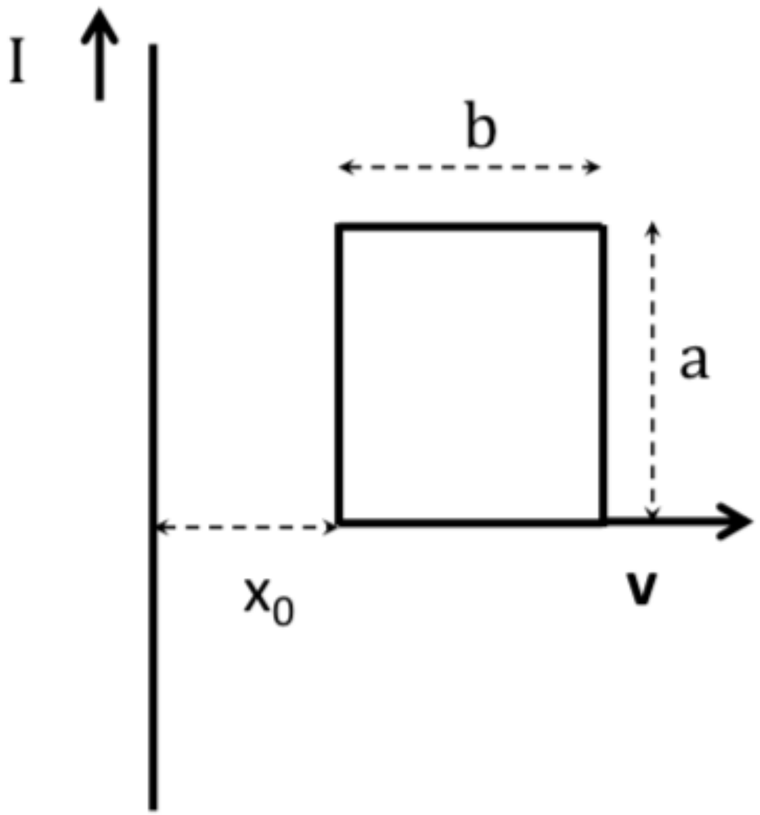
Es. del 29/5/ 2020

Esercizi di esame da
https://www.pi.infn.it/~ciocci/

Esame di Fisica Generale del 1/2/2019



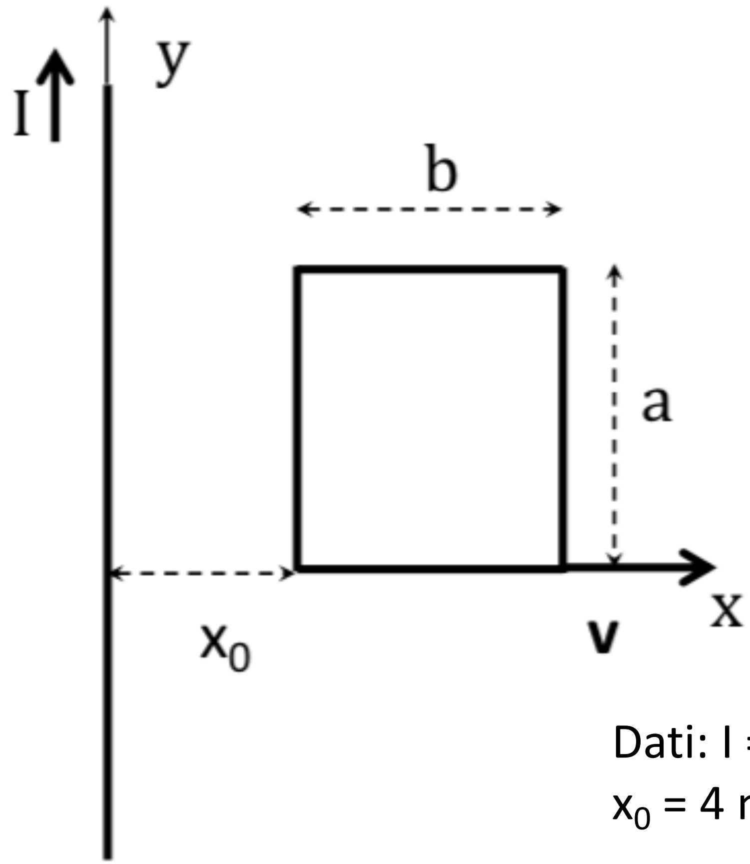
Un filo conduttore ideale infinitamente lungo, è percorso da una corrente costante I nel verso indicato in figura. Un avvolgimento piatto di N spire di forma rettangolare con lati a e b indeformabile, giace nello stesso piano del filo, a distanza x_0, come in figura. La resistenza dell'avvolgimento di spire è R. Ad un certo istante (t = 0) l'avvolgimento di spire viene messo in moto con velocità costante v a partire dalla posizione x_0 nella direzione indicata in figura. Si trascuri il coefficiente di autoinduzione dell'avvolgimento di spire.

1. Calcolare la corrente che circola nell'avvolgimento di spire, $I_s(t')$, all'istante t = t', e determinarne il verso (orario o antiorario) motivando la risposta. $I_s(t')$ = ...

2. Determinare la forza istantanea $\vec{F}$(t) all'istante t , che deve essere applicata all'avvolgimento per mantenerlo in moto con velocità costante. $\vec{F}$(t) = ...

3. Determinare la potenza dissipata nell'avvolgimento al tempo t = t', P(t'). P(t') = ...

Dati: I = 450 A, N = 10000, a = 8 cm, b = 5 cm, R = 1 Ω, v = 0.5 m/s, x_0 = 4 mm, t' = 2 s, μ_0 $=4\pi \times 10^{-7}$ T/m $=1.26 \times 10^{-6}$ T/m.



Filo conduttore ideale infinitamente lungo percorso da I

Avvolgimento piatto di forma rettangolare nel piano del filo a distanza x_0 dal filo

N spire

lati a e b

R resistenza dell'avvolgimento di spire

(t = 0) l'avvolgimento di spire viene messo in moto con velocità costante v.

Si trascuri il coefficiente di autoinduzione dell'avvolgimento di spire.

Dati: I = 450 A, N = 10000, a = 8 cm, b = 5 cm, R = 1 Ω, v = 0.5 m/s, x_0 = 4 mm, t' = 2 s, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T/m $= 1.26 \times 10^{-6}$ T/m.

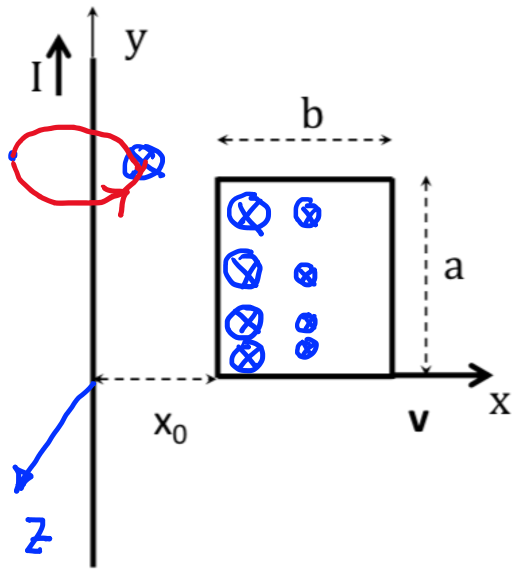
1. Calcolare la corrente che circola nell'avvolgimento di spire, $I_s(t')$, all'istante t = t', e determinarne il verso (orario o antiorario) motivando la risposta. $I_s(t')$ = ...

1 Il campo magnetico generato dal filo indefinito non è uniforme nel piano della spira

② l'avvolgimento è in moto con velocità costante
→ il C.M varia di intensità e di conseguenza il
flusso del C.M attraverso il circuito varia in funzione del
tempo generando una f_{em} indotta nell'avvolgimento
e quindi una corrente indotta.

③ Per determinare il flusso dobbiamo determinare
$\vec{B}$ e $d\vec{s}$ tenendo conto della ① e ②

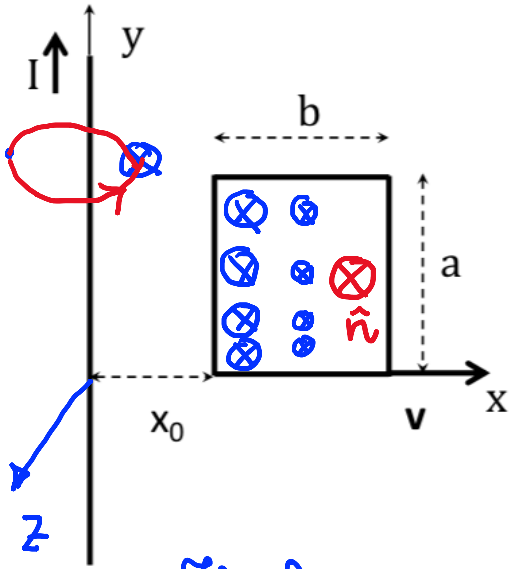
Campo magnetico



Il filo percorso da corrente genera un C.M le cui linee di campo sono circonferenze percorse in senso antiorario con centro sull'asse y e parallele al piano x,z.

Dal teorema di Ampere

$$B(x') = \frac{\mu_0 I}{2\pi x'}$$



$$B(x') = \frac{\mu_0 I}{2\pi x'}$$

Possiamo calcolare il flusso infinitesimo $d\phi_B$ attraverso un rettangolo infinitesimo dell'avvolgimento di lati a e dx'

$$d\phi_B = N\, B(x')\, a\, dx' = d\phi_B(t)$$

Il flusso ϕ_B verrà a dipendere dal tempo in quanto il circuito è in moto

$$\phi_B(t) = \int_x^{x+b} N\, B(x')\, a\, dx' = \frac{N \mu_0 I a}{2\pi} \int_x^{x+b} \frac{dx'}{x'} = \frac{N \mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{x+b}{x}\right)$$

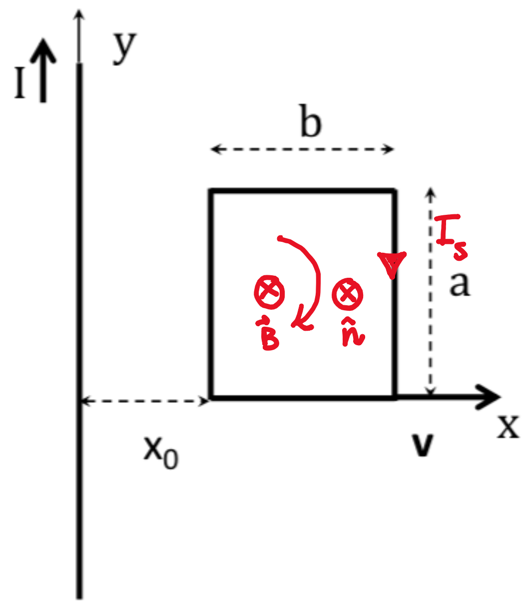
con $x = x(t) = x_0 + v t$

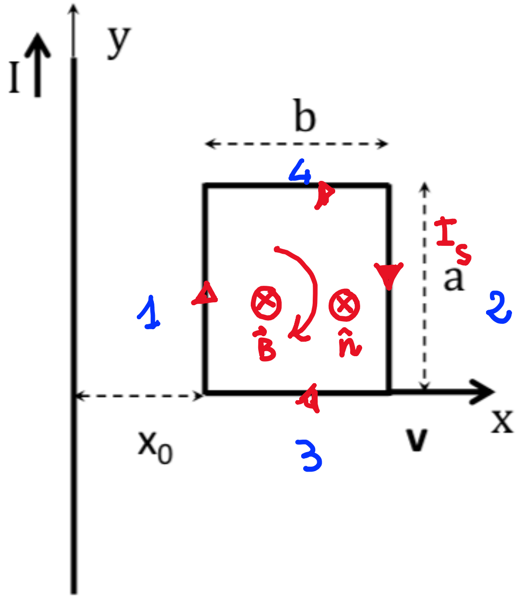
$$\text{per cui } f_{em}^{\text{indotta}} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{N \mu_0 I a}{2\pi} \frac{x}{x+b} \underbrace{\frac{d}{dt}\left[(x+b)\, x^{-1}\right]}_{\cancel{\frac{x}{x}} \frac{\dot{x}}{x} - \frac{(x+b)\dot{x}}{x^2}} = -\frac{N \mu_0 I a}{2\pi} \frac{x}{x+b} \left(-\frac{b v}{x^2}\right)$$

$$f_{em}^{indotta} = -\frac{N\mu_0 I a}{2\pi}\,\frac{x}{x+b}\left(-\frac{bv}{x^2}\right) = \frac{N\mu_0 I a}{(x+b)\,x}\cdot\frac{bv}{2\pi} \qquad \text{con } x = x(t) = x_0 + vt$$

$$\frac{f_{em}^{indotta}}{R} = I_s(t) = \frac{N\mu_0 I a}{2\pi R}\,\frac{bv}{(x_0+vt+b)(x_0+vt)} = 1.7\ mA$$

Poiché la corrente indotta è positiva essa circola in verso orario.



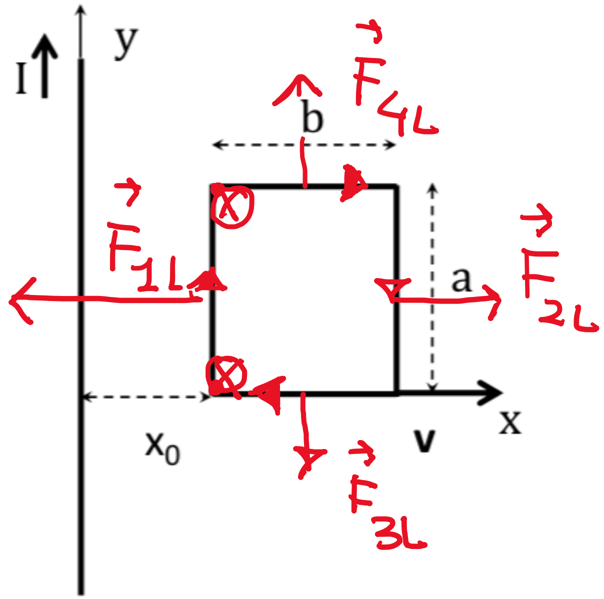


2. Determinare la forza istantanea $\vec{F}$(t) all'istante t , che deve essere applicata all'avvolgimento per mantenerlo in moto con velocità costante. $\vec{F}$(t) = ...

Su ogni lato dell'avvolgimento agisce la forza di Lorentz a causa della corrente $I_s(t)$ e del campo $\vec{B}(x(t)) = -B(x(t))\hat{z}$

La forza totale agente sulla spira è data da: $\vec{F}_L = \vec{F}_{1L} + \vec{F}_{2L} + \vec{F}_{3L} + \vec{F}_{4L} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ in quanto i contributi dovuti a $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$ si elidono reciprocamente ($\forall x$ $\vec{B}$ è lo stesso ma la corrente cambia verso)

$$\vec{F}_L = N I_s(t)\left(-a B(x)\hat{x} + a B(x+b)\hat{x}\right)$$



affinché l'avvolgimento abbia $v = \text{cost}$ $\quad \vec{F}_{TOT} = \vec{F}_L + \vec{F}_{ext} = \emptyset$

$$\vec{F}_L = N I_s(t)\left(-a B(x)\hat{x} + a B(x+b)\hat{x}\right)$$

affinché l'avvolgimento abbia $\vec{v} = \text{cost}\,\hat{x}$ $\quad \vec{F}_{TOT} = \vec{F}_L + \vec{F}_{ext} = \emptyset$ $\Rightarrow$ $\vec{F}_{ext} = \vec{F}(t) = -\vec{F}_L$

$$\vec{F}(t) = N I_s(t)\, a \left(B(x) - B(x+b)\right)\hat{x} =$$

$$N I_s(t)\, a \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi(x_0+vt)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(x_0+vt+b)}\right)\hat{x} =$$

$$\frac{N I_s(t)\, a b\, \mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{(x_0+vt)(x_0+vt+b)}\right)\hat{x} \qquad \text{per cui}$$

per $t = t'$ $\quad \vec{F}(t') = (5.8\times 10^{-6}, 0, 0)\hat{x}$ N

3. Determinare la potenza dissipata nell'avvolgimento al tempo t = t', P(t'). P(t') = ...

La potenza dissipata nell'avvolgimento è

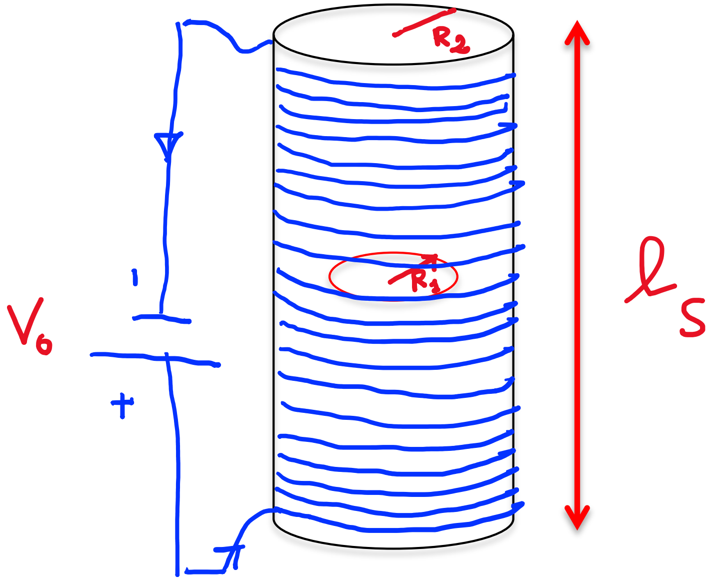
pari a
$$P(t') = I_S^2(t')R = 2.9 \times 10^{-6}\ W$$

ma anche $P(t') = \vec{F}(t') \cdot \vec{v}$: la forza esterna

fornisce la potenza dissipata nella resistenza

$$P(t') = 5.8 \times 10^{-6}\ N \cdot 0.5\ m/s = 2.9 \times 10^{-6}\ W$$

Esame di Fisica Generale del 16/06/2015



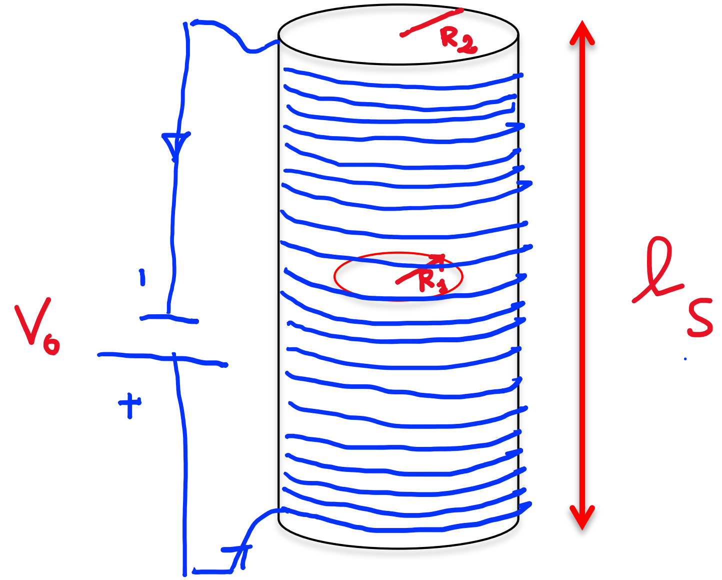
Un circuito circolare di raggio $R_1 = 1$ m e resistenza $R_{circ} = 10\ \Omega$ è posizionato al centro di un solenoide ideale di raggio $R_2 = 3$ m e lunghezza $l_s = 10$ m. Per realizzare il solenoide si e utilizzato un cavo di sezione S = 1cm^2, resistività $\rho = 1.7 \times 10^{-8}\ \Omega$m e lunghezza $l_f = 10$ km.

Supponendo di collegare il solenoide ad un generatore di tensione costante $V_0 = 100$ V e trascurando gli effetti sul solenoide dovuti alla corrente che circola in R_1
Si calcoli:

a) il campo magnetico del solenoide in condizioni stazionarie (quando cioè la corrente che circola nel solenoide si puo considerare continua). B_{staz} =..........................

b) l'energia immagazzinata nel solenoide ad un istante $t_1 = 0.2$ s (durante la carica del circuito RL). E = ...

c) la corrente che circola nel circuito di raggio R_1 nell'istante $t_2 = 0.5$ s. I_{circ} = ...



solenoide ideale
raggio R_2 = 3 m, lunghezza l_s = 10 m.
cavo del solenoide
sezione S = 1cm^2, resistività ρ=1.7 x10^{-8} Ωm, lunghezza l_f = 10 km.
circuito circolare
raggio R_1=1 m e resistenza R_{circ} = 10 Ω
posizionato al centro del un solenoide

il solenoide viene collegato ad un generatore di tensione V_0 = 100 V e trascurando gli effetti sul solenoide dovuti alla corrente che circola in R_1

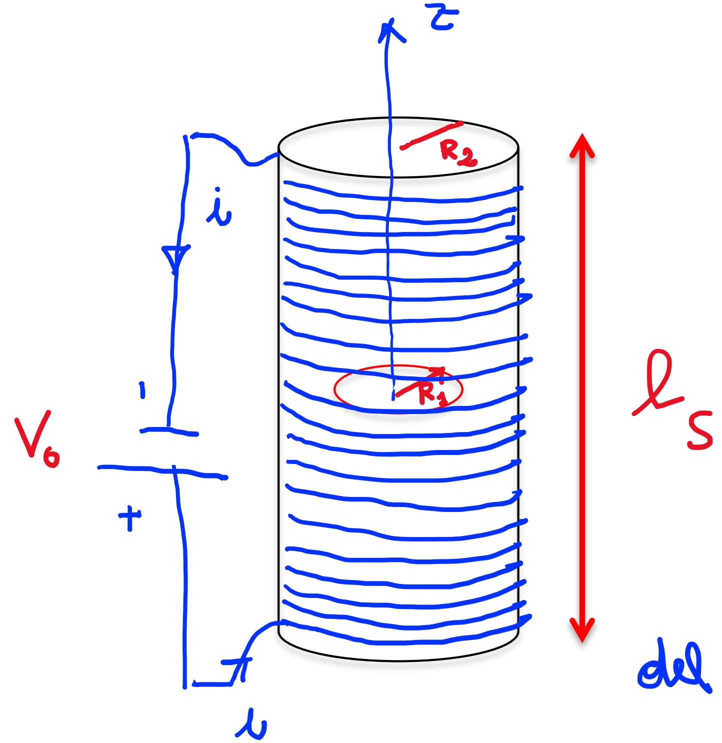
a) Si calcoli il campo magnetico del solenoide in condizioni stazionarie (quando cioè la corrente che circola nel solenoide si può considerare continua).
B_{staz} =............................

Se la corrente è continua $i = \text{cost} = i_0$ $\vec{B}$ non dipende dal tempo

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow \emptyset \qquad \oint_{\text{Sup chiusa}} \vec{E}\cdot\vec{n}\, ds = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

non ci sono cariche fisse $\vec{E} = \emptyset$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{conc} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \qquad \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{conc}$$



$\vec{B} = B\,\hat{z}$ all'interno del solenoide

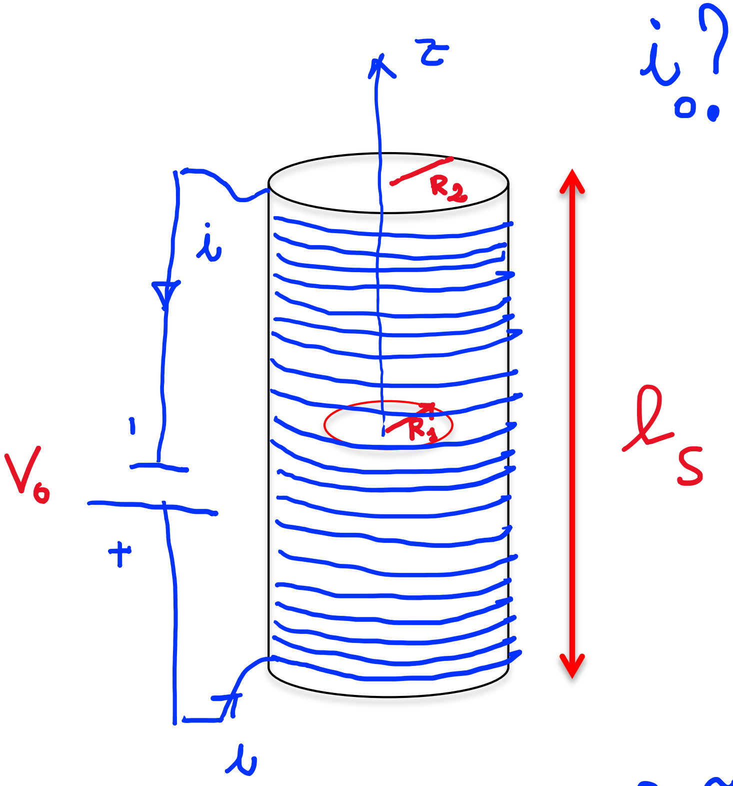
$\vec{B} = 0$ fuori del solenoide

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\, i_{conc}$$

indicando con N_S il numero di spire del solenoide: $B\cdot \ell_S = \mu_0 N_S\, i_0 \Rightarrow B = \mu_0 n\, i_0$

con $n = N_S / \ell_S$ N_S ? , i_0 ?

$$N_S = \frac{\text{lunghezza del cavo}}{\text{lunghezza di una spira}} = \frac{\ell_f}{2\pi R_2} \Rightarrow n = \frac{\ell_f}{\ell_S\, 2\pi R_2} = 53\ m^{-1}$$



i_0? Il solenoide fino a quando non viene raggiunta la condizione di stazionarietà si comporta come un circuito RL.

Con* $i(t) = i_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

e $\tau = \dfrac{L}{R_S}$ con R_S e L resistenza e induttanza del solenoide

* Nell'ipotesi in cui riconduciamo tutto di un circuito RL.

$R_S = \rho \dfrac{\ell_f}{S} = 1.7\ \Omega$ in condizioni stazionarie $I(\infty) = i_0 = \dfrac{V_0}{R_S}$

$$B_{staz} = \mu_0 \overbrace{\frac{\ell_f}{2\pi R_2} \cdot \frac{1}{\ell_S}}^{n} \overbrace{\frac{V_0 S}{\rho \ell_f}}^{i_0} = 0.39 \times 10^{-2}\ T$$

b) Si calcoli l'energia immagazzinata nel solenoide ad un istante $t_1 = 0.2$ s (durante la carica del circuito RL). E = ...

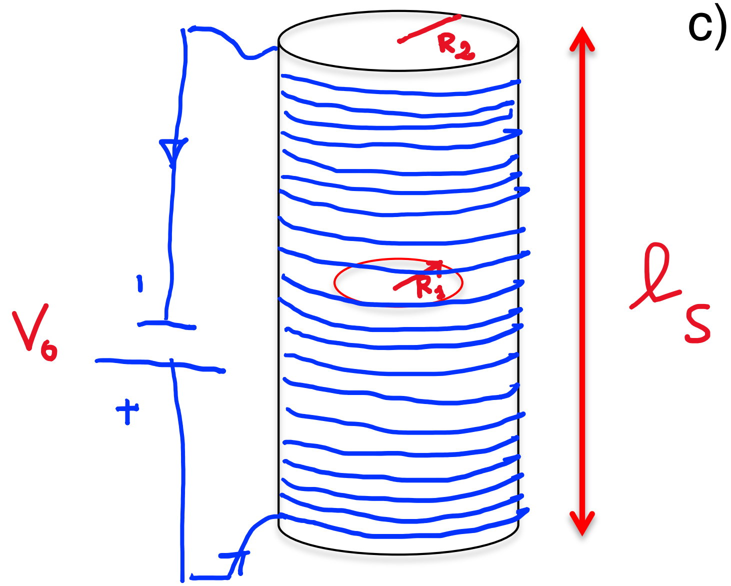
* Se ricordiamo tutto di un RL, durante la carica del circuito RL l'energia viene immagazzinata nell'induttanza: $E(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$

* Se ricordiamo tutto di un circuito RL

$i(t) = i_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ $\quad \tau = \frac{L}{R_S}$ e che nel caso di un solenoide * $L = \mu_0 \frac{N_S^2}{l_S} \pi R_2^2$

$$i(t_1) = \frac{V_0}{R_S}\left(1 - e^{-\frac{R_S t_1}{L}}\right) = 17\,A \Rightarrow E = E(t_1) = \frac{1}{2} L\, i(t_1)^2$$

$E = 144\,J$



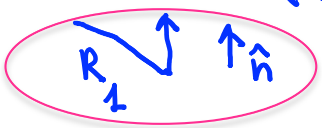
c) Si calcoli la corrente che circola nel circuito di raggio R_1 nell'istante t_2 = 0.5 s. I_{circ} = ...

Durante il processo che porta il solenoide a raggiungere $B = \text{cost}$

$$B = B(t) \Rightarrow \oint \vec{E}\, d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

$$fem^{spira} = \underbrace{\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}_{\text{lungo spira}} = -\frac{d\phi_B}{dt} \qquad \text{con } \phi_B = \underbrace{\int \vec{B} \cdot \vec{n}\, ds}_{S.S_{spira}}$$

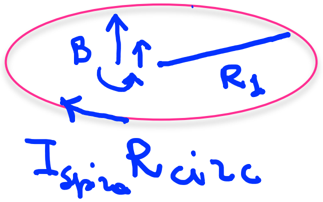
$\vec{B} = B(t)\hat{z}$



$$\vec{B}(t) = \mu_0 n\, i(t)\, \hat{z} \qquad \phi_B = \mu_0 n\, i(t)\, \pi R_1^2$$

$$fem^{spira} = -\mu_0 n \frac{di}{dt} \pi R_1^2 = -\mu_0 n \pi R_1^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{V_0}{R_s}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right)$$

$$= -\mu_0 n \pi R_1^2 \frac{V_0}{R_s} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \qquad \text{con } \tau = L/R_s$$



$$f_{em}^{spira} = -\mu_0 n \pi R_1^2 \frac{V_0}{R_S} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \qquad \text{con } \tau = L/R_S$$

$$I_{spira}(t_2) = \left| \frac{f_{em}^{spira}}{R} \right| = +\mu_0 n R_1^2 \frac{V_0}{R_S} \cdot \frac{R_S}{L} e^{-\frac{R_S}{L} t_2} \Rightarrow I_{circ} = 0.9\ \text{mA}$$

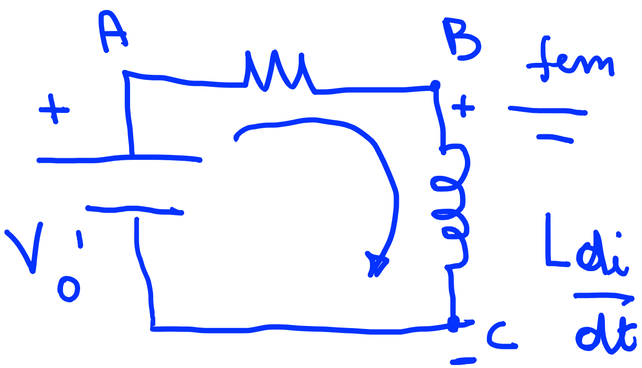
e circola in senso orario in modo da creare un campo magnetico che si oppone alla variazione di flusso che la ha creata.

Nota (1) E se non ci ricordiamo il circuito RL

Il solenoide durante la carica fino al raggiungimento delle condizioni stazionarie si comporta come un RL perchè il campo magnetico $\vec{B}$ dipende dal tempo

e $+\frac{d\Phi_B}{dt}$ nel solenoide $\propto \frac{di}{dt}$ $\Rightarrow$ $+\frac{d\Phi_B}{dt} = L\frac{di}{dt}$

Circuito equivalente del solenoide



$$\int_A^A \vec{E}\cdot d\vec{l} = C(\vec{E}) = \emptyset = Ri + L\frac{di}{dt} - V_0$$

$$= V_A - V_B + V_B - V_C + V_C - V_A$$

$$\Rightarrow \quad V_0 - iR - L\frac{di}{dt} = 0$$

$$① \; V_0 - iR - L\frac{di}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \frac{d}{dt} \quad \Rightarrow \quad -\frac{di}{dt}\frac{R}{L} = \frac{d^2 i}{dt^2}$$

$$\frac{di}{dt} = u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = -u\frac{R}{L} \quad \Rightarrow \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du}{u} = \int_0^t -\frac{R}{L}\, dt$$

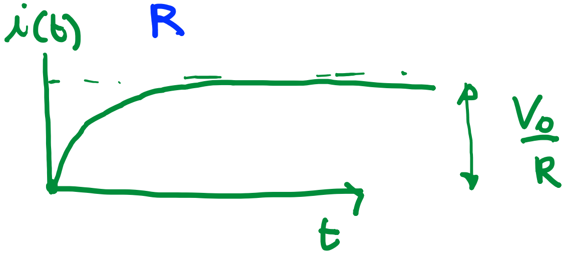
$$\ln\frac{u(t)}{u_0} = -\frac{R}{L}t \quad \rightarrow \quad u(t) = u(0)\, e^{-R/L\, t} = u(0)\, e^{-t/\tau}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{di}{dt}\Big|_{t=0} e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad i(t) = \overset{C_1}{\text{cost}}\; e^{-t/\tau} + \overset{C_2}{\text{cost}_1}$$

per $t=0$ $\quad i(0)=0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2 \Rightarrow i(t) = C_1\left(e^{-t/\tau} - 1\right)$

per $t=\infty$ $\quad \vec{B} = \text{cost}$ $\quad$ fem $=0$ $\quad$ dalla ① $\quad i(\infty) = \frac{V_0}{R} = -C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{V_0}{R}$

$$\Rightarrow \quad i(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad \text{C.V.D}$$



Nota 2 coefficiente di autoinduzione o induttanza L

In un solenoide in carica (ma anche in una bobina ...)

il campo magnetico è funzione del tempo fino

a quando non si raggiungono condizioni stazionarie

$$fem = -\frac{d\phi_B}{dt} \; ; \qquad \phi_B \propto i(t) \quad \Rightarrow \frac{d\phi_B}{dt} = L\frac{di}{dt} =$$

$$fem = -\frac{d\phi_B}{dt} = -L\frac{di}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\phi_B}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

All'interno del solenoide per una spira il flusso è $\left\{ \phi_B^{1\,spira} = \int \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS = \mu_0 n i \cdot S \right.$

$\hookrightarrow \mu_0 i n \hat{z}$

Nel solenoide ci sono

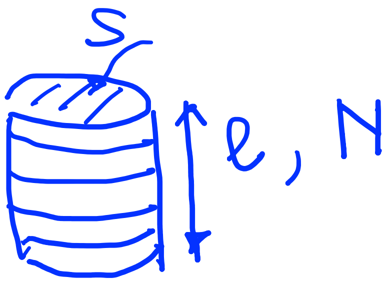
N spire quindi il flusso attraverso il solenoide è

All'interno del solenoide per una spira il flusso è $\left\{ \Phi_B^{1\,spira} = \int \vec{B}\cdot\vec{n}\, ds = \mu_0 n i \cdot S \right.$

$\hookrightarrow \mu_0 i n \hat{z}$

nel solenoide ci sono
N spire quindi il flusso attraverso il solenoide è

$$\Phi_B = N \mu_0 i \frac{N}{\ell} S \Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt}$$



$$\Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$$

per un solenoide

Nota ③ Energia immagazzinata in un solenoide

$$E_{imm}(t) = \frac{1}{2} L\, i^2(t)$$

$$V_0 - iR = L\frac{di}{dt} \Rightarrow \underbrace{i(t)V_0}_{\text{Potenza erogata dal generatore}} = \underbrace{i^2R}_{\text{Potenza spesa nella resistenza}} + \underbrace{L\, i\frac{di}{dt}}_{\text{Potenza immagazzinata in } L}$$

$$\mathcal{L}_{gen}(t^*) = V_0 \int_0^{t^*} i(t)\,dt = V_0\, Q(t^*) = \mathcal{L}_R(t^*) + \mathcal{L}_L$$

$$= \mathcal{L}_R(t^*) + L \int_0^{t^*} i \frac{di}{dt}\, dt =$$

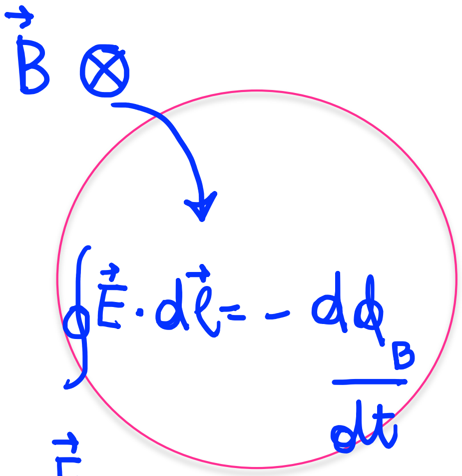
$$= \mathcal{L}_R(t^*) + \frac{1}{2} L\, i^2(t^*)$$

Esercizio

L'intensità del campo magnetico spazialmente uniforme all'interno di un lungo solenoide aumenta linearmente nel tempo, $\vec{B}(t) = -at\hat{z}$ (vedi figura)

determinare il campo elettrico indotto all'interno del solenoide.

Sia l'asse z entrante nel foglio.



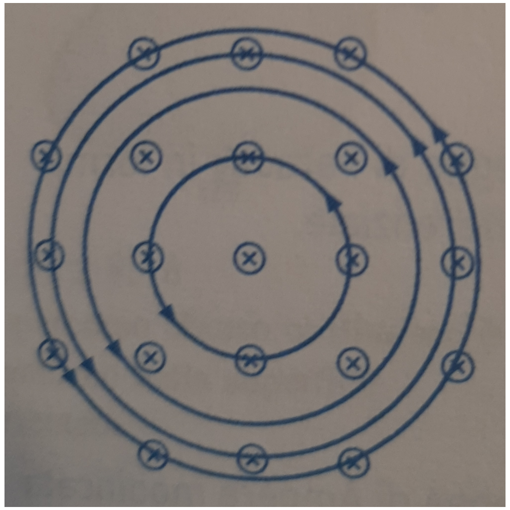
$\vec{E} \neq \emptyset$!

A differenza del campo elettrostatico prodotto da cariche ferme, il c.E. indotto non è conservativo $\rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} \neq 0$. Inoltre dalle equazioni di Maxwell

$$\oint_{\text{Sup chiusa}} \vec{E}\cdot\vec{n}\, ds = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

non essendoci cariche fisse

le linee di campo sono chiuse (come nel caso del campo magnetico).



Per la simmetria cilindrica

Il campo elettrico deve essere invariante per rotazioni e traslazioni rispetto all'asse e le linee di campo debbono essere chiuse $\Rightarrow$ a) le linee di campo sono delle circonferenze con centro sull'asse del solenoide e ad esso ortogonali.

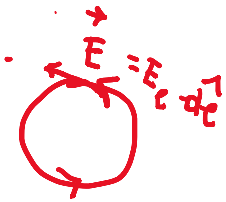
Non sappiamo come è diretto $\vec{E}$ ma scegliamo il senso dell'integrale di linea come indicato in figura. In questo modo la normale alla superficie della circonferenza: $\widehat{\hat{n}\,\hat{B}} = 180°$ Per $R \leq R_s$

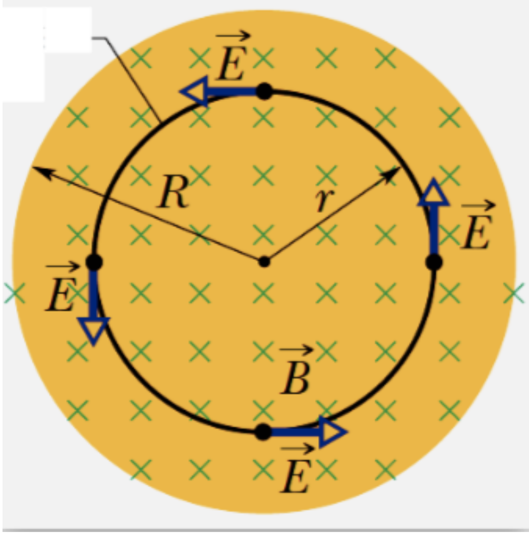
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_B}{dt} = E_\ell\, 2\pi R = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, ds = -\frac{d}{dt}\left(B\cdot(-1)\,\pi R^2\right) = a\pi R^2$$

$|\vec{B}| = B = at$

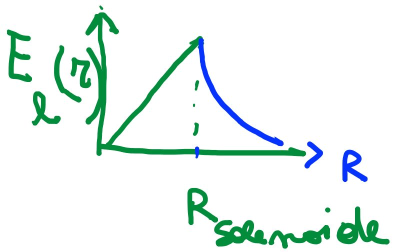
$$E_\ell = \frac{a\pi R^2}{2\pi R} = a\frac{R}{2} > 0$$

$\vec{E}$ è diretto come $d\vec{\ell}$!

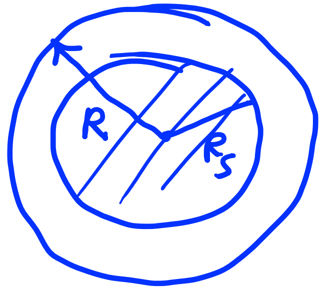




$\Rightarrow$ Per $R \leq R_{solenoide}$ $\quad E_\ell = a\, R/2$



e per $R > R_{solenoide}$?



$R > R_{solenoide}$

$$\oint E_\ell \cdot d\ell = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\underbrace{\int \vec{B}\cdot\vec{n}\, ds}_{S} = \pi R_s^2\, a$$

circ di raggio $R > R_{sol}$

al flusso contribuisce solo la sup. tratteggiata

$$E_\ell \cdot 2\pi R = \pi R_s^2\, a \Rightarrow E_\ell = \frac{a}{2}\cdot\frac{R_s^2}{R}$$

backup