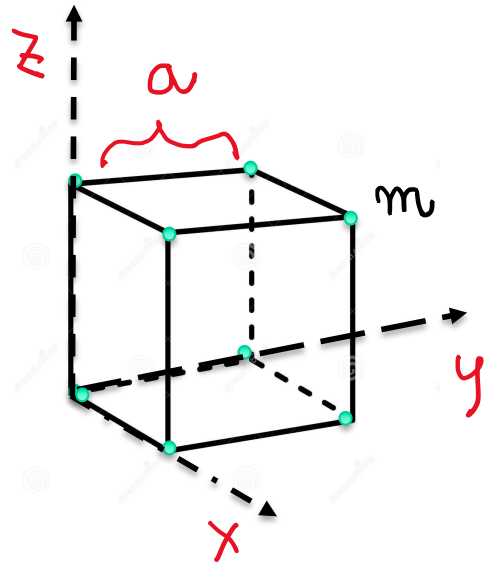
Es. del 24/4/ Ciocci

Esercizi di esame da
https://www.pi.infn.it/~ciocci/

Determinare il centro di massa di un corpo rigido formato da masse puntiformi di massa m poste ai vertici di un cubo di lato a, collegate tra loro con barre di massa trascurabile.



baricentro in x

4 masse hanno $x = a$

4 masse hanno $x = 0$

$$x_{cm} = \frac{(4 \times a + 4 \times 0)\, m}{8\, m} = \frac{a}{2}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

baricentro in y

4 masse hanno $y = a$

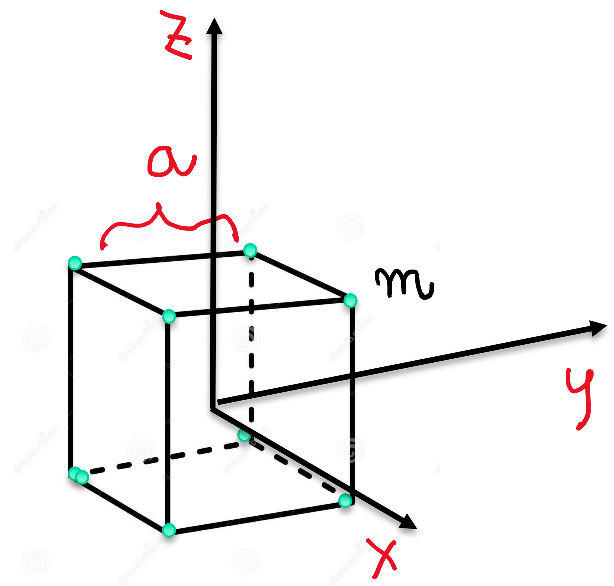
4 masse hanno $y = 0$

$y_{cm} = a/2$

$\Rightarrow$ baricentro in z

$z_{cm} = a/2$

Determinare il momento di inerzia del corpo rigido formato da masse puntiformi di massa *m* poste ai vertici di un cubo di lato *a*, collegate tra loro con barre di massa trascurabile, rispetto ai tre assi indicati in figura passanti per il centro di massa del sistema.



$$I_x^{CM} = \sum_i m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right)$$

$$I_y^{CM} = \sum_i m_i \left(x_i^2 + z_i^2\right)$$

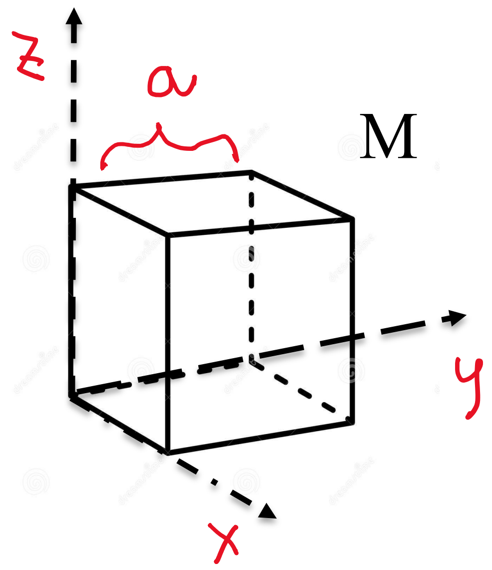
$$I_z^{CM} = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

dalla figura $x = \pm a/2$ $\quad y = \pm a/2$ $\quad z = \pm a/2$

$$I_x^{CM} = 8m\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right) = 4ma^2 = I_y^{CM} = I_z^{CM}$$

Nota: i 3 assi sono assi di simmetria per il sistema

Determinare il centro di massa di un cubo omogeneo di lato *a* e massa *M*.



Baricentro del cubo

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int dm\, \vec{r}$$

$$\Rightarrow \quad x_{cm} = \frac{1}{M}\int dm\, x$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int dm\, y$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\int dm\, z$$

$$dm = \rho_V\, dV \qquad \rho_V = \frac{dm}{dV} \Rightarrow \frac{M}{a^3}, \quad dV = dx\, dy\, dz$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int \rho_V\, dV\, x = \frac{\rho_V}{M}\int dx\, dy\, dz\, x \Rightarrow$$

$$x_{cm} = \frac{\rho_V}{M}\int_0^a x\, dx \int_0^a dy \int_0^a dz = \frac{\rho_V}{M}\, \frac{a^2}{2} \cdot a \cdot a \Rightarrow$$

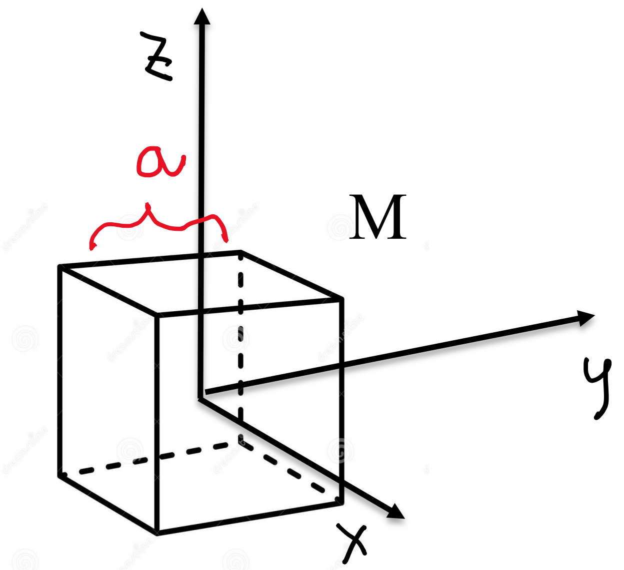
$$x_{cm} = \frac{\rho_V}{M}\int_0^a x\,dx \int_0^a dy \int_0^a dz = \frac{\rho_V}{M}\; a^2/_2 \cdot a \cdot a \Rightarrow$$

$$x_{cm} = \frac{M}{a^3} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{a^4}{2} = \frac{a}{2}$$

poichè $\quad y_{cm} = \frac{\rho_V}{M}\int_0^a dx \int_0^a y\,dy \int_0^a dz = a/_2$

In modo analogo $\quad z_{cm} = a/_2$

Determinare il momento di inerzia di un cubo omogeneo di lato a e massa M rispetto ai tre assi indicati in figura passanti per il centro di massa del sistema.



$$I_x^{CM} = \int dm\,(y^2+z^2)$$

$$I_y^{CM} = \int dm\,(x^2+z^2)$$

$$I_z^{CM} = \int dm\,(x^2+y^2)$$

$$dm = \rho_V\, dV \qquad \rho_V = \frac{M}{a^3}$$

$$I_z^{CM} = \rho_V \int dx\,dy\,dz\,(x^2+y^2) = \rho_V \int_{-a/2}^{a/2} dz \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} (x^2+y^2)\,dy$$

$$= \rho_V\, a \int_{-a/2}^{a/2} \left(a x^2 + \frac{y^3}{3}\Big|_{-a/2}^{a/2} \right) dx$$

$$I_z^{CM} = \rho_V a \int_{-a/2}^{a/2} \left(a x^2 + \frac{y^3}{3} \Big|_{-a/2}^{a/2} \right) dx$$

$$= \rho_V a \int_{-a/2}^{a/2} \left(a x^2 + \frac{a^3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2 \right) dx = \rho_V a \left[a \, 2 \left(\frac{a}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{a^3 \cdot a}{12} \right]$$

$$= \frac{M}{a^3} \cdot a \left[\frac{a^4}{12} + \frac{a^4}{12} \right] = \frac{M}{a^2} \cdot \frac{a^4}{6} = \frac{Ma^2}{6}$$

per simmetria i momenti di Inerzia

I_x^{CM}, I_y^{CM}, I_z^{CM} sono uguali!

II^0 Teorema di Köenig: per il momento angolare

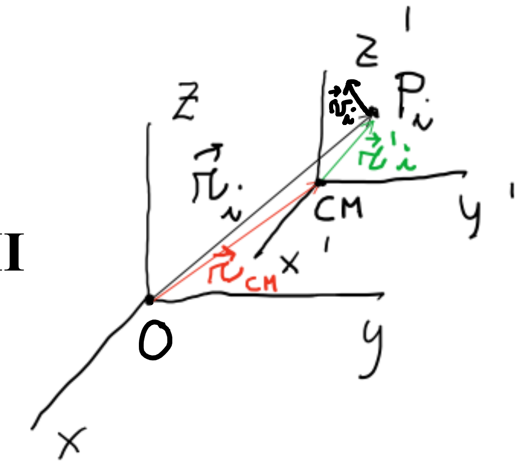
Momento angolare di un corpo rigido (II teorema di Koenig).

Il momento angolare di un corpo rigido rispetto ad un polo fisso O si può scrivere nella forma (con un'ipotesi sull'asse di rotazione, che ora preciseremo):

$$\vec{L}_0 = M\vec{R}_{CM} \wedge \vec{V}_{CM} + I_{CM}\vec{\omega}$$

Ha due contributi:

- Uno associato momento angolare del cm rispetto a O
- Uno associato al momento angolare attorno centro di massa



Momento angolare di un sistema di punti materiali (II teorema di Koenig).

$$\vec{L}_0 = \sum m_i(\vec{R}_i \wedge \vec{V}_i) = \sum m_i(\vec{R}_i{}' + \vec{R}_{CM}) \wedge (\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i{}')$$

$$= \Big(\underbrace{\sum m_i\vec{R}_i{}'}_{=0!}\Big) \wedge \vec{V}_{CM} + M\vec{R}_{CM} \wedge \vec{V}_{CM}$$

$$+ \vec{R}_{CM} \wedge \underbrace{\sum m_i\vec{v}_i'}_{=0} + \sum m_i\vec{R}_i' \wedge \vec{v}_i' = M\vec{R}_{CM} \wedge \vec{V}_{CM} + \sum m_i\vec{R}_i{}' \wedge \vec{v}_i'$$

=0! posizione del CM in SCM CM

=0 q.m del CM in SCM

il primo ed il terzo termine sono nulli per le proprietà del centro di massa.

Momento angolare di un sistema di punti materiali

$$\vec{L}_O = M\vec{R}_{CM} \Lambda \vec{V}_{CM} + \sum m_i \vec{R}_i' \Lambda \vec{v}_i'$$

Momento angolare per un corpo rigido

$$\vec{L}_O = \sum m_i \left(\vec{R}_i \Lambda \vec{V}_i\right) = M\vec{R}_{CM} \Lambda \vec{V}_{CM} + I_{CM}^A \vec{\omega}$$

dove $\vec{\omega}$ è il vettore velocità angolare di rotazione del corpo rigido intorno al CM e I_{CM}^A è il momento di inerzia rispetto a un asse passante per CM e parallelo a $\vec{\omega}$

$$Nota\ \ se : M\vec{R}_{CM} \Lambda \vec{V}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = I_{CM}^A \vec{\omega}$$

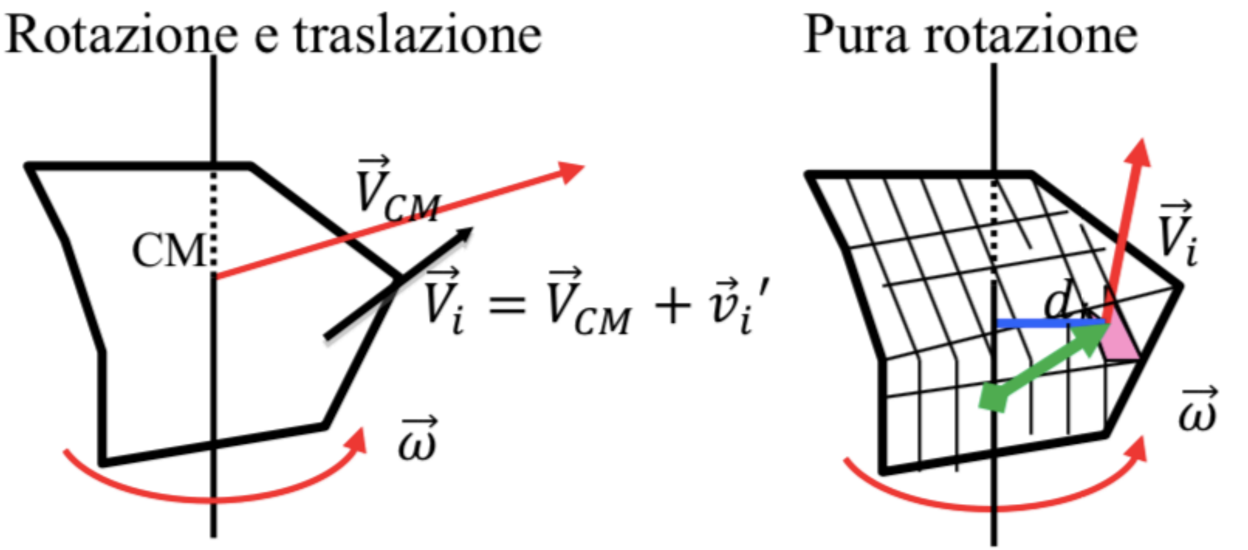
Energia cinetica di un sistema di punti materiali

$$K = \frac{1}{2} M_{tot} v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

Energia cinetica di un corpo rigido

$$K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

$$\Leftrightarrow \quad K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$



Infatti **in generale** (traslazione + rotazione attorno al cm) si ha:

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i'\right)^2$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i V_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \vec{V}_{CM} \cdot \sum m_i \vec{v}_i' = \frac{V_{CM}^2}{2} \sum m_i + \sum \frac{1}{2} m_i \omega^2 d_i^2$$

$$= M \frac{V_{CM}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \sum m_i d_i^2 = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

da cui $I_{CM} = \sum_i m_i d_i^2$

Esame di Fisica Generale del 21/02/2017
Esercizio 1

Due sfere, una di massa $m_1 = 2$ kg e raggio $r_1 = 0.17$ m la seconda di massa $m_2 = 8$ kg e raggio $r_2 = 0.23$m, si urtano centralmente e rimangono attaccate senza deformarsi (troppo). La prima sfera viaggia alla velocità $v_1 = 34$ m/s verso la seconda che è ferma ma ruota su se stessa con una velocità angolare $\omega_2 = 20$ rad/s (Fig.1).

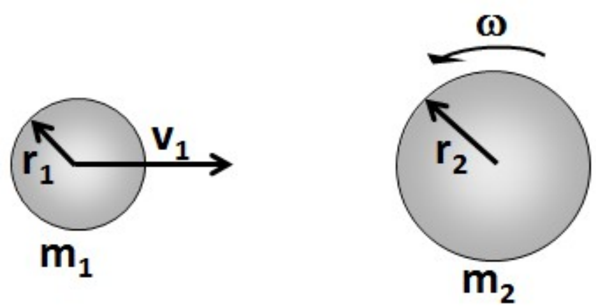


Fig.1

Si calcoli:

a) l'energia cinetica totale iniziale del sistema e la distanza tra il centro di massa del sistema (dopo l'urto) e il centro della prima sfera:

$E_c = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $d_{cm} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) la velocità angolare del sistema dopo l'urto e la massima velocità del centro della seconda sfera rispetto al laboratorio

$\omega = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $v_{max} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c) la variazione di energia del sistema dovuta all'urto tra le due sfere:

$\Delta E = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Le due sfere si scontrano frontalmente e rimangono attaccate.

① L'urto è anelastico

② Non ci sono forze esterne

① $E_f < E_i \Rightarrow T_f < T_i$

② $\vec{P}$ conservato , $\vec{L}$ conservato

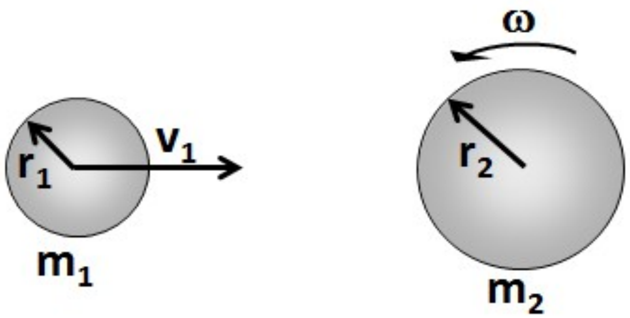


Fig.1

Sfera 1

$m_1 = 2\,kg$

$r_1 = 0.17\,m$

$v_1 = 34\,m/s$

Sfera 2

$m_2 = 8\,kg$

$r_2 = 0.23\,m$

$v_1 = 34\,m/s$

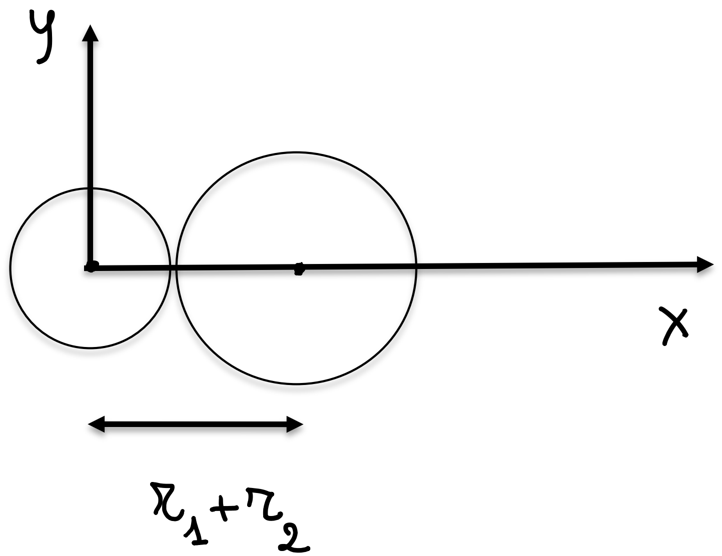
a) Si calcoli l'energia cinetica totale iniziale del sistema e la distanza tra il centro di massa del sistema (dopo l'urto) e il centro della prima sfera: E_c = ... d_{cm} = ...

$$T_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega^2$$

$$I_2 = \frac{2}{5} m_2 r_2^2 = 0.169\ kg\,m^2$$

$E_c = 1190\ J$

a)Si calcoli l'energia cinetica totale iniziale del sistema e la distanza tra il centro di massa del sistema (dopo l'urto) e il centro della prima sfera: $E_c =$ .... $d_{cm} =$ ....



$$d_{cm} = \frac{m_1 \times \emptyset + m_2 (r_1+r_2)}{m_1+m_2} = 0.32\ m$$

b) Si calcoli la velocità angolare del sistema dopo l'urto e la massima velocita` del centro della seconda sfera rispetto al laboratorio:
$\omega =$ .... $v_{max} =$ ....

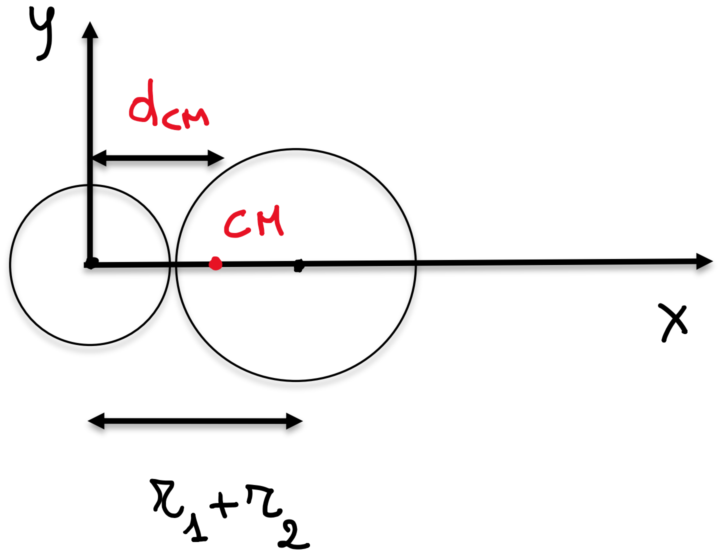
Dalla conservazione di $\vec{P}$ fissata la direzione dell'asse x concorde con $\vec{v}_1$

$$P = m_1 v_1 = (m_1+m_2) v = v_{cm} M = cost$$

per cui $v_{CM} = \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2}$ e $\vec{V}_{cm} = \left(\frac{m_1 v_1}{m_1+m_2}, 0, 0 \right)$

Quindi $v_{CM} = v = \text{cost}$ e $\vec{v}_{CM} = \dfrac{m_1 v_1}{m_1+m_2} \cdot \hat{x} = 6{,}8\,\hat{x}\ m/s$

di conseguenza il CM si muove lungo x di moto rettilineo uniforme!



Possiamo usare la conservazione del momento angolare usando come polo il CM.

$$\vec{L}^{CM}_{in} = \underbrace{\vec{r}^{\,CM}_{CM_1} \wedge \vec{P}_{cm_1}}_{=\emptyset\,:\,//} + \underbrace{I_1 \vec{\omega}_1}_{=\emptyset} + \underbrace{\vec{r}^{\,CM}_{CM_2} \wedge \vec{P}_{cm_2}}_{=\emptyset\,:\,\vec{P}_{cm_2}=0}$$

$$+ I_2 \vec{\omega}_2 = I_2 \omega_2 \hat{z} = \vec{L}^{CM}_{fin} = I \omega \hat{z}$$

per cui $\omega = \dfrac{I_2 \omega_2}{I}$

I è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione ($// \hat{z}$) che passa per il CM del sistema

$$I = \underbrace{I^{sfera\,1}_{cm} + m_1 d^2_{cm}}_{\text{Steiner}} + \underbrace{I^{sfera\,2}_{cm} + m_2 (r_1 + r_2 - d_{cm})^2}_{\text{Steiner}}$$

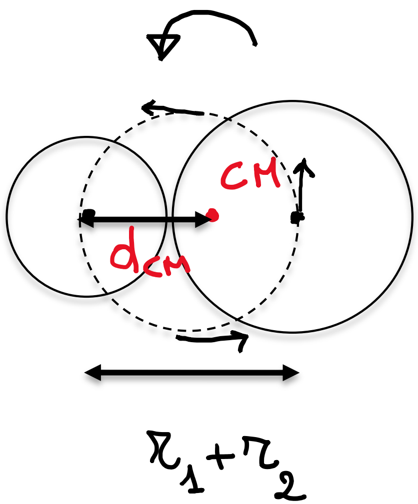
$$I = \underbrace{I_{cm}^{sfera\,1} + m_1 d_{cm}^2}_{Steiner} + \underbrace{I_{cm}^{sfera\,2} + m_2 (r_1 + r_2 - d_{cm})^2}_{Steiner}$$

dove $I_{cm}^{sfera\,1} = \frac{2}{5} m_1 r_1^2$ $\quad I_{cm}^{sfera\,2} = \frac{2}{5} m_2 r_2^2 = I_2$

$I = 0.45\ Kg\, m^2$

$$\omega = \frac{I_2 \omega_2}{I} = 7{,}6\ \frac{rad}{s}$$

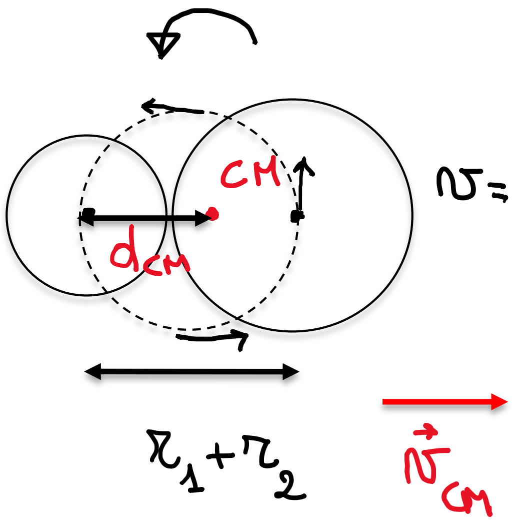
b) Si calcoli la velocità angolare del sistema dopo l'urto e la massima velocita` del centro della seconda sfera rispetto al laboratorio: ω = ... v_{max} = ...



$v = \omega (r_1 + r_2 - d_{CM})$

Congeliamo la Traslazione

Il centro della II^a sfera ruota attorno al CM con velocità v tangente alla traiettoria tratteggiata $\Rightarrow v = cost$



$v = \omega\,(r_1 + r_2 - d_{CM})$

poiché $\vec{v}$ è tangente alla traiettoria e a questa si somma vettorialmente $\vec{v}_{CM}$

la velocità è max nel sistema del laboratorio per $\vec{v}$ diretta come $\vec{v}_{CM}$

$$v_{MAX} = v + v_{CM} = \omega(r_1 + r_2 - d_{CM}) + v_{CM}$$

$$v_{max} = 7{,}4\ m/s$$

c) Calcolare la variazione di energia del sistema dovuta all'urto tra le due sfere:

ΔE = ...

$$\Delta E = E_f - E_i$$

l'energia finale del sistema è

$$E_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v^2_{CM} + \frac{1}{2} I \omega^2 = 278\ J$$

$$E_i = 1190\ J$$

$$E_f - E_i = -912\ J$$

NOTE

backup