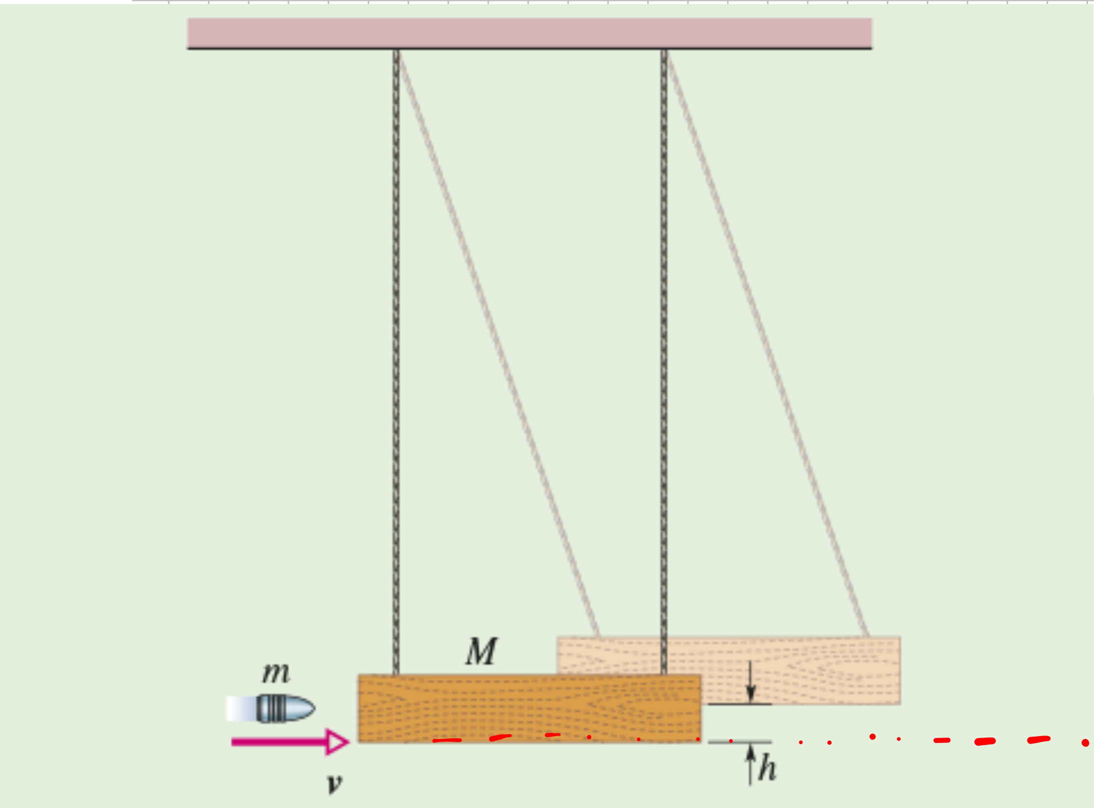
Esempio: pendolo balistico



Un proiettile di massa m urta il pendolo balistico, di massa M, rimanedovi conficcato. Se il sistema sale fino ad un'altezza h, determinare la velocità iniziale del proiettile.

$U = 0$

URTO : $m v_0 = (m+M) v_1$

II FASE : $\frac{1}{2}(m+M) v_1^2 = (m+M) g h$

$$v_1^2 = 2gh \qquad v_1 = \sqrt{2gh}$$

$$m\, v_0 = (m+M)\sqrt{2gh}$$

$$v_0 = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$$

Urto anelastico 2D

Consideriamo due corpi di masse m_1 e m_2 che si muovono in un piano con velocità iniziali $\vec{v}_{1,i}$ e $\vec{v}_{2,i}$, rispettivamente. Supponiamo che, dopo l'urto, i due corpi rimangano uniti formando un unico sistema con massa $M = m_1 + m_2$, che si muove con velocità finale $\vec{v}_f$.

L'obiettivo è determinare $\vec{v}_f$ in funzione delle velocità iniziali e delle masse.

$$\vec{P}_{sis,f} = \vec{P}_{sis,i}$$

EN. NON SI CONSERVA

$$m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} = m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix}$$

$$v_{1fx} = v_{2fx} = v_{fx}$$

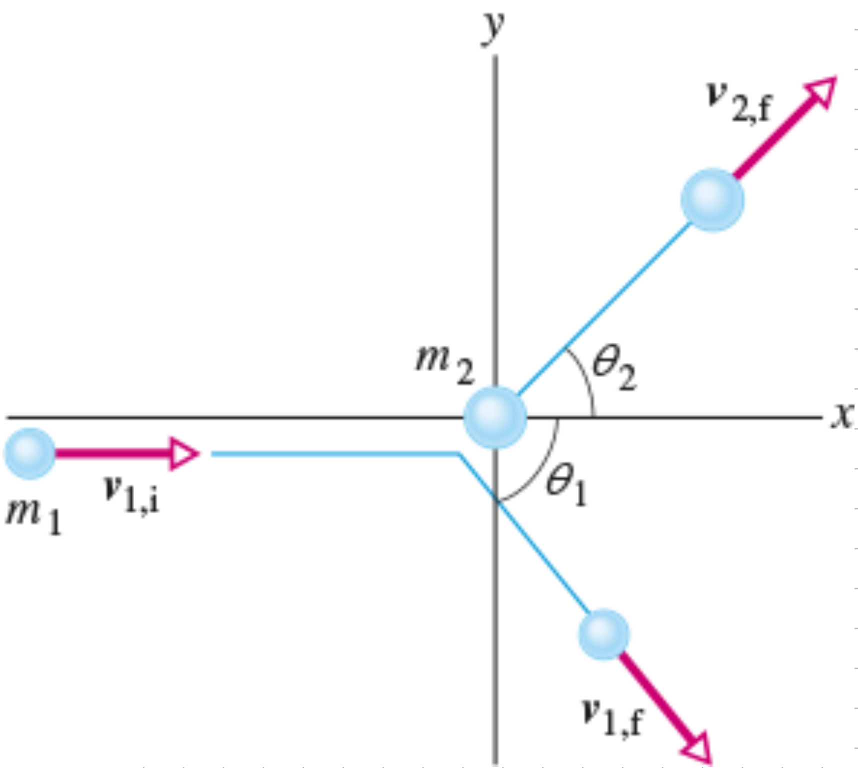
$$v_{fx} = \frac{m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix}}{m_1 + m_2} = v_{cm,x}$$

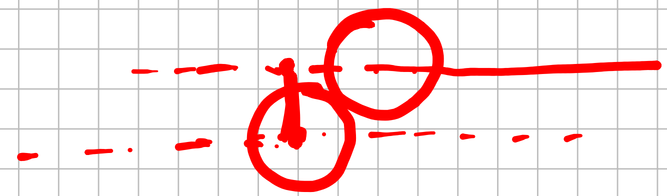
$$v_y = \frac{m_2 v_{1y} + m_1 v_{2y}}{m_1 + m_2} = v_{cm,y}$$

$$v_f = \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fy}^2}$$

Urto elastico 2D

Urto di striscio che conserva quantità di moto ed energia cinetica





$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$

$$\vec{v}_{2i} = 0$$

$$m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$ QUANTITÀ DI MOTO

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$ E N.

SUPPONIAMO $m_1 = m_2 = m$

$$\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f} \qquad (1)$$

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \qquad (2)$$

FACCIAMO IL QUADRATO DI (1)

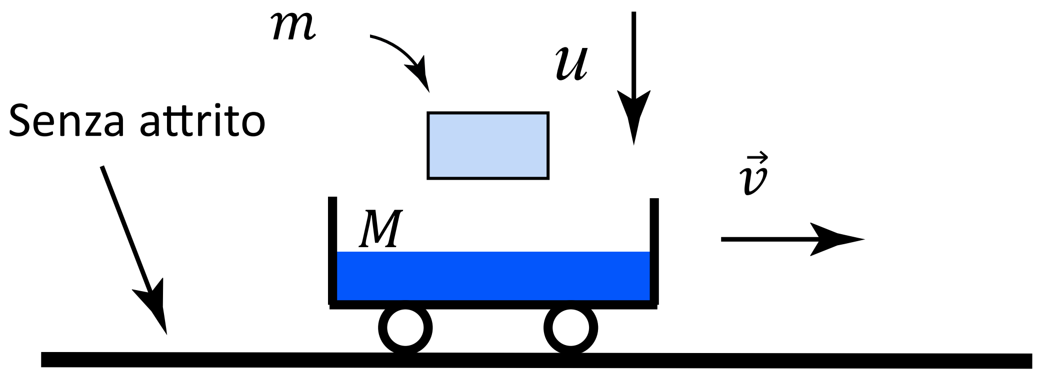
$$v_{1i}^2 = (\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}) \cdot (\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}) =$$

$$= v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\, \vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f}$$

$$\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} = 0 \qquad \vec{v}_{1f} \perp \vec{v}_{2f}$$

esercizio

Consideriamo un carrello di massa M che si muove orizzontalmente, senza attrito, con velocità iniziale v. Su di esso cade, verticalmente, un corpo di massa m che rimane solidale con il carrello. Determinare la variazione della quantità di moto del sistema, del carrello e del corpo.



$$P_{sis,i} = M v$$

COMPONENTI ORIZZONTALI DELLA Q. M.

$$P_{sis,f} = (M+m) v_f$$

$$M v = (M+m) v_f \implies$$

$$\Rightarrow v_f = \frac{M}{M+m} v$$

VARIAZIONE QUANTITÁ DI MOTO:

- SISTEMA

$$\Delta P_{sis} = 0$$

- CARRELLO

$$P_{cf} = M v_f \qquad P_{ci} = M v$$

$$\Delta P_c = M v_f - M v = M\left(\frac{M}{M+m} v - v\right)$$

$$= -\frac{mM}{M+m} v$$

- BLOCCO

$$P_{bf} = m v_f \qquad P_{bi} = 0$$

$$\Delta P_b = \frac{mM}{m+M} v$$

esercizio

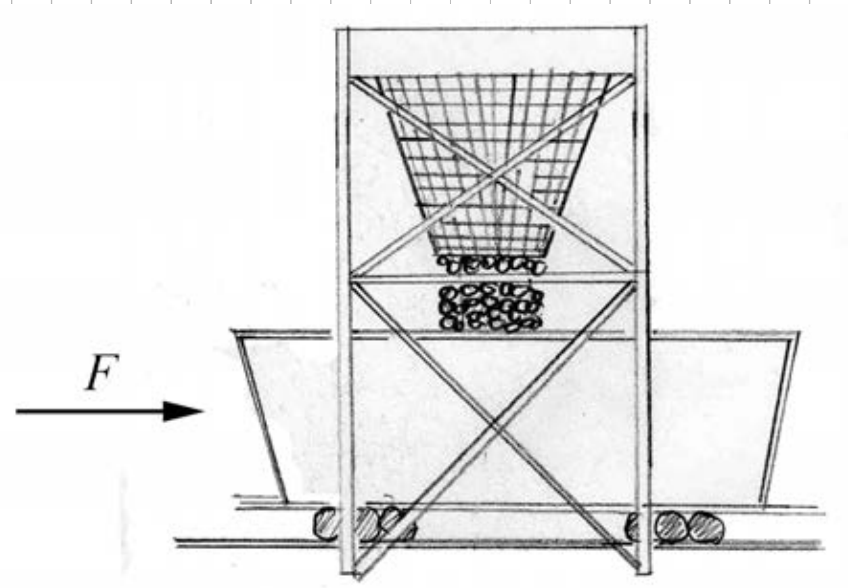
Si consideri un vagone di carbone, inizialmente vuoto, di massa m_0 che parte da fermo e sottoposto a una forza orizzontale costante di modulo F (nella direzione del moto). A $t = 0$ il carbone inizia a cadere nel vagone da una tramoggia, ad un tasso costante

$$b = \frac{dm}{dt} \quad \text{(in kg/s)},$$

cioè, nel tempo t la massa di carbone trasferita è

$$m_c = b\,t.$$

Si richiede di determinare la velocità del vagone quando il vagone ha ricevuto una massa m_c di carbone.



STATO INIZIALE $t = 0$

$$P_x(0) = 0$$

STATO FINALE $t = t_f$

$$P_x(t_f) = (m_0 + m_c)\, v_f \qquad m_c = b\, t_f$$

$[0, t_f]$

$$I_x = \int_0^{t_f} F_x \, dt = P_x(t_f) - P_x(0)$$

FORZA COSTANTE

$$F t_f = (m_0 + m_c)\, v_f$$

$$v_f = \frac{t_f F}{m_0 + m_c} = \frac{F t_f}{m_0 + b t_f}$$

$$v(t) = \frac{F t}{m_0 + b t}$$

esercizio

Consideriamo un carrello di massa M che si muove orizzontalmente con velocità v e che, in un dato istante, perde una parte del carico di massa m. Poiché il carico cade in verticale, al momento della separazione la sua velocità orizzontale è la stessa del carrello, cioè v. Determinare la variazione di quantità di moto del sistema, del carrello e del corpo.

$$P_i = M_{TOT}\, v = (M+m)\, v$$

$$P_{cf} = M v_f \qquad P_{bf} = m v_f$$

$$v_f = v$$

$$P_f = (M+m)\, v$$

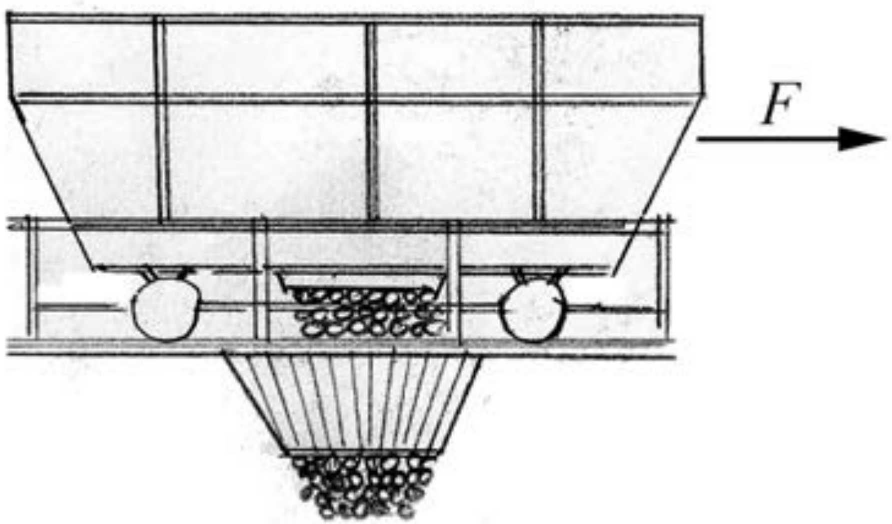
esercizio

Si consideri un vagone merci di massa m_c che, all'istante $t = 0$, contiene sabbia di massa m_s. Al tempo $t = 0$ viene applicata una forza orizzontale costante di modulo F (nella direzione del moto) e, contemporaneamente, viene aperto un portello sul fondo del vagone, permettendo alla sabbia di defluire a un tasso costante

$$b = \frac{dm_s}{dt}.$$

Si supponga che il vagone sia inizialmente fermo.

Determinare la velocità del vagone v_f nel momento in cui tutta la sabbia è uscita.



AL TEMPO t:

$$P_{sis}(t) = \underline{m_c(t)\, v(t)}$$

AL TEMPO $t+\Delta t$

$$P_{sis}(t+\Delta t) = \Delta m_s (v+\Delta v) + [m_c(t) + \Delta m_c](v+\Delta v)$$

$$\Delta m_c = -\Delta m_s$$

$$P_{sis}(t+\Delta t) = \cancel{\Delta m_s (v+\Delta v)} + m_c(t)(v+\Delta v) - \cancel{\Delta m_s (v+\Delta v)}$$

$$= m_c(t)[v+\Delta v]$$

$$\Delta P_{sis} = P_{sis}(t+\Delta t) - P_{sis}(t) =$$

$$= m_c(t)[v+\Delta v] - m_c(t)\, v =$$

$$= m_c(t)\,\Delta v$$

$$F = \frac{d P_{sis}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P_{sis}}{\Delta t} = m_c(t) \frac{dv}{dt}$$

$$m_{c0} = m_c(t) + m_s(t)$$

$$m_s(t) = \int_0^t \frac{dm_s}{dt'} dt' = \int_0^t b\, dt' = bt$$

$$m_c(t) = m_{c0} - bt = m_c + m_s - bt$$

$$F = (m_{c0} - bt) \frac{dv}{dt}$$

$$dv = \frac{F \ dt}{m_{c0} - bt}$$

$$\int_0^{v(t)} dv' = \int_0^t \frac{F}{m_{c0} - bt'} dt'$$

$$v(t) = -\frac{F}{b} \ln (m_{c0} - bt') \Big|_0^t =$$

$$= \frac{F}{b} \ln \left(\frac{m_{c0}}{m_{c0} - bt} \right)$$

esercizio

Consideriamo un carrello di massa M che si muove orizzontalmente con velocità V. Sul carrello atterra un carico di massa m che, prima dell'impatto, si muove con velocità avente componente orizzontale v. Dopo l'impatto il carrello e il carico diventano solidali e si muovono insieme con una velocità finale V_f. Determinare la variazione di quantità di moto del sistema, del carrello e del carico.

COMPONENTE ORIZZONTALE DELLA VEL. FINALE DEL SISTEMA

$$v_f = v_{cm} = \frac{MV + mv}{M+m}$$

CARRELLO:

$$\Delta P_c = M v_f - MV = \frac{Mm}{m+M}(v - V)$$

BLOCCO: $\Delta P_b = -\Delta P_c = \frac{Mm}{m+M}(V - v)$

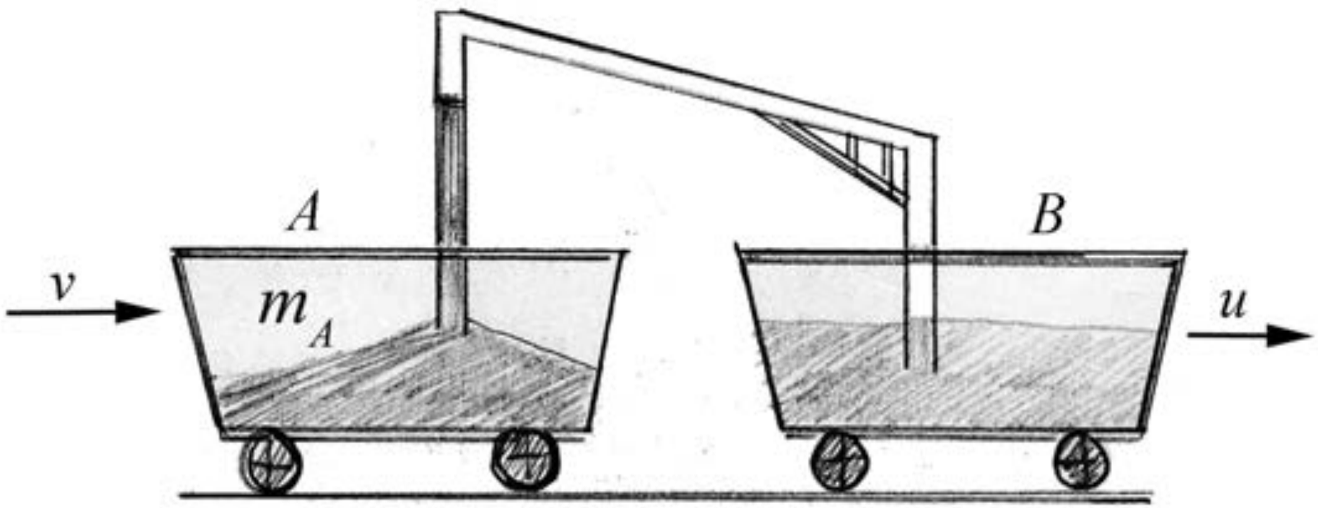
esercizio

Del grano viene trasferito dal vagone B nel vagone A ad un tasso costante di b chilogrammi al secondo. Il grano lascia il tubo cadendo verticalmente, in modo che acquisisca la stessa velocità orizzontale u del vagone B. Il vagone A è inizialmente fermo e ha massa iniziale $m_{A,0}$. Al tempo t il vagone A, che ha accumulato grano, ha massa

$$m_A(t) = m_{A,0} + b\,t$$

e si muove con velocità orizzontale $v_A(t)$.

Si richiede di determinare un'espressione per $v_A(t)$ in funzione del tempo t.



INTERVALLO DI TEMPO Δt

AL TEMPO t:

$$P_{sis}(t) = M_A v_A + \Delta m_g u$$

AL TEMPO $t+\Delta t$

$$P_{sis}(t+\Delta t) = (M_A + \Delta M_A)(v_A + \Delta v_A)$$

ΔM_A $\qquad$ $\Delta M_A = \Delta m_g$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{sis}(t+\Delta t) - P_{sis}(t)}{\Delta t} = 0$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(M_A + \Delta M_A)(v_A + \Delta v_A) - M_A v_A - \Delta m_g u}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{M_A v_A} + \Delta M_A v_A + M_A \Delta v_A + \Delta M_A \Delta v_A - \cancel{M_A v_A} - \Delta m_g u}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M_A \Delta v_A}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta M_A (v_A - u)}{\Delta t} + \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta M_A \Delta v_A}{\Delta t}}_{0}$$

$$M_A \frac{d v_A}{dt} + \frac{d M_A}{dt}(v_A - u) = 0$$

$$\frac{dM_A}{dt} = \frac{dm}{dt} = b$$

$$M_A \frac{dv_A}{dt} - b\left(u - v_A\right) = 0$$

$$\frac{dv_A}{dt} = \frac{b}{M_A}\left(u - v_A\right)$$

$$M_A(t) = M_{A0} + bt$$

$$\frac{dv_A}{dt} = \frac{b\left(u - v_A\right)}{M_{A0} + bt}$$

$$\frac{dv_A}{u - v_A} = \frac{b}{M_{A0} + bt}\, dt$$

$$\int_0^{v_A(t)} \frac{dv'}{u - v'} = \int_0^{t} \frac{dt'}{M_{A0} + bt'}$$

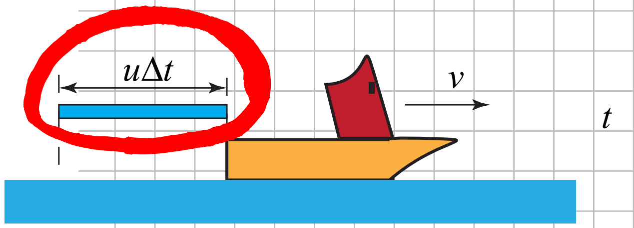
$$\ln \frac{u}{u - v_A} = \ln\left(\frac{M_{A0} + bt}{M_{A0}}\right)$$

$$\frac{u}{u - v_A} = \frac{M_{A_0} + bt}{M_{A_0}}$$

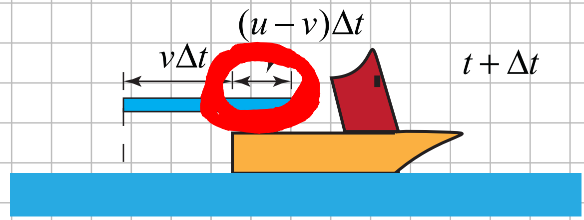
$$v_A(t) = \frac{bt}{M_{A_0} + bt} u$$

esercizio

Consideriamo un carrello inizialmente di massa M_0 che si muove orizzontalmente con velocità $V(t)$ (con $V(0) = 0$). Su di esso arriva un getto di acqua, erogata da un idrante ad un tasso costante di b chilogrammi al secondo e con velocità di componente orizzontale v (nel sistema di riferimento del laboratorio), che si accumula nel carrello stesso. Determinare la velocità del carrello al tempo t.



$$\Delta m_w = \lambda(u-v)\Delta t = \frac{\alpha}{u}(u-v)\Delta t$$



$$\frac{dm_w}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta m_w}{\Delta t} = \frac{\alpha}{u}(u-v) = \alpha\left(1-\frac{v}{u}\right).$$

$$\Delta m_{\text{IDRANTE}} = \lambda\, v\, \Delta t$$

$$\frac{dm_w}{dt} = \frac{b}{v}(v-V)$$

$$\Delta m_{\text{INTERCETTATA}} = \lambda\,(v-V)\,\Delta t$$

$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{dm}{dt}\frac{dt}{dl} = \frac{dm}{dt}\frac{1}{v} = \frac{b}{v}$$

INTERVALLO INFINITESIMO dt

QUANTITÀ DI MOTO INIZIALE:

$$\underbrace{M(t)\,V(t)}_{\text{CARRELLO}} + \underbrace{dm\,v}_{\text{ACQUA}}$$

QUANTITÀ DI MOTO FINALE:

$$\big(M(t)+dM\big)\big(V(t)+dV\big)$$

LA QUANTITÀ DI MOTO SI CONSERVA:

$$MV + dm\,V + M\,dV + dm\,dV = MV + dm\,v$$

INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE (0)

INOLTRE $\quad dM = dm \quad$ (VARIAZIONE DI MASSA DEL CARRELLO = MASSA DI ACQUA INTERCETTATA)

$$\Rightarrow \quad \frac{dV}{v-V} = \frac{dM}{M}$$

RELAZIONE DIFFERENZIALE TRA VELOCITÀ E MASSA

INTEGRIAMO

$$\int_0^V \frac{dV'}{v-V'} = \int_{M_0}^{M} \frac{dM'}{M'}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\frac{v}{v-V} = \ln\frac{M}{M_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{v-V} = \frac{M}{M_0} \quad *$$

$$\Rightarrow \quad V = v\left(1 - \frac{M_0}{M}\right)$$ RELAZIONE TRA VELOCITÁ E MASSA

SE VOGLIAMO $V(t)$ DOBBIAMO ESPRIMERE $M(t)$

NOTA: NEL CASO DEL TRASFERIMONTO DEL GRANO, IL TASSO DI MASSA INTERCETTATA É b, PER CUI:

$$M(t) = M_0 + bt$$

$$\Rightarrow \quad V = v\left(\frac{bt}{M_0 + bt}\right)$$

IN QUESTO CASO, IL TASSO DI ACQUA INTERCETTATA E QUINDI LA MASSA PER UNITÁ DI TEMPO TRASFERITA AL CARRELLO NON É UGUALE ALLA MASSA PER UNITÁ DI TEMPO CHE FUORIESCE DALL'IDRANTE (QUESTO PERCHÉ IL CARRELLO HA VELOCITÁ V E L'ACQUA HA VELOCITÁ v NELLA STESSA DIREZIONE)

QUINDI, IN QUESTO CASO:

$$\frac{dM(t)}{dt} = b\,\frac{(v - V(t))}{v}$$

DALL'EQUAZIONE * RICAVIAMO:

$$\frac{v - V(t)}{v} = \frac{M_0}{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{dt} = b\,\frac{M_0}{M}$$

$$\Rightarrow \quad dM = b\,\frac{M_0}{M}\,dt$$ RELAZIONE DIFFERENZIALE TRA MASSA E TEMPO

SEPARIAMO LE VARIABILI E INTEGRIAMO

$$\int_0^M M' \, dM' = b M_0 \int_0^t dt'$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left[M^2(t) - M_0^2\right] = b M_0 t$$

$$M(t) = \sqrt{M_0^2 + 2 b M_0 t}$$

MASSA IN FUNZIONE DEL TEMPO

SOSTITUENDO NELLA RELAZIONE TRA VELOCITÀ E MASSA:

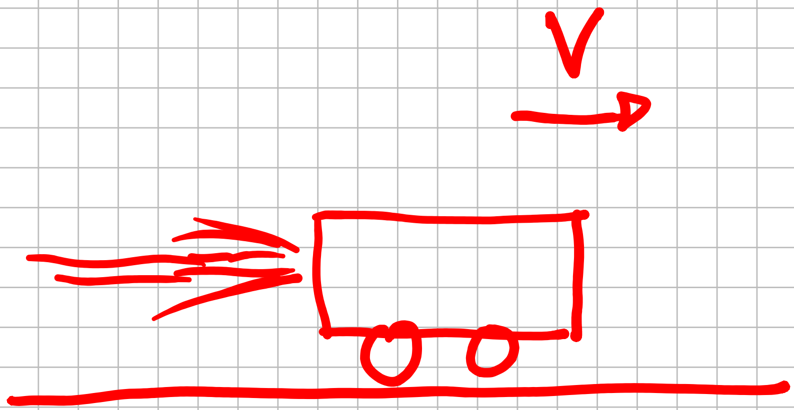
$$V(t) = v\left(1 - \frac{M_0}{M}\right) = v\left(1 - \frac{M_0}{\sqrt{M_0^2 + 2bM_0 t}}\right) =$$

$$= v\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2b}{M_0} t}}\right)$$

VELOCITÀ IN FUNZIONE DEL TEMPO

esercizio

Consideriamo un carrello di massa M, inizialmente fermo, su cui viene diretto un getto continuo di gas in orizzontale. Il gas viene espulso da una bombola ad un tasso costante di b chilogrammi al secondo, ha velocità v (nel sistema di riferimento fissato al laboratorio) e urta elasticamente il carrello. Determinare la velocità del carrello in funzione del tempo.



$$v_{REL} = v - V$$

$$v_{REL}(t) = v - V(t)$$

CARRELLO - GAS

CONSIDERIAMO L'INTERVALLO INFINITESIMO dt

LA MASSA DI GAS dm INCIDE SUL CARRELLO CON VELOCITÀ RELATIVA:

$$v_{rel,i} = v - V(t)$$

$V(t)$ È LA VELOCITÀ DEL CARRELLO AL TEMPO t

L'URTO TRA GAS E CARRELLO È ELASTICO QUINDI IL GAS RIMBALZA CON VELOCITÀ RELATIVA FINALE

$$v_{rel,f} = -v_{rel,i}$$

LA VARIAZIONE INFINITESIMA DI QUANTITÀ DI MOTO DEL CARRELLO È

$$dP_c = 2\, dm\, v_{rel,i}$$

LA MASSA DI GAS CHE COLPISCE IL CARRELLO NELL'UNITÀ DI TEMPO È (VEDI PROBLEMA DELL'IDRANTE)

$$\frac{dm}{dt}(t) = b\left(\frac{v - V(t)}{v}\right)$$

SOSTITUENDO:

$$dP_c = 2b\left(\frac{v-V(t)}{v}\right)\left(v-V(t)\right)dt$$

$$= 2b\,\frac{\left(v-V(t)\right)^2}{v}\,dt$$

LA FORZA ESERCITATA DAL GAS SUL CARRELLO È PERTANTO:

$$F = M\frac{dV(t)}{dt} = \frac{dP_c}{dt} = 2b\,\frac{\left(v-V(t)\right)^2}{v}\,dt$$

SEPARIAMO LE VARIABILI:

$$\frac{dV}{(v-V)^2} = \frac{2b}{Mv}\,dt$$

INTEGRIAMO:

$$\int_0^V \frac{dV'}{(v-V)^2} = \frac{2b}{Mv}\int_0^t dt'$$

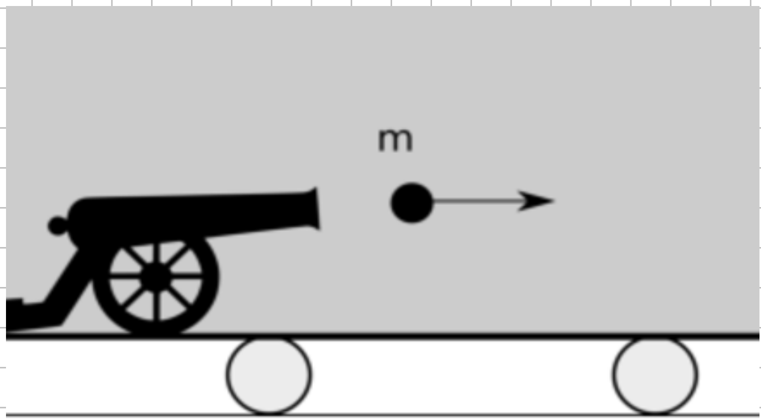
$$\Rightarrow \quad V(t) = v\left(1 - \frac{1}{1+\frac{2b}{M}t}\right)$$

esercizio

Consideriamo un carrello di massa M che si muove orizzontalmente con velocità V. Su di esso è fissato un cannoncino che spara un proiettile di massa m con velocità v relativa al carrello. Il colpo viene sparato in direzione orizzontale e con verso opposto rispetto alla direzione di moto del carrello. Dopo il tiro, il proiettile si separa dal carrello e quest'ultimo subisce una variazione di velocità a causa della conservazione della quantità di moto.

L'obiettivo è determinare la variazione della quantità di moto:

- del sistema complessivo (carrello + proiettile),
- del carrello,
- del proiettile.



esercizio

Consideriamo un razzo di massa iniziale M_0 che espelle gas con velocità di espulsione v (rispetto al razzo) ad un tasso costante di espulsione b kg/s. L'obiettivo è determinare la velocità del razzo in funzione della sua massa e in funzione del tempo.

RAZZO

CONSIDERIAMO UN INTERVALLO DI TEMPO INFINITESIMO dt

dm = MASSA DI GAS ESPULSA IN dt

QUANTITÀ DI MOTO INIZIALE DEL SISTEMA

$$P_i = M(t)\,V(t)$$

QUANTITÀ DI MOTO FINALE:

$$P_f = \left(M(t) - dm\right)\left(V(t) + dV\right) + dm\left(v - V(t)\right)$$

v = VELOCITÀ DI ESPULSIONE DEL GAS (RELATIVA AL RAZZO)

$v - V(t)$ = VELOCITÀ ASSOLUTA DEL GAS

NON CI SONO FORZE ESTERNE QUINDI SI CONSERVA LA QUANTITÀ DI MOTO

$$P_f = P_i \Rightarrow MV = MV + MdV - dm\,V - \underbrace{dm\,dV}_{\text{INFINITESIMO 2° ORDINE}} + dm\,V - dm\,v$$

$$\Rightarrow \quad M\,dV = dm\,v$$

MA LA MASSA DI GAS ESPULSO È UGUALE ALLA VARIAZIONE DI MASSA DEL RAZZO

$$dm = -dM$$

$$\Rightarrow \quad M\, dV = -dM\, v \quad \Rightarrow \quad dV = -v \frac{dM}{M}$$

INTEGRIAMO (SUPPONIAMO V_0 = VELOCITÀ INIZIALE DEL RAZZO)

$$\int_{V_0}^{V} dV' = -v \int_{M_0}^{M} \frac{dM'}{M'}$$

$$\Rightarrow \quad V = V_0 + v \ln \frac{M_0}{M}$$

QUINDI LA VARIAZIONE DI VELOCITÀ DEL RAZZO DIPENDE SOLO DAL RAPPORTO $\frac{M_0}{M}$

SE IL GAS VIENE ESPULSO CON TASSO b

$$M(t) = M_0 - bt$$

$$V(t) = V_0 + v \ln \frac{M_0}{M_0 - bt}$$

SUPPONIAMO ORA CHE IL RAZZO DECOLLI DA TERRA IN VERTICALE, QUINDI

$V_0 = 0$ INOLTRE AGISCE IL PESO

IN QUESTO CASO:

$$M(t)\frac{dV(t)}{dt} = -\frac{dM(t)}{dt}v - M(t)g$$

$$\Rightarrow \quad M\,dV = -dM\,v - Mg\,dt$$

$$\Rightarrow \quad dV = \frac{-dM}{M}v - g\,dt$$

INTEGRIAMO

$$\int_0^{V(t)} dV' = -v\int_{M_0}^{M(t)} \frac{dM'}{M} - g\int_0^t dt'$$

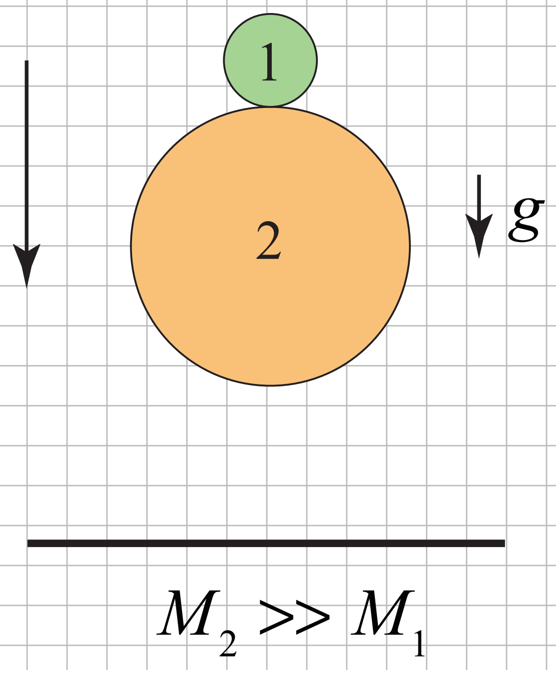
OTTENIAMO

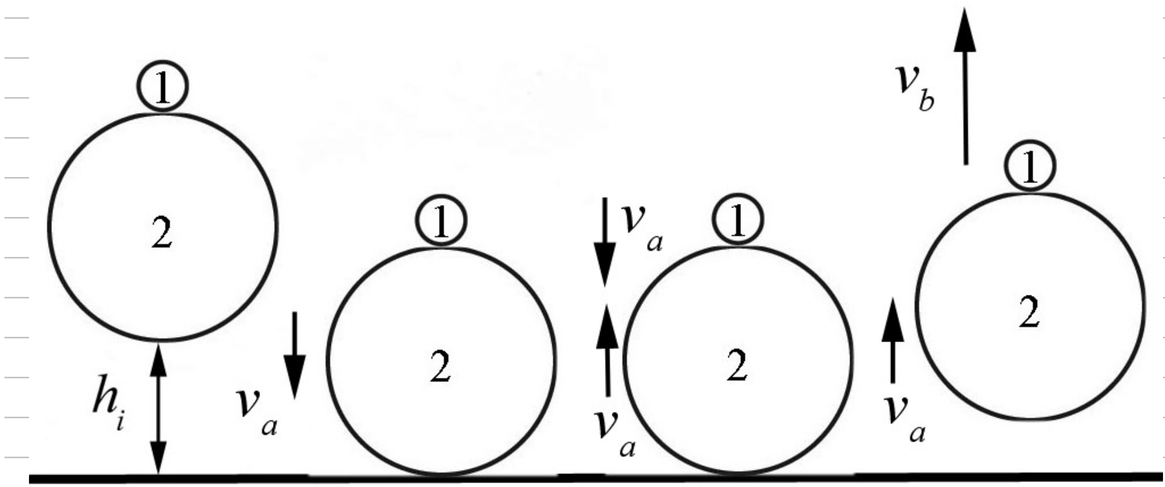
$$V = \ln\left(\frac{M_0}{M(t)}\right) - g\,t$$

Esercizio

Consideriamo due palline che vengono lasciate cadere da un'altezza h_i sopra il suolo, una sopra l'altra. La pallina 1 è in alto e ha massa M_1, mentre la pallina 2 è sotto e ha massa $M_2 \gg M_1$. Supponiamo che non vi sia alcuna perdita di energia cinetica durante le collisioni. La pallina 2 colpisce per prima il suolo e rimbalza. Successivamente, mentre la pallina 2 inizia a muoversi verso l'alto, collide con la pallina 1, che sta ancora scendendo.

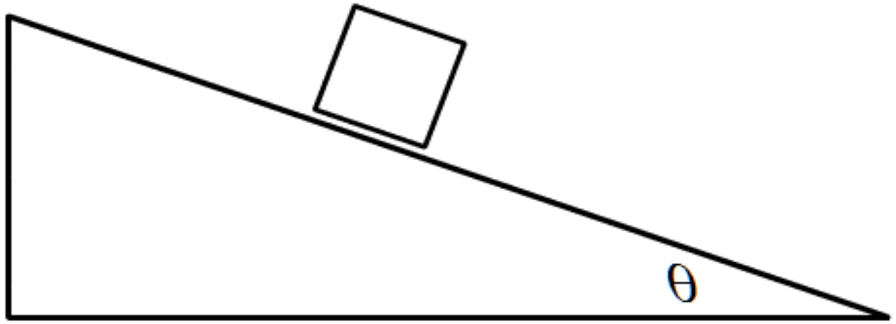
- A quale altezza rimbalzerà la pallina 1 nell'aria?





1
2
h_i
v_a
1
2
v_a
1
v_a
2
v_b
1
v_a
2

Esercizio



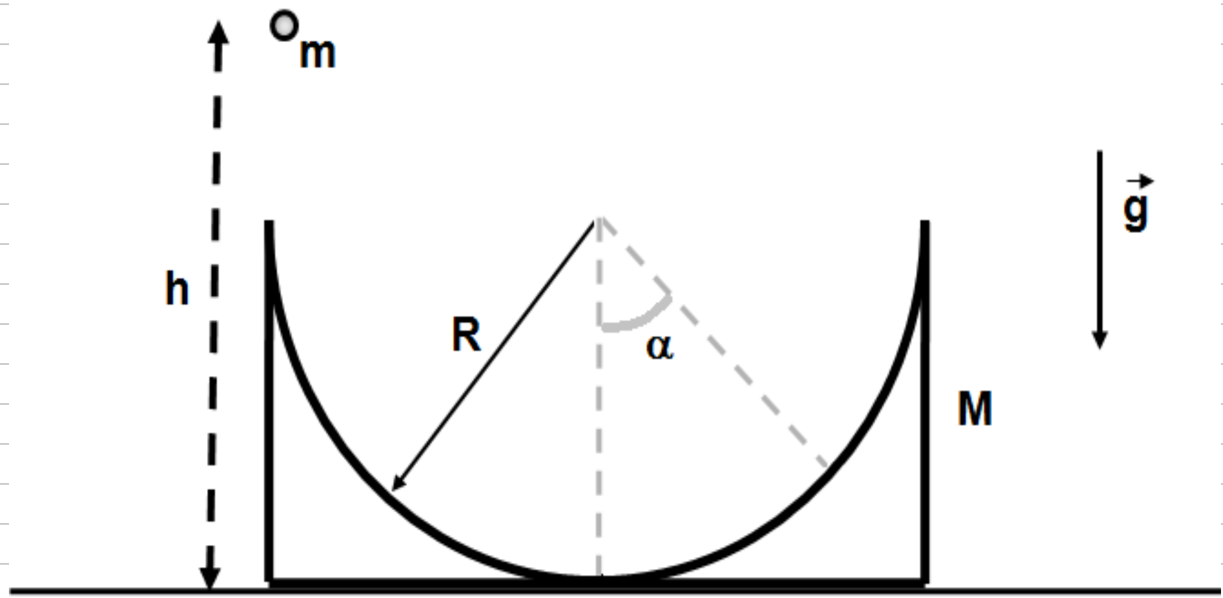
Un cuneo di massa m_c e angolo θ è appoggiato su un piano orizzontale. Sul cuneo è posto un blocco di massa m_b, inizialmente ad altezza h rispetto al piano orizzontale.
Il sistema è lasciato libero di muoversi. Trascurando tutti gli attriti, calcolare:

- Le componenti delle velocità in funzione dell'altezza del blocco rispetto all'orizzontale.

esercizio

Una guida a forma di semicirconferenza ha raggio $R = 1m$ e massa $M = \ 3kg$ e può muoversi su un piano orizzontale liberamente. Un punto materiale di massa $m = 1.6\ kg$ è vincolato a muoversi al suo interno. La massa m viene lasciata cadere da un'altezza $h = 1.3\ m$ all'interno della guida. Tutto il sistema è soggetto all'accelerazione di gravità g. Calcolare:

- lo spostamento orizzontale d della guida quando la massa m esce dall'altro lato rispetto a quello da cui è entrata nella guida;
- il modulo della velocità della guida quando m passa nel punto più basso della guida stessa;
- la quantità di moto del sistema quando la massa m si trova a un angolo $\alpha = \pi/4$.

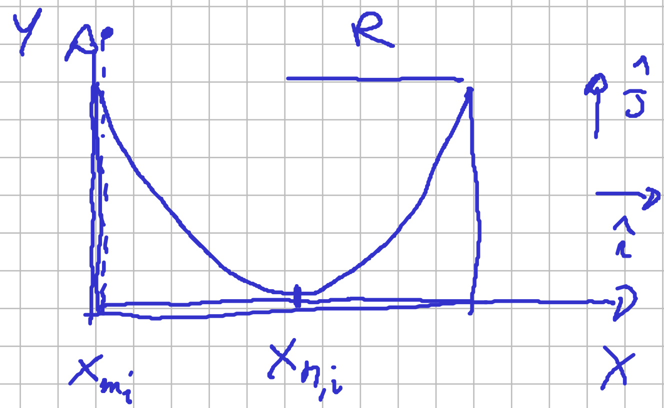


GUIDA SEMICIRCOLARE

SPOSTAMENTO DELLA GUIDA

SI CONSERVA LA COMPONENTE ORIZZONTALE DELLA QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA.

POICHÉ INIZIALMENTE IL SISTEMA È FERMO, LA COORDINATA X DEL CENTRO DI MASSA DEL SISTEMA NON CAMBIA:

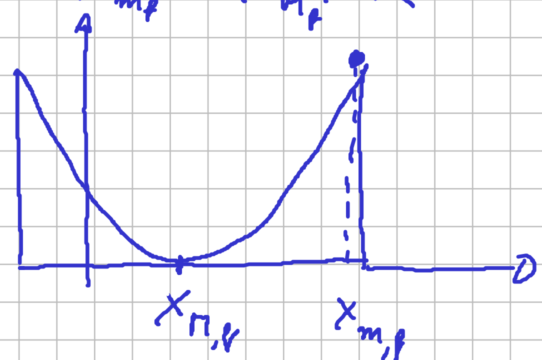


$$X_{cM,i} = \frac{M X_{M,i} + m X_{m,i}}{M+m} = \frac{M R}{M+m}$$

$$X_{M,i} = R \qquad X_{m_i} = 0$$

$$X_{cM,f} = \frac{M X_{Mf} + m X_{mf}}{M+m}$$

CON $X_{mf} = X_{M_f} + R$



UGUAGLIANDO

$$X_{M,f} = \frac{R(M-m)}{M+m}$$

SPOSTAMENTO DELLA GUIDA

$$\Delta X_M = X_{M,f} - X_{M,i} = \frac{R(M-m)}{M+m} - R = -2R \frac{m}{M+m}$$

VELOCITÁ DEL DELLA GUIDA E DEL PUNTO QUANDO QUESTO É NEL PUNTO PIÚ BASSO

NEL PUNTO PIÚ BASSO $\vec{v} = v\,\hat{i}$
(LA VELOCITÁ DEL PUNTO É ORIZZONTALE)

- CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

- CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÁ DI MOTO

$$MV + mv = 0$$

$\Rightarrow \quad V = -\frac{m}{M}v$ SOSTITUIAMO

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{m^2}{M^2}\right)v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{m}{M}}} \qquad V = -\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{m}{M}}} =$$

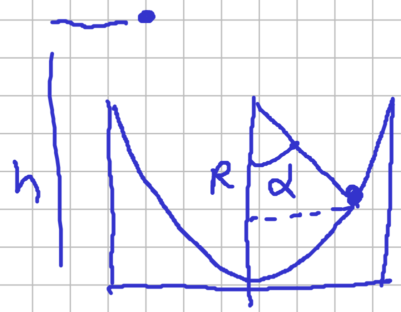
$$= -\sqrt{\frac{2m^2gh}{M(M+m)}}$$

DOMANDA 3

DOBBIAMO CALCOLARE $\vec{P}_{SIS} = P_{SIS\,x}\,\hat{\imath} + P_{SIS\,y}\,\hat{\jmath}$

LA GUIDA SI MUOVE SOLO IN ORIZZONTALE

QUINDI $P_{SIS,y} = m\,v_y$



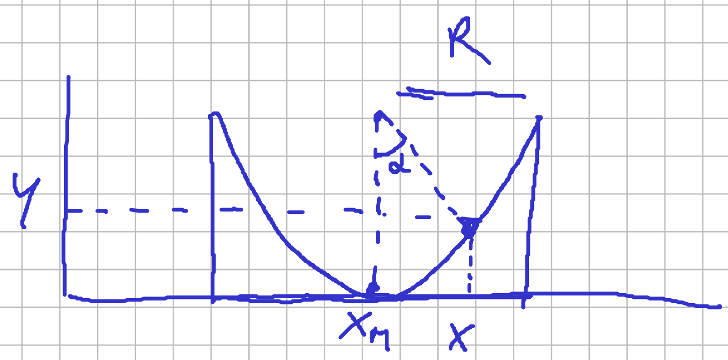
CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} M V^2 + mgR\left[1-\cos\alpha\right] = mgh$$

CONSERVAZIONE DELLA COMPONENTE ORIZZONTALE DELLA QUANTITÁ DI MOTO:

$$m v_x + M V = 0$$

LE INCOGNITE SONO v_x, v_y, V CI SERVE UN'ALTRA RELAZIONE CHE RICAVIAMO DAL VINCOLO:



$$\frac{x - x_M}{R - y} = \operatorname{Tg}\alpha$$

$\Rightarrow \quad x - x_M = (R-y)\operatorname{Tg}\alpha$ DERIVIAMO RISPETTO AL TEMPO

$$\dot{x} - \dot{x}_M = -\dot{y}\, Tg\alpha$$

CIOÈ

$$v_x - V = -v_y\, Tg\alpha$$

ORA ABBIAMO IL SISTEMA DI 3 EQUAZIONI IN 3 INCOGNITE CHE POSSIAMO RISOLVERE (FARE PER ESERCIZIO)