Appunti di Algebra Lineare

Gregory Pearlstein
Università di Pisa

Unità del corso (soggetto a modifiche)

Lezione 1, Panorama: Panoramica del corso, inclusi gli spazi vettoriali R^n e i polinomi, sistemi di equazioni, eliminazione gaussiana, moltiplicazione di matrici, autovalori e autovettori, determinanti.

Lezione 2, Nozioni preliminari: Logica, teoria degli insiemi, funzioni, permutazioni, induzione.

Lezione 3, Vettori in R^3: Linee e piani (forma parametrica ed equazione lineare), intersezione di una linea e un piano, legge del parallelogramma.

Lezione 4, Prodotto vettoriale: Descrizione algebrica e geometrica. Condizione perché due vettori in R^3 siano ortogonali, come trovare l'intersezione di due piani, angolo tra due piani.

Lezione 5, Spazi vettoriali: R^n, lo spazio vettoriale delle funzioni da un insieme alla linea reale, lo spazio vettoriale dei polinomi. Linee e iperpiani in R^n, interpolazione di Lagrange. Spazi vettoriali astratti (solo definizione).

Lezione 6, Mappe lineari: Definizione astratta ed esempi nel caso di R^n e spazi vettoriali di funzioni. Proiezione su un piano in R^3, riflessione attraverso un piano in R^3, rotazione in R^2, derivata formale e integrali di funzioni polinomiali (analisi non richiesta).

Lezione 7, Prodotto scalare: La geometria dei vettori in R^n, derivazione della formula per l'angolo tra due vettori. Proprietà algebriche del prodotto scalare in R^n. Disuguaglianza di Cauchy-Scwarz. Disuguaglianza del triangolo. Assiomi per il prodotto scalare. Prodotto scalare su polinomi.

Lezione 8, Sistema Lineare: Definizione di un sistema lineare di equazioni in R^n. Vettori riga e colonna. Riformulazione dei sistemi lineari in termini di matrici. Soluzione per eliminazione gaussiana. Metodo Gauss-Jordan.

Lezione 9, Sottospazi: Definizione. Eliminazione gaussiana e soluzioni di sistemi omogenei di equazioni lineari. Complementi ortogonali come sottospazi.

Lezione 10, Span lineare, Indipendenza lineare, Base: Definizioni, Dimensione. Nel caso a dimensione finita, questi concetti sono discussi nella lezione 9 insieme all'eliminazione guassiana.

Lezione 11, Mappe lineari come matrici. Forme canoniche di matrici: Forma echelon ridotta. Equivalente per righe. Rango di una matrice. Teorema del rango.

Lezione 12, Isomorfismo: Definizioni, Prodotto di spazi vettoriali, dim U x V = dim U + dim V, la somma di sottospazi, Formula di Grassmann, Algoritmo di Zassenhaus.

Lezione 13, L'algebra delle matrici: La matrice di una permutazione. La matrice di un grafo. La formula per moltiplicazione della matrice. Moltiplicazione delle matrici è associativa e distributiva. Matrici elementari (di Gauss), Fattorizzazione della matrice. Matrice trasposta. Matrice Definita Positiva.

Lezione 14: Matrice inversa, matrici simili: Definizioni. Calcolo dell'inversa della matrice utilizzando l'eliminazione gaussiana. Cambio di base. Matrici Simili.

Lezione 15: Determinanti: Definizioni. Segno di una permutazione. Calcolo del determinante utilizzando le mosse di Gauss. La formula det(AB) = det(A) det(B). Determiante di una mappa lineare. La geometria del determinante. Il risultante.

Lezione 16, Sviluppo di Laplace & La formula di Cramer: Sviluppo di Laplace, Regola di Cramer.

Lezione 17, Spazi vettoriali complessi: Numeri Complessi. Formula di de Moivre. Formula di Eulero. Teorema fondamentaldell'algebra. Polinomio caratteristico. Teorema di Hamilton e Cayley. Teorema del cerchio di Gershgorin. Prodotto Hermitiano.

Lezione 18, Autovettori e autovalori: Definizioni. Molteplicità algebrica, molteplicità geometrica e diagonalizzabilità.

Lezione 19, Teorema Spettrale: Definizioni. Base Unitaria. Matrice Normale. Teorema Spettrale. Casi speciali: Matrice Hermitiana, matrice antihermitiana, matrice unitaria.

Email: greg.pearlstein@unipi.it

Teoremi, definizioni e algoritmi

Tutte le definizioni, teoremi, algoritmi e metodi discussi nel corso sono argomenti idonei per le prove d'esame, a meno che le note non indichino espressamente diversamente

Questo è un elenco parziale di teoremi e definizioni per l'esame di fine corso. È soggetto a modifiche. Questo **non è un elenco di argomenti per l'esame.**

Si prega di consultare le note della classe per la dichiarazione completa di teoremi e definizioni.

Definizioni:

- Forma parametrica di una linea in e di iperpiani in R^n.
- Algebrica e geometrica del prodotto vettoriale.
- Definizione astratta di spazio vettoriale e di sottospazio.
- Prodotto Scalare (Sia per R^n che per spazi vettoriali astratti).
- Norma, distanza e vettore unitario. Angolo e distanza tra vettori, ortogonalità. (Sia per R^n che per spazi di prodotto scalari astratti).
- Spazio vettoriale a dimensione finita.
- Dipendenza e Indipendenza lineare, Span lineare, Base.
- Mappa lineare, kernel, immagine e rango.
- Una matrice a scalini e pivot. Le variabili dipendenti e le variabili indipendenti.
- Mosse di Gauss
- Forma echelon ridotta (forma canonica di riga).
- Equivalenza di riga.
- Matrice di un grafico
- Matrice elementare.
- Matrice definita positiva.
- Matrici inverse e di matrice simile
- Determinante e di segno di una permutazione.
- Il risultante di due polinomi.
- Polinomio caratteristico di una matrice.

- Dischi di Gershgorin.
- Spazio vettoriale complesso (astratta),
- Prodotto Hermitiano.
- Autovettori e autovalori, molteplicità geometrica e algebrica.
- Diagonalizzabilità
- Definizione di matrice: Simmetrica, Antisimmetrica, Hermitiana, Antihermitiana, Normale, Ortogonale, Unitaria.
- Definizione di isometria. Definizione di Base Unitaria e Ortonormale.

Lemmi e Teoremi:

- Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Disuguaglianza triangolare. (Caso Reale e caso Complesso)
- Se L è una mappa lineare allora L(0)=0. Proposizioni su somme e composizioni di mappe lineari.
- Struttura delle soluzioni del sistema lineare L(x) =b.
- Un sottospazio di uno spazio vettoriale a dimensione finita è a dimensione finita.
- L'intersezione di due sottospazi è un sottospazio.
- Un sottoinsieme di un insieme linearmente indipendente è linearmente indipendente.
- Ogni spazio vettoriale di dimensione finita ha una base.
- Due basi qualsiasi di uno spazio vettoriale a dimensione finita hanno la stessa cardinalità.
- Due spazi vettoriali di dimensione finita sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.
- Unicità della forma canonica di riga
- Teorema del rango.
- Teorema di Rouché-Capelli.
- Il prodotto cartesiano di due spazi vettoriali è uno spazio vettoriale.
- Formula di Grassmann.
- Teorema sul numero di cammini di una data lunghezza in un grafo.
- Teorema su matrici definite positive e dominante diagonalmente per righe.
- Det(A) è diverso di zero se e solo se A è una matrice invertibile.
- Teorema (di Binet): det(AB) = det(A)det(B).
- Il risultante diverso da zero non implica radici comuni.

- Sviluppo di Laplace, formula per la matrice inversa utilizzando determinanti.
- Regola di Cramer.
- Teorema di Hamilton-Cayley.
- Teoremi sui dischi di Gershgorin.
- Struttura delle matrici 2x2.
- Un insieme di autovettori con autovalori distinti è linearmente indipendente.
- Teorema sulla diagonalizzabilità in termini di molteplicità geometrica e algebrica.
- Autospazi con autovalori distinti sono indipendenti.
- Teorema Spettrale.
- Proprietà degli autovalori di matrici hermitiane, antihermitiane e unitarie.
- Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

Algoritmi e formule importanti:

- L'equazione parametrica di una retta passante per 2 punti.
- L'intersezione di una retta e un iperpiano.
- L'equazione di un piano passante per 3 punti.
- Calcolo dell'angolo tra due vettori.
- Calcolo della lunghezza di un vettore. Calcolo della distanza tra due punti.
- Interpolazione di Lagrange.
- Integrazione e differenziazione di polinomi.
- Risolvere Ax=b per A una matrice a scalini.
- Eliminazione Gaussiana.
- Algoritmo per risolvere il sistema lineare Ax = b.
- Algoritmo per trovare una base di r(A).
- Algoritmo per trovare una base di Im(A).
- Algoritmo per trovare la base di Ker(A).
- Algoritmo per trovare il complemento ortogonale.
- Matrice di una trasformazione lineare relativa a una base.
- Algoritmo per calcolare il rango di A.
- Algoritmo per trovare la forma echelon ridotta di A.
- Algoritmi per trovare una base dell'intersezione di due sottospazi.
- Cambio di base.
- Algoritmo per calcolare il determinante usando le mosse di Gauss.
- Algoritmo per determinare se due polinomi hanno una radice comune utilizzando la risultante.
- Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

Sommario:

Lezione, Panoramica.

Spazi vettoriali

Sia $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$. Allora, per definizione,

$$\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n), \quad \vec{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n \implies \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n \tag{E1}$$

$$\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R} \implies c\vec{a} = (ca_1, \ldots, ca_n) \in \mathbb{R}^n \tag{E2}$$

Più generalmente, sia S un insieme e $\mathbb{R}^S = \{\text{funzioni } h : S \to \mathbb{R}\}$ e $f, g \in \mathbb{R}^S$, $c \in \mathbb{R}$ definiamo

$$(f+g) : S \to \mathbb{R}, \qquad (f+g)(s) = f(s) + g(s) \tag{E1'}$$

$$cf : S \to \mathbb{R}, \qquad (cf)(s) = cf(s) \tag{E2'}$$

<u>Esempio</u>: $S = \{\text{Lunedì, Martedì, Mercoledì, Giovedì, Venerdì, Sabato, Domenica}\}$

$$f : S \to \mathbb{R}, \qquad f(X) = \text{centimetri di pioggia nel giorno X della settimana scorsa}$$
$$g : S \to \mathbb{R}, \qquad g(X) = \text{centimetri di pioggia il giorno X due settimane fa}$$
$$h = \frac{1}{2}(f+g) = \text{precipitazioni medie}$$

In particolare, se $S = \{1, \ldots, n\}$ abbiamo una correspondenza

$$a \in \mathbb{R}^S \longleftrightarrow \vec{a} = (a(1), \ldots, a(n)) \in \mathbb{R}^n \tag{E3}$$

In generale, chiamiamo gli elementi di $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{R}^S$ vettori.

Le operazioni (E1) e (E1') sono chiamate addizione vettoriale. Le operazioni (E2) e (E2') sono chiamate moltiplicazione scalare

Se S è un insieme e $p \in S$, definiamo

$$\chi_{\{p\}} : S \to \mathbb{R}, \qquad \chi_{\{p\}}(s) = \begin{cases} 1, & s = p \\ 0, & s \neq p \end{cases}$$

Se S è un insieme finito, chiamiamo l'insieme

$$B = \{\chi_{\{s\}} \mid s \in S\}$$

la base canonica di $\mathbb{R}^S$.

<u>Esempio</u>: $S = \{1, \ldots, n\}$. Sotto la corrispondenza (E3), la base canonica di $\mathbb{R}^S$ è l'insieme

$$B = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$$

che di solito è chiamato la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Sistemi di equazioni (informale)

Siano $f_1, \ldots, f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni. Allora,

$$V(f_1, \ldots, f_k) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_k(x) = 0 \,\}$$

dimensione = numero di parametri locali

La dimensione prevista di $V(f_1, \ldots, f_k)$ è $n-k$ perché $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n e ogni equazione $f_\ell(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dovrebbe ridurre la dimensione dell'insieme di soluzioni di uno.

Esempio: $f = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ $\quad V(f) = \{\text{sfera di raggio } 1\}$ (dim. prevista)

$g = g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ $\quad V(g) = \{0\}$

$h = h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1$ $\quad V(h) = \emptyset$

In questo caso, solo $V(f)$ ha la dimensione previsa perché una somma di quadrati è non negativa.

Se sostituiamo i numeri reali con i numeri complessi, allora $V(f), V(g), V(h)$ sono tutti parametrizzati locali da due numeri complessi.

Richiamare: $\mathbb{C} = \{(x,y) \mid x,\, y \in \mathbb{R}\}$. Si scrive $(x,y) = x + iy, \qquad i = \sqrt{-1}$

Siano $z = x + iy, \quad w = u + iv$. Allora

$$z + w = (x+u) + i(y+v), \qquad zw = (x+iy)(u+iv) = (xu - yv) + i(xv + uy)$$

Se $z = x + iy \neq (0,0)$ allora $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$

Esempio: $i^2 = -1, \qquad (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i.$

Sistemi di equazioni lineari (informale)

Il sistema di equazioni $V(f_1, \ldots, f_k)$ si dice lineare se (e sole se) ogni funzione ha la forma

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} x_\ell \right) - b_\ell \qquad \text{(E4)}$$

dove i coefficienti $a_{i\ell}$ e b_ℓ sono costanti. Un sistema lineare si dice omogeneo se (e sole se) ogni $b_\ell = 0$. Altrimenti, si dice che il sistema lineare è disomogeneo.

Nota: Se $V(f_1, \ldots, f_k)$ è un sistema lineare allora

$$V(h_1, \ldots, h_k), \qquad h_\ell(x) = f_\ell(x) - f_\ell(0), \qquad \ell = 1, \ldots, k \qquad \text{(E5)}$$

è un sistema lineare omogeneo. Ogni sistema lineare omogeneo ha la soluzione

$$(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$$

Un sistema lineare disomogeneo non deve necessariamente avere una soluzione. Per esempio, siano

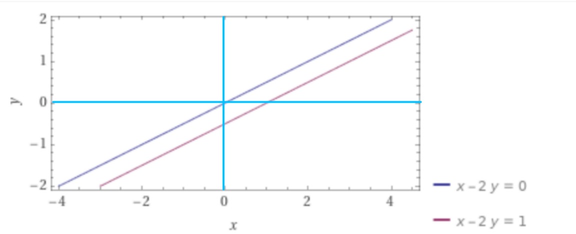
$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 2, \quad f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2, \quad f_3(x_1, x_2) = x_2 + 2x_1 - 1$$

Allora $V(f_1, f_2) = \{(1,1)\}$, ma $f_3(1,1) = 2$. Quindi, $V(f_1, f_2, f_3) = \emptyset$ (insieme vuoto).

Se un sistema lineare $V(f_1, \ldots, f_k)$ ha una soluzione x' allora ogni soluzione di $V(f_1, \ldots, f_k)$ ha la forma

$$x + x', \qquad x \in V(h_1, \ldots, h_k)$$

dove $V(h_1, \ldots, h_k)$ è il sistema lineare (E5).



Sistemi equivalenti di equazioni

Si osservi che: Per qualsiasi sistema di equazioni $V(f_1, \ldots, f_k)$ abbiamo

(i) $V(f_1, f_1 + f_2, \ldots, f_k) = V(f_1, \ldots, f_k)$ perché

$$\{f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0\} \iff \{f_1(x) = 0, \quad f_1(x) + f_2(x) = 0\}$$

(ii) $V(f_1, cf_2, \ldots, f_k) = V(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ se $c \neq 0$

(iii) $V(f_1, \ldots, f_k)$ è indipendente dell'ordine delle equazioni $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

Nel caso di sistemi di equazioni lineari, queste trasformazioni sono chiamate mosse di Gauss:

(1) Aggiungere un multiplo di un'equazione a un'altra.
(2) Moltiplicare un'equazione per uno scalare non nullo.
(3) Riordinare le equazioni.

Eliminazione di Gaussiana: Usa le regole (1)-(3) per semplificare un sistema di equazioni lineari in una forma facile da risolvere.

Assumere non zero usando la regola 3. Altrimenti, x_1 può assumere qualsiasi valore.

Elimina x_1 da queste equazioni usando la regola 1.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + \quad & a_{1n}x_n - b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + \quad & a_{2n}x_n - b_2 = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad & \vdots \qquad\quad = 0 \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + \quad & a_{kn}x_n - b_k = 0 \end{aligned} \tag{E6}$$

Ripetete questo processo con ogni variabile x_ℓ fino ad ottenere un sistema della forma

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n - b'_1 \quad &= 0 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n - b'_2 \quad &= 0 \\ \ddots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad &= 0 \\ a'_{kk}x_k + \cdots + a'_{kn}x_n - b'_k \quad &= 0 \end{aligned} \tag{E6'}$$

Se (E6') ha un'equazione della forma $b'_\ell = 0$ dove $b'_\ell \neq 0$ allora (E6) non ha soluzioni. Altrimenti, possiamo trovare tutte le soluzioni con la "Sostituzione a ritroso"

Esempio:

$$\begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ 6x+2y+z+1=0 \\ -2x+2y+z-7=0 \end{cases} \xrightarrow[R_2=R_2-3R_1]{} \begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ -y-2z+4=0 \\ -2x+2y+z-7=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[R_3=R_3+R_1]{} \begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ -y-2z-4=0 \\ 3y+2z-8=0 \end{cases} \xrightarrow[R_3=R_3+3R_2]{} \begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ -y-2z+4=0 \\ -4z+4=0 \end{cases}$$

Sostituzione a ritroso

$$-4z+4=0 \Longrightarrow z=1, \quad -y-2z+4=0 \Longrightarrow y=2$$

$$2x+y+z-1=0 \Longrightarrow x=-1$$

Di solito omettiamo le variabili usando la seguente notazione matriciale:

$2x+y+z=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2=R_2-3R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3=R_3+R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3=R_3+3R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

Applicazione: Soluzione numerica di equazioni differenziali.

Una derivata è un tasso di cambiamento istantaneo.

Le leggi della fisica producono spesso equazioni che coinvolgono la derivata prima $f'(x)$ e la derivata seconda $f''(x)$ di una funzione $f(x)$. Tali equazioni possono spesso essere risolte numericamente al computer come segue:

Per piccoli valori di h, abbiamo le seguenti approssimazioni:

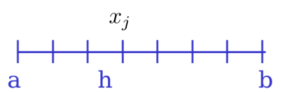
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \tag{E7}$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \tag{E8}$$

Consideriamo l'equazione differenziale

$$u(x)y''(x) + v(x)y'(x) + w(x)y(x) = g(x), \qquad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

Suddividere l'intervallo [a,b] in n parti



$$x_j = a + jh, \qquad h = \frac{b-a}{n}, \qquad j = 0, \dots, n$$

Siano $\quad y_j = y(x_j), \quad u_j = u(x_j), \quad v_j = v(x_j), \quad w_j = w(x_j), \quad g_j = g(x_j), \quad j = 0, \dots, n$

Usando le equazioni (E7) e (E8) otteniamo il sistema di equazioni lineari:

$$u_j \left(\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} \right) + v_j \left(\frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} \right) + w_j y_j = g_j, \qquad j = 1, \dots, n-1$$

dove conosciamo già $y_0 = \alpha$ e $y_n = \beta$.

Esempio: $\quad y''(x) - y(x) = f(x), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$

$$\left(\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} \right) - y_j = f_j \implies y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1} - h^2 y_j = h^2 f_j$$

$$\implies \begin{cases} y_{j+1} - (2+h^2)y_j + y_{j-1} = h^2 f_j, \qquad j = 1, \dots, n-1 \\ y_0 = \alpha, \quad y_n = \beta \end{cases}$$

Moltiplicazione di matrici

Richiamare: Siano $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ matrici 2x2

Allora

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \qquad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} \qquad \text{(E9)}$$

$$c_{11} : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \qquad c_{12} : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$c_{21} : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \qquad c_{22} : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Esempio: $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

Moltiplicare una matrice e un vettore

Siano $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Allora, $Av = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Av, \qquad u_1 : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad u_2 : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Autovettori e autovalori

Supponiamo che A sia una matrice e v sia un vettore tale che

$$Av = \lambda v$$

Allora

$$A^n v = \lambda^n v$$

$\lambda = 3$ $\qquad$ $\lambda = -1$

Esempio: $\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{v} = 3 \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{v}, \qquad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}^{v} = (-1) \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}^{v}$

In generale, un vettore v non nullo è detto un autovettore di A se esiste una costante λ tale che

$$Av = \lambda v$$

Il numero λ è chiamato l'autovalore di A corrispondente a v.

Determinante

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Allora $\det(A) = ad - bc$

L'autovalori di A sono l'soluzione dell'equazione

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

Allora, l'autovalori di A sono $\lambda = 3, \quad \lambda = -1$.

Lezione: Nozioni Perliminari

Logica: Una proposizione è un'affermazione dichiarativa che è vera o falsa.

Esempio: Un pinguino è un animale.

Domande, opinioni e comandi non sono proposizioni.

Connettivi Logici: Siano P, Q, R proposizioni.

Negazione: $\neg P$ è vera se e solo se P è falsa.

Esempio: P = I pinguini possono volare.
Questa proposizione è falsa. Quindi $\neg P$ è vera.

Tavola di verità:

P	$\neg P$
V	F
F	V

Congiunzione: $P \wedge Q$ è vera se e solo se P è vera e Q è vera.

Esempio: P= I pinguini possono volare. Q= I pinguini sono carnivori.
R = I pinguini possono nuotare.

Allora: $P \wedge Q = F$, $P \wedge R = F$, $Q \wedge R = V$

Tavola di verità:

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Disgiunzione: $P \vee Q$ è vera se e solo se P è vera oppure Q è vera.
Nota bene: $P \vee Q$ è vera se P è vera e Q è vera.

Esempio: P, Q, R come nell'esempio precedente.

Allora: $P \vee Q = V$, $P \vee \neg Q = F$, $Q \vee R = V$

Tavola di verità:

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Implicazione: $P \implies Q$ a meno che P sia vera e Q sia falsa

Esempio: P = Se i maiali potessero volare. Q= qualsiasi proposta.

Allora $P \implies Q$ è vera perché P è falsa.

(essere continuato)

Nota: $P \implies Q$ è anche chiamato "implicazione logica" per distinguerlo dal significato colloquiale di "implicazione".

Tavola di verità:

P	Q	$P \implies Q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Altri modi per dire $P \implies Q$ sono:
(i) Se P allora Q
(ii) P è condizione sufficiente per Q.
(iii) Q è condizione necessaria per P.

Esempio: P = Oggi è Pasqua. Q= Domani è lunedì.
Allora $P \implies Q$.

Coimplicazione (o doppia implicazione): $P \iff Q$ significa "P se e sole se Q"

Esempio: P= Oggi è lunedì. Q= Domani è martedì.
Allora: $P \iff Q$

Tavola di verità:

P	Q	$P \iff Q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Altri modi per dire $P \iff Q$ sono:
(i) P se e sole se Q
(ii) P è necessaria e sufficiente per Q

Attenzione: P se Q significa $Q \implies P$.

Insiemi:

Intuitivamente, un insieme S è un insieme di oggetti distinti, chiamati elementi di S.
$s \in S$ è la proposizione che s è un elemento di S. La proposizione $\neg(s \in S)$ è scritto $s \notin S$.

Un insieme con un numero finito di elementi può essere descritto elencando i suoi elementi.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Il insieme vuoto, scritto $\emptyset$ oppure $\{\}$, è l'insieme senza elementi. In particolare, se A è un insieme e $a \in A$ allora $a \notin \emptyset$.

Definizione: Sia A un insieme. Per ogni $a \in A$ sia $P(a)$ una proposizione. Allora

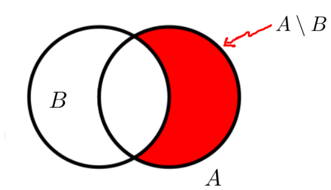
$$\{a \in A \mid P(a)\}$$

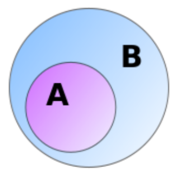
è l'insieme costituito da tutti gli elementi $a \in A$ tali che $P(a)$ è vera.

Definizione: Siano A e B insiemi. Il complemento di B in A è l'insieme

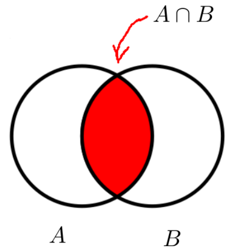
$$A \setminus B = \{\, a \in A \mid a \notin B \,\}$$

Si dice che A è un sottoinsieme di B, scritto $A \subseteq B$, se (e sole se) $A \setminus B = \emptyset$.
Si dice che $A = B$ se (e sole se) $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.





$A \subseteq B$



Esempio: Sia S un insieme. Allora $\emptyset \subseteq S$ perché $s \in \emptyset$ è sempre falsa.

Definizione: Siano A e B insiemi. L'intersezione di A e B è l'insieme

$$A \cap B = \{\, a \in A \mid a \in B \,\}$$

Esempio: Siano $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid 2 \text{ divide } m\}$, $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid 3 \text{ divide } n\}$. Allora,

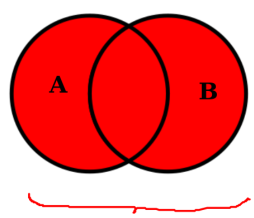
$$A \cap B = \{\, q \in \mathbb{Z} \mid 6 \text{ divide } q \,\}$$

Esercizio: $A \cap B = \{\, b \in B \mid b \in A \,\}$

Di solito nelle nostre discussioni, c'è un insieme ambiente U che contiene tutti gli oggetti in considerazione.

Definizione: Siano A e B sottoinsieme di U. L'unione di A e B è l'insieme

$$A \cup B = \{\, u \in U \mid (u \in A) \vee (u \in B) \,\}$$



$A \cup B$

Esercizio: $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$

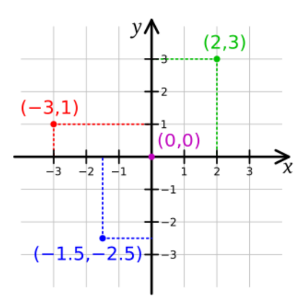
Siano A e B insiemi. Il prossimo concetto primitivo della teoria degli insiemi è il prodotto cartesiano $A \times B$ costituito da coppie ordinate

$$(a, b) \in A \times B$$

Per definizione,

$$(a, b) = (a', b') \iff (a = a') \wedge (b = b')$$

Esempio: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è il piano cartesiano.

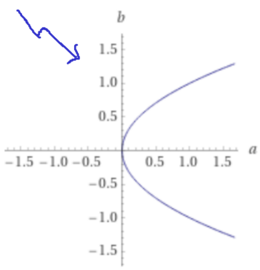


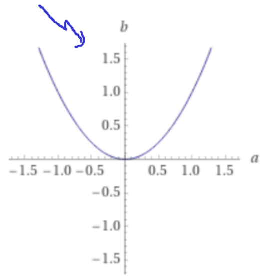
Relazioni e Funzioni

Siano A e B insiemi. Una relazione da A a B è un sottoinsieme $R \subseteq A \times B$.

Esempio: $A = B = \mathbb{R}$

$R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid b^2 = a\}$ $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a^2 = b\}$





Definizione: Una relazione R da A a B definisce una funzione $f : A \to B$ se (e sole se)
(i) Per ogni $a \in A$ esiste un elemento

$$(a,b) \in R$$

(ii) Se $(a,b) \in R$ e $(a,c) \in R$ allora $b = c$.
In questo caso, scriviamo $f(a) = b$.

Esempio: R_1 non soddisfa la condizione (i) perché non c'è nessun elemento della forma $(-1,b) \in R_1$.
R_1 non soddisfa la condizione (ii) perché $(1,1) \in R_1$ e $(1,-1) \in R_1$.
R_2 soddisfa sia condizione (i) che (ii). La funzione associatae è $f(a) = a^2$.

Definizione: Una funzione $f : X \to Y$ si dice:
(i) iniettiva se $f(x) = f(x') \iff x = x'$
(ii) suriettiva se per ogni $y \in Y$ existe $x \in X$ tale che $f(x) = y$.
(iii) biunivoca se f sia iniettiva e suriettiva.

Esempio:
(i) $f(x) = e^x$ è una funzione iniettiva $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Questa funzione non suriettiva perché e^x è sempre positivia.
(ii) $g(x) = \sin(x)$ è una funzione suriettiva $\mathbb{R} \to [-1,1]$. Questa funzione non iniettiva perché $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.
(iii) $h(x) = x^3$ è una funzione biunivoca $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Lemma: Una funzione $f : X \to Y$ ha una funzione inversa $g : Y \to X$ se e solo se f è biunivoca.

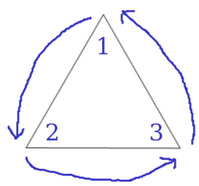
Lemma: Siano X e Y insiemi finiti con lo stesso numero di elementi. Allora, le seguenti sono equivalenti:
(i) $f : X \to Y$ è iniettiva.
(ii) $f : X \to Y$ è suriettiva.
(iii) $f : X \to Y$ è biunivoca.

Permutazione

Sia X un insieme. Una permutazione di X è una funzione biunivoca $f : X \to X$

Esempio: $X = \{1,2,3\}$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$

Esempio: Sia X l'insieme dei vertici di un poligono P. Sia $f : P \to P$ una simmetria.
Allora, $f : X \to X$ è biunivoca. Quindi $f : X \to X$ è una permutazione di X.



$f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$

Esempio: Siano $f, g : X \to X$ permutazioni. Allora, la funzione composta $h = f \circ g$ è una permutazione.

Lemma : Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funzioni e $h = f \circ g$. Allora,
(i) f, g iniettiva $\implies h$ iniettiva.
(ii) f, g suriettiva $\implies h$ suriettiva.
(iii) f, g biunivoca $\implies h$ biunivoca.

Esercizio: Dimostrare il lemma

Dimostrazione per assurdo

Un modo per dimostrare che una proposizione P è vera è mostrare che assumere che $\neg P$ sia vero porta a una contraddizione. Più precisamente, esiste una proposizione Q tale che

$$\neg P \implies Q \wedge (\neg Q) \quad \text{è vero}$$

Poiché $Q \wedge (\neg Q)$ è sempre falsa, ne segue che P è vera.

Teorema (Euclide): Esistono infiniti numeri primi.
Dimonstrazione: Sia S l'insieme di tutti i numeri primi. Supponiamo che S sia finito e che sia m il prodotto degli elementi di S. Chiaramente nessun elemento di S può dividere $m+1$. Quindi, $m+1$ è primo o ha un fattore primo che non è contenuto in S. Ma questo contraddice l'ipotesi che S sia l'insieme di tutti i numeri primi.

Teorema Fondamentale dell'aritmetica: Ogni numero naturale maggiore di 1 o è un numero primo o si può esprimere come prodotto di numeri primi. Tale rappresentazione è unica, se si prescinde dall'ordine in cui compaiono i fattori.

Corollario: Se p è un numero primo e n è numero naturale tale che p divide n^2 allora p divide n.

Teorema (La scuola pitagorica): $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

Dimonstrazione: Supponiamo che

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

dove a e b sono numeri naturali senza fattore comune. Allora

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \implies 2b^2 = a^2$$

e quindi 2 divide a^2. Per il collorario, 2 divide a. Scrive $a = 2c$. Allora,

$$2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2 \implies b^2 = 2c^2$$

Per il collorario, 2 divide b. Così, 2 è un fattore comune di a e b. Ciò contraddice l'ipotesi che a e b non abbiano un fattore comune.

Come volevasi dimostrare

Principio d'induzione

Sia m un numero naturale. Per ogni numero naturale $n \geq m$, sia $P(n)$ una proposizione. Per mostrare che $P(n)$ è vera per ogni numero naturale $n \geq m$, è sufficiente mostrare:
(a) $P(m)$ è vera.
(b) Se $P(n)$ è vera allora $P(n+1)$ è vera.

Varianti: La parte (b) può essere sostituita da
(b') Se $P(m), \ldots, P(n)$ sono vere allora $P(n+1)$ è vera.

Nota: Il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica è un esempio di teorema dove si usa (b') invece di (b). In questo corso, si usa spesso (b') per dimostrare con induzione sulla dimensione.

Esempio: La somma dei primi n numeri naturali è $\frac{n(n+1)}{2}$.

$$m = 1, \qquad P(n): \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(a) $P(1) = 1 = \frac{(1)(1+1)}{2}$ è vera.

(b) $$P(n) = \frac{n(n+1)}{2} \implies P(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k$$
$$= (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1) + n^2 + n}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

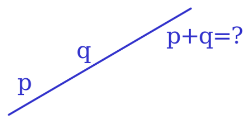
Quindi, P(n+1) è vero. Questo completa la dimostrazione per induzione.

Lezione, Vettori in $\mathbb{R}^3$

La geometria euclidea è lo studio delle proprietà dello spazio euclideo tridimensionale che sono invarianti sotto rotazioni e movimenti rigidi.

Esempi:
(1) Il fatto che due punti distinti determinano una linea.
(2) La distanza tra due punti.
(3) L'angolo tra due linee non parallele.

Esempio: La somma di due punti nello spazio euclideo non ha senso.



$\mathbb{R}^3$ = Spazio euclideo + scelta del sistema di coordinate.
Gli elementi di $\mathbb{R}^3$ possono essere aggiunti componente per componente

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \qquad \text{(E1)}$$

Un numero reale è chiamato scalare. Gli elementi di $\mathbb{R}^3$ possono essere moltiplicati per gli scalari componente per componente.

$$c(x_1, x_2, x_3) = (cx_1, cx_2, cx_3) \qquad \text{(E2)}$$

Gli elementi di $\mathbb{R}^3$ possono anche essere sottratti componente per componente:

$$(x_1, x_2, x_3) - (y_1, y_2, y_3) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3) \qquad \text{(E3)}$$

In generale

$$a(x_1, x_2, x_3) + b(y_1, y_2, y_3) = (ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, ax_3 + by_3)$$

Esempi:

$$(1, 1, 2) + (1, 2, 3) = (2, 3, 5)$$

$$(1, 4, 9) - (1, 2, 3) = (0, 2, 6) = 2(0, 1, 3)$$

$$2(1, 0, 1) + 3(0, 1, -1) = (2, 3, -1)$$

Linea parametrica in $\mathbb{R}^3$

Dati due punti $p = (p_1, p_2, p_3)$ e $q = (q_1, q_2, q_3)$ in $\mathbb{R}^3$, la mappa

$$X(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad X(t) = p + t(q - p) \qquad \text{(E4)}$$

parametrizza la retta passante per p e q (supponendo che p e q siano distinti).

Esempio:

$$p = (1,0,1), \quad q = (1,1,1) \implies X(t) = (1,t,1)$$

è la forma parametrica della retta passante per p e q.

La costruzione dell'equazione parametrica della retta passante per p e q illustra un'importante dicotomia su $\mathbb{R}^3$:

Gli elementi di $\mathbb{R}^3$ possono essere considerati sia come punti nello spazio euclideo sia come "vettori" che possono essere addizionati e moltiplicati per gli scalari.

In generale, dato un punto $p = (p_1, p_2, p_3)$ in $\mathbb{R}^3$ e un vettore $v = (v_1, v_2, v_3)$ in $\mathbb{R}^3$, la retta parametrica passante nella direzione del vettore è data dall'equazione

$$L(t) = p + tv \qquad \text{(E5)}$$

Esempio:

$$p = (1,1,-1), \quad v = (1,0,1) \implies L(t) = (t+1, 1, t-1)$$

è la retta passante per p nella direzione di v.

Esempio: Una curva parametrica in $\mathbb{R}^3$ è una mappa della forma

$$r : (a,b) \to \mathbb{R}^3, \qquad r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Non preoccupateti
di come calcolare r',
questo è coperto
da altri corsi.

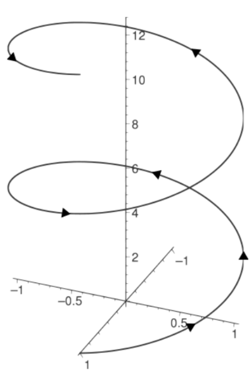
La derivata $r'(c) = (x'(c), y'(c), z'(c))$ (E6)

(se esistono le tre derivate a destra) e l'equazione della retta tangente della curva a $c \in (a,b)$ è

$$L(t) = r(c) + tr'(c), \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{(E7)}$$

Esempio (Elica):

$$r(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$



$$r(2\pi) = (1,0,2\pi), \qquad r'(2\pi) = (0,1,1)$$

r' è dato

$$L(t) = (1,0,2\pi) + t(0,1,1) = (1, t, 2\pi + t)$$

π = p greco

Forma parametrica di un piano in $\mathbb{R}^3$:

Dati tre punti A, B e C in $\mathbb{R}^3$ che non sono collineari, il piano che passa per questi tre punti è il grafico della funzione

$$X(s,t) = s(B-A) + t(C-A) + A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \tag{E8}$$

Si noti che

$$X(0,0) = A, \qquad X(1,0) = B, \qquad X(0,1) = C \tag{E9}$$

<u>Esempio</u>: L'equazione del piano che passa per i punti $A = (1,0,0),\ B = (0,1,0)$ $C = (0,0,1)$ è

$$X(s,t) = (-1,1,0)s + (-1,0,1)t + (1,0,0) = (1-s-t, s, t)$$

Forma lineare di un piano in $\mathbb{R}^3$:

Tornando all'esempio precedente, vediamo che se

$$X(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)) = (1-s-t, s, t)$$

allora

$$x(s,t) + y(s,t) + z(s,t) = (1-s-t) + s + t = 1 \tag{E10}$$

Viceversa, supponiamo che $x_o + y_0 + z_0 = 1$. Allora,

$$\begin{aligned} s_o = y_o, t_o = z_o \implies X(s_o, t_o) &= (1 - s_o - t_o, s_o, t_o) \\ &= ((1 - y_o - z_o), y_o, z_o) = (x_o, y_o, z_o) \end{aligned} \tag{E11}$$

Siano $P = \{X(s,t) \in \mathbb{R}^3 \mid (s,t) \in \mathbb{R}^2\}, \qquad P' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1\}$

Allora,
(1) Per (E10), $P \subseteq P'$.
(2) Per (E11), $P' \subseteq P$
Quindi $P = P'$

In altre parole, l'equazione del piano che passa per $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$ è

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1\}$$

<u>Proposizione</u>: Sia $(a,b,c) \in \mathbb{R}$ e $d \in \mathbb{R}$. Se $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ allora

$$ax + by + cz = d$$

è l'equazione di un piano in $\mathbb{R}^3$.

Esempio: Se $P=\{(x,y,z)\mid x+2y+3z=3\}$ allora

$$(0,3,-1),\ (6,0,-1),(5,-1,0)\in P$$

Usando questi tre punti su P, possiamo quindi trovare un'equazione parametrica per P.

$$X(s,t)=(6,-3,0)s+(5,-4,1)t+(0,3,-1)$$

In generale, si passa dall'equazione lineare di un piano alla sua forma parametrica semplicemente trovando tre punti non lineari sul piano.

Osservazione: La forma parametrica di un piano non è unica, come si vede riordinando i tre punti dati. La forma lineare di un piano è unica modulo moltiplicare l'equazione per uno scalare non nullo.

In particolare, un piano ha un'equazione

$$ax+by+cz=d$$

con $d=0$ se e solo se il piano contiene $(0,0,0)$. Altrimenti, d è non-zero e può essere scalato per essere uguale a 1.

L'equazione lineare di un piano che passa per 3 punti:

Forse il modo più semplice per trovare l'equazione lineare

$$ax+by+cz=d$$

del piano che passa per $(x_0,y_0,z_0),\ (x_1,y_1,z_1),\ (x_2,y_2,z_2)$ è semplicemente scrivere il sistema 3x3 di equazioni lineari

$$\begin{aligned} ax_0+by_0+cz_0&=d\\ ax_1+by_1+cz_1&=d\\ ax_2+by_1+cz_1&=d \end{aligned}$$

e risolvere per $\{a,b,c,d\}$.

Esempio: Trova l'equazione del piano che passa per $(0,3,-1),\ (6,0,-1),(5,-1,0)$.

Dobbiamo risolvere le equazioni: $\begin{cases} 3b-c=d\\ 6a-c=d\\ 5a-b=d \end{cases}$

sottraendo la prima equazione dalla seconda equazione si ottiene

$$6a-3b=0$$

Quindi, ponendo $a=1$ e $b=2$, si ottiene $5a-b=d=3$. Infine, $3b-c=d \implies c=3$.

L'equazione del piano è quindi $x+2y+3z=3$, che concorda con l'esempio all'inizio della pagina.

L'intersezione di una linea con un piano:

Se il piano è dato dall'equazione lineare

$$ax + by + cz = d$$

e la retta è data nella forma parametrica

$$X(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

si risolve semplicemente l'equazione

$$ax(t) + by(t) + cz(t) = d \qquad \text{(E12)}$$

per t .

Naturalmente, è possibile che il piano e la linea siano paralleli, in tal caso l'equazione (E12) non avrà soluzioni.

Esempio: $P = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}$

$X(t) = t(1, 0, -1)$

Allora, $1 = x(t) + y(t) + z(t) = (t) + (0) + (-t) = 0$

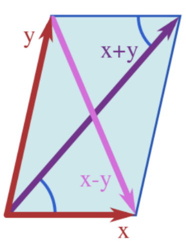
Quindi, il piano e la linea non si intersecano.

Esempio: $P = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}$

$X(t) = t(6, 0, 0) - (0, 3, 2) = (6t, -3, -2) = (x(t), y(t), z(t))$

$1 = x(t) + y(t) + z(t) = 6t - 5 \implies s = 1 \implies r(t) = (6, -3, -2)$

Legge del parallelogramma



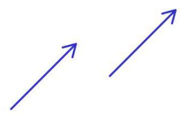
L'addizione e la sottrazione di vettori possono essere descritte geometricamente usando i lati di un parallelogramma come mostrato.

Geometricamente, la moltiplicazione di un vettore per uno scalare c corrisponde a moltiplicare la lunghezza del vettore per c mantenendo la sua direzione.

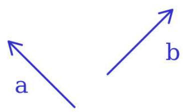
Se vogliamo pensare ai vettori come a frecce dirette in $\mathbb{R}^3$, allora siamo d'accordo nell'identificare due frecce che differiscono per un moto rigido (nessuna rotazione!).

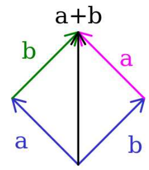
Possiamo poi sommare i vettori spostandoli in un "punto base" comune e usando la legge del parallelogramma.

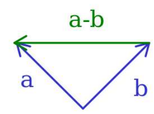
Esempio: Questi vettori sono equivalenti perché hanno la stessa lunghezza e la stessa direzione:



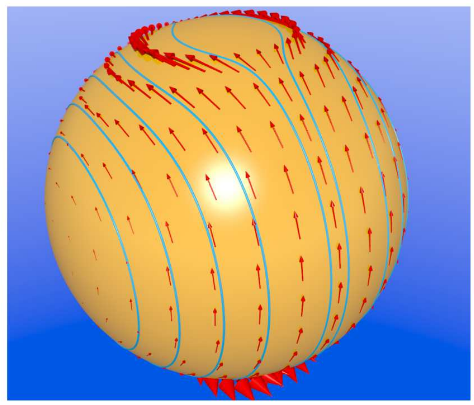
Esempio:







$\boxed{\text{Campi vettoriali:}}$



In fisica, i campi vettoriali si presentano spesso come l'assegnazione di una "Forza" ad ogni punto di una regione dello spazio.

Questo viene visualizzato disegnando una freccia nei punti della regione.

Il campo vettoriale di Killing sulla sfera, chiamato così in onore di Wilhelm Killing.

Esempio: Fino a una costante, il campo vettoriale gravitazionale centrato in (0,0,0) è dato dalla formula:

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \mapsto \frac{(-x, -y, -z)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Sul lato sinistro di questa equazione, (x, y, z) è un punto. A destra, (x, y, z) è un vettore.

Lezione 4: Prodotto Vettoriale

In questa lezione daremo un metodo sistematico per:

(1) Trovare l'equazione di un piano che passa per tre punti in $\mathbb{R}^3$.
(2) Trovare l'intersezione di due piani non paralleli
(3) Trovare l'angolo tra due vettori in $\mathbb{R}^3$
(4) Trovare l'angolo tra due piani non paralleli in $\mathbb{R}^3$.

Lo strumento che useremo è il prodotto vettoriale di due vettori in R^3.

Nota: Esiste un analogo del prodotto vettoriale

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$$

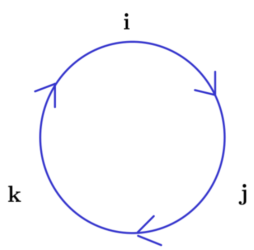
per altri valori di n, che si chiama L'algebra di Grassmann o algebra esterna.
Non tratteremo questo argomento in questo corso.

Definizione: Siano $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ due vettori in $\mathbb{R}^3$
Allora

$$v \times w = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v2 w_1) \qquad \text{(E1)}$$

Notazione: Siano $\mathbf{i} = (1,0,0),\ \mathbf{j} = (0,1,0),\ \mathbf{k} = (0,0,1)$

Esempio:



$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(E2)}$$

Proprietà algebriche del prodotto vettoriale: Siano $u,\ v,\ w \in \mathbb{R}^3,\ c \in \mathbb{R}$
$0 = (0,0,0)$

(1) $v \times w = -w \times v$
(2) $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$
(3) $(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$
(4) $(cu) \times w = c(u \times w)$
(5) $u \times (cw) = c(u \times w)$
(6) $v \times v = 0$
(7) $0 \times v = 0$

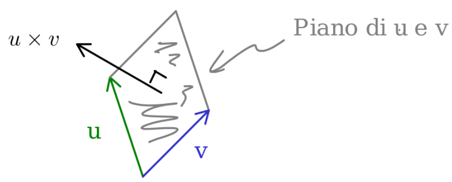
In particolare, utilizzando le proprietà algebriche del prodotto vettoriale e l'equazione (E2), possiamo calcolare il prodotto vettoriale.

Esempio:

Da (E1): $(1,0,1)\times(0,1,0)=((0)(0)-(1)(1),(1)(0)-(1)(0),(1)(1)-(0)(0))=(-1,0,1)$
Da (E2): $(1,0,1)\times(0,1,0)=(\mathbf{i}+\mathbf{k})\times\mathbf{j}=\mathbf{i}\times\mathbf{j}+\mathbf{k}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}-\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{k}-\mathbf{i}$

La definizione geometrica del prodotto vettoriale:

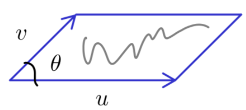
(1) $u\times v=0$ se $u,\ v$ sono paralleli oppure u o v sono $(0,0,0)$.
Altrimenti, u e v generano un piano:



(2) $u\times v$ è perpendicolare al piano di u e v

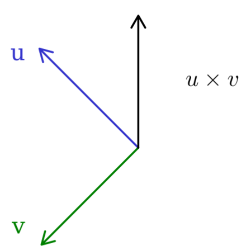
(3) La lunghezza di $u\times v$ è uguale all'area del parallelogramma da u e v:

$P=\{su+tv\mid 0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1\}$

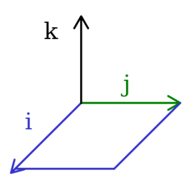


$\text{Area}(P)=(\text{Lunghezza u})(\text{Lunghezza v})\sin(\theta)$

(4) La direzione del vettore $u\times v$ è data dalla regola della mano destra, dove si punta semplicemente l'indice della mano destra in direzione di u e il dito medio in direzione di v. Quindi, il vettore $u\times v$ esce dal pollice.



Esempio: $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$, Area = 1



Condizione per due vettori non nulli in $\mathbb{R}^3$ per essere perpendicolari

Siano: $u=(u_1,u_2,u_3)\neq 0,\quad v=(v_1,v_2,v_3)\neq 0$

Allora $u\perp v \iff (u,v)=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0$

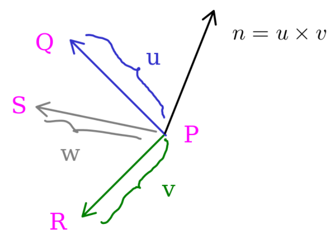
Esempio:

$$u=(1,2,3),\quad v=(1,1,-1)\implies (u,v)=(1)(1)+(2)(1)+(3)(-1)=0\implies u\perp v$$

L'equazione del piano che passa per tre punti non colineari:

P, Q, R = punti in $\mathbb{R}^3$
u = vettore da P a Q.
v = vettore da P a R.
n = u x v (prodotto vettoriale)

S = punti in $\mathbb{R}^3$
w = vettore da S a P



Allora, S appartiene al piano passante per P, Q e R se e solo se w è perpendicolare a n.

Esempio: Trova l'equazione del piano che passa per

$$P = (1,0,0),\ Q = (0,1,0),\ R = (0,0,1)$$

Calcoliamo:

$$u = (-1,1,0) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}, \qquad v = (-1,0,1) = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$n = u \times v = (-\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (-\mathbf{i} + \mathbf{k}) = (-\mathbf{i} \times -\mathbf{i}) - \mathbf{i} \times \mathbf{k} - \mathbf{j} \times \mathbf{i} + \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{j} + \mathbf{k} + \mathbf{i} = (1,1,1)$$

$$S = (x,y,z) \implies w = (x-1,y,z)$$

$$(w,n) = (x-1)(1) + (y)(1) + (z)(1) = x + y + z - 1$$

$$w \perp n \iff x + y + z - 1 = 0$$ (S=P corrisponde a w=0)

L'intersezione di due piani non paralleli:

Se Π è un piano con equazione

$$Ax + By + Cz = D \qquad \text{(E3)}$$

allora $n = (A,B,C)$. Se $(x_o, y_o, z_o) \in \Pi$, l'equazione (E3) può essere scritta come:

$$(n,r) = 0, \qquad r = (x - x_o, y - y_o, z - z_o) \qquad \text{(E4)}$$

Se Π' è un altro piano con equazione

$$A'x + B'y + C'z = D' \qquad \text{(E5)}$$

e $(x_o, y_o, z_o) \in \Pi'$ allora l'equazione (E5) può essere scritta come:

$$(n',r) = 0, \qquad n' = (A', B', C'), \qquad r = (x - x_o, y - y_o, z - z_o) \qquad \text{(E6)}$$

In particolare,

$$(x,y,z) \in \Pi \cap \Pi' \iff (r \perp n) \wedge (r \perp n') \qquad \text{(E7)}$$

(continua, pagina successiva)

Poiché stiamo lavorando in $\mathbb{R}^3$, c'è solo una direzione che è perpendicolare a n e n', che è data da $n \times n'$ (ricorda: Π e Π' non paralleli).

Quindi, l'equazione parametrica della linea $\Pi \cap \Pi'$ è data da

$$t \mapsto t(n \times n') + (x_o, y_o, z_o) \tag{E8}$$

Esempio: Trova l'equazone della linea $\Pi \cap \Pi'$:

$$\Pi : \quad x + y + z = 1, \qquad \Pi' : \quad x + 2y + 3z = 1$$

(1) Trova un punto $(x_o, y_o, z_o) \in \Pi \cap \Pi'$

Per esempio, provate a impostare $x = 1$.
Questo darà due equazioni in y e z:

$$y + z = 0, \qquad 2y + 3z = 0 \implies (y, z) = (0, 0)$$

Allora: $(x_o, y_o, z_o) = (1, 0, 0)$

(2) $n = (1, 1, 1), \quad n' = (1, 2, 3)$

$$\begin{aligned} n \times n' &= (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{2j} + \mathbf{3k}) = \mathbf{i} \times (\mathbf{i} + \mathbf{2j} + \mathbf{3k}) + (\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{2j} + \mathbf{3k}) \\ &= 2\mathbf{k} - 3\mathbf{j} + \mathbf{j} \times (\mathbf{i} + \mathbf{2j} + \mathbf{3k}) + \mathbf{k} \times (\mathbf{i} + \mathbf{2j} + \mathbf{3k}) \\ &= 2\mathbf{k} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k} + 3\mathbf{i} + \mathbf{k} \times (\mathbf{i} + \mathbf{2j} + \mathbf{3k}) \\ &= 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k} + \mathbf{j} - 2\mathbf{i} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \end{aligned}$$

(3) $L(t) = (1, 0, 0) + t(1, -2, 1)$

L'angolo tra due vettori in $\mathbb{R}^3$

In una lezione successiva, mostreremo che l'angolo tra due vettori diversi da zero in $\mathbb{R}^3$ è dato dalla formula:

$$\cos(\theta) = \frac{(a, b)}{\sqrt{(a, a)}\sqrt{(b, b)}}$$

Esempio: Trova l'angolo tra $a = (1, 0, 1), \quad b = (1, 1, 0)$:

$$(a, a) = 1^2 + 0^2 + 1^1 = 2, \qquad (a, b) = (1)(1) + (0)(1) + (1)(0), \qquad (b, b) = (1)^2 + (1)^2 + (0)^2 = 2$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{6}$$

L'angolo tra due piani non paralleli in $\mathbb{R}^3$

Siano

$$\Pi: \; Ax + By + Cz = D, \qquad n = (A, B, C)$$
$$\Pi': \; A'x + B'y + C'z = D', \qquad n' = (A', B', C')$$

due piani non parallei in $\mathbb{R}^3$.

Allora, l'angolo tra Π e Π' è definito come l'angolo tra n e n'.

<u>Esempio</u>: Trova l'angolo tra

$$\Pi: \; x + 2y + 2z = 1, \qquad \Pi': \; x + y = 0$$

$n = (1, 2, 2), \qquad n' = (1, 1, 0)$

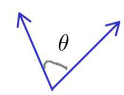
$(n, n) = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9, \qquad (n, n') = (1)(1) + (1)(2) + (2)(0) = 3$

$(n', n') = (1)^2 + (1)^2 + (0)^2 = 2$

$$\cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{9}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \theta = \frac{\pi}{4}$$

<u>Nota</u>: l'angolo tra due piani è un angolo acuto, quindi dobbiamo usare il valore assoluto del prodotto scalare

$$\cos(\theta) = \frac{|(n, n')|}{\sqrt{(n, n)}\sqrt{(n', n')}}$$



Norma di un vettore in $\mathbb{R}^3$

La quantità

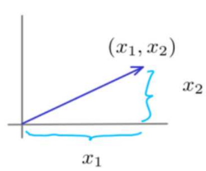
$$|x| = \sqrt{(x, x)} \geq 0 \qquad \text{(anche scritto come } \|x\|\text{)}$$

è chiamata norma del vettore x. Con questa notazione, la formula per l'angolo tra due vettori non-nulla diventa:

$$\cos(\theta) = \frac{(a, b)}{|a||b|}$$

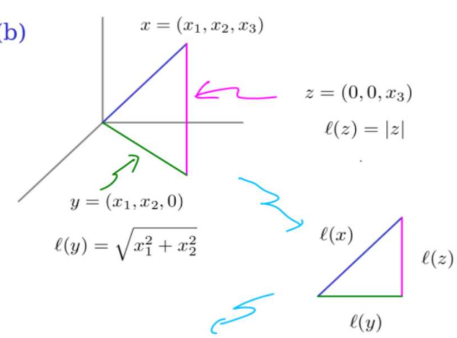
Per il teorema di Pitagora, $\|x\|$ è la lunghezza di x:

(a)



$x = (x_1, x_2) \implies \ell(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

(b)



$\ell(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Distanza:

La distanza $d(x,y)$ tra due punti $x,\ y \in \mathbb{R}^3$ è data da

$$d(x,y) = |x-y|$$

Esempio: Trova la distanza tra $x=(1,0,0),\ y=(2,2,2)$

$$d(x,y) = |x-y| = |(-1,-2,-2)| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

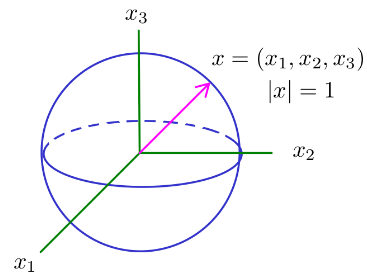
Vettori Unitari:

Un vettore $x \in \mathbb{R}^3$ è detto vettore unitario se (e sole se) $|x| = 1$.

L'insieme

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$$

è chiamato la sfera unitaria.



I punti di S^2 possono essere pensati come le direzioni in $\mathbb{R}^3$.

In particolare, se $x \in \mathbb{R}^3$ e $x \neq 0$ allora

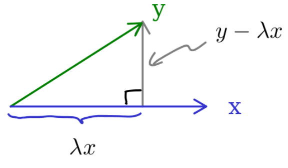
$$u = \frac{x}{|x|}$$

è il vettore unitario nella direzione di x.

Esempio: Trova il vettore unitario nella direzione di $x=(3,4,12)$

$$|x|^2 = 3^2+4^2+12^2 = 25+144 = 169 = 13^2$$
$$u = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{13}$$

Proiezione di $y \in \mathbb{R}^3$ sulla direzione di $x \in \mathbb{R}^3$:



Dobbiamo trovare λ tale che

$$(y-\lambda x, x) = 0 \implies (y,x) - \lambda(x,x) = 0 \implies \lambda = \frac{(y,x)}{(x,x)}$$

Allora

$$\lambda x = \frac{(y,x)}{(x,x)} x \qquad \text{(formula della proiezione)}$$

è la proiezione di y sulla direzione di x.

Nota:
$$\frac{(y,x)}{(x,x)} x = \frac{(y,x)}{\sqrt{(x,x)}} \frac{x}{\sqrt{(x,x)}} = \left(y, \frac{x}{|x|}\right) \frac{x}{|x|} = (y,u)u, \quad u = \frac{x}{|x|}$$

Pagina 6.

Esempio: Trova la proiezione di $y = (1,2,3)$ sul direzione di $x = (1,0,1)$:

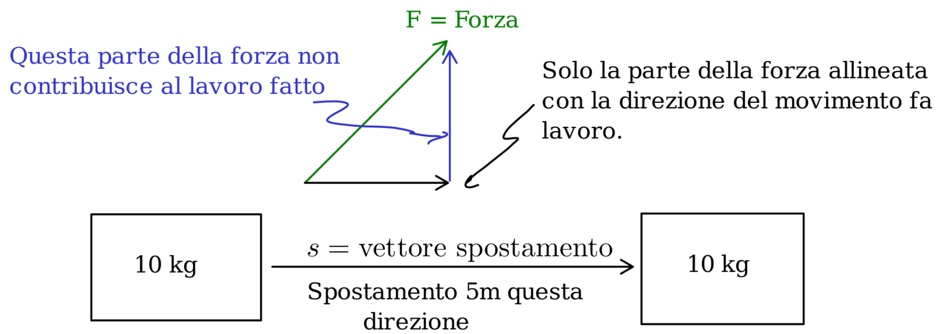
$$\frac{(y,x)}{(x,x)}x = \frac{(1)(1)+(2)(0)+(3)(1)}{1^2+0^2+1^2}(1,0,1) = \frac{4}{2}(1,0,1) = (2,0,2)$$

Lavoro (fisica):

Lavoro = (Forza)(Distanza)

Ma la forza è un vettore e sia il lavoro che la distanza sono scalari?

La distanza dovrebbe essere pensata come uno spostamento s, che è un vettore.



$$L = \left(\underbrace{\frac{(F,s)}{(s,s)}s}_{\text{Proiezione F sulla direzione di s}}, s\right) = \frac{(F,s)}{(s,s)}(s,s) = (F,s)$$

(Formula del Lovoro)

Lezione: Spazi Vettoriali

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n \}$$

Addizione vettoriale: Componente per componente

$$(x_1, \ldots, x_n),\ (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \implies (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \qquad \text{(E1)}$$

Moltiplicazione scalare:

$$c \in \mathbb{R}, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \implies c(x_1, \ldots, x_n) = (cx_1, \ldots, cx_n) \qquad \text{(E2)}$$

Linea parametrica in $\mathbb{R}^n$:

Siano $p \in \mathbb{R}^n$ un punto e $v \in \mathbb{R}^n$ un vettore. Allora,

$$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \qquad L(t) = p + vt \qquad \text{(E3)}$$

è un'equazione parametrica per la linea passante per p nella direzione di v.

Linea passante per due punti in $\mathbb{R}^n$:

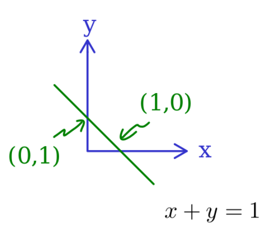
Un'equazione parametrica della linea passante per $p,\ q \in \mathbb{R}^n$ è

$$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \qquad L(t) = p + (q - p)t \qquad \text{(E4)}$$

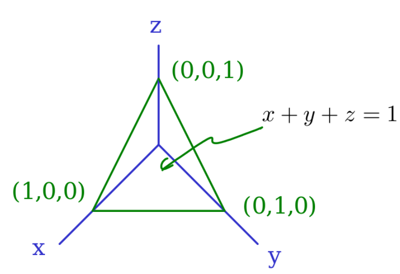
Esempio: Trova la linea passante per $p = (1, 0, 0, 1),\ q = (1, 1, 1, 1)$

$$L(t) = (1, 0, 0, 1) + ((1, 1, 1, 1) - (1, 0, 0, 1))t = (1, 0, 0, 1) + t(0, 1, 1, 0) = (1, t, t, 1)$$

Iperpiani: Consideriamo le equazioni:



Linea tra due punti:
$(1, 0),\ (0, 1)$



Piano tra tre punti:
$(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)$

(continua, pagina seguente)

Osserva che: $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$ passante per:

$$(1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)$$

Dato un insieme $S = \{P_1, \dots, P_n\}$ di n punti in $\mathbb{R}^n$, esiste un'equazione lineare

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = D \tag{E5}$$

che passa per i punti di S .

Per un generico insiemi di n punti S in $\mathbb{R}^n$, l'equazione associata (E5) è unica modulo moltiplicazione per uno scalare non nullo. In questo caso, le soluzioni di (E5) hanno la forma parametrica:

$$L : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n, \qquad L(t_1, \dots, t_{n-1}) = (P_1 - P_n)t_1 + \cdots + (P_{n-1} - P_n)t_{n-1} + P_n$$

L'insieme delle soluzioni H di un'equazione della forma (E5) con almeno un coefficiente non nullo A_j si chiama un iperpiano.

Intersezione della linea e un iperpiano:

Siano: $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad L(t) = p + vt, \quad p = (p_1, \dots, p_n), \quad v = (v_1, \dots, v_n)$

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid A_1x_1 + \cdots + A_nx_n = D\}$$

Per trovare $L \cap H$ sia $x_j = p_j + v_jt$. Allora, abbiamo bisogno di:

$$A_1(p_1 + v_1t) + \cdots + A_n(p_n + v_nt) = D$$

oppure: $$(A_1p_1 + \cdots + A_np_n) + (A_1v_1 + \cdots + A_nv_n)t = D \tag{E6}$$

In analogia con $\mathbb{R}^3$, dati due vettori $u = (u_1, \dots, u_n),\ w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$, definiamo

$$(u, w) = u_1w_1 + u_2w_2 + \cdots + u_nw_n \tag{E7}$$

Sia $A = (A_1, \dots, A_n)$. Allora, (E6) diventa:

$$(A, p) + (A, v)t = D$$

Ci sono tre casi:

(1) $(A, v) \neq 0 \implies t = \dfrac{D - (A, p)}{(A, v)}$ (L interseca H in un punto)

(2) $(A, v) = 0, \quad (A, p) \neq D \implies L \cap H = \emptyset$ (L è parallela a H)

(3) $(A, v) = 0, \quad (A, p) = D \implies L \subseteq H$ (L è contenuto in H)

Esempio: Trova l'intersezione di

$$L(t) = (1,0,0,1) + (1,2,3,4)t, \qquad H:\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &A = (1,1,1,1),\ p = (1,0,0,1),\ v = (1,2,3,4) \\ &(A,p) = 2, \quad (A,v) = 10 \implies t = \frac{1-2}{10} = \frac{1}{5} \end{aligned}\right\} \quad L \cap H = L\left(\frac{1}{5}\right)$$

Lo spazio vettoriale delle funzioni sulla linea reale:

$F(\mathbb{R}) = \{\text{funzioni } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

Addizione vettoriale: $f,\ g \in F(\mathbb{R}) \implies f + g \in F(\mathbb{R})$ è la funzione definita dalla regola

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \tag{E8}$$

Moltiplicazione scalare: $c \in \mathbb{R},\ f \in F(\mathbb{R}) \implies cf \in F(\mathbb{R})$ è la funzione definita dalla regola

$$(cf)(t) = cf(t) \tag{E9}$$

La definizione formale di uno spazio vettoriale è un insieme V dotato di due operazioni chiamate addizione vettoriale e moltiplicazione scalare che soddisfano certi assiomi.

In particolare: Sebbene possiamo anche moltiplicare elementi di $F(\mathbb{R})$ per la regola

$$(fg)(t) = f(t)g(t)$$

questa operazione non fa parte della struttura dello spazio vettoriale di $F(\mathbb{R})$.

Lo spazio vettoriale delle funzioni da un insieme a $\mathbb{R}$:

Sia A un insieme. $\mathbb{R}^A = \{\text{funzioni } f : A \to \mathbb{R}\}$

L'insieme $\mathbb{R}^A$ è uno spazio vettoriale rispetto alle regole di addizione vettoriale e di moltiplicazione scalare (E8) e (E9):

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a), \qquad (cf)(a) = cf(a)$$

Anche se $\mathbb{R}^A$ può sembrare molto astratto, è molto utile come punto di partenza per definire altri spazi vettoriali.

Lo illustreremo con i polinomi:

Lo spazio vettoriale dei polinomi:

Informalmente, un polinomio nella variabile x è una somma finita dei monomi x^m con numeri reali per coefficienti:

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

Naturalmente, possiamo definire l'addizione polinomiale e la moltiplicazione di un polinomio per uno scalare nel solito modo.

Il risultato è uno spazio vettoriale solitamente denotato $\mathbb{R}[x]$.

(continua, pagina seguente)

Supponiamo ora che tu abbia bisogno di programmare un computer per lavorare con i polinomi:

Sia $J = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Allora, si può pensare a un polinomio come a una funzione

$$a : J \to \mathbb{R} \tag{E10}$$

tale che $a(j) = 0$ tranne un numero finito di $j \in J$. Infatti, data una funzione (E10), definiamo

$$p(x) = \sum_{i:a(i)\neq 0} a(i)x^i$$

Viceversa, dato un polinomio $q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ definiamo: $a(j) = \begin{cases} a_j & j = 0, \ldots, n \\ 0 & j > n \end{cases}$

Con queste identificazioni, l'addizione e la moltiplicazione scalare dei polinomi coincide con l'addizione e la moltiplicazione scalare in $\mathbb{R}^J$.

Troncando J ad un insieme finito (cioè delimitando i gradi dei nostri polinomi), possiamo ora programmare facilmente l'addizione polinomiale e la moltiplicazione scalare nel computer.

Interpolazione di Lagrange:

Ricordiamo che esiste un iperpiano che passa per n punti in $\mathbb{R}^n$.

Data $(n+1)$ punti $S = \{(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che $x_0, \ldots, x_n$ sono distinti. Allora, esiste un polinomio $p_S(x)$ di grado n tale che

$$p_S(x_j) = y_j, \qquad j = 0, \ldots, n$$

Infatti, sia
$$p_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \qquad j = 0, \ldots, n$$

Allora,
$$p_j(x_k) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Quindi,
$$p_S(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j p_j(x)$$

è un polinomio di grado n con le proprietà richieste.

Esempio: Trova un polinomio $p(x)$ di grado 2 tale che $p(1)=1, \quad p(2)=3, \quad p(3)=6$

$$S=\{1,2,3\} \implies p_1(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}=\frac{1}{2}(x-2)(x-3)$$

$$p_2(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}=-(x-1)(x-3)$$

$$p_3(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

Allora, $p(x)=(1)p_1(x)+(3)p_2(x)+(6)p_3(x)=\frac{1}{2}x(x+1)$

Nota:

(a) Lasciando $A=\mathbb{R}^n$, otteniamo lo spazio vettoriale $F(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^A$ di funzioni di valore reale su $\mathbb{R}^n$.

(b) Sia $J=\{0,1,2,\dots\}$. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ dei polinomi nelle variabili $x_1,\dots,x_n$ può essere definito come somme finite di monomi $x_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$ con numeri reali per coefficienti oppure o usando le funzioni $a: J^n \to \mathbb{R}$ tale che $a(j)=0$ trane un numero finito di $j\in J^n$:

$$p_a(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\{j=(j_1,\dots,j_n)\in J^n \mid a(j)\neq 0\}} a(j_1,\dots,j_n)x_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$$

La definizione di uno spazio vettoriale astratto:

Uno spazio vettoriale reale è un insieme V dotato di un'operazione

$$+: V\times V\to V, \qquad (u,v)\mapsto u+v$$

chiamata addizione vettoriale e un'operazione

$$\cdot: \mathbb{R}\times V\to V, \qquad (c,u)\mapsto c\cdot u \quad [\text{di solito si scrive } cu]$$

chiamata moltiplicazione scalare tale che:

(1) $u+v=v+u$ per ogni $u, v\in V$.

(2) $(u+v)+w=u+(v+w)$ per ogni $u, v, w\in V$.

(3) Esiste un elemento $0\in V$, chiamato vettore zero, tale che

$$0+u=u+0=u$$

per ogni $u\in V$

(4) Per ogni elemento $u\in V$ c'è un elemento $-u\in V$ tale che

$$u+(-u)=0$$

(5) $(rs)\cdot u=r\cdot(s\cdot u)$ per ogni $r, s\in\mathbb{R}, \quad u\in V$

(6) $(r+s)\cdot u=r\cdot u+s\cdot u$ per ogni $r, s\in\mathbb{R}, \quad u\in V$

(7) $r\cdot(u+v)=r\cdot u+r\cdot v$ per ogni $r\in\mathbb{R}, \quad u, v\in V$

(8) $1\cdot u=u$ per ogni $u\in V$

Si verifica tediosamente che tutti gli esempi di spazi vettoriali presentati finora soddisfano questi assiomi.

Esempio: Siano $V = (0, \infty)$ con

Addizione vettoriale: $u \boxplus v = uv$ moltiplicazione ordinaria
Moltiplicazione scalare: $c \cdot u = u^c$, esponenziale ordinario

Allora,
(1) $u \boxplus v = uv = v \boxplus u$
(2) $u \boxplus (v \boxplus w) = u(vw) = uvw = (uv)w = (u \boxplus v) \boxplus w$
(3) $1 \boxplus u = u \boxplus 1 = u$
(4) $u \boxplus u^{-1} = u^{-1} \boxplus u = 1$
(quindi 1 è il vettore zero in V)
(5) $(rs) \cdot u = u^{rs} = (u^s)^r = (s \cdot u)^r = r \cdot (s \cdot u)$
(6) $(r+s) \cdot u = u^{r+s} = (u^r)(u^s) = (u^r) \boxplus (u^s) = (r \cdot u) \boxplus (s \cdot u)$
(7) $r \cdot (u \boxplus v) = r \cdot (uv) = (uv)^r = u^r v^r = (u^r) \boxplus (v^r) = (r \cdot u) \boxplus (r \cdot v)$
(8) $1 \cdot u = u^1 = u$

Nota : Questo esempio si ottiene prendendo i numeri reali $\mathbb{R}$ dotati di addizione e moltiplicazione ordinaria, e applicando la mappa esponenziale $\mathbb{R} \to (0, \infty)$

Non Esempio: Gli insiemi di funzioni definite dalle condizioni di positività non sono spazi vettoriali perché non possiamo moltiplicare per -1:

In particolare, $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) > 0 \}$ non è un spazio vettoriale, perché se $f \in V$ allora $-f \notin V$

Proposizione: Se V è uno spazio vettoriale allora $c \cdot 0 = 0$ per qualsiasi scalare c.
Dimostrazione: Per (3)

$$0 + 0 = 0 \qquad (\text{lascia } u = 0)$$

Allora, per (7)

$$c \cdot (0+0) = c \cdot 0 \implies c \cdot 0 + c \cdot 0 = c \cdot 0$$

Aggiungere $-c \cdot 0$ a entrambi i lati dell'ultima equazione per ottenere:

$$c \cdot 0 = 0$$

Proposizione: Se V è uno spazio vettoriale allora $0 \cdot v = 0$ per qualsiasi vettore v.
Dimostrazione:

$$v = 1 \cdot v = (1+0) \cdot v = 1 \cdot v + 0 \cdot v = v + 0 \cdot v$$

Aggiungere $-v$ a entrambi i lati dell'ultima equazione per ottenere:

$$0 = 0 \cdot v$$

Lezione: Mappe lineari

Definizione: Che U e V siano spazi vettoriali. Allora, una funzione

$$L : U \to V$$

è detta una mappa lineare da U a V se (e solo se)
(1) $L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$ per ogni $u_1,\ u_2 \in U$.
(2) $L(cu) = cL(u)$ per ogni $c \in \mathbb{R},\ u \in U$.

Esempio: Fissa $w \in \mathbb{R}^3$ e sia

$$L_w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad L_w(u) = u \times w \qquad \text{(prodotto vettoriale con w)}$$

Per le proprietà del prodotto vettoriale:
(1) $L_w(u_1 + u_2) = (u_1 + u_2) \times w = (u_1 \times w) + (u_2 \times w) = L_w(u_1) + L_w(u_2)$
(2) $L_w(cu) = (cu) \times w = c(u \times w) = cL_w(u)$

Quindi, L_w è una mappe lineare.

Esempio: Fissa $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ e sia

$$P_w(v) = (v, w) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Se $v = (v_1, \ldots, v_n),\ v' = (v_1', \ldots, v_n')$ allora
(1)
$$\begin{aligned} P_w(v + v') &= ((v_1 + v_1', \ldots, v_n + v_n'), (w_1, \ldots, w_n)) \\ &= (v_1 + v_1')w_1 + \cdots + (v_n + v_n')w_n \\ &= [v_1w_1 + \cdots + v_nw_n] + [v_1'w_1 + \cdots + v_n'w_n] \\ &= P_w(v) + P_w(v') \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} P_w(cv) &= ((cv_1, \ldots, cv_n), (w_1, \ldots, w_n)) \\ &= (cv_1)w_1 + \cdots (cv_n)w_n \\ &= cP_w(v) \end{aligned}$$

Quindi, P_w è una mappe lineare.

Non Esempio: $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad N(v) = |v|$

$N(1,0,0) = 1, \quad N(0,1,0) = 1, \quad N(1,1,0) = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$
Quindi: $N((1,0,0) + (0,1,0)) \neq N(1,0,0) + N(0,1,0)$

Proposizione: Se $L : U \to V$ è una mappe lineare allora $L(0_U) = 0_V$
Dimostrazione:

$$L(0_U) = L(0_U + 0_U) = L(0_U) + L(0_U) \implies 0_V = L(0_U) \qquad \text{(cancella } L(0_U) \text{ da entrambi i lati)}$$

Non esempio: $L(x, y, z) = x + y + z + 1$

$L(0,0,0) = 1$ (Ma per una mappa lineare $L(0) = 0$)

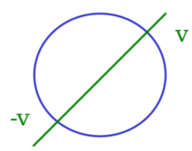
Esempio (Moltiplicazione di un vettore per uno scalare):

Per qualsiasi spazio vettoriale V e qualsiasi scalare c, la mappa

$$L(v) = cv$$

è una mappa lineare.

Casi speciali:
(a) $c = 1$ è chiamata mappa di identità, di solito denotata I o I_V.
(b) $c = -1$ è chiamata inversione:



Esempio (Mappa dell'inclusione):

Se $m \leq n$ allora

$$\iota : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \qquad \iota(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, ...0)$$

si chiama la mappa di inclusione da $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$.
(Si verifica facilmente che è una mappa lineare).

Esempio (Proiezione sulle prime n coordinate):

Se $m \geq n$ la mappa

$$\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \qquad \pi(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$$

si chiama proiezione sulle prime n coordinate.
È anche una mappa lineare.

Esempio (Proiezione da $\mathbb{R}^3$ a un piano):

Sia $P \subseteq \mathbb{R}^3$ un piano con equazione:

$$ax + by + cz = 0 \qquad \text{(E1)}$$

Supponiamo che $u = (a, b, c)$ sia un vettore unitario. Allora,

$$\pi(v) = v - (v, u)u$$

si chiama proiezione da $\mathbb{R}^3$ a P.

Per vedere che π assume valori in P, riscrivi l'equazione (E1) come

$$((x, y, z), u) = 0$$

(Continua a pagina seguente)

Allora: Perché u è un vettore unitario:

$$(\pi(v), u) = (v - (v,u)u, u) = (v,u) - (v,u)(u,u) = (v,u) - (v,u) = 0$$

Per vedere che π è una mappa lineare, si noti che:

(1) $\pi(v_1 + v_2) = (v_1 + v_2) - (v_1 + v_2, u)u = v_1 + v_2 + (v_1,u)u + (v_2,u)u$
$= [v_1 - (v_1,u)u] + [v_2 - (v_2,u)u] = \pi(v_1) + \pi(v_2)$

(2) $\pi(cv) = cv - (cv,u) = cv - c(v,u) = c(v - (v,u)) = c\pi(v)$

Nota : Se u è un vettore unitario in $\mathbb{R}^n$ [i.e. $(u,u) = 1$], si può definire la proiezione da $\mathbb{R}^n$ all'iperpiano (i.e. = id est = cioè)

$$H = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (x,u) = 0 \,\}$$

con la stessa formula $\pi(v) = v - (v,u)u$.

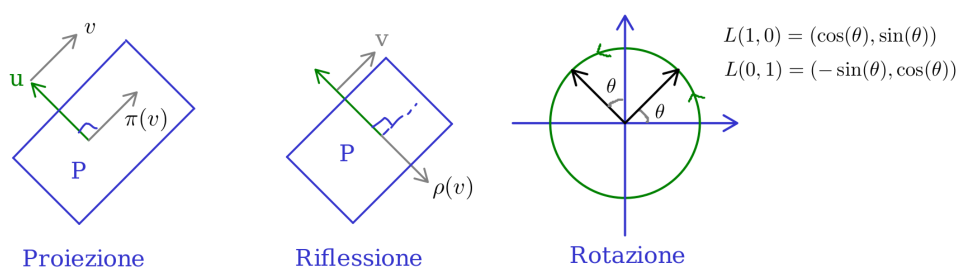
Esempio (Riflessione attraverso un piano in $\mathbb{R}^3$):

Usando la notazione dell'esempio precedente, definiamo:

$$\rho(v) = v - 2(v,u)u$$

Allora,
(i) $\rho(u) = u - 2(u,u)u = -u$
(ii) Se $v \in P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x,u) = 0\}$ abbiamo $\rho(v) = v - (v,u)u = v$

Così ρ fissa il piano P e inverte il vettore normale u. Geometricamente, ρ corrisponde alla riflessione attraverso il piano P.



Esempio: La rotazione intorno all'origine di θ gradi in senso antiorario è una mappa lineare $L_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Proposizione: Se $L : U \to V$ è una mappa lineare e $L' : V \to W$ è una mappa lineare allora $L' \circ L : U \to W$ è una mappa lineare.
Dimostrazione:

(1) $(L' \circ L)(u_1 + u_2) = L'(L(u_1 + u_2)) = L'(L(u_1) + L(u_2))$
$= L'(L(u_1)) + L'(L(u_2)) = (L' \circ L)(u_1) + (L' \circ L)(u_2)$

(2) $(L' \circ L)(cu) = L'(L(cu)) = L'(cL(u)) = cL'(L(u)) = c(L' \circ L)(u)$

In particolare, ponendo $W = V$ e lasciando che L' denoti la moltiplicazione scalare $L'(v) = cv$ segue che per qualsiasi mappa lineare $L : U \to V$ si ha

$$L' \circ L = cL$$

è una mappa lineare.

Proposizione: Se $L, L' : U \to V$ sono mappe lineari allora $L + L'$ è anche una mappa lineare da U a V.
Dimostrazione: Esercizio per gli studenti

Mappe lineari: Spazi di funzioni

Esempio: Se S è un insieme e p è un punto di S, la valutazione in p definisce una mappa lineare

$$\nu_p : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}, \qquad \nu_p(f) = f(p) \tag{E2}$$

Infatti, l'equazione (E2) definisce una mappa ν_p. Resta da dimostrare che la mappa ν_p è lineare:
(1) $\nu_p(f + g) = (f + g)(p) = f(p) + g(p)$
(2) $\nu_p(cf) = (cf)(p) = cf(p) = c\nu_p(f)$

Non Esempi (con la notazione dell'esempio precedente):

$$q_p : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}, \qquad q_p(f) = f^2(p) : \qquad q_p(2f) = (2f(p))^2 = 4f^2(p) = 4q_p(f)$$

$$s_p : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}, \qquad s_p(f + g) = (f + g)(p) + 1 = f(p) + g(p) + 1$$
$$s_p(f) = f(p) + 1 \qquad = (f(p) + 1) + (g(p) + 1) - 1 = s_p(f) + s_p(g) - 1$$

Esempio: Fissa una funzione $g \in \mathbb{R}^S$. Allora la moltiplicazione per g definisce una mappa lineare

$$m_g : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^S, \qquad (m_g(f))(s) = f(s)g(s) \tag{E3}$$

Infatti, l'equazione (E3) definisce una mappa m_g. Resta da dimostrare che la mappa m_g è lineare:
(1) Per ogni $s \in S$

$$(m_g(f_1 + f_2))(s) = ((f_1 + f_2)(s))g(s) = (f_1(s) + f_2(s))g(s)$$
$$= f_1(s)g(s) + f_2(s)g(s) = (m_g(f_1))(s) + (m_g(f_2))(s)$$

allora $m_g(f_1 + f_2) = m_g(f_1) + m_g(f_2)$

(continua, pagina seguente)

Esempio: (continua)
(2) Per ogni $s \in S$

$$(m_g(cf))(s) = ((cf)(s))g(s) = (cf(s))g(s) = cf(s)g(s) = c(m_g(f))(s)$$

Allora $m_g(cf) = c\, m_g(f)$

Spazio vettoriale polinomiale $\mathbb{R}[x]$

Ciascuno degli esempi dati nella sezione precedente si applica anche a $\mathbb{R}[x]$:

$$\nu_p : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \qquad \nu_p(f) = f(p)$$

Il prodotto di due polinomi è un polinomio, quindi se $g \in \mathbb{R}[x]$ è un polinomio fisso allora:

$m_g : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \qquad m_g(f) = fg$ è un mappe lineare

Esempio: Se $a \in \mathbb{R}$ allora la traslazione di a definisce una mappa lineare

$$\tau_a : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \qquad (\tau_a(f))(x) = f(x+a) \qquad \text{(E4)}$$

Infatti, l'equazione (E4) definisce una mappa. Resta da dimostrare che la mappa (E4) è lineare:

(1) $(\tau_a(f+g))(x) = (f+g)(x+a) = f(x+a) + g(x+a) = (\tau_a(f))(x) + (\tau_a(g))(x)$

Allora
$$\tau_a(f+g) = \tau_a(f) + \tau_a(g)$$

(2) $(\tau_a(cf))(x) = cf(x+a) = c(\tau_a(f))$

Quindi
$$\tau_a(cf) = c\tau_a(f)$$

Illustrazioni: $\tau_1(x) = x+1, \qquad \tau_1(x^2) = (x+1)^2, \qquad m_x(f) = xf(x)$

Derivate formali di polinomi:

In analisi, imparerete la definizione della derivata in termini di un limite:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Tuttavia, per le funzioni polinomiali $f \in \mathbb{R}[x]$ la derivata può essere definita come la seguente mappa lineare:

$$\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$

(1) $\frac{d}{dx}(1) = 0$

(2) $n \geq 1 \implies \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

Per le funzioni polinomiali, i due metodi danno lo stesso risultato.

Esempi:

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$\frac{d}{dx}(x^2+2x+1) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(1) = 2x+2$$

$$\frac{d}{dx}(1+x+x^2+x^3) = \frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x^3) = 1+2x+3x^2$$

Esempio (linea tangente a una curva parametrica):

Siano $x(t),\, y(t), z(t) \in \mathbb{R}[t]$. Allora

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{(E5)}$$

è una curva parametrica C (o un punto se tutte le funzioni sono costanti).

Se (E5) non è un punto, allora la forma parametrica della linea tangente a C in $t = t_o$ è

$$L(t) = r(t_o) + tr'(t_o), \qquad r'(t) = \left(\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t), \frac{d}{dt}z(t)\right) \qquad \text{(E6)}$$

presupposto nascosto $r'(t_o) \neq 0$

Illustrazione: $r(t) = (1-t^2, 2t, 1+t^2), \qquad t_o = 1$

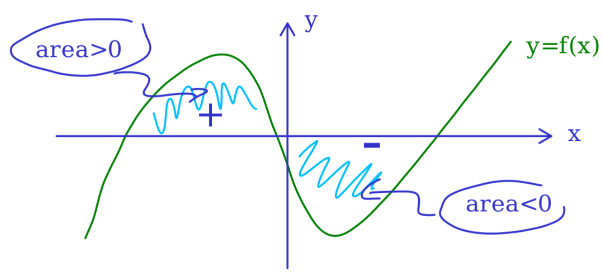
$r'(t) = (-2t, 2, 2t), \implies r'(1) = (-2, 2, 2)$

$r(1) = (0, 2, 2)$

$L(t) = (0,2,2) + t(-2,2,2)$ è la linea tangente

Integrazione formale di polinomi:

In analisi, imparerete a definire l'integrale di una funzione $f(x)$ in termini di area (con segno) sotto il grafico di $y = f(x)$



Fissa un intervallo $[a,b]$. Per funzioni polinomiali $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, l'integrazione può essere definita come la seguente mappa lineare $I : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$:

$$I(x^n) = \int_a^b x^n \, dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Esempio: $[a,b] = [0,1]$

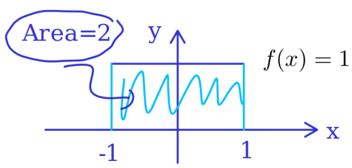
$$\int_0^1 x^n \, dx = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\int_0^1 (1 + x + x^2 + x^3) \, dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

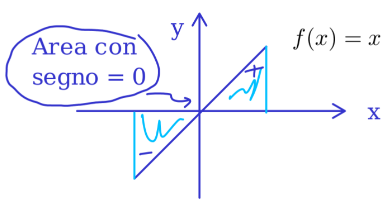
Esempio: $[a,b] = [-1,1]$

$$\int_{-1}^1 x^n \, dx = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \begin{cases} \frac{2}{n+1}, & n \text{ pari} \\ 0, & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 1 \, dx = 2$$

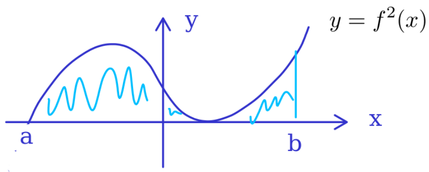


$$\int_{-1}^1 x \, dx = 0$$



A causa dell'interpretazione (o definizione) dell'integrale come area, segue che

$$\int_a^b f^2(x) \, dx > 0$$



a meno che f non sia il polinomio zero. (Oppure $a = b$, nel qual caso I è sempre zero)

Attenzione: Definire la differenziazione e l'integrazione dichiarando i loro valori sui monomi funziona solo perché
(a) La differenziazione e l'integrazione sono operazioni lineari.
(b) I monomi formano una base di $\mathbb{R}[x]$.
Torneremo più tardi sull'idea di base.

<u>La geometria dei vettori</u>

<u>Problema</u>: Come calcolare l'angolo tra due vettori in $\mathbb{R}^n$?

Siano a e b vettori che generano un piano.

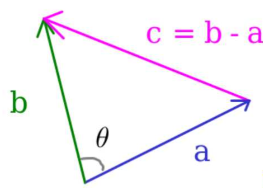


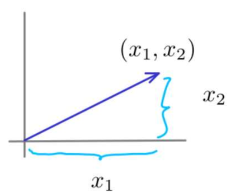
Figura 1

Legge dei coseni: Siano A, B, C rispettivamente <u>la lunghezza dei</u> vettori a, b, c. Allora:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos(\theta)$$

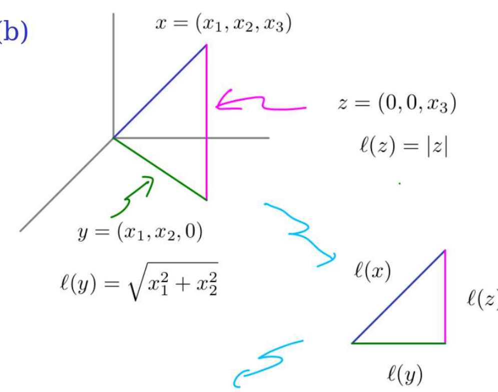
Problema secondario: Come calcolare la lunghezza del vettore $x = (x_1, \ldots, x_n)$?

(a)



$$x = (x_1, x_2) \implies \ell(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

(b)



$$\ell(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Per induzione: La lunghezza $x = (x_1, \ldots, x_n)$ uguale

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \qquad \text{(E1)}$$

Torniamo alla legge dei coseni: (Figura 1)

$$\left.\begin{array}{l} a = (a_1, \ldots, a_n), \quad b = (b_1, \ldots, b_n) \implies c = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n) \\ |a|^2 = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \qquad |b|^2 = \sum_{j=1}^{n} b_j^2 \qquad |c|^2 = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)^2 \end{array}\right\} \quad \text{(E2)}$$

Quindi:

$$|c|^2 - |a|^2 - |b|^2 = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)^2 - a_j^2 - b_j^2 = \sum_{j=1}^{n} -2a_j b_j \qquad \text{(E3)}$$

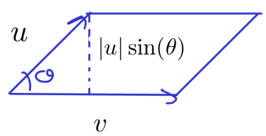
Per la legge dei coseni: $|c|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos(\theta)$

$$\implies |c|^2 - |a|^2 - |b|^2 = -2\sum_{j=1}^{n} a_j b_j = -2|a||b|\cos(\theta)$$

$$\implies \sum_{j=1}^{n} a_j b_j = |a||b|\cos(\theta) \qquad \text{(E4)}$$

Chiamiamo $(a,b) = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$ il prodotto scalare a e b.

<u>Area di un parallelogramma</u>:



$$Area = A = |u||v|\sin(\theta) \implies A^2 = |u|^2|v|^2\sin^2(\theta) = |u|^2|v|^2(1-\cos^2(\theta))$$

$$\implies A^2 = |u|^2|v|^2 - (u,v)^2$$

Se $u = (a,b)$ e $v = (c,d)$ troviamo che

$$A^2 = |u|^2|v|^2 - (u,v)^2 = (ad-bc)^2 \qquad \text{(E5)}$$

Se M è la matrice con le righe u e v, (E5) diventa

$$|\det(M)| = |\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}| = |ad-bc| = \text{Area del paralleogramma} \qquad \text{(E6)}$$

<u>Proprietà del prodotto scalare</u>

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ vettori e $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalare. Allora,
(A1) $(a+b,c) = (a,c) + (b,c), \qquad (\lambda a, c) = \lambda(a,c)$ (linearità)
(A2) $(a,b) = (b,a)$ (simmetria)
(A3) $(a,a) \geq 0, \qquad (a,a) = 0 \iff a = 0.$ (definita positiva)

Le proprietà (A1), (A2) e (A3) seguono algebricamente dalla formula per (a,b) senza ricorrere alla geometria (ad esempio la legge dei coseni).

Il teorema di Pitagora e la legge dei coseni danno (E2) e (E4):

$$(a,b) = |a||b|\cos(\theta), \qquad \text{dove per ogni vettore w}: \quad |w|^2 = (w,w)$$

Esempi: Trova l'angolo tra

(i) $u = (1, 1, 0), \quad v = (0, 1, 1)$

(ii) $u = (1, -1, 0), \quad v = (1, 1, 1)$

(iii) $u = (1, 1, 1, 1), \quad v = (1, 1, 1, 0)$

(i) $\cos\theta = \dfrac{(u, v)}{|u||v|} = \dfrac{(1)(0) + (1)(1) + (0)(1)}{(\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2})(\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2})} = \dfrac{1}{2} \implies \theta = \dfrac{\pi}{3}$

(ii) $\cos\theta = \dfrac{(u, v)}{|u||v|} = \dfrac{(1)(1) + (1)(-1) + (0)(1)}{(\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2})(\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2})} = \dfrac{0}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \implies \theta = \pi/2$

(iii) $\cos\theta = \dfrac{(u, v)}{|u||v|} = \dfrac{3}{\sqrt{4}\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \implies \theta = \dfrac{\pi}{6}$

Ortogonalità

Due vettori non nulli u e v si dicono ortogonali se e solo se l'angolo tra u e v è $\dfrac{\pi}{2}$
Equivalentemente,

$$(u, v) = 0, \qquad (u,\ v \neq 0)$$

Esempio: $u = (1, 1, 1), \quad v = (1, 2, -3)$ sono ortogonali

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

In questa sezione, usiamo solo le proprietà (1)-(3) del prodotto scalare.

Siano a e b vettori e $t \in \mathbb{R}$ un scalare. Sia

$$f(t) = (at + b, at + b)$$

Allora, per proprietà (3), per ogni t,

$$f(t) \geq 0 \tag{E7}$$

Per proprietà (1) e (2),

$$f(t) = (a, a)t^2 + 2(a, b)t + (b, b) \tag{E8}$$

Per la formula quadratica, se $At^2 + Bt + C \geq 0$ allora

$$B^2 - 4AC \leq 0 \tag{E9}$$

Siano $A = (a, a), \quad B = 2(a, b), \quad C = (b, b)$. Allora, le equazioni (E7)-(E9) implicano che

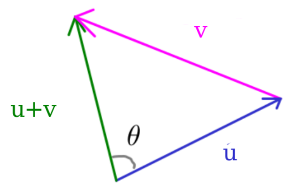
$$4(a, b)^2 - 4(a, a)(b, b) \leq 0$$

Equivalentemente,

$$|(a, b)| \leq |a||b|, \qquad |a| = (a, a)^{1/2}, \quad |b| = (b, b)^{1/2} \tag{E10}$$

L'equazione (E10) è chiamata disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Disuguaglianza triangolare: Siano u, v vettori allora $|u+v| \leq |u| + |v|$



Geometricamente, questo è solo l'affermazione che la somma della lunghezza di qualsiasi due lati di un triangolo è maggiore della lunghezza del lato rimanente.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $\Longrightarrow$ Disuguaglianza triangolare:
Dimonstrare:

$$|u+v|^2 = (u+v, u+v) = (u,u) + 2(u,v) + (v,v) = |u|^2 + 2|u||v|\cos\theta + |v|^2$$

Ricorda che $\cos\theta \leq 1$. Quindi,

$$|u+v|^2 \leq |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 = (|u| + |v|)^2$$

$$\Longrightarrow \; |u+v| \leq |u| + |v|$$

Come volevasi dimostrare

Prodotti scalari su spazi vettoriali

Sia V un spazio vettoriale reale e

$$(—,—) : V \times V \to \mathbb{R} \qquad \text{(E11)}$$

un funzione che soddisfi le proprietà (A1)-(A3). Allora, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è valida per V, perché la dimostrazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz dipende solo dalle proprietà (A1)-(A3).

La dimostrazione della disuguaglianza Triangolo dipende solo dalle proprietà (A1)-(A3), e quindi vale anche per qualsiasi spazio vettoriale reale dotato di una funzione (E11) che soddisfa le proprietà (A1)-(A3).

Definizione: Un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è una funzione (E11) che soddisfa le proprietà (A1)-(A3).

Esempio: T è un insieme finito.

$$(f,g) = \sum_{t\in T} f(t)g(t) \qquad \text{(E12)}$$

è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^T = \{\text{funzioni } h : T \to \mathbb{R}\}$:

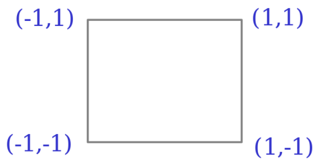
(A1) $(f+g,h) = \sum_{t\in T}(f(t)+g(t))h(t) = \sum_{t\in T} f(t)h(t) + g(t)h(t) = (f,h) + (g,h)$

(A2) $(g,f) = \sum_{t\in T} g(t)f(t) = \sum_{t\in T} f(t)g(t) = (f,g)$

(A3) $(f,f) = \sum_{t\in T} f^2(t) \geq 0, \qquad (f,f) = 0 \implies f(t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in T$

Pagina 4.

Esempio: $T =$ i vertici di un poligono $P \subseteq \mathbb{R}^2$.



$$f(x,y) = x, \quad g(x,y) = y$$

$$\begin{aligned}(f,g) &= f(1,1)g(1,1) + f(-1,1)g(-1,1) + f(-1,-1)g(-1,-1) + f(1,-1)g(1,-1) \\ &= (1)(1) + (-1)(1) + (-1)(-1) + (1)(-1) = 0\end{aligned}$$

Allora, f e g sono ortogonali.

Esempio: Sia $[a,b]$ un intervallo ($a \neq b$). Allora,

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

(f,g) è un prodotto scalare su $\mathbb{R}[x]$:

(A1) $$\begin{aligned}(f+g,h) &= \int_a^b (f+g)(x)\,h(x)\,dx = \int_a^b f(x)h(x) + g(x)h(x)\,dx \\ &= \int_a^b f(x)h(x)\,dx + \int_a^b g(x)h(x)\,dx = (f,h) + (g,h)\end{aligned}$$

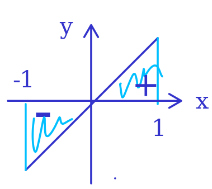
(A2) $$(cf,g) = \int_a^b cf(x)g(x)\,dx = c\int_a^b f(x)g(x) = c(f,g)$$

(A3) $$(f,f) = \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0, \qquad (f,f) = 0 \iff f = 0$$

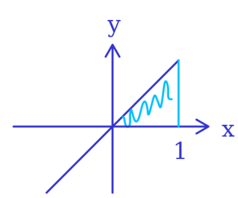
Nota: Questa costruzione funziona anche per lo spazio vettoriale delle funzioni continue (o anche leggermente discontinue) su $[a,b]$. Questo è molto importante nella teoria delle serie di Fourier.

Esempi:

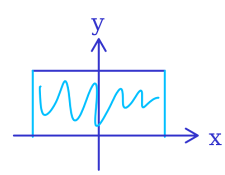
$$\left.\begin{aligned}&[a,b] = [-1,1] \implies (x,1) = \int_{-1}^1 (x)(1)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^1 = 0 \\ &[a,b] = [0,1] \implies (x,1) = \int_0^1 (x)(1)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \\ &[a,b] = [-1,1] \implies (1,1) = \int_{-1}^1 1\,dx = x|_{-1}^1 = 2\end{aligned}\right\} \quad H|_a^b = H(b) - H(a)$$



$[a,b] = [-1,1], \quad (x,1) = 0$



$[a,b] = [0,1], \quad (x,1) = \frac{1}{2}$



$[a,b] = [-1,1], \quad (1,1) = 2$

Esempio: Dopo aver imparato l'integrazione per parti in analisi, sarete in grado di dimostrare la seguente formula molto utile

$$(f, g') + (f', g) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

per il prodotto scalare $\quad (f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

Illustrazione: Caso $\quad f = g$

$$2(f, f') = (f, f') + (f', f) = f^2(b) - f^2(a)$$

oppure $\quad (f, f') = \frac{1}{2}(f^2(b) - f^2(a))$.

Questo è collegato alla conservazione dell'energia in fisica.

Lezione, Sistema di equazioni (parte 1)

Sistemi lineari e mappe lineari

Ricordiamo quanto segue dalla lezione 1: Siano $f_1, \ldots, f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni. Allora,

$$V(f_1, \ldots, f_k) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_k(x) = 0 \,\}$$

Il sistema di equazioni $V(f_1, \ldots, f_k)$ si dice lineare se (e sole se) ogni funzione ha la forma

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} x_\ell \right) - b_\ell$$

dove i coefficienti $a_{i\ell}$ e b_ℓ sono costanti. Un sistema lineare si dice omogeneo se (e sole se) ogni $b_\ell = 0$. Altrimenti, si dice che il sistema lineare è disomogeneo.

Se $V(f_1, \ldots, f_k)$ è un sistema lineare allora

$$V(h_1, \ldots, h_k), \qquad h_i(x_1, \ldots, x_n) = f_i(x_1, ..., x_n) - f_i(0, ..., 0)$$

è un sistema lineare omogeneo, che è chiamato il sistema associato di equazioni omogenee. Ogni sistema lineare omogeneo ha la soluzione

$$(0, \ldots, 0) \tag{E1}$$

Avendo introdotto il concetto di mappa lineare, possiamo ora riformulare la nozione di sistema di equazioni lineari come segue: La funzione,

$$L(x_1, \ldots, x_n) = (h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_k(x_1, \ldots, x_n)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

è una mappa lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^k$. Questo segue dal fatto che ogni funzione componente

$$h_i(x_1, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

è una mappa lineare. Poiché $f_i(x) = h_i(x) + b_i$ abbiamo che

$$V(f_1, \ldots, f_n) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid L(x) = b \,\}, \qquad b = (b_1, \ldots, b_k) \tag{E2}$$

<u>In generale</u>: Siano U e W spazi vettoriali e $f : U \to W$ sia una funzione. Allora

$$V(f) = \{u \in U \mid f(u) = 0\} \tag{E3}$$

Allora V si dice che è un sistema di equazioni lineari se

$$f(u) = L(u) - b$$

dove L è una mappa lineare e b è una costante, quindi

$$V(f) = \{u \in U \mid L(u) = b\,\} \tag{E3'}$$

Esempio: Siano $U = \mathbb{R}[x]$, $W = \mathbb{R}^3$, $L : U \to \mathbb{R}^3$, $L(p) = (p(1), p(2), p(3))$

Ricordiamo che L è una mappa lineare perché:

(a) $p,\ q \in \mathbb{R}[x] \implies L(p+q) = ((p+q)(1), (p+q)(2), (p+q)(3))$
$= (p(1)+q(1), p(2)+q(2), p(3)+q(3))$
$= (p(1), p(2), p(3)) + (q(1), q(2), q(2)) = L(p) + L(q)$

(b) $p \in \mathbb{R}[x],\ c \in \mathbb{R} \implies L(cp) = ((cp)(1), (cp)(2), (cp)(3))$
$= (cp(1), cp(2), cp(3)) = c(p(1), p(2), p(3)) = cL(p)$

Il sistema lineare

$$V(L) = \{\, p \in \mathbb{R}[x] \mid L(x) = 0 \,\}$$

è solo l'insieme dei polinomi che sono nulli in $x = 1,\ x = 2,\ x = 3$. In altre parole, $p \in V(L)$ se e solo se $(x-1),\ (x-2),\ (x-3)$ sono fattori di p.
Quindi,

$$V(L) = \{\, (x-1)(x-2)(x-3)q(x) \mid q(x) \in \mathbb{R}[x] \,\}$$

La struttura delle soluzioni di un sistema lineare

In analogia con i sistemi lineari di equazioni in $\mathbb{R}^n$, un sistema lineare

$$L(u) = b \qquad \text{(E4)}$$

si dice omogeneo se $b = 0$. Altrimenti, il sistema lineare è disomogeneo

Il sistema lineare

$$L(u) = 0 \qquad \text{(E5)}$$

è chiamato il sistema omogeneo associato di (E4).

Proposizione: Se u' è una soluzione di (E4) allora ogni soluzione di (E4) ha la forma $u + u'$ dove u è una soluzione di (E5).
Dimostrare: Supponiamo che u' sia una soluzione di (E4) e che u sia una soluzione di (E5). Allora,

$$L(u') = b, \quad L(u) = 0 \implies L(u'+u) = L(u') + L(u) = b + 0 = b$$

Quindi, $u' + u$ è una soluzione di (E4). Viceversa, supponiamo che $u',\ u''$ sono soluzione di (E4). Allora,

$$L(u'' - u') = L(u'') - L(u') = b - b = 0$$

Quindi, $u = u'' - u'$ è una soluzione di (E5) tale che $u'' = u' + u$.

Esempio: Siano $U = \mathbb{R}[x], \quad W = \mathbb{R}^3, \quad L : U \to \mathbb{R}^3, \quad L(p) = (p(1), p(2), p(3))$

Trova tutte le soluzioni del sistema lineare $L(p) = (1, 3, 6)$.

Nell'esempio precedente, abbiamo risolto il sistema associato $L(p) = 0$.
Abbiamo trovato che le soluzioni erano:

$$\{(x-1)(x-2)(x-3)q(x) \mid q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$$

Per trovare una soluzione di $L(p) = (1, 3, 6)$, possiamo usare l'interpolazione di Lagrange.

Nel nostro caso particolare, questo è stato fatto alle pagine 4 e 5 della lezione 5.
Il risultato fu:

$$p(x) = \frac{1}{2}x(x+1) \implies p(1) = 1, \quad p(2) = 2, \quad p(3) = 6$$

Perciò,

$$L(f) = (1, 3, 6) \iff f(x) = \frac{1}{2}x(x+1) + (x-1)(x-2)(x-3)q(x), \quad q(x) \in \mathbb{R}[x]$$

Matrici:

Una matrice A n per m (di solito scritto $n \times m$) è una tabella rettangolare di numeri che ha n righe e m colonne:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$ (A è una matrice 3x4) (E6)

Una matrice quadrata è una matrice che ha lo stesso numero di righe e colonne.

Una matrice Vandermonde è una matrice quadrata della forma:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \ldots & x_m^{n-1} \end{bmatrix}$$ (V è una matrice quadrata) (E7)

dove $x_1, \ldots, x_m$ sono numeri.

Spesso scriviamo $A = (a_{ij})$ dove a_{ij} è la voce che appare nella i'th riga e j'th colonna di A.

In particolare, questo ci permette di specificare una matrice dando una formula per a_{ij}.

Esempio: La matrice (E6) è data dalla formula

$$A = (a_{ij}), \qquad a_{ij} = i^{j-1}, \quad 1 \le i \le 3, \quad 1 \le j \le 4$$

La matrice (E7) è data dalla formula

$$V = (v_{ij}), \quad v_{ij} = x_i^{j-1}, \quad 1 \le i, j \le m$$

Esempio: Determinare la matrice 3x4 data dalla formula $A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = ij$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Vettori di riga e colonna

$\mathbb{R}^n$ è il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$

Un vettore riga di dimensione n è una matrice $n \times 1$:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$ Esempio: (1 2 3)

Un vettore colonna di dimensione m è una matrice $1 \times m$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$ Esempio: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Naturalmente possiamo pensare a un elemento di $\mathbb{R}^n$ come a un vettore riga di dimensione n o a un vettore colonna di dimensione n usando le mappe:

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Tuttavia, come matrici, i vettori riga e colonna sono cose diverse, tranne nel caso 1x1.

Una matrice 1x1 non è la stessa cosa di uno scalare. Questo diventerà chiaro quando definiremo la moltiplicazione di matrici in generale.

Moltiplicazione sinistra di una matrice nxm e di un vettore a colonne di dimensione m

Sia A una matrice $n \times m$ e v un vettore colonna di dimensione m. Allora, Av è il vettore colonna n dimensionale ottenuto come segue:

$$Av = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad c_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} v_k$$

Un modo di pensare a questa formula è che

$$Av = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \qquad c_i = (\vec{a}_i, \vec{v})$$

Dove $\vec{a}_i$ è l'iesima riga di A, pensata come un elemento di $\mathbb{R}^m$ e $\vec{v}$ è v pensato come un elemento di $\mathbb{R}^m$.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1+1-1 \\ 1-2+4-8 \\ 1-3+9-27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -20 \end{pmatrix}$$

La forma matriciale di un sistema lineare

Sia

$$L\underbrace{(x_1, \ldots, x_m)}_{\text{anche un vettore di colonne in } \mathbb{R}^m} = \underbrace{(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m, a_{21}x_1 + \cdots + a_{2m}x_m, \cdots, a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m)}_{\text{anche un vettore di colonne in } \mathbb{R}^n}$$

Allora,

$$L(x_1, \ldots, x_m) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{A \text{ : matrice nxm}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x \text{ : vettore collonne}}$$

Quindi, pensando agli elementi di $\mathbb{R}^n$ come vettori colonne, il sistema lineare $L(x) = b$ può essere scritto come

$$Ax = b$$

Questa è chiamata la forma matriciale del sistema lineare.

Esempio: Scrivi il seguente sistema di equazioni in forma di matrice.

$$\left\{\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=1\\ x_1+2x_2+4x_3+8x_4&=2\\ x_1+3x_2+9x_3+27x_4&=3 \end{aligned}\right. \longrightarrow \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \qquad \text{(E8)}$$

Sistemi lineari, forma a matrice aumentata:

Il sistema lineare $Ax=b$ è spesso scritto nella forma abbreviata $(A \mid b)$ dove la barra verticale è usata per separare la matrice A dal vettore di costanti b.

Esempio: L'equazione (E8) diventa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&1\\1&2&4&8&2\\1&3&9&27&3 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A}\qquad\underbrace{\quad}_{b}$$

Matrici Saclini:

Sia A una matrice qualsiasi. Per qualsiasi riga R di A, chiamiamo pivot il primo elemento non nullo della riga R. Una matrice a scalini è una matrice che ha la seguente proprietà: il pivot di ogni riga è sempre strettamente a destra del pivot della riga precedente.

$$\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&0&3&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

i pivot   i pivot

Non è una matrice a scalini   Una matrice a scalini

In particolare, se A è una matrice a scalini, allora ogni riga zero di A si verifica nella parte inferiore di A.

$$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Una matrice a scalini.
Ha due pivot e le righe zero nella parte inferiore della matrice.

Questo algoritmo è facile da usare e da capire, ma un po' disordinato da scrivere.

$\boxed{\text{Risolvere Ax=b per A una matrice a scalini.}}$

Se A è una matrice a scalini, possiamo risolvere $Ax = b$ lavorando all'indietro dal fondo della matrice aumentata $(A \mid b)$.

Passo 1: Se $(A \mid b)$ contiene una riga della forma $(0 \cdots 0 \mid b \neq 0)$, fermatevi.
Non c'è soluzione.

Infatti, tale riga corrisponde a un'equazione della forma

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b, \qquad b \neq 0$$

Notazione: Sia $A = (a_{ij})$.
Siano $A_1 = (a_{11} \ \cdots \ a_{1n}), \dots, A_k = (a_{k1} \ \cdots \ a_{kn})$ le righe non nulle di A.
Sia $\alpha_j = a_{jp_j}$ il pivot di A_j

Passo 2: Usando l'ultima riga A_k, si ha

$$x_{p_k} = (\alpha_k)^{-1} \left(b_k - \sum_{\ell > p_k} a_{k\ell} x_\ell \right)$$

Passo 3: Allo stesso modo, usando la riga A_{k-1}, si ha

$$x_{p_{k-1}} = (\alpha_{k-1})^{-1} \left(b_{k-1} - \sum_{\ell > p_{k-1}} a_{(k-1)\ell} x_\ell \right)$$

Elimina x_{p_k} usando l'equazione trovata nel passo precedente.

Passo 4: Applicare lo stesso metodo in sequenza alle righe $A_{k-2}, A_{k-3}, \dots, A_1$

Il risultato dell'algoritmo:

Chiamiamo $\{x_{p_1}, \dots, x_{p_k}\}$ le variabili dipendenti.
Chiamiamo le variabili rimanenti variabili indipendenti.

L'algoritmo descritto sopra produce una formula per le variabili dipendenti in termini di variabili indipendenti.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad (A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$

Passo 1: $(A \mid b)$ non ha righe della forma $(0 \ \cdots \ 0 \mid b \neq 0)$.
Passo 2: L'ultima riga diversa da zero di A dà $2x_4 = 4 \implies x_4 = 2$.
Passo 3: $3x_3 + 4x_4 = 2, \ x_4 = 2 \implies x_3 = (1/3)(2 - (4)(2)) = -2$.
Passo 4: $x_1 + +x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \ x_3 = -2, \ x_4 = 2 \implies x_1 = 1 - x_2 - 2(-2) - (2) = 3 - x_2$

Allora: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - x_2 \\ x_2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dove x_2 è la variabile indipendente e x_1, x_3, x_4 sono le variabili dipendenti

Pagina 7.

Lezione, Eliminazione gaussiana e Sottospazi.

Eliminazione Guassiana:

Input: Una matrice aumentata $(A \mid b)$
Output: Una matrice aumentata $(A' \mid b')$ tale che
(i) A' è una matrice scalina.
(ii) I sistemi lineari $A'x = b'$ e $Ax = b$ hanno le stesse soluzioni.

Ricordiamo dalla lezione 1 che le seguenti mosse di Gauss non cambiano l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $(A \mid b)$:

(1) Aggiungere un multiplo di una riga di $(A \mid b)$ ad un'altra riga.
(2) Moltiplicare una riga di $(A \mid b)$ per uno scalare non nullo.
(3) Riordinare le righe di $(A \mid b)$.

Psuedo Code

Input $M = (A \mid b)$ matrice aumentata con R righe e $C+1$ colonne
Variabili r, s, t (interi)

Procedure:

trova_pivot (M, r, c)
Restituisce il più piccolo $i \geq r$ tale che $M_{ic} \neq 0$. Se non c'è un tale r , restituisce -1.

elimina (M, r, c)
Usando la regola 1, rendere tutte le voci della colonna c di M sotto la riga r zero aggiungendo un multiplo adatto della riga r di M.

eliminazione_gaussiana (M, R, C)

$c \leq C$: Forse dovrai lavorare sull'ultima colonna.
$r \leq R-1$: L'algoritmo finisce quando si raggiunge l'ultima riga.

$r = c = 1$

while ($(r \leq R-1) \wedge (c \leq C)$)
{ $t =$ trova_pivot (M, r, c)
Se (t è uguale a -1) allora aumentare c di 1

La colonna è zero in corrispondenza e sotto la riga r di M. Spostare una colonna a destra.

Altrimenti
{ Se $(t \neq r)$ allora cambia le righe r e t Dobbiamo scambiare le righe
elimina (M, r, c)
aumentare r di 1
aumentare c di 1

Avendo eliminato le voci sotto la riga r nella colonna c di M, spostiamo una riga in basso e una colonna a sinistra.

}
}

Esempio: $*$ = pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Esempio:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Algoritmo per risolvere il sistema lineare $Ax = b$:

(a) Applicare l'eliminazione gaussiana alla matrice aumentata (A|b) per ottenere (A'|b').
(b) Applica l'algoritmo dato nella lezione precedente per risolvere A'x=b'.

Esempio:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Risolvere lavorando all'indietro dall'ultima riga:

$$2x_3 = 1 \implies x_3 = \frac{1}{2} \quad \Big| \quad x_2 + 3x_3 = 2 \implies x_2 = \frac{1}{2} \quad \Big| \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \implies x_1 = 0$$

Esempio:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Variabili dipendenti: $x_1, \ x_2$
Variabili indipendenti: $x_3, \ x_4$

Risolvere lavorando all'indietro dall'ultima riga:

$$x_2 + x_4 = 0 \implies x_2 = -x_4 \quad \Big| \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \implies x_1 = 1 - x_3$$

Eliminazione gaussiana per A invece di $(A \mid b)$

L'algoritmo è esattamente lo stesso della procedura per $(A|b)$. Basta rimuovere l'ultima colonna b.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Sottospazi}}$

Definizione: Sia V un spazio vettoriale. Un sottoinsieme $U \subseteq V$ e' chiamata un sottospazio di V se (e sole se):
(A1) $u, u' \in U \implies u + u' \in U$
(A2) $u \in U, \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda u \in U$

Esempio: Se V è uno spazio vettoriale, allora $\{0\}$ e V sono sottospazi di V.
Un sottospazio $U \subseteq V$ è detto proprio se $U \neq V$.

Proposizione: Se U è un sottospazio di V, allora le operazioni di addizione e moltiplicazione vettoriale per scalari su V si limitano alle operazioni su U rispetto alle quali U diventa uno spazio vettoriale.
Dimostrazione: Il punto chiave è che gli assiomi (A1) e (A2) implicano che le operazioni di addizione vettoriale e di moltiplicazione scalare su V limitano le operazioni su U.

Esempio: Sia $L : U \to V$ una mappa lineare. Allora, il nucleo o kernel

$$\ker(L) = \{u \in U \mid L(u) = 0\}$$

di L è un sottospazio di U

Infatti:
(A1) $u_1, u_2 \in \ker(L) \implies L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2) = 0 \implies u_1 + u_2 \in \ker(L)$
(A2) $u \in \ker(L), \quad c \in \mathbb{R} \implies L(cu) = cL(u) = 0 \implies cu \in \ker(L)$

Esempio: Sia $L : U \to V$ una mappa lineare. Allora, l'immagine

$$L(U) = \{L(u) \mid u \in U\}$$

di L è un sottospazio di V.

Infatti,
(A1) $v_1 = L(u_1), \quad v_2 = L(u_2) \in L(U) \implies v_1 + v_2 = L(u_1) + L(u_2) = L(u_1 + u_2) \in L(U)$
(A2) $v = L(u), \quad c \in \mathbb{R} \implies cv = cL(u) = L(cu) \in L(U)$

Esempio: Se A è una matrice $n \times m$ allora

$$\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = 0\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$ (anche chiamato lo spazio nullo di A)

Infatti, $\ker(A)$ è solo il kernel della mappa lineare $x \in \mathbb{R}^m \mapsto Ax \in \mathbb{R}^n$.

Esempio: Se A è una matrice $n \times m$ allora

$$\mathrm{Im}(A) = \{\, Ax \mid x \in \mathbb{R}^m \,\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ che è chiamato lo spazio delle colonne di A.

Chiaramente, $\mathrm{Im}(A)$ è solo l'immagine di $\mathbb{R}^m$ sotto la mappa lineare $x \mapsto Ax$

Span lineare

Sia S un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V. Allora, lo span lineare

$$\mathrm{span}(S) \subseteq V$$

di S è il più piccolo sottospazio di V che contiene ogni elemento di S.

Nella prossima lezione, definiremo $\mathrm{span}(S)$ nel caso in cui S possa avere infiniti elementi.

Per il momento, assumiamo che S sia finito.

Sia $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ e si definisca $L : \mathbb{R}^m \to V$ la mappa lineare definita dalla formula

$$L(x_1, \ldots, x_m) = x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m$$

Allora $$\mathrm{span}(S) = \mathrm{Im}(L)$$

Esempio: Sia A una matrice con righe $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Allora, lo spazio delle righe di A, scritto $r(A)$, è $\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_n)$.

Spazi vettoriali a dimensione finita

Sia V uno spazio vettoriale. Allora V è di dimensione finita se (e solo se) esiste un sottoinsieme finito $S \subseteq V$ tale che

$$\mathrm{span}(S) = V$$

posto j'th

Esempio: Siano $V = \mathbb{R}^n$ e $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ dove $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$
Allora

$$\mathrm{span}(S) = \mathbb{R}^n$$

Teorema: Se V è di dimensione finita, allora ogni sottospazio di V è anch'esso di dimensione finita.

Esempio: Sia A una matrice $n \times m$. Allora,

$$\ker(A) \subseteq \mathbb{R}^m \implies \ker(A) \text{ ha dimensione finita}$$

Allo stesso modo

$$\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathbb{R}^n \implies \mathrm{Im}(A) \text{ ha dimensione finita}$$

Infine, $$r(A) \subseteq \mathbb{R}^m \implies r(a) \text{ ha dimensione finita}$$

Base

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e S un insieme finito tale che

$$\mathrm{span}(S) = V$$

Allora, $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ si dice che è una base di V se (e solo se) ogni elemento di V ha una rappresentazione unica della forma:

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$$

Esempio: Siano $v_1 = (1, 0),\ v_2 = (0, 1),\ v_3 = (1, 1)$. Allora $\{v_1, v_2\}$ è un base di $\mathbb{R}^2$ perché

$$(x_1, x_2) = c_1 v_1 + c_2 v_2 \iff c_1 = x_1,\ \ c_2 = x_2$$

Invece, $\{v_1, v_2, v_3\}$ non è un base di $\mathbb{R}^2$ perché

$$(1, 2) = v_1 + 2v_2 = v_2 + v_3$$

Infine $\{v_1\}$ non è un base di $\mathbb{R}^2$ perché $\mathrm{span}(v_1) \neq \mathbb{R}^2$.

Algoritmo per trovare una base di $r(A)$

Sia A una matrice nxm. Applicare l'eliminazione gaussiana ad A per produrre una matrice scalina A'.

Le righe non nulle di A' sono una base di $r(A)$.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B = \{(1\ \ 2\ \ 1\ \ 3\ \ 3), (0\ \ 0\ \ -2\ \ -2\ \ -2), (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 3)\}$ è una base di $r(A)$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B = \{(1\ \ 1\ \ 1\ \ 1),\ (0\ \ 1\ \ 0\ \ 1)\}$ è una base di $r(A)$

L'algoritmo successivo afferma che una base per lo spazio delle colonne si trova applicando l'eliminazione gaussiana per trovare i pivot, e poi prendendo le colonne corrispondenti nella matrice originale.

Per la matrice A di questo esempio, vediamo che i pivot si trovano nelle colonne 1 e 2. Inoltre, le colonne 3 e 4 di A sono solo copie delle colonne 1 e 2.

$\boxed{\text{Algoritmo per trovare una base di } \mathrm{Im}(A)}$

Sia A una matrice $n \times m$. Applicare l'eliminazione gaussiana ad A per produrre una matrice scalina A'.

Diciamo che una colonna di A' è una colonna pivot se contiene un pivot di A'.

Sia $\{A_1, \ldots, A_m\}$ a indicare le colonne di A e $\{A'_1, \ldots, A'_m\}$ a indicare le colonne di A'.
Allora,

$$B = \{\, A_i \mid A'_i \text{ è una colonna pivot di } A' \,\}$$

è una base di $\mathrm{Im}(A)$.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$ è una base di $\mathrm{Im}(A)$

$\boxed{\text{Algoritmo per trovare la base di } \ker(A)}$

Sia A una matrice $n \times m$. Applica l'eliminazione gaussiana ad A per produrre una matrice scalina A'.

Ricordiamo dall'ultima lezione che, poiché A' è una matrice di scalina, abbiamo una nozione di variabili indipendenti e dipendenti.

Per ogni variabile indipendente x_i sia v_i la soluzione di $A'x = 0$ ottenuta ponendo $x_i = 1$ e tutte le altre variabili indipendenti uguali a zero.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Variabili indipendenti:
$x_2,\ x_4$

Risolvere lavorando all'indietro dall'ultima riga:

$x_5 = 0$ | $x_3 = -x_4$ | $x_1 = -2x_2 - 2x_4$

$$x_2 = 1, \quad x_4 = 0 \implies v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_2 = 0, \quad x_4 = 1 \implies v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B = \{v_2, v_4\}$ è una base di $\ker(A)$

Sottospazio ortogonale

Sia V uno spazio vettoriale reale con prodotto scalare $(—,—) : V \times V \to \mathbb{R}$.
Sia U uno sottospazio di V. Allora

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid (u,v) = 0 \text{ per ogni } u \in U\}$$

è un sottospazio di V. Infatti:
(a)
$$v \in U^{\perp} \implies (v,u) = 0 \quad \text{for all } u \in U$$
$$w \in U^{\perp} \implies (w,u) = 0 \quad \text{for all } u \in U$$

Perciò
$$(v+w,u) = (v,u) + (w,u) = 0 + 0 \quad \text{for all } u \in U$$

e quindi $v + w \in U$.

(b) $v \in U^{\perp}$, $u \in U$, $c \in \mathbb{R} \implies (cv,u) = c(v,u) = 0 \implies cv \in U^{\perp}$.

Esempio: $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0 \implies (\mathbb{R}v)^{\perp}$ è il piano passante per l'origine perpendicolare a v.

$$v = (1,1,1) \implies (\mathbb{R}v)^{\perp} = \{\, (x,y,z) \mid x+y+z = 0 \,\}$$

In generale, se $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ allora $(\mathbb{R}v)^{\perp}$ è l'iperpiano passante per l'origine perpendicolare a v .

Esempio: Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado inferiore a 3 nella variabile x, dotato del prodotto scalare

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$$

Sia $v = 1 + x + x^2$. Allora,

$$(a+bx+cx, 1+x+x^2) = \int_{-1}^{1} (a+bx+cx^2)(1+x+x^2)\, dx = \frac{2}{15}(20a+5b+8c)$$

Perciò, $(\mathbb{R}(1+x+x^2))^{\perp} = \{\, a+bx+cx^2 \mid 20a+5b+8c = 0 \,\}$.

Algoritmo per trovare il complemento ortogonale:

Input: Una base $\{a_1, \ldots, a_k\}$ per un sottospazio $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
Output: Una base per il complemento ortogonale $U^{\perp}$ di U rispetto al prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n : (u,v) = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$.

Passo 1 : Scrivi ogni come a_i un vettore di riga $(a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in})$ rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^n$.
Passo 2: Sia A la matrice composta dai vettori di riga costruiti nel passo 1.
Passo 3: $U^{\perp}$ è il kernel di A sotto l'identificazione

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \ker(A) \leftrightarrow (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

Lezione: Span lineare, Indipendenza lineare, Base, Dimensione

Span Lineare:

Lemma: Siano U e U' sottospazi di V. Allora $U \cap U'$ è un sottospazio di V.
Dimostrazione:
(i) $u_1,\, u_2 \in U \cap U' \implies u_1,\ u_2 \in U$ e $u_1,\ u_2 \in U'$.
$u_1,\ u_2 \in U \implies u_1 + u_2 \in U$ (perché U è un sottospazio)
$u_1,\ u_2 \in U' \implies u_1 + u_2 \in U'$ (perché U' è un sottospazio)

Quindi $u_1 + u_2 \in U \cap U'$

(ii) $u \in U \cap U' \implies u \in U$ e $u \in U' \implies cu \in U$ e $cu \in U' \implies cu \in U \cap U'$
Come volevasi dimostrare

Più in generale, l'intersezione di una collezione arbitraria di sottospazi di V è anche un sottospazio di V per lo stesso argomento.

Lemma: Sia A un insieme. Per ogni $\alpha \in A$, sia U_α un sottospazio di V. Allora anche

$$W = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$$

è un sottospazio di V.
Dimostrazione: Un esercizio per gli studenti.

Definizione: Sia S un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V. Sia $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ l'insieme di tutti i sottospazi di V che contengono S. Allora,

$$\operatorname{span}(S) = \cap_{\alpha \in A} U_\alpha$$

Attenzione: V è un sottospazio di V. Il caso $\operatorname{span}(S) = V$ è importante.

Nota: In termini semplici, $\operatorname{span}(S)$ è il più piccolo sottospazio di V che contiene S.

Esempio: Sia $S = \{1, x, x^2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}[x]$. Allora $\operatorname{span}(S) = \mathbb{R}[x]$

Infatti, $\operatorname{span}(S)$ deve contenere ogni monomio x^m e quindi ogni somma finita

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

poiché i sottospazi sono chiusi sotto la presa di somme finite.

Esempio: $\operatorname{span}(\emptyset) = \{0\}$

Infatti, $\{0\}$ contiene $\emptyset$ e quindi $\operatorname{span}(S) \subseteq \{0\}$. Poiché $\{0\}$ è il più piccolo spazio vettoriale (ricordiamo che ogni spazio vettoriale deve contenere 0), dobbiamo avere $\operatorname{span}(\emptyset) = \{0\}$.

Notazione: Se S è un insieme, allora una combinazione lineare di elementi di S è una somma finita $\sum a_j v_j$ dove ogni $v_j \in S$ e ogni $a_j \in \mathbb{R}$

Somma finita significa che è una somma di un numero finito di vettori

Esempio: Sia $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ dove ogni componente di e_i è zero, tranne l'iesimo posto, che è uguale a 1. Allora

$$\mathrm{span}(S) = \mathbb{R}^n$$

poiché $(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Per essere chiari, per n=3:

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1)$$

Per ripetere: Se un sottospazio U contiene l'insieme S allora $\mathrm{span}(S) \subseteq U$.

Esempio: $S = \{1, x^2, x^4, \dots\} \implies \mathrm{span}(S) \neq \mathbb{R}[x]$ perché $x \notin \mathrm{span}(S)$.

Esempio: Se $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ è un insieme finito che contiene almeno un elemento, allora

$$\mathrm{span}(S) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{(E1)}$$

Lo studente deve verificare che questo è un sottospazio di V.

Infatti: Sia U il lato destro dell'equazione (E1). Allora $S \subseteq U$ e quindi

$$\mathrm{span}(S) \subseteq U$$

Viceversa, ogni sottospazio che contiene S deve contenere anche U poiché i sottospazi sono chiusi sotto la presa di somme finite.

Osservazione: Finché si lavora solo con insiemi finiti di elementi, si può adottare (E1) come definizione operativa di span, a condizione che si accetti che una somma vuota di elementi sia zero (cioè $\mathrm{span}(\emptyset) = \{0\}$)

Indipendenza lineare

Sia S un sottoinsieme finito di uno spazio vettoriale V. Allora S è linearmente indipendente se
(i) $S = \emptyset$ oppure
(ii) $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k v_k = 0 \implies a_1 = 0,\ a_2 = 0, \dots, a_n = 0$

altrimenti, diciamo che S è linearmente dipendente.

Esempio:
(a) $S = \{(1,0), (0,1), (1,1)\} \implies \mathrm{span}(S) = \mathbb{R}^2$ perché $\mathrm{span}((1,0),(0,1)) = \mathbb{R}^2$
Tuttavia, S non è linearmente indipendente perché

$$(1,0) + (0,1) - (1,1) = (0,0)$$

Nota: Siano S e S' sottoinsiemi di un sottospazio U. Se $S \subseteq S'$ e $\mathrm{span}(S) = U$ allora $\mathrm{span}(S') = U$. Infatti: S' è un sottoinsieme di U, e U è un sottospazio. Quindi $\mathrm{span}(S') \subseteq U$. D'altra parte $S \subseteq S'$ quindi $\mathrm{span}(S) \subseteq \mathrm{span}(S')$. Quindi

$$U = \mathrm{span}(S) \subseteq \mathrm{span}(S') \subseteq U \implies \mathrm{span}(S') = U$$

(continua, pagina seguente)

(b) $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3,4)$, $v_3 = (1,4,9,16)$ è linearmente indipendente perché

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0 \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Applicare l'eliminazione gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 15 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0 \implies (a_1, a_2, a_3) = (0,0,0)$

Per determinare $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ consideriamo il kernel della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 15 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\implies \ker(A) = \operatorname{span}(v_4), \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per la definizione del kernel, $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ consiste nei vettori che sono perpendicolari a $(-1, 3, -3, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_1, v_4) \\ (v_2, v_4) \\ (v_3, v_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usando l'elminazione gaussiana, possiamo anche verificare che $(-1, 3, -3, 1) \notin \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & -3 \\ 1 & 4 & 16 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \\ \boxed{0 \;\; 0 \;\; 0} & \boxed{20} \end{array}\right)$$

Omettere i passi intermedi

$\implies$ nessuna soluzione

(c) $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $v_4 = v_1 + v_2$

Un tale insieme è sempre linearmente dipendente.
$\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ poiché l'ultimo vettore è ridondante.

(d) $S = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$, $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3,4)$, $v_3 = (1,4,9,16)$, $v_4 = (-1,3,-3,1)$ è linearmente indipendente perché

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 = 0 \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & -3 \\ 1 & 4 & 16 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(continua, pagina seguente)

Applicare l'eliminazione gaussiana:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 9 & -3\\ 1 & 4 & 16 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 2 & -10\\ 0 & 0 & 6 & -10\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 2 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 20\end{pmatrix}$$

Quindi $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0 \implies (a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 0, 0)$

Per determinare $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ consideriamo il kernel della matrice:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 9 & 16\\ -1 & 3 & -3 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 8 & 15\\ 0 & 4 & -2 & 2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & -10 & -10\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 20\end{pmatrix} \qquad \implies \ker(A) = 0 \implies \operatorname{span}(S) = (\ker(A))^{\perp} = \mathbb{R}^4$$

<u>Definizione</u>: Sia S un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V. Allora S è linearmente indipendente se (e solo se) ogni sottoinsieme finito di S è linearmente indipendente.

<u>Proposizione</u>: Se S è linearmente indipendente allora ogni sottoinsieme $S' \subseteq S$ è linearmente indipendente.
<u>Dimostrazione</u>: Un insieme finito di S' è un insieme finito di S. Qualsiasi insieme finito di S è linearmente indipendente.

In particolare, se S è un insieme finito non è necessario considerare tutti i sottoinsiemi di S per verificare l'indipendenza lineare di S.

<u>Esempio:</u> $\{1, x, x^2, \ldots, \} \subset \mathbb{R}[x]$ è linearmente indipendente.

Sia $J = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Ricordiamo che un polinomio è dato da una funzione $P : J \to \mathbb{R}$ tale che

$$\{j \in J \mid P(j) \neq 0\}$$

è un insieme finito. Il monomio x^m è la funzione:

$$\mu_m : J \to \mathbb{R}, \qquad \mu_m(j) = \begin{cases}1 & j = m\\ 0 & j \neq m\end{cases}$$

Se $\{x^{m_1}, \ldots, x^{m_\ell}\} \subseteq \mathbb{R}[x]$ è un insieme finito e

$$\sum_{k=1}^{\ell} a_k x^{m_k} = \sum_{k=1}^{\ell} a_k \mu_{m_k} = 0 \qquad \text{(E2)}$$

allora $a_1 = 0,\ a_2,\ \ldots,\ a_\ell = 0$. Informalmente, questa è solo l'affermazione che il polinomio è zero se e solo se tutti i suoi coefficienti sono zero. Più formalmente, (E2) è una funzione $J \to \mathbb{R}$. Un elemento dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^J$ è zero se e solo se valuta a zero in ogni $j \in J$. Valutando (E2) in $\{m_1, \ldots, m_\ell\}$ si vede che (E2) è zero se e solo se $a_1 = 0,\ a_2,\ \ldots,\ a_\ell = 0$

<u>Pagina 4</u>.

Base:

Definizione: Sia V uno spazio vettoriale. Un insieme $B \subseteq V$ è una base di V se (e solo se)

(1) $\mathrm{span}(B) = V$

(2) B è linearmente indipendente.

Esempio: I vettori $e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ dati all'inizio della pagina 2 sono una base di $\mathbb{R}^n$.

Esempio: $\{1, x, x^2, \ldots\}$ è una base di $\mathbb{R}[x]$.

Esempio: Sia $P_n[x]$ l'insieme di tutti i polinomi di grado minore o uguale a n. Allora $P_n[x]$ è uno spazio vettoriale con base $B = \{1, \ldots, x^n\}$.

Sia $J = \{0, 1, 2 \ldots\}$. Allora

$$P_n[x] = \{\, p \in \mathbb{R}^J \mid j > n \implies p(j) = 0 \,\}$$

che è un sottospazio di $\mathbb{R}^J$. In particolare, poiché $\{1, x, x^2, \ldots\}$ è linearmente indipendente, il sottoinsieme finito $\{1, x, \ldots, x^n\}$ è linearmente indipendente. Chiaramente $\mathrm{span}(B) = P_n[x]$.

Esempio: $\emptyset$ è una base di $\{0\}$.

(1) $\mathrm{span}(\emptyset) = 0$

(2) $\emptyset$ è linearmente indipendente.

Esempio: Siano n e m interi positivi. L'insieme $M_{n\times m}$ di tutte le matrici $n \times m$ è uno spazio vettoriale con base

$$B = \{\, E_{ij} \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m \}$$

E_{ij} è la matrice nxm per la quale la voce (i, j) è 1 e tutte le altre voci sono zero.

Per essere chiari: $(n = m = 2)$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio: Se S è un insieme finito allora le funzioni

$$\chi_s(t) = \begin{cases} 1, & t = s \\ 0, & t \neq s \end{cases}$$

è una base di $\mathbb{R}^S$.

Gli algoritmi per trovare una base dello spazio delle righe, dell'immagine e del kernel di una matrice sono stati dati nella lezione 9.

Ricordiamo che uno spazio vettoriale V si dice di dimensione finita se esiste un sottoinsieme finito $S \subseteq V$ tale che $\text{span}(S) = V$.

Proposizione: Uno spazio vettoriale V di dimensione finita ha una base.
Dimostrazione: Il seguente algoritmo produce una base

Nota: Questo algoritmo dimostra che se S è un insieme finito e $V = \text{span}(S)$ allora S contiene una base di V.

Sia S un insieme finito tale che $\text{span}(S) = V$. Sia $L(S)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di S linearmente indipendenti. Elenca gli elementi di $L(S)$ in base al numero di elementi che contengono e scegli un insieme B con il maggior numero di elementi. Allora B è una base di V.

Per definizione, B è linearmente indipendente. Per vedere che $\text{span}(B) = V$, sia $s \in S - B$. Allora, $T = B \cup \{s\}$ è linearmente dipendente (per la massimalità di B), quindi esistono scalari $\{a_t \in \mathbb{R} \mid t \in T\}$ tale che

$$\sum_{t \in T} a_t\, t = 0$$

Ricorda: gli elementi degli insiemi S, B, T sono vettori

Se $a_s = 0$ allora B è linearmente dipendente. Quindi, $a_s \neq 0$ da cui segue che $s \in \text{span}(B)$. Dunque

$$\text{span}(B) = \text{span}(S) = V$$

Come volevasi dimostrare

Teorema: Ogni spazio vettoriale ha una base.
Dimostrazione: Se non assumiamo la dimensionalità finita, risulta essere equivalente all'assioma della scelta nella teoria degli insiemi.

Nota: Questo non dice che possiamo trovare una base per un particolare spazio vettoriale a dimensione infinita, come $\mathbb{R}[x]$, solo che non possiamo dare una dimonstrazione per tutti gli spazi vettoriali senza l'assioma della scelta.

Non preoccuparti troppo di questo.

Proposizione: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia L un sottoinsieme linearmente indipendente di V e S un sottoinsieme di V tale che $\text{span}(S) = V$. Allora, la cardinalità di L è minore o uguale alla cardinalità di S.
Dimonstrazione: Supponiamo che S sia un insieme finito. Scrivi $S = \{s_1, \dots, s_n\}$. Supponiamo che L contenga un sottoinsieme linearmente indipendente L' con $n+1$ elementi $\{\ell_1, \dots, \ell_{n+1}\}$. Scrivi

$$\ell_i = a_{1i}s_1 + a_{2i}s_2 + \cdots + a_{ni}s_n$$

Ricordiamo che un sistema lineare in n equazioni con $n+1$ variabili ha sempre una soluzione diversa da zero. In particolare, il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ha soluzione diversa da zero. Di conseguenza,

$$c_1\ell_1 + \cdots + c_{n+1}\ell_{n+1} = (a_{11}c_1 + \cdots + a_{1(n+1)}c_{n+1})s_1 + \cdots + (a_{n1}c_1 + \cdots + a_{n(n+1)}c_{n+1})s_n = 0$$

che viola l'indipendenza lineare di L. Contraddizione.

Come volevasi dimostrare

Se F è un insieme finito sia $|F|$ denotare il numero di elementi di F.

Proposizione: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora,
(1) Ogni base di V è un insieme finito.
(2) Se B e B' sono basi di V allora $|B| = |B'|$
Dimonstrazione
(1) Poiché V è di dimensione finita, esiste un insieme finito S tale che $\mathrm{span}(S) = V$. Poiché B è linearmente indipendente, $|B| \leq |S|$.
(2) Poiché $\mathrm{span}(B) = V$ e B' è linearmente indipendente, $|B'| \leq |B|$.
Invertendo i ruoli di B e B' si ottiene $|B| \leq |B'|$. Dunque $|B| = |B'|$.
Come volevasi dimostrare

Definizione: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora, la dimensione di V, scritta $\dim V$ è il numero di elementi in qualsiasi base di V.

Esempio: $\dim \mathbb{R}^n = n$

$\dim P_n[x] = n + 1$ (polinomi di grado $\leq n$)

$\dim M_{n\times m} = nm$ (matrici nxm)

$\dim \{0\} = 0$

Se S è un insieme finito allora $\dim \mathbb{R}^S = |S|$

Se H è un iperpiano in $\mathbb{R}^n$ allora $\dim H = n - 1$

Se L è una linea allora $\dim L = 1$

Lezione: Mappe lineari come matrici.
Forme canoniche di matrici.

Matrice di una trasformazione lineare relativa a una base

Siano U e V spazi vettoriali di dimensione finita e sia $L : U \to V$ una mappa lineare.

Sia $B_U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ una base di U. Sia $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V.

Poiché B_V è una base di V, per ogni $1 \leq j \leq m$ possiamo scrivere

$$L(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{nj}v_n$$

dove la scelta dei coefficienti a_{ij} è unica.

Poiché B_U è una base di U, ogni elemento $u \in U$ può essere scritto

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_mu_m$$

dove la scelta dei coefficienti c_j è unica. Quindi,

$$L(u) = \sum_{j=1}^{m} c_j L(u_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_j a_{ij} v_i$$

In particolare, l'coefficienti di v_i in $L(u)$ è

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j$$

In altre parole, $L(u)$ può essere calcolato come il prodotto matriciale di $A = (a_{ij})$
e il vettore di coordinate c di u:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

In questo modo, ogni metodo che abbiamo sviluppato per studiare i sistemi lineari
può essere trasferito agli spazi vettoriali a dimensione finita, facendo una scelta di basi.

Si può pensare a una base come a un dizionario che traduce dallo spazio vettoriale a $\mathbb{R}^m$.

In particolare, se calcoliamo il kernel usando questo metodo, otteniamo un sottospazio di $\mathbb{R}^m$. Abbiamo poi bisogno di usare la base B_U per tradurre il risultato in U.

Allo stesso modo, se calcoliamo l'immagine usando questo metodo, il risultato è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Dobbiamo poi usare la base B_V per ritrasformare il risultato in V.
Risolvere le equazioni differenziali

.

Esempio: Sia n un numero intero non negativo. Allora, l'equazione differenziale (chiamata equazione differenziale di Legender)

$$(1-x^2)\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dx}\right)\right]-2x\frac{dp}{dx}+n(n+1)p(x)=0$$

ha una soluzione polinomiale di grado n.

Questa equazione può essere riscritta come segue:

$$L_n : P_n[x] \to P_n[x], \quad L_n(p)=(1-x^2)\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dx}\right)\right]-2x\frac{dp}{dx}+n(n+1)p(x)$$

è una mappa lineare, dove $P_n[x]$ è lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a n.

Stiamo cercando il kernel di L_n.

Per qualsiasi n particolare, possiamo trovare la soluzione usando l'eliminazione gaussiana.

Supponiamo $n=3$. Nel nostro caso $U=V=P_3[x]$. Per semplicità, selezioniamo la base: $\{1,x,x^2,x^3\}$

$$L_3(1)=12, \quad L_3(x)=10x, \quad L_3(x^2)=6x^2+2, \quad L_3(x^3)=6x$$

La matrice corrispondente è

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il kernel di questa matrice è $\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \leftrightarrow \operatorname{span}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)$

I pivot di questa matrice si trovano nelle colonne 1, 2, 3, quindi l'immagine di L_3 è generata dai primi tre elementi della base $\{1,x,x^2,x^3\}$:

$$\operatorname{Im}(L_3)=\operatorname{span}(1,x,x^2)$$

Rango di una matrice o di una mappa lineare

Definizione: Siano U e V spazi vettoriali. Sia $L: U \to V$ una mappa lineare. Allora, il rango di L è uguale alla dimensione dell'immagine di L:

$$\operatorname{rk}(k)=\dim L(U)$$

Se A è una matrice nxm, il rango di A è definito come il rango della mappa lineare associata

$$L_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \qquad L_A(x)=Ax$$

Lemma: Se U e V sono spazi vettoriali di dimensione finita e $L: U \to V$ è una mappa lineare, allora il rango di L è uguale al rango di qualsiasi matrice A che rappresenta L.

Algoritmo per calcolare il rango di A:

Passo 1: Applicare l'eliminazione gaussiana ad A' per produrre una matrice scalini A'.
Passo 2: Il rango è il numero di pivot di A'.

Esempio:

(Lezione 9, pagina 1):

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$\implies \operatorname{rk}(A) = 3$

(Lezione 9, pagina 2):

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\implies \operatorname{rk}(A) = 2$

Il rango di una matrice può essere calcolato in molti modi. Infatti i seguenti sono equivalenti:

(1) Il massimo numero di colonne linearmente indipendenti.
(2) Il massimo numero di righe linearmente indipendenti.
(3) La dimensione del sottospazio generato $(= \text{span})$ dalle colonne della matrice.
(4) La dimensione del sottospazio generato $(= \text{span})$ dalle righe della matrice.
(5) Se A è una matrice $n \times m$: $\operatorname{rk}(A) = \dim A(\mathbb{R}^m)$
Dopo la nostra discussione sulle matrici invertibili
(6) Il massimo ordine di un minore invertibile di A.

Forma Echelon vs Forma Echelon Ridotta

Poiché questo non è un corso basato sulle dimonstrazioni, non verificherò l'equivalenza di (1)-(6).

Invece, mostreremo che una matrice ha un'unica forma echelon ridotta

Algoritmo per trovare la forma echelon ridotta

Passo 1: Una matrice è in forma echelon se e solo se è una matrice scalini.

Per trasformare una matrice in forma echelon, applicare l'eliminazione gaussiana ad essa.

Passo 2: Avendo trasformato la matrice in forma echelon, possiamo semplificarla ulteriormente usando le operazioni di riga come segue:

(a) Riscala ogni pivot a 1.
(b) Se una colonna contiene un pivot, usate la riga corrispondente per eliminare tutte le voci sopra il pivot.

La definizione di forma echelon ridotta è solo una caratterizzazione dell'output di questo algoritmo:

Definizione: La matrice A è in forma echelon ridotta se:
(1) A è in forma row echelon (cioè A è una matrice scala).
(2) Ogni pivot di A è 1.
(3) Se una colonna di A contiene un pivot allora ogni altra voce in quella colonna è zero.

Esempio: Per ridurre il numero di passi, invece di applicare prima l'eliminazione gaussiana e poi semplificare la matrice risultante, non appena trovo un pivot, lo scalerò a 1 ed eliminerò tutte le voci rimanenti nella colonna (Questa modifica è chiamata metodo di Gauss-Jordan)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Equivalenti per righe

Definizione: Due matrici A, B si dicono equivalenti per righe se una si ottiene dall'altra usando le mosse di Gauss.

Teorema: Sia A una matrice. Allora, A è equivalente per righe esattamente a una matrice in forma echelon a righe ridotte, cioè la matrice ottenuta applicando ad A l'algoritmo descritto all'inizio della pagina.

.

Esempio: Le seguenti matrici sono equivalenti a righe?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow A,\ B$$ equivalenti per righe

$$C \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow C$$ non è una riga equivalente ad A o B

Teorema del rango

Teorema del rango: Sia U uno spazio vettoriale a dimensione finita e $L : U \to V$ una mappa lineare. Quindi,

$$\dim \ker(L) + \text{rk}(L) = \dim U$$

Nota: Solo la dimensione di U deve essere finita.

Esempio: $U = P_3[x],\ V = \mathbb{R}[x],\ L(p) = \dfrac{dp}{dx}$

Base per $P_3[x] = \{1, x, x^2, x^3\}, \quad \dim P_3[x] = 4$

$\ker(L) = \{\text{polinomi costanti}\} = \text{span}(1), \quad \dim \ker(L) = 1$

Teorema del rango:

$$\dim \ker(L) + \text{rk}(L) = \dim\ P_3[x] = 4 \implies \text{rk}(L) = 3$$

Questo teorema è molto importante, perché significa che date (o avendo calcolato) due delle quantità

$$\dim \ker(L), \quad \text{rk}(L) = \text{Im}(K), \quad \dim U$$

allora si può calcolare l'altra.

Esempio: Sia $W = \{\, A \in M_{n\times n} \mid tr(A) = 0\}$. Calcola la dimensione di W.

$U = M_{n\times n}, \quad L : U \to \mathbb{R}, \quad L(A) = \text{tr}(A)$

$$W = \ker(L), \quad c \in \mathbb{R} \implies tr \begin{pmatrix} c/n & & \\ & \ddots & \\ & & c/n \end{pmatrix} = c \implies \text{Im}(L) = \mathbb{R}$$

Teorema del rango

$$\dim W + \text{rk}(K) = \dim M_{n\times} = n^2,\ \text{rk}(L) = \dim\ \text{Im}(L) = 1 \implies \dim W = n^2 - 1$$

Lemma A: Siano U e V spazi vettoriali a dimensione finita e $L: U \to V$ una mappa lineare. Se $L(U) = V$ allora

$$\dim U \geq \dim V$$

Dimostrazione:

$$\dim \ker(L) + \dim \operatorname{rk}(L) = \dim U$$

Per ipotesi,

$$L(U) = V \implies \operatorname{rk}(L) = \dim \operatorname{Im}(L) = \dim V$$

Così,

$$\dim \ker(L) + \dim V = \dim U$$

Poiché $\dim \ker(L) \geq 0$ segue che

$$\dim U = \dim V + \dim \ker(L) \geq \dim V$$

Come Volevasi Dimostrare.

Lemma B: Siano U e V spazi vettorial a dimensione finita e $L: U \to V$ una mappa lineare. Se $\ker(L) = 0$ allora

$$\dim U \leq \dim V$$

Dimostrazione: Poiché $\operatorname{Im}(L)$ è un sottospazio di V: $\dim \operatorname{Im}(L) \leq \dim V$

Per il teorema del rango

$$\dim \ker(L) + \dim \operatorname{Im}(L) = \dim(U)$$

Per ipotesi, $\ker(L) = 0$. Quindi,

$$\dim U = \dim \operatorname{Im}(L) \leq \dim V$$

Come Volevasi Dimostrare

Corollario: Se U e V sono spazi vettoriali di dimensione finita tale che $\dim U > \dim V$ e $L: U \to V$ è una mappa lineare, allora $\ker(L) \neq 0$.

Dimostrazione: Ricorda che

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q) \implies (\neg P)$$

Sia P la proposizione $\ker(L) = 0$. Sia Q la proposizione $\dim U \leq \dim V$

Qual è il significato di $\ker(L) = 0$?

Ricordiamo che una funzione $f: A \to B$ si dice iniettiva se $f(a) = f(a') \iff a = a'$

Lemma: Siano U e V spazi vettoriali. Allora, una mappe lineare $L: U \to V$ è iniettiva se e solo se $\ker(L) = 0$.

Dimostrazione:

(a) Supponiamo che L sia iniettivo: L è una mappa lineare $\implies L(0) = 0$.
Per definizione, se $u \in \ker(L)$ allora $L(u) = 0$
Poiché L è iniettivo e $L(0) = 0$ segue che $L(u) = 0$ implica $u = 0$.
In altre parole: $\ker(L) = \{0\}$

(b) Supponiamo che $\ker(L) = \{0\}$: Assumiamo che $L(a) = L(a')$. Allora, $L(a - a') = 0$.
In altre parole, $a - a' \in \ker(L) = \{0\}$. Così $a = a'$, cioè L è iniettivo.

Come Volevasi Dimostrare.

$\boxed{\text{Come dimostrare il teorema del rango?}}$

Passo 1: Se M è in forma echelon ridotta il teorema è ovvio:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché M è in forma echelon ridotto, ogni colonna pivot di M contiene esattamente una voce diversa da zero. Quindi, le colonne non-pivot di M sono combinazioni lineari di colonne pivot di M. Di conseguenza, $\mathrm{Im}(M)$ è lo span lineare delle colonne pivot di M.

Per costruzione, le colonne pivot sono linearmente indipendenti. Quindi, le colonne pivot sono una base per $\mathrm{Im}(M)$.

Come abbiamo discusso, le colonne non pivot per M corrispondono alle variabili indipendenti utilizzate per costruire una base per lo spazio nullo di M.

Talmente, per una matrice in forma echelon ridotta, il teorema del rango è un modo elegante per dire:

(numero di colonne pivot) + (numero di colonne non pivot) = (numero di colonne)

Passo 2: Ricordiamo dalla nostra discussione sull'equivalenza di riga che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questo esempio illustra due fatti generali:

(a) Le operazioni sulle righe possono cambiare lo span lineare delle colonne.
(La terza voce di qualsiasi combinazione lineare di colonne di M è zero, il che non è vero per le colonne di A.)

(b) Le operazioni sulle righe non modificano le relazioni tra le colonne della matrice.
(Per entrambe le matrici, il doppio della prima colonna più 5 volte la seconda colonna è uguale alla terza colonna.)

Notazione: Se A è una matrice con forma echelon ridotta M, diciamo che una colonna c di A è una colonna base di A se la corrispondente colonna di M è una colonna pivot. Chiamiamo le colonne rimanenti di A le colonne non di base.

Per la parte (b), le colonne di base di A sono una base dello spazio delle colonne di A.

Ecco come funziona l'algoritmo per calcolare una base dello spazio delle colonne.

Isomorfismo

Definizione: Un isomorfismo tra due spazi vettoriali è una trasformazione biunivoca che sia anche lineare. Gli spazi vettoriali U e V si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo da U a V.

Esempi:

(a) $L:\mathbb{R}^{n+1}\to P_n[x], \qquad L(a_0,\ldots,a_n)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$

(b) $L:M_{n\times n}\to\mathbb{R}^{nm}, \quad L(E_{ij})=e_{m(i-1)+j}$

E_{ij} è la matrice in cui ogni voce è zero, tranne la voce (i,j) che è 1.
$\{e_1,\ldots,e_{nm}\}$ è la base standard di $\mathbb{R}^{nm}$

(c) Sia una $\sigma:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$ permutazione. Allora,

$$L_\sigma:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, \qquad L_\sigma(x_1,\ldots,x_n)=(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$$

è un isomorfismo che semplicemente riordina le voci del vettore.

(d) Sia $S=\{1,\ldots,n\}$. Allora,

$$L:\mathbb{R}^S\to\mathbb{R}^n, \quad L(a)=(a(1),a(2),\ldots,a(n))$$

è un isomorfismo.

Teorema: Sia U e V spazi vettoriali di dimensione finita. Allora U e V sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

Dimonstrazione:

(a) Sia $L:U\to V$ un isomorphismo. Poiché $L(U)=V$ segue dal Lemma A a pagina 6 che

$$\dim U\geq\dim V$$

Poiché L è iniettivo, segue dal Lemma B a pagina 6 che

$$\dim U\leq V$$

Quindi $\dim U=\dim V$.

(b) Supponiamo che $\dim U=\dim V<\infty$ e che $B=\{u_1,\ldots,u_n\}$ sia una base di U e $C=\{v_1,\ldots,v_n\}$ sia una base di V. Sia $L:U\to V$ la mappa lineare definita dalla regola

$$u=a_1u_1+\cdots+a_nu_n \implies L(u)=a_1v_1+\cdots+a_nv_n$$

(questo è ben definito poiché ogni $u\in U$ ha una rappresentazione unica della forma $u=a_1u_1+\cdots+a_nu_n$).

(i) L è surjettiva: Poiché C è una base di V, ogni $v\in V$ può essere scritto come $v=a_1v_1+\cdots+a_nv_n$. Quindi $L(a_1u_1+\cdots+a_nu_n)=v$.

(ii) L è iniettiva:

$$L(a_1u_1+\cdots+a_nu_n)=a_1v_1+\cdots+a_nv_n=0 \implies a_1=\cdots=a_n=0$$

poiché C è una base di V.

Prodotto di spazi vettoriali

Lemma: Siano U e V spazi vettoriali. Allora il prodotto cartesiano $U \times V$ è uno spazio vettoriale rispetto alle seguenti operazioni:
(a) $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$
(b) $c(u, v) = (cu, cv)$
Dimonstrazione: Esercizio per lo studente.

Esempio: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ è isomorfo a $\mathbb{R}^{n+m}$ via la mappa lineare

$$L((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_m)) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$$

Lo spazio vettoriale $U \times V$ è chiamato il prodotto diretto di U e V.

Chiaramente,

$$\dim(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \dim(\mathbb{R}^{n+m}) = n + m = \dim(\mathbb{R}^n) + \dim(\mathbb{R}^m)$$

Lo stesso vale per qualsiasi coppia di spazi vettoriali di dimensione finita

$$\dim U \times V = \dim U + \dim V$$

Esercizio: Verificare che $\dim U \times V = \dim U + \dim V$

In relazione a questo esercizio, notiamo che abbiamo le seguenti mappe lineari utili:

$$\begin{aligned} i_U &: U \to U \times V, \quad i_U(u) = (u, 0), \\ i_V &: V \to U \times V, \quad i_V(v) = (0, v), \\ \pi_U &: U \times V \to U, \quad \pi_U(u, v) = u, \\ \pi_V &: U \times V \to V, \quad \pi_V(u, v) = v, \end{aligned}$$

La mappa i_U (risp. i_V) si chiama inclusione di U (risp. V) in $U \times V$. Si possono usare per costruire una base di $U \times V$ da una base di U e una base di V. La mappa π_U (risp. π_V) si chiama proiezione da $U \times V$ (risp. V).

La somma di sottospazi

Siano U e W due sottospazi di V. Indicando con $U + W$ il sottospazio somma di U e W dato da:

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, \ w \in W\}$$

Ovviamente abbiamo una mappa lineare suriettiva

$$L : U \times W \to U + W, \quad L(u, w) = u + w \qquad \text{(E1)}$$

Algoritmo per trovare una base di U+W:

Per i sottospazi di $\mathbb{R}^n$, l'equazione (E1) fornisce un metodo semplice per trovare una base di $U + W$. Sia B_U (risp. B_W) un insieme di vettori colonna che formano una base di U (risp. W). Sia M la matrice le cui colonne sono costituite dalle colonne di B_U e B_W. Allora, $U + W$ è l'immagine di M, quindi applichiamo semplicemente l'algoritmo per trovare una base dello spazio delle colonne alla matrice M.

(identificando $\mathbb{R}^3$ con vettori colonna tridimensionali per risparmiare spazio)

Esempio: $U = \text{span}((1,1,1),(1,2,4)), \quad W = \text{span}((1,3,9),(1,4,16))$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \implies \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $U + W$

$U = \text{span}((1,1,1,0),(1,1,0,1)), \qquad W = \text{span}((0,0,1,1),(1,1,1,1))$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $U + W$

$\boxed{\text{Formula di Grassmann:}}$

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Per verificare la formula di Grassmann, usiamo la mappa lineare (E1) e il teorema del rango

$$\dim \ker(L) + \dim \text{Im}(L) = \dim U \times W = \dim U + \dim W$$

Poiché L è una mappa lineare suriettiva, questa equazione diventa

$$\dim \ker(L) + \dim(U+W) = \dim U + \dim W$$

Infine,

$$(u,w) \in \ker L \iff u + w = 0 \iff \underset{\in U}{u} = \underset{\in W}{-w} \Rightarrow u \in U \cap W$$

Di conseguenza, u (e quindi w) sono elementi di $U \cap W$. Viceversa, se $u \in U \cap W$ allora

(i) $(u, -u) \in U \times W$

(ii) $(u, -u) \in \ker(L)$

Quindi, $\ker(L)$ è isomorfo a $U \cap W$ via la mappe lineare

$$u \in U \cap W \mapsto (u, -u) \in \ker(L)$$

Così,

$$\dim(U \cap W) + \dim(U+W) = \dim U + \dim W$$

Esempio: Tornando all'esempio precedente, abbiamo

(a) $U = \text{span}((1,1,1),(1,2,4)), \quad W = \text{span}((1,3,9),(1,4,16))$

$\implies \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2 + 2 - 3 = 1$

(b) $U = \text{span}((1,1,1,0),(1,1,0,1)), \qquad W = \text{span}((0,0,1,1),(1,1,1,1))$

$\implies \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2 + 2 - 3 = 1$

Nota: Nella parte (a), U e W sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$, quindi $\dim(U+W) = 3$ implica che $U + W$ è $\mathbb{R}^3$. Nella parte (b), $U + W$ è un sottospazio a 3 dimensioni di $\mathbb{R}^4$.

Algoritmo per trovare una base di $U \cap W$

Se U è il kernel di una matrice A $\ell \times m$ e W è il kernel di una matrice B $n \times m$ allora $U \cap W$ è il kernel della matrice ottenuta dall'unione delle righe di A e B.

Esempio: $U = \ker\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\right)$, $W = \ker\left(\begin{pmatrix}1 & 4 & 9\end{pmatrix}\right)$

$$U \cap W = \ker\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9\end{pmatrix}$$

Algoritmo di Zassenhaus

Input: $B_U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base di vettori riga per un sottospazio U di $\mathbb{R}^m$

$B_W = \{w_1, \ldots, w_\ell\}$ una base di vettori riga per un sottospazio W di $\mathbb{R}^m$

Sia $M = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{B_U}^{m} & \overbrace{B_U}^{m} \\ \hline B_W & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, n \\ \}\, \ell \end{array}$ una matrice a blocchi.

Applicare l'eliminazione gaussiana a M:

$$\left(\begin{array}{c|c} B_U & B_U \\ \hline B_W & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} C & E \\ \hline 0 & D \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

C una base di $U+W$

D una base di $U \cap W$

Questa parte potrebbe non apparire

Esempio: $B_U = \{(1,1,1),\ (1,2,4)\}$, $B_W = \{(1,3,9), (1,4,16)\}$

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -3 & -7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 11 \end{array}\right)$$

C

D

Per verificare che $\begin{pmatrix}2 & 5 & 11\end{pmatrix}$ è un elemento di $U \cap W$, risolviamo i sistemi lineari

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 11 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_2 = 3,\ x_1 = -1 \qquad -\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\11\end{pmatrix} \checkmark$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 9 & 16 & 11 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_2 = -1,\ x_1 = 3 \qquad 3\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\11\end{pmatrix} \checkmark$$

Nota Importante: Questo algoritmo utilizza una base di vettori di riga. Per verificare la risposta usando l'eliminazione gaussiana, dobbiamo riscrivere il problema usando i vettori colonna.

(continua, pagina successiva)

In precedenza (due pagine indietro), abbiamo trovato una base per $U+W$ usando i vettori colonna.

L'algoritmo di Zassenhaus produce una base di vettori di riga semplicemente elencando tutte le righe della base per U e W in una matrice e poi applicando l'eliminazione gaussiana per produrre una base per lo spazio di riga.

Per vedere che questi due metodi producono soluzioni equivalenti, dovremo semplicemente controllare che possiamo scrivere ogni elemento di una base in termini dell'altra base.

In teoria, questo richiede di risolvere essenzialmente lo stesso sistema lineare molte volte. Tuttavia, possiamo risparmiare tempo facendo le cose in parallelo aumentando il numero di colonne della matrice aumentata:

<u>Passo 1</u>: Trasformare una base di vettori riga in una base di vettori colonna:

$$B_{U+W} = \{(1,1,1),(0,1,3),(0,0,2)\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \right\}$$

<u>Passo 2</u>: Scrivere in "parallelo" le matrici aumentate:

Altra base per $U+W$: $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix} \right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 4 & 9 \end{array}\right)$$

<u>Passo 3</u>: Applicare l'eliminazione gaussiana in "parallelo"

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 4 & 9 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Si potrebbe dividere per 2 per ottenere questo (0 0 1 0 0 1)

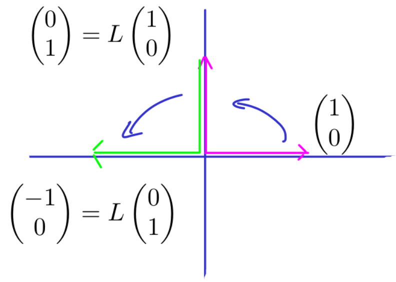
$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

Lezione 13, Algebra delle Matrici

Ricordiamo alcuni esempi:

<u>Esempio</u>: Rotazione di $\pi/2$ radianti intorno all'origine in senso antiorario:

$$L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$



La matrice di L è $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$ (E1)

<u>Esempio</u>: Supponiamo che $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ è una funzione 1-1. Sia

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{(E2)}$$

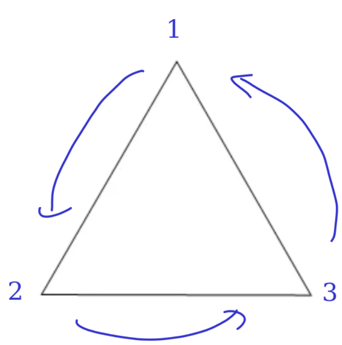
(la base canonica di $\mathbb{R}^3$). Sia A la matrice 3×3 con colonne

$$(e_{f(1)} \quad e_{f(2)} \quad e_{f(3)})$$

Allora,

$$A(e_j) = e_{f(j)}$$

<u>Esempio</u>: Considera le simmetrie dell'insieme {1,2,3} dei vertici di un triangolo equilatero

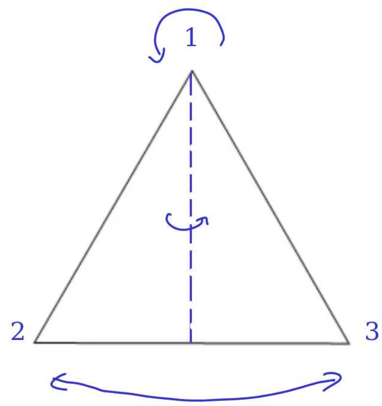


$$f(1) = 2, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 1$$

$$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{(E3)}$$

la matrice di f

(Esempio, continuato)



$$g(1) = 1, \quad g(2) = 3, \quad g(3) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(E4)}$$

la matrice di g

Fine Esempio

In generale, data una funzione

$$f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$$

abbiamo la matrice associata con colonne

$$(e_{f(1)}\ e_{f(2)}\ \cdots\ e_{f(n)}), \qquad \{e_1, \ldots, e_n\} \text{ base canonica di } \mathbb{R}^n \qquad \text{(E4*)}$$

Date due funzioni

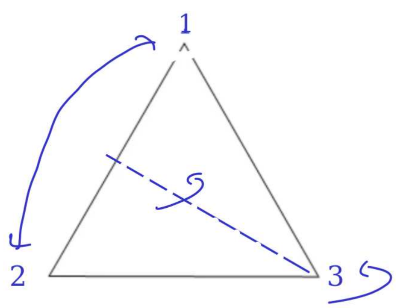
$$f,\ g : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$$

abbiamo la funzione composta

$$h(j) = (f \circ g)(j) = f(g(j)) \qquad \text{(E5)}$$

Torniamo a (E3) and (E4): La matrice (E5) della funzione composta sarà

$$h(1) = f(g(1)) = f(1) = 2, \quad h(2) = f(g(2)) = f(3) = 1, \quad h(3) = f(g(3)) = f(2) = 3$$



$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(E6)}$$

la matrice di h

Vogliamo definire moltiplicazione di matrici tali che per (E3)...(E6):

$$C = AB \tag{E7}$$

In generale, dati spazi vettoriali U, V, W di rispettive dimensioni m, ℓ, n e mappe lineari

$$\beta : U \to V, \qquad \alpha : V \to W \tag{E8}$$

con matrice B $(\ell \times m)$ e matrice A $(n \times \ell)$ relativa alle basi $\mathbf{B}_m, \mathbf{B}_\ell, \mathbf{B}_n$ per U, V, W vogliamo che

$$C = AB \tag{E9}$$

sia la matrica della funzione composta $\alpha \circ \beta$ relativa alle basi $\mathbf{B}_m, \mathbf{B}_n$.

La formula per moltiplicazione della matrice:

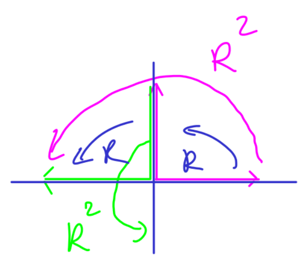
$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{jk}), \quad C = (c_{ik}) \implies c_{ik} = \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} b_{jk} \tag{E10}$$

Esempio: Per (E3), (E4), (E6):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C}$$

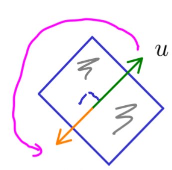
Esempio: Per (E1), rotazione di $\pi/2$ radianti intorno all'origine in senso antiorario:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{R} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{R} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{R^2}$$



Esempio: Dalla lezione 6 segue che, rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$ la riflessione sul piano $P = \{x + y + z = 0\}$ è data dalla matrice

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \implies M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

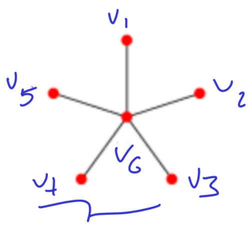
$L(v) = v, \ v \in P$

$L(u) = -u$

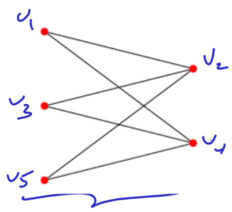
$$\left\{ \begin{array}{l} w \in \mathbb{R}^3 \implies w = \lambda u + v, \ v \in P \\ L^2(w) = L^2(\lambda u) + L^2(v) = \lambda u + v = w \end{array} \right\} ?$$

Matrice di un grafo:

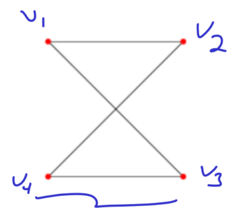
Pittorialmente, un grafo consiste un insieme V di vertici, e un insieme E di collegamenti tra i vertici:



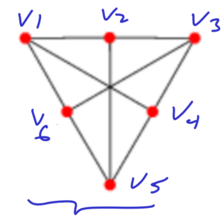
G1



G2



G3



G4

Più formalmente, definiamo un grafo essere una tripla (V,E,f), dove

$$f : E \to \{\, (x,y) \in V \times V \mid x \neq y \,\}$$

è una funzione che specifica i punti finali (vertici) dei collegamenti.

Sia $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. La matrice delle adiacenze di G=(V,E,f) è la matrice $n \times n$

$$A(V,E,f) = (a_{ij}), \qquad \begin{cases} 1, & \text{c'è un collegamento che collega } v_i \text{ e } v_j \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{E11}$$

Esempio: La matrice delle adiacenze di G1 è

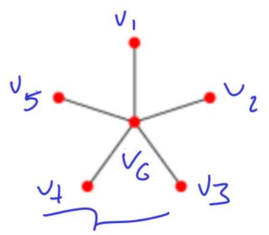
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{E12}$$

Esempio: La matrice delle adiacenze di G3 è

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{E13}$$

Teorema: Sia A la matrice adiacenza del grafo G. Allora, il coefficiente (i,j) di A^n è il numero percorsi di lunghezza n che collega v_i e v_j.
Dimostrazione: Questa è un'applicazione del principio di induzione.

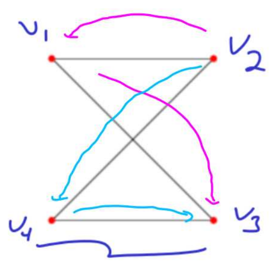
Esempio: C'è un percorso di lunghezza 2 che collega v_i e v_j min G1 per i, j < 6.
Ci sono cinque percosi di lunghezza 2 che collegano v_6 a se stesso



G1

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Esempio: Ci sono due percorsi di lunghezza 2 che collegano v_2 e v_3 in G3, come mostrato sotto:



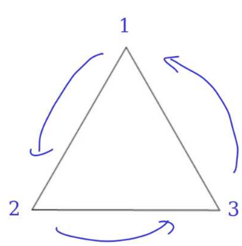
$$A_3^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La moltiplicazione delle matrici non è commutativa:

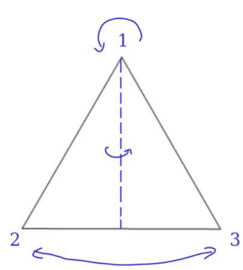
In generale, composizione delle funzioni non è commutativa (quando definita).
Lo stesso vale per la moltiplicazione di matrici.

Esempio: Torniamo alle (E3), (E4), (E6), $f \circ g \neq g \circ f$, $AB \neq BA$:

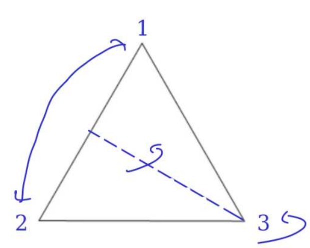
f:



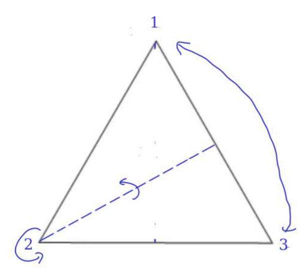
g:



f(g):



g(f):



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

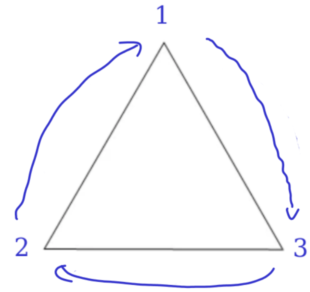
La moltiplicazione delle matrici è associativa:

Invece, la composizione delle funzioni è associativa (quando definita). Lo stesso vale per la moltiplicazione di matrici.

<u>Esempio</u>: Torniamo alle (E3), (E4), (E6):

$$(BA)B = DB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B(AB) = BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$f^{-1} = (g \circ f) \circ g = g \circ (f \circ g)$$

La somma di matrici: Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ due matrici $n \times m$. Allora,

$$A + B = C, \qquad C = (c_{ij}) \quad \text{dove} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{E14}$$

Chiaramente:

$$A + B = B + A \tag{E15}$$

La Proprietà Distributiva: Quando definiti,

$$A(B + C) = AB + AC, \qquad (A + B)C = AC + BC \tag{E16}$$

Matrici di permutazione, Matrice di Identità

Una matrice P tipo $n \times n$ è detta matrice di permutazione se è la matrice (E4*) di a permutazione $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, cioè

$$P = \begin{pmatrix} e_{f(1)} & e_{f(2)} & \cdots & e_{f(n)} \end{pmatrix}$$

La matrice della permutazione identità è chiamata matrice identità

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che se A è una qualsiasi matrice $n \times m$ allora

$$I_n A = A I_m = A$$

Matrici elementari (di Gauss)

Definizione: Una matrice elementare di Gauss è una matrice nxn ottenuta applicando una singola mosse di Gauss alla matrice identità .

Esempio: Per $n = 2$ i tipi di matrici elementari sono

(1) Aggiungi un multiplo di una riga a un'altra riga $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) Moltiplicare una riga per uno scalare diverso da zero $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$

(3) Scambia due righe $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Proprietà chiave: Sia E la matrice elementare ottenuta applicando una mossa di Gauss M alla matrice identità $n \times n$. Sia A una matrice $n \times m$. Quindi, EA è la matrice ottenuta applicando la mossa di Gauss M ad A.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + 2R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \end{pmatrix}$$

Lemma: Sia M una mossa di Gauss e M' la mossa inversa di Gauss. Siano E ed E' le matrici corrispondenti. Allora, $EE' = E'E = I_n$

Nota: E' è la matrice inversa di E, che di solito si scrive E^{-1}.

Fattorizzazione della matrice

In particolare, Sia A una matrice $n \times n$ e $M_1, \ldots, M_k$ le mosse di Gauss necessarie per trasformare A in una matrice scalina A' utilizzando l'eliminazione gaussiana.

Sia E_j la matrice elementare ottenuta applicando M_j alla matrice identità $n \times n$.
Allora,

$$E_k \cdots E_1 A = A'$$

Perciò,

$$A = E_1' \cdots E_{k-1}' E_k' A'$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 = r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 = r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 = r_4 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A' = I_4$$

Quindi:

$$M_1 = \{r_2 = r_2 + r_1\}, \quad M_2 = \{r_3 = r_3 + r_2\}, \quad M_3 = \{r_4 = r_4 + r_3\}$$

$$M_1' = \{r_2 = r_2 - r_1\}, \quad M_2' = \{r_3 = r_3 - r_2\}, \quad M_3' = \{r_4 = r_4 - r_3\}$$

$$E_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = E_1' E_2' E_3' A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice trasposta

Ricorda che la matrice trasposta A^t di una matrice A è la matrice ottenuta scambiando le righe con le colonne di A.

Segue per calcolo diretto utilizzando la formula (E10) che

$$(AB)^t = B^t A^t$$

Matrice Definita Positiva

Sia A una matrice $n \times n$ tale che $A^t = A$. Allora A si dice una matrice definita positiva se (e sole se)

$$u^t A u > 0$$

per qualsiasi vettore colonna n-dimensionale diverso da zero u.

Esercizio: Se A è definita positiva allora la formula

$$(u, v) = u^t A v$$

definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ (spazio dei vettori colonna n-dimensionali).

Una matrice A tipo $n \times n$ si dice dominante diagonalmente per righe se e solo se

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Teorema: Sia A una matrice quadrata dominante diagonalmente per righe. Se $A = A^t$ e gli elementi diagonali di A sono positivi, allora A è definita positiva.

Esempio: Se A è la matrice di un grafo G, allora $A = A^t$. Quindi, possiamo ottenere una matrice definita positiva $\widehat{A} = (\hat{a}_{ij})$ ponendo

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} 1 + \sum_{i \neq j} |a_{ij}| & i = j \\ a_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

Lezione 14: Matrice inversa, matrici simili

Ricordiamo il seguente.

(I) Siano R e S insieme finiti con lo stesso numero di elementi, e

$$f : R \to S$$

una funzione. Allora, i seguenti sono equivalenti:
(1) f è iniettiva.
(2) f è suriettiva.
(3) f è biunivoca.
(4) Esiste una funzione inversa $g : S \to R$ tale che

$$(g \circ f)(r) = r, \qquad (g \circ f)(s) = s$$

per tutti $r \in R,\ s \in S$. La funzione inversa è unica ed è indicata f^{-1}.

(II) Siano U e V spazi vettoriali a dimensione finita con la stessa dimensione, e

$$L : U \to V$$

un'applicazione. Allora, i seguenti sono equivalenti:
(1) L è iniettiva.
(2) L è suriettiva.
(3) L è biunivoca (oppure L è un isomorfismo).
(4) Esiste un'unica applicazione inversa $T : V \to U$ tale che

(5) rango(L) = dim U = dim V

$$(T \circ L)(u) = u, \qquad (L \circ T)(v) = v$$

per tutti $u \in U,\ v \in V$. La funzione inversa è unica ed è indicata L^{-1}.

Definizione: La matrice identita $n \times n$ I_n è la matrice con coefficiente (i, j) 1 se i=j e 0 altrimenti, i.e.:

$$I_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n} \Bigg\} n$$

In particolare, la matrice della funzione identita $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ è I_n. Parimenti, se U ha dimensione n, per qualsiasi scelta di base di U, la matrice della applicazione identica di U è I_n.

(I) Ricorda che se $f, g : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ sono funzioni iniettive con rispettive matrici A, B allora AB è la matrice della funzione composta f(g). In particolare, se f e g sono funzioni inversa allora

$$AB = I_n \tag{E1}$$

<u>Esempio</u>: Sia n=4,

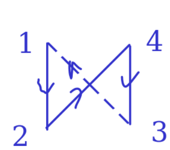
$$f(1) = 2, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 1, \quad f(4) = 3$$

Quindi

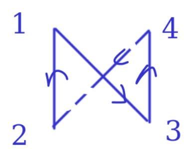
$$f^{-1}(1) = 3, \quad f^{-1}(2) = 1, \quad f^{-1}(3) = 4, \quad f^{-1}(4) = 2$$

Un diagramma di f e f^{-1}. La matrice di f e f^{-1}.

f



f^{-1}



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice di f La matrice di f^{-1}

<u>Nota</u>: Poiché $f(a) = b \iff f^{-1}(a) = b$ la matrice di f^{-1} è la trasposta A^t della matrice A di f :

$$A = (a_{ij}) \implies A^T = (\alpha_{ij}), \qquad \alpha_{ij} = a_{ji}$$

In generale, diciamo che una matrice A $n \times n$ è <u>ortogonale</u> se e solo se

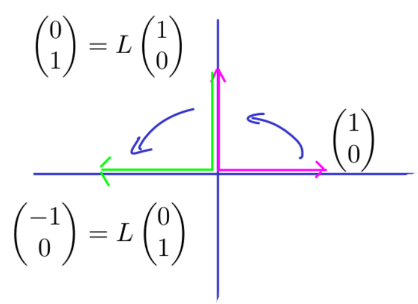
$$AA^t = I_n \tag{E2}$$

(II) Siano U e V spazi vettoriali di dimensione n, e $L : U \to V$ un'applicazione con inversa $L^{-1} : V \to U$. Sia $\mathbf{B_U}$ una base di U e $\mathbf{B_V}$ una base di V. Sia A la matrice di L rispetto a $\mathbf{B_U}$ e $\mathbf{B_V}$. Sia B la matrice di L^{-1} rispetto a $\mathbf{B_V}$ e $\mathbf{B_U}$. Allora

$$AB = I_n \tag{E3}$$

<u>Esempio</u>: Rotazione di $\pi/2$ radianti intorno all'origine in senso antiorario:

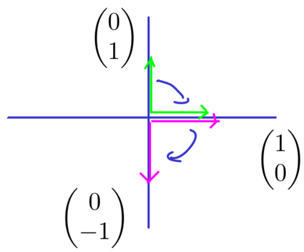
$$L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$



La matrice di L è (per la base canonica di $\mathbb{R}^2$)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rotazione di $\pi/2$ radianti intorno all'origine in senso orario è la inversa di L :



$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: A è ortogonale.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione: Se A e B sono matrici $n \times n$ tali che $AB = I_n$, diciamo che B è la matrice inversa di A.

Una matrice A $n \times n$ ha una inversa se e sole se A ha rango n. Se una matrice A ha una inversa, essa è unica e denotata A^{-1}.

Nota: Se A e B sono matrici $n \times n$ tali che $AB = I_n$ allora $BA = I_n$. Lo assumeremo senza dimostrazione.

Matrici 2x2: Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad ad - bc \neq 0$$

Allora,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \text{(E4)}$$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: Questa matrice non è ortogonale.

Procedura per trovare la matrice inversa in generale: Sia A una matrice $n \times n$.
Forma la matrice augmentata (A | I_n). Applicare le "Mosse di Gauss" ridurre A alla matrica identica:

$$(A \,|\, I_n) \xrightarrow{\text{Mosse di Gauss}} (I_n \,|\, A^{-1})$$

Pagina 3.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{E5}$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}}_{A}\middle|\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_4}\right) \xrightarrow{r_2 = r_2 + r_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 = r_3 + r_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 = r_4 + r_3} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_4}\middle|\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{matrix}}_{A}\middle|\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_4}\right) \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 = r_2 + 2r_1,\, r_3 = r_3 - r_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 = r_2 + 2r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

(Continua)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 = -r_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 = r_2 + r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 = r_3 + r_4} \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_4} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right)$$

<u>Cambio di base</u>: Supponiamo di avere trovato la matrice A di una mappa lineare

$$L : U \to U$$

relativa la base B. Supporre che dobbiamo sapere la matrice relative un'altra base B'. Potremmo trovare la matrice di L relative B' a partire da zero.

Alternativamente potremmo trovare una matrice P "traduzione" dalla base B' alla base B. Allora, la matrice A' di L relatva a B' sarà

$$A' = P^{-1}AP, \quad i.e. \quad [L]_{B'} = P^{-1}[L]_B\, P \qquad \text{(E6)}$$

Per trovare la matrice P, siano

$$B = \{u_1, \ldots, u_n\}, \qquad B' = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

Allora

$$P = (p_{ij}), \qquad v_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} u_j \qquad \text{(E7)}$$

in altre parole, la i-esima colonna di P è il vettore coordinate di v_i relativo a B.

Esempio: Sia U lo spazio vettoriale di polinomi grado minore o uguale a 3 nella variable x. Sia L = d/dx su U.   La matrice di L relativa $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice di L relativa a $B' = \{1-x, x-x^2, x^2-x^3, x^3\}$ è

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice P di cambio di basi da B' a B è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dall'equazione (E5) per l'inversa di P. Vediamo che:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A'$$

Esempio: Sia U lo spazio vettoriale di polinomi di grado minore o uguale 3 nella variable x. Sia (L(f))(x) = f(-x) su U. La matrice di L relativa a $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice di L relativa a $B' = \{1+x^2, x+x^3, 1-x^2, x-x^3\}$ è

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota: Entrambe basi B e B' hanno la stessa simmetria relativa a L. Questo spiega perché A e A' sono ugauli.

Pagina 6.

(Continua)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies P^2 = 2I_4 \implies P^{-1} = \frac{1}{2}P$$

Allora

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A'$$

Fine Esempio.

Matrici Simili.

Definizione: Due matrici quadrate A e A' sono simili quando esiste una matrice P invertible tali che

$$A' = M^{-1}AM$$

Fine definizione.

Per equazione (E6), due matrici A e A' che rappresentano la stessa applicazione L sono simili. Viceversa, due matrici A e A' sono simili solo se esiste un applicazione L e basi B, B' tali che

$$A' = [L]_{B'}, \qquad A = [L]_B$$

In particolare, matrici simili condividere le seguenti proprietà
(i) Rango
(ii) Determinante.
(iii) Autovalori.
(iv) Polinomio caratteristico.
(v) Forma canonica di Jordan (Non discusso in questo corso).

Commenti finali: Con calcolo diretto,

(1) Siano A e B matrici invertibili. Allora

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(2) Siano A e P matrici $n \times n$ con P invertibile. Allora,

$$(P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^mP$$

Lezione 15: Determinanti.

Chiamiamo

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \Pi_{i<j}\,(x_i - x_j)$$

il polinomio di Vandermonde. Sia

$$\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$$

una permutazione. Allora

$$\mathrm{e}(\sigma) = \frac{P(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})}{P(x_1, \ldots, x_n)} \qquad \text{(E1)}$$

si chiama il segno di σ. In particolare, poiche $P(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ e $P(x_1, \ldots, x_n)$ hanno gli stessi fattori a meno del segno,

$$e(\sigma) = +1 \text{ oppure } -1 \qquad \text{(E2)}$$

Esempio: Sia

$$\sigma : \{1,2\} \to \{1,2\}, \quad \sigma(1) = 2,\ \sigma(2) = 1 \qquad \text{(E3)}$$

Allora

$$P(x_1, x_2) = (x_1 - x_2), \qquad e(\sigma) = \frac{x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)}}{x_1 - x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_2} = -1 \qquad \text{(E4)}$$

Esempio: Sia $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ è la funzione identità. Allora:

$$e(\sigma) = \frac{P(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})}{P(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{P(x_1, \ldots, x_n)}{P(x_1, \ldots, x_n)} = 1 \qquad \text{(E5)}$$

Definizione: Sia S_n l'insieme di tutti le funzioni iniettive $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$. Allora,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} e(\sigma) a_{i\sigma(i)} \qquad \text{(E6)}$$

si chiama il determinante di A.

Esempio: Sia $A = (a_{ij})$ una matrice 2×2. Allora, $S_2 = \{\iota, \sigma\}$ dove ι è la funzione identità e σ è la funzione (E3). Quindi

$$\begin{aligned} \det(A) &= e(\iota) a_{1\iota(1)} a_{2\iota(2)} + e(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned} \qquad \text{(E7)}$$

L'equazione (E7) spesso si scrive così

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Esempio: Una matrice quadrata nella quale gli elementi sottostanti alla diagonale principale sono uguali a zero si dice matrice triangolare superiore.

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice trangolare superiore. Sia $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ una funzione iniettiva.

(Esercizio per studenti): Se σ non è la funzione identità allora esiste un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tali che $\sigma(i) < i$.

Osserva che (poiché A è una matrice triangolare superiore):

$$\sigma(i) < i \implies a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0 \qquad \text{(E8)}$$

Poiche σ era un elemento arbitrario di $S_n - \{\text{identità}\}$,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} e(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \qquad \text{(E9)}$$

In particolare,

$$\det(I_n) = 1, \qquad I_n = \text{matrice identità } n \times n \qquad \text{(E10)}$$

Teorema: L'equazione (E6) per $\det(A)$ è l'unica funzione $A \mapsto d(A)$ sulle matrici quadrate tale che:
(1) $d(I) = 1$ se I è la matrice identità.
(2) $d(A)$ è una funzione lineare delle righe di A.
(3) Se due righe adiacenti di A sono uguali allora $d(A) = 0$.

Il teorema implica che l'applicazione delle mosse di Guass a una matrice A abbia il seguente effetto sul determinante:
(a) Se un multiplo scalare di una riga di A viene aggiunto a un'altra riga di A, il determinante rimarrà lo stesso: $R_j \mapsto R_j + \lambda R_i$
(b) Se vengono scambiate due diverse righe di A, il determinante verrà moltiplicato per -1: $R_i \leftrightarrow R_j$
(c) Se una riga di A è moltiplicata per uno scalare s diverso da zero, il determinante verrà moltiplicato per s: $R_j \mapsto sR_j$

Corollario: Se A e B sono due matrici che sono legate da una sequenza di mosse di Gauss allora

$$\det(A) = \lambda \det(B), \qquad \lambda \neq 0 \tag{E11}$$

poiché per (a)-(c), una mossa di Gauss cambia il determiante per uno scalare diverso di zero.

Corollario: $\det(A)$ è diverso di zero se e solo se A è una matrice invertibile.

Per vedere questo, sia A una matrice $n \times n$. Nota che A può essere messa in forma triangolare superiore A' utilizzando una sequenza di mosse di Gauss. Quindi, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A') = n$ se e solo se ciascuno elemento della diagonale principale di A' è diverso da zero.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[+1]{R_2 \mapsto R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[+1]{R_3 \mapsto R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[+1]{R_3 \mapsto R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A'$$

Moltiplicatore per l'operazione.

Totale: (1)(1)(1) =1

Poiché siamo giunti da A ad A' utilizzando solo l'operazione di aggiunta di una riga a un'altra riga, e questa operazione non cambia il determinante,

$$\det(A) = \det(A') = 2$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1]{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'$$

Moltiplicatore

poiché scambiamo due diverse righe,

$$\det(A) = -\det(A') = -1$$

Nota: Una matrice quadrata può essere trasformata nella forma triangolare superiore senza utilizzare l'operazione (c)

$$R_j \mapsto \lambda R_j$$

di moltiplicazione di una riga per uno scalare diverso da zero.

Teorema: Siano A e B due matrici $n \times n$. Allora,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \qquad \text{(E12)}$$

In particolare, se A una matrice invertible allora,

$$1 = \det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A) \implies \det(A^{-1}) = 1/\det(A) \qquad \text{(E13)}$$

Teorema: Sia A una matrice quadrata. Allora,

$$\det(A^t) = \det(A) \qquad \text{(E14)}$$

Così pure se A una matrice ortogonale,

$$1 = \det(A^t A) = \det(A^t)\det(A) = \det(A)^2 \implies \det(A) = \pm 1 \qquad \text{(E15)}$$

Entrambi i teoremi possono essere dimostrati utilizzando il fatto che una matrice invertibile è prodotto di matrici elementari. [Ricorda che una matrice elementare è una matrice ottenuta applicando una mossa di Gauss alla matrice dell'identità.]

Determiante di una mappa lineare.

Supponiamo che $L : U \to U$ è una mappa lineare e la dimensione di U è finita. Sia A la matrice di L relativa la base B di U. Sia A' la matrice di L relativa una altra base B' di U. Allora esiste una matrice invertible P tale che

$$A' = P^{-1}AP \qquad \text{(E16)}$$

Quindi,

$$\det(A') = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A) \qquad \text{(E17)}$$

Così,

$$\det(L) = \det(A) = \det(A') \qquad \text{(E18)}$$

è ben definita, indipendentemente della scelta della base di U. Chiamiamo (E18) il determinante di L.

Nota: Dobbiamo avere $L : U \to U$. Il determiante di $T : U \to V$ non è ben definito, indipendentemente della scelta della base di U e V. L'equazione (E18) è ben definita solo perché $\det(P)$ e $\det(P^{-1})$ si cancellano.

Esempio: Sia U lo spazio vettoriale di polinomi grado minore o uguale a 3 nella variable x. Sia

$$L(f) = (1-x^2)\frac{d^2 f}{dx^2} - x\frac{df}{dx} + 2f$$

su U. La matrice di L relative la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Allora,

$$\det(L) = \det(A) = 28$$

Nota: Ricorda che il fattoriale è la funzione $n \mapsto n!$ sugli interi non-negativi tali che 0!=1 e

$$n! = n(n-1)\cdots(1), \qquad n \geq 1$$

L'insieme

$$S_n = \{\,\text{funzioni iniettive} : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}\,\}$$

ha n! elementi: Per costruire un elemento f di S_n, ci sono n scelte per f(1). Poiché f è iniettiva, ci sono (n-1) scelte per f(2), eccetera.

$$50! = 3.0414093201713378043612608166064768844377641568960512 \times 10^{64}$$

Di conseguenza, la definizione (E6) del determinante

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} e(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

è utile principalmente per le costruzioni teoriche. Invece, calcolare il determinate di una matrice $n \times n$ utilazzando le mosse di Gauss richiede circa $2n^3/3$ operazioni aritmetiche.

Nota: Sia $f : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ una permutazione. Sia A la matrice di f dalla lezione 13:

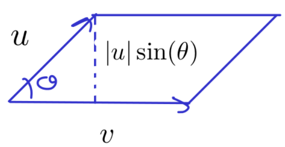
$$A(e_j) = e_{f(j)}$$

Segue direttamente dall'equazione (E6) che $\det(A) = e(f)$, il segno di f .

La geometria del determinante

Richiamo dalla lezione 7

Area di un parallelogramma:



$$Area = A = |u||v|\sin(\theta) \implies A^2 = |u|^2|v|^2\sin^2(\theta) = |u|^2|v|^2(1-\cos^2(\theta))$$
$$\implies A^2 = |u|^2|v|^2 - (u,v)^2$$

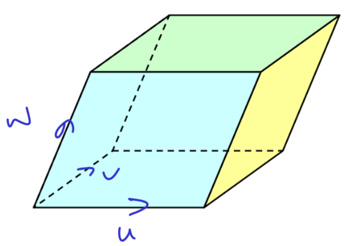
Se $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ troviamo che

$$A^2 = |u|^2|v|^2 - (u,v)^2 = (ad-bc)^2 \tag{E19}$$

Se M è la matrice con le righe u e v, (E19) diventa

$$|\det(M)| = |\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}| = |ad-bc| = \text{Area del paralleogramma} \tag{E20}$$

Volume di un parallelepipedo



$$V = \left|\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}\right| \tag{E21}$$

In generale, sia M una matrice $n \times n$ con righe $m_1, m_2, \ldots, m_n$ Allora

$$|\det(M)| = \text{“n-volume” di } \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j m_j \mid 0 \le t_j \le 1,\ j = 1, \ldots, n \right\}$$

Il risultante

Il risultante $R(p,q)$ di due polinomi

$$p(x) = p_n x^n + \cdots + p_0, \qquad q(x) = q_m x^m + \cdots + q_0$$

è il determinante della matrice $(n+m)\times(n+m)$ ottenuta iniziando dalla riga $\begin{pmatrix} p_n & \cdots & p_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ e permutandola ciclicamente m volte, seguita dalla riga $\begin{pmatrix} q_m & \cdots & q_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ che è permutata ciclicamente n volte

$$R(f,g) = \det \begin{pmatrix} p_n & \cdots & p_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_n & \cdots & p_0 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p_n & \cdots & p_0 \\ q_m & \cdots & q_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_m & \cdots & q_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q_m & \cdots & q_0 \end{pmatrix}$$

La proprietà chiave della risultante è che p e q hanno una radice comune sui numeri complessi se e solo se $R(p,q) = 0$.

<u>In altre parole</u>: Possiamo determinare se due polinomi hanno una radice comune senza cercare di fattorizzare i due polinomi!

In particolare, supponiamo che

$$f(x) = (x-r)^m q(x)$$

dove $m > 1$. Allora, $f(r) = f'(r) = 0$. Viceversa, se f non ha radici multiple, allora f e f' non hanno una radice comune.

<u>Esempio</u>: $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad f'(x) = 2ax + b, \quad a \neq 0$

$$R(f,f') = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{pmatrix}$$

Applicare l'eliminazione gaussiana:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \mapsto R_2 - 2R_1]{} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & -b & -2c \\ 0 & 2a & b \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 + \frac{2a}{b} R_2]{} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & -b & -2c \\ 0 & 0 & b - \frac{4ac}{b} \end{pmatrix}$$

$$\implies R(f,f') = -a(b^2 - 4ac)$$

Poiché $a \neq 0$, f ha una radice multipla se e solo se $b^2 - 4ac = 0$, che è esattamente ciò che dice la formula quadratica.

Lezione: Sviluppo di Laplace & La formula di Cramer.

Torniamo alla formula per il determinante della lezione 15:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} e(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \tag{E1}$$

Quando n=3, abbiamo

$$S_3 \begin{cases} \sigma_1 : 1 \mapsto 1, & 2 \mapsto 2, \quad 3 \mapsto 3, \qquad e(\sigma_1) = 1 \\ \sigma_2 : 1 \mapsto 1, & 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 2, \qquad e(\sigma_1) = -1 \\ \sigma_3 : 1 \mapsto 2, & 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 3, \qquad e(\sigma_1) = -1 \\ \sigma_4 : 1 \mapsto 2, & 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 1, \qquad e(\sigma_1) = 1 \\ \sigma_5 : 1 \mapsto 3, & 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto 2, \qquad e(\sigma_1) = 1 \\ \sigma_6 : 1 \mapsto 3, & 2 \mapsto 2, \quad 3 \mapsto 1, \qquad e(\sigma_1) = -1 \end{cases} \tag{E2}$$

Allora,

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11} \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{E3}$$

dove (lezione 15):

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Definizione: Sia A una matrice $n \times n$ con $n \geq 2$. Dato un paio di indici i e j con $1 \leq i, j \leq n$ il minore complementare C_{ij} è la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da A rimuovendo la i -esima riga e la j-esima colonna.

Esempio: Se $A = (a_{ij})$ è una matrice 3×3 allora

$$C_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{\begin{matrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix}} \\ a_{31} & & \end{pmatrix}, \qquad C_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{\begin{matrix} a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{23} \\ a_{33} \end{matrix}} \end{pmatrix}, \qquad C_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{\begin{matrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} \end{pmatrix},$$

Quindi, l'equazione (E3) diventa

$$\det(A) = a_{11} \det(C_{11}) - a_{12} \det(C_{12}) + a_{13} \det(C_{13}) \tag{E4}$$

Teorema (Sviluppo di Laplace): Sia A una matrice $n \times n$. Per ogni i fissato,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(C_{ij}) \tag{E5}$$

Esempio (confronta con la lezione 15):

Calcolare utilizzando questa riga

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 9\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 9\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$= (18-12) - (9-4) + (3-2) = 2$$

Fine

Ricorada che l'insieme di matrici $n \times n$ è un spazio vettoriale $M_{n\times n}$ di dimensione n^2 con base canonica

$$\{E_{ij} \mid 1 \le i, j \le n\}, \qquad E_{ij}(e_k) = \begin{cases} e_i & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} \tag{E6}$$

dove $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è base canonica di $\mathbb{R}^n$ (oppure $\mathbb{C}^n$). Quando $n = 2$, abbiamo

$$E_{11} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad E_{12} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad E_{21} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad E_{22} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

In generale,

$$A = (a_{ij}) \iff A = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} \tag{E7}$$

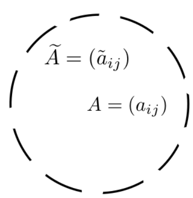
Quindi,

$$\det : M_{n\times n} \to \mathbb{R} \text{ (oppure } \mathbb{C}), \qquad \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} e(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

è una funzione polinomiale dei coefficienti (a_{ij}) di A. Come tale, $\det$ è una funzione differenziabile dei coefficienti. Allora, $\det$ è una funzione continua dei coefficienti. In particolare,

$$\det(A) \neq 0 \implies \det(\widetilde{A}) \neq 0$$

per tutte le matrici $\widetilde{A}$ "vicino ad" A.



$\widetilde{A}$ vicino a A:

$$\sum_{i,j} (\tilde{a}_{ij} - a_{ij})^2 < \epsilon$$

Domanda: Se $\det(A) \neq 0$ è $\widetilde{A} \mapsto (\widetilde{A})^{-1}$ una funzione differenziabile dei coefficienti di $\widetilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$?

Nota: Se la risposta è si, allora la soluzione

$$x = (\widetilde{A})^{-1} b$$

di $\widetilde{A}x = b$ è una funzione derivabile dei coefficienti di $\widetilde{A}$ e b per $\widetilde{A}$ vicino a A.

Pagina 2.

Teorema: Sia A una matrice invertible. Sia (come nello Sviluppo di Laplace)

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{E8}$$

la matrice ottenuta da A rimuovendo la i -esima riga e la j-esima colonna. Allora,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \det(C_{ji}) E_{ij} \tag{E9}$$

($\det(C_{ji})E_{ij}$ non è un errore)

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \implies C_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{22}), \qquad C_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{21})$$

$$C_{21} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{12}), \qquad C_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11})$$

Allora,

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \det(A) = 1$

$$C_{11} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{12} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{13} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(C_{11}) = 1, \qquad \det(C_{12}) = 0 \qquad \det(C_{13}) = 0$$

$$C_{21} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{22} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{23} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(C_{21}) = x, \qquad \det(C_{22}) = 1 \qquad \det(C_{23}) = 0$$

$$C_{31} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{32} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{33} = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(C_{31}) = xy - z, \qquad \det(C_{32}) = y \qquad \det(C_{33}) = 1$$

$$\implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & xy - z \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pagina 3.

In particolare, poiché i minori complementari C_{ij} sono funzioni polinomiali dei coefficienti, ne consegue per (E9) che

$$\det(A) \neq 0 \implies \widetilde{A} \mapsto (\widetilde{A})^{-1}$$

è una funzione derivabile dei coefficienti di $\widetilde{A}$ per $\widetilde{A}$ vicino a A.

Definizione: Sia A una matrice quadrata. Allora $\mathrm{Cof}(A)$ è la matrice con coeifficienti

$$\mathrm{Cof}(A)_{ij} = (-1)^{i+j}\det(C_{ij}) \qquad \text{(E10)}$$

dove C_{ij} è definito da (E9).

Con questa notazione, le equazioni (E5) e (E9) diventano

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{Cof}(A)_{ij}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{Cof}(A))^t \qquad \text{(E11)}$$

Queste formule sono più utili per i calcoli teorici. Come abbiamo visto, esse implicano che $A \mapsto A^{-1}$ è una funzione derivabile dei coefficienti.

Esempio: Sia A una matrice quadrata con coeifficienti interi. Allora A^{-1} è una matrice con coeifficient interi se e solo se $\det(A) = \pm 1$.

Osservazione Importante: Sia B una matrice quadrata con coefficienti interi. Allora, ogni termine del'equazione (E1) è un intero. Quindi $\det(B)$ è un intero.

Supponiamo che A e A^{-1} siano matrici con coeifficienti interi. Allora, $\det(A)$ e $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ sono interi. Quindi $\det(A) = \pm 1$.

Supponiamo che A sia una matrice quadrata con coeifficienti interi e $\det(A) = \pm 1$. Allora, ogni matrice C_{ij} ha coeifficienti interi. Quindi $\mathrm{Cof}(A)$ è una matrice con coeifficienti interi. Allora, A^{-1} è una matrice con coeifficienti interi per equazione (E11).

Esempio: Sia A una matrice $n \times n$ con coefficienti interi e $\det(A) = \pm 1$. Sia b un vettore in $\mathbb{R}^n$ con componenti intere. Allora, $x = A^{-1}b$ è un vettore con componenti intere.

Teorema (Regola di Cramer). Se $\det(A) \neq 0$ il sistema $Ax = b$ ha un'unica soluzione x, data da

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}, \qquad \text{per ogni componente di } x \qquad \text{(E12)}$$

dove B_i indica la matrice ottenuta sostituendo la i-esima colonna di A con b.

Dimostrazione: Facendo uso dell'identità $\det(M^t) = \det(M)$ e dello Sviluppo di Laplace vediamo che

$$\det(B_i) = \det(B_i^t) = \sum_{j=1}^{n} (B_i^t)_{ij} \mathrm{Cof}(B_i^t)_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathrm{Cof}(A^t)_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathrm{Cof}(A)_{ji} \qquad \text{(E13)}$$

Allora, per l'equazione (E11)

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} (A^{-1})_{ij} b_j = \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{Cof}(A))_{ij}^t b_j = \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cof}(A)_{ji} b_j = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}$$

Come volevasi dimostrare. (La dimostrazione non si porta all'esame)

Anche la regola di Cramer è più utile per i calcoli teorici.

Esempio: Considera una sistema lineare della forma

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

Se $ad - bc \neq 0$ la regola di Cramer implica che

$$u_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} -\alpha & b & 0 & 0 \\ -\beta & d & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & a & b \\ -\delta & 0 & c & d \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}} = \frac{-(\alpha d - \beta b)(ad - bc)}{(ad - bc)^2} = -\frac{\alpha d - \beta b}{ad - bc}$$

Un problema tipico nel calcolo multivariabile è calcolare le derivata di z e w rispetto a x e y se $x,\ y,\ z$ e w soddisfano le equazioni $f(x, y, z, w) = 0$ e $g(x, y, z, w) = 0$. Questo produce un sistema lineare della forma:

$$\begin{pmatrix} f_z & f_w & 0 & 0 \\ g_z & g_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_z & f_w \\ 0 & 0 & f_z & f_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x \\ w_x \\ z_y \\ w_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_x \\ g_x \\ f_y \\ g_y \end{pmatrix}$$

Lezione: Spazi vettoriali complessi

Numeri complessi: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ come un spazio vettoriale reale, dotato della seguente operazione di moltiplicazione vettoriale:

$$(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc) \tag{E1}$$

Meno formalmente, se scriviamo $1 = (1,0)$, $i = (0,1)$ allora $\mathbb{C} = \{a + b\,i \mid a,\, b \in \mathbb{R}\}$ dove $a + ib = a1 + ib = (a,b)$ e

$$\begin{cases} (a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc) \\ (a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d) \end{cases} \tag{E2}$$

Proprietà: $z_1,\, z_2,\, z_3 \in \mathbb{C}$, $0 = (0,0)$

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3. $z_1 z_2 = z_2 z_1$
4. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
5. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$
6. $z_1 + 0 = z_1$, $(z_1)(1) = z_1$
7. $\forall z_1\ \exists!\ -z_1$ tale che $z_1 + (-z_1) = 0$
8. $\forall z_1 \neq 0\ \exists!\ (z_1)^{-1}$ tale che $z_1 (z_1)^{-1} = 1$

Proprietà 7: Chiaramente $-(a+ib) = (-a) + i(-b)$

Proprietà 8: Si trova che,

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}, \quad \text{se } (a,b) \neq (0,0) \tag{E3}$$

Coniugazione complessa: $\overline{a+ib} = a - ib$ (E4)

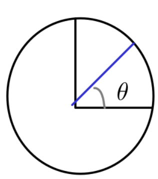
Valore assoluto (anche detto norma): $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ (E5)

Proprietà:

9. $|\overline{a+ib}| = |a+ib|$
10. $|z|^2 = z\bar{z}$
11. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
12. $|z_1 \pm z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Nota: Proprietà 10 implica $z = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$, $z \neq 0$

Forma Polare: Se $|x+iy| = 1$ allora $x + iy = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. La quantità θ è ben definita a meno di multipli interi di 2π.



$(x,y) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$

$x + iy = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

In generale, se $|z| = r \neq 0$ allora $z/|z|$ ha valore assoluto 1. Quindi $z/|z| = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Insomma:

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \tag{E6}$$

Chiamiamo (E6) la forma polare di z.

Esempio Chiave:

$$(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))(\cos(\beta)+i\sin(\beta)) = (\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta))+i(\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)$$
$$= \cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

Quindi,

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = r_1(\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1)) \\ z_2 = r_2(\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2)) \end{array}\right\} \implies z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)) \qquad \text{(E7)}$$

Formula di de Moivre: $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

Esempio: Dato un intero positivo n le soluzioni dell'equazione $z^n = 1$ sono chiamate le radici n-essime dell'unità. Chiarmente

$$z^n = 1 \implies |z|^n = 1 \implies |z| = 1 \implies z = \cos(\theta)+i\sin(\theta)$$

Allora

$$z^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta) = 1 \implies \cos(n\theta) = 1, \quad \sin(n\theta) = 0$$

Quindi $n\theta = 2\pi m$ per qualche intero m. Poiché $z^n = 1$ ha n soluzioni, vediamo che

$$z = \cos(2\pi k/n)+i\sin(2\pi k/n), \qquad k = 0,\ldots,n-1 \qquad \text{(E8)}$$

è la lista completa delle radici n-essime dell'unità.

Esempio: Le radici terze dell'unità sono $z = \cos(0)+i\sin(0) = 1$ e

$$z = \cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi i/3) = \frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z = \cos(4\pi/3)+i\sin(4\pi/3) = \frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nota che

$$z^n = 1 \implies (\bar{z})^n = \overline{z^n} = \bar{1} = 1$$

(Ricorda: Le radici complesse di un polinomio con coefficienti reali vengono in coppie coniugate)

Formula di Eulero: Per ogni numero reale θ, $e^{i\theta} = \cos(\theta)+i\sin(\theta)$. In particolare, l' equazione (E7) diventa:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \implies z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

e l'equazione (E8) è $z = e^{2\pi i k/n}, \quad k = 0,\ldots,n-1$.

Polinomi:

Formalmente, un polinomio con coefficienti complessi è una mappa $f:\{0\}\cup\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ tale che $\{n \mid f(n)\neq 0\}$ è un insieme finito.

L'addizione polinomiale è definita dalla regola: $(f+g)(n)=f(n)+g(n)$.

La moltiplicazione polinomiale è definita dalla regola:

$$(f*g)(n)=\sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k)$$

La mappa f corrisponde a un polinomio $p_f(z)$ nel senso usuale della regola

$$p_f(z)=\sum_{\{k:f(k)\neq 0\}} f(k)z^k, \qquad p_f(z)+p_g(z)=p_{f+g}(z), \qquad p_f(z)p_g(z)=p_{f*g}(z)$$

Il grado $\deg(f)$ di $f\neq 0$ è il massimo dei valori di n tale che $f(n)\neq 0$.

Teorema fondamental dell'algebra: Sia f un polinomio non costante con coefficienti reali o complessi di grado $n\geq 1$. Allora, f ha esattamente n radici sui numeri complessi, quando contate con molteplicità.

In altre parole, sia

$$f(x)=f_nx^n+\cdots+f_0, \quad f_n\neq 0 \implies f(x)=f_n(x-r_1)\cdots(x-r_n) \tag{E9}$$

Se il fattore $(x-\lambda)$ appare k volte nell'equazione (E9), diciamo che λ è una radice di f con molteplicità k. Allora, λ è una radice di f con molteplicità k se e solo se

$$f(x)=(x-\lambda)^k g(x), \qquad g(\lambda)\neq 0$$

Polinomio caratteristico:

Sia A una matrice $n\times n$ con numeri reali o complessi come voci. Allora, il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(t)=\det(tI_n-A) \tag{E10}$$

Esempio:

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix} \implies p_A(t)=\det\begin{pmatrix}t-2&-3\\-1&t-2\end{pmatrix}=t^2-4t+1$$

Lemma: Se A e B sono matrici simili allora $p_A(t)=p_B(t)$.
Dimostrazione:

$$A=C^{-1}BC \implies tI_n-A=tI_n-C^{-1}BC=C^{-1}(tI_n-B)C$$
$$\therefore\ p_A(t)=\det(tI_n-A)=\det(C^{-1}(tI_n-B)C)=\det(CC^{-1}(tI_n-B))=p_B(t)$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\implies p_A(t) = t^2 - 4t + 1, \qquad p_B(t) = t^2 - 4t - 1$$

Dunque, A e B non sono matrici simili.

Si potrebbe sperare che viceversa, se due matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico, allora sono simili. L'esempio seguente dimostra che questo non è vero:

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \implies p_A(t) = p_B(t) = t^2$$

Se A e B sono simili allora esiste una matrice C tale che $B = C^{-1}AC$. Tuttavia, poiché A è la matrice identità, $C^{-1}AC = A$. Quindi $B = A$, che è falso.

In somma:
(i) Se A e B sono simili, allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.
In particolare, se due matrici hanno polinomi caratteristici diversi non sono simili
(ii) Il viceversa (matrici con lo stesso polinomio caratteristico sono simili)
non è vero.

Polinomio caratteristico di una mappa lineare: Sia U uno spazio vettoriale a dimensione finita e $L: U \to U$ sia una mappa lineare. Sia A (risp. A') la matrice di L rispetto ad una scelta di base B (risp. B') di U. Allora, A e A' sono matrici simili, quindi $p_A(t) = p_{A'}(t)$.

Si definisce il polinomio caratteristico di L essere il polinomio caratteristico di A che rappresenta L dopo la scelta di una base per U.

Esempio: $U = P_1[x], \quad L(p) = x\frac{dp}{dx} + p(x)$

$$B = \{1, x\} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ è la matrice di L}$$

$$p_L(t) = p_A(t) = (t-1)(t-2)$$

Teorema di Hamilton-Cayley: Sia A una matrice quadrata con polinomio caratteristico $p(t)$. Allora $p(A) = 0$.
Dimostrazione: Questo può essere dimostrato usando idee simili allo sviluppo di Laplace.

Per chiarire:

$$p(t) = p_n t^n + \cdots + p_1 t + p_0 \implies p(A) = p_n A^n + \cdots + p_1 A + p_0 A^0, \qquad A^0 = I$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \implies p_A(t) = t^2 - 4t + 1$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \implies A^2 - 4A + I = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ (voci reali o complesse). Per $i = 1, \ldots, n$ sia

$$R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

e sia

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq R_i\}$$

Ciascuno di questi dischi è chiamato disco di Gershgorin di A.

Il seguente risultato fornisce la posizione approssimativa delle radici del polinomio caratteristico:

<u>Teorema del cerchio di Gershgorin</u>: Sia A una matrice quadrata con polinomio caratteristico p. Allora, ogni radice di p è contenuta in almeno uno dei dischi di Gershgorin di A.

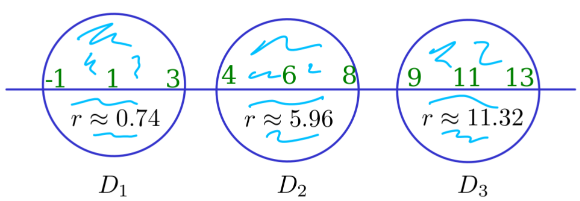
Questo teorema può essere migliorato come segue:

<u>Teorema</u>: Supponiamo che S sia l'unione di k dischi di Gershgorin di A e che S' sia l'unione di $n-k$ dischi di Gershgorin di A. Se S e S' sono disgiunti allora S contiene k radici di p_A e S' contiene $n-k$ radici di p_A.

In particolare, un disco Gershgorin che è disgiunto da ogni altro disco Gershgorin contiene una radice del polinomio caratteristico.

<u>Esempio:</u> Verificare che il polinomio caratteristico della seguente matrice ha tre radici distinte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \implies R_1 = R_2 = R_3 = 2$$



Ogni disco è disgiunto dal resto, e quindi contiene esattamente una radice del polinomio caratteristico.

Spazi vettoriali complessi:

In analogia con gli spazi vettoriali reali (gli oggetti che abbiamo studiato finora), uno spazio vettoriale complesso è un insieme V dotato di due operazioni:
(i) Addizione vettoriale

$$V \times V \to V, \qquad (u, v) \mapsto u + v$$

(ii) Moltiplicazione per scalari complessi.

$$\mathbb{C} \times V \to V, \qquad (c, v) \mapsto c \cdot v \quad (\text{di solito scritto})\ cv$$

Queste due operazioni devono soddisfare gli 8 assiomi dello spazio vettoriale elencati a pagina 5 della lezione 5, dove gli scalari reali sono sostituiti con scalari complessi.

<u>Pagina 5</u>.

Esempi di base di spazi vettoriali complessi:

(1) $\mathbb{C}^n$, $(z_1, \ldots, z_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (z_1 + w_1, \ldots, z_n + w_n)$

$c(z_1, \ldots, z_n) = (cz_1, \ldots, cz_n)$

$\text{Base} = \{e_1, \ldots, e_n\}, \quad e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$

(2) Polinomi con coefficienti complessi $\mathbb{C}[z]$, $\text{Base} = \{1, z, z^2, \ldots\}$

(3) $P_n[z]$ = Polinomi con coefficienti complessi e grado minore o uguale a n (incluso lo zero)

$\text{Base} = \{1, z, \ldots, z^n\}$

(4) $M_{n\times m} =$ matrici $n \times m$ con coefficienti complessi. Addizione e moltiplicazione scalare componente per componente, proprio come $\mathbb{C}^n$.

$\text{Base} = \{E_{ij} \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\}$

(Ogni voce di E_{ij} è zero tranne il posto (i,j) che è 1.)

(5) S è un insieme. $\mathbb{C}^S = \{\text{ funzioni } f : S \to \mathbb{C}\}$

Se S è un insieme finito, allora le funzioni indicatrici

$$\chi_s(t) = \begin{cases} 1, & t = s \\ 0, & t \neq s \end{cases}$$

formano una base $\{\chi_s \mid s \in S\}$ di $\mathbb{C}^S$.

Ogni parte del corso che abbiamo discusso finora e che utilizza solo gli assiomi di uno spazio vettoriale si applica agli spazi vettoriali complessi.

Esempi: Sottospazi, span, indipendenza lineare, base, dimensione, eliminazione gaussiana, gli algoritmi per trovare una base per lo spazio riga, immagine e kernel, il teorema del rango, prodotti di spazi vettoriali, la formula di Grassmann, la somma di sottospazi e l'algoritmo di Zassehaus.

Cosa non è valido (senza modifiche): Tutto ciò che coinvolge il prodotto scalare.

Ingenuamente,

$$((1, i), (1, i)) = 1^2 + i^2 = 0$$

Quindi, tutto ciò che abbiamo fatto (ad esempio la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) che richiede $(v, v) \ge 0$ e $(v, v) = 0$ se e solo $v = 0$ fallisce per gli spazi vettoriali complessi.

Per risolvere questo problema, introduciamo la nozione di prodotto hermitiano.
(pagina seguente)

L'esempio base di un prodotto hermitiano è $\mathbb{C}^n$ dotato della mappa

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad \langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = z_1 \bar{w}_1 + \cdots + z_n \bar{w}_n$$

Con questa scelta, si ha:

(A1) $$\begin{aligned} \langle u + v, w \rangle &= \langle (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle \\ &= \langle (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle \\ &= (u_1 + v_1)\bar{w}_1 + \cdots + (u_n + v_n)\bar{w}_n \\ &= (u_1 \bar{w}_1 + \cdots + u_n \bar{w}_n) + (v_1 \bar{w}_1 + \cdots + v_n \bar{w}_n) \\ &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda u, w \rangle &= \langle \lambda (u_1, \dots, u_n), (w_1, \dots, w) \rangle \\ &= \lambda u_1 \bar{w}_1 + \cdots + \lambda u_n \bar{w}_n = \lambda \langle u, w \rangle \end{aligned}$$

(A2) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ a causa di:

$$\begin{aligned} \overline{\langle v, u \rangle} &= \overline{v_1 \bar{u}_1 + \cdots + v_n \bar{u}_n} \\ &= \bar{v}_1 u_1 + \cdots + \bar{v}_n u_n = \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

Nota: Ciò implica che $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\langle \lambda v, u \rangle} = \overline{\lambda \langle v, u \rangle} = \bar{\lambda} \overline{\langle v, u \rangle} = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle$

(A3) $\langle z, z \rangle = \langle (z_1, \dots, z_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 \geq 0$

$\langle z, z \rangle = 0 \iff z = 0$

Adottiamo queste tre condizioni come assiomi di un prodotto hermitiano.

Norm. Se V è uno spazio vettoriale complesso dotato di un prodotto hermitiano definiamo:

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0$$

Teorema (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz): Se V è uno spazio vettoriale complesso dotato di un prodotto hermitiano allora:

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u||v|$$

(e l'uguaglianza implica che un vettore è un multiplo scalare dell'altro)

Teorema (Disuguaglianza del Triangolo): Sia V uno spazio vettoriale complesso dotato di un prodotto hermitiano. Allora,

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

Per via di questi due teoremi:

(a) Possiamo definire gli angoli usando la solita formula

$$\langle u, v \rangle = |u||v| \cos \theta, \qquad (u \neq 0,\ v \neq 0)$$

(b) La funzione norma soddisfa le seguenti condizioni:

(N1) $|v| \geq 0, \qquad |v| = 0 \iff v = 0$

(N2) $|\lambda v| = |\lambda||v|, \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ v \in V$

(N3) $|u + v| \leq |u| + |v|$

Le condizioni (N1)-(N3) sono gli assiomi di una norma su uno spazio vettoriale complesso. È spesso più facile costruire una norma che un prodotto hermitiano

Esempio:

$$v \in \mathbb{C}^n, \quad \|(v_1, \dots, v_n)\| = \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\}$$

(N1): $\|v\| = \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\} \geq 0, \quad \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\} = 0 \implies v = 0$

(N2): $\|\lambda v\| = \max\{|\lambda v_1|, \dots, |\lambda v_n|\} = \lambda \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\} = |\lambda| \|v\|$

(N3): $\|u + v\| = \max\{|u_1 + v_1|, \dots, |u_n + v_n|\} \leq \max\{|u_1|, \dots, |u_n|\} + \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\}$
$= \|u\| + \|v\|$

Esempio: $v \in \mathbb{C}^n, \quad \|(v_1, \dots, v_n)\| = |v_1| + \cdots + |v_n|$

Trasposta Coniugata: Sia A una matrice nxm allora A^* è la matrice mxn

$$A^* = (\bar{A})^t, \qquad (a_{ij})^* = (\alpha_{ij}), \quad \alpha_{ij} = \bar{a}_{ji}$$

Lemma: Rispetto al prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$,

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = z_1 \bar{w}_1 + \cdots + z_n \bar{w}_n$$

Abbiamo

$$\langle Au, v \rangle = \langle v, A^* u \rangle$$

Lezione: Autovalori e Autovettori

Il problema di Fibonacci:

Supponiamo che:

(i) Iniziamo con un coniglio maschio e uno femmina.
(ii) I conigli sono in grado di accoppiarsi all'età di un mese.
Alla fine del secondo mese una femmina può produrre un'altra coppia di conigli.
(iii) I conigli non muoiono mai.
(iv) La femmina ne produce sempre una nuova coppia (un maschio, una femmina) ogni mese dal secondo in poi.

Quanti coppia conigli ci saranno doppo 6 mesi, 7 mesi, eccetera?

coppie:	$1 \longrightarrow$	$1 \longrightarrow$	$2 \longrightarrow$	$3 \longrightarrow$	$5 \longrightarrow$	$8 \longrightarrow$	$13 \longrightarrow$	$21 \longrightarrow$	$34 \longrightarrow$	$\cdots$
mese:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	

Osserviamo che: I numero di coppie ogni mese è uguale alla somma del numero di coppie dei due mesi precedenti

Nel linguaggio delle matrici:

$$\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n \\ C_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad C_n = \#\text{coppie dopo n mesi}$$

Quindi,

$$\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} C_7 \\ C_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Un problema più generale:

Sia A una matrice quadrata. Come calcolare la k-esima potenza di A?

(i) Caso più semplice: A è una matrice diagonale:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \tag{E1}$$

(ii) Prossimo caso: A è simile ad una matrice diagonale.

$$A = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} B^{-1} \implies A^k = B \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} B^{-1} \tag{E2}$$

Nota: Se A è simile ad una matrice diagonale via B, le colonne di B formano un base

$$\{b_1, \ldots, b_n\} \tag{E3}$$

Tale che $Ab_j = \lambda_j b_j, \quad j = 1, \ldots, n$.

Viceversa: Se che esiste un base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ tale che $Ab_j = \lambda_j b_j$ allora A è simile ad una matrice digaonale.

Domanda: Come trovare i numeri λ e vettore v tale che $Av = \lambda v$?

Nota: Poiché dobbiamo costruire un base, ci interesa solo trovare λ tale che esistano $v \neq 0$ soddisfacenti $Av = \lambda v$

Sia I la matrice identità. Allora, l'equazione $Av = \lambda v$ può essere riscritta come

$$Av = \lambda v \iff Av = \lambda I v \iff (A - \lambda I)v = 0 \tag{E4}$$

Quindi, se $v \neq 0$ allora $A - \lambda I$ è una matrice singolare, perciò

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{E5}$$

Viceversa: Se $\det(A - \lambda I) = 0$ allora esiste $v \neq 0$ tale che $Av = \lambda v$.
In altre parole, λ è una radice del polinomio caratteristico.

Torniamo al problema di Fibonacci:

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &\implies A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &\implies \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 \end{aligned} \tag{E6}$$

Quindi, $\det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (numero aureo)

Sia $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1.6180\ldots, \qquad \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \sim -0.6180\ldots$

$$Av = \lambda_1 v_1 \implies v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ a meno di un multiplo scalare.}$$

$$Av = \lambda_2 v_2 \implies v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ a meno di un multiplo scalare.}$$

Nota: A meno di un mulitiplo scalare

$$1, \lambda_1, \lambda_1^2, \lambda_1^3, \ldots$$
$$1, \lambda_2, \lambda_2^2, \lambda_2^3, \ldots$$

sono le uniche successioni che sono entrambi aritmetice e geometriche.

Dettagli:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + (\lambda-1)R_2} \begin{pmatrix} 0 & \overbrace{1 + (\lambda-1)(-\lambda)}^{\lambda^2 - \lambda - 1 = 0} \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

(continua, pagina successiva)

Se $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ allora $Av = \lambda v$ ha la stessa soluzione come

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a meno di un multiplo scalare} \qquad \text{(E7)}$$

Sia $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dal teorema di cambiamento di base

$$A = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(facilmente verificabile via calcolo diretto)

Quindi,

$$A^n = B \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} B^{-1} \qquad B^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Perciò,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ C_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} B \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\lambda_2 \\ \lambda_1 - 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} B \begin{pmatrix} \lambda_1^n (1-\lambda_2) \\ \lambda_2^n(\lambda_1 - 1) \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} B \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} \\ -(1-\lambda_1)^{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1-\lambda_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} \\ -(1-\lambda_1)^{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+2} - (1-\lambda_1)^{n+2} \\ \lambda_1^{n+1} - (1-\lambda_1)^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

<u>Riposta al problem di Fibonacci</u>:

$$\#\text{ coppie di conigli doppo n mesi} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n+1} - (1-\phi)^{n+1}) \qquad \text{(E8)}$$

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \text{numero aureo}$$

<u>Esempio</u>: Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a : uno scalare

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

Quindi, dobbiamo avere $\lambda = 1$ se $A - \lambda I$ è singolare.

(continua, pagina successiva)

Però, $A - I = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ così $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione di $Av = v$ a meno di un multiplo scalare.

Ricordiamo, dobbiamo avere un base di soluzioni

$$Ab_j = \lambda_j b_j, \quad j = 1, \dots, n$$

se A è simile a una matrice diagonale.

Quindi, A non è simile a una matrice diagonale.

Fortunatamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{E9}$$

Infatti, per induzione su n:

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 1 \implies \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

<u>Esempio</u>: Siano A e B matrici commutative, cioè $AB = BA$. Allora,

$$(AB)^n = A^n B^n \tag{E10}$$

In particolare, se $A = \lambda I$ allora $AB = BA$ per ogni matrice B.

Siano $\lambda \neq 0$ e α scalari. Allora,

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \alpha/\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \tag{E11}$$

Quindi,

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n\alpha/\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\alpha\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \tag{E12}$$

<u>Lemma</u>: Sia A una matrice 2×2 con polinomio caratteristico p_A. Allora,
(1) Se p_A ha due radici distinte λ_1 e λ_2 allora A è simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(2) Se p_A ha una sola radice λ allora o A è la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ o A è simile a una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Attenzione: Il polinomio caratteristico è garantito solo avere radici sui numeri complessi. Quindi, potremmo essere costretti a usare vettori complessi anche quando lavoriamo con matrici reali.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies p_A(t) = \det(I - tA) = t^2 + 1 \implies t = \pm i$$

Per generalizzare questo Lemma, facciamo la seguente definizione:

Definizione: Sia V uno spazio vettoriale e $L : V \to V$ una mappa lineare. Allora, uno scalare λ è un autovalore di L se (e solo se) esiste un vettore v non nullo tale che

$$L(v) = \lambda v$$

Un vettore v non nullo v tale che $Av = \lambda v$ è chiamato un autovettore di A con autovalore λ.

In particolare, se V è di dimensione finita, allora gli autovalori sono solo le radici del polinomio caratteristico di L.

Esempio: I problemi di autovettore e valore proprio si presentano spesso nelle scienze naturali attraverso equazioni che coinvolgono una funzione e le sue derivate (ad esempio le leggi del moto di Newton).

$$\frac{df}{dx} = \lambda f(x) \implies f(x) = Ce^{\lambda x}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Nota: In generale, si possono trovare solo approssimazioni numeriche degli autovalori. Questa è una conseguenza del teorema di Abel-Ruffini che afferma che non è possibile risolvere un'equazione polinomiale generica (cioè coefficienti random) i grado 5 o superiore usando i radicali (radici quadrate, cubo, ecc.).

Nota: Trovare gli autovalori può essere difficile. Nel caso di dimensione finita, una volta che avete un autovalore potete trovare gli autovettori corrispondenti usando l'eliminazione gaussiana.

Il prossimo lemma fornisce un semplice criterio affinche' la matrice abbia una base di autovettori:

Lemma: Sia $A : V \to V$ una mappa lineare. Allora, qualsiasi insieme S di autovettori di A che hanno autovalori distinti è linearmente indipendente. In particolare, se V ha dimensione n e il polinomio caratteristico di A ha n radici distinte, allora A ha una base di autovettori.
Dimostrazione: Questa è una dimostrazione per induzione sul numero di elementi di S. Il risultato è vero se S consiste in un solo autovettore. Il caso chiave è quando S ha 2 elementi, quindi spiegheremo solo questo caso.

Supponiamo che

$$S = \{v_1, v_2\}, \qquad A(v_1) = \lambda_1 v_1, \qquad A(v_2) = \lambda_2 v_2, \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

(continua, pagina seguente)

Allora,

$$c_1v_1 + c_2v_2 = 0 \implies \begin{cases} A(c_1v_1 + c_2v_2) = \lambda_1 c_1 v_1 + \lambda_2 c_2 v_2 = 0 \\ \lambda_1(c_1v_1 + c_2v_2) = \lambda_1 c_1 v_1 + \lambda_1 c_2 v_2 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo, si ottiene

$$(\lambda_1 - \lambda_2)c_2v_2 = 0 \implies c_2 = 0$$

dato che sia $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ che v_2 sono non-zero. Poiché $v_1 \neq 0$

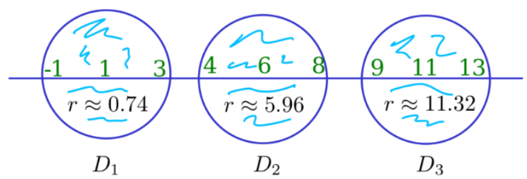
$$(c_1v_1 + c_2v_2 = 0, \quad c_2 = 0) \implies c_1v_1 = 0 \implies c_1 = 0$$

Quindi, $\{v_1, v_2\}$ è linearmente indipendente.

Come Volevasi Dimostrare

Esempio: Ricordiamo dalla lezione precedente che usando il metodo dei dischi di Gershgorin, abbiamo visto che il polinomio caratteristico di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$



ha tre radici distinte. Quindi, la matrice A ha una base di autovettori. Usando lo sviluppo di Laplace, troviamo che il polinomio caratteristico di A è

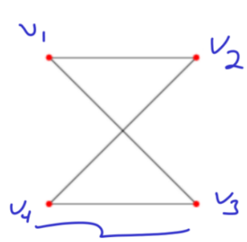
$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 1 \\ 1 & t-6 & 1 \\ 1 & 1 & t-1 \end{pmatrix} = t^3 - 18t^2 + 80t - 50$$

Il risultante di $p_A(t)$ e $p_A'(t) = 3t^2 - 36t + 80$ è

$$R(p_A, p_A') = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 80 & -50 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 80 & -50 \\ 3 & -36 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -36 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -36 & 80 \end{pmatrix} = -87700$$

il che implica anche che p_A ha radici distinte, e quindi A ha una base di autovettori.

Esempio:



G3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & -1 & -1 & 0 \\ -1 & t & 0 & -1 \\ -1 & 0 & t & -1 \\ 0 & -1 & -1 & t \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = t^4 - 4t^2 = t^2(t^2 - 4) \implies t = 2,\ t = -2,\ t = 0 \text{ (molteplicità 2)}$$

(continua, pagina seguente)

Gli autovettori di A sono

$$\lambda = 2,\ v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \lambda = 0,\ v_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \lambda = 0,\ v_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \lambda = -2,\ v_4 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

L'applicazione dell'eliminazione gaussiana a $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

dimostra che in questo caso, la matrice A ha una base di autovettori anche se p_A non ha 4 radici distinte.

Definizione: Sia λ un autovalore di una mappa lineare $L : V \to V$. Allora il λ autospazio di $L : V \to V$ è il sottospazio

$$E_\lambda(L) = \ker(L - \lambda I) = \{\, v \in V \mid L(v) = \lambda v\}$$

in altre parole, il λ autospazio di L è l'unione di tutti gli λ autovettori di L e il vettore zero.

Esempio: Tornando all'esempio precedente,

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \implies E_2(A) = \operatorname{span}(v_1), \qquad E_0(A) = \operatorname{span}(v_2, v_3), \qquad E_{-2}(A) = \operatorname{span}(v_4)$$

Similmente,

$$B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \implies p_B(t) = (t-1)^2, \quad E_1(B) = \ker(I - B) = \ker\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

In particolare, per la matrice A la dimensione di ogni autospazio è uguale alla molteplicità dell'autovalore in polinomio caratteristico di A.

Definizione: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $L : V \to V$ una mappa lineare. Se λ è un autovalore di L allora:
(i) La molteplicità algebrica di λ è la molteplicità di λ come radice di p_L (cioè il grado di $(t - \lambda)$ come fattore di $p_L(t)$).
(ii) La molteplicità geometrica di λ è la dimensione di $E_\lambda(L)$.
Lasciamo che $a_\lambda(L)$ denoti la molteplicità algebrica di λ e m_λ denoti la molteplicità geometrica di λ.

I nostri esempi precedenti possono essere generalizzati al seguente risultato:

Teorema: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $L : V \to V$ una mappa lineare. Allora, L ha una base di autovettori se e solo se $a_\lambda = m_\lambda$ per ogni autovalore di L.

Lezione: Teorema spettrale.

Nelle lezioni precedenti, abbiamo definito la nozione di indipendenza lineare per un sottoinsieme S di uno spazio vettoriale. Il concetto analogo per un insieme di sottospazi di uno spazio vettoriale è il seguente:

Definizione: Supponiamo che $U_1, \ldots, U_n$ siano sottospazi vettoriali di V, allora la loro somma è data da

$$U_1 + \cdots + U_n = \{u_1 + \cdots + u_n \in V \mid u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n\}$$

I sottospazi $U_1, \ldots, U_n$ si dicono indipendenti se

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 0, \quad u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n \iff u_1 = 0, \ldots, u_n = 0$$

Un sottospazio W è detto una somma diretta di $U_1, \ldots, U_n$ se $W = U_1 + \cdots + U_n$ e $U_1, \ldots, U_n$ sono indipendenti.

Errore classico: Una collezione di spazi $U_1, \ldots, U_n$ è indipendente se

$$U_i \cap \left(\sum_{j \neq i} U_j \right) = \{0\}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Per $n = 2$, è solo $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Per $n > 2$, questa condizione è molto più forte del semplice $U_i \cap U_j = \{0\}$ se $i \neq j$.

Esempio: $V = \mathbb{R}^2, \quad U_1 = \mathrm{span}\{(1,0)\}, \quad U_2 = \mathrm{span}\{(0,1)\}, \quad U_3 = \mathrm{span}\{(1,1)\}$
Allora

$$U_1 \cap U_2 = \{0\}, \quad U_1 \cap U_3 = \{0\}, \quad U_2 \cap U_3 = \{0\}$$

ma $U_1,\ U_2,\ U_3$ non sono indipendenti perché

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lemma: Se $L : V \to V$ è una mappa lineare e $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_n}$ sono autospazi con autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ allora $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_n}$ sono indipendenti.
Dimostrazione: Questo è equivalente all'indipendenza degli autovettori con autovalori distinti. Applichiamo il principio di induzione. Sia P_k la proposizione che se $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$ sono autospazi di L con autovalori distinti allora $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$ sono indipendenti. Allora, P_1 è vero. Supponiamo che P_{n-1} è vero ($n > 1$) e

$$v_1 + \cdots + v_n = 0, \qquad v_1 \in V_{\lambda_1}, \ldots, v_n \in V_{\lambda_n}$$

Allora

$$\begin{cases} \lambda_n (v_1 + \cdots + v_n) = \lambda_n v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \\ L(v_1 + \cdots + v_n) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \end{cases}$$

Sottraendo, si ottiene

$$(\lambda_n - \lambda_1) v_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) v_{n-1} = 0$$

Poiché abbiamo autovalori distinti, $\lambda_n - \lambda_1, \ldots, \lambda_n - \lambda_{n-1}$ sono tutti non nulli. Quindi, per l'ipotesi di induzione $v_1, \ldots, v_{n-1}$ sono tutti zero. Quindi, anche v_n è zero, il che verifica P_n.

Per continuare, ricordiamo che $\det(A)$ è una funzione differenziabile delle voci di $A = (a_{ij})$. Sostituendo a_{ii} con $a_{ii} - t$, vediamo che anche i coefficienti del polinomio caratteristico $p_A(t)$ sono funzioni differenziabili delle voci di A. Quindi, il risultante

$$R_A = R(p_A(t), p'_A(t))$$

è una funzione differenziabile delle voci di A. In particolare, se $R_A \neq 0$ allora anche $R_{\tilde{A}} \neq 0$ per tutte le matrici $\tilde{A}$ sufficientemente vicine ad A (la differenziabilità implica la continuità). Quindi,

$$\{A \in M_{n\times n} \mid R_A \neq 0\}$$

è un sottoinsieme aperto di $M_{n\times n}$. Per costruzione, la condizione $R_A \neq 0$ implica che A ha n autovalori distinti, e quindi A ha una base di autovettori.

<u>Più intuitivamente</u>: Ci si aspetta che una matrice scelta a caso abbia una base di autovettori.

Un tipico esempio di matrice che non è casuale è una matrice simmetrica ($A^t = A$), antisimmetrica ($A^t = -A$), hermitiana ($A = A^*$), antihermitiana ($A^* = -A$), ortogonale ($AA^t = I$) o unitaria ($AA^* = I$). [Richiamo, $A^* = (\bar{A})^t$]

Fortunatamente, possiamo raccogliere tutti questi casi in un tipo di matrice più generale. [Dove A deve essere reale nei casi simmetrico, anitsimmetrico e ortogonale].

<u>Definizione</u>: Una matrice quadrata A è normale se $AA^* = A^*A$.

<u>Definizione</u>: Sia V uno spazio vettoriale complesso dotato di un prodotto hermtiano. Allora, una base B di V è una base unitaria di V se e solo se
(1) Ogni elemento di B ha norma 1,
(2) Ogni coppia di elementi distinti di B è ortogonale.
(Una base B di uno spazio vettoriale reale V che soddisfa le condizioni (1) e (2) è chiamata una base ortonormale di V.)

<u>Teorema Spettrale</u>: Una matrice quadrata è normale se e solo se ha una base unitaria di autovettore rispetto al prodotto interno standard su $\mathbb{C}^n$:

$$\langle (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n) \rangle = u_1\bar{v}_1 + \cdots + u_n\bar{v}_n$$

<u>Casi Speciali</u>:
(1) Gli autovalori di una matrice Hermitiana sono reali.
(2) Se A è una matrice reale simmetrica, allora A è hermetiana (quindi i suoi autovalori sono reali) e ha una base di autovettori che sono elementi di $\mathbb{R}^n$. Infatti, se A è una matrice reale e λ è un autovalore reale di A, allora l'autospazio E_λ ha una base costituita da elementi di $\mathbb{R}^n$.
(3) Gli autovalori di una matrice antihermitiana sono immaginari puri (questo include lo zero).
(4) Gli autovalori di una matrice unitaria hanno norma 1. Si noti che una matrice reale ortogonale è unitaria.

<u>Attenzione</u>: Una matrice reale ortogonale può avere autovalori complessi. Per esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies AA^t = I_2, \qquad p_A(t) = t^2 + 1$$

<u>Nota</u>: Una matrice A $n \times n$ si dice diagonalizzabile se ha una base di autovettori. In particolare, una matrice normale A è diagonalizzabile (utilizzando autovettori e autovalori complessi). Allo stesso modo, A è diagonalizzabile se ha n autovalori distinti.

La chiave per dimostrare queste proposizione sugli autovalori è il fatto che (Lezione 17)

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$$

Dimostrazione:

(1) $Av = \lambda v \ (v \neq 0), \quad A = A^* \implies \lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = \langle v, A^*v\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$
Poiché, $|v|^2 = \langle v, v\rangle \neq 0$ dobbiamo avere $\lambda = \bar{\lambda}$.

(3) $Av = \lambda v \ (v \neq 0), \quad A^* = -A \implies \bar{\lambda} = -\lambda$ usando lo stesso metodo di (1).

(4) Cominciamo con l'osservazione che $AA^* = I$ implica che A^* è l'inverso di A.
Quindi, abbiamo anche $A^*A = A^{-1}A = I$.

$$Av = \lambda v \ (v \neq 0), \quad AA^* = I \implies \langle v, v\rangle = \langle A^*Av, v\rangle = \langle Av, Av\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = |\lambda|^2\langle v, v\rangle$$

Poiché, $|v|^2 = \langle v, v\rangle \neq 0$ dobbiamo avere $|\lambda|^2 = 1$.

Lemma: Se u è un autovettore di una matrice normale A con autovalore λ, allora u è un autovalore di A^* con autovalore $\bar{\lambda}$.

Dimostrazione:

$$AA^* = AA^* \implies |Av|^2 = \langle Av, Av\rangle = \langle A^*Av, v\rangle = \langle AA^*v, v\rangle = \langle A^*v, A^*v\rangle = |A^*v|^2$$

Si verifica facilmente che $AA^* = A^*A \implies (A - \lambda I)(A - \lambda I)^* = (A - \lambda I)^*(A - \lambda I)$. Quindi,

$$|(A - \lambda I)v|^2 = |(A - \lambda I)^*v|^2$$

In particolare, se u è un autovettore di A con autovalore λ allora

$$0 = |(A - \lambda I)u|^2 = |(A - \lambda I)^*u|^2 \implies (A - \lambda I)^*u = 0$$

Tuttavia $(A - \lambda I)^* = A^* - \bar{\lambda}I$. Così $A^*u = \bar{\lambda}u$.

Corollario: Se A è una matrice normale e u e v sono autovettori di A con autovalori distinti, allora u e v sono ortogonali.

Dimostrazione: Sia $Au = \alpha u$ e $Av = \beta v$. Allora,

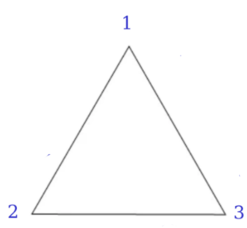
$$\alpha\langle u, v\rangle = \langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle = \langle u, \bar{\beta}v\rangle = \beta\langle u, v\rangle$$

Quindi,

$$(\alpha - \beta)\langle u, v\rangle = 0$$

Poiché $\alpha - \beta \neq 0$ dobbiamo avere $\langle u, v\rangle = 0$.

Esempio: Sia A la matrice di adiacenza del grafo triangolo



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies p_A(t) = (t-2)(t+1)^2$$

Autovettori:

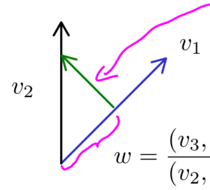
$$\lambda = 2, \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = -1, \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = -1, \ v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In particolare, il teorema spettrale dice solo che A ha una base di autovettori unitaria, non che ogni base di autovettori è unitaria. In questo caso, $(v_2, v_3) = 1$.

(continua, pagina seguente)

Per ottenere una base unitaria per E_{-1}, iniziamo con v_2 e calcoliamo la proiezione ortogonale w di v_3 su v_2:

$$v_3' = v_3 - w = v_3 - \frac{(v_3, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2$$



$$w = \frac{(v_3, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2$$

$$\boxed{v_3' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Allora, v_2 e $v_3' = v_3 - w$ saranno ortogonali. Ora riscaliamo per ottenere una base unitaria.

Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Se V è uno spazio vettoriale reale (risp. complesso) con un prodotto scalare (risp. prodotto hermitiano) e u è un elemento non nullo di V allora

$$\mathrm{Proj}_u : V \to V, \qquad \mathrm{Proj}_u(v) = \frac{(v, u)}{(u, u)} u, \qquad \left(\text{risp. } \mathrm{Proj}_u(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u \right)$$

è una mappa lineare (rispetto a v, non a u!).

Lemma (Gram-Schmidt): Se $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ è un insieme finito di vettori linearmente indipendenti allora

$$v_1 = u_1, \quad v_2 = u_2 - \mathrm{Proj}_{v_1}(u_2), \quad v_3 = u_3 - \mathrm{Proj}_{v_2}(u_3) - \mathrm{Proj}_{v_1}(u_3), \ \ldots, \ v_n = u_n - \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{Proj}_{v_k}(u_n)$$

è un insieme di vettori ortogonali tale che

$$\mathrm{span}(u_1, \ldots, u_\ell) = \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_\ell), \qquad \ell = 1, \ldots, n$$

Dimostrazione: Questa è un'induzione sul numero di elementi di S.

Osservazione: Una volta ottenuto l'insieme ortogonale $\{v_1, \ldots, v_n\}$, possiamo ottenere una base unitaria (o ortonormale) per $\mathrm{span}(S)$ ponendo

$$w_1 = \frac{v_1}{|v_1|}, \ w_2 = \frac{v_2}{|v_2|}, \ \ldots, \ w_n = \frac{v_n}{|v_n|}$$

Esempio: Applicare il processo di Gram-Schmidt alla base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ di $P_3[x]$ relativa al prodotto scalare

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$$

Per iniziare, si calcola

$$(x^a, x^b) = \int_{-1}^{1} x^{a+b}\, dx = \left. \frac{x^{a+b+1}}{a+b+1} \right|_{-1}^{1} = \begin{cases} \dfrac{2}{a+b+1}, & a+b \text{ pari} \\ 0, & a+b \text{ dispari} \end{cases}$$

Allora,

$$v_1 = u_1 = 1 \qquad v_2 = u_2 - \mathrm{Proj}_{v_1}(u_2) = x - \frac{(x,1)}{(1,1)} x = x$$

$$v_3 = u_3 - \mathrm{Proj}_{v_1}(u_3) - \mathrm{Proj}_{v_2}(u_3) = x^2 - \frac{(x^2, 1)}{(1,1)} 1 - \frac{(x^2, x)}{(x, x)} x = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$v_4 = u_4 - \mathrm{Proj}_{v_1}(u_4) - \mathrm{Proj}_{v_2}(u_4) - \mathrm{Proj}_{v_3}(u_4) = x^3 - \frac{3}{5} x$$

(continua, pagina seguente)

$$w_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{(1,1)}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad\qquad w_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{x}{\sqrt{(x,x)}} = x\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$w_3 = \frac{v_2}{\sqrt{(v_2,v_2)}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{(x^2-\frac{1}{3}, x^2-\frac{1}{3})}} = \frac{1}{2}(3x^2-1)\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$w_4 = \frac{v_4}{\sqrt{(v_4,v_4)}} = \frac{x^3 - \frac{3}{5}x}{\sqrt{(x^3-\frac{3}{5}x, x^3-\frac{3}{5}x)}} = \frac{1}{2}(5x^3-3)\sqrt{\frac{7}{2}}$$

$\boxed{\text{Isometria}}$

Sia U e V spazi vettoriali reali (risp. complessi) dotati di prodotti (risp. hermitiani) scalari $(—,—)_U$ e $(—,—)_V$ (risp. $\langle —,—\rangle_U$ e $\langle —,—\rangle_V$). Allora, una mappa lineare $L: U \to V$ è chiamata e isometria se (e solo se)

$$u_1,\ u_2 \in U \implies (u_1,u_2)_U = (L(u_1),L(u_2))_V \qquad (\text{risp. } u_1,\ u_2 \in U \implies \langle u_1,u_2\rangle_U = \langle L(u_1),L(u_2)\rangle_V)$$

In altre parole, un'isometria è una mappa lineare che conserva la lunghezza dei vettori e gli angoli tra loro.

Esempio: La rotazione intorno all'origine è un'isometria di $\mathbb{R}^2$. La riflessione attraverso un iperpiano è un'isometria di $\mathbb{R}^n$. Se $\ker(L)$ è non-zero allora L non è un'isometria, perché non conserva le lunghezze degli elementi di $\ker(L)$. In particolare, un'isometria è sempre iniettiva.

Per costruire un'isometria da uno spazio finito dimensionale U a uno spazio vettoriale finito dimensionale V, si scelgono semplicemente le basi unitarie (o ortonormali) B_U e B_V di U e V rispettivamente, e poi inviare elementi di B_U a B_V in modo 1-1.

Viceversa, ogni isometria tra spazi vettoriali di dimensione finita è di questa forma.

Esempio: $\quad U = P_3[x], \quad (f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx, \qquad V = \mathbb{R}^4,$ prodotto sclare standard

Rispetto ai polinomi dell'esempio precedente, la mappa lineare $T(w_j) = e_j$ è un'isometria

La matrice della mappa L rispetto alle basi $\{1, x, x^2, x^3\}$ e $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}w_1 \implies T(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}T(w_1) = \sqrt{\frac{2}{3}}e_1 \qquad\qquad \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5\sqrt{7}} \end{pmatrix}$$

$$w_4 = \frac{1}{2}(5x^3-3)\sqrt{\frac{7}{2}} \implies \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}w_4 = 5x^3 - 3x$$

$$\implies \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}w_4 = 5x^3 - \sqrt{3}\sqrt{2}w_1 \implies x^3 = \frac{\sqrt{2}}{5}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}w_4 + \sqrt{3}w_1\right) \implies T(x^3) = \frac{\sqrt{2}}{5}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}e_4 + \sqrt{3}e_1\right)$$

Esempio: Sia $\quad L: P_3[x] \to P_3[x], \qquad L(p) = (1-x^2)\frac{d^2p}{dx^2} - 2x\frac{dp}{dx}$

$$L(1) = 0, \qquad L(x) = -2x, \qquad L(3x^2-1) = 6(1-x)^2 - 2x(6x) = 6 - 18x^2 = -6(3x^2-1)$$

$$L(5x^3-3x) = (1-x^2)(30x) - 2x(15x^2-3) = 36x - 60x^3 = (-12)(5x^3-3x)$$

(continua, pagina seguente)

Così, la matrice di L relativa alla base ortonormale $B = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ di $P_3[x]$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

In particolare, poiché questa matrice è una matrice simmetrica e B è una base ortonormale di $P_3[x]$, segue che

$$f,\, g \in P_3[x] \implies (L(f), g) = (f, L(g))$$

Definizione: Sia U uno spazio vettoriale reale con un prodotto scalare $(—,—)$. Allora, una mappa lineare $L : U \to U$ è simmetrica se

$$f,\, g \in U \implies (L(f), g) = (f, L(g))$$

Allo stesso modo, L è antisimmetrica se

$$f,\, g \in U \implies (L(f), g) = -(f, L(g))$$

Nota: Se U è di dimensione finita, questo è equivalente alla matrice di L rispetto a una base ortonormale è simmetrica (risp. antisimmetrica).

Nota tecnica: Nel caso dimensionale infinito, si dovrebbe aggiungere la condizione che L sia un operatore limitato. Non discuteremo questo argomento in questo corso.

Allo stesso modo, se U è uno spazio vettoriale complesso con prodotto hermitiano $\langle —, — \rangle$ allora una mappa lineare $L : U \to U$ è hermitiana (risp. antihermitiana) se

$$f,\, g \in U \implies \langle L(f), g\rangle = \langle f, L(g)\rangle, \qquad (\text{risp. } f,\, g \in U \implies \langle L(f), g\rangle = -\langle f, L(g)\rangle)$$

Se U è di dimensione finita, questo è equivalente alla matrice di L rispetto a una base unitaria è hermitiana (risp. antihermitiana). Allo stesso modo, L è normale se la sua matrice rispetto a una base unitaria è una matrice normale.

Tutto ciò che abbiamo detto sulle matrici simmetriche, antisimmetriche, hermitiane, antihermitiane e normali si applica altrettanto bene alle mappe lineari con la proprietà corrispondente attraverso la rappresentazione matriciale della mappa lineare.

Applicazione (Matrici Definite Positive): Ricordiamo che una matrice reale quadrata A è definita positiva se è simmetrica e

$$(u, v) = u^t A v$$

è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$. Per il teorema dello spettro, poiché A è simmetrica ha una base ortonormale di autovettori. Rispetto a questa base di $\mathbb{R}^n$,

$$(u, v) = \lambda_1 u_1 v_1 + \cdots + \lambda_n u_n v_n$$

Quindi A è definita positivamente se e solo se tutti gli autovalori di A sono positivi. Il modo più semplice per verificare che A abbia autovalori positivi è applicare il teorema del disco di Gershgorin. Questo produce il risultato dichiarato alla fine della lezione 13:

Teorema: Sia A una matrice quadrata dominante diagonalmente per righe. Se $A = A^t$ e gli elementi diagonali di A sono positivi, allora A è definita positiva.

La chiave per dimostrare il teorema spettrale è considerare prima il caso in cui A è una matrice triangolare superiore:

Sia A una matrice triangolare superiore. Allora si calcola che l'elemento $(1,1)$ di AA^* è

$$|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \cdots + |a_{1n}|^2$$

e l'elemento $(1,1)$ di $A^*A = |a_{11}|^2$. Quindi, $AA^* = A^*A$ implica

$$|a_{12}|^2 + \cdots + |a_{1n}|^2 = 0 \implies a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$$

Avendo stabilito che tutti gli elementi non diagonali della prima riga di A sono zero, si procede a considerare l'elemento $(2,2)$ di AA^* e A^*A. Si ottiene,

$$|a_{22}|^2 + |a_{23}|^2 + \cdots + |a_{2n}|^2, \qquad |a_{22}|^2$$

rispettivamente. Quindi, $a_{23} = \cdots = a_{2n} = 0$. Procedendo in questo modo (o usando il principio di induzione), si vede che se A è una matrice triangolare superiore tale che $AA^* = A^*A$ allora A deve essere una matrice diagonale.

Questo ci porta al risultato finale di questo corso, la cui dimostrazione si basa sul processo di Gram-Schmidt.

Lemma di Schur: Sia A una matrice $n \times n$. Allora esiste una matrice unitaria U tale che

$$A = UTU^{-1}$$

dove T è una matrice triangolare superiore.

(fine lemma)

In particolare se $AA^* = A^*A$ e $A = UTU^{-1}$ dove U è unitaria e T è triangolare superiore, allora

$$AA^* = (UTU^*)(UTU^*)^* = UTU^*(U^*)^*T^*U^* = UTU^*UT^*U^* = UTT^*U^*$$
$$A^*A = (UTU^*)^*(UTU^*) = (U^*)^*T^*U^*UTU^* = UT^*U^*UTU^* = UT^*TU^*$$

perché

(1) U unitaria significa $U^*U = I$ e quindi $U^* = U^{-1}$.

(2) la moltiplicazione della matrice e la trasposizione coniugata soddisfano

$$(M_1M_2)^* = M_2^*M_1^*, \qquad (M^*)^* = M$$

Sottraendo, si ottiene

$$0 = AA^* - A^*A = U(TT^* - T^*T)U^*$$

poiché U è invertibile, segue che

$$TT^* - T^*T = 0$$

Quindi, T è una matrice diagonale poiché T è un triangolo superiore. Così, le colonne di U formano una base unitaria di $\mathbb{C}^n$ che sono autovettori di A.