IL LUOGO DELLE RADICI

Walter R. Evans

Evans was born in Saint Louis, Missouri, and his love of math began at an early age.
His father was an engineer, and Walt knew when he was young that he wanted to be one, too.

Walt earned his B.S. in Electrical Engineering from Washington University in St. Louis in 1941, completed the three-year Advanced Engineering Training Program at the General Electric Company in 1944, worked as an instructor at Washington University from 1946 to 1948, and obtained his M.S. in Electrical Engineering from the University of California, Los Angeles, in 1951.

Walter R. Evans

Born	January 15, 1920
Died	July 10, 1999 (aged 79)
Citizenship	American
Alma mater	University of California, Los Angeles Washington University in St. Louis
Known for	Root locus
Awards	Rufus Oldenburger Medal (1987) Richard E. Bellman Control Heritage Award (1988)
Scientific career	
Fields	Control theory

"The main key to learning, in my opinion, is to treat the problem as a game using all the simplifications possible to get the approximate answer."

Control System Synthesis by Root Locus Method

WALTER R. EVANS
MEMBER AIEE

Synopsis: The root locus method determines all of the roots of the differential equation of a control system by a graphical plot which readily permits synthesis for desired transient response or frequency response. The base points for this plot on the complex plane are the zeros and poles of the open loop transfer function, which are readily available. The locus of roots is a plot of the values of s which make this transfer function equal to -1 as loop gain is increased from zero to infinity. The plot can be established in approximate form by inspection and the significant parts of the locus calculated accurately and quickly by use of a simple device. For multiple loop systems, one solves the innermost loop first, which then permits the next loop to be solved by another root locus plot. The resultant plot gives a complete picture of the system, which is particularly valuable for unusual systems or those which have wide variations in parameters.

THE root locus method is the result of an effort to determine the roots of the differential equation of a control system

The opening section in this paper, Background Theory, outlines the over-all pattern of analysis. The following section on Root Locus Plot points out the great usefulness of knowing factors of the open loop transfer function in finding the roots.

The graphical nature of the method requires that specific examples be used to demonstrate the method itself under the topics: Single Loop Example, Multiple Loop System, and Corrective Networks. The topic Correlation with Other Methods suggests methods by which experience in frequency methods can be extended to this method. The topic Other Applications includes the classic problem of solving an nth degree polynomial. Finally, the section on Graphical Calculations describes the key features of a plastic device called a "Spirule", which permits calculations to be made from direct measurement on the

Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Walter R. Evans, "Control System Synthesis by Root Locus Method," Vol. 69, 1950, pp. 66–69.

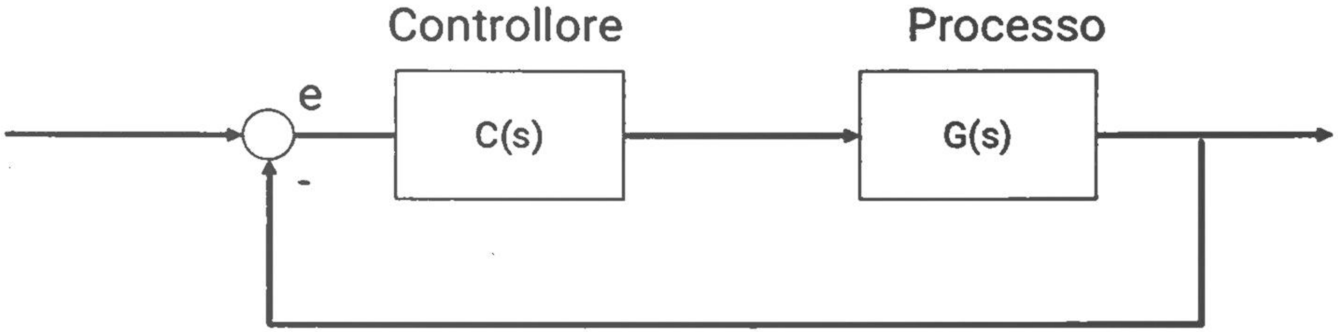
Ziegler delivered his critical assessment, writing:

The basic conclusion of my review is that this book, if published in present form, would not do justice to the author's reputation.... It is not an easy task for a technical industrialist to find time to write a book. It is also difficult for someone as steeped as I in the field to review such a book with the proper perspective. While I think a stranger to the control field with only a general technical background would have a very difficult time with Mr. Evans' presentation, I am not at all sure of this.

I am quite sure, however, that a scholar in the field would find too little new in this book by Mr. Evans.

IL LUOGO DELLE RADICI

Metodo per studiare **nel piano complesso** l'effetto della reazione negativa sui poli del sistema in catena chiusa, a partire dalla conoscenza della funzione di trasferimento in catena aperta *G(s)*



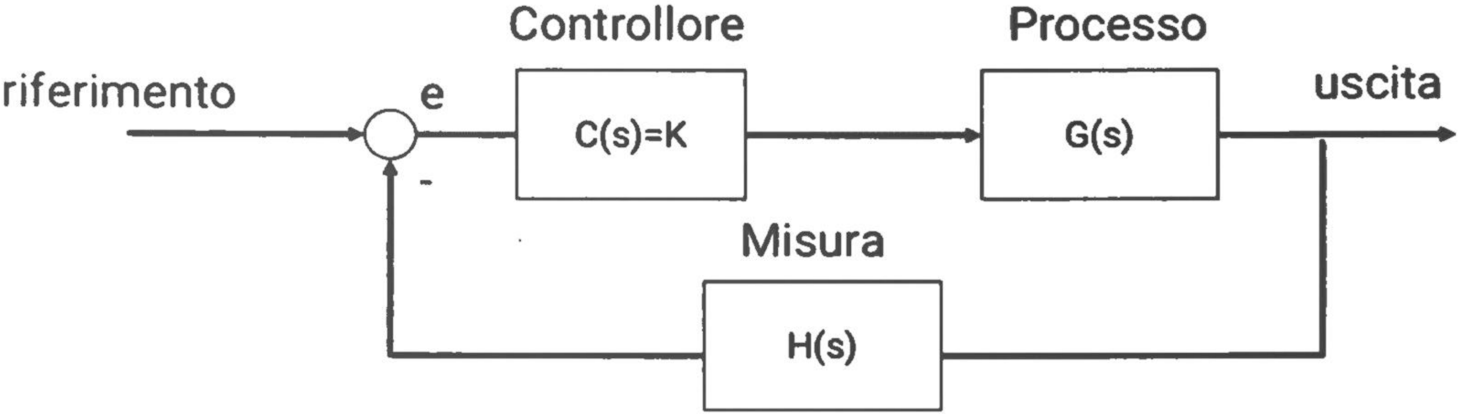
IL LUOGO DELLE RADICI

Metodo per studiare **nel piano complesso** l'effetto della reazione negativa sui poli del sistema in catena chiusa, a partire dalla conoscenza della funzione di trasferimento in catena aperta *G(s)*

Controllo in Ciclo Aperto

IL LUOGO DELLE RADICI

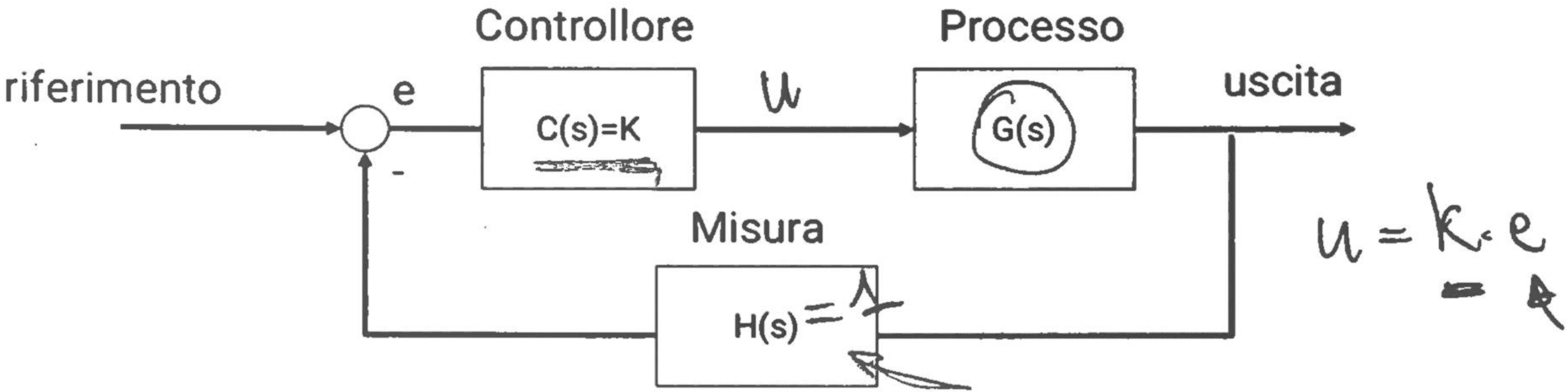
Metodo per studiare **nel piano complesso** l'effetto della reazione negativa sui poli del sistema in catena chiusa, a partire dalla conoscenza della funzione di trasferimento in catena aperta *G(s)*



Controllo in Ciclo Chiuso

IL LUOGO DELLE RADICI

Metodo per studiare **nel piano complesso** l'effetto della reazione negativa sui poli del sistema in catena chiusa, a partire dalla conoscenza della funzione di trasferimento in catena aperta *G(s)*



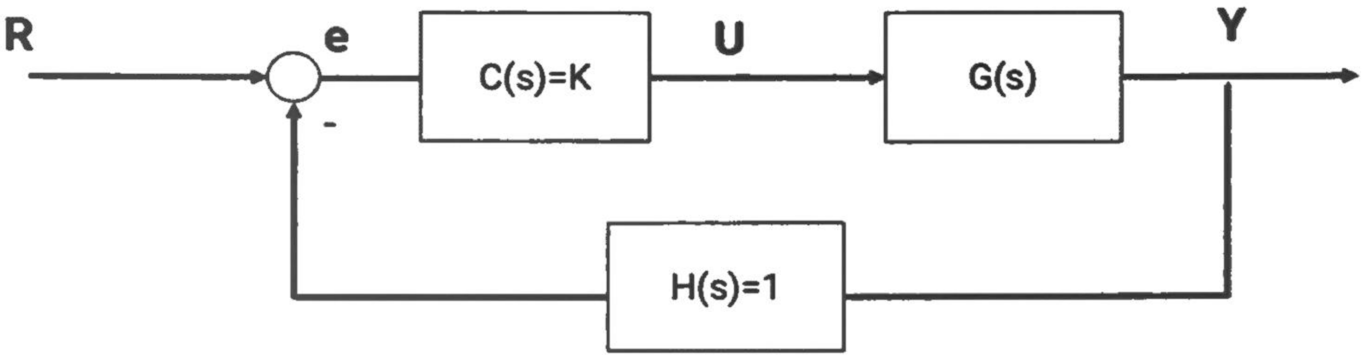
Controllo in Ciclo Chiuso

IL LUOGO DELLE RADICI

Metodo per studiare **nel piano complesso** l'effetto della reazione negativa sui poli del sistema in catena chiusa, a partire dalla conoscenza della funzione di trasferimento in catena aperta *G(s)*

Il luogo delle radici permette l'analisi **grafico-visuale** delle variazioni dei poli in catena chiusa al variare di uno o più parametri (eventualmente introdotti da un controllore)

IL LUOGO DELLE RADICI



$$K \cdot G(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} = K \cdot \frac{n(s)}{d(s)}$$ Anello aperto

$$W(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)} = \frac{K \cdot n(s)}{d(s) + K \cdot n(s)}$$ Anello chiuso

IL LUOGO DELLE RADICI

I poli in catena chiusa sono le radici del polinomio

$$d(s) + K \cdot n(s)$$

Chiamiamo la seguente equazione con il nome di **equazione caratteristica**

$$\underline{d(s) + K \cdot n(s) = 0}$$

Luogo delle radici

Insieme delle radici di $d(s) + K \cdot n(s) = 0$ al variare di K

IL LUOGO DELLE RADICI: Tracciamento

Regola #1
Il numero di radici in ciclo chiuso e' uguale numero di poli della funzione in ciclo aperto

Questo significa che il numero di rami del luogo delle radici e' uguale al numero di poli della funzione di trasferimento in cicle aperto.

IL LUOGO DELLE RADICI: Tracciamento

$$d(s) + K \cdot n(s) = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{n(s)}{d(s)} = -\frac{1}{K}}$$

Il luogo delle radici si ricava da questa equazione

Condizione di fase

$$\begin{cases} \angle n(s) - \angle d(s) = -\pi \pm 2h\pi & \text{se } K > 0 \\ \angle n(s) - \angle d(s) = \pm 2h\pi & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

Applicare questa condizione significa costruire il luogo delle radici

Ogni 2PI la fase si ripete e torno nello stesso punto nel piano di Gauss

IL LUOGO DELLE RADICI: Tracciamento

$$d(s) + K \cdot n(s) = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{n(s)}{d(s)} = -\frac{1}{K}}$$

Condizione di modulo

$$\left|\frac{n(s)}{d(s)}\right| = \frac{1}{|K|}$$

Applicare questa condizione significa "tarare" il luogo delle radici

IL LUOGO DELLE RADICI: Tracciamento

Regola #2 - da dove parte il luogo e da dove arriva?

$$d(s) + K \cdot n(s) = 0$$

Ponendo *K=0* il luogo parte dai **poli a ciclo aperto** del sistema (cioe' da d(s)=0)

$$\frac{1}{K} \cdot d(s) + n(s) = 0$$

Ponendo *K=Inf* il luogo arriva agli **zeri a ciclo aperto** del sistema

IL LUOGO DELLE RADICI: Tracciamento

Regola #2 - da dove parte il luogo e da dove arriva?

$$d(s) + K \cdot n(s) = 0$$

Ponendo *K=0* il luogo parte dai **poli a ciclo aperto** del sistema (cioe' da d(s)=0)

$$\frac{1}{K} \cdot d(s) + n(s) = 0$$

Ponendo *K=Inf* il luogo arriva agli **zeri a ciclo aperto** del sistema

Il luogo delle radici parte dai poli del sistema a ciclo aperto, arriva sugli zeri del sistema a ciclo aperto.

IL LUOGO DELLE RADICI: Tracciamento

1) Il numero di rami del luogo è pari al numero di poli, al variare di K.
2) Il luogo parte, per $K = 0$, dai poli a ciclo aperto.
3) Il luogo evolve sino a terminare, per $K = \pm\infty$, sugli zeri a ciclo aperto al **finito** o **all'infinito**.

IL LUOGO DELLE RADICI: Tracciamento

1) Il numero di rami del luogo è pari al numero di poli, al variare di K.
2) Il luogo parte, per $K = 0$, dai poli a ciclo aperto.
3) Il luogo evolve sino a terminare, per $K = \pm\infty$, sugli zeri a ciclo aperto al **finito** o **all'infinito**.

$$K \cdot G(s) = \frac{K}{s \cdot (s+1)} \xrightarrow{\text{Equazione caratteristica}} s \cdot (s+1) + K = 0$$

Ponendo K=0 si ottengono i punti di partenza $s_1=0$, $s_2=-1$, i poli in ciclo aperto.

IL LUOGO DELLE RADICI: Tracciamento

Regola #3 - **Tutto l'asse reale appartiene al luogo delle radici**

Se $K>0$ il luogo lascia alla propria destra un numero dispari di punti critici (poli e zeri) sull'asse reale.

IL LUOGO DELLE RADICI: Tracciamento

Regola #3 - **l'asse reale appartiene al luogo delle radici**

Se *K>0* il luogo lascia alla propria destra un numero dispari di punti critici (poli e zeri) sull'asse reale.

Condizione di fase
$$\begin{cases} \angle n(s) - \angle d(s) = -\pi \pm 2h\pi & \text{se } K > 0 \\ \angle n(s) - \angle d(s) = \pm 2h\pi & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

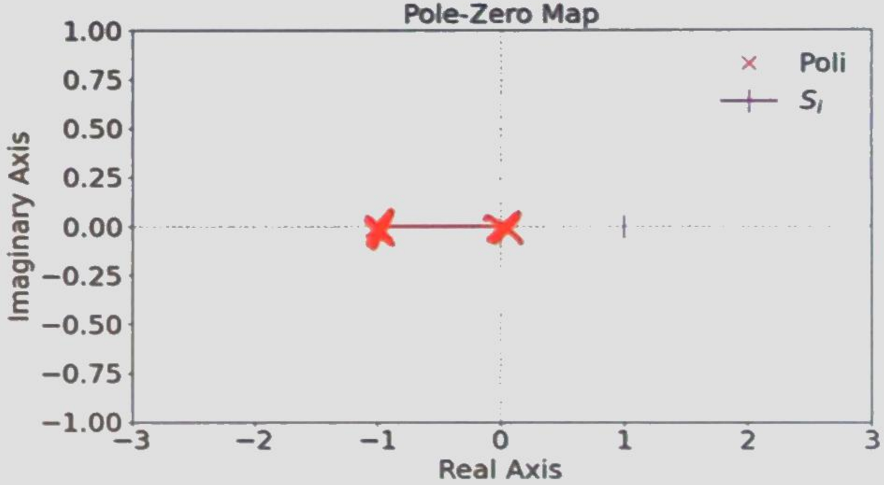
Un punto *s* nel piano di Gauss appartiene al luogo delle radici se la somma delle fasi dei vettori che partono dalle singolarità (poli o zeri) e terminano nel punto *s* è uguale a $-\pi$ (o 0 se K<0).

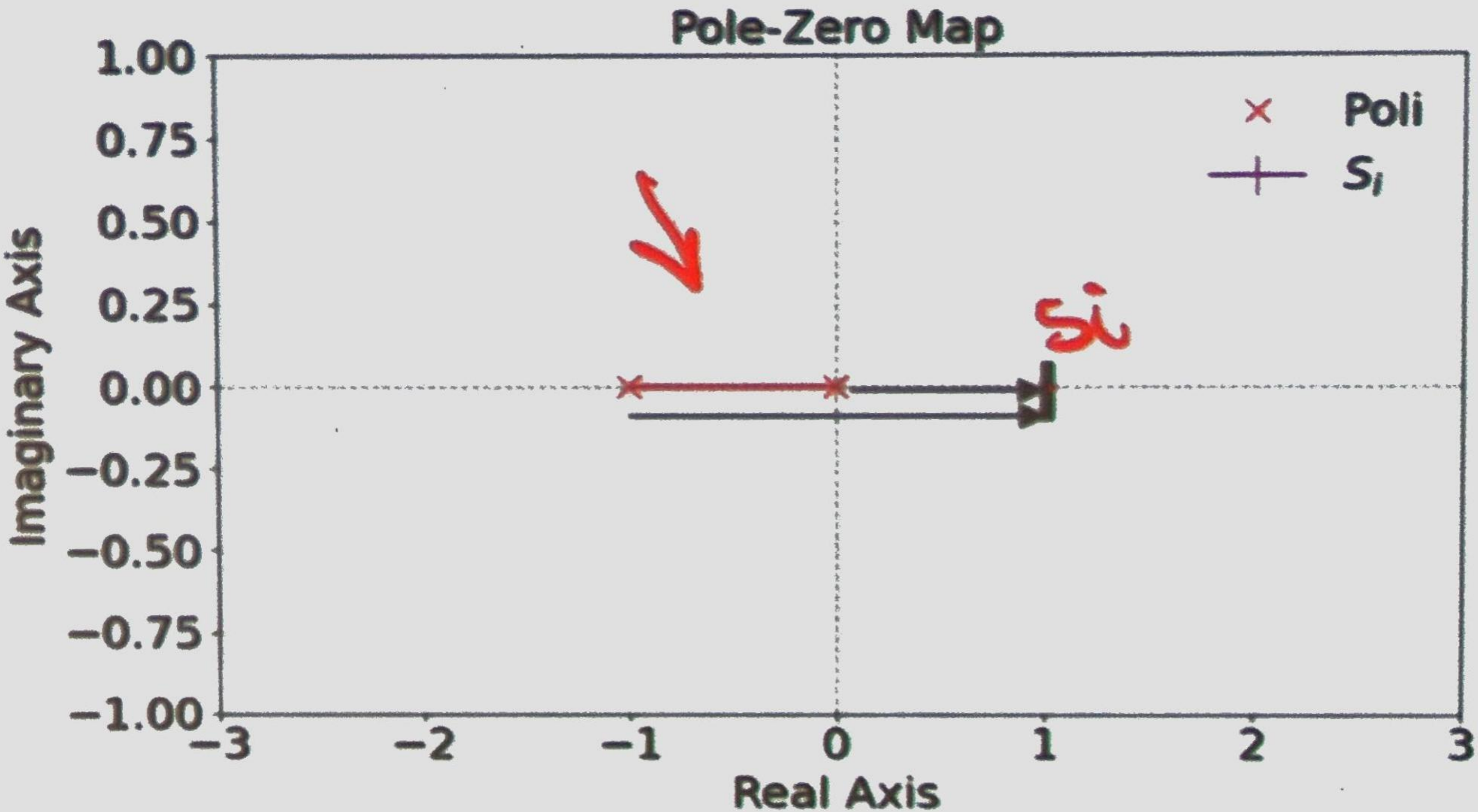
IL LUOGO DELLE RADICI: Tracciamento

Condizione di fase $$\begin{cases} \angle n(s) - \angle d(s) = -\pi \pm 2h\pi & \text{se } K > 0 \\ \angle n(s) - \angle d(s) = \pm 2h\pi & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

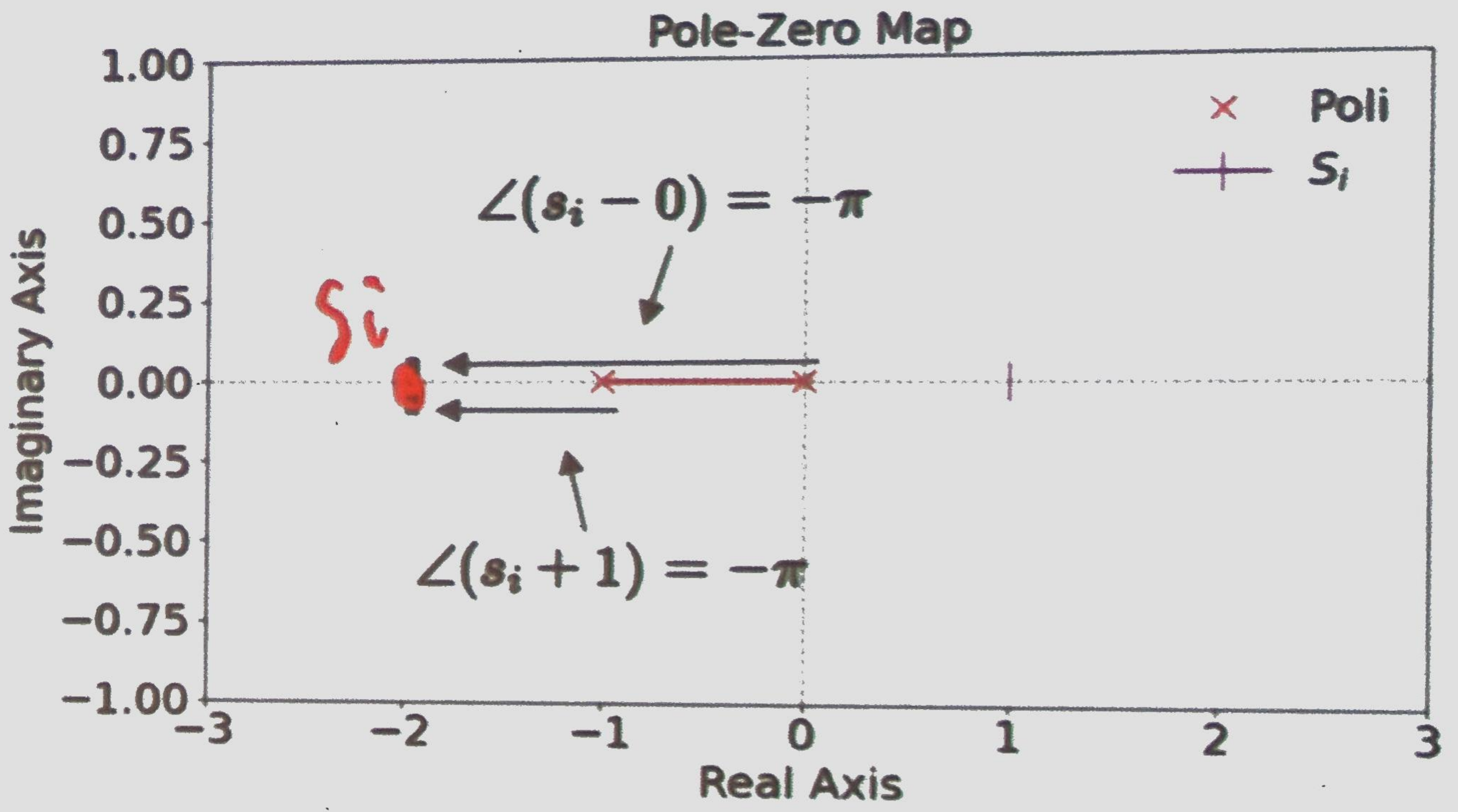
Nel nostro esempio, per *K>0*:

$$\angle \underbrace{\frac{1}{s \cdot (s+1)}}_{G(s)} = -\pi \pm 2h\pi$$

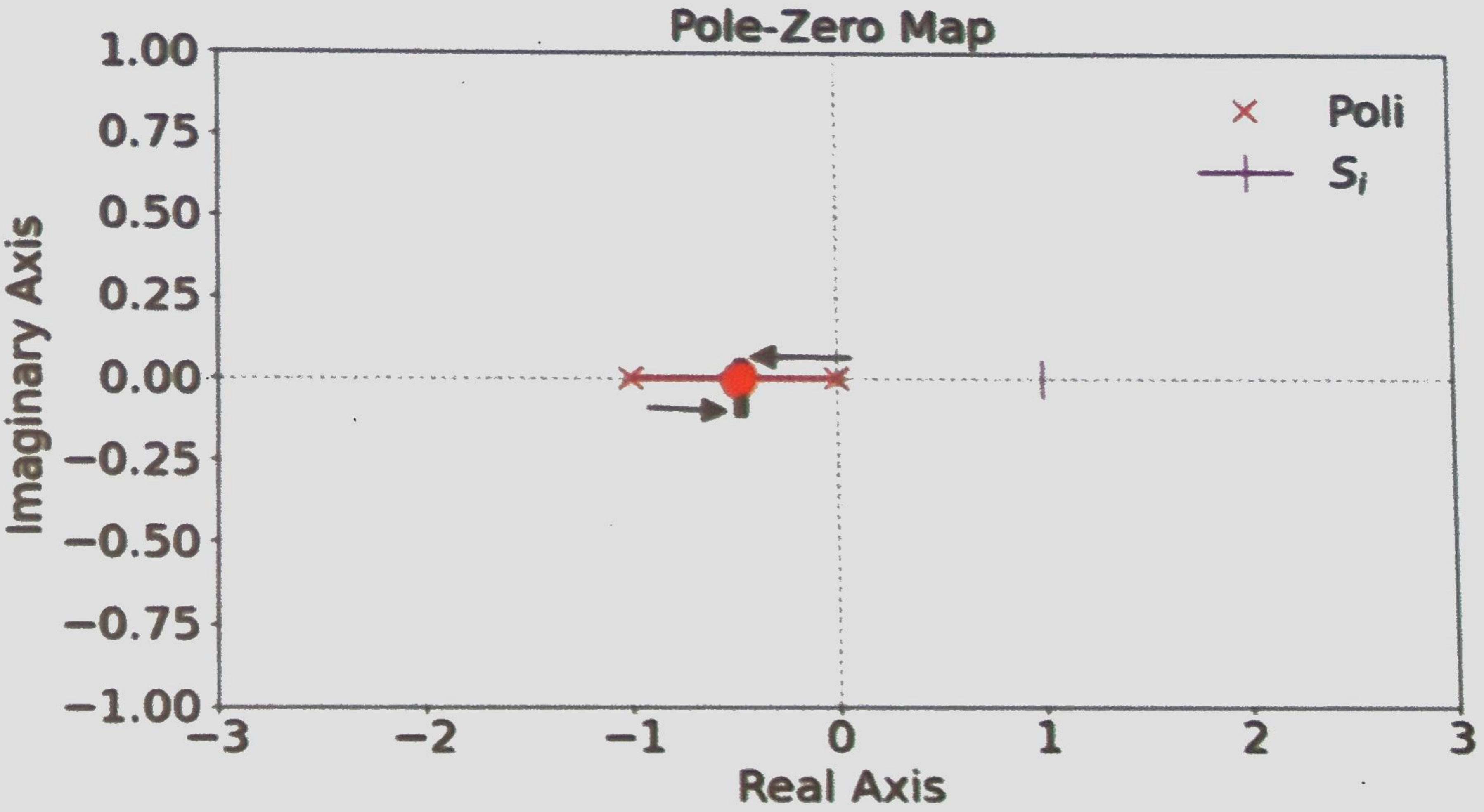




Pole-Zero Map
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−3
−2
−1
0
1
2
3
Real Axis
Imaginary Axis
Poli
S_i
si



Pole-Zero Map
Poli
s_i
$\angle(s_i - 0) = -\pi$
$\angle(s_i + 1) = -\pi$
Si
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
Imaginary Axis
−3
−2
−1
0
1
2
3
Real Axis


Pole-Zero Map
Poli
S_i
Imaginary Axis
Real Axis
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−3
−2
−1
0
1
2
3

IL LUOGO DELLE RADICI: Tracciamento

Regola #4

Se *K>0* appartengono al luogo delle radici tutti i punti dell'asse reale che lasciano alla propria destra un numero **dispari** di singolarità

Regola #5

Se K<0 appartengono al luogo delle radici tutti i punti dell'asse reale che lasciano alla propria destra un numero **pari** di singolarità' (lo zero e' considerato un numero pari)

IL LUOGO DELLE RADICI: Tracciamento

Regola #6

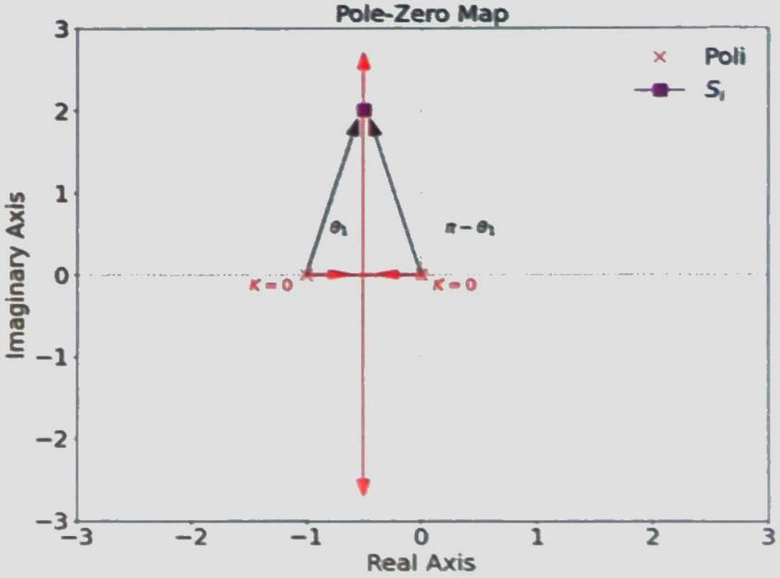
Il luogo delle radici e' simmetrico rispetto all'asse reale.

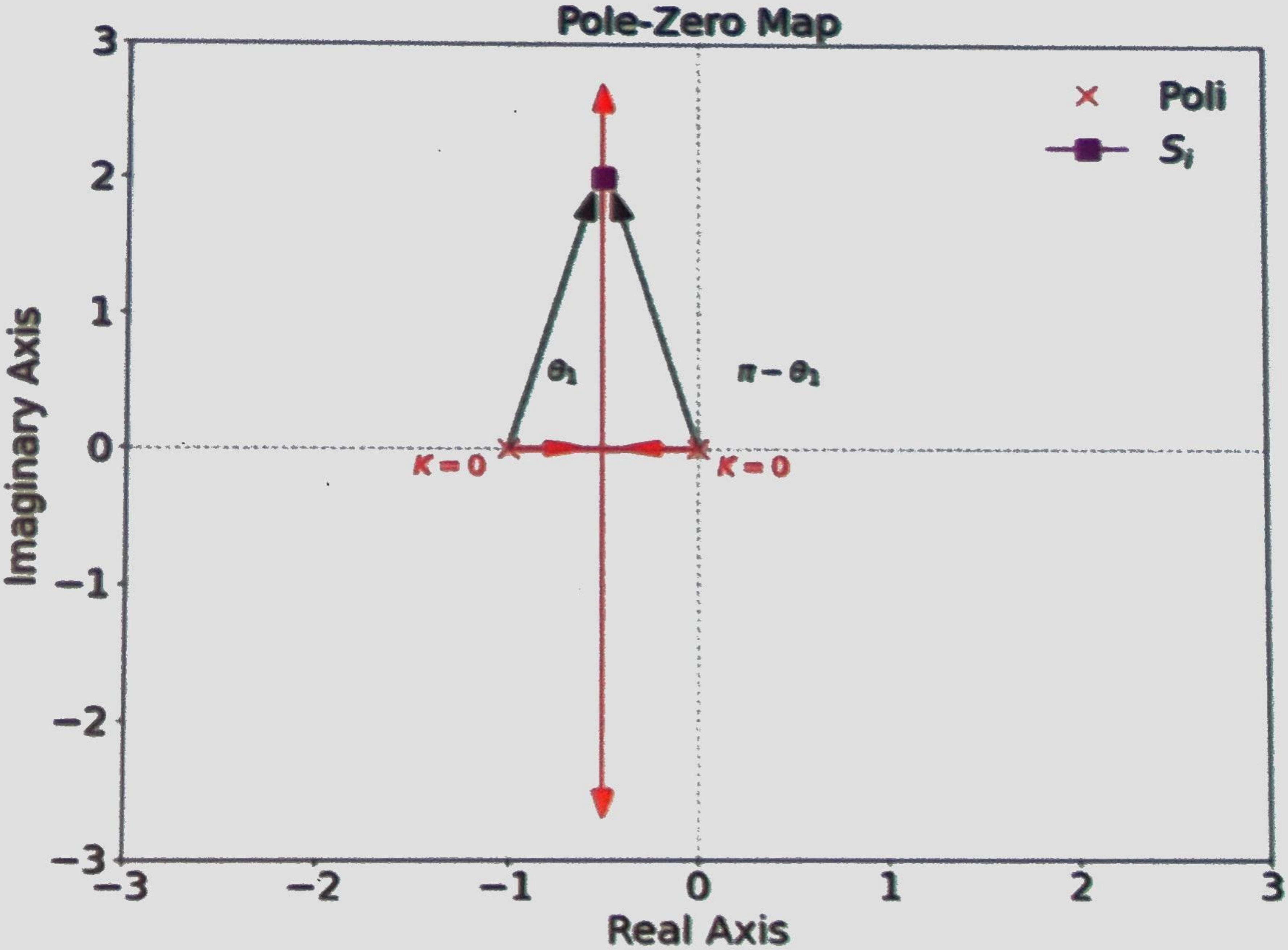
IL LUOGO DELLE RADICI: Tracciamento

Regola #6
Il luogo delle radici e' simmetrico rispetto all'asse reale.

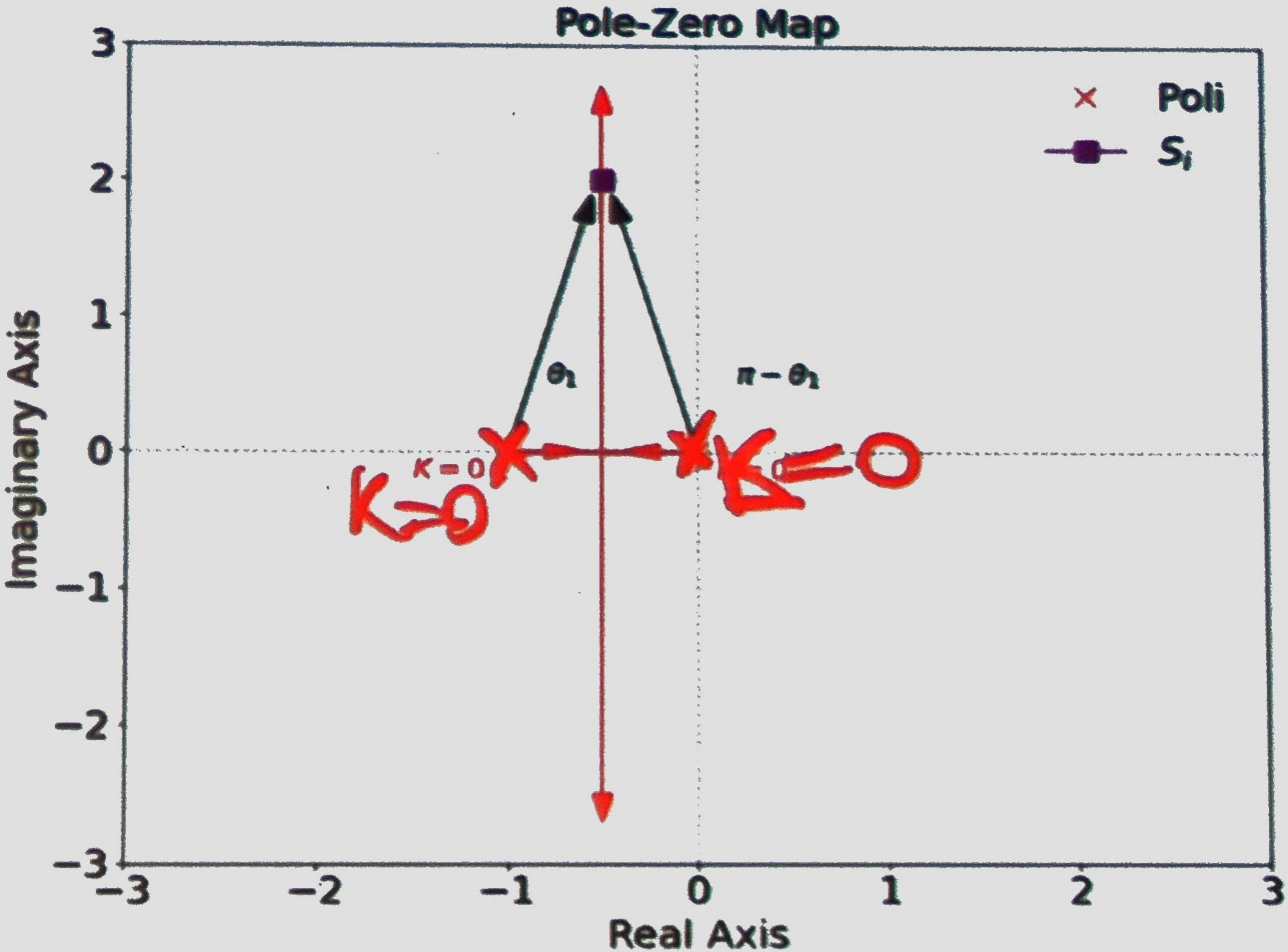
Condizione di fase

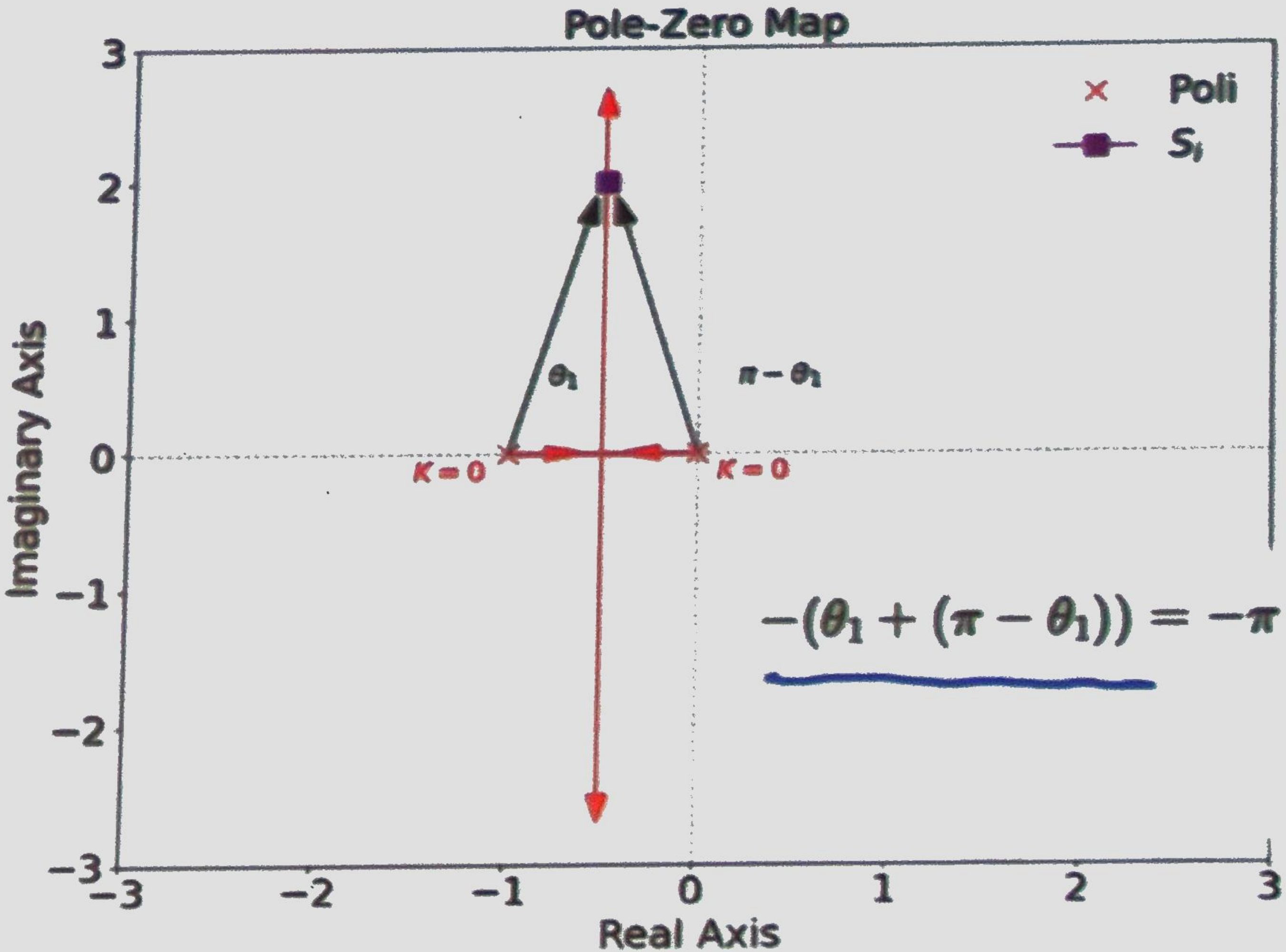
$$\angle \frac{1}{s \cdot (s+1)} = -\pi \pm 2h\pi$$





Pole-Zero Map
Poli
S_i
θ_1
$\pi - \theta_1$
$K = 0$
$K = 0$
Imaginary Axis
Real Axis
3
2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3

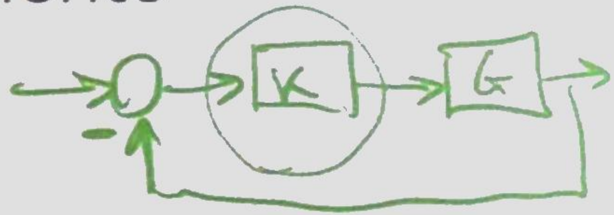

Pole-Zero Map
Poli
S_i
θ_1
$\pi - \theta_1$
$K=0$
$K=0$
$K=0$
Imaginary Axis
Real Axis
3
2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3



$$-(\theta_1 + (\pi - \theta_1)) = -\pi \pm 2h\pi$$

$W = \frac{KG}{1+KG}$

IL LUOGO DELLE RADICI: Tracciamento

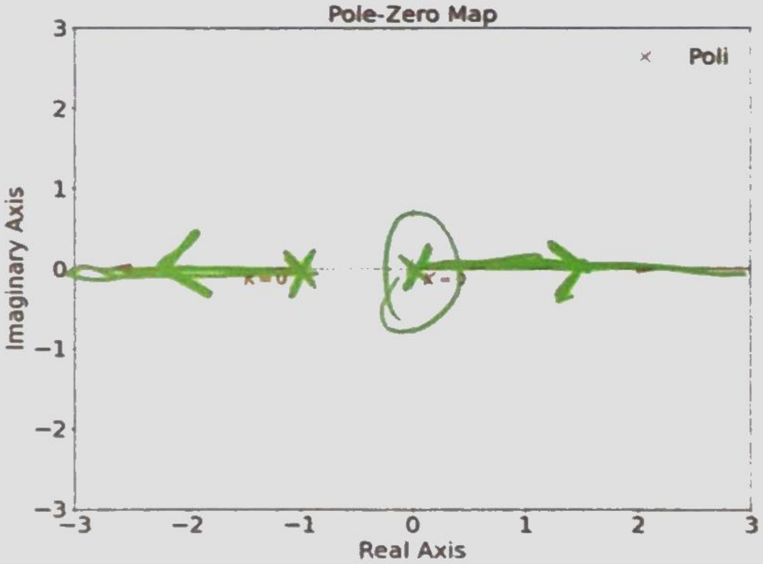


Regola #6

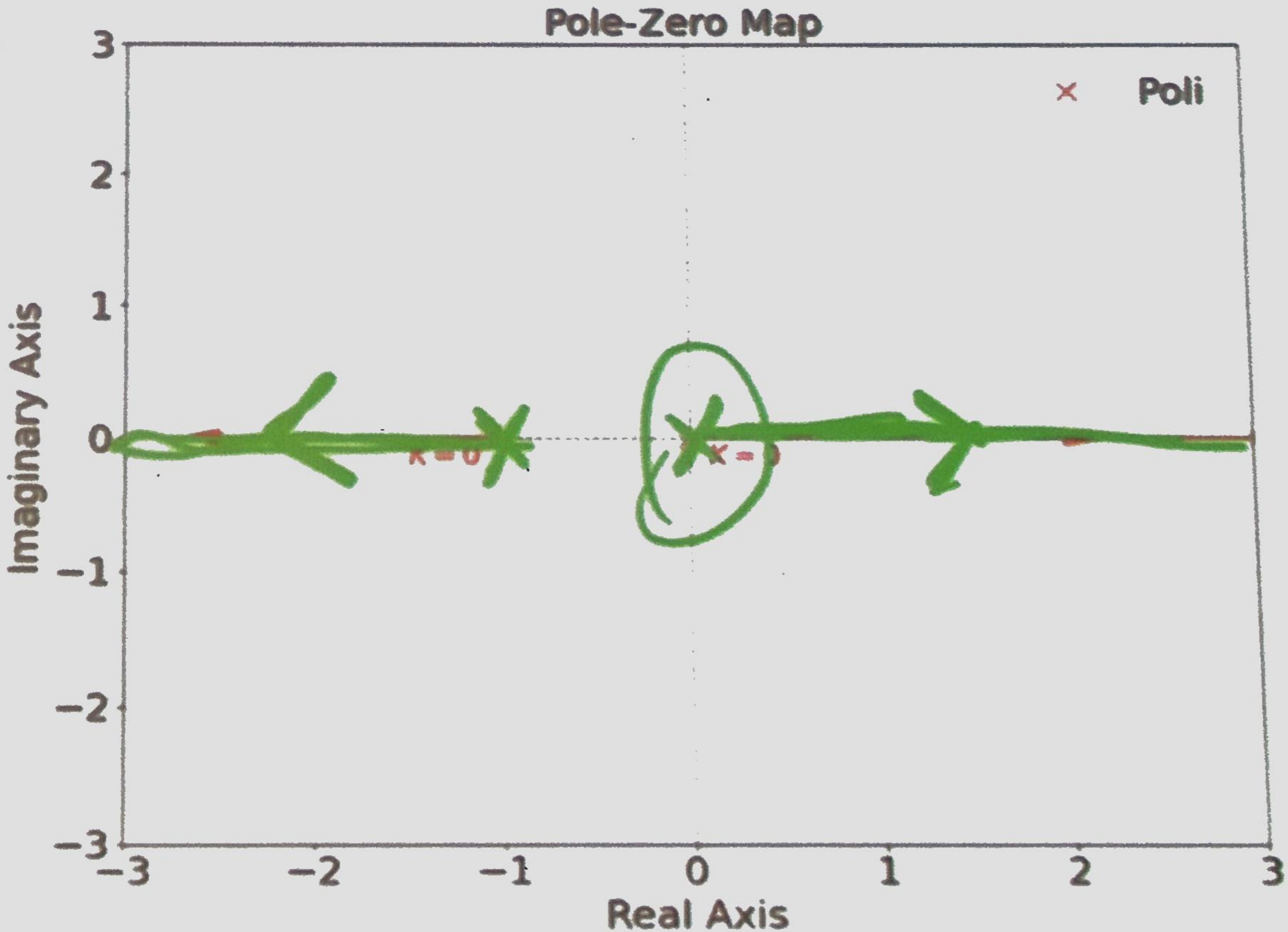
Il luogo delle radici e' simmetrico rispetto all'asse reale.

Condizione di fase

$$\angle \frac{1}{s \cdot (s+1)} = \pm 2h\pi$$



$K \angle \phi$


Pole-Zero Map
Poli
Imaginary Axis
Real Axis
3
2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3

$K < 0$