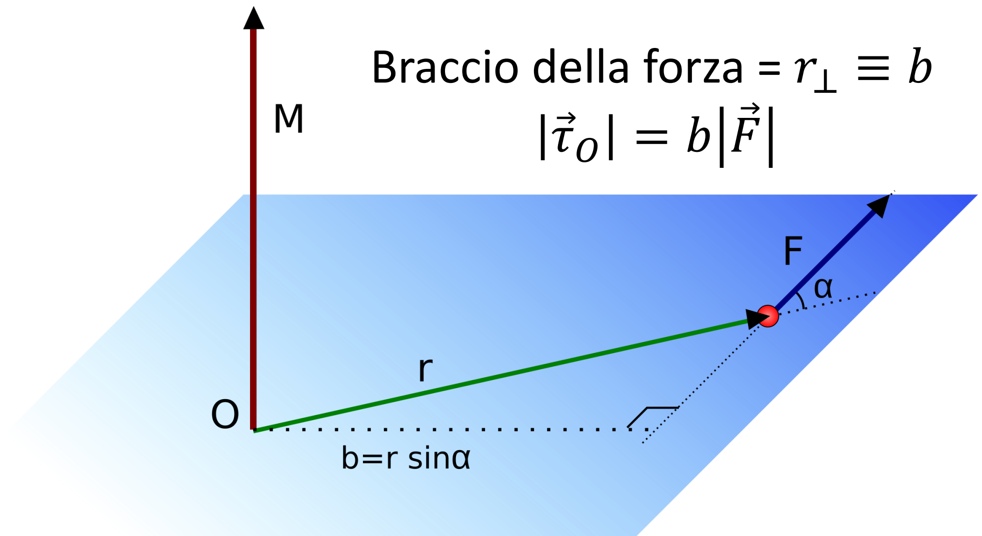
Momento di una forza

Sia data una forza $\vec{F}$ applicata in un punto P. Sia $\vec{r}$ il vettore posizione di P rispetto a un punto O che chiamiamo polo. Definiamo momento $\vec{\tau}_O$ della forza $\vec{F}$ rispetto al polo O il vettore:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

che ha:

- modulo $|\vec{\tau}_O| = |\vec{r}||\vec{F}| sen\alpha$ dove α è l'angolo tra i due vettori;
- direzione perpendicolare al piano su cui giacciono $\vec{r}$ e $\vec{F}$;
- verso stabilito dalla regola della mano destra.



Braccio della forza = $r_\perp \equiv b$

$$|\vec{\tau}_O| = b|\vec{F}|$$

- È una grandezza fisica vettoriale.
- L'unità di misura è $[\vec{\tau}] = N \cdot m$ (non si usa il Joule).
- È nullo se $P = O$
- È nullo se la forza è parallela al vettore $\vec{r}$.

Momento della risultante delle forze

Per un **punto materiale** situato in posizione $\vec{r}$ e soggetto a un sistema di forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, il **momento della risultante delle forze** rispetto a un punto O è dato da:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.$$

Poiché il vettore posizione $\vec{r}$ è lo stesso per tutte le forze applicate al punto materiale, il momento risultante può essere scritto come:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}_R,$$

dove $\vec{F}_R$ è la forza risultante del sistema, definita come:

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.$$

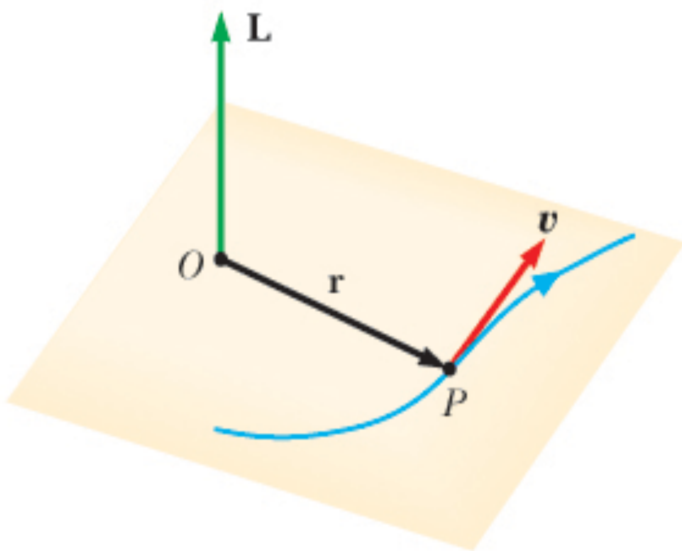
Se $\vec{\tau}_O = 0$, la risultante delle forze ha una linea d'azione che passa per il punto O e quindi non genera alcun effetto rotazionale rispetto a quel punto.

Momento angolare di un punto materiale

Sia definisce momento angolare $\vec{L}_O$ il momento del vettore quantità di moto, rispetto ad un polo O.
Sia $\vec{r}$ il vettore posizione di P rispetto al polo O, e $\vec{p} = m\vec{v}$ il vettore quantità di moto:

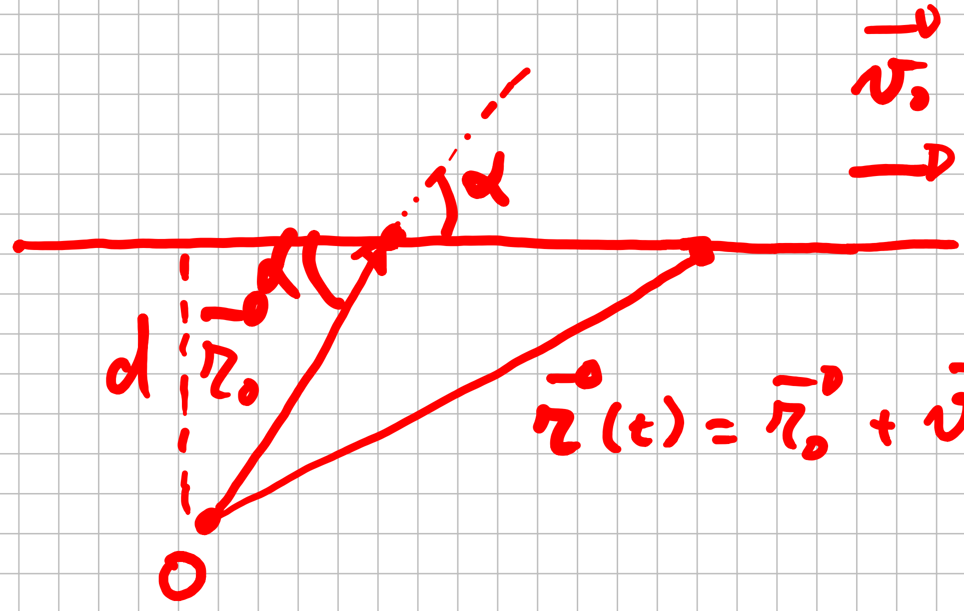
$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

- È una grandezza fisica vettoriale
- L'unità di misura è $[\vec{L}] = J \cdot s$
- È anche chiamato "momento della quantità di moto"



Momento angolare: moto rettilineo

$\vec{v} = \text{cost} = \vec{v}_0$



$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$

$$\vec{p} = m\vec{v}_0$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = (\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t) \times m\vec{v}_0 =$$

$$= \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0 + m t\, \vec{v}_0 \times \vec{v}_0 \underset{=\vec{L}_0}{=} \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0$$

SE LA RETTA PASSA DA O

$$\vec{L} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$$

$$|\vec{L}| = m |\vec{r}_0| |\vec{v}_0| \sin\alpha = m |\vec{v}_0| |\vec{r}_0| \sin\alpha =$$

$$= m |\vec{v}_0| d$$

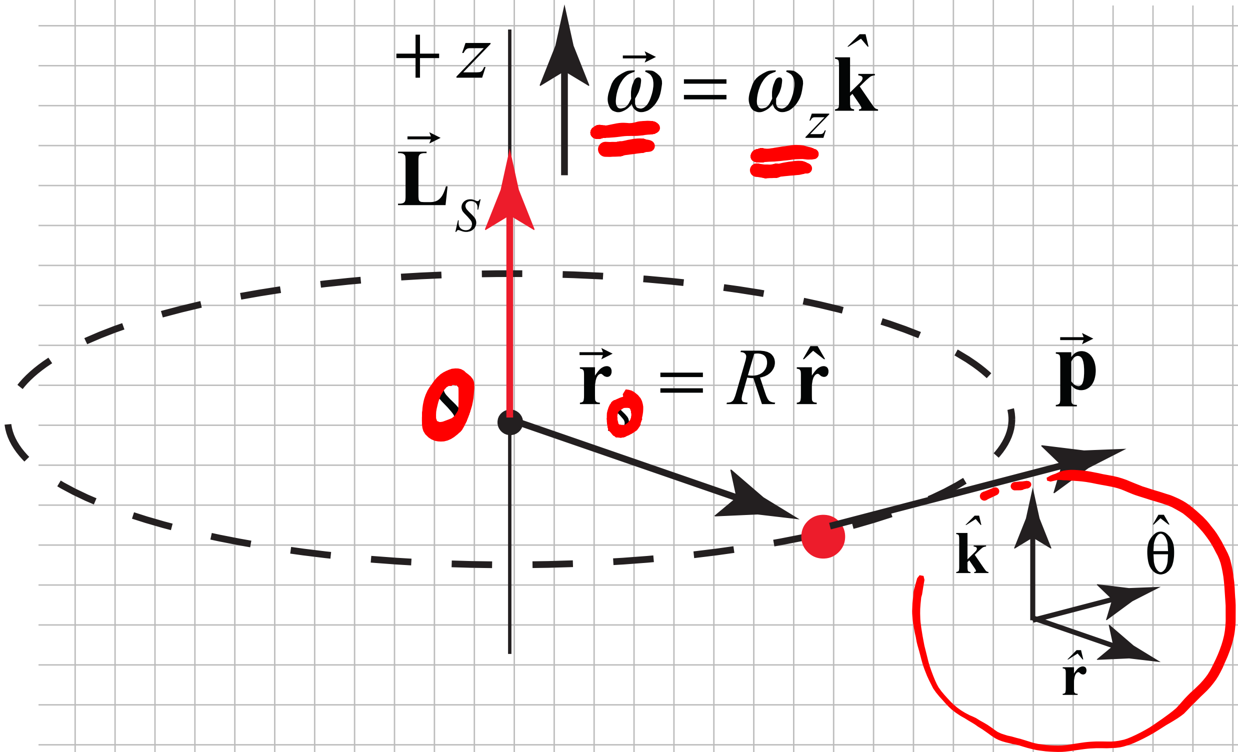
$$\vec{r}_0 = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} \qquad \vec{v}_0 = v_{0x} \hat{i} + v_{0y} \hat{j}$$

$$\vec{r}_0 \times \vec{v}_0 = x_0 v_{0y} \hat{i} \times \hat{j} + y_0 v_{0x} \hat{j} \times \hat{i} =$$

$$= x_0 v_{0y} \hat{k} - v_{0x} y_0 \hat{k} = (x_0 v_{0y} - y_0 v_{0x}) \hat{k}$$

Momento angolare: moto circolare I

Il questo caso il polo coincide con il centro del moto.



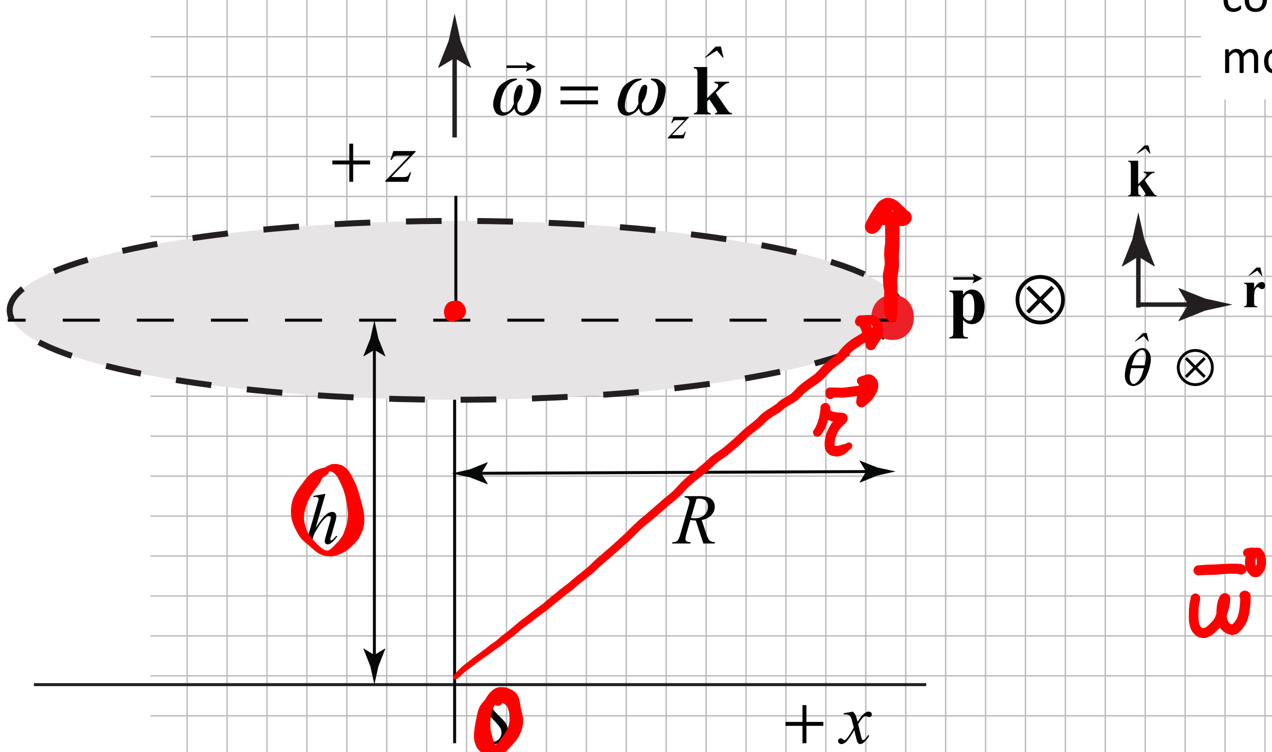
$\vec{r}(t) = R\,\hat{r}(t)$

$\vec{v}(t) = R\,\omega_z\,\hat{\theta}(t)$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = mR^2 \omega_z \, \hat{r} \times \hat{\theta} =$$

$$= mR^2 \omega_z \hat{k} = mR^2 \vec{\omega}$$

Momento angolare: moto circolareII



Il questo caso il polo si trova sull'asse del moto ma non coincide con il centro del moto.

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{r} \times \hat{\theta} &= \hat{k} \\ \hat{k} \times \hat{\theta} &= -\hat{r}\end{aligned}}$$

$$\vec{\omega} = \omega_z \hat{k}$$

$$\vec{r} = R\,\hat{r} + h\,\hat{k}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = m R \omega_z \hat{\theta}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \left(R\hat{r} + h\hat{k}\right) \times mR\omega_z\hat{\theta} =$$

$$= mR^2\omega_z\, \hat{r}\times\hat{\theta} + mRh\omega_z\, \hat{k}\times\hat{\theta} =$$

$$= \underbrace{mR^2\omega_z\,\hat{k}}_{\text{COMPONENTE ASSIALE}} - \underbrace{mRh\omega_z\,\hat{r}}_{\text{COMPONENTE RADIALE}} =$$

$$= L_z\hat{k} + L_r\hat{r}$$

$$L_z = mR^2\omega_z$$

$$L_r = -mRh\omega_z$$

$$|\vec{L}| = \sqrt{L_z^2 + L_r^2} = mR\omega_z\sqrt{h^2+R^2}$$

Teorema del momento angolare per un punto materiale

Facciamo la derivata rispetto al tempo del momento angolare:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Se il polo O è fermo rispetto al sistema di riferimento dove osserviamo il moto si ha che:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \Longrightarrow \vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}$$

Quindi:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O$$

Teorema del momento angolare (per un punto materiale): la derivata temporale del momento angolare è uguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo fisso in un sistema di riferimento inerziale.

Punto materiale sottoposto a forza centrale

Se la forza è **centrale**, significa che è diretta lungo la direzione radiale $\vec{r}$, ovvero:

$$\vec{F} = f(r)\hat{r},$$

dove $f(r)$ è una funzione scalare che dipende solo dalla distanza r dal centro. Calcoliamo il momento della forza rispetto al punto O:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Poiché $\vec{F}$ è parallelo a $\vec{r}$, il prodotto vettoriale è nullo:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times (f(r)\hat{r}) = \vec{0}.$$

Dalla relazione tra il momento della forza e la variazione del momento angolare:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau},$$

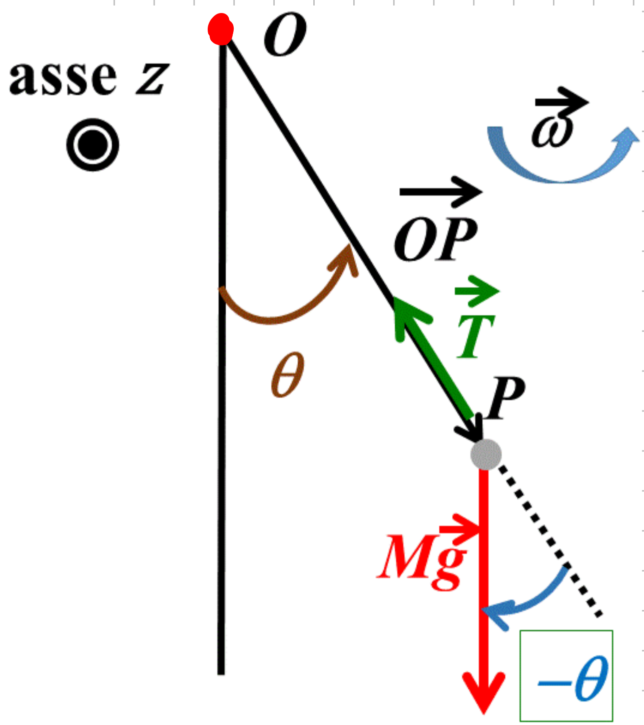
si ottiene:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}.$$

Questo implica che il momento angolare $\vec{L}$ è **costante** nel tempo:

$$\vec{L} = \text{costante}.$$

Esempio: pendolo semplice

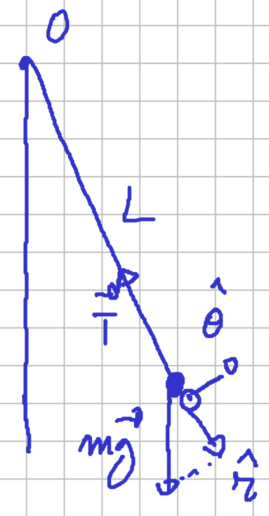


Deriviamo l'equazione del moto del pendolo semplice a partire dal teorema del momento angolare.

L

PENDOLO

$$\vec{L} = m L^2 \vec{\omega} = m L^2 \omega_z \hat{k} = \underline{\underline{m L^2 \dot{\theta} \hat{k}}}$$



$$\vec{r} = L \hat{r}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times (\vec{T} + m\vec{g}) = L \hat{r} \times (\vec{T} + m\vec{g})$$

$$\vec{T} = -T \hat{r}$$

$$m\vec{g} = mg\cos\theta \, \hat{r} - mg\sin\theta \, \hat{\theta}$$

$$\vec{\tau} = \underbrace{-TL \, \hat{r} \times \hat{r}}_{=0} + \underbrace{mgL\cos\theta \, \hat{r} \times \hat{r}}_{=0} - mgL\sin\theta \, \hat{r} \times \hat{\theta}$$

$$\left[\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{k} \right]$$

$$\vec{\tau} = -mgL\sin\theta \, \hat{k}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -mgL\sin\theta \, \hat{k}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m L^2 \dot{\theta} \right) \hat{k} = -mgL\sin\theta \, \hat{k}$$

$$m L^2 \ddot{\theta} = -mgL\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0$$

se θ piccolo $\sin\theta \simeq \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Esercizio

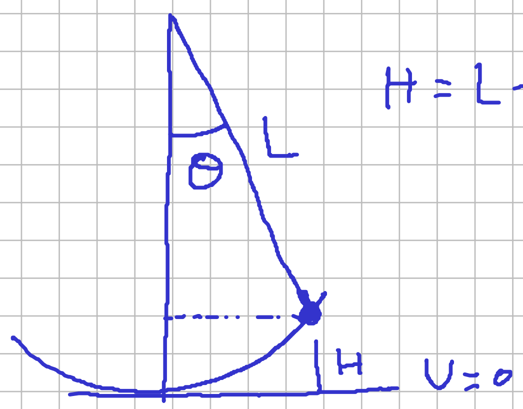
Derivare l'equazione del moto del pendolo semplice a partire dalla conservazione dell'energia meccanica.

PENDOLO ENERGIA

$L \qquad m$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \qquad v = L\omega = L\dot{\theta}$$

$$K = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2$$



$H = L - L\cos\theta$

$$U = mgH = mgL(1-\cos\theta)$$

$$E = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + mgL(1-\cos\theta)$$

ENERGIA SI CONSERVA $\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt}$$

$$\frac{dK}{dt} = m L^2 \dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$\frac{dU}{dt} = mgL \sin\theta \, \dot{\theta}$$

$$\frac{dE}{dt} = m L^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL \sin\theta \, \dot{\theta} = 0$$

$$m L^2 \ddot{\theta} + mgL \sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Esercizio

Consideriamo un satellite geostazionario di massa $m = 100$ kg. Calcolare:

- l'energia cinetica, l'energia potenziale, l'energia totale (K, U, E) e il vettore $\vec{L}$ con polo nel centro della terra.

$$R^3 = \frac{GM}{\omega^2} \qquad \omega = \omega_T = \frac{2\pi}{T_T}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

v = velocità tangenziale

$$v = \omega R$$

$$v^2 = \omega^2 R^2 = \omega^2 \frac{R^3}{R} = \frac{\omega^2 GM}{\omega^2 R} = \frac{GM}{R}$$

$$K = \frac{1}{2} m \frac{GM}{R}$$

$$U = -\frac{GMm}{R}$$

$$E = \frac{1}{2} G\frac{Mm}{R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{R} = -K$$

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} = m\vec{R} \times \vec{v}$$

$$L = mR^2\omega = mR^2 \frac{2\pi}{T_r}$$

Energia meccanica di un satellite in orbita circolare

Consideriamo un satellite di massa m in orbita circolare attorno ad un pianeta di massa M con raggio orbitale r. Le energie in gioco sono:

1. Energia Potenziale Gravitazionale:

$$U = -\frac{GMm}{r},$$

dove G è la costante di gravitazione universale. Questa energia è negativa perché la forza di gravità è attrattiva e un sistema legato (cioè un satellite in orbita) ha energia potenziale inferiore a zero rispetto al caso in cui le due masse siano a distanza infinita ($U = 0$ a distanza infinita).

2. Energia Cinetica:
La velocità orbitale v si ottiene uguagliando la forza centripeta alla forza gravitazionale:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM}{r}.$$

Pertanto, l'energia cinetica è:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{r}\right) = \frac{GMm}{2r}.$$

3. Energia Totale dell'Orbita:
La somma delle energie cinetica e potenziale dà l'energia totale:

$$E = K + U = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}.$$

Pertanto:

$$E = -K.$$

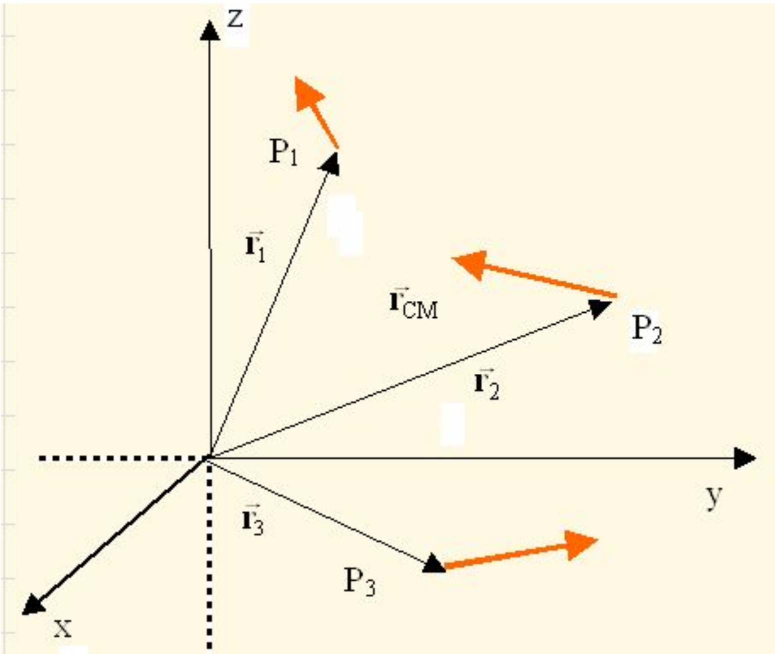
Notiamo che l'energia meccanica E è negativa, il che indica che il satellite è in uno stato legato (ci vuole energia per portarlo all'infinito, dove l'energia potenziale diventa zero). Inoltre la relazione $E = -K$ mostra che l'energia totale è esattamente l'opposto dell'energia cinetica, derivante dal bilanciamento specifico tra energia cinetica e potenziale in un'orbita circolare.

Momento angolare di un sistema di punti materiali

Il **momento angolare** di un sistema di N punti materiali rispetto a un punto O è definito come la somma dei momenti angolari dei singoli punti materiali rispetto a O.

Sia un sistema costituito da N punti materiali di masse m_i e posizione $\vec{r}_i$, con velocità $\vec{v}_i$. Il momento angolare totale rispetto al punto O è dato da:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i.$$



Teorema del momento angolare per un sistema di punti materiali:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext,i} = \vec{\tau}_{ext}$$

Questa è detta anche seconda equazione cardinale.

II EQ. CARDINALE

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{\vec{v}_i} \times m_i \vec{v}_i}_{=0} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,EXT} + \sum_{j=1,\ j\neq i}^{N} \vec{F}_{ij}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,EXT} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \left[\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N} \vec{F}_{ij} \right]$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \left[\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N} \vec{F}_{ij} \right] = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1,\ j\neq i}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}}_{=0}$$

$$\vec{F}_{ij} = - \vec{F}_{ji}$$

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} =$$

$$= (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

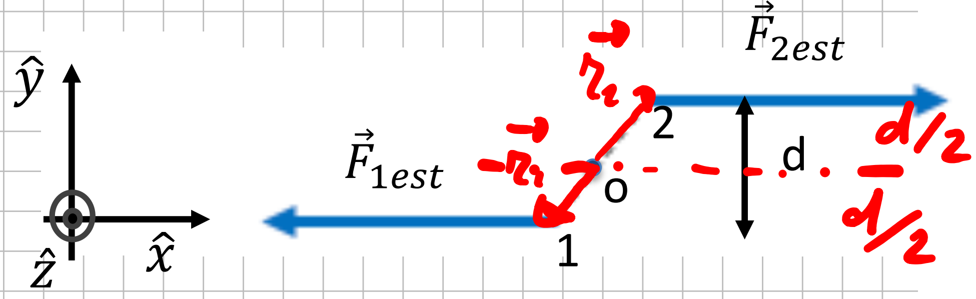
[LE $\vec{F}_{ij}$ SONO DIRETTE LUNGO LA CONGIUNGENTE i e j]

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\,EXT} = \vec{\tau}_{EXT}$$

Osservazione

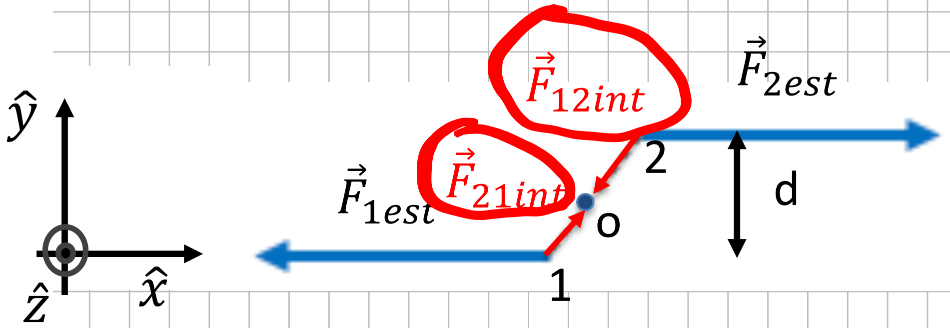
Se due forze hanno stesso modulo e verso opposto non è detto che la somma dei loro momenti sia nulla. Consideriamo un sistema di 2 punti materiali sottoposti a due forze che hanno lo stesso modulo e verso opposto ma non giacciono sulla stessa retta di applicazione.

- Calcoliamo τ rispetto al polo equidistante dai due punti.



$$\vec{\tau}_{ext} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1ext} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2ext}$$

$$\vec{\tau}_{ext} = -\frac{d}{2}|\vec{F}|\hat{z} - \frac{d}{2}|\vec{F}|\hat{z} = \underline{-d|\vec{F}|\hat{z}}$$

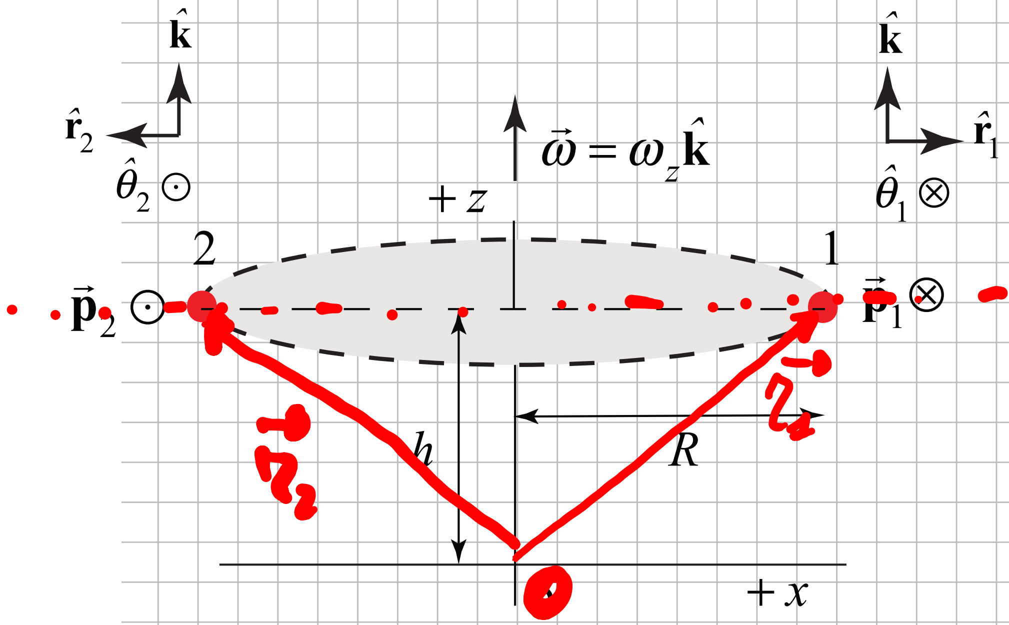


Se consideriamo le forze interne, abbiamo:

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} = 0$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = 0$$

Esercizio



Consideriamo un sistema formato da due particelle identiche di massa m che si muovono su una circonferenza di raggio R con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega_z \hat{k}$. Durante il moto le particelle si trovano alle estremità opposte della circonferenza. Determinare il momento angolare del sistema rispetto a un punto sull'asse e distante da questo h.

$$\hat{r}_1 = -\hat{r}_2$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

$$\vec{L}_1 = L_{1z}\,\hat{k} + L_{1r}\,\underline{\underline{\hat{r}_1}}$$

$$L_{1z} = m R^2 \omega_z$$

$$L_{1r} = -m R h\, \omega_z$$

$$\vec{L}_2 = L_{2z}\,\hat{k} + L_{2r}\,\underline{\underline{\hat{r}_2}}$$

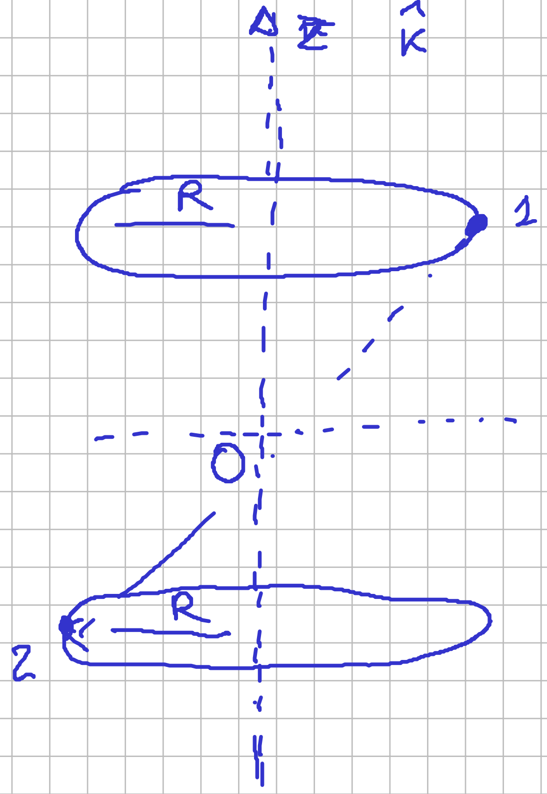
$$L_{2z} = m R^2 \omega_z$$

$$L_{2r} = -m R h\, \omega_z$$

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 =$$

$$(L_{1z} + L_{2z})\,\hat{k} + (L_{1r} - L_{2r})\,\vec{r}_1 =$$

$$= \underline{2 m R^2 \omega_z \hat{k}}$$



h

$-h$

$$\vec{L}_1 = mR^2\omega_z\hat{k} - mRh\omega_z\hat{r}_1$$

$$\vec{L}_2 = mR^2\omega_z\hat{k} + mRh\omega_z\hat{r}_2$$

$$\hat{r}_2 = -\hat{r}_1$$

$$\vec{L} = 2mR^2\omega_z\hat{k} - 2mRh\omega_z\hat{r}_1$$

Conservazione del momento angolare per un sistema di punti

Conservazione del momento angolare

Se il momento risultante delle forze esterne è nullo, ovvero:

$$\tau = \quad \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = 0,$$

allora si ha:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{costante}.$$

Questo implica che il momento angolare totale del sistema si conserva nel tempo.

Teorema di Köenig per il momento angolare

Consideriamo un sistema di punti materiali. Il momento angolare totale rispetto a un polo O è la somma di due termini:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{\mathrm{CM}} + \vec{L}_{\mathrm{rel}},$$

dove:

- $\vec{L}_{\mathrm{CM}} = \vec{R} \times M\vec{V}$ è il momento angolare del sistema considerato come un unico punto materiale di massa M nel centro di massa.
- $\vec{L}_{\mathrm{rel}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i$ è il momento angolare del sistema rispetto al centro di massa.

$\vec{r}'_i$ sono le posizioni relative rispetto al centro di massa:

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R}.$$

$\vec{v}'_i$ sono le velocità relative rispetto al centro di massa:

$$\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{V}.$$

KÖENIG

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{cM} + \vec{r}_i^{\,\prime}$$

$\vec{r}_i^{\,\prime}$ VETTORE POSIZIONE di i RISPETTO AL C.M.

$$\vec{v}_i = \vec{V}_{cm} + \vec{v}_i^{\,\prime}$$

$\vec{v}_i^{\,\prime}$ = VEL. RELATIVA RISPETTO AL C.M.

$$L_o = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{R}_{cm} + \vec{r}_i^{\,\prime}\right) \times \left(\vec{V}_{cm} + \vec{v}_i^{\,\prime}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\vec{R}_{cm} \times \vec{V}_{cm} + \vec{R}_{cm} \times \vec{v}_i^{\,\prime} + \vec{r}_i^{\,\prime} \times \vec{V}_{cm} + \vec{r}_i^{\,\prime} \times \vec{v}_i^{\,\prime}\right] =$$

$$= \vec{R}_{cm} \times \vec{V}_{cm} M + \vec{R}_{cm} \times \underbrace{\left[\sum m_i \vec{v}_i^{\,\prime}\right]}_{=0} + \underbrace{\left[\sum m_i \vec{r}_i^{\,\prime}\right]}_{=0} \times \vec{V}_{cm}$$

(SOMMA QUANTITÀ DI MOTO RELATIVE)

(MEDIA PESATA DELLE POS. RISPETTO C.M.)

$$+ \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i{}' \times \vec{v}_i{}'$$

$$\vec{L}_0 = M \vec{R}_{cm} \times \vec{V}_{cm} + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i{}' \times \vec{v}_i{}'$$

Teorema di Köenig per l'energia cinetica

Il teorema di Köenig per l'energia cinetica afferma che è possibile separare il contributo del moto del centro di massa dall'energia cinetica associata al moto relativo dei punti del sistema:

$$K = K_{\mathrm{CM}} + K_{\mathrm{rel}},$$

dove:

- $K_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}MV^2$ è l'energia cinetica del sistema considerato come un unico punto materiale di massa M che si muove con la velocità del centro di massa.
- $K_{\mathrm{rel}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}m_i v_i'^2$ è l'energia cinetica relativa dei punti materiali rispetto al centro di massa.

$\vec{v}_i'$ sono le velocità relative rispetto al centro di massa:

$$\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{V}.$$

KÖENIG EN. CINETICA

$$R_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \qquad \underline{\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_i{}'}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i{}' \right) \cdot \left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i{}' \right) =$$

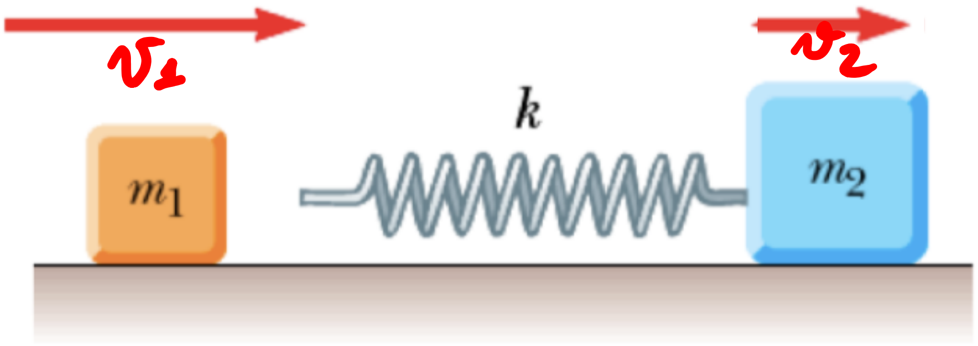
$$= \frac{1}{2} \underline{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_{CM} \cdot \vec{V}_{CM}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_{CM} \cdot \vec{v}_i{}' +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i{}' \cdot \vec{V}_{CM} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{v}_i{}' \cdot \vec{v}_i{}' \right)$$

$$= \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \vec{V}_{CM} \cdot \Big[\underbrace{\sum m_i \vec{v}_i{}'}_{=0} \Big] + \frac{1}{2} \Big(\underbrace{\sum m_i \vec{v}_i{}'}_{=0} \Big) \cdot \vec{V}_{CM}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i{}' \cdot \vec{v}_i{}' = \underbrace{\frac{1}{2} M V_{CM}^2}_{K_{CM}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2}_{K_{rel}}$$

Esercizio



Utilizzando il teorema di Köenig per l'energia cinetica, determinare la massima compressione della molla.