Soluzioni prova scritta

Ingegneria Informatica 30/06/2025

Esercizio 1

Il primo quesito consiste in 2 **domande a risposta aperta** da 1 punto ciascuna. Per i quesiti 2, 3 e 4 ci si deve esprimere sulla **correttezza o falsità di 6 affermazioni**. Si ottengono 0, 1 e 2 punti in base al numero di risposte corrette, errori o risposte in bianco, secondo lo schema:

$$\boxed{\begin{array}{r} 6 \text{ corrette} \to 2 \text{ punti} \\ 5 \text{ corrette} + 1 \text{ errore} \to 1 \text{ punto} \\ 5 \text{ corrette} + 1 \text{ bianca} \to 1 \text{ punto} \\ 4 \text{ corrette} + 2 \text{ bianche} \to 1 \text{ punto} \\ \text{Tutti gli altri casi} \to 0 \text{ punti} \end{array}}$$

1. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5+\mathbf{i} & -2 \\ -2 & -1-\mathbf{i} & 2-\mathbf{i} \\ 2+2\mathbf{i} & -3 & -\mathbf{i} \end{bmatrix}$$

e si indichino con $\mathcal{F}_j(A^H)$ i cerchi di Gershgorin della **matrice trasposta coniugata**.

Il centro di $\mathcal{F}_2(A^H)$ è $\boxed{-1+\mathbf{i}}$

Il raggio di $\mathcal{F}_3(A^H)$ è $\boxed{2+\sqrt{5}}$

2. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Siano $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tali che $B = S^{-1}AS$ per una qualche matrice invertibile S.

- **[V]** [F] A e B hanno lo stesso determinante.
- **[V]** [F] A e B hanno lo stesso raggio spettrale.
- **[V]** [F] A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.
- [V] **[F]** A e B hanno la stessa norma 2.
- [V] **[F]** Se A è a predominanza diagonale forte allora anche B è a predominanza diagonale forte.
- [V] **[F]** Se A è irriducibile allora anche B è irriducibile.

- N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire **chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi 2, 3 e 4**.

3. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si consideri il problema di approssimazione di $f(x)$ nel senso dei minimi quadrati sui punti $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_k, f(x_k))$ con una funzione della forma

$$\psi(x) = c_0\varphi_0(x) + \cdots + c_m\varphi_m(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j\varphi_j(x),$$

dove $\varphi_j(x)$ sono funzioni modello date e $k > m$.

V F Esiste sempre almeno una soluzione ottima nel senso dei minimi quadrati.

V **F** Quando esiste, la soluzione ottima è unica.

V **F** Se $\psi(x)$ è soluzione ottima allora $\psi(x_j) = f(x_j)$ per almeno un punto x_j.

V **F** Se $\psi(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j\varphi_j(x)$ è soluzione ottima allora $c_j \neq 0$ per $j = 0, \dots, m$.

V **F** Se $\psi(x)$ è soluzione ottima allora $\psi(x)$ è un polinomio in x.

V F Se $\psi(x_j) = f(x_j)$ per $j = 0, \dots, k$ allora $\psi(x)$ è soluzione ottima.

4. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $\widetilde{x} = \mathrm{RN}(x), \widetilde{y} = \mathrm{RN}(y)$ i corrispondenti numeri floating point in precisione doppia, ottenuti con il metodo di arrotondamento round-to-nearest. Inoltre si assume che gli arrotondamenti di x, y non abbiano generato overflow ed underflow. Da queste informazioni possiamo dedurre che:

V **F** Tenere in memoria le due rappresentazioni di $\widetilde{x}$ ed $\widetilde{y}$ occupa 8 bytes.

V F $x \cdot \widetilde{x} \cdot y \cdot \widetilde{y} \geq 0$.

V **F** $(x - \widetilde{x})(y - \widetilde{y}) \geq 0$.

V **F** $\mathrm{RN}(x + y) = \mathrm{RN}(x) + \mathrm{RN}(y)$.

V F $\mathrm{RN}(\widetilde{x} + \widetilde{y}) = \mathrm{RN}(\mathrm{RN}(\widetilde{x}) + \mathrm{RN}(\widetilde{y}))$.

V F $\mathrm{RN}(x + y) = \mathrm{RN}(y + x)$.

Esercizio 2

Nel k-esimo passo dell'algoritmo di eliminazione di Gauss senza pivoting (nell'immagine $k=3$):

$$\left(A^{(k)} \mid b^{(k)}\right) = \left(\begin{matrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & A_{33}^{(k)} & * & * & * \\ 0 & 0 & A_{43}^{(k)} & * & * & * \\ 0 & 0 & A_{53}^{(k)} & * & * & * \\ 0 & 0 & A_{63}^{(k)} & * & * & * \end{matrix}\right) \left| \begin{matrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ b_4^{(3)} \\ b_5^{(3)} \\ b_6^{(3)} \end{matrix} \right.$$

l'algoritmo modifica la matrice aumentata $A^{(k)}|b^{(k)}$ sommando alle sue righe da $k+1$ ad n multipli della riga k in modo che gli elementi in posizione $(k+1,k),(k+2,k),\dots,(n,k)$ diventino zero. In particolare, alla riga i, con $i>k$, viene sommata la riga k moltiplicata per $-A_{ik}^{(k)}/A_{kk}^{(k)}$.

Dopo $n-1$ iterazioni il metodo di Gauss ha ridotto il sistema nella forma triangolare superiore $Ux=c$ (ovvero $A^{(n-1)}=U$ e $b^{(n-1)}=c$).

8 Punti se si usano al più 2 for/while, 6 punti se si usano più di 2 cicli for/while

Si implementi, una funzione Matlab `my_gauss` che prende in ingresso

- una matrice quadrata $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,
- un vettore $b \in \mathbb{C}^n$,

e restituisce

- la matrice triangolare superiore U,
- il vettore c,

ottenuti dopo $n-1$ iterazioni del metodo di Gauss senza pivoting sul sistema lineare $Ax=b$.

Soluzione con 2 cicli for:

```
function [U, c] = my_gauss(A, b)
n = size(A, 1);
M = [A, b];
for j = 1:n-1
        for i = j+1:n
            Lij = M(i, j) / M(j, j);
            M(i, j:n) = M(i, j:n) - Lij * M(j, j:n+1);
        end
        M(j+1:n, j) = zeros(n-j, 1);
end
U = M(1:n, 1:n);
c = M(:, n+1);
end
```

Esercizio 3

Si consideri l'equazione non lineare

$$e^{-x} - \sin(x) = 0.$$

(i) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si determini il numero di soluzioni reali dell'equazione e si dimostri l'esistenza di un'unica soluzione α nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(ii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Si proponga un metodo di punto fisso, ovvero una successione della forma $x_{k+1} = \phi(x_k)$, dove $\phi(x)$ verifica $\phi(\alpha) = \alpha$, che sia **localmente convergente ad** α.

(iii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Si proponga un metodo di punto fisso, come nel punto precedente, che **non sia localmente convergente ad** α.

(i) Ci sono infinite soluzioni in $[0, \infty)$; valutando la funzione in 0 ed $\frac{\pi}{2}$ si vede che c'è almeno una radice nell'intervallo, l'unicità segue dal fatto che e^{-x} decresce mentre $\sin(x)$ cresce in tale intervallo.

(ii) Si può prendere ad esempio il metodo di Newton che in questo caso fornisce $\phi_1(x) = x + \frac{e^{-x} - \sin(x)}{e^{-x} + \cos(x)}$.

(iii) Si può far vedere che il metodo definito da $\phi_2(x) = -\log_e(\sin(x))$ non è localmente convergente ad α.

Esercizio 4

Si consideri la formula di quadratura

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{6}f\left(\alpha\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{2}-\beta\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{2}+\beta\right) + \frac{1}{6}f\left(1-\alpha\right),$$

dipendente dai paramatri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ appartenenti agli intervalli $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ e $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$.

(i) $\boxed{\text{5 Punti}}$ Si discutano i possibili ordini di precisione della formula nel caso $\alpha = \beta$.

(ii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Si discutano i possibili ordini di precisione della formula nel caso $\alpha = 0$, $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$.

(i) Per $\alpha = 0$ ed $\alpha = \frac{1}{3}$ si ha grado di precisione 3. Per gli altri α nell'intervallo si ha grado di precisione 1.

(ii) Per $\beta = 0$ si ha grado di precisione 3 (caso precedente $\alpha = \beta = 0$), per $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$ il grado di precisione è 1.