Soluzioni prova scritta

Ingegneria Informatica 08/01/2026

Esercizio 1

Il primo quesito consiste in 2 **domande a risposta aperta** da 1 punto ciascuna. Per i quesiti 2, 3 e 4 ci si deve esprimere sulla **correttezza o falsità di 6 affermazioni**. Si ottengono 0, 1 e 2 punti in base al numero di risposte corrette, errori o risposte in bianco, secondo lo schema:

$$\begin{array}{r} 6 \text{ corrette} \rightarrow 2 \text{ punti} \\ 5 \text{ corrette} + 1 \text{ errore} \rightarrow 1 \text{ punto} \\ 5 \text{ corrette} + 1 \text{ bianca} \rightarrow 1 \text{ punto} \\ 4 \text{ corrette} + 2 \text{ bianche} \rightarrow 1 \text{ punto} \\ \text{Tutti gli altri casi} \rightarrow 0 \text{ punti} \end{array}$$

1. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Siano $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}, x \in \mathbb{C}^2, y \in \mathbb{C}^2$ definiti come:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1+1\mathbf{i} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Il valore di $x^T A y$ è $\boxed{5 - 2\mathbf{i}}$

Il valore di $x^H A^H y$ è $\boxed{-3 + \mathbf{i}}$

2. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si consideri la rappresentazione floating point a doppia precisione.

V F La rappresentazione di un valore numerico richiede in tutto 64 bit.

V F La rappresentazione dell'esponente richiede 11 bit.

V **F** La rappresentazione della mantissa richiede 53 bit.

V **F** Il valore 0.1 viene rappresentato esattamente.

V F I numeri sottonormalizzati sono equispaziati tra di loro.

V **F** Il valore $5 \cdot 10^{300}$ viene rappresentato come INF (overflow).

- N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire **chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi 2, 3 e 4**.

3. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si consideri una funzione della forma

$$\psi(x) = c_0\varphi_0(x) + \cdots + c_m\varphi_m(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j\varphi_j(x),$$

che approssima $f(x)$ nel senso dei minimi quadrati sui punti $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_k, f(x_k))$, dove $x_i \neq x_j$ per ogni $i \neq j$, le funzioni modello sono i monomi $\varphi_j(x) = x^j$ e $k \geq m$.

- V **F** I coefficienti c_j sono uno dei punti di minimo di $\min_{c_0,\ldots,c_m} \sum_{i=0}^{k} |f(x_i) - \psi(x_i)|$.
- **V** F La scelta dei c_j è unica.
- **V** F Se $k = m$ la funzione $\psi(x)$ coincide con il polinomio interpolante di Lagrange.
- V **F** Se si aggiungono altri k punti (quindi $2k$ in totale) e si ricalcola $\psi(x)$, la quantità $|f(x_0) - \psi(x_0)|$ diminuisce.
- **V** F Determinare i coefficienti c_j con il metodo delle equazioni normali richiede di risolvere un sistema lineare $m \times m$.
- V **F** Determinare i coefficienti c_j con il metodo QR richiede di risolvere un sistema lineare $k \times k$.

4. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si consideri il problema di approssimare $\int_a^b f(x)dx$ con una formula Newton-Cotes generalizzata $J_{n,L}^{(G)}(f)$, dove $n+1$ indica il numero di nodi della formula di Newton-Cotes di base ($n = 1$ trapezi, $n = 2$ Simpson) e L il numero di sottointervalli in cui si suddivide $[a, b]$.

- **V** F I nodi della formula $J_{n,L}^{(G)}$ sono equispaziati su $[a, b]$.
- V **F** Il numero totale dei nodi di $J_{n,L}^{(G)}$ è nL.
- **V** F Per $f(x) = 2x^3 + x - 1$ risulta $\int_a^b f(x)dx = J_{2,L}^{(G)}(f)$ per ogni $L \geq 1$.
- V **F** Per $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ risulta $\int_a^b f(x)dx = J_{1,L}^{(G)}(f)$ per ogni $L \geq 1$.
- V **F** Sia $h = \frac{b-a}{L}$, per funzioni sufficientemente regolari l'errore decresce all'aumentare di h.
- **V** F Sia $h = \frac{b-a}{L}$, per funzioni sufficientemente regolari l'errore è proporzionale ad una potenza di h.

Esercizio 2

Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice **tridiagonale**, ovvero che ha elementi diversi da 0 solo sulla diagonale principale, sulla prima sottodiagonale e sulla prima sopradiagonale. Dato un vettore $x \in \mathbb{C}^n$, si consideri il prodotto Ax dato da

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ & & & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \vdots \\ a_{n-1n-2}x_{n-2} + a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n \\ a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

In particolare, si può calcolare Ax impiegando solamente $2n-2$ addizioni e $3n-2$ moltiplicazioni.

2^{3-f} Punti dove f è il numero di cicli for/while utilizzati (8 punti con 0 for, 4 punti con un for, ecc.)

Si implementi, una funzione Matlab `tridiag_matvec` che prende in ingresso

- una matrice quadrata tridiagonale $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$,
- un vettore $x \in \mathbb{C}^n$,

e restituisce

- un vettore $y \in \mathbb{C}^n$ contenente il prodotto matrice per vettore $A \cdot x$,

eseguendo solamente $2n - 2$ addizioni e $3n - 2$ moltiplicazioni.

Soluzione senza cicli for:

```
function y = tridiag_matvec(A, x)
    d0 = diag(A);
    d1 = diag(A, 1);
    dm1 = diag(A, -1);
    y = d0 .* x;
    y1 = d1 .* x(2:end);
    ym1 = dm1 .* x(1:end-1);
```

```
    y(1:end-1) = y(1:end-1) +  y1;
    y(2:end) = y(2:end) + ym1;
end
```

Esercizio 3

Si consideri il sistema lineare $Ax = b$, con matrice dei coefficienti

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

e si consideri il metodo iterativo

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(b - Ax^{(k)}),$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) $\boxed{\text{6 Punti}}$ Si determini per quali valori di α il metodo iterativo risulta convergente.

(ii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si determini per quale valore di α, il metodo risulta avere velocità di convergenza massima.

(i) Con un calcolo diretto si trova che gli autovalori di A sono $2 - \sqrt{2} < 2 < 2 + \sqrt{2}$. Per cui quelli della matrice di iterazione $I - \alpha A$ sono $1 - 2\alpha$ e $1 - \alpha(2 \pm \sqrt{2})$. Il metodo risulta convergente per $0 < \alpha < \frac{2}{2+\sqrt{2}}$.

(ii) La velocità di convergenza è massima quando il raggio spettrale della matrice $I - \alpha A$ risulta minimo. Questo succede per $\alpha = \frac{2}{\lambda_{\min}(A)+\lambda_{\max}(A)} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4

Si consideri la funzione

$$f(x) = \log(x) + 2x - 1.$$

(i) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ammette un'unica soluzione $\theta \in \mathbb{R}$.

(ii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si determini se il metodo di Newton converge localmente a θ e, in caso positivo, con quale ordine.

(iii) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Sia $g(x) = f(\frac{1}{x})$. Si dimostri che l'equazione $g(x) = 0$ ha come soluzione $\frac{1}{\theta}$ e si dimostri che il metodo di Newton risulta convergente a $\frac{1}{\theta}$ per ogni $x_0 \in (0, \frac{1}{\theta}]$.

(i) Data la presenza del logaritmo, ha senso considerare l'equazione solo per $x \in \mathbb{R}^+$. Dato che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ed $f(x)$ strettamente crescente su tutto il dominio, esiste ed è unico il valore $\theta \in \mathbb{R}^+$ tale che $f(\theta) = 0$.

(ii) Dato che $f'(\theta) = \frac{1}{\theta} + 2 > 0$ e $f''(\theta) = -\frac{2}{\theta^2} < 0$ il metodo di Newton converge localmente con ordine quadratico.

(iii) Per definizione $g(\frac{1}{\theta}) = f(\theta) = 0$. Dato che $\frac{1}{\theta}$ è radice semplice e $g(x)$ è convessa decrescente su tutto $\mathbb{R}^+$ si ha che Newton converge per ogni x_0 tale che $g(x_0) \geq 0$. Studiando il segno di $g(x)$ per $x \in (0, \frac{1}{\theta})$ si ottiene la tesi.