

Salve a tutti,

Questi appunti li ho presi durante le lezioni di Innocenti, e comprendono la porzione di controllo digitale fatta dal professor Pollini nell'A.A. 2020-2021. Mancano quindi gli argomenti trattati dal professor Costanzi nell'anno accademico precedente.

In molti casi non ho fatto altro che trascrivere, in termini umani il contenuto delle slide. Il problema principale dell'esame è la mancanza di materiale su cui studiare. Questi appunti non hanno la pretesa di colmare quest'assenza, ma cercare di dare un piccolo contributo alla causa. Non ci sono esercizi svolti, se non quei pochi (pochissimi) che ha fatto a lezione, e spesso alcune correzioni sono scritte a matita di fianco. Preendeteli quindi in modo piuttosto critico (come a dire, mi dissoci da tutto quello che sta scritto in questo pdf). Aggiungo che tante, taaaante cose trattate non servono, nonostante siano in questi appunti.

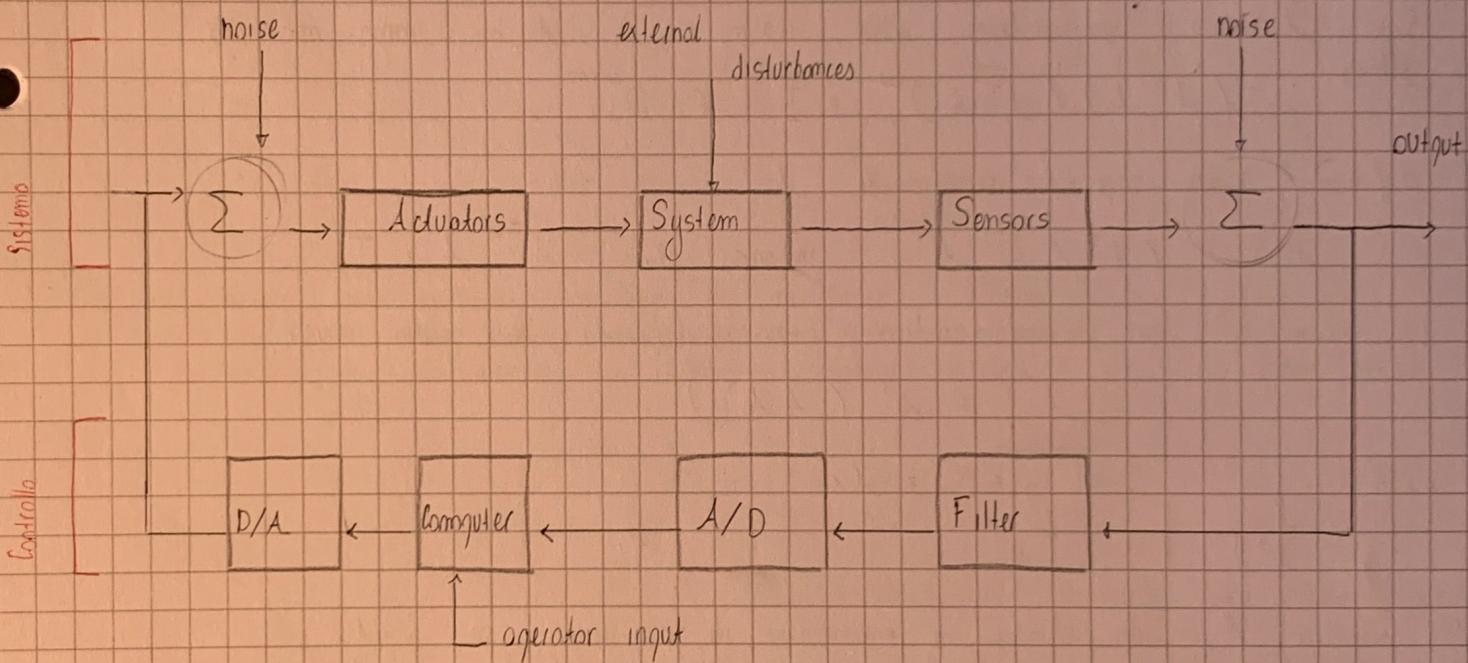
Consiglio di affiancare lo studio della materia a Matlab, utilissimo per capire come sono fatti i vari diagrammi che dobbiamo fare. Il professore ha fornito alcuni script molto comodi, a cui si affiancano i classici *rlocus*, *bode* e *margin*.

Per qualsiasi domanda, contattatemi pure su Telegram, @pcineverdies. Buono studio a tutti!

Giacomo

Ci sono alcuni termini con i quali ci belli prendere familiarità

- Sistemo / impianto: c'è l'oggetto di studio, nel caso specifico una macchina, una rete o un fenomeno. Questo sistema si descrive con eq. differenziali, le cui difficoltà ci impedisce di risolvere senza software. Il punto di partenza sono le leggi della meccanica e le sue equazioni che, semplificate da assunti non di interesse, ci forniscono un modello da poter usare.
- Controllo: Dato un sistema, siamo interessati che esso si comporti in un certo modo. In caso contrario, è necessario eseguire piccole variazioni che lo riportino nelle condizioni da noi desiderate. Ciò è possibile disponendo di informazioni sul sistema.
- Le informazioni sono fornite dai sensori. Tali dati sono input di un software del computer di bordo, che si occupa di stabilire quali modelli chi effettuare. Tali modelli sono eseguiti da un attuatore (che, ad esempio, ruota lo sterzo).
- Il feedback, o anello chiuso, è un modo di agire del sistema di controllo. Noi riceviamo informazioni dai sensori che usiamo per modificare il sistema, il quale ci fornisce nuovi dati.



Richiomi e complementi

Si definisce spazio vettoriale un set chiuso di elementi per cui valgono alcuni assiomi (somma associativa, commutativa, con elemento neutro e chiuso per somme e moltiplicazione scalari). Un sottospazio vettoriale W di V è tale da soddisfare gli stessi assiomi e $W \subset V$.

n vettori v_1, v_2, \dots, v_n sono indipendenti se $\sum z_i v_i = 0 \Leftrightarrow z_i = 0 \forall i$

L'insieme di tutte le combinazioni lineari è lo spazio, spon (v_1, \dots, v_n) . Esso è un sottospazio, ed è una base del sottospazio se i vettori sono indipendenti.

La dimensione di uno spazio è dato dal massimo numero di vettori indipendenti che si possono avere.

Una matrice è un insieme di elementi dati dal prodotto esterno di due vettori.

La matrice trasposta A^T si ottiene scambiando le righe con le colonne.

A è simmetrico se $A = A^T$.

A una matrice quadrata è associato un numero detto determinante. Nel caso di 3×3 , è il volume del parallelepipedo avente come lati i vettori. Si ottiene con una formula ricorsiva:

$$\text{Se } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \det(A) = a_{11}$$

$$\text{Else } \det(A) = \sum_{j=1}^n a_{1j} (-1)^{1+j} \det(A_{1j}) \quad \begin{matrix} \text{rimuovi riga } i \\ \text{e colonna } j \end{matrix}$$

Definiamo matrice aggiunta come $\text{adj}(A) = \{a_{ij}\} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

Vale le seguenti proprietà: $A^{-1} = \text{adj}(A) / \det(A)$

Dato una matrice A , il suo rango è il numero di righe / colonne linearmente indipendenti. Una matrice A di $\mathbb{R}^{n \times n}$ ammette inverso solo se $\det(A) \neq 0$. Il rango di A è invariante rispetto premoltiplicazioni / postmoltiplicazioni per matrici quadrate non singolari.

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ una matrice alba, $n > m$. Se A ha rango massimo, allora

$$(A^T A)^{-1} (A^T A) = I \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

definiamo pseudoinverso sinistro di A

$$A^{+s} = (A^T A)^{-1} A^T \quad \text{in modo che } A^{+s} A = I$$

Lo stesso si può fare per matrici basse, definendo lo pseudoinverso

$$A^{+d} = A^T (A A^T)^{-1}$$

$$x \in \mathbb{R}^n \quad y \in \mathbb{R}^m = Ax$$

$$\boxed{A \in \mathbb{R}^{m \times n}}$$

La matrice A è un elemento di trasmissione di x in y . se $y = Ax$, A viene detto operatore lineare di x in y . ma $y = Ax$ è anche un sistema algebrico

Il sottospazio di \mathbb{R}^m $\text{Im}(A)$ è quello dell'immagine di A al variare di x . Quello di \mathbb{R}^n $\text{Ker}(A)$ è il nucleo, per cui $Ax = \phi$ x è uno certo vettore, y un risultato.

a_j è il contributo di x_j nella componenti j -esima di y , giochi

$$y_i = \sum a_j x_j$$

Lo spazio immagine è lo spazio delle colonne di A .

$Ax = y$ ammette soluzioni se e solo se le combinazioni lineari di uno base dello spazio immagine di A , cioè se

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|y)$$

Se la trasformazione A fa sì che $Ax = 0$, è come riportare il vettore nell'origine. Si dice sottospazio nullo i vettori per cui $Ax = 0$.

$$\text{Sistema } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{Ha soluzioni non banali dato da } \\ \alpha(1, 1, -1) \text{. In generale,}$$

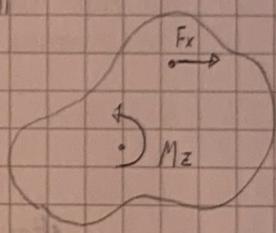
$$\dim(\text{Ker} A) + \text{rang} A = \dim(\mathbb{R}^n)$$

Dato $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, range massimo implica $\text{Ker} A = \{\emptyset\}$. In questo caso, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

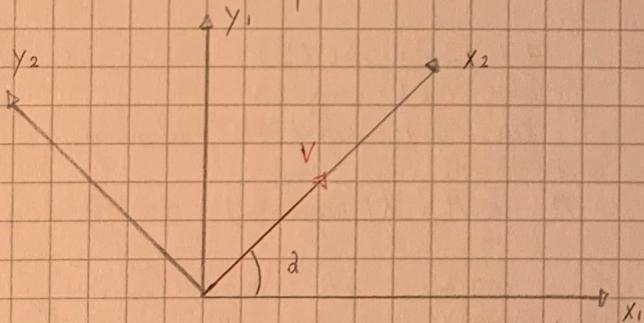
Se consideriamo A come un corpo rigido e \bar{x} le forze o coppie applicate, $\bar{y} = A\bar{x}$ sono le componenti delle forze o coppie risultanti ad un sistema di riferimento. Se consideriamo sia le forze che i momenti

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{11} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & -a_{02} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{Il modulo di } a_{ij} \text{ determina quanto valgono le singole componenti delle varie direzioni}$$

Applicando a questo esempio:



Le trasformazioni per similitudine permettono di modificare i sistemi di riferimento: un dato vettore è sempre lo stesso, cambiando il sistema di riferimento si hanno componenti diverse



$$\begin{pmatrix} V_{x_2} \\ V_{y_2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} V_{x_1} \\ V_{y_1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Essendo una rotazione, } A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$B = T^{-1}AT$ è una trasformazione per similitudine (T non singolare). Sembra più comodo lavorare con B , non con A . Alcuni vantaggi sono costanti nel passaggio da A a B .

Di tutte le possibili trasformazioni, ci ne interesseranno due

$$A = M^{-1}AM \quad \text{con } M \text{ diagonale}$$

$$J = P^{-1}AP \quad \text{con } J \text{ quasi diagonale (primo di Jordan).}$$

Bisogna determinare quali matrici ci portano a J e a M . Il vantaggio di queste trasformazioni è che, partendo da una matrice qualsiasi, ne ottengiamo una con moltissimi zeri (risparmiamo storage).

Per questi problemi, non ci occuperemo degli autovalori.

Si vuole risolvere $\lambda v = \lambda v$. Si tratta di un'ompliacozione di v tramite λ . Il problema dei v si risolve ricordandosi ad un sistema omogeneo

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad (v \neq 0)$$

Risolvendo il sistema ci troviamo degli autovalori: ciascuno di questi avrà associato uno o più autovettori.

Affinché il sistema lascia \emptyset , il rango di $A - \lambda I$ deve essere minore di n , quindi il determinante sarà uguale a 0 .

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \text{ci fornisce } n \text{ soluzioni, gli autovalori di } A.$$

Per come si ricavano, devono essere autoconjugati: o reali, o complessi coniugati.

La molteplicità di un autovalore può essere maggiore di 1 nell'equazione caratteristica. Questo è detto molteplicità algebrica. Nel nostro contesto, avremo • autovalori reali con molteplicità 1 • autovalori reali con molteplicità > 1 • autovalori complessi con molteplicità 1.

Gli autovalori di una matrice diagonale sono gli elementi diagonali.
La trasformazione per similitudine non altera gli autovalori.

Gli autovettori sono un set di vettori linearmente indipendenti.

Cosa succede se non ho n autovettori indipendenti? Se ad esempio ho n autovettori uguali, ho un autovettore con molteplicità geometrica 1 (non sempre è così, anche se ho n autovettori uguali).

Nella trasformazione per similitudine,

$\det(A) = \det(B)$
$\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$
$\text{eig}(A) = \text{eig}(B)$ autovetori.

Poniamo di volere M tale per cui $M^{-1}AM = \Lambda$ (diagonale).

M è detta matrice modale. Trovare M è possibile solo quando gli autovalori di A sono reali e distinti. Questo vuol dire che ci sono n autovettori linearmente indipendenti, $v_1 \dots v_n$.

$M = (v_1 | \dots | v_n)$. Scambiare le colonne scambia gli elementi diagonali.

Questo accade anche con autovalori complessi e coniugati. Tuttavia otteniamo così una matrice diagonale complesso. Possiamo fare così:

$$M = [Re(v_i) \quad Im(v_i)] \Rightarrow M^{-1}AM = \begin{bmatrix} \sigma_1 & w_1 \\ -w_1 & \sigma_1 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \sigma_1 = \sigma + jw_1$$

Ad esempio, sia $A \in \mathbb{R}^{6 \times 5}$

$$\text{eig } A = \{1, 2, 3, 4+5j, 4-5j\} \quad \text{Si calcolano } v_1 \dots v_5$$

$$M = (v_1 \dots v_5) \rightarrow M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 4+5j & \\ & & & & 4-5j \end{bmatrix}$$

L'alternativo è grandere $M = [v_1, v_2, v_3, \operatorname{re}(v_4), \operatorname{im}(v_4)]$

$$M^{-1}AM = \tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ & 4 & 5 \\ & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Quindi manteniamo le stesse informazioni, ma in forma diversa!

E' comunque uno trasl. per similitudine.

L'altra cosa in cui ci possiamo trovare sono autovettori con molte "cata" algebrica maggiore della m. geom. Per ricordarci comunque a λ , si calcolano gli autovettori generalizzati che comprendono la base dei \mathbb{K}^n autovettori

Forse $P^{-1}AP$ ci porta alla forma di Jordan, non alla forma diagonale. E' diagonale solo se ho già n autovettori.

Gli autovettori generalizzati si calcolano con una formula ricorsiva

$$\begin{aligned} (\lambda, I - A) v_i &= 0 && \text{continua se mi mancano autovettori} \\ (\lambda, I - A) v_i^1 &= -v_i && \text{per arrivare alla mult. alg.} \\ (\lambda, I - A) v_i^2 &= -v_i^1 \\ \dots \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{pmatrix} \quad \lambda = 2 \quad \text{non autovettore} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = V$$

mi servono due autovettori generalizzati.

Li calcolo risolvendo

$$(2I - A) v^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{Trovo} \quad v^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Forcio lo stesso cosa un'altro volto, e $P = (V | V^1 | V^2)$

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{E' una forma di Jordan:}$$

Ci sono 4 forme di Jordan

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ho due autovettori generalizzati

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

\hookrightarrow L'autovettore generalizzato è ottenuto dal primo dei due autovettori dell'autovettore 2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

\hookrightarrow come

grado ma del secondo autovettore

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

\hookrightarrow Non ho autovettori generalizzati

In realtà devo trovare un po' tutti gli autovettori per l'autovettore per cui mi serve un autovettore gen.

Teorema di Cayley - Hamilton

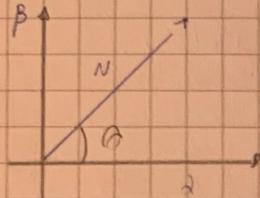
Ogni matrice A quadrata soddisfa la regola cq. caratteristica

$$\det(\lambda I - A) = \Delta(\lambda) = -\sum a_{ii} \lambda^i \quad \Delta(A) = 0$$

Con questo teorema, si puo' trovare l'inverso se A e' non singolare

$$A^{-1} (\Delta(A)) = A^{-1} (A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_0 I) = 0$$

$$A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \dots + a_0 A^{-1} = 0 \quad \text{si isolta } A^{-1} \text{ se } a_0 = \det A \neq 0$$



$$N = \alpha + j\beta$$

$$N = |N| (\cos \theta + j \sin \theta) \quad z = |z| e^{j\theta}$$

con $|N| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad \text{da cui} \quad e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$$

$$N_1 \cdot N_2 = z \quad \left\{ \begin{array}{l} |z| = |N_1| \cdot |N_2| \\ \theta_z = \theta_1 \pm \theta_2 \end{array} \right.$$

$$\text{L'esponentiale di } z \text{ e' } e^z = e^{\alpha + j\beta} = e^\alpha e^{j\beta}$$

Cosa succede sommando due esponentiali complessi?

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$$

$$c_{1,2} = S \pm jN \quad z = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = \dots = 2e^{\alpha t} [S \cos(\beta t) - N \sin(\beta t)]$$

Da una funzione complessa ci si ricordisce ad un termine reale!

Quest'ultimo forma ottenuta si puo' scrivere o solo come sin. o solo come cos.

In ϕ la fase di c_1 ,

$$z = 2|c| e^{\alpha t} \sin \left(\beta t + \phi + \frac{\pi}{2} \right)$$

La somma di due complessi si riduce ad un moto armonico smorzato. L'ampiezza dipende dal modulo di c_1 e c_2 , lo fase da c .
il periodo dalla parte immaginaria di λ , β .

Insomma. Siano $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ e $c_{1,2} = S \pm jN$ $z = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = ?$

$$1. \quad z = 2e^{\alpha t} [S \cos(\beta t) - N \sin(\beta t)]$$

$$2. \quad \text{Dato } |c| = |c_1| = |c_2| \quad \text{e} \quad \angle c_1 = \phi = -\angle c_2$$

$$z = 2|c| e^{\alpha t} \cos(\beta t + \phi)$$

equazioni differenziali

Un' equazione differenziale è una trasformazione lineare soggetta a degli ingreni (in generale sono un vettore) e afferremmo di un vettore di usato.

Il caso più standard è quello lineare del primo ordine a coefficienti costanti

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = a(x(t) + b u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

Si moltiplicano entrambi i membri per e^{-at}

$$e^{-at} \dot{x}(t) - a e^{-at} x(t) = e^{-at} b u(t)$$

$$\frac{d}{dt} e^{-at} x(t) = e^{-at} b u(t) \quad \text{Da cui}$$

$$x(t) = c x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

Questo è l'approccio standard per risolvere l'equazione differenziale

Si può usare anche l'approccio di soluzione omogenea + soluzione particolare, ma la formula sopra è sempre valida.

Quelle del secondo ordine sono molto più comuni (I di Newton).

Per un'equazione omogenea, si può dimostrare che esistono due sole soluzioni linearmente indipendenti. Tale linearità si dimostra con il determinante Wronskiano. Per trovare le due soluzioni, si ipotizza la soluzione dello primo $C e^{\lambda t}$.

$$(\lambda^2 + a\lambda + b) C e^{\lambda t} = 0$$

Si risolve l'eq. algebrica che fornisce due soluzioni, che possono essere reali e distinti, coincidenti o complessi coniugati.

- Distinte: $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

- Coincidenti: $x(t) = C_1 e^{\lambda t} + t C_2 e^{\lambda t}$

- cc: come nel primo ma trigonometrici complessi.

$$(\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta)$$

$$\text{In questo caso, } x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = A e^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi)$$

Aggiungere una forzata (termine noto non nullo) si risolve per linea, sommando la soluzione particolare a quello così ottenuto. Per lo sd. particolare si cerca una funzione 'simile'.

Spero, prima di inserire i valori noti, vorremmo cogliere cosa fa $x(t)$ per $t \rightarrow +\infty$. Queste informazioni si possono sapere nonostante i coefficienti.

E se abbiamo equazioni differenziali di ordine superiore?

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = u \\ \quad \quad \quad \end{array} \right.$$

La soluzione è sempre

$$y(t) = y_p(t) + \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}$$

Sulla base dei λ_i , ricorda in uno dei casi, con soluzioni complesse che forniscono termini trigonometrici. La soluzione completa comprende il contributo di una forzante.

Ci stiamo occupando di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.
 Ma cosa succede se non fossero costanti? Si parla di coefficienti tempo-variabili. Le eq. diff. possono anche essere non lineari. Indipendentemente dall'ordine (derivato massimo), queste eq. possono essere trasformati in un sistema di eq. diff. del primo ordine.

Applicata la tecnica, si può risolvere il sistema per avere l'eq. diff. risolta. Vediamo il caso di coeff. costanti.

Sia $x(t) \in \mathbb{R}^n$ (ordine dell'equazione è n).

$$x = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad x_1 = y \quad x_2 = \dot{y} \dots \quad x_n = y^n$$

Con y soluzione

Facciamo la derivata prima di ciascun elemento di x fino a $n-1$.

$$\dot{x}_1 = \ddot{y} = x_2, \quad \dot{x}_2 = \dddot{y} = x_3 \quad x_n \text{ lo ricaviamo dall'eq. diff. isolando } y^n$$

$$\dot{x}(t) = A_{nxn} x(t) + B_{nx1} u(t) \quad (+ le n \text{ c.iniz.)} \quad \stackrel{\text{P. corrispondono a } x(0)}{-}$$

$$\text{con } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nxn} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b ha tutte le colonne quanti gli ingressi sulla destra.

A e b provengono dall'equazione, C proviene da quale uscita interessa. (Infatti, per come abbiamo costruito x , $x_1 = y$. Se vogliamo solo y , $C = (1 \ 0 \dots \ 0)$). Se vogliamo altre uscite, aggiungiamo U (letton).

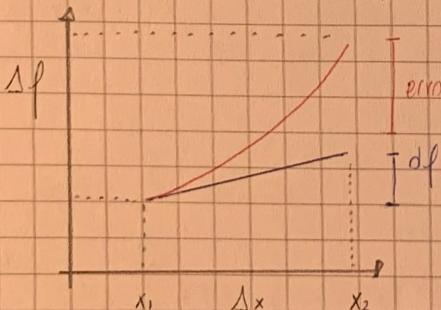
$y = C \bar{x} + Du$ definisce insieme le uscite come soluzione del sistema, sulla base di cosa ci interessa.

t non è un input, ma una variabile indipendente.

Il problema sta nell'approssimare eq. diff. non lineari con un eq. diff. lineare. Questo perché le prime non hanno una soluzione analitica: si possono solo simulare numericamente dati istanti iniziali e tempo di campionamento Δt .

Viceversa, le eq. lineari sono risolvibili in forma chiusa. Vediamo come fare tale processo di linearizzazione (ad esempio, e' il caso del pendolo con $\sin \theta \approx \theta$).

L'idea è quella di sostituire uno retto in un intervallo al posto della funzione, ricavato tramite il differenziale della funzione



L'approssimazione è tanto più precisa per $\Delta x \rightarrow 0$.

Per farlo si cercano i punti stazionari, ossia x che annulla la derivata prima di f .

Dato un sistema $\dot{x} = f(x)$, x_0 è punto di equilibrio se annulla la derivata prima $x_0 = f'(x_0) = 0$

Se f e' omogenea, le due definizioni coincidono; in un punto di equilibrio, il sistema vi rimane indefinitivamente (se f e' non omogenea, mette se f e' o il sistema potrebbe evolversi sotto forze esterne).

$$x(t) = x_0 + \delta x$$

$$\dot{x} = f(x)$$

La linearizzazione si fa con Taylor attorno ad un punto di equilibrio.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x_0} \delta x + g(x, x_0) \quad (\text{G intervenono "piccole" variazioni attorno a } x_0)$$

$$\text{Meno } \dot{x}_0 = f(x_0) = 0, \text{ quindi } \dot{\delta x} = \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} \delta x = a \delta x$$

$$\text{Da cui } x(t) = x_0 + \delta x(t)$$

Un approccio simile e' possibile anche per funzioni a più variabili, usando, tramite ∇f , una componente per volto.

La trasformata di Laplace

Noi partiamo da un sistema fisico (ma anche non propriamente tale) che ne vogliamo sapere comportamento dinamico e un miglioramento delle prestazioni se necessario con un controllore. Il sistema è modellato con equazioni costitutive o tramite dati ricavati sperimentalmente. Ma cosa succede se non ho il sistema fisico a disposizione, ma solo le equazioni? Le equazioni vengono date in due forme: eq. diff. ordinari (ODE) e eq. diff. alle derivate parziali (PDE). Lo differenzio è chi le ODE richiedono la scomposizione del sistema in parti atti elementari macroscopiche, cose che non si può fare nelle PDE, in quanto il numero di parti atti è infinito. Nulla pratica, le PDE non si possono risolvere, ma solo ricondurre a ODE con tecniche tecniche. Uno volto che arriva alle ODE, non c'è dubbio che siamo risolubili localmente: spesso devo effettuare una riduzione di modello, una semplificazione che mi dà due set: eq. diff. ord. non lineari e lineari. Di nuovo, se non sono lineari, si può usare la linearizzazione. Quelle lineari le abbiamo visto in due forme: tempo variante e tempo invariante. Quest'ultime sono quelle che usiamo noi, e che descrivono il nostro modello: sistemi lineari tempo-invarianti.

$$\frac{d^n}{dt^n} Y + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} Y + \dots + a_0 Y = u$$

Usiamo solo questa forma! Usiamo Laplace per rappresentare tali sistemi, ma vedremo anche la rappresentazione ingresso/uscita nello spazio di stato.

La trasformata produce relazioni nel campo algebrico a partire da quello differenziale. La trasformazione è bivincolata, e ci consente di definire la funzione di trasferimento.

La trasformazione di Fourier è una serie infinita che, data $f(t)$ periodica, la equivale ad una serie infinita di armoniche a frequenze crescenti, multiple di quella di partenza. Una funzione aperiodica è come se avesse periodo infinito. In questo caso, da un \sum si passa ad un integrale. Ci sono però cose che non possono essere risolti da Fourier, quelli in cui il moto non è armonico. La descrizione di tali cose è fatta con Laplace, un caso di Fourier in cui l'esponente dell'esponentiale comprende sia una parte reale che immaginaria.

Una trasformata mappa uno medesimo informazione in domini diversi.

Sia $f(t)$ una funzione definita per $t \geq 0$. Datto $s = \sigma + j\omega$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

se l'integrale esiste e converge. Per le nostre funzioni questo è vero sempre. Anche Laplace è bivincolata tramite un'antitrasform.

Con lo bivincolato, ad una f corrisponde uno F e viceversa.

Rispetto a $F(s)$, ci interessa soprattutto i poli e gli zeri, cioè i valori che annullano denominatore e numeratore.

Noi consideriamo così che ommetto $F(s)$; in particolare, questi sono continui a tratti. Laplace è invece. Per trovare la trasformata, si usa la definizione

$$f(t) = u \quad F(s) = \int_0^{+\infty} -st u e^{-st} dt + \frac{u}{s}$$

$$f(t) = e^{at}$$

$$F(s) = \frac{1}{s-a}$$

$$f(t) = \sin(at)$$

$$F(s) = \text{si usano le formule di Eulero} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$f(t) = t^n$$

$$F(s) = n! / s^{n+1}$$

Dato il comb. lin delle funzioni viste, si scrive immediatamente la trasformata.

La trasformazione puo' essere traslata nel tempo. Se $f(t) \rightarrow F(s)$ e allora $\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = e^{-t_0 s} F(s)$ nulla per $t < 0$

Si usa per le funzioni con un termine di ritardo. Ad esempio, una funzione troncata si puo' vedere come una f lineare fino a T = vertice, poi una funzione lineare ritardata di un fattore

Esempio triangolo

Se una funzione del dominio di Laplace presenta un fattore $e^{-t_0 s}$, allora lo f era traslato di t_0 a dx

Se $f(t) \rightarrow F(s)$, allora $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

$f(t) = e^{2t} \cos 3t \rightarrow$ calcolo $F(s) = \mathcal{L}\{\cos 3t\}$ e ad s sostituisco $s-2$
E' comodo per passare anche da F a f .

Per le funzioni con periodo T , si calcola la trasformata F della f di pertinenza e

$$\mathcal{L}\{f_T(t)\} = F(s) / 1 - e^{-Ts}$$

Due teoremi fondamentali:

$$\text{Se } f(t) \rightarrow F(s) \quad \mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

L'operazione e' ricorsivo:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2} f\right\} = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

Suggerito di non avere condizioni iniziali

Quindi, dato un'eq. diff., posso partorla nel dominio di Laplace

$$\begin{cases} Y'' + 4Y = 0 \\ Y(0) = 1 \quad Y'(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow s^2 Y(s) - sY(0) - Y'(0) + 4Y(s) = 0$$

Sostituisco c
isola $Y(s)$

$$\text{Da cui } Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$\text{Antitrasformando, } y(t) = \cos 2t + \sin 2t$$

$$\mathcal{Z}\{f(t)g(t)\} \neq F(s)G(s)$$

Tuttavia si può definire un'operazione
detta convoluzione (*)

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t g(t-\tau)f(\tau) d\tau = g * f$$

$$\text{Allora } \mathcal{Z}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$$

$$F(s)G(s) = \frac{4}{s+2} \cdot \frac{3}{s^2+9} = \int_0^{\infty} 4e^{-2(t-\tau)} \sin 3\tau d\tau$$

Di nuovo lo t. di Laplace

$$\mathcal{Z}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

F è analitico, e la trasformata
è biunivoca. In particolare, esiste se
l'integrale converge, che accade per
 f continua a tratti.

La trasformata/antitrasformata è lineare: $\mathcal{Z}\{af + bg\} = aF(s) + bG(s)$

Le funzioni elementari hanno tabella in cui vi sono tutte le trasformate.

Poniamo di avere f (con trasformata F) nullo per $t < 0$. Allora

$$\mathcal{Z}\{f(t-t_0)\} = e^{-ts_0} F(s)$$

$$f(t) = (t-1)^2 + 4\sin(t-10) \quad F(s) = e^{-s} \frac{2}{s^3} + 4e^{-10s} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

~~che corrisponde al caso di trasformata composta per la trasformata~~

$$\mathcal{Z}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

$$f(t) = e^{2t} \cos 3t \quad \mathcal{Z}\{\cos 3t\} = \frac{s}{s^2+9} \Rightarrow F(s) = \frac{s-2}{(s-2)^2+9}$$

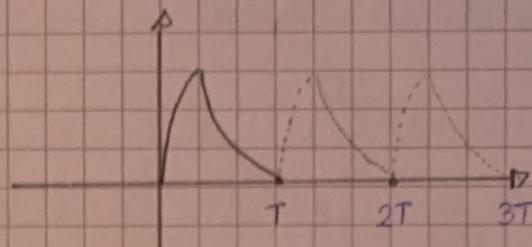
Se stessa cosa si puo' fare per l'antitrasformata.

$$F(s) = \frac{s+9}{s^2+6s+13} = \frac{s+3+6}{(s+3)^2+4} = \frac{s+3}{(s+3)^2+2^2} + 3 \frac{2}{(s+3)^2+2^2}$$

$$\Rightarrow f(t) = u(t) \left[e^{-3t} \cos 2t + 3e^{-3t} \sin 2t \right]$$

Sia $f(t)$ non nullo per $t \in [0, T]$

Sia f_0 la funzione che si ottiene rigettando $f_0(t+nT) = f(t)$



$$2 \left\{ f_0(t) \right\} = F(s) / 1 - e^{-Ts}$$

$$2 \left\{ \frac{df_0(t)}{dt} \right\} = sF(s) - f_0(0)$$

Questo ci permette di rappresentare un'eq diff lineare a coeff costanti con una rel. algebrica tra soluzioni e sue derivate.

$$2 \left\{ \int_0^t f_0(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} F(s) \quad \text{con condizioni iniziali nulle}$$

$$\begin{cases} \ddot{y} + 4\dot{y} = 0 \\ y_0 = 1 \quad \dot{y}_0 = 2 \end{cases} \quad 2 \left\{ \ddot{y} \right\} = s^2 F(s) - s y_0 - \dot{y}_0 = s^2 F(s) - s - 2 \rightarrow f(t) = \frac{\cos 2t + \sin 2t}{\sqrt{5}}$$

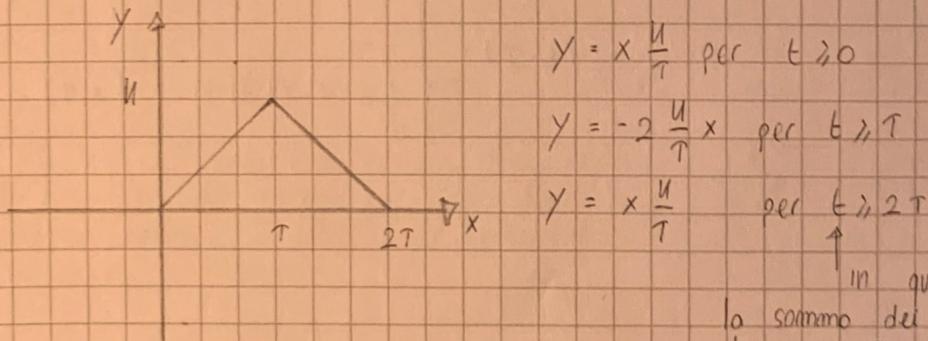
$$\text{Da cui } 4F + s^2 F - s - 2 = 0 \Rightarrow F(s) = \frac{s+2}{s^2 + 4}$$

Si definisce il prodotto di convoluzione tra f e g come

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \quad 2 \left\{ f * g \right\} = F \cdot G$$

$$\text{Sia } F(s) = \frac{4}{s+2} \cdot \frac{3}{s^2 + 9} = 2 \left\{ 4e^{-2t} \right\} \cdot 2 \left\{ \sin 3t \right\}$$

$$f(t) = 4 \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \sin 3\tau d\tau$$



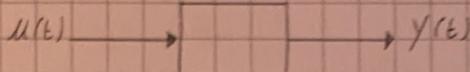
In questo modo
 lo sommo dei segnali e' 0 per
 $t > 2T$. Trasformo i singoli
 segnali con il fattore di ritardo.

$$Y(s) = \frac{U}{T} \frac{1}{s^2} - \frac{2U}{T} \frac{1}{s^2} e^{-Ts} + \frac{U}{T} \frac{1}{s} e^{-2Ts} = \frac{U}{Ts^2} (1 - 2e^{-Ts} + e^{-2Ts})$$

Tavola riassuntiva delle trasformate note

H	$1/s$
e^{at}	$1/s - a$
$\sin wt$	$w/s^2 + w^2$
$\cos wt$	$s/s^2 + w^2$
Formule per il ritardo	
t^n	$n! / s^{n+1}$
f'	$sF(s) - f(0)$
$\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$	$F(s) \cdot G(s)$

Consideriamo una generica trasformazione lineare



Spesso, avendo tra le mani $Y(s)$, siamo interessati al limite di $Y(t)$ per $t \rightarrow 0^+$ o per $t \rightarrow +\infty$. Vengono i seguenti teoremi

Teorema del valore iniziale Sia $f \rightarrow F$.

Se il limite in s esiste, vale la relazione

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

Poiché F è una funzione algebrica, il limite a 0 è finito o ∞ .

Teorema del valore finale Sia $f \rightarrow F$. Si è solo se il limite temporale

Il limite all'infinito di f potrebbe non esistere o forse $+\infty$. (nell'ambito della stabilità, esiste l'infinito solo se G è stabile / osint. stabile)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

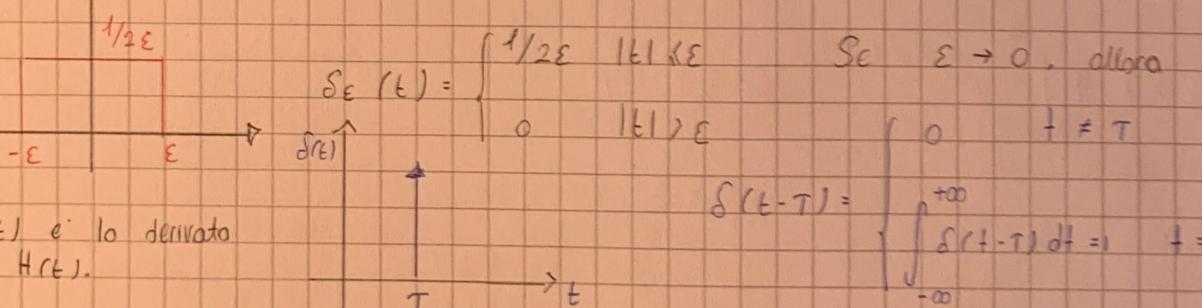
Si definisce la funzione gradino come $H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

Dallo definitone, si ha comunque $\mathcal{L}\{H(t)\} = 1/s$

Se la faccio partire da a , allora, per il th della trasformazione, $\mathcal{L}\{H(t-a)\} = e^{-as}$

La funzione gradino si usa come approssimante.

Il detto di Dirac $\delta(t-T)$ è il passaggio al limite di un rettangolo di area unitaria.



$$\delta(t-T) = \begin{cases} +\infty & t = T \\ \int_{-\infty}^t \delta(t-\tau) d\tau = 1 & t \neq T \end{cases}$$

$\delta(t)$ è lo derivato di $H(t)$.

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-T)\} = e^{-Ts}$$

Adesso possiamo usare Lagrange per risolvere eq. diff lineari a coefficienti costanti

$$\begin{cases} \ddot{y} + a\dot{y} + by = u(t) \\ y_0 = 1, \quad \dot{y}_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow S^2 y(s) - s^2 y_0 - s a y_0 + a s y(s) - a y_0 + b y(s) = u(s)$$

$$y(s) (s^2 + as + b) - y_0 (s+a) - y_0 = u(s)$$

$$y(s) = \frac{y_0 (s+a) + y_0}{s^2 + as + b} + \frac{u(s)}{s^2 + as + b}$$

Per linearità, il primo termine rappresenta l'evoluzione libera del sistema per $u(s) = 0$, il secondo la risposta allo stimone.

Una volta che si ha l'espressione analitica di $u(t)$, si puo' sempre scrivere lo trasformato come somma di due polinomi

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \text{Si ottiene rendendo minimi i due polinomi.}$$

Se il grado del numeratore (m) e' maggiore del denominatore, allora non ha un sistema fisico, e la situazione e' impossibile. Ci si ottiene se la parziale compare con ordine maggiore dell'equazione

Se $m=n$, $F(s)$ e' proprio e si scomponne come somma di una costante e un'altra frazione. Se $m < n$, $F(s)$ e' strettamente proprio e si usa la tecnica dei numeri complessi.

$y(s)$ puo' essere scritto come somma di elementi del tipo

$$1. \quad \frac{1}{s+p} \quad \text{Quando } -p \text{ e' una radice semplice del denominatore}$$

$$\text{Si annulla il denominatore come } A e^{-pt}$$

$$2. \quad \frac{B_r}{(s+p)^r} + \frac{B_{r-1}}{(s+p)^{r-1}} + \dots + \frac{B_1}{(s+p)} \quad \text{Quando } p \text{ ha molteplicità } r.$$

$$2^{-1} \left\{ \frac{B_r}{(s+p)^r} \right\} = \frac{1}{r!} B_r + e^{-pt}$$

$$3. \quad \frac{C}{s+p} + \frac{C^*}{s+p^*} \quad \begin{matrix} \text{radici} \\ \text{conjugate} \end{matrix}$$

$$\text{Si annulla il denominatore come } A e^{Re\{-pt\}t} \cos [Im\{-pt\}t + B]$$

A , B e C sono detti residui. Sono legati all'ampiezza del sistema, e sono legati alle condizioni iniziali. Le radici invece determinano l'evoluzione temporale.

$$-p_i = (s+p_i) F(s) \quad |_{s=-p_i}$$

Allo stesso modo si determinano C e C^*

$$A = 2 \sqrt{Re^2\{C\} + Im^2\{C\}} = 2|C|$$

$$B = \tan^{-1} \frac{Im\{C\}}{Re\{C\}}$$

$$B_{r-n} = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{ds^n} [(s+p)^r F(s)] \right\}_{s=-p}$$

$$\frac{u(t)}{U(s)} \rightarrow \begin{cases} \text{Eq. diff. lin} \\ \text{a coeff. cost} \end{cases} \quad \frac{y(t)}{Y(s)}$$

La funzione di trasferimento è un'operazione che permette di volutamente l'uscita, dato un ingresso, in alternativa alla risoluzione dell'eq. diff.

Nel passaggio dall'equazione a Lagrange, si ottiene sempre $D(s)Y(s) = N_H(s) + U(s)$

La funzione di trasferimento di un s. lin. tempo invarianti è il rapporto tra lo trasformato dell'uscita e dell'ingresso a condizioni iniziali nulli

Nota lo FdT e lo trasformato dell'ingresso

$$G(s) = Y(s)/U(s)$$

C'è anche un'altra definizione, conseguenza diretta di cui. Sia $u(t) = \delta(t)$. Allora $M(s) = 1$ e $y(s) = G(s)$

la funzione di trasferimento è lo FdT dell'uscita quando l'ingresso è un impulso applicato per $T=0$

Quindi, davanti ad un sistema, applicare $\delta(t)$ ci permette di determinare $G(s)$.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$Y(s) = P_j(s + z_i)$$

$Y(s)$ è detto guadagno del sistema

- P_j sono i poli

- z_i sono gli zeri

$$\begin{cases} \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 4\dot{u} - 8u \\ y_0, \dot{y}_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} & s^2 Y(s) - s y_0 - \dot{y}_0 + 3s Y(s) - 3y_0 + 2Y(s) = \\ & = 4s U(s) - 4 u_0 - 8 U(s) \end{aligned}$$

$u_0 = 0$ perché così definiamo G .

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = y_0(s+3) + \dot{y}_0 + (4s - 8)U(s)$$

$$Y(s) = \frac{4(s+2)}{s^2 + 3s + 2} - \frac{y_0(s+3) + \dot{y}_0}{s^2 + 3s + 2}$$

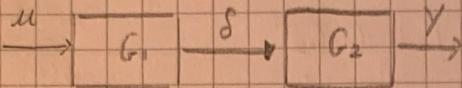
$$G(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{4(s-2)}{s^2 + 3s + 2}$$

Sia $u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1$

$$Y(s) = G(s) = 4 \frac{s-2}{s^2 + 3s + 2} = 4 \frac{s-2}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow y(t) = g(t) = -12e^{-t} + 16e^{-2t}$$

G è una sorta di caratteristica del sistema fisico, indipendente dagli ingressi

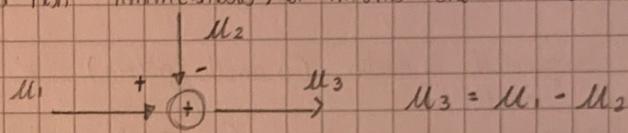
Un sistema fisico è descritto dallo grafico (dT) in termini di relazioni tra ingresso e uscita. Le interconnessioni tra sistemi si rappresentano per via schematica tramite diagrammi a blocchi. Le interconnessioni dinamiche tra sistemi lineari interconnessi si rappresentano con espressioni algebriche delle varie fdT.



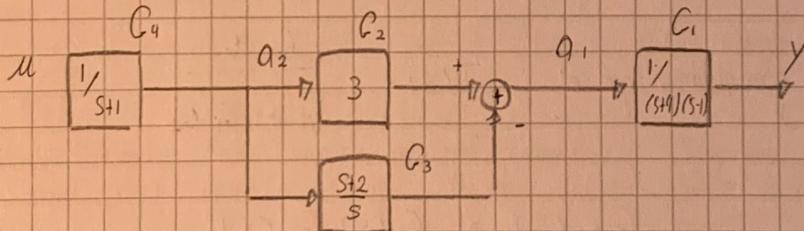
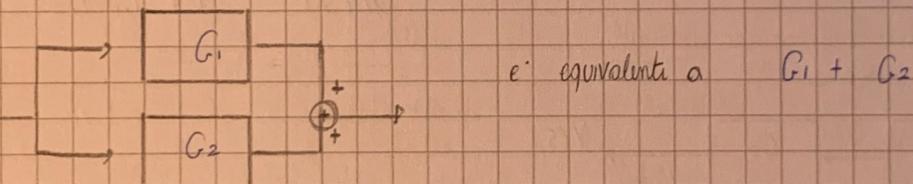
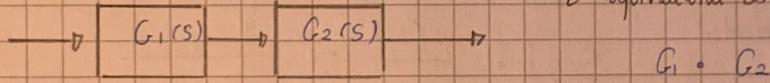
Potrei voler ricavare la funzione di trasferimento tra u e y , indipendentemente dai segnali intermedi. G_2 potrebbe essere un attuatore, G_1 un sistema di controllo che riceve alcuni segnali: quali forze y vengono applicate sulla base degli ingressi?

L'idea fondamentale da tenere a mente è che in un sistema fisico c'è sempre una relazione causa-effetto tra y e s , (conseguenzialità), sequenziale (l'usato non può anticipare l'ingresso) ma non immediato, a meno che G sia costante.

Alcune relazioni algebriche



è equivalente ad un sistema con fdT

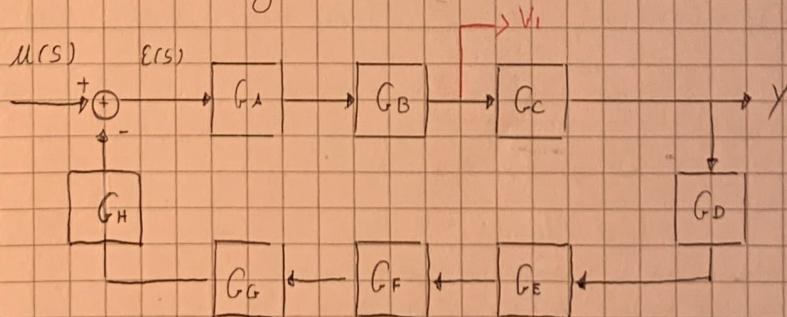


$$\begin{cases} y_1 = a_1 G_1 \\ a_1 = a_2 (G_2 - G_3) \\ a_2 = u G_1 \end{cases}$$

Uno scrittura del generico è più conveniente, basta scrivere come si realizzano i segnali.

$$G_{TOT} = G_1 (G_2 - G_3) G_4 = \frac{1}{s(s+1)(s+4)}$$

Consideriamo il seguente sistema in retroazione



$$V_1(s) = G_A G_B U(s) - G_A \dots G_H V_1(s)$$

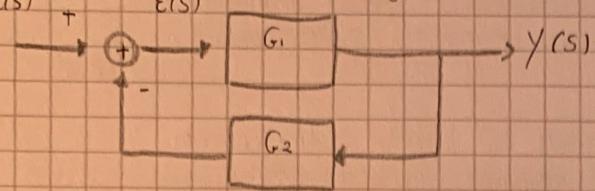
$$\frac{N_1(s)}{U_1(s)} = \frac{G_A G_B}{1 + G_A \dots G_H}$$

potremmo emere interessanti relazioni tra $U(s)$ e $V_1(s)$

$$V_1(s) = E(s) G_A G_B = G_A G_B (U(s) - V_1(s) G_A G_C G_F G_E G_D G_G)$$

$$G_A G_B$$

Cosa posso dire in generale di



$$Y(s) = G_1(s) (U(s) - G_2(s)Y(s))$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}$$

In anello del genere e' detto non unitario, ovvero $G_2 \neq 1$ (il segnale y , tornando indietro, e' manipolato).

La funzione di trasferimento in anello chiuso o Funzione di sensitività complementare

$$\frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = G_{CL}(s) = T(s)$$

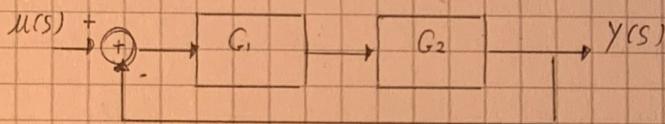
La funzione di trasferimento di anello (o anello aperto) e' il prodotto di tutte le fdt nell' anello

$$G_{CL}(s) = G_1(s) G_2(s)$$

Si definisce funzione di sensitività

$$S(s) = \frac{E(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + G_1 G_2}$$

Consideriamo ora la retroazione unitaria



La funzione di sensitività complementare e' $T(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2}$
(o fdt dell' anello chiuso)

La fdt di anello e'

$$G_{CL}(s) = G_1(s) G_2(s)$$

La funzione di sensitività e'

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_1 G_2} = \frac{E(s)}{U(s)}$$

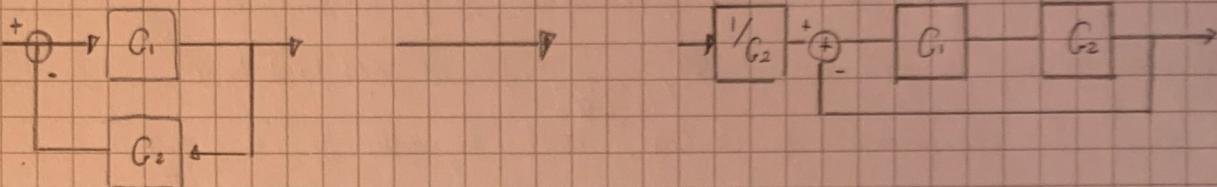
Viene il seguente vincolo algebrico

$$T(s) + S(s) = 1$$

Dato un sistema in retroazione non unitario, è sempre possibile ricordurlo ad uno con retroazione unitaria.

Due sistemi sono equivalenti se hanno lo stesso fdT

$$fdT_{NU} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} = \frac{1}{G_2} \cdot \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} = \frac{1}{G_2} \cdot fdT_U$$



Siamo dati i sistemi a retroazione (e mn) dello pagina precedente.
il tipo di anello determina gli zeri della fdT, ma mn i poli

$$G_1 = N_1 / D_1 \quad \text{e} \quad G_2 = N_2 / D_2$$

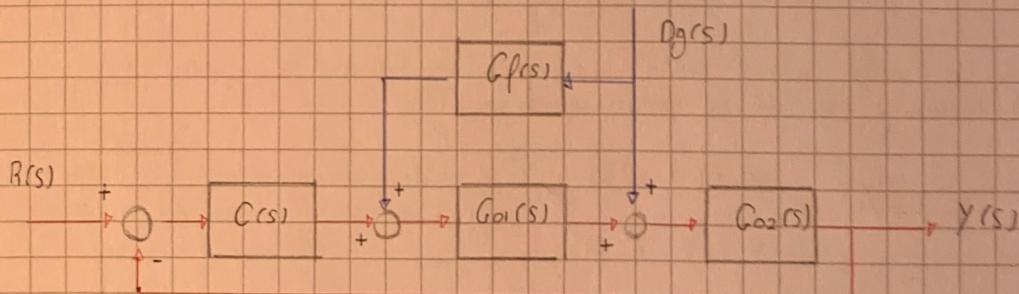
$$fdT_{NU} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} = \frac{N_1 / D_1}{D_1 D_2 + N_1 N_2} = \frac{N_1 D_2}{D_1 D_2 + N_1 N_2}$$

$$fdT_U = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} = \frac{N_1 N_2}{D_1 D_2 + N_1 N_2}$$

Quindi, nel dominio del tempo avremo

$\sum c_i e^{\lambda_i t}$, con
 λ_i minore nei due casi

Le strutture ad anello sono utili per moltissime applicazioni. Supponiamo di avere un ingresso $R(s)$ e un uscita $y(s)$ con un disturbo $Dg(s)$. Possiamo far sì che y non dipenda da Dg ?



$$y(s) = G_2(s) \left\langle D(s) + G_1(s) \left\{ f(s) D(s) + C(s) [R(s) - y(s)] \right\} \right\rangle$$

Da cui

$$y(s) = \frac{G_2 (1 + G_1 G_f)}{1 + G_2 G_1 C} Dg(s) + \frac{G_2 G_1 C}{1 + G_2 G_1 C} R(s)$$

$$G_f = - \frac{1}{G_1 C(s)}$$

mi consente di annullare il disturbo esterno, facendo sì che l'anello unitario non sia influenzato da tali fatti.

$LfdT$ dell'anello unitario

All'interno di un sistema ci possono essere anche più anelli (multilang). Si può pensare che gli anelli interni, i quali operano a frequenze più elevate, effettuino delle modifiche andando verso i requisiti di sistema, mentre quello esterno segue il risultato finale.

Il modo con cui posso realizzare un controllore, a parità di gati, zeri e quadri, è multielica. A seconda dei casi è preferibile un sistema open loop che non tiene conto dell'uscita, o uno ~~open~~ closed loop. Tuttavia, i due modelli, con le giuste fdT, sono equivalenti.

$$\text{Supponiamo di avere } G(s) = N/D = Y/U$$

Se uno dei poli del sistema ha $\Re s > 0$, allora $y(t) \rightarrow +\infty$. In $y(t) = \sum c_i e^{\lambda_i t}$

Con retroazione unitaria, lo fdT è $G_U / 1 + GU$, dove $w(t) = \sum b_i e^{\bar{\lambda}_i t}$

In questo caso $\bar{\lambda}_i$ sono le radici di $1 + GU$, diverse da quelle di $G \cdot \lambda_i \neq \bar{\lambda}_i$.

Viceversa, se ho un sistema OL, lo fdT è $GU \rightarrow y(t) = \sum a_i e^{\bar{\lambda}_i t}$ con i poli di G non compresi in quelli di GU . Posso quindi usare gli zeri di U per annullare i poli di G che non voglio (mogono perché di parte reale positiva). La struttura ad anello chiuso mi modifica comunque i poli, ad anello aperto no.

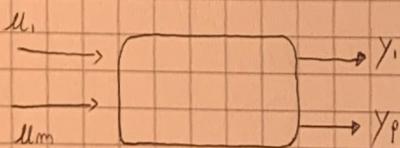
La rappresentazione in variabili di stato

Dato un sistema descritto tramite eq. diff., possiamo rappresentarlo sia con uno fdT che con le variabili di stato. Quest'ultimo metodo è valido anche per eq. diff. non tempi invarianti. Si tratta di prendere l'eq. diff. e di riscrivere come un sistema di eq. diff. del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ si definisce vettore di stato ed è costituito dal numero minimo di variabili indipendenti necessarie a descrivere univocamente il sistema dinamico nel sottospazio \mathbb{R}^n . Tale numero è dato da il numero di condizioni iniziali necessarie alla soluzione dell'eq. diff. di partenza.

La quadrupla (A, B, C, D) non è unica e, dato un vettore in ingresso, lo stesso vettore di uscita è dato da un numero infinito di vettori.



$$\begin{aligned} u(t) &\in \mathbb{R}^m \\ y(t) &\in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

A è detta matrice dinamica, e i suoi autovalori sono i modi del sistema.

Se l'ingresso non ha derivate successive, si usa il seguente metodo

$$y^{(0)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y^2 + a_1 y = u$$

$$\text{Si pone } x = [x_1 \dots x_n] \quad \text{e} \quad x_1 = y, x_2 = \dot{y}, \dots, x_n = y^{(n-1)}$$

$$\text{Derivando } x, \quad \dot{x} = (\dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)})$$

$$\text{Ma allora } \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \dots, \quad \dot{x}_n = y^{(n)} = u - a_{n-1} y^{(n-1)} - \dots - a_1 y$$

$$\text{E } y = x_1, \text{ quindi } y(t) = (1 \ 0 \dots 0) x(t)$$

D'è \emptyset sc il sistema è strettamente proprio.

$$\ddot{y} + 16\dot{y} - 4y = 18u$$

$$s^3 y(s) + 16s^2 y(s) - 4y(s) = 18u(s) \Rightarrow G(s) = \frac{18}{s^3 + 16s^2 - 4}$$

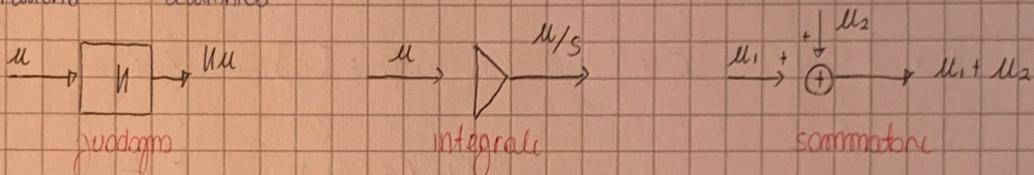
Per le variabili di stato, ho $x \in \mathbb{R}^3$

$$x_1 = y \quad x_2 = \dot{y} \quad x_3 = \ddot{y} \quad \dot{x} = (\dot{y}, \ddot{y}, 18u - 16\dot{y} + 4y)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \rightarrow C = (1 0 0), D = (0)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \rightarrow \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -16 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} u(t)$$

Nel caso in cui le derivate dell'ingresso siano fra 2 e n (non maggiori dell'usato) si fa uso di diagrammi analogici che mostrano circuito elettronico



Si prende l'equazione

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 2u + 3\dot{u}$$

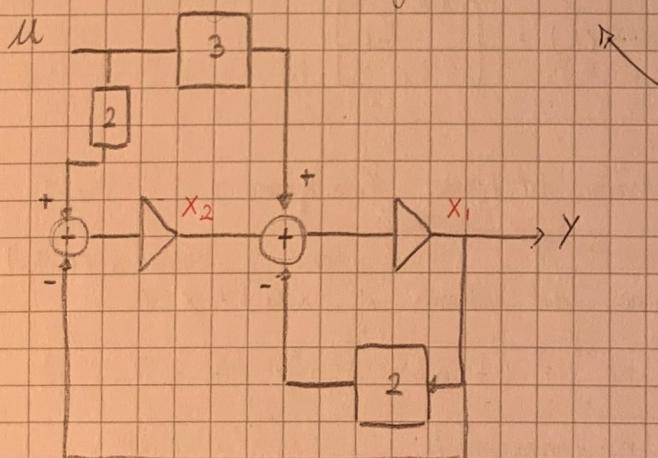
$$\text{Si usa l'eq. integrale } y = \frac{1}{s} \dot{y} \rightarrow s^2 y + 2s y + y = 2u + 3s u$$

Si isola il termine con s di grado maggiore

$$y = \frac{1}{s^2} (2u + 3su - y - 2sy) =$$

Si traccia il diagramma

$$= \frac{2u}{s^2} + \frac{3u}{s} - \frac{y}{s^2} - \frac{2y}{s} = \\ = \frac{1}{s} \left\{ 3u - 2y + \frac{1}{s} [2u - y] \right\}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] u$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

$D \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$

Si servono due variabili di stato, x_1, x_2 .

Si selezionano come variabili di stato l'uscita di ciascun integratore (non importa l'ordine)

$$x_1 = 3u + x_2 - 2x_1$$

$$x_2 = 2u - x_1$$

$$y = x_1$$

Per ora sappiamo rappresentare un sistema con un'eq. differenziale, con uno f.d.T o con equazioni di stato. In questo caso, dato un ingresso $u(t)$ e delle condizioni iniziali, vogliamo determinare $x(t)$ e l'uscita del sistema $y(t)$.

Dato $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$ per il caso tempo invarianti
o si può ricorrere a Laplace

Dalla prima, $\begin{cases} SX(s) - x_0 = Ax(s) + Bu(s) \end{cases}$ e quindi, isolando $x(s)$

$$x(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}Bu(s) \quad \text{Si sostituisce nello secondo}$$

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s)$$

Dal momento in cui $y(s) = G(s)u(s)$, allora

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \in \mathbb{R}^{q \times m}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = [0] \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix} \quad (sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{3}{s+1} \\ \frac{-3}{s-2} \end{bmatrix} \quad y(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{s+1} \\ \frac{-3}{s-2} \end{bmatrix} u(s)$$

Dato un ingresso impulsivo, avendo $u(s) = 1$, sostituendo nello formula

$$y(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{s+1} \\ -\frac{3}{s-2} \end{bmatrix} \quad \text{e quindi} \quad y(t) = \begin{bmatrix} 4e^{-t} \\ -3e^{2t} \end{bmatrix}$$

Nel caso più generale, è possibile risolvere nel dominio del tempo. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Sappiamo che la soluzione del problema è $x(t) = x_0 e^{at}$
e che, per Taylor, $e^{at} = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \dots$

Lo stesso meccanismo si può applicare al caso n -dimensionale.

Se $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\dot{x} = Ax$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Applicando la trasformata di Laplace, $x(s) = (sI - A)^{-1}x_0$. Allora, antitrasformando il frutto

$$x(t) = e^{At-t_0}x_0$$

Per i sistemi lineari e tempo invarianti, si chiama matrice di transizione dello stato

$$e^{A(t-t_0)}$$

Il problema sta nel determinarla.

Metodo 1 Lo sviluppo di Taylor ha senso anche in questo caso:

$$e^{At} = I + At + A \frac{t^2}{2!} + \dots + A \frac{t^n}{n!} + \dots$$

Venne usato o in ambito numerico o quando si osservano relazioni produttive.

Metodo 2 Come visto,

$$\dot{x} = Ax \rightarrow Sx = Ax + x_0 \rightarrow x(s) = [sI - A]^{-1} x_0$$

$$\text{Mo se } x(t) = e^{At} x_0, \text{ allora } e^{At} = 2^{-1} [sI - A]^{-1}$$

$$\text{Sia } A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad sI - A = \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A]^{-1} = \frac{1}{(s+3)^2 - 1} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+6s+8} & \frac{1}{s^2+6s+8} \\ \frac{1}{s^2+6s+8} & \frac{s+3}{s^2+6s+8} \end{bmatrix}$$

Si antitrasforma membro a membro ottenendo

$$e^{At} = \begin{bmatrix} A_1 e^{-2t} & A_2 e^{-4t} & B_1 e^{-2t} & B_2 e^{-4t} \\ A_2 e^{-2t} & A_1 e^{-4t} & B_2 e^{-2t} & B_1 e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Metodo 3: si ricorre alla forma di Jordan

Sappiamo che è possibile ridursi ad una matrice diagonale / jordan con una trasformazione per similitudine tramite opportuna M di autovettori (eventualmente generalizzati).

Caso 1: autovettori distinti, A diagonalizzabile.

$$A = M^{-1} A M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow A = M \Lambda M^{-1}$$

$$e^{At} = I + At + A \frac{t^2}{2} + \dots = M M^{-1} + M \Lambda M^{-1} + M \Lambda M^{-1} M \Lambda M^{-1} + \dots = \\ = M \left\{ I + \Lambda t + \Lambda \frac{t^2}{2} + \dots \right\} M^{-1} = M e^{\Lambda t} M^{-1}$$

Mo a cosa è uguale $e^{\Lambda t}$?

$$e^{\Lambda t} = I + \Lambda t + \Lambda \frac{t^2}{2} + \dots = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} + \dots = \\ = \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \lambda_1^2 \frac{t^2}{2} + \dots & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 + \lambda_n t + \lambda_n^2 \frac{t^2}{2} + \dots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{\lambda_n t} & \end{bmatrix}$$

Quindi, potendo ricavare $e^{\Lambda t}$ immediatamente noti gli autovettori, si tratta di svilgere il prodotto per M e M^{-1} .

$M = (V_1, \dots, V_n)$ e' formato dagli autovettori destri di A

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_1^T \\ \vdots \\ \mu_n^T \end{bmatrix} \quad \text{e' formato dagli autovettori sinistri di } A$$

$$M = \begin{bmatrix} \mu_1^T & \cdots & \mu_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix} M^{-1}$$

In particolare, uno sotto visto e'

$$X(t) = \sum_{i=1}^n c_i \mu_i^T e^{\lambda_i t} x_i$$

Caso 2: A risiedono ad uno formo di jordan, margini perché costretti a chiamare in come autovettori generalizzati

$$P^{-1} A P = J \quad A = P J P^{-1} \Rightarrow \text{Secondo quanto visto } P e^{Jt} P^{-1}$$

A partire da jordan, possiamo scrivere, nel caso di un solo blocco

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \ddots & \lambda_1 \end{bmatrix} = \lambda_1 I + \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots & 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 I + R \Rightarrow e^{Jt} = e^{\lambda_1 t} e^{Rt}$$

Il prodotto di una matrice C per R fornisce la matrice C con ogni colonna shiftata a dx e lo gromo di tutti zero

$$CR = [0, C_1, \dots, C_{n-1}] \quad \text{Da cui}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad R^3 = \emptyset \times R^\infty \quad R^n = 0$$

$$\text{Quindi, se abbiamo } P_{n \times n}, \quad e^{Rt} = I + Rt + R^2 \frac{t^2}{2} + \dots + R^{\frac{n-1}{2}} \frac{t^{\frac{n-1}{2}}}{\frac{n-1}{2}} + 0 + \dots$$

Questo tipo di ragionamento e' comodo considerando separatamente un singolo blocco di jordan

$$\dot{x} = Ax + Bu \Rightarrow x_s - Ax = x_a + Bu(s)$$

$$\Rightarrow x = (sI - A)^{-1} x_a + (sI - A)^{-1} Bu(s)$$

$$x(t) = e^{(t-t_0)} x_a + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)} (t-\tau)^{-1} B u(\tau) d\tau$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t^2 & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^n}{n!} \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = C \left(e^{(t-t_0)} x_a + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t) \right)$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix} X \quad e^{\delta_1 t} = e^{-2t}$$

$$e^{\delta_1 t} = e^{(-I + A)t} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

\downarrow Il formato è standard

Quindi $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \\ & e^{-2t} \end{bmatrix}$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{10} e^{-t} + x_{10} t e^{-t} \\ x_{20} e^{-t} \\ x_{30} e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Metodo II di Cayley - Hamilton

Secondo il teorema per cui A verifica lo suo eq. caratteristico, si deduce che

Ogni potenza di A può essere espressa come combinazione delle prime $n+1$

$$A^n = d_0(t) I + d_1(t) A + \dots + d_{n-1}(t) A^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} d_i(t) A^i$$

Per trovare gli d_i , si usa lo stesso teorema, impostando che

$$e^{At} = d_0(t) I + d_1(t) \lambda_1 + \dots + d_{n-1}(t) \lambda_n$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 \lambda_1 & \lambda_1^{n-1} \\ 1 \lambda_2 & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 \lambda_n & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ \vdots \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

Nel caso di autovettori distinti.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X \quad \text{gli autovettori sono } -1 \text{ e } 2. \text{ Dal teorema}$$

$$A^n = d_0 I + d_1 A \quad \begin{cases} d_0 - d_1 = e^{-t} \\ d_0 + 2d_1 = e^{2t} \end{cases} \quad \text{Da cui si ricava } d_0 \text{ e } d_1 \text{ e si sostituiscono}$$

A questo punto otteniamo gli strumenti per risolvere

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A X(t) + B u(t) \\ Y(t) = C X(t) + D u(t) \\ X(t_0) = x_0 \end{cases} \quad e^{-At} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{-At} B$$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{-At} X(t) \right] = e^{-At} B$$

E quindi, come nel caso scalare,

$$X(t) = e^{-A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

e quindi, sostituendo, si ricava $Y(t)$

Supponiamo di avere un sistema strettamente proprio ($D=0$) e consideriamo il sistema omogeneo.

$\dot{x} = Ax$. Sono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \bar{\lambda}_3, \lambda_4, \bar{\lambda}_4$ gli autovectori di A , con relativi autovettori, eventualmente generalizzati per λ_3 .

Definiamo $q = M^{-1}x$ e $q_0 = M^{-1}x_0 \Rightarrow x = Mq$
Il vettore q si dice di coordinate modali.

$$\dot{x} = Ax \Rightarrow M\dot{q} = A M q \Rightarrow \dot{q} = M^{-1}AMq = Jq$$

Quindi la matrice A nelle coordinate modali è di jordan! Nel caso sopra

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_3 \\ & & & \lambda_4 \\ & & & \bar{\lambda}_4 \end{bmatrix} \quad e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & & & \\ & & e^{\lambda_3 t} & & & \\ & & & e^{\lambda_3 t} + e^{\bar{\lambda}_3 t} & & \\ & & & & e^{\bar{\lambda}_3 t} & \\ & & & & & e^{\lambda_4 t} \\ & & & & & & e^{\bar{\lambda}_4 t} \end{bmatrix}$$

Da cui $q(t) = e^{Jt} q_0 = \begin{bmatrix} q_{01} e^{\lambda_1 t} \\ q_{02} e^{\lambda_2 t} \\ q_{03} e^{\lambda_3 t} (++) \\ q_{03} e^{\bar{\lambda}_3 t} \\ q_{04} e^{\lambda_4 t} \\ q_{05} e^{\bar{\lambda}_4 t} \end{bmatrix}$

Si tratta ora di ricavare $x(t)$ date le sue coordinate modali:

$$x(t) = Mq = Me^{Jt}q_0 = Me^{Jt}M^{-1}\begin{bmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_0 \end{bmatrix} =$$

$$= [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_3^* \ N_4 \ \bar{N}_4] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & & & \\ & & e^{\lambda_3 t} + e^{\bar{\lambda}_3 t} & & & \\ & & & e^{\lambda_3 t} & & \\ & & & & e^{\lambda_4 t} & \\ & & & & & e^{\bar{\lambda}_4 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1^T \\ \mu_2^T \\ \mu_3^T \\ \mu_3^T (++) \\ \mu_4^T \\ \bar{\mu}_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{01} \\ X_{02} \\ X_{03} \\ X_{04} \\ X_{05} \\ X_{06} \end{bmatrix} =$$

$$= N_1 \mu_1^T X_{01} e^{\lambda_1 t} + N_2 \mu_2^T X_{02} e^{\lambda_2 t} + N_3 \mu_3^T X_{03} (++) e^{\lambda_3 t} + N_3 \mu_3^T X_{03} e^{\bar{\lambda}_3 t} + N_4 \mu_4^T X_{04} e^{\lambda_4 t} + X_{05} \bar{N}_4 \bar{\mu}_4^T e^{\bar{\lambda}_4 t}$$

La relazione tra $x(t)$ e $q(t)$ mi dice che, volendo $x(t) = e^{\lambda_1 t} c$,
dove intervengono in modo che le condizioni iniziali del vettore modale
rendano nulli gli elementi diversi da $e^{\lambda_1 t}$.

Studieremo tre aspetti dei sistemi dinamici:

- Stabilità (cosa succede allo stato di un auto se ci sono perturbazioni?)
- Controllabilità (Quali sono le propriezà necessarie per gestire lo stato nel tempo?)
- Osservabilità (Come faccio a sapere in ogni istante la velocità?)

L'analisi dei sistemi consiste nello studio di alcune proprietà intrinseche del loro modello matematico. Le proprietà interne dipendono dalla struttura del sistema e non da sollecitazioni esterne; le proprietà esterne dipendono dalle relazioni interno-ingresso-uscita. Lo studio di tali proprietà può essere fatto con i su. pdT (o eg. diff.) entro tutti raggruppamenti del modello (nel nostro caso, lineare tempo-invariante).

La stabilità

Dati istante iniziale t_0 , stato iniziale $x(t_0)$ e ingresso $u(t)$ si dice **movimento** il suo andamento al tempo corrente ottenuto come soluzione del sistema di eq. di costitutività

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases}$$

Quindi $\tilde{x}(t)$ vettore di stato è un movimento se soddisfa il sistema.

Si parla di **movimento d'equilibrio** $x_E(t)$ se si verifica

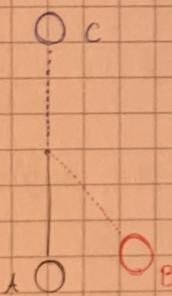
$$\begin{cases} 0 = \dot{x}_E = f(x_E, u, t) \\ y = g(x_E, u, t) \end{cases}$$

Un movimento d'equilibrio non è necessariamente costante: un corpo che ruota attorno allo zero è in equilibrio (se la traiettoria è perturbata allora si sistema), ma il vettore velocità varia in direzione. Per trovare i movimenti d'equilibrio, si risolve

$$0 = f(x, u, t)$$

Una perturbazione è la variazione di un movimento dovuta a variazioni di condizioni iniziali e/o di ingressi.

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t) + \delta x(t)$$

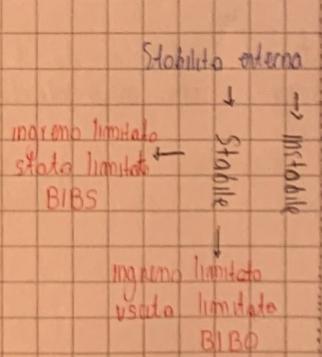
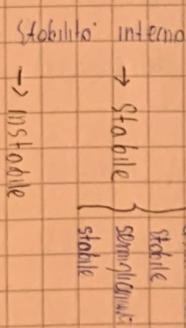


Se il pendolo è in A, siamo in una situazione di equilibrio. Una perturbazione lo può portare in B, ma il pendolo tenderà a tornare in A (eq. stabile). Se il pendolo è in C, una variazione delle condizioni iniziali lo allontanerà da C, senza che vi torni mai (eq. instabile).

Per un sistema lineare tempo-invariante, l'unica condizione di equilibrio è l'origine

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x_0 \\ x(t) &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} e^{\lambda_1 t} \\ x_{20} e^{\lambda_2 t} \\ x_{30} e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Analizzeremo le seguenti classificazioni di equilibrio



Allo stesso tempo potrei avere una limitata di stabilità che mi porta all'equilibrio per $t \rightarrow +\infty$

Se non ho $x_{10} = 0$, allora non ho mai equilibrio. Per questo riguardo l'uscita

$$y(t) = a x_{10} e^{\lambda_1 t} + b x_{20} e^{\lambda_2 t} + c x_{30} e^{\lambda_3 t}$$

La valutazione dell'equilibrio altro dipende anche dal vettore C : Se $a=0$, $y(t)$ va a 0.

$\tilde{x}(t)$ è stabile se, $\forall \epsilon > 0$ $\exists T > 0$ tale che, per tutti gli stati iniziali x_0 per cui

$$\|x_0 - \tilde{x}_0\| < \gamma, \text{ si ha } \|s x(t)\| = \|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \epsilon \quad \forall t > T$$

mi dice che, se la perturbazione non si discosta giù di un fattore γ , allora anche il movimento non si allontana mai più di ϵ . Non è detto che torni o coincidere con $x(t)$.

$\tilde{x}(t)$ si dice asintoticamente asintoticamente stabile. Se

- è stabile
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \tilde{x}(t)\| = 0$

$\tilde{x}(t)$ si dice instabile se non soddisfa le condizioni di stabilità.

La stabilità di un movimento non implica la stabilità di un sistema: se ad un movimento stabile si modifica u o x_0 , non è detto che continui ad essere stabile. La linearità semplifica l'analisi.

Teorema Un movimento (di equilibrio) di un sistema lineare è stabile, asintoticamente stabile o instabile se e solo se tutti i movimenti del sistema lo sono a loro volta.

Quindi, ad esempio, se un movimento è stabile (asintoticamente) rispetto a perturbazioni della stato iniziale / ingromo, anche qualsiasi altro movimento del sistema è stabile (ost.) rispetto a perturbazioni di si / ingromo.

Per sistemi lineari, se si può occupare del sistema omogeneo equivalente $\dot{x} = Ax + Bu$

\tilde{x} movimento nominale $\rightarrow \tilde{x}_0 = \tilde{x} + s\tilde{x}$

$$\tilde{x}_p - \tilde{x} = A(\tilde{x} + s\tilde{x}) + Bu - A\tilde{x} - Bu \Rightarrow s\dot{x} = A s x$$

Quindi

- è sufficiente stabilire la stabilità del movimento nullo originale
- si può parlare indifferenziamente di stabilità di mov. di eq o stato di eq. del sistema
- Tutto quello che serve è dato da A .

• Stato di equilibrio $x(t) = 0 \Leftrightarrow x_e = 0$

• Requisito di stabilità $\|e^{At}\| \leq M \quad \forall t > 0$

• Requisito di stabilità asintotica $\|e^{At}\| \rightarrow 0$

Questi sono proprieta di stabilità interna (non dipendono da particolari condizioni iniziali, ma solo dagli autovalori di A)

Un SL è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori di A hanno parte reale strettamente negativa.

Un SL è stabile se e solo se tutti gli autovalori di A sono a parte reale negativa o nulla, ma questi hanno una algebra e geometria uguali.

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x & \text{instabile} \\ & \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{asintoticamente stabile} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & \text{stabile} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{instabile} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \text{instabile} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{stabile} \end{array}$$

BIBO e **BIBS** si riferiscono alla limitatezza dello stato o dell'uscita di un sistema avendo ingreni limitati.

BIBS

$$\forall t_0, \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$$

$$\|x(t)\| < \delta, \|f(t)\| < \epsilon \Rightarrow$$

$$\|x(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) f(\tau) d\tau \right\| < \epsilon$$

BIBO

$$\forall t_0, \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$$

$$\|x(t)\| < \delta, \|f(t)\| < \epsilon \Rightarrow$$

$$\|y(t)\| < \epsilon$$

metodo di Lyapunov

L'idea di Lyapunov è che, se l'energia totale di un sistema è costantemente dissipata, esso evolve verso l'equilibrio. Quindi, lo studio dell'equilibrio studiando una funzione scivore corrispondente all'energia totale. L'energia meccanica rileva l'ampiezza del vettore di stato, ma allo stesso tempo si nota che la sua variazione nel tempo caratterizza le proprietà di stabilità del sistema.

Inoltre. Se $\dot{V} < 0$, allora $V(x) \rightarrow 0$ e il sistema è asint. stabile

Si chiama funzione di Lyapunov $V(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

V è definito positivo (semidefinito) in x' se

$$V(x') = 0, \exists \delta > 0 \Rightarrow V(x) > 0 \quad (\forall x : \|x - x'\| < \delta, x \neq x')$$

Analogamente per le negative e semidefinite negative.

Teorema di Lyapunov Sia $V(\cdot)$ f.d.L. continuo con derivate parziali continue. Si consideri lo stato di equilibrio del sistema $\dot{x}_E = f(x_E) = 0$ autonomo

Sia $V(x) > 0$ eccetto che in x_E . Si calcoli $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$

Se $\dot{V}(x) < 0$, lo stato di equilibrio è stabile

Se $\dot{V}(x) > 0$, lo stato di equilibrio è asintoticamente instabile

Se $\dot{V}(x) = 0$, lo stato di equilibrio è instabile

Quanto è cs per la stabilità, ma non ci dà informazioni su come calcolare V .

$\dot{x} = (1-x)^5$ Una f.d.L. debole continua, derivate prezzi continui, definito positivo in ogni punto e nullo in x_E (in questo caso $x_E = 1$)

$$V(x) = (1-x)^2 \quad \dot{V}(x) = -2(1-x)^6 \quad \text{è definito negativo, quindi } x_E \text{ è asintoticamente stabile.}$$

(Vedere altro esempio). Per i sistemi lineari stazionari, lo teorema si semplifica, riducendo su allo studio della stabilità null'origine

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_e(t) = \mathbf{0} \end{cases}$$

Dato P simmetrica e definito positivo ($P > 0$),
si puo' scrivere

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} > 0 \text{ con } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Bisogna studiare il segno della variazione totale dello f di L.

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T A^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (A^T P^T + P A) \mathbf{x}$$

$$\text{Si pone } -Q = A^T P^T + P A, \quad \dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$$

$$\text{Si dice equazione di Lyapunov} \quad A^T P^T + P A = -Q$$

Un sistema lineare autonomo e' osinteticamente stabile se c'è solo se, \forall matrice simmetrica Q definito positiva, esiste P simmetrico e definito positivo per cui

$$A^T P^T + P A = -Q$$

Dato una matrice

A , tutti i suoi autovalori hanno parte reale negativa se e solo se esiste P simmetrico definito positivo e Q simmetrico definito positivo per cui

$$A^T P^T + P A + Q = 0 \quad (P \text{ unico } \forall Q)$$

Quest'ultimo teorema

lega lo teorema di Lyapunov con quanto detto sulla stabilità di LT1.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ instabile. Consideriamo Q simmetrico def. positivo

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} > 0 & 0 \\ 0 & q_{22} > 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T P^T + P A = -Q \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} q_{12} & q_{12} \\ -2q_{12} & -2q_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{11} & -2q_{12} \\ q_{12} & -2q_{22} \end{pmatrix} = -Q \quad = \begin{pmatrix} -q_{11} & \\ & -q_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2q_{11} & -q_{12} \\ -q_{12} & -4q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_{11} & 0 \\ 0 & -q_{22} \end{pmatrix} = \begin{cases} q_{12} = 0 \\ q_{11} = -\frac{q_{11}}{2} < 0 \\ q_{22} = \frac{q_{22}}{4} > 0 \end{cases}$$

P non e' definito positivo,
quindi il sistema e' instabile

Stabilità con lo PdT

$$G_x^x = (sI - A)^{-1} = H(s)$$

$$G_u^x = (sI - A)^{-1} B$$

$$G_x^y = C (sI - A)^{-1}$$

$$G_u^y = C (sI - A)^{-1} B + D$$

Un sistema lineare autonomo è

- **Stabile** Se tutti i poli di ogni elemento h_{ij} hanno parte reale < 0 tranne alcuni, con molteplicità unitaria, con parte reale nulla.

- **Asintoticamente stabile** Se tutti i poli di ogni elemento di h_{ij} hanno parte reale < 0 .

Ma su qui' volutore lo stabilità do $G_u^y = C (sI - A)^{-1} B + D$? No! ci può essere uno concetto, se nello spazio di trasferimenti, mai stato che magari usata. In $H(s)$ abbiamo sicuramente tutti i poli. Tuttavia, noi abbiamo tra le mani G_u^y , e valuteremo la stabilità sulla base di questo.

Si parla di cancellazioni zero-polo quando il polo che si cancella sta a valle della reazione, polo-zero quando sta a monte.

$$\begin{array}{c} u \\ \longrightarrow \end{array} \boxed{\frac{1}{s-1}} \xrightarrow{N} \boxed{\frac{s-1}{s+1}} \xrightarrow{Y} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 - 2u \\ \dot{v} = x_1 \\ y = x_2 + v \end{cases}$$

La ISU compiono si ottiene sostituendo $v = x_1$ nello secondo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad C(s) = C (sI - A)^{-1} B$$

$$y = [1 \ 1] x \quad sI - A = \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 2 & s+1 \end{pmatrix}$$

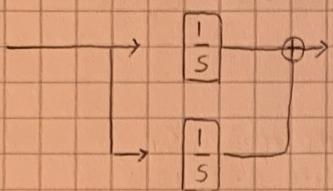
$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)(s-1)} & 0 \\ -\frac{2}{(s+1)(s-1)} & \frac{1}{(s+1)(s-1)} \end{pmatrix}$$

Il sistema è internamente instabile, visto che in $H(s)$ abbiamo 1 come polo.

$$G_u^x(s) = H(s) B = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} \\ -\frac{2}{(s+1)(s-1)} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Il sistema è BIBS instabile,} \\ \text{perché } G_u^x \text{ ha un polo in } i$$

$$G_u^y(s) = C H B = \frac{1}{s+1} \rightarrow \text{Il sistema è BIBS stabile}$$

La perdita di componenti dinamiche qui' avvenire anche senza una cancellazione, ma dalla struttura in parallelo di diagrammi a blocchi. Non ovviamente se e solo se i denominatori sono primi fra loro.



Uno dei due integratori non compare nello fdT: $C(s) = 2/s$

Per quanto lo stabilità interno di un sistema qui' more debba solo da $H(s)$, comunque G_u^x e G_u^y sono indispensabili per valutare la stabilità esterna

- Un sistema tempo invarianti è stabile BIBS se e solo se i poli degli elementi di G_u^x hanno tutti parte reale negativa
- Un sistema tempo invarianti è stabile BIBO se e solo se i poli degli elementi di G_u^y hanno tutti parte reale negativa

I poli di G_u^x e G_u^y sono sottinsiemi di quelli di $H(s)$, quindi se un sistema è asintoticamente stabile, è anche BIBO / BIBS stabile.

Criterio di Routh - Hurwitz

E' una tecnica per il calcolo delle radici di un polinomio. In fatto, dato $D(s)$ denominatore di uno fdT, o mi interessa che sia stabile a meno, e quindi stabilire i segni delle parti reali delle sue radici, senza calcolarle.

O.N. affinché $C(s)$ sia stabile è che, dati a_i i coefficienti del suo denominatore

1. $a_1 \neq 0$ $\forall i$
2. Tutti i coefficienti a_i devono avere lo stesso segno

Una volta verificato questo CN, CS affinché sia stabile asintoticamente è che, fatto lo tabellone di RH, la prima colonna abbia tutti termini positivi.

S^n	a_n	a_{n-2}	...	0	con	$b_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$
S^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	...	0		
S^{n-2}	b_1	b_2				$b_2 = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_{n-3} a_n}{a_{n-1}}$
S^{n-3}	c_1	c_2				$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$
S^0	:	:				

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$$

$$\frac{1}{s^4 + 1} \rightarrow \text{Instabile}$$

$$\frac{1}{s^3 + 2s^2 - s + 3} \rightarrow \text{Instabile}$$

$$\frac{s+1}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8}$$

(verifica CN)

$$s^3 \quad 1 \quad 12 \quad 0$$

$$s^2 \quad 6 \quad 8 \quad 0 \quad \text{E' stabile}$$

$$s^1 \quad 32/3 \quad 0$$

$$s^0 \quad 8$$

$$\frac{s^2 + 1}{s^3 + s^2 + 2s + 8}$$

(verifica CN)

$$s^3 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad \text{Non e' stabile}$$

$$s^2 \quad 1 \quad 8 \quad 0$$

$$s^1 \quad -6 \quad 0$$

$$s^0 \quad 8$$

Il numero di radici a parte reale positiva coincide con il numero di variazioni di segno nello stesso colonna di CII

- Se un elemento dello stesso colonna e' nullo, esso viene sostituito con un e positivo arbitrariamente piccolo e lo tabella completato.
- Se un'intera riga e' tutta di zeri:

$$D(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50$$

$$s^5 \quad 1 \quad 24 \quad -25 \quad 0$$

$$s^4 \quad 2 \quad 48 \quad -50 \quad 0$$

$$s^3 \quad 0 \quad 0$$

Si costruisce un polinomio con la riga precedente

$$y(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

Si deriva, e alla riga di tutti i si sostituiscono i coefficienti della derivata

$$s^3 \quad 8 \quad 96 \quad 0$$

$$y'(s) = 8s^3 + 96s$$

$$s^2 \quad 24 \quad -50$$

$$s^1 \quad 112.7 \quad 0$$

$$s^0 \quad -50$$

Uno variazione di segno, un solo con parte reale positiva

In esempio di stabilizzazione di un sistema

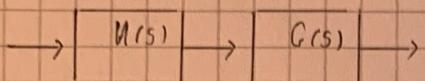
$$G(s) = \frac{20}{(s-1)(s-2)}$$

E' instabile, avendo due poli positivi. Infatti, calcolando la risposta impulsiva $U_{CS}(s) = 1$, quindi si annulla $G(s)$, si ottiene

$$y(t) = -10e^t + 20e^{2t} \rightarrow +\infty$$

La stabilizzazione si può fare sia ad anello aperto che chiuso

• Open loop



All'inizio con U il sistema sia stabilizzato gli zeri di U devono essere pari ai poli di G per avere cancellazione. In questo modo, non agiamo nella risposta controllata. Il problema è che ciò ha senso in teoria: nulla grafico avremo sempre un errore anche infinitesimale. Bene U , o perché G aggressivo

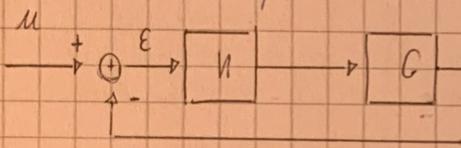
che non permette la cancellazione, o perché non possiamo il sistema in modo grossolano.

Sia ad esempio $U_{CS}(s) = \frac{(s-2)(s-0.9)}{(s+1)(s+2)}$ i nuovi poli sono uno scelta di progetto

Considerando $U \cdot G$ con un ingresso impulsivo, $y(t) = 0.03e^{-t} - 19e^{-19t} - 19.3e^{-19.3t}$. L'esponentiale è smorzato da una costante piccolo per i piccoli, ma y va comunque a $+\infty$.

Aumentando l'accuratezza riduciamo il residuo, ma il sistema sarà comunque instabile.

• Closed loop



Si sceglie una retroazione unitaria, ma lo stem sarebbe stato per la non unitaria, sarebbe solo cambiato di segno la sensitività complementare T_{CS}

$$T_{CS}(s) = \frac{GU}{1+GU}$$

Per primo caso, consideriamo un controllore proporzionale, che ammiglio di un fattore U gli ingressi

$$T(s) = \frac{20U}{s^2 - 3s + 2 + 20U}$$

Il sistema è instabile, perché i coeff. non possono avere lo stesso segno. Ci deve essere allora un contributo del quinto ordine che modifichi quel -3 e renda il coefficiente positivo.

$$U(s) = U(s+z) \Rightarrow T(s) = \frac{20U(s+z)}{s^2 + (20U+3)s + 2 + 20Uz}$$

All'inizio sia stabile, basta $U > 3/20$ e $z > 0$. Siamo $U = z = 1$

Non abbiamo limito, perché U_{CS} non è causale! Si aggiunge un polo in -20 , e si lascia libero U .

$$T(s) = \frac{20U(s+1)}{s^3 + 17s^2 + (20U-58)s + 40 + 20U}$$

Per lo stabilità, si usa RH

$$\text{CN: } 20U - 58 > 0, \quad 40 + 20U > 0 \\ \Rightarrow U > 2.9$$

$$S^3 \ 1 \quad 20U - 58 \quad 0$$

$$S^2 \ 17 \quad 40 + 20U \quad 0$$

$$S \ \frac{17(20U-58) - 40 - 20U}{17} \quad 0$$

$$S \ 40 + 20U \quad 0$$

La prima riga deve essere positiva, e dal terzo elemento si impone $U > 2.95$

$$U(s) = 7.9 \frac{(s+1)}{(s+20)}$$

Osservabilità

Supponiamo di avere un sistema in cui si verifica una cancellazione zero-polo. Questo avviene nell'gradotto $C(SI - A)^{-1}$, e indica l'assenza di osservabilità. Questo significa indicare la capacità di determinare, in un tempo finito, lo stato del sistema $x(t)$ noto il segnale d'uscita $y(t)$. Non posso quindi ricorrere all'evoluzione del vettore di stato.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & t e^{2t} \\ e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}$$

Noto $y(t)$, allora $x_1(t) = y(t)$ ma $x_2(t) = x_1(t)$ si può ricavare

$$x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_2(t) = \dot{y}(t) - 2y(t) \quad \text{Conoscendo } x_1 \text{ e } x_2, \text{ il sistema è osservabile}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

$x_2(t) = y(t)$, ma non si può ricavare x_1 in alcun modo.

Sia

$$C = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Il sistema è osservabile se il rango di C è massimo, ossia n . Se accade, in $C(SI - A)^{-1}$ non perde autovettori presenti in A .

Controllabilità

Le cancellazioni polo-zero avvengono nel prodotto $(SI - A)^{-1}B$, e indicano l'assenza di controllabilità / raggiungibilità.

Inoltre la capacità di portare lo stato iniziale in un punto qualsiasi del proprio spazio vettoriale

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

non controllabile, perché

$$x_1(t) = 2x_2(t)$$

Un sistema è controllabile se e solo se $B = (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$ ha rango n

Def di modo naturale?

Risposta temporale

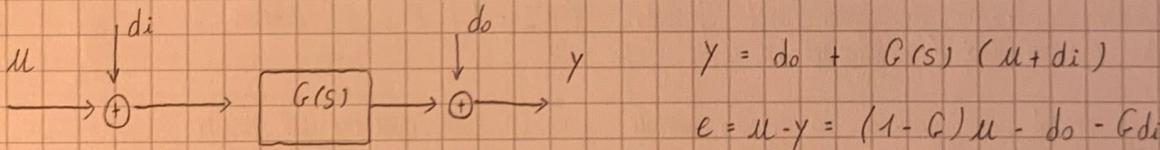
L'analisi di un sistema si fa per determinare le sue prestazioni, e l'attualità di un sistema di controllo. Oltre a stabilità, osservabilità e controllabilità, vedremo la risposta ai comandi (precisione, accuratezza, velocità di risposta) e reazioni ai disturbi e ai rumori (un buon sistema non reagisce ai rumori, solo agli ingaggi). Inoltre, siamo interessati alla risposta nominale: se ne G è un'approssimazione del \tilde{G} . Vorremo che lo G garantito per G vada bene anche per \tilde{G} . Determineremo una serie di parametri che ci faranno fare la analisi. Considereremo solo sistemi controllabili e osservabili, in cui lo stabilità tramite $f(t)$ garantisce sia quello interno che esterno (per $G \equiv \text{eig}(A)$).

La risposta temporale è l'andamento del segnale di uscita quando un sistema è sottoposto a determinati segnali in ingresso. Sulla base della risposta ad un ingresso impulsivo, stabiliamo lo stabilità dell' sistema. Quando $y(t)$ tende ad un valore costante, si distinguono due zone della risposta, transitorio e a regime. Ognuna di tali specifica certe proprietà del sistema.



$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

La risposta a regime ha avuto solo per ~~stabil~~ sistemi asintoticamente stabili. Lo studio di un sistema OL per lo r. a regime è banale (per quanto il sistema possa essere complesso).

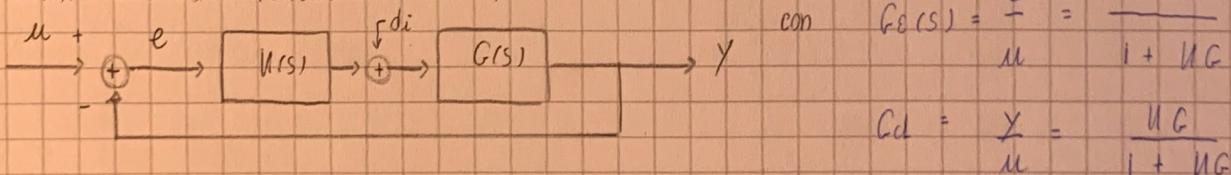


Vogliamo sapere quando vale il segnale a +oo.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) U(s) + \lim_{s \rightarrow 0} s do(s) + \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) di(s)$$

Do stiamo si vuol avere con $U(s)$, e riuscire immediatamente a sapere quanto vale ordinamento ed errore a +oo.

Consideriamo la retroazione (unitaria)



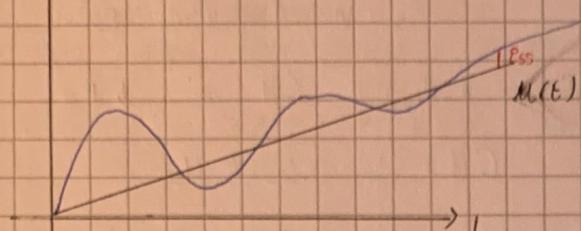
- Noi vorremo che
- Se $du = \emptyset$, per $t \rightarrow +\infty$ $y = u$ ($E = 0$)
 - Se $u = \emptyset$, $du \neq 0$ per $t \rightarrow +\infty$ $y = \emptyset$

Uno dei parametri di progetto di un controllore c'è l'errore a regime,
parametro base per la valutazione della risposta a regime. Se si ha lo
stabilità assintotica, allora sia l'errore che l'usura si possono calcolare
con il th del valore finale

$$E_{ss} = \lim_{t \rightarrow +\infty} u - y = \lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s)$$

La stabilità assintotica
è CN per applicare
il th del valore finale

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s y(s)$$



Tale parametro è valutato con ingressi standard, ovvero gradini, rompi e parabole

$$H(t-t_0) \rightarrow \frac{1}{s} e^{-tos}$$

$$\text{Rombo } (t-t_0) \rightarrow \frac{1}{s^2} e^{-tos}$$

$$\text{Parabola } (t-t_0) \rightarrow \frac{1}{s^3} e^{-tos}$$

Lo strumento di calcolo è la funzione di sensitività

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)U(s)}$$

In particolare, dato lo ingresso di ampio segnale GU,
si calcola sulla base del numero di poli in o

$$U(s)G(s) = \frac{u_0 \prod_i (s+z_i)}{s^\delta \prod_u (s+p_u)}$$

E dunque \downarrow con $j = 0, 1, 2, \dots$

Si può generalizzare il calcolo dell'errore a regime sulla base del tipo di GU e di ut

tipo ϕ , ingresso a gradini unitario

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} S(s)U(s)s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + h_0 \frac{\prod_i (s+z_i)}{\prod_u (s+p_u)}} = \frac{1}{1 + h_0 \cdot \infty} = 0$$

tipo 0, ingresso a gradini unitario

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} S(s)U(s)s =$$

$$\frac{1}{s^2} \cdot s \cdot \frac{1}{1+GU} = \frac{1}{sGU}$$

tipo 0, rombo

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + h_0 \frac{\prod_i (s+z_i)}{s \prod_u (s+p_u)}} = \frac{1}{1 + h_0 \cdot \infty} = 0$$

tipo 1, rombo

tipo 2, rombo

$$h_{00} = \frac{6 \prod_i (s+z_i)}{8 \prod_u (s+p_u)}$$

$$\frac{1}{s} \frac{\prod_i (s+z_i)}{h_0 \prod_u (s+p_u)}$$

\downarrow
 ∞

$$\frac{1}{s} \frac{s \prod_i (s+z_i)}{h_0 \prod_u (s+p_u)}$$

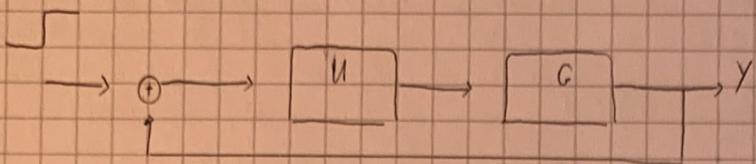
\downarrow
inizio

$$\frac{1}{s} \frac{s^2 \prod_i (s+z_i)}{h_0 \prod_u (s+p_u)}$$

\downarrow
0

Quindi, ho errore infinito se il tigo e' minore del grado di almeno 2
 infinito se il tigo e' minore del grado di 1
 nullo se il tigo e' > del grado.

Ho un ingreno a gradino.



$$G(s) = \frac{0.2214}{s + 0.8432}$$

Si vuole annullare Ess

Avendo un ingreno a gradino, Ess e' nullo solo se il tigo di GU e' > 1

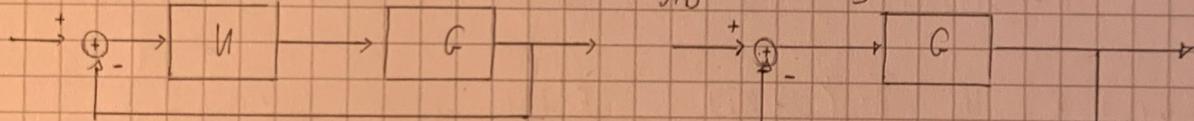
$$\text{Sia quindi } U(s) = U_0 / s \quad GU = 0.2214 U_0$$

$$\text{Adesso devo imporre la stabilità di } T(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{U_0}{s(s+0.8432)}$$

$$T(s) = \frac{GU}{1 + GU} = \frac{0.2214 U_0}{s^2 + 0.8432s + 0.2214 U_0} \Rightarrow U_0 > 0$$

Qui si nota come cambia la cosa da anello unitario a non unitario.

$$G(s) = \frac{A}{s+B} \quad U = \frac{U_0}{s}$$



$$T(s) = \frac{GU}{1 + GU} =$$

$$= \frac{\frac{AU_0}{s(s+B)}}{\frac{s^2 + Bs + AU_0}{s(s+B)}} =$$

$$\frac{AU_0}{s^2 + Bs + AU_0}$$

$$T(s) = \frac{C}{1 + GU}$$

$$= \frac{\frac{A}{s+B}}{1 + \frac{AU_0}{s(s+B)}} =$$

$$\frac{As}{s^2 + Bs + AU_0}$$

Risposta transitoria

Permetti di studiare 1. Stabilità 2. Ampiamento massimo della componenti oscillante
2. Velocità di risposta.

Lo risposto transitorio si voluto sulla base di ingreni a gradino e sulla volatilità del sistema in base all'ordine

I sistemi del primo ordine sono dello forma $G(s) = \frac{a}{s+b}$ $\Rightarrow y(t) = \frac{a}{b} (1 - e^{-bt})$

Si definisce costante di tempo $T = 1/b$,
e indica quanto tempo impiega il sistema a raggiungere il valore di regime.

$$\text{Infatti } y(T) = 63\% \quad y_\infty = 63\% \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.63 \cdot \frac{a}{b}$$

Esempio

$$\text{Sia } G(s) = \frac{1.8}{s+5}$$

Si vuole $T = 0.1 s$, Erogino non superiore a 0.02

Potremmo struttare un controllore in OL per imparare le due condizioni con uno controllore zero-golo, ma supponiamo che non è lo caso ottimale, nemmeno solo teorico.

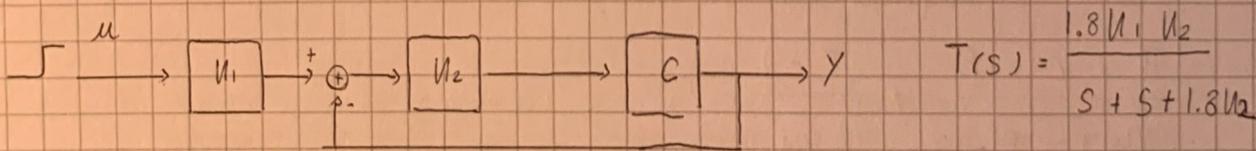
$$U(s) = U_0 \frac{s+5}{s+10} \Rightarrow G \cdot U = U_0 \frac{1.8}{s+10} \quad 10 \cdot 1.8 < 0.2$$

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{s} + \frac{1.8}{s+10} \right) = \frac{1}{0} + \frac{1.8}{10} = 0.18$$

$$s(\mu - y) = s \left(\frac{1}{s} - \frac{1.8}{s+10} \right) = 1 - \frac{1.8}{10} < 0.02$$

$$\mu > 5.444$$

Per realizzarlo ad anello chiuso non ci basta un solo controllore proporzionale, avendo due requisiti indipendenti



$$\frac{1}{s+1.8 U_1} = 0.1 \Rightarrow 1 = 0.5 + 0.18 U_1 \Rightarrow U_2 = 2.7778$$

Si calcola l'errore a regime

Si potranno anche usare
uno retroazione non unitaria.

$$E_{ss} = 1 - \frac{s U_2}{s+10} = 1 - \frac{U_2}{2} < 0.02$$

Si potranno considerare anche
l'errore tra 0 e -0.02. $U_1 > 1.96$

L'analisi dello risposto transitorio si fa solo con il gredino. Il parametro T si usa per i sis. del primo ordine. Vediamo cosa succede per il secondo ordine.

Le configurazioni dei due poli sul piano di Gauss sono omotetiche. Inoltre, consideriamo solo i casi con $\operatorname{Re}(\rho_1) > 0$, avendo sistemi stabili. Se $\operatorname{Re}(\rho_1) = 0$ e $\operatorname{Im}(\rho_1) \neq 0$, sono nel caso di un'oscillazione autogenerata, non interattiva. Se i poli sono reali, allora mi ricordo ad un sistema del I ordine. Prendiamo allora poli comp. coniug.

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

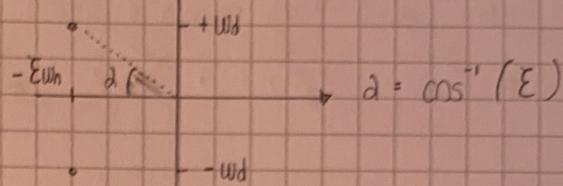
ζ è il coefficiente di smorzamento

w_n è la pulsazione propria non smorzata

w_d è la pulsazione propria smorzata

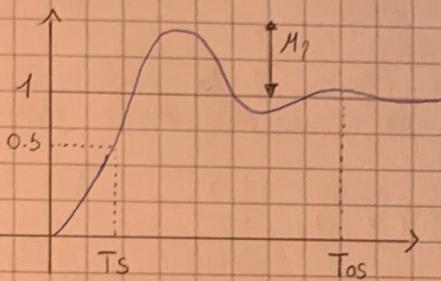
$$\text{I poli sono } \rho_{1,2} = -\zeta w_n \pm j w_d$$

$$w_d = w_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$



Più ζ diminuisce, più ci avviciniamo a $\operatorname{Im}(\rho)$ e $w_n \approx w_d$

La risposta transitorio è influenzata da ζ e w_n



Sarà chiamata ampiezza massima: max ampiezza di oscillazione.

Tempo di solita: indica lo t di risposta.

Tempo di ossontamento: quando si raggiunge il regime.

M_2 viene calcolato come l'errore percentuale tra y_{max} e $y_\infty = 1$

$$M_2 = \frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty} \cdot 100 = -\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \text{Dipende solo da } \zeta!$$

M_2 c'è anche un indice di stabilità: più ζ è basso, più y oscilla prima di raggiungere il regime

T_s è il tempo necessario affinché i sistemi arrivino per la prima volta al valore di regime (M_2 è sommamente def. tipo o.s.y_{in}). Se $y_\infty = 1$,

$$T_s = \frac{\pi - \cos^{-1} \zeta}{w_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi - \alpha}{w_d}$$

$$T_{os} = -\frac{1}{\zeta w_n} \ln(\zeta)$$

Tempo oltre il quale la differenza tra y e y_∞ è inferiore a ζ , calcolato come percentuale dell'errore di regime stesso

Tempo di dimensionamento

È il tempo al quale l'ampiezza dell'oscillazione è metà del valore del tempo nullo

$$G(s) = \frac{100(s+2)}{(s+1)(s-1)}$$

Vogliamo un controllore che renda il tempo di dimezzamento minimo di 2 secondi

il sistema al netto chiuso deve essere stabile e avere i poli con parte reale < -2

Si sceglie un controllore proporzionale:

$$G_{cs} = \frac{100 K}{(s+2)}$$

Allora sia stabile e con la condizione sui poli, si pone $s = z - 2$, shiftando tutto a sx di 2, e si applica RH

$$100K - 2 > 0 \Rightarrow K > 0.02$$

$$G(s) = \frac{4}{s + 0.8}$$

controllore con

$$G(z) = \frac{100Kz}{z^2 + 10Kz - 2z + 3}$$

- ($E_{stes} = 0$)
- $M_p \leq 10\%$
- $T_{os} \leq 10 \text{ sec}$

Primo di tutto si imposta la struttura di K che permetta $E_{st} = 0$. E' necessario che il tpo di GK sia 1, quindi $K(s)$ deve avere un polo nell'origine

$$M_p \leq 0.1 \rightarrow e^{-\frac{\pi}{T_1 - \varepsilon^2}} \leq 0.1 \quad \ln(10) \times \frac{\pi}{T_1 - \varepsilon^2}$$

$$5.3(1 - \varepsilon^2) \leq \varepsilon^2 \pi^2 \quad 5.3 \leq 15.17 \varepsilon^2 \quad \varepsilon \geq 0.591$$

$$T_{os} \approx \frac{4}{\varepsilon w_n} \leq 10 \quad w_n \leq 0.68$$

$$\text{Sia allora } K(s) = \frac{K}{s}$$

$$G_{cl} = \frac{4K}{s^2 + 0.816s + 4K}$$

$$w_n = 2\sqrt{K} \leq 0.68 \quad K \leq 0.1156$$

$$0.816 = 2\varepsilon w_n = 2\varepsilon 2\sqrt{K} \quad K = 0.1156 \rightarrow \varepsilon = 0.6 \quad \checkmark$$

Per sistemi di ordine maggiore del II le cose si complicano, e non si puo' pensare di approssimarli con quelli del II ordine. Inoltre, si hanno problemi anche se ci sono zeri.

Non ci sono approssimazioni semplici per il calcolo dei parametri, anche se lo risposta viene caratterizzata con gli stessi parametri. Si puo' fare uno stima tramite poli dominanti

I poli dominanti sono quelli (reali o complessi) molto piu' vicini agli altri rispetto all'asse immaginario, e sono i piu' critici per la risposta del sistema. La dominanza non e' assoluta, ma sempre in funzione della posizione degli altri poli. Di solito ci si riconduce a I o II ordine a poli di occitare un errore.

Nello stimare G_{cs} con i poli dominanti, non possiamo ignorare le caratteristiche del sistema in regime (zeri e guadagno)

Effetto degli zeri

Uno zero si può definire in più modi :

- è la radice del numeratore di uno FdT
- è la frequenza che annulla lo FdT

L'aspetto importante è che gli zeri influenzano l'ampiezza dello risposto (i residui). Se uno G ha degli zeri, lo FdT ad anello chiuso continuerà ad avere gli stessi.

Poiché $G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{\Delta(s)} \cdot C \cdot \text{Adj}(sI - A) \cdot B$, allora

il polinomio del numeratore di G, i cui zeri sono gli zeri del sistema, è $C \cdot \text{Adj}(sI - A) \cdot B$

Consideriamo FdT del primo ordine $G(s) = \frac{s + z}{s + \zeta}$

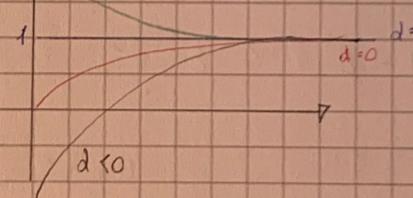
Se ζ ha parte reale negativa, lo risposto è quello che ci si aspetta. Viceversa, se $\text{Re}(z) > 0$, allora il sistema si comporta in modo opposto rispetto a $u(t)$: se $u(s) = 1$, $y_{ss} < 0$. Pur raggiungendo il valore di regime, ci impiega più tempo.

Se uno zero ha parte reale positiva, si parla di sistema a sfasamento non minimo

$$G(s) = \frac{1}{s + z} = \frac{1 + dTs}{1 + Ts} \quad \text{con} \quad T = \frac{1}{s} \quad \text{e} \quad d = \frac{P}{Z}$$

Sia $\mu = 1$ e $T = 0$

$d < 0 \Rightarrow z > 0$ (infatti $z > 0$ per avere stabilità)
Il sistema risponde in maniera opposta al comando



Nei sistemi del secondo ordine, tali così si hanno sullo baco della posizione di ζ e q_1/q_2

Risposta in frequenza

L'analisi di un sistema è comunemente effettuato nell'ambito della frequenza, ossia lo risposto di un sistema ad ingredi sinusoidali. Se $U(t) = A \sin(\omega t)$, l'uscita avrà stessa pulsazione ma A' e φ differenti.

Sia allora $U(t) = U \sin(\omega t)$. Quanto vale $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$?

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s) \cdot \frac{U \omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{A_1}{s + j\omega_0} + \frac{A_1^*}{s - j\omega_0} + \text{termini oggettivamente stabili}$$

dovuti ai valori di

Questa è l'uscita a regime. $y_{ss}(s)$

I residui complessi coniugati si calcolano come

$$A_1 = \frac{G(-j\omega_0)U}{-2j} \quad A_1^* = \frac{G(j\omega_0)U}{+2j}$$

Quindi dipendono solo da G , e non dai termini di $U(t)$. Inoltre, poiché $\pm j\omega_0$ è complejo, lo saranno anche $G(\pm j\omega_0)$, con relativo modulo e fase.

$$\text{Ma allora } y_{ss}(t) = A_1 e^{-j\omega_0 t} + A_1^* e^{j\omega_0 t} = \\ = U |G(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

L'ampliamento dell'uscita è

$$\text{La fase è } \varphi = \tan^{-1} \frac{\text{Im} |G(j\omega_0)|}{\text{Re} |G(j\omega_0)|}$$

Lo risposto in frequenza consiste nel determinare $y(t)$, e quindi lo coppia $\langle A, \varphi \rangle$, per ciascuno dei possibili ingredi sinusoidali $U(t) = U \sin(\omega t)$ con $\omega \in [0, +\infty)$.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 1} \quad U(t) = 10 \sin(\omega t)$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + j\omega + 1} = \frac{1 \cdot e^{j\varphi}}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2} e^{j \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{1-\omega^2} \right)}}$$

$$\text{Da } w_1 \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}} \quad \text{e} \quad \varphi = -\tan^{-1} \frac{\omega}{1-\omega^2}$$

$$y(t) = 10 \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}} \sin \left(\omega t - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{1-\omega^2} \right) \right)$$

La risposta in frequenza può essere studiata anche per segnali periodici sfruttando la serie di Fourier, che li riconduce a somme di seni e coseni. A quel punto, si usa il principio di sovrapposizione.

Una funzione è periodica se $f(t) = f(t+T) \forall t$, con T il più piccolo possibile.

La trasformata assume una forma del tipo $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \phi_n)$

Una conseguenza è che, dato un ingresso un segnale periodico, il sistema non sarà in grado di rigenerarlo allo stesso modo in uscita: al posto di una serie, si avrà una sommatoria fino ad \bar{n} . L'intervallo di frequenza entro il quale il sistema fornisce una risposta si dice banda passante.

Si può parlare di RF anche per segnali aperiodici. In questo caso, è come fare la T. di Fourier per una funzione con periodo T infinito.

Diagramma di Bode

È un modo qualitativo per tracciare, al variare di ω , modulo e fase della risposta di un sistema, ovvero i due fattori

$$|G(j\omega)| \text{ e } \angle G(j\omega)$$

In Bode, il modulo si misura in dB. In particolare,

$$|G(j\omega)| \text{ dB} \Rightarrow 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

Supponiamo di avere

$$G(s) = \frac{(a_1 + j b_1)(a_2 + j b_2)}{(a_3 + j b_3)}$$

$$|G| = \frac{|a_1 + j b_1||a_2 + j b_2|}{|a_3 + j b_3|} = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} \Rightarrow$$

$$\log_{10} |G| = \log_{10} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \log_{10} \sqrt{a_2^2 + b_2^2} - \log_{10} \sqrt{a_3^2 + b_3^2}$$

$$\angle G = \angle(a_1 + j b_1) + \angle(a_2 + j b_2) - \angle(a_3 + j b_3)$$

Si tratta di fare somme lineari di queste grandezze e di sommare i diversi contributi. Lo scalo di ω è logaritmico in base 10. Le ordinate riportano il modulo $|G(j\omega)|$ in dB. Lo scalo è il quanto cosa lineare, nel diagramma del modulo. Nel diagramma delle fasi si usa un scalo lineare, in grado a radicanti. Usando funzioni logaritmiche in diagrammi in scala logaritmica, si può far ricorso a diagrammi asintotici. Innanzitutto, si scrive $G(j\omega)$ in forma di Bode

guadagno statico

$$G(j\omega) = \frac{W \cdot \prod_i (1 + j T_i \omega) \prod_i \left(1 + \frac{2 \cdot E_{iz} \omega}{\omega_{iz}}\right) - \frac{\omega^2}{\omega_{iz}^2}}{(j\omega)^r \prod_i (1 + j T_i \omega) \prod_i \left(1 + \frac{2 \cdot E_{ig} \omega}{\omega_{ig}}\right) - \frac{\omega^2}{\omega_{ig}^2}}$$

$$\text{Sia } G(s) = \frac{10^4 (s+1)}{(s^2 + 16s + 100)(s+20)}$$

I goli complessi hanno $w_n = 10$,

$$\zeta = \frac{16}{2 \cdot 10} = 0.8$$

Si porta in forma di Bode: il numeratore non si tocca, il denominatore si moltiplica e divide per $20 \cdot 100 = 2000$

$$G(jw) = \frac{10^4 (s+1)}{2000 s (0.01s^2 + 0.16s + 1) (0.05s + 1)} \quad | s=jw \quad (jw)(0.05jw + 1) \left(1 - 0.01w^2 + 0.16jw \right)$$

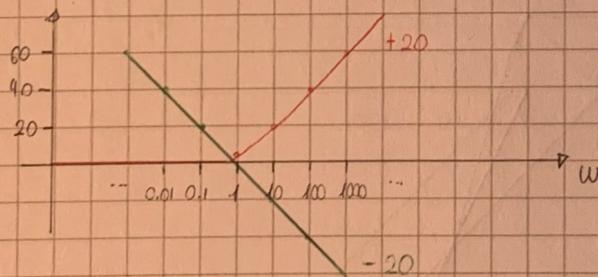
$$|G(jw)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(5) + 20 \log_{10}(\sqrt{1+w^2}) - 20 \log_{10}(w) - 20 \log_{10}\left(\sqrt{1+\frac{w^2}{20^2}}\right) - 20 \log_{10}\left(\sqrt{\frac{(0.16w)^2 + (1-0.01w^2)^2}{(1-0.01w^2)^2}}\right)$$

Si fa uno stima osintotica di ciascun termine

1. $20 \log_{10}(5) = 14 \text{ dB}$ il contributo del guadagno statico è un costante

2. $+20 \log_{10} \sqrt{1+w^2}$

- se $w \rightarrow 0$, allora $|1| \approx 20 \log_{10}(1) = 0$
Avvicinandosi allo zero, si ha un valore di zero.
- se $w \rightarrow +\infty$, $|1| \approx 20 \log_{10}(w)$. Questo è uno retto con pendente 20 dB/decade
- si calcola poi $|1|$ allo suo frequenzio caratteristico. In questo caso $w=1$ (valore dello zero) $|1| = 20 \log_{10} \sqrt{2} = 3$



Quata è il diagramma osintotico per il contributo di questo termine

Se fosse $G(s) = 5(s+1)$, avremmo il diagramma sommando i due contributi.

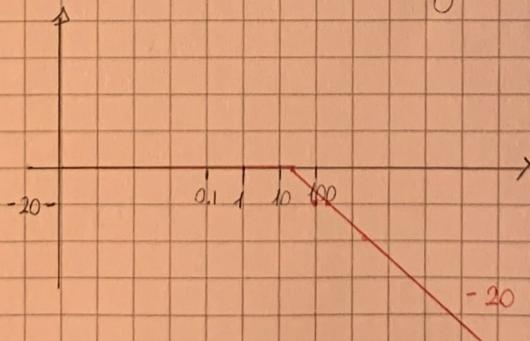
3. $-20 \log_{10}(w)$ Se $w=1$, $|1|=0$ Per il retto, è uno retto di pendente -20 dB/decade, verde in figura sopra

4. Per il polo in -20, il ragionamento è analogo allo zero in -1:

1. Se $w=20$, $|1| = -3 \text{ dB}$

2. Se $w \ll 20$, $|1| \approx -20 \log_{10}(1) = 0$

3. Se $w \gg 20$, $|1| \approx -20 \log_{10}(w)$ retto con pendente -20



5. Ci mancano i poli complessi coniugati. Vediamo il caso generale.

$$S^2 + 2\omega_n \xi S + \omega_n^2 \Rightarrow \omega_n^{-2} \left(\frac{S}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} S + 1 \right) = 0$$

$$\log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{\xi}{\omega_n} \omega\right)^2}$$

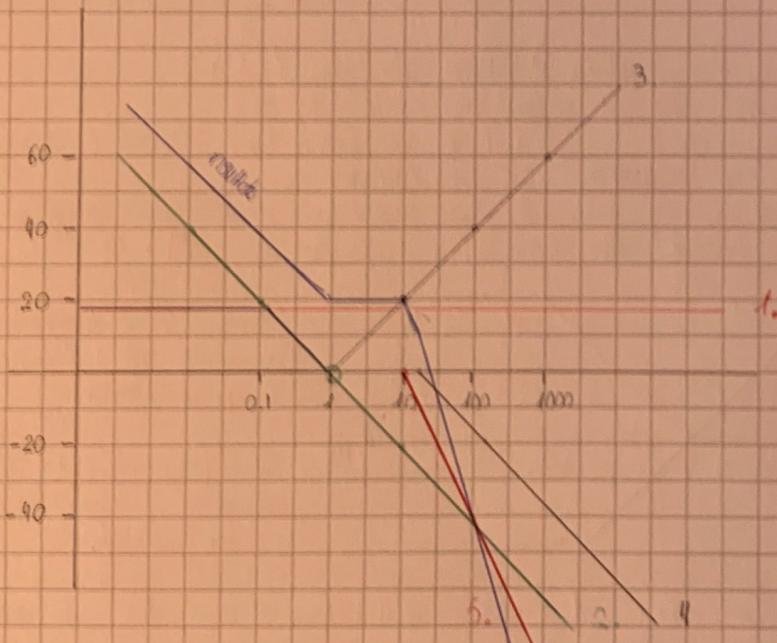
- Se $\omega \ll \omega_n$, $| \cdot | = 20 \log_{10}(1) = 0$

- Se $\omega \gg \omega_n$, $| \cdot | \cong 20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \cong 40 \log_{10}(\omega)$
Si tratta di una retta con pendenza ± 40 !

- Se $\omega = \omega_n$, $| \cdot | = 20 \log_{10}(2\xi)$

Si ha un picco detto picco di risonanza $M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

A questo punto si sommano i diversi contributi



1. fa lo stesso cosa con ilo ~~caso~~ fasc

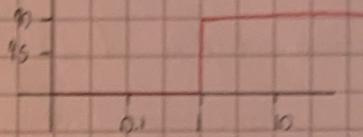
$$\angle G(j\omega) = \angle 5 + \angle (1+j\omega) - \angle (j\omega) - \angle (1+0.05j\omega) - \angle \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + 0.16j\omega \right)$$

1. $\angle 5 = 0^\circ$

2. $\angle (1+j\omega)$ Se $\omega \ll 1$, si ha 0° ; se $\omega \gg 1$, si ha 90° .
Se $\omega=1$, si ha 45° . Per farlo in modo fruttuoso, si fa un salto per la f. caratteristica

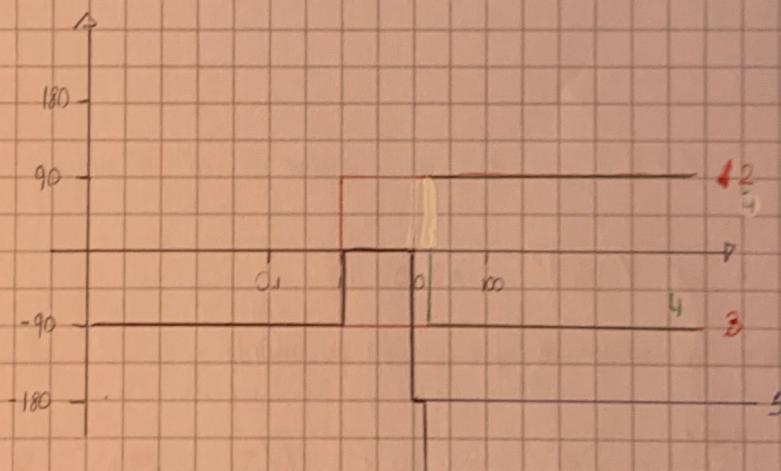
3. $\angle -(j\omega)$ 2° angolo è $-\frac{\pi}{2} \text{ rad}$

Espresso



4. $\angle (1+0.05j\omega)$ se $\omega \ll 20$, $\angle = 0^\circ$; se $\omega \gg 20$, $\angle = 90^\circ$.
Il salto si fa a $\omega = 20$

5. $\angle \left(1 - \frac{\omega^2}{100} \right) + 0.16j\omega$ se $\omega \ll 10$, $\angle = 0^\circ$; se $\omega \gg 10$, $\angle = -\pi$



Bode - modulo

1. Costante di guadagno statico $\pm H$ $|G(j\omega)|_{dB} = \pm 20 \log |H|$

2. Zeri / poli all'origine $(j\omega)^{\pm m}$

Per gli zeri, ho uno retto di pendente $\pm 20m$ che vale 0 per $\omega = 0$

3. Zeri / poli simili o riuniti $(1 + j\omega T_i)^{\pm m}$

O per $\omega <$ frequenza osservata
retta con pendenza $\pm 20m$ oltre la frequenza osservata

4. Zeri / poli complessi e coniugati

O per $\omega < \omega_n$

Per $\omega = \omega_n$, il valore è

± 90 di pendente oltre ω_n

$$20 \log_{10} 2 \approx$$

Bode - fase

-1. $\pm H \rightarrow \angle(\pm H) \rightarrow 0^\circ$ se positivo, 180° se negativo

2. $(j\omega)^{\pm m} \angle(j\omega)^{\pm m} = \pm m \cdot 90^\circ$

Gli zeri introducono un anticipo di fase, i poli un ritardo

3. $(1 + j\omega T_i)^{\pm m} \quad 0^\circ \text{ se } \omega < 1/T_i, \pm 180^\circ \text{ se } \omega > 1/T_i$

4. $\left(1 + \frac{2E\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1} \quad 0^\circ \text{ se } \omega < \omega_n, \pm 180^\circ \text{ se } \omega > \omega_n$

Si segnano sulla oscuria le frequenze d'angolo, i poli e zeri di $G(s)$
e lo qualsiasi graffio dei termini di II grado

Le frequenze di poli e zeri sono detti f. di taglio

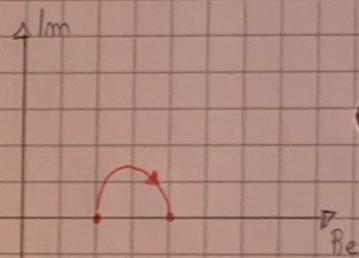
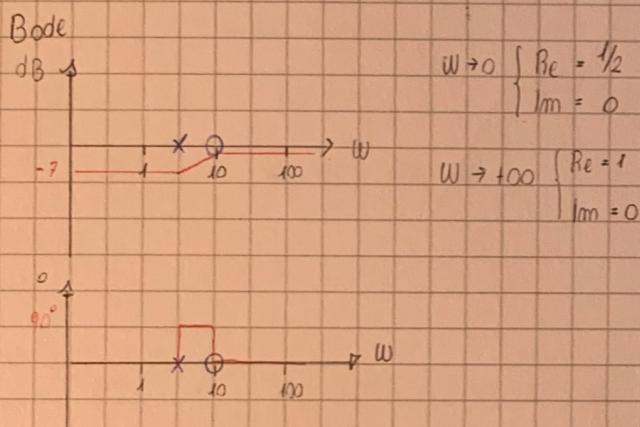
Si fa prima il diagramma per $H=1$, poi si somma

La precisione che si ha è in funzione al problema che si vuole risolvere: conviene aggiungere allo fini i picchi di risonanza.

I diagrammi di Nyquist mostrano il valore di Re / Im di $G(j\omega)$ al vario di ω . Non hanno a che fare con la risposta in frequenza, visto che hanno $\omega \in [-\infty, +\infty]$, ma i valori negativi sono comunque indisponibili per il criterio di N. Quello che ci interessa è un'aggressimazione del grafico.

1. Si scrive $G(j\omega)$ isolando Re e Im
2. Si calcolano i limiti per $\omega \rightarrow 0^+$ e $\omega \rightarrow +\infty$ di Re e Im
3. Si calcolano intersezioni con gli assi
4. Si usa Bode per tracciare un andamento qualitativo

$$G(s) = \frac{s+5}{s+10} \quad G(j\omega) = \frac{j\omega+5}{j\omega+10} = \frac{(j\omega+5)(j\omega+10)}{100+\omega^2} = \frac{50+\omega^2}{100+\omega^2} + j \frac{5\omega}{100+\omega^2}$$



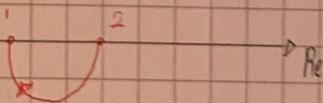
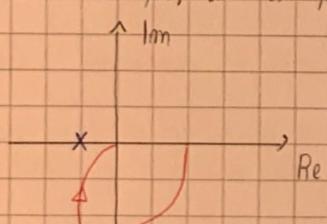
La parte reale del valore per $\omega \rightarrow 0$ è il guadagno statico. Da Bode, si vede che lo fase è compresa fra 0° e 90° , quindi siamo nel primo quadrante. Il modulo aumenta ma si stabilizza su $0 \text{ dB} \Rightarrow$ modulo 1. L'andamento approssimato è quello in figura, con la freccia che indica l'aumento di ω .

$$G(s) = \frac{s+10}{s+5} \quad \text{Il } M_s \text{ è } \cdot 2 \Rightarrow 20 \log_{10} 2 = 6.02$$

Il punto di pertinenza è $(2,0)$

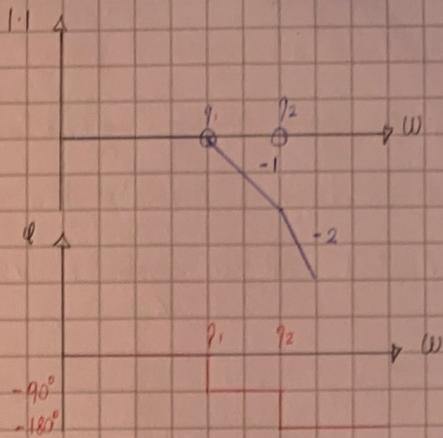
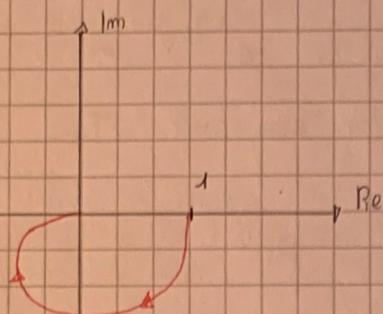
La fase è compresa in $[-90^\circ, 0^\circ]$, quindi siamo nel quarto quadrante. Per $\omega \rightarrow +\infty$, $G(j\omega) \rightarrow 1$.

L'importante c'è sapere, ad esempio, che l'andamento mn è



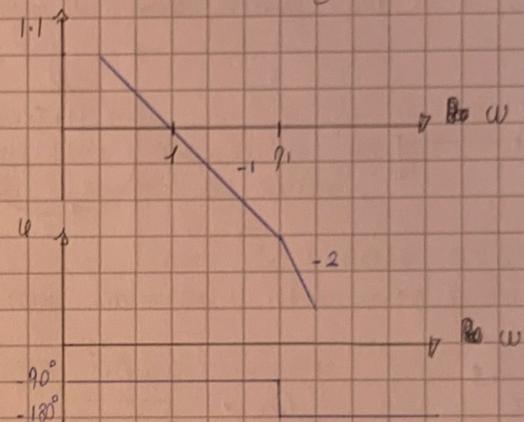
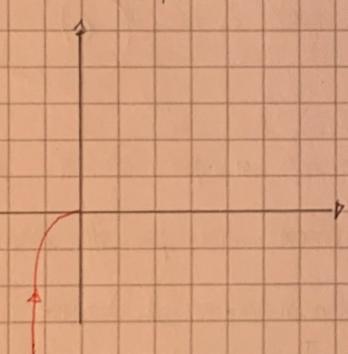
Anche qui, come vedremo, l'importante è la posizione rispetto a $(-1,0)$

$$G(s) = \frac{U}{(s+\eta_1)(s+\eta_2)}$$



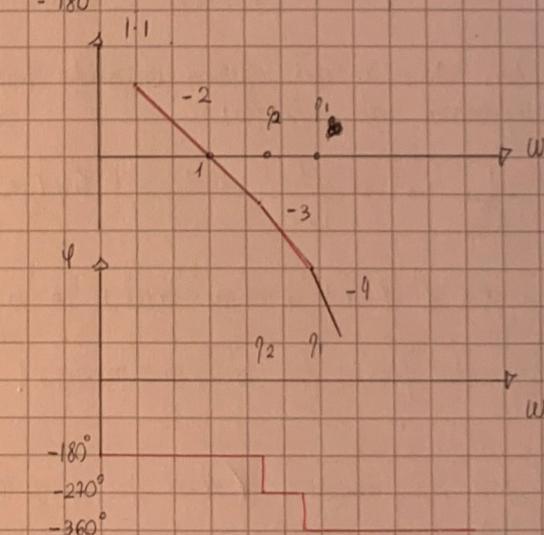
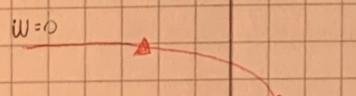
Per $\omega \rightarrow +\infty$, il modulo sono $\neq 0$, con fase -180° . Avremo quindi un'intersezione con l'Im.
dato da $\text{Im}(G(j\omega)) = 0$. Aggiungendo poli, si aumentano i giri.

$$G(s) = \frac{U}{s(s+\eta_1)}$$



Se $\omega \rightarrow 0$, il modulo e' infinito, con angolo -90° : viene verticale dall'alto, rimane nel III quadrante e arriva a 0 con angolo -180° .

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+\eta_1)(s+\eta_2)}$$

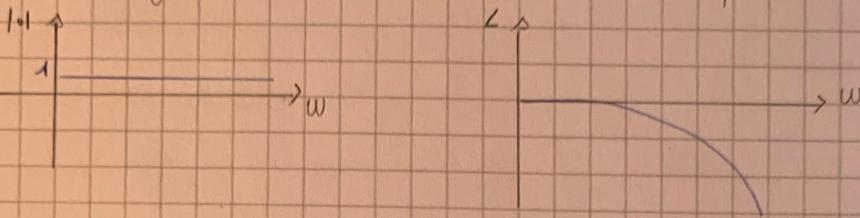


Alcuni casi particolari nel tracciamento della risposta in frequenza

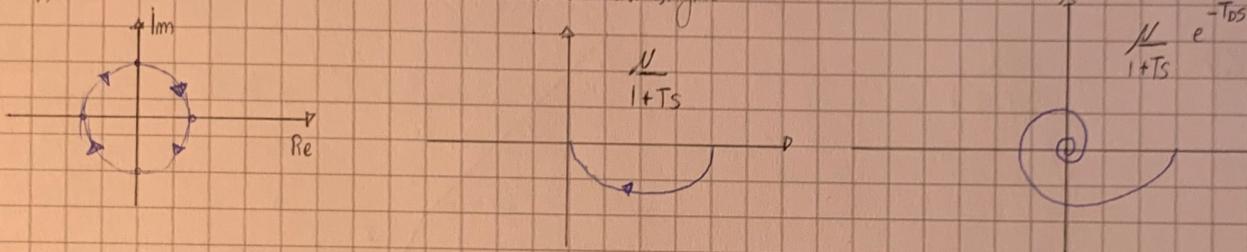
1. Presenza di un ritardo. Un ritardo del tipo $g(t-T_0)$ si presenta come $G_1(s)$ e

Calcolando il solo ritardo in termini di risposta in frequenza, si ha $e^{-T_0 j\omega} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(\omega T_0) - j \sin(\omega T_0)$ il suo modulo è 1, lo si scrive quindi come $-T_0 j\omega$



Come si vede nel diagramma, si è distanziati 1 dall'origine, ma lo si scrive come $-T_0 j\omega$. Se tale ritardo è applicato a G , si ha uno chiodo attorno all'origine



Se c'è un ritardo, non si possono calcolare i poli in ciclo chiuso, visto che non si può scrivere G_{CL} in termini razionali:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-s}$$

$$G_{CL} = \frac{e^{-s}}{s+1 + e^{-s}}$$

Si possono allora fare due cose

1. usare il criterio di Nyquist

2. Usare gli approssimatori di Pade'. Nella forma più brutale,

$$e^{-T_0 s} \approx \frac{1}{1+T_0 s}$$

2. Sistemi instabili. Non si può effettuare un'analisi della risposta in frequenza, ma è possibile tracciare i diagrammi di $G(j\omega)$

$$G_1(s) = \frac{1}{s-1} = -\frac{1}{1-s} \quad |G_1(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega+1} \right|$$

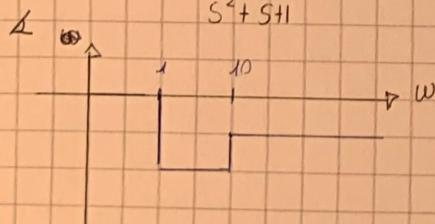
$$\angle G_1(j\omega) = \angle(-1) + \tan^{-1}(c\omega) = -180^\circ + \tan^{-1}\omega$$

Ho un anticipo di fase, con lo stesso modulo!

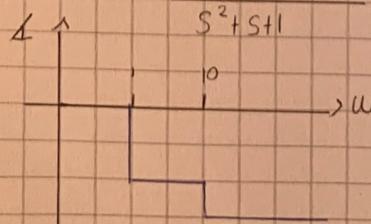
3. Sistemi o fase non minima (zeci con parte reale positiva)

Il diagramma del modulo coincide con quello a fase minima, per lo più è come ovvero un polo a parte reale negativo, portando un decremento di fase di -90° .

$$G_1(s) = \frac{s+10}{s^2+s+1}$$



$$G_2(s) = \frac{s-10}{s^2+s+1}$$



Parametri del risposto in frequenza

I parametri li vedremo per sistemi del secondo ordine; per ordine maggiore ci si ricorderà a questi.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$$

Si dice frequenza di risonanza ω_n

la frequenza per cui $|G(j\omega)|_{dB}$ assume valore massimo, e vale

Il picco di risonanza Y_R è il rapporto tra valore massimo e statico dello risposto. E' affine allo sovraccarico massimo

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} < \omega_n$$

$$Y_R = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

In teoria dei segnali, si definisce banda passante W_{BW} lo spettro di rigoduzione, con periferia limitata, un segnale armonico in un certo intervallo di frequenze.

Maggiore è W_{BW} , meno sono le armoniche regolabili dal sistema

$$y(t) = \sum_i A_i \sin(n\omega t + B_i) + \text{termini che si avrebbero se } \omega_0 \text{ fosse maggiore.}$$

Sogendo che $\sqrt{2} = 3 \text{ dB}$, si tratta di cogliere per quali frequenze

$$|G(j\omega)| - 3 \leq |G(j\omega)|_{dB} \leq |G(j\omega)| + 3$$

W_{BW} si trova con una formula che coinvolge ξ . Se il guadagno statico è ad 1, tenendo il modulo decrescente, si tratta di risolvere

$$|G(j\omega_{BW})|_{dB} = -3 \text{ dB} \quad (= 0.707)$$

In generale

$$|G(j\omega_{BW})| = 0.707 |G(j\omega)|$$

Ma cosa succede per una funzione a ciclo chiuso? Tramite Bode, è possibile trovare una relazione fra ω_{BW} di G_{OL} e ω_{BW} di G_{CL} , utile per sapere questo valore senza calcolarlo direttamente.

$$\text{Dato } S(s) = \frac{1}{1 + G_{OL}(s)} \quad \text{la funzione di sensibilità, esiste } \omega_c \text{ t.c. } |S(j\omega_c)| = 1$$

Tale valore, è una buona approssimazione di ω_{BW} per G_{OL} .

Dato lo risposto in frequenza di $G_{OL}(s)$, si può determinare anche l'errore a regime sullo bolo del figo

- se $\omega \rightarrow 0$ e $1 \cdot 1 = 0$, figo \emptyset (errore al gradino finito)
- se $\omega \rightarrow \infty$ e $1 \cdot 1 = -20 \text{ dB}$, figo \perp ($\epsilon \rightarrow \infty$ nello, $\epsilon \downarrow$ finito)

$\omega_c \rightarrow |S(j\omega_c)| = 1$ e $|G_{OL}(j\omega_c)| = 1$ approssima la banda passante in G_{OL}

$\omega_c \rightarrow$ frequenza di attraversamento della funzione di trasf.
Si calcola con Bode

Il luogo delle radici

L'abscisa dell'andamento di $G_{CL}(s)$ si può fare a partire da $G(s)$. Finora sappiamo che l'anello chiuso è stabile se i suoi zeri hanno $\text{Re}(z) < 0$, ossia le radici di $-1 + G(s) \cdot H(s) = 0$. Il luogo delle radici consiste nel determinare come variano tali radici al variare del guadagno ~~stazionario~~ di anello. In tal caso, si considerano funzioni senza ritardo, che si può al più approssimare con Padé. Inoltre, si applica a sistemi SISO, potendo avere una rappresentazione grafica.

Finora conosciamo i seguenti parametri (riassunto)

$$E_{ss} = U(t) - Y(t) = s (U(s) - Y_{ss}(s))$$

$$M_p = \frac{1}{100} e^{-\frac{\frac{3\pi}{2}}{\sqrt{1-5^2}}}$$

$$T_s = \frac{\pi - \alpha}{\omega_d}$$

$$T_{ss} = \frac{3}{5 \omega_n}$$

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1-25^2} < \omega_n$$

$$M_R = \frac{1}{25 \sqrt{1-5^2}}$$

$$|G(j\omega_B)| = 0.707 |G(j\omega)|$$

Sia con anello a retroazione unitaria o non, detto $H \cdot H(s)$ il controllore, avremo che i zeri di G_{CL} sono dati da

$$1 + U H(s) G(s) = 0 \Rightarrow 1 + G_{CL}(s) = 0$$

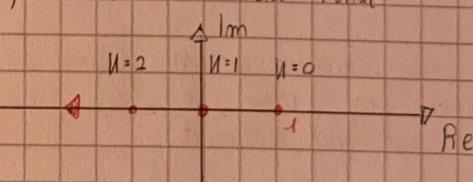
Si definisce luogo delle radici il luogo delle radici di $1 + U \cdot H(s) \cdot G(s) = 0$ al variare di U tra $[0, +\infty]$, lungo diretto, o $(-\infty, 0]$, luogo inverso.

Il guadagno U che si usa è il fattore di proporzionalità che moltiplica $H(s)$, non il guadagno statico del sistema, che invece è dato da

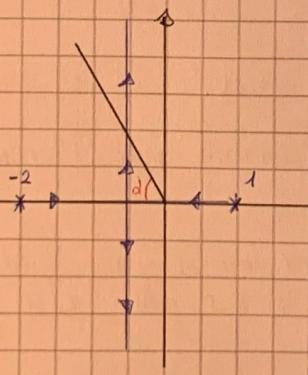
$$U_{STAT} = U \cdot \frac{\prod_{j=1}^m Z_j}{\prod_{j=1}^n P_j} \quad (\text{si porta il sistema in forma di Bode})$$

$$\text{Sia } G(s) = \frac{1}{s-1} \quad \text{e} \quad H(s) = U \quad \text{allora} \quad G_{CL}(s) = \frac{U}{s+U-1}$$

Si nota che il polo è uno solo, sempre reale, stabile per $U > 1$ e che tende a $-\infty$ se $U \rightarrow +\infty$



A partire dal luogo delle radici, se determinano i valori di U che rendono G_{CL} stabile.



$$\text{Sia } G_{CL} = \frac{U}{(s-1)(s+2)}$$

L'intersezione di una retta del tipo

$$\text{Im}(s) = - + \text{Re}(s) \quad \text{con } + \geq 0$$

formise ξ , quindi $\cos(\phi) = \xi$,

e il valore di ω_n come distanza fra 0 e l'intersezione (avviene per G_{CL} del secondo ordine).

Matlab:

$$s = +j(s')$$

$$g = 1 / (s-1) * (s+1)$$

$$\text{Rlocus}(g)$$

Dove valere la relazione $G(s) \cdot H(s) = -\frac{1}{n}$ do cui, per le proprietà

$$1. \left| \frac{\prod_i (s + z_i)}{\prod_i (s + p_i)} \right| = \left| -\frac{1}{n} \right|$$

$$2. \sum_k \Re(s + z_j) - \sum_k \Re(s + p_i) = k - \frac{1}{n}$$

Da queste due condizioni, si ricavano le regole

- Se $U=0$, i poli in ciclo aperto e chiuso coincidono, quindi il luogo parte dai poli di $G_{OL}(s)$

Basalmente, se $U \rightarrow 0$, $|s| \rightarrow +\infty$, e si ha tale valore quando si annulla il denominatore. Inoltre, in ciclo chiuso, se il guadagno è positivo, il numero di poli è uguale al ciclo aperto.

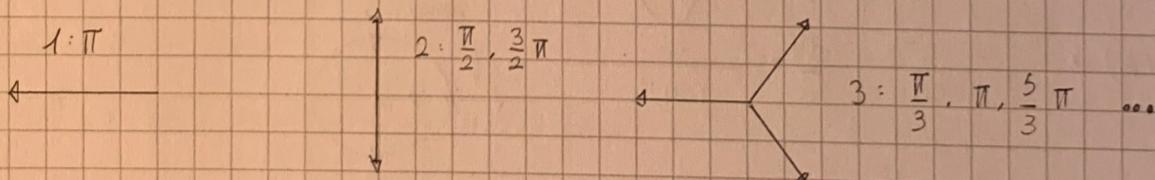
- Per $U \rightarrow +\infty$, i poli in ciclo chiuso tendono a degli zeri di anello aperto, o a infinito
- Il numero di nomi è pari al numero n di poli in anello aperto (il massimo di ciascun polo sul piano complesso definisce un ramo).
- Il luogo delle radici è simmetrico sull'asse reale.

Inoltre, i poli, in quanto radici di un polinomio, sono omotocoincidenti.

- Sono n i poli di G_{OL} , in numero uguali a quelli di G_{OL} , m gli zeri di G_{OL} , con $n > m$. Degli n poli, m tendono agli zeri di G_{OL} .
gli altri $n-m$ seguono direzioni osintotiche che hanno in comune il punto x_0 sull'asse reale e formano con l'osser reale angoli φ_0 .

$$x_0 = \frac{\sum_i p_i - \sum_j z_j}{n-m}$$

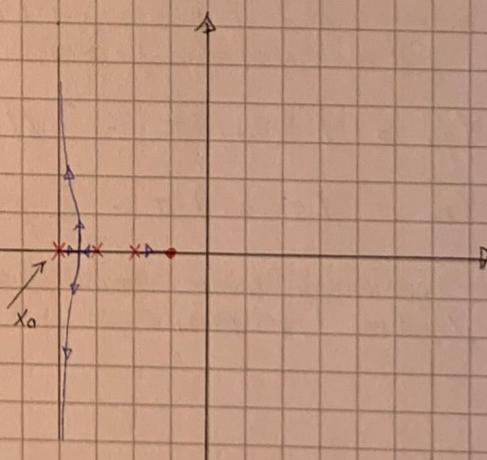
$$\varphi_0 = \frac{(2r+1)\pi}{n-m} \quad r = 0, 1, \dots, n-m-1$$



$$\text{Sia } G_{OL}(s) = n \cdot \frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)} \quad (n-m)=2$$

$$x_0 = \left(\frac{(-2-3-4) - (-1)}{2} \right) = -4$$

Stando a sinistro di lm , G_{OL} è sempre stabile.

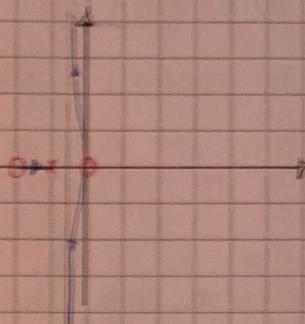


6. Lungo l'asse reale, il luogo lascia alla griglia di un numero dispari di singolarità (poli e zeri in molti punti)

Sia $G(s) = \frac{(s+1)}{s^2}$ Per avere $E_k = \varphi$, devo avere $G(j\omega)$ di tipo almeno due, quindi $U(s) = U/s^2$

$$U \frac{(s+1)}{s^2} \quad \text{Due asintoti con } \pm \pi/2$$

Ho Cas stabile $\forall U > 0$



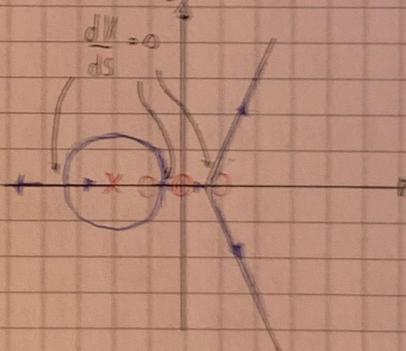
7. Il luogo lascia/mentre l'asse reale con quantità φ in più quadri calcolati con

$$\frac{dU}{ds} = 0$$

Calcolando tali valori, alcuni s non appartengono al luogo, e non saranno validi.

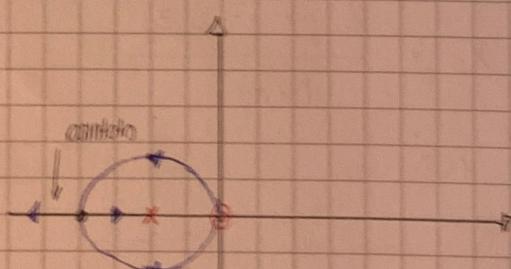
$$G(s) = \frac{(s+1)}{s^2(s-1)(s+1)} \quad x_0 =$$

$$U(s) = -s^2(s-1)(s+1)/s^2$$



$$G(s) = U \frac{(s+1)}{s^2} \quad s=0, s=-2$$

$$U(s) = -\frac{s^2}{s+1} \quad \frac{dU}{ds} = \dots / (s+1)^2$$

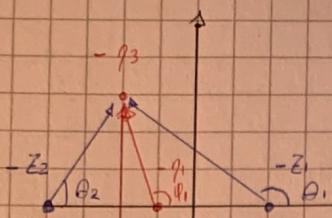


8. L'angolo di pertinenza di uno coppia di poli complessi coniugati e di ormai per zeri ce si calcolano misurando le apparenze

$$\gamma_p = (2V+1)\pi - \sum \alpha(p_i - q_j) + \sum \alpha(q_i - \bar{z}_j)$$

$$\gamma_z = (2V+1)\pi - \sum \alpha(z_i - \bar{z}_j) + \sum \alpha(z_i - q_j)$$

Si tratta quindi di andare molto vicini a zeri/pol., e uscire con quelli angoli orivano/girano i rami.



$$\gamma_{\eta_3} = (2\eta+1)\pi - (\phi_1 + \phi_2) + (\theta_1 + \theta_2)$$

sommare gli angoli che li comppongono con gli zeri, sottrarre gli quelli dei poli. Viceversa con gli zeri.

$$Col(s) = U \cdot \frac{(s+2)}{s^2 + s + 1}$$

$$\rho_{1,2}^{OL} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j = -0.5 \pm 0.866j$$

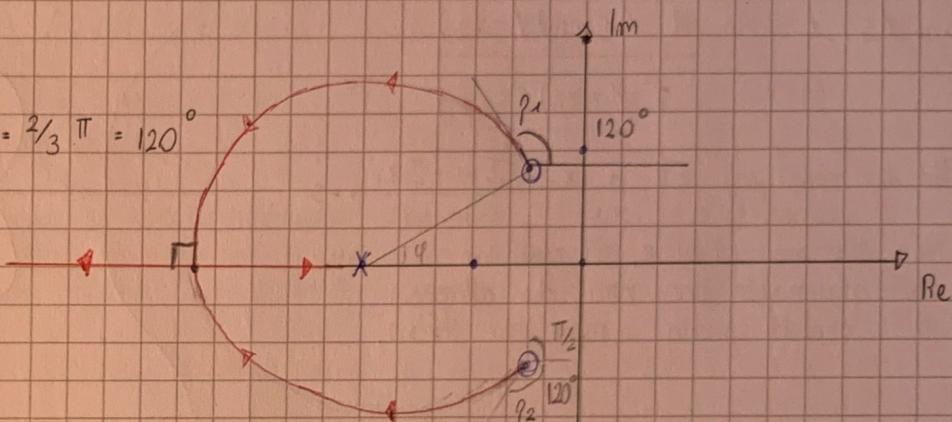
$$Z_1^{OL} = -2$$

$$\theta = \pi/2 \quad \varphi \cong \pi/6$$

$$\gamma_{\eta_1} = \pi + \pi/6 - \pi/2 = 2/3\pi = 120^\circ$$

$$\frac{dU}{ds} = 0 \Rightarrow s = -3.73$$

X sono poli
O sono zeri



9. Il valore del guadagno U per cui il lungo delle radici attraverso l'asse immaginario si trova con il criterio di BH

Questo mi permette di sapere U_{BC} , il guadagno critico, oltre il quale il sistema ha poli con $\text{Re} < 0$, ed è quindi instabile

$$Col(s) = U \frac{s+1}{s^2 - 2s + 2}$$

Il denominatore di Col è

$$s^2 - 2s + 2 + Us + U = s^2 + s(U-2) + (U+2)$$

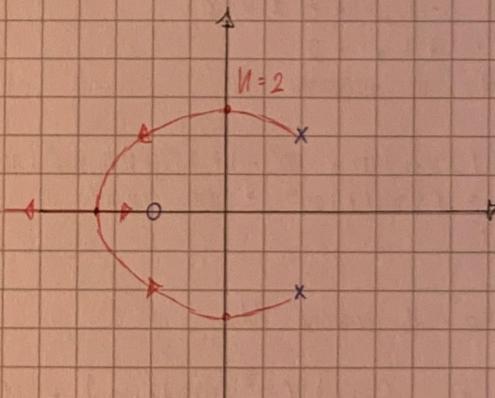
$$\begin{matrix} s^2 & 1 & U+2 \\ s' & U-2 \\ s & U+2 \\ U+2 > 0 \end{matrix} \Rightarrow U_{BC} = 2$$

$$\frac{dU}{ds} = 0 \Rightarrow s = -3.2368$$

Il sistema è stabile per $U > 2$

10. Gli zeri in ampiezza agiscono i rombi, i poli li respingono

Questo aspetto serve in fase di sintesi per sapere dove inserire poli e zeri per avere quanto voluto in termini di risposta transitoria.



$$G_{OL}(s) = U \cdot \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}$$

$$U(s) = - \frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)(s-2)} s = -6 \frac{s^2 - 2}{(s^2 - 3s + 2)^2} \Rightarrow \pm \sqrt{2}$$

$U=1$ si determina con RH al denominatore di G_{OL} .

Quindi ho un sistema stabile se $0 < U < 1$.

Ma se vogliamo $\epsilon_k = 0$? Sicuramente devo aggiungere due integratori, ottenendo

$$G_{OL}(s) = \frac{U (s-1)(s-2)}{s^2 (s+1)(s+2)}$$

$$\text{Ho due osintesi con } \pm \pi \text{ a } X_0 = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = -3$$

Non ho mai stabilità. Al controllore devo aggiungere uno zero che attraversa in qualche modo i rammi con $Re > 0$.

$$G_{OL}(s) = U \cdot \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)(s^2 + 10s + 100)}$$

zeri in: $-1, -5 \pm 8,66j$

zeri in: $+1, -2$

un osintoto in direzione π

$$\gamma_p = (2U+1)\pi - 90^\circ - 114.79^\circ + 109.107^\circ + 124.32^\circ = \\ = (2U+1)180^\circ = 209.037^\circ$$

Si tratta di trovare U_{rc}

$$D(s) = (s+1)(s^2 + 10s + 100) + U(s^2 + s - 2) = \\ = s^3 + 10s^2 + 100s + s^2 + 10s + 100 + Us^2 + Us - 2U = \\ = s^3 + (11+U)s^2 + (110+U)s + 100 - 2U$$

$$s^3 \quad 1 \quad 110+U \quad 0 \quad . \quad 1210 + 11U + 110U + U^2 - 100 + 2U$$

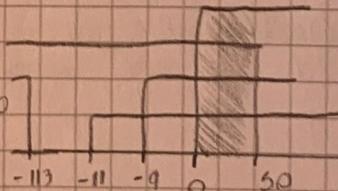
$$s^2 \quad 11+U \quad 100-2U \quad 0$$

$$s^1 \quad \frac{110+123U+U^2}{11+U} \quad 0$$

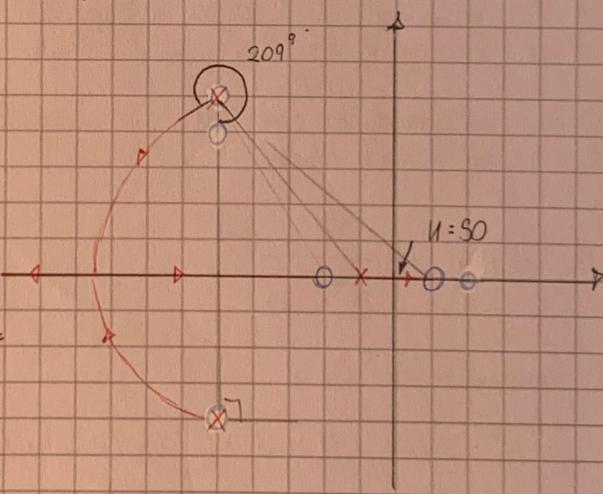
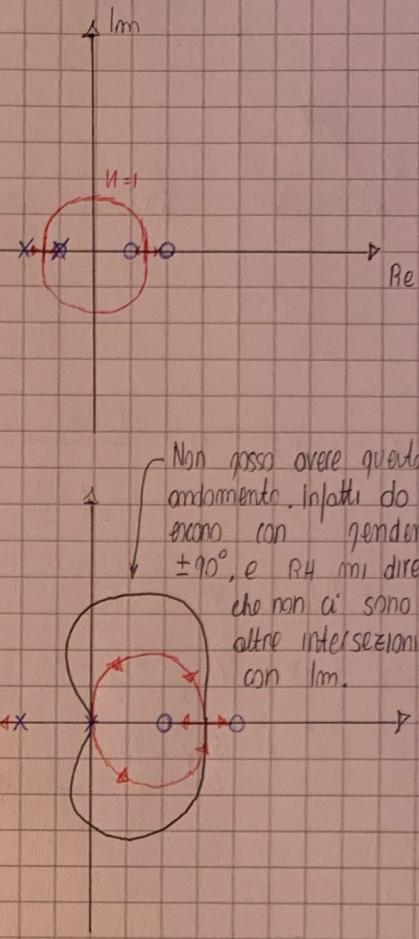
$$s^0 \quad 100-2U$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 11+U > 0 \\ 110+123U+U^2 > 0 \end{array} \right.$$

$$100-2U > 0$$



Stabile per $0 < U < 50$



$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 2}$$

Si vuole un controllore per cui $E(s) = 0$ e per cui lo risposta transitoria sia dominata da un comportamento del primo ordine (ci deve essere un polo dominante!).

$$\text{Come minimo, } G_{OL}(s) = \frac{U}{s(s^2 - 2s + 2)}$$

Tre osintati con $x_p = 3/2$. Il sistema è sempre instabile.
Si deve come minimo introdurre uno zero con $\text{Re } s < 0$.

$$G_{OL}(s) = \frac{U(s+z_1)}{s(s^2 - 2s + 2)}$$

Si (o RH)

$$D(s) = s^3 - 2s^2 + (2+U)s + Uz_1 \quad \text{Non si verifica la CN di RH.}$$

Si deve allora usare un controllore PID: $\frac{U(s+z_1)(s+z_2)}{s}$

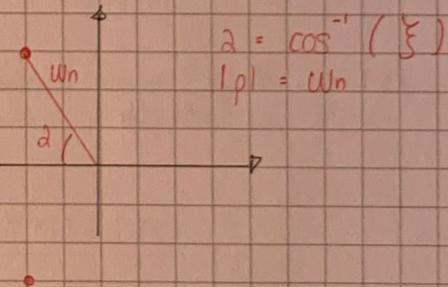
Si vede che in questo modo si riesce a stabilizzare. Allo stesso tempo, non è causale.
Si deve aggiungere un polo 'fuori banda', cioè con frequenza molto maggiore di ω_{BW} affinché non influenzi lo risposto in frequenza.

ω_{BW} si stima con la frequenza di attraversamento di G_{OL} , $\omega_c : |G(j\omega_c)| = 1$

Nello sintesi, si usa il root locus per dare delle proprietà legate ai requisiti di sintesi dovute a poli dominanti. Si sfrutta il fatto che

E se volremo tracciare qualcun al di fuori di un goniometro che non è il guadagno di un solo?

$$G_{OL}(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + 4s^2 + Us + 1}$$

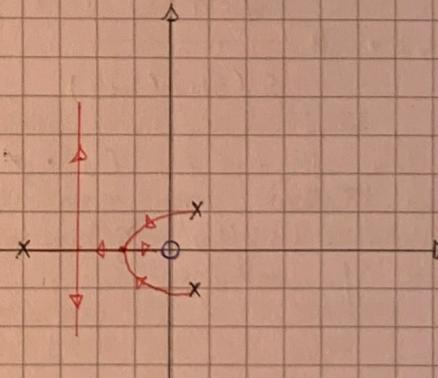


$$s^3 + 4s^2 + Us + 1 = 0$$

$$(s^3 + 4s^2 + 1) + Us = 0$$

$$1 + U \frac{s}{s^3 + 4s^2 + 1} = 0$$

G_{OL} da usare



Il luogo delle radici inverse fornisce l'andamento dei poli di $G(s)$ per $U \in (-\infty, 0]$

Le regole che portano al suo tracciamento derivano da $1 + U G(s) H(s) = 0$

$$\left| \frac{U(s+z_d)}{U(s+p_i)} \right| = \left| - \frac{1}{n} \right| \quad \sum \alpha(s+z_d) - \sum \alpha(s+p_i) = k - \frac{1}{n} = \pm 2V\pi$$

Il modulo non è influenzato dal segno di U

Lo fase è influenzata dal segno di U , e cambiamo alcune regole.

5. I rami che vanno a no seguono osintoti che tengono conto di

$$Y_{\text{par}} = \frac{2V\pi}{n-m}$$

$$X_0 = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m}$$

1. - \rightarrow

2. \leftarrow - \rightarrow

3. \nearrow \rightarrow

4. \leftarrow \downarrow \rightarrow

6. Il luogo, sull'asse reale, si lascia a dentro un numero pari di singolarità

8 Gli angoli di pertinenza di poli e zero di $G(s)$ si determinano con

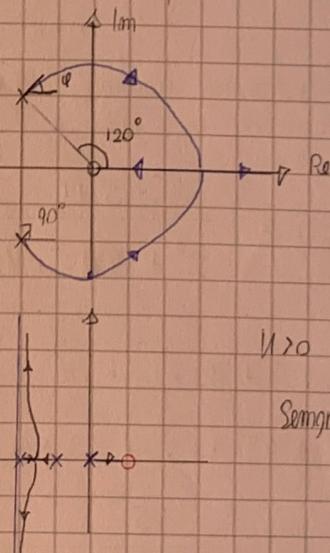
$$Y_{p_i} = 2V\pi - \sum \alpha(p_i - p_k) + \sum \alpha(p_i - z_j)$$

$$Y_{z_n} = 2V\pi - \sum \alpha(z_n - p_k) + \sum \alpha(z_n - z_j)$$

$$G(s) = U \frac{s}{s^2 + Sh}$$

$$\varphi = 2V\pi - 90^\circ + 120^\circ \\ + 30^\circ$$

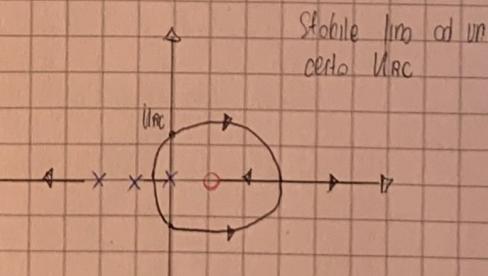
Stabile per $U < 0$



Meglio usando il luogo diretto c'è instabilità $\forall U$, mentre risulta stabile per alcuni valori di $U < 0$.

$$G(s) = U \frac{(s-1)}{s(s+1)(s+2)} \quad X_0 = -2$$

Essendo $G(s)$ di tipo 1, $\mathcal{E}_G = \emptyset$, è finito. Tuttavia non manca che ci avviciniamo a U_{rc} , e aumenta, e l'usato si fa instabile.



Criterio di Nyquist

- Dallo risposto in frequenza si possono determinare i parametri dello risposto temporale
- Si possono valutare direttamente dei ritardi, senza far ricorso a Padé \rightarrow dinamica che
- Si può stimare W_{bw} attraverso la frequenza di attraversamento determinando la perdita di fase
di $G_{\text{cl}}(s)$ e $S(s)$, senza trovare W_{bw} come la frequenza per cui ci si allontana più di 3dB dal valore (di portata?)

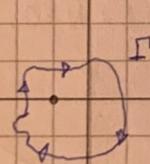
Si vuole stabilire la stabilità di G_{cl} con lo risposto in frequenza; si vuole determinare la stabilità nel caso di errori di modello (altri dinamici o dinamici inerti). Rlocus fornisce uno risposto al primo problema, ma solo Nyquist risponde al secondo.

Tra le altre cose, da Bode si può ricavare l'Esig di G_{cl} se G_{cl} di tipo 0 e E_{ramg} di G_{cl} se G_{cl} di tipo 1.

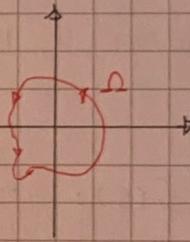
Si parla di stabilità relativa, facendo riferimento ad eventuali errori di modello

Si parte da una funzione $F(s)$ con $s = \sigma + j\omega \in D \subseteq \mathbb{C}$. Il principio dell'argomento afferma che: dato $F(s)$ razionale a valori complessi con m zeri e n poli, si definisce un contorno chiuso arbitrario Γ che racchiuda l'insieme di zeri e zeri (all'interno del quale F sia analitica). Percorrendo Γ in senso orario, F mangia Γ in uno giro chiuso Ω che gira intorno all'origine un numero di volte pari a $N = m - n$ in senso orario

$$F(s) = \frac{1}{s+i}$$



$$\begin{aligned} m &= 0 \\ n &= 1 \\ N &= -1 \\ \text{Un giro in} \\ \text{senso antiorario} \end{aligned}$$

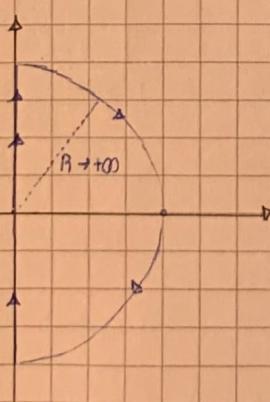


A noi non interessa lo stesso, ma solo il numero di giri attorno all'origine. Infatti dalla maggioranza è possibile saperne l'errore solo zero o zero solo all'interno di Γ dal numero di giri di Ω intorno all'origine e il senso

Si ha $F(s) = 1 + G_{\text{cl}}(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)}$

gli zeri di F sono i poli in ciclo chiuso mentre i poli di F sono i poli in ciclo aperto; affinché G_{cl} sia stabile, gli zeri di $F(s)$ devono avere parte reale strettamente positiva

Γ chiuderà lo spazio di \mathbb{C} critico per la stabilità, e quindi $\operatorname{Re} s > 0$, incluso l'asse immaginario.



Si considera allora $F(jw)$, $\forall w \in (-\infty, +\infty)$, con lo gire negativo seguito a quello positivo

Se ci sono delle singolarità sulIm, si considerano delle circonferenze semicircumferenze che le ignorano



- Se uno degli zeri di $F(s)$ è Γ , il sistema è instabile in chiuso;
- Se uno dei poli di $F(s)$ è Γ , il sistema è instabile in aperto;

Invece che $F(s)$, si lo lo riappunto su Γ di $F'(s) = F(s) - 1 = G_{CL}(s)$. Le rotazioni sono ora attorno a $(-1, 0)$, non all'origine.

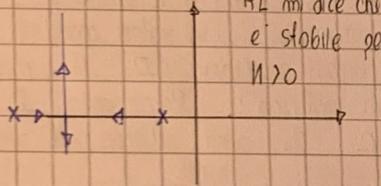
Criterio di Nyquist

Sia $F'(s) = G_{CL}(s)$. Quando F' segue Γ (curva di Nyquist) in senso orario per $w \in (-\infty, +\infty)$, F' viene mappato in Ω_N che gira intorno a $(-1, 0)$ N volte con $N = Z - P$ in senso orario, con Z numero di poli di G_{CL} in Γ , instabili e P numero di zeri di G_{CL} in Γ , instabili.

Ω_N è il diagramma polare per $w \in (-\infty, +\infty)$ di $G_{CL}(s)$. Poiché P è noto, ricavando N dal diagramma,

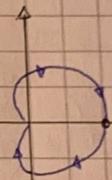
$$Z = N + P, \text{ e } G_{CL} \text{ è stabile solo se } Z = 0.$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+5)}$$



Ri dice che
è stabile per
 $N > 0$

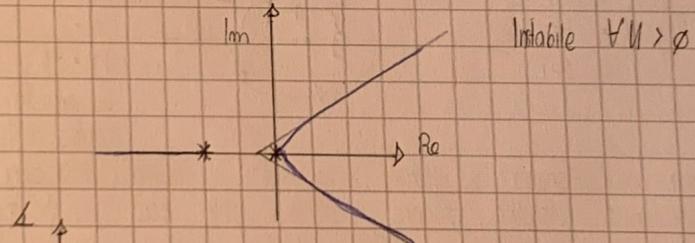
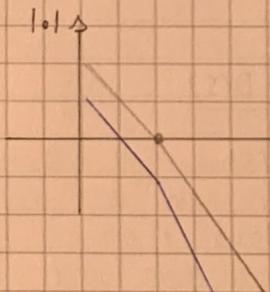
$N = 1$



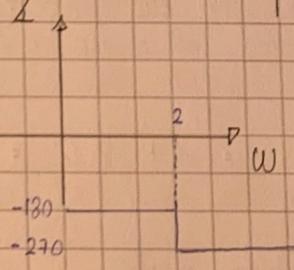
Dunque se $N = 1$, Nyquist arriva mai a $(-1, 0)$: $N = 0$, $P = 0$, $Z = 0$ e G_{CL} stabile

$$H(s) G(s) = \frac{1}{s^2 (s+2)}$$

Sia $H = 1$

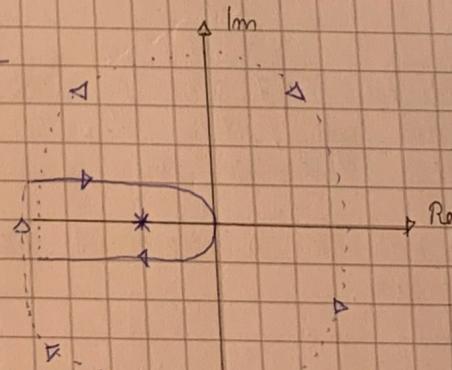


Instabile $\forall N > 0$



$$Z = 2 + 0 = 2$$

Come si vedono due poli, in G_{CL} ci sono due poli instabili



Stabilità in condizioni non nominali

Il criterio di Nyquist si può usare per lo studio di sistemi soggetti ad errori e/o incertezze di modulo. Il controllore $U(s)$ deve essere in grado di mantenere i requisiti di stabilità e garantire la garanzia di errori e incertezze di modulo, per comportarsi bene nel caso reale.

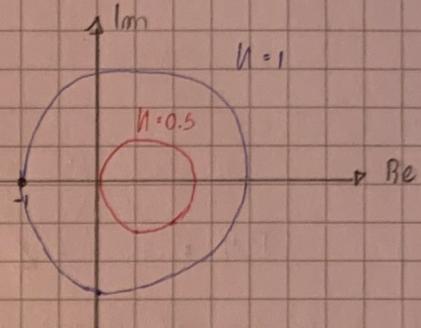
Noi consideriamo il caso di incertezze non strutturate moltiplicative: non digendo che un errore particolare è entrato nell'anello come un blocco $L(s)$ che moltiplica $G(s)$.

Tale funzione sarà limitata superiormente: $\|L(j\omega)\| < \Delta$

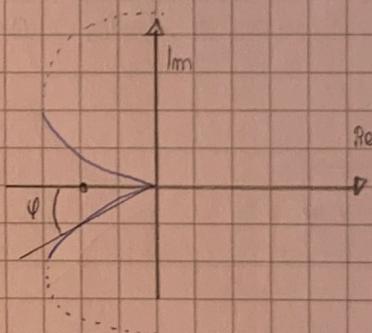
$$\text{Consideriamo } G(s) = \frac{U(s-1)}{(s+1)}$$

Se $U > 1$, $N=1$, ed entro

$P=0$ otteniamo $Z=1$, ossia instabilità. Il diagramma di $G(j\omega)$ per $U=0.5$ mi dice anche che oltre qualche angolo il controllore U di 0.5 gradi di avere instabilità: non ho problemi con $L(s)$, purché $\|L(j\omega)\| < 0.5$.



Lo stesso ragionamento (e interpretazione) si può fare per lo Jose: nello figura, questo accade per incertezze di fase di più - e gradi di ricadere nel caso instabile!



1. Errore di guadagno modificando U , si passa ad una situazione instabile, corrispondente ad introdurre un fattore moltiplicativo $\|L(j\omega)\|$

2. Errore di Jose Si può commettere un errore nello Jose dovuto al termine $\angle L(j\omega)$

- I margini di stabilità sono due parametri che misurano la stabilità relativa dei sistemi in retroazione dal risposto in frequenza di $G(s)$, e permettono
 - Lo sviluppo dell'effetto di incertezze moltiplicative di anello sulla stabilità in CL.
 - La possibilità di sintesi di un controllore che mantenga la stabilità di un sistema in presenza di tali incertezze.

Il successivo uso del criterio di Bode richiede $G(s)$ stabile, non positivo e un unico attraversamento dell'asse a 0 dB

I margini sono aggiunto delle quantità entro cui posso stare senza perdere stabilità.

Il passaggio critico per la stabilità si ottiene per $G(j\omega_c) = -1$

Per alcune frequenze che chiamiamo di attraversamento ω_c $|G(j\omega_c)| = 1$

Per altre, dette di attraversamento di Jose ω_π $\angle G(j\omega_\pi) = \pi$

Il valore critico si ha quando $\omega_\pi = \omega_c = \omega^*$, per cui $G(j\omega^*) = -1$.

Definiamo il margine di guadagno di un sistema come

$$GM_{dB} = \frac{1}{|G(j\omega_\pi)|}$$

E' l'inverso dello fdT calcolato nel punto in cui si interseca il semiasse negativo ($\omega_\pi = -180^\circ$).

Ripetendo quanto visto spiegare al più in modulo grado di andare oltre $(-1, 0)$, e quindi fare un giro attorno a $(-1, 0)$, con G_a instabile.

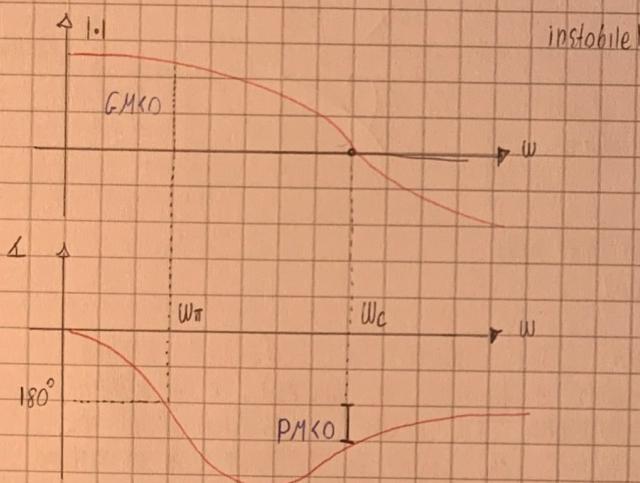
- Si puo' trovare con Bode :
- dal diagramma di fase, trova il punto in cui $\angle G = -180^\circ$
 - Guarda lo distacco fra il modulo in quel punto e l'asse ϕ

Il margine di fase e'

$$PM = 180^\circ - \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - \varphi_c \quad (\varphi_c \text{ si calcola in senso orario})$$

φ_c e' lo fase del sistema nel punto (unico per i punti) in cui G ha modulo 1.

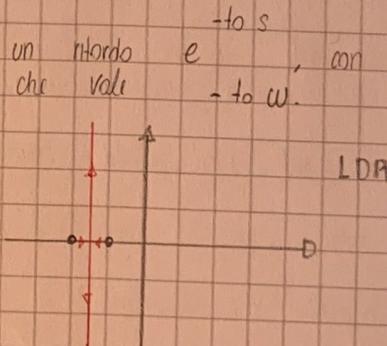
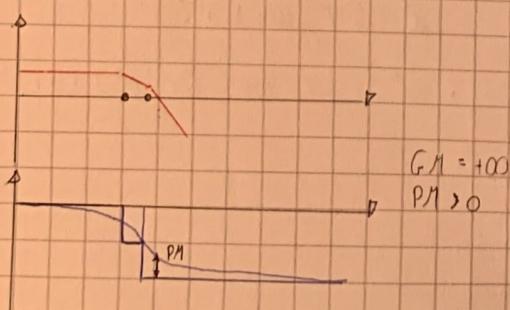
Soddisfatto l'ipotesi di Bode, anz per G_a stabile e' $PM > 0$ e $GM > 0$.



Nei sistemi aperti e un ritardo di fronte ad un ritardo e -to s, con -to w.

$$G_a(s) = N \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Il sistema in anello chiuso e' stabile per $N > 0$



- Td S
Introducendo il ritardo τ_{wC} si può comunque usare il criterio di Bode, cercando la $G(j\omega_C)$ e $\frac{1}{j\omega_C}$. Per esempio

$$C(s) = \frac{1}{s(s+1)} e^{-s}$$

$\omega_C = 1$. Per tali valori

$$\angle e^{-j\frac{1 \text{ rad}}{3} \cdot 15} = -1 \text{ rad} = -57^\circ$$

$$\angle \frac{1}{j(j+1)} = -135^\circ$$

Nel caso senza ritardo, $PM = 180^\circ - 135^\circ > 0$

Nel caso con il ritardo $PM = 180^\circ - 192^\circ < 0 \Rightarrow$ instabile, non verificando CNS

Il massimo ritardo che un sistema può sopportare vale $\omega_C T_0 = PM \Rightarrow T_0 = \frac{PM}{\omega_C}$

In un sistema di secondo grado (o approssimabile tale da poli dominanti), si ha

$$g \approx \frac{PM}{100}$$

I controllori standard

$$U(s) = U_0 \frac{\prod (s + z_i)}{s^m \prod (s + p_j)}$$

$$U(s) = U_0 \frac{z_1 \dots z_m}{p_1 \dots p_n}$$

Il guadagno statico si ottiene scrivendo U in forma di Bode.

Nei controllori PID si fondono componenti proporzionali, integrali e derivativi.

- Lo modifica del fattore U_0 di proporzionalità si usa sia per la stabilità, sia per il controllo di parametri come lo risposto a regime, GM e PM.
- L'azione integrali U_1/s si usa per modificare il tipo di Gol, e quindi i requisiti a regime, ma lo suogrenza non provocare instabilità.

Un'alternativa all'uso isolato di un controllore integrati è quello di mettere in parallelo U_p e U_1/s , in modo da ottenere uno zero che compensi l'azione del polo

$$U(s) = \frac{U_1}{s} + U_p = \frac{U_1 + sU_p}{s}$$

- Si può inserire un controllore derivativo facendo $U_0 s$ in parallelo a U_1 , ottenendo azione proporzionale derivativo. Esso muove l'origine degli osintati verso sinistro e aumenta lo velocità di risposta, ma risulta non causale, quindi serve inserire un polo fuori banda

$$|P| \geq 10 \text{ dB}$$

$$U(s) = U_p + sU_0$$

- La forma più generale è il controllore PID, anche se non causale

$$= U_0 s^2 + U_p s + U_1$$

Il tuning consiste nel determinare dei parametri per un controllore PID. Le regole che vediamo furono proposte da Ziegler e Nichols, con

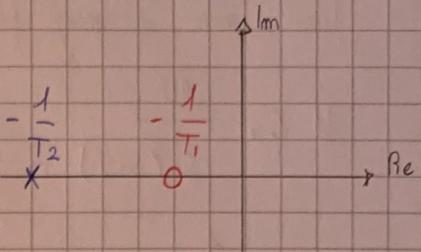
$$U(s) = U_0 = \left(1 + \frac{1}{T_1 s} + T_{D}s \right)$$

Le reti correttive

Modificiamo il comportamento dinamico del sistema fornendo un comportamento simile ai PID.

• Reti ad anticipo di fase

$$U(s) = U_0 \cdot \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} = U_0 \cdot \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{T_2}}$$



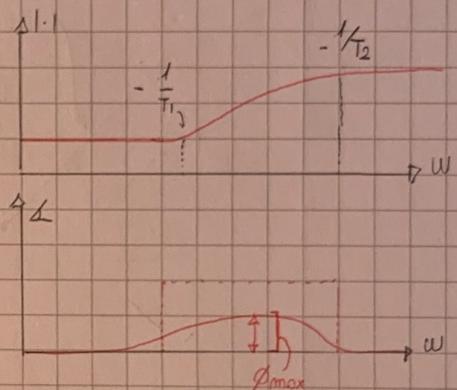
E' una rete noto come filtro gassato, che aumenta lo banda passante, migliora lo v. di risposta e attenua le frequenze basse.
Alle alte frequenze non si ha attenuazione.

Maggiore è lo distanzio polo zero, maggiore è il restringere di fase. Detto $d = T_2 / T_1$.

$$\phi_{\max} = \sin^{-1} \frac{1-d}{1+d}$$

La frequenza di massimo anticipo è

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$



Per lo sintesi di un controllore lead, si possono usare le seguenti regole:

1. Si calcola il tago di C_{OL} e U per avere ϕ_{\max} approssimato
2. Si calcola PM di C_{OL} in questo modo
3. Si calcola il Δ da sommare a PM per avere il PM che è requisito di gergo. Tale valore sarà ϕ_{\max} nel controllore lead
4. Si calcola $d = T_2 / T_1$, con $\phi_{\max} = \sin^{-1} \frac{1-d}{1+d}$
5. Si calcolo la nuova frequenza di attraversamento ω_c^n con

$$|U(j\omega_c^n) G(j\omega_c^n)| = A_{dB} = 20 \log \left| \frac{T_1}{T_2} \right|$$

6. Si ricava $\omega_c^n = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$. e da questo ricaviamo T_1 e T_2 per $U(s)$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

$EK \approx 65\%$

$PM \geq 45^\circ$

tipo I, errore allo rischio finito \rightarrow

$$E_{SS} = \frac{2}{N} \cdot 0.05 \Rightarrow N = 40$$

$$H_C = \frac{40}{s(s+2)}$$

$$H_S =$$

$PM = 18^\circ$

$$\Delta = 45^\circ - 18^\circ \Rightarrow \Delta_{des} \cong 40^\circ$$

$$\alpha = \frac{1}{4.5991} = \frac{T_2}{T_1}$$

troviamo il valore di W_C per cui il modulo di G_{OL} è

$$\alpha = -20 \log \frac{1}{d} = -13.25$$

$$W_C^n = +13.25$$

$$\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = 13 \text{ rad/s}$$

$$\left| \begin{array}{l} 1/T_1 = 6.1961 \text{ rad/s} \\ 1/T_2 = 28.41 \text{ rad/s} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} 1/T_1 = 6.1961 \text{ rad/s} \\ 1/T_2 = 28.41 \text{ rad/s} \end{array} \right.$$

$$G(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+5)}$$

$E_J = 0$ (sempre verificato)

$$M_I = e^{-\frac{j\pi}{T_1 - S^2}} < 0.02 \Rightarrow \xi \geq 0.78$$

$$\cos^{-1}(\xi) = 38.74^\circ \quad |z| = 1.03$$

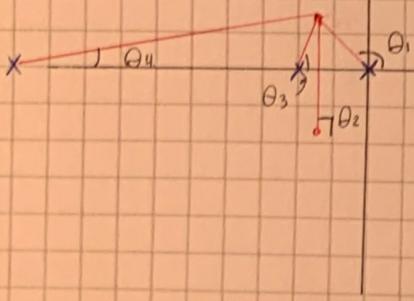
$$T_S = \frac{4}{\xi w_n} \quad \Rightarrow \quad w_n \cong 1.03$$

$$|z| = 1.03 \quad (\cos(38.74^\circ) \pm j \sin(38.74^\circ))$$

(sostituendo ξ)

$= -0.8 \pm j0.64 \rightarrow$ vogliamo che il luogo delle radici possa per questi punti

$\Delta \frac{\pi(z+s)}{s^2 \pi(\eta+s)} = \pi + 2k\pi$ || RL posso per i punti rossi se lo sommo degli angoli che formo con gli zen meno lo somma degli angoli che formo con i ghi più multo di $\pi + 2k\pi$



$$\theta_2 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = -180^\circ$$

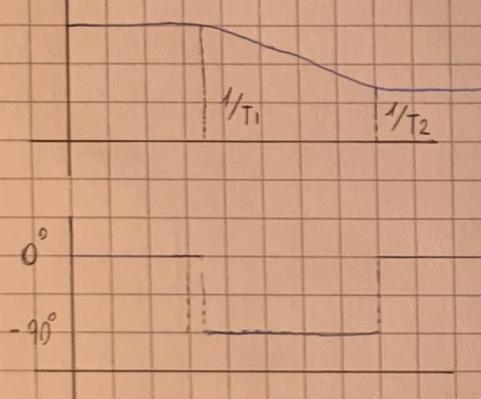
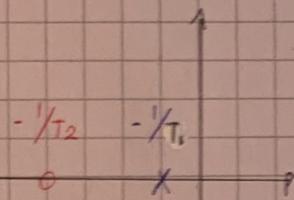
$$\Rightarrow \theta_e - \theta_p = 132.65^\circ$$

A questo punto si possono inserire uno zero o tentativo, e verificare che il risultato sia corretto

• Rete a ritardo di fase

Noto come filtro passa basso, aumenta il gain fino ad un certo frequenza e lo riduce ad alta. Elimina i rumori ad alto frequenza e diminuisce lo banda passante

$$U(s) = U \frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1} = U \frac{s + 1/T_2}{s + 1/T_1}$$



Come genna.

$$\Delta dB = 20 \log T_1/T_2$$

$$\omega_m = \sqrt{T_1 T_2}$$

$$d = T_2/T_1$$

$$\phi_{max} = -\sin \frac{1-d}{1+d}$$

Sistemi tempo-discreti

Nei sistemi continui, $t \in \mathbb{R}$, in quelli discreti $t \in \mathbb{N}$. Tra l'istante U e il $U+1$ non succede nulla e, allo stesso tempo, non si stabilisce il tempo che occorre tra i due istanti in questione (dipende dal problema). Nonostante il tempo di orologio tra U e $U+1$ possa essere diverso tra quello tra $U+1$ e $U+2$, noi considereremo uno distribuzioni uniformi, necessaria per l'approccio matematico.

Un macchinino da caffè, tra due caffè, non lo nullo, ma comunque uno stato (ogni volta il numero di monete) solo se si inserisce uno nnullo. Sulla base del tempo che intercorre fra due eventi, si hanno distanze diverse fra due variazioni: si parla di sistemi ad eventi discreti. Noi considereremo sistemi in cui accade una certa azione ogni intervallo temporale prefissato, con sistemi temporizzati. In un macchinino dal caffè di questo tipo, periodicamente si guarda se un tasto sia stato premuto.

In sistemi di questo tipo otteniamo equazioni alle differenze: $X_{U+1} = A X_U + B U$

Consideriamo una colonia di conigli, con le seguenti regole

- Uno coniglio di conigli genera uno coniglio di figli un anno all'anno
- Conigli giovani non fanno figli
- Conigli giovani diventano adulti dopo un anno
- Posso crescere o aggiungere coppie di conigli giovani
- i conigli sono immortali.

Mi servono delle variabili, nel numero minimo per descrivere il sistema. Prendiamo n_y come numero di coppie di conigli giovani, n_o per gli adulti.

L'ingresso è una variabile ingeno: non sto nel sistema, ma permette di alterarlo. Sia allora u , come numero di conigli che si aggiungono (> 0) o rimuovono (< 0)

$$n_o(U+1) = n_o(U) + n_y(U)$$

↑ conigli immortali. Dopo un anno, i giovani sono adulti

$$n_y(U+1) = n_o(U) + u(U)$$

Perché ogni sistema ha un uscita, possiamo considerare il numero di conigli totali:

$$y(U) = n_o(U) + n_y(U)$$

Riassumendo,

$$x(U) = \begin{pmatrix} n_o(U) \\ n_y(U) \end{pmatrix} \quad x(U+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(U) + \begin{pmatrix} 0 \\ u(U) \end{pmatrix}$$

$$y(U) = (1 \ 1) x(U)$$

Molto spesso, lavoreremo con sistemi continui, in cui potremo acquisire informazioni dai sensori solo ad istanti discreti: ci ricordiamo dunque a questo situazione. In generale

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad \text{Se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } u \in \mathbb{R}^m \text{ (m ingressi)}$$

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ x_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{cases}$$

La forma matriciale si ottiene nel caso di f lineare in tutte le $n+m$ variabili

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Dato $u(1)$ è lo stato in un istante.
può essere utile sapere cosa succede dopo
T istanti, un po' come nel caso continuo,
usiamo Logaritmo per l'induzione di $x(t)$.

Sia t_0 l'istante iniziale. Se il sistema è tempo invarianto, si può assumere
 $t_0 = 0$ senza perdita di generalità. Nota $x(0)$, calcolo $x(1)$ con

$x(1+1) = Fx(1) + Gu(1)$, detto mappo di aggiornamento dello stato ad un passo

$$x_1 = Fx_0 + Gu_0$$

$$x_2 = Fx_1 + Gu_1 = F^2 x_0 + FG u_0 + Gu_1$$

$$x_3 = Fx_2 + Gu_2 = F^3 x_0 + F^2 Gu_0 + FG u_1 + Gu_2 \quad \dots$$

Per induzione, si ricava un'espressione generale, detta mappo di aggiornamento dello stato a n passi

$$x(n) = F^n x(0) + \sum_{i=0}^{n-1} F^{n-1-i} G u_i$$

Nello sommatoria, la potenza di F varia in senso opposto all'ordine di n .

$$x_n = F^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} F^{n-1-i} G u_i$$

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Risposta libera	Risposta forzata
-----------------	------------------

Si trova l'espressione dell'uscita sostituendo; infatti, avendo $y_n = Hx_n + Du_n$,

$$y(n) = H F^n x(0) + H \sum_{i=0}^{n-1} F^{n-1-i} G u_i + D u_n$$

Si noti che si può scrivere

$$\sum_{i=0}^{n-1} F^{n-1-i} G u_i = \left[\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline G & FG & F^2 G & \cdots & F^{n-1} G \\ \hline \end{array} \right] \begin{matrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_1 \\ u_0 \end{matrix}$$

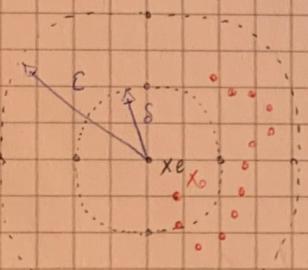
x_e è un punto di equilibrio se, postovi il sistema, esso ci rimane. Poiché lo stato avviene come $x(t+1) = f(x(t), u(t))$, esso dipenderà anche dall'ingresso, che possiamo comunque non considerare.

$x_e = f(x_e, \cdot)$ non solo questa è la definizione, ma anche l'equazione da impostare per trovare i punti di equilibrio, al variare di u . Il caso equivalente nei sistemi TC è $\dot{x} = 0 = f(x, u)$.

Dato un punto di equilibrio x_e , esso si definisce stabile se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists S > 0 : \|x(0) - x_e\| < S \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \quad \forall t$$

Fissato ε , posso trovare una distanza massima da x_e per $x(0)$ con il quale il movimento non si allontana mai più di ε da x_e .



x_e è convergente se

$$\exists S > 0 : \text{se } \|x(0) - x_e\| < S \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

Limitando la perturbazione iniziale, osinteticamente si torna ad x_e .

Un movimento di equilibrio osinteticamente stabile unisce le due cose:

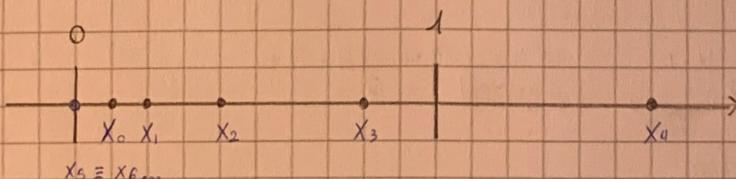
$$\forall \varepsilon > 0 \exists S > 0 : \text{se } \|x(0) - x_e\| < S \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \quad \forall t \text{ e } \|x(t) - x_e\| \rightarrow 0 \quad t \rightarrow +\infty$$

Nel sistemi TC, la convergenza implica la stabilità; nei sistemi TD, ci possono essere sistemi convergenti ma non asint. stabili. Il problema sta nel " $\forall \varepsilon > 0 \exists S > 0$ ": Ci potrebbero essere ε per cui non trovo S o che mi limita il movimento, ma poi torna a x_e .

$$x(t+1) = \begin{cases} 2x(t) & \text{se } \|x(t)\| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il punto di equilibrio è $x_e = 0$.
È convergente, perché torna sempre a 0.

Sia $x(0) = 0.1$



Se $\varepsilon \geq 1$, mi basta avere S piccolo e rientro a non andare mai oltre 1. Ma per $\varepsilon = 0.5$, io non rientro a trovare S con il quale non mi allontano più di 0.5 da x_e . Quindi non è equilibrio stabile.

$$x(t+1) = x(t)$$

Tutti gli $x_e \in \mathbb{R}$ sono stabili e convergenti come punti di equilibrio.

Consideriamo $x = Ax + u$ Esso ha $A = 0$, con autovalore $\lambda = 0$, con autovettore ϕ di molte cifre: è un integratore ($Sx(s) = u(s) \Rightarrow x(s) = u(s)/s$)

$$x_{n+1} = x_n + u$$

Tali sistemi sono accumulatrici andando a sommire tutte volte l'ingresso: è come un integrale, solo nel caso discreto $\Rightarrow \lambda(A) = 1 - \lambda$.

Vediamo il caso di sistemi lineari a TD + tempo invarianti

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$$

Poniamo $u_n = 0$, considerando l'evoluzione libera

$$x_e = Ax_e$$

$x_e = 0$ e' un punto di equilibrio, ma potrebbero essercene altri. In particolare, serve $(A - I)x_e = 0$. Ciò accade se $\det(A - I) \neq 0$, ovvero se $\det(A - I) = 0$. $A - I$ deve avere almeno uno zero su diagonale, da cui A deve avere almeno uno zero su diagonale.

Lo stesso caso accade nel caso TC se λ è uno zero su diagonale di A . In particolare, se $x_e \neq 0$ è un punto di equilibrio, lo sono anche $x_e + v \in \mathbb{R}^n$.

Nel caso TC, lo risposto libero si ottiene da $x(t) = e^{At} x_0$

Nel caso TD,

$$x_n = A^n x_0$$

ma A si può scrivere come $V \Lambda V^{-1}$ con Λ diagonale:

$$A^n = V \Lambda V^{-1} V \Lambda V^{-1} \dots V \Lambda V^{-1} = V \Lambda^n V^{-1}$$

Detti z_1, \dots, z_n gli autovalori di A , $\Lambda = \text{diag}(z_1, \dots, z_n)$ e

$$\Lambda^n = \begin{bmatrix} z_1^n & & \\ & z_2^n & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n^n \end{bmatrix}$$

z^n sono i modi del sistema che, se combinati con V e V^{-1} , formiscono la risposta libera del sistema.

Se z è reale, il modo è z^n

Se abbiamo due autovalori complessi e coniugati, i modi sono

$$z^n \text{ e } \bar{z}^n \Rightarrow (pe^{j\theta})^n \text{ e } (pe^{-j\theta})^n \Rightarrow p^n \sin(\theta n + \varphi)$$

ogni φ che deriva dalle condizioni iniziali

Se z ho ammesso $\gamma > 1$, ci sono γ modi dello stesso tipo

$$u^0 z^n, u^1 z^{n-1}, \dots, u^{\gamma-1} z^{n-\gamma+1}$$

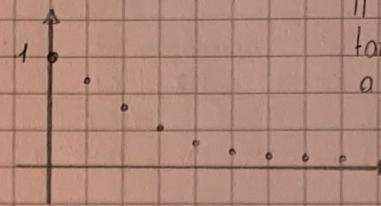
Lo stesso se z è complesso

$$u^0 p^n \sin(\theta n + \varphi), \dots, u^{\gamma-1} p^{n-\gamma+1} \sin(\theta n + \varphi)$$

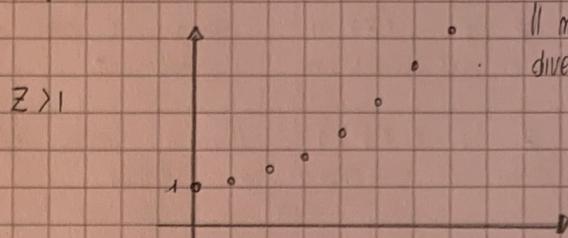
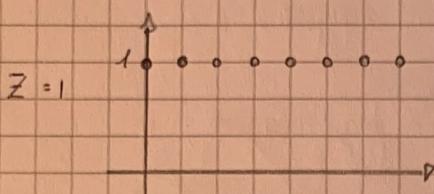
Consideriamo possibili valori di z e ammesso

• z reale

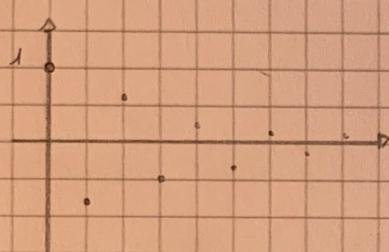
$0 < z < 1$



Il modo e convergente.
tanto qui rigido o nientemeno
 $\alpha \neq \emptyset$

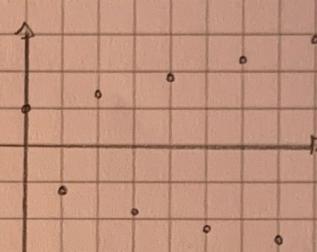


$-1 < z < 0$



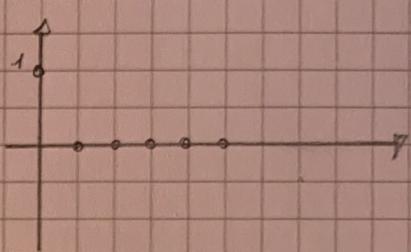
Il segno cambia, ma il modulo diminuisce:
il modo e convergente

$z < -1$



Il modo e divergente

$z = 0$

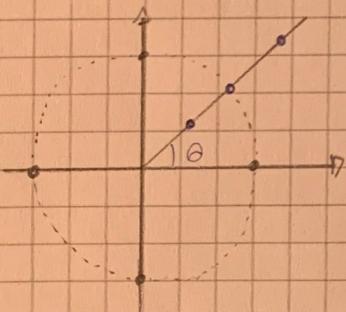


$0^\circ = 1$, quindi il modo vale inizialmente 1, poi sempre 0.
E come un impulso!

In modi mn $-1 < z < 0$. La frequenza e' lo qui grande possibile, cioè un cambio di segno ogni due istanti.

L'idea, nel loro questo, e' chi lo complesso X_0 potrebbe essere o meno un modo; sulla base del modo, il movimento potrebbe divergere o convergere.

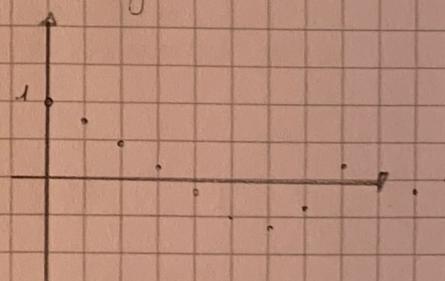
Per i valori cc. abbiamo il seguente caso



$$P'' \sin(\theta u + \phi) : \text{ se } P = 1, \text{ ho una sinusode}$$

se $P > 1$, ho un'oscurazione con uno ammesso che aumenta, rendendo il modo non convergente

Se $0 < P < 1$, il modo e' convergente, con una sinusode smorzata.



Se $\theta = 90^\circ$, le cose non cambiano se non il segnale.

Se $\operatorname{Re}(z) < 0$, allora l'oscurazione dipende dal fattore $(-p)^u$. Avendo due oscurazioni simultanee, l'andamento e' molto ma, di sicuro. Se $-1 < p < 0$, allora il modo converge, perché $p'' \rightarrow 0$.

Degli andamenti si possono trovare anche nel caso di $\gamma > 1$. In tal caso, se $p < 1$ comunque si ha la convergenza. Cambia il discorso per $p = 1$: qualcosa che prima oscurava tra -1 e 1 viene moltiplicato per u , quindi diverge.

Un sistema LTI TD e' osintoticamente stabile se tutti i suoi modi siano convergenti, ossia se $|z_i| < 1$. In tal caso

$$x_n = A^n x_0 \xrightarrow{u} 0, \text{ case' il punto di equilibrio.}$$

Se $\exists z : |z| > 1$, allora il modo associato e' divergente, e il sistema non e' né stabile né convergente.

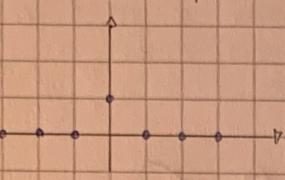
Se $\exists z : |z| = 1$, allora il modo associato e' non divergente; se $\gamma = 1$, allora il sistema e' stabile

Se $\exists z : |z| = 1$ ma $\gamma > 1$, allora il sistema e' instabile.

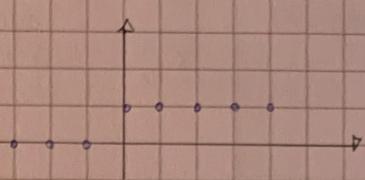
Come nel caso TC, se un punto di equilibrio e' stabile/instabile in LTI, tali lo sono tutti, poiché la stabilità e' una proprietà del sistema.

Anche nel caso TD si possono definire alcuni ingressi 'standard':

$$\text{L'impianto } s(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$\text{Il gradino } u(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n>0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Immaginiamo di avere un segnale di cui conosciamo il suo valore per ogni n :

$$\{u(n)\} = \{\dots, u(-1), u(0), u(1), \dots\}$$

Si può realizzare $u(n)$ sommando impulsi adeguatamente strozzati in i come $s(n-i)$

$$u(n) = \dots + u(-1) \delta(n+1) + u(0) \delta(n) + \dots = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n) \delta(n-n)$$

Un'operazione simile non si può fare in TC.

Abbiamo già visto che lo risposto ad un segnale in ingresso $u(n)$ è

$$y(n) = H F^n x_0 + H \sum_{j=0}^{n-1} F^{n-1-j} G u(j) + D u(n)$$

Questa porzione non ci interessa,

ma avendo direttamente a che fare con $u(n)$.

Anche nel caso TC si ottiene allo stesso risultato sommando i contributi delle singole componenti $s(n-i)$.

$$\text{Supponiamo } u(n) = s(n)$$

Per $n=0$, lo sommatoria non è definito, resto solo l'ultimo termine che vale D ;

Per $n>0$, resto solo il primo termine dello sommatoria, ossia $j=0$

$$\text{Lo risposto impulsivo } g(n) = \begin{cases} D & \text{se } n=0 \\ H F^{n+1} G & \text{se } n>0 \end{cases}$$

Compionamento di segnali:

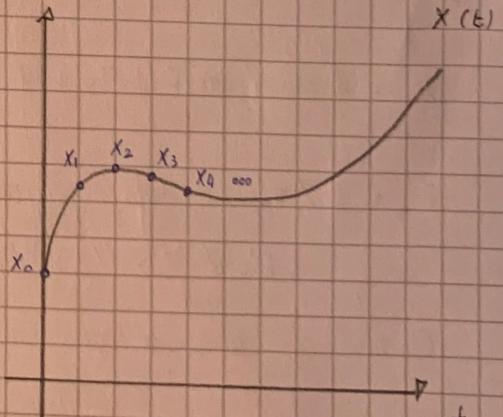
Sono i controllori veramente realizzati con un calcolatore; per elaborare i dati, sono dunque fatti dei campionamenti di un segnale esterno continuo, che necessariamente avverrà ogni intervallo fissato.

Se il tempo tra due campionamenti successivi è lo stesso, allora esso è uniforme e T_s è il tempo di campionamento. Si indica come frequenza di campionamento $F_s = 1/T_s$.

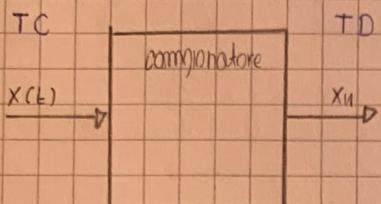
La relazione fondamentale che definisce il campionamento uniforme mette in relazione TC e TD.

$$x_n = x(t) \Big|_{t=n \cdot T_s} = x(nT_s)$$

$x(t)$ è un segnale elettronico, x_n un numero in un calcolatore.



L'operazione viene svolta da un transduttore, come un convertitore A/D.



Il problema sta nello scatto di T_s : intervalli di tempo troppo distanti potrebbero far apparire simili segnali differenti: non conoscendo la funzione se non per i valori campionati, il controllore sarà errato.

La soluzione è ridurre T_s ; tuttavia, con T_s troppo grande si rischia che segnali diversi appaiano simili. Allo stesso tempo, se T_s è troppo, si deve spendere molto in CPU chi rientrano ad elaborare i dati veloci, grumo del successivo campionamento.

Pensiamo al campionamento di segnali sinusoidali:

$$u(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{con} \quad \omega = 2\pi f \quad \text{pulsazione}$$

In TD, uno sinusoidale nativo è $u_n = A \cos(2\pi f n + \theta)$

E' immediato che in TC $u(t)$ è periodico, ma in TD? Serve trovare un valore n per cui $x_n = x_{n+m} \quad \forall x_n$

Per avere ciò, $A \cos(2\pi f n + \theta) = A \cos(2\pi f n + 2\pi f m + \theta)$

L'uguaglianza si ha per $2\pi f m$ multiplo di 2π : $2\pi f m = 2\pi m \quad f = m/n$

u_n è periodico solo se f è razionale, $f \in \mathbb{Q}$

In TD, due sinusoidi possono essere uguali per pulsazione differente:

Sia $\omega_2 = \omega_1 + 2\pi m$ e m intero

$$u_n = A \cos(\omega_2 n + \theta) = A \cos(\omega_1 n + 2\pi m n + \theta) = A \cos(\omega_1 n + \theta)$$

infatti $m n$ è intero, quindi $2\pi m n$ è un multiplo intero di 2π .

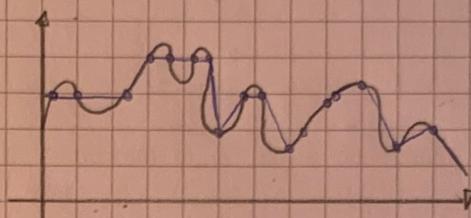
A noi interessa il campionamento di uno sinusoidale continuo.

$$u_n = A \cos(2\pi F n \cdot T_s + \varphi) = A \cos\left(2\pi \frac{F}{F_s} n + \varphi\right) = A \cos(2\pi F' n + \varphi)$$

F' = F/F_s è detta frequenza normalizzata

Se $F' \notin [-1/2, 1/2]$, allora sinusoidi con frequenze diverse appaiono identiche.

Quando ciò accade, si parla di aliasing!



$$u_1(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{8}t\right) \quad u_2(t) = \cos\left(2\pi \frac{7}{8}t\right) \quad \text{Sia } T_s = 1$$

$$\cos(2\pi \frac{7}{8}t) = \cos(2\pi (1 - \frac{1}{8})t) = \cos(2\pi t - \frac{1}{8}2\pi t) =$$

$$= \cos(-2\pi \frac{1}{8}t) = \cos(2\pi \frac{7}{8}t)$$

Dal commigionamento di u_2 ci siamo
riandati al commigionamento di u_1 .

Il problema sta nelle pulsazioni che distano multipli interi di 2π , e quindi nelle frequenze che distano $n \in \mathbb{Z}$

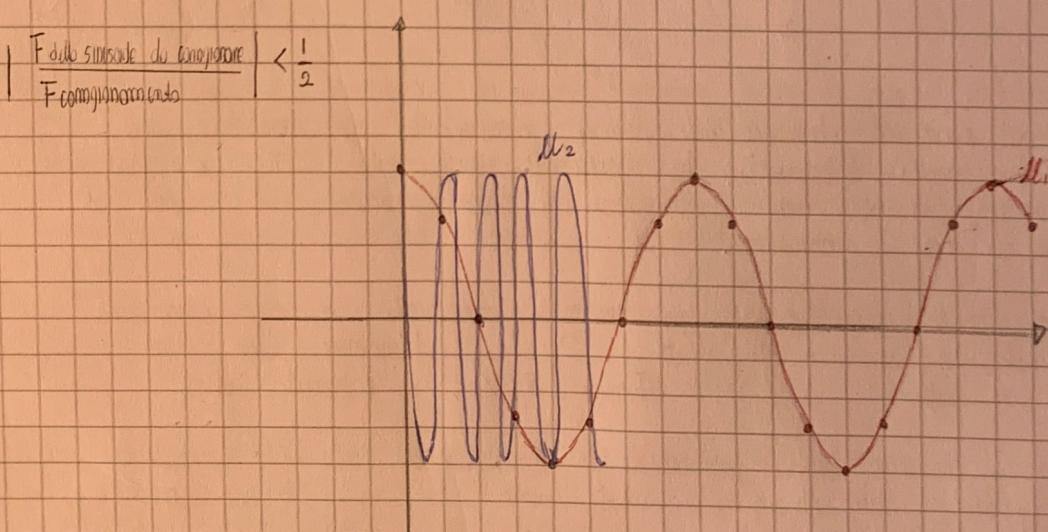
Nel caso precedente, $\frac{1}{8}$ è equivalente a $-\frac{1}{8} = \frac{7}{8} - 1$

Le frequenze in questione sono dette alias.

Quindi, fissato F_s , il valore massimo che posso ottenere come F' è limitato in modulo da 0.5 : al di fuori do $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, ho un alias nell'intervallo.

$$\text{mo se } F'_{\max} = \frac{F_{\max}}{F_s} = \frac{1}{2}, \text{ allora } F_{\max} = \frac{1}{2} F_s \quad F_s > 2 F_{\max}$$

In conclusione, se commigiano un segnali con frequenza F t.c. $|F| > \frac{1}{2} |F_s|$, allora avrò un colpito con un altro segnale in $[-F_{\max}, F_{\max}]$



Risposto di un sistema ad un generico segnale $u(n)$

Si considera lo risposto ai singoli impulsi di cui è costituito il sistema

$$\{u(n)\} = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n) \delta(n-n) = u(n)$$

non ha alcuna influenza sull'uscita del sistema. Se, come visto, l'uscita di un sistema ad un impulso è $g_y(n)$, allora quello ad uno somma di impulsi è

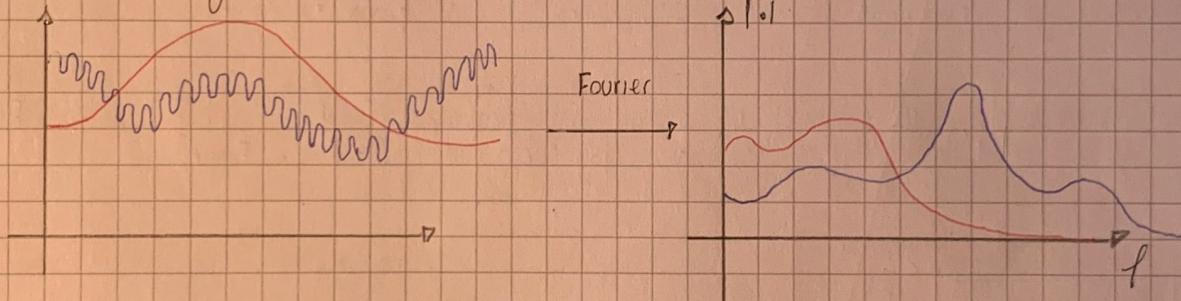
$$y(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n) g_y(n-n)$$

Quanto è lo somma di convoluzione, e si indica come $u(n) * g_y(n)$

affine agli integrali di convoluzione in TC.

Finora abbiamo osservato il problema del campionamento in segnali che differiscono per un fattore N costanti nello spettro (Aliasing).

Ogni segnale può essere interpretato (e quindi scomposto) come somma di sinusoidi. Lo spettro di un segnale presenta le frequenze sullo x, l'ampiezza delle sinusoidi associate sullo y. Le frequenze alte sono spesso associate al rumore, causando oscillazioni di disturbo nel segnale.

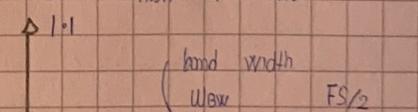
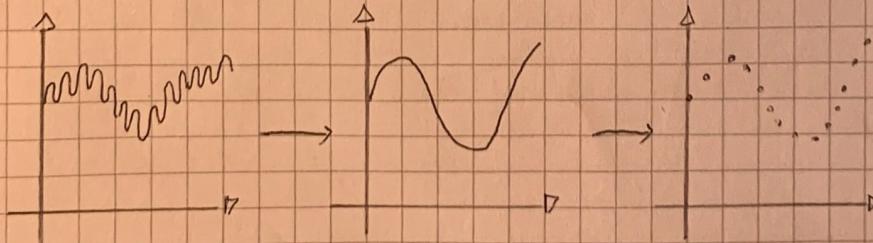


Un filtro passo basso serve ad eliminare tali rumore, rimuovendo le frequenze oltre W_{BW} (band width, o banda passante). In particolare, nell'ambito TD è fondamentale rimuovere le frequenze alte ed i rumori, altrimenti il campionamento può condurre ad errori importanti di cui non ci accorgiamo.

Inoltre, campionare un segnale composto da più ondulazioni sovrapposte è come campionare ciascuna in modo isolato e sommare gli effetti. Per le frequenze alte, può darsi che si superi il fattore $F_{max} = F_s/2$, causando aliasing.

Bisogna allora garantire che il contenuto frequenziale di un segnale sia nullo (o trascurabile) oltre F_{max} , ovvero dovrà scegliere tale valore in modo da non rimuovere frequenze utili.

In un filtro del genere, arrivati a $F_s/2$, l'attenuazione è di circa 20 dB e si dice che il filtro è "ignorabile", le ondulazioni superate vengono rimosse.

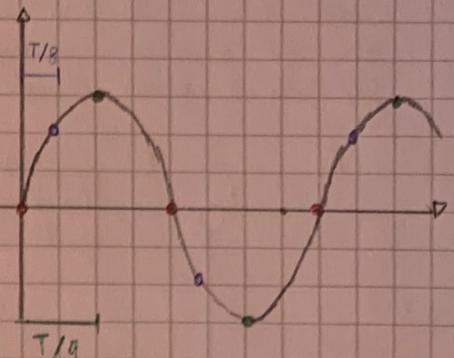


Poiché il filtro passo basso non è ideale, bisogna scegliere W_{BW} abbastanza prima di $F_s/2$.

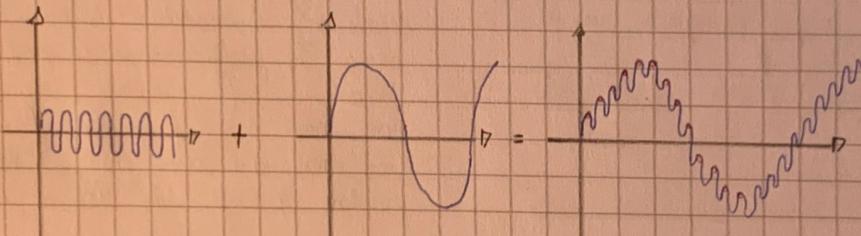
Nonostante le occorrenze, il caso e lo fortunato nel campionamento entrano in gioco.
 Sia F la frequenza di una sinusoidale e campionata con frequenza $2F$.
 (Il periodo di campionamento è la metà).

Se compongo a partire da $t=0$, ho un segnale nullo
 da $t = T/8$ ho un segnale sinusoidale spostato
 di ampiezza $1/2$, se $t = T/4$ l'ampiezza
 è 1 .

Osserviamo che il limite $F_{max} = F_s/2$ è
 puramente teorico, e ho a che fare, con il campionamento
 di un numero infinito di campioni, di ricostruire il segnale
 di partenza. Si tenga conto che,
 per non avere problemi, $F \gg F_{max} = F_s/2$ (dove $F_s > 2F_{max}$, Th di NS).
 Allo stesso tempo, il filtro passo basso riduce il modulo di alcune armoniche grido di f_{BW} .



\Rightarrow Dato f_{max} utile, scelto $f_{BW} \gg f_{max}$ in modo da non perdere
 le armoniche che mi servono, dopo scelgo $f_s \gg f_{BW}$, in modo
 che sia campionamento onnivolo quanto mi serve.



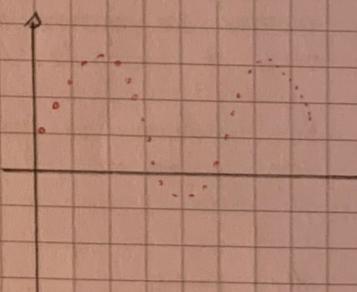
Suggeriamo di campionare con uno frequenza vicina a quella del grido
 segnale, senza usare un filtro passo basso. C'è il rischio che io prenda
 sempre i picchi delle creste (punti massimi). Il risultato è
 simile allo secondo onda, ma traslato in alto, con un
 errore comunque ignora.

$$f_{max} \ll f_{BW} \ll f_s$$

E anche non valgono i criteri, ma siamo comunque

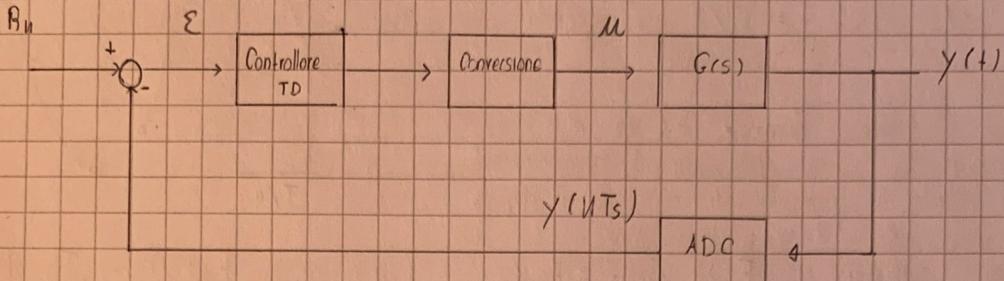
$F_s \gg 2F_{max}$, perché il teorema di NS ha riferimento

solo teorico. Basta uno decodice: $F_s \approx 20F_{max}$

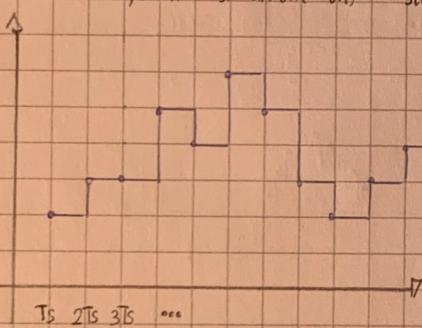


Sistemi in TD

Spesso l'ingresso R_u di un sistema è TD, posso attraverso un controllore a suo volto TD e viene poi convertito in un segnale TC, in modo che possa farci da ingresso a GCS. Si tratta di convertire l'uscita u_n di un controllore in $u(t)$.

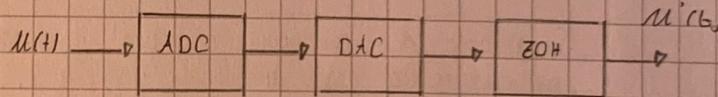


Sicuramente nella conversione dobbiamo far uso di un DTC, ma non solo, perché lo grandezza fisico dura e cambia nel tempo. Si usa lo zero order hold (ZOH) che tiene il segnale stabile a $u(n \cdot Ts)$ da nTs a $(n+1)Ts$. Nella grafica, dai puntini si ottiene un scalinato.



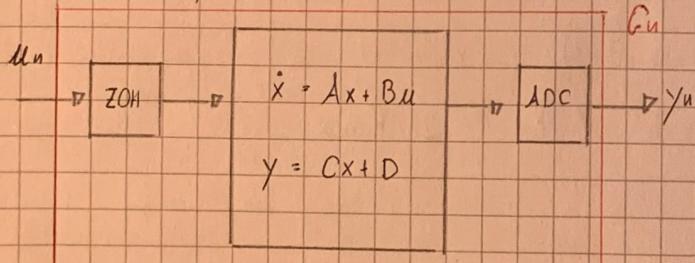
Se i gradini sono grandi il segnale non è realistico: si deve avere Ts sull'incremento piccolo. Però, f_s dipende da una parte da f_{max} e f_{base} , ma anche dall'usato che vogliamo in tale passaggio da TD a TC.

Consideriamo questo caso limite



Quanto sono diversi $u(t)$ con $u'(t)$? Il th. di Nyquist mi dice che posso ricostruire con precisione massima $u(t)$ se lo $u(t)$ supera frequenza massima è minore di $F_s/2$. Questa situazione è valida però solo in teoria.

Se mettiamo un controllore TD e un convertitore a monte di GCS e un ADC a ~~uno~~ volte, il sistema è come se lavorassero completamente in TD, nonostante ciò interni operi in TC.



Fissiamo l'istante temporale nTs , e vediamo cosa succede all'istante successivo $(n+1)Ts$.

Sapendo $x(t_n)$, troviamo $x(t_{n+1})$ con Lagrange

$$x(t_{n+1}) = e^{A(t_{n+1} - t_n)} x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{A(t_{n+1} - \tau)} B u(\tau) d\tau$$

Avendo usato ZOH, $u(\tau)$ è costante in $[t_n, t_{n+1}]$, e vale $u(t_n)$

$$\Rightarrow x(t_{n+1}) = e^{At_n} x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{A(t_{n+1} - \tau)} B u(t_n) d\tau$$

Si fa un cambio di variabili, ponendo $T' = t_{n+1} - T$

$$x(t_{n+1}) = e^{\frac{AT_s}{T_s}} x(t_n) + u(t_n) \int_0^{T_s} e^{\frac{AT'}{T_s}} dT B$$

F, indipendente da t_n

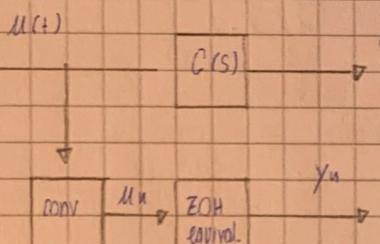
G, indipendente da t_n

Ottieniamo un sistema TD nella seguenti forme

$$\begin{array}{|c|} \hline \begin{matrix} u_n \\ \rightarrow \end{matrix} & \boxed{x_{n+1} = Fx_n + Gu_n} & \begin{matrix} y_n \\ \rightarrow \end{matrix} \\ \hline & y_n = Cx_n + Du_n & \\ \hline \end{array}$$

$F = e^{\frac{AT_s}{T_s}}$

$G = \int_0^{T_s} e^{\frac{AT'}{T_s}} B dT$



$\forall T_s$, componendo $y(t)$ con tali valori si ottiene esattamente y_n :

Il sistema TD produce i campionamenti di TC

Si può pensare di progettare $U(s)$ che lavori su ZOH; applicandolo a $G(s)$, negli istanti di campionamento avremo lo stesso risultato in uscita.

L'equivalenza si può anche fare in forma approssimata

$$\dot{x}(t_n) = x(t_{n+1}) - x(t_n) / T_s \quad \text{si sostituisce a } \dot{x} = Ax + Bu$$

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{T_s} \cong Ax_n + Bu_n \implies x_{n+1} \cong (I + AT_s)x_n + BT_s u_n$$

Infatti $F = e^{\frac{AT_s}{T_s}} = (\text{sviluppo con Taylor fino al 1} \cong I + AT_s \cong F \text{ primo ordine})$

$$G = \int_0^{T_s} e^{\frac{AT'}{T_s}} dT B = A^{-1} (e^{\frac{AT_s}{T_s}} - I) B \cong (\text{Taylor al primo$$

$$\text{ordine}) \cong A^{-1} (I + AT_s - I) B \cong T_s B = BT_s$$

Lo trasformato z

E' l'equivalente di Laplace in TD. Dato $\{u_n\}$, lo trasformato z del segnale e'

$$Z\{u_n\} = M(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n z^{-n}$$

Avevamo sistemi causali e segnali con $u_n = 0$ se $n < 0$, lo sommatoria partire da 0.

Esiste anche l'omotrasformato, che normalmente vale
Tale definizione non ha utilità, ricorrendo ad una sostanziale
zione affine ai tratti semplifici in TC.

$$\frac{1}{2\pi j} \oint M(z) z^{n-1} dz$$

In generale, $M(z)$ sono rapporto di due polinomi, $N(z)/D(z)$

$$\delta(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_n \cdot z^{-n} = 1 \cdot z^0 = 1 \quad \text{mentre } \delta_n = 0 \quad \forall n \neq 0$$

$$1(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} 1(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

Se $|1/z| < 1$, allora si ha convergenza a $1/(1-z)$

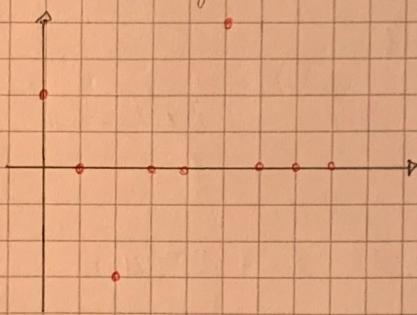
Si dimostra facilmente la linearità dello trasformato z

$$Z\{a x_{1n} + b x_{2n}\} =$$

$$= a Z\{x_{1n}\} + b Z\{x_{2n}\}$$

Consideriamo un segnale finito e calcoliamone lo trasformato

$$M(n) = 2 s(n) - 3 s(n-2) + 4 s(n-5)$$



$$Z\{u_n\} = \text{uso la linearità e la definizione}$$

$$= 2 - 3z^{-2} + 4z^{-5} =$$

$$= \frac{2z^5 - 3z^3 + 4}{z^5}$$

Tutti i segnali finiti hanno poli (e quindi autovalori della matrice dinamica A) pari a 0

Trasformiamo $\cos(\omega n)$

$$Z\{\cos \omega n\} = Z\left\{ \frac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2} \right\} = \frac{1}{2} Z\{e^{j\omega n}\} + \frac{1}{2} Z\{e^{-j\omega n}\}$$

[trasformiamo z^n , e quindi $\omega = e^{j\omega n}$]

$$\sum u_n z^{-n} = \sum \left(\frac{z}{\omega}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{\omega}{z}} = \frac{z}{z - \omega}$$

A cui si ricorda il $\cos \omega = 1$.]

$$\text{Mo' altro} \quad Z \left\{ e^{j\omega n} \right\} = \frac{z}{z + e^{j\omega}} \quad * Z \left\{ f(n-n_0) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n-n_0) z^{-n} = (z - z^{-n_0})$$

$$Z \left\{ \cos \omega n \right\} = \frac{1}{2} \frac{z}{z - e^{j\omega}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z - e^{-j\omega}} = - \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) z^{-n} \right) z^{-n_0} = F(z) \cdot z^{-n_0}$$

$$= \frac{1}{2} z \left(\frac{z - e^{-j\omega} + z - e^{j\omega}}{(z - e^{j\omega})(z - e^{-j\omega})} \right) = \frac{1}{2} z \left(\frac{2z - 2z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1} \right) = \frac{z^2 - z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$$

Sia $F(z) = Z \left\{ f(n) \right\}$ Cosa succede nel caso di un ritardo / anticipo n_0 ?

1. $n_0 > 0$: ho una traslazione a dentro, e quindi un ritardo. Dallo definizione, con un cambio di variabili, si ottiene

$$Z \left\{ f(n-n_0) \right\} = F(z) z^{-n_0} *$$

2. $n_0 < 0$: Non c'è un'operazione causale, non potendo prendere i fattori gramo di ϕ , e' come prevedere il futuro. Allora si trova di un fattore $n_0 < 0$, poi si tagliano gli elementi da ϕ a $n_0 - 1$, che vengono gramo dalla ϕ

$$Z \left\{ f(n-n_0) \right\} = F(z) \cdot z^{-n_0} - \sum_{n=0}^{n_0-1} f(n) z^{-n} - (n-n_0)$$

Nel caso di $n_0 = -1$, otteniamo

$$Z \left\{ f(n+1) \right\} = Z F(z) - z f(0)$$

Rimane questo

Mo' allora:

z^+ e' come un anticipo di un istante di tempo

z^- e' un operatore di ritardo di un istante di tempo

Teorema sul valore

iniziali

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} F(z)$$

Teorema sul valore

finali

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1) F(z)}{z}$$

Trasformato dello scambio di convoluzione

$$Z \left\{ M(n) * g_r(n) \right\} = G(z) \cdot M(z)$$

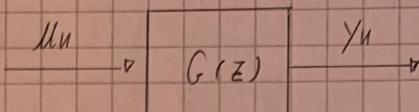
Risposta impulsiva
del sistema

$$= \begin{cases} D & \text{se } n=0 \\ C F B & \text{se } n>0 \end{cases}$$

Imo allora possiamo vedere il sistema in termini di blocchi

$G(z)$ è la funzione di trasferimento del sistema

In TC, il guadagno statico è $G(0)$; in TD, è $G(j)$



U_n	$U(z)$	U_n	$U(z)$
S_n	1	$U_d^n U_n$	$\left(-z \frac{d}{dz}\right)^n \frac{z}{z-d}$
$1/U_n$	$\frac{z}{z-1}$	$\sin(n\omega)$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
rimpa $U_1(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\cos(n\omega)$	$\frac{z^2 - z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
$U^n U_n$	$\left(-z \frac{d}{dn}\right)^n \frac{z}{z-1}$	$d^n \cosh n\omega$	$\frac{z d \cosh \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
modo di autorallineale			
$0.8^n 2^n U_n$	$\frac{z}{z-2}$	$d^n \sin n\omega$	$\frac{z^2 - z d \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$

Portiamo sullo schema di aggiornamento dello stato ad un passo e ricaviamoci $G(z)$

$$X_{n+1} = Ax_n + Bu_n \rightarrow z \{ X_{n+1} \} = A x(z) + B u(z)$$

$$y_n = cx_n + du_n \quad z x(z) - z x(0) = A x(z) + B u(z)$$

$$x(z) = (zI - A)^{-1} z x(0) + (zI - A)^{-1} B u(z)$$

Si inserisce nello secondo

$$y(z) = C(zI - A)^{-1} z x(0) + [C(zI - A)^{-1} B + D] u(z)$$

risposto libero del sistema.

In effetti, $(zI - A)^{-1} z x(0)$ è come se fosse lo trasformato di $A^n x(0)$.

Funzione di trasferimento, che determina lo risposta forzata.

Per antitrasformare si usa lo tecnico dei razzi semplificati tenendo presente che u serve lo z al numeratore. L'operazione e' quella di scomporre in razzi semplificati y/z come segue. Poi moltiplicare tutto per z per ottenere i razzi semplificati trasformati z

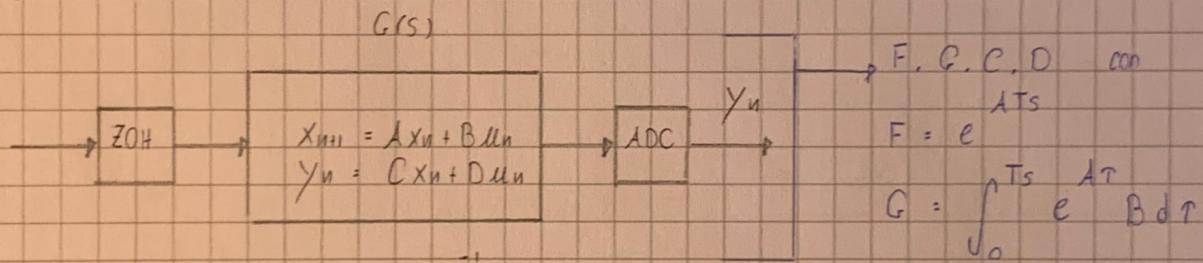
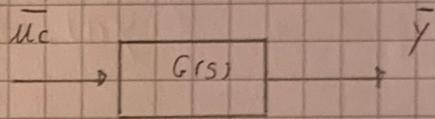
$$y(z) = \frac{2z^2 + 2z}{z^2 + 2z + 3} \quad \frac{y}{z} = \frac{2z+2}{(z+3)(z-1)} = \frac{1}{z+3} + \frac{1}{z-1}$$

$$y(z) = \frac{z}{z+3} + \frac{z}{z-1} \Rightarrow y_n = (-3)^n u_n + 1^n$$

Progettazione di sistemi di controllo

L'impianto di cui ci occupiamo lavorerà in TC, così come eventuali attuatori e monte e sensori o valvole. Nel complesso i tre elementi forniscano una funzione di trasferimento $G(s)$, il cui input sarà l'uscita del controllore

Nel progettare un controllore TD. Ci dobbiamo ricondurre allo zero holder hold equivalente di $G(s)$, su cui fare ogare $U(z)$



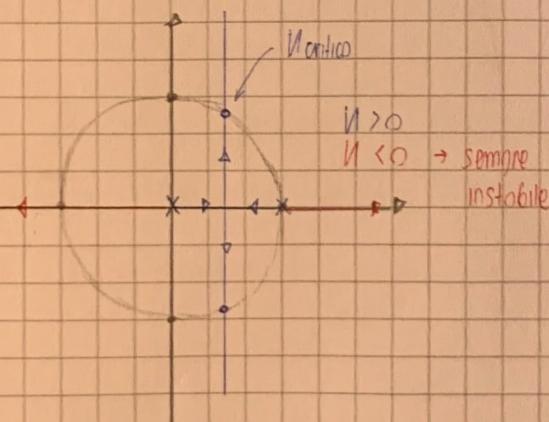
Con $C_n = C(zT - 1)^{-1} B + D$
otteniamo un sistema discrezionato che si comporta come
 $y(+)$ negli istanti $U \cdot Ts$

La retroazione unitaria agisce allo stesso modo, con

$$G_{CL}(z) = \frac{C_{CL}}{1 + C_n}$$

Poiché se influenzano i poli di G_{CL} , vorremo che questo sia stabile, ossia i suoi poli abbiano $|z| < 1$. Possiamo usare un criterio di stabilità del luogo delle radici come nel caso TC

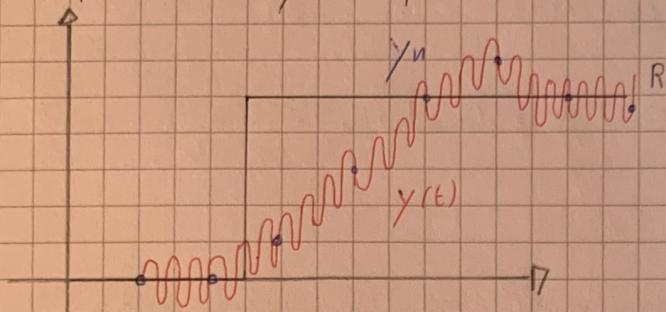
$$G(z) = \frac{1}{(z-1)z} \quad \text{usiamo un controllore proporzionale}$$



A questo punto, si fa riferimento all'analisi precedente fatta a suo tempo

I poli con $Re < 0$ sono dunque gli che, al pari di $Im \neq 0$, contribuiscono alle oscillazioni. Se $p=1$ ha stabilità non asintotica. L'angolo è in funzione del periodo delle oscillazioni. Più siamo vicini a $p=1$, più la risposta è lenta, poiché i modi vanno a più giù lentamente.

Per valutare lo risposto, si usano i parametri dei sistemi del secondo ordine in TC. Noi abbiamo in uso $y_n = y(t \cdot Ts)$, ma ci interessa modellare opportunamente il comportamento di $y(t)$. Infatti, nel mondo TD il sistema si evolve solo in certi istanti, mm C(S), nativa TC. Si evolve sempre. Oltre tutto, se Ts grande, magari y_n sembra osservare certe specifiche, mentre $y(t)$ fa tutt'altro



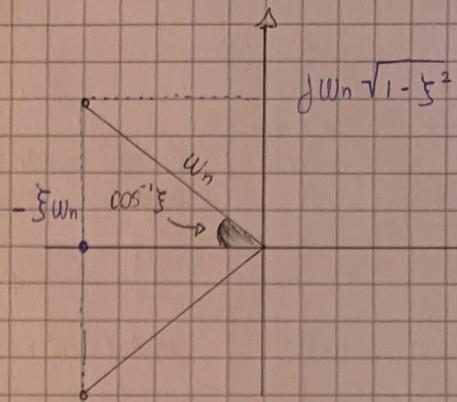
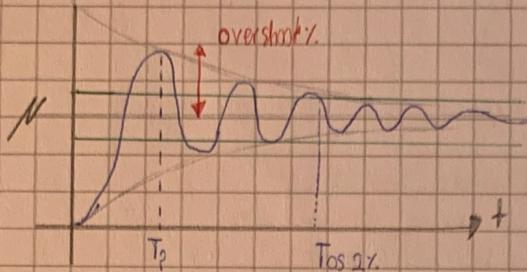
L'analisi del comportamento è esatta, ma non rende conto dell'effettivo andamento di $y(t)$

Ovvioamente non ho questo differenza se Ts piccolo. In definitivo, le specifiche di prestazioni sono definite su $y(t)$

Se Ts è adeguato, buona approssimazione di specifiche si fanno su $y(t)$. Per questo, interpolando y_n ottengo una $y(t)$, non su y_n !

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

Lo risposta al gradino è:



T_1 è l'istante in cui si raggiunge il valore massimo, e vale

$$T_1 \approx \frac{\pi}{w_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$T_1 < \alpha \Rightarrow w_n \sqrt{1 - \xi^2} > \frac{\pi}{2}$$

T_1

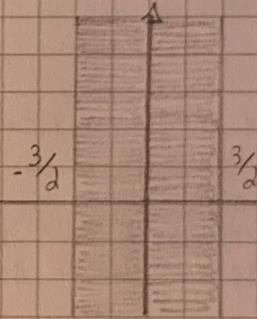
$-\pi/\alpha$

Questo è il modulo della parte immaginaria del polo, quindi significalo richiedere $\text{Im } \geq \text{val}$

$T_{0.95}$ è il tempo oltre il quale la funzione dista meno del 5% da N , e vale

$$T_{0.95} \approx \frac{3}{\xi w_n}$$

$$T_{0.95} < \alpha \Rightarrow \xi w_n > \frac{3}{2}$$



Ho a che fare con il modulo della parte reale

Lo sovraccarico è la distanza percentuale tra N e il ricco

$$M_g = 100 \cdot e^{-\frac{\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

$$M_g < \alpha \Rightarrow \xi > \beta$$

Quindi l'angolo deve essere minore di $\cos^{-1}(\beta)$ verso -180°

Bisogna trovare la relazione tra queste specifiche in TC e quelli da imporre in TD

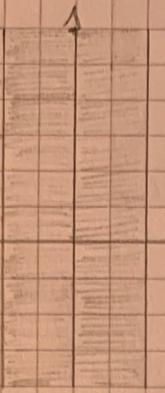
Da $\dot{x} = Ax$ possiamo a $x_{n+1} = e^{AT_s} x_n$

Se λ è autovalore di A , e $e^{\lambda T_s}$ lo è di e^{AT_s}

\Rightarrow Lo sampling transformation tra $s \in \mathbb{C}_{TC}$ e $z \in \mathbb{C}_{TD}$ è

$$z = e^{sT_s}$$

Si mappano così le ore che ci andano bene da \mathbb{C}_{TC} a \mathbb{C}_{TD}

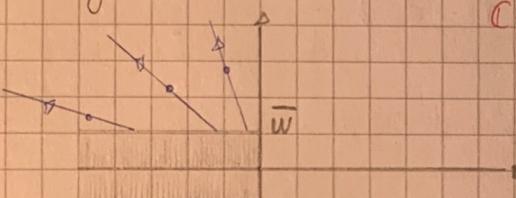


Questo parte va comunque scartato

Instabilità in TC

$$S = -\sigma + j\omega \text{ con } \omega \in (-\infty, +\infty)$$

Il modulo è costante e vali $e^{-\sigma T_s}$, diminuendo all'aumentare di σ . Il fase varia fra tutti i possibili valori, quindi sono i punti interni allo circonferenza di raggio $e^{-\sigma T_s}$



G_{TC}

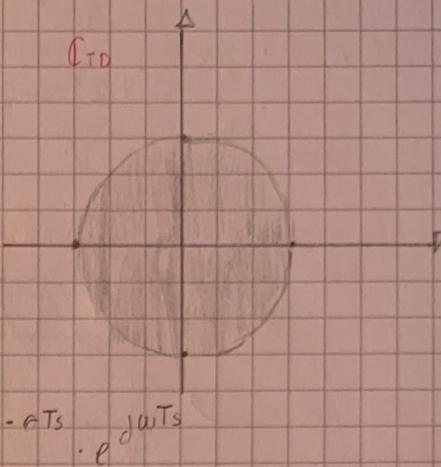
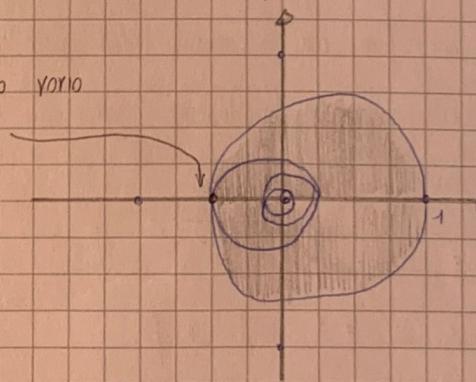
G_{TD}

Non si possono considerare gli angoli tra $-\bar{\omega}$ e $+\bar{\omega}$, e loro multipli di 2π

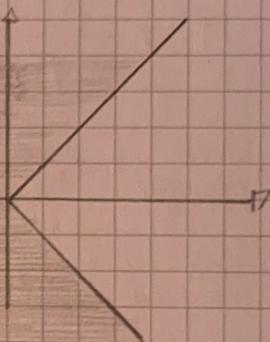
Dato un punto, la fase è costante, il modulo può variare

Per l'overshoot, il modulo varia diminuendo mo allo stesso tempo lo sose spazia tutti i possibili valori:

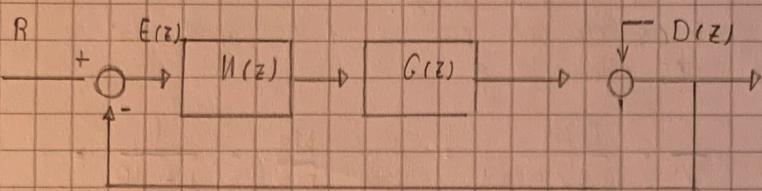
Questo punto varia sulla base dell'overshoot



$$z = e^{-\sigma T_s} \cdot e^{j\omega T_s}$$



L'errore o regime si valuta per i sistemi TD usando la nozione di tigo, e quindi con riferimento al principio del modello interno.



Vogliamo che y inseguiva R (inseguimento), e che D non abbia influenza su y (reazione).

$$E(z) = \frac{1}{1+UG} R(z)$$

↳ girolo affinché inseguo il riferimento

$$y(z) = \frac{1}{1+UG} D(z)$$

↳ girolo per avere reazione.

$$R(z) = \frac{N(z)}{d_R(z) \cdot D_R(z)}$$

N e D sono polinomi con radici in modulo minore di 1. d_R è un modello del segnale da influire

$$\text{Per seguire lo rampo } r(z) = \frac{z}{z-1}, \text{ sarebbe } d_R(z) = \frac{z-1}{z}$$

Se $N = D = 1$, R coincide con il segnale da seguire, ma anche in presenza di elementi che filtrano dall'originale le cose non cambiano.

Si ipotizza che UG si scriva come

$$\frac{N(z)}{d(z) D(z)}$$

con N e D ~~polinomi~~ polinomi di radici diverse da 1.

$$E(z) = \frac{1}{GU+1} \quad R(z) = \frac{1}{1+N} \cdot \frac{Na}{d_R d_R} = \frac{2D}{1+2D+N} \cdot \frac{Na}{d_R d_R}$$

→ polinomio caratteristico del cerchio chiuso con radici che superano in modulo minore di 1.

Mo posso scrivere

$$E(z) = \frac{N z D}{D_R(2D+N)} \cdot \frac{d}{2R} \quad \rightarrow$$

Per i punti i poli in questione stanno sul cerchio unitario, e il valore di ϵ_n per $U \rightarrow +\infty$ dipende dal numero di cancellazioni.

↳ osint. stabile

Lo stesso vale per lo reazione al disturbo: l'errore è 0 se il sistema contiene un modello del disturbo / segnali da reazione / seguire. Denote errore complessivo generato un segnale affine. Supponiamo D costante. Allora y tende a 0. L'uso di G deve essere $-D$, quindi $1/GU$ deve avere un polo in 1 affinché possa generare tale valore.

Il tigo di un sistema è equivalente al coso T_C , con i poli in 1 invece che 0

$$UG = \frac{1}{(z-1)^N} \cdot \frac{N}{D} \quad \text{è di tigo } N$$

Sia UG di tigo N , R di tigo M e usiamo il teorema del valore finale in così diversi

$$\lim_{U \rightarrow +\infty} \epsilon_n = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{1+GU} \cdot R = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z} \cdot \frac{N_A \cdot D}{D_R(2D+N)} (z-1)^{M-N+1}$$

- $N = M$ Nella funzione rimane uno zero in ζ che manda a ϕ
l'intero limite: il risultato è ϕ !
Anche in questo caso c'è uno zero in ζ con molleggiato maggiore di -1, quindi lo ϕ
- $N > M$

$$\bullet \quad N=0, M=1 \quad \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{1}{Z} \cdot \frac{DNR}{DR(D+N)} = \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{NR}{DR} \cdot \frac{1}{1 + \frac{NR}{DR}} =$$

$$= \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{NR}{DR} \cdot \frac{1}{1 + \frac{NR}{DR}} \xrightarrow{\text{grado statico, cioè il valore}} \text{dallo funzione per } Z=1$$

Ottieniamo che il valore limite del segnale da seguire viene scalato di un fattore legato al grado statico

- $N=1, M=2$
(vole sempre se lo differenza è 1 con $N > 0$)

Anche in questo caso, ci si discosta dal valore di regime di $1/Nr$, con

$$Nr = \lim_{Z \rightarrow 1} GU(z-1)^N$$

- $N+1 < M$ Il limite lo banalmente too, avendo un polo in 1.

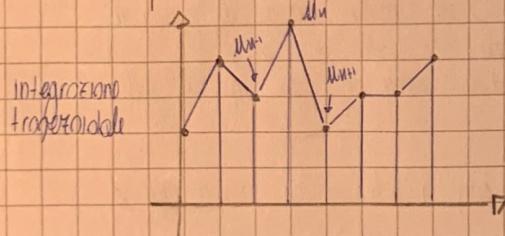
Controllori PID in TD

$$U(s) = U_p + U_D s + \frac{U_I}{s}$$

Bisogna trovare uno componenti equivalenti in un'unica etapa in TD

Lo componente proporzionale non cambia.

Lo componente integrale corrisponde in TD a fare
Dobbiamo approssimare tale integrale in TD, per
esempio ricorrendo a metodi numerici



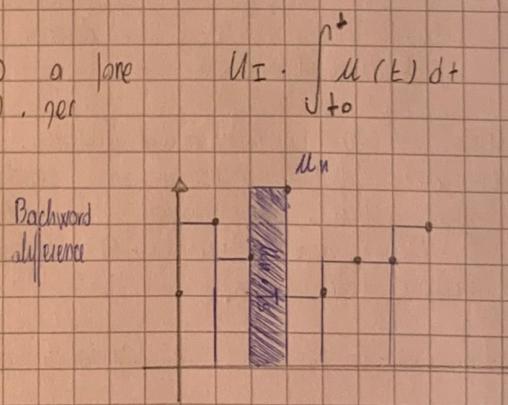
$$y[n] = y[n-1] + \frac{T_s}{2} (u[n] + u[n-1])$$

possiamo scrivere in forma z

$$Y(z) = z^{-1} Y(z) + \frac{T_s}{2} (U(z) + z^{-1} U(z))$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T_s}{2} \frac{z+1}{z-1}$$

Il derivatore otturato ha un polo in -1
 L'→ il modo (-1)ⁿ genera oscillazioni!



$$y[n] = y[n-1] + T_s u[n]$$

$$Y(z) = z^{-1} Y(z) + T_s U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = T_s \cdot \frac{z}{z-1}$$

Quelli ottenuti sono due forme per esprimere l'integrazione. Abbiamo lo stesso, fornendo un'approximazione migliore dell'integrale.

Se possiamo fare anche le somme in orari:

Invertendo otteniamo l'azione un polo in -1, che ci crea

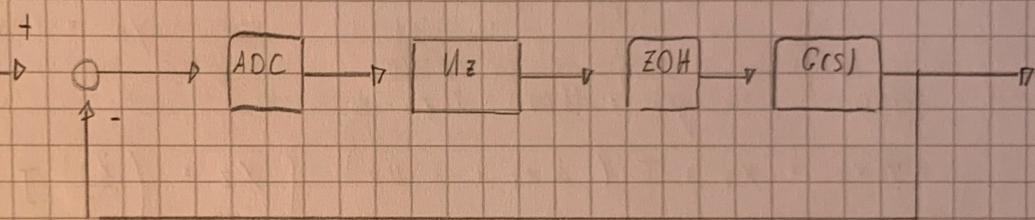
derivative. Nel primo caso abbiamo oscillazioni, quindi usiamo il secondo metodo d'integrazione.

$$y_{n+1} = y_n + T_s u_n$$

$$U(z) = U_0 + U_1 \frac{T_s}{2} \cdot \frac{(z+1)}{(z-1)} + U_0 \frac{1}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

Per progettare un controllore possiamo anche realizzarlo in TC e successivamente 'digitalizzarlo', con una tecnica simile a quanto visto per l'integratore.

Si parte con uno $U(s)$ adatto per $G(s)$ in retroazione. Vogliamo che, portato a $U(z)$, funzioni nel controllo.



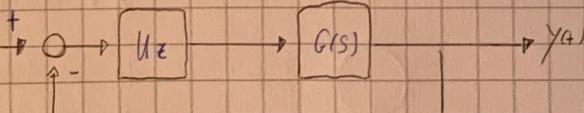
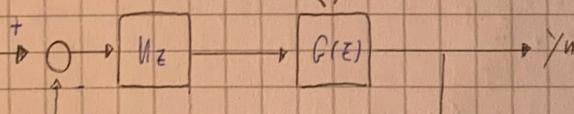
Non è come progettare un controllore per $G(s)$ digitalizzato, perché sto togliendo una parte di informazione: non gestisco correttamente ciò che succede tra $U(s)$ e $(U+1)Ts$, perdendo il valore reale costante con ZOH, ma $U(s)$ agisce anche lì.

Ottengono quindi risultati diversi applicando $U(s)$ e $U(z)$

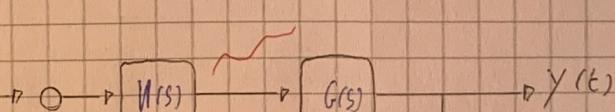


La teoria garantisce

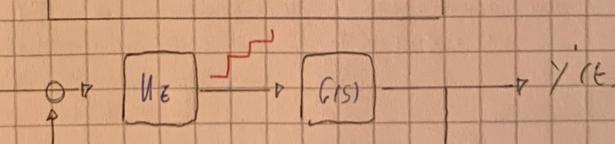
$$y_n = y(t+) + nTs$$



$y'(t) \neq y(t)$
anche in $U(s)$.



Riducendo Ts
ha delle
migliorrie.



$$y_n = y_{n-1} + T_s u_n$$

$$zY = Y + T_s u$$

$$\frac{Y}{u} = \frac{T_s}{z-1}$$

il derivatore ho

Invece di progettare $U(z)$ sullo zOH equivalente di $G(s)$, vogliamo progettare $U(s)$ e discuterlo in $U(z)$, in modo da realizzarlo con un calcolatore. Non sono un'equivalenza esatta, poiché $U(s)$ ha un'uscita continua, $U(z)$ una discreta estesa con zOH; nel caso del progetto nativo discreto, valuta l'identità per cui l'uscita di $G(u)$ era

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

Usiamo lo stesso approccio visto con l'integratore, usando l'integrazione numerica. In particolare, si considera il metodo dei rettangoli in avanti.

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + T \dot{x}(t) \\ (T = T_s) \quad &\quad + = UT \end{aligned}$$

Cominciamo
dalle variabili
di stato di $U(s)$

$$\dot{x}_n = X_n + T \dot{x}_n$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Ma $\dot{x}_n \approx Ax_n + Bu_n$, da cui ottieniamo il sistema di equazioni alle differenze

$$X_{n+1} = X_n + T(Ax_n + Bu_n)$$

$$y_n = Cx_n + Du_n$$

Di questo si fa lo Z trasformato, e si cerca di scrivere

$$Y_z = U(z) \cdot U_z$$

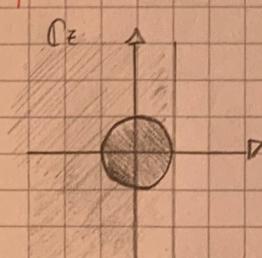
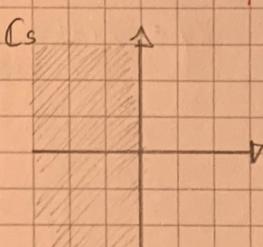
$$\begin{cases} Z X_z = X_z + T(Ax_z + Bu_z) \\ Y_z = Cx_z + Du_z \end{cases} \quad \begin{cases} X_z = \left(\frac{z-1}{T} I - A \right)^{-1} Bu_z \\ Y_z = \left[C \left(\frac{z-1}{T} I - A \right)^{-1} B + D \right] u_z \end{cases}$$

Ottieniamo quindi lo fDT del controllore TD!

Ma $U(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$, da cui

$$U(z) = U(s) \quad | \quad s = \frac{z-1}{T}$$

Non solo possiamo trovare U_z immediatamente, ma ottieniamo una maggiore
distinzione tra le singolarità di C_s e C_z .



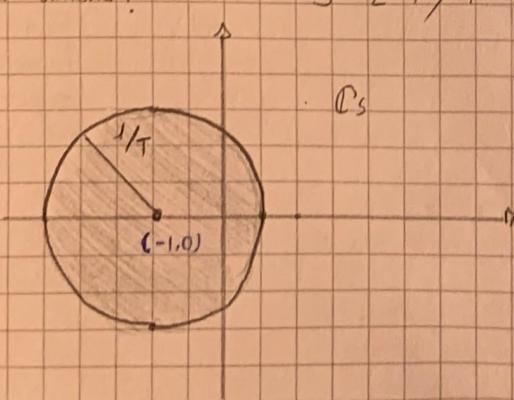
$$z = ST + 1$$

Le singolarità vengono scalate e spostate di 1, quindi gli stabili in TC possono diventare instabili in TD, se fuori dal cerchio unitario.

Facciamo il percorso inverso: dove devono stare le singolarità di TC per finire dentro al cerchio unitario?

$$s = z - 1/T$$

Il cerchio unitario si trasla di 1 a sinistra e si scala di $-1/T$. Se le singolarità sono già dentro, bisogna nel cerchio unitario in Cz : il tronco allora ci prende T per intendersi il cerchio per intendere tali cerchi.



Tuttavia, con T piccolo, $z = ST + 1$ quindi ci sono tante singolarità vicino a $(1, 0)$. Il sistema è stabile ma può essere difficile da realizzare.

L'integrazione si può fare anche in altri modi. Con il metodo dei trapezi

$$S = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}; \quad z = \frac{1 + Ts/2}{1 - Ts/2}$$

Questo metodo maggio
Prezzo di G_S in
1. i < 1 di G_Z .

Nel discretizzatore, non possiamo rendere instabile $U(z)$.

Vediamo ora alcune considerazioni da fare per scegliere T_S .

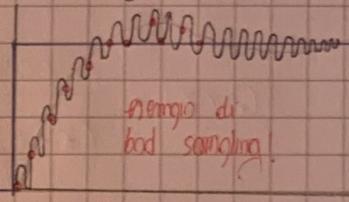
- Bisogna trovare, usando Fourier, la massima frequenza nell'ingresso, f_{max} . Come minimo il criterio di Shannon vorrebbe $1/T \geq 2 f_{max}$, ma nei sistemi reali dobbiamo lasciare margini, soprattutto anche di uno decade.

$$F \text{ di campionamento} \leftarrow \frac{1}{T_S} = 20 f_{max}$$

- La frequenza di campionamento si rivolga anche sulla base delle specifiche: vogliamo misurare opportunamente uno certo spaziale, serve T_S piccolo. In generale, è necessario che tutte le uscite siano ben combinate: se non vediamo delle oscillazioni, ricodiciamo nel bad sampling.

Sintesi diretta di un controllore

Dato G_{CL} , vogliamo trovare U per cui si ottiene entrambi G_{CL} .



$$G_{CL} = \frac{U \cdot G}{1 + U \cdot G} \quad \text{Isolando } U(z) \quad U(z) = \frac{G_{CL}}{G(1 - G_{CL})}$$

Adesso analizziamo i controllori U , e cogliamo quando c'è l'errore tale operazione e se possiamo ottenere qualunque G_{CL} .

$$U(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} \quad G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad G_{CL}(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$U(z) = \frac{B/A}{N(1 - B/A)} = \frac{DB}{N(A-B)} = \frac{Q}{P}$$

- Il controllore deve essere causale $\Rightarrow \deg(P) \geq \deg(Q)$

$$\deg(N(A-B)) \geq \deg(DB) \Rightarrow$$

$$\deg(N) + \deg(A) \geq \deg(D) + \deg(B) \Rightarrow$$

$$\deg(B) - \deg(A) \leq \deg(N) - \deg(D)$$

$$\deg(A) - \deg(B) \leq \deg(D) - \deg(N)$$

Il grado relativo di G_{CL}
deve essere maggiore o uguale
a quello di G_{CL} , non
può diminuire.
In caso contrario,
 U è non causale

Il grado relativo è indice del ritardo che si osserva nel manifestarsi delle variazioni di U in y . Tali ritardi non solo diminuire, ma solo aumentare. Se provassi a farlo, avrei un controllore non causale.

- Il controllore deve essere stabile \Rightarrow in $N(A - B)$ non ci devono essere radici con $|z| > 1$. Ma N è il numeratore di G , e non può essere modificato! Se le radici di N sono a lo se non minimo, devo necessariamente realizzare una cancellazione con uno radice di B . La cancellazione è virtuale perché ovunque dentro il controllore nello suo realizzazioni, ma non si manifesta. Ma B è il numeratore di G , da cui
Se G ha zeri o poli non minimo, devono esserci anche per G_{CL} , senza poterli eliminare.
- Non ci possono essere cancellazioni tra poli instabili di G e il numeratore di U . La cancellazione virtuale deve avvenire dentro il controllore, imponendo che le radici di $|z| > 1$ di D devono esserci anche di $A - B$
- Vogliamo che l'usato segno perfettamente il gradino $\Rightarrow G_{CL}(1) = 1$

Esempio

$$G(z) = \frac{0.0041(z + 0.819)}{(z - 0.905)(z - 0.607)}$$

Usando lo schema

$$H(z) = \frac{G_{CL}}{G(1 - G_{CL})} = \frac{0.2}{(z - 0.8)} = \frac{0.2 / (z - 0.8)}{0.0041(z + 0.819) / (z - 1)} = \frac{0.2}{(z - 0.905)(z - 0.607) / (z - 1)}$$

Vogliamo un sistema del quinto ordine con quadri unitario e un modo 0.8^n

$$G_{CL}(s) = \frac{0.2}{(s - 0.8)}$$

Il controllore è corretto, ma oscilla, avendo un modo in $(-0.819)^n$. Per evitare questo caso, possiamo modificare opportunamente G_{CL} impostando lo stesso singolarità come zero. Si aggiunge poi un polo veloce (equivalente ai poli fuori fase di TC, vicino all'origine) per renderlo del quinto ordine. Si sceglie poi H per avere $G_{CL}(1) = 1$

$$G_{CL} = 0.989 \frac{(z + 0.819)}{(z - 0.8)(z - 0.1)}$$