FISICA - TEORIA

Docente titolare: Guido Emilio Tonelli
Co-docente: Maria Agnese Ciocci
Co-docente: Francesco Palmonari

Ricevimento: Mercoledì dalle 17.30 alle 20.00 presso INFN Polo Fibonacci

PROGRAMMA :

- PRINCIPI della MECCANICA
- PRINCIPI di ELETTROMAGNETISMO

LA FISICA È UNA SCIENZA SPERIMENTALE !

La fisica quindi non è una scienza descrittiva ma quantitativa, perché si basa fortemente su misure.

In Fisica è di fondamentale importanza poter dare ad ogni grandezza un significato non ambiguo. Ecco che sono state inventate le unità di misura. Esiste un sistema di unità di misura comune e riconosciuto in tutto il mondo: **sistema internazionale.**
Il S.I. adotta 7 unità di misura fondamentali:

- Metro (lunghezza)
- Grammo (massa)
- Secondo (tempo)
- Kelvin (temperatura)
- Candela (intensità luminosa)
- Ampere (intensità di corrente)
- Mole (quantità di materia)

TABELLA S.I.

LUNGHEZZA	METRO
MASSA	GRAMMO
TEMPO	SECONDO
TEMPERATURA	KELVIN
INT. di CORRENTE	AMPERE
INT. LUMINOSA	CANDELA
QT. di SOSTANZA	MOLE

COSA È UNA GRANDEZZA FISICA ?

- È un' entità TANGIBILE che può essere comparata con un' entità standard chiamata UNITÀ di MISURA.

REQUISITI INFORMAZIONI FISICHE

- Comunicabilità dell' INFORMAZIONE
  S.I. → Sistema Internazionale
- Attendibilità
- Coerenza
- Completezza

DELL' INFORMAZIONE

ANALISI DIMENSIONALE

Tecnica che serve a verificare la correttezza di un equazione. I due membri di un equazione devono essere congruenti dal punto di vista dimensionale.
Le unità di misura possono essere sommate o sottratte se e solo se sono uguali. Inoltre possono essere moltiplicate e divise indipendentemente dalla loro natura dimensionale.
EQUAZIONI NON DIMENSIONALMENTE CORRETTE SONO SICURAMENTE SBAGLIATE.

Esempio

$$x = \frac{1}{2}t^2 g \Rightarrow [L] = \frac{1}{2}\cancel{[T^2]}\frac{[L]}{\cancel{[T^2]}} = [L] \checkmark$$

La CORRETEZZA di una misura è data da:

① PRECISIONE & ACCURATEZZA

Si INTRODUCE l' ERRORE RELATIVO

$$\varepsilon_r = \frac{\text{ERRORE ASSOLUTO}}{\text{MISURA}}$$

ESERCIZIO: Calcolo della massa volumica di una persona

$$2\pi r = 60 \text{ cm} \Rightarrow r = \frac{30}{\pi}$$
$$h = 180 \text{ cm}$$

$$V = \pi r^2 h = [L^2][L] = [L^3] \checkmark$$

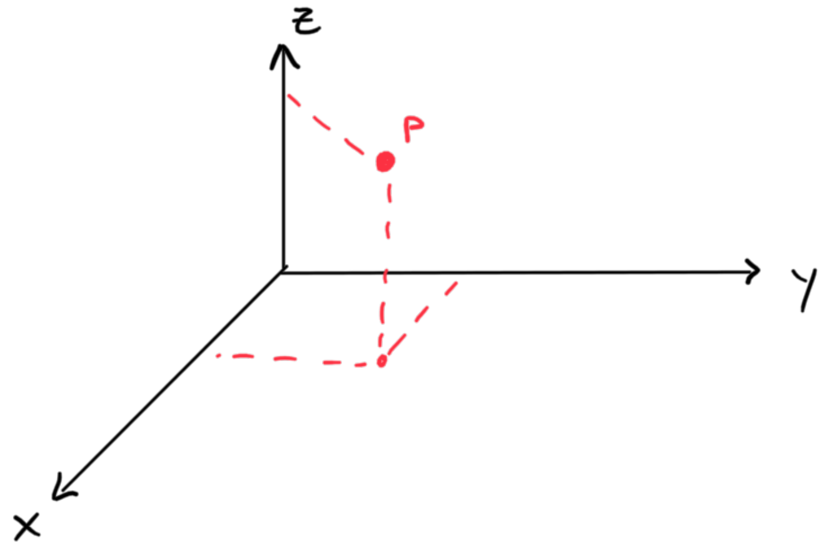
$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{30}{\pi}\right)^2 \cdot 180 \simeq \Omega \text{ cm}^3$$

$$d = \frac{m}{V} \quad ; \quad m = dV$$

$$m = 1\frac{g}{cm^3} \cdot \Omega\ cm^3 = g \checkmark$$ ANALISI DIMENSIONALE

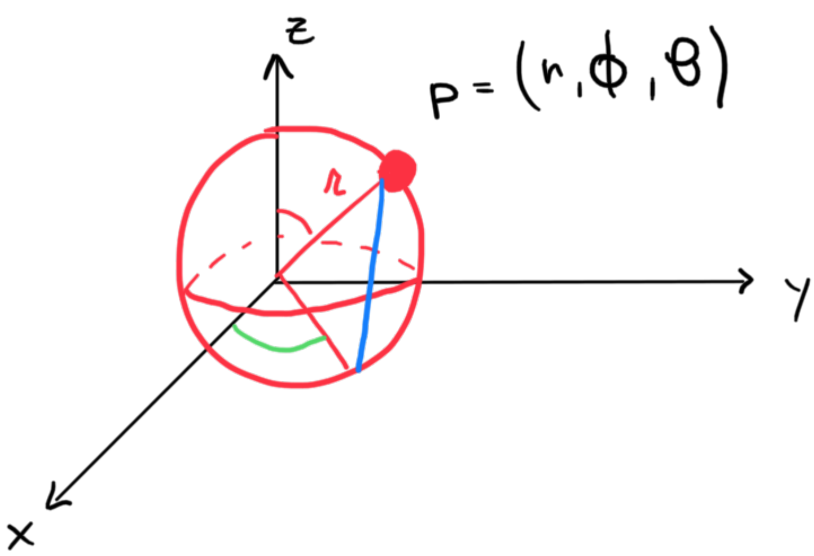
SISTEMI DI COORDINATE

Sistema di descrizione di un punto rispetto ad un sistema preso come riferimento. Esempio: Sistema cartesiano.



Cos'è un punto materiale: entità le cui dimensioni sono trascurabili rispetto le dimensioni del contesto a cui ci si riferisce. Esempio: la Terra può essere considerata un punto materiale se si studia il moto attorno al Sole (le distanze in gioco sono enormemente maggiori rispetto al raggio della Terra).

COORDINATE SFERICHE

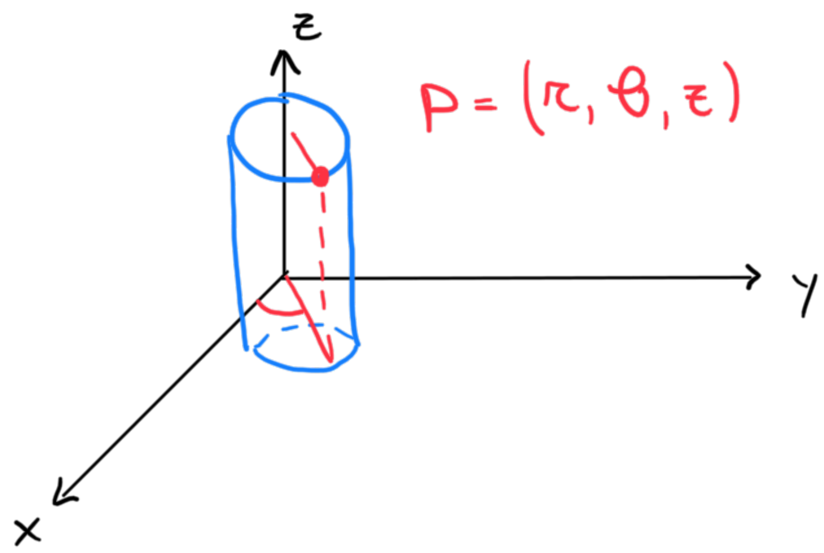


$$x = r \sin\theta \cos\phi$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi$$
$$z = r \cos\theta$$

RELAZIONI

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$$
$$\frac{y}{x} = tg\,\phi$$
$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \cos\theta$$

COORDINATE CILINDRICHE (POLARI)



$$x = r \cos\theta$$

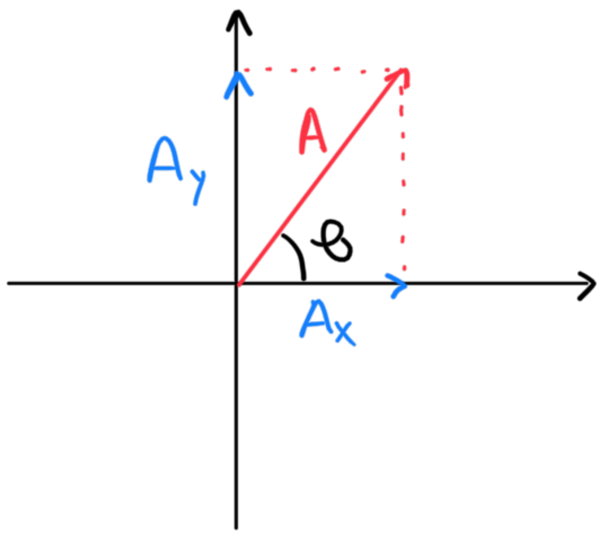
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

RELAZIONI

$$\frac{y}{x} = tg\,\theta$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = r$$

VETTORI IN COORDINATE CARTESIANE



Un vettore può essere espresso tramite le sue coordinate cartesiane.
[Un vettore A può essere espresso come somma di vettori proiezione di A su assi cartesiani]

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = (A_x , A_y)$$

NOTIAMO CHE:

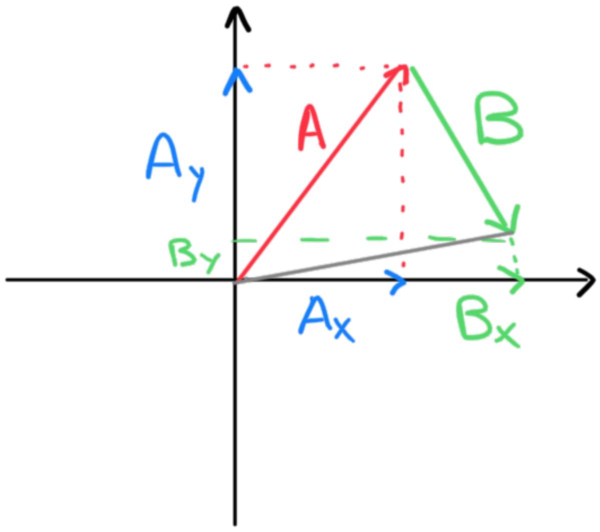
$$A_x = A\cos\theta \qquad\qquad A_y = A\sin\theta$$

Ad ogni vettore sono associate delle unità di misura.

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

SOMMA DI VETTORI IN COORDINATE CARTESIANE

COORDINATE CARTESIANE



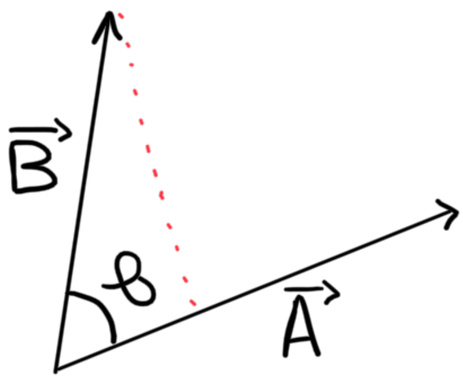
$$\vec{R} = A+B = (A_x, A_y) + (B_x, B_y) = (A_x + B_x \,,\, A_y + B_y)$$

VERSORI: vettori di modulo unitario.

PRODOTTO SCALARE

Siano $\vec{A}, \vec{B}$ due vettori ed è un operazione tale che come risultato si ha uno scalare.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$$



PROPRIETÀ:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

$a\vec{A} \cdot b\vec{B} = (ab)\, \vec{B} \cdot \vec{A}$

$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

$\vec{A} \cdot \vec{A} = |A|^2$

Si ricorda che ogni vettore può essere espresso in coordinate cartesiane:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A\hat{z} \qquad \vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B\hat{z}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

perchè $\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$ e le altre combinazioni uguali a zero.

PRODOTTO VETTORE

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C}$$

① $|\vec{C}| = |A||B| \sin\theta$

② $\vec{C}$ è $\perp$ ad $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

③ Il verso di $\vec{C}$ è determinato dalla regola della mano destra.

④ $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$

Sfruttiamo la decomposizione dei vettori

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A\hat{z} \qquad \vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B\hat{z}$$

Troviamo:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A\hat{z}\right) \wedge \left(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B\hat{z}\right) =$$

$$= \hat{\imath}A_x \wedge B_x\hat{\imath} + \hat{\imath}A_x \wedge B_y\hat{\jmath} + \hat{\imath}A_x \wedge B\hat{z} + \cdots =$$

$$= \text{RIMANE SOLAMENTE} =$$

$$= \hat{\imath}\left(A_yB_z - A_zB_y\right) + \hat{\jmath}\left(A_xB_z - A_zB_x\right) + \hat{z}\left(A_xB_y - A_yB_x\right)$$

FORMULA DEL DETERMINANTE

CINEMATICA

VELOCITÀ MEDIA:

La velocità media è definita come il rapporto tra lo spostamento ed un intervallo di tempo. Essa indica con quale rapidità un oggetto in movimento percorre un certo spazio in un intervallo di tempo.

$$V_{MEDIA} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

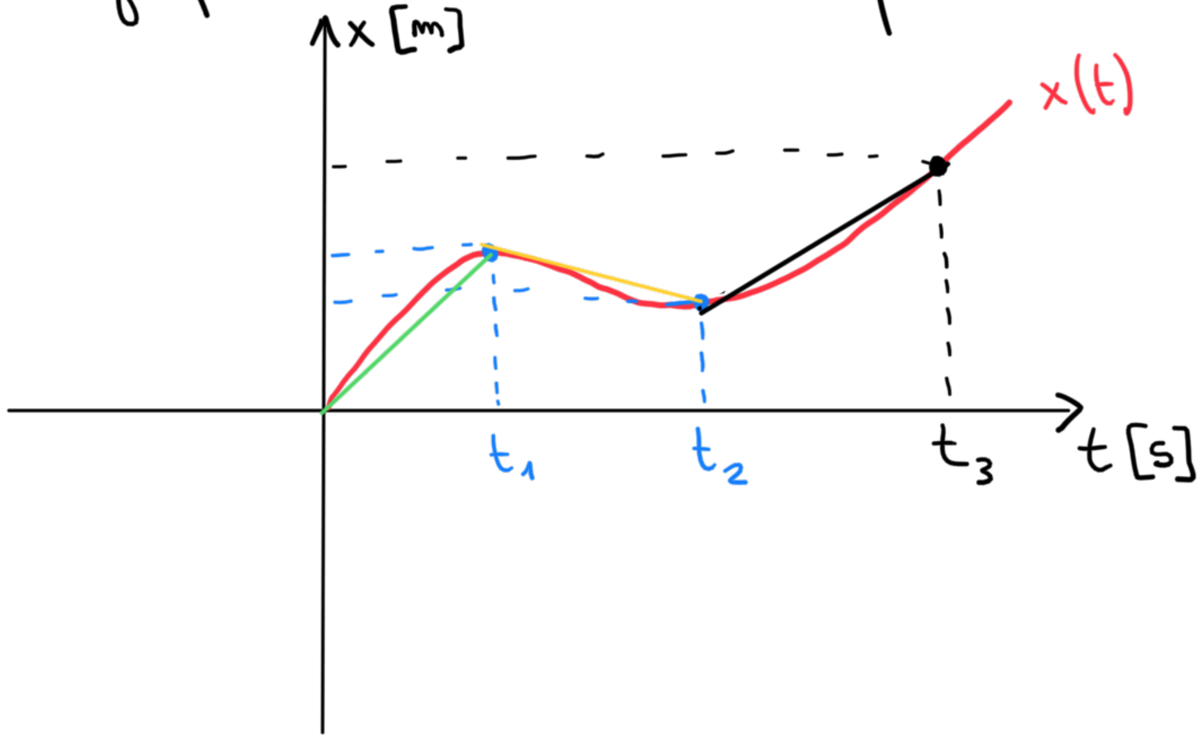
$$V_{MEDIA} = \frac{[L]}{[T]} = \frac{m}{s}$$

VELOCITÀ ISTANTANEA:

La velocità istantanea è definita come il limite per l'intervallo di tempo che tende a zero del rapporto spostamento / intervallo di tempo. Se la velocità media risponde alla domanda "quanto rapidamente il corpo percorre uno spazio in un intervallo di tempo" la velocità istantanea ci permette di conoscere la velocità in un certo istante del moto compiuto da un oggetto.

$$V_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Vediamo graficamente un esempio:



$x(t)$ è una funzione che descrive, per ogni istante, la posizione dell' oggetto in relazione al tempo.

Calcolando la velocità media tra $t_i = 0$ e $t_f = t_1$ si ha:

$$V_{m1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{x(t_1) - x(0)}{t_1 - 0}$$

$V_{m1} > 0$ perchè $t_1 > 0$ $x(t_1) > x(0)$

Analogalmente calcolando la velocità media tra $t_i = t_2$ e $t_f = t_3$ si ha:

$$V_{m3} = \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} = \frac{x(t_3) - x(t_2)}{t_3 - t_2}$$

$V_{m3} > 0$ perchè $\Delta t_3 > 0$ e $x(t_3) > x(t_2)$

Invece si può notare che la velocità media può essere

... negativa ; si calcola V_{m2} con $t_i = t_1$ e $t_f = t_3$

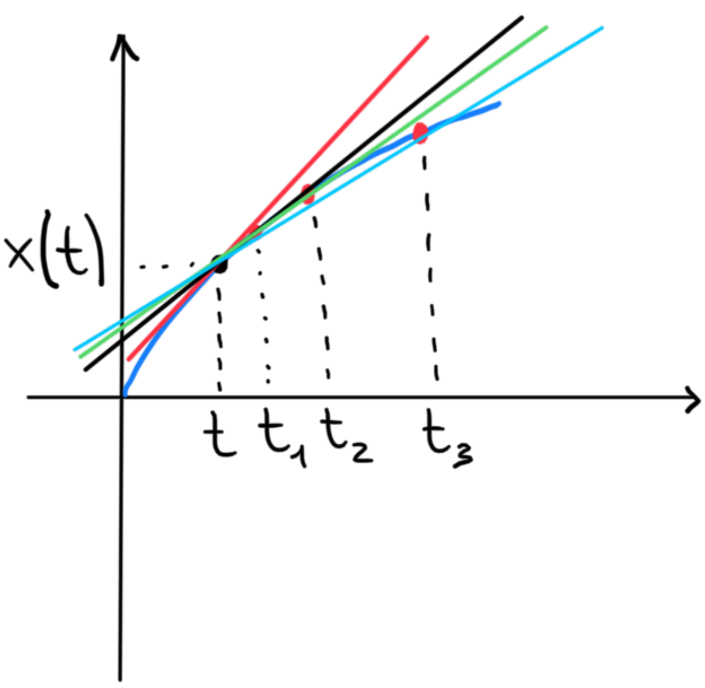
$$V_{m2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$V_{m2} < 0$ perché $x(t_2) < x(t_1)$ e $\Delta t_2 > 0$

Una velocità media negativa corrisponde ad uno spostamento a ritroso rispetto alla posizione iniziale del moto. In un moto unidimensionale l'oggetto si è mosso da DESTRA VERSO SINISTRA.

Da un punto di vista grafico la V_{MEDIA} rappresenta la PENDENZA della retta SECANTE i punti di INIZIO e FINE dello spostamento.

VELOCITÀ ISTANTANEA



Conoscere la velocità nell'esatto istante t corrisponde a calcolare la velocità media su un INTERVALLO che corrisponde esattamente con t.

Per far questo occorre calcolare la velocità media su Δt sempre più piccoli.

Notiamo che quando $\Delta t \to 0$ la pendenza della retta secante a x_f e x_i approssima sempre meglio la pendenza della RETTA TANGENTE in $x(t), t$.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{PENDENZA TANGENTE in } x(t), t$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \to t_f} \frac{x(t_f) - x(t_i)}{t_f - t} = \frac{dx}{dt}$$

LA VELOCITÀ ISTANTANEA IN t_0 È LA DERIVATA di x RISPETTO a t nel punto t_0. NOTAZIONE ALTERNATIVA $\Rightarrow v(t) = \dot{x}(t)$

LEGGE ORARIA MOTO DI UN CORPO A VELOCITÀ COSTANTE

$$V_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

$$x_f - x_i = V_x \Delta t \Rightarrow x_f = x_i + V_x \Delta t$$

La seguente equazione ci permette di conoscere la posizione finale di un oggetto moto l'intervallo di tempo, la velocità dell'oggetto in ogni ISTANTE (Notiamo che questa legge è valida se in ogni momento la velocità IST. è la stessa, quindi se V_x = COSTANTE), la sua posizione INIZIALE.

ACCELERAZIONE MEDIA

La situazione analizzata sopra è abbastanza rara. La VELOCITÀ di un oggetto è soggetta a repentini cambiamenti. Si dice che un corpo ACCELERA se a due istanti diversi corrispondono due velocità diverse.

L'ACCELERAZIONE MEDIA è definita come il RAPPORTO tra la variazione della velocità e un INTERVALLO di tempo.

$$A_{MEDIA} = \frac{\Delta V_x}{\Delta t} = \frac{V(t_f) - V(t_i)}{t_f - t_i}$$

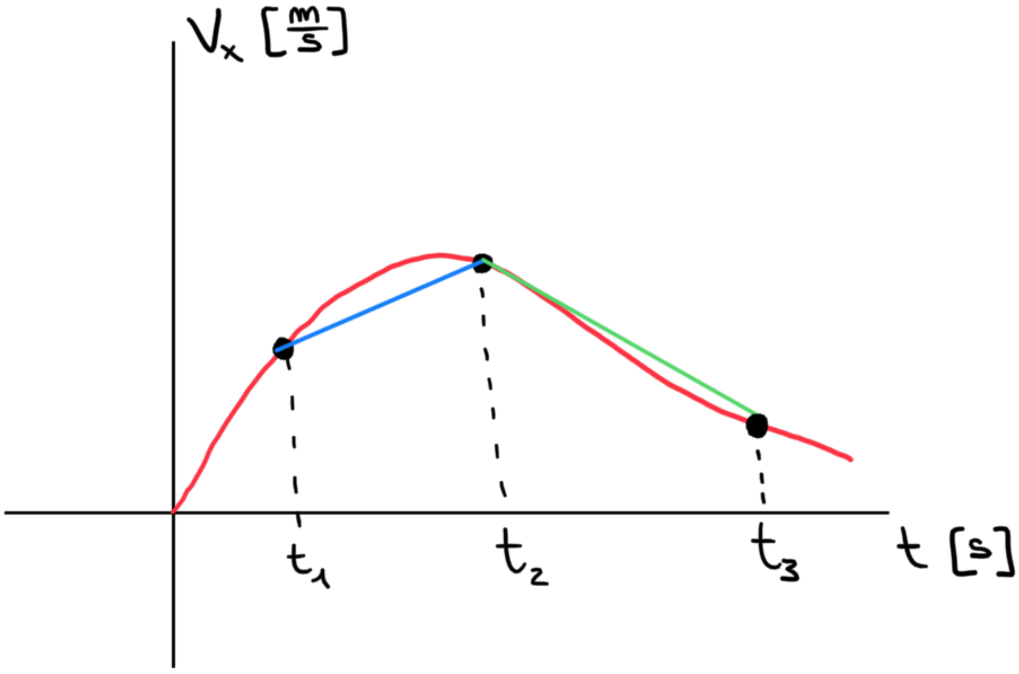
$$A_{MEDIA} = \frac{[L]/[T]}{[T]} = \frac{[L]}{[T]^2} = \frac{m}{s^2}$$

ACCELERAZIONE ISTANTANEA

L'accelerazione istantanea è definita come il limite per l'intervallo di tempo che tende a zero del rapporto variazione velocità / intervallo di tempo. Se l'accelerazione media risponde alla domanda "quanto rapidamente il corpo cambia velocità in un intervallo di tempo" l'accelerazione istantanea ci permette di conoscere l'accelerazione in un certo istante del moto compiuto da un oggetto.

$$A_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V_x}{\Delta t}$$

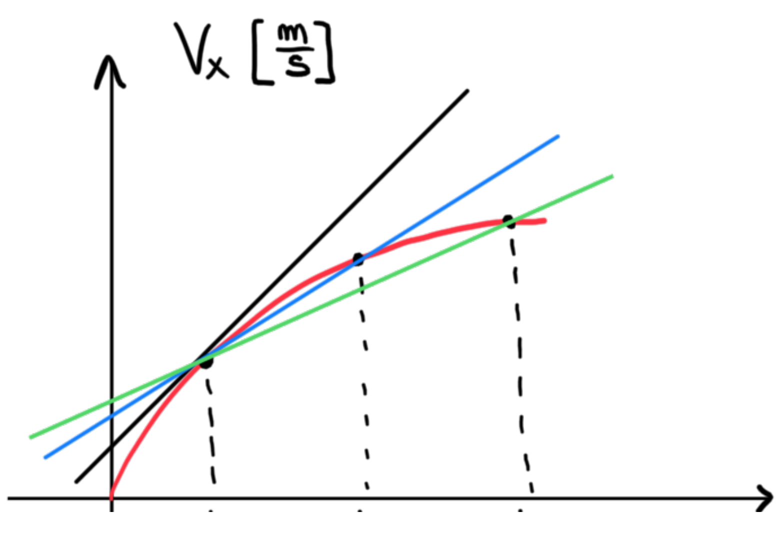
Vediamo un esempio grafico:



Si voglia calcolare l'accelerazione media tra $t_i = t_1$ e $t_f = t_2$

$$A_{m1} = \frac{\Delta V_1}{\Delta t_1} = \frac{V(t_2) - V(t_1)}{t_2 - t_1} > 0$$ perché $t_2 > t_1$ e $V(t_2) > V(t_1)$

Se si ripetesse lo stesso calcolo con $t_i = t_2$ e $t_f = t_3$ si troverebbe un'accelerazione negativa. Questo corrisponde ad una diminuzione della VELOCITÀ nell'arco dell'intervallo.



$t_0 \quad t_1 \quad t_2 \qquad t\,[s]$

Se si volesse calcolare l'ACCELERAZIONE ISTANTANEA di un corpo nell'istante t_0 occorre prendere un intervallo di tempo coincidente con t_0.
Notiamo che mano a mano l'intervallo diventa INFINITESIMO la pendenza delle rette approssima sempre meglio la RETTA TANGENTE in $V(t_0), t_0$.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \text{PENDENZA RETTA TANGENTE in } V(t_0), t_0$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{t \to t_f} \frac{V(t_f) - V(t_i)}{t_f - t} = \frac{dV}{dt}$$

L'ACCELERAZIONE ISTANTANEA in t_0 È LA DERIVATA di V RISPETTO a t nel punto t_0.

Se sostituiamo $V = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ troviamo che

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{t \to t_f} \frac{\frac{x(t_f) - x(t_i)}{t_f - t}}{t_f - t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

L'ACCELERAZIONE ISTANTANEA in t_0 È LA DERIVATA II di x RISPETTO a t nel punto t_0.

LEGGE ORARIA MOTO DI UN CORPO CON ACCELERAZIONE COSTANTE.

$$A_{MEDIA} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \Delta V = A_{MEDIA} \Delta t$$

$$\Downarrow$$

$$V(t_f) - V(t_i) = A\,\Delta t$$

$$V(t_f) = V(t_i) + A \cdot \Delta t$$

Quindi se conosciamo la velocità INIZIALE di un corpo e l'accelerazione (COSTANTE) possiamo ricavare la VELOCITÀ FINALE.

Noi sappiamo che:

$$V_{IST} = V_{MEDIA} \text{ se } A_{IST} \text{ COSTANTE}$$

quindi se ne ricava che $V_{MEDIA} = \dfrac{V(t_f) + V(t_i)}{2}$ da cui segue:

$$V_{MEDIA} = \frac{x(t_f) - x(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{V(t_f) + V(t_i)}{2}$$

$$x(t_f) - x(t_i) = \frac{1}{2}\left(V(t_f) - V(t_i)\right) \cdot \Delta t$$

$$\Downarrow$$

$$x(t_f) = x(t_i) + \frac{1}{2}\left(V(t_f) + V(t_i)\right)\Delta t$$

Se la variazione di velocità è nota e la posizione iniziale anche, in caso di accelerazione costante, possiamo ricavarci la posizione FINALE.

Possiamo inoltre notare che:

$$V(t_f) = V(t_i) + A \cdot \Delta t$$

$$\Downarrow$$

$$x(t_f) = x(t_i) + \frac{1}{2}\left(V(t_i) + A \Delta t + V(t_i)\right)\Delta t$$

$$\Downarrow$$

$$x(t_f) = x(t_i) + V(t_i) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} A \Delta t^2$$

Se si volesse conoscere la velocità finale non avendo come dato Δt si avrebbe:

$$V(t_f) = V(t_i) + A \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = V(t_f) - V(t_i)$$

$$\Delta t = \frac{V(t_f) - V(t_i)}{A}$$

$$x(t_f) = x(t_i) + \frac{V(t_f) + V(t_i)}{2} \Delta t$$

$$x(t_f) = x(t_i) + \frac{V(t_f) + V(t_i)}{2} \left(\frac{V(t_f) - V(t_i)}{A} \right)$$

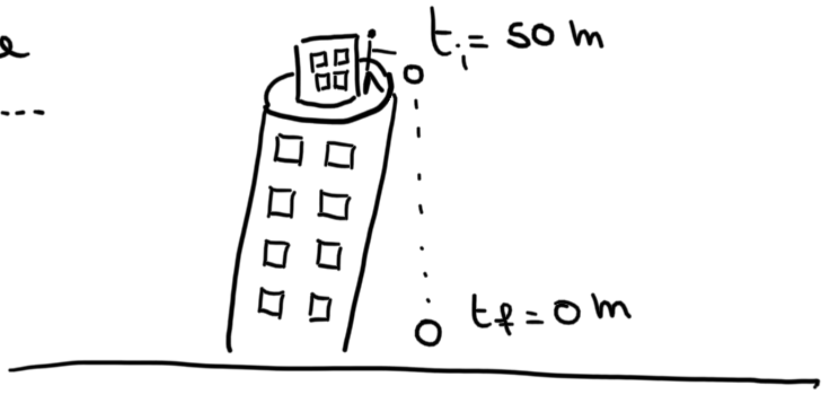
$$x(t_f) = x(t_i) + \frac{V(t_f)^2 - V(t_i)^2}{2A}$$

$$V(t_f)^2 = \big(x(t_f) - x(t_i)\big) 2A + V(t_i)^2$$

Moto di un grave

Se trascurassimo l'attrito causato dall'aria noteremo che qualsiasi corpo lasciato sospeso cadrebbe liberamente arrestando il suo moto una volta incontrata una superficie abbastanza dura da resistere all'urto. Anche se apparentemente non sembra, ogni corpo è attratto verso il centro della terra da una forza non visibile: la forza di gravità. Questa forza imprime un'accelerazione diretta verso il basso, spiegando la natura del moto ogni qual volta si osserva un oggetto che cade.

Si, è la Torre di Pisa...



$$x(t_f) = x(t_i) + A \cdot \Delta t^2$$

$A = 9{,}81 \ \frac{m}{s^2} = g$ COSTANTE FORZA DI GRAVITÀ

$$x(t_i) = x(t_f) + g \Delta t^2$$

ALTEZZA di CADUTA

Calcolo differenziale applicato alla cinematica

La fisica è strettamente legata con la matematica. Ecco un esempio di ciò appena detto:

Sappiamo che per conoscere la posizione di un corpo che si muove con velocità costante è sufficiente sapere la sua posizione iniziale a cui viene sommata il risultato del prodotto tra la velocità (costante) per l'intervallo di tempo. Ricordando che in situazioni di velocità costante la velocità media coincide con la velocità istantanea è che quest'ultima la velocità istantanea è la derivata della funzione X(t) (quindi della legge che lega lo spostamento al variare del tempo) e l'equazione:

$$x(t_f) = x(t_i) + v\Delta t$$

diventa:

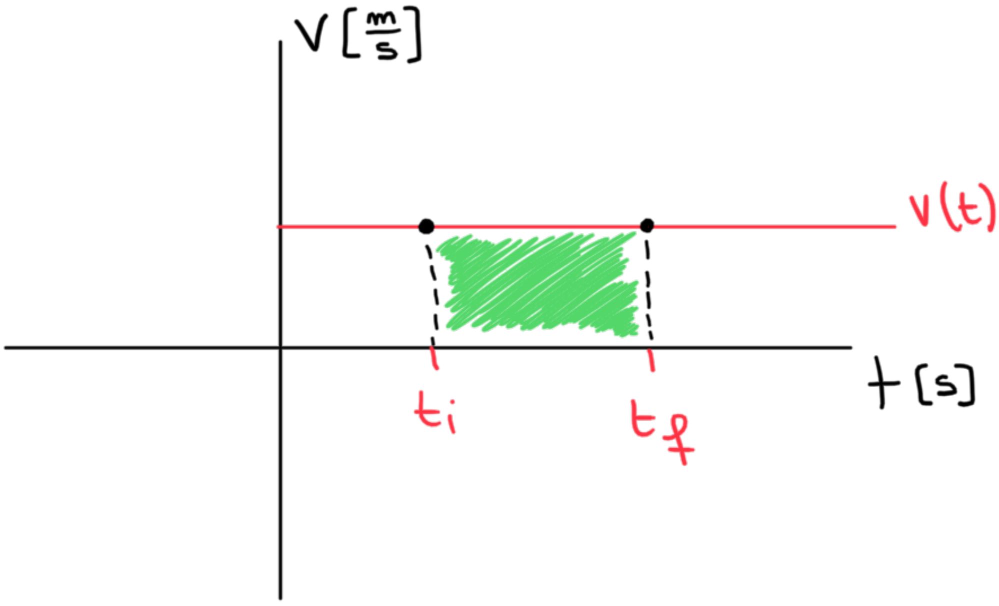
$$x(t_f) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} v(t)\,dt$$

Notiamo la correttezza dell'asserto:

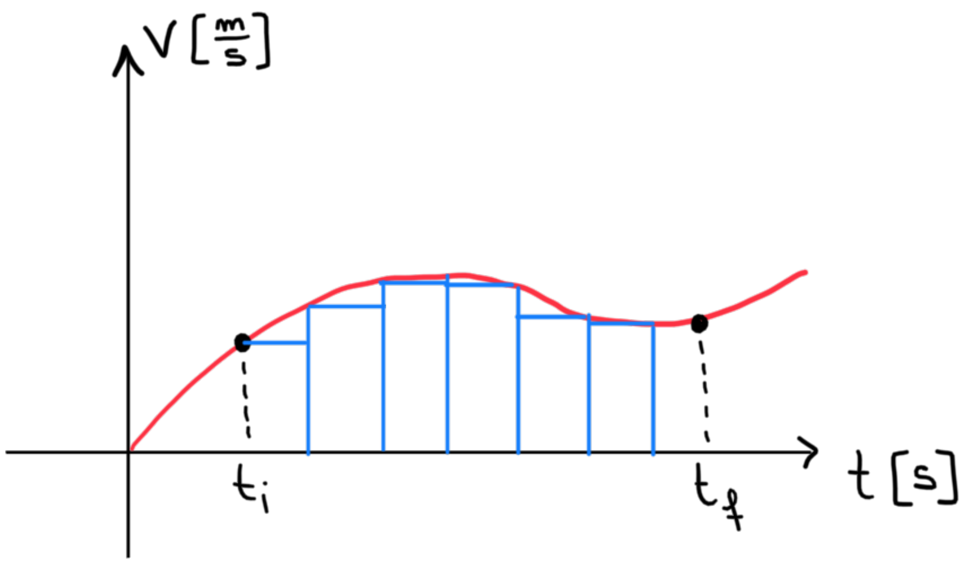
$$x'(t) = v(t) \Rightarrow x(t_f) = \cancel{x(t_i)} + x(t_f) - \cancel{x(t_i)}$$

$$x(t_f) = x(t_f) \checkmark$$

Si fa attenzione a ciò: se la velocità è costante Δx corrisponde a calcolare l'area sottesa al grafico di $v(t)$.



Se la velocità non fosse costante?



Avendo scoperto che Δx = AREA SOTTESA tra $v(t)$ e Δt possiamo applicare lo stesso ragionamento sommando l'area di n RETTANGOLINI aventi come base l'intervallo $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ ed altezza

$h = V_{MEDIA}\big|_{[t_n, t_{n+1}]}$

$[t_m, t_{m+1}]$

Per giunta si avrebbe:

$$\sum_{i=0}^{n} \Delta t_i h_i = \sum_{i=0}^{n} (t_{i+1} - t_i) V_{media}\Big|_{[t_i, t_{i+1}]}$$

Rendendo più accurato possibile il processo si avrebbe:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} (t_{i+1} - t_i) V_{media}\Big|_{[t_i, t_{i+1}]} =$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} v(t)$$

Da cui si ottiene la medesima equazione presentata nel caso di V_{MEDIA} = COSTANTE.

EQUAZIONI CINEMATICHE E CALCOLO DIFFERENZIALE

Si ricorda che:

$$a_x = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = V_f - V_i$$

$$V_f - V_i = \int_0^t a \, dt$$

Sappiamo bene che nel caso particolare $a_x \equiv c$ costante, si ha:

$$V_f - V_i = a \int_0^t dt = at \Big|_0^t \Rightarrow V_f = V_i + at$$

In generale: $V_f = V_i + \int_0^t a(t)$

Consideriamo l' equazione $V_x = \frac{dx}{dt}$

$$x_f - x_i = \int_0^t V_x \, dt$$

Sappiamo bene che $V_x = V_f = V_i + at$. Se il moto ha velocità costante la VELOCITÀ MEDIA = VELOCITÀ FINALE!

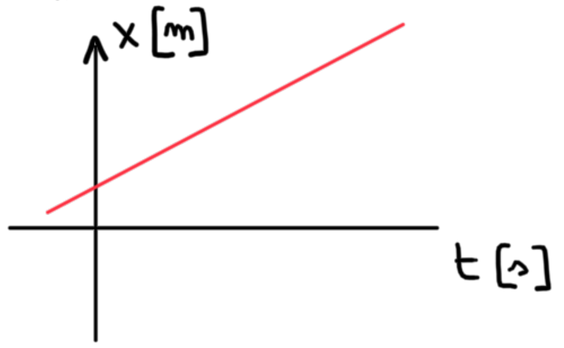
$$x_f - x_i = \int_0^t V_i + at$$

$$x_f = x_i + V_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

ACCELERAZIONE E VELOCITÀ SONO DUE GRANDEZZE VETTORIALI

MOTO RETTILINEO UNIFORME

IMPORTANTE => VELOCITÀ COSTANTE



$$x(t) = x_i + vt$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) \equiv \text{COSTANTE}$$

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

IMPORTANTE => ACCELERAZIONE COSTANTE

$$x(t) = x_i + v_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_i + at \equiv \text{VELOCITÀ}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a \equiv \text{COSTANTE}$$

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

RELAZIONI UTILI

1. $x = x_i + v_i t + \frac{1}{2} a t^2$
2. $v = v(t) = v_i + at$
3. $x = x_1 + \frac{1}{2}(v + v_i)t$ -> SOSTITUENDO NELLA 1 $a = \frac{v_f - v_i}{t}$
4. $v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$ -> SOSTITUENDO NELLA 1 $t = \frac{v_f - v_i}{a}$

DALL'ACCELERAZIONE ALLA LEGGE ORARIA

In generale, se conosciamo l'accelerazione istantanea (la legge con cui varia in funzione di t la funzione accelerazione) possiamo ricavare velocità è posizione istantanea mediante integrazione.

RICORDIAMO che $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = \int a(t)dt$

$$\Rightarrow V_f - V_i = \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

$$V_f - V_i = V(t)\Big|_{t,t_0} \qquad V_f = V_i + V(t)\Big|_{t,t_0}$$

RICORDIAMO che se $a \equiv$ costante si ha

$$V_f - V_i = a\int_{t_0}^{t} dt$$

$$V_f - V_i = at\Big|_{t,t_0} \qquad V_f = V_i + at\Big|_{t,t_0}$$

Stiamo attenti a quest'altra relazione:

$$\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow dx = v\,dt$$

$$X_f - X_i = \int_{t_0}^{t} v(t)$$

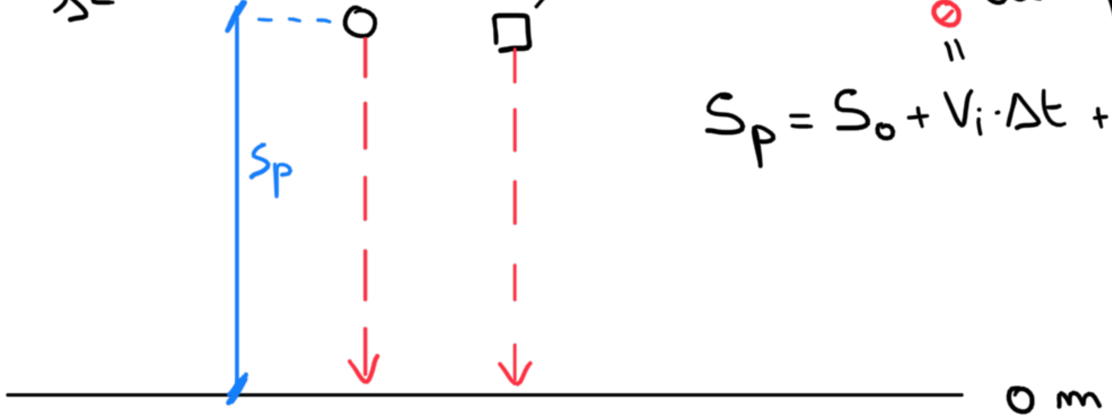
N.B. $\Rightarrow v(t) = V_f = V_i + at$ se $a \equiv$ COSTANTE

$$X_f - X_i = \int_{t_0}^{t} V_i + at$$

$$X_f = X_i + \left(V_i t + \frac{1}{2}at^2\right)\Big|_{t,t_0}$$

ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ

$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$



nel caso in cui non ci sono forze di spinta

$$\overset{0}{\underset{\|}{\,}} \quad S_p = S_0 + V_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2}gt^2$$

$v(t) = -gt$ (il segno − perchè g è diretta verso il basso).

QUINDI SI RICAVA $\Rightarrow X(t) = -\frac{1}{2}gt^2$

TECNICHE PER LA RISOLUZIONE DI UN ESERCIZIO:

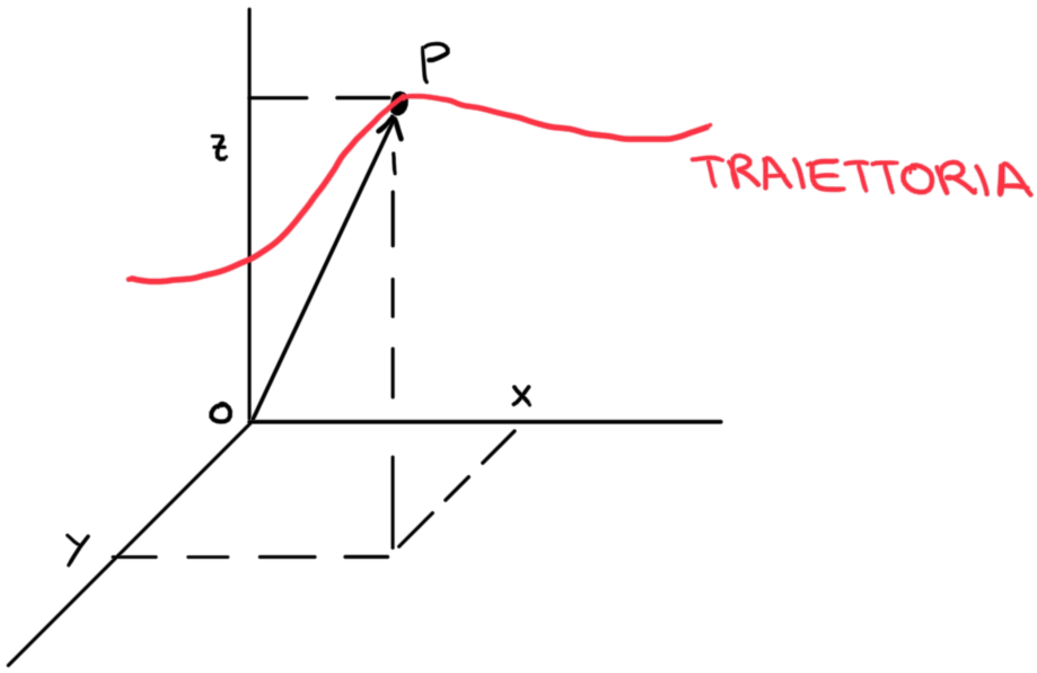
- Leggere attentamente il testo.
- Fare un disegno scegliendo il sistema di riferimento.
- Analizzare il problema: quali relazioni cinematiche si possono usare?
- Disegnare o schematizzare il problema.
- Fare l’analisi dimensionale delle formule che si sono ricavate e dei risultati ottenuti.

MOTO DI UN PUNTO MATERIALE IN 3D

$\overline{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$

ma x, y, z sono

$x = S_x(t)$
$y = S_y(t)$
$z = S_z(t)$



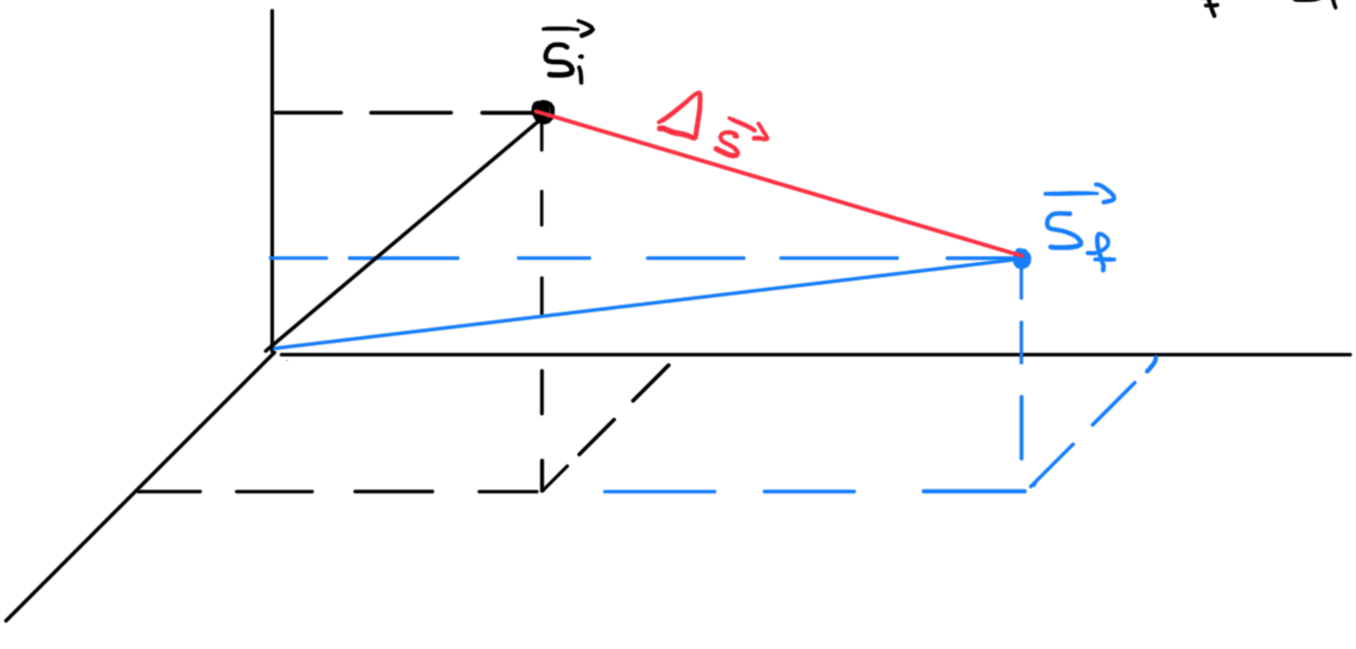
Ogni $S(t)$ CORRISPONDE ad una legge ORARIA dello spazio in funzione del tempo.

Lo studio dei moti in 2D e in 3D è la composizione dei vettori spostamento UNIDIMENSIONALI sugli assi.
Quindi se in una dimensione valevano le leggi $V(t)$ e $X(t)$ ora si APPLICHERANNO ad ogni componente del moto.

VETTORE VELOCITÀ MEDIA

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{s}_f - \vec{s}_i}{t_f - t_i}$$

La DIREZIONE e il VERSO sono i medesimi del vettore $\vec{s}_f - \vec{s}_i$.



VETTORE VELOCITÀ ISTANTANEA

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

$$\vec{V} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{S_x(t+\Delta t) - S_x(t)}{\Delta t} \right) \vec{e}_1 +$$

$$+ \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{S_y(t+\Delta t) - S_y(t)}{\Delta t} \right) \vec{e}_2 +$$

$$+ \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{S_z(t+\Delta t) - S_z(t)}{\Delta t} \right) \vec{e}_3 = \frac{ds_x}{dt}\vec{e}_1 + \frac{ds_y}{dt}\vec{e}_2 + \frac{ds_z}{dt}\vec{e}_3 =$$

$$= \frac{d\vec{s}}{dt}$$

LA VELOCITÀ ISTANTANEA è SEMPRE TANGENTE ALLA TRAIETTORIA.

VETTORE ACCELERAZIONE MEDIA

$$\vec{A}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

La DIREZIONE e il VERSO sono i medesimi del vettore $\vec{v}_f - \vec{v}_i$.

VETTORE ACCELERAZIONE ISTANTANEA

$$\vec{A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{A} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_x(t+\Delta t) - V_x(t)}{\Delta t} \right) \vec{e}_1 +$$

$$+ \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_y(t+\Delta t) - V_y(t)}{\Delta t} \right) \vec{e}_2 +$$

$$+ \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_z(t+\Delta t) - V_z(t)}{\Delta t} \right) \vec{e}_3 = \frac{dv_x}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dv_y}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dv_z}{dt}\vec{e}_3 =$$

$$= \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Si può notare che:

$$\frac{dV_x}{dt}\vec{e_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds_x}{dt}\right)\vec{e_1} = \frac{d^2s_x}{dt^2}\vec{e_1}$$

$$\frac{dV_y}{dt}\vec{e_2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds_y}{dt}\right)\vec{e_2} = \frac{d^2s_y}{dt^2}\vec{e_2}$$

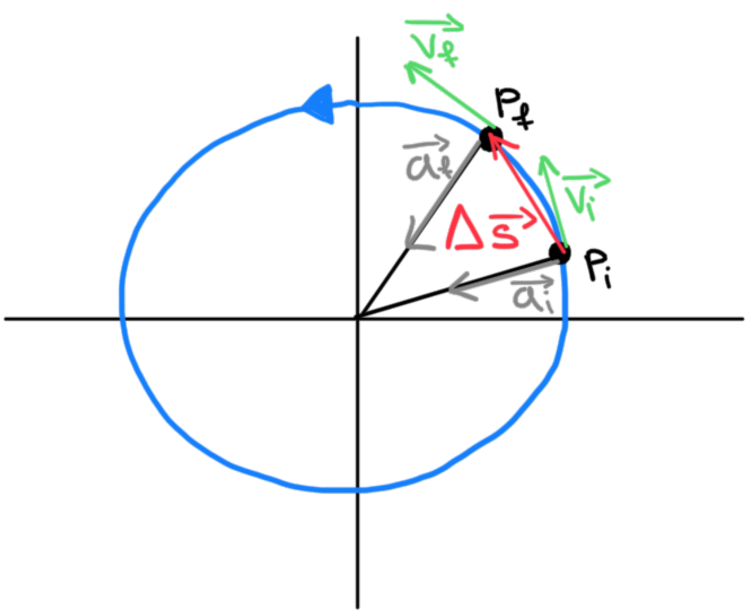
$$\frac{dV_z}{dt}\vec{e_3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds_z}{dt}\right)\vec{e_3} = \frac{d^2s_z}{dt^2}\vec{e_3}$$

Ne segue:

$$\frac{d^2s_x}{dt^2}\vec{e_1} + \frac{d^2s_y}{dt^2}\vec{e_2} + \frac{d^2s_z}{dt^2}\vec{e_3} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE, L'ACCELERAZIONE È LA DERIVATA SECONDA dello SPAZIO IN FUNZIONE del TEMPO.

PUNTO MATERIALE IN MOTO CIRCOLARE UNIFORME



Supponiamo di avere un oggetto, classificabile come un punto materiale, legato ad un'estremità di una corda. Facendo ruotare la corda notiamo che, supposto che il modulo della velocità del punto sia costante, l'oggetto in questione percorre una traiettoria circolare.
Sotto queste ipotesi introduciamo il MOTO CIRCOLARE UNIFORME.

Ci sono ANALOGIE con il MOTO RETTILINEO UNIFORME? SI
Calcoliamo il vettore spostamento $\Delta\vec{s}$.

$$\Delta\vec{s} = \vec{P_f} - \vec{P_i} = r\theta \qquad \text{con } \theta = \text{ANGOLO TRA } \vec{P_f} \text{ e } \vec{P_i}$$

Quindi si può conoscere la posizione del punto in funzione del tempo? SI
Nel MCU (MOTO CIRCOLARE UNIFORME) la posizione è rappresentata dall'arco di circonferenza percorso dall'ORIGINE del sistema di riferimento.

$$S = r\theta \Rightarrow S(t) = r\theta(t)$$

Ora definiamo la VELOCITÀ. Essendo costante $V_M = V_i = V(t)$
Inoltre ricordiamo che il percorso che compie il punto è sempre lo stesso (una CIRCONFERENZA) quindi la VELOCITÀ (detta VELOCITÀ TANGENZIALE):

$$V = \frac{2\pi r}{T}$$

dove T = PERIODO = TEMPO NECCESSARIO PER COMPIERE UN GIRO

Da cui si ricava $T = \frac{2\pi r}{V}$

$$V = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d(r\theta(t))}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \equiv \text{COSTANTE}$$

Con il MCU viene introdotta la FREQUENZA:
NUMERO DI GIRI PERCORSI NELL'UNITÀ DI TEMPO

$$F = \frac{1}{T} \, [s^{-1}] \qquad F = \frac{\omega}{2\pi}$$

Se si volesse conoscere con quanta rapidità viene percorso un certo angolo dall'oggetto in MCU?
VELOCITÀ ANGOLARE

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \frac{rad}{s}$$

Possiamo notare una stretta relazione tra VELOCITÀ TANGENZIALE e VELOCITÀ ANGOLARE.

Notiamo che: $V_T = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{V}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow V = \frac{2\pi r \omega}{2\pi} = r\omega \ \frac{m}{s}$$

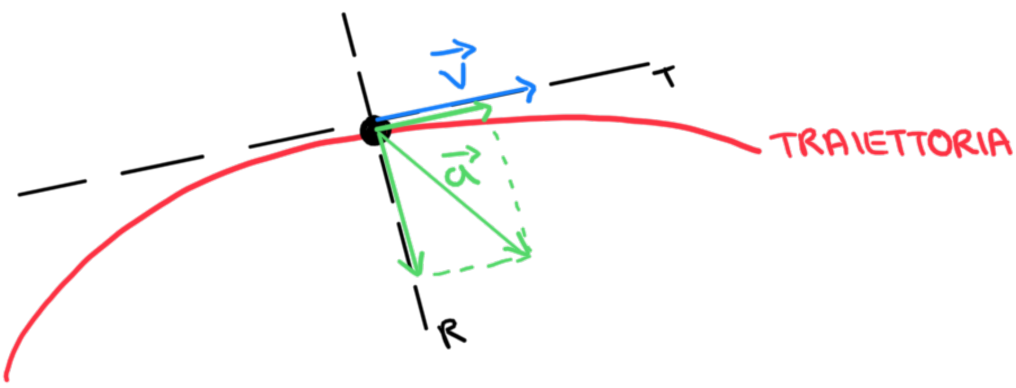
$$V = r\omega \ \frac{m}{s} \quad ; \quad \omega = \frac{V}{r} \ s^{-1}$$

ACCELERAZIONE (CENTRIPETA)

Anche se il modulo della velocità è costante ciò non vuol dire che l'accelerazione sia nulla. Si ricorda che l'accelerazione è definita come la variazione del vettore VELOCITÀ in un intervallo di tempo. Sappiamo bene che un vettore è ben identificato da 3 COMPONENTI (se si volesse essere precisi si dovrebbe considerare il PUNTO di APPLICAZIONE come 4° componente):

- MODULO
- VERSO
- DIREZIONE

Ognuna di esse può variare INDIPENDENTEMENTE dall'altra. Vien da se la conclusione del ragionamento.



Nel disegno abbiamo scomposto il vettore ACCELERAZIONE in due componenti

$$\vec{a} = a_T\hat{u}_T + a_R\hat{u}_R$$

La componente parallela al vettore VELOCITÀ, nel MCU

deve essere nulla ($a_T = 0$) altrimenti produrrebbe una variazione del modulo di $\vec{v}$.
Ma sappiamo che $\vec{v}$ cambia direzione quindi c'è accelerazione ($a_R \neq 0$). Questa accelerazione è detta CENTRIPETA (si nota come la componente $a_R \hat{u}_R$ sia normale a $\vec{v}$ e quest'ultimo, essendo tangente alla curva, ci fa notare che $a_R \hat{u}_R$ giace sulla retta diretta verso il centro della curva).

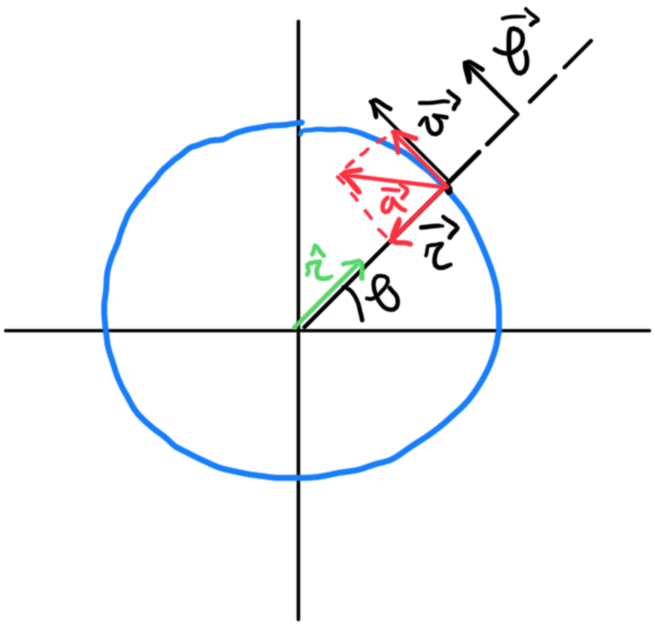
Nel MCU l'ACCELERAZIONE CENTRIPETA è DEFINITA:
(si ricorda che l'unica componente non nulla dell'accelerazione è quella relativa alla variazione della DIREZIONE ed è in modulo costante).

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

oppure sostituendo $v = \omega r \Rightarrow a_c = \omega^2 r$

MOTO CIRCOLARE VARIO

$$\vec{v} = v(t)\,\hat{\theta}$$



$$\vec{r} = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = r$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$$

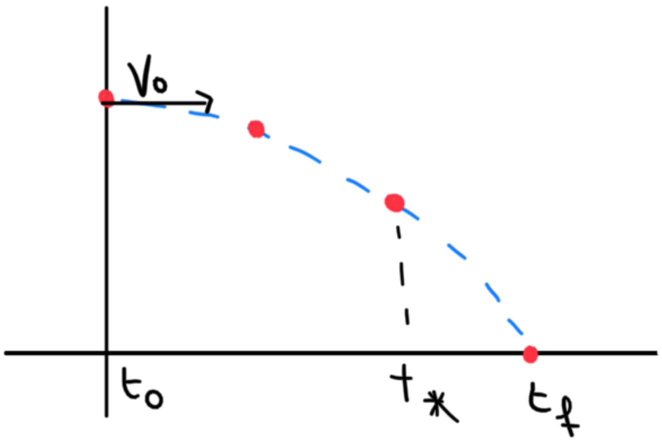
$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

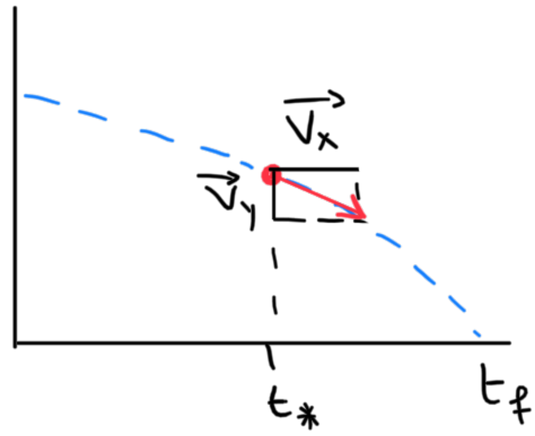
$$\vec{a} = \underbrace{\frac{|dv|}{dt}\hat{\theta}}_{\text{ACCELERAZIONE TANGENZIALE}} - \underbrace{\frac{v^2}{r}\hat{r}}_{\text{ACCELERAZIONE RADIALE}}$$

MOTO DEL PROIETTILE

Caratteristiche:

- La particella è soggetta unicamente ad un’accelerazione: la forza di gravità lungo l’asse delle ordinate.
- Ha una velocità iniziale diretta lungo l’asse delle ascisse (e una diretta lungo l’asse delle ordinate se il moto inizia con un certo angolo).
- Il moto orizzontale e quello verticale sono indipendenti.





LUNGO L'ASSE X VALE LA LEGGE ORARIA $X(t) = X_0 + V_0 t$

LUNGO L'ASSE Y VALE LA LEGGE ORARIA $Y(t) = Y_0 + V_0 t + \frac{1}{2} g t$

MOTO ORIZZONTALE

$a_x = 0 \qquad V_x = V_0 \equiv$ COSTANTE $\qquad X(t) = X_0 + V_0 t$

MOTO VERTICALE

$a_y = -g \qquad V_y = V_{0y} - gt \qquad Y(t) = Y_0 + V_0 t + \frac{1}{2} g t$

RICORDA CHE LE COMPONENTI di $\vec{V_0}$ SONO DATE DA

$$V_{0x} = \cos\theta |V_0|$$
$$V_{0y} = \sin\theta |V_0|$$

SCOPRIAMO DAL MOTO ORIZZONTALE

$$t = \frac{X - X_0}{V_{0x}}$$

SOSTITUIAMO t NEL' EQUAZIONE DEL MOTO VERTICALE

$$Y - Y_0 = \frac{V_{0y}}{V_{0x}}(X - X_0) - \frac{1}{2} g \left(\frac{X - X_0}{V_{0x}}\right)^2$$

RICORDA $Y_0 = X_0 = 0$ e $\frac{V_{0y}}{V_{0x}} = \frac{\sin\theta |V_0|}{\cos\theta |V_0|} = \tan\theta$

$$Y = \tan\theta \, x - \frac{1}{2} \frac{g}{V_{0x}^2} x^2$$ EQUAZIONE DELLA TRAIETTORIA

=> PARABOLA CONCAVITÀ VERSO IL BASSO

GITTATA : qual'è la massima distanza che riesce a percorrere prima che la velocità sia nulla?

$Y = V_0 \sin(\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \implies$ IL PROIETTILE, quando tocca terra, HA ORDINATA ...

ORDINATA NULLA.

$$Y = t\left(V_0 \sin(\theta) - \frac{1}{2} g t\right) = 0$$

$$t = 0 \quad \text{oppure} \quad t = \frac{2 V_0 \sin(\theta)}{g}$$

SOSTITUENDO t in $x(t) = X_0 + V_0 \cos\theta \cdot t$ si ottiene

$$X - X_0 = \frac{2 V_0 \cos\theta \, V_0 \sin\theta}{g} = \frac{V_0^2 \sin(2\theta)}{g} \equiv \text{GITTATA}$$

RICORDA => LA GITTATA È MASSIMA a $\theta = 45°$ a PARITÀ DI CONDIZIONI INIZIALI

L' ALTEZZA MASSIMA SI RAGGIUNGE quando

$$V_y = V_0 \sin\theta - g t = 0$$

quindi $t = \frac{V_0 \sin\theta}{g}$ da cui ricavo

$$Y = \frac{V_0^2}{g} \sin^2\theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_0 \sin\theta}{g}\right)^2 =$$

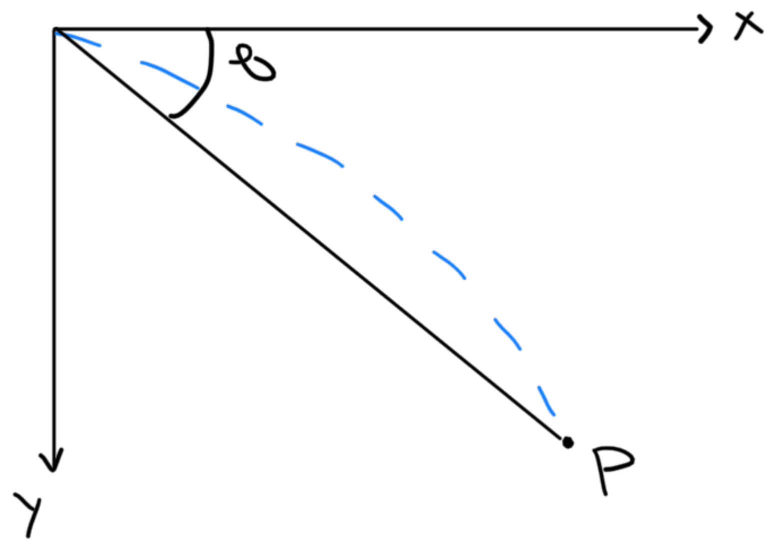
$$= \frac{V_0^2 \sin^2\theta}{g}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{V_0^2 \sin^2\theta}{2g} \equiv h_{MAX}$$

Esercizio tipo:

Un aereo viaggia orizzontalmente alla velocità V = 600 km/h a un’altezza d = 1km. All’istante t = 0 esso sgancia un oggetto che deve cadere in un punto stabilito P. Calcolare sotto quale angolo rispetto all’orizzontale deve essere visto P dal punto di sgancio. Trascurare gli effetti dovuti all’attrito dell’aria e alla rotazione terrestre.

$V_{oy} = 0 \frac{Km}{h}$ $V_{ox} = 600 \frac{Km}{h}$ $h = 1 \, Km = Y_0$

$X_0 = 0$



$$X(t) = X_0 + V_{ox} t$$

$$Y(t) = Y_0 + V_0 \sin(\theta) + \frac{1}{2} g t^2$$

Io so che al momento dell' impatto avrò percorso verticalmente 1 Km.

$$h = Y_0 + V_0 \sin(\theta) + \frac{1}{2} g t^2$$

$Y_0 = 0$ $V_0 = 0$ $\Rightarrow$ $h = \frac{1}{2} g t^2$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{2000}{9.81}} = 14.27 \, s$$

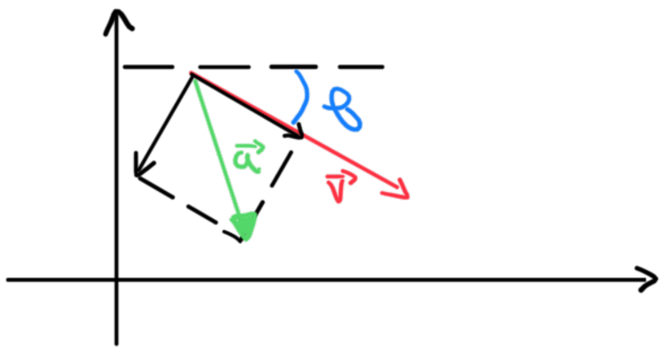
$$X(t) = X_0 + V_{ox} t = 0 + 600 \frac{m}{s} \cdot 14.27 \, s = 8\,567 \, m$$

$$\text{GITTATA} = \frac{V_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

$$\sin(2\theta) = \frac{\text{GITTATA} \cdot g}{V_0^2} = \frac{8\,567 \cdot 9.81 \, \frac{m^2}{s^2}}{600^2 \, \frac{m^2}{s^2}} = 0.23$$

$\sin(2\theta) = 0.23$ $\Rightarrow$ $\theta = 6.75°$

COMPONENTI DELL'ACCELERAZIONE



Come ben sappiamo la velocità è sempre tangente alla curva descritta dalla traiettoria dell'oggetto in moto. Dalla definizione di accelerazione (variazione del vettore velocità / variazione di tempo) notiamo che il vettore accelerazione può essere scomposto in due componenti: una componente parallela al vettore velocità che ne modifica il modulo e una componente normale al vettore velocità che ne modifica la direzione. Queste due componenti sono chiamate rispettivamente accelerazione **tangenziale** e **radiale**.

$$\vec{a} = a_T \hat{t} + a_R \hat{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\hat{t})}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + v\frac{d\hat{t}}{dt}$$

Il versore t può essere riscritto in coordinate cartesiane come:

$$\hat{t} = \cos\beta\,\hat{i} + \sin\beta\,\hat{j}$$

Da cui segue, svolgendo la derivata del versore:

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = -\sin\beta\frac{d\beta}{dt}\hat{i} + \cos\beta\frac{d\beta}{dt}\hat{j} = \left(-\sin\beta\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j}\right)\frac{d\beta}{dt}$$

Ora facciamo un osservazione (o meglio ripasso di trigonometria!):

$$\sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\beta)$$
$$\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\beta)$$

Notiamo bene che il versore, in coordinate cartesiane, della derivata del versore tangenziale, è normale ad esso stesso (come volevasi dimostrare) quindi coincide esattamente con il versore diretto lungo l'asse radiale alla tangente.

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\text{MODULO ACCELERAZIONE TANGENZIALE}}\hat{t} + \underbrace{v\frac{d\beta}{dt}}_{\text{MODULO ACCELERAZIONE RADIALE}}\hat{r}$$

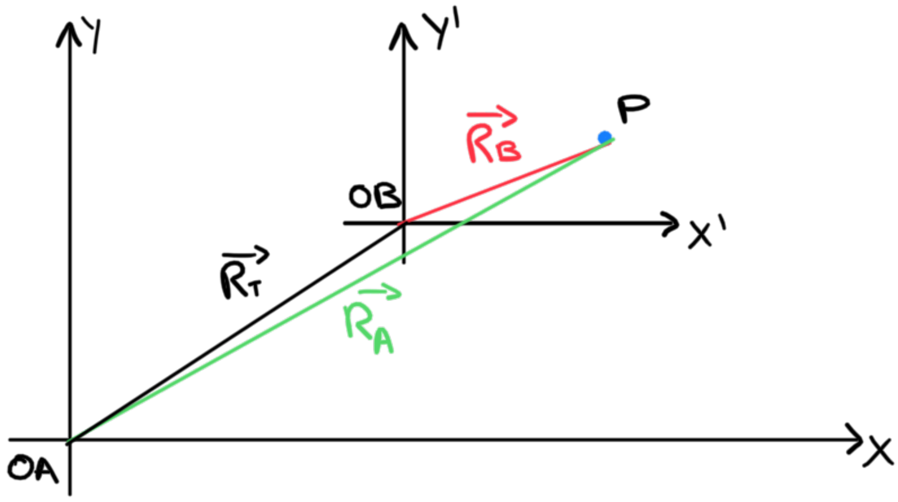
Nel caso in cui la velocità in modulo sia costante abbiamo che la componente tangenziale dell'accelerazione è nulla. In questa situazione tale accelerazione sarà chiamata **centripeta**.

$$\vec{a}_c = \frac{v\,d\theta}{dt}\hat{r}$$

RICORDA : $\frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{v}{r}$

$$\vec{a}_c = \frac{v^2}{r}\hat{r}$$

VELOCITÀ ED ACCELERAZIONI RELATIVE



Supponiamo che il grafico riportato qui sopra rappresenti una situazione di vita come di tutti i giorni: sia l'origine del sistema di riferimento A un osservatore che sta in quiete di fianco ad un nastro trasportatore; sia l'origine del sistema di riferimento B un altro osservatore che sta in quiete ma questa volta sopra il nastro trasportatore. Supponendo che il nastro trasportatore faccia ruotare i suoi rulli imprimendo una velocità costante agli oggetti che trasporta si può ben notare che i due osservatori misurano velocità differenti del punto P. Perché avviene questo?
La velocità rispetto all'osservatore OB è data da:

$$\vec{V}_B = \frac{d\vec{R}_B}{dt}$$

Mentre se consideriamo la velocità rispetto all'osservatore OA (il cui sistema consideriamo assoluto e solidale con la Terra) é data da:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_T = \frac{d\vec{R}_A}{dt} = \frac{d\vec{R}_T}{dt} + \frac{d\vec{R}_B}{dt}$$

Il vettore velocità, dal punto di vista dell'osservatore OA, è dato dalla somma vettoriale delle derivate degli spostamenti di P rispetto ad OB e di quest'ultimo rispetto al sistema assoluto. Le due componenti della velocità sono chiamate, rispettivamente, **velocità relativa** e **velocità di trascinamento**.
Si è supposto che il tempo nei due sistemi di riferimento scorresse allo stesso modo (si deriva il vettore spostamento rispetto al tempo in tutti e due i casi). Purtroppo questo non è sempre vero a patto che non ci si riferisca a fenomeni fisici la quale durata é infinitesima rispetto alla durata dei fenomeni a cui sono soggetti i sistemi presi in considerazione.

Allo stesso modo può essere definita l'accelerazione di P rispetto al sistema A:

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{V}_A}{dt} = \frac{d\vec{V}_B}{dt} + \frac{d\vec{V}_T}{dt} = \frac{d^2\vec{R}_T}{dt^2} + \frac{d^2\vec{R}_B}{dt^2}$$

Indubbiamente possiamo fare una considerazione: se la velocità è costante sia tra i due sistemi di riferimento sia tra il punto e il sistema B allora l'accelerazione è nulla. Ma c'è un caso più interessante: supponiamo che il punto P si muova con in accelerazione costante nel tempo non dovuta al nastro trasportatore (quindi l'osservatore posto all'origine del sistema B si muoverà con velocità costante rispetto al sistema assoluto A). L'accelerazione misurata dall'osservatore A coincide esattamente con l'accelerazione misurata dall'osservatore B. Questo perché l'accelerazione assoluta, essendo somma vettoriale di due accelerazioni, se una è nulla (nel nostro l'accelerazione dovuta alla velocità di trascinamento) è uguale all'unico membro restante.

SISTEMI INERZIALI E NON INERZIALI

Si dirà che un sistema è **inerziale** rispetto ad un altro se l'uno rispetto all'altro si muovono di moto rettilineo uniforme o sono in stato di quiete. L'ultimo esempio riportato sopra descrive un sistema inerziale. Nei sistemi inerziali valgono le seguenti leggi:

$$\left.\begin{aligned} \vec{V}_A &= \vec{V}_T + \vec{V}_R \\ \vec{a}_A &= \vec{a}_R \end{aligned}\right\} \text{SISTEMI INERZIALI}$$

$\vec{V}_T$ = VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO

$\vec{V}_R$ = VELOCITÀ RELATIVA

$\vec{a}_R$ = ACCELERAZIONE RELATIVA

Si dirà che un sistema è **non inerziale** rispetto ad un altro se l'uno rispetto all'altro si muovono di moto rettilineo uniformemente accelerato.

$$\left.\begin{aligned} \vec{V}_A &= \vec{V}_T + \vec{V}_R \\ \vec{a}_A &= \vec{a}_T + \vec{a}_R \end{aligned}\right\} \text{SISTEMI NON INERZIALI}$$

$\vec{V}_T$ = VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO

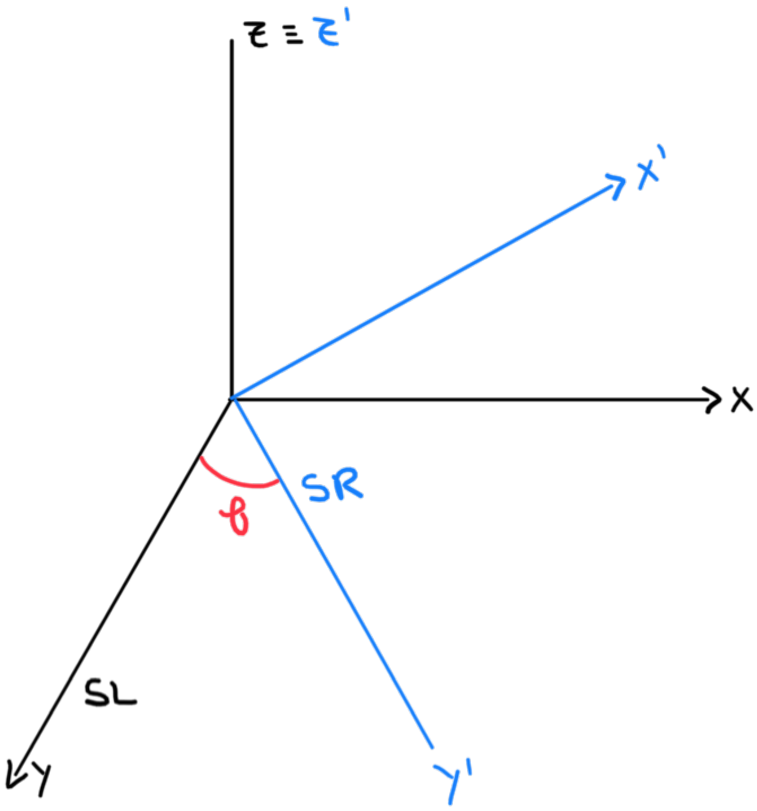
$\vec{V}_R$ = VELOCITÀ RELATIVA

$\vec{a}_R$ = ACCELERAZIONE RELATIVA

$\vec{a}_T$ = ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO

SISTEMI DI RIFERIMENTO ROTANTI

Supponiamo di avere due sistemi di riferimento chiamati rispettivamente SL (sistema solidale) e SR (sistema rotante). Si supponga che l'origine degli assi dei due sistemi coincida e che SR si muova di moto circolare uniforme (asse di rotazione = z) rispetto a SL. Notiamo bene da subito che i due sistemi non possono essere inerziali l'uno rispetto all'altro perché il secondo sistema si muove con un'accelerazione costante (l'accelerazione centripeta provocata dal moto circolare).



Si voglia calcolare la velocità è l'accelerazione di trascinamento prodotta dal sistema SR:

$$\vec{V}_T = \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{a}_T = \frac{d\vec{V}_T}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{V}_T = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) = -\omega^2 \vec{R}_\perp$$

* $\vec{R}_\perp$ = proiezione del vettore $\vec{R}$ sul piano di rotazione.

Relazione tra la velocità di un punto materiale nel sistema rotante rispetto al sistema solidale:

$$\vec{V} = \vec{V}_R + \vec{V}_T = \vec{V}_R + \vec{\omega} \wedge \vec{R}$$

DINAMICA: FORZE E MOTO, LEGGI DI NEWTON

La **dinamica** studia il moto dei corpi in relazione con le sue cause: perché e come gli oggetti si muovono.
Il moto dei corpi è determinato dalle leggi di Newton.

PRIMA LEGGE DI NEWTON

- Per un oggetto non interagente con altri oggetti, è sempre possibile identificare un sistema di riferimento inerziale, nel quale l'oggetto ha accelerazione nulla.
- In assenza di interazioni con il mondo esterno allora un oggetto conserva il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

Questa prima legge è conosciuta come **principio d'inerzia**.

Come si può creare una situazione in cui un oggetto è in uno spazio privo di interazioni? Basterebbe pensare che in assenza di contatto si crea una situazione priva di interazioni. Non

è vero! Basta pensare al campo gravitazionale: quando saltiamo in una zona priva di oggetti comunque veniamo riportati giù a terra. Quindi seppur in assenza di interazioni c'è una forza che ci porta a terra: questa forza è l'attrazione che la Terra manifesta verso i corpi abbastanza vicini ad essa.
Noi consideriamo un corpo senza interazioni se su tale corpo le forze agenti su di esso siano trascurabili. Esempio: se volessimo misurare il tempo di caduta di un sasso dovremmo contare anche la forza gravitazionale della Luna su di esso (e via dicendo tutto l'universo). Questa interazione viene trascurata perché gli effetti sono infinitesimi rispetto agli effetti provocati dalla forza gravitazionale della Terra (dato che la Luna è a distanza enormi rispetto alla Terra nel sistema di riferimento del fenomeno osservato).

Forze che interagiscono sui corpi:
- Forza di gravità;
- Forza elettromagnetica;
- Forza nucleare forte;
- Forza nucleare debole.

A rigore nessun sistema è isolato; è tale se gli effetti indesiderati sul sistema sono piccoli rispetto al livello di accuratezza che si vuole ottenere dalla misura.

SECONDA LEGGE DI NEWTON
- Le forze sono direttamente proporzionali all'accelerazione ed alla variazione della massa dei corpi rispetto al tempo.

Sia $\vec{p} = m\vec{v}$ ($\vec{p}$ = QUANTITÀ DI MOTO)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt}m$$

Dove $m = m(t)$; quindi la massa è variabile nel tempo.

Se la massa è costante nel tempo si ha:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Si introduce il **primo principio di conservazione** della quantità di moto:
- In un sistema in cui le forze esterne siano nulle (sistema isolato) la quantità di moto si conserva:

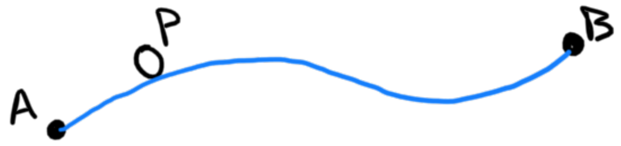
$$\vec{p} = m\vec{v} \equiv \text{COSTANTE}$$

quindi $\dfrac{d\vec{p}}{dt} \equiv 0 \Rightarrow \sum \vec{F}_{EXT} = 0$

Notiamo che:

$\vec{F}$ è // $d\vec{p}$

Facciamo un esempio:



Il corpo p conserva la quantità di moto percorrendo la traiettoria AB?

No! Durante tutto il percorso il vettore $\vec{v}$ è tangente alla curva e cambiando direzione ne provoca una variazione da cui segue $\vec{p} \neq$ COSTANTE.

L'unico vettore presente in $\vec{p} = m\vec{v}$ è la velocità (essendo m uno scalare) per cui derivando la direzione si conserva e segue $\vec{F}$ // $\vec{p}$.

Se si trova la direzione in cui varia $\vec{p}$ si trova la direzione in cui è diretta $\vec{F}$.

Che cosa sono le forze?

- Le forze sono interazioni tra i corpi che producono variazioni di moto (o di quiete in moto).

Tutte le forze che conosciamo sono precisamente campi di forze.

FORZA D'INTERAZIONE GRAVITAZIONALE

$$\vec{F}_G = -\frac{G m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

FORZA D'INTERAZIONE ELETTROMAGNETICA

$$\vec{F}_E = \pm\frac{K q_1 q_2}{r_{12}}\hat{r}_{12}$$

MOLTO SIMILI TRA LORO

A cosa sono dovute le forze elastiche? Le interazioni elettromagnetiche tra atomi richiama la molla nella posizione iniziale: i legami atomici che compongono un oggetto possono essere "allungati" per provocare un allungamento complessivo dell'oggetto ma ad ogni allungamento corrisponde una forza in uguale modulo ma diretta in verso opposto che cerca di riportare al loro posto tutti gli atomi che si sono spostati dalla loro posizione originaria nella struttura

cristallina.
Anche le reazioni vincolari sono causate dalla forza di interazione elettromagnetica.

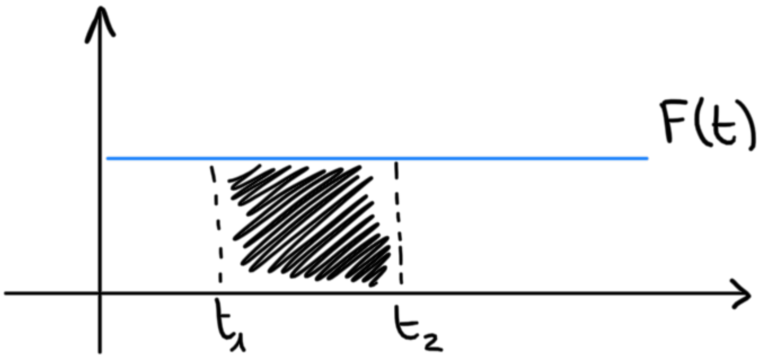
Notiamo che:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}\,dt = d\vec{p}$$

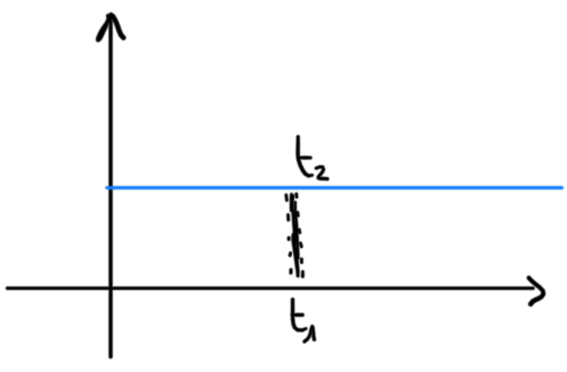
In alcuni casi ci può essere conservazione di quantità di moto anche in presenza di $\vec{F}_{EXT}$

$dt = t_2 - t_1$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{EXT}\,dt = P_{t_2} - P_{t_1} \qquad \text{dove } P_{t_2} = P_{t_1}$$



Se dt è grande allora sicuramente la presenza di una forza esterna modifica la quantità di moto (area NERA).

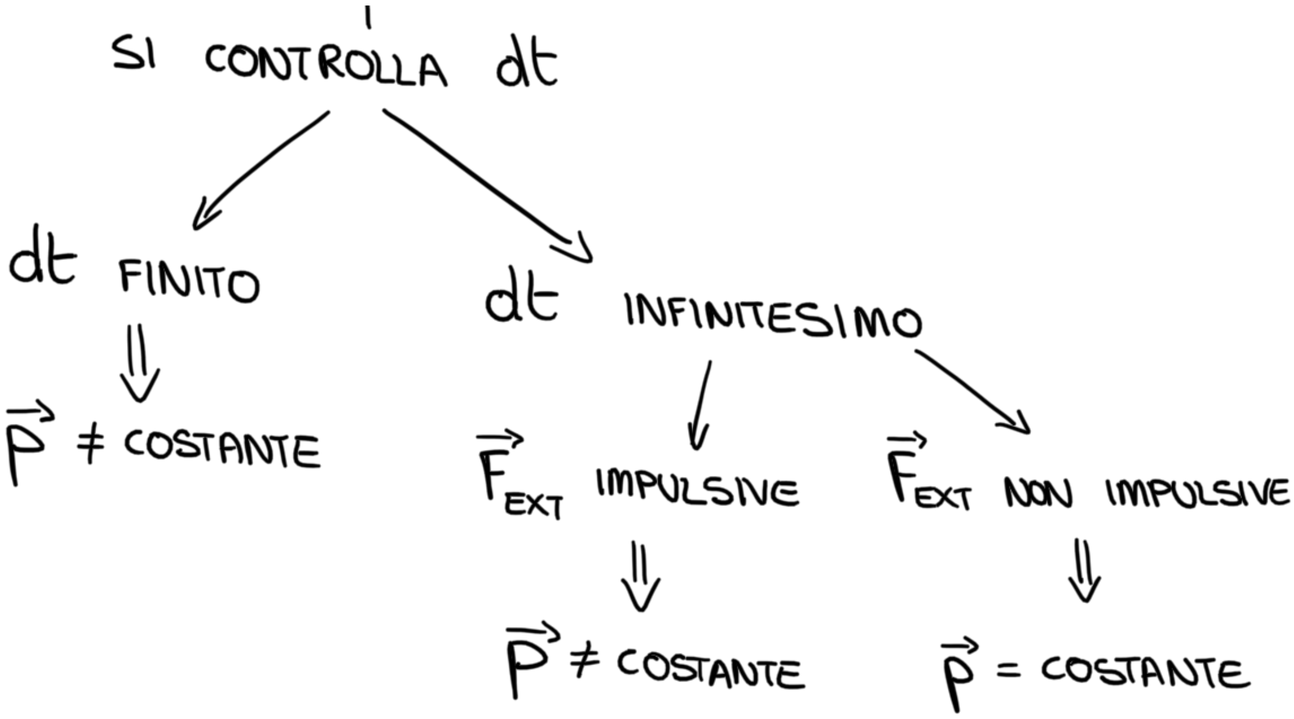


Se dt È INFINITESIMO la variazione di quantità di moto è trascurabile (quindi si assumerà $\vec{p}$ COSTANTE) se e solo se le FORZE sono NON IMPULSIVE

Qui di sotto è riportata una "ROAD MAP" su come decretare se un sistema CONSERVA $\vec{p}$.

$\sum \vec{F}_{EXT} = 0 \Rightarrow \vec{p} \equiv$ COSTANTE

└ ALTRIMENTI SE $\sum \vec{F}_{EXT} \neq 0$



Perché se la forza è impulsiva per dt infinitesimi comunque non c'è conservazione di moto?
Una forza si dirà impulsiva se agisce in un intervallo di tempo infinitesimo con un'intensità al limite infinita. Supponiamo quindi che si abbia una forza impulsiva descritta dalla funzione F(t) = 1/t (questa funzione, ristretta in un intorno di 0, approssima concettualmente l'effetto di una forza impulsiva).
Si voglia esprimere in funzione del tempo la variazione di quantità di moto:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad F(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\bar{t}} F(t)\,dt = d\vec{p}$$

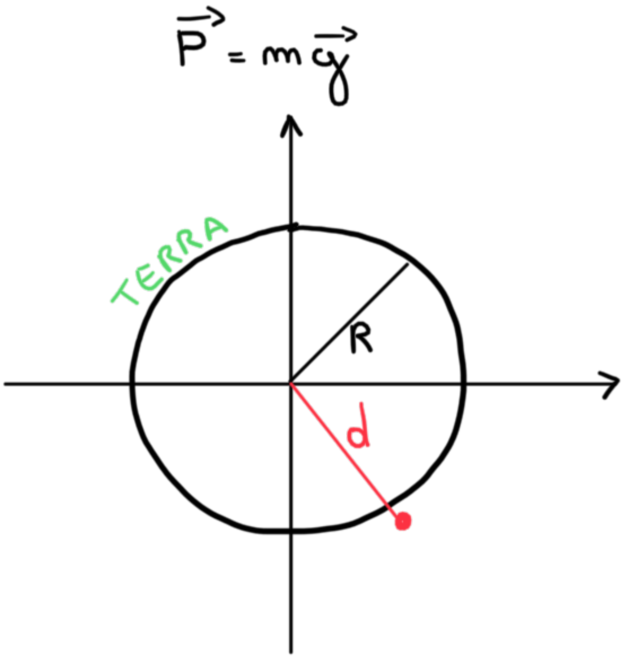
$$d\vec{p} = P_{\bar{t}} - P_0$$

$$\int_0^{\bar{t}} F(t)\,dt = \int_0^{\bar{t}} \frac{dt}{t} = \lim_{b \to 0} \log|t| \Big|_b^{\bar{t}} = \infty$$

NE SEGUE $\quad \infty = P_{\bar{t}} - P_0 \quad \Rightarrow \quad P_{\bar{t}} \neq P_0$

Quindi per dt infinitesimi le forze impulsive producono certamente una variazione di quantità di moto.

Forza peso
Si indica forza peso quella forza di attrazione gravitazionale, diretta radialmente, che la Terra esercita sui corpi nelle sue immediate vicinanze (beh e non solo!).



Anche la forza peso è un'approssimazione: essendo il risultato della forza gravitazionale essa dipende inversamente dalla distanza del corpo dal centro della Terra. Le distanze in gioco in cui si utilizza la forza peso sono trascurabili rispetto al raggio medio della Terra quindi si prenderà come constante g.

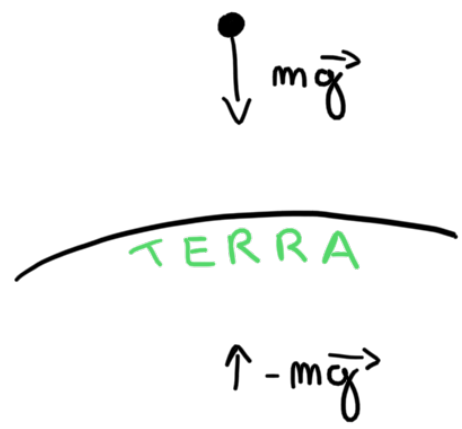
Reazioni vincolari
Quando due corpi sono in "contatto" essi esercitano l'uno sull'altro delle forze. Quando la superficie di contatto è priva di attrito la forza è diretta verso la normale della superficie. Se nel sistema non sono presenti forze esterne oltre alla forza applicata dal corpo in contatto sulla superficie la risultante delle forze è nulla: la reazione vincolare è in modulo uguale alla forza applicata sulla superficie, diretta lungo la parallela ma in verso opposto.

TERZA LEGGE DI NEWTON
- "Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria".
- La terza legge di Newton spiega che all'interazione di un corpo materiale su di un altro è associata una reazione, in termini di forze, diretta parallelamente nella direzione della prima forza, in egual modulo, ma un verso opposto.

PERCHÈ L'ACCELERAZIONE È DATA UNICAMENTE DALLA SOMMATORIA DELLE FORZE ESTERNE?

TUTTE LE FORZE INTERNE SONO FRUTTO DELLA TERZA LEGGE DI NEWTON E QUINDI, ESSENDO L'UNA L'OPPOSTO DELL'ALTRA, SI ANNULLANO.

ESEMPIO: CADUTA DI UN GRAVE



Secondo la terza legge di Newton se la terra imprime un attrazione sul sasso (forza peso in questo caso specifico!) anche il sasso deve imprimere la stessa forza, uguale in modulo ma diretta in verso opposto (in questo caso uscente rispetto l'asse radiale). Quindi teoricamente la Terra si muove verso il sasso ed è proprio quello che succede ma gli effetti provocati sono infinitamente piccoli per essere considerati significativamente nei nostri esperimenti.

RICORDA: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ da cui se $m \equiv$ COSTANTE diventa:

$\vec{F} = m\vec{a}$ ed esplicitando $\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

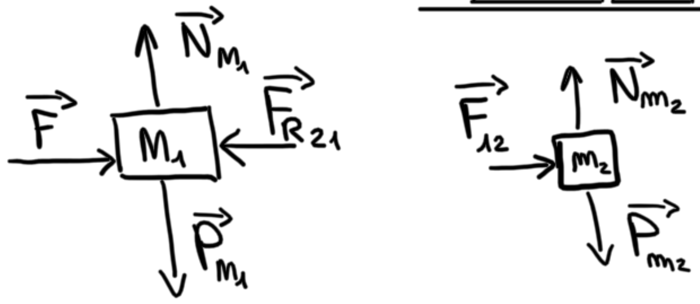
A PARITÀ DI FORZA IL CORPO DI MASSA MINORE RICEVE UN'ACCELERAZIONE MAGGIORE.

FILI E CORDE: TENSIONE

- Supponiamo di avere un filo o una corda che sia inestensibile. Sotto questa ipotesi la corda è in grado di trasmettere una forza da un estremo all'altro.
- La tensione è sempre diretta come la corda ed è applicata al punto di attacco della corda.

OGGETTI MULTIPLI

I due CORPI sono a contatto



Dal 2° PRINCIPIO DI NEWTON $\Rightarrow$ $\vec{F}_{R21} = -\vec{F}_{12}$

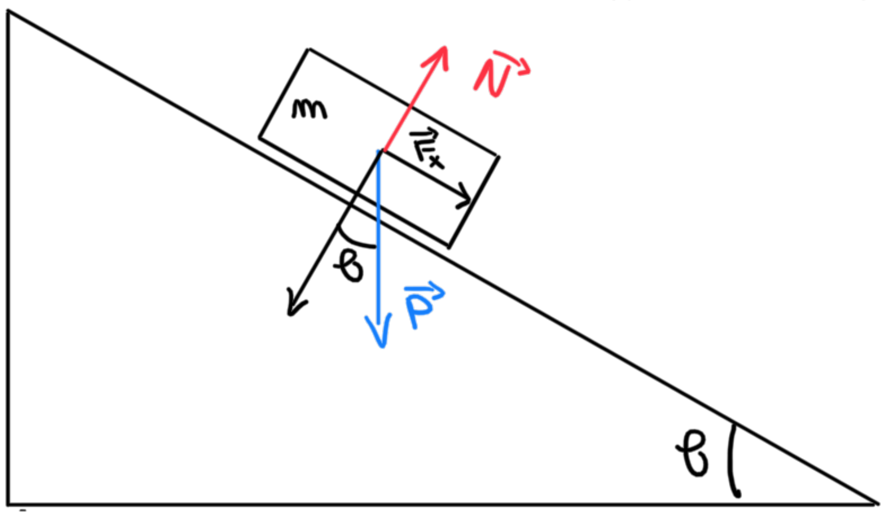
Ma ricordiamo che $\vec{F}_{R21}$ e $-\vec{F}_{12}$ sono FORZE INTERNE.

Si ricava:

$$\sum \vec{F}_{EXT} = (M_1 + m_2)\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}_{EXT}}{\sum_{i=1}^{m} m_i}$$

CADUTA DI UN CORPO DA UN PIANO INCLINATO



$\vec{N}$ REAZIONE VINCOLARE È SEMPRE NORMALE AL PIANO – IN CASO DI ASSENZA DI ATTRITO

$\vec{P}$ FORZA PESO È SEMPRE NORMALE ALLA SUPERFICIE TERRESTRE

Se $\sum \vec{F}_y = 0$ allora si ha:

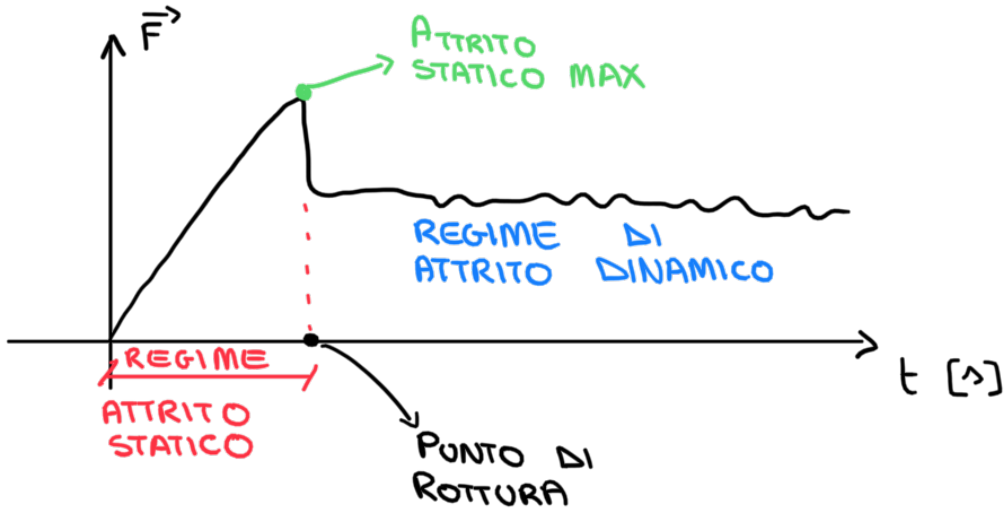
$$\vec{F}_x = (mg \sin\theta \; \hat{i})\, N$$

N.B.: $\vec{F}_y = -mg\cos\theta + \vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{N} = mg\cos\theta$

FORZE DI ATTRITO
Da un punto di vista microscopico l’attrito è dovuto alle microfusioni tra i due materiali in contatto. Tali microfusioni sono causate dal peso (inteso come forza) esercitato dalle protrusioni del materiale, di cui è formato il corpo soprastante, sulle altrettante protusioni del corpo sottostante. (Attento: non si intendono protusioni macroscopiche ma di origine microscopico).
La forza di attrito è una reazione: nasce quando c’è qualche forza che opera sul corpo facendogli compiere uno spostamento lungo la superficie con cui è a contatto.

Attrito statico: forza necessaria a rompere le microfusioni che ostacolano il movimento.

Attrito dinamico: forza necessaria a mantenere lo scorrimento tra le due superficie e mantenere di conseguenza la capacità di compiere spostamenti del corpo soggetto alla forza.



NOMENCLATURA : $\vec{F_s}$ = forza ATTRITO STATICO

$\boxed{\vec{F_s} \leq \vec{F}_{EXT}}$ OPPURE $\boxed{\vec{F_s} \leq \mu_s \vec{N}}$

μ_s: COEF. ATTRITO STATICO.

$\vec{F_s}$ è DIPENDENTE dalle forze esterne che AGISCONO PARALLELAMENTE alla superficie di contatto tra i due corpi.

$\vec{F_s}$ è comunque DIPENDENTE, PROPORZIONALMENTE da μ_s, dalla REAZIONE NORMALE.

$\vec{F_s} \leq \mu_s \vec{N}$ ed in particolare $\vec{F}_{s\,MAX} = \mu_s \vec{N}$

ATTENZIONE : FORZA DI ATTRITO DINAMICO È ESATTAMENTE UGUALE, e proporzionale, ad $\mu_D \vec{N}$.

$$\vec{F_D} = \mu_D \vec{N}$$

MOTO IN UN FLUIDO

Un fluido (sia esso un liquido o un gas) oppone una forza a tutti i corpi che si muovono al suo interno. Quindi l'origine dell'attrito del mezzo è l'insieme vorticoso di collisioni tra il corpo in movimento e il mezzo che sta percorrendo. In sostanza un corpo viene decelerato dal mezzo su cui si svolge il suo moto.

TIPICAMENTE (e in buona approssimazione). $\vec{F}_{ATTRITO} \propto -\beta\vec{v}$ $\vec{v}$ = velocità

SITUAZIONI CHE POSSONO ACCADERE CON LE FORZE

$\vec{F}$ = COSTANTE $\longrightarrow$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ e se m = COSTANTE

$\downarrow$

$\vec{F} = m\vec{a}$

- $\vec{F}$ DIPENDENTE DALLA VELOCITÀ (ad esempio MOTO IN UN FLUIDO)

$$mg - \beta v = m\frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} + \beta v = mg$$ $\Rightarrow$ EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE DI PRIMO GRADO

$\rightarrow$ SOLUZIONE OMOGENEA: $m\frac{dv}{dt} + \beta v = 0$

$m\lambda + \beta = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{\beta}{m}$ per cui si ottiene:

$$v_0(t) = Ae^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$\rightarrow$ SOLUZIONE PARTICOLARE

$v_p(t) = c$ soluzione particolare DISOMOGENEA ed in particolare:

$$\frac{dc}{dt} + \beta c = mg \Rightarrow 0 + \beta c = mg \Rightarrow c = \frac{mg}{\beta}$$

$$v_p(t) = \frac{mg}{\beta}$$

SOLUZIONE: $V(t) = \frac{mg}{\beta} + Ae^{-\frac{\beta}{m}t}$

Il parametro A dipende dalle condizioni iniziali del moto.

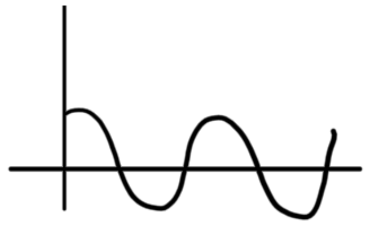
- $\vec{F}$ DIPENDENTE DALLA POSIZIONE (esempio MOTO ARMONICO)
- $\vec{F}$ DIPENDENTE DAL TEMPO

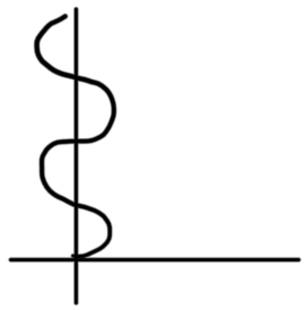
MOTO CIRCOLARE UNIFORME COME SOVRAPPOSIZIONE DI DUE MOTI ARMONICI

Supponiamo di avere:

$X(t) = A\cos(\omega t)$

$Y(t) = A\sin(\omega t)$





$$\frac{X}{A} = \cos(\omega t)$$

$$\frac{Y}{A} = \sin(\omega t)$$

$$\frac{X}{A} + \frac{Y}{A} = \cos(\omega t) + \sin(\omega t)$$

ELEVANDO AL QUADRATO $\Rightarrow \frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{A^2} = 1 \Rightarrow X^2 + Y^2 = A^2$

Abbiamo trovato una traiettoria circolare indipendente dal tempo = MOTO CIRCOLARE

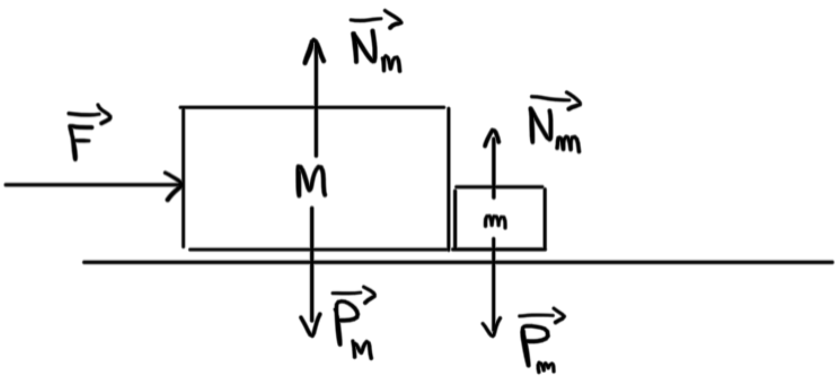
È UNIFORME ? => VELOCITÀ COSTANTE ?

$|v| \equiv$ COSTANTE $\Rightarrow v = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{d\vec{y}}{dt}$

$$|v| = \frac{|d\vec{x}|}{|dt|} + \frac{|d\vec{y}|}{|dt|} = \left((-A\omega\sin(\omega t))^2 + (A\omega\cos(\omega t))^2\right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{A^2\omega^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t))} = A\omega \equiv \text{COSTANTE}$$

DINAMICA DI DUE CORPI A CONTATTO

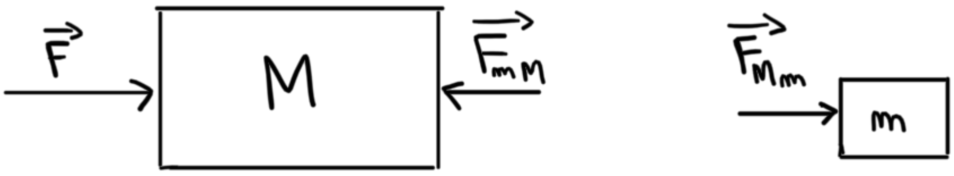


I due corpi sono in equilibrio verticalmente; da ciò segue che:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{P}_M + \vec{N}_M = 0 \Rightarrow \vec{N}_M = -\vec{P}_M$$

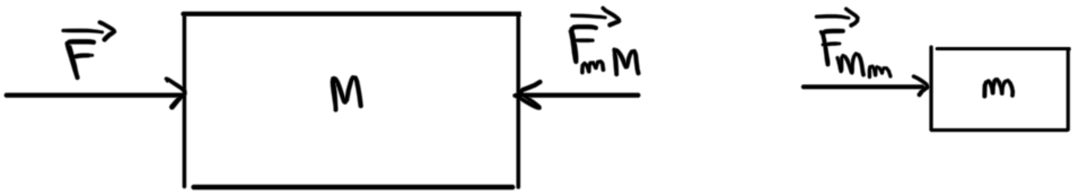
$$\vec{P}_m + \vec{N}_m = 0 \Rightarrow \vec{N}_m = -\vec{P}_m$$

Lungo l'orizzontale agisce una forza F che imprime un'accelerazione ai corpi.



Secondo la terza Legge di Newton, il corpo di massa m imprime una forza, in modulo uguale ma in verso contrario, alla massa M. La forza che imprime il corpo M sul corpo m è la stessa impressa da F (supponendo che i corpi siano rigidi e giacenti su un piano privo di attrito). Queste due forze (di azione e reazione) sono interne al sistema e non influiscono sul moto dei due corpi. Tale aspetto ci permette di considerare i due corpi come un'unica entità materiale a cui è applicata una forza F.

$$\vec{F} = (M+m)\vec{a}_T \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_T = \frac{\vec{F}}{M+m}$$



$$\vec{F} - \vec{F}_{mM} = \vec{F}_{Mm}$$

$$(M+m)\vec{a}_T - m\vec{a}_T = \vec{F}_{Mm} \quad \Rightarrow \text{SOSTITUENDO} \quad \vec{a}_T = \frac{\vec{F}}{M+m}$$

I DUE CORPI SONO SOGGETTI ALLA STESSA ACCELERAZIONE PERCHÈ CONSIDERATI UN UNICO SISTEMA.

$$\vec{F}_{Mm} = \vec{F} - \frac{m\vec{F}}{M+m}$$

$$\vec{F}_{Mm} = \frac{\vec{F}(M+m-m)}{M+m} = F\left(\frac{M}{M+m}\right)$$

Si ricava inoltre

$$\vec{F}_{mM} = \vec{F} - \vec{F}_{Mm}$$

$$\vec{F}_{mM} = \frac{\vec{F}(M+m) - \vec{F}\cdot M}{M+m} = \vec{F}\left(\frac{m}{M+m}\right)$$

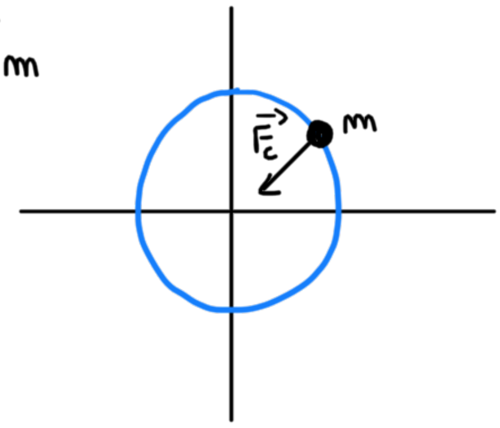
FORZA ELASTICA
È una particolare forza vincolare che rispetta la legge di Hooke. È una forza variabile in cui il modulo è proporzionale allo spostamento rispetto alla posizione di riposo.

FORZA CENTRIPETA
La forza centripeta è la forza causata dall'accelerazione centripeta a cui è soggetto un corpo che percorre una traiettoria circolare.

$$\vec{F_c} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \text{MASSA COSTANTE} = \frac{d\vec{v}}{dt} m$$

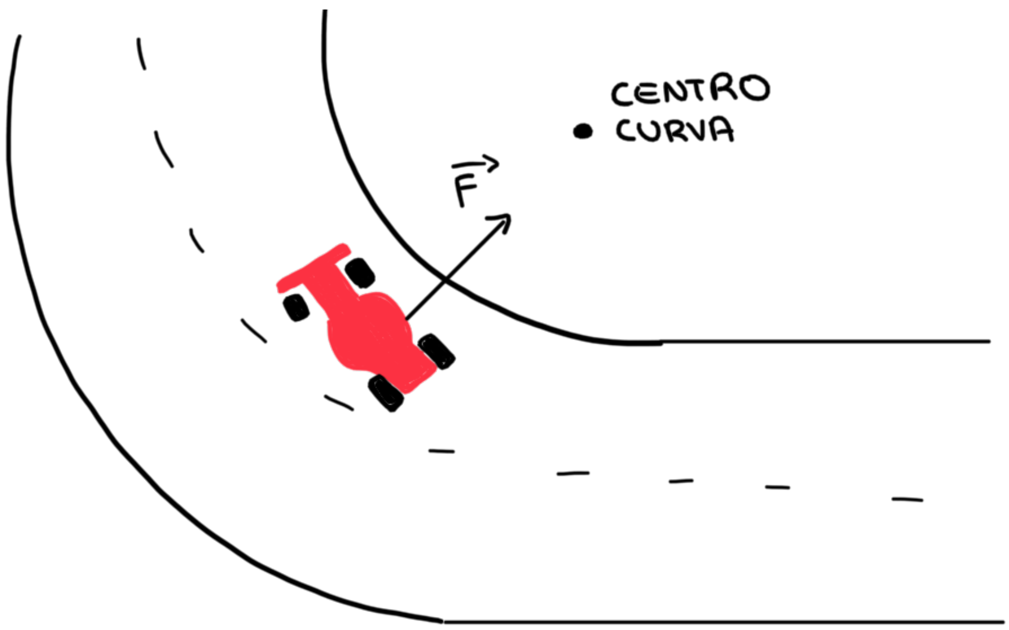
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a_c} \qquad \text{SEGUE} \qquad \vec{F_c} = m\vec{a_c}$$

$$\vec{F_c} = m\frac{v^2}{r}$$



MOTO DI UN AUTOMOBILE
Il moto di un automobile è dato non dalla forza motrice prodotta dal motore ma dalla reazione del suolo (quindi l'attrito) provocato dalla forza che viene impressa dalle ruote sul suolo. In una strada perfettamente orizzontale, se il motore è staccato (tramite la frizione) dal cambio allora non vi è alcuna forza che agisce sulle ruote e la macchina manterrà il suo stato di quiete. Quando la macchina parte il motore fa girare le ruote che quindi imprimono una forza sull'asfalto. La reazione che produce l'asfalto è proporzionale al peso della macchina e diretta in verso opposto alla forza prodotta dalle ruote (ricordiamo che in questo caso abbiamo supposto che il moto si svolgesse su un piano orizzontale e quindi la reazione normale è uguale in modulo al peso ma in verso opposto); la costante di proporzionalità è proprio il coefficiente di attrito: statico all'atto della partenza e dinamico per tutto il resto del moto. Grazie a questa reazione la macchina si sposterà lungo la direzione e il verso della reazione.

Cosa succede quando una macchina percorre una curva?



La macchina in curva percorre un arco di circonferenza quindi per un tratto di strada si muoverà di moto circolare. L'accelerazione centripeta conseguente al moto determina una forza. La macchina non andrà fuori strada se e solo se la forza prodotta dal moto non eccederà la forza di attrito statico prodotto dall'asfalto (in questo caso l'attrito è statico perché il moto è diretto lungo la tangente e non lungo l’asse radiale).

$$\vec{F} = m\bar{a}_c = m\frac{v^2}{r}$$

$$\vec{F} \leq \mu_s \vec{m} \quad \Rightarrow \quad m\frac{v^2}{r} \leq \mu_s m g$$

VELOCITÀ LIMITE DI PERCORRENZA := $v = \sqrt{\mu_s r g}$

LA VELOCITÀ LIMITE NON DIPENDE DALLA MASSA!

MOTO ARMONICO

Se tendiamo o comprimiamo una molla ancorata ad un estremo e poi lasciamo andare, la molla oscillerà avanti e indietro. Questa oscillazione é chiamata moto armonico (semplice).

$\vec{F} = -kx(t)$ $\qquad$ $x(t) =$ funzione spazio

SAPPIAMO INOLTRE CHE: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\frac{d\vec{x}}{dt} + m\frac{d^2\vec{x}}{dt}$

SUPPONIAMO $m =$ COSTANTE, si ricava:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \Rightarrow$$ EQUAZIONE DIFFERENZIALE

Quale funzione, derivata due volte, è proporzionale a se stessa con il segno opposto? Le funzioni periodiche come il seno o il coseno. Si prende come esempio il coseno.

$x(t) = A\cos(\underbrace{\omega t}_{})$ → COSTANTE DI PROPORZIONALITÀ

↳ senza il COEFICIENTE L'EQUAZIONE È DIMENSIONALMENTE ERRATA.

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t)$$ => L'EQUAZIONE È SODDISFATTA

$$-A\omega^2\cos(\omega t) + A\cos(\omega t) = 0$$

$$-A\omega^2\cos(\omega t) = -A\cos(\omega t)$$

Sostituiamo ad A i rispettivi valori:

$$-m\,\omega^2\cos(\omega t) = -K\cos(\omega t)$$

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ => PULSAZIONE (o frequenza angolare)

T => PERIODO $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

f => FREQUENZA $\quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{K}{m}}}{2\pi}$

ENERGIA

L'energia è la capacità di un corpo di compiere lavoro. Esistono diversi tipi di energia, ognuno dei quali dipende da una forza fisica.

Facciamo un esempio:

- Energia cinetica, dipendente dalla velocità.
- Energia potenziale, dipendente dalla posizione.
- Energia termica, dipende dalla temperatura.

L'energia di un corpo rimane costante se non avvengono scambi di energia con l'ambiente esterno. Un esempio di conservazione dell'energia é un sistema isolato con forze esterne nulle.

ENERGIA CINETICA

Si dice ENERGIA CINETICA l'energia che un corpo possiede a causa del proprio movimento.

DEFINIZIONE := $K = \frac{1}{2} m v^2$ $\quad$ (m = MASSA)

oppure $\quad K = \frac{1}{2} m \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$

L'ENERGIA CINETICA di un SISTEMA di m PARTICELLE NON INTERAGENTI :=

$$K_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} m_i \sum_{i=1}^{m} v_i^2$$

L'agitazione interna di un corpo produce energia cinetica ma noi in meccanica non la consideriamo perché produce effetti trascurabili nei fenomeni studiati con la meccanica.

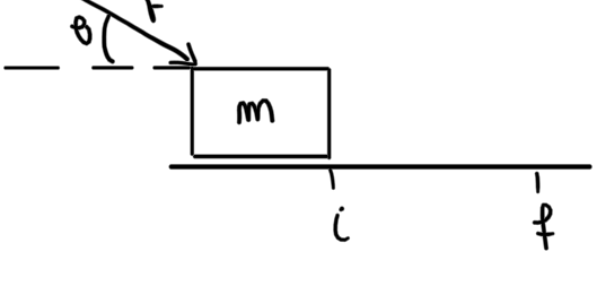
Si chiama **LAVORO** fatto da una forza F che produce uno spostamento dal punto i al punto f, l'integrale così definito:

$$L = \int_i^f \vec{F} \, d\vec{s}$$

Il differenziale ds indica lo spostamento dal punto iniziale al punto finale. Tale spostamento può non essere rettilineo orizzontale ma nella maggior parte delle occasioni la traiettoria percorsa dal corpo in movimento è curvilinea. Per tale motivo è corretto definire il lavoro come l'integrale di linea della forza per ds.

$$L_{i \to f} = \int_i^f \vec{F} \, d\vec{s}$$

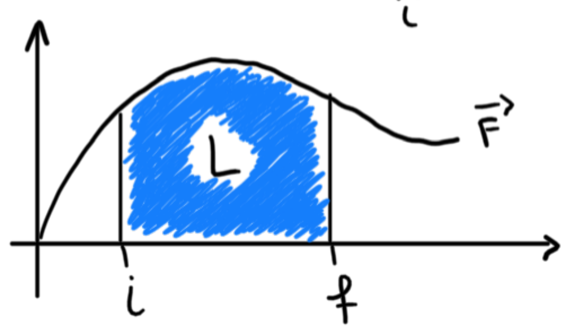
La forza che produce lavoro è esclusivamente quella parallela allo spostamento. Da ciò segue che se una forza è applicata con un certo angolo theta rispetto la direzione parallela al movimento, la componente che contribuisce al lavoro è data dalla proiezione della forza sulla retta parallela allo spostamento.



$\vec{F}$ RELATIVA AL LAVORO := $\vec{F}_L = F \cos\theta \, \hat{i}$

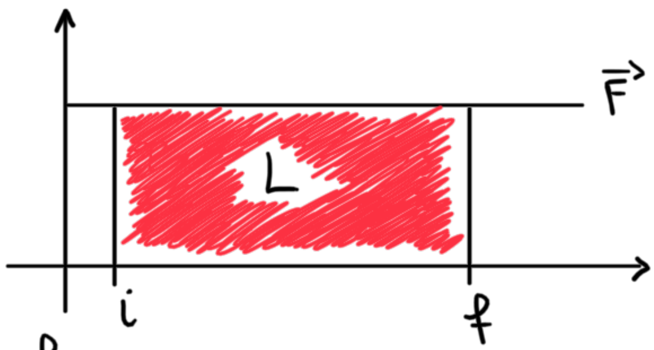
Consideriamo il caso in cui lo spostamento avvenga parallelo all'asse orizzontale del sistema di riferimento. In tale situazione l'ascissa curvilinea coincide con l'asse x e di conseguenza l'integrale curvilineo coincide con l'integrale di Riemann.

$d\vec{s}$ ORIZZONTALE $\Rightarrow L = \int_i^f \vec{F} ds$ NEL SENSO DI RIEMANN



$$ds = f - i$$

Supponiamo invece di avere una forza costante nel tempo e ds rettilineo.

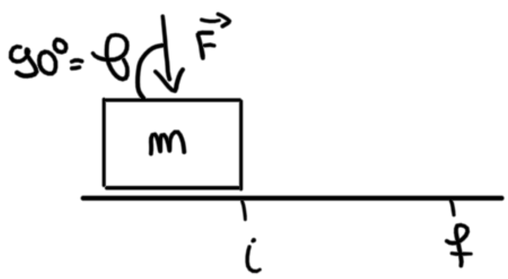


$$L = \int_i^f F ds = F \int_i^f ds = F x \Big|_i^f = F(f - i) = F ds$$

E nel caso di una forza non parallela allo spostamento:

$$L = F \cos\theta \, ds$$

Ora si immagini di avere una forza applicata lungo la normale allo spostamento:



Tale lavoro è nullo dato che cosθ = 0 => θ = 90 gradi.
Inoltre il lavoro è nullo quando F è nulla o lo spostamento è nullo.

$$L = 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} \vec{F} = 0 \\ d\vec{s} = 0 \\ \vec{F} \perp d\vec{s} \end{cases}$$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA (anche detto th. forza viva)
Enunciato: ΔK = L
Dimostrazione:

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}m v_f^2 - \frac{1}{2}m v_i^2 = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

$$L = \int_i^f \vec{F}\, d\vec{s} = \int_f^i \frac{d\vec{p}}{dt}\, d\vec{s} = \int_f^i \frac{d(m\vec{v})}{dt}\, d\vec{s} = \int_f^i \left(\frac{dm}{dt}\vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt}m\right) d\vec{s}$$

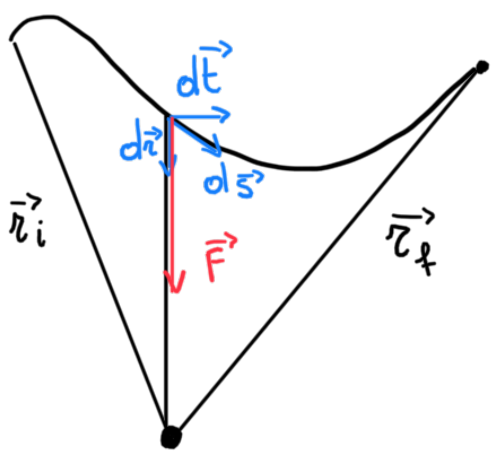
Supposto che la massa sia constante nel tempo risulta dm/dt = 0. Ne segue quindi:

$$\int_f^i m \frac{d\vec{v}}{dt}\, ds = m \int_f^i \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v}\, d\vec{v} = m \int_f^i v\, d\vec{v} = \underset{\text{TESI}}{\underline{m\,\frac{1}{2}\left(v_f^2 - v_i^2\right)}}$$

$$\Delta K = m\,\frac{1}{2}\left(v_f^2 - v_i^2\right) = L \qquad \blacksquare$$

Lavoro compiuto da una forza radiale (diretta verso il centro)

$$\int_i^f \vec{F}\, d\vec{s} = \int_i^f -\frac{k}{r^2}\,\vec{r}\, d\vec{s} = -k \int_i^f \frac{d\vec{r}}{r^2} = k\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$$



Ricordiamo che il lavoro è compiuto solamente nella direzione dello spostamento o viceversa la forza che compie lavoro è diretta unicamente verso la direzione dello spostamento. Da questo segue che del differenziale spostamento ds si prende unicamente la componente radiale dr. Il versore r non influisce nel modulo dello spostamento perché, ovviamente, ha norma 1.

POTENZA

Definizione: rapidità con il quale una forza compie lavoro.

$$P_{MEDIA} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$ (ΔL: quantità di lavoro compiuta in un intervallo Δt)

$$P_{IST} = \frac{dL}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Dimostrazione Potenza istantanea:

$$P_{IST} = \frac{d}{dt}\left(\int \vec{F} \cdot d\vec{s}\right) = \frac{d\vec{F}}{dt} d\vec{s} + \vec{F}\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v}\left(d\vec{F} + \vec{F}\right) = \vec{F}\vec{v}$$

La potenza si misura in W (watt = joule/secondi).

SISTEMI DI PIÙ PARTICELLE

In generale fino ad ora abbiamo considerato corpi assimilabile come punti. Ma nella realtà i corpi non possono sempre essere considerati come dei punti. La dinamica dei punti materiali è ben differente dalla dinamica di un corpo rigido. Nel mezzo si trovano i sistemi di punti materiali.

Un sistema di più particelle (si supponga sia composto da n particelle puntiformi) ha bisogno di molte variabili per descrivere il moto del sistema.
Infatti ogni punto materiale può avere posizione, velocità e accelerazione differente rispetto alle altre componenti.

Si può semplificare la trattazione il discorso introducendo il **centro di massa**.
Il centro di massa è la posizione media pesata con le masse delle particelle.

$$X_{cm} = \frac{m_1 X_1 + m_2 X_2}{m_1 + m_2}$$

Più in generale (in tre dimensioni) si può esprimere come:

$$\vec{r}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \cdot \frac{1}{M_{TOT}}$$

Per trovare la posizione del centro di massa di un oggetto “continuo”:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

dove dm sono dei cubetti infinitesi di materia.
Introducendo $\rho = \frac{dm}{dV}$, cioè la densità, si ottiene un integrale di volume:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, \rho(\vec{r})\, dV$$

Centro di massa di oggetti compositi
Supponiamo di avere un oggetto composto da più parti ognuna delle quali è a sua volta composto da corpi puntiformi. Il centro di massa di questo oggetto è dato dalla posizione media dei centri di massa di ogni sua parte.

Sia M_i la parte i-esima di un oggetto composito.

$$\vec{r}_{cm_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M_{i\,TOT}}$$

$$\vec{r}_{cM} = \frac{\sum M_j \vec{r}_{M_j}}{\sum M_j} = \frac{\sum \left(\sum m_i \vec{r}_i\right) \vec{r}_{M_j}}{M_{OGGETTO}}$$

MOTO DEL CENTRO DI MASSA

Notiamo che:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i \quad \Rightarrow \quad M\vec{r}_{cm} = \sum m_i \vec{r}_i$$

Supposto M = COSTANTE e derivando rispetto al tempo:

$$\frac{d\,M\vec{r}_{cm}}{dt} = \underbrace{\frac{dM}{dt}}_{=0}\vec{r}_{cm} + \frac{M\,d\vec{r}_{cm}}{dt} = M\vec{v}_{cm}$$

Ma sappiamo che

$$\frac{d\,M\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{d\,m_1\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\,m_2\vec{r}_2}{dt} + \dots + \frac{d\,m_n\vec{r}_n}{dt} = \sum \underbrace{\frac{dm_i}{dt}}_{=0}\vec{r}_i + \sum \frac{d\vec{r}_i}{dt}m_i$$

In conclusione:

$$M\vec{v}_{cm} = \sum m_i \vec{v}_i$$

Analogalmente accade per l'accelerazione:

$$M\vec{a}_{cm} = \sum m_i \vec{a}_i$$

Considerando la SECONDA legge di Newton

$$\boxed{\vec{F} = M\vec{a}_{cm} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i}$$

Possiamo affermare con certezza che la sommatoria delle forze interne ad un sistema è nulla grazie alla terza legge di Newton: ad ogni forza interna al sistema è associata una reazione in modulo e direzione uguale alla forza ma in verso opposto. Tali coppie di forze, nulle a due a due, fanno si che la forza agente sul centro di massa di un corpo sia solamente la somma delle forze esterne al sistema.

$$\vec{F}_{CM} = \sum \vec{F}_{INT} + \sum \vec{F}_{EXT} = \sum \vec{F}_{EXT}$$

Il centro di massa di un corpo si comporta come un punto materiale tale che tutta la massa sia concentrata in esso e sia l'unico punto di applicazione di tutte le forze esterne. Quindi il moto di un corpo può essere studiato tramite il moto del relativo centro di massa.

QUANTITÀ DI MOTO

La quantità di moto è definita come il prodotto tra la massa del corpo e la sua velocità (nel caso di un sistema di partenza o di un corpo rigido si considera la velocità del centro di massa).

$$p = m\vec{v}$$

oppure nei sistemi di particelle

$$p = \sum_{i}^{n} m_i \vec{v}_i = M_{TOT}\,\vec{v}_{CM}$$

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO
In assenza di forze esterne la quantità di moto totale di un sistema è costante per cui il corpo prosegue il suo moto rettilineo uniforme o permane in uno stato di quiete. Questo principio è sempre vero nei sistemi isolati.

IMPULSO DI UNA FORZA
L'impulso di una forza é un vettore definito dall'integrale della Forza calcolato nella lasso di tempo in cui la forza è stata applicata su un corpo.

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt$$

TEOREMA DELL'IMPULSO
La variazione della quantità di moto di un sistema è data dall'impulso della forza netta agente sul sistema.
Dimostrazione:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt}\,dt = \Delta\vec{p}$$

Esempio sul moto del centro di massa
§ Un proiettile lanciato ad un angolo θ = 36.90 con velocità iniziale v = 24.5 m/s si frammenta in due pezzi di massa uguale nel punto piu' alto della traiettora. Uno dei frammenti cade giu' in verticale. Dove atterra l'altro?
Risoluzione: Fin quanto il proiettile non raggiunge l'altezza massima il sistema, solidale al centro di massa, viaggia di moto rettilineo uniforme lungo l'asse orizzontale e di moto rettilineo uniformemente accelerato sull'asse verticale. Al momento del distacco delle due componenti la quantità di moto del sistema, relativo all'asse x, si conserva perché ad agire sul sistema sono solo forze interne.
Da ciò si ricava che il centro di massa percorre senza alterazioni la sua traiettoria che possiamo ricavare dal sistema:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\theta\, t \\ y(t) = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$h_{max} \Rightarrow \quad v_0 \sin\theta - gt = 0 \quad \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

Da cui si ricava $G = \frac{v_0 \cos\theta\, 2 v_0 \sin\theta}{g}$

$$G = \frac{2 v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g}$$

Si suppone che il proiettile si divide in 2 porzioni uguali tali che:

$$M_p = m_1 + m_2 = \frac{M_p}{2} + \frac{M_p}{2}$$

La prima parte cade in $x(t) = \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$ mentre il centro di massa cade in

$$x(t) = \frac{2 v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g}$$

Sapendo che

$$\vec{x}_{cm} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2} =$$

$$\frac{1}{m_2}\left(M_p \vec{x}_{cm} - m_1 \vec{x}_1\right) = \vec{x}_2$$

Sostituendo:

$$\vec{x}_2 = \frac{2}{M_p}\left[M_p\left(\frac{2 v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g}\right) - \frac{M_p}{2}\left(\frac{v_0 \cos\theta\, 2 v_0 \sin\theta}{g}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{M_p}\left[M_p \frac{3 v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{2g}\right] = 3\frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

Infine con i dati iniziali si ha $\vec{x}_2 = 88.13\,\hat{i}$ m

Equazione del razzo di Ciolkovskij

Si consideri un razzo in moto avente una massa M che in un intervallo di tempo Δt espelle una quantità di gas Δm ad una velocità Vg. Si calcoli l'espressione della velocità.

Dimostrazione:

Dalla 2° legge di Newton si ha:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

La forza risultante che produce la spinta del razzo è uguale a:

$$M\vec{a} = \frac{dm}{dt}\vec{v_G} + \frac{d\vec{v_G}}{dt}M \qquad \vec{v_G} \equiv \text{COSTANTE}$$

$$M\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}\vec{v_G} \quad \Rightarrow \quad M\,dv = -dm\,\vec{v_G}$$

Si ricorda che $M \neq$ COSTANTE

$$\int_{v_i}^{v_f} -\frac{dv}{v_g} = \int_{M_i}^{M_f} \frac{dm}{M} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{v_g}v(t) = \log\left(\frac{M_f}{M_i}\right)$$

$$v(t) = v_g \log\left(\frac{M_f}{M_i}\right)$$

N.B = $M_i > M_f$

COLLISIONI (anche dette URTI)

Quando avviene una collisione l'interazione tra i due corpi è di origine impulsiva. Queste forze comunque sono forze interne e sono sempre in coppia (quindi azione e reazione). Nel caso in cui sul sistema non agiscono forze esterne impulsive allora si può dire che l'urto conserva la quantità di moto. Questo accade perché le forze sprigionate a causa dell'urto sono interne e si annullano in coppia. Nel caso in cui siano presenti altre forze esterne di origine impulsiva allora la quantità di moto non si conserva. Si nota che si parla di forze esterne impulsive perché tipicamente il lasso di tempo su cui si manifesta l'urto è infinitesimo.

Se la quantità di moto si conserva dopo un urto allora possiamo dire che:

$$M_1V_{1i} + M_2V_{2i} = M_1V_{1f} + M_2V_{2f}$$

Ciò non è comunque sufficiente a determinare le velocità finali dei due corpi. Infatti con le informazioni attuali non si noterebbe una variazione di velocità ma l'esperienza quotidiana ci suggerisce che tale conclusione non è sempre quella giusta.

Collisioni anelastiche

Si dice collisione anelastica di un urto dopo il quale i corpi a contatto sono diventati un unico corpo.

Sapendo che la quantità di moto totale del sistema si conserva e i due corpi diventano un unica entità di massa $M = m_1 + m_2$ si ha:

$$\vec{P_i} = \vec{P_f} \qquad \Rightarrow \qquad m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = M v_f$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$\boxed{v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}}$$

Vediamo perché non viene conservata l'energia cinetica in un urto anelastico.

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2$$

Moltiplicando ambo i membri per le rispettive masse

$$\frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2} \neq \frac{P_f^2}{2m_1 + 2m_2}$$

Collisioni elastiche

Si dice collisione elastica di un urto dopo il quale i corpi a contatto permangono ad essere corpi distinti.

In un urto elastico, oltre alla quantità di moto, si conserva anche l'energia cinetica. Preso atte di queste due considerazioni si ricava agilmente:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

Notiamo cosa succede se la velocità del corpo di massa m2 è nulla e viene colpito da un corpo di m1 >> m2:

- Il corpo m1 prosegue il suo moto con velocità pressoché inalterata;
- Il corpo m2 inizia a muoversi con velocità quasi doppia alla velocità con cui il corpo m1 lo ha urtato.

CONSERVAZIONE ENERGIA

$$\boxed{\Delta K + \Delta U + \Delta E_{INT} = \sum T}$$

LEGENDA
- T := trasferimento energia
- U := energia potenziale
- K := energia cinetica

Consideriamo un sistema in cui agiscono solamente FORZE CONSERVATIVE:

① $\Delta K + \Delta U = 0$

L'equazione su scritta rappresenta il PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA.

Notiamo che ① deriva dal più generale principio di conservazione dell'energia.

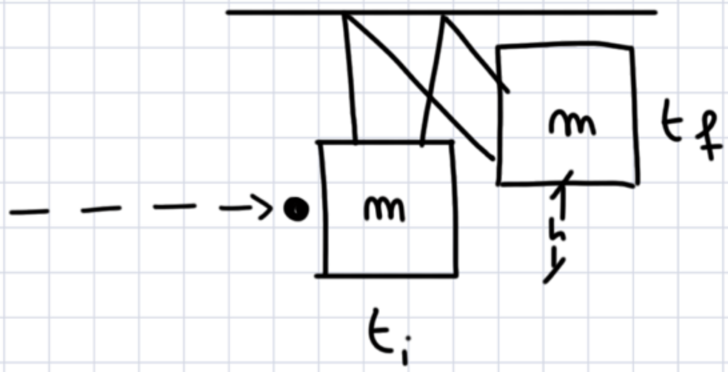
Si nota inoltre che un sistema si dirà ISOLATO se $\Delta K + \Delta U + \Delta E_{INT} = \emptyset$, NON ISOLATO altrimenti.

Alcune conseguenze dovute alla CONSERVAZIONE dell'ENERGIA:

- $\Delta K + \Delta U = 0 \iff$ SISTEMA ISOLATO conserva E. MEC.
- $\sum W_{EST} = 0 \iff \Delta p = 0$ per il th. IMPULSO.
- $\Delta K + \Delta U = 0 \iff \Delta K = -\Delta U$ infatti se un oggetto acquisisce E_K allora perde E_U.
- $\sum W = 0 \iff$ ENERGIA MECCANICA CONSERVATA

ESEMPI DI RISOLUZIONE DI ESERCIZI UTILI

PENDOLO BALISTICO



Un proiettile viene sparato con una velocità iniziale V_i e si conficca su un corpo di massa m. Il corpo è fissato inestensibilmente al soffitto. L'urto, supposto perfettamente anelastico, ha una durata T_U.

① V_i del proiettile conoscendo h.

Si consideri il sistema proiettile - blocco.

URTO ANELASTICO => $\Delta p = 0$

$$m_p v_i + m v_m = (m_p + m) v_f$$

$$\rightarrow v_i = \frac{m_p + m}{m_p} v_f$$

Si ricava v_f. Sappiamo che una volta concluso l'urto il sistema massa-proiettile conserva l'energia meccanica perché l'urto è INTERNO al sistema.

$$\Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) = - mg (h_f - h_i)$$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = - mgh \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh}$$

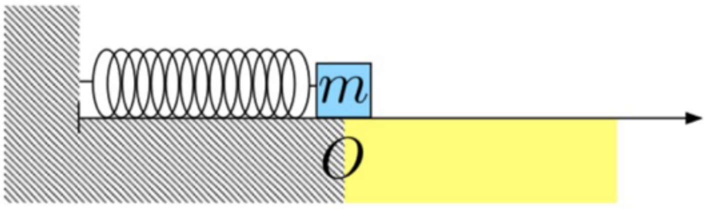
Ne segue $v_i = \dfrac{m_p + m}{m_p} \sqrt{2gh}$

Un corpo di massa $m = 0.5\,\text{Kg}$ è agganciato ad un supporto fisso tramite una molla di costante elastica $k = 2\,\text{N/m}$; il corpo è in quiete nel punto O di un piano orizzontale, che è liscio a destra di O e scabro a sinistra di O. Viene impressa al corpo una velocità $v_0 = 0.16\,\text{m/s}$ verso destra. Calcolare:

1. di quanto è allungata la molla nell'istante in cui il corpo si ferma.

Il corpo ripassa per O con velocità $-v_0$ e si ferma dopo aver percorso una distanza di $5\,\text{cm}$ alla sinistra di O. Calcolare

2. il valore del coefficiente di attrito dinamico μ.



per $x > 0$ si ha un SISTEMA ISOLATO.

Conseguenza $\Rightarrow$ ENERGIA MECCANICA CONSERVATA

$$\Delta K + \Delta U = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = \frac{1}{2}K\left(x_f^2 - x_i^2\right)$$

$$x_f = \sqrt{\frac{m}{K}\left(v_f^2 - v_i^2\right)} = \sqrt{\frac{0.5}{2}\left(0.16^2\right)} = 0.08\ m = 8\ cm$$

Lo stesso problema si può risolvere con le equazioni della DINAMICA:

$$F_s = -K(L - x)$$

$\hookrightarrow$ POSIZIONE DI EQUILIBRIO

$$m\vec{a} + Kx = 0$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -\frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{m}}$$

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \phi\right)$$

Dati al contorno : $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0.16\ \frac{m}{s} \end{cases}$

$$\dot{x}(t) = -A\sqrt{\frac{K}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \phi\right)$$

$$x(0) = A\cos(\phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{2} + z\pi, \quad A = 0$$

$$\dot{x}(0) = A\sqrt{\frac{K}{m}}\sin(\phi) = 0.16\ \frac{m}{s} \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{2} + z\pi, \quad A = 0.16\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$x(t) = (0.16)\sqrt{\frac{m}{K}}\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \frac{\pi}{2}\right) = (0.16)\sqrt{\frac{m}{K}}\sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)$$

$$x_{max}(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad (0.16)\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right) = 0$$

$$\sqrt{\frac{K}{m}}t = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{K}}\right) = (0.16)\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\sin\frac{\pi}{2} = 0.08\ m = 8\ cm$$

PARTE 2

$\vec{F}$ ... d^2x

$$F = -Kx + m\mu_D g \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = + \mu_D m g$$

Soluzione OMOGENEA

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x \quad \Rightarrow \quad x(t) = A\cos\left(\sqrt{\tfrac{K}{m}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\tfrac{K}{m}}\,t\right)$$

Soluzione PARTICOLARE

$$x(t) = A \quad \Rightarrow \quad KA = \mu_D m g \quad \Rightarrow \quad A = \mu_D m g \cdot \frac{1}{K}$$

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\tfrac{K}{m}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\tfrac{K}{m}}\,t\right) + \mu_D m g \cdot \frac{1}{K}$$

Dati al contorno

$$x(0) = 0$$
$$\dot{x}(0) = -v_0$$

$$x(0) = A + \mu_D m g \frac{1}{K} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\mu_D \frac{mg}{K}$$
$$\dot{x}(0) = B\sqrt{\tfrac{K}{m}} = -v_0 \quad \Rightarrow \quad B = -v_0\sqrt{\tfrac{m}{K}}$$

$$x(t) = -\mu_D\frac{mg}{K}\cos\left(\sqrt{\tfrac{K}{m}}\,t\right) - v_0\sqrt{\tfrac{m}{K}}\sin\left(\sqrt{\tfrac{K}{m}}\,t\right) + \mu_D\frac{mg}{K}$$

$$x(t) = \mu_D\frac{mg}{K}\left(1 - \cos\left(\sqrt{\tfrac{K}{m}}\,t\right)\right) - v_0\sqrt{\tfrac{m}{K}}\sin\left(\sqrt{\tfrac{K}{m}}\,t\right)$$

quando $\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow x(t) = 5$ cm

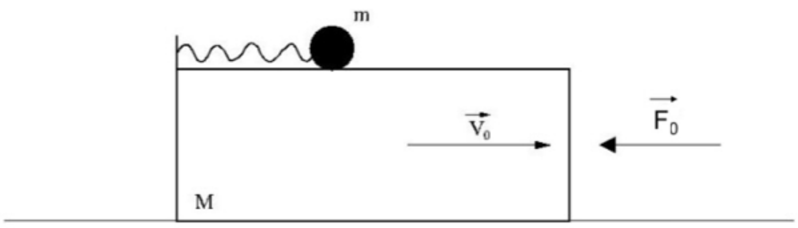
$$\dot{x}(t) = \mu_D\frac{mg}{K}\sqrt{\tfrac{K}{m}}\sin\left(\sqrt{\tfrac{K}{m}}\,t\right) - v_0\cos\left(\sqrt{\tfrac{K}{m}}\,t\right) = 0$$

$$\mu_D\frac{mg}{K}\sqrt{\tfrac{K}{m}}\tan\left(\sqrt{\tfrac{K}{m}}\,t\right) = v_0$$

$$\tan\left(\sqrt{\tfrac{K}{m}}\,t\right) = v_0\frac{K}{\mu_D m g}\sqrt{\tfrac{m}{K}}$$

$$t = \frac{m}{K}\arctan\left(v_0\frac{K}{\mu_D m g}\sqrt{\tfrac{m}{K}}\right) = \phi$$

Esplicitando μ_D da $x(\phi)$ si ha la soluzione.



Un blocco di massa M è appoggiato su un piano orizzontale, dove può muoversi senza attrito. Una pallina di massa m, assimilabile ad un punto materiale, è collegata ad un estremo del blocco tramite una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0, come in figura. La pallina può muoversi senza attrito sul blocco. All'inizio il sistema trasla con velocità costante v_0. Da un certo istante (t=0) una forza opportuna F_0, non necessariamente costante, fa frenare il blocco fino a farlo fermare, con decelerazione a_0 costante. Sapendo che nell'istante $t = \tau$ in cui il sistema si ferma, la pallina ha velocità relativa nulla rispetto al blocco, che nello stesso istante la molla ha lunghezza $2l_0$, e che da quel momento (per $t > \tau$) il blocco rimane fermo, calcolare:

1. La velocità v_0, il tempo di frenata τ e il modulo dell'accelerazione a_0 del blocco, dovuta alla forza $\vec{F}_0$

$$v_0 = \dots\dots\dots\dots \qquad \tau = \dots\dots\dots\dots \qquad a_0 = \dots\dots\dots\dots$$

2. Il lavoro compiuto dalla forza frenante, $L_{frenante}$

$$L_{frenante} = \dots\dots\dots\dots$$

3. La lunghezza minima della molla dopo che il blocco si è fermato per $t > \tau$

$$l_{min} = \dots\dots\dots\dots$$

Dati: $M = 0.4\ Kg$, $m = 0.1\ Kg$, $k = 2\ N/m$, $l_0 = 40\ cm$

Fino a t = 0 il sistema è INERZIALE rispetto il sistema Terra perché si muove di moto rettilineo uniforme e non agiscono forze dissipative su di esso. Per t > 0 si ha un sistema NON INERZIALE dato che sul blocco agisce una forza che lo rallenta sino a fermarsi (t = τ).
Possiamo implicitamente dedurre che la velocità della pallina attaccata alla molla ha velocità iniziale nulla perché su di essa non sono agenti forze lunga la direzione di moto (asse x) e lungo l'asse y la forza peso è bilanciata dalla reazione vincolare del blocco.
Si scrive l'equazione del moto della pallina vincolata alla molla (si noti che è presenta una forza apparante uguale ma diretta in verso opposto alla forza frenante perché il sistema e non inerziale).

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-\ell) + F_{app}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + (k\ell + ma_0)$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{1}{m}(k\ell + ma_0)$$

Soluzione OMOGENEA

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Soluzione particolare

$$x(t) = C$$

$$+\frac{k}{m}C = \frac{k\ell}{m} + a_0 \quad \Rightarrow \quad C = \ell_0 + a_0\frac{m}{k}$$

Soluzione GENERALE

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \ell_0 + a_0\frac{m}{k}$$

Dati al CONTORNO :

$$x(0) = \ell_0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$x(0) = A + \ell_0 + a_0\frac{m}{k} = \ell_0 \quad \Rightarrow \quad A = -a_0\frac{m}{k}$$

$$\dot{x}(0) = B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$x(t) = -a_0\frac{m}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \ell_0 + a_0\frac{m}{k}$$

Possiamo fare alcune considerazioni:

- All’istante t = τ la lunghezza della molla è pari a 2 volte la lunghezza della molla in equilibrio ed inoltre in quell’istante l’accelerazione totale del sistema è uguale unicamente all’accelerazione di ritorno che la molla imprime sulla pallina.
- All’istante t = τ la velocità della pallina é 0.

$$\dot{x}(\tau) = 0 \Rightarrow +\underbrace{a_0 \frac{m}{K}\sqrt{\frac{K}{m}}}_{\neq 0} \sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right) = 0$$

$$\sqrt{\frac{K}{m}}t = \pi$$

$$t = \tau = \pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Si trova $a_0 \Rightarrow$

$$2l_0 = -a_0\frac{m}{K}\cos(\pi) + l_0 + a_0\frac{m}{K}$$

$$2l_0 - l_0 = a_0\left(\frac{m}{K} + \frac{m}{k}\right) \Rightarrow a_0 = \frac{1}{2}l_0\frac{K}{m}$$

Si ricava inoltre $v_0 = a_0\tau$

RISPOSTE : $v_0 = a_0\tau = 2.8 \frac{m}{s}$

$$a_0 = \frac{1}{2}l_0\frac{K}{m} = 4 \frac{m}{s^2}$$

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 0.7 \text{ s}$$

Il secondo quesito dell'esercizio chiede il lavoro compiuto dalla forza frenante sul blocco. Si può agevolmente calcolare grazie al teorema delle forze vive e si trova che:

$$L_F = \int \vec{F}_F dx + \int_{\ell}^{2\ell} -k(x-\ell) = \frac{1}{2}M(\underbrace{v_f^2}_{=0} - v_i^2) + \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

$$L_F = -\frac{1}{2}\overline{M}v_0^2 + \frac{1}{2}k(x-\ell)^2\Big|_{\ell}^{2\ell} = -18 \text{ J}$$

Si noti $\overline{M} = M + m$