
A: \; i_L(t) = i_R(t) + i_C(t) \\
-e(t) + R_1 \cdot i_L(t) + L \dfrac{di_L(t)}{dt} + R_2 \cdot i_R(t) = 0 \\
R_2 i_R(t) - \dfrac{1}{C} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\, d\tau = 0
\end{cases}
$$

ESERCIZIO ESAME Calcolare il circ. equiv. di TH

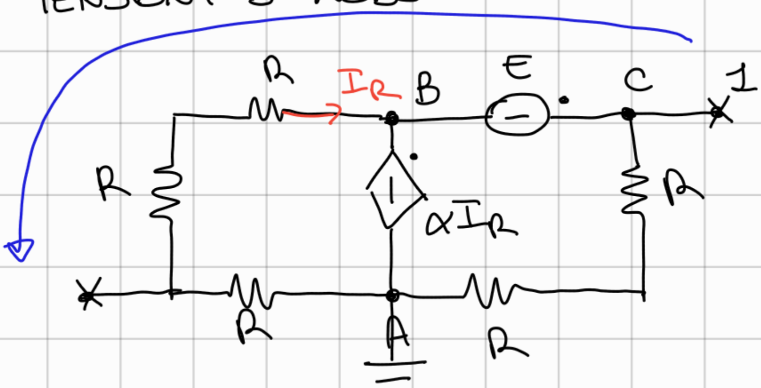


$E = 60V$

$R = 10\ \Omega$

$\alpha = 10\ V/A$

TENSIONI DI NODO



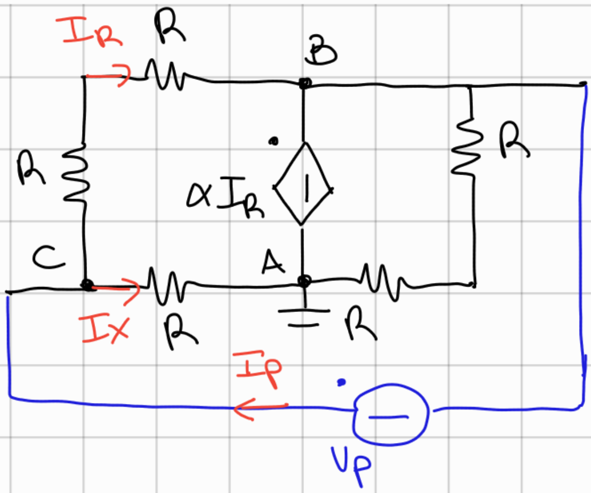
$V_A = 0$

$V_B = \alpha I_R$

$V_C = \alpha I_R + E$

$$I_R = -\frac{(V_B - \cancel{V_A})}{3R} = -\frac{\alpha I_R}{3R} \Rightarrow I_R = 0$$

$V_{TH} = 60\ V$



$V_A = 0$

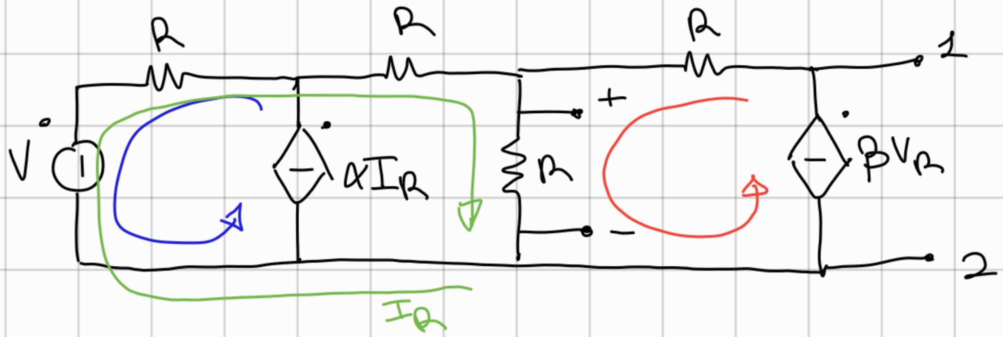
$V_B = \alpha I_R = \alpha \frac{V_p}{2R} = \frac{V_p}{2}$

$V_C = \alpha I_R + V_p = \frac{3}{2} V_p$

$I_R = \frac{V_C - V_B}{2R} = \frac{\alpha I_R + V_p - \alpha I_R}{2R}$

$I_p = I_R + I_x = \frac{V_p}{2R} + \frac{3V_p}{2R} = \frac{2V_p}{R} \Rightarrow R_{TH} = \frac{V_p}{I_p} = \frac{V_p}{\frac{2V_p}{R}} = \frac{R}{2} = 5\,\Omega$

ESERCIZIO ESAME 11/06/2021 Calcolare eq. TH



$V = 10V$

$R = 10\,\Omega$

$\alpha = 0.5$

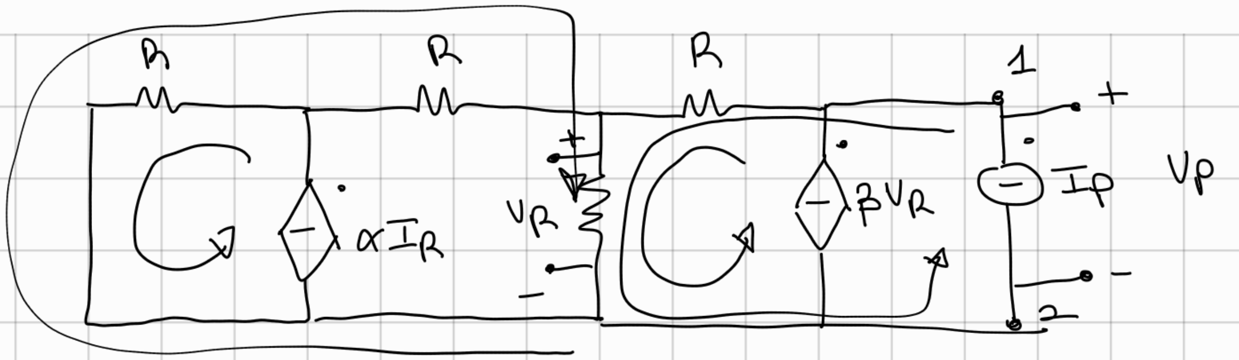
$\beta = 0.1\ A/V$

CORRENTI DI MAGLIA

$$\begin{cases} -V + \cancel{3RI_R} - \alpha R \cancel{I_R} + \beta R V_R = 0 \Rightarrow V_R = V \\ V_R = (I_R + \beta V_R) R \Rightarrow (1 - \beta R) V_R = R I_R \Rightarrow I_R = 0 \end{cases}$$

$R \cdot \beta V_R = 2V$

$V_{TH} = 20V$



$$\begin{cases} 3RI_R - \alpha RI_R + RI_p + \beta RV_R = 0 \\ V_R = R(I_R + \beta V_R I_p) \Rightarrow V_R(1-\beta R) = R(I_R + I_p) = 0 \Rightarrow I_R = -I_p \end{cases}$$

$$-3RI_p + \alpha RI_p + RI_p = -V_R \Rightarrow V_R = \frac{3}{2}RI_p$$

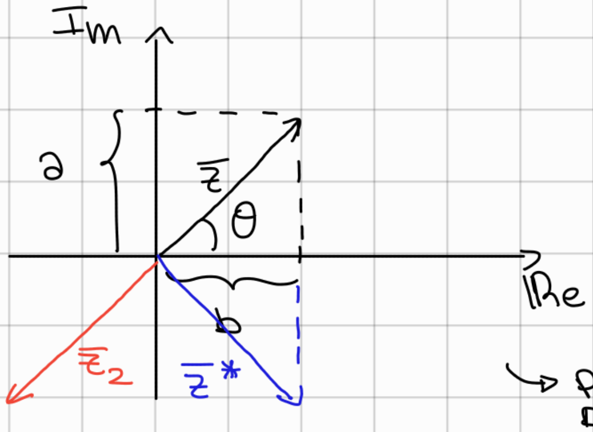
$$V_p = R(I_p + \beta V_R) + V_R = RI_p + 2V_R = (R + 3R)I_p \Rightarrow R_{TH} = \frac{V_p}{I_p} =$$

$$= \frac{4RI_p}{I_p} = 4R$$

$$= 40\ \Omega$$

25/10/2022

RIPASSO NUMERI COMPLESSI



↳ PIANO DI GAUSS

$\bar{z} = a + jb$

$\bar{z} = \rho e^{j\theta}$ COORD. POLARI

ρ ↳ LUNGHEZZA VETTORE $\bar{z}$ NEL PIANO DI GAUSS

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

PER PASSARE DA COORD. CARTESIANE A POLARI

ES.

$\bar{z} = 1 + j \qquad \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = \operatorname{arctg}(1) \Rightarrow \theta = 45° = \frac{\pi}{4}$

$\bar{z}_2 = -1 - j \qquad \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{-1}\right) = \operatorname{arctg}(1) \Rightarrow \theta = 225° = \frac{5}{4}\pi$

$$\begin{cases} b = \rho \sin\theta \\ a = \rho \cos\theta \end{cases}$$

PER PASSARE DA COORD. POLARI A CARTESIANE

$\bar{z}^* = a - jb = -\rho e^{-j\theta}$ Z COMPLESSO CONIUGATO

CIRCUITI A REGIME PERIODICO SINUSOIDALE

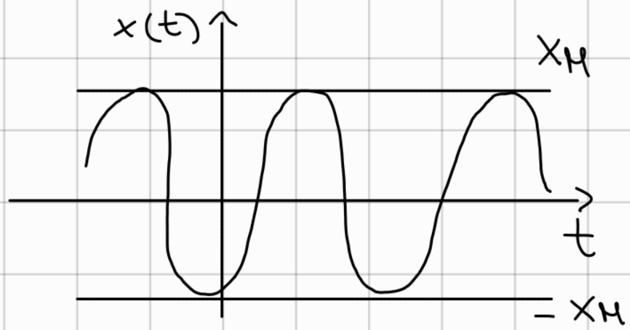
PERIODICO: il segnale si ripete uguale a sé stesso dopo un intervallo di tempo chiamato periodo

Un segnale si dice periodico se: $x(\underbrace{t+T}_{\text{PERIODO}}) = x(t) \quad \forall t$

SINUSOIDALE: tutte le correnti e le tensioni possono essere espresse come funzioni sinusoidali con la stessa pulsazione ω.

$x(t) = \underbrace{X_M}_{\text{VALORE MASSIMO}} \sin(\underbrace{\omega}_{\text{PULSAZIONE}} t + \underbrace{\varphi_x}_{\text{FASE}})$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ [rad/s]



C'é bisogno di φ_x perché altrimenti il segnale, all'istante $t=0$ avrebbe valore zero, in quanto $\sin(0)=0$. Se all'istante $t=0$ il segnale non vale zero si dice che c'é uno "sfasamento" rappresentato dalla fase.

Le correnti e le tensioni all'interno dello stesso circuito si differenziano per valore massimo e fase, mentre la pulsazione é uguale per tutte.

Dunque, un circuito é a regime periodico sinusoidale se tutte le correnti e le tensioni hanno la stessa pulsazione (e quindi lo stesso periodo).

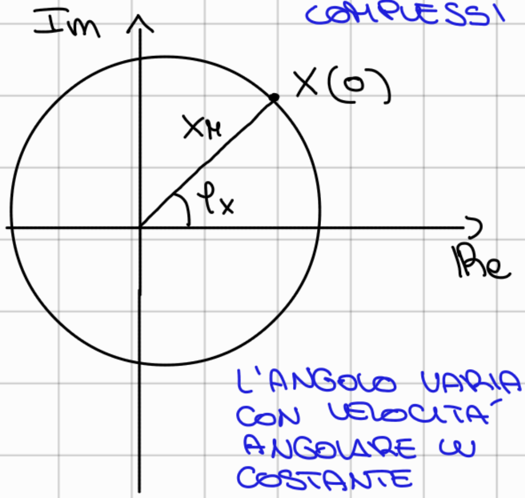
N.B.: $y = Y_M \cos(\omega t) = Y_M \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

TEMPO

$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi_x)$$

$$X(t) = X_M e^{j(\omega t + \varphi_x)}$$

QUESTO SEGNALE ASSUME VALORI COMPLESSI

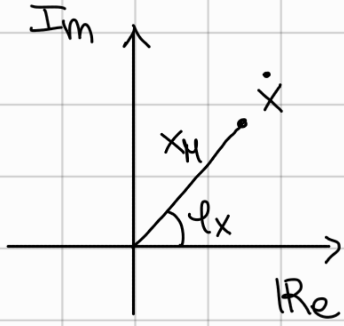


L'ANGOLO VARIA CON VELOCITÀ ANGOLARE ω COSTANTE

X = VETTORE ROTANTE

FASORI

$$\dot{X} = X(0) = X_M e^{j\varphi_x}$$



N.B.: UN FASORE È UN NUM. COMPLESSO, MA UN NUM. COMPL. IN GENERALE NON È UN FASORE

Anziché lavorare con segnali varianti nel tempo, li trasformeremo in fasori e lavoreremo con quelli.

Per passare da dominio del tempo a dominio fasoriale

ES. $v(t) = 30 \sin\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right)$

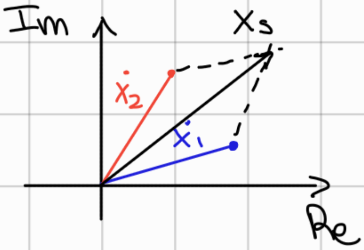
$$\dot{V}(t) = 30 e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\boxed{x(t) = \underbrace{\mathrm{Im}}_{\text{PARTE IMMAGINARIA DI}}\left\{\dot{x}e^{j\omega t}\right\}} = \mathrm{Im}\left\{X_M e^{j\varphi_x} e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{X_M \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)}\right\}$$

$$= \mathrm{Im}\left\{X_M \cos(\omega t + \varphi_x) + j X_M \sin(\omega t + \varphi_x)\right\}$$

OPERAZIONI NEL DOMINIO FASORIALE

$x_1(t) = X_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ $\qquad$ $x_2(t) = X_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$



$$\dot{X}_S = \dot{X}_1 \pm \dot{X}_2 = \underbrace{X_1}_{\text{VALORE MAX DEL SEGNALE } x_1(t)} e^{j\varphi_1} \pm X_2 e^{j\varphi_2} =$$

$$= x_1 \cos\varphi_1 + j x_1 \sin\varphi_1 \pm x_2 \cos\varphi_2 \pm j x_2 \sin\varphi_2 =$$

$$= (x_1 \cos\varphi_1 \pm x_2 \cos\varphi_2) + j(x_1 \sin\varphi_1 \pm x_2 \sin\varphi_2)$$

Il fasore $\dot{X}_S$ si può ottenere dunque come somma vettoriale tra $\dot{X}_1$ e $\dot{X}_2$ nel piano di Gauss.

Considerazioni analoghe valgono per la differenza.

DERIVATA NEL DOMINIO FASORIALE

$$y(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t} = \frac{\partial[\mathrm{Im}\{\dot{X}e^{j\omega t}\}]}{\partial t} = \mathrm{Im}\left\{\frac{\partial(\dot{X}e^{j\omega t})}{\partial t}\right\} =$$

$$= \mathrm{Im}\{\dot{X}e^{j\omega t}\cdot j\omega\} = \mathrm{Im}\{j\omega\dot{X}\cdot e^{j\omega t}\} = \mathrm{Im}\{\dot{Y}e^{j\omega t}\}$$

$\boxed{\dot{Y} = j\omega\dot{X}}$ = DERIVATA DEL FASORE $\dot{X}$

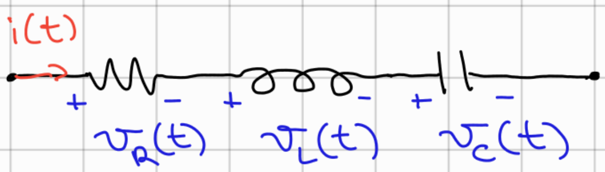
INTEGRALE NEL DOMINIO FASORIALE

$$y(t) = \int x(t)\,dt = \int[\mathrm{Im}\{\dot{X}e^{j\omega t}\}]dt = \mathrm{Im}\left\{\int \dot{X}e^{j\omega t}dt\right\} =$$

$$= \mathrm{Im}\left\{\dot{X}\frac{e^{j\omega t}}{j\omega}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\underbrace{\frac{\dot{X}}{j\omega}}_{\dot{Y}}\cdot e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\{\dot{Y}e^{j\omega t}\}$$

$\boxed{\dot{Y} = \frac{\dot{X}}{j\omega}}$ = INTEGRALE DEL FASORE $\dot{X}$

CONCLUSIONE: le operazioni di derivata e integrale diventano operazioni algebriche nel dominio fasoriale perché corrispondono a moltiplicare / dividere per $j\omega$.



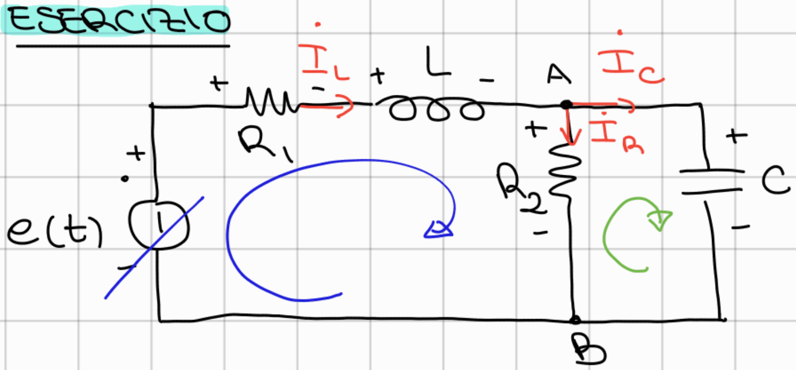
Determiniamo la caduta di tensione nel dominio fasoriale:

$v_R(t) = R\cdot i_R(t)$ $\qquad \dot{V}_R = R\dot{I}_R$

$v_L(t) = L\cdot \frac{L\cdot i_L(t)}{dt}$ $\qquad \dot{V}_L = Lj\omega\dot{I}_L = j\omega L\cdot\dot{I}_L$

$v_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)\,dt$ $\qquad \dot{V}_C = \frac{1}{C}\cdot\frac{\dot{I}_C}{j\omega} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_C$

ESERCIZIO



$R_1 = 10\,\Omega$

$R_2 = 20\,\Omega$

$L = 10\,mH = 10^{-2}\,H$

$C = 100\,\mu F = 10^{-4}\,F$

$e(t) = 10 \sin(100t + \frac{\pi}{2})$

METODO CORRENTI DI RAMO:

A: $\dot{I}_L = \dot{I}_R + \dot{I}_C \Rightarrow$

$\circlearrowright$: $-\dot{E} + R_1\dot{I}_L + j\omega L\dot{I}_L + R_2\dot{I}_R = 0$

$\circlearrowright$: $-R_2\dot{I}_R + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_C = 0$

$\dot{E} = 10e^{j\frac{\pi}{2}} = 10j$

$\omega = 100$ rad/s

L'utilizzo dei fasori ci ha permesso di scrivere le equazioni, che sarebbero state integro-differenziali, come un sistema lineare a coefficienti complessi.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ (R_1+j\omega L) & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_L \\ \dot{I}_R \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{E} \\ 0 \end{bmatrix}$$

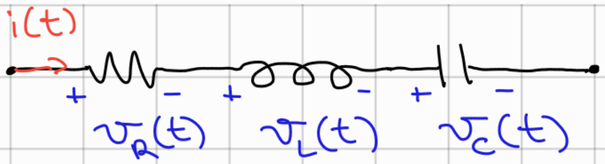
N.B: Risolvere 1 eq. nei complessi equivale a risolvere 2 eq. nei reali.

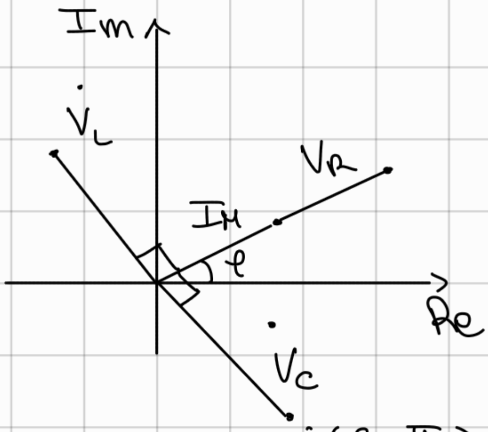
ES: $\dot{I}_L = \dot{I}_R + \dot{I}_C \Rightarrow \begin{cases} Re\{\dot{I}_L\} = Re\{\dot{I}_R\} + Re\{\dot{I}_C\} \\ Im\{\dot{I}_L\} = Im\{\dot{I}_R\} + Im\{\dot{I}_C\} \end{cases}$

Una volta risolto il sistema, per trovare le correnti nel dominio del tempo:

$\dot{I}_L = \rho_L e^{j\varphi_L}$

$i_L(t) = \rho_L \cdot \sin(100t + \varphi_L)$





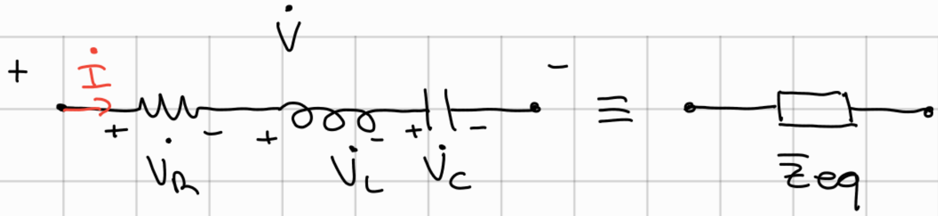
$$\dot{I} = I_M \cdot e^{j\varphi}$$

$$\dot{V}_R = R\dot{I}_R = R I_M e^{j\varphi} \quad \text{(SEMPRE} > 0)$$

$$\dot{V}_L = j\omega \dot{I}_L = j\omega L\, I_M e^{j\varphi} = e^{j\frac{\pi}{2}} \omega L I_M e^{j\varphi} = \omega L I_M e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})}$$

$$\dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \dot{I}_C = \frac{1}{j\omega C} I_M e^{j\varphi_C} = \frac{1}{\omega C e^{j\frac{\pi}{2}}} \cdot I_M e^{j\varphi_C} = \frac{I_M}{\omega C} e^{j(\varphi_C - \frac{\pi}{2})}$$

27/10/2022



$\dot{V}_R = R\dot{I}$

$\dot{V}_L = j\omega L \dot{I}$

$\dot{V}_C = \dfrac{1}{j\omega C}\dot{I}$

$\boxed{\dot{V} = \bar{Z}\dot{I}}$ → GENERALIZZ. LEGGE DI OHM NEL DOMINIO FASORIALE

$\bar{Z}$ → IMPEDENZA [Ω] é un num. complesso

$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C = \left(R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}$ = TENSIONE AI CAPI DELLA SERIE DI 3 IMPEDENZE

$= \bar{Z}_{eq}\dot{I}$

$$\bar{Z}_{eq} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) =$$

$$= \underbrace{R}_{\substack{\text{PARTE REALE} \\ \text{(RESISTENZA)}}} + j\underbrace{X}_{\substack{\text{PARTE IMMAGINARIA} \\ \text{(REATTANZA)}}}$$

$\bar{Z}$:
- $R=0, X>0$ → INDUTTIVA ⇝ $\varphi = \frac{\pi}{2}$
- $R\neq 0, X>0$ → OHMICO-INDUTTIVA ⇝ $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$
- $X=0$ → RESISTIVA ($\bar{Z}$ num. reale) ⇝ $\varphi = 0$
- $R\neq 0, X<0$ → OHMICO-CAPACITIVA ⇝ $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$
- $R=0, X<0$ → CAPACITIVA ⇝ $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

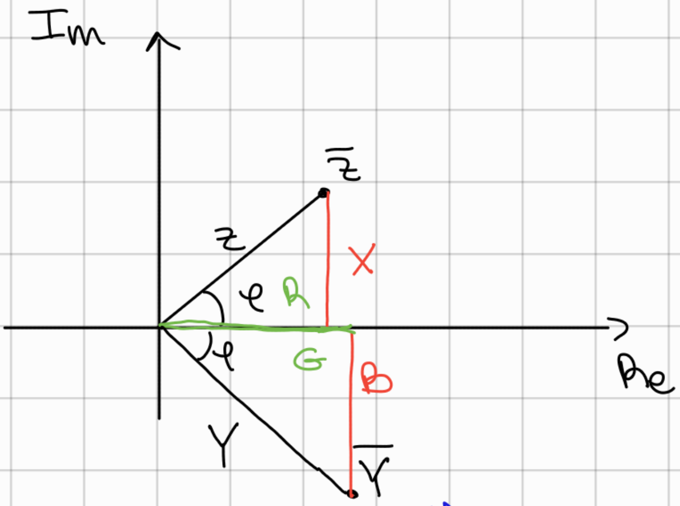
$\dot{V} = \bar{Z}\dot{I}$

$\dot{V} = Ve^{j\varphi_v}$ ⟶ $v(t) = V\sin(\omega t + \varphi_v)$

$\dot{I} = Ie^{j\varphi_i}$ ⟶ $i(t) = I\sin(\omega t + \varphi_i)$

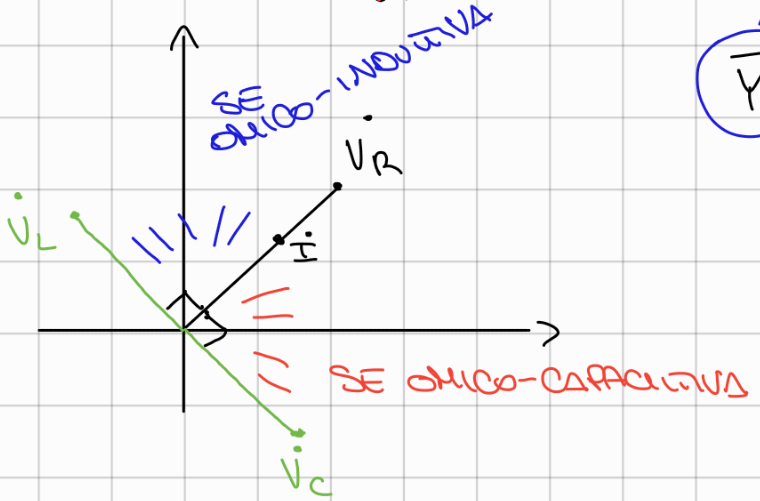
$\bar{Z} = R + jX = z\cdot e^{j\varphi_z}$

$\dot{V} = \bar{Z}\dot{I} \Rightarrow Ve^{j\varphi_v} = ze^{j\varphi_z} \cdot Ie^{j\varphi_i}$ → $V = zI$; → $\varphi_v = \varphi_z + \varphi_i \Rightarrow \varphi_z = \varphi = \varphi_v - \varphi_i$



$X = Z\sin\varphi$

$R = Z\cos\varphi$



AMMETTENZA

SUSCETTANZA

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = G + jB = \frac{1}{Ze^{j\varphi}} = \frac{1}{Z}e^{-j\varphi}$$

CONDUTTANZA

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R+jX} = \frac{R-jX}{R^2+X^2} =$$

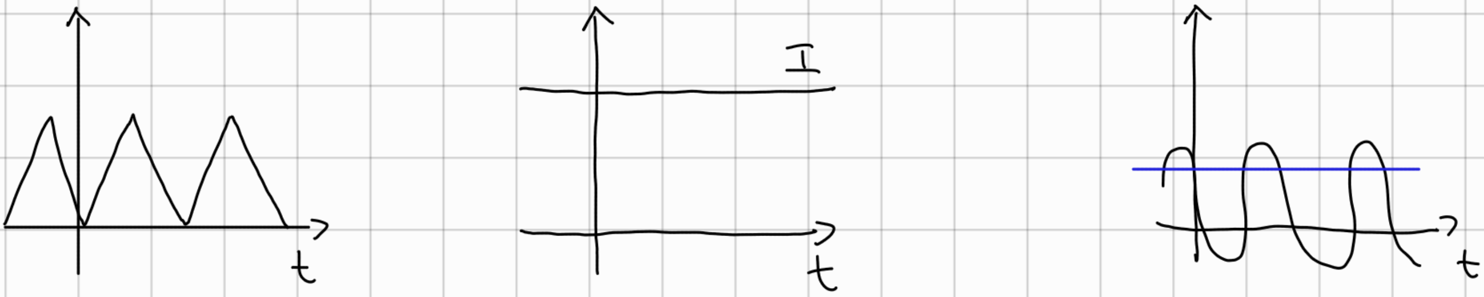
$$= \frac{R}{R^2+X^2} - j\frac{X}{R^2+X^2}$$

$$G = \frac{R}{R^2+X^2}$$

$$B = -\frac{X}{R^2+X^2}$$

28/10/2022

VALORE EFFICACE



$$p(t) = R \cdot i^2(t) = RI^2$$

$$w(t) = \int_0^T p(t)\,dt = \int_0^T RI^2\,dt = RTI^2$$

$$w(t) = \int_0^T R \cdot i^2(t)\,dt = \cancel{R}\int_0^T i^2(t)\,dt = \cancel{R}\,T\,I_{eff}^2$$

$$\Rightarrow I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_M^2 \sin^2(\omega t)\,dt} = \sqrt{\frac{I_M^2}{t}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{I_M^2}{T}\int_0^T (1-\cos^2(\omega t))\,dt} = \sqrt{\frac{I_M^2}{T}\int_0^T \left(\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\right)dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{I_M^2}{2T}\left[\int_0^T 1\,dt - \int_0^T \cos(2\omega t)\,dt\right]} = \sqrt{\frac{I_M^2}{2T}\left[T-0\right]} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

POTENZA ISTANTANEA

$$i(t) = I_M \sin(\omega t)$$

$$v(t) = V_M \sin(\omega t + \varphi)$$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) =$$

$$= V_M I_M \sin(\omega t + \varphi)\sin(\omega t) =$$

$$= V_M I_M [\sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi]\sin(\omega t) =$$

$$= V_M I_M [\sin^2(\omega t)\cos\varphi + \sin(\omega t)\cos(\omega t)\sin\varphi] =$$

$$= V_M I_M [(1-\cos^2(\omega t))\cos\varphi + \sin(\omega t)\cos(\omega t)\sin\varphi] =$$

$$= V_M I_M \left[\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\cos\varphi + \frac{\sin(2\omega t)\sin\varphi}{2}\right]$$

$$= \frac{V_M I_M}{2}\left[(1-\cos(2\omega t))\cos\varphi + \sin(2\omega t)\sin\varphi\right] =$$

POTENZA ATTIVA ISTANTANEA

POTENZA REATTIVA ISTANTANEA

POTENZA ATTIVA: $\boxed{P} \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \boxed{\frac{V_M I_M}{2}\cos\varphi} = \frac{Z I_M^2}{2}\cos\varphi = \boxed{\frac{R I_M^2}{2}}$
$= \frac{Y V_M^2}{2}\cos\varphi = \boxed{\frac{G V_M^2}{2}}$

PER DEF.

FA 0 PERCHÉ INTEGRANDO SUL PERIODO SU 2 VOLTE
FA 0, IDEM INTEGR. IL PERIODO

$$P = \frac{1}{T}\cdot\frac{V_M I_M}{2}\left[\int_0^T \cos\varphi\,dt - \underbrace{\int_0^T \cos(2\omega t)\cos\varphi\,dt}_{} + \int_0^T \sin(2\omega t)\sin\omega t\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{T}}\cdot\frac{V_M I_M}{2}\left[\cos\varphi\cdot\cancel{T} - \cancel{\cos\varphi}\cdot 0 + \sin\cancel{\varphi}\cdot 0\right] =$$

$= \frac{V_M I_M}{2}\cos\varphi$ [W] (valore medio della potenza istantanea)

POTENZA REATTIVA: $\boxed{Q} = \boxed{\frac{V_M I_M}{2}\sin\varphi} = \frac{Z I_M^2}{2}\sin\varphi = \boxed{\frac{X I_M^2}{2}} = \frac{Y V_M^2}{2}\sin\varphi = \boxed{-\frac{B V_M^2}{2}}$ [VAR] = VOLT AMPERE REATTIVI

(valore max della potenza reattiva istantanea)

POTENZA APPARENTE: $\boxed{S} = \boxed{\frac{V_M I_M}{2}} = \boxed{\frac{Z I_M^2}{2}} = \boxed{\frac{Y V_M^2}{2}}$ [VA] = VOLT AMPERE

(limite max che la potenza attiva e reattiva non possono superare)

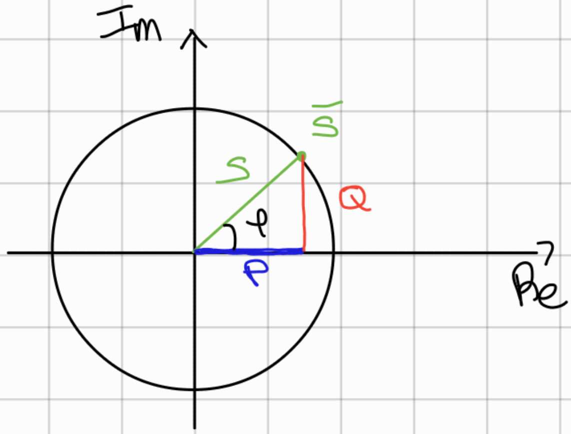
N.B: Tutte e tre le potenze sono numeri reali

POTENZA COMPLESSA: $\bar{S} = \frac{\dot{V}\dot{I}^*}{2}$ (é un numero complesso)

$\dot{V} = V_M e^{j\varphi_v}$ $\quad \dot{I} = I_M e^{j\varphi_i}$

$$\bar{S} = \frac{V_M e^{j\varphi_v} I_M e^{-j\varphi_i}}{2} = \frac{V_M I_M}{2} e^{j\varphi} = \frac{V_M I_M}{2}\cos\varphi + j\frac{V_M I_M}{2}\sin\varphi = P + jQ$$

[VA]



$$\left(\frac{V_M I_M}{2}\right)^2 \cos^2\varphi + \left(\frac{V_M I_M}{2}\right)^2 \sin^2\varphi =$$

$$P^2 \qquad + \qquad Q^2$$

$$= \left(\frac{V_M I_M}{2}\right)^2 \left[\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right] = S^2$$

$\dot{V} = \bar{Z}\,\dot{I}$ → $V_M = Z \cdot I_M$

→ $\varphi_v = \varphi + \varphi_i$

$\dot{I} = \bar{Y}\,\dot{V}$ → $I_M = Y V_M$

→ $\varphi_i = -\varphi + \varphi_v$

$I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$ $\quad V_{eff} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$ $\quad I_M = I_{eff}\sqrt{2}$ per evitare di avere la frazione

P diventa $VI\cos\varphi = RI^2 = GV^2$

(senza pedice si sottintende che sono i valori efficaci di tensione / corrente)

idem per le altre

TEOREMA DI TELLEGEN

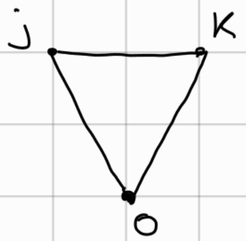
La somma delle potenze istantanee su tutti i rami di un circuito è uguale a 0.

$$\boxed{\sum_{j,k=1}^{n} v_{jk}(t)\cdot i_{jk}(t)=0} \Rightarrow \sum_{j,k=1}^{n}\left(v_{jo}(t)-v_{ko}(t)\right) i_{jk}(t)=0$$

$$\Rightarrow \sum_{j,k=1}^{n} v_{jo}(t)\cdot i_{jk}(t)-\sum_{j,k=1}^{n} v_{ko}(t)\cdot i_{jk}(t)=0$$

DIM

$$v_{jk}(t)=v_{j\emptyset}(t)-v_{k\emptyset}(t) \quad (*)$$



$$v_{jk}+v_{k\emptyset}+v_{\emptyset j}=0 \Rightarrow v_{jk}=-v_{k\emptyset}-v_{\emptyset j}=$$
$$=v_{j\emptyset}-v_{k\emptyset}$$

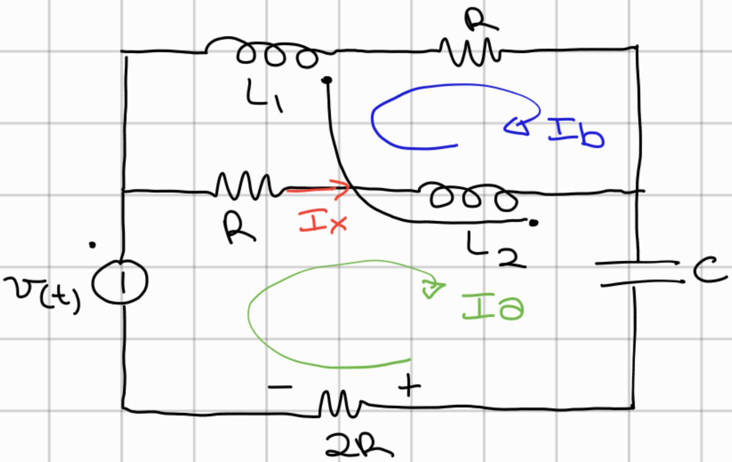
PER KIRCHOFF I

$$(*) \quad \sum_{j=1}^{n} v_{jo}(t)\overset{0}{\overset{\parallel}{\left[\cancel{\sum_{k=1}^{n} i_{jk}(t)}\right]}}-\sum_{k=1}^{n} v_{ko}(t)\overset{0}{\overset{\parallel}{\left[\cancel{\sum_{j=1}^{n} i_{jk}(t)}\right]}}=0$$

SOMMA ALG.
DELLE CORR.
USCENTI DAL
NODO j

SOMMA ALG.
DELLE CORR.
ENTRANTI IN K

ESAME 14/02/2022



$\dot{V}$ $v(t) = 100\sqrt{2}\cos(1000t)$ V

$R = 10\ \Omega$

$L_1 = 10$ mH $= 10 \cdot 10^{-3}$ H

$L_2 = 20$mH $= 20 \cdot 10^{-3}$ H

$M = 10$ mH $= 10 \cdot 10^{-3}$ H

$C = 10\ \mu F = 10 \cdot 10^{-6}$ F

$i_x(t) = ?$

$\bar{S}_{2R} = ?$

$\dot{V} = 100$

Con gli induttori mutuamente accoppiati non si può usare il metodo delle tensioni di nodo, si può usare solo correnti di maglia.

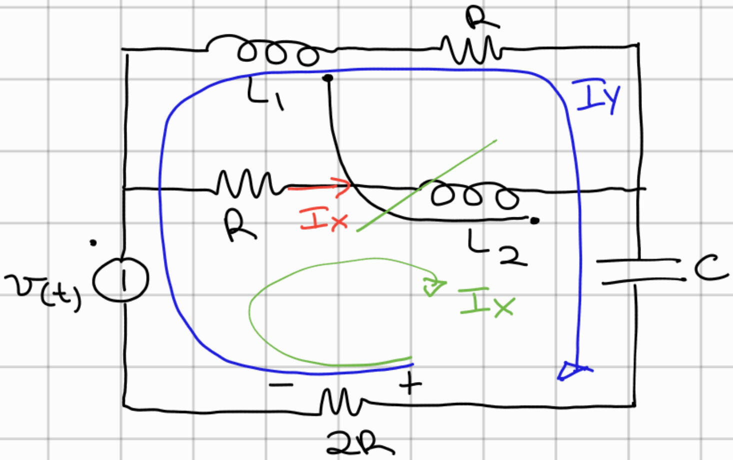
$$\begin{cases} \circlearrowright: 2R\dot{I}_a - \dot{V} + R(\dot{I}_a - \dot{I}_b) + \underbrace{j\omega L_2(\dot{I}_a - \dot{I}_b) + j\omega M\dot{I}_b}_{\text{CADUTA DI TENSIONE SU } L_2} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_a = 0 \\ \circlearrowright: R(\dot{I}_b - \dot{I}_a) + \underbrace{j\omega L_1\dot{I}_b + j\omega M(\dot{I}_a - \dot{I}_b)}_{\text{CADUTA DI TENSIONE SU } L_1} + R\dot{I}_b + \underbrace{j\omega L_2(\dot{I}_b - \dot{I}_a) - j\omega M\dot{I}_b}_{\text{CADUTA SU } L_2} = 0 \\ \dot{I}_x = \dot{I}_a - \dot{I}_b \end{cases}$$

↳ I_x va poi riportata nel dominio del tempo

Per calcolare $\bar{S}_{2R}$:

$$\dot{V}_{2R} = 2R\dot{I}_a$$
$$\bar{S}_{2R} = \dot{V}_{2R}\dot{I}_a^* = 2R\dot{I}_a\dot{I}_a^* = 2R|\dot{I}_a|^2$$

Rifacciamo l'esercizio scegliendo maglie diverse:



$$\circlearrowright: 2R(\dot{I}_x + \dot{I}_y) - \dot{V} + R\dot{I}_x + j\omega L_2\dot{I}_x + j\omega M\dot{I}_y + \frac{1}{j\omega C}(\dot{I}_x + \dot{I}_y) = 0$$

$$\circlearrowright: 2R(\dot{I}_x + \dot{I}_y) - \dot{V} + j\omega L_1(\dot{I}_y) + j\omega M\dot{I}_x + R\dot{I}_y + \frac{1}{j\omega C}(\dot{I}_x + \dot{I}_y) = 0$$

Ricaviamo $\dot{I}_y$ dalla 1° eq:

$$\dot{I}_y = \underbrace{\frac{\dot{V}}{2R + j\omega M + \frac{1}{j\omega C}}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{3R + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}}{2R + j\omega M + \frac{1}{j\omega C}}}_{\beta}\dot{I}_x = \alpha + \beta\dot{I}_x$$

Risolviamo la 2° eq:

$$\left(2R + j\omega M + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_x + \left(3R + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C}\right)(\alpha + \beta\dot{I}_x) = \dot{V}$$

$$\dot{I}_x = \frac{\dot{V} - \left(3R + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C}\right)\alpha}{2R + j\omega M + \frac{1}{j\omega C} + \left(3R + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C}\right)\beta} = 0.3325 + 0.3563j = 0.4874e^{j0.8199}$$

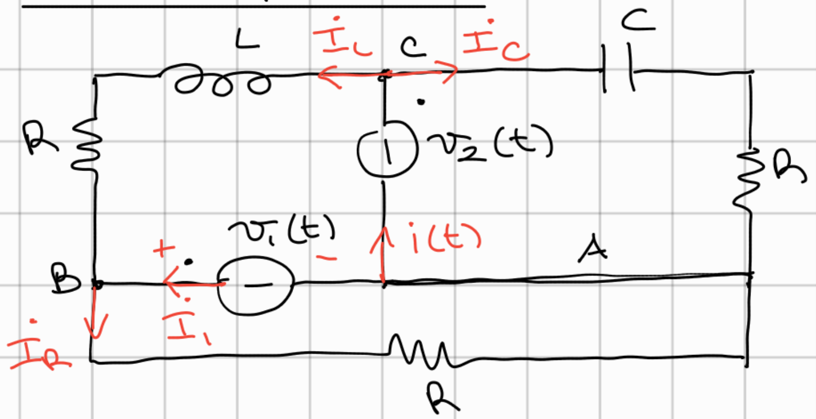
$$i_x(t) = 0.4874\sqrt{2} \cdot \cos(1000t + 0.8199)\ A$$

$$\dot{I}_R = \dot{I}_x - \dot{I}_y = -\dot{I}_x - \alpha - \beta \dot{I}_x = 1.0898 e^{-j1.8581}$$

$$\overline{S}_{2R} = P_{2R} = 2R \cdot 1.0898^2 = 23.7530\ W$$

04/11/2022

ESAME 24/01/2022



$v_1(t) = 10\sqrt{2}\cos(1000t)$

$v_2(t) = 20\sqrt{2}\sin(1000t) =$
$= 20\sqrt{2}\cos(1000t - \frac{\pi}{2})$

$R = 10\ \Omega$

$L = 10\ mH = 10 \cdot 10^{-3}\ H$

$C = 10\ \mu F = 10 \cdot 10^{-6}\ F$

$P_{v_1} = ?$

$\dot{V}_1 = 10$

$\dot{V}_2 = 20e^{-j\frac{\pi}{2}} = -20j$

$\dot{V}_A = 0$

$\dot{V}_B = \dot{V}_1$

$\dot{V}_C = \dot{V}_2$

Calcoliamo $\dot{I}$ applicando il I principio di Kirchoff al nodo C:

$$\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_C = \frac{\dot{V}_C - \dot{V}_B}{R + j\omega L} + \frac{\dot{V}_C - \cancel{\dot{V}_A}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = -1.3020 - 0.5198j =$$
$$= 1.4019e^{-j2.7617}$$

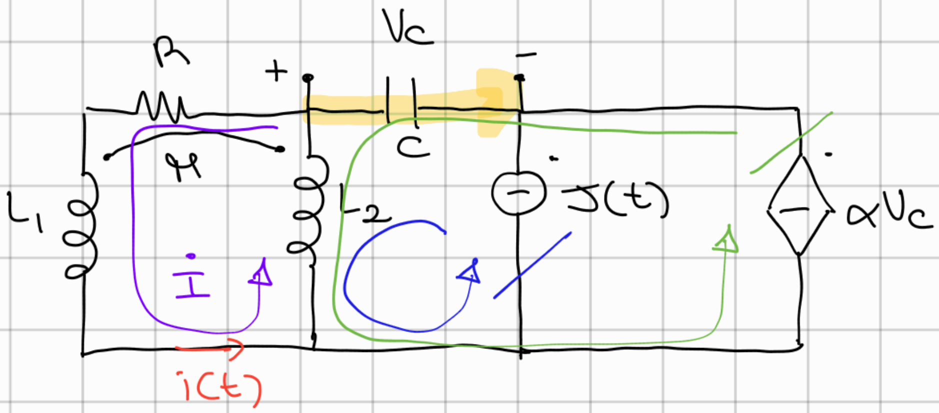
$i(t) = 1.4019\sqrt{2}\cos(1000t - 2.7617)$

$P_{v_1} = Re\{\dot{V}_1\dot{I}_1^*\} = Re\{\bar{S}\}$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_R - \dot{I}_L = \frac{\dot{V}_B}{R} - \dot{I}_L = 2.5 + 0.5j$$

$\bar{S}_{V_1} = 10(2.5 - 0.5j) = 25 - 5j = 25\ W$

ESAME APRILE 2022



$J(t) = 2\sqrt{2}\cos(1000t)$

$R = 10\ \Omega$

$L_1 = 15\ mH = 15 \cdot 10^{-3}\ H$

$L_2 = 20\ mH = 20 \cdot 10^{-3}\ H$

$M = 10\ mH = 10 \cdot 10^{-3}\ H$

$C = 100\ \mu F = 100 \cdot 10^{-6}\ F$

$\alpha = 0.2\ A/V$

$\dot{J} = 2$

Ca: $R\dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M(\dot{J} + \alpha \dot{V}_c - \dot{I}) + j\omega L_2(\dot{I} - \dot{J} - \alpha \dot{V}_c) -$
$- j\omega M \dot{I} = 0$

$$\dot{V}_c = -\frac{1}{j\omega C}(\dot{J} + \alpha \dot{V}_c) \Rightarrow \left(1 + \frac{\alpha}{j\omega C}\right)\dot{V}_c = -\frac{\dot{J}}{j\omega C} \Rightarrow \dot{V}_c = \frac{-\frac{\dot{J}}{j\omega C}}{1 + \frac{\alpha}{j\omega C}} =$$

$$= -8 + 4j$$

$$\dot{I} = \frac{-j\omega M \dot{J} - j\omega M \alpha \dot{V}_c + j\omega L_2 \alpha \dot{V}_c + j\omega L_2 \dot{J}}{j\omega L_1 - j\omega M + R + j\omega L_2 - j\omega M} =$$

$$= -0.0615 + 0.4923j = 0.4961 e^{j1.6952}$$

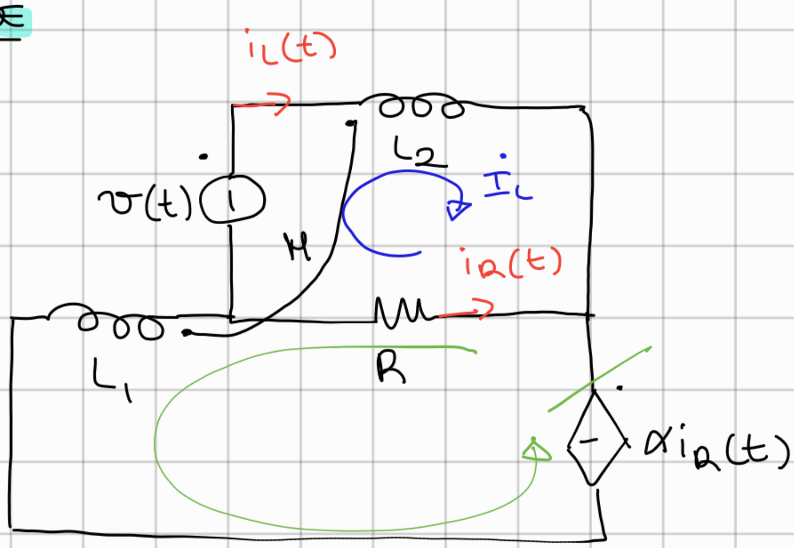
$i(t) = 0.4961\sqrt{2}\cos(1000t + 1.6952)$

$P_C = 0$

$P_{L_1 L_2} = 0$

$P_R = RI^2 = 10 \cdot (0.4961)^2 = 2.4615\ W$

ESAME



$v(t) = 80\sqrt{2}\sin(100t)$ V

$R = 10\ \Omega$

$L_1 = L_2 = 10$ mH

$M = 5$ mH

$\alpha = 1/2$

$S_v = ?$

$\dot{V} = 80$

$$\circlearrowright: \begin{cases} R(\dot{I}_L + \alpha \dot{I}_R) - \dot{V} + j\omega L_2 \dot{I}_L + j\omega M \alpha \dot{I}_R = 0 \\ \dot{I}_R = -\alpha \dot{I}_R - \dot{I}_L \Rightarrow (1+\alpha)\dot{I}_R = -\dot{I}_L \Rightarrow \dot{I}_R = -\frac{1}{1+\alpha}\dot{I}_L = -\frac{2}{3}\dot{I}_L \end{cases}$$

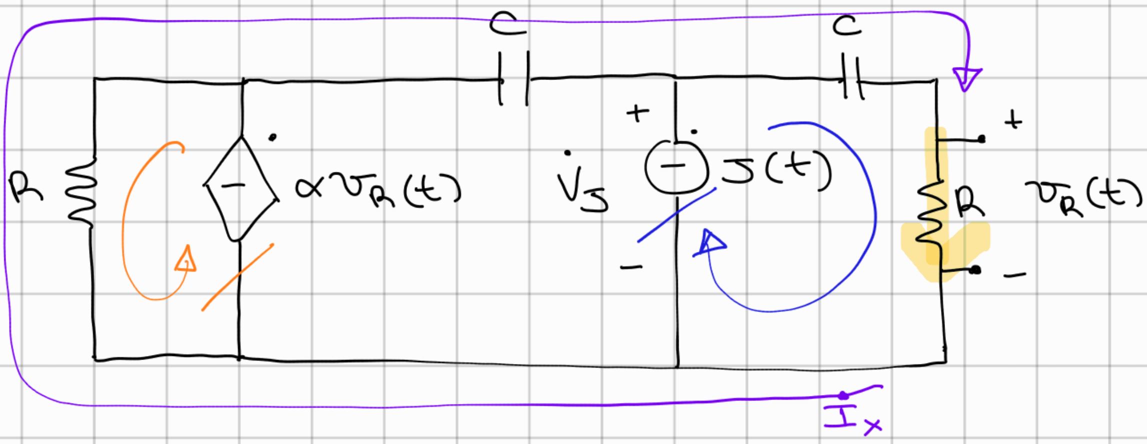
EQ. PER LA GRANDEZZA PILOTA

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{V}}{R - \frac{2}{3}\alpha R + j\omega L_2 - j\omega M\alpha\frac{2}{3}} = 4.6829 - 5.8537j = 7.4963e^{-j0.8961}$$

$i_L(t) = 7.4963\sqrt{2}\sin(1000t - 0.8961)$ A

$S = VI = 80 \cdot 7.4963 = 599.7072$ VA

ESAME 10/06/2022



$J(t) = 2\sqrt{2}\cos(1000t + \pi/2)$ $\qquad \dot{J} = 2j$

$R = 10\ \Omega$

$C = 10\ \mu F$

$\alpha = 0.1\ A/V$

$\bar{S}_J = ?$

$$\begin{cases} R(\dot{I}_x - \alpha \dot{V}_R) + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_x + \frac{1}{j\omega C}(\dot{I}_x + \dot{J}) + R(\dot{I}_x + \dot{J}) = 0 \\ \dot{V}_R = R(\dot{J} + \dot{I}_x) \end{cases}$$

$$R\dot{I}_x - \alpha R^2 \dot{J} - \alpha R^2 \dot{I}_x + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_x + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_x + \frac{\dot{J}}{j\omega C} + R\dot{I}_x + R\dot{J} = 0$$

$$\dot{I}_x\left(2R - \alpha R^2 + \frac{2}{j\omega C}\right) = \left(\alpha R^2 - \frac{1}{j\omega C} - R\right)\dot{J}$$

$$\dot{I}_x = \frac{\alpha R^2 - \frac{1}{j\omega C} - R}{2R - \alpha R^2 + \frac{2}{j\omega C}}\dot{J} = -0.0499 - 0.9975j$$

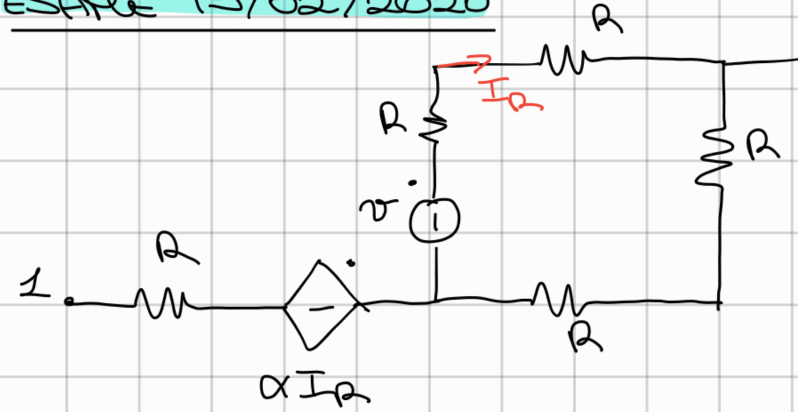
$$\dot{V}_R = (\dot{J} + \dot{I}_x)R = -0.4988 + 10.0249j = 10.0373e^{j1.6205}$$

$$v_R(t) = 10.0373\sqrt{2}\cos(1000t + 1.6205)$$

$$\bar{S} = \dot{V}_J \dot{J}^* = (\dot{I}_x + J)\left(\frac{1}{j\omega C} + R\right)\dot{J}^* = (99.7506 + 15.0125j)\,\dot{J}^*$$

$$\bar{S} = 30 - 199.5j \quad VA$$

ESAME 19/02/2020

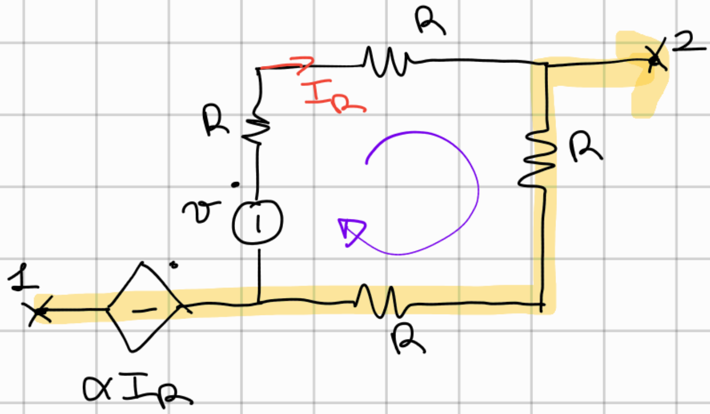


$V = 12V$

$R = 10\,\Omega$

$\alpha = 10\ V/A$

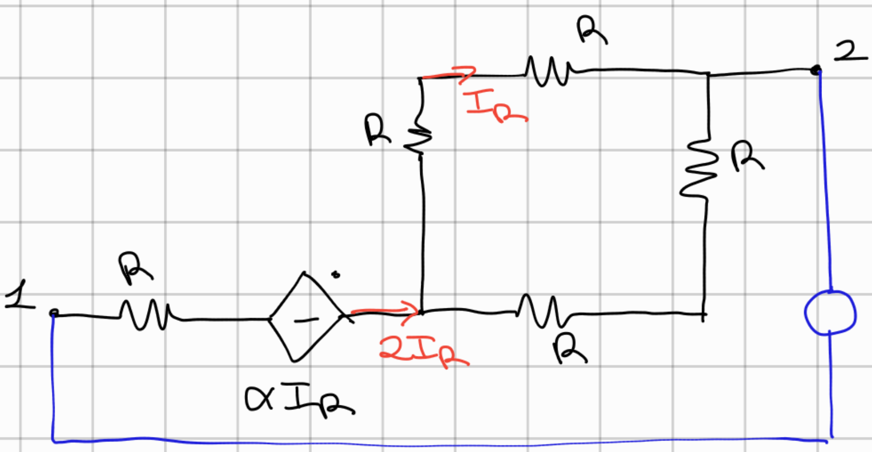
1) E_{TH}

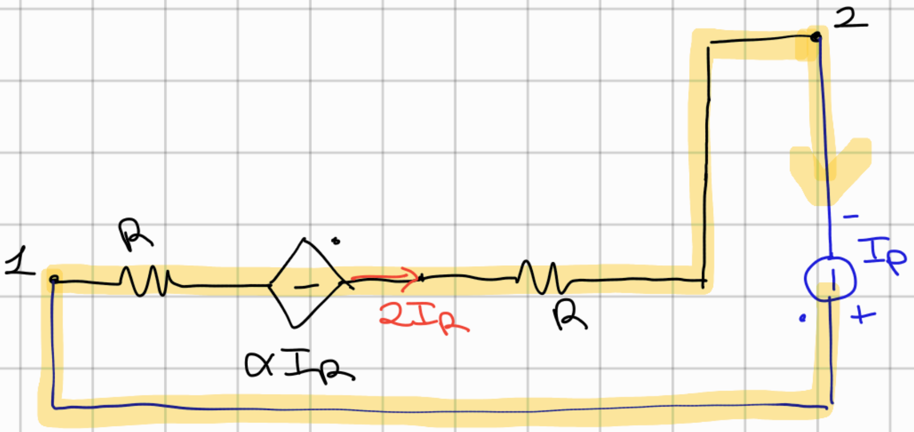


$$I_R = \frac{V}{4R} = 0.3\,A$$

$$V_{12} = V_{TH} = -\alpha I_R - 2R(I_R) = -9V$$

2) R_{TH}

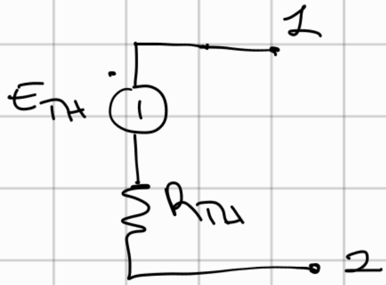




$V_p = RI_p - \alpha I_R + RI_p$

$2I_R = I_p \Rightarrow I_R = \frac{I_p}{2}$

$R_{TH} = \frac{V_p}{I_p} = 2R - \frac{\alpha}{2} = 15\ \Omega$



08/11/2022

TEOREMA DI BOUCHEROT

In un circuito a regime periodico sinusoidale la somma delle potenze attive e reattive erogate dai generatori presenti nel circuito é uguale alla somma delle potenze attive e reattive impegnate nei componenti del circuito.

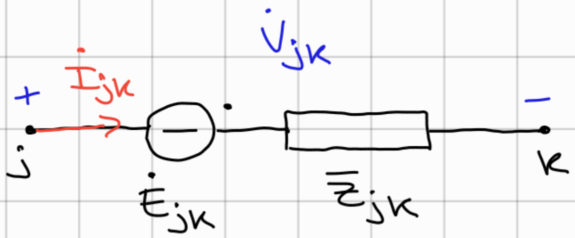
DIM

Per il th di Tellegen $\sum_{j,k=1}^{n} v_{jk} i_{jk} = 0$

La stessa relazione vale anche nel dominio fasoriale:

$$\sum_{j,k=1}^{n} \dot{V}_{jk} \dot{I}^*_{jk} = 0$$

Consideriamo un generico ramo tra j e k.
In generale questo ramo potrà contenere un generatore (di tensione o corrente) e/o un impedenza o nessuno dei due.



Effettuando un percorso da j a k possiamo scrivere $\dot{V}_{jk}$ come: $-\dot{E}_{jk} + \bar{Z}_{jk}\dot{I}_{jk}$

$$\Rightarrow \sum_{j,k=1}^{n} (-\dot{E}_{jk} + \bar{Z}_{jk}\dot{I}_{jk})\dot{I}^*_{jk} = 0$$

$$\underbrace{\sum_{j,k=1}^{n} \dot{E}_{jk}\dot{I}^*_{jk}}_{\text{SOMMA DELLE POTENZE COMPLESSE EROGATE DAI GEN. DEL CIRCUITO}} = \underbrace{\sum_{j,k=1}^{n} \overset{\text{IMPEDENZA}}{\bar{Z}_{jk}} I_{jk}^2}_{\text{SOMMA DELLE POTENZE COMPLESSE IMPEGNATE NELLE IMPEDENZE DEL CIRCUITO}}$$

$$\sum_{j,k=1}^{n}(P^{G}_{jk}+Q^{G}_{jk})=\sum_{j,k=1}^{n}\overline{S}_G=\sum_{j,k=1}^{n}(R_{jk}+jX_{jk})I^2_{jk}=\sum_{j,k=1}^{n}P_{jk}+j\sum_{j,k=1}^{n}Q_{jk}=\sum_{j,k=1}^{n}\overline{S}_{jk}$$

Se è presente un solo generatore sicuramente la potenza ATTIVA E erogata sarà positiva (o non neg.), se sono presenti più generatori si può solo dire che la somma delle potenze erogate sarà positiva (singolarmente un gen. potrebbe dissipare potenza).

Lo stesso non si può dire per le potenze REATTIVE Q, in quanto I^2_{jk} sono sempre non negative, mentre X_{jk} sono negative per i condensatori $(-\frac{1}{\omega C})$ e positive per gli induttori (ωL).
Dunque, il segno delle potenze reattive è indeterminato.

Il th ci dice che le potenze attive e reattive si conservano, così come la loro somma (potenze complesse).

Lo stesso non si può dire della potenza apparente, infatti immaginiamo di avere un generatore e due impedenze:

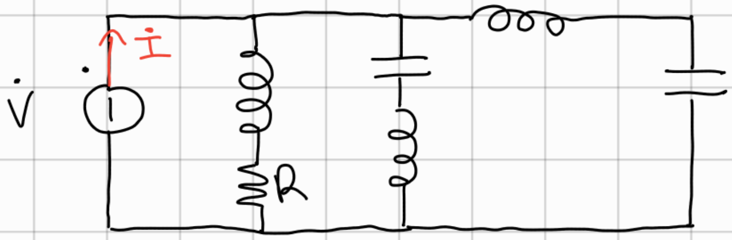
$\overline{S}_G=\overline{S}_1+\overline{S}_2$

$|\overline{S}_G|=|\overline{S}_1+\overline{S}_2|\neq|\overline{S}_1|+|\overline{S}_2|$

$\Rightarrow$ la potenza apparente <u>non</u> si conserva

ESEMPIO

Calcolare la potenza dissipata su R.

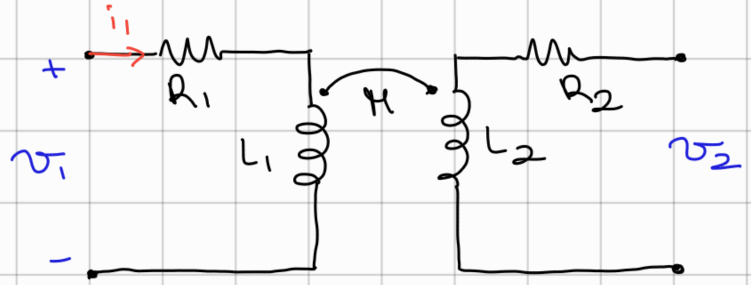


$$P_R = \mathrm{Re}\{\dot{V}\dot{I}^*\}$$

La resistenza R è l'unico componente dove si dissipa potenza attiva, su tutti gli altri si dissipa solo potenza reattiva.

POTENZA NEGLI INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI

CASO INDUTTORI REALI:



(nel caso di induttori ideali basta porre $R_1 = R_2 = 0$)

$$\bar{S} = \dot{V}_1\dot{I}_1^* + \dot{V}_2\dot{I}_2^*$$

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = R_1\dot{I}_1 + j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = R_2\dot{I}_2 + j\omega L_2\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 \end{cases}$$

$$\bar{S} = (R_1 I_1^2 + j\omega L_1 I_1^2 + j\omega M\dot{I}_2\dot{I}_1^*) + (R_2 I_2^2 + j\omega L_2 I_2^2 + j\omega M\dot{I}_1\dot{I}_2^*)$$

- POTENZA ATTIVA DISSIPATA SULLE R
- POTENZA REATTIVA DISSIPATA SUGLI L
- TERMINI DOVUTI AL MUTUO ACCOPPIAMENTO

$\dot{I}_1 = I_1 e^{j\varphi_1}$

$\dot{I}_2 = I_2 e^{j\varphi_2}$

$$\bar{S} = \ldots + j\omega M \left(I_2 e^{j\varphi_2} I_1 e^{-j\varphi_2} + I_1 e^{j\varphi_1} I_2 e^{-j\varphi_2} \right) =$$
$$= \ldots + j\omega M I_1 I_2 \left(e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} + e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) =$$
$$= \ldots + j\omega M I_1 I_2 \left(\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \cancel{j\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cancel{j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \right)$$

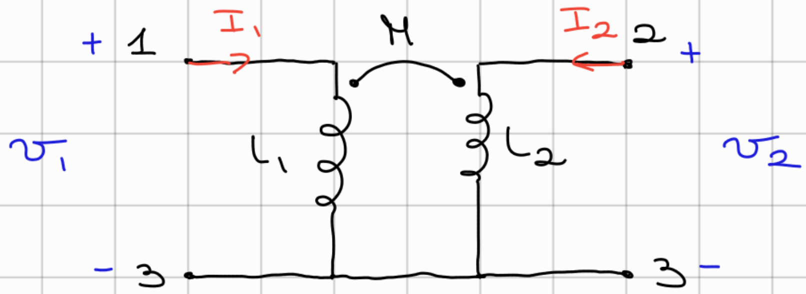
$$= R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + \boxed{j\omega L_1 I_1^2 + j\omega L_2 I_2^2 + 2j\omega M I_1 I_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

DUE INDUTTORI IDEALI MUTUAMENTE ACCOPPIATI DISSIPANO SOLO POTENZA REATTIVA (LA POTENZA COMPLESSA HA SOLO LA PARTE IMMAGINARIA)

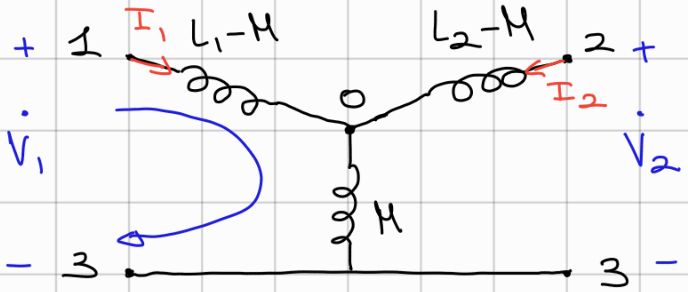
N.B: I_1 e I_2 VANNO SCELTE ENTRANTI NEI CONTRASSEGNI E VANNO SCRITTE IN FORMA POLARE (IL MODULO DEVE ESSERE POSITIVO)

N.B: nel singolo induttore c'è potenza attiva, ma si annulla con la potenza attiva dell'altro induttore che è uguale e opposta.

TRASFORMAZIONE DI DUE INDUTTORI MUTUAM. ACCOPPIATI IN TRE INDUTTORI SENZA MUTUO ACCOPPIAMENTO



Questa trasformazione si può effettuare se i due induttori hanno un nodo in comune.



Dimostriamo che il circuito rimane equivalente agli effetti esterni.

PRE-TRASFORMAZIONE

$\dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$

$\dot{V}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1$

POST-TRASFORMAZIONE

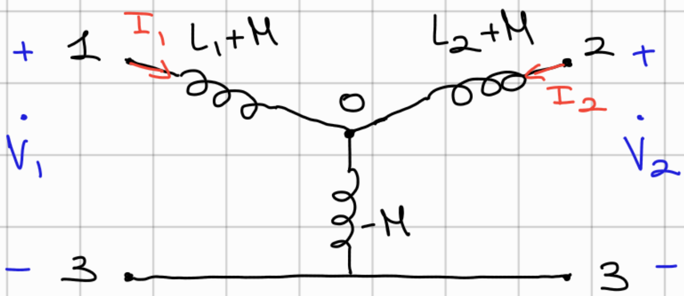
$\dot{V}_1 = j\omega (L_1 - \cancel{M}) \dot{I}_1 +$

$\quad + \cancel{j\omega M \dot{I}_1} + j\omega M \dot{I}_2$

$\dot{V}_2 = j\omega (L_2 - \cancel{M}) \dot{I}_2 +$

$\quad + j\omega M (\dot{I}_1 + \cancel{\dot{I}_2})$

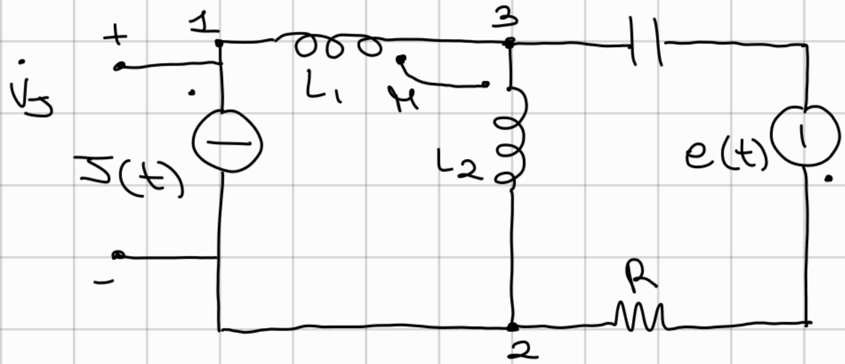
Se il nodo in comune è dalla stessa parte rispetto ai contrassegni (disegno sopra), allora la trasformazione è quella già illustrata, altrimenti cambia il segno di M:



Questa trasformazione topologica può essere utile se:

- $L_1 = M$ o $L_2 = M$ poiché in questo caso rimarrebbero solo due induttori senza mutuo accoppiamento
- si vuole applicare il metodo delle tensioni di nodo in presenza di induttori mutuam. accoppiati

ESERCIZIO



$e(t) = 20\sqrt{2}\sin(100t)$

$J(t) = 3\sqrt{2}\sin(100t)$

$R = 10\ \Omega$

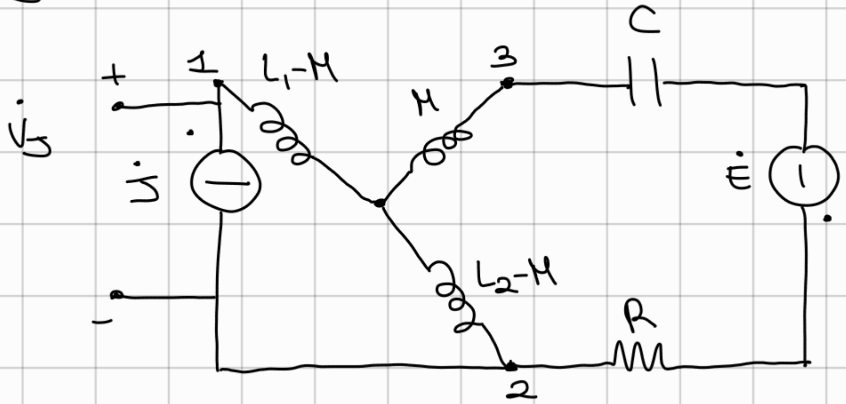
$C = 100\ \mu F$

$L_1 = M = 10\ mH$

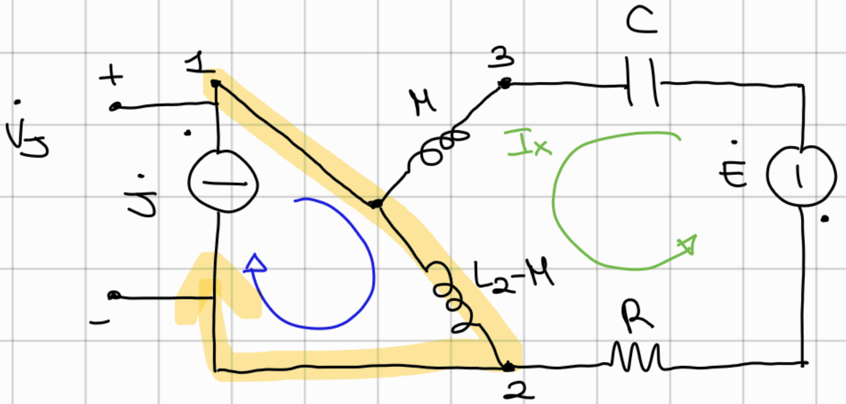
$L_2 = 20\ mH$

Calcolare la potenza complessa erogata da J.

$\bar{S} = \dot V_J \cdot \dot J^*$



Poiché $L_1 = M$:

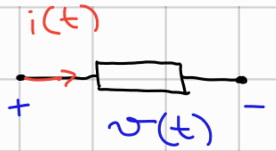


G: $\dot E + \left(R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega M + j\omega(L_2 - M)\right)\dot I_x + \dot J\, j\omega(L_2 - M) = 0$

$$\Rightarrow \dot I_x = -\frac{E + \dot J \cdot j\omega(L_2 - M)}{R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L_2} = 0.0097 - 0.205j$$

$\dot V_J = (\dot J + \dot I_x)\, j\omega(L_2 - M)$

$\bar S = \dot V_J \cdot \dot J^* = 0.6152 + 9.0291j\ \ VA$



$v(t) = f(i(t)) \Rightarrow i(t) = g(v(t))$

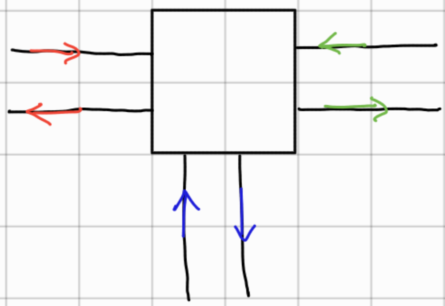
Questa rappresentazione è valida se l'elemento da studiare è un bipolo.

DISPOSITIVI MULTIPOLI

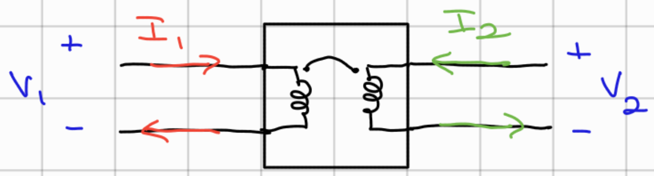
PORTA (di un multipolo): coppia di morsetti caratterizzata dal fatto che la corrente che entra in un morsetto è uguale alla corrente che esce dall'altro.
(ad es. i due morsetti di un bipolo costituiscono una porta)

MULTIPORTA: multipolo in cui tutti i morsetti a due a due costituiscono una porta.

ES. (DISPOSITIVO A 3 PORTE)



CIRCUITI A DUE PORTE



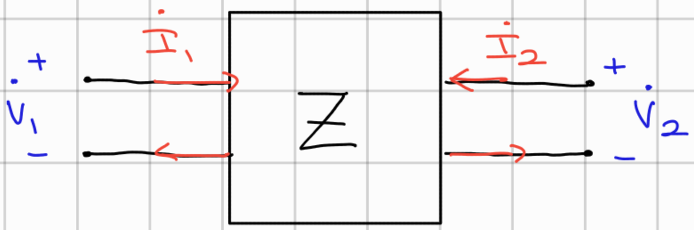
Due induttori mutuam. accoppiati costituiscono un circuito a due porte.

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\bar{Z}_{11}}{j\omega L_1} & \overset{\bar{Z}_{12}}{j\omega M} \\ \underset{\bar{Z}_{21}}{j\omega M} & \underset{\bar{Z}_{22}}{j\omega L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\dot{V}}_{\text{VETTORE DELLE TENSIONI } (2\times1)} = \underbrace{\bar{Z}}_{\text{MATRICE } (2\times2) \text{ A VALORI COMPLESSI}} \underbrace{\dot{I}}_{\text{VETTORE DELLE CORRENTI } (2\times1)} \Rightarrow \dot{I} = \bar{Z}^{-1} \cdot \dot{V}$$

CIRCUITI A DUE PORTE

- Hanno 4 poli
- I poli a due a due formano una porta



CONVENZIONE: la corrente $\dot{I}_1$ si prende sempre entrante nella prima porta, mentre la corrente $\dot{I}_2$ si prende sempre entrante nella seconda porta.

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \bar{z}_{21}\dot{I}_1 + \bar{z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$$

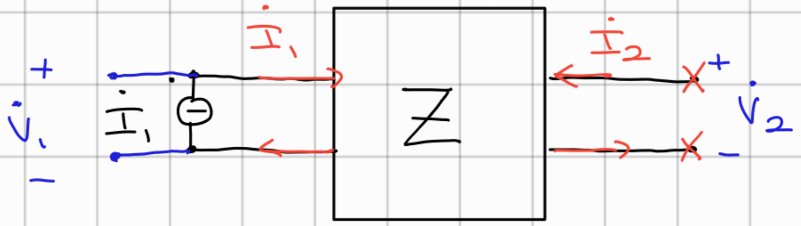
Questa parametrizzazione viene chiamata PARAMETRIZZAZIONE A PARAMETRI Z perché i quattro elementi della matrice che lega tensioni e correnti hanno tutti le dimensioni di un'impedenza $\bar{z}$ $[\Omega]$.

Per calcolare i valori delle quattro impedenze si possono mettere a zero alternativamente $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$.

$$\bar{z}_{11} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} \qquad \bar{z}_{12} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$

$$\bar{z}_{21} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} \qquad \bar{z}_{22} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$

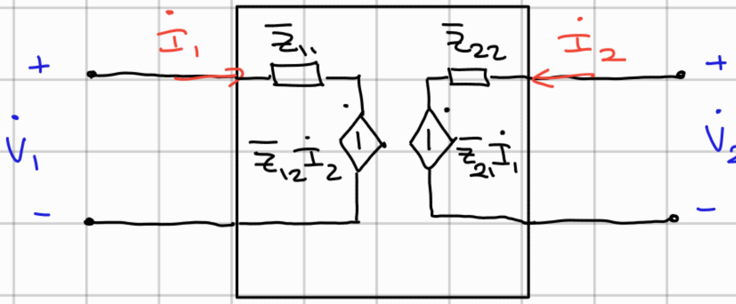
Ipotizziamo di mettere a zero $\dot{I}_2$ anche fisicamente:



Se inseriamo un gen. di corrente sulla porta 1 (supponiamo che eroghi 1 A, ma è un fattore di scala) e misuriamo $\dot{V}_1$ e $\dot{V}_2$ otteniamo direttamente $\bar{z}_{11}$ e $\bar{z}_{21}$.

Lo stesso vale per i valori di $\bar{z}_{12}$ e $\bar{z}_{22}$ azzerando $\dot{I}_1$.

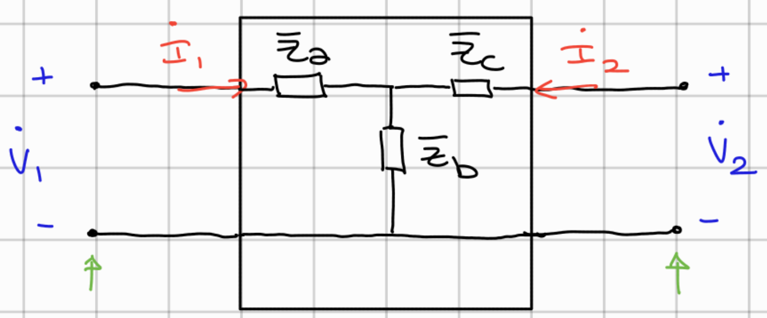
Circuito equivalente agli effetti esterni:



$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \bar{z}_{22}\dot{I}_2 + \bar{z}_{21}\dot{I}_1 \end{cases}$$

UGUALE AL SISTEMA DEL CIRCUITO INIZIALE

Si può dimostrare che se all'interno del circuito a due porte non sono presenti gen. pilotati $\Rightarrow \bar{z}_{21} = \bar{z}_{12} \Rightarrow$ gli ingressi della matrice sono 3.
In questo caso è possibile trovare un circuito equiv. più semplice rispetto al precedente.

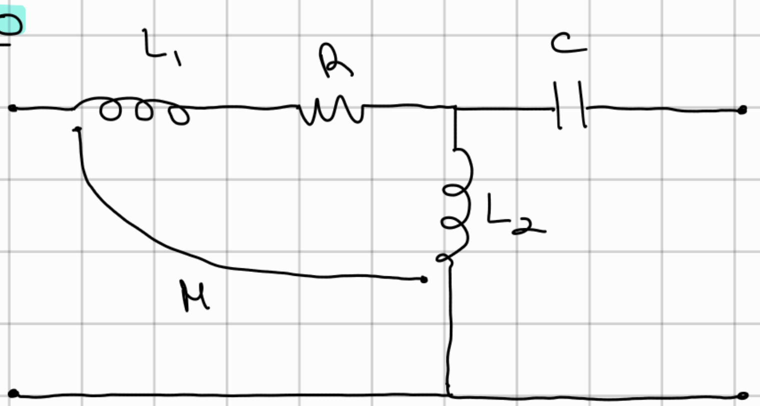


IPOTIZZIAMO CHE QUESTI DUE POLI SIANO ALLO STESSO POTENZIALE

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{Z}_a\dot{I}_1 + \bar{Z}_b(\dot{I}_1+\dot{I}_2) = \overbrace{(\bar{Z}_a+\bar{Z}_b)}^{\bar{Z}_{11}}\dot{I}_1 + \overbrace{\bar{Z}_b}^{\bar{Z}_{12}}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \bar{Z}_c\dot{I}_2 + \bar{Z}_b(\dot{I}_1+\dot{I}_2) = \underbrace{\bar{Z}_b}_{\bar{Z}_{12}}\dot{I}_1 + \underbrace{(\bar{Z}_b+\bar{Z}_c)}_{\bar{Z}_{22}}\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\bar{Z}_a + \bar{Z}_b = \bar{Z}_{11} \Rightarrow \bar{Z}_a = \bar{Z}_{11} - \bar{Z}_{12}$$
$$\bar{Z}_b = \bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21} \Rightarrow \bar{Z}_b = \bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21}$$
$$\bar{Z}_b + \bar{Z}_c = \bar{Z}_{22} \Rightarrow \bar{Z}_c = \bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}$$

ESERCIZIO



$L_1 = 20\ mH = L_2$
$M = 15\ mH$
$R = 20\ \Omega$
$\omega = 1000\ rad/s$
$C = 0.1\ mF$

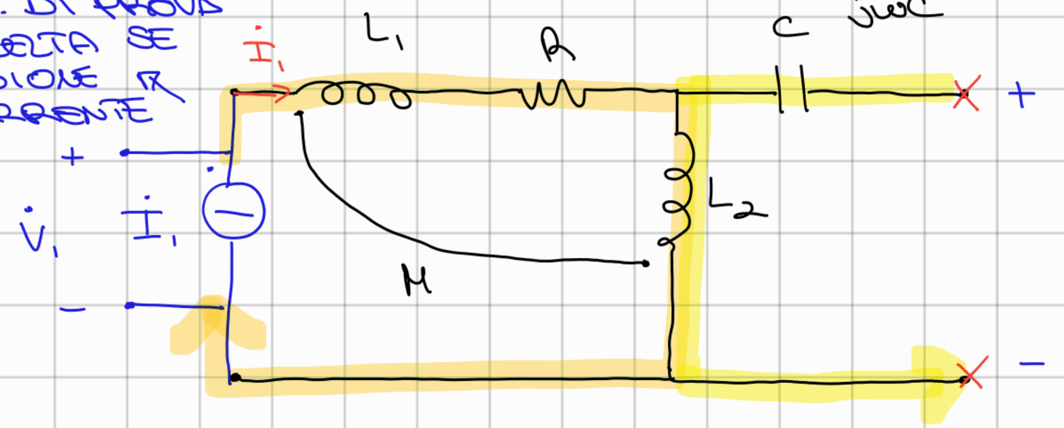
Calcolare i parametri $\bar{Z}$ in modo da poter scrivere $\dot{V}_1$ e $\dot{V}_2$ in funzione di $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$.

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{Z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \bar{Z}_{21}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

Mettiamo a zero I_2:

SI PUÒ CANCELLARE LA CADUTA SAREBBE $\frac{1}{j\omega C} I_2$ MA $I_2 = 0$

GEN. DI PROVA A SCELTA SE TENSIONE O CORRENTE

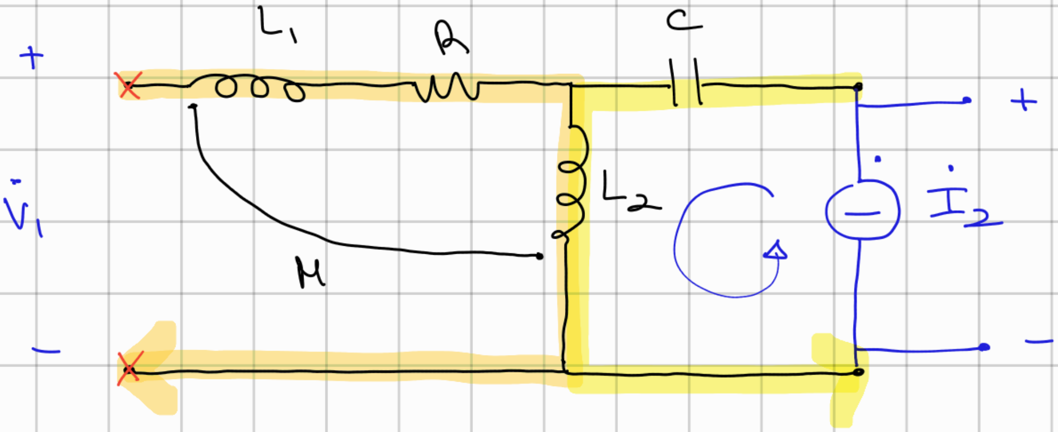


$\dot{I}_2 = 0$, $\dot{I}_1$ fissato, rimangono da calcolare $\dot{V}_1$ e $\dot{V}_2$

$$\dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_1 + R\dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_1 =$$
$$= \dot{I}_1 (j\omega L_1 - j\omega M - R + j\omega L_2 - j\omega M) = z_{11} \dot{I}_1$$
$$\Rightarrow \bar{z}_{11} = 20 + 10j$$

$$\dot{V}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_1 = j\omega (L_2 - M)\dot{I}_1 \Rightarrow \bar{z}_{21} = j\omega(L_2 - M)$$
$$= 5j$$

Mettiamo a zero $\dot{I}_1$:



$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{z}_{11} \dot{I}_1 + \bar{z}_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \bar{z}_{21} \dot{I}_1 + \bar{z}_{22} \dot{I}_2 \end{cases}$$

CORRENTI DI MAGLIA: 1 maglia − 1 gen. di corrente = 0 eq.

$\dot{I}_1 = 0$, $\dot{I}_2$ fissata, restano da calcolare $\dot{V}_1$ e $\dot{V}_2$.

$$\dot{V}_1 = j\omega \cancel{L_1 \dot{I}_1} - j\omega M(\cancel{\dot{I}_1} + \dot{I}_2) + \cancel{R\dot{I}_1} + j\omega L_2(\cancel{\dot{I}_1} + \dot{I}_2) - \cancel{j\omega M \dot{I}_1}$$

$$= \underbrace{-j\omega M \dot{I}_2}_{\text{CADUTA SU } L_1} + \underbrace{j\omega L_2 \dot{I}_2}_{\text{CADUTA SU } L_2} = j\omega(L_2 - M)\dot{I}_2$$

(NON C'È NESSUNA CORRENTE CHE SCORRE SU L_1 E CAUSA CADUTA DI MUTUA)

$$\Rightarrow \bar{Z}_{12} = j\omega(L_2 - M) = 5j$$

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 = (Z_{22}\dot{I}_2) \Rightarrow \bar{Z}_{22} = 10j$$

$$Z = \begin{bmatrix} 20 + 10j & 5j \\ 5j & 10j \end{bmatrix}$$

MATRICE SIMMETRICA ($\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21}$) PERCHÉ NEL CIRC. A 2 PORTE NON C'ERANO GEN. PILOTATI (IL CIRC. È EQUIV. A QUELLO CON 3 IMPEDENZE A T)

Se la matrice è simmetrica si dice che la rete è RECIPROCA, mentre si dice che la rete è SIMMETRICA se è reciproca e anche $\bar{Z}_{11} = \bar{Z}_{22}$ (la porta di ingresso può essere vista come uscita e nulla cambia agli effetti esterni).

11/11/2022

PARAMETRIZZAZIONE A PARAMETRI Y (CORRENTI IN FUNZIONE DELLE TENSIONI)

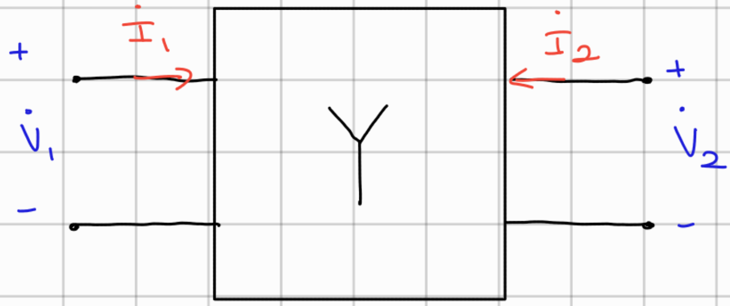
$\dot{V} = \bar{Z}\dot{I}$

$\dot{I} = \bar{Z}^{-1}\dot{V}$ con $\bar{Z}$ matrice invertibile 2x2

$= \bar{Y} V$ → MAT. INVERSA DELLE IMPEDENZE

$$\bar{Y}\dot{V} \Rightarrow \begin{cases} \dot{I}_1 = \bar{y}_{11}\dot{V}_2 + \bar{y}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{y}_{21}\dot{V}_1 + \bar{y}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

Tutti i parametri $\bar{y}$ hanno la dimensione di un' AMMETTENZA.

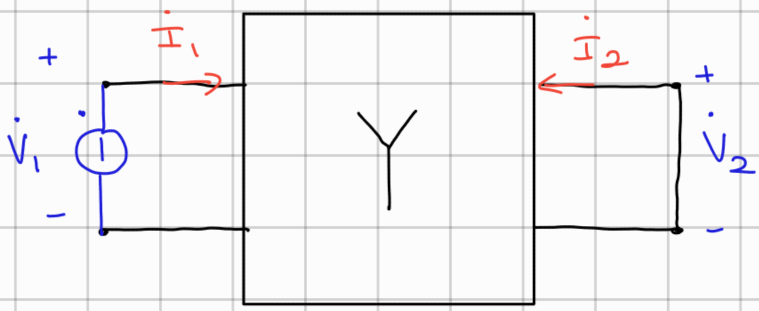


Per calcolare i parametri $\bar{y}$:

$$\bar{y}_{11} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{V}_2=0} \qquad \bar{y}_{12} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{V}_1=0}$$

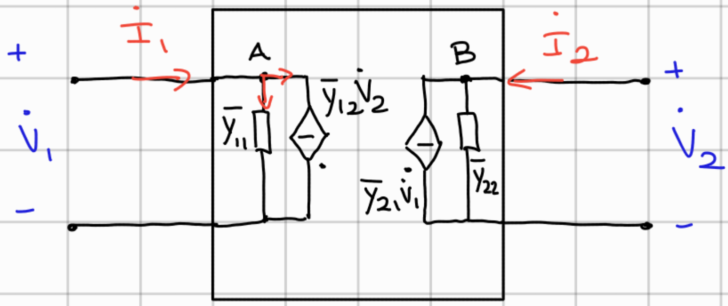
$$\bar{y}_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{V}_2=0} \qquad \bar{y}_{22} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{V}_1=0}$$

Mettere a zero $\dot{V}_2$ significa:



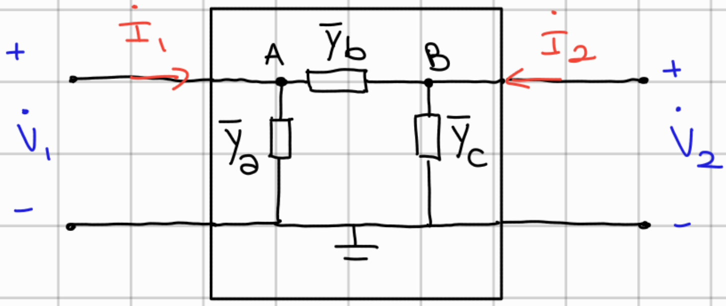
Calcolando $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$ ($\dot{V}_1$ è noto) si ottengono i valori dei parametri.
Lo stesso vale per $\dot{V}_2$ (cc alla porta 1 e gen. di prova di tensione alla porta 2).

CIRCUITO EQUIVALENTE:



$$A: \dot{I}_1 = \bar{Y}_{12}\dot{V}_2 + \bar{Y}_{11}\dot{V}_1 \qquad B: \dot{I}_2 = \bar{Y}_{22}\dot{V}_2 + \bar{Y}_{21}\dot{V}_1$$

In assenza di gen. pilotati nel circ. a due porte, la matrice $\dot{Y}$ risulta simmetrica.

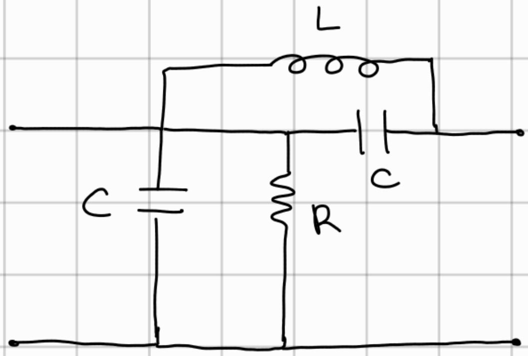


(circuito "a pi greco")
Applicando tensioni di nodo:

$$A: \dot{I}_1 = \dot{V}_A(\bar{Y}_a + \bar{Y}_b) - \dot{V}_B\bar{Y}_b = \dot{V}_1(\bar{Y}_a + \bar{Y}_b) - \dot{V}_2\bar{Y}_b$$
$$B: \dot{I}_2 = \dot{V}_B(\bar{Y}_b + \bar{Y}_c) - \dot{V}_A\bar{Y}_b = -\dot{V}_1\bar{Y}_b + \dot{V}_2(\bar{Y}_b + \bar{Y}_c)$$

$$\begin{cases} \bar{Y}_{11} = \bar{Y}_a + \bar{Y}_b \\ \bar{Y}_{12} = -\bar{Y}_b = \bar{Y}_{21} \\ \bar{Y}_{22} = \bar{Y}_b + \bar{Y}_c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{Y}_a = \bar{Y}_{11} + \bar{Y}_{21} \\ \bar{Y}_b = -\bar{Y}_{21} = -\bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_c = \bar{Y}_{22} + \bar{Y}_{21} \end{cases}$$

ESERCIZIO



$R = 10\ \Omega$

$C = 10\ \mu F$

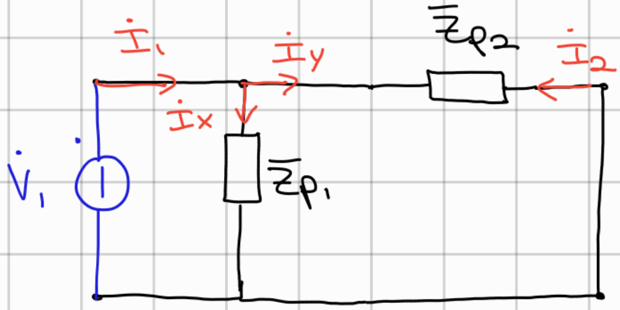
$L = 10\ mH$

$\omega = 1000\ rad/s$

Determinare la rappr. a parametri y.

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \bar{Y}_{11}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{Y}_{21}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

Mettiamo a zero $\dot{V}_2$, restano da calcolare $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{V}_1$.



$$\bar{Z}_{p_1} = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\bar{Z}_{p_2} = \frac{j\omega L / j\omega C}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

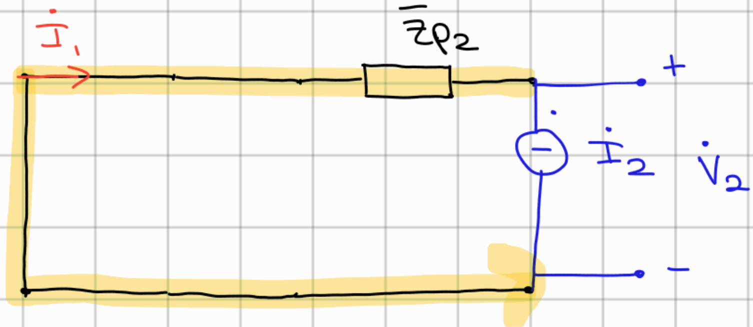
$$\dot{I}_2 = -\frac{\dot{V}_1}{\bar{Z}_{p_2}} \Rightarrow \bar{Y}_{21} = -\frac{1}{\bar{Z}_{p_2}}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_x + \dot{I}_y = \frac{\dot{V}_1}{\bar{Z}_{p_1}} + \frac{\dot{V}_1}{\bar{Z}_{p_2}} \Rightarrow \bar{Y}_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1} = \frac{\frac{\dot{V}_1}{\bar{Z}_{p_1}} + \frac{\dot{V}_1}{\bar{Z}_{p_2}}}{\dot{V}_1} = \frac{1}{\bar{Z}_{p_1}} + \frac{1}{\bar{Z}_{p_2}}$$

Mettiamo a zero $\dot{V}_1$, restano da calcolare $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{V}_2$.

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \cancel{\bar{Y}_{11}\dot{V}_1} + \bar{Y}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \cancel{\bar{Y}_{21}\dot{V}_1} + \bar{Y}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

R e C sono in // con un cc => si eliminano



$$\dot{V}_2 = \bar{Z}_{P2}\dot{I}_2 \Rightarrow \bar{Y}_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2} = \frac{\dot{I}_2}{\bar{Z}_{P2}\dot{I}_2} = \bar{Z}_{P2}^{-1}$$

$$\dot{I}_1 = -\dot{I}_2 = -\bar{Y}_{22}\dot{V}_2 \Rightarrow \bar{Y}_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2} = -\frac{\bar{Y}_{22}\dot{V}_2}{\dot{V}_2} = -\bar{Y}_{22} = -\frac{1}{\bar{Z}_{P2}}$$

Le parametrizzazioni x e y sono sostanzialmente equivalenti in quanto si possono ricavare l'una dall'altra invertendo le rispettive matrici.
In presenza di componenti in serie può convenire usare i parametri x, in presenza di comp. in parallelo i parametri y.

PARAMETRIZZAZIONE A PARAMETRI H (O PAR. IBRIDI)
(UNA TENSIONE E UNA CORRENTE IN FUNZIONE DI UN'ALTRA TENSIONE E UN'ALTRA CORRENTE)

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{h}_{11}\dot{I}_1 + \bar{h}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{h}_{21}\dot{I}_1 + \bar{h}_{22}\dot{V}_2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \bar{h}\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}$$

La dimensione dei parametri non è più la stessa per tutti: $\bar{h}_{11}$ ha la dim. di una resistenza [Ω], $\bar{h}_{22}$ ha la dim. di un'ammettenza [S], $\bar{h}_{12}$ e $\bar{h}_{21}$ sono scalari.

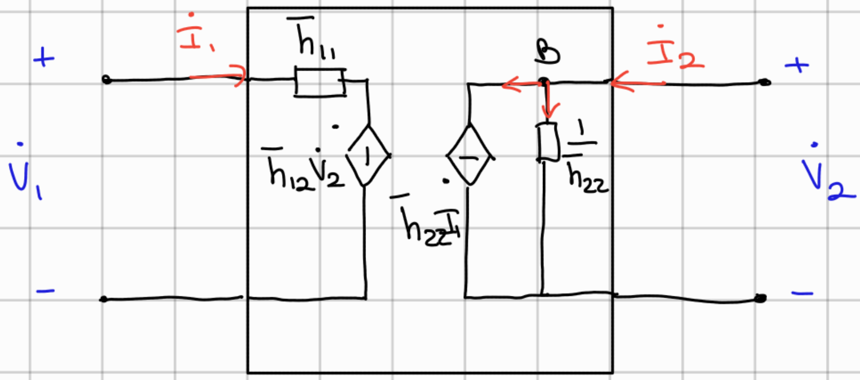
Per calcolare i parametri:

$$\bar h_{11} = \frac{\dot V_1}{\dot I_1}\Bigg|_{\dot V_2 = 0} \qquad \bar h_{12} = \frac{\dot V_1}{\dot V_2}\Bigg|_{\dot I_1 = 0}$$

$$\bar h_{21} = \frac{\dot I_2}{\dot I_1}\Bigg|_{\dot V_2 = 0} \qquad \bar h_{22} = \frac{\dot I_2}{\dot V_2}\Bigg|_{\dot I_1 = 0}$$

$\Downarrow$ CC PORTA 2 $\qquad\qquad$ $\Downarrow$ APERTO PORTA 1

CIRCUITO EQUIVALENTE



(scriviamo $\frac{1}{\bar h_{22}}$ perché si tratta di un'ammettenza e non di un'impedenza come $\bar h_{11}$)

$$\begin{cases} \dot V_1 = \bar h_{11}\dot I_1 + \bar h_{12}\dot V_2 \\ \dot V_2 = \bar h_{22}\dot V_2 + \bar h_{21}\dot I_1 \end{cases}$$

In assenza di gen. pilotati ($\Rightarrow$ mat. simmetrica $\Rightarrow$ circuito reciproco):

$$\begin{cases} \dot V_1 = \bar h_{11}\dot I_1 + \bar h_{12}\dot V_2 \\ \dot I_2 = \bar h_{21}\dot I_1 + \bar h_{22}\dot V_2 \Rightarrow \dot V_2 = -\frac{\bar h_{21}}{\bar h_{22}}\dot I_1 + \frac{1}{\bar h_{22}}\dot I_2 \end{cases}$$

$$\bar z_{21} = -\frac{\bar h_{21}}{\bar h_{22}} \; ; \; \bar z_{22} = \frac{1}{\bar h_{22}}$$

Sostituendo nella prima eq.:

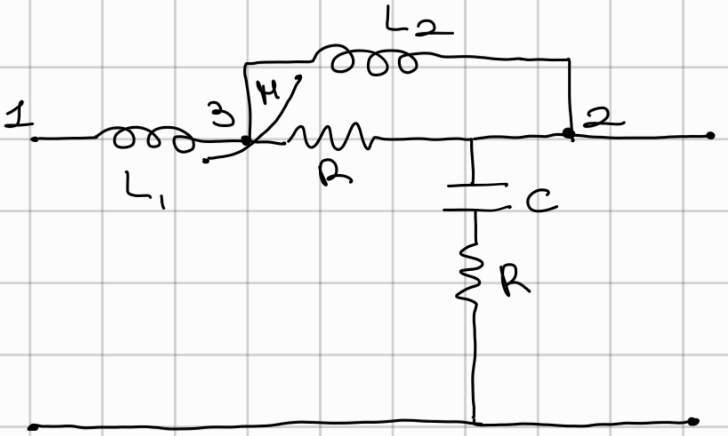
$$\dot{V}_1 = \bar{h}_{11}\dot{I}_1 - \frac{\bar{h}_{12}\bar{h}_{21}}{\bar{h}_{22}}\dot{I}_1 + \frac{\bar{h}_{12}}{\bar{h}_{22}}\dot{I}_2 = \frac{\bar{h}_{11}\bar{h}_{22} - \bar{h}_{12}\bar{h}_{21}}{\bar{h}_{22}}\dot{I}_1 + \frac{\bar{h}_{12}}{\bar{h}_{22}}\dot{I}_2$$

$$\frac{\bar{h}_{11}\bar{h}_{22} - \bar{h}_{12}\bar{h}_{21}}{\bar{h}_{22}} = \bar{z}_{11} \quad ; \quad \frac{\bar{h}_{12}}{\bar{h}_{22}} = \bar{z}_{12}$$

MATRICE ANTISIMMETRICA $\Rightarrow \bar{z}_{21} = -\frac{\bar{h}_{21}}{\bar{h}_{22}} = \bar{z}_{12} = \frac{\bar{h}_{12}}{\bar{h}_{22}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{h}_{12} = -\bar{h}_{21}}$$

ESERCIZIO



$R = 10\,\Omega$

$C = 100\,\mu F$

$L_1 = 10\,mH$

$L_2 = 20\,mH$

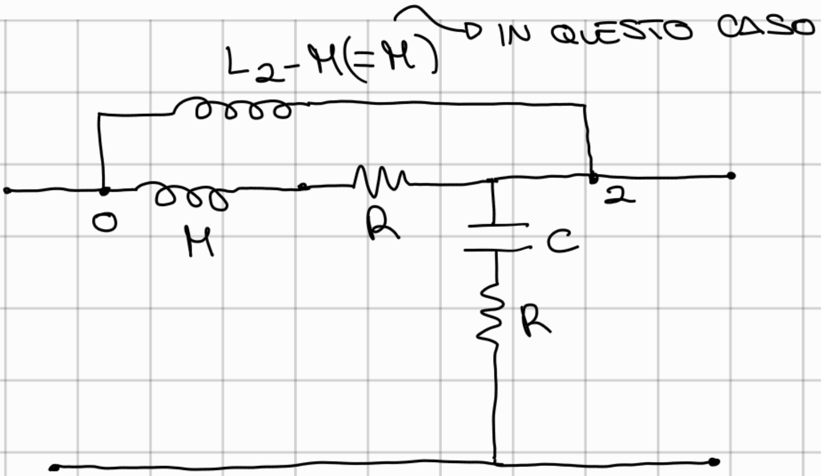
$M = 10\,mH$

$\omega = 1000\,rad/s$

Determinare la param. a parr. h.

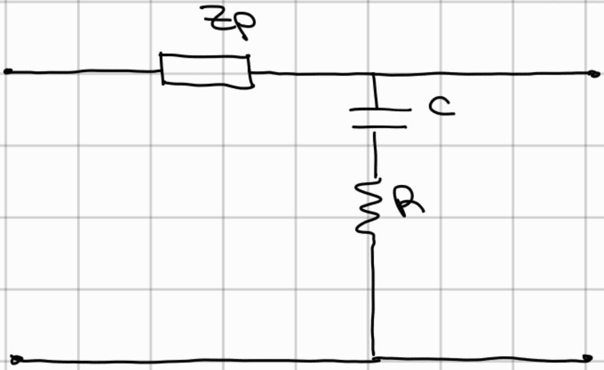
$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{h}_{11}\dot{I}_1 + \bar{h}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{h}_{21}\dot{I}_1 + \bar{h}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

$L_1 = M$, L_1 e L_2 hanno un nodo in comune dalla stessa parte del contrassegno $\Rightarrow$ possiamo trasformare i due indutt. mutuam. accoppiati in due induttori senza mutuo accopp. ($L_1 - M$ diventa cc).



È vantaggioso fare il parallelo tra M e $(j\omega M + R)$:

$$\bar{Z}_p = \frac{(R + j\omega M)\, j\omega M}{R + 2 j\omega M}$$

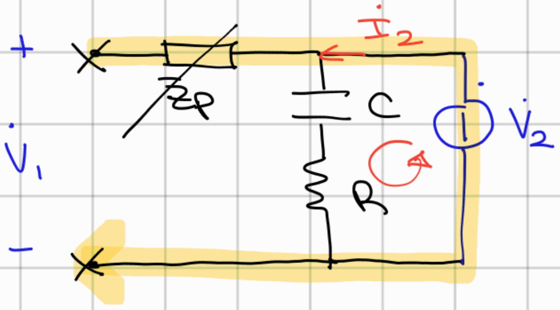


Mettiamo a zero $\dot{V}_2$:

$$\dot{V}_1 = \bar{h}_{11} \dot{I}_1 = \bar{Z}_p \dot{I}_1 \Rightarrow \bar{h}_{11} = \bar{Z}_p$$

$$\dot{I}_2 = \bar{h}_{21} \dot{I}_1 = -\dot{I}_1 \Rightarrow \bar{h}_{21} = -1$$

Mettiamo un aperto alla porta 1 ($\dot{I}_1 = 0$):



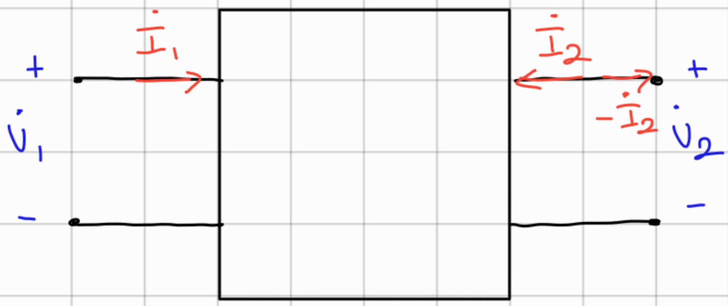
$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_2}{R + \frac{1}{j\omega C}} \Rightarrow \bar{h}_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2} = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)^{-1}$$

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \Rightarrow \bar{h}_{12} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} = 1 = -\bar{h}_{21}$$

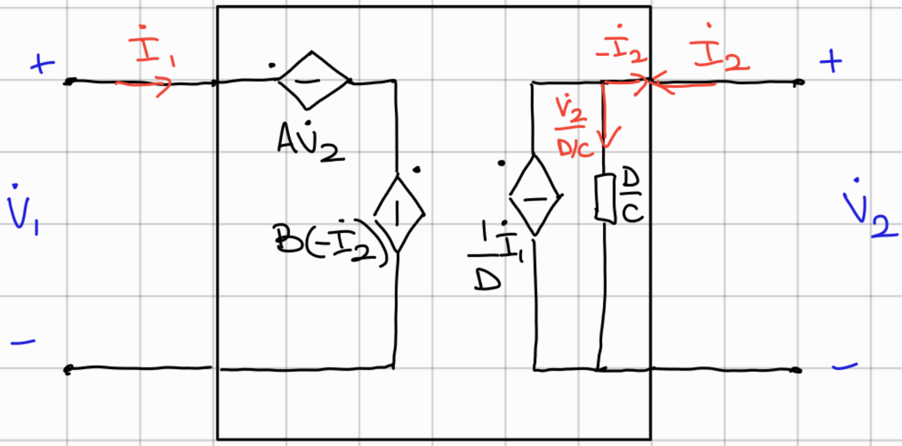
15/11/2022

PARAMETRIZZAZIONE A PARAMETRI T

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = A\dot{V}_2 + B(-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 = C\dot{V}_2 + D(-\dot{I}_2) \end{cases}$$



CIRCUITO EQUIVALENTE:



$$-\dot{I}_2 = \frac{1}{D}\dot{I}_1 - \frac{C}{D}\dot{V}_2$$

Per calcolare i parametri si calcolano i reciproci:

$$\frac{1}{A} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}\Big|_{\dot{I}_2=0} \qquad \frac{1}{B} = -\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1}\Big|_{\dot{V}_2=0}$$ ⇒ CORTO ALLA PORTA 2

⇓ APERTO ALLA PORTA 2

$$\frac{1}{C} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\Big|_{\dot{I}_2=0} \qquad \frac{1}{D} = \frac{-\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\Big|_{\dot{V}_2=0}$$

Bisogna fare 4 prove sperimentalmente: 2 gen. di tensione e 2 di corrente.

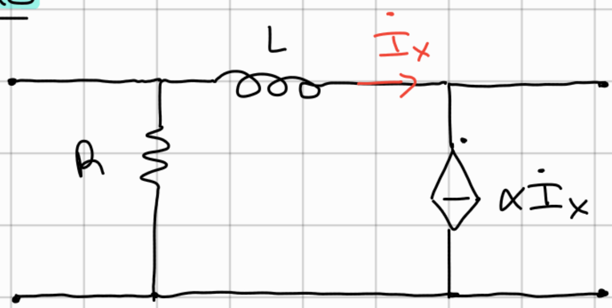
$$\dot V_2 = \frac{1}{C}\dot I_1 + \frac{D}{C}\dot I_2 \Rightarrow \begin{cases} \bar Z_{21} = \frac{1}{C} \\ \bar Z_{22} = \frac{D}{C} \end{cases}$$

$$\dot V_1 = \frac{A}{C}\dot I_1 + \frac{AD}{C}\dot I_2 + B(-\dot I_2) =$$

$$= \frac{A}{C}\dot I_1 + \frac{AD-BC}{C}\dot I_2 \Rightarrow \begin{cases} \bar Z_{11} = \frac{A}{C} \\ \bar Z_{12} = \frac{AD-BC}{C} \end{cases}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{AD-BC}{C} \Rightarrow \boxed{\underbrace{AD-BC}_{\text{det mat } T} = 1}$$ (se nel circ. a due porte non ci sono gen. pilotati)

ESERCIZIO



$R = 5\,\Omega$

$L = 10\text{ mH}$

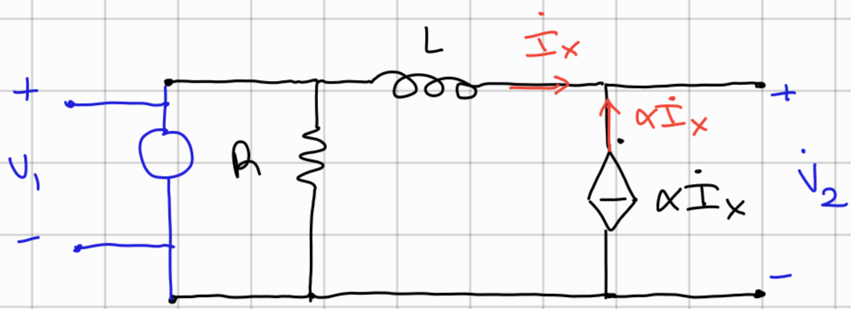
$\alpha = 2$

$\omega = 1000\text{ rad/s}$

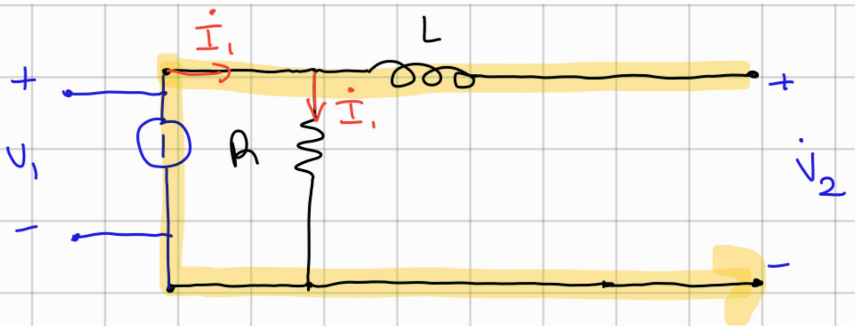
Trovare la rappr. a parametri T.

$$\begin{cases} \dot V_1 = A\dot V_2 + B(-\dot I_2) \\ \dot I_1 = C\dot V_2 + D(-\dot I_2) \end{cases}$$

Mettiamo a zero $\dot I_2$, restano da calcolare $\dot V_1$, $\dot V_2$, $\dot I_1$.



$$\alpha \dot I_x = -\dot I_x \Rightarrow \dot I_x = 0$$

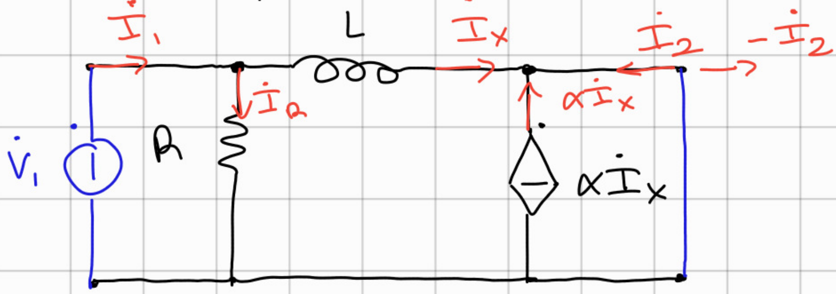


N.B: su L non passa corrente

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_1}{R} = \frac{1}{R}\dot{V}_2 \Rightarrow C = \frac{1}{R_1}$$

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 \Rightarrow A = 1$$

Mettiamo a zero $\dot{V}_2$, restano da calcolare $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$.



$$\begin{cases} \dot{V}_1 = A\dot{V}_2 + B(-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 = C\dot{V}_2 + D(-\dot{I}_2) \end{cases}$$

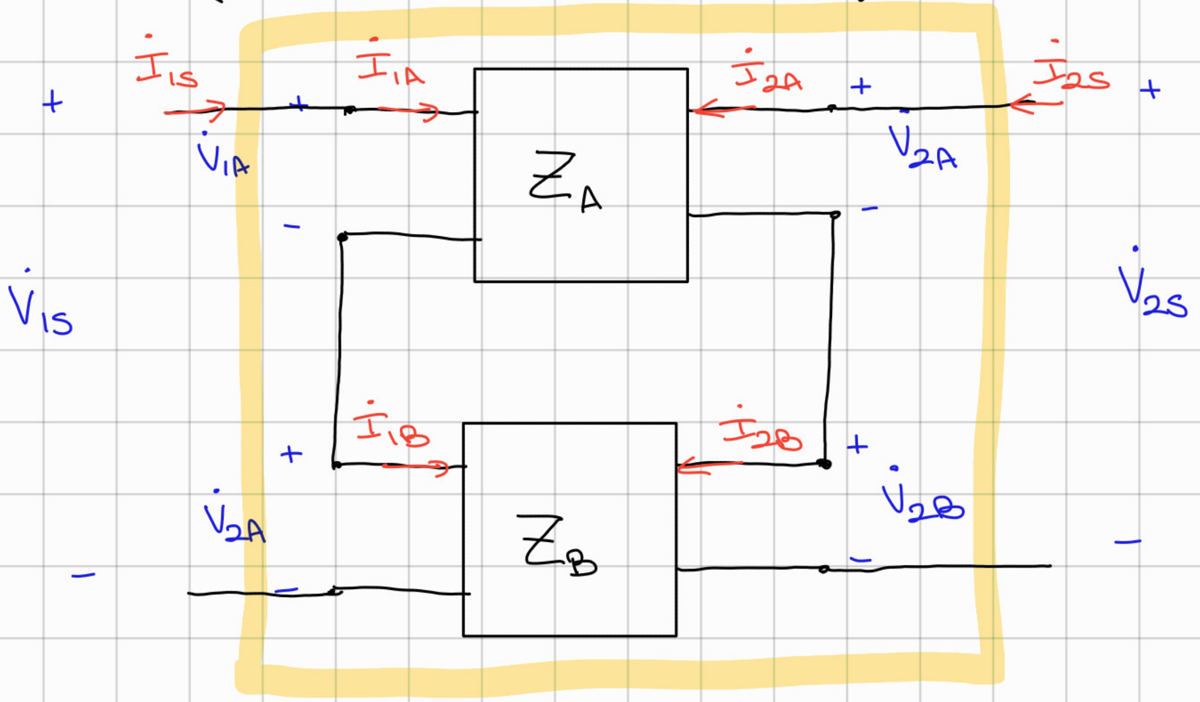
$$\dot{I}_1 = \dot{I}_R + \dot{I}_x = \frac{\dot{V}_1}{R} + \frac{\dot{V}_1}{j\omega L}$$

$$-\dot{I}_2 = \dot{I}_x + \alpha\dot{I}_x = \frac{\dot{V}_1}{j\omega L} + \frac{\alpha}{j\omega L}\dot{V}_1$$

$$B = \frac{\dot{V}_1}{-\dot{I}_2} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_1\left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{\alpha}{j\omega L}\right)} = \left(\frac{1+\alpha}{j\omega L}\right)^{-1}$$

$$D = \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} = \frac{\frac{\dot{V}_1}{R} + \frac{\dot{V}_1}{j\omega L}}{-\dot{I}_2} = \frac{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}\right) \cdot B(\cancel{-\dot{I}_2})}{\cancel{-\dot{I}_2}} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}\right)B$$

Due circ. a due porte sono in serie se sono attraversati dalle stesse correnti $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$ (conviene usare la parametrizzazione Z).

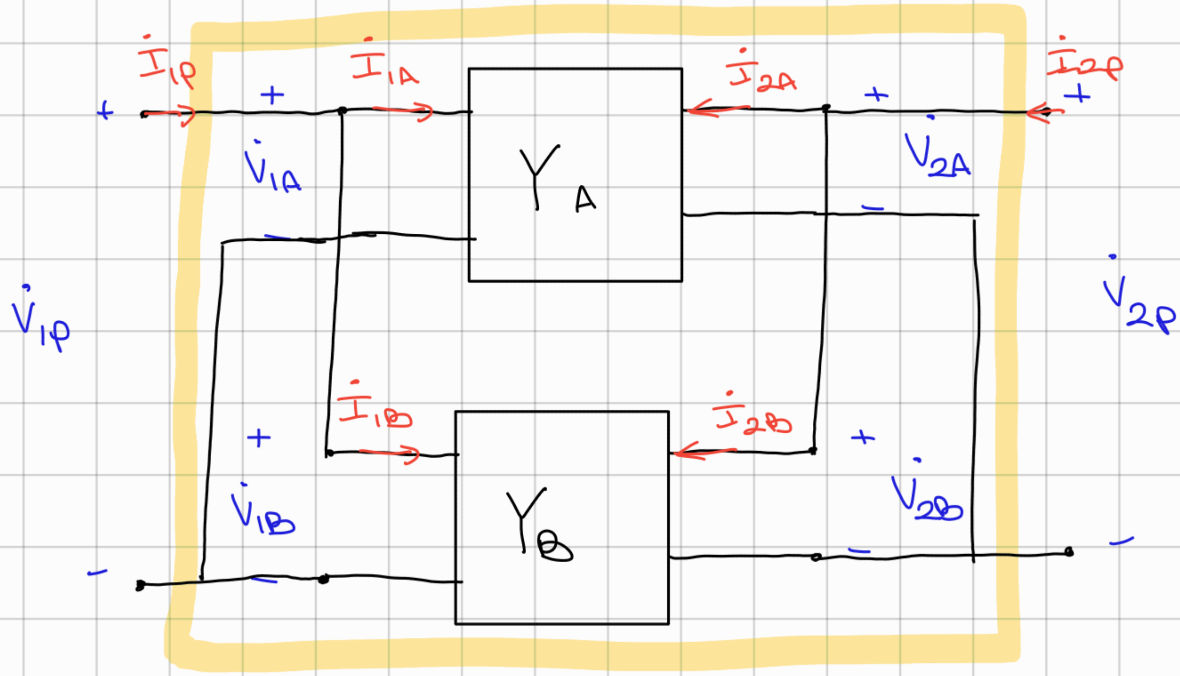


è sempre un circuito a due porte, i cui parametri Z sono:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{1S} \\ \dot{V}_{2S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{1A} \\ \dot{V}_{2A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{V}_{1B} \\ \dot{V}_{2B} \end{bmatrix} = Z_A \begin{bmatrix} \dot{I}_{1A} \\ \dot{I}_{2A} \end{bmatrix} + Z_B \begin{bmatrix} \dot{I}_{1B} \\ \dot{I}_{2B} \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{(Z_A + Z_B)}_{\text{SOMMA TRA DUE MATRICI}} \begin{bmatrix} \dot{I}_{1S} \\ \dot{I}_{2S} \end{bmatrix}$$

Se due circ. a due porte sono in parallelo conviene usare i parametri Y.



Due circ. a due porte sono in parallelo se si trovano allo stesso potenziale.

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{1P} \\ \dot{I}_{2P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{1A} \\ \dot{I}_{2A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{I}_{1B} \\ \dot{I}_{2B} \end{bmatrix} = Y_A \begin{bmatrix} \dot{V}_{1A} \\ \dot{V}_{2A} \end{bmatrix} + Y_B \begin{bmatrix} \dot{V}_{1B} \\ \dot{V}_{2B} \end{bmatrix} = (Y_A + Y_B) \begin{bmatrix} \dot{V}_{1P} \\ \dot{V}_{2P} \end{bmatrix}$$

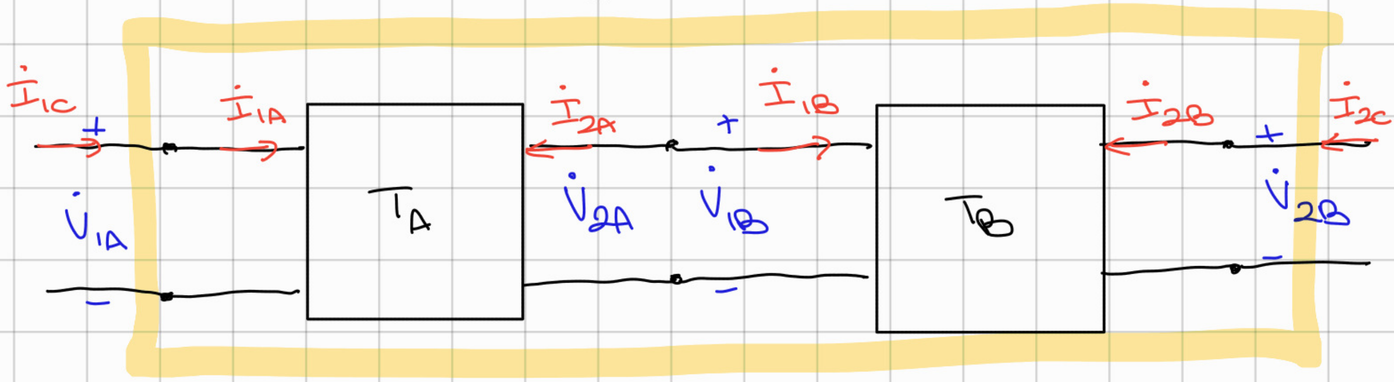
$$\Rightarrow \dot{I}_P = (Y_A + Y_B)\dot{V}_P$$

Conoscendo Z_A e Z_B:

$$Y_P = Y_A + Y_B = Z_A^{-1} + Z_B^{-1} \Rightarrow Z_P = (Z_A^{-1} + Z_B^{-1})^{-1}$$

COLLEGAMENTI IN CASCATA

(in questo caso convengono i parametri T)

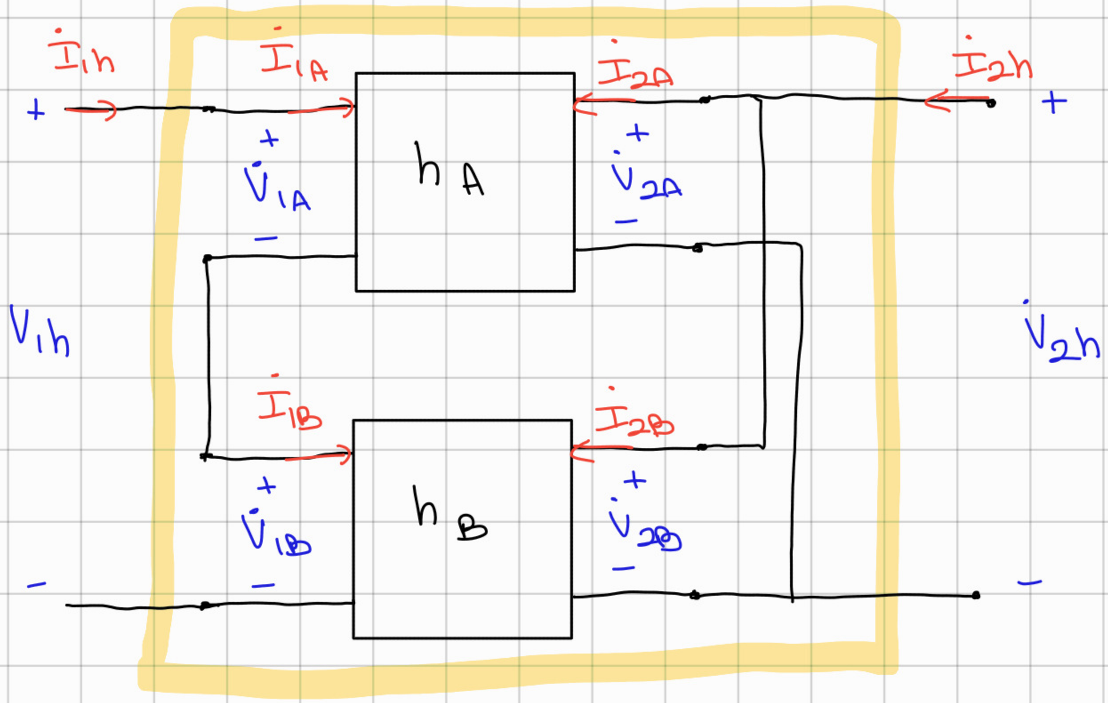


$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{1C} \\ \dot{I}_{1C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{1A} \\ \dot{I}_{1A} \end{bmatrix} = T_A \begin{bmatrix} \dot{V}_{2A} \\ -\dot{I}_{2A} \end{bmatrix} = T_A \begin{bmatrix} \dot{V}_{1B} \\ \dot{I}_{1B} \end{bmatrix} = T_A \cdot T_B \begin{bmatrix} \dot{V}_{2B} \\ -\dot{I}_{2B} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{V}_{1C} \\ \dot{I}_{1C} \end{bmatrix} = T_A T_B \begin{bmatrix} \dot{V}_{2C} \\ -\dot{I}_{2C} \end{bmatrix}$$

COLLEGAMENTO MISTO (O IBRIDO)

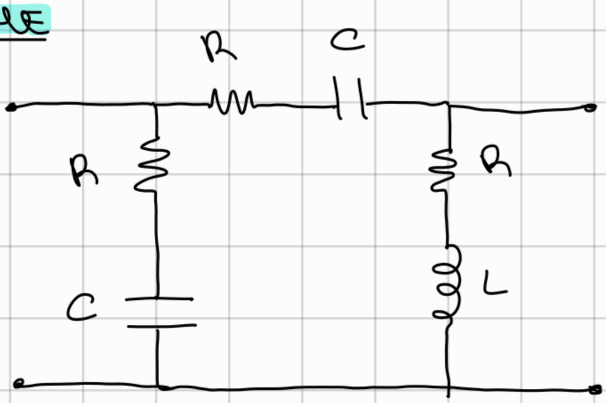
(in questo caso convengono i parametri h)



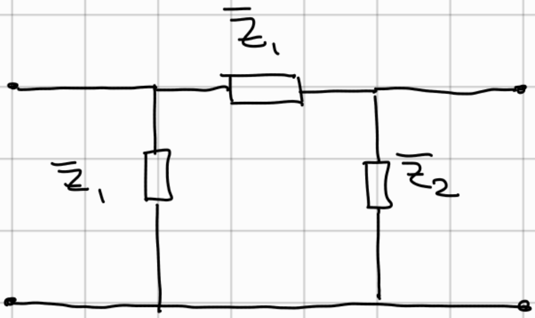
$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{1h} \\ \dot{I}_{2h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{1A} \\ \dot{I}_{2A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{V}_{1B} \\ \dot{I}_{2B} \end{bmatrix} = h_A \begin{bmatrix} \dot{I}_{1A} \\ \dot{V}_{2A} \end{bmatrix} + h_B \begin{bmatrix} \dot{I}_{1B} \\ \dot{V}_{2B} \end{bmatrix} = (h_A + h_B) \begin{bmatrix} \dot{I}_{1h} \\ \dot{V}_{2h} \end{bmatrix}$$

17/11/2022

ESERCIZIO ESAME

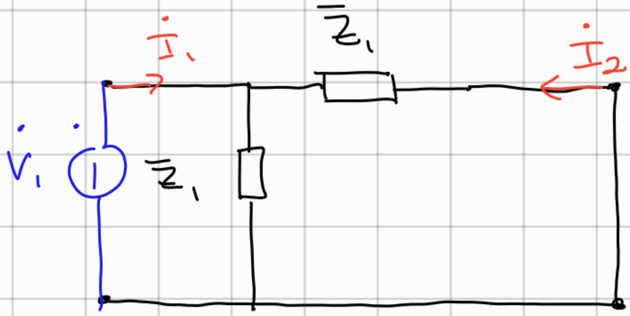


Determinare la rapp. a par. Y.



$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \bar{Y}_{11}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{Y}_{21}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

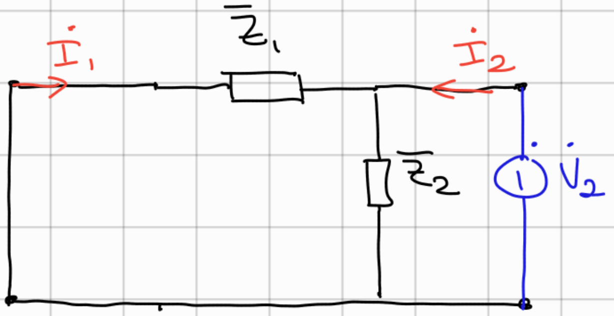
Mettiamo a zero $\dot{V}_2$:



$$\dot{I}_2 = -\frac{\dot{V}_1}{\bar{Z}_1} \Rightarrow \bar{Y}_{21} = -\frac{1}{\bar{Z}_1}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_1}{\bar{Z}_1} \cdot 2 \Rightarrow \bar{Y}_{11} = \frac{2}{\bar{Z}_1}$$

Mettiamo a zero $\dot{V}_1$

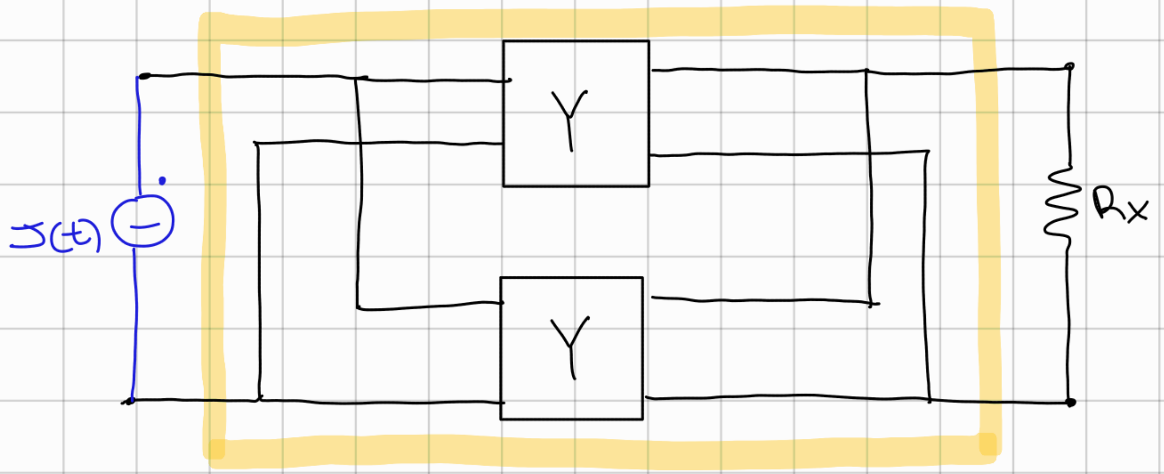


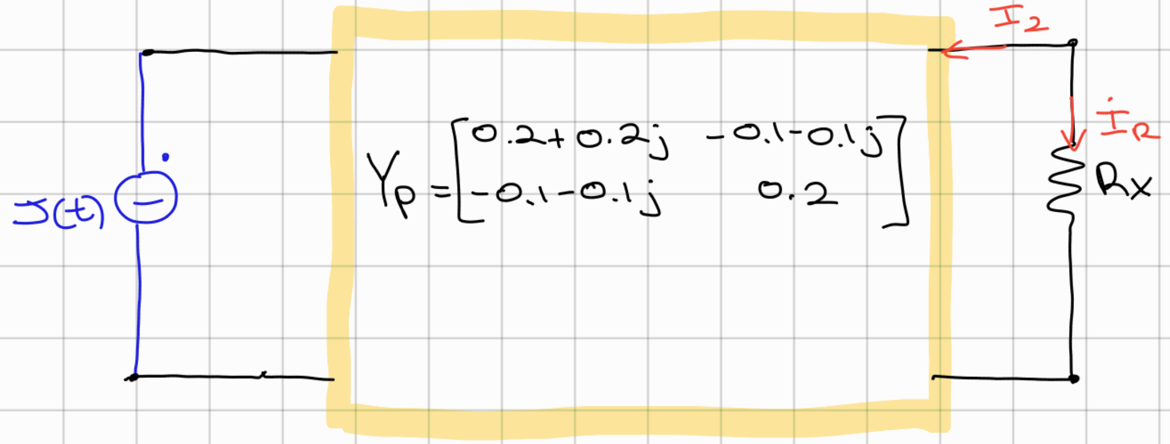
$$\dot{I}_1 = -\frac{\dot{V}_2}{\bar{Z}_1} \Rightarrow \bar{Y}_{12} = -\frac{1}{\bar{Z}_1} = \bar{Y}_{21}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_2}{\bar{Z}_1} + \frac{\dot{V}_2}{\bar{Z}_2} \Rightarrow \bar{Y}_{22} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} 0.1 + 0.1j & -0.05 - 0.05j \\ -0.05 - 0.05j & 0.1 \end{bmatrix}$$

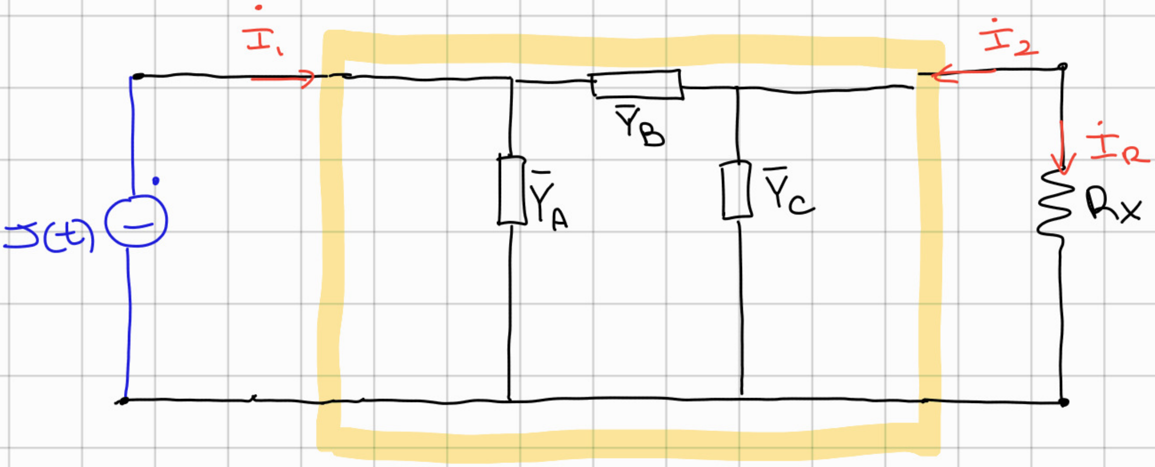
Immaginiamo di avere due circ. a due porte analoghi al prec., collegati in parallelo:





$P_{Rx} = ?$

$$P_{Rx} = I_R^2 R_x = |\dot{I}_R|^2 R_x = R_x I_2^2$$



$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \bar{Y}_{11}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{Y}_{21}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{22}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_1 = \dot{J} \\ \dot{V}_2 = -R_x\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\dot{V}_1 = \frac{\dot{J}}{\bar{Y}_{11}} + R_x\frac{\bar{Y}_{12}}{\bar{Y}_{11}}\dot{I}_2 = \bar{\alpha} + \bar{\beta}\dot{I}_2$$

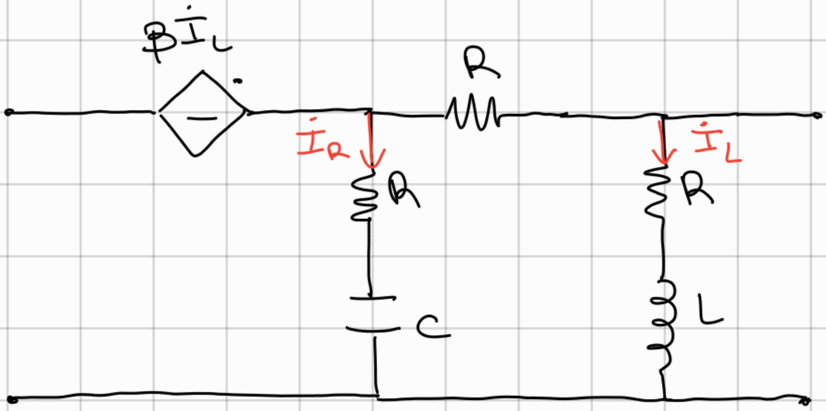
$$\dot{I}_2 = \frac{\bar{Y}_{21}\dot{J}}{\bar{Y}_{11}} + R_x\frac{\bar{Y}_{12}\bar{Y}_{11}}{\bar{Y}_{11}}\dot{I}_2 - R_x\bar{Y}_{22}\dot{I}_2 = \frac{\dfrac{\bar{Y}_{21}\dot{J}}{\bar{Y}_{11}}}{1 + R_x\bar{Y}_{12} - \dfrac{R_x\bar{Y}_{12}\bar{Y}_{21}}{\bar{Y}_{11}}} =$$

$$= 0.1923 + 0.0385j = 0.1961\,e^{j0.1974}$$

$$\Rightarrow P_{Rx} = R_x I_2^2 = 0.3846\ \text{W}$$

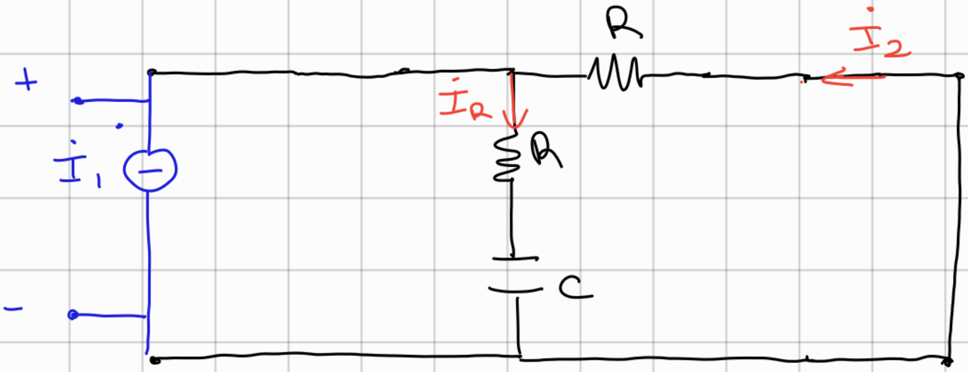
ESERCIZIO ESAME 24/01/2022

Determinare la rappr. a param. h



$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{h}_{11}\dot{I}_1 + \bar{h}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{h}_{21}\dot{I}_1 + \bar{h}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

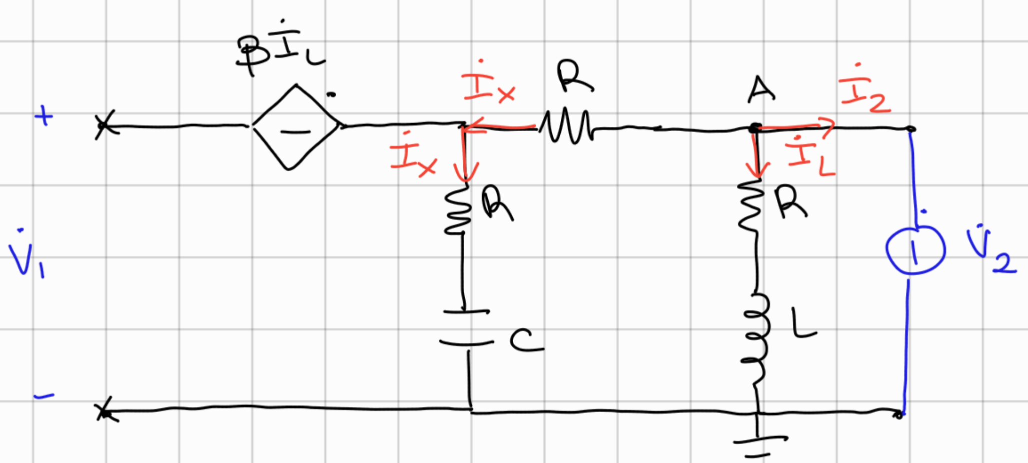
Mettiamo a zero $\dot{V}_2$:



$$\dot{I}_2 = -\dot{I}_1 \cdot \frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C} + R} \Rightarrow \bar{h}_{11} = -\frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C} + R}$$

$$\dot{V}_1 = -R\dot{I}_2 = -R\bar{h}_{21}\dot{I}_1 \Rightarrow \bar{h}_{21} = -R\bar{h}_{21}$$

Mettiamo a zero $\dot{I}_1$:



$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{h}_{11}\dot{I}_1 + \bar{h}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{h}_{21}\dot{I}_1 + \bar{h}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{V}_2}{R + j\omega L}$$

$$\dot{I}_x = \frac{\dot{V}_2}{2R + \frac{1}{j\omega C}}$$

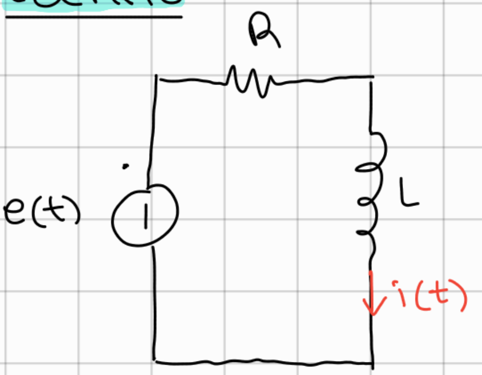
$$\dot{I}_2 = \dot{I}_L + \dot{I}_x = \dot{V}_2\left(\frac{1}{R+j\omega L} + \frac{1}{2R + \frac{1}{j\omega C}}\right) \Rightarrow$$

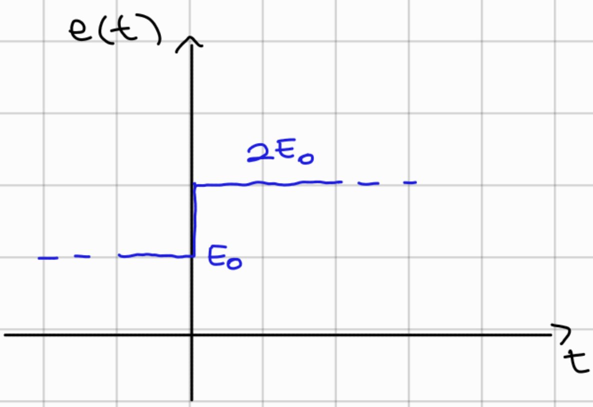
$$\Rightarrow \bar{h}_{22} = \left(\frac{1}{R+j\omega L} + \frac{1}{2R + \frac{1}{j\omega C}}\right)$$

$$\dot{V}_1 = -\beta \dot{I}_L + \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_x = \underbrace{\left[-\beta\frac{1}{R+j\omega L} + \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\frac{1}{2R+\frac{1}{j\omega C}}\right]}_{\bar{h}_{12}}\dot{V}_2$$

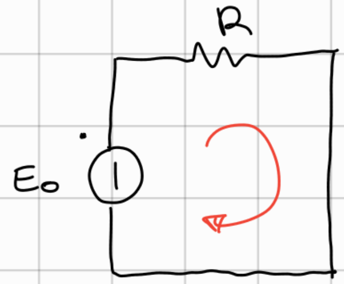
18/11/2022

ESEMPIO





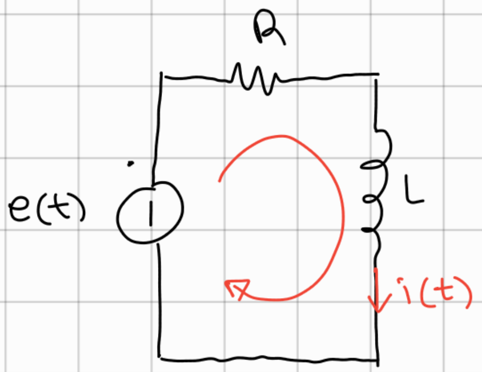
Per $t<0$ studiamo il circ. in continua:



$$v_L(t) = \frac{L\,di_L(t)}{dt} = 0$$

$$i(t) = \frac{E_0}{R}\ ,\ t<0$$

Per $t \geq 0$ c'è una discontinuità:



$$-2E_0 + Ri(t) + \frac{L\,di(t)}{dt} = 0$$

$$i(t) = \underbrace{i_0(t)}_{\text{SOL. EQ. OMOGENEA}} + \underbrace{i_p(t)}_{\text{SOL. EQ. PARTICOLARE}}$$

$$Ri_0(t) + \frac{L\,di_0(t)}{dt} = 0\ ,\quad i_0(t) = Ae^{\lambda t}$$

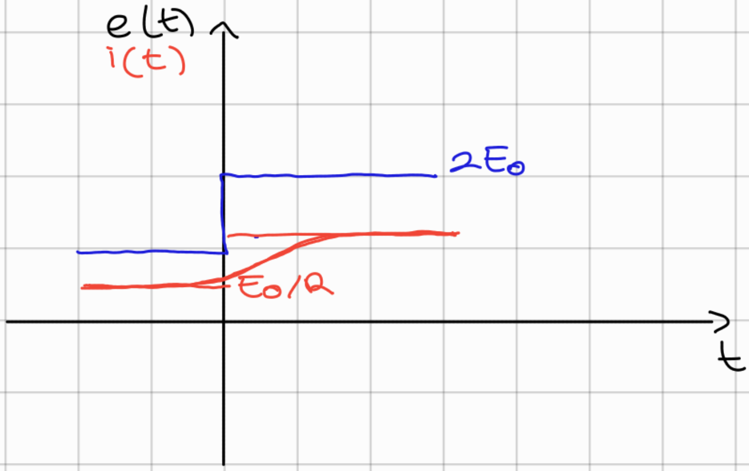
$$R\lambda^0 + L\lambda^1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R}{L} \Rightarrow i_0(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_p(t) = I \Rightarrow -2E_0 + RI = 0 \Rightarrow I = \frac{2E_0}{R} = i_p(t)$$

$$i(t) = i_0(t) + i_p(t) = Ae^{-R/L\,t} + \frac{2E_0}{R}$$

$$i(0) = A + \frac{2E_0}{R} = \frac{E_0}{R} \Rightarrow A = -\frac{E_0}{R}$$

$$i(t) = \begin{cases} E_0/R \quad , t<0 \\ -E_0/R\, e^{-R/L\, t} + \dfrac{2E_0}{R} \quad , t>0 \end{cases}$$

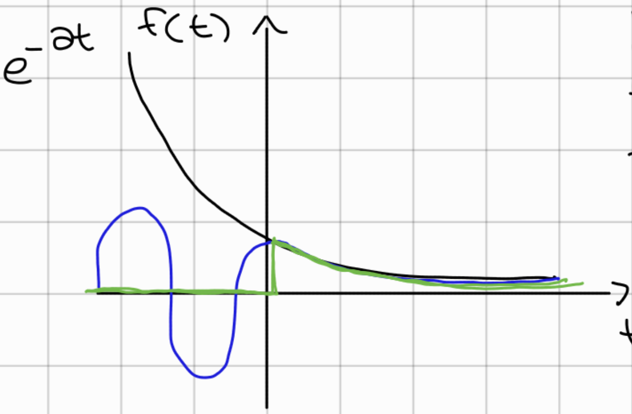


Vogliamo però evitare di utilizzare le eq. differenziali per risolvere il circuito: si introduce la trasformata di Laplace.

TRASFORMATA DI LAPLACE

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \triangleq \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st}\, dt \qquad (s = \sigma + j\omega)$$

$f(t)$	$F(s)$
$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$e^{-2t} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s+2}$
$e^{0t} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s}$
DELTA DI DIRAC → $\delta(t)$	1
$t \cdot u(t)$	$1/s^2$



IL COMPORT. DI f(t) PER t < 0 NON INFLUENZA F(S)

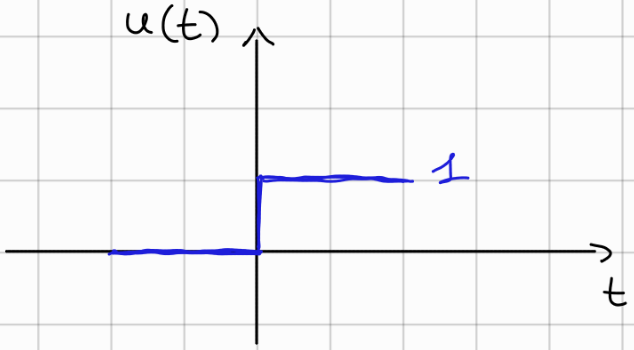
$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-at} e^{-st}\, dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-(a+s)t}\, dt = \left. \frac{e^{-(a+s)t}}{-(a+s)} \right|_{0^-}^{+\infty} =$$

$$= 0 - \frac{1}{-(a+s)} = \frac{1}{s+a}$$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
↳ ANTITRASFORMATA DI LAPLACE
(É UNICA PER OGNI $f(t)$)

Per tutte le $f(t)$ con uguale $F(t)$ si prende l'antitrasformata

FUNZIONE GRADINO



$1(t)$
$H(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

PROPRIETÀ DI LINEARITÀ

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

ES: $\mathcal{L}\left\{\frac{3}{2}e^{6t} - \frac{5}{4}e^{-3t}\right\} = \frac{3/2}{s-6} - \frac{5/4}{s+3}$

(anche l'antitrasformata della somma é uguale alla somma delle antitrasformate)

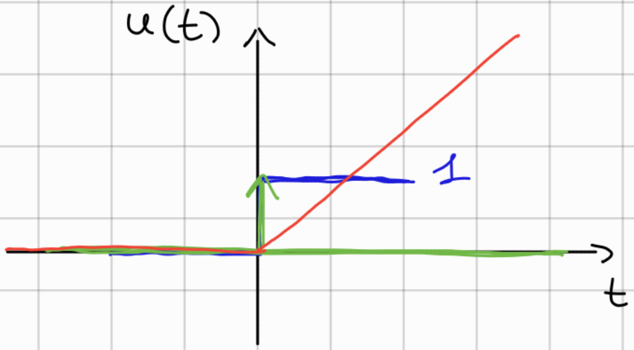
PROPRIETÀ DI DERIVATA

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-)$$

PROPRIETÀ DI INTEGRALE

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} f(t)\,dt$$

DERIVATA DELLA FUNZIONE GRADINO

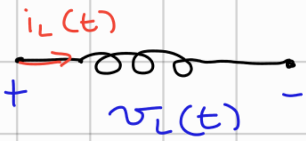


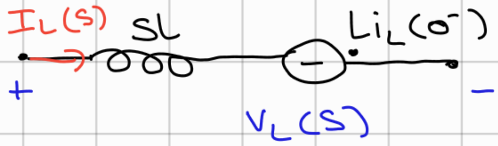
Vale sempre 0 tranne nell'origine dove tende a ∞.

DOMINIO DEL TEMPO	DOMINIO DI LAPLACE

$$v_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$V_R(s) = R I_R(s)$$

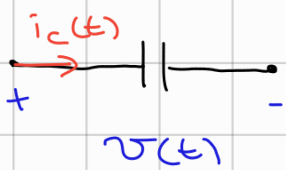


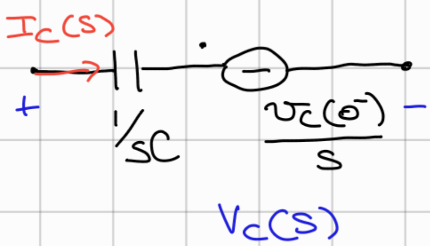


$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow \mathcal{L}\{v_L(t)\} = \mathcal{L}\left\{L\frac{di_L(t)}{dt}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_L(s) = L\left[s \cdot I_L(s) - i_L(0^-)\right] =$$

$$= sL I_L(s) - L i_L(0^-)$$



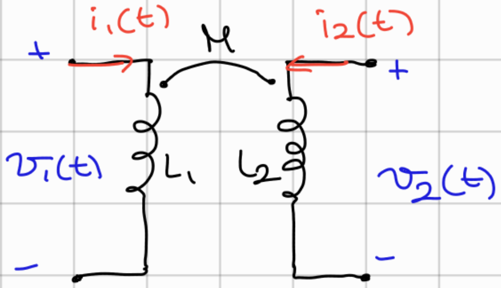


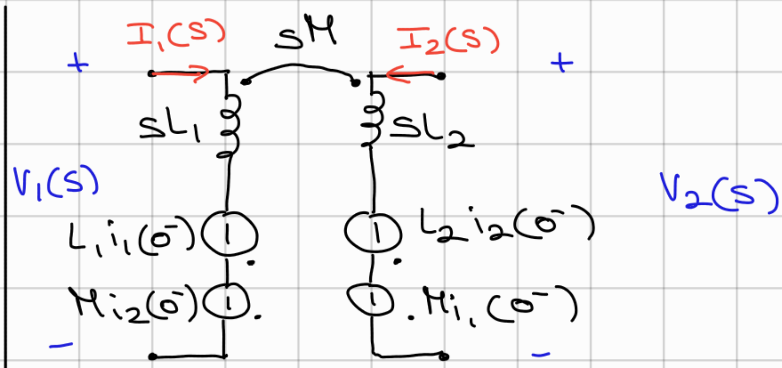
$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_L(\tau)\,d\tau$$

$$V_C(s) = \frac{1}{C}\left[\frac{I_C(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} i_C(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{1}{sC}\,q_C(0^-) =$$

$$= \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{v_C(0^-)}{s}$$

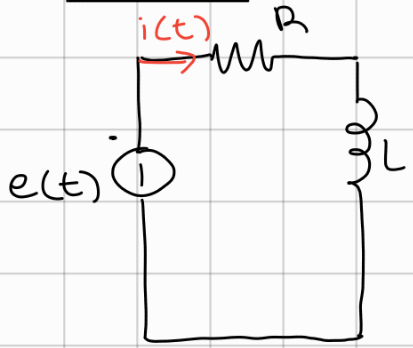


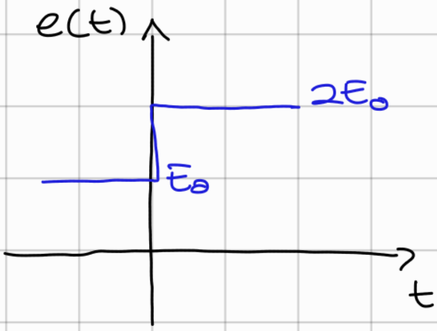


$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt} \qquad V_1(s) = L_1\left[sI_1(s) - i_1(0^-)\right] \pm M\left[sI_2(s) - i_2(0^-)\right]$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \frac{di_1(t)}{dt} \qquad V_2(s) = L_2\left[sI_2(s) - i_2(0^-)\right] \pm M\left[sI_1(s) - i_1(0^-)\right]$$

ESEMPIO

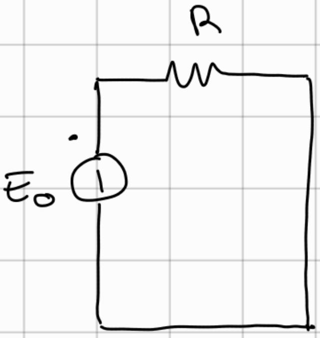




$i(t) = ?$

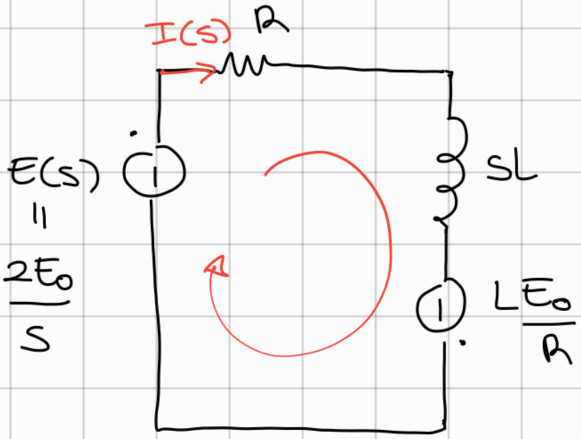
① Risolvo per $t<0$

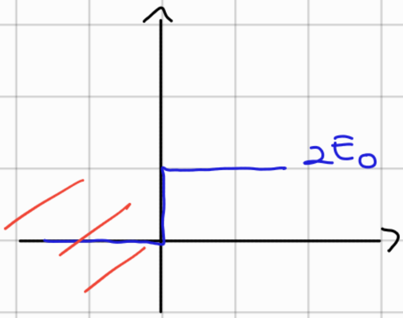
- $i(t)$, $t<0 \Rightarrow i(t) = \frac{E_0}{R}$, $t<0$
- cond. iniziali nei condensatori e negli induttori:



$$i_L(0^-) = \frac{E_0}{R}$$

② Risolvo per $t \geq 0$ (nel dominio di Laplace)





Calcolo $I(s)$:

$$I(s) = \frac{\frac{2E_0}{s} + \frac{LE_0}{R}}{R + sL} = \frac{2E_0R + LE_0 s}{s^2RL + sRL}$$

③ Ricavo $i(t)$ tramite l'antitrasformata

22/11/2022

Dall'esercizio della lez. prec.:

$$I(s) = \frac{2RE_0 + sLE_0}{sR^2 + s^2RL}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$ MA HA VALENZA SOLTANTO TEORICA

Supponiamo che $I(s)$ valga, e fattorizziamola:

$$I(s) = \frac{s^2+5}{3s^3+9s^2+6s} = \frac{\frac{s^2}{3}+\frac{5}{3}}{s^3+3s^2+2s} = \frac{\frac{s^2}{3}+\frac{5}{3}}{s(s^2+3s+2)} = \frac{\frac{s^2}{3}+\frac{5}{3}}{s(s+1)(s+2)}$$

RENDIAMO MONICO IL POLINOMIO AL DEN. (COEFF. TERM. GRADO MAX = 1)

RADICI DEL DENOM. (O POLI):
$s = 0$
$s = -1$
$s = -2$

SVILUPPO IN FRATTI SEMPLICI

$$I(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+2}$$ in questa forma posso trovare l'antitrasformata

$$\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = (A_1 + A_2e^{-t} + A_3e^{-2t})u(t)$$

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)\cdot e^{-2t}$	$\frac{1}{s+2}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$

A_1, A_2, A_3 = RESIDUI

Per trovare i residui:

$$\frac{\frac{s^2}{3}+\frac{5}{3}}{s\cancel{(s+1)(s+2)}} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+2} = \frac{A_1(s+1)(s+2) + A_2s(s+2) + A_3s(s+1)}{s\cancel{(s+1)(s+2)}}$$

$$\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3} = A_1s^2 + 3A_1s + 2A_1 + A_1s^2 + 2A_2s + A_3s^2 + A_3s$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} = A_1 + A_2 + A_3 \Rightarrow A_2 + A_3 = -1/2 \Rightarrow A_3 = -1/2 - A_2 = \frac{3}{2} \\ 0 = 3A_1 + 2A_2 + A_3 \Rightarrow 2A_2 + A_3 = -5/2 \\ \frac{5}{3} = 2A_1 \Rightarrow A_1 = 5/6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = -2 \\ A_3 = 3/2 \\ A_1 = 5/6 \end{cases} \qquad \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \left(\frac{5}{6} - 2e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$

Altra strategia per calcolare i residui:

$$I(s) = \sum_{i=1}^{\overset{\#\text{ POLI CIOÈ GRADO DEN}}{n}} \frac{\overset{\to \text{RESIDUO CORRISP. A } p_i}{A_i}}{s - \underset{\text{POLO}}{p_i}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{TEOREMA DEI RESIDUI} \\ A_i = \lim\limits_{s \to p_i} (s - p_i) I(s)\end{array}}$$

Risolviamo nuovamente l'esercizio:

$$A_1 = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{\cancel{s}(s+1)(s+2)} = \frac{5/3}{2} = \frac{5}{6}$$

$$A_2 = \lim_{s \to -1} \cancel{(s+1)} \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s\cancel{(s+1)}(s+2)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{5}{3}}{-1 \cdot 1} = -2$$

$$A_3 = \lim_{s \to -2} (s+2) \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s(s+1)(s+2)} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{3}}{-2 \cdot -1} = \frac{3}{2}$$

Terminiamo l' esercizio della lez. prec.:

$$I(s) = \frac{2RE_0 + sLE_0}{sR^2 + s^2RL} = \frac{2E_0/L + sE_0/R}{\underbrace{s^2 + sR/L}_{\text{POL. MONICO}}} = \frac{2E_0/L + sE_0/R}{s(s+R/L)}$$

$$\Rightarrow i(t) = \left(A_1 + A_2 e^{-R/L\,t}\right)u(t), \quad t \geq 0$$

Per il th dei residui:

$$A_1 = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{2E_0/L + \cancel{sE_0/R}}{\cancel{s}(\cancel{s}+R/L)} = \frac{2E_0}{R}$$

$$A_2 = \lim_{s \to -R/L} (s + \cancel{R/L}) \cdot \frac{2E_0/L + sE_0/R}{s(s+\cancel{R/L})} = \frac{2E_0/L - E_0/L}{-R/L} =$$

$$= -\frac{E_0}{R}$$

$$\Rightarrow i(t) = \left(\frac{2E_0}{R} - \frac{E_0}{R} e^{-R/L\,t}\right)u(t), \quad t \geq 0$$

ESAME 07/01/2022

$e(t) = 30\,V$

$J(t) = 3\,A$

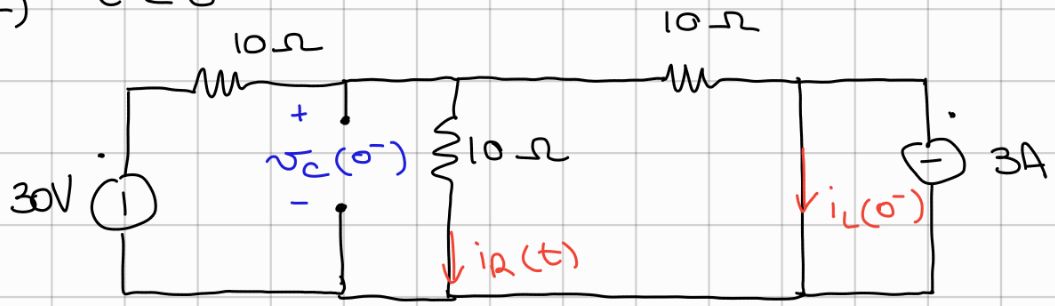
$L = 10\,mH$

$C = 100\,\mu F$

$R = 10\,\Omega$

Calcolare $i_R(t)$ per $-\infty < t < +\infty$

1) $t < 0$



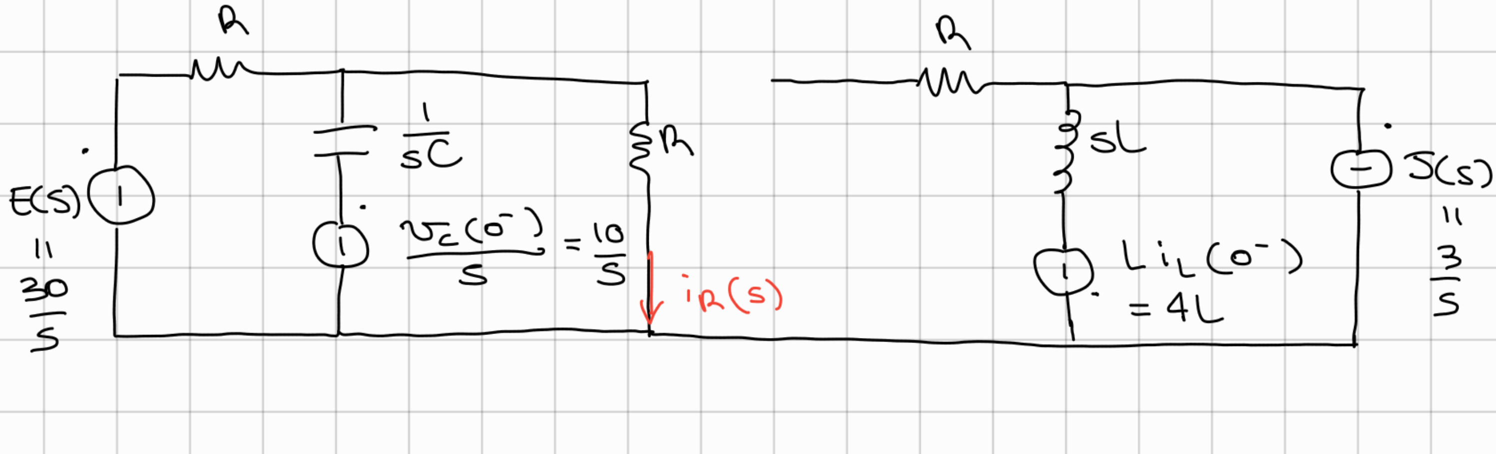
Risolviamo tramite sovrapp. degli effetti:

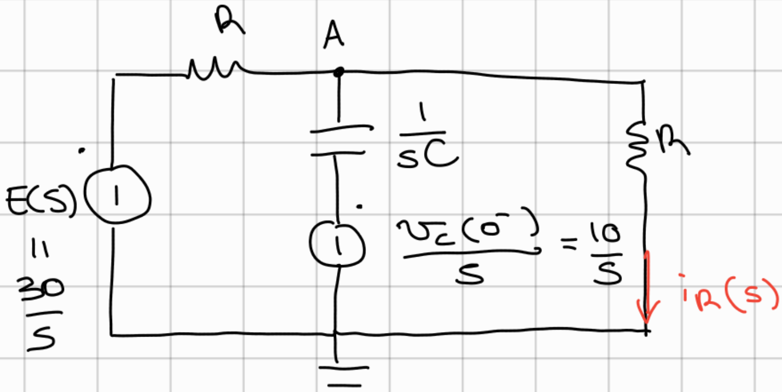
$i_L(0^-) = 3 + 1 = 4\,A$ ↓

$\boxed{i_R(t) = 1\,A,\ t < 0}$

$v_C(0^-) = 10\,V$ $\pm$

2) $t \geq 0$





$$\frac{30}{sR} + 10C = V_A(s)\left[\frac{1}{R} + sC + \frac{1}{R}\right]$$

$$V_A(s) = \frac{\frac{30}{sR} + 10C}{\frac{2}{R} + sC}$$

$$I_R(s) = \frac{V_A(s)}{R} = \frac{30/sR + 10C}{2 + sRC} = \frac{\frac{30}{R} + 10Cs}{s^2RC + 2s} = \frac{\frac{30}{R^2C} + \frac{10}{R}s}{s\left(s + \frac{2}{RC}\right)}$$

3) $$I_R(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + 2/RC}$$

$$i_R(t) = \left(A_1 + A_2 e^{-\frac{2}{RC}t}\right)u(t),\ t \geq 0$$

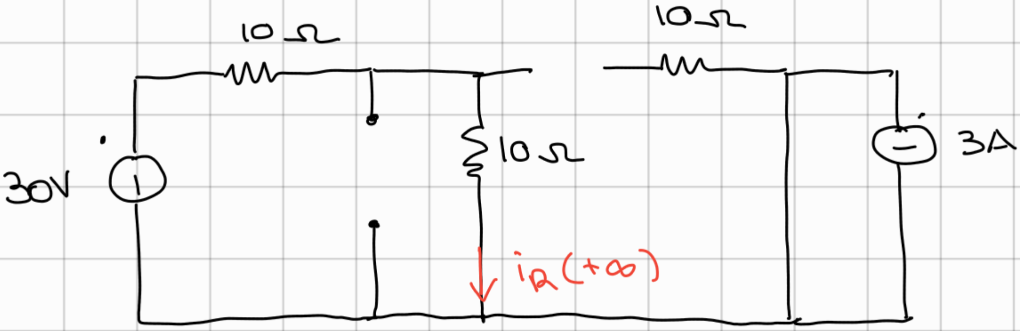
$$A_1 = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{\frac{30}{R^2C} + \cancel{\frac{10}{R}s}}{\cancel{s}\left(\cancel{s} + \frac{2}{RC}\right)} = \frac{30/R^2\cancel{C}}{2/\cancel{RC}} = 1.5$$

$$A_2 = \lim_{s \to -\frac{2}{RC}} \left(\cancel{s + \frac{2}{RC}}\right) \cdot \frac{\frac{30}{R^2C} + \frac{10}{R}s}{s\left(\cancel{s + \frac{2}{RC}}\right)} = \frac{30/R^2\cancel{C} - 20/R^2\cancel{C}}{-2/\cancel{RC}} = -0.5$$

$$i_R(t) = \begin{cases} 1A, & t < 0 \\ 1.5 - 0.5e^{-2000t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

4) Verifica del risultato

$t \to +\infty$



$i_R(+\infty) = 1.5A$

GRANDEZZE DI STATO:

$i_L(t)$ e $v_C(t)$ variano con continuità

$$\lim_{t \to 0^-} i_L(t) = \lim_{t \to 0^+} i_L(t)$$: NODI IMPROPRI

$$\lim_{t \to 0^-} v_C(t) = \lim_{t \to 0^+} v_C(t)$$: MAGLIE IMPROPRIE

CASI IN CUI i_L E v_C NON VARIANO CON CONTIN.

$$\lim_{t \to 0^-} i_R(t) = \lim_{t \to 0^+} i_R(t)$$

$1 = 1$ ✓

VERIFICA DELLA CONTINUITÀ DELLA SOLUZIONE IN $t=0$

SI PUÒ FARE SOLO SE L'INCOGNITA È UNA GRAND. DI STATO O È STRETT. LEGATA A UNA GRAND. DI STATO

ECCEZIONI ALLA REGOLA DEF. SOPRA

$$V(s) = \frac{2s^2}{s^2+4s+3} = \frac{2(s^2+4s+3)-8s-6}{s^2+4s+3} = 2 - \frac{8s+6}{s^2+4s+3} =$$

F. RAZIONALE FRATTA PROPRIA (GRADO NUM. = GRADO DEN)

$$= 2 - \frac{8s+6}{(s+1)(s+3)}$$

$$v(t) = 2\delta(t) - \left[A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t}\right]u(t) = 2\delta(t) - \left[-e^{-t} + 9e^{-3t}\right]u(t)$$

$$A_1 = \lim_{s \to -1} \frac{8s+6}{(s+1)(s+3)}(s+1) = -\frac{2}{2} = -1$$

$$A_2 = \lim_{s \to -3} (s+3)\frac{8s+6}{(s+1)(s+3)} = \frac{-18}{-2} = 9$$

24/11/2022

$$I(s) = \frac{s+2}{s^2+9} = \frac{s+2}{(s+3j)(s-3j)} =$$

$$= \frac{A_1}{s+3j} + \frac{A_2}{s-3j}$$

$$A_1 = \lim_{s \to -3j} \cancel{(s+3j)} \frac{s+2}{\cancel{(s+3j)}(s-3j)} = \frac{2-3j}{-6j} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3j} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}j$$

$$A_2 = \lim_{s \to 3j} \cancel{(s-3j)} \frac{s+2}{(s+3j)\cancel{(s-3j)}} = \frac{2+3j}{6j} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}j$$

$$i(t) = \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}j\right)e^{-3jt} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}j\right)e^{3jt}\right]u(t)$$

Se i poli sono complessi coniugati anche i residui vengono complessi coniugati.

Caso più generale:

$$i(t) = \overbrace{(M+jN)}^{A_1} e^{-(\sigma+j\omega t)} + \overbrace{(M-jN)}^{A_2} e^{-(\sigma-j\omega)t} = (*)$$

$$P_{1,2} \begin{cases} P_1 = -(\sigma + j\omega t) \\ P_2 = -(\sigma - j\omega t) \end{cases}$$

Nel caso di prima $\sigma = 0$, $\omega = 3$, $M = \frac{1}{2}$, $N = \frac{1}{3}$

$$(*) = Me^{-\sigma t}e^{-j\omega t} + jNe^{-\sigma t}e^{-j\omega t} + Me^{-\sigma t}e^{j\omega t} - jNe^{-\sigma t}e^{j\omega t} =$$

$$= Me^{-\sigma t}(e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}) + jNe^{-\sigma t}(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}) =$$

$$= Me^{-\sigma t}(\cos(-\omega t) - j\cancel{\sin(+\omega t)} + \cos(\omega t) + j\cancel{\sin(\omega t)}) +$$
$$+ jNe^{-\sigma t}(\cancel{\cos(+\omega t)} - j\sin(+\omega t) - \cancel{\cos(\omega t)} - j\sin(\omega t)) =$$

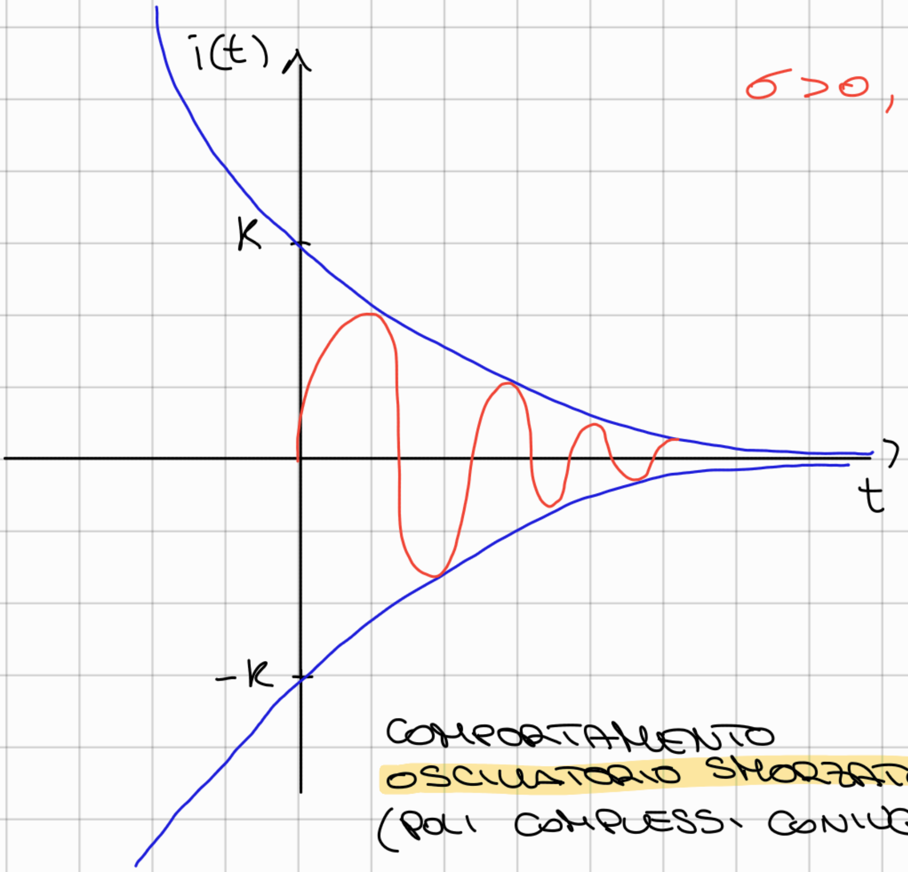
$$= 2Me^{-\sigma t}\cos(\omega t) + 2Ne^{-\sigma t}\sin(\omega t) =$$

$$= Ke^{-\sigma t}\sin(\omega t + \alpha) = (*)$$

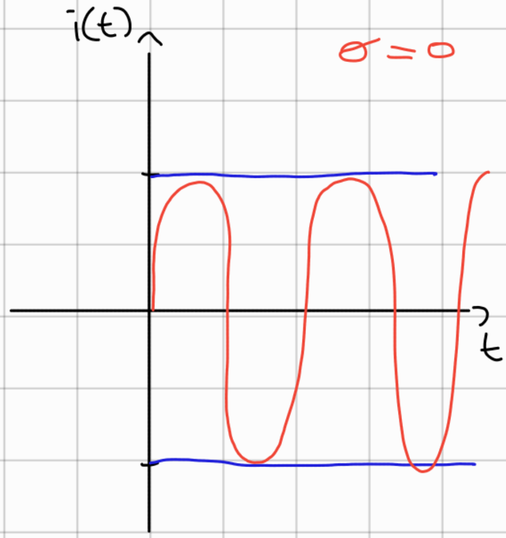
$$Ke^{-\sigma t}\sin(\omega t + \alpha) = Ke^{-\sigma t}(\sin(\omega t)\cos\alpha + \cos(\omega t)\sin\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2M = K\sin\alpha \\ 2N = K\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan\alpha = M/N \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{M}{N}\right) \\ K^2\sin^2\alpha + K^2\cos^2\alpha = K^2 = 4M^2 + 4N^2 \\ \Rightarrow K = \sqrt{4M^2 + 4N^2} \end{cases}$$

$$(*) = \sqrt{4M^2 + 4N^2}\, e^{-\sigma t}\sin\left(\omega t + \arctan\left(\frac{M}{N}\right)\right)$$

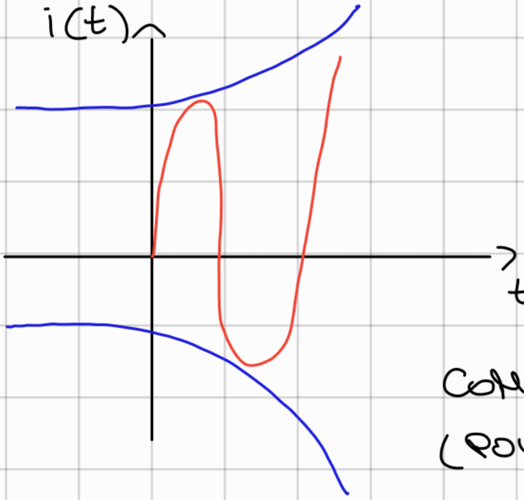


COMPORTAMENTO
OSCILLATORIO SMORZATO
(POLI COMPLESSI CONIUGATI)



COMPORT.
OSCILLATORIO
(POLI IMMAG. PURI)

$\sigma < 0$



COMP. OSCILLATORIO DIVERGENTE
(POLI A PARTE REALE POSITIVA)

Altro caso: COMP. ESPONENZIALE divergente o meno in base al segno di σ

$(\omega = 0)$

$$i(t) = \sqrt{1 + \frac{4}{9}}\, \sin\left(3t + \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{13}{9}}\, \sin\left(3t + \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

($i(t)$ nel caso iniziale di prima)

$f(t)$	$f(s)$
$u(t)\sin(\omega t)$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$
$u(t)\cos(\omega t)$	$s / (s^2 + \omega^2)$

$$I(s) = \frac{s+2}{s^2+9} = \frac{s}{s^2+9} + \frac{3}{s^2+9} \cdot \frac{2}{3}$$

$$i(t) = \left[\cos(3t) + \frac{2}{3}\sin(3t)\right] u(t)$$

$$\sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3}\sin(3t)$$

$$e^{j\pi/2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + j \Rightarrow i(t) = \sqrt{\frac{13}{9}}\, \sin\left(3t + \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right)\right) u(t)$$

25/11/2022

$$V(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)^3}$$

$$V(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(s-p)^i}$$

$f(t)$	$F(s)$
$\frac{1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} \cdot e^{pt}$	$\frac{1}{(s-p)^n}$

$$A_i = \lim_{s \to p} \frac{1}{(n-i)!} \frac{\partial^{n-i}[(s-p)^n V(s)]}{\partial s^{n-i}}$$

$$A_1 = \lim_{s \to -1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2}(s^2+2s+3) = 1$$

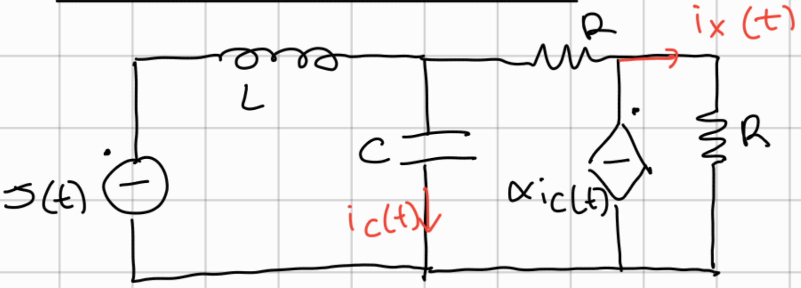
$$A_2 = \lim_{s \to -1} 1 \cdot \frac{\partial}{\partial s}(s^2+2s+3) = 2s+2 \Big|_{s=-1} = 0$$

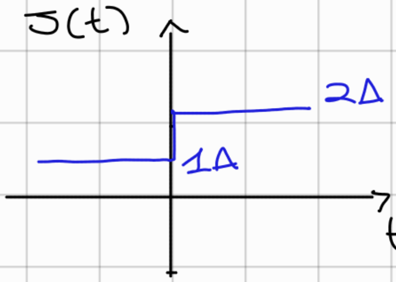
$$A_3 = \lim_{s \to -1} 1 \cdot (s^2+2s+3) = 2$$

$$V(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

$$v(t) = (e^{-t} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot e^{-t})\, u(t) = (e^{-t} + t^2 e^{-t})\, u(t)$$

ESAME 01/07/2022





$L = 10\,mH$

$C = 10\,\mu F$

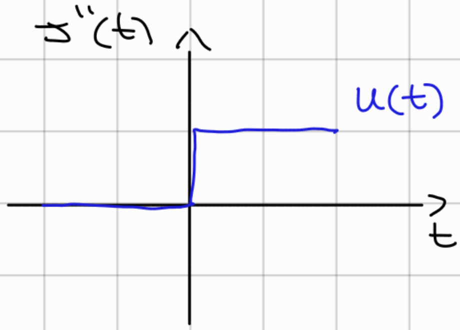
$R = 10\,\Omega$

$\alpha = 0.5$

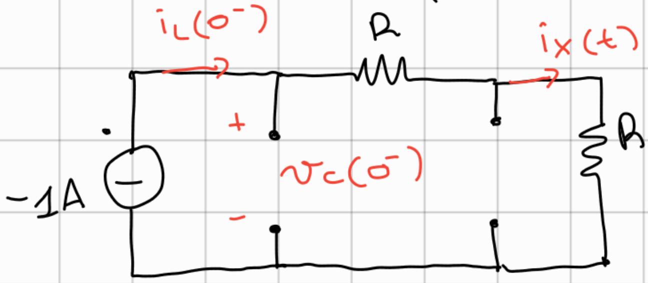
$$i_x(t) = \begin{cases} 1A, & t < 0 \\ & \end{cases}$$

$i_L(0^-) = 1A \rightarrow$

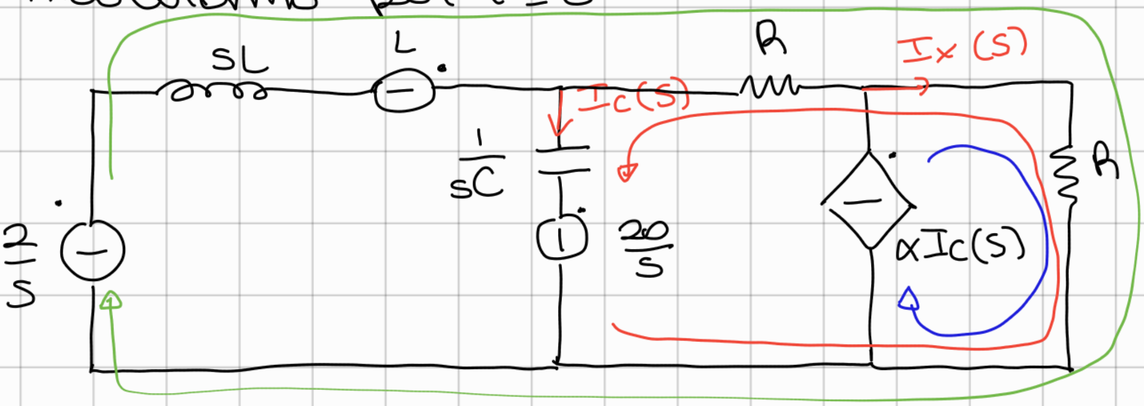
$v_C(0^-) = 2R = 20V$



Risolviamo per $t < 0$



Risolviamo per $t \geq 0$

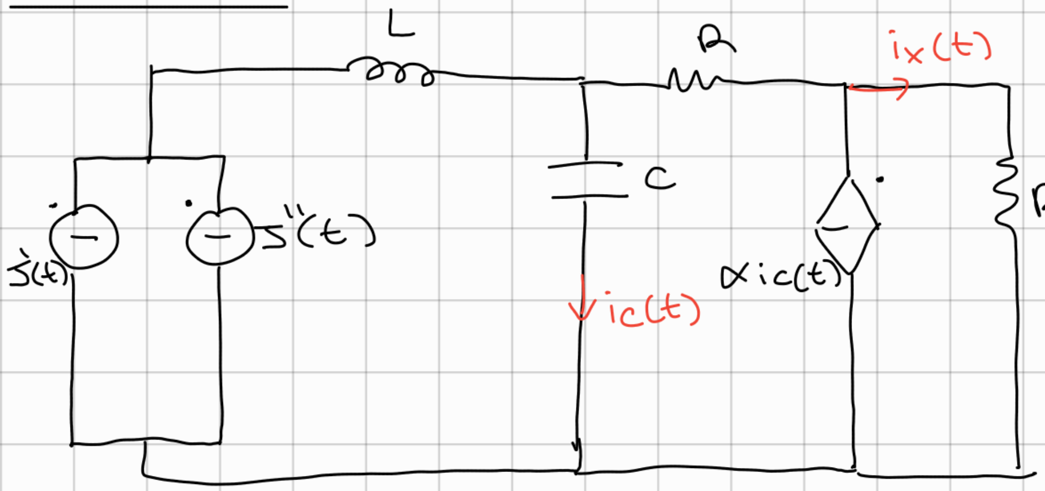


$$\circlearrowleft : \left(2R + \frac{1}{SC}\right) I_C(S) + \frac{20}{S} - \alpha R I_C(S) - 2R \cdot \frac{2}{S} = 0$$

$$\Rightarrow I_C(S) = \frac{\frac{4R}{S} - \frac{20}{S}}{2R + \frac{1}{SC} - \alpha R} = \frac{20}{\frac{3}{2}RS + \frac{1}{C}} = \frac{4/3}{S + \frac{2}{3RC}}$$

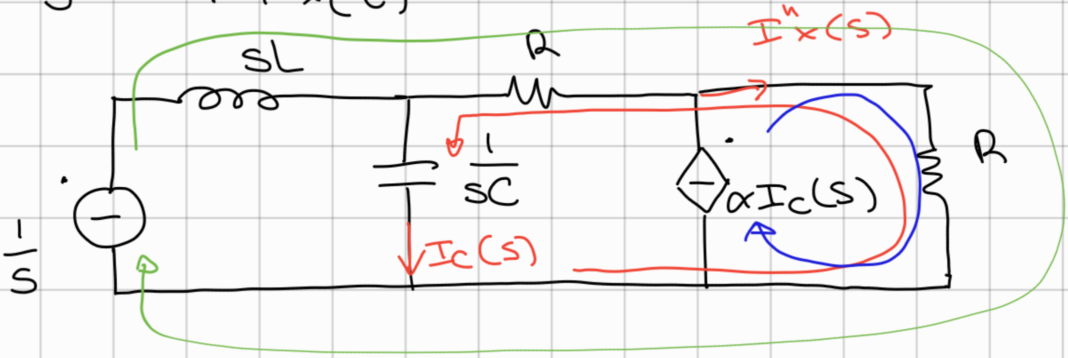
$$I_x(s) = \alpha I_c(s) + \frac{2}{s} - I_c(s) = -\frac{2/3}{s+\frac{2}{3RC}} + \frac{2}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_x(t) = \left(2 - \frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3RC}t}\right) u(t)$$



$J'(t) \longrightarrow i'_x(t) = 1A$ (vale per tutto l'asse dei tempi)

$J'' \longrightarrow i''_x(t)$



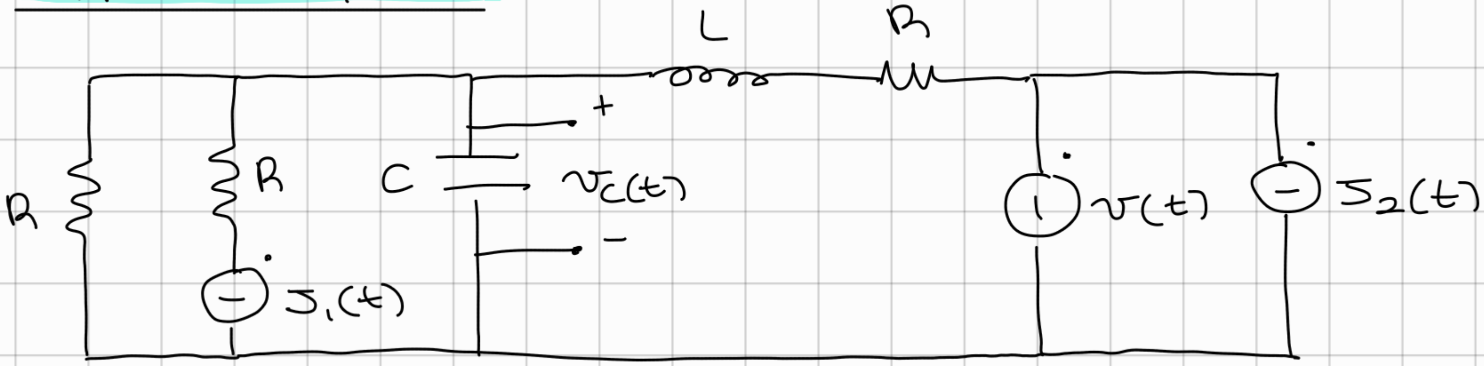
$$\left(2R + \frac{1}{sC}\right) I_c(s) = -\alpha R I_c(s) - \frac{2R}{s} = 0$$

$$\Rightarrow I_c(s) = \frac{\frac{2R}{s}}{2R + \frac{1}{sC} - \alpha R} = \frac{2\cancel{R}}{\frac{3}{2}\cancel{R}s + \frac{1}{CR}} = \frac{4/3}{s + \frac{2}{3RC}}$$

$$I''_x(s) = \frac{1}{s} - \frac{2/3}{s + 2/_{3RC}} \Rightarrow i''_x(t) = \left[1 - \frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3RC}t}\right] u(t)$$

$$i_x(t) = i'_x(t) + i''_x(t) = 1 + \left(1 - \frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3RC}t}\right) u(t)$$

ESAME 23/07/2021

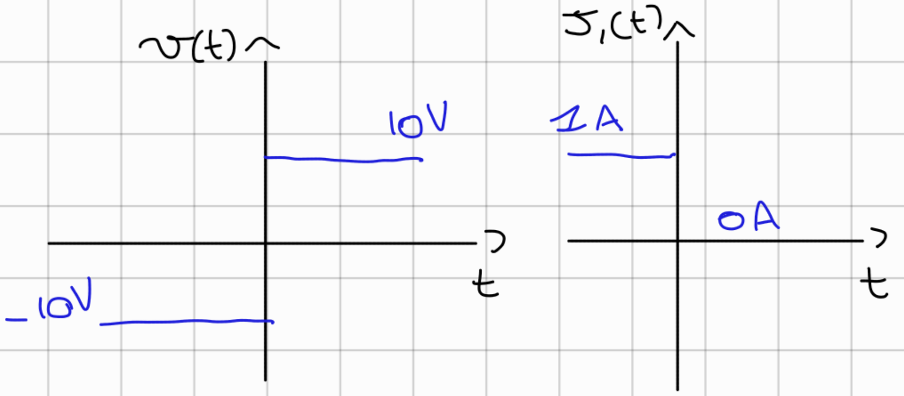


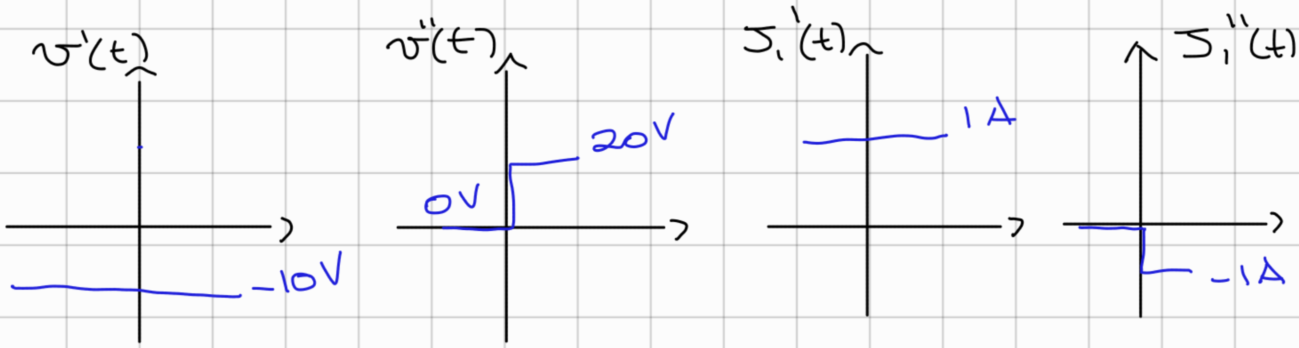
$R = 20\ \Omega$

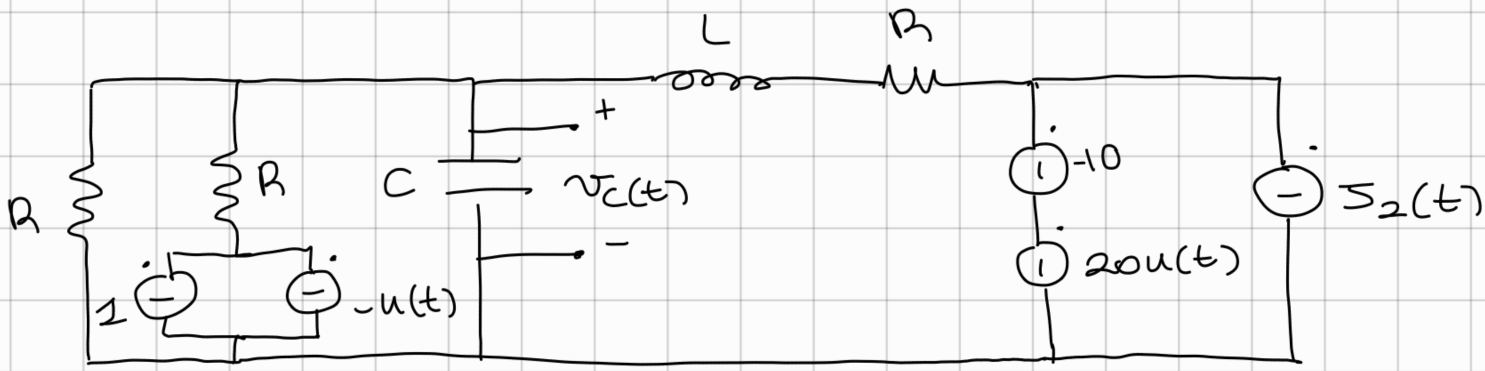
$C = 100\ \mu F$

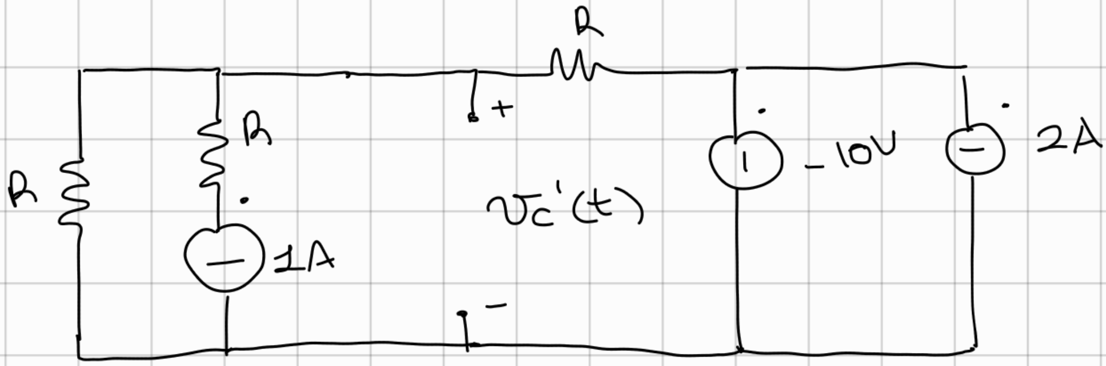
$L = 1 mH$

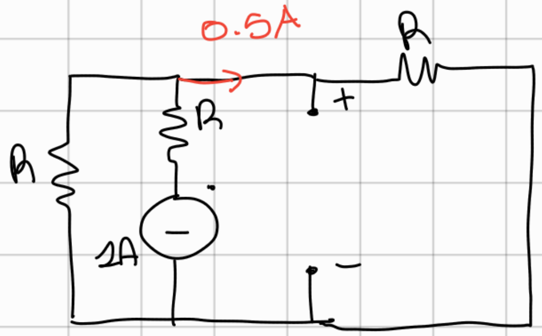
$J_2(t) = 2A$ (costante)



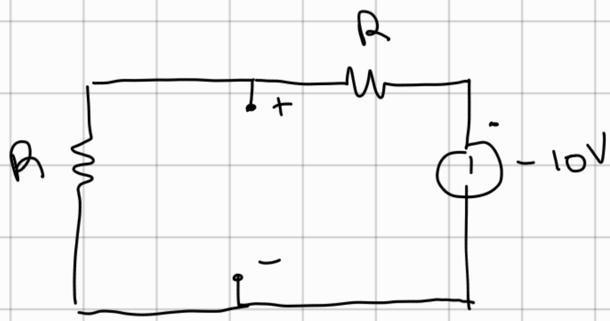


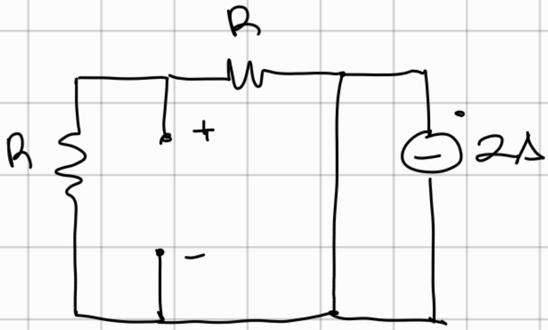


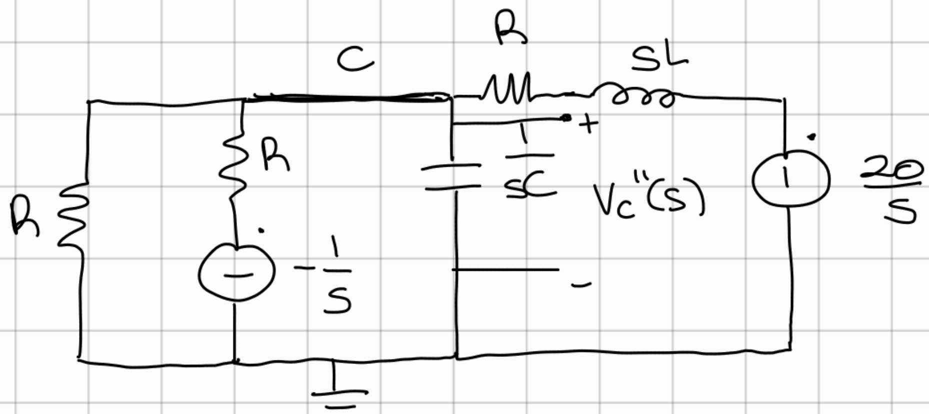




$v_c'(t) = 10 - 5 = 5\,V$







$$-\frac{1}{s} + \frac{20}{s(R+sL)} = V_c''(s)\left[\frac{1}{R} + sC + \frac{1}{R+sL}\right]$$

$$V_c''(s) = \frac{-\frac{1}{s} + \frac{20}{s(R+sL)}}{\frac{1}{R} + sC + \frac{1}{R+sL}} = \frac{-R(R+sL) + 20R}{s(R+sL) + RCs^2(R+sL) + sR} =$$

$$= -\frac{0.02}{2 \cdot 10^{-6} s^2 + 0.0415 + 40}$$

$P_1 = -19473$

$P_2 = -1027$

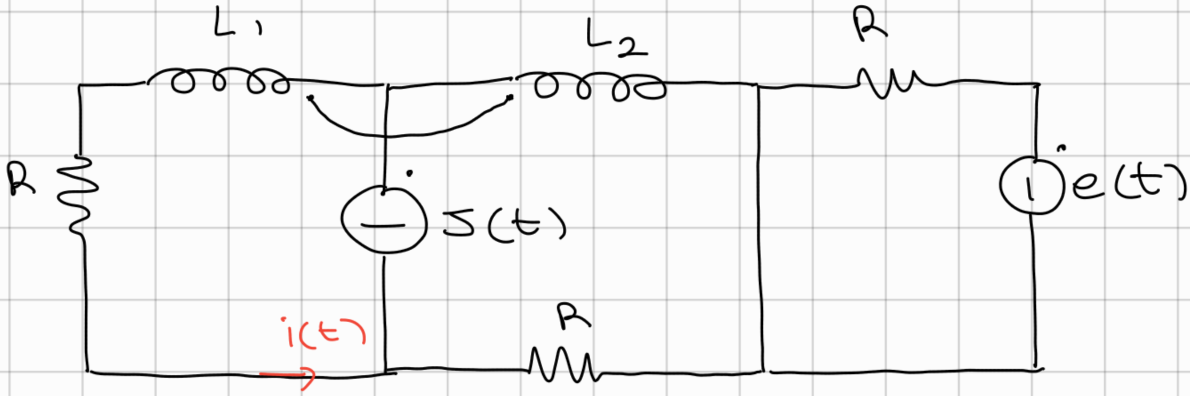
$$V_c''(s) = -\frac{0.02}{2\cdot 10^{-6}(s+19473)(s+1027)}$$

$$v_c''(t) = (0.5421e^{-19473t} - 0.5421e^{-1027t})\,u(t)$$

$$v_c(t) = 5 + v_c''(t)$$

29/11/2022

ESERCIZIO ESAME 24/01/2022



$e(t) = 50\,V$ (costante)

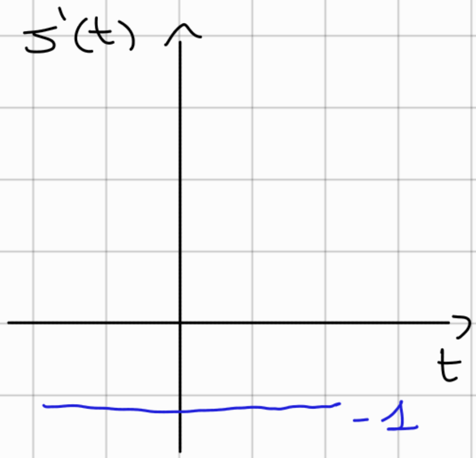
$L_1 = 10\ mH$

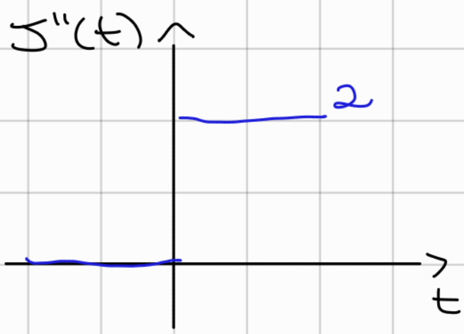
$L_2 = 20\ mH$

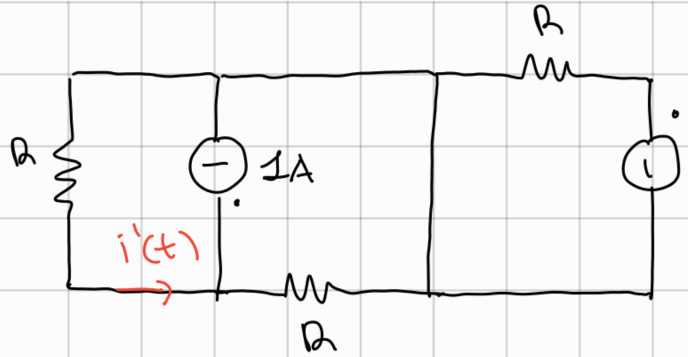
$M = 5\ mH$

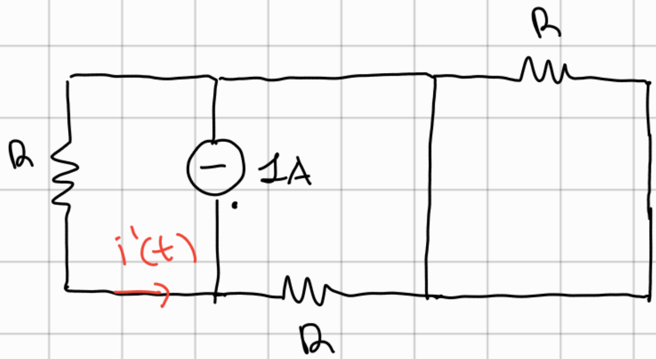
$R = 10\ \Omega$

$\equiv$

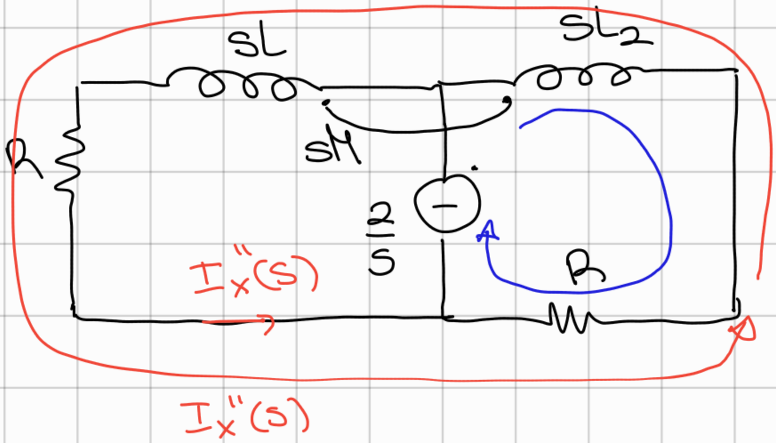








$i'(t) = -0.5\,A$



$$R\left(I_x''(s) - \frac{2}{s}\right) + sL_2\left(I_x''(s) - \frac{2}{s}\right) - sM \cdot I_x''(s) + sL_1 I_x''(s)$$

$$- sM\left(I_x''(s) - \frac{2}{s}\right) + R I_x''(s) = 0$$

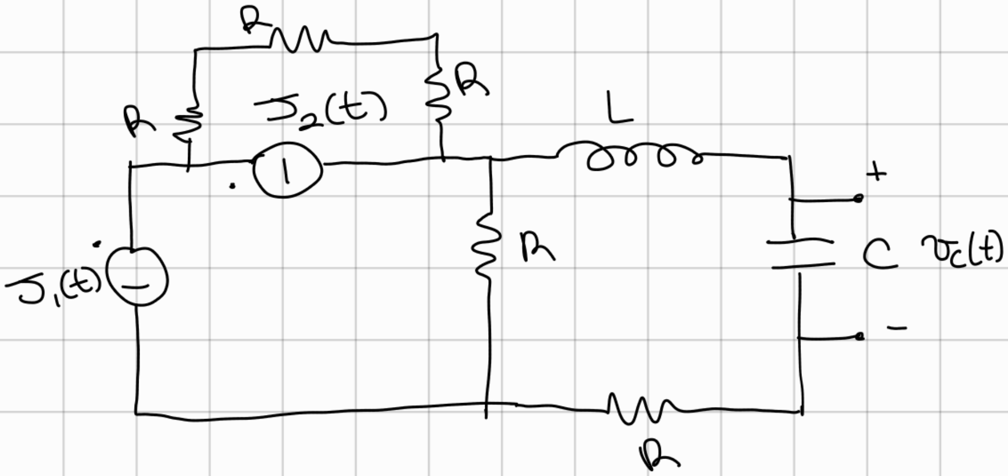
$$I_x''(s) = \frac{R + sL_2 - sM}{R + sL_2 - sM + sL_1 - sM + R} \cdot \frac{2}{s} = \frac{+0.01s + 20}{0.01s^2 + 20s} =$$

$$= + \frac{s + 2000}{s(s+2000)} = + \frac{1}{s}$$

$i_x''(t) = +1 \cdot u(t)$

$i_x(t) = i_x'(t) + i_x''(t) = -\frac{1}{2} + 1 \cdot u(t)$

ESERCIZIO ESAME 14/02/2022



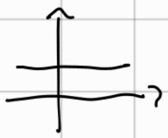
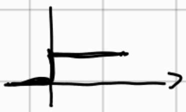
$J_1(t) = 1 + u(t)$

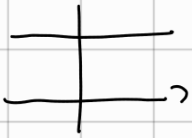
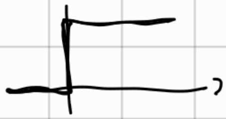
$J_2(t) = 2 + 2u(t)$

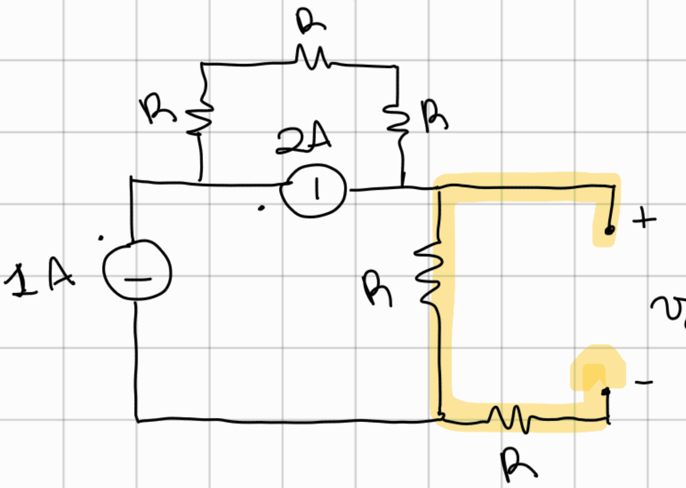
$L = 10\ mH$

$C = 500\ \mu F$

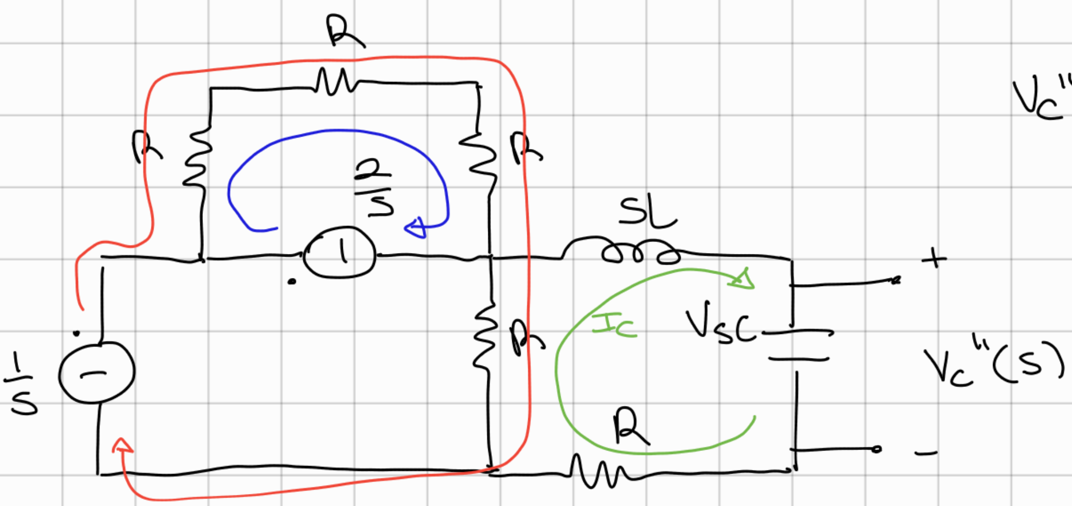
$R = 10\ \Omega$

$J_1(t) =$  $+$ 

$J_2(t) =$  $+$ 



$v_c'(t) = 10\ V,\ \forall t$



$V_c''(s) = \frac{1}{sC} I_c(s)$

$$\left(2R + sL + \frac{1}{sC}\right) I_C(s) - \frac{R}{s} = 0$$

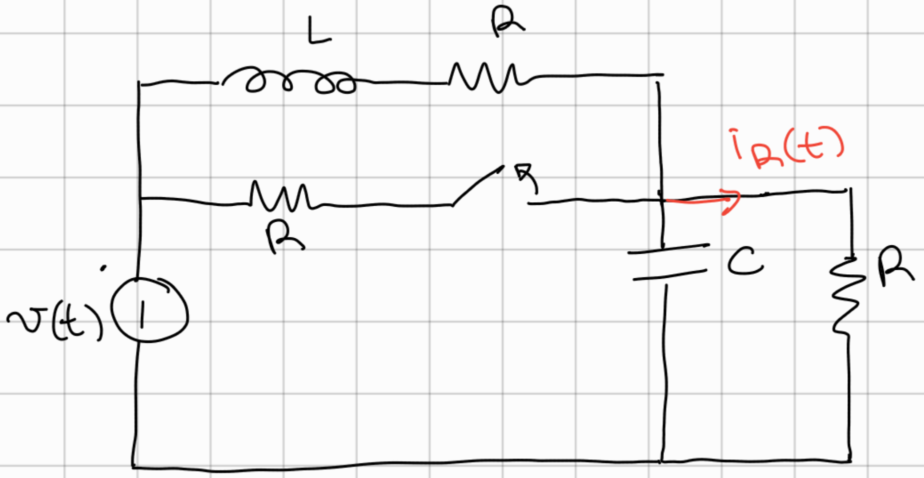
$$I_C(s) = \frac{R/s}{2R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{RC}{LCs^2 + 2RCs + 1}$$

$$V_C''(s) = \frac{R}{s(LC^2 + 2RCs + 1)} = \frac{10}{s(5 \cdot 10^{-6} s^2 + 0.015 + 1)}$$

$$v_C''(t) = \left(10 + 0.5902 e^{-1894.4t} - 10.5902 e^{-105.6t}\right) u(t)$$

$$v_C(t) = 10 + v_C''(t)$$

ESERCIZIO ESAME 20/04/2022



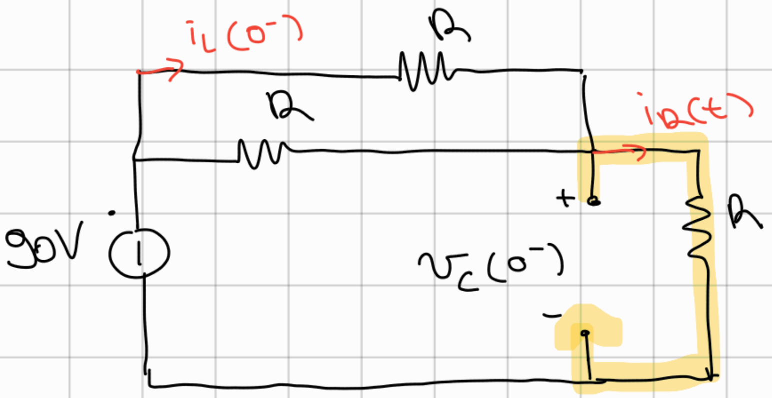
$v(t) = 90\,V$ (cost.)

$L = 10\,mH$

$C = 10\,\mu F$

$R = 10\,\Omega$

$t < 0$

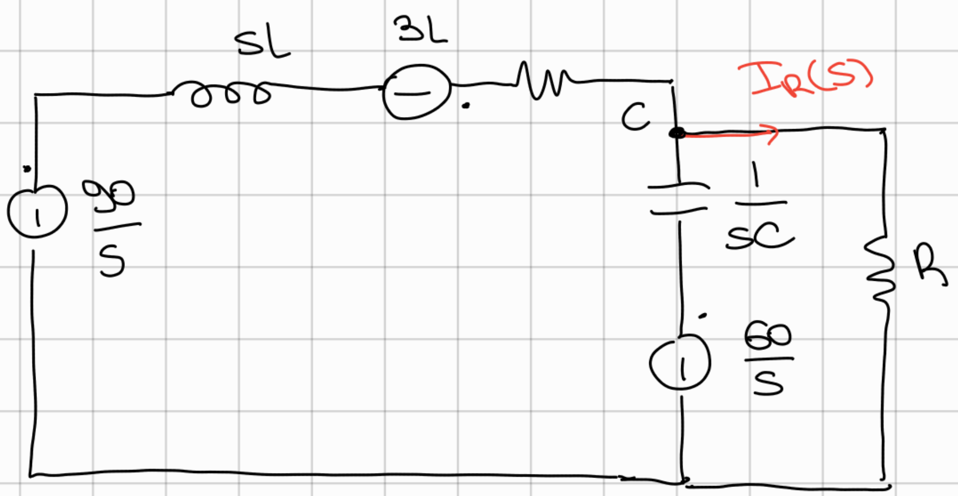


$$i_R(t) = \frac{90}{\frac{R}{2} + R} = \frac{90}{\frac{3}{2}R} = 6A$$
PER $t < 0$

$i_L(0^-) = 3A \longrightarrow$

$v_C(0^-) = 60\,V$ $\pm$

$t \geq 0$



$$I_R(s) = \frac{V_C(S)}{R}$$

$$C: \frac{\frac{90}{S} + 3L}{R + sL} + 60C = V_C(S)\left[\frac{1}{R+SL} + SC + \frac{1}{R}\right]$$

$$V_C(S) = \frac{\frac{90 + 3LS}{S(R+SL)} + 60C}{\frac{1}{R+SL} + SC + \frac{1}{R}} = \frac{90R + 3RLs + 60RCs(R+SL)}{Rs + RCs^2(R+SL) + s(R+sL}$$

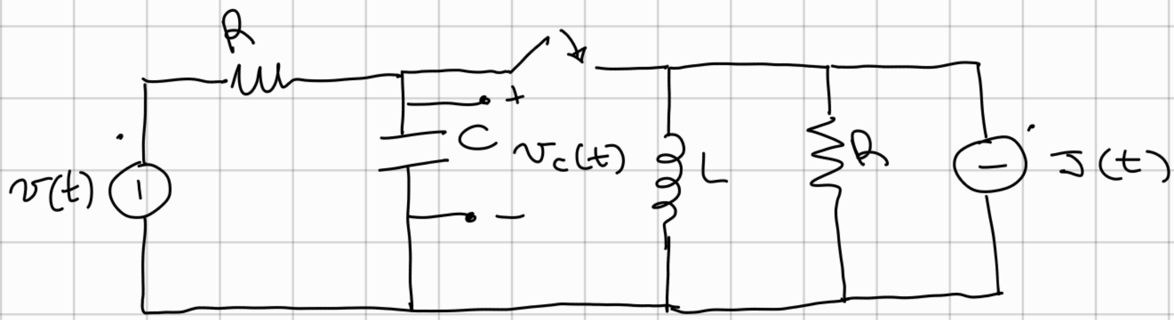
$$I_R(S) = \frac{60LCs^2 + (60RC + 3L)s + 90}{(s(RLCs^2 + (R^2C + L)s + 2R)} =$$

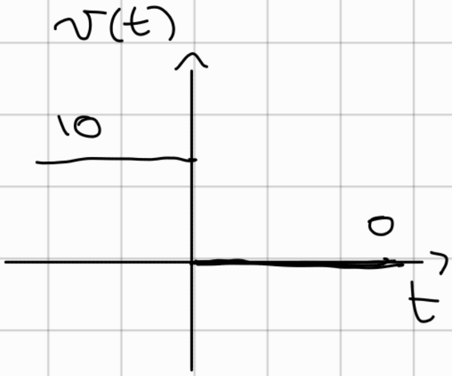
$$= \frac{6 \cdot 10^{-6} s^2 + 0.036s + 90}{s(10^{-6}s^2 + 0.011s + 20)}$$

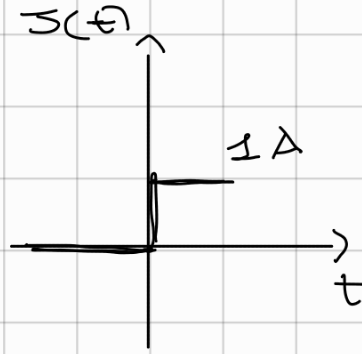
$$i_R(t) = (4.1468\, e^{-8701 6t} - 2.6468\, e^{-22984t} + 4.5)\, u(t)$$

PER $t \geq 0$

ESERCIZIO ESAME 10/06/2022







$v(t) = 10 \cdot u(-t)$

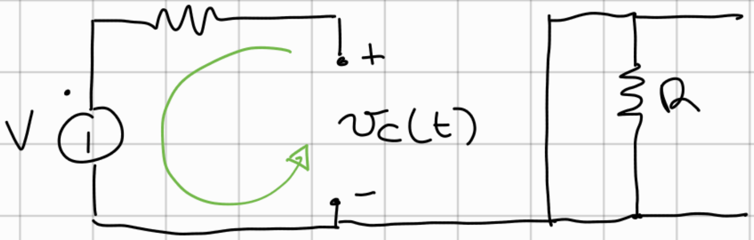
$J(t) = u(t)$

$C = 10\ \mu F$

$L = 10\ mH$

$R = 10\ \Omega$

$t < 0$

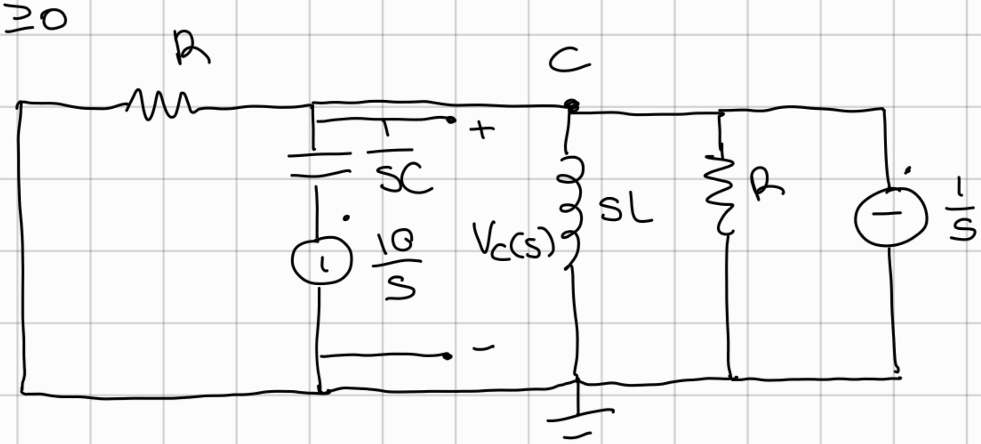


$$v_C(t) = \begin{cases} 10\ V, & t < 0 \\ & \end{cases}$$

$v_C(0^-) = 10\ V$ ±

$i_L(0^-) = 0$

$t \geq 0$



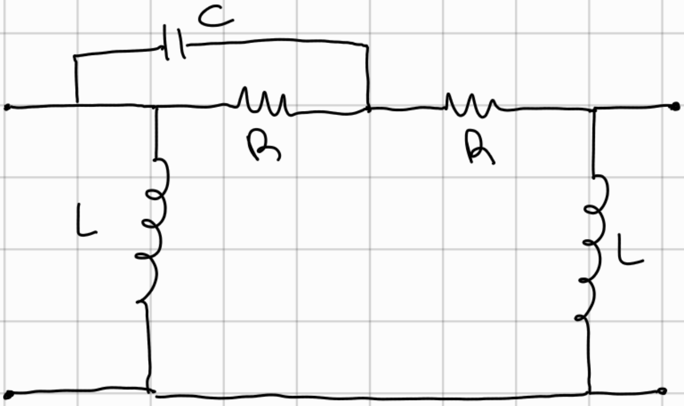
$$C: \quad 10C + \frac{1}{s} = V_C(s)\left[\frac{1}{R} + sC + \frac{1}{sL} + \frac{1}{R}\right]$$

$$\Rightarrow V_C(s) = \frac{10C_1 + \frac{1}{s}}{\frac{2}{R} + sC + \frac{1}{sL}} = \frac{10RCLs + RL}{RLCs^2 + 2Ls + R} = \frac{10^{-5}s + 0.1}{10^{-6}s^2 + 0.02s + 1}$$

$$\Rightarrow v_C(t) = \left(5e^{-19487t} + 5e^{-593t}\right)u(t)$$

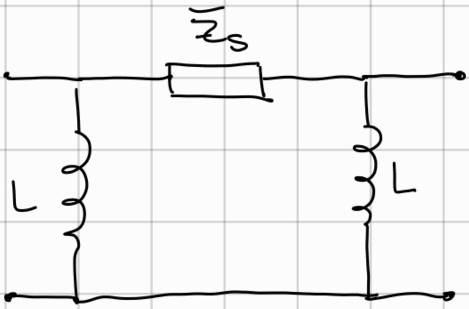
01/12/2022

ESERCIZIO ESAME



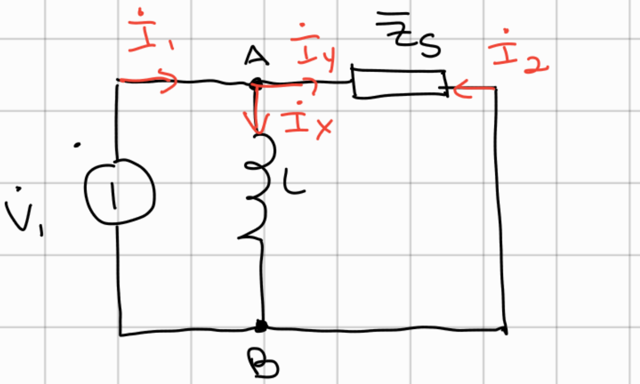
$$\overline{Z}_p = \frac{R/_{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\overline{Z}_s = \overline{Z}_p + R = 19.901 - 0.9901j$$



$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \overline{Y}_{11}\dot{V}_1 + \overline{Y}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \overline{Y}_{21}\dot{V}_1 + \overline{Y}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

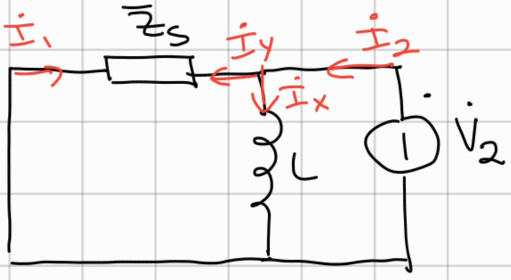
Mettendo a zero $\dot{V}_2$:



$$\dot{I}_2 = -\frac{\dot{V}_1}{\overline{Z}_s} \Rightarrow -\frac{1}{\overline{Z}_s} = \overline{Y}_{21}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_x + \dot{I}_y = \frac{\dot{V}_1}{j\omega L} + \frac{\dot{V}_1}{\overline{Z}_s} = \underbrace{\left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\overline{Z}_s}\right)}_{= \overline{Y}_{11}}\dot{V}_1$$

Mettendo a zero $\dot{V}_1$:

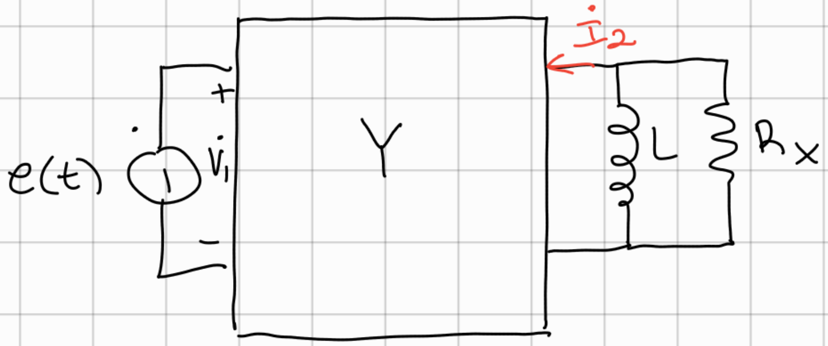


$$\dot{I}_1 = -\frac{\dot{V}_2}{\overline{Z}_s} \Rightarrow \overline{Y}_{12} = -\frac{1}{\overline{Z}_s} = \overline{Y}_{21}$$

$$\dot{I}_2 = \left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\overline{Z}_s}\right)\dot{V}_2 \Rightarrow \overline{Y}_{22} = \overline{Y}_{11}$$

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} 0.05 - 0.0975j & 0.05 - 0.0025j \\ 0.05 - 0.0025j & 0.05 - 0.0975j \end{bmatrix}$$

2° PARTE ESERCIZIO:

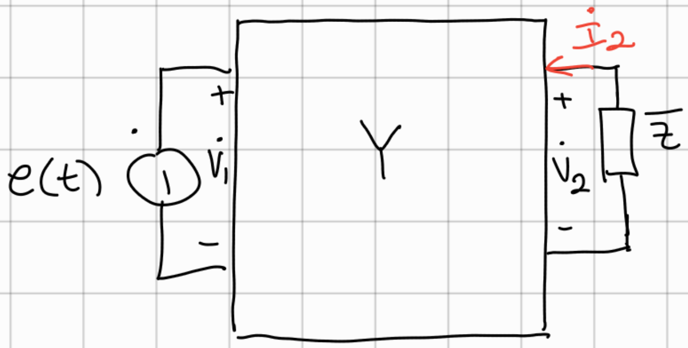


$\dot{E} = 100$

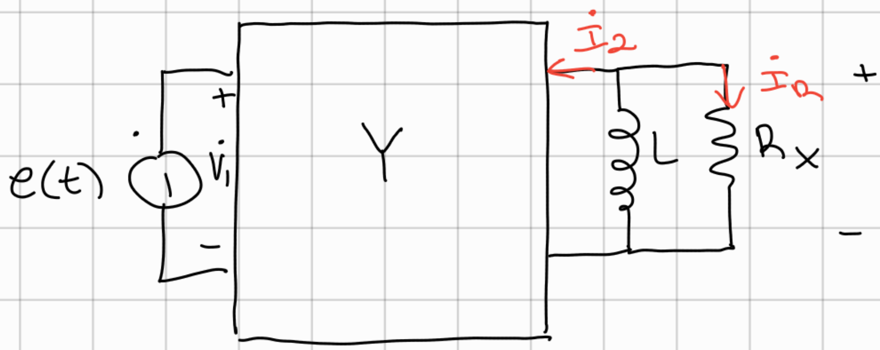
$\bar{S}_{R_x} = ?$

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \bar{Y}_{11}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{Y}_{21}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{22}\dot{V}_2 \\ \dot{V}_1 = \dot{E} \\ \dot{V}_2 = -\bar{Z}\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\bar{Z} = \frac{R_x \cdot j\omega L}{R_x + j\omega L} = 5 + 5j$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{I}_1 = 100\bar{Y}_{11} - \bar{Y}_{12}\bar{Z}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_2 = 100\bar{Y}_{21} - \bar{Y}_{22}\bar{Z}\dot{I}_2 \end{cases} \Rightarrow \dot{I}_2 = \frac{100\bar{Y}_{21}}{1+\bar{Y}_{22}\bar{Z}} = -2.812 - 0.5267j$$

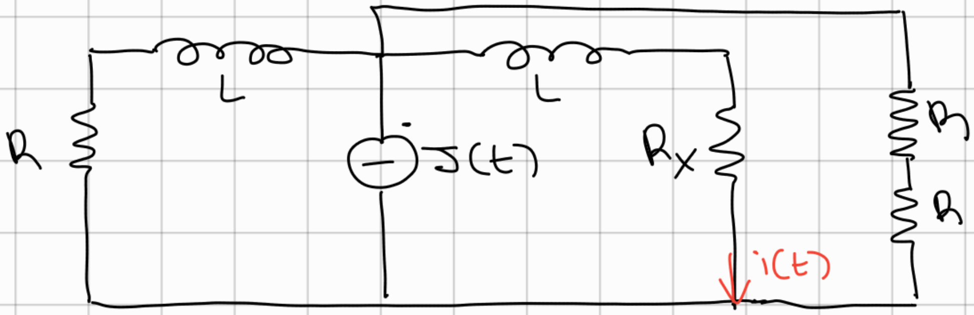


$$\bar{S} = \dot{V}\dot{I}^* = R\dot{I}_R\dot{I}_R^* = R I_R^2$$

oppure

$$\bar{S} = \bar{Z} \cdot |\dot{I}_2|^2 = 40.9238 + 40.9238\,j \Rightarrow \bar{S}_{R_x} = P_{R_x} = 40.9238\ W$$

ESERCIZIO ESAME 22/07/2022



$L = 10\ mH$

$R = 12\ \Omega$

$J(t) = 6\ A$

$$R_x = \begin{cases} 2R, & t<0 \\ R, & t \geq 0 \end{cases}$$

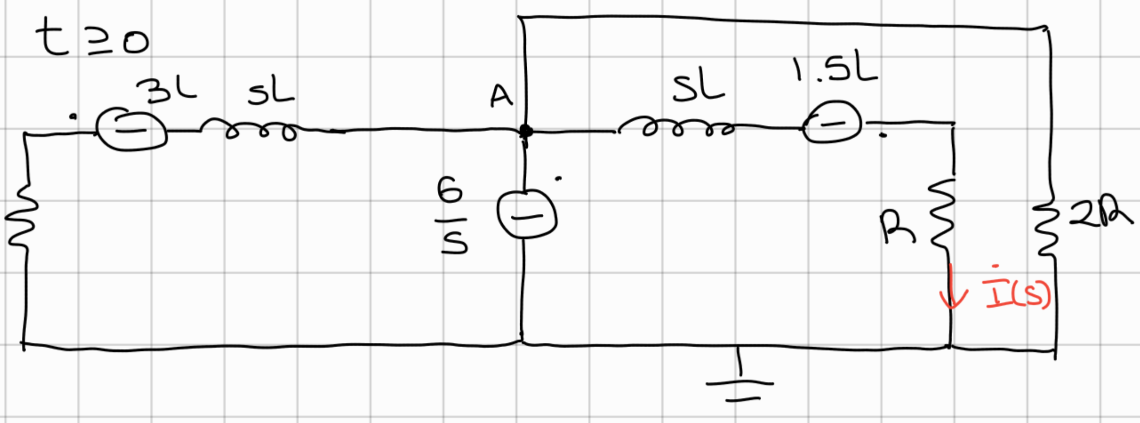
$t<0$

$$i_R(t) = i_{L_2}(0^-) = 6 \cdot \frac{1/2R}{\frac{1}{R}+\frac{1}{2R}+\frac{1}{2R}} =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{4} = 1.5\ A \longrightarrow$$

$$i_{L_1}(0^-) = 2 \cdot 1.5 = 3A \longleftarrow$$

$t \geq 0$



$$\frac{6}{s} - \frac{3L}{R+sL} - \frac{1.5L}{R+sL} = V_A(s)\left[\frac{1}{R+sL} + \frac{1}{R+sL} + \frac{1}{2R}\right]$$

$$V_A(s) = \frac{\frac{6}{s} - \frac{4.5L}{R+sL}}{\frac{2}{R+sL} + \frac{1}{2R}} = \frac{12R(R+sL) - 9RLs}{4Rs + s(R+sL)} = \frac{3RLs + 12R^2}{s^2L + 5Rs}$$

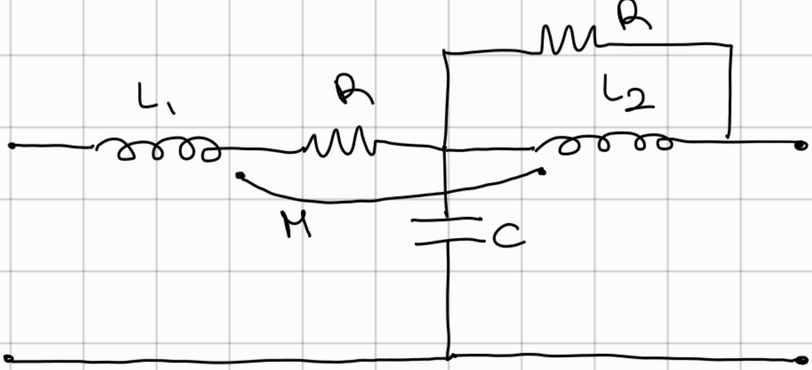
$$I(s) = \frac{V_A(s) + 1.5L}{R + sL} = \frac{\frac{3RLs + 12R^2}{s(sL+sR)} + 1.5L}{R+sL} =$$

$$= \frac{3RLs + 12R^2}{s(sL+sR)(sL+R)} + \frac{1.5L}{R+sL}$$

$$i(t) = \left(-0.15e^{-6000t} - 2.25e^{-1200t} + 2.4\right)u(t) + 1.5e^{-1200t}u(t)$$
$$= \left(-0.15e^{-6000t} - 0.75e^{-1200t} + 2.4\right)u(t) \quad (*)$$

$$i(t) = \begin{cases} (*) , & t \geq 0 \\ 1.5A & t < 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO ESAME 11/01/2022



$R = 10\ \Omega$

$L_1 = 10\ mH$

$L_2 = 20\ mH$

$M = 12\ mH$

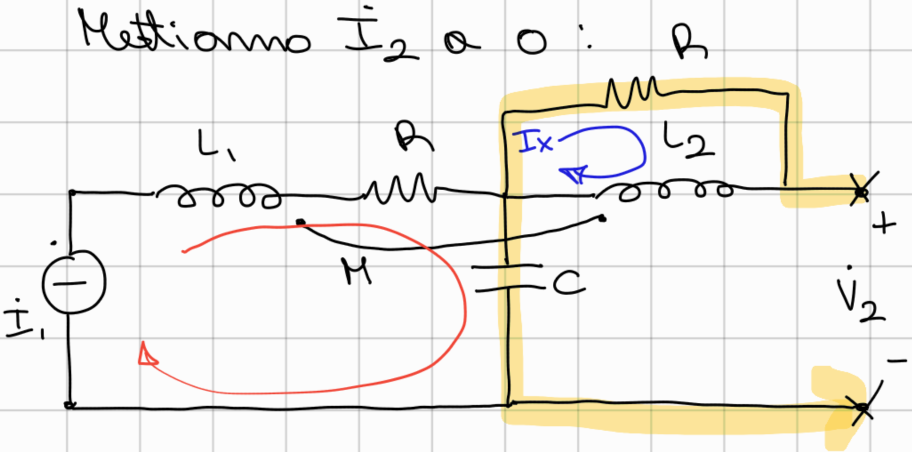
$C = 10\ \mu F$

$e(t) = 100\sqrt{2}\cos(1000t + \frac{\pi}{4})$

$\bar{Z}_c = (30 + 40j)\ V$

$$\dot{V}_1 = \bar{Z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\dot{I}_2$$
$$\dot{V}_2 = \bar{Z}_{21}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{22}\dot{I}_2$$

Mettiamo $\dot{I}_2$ a 0:



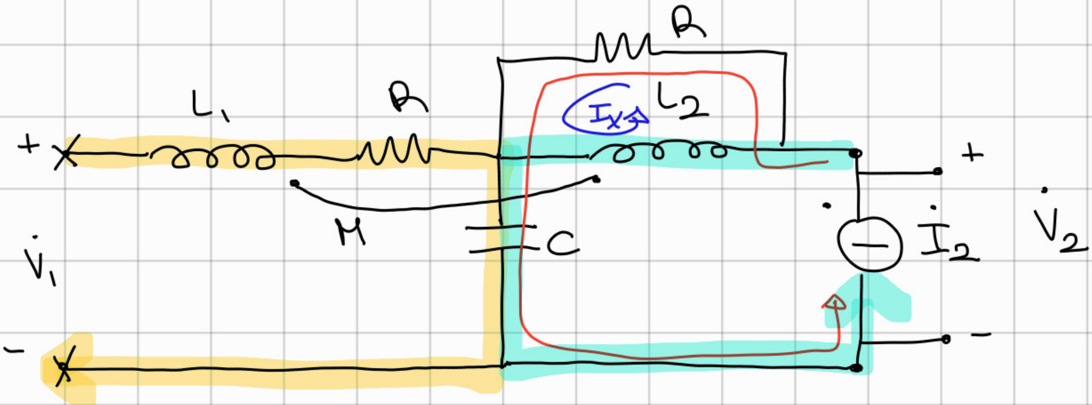
$$(R + j\omega L_2)\dot{I}_x + j\omega M\dot{I}_1 = 0 \Rightarrow \dot{I}_x = -\frac{j\omega M}{R + j\omega L_2}\dot{I}_1 = \bar{\gamma}\dot{I}_1$$

$$\dot{V}_1 = \left(R + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_1 + j\omega M\bar{\gamma}\dot{I}_1$$

$\bar{Z}_{11} = 12.88 - 5.76j$

$$\dot{V}_2 = \underbrace{-R\dot{I}_x + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_1 = \left(-R\bar{\gamma} + \frac{1}{j\omega C}\right)}_{\bar{Z}_{21} = 4.8 - 7.6j}\dot{I}_1$$

Mettiamo a 0 $\dot{I}_1$:

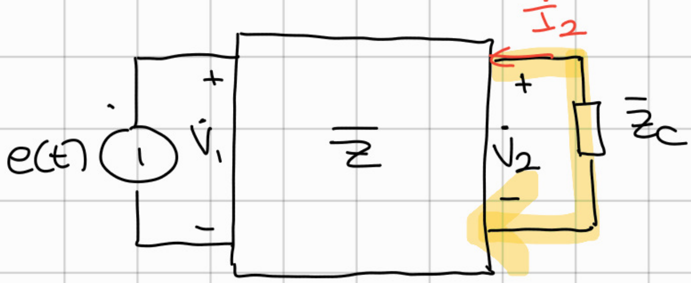


$$(R + j\omega L_2)\dot{I}_x + R\dot{I}_2 = 0 \Rightarrow \dot{I}_x = -\frac{R}{R + j\omega L_2}\dot{I}_2 = \bar{\gamma}\dot{I}_2$$

$$\dot{V}_1 = -j\omega M \dot{I}_x + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_2 = \underbrace{\left(-j\omega M\bar{\gamma} + \frac{1}{j\omega C}\right)}_{\bar{Z}_{12} = 4.8 - 7.6j}\dot{I}_2$$

$$\dot{V}_2 = -j\omega L_2\bar{\gamma}\dot{I}_2 + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_2 \Rightarrow \bar{Z}_{22} = \left(\frac{1}{j\omega C} - j\omega L_2\bar{\gamma}\right) =$$

$$= 8 - 6j$$



$\dot{E} = 100e^{j\pi/4}$

$P_{\bar{Z}_c} = ?$

$$\begin{cases} 100e^{j\frac{\pi}{4}} = \bar{Z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\dot{I}_2 \\ -\bar{Z}_c\dot{I}_2 = \bar{Z}_{21}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\bar{S}_{\bar{Z}_c} = \bar{Z}_c|\dot{I}_2|^2 \Rightarrow P = Re\left\{\bar{Z}_c|\dot{I}_2|^2\right\} = 30 \cdot |I_2|^2$$

$$\dot{I}_1 = \frac{-\bar{Z}_c - \bar{Z}_{22}}{\bar{Z}_{21}}\dot{I}_2$$

$$100 e^{j\pi/4} = \left(- \frac{\bar{Z}_{11}(\bar{Z}_c + \bar{Z}_{22})}{\bar{Z}_{21}} + \bar{Z}_{12} \right) \dot{I}_2$$

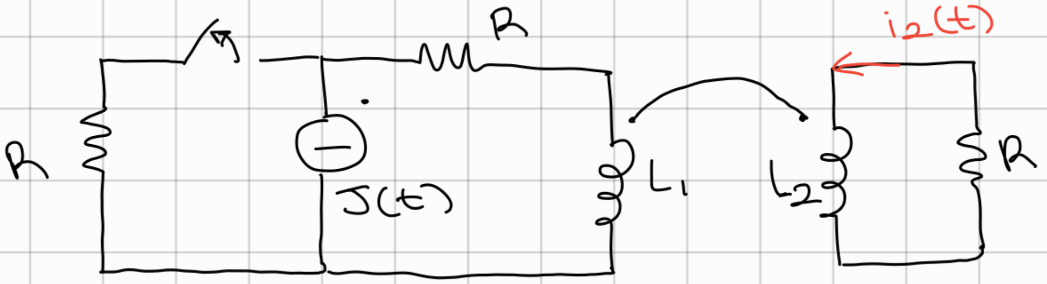
$$\Rightarrow \dot{I}_2 = 0.95 + 0.6603j = 1.1569\, e^{j2.5342}$$

$$P = 30 \cdot 1.1569^2 = 40.1568 \text{ W}$$

$$\Rightarrow \dot{I}_1 = 2.8 + 5.9355j = 6.5628\, e^{j1.13}$$

$$i_1(t) = 6.5628\sqrt{2}\cos(1000t + 1.13)$$

ESERCIZIO ESAME 09/2022



$L_1 = 10$ mH

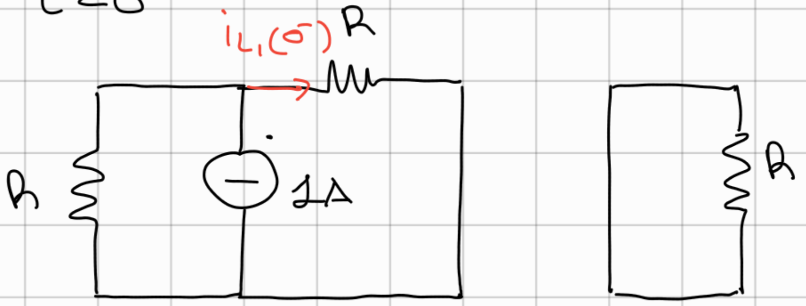
$L_2 = 20$ mH

$M = 10$ mH

$R = 10\,\Omega$

$J(t) = 1$A

$t < 0$

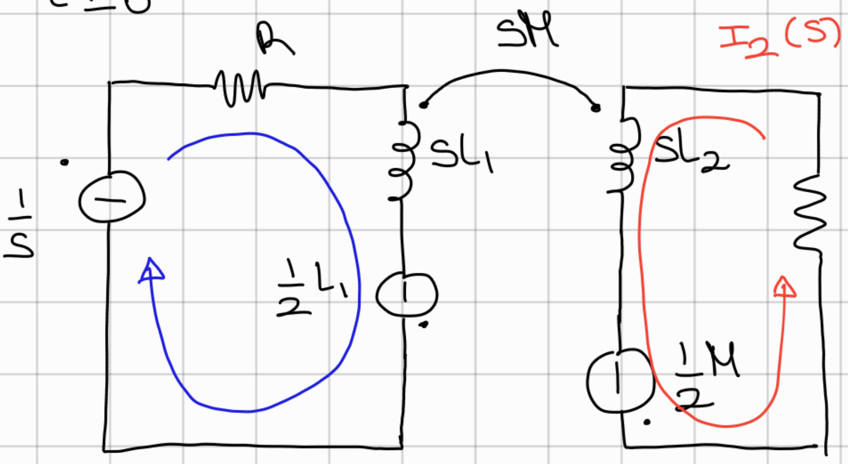


$i_2(t) = 0$

$i_{L_2}(0^-) = 0 \downarrow$

$i_{L_1}(0^-) = 0.5$ A $\downarrow$

$t \geq 0$

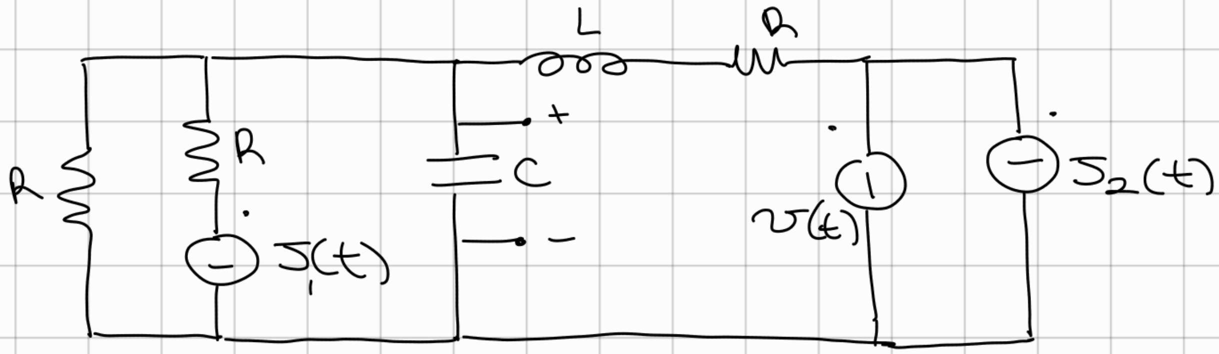


$$(R_1 + sL_2)\, I_2(s) + \cancel{s}M \frac{1}{\cancel{s}} - \frac{1}{2}M = 0$$

$$I_2(s) = -\frac{1/2\cancel{M}}{R + s(2\cancel{M})} = -\frac{1/4}{s + R/2M}$$

$$i_2(t) = -\frac{1}{4} e^{-500t}\, u(t)$$

ESERCIZIO ESAME 07/2021

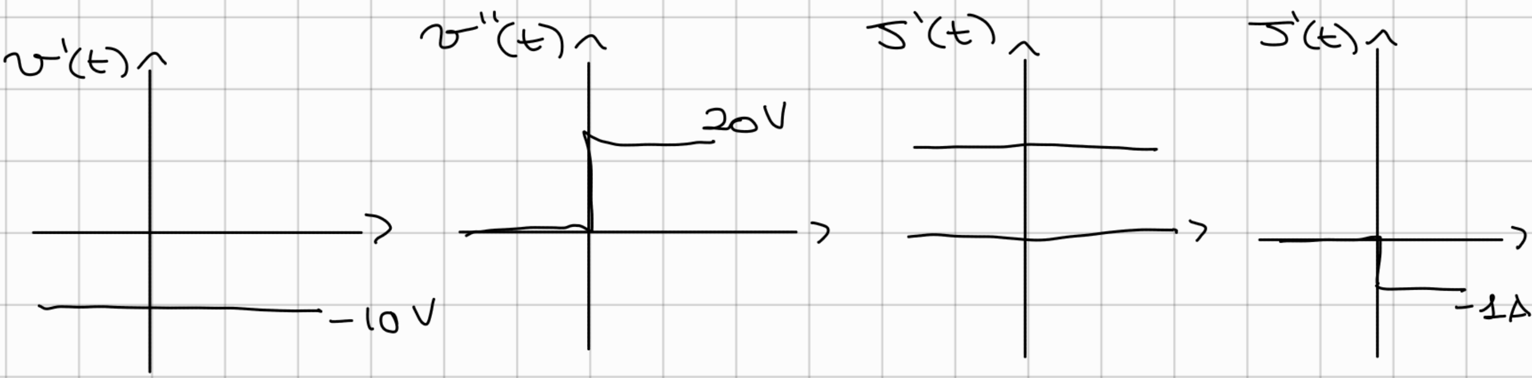


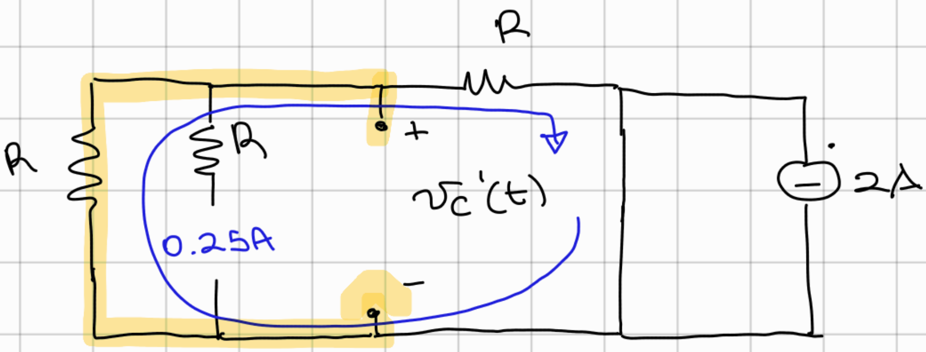
$R = 25\,\Omega$

$C = 100\,\mu F$

$L = 1\,mH$

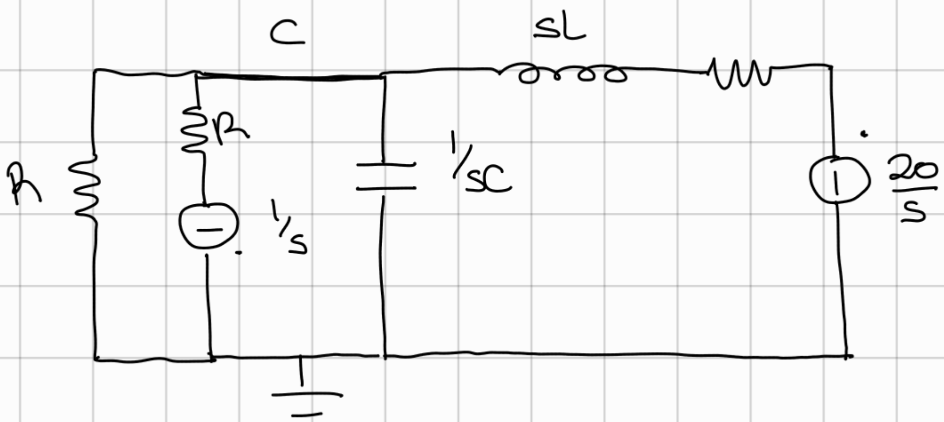
$J_2(t) = 2A$





$$v_c'(t) = 10 - 5 + 0 = 5\ V$$

$$v_c(t) = v_c'(t) + v_c''(t) = 5 + v_c''(t)$$



$$-\frac{1}{s} + \frac{20}{s(sL+R)} = V_c''(s)\left[\frac{1}{R} + sC + \frac{1}{R+sL}\right]$$

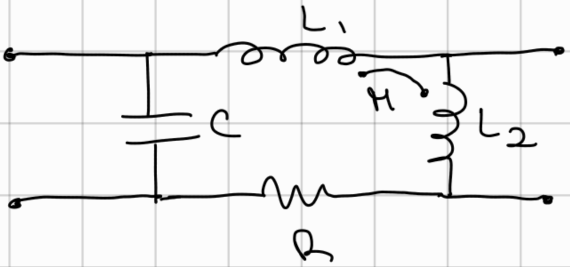
$$V_c''(s) = \frac{20/(s(sL+R)) - 1/s}{\frac{1}{R} + sC + \frac{1}{R+sL}} = \frac{\cancel{20R} - \cancel{R^2} - RLs}{s(sL+R) + RCs^2(sL+R) + Rs}$$

$$= \frac{-RL\cancel{s}}{\cancel{s}\left[RLCs^2 + (L+R^2C)s + 2R\right]}$$

$$v_c''(t) = \left(0.5421e^{-19473t} - 0.5421e^{-102t}\right)u(t)$$

$$v_c(t) = 5 + v_c''(t)$$

ESERCIZIO ESAME 07/2022



$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \bar{Y}_{11}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{Y}_{21}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

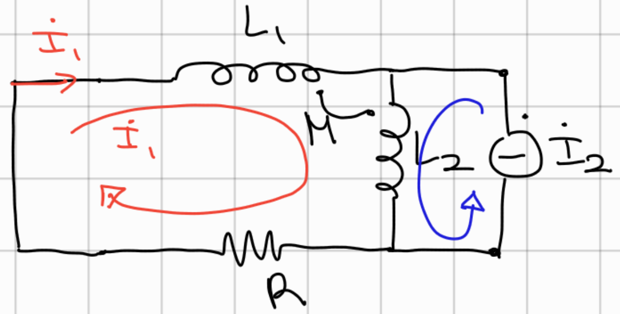
Mettiamo a 0 $\dot{V}_2$:

$$\dot{V}_2 = 0 = j\omega L_2 \dot{I}_{L_2} + j\omega M \dot{I}_{L_1}$$

$$\begin{cases} \left(R + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_x + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_y = 0 \\ \cancel{j\omega} L_2 \dot{I}_y + \cancel{j\omega} M \dot{I}_x = 0 \implies \dot{I}_y = -\frac{M}{L_2}\dot{I}_x \end{cases}$$

$$\dot{I}_x = \frac{-1/j\omega C}{R + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} - j\omega \frac{M^2}{L_2}}\dot{I}_1 = \bar{\gamma}\dot{I}_1$$

Mettiamo a 0 $\dot{V}_1$:



$$(j\omega L_1 + j\omega L_2 - 2j\omega M + R)\dot{I}_1 + (j\omega L_2 - j\omega M)\dot{I}_2 = 0$$

$$\dot{V}_2 = j\omega L_2(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) - j\omega M\dot{I}_1$$

06/12/2022

CIRCUITI MAGNETICI

H: intensità del campo magnetico [A/m]

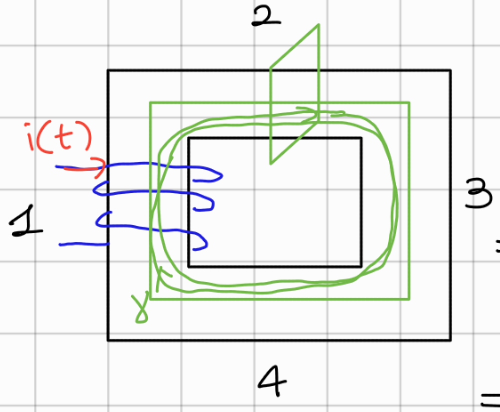
B: induzione magnetica (o densità del flusso magnetico) $[Wb/m^2] \equiv [T]$

ϕ: flusso magnetico [Wb]

$$B = \mu H = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H$$

$$\phi = \int_S B\, ds = B \cdot S$$

LEGGE DI AMPERE: $\oint_\gamma H\, dl = \sum_i I_i$



$$\oint_\gamma H dl = \sum_{i=1} I$$

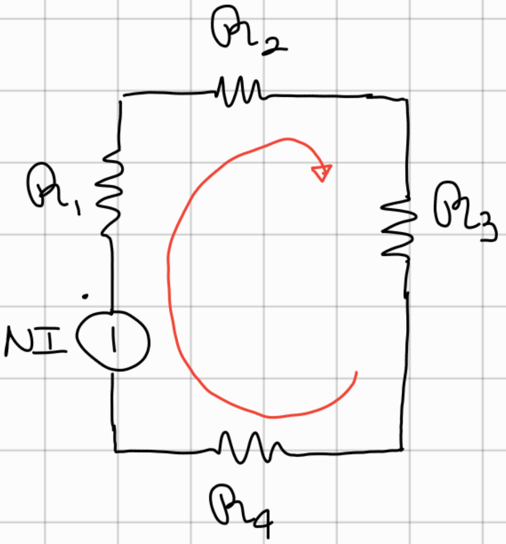
$$\Rightarrow \oint_\gamma \frac{B\,dl}{\mu_0 \mu_r} = NI \Rightarrow \oint_\gamma \frac{\phi}{\mu_0 \mu_r S} dl = NI \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4} \frac{\phi_i}{\mu_0 \mu_r S_i} l_i = NI$$ → TENSIONE MAGNETICA

RILUTTANZA $\mathcal{R}_i = \dfrac{l_i}{\mu_0 \mu_r S_i} = \dfrac{1}{\mu} \cdot \dfrac{l}{S}$

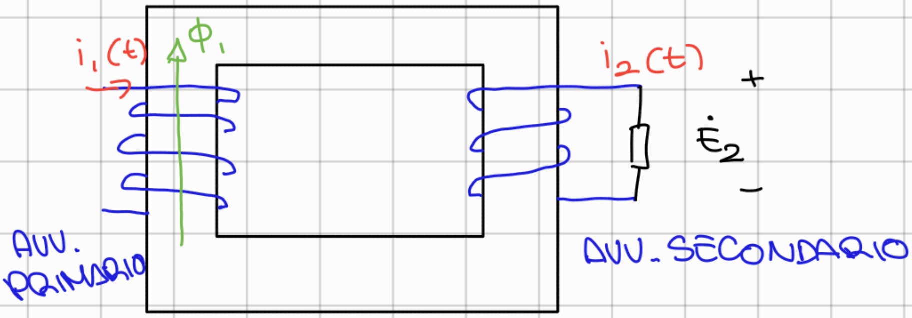
LEGGE DI HOPKINSON: $\sum_{i=1}^{n} \phi_i \cdot \mathcal{R}_i = \sum_{i=1}^{m} N_i I_i$

n: n. tronchi
m: n. solenoidi



$$-NI + \mathcal{R}_1 \phi + \mathcal{R}_2 \phi + \mathcal{R}_3 \phi + \mathcal{R}_4 \phi = 0$$

TRASFORMATORE IDEALE

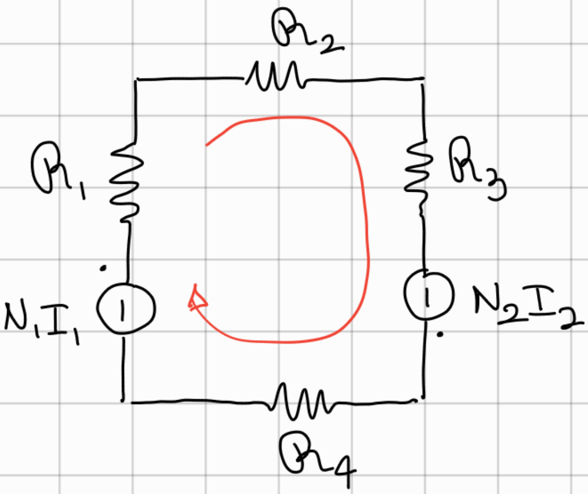


IPOTESI SEMPLIFICATIVE:

1) $R_{avv} = 0$

2) $\mu_{FE} \to \infty$

3) μ_{FE} é costante



$$-N_1I_1 + \cancel{R_1\phi} + \cancel{R_2\phi} + \cancel{R_3\phi} + \cancel{R_4\phi} - N_2I_2 = 0$$

$$R_i = \frac{l_i}{\mu_0\mu_r S_i} \to 0 \quad \text{PER L'IP. 2}$$

$$-N_1I_1 - N_2I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = -\frac{N_1}{N_2} I_1$$

$$\frac{N_1}{N_2} = n = \text{RAPPORTO SPIRE}$$

$$I_2 = -n I_1 \Rightarrow I_1 = -\frac{1}{n} I_2$$

$$\dot{E}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 = j\omega N_1 \dot{\phi}_1$$

$$\dot{E}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 = j\omega N_2 \dot{\phi}_2$$

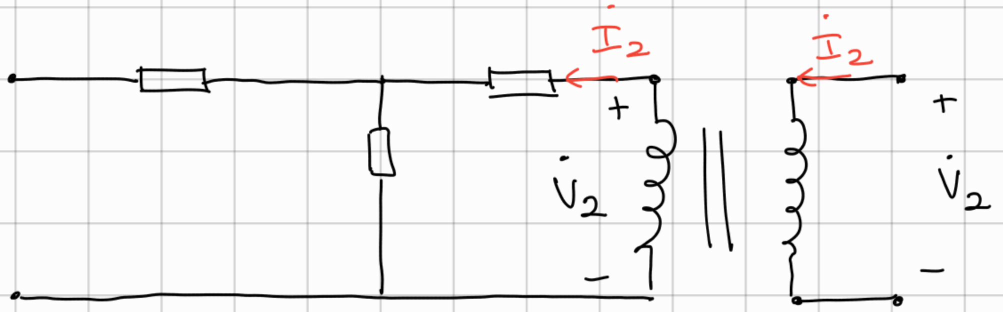
$$\phi(t) = L \cdot i(t)$$

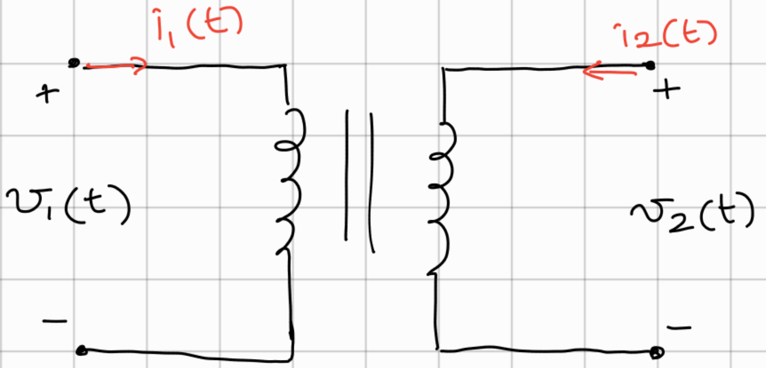
$$\frac{\dot{E}_1}{\dot{E}_2} = \frac{\cancel{j\omega} N_1 \cancel{\dot{\phi}_1}}{\cancel{j\omega} N_2 \cancel{\dot{\phi}_2}} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow \boxed{\dot{E}_1 = n \dot{E}_2}$$

$\dot{E}_1 = n\dot{E}_2$

$\dot{I}_1 = -\frac{1}{n} I_2$ con $n = \frac{N_1}{N_2}$

$S_1 = E_1 I_1 = \cancel{n}E_2 \left(-\frac{1}{\cancel{n}}\dot{I}_2\right) = -E_2 I_2 = -S_2$





$M = \sqrt{L_1 L_2}$

$L_1 = N_1^2 \mu \frac{S}{l}$

$L_2 = N_2^2 \mu \frac{S}{l}$

$M = N_1 N_2 \mu \frac{S}{l}$

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \dfrac{di_1(t)}{dt} + M \dfrac{di_2(t)}{dt} \\[2ex] v_2(t) = L_2 \dfrac{di_2(t)}{dt} + M \dfrac{di_1(t)}{dt} = M\left(\dfrac{di_1(t)}{t} + \dfrac{L_2}{M}\dfrac{di_2(t)}{dt}\right) \end{cases}$$

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{L_1\cancel{\left(\dfrac{di_1(t)}{dt} + \dfrac{M}{L_1}\dfrac{di_2(t)}{dt}\right)}}{M\cancel{\left(\dfrac{di_1(t)}{dt} + \dfrac{L_2}{M}\dfrac{di_2(t)}{dt}\right)}} = \frac{L_1}{M} = \frac{N_1}{N_2} = n$$

$$\begin{cases} \dot V_1 = j\omega L_1 \dot I_1 + j\omega M \dot I_2 \\ \dot V_2 = j\omega L_2 \dot I_2 + j\omega M \dot I_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n\dot V_2 = j\omega L_1 \dot I_1 + j\omega M \dot I_2 \\ \dot V_2 = j\omega L_2 \dot I_2 + j\omega M \dot I_1 \end{cases}$$

$$\cancel{j\omega} L_1 \dot I_1 + \cancel{j\omega} M \dot I_2 = \cancel{j\omega} L_2 n \dot I_2 + \cancel{j\omega} M n \dot I_1$$

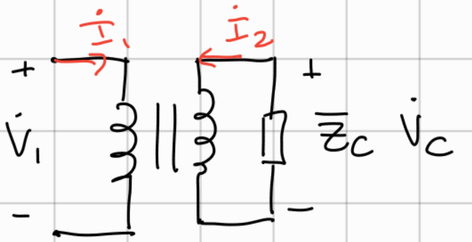
$$L_1 \dot I_1 - M n \dot I_1 = n L_2 \dot I_2 - M \dot I_2$$

$$(L_1 - Mn)\dot I_1 = (nL_2 - M)\dot I_2$$

$$\frac{L_2}{M} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow M = \frac{N_1}{N_2} L_2 = nL_2$$

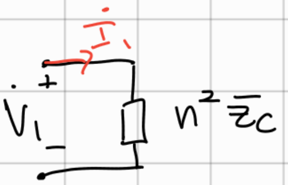
$$\frac{\dot I_1}{\dot I_2} = \frac{nL_2 - M}{L_1 - Mn} = L_2\left(n - \frac{M}{L_2}\right. \quad ?$$

IMPEDENZA AL SECONDARIO:

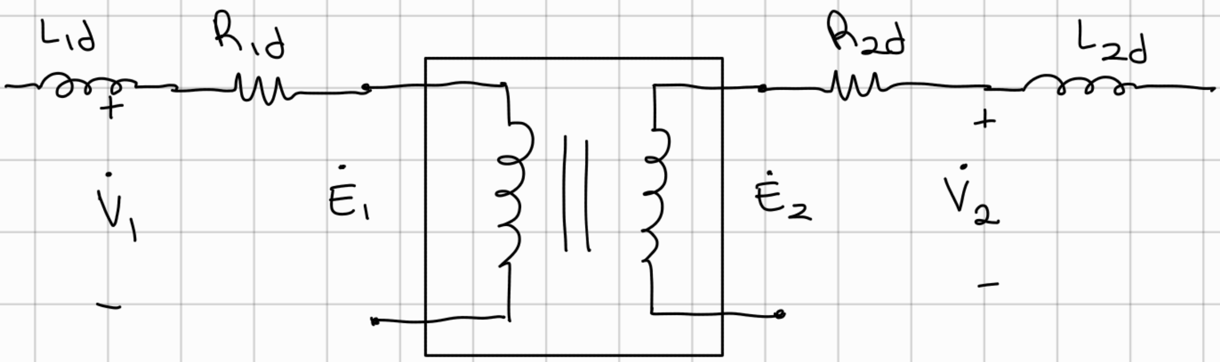


$$\dot V_2 = -\bar Z_C \dot I_2$$

$$\frac{\dot V_1}{n} = -\bar Z_C(-n\dot I_1) \Rightarrow \dot V_1 = n^2 \bar Z_C \dot I_1$$

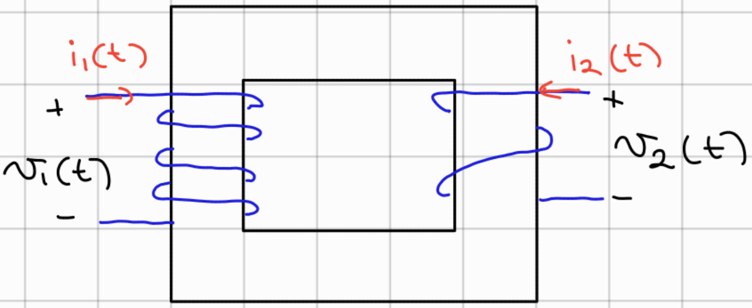


$$\bar Z_1 = n^2 \bar Z_C$$



09/12/2022

TRASFORMATORE IDEALE



IPOTESI SEMPLIFICATIVE

- $R_{avv} = 0$
- $\mu_{FE} \rightarrow +\infty$
- μ_{FE} COSTANTE

$$n = \frac{N_1}{N_2}$$

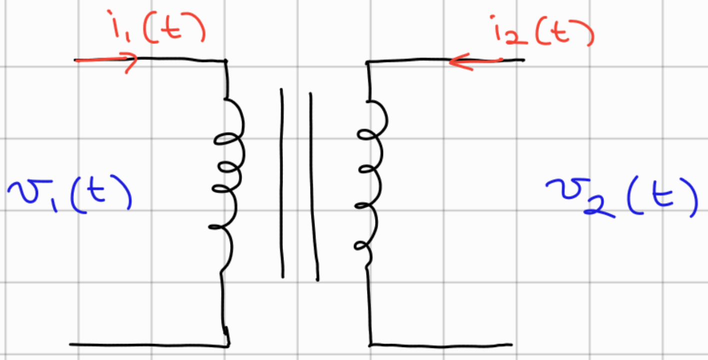
$$L_1 = N_1^2 \cdot \frac{S}{\mu l}$$

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = n \; ; \; \frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{1}{n}$$

$$L_2 = N_2^2 \cdot \frac{S}{\mu l}$$

$$S_1 = -S_2$$

CIRCUITO EQUIVALENTE



$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

NEL CASO DI ACCOPP. IDEALE

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

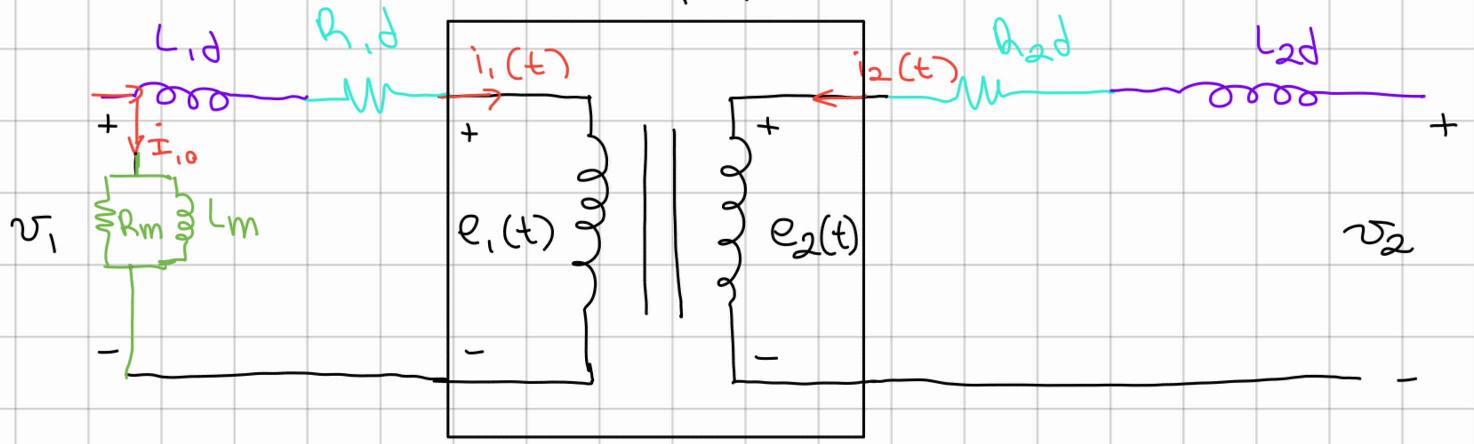
$$p(t) = v_1(t) \cdot i_1(t) + v_2(t) \cdot i_2(t) = \cancel{n} v_2(t) \left(-\frac{1}{\cancel{n}} \cdot i_2(t) \right) + v_2(t) \cdot i_2(t) = 0$$

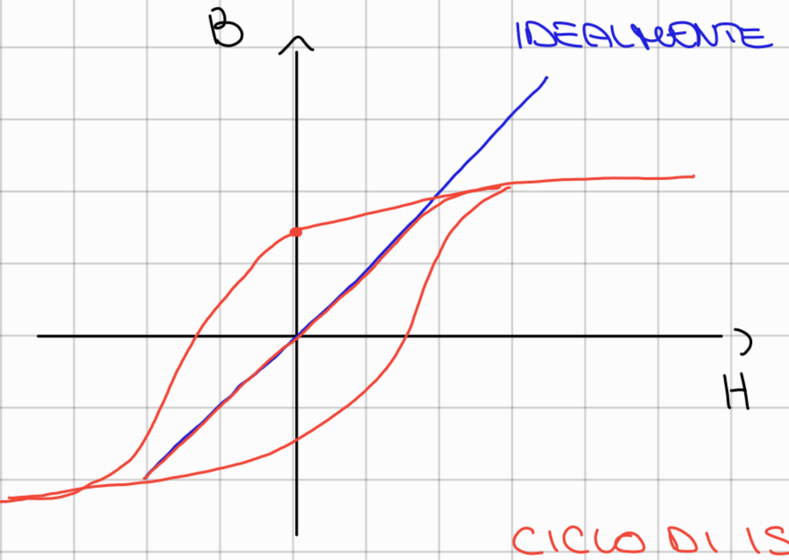
$$W(t) = \frac{1}{2} L_1 \left(i_1(t) + \frac{M}{L_1} i_2(t) \right)^2 = \frac{1}{2} L_2 \left(i_2(t) + \frac{M}{L_2} i_1(t) \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i_1(t) + \frac{M}{L_1} i_2(t) = 0 \\ i_2(t) + \frac{M}{L_2} i_1(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1(t) + \frac{N_2}{N_1} i_2(t) = 0 \\ i_2(t) + \frac{N_1}{N_2} i_1(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_1(t) = -\frac{1}{n} i_2(t) \\ \boxed{i_1(t) = -\frac{1}{n} i_2(t)} \end{cases}$$

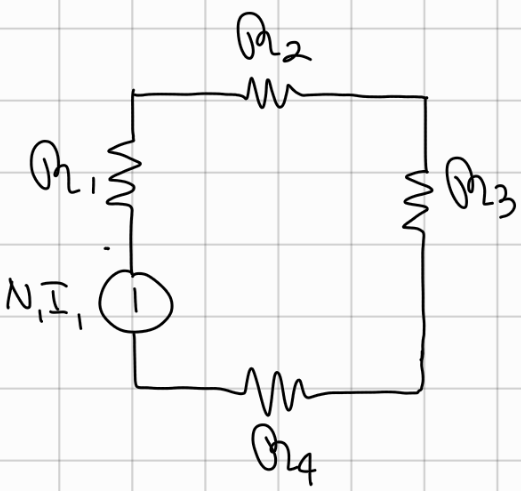
Rimuovendo le ip. semplificative:



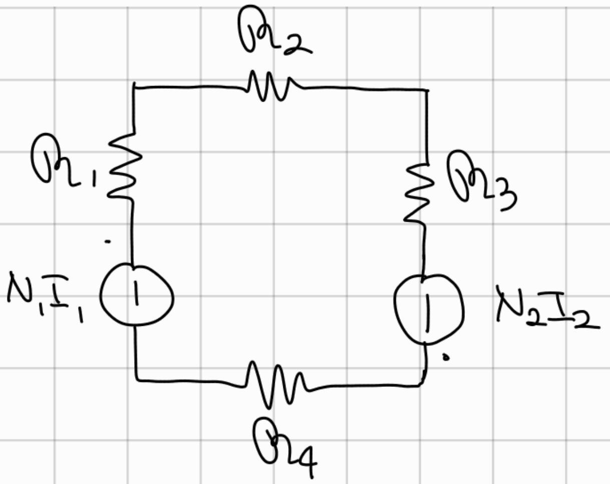


$B = \mu H$

CICLO DI ISTÈRESI



$= N_1 \dot{I}_{10} = f(R, \Phi_0)$

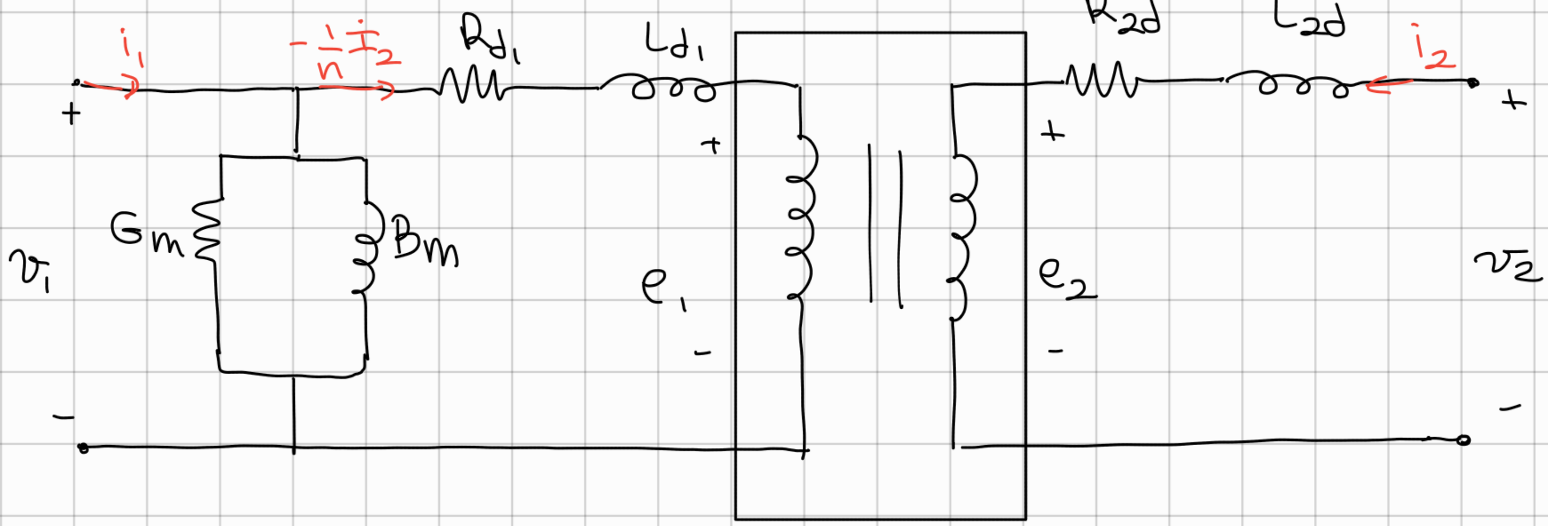


$$N_1\dot{I}_1 + N_2\dot{I}_2 = f(\mathcal{R}, \phi)$$

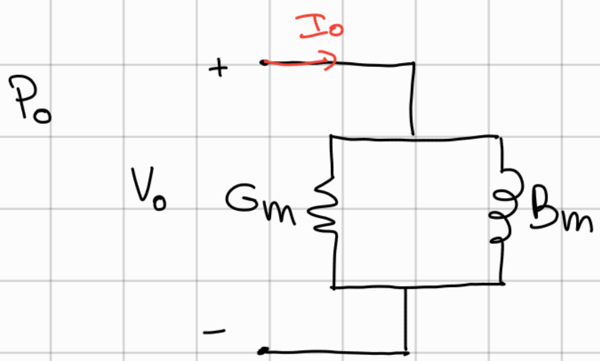
$$\phi_0 \approx \phi$$

$$N_1\dot{I}_1 + N_2\dot{I}_2 = N_1\dot{I}_{10}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{10} - \frac{N_2}{N_1}\dot{I}_2 = \dot{I}_{10} - \frac{1}{n}\dot{I}_2 = \dot{I}_1$$

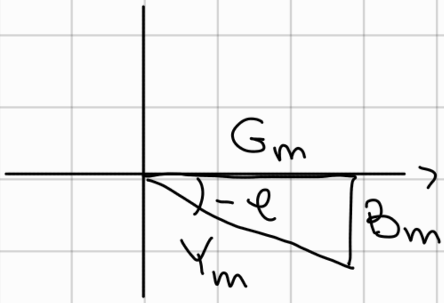


PROVA VUOTO



(1) $P = R_m I_{R_m}^2 = R_m\left(\frac{V_0}{R_m}\right)^2 = V_0^2 G_m \Rightarrow \boxed{G_m = \frac{P_0}{V_0^2}}$

② $\boxed{Y_m = \dfrac{I_o}{V_o}}$

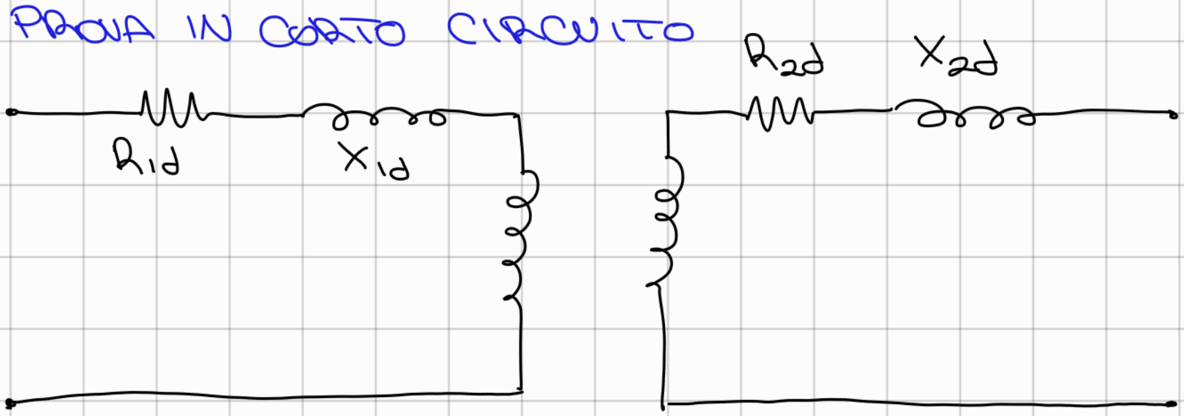


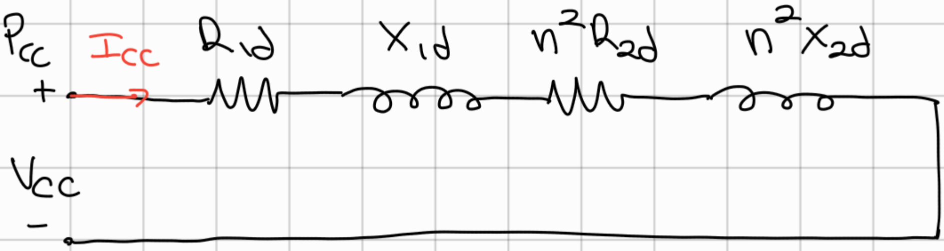
③ $B_m = -\sqrt{Y_m^2 - G_m^2}$

$$\bar{Z} = j\omega L = jX$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{j\omega L} = -\frac{j}{\omega L}$$

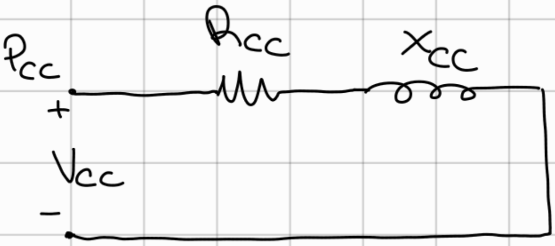
PROVA IN CORTO CIRCUITO





$R_{cc} = R_{1d} + n^2 R_{2d}$

$X_{cc} = X_{1d} + n^2 X_{2d}$

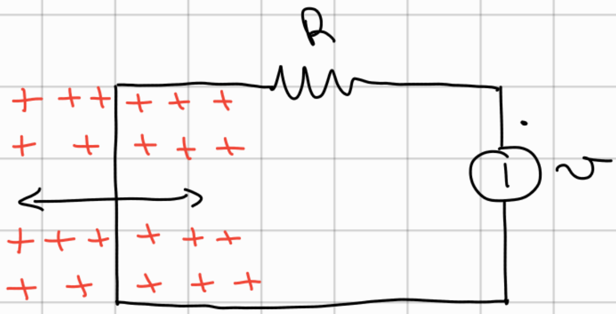


① $P_{cc} = R_{cc} I_{cc}^2 \Rightarrow \boxed{R_{cc} = P_{cc} / I_{cc}^2}$

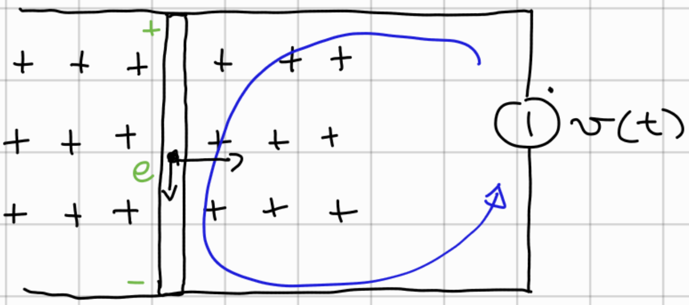
② $Z_{cc} = V_{cc} / I_{cc}$

③ $X_{cc} = \sqrt{Z_{cc}^2 - R_{cc}^2}$

MACCHINA RUDIMENTALE
(TRASDUTTORE A BOBINA MOBILE)



$$F = q v \wedge B = q u B$$



CASO BARRETTA FERMA:

$dl\, i = \frac{dq}{dt}$ $\qquad dl = u' dq$

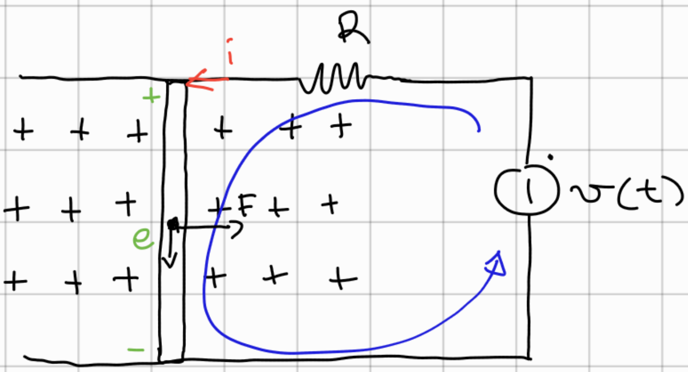
$Bl \cdot i = u' q B = F$ $\qquad \boxed{F = Bli}$ COMPORTAMENTO DA MOTORE

CASO BARRETTA IN MOTO:

$e = \frac{lF}{\cancel{q}} = \cancel{q} u B l = Blu$ $\qquad \boxed{e = Blu}$ COMPORTAMENTO DA GENERATORE

$P_{mecc} = F \cdot u = Bli \cdot u = Blui = P_{el}$

perché abbiamo ipotizzato un trasduttore IDEALE a bobina mobile



$i = \frac{v - e}{R}$
- $i > 0$, MOTORE
- $i = 0$, COMPORTAMENTO IDEALE ($R = 0 \Rightarrow v = e = Blu_0$)
- $i < 0$, GENERATORE

$$\begin{cases} v - R \cdot i = 0 & \text{EQ. ELETTRICA} \Rightarrow i = \frac{v-e}{R} \\ F_{mecc} - f_r = m \cdot \cancel{\frac{du}{dt}} = 0 & \text{EQ. MECCANICA} \end{cases}$$

$$Bli - f_r = 0 \Rightarrow Bl \cdot \frac{v-e}{R} - f_r = 0$$

$$\Rightarrow Bl \cdot \frac{Blu_0 - Blu}{R} - f_r = 0$$

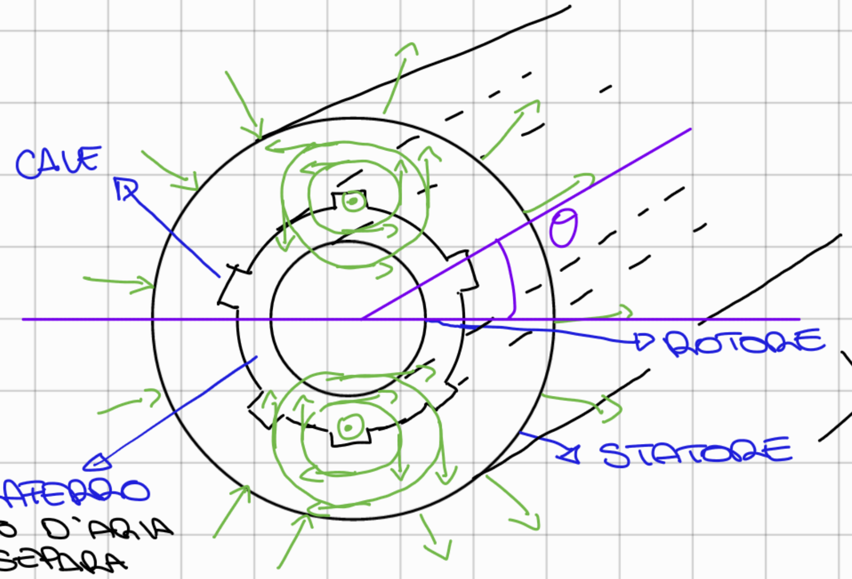
$$\Rightarrow \frac{B^2 l^2}{R}(u_0 - u) = f_r = u_0 - u = f_r \cdot \frac{R}{B^2 l^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = u_0 - f_r \cdot \frac{R}{B^2 l^2}}$$

$$\Omega = \Omega_0 - C_r \cdot \frac{R}{\phi^2}$$ nel caso delle macchine elettriche vere e proprie

MACCHINA ASINCRONA

Sfrutta un movimento rotatorio angolare e non lineare.



ENTRAMBI DI FORMA CILINDRICA E COASSIALI

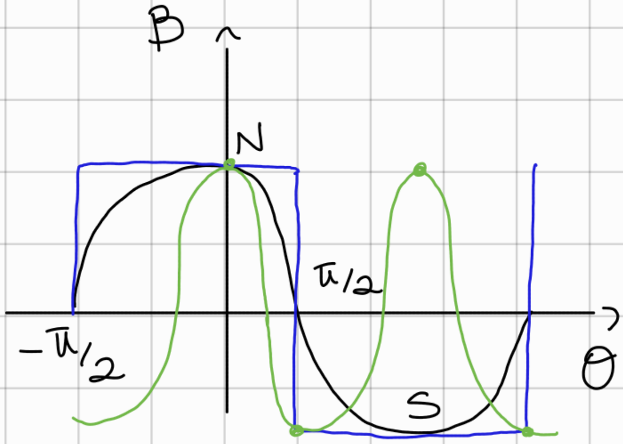
(*)

$i_1(t) = I_M \sin(\omega t)$

$B_1(t) = c_1 i_1(t) \cos(p\theta)$

$i_2(t) = I_M \sin(\omega t - 2/3\,\pi)$

$i_3(t) = I_M \sin(\omega t - 4/3\,\pi)$



p = paia polari (o coppie polari)

p = 1 ⇒ in ogni intervallo c'é 1 solo polo max o min

$p = 2 \Rightarrow$ in ogni intervallo assume una volta il valore max e una volta il min

(*) Ciascun avvolgimento darà luogo a un B:

$$B_2(t,\theta) = c_2 i_2(t)\cos(p\theta - 2/3\pi)$$
$$B_3(t,\theta) = c_3 i_3(t)\cos(p\theta - 4/3\pi)$$

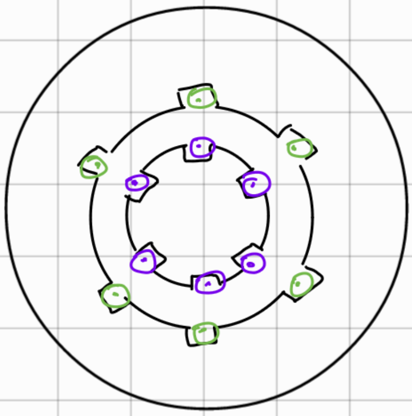
$$B(t,\theta) = B_1(t,\theta) + B_2(t,\theta) + B_3(t,\theta) =$$
$$= K I_M \cos(\omega t - p\theta)$$

CAMPO MAGNETICO ROTANTE

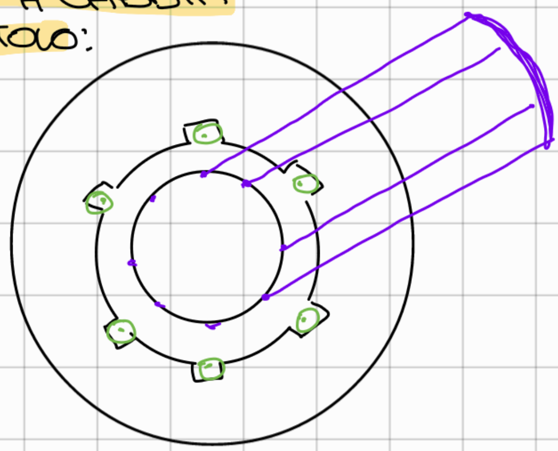
MOVIMENTO DELLA MACCHINA ASINCRONA:

1) Alimentiamo gli avvolg. di statore con una terna di correnti sfasate di 120 gradi elettrici e meccanici
(gli avvolg. di rotore non sono alimentati)

ROTORE AVVOLTO:



ROTORE A GABBIA DI SCOIATTOLO:



2) $e = -\frac{d\phi}{dt}$

3) FORZA DI LORENTZ

Ω_s: velocità del campo magnetico di statore

Ω_r: " di rotazione del rotore

Ω_{sr}: $\Omega_s - \Omega_r$

$$s \triangleq \frac{\Omega_s - \Omega_r}{\Omega_s} = \text{SCORRIMENTO}$$

→ CASO IDEALE: $\boxed{s = 0}$ ROTORE LIBERO

→ $\boxed{s = 1} \rightarrow \Omega_r = 0$ ROTORE BLOCCATO

$$B(t,\theta) = K \cdot I_M \cos(\omega t - p\theta)$$

$$\omega t_1 - p\theta_1 = 0 \qquad \omega t_2 - p\theta_2 = 0 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\omega t_2}{p}$$

$$\Omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{\omega t_2}{p} - \frac{\omega t_1}{p}}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{\omega}{p}(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{p}$$

$\Omega_s = \dfrac{\omega_1}{p}$ dove ω_1: pulsazione delle grandezze di statore

$\Omega_s - \Omega_r = \boxed{\dfrac{\omega_2}{\cancel{p}}}$ dove ω_2: puls. grandezze di rotore

$$= \Omega_s \cdot s = \boxed{s \cdot \frac{\omega_1}{\cancel{p}}} \Rightarrow \boxed{\omega_2 = s\omega_1}$$

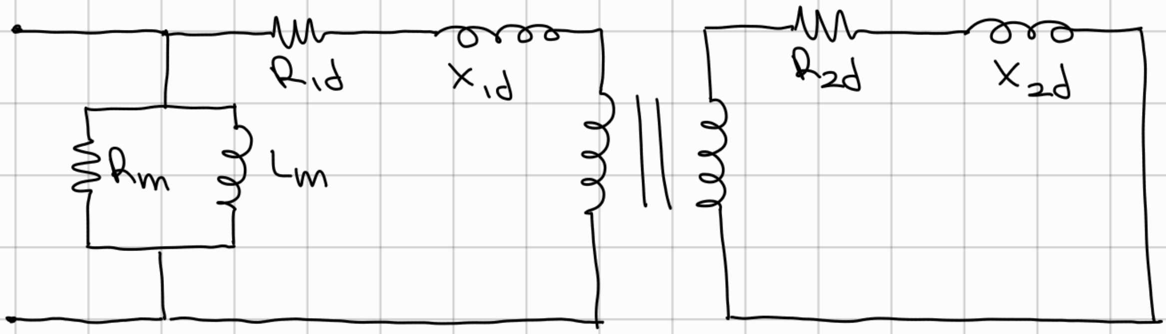
15/12/2022

$$\Omega_s = \frac{\omega_1}{p}$$

$$s = \frac{\Omega_s - \Omega_r}{\Omega_s} \Rightarrow s\Omega_s = \Omega_s - \Omega_r \Rightarrow \Omega_r = \Omega_s - s\Omega_s = $$
$$= (1-s)\Omega_s$$

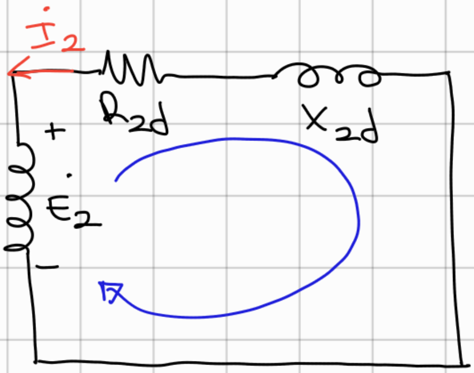
$$\frac{\omega_2}{\cancel{p}} = \Omega_s - \Omega_r = s\Omega_s = \frac{\omega_1}{\cancel{p}} \cdot s \Rightarrow \omega_2 = s\omega_1$$

CIRCUITO EQUIV. DELLA MACCHINA ASINCRONA



$$\omega_2 = s\omega_1$$

$\Omega_r = 0 \Rightarrow$ ROTORE BLOCCATO $\Rightarrow \omega_2 = \omega_1$



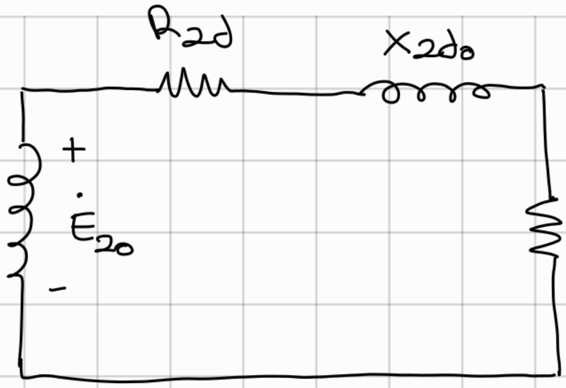
$$\dot{I}_2 = -\frac{\dot{E}_2}{R_{2d} + jX_{2d}}$$

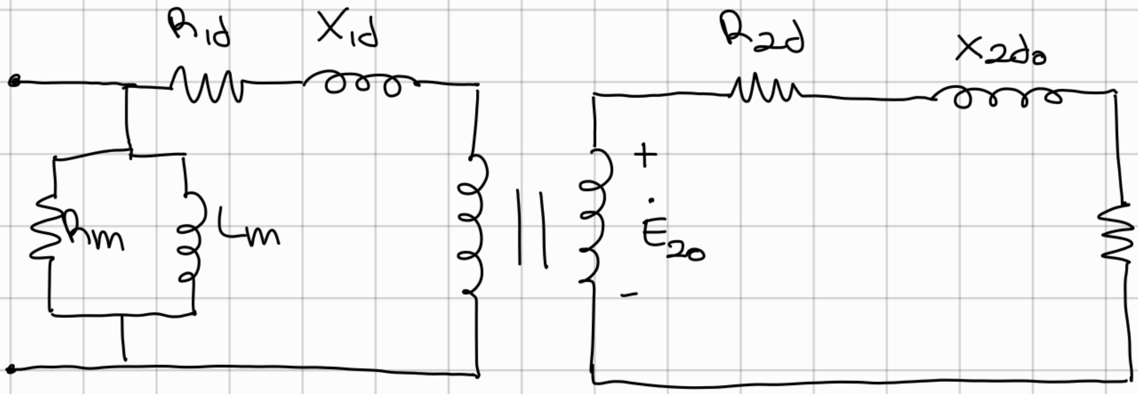
$$X_{2d} = \omega_2 L_{2d} = s\omega_1 L_{2d} = sX_{2d_0}$$

$$\dot{E}_2 = j\omega_2 N_2 \dot{\phi} = js\omega_1 N_2 \dot{\phi} = s\dot{E}_{2_0}$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{s\dot{E}_{20}}{R_{2d} + jsX_{2d_0}} = -\frac{\dot{E}_{20}}{\frac{R_{2d}}{s} + jX_{2d_0}} = -\frac{\dot{E}_{20}}{R_{2d} + jX_{2d_0} + R_c}$$

$$\frac{R_{2d}}{s} = R_{2d} + R_c \Rightarrow R_c = \frac{R_{2d}}{s} - R_{2d} = \frac{1-s}{s} R_{2d}$$





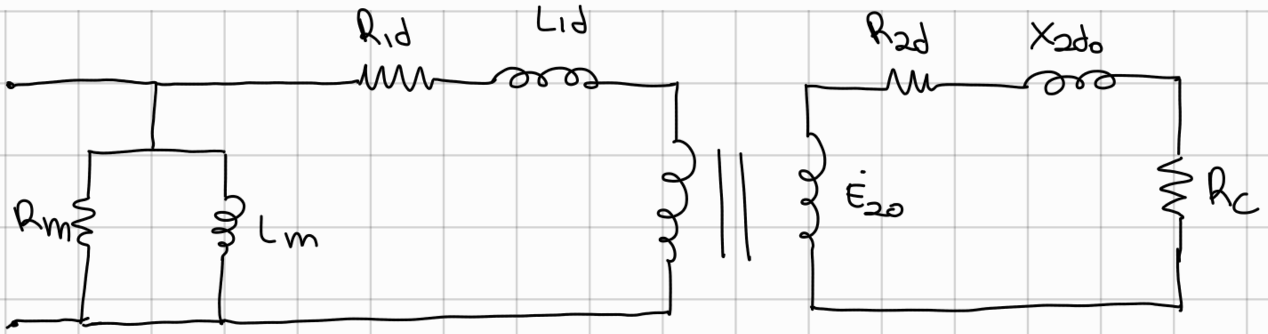
RAPPR. IL CARICO MECCANICO CHE VIENE COLLEGATO AL ROTORE

$S = 1 \Rightarrow$ ROTORE BLOCCATO $\Rightarrow \Omega_r = 0,\ R_C = 0$

$S = 0 \Rightarrow$ ROTORE LIBERO $\Rightarrow \Omega_r = \Omega_s,\ R_C \to \infty$

	S	$\Omega_r = (1-S)\Omega_s$	R_C	$P_m = R_C I_r^2$
GENERATORE	$S < 0$	$\Omega_r > \Omega_s$	$R_C < 0$	$P_m < 0$
ROTORE LIBERO	$S = 0$	$\Omega_r = \Omega_s$	$R_C \to \infty$	$P_m \to 0$
MOTORE	$0 < S < 1$	$\Omega_r < \Omega_s$	$R_C > 0$	$P_m > 0$
ROTORE BLOCCATO	$S = 1$	$\Omega_r = 0$	$R_C \to 0$	$P_m \to 0$
FRENO	$S > 1$	Ω_r e Ω_s HANNO SEGNO OPPOSTO	/	/

16/12/2022



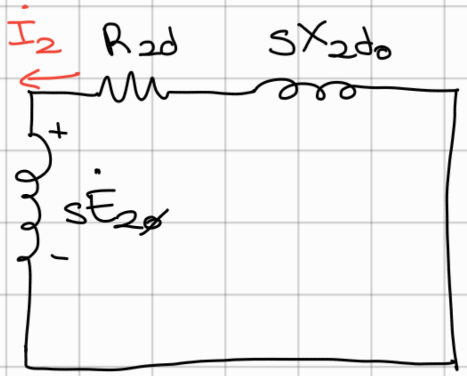
CIRC. EQUIV. DI ROTORE

ω_1 ω_2

$$R_c = \frac{1-s}{s} R_{2d}$$

$$X_{2d} = \omega_2 L_{2d} \frac{\omega_1}{\omega_1} = s\omega_1 L_{2d} = $$
$$= sX_{rdo}$$

$$P_m = R_c I_2^2 = \frac{1-s}{s} R_{2d} \cdot I_2^2$$



$$P_m = \frac{1-s}{s} R_{2d} \cdot \frac{s^2 E_{20}^2}{R_{2d}^2 + s^2 X_{2do}^2}$$

COPPIA TORCENTE

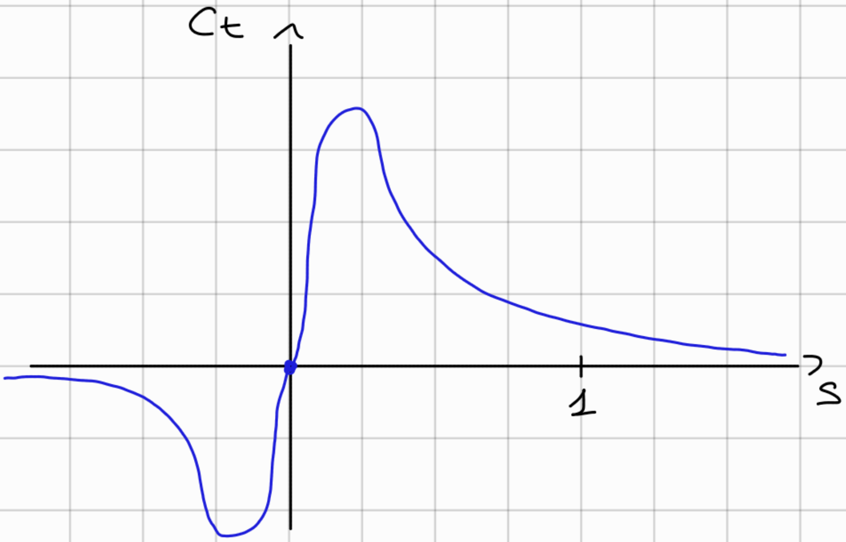
$$C_t = \frac{P_m}{\Omega_r} = \frac{(1-s)E_{20}^2 \cdot R_{2d} \cdot s}{(1-s)\Omega_s\left[R_{2d}^2 + s^2 X_{2do}^2\right]} =$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{s\dot{E}_{20}}{R_{2d} + jsX_{2do}}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_t = \frac{E_1^2}{n^2 \frac{\omega_1}{p}} \cdot \frac{R_{2d}}{\frac{R_{2d}^2}{s} + sX_{rdo}^2}}$$

$$|\dot{I}_2| = \frac{s\dot{E}_{20}}{\sqrt{R_{2d}^2 + s^2 X_{2do}^2}}$$

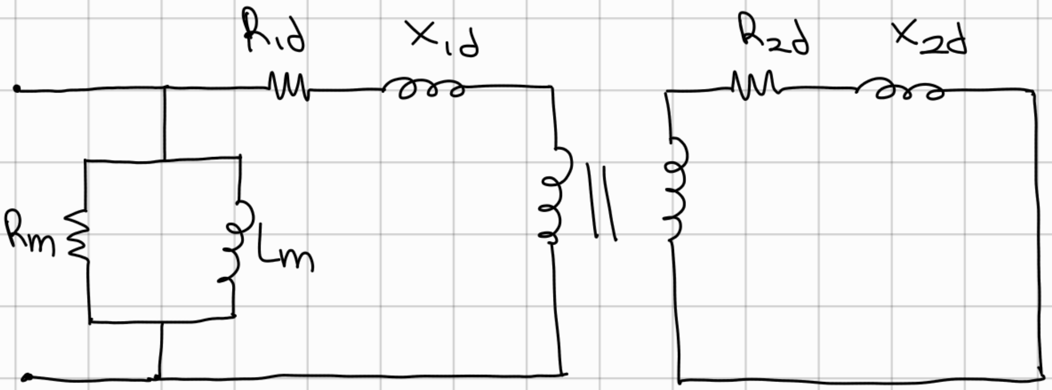
$$\frac{E_1}{E_{20}} = n \Rightarrow E_{20} = \frac{E_1}{n}$$



$$\eta = \frac{P_{utile}}{P_{ass}} \cdot 100 = \frac{R_c I_2^2}{R_c I_2^2 + R_{1d} I_1^2 + R_{2d} I_2^2 + \frac{V_1^2}{R_m} + P_{disp}} \cdot 100$$

$$\downarrow$$

$$P = I_R^2 \cdot R_m = \left(\frac{V_1}{R_m}\right)^2 \cdot R_m = \frac{V_1^2}{R_m}$$



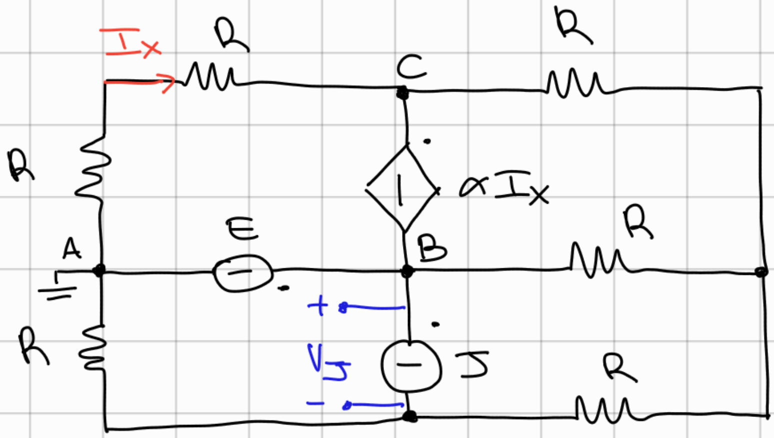
TRASFORMATORE — MACCHINA ASINCRONA

PROVA A VUOTO ⟷ PROVA A ROTORE LIBERO

PROVA IN C.C. ⟷ PROVA A ROTORE BLOCCATO $(\omega_1 = \omega_2)$

ESAME 1° APPELLO 2018

ESERCIZIO 1



$E = 50\,V$

$R = 10\,\Omega$

$J = 2A$

$\alpha = 10\,V/A$

$P_J = ?$

$$P_J = J \cdot V_J = J(V_B - V_E) = 2\left(50 - 14/3\right) = 2 \cdot \frac{136}{3} = 90.67\,W$$

$V_A = 0$

$V_B = E = 50\,V$

$V_C = E + \alpha I_x = 50 + \alpha I_x = 100/3 = 33.33\,V$

$$I_x = \frac{V_A - V_C}{2R} = \frac{50 + \alpha I_x}{2R} \Rightarrow 2RI_x + \alpha I_x = -50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_x = -\frac{50}{2R+\alpha} = -1.67\,A = -5/3$$

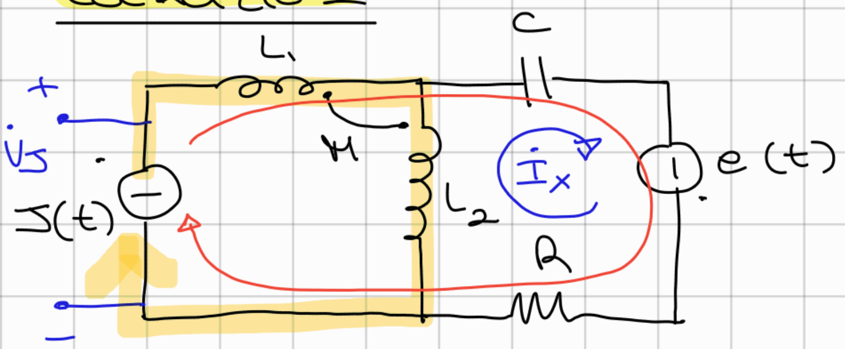
$$D:\ 0 = V_D\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) - V_C\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{V_B}{R} - \frac{V_E}{R}$$

$$E:\ -J = V_E\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) - \frac{V_D}{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D:\ 3V_D = V_B + V_C + V_E = 50 + \frac{100}{3} + V_E \\ E:\ -JR = 2V_E - V_D \Rightarrow -20 = 2V_E - V_D \Rightarrow V_D = 2V_E + 20 \end{cases}$$

$$6V_E + 60 = 50 + \frac{100}{3} + V_E \Rightarrow 5V_E = \frac{100}{3} - 10 \Rightarrow V_E = \frac{14}{3}$$

ESERCIZIO 2



$\omega = 100$ rad/s

$e(t) = 20\sqrt{2}\sin(100t)$

$\Rightarrow \dot E = 20$

$J(t) = 3\sqrt{2}\sin(100t)$

$\Rightarrow \dot J = 3$

$R = 10\,\Omega$

$C = 100\,\mu F$

$L_1 = M = 10\,mH$

$L_2 = 20\,mH$

Calcolare potenza attiva P e reattiva Q

$$-\dot E + \left(R + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot I_x + j\omega M \dot J + \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot J = 0$$

$$\dot I_x = \frac{\dot E - \left(j\omega M + R + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot J}{R + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}} =$$

$$= -3.0097 + 0.2051j$$

$$\bar S_J = \dot V_J \dot J^*$$

$$\dot V_J = j\omega L_1 \dot J + j\omega M \dot I_x - j\omega L_2 \dot I_x - j\omega M \dot J =$$

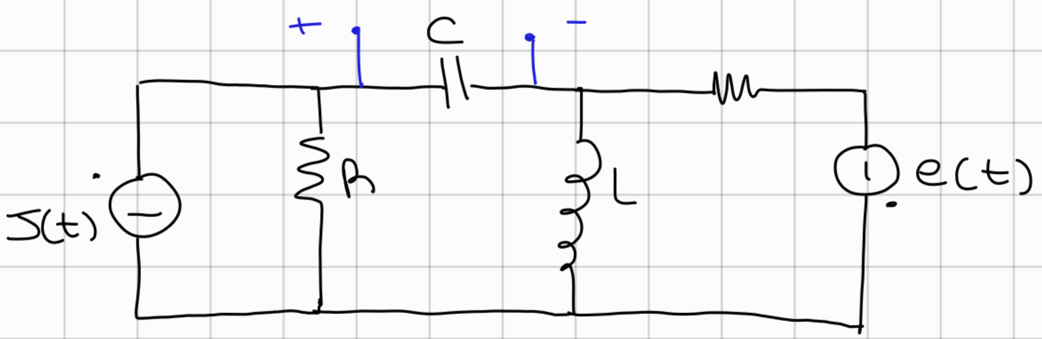
$$= 0.2051 + 3.0097j$$

$$\bar S_J = 0.6152 + 9.0291j$$

$P = 615$ mW

$Q = 9.03$ VAR

ESERCIZIO 3

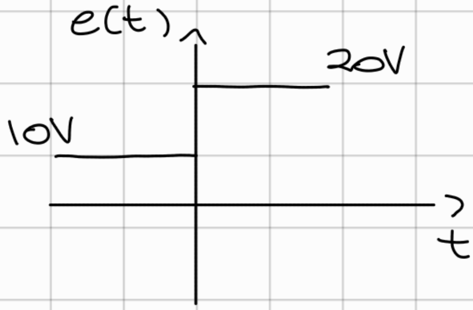


$R = 10\,\Omega$

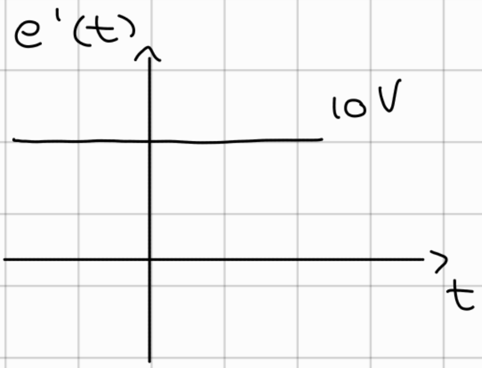
$L = 10\,mH$

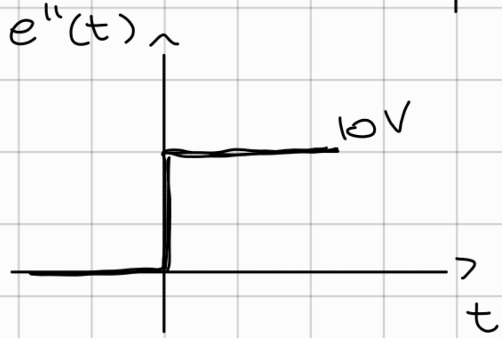
$C = 10\,\mu F$

$J = 2A$

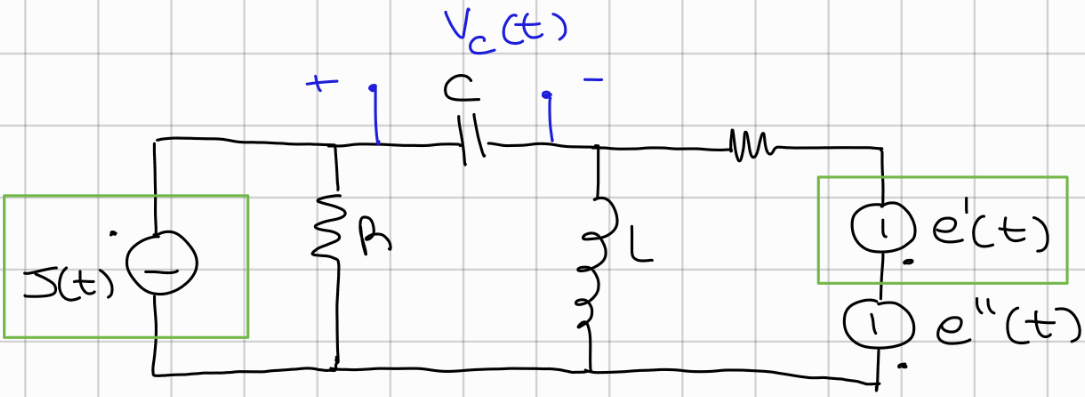


Calcolare $V_c(t)$ per tutto l'asse dei tempi.

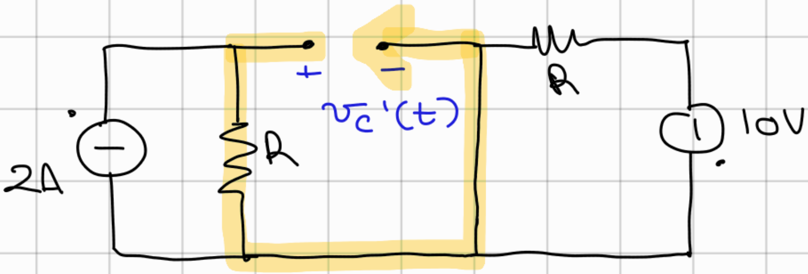




PER SOVRAPP. DEGLI EFFETTI (COSÌ NON CI SONO CONDIZ. INIZIALI)

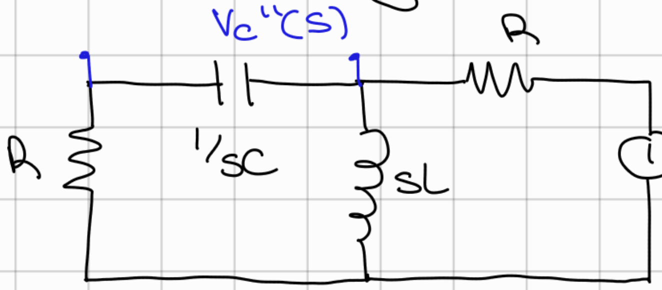


Facciamo agire i gen. in continua

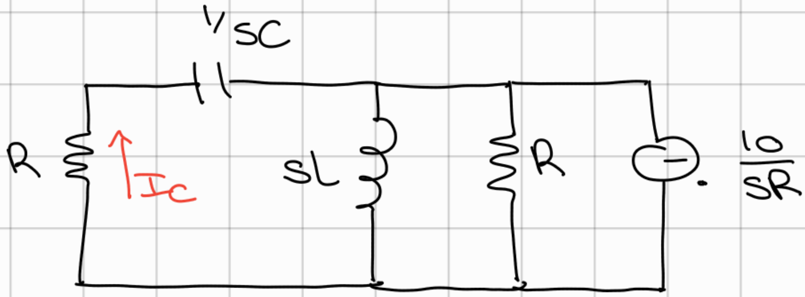


$v_c'(t) = 2R = 2 \cdot 10 = 20\,\Omega$ (vale per tutti i tempi)

Facciamo agire solo $e''(t)$:



TRASFORMIAMOLO NELL' EQUIV. NORTON



$$I_C(S) = \frac{10}{sR} \cdot \frac{\frac{1}{R + 1/sC}}{\frac{1}{R+\frac{1}{sC}} + \frac{1}{sL} + \frac{1}{R}}$$

$$V_C''(S) = \frac{10}{s^2RC} \cdot \frac{\frac{sC}{RCs+1}}{\frac{sC}{RCs+1} + \frac{1}{sL} + \frac{1}{R}} = \frac{10}{sR} \cdot \frac{RsL}{s^2RLC + R(RCs+1) + sL(RCs+1)}$$

$$= \frac{10L}{2RLCs^2 + (R^2C+L)s + R} = \frac{0.1}{2 \cdot 10^{-6} s^2 + 0.011s + 10} =$$

$$= \frac{0.1}{2 \cdot 10^{-6} s^2 + 0.011s + 10} = \frac{0.1}{2 \cdot 10^{-6}(s-p_1)(s-p_2)}$$

$$v_C''(t) = (-15.6174e^{-4350.8t} + 15.6174e^{-1149.2t})u(t)$$

$$v_C(t) = 20 + (-15.6174e^{-4350.8t} + 15.6174e^{-1149.2t})u(t)$$