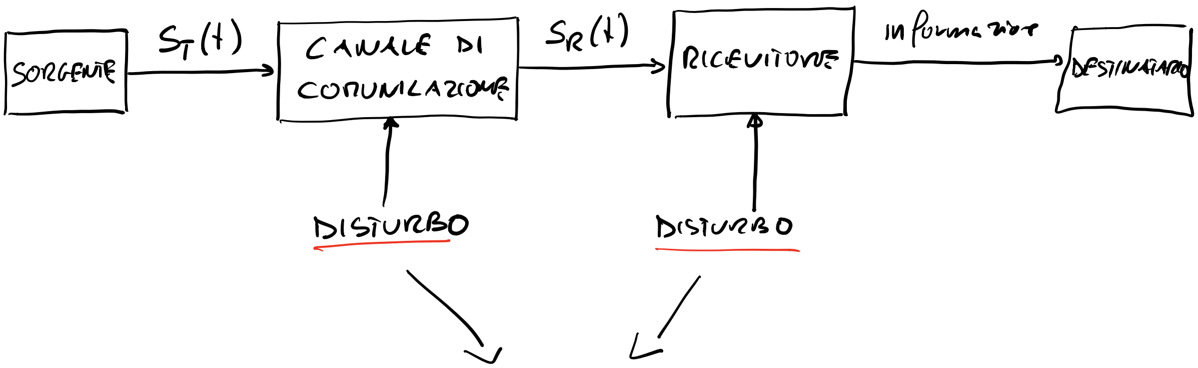
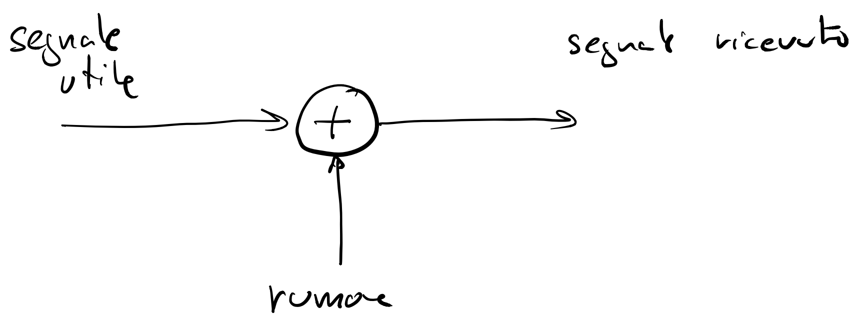
- SISTEMA DI TELECOMUNICAZIONE (TLC)



RUMORE

$\Downarrow$

segnale aleatorio additivo



$\Rightarrow$ caratterizzazione del rumore

$\Downarrow$

statistiche

$\Rightarrow$ Teoria della probabilità

$\Rightarrow$ Variabili aleatorie

$\Rightarrow$ processi aleatori (rumore)

TEORIA DELLA PROBABILITÀ

-) CONCETTO: ESPERIMENTO CASUALE (O ALEATORIO)

|| Un esperimento si dice "casuale" se il risultato non è predicibile deterministicamente

Es lancio di un dado a sei facce

non posso predire che numero uscirà

$\downarrow$

ESP. CASUALE

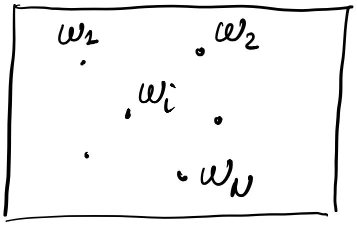
osservo delle regolarità statistiche

||

es. se lancio il dado N volte (con N molto grande), la faccia "1" uscirà $\sim \frac{N}{6}$ volte

-) DESCRIZIONE FORMALE DI UN ESPERIMENTO CASUALE

SPAZIO CAMPIONE



$$\Omega = \{ \underbrace{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N} \}$$

|| tutti i possibili risultati di un esperimento casuale

es. "lancio di un dado a sei facce"

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_6 \}$$

ω_i = "esce la faccia "6" "

⇒ **EVENTO** : è un sottoinsieme dello spazio campione che soddisfa le seguenti condizioni:

•) se A è un evento, anche il suo complemento $\bar{A}$, rispetto all'insieme Ω, è un evento

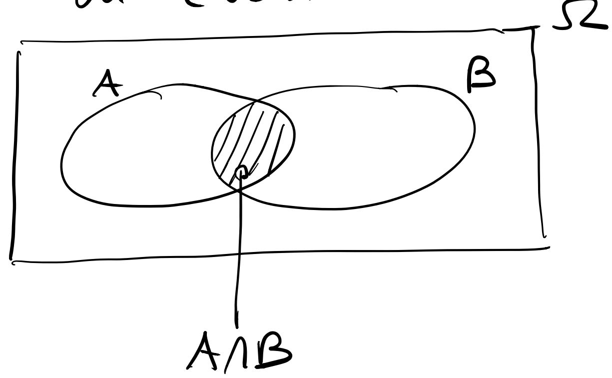
A è un evento ⇒ $\bar{A}$ è un evento

$$\bar{A} : \quad A \cup \bar{A} = \Omega$$

•) se A e B sono eventi, anche la loro unione $A \cup B$ è un evento

⇒ Proprietà degli eventi

1) $A \cap B$ è un evento



Dimostrazione

$\bar{A}$ è un evento

$\bar{B}$ è un evento

$\bar{A} \cup \bar{B}$ è un evento

$\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$ è un evento

$\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = A \cap B$

2) $A \cup \bar{A} = \Omega$ è un evento
EVENTO CERTO

3) $A \cap \bar{A} = \emptyset$ è un evento
EVENTO IMPOSSIBILE

.) CARATTERIZZAZIONE DI UN ESPERIMENTO CASUALE

$\Rightarrow$ elementi necessari alla completa descrizione (caratterizzazione) di un esperimento casuale

1) la descrizione di uno spazio campione Ω

2) la definizione e proprietà degli eventi

3) legge di probabilità: associa ad ogni evento definito una misura della probabilità che esso si presenti

DEFINIZIONE ASSIOMATICA DELLA PROBABILITÀ
(KOLMOGOROV)

1) La probabilità di un evento A è non-negativa

$$P\{A\} \geq 0$$

2) La probabilità dell'evento certo è unitaria

$$P\{\Omega\} = 1$$

3) Dati due eventi, A e B, mutuamente esclusivi (che non si possono verificare contemporaneamente - $A \cap B = 0$), la probabilità dell'evento unione è pari alla somma delle probabilità dei singoli eventi

$$\text{se } A \cap B = 0$$

$$\Downarrow$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

·) PROPRIETÀ

1) $P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A})$

$$P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(A \cup \bar{A}) = 1$$

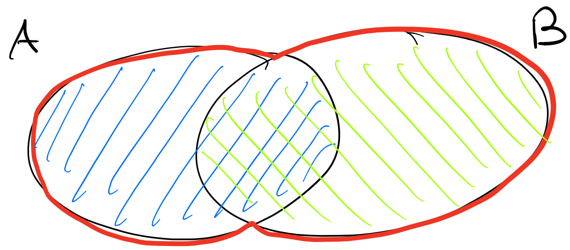
$$A \cap \bar{A} = 0 \Rightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A})$$

2) $P\{\phi\} = 0$ $\qquad \phi$ = evento impossibile

3) $0 \leq P(A) \leq 1$

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



·) NOTAZIONE SEMPLIFICATA

$$A \cup B \Rightarrow A + B$$

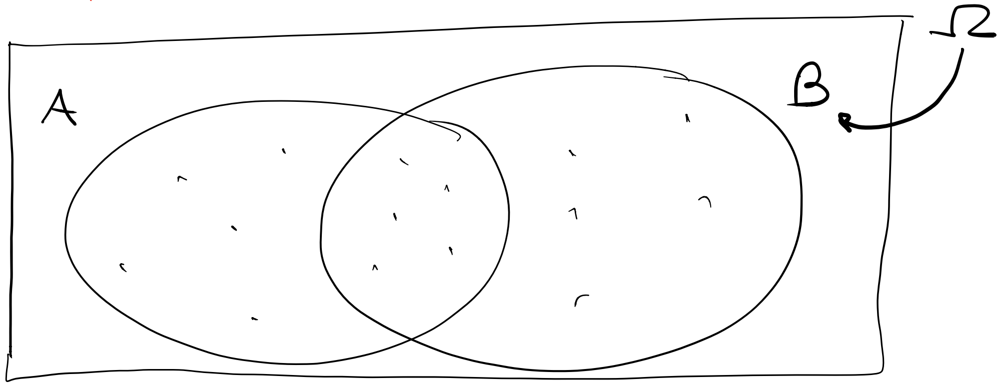
$$A \cap B \Rightarrow AB$$

$P(AB) = P(A \wedge B)$ probabilità congiunta

$P(A), P(B)$ probabilità marginali

·) PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$$\boxed{P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)}}$$



$P(A) \Rightarrow (\cdot)$

$P(A|B)$

nel momento che osservo "B" lo spazio campione si riduce a "B"

$B = \Omega'$ nuovo spazio campione

$P(A)$ probabilità "a priori"

$P(A|B)$ probabilità "a posteriori" – dopo aver osservato qualcosa

) DEFINIZIONE "CLASSICA" DI PROBABILITÀ (PASCAL)

$$\boxed{P(A) \triangleq \frac{N_F(A)}{N_P}}$$

$N_F(A)$ = nr. di casi favorevoli ad A (risultati $\in A$)

N_P = nr. di casi possibili

Es. dado a sei facce

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Contro-esempio:

$\Rightarrow$ dado truccato

$\Rightarrow$ $P(A) = \frac{N_F(A)}{N_P}$ $\Rightarrow$ non è utilizzabile perché non contempla il caso in cui un numero possa uscire più volte degli altri

prob. a priori

$$\boxed{P(\omega_i) = p \quad \forall i}$$

tutti i risultati devono essere equiprobabili

·) DEFINIZIONE "FREQUENTISTA" DI PROBABILITA'

(VON MISES)

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$

N_A = nr. di volte che esce un risultato favorevole ad A

N = nr. di esperimenti fatti

⇒ Soddisfacimento degli assiomi per la prob. freq.

1) $P(A) \geq 0$

$$N_A \geq 0, \quad N > 0 \quad \Rightarrow P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N} \geq 0$$

2) $P(\Omega) = 1$

$$N_A = N \quad \Rightarrow \quad P(\Omega) = \lim_{N \to \infty} \frac{N}{N} = 1$$

3) $P(A \cup B)$ $\Rightarrow$ $P(A \cup B) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_{A \cup B}}{N}$

$A \cap B = 0$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{N_A + N_B}{N}$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N} + \lim_{N \to \infty} \frac{N_B}{N}$$

$$= P(A) + P(B)$$

$\Rightarrow$ Soddisfacimento degli assiomi per la prob. classica

1) $P(A) \geq 0 \Rightarrow P(A) = \frac{N_F(A)}{N_P} \geq 0$

$$N_F(A) \geq 0$$
$$N_P > 0$$

2) $P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(\Omega) = \frac{N_P}{N_P} = 1$

$$N_F(\Omega) = N_P$$

3) $P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{N_F(A \cup B)}{N_P} = \frac{N_F(A) + N_F(B)}{N_P}$

$A \cap B = 0$

$$= \frac{N_F(A)}{N_P} + \frac{N_F(B)}{N_P} = P(A) + P(B)$$

·) INDIPENDENZA TRA EVENTI

Due eventi, A e B, si dicono indipendenti se

$$\boxed{P(A|B) = P(A)}$$

$\Rightarrow$ Se A e B sono indipendenti

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(AB) = P(A)\,P(B)}$$

·) TEOREMA DI BAYES

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}}$$

$P(A),\ P(B) \neq 0$

Dimostrazione

$$P(AB) = P(BA) \quad \Leftarrow \quad A \cap B = B \cap A$$

$$P(AB) = P(A|B)\,P(B) \quad \Leftarrow \quad P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$\shortparallel \qquad\qquad \shortparallel$$

$$P(BA) = P(B|A)\,P(A)$$

$$P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$$

$$\Downarrow \ P(B) \neq 0$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

·) PARTIZIONE DI UNO SPAZIO CAMPIONE

Una partizione di uno spazio campione è tale che, scegliendo N eventi B_i, $i = 1, \dots, N$ con le seguente proprietà

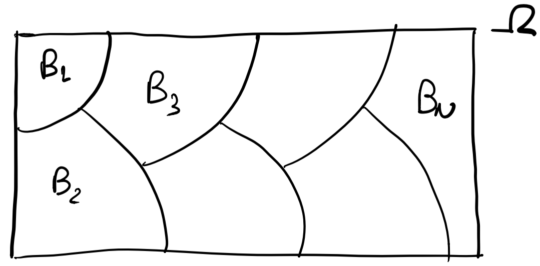
1) $B_i \cap B_k = 0 \quad \forall\, i, k \quad i \neq k$

tutti mutuamente esclusivi

2) $\bigcup_{i=1}^{N} B_i = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_N = \Omega$

$\Rightarrow$ L'insieme dei B_i, $i=1,\dots,N$ è una partizione di Ω

.) esempio:



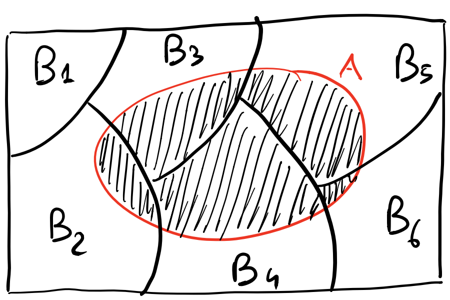
.) TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE

Se B_i, $i=1,\dots,N$ è una partizione di Ω allora, se A è un evento

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(A \mid B_i)\, P(B_i)}$$

.) DIMOSTRAZIONE

$$P(A) = P(A\Omega) = P\left(A \sum_{i=1}^{N} B_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{N} A B_i\right) = *$$



$\bigcup_{i=1}^{N} B_i = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_N$

$= B_1 + B_2 + \dots + B_N = \sum_{i=1}^{N} B_i$

$$AB_i \cap AB_k \quad i \neq k \quad \forall i, k$$

$$* = \sum_{i=1}^{N} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{N} P(A|B_i)\,P(B_i)$$

$$P(AB_i) = P(A|B_i)\,P(B_i)$$

$$\Uparrow$$

$$P(A|B_i) = \frac{P(AB_i)}{P(B_i)}$$

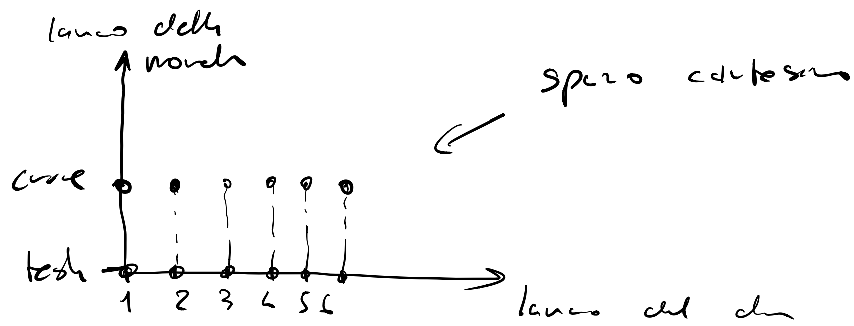
·) ESPERIMENTO ALEATORIO COMPOSTO

⇒ Si parla di esperimento aleatorio composto quando si considerano contemporaneamente due o più esperimenti casuali.

Esempio: lancio di un dado e di una moneta

⇒ Lo spazio campione di un esp. al. composto è il prodotto cartesiano tra gli spazi campione dei singoli esp.

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_N$$



risultato = coppia "ordinata" dei risultati dei singoli esperimenti

es: "$\underbrace{\text{faccia del dado "1"}}$ e $\underbrace{\text{testa}}$"

evento: è costituito dal prodotto cartesiano dei singoli eventi

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N$$

⇒ Se i singoli esp. aleatori sono indipendenti dagli altri, allora

$$P(A) = P(A_1)\, P(A_2) \dots P(A_N)$$

$P(A_i)$ $i = 1, \dots, N$ sono le probabilità dei singoli eventi

⇒ N.B. In generale non è possibile risalire alla legge di probabilità dell'evento composto "A" a partire dalle leggi di probabilità dei singoli eventi

⇓

vale solo se gli eventi sono indipendenti