Soluzioni prova scritta

Ingegneria Informatica 14/01/2025

Esercizio 1

Il primo quesito consiste in 1 **domanda a risposta aperta** da 4 punti. Per i quesiti 2 e 3 ci si deve esprimere sulla **correttezza o falsità di 6 affermazioni**. Si ottengono 0, 1 e 2 punti in base al numero di risposte corrette, errori o risposte in bianco, secondo lo schema:

$$\begin{aligned} 6 \text{ corrette} &\to 2 \text{ punti} \\ 5 \text{ corrette} + 1 \text{ errore} &\to 1 \text{ punto} \\ 5 \text{ corrette} + 1 \text{ bianca} &\to 1 \text{ punto} \\ 4 \text{ corrette} + 2 \text{ bianche} &\to 1 \text{ punto} \\ \text{Tutti gli altri casi} &\to 0 \text{ punti} \end{aligned}$$

1. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia
$$f(x) = x^3 - e^{-x}.$$

   Si scriva il codice Matlab/Octave di una funzione `disegna_f` che prende in ingresso due numeri reali $a < b$ ed un numero intero n e disegna, **senza utilizzare cicli for o while**, il grafico della funzione f sull'intervallo $[a, b]$ mediante una linea continua rossa che passa per i valori di $f(x)$ su n punti equispaziati in $[a, b]$. La funzione resistuisce il vettore contenente le valutazioni della funzioni sugli n punti.

```
function y = disegna_f(a, b, n)
    x = linspace(a, b, n);
    y = x.^3 - exp(-x);
    plot(x, y, 'r')
end
```

- N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire **chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi 2, 3 e 4**.

2. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice unitaria, allora:

V F La norma 2 di A è uguale a 1.

V F Il determinante di A è uguale a 1.

V F Il numero di condizionamento di A, rispetto alla norma 2, è uguale a 1.

V F Dato $b \in \mathbb{C}^n$, calcolare $A \cdot b$ (nel modo più efficiente possibile) costa $\mathcal{O}(n)$.

V F Dato $b \in \mathbb{C}^n$, risolvere $Ax = b$ (nel modo più efficiente possibile) costa $\mathcal{O}(n^2)$.

V F Calcolare una fattorizzazione QR di A (nel modo più efficiente possibile) costa $\mathcal{O}(n^3)$.

3. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $b \in \mathbb{C}^n$; inoltre siano $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $c \in \mathbb{C}^n$ tali per cui $x = Hx + c$. Infine si consideri il metodo iterativo:

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_k = Hx_{k-1} + c \end{cases}.$$

V F Il metodo si dice convergente se esiste almeno una scelta di x_0 per cui $x_k \to x$

V F Il metodo si dice convergente se per ogni scelta di x_0 si ha $x_k \to x$.

V F Se il metodo non è convergente allora per ogni scelta di x_0, x_k non converge a x.

V F Se il metodo è convergente allora $||H||_2 < 1$.

V F Se il metodo è convergente allora H è non singolare.

V F Se il metodo è convergente allora $|\det(H)| < 1$.

4. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Siano $a_0, \ldots, a_n$ e $x_0, \ldots, x_n$ i pesi ed i nodi di una formula di quadratura **interpolatoria** $J_n(f) \approx \int_a^b f(x)dx$.

V F La formula di quadratura è esatta per $f(x) = x^n + \pi$.

V F Il grado di precisione è almeno n.

V F J_n è una formula di Newton-Cotes per ogni scelta di nodi.

V F J_n è una formula Gaussiana per ogni scelta di nodi.

V $\boxed{\text{F}}$ Per $j = 0, \ldots, n$, vale $a_j = \int_a^b \ell_j(x)dx$, con $\ell_j(x)$ j-esimo polinomio di Lagrange rispetto ai nodi $x_0, \ldots, x_n$.

$\boxed{\text{V}}$ F Per $j = 0, \ldots, n$, vale $a_j = \int_a^b N_j(x)dx$, con $N_j(x)$ j-esimo polinomio di Newton rispetto ai nodi $x_0, \ldots, x_n$.

Esercizio 2

Sia

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - e^{-x} + 1 - x.$$

(i) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si dimostri che $\alpha = 0$ è l'unico zero di $f(x)$ nell'intervallo $[-\log_e 2, 1]$.

(ii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Dire se lo schema di punto fisso

$$x_{k+1} = \cos\left(x_k + \frac{\pi}{2}\right) - e^{-x_k} + 1$$

converge e, in caso affermativo, determinarne l'ordine di convergenza.

(iii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Si consideri lo schema iterativo

$$x_{k+1} = x_k + \frac{f(x_k)}{\gamma},$$

dipendente dal parametro γ. Si determini per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ il metodo è localmente convergente ad α ed il relativo ordine di convergenza.

(i) Si verifica che $f(0) = 0$. La derivata di f non ha segno costante nell'intervallo, però la derivata seconda è sempre negativa (la funzione è concava) ed in particolare $f(x)$ ha un massimo all'interno dell'intervallo e decresce avvicinandosi agli estremi. Essendo $f(-\log_e(2)) > 0$ ed $f(1) < 0$ si ha che necessariamente c'è un'unica radice.

(ii) Lo schema converge localmente con ordine 2.

(iii) Lo schema converge localmente per $\gamma > \frac{1}{2}$; la convergenza è quadratica per $\gamma = 1$ e lineare altrimenti.

Esercizio 3

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1+\mathbf{i} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1-\frac{2}{3}\mathbf{i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}, \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3.$$

(i) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si dica, **giustificando la risposta**, se il metodo delle potenze applicato ad A con punto di partenza x_0 converge a una coppia autovalore/autovettore dominante della matrice.

(ii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si dica, **giustificando la risposta**, se il metodo delle potenze inverse applicato ad A con punto di partenza x_0 converge a una coppia autovalore/autovettore associata all'autovalore di modulo minimo di A.

Siano

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \mathbb{C}^{3\times 3}, \qquad y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3.$$

(iii) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si dica, **giustificando la risposta**, se il metodo delle potenze applicato a B con punto di partenza y_0 converge a una coppia autovalore/autovettore dominante della matrice.

(iv) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si dica, **giustificando la risposta**, se il metodo delle potenze inverse applicato a B con punto di partenza y_0 converge a una coppia autovalore/autovettore associata all'autovalore di modulo minimo di B.

(i) Il metodo converge.

(ii) Il metodo delle potenze inverse non è applicabile perchè la matrice non è invertibile.

(iii) Il metodo non converge perchè ha due autovalori di modulo massimo.

(iv) Il metodo non converge perchè il punto di partenza è ortogonale all'autovettore (sia destro che sinistro) associato all'autovalore di modulo minimo.

Esercizio 4

(i) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Determinare i coefficienti a_0, a_1, a_2, a_3 in modo che la formula di quadratura

$$\int_0^1 f(x)dx \approx a_0 f\left(\frac{1}{2}\right) + a_1 f'\left(\frac{1}{2}\right) + a_2 f''\left(\frac{1}{2}\right) + a_3 f'''\left(\frac{1}{2}\right)$$

abbia grado di precisione massimo e determinare tale grado.

(ii) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Si determini se esistono coefficienti $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ ed $x_0 \in [0,1]$ per cui la formula di quadratura

$$\int_0^1 f(x)dx \approx a_0 f(x_0) + a_1 f'(x_0)$$

ha grado di precisione maggiore di 1; in caso affermativo, si determini tale grado.

(i) $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{24}$, $a_3 = 0$. Il grado di precisione è 3.

(ii) La formula non ha grado maggiore di 1 per nessuna scelta di a_0, a_1.