Scritto / Orale FdA - $23/06/2025$

> Ogni esercizio rappresenta la traccia dello scritto (ognuno ha una traccia diversa allo scritto con un esercizio che può presentare più richieste).

> Laddove siano state condivise dagli studenti sono presenti anche le domande dell'orale (anche in questo caso si tratta di esercizi scritti o domande orali)

> Nota bene: molte delle tracce sono simili o uguali a quelle uscite nel primo appello. La parte "variabile" dell'esame comprende le domande dell'orale o le tracce successive alla prima

1 - Risposta libera e forzata

Esercizio 1.1

1. Calcola la **risposta libera** della funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+3}{s(s+5)^2}$$

   con condizioni iniziali:

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = -1, \quad \ddot{y}(0) = -1$$

2. Il sistema è **BIBO-stabile**? Perché?

> **Domande Orale**
>
> - Tracciare il diagramma di Bode della precedente f.d.t.

Variante 1.1.1

Stesso esercizio ma con funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s+9}{s(s+5)^2}$$

e con condizioni iniziali:

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = -2, \quad \ddot{y}(0) = -1$$

> **Domande Orale**
>
> - Progettare un controllore con margine di fase $\geq 50^\circ$ e tempo di assestamento < 3 secondi.

Esercizio 1.2

Calcola la risposta forzata al gradino di:

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+5)}{s(s+2)^2}$$

2 - Progettazione del controllore

Esercizio 2.1

Un impianto ha f.d.t.:

$$G(s) = 50\frac{s-20}{(s+10)(s+5)^2}$$

progettare per tale impianto un regolatore R(s) tale per cui il sistema a ciclo chiuso

> $$\begin{array}{ccccccccc} r(s) & \xrightarrow{+} & \bigcirc & \longrightarrow & \boxed{R(s)} & \longrightarrow & \boxed{G(s)} & \longrightarrow & y(s) \\ & & {}^{-}\big\uparrow & & & & & & \big\downarrow \\ & & \bigcirc & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \bigcirc \end{array}$$

soddisfi le seguenti specifiche:

- Errore nullo a regime in risposta al gradino
- Reiezione dei disturbi di carico di almeno 20 dB per $\omega \leq 0.1$ rad/s
- Reiezione dei disturbi di misura di almeno 20 dB per $\omega \geq 50$ rad/s
- Margine di fase di almeno 45°

Esercizio 2.2

Un impianto ha f.d.t.:

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s^2+s+25)}$$

progettare per tale impianto un regolatore R(s) tale per cui il sistema a ciclo chiuso

> $$\begin{array}{ccccccccc} r(s) & \xrightarrow{+} & \bigcirc & \longrightarrow & \boxed{R(s)} & \longrightarrow & \boxed{G(s)} & \longrightarrow & y(s) \\ & & {}^{-}\big\uparrow & & & & & & \big\downarrow \\ & & \bigcirc & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \bigcirc \end{array}$$

soddisfi le seguenti specifiche:

- Errore in risposta al gradino $< 10\%$
- Reiezione dei disturbi di carico di almeno 20 dB per $\omega \leq 0.2$ rad/s
- Reiezione dei disturbi di misura di almeno 20 dB per $\omega \geq 30$ rad/s
- Margine di fase di almeno 60°

> **Domande Orale**
>
> Ho avuto l'assistente all'orale e mi ha fatto commentare il ragionamento delle scelte di progetto (fortunatamente erano fatte bene), mi ha chiesto la definizione di BIBO stabilità e come si trova con i poli e poi mi ha fatto fare un esercizio con una matrice da studiarne osservabilità e raggiungibilità.

3 - Bode e Nyquist

> Nessuna traccia condivisa per questa tipologia

4 - Modello in variabili di stato

Esercizio 4.1

Si consideri il sistema descritto dalle equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

1. Si discuta la raggiungibilità, l'osservabilità e la stabilità interna del sistema
2. Sulla base della discussione precedente, si determini la funzione di trasferimento del sistema
3. Il sistema è BIBO stabile?

Esercizio 4.2

Si consideri il sistema descritto dalle equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

1. Si discuta la raggiungibilità, l'osservabilità e la stabilità interna del sistema
2. Sulla base della discussione precedente, si determini la funzione di trasferimento del sistema
3. Il sistema è BIBO stabile?

Esame svolto

1. Calcola la **risposta libera** della funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+7}{s(s+3)^2}$$

   con condizioni iniziali:

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = -1, \quad \ddot{y}(0) = 1$$

2. Il sistema è **BIBO-stabile**? Perché?

L'esame riportato di seguito (*visualizzabile solo nella versione pdf di questo file*) è stato fatto da me e comprendeva tre tracce più un'orale di 15 minuti. Ecco una breve spiegazione per poter replicare:

- La prima traccia (foto 1) è il classico esercizio sulla risposta libera
- La seconda traccia chiedeva di tracciare luogo delle radici e diagramma di Nyquist della f.d.t. Ho svolto questa traccia, disegnando prima il luogo delle radici e poi ricavando Nyquist dal diagramma di Bode
- La terza traccia chiedeva di progettare un controllore che portasse la banda passante sopra i 3 rad/s, mantenendo un margine di fase di almeno 45°. Questa richiesta non è molto chiara nello scritto in quanto il tempo era poco e il prof chiedeva un'idea di soluzione. Ho proposto un controllore della forma $C(s) = K\frac{(\frac{s}{3}+1)^2}{(\frac{s}{10}+1)^2}$ (avevo invertito per sbaglio n e d) e insieme al prof (Munafò) abbiamo visto all'orale che tracciando Bode funzionava perfettamente.
- All'orale oltre a una discussione sullo svolgimento dello scritto e della progettazione fatta, mi sono state fatte alcune domande sul luogo delle radici e su Nyquist, e mi è stata chiesta quale era la relazione tra le regioni delineate da Nyquist e le soluzioni del luogo delle radici.

L'unico errore fatto allo scritto (che mi potevo facilmente evitare) era un'errore sul luogo delle radici per K positivo, sul tracciamento dei rami che vanno a infinito. Per questo errore il prof mi ha tolto 3 punti.

Traccia 2: Si consideri un sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s+7}{s(s+3)^2} \rightarrow \frac{7\left(\frac{s}{7}+1\right)}{s \cdot 9\left(\frac{s}{3}+1\right)^2}$$

1. Si determini la risposta libera del sistema con condizioni iniziali: $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = -1$; $\ddot{y}(0) = 1$
2. Il sistema è BIBO stabile? Perché?

GIUSEPPE VAGLICA - 23/06/2025 - MAiR:

27

$$\text{f.d.t}: G(s) = \frac{s+7}{s(s+3)^2} \rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+7}{s(s+3)^2}$$

Per avere la risposta libera dobbiamo considerare l'uscita rispetto allo stato iniziale e annullare gli effetti dovuti all'ingresso:

$$Y(s)\left(s(s+3)^2\right) = U(s)(s+7)$$

$$Y(s)\left(s^3+6s^2+9s\right) = U(s)(s+7)$$

Riporto nel dominio temporale con l'antitrasformata di Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\{ \,''\, \} = \dddot{y}(t) + 6\ddot{y}(t) + 9\dot{y}(t) = \dot{u}(t) + 7u(t)$$

Abbiamo ricavato la differenziale ingresso-uscita, adesso poniamo $u(t)$ (e le sue derivate) pari a 0 e trasformiamo nuovamente nel dominio di Laplace per includere le condizioni iniziali

$$\mathcal{L}\{y^{(3)}\} + \mathcal{L}\{6y^{(2)}\} + \mathcal{L}\{9y^{(1)}\cancel{(t)}\} = 0$$

$$\rightarrow s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)\,\} + 6s^2Y(s) - 6sy(0)$$
$$- 6y'(0)\,\} + 9sY(s) - 9y(0) = 0$$

Applico le condizioni iniziali: $y(0)=0$, $y'(0)=-1$, $y''(0)=2$

$$\rightarrow s^3Y(s) - 0 + s - 2\,\} + 6s^2Y(s) - 0 + 6\,\} + 9sY(s) - 0 = 0$$

$$\rightarrow Y(s)\left(s^3+6s^2+9s\right) = -(s+5)$$

$$\rightarrow Y_e(s) = \frac{-s-5}{s(s+3)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{(s+3)^2}$$

Trovo A, B, e C con il teorema dei residui (caso dei poli multipli)

$$A = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{-s-5}{(s+3)^2} = -\frac{5}{9}$$

$$\frac{-\cancel{s}+\cancel{s}+5}{s^2}$$

$$B = \lim_{s\to -3} \frac{d(s+3)^2Y(s)}{ds} = \lim_{s\to -3} \frac{d}{ds}\left(\frac{-s-5}{s}\right) = \frac{5}{9}$$

$$C = \lim_{s\to -3} (s+3)^2Y(s) = \lim_{s\to -3} \frac{-s-5}{s} = \frac{2}{3}$$

$$Y_l(s) = \frac{-5/9}{s} + \frac{5/9}{s+3} + \frac{2/3}{(s+3)^2}$$

Antitrasformiamo un'ultima volta per ottenere la risposta libera:

$$y_l(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_l(s)\} = -\frac{5}{9}e^{0t} + \frac{5}{9}e^{-3t} + \frac{2}{3}te^{-3t}$$

$$\Rightarrow y_l(t) = -\frac{5}{9} + \frac{5}{9}e^{-3t} + \frac{2}{3}t\,e^{-3t}$$

Questa è la risposta libera del sistema, ovvero quella che tiene conto solo dello stato iniziale del sistema e dipende da un ingresso nullo.

- Discussione sulla stabilità BIBO

Per stabilità BIBO (bounded input, bounded output) si intende la capacità del sistema di avere una risposta limitata (ovvero che tende a 0) a un ingresso limitato.

Nel nostro caso il sistema NON È BIBO STABILE in quanto tutti i poli della f.d.t devono avere parte reale strettamente negativa e nella nostra f.d.t c'è un polo nell'origine che infatti genera una componente costante nella risposta (non è legata a un'esponenziale decrescente)

In generale, non c'è stabilità BIBO se ci sono poli nell'origine. Invece c'è se tutte le componenti sono a parte reale ~~strettamente~~ negativa.

DISEGNARE LUOGO DELLE RADICI
e DIAGRAMMA DI NYQUIST.

→ Luogo delle radici

Per K > 0 (luogo diretto)

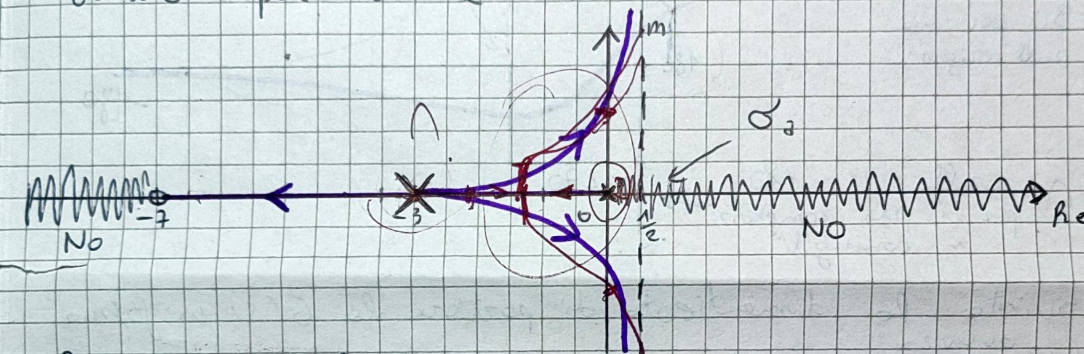
1 polo in 0, 2 poli in −3, 1 zero in −7

Centro degli asintoti:

$$\sigma_a = \frac{1}{3-1}\left(\sum p_i - \sum z_i\right) = \frac{-6+7}{2} = \frac{1}{2}$$

Ci sono due asintoti con angoli $\left(\frac{2\cdot 0+1}{3-1}\right)\pi$ e $\left(\frac{2\cdot 1+1}{3-1}\right)\pi$

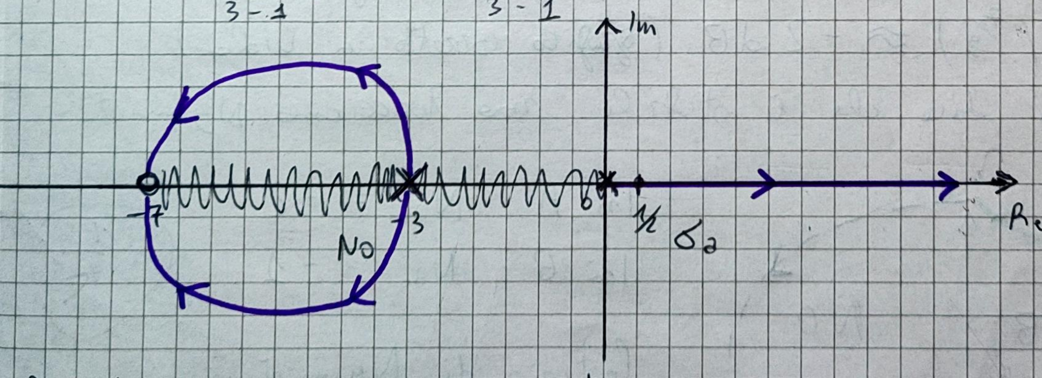
ovvero per 90° e 270°



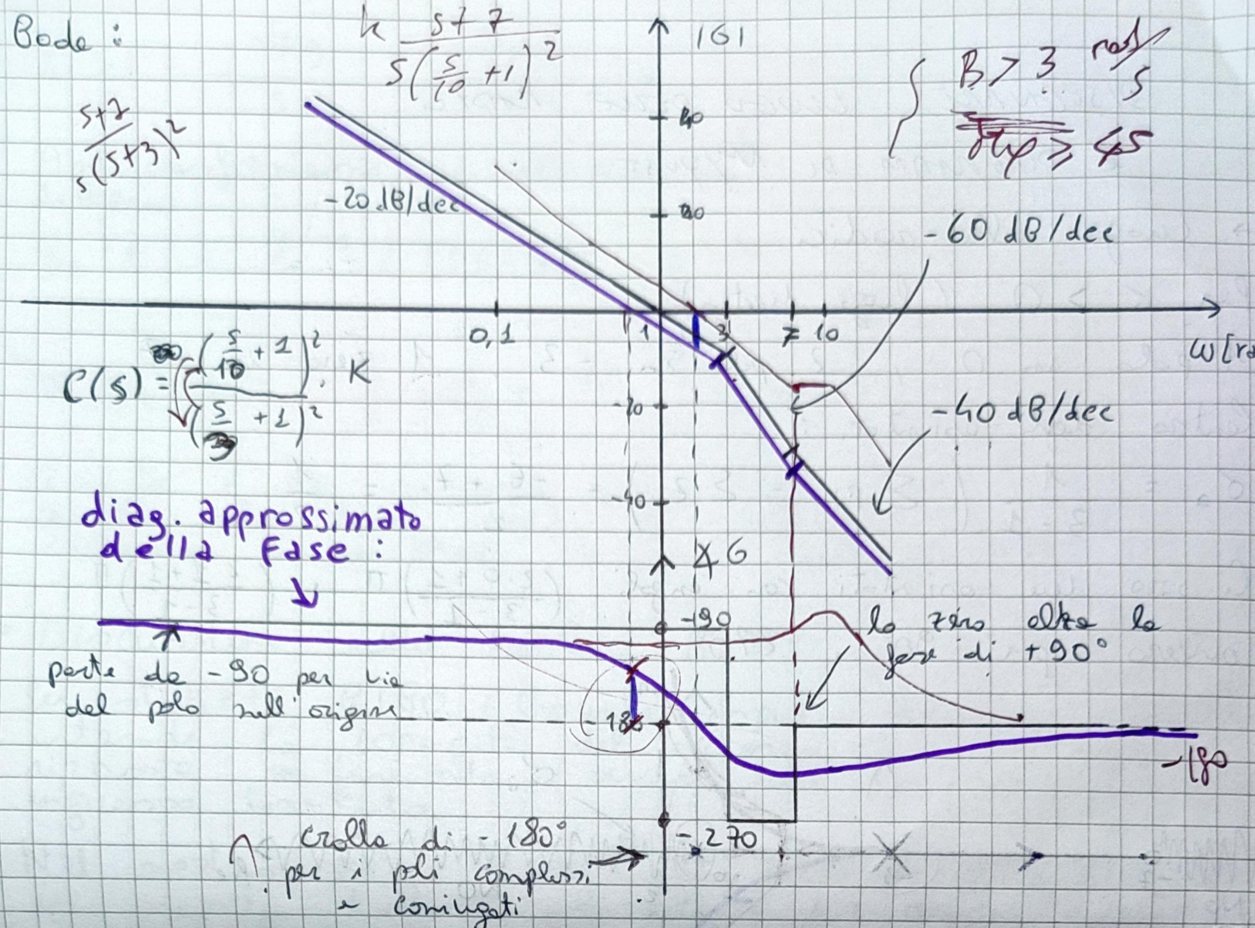
Per K < 0 (luogo inverso)

Singolarità e centro degli asintoti invariati

$$\theta_{1,2} = \frac{2\cdot 0}{3-1}\pi \text{ e } \frac{2\cdot 1}{3-1}\pi \rightarrow \theta_1 = 0° \text{ e } \theta_2 = 180°$$



Per tracciare Nyquist mi traccio prima Bode



Per una svista ho dimenticato di portare la $G(s)$ in forma di Bode, ovvero:

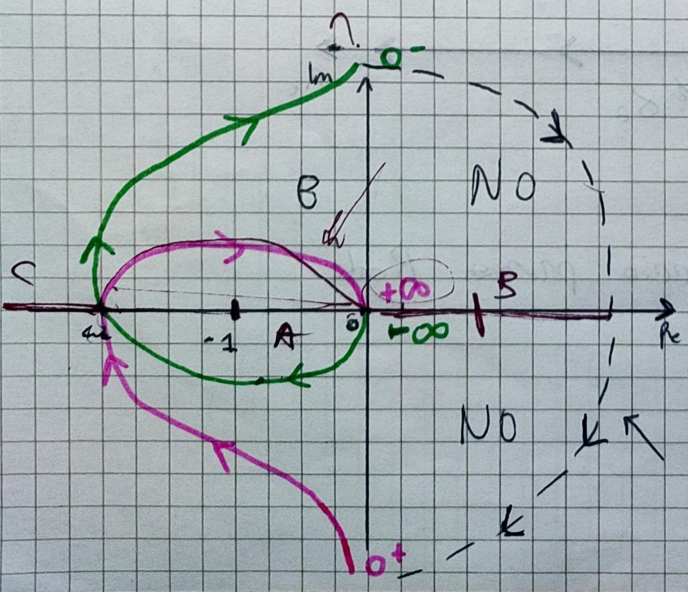
$G(s) = \frac{7}{9} \cdot \frac{(s/7 + 1)}{s\left(\frac{s}{3}+1\right)^2}$ Ma poco male:

- la fase rimane invariata ($K > 0$)

→ il diagramma del modulo invece viene "shiftato" di

$20 \cdot \log_{10}(7/9) \approx -2$ dB (grafico corretto in viola)

Già Bode ci dice che è stabile, ma tracciamo Nyquist:



In A: $N_{a_0} = -2$

In B: $N_{a_0} = -1$

$-\frac{1}{K}$

Criterio di Nyquist:

$N_{a_0} = P^{(+)}$

1 richiusura a ∞:

mezza circonferenza perché è un sistema di tipo 1