



UNIVERSITÀ DI PISA

Dipartimento di Ingegneria
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Informatica

Appunti

Fondamenti di Automatica

Professori:
Prof. Munafò
Prof. Tonellotto

Autore:
Enea Passardi

Anno Accademico 2023/2024

Contents

Unimap	4
Introduzione	8
Breve storia della teoria del controllo automatico	9
I Sistemi continui e discreti	11
1 Sistemi continui	12
1 L'incertezza	13
2 Sistemi di controllo	13
3 Controllo in anello aperto e anello chiuso	14
4 Aspetti realizzativi	14
5 Modellistica matematica	15
6 Sistemi di controllo in anello aperto e in anello chiuso	16
2 Sistemi dinamici a tempo continuo	18
1 Rappresentazione di stato	19
2 Classificazione dei sistemi dinamici	20
3 Derivazione delle variabili di stato	22
4 Modellazione di un sistema lineare partendo da un sistema non lineare	24
3 Sistemi lineari e stazionari tempo continuo	26
1 Risposta del sistema	26
2 Rappresentazioni equivalenti	27
3 Autovalori e modi	27
3.1 Matrice della dinamica diagonalizzabile	28
3.2 Matrice della dinamica del sistema non diagonalizzabile	29
4 Risposta all'impulso	32
5 Stabilità di un sistema	32
6 Raggiungibilità	33
7 Osservabilità	35
8 Forma canonica di Kalman	37
II Funzione di Trasferimento	38
4 Trasformata di Laplace	39
1 Proprietà della trasformata di Laplace	42
2 Decomposizione in fratti semplici	44

5 Funzione di trasferimento	48
1 Stabilità	50
2 Cancellazione, stabilità e osservabilità	51
3 Ritardo di tempo	52
4 Risposta allo scalino	53
5 Risposta al gradino nei sistemi dinamici	54
6 Sistemi di ordine superiore al secondo	57
7 Il problema della realizzazione	58
8 Sistemi MIMO	59
6 Schema a blocchi	60
1 Disposizione topografica in uno schema a blocchi	61
7 Risposta in frequenza	64
1 Risposta alla sinusoida	66
2 Risposta esponenziale	68
III Criteri di stabilità dei sistemi	69
8 Introduzione	70
9 Criterio di Routh	72
1 Casi singolari	74
10 Diagrammi di Bode	77
1 Tipologie di diagrammi	78
1.1 Caso di costante moltiplicativa	79
1.2 Caso dei poli nell'origine	81
1.3 Caso polo semplice	81
1.4 Caso dello zero semplice	83
1.5 Poli complessi coniugati	84
1.6 Caso di zeri complessi coniugati	86
2 Il ritardo	87
11 Luogo delle radici	88
12 Diagrammi e criterio di Nyquist	95
1 Rappresentazione esatta dei diagrammi di Nyquist	95
2 Rappresentazione approssimata dei diagrammi di Nyquist	96
2.1 Rappresentazione approssimata con i diagrammi di Bode	98
3 Criterio di Nyquist	103
IV Criteri di sintesi e sviluppo dei controllori	106
13 Margini di ampiezza e fase	107
1 Margine di guadagno	109
2 Margine di fase	110
3 Conclusioni	110
14 Sistemi di controllo	111
1 Specifiche statiche	111
2 Specifiche dinamiche	114

15 Progettazione del controllore	116
1 Funzione di sensitività	118
2 Specifiche dinamiche	120
3 Tecnica del <i>Loop-Shaping</i>	121
4 Reti stabilizzatrici	122
4.1 Rete anticipatrice	123
4.2 Rete anticipatrice	124
16 Controllori PID	125
17 Esempio di sintesi di un controllore mediante <i>loop-shaping</i>	129
V Appendici	132
A Miscellanea	133
1 Calcolo della adj(A)	133
2 Tabella degli errori	133

Unimap

1. **Mar 25/02/2025 08:30-11:30 (3:0 h)** lezione: introduzione al corso; Introduzione e discussione del problema dell'identificazione, modellistica, simulazione e controllo. Definizione di sistema. Esempi di sistema. (ANDREA MUNAFO')
2. **Mer 26/02/2025 10:30-13:30 (3:0 h)** lezione: Modellistica per sistemi dinamici; ancora sui sistemi; sistemi come blocchi e loro parametri principali (ingressi, uscite e disturbi); Proprieta' dei sistemi dinamici; Approccio alla modellistica (black box; white box; gray box); (ANDREA MUNAFO')
3. **Gio 27/02/2025 11:30-13:30 (2:0 h)** lezione: Concetto di stato di sistema; Sistemi Lineari e Tempo Invarianti (LTI); Modellistica: equazioni differenziali lineari; Esempi (serbatoio; modello automobile per regolazione velocita'); introduzione ai sistemi non lineari e linearizzazione tramite serie di Taylor. Definizione di equilibrio e stabilita'. Formula di Lagrange per sistemi omogenei. (ANDREA MUNAFO')
4. **Mar 04/03/2025 08:30-11:30 (3:0 h)** lezione: definizione di stabilita', stabilita' degli equilibri, asintotica stabilita, stabilita' marginale, instabilita'. La formula di Lagrange per sistemi autonomi; definizione di movimento di stato e uscita di un sistema, la matrice di transizione di stato (matrice esponenziale); la formula di Lagrange per l'evoluzione completa. Risposta libera e forzata. (ANDREA MUNAFO')
5. **Mer 05/03/2025 10:30-13:30 (3:0 h)** lezione: Equazione di ordine n e sistemi di ordine uno; Trasformazioni di coordinate e Rappresentazioni equivalenti; Discussione sul fatto che la scelta variabili di stato non e' unica; esempio dei carellini. (ANDREA MUNAFO')
6. **Gio 06/03/2025 11:30-13:30 (2:0 h)** lezione: Autovalori e modi. Matrice A diagonalizzabile; Esempi quando A e' diagonalizzabile; calcolo autovalori e modi. (ANDREA MUNAFO')
7. **Mar 11/03/2025 08:30-11:30 (3:0 h)** lezione: Autovalori e Modi, A non diagonalizzabile; Forma di Jordan di una matrice, e calcolo della matrice esponenziale. Esempi di matrici in forma di Jordan. La molteplicita' algebrica e geometrica. (ANDREA MUNAFO')
8. **Mer 12/03/2025 10:30-13:30 (3:0 h)** lezione: La forma di Jordan: autovalori complessi e coniugati. Legame tra stabilita', autovalori e modi. Esempi. Definizione di Raggiungibilita' e Osservabilita'. Metodi per la verifica di raggiungibilita' e osservabilita' attraverso la matrice di raggiungibilita' e osservabili'. Il lemma PBH per l'ispezione diretta. Identificazione delle parti raggiungibili e osservabili. Forma minima dei sistemi. Esempi. Breve discussione sulla Stabilita' dei sistemi linearizzati. (ANDREA MUNAFO')
9. **Mar 18/03/2025 08:30-11:30 (3:0 h)** lezione: Definizione di Funzione di Trasferimento. Il Controllo in Feedback e discussione degli elementi piu' importanti e dei segnali coinvolti. La trasformata di Laplace. La logica delle trasformate. Richiami sui numeri complessi. Definizione di trasformata e anti-trasformata di Laplace. Singolarita' della trasformata di Laplace: zeri e poli. Calcolo di trasformate di funzioni elementari (Dirac, gradino, esponenziale e loro versione ritardate). (ANDREA MUNAFO')
10. **Mer 19/03/2025 10:30-13:30 (3:0 h)** esercitazione: Esercitazione su proprietà strutturali, stabilità, osservabilità e raggiungibilità. Calcolo autovalori e modi del sistema. Sistemi in forma di Jordan. Verifica osservabilità e raggiungibilità con il calcolo delle matrici di osservabilità e raggiungibilità e attraverso il Lemma PBH per l'ispezione diretta. (ANDREA MUNAFO')
11. **Gio 20/03/2025 11:30-13:30 (2:0 h)** lezione: Proprietà della trasformata di Laplace: linearità, cambiamento di scala, derivazione in s, derivazione nel tempo, integrazione, traslazione nel tempo e in s, convoluzione. Esempi. (ANDREA MUNAFO')

12. **Mar 25/03/2025 08:30-11:30 (3:0 h)** lezione: Ancora sulla Trasformata di Laplace: teorema del valore iniziale e del valore finale. Decomposizione in fratti semplici (ANDREA MUNAFO')
13. **Mer 26/03/2025 10:30-13:30 (3:0 h)** lezione: Esercizi sulla decomposizione in fratti semplici (poli reali e complessi e coniugati). La risposta all'impulso di un sistema. Definizione. Uscita di un sistema come convoluzione della risposta all'impulso e l'ingresso. Risposta all'impulso e funzione di trasferimento (ANDREA MUNAFO')
14. **Gio 27/03/2025 11:30-13:30 (2:0 h)** lezione: Schemi a blocchi, e algebra degli schemi a blocchi: sistemi in serie, parallelo e in retroazione. Perdita di raggiungibilità e osservabilità a causa delle cancellazioni. (ANDREA MUNAFO')
15. **Mar 01/04/2025 08:30-11:30 (3:0 h)** lezione: La Trasformata di Laplace e le Equazioni Differenziali. Analisi dei sistemi del primo ordine, risposta nel tempo, e loro parametri caratteristici, costante di tempo. Tempo di assestamento in funzione della costante di tempo. Analisi dei sistemi del secondo ordine, risposta nel tempo e loro parametri caratteristici. Poli reali e coincidenti, poli reali e distinti. Trasformata di Laplace di un'equazione differenziale in presenza di condizioni iniziali diverse da zero: risposta libera e forzata. (ANDREA MUNAFO')
16. **Mer 02/04/2025 10:30-13:30 (3:0 h)** lezione: Ancora sull'analisi dei sistemi del secondo ordine, risposta nel tempo al gradino e loro parametri caratteristici. Poli reali e coincidenti, poli complessi e coniugati. Esempio massa molla e smorzatore. Il criterio di Routh. (ANDREA MUNAFO')
17. **Gio 03/04/2025 11:30-13:30 (2:0 h)** non tenuta: Lezione non tenuta per partecipazione a conferenza (ANDREA MUNAFO')
18. **Mar 08/04/2025 08:30-11:30 (3:0 h)** lezione: Ancora sul criterio di Routh, coefficienti simbolici e casi singolari. Esempi ed esercizi. Risposta In Frequenza o Risposta Armonica (Teorema e dimostrazione). Risposta in frequenza come metodo sperimentale. I Diagrammi Di Bode (Modulo e Fase). (ANDREA MUNAFO')
19. **Mer 09/04/2025 10:30-13:30 (3:0 h)** lezione: Ancora sui Diagrammi di Bode: Metodi di tracciamento, diagramma di modulo e di fase. Tracciamento dei diagrammi per blocchi elementari. (ANDREA MUNAFO')
20. **Gio 10/04/2025 11:30-13:30 (2:0 h)** lezione: Ancora sui Diagrammi di Bode: Metodi di tracciamento, diagramma di modulo e di fase. Tracciamento dei diagrammi per blocchi elementari: poli complessi e coniugati e ritardo puro. Esercizio. (ANDREA MUNAFO')
21. **Mar 15/04/2025 08:30-11:30 (3:0 h)** lezione: Esercizio sui diagrammi di Bode: tracciamento modulo e fase. Calcolo intersezione con asse a 0dB. Interpretazione. Introduzione al Luogo delle Radici. Condizioni di Modulo e Fase e prime regole di tracciamento. (ANDREA MUNAFO')
22. **Mer 16/04/2025 10:30-13:30 (3:0 h)** lezione: Ancora sul luogo delle radici. Regole per il tracciamento: punti multipli, angoli di partenza e arrivo, asintoti. Esempi ed esercizi sul luogo diretto e inverso. Note sullo smorzamento, la pulsazione naturale, tempo di assestamento e posizione dei poli nel piano complesso. (ANDREA MUNAFO')
23. **Gio 24/04/2025 11:30-13:30 (2:0 h)** lezione: Introduzione al diagramma di Nyquist. Descrizione della forma polare della risposta in frequenza. Metodo analitico e introduzione al metodo grafico. (ANDREA MUNAFO')
24. **Lun 28/04/2025 12:30-14:30 (2:0 h)** lezione: Recupero lezione del 3 Aprile. Ancora su Nyquist. Tracciamento per punti e attraverso il diagramma di Bode. (ANDREA MUNAFO')

25. **Mar 29/04/2025 08:30-11:30 (3:0 h)** lezione: Il criterio di Nyquist, dimostrazione. Eq. di Nyquist per la stabilita' in ciclo chiuso. Richiuse all'infinito. Sistemi con un polo nell'origine e asintoti. Esercizi di confronto tra i metodi. (ANDREA MUNAFO')
26. **Mer 30/04/2025 10:30-13:30 (3:0 h)** esercitazione: Esercizi di confronto tra i metodi: Bode, Nyquist e Luogo delle radici: Interpretazione dei risultati con i tre metodi e confronto. Esempi con poli reali, complessi e coniugati e immaginari puri. (ANDREA MUNAFO')
27. **Mar 06/05/2025 08:30-11:30 (3:0 h)** esercitazione: Esercizi di confronto dei metodi: Bode, Nyquist e Luogo delle Radici. (ANDREA MUNAFO')
28. **Mer 07/05/2025 10:30-13:30 (3:0 h)** lezione: Robustezza dei sistemi. Definizione di margine di stabilita': margine di ampiezza e fase. Identificazione su Bode e Nyquist. Sistemi regolari e non regolari. Variazione delle definizioni di margine di ampiezza per sistemi non regolari. Esempi. (ANDREA MUNAFO')
29. **Gio 08/05/2025 11:30-13:30 (2:0 h)** lezione: Elementi di un sistema di controllo. Definizioni e specifiche: performance desiderate in ciclo chiuso: stabilita', specifiche statiche e dinamiche e di robustezza. Uso del teorema del valore finale per il rispetto delle specifiche statiche. Specifiche statiche e tipo del sistema. Disturbi interno ed esterno al processo. Controllori per la reiezione dei disturbi. (ANDREA MUNAFO')
30. **Ven 09/05/2025 13:00-16:00 (3:0 h)** lezione: Ancora sui controllori: il principio del modello interno. Configurazioni equivalenti per i disturbi. Configurazione con rumore sull'uscita e sue rappresentazioni equivalenti. Funzioni di trasferimento ingresso-uscita. La Funzione Di Anello Specifiche nel dominio del tempo (tempo di salita, Tempo di assestamento, Tempo di ritardo, Massima sovraelongazione , tempo di Massima sovraelongazione). Specifiche nel dominio della frequenza (filtri passa basso, passa alto e passa banda). Definizione di Risoneanza, e di banda del sistema. I legami globali tra le specifiche dinamiche nel dominio tempo con quelle nel dominio della frequenza. (ANDREA MUNAFO')
31. **Mar 13/05/2025 08:30-11:30 (3:0 h)** lezione: Progetto sulla base della risposta in frequenza dell'impianto: loop shaping. Traduzione specifiche in requisiti sul diagramma di Bode della funzione di anello. Definizione delle barriere sul diagramma di Bode. Esempio controllore di velocita' per automobile. (ANDREA MUNAFO')
32. **Mer 14/05/2025 10:30-13:30 (3:0 h)** lezione: Ancora sul Loop Shaping: Reiezione dei disturbi: variazione di carico. Reiezione dei rumori di misura. Funzioni di sensitivita' e di sensitivita' complementare. (ANDREA MUNAFO')
33. **Gio 15/05/2025 11:30-13:30 (2:0 h)** lezione: Ancora sul loop shaping: Funzione di sensitivita' al controllo. Conseguenze dovute alla sensitivita' al controllo. Specifiche di progetto relative alla sensibilita' del controllo. Discussione sulle Limitazioni intrinseche all'azione di controllo. (ANDREA MUNAFO')
34. **Ven 16/05/2025 13:00-15:00 (2:0 h)** esercitazione: Sintesi dei controllori con il luogo delle radici: Esercizi. Sintesi dei controllori con il Bode: Esercizi. Reti anticipatrici e ritardatrici. (ANDREA MUNAFO')
35. **Ven 16/05/2025 15:00-16:00 (1:0 h)** lezione: I controllori PID. Funzione di Trasferimento di un PID. Montaggio di un PID. Wind-up dell'azione integrale. Procedure anti-wind-up. Taratura di un PID. Procedura di Ziegler e Nichols per la taratura automatica dei PID. Controllori Industriali. (ANDREA MUNAFO')
36. **Mar 20/05/2025 08:30-11:30 (3:0 h)** non tenuta: Sospensione didattica per Giro d'Italia. (ANDREA MUNAFO')
37. **Mer 21/05/2025 10:30-13:30 (3:0 h)** esercitazione: Sintesi dei controllori con poli immaginari: Esercizi. Sintesi dei controllori per sistemi con ritardo: Esercizi. (ANDREA MUNAFO')

38. **Gio 22/05/2025 11:30-13:30 (2:0 h)** esercitazione: Esercizi sui controllori con Bode in presenza di disturbi e rumori di misura. Esercizi sui sistemi in variabili di stato: stabilita', modi, osservabilita' e raggiungibilita'. Identificazione di parte non osservabile e non controllabile e soluzione per il controllo. Breve discussione sulla Mappa della Teoria dei Controlli e i controlli avanzati. (ANDREA MUNAFO')

Introduzione

Cosa vuol dire controllore ? Supponiamo di voler mantenere costante una temperatura all'interno di un particolare ambiente. Per farlo dobbiamo dotarci di un **sistema di controllo** che, presa in ingresso la temperatura della stanza, proceda a *decidere cosa fare*, in particolare, se emettere aria calda per scaldare la stanza, se emettere aria fredda per raffreddare la stanza o, se non emettere alcun tipo di aria quando la temperatura è corretta.

Cosa studieremo in questo corso ? In questo corso andremo a studiare il modo in cui possiamo descrivere il sistema. Nello specifico, andremo a studiare come si progetta la parte **intelligente** del sistema, quindi quella che, per dirla in termini brutali, *decide cosa fare*.

Breve storia della teoria del controllo automatico

Il termine automazione venne introdotto, per la prima volta, nel 1947 presso la **Ford Motor Company** come **contrazione** dell'espressione *automatic production* per indicare l'insieme di apparti di movimentazione automatica che erano stati installati nelle loro **linee di produzione**.



Figure 1: Linee di produzione della **Ford Motor Company**

Alcuni esempi di **sistema di controllo automatico** possono essere ritrovati anche in epoche storiche precedenti. L'esempio più classico è quello dell'**orologio di Ctesibio** o del termostato di Drebbel

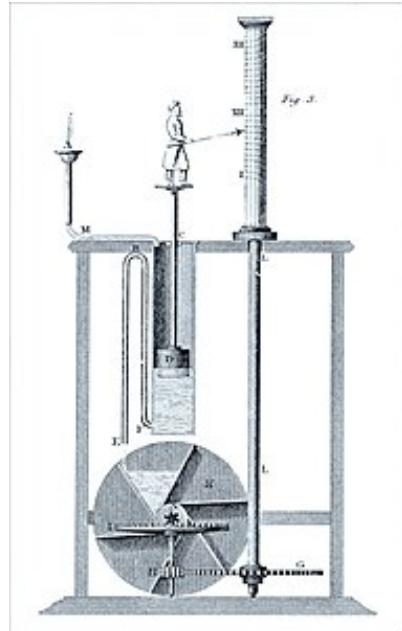


Figure 2: Orologio di Ctesibio, 270 A.C.

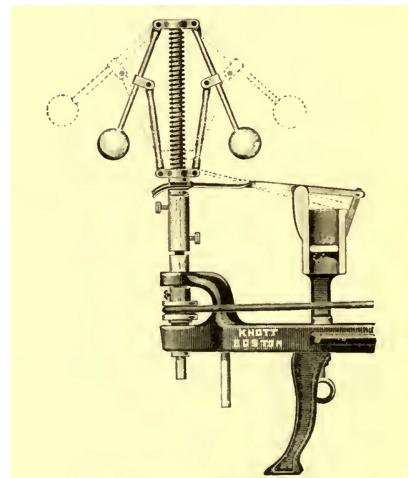


Figure 3: Regolatore di Watt

La particolarità di entrambi i sistemi era la presenza di un sistema di **Feedback**. I sistemi di **feedback** sono dei sistemi di controllo interni al sistema di controllo stesso che permettono di ottenere alcune informazioni sullo stato interno del sistema. Ad esempio, il galleggiante nell'orologio

di Ctesibio sfrutta un galleggiante come sistema di **feedback**.

Part I

Sistemi continui e discreti

Chapter 1

Sistemi continui

Nel ciclo di vita di un gran numero di apparati della più svariata natura, si riconosce la necessità di intervenire dall'esterno in modo che essi si comportino nel modo desiderato. Per esempio, affinché un veicolo si muova su un dato percorso seguendo un prefissato profilo di velocità, è indispensabile agire in maniera continua su organi che determinano la direzione o la coppia applicata alle ruote.

Per determinare quali azioni vanno compiute in situazioni come quelle delineate, si è condotti ad affrontare i cosiddetti **problemi di controllo**, che trovano soluzione nei **sistemi di controllo**. Un sistema può essere definito, in modo molto generale, come un *oggetto astratto orientato*; in particolare:

- **Oggetto astratto** perché non ci interessa la natura dell'oggetto, ma la sua descrizione matematica. Oggetti di natura diversa ma con la stessa descrizione matematica sono per noi il medesimo sistema.
- **Orientato** perché il sistema ha un ingresso e un'uscita che rappresentano, rispettivamente, la **causa** della variazione dello stato del nostro sistema e l'**effetto** di questa variazione.

Dato un sistema, definire qual è la causa e qual è l'effetto è anche, talvolta, banale. Pensiamo solo a una massa che si muove sottoposta a una forza \vec{F} su un piano e che si sposta di z sul medesimo piano. La causa dello spostamento è, ovviamente, la **forza**, mentre l'**effetto** è, altrettanto ovviamente, lo spostamento.

I **problemi di controllo** consistono nell'imporre un *funzionamento desiderato* a un *processo assegnato*. Con il termine **sistema sotto controllo** ci si riferisce invece all'oggetto su cui il problema è posto. Il **funzionamento desiderato** è invece espresso dalla richiesta che l'andamento di alcune variabili nel tempo coincida con quello di alcune variabili **prestabilite**. Le prime variabili sono quindi le grandezze di interesse, note anche come **variabile controllata**; le seconde invece, espresse in forma **vettoriale**, rappresentano l'**andamento desiderato della variabile controllata o segnale di riferimento** (detto anche **set-point** se costante nel tempo). L'obiettivo ideale di un problema di controllo può essere sintetizzato come segue:

$$\text{variabile controllata} = \text{segnale di riferimento} \quad (1)$$

condizione necessaria che deve valere per tutto il tempo di funzionamento del processo.

Affinché questa condizione sia garantita, è necessario attuare dei condizionamenti sulla **variabile controllata** mediante delle *variabili scalari* che, nel complesso, prendono il nome di **variabile di controllo**. L'andamento di questa variabile di controllo può essere scelto arbitrariamente, anche in funzione di vincoli.

Quando siamo in presenza di un **set-point**, quindi di un segnale di riferimento costante nel tempo, il problema prende il nome di **problema di regolazione**.

1 L'incertezza

In realtà la **variabile controllata** non dipende solamente dalle **variabili di controllo**; esistono infatti anche altre grandezze, **non manipolabili**, che agiscono sulla **variabile controllata**. Una di queste è l'**incertezza**: una grandezza **sempre presente in qualsiasi processo da controllare**.

Quest'incertezza si può manifestare in moltissimi modi. Un esempio è la possibilità che alcuni valori relativi a dei componenti del sistema non abbiano un **valore effettivo** uguale a quello **nomina**le. Oppure, l'incertezza è anche quella relativa ai parametri iniziali del sistema quando iniziamo a esercitare l'**azione di controllo**, i quali **non possono essere misurati perfettamente**. L'esistenza di tutte queste variabili, racchiuse nel vettore **disturbo**, complica in maniera enorme i **problemi di controllo**, soprattutto per il fatto che esse usualmente differiscono in modo ignoto rispetto ai loro **andamenti nominali**.

Quando i parametri e i disturbi assumono i loro valori e andamenti *nominali*, si dice che ci si trova in **condizioni nominali**; altrimenti si parla di **condizioni perturbate**.

Nei problemi di controllo, tutti i parametri sono in funzione del tempo, il quale può essere visto in due modi:

- **continuo**, se il suo valore è rappresentato da un valore reale τ ;
- **discreto**, se il suo valore è rappresentato da un valore intero k .

Per comprendere meglio tutti i concetti introdotti, si può procedere con un esempio. Si assume di avere un veicolo, al quale si intende far percorrere una traiettoria assegnata a una velocità desiderata. Questo esempio aiuta a visualizzare l'effetto del controllo sulla dinamica del sistema.

2 Sistemi di controllo

La determinazione dell'andamento della **variabile di controllo** viene compiuto da un organo detto **controllore**, o **regolatore**. Il costituito dal processo e dal controllore è detto **sistema di controllo**; nel caso in cui processo e controllore siano intrinsecamente connessi, il sistema prende il nome di **sistemi di controllo naturali**, altrimenti **sistemi di controllo artificiali**. Alcuni esempi di **sistemi di controllo naturali** si trovano all'interno del corpo umano, tra questi si possono citare quelli che provvedono a risolvere i seguenti problemi di controllo:

- *tenere costante la pressione arteriosa.*
- *tenere costante la concentrazione di glucosio nel sangue.*
- *tenere costante la temperatura corporea.*

tutti i sistemi di controllo possono essere anche divisi secondo un altro criterio:

- **Sistemi di controllo automatici:** sono sistemi di controllo nei quali non è necessario alcun intervento umano esterno.
- **Sistemi di controllo manuali:** sono sistemi di controllo nei quali è necessario che ci sia un intervento umano esterno.

All'inizio del paragrafo abbiamo definito un equazione **ideale** che un sistema di controllo deve rispettare, questa condizione è però **inapplicabile nella pratica**. Quando si progetta un sistema di controllo si può ritenere che un problema di controllo sia stato risolto convenientemente anche se l'equazione è soddisfatta solo in parte, infatti è sufficiente che

$$\text{Variabile controllata} \approx \text{Segnale di Riferimento} \quad (2)$$

possiamo anche definire una grandezza, nota come **errore**

$$\text{errore} = \text{Segnale di Riferimento} - \text{Variabile Controllata} \quad (3)$$

La nostra equazione [1.2] può essere tradotta nell'imporre che l'**errore** soddisfi un insieme di **requisiti**, o **specifiche**, che esprimono la necessità che esso risulti *accettabilmente piccolo* in tutte le condizioni di funzionamento di interesse.

Per quanto riguarda i *parametri* e i *disturbi*, è molto utile conoscere i rispettivi *valori* e *andamenti nominali*, nonché le classi cui appartengono i valori e gli andamenti veri. Inoltre, di solito un unico *controllore* deve essere in grado di imporre al processo comportamenti di volta in volta differenti. Ciò deriva dal fatto che, nel momento in cui si progetta il *controllore*, il **segnale di riferimento** non è del tutto noto, ma se ne conosce solo una **classe funzionale di appartenenza**.

All'obiettivo di rendere piccolo l'errore si aggiunge di solito la richiesta di **moderazione del controllo**, che è motivata sia dalla tipica presenza di vincoli sulla variabile controllata e sia dall'ovvia necessità che il processo riceva delle sollecitazioni eccessive.

3 Controllo in anello aperto e anello chiuso

Ogni controllore deve disporre delle informazioni sul segnale di riferimento e sul disturbo. Talvolta queste informazioni riguardano sia il passato che il presente dell'andamento di entrambi; Infatti a tempo $\tau = \tau_n$ sono note tutte le informazioni sul disturbo e sul segnale di riferimento per $\tau \leq \tau_n$. Note queste informazioni, possiamo dividere i controllori:

- **controllori in anello aperto:** i requisiti di prestazione sono preimpostati e non possono essere modificati durante l'operazione. Questo tipo di intervento richiede una conoscenza profonda del nostro sistema, in quanto una volta iniziata la sequenza di controllo, essa non può venir modificata in alcun modo.
- **controllori in anello chiuso:** il controllore prende le informazioni sull'uscita e le paragona con le informazioni sull'ingresso. Da questa comparazione viene generato un segnale di errore, che viene sfruttato dal controllore per determinare il *da farsi*.

Se il **disturbo è misurabile** e la variabile di controllo dipende da esso, si usa dire che il controllore effettua una *compensazione del disturbo*. La compensazione costituisce comunque un'azione in anello aperto, in quanto la definizione di **anello chiuso** riguarda soltanto il fatto che abbiamo una **variabile di controllo dipendente dalla variabile controllata**.

Notiamo che l'anello chiuso è molto più potente dell'anello aperto e diventa man mano più potente tanto più sono le informazioni che conosciamo sul processo.

4 Aspetti realizzativi

Vi sono alcuni aspetti realizzativi di cui tener conto durante la fase di creazione di un **sistema di controllo**

Tecnologia del controllore Un regolatore deve elaborare l'informazione disponibile per generare un'appropriata azione di controllo sul processo. Questi controllori automatici possono sfruttare diverse tecnologie, ad esempio, nel corso della storia sono stati usati controllori **idraulici** e **pneumatici**, fino all'epoca moderna, in cui questi controllori analogici sono andati man mano a sostituirsi con controllori **digitali**, più moderni e più ridotti. Il problema che però si riscontra nei controllori digitali è la loro dipendenza rispetto a variabili numeriche, le quali vengono sottoposte a approssimazioni e errori.

Strumentazione di processo Affinché un processo possa essere connesso a un controllore è indispensabile che esso sia corredata da un'adeguata **strumentazione** che lo predisponga al controllo. Nella praticaabbiamo che ad ogni variabile di controllo è associato un **attuatore** e per ogni variabile misurataabbiamo un **trasduttore**. In particolare,abbiamo che

- I trasduttori della variabile controllata e del disturbo effettuano la misura delle rispettive grandezze fisiche e le convertono in modo da renderle compatibili con il controllore, per poi, infine, trasmetterle.

- Gli attuatori hanno invece il compito di convertire le variabili prodotte dal controllore in variabile manipolabili relative al processo. Inoltre, questi componenti hanno anche il compito di amplificare le variabili di controllo, in modo che esse possano effettivamente agire sul processo.

5 Modellistica matematica

Fino ad ora abbiamo parlato di **disturbi**, **segnali di riferimento**, **variabili controllate**, ecc... tutti questi elementi, insieme alle specifiche di progetto possono essere descritti formalmente. Tutto ciò non è però sufficiente, dobbiamo ricavare dei modelli matematici per descrivere il funzionamento degli **attuatori** e dei **trasduttori**, attraverso l'utilizzo di equazioni differenziali, sistemi di equazione e altri strumenti matematici. Un tipo di modellistica di un sistema di controllo potrebbe essere quella *ingresso-uscita*, quindi un sistema costituito da una singola equazione del tipo

$$f : \text{Ingresso} \longrightarrow \text{Uscita} \quad (4)$$

L'equazione sarà ovviamente un'equazione differenziale, scritta nella forma

$$f(y^n(x), \dots, y(t), x^m(t), \dots, x(t)) = 0 \quad (5)$$

Il secondo tipo di descrizione possibile è quello detto **I.S.U (Ingresso-Stato-Uscita)**, che verrà approfondito nel prossimo capitolo.

Esempio introduttivo

Analizziamo un esempio pratico di **modellistica di un sistema**: Un serbatoio cilindrico di base A è alimentato con una portata d'acqua detta $u(t)$. Definiamo h_0 come l'**altezza iniziale** a t_0 e h_1 come l'altezza dopo un istante di tempo t_1 . Definiamo come ΔV la variazione di volume

$$\Delta V = A \cdot (h_1 - h_0) = \int_{t_0}^{t_1} u(\tau) d\tau \quad (6)$$

Andando a derivare da entrambe le parti otteniamo

$$A \frac{dh}{dt} = u(t) \quad (7)$$

supponendo $x = h$, otteniamo

$$A \dot{x} = u(t) \implies \dot{x} = \frac{u(t)}{A} \quad (8)$$

abbiamo quindi ottenuto un'equazione in grado di descrivere, con una sufficiente accuratezza, lo stato interno del nostro sistema

In termini molto coincisi, possiamo dividere la soluzione di un problema di controllo in tre passi:

- La riformulazione matematica del problema di controllo.
- La determinazione del modello matematico del controllore.
- La realizzazione del controllore.

Il secondo passo è quello che più di tutti prescinde dalla realtà, rimanendo confinato a una dimensione più astratta.

Un problema di analisi nasce quando si cerca di verificare le prestazioni di un sistema di controllo completamente specificato, anche per quanto riguarda il modello del controllore. Infatti prima di procedere all'installazione del sistema su impianti, occorre che esso sia accuratamente provato e controllato.

Uno dei principali sistemi per valutare l'efficienza e la correttezza di un sistema di controllo è la **simulazione**: questo processo consiste nello studiare l'evoluzione temporale delle variabili del **sistema di controllo** risolvendo le equazioni che ne governano il comportamento.

Esistono tre tipologie di modellistica di un sistema di controllo

- **Black-box:** Del sistema si conosce solo ingresso e uscita (ottenuta tramite sensori e/o misurazioni), ma non si conosce la struttura interna. Per modellare il sistema dobbiamo utilizzare un approccio **statistico**, andiamo a fare un numero quanto più possibile grande di misurazioni, inseriamo i dati in una tabella e ne facciamo il **fitting**.
- **White-box:** si conosce **ingresso**, **uscita** e alcuni aspetti del modello; ad esempio, supponiamo di avere una molla con una massa appesa nel vuoto: studiando il sistema siamo in grado di determinare le equazioni che lo descrivono

$$m\ddot{x} = mg + kx \quad (9)$$

Risolvendo queste equazioni siamo in grado di determinare un **modello astratto** che approssimi, nel caso sia corretto, la nostra realtà fisica. Per testare la correttezza del nostro modello è sufficiente confrontare l'uscita del **sistema fisico** con l'uscita del nostro **modello astratto**.

- **Gray-box:** questo processo di modellistica rappresenta una via di mezzo tra la modellistica a scatola nera e la modellistica a scatola grigia. In questa situazione conosco solo una parte delle caratteristiche che descrivono il mio modello fisico; quelle che non conosco le ricavo sperimentalmente.

Esiste anche un'ulteriore approccio, detto **approccio pragmatico**: **costruisco il modello anche se non ho riscontri nella realtà**. Costruisco il modello immaginandomi il suo funzionamento, **indipendentemente dalla realtà fisica**, e solo successivamente provo ad avvicinarlo quanto più possibile alla **realtà fisica**. In appendice è possibile trovare tre diagrammi che descrivono **graficamente** i vari approcci descritti.

6 Sistemi di controllo in anello aperto e in anello chiuso

La struttura in anello chiuso svolge un ruolo cruciale nella soluzione dei sistemi di controllo. Conviene iniziare confrontando le prestazioni ottenibili dai sistemi di controllo in anello chiuso, con quelle ottenibili dai sistemi di controllo in anello aperto. Prendiamo in considerazione un esempio: *Un corpo di massa $M > 0$ è vincolato a un riferimento fisso di mediante una molla di costante elastica $k > 0$ e si muove lungo una guida rettilinea caratterizzata da un coefficiente di attrito viscoso proporzionale alla velocità ($h > 0$); esso è soggetto a una forza elettromotrice F_m e a un'altra forza esterna F_e costante. Si vuole controllare la sua posizione, rappresentata come uno scalare s calcolato dalla posizione di riposo della molla. Sono noti i valori nominali di M , k e h , indicati con l'iniziale dello scalare e un trattino sopra. Anche la forza motrice ha un valore nominale \overline{F}_e .* In generale, quando il sistema è in equilibrio vale la relazione

$$0 = F_e + ks - F_m \iff F_m = ks + F_e \quad (10)$$

Inoltre, se l'obiettivo è ottenere un certo valore \bar{s} di spostamento, si può pensare di assegnare alla forza motrice il valore

$$F_m = \bar{ks} + \overline{F}_e \quad (11)$$

Se, come si verifica nella realtà, i valori nominali non corrispondono ai valori effettivi, possiamo definire un errore

$$e = \bar{s} - s \quad (12)$$

per calcolare questo errore occorre utilizzare una sostituzione, dalla quale cerchiamo di calcolare il valore dello spostamento effettivo fatto dal blocco

$$\begin{aligned} \bar{ks} + \overline{F}_e &= ks + F_e \\ s &= \frac{1}{k} \left(\bar{ks} + \overline{F}_e - F_e \right) \end{aligned} \quad (13)$$

andiamo a sostituire nella legge dell'errore e ricaviamo che

$$e = \frac{k - \bar{k}}{k} \bar{s} + \frac{F_e - \bar{F}_e}{k} \quad (14)$$

Supponiamo adesso di lavorare con un sistema in anello chiuso che aggiunga alla forza motrice F_m un contributo proporzionale all'errore

$$F_m = ks + F_e + \mu e \quad (15)$$

Andando a ricalcolare lo spostamento e l'errore si ottiene

$$e = \frac{k}{\mu + k} \left(\frac{k - \bar{k}}{k} \bar{s} + \frac{F_e - \bar{F}_e}{k} \right) \quad (16)$$

In questo modo notiamo che possiamo ottenere un errore molto minore rispetto a quello ottenuto in anello chiuso. Di base non è necessario utilizzare un controllore in anello aperto se si è sicuri che gli andamenti delle variabili di controllo e degli errori siano **nominali**.

Inoltre, nello studio di un sistema di controllo non è mai sufficiente riferirsi al suo comportamento di regime. Occorre infatti analizzare anche i comportamenti dei transistori per accettare che le variabili mostrino la tendenza a portarsi sui valori individuati nell'analisi statica (*stabilità*).

Bisogna poi verificare che il sistema di controllo abbia una buona *precisione dinamica*, quindi che i transistori abbiano siano sufficientemente veloci e privi di sovra-elongazioni troppo ampie. Se oltre a ciò, le azioni di controllo sono limitate, il sistema ha delle buone **prestazioni dinamiche**.

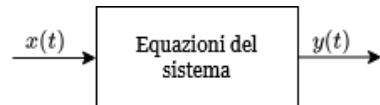
Infine, possiamo suddividere il comportamento dei controllori in anello chiuso in tre classi principali

- **Controllori statici o *non dinamici***: Questo tipo di controllori, che sono anche quelli più *semplici*, fanno dipendere il valore istantaneo della variabile di controllo esclusivamente dai valori dello stesso istante del segnale di riferimento.
- **Controllori dinamici**: In questi regolatori il valore della variabile di controllo in un certo istante dipende anche dai valori passati assunti dal segnale di riferimento, dalla variabile controllata e dai disturbi misurabili.
- **Controllori a Relé**: Questi controllori generano una variabile di controllo con un numero finito di possibili stati, determinati in **sede di progetto**, e commuta da l'uno all'altro quando l'errore raggiunge delle determinate soglie.

Chapter 2

Sistemi dinamici a tempo continuo

Un **sistema dinamico** costituisce un *modello matematico* di un *oggetto fisico* che interagisce con il mondo circostante tramite due vettori di variabili **dipendenti dal tempo**.



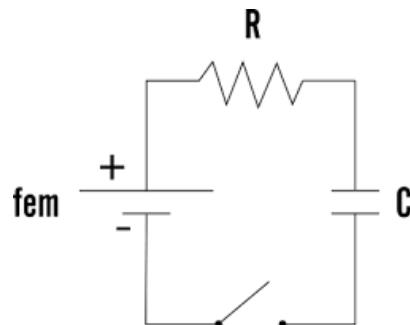
La rappresentazione risulta accettabile, anche se, come vedremo a breve, la modellistica viene fatta attraverso delle equazioni matematiche. Nella figura compaiono due grandezze, una $u(t)$ e una $y(t)$, analizziamole:

- **Variabili di Ingresso:** indicate come $u(t)$, sono le azioni che vengono compiute da agenti esterni sull'oggetto in esame, le quali ne influenzano il comportamento.
- **Variabili di Uscita:** indicate come $y(t)$, sono le conseguenze delle azioni che sono state impresse sull'oggetto.

In altre parole, possiamo delineare un rapporto di causa-effetto tra le **variabili di ingresso** e le **variabili di uscita** (l'uscita non può dipendere dai valori futuri dell'ingresso). Se non vi è un rapporto causa-effetto tra ingresso e uscita (solitamente quando ci sono fenomeni aleatori), allora devono esserci legami stocastici o deterministici (dato un ingresso $u(t)$ costante, ma in istanti diversi, l'uscita deve essere uguale).

In generale, possiamo definire anche una regola: **prenderemo come causa della dinamica del sistema (l'ingresso) la grandezza che viene derivata (intesa come operazione matematica di derivazione) il minor numero di volte**.

Talvolta però la sola conoscenza delle variabili in ingresso non è sufficiente per determinare il valore delle variabili di uscita. Prendiamo come esempio un circuito RC strutturato nel seguente modo. Si assuma di avere come variabile di ingresso la tensione V_g ai capi del generatore e come



variabile di uscita la tensione V_R ai capi della resistenza. Per la legge della tensione abbiamo che

$$V_R(t) = V_G(t) - V_C(t) \quad (1)$$

ci accorgiamo quindi che la sola conoscenza della tensione $V_G(t)$ non è sufficiente per determinare il valore $V_R(t)$, risulta anche necessario conoscere delle informazioni riguardanti lo **stato interno** del circuito, in questo caso: la tensione presente ai capi del condensatore ad un generico istante t . Questo esempio ci porta ad una conclusione importante: talvolta, durante la progettazione di un sistema dinamico, può essere necessario dover introdurre un terzo set di variabili in ingresso, chiamate **variabili di stato**, che forniscono informazioni sullo stato interno del sistema.

1 Rappresentazione di stato

Una volta introdotte le variabili necessarie, si può passare a definire la struttura delle equazioni che le mettono in relazione, o in altri termini, possiamo definire cosa sia un **sistema dinamico a tempo continuo**. Indicano rispettivamente con $u \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^k$ i vettori delle variabili in ingresso, stato e uscita, e con f e g due funzioni vettoriali, un **sistema dinamico a tempo continuo** è costituito dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t) \end{aligned} \quad (2)$$

la prima equazione viene detta **equazione di stato**, la seconda viene invece detta **trasformazione d'uscita**. Entrambe le equazioni permettono di descrivere un particolare aspetto del sistema lineare:

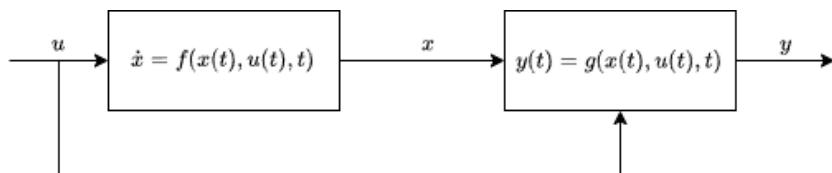
- L'equazione di stato è un'**equazione differenziale**. Sfruttando questa equazione è possibile mettere in relazione l'ingresso del sistema con la sua **stato attuale**.

Quando modelliamo un sistema dobbiamo anche definire *quante* e *quali* sono le variabili di stato; per determinare la prima informazione possiamo utilizzare una regola molto semplice: **il numero di variabili di stato è uguale al numero di volte in cui sono derivate le grandezze non di ingresso**. Per quanto concerne la seconda informazione, non abbiamo nessuna regola generale per determinare quali sono le variabili di stato, dobbiamo valutare osservando le equazioni che descrivono il sistema.

- La trasformazione d'uscita è una semplice equazione algebrica che esprime una relazione tra l'uscita (variabile dipendente) e, rispettivamente, stato interno del sistema e ingresso del sistema (variabili indipendenti).

Più avanti osserveremo come, in alcuni sistemi, la trasformazione d'uscita dipende solamente dallo stato interno e non, **direttamente**, dall'ingresso.

Rispetto ad alcune blande condizioni, l'equazione di stato definisce in modo univoco l'evoluzione dello stato interno $x(t)$ per $t \geq t_0$, in corrispondenza di ogni terna costituita dallo stato iniziale t_0 , una funzione di ingresso $u(t)$ con $t \geq t_0$ e una condizione iniziale $x(t_0) = x_0$. La funzione $x(t)$ con $t \geq t_0$ viene detta **movimento dello stato**. Possiamo pensare, in modo del tutto intuitivo, che alla variazione dello stato di ingresso si sussegua una variazione dello stato interno, calcolata con l'**equazione di stato**; da questa variazione dello stato interno, che quindi genera un nuovo stato, sfruttando la trasformazione di uscita, possiamo ricavare la nuova uscita del sistema. Possiamo riassumere questo concetto nel seguente disegno



Come abbiamo potuto vedere nella trattazione, la scelta delle variabili di stato è fondamentale

per rappresentare un sistema: **le variabili di stato rendono conto di quanto è necessario conoscere della situazione interna** (o della storia del sistema), per **poter calcolare l'uscita**. Nei sistemi fisici la situazione interna è, generalmente, determinata da accumuli di energia, da quantità di moto o massa e perciò può essere opportuno scegliere come variabili di stato quelle variabili da cui gli accumuli stessi si generano. In altri sistemi, come ad esempio quelli circuituali, la situazione intera potrebbe essere determinata da tensioni a capi di induttori o condensatori e pertanto, potrebbe essere conveniente utilizzare queste grandezze come variabili di stato. Nei modelli di sistemi meccanici può convenire scegliere come variabili di stato posizioni e velocità dei vari elementi, perché legate ad accumuli di energia potenziale e cinetica o di quantità di moto. Infine, nei sistemi termici, le temperature sono adatte ad essere assunte come variabili di stato, perché è da esse che dipendono le energie termiche immagazzinate. Grazie alle leggi fondamentali della fisica siamo in grado di esprimere delle relazioni che legano **variabili di ingresso, variabili di stato e le loro derivate**, portandoci alle **equazioni di stato**.

La scelta delle variabili di stato non è univoca, esistono, addirittura, delle particolari classi di sistemi per cui esistono infinite possibili scelte delle variabili di stato: alcune combinazioni si prestano meglio per una prima scrittura delle equazioni del sistema, altre combinazioni si prestano meglio per una descrizione analitica del sistema. Alcune combinazioni potranno portare, addirittura, a definire lo stato nel campo dei **numeri complessi**, quindi con $X \in \mathbb{C}$. Inoltre, neppure il numero delle variabili di stato, o *ordine del sistema*, è fissato a priori; in altre parole, esistono più sistemi dinamici, scelti in base all'accuratezza con il quale si vuole descrivere il nostro sistema, associabili a un unico oggetto fisico da modellare. Inoltre, quando sceglieremo una grandezza come variabile di stato dobbiamo prendere anche, come variabili di stato, anche tutte le sue derivate fino all'ordine massimo.

2 Classificazione dei sistemi dinamici

I sistemi dinamici descritti, dalle due equazioni fondamentali (**equazione di stato e trasformazione d'uscita**), possono essere classificati in funzione delle proprietà delle funzioni f e g :

- **Sistemi mono-variabili e multi-variabili** (*SISO* e *MIMO*): Si dicono *mono-variabili* i sistemi dotati di una sola **variabile di uscita** e di una sola **variabile di ingresso**. Si dicono *multi-variabili* tutti gli altri sistemi.
- **Sistemi propri, strettamente propri e non dinamici**: Se la **trasformazione d'uscita** non dipende dall'ingresso, cioè se l'equazione che la descrive può essere scritta nella forma

$$y(t) = g(x(t), t) \quad (3)$$

il sistema si definisce come *strettamente proprio*, o anche *puramente dinamico*. Invece, in generale, un sistema si definisce come **proprio**. Un caso particolare si sistema *strettamente proprio* è quello del **sistema statico**, o **non dinamico**. Per descrivere questi sistemi non si utilizza alcuna variabile di stato ed esiste una relazione diretta tra ingresso e uscita.

$$y(t) = g(u(t), t) \quad (4)$$

- **Sistemi lineari e non lineari** Quando le funzioni f e g sono lineari in $x(t)$ e $u(t)$, cioè, quando sia $\dot{x}(t)$ e $y(t)$ sono combinazioni lineari delle varie componenti del vettore $x(t)$ e del vettore $u(t)$, il sistema si dice **lineare** e possiamo scrivere le equazioni nella forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \quad (5)$$

con $A(t) \in M^{n \times n}$, $B(t) \in M^{n \times m}$, $C(t) \in M^{p \times n}$ e $D(t) \in M^{p \times m}$. In questo caso diciamo che il sistema è descritto da 4 mappe:

- La matrice $A(t)$ viene detta **dinamica del sistema**.
- La matrice $B(t)$ viene detta **vettore dell'ingresso**.

- La matrice $C(t)$ viene detta **vettore dell'uscita**.
- La matrice $D(t)$ non ha un nome, rappresenta il legame algebrico tra ingresso e uscita.
Non è detto che essa sia presente (quindi nel caso di sistema **strettamente proprio**).

Se invece le equazioni non assumono la forma sopra-riportata, il sistema si dice **non lineare**.

La prima considerazione che possiamo fare è che non esistono, nella realtà, sistemi in cui esiste una relazione algebrica diretta tra **ingresso e uscita** (**sistemi statici** o *non dinamici*), ma accetteremo comunque che possano esistere. Un sistema **non dinamico** è un'estrema approssimazione dei sistemi di controllo **propri o strettamente propri**, la scelta di utilizzarla o meno dipende dalla complessità a cui vogliamo arrivare.

Il problema del termostato

Si assume di avere un termostato programmato per mantenere a una certa temperatura l'ambiente in cui si trova. Possiamo analizzare il sistema di controllo da due livelli di complessità diversi

- Supponiamo di essere il proprietario di casa e di non avere una formazione nell'ambito dei controlli automatici. Dal nostro punto di vista il termostato è un sistema di controllo è un sistema **non dinamico**, in quanto, girando la manovella, cambia la temperatura; quindi, dal nostro punto di vista esiste una relazione, tra temperatura impostata e temperatura ambientale, diretta

$$y(t) : \text{Temperatura impostata} \longrightarrow \text{Temperatura ambientale} \quad (6)$$

- Supponiamo di essere l'ingegnere che deve progettare la casa. Dal nostro punto di vista il termostato è un sistema di controllo **proprio o strettamente proprio**, costituito dalle due equazioni fondamentali

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t) \end{aligned} \quad (7)$$

Quindi, il livello di complessità a cui guardiamo il sistema è completamente diverso dalle due prospettive e dipende solo dalla necessità che abbiamo noi di vedere il sistema in uno o nell'altro modo.

Da ora in poi ci riferiremo ai nostri modelli come **Sistemi lineari tempo invarianti** e ne definiamo alcune proprietà

- **Omogeneità:** se si scala l'ingresso $u(t)$, allora l'uscita verrà scalata dello stesso fattore.

$$au(t) \implies ay(t) \quad (8)$$

ad esempio, raddoppiando l'ingresso, raddoppia anche l'uscita.

- **Sovrapposizione degli effetti:** se un modello ha risposta $y_1(t)$ e $y_2(t)$ e ha due ingressi $u_1(t)$ e $u_2(t)$ allora la **risposta del sistema alla combinazione lineare degli ingressi**

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \quad (9)$$

è data dalla **combinazione lineare delle risposte individuali**

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \quad (10)$$

- **Tempo invarianza:** Il sistema si comporta allo stesso modo indipendentemente dal quando avviene l'azione

$$u(t) \rightarrow y(t) = u(t + \tau) \rightarrow y(t + \tau) \quad (11)$$

Quindi, la stessa azione, fatta in instanti di tempo diversi, produce lo stesso risultato.

Il motivo per cui studiamo questa categoria di sistemi è, per citare **Richard Feynman**: *Linear system are important because we can solve them.*

3 Derivazione delle variabili di stato

Fino ad ora non ci siamo soffermati ad analizzare l'ingresso del sistema: abbiamo sempre supposto infatti che non venisse derivato ($p = 0$). Cerchiamo però di capire cosa succede quando il nostro sistema ha l'ingresso **derivato** un numero di volte al più come l'uscita. Supponiamo di prendere l'equazione di stato di un sistema generale

$$F(y(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), \dots, u^{(p)}(t), t) = 0 \quad (12)$$

Ipotizzando di andare a isolare il membro con l'ordine di derivazione maggiore tra tutti, otteniamo:

$$y^{(n)}(t) = \hat{F}(y(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t), \dots, u^{(p)}(t), t) \quad (13)$$

Il nostro obiettivo è quello di riuscire a andare dalla forma appena enunciata alla seguente forma:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\dots) \\ \vdots \\ f_n(\dots) \end{bmatrix} = Ax(t) + Bu(t) \quad (14)$$

Esistono tre diverse casistiche che risulta utile analizzare:

- **Caso $p = 0$:** questa situazione è quella che abbiamo supposto per ogni nostro sistema fino ad ora: l'ingresso **non viene mai derivato**. Supponendo che il nostro sistema sia descritto da una grandezza y derivata fino all'ordine n -esimo, possiamo scegliere come variabile di stato:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Andando a calcolare la derivata dello stato otteniamo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ \hat{F}(y, \dots, y^{(n-1)}, u, t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Essendo il sistema lineare, $y^{(n)}$ sarà esprimibile come:

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i y^{(i)}(t) + u(t) \quad (17)$$

Inoltre, supponendo $x_1 = y$, la trasformazione d'uscita sarà:

$$y = x_1 \quad (18)$$

Possiamo quindi riscrivere il sistema in forma matriciale:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu(t) \\ y = Cx \end{cases} \quad (19)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

- **Caso $0 < p < n$:** in questo caso, l'ingresso viene derivato fino all'ordine p . Possiamo sempre scrivere il sistema come:

$$F(y(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), \dots, u^{(p)}(t), t) = 0 \quad (20)$$

Per linearità, possiamo riscrivere la derivata massima di y come:

$$y^{(n)}(t) = \hat{F}(y(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t), \dots, u^{(p)}(t), t) \quad (21)$$

Scriviamo ora un'equazione ausiliaria priva di derivate di u :

$$z^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i z^{(i)}(t) + u(t) \quad (22)$$

Dato che il sistema è lineare, la sua uscita sarà una combinazione lineare delle derivate di $z(t)$:

$$y(t) = \sum_{j=0}^p \beta_j z^{(j)}(t) \quad (23)$$

Possiamo quindi scegliere come stato:

$$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \vdots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (24)$$

La rappresentazione matriciale del sistema è la stessa del caso precedente, ma la trasformazione d'uscita diventa:

$$y = [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_p \ 0 \ \dots \ 0] x \quad (25)$$

- **Caso $p = n$:** è il caso limite in cui la derivata massima dell'ingresso ha lo stesso ordine di quella dell'uscita. In questa situazione l'uscita è combinazione lineare di tutte le derivate di $z(t)$ fino all'ordine n , inclusa quindi anche $u(t)$. Come nei casi precedenti scriviamo:

$$z^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i z^{(i)}(t) + u(t) \quad (26)$$

e l'uscita sarà:

$$y(t) = \sum_{j=0}^n \beta_j z^{(j)}(t) \quad (27)$$

Definiamo lo stato come:

$$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \vdots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Il sistema si scrive in forma matriciale come:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu(t) \\ y = Cx + Du(t) \end{cases} \quad (29)$$

dove:

$$C = [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_{n-1}], \quad D = \beta_n$$

4 Modellazione di un sistema lineare partendo da un sistema non lineare

Inoltre, nella realtà fisica, i sistemi sono tutti non lineari e quindi rappresentabili nella forma

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad (30)$$

Noi, sfruttando delle approssimazioni, siamo in grado di creare, partendo da questi sistemi *non lineari*, dei sistemi lineari equivalenti. Prima di passare alla trattazione occorre però introdurre alcune definizioni

Definition 4.1. (Movimento del sistema) Si intende come **movimento del sistema** una qualunque **soluzione** del sistema di equazioni differenziali relativa a un ingresso $\tilde{u}(t)$.

Quindi, una qualunque soluzione $x(t)$ ottenuta a partire da un ingresso $u(t)$ viene detta "soluzione indotta dall'ingresso $u(t)$ ". La seconda definizione, molto più importante, è quella di **equilibrio del sistema**

Definition 4.2. (Equilibrio del sistema) Un equilibrio del sistema è un qualunque stato x_{eq} tale per cui, sotto un ingresso prefissato $u(t)$, annulla tutte le derivate dello stato.

$$f(x_{\text{eq}}, u(t), t) = 0 \quad (31)$$

Questa equazione può avere una sola soluzione, può averne tante o non averne nessuna. In ogni caso, a ciascuna di esse corrisponde un'uscita di equilibrio \bar{y} calcolabile mediante la relazione

$$\bar{y} = g(x_{\text{eq}}(t), \tilde{u}(t)) \quad (32)$$

Uno stato di equilibrio è dunque uno stato in cui il sistema, sollecitato da un ingresso costante, permane indefinitamente se vi si trova in un qualunque istante di tempo. In altri termini, se al tempo \bar{t} lo stato del sistema è $x(t) = x_{\text{eq}}(t)$, allora risulta $x(t) = x_{\text{eq}}(t)$ anche per ogni $t > \bar{t}$. Gli equilibri prendono anche il nome di **punti operativi del sistema**. Il motivo deriva dal fatto che alcuni sistemi fisici operano sui punti operativi del sistema, ad esempio, una centrale elettrica che eroga una potenza costante nel tempo. Quindi, è importante andare a descrivere la dinamica del sistema attorno a uno dei suoi punti di equilibrio, che sarà descritta da un sistema di equazioni lineari approssimato.

Per poter parlare di linearizzazione di un sistema dobbiamo prima garantire che il sistema sia **regolare**

Definition 4.3. (Sistema regolare) Si definisce come sistema regolare un sistema in cui le funzioni che descrivono il sistema sono, insieme alle loro derivate prime rispetto alle variabili di stato e all'ingresso, continue.

Quindi, implicitamente, deve esistere il differenziale primo delle funzioni prese in esame. Sotto tutte queste ipotesi possiamo scrivere le equazioni del sistema nella forma

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)) \quad (33)$$

Adesso vogliamo trovare un modello che funzioni attorno a un particolare stato di equilibrio x_{eq} relativo a un ingresso $\tilde{u}(t)$. Lo facciamo operando un cambio di variabili del tipo

$$x(t) = x_{\text{eq}}(t) + \xi \quad (34)$$

Indicando con ξ il vettore di **equilibrio**, quindi le variazioni dello stato attorno al punto operativo sul quale sta operando il sistema. Facciamo lo stesso procedimento anche per il nostro ingresso

$$u(t) = \tilde{u}(t) + \lambda \quad (35)$$

Possiamo riscrivere ora le equazioni

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= f_1(x_{1,\text{eq}} + \xi_1, \dots, x_{n,\text{eq}} + \xi_n, \tilde{u}(t) + \lambda) = \\ f_1(x_{1,\text{eq}}, \dots, x_{n,\text{eq}}, \tilde{u}) &+ \frac{\partial f_1}{x_1} \Big|_{\text{eq}} \cdot \xi_1 + \frac{\partial f_1}{x_2} \Big|_{\text{eq}} \cdot \xi_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{x_n} \Big|_{\text{eq}} \cdot \xi_n + \frac{\partial f_1}{\tilde{u}} \Big|_{\text{eq}} \cdot \lambda + o(\xi, \lambda) = \\ f_1(x_{1,\text{eq}}, \dots, x_{n,\text{eq}}, \tilde{u}) &+ \frac{\partial f_1}{x_1} \Big|_{\text{eq}} \cdot \xi_1 + \frac{\partial f_1}{x_2} \Big|_{\text{eq}} \cdot \xi_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{x_n} \Big|_{\text{eq}} \cdot \xi_n + \frac{\partial f_1}{\tilde{u}} \Big|_{\text{eq}} \cdot \lambda\end{aligned}\quad (36)$$

Inoltre, il termine $f_1(x_{1,\text{eq}}, \dots, x_{n,\text{eq}}, \tilde{u})$ coincide con \dot{x}_1 calcolato nell'equilibrio, che equivale a 0. Possiamo quindi eliminarlo dall'equazione

$$\dot{\xi}_1 = \frac{\partial f_1}{x_1} \Big|_{\text{eq}} \cdot \xi_1 + \frac{\partial f_1}{x_2} \Big|_{\text{eq}} \cdot \xi_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{x_n} \Big|_{\text{eq}} \cdot \xi_n + \frac{\partial f_1}{\tilde{u}} \cdot \lambda \quad (37)$$

nel caso di un sistema tempo-invariante la derivata calcolata nell'equilibrio ha valore costante. Quindi, sfruttando le trasformazioni per ogni funzione arriviamo ad ottenere un sistema del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \frac{\partial f_1}{x_1} \Big|_{\text{eq}} \cdot \xi_1 + \frac{\partial f_1}{x_2} \Big|_{\text{eq}} \cdot \xi_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{x_n} \Big|_{\text{eq}} \cdot \xi_n + \frac{\partial f_1}{\tilde{u}} \cdot \lambda \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n = \frac{\partial f_n}{x_1} \Big|_{\text{eq}} \cdot \xi_1 + \frac{\partial f_n}{x_2} \Big|_{\text{eq}} \cdot \xi_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{x_n} \Big|_{\text{eq}} \cdot \xi_n + \frac{\partial f_1}{\tilde{u}} \cdot \lambda \end{array} \right. \quad (38)$$

Che possiamo scrivere in maniera compatta come

$$\dot{\xi} = J_{\text{eq}} \cdot \xi + J_{u,\text{eq}} \lambda \quad (39)$$

dove J_{eq} è la matrice **jacobiano** delle funzioni rispetto allo stato x_{eq} e $J_{u,\text{eq}}$ è lo **jacobiano** delle funzioni rispetto all'ingresso calcolato nello stato x_{eq} . Questa rappresentazione prende il nome di **sistema linearizzato**. Quindi, la dinamica di un sistema attorno a un suo punto operativa può essere sempre descritta, anche se in modo approssimato, da un sistema del tipo

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (40)$$

Dove con \dot{x} intendo il vettore delle variazioni di stato, con A intendo la matrice **jacobiana** delle funzioni rispetto al punto di equilibrio, con B la matrice jacobiana delle funzioni rispetto allo stato di ingresso e con $u(t)$ la variazione dello stato di ingresso rispetto a quello di equilibrio $\tilde{u}(t)$. L'ultima definizione che introduciamo è quella di **stazionarietà di un sistema**

Definition 4.4. (Sistema stazionario) Un sistema è **stazionario** se e solo se la sua dinamica a un istante t non dipende direttamente dal tempo t , ma dipende solo dalla differenza $t_0 - t$ (dove t_0 è l'istante iniziale)

Chapter 3

Sistemi lineari e stazionari tempo continuo

In questo capitolo andremo a studiare come studiare la dinamica di un sistema attorno a un suo punto operativo mediante l'analisi di un sistema di equazioni lineari stazionarie della forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{1}$$

Con le matrici A, B, C e D reali con coefficienti costanti e di dimensioni opportune. Si assuma, inoltre, che l'istante iniziale sia l'istante t_0 .

1 Risposta del sistema

Si può facilmente verificare che, sfruttando la sostituzione, il movimento dello stato $x(t)$ corrispondente a un ingresso $u(t)$, definito per $t \geq t_0$, e allo stato iniziale $x(t_0) = x_{t_0}$ è dato dalla seguente espressione

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_{t_0} + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq 0\tag{2}$$

Il corrispondente movimento dell'uscita è dato da

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_{t_0} + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t), \quad t \geq 0\tag{3}$$

Richiamiamo un attimo la definizione di esponenziale con matrice all'esponente

Definition 1.1. Per ogni matrice $A \in M^{n \times n}$, e per ogni scalare $t \geq 0$ la matrice esponenziale $\Psi(t)$ è definita dalla relazione

$$\Psi(t) = e^{At} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} (At)^i = I_n + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots\tag{4}$$

e viene detta **matrice di transizione dello stato**.

Nei movimenti che abbiamo appena scritto possiamo individuare due contributi, il primo dipendente solo dallo **stato iniziale** e l'altro dipendente dall'**ingresso**, dalla cui somma riusciamo ad ottenere la risposta del sistema. Il contributo dato solo dallo stato iniziale prende il nome di **movimento libero**, ed è definito, rispettivamente, come

$$\begin{aligned}x_L(t) &= e^{A(t-t_0)}x_{t_0} \\ y_L(t) &= Ce^{A(t-t_0)}x_{t_0}\end{aligned}\tag{5}$$

Mentre il secondo ingresso, la cui dipendenza è rispetto all'ingresso, prende il nome di **risposta forzata**

$$\begin{aligned} x_F(t) &= \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \\ y_F(t) &= \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t) \end{aligned} \quad (6)$$

2 Rappresentazioni equivalenti

All'inizio avevamo accennato che la scelta delle variabili di stato non è univoca. Infatti, per descrivere un oggetto fisico mediante un sistema dinamico è possibile scegliere diverse rappresentazioni, e quindi diverse variabili di stato. Si consideri una matrice cosantante $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolare e, mediante un cambio di variabili, si definisca un nuovo vettore di stato $\hat{x}(t)$ come

$$\hat{x}(t) = Tx(t) \iff x(t) = T^{-1}\hat{x}(t) \quad (7)$$

Se si sostituisse nelle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (8)$$

si otterrebbe un sistema nella forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) &= \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t) \end{aligned} \quad (9)$$

con $\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$, $\hat{C} = CT^{-1}$, $\hat{D} = D$. Abbiamo ottenuto un sistema dinamico *equivalente* a quello descritto attraverso le equazioni iniziali.

3 Autovalori e modi

Per poter studiare la risposta **libera** del sistema quando $n > 1$ è necessario analizzare la struttura della nostra matrice e^{At} . Dividiamo la trattazione in due casi:

- Matrice della dinamica **diagonalizzabile**
- Matrice della dinamica **non diagonalizzabile**

Introduciamo il significato di matrice diagonale

Definition 3.1. (Matrice diagonale) Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, si dice che A è in **forma diagonale** se e solo se

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in N, \quad i \neq j \quad (10)$$

Una proprietà che utilizzeremo senza dimostrare è la seguente

Theorem 3.1. Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con autovalori $\lambda = \sigma + j\omega$ e $\bar{\lambda} = \sigma - j\omega$ in forma diagonale

$$A = \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix} \quad (11)$$

possiamo dire che questa matrice è simile alla matrice in forma reale

$$S = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \quad (12)$$

3.1 Matrice della dinamica diagonalizzabile

Se gli **autovalori** della nostra matrice sono **distinti**. È quindi possibile scegliere, opportunamente, una matrice T tale per cui la matrice della dinamica A_D , definita come:

$$A_D = T A T^{-1} \quad (13)$$

sia in **forma diagonale**. Una particolarità della matrice A_D è quella di essere una matrice di autovalori della dinamica del sistema

$$A_D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (14)$$

Grazie a queste considerazioni è possibile andare a riscrivere in modo diverso la risposta libera del sistema, semplificando enormemente il complesso e laborioso sviluppo in serie di e^{At} . Detto \hat{x}_L la risposta libera del sistema relativa alla matrice A_D , vale che:

$$\hat{x}_L = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A_d t)^k}{k!} \hat{x}_0 = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} \hat{x}_0, \dots, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} \hat{x}_0 \right) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \hat{x}_0 \quad (15)$$

Dato che $\hat{x}_L(t) = Tx_L(t)$ e $\hat{x}_0 = Tx_0$:

$$\begin{aligned} \hat{x}_L(t) &= Tx_L(t) \\ x_L(t) &= T^{-1} \hat{x}_L(t) \\ x_L(t) &= T^{-1} \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \hat{x}_0 \\ x_L(t) &= T^{-1} \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) Tx_0 \end{aligned} \quad (16)$$

Dato che $y = Cx$, la trasformazione d'uscita vale

$$y_L(t) = CT^{-1} \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \hat{x}_0 T \quad (17)$$

I coefficienti $e^{\lambda_i t}$ si definiscono **modi propri** del sistema e hanno la proprietà di poter essere sia **complessi**, sia **reali**. È possibile rappresentare graficamente l'andamento dei modi reali del sistema in funzione della loro posizione sul piano immaginario

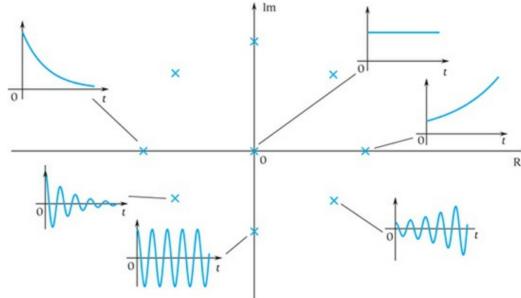


Figure 3.1: Andamento dei modi propri sul piano immaginario

Quindi, quando abbiamo un autovalore complesso è certo che insieme troveremo anche il suo complesso coniugato. Inoltre, quando abbiamo un autovalore complesso abbiamo delle oscillazioni derivate dalla presenza di seni e coseni

$$e^{\lambda_i t} = e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = e^{\sigma t} e^{i\omega t} = e^{\sigma t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \quad (18)$$

Sempre come possiamo vedere dall'immagine, quando la parte reale sarà minore di 0, l'ampiezza delle oscillazioni tenderà a diminuire con il tempo. Se la parte reale sarà maggiore di 0, l'ampiezza delle oscillazioni tenderà ad aumentare. Un'osservazione che possiamo fare è che per calcolare la matrice di trasformazione T_D^{-1} è ottenibile calcolando gli autovettori della matrice.

3.2 Matrice della dinamica del sistema non diagonalizzabile

Questa situazione si verifica quando si hanno **autovalori multipli**, quindi autovalori la cui molteplicità sia maggiore di 1; in altre parole, quando non è possibile distinguere tra di loro alcuni autovalori. Non è detto che siamo in grado di trovare una matrice T tale per cui $A_D = TA$ risulta in forma **diagonale**, l'unica certezza che abbiamo è quella di poter portare la nostra matrice in forma di Jordan

Definition 3.2. (Matrice di Jordan) Si definisce come **matrice di Jordan** una matrice *quasi diagonale* tale per cui

- Tutti gli elementi sulla diagonale sono **non nulli**.
- Esiste al più un elemento sulla sovradiagonale che sia pari a 1.

Quindi, sappiamo che scegliendo opportunamente una matrice T_J , la matrice $\hat{A}_J = T_J A$ è una matrice in **forma di Jordan**. Anche in questo caso gli elementi sulla diagonale coincidono con gli autovalori della dinamica del sistema che, come nel caso precedente possono essere **immaginari o reali**

$$\begin{aligned} t^{\eta-1} e^{\lambda_i t}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \\ t^{\eta-1} e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t + \varphi), \quad \lambda_i \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (19)$$

Il coefficiente η che compare nella formula è un intero compreso tra 0 e la **massima dimensione dei miniblocchi di Jordan**.

Definition 3.3. (Miniblocco di Jordan) Dato un elemento $\lambda \in \mathbb{R}$, chiamiamo *blocco di Jordan di ordine r con autovalore λ* la sottomatrice di ordine r avente tutti gli elementi sulla diagonale principali uguali a λ , tutti gli elementi nella sovradiagonale uguali a 1 e tutti gli altri elementi nulli.

Prendiamo ad esempio la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Seguendo la definizione notiamo che esistono due **miniblocchi** di Jordan, uno del *terzo ordine* (**quello con tre elementi sulla diagonale e due sulla sovradiagonale**) e uno del *primo ordine* (**quello con un solo uno sulla diagonale**).

Anche in questo caso possiamo analizzare l'andamento dei modi del sistema in funzione della loro posizione sul piano complesso.

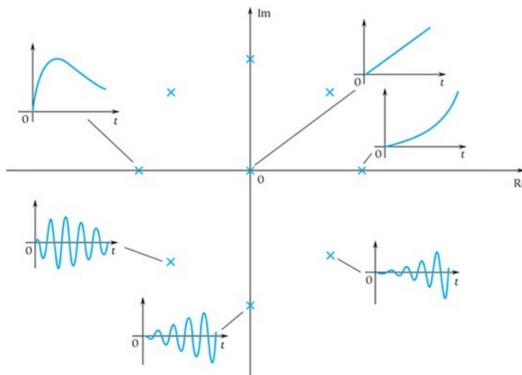


Figure 3.2: Enter Caption

Ad ogni autovalore della matrice dobbiamo anche associare due grandezze: **molteplicità algebrica** e **molteplicità geometrica**. La prima identifica quante volte compare l'autovalore, la seconda in quanti miniblocchi compare l'autovalore.

Il problema che ci dobbiamo porre è il modo in cui arriviamo a calcolare la matrice $e^{Jt} = e^{TAT^{-1}t}$ quando la nostra matrice J non è diagonalizzabile (quindi quando non è possibile trovare una matrice T tale per cui $J = TAT^{-1}$ è in forma diagonale). Una volta ottenuta una matrice in forma di Jordan, se consideriamo i miniblocchi come dei coefficienti J_i possiamo concludere che: una matrice espressa in forma di Jordan è anche, per definizione, una matrice **diagonale a blocchi** e possiamo quindi rappresentarla come

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & J_n \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (21)$$

Dove J_i rappresenta un **miniblocco di Jordan**. Riprendendo quanto detto nel paragrafo sulle matrici diagonali, sappiamo che $e^{A_D t} = e^{TAT^{-1}} = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) T^{-1}$, allora se la matrice e^{Jt} è **diagonale a blocchi**, possiamo dire che $e^{Jt} = T \operatorname{diag}(e^{J_1 t}, \dots, e^{J_n t}) T^{-1}$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{J_3 t} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{J_{n-1} t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{J_n t} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Il problema è che ogni singolo elemento della diagonale è un esponenziale elevato a una matrice, in quanto è un esponenziale elevato ad un **miniblocco** di Jordan. Nello specifico, ogni elemento $e^{J_1 t}$ sarà uguale a

$$e^{J_1 t} = e^{\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 \end{bmatrix} t} \quad (23)$$

Supponiamo adesso di fare una piccola equivalenza algebrica $J_i = I\lambda + J_0$, dalla quale si ricava $e^{J_i t} = e^{(I\lambda + J_0)t} = e^{\lambda I} e^{J_0 t}$ (definiamo questa parte come **parte Nilpotente**) e facciamo la scomposizione in serie dell'esponenziale di $e^{J_0 t}$

$$e^{J_0 t} = I + J_0 t + \frac{J_0 t^2}{2!} + \frac{J_0 t^3}{3!} + \dots \quad (24)$$

Ogni elevazione a potenza della matrice J_0 genera una matrice in cui la diagonale di tutti 1 viene spostata nella diagonale immediatamente successiva, quindi:

$$\begin{aligned} J_{0i} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{0i}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \\ J_{0i}^{q-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{0i}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \wedge k \geq q \end{aligned}$$

Siamo riusciti a portarci da un'espansione in serie infinita (quella dell'esponenziale) a una serie di somme finite dato che qualsiasi J_0^k , $k > q$ sarebbe equivalente a sommare 0. Ricaviamo perciò che la matrice **nilponente** equivale a

$$e^{J_0 t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponendo $q \in \mathbb{R}$ come la dimensione del blocco di **Jordan**, le funzioni che si combinano linearmente, e quindi i nostri modi del sistema, sono:

$$\begin{aligned} t^k \frac{e^{\lambda t}}{k!}, \quad 0 \leq k \leq q-1, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ t^k \frac{e^{\sigma t}}{k!} \cos(\omega t), \quad t^k \frac{e^{\sigma t}}{k!} \sin(\omega t), \quad 0 \leq k \leq q-1, \quad \lambda \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{25}$$

All'inizio abbiamo introdotto anche una proprietà di similitudine tra matrici e matrici in forma diagonalizzabile. Possiamo estendere questa proprietà anche per matrici di ordine superiore

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - j\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \sigma & \omega & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sigma & \omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + j\omega & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma + j\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se A è una **matrice a valori reali**, gli **autovalori** e **autovettori** sono immaginari, allora è possibile applicare un **cambio di coordinate** che trasforma la matrice diagonale complessa in una matrice reale diagonale a blocchi.

$$M = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \tag{26}$$

Nel caso in cui non si abbia la matrice che ci permette di portare in forma diagonale di **Jordan** la matrice A , è possibile calcolare la molteplicità geometrica dei singoli autovalori applicando la seguente formula

$$mg = n - \text{rk}(\ker(A - \lambda I)) = \dim(\ker(A - \lambda I)), \quad \lambda = \lambda_i \tag{27}$$

il secondo membro della differenza è detto **spazio nullo della matrice** e può essere agilmente calcolato calcolando il rango della matrice $A - \lambda I$ quando $\lambda = \lambda_i$. La sottrazione ci dà il numero di autovettori linearmente indipendenti della matrice.

4 Risposta all'impulso

Si supponga che il sistema preso in esame abbia solo un ingresso e sia sollecitato da un impulso unitario $\delta(t)$ (Delta di **Dirac**) all'istante $t_0 = 0$: si assuma cioè $m = 1$ e $u(t) = \delta(t)$. Denotando con g_x e g_y i particolari movimenti forzati dello stato e dell'uscita sono

$$\begin{aligned} g_x(t) &= e^{At} B \\ g_y(t) &= Ce^{At} B + D\delta(t) \end{aligned} \quad (28)$$

Questi movimenti sono detti *risposti all'impulso dello stato e dell'uscita*. Possiamo anche estendere la definizione di risposta per $m > 1$ in modo estremamente semplice.

Indipendentemente dal valore di m , le risposte all'impulso rivestono un'importanza enorme, in quanto la loro sola conoscenza è sufficiente per calcolare i movimenti forzati dello stato e dell'uscita generati da un ingresso qualunque applicato in $t_0 = 0$. Possiamo ottenere questi movimenti come **prodotto di convoluzione** delle risposte g_x e g_y con l'ingresso $u(t)$; visto che g_x e g_y sono nulle per tempi negativi si ottiene

$$\begin{aligned} g_x(t) \star u(t) &= \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = x_f \\ g_y(t) \star u(t) &= C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t) = y_f \end{aligned} \quad (29)$$

5 Stabilità di un sistema

Si consideri, per un sistema dinamico invariante nel tempo, l'ingresso $u(t) = \tilde{u}$, $t \geq 0$ e un corrispondente stato di equilibrio x_{eq} , detto *normale*. Si consideri anche un qualsiasi movimento dello stato $x(t)$, detto *perturbato*.

Definition 5.1. Uno stato di equilibrio x_{eq} si dice **stabile** se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che per tutti gli stati x_0 che soddisfano la relazione

$$\|x_0 - x_{\text{eq}}\| \leq \delta \quad (30)$$

risulti

$$\|x(t) - x_{\text{eq}}\| \leq \varepsilon \quad (31)$$

per tutti i $t \geq 0$.

Quindi, questa condizione ci garantisce che lo stato perturbato, a patto di prendere uno stato iniziale nominalmente vicino a quello di equilibrio, rimanga sempre in un intorno abbastanza piccolo dello stato di equilibrio del sistema. Uno stato per cui non vale questa condizione viene detto **instabile**.

L'instabilità di uno stato di equilibrio implica che esistano perturbazioni abbastanza piccole da rendere lo stato iniziale lontano dallo stato di equilibrio. Per rafforzare questa definizione possiamo anche richiedere che il movimento perturbato tenda all'equilibrio nominale per $t \rightarrow +\infty$

Definition 5.2. (Stabilità asintotica) Uno stato di equilibrio si dice **asintoticamente stabile** se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che per tutti gli stati x_0 che soddisfano la relazione

$$\|x_0 - x_{\text{eq}}\| \leq \delta \quad (32)$$

risulti

$$\|x(t) - x_{\text{eq}}\| \leq \varepsilon \quad (33)$$

per tutti i $t \geq 0$, e inoltre

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_0\| = 0 \quad (34)$$

Se lo stato $x(t)$, indipendentemente da quanto prendo ampia la perturbazione, tende sempre a avvicinarsi a quello di equilibrio nominale x_{eq} , diciamo che x_{eq} è **globalmente stabile**.

Inoltre, in corrispondenza di ogni stato di ingresso, il sistema potrebbe essere dotato di più stati di equilibrio, con differenti proprietà di stabilità. Per quelli asintoticamente stabili esisterà poi un insieme di stati iniziali, che si dicono *regione di attrazione* dello stato di equilibrio, che generano movimenti perturbati convergenti asintoticamente allo stato di equilibrio stesso.

L'origine è sempre un punto di equilibrio per ingresso nullo. Se l'origine è stabile, allora è stabile qualsiasi altro punto di equilibrio e, quindi, si parla di **stabilità del sistema**. Allora, se la stabilità dipende dall'origine, vuol dire che dipende solo dalla risposta libera e di conseguenza dipende dai **modi propri** del sistema:

- Se i **modi propri** hanno parte reale negativa allora il sistema è **asintoticamente stabile**.
- Se i **modi propri** hanno parte reale negativa o nulla e, tutti i modi propri tali per cui $\text{Re}(\lambda) = 0$ hanno molteplicità 1, il sistema è **stabile**, ma non **asintoticamente stabile**.

Le considerazioni sulla stabilità dell'equilibrio possono essere generalizzate sostituendo al concetto di equilibrio nominale di riferimento un generico movimento nominale. Per un sistema dinamico invariante nel tempo, si considerino un ingresso $\tilde{u}(t)$, $t \geq 0$, uno stato iniziale \bar{x}_0 e il movimento dello stato $\bar{x}(t)$, detto *nominale*. Si consideri anche un secondo movimento $x(t)$, detto *perturbato*, generato a partire da $\tilde{u}(t)$, ma da uno stato iniziale diverso x_0

Definition 5.3. (Stabilità del movimento) Un movimento $\bar{x}(t)$ si dice *stabile* se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che per tutti gli stati x_0 che soddisfano la relazione

$$\|x_0 - \bar{x}_0\| \leq \delta \quad (35)$$

risulti che

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| \leq \varepsilon \quad (36)$$

per ogni $t \geq 0$

La regola può essere interpretata allo stesso modo della regola della stabilità dell'equilibrio. Possiamo, anche in questo caso, rafforzare l'ipotesi aggiungendo la condizione della **stabilità asintotica**

Definition 5.4. (Stabilità del movimento) Un movimento $\bar{x}(t)$ si dice *stabile* se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che per tutti gli stati x_0 che soddisfano la relazione

$$\|x_0 - \bar{x}_0\| \leq \delta \quad (37)$$

risulti che

$$\|\bar{x}(t) - x(t)\| \leq \varepsilon \quad (38)$$

per ogni $t \geq 0$, e inoltre

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \bar{x}(t)\| = 0 \quad (39)$$

6 Raggiungibilità

La raggiungibilità è un'altra proprietà fondamentale dei sistemi lineari stazionari e riguarda la possibilità di, preso un qualsiasi set di condizioni iniziali, riuscire a portare il sistema da uno stato iniziale x_0 a uno stato \hat{x} in un **tempo finito**

Definition 6.1. (Raggiungibilità di uno stato) Uno stato \hat{x} del sistema si dice **raggiungibile** se e solo se, esistono un istante di tempo finito \bar{t} e un ingresso $\bar{u}(t)$, definito tra 0 e \bar{t} , tali che, detto $\bar{x}(t)$, $0 \leq t \leq \bar{t}$, il movimento forzato generato da $\bar{u}(t)$, risulti $\bar{x}(\bar{t}) = \hat{x}$

In altri termini, quindi, un particolare vettore \hat{x} costituisce uno stato raggiungibile se e solo se è possibile, con un opportuna scelta dell'ingresso, trasferirvi lo stato del sistema in un **tempo finito**.

Lemma 6.1. Se ogni stato del sistema è **raggiungibile**, il sistema è **completamente raggiungibile**.

Si osservi che la trasformazione d'uscita non gioca alcun ruolo nel concetto di raggiungibilità di un sistema. Per accettare se un sistema gode della completa raggiungibilità si può applicare il seguente teorema

Theorem 6.2. Un sistema si dice **completamente raggiungibile** se e solo se il rango della matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{M}_r = [BABA^2 \dots BA^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times (m \cdot n)} \quad (40)$$

è n . In altri termini, se il numero di righe linearmente indipendenti della matrice è equivalente ad n .

Se abbiamo $m = 1$, la matrice sarà una 2×2 e la condizione sufficiente affinché il sistema sia completamente raggiungibile è che

$$\det(M_r) \neq 0 \quad (41)$$

Nel caso in cui un sistema non sia completamente raggiungibile possiamo provare a isolare la sua parte raggiungibile: cerco una trasformazione T_R tale per cui la nuova rappresentazione \hat{x} è diviso in **stati raggiungibili** \hat{x}_R e **stati non raggiungibili** \hat{x}_N . Applicando la trasformazione al nostro sistema otteniamo

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u(t), \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_R \\ \hat{x}_N \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \hat{A}_A & \hat{A}_{AB} \\ 0 & \hat{A}_B \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \hat{B}_A \\ 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Siamo quindi riusciti ad ottenere un sistema che separa gli stati del sistema in funzione della loro raggiungibilità. Andando a sviluppare le equazioni di stato relative alle trasformazioni otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_R &= \hat{A}_A\hat{x}_R + \hat{A}_{AB}\hat{x}_N + \hat{B}_A u(t) \\ \dot{\hat{x}}_N &= \hat{A}_{AB}\hat{x}_N \end{aligned} \quad (43)$$

Supponendo $n_r = \text{Rk}(M_r)$, ricordiamo che $A \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$ e $B \in \mathbb{R}^{n_r \times 1}$.

Un sistema in cui tutti gli stati non controllabili sono **asintoticamente stabili** si dice **stabilizzabile**: anche se non posso controllarla, ho la certezza che una perturbazione del sistema non causi delle variazioni di stato eccessive.

Si noti che, in generale, la definizione di raggiungibilità che abbiamo dato all'inizio include due definizioni al suo interno: **controllabilità** e **raggiungibilità**. Essi sono però due concetti distinti:

- La **raggiungibilità** identifica la possibilità di uno stato di essere **raggiunto** pilotando in qualche modo l'ingresso,
- La **controllabilità** identifica la possibilità di **trovare uno stato di ingresso** che ci permette di raggiungere lo stato raggiungibile.

Fortunatamente, nel caso specifico dei sistemi continui, i due concetti diventano equivalenti.

L'ispezione diretta per la raggiungibilità può essere fatta facilmente nel caso di un sistema **SISO** con dinamica del sistema diagonale

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (44)$$

visto che $B \in \mathbb{R}^n$ è un vettore, la matrice di raggiungibilità può essere scritta come

$$M_r = \begin{bmatrix} b_n & \lambda_n b_n & \lambda^2 b_n & \dots & \lambda^{n-1} b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & \lambda_n b_n & \lambda^2 b_n & \dots & \lambda^{n-1} b_n \end{bmatrix} \quad (45)$$

Quindi M_r avrà rango n se e solo se B non ha elementi nulli e gli autovalori λ_i sono **distinti**. Possiamo generalizzare il tutto sfruttando un risultato, detto

Theorem 6.3. (Teorema Popov-Belevitch-Hautus) Il sistema dinamico LTI $\dot{x} = Ax + Bu$ è completamente raggiungibile se e solo se $\text{Rk}(\lambda I - A|B) = n$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

DIMOSTRAZIONE* Supponiamo che esista un λ_i tale per cui $\text{rk}(\lambda I - A|B) < n$, allora dal teorema del rango nullo sappiamo che $\exists q \neq 0 : q^T[\lambda I - A|B] = 0$, ovvero $q \in \ker(\lambda I - A|B)$. Se questo è vero posso scrivere

$$q^T(\lambda_i I' A) = 0, \quad q^T B = 0 \quad (46)$$

possiamo riscrivere, post-moltiplicando per B, la prima parte come

$$q^T AB = \lambda_i q^T B = 0 \quad (47)$$

Se invece di post-moltiplicare per B, postmoltiplico per AB, ottengo:

$$q^T A^2 B = \lambda_i q^T AB = 0 \quad (48)$$

Iterando questo procedimento all'ordine **n**-esimo mi accorgo che

$$q^T [A \quad |AB| \quad \dots \quad |A^{n-1}B|] = 0 \quad (49)$$

concludendo che il sistema non è raggiungibile.

Calcolarsi questa matrice risulta estremamente più semplice rispetto a calcolarsi la matrice di **osservabilità**, infatti la dimensione è pari a circa $n \times (m + n)$. Inoltre, se λ non è autovalore di A, allora la condizione è sempre verificata

$$\det(\lambda I - A) \neq 0 \implies \text{Rk}(\lambda I - A) = n \quad (50)$$

Se λ è autovalore della matrice A la condizione deve essere verificata, poiché potrebbe valere che

$$\text{rk}(\lambda I - A) < n \quad (51)$$

Possiamo pensarla in modo intuitivo nel seguente modo: se prendo uno degli autovalori di A, una riga sicuramente si cancellerà, ad esempio $\lambda = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \lambda I - A = \begin{bmatrix} (1) - 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1) + 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1) - 3 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Come si osserva, la prima riga diventa di tutti zero, quindi c'è almeno una riga che non è linearmente indipendente dalle altre e, di conseguenza, il rango sarà $\text{Rk}(\lambda I - A) < n$. A questo punto, per cercare di rendere lo stato controllabile, devo cercare di trovare una matrice B che renda nuovamente linearmente indipendenti le righe, infatti

$$\text{Rk}(\lambda I - A) < n \not\Rightarrow \text{Rk}(\lambda I - A|B) \quad (53)$$

Possiamo collegare questo risultato alla definizione stessa di controllabilità: **se controlliamo opportunamente l'uscita riusciamo a rendere lo stato controllabile** e, se ogni stato è controllabile, lo è anche l'intero sistema.

Per un sistema SISO, la molteplicità geometrica di tutti gli autovalori deve essere pari ad 1 e B deve avere tanti elementi diversi da 0 quanti sono gli autovalori distinti di A. In un sistema con μ miniblocchi di Jordan associati ad un unico autovalore λ può essere raggiungibile solo se ha almeno μ ingressi.

7 Osservabilità

L'ultima proprietà dei sistemi lineari stazionari che studiamo è quella di **osservabilità**. In generale, possiamo dire che un sistema è osservabile se è possibile determinare lo stato interno $x(t)$ conoscendo l'uscita $y(t)$ e l'ingresso $u(t)$.

Definition 7.1. Uno stato $\hat{x} \neq 0$ del sistema si dice *non osservabile* se, qualunque sia $\hat{t} > 0$ finito, detto $\hat{y}_f(t)$, $t \geq 0$, il movimento libero dell'uscita generato da $\hat{x}(t)$, risulta $\hat{y}_f(t) = 0$, $0 \leq t \leq \hat{t}$.

In altri termini, un particolare vettore \hat{x} costituisce uno stato non *osservabile* se l'esame di un tratto di qualunque durata del movimento libero non consente di distinguerlo dal vettore $x = 0$.

Lemma 7.1. Un sistema in cui non esistano stati *non osservabili* si dice **completamente osservabile**

Quindi, la proprietà di osservabilità garantisce che, conoscendo sia ingresso che risposta del circuito sia possibile ricondurci allo stato interno del sistema. Esiste, analogamente alla raggiungibilità, un teorema per verificare se il sistema è **completamente osservabile**

Theorem 7.2. Un sistema si dice **completamente osservabile** se e solo se il rango della matrice di osservabilità

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ AC \\ A^2C \\ \vdots \\ A^{n-1}C \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (m \cdot n)} \quad (54)$$

è n . In altri termini, se il numero di righe linearmente indipendenti della matrice è equivalente ad n .

Se abbiamo $m = 1$, la matrice sarà una 2×2 e la condizione sufficiente affinché il sistema sia completamente raggiungibile è che

$$\det(M_o) \neq 0 \quad (55)$$

L'osservabilità di un sistema è una proprietà che si lega, in modo intrinseco, alle proprietà della risposta libera e della trasformazione d'uscita del sistema. Inoltre, anche in questo caso, siamo in grado di definire una forma canonica di osservabilità, che ci permette di avere una netta separazione tra le parti osservabili e non osservabili del sistema. Supponendo di trovare un'opportuna matrice di trasformazione T_O , possiamo scrivere

$$\hat{x}(t) = T_O x(t) \quad (56)$$

Caratterizzato da tre matrici \hat{C} , \hat{A} , \hat{B} tali per cui

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ba} & \hat{A}_b \end{bmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0} \\ \hat{C} &= [\hat{C}_a \ 0], \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n_0} \end{aligned} \quad (57)$$

Le sottomatrici A_{ba} e A_b rappresentano la parte **non osservabile del sistema**, mentre, la sottomatrice A_a rappresenta la **parte osservabile** di quest'ultimo. In generale, per costruire la matrice di trasformazione T_O è sufficiente selezionare $n - n_0$ vettori linearmente indipendenti tali che

$$M_o \xi_0 = 0, \quad \text{span}(\{\xi_0\}) = \mathcal{X}_{\text{no}} \quad (58)$$

compongono una base del $\ker(M_o)$, ovvero ogni vettore rappresenta uno stato non osservabile (quindi quei vettori che moltiplicati per la matrice danno 0). Ovviamente, se i vettori sono linearmente indipendenti, varrà che $\det(T_O) = 0$. Inoltre, vale anche un'altra relazione

$$\text{aut}(A) = \text{aut}(\hat{A}) = \text{aut}(A_o) + \text{aut}(A_b) \quad (59)$$

Possiamo introdurre, anche per l'osservabilità, una variante del **Teorema Popov-Belevitch-Hautus**

Theorem 7.3. (Teorema Popov-Belevitch-Hautus per l'osservabilità) Il sistema dinamico LTI $\dot{x} = Ax + Bu$ è completamente osservabile se e solo se

$$\text{Rk} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (60)$$

inoltre, tutte le colonne $c_{1,i}$ devono essere **linearmente indipendenti**.

Il motivo è presto detto, se il rango può essere anche inteso come il **numero di colonne linearmente indipendenti**, dobbiamo fare in modo che, affinché il rango sia massimo, le colonne siano tutte tra di loro indipendenti. Se scegliendo λ uguale a un particolare autovalore di A , abbiamo sicuramente una riga (quella in cui non c'è 1 sulla sovradiagonale) che andrà a tutti 0 e di conseguenza dovremmo trovare un modo per renderla nuovamente **linearmente indipendente** con la matrice C .

8 Forma canonica di Kalman

Esiste una forma di rappresentazione per i sistemi dinamici, detta **forma canonica**, che ci permette di rappresentare un sistema dinamico diviso nelle sue componenti **controllabili** e **osservabili**. In particolare, sfruttiamo una particolare trasformazione, detta **trasformazione di Kalman**, che permette di scomporre le variabili di stato nei 4 sottospazi strutturali mediante una trasformazione di similitudine sfruttando una matrice T_K

$$\hat{x}(t) = T_K x(t) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) = \hat{C}\hat{x}(t) \end{cases} \quad (61)$$

Possiamo quindi, applicando questa trasformazione, scrivere il vettore delle variabili di stato come

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ \hat{x}_c \\ \hat{x}_d \end{bmatrix} \quad (62)$$

Di questo vettore possiamo distinguere quattro parti distinte:

- Una parte a raggiungibile non osservabile.
- Una parte b raggiungibile e osservabile.
- Una parte c non raggiungibile e non osservabile.
- Una parte d non raggiungibile e osservabile.

Conseguentemente, possiamo scrivere le matrici del sistema come

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \hat{A}_b & 0 & \hat{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \hat{A}_c & \hat{A}_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_d \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [0 \quad \hat{C}_b \quad 0 \quad \hat{C}_d] \quad (63)$$

Un sistema che sia completamente osservabile e completamente raggiungibile è detto **in forma minima**: non è possibile utilizzare un numero di variabili di stato del suo ordine per descrivere la relazione **ingresso-uscita**. Come conseguenza abbiamo che, le parti **non raggiungibili o non osservabili**, non rappresentano la relazione **ingresso-uscita**.

In altre parole, le parti non raggiungibili o non osservabili sono sovrabbondanti per lo studio dell'uscita del sistema e del suo movimento forzato, ma sono fondamentali per lo studio del movimento libero o nell'analisi di stabilità.

Part II

Funzione di Trasferimento

Chapter 4

Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è un sistema con il quale è possibile trasformare una funzione di variabile reale in una funzione di variabile complessa.

Assumiamo di avere un problema, come ad esempio un sistema di equazioni differenziali, non facilmente risolvibile. La trasformata di Laplace ci consente di trasformare un problema **differenziale**, come quello appena descritto, in un problema **algebrico**.

Sia $f(t)$ una funzione di variabile reale, applichiamo ad essa la trasformata di Laplace, indicata con il seguente simbolo ζ , ottenendo così una funzione $F(s)$ in **variabile complessa**; Indichiamo questo formalismo come

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \quad (1)$$

Ipotizziamo inoltre $0 \leq t < +\infty$. Introduciamo s , definita come **pulsazione complessa**, definita come

$$s = \beta \pm i\gamma \quad (2)$$

Data una funzione $f(t)$ tale per cui $t \in \mathbb{R}$ e $t < 0$, si definisce **trasformata di Laplace** della funzione $f(t)$ e si indica con $F(s) = \zeta[f(t)]$ la funzione

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3)$$

dove vale che

$$s = \beta \pm i\gamma \quad \text{Re}(s) > a_f \quad (4)$$

dove a_f indica l'**ascissa di Convergenza**, la quale identifica la variabile che rende sommabile, ovvero integrabile, la funzione di Laplace.

Definition 0.1 (Ascissa di Convergenza). Si definisce come **Ascissa di Convergenza** $\sigma[f]$ (σ_f) il **limite inferiore** dell'insieme dei possibili $s \in \mathbb{C}$ per cui l'**integrale converge** (rappresentato da un **semipiano destro** di \mathbb{C})

$$\sigma[f] = \inf\{\text{Re}(s), s \in \mathbb{C} \text{ tali per cui l'integrale converge}\} \quad (5)$$

Il processo di trasformazione di una funzione è un processo che può risultare, talvolta, estremamente lungo e complesso. Tuttavia, possiamo definire alcune classi di funzione per cui possiamo trovare facilmente la trasformata: ci "appoggiamo" su queste trasformare elementari per poter riuscire a calcolare facilmente anche quelle più complesse.

Funzione di Heaviside Si assume di voler calcolare la **trasformata di Laplace** della **funzione di heaviside** (detta anche *funzione a gradino*), definita come

$$\mathcal{H}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (6)$$

Possiamo indicare questa funzione anche come $\mathcal{H}(t) = 1(t)$. Andiamo a calcolarne la trasformata applicando la definizione stessa, calcolando quindi l'integrale

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-st} dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} = \frac{1}{s} \quad (7)$$

Funzione $\delta(t)$ di Dirac La funzione $\delta(t)$ di Dirac è una funzione che trova un ampiissimo utilizzo nel mondo dell'elettronica, delle comunicazioni e dell'automatica; questa funzione genera un segnale **idealmente** infinito, ma di brevissima durata. Più formalmente possiamo definirla nel seguente modo

Definition 0.2. Si definisce come **funzione a impulso unitario** $\delta(t - \tau)$, applicata all'istante $t = \tau$, come passaggio al limite di una funzione rettangolare avente area unitaria

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & t \neq \tau \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) dt = 1 & t = \tau \end{cases} \quad (8)$$

Il calcolo della trasformata di questa funzione può essere fatto sfruttando due proprietà della trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned} \text{Prodotto di convoluzione} \quad (f \star g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \\ \text{Proprietà di campionamento} \quad f(t) \cdot \delta(t - t_0) &= f(t_0) \cdot \delta(t - t_0) \end{aligned} \quad (9)$$

Tutti gli integrali che coinvolgono le funzioni **delta** devono essere valutati nel seguente modo

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\delta(t - a)dt = \begin{cases} 1 & t_0 < a < t_1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (10)$$

Inoltre, per trovare la trasformata di Laplace di $\delta(t)$ abbiamo bisogno della definizione esplicita di trasformata del delta di dirac

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{+\infty} \delta(t)e^{st} dt = e^0 = 1 \quad (11)$$

Nel caso in cui $a > 0$ la definizione della trasformata di laplace è leggermente diversa

$$\mathcal{L}\{\delta(t - a)\} = \int_0^{+\infty} \delta(t - a)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \delta(t - a)e^{-st_0} dt = e^{-sa} \int_0^{+\infty} \delta(t - a)dt = e^{-sa} \quad (12)$$

Funzione t^n Si assuma di voler calcolare la trasformata di Laplace della funzione t^n . Applichiamo la definizione di **trasformata di Laplace** sulla funzione

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-st} t^n dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} t^n + \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt \quad (13)$$

analizzando l'ultimo fattore ci si accorge di un fatto, l'integrale è la definizione di **trasformata di Laplace** per la funzione t^{n-1}

$$\frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}] \quad (14)$$

se andassimo a svolgere nuovamente l'integrale otteremmo

$$\frac{n(n-1)}{s^2} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-2} dt = \frac{n(n-1)}{s^2} \mathcal{L}[t^{n-2}] \quad (15)$$

se si proseguisse all'infinito ci si troverebbe al punto in cui n equivale a 0 e t^n equivale a 1 (quindi uguale alla **funzione di heaviside**); Dal punto precedente sappiamo però che la trasformata di Laplace per la **funzione di heaviside** equivale a

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s} \quad (16)$$

Unendo tutto quello che fino ad ora abbiamo trovato, otteniamo che la **trasformata di Laplace** per la funzione t^n equivale a

$$\begin{aligned} & \frac{n(n-1)(n-2)\dots(1)}{s^n} \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(1)}{s^n} \mathcal{L}[1](s) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(1)}{s^n} \frac{1}{s} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}} \end{aligned} \quad (17)$$

Quindi, la **trasformata di Laplace** per la funzione t^n equivale a

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (18)$$

Funzione esponenziale Si assuma di voler calcolare la **trasformata di Laplace** della **funzione esponenziale**, definita come

$$g(t) = e^{\alpha t} \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (19)$$

per cui vale la seguente ipotesi $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(\alpha)$. Andiamo a applicare la definizione di **trasformata di Laplace**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{\alpha t}] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-st} e^{\alpha t} dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{t(\alpha-s)} dt = \\ &= \frac{1}{(\alpha-s)} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t (\alpha-s) e^{t(\alpha-s)} dt = \frac{1}{(\alpha-s)} e^{(\alpha-s)t} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{\alpha-s} = \frac{1}{s-\alpha} \end{aligned} \quad (20)$$

In definitiva, la trasformata di Laplace per la funzione $e^{\alpha t}$ equivale a

$$\mathcal{L}[e^x](s) = \frac{1}{s-\alpha} \quad (21)$$

Funzione trigonometrica $\sin(\omega t)$ Si assuma di voler calcolare la **Trasformata di Laplace** della funzione

$$f(t) = \sin(\omega t) \quad \omega \in \mathbb{C} \quad (22)$$

per cui vale l'ipotesi $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(\alpha)$. Inoltre, possiamo definire la funzione $\sin(\omega t)$ con $\omega \in \mathbb{C}$ sfruttando la definizione data nel paragrafo sui numeri immaginari

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \quad (23)$$

Andiamo a applicare la definizione di **trasformata di Laplace** sulla funzione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} dt = \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2i} \left[\mathcal{L}[e^{i\omega t}](s) - \mathcal{L}[e^{-i\omega t}](s) \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right] = \frac{1}{2i} \frac{2i\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (24)$$

In definitiva, possiamo dire che la **trasformata di Laplace** per la funzione $\sin(\omega t)$ con $\omega \in \mathbb{C}$ equivale a

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (25)$$

Funzione trigonometrica $\cos \omega t$ Si assuma di voler calcolare la **Trasformata di Laplace** della funzione

$$f(t) = \cos \omega t \quad \omega \in \mathbb{C} \quad (26)$$

per cui vale l'ipotesi $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(\alpha)$. Inoltre, possiamo definire la funzione $\sin(\omega t)$ con $\omega \in \mathbb{C}$ sfruttando la definizione data nel paragrafo sui numeri immaginari

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \quad (27)$$

Andiamo a applicare la definizione di **trasformata di Laplace** sulla funzione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos \omega t](s) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} [\mathcal{L}[e^{i\omega t}](s) + \mathcal{L}[e^{-i\omega t}](s)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2s}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{s}{\omega^2 + s^2} \end{aligned} \quad (28)$$

in definitiva, possiamo dire che la **trasformata di Laplace** per la funzione $\cos(\omega t)$ con $\omega \in \mathbb{C}$ equivale a

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (29)$$

Data una funzione complessa, di variabile complessa, calcolare, se esiste, la funzione del tempo $f(t)$ di cui la $F(s)$ è la trasformata di laplace è possibile calcolando il seguente integrale:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(s)e^{st} dt \quad (30)$$

Il calcolo di questo integrale è estremamente complesso e tendenzialmente non si utilizza, si preferisce ricorrere ad altri metodi che ci permettono di ottenere l'antitrasformata **gratis**.

1 Proprietà della trasformata di Laplace

Esistono alcune proprietà legate alla **trasformata di Laplace**:

Proprietà di Linearità Secondo la proprietà di linearità, che unisce due proprietà diverse, vale che

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)](s) = \alpha \mathcal{L}[f(t)](s) + \beta \mathcal{L}[g(t)](s) \quad (31)$$

La dimostrazione è abbastanza semplice, è infatti sufficiente conoscere le proprietà elementari a riguardo degli integrali.

Prima proprietà di traslazione La prima proprietà di traslazione ci dice che

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)](s) = F(s - \alpha), \operatorname{Re}(s) > a_f + \operatorname{Re}(\alpha) \quad (32)$$

per dimostrarla applichiamo sempre la definizione di trasformata

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} f(t) dt = F(s - \alpha) \quad (33)$$

Ad esempio, si assuma di voler calcolare la seguente trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right](s) \quad (34)$$

ci accorgiamo facilmente di poter applicare la prima proprietà di traslazione sulla trasformata, supponendo infatti che

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right](s) = \frac{1}{s^n} \quad (35)$$

risulta che

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right](s) = F(s - \alpha) = \frac{1}{(s - \alpha)^n} \quad (36)$$

Seconda proprietà di traslazione La seconda proprietà di traslazione ci dice che

$$\mathcal{L}[f(t - \alpha)](s) = e^{-\alpha s} F(s), \quad \operatorname{Re}(s) > a_f, \alpha \geq 0 \quad (37)$$

per dimostrarla utilizziamo sempre la definizione di **Trasformata di Lagrange**

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} H(t - \alpha) f(t - \alpha) dt = \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-st} H(t - \alpha) f(t - \alpha) dt \quad (38)$$

si procede facendo un cambiamento di variabile $\tau = t - \alpha$

$$\int_0^{+\infty} e^{-s(\tau + \alpha)} H(\tau) f(\tau) d\tau = e^{-\alpha s} F(s) \quad (39)$$

Proprietà del cambio di scala Questa proprietà garantisce che

$$\mathcal{L}[f(\alpha t)](s) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right), \quad \operatorname{Re}(s) > \alpha \cdot a_f, \alpha > 0 \quad (40)$$

per dimostrarlo applichiamo la definizione di **Trasformata di Laplace**

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(\alpha t) dt \quad (41)$$

si applica un cambiamento di variabile del tipo

$$\alpha t = \tau \iff t = \frac{\tau}{\alpha} \iff d\tau \frac{1}{\alpha} = dt \quad (42)$$

dal quale si ottiene

$$\int_0^{+\infty} e^{-s\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)} f(\tau) \frac{1}{\alpha} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad (43)$$

Proprietà del prodotto per la potenza Questa proprietà ci garantisce che

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} (F(s)), \quad \operatorname{Re}(s) > a_f \quad (44)$$

per dimostrarlo applichiamo la definizione di **Trasformata di Laplace**

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n f(t) dt &= \int_0^{+\infty} (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} (e^{-s\alpha}) f(t) dt = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \int_0^{+\infty} e^{-s\alpha} f(t) dt \\ &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \end{aligned} \quad (45)$$

Proprietà di traslazione nel tempo Sia $F(s)$ la trasformata della funzione $f(t)$, nulla per $t < 0$. Allora vale la relazione

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s) \quad (46)$$

Trasformata della derivata e dell'integrale di una funzione Queste due proprietà ci garantiscono che

1. $\mathcal{L}[f^n(t)](s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
2. $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x) dx\right](s) = \frac{1}{s} F(s)$

Teorema del valore iniziale Il teorema del valore iniziale ci dice che, data una funzione $f(t)$, che espandiamo il sviluppo in serie di Taylor

$$f(t) = f(t_0) + \frac{df}{dt}(t)\Big|_{x=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dt^2}(t)\Big|_{x=t_0} (t - t_0)^2 \quad (48)$$

Se valutassimo l'espressione in $t_0 = 0$, allora l'espressione si semplificherebbe enormemente

$$f(t) = f(0) + \dots \quad (49)$$

Se prendo i singoli pezzetti (quelli che non fanno parte della derivata) e li trasformo con laplace ottengo

$$F(s) = f_0 \frac{1}{s} + f_1 \frac{1}{s^2} + \dots + f_n \frac{1}{s^{n+1}} \quad (50)$$

Quindi, se calcolo il limite per $t \rightarrow 0$ della mia funzione $f(t)$, è equivalente al limite per $s \rightarrow \infty$ di $s \cdot F(s)$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) \quad (51)$$

A livello pratico, questo teorema trova scarso impiego. La sua utilità sta però nel riuscire a definire un legame diretto.

Più precisamente, l'enunciato del teorema del valore iniziale ci dice che

Theorem 1.1. (Teorema del valore iniziale) Sia $f(t)$ una funzione trasformabile, che può essere anche discontinua in $t = 0$. Indichiamo come $f(0^+)$ il limite destro della funzione $f(t)$ per $t \rightarrow 0$. Il valore di $f(0^+)$ può essere dedotto attraverso la trasformata $F(s)$ con la relazione

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (52)$$

Teorema del valore finale Dualmente al teorema del valore iniziale, abbiamo il teorema del valore finale

Theorem 1.2. Data una $f(t)$ e una $F(s)$ tale per cui $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, allora vale che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) \quad (53)$$

Ovviamente, abbiamo come condizione che

$$-\infty < \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) < +\infty \quad (54)$$

Prendiamo com esempio la seguente trasformata

$$\int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0) \quad (55)$$

se facciamo il limite per $s \rightarrow 0$ abbiamo che

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) - f(0) \quad (56)$$

Tuttavia $f(0)$ si semplifica da entrambe le parti: abbiamo quindi dimostrato la nostra relazione.

2 Decomposizione in fratti semplici

In genere, tutti i sistemi che studieremo potranno essere espressi come rapporti di polinomi nel dominio di Laplace. Occorre, di conseguenza, introdurre un sistema per trasformare questi rapporti di polinomi nel dominio complesso, a funzioni nel dominio del tempo. Lo faremo con la **decomposizione in fratti semplici**.

Per semplicità di trattazione supporremo che la risposta sia **propria**, quindi che $n > m$. Per anti-trasformare la risposta appena ottenuta dobbiamo cercare di scomporla elementi che siano riconducibili a trasformate elementari. Nel caso in cui la risposta abbia tutte radici semplici, quindi radici con molteplicità uno, possiamo scomporre in **frazioni parziali**

$$R(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - p_k} \quad (57)$$

dove i coefficienti A_k sono chiamati **residui**. Per calcolare il **residuo k-esimo** possiamo sfruttare il teorema noto come **teorema dei residui**

$$A_k = \lim_{s \rightarrow p_k} (s - p_k)I(s) \iff F(s) = \frac{(s - p_k)A_1}{s - p_1} + \cdots + \underbrace{\frac{(s - p_k)A_1}{s - p_k}}_{\cancel{s - p_k}} + \cdots + \frac{(s - p_k)A_n}{s - p_n} \quad (58)$$

Quindi, valutando l'espressione per $s = p_k$ abbiamo che tutti i termini, tranne uno, si annullano

$$(s - p_k)F(s)|_{s=p_k} = 0 + \cdots + A_k + 0 + \cdots + 0 \quad (59)$$

Una volta ottenuti i coefficienti A_k possiamo procedere anti-trasformando uno a uno i membri sfruttando la relazione

$$\frac{1}{s - a} \iff e^{at} \quad (60)$$

Prendiamo come esempio la funzione

$$F(s) = \frac{3s + 2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \quad (61)$$

I poli della nostra funzione sono $-1, -2$ e -3 . Scomponendo in fattori il denominatore abbiamo

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{3s + 2}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{s + 2} + \frac{A_3}{s + 3} \\ A_1 &= \left. \frac{3s + 2}{(s + 1)(s + 3)} \right|_{s=-1} = -0.5 \\ A_2 &= \left. \frac{3s + 2}{(s + 2)(s + 3)} \right|_{s=-2} = 4 \\ A_3 &= \left. \frac{3s + 2}{(s + 1)(s + 2)} \right|_{s=-3} = -3.5 \end{aligned} \quad (62)$$

Nel caso in cui sia presente un polo p_i con molteplicità l maggiore di uno, lo sviluppo visto in precedenza, al posto del termine con polo p_i avrà

$$\frac{A_{i1}}{s - p_i} + \frac{A_{i2}}{(s - p_i)^2} + \cdots + \frac{A_{il}}{(s - p_i)^l} \quad (63)$$

Per calcolare i fattori A_{ij} relativi al polo multiplo possiamo applicare lo sviluppo in fratti semplici; moltiplichiamo $F(s)$ per $(s - p_i)^l$

$$\begin{aligned} (s - p_i)^l F(s) &= \cdots + \frac{(s - p_i)^l A_{i1}}{s - p_i} + \frac{(s - p_i)^l A_{i2}}{(s - p_i)^2} + \cdots + \frac{(s - p_i)^l A_{il}}{(s - p_i)^l} + \cdots \\ &= \cdots + (s - p_i)^{l-1} A_{i1} + (s - p_i)^{l-2} A_{i2} + \cdots + (s - p_i) A_{i,l-1} + A_{il} + \cdots \end{aligned} \quad (64)$$

Si noti che, quando poniamo $s = p_i$ tutti gli altri termini dell'espressione si annullano. Inoltre, per calcolare $A_{i,l-1}$ dobbiamo calcolare la derivata rispetto ad s della

$$\frac{d}{ds} [(s - p_i)^l F(s)] = \cdots + (l - 1)(s - p_i)^{l-2} A_{i1} + (l - 2)(s - p_i)^{l-3} A_{i2} + \cdots + A_{i,l-1} + \cdots \quad (65)$$

Quindi, andando a sostituire $s = p_i$ rimane soltanto il fattore $A_{i,l-1}$. Di conseguenza

$$A_{i,l-1} = \left. \frac{d}{ds} [(s - p_i)^l F(s)] \right|_{s=p_i} \quad (66)$$

Questa casistica può essere generalizzata nella seguente forma

$$A_{ij} = \frac{1}{(l-j)!} \left(\frac{d^{l-1}}{ds^{l-1}} \right) [(s-p_i)^l F(s)] \Big|_{s=p_i} \quad (67)$$

Ottenuti i coefficienti possiamo antitrasformare gli elementi appena ottenuti sfruttando la seguente relazione

$$\frac{A_{ij}}{(s-p_i)^j} \longleftrightarrow \frac{A_{ij}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{p_i t} \quad (68)$$

Prendiamo come esempio la funzione

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2} \quad (69)$$

Il denominatore ha un polo multiplo, con molteplicità 2, in $s = -1$; possiamo, quindi, riscrivere la funzione come

$$F(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} \quad (70)$$

I coefficienti si ricavano come

$$\begin{aligned} A_1 &= \cancel{(s+1)^2} \frac{(s+3)}{\cancel{(s+1)^2}} \Big|_{s=-1} \\ A_2 &= \frac{d}{ds}[s+3] \Big|_{s=-1} \end{aligned} \quad (71)$$

Quindi, la funzione equivale a

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} \quad (72)$$

Infine, l'ultima casistica che andiamo ad analizzare, in riferimento alle funzioni proprie, è quella delle funzioni che hanno poli **complessi**. In presenza di questi poli la funzione presenta termini complessi, che però possiamo semplificare ottenendo una funzione reale. Visto che i poli di $D(s)$ sono reali, le soluzioni immaginarie si presentano sempre in coppie

$$p_k = \sigma_k + j\omega_k \quad p_k^* = \sigma_k - j\omega_k \quad (73)$$

Applicando il teorema dei residui

$$A_{k1} = (s-p_k)F(s)|_{s=p_k} \quad A_{k2} = (s-p_k^*)F(s)|_{s=p_k^*} \quad (74)$$

Anche i due residui sono coniugati, di conseguenza la scomposizione in fratti conterrà gli elementi

$$\frac{A_k}{s - (\sigma_k + j\omega_k)} + \frac{A_k^*}{s - (\sigma_k - j\omega_k)} \quad (75)$$

Esprimendo in forma polare di eulero i due residui abbiamo

$$\frac{|A_k|e^{j\theta_k}}{s - (\sigma_k + j\omega_k)} + \frac{|A_k|e^{-j\theta_k}}{s - (\sigma_k - j\omega_k)} \quad (76)$$

La corrispondente anti-trasformata è

$$\begin{aligned} |A_k|e^{j\theta_k}e^{\sigma_k t}e^{j\omega_k t} + |A_k|e^{-j\theta_k}e^{\sigma_k t}e^{-j\omega_k t} &= \\ |A_k|e^{\sigma_k t}(e^{j(\omega_k t + \theta_k)} + e^{-j(\omega_k t + \theta_k)}) &= \\ 2|A_k|e^{\sigma_k t} \cos(\omega_k t + \theta_k) \end{aligned} \quad (77)$$

Di conseguenza i due termini dello sviluppo relativi a una coppia di poli complessi coniugati si anti-trasformano con la seguente relazione

$$\frac{A_k}{s - (\sigma_k + j\omega_k)} + \frac{A_k^*}{s - (\sigma_k - j\omega_k)} \longleftrightarrow 2|A_k|e^{\sigma_k t} \cos(\omega_k t + \theta_k) \quad (78)$$

Possiamo sviluppare anche in un modo diverso la relazione sui poli complessi coniugati, infatti, quando le radici sono **complesse coniugate**, abbiamo che $s_1 = \sigma_k + j\omega_k$ e, che, $s_2 = \sigma_k - j\omega_k$; analogamente ai poli complessi coniugati, anche i coefficienti sono complessi coniugati e possono essere scritti come $A_k = N + jM$ e $A_k^* = N - jM$. Quindi se, in generale, $r(s) = A_k e^{s_1 t} + A_k^* e^{s_2 t}$, posso utilizzare le formule di eulero e riscriverla come

$$Me^{\sigma_k t}(e^{j\omega_k} + e^{-j\omega_k}) + Ne^{\sigma_k t}(e^{j\omega_k} - e^{-j\omega_k}) = 2Me^{\sigma_k t} \cos(\omega_k t) + 2Ne^{\sigma_k t} \sin(\omega_k t) = 2e^{\sigma_k t}(M \cos(\omega_k t) + N \sin(\omega_k t)) \quad (79)$$

Prendiamo come esempio la funzione

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2 + 2s + 2} \quad (80)$$

Il denominatore ha due radici complesse coniugate

$$p_1 = -1 + j \quad p_2 = -1 - j \longleftrightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = -1 \quad \omega_1 = 1, \quad \omega_2 = -1 \quad (81)$$

La funzione può quindi essere scritta come

$$F(s) = \frac{s-1}{(s+1-j)(s+1+j)} \quad (82)$$

Calcoliamo ora i residui associati ai poli

$$A_1 = \left. \frac{s-1}{s+1+j} \right|_{s=-1+j} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}; 63.4 \right) \quad (83)$$

Il calcolo dell'altro residuo è superfluo, infatti avendo già calcolato uno dei due residui della coppia abbiamo tutto quello che ci serve per definire la funzione

$$r(s) = \sqrt{5}e^{-t} \cos(t + 63.4) \quad (84)$$

Chapter 5

Funzione di trasferimento

Passiamo adesso ad enunciare una nuova rappresentazione dei sistemi dinamici a tempo continuo **lineari e stazionari**. Essa è chiamata **funzione di trasferimento** e mette in relazione variabili di *ingresso* e di *uscita* del sistema. Sappiamo che di un sistema possiamo ottenere una descrizione **Ingresso-Stato-uscita** del tipo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{1}$$

Attraverso la trasformata di Laplace possiamo però descrivere il sistema in un'ulteriore forma, una forma che all'inizio avevamo trattato pochissimo: la descrizione **Ingresso-Uscita**. In generale, un sistema descritto nella forma **Ingresso-Uscita** ha la struttura di un'equazione differenziale

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y = u\tag{2}$$

Supponiamo ora che le condizioni iniziali siano nulle, riconducendoci a un problema di Cauchy del tipo

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y = u \\ y^{(n-1)}(0) = 0 \\ \vdots \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Andando a trasformare l'equazione differenziale nel dominio di Laplace otteniamo la risposta forzata del sistema relativa all'ingresso $u(t)$

$$\begin{aligned}s^nY(s) + a_{n-1}s^{n-1}Y(s) + \dots + a_0Y(s) &= U(s) \\ Y(s)(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0) &= U(s)\end{aligned}$$

Possiamo ora enunciare la definizione di **funzione di trasferimento**.

Definition 0.1. Si definisce come funzione di trasferimento $G(s)$ il rapporto tra la risposta forzata dell'uscita $Y_f(s)$ e l'ingresso $U(s)$

$$G(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)}\tag{3}$$

Il motivo di specificare $Y_f(s)$ è dato dall'importanza che al numeratore vi sia la **risposta forzata dell'uscita**. Ricordiamo infatti che, fissato un ingresso $u(t)$, l'uscita del sistema non è univocamente fissata, ma dipende altresì dalle condizioni iniziali del sistema. Inoltre, chiameremo come **zeri** di $G(s)$ le radici del numeratore, cioè i valori z_1, z_2, \dots, z_m (con m pari al grado del numeratore) i valori di s per cui $Y_f(s) = 0$ e per cui, di conseguenza, $G(s) = 0$. Inoltre, chiameremo come **poli** i valori p_1, p_2, \dots, p_n (con n pari al grado del denominatore) di $G(s)$ tali per cui $u(s) = 0$.

Esiste anche un'altra definizione di **funzione di trasferimento**

Definition 0.2. Si definisce come funzione di trasferimento $G(s)$ la \mathcal{L} -trasformata della risposta **impulsiva**.

Ricordiamo che la risposta impulsiva è la risposta del circuito quando all'ingresso pongo un impulso, a partire da stato iniziale **nullo**. Esiste una correlazione tra le due definizioni di **funzione di trasferimento**, ricordiamo infatti che la risposta forzata del sistema $y_f(t)$ per un qualunque ingresso è data dal **prodotto di convoluzione** tra la risposta **impulsiva** $g(t)$ e l'ingresso $u(t)$

$$y_f(t) = g(t) \cdot u(t) \quad (4)$$

Se andassimo a \mathcal{L} -trasformare l'equazione otterremo una equazione del tipo

$$Y_f(s) = G(s)Y(s) \quad (5)$$

dalla quale ricaviamo che

$$G(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)} \quad (6)$$

che equivale alla prima definizione che avevamo dato di **funzione di trasferimento**. Analizziamo ora un caso particolare, supponiamo di avere un sistema dinamico scritto nella forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (7)$$

Sappiamo, per definizione, che la funzione di trasferimento è un rapporto di polinomi, in quanto ammettiamo che i nostri sistemi siano descrivibili con un numero finito di variabili di stato. Inoltre, ad una funzione di trasferimento possiamo anche associare una matrice, detta **matrice della funzione di trasferimento**. Per calcolarla dobbiamo \mathcal{L} -trasformare le due equazioni che descrivono il sistema

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned} \quad (8)$$

Si procede poi analizzando il primo termine, si raccoglie a fattor comune i membri con stesso moltiplicatore e si divide in modo da trovare $X(s)$

$$X(s)[sI - A] = BU(s) \implies X(s) = [sI - A]^{-1}BU(s) \quad (9)$$

Andando a sostituire nella seconda equazione, quella della risposta, abbiamo che

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) \quad (10)$$

Quindi, per un sistema lineare stazionario, descritto da un numero finito di variabili di stato, la matrice relativa alla funzione di trasferimento è così descritta

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (11)$$

Dobbiamo, adesso, calcolare quanto vale $C(sI - A)^{-1}B$. Richiamando un po di algebra lineare sappiamo che, presa una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vale che

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} \quad (12)$$

che applicato alla nostra matrice equivale a dire che

$$C(sI - A)^{-1}B = CB \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \quad (13)$$

il denominatore è il **polinomio caratteristico della matrice** (cambiato di segno), definito come $\det(A - \lambda I)$ e $\text{adj}(sI - A)$ è la **matrice degli aggiunti**, la quale moltiplicata per i vettori CB restituisce come risultato un polinomio. Quindi sia numeratore che denominatore sono dei polinomi

$$\frac{n(s)}{p(s)} + d \quad (14)$$

Se vale che $d = 0$ e quindi il sistema è **strettamente proprio**, abbiamo che la funzione di trasferimento è un rapporto tra polinomi in cui il grado del numeratore è **minore** del grado del denominatore. Se invece il sistema è **proprio**, abbiamo che il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore. Nel corso vedremo solo sistemi **strettamente propri**, quindi descrivibili come

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= C^T x \\ G(s) &= C^T(sI - A)^{-1}B\end{aligned}\tag{15}$$

Uno degli elementi centrali dei sistemi di controllo è il concetto di reatoazione: il controllore prende le informazioni sull'uscita e le paragona con le informazioni sull'ingresso. Da questa comparazione viene generato un segnale di errore, che viene sfruttato dal controllore per determinare il *da farsi*.

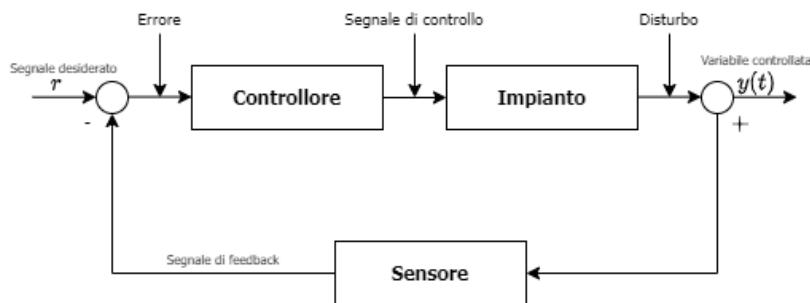


Figure 5.1: Schema a blocchi di un sistema in *feedback*

1 Stabilità

La stabilità di un sistema è una **proprietà** che **descrive come il sistema si comporta in presenza di piccole perturbazioni, o variazioni, del proprio stato**. Intuitivamente possiamo dire che un sistema è stabile quando il suo comportamento rimane quello desiderato anche in presenza di perturbazioni del proprio stato. Nel primo paragrafo avevamo introdotto un concetto di stabilità, detto stabilità di equilibrio

Definition 1.1. (Stabilità di equilibrio) Supponendo di avere uno stato iniziale x_0 , uno stato $x(t)$ (che è l'evoluzione nel tempo di x_0) e uno stato di equilibrio \hat{x} . Diciamo che \hat{x} è **asintoticamente stabile** se e solo se, per ogni $\delta > 0$, esiste un $\varepsilon > 0$ tale per cui, se

$$\|x_0 - \hat{x}\| < \delta \tag{16}$$

risulta che

$$\|x(t) - \hat{x}\| < \varepsilon \tag{17}$$

per ogni $t \geq 0$, e inoltre

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \hat{x}\| = 0 \tag{18}$$

Questa definizione contiene anche la condizione di **stabilità asintotica**, che è solo un *rafforzamento* della definizione, togliendola si otterebbe comunque una definizione di stabilità dell'equilibrio valida. Utilizzare questo sistema per verificare se il sistema è stabile o meno risulta alquanto sconveniente, in quanto si dovrebbe studiare il sistema in tutti i suoi punti di equilibrio e per tutti i possibili stati iniziali che si considera. Il metodo che andiamo a utilizzare per la verifica della stabilità, prende il nome di **BIBO Stabilità**, dove **BIBO** è l'acronimo per **Bounded Input, Bounded Output**.

Theorem 1.1. (BIBO stabilità) Diciamo che un sistema è **BIBO stabile** se e solo se esistono due costanti $M, B > 0$ tali per cui, per ogni ingresso $\|u(t)\| < B$, l'uscita corrispondente rispetta la condizione $\|y(t)\| < M$.

Nel caso dei sistemi lineari possiamo leggermente trasformare questa condizione

Theorem 1.2. (BIBO stabilità nei sistemi lineari) Preso un qualunque sistema lineare stazionario diciamo che è **BIBO stabile** se e solo se **tutti i poli della funzione di trasferimento hanno parte reale negativa**.

Esiste anche un terzo concetto di stabilità, detta **stabilità di margine**. Questa casistica si verifica quando il sistema ha una risposta oscillatoria e periodica nel tempo. Possiamo anche verificare se un sistema è stabile controllando la matrice associata alla funzione di trasferimento.

Theorem 1.3. (Stabilità del sistema) Un sistema lineare stazionario si dice **asintoticamente stabile** se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale negativa.

Possiamo rilassare la condizione aggiungendo che, se esistono poli con parte reale nulla la cui **moltiplicità** è al più 1, il sistema è **stabile**. Se invece esiste anche solo un polo con parte reale positiva, il sistema è **instabile**.

Durante questo corso utilizzeremo la funzione di trasferimento per verificare la stabilità di un sistema. Ricordiamo che preso un polinomio del tipo

$$G(s) = \frac{Qx + c}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{A_n}{s - p_n} + \dots + \frac{A_1}{s + p_1} \quad (19)$$

la sua **antitrasformata** nel dominio del tempo ha una struttura del tipo

$$g(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t} \quad (20)$$

se $g(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ allora il sistema è **asintoticamente stabile**. Quindi, se indipendentemente dalle condizioni iniziali del sistema, la risposta forzata tenderà verso 0, allora il sistema risulterà asintoticamente stabile.

2 Cancellazione, stabilità e osservabilità

Può capitare, nel calcolo della funzione di trasferimento, che esistano delle radici **comuni** tra numeratore e denominatore. In situazioni del genere è possibile procedere a un'eliminazione della radice, comportando che il numero dei poli della **funzione di trasferimento** sia inferiore rispetto al numero degli autovalori della matrice del sistema. Possiamo intuitivamente pensare che, essendo $G(s)$ una rappresentazione esterna che descrive una relazione tra ingresso e uscita, le radici che sono autovalori, ma non sono poli, siano associati a **parte nascoste** del sistema che non influenzano la relazione *Ingresso-Uscita*.

Esempio

Inoltre, facendo alcuni esempi, si nota come i poli relativi a parti nascoste del sistema abbiano parte reale **non negativa**. Quindi, per verificare la stabilità di un sistema bisogna procedere con i seguenti passi

- Quando nel calcolo della funzione di trasferimento $G(s)$ non si ha alcuna cancellazione, il denominatore coincide con il polinomio caratteristico della matrice relativa e la conoscenza dei poli è sufficiente a verificare la stabilità del sistema.
- Se vi sono cancellazioni, la semplice conoscenza dei poli $G(s)$ non è sufficiente per trarre conclusioni sulla stabilità del sistema; potrebbe infatti accadere che uno o più autovalori non abbiano parte reale negativa.

La presenza di cancellazioni può essere dovuta, talvolta, a una non corretta modellazione del sistema, almeno dal punto di vista della descrizione esterna. Ai fini del corso ci limiteremo a considerare sistemi correttamente modellati e in cui non vi è la presenza di alcuna cancellazione. La presenza di *parti nascoste* del sistema si riflette anche sulle proprietà di **raggiungibilità** e di **osservabilità**. Senza perdere troppo tempo sulla dimostrazione, concludiamo che

Theorem 2.1. I poli del sistema, ipotizzato SISO, coincidono con gli autovalori della parte raggiungibile e osservabile del sistema.

Possiamo quindi dire che gli eventuali autovalori del sistema che non sono poli della funzione di trasferimento, sono necessariamente autovalori della parte non raggiungibile e/o non osservabile del sistema stesso. Quindi, un sistema in cui avvengono delle cancellazioni, non sarà sicuramente *completamente raggiungibile* e/o **completamente osservabile**.

Possiamo rappresentare graficamente poli e zeri di un sistema sul piano complesso, utilizzando la seguente convenzione

- Gli zeri si indicano con un cerchio.
- I poli si indicano con una croce.

Quando i nostri poli si trovano nel semipiano sinistro del piano di Gauss abbiamo sistemi stabili, quando i poli si trovano nel semiasse destro, abbiamo sistemi instabili. In particolare, tanto più il polo si trova lontano dall'asse immaginario, tanto più la risposta sarà veloce, indipendentemente dalla stabilità.

Gli zeri non hanno invece effetto sulla stabilità del sistema. Uno zero nel semipiano a parte reale positiva significa che si ha una risposta inversa ad un riferimento a gradino.

3 Ritardo di tempo

Il concetto di ritardo può essere espresso dalla relazione matematica

$$y(t) = u(t - \tau) \quad (21)$$

il quale è un sistema lineare stazionario. Andando a trasformare entrambi i membri con **Laplace** otteniamo che la funzione di trasferimento è

$$Y(s) = U(s)e^{-s\tau} \iff G(s) = e^{-s\tau} \quad (22)$$

Come si può facilmente osservare la funzione non è **razionale**.

Esistono anche dei casi pratici in cui è utile considerare dei sistemi lineari stazionari in cui l'ingresso agisce sull'uscita con un ritardo τ . Questi sistemi avranno forma

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t - \tau) \\ \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (23)$$

Possiamo esprimere il sistema in una forma leggermente diversa introducendo un'uscita $z(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ y(t + \tau) &= z(t) \end{aligned} \quad (24)$$

che per mezzo della trasformazione di Laplace determina la funzione di trasferimento

$$G(s) = e^{-s\tau} G'(s), \quad G'(s) = C^T(sI - A)^{-1}B + D \quad (25)$$

che è quindi data dal prodotto tra $e^{-s\tau}$ e $G'(s)$, dove $G'(s)$ è una funzione razionale in s , a cui si applicano tutte le considerazioni viste fino ad adesso.

4 Risposta allo scalino

A partire dalla funzione di trasferimento del problema siamo in grado di studiare il sistema in funzione di diversi ingressi possibili. Esiste un particolare ingresso che risulta estremamente utile da studiare: **l'ingresso a scalino**. Studiare il movimento dell'uscita in risposta a uno scalino è importante, perché permette di capire come si comporta il sistema nel passaggio da una condizione di equilibrio a un'altra a seguito di un'improvvisa variazione del suo valore d'ingresso. Ricordiamo che la funzione scalino è così definita

$$h(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (26)$$

Lo studio della risposta verrà limitato a sistemi del primo e del secondo ordine. Il motivo è presto detto, attraverso la tecnica dei **poli dominanti** siamo in grado di ridurre ogni sistema di ordine n -esimo a un sistema del primo o, al massimo, del secondo ordine.

Prima di intraprendere lo studio delle risposte è opportuno fare alcune considerazioni di carattere generale. Nel caso di sistemi asintoticamente stabili, il calcolo del valore di regime y_∞ della variabile di uscita può essere fatto sfruttando il teorema del valore finale. Supponiamo di avere un sistema descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \cdots + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_0} \quad (27)$$

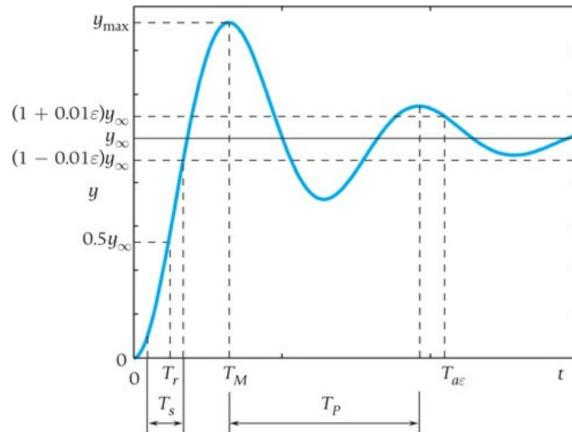
Dove il grado del denominatore è sicuramente maggiore o uguale al grado del numeratore. Il valore iniziale della risposta a scalino può essere determinato mediante il teorema del valore iniziale

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \frac{1}{s} G(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} G(s) = \begin{cases} 0 & n > m \\ \frac{\beta_m}{\alpha_n} & n = m \end{cases} \quad (28)$$

Iterando lo stesso calcolo per tutte le derivate di $y(0)$ si conclude che, se il grado del numeratore è minore del grado del denominatore, allora tutte le derivate di ogni ordine di $y(0)$ sono nulle. Se applicassimo il teorema del valore finale invece, risulterebbe che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} s G(s) = \frac{\beta_0}{\alpha_0} \quad (29)$$

Supponiamo adesso di avere una funzione di trasferimento a cui è stato applicato un ingresso a scalino All'interno della figura sono presenti alcuni indici numerici. Passiamo a enunciarne il



significato

- **Il valore di regime y_∞ :** il valore dell'uscita a transitorio esaurito.
- **Valore massimo y_{\max} :** il valore massimo assunto dall'uscita.

- **Sovraelongazione massima $S\%$:** ampiezza, in percentuale, della sovraelongazione massima rispetto al valore di regime. Si può visualizzare questa grandezza come una misura di *quanto si è alzato* il valore dell'uscita rispetto al valore di regime.
- **Tempo di massima sovraelongazione T_M :** il primo istante in cui $y = y_{\max}$.
- **Tempo di salita T_S :** il tempo impiegato dal sistema perché l'uscita passi per la prima volta dal 10% al 90% del suo valore di regime.
- **Tempo di ritardo T_r :** tempo necessario perché l'uscita raggiunga il 50% del valore di regime.
- **Tempo di assestamento:** è il tempo che serve a un sistema dinamico per raggiungere e rimanere in una fascia attorno all' $i\%$ del valore di regime.

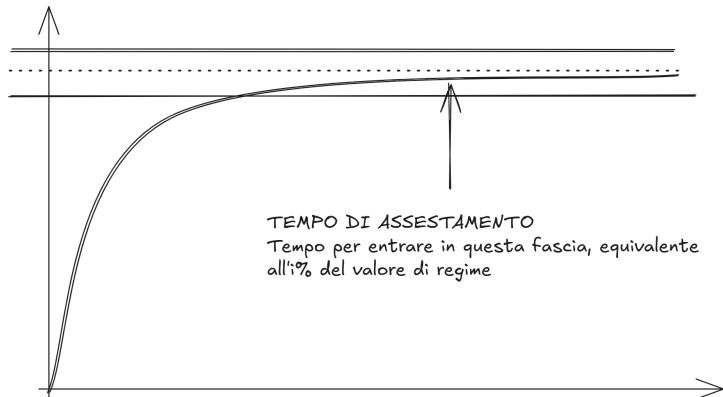


Figure 5.2: Tempo di assestamento

- Costante di tempo τ : tempo necessario per raggiungere il 63% del valore di regime.

5 Risposta al gradino nei sistemi dinamici

Supponiamo di avere ora un'equazione differenziale del tipo

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) a_0 + a_1 s Y(s) = b_0 U(s) + b_1 s U(s) \implies \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s} = G(s) \quad (30)$$

Questa scrittura ci da la possibilità di riscrivere il nostro sistema in due forme differenti. La prima è detta **forma di Bode**, in questa forma si cerca di mettere in evidenza le **costanti di tempo del sistema**

$$G(s) = \frac{b_0}{a_0} \frac{1 + \frac{s}{b_0}}{1 + \frac{s}{a_1}} = G(0) \cdot \frac{1 + \tau_z}{1 + \tau} \quad (31)$$

L'altra forma è detta invece **forma di evans**, in questa forma si mettono in evidenza le *singolarità dinamiche del sistema, ovvero poli e zeri*

$$G(s) = \frac{b_1}{a_1} \frac{s + \frac{b_0}{b_1}}{s + \frac{a_0}{a_1}} \quad (32)$$

Anche in un sistema del secondo ordine è possibile riscrivere il sistema nelle due forme

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}G(0) \\ G(s) &= \frac{b_0/a_2}{(s+p_1)(s+p_2)} \end{aligned} \quad (33)$$

Dove abbiamo che $T_1 = 1/p_1$ e $T_2 = 1/p_2$. Andando a mettere come ingresso il gradino unitario, posso scrivere il sistema come

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1/T_1} + \frac{C}{1+1/T_2} \quad (34)$$

Il secondo caso è quello dei sistemi del secondo ordine. Supponiamo quindi di avere una funzione di trasferimento del tipo

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}_{\text{Risposta forzata}} U(s) + \underbrace{\frac{(a_1 + a_2 s)y(0) + a_2 \dot{y}(0)}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}_{\text{Risposta libera}} \quad (35)$$

Le risposte hanno gli stessi poli, dunque, se il sistema è asintoticamente stabile, andranno a 0 entrambe; tuttavia, essendo la risposta forzata dipendente dall'ingresso, andrà a 0 più lentamente della risposta libera. Focalizziamoci quindi sulla risposta forzata

$$Y(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} U(s) \quad (36)$$

L'analisi di questi sistemi richiede che vengano analizzate tre diverse casistiche

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\quad \text{Poli distinti e reali} \\ \Delta = 0 &\quad \text{Poli coincidenti e reali} \\ \Delta < 0 &\quad \text{Poli complessi coniugati} \end{aligned} \quad (37)$$

Il primo caso è quello in cui abbiamo due **poli distinti e reali**. Supponiamo quindi di avere una funzione di trasferimento del tipo

$$Y(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} U(s) \quad (38)$$

Che può essere scritta in entrambe le forme, **forma di Bode** e **forma di Evans**

$$G(s) = \underbrace{\frac{1}{(1+s \cdot T_1)(1+s \cdot T_2)}}_{\text{Forma di Bode}} = \underbrace{\frac{b_0/a_2}{(s+p_1)(s+p_2)}}_{\text{Forma di Evans}} \quad (39)$$

L'ultimo caso che andiamo ad analizzare è quello dei **poli complessi coniugati**. Supponiamo quindi di avere una funzione di trasferimento scritta nella forma

$$G(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (40)$$

Essendo poli complessi, un polo qualsiasi è scritto nella forma $\alpha + i\beta$. Questi due coefficienti sono ricavabili dalla formula risolutiva per le equazioni di secondo grado

$$\alpha = -\frac{a_1}{2a_2}, \quad \beta = \sqrt{\frac{a_0}{a_2} - \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2} \left(1 - \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2\right)} \quad (41)$$

All'interno delle formule è possibile distinguere due diversi coefficienti, entrambi fondamentali nello studio dei sistemi di controllo.

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \quad \text{Pulsazione di risonanza} \\ \xi &= \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 \cdot a_2}} \quad \text{Smorzamento} \end{aligned} \quad (42)$$

La pulsazione di risonanza è la pulsazione sulla quale il sistema oscilla per $t \rightarrow \infty$, invece lo smorzamento del sistema ci indica come vengono smorzate le oscillazioni del sistema. Maggiore è il coefficiente di smorzamento, minore sarà l'ampiezza delle oscillazioni. Introdotte queste due grandezze, possiamo riscrivere la funzione di trasferimento nella forma

$$G(s) = \underbrace{\frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)}}_{\text{Forma di Evans}} = \overbrace{\frac{G(0)}{1 + s\xi \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}}^{\text{Forma di Bode}} \quad (43)$$

Con ω_0 la **frequenza naturale** del sistema e ξ lo **smorzamento** del sistema. I poli del sistema sono quindi dati dall'espressione

$$s = -\xi\omega_0 \pm \sqrt{1 - \xi^2} \quad (44)$$

La risposta a gradino può essere calcolata come fatto nei sistemi del primo ordine

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \arccos(\xi)) \quad (45)$$

La risposta è quindi costituita da un termine sinusoidale, con pulsazione data dalla parte immaginaria dei poli, moltiplicato per un'esponenziale che, se il sistema è asintoticamente stabile, decresce tanto velocemente quanto più è elevato il valore di $\xi\omega_n$. In particolare, per $\xi > 0$ il sistema è **asintoticamente stabile** e tende al valore di regime, se $\xi < 0$ il sistema è instabile e l'uscita diverge e, infine, se $\xi = 0$ il sistema è **stabile**, ma non **asintoticamente stabile** e la risposta assume come forma

$$y(t) = \mu(1 - \cos(\omega_n t)) \quad (46)$$

La risposta può essere scritta anche in una forma leggermente diversa

$$y(s) = G(0) \left[1 - e^{-\xi\omega_0 t} \left(\cos(\sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega_0 \cdot t) \right) \right] \cdot 1(t) \quad (47)$$

Nel caso di sistemi del secondo ordine la risposta non è prevedibile, come nel caso dei sistemi del primo. Nei sistemi del secondo ordine si possono avere casistiche in cui le sovraelongazioni sono altissime o casi in cui diventano trascurabili: generalmente, quando si hanno poli reali abbiamo $\xi > 1$ e la risposta è simile a quella di un sistema del primo ordine; nel caso di poli complessi coniugati, dove ho $\xi < 1$, la risposta sarà di tipo oscillatorio.

Per un sistema del secondo ordine possiamo, dalla formula della risposta al gradino, ricavare alcune relazioni che permettono di ricavare i parametri della risposta al gradino del sistema

Sovraelongazione massima	$S\% = 100e^{\frac{\xi\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$
Tempo di massima sovraelongazione	$t_m = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$
Tempo di oscillazione	$T_P = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$
Tempo di assestamento	$T_{ass} \approx -\frac{1}{\xi\omega_0} \ln(0.05)$

cerchiamo di capire come si ottiene la risposta al gradino utilizzando l'antitrasformata

$$G(s)U(s) = \frac{\omega_0^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)} = \frac{1}{s} + \frac{As + B}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2 + As^2 + Bs}{s(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)} \quad (48)$$

Andando a calcolare i residui otteniamo che $A = -1$ e $B = -2\xi\omega_0$. Sostituiamolo nella formula e facciamo qualche passo di semplificazione, ottenendo

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{(s + \xi\omega_0) + \xi\omega_0}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)} = \frac{1}{s} - \frac{(s + \xi\omega_0) + \xi\omega_0 \sqrt{\frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2}}}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)} \quad (49)$$

Divido l'espressione in due parti che considero singolarmente

$$\frac{1}{s} - \frac{(s + \xi\omega_0)}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)} \quad (50)$$

Ci possiamo accorgere facilmente che questa struttura può essere antitrasformata utilizzando la trasformata del coseno e la proprietà di traslazione. Imponiamo $\omega^2 = \omega_0^2(1 - \xi^2)$ e scriviamo la prima parte dell'uscita

$$e^{-\xi\omega_0 t} \cos \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t \quad (51)$$

Dopo aver calcolato la prima antitrasformata, corrispondente a una delle due parti che compone l'antitrasformata dell'uscita, posso andare a antitrasformare l'altra parte dell'uscita

$$\frac{\xi\omega_0 \sqrt{\frac{1 - \xi^2}{1 - \xi^2}}}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)} = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)} \quad (52)$$

anche in questo caso possiamo utilizzare la proprietà di traslazione, unità all'antitrasformata del seno, ottenendo

$$-\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t) \quad (53)$$

Unendole si riesce ad ottenere la risposta al gradino del sistema che avevamo dato all'inizio del paragrafo. Esiste anche una terza forma in cui si può scrivere la risposta al gradino

$$1 - e^{-\xi\omega_0 t} \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{1 - \xi^2}} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right)\right) \quad (54)$$

Per ricavarla dobbiamo applicare l'identità $A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) = B \cdot \cos(\omega \cdot t) + C \cdot \sin(\omega \cdot t)$ insieme ad altre due relazioni

$$\begin{aligned} \tan(\varphi) &= \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{B}{C} \\ A &= \sqrt{B^2 + C^2} \end{aligned}$$

Dobbiamo anche imporre che

$$A = \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{1 - \xi^2}}$$

6 Sistemi di ordine superiore al secondo

Il numero di poli del sistema determina il suo **ordine**, ad esempio, se il sistema ha 2 poli, sarà un sistema **del secondo ordine**. Maggiore il numero dei poli, maggiore sarà complesso studiare il sistema.

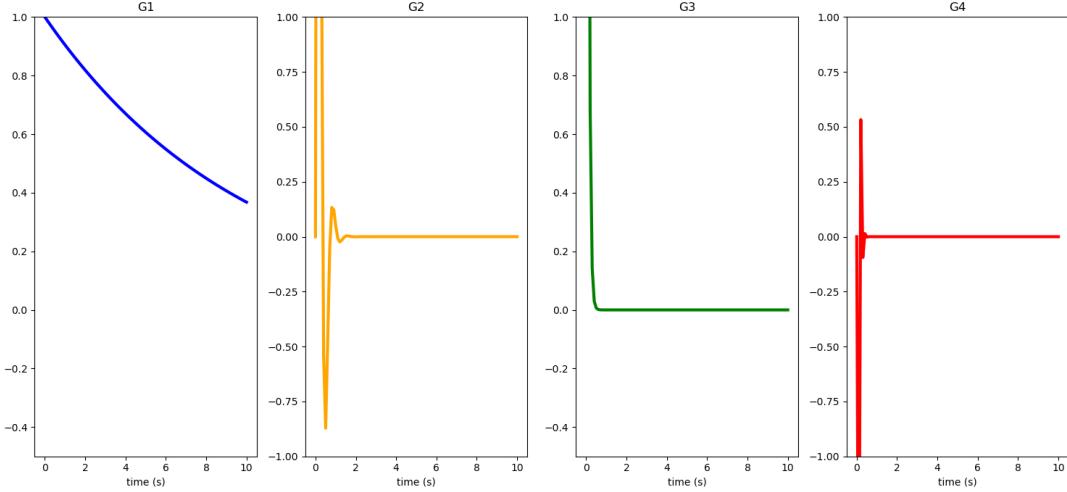
Un modo per rendere questi sistemi più semplici è quello di approssimare il sistema a un ordine inferiore sfruttando l'**approssimazione al polo dominante**. L'idea alla base di questo metodo è analizzare il polo, i poli che hanno una crescita più **lenta** (quindi quelli più vicino all'origine nel piano cartesiano) sono quelli **maggiormente importanti**, mentre i poli che hanno una crescita più veloce sono quelli **meno importanti**. Supponiamo di avere la funzione di trasferimento i cui poli sono

$$p_1 = -0.1, \quad p_{2,3} = -5 \pm 8.66j, \quad p_4 = -15.5, \quad p_{5,6} = -20 \pm 34.64j \quad (55)$$

Supponiamo adesso di studiare i poli supponendo che siano sistemi distinti

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{1}{s + 0.1}, & G_2(s) &= \frac{100}{s^2 + 10s + 100}, \\ G_3(s) &= \frac{15.5}{s + 15.5}, & G_4(s) &= \frac{1600}{s^2 + 40s + 1600} \end{aligned} \quad (56)$$

Possiamo andare adesso a rappresentare le funzioni di trasferimento su un grafico, ottenendo come risultato



Prima di fare un esempio completo, è necessario fare una trattazione più generale. Supponiamo di avere un sistema del secondo ordine scritto come

$$G(s) = K \frac{\alpha\beta}{(s + \alpha)(s + \beta)} \quad (57)$$

La cui risposta a scalino è data da

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) \frac{1}{s} = K \frac{\alpha\beta}{(s + \alpha)(s + \beta)} \frac{1}{s} \quad (58)$$

la cui antitrasformata è data da

$$y(t) = K \left(1 - \frac{\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{\beta t}}{\beta - \alpha} \right) \quad (59)$$

In generale, se abbiamo che $\beta \gg \alpha$, possiamo scrivere un approssimazione del tipo

$$G(s) = K \frac{\alpha\beta}{(s + \alpha)(\beta)} = K \frac{\alpha}{(s + \alpha)} \quad (60)$$

Calcolando la risposta al gradino otteniamo

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = K \frac{\alpha}{(s + \alpha)s} \iff y(s) = K \left(1 - e^{-\alpha t} \right) \quad (61)$$

Il metodo appena analizzato ha delle limitazioni. Se la risposta al gradino del sistema non è *simile* a nessuna risposta al gradino dei suoi componenti, allora non possiamo applicare questo tipo di approssimazione.

7 Il problema della realizzazione

Esiste un numero infinito di possibili modelli in spazio di stato che forniscono la stessa dinamica ingresso uscita. Aiuta quindi avere strutture standardizzate dei modelli in spazio di stato: queste sono le cosiddette **forme canoniche**. Data una qualsiasi funzione di trasferimento è possibile ottenere ciascuna delle forme canoniche. Inoltre, da una qualsiasi forma canonica siamo in grado di trasformarla in un'altra forma. Supponiamo di avere la funzione di trasferimento

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \quad (62)$$

La prima forma canonica è detta **forma canonica di raggiungibilità**. Possiamo supporre di scrivere il nostro sistema nella forma

$$G(s) = \frac{\hat{b}_0 s^n + \hat{b}_1 s^{n-1} + \dots + \hat{b}_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} + \hat{b}_n \quad (63)$$

Dove $\hat{b}_n = b_n$ e $\hat{b}_i = b_i - a_i \hat{b}_n$. La forma canonica di raggiungibilità è data dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [\hat{b}_0 \quad \hat{b}_1 \quad \hat{b}_2 \quad \dots \quad \hat{b}_n], \quad D = \hat{b}_n$$

8 Sistemi MIMO

Nel caso di sistemi in cui abbiamo più ingressi e più uscite abbiamo delle matrice di trasferimento, non più delle funzioni. Queste matrici di trasferimento esprimono la relazione che esiste tra ogni ingresso e ogni uscita

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \dots & g_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1} & \dots & g_{pm}(s) \end{bmatrix}, \quad G(s) \in M^{m \times p} \quad (64)$$

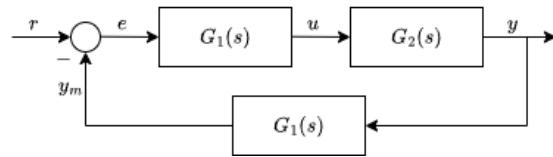
Avrà tante colonne (m) quanto il numero di ingressi e tante righe (p) quanto il numero di uscite. Se esiste un $g_{ij} = 0$, allora vuol dire che non esiste alcuna relazione che lega l'ingresso **i**-esimo all'uscita **j**-esima.

Quando studiamo dei sistemi **MIMO** dobbiamo tenere conto che, per ogni funzione di trasferimento g_{is} , i poli della funzione di trasferimento sono tutti e i soli i poli raggiungibili dall'ingresso u_i ed osservabili dall'uscita y_i . Inoltre, lo studio della stabilità dei sistemi **MIMO** è estremamente complessa. Affinché un sistema sia stabile, data la sua **matrice di trasferimento** $G(s)$, è necessario che tutti gli g_{ij} siano **stabili**. Generalmente, nel caso di sistemi **MIMO**, si preferisce studiare il sistema nella sua rappresentazione in variabili di stato.

Chapter 6

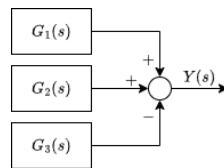
Schema a blocchi

Nello studio dei sistemi dinamici lineari e stazionari costituiti da più sottoinsiemi variamente collegati tra di loro risulta utile dotarci di una rappresentazione grafica. Questa rappresentazione prende il nome di **schema a blocchi**. Questo tipo di descrizione permette di semplificare enormemente la rappresentazione della dinamica di un sistema e le interazioni che esistono tra i vari componenti del sistema stesso. Un esempio di schema a blocchi è il seguente L'algebra di uno schema a blocchi



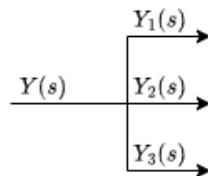
può risultare anche molto complessa ed occorre quindi analizzare molto attentamente la disposizione dei blocchi. Inoltre, negli schemi a blocchi compaiono anche altri due elementi: il **nodo sommatore** e il **punto di diramazione**

Nodo sommatore Il nodo sommatore è caratterizzato da delle frecce entranti e una freccia uscente incidenti sullo stesso nodo. Ad ogni freccia entrante viene associato il suo rispettivo segno nella somma della variabile relativa alla freccia d'uscita. Ad esempio



equivale all'espressione $Y(s) = G_1(s) + G_2(s) - G_3(s)$.

Punto di diramazione Il **punto di diramazione** viene utilizzato quando si vuole descrivere il fatto che due o più variabili, rappresentate da frecce uscenti, costituiscono la replica dell'unica variabile a monte del punto. Ad esempio

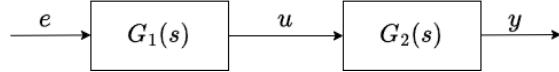


equivale a all'espressione $Y(s) = Y_1(s) = Y_2(s) = Y_3(s)$.

Un generico blocco di uno schema a blocchi come quello dell'esempio iniziale rispetta la condizione algebrica $Y(s) = G_2(s)U(s)$.

1 Disposizione topografica in uno schema a blocchi

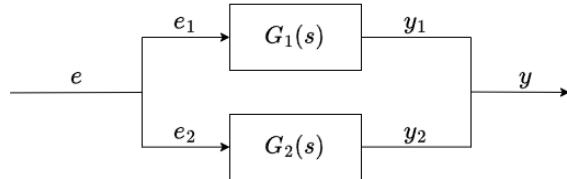
La reciproca disposizione tra blocchi in un diagramma a blocchi esprime una precisa relazione algebrica. Esistono tre disposizioni che n blocchi possono reciprocamente assumere. La prima disposizione è la **disposizione in serie** (o **a cascata**). Due **blocchi** si dicono in serie quando l'**uscita del primo blocco coincide con l'ingresso del secondo**; ad esempio



I sistemi sono descritti dalle equazioni $U(s) = G_1(s)E(s)$ e $Y(s) = G_2(s)U(s)$. Quando ci troviamo davanti a una struttura di questo tipo la funzione di trasferimento è data dal prodotto delle funzioni di trasferimento dei blocchi.

$$Y(s) = G_2(s)U(s) = G_2(s)(G_1(s)E(s)) \iff G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = G_1(s)G_2(s) \quad (1)$$

La seconda disposizione è la **disposizione in parallelo**. Due blocchi si dicono in parallelo quando l'uscita e l'ingresso dei due blocchi coincidono; ad esempio



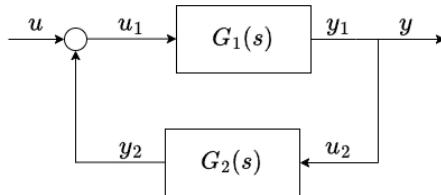
I sistemi sono descritti dalle equazioni $Y_1(s) = G_1(s)E_1(s)$ e $Y_2(s) = G_2(s)E_2(s)$. Quando i blocchi sono in parallelo abbiamo che la funzione di trasferimento totale è data dalla somma delle due funzioni di trasferimento

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_1(s)E_1(s) + G_2(s)E_2(s) = E(s)(G_1 + G_2) \iff G(s) = G_1(s) + G_2(s) \quad (2)$$

Che può essere scritto in forma sviluppata come

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{Y_1(s)}{E_1(s)} + \frac{Y_2(s)}{E_2(s)} = \frac{Y_1(s)E_2(s) + Y_2(s)E_1(s)}{E_1(s)E_2(s)} \quad (3)$$

La terza e ultima disposizione è quella dei blocchi in **retroazione**. Due blocchi si dicono in **retroazione** se e solo se costituiscono un *anello chiuso retroazionato*; ad esempio



I sistemi sono descritti dalle equazioni $Y_1(s) = G_1(s)U_1(s)$ e $Y_2(s) = G_2(s)U_2(s)$. In questo tipo di sistema la relazione tra le due funzioni di trasferimento è data dal rapporto tra la funzione di trasferimento $G_1(s)$ e il prodotto delle due funzioni di trasferimento sommato a 1.

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{Y_1(s)U_2(s)}{U_1(s)U_2(s) + Y_1(s)Y_2(s)} \quad (4)$$

Il numeratore dipende dal segno che abbiamo sul nodo sommatore. Se sul nodo sommatore vi è un segno positivo, allora il denominatore sarà la somma tra 1 e la **funzione di trasferimento dell'anello**.

$$D(s) = 1 + G_1(s)G_2(s), \quad G_1(s)G_2(s) \text{ Funzione di trasferimento anello} \quad (5)$$

Se sul nodo sommatore vi è un segno negativo, allora il denominatore sarà la differenza tra 1 e la **funzione di trasferimento dell'anello**.

$$D(s) = 1 - G_1(s)G_2(s), \quad G_1(s)G_2(s) \text{ Funzione di trasferimento anello} \quad (6)$$

Riportiamo di seguito una tabella che specifica le conversioni tra i tipi di diagrammi a blocchi

	Original Block Diagrams	Equivalent Block Diagrams
1		
2		
3		
4		
5		

Quando andiamo a calcolare degli schemi ridotti dobbiamo prestare attenzione alle possibili cancellazioni. Supponiamo preliminarmente che $N_i(s)$ identifichi il numeratore della **funzione di trasferimento** i -esima e che $D(s)$ identifichi il denominatore della **funzione di trasferimento** i -esima. Nella disposizione **in serie** dobbiamo prestare attenzione a due possibili casistiche

- Se $N_1(s)$ e $D_2(s)$ hanno **radici comuni** il sistema non è **controllabile**.
- Se $N_2(s)$ e $D_1(s)$ hanno **radici comuni** il sistema non è **osservabile**.

In generale, se non abbiamo alcuna cancellazione e le due funzioni $G_1(s)$, $G_2(s)$ sono **asintoticamente stabili**, allora la funzione $G(s)$ è anch'essa **asintoticamente stabile**. Nella disposizione in parallelo, le cancellazioni avvengono solo quando $D_1(s)$ e $D_2(s)$ hanno dei poli in comune. Se non abbiamo alcuna cancellazione, i poli di $G(s)$ sono il prodotto di $G_1(s)$ e di $G_2(s)$ e possiamo quindi dire che il sistema è asintoticamente stabile se e solo se i poli di $G_1(s)$ e di $G_2(s)$ hanno parte reale negativa. Infine, quando abbiamo dei blocchi in reatrazione abbiamo che le cancellazioni avvengono quando $N_1(s)$ e $D_2(s)$ hanno fattori comuni:

- Se $G_1(s)$ cancella un polo di $G_2(s)$ abbiamo un sistema **non osservabile e non raggiungibile**.
- Se $G_2(s)$ cancella uno zero di $G_1(s)$ abbiamo un sistema **completamente osservabile e completamente raggiungibile**.

Nel caso in cui non vi siano cancellazioni i poli del sistema sono le radici dell'equazione

$$N_1(s)N_2(s) + D_1(s)D_2(s) = 0 \quad (7)$$

Che può essere riscritta come

$$1 + \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)N_2(s)} = 0 \quad (8)$$

A questo punto dobbiamo valutare se esistono cancellazioni nel rapporto. Se esistono cancellazioni che corrispondono a poli con parte reale ≥ 0 , allora il sistema è instabile.

Chapter 7

Risposta in frequenza

L'analisi in frequenza risulta di fondamentale importanza nello studio dei sistemi lineari stazionari. Partendo infatti dallo studio della risposta in frequenza di un sistema siamo in grado di giungere allo studio della stabilità di un sistema. Ciò è possibile mediante la rappresentazione grafica della risposta armonica, che può essere fatta attraverso una di queste possibili rappresentazioni

- Diagrammi di Bode
- Diagrammi di Nyquist.
- Diagrammi di Nichols.

Questa tipologia di analisi si basa, in prima istanza, sullo studio del comportamento del sistema quando viene sollecitato da un ingresso di tipo **sinusoidale**.

La risposta in frequenza è un concetto chiave anche in molti dispositivi elettronici. Ad esempio, gli equalizzatori: dispositivi elettronici utilizzati per regolare il livello di specifiche frequenze audio.

La risposta in frequenza è una proprietà che riguarda i **sistemi lineari asintoticamente stabili**, quindi a tutti quei sistemi i cui poli hanno $\text{Re} < 0$.

Prima di andare a studiare la risposta alla sinusode, può essere utile lavorare con un esempio introduttivo, chiamato **il problema del Gatto e della Ciotola rotante**, il cui autore è il **Prof. Landi**, che semplifica enormemente la comprensione dei concetti chiave che verranno ripresi più avanti

Immaginiamo di avere un tavolo circolare che ruota attorno al suo centro. Sul tavolo è fissata una ciotola piena di cibo, alla quale un gatto è molto interessato. Il tavolo, però, è in movimento: ruota a diverse velocità e presenta al gatto una sfida sempre più complessa. Dinnanzi a questa situazione il gatto deve decidere come comportarsi per ottenere il cibo.

Fintanto che il tavolo ruota lentamente, il gatto può camminare o correre intorno al tavolo e seguire facilmente il movimento della ciotola: non ci sono grandi difficoltà e il gatto riesce a mantenere il contatto visivo e a calcolare il percorso da seguire. Tuttavia, man mano che la rotazione aumenta, il comportamento del gatto cambia; a diverse frequenze di rotazione, il gatto deve adattare le sue azioni per cercare di avere successo.

La **frequenza di rotazione** è una grandezza che descrive quante rotazioni un oggetto riesce a descrivere intorno al suo asse in un certo intervallo di tempo. L'unità di misura è l'Hertz (**Hz**), che rappresenta il numero di rotazioni complete per ogni secondo. A volte si preferisce esprimere questa grandezza in termini di pulsazione

$$\omega = 2\pi f \quad (1)$$

Il movimento della ciotola può essere visto come un *moto circolare uniforme*, dove la posizione della ciotola segue un percorso **circolare** attorno al centro del tavolo. La

rotazione del tavolo può essere rappresentata tramite la sua **frequenza angolare** ω , espressa in **radianti al secondo**. Inoltre, il moto del tavolo può essere espresso in termini di funzioni sinusoidali; possiamo infatti descrivere la posizione del tavolo con le seguenti formule

$$\begin{aligned}x(t) &= R \cos(\omega t) \\y(t) &= R \sin(\omega t)\end{aligned}\tag{2}$$

Dove R è il raggio del tavolo. Questa situazione può essere studiato attraverso il concetto di **risposta in frequenza** del gatto. Se tracciamo un grafico della risposta in frequenza del gatto, dove utilizziamo la frequenza di rotazione della ciotola come variabile indipendente e la capacità del gatto di seguire la ciotola come variabile dipendente, vedremmo una curva che inizia alta per frequenze basse, ma decresce rapidamente superata una certa soglia ω_C .

La **banda passante** del gatto può essere definita come l'intervallo di frequenze di rotazione del tavolo per cui il gatto è ancora in grado di inseguire la ciotola e raggiungere il cibo in modo efficace. Ovviamente, man mano che la velocità di rotazione del tavolo aumenta, osserviamo diverse reazioni da parte del gatto, in questo scenario osserviamo come l'efficacia del gatto nell'inseguire la ciotola e nel mangiare il cibo diminuisca enormemente, man mano che aumenta la velocità di rotazione del tavolo aumenta. Di conseguenza, il fatto finisce per mangiare sempre meno frequentemente, diminuendo così la quantità di cibo che riesce a consumare

- **Basse frequenze:** quando il tavolo ruota lentamente, il gatto riesce facilmente a inseguire la ciotola. L'inseguimento avviene in modo coordinato e continuo, senza troppo sforzo.
- **Medie frequenze:** Con l'aumento della velocità di rotazione, il gatto inizia a mostrare segni di difficoltà. Corre più velocemente, fermandosi talvolta per valutare il movimento della ciotola: questo fatto riflette una leggera perdita di sincronizzazione tra il movimento del tavolo e l'azione del gatto.
- **Alte frequenze:** Quando la velocità di rotazione del tavolo diventa molto elevata, il gatto non è più in grado di inseguire la ciotola, il che porta ad una inevitabile frustrazione. Inoltre, il tempo disponibile per mangiare si riduce sempre di più e il gatto riduce, proporzionalmente, la quantità di cibo che riesce ad assumere.

A questo punto il gatto cambia paradigma: invece che continuare a inseguire la ciotola sul tavolo rotante, decide di saltare direttamente sul tavolo, posizionandosi vicino alla ciotola. Questo tipo di approccio rappresenta una soluzione pratica al problema.

- A basse e medie frequenze: il gatto capisce che potrebbe ancora tentare di inseguire la ciotola, ma man mano che la velocità aumenta, le sue possibilità di raggiungere il cibo diminuiscono.
- **Ad alte frequenze:** il gatto si rende conto che inseguire la ciotola è praticamente impossibile. Capisce che il vero problema è la difficoltà di seguire un riferimento che si muove troppo velocemente. Spinto dalla necessità, il gatto adotta la soluzione più efficace: salta sul tavolo.

Il gatto, invece che continuare a inseguire la ciotola con un crescente sforzo (proporzionale alla velocità di rotazione del tavolo), ha deciso di adottare una scelta più intelligente: saltare sul tavolo. Una volta salito sul tavolo l'effetto dovuto alla rotazione del sistema di riferimento diventa trascurabile: il problema passa da essere un problema dinamico a un problema statico. Nello specifico, il sistema passa dall'inseguimento di un movimento sinusoidale a un sistema statico, in cui la ciotola è un riferimento fisso.

Anche nel mondo ingegneristico esistono delle trasformazioni in grado di modificare il sistema di riferimento, convertendo le grandezze elettriche, da correnti alternate a grandezze continue.

1 Risposta alla sinusoide

Supponiamo di voler studiare il movimento del sistema lineare stazionario quando viene sollecitato da un ingresso di tipo **sinusoidale**. Si consideri il sistema **SISO** di ordine **n** descritto da

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\quad (3)$$

con la funzione di trasferimento associata $G(s) = C^T(sI - A)^{-1}B + D$. Supponiamo adesso di avere un ingresso **sinusoidale** nella forma

$$u(t) = U \sin(\omega t) \quad (4)$$

Ricordando la trasformata di Laplace della sinusoide abbiamo che

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} U \quad (5)$$

L'uscita può essere ottenuta antitrasformando l'espressione mediante lo sviluppo in fratti semplici. Supponendo di prendere l'uscita

$$y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s + p_i} + \frac{Q}{s - j\omega} + \frac{\bar{Q}}{s + j\omega} \quad (6)$$

Il particolare, il numero complesso Q è il residuo associato al polo $j\omega$ e può essere calcolato come

$$Q = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega)Y(s) = G(j\omega) \frac{U\omega}{j\omega + j\omega} = G(j\omega) \frac{U}{2j} \quad (7)$$

Essendo $G(s)$ una funzione razionale vale l'identità $G(-j\omega) = \bar{G}(j\omega)$, risulta quindi che

$$\bar{Q} = -\bar{G}(j\omega) \frac{U}{2j} \quad (8)$$

La prima parte della funzione, quella con poli puramente reali, per ipotesi della stabilità asintotica, tende asintoticamente a 0 per $t \rightarrow +\infty$ e, pertanto, l'uscita $y(t)$ tende verso l'antitrasformata della parte immaginaria

$$y(t) = Qe^{j\omega t} + \bar{Q}e^{-j\omega t} \quad (9)$$

Andando a sviluppare i **residui** otteniamo

$$\begin{aligned}y(t) &= G(j\omega) \frac{U}{2j} e^{j\omega t} + -\bar{G}(j\omega) \frac{U}{2j} e^{-j\omega t} = \\ &\frac{U}{2j} ((G(j\omega) - \bar{G}(j\omega)) \cos(\omega t) + (G(j\omega) - \bar{G}(j\omega)) \sin(\omega t)) = \\ &\frac{U}{2j} (2j \operatorname{Im}(G(j\omega)) \cos(\omega t) + 2j \operatorname{Re}(G(j\omega)) \sin(\omega t)) = \\ &U(|G(j\omega)| \sin(\arg(G(j\omega))) \cos(\omega t) + |G(j\omega)| \cos(\arg(G(j\omega))) \sin(\omega t)) = \\ &|G(j\omega)| U \sin(\omega t + \arg(G(j\omega)))\end{aligned}\quad (10)$$

Quindi, l'uscita $y(t)$ converge a una sinusoide la cui pulsazione è la medesima della sinusoide di ingresso, la cui ampiezza è data $Y = |G(j\omega)|U$ e lo sfasamento dato da $\theta = \arg G(j\omega)$

$$y(t) = |Y(j\omega)| \sin(\omega t + \theta) \quad (11)$$

La risposta di un segnale sinusoidale è la medesima indipendentemente dalle condizioni iniziali, in quanto lo stato iniziale $x(0)$ tende ad annullarsi in virtù della proprietà di stabilità asintotica. Fatta questa considerazione possiamo formulare un teorema di enorme importanza, detto **teorema fondamentale della risposta in frequenza**

Theorem 1.1. (Teorema Fondamentale della Risposta in Frequenza) Se si applica a un sistema lineare **asintoticamente stabile** con funzione di trasferimento $G(s)$ l'ingresso sinusoidale

$$u(t) = U \sin(\omega_0 t) \quad (12)$$

L'uscita del transitorio esaurito assume l'andamento

$$\hat{y}(t) = |G(j\omega_0)|U \sin(\omega_0 t + \arg G(j\omega_0)) \quad (13)$$

indipendentemente dallo stato iniziale.

La conoscenza di modulo e fase della funzione $G(j\omega)$ al variare di ω permette di determinare il comportamento del sistema nei riguardi di ingressi sinusoidali di diversa pulsazione. Si verifica inoltre che l'uscita a regime oscilla con una pulsazione uguale a quella dell'ingresso, ma il segnale d'uscita ha un'ampiezza e una fase che dipendono dalla pulsazione d'ingresso

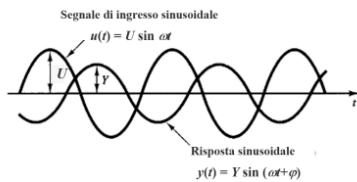


Figure 7.1: Risposta in frequenza di un sistema

Nel caso più generale, applicando un'ingresso

$$u(t) = U_M \sin(\omega t + \varphi) \quad (14)$$

L'uscita del sistema sarà

$$y_\infty(t) = U_M |G(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega))) \quad (15)$$

Definiamo la risposta appena introdotta **risposta armonica** (o **risposta in frequenza**) del sistema dinamico. La risposta in frequenza di un sistema può essere definita solo per sistemi asintoticamente stabili; il motivo è banale. Se un sistema è instabile o marginalmente stabile, la risposta liberà andrà a, rispettivamente, divergere o oscillare indefinitamente. Studiare la risposta armonica in queste due casistiche sarebbe insensato. Pertanto, data una funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema **asintoticamente stabile**, calcolare per $s = j\omega$ la funzione di trasferimento, corrisponde alla *restrizione della funzione di trasferimento lungo l'asse immaginario positivo*. La restrizione della funzione prende il nome di **risposta armonica** (o **risposta in frequenza**) del sistema in esame

$$G(j\omega) = C^T(j\omega I - A)^{-1}B + D \quad (16)$$

Descrivere un sistema dinamico attraverso la sua risposta armonica significa, in pratica, caratterizzare il sistema stesso: è importante notare che ciò può essere facilmente ottenuto attraverso prove sperimentali

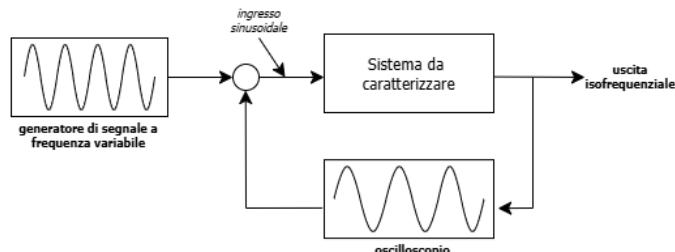


Figure 7.2: Schema generale della risposta sinusoidale

Una conclusione alla quale si può facilmente arrivare è che il rapporto tra le ampiezze dei segnali (nota come *amplificazione dinamica*) e lo sfasamento tra i due segnali dipendono dalla pulsazione ω del segnale in ingresso. Pertanto, la **risposta in frequenza** di un sistema descrive come l'ampiezza e la fase dell'uscita variano al variare della frequenza ω .

Un'ultima proprietà matematica che riguarda la risposta in frequenza del sistema è quella che ci garantisce che

$$G(-j\omega) = \overline{G(j\omega)}$$

Questo risultato è fondamentale: conoscendo la risposta in frequenza per $\omega \geq 0$, è possibile ricavarla anche per valori negativi di ω .

2 Risposta esponenziale

Si supponga di voler calcolare la risposta del sistema ad un ingresso di tipo esponenziale e scritto nella forma

$$u(t) = e^{\lambda t} \quad (17)$$

Esiste un teorema che permette di definire l'uscita del sistema relativa ad un ingresso di tipo esponenziale

Theorem 2.1. Se si applica a un sistema lineare asintoticamente stabile con funzione di trasferimento l'ingresso sinusoidale

$$u(t) = Ue^{\lambda t} \quad (18)$$

l'uscita del sistema una volta esaurito il transitorio avrà forma

$$\hat{y}(t) = G(\lambda)Ue^{\lambda t} \quad (19)$$

indipendentemente dallo stato iniziale del sistema.

La proprietà appena enunciata è significativa solo quando l'andamento asintotico non converge a 0, cioè quando la costante λ è positiva o nulla, oppure la velocità con cui $e^{\lambda t}$ tende a 0 è inferiore rispetto alla velocità con cui il transitorio si esaurisce.

Inoltre, se λ coincide con uno degli zeri della funzione di trasferimento l'uscita tende asintomaticamente ad annullarsi per qualsiasi valore dello stato iniziale. Il motivo è presto detto, se uno degli zeri coincide con λ abbiamo che

$$y(t) = G(\lambda)Ue^{\lambda t} = 0Ue^{\lambda t} = 0 \quad (20)$$

Questa proprietà prende il nome di *proprietà bloccante*. Un caso particolare da tenere conto è quando ci troviamo in presenza di un sistema che non rispetta la proprietà di **stabilità asintotica**. Ci chiediamo se, alimentando il sistema con un ingresso

$$u(t) = Ue^{\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad (21)$$

esiste uno stato iniziale $x(0)$ tale per cui il movimento dello stato sia di tipo esponenziale, nella forma

$$x(t) = x(0)e^{\lambda t} \quad (22)$$

La risposta la ricaviamo prendendo in considerazione la

Part III

Criteri di stabilità dei sistemi

Chapter 8

Introduzione

Dalle considerazioni iniziali sulla stabilità sappiamo che un sistema è stabile se e solo se tutte le radici dell'equazione caratteristica sono negative o hanno parte reale negativa. Dobbiamo inoltre fare delle assunzioni

- Consideriamo cambiamenti del **set-point** piuttosto che dei disturbi veri e propri.
- Tutti i poli sono distinti.
- La funzione di trasferimento è un rapporto di polinomi

Prendiamo un esempio, supponiamo che ci venga data una funzione di anello aperto:

$$G_{OL} = \frac{10(0.5s + 1)}{s(2s + 1)} \quad (1)$$

Supponiamo di dover studiare la stabilità della funzione in anello chiuso. Per farlo dobbiamo studiare quando

$$1 + G_{OL} = 1 + \frac{10(0.5s + 1)}{s(2s + 1)} = \frac{2(s^2 + 3s + 5)}{s(2s + 1)} \quad (2)$$

è uguale a 0. Però, uguagliare quest'espressione a 0 equivale a uguagliare il nominatore della funzione a 0

$$1 + G_{OL} \Rightarrow s^2 + 3s + 5 = 0 \quad (3)$$

Risolvendo questa semplice equazione siamo in grado di studiare se il nostro sistema è stabile. Prendiamo anche un altro esempio. Supponiamo che ci venga data la funzione di trasferimento $1 + G_{OL}$

$$1 + G_{OL} = s + 0.2k - 1 \quad (4)$$

La particolarità di questa funzione è la presenza di un termine simbolico. Andando a risolvere ci accorgiamo che esiste una dipendenza diretta tra il polo (che determina la stabilità) e il termine simbolico

$$s = 1 - 0.2k \quad (5)$$

Prendiamo un ultimo esempio

$$G(s) = \frac{k_c}{(2s + 1)(5s + 1)} \quad (6)$$

Per studiare la stabilità dobbiamo, come al solito, studiare la funzione di trasferimento in anello chiuso:

$$1 + G(s) = \frac{10s^2 + 7s + k_c + 1}{(2s + 1)(5s + 1)} \quad (7)$$

La posizione dei poli dipenderà dalla posizione di quel coefficiente simbolico k che rileviamo nell'espressione, in quanto dovremmo risolvere

$$10s^2 + 7s + k_c + 1 = 0 \quad (8)$$

Risolvere questo tipo di equazioni è estremamente complesso. Potrebbe essere comodo avere dei criteri che ci permettano di studiare la stabilità in presenza di termini simbolici di questo tipo. Durante il corso approfondiremo 5 diverse tipologie di criteri

- Criterio di Routh.
- Luogo delle radici.
- Diagrammi di Bode.
- Criterio di Nyquist.

Chapter 9

Criterio di Routh

In questo capitolo approfondiremo il primo criterio, detto criterio di **Routh**. Questo metodo di verifica della stabilità per un sistema dinamico venne sviluppato dal matematico **E. J. Routh** nel 1905. In realtà, già nel 1869 il fisico **Maxwell** stabilì un criterio di stabilità per i polinomi di grado fino e uguale a 3, ma non andò oltre. Seguendo il percorso tracciato da Maxwell, Routh riuscì a definire un criterio in grado di valutare il segno delle radici di un polinomio nel caso generale.

È un metodo puramente algebrico, utilizzato, nello specifico, a **sistemi di controllo lineari tempo-invarianti** con equazione caratteristica in forma polinomiale

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (1)$$

Un caso in cui il criterio non è applicabile è nei sistemi in cui esiste un ritardo di tempo, data la presenza di un termine esponenziale: in questi casi si cerca di costruire un'approssimazione polinomiale. Il primo passo per arrivare al criterio di **Routh** è definire una condizione per la stabilità

Lemma 0.1. (Condizione **necessaria** per la stabilità) Tutti gli $n + 1$ coefficienti del polinomio devono avere lo stesso segno

Questa condizione è **necessaria**, ma da sola non è sufficiente per stabilire la stabilità di un sistema; eccetto nel caso in cui $n \leq 2$, in cui la condizione è **necessaria e sufficiente**.

Esiste una condizione **necessaria e sufficiente** la stabilità

Lemma 0.2. (Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità) Supponendo che la condizione necessaria sia verificata, tutti gli $n + 1$ elementi della prima colonna della tabella di **Routh** devono avere lo stesso segno.

Per applicare questo criterio è necessario costruire una tabella, detta **tabella di Routh**: possiamo costruirla a partire dai coefficienti della funzione di trasferimento. Essa possiede $n + 1$ righe e ha una struttura triangolare: ogni due righe, escludendo la prima nel caso in cui n sia pari, il numero di elementi diminuisce di 1.

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...	
$n - 1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...	
$n - 2$	γ_1	γ_2	γ_3	...	
:	:	:	:		
1	b_1	b_2			
0	c_1				

La costruiamo iterativamente dividendo il procedimento in due parti, quello per costruire le prime due righe e quello per costruire le restanti $n - 2$ righe. Per le prime due righe dobbiamo dividere il polinomio in due parti

- Polinomio pari

$$a_n s^n + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_0 \quad (3)$$

- Polinomio dispari

$$a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-3} s^{n-3} + \cdots + a_1 s \quad (4)$$

Le prime due righe si costruiscono mettendo i coefficienti del polinomio pari nella prima riga e il coefficienti del polinomio dispari nella seconda riga.

Il calcolo dei restanti coefficienti è leggermente più complesso. Prendiamo come esempio il coefficiente γ_1 , lo possiamo calcolare come

$$\gamma_1 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix}}{a_{n-1}} \quad (5)$$

Come si osserva facilmente, è sufficiente calcolare il determinante del minore ottenuto prendendo le due colonne sopra γ_i e le due colonne a destra. Dividiamo successivamente il determinante del minore per il termine immediatamente sopra γ_1 . Possiamo procedere iterativamente per tutti i coefficienti fintanto che non abbiamo riempito tutta la tabella.

Se nella prima colonna troviamo dei cambi di segno possiamo sfruttare il seguente risultato:

Theorem 0.3. Se gli elementi sulla prima colonna non hanno tutti lo stesso segno il numero di radici con parte reale positiva è uguale al numero di cambi di segno dei coefficienti della prima colonna.

Esempio

Supponiamo di avere il seguente polinomio

$$s^6 + s^5 + 4s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 4s + 2 = 0 \quad (6)$$

Dividiamo in **polinomio pari** e **polinomi dispari** e inseriamo nella tabella di **Routh**

$$\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \end{array} \quad (7)$$

La condizione necessaria è rispettata, infatti tutti i coefficienti del polinomio hanno lo stesso segno. Andiamo ora a calcolare i coefficienti λ applicando la formula (nell'esempio mi limiterò a farla solo per γ_1)

$$\gamma_1 = -\frac{\det \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}}{1} = \frac{-1}{-1} = 1 \quad (8)$$

Andando a calcolare il resto dei coefficienti γ_i otteniamo.

$$\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{array} \quad (9)$$

Calcolando allo stesso identico modo il resto dei coefficienti della tabella di **Routh**

$$\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & -\frac{12}{5} & 2 \\ 1 & -\frac{74}{12} \\ 0 & 2 \end{array} \quad (10)$$

Il secondo teorema di **Routh**, secondo il quale il numero di cambi di segno nella prima colonna equivale al numero di radici del polinomio con parte reale maggiore di zero, ci garantisce che abbiamo due radici instabili (abbiamo due cambi di segno): radici con parte reale maggiore di 0.

Esempio

Supponiamo di partire da una G_{OL} scritta nella forma

$$G_{OL} = \frac{K_c}{(s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{3}+1\right)} \quad (11)$$

Per determinare il valore per cui il sistema risulta stabile, devo studiare $G_{CL} = 1 + G_{OL}$

$$G_{CL} = \frac{s^3 + 6s^2 + 11s + 6(1 + K_c)}{(s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{3}+1\right)} \quad (12)$$

Per studiare questo polinomio presenta un termine K_C ignoto, non posso quindi dire con certezza se il sistema sia stabile o meno, poiché dipende dal valore che assume il termine K_C . Il criterio di Routh ci viene in aiuto in questo caso, proviamo infatti a costruire la tabella di Routh del denominatore

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 6 & 6(1 + K_C) \\ 2 & 10 - K_C & \\ 0 & 6(1 + K_C) & \end{array} \quad (13)$$

Dobbiamo garantire che la prima colonna sia interamente positiva affinché il sistema sia stabile: sarà quindi sufficiente impostare un sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 10 - K_C > 0 \\ 6(1 + K_C) > 0 \end{cases} \quad (14)$$

Il cui risultato sarà $-1 < K_C < 10$. Dunque, fintanto che sceglio un valore di $K_c \in]-1, 10[$, il nostro sistema sarà **stabile**.

1 Casi singolari

Nel criterio di Routh troviamo due casi limite distinti

- Il primo termine di una riga è nullo.
- Una intera riga con solo coefficienti a 0

Supponiamo, ad esempio, di avere un polinomio

$$p(s) = s^3 + s + 2 \quad (15)$$

e costruiamo la sua tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & c_1 & \end{array} \quad (16)$$

Quello che accade è che mi troverò, nel calcolo di γ_1 , a fare una divisione per 0. Per risolvere questa problematica posso applicare due soluzioni

- Faccio uno **shift** a sinistra delle cifre, così da eliminare lo zero come coefficiente della divisione.
- Sostituisco 0 con un $\varepsilon_0 \approx 0$: quindi un numero molto vicino allo zero, ma diverso da 0.

Posso a questo punto popolare la restante tabella di Routh con i vari coefficienti e, solo alla fine, devo fare il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ di tutti i coefficienti che presentano una ε .

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_{ij} \quad (17)$$

dove R_{ij} è un coefficiente della tabella di Routh. Una volta fatto il limite è sufficiente applicare i due teoremi di Routh.

Studiamo adesso il secondo caso

$$p(s) = s^3 + bs^2 + cs + 1 \quad (18)$$

Costruiamo la tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & c \\ 2 & b & 1 \\ 1 & \frac{bc - 1}{b} & \\ 0 & 1 & \end{array} \quad (19)$$

Se $bc - 1 > 0$ e $b, c > 0$, allora la condizione necessaria, ma non sufficiente, di Routh è rispettata. Tuttavia, se $bc = 1$, abbiamo una riga di tutti 0

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & c \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{array} \quad (20)$$

Per risolvere questo problema utilizziamo il metodo dell'equazione ausiliaria: prendo la riga precedente a quella con tutti 0 e studio l'equazione relativa. Nel nostro caso

$$bs^2 + 1 = 0 \rightarrow s^2 = -\frac{1}{b} = \pm j\sqrt{\frac{1}{b}} \quad (21)$$

le radici dell'equazione ausiliaria coincidono con le radici mancanti per le quali la tabella di Routh non mi sta dando informazioni. Il secondo metodo è detto **metodo della derivata**; come anche nel caso dell'equazione ausiliaria, partiamo dall'equazione relativa alla riga precedente alla riga di 0

$$q(s) = bs^2 + 1 \quad (22)$$

invece che calcolare le radici dell'equazione ausiliaria, la derivo

$$\frac{dq}{ds}(s) = 2bs \quad (23)$$

sostituisco il coefficiente della derivata nella riga di tutti 0

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & c \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 2b & \\ 0 & 1 & \end{array} \quad (24)$$

Anche in questo caso è sufficiente valutare se la prima colonna ha dei cambi di segno o meno: il metodo è lo stesso di una qualsiasi tabella di routh non singolare. L'unica differenza è che, se la prima colonna non presenta alcuna variazione di segno, allora il sistema è **semplicemente stabile**. Inoltre, presenta **instabilità** per

- Presenza di poli con parte reale maggiore di 0.
- Poli immaginari con $\mu > 1$

In questo caso particolare del criterio di Routh si parla di **simmetria quadrangolare**; nello specifico, le radici possono essere

- Simmetriche rispetto all'asse immaginario \Rightarrow instabilità.
- Simmetriche rispetto all'asse reale \Rightarrow stabilità semplice.
- Simmetriche rispetto all'origine \Rightarrow instabilità

Quando l'equazione ausiliaria, nel caso di configurazioni polari con soluzioni immaginarie pure significa trovare le frequenze di oscillazione del sistema, quelle ai limiti della stabilità per cui il sistema dinamico oscilla. Nel caos precedente

$$a(s) = bs^2 + 1 = 0 \iff s = \pm j\sqrt{\frac{1}{b}} \quad (25)$$

se impongo $s = j\omega$ ottengo

$$a(j\omega) = -b\omega^2 + 1 \iff \omega = \pm \frac{1}{\sqrt{b}} \quad (26)$$

Chapter 10

Diagrammi di Bode

Hendrik Wade Bode è stato un ingegnere elettrico, matematico e inventore statunitense, noto per i suoi contributi fondamentali alla teoria dei controlli automatici e all'ingegneria dei sistemi. Lavorò a lungo nei laboratori Bell, dove sviluppò metodi pionieristici per l'analisi dei sistemi lineari nel dominio della frequenza. A lui si devono i celebri **diagrammi di Bode**, strumenti essenziali per la rappresentazione del guadagno e della fase nei sistemi dinamici.

Nel corso della sua carriera, Bode contribuì anche allo sviluppo delle tecnologie radar durante la Seconda guerra mondiale e fu tra i promotori dell'approccio moderno alla retroazione nei sistemi elettrici e meccanici. La sua visione unificata tra teoria matematica e applicazione pratica ha avuto un impatto duraturo sia in ambito accademico sia industriale.

Tra le sue opere più importanti si ricorda il libro *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, che ha influenzato profondamente la didattica dei controlli. Dopo il suo ritiro dai Bell Labs, insegnò alla Harvard University, continuando a influenzare generazioni di ingegneri e ricercatori.



Figure 10.1: Hendrik Wade Bode

Nei sistemi SISO i **diagrammi di Bode** sono la forma più utilizzata per rappresentare la risposta in frequenza $G(j\omega)$ associata alla funzione di trasferimento $G(s)$. Essi sono costituiti da una coppia di curve, quindi di diagrammi, che rappresentano

- **diagramma del modulo:** il diagramma del modulo rappresenta il modulo di $|G(j\omega)|$.
- **diagramma della fase:** il diagramma della fase rappresenta l'argomento della risposta in frequenza $\arg(G(j\omega))$.

La rappresentazione mediante diagrammi di Bode può essere fatta anche per una generica funzione $G(j\omega)$, anche per sistemi instabili, nei quali la risposta in frequenza non esiste: in questi casi, il diagramma perde il suo significato come rappresentazione grafica di prove sperimentali e assume un significato prettamente matematico. Un caso particolare dei diagrammi di Bode è quando abbiamo un sistema in cascata.

Quando abbiamo dei sistemi in cascata, il diagramma di Bode del sistema complessivo, si ottiene come somma dei diagrammi di Bode dei singoli sottosistemi. Inoltre, anche il diagramma di Bode di una funzione data in forma fattorizzata, si ottiene come la somma dei diagrammi di Bode dei singoli fattori.

Esistono anche due proprietà fondamentali che, semplificano enormemente la rappresentazione dei diagrammi di Bode:

$$\boxed{|G(j\omega)| = |G(-j\omega)|}$$

$$\boxed{\arg(G(j\omega)) = -\arg(G(j\omega))}$$

Funzione pari

Funzione dispari

1 Tipologie di diagrammi

Prima di entrare nel vivo della trattazione sulle tipologie dei diagrammi di Bode, è opportuno inotrodurre due definizioni:

Definition 1.1. (Decade) Si definisce come **decade** la distanza in scala logaritmica tra numeri il cui rapporto è 10.

Definition 1.2. (Ottava) Si definisce come **ottava** la distanza in scala logaritmica tra numeri il cui rapporto è 2.

L'ottava ha origini legate agli studi musicali, dove rappresenta l'intervallo di otto note che compongono una scala completa; il rapporto tra le frequenze di due suoni in un intervallo di un'ottava è pari a due.

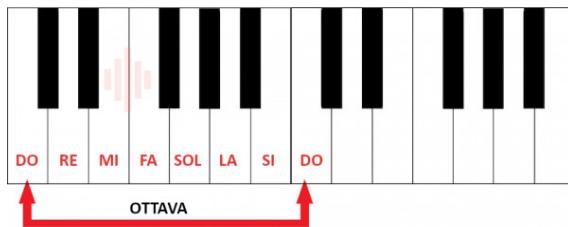


Figure 10.2: Esempio di un'ottava musicale

Generalmente, cerchiamo di ragionare in termini di decadi, essendo la scala logaritmica che utilizziamo in base 10.

Nel tracciamento dei diagrammi è comodo utilizzare una scala logaritmica in base dieci per l'ascissa, dove è riportata la pulsazione ω , eventualmente normalizzata rispetto ad un valore di riferimento.

$$x_{wb} = 20 \log_{10}(|x|) \quad \text{Scala logaritmica in base 10} \quad (1)$$

L'ordinata del diagramma del modulo potrebbe anch'essa essere rappresentata in scala logaritmica, ma la rappresentazione più diffusa utilizza i decibel, che in qualche modo **linearizzano** la scala logaritmica

$$x_{db} = 20 \log_{10}(|x|) \quad (2)$$

Come per l'ottava, anche in questo caso l'unità di misura trae origine dal mondo musicale: l'orecchio umano percepisce l'intensità del suono in scala logaritmica rispetto alla potenza acustica del volume stesso. Se si aumenta l'intensità del suono di 10 volte, l'orecchio umano, non percepisce il suono 10 volte più forte, ma solo di una quantità proporzionale al logaritmo della variazione. Esistono due semplici regole per calcolare un valore in scala logaritmica

- Ogni 6Db il valore di A raddoppia.
- Ogni 20Db il valore di A è 10 volte maggiore.

L'uso di scale logaritmiche semplifica enormemente il tracciamento dei diagrammi, poiché:

- Permette di rappresentare in maggiore dettaglio l'andamento dei diagrammi per pulsazioni basse, pur mantenendo ampio il campo di visualizzazione di $|G(j\omega)|$ e per la fase $\arg(G(j\omega))$.
- Semplifica il prodotto tra numeri complessi.
- Ci permette di utilizzare le proprietà del logaritmo.

Nel caso dell'ordinata del diagramma di fase la questione cambia leggermente, infatti, la scala di rappresentazione è **lineare** e la sua unità di misura è il **radiante**. Tuttavia, sono ammissibili anche rappresentazioni in **gradi**. Possiamo riassumere il tutto nella seguente tabella

	Diagramma del modulo	Diagramma della fase
Ascissa	Scala logaritmica	Scala logaritmica
Ordinata	Scala logaritmica	Scala lineare

Le proprietà della scala logaritmica consentono di eseguire il prodotto di più funzioni di trasferimento tramite la somma grafica dei singoli diagrammi di modulo e fase. Per fare ciò occorre scrivere, opportunamente, la nostra funzione di trasferimento, nella Forma di Bode

$$G(j\omega) = \frac{K_B}{(j\omega)^h} \cdot \frac{\underbrace{\prod_{i=1}^{m-u} (1 \pm j\omega T_{zi})}_{\text{Zeri semplici}}}{\underbrace{\prod_{i=1}^{n-h-r} (1 \pm j\omega T_{pi})}_{\text{Poli semplici}}} \cdot \frac{\underbrace{\prod_{i=1}^u \left(1 \pm j\omega \frac{2\xi_{zi}}{\omega_{0z,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{0z,i}^2} \right)}_{\text{Coppie di zeri complessi e coniugati}}}{\underbrace{\prod_{i=1}^r \left(1 \pm j\omega \frac{2\xi_{pi}}{\omega_{0p,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{0p,i}^2} \right)}_{\text{Coppie di poli complessi e coniugati}}} \quad (3)$$

dove h rappresenta il tipo di sistema, i termini T_{zi} e T_{pi} rappresentano, rispettivamente, le costanti di tempo del numeratore e del denominatore, K_B rappresenta il guadagno di Bode, gli elementi $(j\omega)$ rappresentano i poli nell'origine, gli elementi $\omega_{0z,i}$ e $\omega_{0p,i}$ rappresentano, rispettivamente, le pulsazioni naturali dei termini del numeratore e del denominatore con radici complesse coniugate e, infine, i termini ξ_{pi} e ξ_{zi} rappresentano, rispettivamente, i relativi fattori di smorzamento. Grazie proprio alla forma di Bode siamo in grado di semplificare il tracciamento dei diagrammi: infatti, ad esempio, nel caso in cui non ci siano radici complesse coniugate, con \mathbf{m} zeri e \mathbf{n} poli semplici, si verifica che

$$\begin{aligned} \log(|G(j\omega)|) &= \sum_{i=1}^m \log(|1 \pm j\omega T_{zi}|) - \sum_{i=1}^n \log(|1 \pm j\omega T_{pi}|) \\ \arg(G(j\omega)) &= \sum_{i=1}^m \arg(1 \pm j\omega T_{zi}) - \sum_{i=1}^n \arg(1 \pm j\omega T_{pi}) \end{aligned} \quad (4)$$

In generale però, per una funzione che non rispetta, ahimè, questa condizione, utilizzeremo una proprietà discussa all'inizio del capitolo: *il diagramma di Bode di un sistema è la somma dei diagrammi di Bode dei termini che lo compongono*. Nello specifico, studieremo il sistema generale *componente per componente* e, successivamente, ne rappresenteremo il diagramma complessivo come somma dei diagrammi di ogni singolo *componente*.

1.1 Caso di costante moltiplicativa

Supponiamo di analizzare il termine costante della nostra risposta in frequenza

$$G(j\omega) = K_B \quad (5)$$

Il numero, essendo reale puro, ha fase pari a 0, se positivo, o a -180° , se negativo, e modulo pari a $|G(j\omega)| = |K_B|$. Inoltre, definiamo un valore reale r tale per cui

$$r = \begin{cases} 0 & \text{Re}(K_B) > 0 \\ 1 & \text{Re}(K_B) < 0 \end{cases} \quad (6)$$

Nella pratica, il diagramma di modulo è sempre una costante pari a $20 \log(|K_B|)$, mentre il diagramma della fase vale 0 se la costante di Bode è un numero positivo, invece, vale -180° se la costante di Bode è un numero negativo. Ad esempio, se abbiamo $G(j\omega) = 40$, abbiamo che

$$20 \log(40) = 32 \text{dB} \quad (7)$$

Inoltre, in quanto numero positivo, la sua fase equivale a 0. Abbiamo a questo punto sufficienti informazioni per disegnare il diagramma di Bode relativo al termine costante

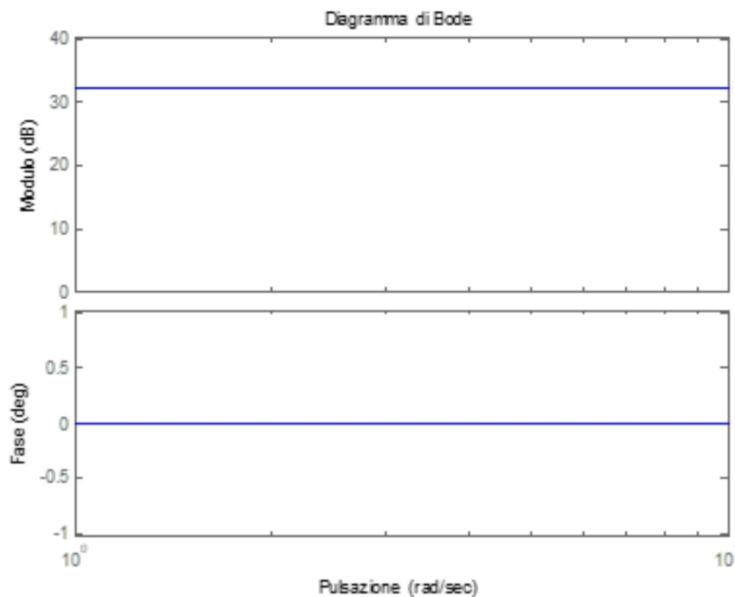


Figure 10.3: Diagrammi di Bode per il guadagno

1.2 Caso dei poli nell'origine

Supponiamo di voler analizzare ora il termine relativo ai poli nell'origine

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^h} \quad (8)$$

Il diagramma del modulo equivale, in questo caso, a

$$20 \log(\omega^{-h}) = -20h \log_{10}(\omega) \quad (9)$$

che nel caso che prendiamo in esame, quello con un $h = 2$, equivale a

$$-40 \log(\omega) \quad (10)$$

che possiamo rappresentare, graficamente, come

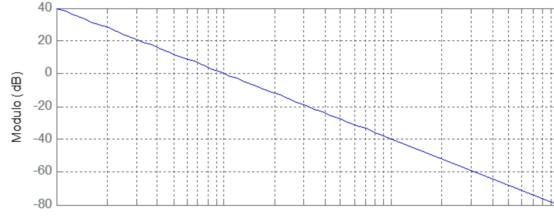


Figure 10.4: Diagramma del modulo per i poli nell'origine

Il diagramma della fase, costante al variare di ω vale

$$\arg(G(j\omega)) = -h \cdot \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

che nel nostro caso, quello con $h = 2$, equivale a

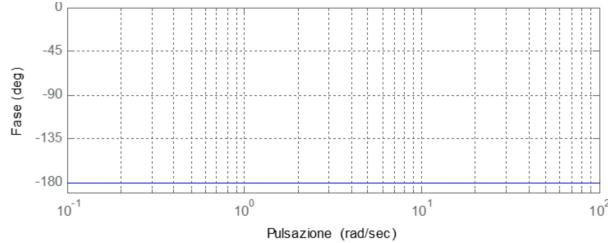


Figure 10.5: Diagramma della fase per i poli nell'origine

1.3 Caso polo semplice

Supponiamo adesso di analizzare il caso in cui si abbia un singolo polo reale

$$G(s) = \frac{1}{1 + s\tau} \quad (12)$$

Imponendo $s = j\omega$ otteniamo

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot e^{-j \arctan(\omega\tau)} \quad (13)$$

Il modulo e la fase della nostra risposta saranno, rispettivamente

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}\right) \\ \arg(G(j\omega)) &= -\arctan(\omega\tau) \end{aligned} \quad (14)$$

Per quanto riguarda lo studio del modulo del sistema possiamo applicare delle ipotesi esemplificative, che ci permetteranno di semplificare il tracciamento del diagramma

- Se $\omega\tau \gg 1$, allora il contributo dato dall'aggiunta di 1 diventa del tutto ininfluente; possiamo quindi scrivere

$$|G(j\omega)| = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\omega\tau} \right) \text{ dB} \quad (15)$$

- Se $\omega\tau \ll 1$, allora il numeratore diventa approssimativamente 1, di conseguenza posso scrivere

$$20 \log_{10}(1) = 0 \text{ dB} \quad (16)$$

Possiamo portare la semplificazione fino ad punto di rottura, quindi il punto in cui vale $\omega = \tau^{-1}$, così da poter tracciare il diagramma in forma approssimata; nello specifico, distinguiamo tre casi

- Se $\omega = \tau^{-1}$, allora abbiamo che

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau \cdot \tau^{-1})^2}} \implies |G(j\omega)| = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -3 \text{ dB} \quad (17)$$

- Se $\omega < \tau^{-1}$ allora abbiamo che

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1 \implies 20 \log_{10}(|G(j\omega)|) = 0 \text{ dB} \quad (18)$$

- Se $\omega > \tau^{-1}$ allora abbiamo che

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{(\omega\tau)^2}} = \frac{1}{\omega\tau} \implies |G(j\omega)| = 20 \log_{10}(|G(j\omega)|) \quad (19)$$

Il diagramma ottenuto utilizzando le ipotesi esemplificative è detto **diagramma asintotico**.

Possiamo anche concludere, senza dimostrarlo, che l'errore fatto nell'approssimazione del diagramma del modulo è massimo nel punto di rottura del sistema e si riduce simmetricamente rispetto ad esso.

Analogamente al diagramma del modulo, è opportuno costruire anche il diagramma della fase. Dalla scomposizione del polo in forma **polare**, sappiamo che

$$-\arctan(\omega\tau) \quad (20)$$

Analogamente al diagramma della fase, posso attuare delle ipotesi esemplificative anche sul diagramma della fase, andando a applicare delle approssimazioni che permettano di rappresentare in modo semplificato il mio sistema. La prima classe di ipotesi esemplificative riguarda i **poli stabili**, quindi, tutti quei poli per cui $\tau > 0$ e, di conseguenza, per cui la parte reale è negativa:

- Se $\omega\tau \ll 1$, allora la fase $\arg(G(j\omega)) \approx 0^\circ$.
- Se $\omega\tau \gg 1$, allora la fase $\arg(G(j\omega)) \approx -90^\circ$.
- Se $\omega\tau = 1$, allora $\arg(G(j\omega)) = -45^\circ$.

Esiste una regola specifica per rappresentare i diagrammi di fase approssimati: una decade prima del punto di rottura considero la fase pari a 0 gradi, una decade dopo la considero a -90 gradi e, tra questi due punti, faccio un raccordo lineare, passando esattamente per il valore -45 gradi.

La seconda classe di ipotesi esemplificative è relativa ai poli instabili, quindi tutti quei poli tali per cui $\tau < 0$

- Se $\omega\tau \ll 1$, allora la fase $\arg(G(j\omega)) \approx 0^\circ$.
- Se $\omega\tau \gg 1$, allora la fase $\arg(G(j\omega)) \approx +90^\circ$.
- Se $\omega\tau = 1$, allora $\arg(G(j\omega)) = +45^\circ$.

Il diagramma della fase, nel caso di poli instabili, varia di segno rispetto a quello dei poli stabili; invece, il diagramma della fase rimane del tutto uguale. È importante ricordare che nel caso di poli instabili, la risposta in frequenza non esiste, ma è comunque possibile tracciare il diagramma di Bode.

Al netto di tutte queste considerazioni, posso concludere che il diagramma di Bode nel caso del polo reale semplice equivale a

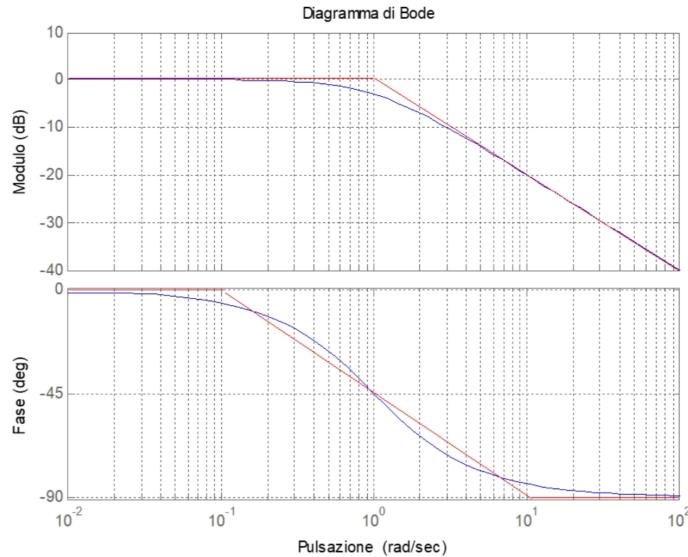


Figure 10.6: Diagrammi di Bode per polo reale semplice

Come si può osservare anche nell’immagine, il diagramma reale (rappresentato in blu), è leggermente diverso rispetto a quello approssimato, rappresentato in rosso. Nella pratica, questa approssimazione non ci causa alcun problema particolare.

Inoltre, nel caso in cui si abbiano dei poli multipli, la logica da seguire diventa estremamente semplice: i poli multipli sono dei prodotti di poli semplici e, nel caso in cui si ragioni con i logaritmi, i prodotti diventano delle somme.

1.4 Caso dello zero semplice

Nel caso dello zero semplice valgono le medesime considerazioni fatte per il polo semplice, supponiamo infatti di imporre la restrizione $s = j\omega$ alla funzione di trasferimento relativa ad uno zero semplice

$$G(j\omega) = 1 + j\omega\tau = \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \cdot e^{j\arctan(\omega\tau)} \quad (21)$$

Analogamente a quanto visto in precedenza posso applicare le seguenti ipotesi esemplificative

- Se $\omega\tau \ll 1$, allora $|G(j\omega)| = 0$ dB.
- Se $\omega\tau \gg 1$, allora $|G(j\omega)| = 20 \log_{10}(\omega\tau)$ dB

Inoltre, estendendo l’approssimazione, si può tracciare in forma approssimata il diagramma assintotico. Similmente a quanto detto per il polo semplice, possiamo definire le seguenti ipotesi esemplificative:

- Se $\omega < \tau^{-1}$, allora $|G(j\omega)| = 0$ dB.
- Se $\omega > \tau^{-1}$, allora $|G(j\omega)| = 20 \log_{10}(\omega\tau) = 20(\log_{10}(\omega) + \log_{10}(\tau))$
- Se $\omega = \tau^{-1}$, allora $|G(j\omega)| = 20 \log_{10}(\sqrt{2}) = 3$ dB

Il secondo caso può essere ulteriormente approssimato come una retta nel diagramma logaritmico di pendenza 20 dB/decade.

Dopo aver costruito il diagramma del modulo è necessario tracciare anche il diagramma della fase. Dalla scomposizione del nostro zero semplice in forma polare, sappiamo che

$$\arg(G(j\omega)) = \arctan(\omega\tau) \quad (22)$$

Anche in questo caso abbiamo le due classi di ipotesi esemplificative che, ci permettono di rappresentare il diagramma della fase in una forma molto semplificata. La prima classe è quella per gli zeri stabili, quindi gli zeri con $\tau > 0$.

- Se $\omega\tau \ll 1$, allora la fase $\arg(G(j\omega)) \approx 0^\circ$.
- Se $\omega\tau \gg 1$, allora la fase $\arg(G(j\omega)) \approx +90^\circ$.
- Se $\omega\tau = 1$, allora $\arg(G(j\omega)) = +45^\circ$.

Esiste una regola specifica per rappresentare i diagrammi di fase approssimati: una decade prima del punto di rottura considero la fase pari a 0 gradi, una decade dopo la considero a 90°gradi e, tra questi due punti, faccio un raccordo lineare, passando esattamente per il valore 45 gradi. La classe di ipotesi esemplificative per gli zeri instabili è facilmente ottenibile invertendo il segno della classe degli zeri stabili.

Al netto di tutte queste considerazioni, posso concludere che il diagramma di Bode nel caso del polo reale semplice equivale a

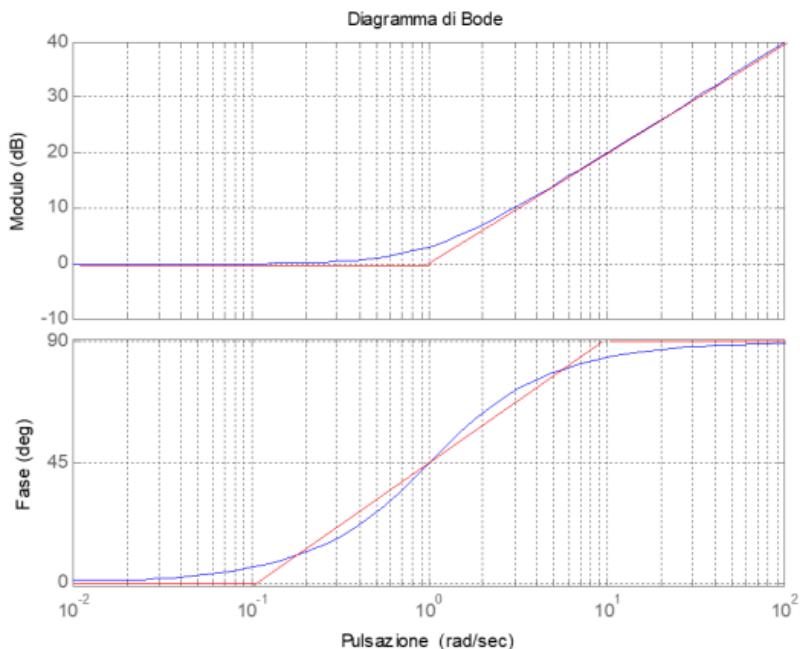


Figure 10.7: Diagramma di Bode per lo zero semplice

Nel caso di zeri e poli, semplici, multipli possiamo utilizzare le proprietà di somma dei diagrammi logaritmici. Nella pratica è quindi sufficiente sommare i diagrammi relativi ai vari, rispettivamente, poli e zeri semplici.

1.5 Poli complessi coniugati

Supponiamo di avere una funzione di trasferimento con dei poli complessi coniugati

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} s + \frac{\omega_0^2}{s^2}} \quad (23)$$

Supponiamo di restringere la funzione di trasferimento al semiasse immaginario positivo $s = j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \quad (24)$$

Il modulo del nostro sistema equivale a

$$|G(j\omega)| = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \right) \quad (25)$$

Il diagramma del modulo può essere scritto in forma approssimata nelle ipotesi seguenti

- Se $\omega \ll \omega_0$, allora $|G(j\omega)| = 0 \text{ dB}$.
- Se $\omega \gg \omega_0$, allora

$$|G(j\omega)| = 20 \log_{10} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = 40(\log_{10}(\omega_0) - \log_{10}(\omega)) \quad (26)$$

che viene rappresentato nel diagramma logaritmico con una retta con pendenza -40 dB/decade .

Si noti che, in generale, il diagramma asintotico non ha una dipendenza dallo smorzamento; stessa cosa però non possiamo dire nel punto di rottura del sistema, infatti quando ci troviamo nel caso in cui $\omega = \omega_0$ risulta che

$$|G(j\omega)| = -20 \log(|2 \cdot \xi|) \quad (27)$$

Dobbiamo quindi studiare cosa succede al sistema al variare dei possibili valori assunti da ξ . In generale, possiamo dire che

$$\begin{cases} +\infty & \xi = 0 \\ 0 & \xi = 1/2 \\ -3 \text{ dB} & \xi = \sqrt{2}/2 \\ -6 \text{ dB} & \xi = 1 \end{cases} \quad (28)$$

Si vede immediatamente che l'errore dipende dal fattore di smorzamento ξ e che si mantiene limitato per valori non troppo piccoli di ξ . Di conseguenza, l'approssimazione asintotica costituirà un'approssimazione accettabile per errori non troppo grandi, ergo, per valori non troppo piccoli dello smorzamento. In generale, possiamo dire che il diagramma asintotico è accurato fintanto che lo smorzamento è $\xi > 0.3$. Il diagramma della fase assume questo aspetto

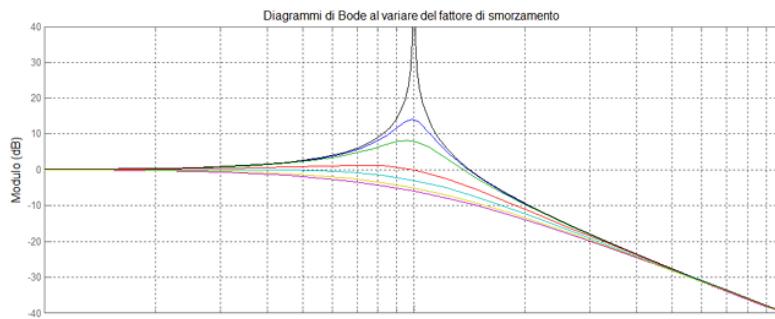


Figure 10.8: Diagramma della fase per poli complessi coniugati

Il massimo dell'ampiezza corrisponde al minimo della funzione

$$f(u) = (1 - u^2)^2 + 4\xi^2 u^2, \quad u = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (29)$$

derivando e calcolando il massimo, si ottiene

$$u_M = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (30)$$

La fase è invece dipendente dalla fase del numero complesso che troviamo al denominatore

$$\arg(G(j\omega)) = -\text{atan2}\left(\frac{\frac{2\xi}{\omega_0}\omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) \quad (31)$$

La funzione atan2 equivale a una funzione che estende il concetto di arcotangente su tutti e 4 i quadranti. Per calcolare questa funzione trigonometrica sarà sufficiente valutare in quale delle seguenti 4 casistiche rientra la fase che dobbiamo calcolare

$$\Phi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) & \alpha > 0 \\ \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \pi & \alpha < 0 \wedge \beta \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - \pi & \alpha < 0 \wedge \beta < 0 \\ \text{sgn}(\beta)\left(\frac{\pi}{2}\right) & \alpha = 0 \wedge \beta \neq 0 \end{cases} \quad (32)$$

Sempre per quanto riguarda la fase, possiamo applicare, come in tutti i casi visti fino a questo momento, delle ipotesi esemplificative

- Se $\omega \ll \omega_0$, allora la fase $\arg(G(j\omega)) \approx 0^\circ$.
- Se $\omega \gg \omega_0$, allora la fase $\arg(G(j\omega)) \approx -90^\circ$.
- Se $\omega = \omega_0$, allora $\arg(G(j\omega)) = -45^\circ$.

In generale, possiamo applicare anche in questo caso una regola pratica: considerare la fase nulla una decade prima del punto di rottura; pari a -180° una decade dopo il punto di rottura e raccordare linearmente i valori passando esattamente per -90° nel punto di rottura.

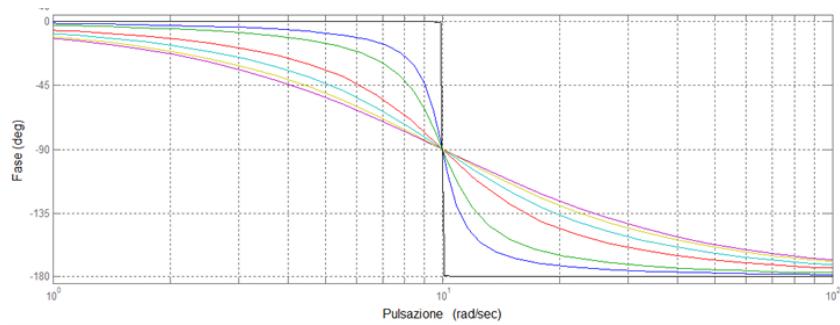


Figure 10.9: Diagramma della fase per poli complessi coniugati

Dal capitolo sui sistemi del secondo ordine abbiamo visto come lo **smorzamento** sia una grandezza che quantifica quanto un *sistema* è *in grado di limitare le oscillazioni*, quindi, quanto è in grado di evitare le **sovraetensioni** rispetto al valore di regime. Quando abbiamo dei poli complessi coniugati all'interno della risposta forzata non abbiamo, in generale dei problemi, l'unico caso in cui ci dobbiamo preoccupare è quando la pulsazione in ingresso si allinea alla pulsazione naturale del sistema, in quei casi si rischia di avere delle oscillazioni tali da rompere interamente il sistema.

1.6 Caso di zeri complessi coniugati

Il caso degli zeri complessi coniugati è estremamente semplice, è sufficiente prendere quanto detto per i poli complessi coniugati e invertire di segno i vari concetti introdotti

2 Il ritardo

Supponiamo di avere una funzione di trasferimento

$$G(s) = e^{-s\tau} \quad (33)$$

Restringendo la funzione nel dominio del tempo risulta che

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau} \quad (34)$$

Che è già un numero rappresentato in forma polare. Il modulo sarà quindi pari a 0 dB, mentre la fase sarà pari a $-\omega\tau$

Chapter 11

Luogo delle radici

Oltre ai metodi basati sulla risposta in frequenza (*diagrammi di Bode* e *diagrammi di Nyquist*), esistono anche delle altre tecniche di sintesi per l'analisi e la sintesi dei sistemi di controllo in **retroazione negativa**. Tra questi metodi, uno dei più noti è il **luogo delle radici** (o *root locus*, in inglese). L'idea alla base del **luogo delle radici** è che, conoscendo la funzione di trasferimento del sistema in anello aperto, rappresentata come

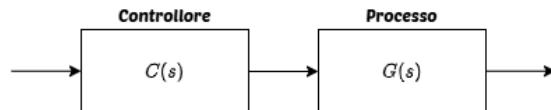


Figure 11.1: Sistema di controllo in anello aperto

attraverso una semplice rappresentazione grafica, sia possibile ricavare informazioni sull'esatta collocazione dei poli in **anello chiuso**. Quindi, i poli relativi al sistema

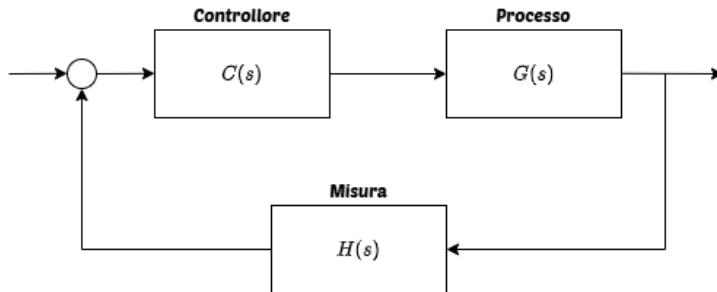


Figure 11.2: Sistema di controllo in anello chiuso (*retroazione negativa*)

Il **luogo delle radici** permette un'*analisi grafico-visuale* delle variazioni dei poli in catena chiusa al variare di uno o più parametri: durante il corso ci limiteremo a studiare un sistema a parametro singolo. Inoltre, il sistema di controllo a cui faremo riferimento ha una struttura molto più semplice; a tal proposito, faremo due ipotesi esemplificative:

- La prima ipotesi esemplificativa che facciamo è che il controllore sia una costante **proporzionale** K , quindi $C(s) = K$.
- La seconda ipotesi esemplificativa che facciamo è che $H(s)$ sia uguale a 1.

Il nostro obiettivo sarà quello di trovare la costante K per cui i poli della funzione di trasferimento in anello chiuso si posizionano, all'interno del *piano di Gauss*, in una posizione determinata dalle specifiche di progetto. La tecnica del **luogo delle radici** vede la luce intorno al 1950 grazie al

matematico **Walter R. Evans**. Walter Richard Evans (1920–1999) è stato un ingegnere e scienziato americano noto per il suo fondamentale contributo nell'ambito dell'ingegneria dei controlli automatici. Fin da giovane, subisce l'influenza della nonna, campionessa statunitense di scacchi. Grazie a lei impara il gioco degli scacchi, che lo porterà a sviluppare un tipo di mentalità, basata sul pensiero strategico e sulla previsione, che sarà fondamentale per tutta la sua carriera, in particolare, questo suo talento lo accompagnerà nel risolvere problemi complessi e sarà una qualità distintiva del suo approccio alla progettazione dei sistemi di controllo

*"The main key to learning, in my opinion, is to treat the problem as a game using all the simplifications possibile to get the approximate answer" - **Walter R. Evans***

Dopo essersi laureato in ingegneria elettrica presso l'Università di Stanford, lavorò per importanti enti e aziende come la General Electric e il Naval Ordnance Laboratory.

Il suo apporto più significativo alla teoria del controllo fu lo sviluppo del metodo del luogo delle radici (root locus), una tecnica grafica introdotta per la prima volta nel 1948, che consente di analizzare il comportamento delle radici di una funzione di trasferimento al variare di un parametro, tipicamente il guadagno. Questo metodo divenne presto uno strumento essenziale per la progettazione e l'analisi di sistemi di controllo retroazionati, permettendo agli ingegneri di visualizzare con immediatezza la stabilità e la risposta dinamica del sistema. Il luogo delle radici è oggi parte integrante dei corsi universitari di automazione e controllo e ha influenzato profondamente lo sviluppo della moderna teoria del controllo.

L'utilizzo del luogo delle radici ci permette di poter studiare il sistema anche nel caso in cui i poli siano instabili e, più in generale, in situazioni nelle quali non sono soddisfatte le condizioni di applicabilità del *criterio di Bode*. D'altra parte però, lo svantaggio principale di questa tecnica è la difficoltà che si ha nel trattare i sistemi con ritardo.

Prima di parlare del funzionamento vero e proprio del sistema, è utile cercare di capire da cosa deriva. Partiamo dalla nostra funzione di trasferimento del sistema in **anello aperto**

$$K \cdot G(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = K \frac{n(s)}{d(s)} \quad (1)$$

al numeratore troviamo gli **zeri** del sistema, mentre al denominatore troviamo i **poli** del sistema, descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)$. Quello che possiamo fare ora è cercare di definire la corrispettiva funzione di trasferimento del sistema in **anello chiuso**

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)} = \frac{K \frac{n(s)}{d(s)}}{1 + K \frac{n(s)}{d(s)}} = \frac{1}{d(s)} \frac{K \cdot n(s)}{\frac{1}{d(s)}(d(s) + K \cdot n(s))} = \\ &= \frac{d(s)}{d(s)} \frac{K \cdot n(s)}{d(s) + K \cdot n(s)} = \boxed{\frac{K \cdot n(s)}{d(s) + K \cdot n(s)}} \end{aligned} \quad (2)$$

La prima conclusione alla quale possiamo arrivare osservando la $W(s)$ è che, preso un sistema di controllo in anello aperto descritto da $G(s)$ e un il relativo sistema di controllo in anello chiuso $W(s)$, gli **zeri sono invarianti**. I poli del sistema in anello chiuso sono invece dati dall'equazione

$$d(s) + K \cdot n(s) = 0 \quad (3)$$

detta anche **equazione caratteristica del sistema**. L'insieme delle radici dell'equazione al variare di K e nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$, rappresentato il **luogo delle radici**. Supponendo di avere n zeri e m poli, con $m \geq n$, possiamo tranquillamente concludere che anche il **numero** di radici del denominatore è invariante tra $G(s)$ e $W(s)$ e che, quindi, il numero di rami del luogo delle radici è uguale al numero di poli della funzione $G(s)$

Definition 0.1. (Ramo) Si definisce come **ramo** la traiettoria descritta dalla radice dell'equazione caratteristica

$$d(s) + K \cdot n(s) = 0 \quad (4)$$

alla variazione del parametro K .

Per le costruzione del luogo delle radici occorre partire dall'equazione

$$\frac{n(s)}{d(s)} = -\frac{1}{K} \quad (5)$$

facilmente ottenibile attraverso semplici passaggi algebrici dell'equazione caratteristica. Inoltre, devono essere rispettate due condizioni

Theorem 0.1. (Condizioni necessarie) Data una funzione di trasferimento in anello chiuso $W(s)$, devono essere rispettate le seguenti condizioni

- **Condizione di fase:**

$$\begin{cases} \arg(n(s)) - \arg(d(s)) = -\pi \pm 2h\pi & K > 0 \\ \arg(n(s)) - \arg(d(s)) = \pm 2h\pi & K < 0 \end{cases} \quad (6)$$

- **Condizione sul modulo:**

$$\left| \frac{n(s)}{d(s)} \right| = \frac{1}{|K|} \quad (7)$$

La condizione **strettamente necessaria** per il tracciamento del luogo delle radici è la condizione di fase. Invece, la condizione di modulo è utilizzata per determinare il valore di K in un determinato punto del luogo delle radici, costituendo, di fatto, una condizione di taratura.

La seconda regola sul tracciamento del luogo delle radici riguarda *da dove parte e dove arriva*. Ponendo $K = 0$ nell'equazione caratteristica, si ottiene che che il *luogo parte dalle radici del sistema*. Successivamente, dividiamo per K l'equazione caratteristica

$$\frac{d(s)}{K} + n(s) = 0 \quad (8)$$

portando $K \rightarrow \infty$ si ottiene $n(s) = 0$. Quindi, si osserva che, aumentando la costante di guadagno K del controllore proporzionale, e al limite per $K \rightarrow \pm\infty$, il luogo delle radici, che partiva dai poli del sistema, arriva **sugli zeri del ciclo aperto del sistema**. Formalizzando il tutto, otteniamo

Theorem 0.2. Il luogo delle radici parte dai poli del sistema in ciclo aperto e arriva agli zeri del sistema in ciclo aperto, al finito o all'infinito.

Il senso del termine "al finito o all'infinito" deriva da un fatto che avevamo già accennato in precedenza. Essendo il numero di zeri minore o uguale al numero di poli, non è detto che tutti i poli *finiscano* in uno zero: quelli che non lo fanno, finiscono all'infinito. Esiste anche un'altra regola pratica utile per il tracciamento del luogo delle radici

Theorem 0.3. Tutto l'asse reale appartiene al luogo delle radici. Se $K > 0$, il luogo lascia alla propria destra un numero dispari di punti critici.

Prendiamo un primo esempio pratico, supponiamo che ci venga data

$$C(s) \cdot G(s) = \frac{K}{s \cdot (s+1)} \quad (9)$$

La funzione di trasferimento ha due poli, uno nell'origine e uno collocato sulla parte sinistra dell'asse reale ($s = -1$). Siccome il numero di radici dell'equazione caratteristica è invariante nel passaggio da anello aperto ad anello chiuso, al variare di K si avranno due rami sul piano complesso, che termineranno sugli zeri. Tuttavia, nel nostro sistema non si trovano zeri, quindi entrambi i rami andranno all'infinito. Possiamo verificare l'ultima proprietà introdotta andando ad analizzare la condizione di fase per la nostra $C(s)G(s)$

$$\arg\left(\frac{1}{s \cdot (s+1)}\right) = -\pi \pm 2h\pi, \quad K > 0 \quad (10)$$

Quello che facciamo è, se preso un generico punto s_i a destra delle singolarità, appartiene al luogo delle radici. Se proviamo a disegnare i vettori che congiungono le singolarità al punto generico s_i sull'asse reale positivo, si verifica che entrambi i vettori hanno fase nulla, rispetto al riferimento di fase, che è sempre l'asse reale positivo.

Per cui, andando a sostituire nella nostra fase, non è mai possibile verificare la condizione di fase, infatti

$$\nexists h \in \mathbb{Z} : h \geq 0 \wedge 0 = -\pi \mp 2h\pi \quad (11)$$

Se invece provassimo a prendere un punto a sinistra delle singolarità, si otterebbe che entrambe le fasi, supponendo l'asse positivo come riferimento, assumono valore -2π . Quindi, affinché la condizione di fase sia rispettata, è necessario esista un $h > 0$ intero, tale per cui

$$-\pi - \pi = -\pi \pm 2h\pi \quad (12)$$

Si osserva facilmente che un valore del genere non esiste, L'ultimo caso che andiamo ad analizzare è quello di una radice posta tra i due poli del sistema:

$$\begin{aligned} \arg(s_i + 0) &= -\pi \\ \arg(s_i + 1) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Allora, sostituendo nell'equazione della fase, si verifica che prendendo $h = +1$, la condizione viene rispettata

$$-\pi = -\pi \pm 2h\pi \quad (14)$$

Si verifica quindi che, banalmente, il **luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale**. Inoltre, esplorando le conclusioni, è possibile ottenere le seguenti regole

- Se $K > 0$, appartengono al luogo delle radici tutti i punti dell'asse reale che lasciano alla propria destra un numero di dispari di singolarità.
- Se $K < 0$, appartengono al luogo delle radici tutti i punti dell'asse reale che si lasciano alla propria sinistra un numero pari di singolarità

A tal proposito, lo zero si considera un numero pari. Potremmo anche provare a verificare l'appartenenza al luogo delle radici di un generico punto posto sull'asse di simmetria del segmento dell'asse reale, per $K > 0$, con la condizione di fase

$$-(\pi - \theta_1) - \theta_1 = -\pi \pm 2h\pi \quad (15)$$

Che è sicuramente rispettata per $h = 0$. Possiamo allora concludere che anche tutto l'asse di simmetria dell'intervallo descritto dai due poli del sistema appartiene al luogo delle radici del sistema in anello chiuso. Nel caso preso in esame nell'esempio, il luogo delle radici può essere rappresentato come

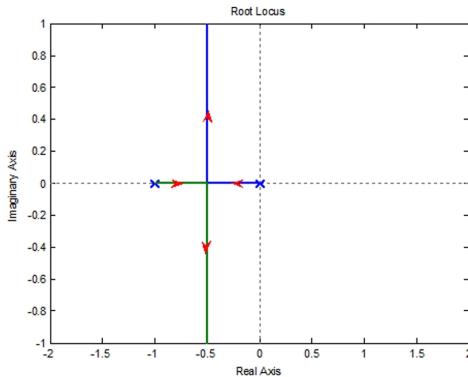


Figure 11.3: Luogo delle radici per la funzione di trasferimento dell'esempio (9)

L'ultima proprietà sul luogo delle radici ci garantisce che **i rami del luogo non si sovrappongono mai**; al massimo coincidono in punti singolari, detti **punti multipli**.

Una volta capito come tracciare il luogo delle radici attraverso l'utilizzo della condizione di fase, introduciamo l'utilizzo del criterio del modulo. Riguardo alla taratura del luogo delle radici possiamo notare che

$$|n(s)| = \prod_{i=1}^n |s + z_i|, \quad |d(s)| = \prod_{i=1}^m |s + p_i| \quad (16)$$

possiamo quindi immaginarc $n(s)$ come il prodotto delle distanze tra un generico punto s del luogo delle radici e gli zeri del sistema, così come possiamo immaginarc $d(s)$ come come il prodotto delle distanze tra un generico punto s del luogo delle radici e i poli del sistema. Dalla condizione sul modulo sappiamo che

$$\frac{1}{|K|} = \left| \frac{n(s)}{d(s)} \right| \quad (17)$$

Supponendo di avere un punto \bar{s} appartenente al luogo delle radici e, imponendo $\lambda_i = |\bar{s} + z_i|$ e $\eta_i = |\bar{s} + p_i|$, il corrispondente valore di K si ricava come

$$|K| = \frac{\prod_{i=1}^m \eta_i}{\prod_{i=1}^n \lambda_i} \quad (18)$$

quindi come il rapporto tra il prodotto delle distanze dei poli dal punto \bar{s} e il prodotto delle distanze dagli zeri dal punto \bar{s} .

L'ultimo caso che rimane da considerare è quello di zeri all'infinito. Nello specifico, vogliamo verificare se esiste un metodo che ci aiuti a calcolare dove posizionare gli asintoti nel caso di zeri all'infinito. Proviamo a considerare una generica distribuzione di singolarità note e supponiamo di valutarne la fase da un punto P infinitamente lontano

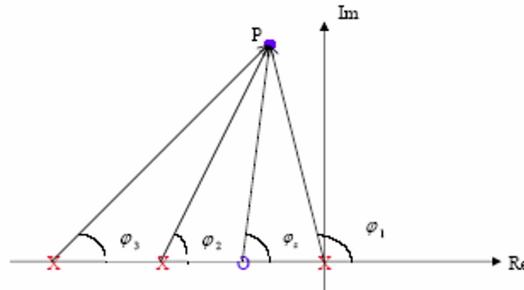


Figure 11.4: Distribuzione di punti nello spazio

Se ci trovassimo sul punto P e osservassimo gli angoli descritti da ogni retta congiungente P alla singolarità, rispetto al semiasse reale positivo, ci potremmo facilmente rendere conto che

$$\varphi_1 \approx \varphi_2 \approx \dots \approx \varphi_n \approx \varphi_\infty \quad (19)$$

Dalla regole delle fasi, per $k > 0$ si ottiene

$$\begin{aligned} \arg(n(s)) - \arg(d(s)) &= -\pi \pm 2h\pi \\ \varphi_\infty(n_z) - \varphi_\infty(n_p) &= -\pi \pm 2h\pi \\ \varphi_\infty(n_z - n_p) &= -\pi \pm 2h\pi \\ \varphi_\infty &= \frac{1}{n_p - n_z}(-\pi \mp 2h\pi) \end{aligned} \quad (20)$$

Che per $k < 0$ diventa

$$\varphi_\infty = \frac{1}{n_p - n_z}(\mp 2h\pi) \quad (21)$$

Queste due espressioni sono quelle più riportate nei vari libri di testo. Tuttavia, essendo non proprio di facile memorizzazione, possiamo utilizzare una regola generale che vale per entrambe

Theorem 0.4. Data la simmetria del luogo delle radici, è possibile affermare che gli asintoti dividono il piano complesso in parti equiangole e simmetriche rispetto all'asse reale

La seconda regola che possiamo introdurre riguarda i punti multipli, che però non abbiamo ancora definito

Definition 0.2. Si definisce come **punto multiplo** una radice dell'equazione caratteristica tale per cui

$$d^{(1)}(s) + K \cdot n^{(1)}(s) = 0 \quad (22)$$

ottenuta derivando l'equazione caratteristica rispetto ad s. Nel caso di una funzione con m zeri ed n poli, vale che i punti multipli corrispondono alle radici dell'equazione

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} \quad (23)$$

La regola ci dice che i rami usciti in poli o zeri di molteplicità maggiore di 1 dividono il luogo in parti equiangole e simmetriche rispetto all'asse reale. L'ultima regola che dobbiamo definire riguarda la ricerca del centro degli asintoti: il centro degli asintoti si trova nel baricentro individuato da poli e zeri. Questo baricentro può essere calcolato sfruttando la seguente formula

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \quad (24)$$

Supponiamo ora di avere un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n j \sqrt{1 - \xi^2} \quad (25)$$

Se provassimo a disegnarli all'interno del piano complesso otterremmo una situazione del tipo

IMMAGINE

Se il vettore che congiunge l'origine degli assi alla radice complessa coniugata è pari a ω_n , possiamo allora scrivere che

$$\omega_n \sin(\theta) = \xi\omega_n \rightarrow \theta = \arcsin(\xi) \quad (26)$$

Quindi, se teniamo costante il fattore di smorzamento e cambiamo la lunghezza del vettore, variano quindi la pulsazione naturale del sistema, ci spostiamo lungo la retta con pendenza pari a θ per prodotti del suo modulo proporzionali all'incremento della pulsazione naturale. Tenendo invece costante ω_n e variamo lo smorzamento del sistema, ci spostiamo lungo il perimetro della semi-circonferenza di raggio ω_n

- Quando lo smorzamento è nullo, i poli sono sull'asse immaginario.
- Quando lo smorzamento è 1, i poli sono sull'asse reale e sono coincidenti.
- Quando lo smorzamento è compreso nell'intervallo $(0, 1)$, i poli sono complessi coniugati.
- Quando lo smorzamento diventa molto maggiore di 1, i poli sono reali e distinti.

Nel caso di smorzamento pari a 1, il sistema è perfetto e ha un comportamento esponenziale, nel caso dello smorzamento tra $(0, 1)$ le oscillazioni sono smorzate e, infine, nel caso di smorzamento molto maggiore di 1, il sistema è sovrasmorzato e non ci sono oscillazioni.

Inoltre, tutti i rami uscenti dai poli con molteplicità 1 dividono il piano in parti equiangole e simmetriche rispetto all'asse reale. Possiamo partire dalla nostra condizione di fase

$$\arg(n(s)) - \arg(d(s)) = -\pi, \quad K > 0 \quad (27)$$

Considero il polinomio $d^*(s) = d(s)/s - p_1$, ma allora, per $s = p_1$, possiamo scrivere

$$\theta_{p_1} = \pi + \arg(n(s)) - \arg(d^*(s)) \quad (28)$$

dove θ_{p_i} rappresenta la fase del polo complesso. Prendiamo come esempio una funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(s+5)}{s(s+3+10i)(s+3-10i)} \quad (29)$$

Il primo passo è calcolare il centro degli asintoti con la formula esplicita e i punti di diramazione

$$\begin{array}{ll} \text{Centro asintoti} & c = \frac{-3 - 10i - 3 + 10i + 5}{2} = \frac{1}{2} \\ \text{Punti diramazione} & 2s^3 + 21s^2 + 50s + 545 \end{array}$$

I punti di diramazione sono tutti e soli i poli reali dell'equazione di terzo grado dell'esempio precedente. L'angolo di partenza relativo al polo $p_1 = 3 + 10i$ equivale a scrivere

$$\theta_{p_1} = \pi + \arg(2 + 10i) - \arg(-3 + 10i) - \arg(20i) = 180 + 78.7 - 106.7 - 90 = 62 \quad (30)$$

Tracciando il luogo delle radici per questo sistema otteniamo

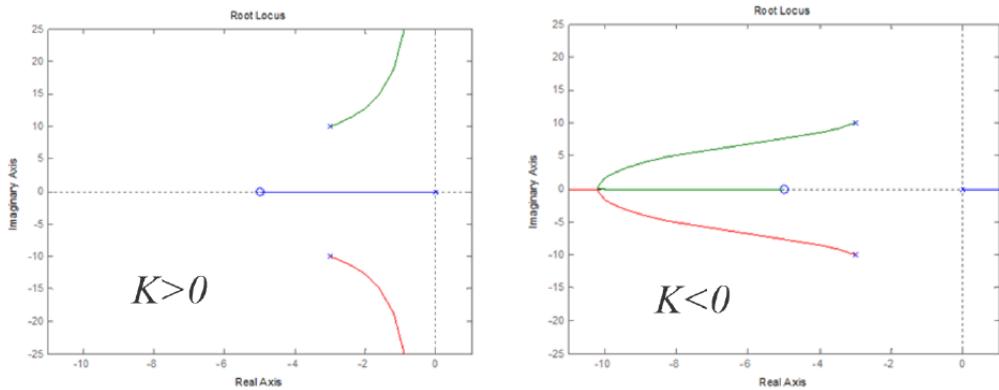


Figure 11.5: Luogo delle radici diretto e inverso

Possiamo fare la stessa cosa anche per gli zeri. Partiamo sempre dalla condizione di fase, ma modifichiamo il polinomio

$$n^*(s) = \frac{n(s)}{s - z_i} \quad (31)$$

infine, come nel caso precedente, la fase dello zero equivale a

$$\theta_{z_i} = -\pi + \arg(d(s)) - \arg(n^*(s)) \quad (32)$$

Chapter 12

Diagrammi e criterio di Nyquist

I diagrammi di Nyquist, oltre ad essere l'argomento più ostico di tutto il corso, rappresentano anche una tecnica fondamentale nello studio della stabilità dei sistemi, infatti, questa tipologia di diagrammi permette di rappresentare la **forma polare** della risposta in frequenza di una generica funzione di trasferimento $G(s)$ relativa a un sistema **SISO**. Tuttavia, data la complessità nella rappresentazione di questi diagrammi, il loro studio verrà diviso in due parti:

- Studio del tracciamento **esatto** dei diagrammi di Nyquist.
- Studio di metodi esemplificativi per la rappresentazione **approssimata** dei diagrammi di Nyquist.

L'utilità dei diagrammi di Nyquist, come già accennato all'inizio del capitolo, è giustificata dalla possibilità di studiare la stabilità di un generico sistema in anello chiuso, cioè del sistema

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}, \quad H(s) = 1 \quad (1)$$

In particolare, studiare la stabilità di questo sistema equivale a trovare i poli della funzione di trasferimento in anello chiuso, corrispondente gli zeri del denominatore della funzione di trasferimento $M(s)$

$$1 + G(s)H(s) = 0, \quad H(s) = 1$$

Nello specifico, dobbiamo capire se esistono degli zeri nella parte sinistra del piano complesso, quindi poli tali per cui $\text{Re}(p_i) > 0$. Il motivo per cui questi diagrammi presentano una maggiore osticità rispetto alla rappresentazione dei diagrammi di Bode è data da due fattori:

- Non è possibile sfruttare la natura additiva dei logaritmi, in quanto nei diagrammi di Nyquist si lavora con una rappresentazione in scala lineare.
- Non è possibile ricorrere a delle rappresentazioni asintotiche.

Ad ogni modo, la differenza sostanziale rispetto ai diagrammi di Bode, sta nel numero di diagrammi che è necessario tracciare; infatti, nei diagrammi di Nyquist, si traccia un solo diagramma, tale per cui:

- L'asse delle ordinate riporta i valori di $\text{Re}(G(j\omega))$.
- L'asse delle ascisse riporta i valori di $\text{Im}(G(j\omega))$.

1 Rappresentazione esatta dei diagrammi di Nyquist

La rappresentazione di un diagramma di Nyquist parte, come il diagramma di Bode, dalla risposta armonica del sistema, cioè la restrizione della funzione trasferimento al semiasse immaginario

positivo:

$$G(s)|_{s=j\omega} = K_1 \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_n)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_m)} \quad (2)$$

Variando la pulsazione ω è come se mi stessi muovendo lungo il semiasse immaginario. Inoltre, supponendo di scegliere un punto ω^* , è possibile valutare la risposta armonica $G(j\omega^*)$. Fare questa valutazione equivale a tracciare, a partire dalle singolarità, i vettori che congiungono le singolarità al punto ω^* , cioè, vuol dire che posso riscrivere la risposta in frequenza del sistema in **modulo** e **fase**. Ad esempio, prendendo una funzione $G(s)$ con un singolo zero e tre diversi poli, posso riscriverla come

$$G(s) = K_1 \frac{(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)(j\omega - p_3)} = K_1 \frac{M_1}{M_2 M_3 M_4} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)} \quad (3)$$

Il primo metodo consiste quindi nel valutare la funzione di trasferimento in un numero enorme di punti, fino ad ottenere un percorso, ottenendo quindi il diagramma di Nyquist. Un altro metodo per disegnare il diagramma consiste nello scomporre a priori la risposta armonica $G(j\omega)$ nella sua parte reale e nella sua parte immaginaria, valutando le coppie di valori

$$[\operatorname{Re}(j\omega), \operatorname{Im}(j\omega)] \quad (4)$$

al variare della pulsazione ω . In generale però, nessuno di questi due metodi è, di fatto, ottimo, poiché entrambi i metodi richiedono di valutare un'enormità di valori possibili di ω .

2 Rappresentazione approssimata dei diagrammi di Nyquist

Possiamo provare a ridurre il numero di punti, ottenendo un'approssimazione del diagramma sufficientemente buona. Supponiamo di avere una funzione di trasferimento nella forma

$$G(s) = K_1 \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + s^m}{s^h \cdot (a_h + a_{h-1}s + a_{h-2}s^2 + \dots + s^{n-h})} \quad (5)$$

Possiamo studiare il diagramma approssimato andando a valutare l'andamento della risposta armonica in quattro situazioni:

- Quando $\omega \rightarrow \infty$.
- Quando $\omega \rightarrow 0$.
- L'intersezione di ω con l'asse reale.
- L'intersezione di ω con l'asse immaginario.

Il primo caso che studiamo è quello per $\omega \rightarrow 0$, dove, supponendo di avere un sistema di tipo 0, abbiamo:

$$G(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = k_1 \frac{b_0}{a_0} \quad \text{Punto nell'origine} \quad (6)$$

$$\varphi(\omega = 0) = \begin{cases} 0 & G(0) > 0 \\ -\pi & G(0) < 0 \end{cases} \quad \text{Fase nell'origine} \quad (7)$$

D'altra parte, se il sistema non è di tipo 0 e, quindi, ha dei punti nell'origine, la situazione è leggermente differente

$$G(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \infty \quad \text{Punto nell'origine} \quad (8)$$

$$\varphi(\omega = 0) = \frac{1}{s^h} = -h \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{Fase nell'origine} \quad (9)$$

Più avanti nel capitolo verrà approfondito il caso in cui $G(j\omega) \rightarrow \infty$, poiché, in questo particolare caso dobbiamo valutare la presenza di eventuali asintoti. Il secondo punto che andiamo a studiare è $G(\infty)$:

$$G(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \begin{cases} 0 & n > m \\ k_1 & m = n \end{cases} \quad (10)$$

dove n è il numero di poli e m è il numero di zeri. Inoltre, se $n > m$, allora abbiamo che la fase corrisponde alla fase della funzione

$$G(s) \approx \frac{1}{s^{n-m}} \quad (11)$$

se k_1 ha segno positivo. Infine, gli ultimi due punti che dobbiamo valutare sono le intersezioni con gli assi, in particolare, sia con l'asse reale, che con l'asse immaginario. L'intersezione può essere calcolata mediante metodo analitico

- Poniamo $\operatorname{Re}(G(j\omega)) = 0$ e troviamo l'intersezione con l'asse immaginario.
- Poniamo $\operatorname{Im}(G(j\omega)) = 0$ e troviamo l'intersezione con l'asse reale.

Prendiamo come esempio un sistema la cui funzione di trasferimento corrisponde a

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \quad (12)$$

Impongo la condizione $s = j\omega$, restringendo la funzione al semiasse immaginario positivo

$$G(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} = \frac{1}{-\omega^2 + 3j\omega + 2} \quad (13)$$

Il sistema è di tipo 0, dobbiamo quindi studiare il valore per $\omega \rightarrow 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$

$$\left. \frac{1}{-\omega^2 + 3j\omega + 2} \right|_{\omega=0} = \frac{1}{2}, \varphi = 0 \quad \omega \rightarrow 0 \quad (14)$$

$$\left. \frac{1}{-\omega^2 + 3j\omega + 2} \right|_{\omega=\infty} = 0, \varphi = -\pi \quad \omega \rightarrow \infty \quad (15)$$

(16)

Razionalizziamo la funzione di trasferimento del sistema, così da poterla dividere più facilmente in parte reale a parte immaginaria

$$\begin{aligned} G(s)|_{s=j\omega} &= \frac{1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} = \frac{1}{-\omega^2 + 3j\omega + 2} = \frac{1}{-\omega^2 + 3j\omega + 2} \cdot \frac{(2 - \omega^2) - 3j\omega}{(2 - \omega^2) - 3j\omega} = \\ &\frac{(2 - \omega^2) - 3j\omega}{(2 - \omega^2)^2 - 9j\omega} \end{aligned} \quad (17)$$

Poniamo la parte reale del sistema a 0 e troviamo l'intersezione con l'asse immaginario

$$\frac{(2 - \omega^2)}{(2 - \omega^2)^2 - 9j\omega} = 0 \implies \omega = \sqrt{2}, \underbrace{\frac{-3\sqrt{2}}{2 \cdot 9} = \frac{-\sqrt{2}}{6} \approx -0.236}_{\text{Parte immaginaria}} \quad (18)$$

Possiamo fare lo stesso ragionamento per la parte immaginaria, ponendola uguale a zero e calcolando le intersezioni con l'asse reale

$$\frac{-3j\omega}{(2 - \omega^2)^2 - 9j\omega} = 0 \implies \omega = 0, +\infty \quad (19)$$

Che sono gli stessi identici punti che sono stati trovati nella valutazione, rispettivamente, di $\omega \rightarrow 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$. Questo metodo, così come specificato nel titolo, ci porta ad avere una rappresentazione molto approssimata del nostro diagramma. Ciononostante però, questo fatto non rappresenta un problema.

2.1 Rappresentazione approssimata con i diagrammi di Bode

Il diagramma di Nyquist può essere ricavato, in via qualitativa a partire dalla conoscenza dei diagrammi di Bode, sia di modulo modulo che fase. Supponiamo di avere il processo dinamico descritto dalla relazione

$$G(s) = \frac{K}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}, \quad K, T_1, T_2, T_3 > 0 \quad (20)$$

Coma già ripetuto un'infinità di volte, il primo passo è partire dalla risposta armonica del sistema

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)} \quad (21)$$

Il primo passo è quello di studiare il sistema per $\omega \rightarrow 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$, ottenendo

$$\begin{aligned} G(0) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = K, \varphi = 0 & \omega \rightarrow 0 \\ G(\infty) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0, \varphi = -\frac{2}{3}\pi & \omega \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Giustifichiamo in modo più esaustivo il fatto che la fase per $G(j\omega)$ per $\omega \rightarrow \infty$ sia equivalente a -270° , andando a sviluppare il limite otteniamo

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)} \approx \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{(j\omega T_1)(j\omega T_2)(j\omega T_3)} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{(j\omega)^3 T_1 T_2 T_3} \quad (22)$$

il coefficiente $(j\omega)^3$ al numeratore dovrebbe equivale ad avere un polo triplo nell'origine e, dalla regola che avevamo dato nel capitolo sui diagrammi di Bode, sappiamo che per un polo nell'origine con molteplicità h la fase equivale a

$$\varphi = -h \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi = -270^\circ \quad (23)$$

Già dalla semplice osservazione del diagramma di Bode si riesce ad avere un'idea generale dell'andamento che assumerà il diagramma di Nyquist quando verrà rappresentato.

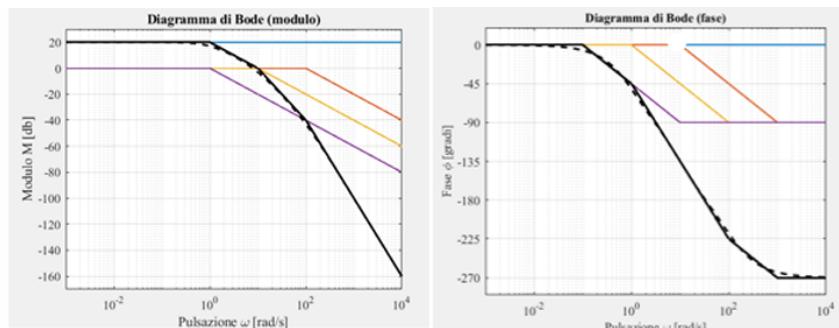


Figure 12.1: Diagramma di Bode per esempio

Notiamo immediatamente che il diagramma della fase parte da 0, per poi decrescere *linearmente* fino a -270° , un andamento di questo tipo, nel diagramma di Nyquist, lo si può immaginare come un percorso che parte, nell'origine, e, successivamente:

- interseca l'asse immaginario negativo (per $\varphi = -90^\circ$).
- interseca l'asse reale negativo (per $\varphi = -180^\circ$).
- interseca l'asse immaginario positivo (per $\varphi = -270^\circ$)

Questa deduzione è una delle prime regole riguardante la rappresentazione dei diagrammi di Nyquist, utilizzando i diagrammi di Bode, che, in particolare, ci permette di capire in quali quadranti si sviluppa tale diagramma.

Il secondo passo è quello di determinare il punto di partenza e il punto di arrivo del diagramma di Nyquist. A tal senso, valutiamo la $G(j\omega)$ per $\omega \rightarrow 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= K & \omega \rightarrow 0 \\ G(j\omega) &= 0 & \omega \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Quindi, il nostro diagramma partirà da K , che nel nostro esempio equivale a $K = 10$ e, dopo aver intersecato gli assi **immaginario negativo** e **reale negativo**, avvierà a 0. Quindi, nel momento in cui la fase arriva a $\varphi = -270^\circ$, il diagramma arriverà nell'origine e, terminerà.

Il terzo e ultimo passo è il calcolo dell'intersezione con gli assi del piano complesso. Il calcolo di queste intersezioni lo si fa, per l'appunto, con i diagrammi di Bode e parte dall'analisi del diagramma di fase

- Supponiamo di voler analizzare il sistema quando interseca uno dei generici assi dedotti nell'analisi dei quadranti fatta in precedenza, cioè per un generico valore φ . Osserviamo, all'interno del diagramma della fase, la pulsazione ω^* del sistema per quel valore di φ .
- Una volta identificata la pulsazione, si procede a identificare il modulo per quel la pulsazione ω^* , che chiameremo \bar{x} .
- L'ultimo passo è quello di riportare \bar{x} in scala lineare, infatti, nei diagrammi di Bode, la fase è descritta in scala logaritmica. Imponendo \bar{y} come la rappresentazione di \bar{x} in scala lineare, si applica la seguente corrispondenza

$$20 \log_{10}(\bar{y}) = \bar{x} \quad (24)$$

Quindi, questi due valori appena trovati sono fondamentali per il tracciamento del diagramma. La fase \bar{y} ci indica la distanza rispetto all'origine $(0, 0)$ del diagramma in cui la curva interseca l'asse. Prendiamo come esempio l'intersezione con l'asse immaginario negativo, quindi per $\varphi = -\pi/2$, in questo caso, dal diagramma della fase, ci accorgiamo che la pulsazione è un valore compreso tra $[10^0, 10^1]$. Per quel valore di pulsazione abbiamo che il modulo è un valore compreso tra $[20, 0]$ dB, che poniamo essere circa 9.5. A questo punto, dobbiamo portare il valore della fase in scala lineare, applicando la relazione già enunciata in precedenza

$$20 \log(\bar{y}) = 9.5 \implies \bar{y} \approx 2.9 \quad (25)$$

Quindi, la curva intersecherà l'asse immaginario negativo, nel punto con fase $\varphi = -\pi/2$ e modulo 2.9, ergo, nel punto $-2.9j$. Il diagramma finale sarà quindi:

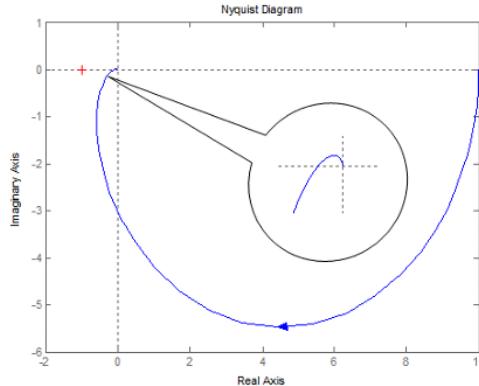


Figure 12.2: Diagramma di Nyquist per $K = 10$, $T_1 = 1$, $T_2 = 10$, $T_3 = 100$

D'altra parte, è opportuno fare una piccola precisazione: quando andiamo a rappresentare un

diagramma di Nyquist partendo da uno di Bode, dobbiamo avere un diagramma che **non sia asintotico**. Il diagramma di Bode deve essere quindi abbastanza vicino a quello reale. Quindi, prima di tracciare il diagramma di Nyquist, è opportuno smussare i bordi del diagramma di Bode, così da avvicinarlo a quello reale.

Uno dei problemi derivanti dal tracciamento dei diagrammi di Nyquist, partendo dai diagrammi di Bode, è stimare l'andamento che ha il diagramma in tutti quei punti che non andiamo a calcolare direttamente. Infatti, per quei punti, possiamo fare delle stime di massima partendo da quello che sappiamo sul diagramma della fase e sul diagramma del modulo. Ricordiamo che

- Il modulo identifica la distanza del punto rispetto all'origine.
- La fase identifica l'angolo che il vettore, che congiunge l'origine al punto che stiamo analizzando, spazza rispetto all'asse reale positivo.

Fissando il modulo, si potrebbe osservare una variazione dell'angolo descritto, nello specifico, variando φ nell'intervallo $[0, 2\pi[$, il vettore descriverebbe una circonferenza, mentre, fissando la fase e variando il modulo, si potrebbe osservare una variazione della lunghezza del vettore rispetto all'origine.

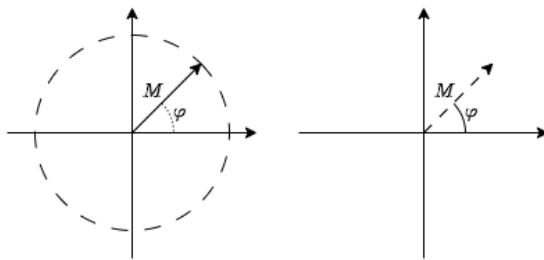


Figure 12.3: A sinistra si osserva come, fissando il modulo e variando la fase, il vettore descriva una circonferenza. A destra, invece, si osserva come, fissando fase e variando il modulo, la retta si *allunghi* nello spazio

Quindi, quando nel diagramma della fase osserviamo una diminuzione della fase, significa che si ha una variazione dell'angolo che la curva descrive, che può essere vista come una variazione dell'andamento vero e proprio della curva, mentre, una variazione del modulo corrisponde a un avvicinarsi della curva all'origine degli assi, in quanto vi è una variazione vera e propria della lunghezza del vettore.

Sistemi con asintoti

Talvolta, in alcuni sistemi, si possono verificare delle situazioni in cui o per $\omega \rightarrow 0$, o per $\omega \rightarrow \infty$, la risposta armonica del sistema tende a $+\infty$. In questo caso diciamo che *potrebbe esistere un asintoto*. Prendiamo come esempio il sistema descritto dalla funzione

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)(1 + j\omega T)} \quad (26)$$

Il primo passo è, come sempre, quello di studiare il sistema per $\omega \rightarrow 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} G(0) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = +\infty & \varphi &= -\frac{\pi}{2} & \omega &\rightarrow 0 \\ G(\infty) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 & \varphi &= -\pi & \omega &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Per $\omega \rightarrow 0$ la risposta armonica cresce indefinitamente, dobbiamo però capire, analiticamente, se la crescita segue un andamento asintotico o meno. La tecnica standard per calcolare, se esiste, l'asintoto prevede di scrivere in forma cartesiana le equazioni della funzione in esame che, così

facendo, viene scomposta in parte reale e parte immaginaria.

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(G(j\omega)) = -\frac{K \cdot T}{1 + \omega^2 T^2} \\ \operatorname{Im}(G(j\omega)) = \frac{K}{\omega \cdot (1 + \omega^2 T^2)} \end{cases} \quad (27)$$

A questo punto è possibile calcolare l'asintoto ricavando il limite della parte reale di $G(j\omega)$, per $\omega \rightarrow 0$.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}(G(j\omega)) = -K \cdot T \quad (28)$$

Quindi, la nostra risposta armonica non ha un vero e proprio punto di partenza, infatti, quando $\omega = 0$, la risposta non è definita. Tuttavia, per $\omega \rightarrow 0$ sappiamo che si estende indefinitamente, con un limite asintotico, di conseguenza, il nostro diagramma sarà così strutturato

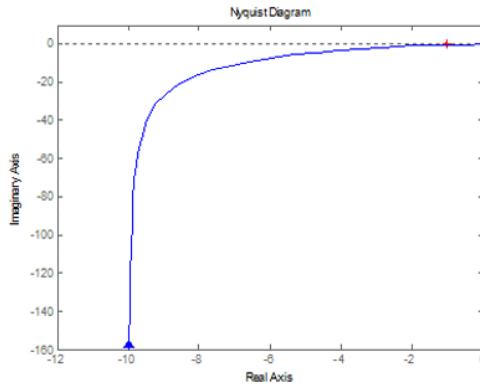


Figure 12.4: Diagramma di Nyquist per $K = 10$ e $T = 1$

Esiste, in realtà, un modo più semplice per il calcolo dell'asintoto, che permette di ricavare il valore asintotico esatto, evitando di decomporre la funzione di risposta armonica in parte reale e parte immaginaria. Scrivendo la funzione di trasferimento in forma di Bode, è possibile ricondursi a situazioni in cui sia applicabile lo sviluppo di Taylor in un intorno di $x = 0$.

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x \quad (29)$$

Ovviamente, la semplificazione è valida quando x è molto piccolo rispetto a 1, esatta per $x = 0$. Nell'esempio in esame abbiamo

$$\frac{K}{j\omega(1+j\omega)} = \frac{1}{j\omega T} \cdot (1 - j\omega T) \quad (30)$$

che per $\omega \rightarrow 0$ ha parte reale pari proprio a $-K \cdot T$. Come abbiamo già detto, non sempre l'asintoto esiste, esistono anche dei casi in cui l'andamento non è delimitato da un asintoto per $\omega \rightarrow 0$. Consideriamo il processo dinamico descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^2(1+s)} \iff G(s)|_{s=j\omega} = -\frac{1}{\omega^2(1+j\omega)} \quad (31)$$

Il sistema appena descritto è un sistema del secondo tipo, quindi un sistema con due poli nell'origine. Possiamo verificare facilmente che per un sistema di questo tipo non esiste un valore finito che delimita l'asintoto per $\omega \rightarrow 0$, infatti, supponendo di fattorizzare la funzione per separare la parte reale, abbiamo che

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} -\frac{1}{\omega^2} = -\infty \quad (32)$$

Inoltre, abbiamo che

$$\operatorname{Im}(G(j\omega))^2 = \operatorname{Re}(G(j\omega)) \quad (33)$$

Nel piano di Gauss tale espressione rappresenta una parola, cioè il diagramma di Nyquist tende asintoticamente a una parabola per $\omega \rightarrow 0$. Quindi, supponendo di aver studiato il diagramma di Bode relativo al sistema, che si compone di due poli nell'origine e di un polo semplice

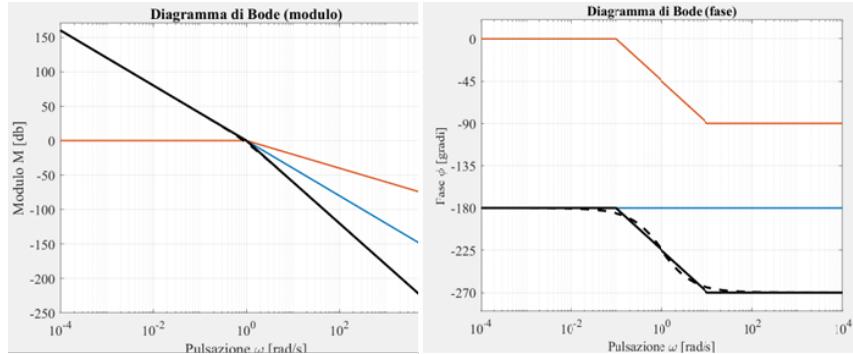


Figure 12.5: Diagramma di Bode per (33)

Risulta che il diagramma di Nyquist corrisponde a

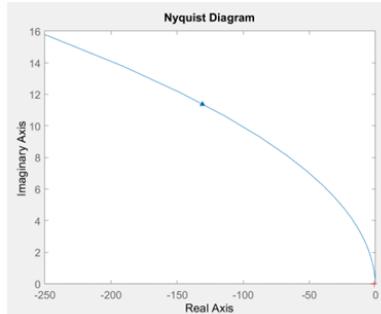


Figure 12.6: Diagramma di Nyquist con asintoto parabolico

L'ultimo caso da analizzare è quello che riguarda i sistemi con ritardo, cioè tutti quei sistemi descritti da una funzione di trasferimento del tipo

$$G(s) = G'(s)e^{-s\tau} \quad (34)$$

Prendiamo, in particolare, come esempio, il sistema descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s} \implies G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{j\omega} = \frac{\cos(\omega) - j\sin(\omega)}{j\omega} \quad (35)$$

Andiamo, come sempre, a calcolare cosa succede al nostro sistema quando $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} G(0) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = +\infty & \varphi = 0 & \omega \rightarrow 0 \\ G(\infty) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 & \varphi = -\pi & \omega \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Infatti, per $\omega \rightarrow \infty$ le due funzioni trigonometriche oscillano indefinitamente e, quindi, l'andamento del diagramma di Nyquist non è assolutamente definito. Di conseguenza, gli attraversamenti degli assi sono infiniti; in generale, la fase equivale a $\arg(G(j\omega)) = -\omega - \pi/2$.

Rimane aperta la questione dell'asintoto, infatti non siamo certi che il nostro sistema abbia un andamento asintotico. Possiamo trovarlo applicando la solita regola per verificare se esiste o meno:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} -\frac{\sin(\omega)}{\omega} = -1 \quad (36)$$

Quindi, l'asintoto del nostro sistema si trova in -1. Quindi, il diagramma di Nyquist che si ottiene dall'analisi del sistema con ritardo, considerando anche il diagramma di Bode per il polo nell'origine, è un diagramma che *ruota* stringendosi intorno all'origine degli assi, fino ad toccarla.

Il diagramma di Nyquist risulterà quindi essere

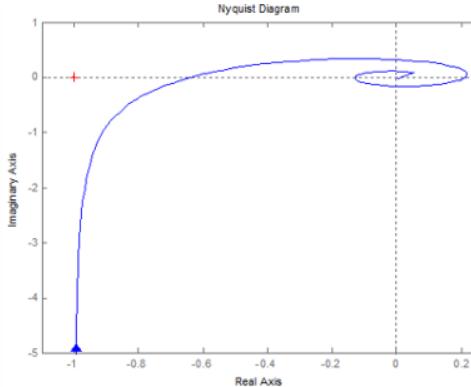


Figure 12.7: Diagramma di Nyquist per sistema con ritardo

3 Criterio di Nyquist

Come già detto all'inizio del capitolo, i diagrammi di Nyquist permettono lo studio nel piano complesso della retroazione negativa sui poli del sistema in catena chiusa, partendo dalla conoscenza della funzione di trasferimento in anello aperto $G_{\text{ol}}(s)$. Questo fatto ci permette anche di compiere uno studio approfondito sulla stabilità del sistema retroazionato, senza dover necessariamente calcolare la funzione di trasferimento in anello chiuso. Supponiamo quindi che la funzione di trasferimento in catena chiusa del sistema sia

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_c \cdot G(s)}{1 + K_c \cdot G(s)} = K \frac{n(s)}{d(s) + K \cdot n(s)} = \frac{\hat{G}(s)}{1 + \hat{G}(s)}, \quad \hat{G}(s) = K \cdot G(s) \quad (37)$$

Da quello che abbiamo studiato fino ad ora, sappiamo che il sistema dinamico in catena chiusa è **asintoticamente stabile** se e solo se le radici dell'**equazione caratteristica** hanno tutte parte reale negativa. Ricordiamo che l'equazione caratteristica è il denominatore della funzione di trasferimento in anello chiuso

$$1 + \hat{G}(s) = 0 \quad \text{Equazione caratteristica} \quad (38)$$

In termini di posizionamento, affinché un sistema sia asintoticamente stabile, tutte le radici dell'**equazione caratteristica** devono trovarsi nel **semipiano complesso a parte reale negativa**.

Un primo fatto che possiamo notare è che, essendo la nostra funzione di trasferimento definita come:

$$W(s) = \frac{\hat{G}(s)}{1 + \hat{G}(s)} \quad (39)$$

esiste, sicuramente, un punto in cui non è definita, cioè quando $\hat{G}(s) = -1$. Siccome il diagramma di Nyquist studia la variazione della parte reale e della parte immaginaria della funzione di trasferimento in anello chiuso, questa situazione si verifica se e solo se il diagramma passa per il punto $(-1, 0)$. Quindi, possiamo definire due condizioni di stabilità del nostro diagramma:

- Nessuna radice deve andare nel semipiano $\text{Re} > 0$ al variare del guadagno K_c .
- $G(j\omega) \neq -1$.

Il primo passo che dobbiamo fare ora è esplicitare l'equazione caratteristica, imponendo la condizione $s = j\omega$, scrivendola in una forma alternativa

$$1 + \hat{G}(j\omega) = 1 + K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \alpha \frac{\prod_{i=1}^n (s - r_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}, \quad \alpha = 1 + G(\infty) = \begin{cases} 1 & m < n \\ K & m = n \end{cases} \quad (40)$$

Facendo in questo modo, si scrive l'equazione in forma razionale fratta, in modo da evidenziare una struttura in cui il numero di radici della funzione in catena chiusa è uguale al numero di poli della funzione in catena aperta. Dove, gli elementi al numeratore sono le **radici del sistema in catena chiusa**, mentre gli elementi al denominatore i **poli del sistema in catena aperta**.

Si prenda ora due zeri dell'equazione caratteristica, uno che sta a destra nel piano complesso, l'altro che si trova a sinistra nel piano complesso e studiamo cosa succede al diagramma al variare di ω nell'intervallo $]-\infty, +\infty[$, seguendo il percorso che va da $-\infty \rightarrow +\infty$. Si supponga ora di tracciare il vettore che collega uno dei due punti all'asse immaginario, la cui lunghezza sarà

$$d = j\omega - r_1 \quad (41)$$

al variare di ω questo vettore si sposterà verso l'alto o verso il basso, spazzando un certo angolo θ in senso **antiorario**. Stessa cosa succede a r_2 , che tuttavia spazzerà un angolo in verso **orario**. Convenzionalmente diciamo che:

- Se spazziamo un angolo in verso orario, gli diamo valori negativi.
- Se spaziamo un angolo in verso antiorario, gli diamo valori positivi.

Quindi, quando andiamo da $-\infty$ a $+\infty$ una radice che si trova a sinistra spazzerà un angolo di $+\pi$, una che si trova a destra, un angolo di $-\infty$. Il ragionamento nel caso dei poli p_i è analogo, ma con la differenza che, nel valutare la variazione della fase per $j\omega - p_i$ i poli, trovandosi al denominatore della funzione di trasferimento in anello chiuso, ha segno opposto rispetto al contributo in fase delle radici, nella stessa regione del piano complesso:

- Un polo a parte reale negativa porta una variazione di fase negativa pari a $-\pi$.
- Un polo a parte reale positiva porta una variazione di fase positiva pari a $+\pi$.

D'altra parte, la presenza di poli in ciclo aperto sull'asse immaginario ci porta diversi problemi, poiché non è possibile definire esattamente il vettore $j\omega - p_i$. Ciononostante, possiamo escludere a priori la presenza di radici del sistema in catena chiusa sull'asse immaginario, grazie alla condizione $G(j\omega) = -1$. Per eliminare il problema dei poli sull'asse immaginario, occorre modificare il percorso sull'asse immaginario, in modo da non comprendere le singolarità. Convenzionalmente si considerano dei semicerchi di raggio infinitesimo sull'asse immaginario, tali da scavalcare sulla destra i poli dell'asse.

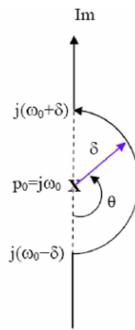


Figure 12.8: Rotazione infinitesima nel caso di poli sull'asse immaginario

Definiamo adesso alcune terminologie

- Chiamiamo R^+ (R^-) il numero di radici a parte reale **positiva** (**negativa**)
- Chiamiamo P^+ (P^-) il numero di poli a parte reale **positiva** (**negativa**).
- Chiamiamo P^0 il numero di poli sull'asse **immaginario**.

La forma scritta all'inizio della funzione di trasferimento ci assicurava di avere n poli e n radici, possiamo quindi imporre le condizioni

$$\begin{cases} R^+ + R^- = n \\ P^+ + P^- + P^0 = n \end{cases} \quad (42)$$

Grazie a queste due regole è possibile calcolare la variazione totale di fase di $1 + \hat{G}(s)$ lungo il cammino, come:

$$\begin{aligned} \arg(1 + \hat{G}(s)) &= R^+ \cdot -\pi + R^- \cdot \pi + P^+ \cdot \pi + P^- \cdot -\pi + P^0 \cdot -\pi \\ &= \pi(n - 2R^+ - n + 2P^+) = \boxed{2\pi(P^+ - R^+)} \end{aligned}$$

La condizione di stabilità, affinché il sistema sia stabile, impone che il numero di radici a parte reale positiva del polinomio caratteristico a ciclo chiuso deve essere nullo, imponendo quindi $R^+ = 0$ otteniamo:

$$N_{ao} = P^+ \quad (43)$$

Il criterio afferma quindi che, affinché il sistema in retroazione negativa sia stabile, il numero di rotazioni antiorarie N_{ao} della funzione $1 + \hat{G}(j\omega)$ intorno all'origine del piano di Gauss, al variare di ω , deve essere uguale al numero di poli in parte reale positiva della funzione a ciclo aperto di $\hat{G}(j\omega)$. Esistono due problemi principali nello studio della stabilità con il criterio di Nyquist

- Il problema è che la funzione di trasferimento è nota solo per pulsazioni positive, tuttavia, questo fatto non costituisce di per sé un grosso problema, infatti, per simmetria di $\hat{G}(j\omega)$ e $\hat{G}(-j\omega)$, nel diagramma polare rispetto all'asse reale, è sufficiente ribaltare il diagramma per le pulsazioni positive.
- Il secondo problema è che noi non conosciamo $1 + \hat{G}(s)$, ma conosciamo solo $G(j\omega)$. Tuttavia, anche in questo caso, non è un problema tanto grosso, infatti, possiamo dire che *il numero di rotazioni intorno all'origine di $1 + \hat{G}(j\omega)$ è uguale al numero di rotazioni attorno al punto $(-1, 0)$, o se $\hat{G}(j\omega) = KG(j\omega)$ è sufficiente studiare il numero di rotazioni attorno al punto $(-1/K, 0)$.*

Preliminarmente definiamo il concetto di **percorso di Nyquist**

Definition 3.1. (percorso di Nyquist) Si definisce percorso di Nyquist la curva chiusa che percorre l'asse immaginario al variare di ω da meno infinito a più infinito. La curva si richiude all'infinito per comprendere tutto il semipiano a parte reale positiva.

Inoltre, presa una qualsiasi curva chiusa e orientata, se consideriamo un vettore con l'estremo fisso in un punto P_1 interno alla curva e rotante con l'altro estremo lungo la direzione orientata della curva, la rotazione totale che percorre una volta l'intero contorno della curva chiusa è sempre di un giro. Se invece il vettore ha l'estremo fisso in un punto esterno alla curva, allora la rotazione totale che percorre una volta l'intero contorno della curva chiusa è nulla.

Per applicare il criterio di Nyquist, occorre valutare il numero di rotazioni della risposta armonica intorno al punto $(-1/K_B, 0)$. Tuttavia

- Nel caso di sistemi di tipo 0, la curva di $G(j\omega)$, al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$ nel piano complesso è una curva chiusa.
- Nel caso di sistemi con poli dell'origine, non risulta immediata la forma della curva chiusa rispetto al cui contorno occorre valutare il numero di rotazioni. Infatti, il sistema, per $\omega \rightarrow 0$ va all'infinito e, quindi, specchiandolo, si avranno due rami che vanno all'infinito.

Quello che occorre quindi fare è capire come fare la **richiusura del diagramma** all'infinito nel caso di sistemi di tipo diverso da 0. La prima regola ci dice che, ogni attraversamento del **cammino di Nyquist**, cioè ogni singolarità sull'asse immaginario, equivale a un mezzo giro in senso orario del diagramma di Nyquist stesso. Tuttavia, se sull'asse immaginario abbiamo un poli, il mezzo giro sarà in verso **antiorario**. Nella pratica, una volta rappresentato il diagramma per pulsazioni positive e per pulsazioni negative, possiamo suddividerlo in settori, sfruttando i confini creati dalle linee del diagramma, successivamente, per ogni singolo settore, studiamo quanti giri vengono fatti intorno ai punti all'interno di quel settore. Così facendo siamo in grado di determinare dove il sistema è stabile e dove non lo è, così da poter posizionare il guadagno statico in modo ottimale.

Part IV

Criteri di sintesi e sviluppo dei controllori

Chapter 13

Margini di ampiezza e fase

Supponiamo di avere un sistema fisico descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)$, chiuso in retroazione unitaria, e con un controllore proporzionale del tipo $C(s) = K$ posto nella catena diretta. Sappiamo, da tutti i capitoli precedenti, che la corrispettiva funzione in anello chiuso equivale a

$$W(s) = \frac{\hat{G}(s)}{1 + \hat{G}(s)}, \quad \hat{G}(s) = KG(s) \quad (1)$$

Uno dei problemi fondamentali nella teoria del controllo, è quello di riuscire a *quantificare* la stabilità di un sistema a ciclo chiuso, conoscendo solo la risposta armonica in catena aperta; con *quantificare* intendiamo *determinare quando un sistema è più stabile rispetto a un altro*. Un altro motivo per cui vogliamo quantificare la stabilità del sistema data dalla necessità di conoscere *quanto è possibile perturbare il sistema prima di perdere questa stabilità*. Ad ora, uno dei modi con cui possiamo studiare come, al variare del guadagno statico, variano i poli del sistema (e quindi, implicitamente, la stabilità di esso) è il luogo delle radici. Supponiamo di avere una funzione di trasferimento descritta funzione di trasferimento in catena diretta $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{s \cdot (s + 1)^2} \quad (2)$$

Applicando il luogo delle radici diventa di immediata verifica che, per valori positivi del guadagno, i poli a ciclo chiuso si muovo percorrendo due rami che, per un certo valore di guadagno K , entrano nel semipiano destro, dove i nostri poli sono **instabili**.

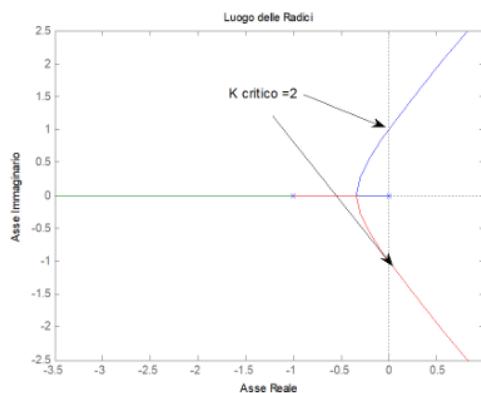


Figure 13.1: Esempio 1. Luogo delle radici

Tuttavia, dall'analisi del luogo delle radici, riusciamo solo a dedurre quali valori del guadagno statico il nostro sistema resta stabile, senza però avere indicazioni su quali valori del guadagno siano migliori di altri. A tal proposito, possiamo introdurre due grandezze chiamate, rispettivamente,

margine di fase e margine di guadagno. L'idea alla base dello studio di queste due grandezze è quella di capire quanto, variando queste grandezze, il nostro sistema si **avvicina/allontana** dal **critico** $(-1, 0)$. Possiamo visualizzare questi due margini all'interno del diagramma di Bode; supponiamo quindi di prendere l'esempio introdotto nell'esempio precedente e di tracciare il diagramma del modulo e della fase

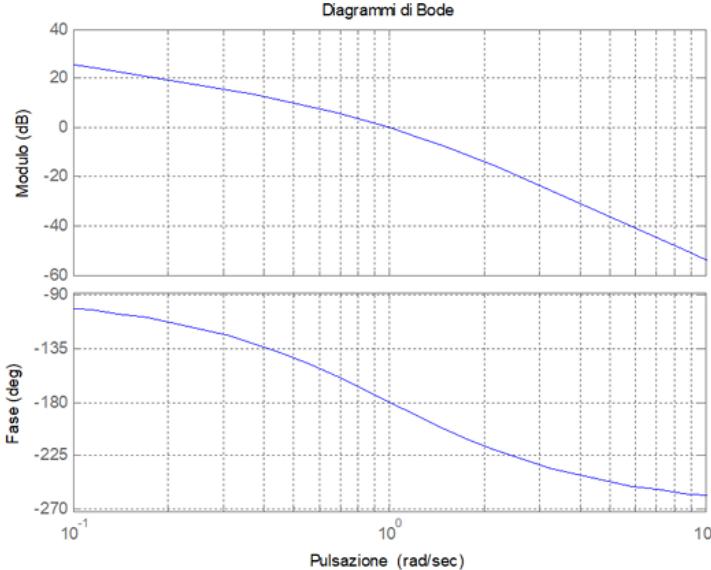


Figure 13.2: Esempio 1. Diagramma di bode con K pari al *guadagno critico*

Si nota immediatamente che, per valore di pulsazione pari a 1 rad/s, il diagramma del modulo passa per 0, mentre il diagramma della fase passa per $-\pi$: questo valore di pulsazione rappresenta, di fatto, una **frequenza di taglio** per il diagramma, che passa nel punto $(-1, 0)$. Tuttavia, da quello che abbiamo detto in precedenza, questo punto rappresenta un punto critico. Possiamo quindi provare a variare il guadagno e a disegnare nuovamente i due diagrammi

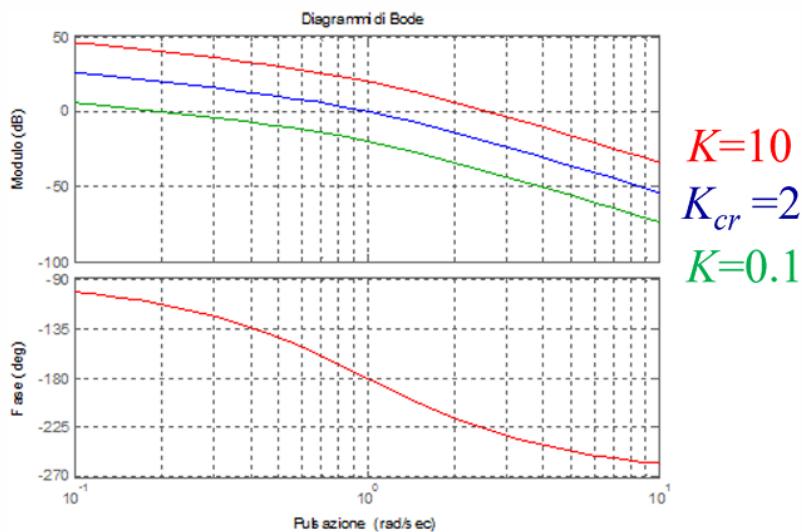


Figure 13.3: Esempio 1. Diagrammi di Bode al variare del guadagno K

Osservando il diagramma, è di immediata verifica il fatto che il diagramma, variando il guadagno statico, subisca uno spostamento **verticale** o **orizzontale**. In generale, possiamo ricavare una regola di rappresentazione valida per ogni possibile configurazione del guadagno statico:

- Una variazione negativa del guadagno, porta a uno spostamento verso il basso del diagramma del modulo.
- Una variazione positiva del guadagno, porta a uno spostamento verso l'alto del diagramma del modulo.

Si verifica quindi che, per un guadagno superiore a quello critico, il diagramma del modulo assume un valore superiore a 0 dB quando la fase vale $-\pi$, mentre, per un guadagno inferiore a quello critico assume un valore inferiore a 0 dB quando la fase vale $-\pi$. Possiamo quindi definire due margini di robustezza, il primo è legato al fatto che la fase sia maggiore di $-\pi$ quando il modulo vale 0 dB, mentre, il secondo è legato al fatto che è desiderabile che il modulo sia minore di 0 dB quando la fase vale $-\pi$. Gli indicatori tipici per questi margini sono le due grandezze introdotte all'inizio:

- Margine di guadagno.
- Margine di fase (o di ampiezza).

1 Margine di guadagno

Una prima misura del grado di stabilità a fronte di possibili variazioni del modello del sistema è data dalla distanza tra i punti A e il punto $(-1, 0)$. Quindi, indicano con x_a l'ascissa relativa al punto A , si definisce come **margine di guadagno** del sistema retroazionato la differenza tra 0 e il valore in dB del **modulo della funzione** di trasferimento $G(s)$ quando la fase della $G(s)$ ad anello aperto vale $-\pi$ radianti

$$M_{g_{\text{dB}}} = 0 - |G(s)|_{\text{dB}(\Phi=-\pi)} \quad (3)$$

Una possibile interpretazione che è possibile dare del margine di guadagno è quella di definirlo come l'*estremo superiore superiore dei fattori moltiplicativi del guadagno d'anello che il sistema può tollerare senza perdere la proprietà di stabilità asintotica*. Infatti, fintanto che il diagramma non coincide o supera il punto $(-1, 0)$ non si formano giri intorno al punto critico e, quindi, per criterio di Nyquist relativo alla funzione di trasferimento dell'esempio iniziale, il sistema è asintoticamente stabile.

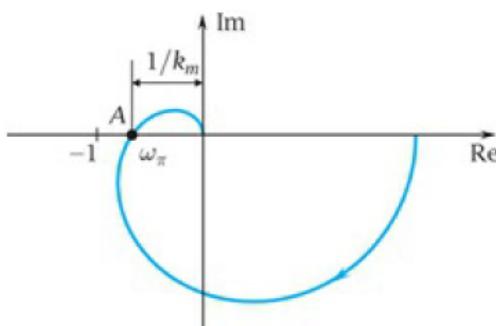


Figure 13.4: Esempio 1. Margine di guadagno relativo alla funzione di trasferimento dell'esempio iniziale

L'immagine conferma quanto detto in precedenza, fintanto che il diagramma rimane alla sinistra del punto critico, non si forma alcun avvolgimento intorno a quel punto e, di conseguenza, il sistema è **asintoticamente stabile**. Per visualizzare il margine di guadagno sul diagramma di Bode è necessario andare a osservare, nel diagramma della fase, la pulsazione per cui la fase vale $-\pi$. Una volta identificata la pulsazione

2 Margine di fase

Un altro indicatore del grado di stabilità del sistema dinamico preso in esame è il **margine di fase**. Si assume, come nel caso precedente, che il diagramma polare di $L(j\omega)$ intersechi una sola volta la circonferenza di raggio unitario e centro nell'origine. Indicando con C il punto di intersezione, la

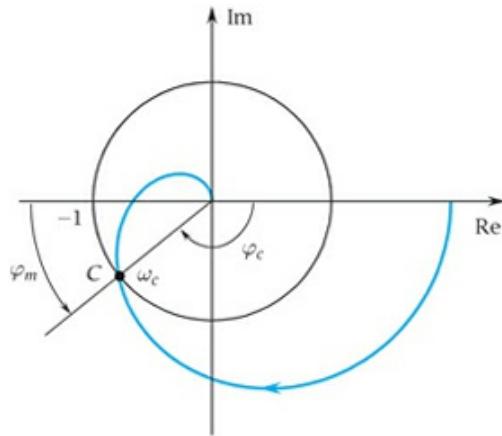


Figure 13.5: Esempio 1. Definizione del margine di fase

corrispondente pulsazione ω_c come **pulsazione critica**, e la fase φ_c come **fase critica**, si definisce il **margine di fase** come:

$$m_\Phi = \pi + \Phi(\omega_c) \quad (4)$$

dove $\Phi(\omega_c) = \arg L(j\omega_c)$ è la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto alla pulsazione critica ω_c , ovvero il punto in cui $|L(j\omega_c)| = 1$. Per determinare il margine di fase utilizzando il diagramma di Bode, è sufficiente individuare il punto in cui il modulo della funzione ad anello aperto interseca l'asse a 0 dB, cioè dove $|L(j\omega)| = 1$. In quel punto si valuta la fase $\Phi(\omega_c)$, e si calcola:

$$m_\Phi = 180^\circ + \Phi(\omega_c) \quad (5)$$

Un margine di fase positivo indica un sistema stabile con adeguata stabilità relativa, mentre un margine negativo suggerisce instabilità.

3 Conclusioni

Entrambi questi margini, nella pratica, ci indicano la distanza dal punto critico $(-1, 0)$, anche se sotto due aspetti diversi. Aumentando il margine di guadagno, l'intersezione con l'asse reale negativo si sposta verso sinistra, mentendo sempre la stessa fase rispetto alla circonferenza unitaria, mentre, aumentando il margine di fase, diminuisce l'angolo spazzato dall'intersezione del diagramma rispetto alla circonferenza unitaria centrata nell'origine.

Abbiamo delle buone condizioni di stabilità quando il margine di guadagno varia tra 4/6 dB, mentre, il margine di guadagno dovrà essere superiore a $M_f > 35 \text{ deg}$. Tuttavia, una nota importante è che tutte le definizioni viste fino ad ora valgono però solo per sistemi **regolari**, quindi per quei sistemi che rispettano la seguente definizione

Definition 3.1. Un sistema in retroazione ha un andamento regolare se l'ampiezza della funzione di trasferimento a ciclo aperto è funzione monotona decrescente della pulsazione.

Chapter 14

Sistemi di controllo

Un sistema di controllo è progettato per **gestire e regolare** una specifica **variabile di interesse**, affinché segua un valore (o andamento) desiderato di riferimento, detto **setpoint**, anche in presenza di disturbi esterni. Sempre più spesso, questi sistemi sono di **natura digitale** e sono basati su *microcontrollori* o *PLC*, che elaborano le informazioni in modo rapido e preciso.

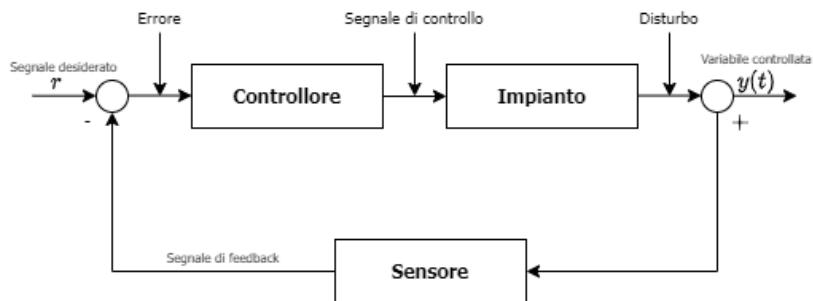


Figure 14.1: Schema a blocchi di un sistema in *feedback*

Un sistema di controllo è tipicamente composto da: *sensori* che misurano le grandezze da controllare, un *attuatore* che applica le correzioni al processo fisico e da un *controllore digitale* che calcola l'azione correttiva attraverso algoritmi specifici. L'azione di controllo, quindi quella fatta dal *controllore digitale*, dipende dall'entità di una grandezza intrinseca di tutti i sistemi, chiamata **errore** (o **incertezza**).

Supponiamo di avere a che fare con un sistema dinamico $P(s)$ controllato in *retroazione negativa*, assoggettato a un segnale di riferimento R e un disturbo D . Lo scopo del controllo è di rispondere il più rapidamente possibile al segnale di riferimento, inseguendolo fedelmente, e a di annullare il disturbo. Quindi, riassumendo, le nostre specifiche per i sistemi di controllo sono

- Il sistema in ciclo chiuso deve essere stabile.
- Inseguire i riferimenti nel modo più fedele possibile.
- Reiezione dei disturbi

Questi tre specifiche possono essere classificate in tre categorie: **specifiche di fase**, **specifiche dinamiche** e **specifiche di robustezza**. L'ultima categoria di specifiche sono quelle che riguardano i, già trattati, **margini di fase** e **margini di guadagno**.

1 Specifiche statiche

Le specifiche statiche sono quelle che riguardano il **comportamento a regime**, quindi il comportamento del sistema per $t \rightarrow +\infty$. Uno degli scopi tipici di un sistema di controllo è che, per

$t \rightarrow \infty$, cioè dopo che si è esaurito l'effetto del transitorio iniziale, l'errore e si mantenga limitato, o, nel caso ideale, che sia nullo. Questo errore (o **disturbo**) può interferire in diversi modi sul nostro sistema. Tuttavia, questo disturbo non agisce in modo univoco sul sistema, possiamo infatti distinguere due casi

- Nel primo caso, il disturbo agisce prima del processo dinamico $G(s)$

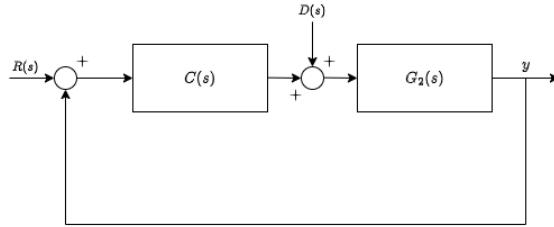


Figure 14.2: Sistema di controllo con disturbo prima del processo

- Nel secondo caso invece, il sistema presenta un disturbo all'interno del processo stesso.

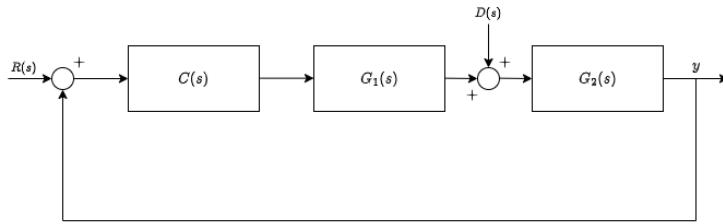


Figure 14.3: Sistema di controllo con disturbo interno al processo

Il secondo caso risulta, ovviamente, più complesso da studiare rispetto al primo, in effetti l'uscita è data dalla **sovraposizione degli effetti** delle azioni del riferimento e del disturbo. Andando a esplicitare questi due effetti, si ottiene una situazione del tipo

$$Y_1(s) = W(s) \cdot R(s) + W_d(s) \cdot D(s)$$

dove

$$W(s) = \frac{C(s)G_1(s)G_2(s)}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)} \Big|_{D(s)=0}, \quad W_d(s) = \frac{G_2(s)}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)} \Big|_{R(s)=0} \quad (1)$$

Prendendo ingressi a gradino, in sistemi di tipo zero, e applicando il teorema del valore finale, si potrebbe concludere che $W(0)$ e $W_d(0)$, cioè i guadagni statici delle funzioni di trasferimento in anello chiuso, coincidono proprio con i valori della risposta a regime. Da questa considerazione risulta evidente come avere guadagni di anello molto alti sia una condizione molto vantaggiosa. Infatti, supponendo di avere altissimi valori del guadagno di anello, possiamo sfruttare la seguente approssimazione

$$|C(s)G_1(s)G_2(s)| \gg 1 \quad (2)$$

Da questa approssimazione, possiamo concludere che

$$W_d(s) = \frac{G_2(s)}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)} \approx \frac{G_2(s)}{C(s)G_1(s)G_2(s)} = \frac{1}{C(s)G_1(s)} \approx 0, \quad C(s) \text{ molto grande} \quad (3)$$

In altre parole, con un guadagno di anello molto alto, il disturbo ha un effetto trascurabile sull'uscita e l'errore tende a zero: aumentare il guadagno di anello riduce l'errore a regime, ma bisogna fare attenzione che non si verifichino instabilità a causa di guadagni troppo alti. In generale quindi, lo scopo dell'anello di controllo è raggiungere le seguenti condizioni

$$W(0) = 1, \quad W_d(0) = 0 \quad (4)$$

Supponiamo ora di avere un disturbo $D(s)$ con una struttura a **gradino** e un controllore $C(s)$ con una forma particolare, che introduce nel sistema un polo nell'origine

$$D(s) = \frac{d_0}{s}, \quad C(s) = \frac{C_0(s)}{s} \quad (5)$$

Ipotizzando di voler studiare l'effetto del disturbo sull'uscita del sistema, quando all'ingresso troviamo uno scalino, è necessario studiare l'uscita del sistema relativa al disturbo che si intende studiare

$$Y_d(s) = \frac{G_2(s)}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)} D(s) = \frac{G_2(s)}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)} \frac{d_0}{s} \quad (6)$$

Quindi, per studiare l'effetto del disturbo a regime, possiamo applicare il teorema del valore finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_d(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{s G_2(s)}{1 + \frac{C_0(s)}{s} G_1(s) G_2(s)}}_{\gg 1} \cdot \frac{d_0}{s} \right) \approx \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{d_0}{\frac{C_0(s)}{s} G_1(s)} \right) = 0 \quad (7)$$

Il limite andrebbe a 0 indipendentemente dal numero di poli nell'origine; tuttavia, aumentando il numero di poli nell'origine l'effetto del disturbo diminuisce nettamente. Il problema è che, insieme alla diminuzione del disturbo, aumentando il numero di poli nell'origine, vi è anche il rischio di diminuire anche la stabilità del sistema. In generale, vale una regola, applicabile solo e solamente ai **sistemi stabili**

Lemma 1.1. (Regola per sistemi STABILI) *Per garantire l'annullamento a regime dell'effetto di un disturbo a gradino, è necessario che nella catena diretta, prima del punto di ingresso del disturbo, sia presente un termine integrale*

L'integratore, quindi il polo nell'origine, deve essere presente nei blocchi **a monte del disturbo** stesso. Il secondo problema riguarda invece la **minimizzazione dell'errore**, quindi studiare come minimizzare l'errore tra l'ingresso $R(s)$ e l'uscita del sistema $Y(s)$. Poniamo un ingresso $R(s) = R_0/s$ e poniamo $D(s) = 0$, definiamo l'errore come la differenza tra il riferimento e l'uscita del sistema

$$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{1}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)} R(s) = \frac{1}{1 + C(s) \underbrace{P(s)}_{G_1(s)G_2(s)}} R(s) \quad (8)$$

Quindi, poiché l'obiettivo è che l'uscita a regime tenda al riferimento, deve valere che l'errore $e \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Quindi, applicando il teorema del valore finale, equivale a studiare quando $E(s) \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \frac{1}{1 + G(0)P(0)} = \frac{1}{1 + k_0} && \text{Sistemi di tipo 0} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = 0 && \text{Sistemi di tipo } > 0 \end{aligned}$$

Quindi, nel caso di sistemi di tipo 0, aumentando il guadagno statico k_0 , l'errore tenderà a diminuire di molto. Invece, per garantire che questo errore venga annullato del tutto, occorre mettere un integratore nel controllore $C(s)$. In appendice si può trovare una tabella che generalizza gli errori anche per altri possibili ingressi

2 Specifiche dinamiche

Le specifiche dinamiche riguardano il comportamento del sistema durante i transitori. Esse si distinguono in **specifiche nel dominio del tempo** e **specifiche nel dominio della frequenza**. Inoltre, queste specifiche di robustezza si concentrano sulla capacità del sistema di mantenere prestazioni accettabili nonostante variazioni nei parametri o disturbi. Le specifiche nel dominio del tempo sono tutte quelle specifiche già trattate nel capitolo sulla risposta libera dei sistemi del secondo ordine

- **Il valore di regime** y_∞ : il valore dell'uscita a transitorio esaurito.
- **Valore massimo** y_{\max} : il valore massimo assunto dall'uscita.
- **Sovraelongazione massima** $S\%$: ampiezza, in percentuale, della sovraelongazione massima rispetto al valore di regime. Si può visualizzare questa grandezza come una misura di *quanto si è alzato* il valore dell'uscita rispetto al valore di regime. Si definisce

$$\text{massima sovraelongazione percentuale relativa} = 100 \frac{S\%}{y_\infty} \quad (9)$$

- **Tempo di massima sovraelongazione** T_M : il primo istante in cui $y = y_{\max}$.
- **Tempo di salita** T_S : il tempo impiegato dal sistema perché l'uscita passi per la prima volta dal 10% al 90% del suo valore di regime.
- **Tempo di ritardo** T_r : tempo necessario perché l'uscita raggiunga il 50% del valore di regime.
- **Tempo di assestamento**: è il tempo che serve a un sistema dinamico per raggiungere e rimanere in una fascia attorno all' $i\%$ del valore di regime.
- Costante di tempo τ : tempo necessario per raggiungere il 63% del valore di regime.

Oltre alle specifiche appena enunciate, quindi relative al **dominio del tempo**, troviamo anche delle specifiche relative al **dominio della frequenza**. In particolare, i requisiti di progetto potrebbero richiedere che la risposta allo scalino del sistema si trovi all'interno di una regione specificata, come mostrato in figura

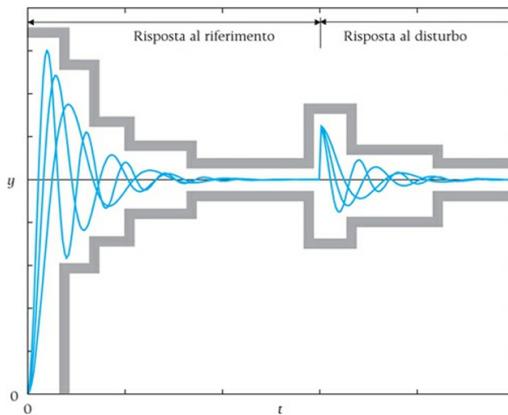


Figure 14.4: Famiglia di risposte desiderate per il sistema retroazionato

Questa tipologia di requisiti si traduce nel richiedere determinate specifiche per la risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento tra il segnale di riferimento e l'uscita, come, ad esempio, un andamento **passa-basso**. I sistemi con un comportamento *passa-basso* sono tutti quei sistemi che lasciano passare inalterate, o al più amplificate di un valore costante, unicamente i segnali di ingresso con pulsazione inferiore o uguale ad un valore $\bar{\omega}$, e che eliminano (nel caso ideale) o, attenuano (nel caso reale), le armoniche con pulsazione maggiore di tale valore $\bar{\omega}$.

Questi sistemi vengono anche chiamati *filtri ideali passa-basso* e il diagramma di Bode a essi associato è costante sino a $\bar{\omega}$ e vale $-\infty$ per $\omega > \bar{\omega}$; mentre il diagramma della fase è nullo, fino ad almeno $\bar{\omega}$

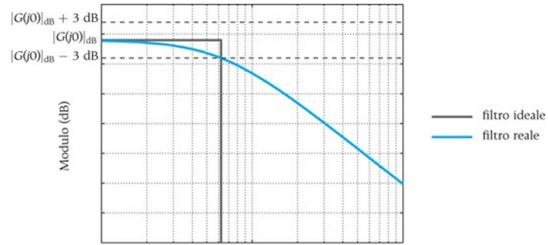


Figure 14.5: Diagramma di Bode filtro *passa-basso*

Osservando il diagramma di Bode ci si accorge che il diagramma del modulo del filtro reale *passa-basso* è compreso nell'intervallo $[-3 \text{ dB}, +3 \text{ dB}]$ per $\omega \leq \bar{\omega}$, mentre assume valori inferiori a $|G(j0)| - 3 \text{ dB}$ per valori di $\omega > \bar{\omega}$. Possiamo quindi definire $\bar{\omega}$ come *banda passante*, quindi quel valore della pulsazione tale per cui il modulo del sistema si attenua di un fattore 3 dB, assumendo valore $|G(j0)| - 3 \text{ dB}$. Oltre a poter imporre che la risposta in frequenza del sistema sia di tipo *passa-basso*, possiamo anche imporre che, dualmente, sia di tipo **passa-alto**. I sistemi con comportamento *passa-alto* sono tutti quei sistemi che lasciano passare inalterate, o al più amplificate di una quantità costante, unicamente i segnali di ingresso con pulsazione maggiore o uguale a $\bar{\omega}$, e che eliminano le armoniche con pulsazione minore di $\bar{\omega}$. Nel diagramma di Bode del filtro ideale passa-alto, il diagramma del modulo è costante per $\omega \geq \bar{\omega}$ e vale $-\infty \text{ dB}$ per $\omega < \bar{\omega}$

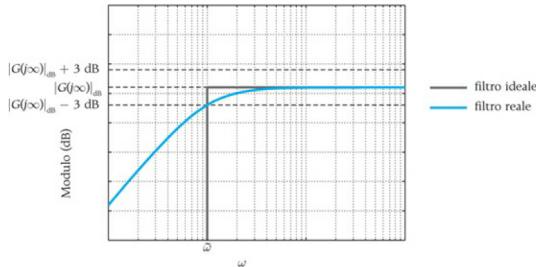


Figure 14.6: Diagramma di Bode filtro *passa-alto*

Chapter 15

Progettazione del controllore

La **progettazione** di un **sistema di controllo retroazionato** consiste nella determinazione della **funzione di trasferimento del regolatore**, in modo che il sistema rispetti le caratteristiche imposte dalle **specifiche di progetto**. Negli scorsi capitoli si è visto come sia anche possibile studiare un sistema retroazionato a partire dalla conoscenza della risposta armonica della funzione di trasferimento in catena diretta.

Esistono diverse possibilità implementative per la progettazione di un controllore, che permettono, a partire da specifiche assegnate, di ottenere infiniti regolatori compatibili con esse

- Progetto sulla base della risposta in frequenza.
- Progetto di R in modo che $L = RG$ rispetti delle caratteristiche particolari.

La prima metodologia di progetto viene detta *loop-sharing*, e consiste in una valutazione delle prestazioni in retroazione sulla base delle proprietà della funzione di anello $L(s)$; in particolare, il metodo consiste nella scelta dei poli, degli zeri e del guadagno statico del regolatore in modo che vengano rispettate determinate caratteristiche. L'ipotesi su cui ci baseremo, inoltre, è che il nostro sistema dinamico descritto da $L(s)$ sia **B.I.B.O** stabile. Tuttavia, se per qualche motivo il controllore non fosse, di sua natura, stabile, si dovrebbe introdurre un regolatore che sia in grado di stabilizzare la nostra funzione $G(s)$, queste reti sono dette **reti stabilizzatrici**.

Uno dei principi su cui ci baseremo per la sintesi dei controllori è chiamato **principio del modello interno**. Secondo questo principio, affinché un segnale di riferimento sia seguito perfettamente a regime, è necessario e sufficiente che:

- Il sistema chiuso in retroazione sia **asintoticamente stabile**.
- La funzione ad anello aperto $L(s)$ abbia una coppia di poli complessi e coniugati sull'asse immaginario a una certa pulsazione.

Nel caso di segnali e di disturbi costanti, il principio può essere ulteriormente semplificato. Infatti, affinché un sistema a regime inseguia perfettamente un riferimento è necessario e sufficiente che il sistema sia **asintoticamente stabile** e che abbia un **polo nell'origine**. Quindi, ad esempio, dato un sistema di controllo descritto dalla funzione $L(s)$

$$L(s) = C(s) \frac{1}{(s+1)^2} \quad (1)$$

affinché il sistema abbia, ad esempio, errore al gradino nullo, dobbiamo verificare due condizioni, che il sistema sia asintoticamente stabile, cosa che viene rispettata, e che abbia un polo nell'origine, cosa che invece non viene rispettato. Possiamo quindi aggiungere un polo nell'origine al controllore $C(s)$, così da rimuovere l'errore al gradino, rendendolo nullo.

Uno dei primi passi che dobbiamo fare nella sintesi del controllore è quella di studiare la relazione che esiste tra la risposta armonica della funzione di anello $L(j\omega)$ e la risposta armonica della

funzione in anello chiuso $H(j\omega)$

$$H(j\omega) = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} = \frac{|L(j\omega)|}{\sqrt{1 + |L(j\omega)|^2}} \quad (2)$$

Per pulsazioni vicine a 0, essendo il sistema *passa-basso*, la funzione risposta armonica della funzione di anello $L(j\omega) \gg 1$ e di conseguenza:

$$|H(j\omega)| \approx \frac{|L(j\omega)|}{|L(j\omega)|} = 1 \quad (3)$$

Invece, per pulsazioni grandissime, cioè per $\omega \rightarrow \infty$, visto che la funzione ha più poli che zeri, risulta che $|L(j\omega)| \ll 1$ e, di conseguenza

$$|H(j\omega)| \approx \frac{|L(j\omega)|}{1} = |L(j\omega)| \quad (4)$$

Nelle medie frequenze invece, il comportamento di $H(s)$ raccorderà i comportamenti per le basse e le alte frequenze. Inoltre, sotto le ipotesi esposte per l'analisi della stabilità, possiamo definire delle regole **empiriche**

$M_\varphi > 75$	Sistema del primo ordine
$M_\varphi \leq 75$	Sistema del secondo ordine

Quindi, ricapitolando, le approssimazioni che saranno fondamentali nella sintesi dei controllori sono

- Il sistema in ciclo chiuso ha un comportamento **passa-basso**.
- La pulsazione di rottura o la pulsazione naturale sono approssimate dalle pulsazioni di taglio a 0 dB della funzione di anello L .
- Nei sistemi passa-basso, la **pulsazione critica**, che rappresenta una frequenza caratteristica oltre la quale il sistema cambia comportamento in termini di risposta in frequenza, può essere approssimata con l'estremo superiore della **banda passante**, poiché rappresenta la frequenza oltre la quale il modulo della funzione di trasferimento $|G(j\omega)|$ inizia a decrescere significativamente (tipicamente scendendo sotto i -3 dB).

La frequenza di taglio della risposta armonica $L(j\omega)$ corrisponde alla frequenza in cui il modulo della funzione di trasferimento vale 1 (ovvero 0 dB), cioè:

$$|L(j\omega_c)| = 1 \quad \text{oppure} \quad 20 \log_{10} |L(j\omega_c)| = 0 \text{ dB} \quad (5)$$

Tale frequenza viene detta *frequenza di crossover* e gioca un ruolo fondamentale nell'analisi della stabilità del sistema in retroazione. Un'ultima approssimazione lega il margine di fase allo smorzamento del sistema

$$\xi \approx \frac{M_\phi}{100} \quad (6)$$

In generale, per quanto riguarda le specifiche statiche, abbiamo che

- Sistema di tipo zero

$K_0 = C(0)G(0)$	Guadagno statico
$e(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{1 + k_0}$	Errore a regime

- Sistema di tipo uno

$$e(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{1 + \frac{C(0)P(0)}{s}} \Big|_{s=0} = 0 \quad \text{Errore a regime}$$

- Sistema di tipo n: principio del modello interno.

$$e(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{1 + \frac{C(0)P(0)}{s}} = 0 \quad \text{Errore a regime}$$

Per sintetizzare il controllore è necessario utilizzare i diagrammi di Bode, lavorando sul modulo e sulla fase della funzione $L(s)$. Ad esempio, nel caso di un sistema di tipo 0 con una particolare specifica sull'errore a regime $e_{ss} < \varepsilon$, allora esiste un certo errore a regime, perciò per basse frequenze la funzione $L(s)$ avrà un modulo maggiore o uguale ad un minimo costante; invece, per sistemi del primo tipo, vista la presenza di un integratore, esiste un valore minimo dell'errore a regime descritto da una retta a -20 dB/decade

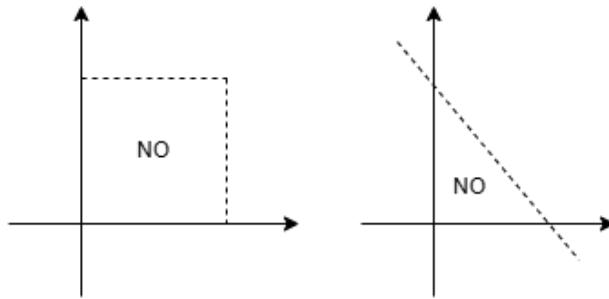


Figure 15.1: Esempio 1. Rappresentazione delle aree vietate

1 Funzione di sensitività

Supponendo di avere un sistema di controllo descritto dalla funzione di trasferimento $L(s) = C(s)G(s)$ e strutturato nel seguente modo

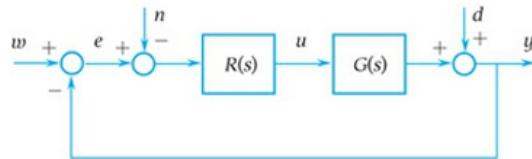


Figure 15.2: Esempio 1. Sistema di controllo

Può essere utile isolare alcune parti del sistema e studiare le corrispondenti funzioni di trasferimento risultanti. Nello specifico, possiamo isolare 5 funzioni di trasferimento possibili all'interno del nostro sistema

- Funzione di trasferimento che lega **errore** e **riferimento**

$$E = \frac{1}{1 + RG} Y_{\text{rif}} \quad (7)$$

- Funzione di trasferimento che lega **ingresso** del sistema e **riferimento**

$$U = \frac{R}{1 + RG} Y_{\text{rif}} \quad (8)$$

- Funzione di trasferimento che lega uscita del sistema e disturbo

$$Y = \frac{1}{1 + RG} D \quad (9)$$

- Funzione di trasferimento che lega uscita del sistema e riferimento

$$Y = \frac{RG}{1 + RG} Y_{\text{rif}} \quad (10)$$

- Funzione di trasferimento che lega uscita del sistema e rumore di misura

$$Y = \frac{RG}{1 + RG} N \quad (11)$$

Una volta isolate queste funzioni particolari, potrebbe essere utile valutare l'influenza dei parametri che definiscono le funzioni di trasferimento del sistema il controllore stesso, sulla risposta del sistema di controllo. A tale scopo, si definiscano le seguenti funzioni, dette **funzioni di sensitività**

$S(s) = \frac{1}{1 + RG}$

Funzione di **sensitività**

$F(s) = \frac{RG}{1 + RG}$

Funzione di **sensitività complementare**

$Q(s) = \frac{R}{1 + RG}$

Funzione di **sensitività del controllo**

La funzione di sensitività rappresenta il fattore moltiplicativo del disturbo della funzione di trasferimento dovuto alla retroazione che produce errori nel sistema. La funzione si sensitività complementare, definita dall'espressione sopra indicata, ma talvolta anche scritta come

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (12)$$

gioca un ruolo fondamentale nel caratterizzare il comportamento del sistema retroazionato, poiché rappresenta diversi aspetti legati ad esso

- La funzione di trasferimento tra il riferimento e l'uscita del sistema.
- La funzione di trasferimento, cambiata di segno, tra il disturbo e l'uscita del sistema.
- La funzione di trasferimento tra il disturbo e l'errore del sistema.

La funzione di sensitività complementare e la funzione di sensitività dipendono congiuntamente da $R(s)$ e da $G(s)$, mentre nella funzione di sensitività del controllo, la dipendenza è relativa solo a $R(s)$. Tuttavia, il denominatore di tutte e tre le funzioni è il medesimo, infatti, la *stabilità* è *indipendente dal particolare ingresso*. Inoltre, tra la funzione di sensitività e la funzione si sensitività complementare vale una relazione

$$F(s) + S(s) = 1 \quad (13)$$

Questa relazione dimostra come non sia possibile imporre, attraverso il progetto del regolatore, delle specifiche arbitrarie. La funzione di sensitività ricopre una fondamentale importanza quando si hanno delle specifiche di reiezione dei disturbi di carico; in particolare

$$\begin{aligned} |S(j\omega)| &\leq \varepsilon_n && \text{per } \omega \in [0, \omega_n] \\ |1 + L(j\omega)| &\leq \varepsilon_n \\ |L(j\omega)| &\geq 1/\varepsilon_n \end{aligned}$$

La specifica si traduce in una ulteriore barriera in bassa frequenza sul diagramma di Bode della funzione di anello. Per quanto riguarda la funzione di sensitività complementare invece, si richiede che sia circa 1 a regime, così da soddisfare gli obiettivi di controllo

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| &\leq \varepsilon_n && \text{per } \omega \in [\omega_n, \infty] \\ \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} &\leq \varepsilon_n \\ |L(j\omega)| &\leq \varepsilon_n \end{aligned}$$

Anche in questo caso, la specifica si traduce in una barriera in alta frequenza sul diagramma di Bode della funzione di anello.

2 Specifiche dinamiche

Come anche altri strumenti utilizzati nell'analisi dei sistemi retroazionati, il metodo del luogo delle radici può essere utilmente impiegato per il progetto del regolatore. In particolare, il metodo ben si presta nel trattare problemi nei quali gli obiettivi del controllo sono direttamente esprimibili in termini di posizione nel piano complesso dei poli in anello chiuso. Per esempio

- I vincoli sullo **smorzamento**, come ad esempio i vincoli $\xi \geq \bar{x}_i$, si traducono nell'imporre che i poli in anello chiuso siano confinati in determinati settori nel settore del piano complesso.
- Una specifica sul **massimo tempo di assestamento** si può esprimere come un vincolo sulla parte reale dei poli in anello chiuso $-\sigma$, che definisce il semipiano $-\sigma \leq -\bar{\sigma}$. In pratica, dobbiamo fissare una retta verticale e spostarla verso sinistra in base alla specifica $-\bar{\sigma}$.
- Un requisito sulla pulsazione naturale ω_n del tipo $\omega_n \geq \bar{\omega}_n$, si traduce nel richiedere che i poli giacciono sulla circonferenza di raggio $\bar{\omega}_n$ centrata nell'origine.

Possiamo riassumere i vincoli nella seguente immagine, dove, la prima immagine rappresenta quelli che sono i vincoli sullo smorzamento, la seconda i vincoli sulla pulsazione naturale e la terza riguarda i vincoli sul tempo di assestamento.

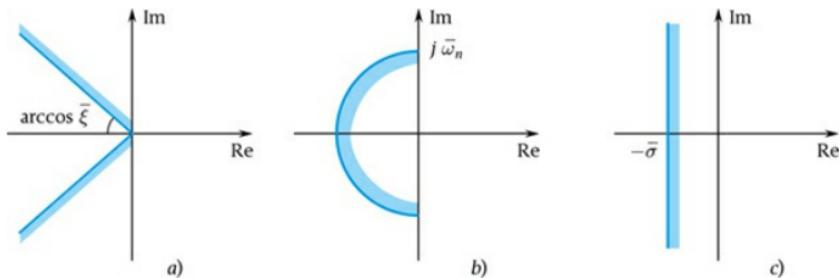


Figure 15.3: Requisiti dinamici nel luogo delle radici

Quindi, tutte le specifiche che riguardano tempi di assestamento, sovraelongazioni massime, etc, vanno trasformate in vincoli che riguardano **smorzamento**, **pulsazione naturale** e **parte reale dei poli**. Naturalmente, la formulazione di problemi in cui si richiede il soddisfacimento contemporaneo di condizioni di questo genere porta ad avere delle regioni ammissibili nel piano complesso di forma più articolata, ottenute come intersezione dei diversi vincoli. Quando parliamo di smorzamento, possiamo anche definire l'angolo che lo smorzamento forma rispetto all'asse immaginario, definito come

$$\beta = \arcsin(\xi) \quad (14)$$

tracciando due rette, con punto fisso nell'origine e che vanno all'infinito con angolo β descrivono una regione *ammissibile* nel piano complesso, mentre, tutto ciò che si trova al di fuori della regione *ammissibile* è, banalmente, *inammissibile*.

Inoltre, anche tutti i requisiti sulla sovraelongazione possono essere ricondotti a requisiti sullo smorzamento, infatti, la sovraelongazione è legata allo smorzamento dalla relazione

$$S(\%) = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (15)$$

Quindi, da un requisito sulla sovraelongazione, siamo in grado di ricavare un requisito sullo smorzamento del sistema. Per farlo, possiamo provare a creare un grafico che lega **sovraelongazione** e **massimo smorzamento**, si pone poi un asintoto orizzontale che interseca la massima sovraelongazione secondo i requisiti: la regione sottostante a quell'asintoto rappresenta una regione

ammissibile di valori dello smorzamento. A livello empirico, esiste anche una relazione che lega **margine di fase e smorzamento**

$$M_f \geq M_f^* \approx 100\xi^*, \quad \xi^* \text{ smorzamento desiderato} \quad (16)$$

Quindi, anche una specifica sul margine di fase, attraverso la relazione appena introdotta, può essere trasformata in una specifica sullo smorzamento. Idealmente, siccome vorremmo che la $L(s)$ si comporti come un integratore, sarebbe molto comodo se il margine di fase fosse $\pi/2$, quindi equivalente a quello dell'integratore. Tuttavia, nella maggior parte dei casi, ciò non è possibile e, dunque, la relazione con lo smorzamento può essere un'ottima alternativa.

Quindi, se lo smorzamento non è nullo, la nostra funzione di trasferimento in anello chiuso, applicando eventualmente l'approssimazione ai poli dominanti, assume la forma di un sistema del secondo ordine

$$W(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \quad (17)$$

Una soluzione pratica che viene utilizzata spesso è quella di poter fare delle cancellazioni di zeri e poli. Quindi, se ho un impianto $G(s)$, che si comporta con una certa dinamica, posso prendere un controllore con la forma

$$C(s) = G^{-1}(s) \iff L(s) = C(s)G(s) = 1 \quad (18)$$

Ovviamente, l'esempio preso in esame è *estremo*, non è infatti obbligatorio cancellare tutto il sistema, si potrebbe infatti cancellare solo una sua parte. Ovviamente, questa cancellazione può essere fatta solo su poli stabili, cioè su poli con parte reale negativa; infatti, anche se cancelliamo matematicamente i poli instabili, la dinamica del sistema rimane inalterata.

3 Tecnica del *Loop-Shaping*

La tecnica del loop-shaping è una delle tecniche principali per la sintesi di controllori ad anello chiuso, partendo dalla sola conoscenza della *funzione di trasferimento ad anello aperto*. Questo approccio nasce direttamente dallo studio dei diagrammi di Nyquist, dove, per l'appunto, attraverso la conoscenza della funzione in anello aperto (*open loop*) è possibile studiare la stabilità della funzione di trasferimento in anello chiuso (*closed loop*). Nel caso della tecnica del *loop-shaping*, conoscendo la funzione di trasferimento in anello aperto, definita come

$$L(s) = C(s)G(s) \quad \text{open-loop function}$$

è possibile impostare le specifiche del progetto in termini di proprietà su questa funzione in anello aperto. L'utilizzo di questo metodo permette di semplificare enormemente lo studio del sistema, rispetto a studiare la funzione di trasferimento in *anello chiuso*

$$\hat{G}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (19)$$

Quindi, lo scopo del *loop-shaping* è quello di progettare un controllore $C(s)$ tale che la risposta in frequenza del sistema a ciclo aperto sia quella desiderata; in particolare, si impongono dei vincoli sulla risposta in frequenza a ciclo aperto in base alle specifiche di progetto: ogni specifica influirà su particolari parametri della funzione di trasferimento. Quindi, tutte le specifiche di progetto vengono

- Tradotte in requisiti sul diagramma di Bode della funzione di anello.
- Rappresentare graficamente come regioni di non ammissibilità queste regioni all'interno del diagramma di Bode.

Nel paragrafo sulle funzioni di sensitività è stata accennata anche una terza tipologia di funzione, detta **funzione di sensitività al controllo**, la quale *amplifica l'azione di controllo in conseguenza*

dell'ingresso di riferimento e/o del disturbo di misura sull'uscita. Nella pratica, permette di inserire nel progetto i vincoli dovuti alle limitazioni fisiche degli attuatori

$$\begin{aligned} |Q(j\omega)| = \frac{|C(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} & \begin{array}{ll} \omega \rightarrow 0 & \rightarrow |Q(j\omega) \simeq \frac{1}{G(j\omega)}| \\ \omega \rightarrow \infty & \rightarrow |Q(j\omega) \simeq C(j\omega)| \\ \underbrace{\omega = \omega_c} & \rightarrow |L(j\omega) = 1| \rightarrow |Q(j\omega)| = \frac{1}{2}|C(s)| \end{array} \\ & \text{Pulsazione di Taglio} \end{aligned} \quad (20)$$

Alcune conseguenze relative alla funzione di sensibilità al controllo sono derivanti dalla natura stessa dell'impianto. Nel nostro caso, il sistema è di tipo *passa-bassso*, di conseguenza:

$$G(j\omega) \ll 1 \quad (21)$$

Se la frequenza di taglio rispetta $\omega \geq \omega_{BP}$, allora $|L(j\omega)| > 1$, e quindi

$$|Q(j\omega)| \simeq \frac{1}{G(j\omega)} \gg 1 \quad (22)$$

Il tentativo di allargare la banda passante dell'impianto conduce quindi a valori di controllo molto elevati, e non sempre accettabili. Questo quindi ci impone dei vincoli relativi alla sensitività di controllo, in particolare inseriamo delle barriere in alta frequenza sulla funzioni di anello e sulla funzione del controllore:

$$\boxed{\begin{cases} |L(j\omega)| < \varepsilon_u & \omega \geq \omega_u \\ |C(j\omega)| < \varepsilon_{ru} & \omega \geq \omega_{ru} \end{cases}} \quad (23)$$

I massimizzatori ε sono tendenzialmente forniti dalle specifiche di processo. Quindi, in sostanza, la strategia del **loop-shaping** si basa sul procedere per tentativi successivi, cominciando a considerare come candidati alla soluzione regolatori di struttura molto semplice e complicandoli via via, se necessario, così da rispettare tutte le specifiche di progetto. In corrispondenza di ogni tentativo, gli strumenti dell'analisi dei sistemi retroazioni, come i diagrammi di Bode, possiamo essere impiegati per valutare se l'obiettivo è stato raggiunto o se sono necessari ulteriori aggiustamenti. Seguendo questa impostazione quindi, è spesso comodo ragionare sulla funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore, fattorizzata come $R(s) = R_1(s)R_2(s)$, dove $R_1(s)$ rappresenta la *parte statica* del controllore:

$$R_1(s) = \frac{\mu_r}{s^h} \quad (24)$$

mentre $R_2(s)$ rappresenta la *parte dinamica* del controllore e corrisponde a una *rete stabilizzatrice*. Quindi, si nota facilmente che

- $R_1(s)$ influisce sulle prestazioni statiche del sistema di controllo in risposta a segnali canonici.
- $R_2(s)$ viene utilizzata per modificare opportunamente le caratteristiche della funzione d'anello, così da rispettare i requisiti dinamici.

4 Reti stabilizzatrici

Come già accennato nel paragrafo precedente, nella sintesi per tentativi, si cerca iterativamente di costruire un controllore $R(s)$ dotato di una *parte statica* $R_1(s)$ e una parte dinamica R_2 , così strutturate

$$\begin{aligned} R_1(s) &= \frac{\mu_r}{s^h} && \text{parte statica} \\ R_2(s) &= \mu \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts} && \text{parte dinamica} \end{aligned}$$

In questa sezione verrà approfondito il significato della *parte dinamica* del controllore; nello specifico, verranno approfondite due tipologie di reti: *reti anticipatrici* e *reti ritardatrici*. In generale, queste reti hanno forma

$$R_2(s) = \mu \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}, \quad \mu_R > 0, T > 0 \quad (25)$$

Quando $\alpha > 1$ parliamo di **rete ritardatrice**, mentre, invece, quando $0 < \alpha < 1$, parliamo di **rete anticipatrice**.

4.1 Rete anticipatrice

Una rete **ritardatrice** è descritta dalla funzione di trasferimento

$$R_2(s) = \mu \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}, \quad \mu_R > 0, T > 0, \alpha > 1 \quad (26)$$

Analizzando il diagramma di Bode di questa rete si osserva come essa possa contribuire ad aumentare il modulo della funzione d'anello $L(s)$ a bassa frequenza, introducendo però una sfasamento negativo sulla fase.

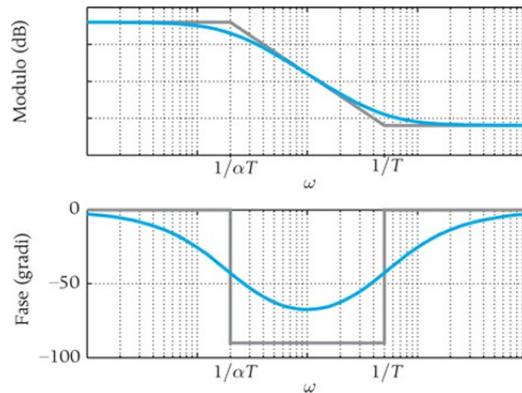


Figure 15.4: Diagramma di Bode di una rete ritardatrice

L'impiego di una rete ritardatrice è quello di **attuare** le frequenze che possono passare nel sistema, riducendo, di fatto, la banda passante. Il suo uso è giustificato quando si intende migliorare la precisione statica o allargare la banda del sistema, rendendo il sistema più veloce. Inoltre, l'introduzione di una rete ritardatrice con un guadagno unitario ω_r .

4.2 Rete anticipatrice

Una rete **anticipatrice** è descritta dalla seguente funzione di trasferimento:

$$R_2(s) = \mu \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}, \quad \mu > 0, T > 0, 0 < \alpha < 1 \quad (27)$$

Questa rete introduce uno **zero** nel punto $s = -\frac{1}{T}$ e un **polo** nel punto $s = -\frac{1}{\alpha T}$. Poiché $0 < \alpha < 1$, risulta:

$$\frac{1}{\alpha T} > \frac{1}{T} \Rightarrow \text{il polo si trova a una pulsazione maggiore dello zero} \quad (28)$$

In particolare, il polo si trova a una pulsazione pari a $\frac{1}{\alpha}$ volte quella dello zero. Analizzando il diagramma di Bode di questa rete, si osserva che essa contribuisce a generare un **anticipo di fase** che raggiunge il suo massimo in corrispondenza della pulsazione $\bar{\omega} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$

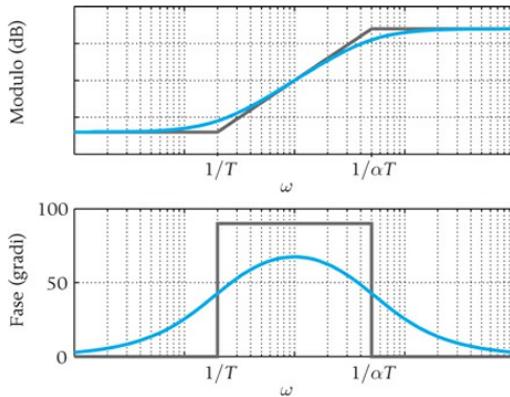


Figure 15.5: Diagramma di Bode della rete anticipatrice

Al diminuire del parametro α , l'anticipo massimo di fase aumenta e la curva del modulo nel diagramma di Bode si innalza. In particolare, una rete anticipatrice introduce un incremento di fase e modulo compreso tra la pulsazione dello zero e quella del polo.

Nel tratto in cui entra in gioco lo zero, si osserva un aumento della fase e del modulo. Quando invece si raggiunge la pulsazione del polo, l'effetto dello zero viene progressivamente compensato, fino a stabilizzarsi. Il massimo anticipo si verifica attorno alla pulsazione media geometrica tra quella del polo e quella dello zero, ovvero $\bar{\omega}$.

L'utilità di una rete anticipatrice è data dalla possibilità di permettere un recupero della fase in corrispondenza della pulsazione di taglio desiderata, quindi la pulsazione tale per cui il diagramma del modulo attraversa l'asse a 0 dB, così da rispettare un ipotetico requisito sul margine di fase. Il problema che si pone è che, insieme all'aumento di fase, si verifica anche un aumento di modulo e, di conseguenza, la pulsazione critica potrebbe spostarsi. Quindi, l'idea che si utilizza per configurare una rete anticipatrice è la seguente: si sceglie α in modo da garantire il recupero di fase necessario, sfruttando la relazione

$$\alpha = \frac{1 - \sin(\varphi_{\max})}{1 + \sin(\varphi_{\max})} \quad (29)$$

Si determina inoltre T dai diagrammi di Bode normalizzati delle reti, imponendo che φ_{\max} sia raggiunto proprio in corrispondenza della pulsazione desiderata

$$\omega_{c,\text{des}} T = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \implies T = \frac{1}{\omega_{c,\text{des}}} \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \quad (30)$$

Se il margine di fase da recuperare è troppo elevato occorre introdurre più reti anticipatrici scelte in modo che la somma dei recuperi di fase sia pari a recupero desiderato.

Chapter 16

Controllori PID

I regolatori che ad oggi trovano il più ampio utilizzo in ambito industriale sono i **controllori PID**, detti anche *Controllori ad azione Proporzionale, Integrale e Derivata*. I motivi che giustificano l'utilizzo di questi controllori sono molteplici, tuttavia, i principali sono due

- La possibilità di controllare un'ampia gamma di processi.
- La possibilità di tararli in modo facile attraverso delle semplici regole matematiche.

La facilità di taratura deriva dal fatto che i PID sono dei modelli standard, cioè strutturati sempre nello stesso identico modo. Utilizzando un controllore PID quindi, non sussiste più il problema del controllo inteso come *sintetizzare un controllore* a partire dalla sola $L(s)$, studiando poli e zeri, ma il problema diventa quello di regolare delle costanti in modo che il controllore segua, nel modo più accurato possibile, il riferimento. In generale, un controllore PID implementa la legge di controllo

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_{t_0}^{t_1} e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (1)$$

dove K_p, K_i, K_d sono costanti **positive** o **nulle**. Il coefficiente K_p è detto *coefficiente dell'azione proporzionale*, mentre K_i e K_d sono rispettivamente il *coefficiente dell'azione integrale* e il *coefficiente dell'azione derivata*. Risulta di immediata verifica che i controllori PID, almeno nella loro forma ideale, sono dei sistemi dinamici **SISO** tali per cui, applicando la trasformata di laplace, si ottiene la funzione di trasferimento del tipo

$$R(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (2)$$

Un altro vantaggio dato dall'utilizzo dei controllori PID è la possibilità di disattivare alcune delle azioni ponendo, semplicemente, una delle costanti a zero. Nello specifico, alcuni esempi di controllori derivabili a partire dal PID sono:

- Controllori **P** (K_D e K_I nulli): Questo tipo di controllore viene utilizzato nel controllo di processi *asintoticamente stabili*, o *semplicemente stabili*, e nel caso in cui le prestazioni statiche richieste al sistema di controllo non rendano necessario l'eventuale inserimento di un'azione **integrale**.
- Controllori **PI** (K_D nullo): I regolatori PI vengono impiegati quando è necessaria l'azione integrale per le prestazioni statiche, ma è necessaria anche la presenza di uno zeri per avere una banda passante più ampia rispetto a quella ottenibile con altri regolatori.
- Controllori **I**: I regolatori I permettono di esercitare una funzione solamente di tipo integrale. Nella pratica, questo genere di regolatori trova impiego in tutte quelle casistiche in cui è necessaria un'azione integrale per il soddisfacimento dei requisiti sull'errore a transitorio esaurito, ma non si richiedono prestazioni elevate in termini di velocità di risposta del sistema.

Quindi, come detto anche in precedenza, la difficoltà principali data dall'utilizzo di questi controllori è quella di tarare le costanti. Questa taratura può essere fatta in due modi diversi:

- alla *canis cazzum*, mettendo valori a caso e pregando la divina provvidenza che funzioni.
- Scegliere i parametri seguendo dei modelli matematici, in base alle prestazioni di cui abbiamo bisogno.
- Lavorare su poli e zeri della funzione di trasferimento del regolatore.

Il terzo metodo richiede di riscrivere la funzione di trasferimento in una forma più esplicita, simile alle funzioni di trasferimento studiate fino ad adesso

$$R(s) = k_p \frac{\tau_I \tau_D s^2 + \tau_I s + 1}{\tau_I s} \quad (3)$$

Il problema, immediatamente osservabile, della nostra funzione è che il numero di zeri è maggiore del numero di poli. A questo punto, dobbiamo distinguere due aspetti diversi del regolatore

- Aspetto teorico.
- Aspetto reale.

Dal punto di vista pratico e reale, non possiamo avere un regolatore con più zeri che poli. Quindi, nel mondo reale è necessario introdurre un polo nell'origine aggiuntivo, che permetta di concretizzare il regolatore. Dal punto di vista teorico invece, ci limitiamo a studiare il sistema nella sua forma originale, senza introdurre ulteriori poli. Inoltre, studiando il regolatore in questa forma, possiamo identificare facilmente la posizione di zeri e poli

$$z_{1,2} = \frac{-\tau_I \pm \sqrt{\tau_I^2 - 4\tau_D\tau_I}}{2\tau_I\tau_D} \quad \text{zeri del PID} \quad (4)$$

$$s = 0 \quad \text{polo del PID} \quad (5)$$

Grazie a questa conoscenza, possiamo effettuare la taratura delle costanti attraverso meccanismi di progetto visti fino ad ora, come, ad esempio zeri e poli. Inoltre, zeri e poli garantiscono alcune caratteristiche al regolatore

- Il polo nell'origine garantisce prestazione a regime.
- Gli zeri permettono di recuperare la fase e, assieme alla costante di guadagno, di soddisfare le specifiche di transitorio.

La disponibilità di un regolatore PID consente da un lato di poter usare una struttura standard per il controllo, andando però a togliere gradi di libertà al progetto del regolatore.

All'interno dei controllori PID si possono riscontrare alcune problematiche legate alla presenza del termine integrale e del termine derivato. Entrambi questi problemi possono, se le costanti vengono tarate in un modo scorretto, portare il sistema ad avere un comportamento instabile. Analizziamo il problema relativo al termine derivato; per farlo partiamo dal montaggio tradizionale di un controllore PID, che prevede che il termine integrale sia relativo **all'errore del sistema**, definito come $e = w - y$:

La problematica di questo montaggio nasce proprio dal fatto che l'azione derivata è effettuata sull'errore e . Infatti, in presenza di uno scalino del segnale di riferimento w , l'uscita del derivatore, e di conseguenza la variabile di controllo u , hanno un andamento di tipo impulsivo. Questa brusca variazione va in contrasto con il requisito di moderazione del controllo e può provocare la saturazione dell'attuatore e un conseguente comportamento instabile del sistema. Questa problematica trova due possibili soluzioni:

- Togliere la possibilità all'utente di generare un gradino ideale introducendo un filtro passabasso che smorzi il segnale.

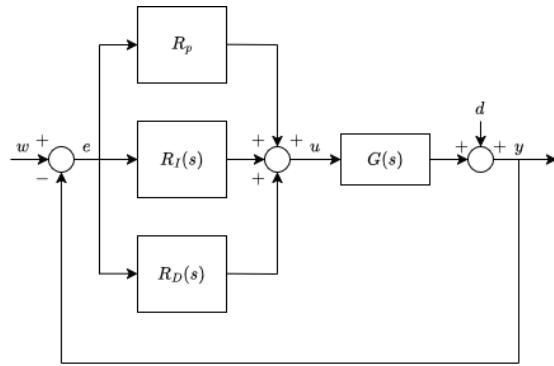


Figure 16.1: Modello di un controllore PID con derivazione dell'errore

- Utilizzare un diverso tipo di montaggio, in cui l'azione derivata venga esercitata sull'uscita e non sull'errore.

Nel secondo caso, l'azione derivata non viene più fatta sull'errore, ma sull'uscita del sistema. Poiché y corrisponde all'uscita di un sistema con un comportamento, generalmente, *passa-basso*, allora, le variazioni istantanee dell'uscita sono generalmente contenute e la presenza dell'azione derivativa non provoca il suddetto andamento impulsivo di u .

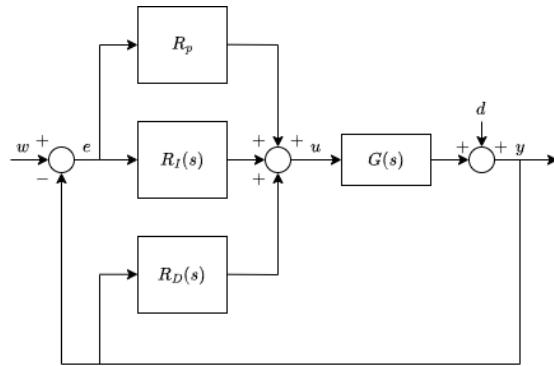


Figure 16.2: Modello di un controllore PID con derivazione dell'uscita

Il secondo problema, detto anche *wind-up*, nasce dalla presenza combinata dell'azione integrale e di una, eventuale, saturazione degli attuatori, che provoca un effetto di tipo *non-lineare* che può deteriorare le prestazioni del sistema di controllo. Supponiamo, ad esempio, di avere un errore $e(t)$ che rimane costante per un certo periodo di tempo. L'azione integrale equivale quindi a

$$\int_{t_0}^{t_1} e(t) \, dt \approx k, \quad k \text{ molto grande} \quad (6)$$

Quando l'errore e si mantiene dello stesso segno per un certo periodo, lo stato dell'integratore, cresce in modulo sempre di più. Il problema è che, aumentando l'azione così tanto si arriva a un punto di saturazione degli attuatori del sistema, che non sono più in grado di inseguire la correzione desiderata. Inoltre, nel momento in cui l'errore cambia di segno, è necessario attendere che l'integratore si scarichi prima che l'attuatore ripresa a operare correttamente. Questa problematica, se abbinata a una taratura scorretta dei coefficienti integrali, può portare due effetti collaterali:

- Rendere il sistema instabile.
- Diminuire la capacità del sistema di raggiungere i segnali.

Esistono tuttavia dei meccanismi che permettono di realizzare delle procedure di compensazione di questo meccanismo. La prima prevede che, nel momento in cui si raggiunge la saturazione massima degli attuatori, l'azione integrale venga temporaneamente interrotta. Mentre, la seconda soluzione prevede di azzerare il contributo integrale nel momento in cui l'errore cambia di segno.

Quindi, ricapitolando, la taratura delle costanti è un procedimento molto delicato all'interno del mondo dei controllori PID. Una scelta sbagliata delle costanti potrebbe risultare in dei comportamenti non desiderabili dell'uscita del sistema di controllo. Inoltre, come già detto, esistono diverse possibilità di taratura per le costanti di un controllore PID:

- Studio con diagrammi di Bode, luogo delle radici, etc.
- Modelli numerici basati su relazioni algebriche tra le costanti

L'esempio che andiamo a enunciare appartiene alla seconda categoria. Nello specifico, si tratta di un'insieme di regole che permettono di calcolare velocemente le costanti, senza calcoli eccessivamente laboriosi, a patto però che le prestazioni richieste non siano particolarmente spinte; queste regole prendono il nome di "*regole di Nicholson-Zigler*". L'unica ipotesi preliminare che occorre fare è che il sistema sia **BIBO** stabile. Il primo passo della procedura per il calcolo della taratura prevede di calcolare due grandezze:

- Si chiude un primo anello di controllo con un controllore proporzionale K_P .
- Si incrementa il valore della costante fintanto che il sistema non inizia a oscillare (supponendo un ingresso a gradino). A questo punto si segna
 - Il periodo dell'oscillazione $\bar{\tau}$
 - Il valore del guadagno \bar{k} .

Una volta identificati questi due parametri è sufficiente utilizzare una semplice tabella, che lega, per l'appunto, i parametri calcolati alle costanti proporzionali

Controllore	K_p	τ_I	τ_D
P	$0.5 \cdot \bar{k}$		
PI	$0.45 \cdot \bar{k}$	$0.8 \cdot \bar{\tau}$	
PID	$0.6 \cdot \bar{k}$	$0.5 \cdot \bar{\tau}$	$0.125 \cdot \bar{\tau}$

Table 16.1: Parametri PID secondo una regola empirica (es. Ziegler-Nichols)

Chapter 17

Esempio di sintesi di un controllore mediante *loop-shaping*

Supponiamo di avere il sistema dinamico descritto dalla funzione in anello

$$L(s) = C(s)G(s) = \frac{10(20-s)}{(s+1)(s+25)^2}C(s) \quad (1)$$

Si chiede di progettare un controllore che rispetti le seguenti specifiche

- Errore a regime in risposta al gradino $\leq 3\%$.
- Attenuazione disturbi di carico di almeno 20 dB per $\omega \leq 0.1 \text{ rad/s}$.
- Reiezione dei rumori di misura di almeno -20 dB per $\omega \geq 40 \text{ rad/s}$.
- Margine di fase maggiore o uguale di 45 deg

Il primo passo della sintesi del controllore riguarda l'analisi del requisito sull'errore a regime del nostro sistema. Nello specifico, si studia la relazione tra il segnale errore e il segnale di riferimento, cioè, si studia la relazione tra l'ingresso e l'uscita. Il sistema è di tipo zero, di conseguenza, non avendo un polo nell'origine, mi aspetto di avere un certo errore a regime e_∞ ; applico quindi il teorema del valore finale

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + R(s)G(s)} Y_{rif}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + R(s)G(s)} \leq 0.03 (3\%) \\ &= \frac{1}{1 + R(0)G(0)} \leq 0.03 = \boxed{\frac{1}{1 + k} \leq 0.03} \end{aligned}$$

Quello che dobbiamo fare è, quindi, calcolare il guadagno statico della funzione di trasferimento, che risulta essere

$$G(0) = \frac{10 \cdot 20}{25^2} = 0.32 \quad (2)$$

Unendo a quanto visto in precedenza

$$\frac{1}{1 + k} \leq 0.03 \iff 1 + k \geq \frac{100}{3} \quad (3)$$

La costante k è data dal prodotto del guadagno del regolatore e del guadagno della $G(s)$, quindi

$$1 + k_c G(0) \geq \frac{100}{3} \rightarrow \boxed{k_p \geq 101} \quad (4)$$

Scegliendo un valore di k_p maggiore di 101 siamo in grado di rispettare la prima specifica. Il secondo passo è quello di andare a rappresentare gli altri vincoli statici all'interno del diagramma

di Bode, traducendoli in delle regioni *proibite*. Prima di tutto, dobbiamo capire cosa voglia dire **attenuare il disturbo di carico**; nella pratica, vuol dire studiare un elemento che riguarda il disturbo e l'uscita: dobbiamo quindi studiare la funzione di sensitività

$$S(s) = \frac{1}{1 + RG} = \frac{Y(s)}{D(s)} \quad (5)$$

Che rappresenta la relazione tra l'uscita del sistema quando pongo un disturbo di carico. Quindi, imporre un attenuazione sul disturbo di carico, vuol dire imporre un vincolo sul modulo della nostra funzione di sensitività; nello specifico, stiamo chiedendo che il modulo della $S(j\omega)$ sia minore o uguale di -20 dB in un range di frequenze specifico, corrispondente a $\omega \in [0, 0.1]$

$$|S(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + R(j\omega)G(j\omega)} \right| \leq -20 \text{ dB} \quad (6)$$

La funzione di anello $R(j\omega)G(j\omega)$ è **alta per basse frequenze**, di conseguenza, possiamo scrivere

$$|1 + R(j\omega)G(j\omega)| \geq -20 \text{ dB} \approx |R(j\omega)G(j\omega)| \geq 20 \text{ dB} = |L(j\omega)| \geq 20 \text{ dB} \quad (7)$$

Possiamo quindi passare a studiare il diagramma di Bode, imponendo le seguenti barriere

$$\begin{aligned} |L(j\omega)| &\geq 31 = 20 \log_{10}(101 \cdot 0.32) \text{ dB} \\ |L(j\omega)| &\geq 20 \text{ dB} \end{aligned}$$

Quindi, per frequenze inferiori a 0.1 abbiamo una barriera inferiore per il diagramma di Bode che passa per 31 dB. La reiezione dei rumori di misura per alte frequenze impone di studiare la funzione di trasferimento tra il rumore di misura e l'uscita del sistema, cioè, la funzione di sensitività complementare

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} \quad (8)$$

Chiedere che ci sia una reiezione di almeno 20 dB, equivale a imporre

$$\frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} \leq -20 \text{ dB} \quad \omega \in [40, \infty) \quad (9)$$

Questo vincolo però non ci basta, dobbiamo riuscire a ricavare il vincolo che esiste sulla funzione di anello. Ad alta frequenza, la nostra funzione ad anello è bassa e di conseguenza posso approssimare nel seguente modo

$$\frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} \approx R(s)G(s) \leq -20 \text{ dB} \quad \omega \in [40, \infty) \quad (10)$$

che equivale a dire che il modulo di $L(s)$ deve essere pari a -20 dB per $\omega \in [0, \infty)$

$$|L(j\omega)| \leq -20 \text{ dB} \quad \omega \in [40, \infty) \quad (11)$$

Quindi, possiamo mettere un'altra barriera nel diagramma di Bode, una barriera a -20 dB tale per cui tutto il diagramma di Bode non potrà andare sopra a quella barriera: un limite superiore per il nostro diagramma. A questo punto abbiamo mappato tutte le specifiche per il nostro diagramma di Bode della funzione ad anello. Il passo successivo è quindi quello di rappresentare il diagramma di Bode della $L(s)$

$$\underbrace{k_p}_{R(S)} G(s) = 30 \frac{(1 - s/20)}{(1 + s)(1 + s/25)^2} \quad \text{Forma di Bode} \quad (12)$$

Quello che faccio è supporre $R(s) = k_p$, andando a testare se tutte le specifiche statiche vengono rispettate, in tal caso, abbiamo finito.

INSERIRE IMMAGINE

Il problema di questo regolatore è che non viene rispettato il requisito sui disturbi di misura, infatti vi è una vera e propria intersezione della regione proibita. Quindi, è necessario cercare

un regolatore che ci permette di spostare all'indietro il modulo del nostro diagramma, di modo da farlo uscire dalla regione proibita. Anche dal diagramma della fase si nota un problema non trascurabile, il vincolo sul margine di fase, oltre a non essere rispettato, potrebbe essere talmente piccolo da portare il sistema alla stabilità.

Uno dei modi con cui si potrebbe risolvere il problema dell'attenuazione dei rumori di carico è introdurre una polo nel punto $(0, -1)$, il cui scopo sarebbe anticipare la discesa del diagramma di Bode.

$$R(s) = \frac{(1+s)}{1+10s} \quad (13)$$

La funzione di trasferimento risultante diventerebbe

$$L(s) = 32 \frac{(1-s/20)}{(1+10s)(1+s/25)^2} \quad (14)$$

Tracciando il diagramma di Bode in questo caso si arriverebbe a una soluzione nella quale si sta passando molto vicino ma comunque, in linea teorica, fuori dalla regione proibita.

Il comportamento che ci piacerebbe è che quando attraversa l'asse a 0db il nostro sistema abbia un andamento simile a quello di un integratore.

Part V

Appendici

Appendix A

Miscellanea

1 Calcolo della adj(A)

Il calcolo della matrice degli aggiunti è relativamente semplice. Il primo passo è il calcolo della matrice trasposta, successivamente si trova il primo minore della matrice e si calcola il determinante. Per trovare i minori si procede nel seguente modo

- Si fissa la riga:
 1. Si elimina la prima colonna.
 2. Si calcola il minore
 3. Lo si pone nella matrice degli aggiunti alla posizione in cui la riga e la colonna eliminate si intersecano.
 4. Se rimangono altre colonne da eliminare si torna al passo 1.1
- Se rimangono altre righe, si torna al passo 1. Altrimenti si esce dall'algoritmo

Supponiamo di voler calcolare la matrice degli aggiunti della matrice

$$A = \begin{bmatrix} s & 0 & 1 \\ -1 & s & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

2 Tabella degli errori

Ingresso $r(t)$	Tipo 0	Tipo 1	Tipo 2
$1(t)$	$\frac{1}{1+k_0}$	0	0
$t \cdot 1(t)$	∞	$\frac{1}{k_1}$	0
$0.5 \cdot t^2 \cdot 1(t)$	∞	∞	$\frac{1}{k_2}$

Figure A.1: Figura 1. Errore a regime per diversi tipi di sistemi e ingressi