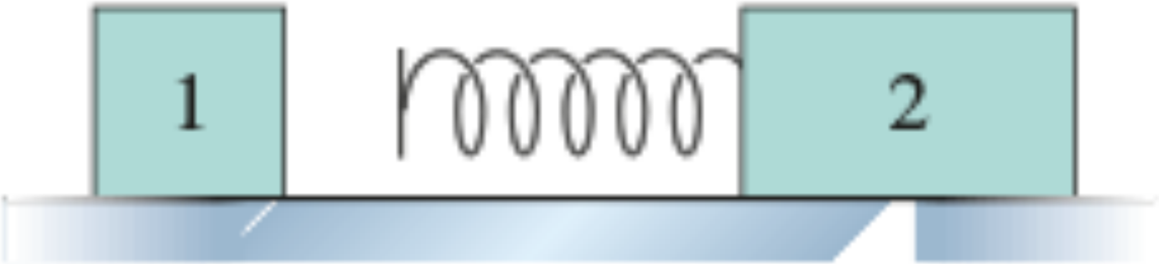
esercizio



Il carrello 1, di massa m_1 si muove con velocità $v_{1,0}$ verso il carrello 2, di massa m_2, che è inizialmente fermo.
I due carrelli interagiscono attraverso una molla di costante elastica k. Si possono trascurare tutti gli attriti.

- Determinare la massima compressione della molla.
- Determinare la velocità dei due carrelli quando la molla è massimamente compressa.

$$L_{A\to B} = \frac{1}{2}\mu\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$v_{1,0} \neq 0$ $\quad v_{2,0} = 0$ $\quad v_A = v_{1,0}$ STATO A

$v_B = 0$ STATO B

$$L_{A\to B} = \frac{1}{2}\mu\left(-v_{10}^{2}\right) = -\frac{1}{2}\mu v_{10}^{2}$$

$$L_{A\to B} = \int_{A}^{B} \vec{F}_{21}\cdot d\vec{r}_{21} = \int_{0}^{x_{MAX}} -kx\,dx = -\frac{k}{2}x_{MAX}^{2}$$

$$-\frac{k}{2}x_{MAX}^{2} = -\frac{1}{2}\mu v_{10}^{2}$$

$$x_{MAX} = \sqrt{\frac{\mu}{k}}\,v_{10} = \sqrt{\frac{1}{k}\,\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}\,v_{10}$$

esercizio

In questi due esempi, una massa si sposta verso l'alto. Determinare il lavoro delle forze che agiscono nei due casi.

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$L_{RIS} = \Delta K = L_{PESO} + L_{TENSIONE} = -mgH + L_T = 0$$

$$L_T = mgH$$

$$L_T = \int_0^H T(y)\,dy$$

2° caso

$$\Delta K = 0 = L_{RIS} = L_{peso} + ?$$

$$? = \quad = mgH$$

Potenza

Se L è il lavoro di una forza nell'intervallo di tempo Δt, la potenza media è definita da:

$$P_{media} = \frac{L}{\Delta t}$$

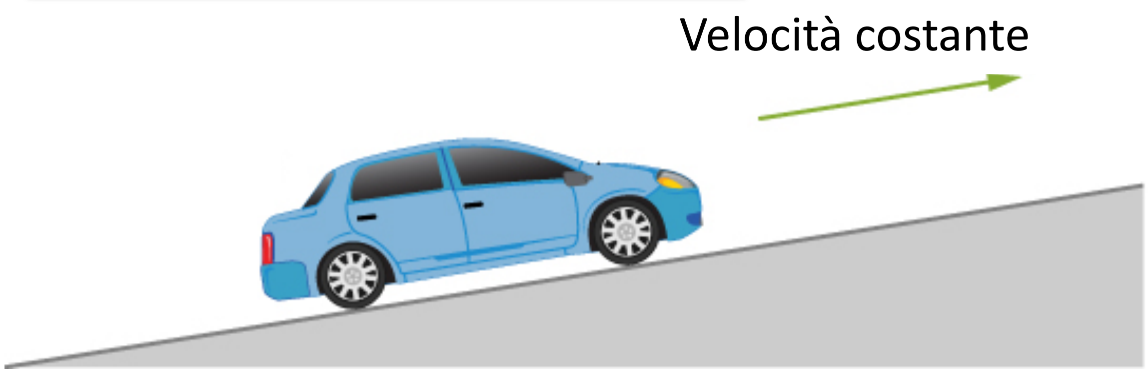
La potenza istantanea è

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} P_{media} = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d}{dt}\int \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

La potenza è uno scalare. L'unità di misura è il $Watt$, simbolo W

$$1\, W = 1\, J\, s^{-1} = 1\, kg\, m^2\, s^{-3}$$

Esempio: auto su piano inclinato



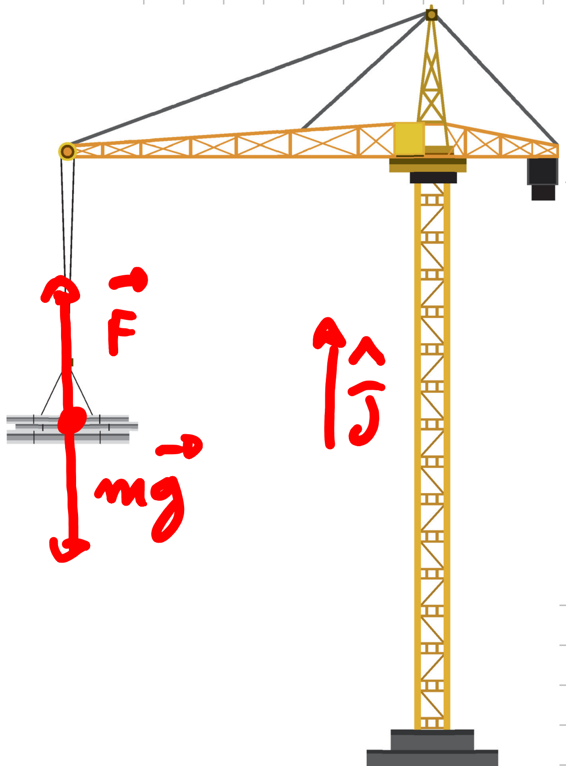
La velocità non dipende dalla forza esercitata dal motore:

$$F_{motore} = mg \sin\theta$$

La velocità dipende dalla potenza del motore:

$$v = P_{motore}/mg \sin\theta$$

esercizio



Una gru viene utilizzata per sollevare un oggetto di massa $m = 5 \times 10^2\,\mathrm{kg}$ dal suolo. La gru esercita una forza costante verso l'alto di intensità $F = 6 \times 10^3\,\mathrm{N}$ per sollevare l'oggetto. Trascurare ogni effetto di attrito. Si assuma $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Determinare:

1. L'accelerazione dell'oggetto.
2. Il lavoro compiuto dalla gru per sollevare l'oggetto fino a un'altezza di $12\,\mathrm{m}$.
3. La potenza media erogata dalla gru nei primi $8\,\mathrm{s}$.
4. La potenza istantanea erogata dalla gru quando l'oggetto si trova a $4\,\mathrm{m}$ dal suolo.

$$F - mg = ma$$

$$a = \frac{F - mg}{m} = 2\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$L_{GRU} = \vec{F} \cdot \vec{d} = 6 \times 10^3\,\mathrm{N} \times 12\,\mathrm{m} = 7.2 \times 10^4\,\mathrm{J}$$

$$P_{MEDIA} = \frac{L}{\Delta t} \qquad \Delta t = 8\,s$$

$$y = \frac{1}{2} a t^2 = 64\,m$$

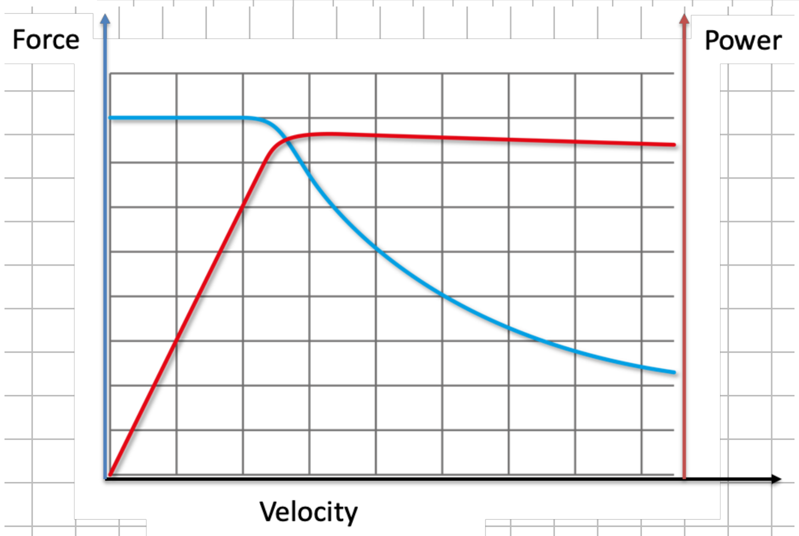
$$P_{MEDIA} = \frac{6 \times 10^3\,N \times 64\,m}{8\,s} = 4.8 \times 10^4\,W$$

$$P_{ISTANTANEA} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F\sqrt{2ad}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2ad$$

$$v = \sqrt{2ad}$$

esercizio



Un'auto ha massa $m = 2t$ e parte da ferma.
Il motore fornisce la forza costante di modulo $F = 4\ kN$ fino alla velocità $v = 40\ ms^{-1}$ e poi una potenza quasi costante. Calcolare:

- la potenza massima del motore,
- il tempo richiesto per raggiungere la potenza massima,
- il lavoro compiuto dal motore nei primi 10 secondi.
- Qual sarebbe la velocità dell'auto dopo 10 secondi, se invece il motore fornisse potenza costante uguale a quella massima?

$$P = m v a = m v \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P}{mv}$$

Per un moto rettilineo con $P = costante$ calcolare:

$$v(t); \quad a(t); \quad x(t).$$

$$m = 2\times10^{3}\,kg \qquad F = 4\times10^{3}\,N$$

$$a = \frac{F}{m} = 2\,m\,s^{-2}$$

$$P_{MAX} = \vec{F}\cdot\vec{v} = $$
$$= 1.6\times10^{5}\,W$$

$$v = a\,\Delta t \qquad \Delta t = \frac{v}{a} = 20\,s$$

$$L = \vec{F}\cdot\vec{d} = Fd = F\,\frac{1}{2}at^2 = 2\times10^{5}\,J$$

$$P_{MEDIA} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{\Delta K}{\Delta t}$$

$$\Delta K = K_f = $$
$$= \frac{1}{2}\,m\,v_f^{\,2}$$

$$\frac{1}{2}m v_f^{\,2} = P_{MEDIA}\,\Delta t = P_{MAX}\,\Delta t$$

$$v_f = 40\,\frac{m}{s}$$

esercizio

Una particella di massa m si muove lungo un percorso circolare di raggio costante r . La componente radiale della sua accelerazione in funzione del tempo è:

$$a_r = -k^2\, r\, t^2$$

con k costante.

- Determinare la potenza trasferita alla particella dalle forze che agiscono su di essa.

$$a_r = -k^2 r t^2$$

K COSTANTE

MOTO CIRCOLARE:

$$a_r = -r\omega^2 = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$v_r = 0$$

$$a_\theta = r\frac{d\omega}{dt} = r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$v_\theta = r\omega = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = F_\theta v_\theta = F_T v_T$$

$$F_\theta = m\, a_\theta$$

$$a_r = -r\omega^2 = -k^2 r t^2$$

$$\omega^2 = k^2 t^2$$

$$\omega = kt$$

$$\frac{d\omega}{dt} = k$$

$$F_\theta = m\, a_\theta = m r k$$

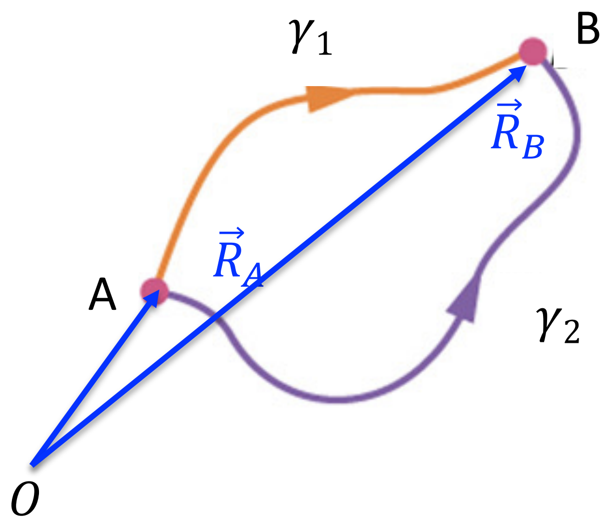
$$v_\theta = \omega r = r k t$$

$$P = F_\theta v_\theta = m r^2 k^2 t$$

Forze conservative

Una forza è definita conservativa se il lavoro da essa sviluppato su un corpo che si sposta tra due punti è identico per tutti i percorsi che collegano questi due punti.

$$L = \int_{\vec{R}_A \text{ linea } \gamma}^{\vec{R}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv \int_{\vec{R}_A}^{\vec{R}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Esempi.

Forze conservative :

- Gravitazionale
- Elastica
- Forza di Coulomb
- .....

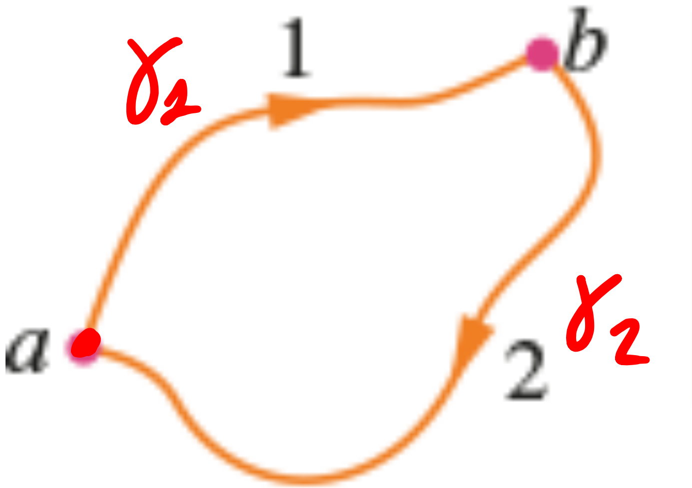
Forze non conservative:

- Attrito tra superfici
- Resistenza aerodinamica
- Resistenza elettrica
- ....

Forze conservative

Una forza è conservativa se il lavoro da essa sviluppato su un corpo che effettua un percorso chiuso è nullo, cioè se, per ogni percorso chiuso γ è:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$



Supponaimo che, con riferimento alla figura, la circuitazione sia nulla. Dividiamo l'integrale in due parti:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 = \int_{\vec{R}_{\mathrm{a},\gamma_1}}^{\vec{R}_{\mathrm{b}}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{R}_{\mathrm{b},\gamma_2}}^{\vec{R}_{\mathrm{a}}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

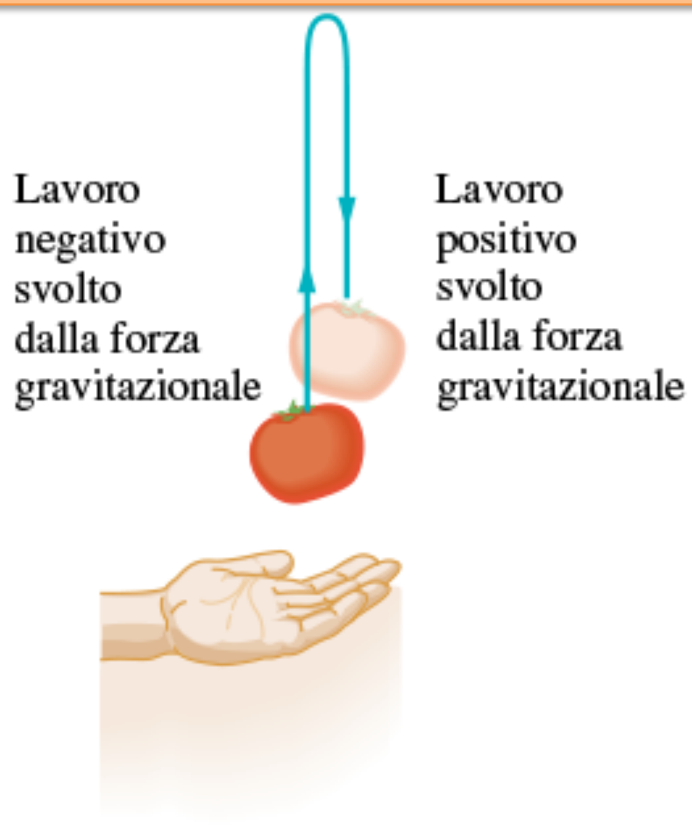
$$\Longrightarrow \int_{\vec{R}_{\mathrm{a},\gamma_1}}^{\vec{R}_{\mathrm{b}}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{R}_{\mathrm{a},\gamma_2}}^{\vec{R}_{\mathrm{b}}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

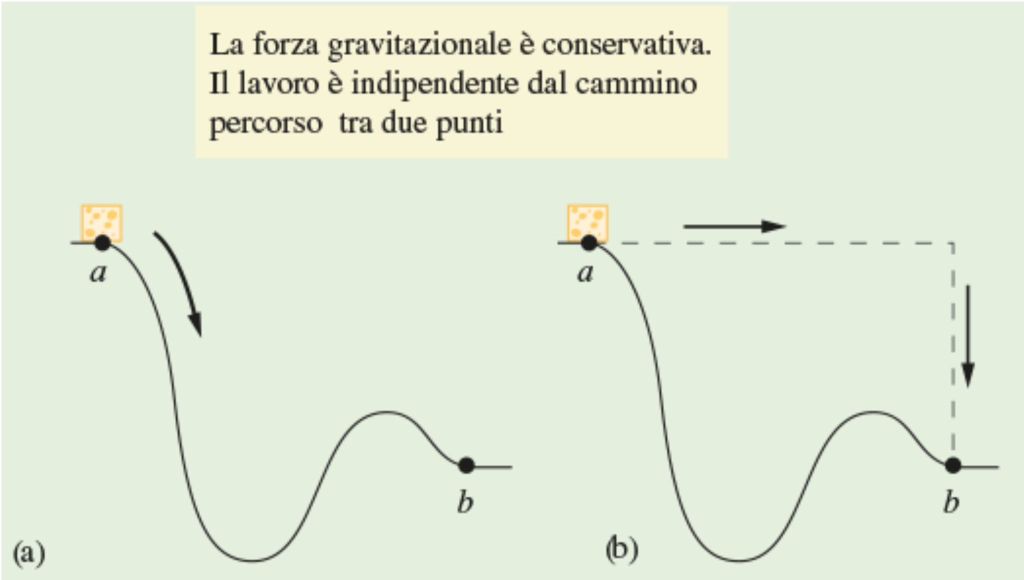
Quindi se la forza $\vec{F}$ è tale che per qualunque percorso chiuso γ la circuitazione è nulla, il lavoro fatto dalla forza $\vec{F}$ dipende unicamente dalla posizione iniziale e finale e non dal percorso scelto.

Esempio: forza peso

Il lavoro di una forza costante tra due punti dipende solo dalla componente dello spostamento lungo la direzione della forza.

$$L_{peso} = mg(h_a - h_b)$$





In un cammino chiuso, lo spostamento è nullo e quindi la circuitazione è sempre nulla.

$$L_{peso} = 0$$

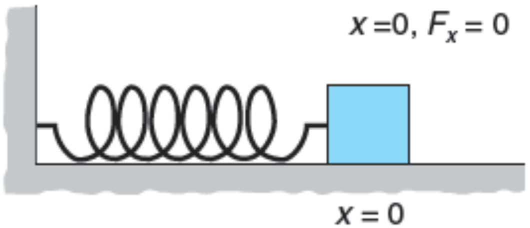
Esempio: forza elastica

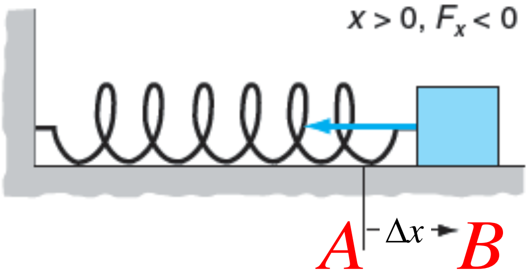
$$L_{x_i \to x_f} \equiv \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{x_i}^{x_f} kxdx = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)$$

Fissiamo l'origine nel punto di equilibrio e ci muoviamo prima verso destra , da A a B, e poi verso sinistra, da B ad A, per una quantità Δx

- Da A a B espansione
  $x_i = 0 \quad x_f = \Delta x$
- Da B ad A compressione
  $x_i = \Delta x \quad x_f = 0$

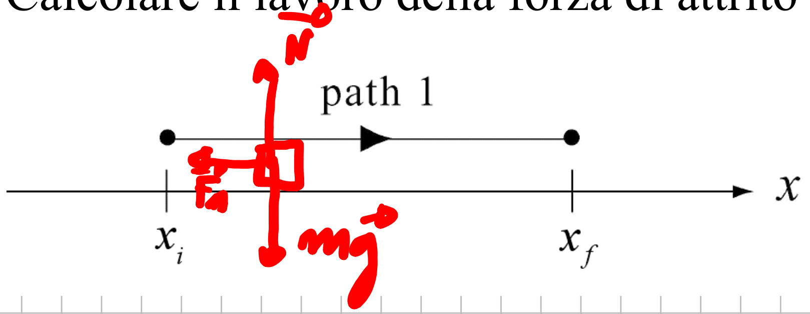
$$L_{ABBA} = L_{AB} + L_{BA} = -\frac{1}{2}k\Delta x^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 = 0$$

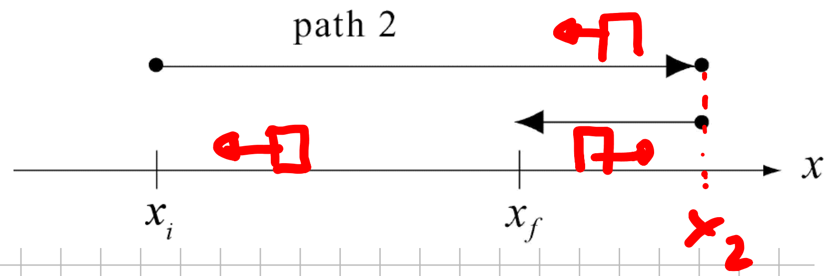




Esempio: attrito dinamico

Calcolare il lavoro della forza di attrito dinamico nel caso di questi due cammini:





L'attrito è sempre opposto allo spostamento.

CASO 1

$$L_{ATT} = -\mu_d mg \int_{x_i}^{x_f} dx = -\mu_d mg (x_f - x_i)$$

CASO 2

$$L_{ATT} = -\mu_d mg (x_f - x_i) - 2\mu_d mg (x_2 - x_f)$$

Variazione di energia potenziale

Se una forza $\vec{F}$ è conservativa allora esiste una funzione della posizione del punto materiale (e solo della posizione) tramite la quale si può esprimere il valore numerico del lavoro:

$$L_{A\to B} = f(A,B)$$

Definiamo la **variazione di energia potenziale**:

$$\Delta U_{A\to B} = U(B) - U(A) = -L_{A\to B} = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

- La variazione di energia potenziale dipende esclusivamente dalle posizioni iniziale e finale.
- Il valore assoluto dell'energia potenziale è arbitrario e può essere stabilito fissandone un valore in un determinato, ed arbitrario, punto dello spazio.

Energia potenziale: forza peso

La variazione di energia potenziale è:

$$\Delta U = -L_{peso} = -\int_{y_i}^{y_f} -mg\,dy$$

$$= mg\int_{y_i}^{y_f} dy = mg\left(y_f - y_i\right)$$

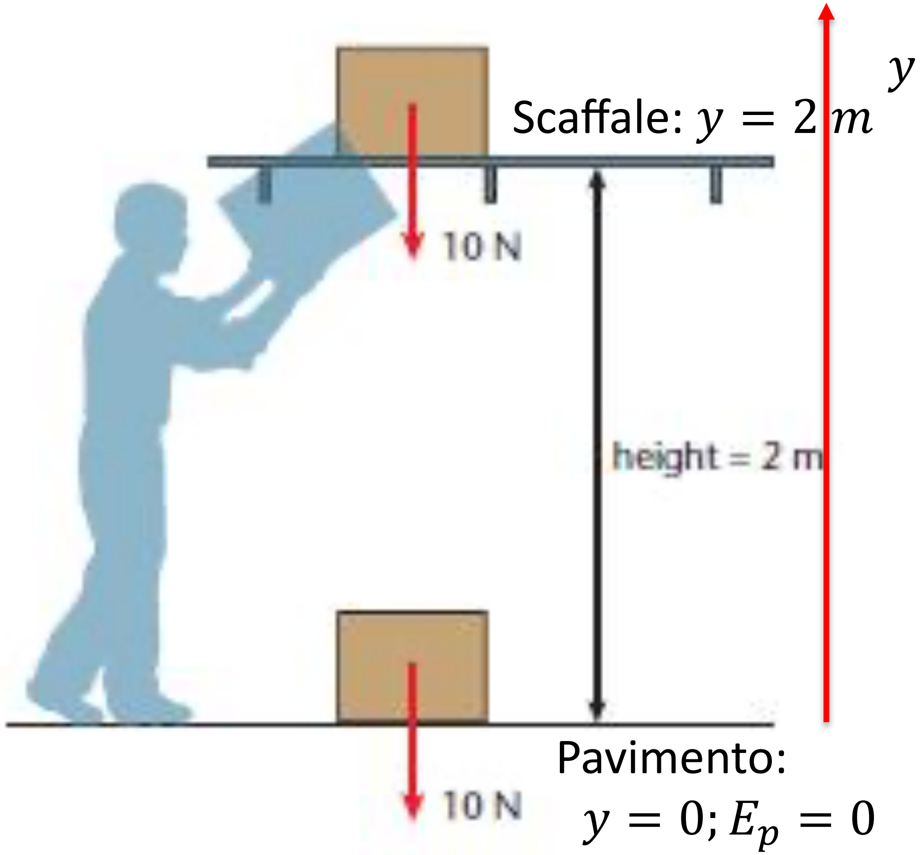
$$= mg\Delta y$$

Se poniamo zero **l'energia potenziale all'origine del riferimento** :

$$U_i = 0 \quad \text{in} \quad y_i = 0$$

possiamo scrivere il valore dell'energia potenziale in funzione della coordinata:

$$U(y) = mgy$$



In questo esempio, l'origine del riferimento è sul pavimento:

- $U_i = U(y = 0) = 0$
- $U_f = U(y = 2m) = 20\,J$

Energia potenziale: forza elastica

La forza elastica $\vec{F}_e$ è conservativa. La variazione di energia potenziale è:

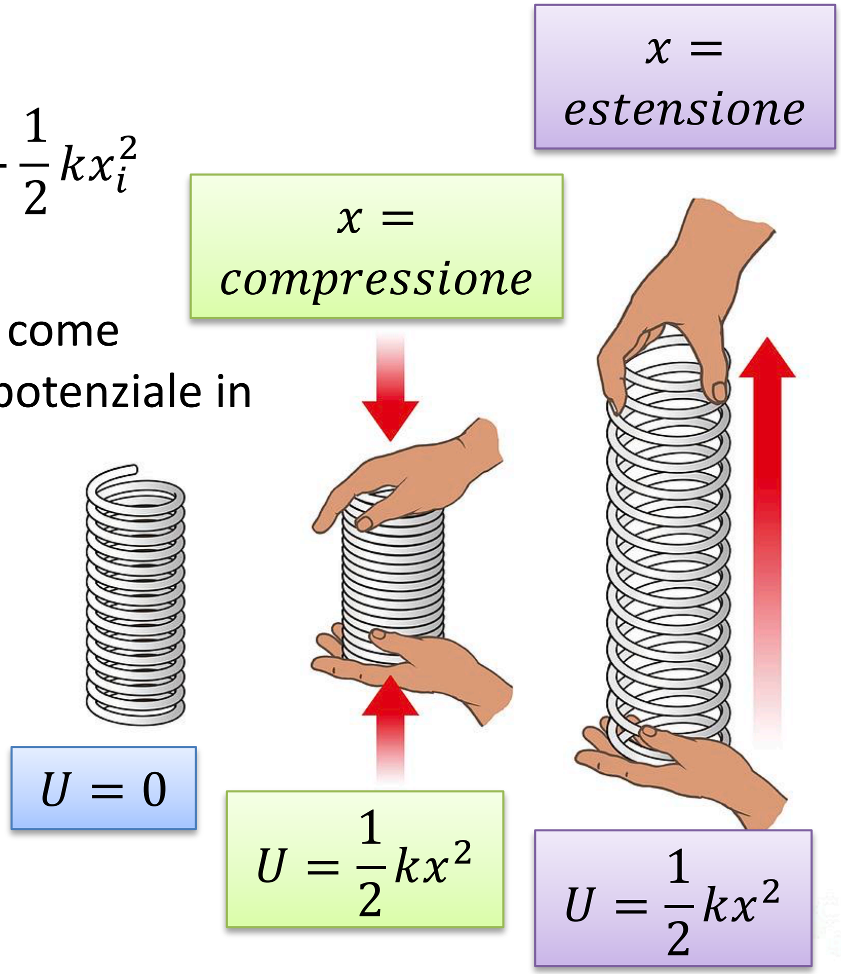
$$\Delta U = -L_{x_i \to x_f} = -\int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

Se scegliamo l'estremità libera della molla a riposo come origine del riferimento e poniamo a zero l'energia potenziale in questo punto:

$$U(x=0) = 0$$

Otteniamo l'energia potenziale in funzione della deformazione (estensione o compressione) x:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$



Osservazioni sull'energia potenziale

Per una forza conservativa abbiamo:

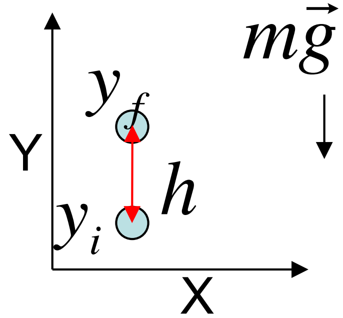
$$\Delta U_{A\to B} = U(B) - U(A) = -L_{A\to B} = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

- Se il corpo si muove **contro** la forza conservativa, il lavoro della forza è **negativo,** ovvero **l'energia potenziale aumenta**. Questo processo può essere interpretato come un **accumulo di energia potenziale** nel sistema.

- Se il corpo si muove **secondo** la direzione della forza conservativa, il lavoro della forza è **positivo**. L'energia potenziale diminuisce e viene convertita per esempio in energia cinetica, ovvero il sistema **cede energia potenziale**.

Esempi

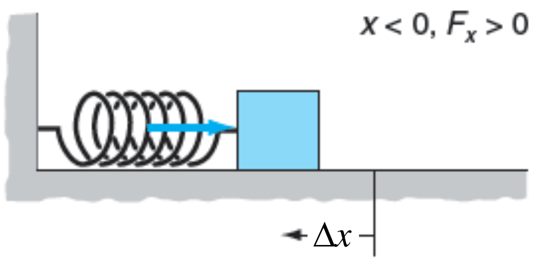
- Forza peso: se si innalza la quota di un corpo di massa m, l'energia potenziale aumenta $\Longrightarrow$ si immagazzina energia potenziale



$$L_{peso} = -mg(y_f - y_i) = -(U(y_f) - U(y_i))$$

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mgh$$

- Forza elastica: se si comprime o si allunga la molla, l'energia potenziale aumenta $\Longrightarrow$ si immagazzina energia potenziale



$$L_{molla} = -\frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right) = -(U(x_f) - U(x_i))$$

Dall'energia potenziale alla forza

Consideriamo l'energia potenziale in un certo punto in posizione $\vec{R}$:

$$U(\vec{R}) = U(\vec{R}_0) - \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

In coordinate cartesiane, questa relazione diventa:

$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0) - \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x,y,z)} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

La relazione tra componenti della forza ed energia potenziale è:

$$F_x = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}. \qquad F_z = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}$$

In notazione vettoriale:

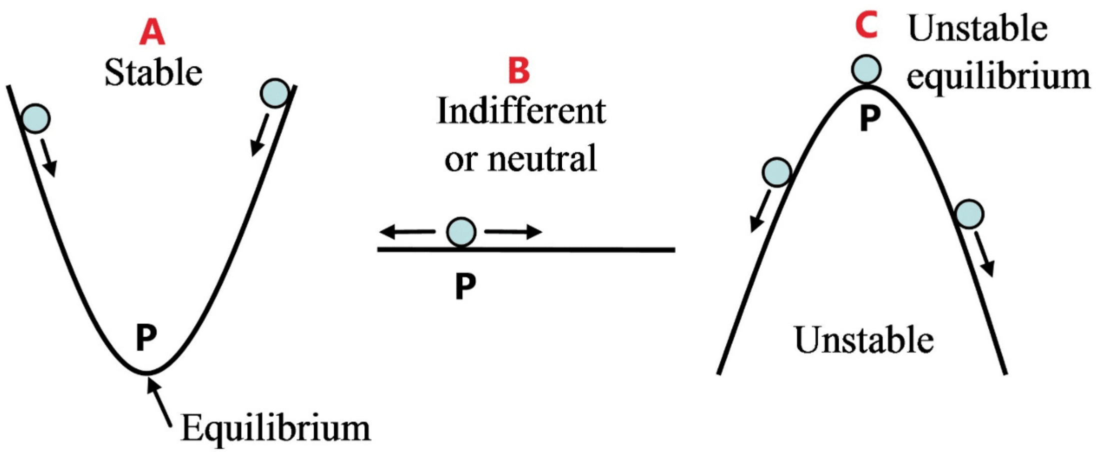
$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \text{ con } \vec{\nabla} = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \text{ operatore gradiente}$$

Quindi se conosciamo la funzione scalare $U(x, y, z)$ nell'intorno di un punto si può determinare il vettore forza in quel punto.

Equilibrio stabile e instabile

Equilibrio stabile:
Un sistema è in equilibrio stabile se, in seguito a una piccola perturbazione, le forze risultanti tendono a riportarlo alla posizione di equilibrio. In termini di energia potenziale, questo corrisponde a un *minimo locale*: piccoli spostamenti aumentano l'energia potenziale, generando una forza di richiamo.

Equilibrio instabile:
Un sistema è in equilibrio instabile se, a seguito di una piccola perturbazione, le forze lo spingono ulteriormente lontano dalla posizione di equilibrio. In questo caso la configurazione corrisponde a un *massimo locale* dell'energia potenziale, e piccoli spostamenti determinano una diminuzione dell'energia potenziale, favorendo il distacco dall'equilibrio.



caso unidimensionale

Consideriamo una funzione di energia potenziale $U(x)$ in una dimensione. Le posizioni di equilibrio si trovano imponendo:

$$\frac{dU}{dx}(x_0) = 0.$$

La stabilità del punto di equilibrio x_0 è determinata dalla derivata seconda di U in quel punto:

- Se
  $$\frac{d^2U}{dx^2}(x_0) > 0,$$
  allora x_0 è un minimo locale e l'equilibrio è stabile.
- Se
  $$\frac{d^2U}{dx^2}(x_0) < 0,$$
  allora x_0 è un massimo locale e l'equilibrio è instabile.
- Se
  $$\frac{d^2U}{dx^2}(x_0) = 0,$$
  la stabilità non può essere determinata dalla sola derivata seconda ed è necessario analizzare derivate di ordine superiore.

esercizio

L'energia potenziale di un oggetto è data da:

$$U(x) = 5x^2 - 4x^3$$

- Qual è la forza che agisce sull'oggetto?
- Determinare le posizioni in cui l'oggetto è in equilibrio e dire se si tratti di equilibrio stabile o instabile

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -10x + 12x^2$$

EQUILIBRIO

$$F(x) = 0 \qquad -10x + 12x^2 = 0 \qquad x = 0 \qquad x = \frac{10}{12}$$

$$\frac{dU}{dx} = 10x - 12x^2 \qquad \frac{d^2U}{dx^2} = 10 - 24x$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dx} = 0 \qquad \frac{d^2U}{dx^2} = 10 > 0$$

$$x = \frac{10}{12} \qquad \frac{d^2U}{dx^2} = 10 - 24x = 10 - \frac{24}{12} \times 10 = -10 < 0$$