

# Fondamenti di Automatica

Start	@25/02/2025
End	@23/06/2025
Year/Semester	Y2/S2
CFU	9
Code	077II
Professor	Andrea Munafò
Valutami	<a href="https://esami.unipi.it/elencoappelli.php?from=sappelli&amp;docente=&amp;insegnamento=fondamenti+di+automatica&amp;cds=IFO-L&amp;cerca=">https://esami.unipi.it/elencoappelli.php? from=sappelli&amp;docente=&amp;insegnamento=fondamenti+di+automatica&amp;cds=IFO-L&amp;cerca=</a>
Teams	<a href="https://teams.microsoft.com/l/team/19%3AmOqfRqBFR7bqSQcSe-7VcbnD2imT5q5r9EwjIPDQpeg1%40thread.tacv2/conversations?groupId=8a97f69d-ac3f-4101-b31b-722a7950285f&amp;tenantId=c7456b31-a220-47f5-be52-473828670aa1">https://teams.microsoft.com/l/team/19%3AmOqfRqBFR7bqSQcSe-7VcbnD2imT5q5r9EwjIPDQpeg1%40thread.tacv2/conversations? groupId=8a97f69d-ac3f-4101-b31b-722a7950285f&amp;tenantId=c7456b31-a220-47f5-be52-473828670aa1</a>
Propedeuticity	Analisi Matematica II Fisica Generale 1

## Informazioni generali

## Appunti Lezione

### Modello a variabili di stato

#### Modello a variabili di stato

 [Lezione 1 - 25/02/2025](#)

 [Lezione 2 - 26/02/2025](#)

 [Lezione 3 - 27/02/2025](#)

 [Lezione 4 - 04/03/2025](#)

 [Lezione 5 - 05/03/2025](#)

 [Lezione 6 - 06/03/2025](#)

 [Lezione 7 - 11/03/2025](#)

 [Lezione 8 - 12/03/2025](#)

## Funzione di trasferimento

### [2 Funzione di trasferimento](#)

 [Lezione 9 - 18/03/2025](#)

 [Lezione 10 - 19/03/2025 - \[edit\]](#)

 [Lezione 11 - 20/03/2025](#)

 [Lezione 12 - 25/03/2025](#)

 [Lezione 13 - 26/03/2025](#)

 [Lezione 14 - 27/03/2025](#)

 [Lezione 15 - 01/04/2025](#)

## Criterio di Routh

### [3 Criterio di Routh](#)

 [Lezione 16 - 02/04/2025](#)

 [Lezione 17 - 08/04/2025](#)

## Diagrammi di Bode

### [4 Diagrammi di Bode](#)

 [X Lezione 18 - 09/04/2025](#)

 [X Lezione 19 - 10/04/2025](#)

## Luogo delle radici

### [5 Luogo delle radici](#)

 [Lezione 20 - 15/04/2025](#)

 [Lezione 21 - 16/04/2025](#)

 [Lezione 22 - 24/04/2025](#)

## Diagrammi di Nyquist

 [6 Diagrammi di Nyquist](#)

 [Lezione 23 - 28/04/2025](#)

 [Lezione 24 - 29/04/2025](#)

 [Lezione 25 - 30/04/2025](#)

 [Lezione 26 - 06/05/2025 - \[📝\]](#)

## Progettazione del controllore

 [7 Progettazione del controllore](#)

 [Lezione 27 - 07/05/2025](#)

 [Lezione 28 - 08/05/2025](#)

 [Lezione 29 - 09/05/2025](#)

 [Lezione 30 - 13/05/2025](#)

 [Lezione 31 - 14/05/2025 - \[📝\]](#)

 [Lezione 32 - 15/05/2025 - \[📝\]](#)

 [Lezione 33 - 17/05/2025 - \[📝\]](#)

Mancano le due esercitazioni finali fatte nelle lezione 34 e 35.

## Utilità

 [8 Utilità](#)

 [Matrice in forma compagna](#)

 [Risposta libera e forzata](#)

 [Modello a variabili di stato](#)

## Esami

 [9 Esami](#)

 [Appello 03/06/2025 - \[📝\]](#)



# Informazioni generali

Corso di Fondamenti di Automatica

Prof. Andrea Munafò

A.A. 2024/2025

Studente: Giuseppe Vaglica

Contatti: [@giuseppe\\_vaglica \(Instagram\) / \[giuseppe.vaglica3@gmail.com\]\(mailto:giuseppe.vaglica3@gmail.com\)](https://www.instagram.com/giuseppe_vaglica)

## Chiave di lettura appunti

Questi appunti raccolgono in modo sistematico i contenuti del corso di Fondamenti di Automatica, tenuto durante il secondo semestre del secondo anno del corso di laurea in Ingegneria Informatica.

La base principale degli appunti è costituita dalle slide ufficiali del docente, che sono state riscritte, riorganizzate e commentate con l'obiettivo di renderle più fruibili e comprensibili, soprattutto in ottica di studio e ripasso.

A queste sono state aggiunte integrazioni provenienti dal libro di testo consigliato, da fonti complementari e da domande poste direttamente al docente. L'obiettivo è offrire un quadro completo e coerente della materia, utile sia per la comprensione dei concetti teorici sia per l'impostazione degli esercizi e la preparazione all'esame.

## Disclaimer

Questi appunti non sostituiscono lo studio completo del materiale ufficiale del corso di Fondamenti di Automatica. Nonostante l'attenzione posta nella loro stesura, potrebbero contenere errori, omissioni o semplificazioni.

Il mio consiglio personale è di utilizzare questi appunti come guida e supporto allo studio, ma di affiancarli sempre alle spiegazioni del libro di testo consigliato dal docente.

## Commenti sui contenuti del libro

Alcune cose sul libro non ci sono o sono spiegate diversamente. La parte delle matrici c'è quasi tutta ma è abbastanza frammentata (quella si studia meglio dalle slide). Vanno saltati diversi capitoli sul libro, soprattutto per quanto riguarda i sistemi a tempo discreto che non sono stati fatti (io ho segnato come capitoli da studiare: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, Appendice A e B), poi magari di alcuni capitoli fatti e non segnati può essere che ci sia giusto qualche cenno fatto a lezione.

## Commenti sulle esercitazioni

Negli appunti sono riportate diverse esercitazioni svolte in aula e non, ma queste sono in numero abbastanza limitato, molte sono rimaste su carta e sul tablet e sono riportate solo quelle più significative. **Non consiglio questi appunti a chi vuole focalizzarsi solo sulle esercitazioni.**

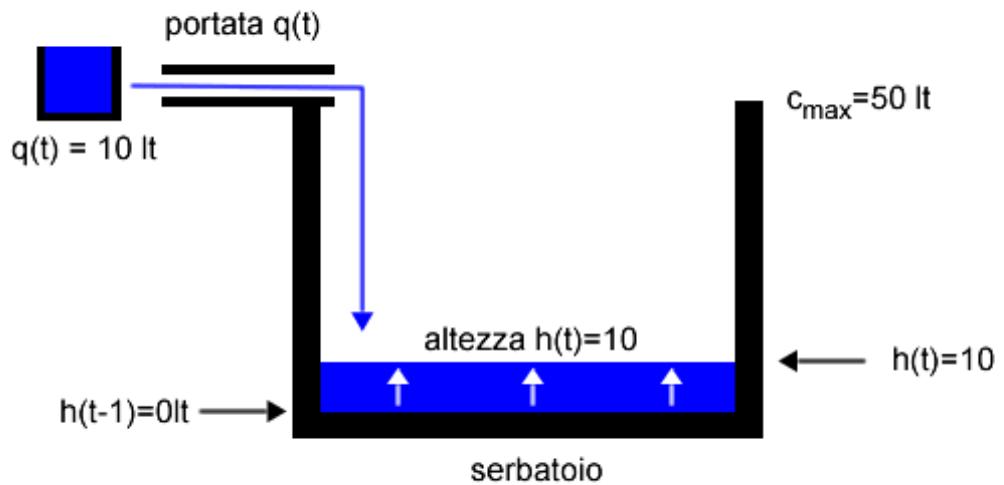
## Informazioni esame

L'esame è un orale in forma scritta seguita da un dialogo con il professore. È organizzato in gruppi e le domande scritte saranno 2 o 3 esercizi. La durata dello scritto è di circa 30 o 40 minuti (flessibile e non è importante concludere l'esercizio in quanto poi viene discusso all'orale).

## Progetti esterni a FDA

Progetto a tema robotica e AI dell'UNIPI: **forelab**

# Modello a variabili di stato



WWW.ANDREAMININI.ORG



# Lezione 1 - 25/02/2025

## Introduzione ai Controlli Automatici

Quello che ci chiederemo è **"come eseguire un compito in modo automatico"**, dove il compito è di fatto un modello matematico, e il nostro contributo sarà quello di capire come eseguire questo modello.

Il termine automation deriva da **automation** production coniato dalla Ford nel 1947, per indicare l'insieme di apparati automatici che erano stati installati nelle loro linee di produzione.

Il termine automazione oggi è associato principalmente alla **robotica**. Infatti, il robot è stato inizialmente definito come quella cosa in grado di sostituire l'uomo nelle sue azioni.

## Automazione e meccanismi di feedback

Periodo	Evento	Strumento
300 a.C. - 1200 a.C.	Misurare correttamente il tempo	Ctesibio (270 a.C.), Alessandria, esperimento dell'orologio ad acqua
1600	Rivoluzione industriale in Europa	Drebbel (1620), Termostato; regolatore di Watt (1787)
1910 - 1945	Inizio comunicazioni di massa (aspetto legato principalmente alle due guerre mondiali)	
1957	Conquista dello spazio e sviluppo informatico	
2010	Industria 4.0 (robotica avanzata) e industria 5.0 (intelligenza artificiale)	

Prima rivoluzione industriale (1780)	Seconda rivoluzione industriale (1870)	Terza rivoluzione industriale (1970)	Quarta rivoluzione industriale (oggi)	Quinta rivoluzione industriale (ancora più attuale)
Introduzione di strumenti meccanici di produzione	Organizzazione del lavoro e produzione di massa grazie all'utilizzo dell'energia elettrica	Produzione ulteriormente automatizzata grazie all'utilizzo in fabbrica di sistemi IT ed elettronici	Prodotti e processi interconnessi grazie all'utilizzo in fabbrica dell'IoT (IIoT, Industrial Internet of Things) e delle nuove tecnologie digitali	Avvento dell'intelligenza artificiale
Primo telaio a vapore	Prima catena di montaggio	Primo PLC (1969)	Microchip e sensori	AI

Il termine **feedback** sarà di fondamentale importanza per tutta la durata del corso.

## Tecnologie abilitanti

1. Advanced Manufacturing Solutions. Robotica avanzata dedicata all'industria.
2. Additive Manufacturing (Stampa 3D). Tecnologie di produzione additiva che non richiedono scarti di produzione.
3. Augmented Reality. Per esempio la riproduzione di contesti particolari per il training dei pompieri.
4. Simulation (Simulazione Avanzata). Prendiamo come evento una frana di una montagna. La ricostruzione dell'evento è la riproduzione degli eventi accaduti, invece la simulazione avanzata consiste nella riproduzione fedele della fisica e del contesto che hanno causato quell'evento.
5. Horizontal and Vertical System Integration. Gestione di processi verticali (eseguo in serie prima A e poi B) e gestione di processi orizzontali (processi paralleli).

6. Industrial Internet of Thinghs (IIoT). Dispositivi interconnessi tramite internet.
7. Cloud Computing. Possibilità per i dispositivi di poter processare i dati prima dell'invio per diminuire il carico e migliorare la qualità dei dati trasmessi.
8. Cybersecurity. Sicurezza legata ai sistemi informatici.
9. Big Data Analytics. Analizzare grandi quantità di dati aggregati e derivare altri dati.

## Modellistica Matematica

Questa sezione è racchiusa nei primi due capitoli del libro. Un modello si applica a un sistema.

### Sistemi dinamici

Definiamo dunque cosa è un sistema:

Un **sistema** è un insieme di parti interconnesse e interagenti che formano un insieme più grande e complesso.

Un sistema è un insieme di parti hardware e software eventualmente. Inoltre, un sistema può essere dinamico. Diamo tre definizioni diverse di sistema dinamico:

Un sistema è **dinamico** se evolve nel tempo.

Un sistema dinamico è (la rappresentazione di) un "oggetto" caratterizzato da grandezze (stati e uscite) che variano nel tempo e che interagiscono con l'ambiente esterno.

Un sistema dinamico è normalmente costituito da più sottoinsiemi che interagiscono tra loro.

Definiamo infine quelli che sono dei concetti chiave legati al sistema:

- **Ingresso**: cosa entra nel sistema, noi vogliamo inseguire gli ingressi.
- **Uscita**: cosa esce dal sistema.
- **Disturbo**: segnale non desiderato e spesso casuale, noi vogliamo reiettare i disturbi. Nota bene che un disturbo è anche un ingresso (che però è indesiderato).
- **Stato**: è un concetto complesso su cui ritorneremo.

Ovviamente, anche il computer è un sistema, così come sono sistemi i freni a disco di un'auto, che sono parte di un sistema di frenata, che a sua volta è parte di un sistema più ampio che è l'auto.

Un sistema viene rappresentato nel seguente modo:



Possiamo rappresentare l'uscita di un sistema come il risultato di una funzione matematica:

$$y = f(u, \xi, \theta)$$

È una notazione abbastanza standard (ma non sempre si usano gli stessi simboli). Gli ingressi sono  $u$ , l'uscita è  $y$ , invece  $\xi$  sono i disturbi e  $\theta$  i parametri del sistema.

## Proprietà dei sistemi dinamici

1. Devono essere **causalì**, ovvero l'uscita non può dipendere dai valori futuri dell'ingresso.
2. Possono essere **stocastici** o **deterministici**, se sono presenti o meno fenomeni aleatori nel legame ingresso-uscita.

I disturbi sono non deterministici.

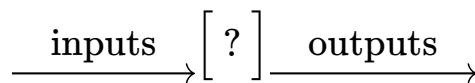
## Sistemi LTI

Un sistema LTI (Lineare Tempo Invariante) è detto causale se l'uscita  $y(t)$  per un certo  $t_d$  dipende dai valori dell'ingresso  $x(t)$  solo per valori  $t \leq t_d$

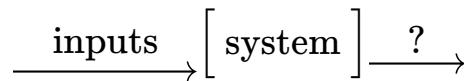
## Diverse tipologie di problemi

Date tre componenti abbiamo tre tipologie diverse di problemi:

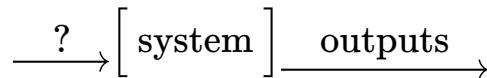
1. **Modellistica** (non conosciamo il sistema)



2. **Simulazione** (non conosciamo l'uscita)



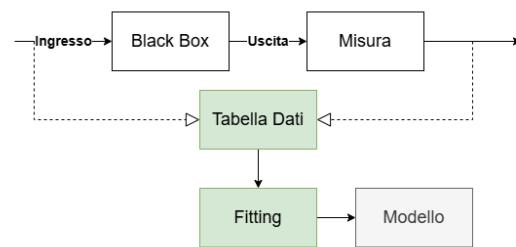
3. **Controllo** (non conosciamo gli ingressi)



## Modellistica - Black Box

Si tratta di un approccio sperimentale (induttivo), in cui non conosciamo il modello ma conosciamo solo **ingressi** e **uscite**. L'appuccio si compone di pochi step:

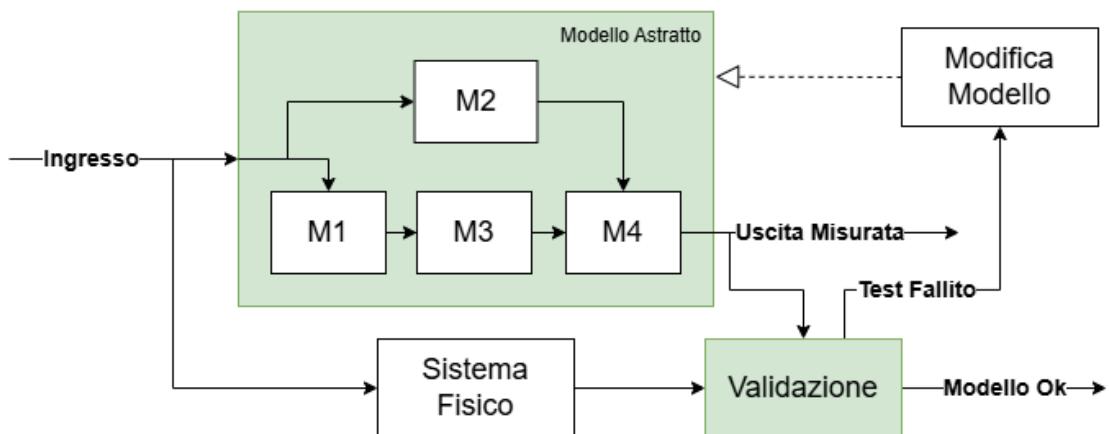
- Provo un numero sufficiente di ingressi.
- Salvo ogni ingresso in relazione alla sua uscita in una **tabella dati**.
- Eseguo un **fitting** sui dati nella tabella e ne ricavo un modello.



Questo approccio funziona fin tanto che i dati in ingresso seguono circa lo stesso andamento; se di punto in bianco un ingresso si discosta da quello predetto allora il modello non sarà preciso. Inoltre, questo approccio si adatta bene a modelli di machine learning e intelligenza artificiale, in cui si usano grandi moli di dati per addestrare e costruire un modello il più verosimile possibile. Ne consegue che questo approccio ha molto senso in sistemi troppo complessi.

## Modellistica - White Box

Si tratta di un approccio analitico (deduttivo). Si genera un modello contenente gli ingressi, e in parallelo inseriamo gli stessi ingressi in un **sistema fisico**. Eseguiamo poi la validazione del nostro output confrontandolo con quello atteso, andando a modificare i parametri del modello qualora il test fallisse.

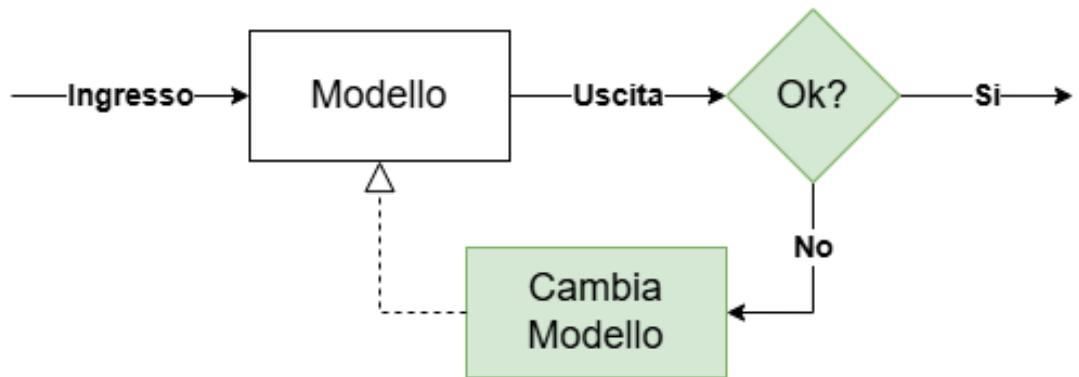


## Modellistica - Gray Box

La gray box rappresenta una fusione di white box e black box, e permette di ricavare un modello specifico partendo da un **comportamento generale noto**. Questo modello richiede di trovare i parametri della configurazione.

## Modellistica - Approccio pragmatico

Si genera un modello che non necessariamente rappresenta un modello fisico. La costruzione del modello fisico avviene dopo e eventualmente può modificare il modello.



Lezione 2 - 26/02/2025



# Lezione 2 - 26/02/2025

## Lezione 1 - 25/02/2025

Ritornando alla modellistica teniamo sempre in considerazione il seguente modello:

$$\xrightarrow{\text{inputs}} \left[ \text{system} \right] \xrightarrow{\text{outputs}} y = f(u, \xi, \theta)$$

Aggiungiamo alcune note sui concetti di modellistica trattati in precedenza:

- Nella **Black Box** il sistema fisico non lo conosciamo. Supponiamo di avere una stanza che rappresenta la nostra scatola nera. Produrremo una serie di ingressi tramite la rotazione di un termostato, per ogni ingresso dato ne ricaveremo un'uscita misurata. Per ogni coppia ingresso-uscita alla fine costruiremo una tabella dati, tramite la quale faremo un fitting (per esempio su matlab possiamo usare la funzione `interp` ).
- Nella **White Box** usiamo un approccio opposto rispetto al precedente. Si tratta di un approccio in cui più o meno conosco il sistema fisico e quindi sono in grado di ricostruire a grandi linee un modello astratto. Per esempio in un sistema basato sulle leggi di Newton il modello astratto sarà dato da  $F = ma$ . A seguito della costruzione del modello astratto, verificherò in parallelo le uscite di sistema fisico e modello astratto a partire da un dato ingresso, e confrontando le uscite riesco a rendere il modello astratto quanto più simile possibile al sistema fisico. La validazione non sarà mai nulla in quanto è impossibile approssimare al 100% il modello astratto, ma sarà sempre conforme a un certo **range** di valori.
- Nella **Gray Box** conosciamo il comportamento generale del sistema ma non quello specifico. Prendendo come esempio una molla conosco il suo funzionamento ma ho bisogno di determinare il parametro specifico della costante elastica della molla.
- In un **approccio pragmatico** vado a creare un modello che sia indipendente dalla realtà, quindi si tratta di un approccio soggettivo in quanto dipende dalle nostre personali esigenze. Se per esempio mi trovo in un videogioco e

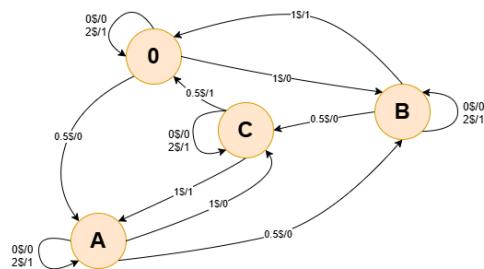
voglio modellare un drago, questo non esiste nella realtà, ma sta a noi costruire quel modello secondo un'idea che abbiamo.

## Modellistica - Macchine a stati

Iniziamo trattando il concetto di macchina a stati finiti per l'erogazione di un bene.

Supponiamo di avere un distributore automatico che accetta solo 0 (nulla), 0.5\$, 1\$, 2\$, e che vende solo una bevanda che costa 2\$.

- Nello stato 0 la macchinetta non ha soldi inseriti dall'utente.
- Nello stato A la macchinetta ha 0.5\$
- Nello stato B la macchinetta ha 1\$
- Nello stato C la macchinetta ha 1.5\$



Quando la macchinetta ha 2\$ ritorna nello stato 0 e produce uscita 1 (bevanda erogata). In ogni altro caso la macchinetta produrrà uscita 0 (bevanda non erogata). Una domanda interessante da porci è: "se inserisco 0.5\$ la macchinetta mi darà la bevanda?". La risposta è "dipende", infatti l'erogazione dipenderà dallo stato in cui si trova la macchinetta.

Nel caso trattato si parla di sistema discreto, perché il sistema ha  $1, 2, 3, \dots, n$  stati. Il comportamento del sistema dipenderà dal suo stato precedente.

Il grafico inserito ha molto senso nel caso di piccoli sistemi con 4, 5 o 6 stati, ma diventa molto difficile da usare su grandi sistemi.

Si definisce **segnale di riferimento** (set point)  $h^o(t) = \bar{h}$  l'oggetto che desidero in uscita ( $h^o$  sta per h output)

Esiste una relazione tra lo stato  $x$  e la sua derivata temporale  $\dot{x}$ , e questa relazione è:

$$\dot{x} \rightarrow \boxed{\int} \rightarrow x$$

$$x \rightarrow \boxed{\frac{1}{s}} \rightarrow \dot{x}$$

▼ Es1: livello di un serbatoio

### Livello di un serbatoio

Consideriamo un meccanismo per riempire un serbatoio

$$\Delta V = A (h_1 - h_0) = \int_{t_0}^{t_1} u(r) dr$$

$$dV = A \cdot dh = u(t) dt$$

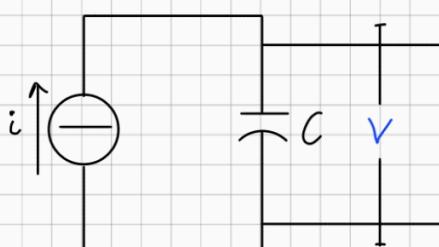
$$A \cdot \frac{dh}{dt} = u(t)$$

Chiamiamo  $x = h$ , dove  $h$  è lo stato del serbatoio

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} = \frac{1}{A} u(t) \quad (\text{equazione differenziale})$$

▼ Es2: circuito di carica di un condensatore

### Circuito di carica di un condensatore



$$\Delta q = C (V_1 - V_0) = \int_{t_0}^{t_1} i(r) dr$$

$$C = \frac{dV}{dt} = i(t)$$

$$x = V \rightarrow \dot{x} = \frac{1}{C} i(t)$$

▼ Es3: legge di Newton

### Legge di Newton

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = F(t), \text{ chiamiamo } x = v \rightarrow \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} = \frac{1}{m} F(t)$$

## Sistemi lineari e Tempo Invarianti (LTI)

## Proprietà fondamentali

Tutti i sistemi LTI hanno le seguenti proprietà fondamentali:

### Omogeneità

Se si scala l'ingresso  $u(t)$ , allora l'uscita verrà scalata dello stesso fattore:

$$a \cdot u(t) = a \cdot y(t)$$

### Sovrapposizione degli effetti

Se un modello di sistema ha risposte  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  a due ingressi qualsiasi  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , la risposta del sistema alla combinazione lineare di questi ingressi:

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

è data dalla combinazione lineare delle risposte individuali:

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

La regola generale sarebbe:

$$u_1 \rightarrow y_1, \quad u_2 \rightarrow y_2, \quad u_1 + u_2 \rightarrow y_1 + y_2$$

### Invarianza nel tempo

- Il sistema si comporta allo stesso modo indipendentemente da quando avviene l'azione.
- Formalmente, nelle equazioni non vi è una dipendenza esplicita dal tempo.
- Lo stesso ingresso traslato nel tempo produce lo stesso output anch'esso traslato nel tempo.
- Un ingresso  $x(t - \tau)$  produce un'uscita  $y(t - \tau)$ .

$$\xrightarrow{x_1(t - \tau)} \left[ \begin{array}{c} \text{LTI} \end{array} \right] \xrightarrow{y_1(t - \tau)}$$

## Equazioni differenziali lineari

Forniamo una rappresentazione standard per rappresentare la dinamica di un sistema.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x : \text{stato}, u : \text{ingresso} \\ y = Cx + Du, & y : \text{uscita} \end{cases}$$

$$u \in \mathbb{R}^r, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m, \\ A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad C \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{m \times r}$$

- Risolvendo la prima equazione del sistema, che è una differenziale ricaviamo  $x(t)$ , che è anche detta **movimento dello stato del sistema**. La seconda equazione  $y(t)$  è detta **movimento dell'uscita del sistema**.
- La seconda relazione rappresenta la relazione ingresso uscita. Nel caso in cui il sistema non dipendesse dallo stato, allora la relazione  $Du$  rappresenterebbe una relazione diretta tra ingresso e uscita. Ad esempio dalla prima legge di Ohm ricaviamo  $V = RI$  (con V uscita, R = D e I ingresso).

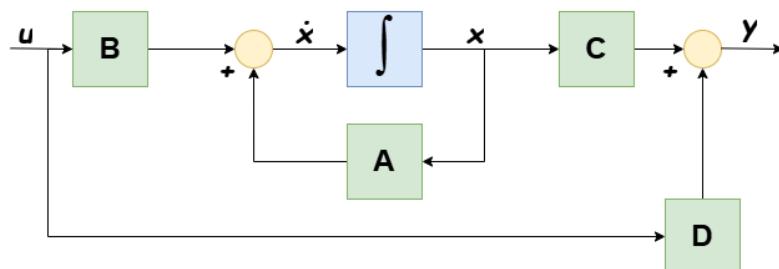
Osservando la struttura del sistema possiamo trarre alcune considerazioni:

- La matrice  $[A]$  evidenza una proprietà di **stabilità**.
- La coppia di matrici  $[A, B]$  evidenzia la proprietà di **controllabilità**.
- La coppia di matrici  $[A, C]$  evidenzia la proprietà di **osservabilità**.

## Schema a blocchi

È possibile rappresentare le equazioni del sistema LTI tramite uno schema a blocchi

Nota: il tondino rappresenta una somma e la cosa è ulteriormente esplicitata dal segno + accanto



## Modello in variabili di stato

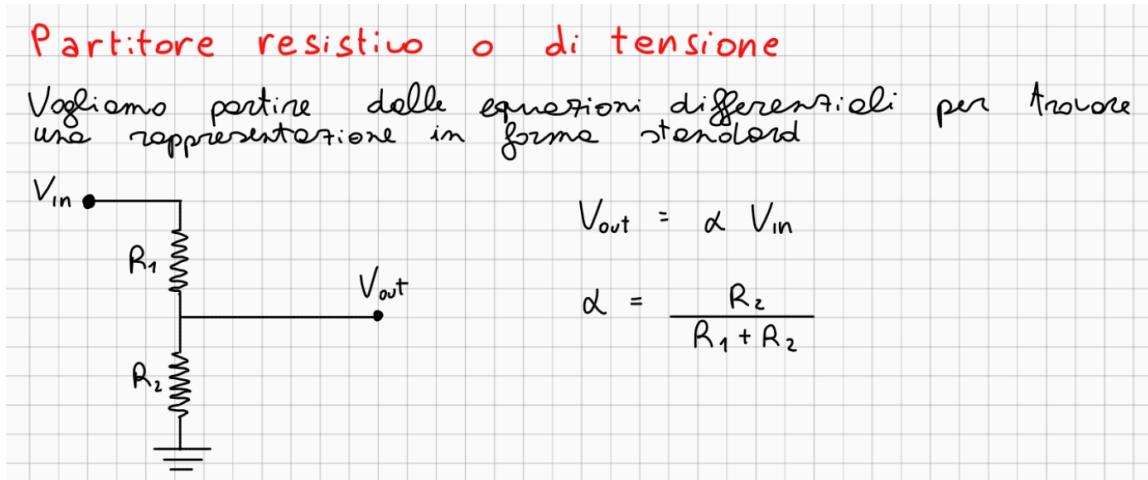
Il modello in variabili di stato presenta come vantaggio il re-packaging di equazioni differenziali di ordine arbitrario in un insieme di equazioni differenziali del primo ordine.

La forma standard permette di capire come ogni variabile di stato influenza l'altra.

Un altro vantaggio è il fatto che usa un sistema di equazioni in forma matriciale, che permette analisi e progetto mediante potenti metodi matematici.

Le variabili di stato sono il minimo insieme di variabili che descrivono il sistema nella sua interezza, ovvero che permettono di predire il suo comportamento futuro.

### ▼ Es1: partitore resistivo o di tensione

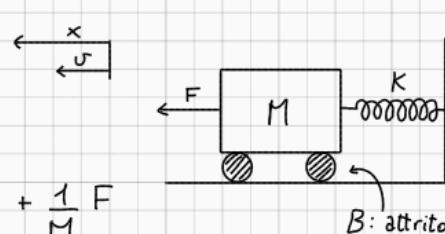


### ▼ Es2: massa-molla-smorzatore

## Massa - molla - smorzatore

$$F(t) = M \frac{du}{dt} + Bu + Kx$$

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{K}{M}x - \frac{B}{M}u + \frac{1}{M}F$$



Nei sistemi meccanici in genere si scelgono come variabili di stato le posizioni e le velocità. Se sono ancora più complessi si aggiunge anche l'accelerazione. Il vantaggio è quello che ottieniamo una relazione diretta tra variabili di stato, tramite le derivate.

Ricorriamo le forme standard:

Dato il nostro sistema:

$$\begin{cases} I: \frac{dx}{dt} = u \\ II: \frac{du}{dt} = -\frac{K}{M}x - \frac{B}{M}u + \frac{1}{M}F \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Le variabili di stato saranno  $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$

Scelgo come uscite le posizioni:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{du}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M}F \end{pmatrix} = \begin{cases} I \\ II \end{cases}$$

$$y = x = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + (0) F$$

Scelgo come uscite le velocità:

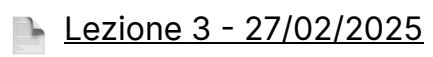
$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{du}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M}F \end{pmatrix} = \begin{cases} I \\ II \end{cases}$$

$$y = u = (0 \ 1) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + (0) F$$

## Nota sui sistemi non lineari

In generale tutto quello che vogliamo rappresentare nella realtà non è rappresentabile tramite un modello lineare. Banalmente il problema del serbatoio che si riempie nel caso ideale ha una sezione costante, ma nel mondo reale il serbatoio potrebbe avere una sezione non costante, per

esempio è facile immaginare un serbatoio con forma non regolare o che ha inizialmente una sezione conica.





# Lezione 3 - 27/02/2025

 [Lezione 2 - 26/02/2025](#)

## Linearizzazione

Partiamo da un esempio che prevede un automobile su un piano inclinato:

## Regolazione della velocità di crociera

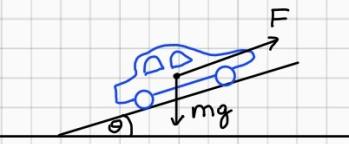
- Ingresso manipolabile : pedale dell'acceleratore

- Uscita : velocità

- Disturbo pendente strada

$$m \frac{du}{dt} + \alpha |u| u + \beta u = \gamma u - mg \sin \theta$$

$\xrightarrow{\quad m \cdot a + \text{attrito} \quad}$   $\xleftarrow{\quad \text{Forza del motore} + \text{cost di gravità} \quad}$



Diranno che  $\gamma u$  è la forza del motore proporzionale all'apertura delle valvole del gas

Questa equazione non è lineare ma possiamo fare alcune ipotesi semplificative per rendere il modello lineare

$$\approx m \frac{du}{dt} + \beta u = \gamma u - mg \theta$$

Affidiamo supposto che la spinta del motore sia proporzionale all'accelerazione, attriti e resistenze lineari con la velocità e abbiamo supposto piccole pendenze ( $\theta < 30^\circ$ ,  $\sin \theta \approx \theta$ )

Riconduciamo il tutto a una forma standard

Varidili di stato  $\dot{x} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2]^T$  (posizione e velocità)

Ingressi :  $u$ ,  $\theta$  ( $\theta$  è un disturbo quindi è un ingresso)

Uscita :  $y$  è la velocità

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{\alpha}{m} |x_2| x_2 - \frac{\beta}{m} x_2 + \frac{\gamma}{m} u - g \sin(\theta) \\ y = x_2 \end{cases}$$

Pongo le condizioni iniziali :  $x(t_0) = x_0$

Osservazioni :

- Siamo portati da un'equazione del secondo ordine quindi abbiamo bisogno di due varidili di stato
- Nel sistema non compare  $t$ , quindi il sistema è stationario

## Stato di equilibrio

Dato il sistema  $\dot{x} = f(x, u)$  (forma standard dell'equazione di stato) e dato un ingresso  $u(t)$

Uno stato  $\bar{x}$  si dice in **equilibrio** se soddisfa la relazione:

$$0 = f(\bar{x}, u)$$

Il sistema non si muove da  $\bar{x}$

Gli equilibri giocano un ruolo importante nell'operazione di **linearizzazione**. In particolare partiremo da una forma standard non lineare, supponendo un sistema stazionario per semplicità. Scegliamo un ingresso  $\bar{u}$  e uno stato di equilibrio corrispondente  $\bar{x}$ , allora avremo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ 0 &= f(\bar{x}, \bar{u})\end{aligned}$$

Definiamo due nuove variabili che rappresentano la **variazione di equilibrio**

$$\begin{aligned}\Delta x &= x - \bar{x} \\ \Delta u &= u - \bar{u}\end{aligned}$$

### Linearizzazione attorno a uno stato di equilibrio

Scriviamo le equazioni di stato attraverso la serie di Taylor centrata nello stato di equilibrio e poi tronchiamo al primo ordine

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x} - \dot{\bar{x}} = \Delta \dot{x} = \dot{x} = f(x, u) = \\ &= \cancel{f(\bar{x}, \bar{u})} + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \Delta u + \cancel{O(||\Delta x||^2)} + \cancel{O(||\Delta u||^2)} \\ &\quad \text{posso ignorare queste quantità}\end{aligned}$$

### Matrici Jacobiane

Le matrici che moltiplicano i termini del primo ordine sono dette matrici jacobiane

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

## Forma Standard Lineare

Siamo ritornati alla forma che conosciamo:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$x$  e  $u$  nella forma standard lineare sono le deviazioni  $\Delta x$  e  $\Delta u$  dalla configurazione stato-ingresso di equilibrio. Allo stato di equilibrio è associata anche un'uscita di equilibrio  $\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$  definendo la deviazione  $\Delta y$  dall'uscita di equilibrio, e le matrici jacobiane dell'equazione di uscita, si ottiene l'equazione di uscita della forma standard lineare:

$$y = Cx + Du$$

## Conclusioni

- Esistono diversi tipi di linearità
- Non è sempre possibile trovare una forma non lineare generale

Però grazie alla condizione di equilibrio possiamo **linearizzare intorno a dei punti di funzionamento** e quindi ritornare a un modello lineare. D'ora in poi assumeremo solo modelli lineari.

Continuiamo l'esempio iniziale con i nuovi concetti:

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{\alpha}{m}|x_2|x_2 - \frac{\beta}{m}x_2 + \frac{\gamma}{m}u - g \sin(\theta) \end{cases}$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\alpha}{m}|x_2| - \frac{\beta}{m} \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Se imponiamo  $\theta = 0$  (piano orizzontale) e  $u = 0$  (nessuna forza di controllo), otteniamo  $x_2 = 0$ , per qualsiasi  $x_1$ .

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ u = 0 \end{cases} \rightarrow \text{equilibrio: } \begin{cases} \forall x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{bmatrix}u = Ax + Bu$$

$$y = [0 \ 1]x$$

## Stabilità (secondo Lyapunov)

Noi non faremo lo studio della stabilità secondo Lyapunov (capitolo 4 del libro), ma sfrutteremo solo le definizioni date dal matematico russo.

La stabilità considera le conseguenze sul movimento del sistema di un'incertezza sul valore iniziale dello stato (ipotesi ingressi fissi e noti).

"Piccole" perturbazioni dello **stato iniziale** rispetto a un valore di riferimento provocano solo "piccole" perturbazioni del **movimento dello stato**, eventualmente destinate ad annullarsi per "tempi lunghi".

## Stabilità dell'equilibrio

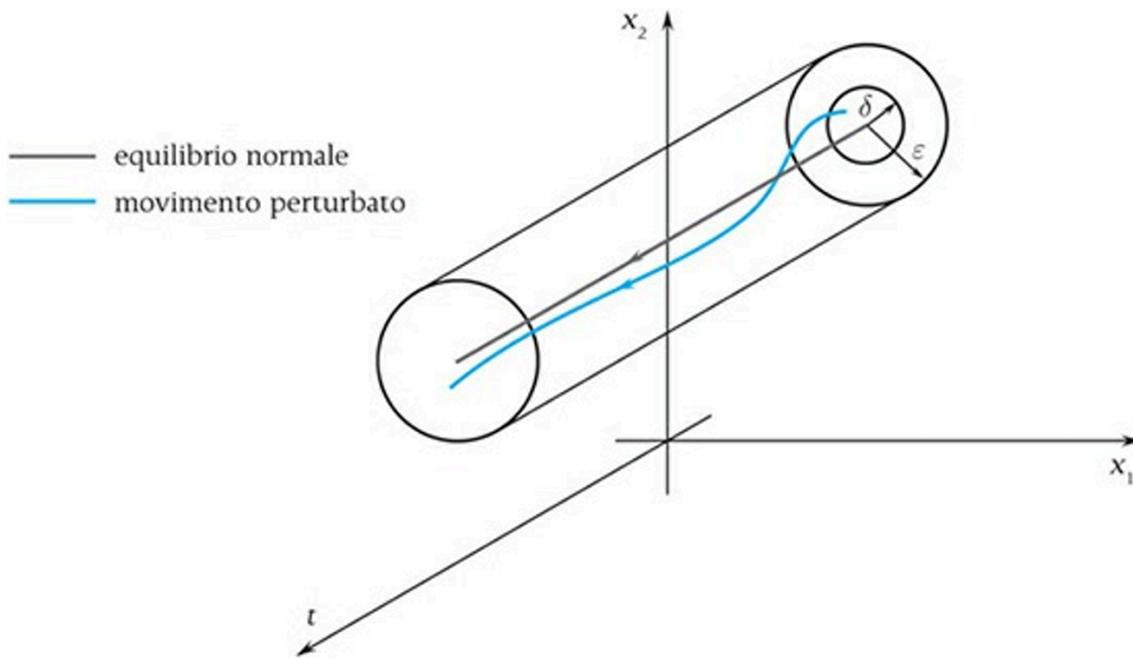
Scelgo un ingresso costante  $u(t) = \bar{u}$  corrispondente allo stato di equilibrio  $\bar{x}$ .

Consideriamo un **movimento perturbato** ottenuto da  $u(t) = \bar{u}$  ma a partire da  $x_0$  (diverso da  $\bar{x}$ ). Allora definiremo:

Uno stato di equilibrio  $\bar{x}$  è stabile, se per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che per tutti gli  $x_0$  che soddisfano

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta$$

Si ha  $\|x(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon$ ,  $t \geq 0$



Il tubo ha diametro esterno  $\epsilon$  e ha diametro interno  $\delta$ . Il tubo non rappresenta altro che la tolleranza. Nello specifico  $\delta$  è la distanza massima tra  $\bar{x}$  e  $x_0$ , invece  $\epsilon$  è la tolleranza legata alla stabilità.

## Asintotica stabilità

Uno stato di equilibrio  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile, se per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che per tutti gli  $x_0$  che soddisfano:

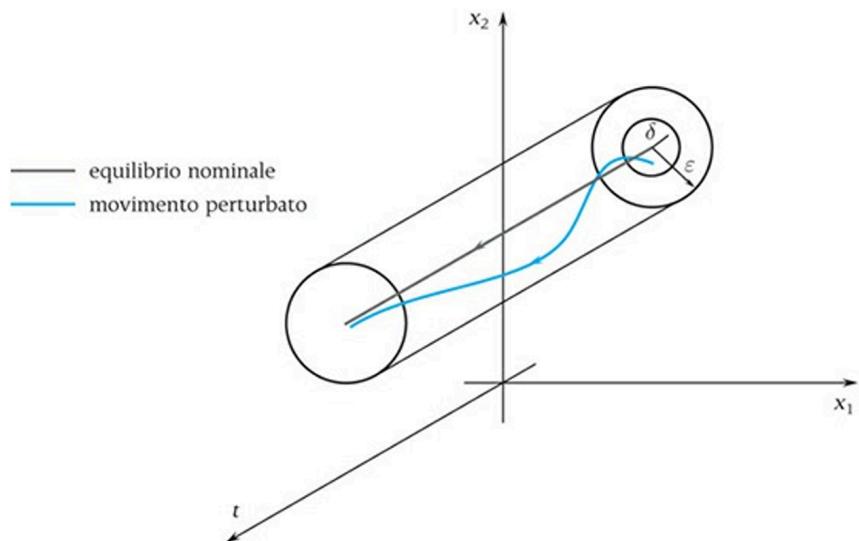
$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta$$

Si ha che:

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon, \quad t \geq 0$$

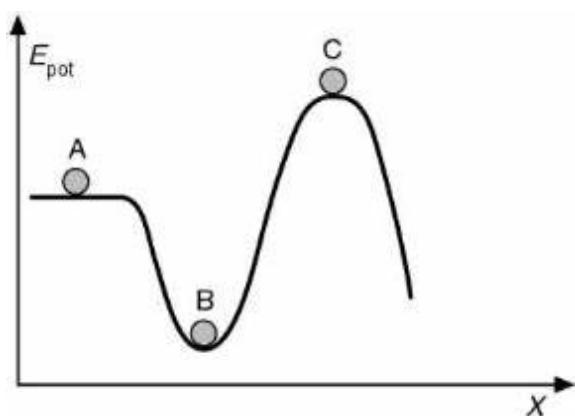
E inoltre abbiamo che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$$



Riassumiamo con questa immagine:

- A è **stabile**
- B è **asintoticamente stabile**
- C è **Instabile**



# Formula di Lagrange

Lagrange assieme a Lyapunov rappresenta un punto cardine per i controllisti.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x : \text{stato}, u : \text{ingresso} \\ y = Cx + Du, & y : \text{uscita} \end{cases}$$

$$u \in \mathbb{R}^r, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m, \\ A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad C \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{m \times r}$$

Per sistemi LTI possiamo calcolare in forma chiusa la **funzione di transizione dello stato**, ovvero la soluzione:

$$\begin{cases} x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(t)) \\ y(t) = \gamma(t, t_0, x(t_0), u(t)) \end{cases}$$

## Equazioni differenziali lineari

### Soluzioni esplicite

Una equazione differenziale scalare e omogenea:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a \cdot x(t) \\ x(t_0 = 0) = 0 \end{cases}$$

Ha una soluzione del tipo

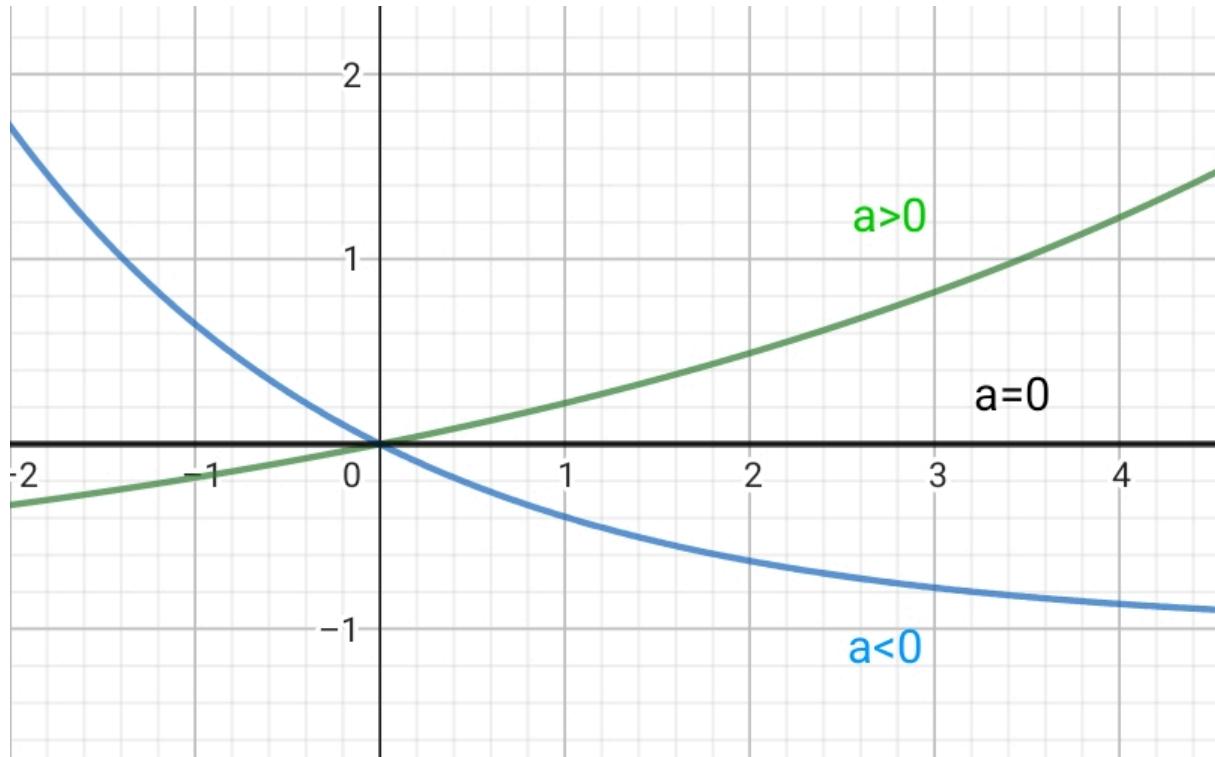
$$x(t) = x_0 e^{at}$$

Il comportamento dipende dal segno e dal valore di  $a$  o della sua parte reale

$$e^{at} = e^{(x+jy)} = e^x (\cos(y) + j \sin(y))$$

Sviluppando in serie la funzione esponenziale

$$e^{at} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \frac{t^i}{i!} = 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + a^r \frac{t^r}{r!} \cdots, \quad a \in \mathbb{R}$$



## Soluzioni vettoriali

Consideriamo il caso vettoriale omogeneo (sistema LTI con  $u(t) = 0$ )

$$\dot{x} = Ax(t); \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in \mathbb{R}$$

La soluzione dell'equazione differenziale vettoriale è del tipo

$$x(t) = e^{At}x_0$$

dove

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^i}{i!} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + A^r \frac{t^r}{r!} + \cdots$$

è detta esponenziale della matrice  $A$

## Matrice di transizione

$e^{At}$  è chiamata matrice di transizione perché determina in assenza di ingresso ( $u(t) = 0$ ), il moto libero del sistema:

$$x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u = 0) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

Allora definiamo matrice di **transizione dello stato**  $\Phi(t, t_0)$  la soluzione dell'**equazione differenziale matriciale** (caso non stazionario)

$$\dot{X} = A(t)X(t); \quad X(t_0) = X_0$$

 Lezione 4 - 04/03/2025



# Lezione 4 - 04/03/2025

[Lezione 3 - 27/02/2025](#)

## Recap Lezione 3

Nella scorsa lezione abbiamo introdotto quelli che sono i sistemi lineari tempo invarianti, ovvero i sistemi dinamici che godono anche della proprietà di linearità e stazionarietà. Questi sistemi sono particolarmente importanti perché sono utilizzati anche per **descrivere in maniera approssimata** anche il comportamento di sistemi non lineari e varianti nel tempo.

Abbiamo visto che le equazioni di un sistema LTI sono:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x : \text{stato}, u : \text{ingresso} \\ y = Cx + Du, & y : \text{uscita} \end{cases}$$
$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad C \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{m \times r}$$

Per sistemi LTI possiamo calcolare in forma chiusa la **funzione di transizione dello stato**, ovvero la soluzione:

$$\begin{cases} x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(t)) \\ y(t) = \gamma(t, t_0, x(t_0), u(t)) \end{cases}$$

Il nostro scopo è trovare la soluzione di questo sistema partendo dalle condizioni iniziali, per ottenere il movimento dello stato.

Abbiamo anche visto quelle che sono le soluzioni esplicite e le soluzioni vettoriali di questo sistema, mettendo in gioco anche operazioni nuove come l'esponenziale di una matrice. In particolare sulle soluzioni vettoriali abbiamo:

$$\dot{x} = Ax(t); \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t) \in \mathbb{R}$$

La soluzione dell'equazione differenziale vettoriale è del tipo

$$x(t) = e^{At}x_0$$

dove

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^i}{i!} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + A^r \frac{t^r}{r!} + \cdots$$

è detta esponenziale della matrice  $A$ .

## Evoluzione dello stato per sistemi LTI

### Formula di Lagrange

Sia dato  $\dot{x} = Ax + Bu$     $x(t_0 = 0) = x_0$ ;    $x(t) \in \mathbb{R}$

Si dimostra che la soluzione dell'equazione differenziale, ovvero il movimento dello stato in corrispondenza di un certo ingresso  $u(t) \neq 0$  è data dalla **Formula di Lagrange**:

$$\dot{x} = Ax + Bu \implies x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\text{risposta libera}} + \int_0^t \underbrace{e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{risposta forzata}}$$

Nota bene in un sistema più generico con  $t_0 \neq 0$  abbiamo:

$$x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)}x_0}_{\text{risposta libera}} + \int_{t_0}^t \underbrace{e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{risposta forzata}}, \quad t \geq t_0, x_0 = x(t_0)$$

- **Risposta libera**  $\phi(t, t_0, x_0, u(t) = 0)$ :

Il contributo al movimento dello stato e dell'uscita funzione solo dello stato iniziale, cioè quello che si avrebbe se, a pari stato iniziale, l'ingresso fosse nullo, si chiama **movimento libero**, ed è:

$$x_l(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 \quad y_l(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0$$

## Risposta libera

La risposta libera è la risposta del sistema dovuta esclusivamente alle condizioni iniziali quando l'ingresso è zero. In altre parole è come il sistema reagisce al suo stato iniziale, senza alcuna influenza esterna.

→ Nell'equazione differenziale ingresso-uscita pongo nulli  $u(t)$  e le sue derivate.

- **Risposta forzata**  $\phi(t, t_0, x(t) = 0, u(t))$ :

Il contributo funzione solo dell'ingresso, cioè quello che si avrebbe se, a pari ingresso, lo stato iniziale fosse nullo, si chiama **movimento forzato**, ed è:

$$x_f(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad y_f(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

## Risposta forzata

La risposta forzata di un sistema è la sua uscita quando si applica un ingresso specifico, considerando che il sistema parte da condizioni iniziali nulle. In altre parole è la parte della risposta del sistema dovuta esclusivamente all'ingresso, senza considerare la risposta libera dovuta alle condizioni iniziali.

→ Pongo nulli  $y(0)$  e le sue derivate nella trasformata dell'equazione differenziale ingresso-uscita.

Al **movimento dello stato**  $x(t)$  dal sistema LTI ricaviamo anche il corrispondente **movimento dell'uscita**:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

## Principio di sovrapposizione degli effetti

Il **principio di sovrapposizione degli effetti** è di fondamentale importanza, in quanto consente di calcolare il movimento generato da più cause, cioè stati iniziali e ingressi, semplicemente come somma pesata dei singoli effetti provocati dalle cause sudette. Stabilendo una forma generale, avremo che:

$$F(y(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), \dots, u^{(p)}(t), t) = 0$$

$$y^n(t) = \hat{F}(y(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t), \dots, u^{(p)}(t), t)$$

Riconosciamo quindi alcune delle componenti fondamentali di questa equazione. Le variabili  $y(t), y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$  identificano le uscite e le derivate di esse del sistema (gli effetti provocati da una o più cause), mentre gli ingressi  $u(t), u^{(1)}, \dots, u^{(p)}$  sono appunto gli ingressi e le derivate influenti sul sistema.

## Rappresentazioni equivalenti

Data la forma generale possiamo dire che avremo equazioni di ordine  $n$  e sistemi di ordine 1:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\dots) \\ \vdots \\ f_n(\dots) \end{bmatrix} \underset{\text{se lineare}}{=} Ax + Bu$$

### Rappresentazioni equivalenti per $p = 0$

Se  $p = 0$  scelgo come stato  $x_1 = y$ :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\dots) \\ \vdots \\ f_n(\dots) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \hat{F}([y, \dots, y^{(n-1)}], u, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \hat{F}(x, u, t) \end{bmatrix} = \bar{f}(x, u, t)$$

Inoltre per i sistemi lineari vale che:

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t)y^{(i)}(t) + u(t) \quad (\mathbf{p} = 0)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, & p = 0 \\ y = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] x + [0] u \end{cases}$$

Quest'ultima matrice è detta **matrice in forma compagna orizzontale inferiore**.

### Rappresentazioni equivalenti per $0 < p < n$

Nel caso in cui abbiamo  $0 < p < n$  nei sistemi lineari

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t) y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^p \beta_j u^{(j)}(t) \quad (0 < p < n)$$

Scriviamo l'equazione ausiliaria:

$$z^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t) z^{(i)}(t) + u(t) \quad \longleftrightarrow \quad x = \begin{bmatrix} z \\ \vdots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Rappresenta la risposta del sistema all'ingresso  $u(t)$ .

Proprio per il fatto che il sistema è lineare possiamo dire che la combinazione lineare degli ingressi equivale alla combinazione lineare delle uscite. Abbiamo ottenuto che l'uscita  $y(t)$  è data dalla combinazione lineare delle derivate di  $z$ , con gli stessi coefficienti:

$$y(t) = \sum_{j=0}^p \beta_j z^{(j)}(t)$$

Scriviamo infine il sistema per  $0 < p < n$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \sum_{i=1}^{p+1} \beta_{i-1} x_i = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_p \quad 0 \quad \cdots \quad 0] x + [0] u \end{array} \right.$$

Osserva che le matrici  $A$  e  $B$  sono le stesse di prima per  $p = 0$  e l'equazione di uscita contiene  $p + 1$  elementi non nulli.

### Rappresentazioni equivalenti per $p = n$

Ripartiamo dalle equazioni per  $0 < p < n$ :

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t) y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^p \beta_j u^{(j)}(t) \quad (0 < p < n)$$

Facciamo qualche passaggio già visto in precedenza per esplicitare  $p = n$  e sfruttando le proprietà di linearità ottenere le equazioni per il caso di  $p = n$

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} x_i + \beta_n z^{(n)}, \quad z^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t) z^{(i)}(t) + u(t)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} x_i - \beta_n \sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} x_i + \beta_n u(t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [\beta_0 - \beta_n \alpha_0 \quad \beta_1 - \beta_n \alpha_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1}] x + [\beta_n] u \end{array} \right.$$

## Esempio

Prendiamo un'equazione differenziale generica con  $p < n$ :

$$y^{(2)} + y = 2u + \dot{u}$$

Riconducibile alla forma:

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t)y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^p \beta_j^{(j)}u(t)$$

In questo caso abbiamo che  $p = 1$

Dobbiamo ricercare la forma standard  $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ , troviamo quindi che:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -\alpha_0 y & -\alpha_2 \dot{y} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 2 \\ \underbrace{\beta_0 u}_{\beta_1 \dot{u}} \end{bmatrix} x + [0] u$$

## Realizzazione minima di una f.d.t.

Per produrre la realizzazione minima di un impianto ci basta riscrivere la  $G(s)$  in questa forma:

$$G(s) = \frac{\beta_0 + \beta_1 s + \cdots + \beta_m s^m}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Assumendo  $p = m$  il grado del numeratore e  $n$  il grado del denominatore, abbiamo una forma propria con ( $p < n$ ) e possiamo trattarla con la rappresentazione equivalente per  $0 < p < n$ .

## Sistemi dinamici equivalenti

La scelta delle variabili di stato da utilizzare per descrivere un oggetto fisico mediante un sistema dinamico non è unica, infatti è semplice dimostrare ciò tramite un cambio di variabili.

Preso un nuovo vettore di stato  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  e una matrice costante non singolare e invertibile  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  possiamo effettuare un **cambio di variabili** del tipo:

$$\dot{\hat{x}}(t) = T\dot{x}(t) \quad (\text{nuovo vettore di stato})$$

Di conseguenza è possibile anche l'operazione inversa:  $x(t) = T^{-1}\hat{x}(t)$

Grazie al nuovo vettore di stato possiamo anche definire un nuovo sistema LTI:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t) \end{cases}$$

Le dimensioni fisiche degli oggetti in gioco rimangono invariate, estendiamo inoltre le definizioni delle matrici:

$$\hat{A} = TAT^{-1}, \quad \hat{B} = TB, \quad \hat{C} = CT^{-1}, \quad \hat{D} = D$$

Questo sistema viene detto **equivalente** a quello descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

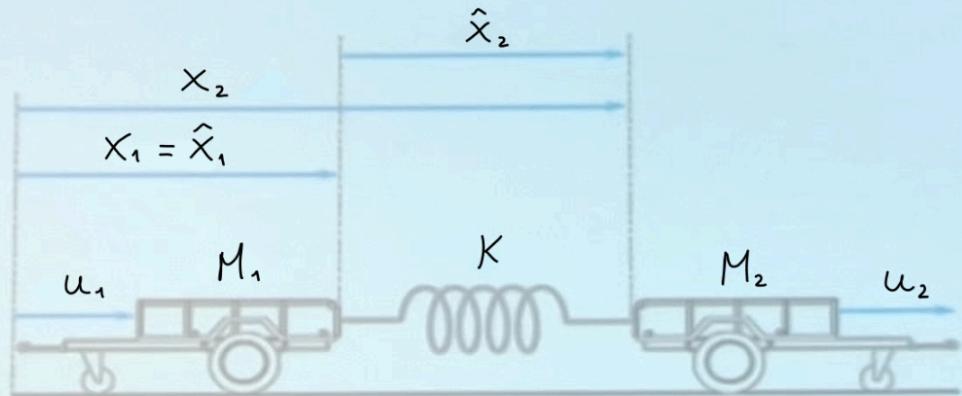
In particolare questo significa che per un ingresso  $u(t)$  e per due stati iniziali  $x(t_0)$  e  $\hat{x}(t_0)$  di cui sappiamo che  $\hat{x}(t) = Tx(t)$  per  $t > t_0$ , allora i movimenti d'uscita sono identici. Inoltre le due quadruple di matrici  $(A, B, C, D)$  e  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$  sono semplicemente due descrizioni di uno stesso oggetto fisico.

Nota bene: sia il nuovo stato  $\hat{x}$  che la matrice  $T$  possono essere definite nel campo complesso senza complicazioni (ovviamente in questo caso si perde il senso fisico del sistema).

Osservazione: le matrici  $A$  e  $\hat{A}$  sono simili quindi hanno gli stessi autovalori, fondamentali per determinare le caratteristiche dei movimenti del sistema, e chiamati **autovalori del sistema**.

## Esempio

Esempio per  $p < n$  (sistema lineare)



Richieste : Trovare  $x_1$

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1 = -K(x_1 - x_2) + u_1 \\ M_2 \ddot{x}_2 = -K(x_2 - x_1) + u_2 \end{cases}$$

$$\ddot{x}_1 = \ddot{\hat{x}}_1 \quad \ddot{x}_2 = \ddot{\hat{x}}_2$$

$$I \rightarrow \ddot{\hat{x}}_1 = \frac{1}{M_1} [-K(x_1 - x_2) + u_1]$$

$$II \rightarrow \ddot{\hat{x}}_2 = \frac{1}{M_2} [-K(x_2 - x_1) + u_2]$$

$$Il mio stato sarà dato da \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)^T$$

Per semplicità e per esperienza, conosco già  $x_1$  e  $x_2$ , quindi scelgo  $\dot{x}_1 = \dot{\hat{x}}_1$  e  $\dot{x}_2 = \dot{\hat{x}}_2$ .

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$$

Adesso ho tutto per poter scrivere  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K}{M_1} & \frac{K}{M_1} & 0 & 0 \\ \frac{K}{M_2} & -\frac{K}{M_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)]^T \end{array} \right.$$

$\nwarrow$  variabile di stato che mi interessa

Allora otteniamo che :

$$\dot{\hat{X}}_1(t) = X_1(t)$$

$$\dot{\hat{X}}_2(t) = X_2(t) - X_1(t)$$

$$\dot{\hat{X}}_3(t) = X_3(t)$$

$$\dot{\hat{X}}_4(t) = X_4(t) - X_3(t)$$

$$\rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Adesso posso scrivere un nuovo sistema con le variabili di stato  $\hat{x}$ , quindi avremo :  $\dot{\hat{x}} = [\dot{\hat{x}}_1, \dot{\hat{x}}_2, \dot{\hat{x}}_3, \dot{\hat{x}}_4]^T$

## Autovalori e Modi

Sappiamo che  $x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$  è la soluzione di  $\dot{x} = Ax$  con  $u(t) = 0$  (caso di movimento libero). A seconda che  $A$  sia **diagonalizzabile** o meno distinguiamo due casi.

### $A$ diagonalizzabile

Possiamo scegliere  $T$  in modo tale che la matrice della dinamica risulti diagonale:

$$A = T^{-1}A_D T \quad A_D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

In questo caso il movimento libero ( $\hat{x}_l$ ) risulta:

$$\begin{aligned} \hat{x}_l(t) &= e^{A_D t} \hat{x}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A_D t)^k}{k!} \hat{x}_0 \quad (A_D)^k = \begin{bmatrix} (\lambda_1)^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_n)^k \end{bmatrix} \\ &= \text{diag} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} \right\} \hat{x}_0 \\ &= \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\} \hat{x}_0 \end{aligned}$$

Riportandoci nelle coordinate originali:

$$x_l(t) = T^{-1} \hat{x}_l(t) = T^{-1} \underbrace{\text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}}_{\text{Modi}} T x_0$$

In generale  $\lambda$  può essere un numero complesso. Le funzioni sono combinazioni lineari degli esponenziali degli autovalori di  $A$ , detti anche modi propri del sistema

$$y_l(t) = CT^{-1}\text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}Tx_0$$

### Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm j$$

$$T_o = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{pmatrix} \quad T_o^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = T_o A T_o^{-1} = \begin{pmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{pmatrix}$$

$$x_e(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1+j)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-j)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{pmatrix}$$

$$x_e(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} x_o$$

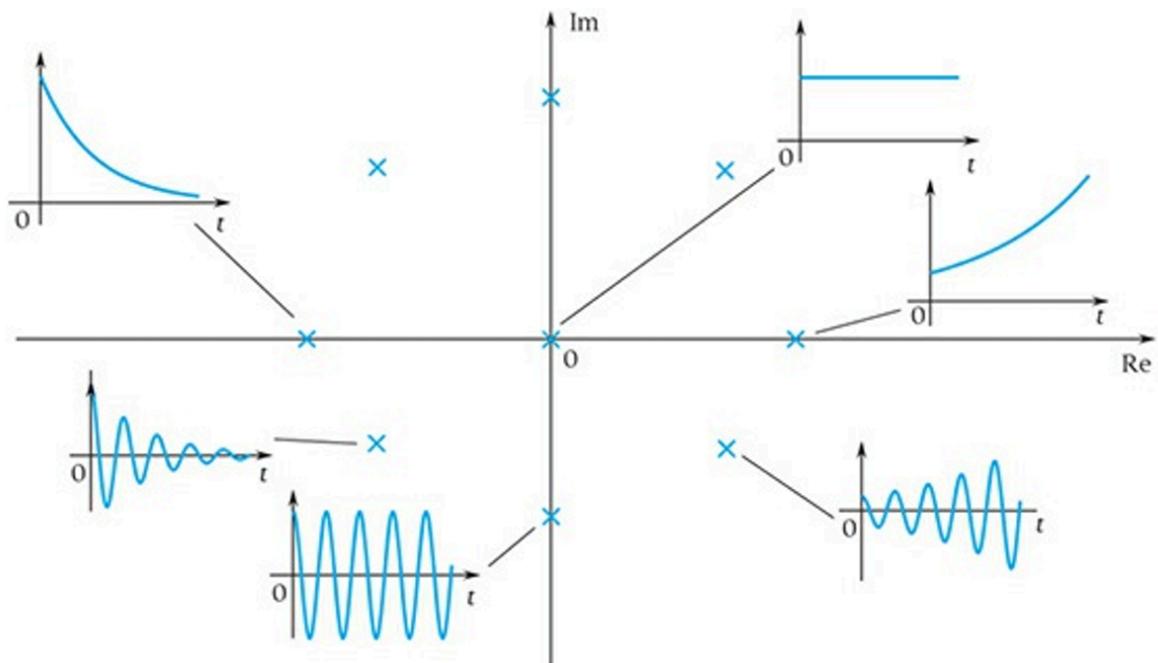
$$y_e(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} x_o$$

$$y_e(t) = \sqrt{2} e^t \left[ \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right] x_o$$

### Studio dei segni di $\lambda$ e del comportamento dei modi $e^{\lambda t}$

Se la parte reale di  $\lambda$  è negativa avremo un'esponenziale decrescente, se invece positiva avremo un'esponenziale crescente. Un comportamento ondulatorio è invece dovuto a un  $\lambda$  immaginario. Nota bene che il comportamento ondulatorio si combina con l'esponenziale crescente o decrescente.

Riassumiamo il tutto illustrando un quadro sintetico dell'**andamento temporale e qualitativo dei modi** in dipendenza della posizione nel piano complesso dei corrispondenti autovalori, rappresentati con crocette.



Da queste considerazioni ricaviamo intuitivamente che per valori di  $\lambda$  negativi, il sistema sarà **stabile**, mentre per valori positivi il sistema sarà **instabile**.

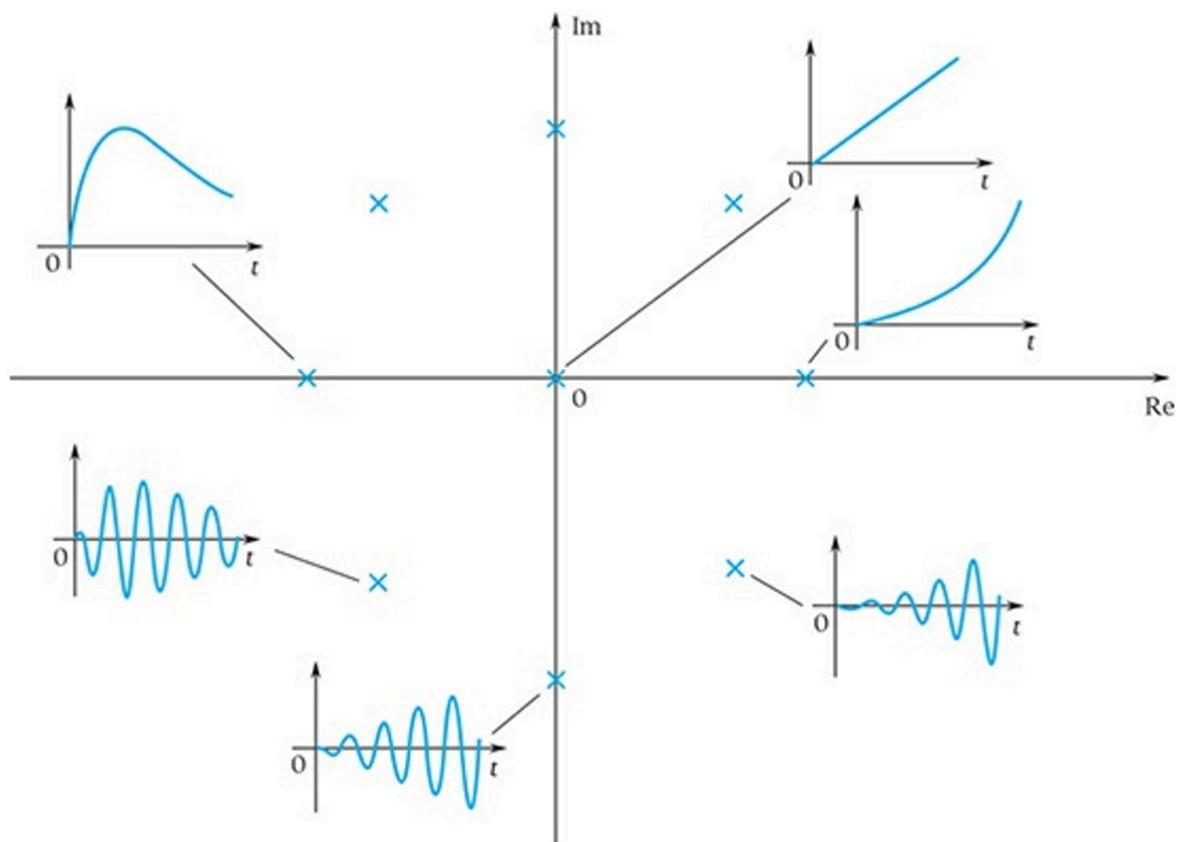
## $A$ non diagonalizzabile

La matrice  $A$  ha autovalori multipli e potrebbe non essere diagonalizzabile, ma è comunque possibile trasformarla in **forma di Jordan**. La matrice ha una struttura quasi diagonale, con elementi non nulli sulla diagonale (autovalori) e elementi di valore unitario sulla sopradiagonale.

In questo caso i modi avranno la seguente forma:

$$t^{\eta-1} e^{\lambda_i t}, \quad \lambda_i \text{ reale}$$

$$t^{\eta-1} e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad \lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \text{ complesso}$$



Anche qui possiamo fare delle considerazioni sui modi e sugli autovalori, ma anche qui valgono le stesse considerazioni di prima.

[Lezione 5 - 05/03/2025](#)



# Lezione 5 - 05/03/2025

[Lezione 4 - 04/03/2025](#)

## Recap Lezione 4

Abbiamo visto il calcolo di  $e^{At}$ :

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^i}{i!} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + A^r \frac{t^r}{r!} + \cdots$$

- Quando  $A$  è **diagonalizzabile**, la sua esponenziale ha una forma semplificata:

$$e^{At} = T^{-1} e^{A_D t} T = T^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T$$

Le funzioni sono combinazioni lineari degli esponenziali degli autovalori di  $A$ , detti anche modi propri del sistema.

## Autovalori

### Autovalori complessi

Se gli autovalori sono complessi e coniugati

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \quad \bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$$

Da questo deriva direttamente che:

$$e^{\lambda_i t} = e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} = e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t}$$

$$e^{\bar{\lambda}_i t} = e^{(\sigma_i - j\omega_i)t} = e^{\sigma_i t} e^{-j\omega_i t}$$

Questo implica che avremo modi con seni e coseni.

### Modi propri

## Calcolo degli autovalori

Piccolo ripasso sul calcolo degli autovalori

$v$  è autovettore di  $A$ , e  $\lambda$  è l'autovalore associato, se vale la relazione data dall'equazione caratteristica:

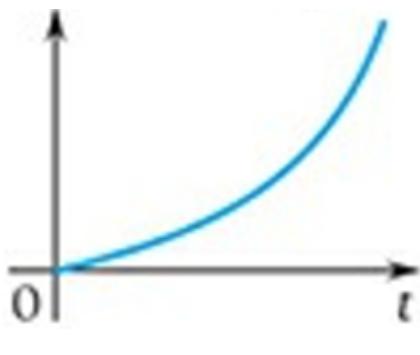
$$Av = \lambda v \Rightarrow (A - \lambda I)v \underset{\neq 0}{=} 0 \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0$$

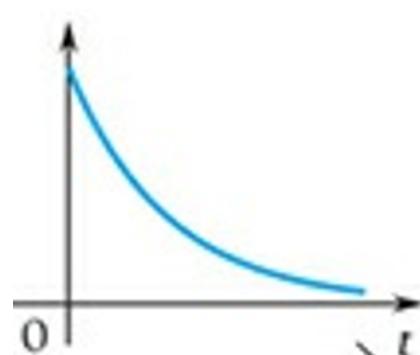
Inoltre, diremo che se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  con molteplicità  $k > 1$ , allora i modi propri associati:

$$C(t)e^{\lambda t}, \quad C(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_{k-1} t^{k-1}$$

## Autovalori reali



Caso con  $\lambda > 0$



Caso con  $\lambda < 0$

## Autovalori complessi



Caso con  $Re(\lambda) > 0$



Caso con  $Re(\lambda) < 0$

## Esempio

Esempio su un sistema libero ( $u(t) = 0$ )

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 1] \quad \lambda_{1,2} = \pm j$$

La matrice  $T$  costruisce a partire dagli autovettori della matrice  $A$ .

Gli autovettori non sono unici e devono essere linearmente indipendenti per avere  $T$  invertibile.

Prendiamo  $T_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \quad T_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}$

$$\hat{A} = T_0 A T_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax \\ \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} \end{cases}$$

- La matrice  $A$  è DIAGONALIZZABILE e ha due autovalori distinti, che quindi hanno molteplicità 1.

$$x_e(t) = T_0^{-1} \hat{x}_e(t) = T_0^{-1} \cdot \text{diag} \{ e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \} T_0 x_0$$

$$x_e(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(1+j)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-j)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} x_0$$

$$x_e(t) = e^t \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} x_0 \quad x_e(t) = \begin{bmatrix} x_{e_1}(t) \\ x_{e_2}(t) \end{bmatrix}$$

Infatti osserviamo che :

$$e^{(1+j)t} = e^t e^{jt} = e^t (\cos(t) + j \sin(t))$$

$$e^{(1-j)t} = e^t e^{-jt} = e^t (\cos(t) - j \sin(t))$$

evoluzione delle nostre due variabili di stato nel tempo. Torna anche dimensionalmente

Troviamo l'uscita

$$y_e(t) = e^t [1 \ 1] \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} x_0$$

$$y_e(t) = \sqrt{2} e^t \left[ \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right] x_0$$

Dimensionalmente torna perché  $y_e$  è  $1 \times 1$ ,  $C$  è  $1 \times 2$  e  $x_0$  è  $2 \times 1$

## Matrice reale, autovalori complessi

Se  $A$  è reale ma qualche suo autovalore non lo è, il corrispondente autovettore e anche la matrice  $A_D$  è complessa.

Si consideri la matrice diagonale  $M$  con autovalori  $\sigma + j\omega$  e  $\sigma - j\omega$ :

$$M = \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix}$$

Questa matrice è simile alla matrice in forma reale  $S$ :

$$S = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

## Forma di Jordan

Se gli autovalori sono multipli ma  $A$  **non è diagonalizzabile**, è possibile portare  $A$  in **forma di Jordan** attraverso un'altra trasformazione:

$$J = Q A Q^{-1}$$

In particolare avremo che:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_N \end{bmatrix}, \quad J_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_h & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_h & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_h & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_h \end{bmatrix}}_{\text{blocco di Jordan}}$$

La forma di Jordan è quindi complessivamente definita come:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & \lambda_2 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_3 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \lambda_n & 1 \\ & & & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Ogni blocco di Jordan ha sulla diagonale un autovalore (lo stesso valore) che compare tante volte quanto è la sua **moltiplicità algebrica** (*m.a.*); ci sono tanti blocchi di Jordan  $J_i$  associati allo stesso autovalore, quanto è la sua **moltiplicità geometrica** (*m.g.*). Quest'ultima corrisponde appunto al numero di blocchi di Jordan.

## Esempio

$$\left[ \begin{array}{ccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \implies \left[ \begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Riconosciamo  $\lambda = -1$ ,  $m.a. = 5$   $m.g. = 2$

## Costruzione della forma di Jordan

Riprendiamo la matrice esponenziale:

$$e^{At} = e^{QJQ^{-1}} = Q \left[ I + Jt + \frac{J^2t^2}{2!} + \frac{J^3t^3}{3!} + \dots \right] Q^{-1} = Q e^{Jt} Q^{-1}$$

Per calcolare  $e^{Jt}$  costruiamo la matrice diagonale a blocchi:

$$\begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{J_N t} \end{bmatrix}$$

E ogni blocco ha la forma:

$$e^{J_i t} = e^{\left( \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) t} = \overbrace{e^{(\lambda I + J_{0i})t}}^{\text{parte nilpotente}} = e^{\lambda t} e^{J_{0i} t}$$

Inoltre notiamo che la costruzione di  $e^{J_{0i} t}$  è una somma finita di  $q$  termini

$$e^{J_{0i} t} = I + J_{0i} t + \frac{J_{0i}^2 t^2}{2!} + \frac{J_{0i}^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{J_{0i}^{q-1} t^{q-1}}{(q-1)!}$$

$$e^{J_0 t} = I + \underbrace{J_0 t}_{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}} + \underbrace{\frac{J_0^2 t^2}{2!}}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}} + \cdots + \underbrace{\frac{J_0^{q-1} t^{q-1}}{(q-1)!}}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

L'apice  $k$  di  $J_{0i}^k$  indica la dimensione del blocco di Jordan

Allora ho ottenuto che:

$$e^{J_0 t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{(q-1)}}{(q-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi le funzioni che si combinano linearmente sono:

$$t^k \frac{e^{\lambda t}}{k!} \quad 0 \leq k \leq q-1$$

Con  $q$  la dimensione del blocco di Jordan.

## Autovalori

Se gli autovalori sono complessi e coniugati, facendo calcoli simili a quello visto, troviamo che i termini che compaiono sono del tipo:

$$t^k \frac{e^{\sigma t}}{k!} \sin(\omega t), \quad t^k \frac{e^{\sigma t}}{k!} \cos(\omega t), \quad 0 \leq k \leq q-1$$

Se  $\lambda$  è un autovalore con molteplicità  $k > 1$ , allora i modi propri associati sono:

$$C(t) e^{\lambda t}, \quad C(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t^1 + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_{k-1} t^{k-1}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\text{simile}} \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{array} \right] \xrightarrow{\text{simile}} \left[ \begin{array}{cccc} \sigma + j\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - j\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega \end{array} \right] \\
 \text{Forma reale di Jordan} \qquad \qquad \qquad \text{Forma complessa di Jordan}
 \end{array}$$

## Stabilità nei sistemi lineari stazionari

Riprendiamo la **definizione di stabilità**:

Uno stato di equilibrio  $\bar{x}$  è stabile, se per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che per tutti gli  $x_0$  che soddisfano

$$||x_0 - \bar{x}|| \leq \delta$$

$$\text{Si ha } ||x(t) - \bar{x}|| \leq \epsilon, \quad t \geq 0$$

La definizione di stabilità è una definizione rispetto a **perturbazioni**.

L'origine è sempre un punto di equilibrio per ingresso nullo. Se l'origine è stabile, allora è stabile qualsiasi altro punto di equilibrio. Possiamo parlare allora di **stabilità del sistema**. La stabilità dipende solo dalla risposta libera del sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad u = 0; \quad x(0) = x_0; \quad x(t) = e^{At}x_0$$

La stabilità dipende solo dai modi propri del sistema. Se gli autovalori a  $Re < 0$ , il sistema è asintoticamente stabile. Se gli autovalori a  $Re \leq 0$  e se  $Re = 0$  con molteplicità 1, il sistema è stabile. Il tutto deriva dallo sviluppo di  $e^{\lambda t} = e^{\sigma t}e^{j\omega t}$  con seni e coseni.

## Stabilità e autovalori

Stabilità	Modi	Autovalori
Stabilità asintotica	Tendono a zero.	Parte reale $< 0$ .
Stabilità semplice o marginale	Non vanno a infinito. Almeno uno non converge a zero.	Parte reale $\leq 0$ . Almeno uno con parte reale = 0 (con m.a. = m.g. e $q = 1$ ).
Instabile	Almeno uno va a infinito.	Almeno uno con parte reale $> 0$ oppure almeno uno con parte reale = 0 (con m.a. $\neq$ m.g. e $q > 1$ ).

## Stabilità dei sistemi linearizzati

- Sistema linearizzato: equazioni non lineari trascurando i termini di secondo ordine nell'intorno di uno stato di equilibrio.
- Se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile, allora lo stato di equilibrio del sistema non lineare è stabile (basta mettersi sufficientemente vicini allo stato di equilibrio per cascarci dentro).
- Se il sistema linearizzato è semplicemente stabile, allora non possiamo concludere nulla sul sistema non lineare (un autovalore 0 è come dire che il termine del primo ordine è 0 ... allora contano quelli del secondo ordine...).

### Esempio 1

Prendiamo in considerazione il seguente esempio:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- La matrice è in forma di Jordan e presenta 3 blocchi, quindi abbiamo la molteplicità geometrica  $m.g. = 3$ .
- La molteplicità algebrica dell'autovalore è  $m.a. = 5$ .

Analizzando i singoli blocchi abbiamo:

1.  $q = 3$  modi, ovvero  $e^{-t}$ ,  $te^{-t}$ ,  $\frac{t^2}{2!}e^{-t}$
2.  $q = 1$  modi, ovvero  $e^{-t}$
3.  $q = 1$  modi, ovvero  $e^{-t}$

Possiamo adesso concludere che il sistema è **asintoticamente stabile**

### Esempio 2

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se prendiamo la matrice  $2 \times 2$  formata da  $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ , questa è una matrice simile alla matrice a:

$$\begin{bmatrix} -1+j2 & 0 \\ 0 & -1-j2 \end{bmatrix}$$

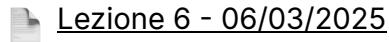
Riunendo con la matrice di partenza troviamo che la matrice ha tre blocchi di Jordan:

$$\begin{bmatrix} -1+j2 & 0 & 0 \\ 0 & -1-j2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Concludiamo l'esempio con le considerazioni:

- Per  $\lambda_1 = -1 + j2$  abbiamo  $m.a. = m.g. = 1$  e come modo  $e^{-t} \sin(2t)$
- Per  $\lambda_2 = -1 - j2$  abbiamo  $m.a. = m.g. = 1$  e come modo  $e^{-t} \cos(2t)$
- Per  $\lambda_3 = 0$  abbiamo  $m.a. = m.g. = 1$  e come modo  $e^{0t} = 1$

La conclusione dell'esercizio è che il sistema è **marginalmente stabile**.



Lezione 6 - 06/03/2025



# Lezione 6 - 06/03/2025

[Lezione 5 - 05/03/2025](#)

## La forma di Jordan e esempi

Se  $A$  è una matrice a valori reali, gli autovalori e gli autovettori sono complessi e coniugati.

Possiamo usare un **cambio di coordinate** reale che trasforma la matrice diagonale complessa in una matrice diagonale reale a blocchi (blocchi al più di dimensione 2).

Il numero di blocchi è pari al numero di coppie di autovalori complessi e coniugati.

$$\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\text{simile}} \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix}$$

Nel caso  $A$  abbia mini blocchi di Jordan di dimensione  $q > 1$  corrispondenti ad autovalori complessi coniugati

$$\begin{array}{c|cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{array} \xleftrightarrow{\text{simile}} \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - j\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix}$$

Forma reale di Jordan      Forma complessa di Jordan

Inoltre, riconosciamo un certo pattern, dato da:

$$J_r = \begin{bmatrix} M & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M & I & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & M & I \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & M \end{bmatrix}$$

forma reale di Jordan

## Esempi

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Consideriamo i seguenti due blocchi:

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right]$$

In particolare sul primo blocco non faccio nulla, mentre sul secondo blocco posso fare la seguente operazione considerando come autovalore  $-2 \pm j = \sigma \pm j\omega$ :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} -2+j & 0 \\ 0 & -2-j \end{bmatrix}$$

*m.a. = m.g. = 1*

- Concludo dicendo che il **sistema è asintoticamente stabile** (la parte reale di  $\lambda$  è negativa per ogni lambda calcolato).

Prendiamo un secondo esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

Per le stesse considerazioni di prima riconosciamo subito due blocchi di Jordan.

Nel primo blocco troviamo  $\lambda = 0$  con  $m.a. = m.g. = 1$ . Nel secondo blocco troviamo  $\lambda = \pm j$  con nuovamente  $m.a. = m.g. = 1$  quindi con la presenza di seni e coseni.

- Inoltre, per via degli autovalori complessi con parte reale nulla concludiamo dicendo che **il sistema è semplicemente stabile**.

Prendiamo un nuovo esempio

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 & m.a. &= 2 & m.g. &= 1 \\ \lambda_2 &= j & m.a. &= 2 & m.g. &= 1 \\ \lambda_3 &= -j & m.a. &= 2 & m.g. &= 1 \end{aligned}$$

Inoltre, per il blocco 2 abbiamo  $\begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ t \cos(t) & t \sin(t) \end{bmatrix}$  (nota bene la  $t$  nella seconda riga)

- Questo **sistema è instabile** (ci basta anche solo uno degli autovalori con parte reale  $> 0$  oppure almeno uno con parte reale  $= 0$  (con  $m.a. \neq m.g.$  e  $q > 1$ )).

Prendiamo un ultimo esempio

$$A = \left[ \begin{array}{c|cc|ccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{lll}
 \lambda_1 = 5 & m.a. = 1 & m.g. = 1 \\
 \lambda_2 = 1 + 2j & m.a. = 1 & m.g. = 1 \\
 \lambda_3 = 1 - 2j & m.a. = 1 & m.g. = 1 \\
 \lambda_4 = -2 & m.a. = 3 & m.g. = 1
 \end{array}$$

Per il blocco 1 abbiamo  $e^{5t}$ , mentre per il blocco 2 abbiamo  $[e^t \sin(2t) \quad e^t \cos(2t)]$ . Infine per il blocco 3 abbiamo  $[e^{-2t} \quad te^{-2t} \quad t^2e^{-2t}]$

- Questo **sistema è instabile** (ci basta anche solo uno degli autovalori con parte reale  $> 0$  oppure almeno uno con parte reale  $= 0$  (con  $m.a. \neq m.g.$  e  $q > 1$ )).

## Altre proprietà dei sistemi lineari

Nei sistemi lineari la stabilità dipende solo dalla struttura del sistema (e in particolare della sola matrice  $A$ ). A questo punto ci chiederemo alcune domande:

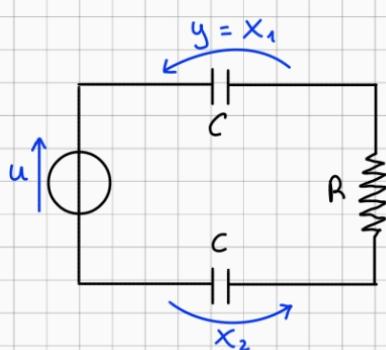
- Esistono altre proprietà che dipendono dalla struttura del sistema lineare e che sono di interesse per la regolazione automatica?
- Che ingresso dare per portare il sistema in un dato stato?
- Come determinare lo stato se abbiamo solo la misura dell'uscita?

Sicuramente esistono altre proprietà che ancora non abbiamo trattato, e per rispondere alla seconda domanda daremo una definizione di **raggiungibilità**, mentre per la terza definiremmo la proprietà di **osservabilità**.

## Raggiungibilità

Partiamo con il vedere questo esempio:

## Esempio - Raggiungibilità



$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{1}{CR}(x_1(t) + x_2(t)) - u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{CR}(x_1(t) + x_2(t)) - u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Cambio var.  $\begin{cases} \hat{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ \hat{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$

Mat. T

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = -\frac{2}{RC}(\hat{x}_1(t) - u(t)) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = 0 \\ y(t) = \frac{1}{2}(\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t)) \end{cases}$$

Qualsiasi sia l'ingresso  
 $\hat{x}_2$  rimane invariata  
 quindi irraggiungibile

Abbiamo visto che la raggiungibilità è una proprietà intrinseca del sistema.

## Definizione

Prendiamo il sistema dinamico di ordine  $n$  con  $m$  ingressi e  $p$  uscite:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x : \text{stato}, u : \text{ingresso} \\ y = Cx + Du, & y : \text{uscita} \end{cases}$$

$$u \in \mathbb{R}^r, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m, \\ A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad C \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{m \times r}$$

### Definizione:

Uno stato  $\tilde{x}$  del sistema LTI si dice **raggiungibile** se esistono un istante di tempo finito  $\tilde{t} > 0$  e un ingresso  $\tilde{u}$ , definito tra 0 e  $\tilde{t}$ , tali che, detto  $\tilde{x}_f(t)$ ,  $0 \leq t \leq \tilde{t}$ , il movimento forzato dello stato generato da  $\tilde{u}$  risulti  $\tilde{x}_f(\tilde{t}) = \tilde{x}$ .

Un sistema i cui stati sono tutti raggiungibili si dice **completamente raggiungibile**.

Questa proprietà divide gli stati in:

- **Stati raggiungibili**  $x_R$
- **Stati non raggiungibili**  $x_{NR}$

## Sistemi completamente raggiungibili

Per verificare che un sistema sia **completamente raggiungibile** bisogna calcolare:

$$M_R = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

Condizione necessaria e sufficiente per la **raggiungibilità** è:

$$\text{rank}(M_R) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\right) = n$$

Nel caso in cui il sistema abbia solo un ingresso mi basta calcolare il determinante per trovare il rango.

## Sistemi non completamente raggiungibili

Dato il mio sistema posso isolare i suoi stati raggiungibili da quelli non raggiungibili?

Nel caso in cui il sistema non sia completamente raggiungibile, si può isolare la sua parte raggiungibile

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{\tilde{x}(t) = T_r x(t)} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t)$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix} \quad \hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{B}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$$
$$n_r = \text{rank}(M_R)$$

A questo punto conoscendo  $n_r$  (numero di stati raggiungibili) possiamo scrivere un nuovo sistema:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_R = \hat{A}_a \tilde{x}_R + \hat{A}_{ab} \tilde{x}_{NR} + \hat{B}_a u \\ \dot{\tilde{x}}_{NR} = \hat{A}_b \tilde{x}_{NR} \end{cases}$$

Come trovo la **matrice di trasformazione**  $T$ ?

Scegliamo  $n_r$  colonne linearmente indipendenti in  $M_R$ . Ogni stato raggiungibile è combinazione lineare delle colonne selezionate. A questo punto aggiungo  $n - n_R$  colonne linearmente indipendenti per costruire  $T$ .

 Lezione 7 - 11/03/2025



# Lezione 7 - 11/03/2025

[Lezione 6 - 06/03/2025](#)

## Ancora sulla raggiungibilità

Oggi riprenderemo le **proprietà strutturali** dei sistemi dinamici. Partiamo riprendendo la definizione di raggiungibilità:

### Definizione:

Uno stato  $\tilde{x}$  del sistema LTI si dice **raggiungibile** se esistono un istante di tempo finito  $\tilde{t} > 0$  e un ingresso  $\tilde{u}$ , definito tra 0 e  $\tilde{t}$ , tali che, detto  $\tilde{x}_f(t)$ ,  $0 \leq t \leq \tilde{t}$ , il movimento forzato dello stato generato da  $\tilde{u}$  risulti  $\tilde{x}_f(\tilde{t}) = \tilde{x}$ .

Un sistema i cui stati sono tutti raggiungibili si dice **completamente raggiungibile**.

Per la raggiungibilità sono quindi fondamentali le matrici  $A$  e  $B$  e in particolare la scorsa volta abbiamo visto che:

Per verificare che un sistema sia **completamente raggiungibile** bisogna calcolare:

$$M_R = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

Condizione necessaria e sufficiente per la **raggiungibilità** è:

$$\text{rank}(M_R) = \text{rank}\left( [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \right) = n$$

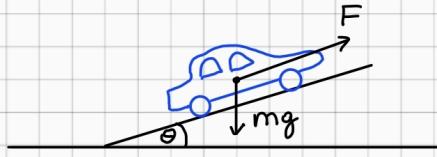
## Esempi

### Velocità di crociera

Esempio raggiungibilità - velocità di crociera

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 1] x \quad \text{← } n = 2$$

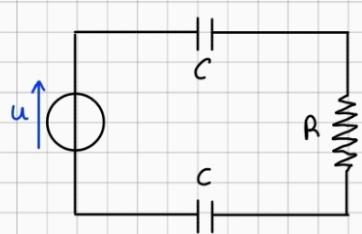


$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \frac{\gamma}{m} & -g \\ \frac{\gamma}{m} & -g & \left( -\frac{\beta}{m} \right) \frac{\gamma}{m} & g \frac{\beta}{m} \end{array} \right] = M_R$$

$\text{rank}(M_R) = 2 = n \rightarrow$  il sistema è completamente raggiungibile

Ritorniamo al circuito

## Esempio - ritorniamo al circuito



$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -\frac{1}{RC}(x_1(t) + x_2(t) - u(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{RC}(x_1(t) + x_2(t) - u(t)) \\ y(t) = x_1(t) \end{array} \right.$$

$$A = -\frac{1}{RC} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \frac{1}{RC} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad M_R = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2 C^2} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2 C^2} \end{bmatrix}$$

$\text{Rank}(M_R) = 1 \rightarrow$  sistema non raggiungibile

Quindi sono le parti raggiungibili?

$$T_R^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{*} T_R = (T_R^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{x} = \begin{cases} \hat{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \hat{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

→ è un multiplo scalare della prima colonna di  $M_R$

$[1/RC \ 1/RC]^T$ . Può essere scelto di qualsiasi fattore:

In questo caso ho scelto di  $RC/2$ , dove  $1/2$  serve per semplificare i conti.

\* Questa colonna si sceglie affinché sia linearmente indipendente rispetto alle prime

Con le trasformazioni ottengo

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = -\frac{2}{RC}(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 - u) \\ \dot{\hat{x}}_2 = 0 \\ y = \frac{1}{2}(\hat{x}_1 + \hat{x}_2) \end{cases} \rightarrow \hat{A} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{RC} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T_A A T_A^{-1}$$

\*

Abbiamo riscritto il sistema nelle forme:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} u \rightarrow \dot{\hat{x}} = \hat{A} \hat{x} + \hat{B} u$$

parte raggiungibile  
parte non raggiungibile

\* Da  $\hat{A}$  abbiamo ottenuto che il sistema non è raggiungibile, in particolare:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{RC} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

raggiungibile  
non raggiungibile

Inoltre,  $\hat{A}_{ab}$  rappresenta l'influenza delle porte raggiungibile su quella non raggiungibile.

È importante dividere la parte raggiungibile da quella N.R., perché se la parte N.R. è stabile, abbiamo ancora qualche speranza.

## Considerazioni finali

- Per **sistemi LTI raggiungibilità coincide con controllabilità** (portare il sistema da uno stato qualsiasi nell'origine).
- Se la parte non controllabile di un sistema è asintoticamente stabile (autovalori con parte reale negativa), il sistema si dice **stabilizzabile**.
- Per un sistema **completamente controllabile** esiste sempre almeno un ingresso che permette al sistema di spostarsi da uno stato  $x_A$  a uno stato  $x_B$ .

## Osservabilità

L'**osservabilità** è la proprietà che riguarda le matrici  $A$  e  $C$ . Quasi sempre in un sistema fisico la matrice  $D$  è nulla in quanto rappresenta una relazione diretta e istantanea tra ingresso e uscita. Nella pratica non esistono relazioni istantanee

ma al limite esistono approssimazioni (anche  $V = RI$  non apporta un cambiamento istantaneo ma lo approssimiamo come tale). Partiamo con un esempio:

**Esempio - osservabilità**

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\frac{c}{m} x_1 + \frac{u}{m} \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_1 \end{array} \right. \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

## Definizione

Diamo adesso una definizione di **osservabilità**:

Partendo sempre dal solito sistema dinamico con  $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$  e  $y = Cx(t) + Du(t)$

### Definizione:

Uno stato  $\tilde{x} \neq 0$  di un sistema LTI si dice **non osservabile** se, qualunque sia  $\tilde{t} > 0$  finito, detto  $\tilde{y}_l(t)$ ,  $t \geq 0$ , il movimento libero dell'uscita generato da  $\tilde{x}$  risulta  $\tilde{y}_l(t) = 0$ ,  $0 \leq t \leq \tilde{t}$ .

Un sistema privo di stati non osservabili si dice **completamente osservabile**.

Prendiamo un generico stato non nullo per il semplice fatto che indipendentemente da  $C$  l'uscita è nulla se lo stato è nullo.

- Uno stato iniziale  $x$  si dice osservabile se è possibile determinare  $x$  sulla base della misura delle uscite  $y$ .
- Un sistema è osservabile se tutti gli stati sono osservabili.
- L'osservabilità è legata alle proprietà della risposta libera e dell'equazione di uscita.

$$y(t) = Ce^{At}x_0$$

## Condizioni per l'osservabilità

Condizione necessaria e sufficiente per l'**osservabilità** è:

$$\text{rank} \left( \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n \quad (\text{ordine del sistema})$$

Con  $\mathcal{O}$  matrice di osservabilità.

## Stati osservabili e non osservabili

Questa proprietà divide gli stati in **stati osservabili**  $x_O$  e **stati non osservabili**  $x_{NO}$ . Nel caso in cui il sistema non sia completamente osservabile possiamo dividere la sua parte osservabile da quella non osservabile.

Eseguo un cambio di variabili tramite la matrice  $T_O$ :

$$\hat{x}(t) = T_O x(t) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} \end{cases}$$

Tale per cui le nuove matrici hanno la forma seguente:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ba} & \hat{A}_b \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_O \times n_O}$$

$$\hat{C} = [\hat{C}_a \quad 0], \quad \hat{C}_a \in \mathbb{R}^{p \times n_O}$$

$$n_O = \text{rank} \left( \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right), \quad n_O < n$$

Per costruire  $T_O$  seleziono  $n - n_O$  vettori linearmente indipendenti tali che:

$$\mathcal{O}\xi_i = 0 \quad \text{span}(\xi_i) = \mathcal{X}_{NO}$$

Compongono una base del  $\ker(\mathcal{O})$ , ovvero ogni vettore rappresenta uno stato non osservabile.

Si selezionano  $n_O$  vettori linearmente indipendenti per completare la matrice tali che:

$$\det(T_O^{-1}) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad T_O \text{ è invertibile}$$

Posso quindi partizionare lo stato in modo che:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) = \hat{A}_a \hat{x}_a(t) \\ \dot{\hat{x}}_b(t) = \hat{A}_{ba} \hat{x}_a(t) + \hat{A}_b \hat{x}_b(t), \\ y(t) = \hat{C}_a \hat{x}_a(t) \end{cases}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix}$$

Possiamo anche fare delle considerazioni sugli **autovalori** in quanto la matrice è triangolare inferiore

$$\text{aut}(\hat{A}) = \text{aut}(A) = \underbrace{\text{aut}(\hat{A}_a)}_{\text{parte osservabile}} + \underbrace{\text{aut}(\hat{A}_b)}_{\text{parte non osservabile}}$$

L'osservabilità ha una relazione importante con la stabilità, perché se tutti gli stati sono non osservabili, il nostro sistema potrebbe essere instabile e esplodere da un momento all'altro senza che noi ce ne potessimo accorgere.

### Esempio - velocità di crociera

**Esempio osservabilità - velocità di crociera**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 1] x \quad n = 2$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} C \quad CA$$

Il sistema **NON È OSSERVABILE**  
perché non è possibile ricostruire le posizioni iniziali misurando solo le velocità.

Il sistema è **non osservabile** perché il rango della matrice di osservabilità è 1.

## Esempio della massa (esempio iniziale)

Osservabilità - esempio della massa

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{c}{m}x_1 + \frac{u}{m} \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = x_1 \rightarrow y = Cx = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{c}{m} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0]$$

$$A = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ba} & \hat{A}_b \end{bmatrix}, \quad C = [\hat{C}_a \ 0]$$

Le matrici sono già nella forma desiderata \*

Questo è utile perché ci permette di distinguere da subito gli stati osservabili da quelli non osservabili.

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{m} & 0 \end{bmatrix} \overset{CA}{\rightarrow} \det(\Theta) = 0 \rightarrow \text{rank}(\Theta) 1 \neq 2 = n$$

## Scomposizione canonica

Un sistema può essere sia non completamente osservabile che non completamente raggiungibile.

È possibile dimostrare che esiste sempre una scomposizione che porta il sistema in una forma che ne evidenzia le varie parti: la sua **forma canonica**.

La trasformazione che permette ciò è la trasformazione di Kalman, detta  $T_K$ .

Kalman è un importante ingegnere che grazie al suo lavoro ha dato vita a tecnologie come il GPS basato sul suo famoso **filtro di Kalman**.

Per trovare questa matrice, cerchiamo come al solito un cambio di variabili del tipo  $\hat{x} = T_K x$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \end{cases}$$

Quindi, avremo che:

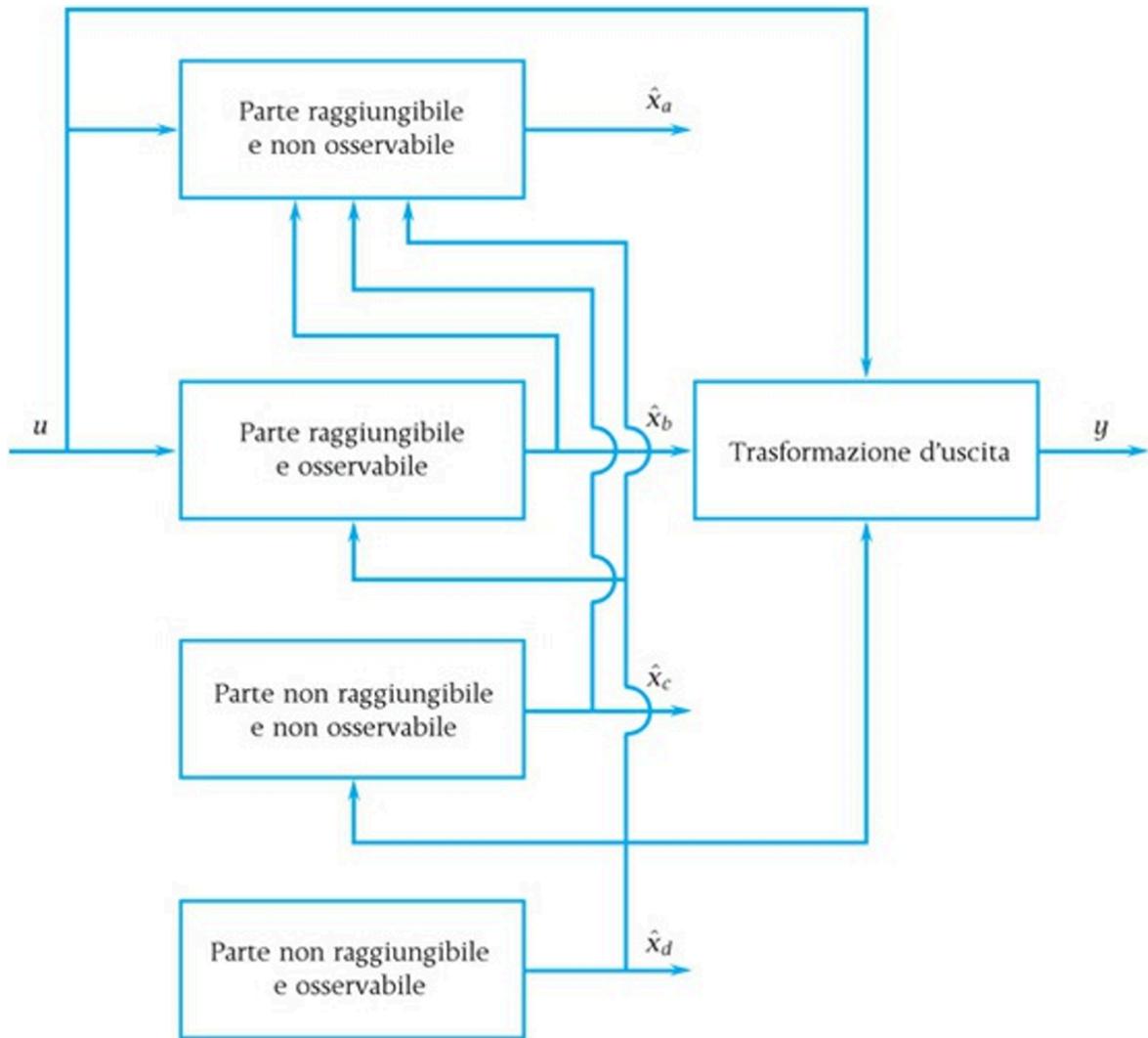
$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ \hat{x}_c \\ \hat{x}_d \end{bmatrix} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \hat{A}_b & 0 & \hat{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \hat{A}_c & \hat{A}_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_d \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{raggiungibile} \\ \text{raggiungibile} \end{array}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \underbrace{\hat{C}_b}_{\text{osservabile}} & 0 & \underbrace{\hat{C}_d}_{\text{osservabile}} \end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono l'unione degli autovalori dei singoli sottoinsiemi. Per quanto riguarda gli stati  $\hat{x}$  è importante notare che:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ \hat{x}_c \\ \hat{x}_d \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \hat{x}_a : & \text{raggiungibile / non osservabile} \\ \hat{x}_b : & \text{raggiungibile / osservabile} \\ \hat{x}_c : & \text{non raggiungibile / non osservabile} \\ \hat{x}_d : & \text{non raggiungibile / osservabile} \end{array} \right.$$

Di seguito, è riportato uno schema a blocchi:



Dallo schema a blocchi ricaviamo che le osservazioni più importanti le ricaviamo studiando le parti raggiungibili e osservabili del sistema.

Lezione 8 - 12/03/2025



# Lezione 8 - 12/03/2025

[Lezione 7 - 11/03/2025](#)

## Osservazioni sulla lezione precedente

- Un breve riepilogo sulle proprietà dei sistemi dinamici:
  - **Stabilità**: data dalla matrice  $A$
  - **Raggiungibilità**: data dalle matrici  $A$  e  $B$ , che ci permettono di trovare  $M_R$
  - **Osservabilità**: data dalle matrici  $A$  e  $C$ , che ci permettono di trovare  $M_O$
- Un sistema completamente osservabile e raggiungibile è detto in **forma minima** (non è possibile usare un numero di variabili di stato minore del suo ordine per descrivere la relazione ingresso-uscita).
- Le parti non raggiungibili o non osservabili non rappresentano la relazione ingresso-uscita (movimento forzato dell'uscita).
- Le parti non raggiungibili o non osservabili sono comunque importanti per lo studio del movimento libero dello stato o dell'uscita (es. analisi della stabilità).

## Ispezione diretta per la raggiungibilità

### Caso SISO ( $m = 1$ ), $A$ diagonale

Per SISO si intende singolo ingresso singola uscita. Le componenti di questo sistema sono:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow M_R = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} b_1 & \lambda_1 b_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & \underbrace{\lambda_n b_n}_{AB} & \cdots & \underbrace{\lambda_n^{n-1} b_n}_{A^{n-1}B} \end{array} \right]$$

$\text{rank}(M_R) = n \Leftrightarrow B$  non ha elementi nulli e  $\lambda_i$  sono distinti.

### Lemma PBH (Popov, Belevitch, Hautus)

Questo lemma non è presente sul libro e in molti casi evita di fare tanti calcoli e semplifica molto la vita.

### Teorema

Il sistema dinamico LTI  $\dot{x} = Ax + Bu$  è **completamente raggiungibile** se e solo se  $\text{rank} \underbrace{[\lambda I - A]}_{\substack{n \times n}} \mid \underbrace{B}_{n \times m} = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$ .

Dimensione  $n \times (n+m)$

- Se  $\lambda$  non è autovalore: la condizione è sempre verificata

$$\det(\lambda I - A) \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(\lambda I - A) = n$$

- Se  $\lambda$  è autovalore: la condizione deve essere verificata perché

$$\text{rank}(\lambda I - A) < n$$

### Dimostrazione

Supponiamo che esista un  $\lambda_i : \text{rank}[\lambda I - A|B] < n$

allora possiamo usare quello che in algebra lineare è detto **teorema del rango nullo**, ovvero diremo che allora:

$$\exists q \neq 0 : \underbrace{q^T [\lambda I - A|B]}_{q^T M} = 0 \quad \text{ovvero} \quad q \in \ker([\lambda I - A|B])$$

$$q^T (\lambda_i I - A) = 0, \quad q^T B = 0$$

Post-moltiplico per  $B$

$$\rightarrow q^T \lambda_i = q^T A \rightarrow q^T AB = \lambda_i q^T B = 0$$

Adesso post-moltiplico per  $AB$

$$\rightarrow q^T \lambda_i = q^T A \rightarrow q^T A^2 B = \lambda_i q^T AB = 0$$

Potrei continuare così aumentando ogni volta il grado di  $A$  e ottenendo infine:

$$\begin{aligned}
q^T A B &= \lambda_i q^T B = 0 \\
q^T A^2 B &= \lambda_i q^T A B = 0 \\
&\vdots \\
q^T A^{n-1} B &= \lambda_i q^T A^{n-2} B = 0 \\
q^T [ \quad B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1} B \quad ] &= 0
\end{aligned}$$

## Caso generico con ingresso multiplo (MI) e $A$ in forma di Jordan

$$A = \left[ \begin{array}{cccc|c|cccc}
\lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda_1 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_p & 1 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_p & \ddots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots & \ddots & \lambda_p & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \lambda_p
\end{array} \right] \quad B = \left[ \begin{array}{c}
B_{11} \\
B_{12} \\
\vdots \\
\hline
B_{1,m_1} \\
\vdots \\
\hline
B_{p,1} \\
B_{p,2} \\
\vdots \\
\hline
B_{p,m_p}
\end{array} \right]$$

Matrice in forma di Jordan con  $p$  blocchi

$m_1$  dimensione blocco 1  
 $m_p$  dimensione blocco  $p$

- Per un **sistema SISO** (single input single output), la molteplicità geometrica di tutti gli autovalori deve essere pari a uno; e  $B$  deve avere almeno tanti elementi diversi da zero quanti gli autovalori distinti di  $A$ . Questa è la condizione che rende il rango massimo.
- Un sistema con  $\mu$  miniblocchi associati ad un unico autovalore  $\lambda$  può essere raggiungibile solo se ha almeno  $\mu$  ingressi. Questo perché le righe "delicate" sono rispettivamente l'ultima riga di ogni miniblocco, dove l'autovalore non ha nessun uno adiacente. Se uno stesso autovalore si presenta in due miniblocchi ho bisogno che  $B$  abbia almeno due colonne, altrimenti la lineare indipendenza viene meno.

### Esempio 1

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Per  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_1 I - A$  rende nulle la terza e la quinta riga di  $A$ . Il rango di  $[\lambda_1 I - A]$  è minore di  $n$  quindi la speranza è che il rango di  $[\lambda_1 I - A | B]$  sia proprio  $n$ . In questo caso ci va bene perché dalla matrice con  $B$  affiancata otteniamo che le righe sono linearmente indipendenti e quindi il rango è  $n$ .
- Invece, notiamo che  $\lambda_1$  è presente in due miniblocchi quindi  $B$  deve avere almeno due colonne.

Concludiamo che il sistema è **completamente raggiungibile**.

## Esempio 2

Se invece, considerando nuovamente il primo esempio, la matrice  $B$  fosse:

$$B = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 3 \ 2 \ 3]^T$$

La lineare indipendenza viene meno e il sistema è **non è raggiungibile**.

## Ispezione diretta per l'osservabilità

### Lemma PBH (Popov, Belevitch, Hautus)

Preso il classico sistema dinamico lineare

#### Teorema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

è **completamente osservabile** se e solo se  $\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

La matrice  $A$  rimane invariata e si considera sempre una matrice in forma di Jordan con  $p$  blocchi

$$A = \left[ \begin{array}{cccc|ccc|cc} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_p & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_p & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots & \ddots & \lambda_p & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{array} \right]$$

Matrice in forma di Jordan con  $p$  blocchi

La matrice  $C$  invece sarà

$$C = [ \ C_{11} \ C_{21} \ \cdots \ C_{m_1,1} \ | \ \cdots \ | \ C_{1,p} \ C_{2,p} \ \cdots \ C_{m_p,p} \ ]$$

Il tutto affinché si possa trovare

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Tutte le colonne  $C_{i,1}$  dei corrispondenti blocchi di Jordan devono essere linearmente indipendenti.

### Esempio

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda I - A = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\lambda I} - A \\ &= \begin{bmatrix} -1 - (-1) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 + 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'esempio non è completo (è stato lui un pò superficiale), ma basta aggiungere come riga la matrice  $C$  e calcolare il rango per vedere se il sistema è completamente osservabile.

# Funzione di trasferimento e controllo Feedback

Abbiamo sempre rappresentato i nostri sistemi grazie a delle variabili di stato, e abbiamo sempre risolto delle equazioni differenziali ordinarie. Siamo arrivati a un punto in cui gli strumenti di algebra lineare richiesti sono sempre meno banali. Abbiamo quindi bisogno di un sistema diverso che sia più alla portata di un ingegnere e che non richieda calcoli troppo complessi.

Arriveremo a trovare una forma alternativa per scrivere il nostro sistema e che non richieda troppi conti. Quindi, per tutta la durata del corso parleremo di un nuovo strumento, detto **funzione di trasferimento**. Nota bene che sarà sempre possibile intercambiare le varie rappresentazioni.

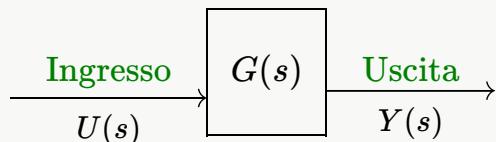
## Funzione di trasferimento

### Definizione (funzione di trasferimento)

La **funzione di trasferimento  $G(s)$**  di un sistema dinamico nella variabile  $s$  è il rapporto tra l'uscita del sistema e il suo ingresso

$$G(s) = \frac{\text{uscita}}{\text{ingresso}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

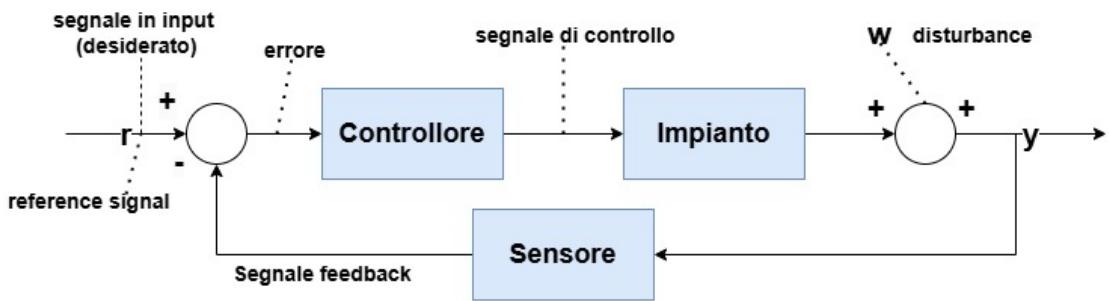
Come schemi a blocchi:



## Controllo in Feedback

### Modello

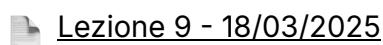
Questo è il modello più usato per il controllo in feedback



L'obiettivo è quindi quello che dato l'**impianto** dobbiamo sapere cosa mettere nel blocco **controllore**.

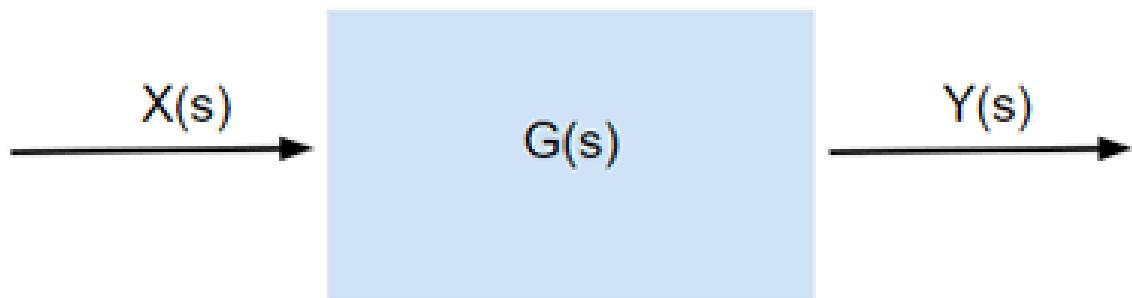
Una breve nota che poi verrà trattata più avanti. Nel primo cerchietto del modello a blocchi abbiamo un segno meno e un segno più. Questo perché:

- Un **feedback positivo** dà vita a un sistema instabile (un esempio il feedback positivo è il microfono che riceve l'audio dalle casse e lo amplifica dando vita a un loop originato proprio da un feedback positivo).
- Un **feedback negativo** dà vita a un sistema stabile



2

# Funzione di trasferimento



WWW.ANDREAMININI.ORG



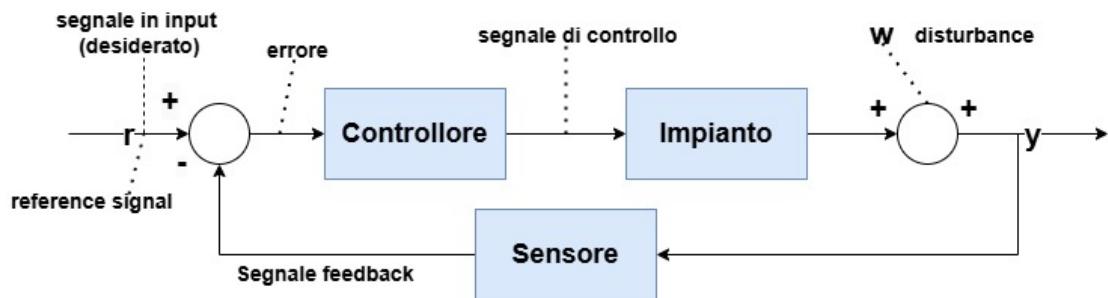
# Lezione 9 - 18/03/2025

[Lezione 8 - 12/03/2025](#)

## Controllo in Feedback

### Modello

Questo è il modello più usato per il controllo in feedback



L'obiettivo è quindi quello che dato l'**impianto** dobbiamo sapere cosa mettere nel blocco **controllore**.

Una breve nota che poi verrà trattata più avanti. Nel primo cerchietto del modello a blocchi abbiamo un segno meno e un segno più. Questo perché:

- Un **feedback positivo** dà vita a un sistema instabile (un esempio il feedback positivo è il microfono che riceve l'audio dalle casse e lo amplifica dando vita a un loop originato proprio da un feedback positivo).
- Un **feedback negativo** dà vita a un sistema stabile

### Funzione di trasferimento

Fino a mo quello che si è fatto è stato modellare l'**impianto** con:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

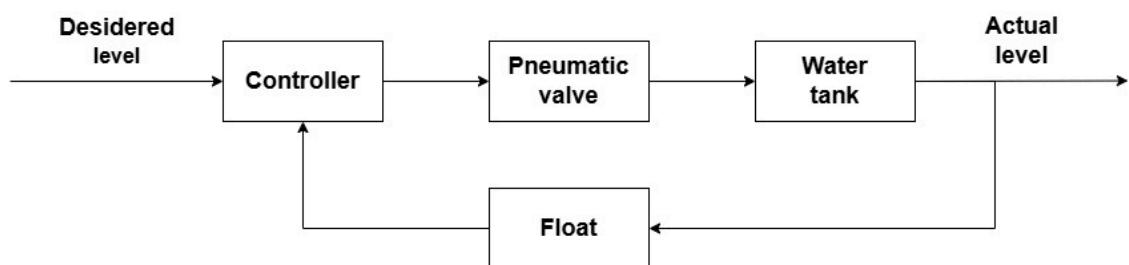
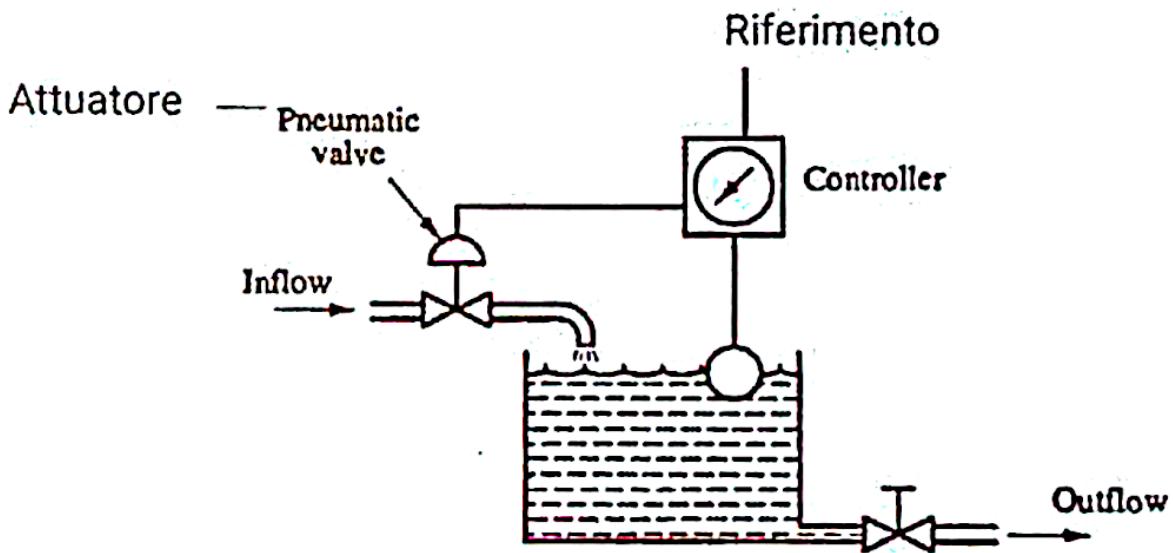
Inoltre, il **controllore** è colui che produce l'ingresso  $u$ . In particolare legge l'errore dato da  $r - b$  dove  $r$  è il segnale in input e  $b$  è il segnale di feedback. Il nostro scopo sarà rendere l'**errore** il più piccolo possibile, quindi il controllore dovrà far tendere  $r$  a  $y$ , ovvero  $r \rightarrow y$ .

Inoltre, alcune componenti sono:

- Il **segnale di riferimento** o segnale di input lo produciamo e lo controlliamo noi.
- Il **disturbo** agisce sul sistema e non lo possiamo controllare:  $y = \bar{y} + w$ .

A conti fatti, passeremo dal modello studiato in precedenza, detto a **variabili di stato**, in un nuovo modello basato sulla **funzione di trasferimento**.

## Esempio - controllo di livello

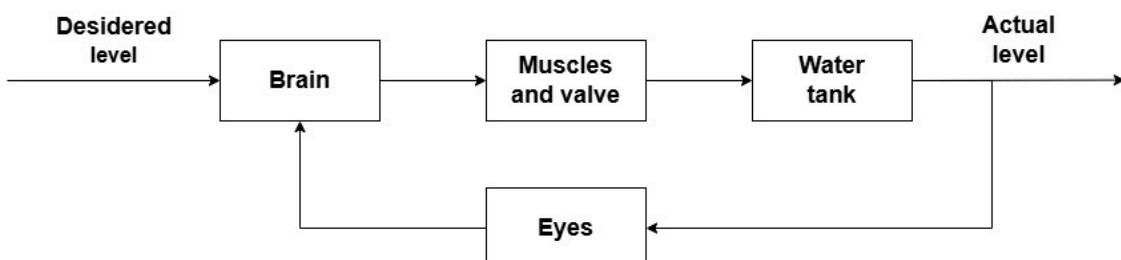
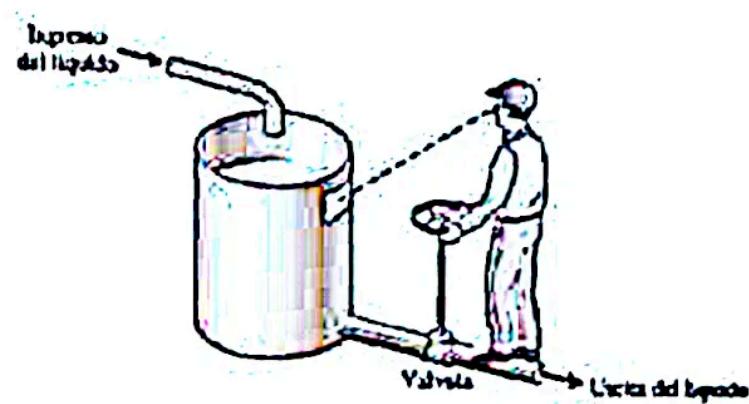


Riconosciamo le componenti principali del sistema:

- **Controllore** → Controller

- **Attuatore** → Pneumatic valve
- **Impianto** → Water tank
- **Sensore** → Float (galleggiante)

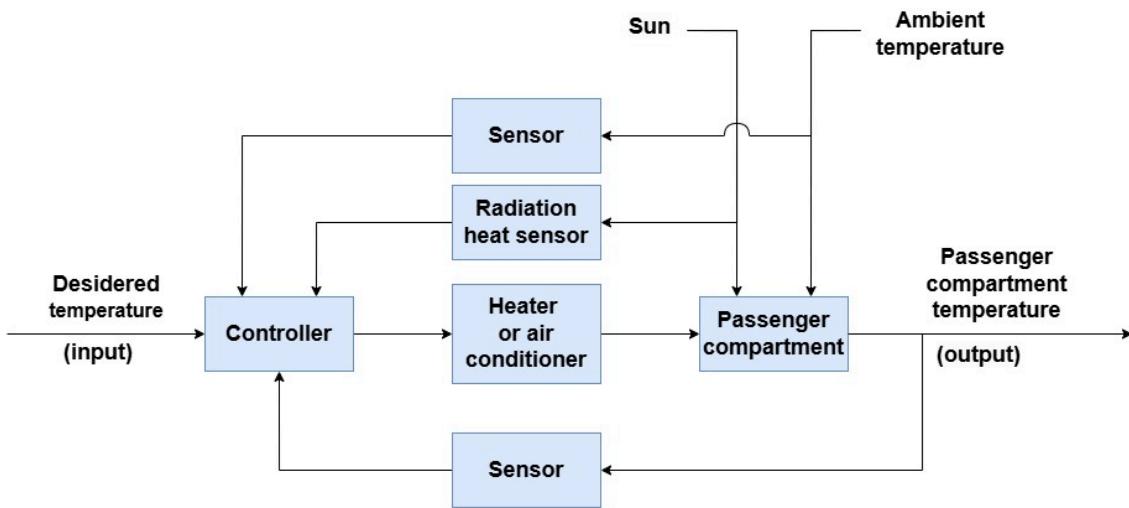
Abbiamo assunto che il controllore sia un controllore automatico ma nulla ci vieta di avere un controllore umano (il sensore sono gli occhi dell'operatore, mentre l'attuatore sono le sue braccia).



Le nuove componenti rimpiazzano le vecchie pertanto il cervello sarà il controllore, i muscoli dell'operatore l'attuatore, ecc.

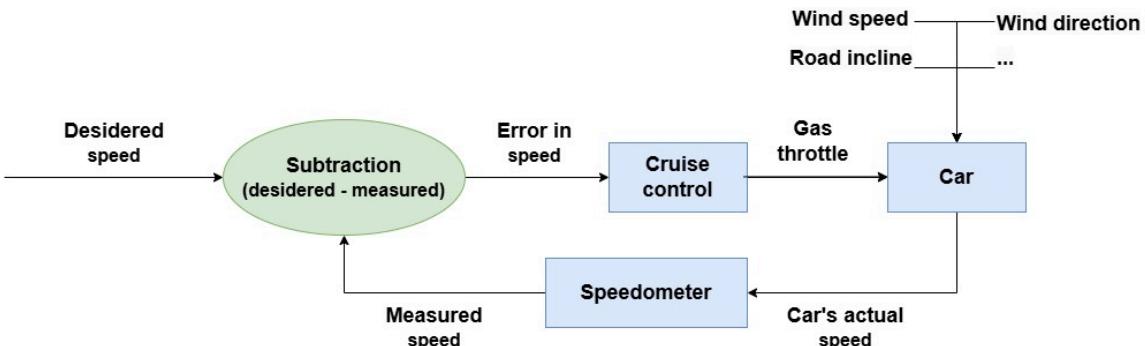
Ovviamente la differenza tra un operatore umano e un sistema automatico, è che l'essere umano non è infallibile, si può distrarre oppure fare misurazioni non precise; invece, un computer è affidabile.

## Esempio - condizionamento termico



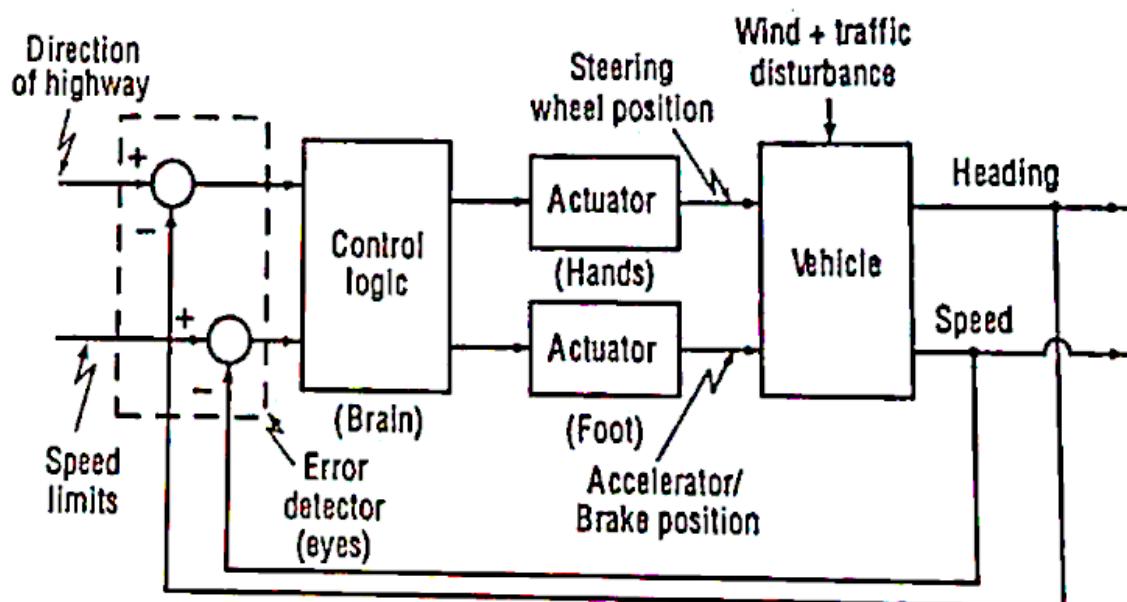
Questo esempio mostra un chiaro esempio in cui i disturbi hanno apparati di misura specifici e gli errori fanno parte del sistema in quanto ingressi. In questo caso, la temperatura ambiente e il sole sono disturbi.

### Esempio - cruise control



Classico esempio sul sistema di mantenimento di velocità dell'automobile.

### Esempio - car control (MIMO)

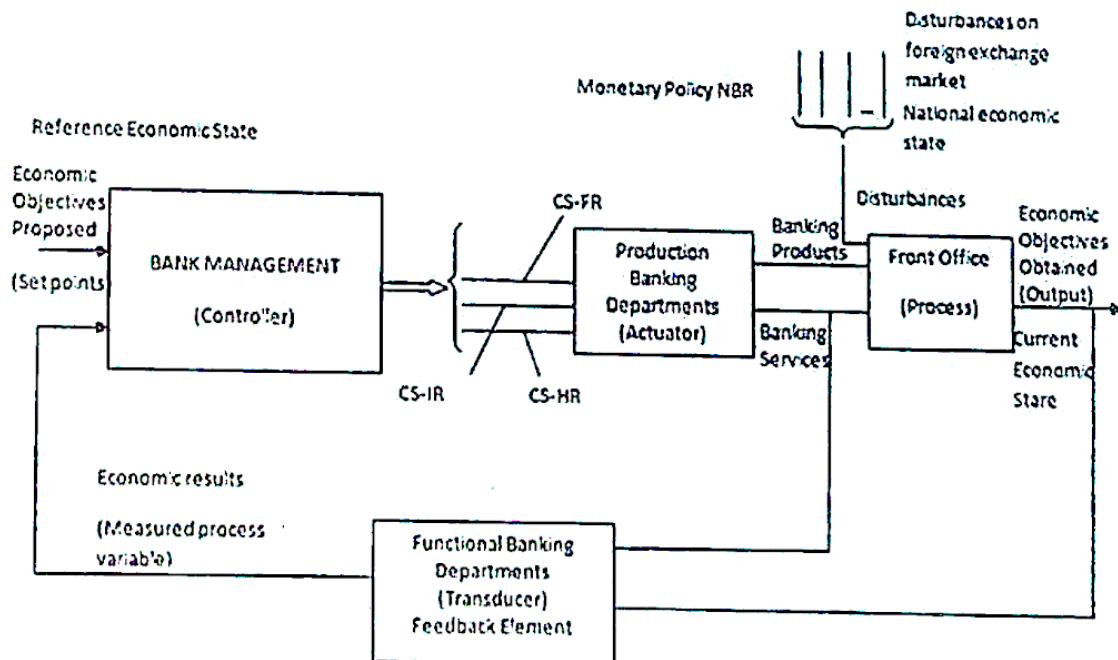


Questo è un caso di sistema **MIMO** (multiple input multiple output). Nota bene che in questo caso gli attuatori si dividono in due sistemi differenti..

Potremmo prendere per esempio due sensori in questo schema: un sensore di velocità che influisce sul limitatore di velocità (speed limits), e un sensore di posizione del volante che influisce sul sistema di posizionamento su strada (direction of highway).

Il controllore invece produrrà due segnali di controllo perché abbiamo due attuatori diversi.

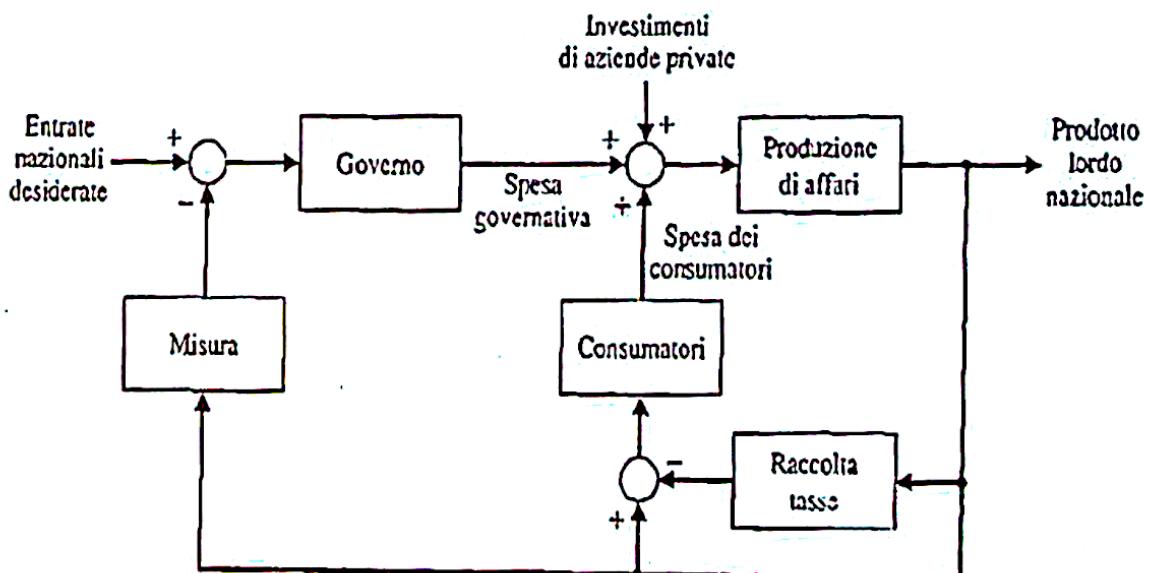
### Esempio - banks



Feedback Control System for banking activities [adapted from 9]: CS-FR-control signal financial resources; CS-IR-control signal informational resources; CS-HR-control signal human resources; RES-Reference Economic State; CES-Current Economic State

I sistemi in feedback permettono di modellare non solo sistemi "ingegneristici", ma possono essere usati in vari campi. Questo è un esempio applicato all'ambito finanziario. L'output o l'obiettivo sarà l'obiettivo economico ottenuto.

### Esempio - entrate nazionali



Infine, vediamo nuovamente un esempio in ambito finanziario che esplica al meglio l'uso degli schemi a blocchi.

## Trasformata di Laplace

Tutta la parte sulle trasformate di Laplace è sul libro nella parte di appendice B 1, 2 e 3. Fino ad ora i capitoli fatti sono i primi 3, il quarto non sarà affrontato.

### Soluzioni di equazioni differenziali

La **trasformata di Laplace** è uno dei metodi che si applicano alla risoluzione delle differenziali. Si arriva a questa tramite vari step:

- Eulero nel 1744 cominciò ad usare integrali come soluzione di equazioni differenziali

$$z = \int X(x)e^{ax} dx \quad z(x, a) = \int_0^t e^{at} X(t) dt$$

- Lagrange usò la forma:

$$z = \int_0^t X(x)e^{-ax} a^x dx$$

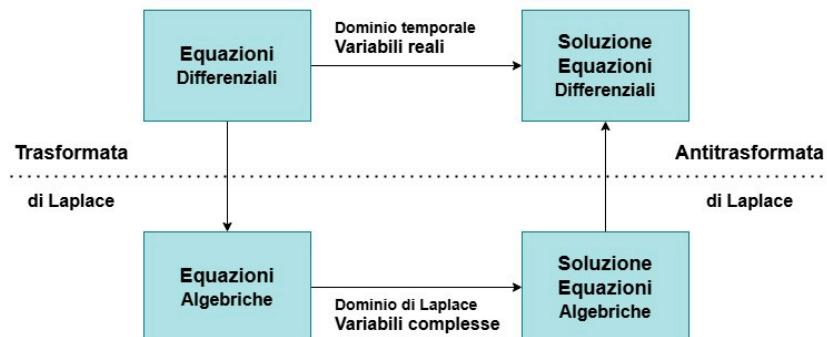
- Laplace infine nel 1785 cominciò ad usare la trasformata per risolvere equazioni alle differenze finite

$$y_s = \int e^{-sx} \phi(x) dx$$

### Trasformate nell'ingegneria

Trasformata	Dominio	Definizione Principale	Applicazioni
Laplace	$t \rightarrow s$	$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$	Sistemi dinamici, controlli automatici, circuiti elettrici
Fourier	$t \rightarrow \omega$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$	Analisi spettrale, segnali, telecomunicazioni
Zeta	$n \rightarrow z$	$\sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n}$	Sistemi digitali, DSP, controllo discreto
Mellin	$t > 0 \rightarrow s$	$\int_0^\infty t^{s-1}f(t)dt$	Analisi scalabile, teoria dei numeri, segnali
Hankel	$r \rightarrow k$	$\int_0^\infty f(r)J_n(kr)r dr$	Acustica, elettromagnetismo, campi radiali
Hilbert	$t \rightarrow t$	$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t-\tau} d\tau$	Demodulazione, segnali analitici
Wavelet	$t \rightarrow (a, b)$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi^*(\frac{t-b}{a}) dt$	Elaborazione segnali, compressione, analisi multirisoluzione
Radon	$(x, y) \rightarrow (\rho, \theta)$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy$	Tomografia, elaborazione immagini

## La logica delle trasformate

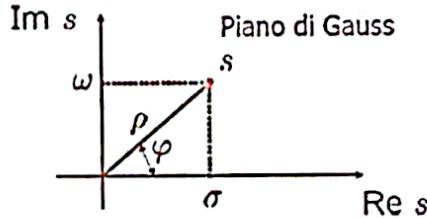


Le equazioni differenziali viste fino ad ora lavorano nel dominio del tempo e usando variabili reali. Con la trasformata di Laplace lavoreremo nel **dominio di Laplace** e nel campo dei complessi. Invece, sarà sempre possibile ritornare dal dominio di Laplace al dominio del tempo, usando l'**antitrasformata di Laplace**.

Nota bene: nel dominio temporale le equazioni differenziali erano usate per descrivere il sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$ , mentre la loro soluzione era data da una certa  $x(t) = e^{At}x_0$ .

## Ripasso sui numeri complessi

Rappresentazione numeri complessi:



- Forma cartesiana

$$s = \sigma + j\omega$$

parte reale      parte immaginaria

- Forma polare

$$s = \rho e^{j\varphi}$$

modulo      argomento

Passaggio tra le due formulazioni:

- $\sigma = \rho \cos \varphi$        $\omega = \rho \sin \varphi$
- $\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$        $\varphi = \operatorname{atan} \frac{\omega}{\sigma}$

Trasformazione biunivoca se  
 $-\pi < \varphi \leq \pi$

## Definizione

### Definizione

Sia  $f(t)$  una funzione, reale o complessa, di variabile reale  $t$ , definita nel semiasse reale positivo, **generalmente continua** in  $\mathbb{R}^+$  e sommabile in ogni intervallo  $[0, T]$ , con  $T > 0$

La trasformata di Laplace è:

$$f(t) = \sigma(t) + j\beta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad s = \alpha + j\omega$$

Così facendo possiamo passare dal dominio del tempo  $t$  al dominio di Laplace  $s$  complesso.

La trasformata di Laplace di  $f(t)$ , è la funzione complessa  $F(s)$ , di variabile complessa  $s = \alpha + j\omega$ :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

## Condizioni sulle funzioni L-trasformabili

Una funzione  $f(t)$  è detta **generalmente continua** nell'intervallo  $[a, b]$  se questo può essere suddiviso in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali la funzione è continua e ammette limite destro e sinistro finiti (continua a tratti).

Può presentare dei **salti** come unico tipo di discontinuità; per salti si intende i punti in cui limite destro e sinistro esistono ma sono finiti e diversi. Una funzione generalmente continua in  $[a, b]$  è sicuramente integrabile.

Le funzioni **L-trasformabili** sono quelle che hanno **ordine esponenziale  $\alpha$**  (ovvero esiste l'integrale di Laplace).

Una funzione  $f(t)$  ha ordine esponenziale  $\alpha$ , se esistono due costanti  $\alpha, M > 0$ , tali che per qualche  $t_0 > 0$  risulta:

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t} \quad \forall t \geq t_0$$

Allora l'integrale di Laplace di  $f(t)$  converge ad una soluzione che è la sua trasformata:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

## Riassumendo

La trasformata di Laplace esiste se l'integrale esiste per qualche valore di  $s$ , e le condizioni su  $f(t)$  sono le seguenti:

- **Generalmente continua**
- Di **ordine esponenziale**

## Trasformata di Laplace nella pratica

### Condizione di convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt < \infty \quad \forall s \in I$$

Sono L-trasformabili tutte le funzioni  $f(t)$  di ordine esponenziale, e la **convergenza dell'integrale di Laplace** equivale a verificare che:

$$\left| f(t)e^{-\alpha t} \right| \leq M \quad \longrightarrow \quad |f(t)| \leq M e^{\alpha t}$$

### Convergenza

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

Se l'integrale converge per un certo  $s_0 \in \mathbb{C}$  e converge per tutti gli  $s \in \mathbb{C}$  tali che:

$$Re(s) > Re(s_0) \quad \text{poichè} \quad |e^{-sx}| = e^{-Re(s)x}$$

Quest'ultima parte mi dice semplicemente che quello che importa è la parte reale della variabile  $s$ .

### Ascissa di convergenza

L'**ascissa di convergenza** è il valore minimo della parte reale  $\sigma = Re(s)$  per cui l'integrale della trasformata di Laplace converge:

$$\alpha = \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt < \infty \right\}$$

#### Definizione

Estremo inferiore dell'insieme dei valori reali  $\alpha$  dei punti complessi, per cui converge l'integrale di definizione della L-trasformata.

Inoltre, è possibile trarre alcune considerazioni sul significato geometrico; infatti,  $\alpha$  separa il piano complesso in due regioni:

- Per  $Re(s) > \alpha$  l'integrale converge
- Per  $Re(s) \leq \alpha$  l'integrale diverge



### Esempi

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

**Condizioni di applicabilità:** generalmente continua, ordine esponenziale

$$f(t) = e^{t^2} \quad \text{non è di ordine esponenziale}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{questa converge}$$

## Generalità

Più in generale la funzione  $f(t) = t^n$  ha **ordine esponenziale**  $n+1$ , poiché:

$$|t^n| < e^{(n+1)t}$$

Queste funzioni sono: rampa, parabola, etc. Dal punto di vista pratico la trasformata di Laplace esiste quasi sempre (nel nostro caso sempre).

La trasformata di Laplace è una funzione analitica ed è possibile estendere la sua definizione a tutto il piano complesso con la **tecnica del prolungamento analitico di Weierstrass**.

In conclusione la  $F(s)$  risulterà definita su tutto il piano complesso, escludendo i suoi punti di **singolarità polare**. Se tali punti sono in un numero finito, la  $F(s)$  risulterà essere uguale ad un rapporto di polinomi in  $s$  (**trasformate razionali**):

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

## Riepilogo

- Sappiamo com'è fatto l'integrale di Laplace.
- Sappiamo che l'integrale di Laplace si può applicare a quasi tutte le funzioni del dominio del tempo tranne a quelle che non sono di ordine esponenziale.
- Anche se la convergenza dell'integrale può apparire limitata, il dominio di convergenza si può estendere a tutto il piano complesso.
- Le trasformate di Laplace che ci interessano sono rapporti di polinomi (quasi tutte) cioè sono razionali.

## Singolarità della trasformata di Laplace

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

**Zeri** del sistema dinamico: le **radici** dell'equazione  $N(s) = 0$

**Poli** del sistema dinamico: le **radici** dell'equazione  $D(s) = 0$

### Esempio

$$F(s) = \frac{s+1}{s\left(s - \frac{1}{20}\right)}, \quad \begin{array}{ll} s = -1 & \text{zero} \\ s = 0, s = \frac{1}{20} & \text{poli} \end{array}$$

## Anti-trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

### Problema inverso

Data una funzione complessa, di variabile complessa  $F(s)$  calcolare, se esiste, la funzione del tempo  $f(t)$  di cui la  $F(s)$  è la trasformata di Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \underbrace{\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(s)e^{st}ds}_{\text{Integrale di Bromwich}}$$

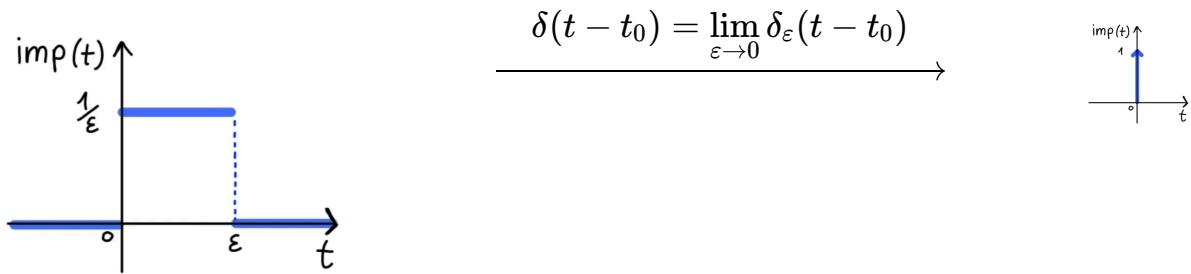
La definizione di **anti-trasformata** viene estesa a tutto l'asse reale assumendo che  $f(t) = 0, t < 0$ .

## Trasformate di funzioni elementari

### Impulso di Dirac

Si definisce per prima cosa la funzione rettangolare di area unitaria:

$$\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$



La **funzione di Dirac** è una funzione che vale:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } t = 0 \\ 0, & \text{se } t \neq 0 \end{cases}$$

Ha area unitaria ed è nullo negli intervalli esterni all'intervallo di applicazione.

### Trasformata dell'impulso di Dirac

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) \cdot dt = 1}_{\text{area unitaria}} \quad \text{e} \quad \delta(t - t_0) = 0 \quad \forall t \neq t_0$$

### Proprietà di campionamento

$$f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

### Prodotto di convoluzione

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

Facendo la **convoluzione** di  $f(t)$  con la delta applicato in  $t_0$

$$\int_0^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0)dt = \int_0^{+\infty} \underbrace{f(t_0) \cdot \delta(t - t_0)}_{\text{prop. campionamento}} dt = f(t_0) \int_0^{+\infty} \underbrace{\delta(t - t_0)dt}_{\text{area unitaria} = 1} = f(t_0)$$

E quindi per la **proprietà di campionamento e convoluzione**:

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} \cdot \int_0^{+\infty} \delta(t - t_0)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} \delta(t - t_0)e^{-st_0}dt$$

$$e^{-st_0} \int_0^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = e^{-st_0}$$

$$\text{Se } t_0 = 0 \quad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

## Funzione gradino

La **funzione gradino**  $1(t)$  vale:

$$\begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}, \quad F(t) = 1(t)$$

## Trasformata del gradino

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[ \frac{-e^{-st}}{s} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

## Trasformata del gradino traslato

La **funzione gradino traslato**  $1(t - t_0)$  vale:

$$1(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases}, \quad F(t) = 1(t - t_0)$$

Mi basta risolvere al solito modo ma usando un cambio di variabili:

$$\int_{-t_0}^{+\infty} 1(\tau) \cdot e^{-s(\tau+t_0)} d\tau = e^{-st_0} \int_0^{+\infty} 1(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0} \cdot \left[ \frac{-e^{-s\tau}}{s} \right]_0^{+\infty} = \frac{e^{-st_0}}{s}$$

La funzione  $e^{-s\tau}$  rappresenta un **ritardo di  $\tau$  nell'applicazione di un segnale** e  $t_0$  è la **traslazione nel tempo**.

## Funzione esponenziale

### Trasformata dell'esponenziale

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s), \quad f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{at}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \left[ \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}$$

L'integrale esiste solo se  $\operatorname{Re}(s) > a$  (integrale ha esponente negativo e quindi converge), dove  $a$  è l'ascissa di convergenza.

 [Lezione 10 - 19/03/2025 - \[edit\]](#)



# Lezione 10 - 19/03/2025 - [ ]



## Lezione 9 - 18/03/2025

Lezione di riepilogo sullo studio dei sistemi dinamici usando il modello a variabili di stato. Esercitazione su stabilità, modi del sistema, raggiungibilità e osservabilità.

[attachment:9c233f11-0f7e-4c41-a023-4d7d360ba3b1:Lezione\\_10\\_250320.pdf](#)



## Lezione 11 - 20/03/2025

## Riepilogo sul MODELLO A VARIABILI DI STATO

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \rightarrow m \text{ ingressi}$$

$x \in \mathbb{R}^n$

↓  
p uscite

$\ast$

$$M_R = [B | AB | \dots | A^{n-1}B]$$

$$M_O = \left[ \begin{array}{c} C \\ \hline CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{array} \right]$$

Studio dei sistemi dinamici

Stabilità → Autovettori di A

Movimento dello stato → Modi

Osservabilità → rank( $M_R^*$ ) = n }  
 Raggiungibilità → rank( $M_O^*$ ) = n } oppure Lemma PBH

## Scheme riassuntivo

STABILITÀ	MODI	AUTOVALORI
ASINTOTICA	→ 0	$Re(\lambda) < 0$
MARGINALE	<ul style="list-style-type: none"> <li>non <math>\infty</math></li> <li>almeno uno non va a 0</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>Re(\lambda) \leq 0</math></li> <li><math>Re(\lambda) = 0 \Leftrightarrow Re(\lambda) = 0</math></li> </ul> $m_a = m_g$ $(g = 1)$
INSTABILITÀ	almeno uno va a $\infty$	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>Re(\lambda) \geq 0</math></li> <li><math>Re(\lambda) = 0 \quad m_a \neq m_g</math></li> </ul>

## TRACCE D'ESAME

### • Esercizio 1 - sistema SISO

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y = [1 \ 2 \ 0]x \end{cases}$$

a - Stabilità interna ?  
 b - Raggiungibilità ?  
 c - Osservabilità ?

### 1.b - Metodo 1 con $M_A$

$$M_A = [B | AB | A^2B] = \left[ \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{array} \right]$$

$$A^2B = A \cdot AB = A \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -2 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \text{rank}(M_A) = 3 = n \quad \left( \begin{array}{l} \text{- Det sottometrici} \\ \text{- Vett. lin. indip.} \\ \text{- Altri metodi...} \end{array} \right)$$

→ Il sistema è completamente raggiungibile (rango max)

# 1.c - Metodo 1 con $M_0$

$$M_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{rank}(M_0) = 3 = n$$

→ Il sistema è completamente osservabile (rango max)

## 1. a

La matrice A potrebbe avere una forma particolare che ci potrebbe semplificare la vita nel calcolo degli autovalori.

- Metodo classico  $\det(\lambda I - A)$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{pmatrix} = \lambda (\lambda(\lambda+2) + 1) \stackrel{-(-1) \cdot 0 + 0 \cdot 0}{=} 0$$

$$\rightarrow \lambda(\lambda+1)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases} \begin{array}{l} \text{OK perché } m_a = m_g = 1 \\ \text{OK perché } \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \end{array}$$

→ Il sistema è marginalmente stabile (perché esiste un  $\lambda_i = 0$  con  $m_a = m_g$ )

Se l'esercizio chiedesse di calcolare i modi avremmo dovuto scrivere anche quelli:

(N.B. se non sono richiesti rimangono optionali all'esame)

- Metodo 2 La matrice è diagonale e blocchi, quindi:

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ (\lambda + 1)^2 \rightarrow \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -1 \end{array}$$

Per trovare i modi conosciamo già le  $m_a$  ma non le  $m_g$  di  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ , quindi dovranno prima trovare una matrice di trasformazione  $\hat{x} = T x$  e poi trovare la matrice in forma di Jordan  $A_J$ .

Ricordiamo che  $A_J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{bmatrix}$  e  $J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$  e che  $m_g \leq m_a$

e che avendo  $A_J$ , allora  $m_g$  sarà il numero di blocchi di Jordan  $J_i$  in cui compare lo stesso  $\lambda_i$ .

Nelle pratiche in realtà ci basta scrivere:

$$m_g = n - \dim [\operatorname{Ker}(\lambda I - A)] \Leftrightarrow (\lambda I - A) \overset{\text{autovettore}}{\underset{\text{rank}(\lambda I - A)}{\longrightarrow}} \operatorname{rank}(\lambda I - A) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$m_g = n - \dim [\operatorname{Ker}(\lambda I - A)] = 3 - 2 = 1$$

$$\text{Questo equivale alla forma di Jordan } J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} m_a = m_g = 1 \\ m_a = 2 \\ m_g = 1 \end{array}$$

Invece nel caso di  $\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$   $\rightarrow m_1 = m_2 = mg = 1$   
 $\left. \right\} \rightarrow m_3 = mg = 2$

### • Esercizio 2

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

a) Ragg. Oss. Stab.  
b) Modi

$$y = [1 \ 0 \ 1 \ 0]x$$

Analizziamo per prima cosa A

$$\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

- Matrice diagonale e blocchi
- Forma complessa del tipo  $\begin{pmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{pmatrix}$

Gli autovettori sono  $\lambda_1 = -7$ ,  $\lambda_2 = 2j$ ,  $\lambda_3 = -2j$ ,  $\lambda_4 = -8$

$\Rightarrow$  sistema marginalmente stabile

- $\lambda_1$  e  $\lambda_4$  ok perché  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$
- $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  hanno  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ , ma  $m_1 = m_2 = 1$

$$\lambda_1 = -7 \rightarrow e^{-7t} \quad \lambda_2 = 2j \rightarrow \cos(2t)$$

$$\lambda_3 = -2j \rightarrow \sin(2j) \quad \lambda_4 = -8 \rightarrow e^{-8t}$$

\* seni e coseni vanno bene perché rimangono limitati

Discussiamo la raggiungibilità

$$M_R = [B \mid AB \mid A^2B \mid A^3B] = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -8 \\ 1 & -8 & 64 & -512 \end{array} \right]$$

- le prime righe sono tutte 0 quindi  $\operatorname{rank}(M_R) < 4$   
 $\rightarrow$  sistema non raggiungibile

Discussiamo l'osservabilità

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & 0 & 0 \\ 49 & 0 & -4 & 0 \\ -343 & -8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \rightarrow \operatorname{rank}(M_O) &< 4 \\ \rightarrow \text{Sistema non osservabile} \end{aligned}$$

Proviamo a studiare Ragg. e Oss. con PBH

- $P(\lambda) = [\lambda I - A \mid B]$
  - $P(\lambda) = [\lambda I - A \mid C]$
- $\left. \right\} \text{ Studiare } \forall \lambda \in \mathbb{C}$

Ma in realtà gli unici valori di  $\lambda$  per cui devo verificare il rango sono gli autovelori di  $A$ :

$$\lambda_1 = -7, \lambda_2 = 2j, \lambda_3 = -2j, \lambda_4 = -8$$

Sono gli unici che ho senso verificare perché sono gli unici che potrebbero rendere il rango non massimo.

$$P(\lambda) = [\lambda I - A | B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} \lambda + 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + 8 & 1 \end{array} \right]$$

- Per  $\lambda_1 = -7$  la riga 1 (o col. 1) sono tutti 0 quindi il sistema NON È RAGG.  
→ Mi posso già fermare qui però continuo per il quadro generale.  
→ Lo stato associato a  $\lambda_1 = -7$  non è raggiungibile
- Per  $\lambda_4 = -8 \rightarrow$  la riga 4 diventa (0 0 0 0 1) e il rango è massimo, ovvero 4  
→ RAGGIUNGIBILE
- Per  $\lambda_{2,3} = \pm 2j$  abbiamo:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} \lambda + 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + 8 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 7 \pm 2j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 2j & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & \pm 2j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \pm 2j & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \text{rango} = 4 \rightarrow \text{RAGG.}$$

### Esercizio 3

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -7 & -5 & 0 \\ 10 & 0 & -20 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}u \quad \begin{array}{l} \text{a)} \text{ Ragg. Oss. Stab.} \\ \text{b)} \text{ Modi} \end{array}$$

$$y = [1 \ 3 \ 0]x$$

$A$  è triangolare inferiore e gli autovelori sono  $-4, -5, -20$

→ Sistema asintoticamente stabile

→ Modi  $e^{-4t}, e^{-5t}, e^{-20t}$

Lemme PBH

All'esempio scrivere i passaggi (in)

$$P(\lambda) = [\lambda I - A | B] \rightarrow \begin{cases} \lambda = -4, r_1 = 0, \text{ rank} = 2 \rightarrow \text{NON RAGG.} \\ \lambda_2 = -5, C_2 = 0 \\ \lambda_3 = -20, C_3 = 0 \end{cases}$$

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4, r_1 = 3, \text{ rank} = 3 \rightarrow \text{OSS.} \\ \lambda_2 = -5, r_2 = 3, \text{ rank} = 3 \rightarrow \text{OSS.} \\ \lambda_3 = -20, C_3 = 0, r_3 = 2 \rightarrow \text{NON OSS.} \end{cases}$$

per ogni  $\lambda$   
scrivere le matrice

### • Esercizio 4

Trovare i modi di :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0.2 & 3 \\ 0 & -0.2 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = -3 \rightarrow e^{-3t} \\ \lambda_2 = -0.2 \rightarrow e^{-0.2t} \\ \lambda_3 = 0.5 \rightarrow e^{0.5t} \\ \lambda_4 = 0 \rightarrow e^{0t} = 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \checkmark \\ \checkmark \\ \times \end{array}$$

→ Il sistema è instabile

### • Esercizio 5

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0.3 & 0.2 & 1 & 2 \\ -0.2 & 0.3 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.8 & 2.4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} \sigma - w & 1 & 2 \\ w & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ -0.8 & 2.4 & \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} (A \text{ triangolare}) \\ \text{sup. e blocchi} \end{array}$$

Gli autovettori sono

$$\lambda_1 = 0.3 + 0.2j \rightarrow e^{0.3t} \cos(0.2t)$$

$$\lambda_2 = 0.3 - 0.2j \rightarrow e^{0.3t} \sin(0.2t)$$

$$\lambda_{3,4} = \det(\lambda I - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.8 & 2.4 \end{pmatrix}) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0.8 & \lambda - 2.4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \lambda(\lambda - 2.4) + 0.8 = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 0.4)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_3 = 0.4 \rightarrow e^{0.4t}$$

$$\lambda_4 = 2 \rightarrow e^{2t}$$

⇒ il sistema è instabile (ci bastava già  $\lambda_1$ )



# Lezione 11 - 20/03/2025

[Lezione 10 - 19/03/2025](#) - [

## Proprietà della trasformata di Laplace

### Linearità

Date due trasformate:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s), \operatorname{Re}(s) > \alpha_1 \\ \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s), \operatorname{Re}(s) > \alpha_2 \end{cases}$$

Vale la **proprietà di linearità**

$$\mathcal{L}\{c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\} = c_1 \cdot F_1(s) + c_2 \cdot F_2(s), \quad \operatorname{Re}(s) > \max(\alpha_1, \alpha_2)$$

- Si dimostra applicando la definizione
- L'**ascissa di convergenza** è il max delle ascisse di convergenza

### Esempio

Calcolare la L-trasformata  $F(s)$  di  $f(t) = \sin(\omega t)1(t)$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{1}{2j}\left(\frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

### Esempio

Calcolare la L-trasformata  $F(s)$  di  $f(t) = \sin(\omega t + \phi)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(\omega t + \phi)\} &= \mathcal{L}\{\sin(\omega t) \cdot \cos(\phi) + \cos(\omega t) \cdot \sin(\phi)\} \\ &= \cos(\phi) \cdot \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} + \sin(\phi) \cdot \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t + \phi)\} = \cos(\phi) \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \sin(\phi) \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega \cdot \cos(\phi) + s \cdot \sin(\phi)}{s^2 + \omega^2}$$

## Traslazione in $t$

$$\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} = e^{-st_0} F(s)$$

Si dimostra nel seguente modo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} &= \int_0^{+\infty} f(t - t_0) \cdot e^{-st} dt \stackrel{\tau=t-t_0}{=} \int_{-t_0}^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{-s(\tau+t_0)} d\tau \\ &= e^{-st_0} \int_{-t_0}^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0} \cdot F(s)\end{aligned}$$

Abbiamo usato il cambio di variabili  $\tau = t - t_0$ .

## Cambiamento di scala

$$\mathcal{L}\{f(a \cdot t)\} = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Applichiamo la definizione e il cambio di variabili  $\tau = at \rightarrow d\tau = adt$

$$\mathcal{L}\{f(a \cdot t)\} = \int_{-t_0}^{+\infty} f(a \cdot t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{a} \cdot f(\tau) \cdot e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$$

## Esempio

Vogliamo calcolare la trasformata di  $f(t) = \sin(3t)$

$$\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\mathcal{L}\{f(a \cdot t)\}}_{\mathcal{L}\{\sin(3t)\}} = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{3}\right)^2 + 1} = \frac{3}{s^2 + 9}$$

## Derivazione in $s$

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -\frac{d(F(s))}{ds}$$

Vediamolo con un esempio, prendendo la L-trasformata del gradino:

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \int_0^{+\infty} 1(t) \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

Facciamo la derivata rispetto a  $s$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \int_0^{+\infty} 1(t) \cdot e^{-st} dt \right) &= \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s} \right) \\ \Rightarrow - \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-st} dt &= -\frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Possiamo allora costruire la L-trasformata di tutto un insieme di funzioni, applicando iterativamente la **proprietà di derivazione**:

$$\mathcal{L}\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n(F(s))}{ds^n}$$

Applicando la regola generale alla **famiglia del gradino** otteniamo:

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{t^k}{k!} \cdot 1(t) \right\} = \frac{1}{s^{k+1}}$$

Potrebbe essere interessante il calcolo di  $t^2 1(t)$ ,  $t^3 1(t)$ ,  $t e^{at} 1(t)$ .

## Traslazione in $s$

Dobbiamo adesso trovare la  $f(t)$  che ha originato  $F(s - a)$

$$F(s - a) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-(s-a)t} dt \quad \rightarrow \quad \int_0^{+\infty} (e^{at} f(t)) \cdot e^{-st} dt = \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}$$

Ovvero, ho ottenuto:

$$F(s - a) = \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}$$

## Esempio

Calcolare  $\mathcal{L}\{e^{-kt} \cdot t^2\}$

sapendo che  $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$   $\rightarrow \mathcal{L}\{e^{-kt} \cdot t^2\} = \frac{2}{(s+k)^3}$

## Derivazione in $t$

Ricordando l'integrazione per parti  $\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} &= \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} \cdot e^{-st} dt = f(t) \cdot e^{-st} \Big|_0^{+\infty} - \underbrace{\int_0^{+\infty} -s \cdot f(t) \cdot e^{-st} dt}_{s \cdot F(s)} \\ &= s \cdot F(s) - f(0) \end{aligned}$$

Questa cosa vale perché abbiamo sfruttato  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \cdot e^{-st} = 0$ .

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = s \cdot F(s) - f(0)$$

## Modello a variabili di stato

Nota bene che adesso abbiamo tutte le proprietà necessarie per passare dal **modello a variabili di stato**  $\dot{x} = Ax + Bu$  alla forma nel **dominio di Laplace**.

## Osservazione

Quanto vale la funzione in 0? Nello specifico quanto vale nel caso del gradino?

$$\mathcal{L}^-\{f(t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt, \quad \mathcal{L}^+\{f(t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$
$$\mathcal{L}^-\{f(t)\} = \mathcal{L}^+\{f(t)\} + \int_{0^-}^{0^+} f(t) \cdot e^{-st} dt = \mathcal{L}^+\{f(t)\} + a_0$$

La costante  $a_0$  esce fuori dal comportamento che avviene proprio tra  $0^+$  e  $0^-$ , e quindi l'impulso dato dalla **funzione di Dirac**. Complessivamente abbiamo diviso l'intervallo temporale nelle sezioni che ci interessava studiare.

## Esempio - gradino

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}1(t)\right\} = s \cdot \frac{1}{s} - \underbrace{f(0^-)}_{\rightarrow 0} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} \quad \text{dato che } f(0^-) = 0$$

Il risultato ottenuto corrisponde alla trasformata dell'impulso di Dirac, che quindi può essere considerato la derivata del gradino unitario.

## Integrazione in $t$

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad g(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dg(t)}{dt} = f(t)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{dg}{dt}\right\} = s \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} = \frac{1}{s} \cdot F(s)$$

Dove  $\frac{1}{s}$  è l'integratore.

## Esempio

Calcolare la TdL (Trasformata di Laplace) di  $f(t) = \int_0^t \sin(3\tau) d\tau$

$$\mathcal{L}\{\sin(3t)\} = \frac{3}{s^2 + 9} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin(3\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{3}{s^2 + 9}$$

## Convoluzione

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s) \\ \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s) \end{cases}$$

La **convoluzione** nel tempo è il prodotto delle trasformate

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Possiamo scrivere

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau)d\tau = \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau)d\tau$$

Abbiamo sfruttato il fatto che  $f_2(t)$  la stiamo considerando come  $f_2(t - \tau)$ , e quindi per  $\tau > t$  stiamo andando in tempi negativi. Possiamo quindi estendere l'intervallo di integrazione tra 0 e  $+\infty$ . Questo ci torna comodo perché tutte le funzioni studiate per tempi negativi valgono 0. Questo trucchetto non cambia il risultato ma ci permette di ricondurci all'integrale di Laplace.

Applicando la definizione di L-trasformata alla funzione integrale di convoluzione:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau)d\tau \right) e^{-st} dt$$

Usando un semplice trucchetto:  $e^{-st} = e^{-s(t+\tau-\tau)}$

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} \left( \int_0^{+\infty} f_2(t - \tau) \cdot e^{-s(t-\tau)} dt \right) d\tau$$

Pongo infine  $v = t - \tau$  e  $dv = dt$  per ottenere:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} \left( \int_{-\tau}^{+\infty} f_2(v) \cdot e^{-sv} dv \right) d\tau$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} F_2(s) d\tau = F_2(s) \cdot \int_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= F_2(s) \cdot F_1(s)\end{aligned}$$

## Esempio

Applicando la proprietà di convoluzione, calcolare la TdL di:

$$F(s) = \frac{s}{(s+1) \cdot (s^2+1)}$$

Ricaviamo alcuni pezzi già noti

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} &= e^{-t} & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} &= \cos(t) \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1) \cdot (s^2+1)}\right\} &= \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cos(\tau) d\tau = e^{-t} \int_0^t e^\tau \cos(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \left( \cos(t) + \sin(t) - e^{-t} \right)\end{aligned}$$



Lezione 12 - 25/03/2025



# Lezione 12 - 25/03/2025

[Lezione 11 - 20/03/2025](#)

## Proprietà della L-trasformata

### Teorema del valore iniziale

$$f(t) = f_0 + \frac{f_1}{1!}(t - t_0) + \frac{f_2}{2!}(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{f_k}{k!}(t - t_0)^k + \cdots$$

$$f_0 = f(t_0); \quad f_1 = \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_0}; \quad f_2 = \left. \frac{d^2f}{dt^2} \right|_{t=t_0}; \quad f_k = \left. \frac{d^k f}{dt^k} \right|_{t=t_0};$$

$$t = 0; \quad f(t) = f_0 + \frac{f_1}{1!}t + \frac{f_2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{f_k}{k!}t^k + \cdots$$

Queste sono tutte facili da calcolare infatti:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^k}{k!} \cdot 1(t)\right\} = \frac{1}{s^{k+1}}$$

Quindi otteniamo esattamente:

$$F(s) = f_0 \frac{1}{s} + f_1 \frac{1}{s^2} + f_2 \frac{1}{s^3} + \cdots + f_k \frac{1}{s^{k+1}} + \cdots$$

Inoltre posso ricostruirmi le condizioni iniziali guardando la trasformata di Laplace, in quanto vale:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s \cdot F(s))$$

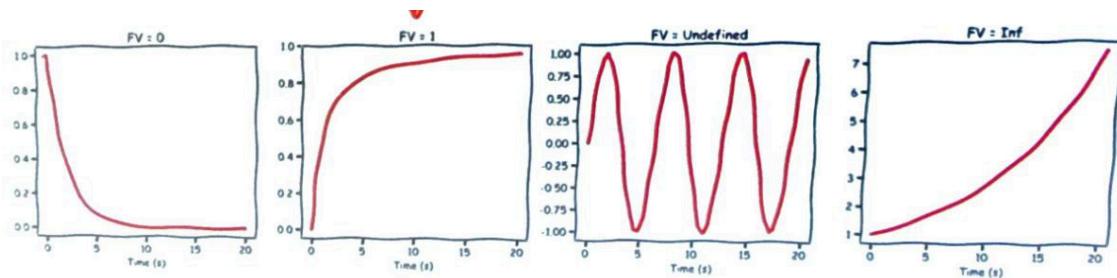
Questo non ci serve a molto ingegneristicamente parlando, in quanto quasi sempre le condizioni iniziali sono note.

## Teorema del valore finale

Questo teorema fa l'opposto del precedente in quanto ci permette di ricostruire le condizioni iniziali

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot F(s)) \quad \text{a condizione che } \exists \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \text{ finito}$$

Questa condizione che imponiamo equivale a imporre che il sistema deve essere stabile



Per capire meglio, partiamo dalla trasformata di Laplace della derivata di  $f(t)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} \cdot e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

Facendo il limite per  $s \rightarrow 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} dt \quad \text{questo è} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - f(0)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{df}{dt} dt = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot F(s)) - f(0)$$

Concludiamo quindi che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot F(s)) - f(0)$$

### Esempio 1

$$e^{-t} \rightarrow \frac{1}{s+1} \quad \text{per} \quad t \rightarrow +\infty, \text{ vale } 0$$

Posso quindi applicare il teorema del valore finale

## Esempio 2

$$e^t \rightarrow \frac{1}{s-1} \quad \text{per} \quad t \rightarrow +\infty, \text{ vale } +\infty$$

Non posso applicare il teorema del valore finale

## Decomposizione in fratti semplici

$$G(s) = \underbrace{\frac{n(s)}{d(s)}}_{\text{rapporto di polinomi}} = \underbrace{\frac{(s-s_1)^h}{(s-s_1)^h}}_{\substack{\text{poli in } s_1 \text{ con} \\ \text{molteplicità } h}} \cdot \underbrace{\frac{n(s)}{R(s)}}_{\substack{\text{Tutti gli altri poli}}}$$

Posso riscrivere  $G(s)$  come somma di residui polari

$$G(s) = \frac{k_1}{(s-s_1)^h} + \frac{k_2}{(s-s_1)^{h-1}} + \cdots + \frac{k_h}{(s-s_1)} + T(s)$$

$$(s-s_1)^h \cdot G(s) = \left[ \frac{k_1}{(s-s_1)^h} + \frac{k_2}{(s-s_2)^{h-1}} + \cdots + \frac{k_\mu}{(s-s_2)} + T(s) \right] \cdot (s-s_1)^h$$

$$(s-s_1)^h \cdot G(s) = k_1 + k_2(s-s_1) + k_3(s-s_1)^2 + \cdots + k_h(s-s_1)^{h-1} + T(s) \cdot (s-s_1)^h$$

Facendo il limite per  $s \rightarrow s_1$

$$\lim_{s \rightarrow s_1} ((s-s_1)^h \cdot G(s)) = k_1 \quad \text{trovo il primo residuo polare}$$

Posso iterare la procedura. Se faccio la derivata rispetto a  $s$  del primo termine:

$$\frac{d[(s-s_1)^h \cdot G(s)]}{ds} = k_2 + 2 \cdot k_3(s-s_1) + \cdots + (h-1) \cdot k_h(s-s_1)^{h-2} + \text{resto}$$

$$\lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d[(s-s_1)^h \cdot G(s)]}{ds} = k_2$$

Infine, arrivo alla forma generale

$$k_i = \frac{1}{(i-1)!} \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d^{i-1}[(s-s_1)^h \cdot G(s)]}{ds^{i-1}}$$

## Esempi

### Esempio 1

Esempio - decomposizione in Fratti semplici

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+1)^3} \quad G(s) = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+1)^3}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3)G(s) = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s+2}{(s+1)^3} = \frac{-1}{(-2)^3} = \frac{1}{8}$$

$$D = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)^3 G(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{(s+1)^3 (s+2)}{(s+3)(s+1)^3} = \frac{1}{2}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left( \frac{(s+1)^3 (s+2)}{(s+3)(s+1)^3} \right) = \frac{(s+3) - (s+2)}{(s+3)^2} = \frac{1}{4}$$

Per calcolare il residuo B posso o riapplicare la formula oppure posso calcolarlo tramite una piccola scorciatoia:

$$\frac{A(s+1)^3 + B(s+3)(s+1)^2 + C(s+1)(s+3) + D(s+3)}{(s+3)(s+1)^3}$$

Il passaggio precedente è errato, rielaborarlo meglio a casa. Facendo vari calcoli ottengo  $B = -A$ .

### Esempio 2

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+1)^3} \quad G(s) = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+1)^3}$$

Decomposizione in fratti semplici: esempio

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+3) \cdot (s+1)^3} \quad G(s) = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+1)^3}$$

$$G(s) = \left( \frac{1/8}{s+3} - \frac{1/8}{s+1} + \frac{1/4}{(s+1)^2} + \frac{1/2}{(s+1)^3} \right) \quad | \quad \downarrow \quad \frac{1}{s^2}$$

$$g(t) = \left( \frac{1}{8}e^{-3t} - \frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{4}t \cdot e^{-t} + \frac{1}{4}t^2 \cdot e^{-t} \right) \cdot 1(t)$$

### Esempio 3

Prendiamo adesso un caso in cui abbiamo poli complessi e coniugati

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2} = \frac{1}{(s+j)^2 + (s-j)^2} = \frac{A}{s+j} + \frac{A^*}{s-j} + \frac{B}{(s+j)^2} + \frac{B^*}{(s-j)^2}$$

Il coniugato del residuo è uguale al residuo del coniugato. Quindi, nella pratica mi basta calcolare due residui polari e gli altri li trovo facendo il complesso coniugato.

$$B = \lim_{s \rightarrow -j} ((s+j)^2 \cdot G(s)) = \lim_{s \rightarrow -j} \frac{1}{(s-j)^2} = -\frac{1}{4} = B^* \quad \begin{matrix} \text{Ci troviamo il complesso e} \\ \text{coniugato} \end{matrix}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -j} \frac{d}{ds} [(s+j)^2 \cdot G(s)] = \lim_{s \rightarrow -j} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{(s-j)^2} \right) = \frac{j}{4}, \quad A^* = -\frac{j}{4} \quad \begin{matrix} \text{Il residuo e' immaginario} \end{matrix}$$

Ed infine:

$$G(s) = \frac{j/4}{s+j} - \frac{j/4}{s-j} - \frac{1/4}{(s+j)^2} - \frac{1/4}{(s-j)^2} \longrightarrow g(t) = \frac{j}{4} (e^{-jt} - e^{jt}) \cdot 1(t) - \frac{1}{4} t \cdot (e^{-jt} + e^{jt}) \cdot 1(t)$$

$$g(t) = \left( \frac{1}{2} \sin(t) - \frac{t}{2} \cos(t) \right) \cdot 1(t)$$

### Per casa

## Decomposizione in fratti semplici: esercizio

$$F(s) = \frac{3s+7}{s^2 - 2s - 3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3} = \frac{A(s-3) + B(s+1)}{(s+1)(s-3)}$$

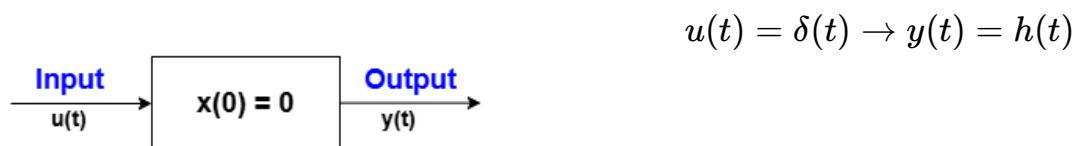
$$\mathcal{L}^{-1}[f] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s-3}\right] = -e^{-t} + 4e^{3t}$$

### Esercizio

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2}$$
$$\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{As(s+1)(s+2) + B(s+1)(s+2) + Cs^2(s+2) + Ds^2(s+1)}{s^2(s+1)(s+2)}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

## Risposta all'impulso

I sistemi LTI possono essere caratterizzati attraverso la loro **risposta all'impulso**, ovvero l'uscita del sistema quando in ingresso vi è un segnale molto breve.



Fornisce solo la **relazione ingresso-uscita** e non da informazioni sull'evoluzione dello stato. La risposta all'impulso può essere usata per determinare come il sistema risponde a qualsiasi ingresso.

La relazione tra ingresso e uscita di un sistema dinamico, inizialmente rilassato (condizioni iniziali nulle), è descritta da:

$$\text{uscita } y(t) = \int_0^t \underset{\text{ingresso}}{g(t-\tau)} \underset{\text{risposta all'impulso}}{r(\tau)} d\tau = \int_0^t g(t) \underset{\text{risposta all'impulso}}{r(t-\tau)} d\tau; \quad t \geq 0$$

La convoluzione emerge naturalmente nella descrizione dei sistemi dinamici LTI a causa della proprietà di linearità (i.e. principio di sovrapposizione degli effetti) e invarianza nel tempo.

Supponiamo di avere un ingresso generico  $u(t)$ . È possibile interpretarlo come la sovrapposizione continua di infiniti impulsi infinitesimali, ciascuno rappresentato dalla funzione  $\delta(t)$ :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

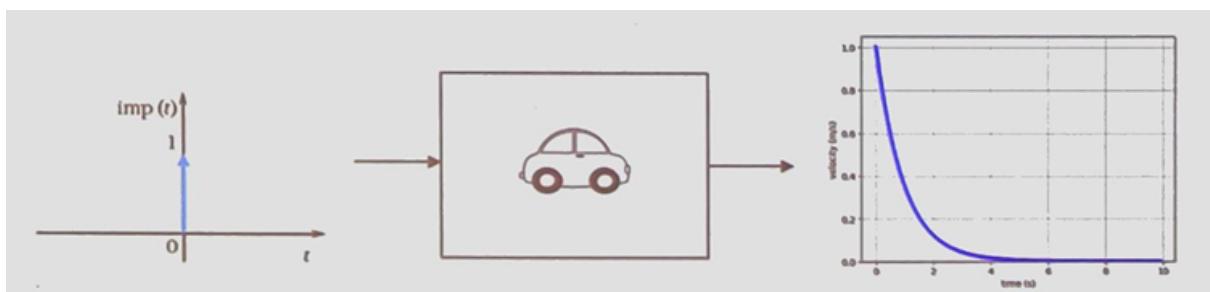
L'ingresso  $u(\tau)$  in un istante particolare può essere visto come un impulso "pesato" e ritardato nel tempo.

Sfruttando la linearità del sistema, l'uscita sarà la somma delle risposte impulsive corrispondenti pesate del valore dell'ingresso  $u(\tau)$ :

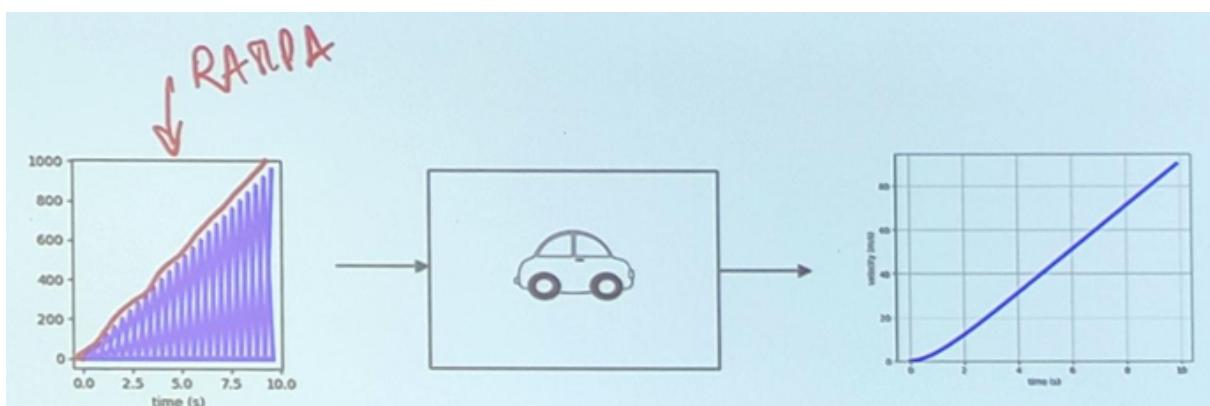
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Quindi la funzione di trasferimento è usata dal modello della risposta all'impulso.

## Esempio



Se invece che un impulso applichiamo la **rampa** la risposta sarà la seguente:



$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)r(\tau)d\tau = \int_0^t g(t)r(t-\tau)d\tau; \quad t \geq 0$$

## La risposta all'impulso e funzione di trasferimento

L'anti-trasformata di una funzione di trasferimento rappresenta la risposta all'impulso unitario.

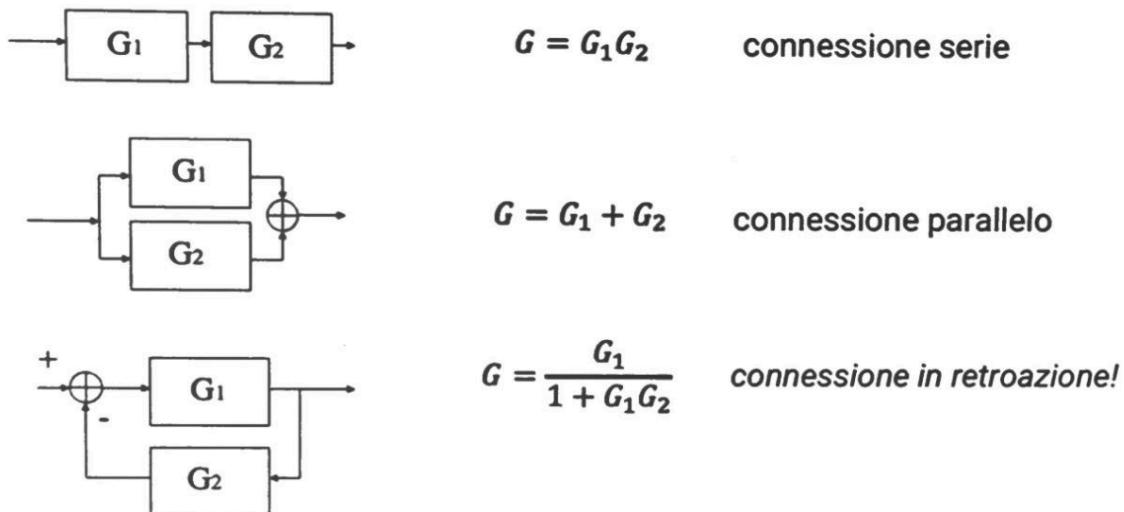
L'integrale della risposta all'impulso unitario rappresenta la **risposta al gradino unitario**

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s) \cdot \frac{1}{s}\right\} = \int g(t)dt$$

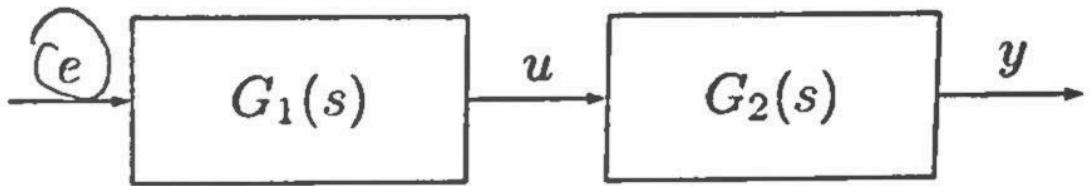
## Schemi a blocchi

- Forniscono una **rappresentazione standard** e uniforme di sistemi e sottosistemi interconnessi con funzioni di trasferimento.
- Permettono la facile identificazione di ingressi, uscite, elementi dinamici.
- Sono sempre utili concettualmente in fase di analisi.

## Algebra dei blocchi



## Connessione in serie



$$\begin{aligned} Y(s) &= G_2(s)U(s) & U(S) &= G_1(s)E(s) \\ Y(s) &= G_2(s)G_1(s)E(s) & G(s) &= G_1(s)G_2(s) \end{aligned}$$

**Note sulla raggiungibilità e osservabilità:**

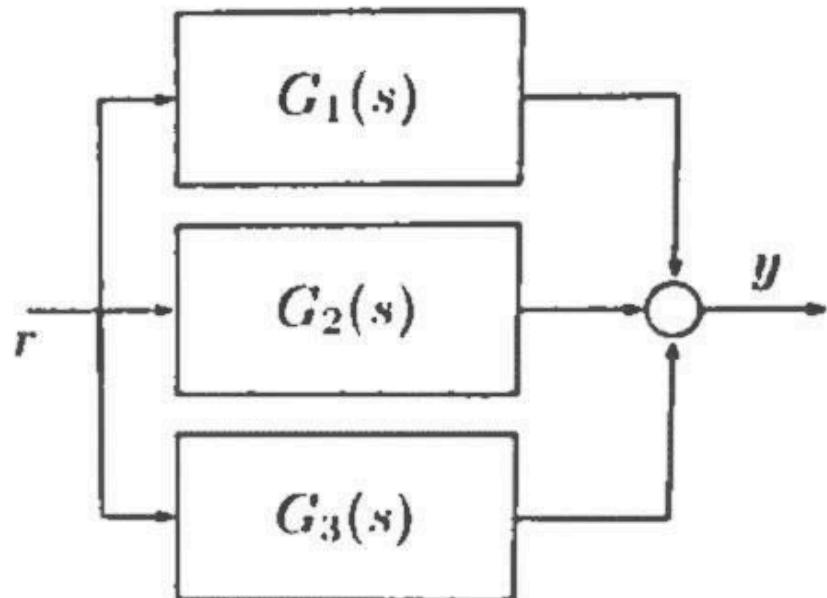
$$G = \frac{n_1(s) n_2(s)}{d_1(s) d_2(s)}$$

Se  $n_1$  e  $d_2$  hanno radici in comune,  $G$  non è raggiungibile (**cancellazione zero - polo**)

Se  $n_2$  e  $d_1$  hanno radici in comune,  $G$  non è osservabile (**cancellazione polo - zero**)

Quindi, aggregare due sistemi in serie potrebbe rendere qualcosa non osservabile e/o raggiungibile.

### Connessione in parallelo



$$Y(s) = G_1(s)R(s) + G_2(s)R(s) + G_3(s)R(s) = (G_1(s) + G_2(s) + G_3(s))R(s)$$

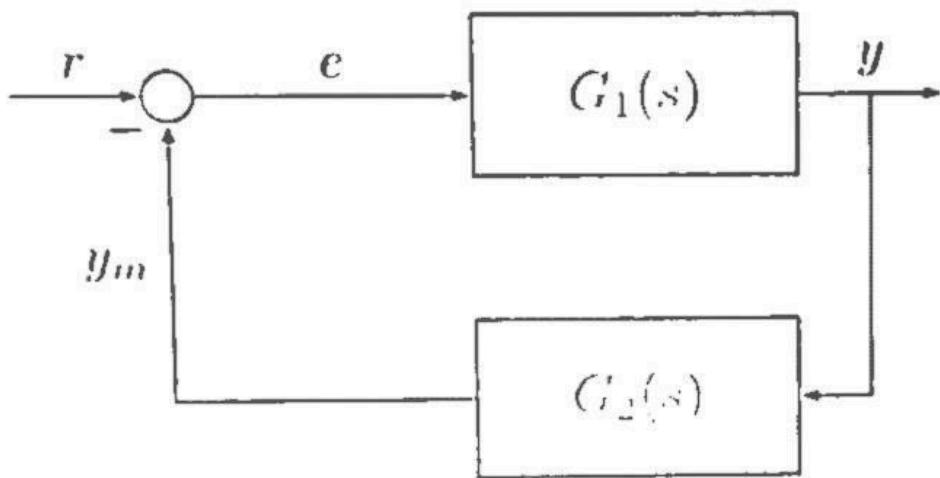
$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + G_3(s)$$

**Note sulla raggiungibilità e osservabilità:**

$$G = \frac{n_1(s)}{d_1(s)} + \frac{n_2(s)}{d_2(s)} = \frac{n_1 d_2 + n_2 d_1}{d_1 d_2}$$

Se  $d_1$  e  $d_2$  hanno radici in comune,  $G$  non è raggiungibile e non è osservabile

### Connessione in retroazione



La foto è venuta un pò male ma nei blocchi ci sono  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ , il segnale di retroazione è  $y_m$ .

$$Y(s) = G_1(s)E(s) \quad E(s) = R(s) - Y_m(s) \quad Y_m(s) = G_2(s)Y(s)$$

$$Y(s) = G_1(s)(R(s) - Y_m(s)) \rightarrow Y(s) = G_1(s)(R(s) - G_2(s)Y(s))$$

$$Y(s) = G_1(s)G_2(s)Y(s) = G_1(s)R(s) \quad G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

**Note sulla raggiungibilità e osservabilità:**

$$G = \frac{\frac{n_1(s)}{d_1(s)}}{1 + \frac{n_1(s)n_2(s)}{d_1(s)d_2(s)}} = \frac{n_1 d_2}{d_1 d_2 + n_1 n_2}$$

Regole relative alla connessione serie per il prodotto  $G_1 G_2$ :

- Cancellazioni possono avvenire quando  $N_1$  e  $D_2$  hanno fattori comuni
- La retroazione modifica i poli e non modifica gli zeri del sistema in catena diretta (  $G_1$ )



Lezione 13 - 26/03/2025



# Lezione 13 - 26/03/2025

[Lezione 12 - 25/03/2025](#)

## L-trasformata ed Equazioni differenziali

Oggi parleremo di come applicare la trasformata di Laplace alle equazioni differenziali ordinarie.

### Sistemi del primo ordine

Analizzeremo le equazioni fino al secondo ordine, in quanto i sistemi di ordine superiore al secondo possono essere facilmente approssimabili con i sistemi di primo e secondo ordine. A livello ingegneristico, i sistemi fino al secondo ordine ricoprono la maggior parte dei casi pratici di maggiore interesse.

Prendiamo per esempio:

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u, \quad y(0) = 0$$

Per applicare la L-trasformata consideriamo:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dy}{dt} \right\} = sY(s) - y(0)$$

Applicando la regola di trasformazione della derivata

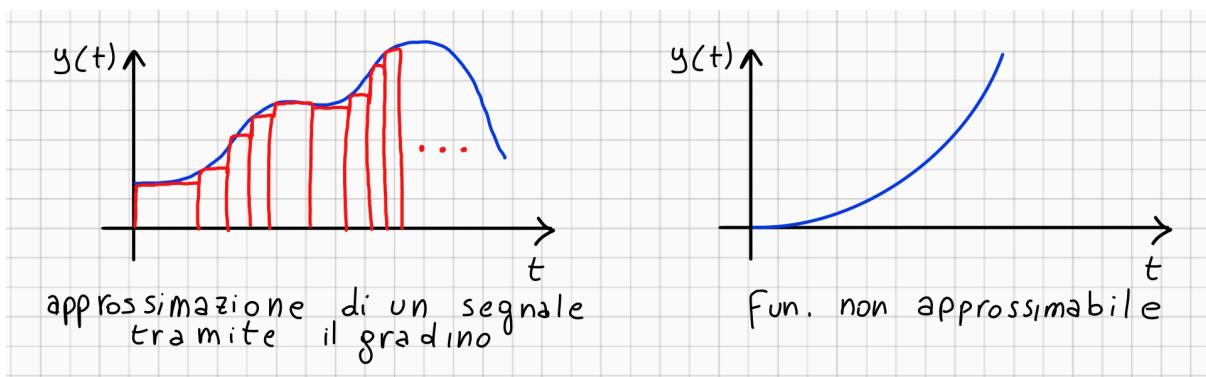
$$a_0 \cdot Y(s) + a_1 \cdot s \cdot Y(s) = b_0 \cdot U(s) \quad \text{non è più differenziale}$$

Posso anche calcolare la funzione di trasferimento

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s} = G(s) \quad \text{FdT ingresso/uscita}$$

$$\xrightarrow{u(s)} \begin{bmatrix} & G(s) \\ & \end{bmatrix} \xrightarrow{y(s)} \quad y(s) = G(s)u(s) \rightarrow 1, \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

Usiamo il **gradino come segnale di ingresso** perché è un ottimo segnale di prova e in un caso generico possiamo combinare i segnali gradino (dando 2, 3, 4, ... segnali gradino in input) per **approssimare un segnale complesso** e capire al meglio la risposta del sistema. Capire come risponde il sistema a un segnale gradino ci permette di capire come risponde il sistema a segnali diversi. Nota bene che non tutti i segnali possono essere approssimati dal gradino, in quei casi entrano in gioco le altre funzioni della famiglia del gradino (gradino unitario precedentemente visto = 1, poi abbiamo  $t$ ,  $t^2$ ,  $t^3$ , ...). Poi troveremo anche casi specifici di segnali, come seni e coseni che hanno tecniche diverse di studio.



per il secondo tipo di segnale sarà più adatta un'approssimazione tramite una parabola (che vedremo in un altro momento). Inoltre, nota che il tutto funziona grazie al **principio di sovrapposizione degli effetti**.

Quindi, se vogliamo sapere la  $y(t)$  in risposta al gradino  $U(s) = \frac{1}{s}$

$$y(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}}_{y(s)=G(s)u(s)=G(s)\frac{1}{s}} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{b_0}{a_1 s + a_0} \cdot \frac{1}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{b_0}{a_1}}{s + \frac{a_0}{a_1}} \cdot \frac{1}{s} \right\}$$

Nell'ultimo passaggio ho reso il **denominatore monadico**, ovvero con il coefficiente unitario della variabile di grado massimo del polinomio. Questo serve semplicemente per semplificare i conti durante l'operazione di antitrasformata.

Inoltre, la forma del denominatore  $s + \frac{a_0}{a_1}$ , è detta **forma di Evans**.

Possiamo anche usare il teorema del valore iniziale e il teorema del valore finale per fare la seguente considerazione

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( s \cdot \frac{\frac{b_0}{a_1}}{s + \frac{a_0}{a_1}} \cdot \frac{1}{s} \right) = 0 \quad \text{Teorema valore iniziale}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \cdot \frac{\frac{b_0}{a_1}}{s + \frac{a_0}{a_1}} \cdot \frac{1}{s} \right) = \frac{b_0}{a_0} \quad \text{Teorema valore finale}$$

Adesso conosco il valore iniziale del sistema e conosco anche il valore finale per  $t \rightarrow \infty$ . Mi manca solo sapere cosa accade nel transitorio (nel mentre), e per fare ciò mi basta trovare la soluzione all'equazione differenziale, applicando i fratti semplici. Quindi, ritornando al nostro esempio:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{\frac{b_0}{a_1}}{s(s + \frac{a_0}{a_1})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{a_0}{a_1}} \quad \text{poli: } -\frac{a_0}{a_1}, \quad 0$$

Antitrasformando ottengo:

$$y(t) = A \cdot 1(t) + B \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1}t} \cdot 1(t)$$

Troviamo i coeff A e B con i fratti semplici

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{b_0}{a_1}}{s(s + \frac{a_0}{a_1})} = \frac{b_0}{a_0} = G(0) \leftarrow \text{guadagno statico}$$

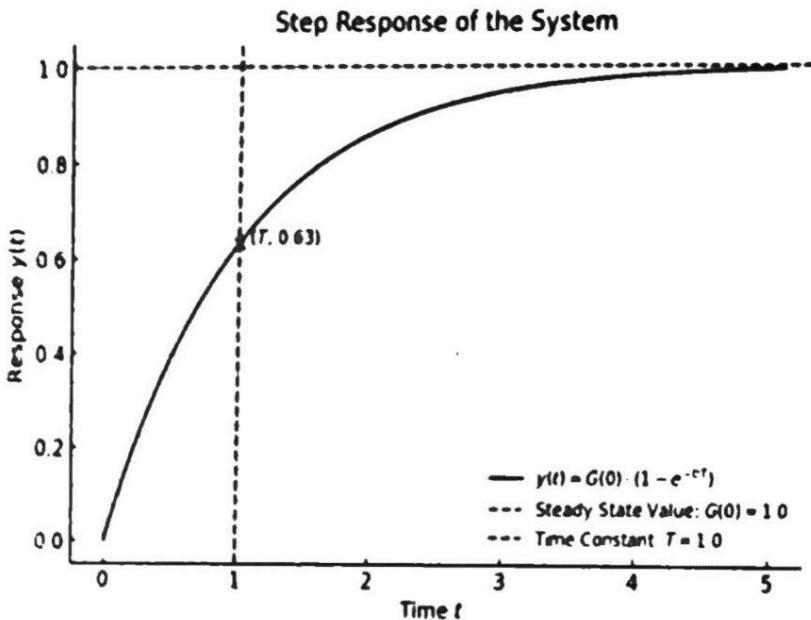
$$B = \lim_{s \rightarrow -\frac{a_0}{a_1}} \left( s + \frac{a_0}{a_1} \right) \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow -\frac{a_0}{a_1}} \left( s + \frac{a_0}{a_1} \right) \cdot \frac{\frac{b_0}{a_1}}{s(s + \frac{a_0}{a_1})} = -\frac{b_0}{a_0} = -G(0)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{b_0}{a_0} \cdot 1(t) - \frac{b_0}{a_0} \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1}t} \cdot 1(t) = G(0) \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \cdot 1(t)$$

Abbiamo quindi considerato  $T$  una costante di tempo del sistema dinamico

$$\frac{1}{T} = \frac{a_0}{a_1}$$

Possiamo anche disegnare questa funzione per tracciare il **transitorio**:



$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{b_0}{a_0} \cdot 1(t) - \frac{b_0}{a_0} \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1}t} \cdot 1(t) = G(0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot 1(t)$$

Inoltre, è interessante conoscere  $y(t = T)$ , al fine di parametrizzare i sistemi del primo ordine. Infatti, questi sistemi sono approssimabili con il gradino unitario, quindi l'unico parametro rimane  $T$ .

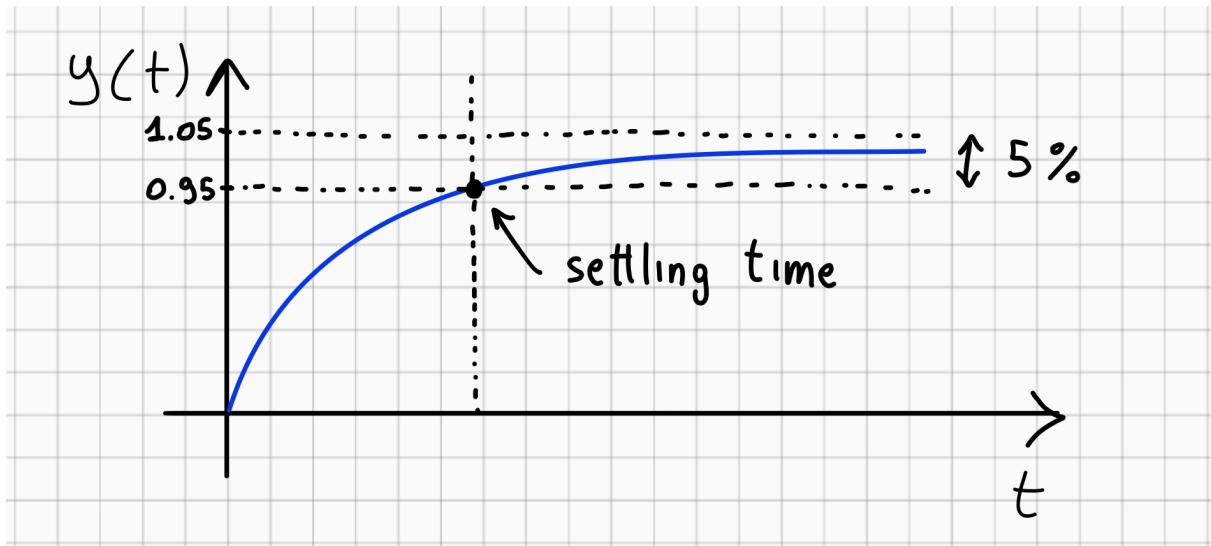
$$y(T) = G(0) \cdot \left(1 - e^{-1}\right) \cdot 1(t) \approx 0.63 \cdot G(0)$$

Significa che per  $t = T$  siamo circa al 63% del valore di regime. Riassumendo, tutti i sistemi del primo ordine hanno questa risposta al gradino unitario e possiamo parametrizzarli con  $T$  sapendo che per  $t = T$  siamo sempre al 63% del valore di regime.

## Tempo di assestamento

### Definizione:

Il **tempo di assestamento (settling time)** all'  $i\%$  (di solito si ha  $i = 5$  o  $i = 10$ ) è il tempo che serve a un sistema dinamico per raggiungere e rimanere in una fascia  $\pm i\%$  intorno al valore di regime.



Questo è un tempo calcolabile. Prendiamo per esempio un tempo di assestamento al 5%:

$$y(t_{ss}) = G(0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_{ss}}{T}}\right) = 0.95 \cdot G(0) \rightarrow y(t_{ss}) = 1 - e^{-\frac{t_{ss}}{T}} = 0.95$$

$$0.05 = e^{-\frac{t_{ss}}{T}} \Rightarrow -\frac{t_{ss}}{T} = \ln(0.05) \Rightarrow t_{ss} = T \cdot \ln(20) \approx 3 \cdot T$$

Quindi il tempo di assestamento in questo caso è circa 3 volte la costante di tempo del sistema.

## La forma di Bode e la forma di Evans

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \rightarrow a_0 Y(s) + a_1 s Y(s) = b_0 U(s) + b_1 s U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s} = G(s)$$

Possiamo scrivere le funzioni di trasferimento in due modi

### Forma di Bode

Evidenzia le **costanti di tempo** del sistema dinamico

$$G(s) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1 + s \cdot \frac{b_1}{b_0}}{1 + s \cdot \frac{a_1}{a_0}} = G(0) \cdot \frac{1 + s \cdot \tau_z}{1 + s \cdot \tau}$$

Abbiamo così evidenziato tre costanti di tempo:  $G_0 = \frac{b_0}{a_0}$ ,  $\tau_z = \frac{b_1}{b_0}$ ,  $\tau = \frac{a_1}{a_0}$

## Forma di Evans

Evidenzia le **singolarità dinamiche** del sistema, ovvero **poli** e **zeri**

$$G(s) = \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{s + \frac{b_0}{b_1}}{s + \frac{a_0}{a_1}}$$

A seconda dell'applicazione sceglieremo **Bode** o **Evans** per semplificare i conti e evitare errori nei calcoli. Usare una forma piuttosto che un'altra significa dover usare dei correttivi, ma questo non ci piace. Se ci torna più comodo fare considerazioni sul sistema dinamico e sulle sue costanti di tempo useremo Bode, invece, se dobbiamo antitrasformare la funzione di trasferimento usiamo Evans.

## Sistemi del secondo ordine

Prendiamo un sistema del secondo ordine e supponiamo condizioni iniziali non nulle:

$$a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u \quad \begin{cases} y(0) = y_0 \neq 0 \\ \frac{d(y(0))}{dt} = \dot{y}(0) \neq 0 \end{cases}$$

Se prima applicavamo solo una volta la regola della trasformata della derivata qui la applichiamo una e due volte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} &= sY(s) - y(0) \\ \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right\} &= s \cdot \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - \dot{y}(0) = s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) \end{aligned}$$

Riscrivendo la differenziale iniziale del secondo ordine:

$$a_0 Y(s) + a_1 (sY(s) - y(0)) + a_2 (s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) = b_0 U(s)$$

Posso adesso raccogliere ed evidenziare la **risposta in evoluzione forzata**, e la **risposta in evoluzione libera**:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} U(s)}_{\begin{array}{c} \text{risposta in evoluzione} \\ \text{forzata} \end{array}} + \underbrace{\frac{a_2 s y(0) + a_2 \dot{y}(0) + a_1 y(0)}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}}_{\begin{array}{c} \text{risposta in evoluzione} \\ \text{libera} \end{array}}$$

Nota bene che la risposta libera dipende dalle condizioni iniziali; se queste fossero nulle, la risposta libera va a 0. Pertanto, la parte in evoluzione forzata sarà quella che conta ai fini dell'analisi del sistema. Inoltre, le due risposte possono essere antitrasformate indipendentemente per capire la loro evoluzione nel tempo.

## Risposta forzata

Concentriamoci adesso solo sulla risposta forzata:

$$Y(s) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} U(s) \quad \rightarrow \quad p_{1,2} = \underbrace{\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}}_{\text{poli del sistema}}$$

$$\Delta = \frac{a_1^2}{4} - a_0 a_2, \quad \begin{cases} \Delta > 0 & \Rightarrow \quad 2 \text{ poli reali distinti} \\ \Delta = 0 & \Rightarrow \quad 2 \text{ poli reali coincidenti} \\ \Delta < 0 & \Rightarrow \quad 2 \text{ poli complessi coniugati} \end{cases}$$

## Caso dei poli reali

Nella forma di Bode evidenzio le costanti di tempo

$$G(s) = G(0) \cdot \frac{1}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \quad G(0) = \frac{b_0}{a_0}$$

La risposta al gradino nel caso di poli reali e distinti è:

$$G(s)U(s) = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{s(s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_2})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{T_1}} + \frac{C}{s + \frac{1}{T_2}}$$

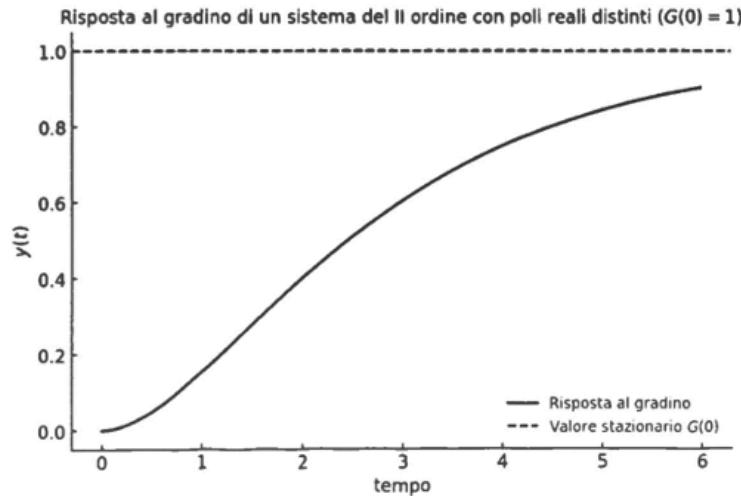
$$A = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{b_0}{a_2}}{(s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_2})} = \frac{b_0}{a_2} T_1 T_2 = \frac{b_0 a_2}{a_2 a_0} = \frac{b_0}{a_0} = G(0)$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T_1}} \frac{\frac{b_0}{a_2}}{s(s + \frac{1}{T_2})} = \frac{b_0}{a_2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{T_1}(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1})} = \frac{b_0 T_1^2 T_2}{a_2 (T_2 - T_1)} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} G(0)$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T_2}} \frac{\frac{b_0}{a_2}}{s(s + \frac{1}{T_1})} = \frac{b_0}{a_2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{T_2}(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2})} = -\frac{b_0 T_1 T_2^2}{a_2 (T_2 - T_1)} = -\frac{T_2}{T_2 - T_1} G(0)$$

## Risposta al gradino

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\} = G(0) \left( 1 + \frac{T_1 \cdot e^{-t/T_1} - T_2 \cdot e^{-t/T_2}}{T_2 - T_1} \right) \cdot 1(t)$$



Lezione 14 - 27/03/2025



# Lezione 14 - 27/03/2025

↳ [Lezione 13 - 26/03/2025](#)

## Equazioni del secondo ordine

### Risposta forzata

#### Caso dei poli reali e coincidenti

La seguente relazione è ricavabile matematicamente e rappresenta la **relazione che lega la forma di Evans a quella di Bode**:

$$T^2 \triangleq \frac{1}{p^2} \triangleq \frac{a_2}{a_0}$$

Nel **caso dei poli reali e coincidenti** abbiamo che la risposta al gradino è:

$$G(s) \cdot U(s) = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{(s + \frac{1}{T})^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{T}} + \frac{C}{(s + \frac{1}{T})^2}$$

Applichiamo i fratti semplici:

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{b_0}{a_2}}{(s + \frac{1}{T})^2} = \frac{b_0 T^2}{a_2} = \frac{b_0}{a_0} = G(0)$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T}} \frac{b_0}{a_2} \cdot \frac{1}{s} = -\frac{b_0 T}{a_2} = -\frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{a_0}{a_2} \cdot T = -G(0) \cdot \frac{T}{T^2} = -\frac{G(0)}{T}$$

Per calcolare B usiamo una "scorciatoia":

$$A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -A = -G(0)$$

Quando abbiamo poli multipli conviene sempre iniziare dal polo con molteplicità maggiore, perché più semplice da calcolare, poi in questo caso ci siamo accorti che potevamo sfruttare una scorciatoia. Si ottiene quindi:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{G(0)}{s}}_A - \underbrace{\frac{\frac{G(0)}{T}}{(s + \frac{1}{T})^2}}_C - \underbrace{\frac{G(0)}{s + \frac{1}{T}}}_B$$

$$F(s-a) = \mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\}$$

$$\frac{1}{s^2} \rightarrow t \cdot 1(t) \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(0)}{T} \cdot \frac{1}{(s + \frac{1}{T})^2}\right\} = \frac{G(0)}{T} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \frac{1}{T})^2}\right\} = \frac{G(0)}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot t \cdot 1(t)$$

$$y(t) = G(0) \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \left( 1 + \frac{t}{T} \right) \right) \cdot 1(t)$$

## Poli complessi e coniugati

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2} \rightarrow p_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

$$\alpha = -\frac{a_1}{2a_2}, \quad \beta = \sqrt{\frac{a_0}{a_2} - \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2} \left(1 - \frac{a_1^2}{4a_2 a_0}\right)^2}$$

Sotto quest'ultima quantità ricaviamo e riconosciamo due quantità importanti:

- **Pulsazione di risonanza** ( $a_1 = 0$ ):  $\omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$

- **Smorzamento** ( $a_1 \neq 0$ ):  $\xi \triangleq \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$

In particolare, nel caso avessimo  $\alpha = 0$ :

$$\alpha = 0 \quad \xrightarrow{a_1 = 0} \quad a_2 s^2 + a_0 = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 = -\frac{a_0}{a_2}$$

In questo caso (ovvero poli puramente immaginari) ho un **evento dissipativo**, ovvero sto dissipando energia.

Riscrivo adesso i poli in termini di pulsazione di risonanza e smorzamento:

$$\alpha = -\xi \cdot \omega_0, \quad \beta = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad p_{1,2} = -\xi \cdot \omega_0 \pm i \cdot \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

- **Forma di Bode**

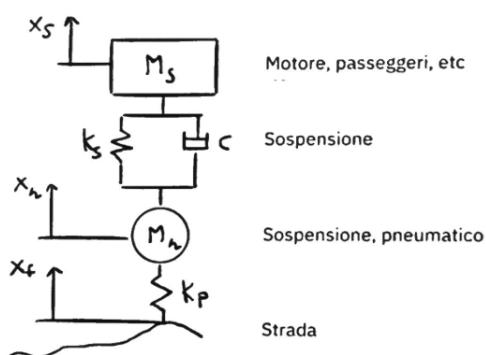
$$G(s) = \frac{G(0)}{1 + 2\xi \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

- **Forma di Evans**

$$G(s) = \frac{G(0)\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

## Esempio

Immaginiamo di modellare una parte di automobile:

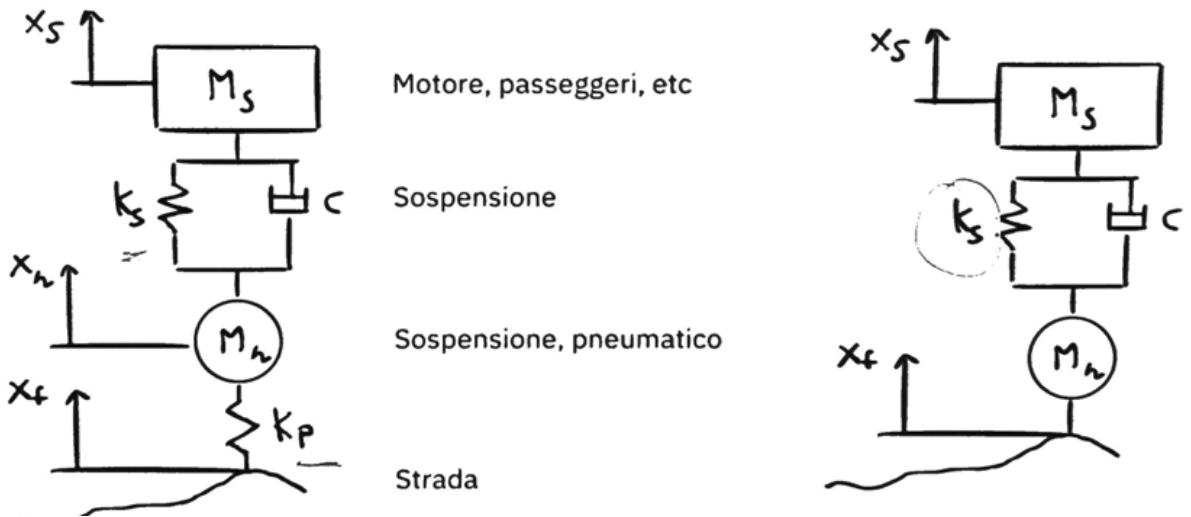


Le costanti presenti nello schema sono

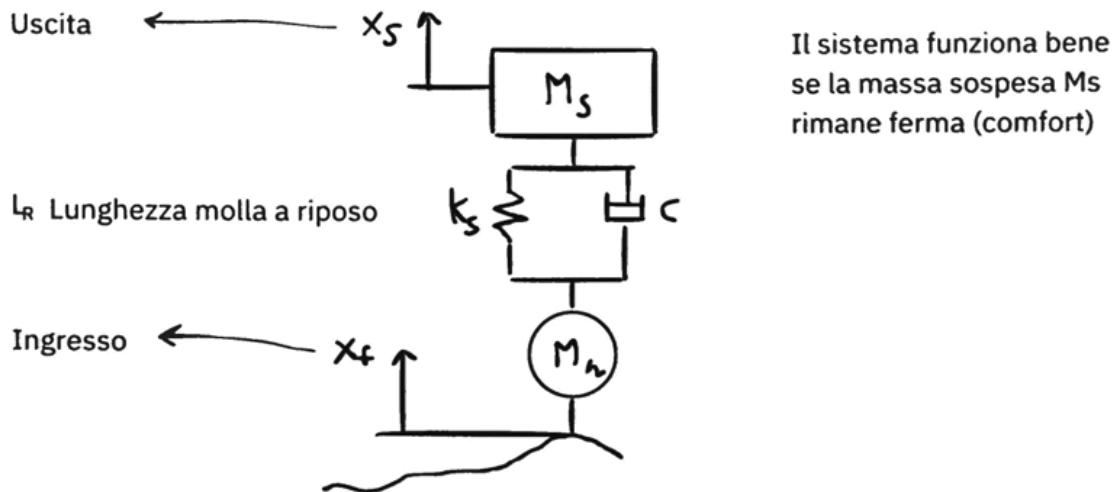
- $c$  (costante dello smorzatore)
- $k_p$  (costante elastica dello pneumatico)
- $k_s$  (costante elastica della sospensione).

Inoltre, ho introdotto tre sistemi di riferimento che sono  $x_f$ ,  $x_h$ ,  $x_s$ .

Posso anche semplificare il sistema nel seguente modo:



In forma finale, il sistema risulta essere:



A questo punto sono in grado di scrivere le equazioni dinamiche. Sfrutto la legge di Newton essendo un sistema meccanico:

$$M_s \frac{d^2 x_s}{dt^2} = c \frac{d(x_f - x_s)}{dt} + k_s(x_f - x_s) + k_s L_r - M_s g$$

Inoltre:

$$x_s = \Delta x_s + \bar{x}_s \quad \bar{x}_s = \underbrace{L_r - \frac{M_s g}{k_s}}_{\text{condizione di equilibrio}}$$

La condizione di equilibrio implica le derivate nulle. Dalla prima equazione invece ottengo la variazione di altezza rispetto alla condizione di equilibrio. Riscrivendola ho:

$$\Delta x_s = x_s - \bar{x}_s = x_s - L_r + \frac{M_s g}{k_s}$$

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = \frac{d^2 \Delta x_s}{dt^2} \quad \frac{dx_s}{dt} = \frac{d \Delta x_s}{dt}$$

$$M_s \frac{d^2 \Delta x_s}{dt^2} = c \frac{d(x_f - \Delta x_s)}{dt} + k_s(x_f - \Delta x_s)$$

Adesso mi basta raggruppare ingressi e uscite:

$$M_s \frac{d^2 \Delta x_s}{dt^2} + c \frac{d \Delta x_s}{dt} + k_s \Delta x_s = c \frac{dx_f}{dt} + k_s x_f$$

Passo nel dominio di Laplace:

$$(s^2 M_s + cs + k_s) \Delta x_s = (cs + k_s) x_f$$

$$G(s) = \frac{\Delta x_s}{x_f} = \frac{cs + k_s}{s^2 M_s + cs + k_s}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} = \sqrt{\frac{k_s}{M_s}} \quad \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} = \frac{c}{2\sqrt{k_s M_s}}$$

Osservazione: in un automobile abbiamo poli complessi e coniugati perché ci deve essere uno smorzatore.

 [Lezione 15 - 01/04/2025](#)



# Lezione 15 - 01/04/2025

[Lezione 14 - 27/03/2025](#)

## Equazioni del secondo ordine: risposta forzata

### Caso dei poli complessi e coniugati

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$G(s) = \underbrace{\frac{G(0)}{1 + 2\xi\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}}_{\text{Forma di Bode}} \quad G(s) = \underbrace{\frac{G(0)\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}}_{\text{Forma di Evans}}$$

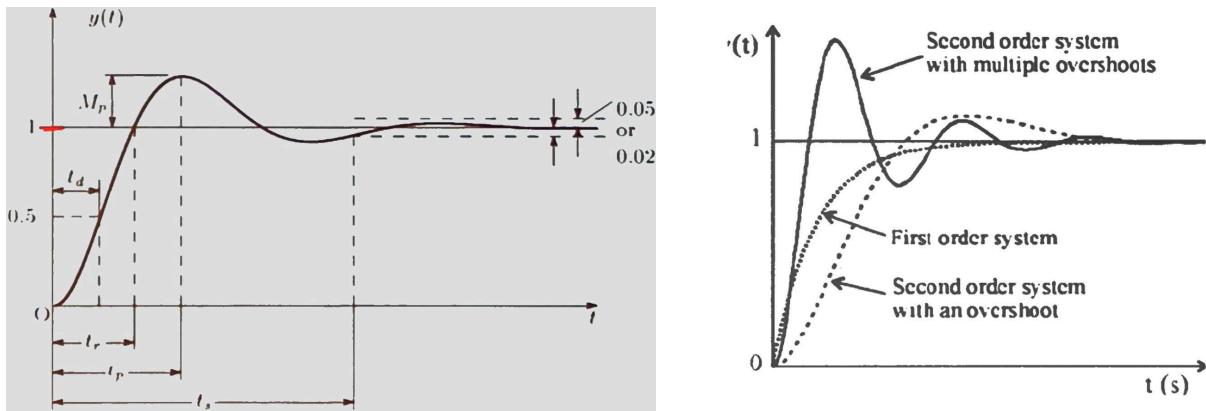
### Risposta al gradino

$$y(t) = G(0) \left[ 1 - e^{-\xi\omega_0 t} \left( \cos(\sqrt{1-\xi^2} \cdot \omega_0 t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2} \cdot \omega_0 t) \right) \right] \cdot 1(t)$$

Alcune osservazioni:

- $G(0)$  è il **guadagno statico**
- $1$  è il **gradino di riferimento**
- L'esponenziale  $e^{-\xi\omega_0 t}$  tende a 0
- $\sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega_0$  è la pulsazione

### Parametri caratteristici della risposta a gradino



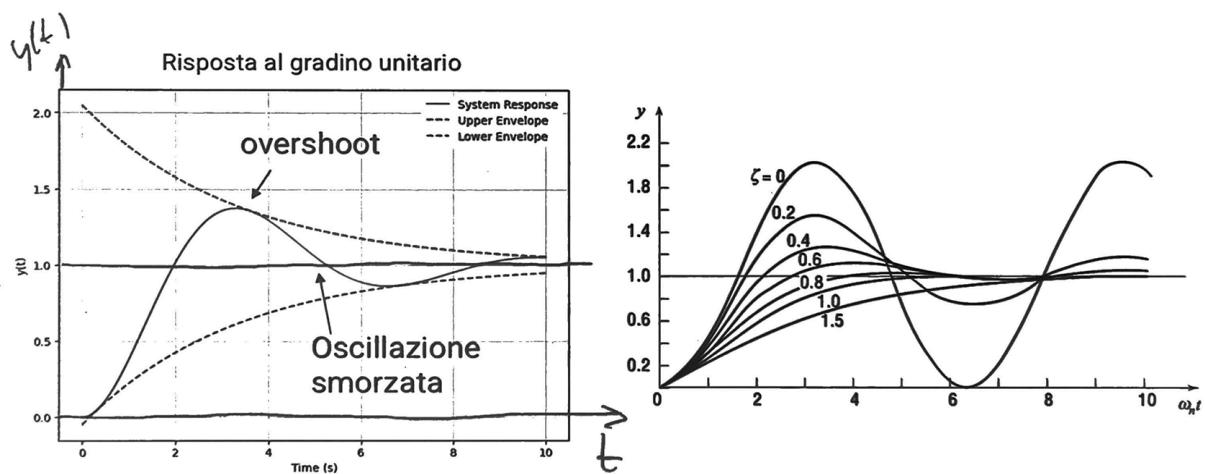
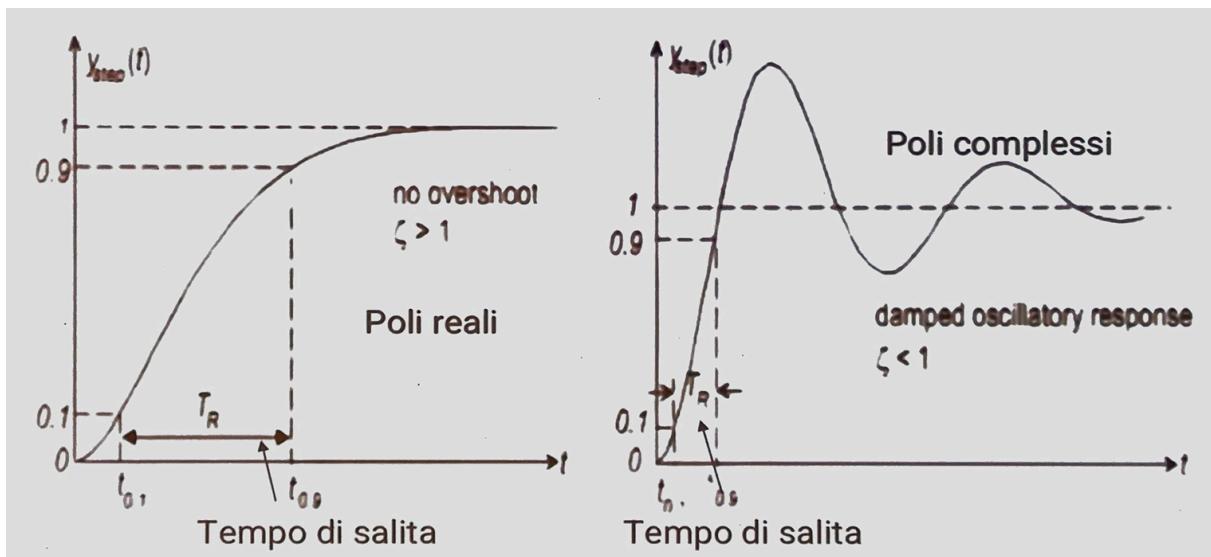
La  $y(t)$  va da 0 a 1 compiendo delle **oscillazioni**. Nello specifico a causa delle oscillazioni, la  $y(t)$  compie delle **sovra elongazioni**, in cui supera 1 e poi tende a decrementare fino a raggiungere 1 (o eventualmente compie altre oscillazioni).

Nel primo grafico troviamo:

Costante	Descrizione
$M_p$ (oppure $s$ )	<b>Massima elongazione relativa</b> (spesso espresso in percentuale).
$t_p$	Tempo necessario per raggiungere la massima elongazione relativa.
$t_d$	<b>Tempo di ritardo</b> , in cui l'uscita raggiunge il 50% del valore di regime.
$t_r$	<b>Tempo di salita</b> , in cui l'uscita passa dal 10% al 90% del valore di regime
$t_s$ (oppure $t_{ass}$ )	<b>Tempo di assestamento (settling time)</b> al 5% (o al 2%), in cui l'uscita entra in una fascia del 5% (o al 2%) del valore di regime e non ne esce più.

Vediamo un confronto tra sistemi del primo e del secondo ordine (vedi secondo grafico qui sopra). Nel caso dei sistemi del primo ordine la risposta era caratterizzata solo dalla costante di tempo e poteva essere o più veloce o più lenta. Con i sistemi del secondo ordine possiamo avere due tipi di risposte:

- Una prima risposta più lenta che tende a 1 e non lo supera mai.
- Un secondo tipo di risposta più veloce ma con delle oscillazioni (molto spesso i sistemi con sovra elongazioni sono più veloci).



Il tutto dipende dal parametro dello **smorzamento**.

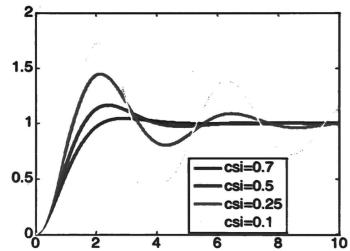
Un sistema del secondo ordine non necessariamente deve possedere poli complessi e coniugati, ma può essere caratterizzato da poli reali. In generale, un sistema con **poli complessi** sarà più veloce ma le sue oscillazioni andranno ad incrementare il tempo di assestamento (nel senso che il sistema per stabilizzarsi in una banda ci metterà più tempo, proprio perché entra subito in quella banda ma poi a causa delle oscillazioni uscirà e rientrerà numerose volte, fino a poi stabilizzarsi). Un sistema con **poli reali** invece, non ha oscillazioni; pertanto appena entra nella banda richiesta (più tardi rispetto ai poli complessi) sarà anche stabile.

## Risposta al gradino di un sistema del secondo ordine

$$G(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} + 1}, \quad 0 < \xi < 1, \quad s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$u(t) = 1(t)$$

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \arccos(\xi))$$



## Qualità della risposta al gradino

*Sovraelongazione*

$$S\% = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

*Tempo di massima sovraelong.*

$$t_{MAX} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

*Periodo di oscillazione*

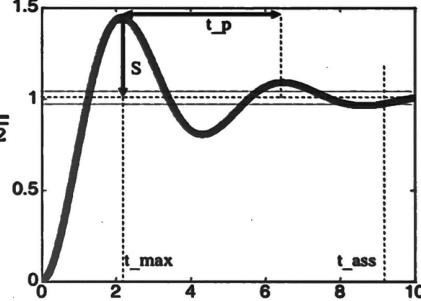
$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\text{Tempo di assestamento} \quad t_{ass} \approx -\frac{1}{\xi\omega_n} \ln(0.05)$$

*Tempo di salita (90%)*

$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

(approssimazione pratica)



Queste formule valgono unicamente **nel caso in cui i poli complessi e coniugati siano due**, se sono più di due non è assicurata la correttezza delle formule.

Abbiamo visto la risposta al gradino nel dominio del tempo. Vediamo come siamo arrivati a ottenerla:

$$\begin{aligned} G(s) \cdot U(s) &= \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{1}{s} + \frac{A \cdot s + B}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \\ &= \frac{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2 + As^2 + Bs}{s(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)} \end{aligned}$$

Poi, sfruttando l'uguaglianza dei polinomi posso concludere che:

- $As^2 + s^2 = 0 \quad \rightarrow \quad A = -1$
- $Bs + 2\xi\omega_0 s = 0 \quad \rightarrow \quad B = -2\xi\omega_0$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_0}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{1}{s} - \frac{(s + \xi\omega_0) + \xi\omega_0}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{s} - \frac{(s + \xi\omega_0) + \xi\omega_0\sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-\xi^2}}}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{(s + \xi\omega_0)}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)} + \frac{\xi\omega_0\sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-\xi^2}}}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)}
\end{aligned}$$

Prendendo la seconda frazione e applicando le seguenti due regole di Laplace:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} & \mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} &= e^{at}f(t) \\
\frac{\xi\omega_0\sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-\xi^2}}}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)} &= \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \frac{\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)}
\end{aligned}$$

Prendendo la terza frazione e applicando le seguenti due regole di Laplace:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} & \mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} &= e^{at}f(t) \\
&\rightarrow \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\left(\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}t\right)
\end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme riusciamo a ottenere l'antitrasformata finale e quindi abbiamo trovato la  $y(t)$ :

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{(s + \xi\omega_0) + \xi\omega_0\sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-\xi^2}}}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)} \\
y(t) &= 1 - e^{-\xi\omega_0 t} \cos\left(\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \cdot t\right) - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\left(\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \cdot t\right) \\
y(t) &= 1 - e^{-\xi\omega_0 t} \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{1 - \xi^2}} \sin\left(\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \cdot t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right)\right) \\
&\quad \boxed{\begin{array}{l} A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = B \cdot \cos(\omega \cdot t) + C \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ \boxed{A \cdot \sin(\omega \cdot t)} \boxed{\frac{\cos(\varphi)}{C} + \frac{A \cdot \sin(\varphi)}{B} \cdot \cos(\omega \cdot t)} = B \cdot \cos(\omega \cdot t) + C \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{array}} \\
&\quad A \cdot \cos(\varphi) = C \quad \text{e} \quad A \cdot \sin(\varphi) = B
\end{aligned}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \frac{B}{C} \quad \text{e} \quad A = \sqrt{B^2 + C^2}$$

$$\begin{aligned}
 & y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_0 t} \underbrace{\cos(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \cdot t)}_{B=1} - \boxed{\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} e^{-\xi\omega_0 t} \underbrace{\sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \cdot t)}_{C} \\
 & y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_0 t} \boxed{\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{1-\xi^2}}} \sin \left( \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \boxed{\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)} \right) \\
 & \boxed{A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = B \cdot \cos(\omega \cdot t) + C \cdot \sin(\omega \cdot t)} \quad \tan(\varphi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \frac{B}{C} \quad \text{e} \quad A = \sqrt{B^2 + C^2}
 \end{aligned}$$

## Stabilità per i sistemi lineari

Facciamo una rapida ricapitolazione su alcuni concetti di interesse per la stabilità

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{b_m(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{a_n(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

Dove gli  $z_i$  sono gli zeri,  $p_i$  i poli, e si assume  $n \geq m$ . Il comportamento dinamico di un modello a funzione di trasferimento è caratterizzato dal valore numerico di poli e zeri.

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{b_m(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{a_n(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (\text{Forma di Evans}) \\
 &= G(s) = K \frac{(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1) \cdots}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots} \quad (\text{Forma di Bode})
 \end{aligned}$$

### Poli

I **poli** sono i fattori al denominatore della funzione di trasferimento.

Il polo di una funzione di trasferimento è il valore di  $s$  per cui la funzione di trasferimento tende a infinito

$$f(s) = \frac{g(s)}{\sum_{i=1}^x (s - a_i)^{n_i}}$$

dove  $n_i$  è l'ordine del polo.

## Zeri

Gli **zeri** sono i fattori al numeratore della funzione di trasferimento.

Lo zero di una funzione di trasferimento è il valore di  $s$  per cui la funzione di trasferimento tende a 0

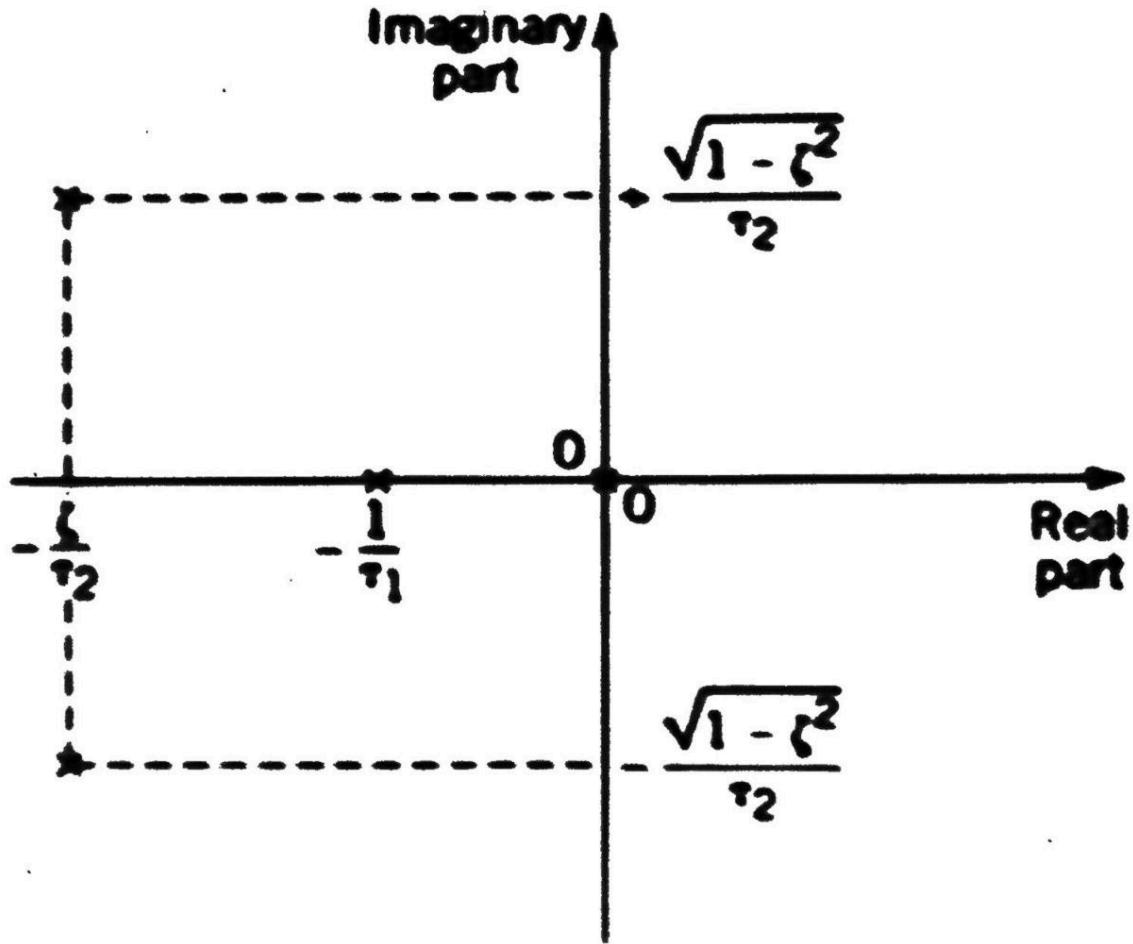
$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^y (s - a_i)^{m_i}}{g(s)}$$

dove  $m_i$  è l'ordine dello zero.

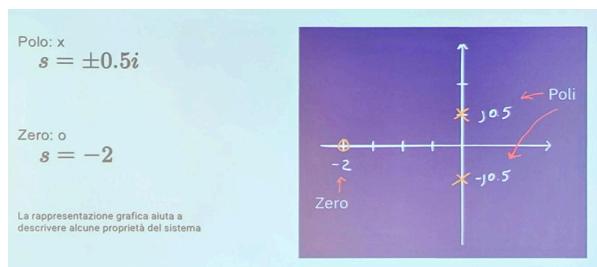
## Rappresentazione sul piano di Gauss

La **rappresentazione grafica** di una funzione di trasferimento razionale nel piano complesso che aiuta a descrivere alcune proprietà del sistema.

$$G(s) = \frac{K}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2^2 s^2 + 2\xi\tau_2 s + 1)}$$

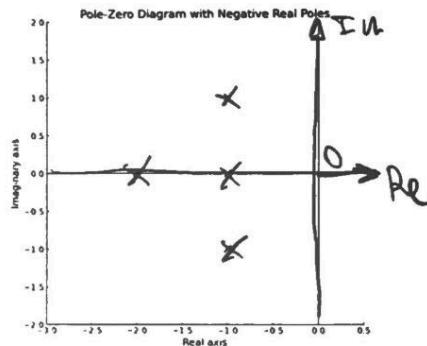


Un esempio di rappresentazione è la seguente:

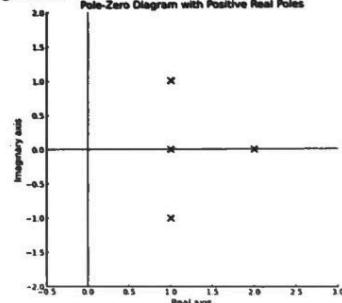


## Effetto della posizione dei poli

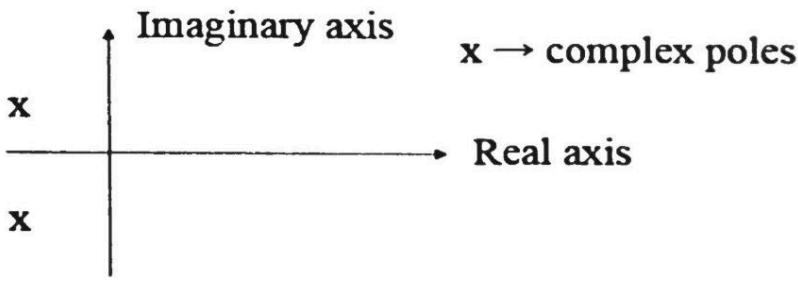
Poli nel semipiano reale negativo corrispondono a sistemi stabili (ovvero la cui risposta è stabile)



Poli nel semipiano reale positivo corrispondono a sistemi instabili (ovvero la cui risposta non è stabile)



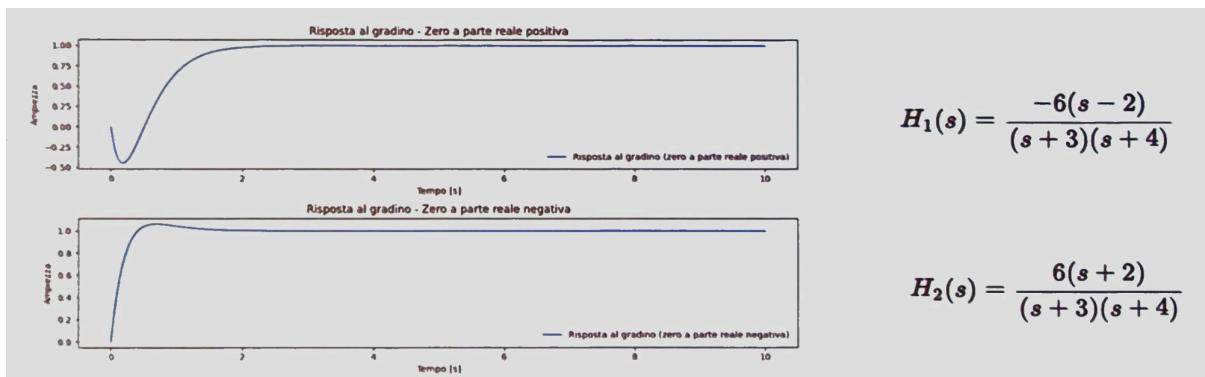
Notiamo che la risposta è più veloce quando il polo è **lontano dall'asse immaginario**, e notiamo che poli complessi risultano in una risposta oscillatoria.



$$p = a + bj \quad \text{where } j = \sqrt{-1}$$

## Effetto della posizione degli zeri

Gli zeri non hanno effetto sulla **stabilità del sistema**. Uno zero nel semipiano a parte reale positiva significa che si ha una risposta inversa ad un riferimento a gradino



# Dallo spazio di stato alla funzione di trasferimento

Dato il modello in variabili di stato:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Adesso sono in grado, tramite la proprietà di derivazione, di passare alla funzione di trasferimento. Le condizioni iniziali sono assunte come nulle. Applicando la trasformata di Laplace ottengo:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Adesso per scrivere  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$  uso la seconda equazione del modello a variabili di stato:

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \Rightarrow Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

Troviamo così la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

## Esempio

$$x^{(4)} + 10x^{(3)} + 2x^{(2)} - 5x^{(1)} + 6x + 10u = 0$$

Arriviamo fino alla derivata quarta, possiamo scegliersi  $n - 1$  variabili di stato:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x^{(1)} \\ x_3 = x^{(2)} \\ x_4 = x^{(3)} \end{cases} \quad x_4^{(1)} + 10x_4 + 2x_3 - 5x_2 + 6x_1 + 10u = 0$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = x_2 \\ x_2^{(1)} = x_3 \\ x_3^{(1)} = x_4 \\ x_4^{(1)} = -10x_4 - 2x_3 + 5x_2 - 6x_1 - 10u \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & -2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} u \quad \rightarrow \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

## Equazioni in forma canonica di controllo

Esiste un numero infinito di possibili modelli in spazio di stato che forniscono la stessa dinamico di ingresso/uscita.

Aiuta avere alcune **strutture standardizzate** dei modelli in spazio di stato: queste sono le cosiddette **forme canoniche**.

Data la funzione di trasferimento di un sistema, è possibile ottenere ciascuna delle forme canoniche.

Data una particolare forma canonica, è possibile trasformarla in un'altra forma.

Consideriamo il sistema definito da :

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\dot{y} + a_ny = b_0u^{(n)} + b_1u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}\dot{u} + b_nu$$

Prendendo la trasformata di Laplace di entrambi i lati otteniamo:

$$Y(s)(s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n) = U(s)(b_0s^n + b_1s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n)$$

Da cui la funzione di trasferimento:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0s^n + b_1s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$$

La forma canonica controllabile dispone i coefficienti del denominatore della funzione di trasferimento su una riga della matrice A:

$$\overset{A}{\left[ \begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{array} \right]} = \left[ \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{array} \right] \overset{B}{\left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{array} \right]} + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] u$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \cdots \quad b_1 - a_1 b_0] \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right] + b_0 u$$

C  $\rightarrow$

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] u$$

$$\rightarrow y = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \cdots \quad b_1 - a_1 b_0] \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right] + b_0 u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$\left[ \begin{array}{c} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(1)} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & -2 & -10 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{array} \right] u$$

## Lezione 16 - 02/04/2025

## 3

# Criterio di Routh

$n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$	$\dots$
$n - 1$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$a_{n-7}$	$\dots$
$n - 2$	$x_{n-2,1}$	$x_{n-4,2}$	$x_{n-6,3}$	$x_{n-8,4}$	
$n - 3$	$x_{n-3,1}$	$x_{n-5,2}$	$x_{n-7,3}$	$x_{n-9,4}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
2	$x_{2,1}$	$x_{0,2}$		$\dots$	
1	$x_{1,1}$	$\dots$	$\dots$		
0	$x_{0,1}$	$\dots$	$\dots$		

WWW.ANDREAMININI.ORG



# Lezione 16 - 02/04/2025

[Lezione 15 - 01/04/2025](#)

## Equazioni in forma canonica di controllo

Esiste un numero finito di possibili modelli in spazio di stato che forniscono la stessa dinamica ingresso-uscita. In tal senso aiuta avere alcune strutture standardizzate dei modelli in spazio di stato: queste sono le cosiddette forme canoniche.

Data una particolare forma canonica, è possibile trasformarla in un'altra forma.

Continua con delle slide di riepilogo già inserite alla fine della scorsa lezione (puoi riprenderle lì).

### Esercizio

Trovare la funzione di trasferimento dal seguente modello del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0 \ 0] x \end{cases}$$

Soluzione

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s + 3 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s^2 + 3s + 2 & s + 3 & 1 \\ -1 & s(s+3) & s \\ -s & -(2s+1) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s^2 + 3s + 2 & s + 3 & 1 \\ -1 & s(s+3) & s \\ -s & -(2s+1) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

trasposta

$\begin{bmatrix} s & 0 & 1 \\ -1 & s & 2 \\ 0 & -1 & s+3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{trasposta}} \begin{bmatrix} s' & 0' & 1' \\ -1' & s' & 2' \\ 0' & -1' & s+3' \end{bmatrix}$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s^2 + 3s + 2 & s + 3 & 1 \\ -1 & s(s+3) & s \\ -s & -(2s+1) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

trasposta

$\begin{bmatrix} s & 0 & 1 \\ -1 & s & 2 \\ 0 & -1 & s+3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{trasposta}} \begin{bmatrix} s' & 0' & 1' \\ -1' & s' & 2' \\ 0' & -1' & s+3' \end{bmatrix}$

Cambio segno perche' somma indici elemento e' dispari (1,2)

Per il calcolo della funzione di trasferimento ci rimane applicare la formula in cui sono presenti le altre matrici:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u; \quad y = [1 \ 0 \ 0]x$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s^2 + 3s + 2 & s + 3 & 1 \\ -1 & s(s+3) & s \\ -s & -(2s+1) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad \longrightarrow \quad G(s) = \frac{[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} s^2 + 3s + 2 & s + 3 & 1 \\ -1 & s(s+3) & s \\ -s & -(2s+1) & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u; \quad y = [1 \ 0 \ 0]x$$

$$G(s) = \frac{[1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} s^2 + 3s + 2 & s + 3 & 1 \\ -1 & s(s+3) & s \\ -s & -(2s+1) & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

$$G(s) = \frac{10(s^2 + 3s + 2)}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

Nota bene: i coefficienti del polinomio sono proprio i coefficienti dell'ultima riga di  $A$ . Questo vale solo quando la  $A$  è scritta in questa forma.

## Matrice di trasferimento nei sistemi MIMO

Nel caso in cui abbiamo una  $y = C(sI - A)^{-1}Bu$ , la matrice  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  è detta matrice di trasferimento del sistema.

Ogni elemento di  $G$  esprime la relazione (dinamica, dato che c'è l'operatore  $s$ ) fra un canale di ingresso e di uscita

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} g_{11}(s) & \dots & g_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1}(s) & \dots & g_{pm}(s) \end{pmatrix}$$

$g_{ij}(s)$ : funzione di trasferimento  $u_j \rightarrow y_i$

## Esempio

Prendiamo la classica automobile in salita già trattata qualche lezione fa, e identificata dal sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{m} & -g \end{bmatrix} u \\ y = [0 \ 1] x \end{cases}$$

Calcoliamo adesso  $sI - A$  e poi la sua inversa:

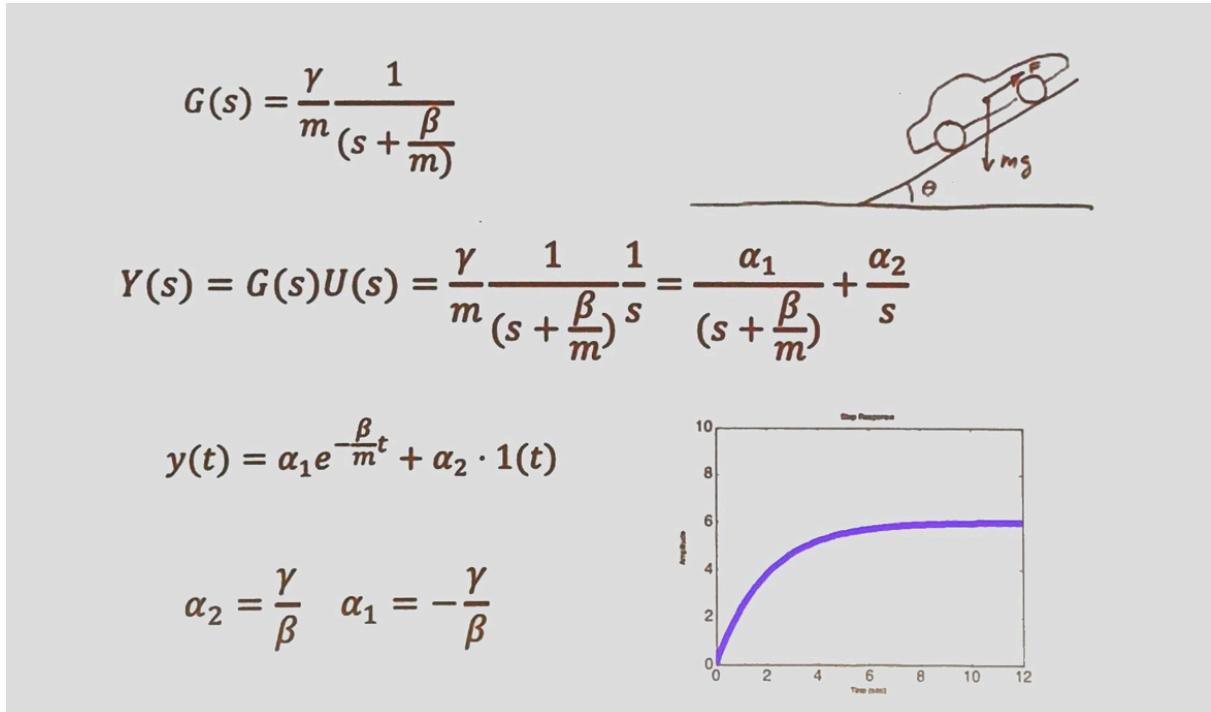
$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + \frac{\beta}{m} \end{bmatrix} \quad (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s + \frac{\beta}{m})} \begin{bmatrix} s + \frac{\beta}{m} & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Troviamo adesso la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s(s + \frac{\beta}{m})} \begin{bmatrix} \gamma & -sg \\ s\frac{\gamma}{m} & -sg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{m} \cdot \frac{1}{s + \frac{\beta}{m}} & \frac{-g}{s + \frac{\beta}{m}} \\ s\frac{\gamma}{m} \cdot \frac{1}{s + \frac{\beta}{m}} & s\frac{\gamma}{m} \cdot \frac{-g}{s + \frac{\beta}{m}} \end{bmatrix}$$

Adesso ci basta scegliere una funzione di trasferimento e antitrasformarla, usando come ingresso il gradino:

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\gamma}{m} \cdot \frac{1}{s + \frac{\beta}{m}}$$



## Poli del sistema ed equazione caratteristica

I poli del sistema sono un sottoinsieme delle radici dell'equazione:

$$\det(sI - A) = 0$$

che coincidono con le radici dell'equazione caratteristica:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

I poli del sistema sono un sottoinsieme degli autovalori della matrice  $A$ .

Esiste anche un caso senza perdita, ovvero un caso dove possiamo vedere tutti gli autovalori.

## F.d.T., raggiungibilità e osservabilità

Per ogni funzione di trasferimento  $g_{ij}(s)$ , i poli della f.d.t. sono tutti e soli i poli raggiungibili dall'ingresso  $u_j$  ed osservabili dall'uscita  $y_i$ .

Nel caso specifico di sistemi SISO, la funzione di trasferimento comprende solo i poli raggiungibili e osservabili dal sistema.

## Discussione sulla stabilità

Consideriamo la solita funzione di trasferimento nella forma:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{n(s)}{d(s)}, \quad d(s) \neq 0$$

- Polinomio al numeratore: le radici sono gli zeri del sistema
- Polinomio al denominatore: le radici sono i poli del sistema
- L'equazione  $d(s) = 0$  viene detta equazione caratteristica del sistema dinamico
- Le radici dell'equazione caratteristica dipendono dagli autovalori della matrice dinamica  $A$
- Affinché l'uscita sia stabile, ovvero converga a un valore finito, occorre che i poli al denominatore della funzione di trasferimento non abbiano parte reale positiva, ciò conferma il loro legame con gli autovalori di  $A$

## Stabilità

La maggior parte dei processi industriali sono stabili senza controllo in retroazione e si dice che siano stabili ad anello aperto o auto-regolanti.

Un processo stabile ad anello aperto tornerà allo stato stazionario originale dopo un disturbo transitorio (cioè, uno non sostenuto).

Al contrario, ci sono alcuni processi, come i reattori chimici esotermici, che possono essere instabili ad anello aperto.

## Stabilità BIBO

Un sistema lineare non vincolato si dice stabile se la risposta in uscita è limitata per tutti gli ingressi limitati, ovvero presenta stabilità BIBO (Bounded Input, Bounded Output). Altrimenti si dice instabile.

Detto altrimenti: un sistema si dice stabile BIBO, se ad ogni ingresso limitato corrisponde un'uscita limitata.

La stabilità BIBO si applica a:

- Qualsiasi sistema di controllo lineare composto da elementi lineari.
- Sistemi non lineari che operano vicino al punto di linearizzazione.

Le condizioni di stabilità BIBO sono:

- Per i sistemi lineari, si ha stabilità BIBO se e solo se i poli della funzione di trasferimento hanno tutta parte reale negativa. Attenzione: i poli della f.d.t. sono solo quelli raggiungibili e osservabili.

La stabilità BIBO dipende solo dalla risposta forzata del sistema.

## Stabilità asintotica

Si verifica quando le variabili del sistema di controllo stabile diminuiscono sempre dal valore iniziale e non mostrano oscillazioni permanenti.

Le oscillazioni permanenti si verificano quando ha una parte reale esattamente pari a zero (nel caso continuo) (o un modulo pari a uno nel caso discreto).

- Un sistema che oscilla non è detto che sia instabile, ma sicuramente non andrà a zero.
- I sistemi oscillanti permanentemente hanno poli semplici sull'asse immaginario (nel caso continuo).

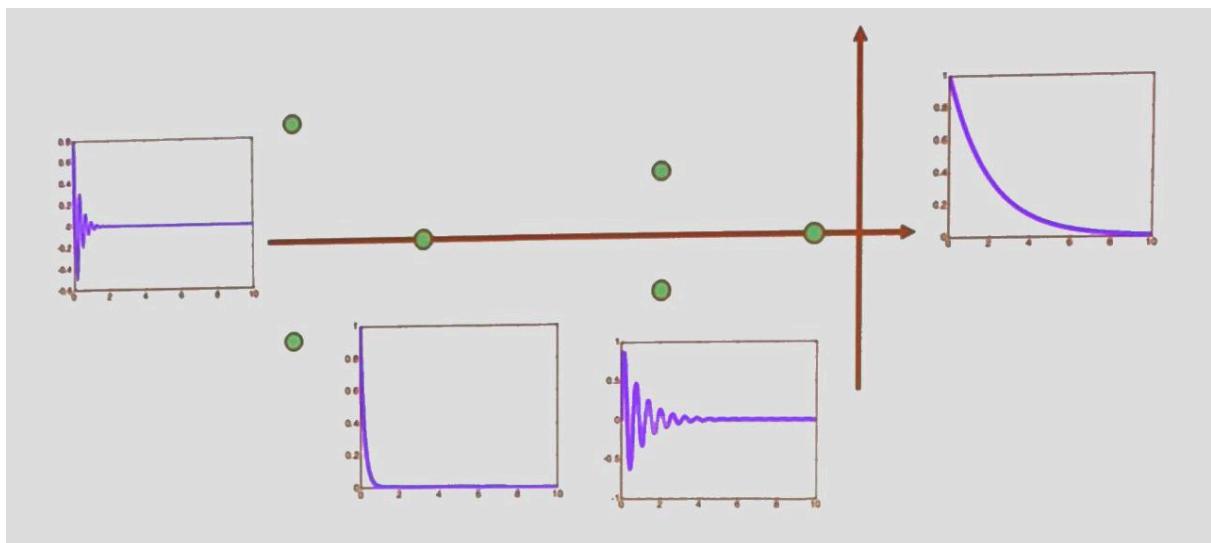
## Stabilità marginale

Si verifica quando la risposta di un sistema semplicemente stabile né si attenua né cresce nel tempo e non presenta oscillazioni.

La funzione di trasferimento del sistema ha poli non ripetuti nell'origine del piano complesso, cioè le loro componenti reali e immaginaria sono pari a zero nel caso continuo.

## Poli dominanti

In un sistema BIBO stabile, i modi sono tutti segnali esponenzialmente smorzati. Al di là del transitorio iniziale, l'effetto prevalente è quello dei modi più lenti



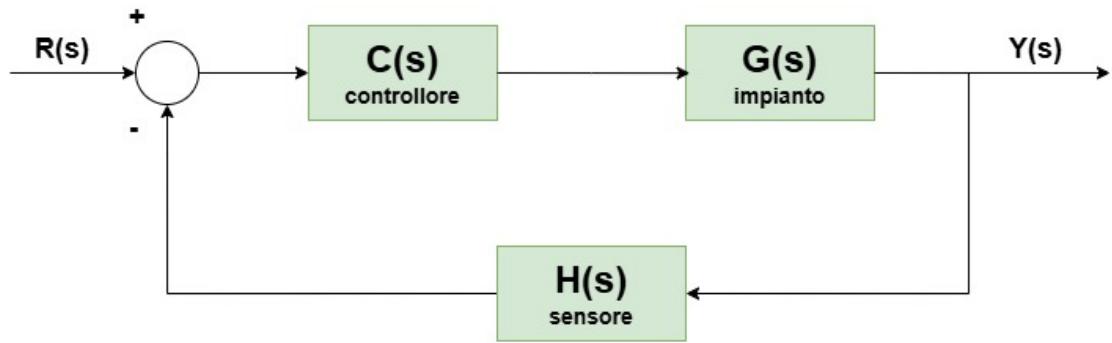
## Sistemi del primo e del secondo ordine

- La dinamica di un sistema può essere approssimata dai modi associati ai poli dominanti.
- Casi più comuni: sistemi del primo o del secondo ordine (polo dominante reale o coppia di poli dominanti complessi coniugati), eventualmente con ritardo fisso.
- Analisi della risposta (forzata) al gradino di sistemi del primo e del secondo ordine.
- Qualità della risposta associata a particolari parametri misurabili sperimentalmente.

## Criteri di stabilità

Sul libro si trova nel capitolo 3

## Stabilità in ciclo chiuso



La funzione di trasferimento in anello aperto ( $G_{OL}$  - Open Loop) è  $G_{OL} = C(s)G(s)$ , mentre quella in anello chiuso è data da:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}$$

Isoliamo  $1 + C(s)G(s)H(s) = 0$  l'equazione caratteristica di  $T(s)$  ottenendo:

- $1 + G_{OL} = 0$  se  $H(s) = 1$
- Le radici sono i poli della funzione di trasferimento

### Esempio 1

Determinare se il sistema in catena chiusa è stabile:

$$G_{OL} = \frac{10(0.5s + 1)}{s(2s + 1)}$$

Nota che  $G_{OL}$  sta per G open loop. Adesso risolvo:

$$1 + G_{OL} = 1 + \frac{10(0.5s + 1)}{s(2s + 1)} = \frac{2(s^2 + 3s + 5)}{s(2s + 1)}$$

Se adesso uguaglio a 0, l'espressione  $1 + G_{OL}$  ottengo  $s^2 + 3s + 5 = 0$ .

### Esempio 2

Determinare se il sistema in catena chiusa è stabile

$$1 + G_{OL} = s + 0.2k_c - 1$$

$$1 + G_{OL} = 0 \quad \rightarrow \quad s + 0.2k_c - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad s = 1 - 0.2k_c$$

Affinché il sistema sia stabile necessitiamo  $s < 0$ , vale a dire  $k_c > 5$ .

### Esempio 3

Determinare se il sistema in catena chiusa è stabile:

$$G_{OL} = \frac{k_c}{(2s+1)(5s+1)}$$

$$1 + G_{OL} = 1 + \frac{k_c}{(2s+1)(5s+1)} = \frac{10s^2 + 7s + k_c + 1}{(2s+1)(5s+1)}$$

$$10s^2 + 7s + k_c + 1 = 0$$

Le soluzioni dipendono dal valore di  $K_c$

## Test di stabilità

Studieremo diversi criteri di stabilità, per analizzare i nostri sistemi. Tra questi troviamo:

- Criterio di stabilità di Routh
- Luogo delle radici
- Criterio di stabilità di Bode
- Criterio di stabilità di Nyquist

## Criterio di Routh

Si tratta di un metodo puramente algebrico per determinare la stabilità nei sistemi lineari tempo-invarianti del tipo SISO.

Riparto le sole slide del criterio di Routh:

attachment:e602fbad-2864-4847-90a7-731c2f60e95d:Lezione\_16.2\_-\_02042025.pdf

 Lezione 17 - 08/04/2025



# Lezione 17 - 08/04/2025

[Lezione 16 - 02/04/2025](#)

## Criterio di Routh

Il **criterio di Routh** si applica a sistemi con equazione caratteristica in forma polinomiale:

$$\underbrace{a_n}_{>0} s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 = 0$$

Invece, **non si può applicare a sistemi con ritardi di tempo**, ovvero dove compare  $e^{-\tau s}$ . In questi casi, provvediamo a costruire un'approssimazione polinomiale.

## Condizioni di applicabilità

Condizione necessaria e sufficiente per la **stabilità asintotica**:

- Tutti gli  $n + 1$  coefficienti del polinomio devono avere lo stesso segno.
- Questa condizione diventa necessaria e sufficiente solo per  $n \leq 2$  (regola di Cartesio).
- Gli  $n + 1$  elementi della prima colonna della **tabella di Routh** devono avere lo stesso segno.

## Esempio 1

Prendiamo il polinomio:

$$s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 4s + 2 = 0$$

Costruiamo la tabella di Routh: vedi a destra.

La conclusione che possiamo trarre è che:

- Tutti i coefficienti del polinomio di partenza hanno segno positivo.

4	1	5	2
3	3	4	
2	$\frac{11}{3}$	2	
1	$\frac{26}{11}$	0	
0	2		

- Tutti i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh hanno lo stesso segno.
- Tutte le radici hanno  $Re < 0$ .

## Esempio 2

Prendiamo il polinomio:

$$s^6 + s^5 + 4s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 4s + 2 = 0$$

Costruiamo la tabella di Routh: vedi a destra.

La conclusione che possiamo trarre è che:

- Ci sono due radici instabili a parte reale maggiore di 0 (per dire questo abbiamo visto quanti cambi di segno ci sono).

Per verificare se i calcoli algebrici sono corretti, l'ultimo valore deve essere uguale al termine noto dell'equazione originaria.

6	1	4	2	2
5	1	3	4	
4	1	-2	2	
3	5	2		
2	$-\frac{12}{5}$	2		
1	$-\frac{74}{12}$			
0	2			

## Coefficienti simbolici

Presentiamo questa tipologia di esercizio con un esempio. Dobbiamo determinare i valori di  $k_c$  per avere un sistema stabile:

$$G_{OL} = \frac{k_c}{(s+1)(\frac{s}{2}+1)(\frac{s}{3}+1)}$$

Per determinare la soluzione, calcoliamo  $1 + G_{OL}$

$$1 + G_{OL} = 1 + \frac{k_c}{(s+1)(\frac{s}{2}+1)(\frac{s}{3}+1)} = \frac{s^3 + 6s^2 + 11s + 6(1+k_c)}{(s+1)(\frac{s}{2}+1)(\frac{s}{3}+1)}$$

Devo quindi studiare il polinomio  $s^3 + 6s^2 + 11s + 6(1+k_c) = 0$ . Vale a dire:

3	1	11
2	6	$6(1+k_c)$
1	$10 - k_c$	
0	$6(1+k_c)$	

Questo tradotto significa che deve valere:

- $10 - k_c > 0 \rightarrow k_c < 10$
- $6(1+k_c) > 0 \rightarrow k_c > -1$

La regione di stabilità è identificata per:

$$-1 < k_c < 10$$

## Casi singolari

### Casi particolari (pivot nullo)

Verifichiamo cosa succede nel caso singolare di **termine pivot nullo** (e eventualmente altri termini). Si tratta di un caso particolare in quanto è il termine pivot per il quale dividiamo nel costruire la tabella

$$p(s) = s^3 + s + 2$$

Ponendo  $\varepsilon$  al posto di 0 ho:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 2 \\ 1 & & \\ 0 & & \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 0 \rightarrow \varepsilon & 2 \\ 1 & \frac{\varepsilon-2}{\varepsilon} & \\ 0 & 2 & \end{array}$$

Facendo il limite per  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$  ottengo come prima colonna:  
 $1, 0^+, -\infty, 2$ . Di conseguenza, ci sono due radici instabili con  $Re > 0$ .

### Casi particolari (riga nulla)

$$p(s) = s^3 + bs^2 + cs + 1$$

Ovviamente nel caso in cui  $bc = 1$  la riga si annulla.  
Invece abbiamo che:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & c \\ \hline 2 & b & 1 \\ 1 & \frac{bc-1}{b} & \\ 0 & 1 & \end{array}$$

Applicando il metodo C:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & c \\ \hline 2 & b & 1 \\ 1 & 2b & \\ 0 & 1 & \end{array}$$

- Caso A con  $bc - 1 > 0$  e  $b, c > 0$ : allora il polinomio ha solo radici stabili
- Caso B con  $bc = 1$ : **metodo dell'equazione ausiliaria** (dalla riga precedente a quella tutta nulla).

$$bs^2 + 1 = 0 \rightarrow s^2 = -\frac{1}{b} = \pm j\sqrt{\frac{1}{b}}$$

Risolvo l'equazione e le sue radici coincidono con le radici mancanti per le quali la tabella non aveva dato informazioni.

- Caso C con  $bc = 1$ : **metodo della derivata** (dalla riga precedente a quella tutta nulla).

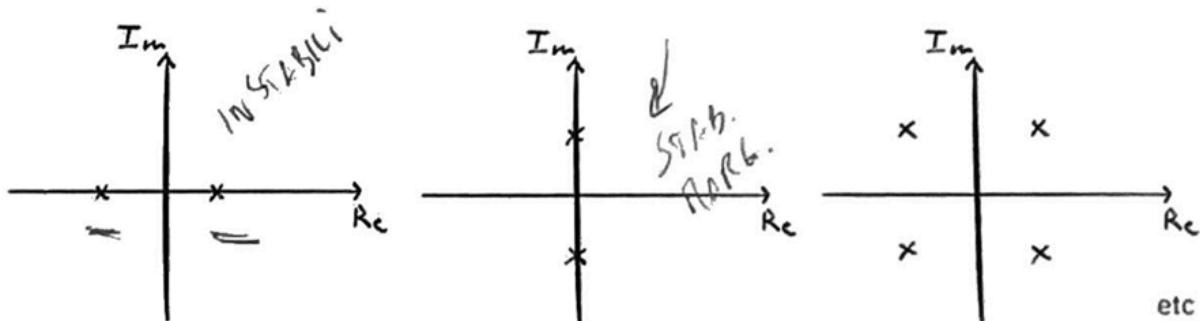
$$q(s) = bs^2 + 1 \rightarrow \frac{d}{ds}q(s) = 2bs$$

Calcolo la derivata rispetto ad s e sostituisco i coefficienti alla riga tutta nulla.

Riconosciamo due casistiche:

- Se la prima colonna modificata non presenta variazioni di segno si ha stabilità semplice.
- Se la prima colonna modificata presenta variazioni di segno si ha instabilità per presenza di poli a parte reale positiva e/o poli immaginari con molteplicità maggiore di uno.

Possiamo avere solo i seguenti casi che portano righe nulle nella tabella di Routh:



Risolvere l'equazione ausiliaria nel caso di configurazioni polari con soluzioni immaginarie pure significa trovare le frequenze di oscillazione del sistema, quelle ai limiti della stabilità per cui il sistema dinamico oscilla. Nel caso precedente:

$$a(s) = bs^2 + 1 = 0 \quad a(j\omega) = -b\omega^2 + 1 = 0 \rightarrow \omega = \pm \sqrt{\frac{1}{b}}$$

Con  $\omega$  la pulsazione critica di oscillazione del sistema dinamico, quando si verifica la condizione critica  $bc - 1 = 0$ .

## Esempio

Esempio presente sulle slide della lezione 17, pagine da 17 a 23.

## Risposta in frequenza

La **risposta in frequenza** (o **risposta armonica**) è una proprietà dei sistemi lineari asintoticamente stabili.

Se applichiamo un segnale di ingresso sinusoidale:

$$u(t) = U_M \sin(\omega t)$$

Esaurito il **transitorio**, l'uscita sarà ancora sinusoidale:

$$y(t) = |Y(\omega)| \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

Alcuni punti importanti:

- La pulsazione di ingresso è la stessa dell'ingresso.
- L'ampiezza e la fase dell'uscita dipendono dalla pulsazione d'ingresso.

## Dimostrazione

$$u(t) = U_M \sin(\omega t) \quad y(t) = |Y(\omega)| \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

Schematizziamo come segue:

$$\xrightarrow{U(s)} \left[ \begin{array}{c} G(s) \end{array} \right] \xrightarrow{Y(s)}$$

Procediamo con la dimostrazione:

$$u(t) = \sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{A_1}{s - j\omega} + \frac{A_1^*}{s + j\omega} + \text{termini transitori legati ai poli di } G(s)$$

La forma particolare di  $Y(s)$  è dovuta al fatto che so che in ingresso ho una sinusoide.

$G(s)$  è stabile quindi i termini transitori a regime andranno a zero. A regime invece, si mantengono i contributi della sinusoide, che non tendono a zero. Possiamo adesso calcolare la risposta a regime:

$$y(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = Y_\infty(s) = \frac{A_1}{s - j\omega} + \frac{A_1^*}{s + j\omega}$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega)G(s)U(s) = (s - j\omega)G(s) \frac{\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} = G(j\omega) \frac{1}{2j}$$

$$A_1^* = -G(-j\omega) \frac{1}{2j}$$

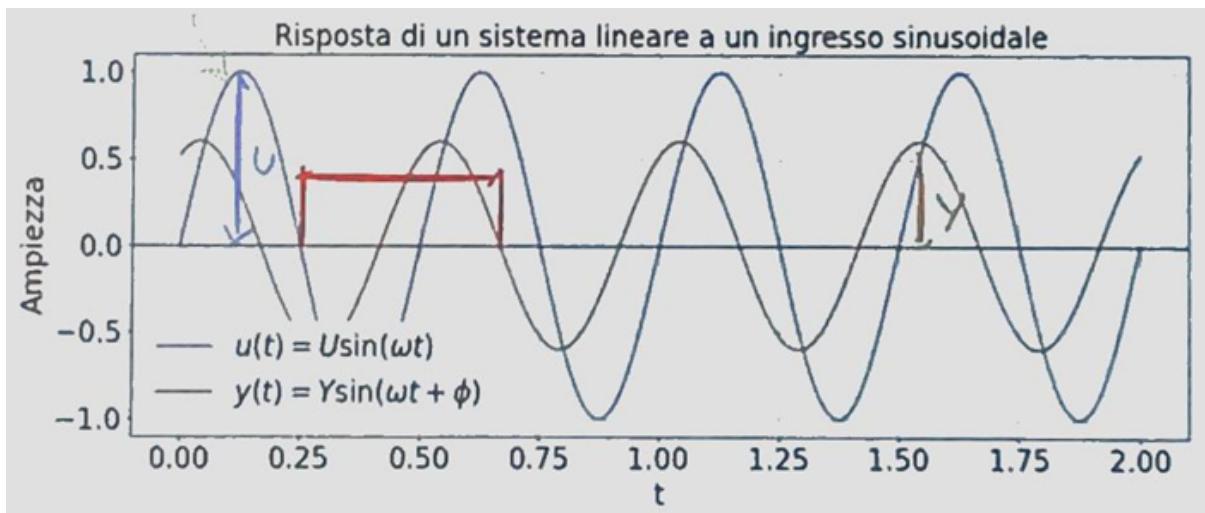
$$\frac{G(j\omega)}{2j} e^{j\omega t} - \frac{G(-j\omega)}{2j} e^{-j\omega t} \quad \text{valore a regime nel tempo}$$

1. Sfrutto che per  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z + z^* = 2\operatorname{Re}(z)$
2. Scrivo che  $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\Phi G(j\omega)}$
3. Ottengo che:

$$\begin{aligned} y_\infty &= 2\operatorname{Re}\left[\frac{G(j\omega)}{2j} e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{|G(j\omega)|}{j} e^{j(\omega t + \Phi G(j\omega))}\right] \\ &= \operatorname{Re}\left[\frac{|G(j\omega)|}{j} \cos(\omega t + \Phi G(j\omega)) + j \sin(\omega t + \Phi G(j\omega))\right] \\ &= |G(j\omega)| \sin(\omega t + \Phi G(j\omega)) \end{aligned}$$

## Punti principali

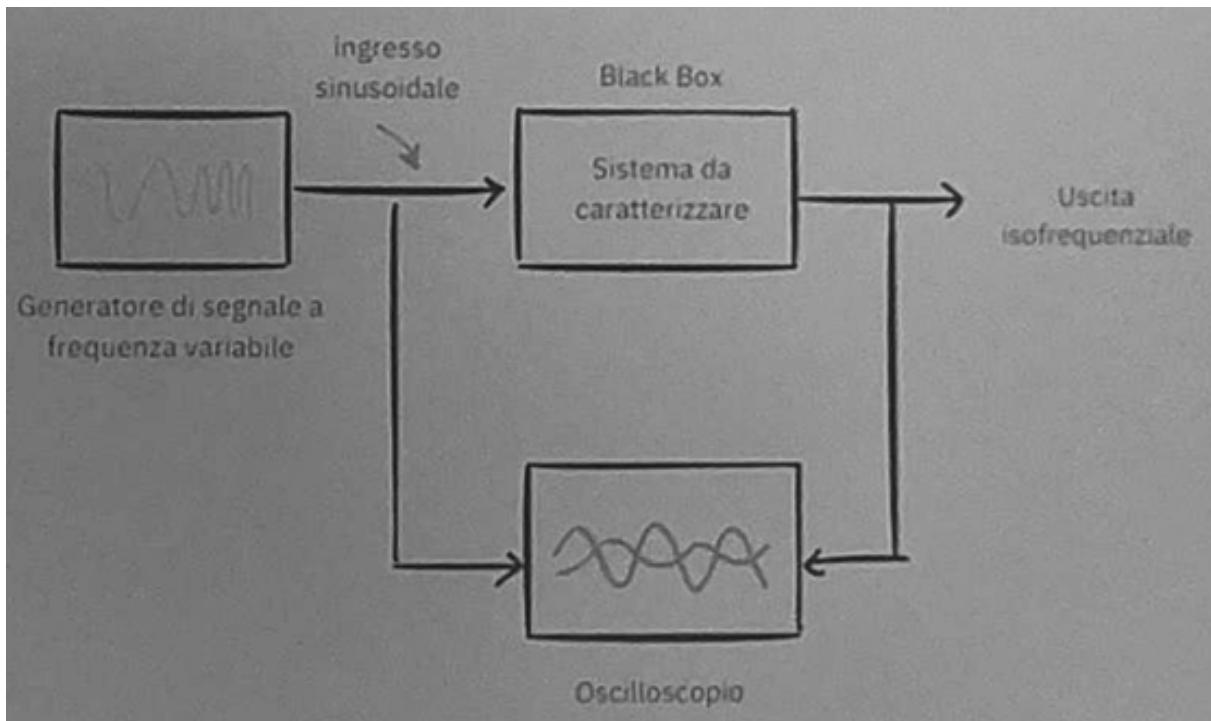
- L'uscita a regime oscilla con pulsazione uguale a quella di ingresso.
- Il segnale ha ampiezza e fase che dipendono dal valore della pulsazione in ingresso.



- In molte applicazioni è importante conoscere la risposta a regime di un sistema (di misura) ad un ingresso di tipo sinusoidale.
- Se il sistema è lineare e stazionario, a regime. l'uscita  $y(t)$  del sistema è ancora un segnale sinusoidale avente la stessa frequenza  $\omega$  del segnale in ingresso  $u(t)$ .

- In generale l'ampiezza dell'output differisce da quella dell'input; inoltre i due segnali hanno fasi differenti.
- Il rapporto in termini di ampiezze fra i segnali (**amplificazione dinamica**) e lo sfasamento variano al variare della pulsazione ( $\omega$ ) del segnale di ingresso.
- La risposta in frequenza di un sistema (di misura) consiste nell'indicazione di come l'amplificazione e lo sfasamento variano al variare della pulsazione ( $\omega$ ).

## Metodo sperimentale



## Visualizzazione

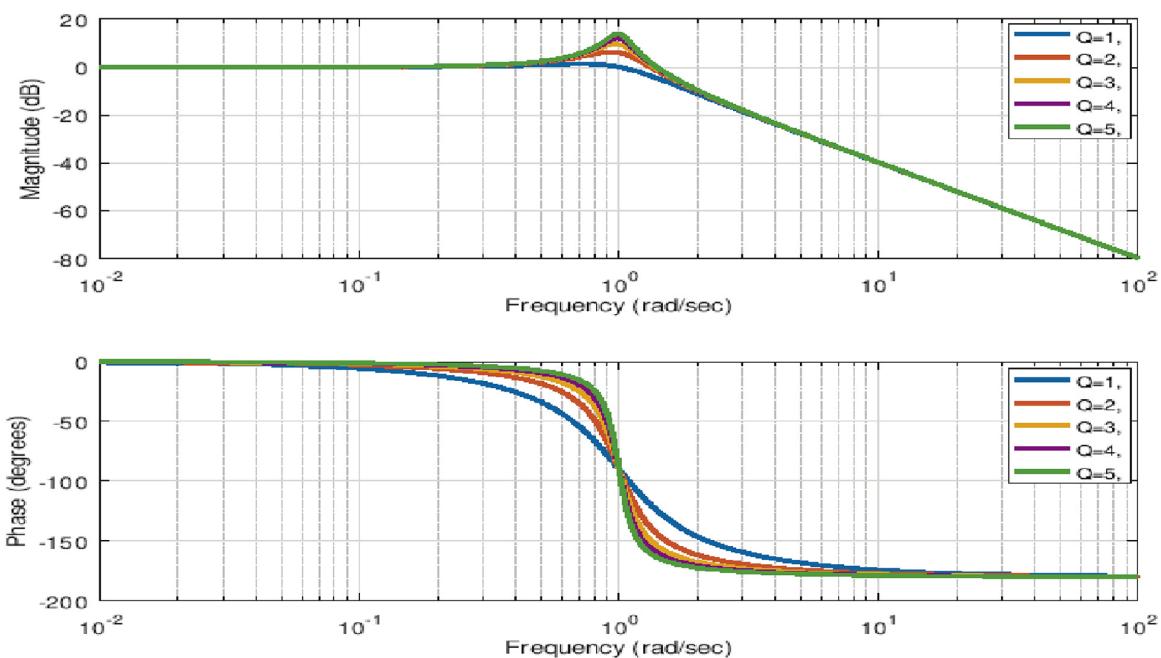
La rappresentazione grafica della risposta armonica è in genere visualizzata nei **diagrammi di Bode**.

Sono possibili rappresentazioni grafiche alternative estremamente valide con i **diagrammi di Nyquist** e di **Nichols**.

[Lezione 18 - 09/04/2025](#)

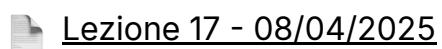
# 4

## Diagrammi di Bode





# Lezione 18 - 09/04/2025



[Lezione 17 - 08/04/2025](#)

Lezione non disponibile, e studiata da libro e slide. Riporto le slide di seguito

[attachment:d4b8e460-f81d-45c0-b192-0c2fecedd45a:Lezione\\_18\\_-09-04-2025.pdf](#)



[Lezione 19 - 10/04/2025](#)

# Risposta in Frequenza

A.K.A. RISPOSTA ARMONICA

E' una proprietà dei sistemi lineari asintoticamente stabili

Se applichiamo un segnale d'ingresso sinusoidale

$$u(t) = U_M \sin(\omega t)$$

Esaurito il transitorio, l'uscita sarà ancora sinusoidale

$$y(t) = |Y(w)| \sin(\omega t + \phi(w))$$

# Diagrammi di Bode

MODULO E FASE

## Diagramma di modulo (o ampiezza)

Rappresenta il modulo di  $G(j\omega)$  al variare della pulsazione  $\omega$

$|G(j\omega)|$  e  $\omega$  sono espressi in scala logaritmica

Per il modulo si usano i deciBell (dB)

Per la pulsazione  $w$  si usa la scala logaritmica in base 10

$$x_{dB} = 20 \log_{10} (|x|)$$

## Diagramma di fase

Rappresenta la fase di  $G(j\omega)$  al variare della pulsazione  $\omega$

La fase viene espressa in scala lineare

Per la pulsazione  $w$  si usa la scala logaritmica in base 10.

# Diagrammi di Bode

## MODULO E FASE

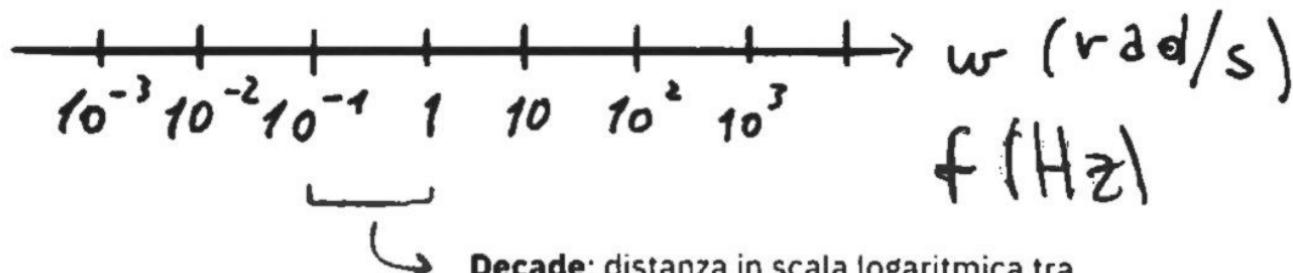
I diagrammi di Bode sono una possibile rappresentazione della risposta in frequenza

Più in generale possono rappresentare generiche funzioni  $G(jw)$  anche instabili, ovvero funzioni per cui la risposta in frequenza non esiste.

# Diagrammi di Bode

PLOTS

Scala delle ascisse nei diagrammi di Bode



**Decade:** distanza in scala logaritmica tra numeri il cui rapporto è 10 (es: 0.2, 2)

**Ottava:** distanza in scala logaritmica tra numeri il cui rapporto è 2 (es: 4, 8)

# Diagrammi di Bode

IL DECIBEL

Da Alexander Graham Bell

Originariamente usato per misurare le perdite di potenza lungo le linee telefoniche

Un Bel è il logaritmo del rapporto tra due livelli di potenza

Il deciBel è la decima parte del Bel

Il Bel (o il deciBel) non è un'unità di misura assoluta è semplicemente il rapporto logaritmico tra due livelli di potenza.

# Diagrammi di Bode

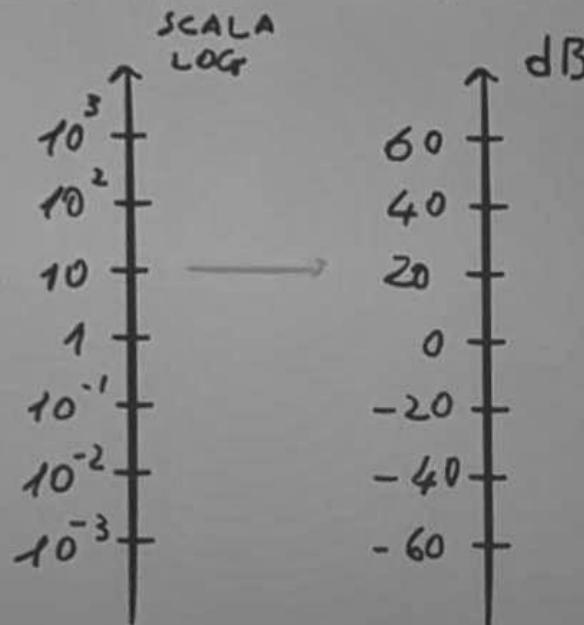
## DIAGRAMMA DI AMPIEZZA

Nei diagrammi di Bode lo spettro di ampiezza viene riportato in unità logaritmiche (dB)

$$x_{dB} = 20 \log_{10} (|x|)$$

$$20 \log_{10} (10) = 20 \cdot 1$$

$$20 \log_{10} (0.1) = 20 \cdot (-1)$$



# Diagrammi di Bode

## DIAGRAMMA DI FASE

L'ordinata del diagramma di fase è rappresentata in scala lineare.

E' quindi un diagramma in scala semi-logaritmica (logaritmica lungo le ascisse; lineare sulle ordinate)

La sua unità di riferimento è il radiante. Rappresentazioni in gradi sono accettate.

$$|G(j\omega)| = |G(-j\omega)| \quad \text{Il modulo è una funzione pari}$$

$$\angle G(j\omega) = -\angle G(-j\omega) \quad \text{La fase è una funzione dispari}$$

# Diagrammi di Bode

VALORI TIPICI

$$\sqrt{2} \rightarrow 3 \text{ dB}$$

$$2 \rightarrow 6 \text{ dB}$$

$$5 \rightarrow 14 \text{ dB}$$

$$20 \rightarrow 26 \text{ dB}$$

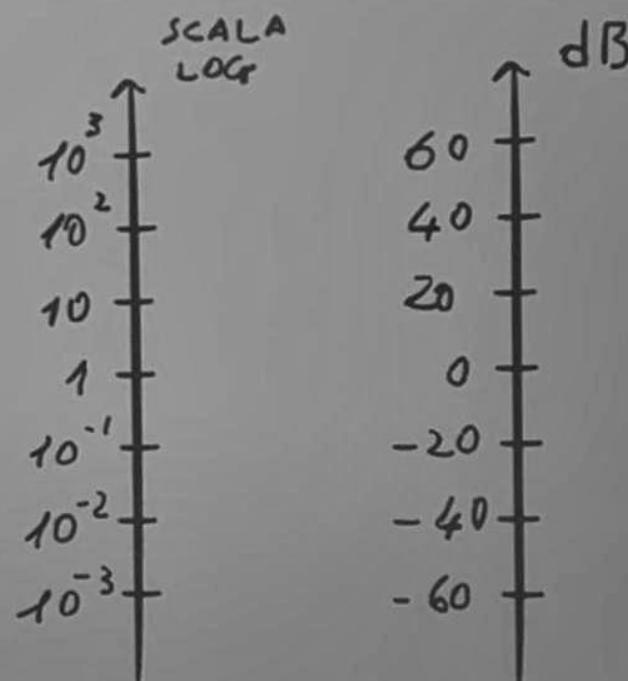
$$50 \rightarrow 34 \text{ dB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow -3 \text{ dB}$$

$$\frac{1}{2} \rightarrow -6 \text{ dB}$$

$$\frac{1}{5} \rightarrow -14 \text{ dB}$$

...



# Diagrammi di Bode

SOMME DI LOGATIMI, SOMME DI ANGOLI

le fasi si sommano e nel diagramma di fase  
non serve usare le scale logaritmiche

$$\left\{ \begin{array}{l} a = |a| e^{j\varphi_a} \\ b = |b| e^{j\varphi_b} \end{array} \right. \rightarrow |a \cdot b| = \underbrace{|a| |b|}_{\downarrow} e^{j(\varphi_a + \varphi_b)}$$

poiché per le proprietà dei logaritmi i  
prodotti diventano somme

$$\log(|a \cdot b|) = \log|a| + \log|b|$$

E' utile usare le scale logaritmiche nei  
diagrammi di modulo

# Diagrammi di Bode

$G(s)$  -

## RAPPRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

La forma fattorizzata della funzione di trasferimento rende agevole la costruzione dei diagrammi di Bode

Il valore in dB del modulo è dato dalla differenza tra le sommatorie dei valori in dB dei moduli dei fattori del numeratore e dei fattori del denominatore

L'argomento è dato dalla differenza tra le sommatorie degli argomenti dei fattori del numeratore e dei fattori del denominatore

I diagrammi possono essere ottenuti sommando i contributi di termini corrispondenti alle funzioni elementari

# Diagrammi di Bode

VALORI TIPICI

$$\sqrt{2} \rightarrow 3 \text{ dB}$$

$$2 \rightarrow 6 \text{ dB}$$

$$5 \rightarrow 14 \text{ dB}$$

$$20 \rightarrow 26 \text{ dB}$$

$$50 \rightarrow 34 \text{ dB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow -3 \text{ dB}$$

$$\frac{1}{2} \rightarrow -6 \text{ dB}$$

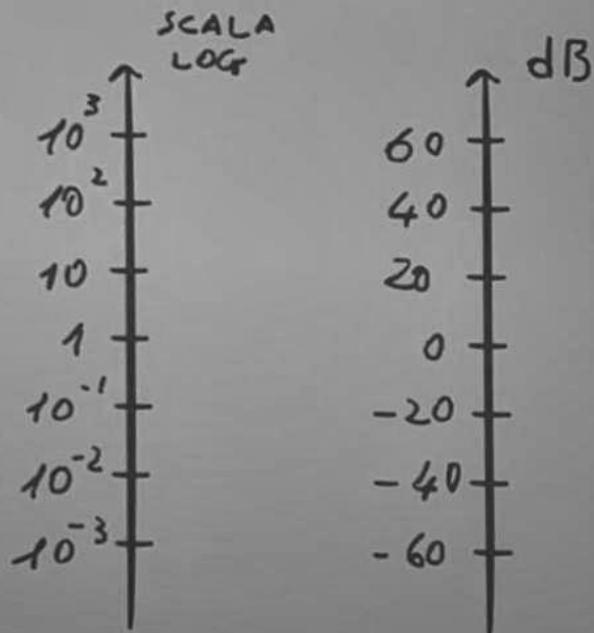
$$\frac{1}{5} \rightarrow -14 \text{ dB}$$

...

$$A_{dB} = 20 \log_{10} A$$

Ogni 6dB il valore di A raddoppia

Ogni 20dB il valore di A è  $\times 10$



# Diagrammi di Bode

## VANTAGGI SCALE LOGARITMICHE

E' possibile avere una rappresentazione dettagliata di grandezze che variano in campi notevolmente estesi

I diagrammi di Bode di sistemi in cascata si ottengono come somma dei diagrammi di Bode dei singoli sottosistemi

I diagrammi di Bode di una funzione data in forma fattorizzata si ottengono come somma dei diagrammi elementari dei singoli fattori

# Diagrammi di Bode

RAPPRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

$$G(j\omega) = \frac{K_B}{(j\omega)^n} \frac{\prod_{i=1}^{m-n} (1 \pm j\omega T_{z_i})}{\prod_{i=1}^{n-m-r} (1 \pm j\omega T_p)}$$

$$G(s) = \frac{\pi(s - z_i)}{\pi(s - p_i)}$$

$$\frac{\prod_{i=1}^n \left(1 \pm j\omega \frac{2\xi_{z_i}}{\omega_{0z_i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{0z_i}^2}\right)}{\prod_{i=1}^r \left(1 \pm j\omega \frac{2\xi_{p_i}}{\omega_{0p_i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{0p_i}^2}\right)}$$

# Diagrammi di Bode

RAPPRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

guadagno di Bode

$$G(j\omega) = \frac{K_B}{(j\omega)^n} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (1 + j\omega T_{z_i})}{\prod_{i=1}^{n-h-r} (1 + j\omega T_{p_i})}$$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\zeta = j\omega$        $h$

poli nell'origine      tipo del sistema

zeri semplici

poli semplici

zeri complessi e coniugati

$$\frac{\prod_{i=1}^n \left(1 + j\omega \frac{2\xi_{z_i}}{\omega_{0z_i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{0z_i}^2}\right)}{\prod_{i=1}^r \left(1 + j\omega \frac{2\xi_{p_i}}{\omega_{0p_i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{0p_i}^2}\right)}$$

poli complessi e coniugati

I diagrammi possono essere ottenuti sommando i contributi di termini corrispondenti alle funzioni elementari

# Diagrammi di Bode

RAPPRESENTAZIONE DELLE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

Caso con soli poli e zeri semplici

$$\log|G(j\omega)| = \sum_{i=1}^m \log|1 \pm j\omega T_{z_i}| - \sum_{i=1}^n \log|1 \pm j\omega T_{p_i}|$$

$$\not \propto G(j\omega) = \sum_{i=1}^m \not \propto(1 \pm j\omega T_{z_i}) - \sum_{i=1}^n \not \propto(1 \pm j\omega T_{p_i})$$

# Diagrammi di Bode

POLO REALE

$$G_T(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad \left|_{s=j\omega} \right. = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

polo -  $\frac{1}{\tau}$

Fase:

$$\angle G(j\omega) = -\arctan \omega\tau$$

$$\text{IF } \omega^2\tau^2 \ll 1 \Rightarrow \angle G(j\omega) \approx 0^\circ$$

$$\text{IF } \omega^2\tau^2 \gg 1 \Rightarrow \angle G(j\omega) \approx -90^\circ$$

$$\text{IF } \omega\tau = 1 \Rightarrow \angle G(j\omega) = -45^\circ$$

Caso Polo Stabile

$\tau > 0$

Questi sono 3  
punti: come li  
uniamo?

# Diagrammi di Bode

FUNZIONE ELEMENTARE: GUADAGNO COSTANTE

Funzione di risposta armonica

$$G(s) = K \rightarrow G(j\omega) = |K| e^{j\varphi}$$

Modulo:  $|G(j\omega)| = |K|$

# Diagrammi di Bode

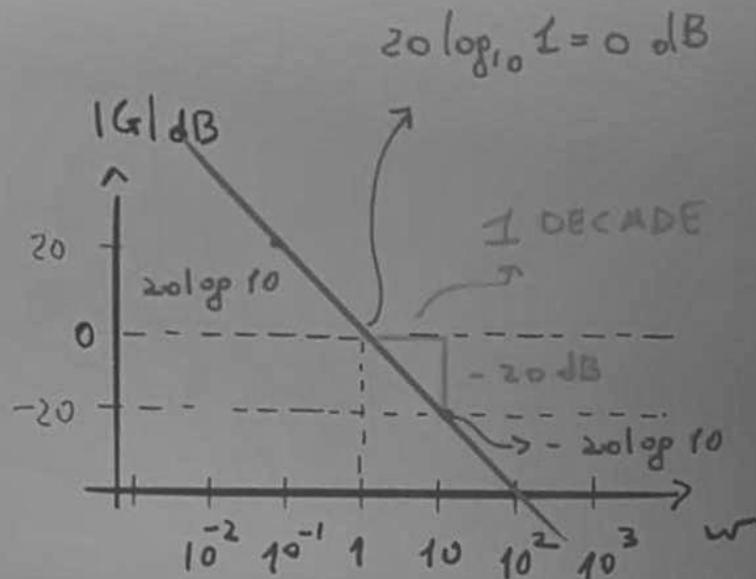
POLO NELL'ORIGINE

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad \boxed{s=j\omega} \quad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

Modulo:  $|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$

$$\Rightarrow 20 \log_{10} \omega^{-1} = -20 \log_{10} \omega$$

Retta in diagramma logaritmico che passa per  $\omega=1$  con modulo 0 dB e pendenza -20dB/dec (ovvero -6 dB/ottava)



# Diagrammi di Bode

POLO REALE

$$G_r(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \xrightarrow{s=j\omega} \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

$$\text{polo} - \frac{1}{\tau}$$

Modulo:

$$|G_r(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

Fase:

$$\angle G_r(j\omega) = -\arctan \omega\tau$$

# Diagrammi di Bode

POLO REALE

$$G_r(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad \left| \begin{array}{l} \\ S=j\omega \end{array} \right. = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

$\text{polo} - \frac{1}{\tau}$

Modulo:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

$$\text{If } \omega^2\tau^2 \ll 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$$

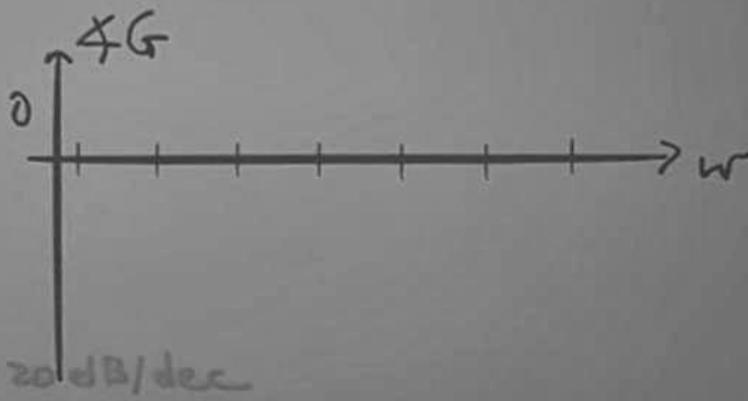
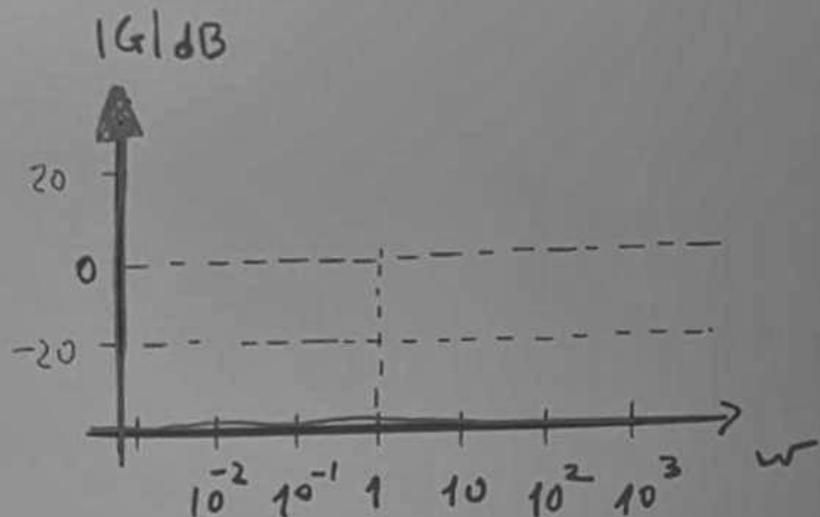
$$\text{If } \omega^2\tau^2 \gg 1 \Rightarrow |G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{1}{\omega\tau} =$$

$$= 20 \log \left( \frac{1}{\tau} \right) - 20 \log(\omega)$$

NUMERO

RETTA CON PENDENTE

-20 dB/dec



# Diagrammi di Bode

POLO REALE

$$G_r(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad \left|_{s=j\omega} \right. = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

polo -  $\frac{1}{\tau}$

$$\omega = \frac{1}{\tau}$$

Punto di rottura  
cambia la pendenza



Errore massimo  
nel punto di rottura

$$|G_r(j\omega)|_{\omega=\frac{1}{\tau}} = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -3 \text{dB}$$

Modulo:

$$|G_r(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

$$\text{IF } \omega^2\tau^2 \ll 1 \Rightarrow |G_r(j\omega)|_{\omega_0} = 0 \text{ dB}$$

$$\text{IF } \omega^2\tau^2 \gg 1 \Rightarrow$$

$$|G_r(j\omega)|_{\omega_0} = 20 \log\left(\frac{1}{\tau}\right) - 20 \log(\omega)$$

# Diagrammi di Bode

POLO REALE

$$G_r(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad \left|_{s=j\omega} \right. = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

polo  $- \frac{1}{\tau}$

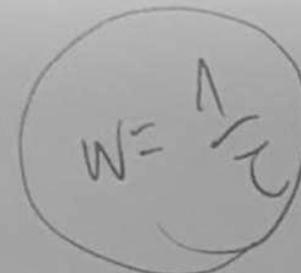
Fase:

$$\angle G(j\omega) = -\arctan \omega\tau$$

$$\text{IF } \omega^2\tau^2 \ll 1 \Rightarrow \angle G(j\omega) \approx 0^\circ$$

$$\text{IF } \omega^2\tau^2 \gg 1 \Rightarrow \angle G(j\omega) \approx -90^\circ$$

$$\text{IF } \omega\tau = 1 \Rightarrow \angle G(j\omega) = -45^\circ$$



## REGOLA

Considerare fase nulla una decade prima del punto di rottura;

Pari a  $-90^\circ$  una decade dopo il punto di rottura;

Effettuare un raccordo lineare, passando esattamente per il valore  $-45^\circ$  nel punto di rottura.

Caso Polo Stabile

$\tau > 0$

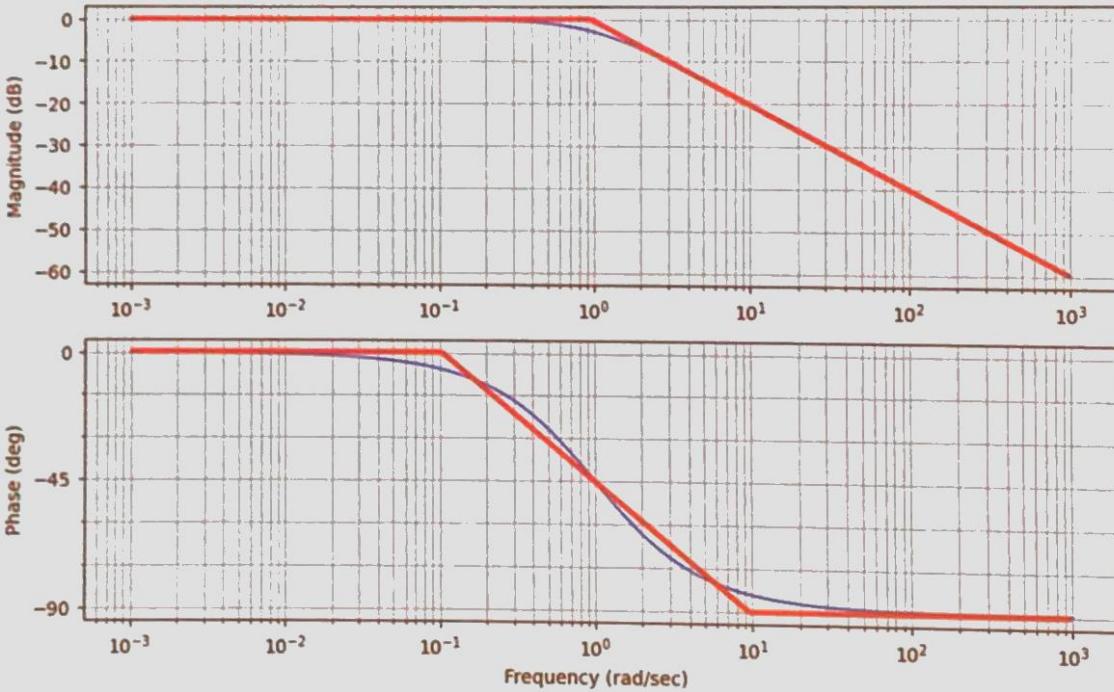
Questi sono 3 punti: come li uniamo?

# Diagrammi di Bode

POLO REALE

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

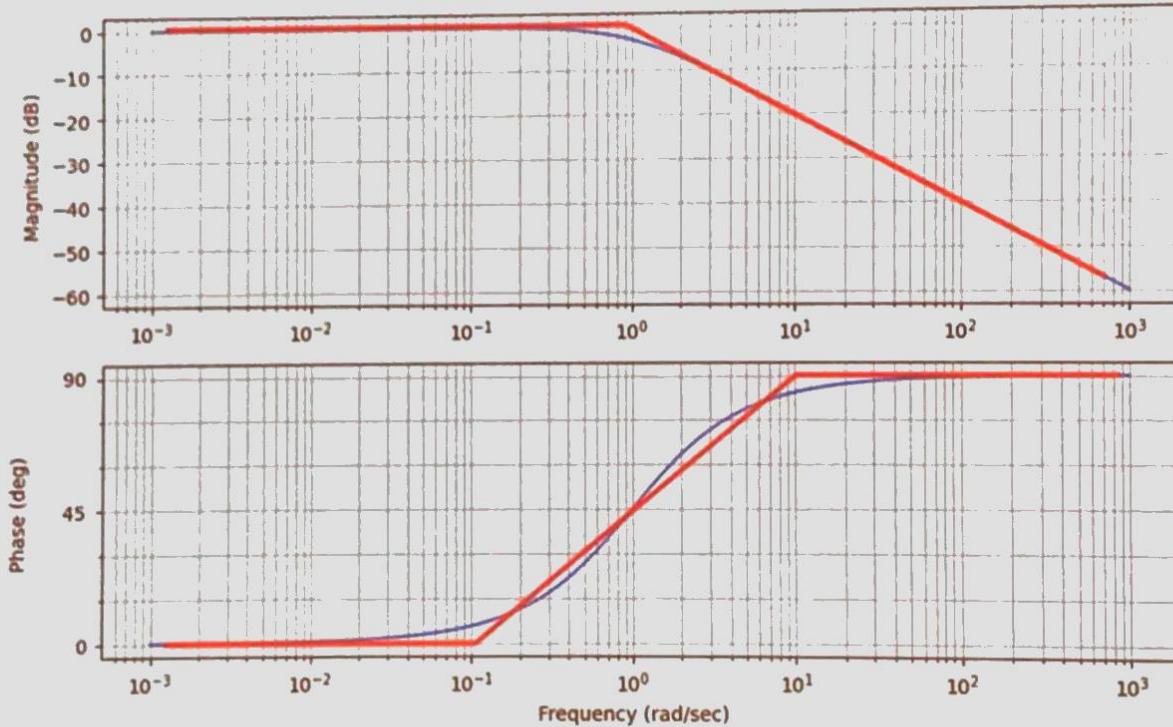
$$\tau = 1$$



# Diagrammi di Bode

POLO REALE

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - j\omega}$$



# Diagrammi di Bode

POLO REALE

$$G_r(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad \left| \begin{array}{l} \\ S=j\omega \end{array} \right. - \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

polo -  $\frac{1}{\tau}$  ↪

Distanza massima tra la rappresentazione asintotica e l'andamento reale si ha per

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\tau} \Rightarrow c_{rr} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3 \text{ dB}$$

$$\ln \omega = \frac{1}{2\tau} \Rightarrow |G(j\omega)|_{\omega=\frac{1}{2\tau}} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} \approx 1 \text{ dB} \Rightarrow |c_{rr}| \approx 1 \text{ dB} - 0 \text{ dB} = 1 \text{ dB}$$

vero ↓ asintotico ↓

$$\ln \omega = \frac{2}{\tau} \Rightarrow |G(j\omega)|_{\omega=\frac{2}{\tau}} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+4}} \approx -7 \text{ dB} \Rightarrow |c_{rr}| \approx 7 \text{ dB} - 6 \text{ dB} = 1 \text{ dB}$$

L'errore e' massimo nel punto di rottura, e si riduce simmetricamente rispetto ad esso

# Diagrammi di Bode

ZERO SEMPLICE

$$G(s) = 1 + s\tau \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$$

Modulo:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$$

$$\text{IF } \omega^2\tau^2 \ll 1 \Rightarrow |G(j\omega)| = 0 \text{ dB}$$

$$\text{IF } \omega^2\tau^2 \gg 1 \Rightarrow |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \omega\tau$$

Fase:

$$\times G(j\omega) = \arctan \omega\tau$$

Il modulo è una retta nel diagramma logaritmico di pendenza +20 dB/dec (+6 dB/ottava)

La fase salirà di +90 gradi

I diagrammi di Bode di uno zero semplice si ottengono ribaltando attorno all'asse delle ascisse quelli dei poli semplici

# Diagrammi di Bode

ZERO SEMPLICE

$$G(j\omega) = 1 + j\omega$$

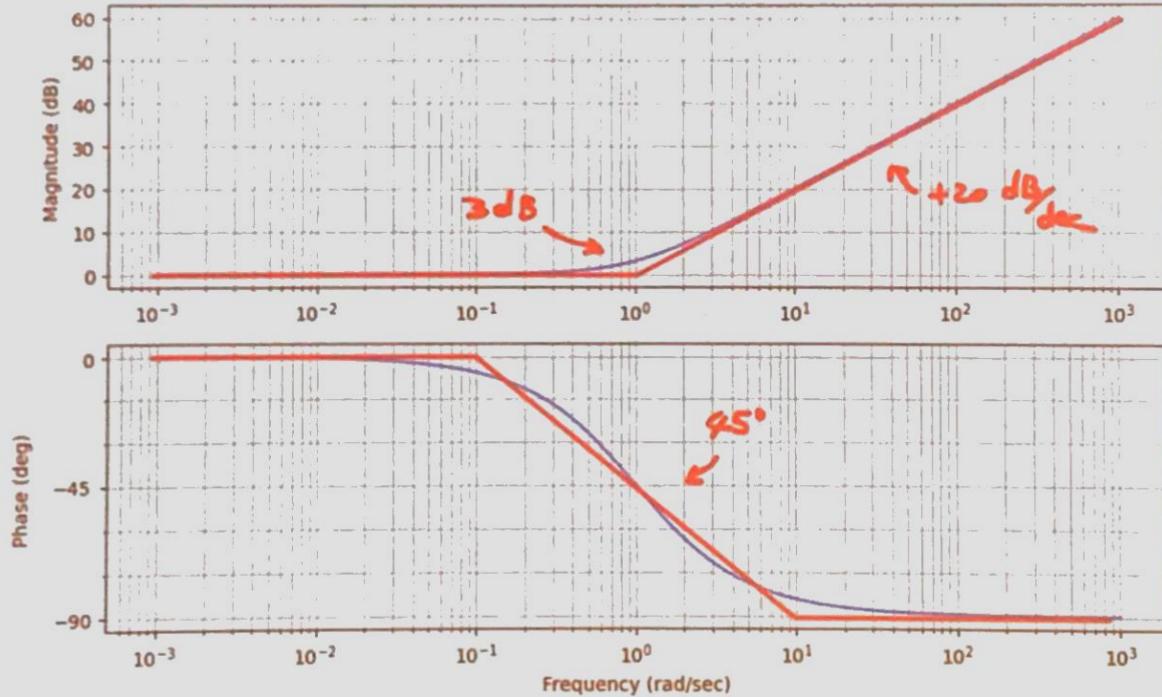
$$\tau = 1$$



# Diagrammi di Bode

ZERO SEMPLICE

$$G(j\omega) = 1 - j\omega$$



# Diagrammi di Bode

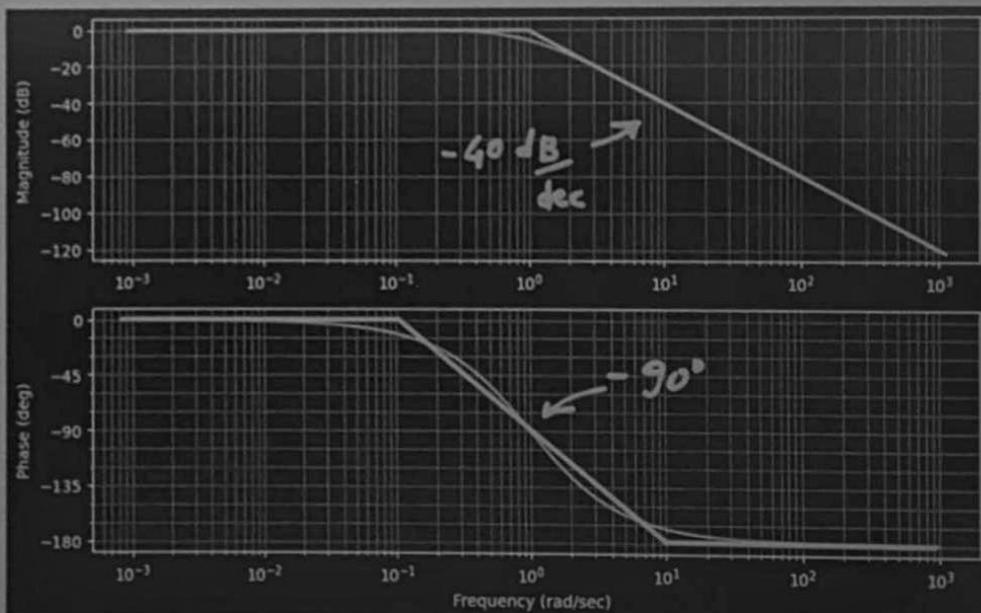
POLI DOPPI

$$G_r(s) = \frac{1}{(1+s)^2} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{(1+j\omega)^2}$$

Prodotto di due poli semplici



Con i logaritmi i prodotti diventano somme (modulo) e la fase si somma





# Lezione 19 - 10/04/2025

 [Lezione 18 - 09/04/2025](#)

Lezione non disponibile, e studiata da libro e slide. Riporto le slide di seguito

[attachment:e75600c2-322e-4b58-bb16-d6f441df64fc:Lezione\\_19\\_-10042025.pdf](#)

 [Lezione 20 - 15/04/2025](#)

# Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

$$|G(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad A$$

calcoliamo il valore nel punto di rottura  $\omega = \omega_0$

$$\Rightarrow |G(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{4\xi^2}} = -20 \log(2\xi) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \xi = 0 \\ 0 \text{ dB} & \xi = 1/2 \\ -3 \text{ dB} & \xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -6 \text{ dB} & \xi = 1 \end{cases}$$

## REGOLA PRATICA

Considerare il diagramma asintotico  
solo se lo smorzamento è  $> 0.3$

se smorzamento è piccolo, l'approssimazione  
asintotica non va bene

caso limite: equivale a due poli  
reali (avevamo visto che l'errore  
in questo caso era -6dB)

# Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

$$|G(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

calcoliamo il valore nel punto di rottura  $\underline{\omega = \omega_0}$

$$\Rightarrow |G(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{4\xi^2}} = -20 \log (2\xi) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \xi = 0 \\ 0 \text{ dB} & \xi = 1/2 \\ -3 \text{ dB} & \xi = \sqrt{2}/2 \\ -6 \text{ dB} & \xi = 1 \end{cases}$$

caso limite: equivale a due poli reali (avevamo visto che l'errore in questo caso era -6dB)

# Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

$$G_r(s) = \frac{1}{1 + \frac{2}{\omega_*} s + \frac{s^2}{\omega_*^2}} \quad \xrightarrow{s=j\omega} \quad G_r(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2}{\omega_*} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_*^2}}$$

$$|G_r(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_*^2}\right)^2 + 4 \frac{\omega^2}{\omega_*^2}}}$$

$$\angle G_r(j\omega) = -\arctan 2 \left( \frac{2 \frac{\omega}{\omega_*}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_*^2}} \right)$$

↗

arcotangente definita su quattro quadranti

Diagramma asintotico

$$\text{IF } \omega \ll \omega_* \Rightarrow |G_r(j\omega)| = 0 \text{ dB}$$

$$\text{IF } \omega \gg \omega_* \Rightarrow$$

$$|G_r(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_*^2}} =$$

$$= 40 \log(\omega_*) - 40 \log(\omega)$$

pendenza di -40 dB/dec (-12 dB ottava)

# Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{z}{\omega_0} s + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \quad \stackrel{s=j\omega}{\Rightarrow} \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{z}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$|G(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

|

# Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{z}{\omega_0} s + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \quad \stackrel{s=j\omega}{\Rightarrow} \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{z}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

# Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

$$|G(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

Il massimo dell'ampiezza corrisponde al minimo della funzione:

Posto

$$u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$f(u) = (1-u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2$$

Derivando e uguagliando a zero:

$$\frac{d f(u)}{d u} = 0 = -4u(1-u^2) + 8\zeta^2 u \rightarrow u_{MAX} = \frac{\omega_{MAX}}{\omega_0} = \sqrt{1-2\zeta^2}$$

con  $\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$

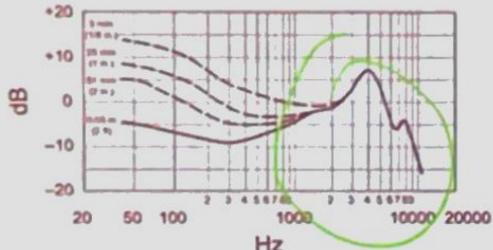


# Diagrammi di Bode

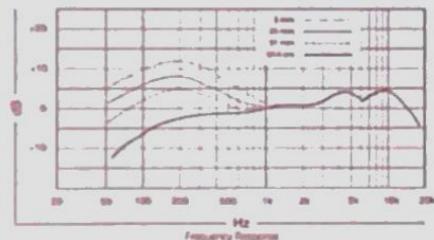
## Microfono

Frequenze udibili dall'orecchio umano tra: 20Hz e 20kHz

Microfoni specializzati per esaltare determinati campi di frequenza



Risposta in frequenza microfono per grancassa (amplifica le basse frequenze)



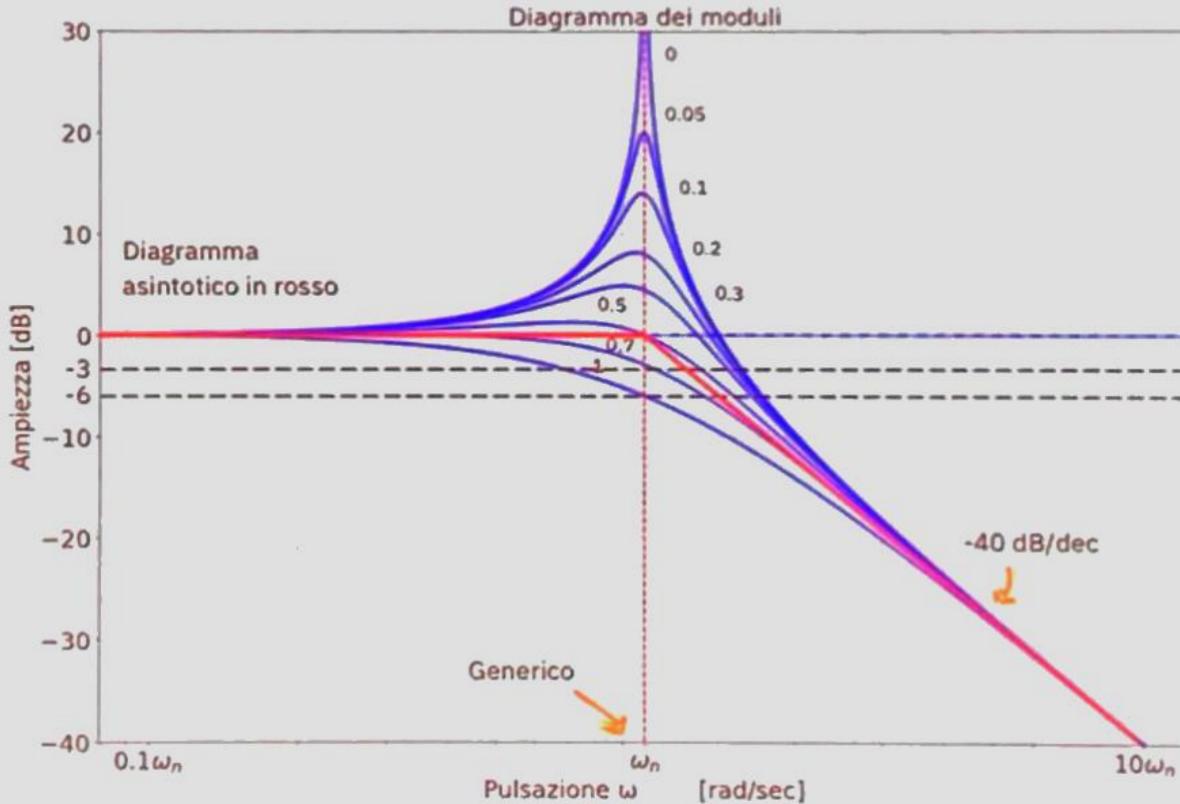
Risposta in frequenza microfono per la voce (leggera amplificazione delle frequenze del parlato)



Risposta in frequenza microfono per chitarra elettrica

# Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI



# Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{\zeta} s + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \quad \xrightarrow{s=j\omega} \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{\zeta} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Smorzamento  $\xi > 0$

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \angle G(j\omega) \approx 0$$

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \angle G(j\omega) \approx -180$$

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \angle G(j\omega) \approx -90$$

## REGOLA PRATICA

Considerare la fase nulla una decade prima del punto di rottura;  
Pari a -180 gradi una decade dopo il punto di rottura;  
Raccordare linearmente i valori passando esattamente per la fase  
-90 gradi nel punto di rottura.

La regola ha senso solo se il fattore di smorzamento è  $> 0.3$

# Diagrammi di Bode

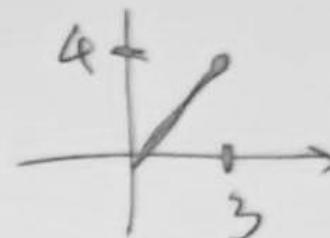
POLI COMPLESSI E CONIUGATI

Esempio

$$z = x + jy = 3 + j4$$

$$|z|^2 = r^2 = x^2 + y^2 = 9 + 16 = 25 \rightarrow |z| = 5$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = \arctan(1.25) = 51.34'$$

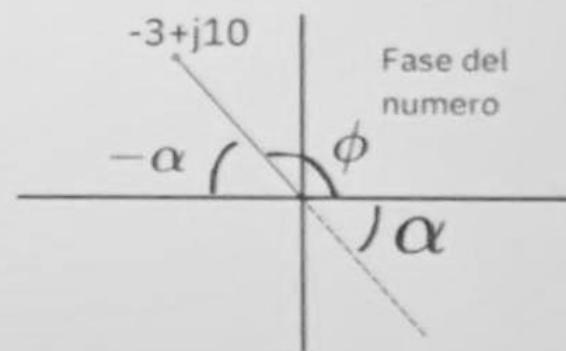


$$z = -3 + j10$$

$$|z|^2 = 9 + 100 = 109 \rightarrow |z| = 10.44$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{10}{-3}\right) = -73.28$$

$$\rightarrow \arctan\left(\frac{\theta}{\alpha}\right) + \pi = 180 - 73.28 = 106.72$$



# Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2}{\omega_0} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Fase:

$$\angle G(j\omega) = -2 \operatorname{atan} \left( \frac{\frac{2\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)$$

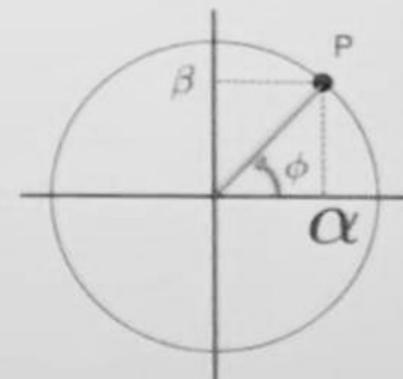
Fase di numeri complessi:

$$\phi = a \tan \frac{\beta}{\alpha} \quad \alpha > 0$$

$$\phi = a \tan \frac{\beta}{\alpha} + \pi \quad \alpha < 0, \beta \geq 0$$

$$\phi = a \tan \frac{\beta}{\alpha} - \pi \quad \alpha < 0, \beta < 0$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(\beta) \quad \alpha = 0, \beta \neq 0$$



# Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI

$$|G(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\rightarrow 20 \log \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Valore del  
modulo al variare  
dello  
smorzamento

Il massimo dell'ampiezza corrisponde al minimo della funzione:

Posto

$$u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$f(u) = (1-u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2$$

Derivando e uguagliando a zero:

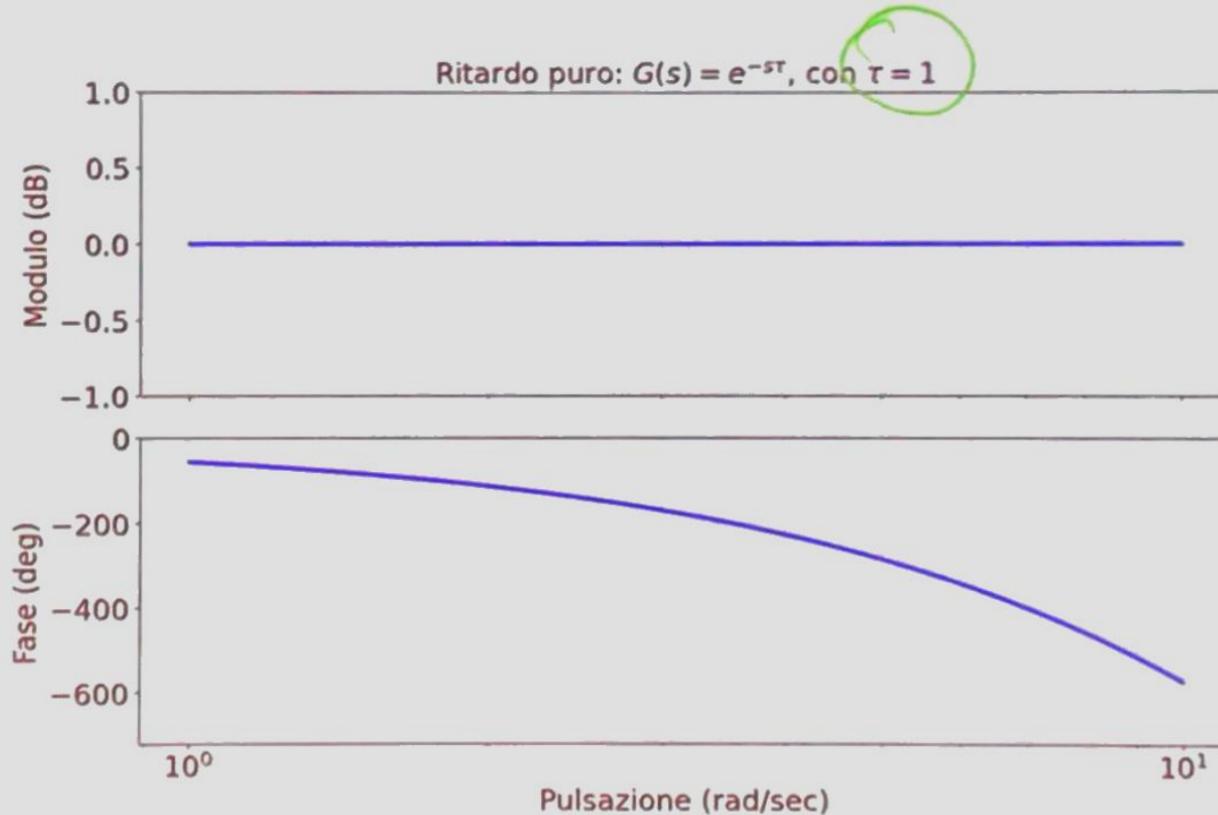
$$\frac{df(u)}{du} = 0 = -4u(1-u^2) + 8\zeta^2 u \rightarrow u_{MAX} = \frac{\omega_{MAX}}{\omega_0} = \sqrt{1-2\zeta^2}$$

con  $\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$

# Diagrammi di Bode

## RITARDO PURO

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$$



# Diagrammi di Bode

RITARDO PURO

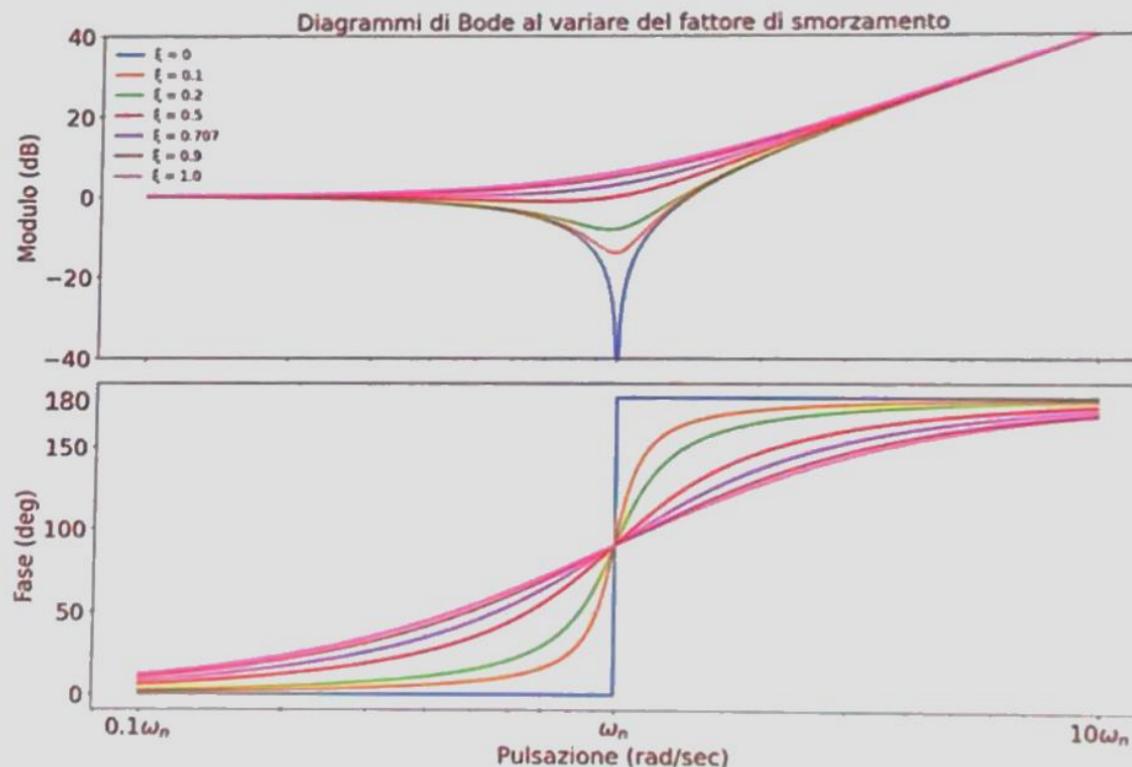
$$G_r(s) = e^{-s\tau} \xrightarrow{s=j\omega} G_r(j\omega) = e^{\overbrace{-j\omega\tau}^{\text{Fase } -\omega\tau}}$$

↓  
modulo 1 (ovvero 0 dB)

# Diagrammi di Bode

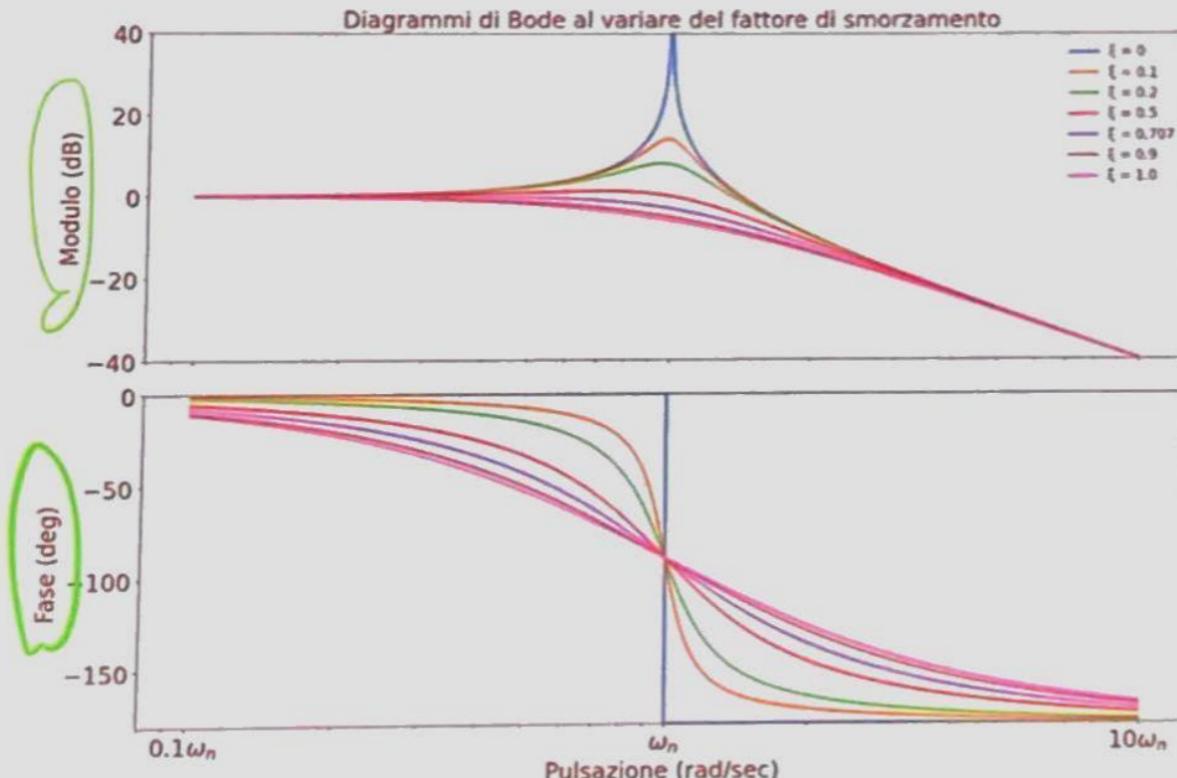
ZERI COMPLESSI E CONIUGATI

$$G(s) = 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} s + \frac{s^2}{\omega_0^2}$$



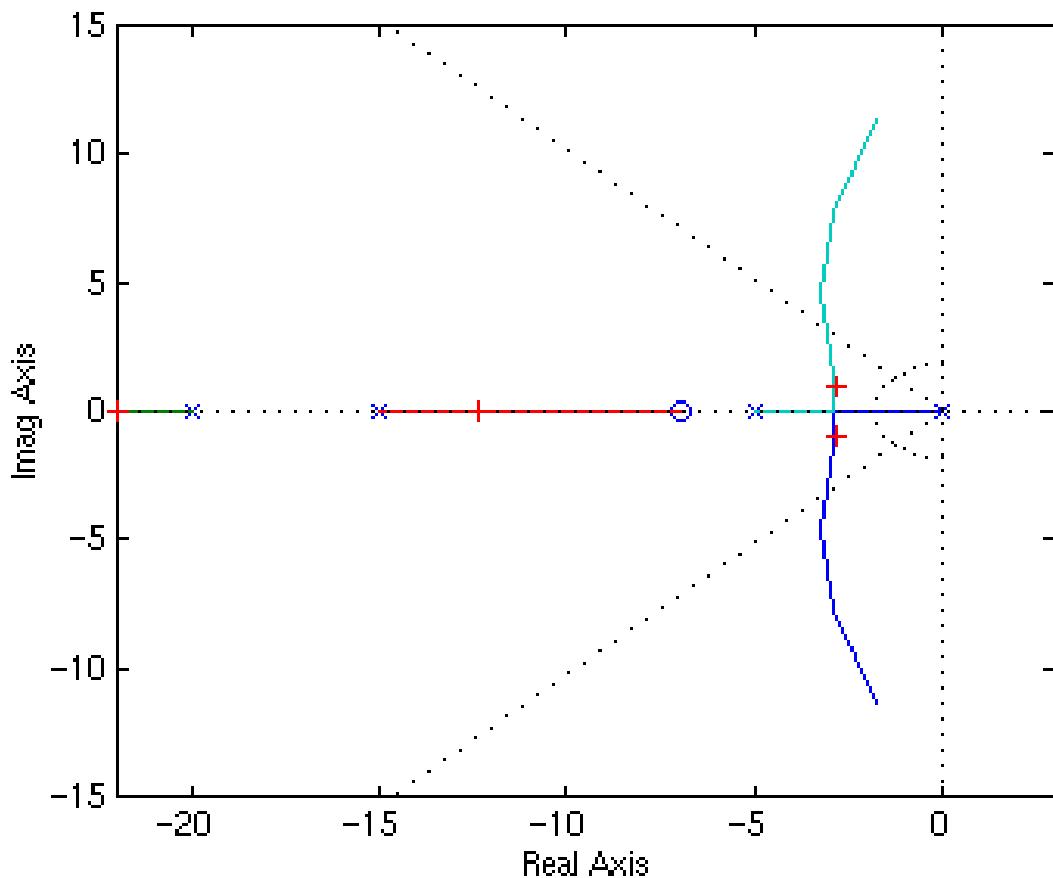
# Diagrammi di Bode

POLI COMPLESSI E CONIUGATI



5

# Luogo delle radici





# Lezione 20 - 15/04/2025

## Lezione 19 - 10/04/2025

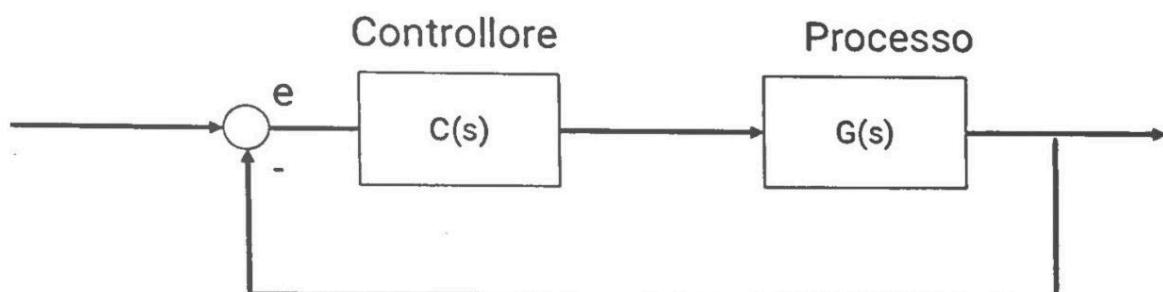
Continuazione dell'esercizio della lezione scorsa (sul tablet, sarà aggiunto alla lezione 19).

## Luogo delle radici

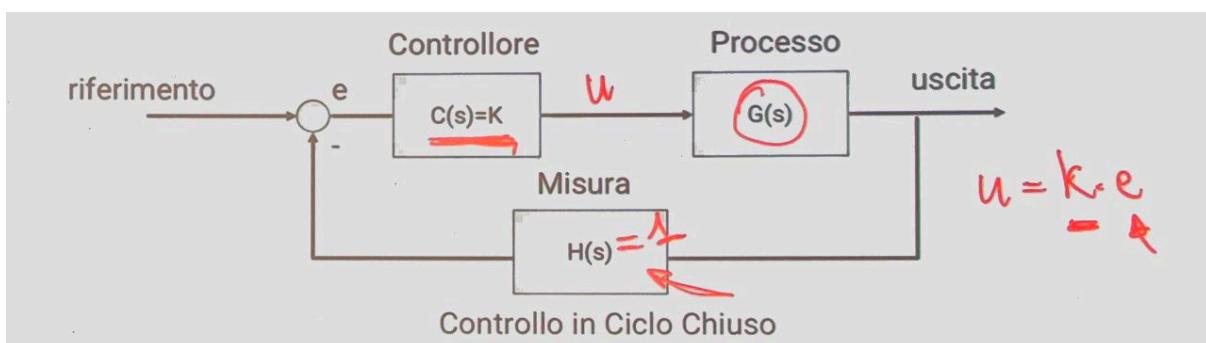
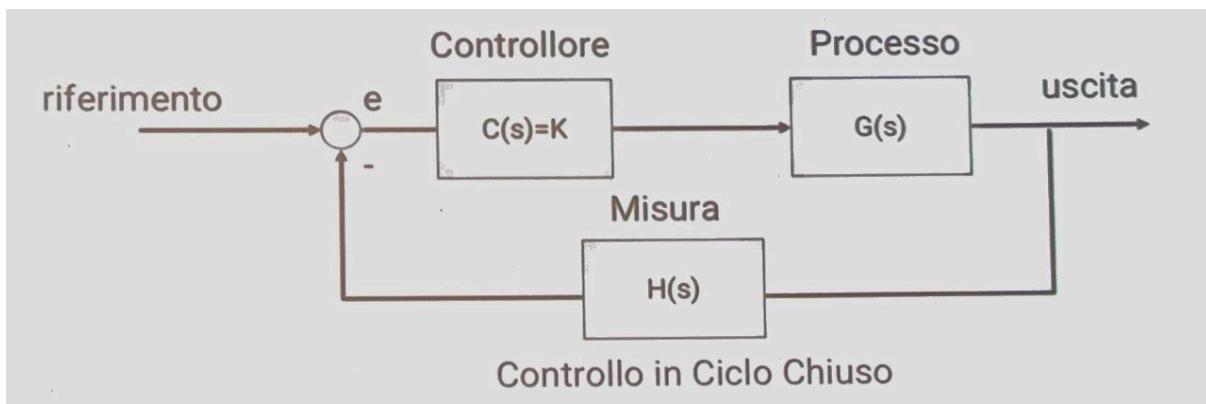
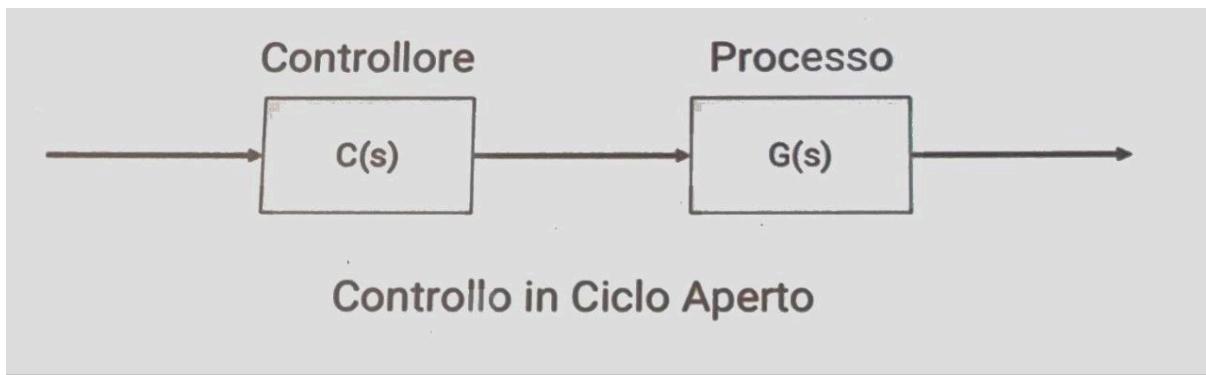
Il **luogo delle radici** è un altro tool molto utile insieme ai **diagrammi di Bode**. Questo strumento è stato inventato da Walter R. **Evans** (celebrato come uno dei padri dell'automatica moderna).

### Luogo delle radici:

Si tratta di un metodo per studiare nel piano complesso l'effetto della reazione negativa sui poli del sistema in catena chiusa, a partire dalla conoscenza della funzione di trasferimento in catena aperta  $G(s)$ .



Imponiamo un controllore particolare, che è una costante di proporzionalità  $K$ . Il controllo può essere sia in il **ciclo aperto** sia in **ciclo chiuso**.



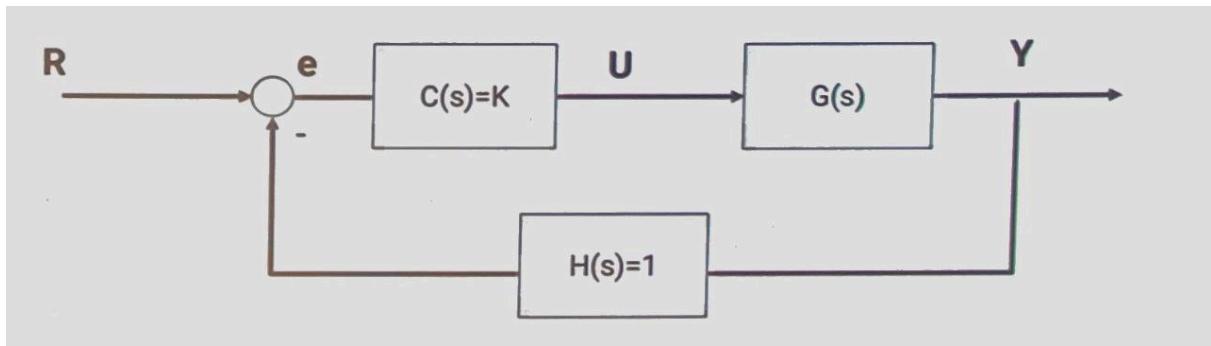
In particolare i controlli in ciclo chiuso determinano stabilità e **performance**.

Il luogo delle radici permette l'**analisi grafico-visuale** delle **variazioni dei poli** in **catena chiusa** al variare di uno o più parametri (eventualmente introdotti da un controllore).

Nel caso di più parametri studieremo il luogo del luogo delle radici (o **contorno delle radici**).

## Anello aperto e chiuso

Entriamo nel dettaglio:



- Scegliamo un controllore tale che  $C(s) = K$
- Il processo è noto ed è  $G(s)$

$$K \cdot G(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = K \cdot \frac{n(s)}{d(s)} \quad (\text{anello aperto})$$

$$W(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)} = \frac{K \cdot n(s)}{d(s) + K \cdot n(s)} \quad (\text{anello chiuso})$$

Nel caso di anello chiuso gli zeri non cambiano, ma cambiano i poli. Questo è il motivo per cui sono in grado di cambiare le performance. Se le radici prima erano instabili adesso posso pensare di scegliere un  $K$  tale che mi permette di spostare queste radici e renderle stabili.

I poli in catena chiusa sono le radici del polinomio  $d(s) + K \cdot n(s)$ .

Chiameremo l'**equazione caratteristica**:

$$d(s) + K \cdot n(s) = 0$$

### Luogo delle radici:

Viene detto luogo delle radici l'insieme delle radici di  $d(s) + K \cdot n(s) = 0$ , al variare di  $K$ .

## Tracciamento

Vediamo un insieme di regole per lavorare con il luogo delle radici.

## Regola 1

### Regola #1

Il numero di radici in ciclo chiuso è uguale al numero di poli della funzione in ciclo aperto.

Questo significa che il numero di **rami** del luogo delle radici è uguale al numero dei poli della funzione di trasferimento in ciclo aperto.

Al variare di  $K$  le radici dell'equazione caratteristica sono punti nel piano complesso e vengono dette **rami**.

Il luogo delle radici si ricava da questa equazione:

$$d(s) + K \cdot n(s) = 0 \quad \frac{n(s)}{d(s)} = -\frac{1}{K}$$

### Condizione di fase

$$\begin{cases} \angle n(s) - \angle d(s) = -\pi \pm 2h\pi & \text{se } K > 0 \\ \angle n(s) - \angle d(s) = \pm 2h\pi & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

Applicare la **condizione di fase** significa costruire il luogo delle radici. Ricorda che ogni  $2\pi$  ritorno nello stesso punto sul piano di Gauss.

### Condizione di modulo

$$\left| \frac{n(s)}{d(s)} \right| = \frac{1}{|K|}$$

Applicare la **condizione di modulo** significa **"tarare"** il luogo delle radici.

## Regola 2

## Regola #2 - da dove parte il luogo e da dove arriva

$$d(s) + K \cdot n(s) = 0$$

Prendendo un  $K \in [0, +\infty]$  e ponendo  $K = 0$  il luogo **parte dai poli a ciclo aperto** del sistema (cioè  $d(s) = 0$ ).

$$\frac{1}{K} \cdot d(s) + n(s) = 0$$

Ponendo  $K = +\infty$  il luogo delle radici **arriva agli zeri a ciclo aperto** del sistema.

Il luogo delle radici parte dai poli del sistema a ciclo aperto, e arriva sugli zeri del sistema a ciclo aperto.

## Riassunto

1. Il numero di rami del luogo è pari al numero di poli, al variare di  $K$ .
2. Il luogo parte, per  $K = 0$ , dai poli a ciclo aperto.
3. Il luogo evolve sino a terminare, per  $K = +\infty$ , sugli zeri a ciclo aperto al finito o all'infinito.

## Esempio pt.1

Prendiamo per esempio:

$$K \cdot G(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad \longrightarrow \quad s(s+1) + K = 0$$

- Se  $K = 0$  si ottengono i punti di partenza  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -1$ , i poli in ciclo aperto.

## Regola 3

### Regola #3 - tutto l'asse reale appartiene al luogo delle radici

Se  $K > 0$  il luogo lascia alla propria destra un numero dispari di punti critici (poli e zeri) sull'asse reale.

Questa regola deriva dalla condizione di fase

$$\begin{cases} \angle n(s) - \angle d(s) = -\pi \pm 2h\pi & \text{se } K > 0 \\ \angle n(s) - \angle d(s) = \pm 2h\pi & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

Un punto  $s$  nel piano di Gauss appartiene al luogo delle radici se la somma delle fasi dei vettori che appartengono alle singolarità (poli o zeri) e terminano nel punto  $s$  è uguale a  $-\pi$  (o  $0$  se  $K < 0$ ).

### Esempio pt.2

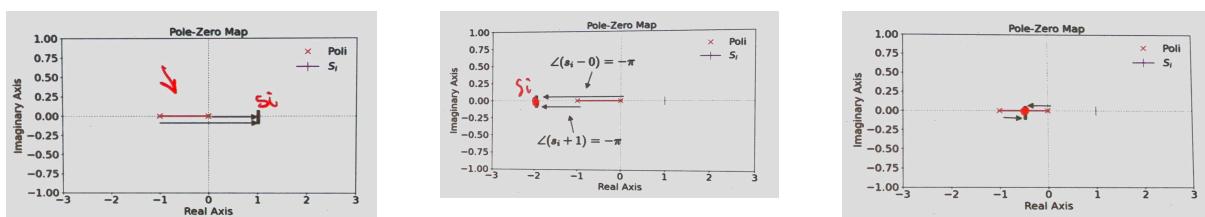
Nell'esempio precedente con:

$$K \cdot G(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad \rightarrow \quad s(s+1) + K = 0$$

Nel nostro esempio per  $K > 0$ :

$$\angle \frac{1}{s(s+1)} = -\pi \pm 2h\pi$$

Possiamo riscontrare tre possibili casi:



Abbiamo quindi trattato i tre casi di  $s_i$  a destra dei poli, a sinistra dei poli e in mezzo ad essi. La conclusione che possiamo trarre dai nostri esempi è che per  $K > 0$  l'unica configurazione possibile è per  $s_i$  in mezzo alle **singolarità** (terza

foto) (questo perché per la regola 3, deve lasciare a destra un numero dispari di singolarità). Tutti i punti tra i due poli fanno quindi parte del luogo delle radici.

Diamo un senso più specifico alla regola 3.

## Regola 4

### Regola #4

Se  $K > 0$  appartengono al luogo delle radici tutti i punti dell'asse reale che lasciano alla propria destra un numero **dispari** di singolarità.

## Regola 5

### Regola #5

Se  $K < 0$  appartengono al luogo delle radici tutti i punti dell'asse reale che lasciano alla propria destra un numero **pari** di singolarità (lo zero è considerato un numero pari).

Andiamo avanti con le regole sul luogo delle radici

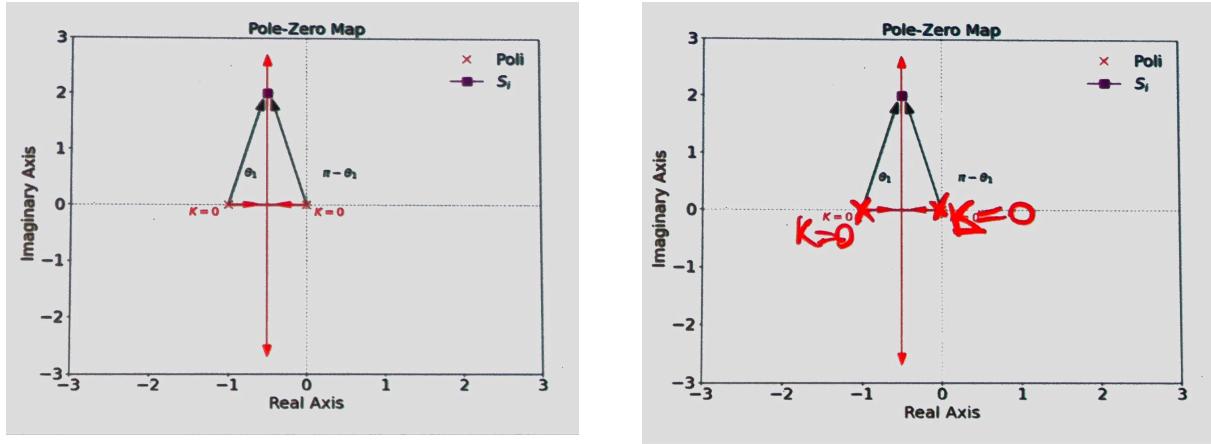
## Regola 6

### Regola #6

Il luogo delle radici è **simmetrico** rispetto all'asse reale

La simmetria rispetto all'asse reale implica che i due poli si comportano in modo simmetrico. Non può esistere il caso in cui uno dei due poli si muove più o meno velocemente dell'altro.

Per  $K > 0$  la condizione di fase sarà:  $\angle \frac{1}{s(s+1)} = -\pi \pm 2h\pi$



Tra i due poli ci sono due frecce discordi proprio a indicare che quella è l'unica direzione lungo il quale si può muovere il punto.

Verifichiamo come prima prendendo dei punti  $s_i$  se verifica la condizione di fase

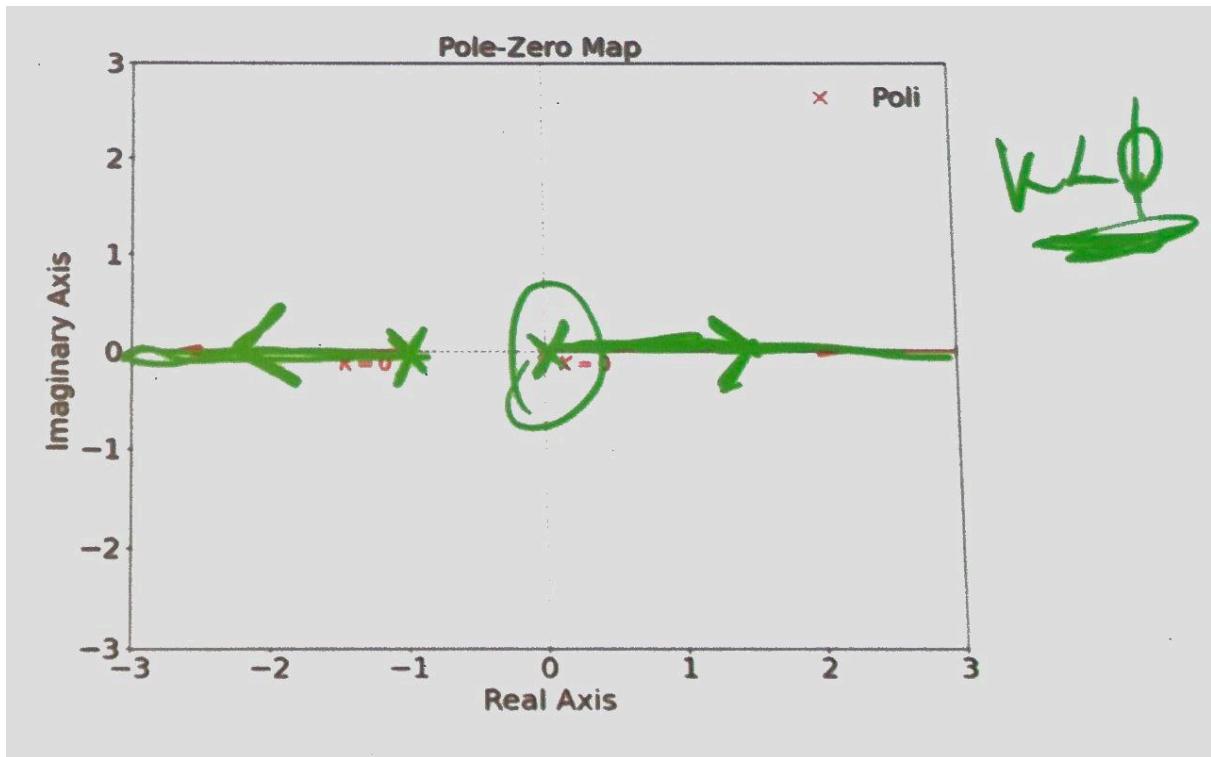
- La condizione di fase non dipende dall'angolo, infatti:

$$-(\cancel{\theta_1} + (\pi - \cancel{\theta_1})) = -\pi \pm 2h\pi$$

$$-\pi = -\pi \pm 2h\pi$$

- Al variare di  $K$  i poli si avvicineranno fino ad arrivare all'asse rosso (**asse di simmetria**).
- Per un certo  $\bar{K}$  avrà due radici reali e coincidenti.

Per  $K < 0$  invece succederà che:



- I poli si allontanano e non si possono formare due radici reali e coincidenti.

[Lezione 21 - 16/04/2025](#)



# Lezione 21 - 16/04/2025

[Lezione 20 - 15/04/2025](#)

## Recap lezione precedente

Gli argomenti trattati sono sul libro:

- Luogo delle radici: capitolo 13
- Risposta in frequenza: capitolo 7 (include anche dei paragrafi sui diagrammi polari e di Nyquist che tratteremo in seguito)

Abbiamo iniziato a parlare di luogo delle radici e abbiamo detto che prendendo la funzione di trasferimento in anello aperto, l'idea è quella di studiare la stessa in anello chiuso e considerare un controllore proporzionale. Andremo quindi a vedere i poli del sistema in ciclo chiuso.

Abbiamo anche detto che dall'equazione caratteristica ricaviamo la condizione di fase:

$$\begin{cases} \angle n(s) - \angle d(s) = -\pi \pm 2h\pi & \text{se } K > 0 \\ \angle n(s) - \angle d(s) = \pm 2h\pi & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

e allo stesso modo andiamo a considerare anche la condizione di modulo:

$$\left| \frac{n(s)}{d(s)} \right| = \frac{1}{|K|}$$

La condizione di fase non è una condizione operativa, ma ci è utile conoscere le regole che derivano da essa e che ci aiutano a tracciare il luogo delle radici.

## Tara del luogo delle radici

Fino ad ora abbiamo applicato sempre la condizione di fase per capire come si muove il luogo delle radici. Adesso è il momento di applicare la **condizione di**

**modulo** per capire qual è il valore di  $\bar{K}$  che mi permette di avere i poli in una certa posizione.

Prendiamo lo stesso esempio della lezione precedente, ovvero  $K \cdot G(s) =$

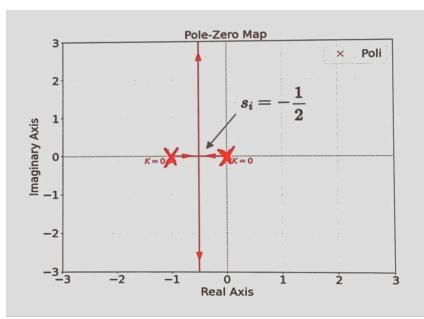
$$\frac{K}{s(s+1)}$$

Applicando la condizione di modulo e imponendo un  $s_i$  che appartiene al luogo delle radici (se non appartiene significa che non sto rispettando la **condizione di fase**, e a me interessa rispettare entrambe le condizioni):

$$\left| \frac{n(s)}{d(s)} \right| = \frac{1}{|K|} \xrightarrow{s_i} K \Big|_{s=s_i} = \frac{|n(s)|}{|d(s)|}$$

Nota bene che la condizione di fase è sempre verificata per tutti i punti appartenenti al luogo delle radici. Seguendo la nostra  $G(s)$  otteniamo:

$$K \Big|_{s=s_i} = \frac{|s_i(s_i + 1)|}{|1|} \rightarrow \bar{K} = \left| \frac{-0.5(-0.5 + 1)}{1} \right| = \frac{1}{4}$$



Sapendo che i miei poli sono in 0 e -1 (trovati ieri facendo i conti), quindi devo trovare  $s_i$  in mezzo a 0 e -1 (ovvero mi serve un punto sull'asse di simmetria), ottenendo  $s_i = -\frac{1}{2}$ . Ho anche trovato che si tratta di 2 poli reali e coincidenti con  $s_i = -\frac{1}{2}$ .

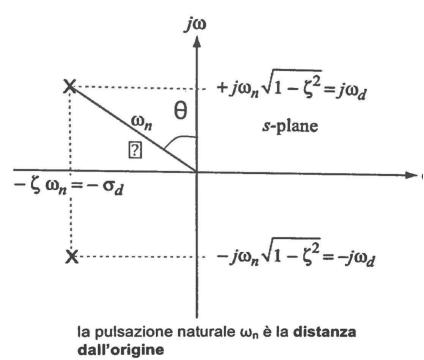
## Poli complessi e coniugati

Prendiamo adesso un **sistema del secondo ordine** che presenta **poli complessi e coniugati**, che ha la forma:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n j \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\omega_n \sin(\theta) = \xi\omega_n \Rightarrow \theta = \arcsin(\xi)$$



## Pulsazione naturale e costante

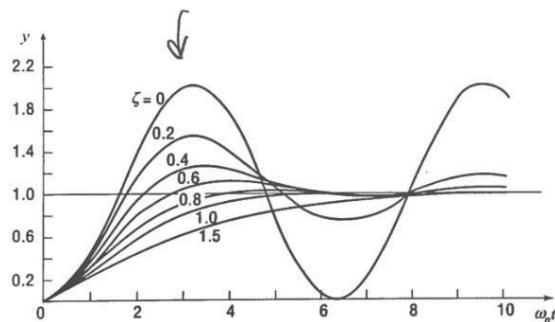
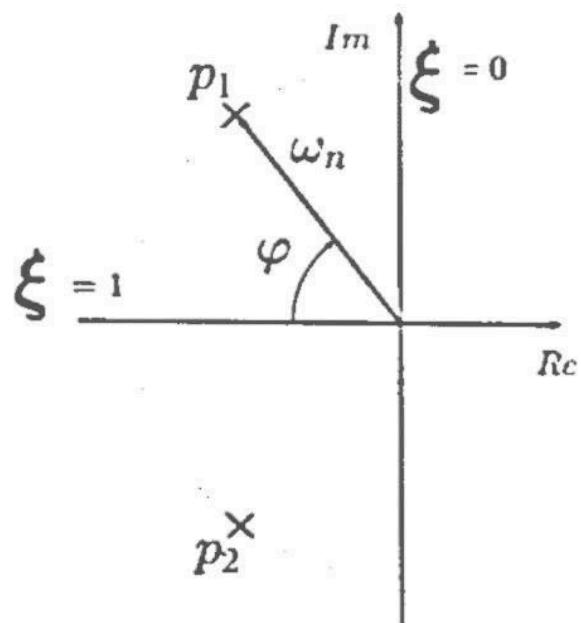
Se teniamo costante la pulsazione  $\omega_n$  e facciamo variare lo smorzamento  $\xi$  abbiamo  $\theta = \arcsin(\xi)$ , ci stiamo muovendo lungo la circonferenza di raggio  $\omega_n$  e abbiamo le seguenti casistiche:

- **Smorzamento nullo:** i poli sono sull'asse immaginario.
- Smorzamenti pari a 1 (**smorzamento perfetto**): i poli sono sull'asse reale e coincidenti. Hanno un comportamento esponenziale.
- Smorzamento tra 0 e 1 (**oscillazioni smorzate**): i poli sono complessi e coniugati.
- Smorzamento maggiore di 1 (**sistema sovrasmorzato**): i poli sono reali e distinti. Un sistema sovrasmorzato implica una risposta lenta senza overshoot.

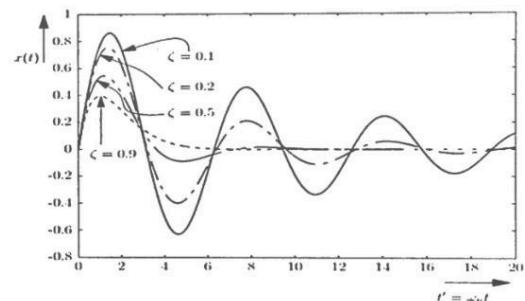
$$0 < \xi < 1$$

$$\frac{\pi}{2} > \varphi > 0$$

$\omega_n$  costante



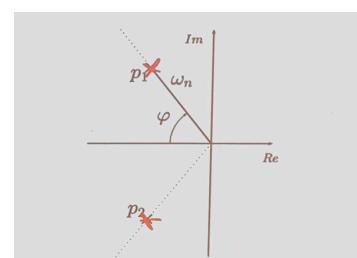
Risposta al gradino



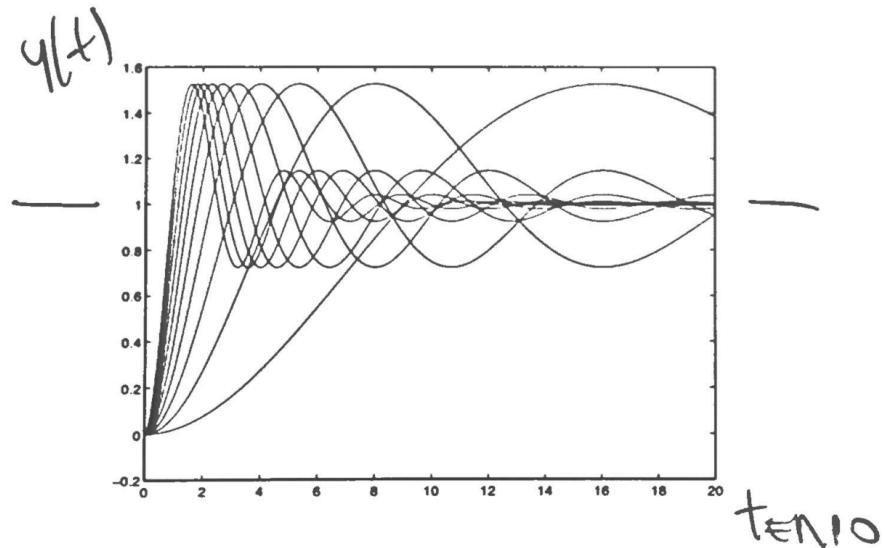
Risposta all'impulso

## Smorzamento costante

Quando lo smorzamento è costante non stiamo più percorrendo una circonferenza, ma ci stiamo muovendo lungo la direzione radiale (**linee a smorzamento costante**):

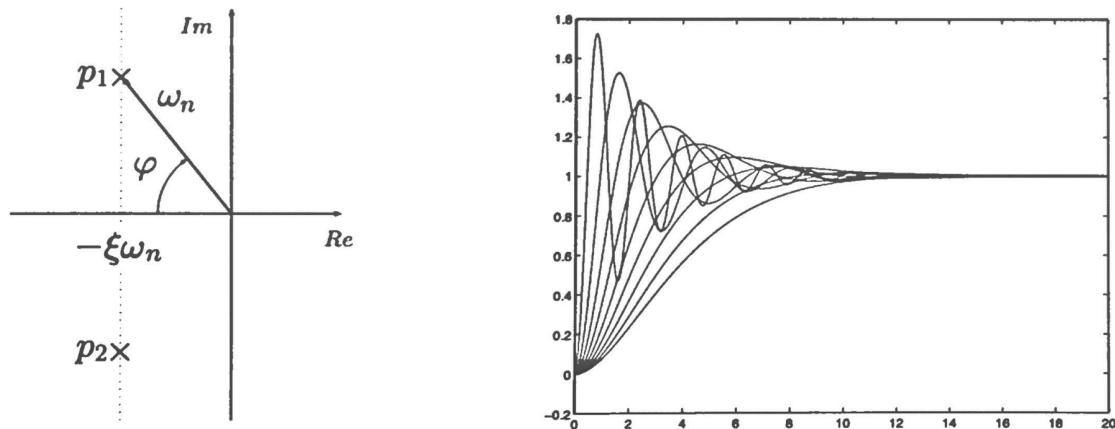


Se si mantiene costante lo smorzamento ( $\xi = 0.2$ ) e si fa variare la pulsazione ( $\omega_n \in [0.2, 0.4, \dots, 2]$ ) si otterrà la seguente risposta al gradino:

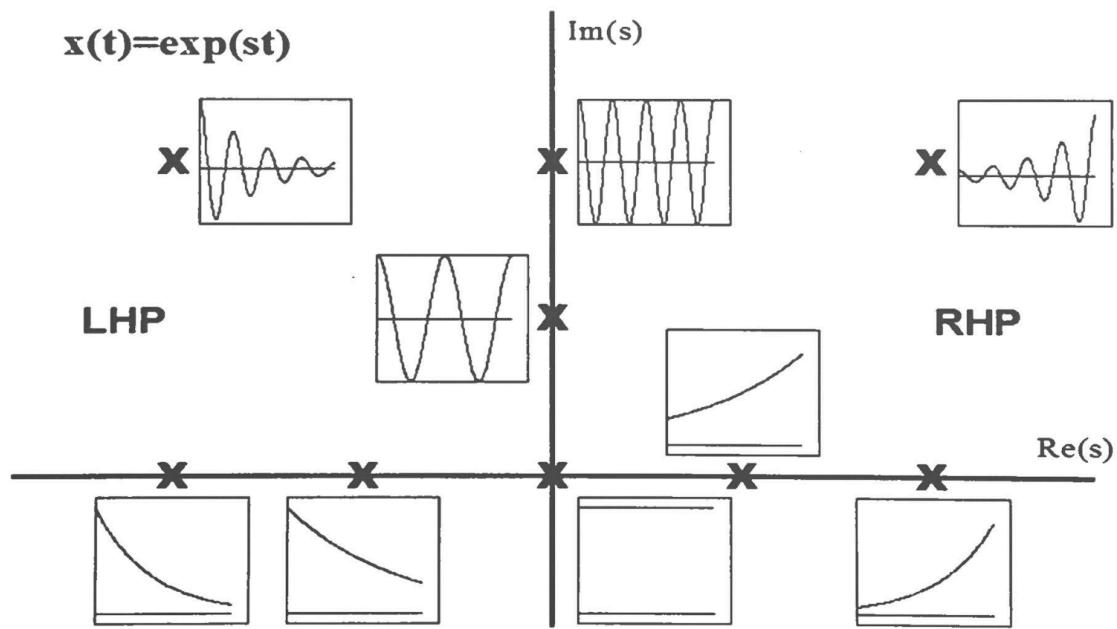


### Tempo di assennato costante

Prendiamo  $t_{\text{ass}} \approx -\frac{1}{\xi\omega_n} \ln(0.05)$  allora avremo uno smorzamento  $\xi$  che varia tra 0.1 e 0.9, e invece dovremo mantenere costante il prodotto  $\xi\omega_n = 0.4$ .



### Configurazioni sul piano complesso



## Vincoli e performance

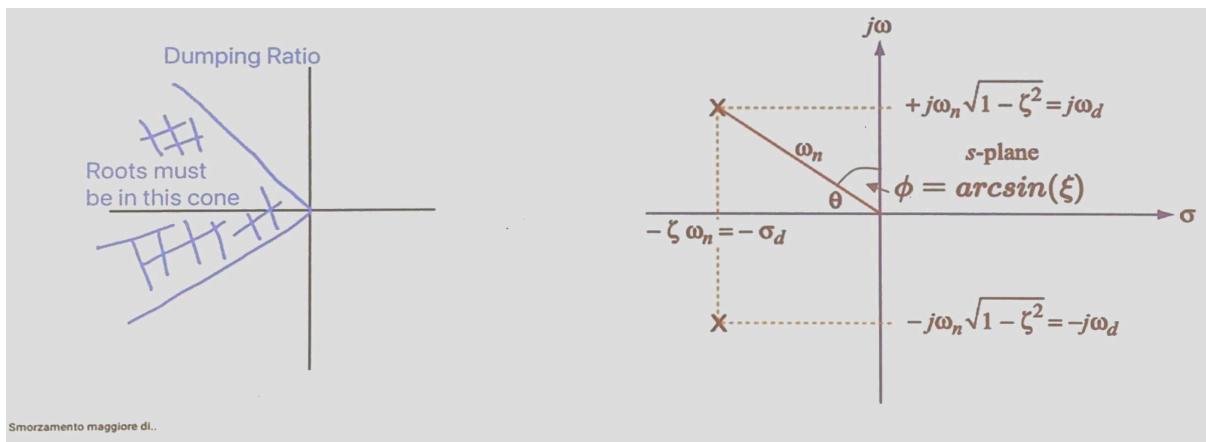
A partire dalle **specifiche di prestazione** (per esempio  $t_{\text{ass}}$ ) otteniamo dei requisiti su pulsazione e smorzamento, e infine ricaviamo dei **requisiti sulla posizione dei poli**.

### Vincoli sullo smorzamento

Se ci viene dato come requisito che il nostro sistema deve avere almeno un certo smorzamento  $\bar{\xi}$ :

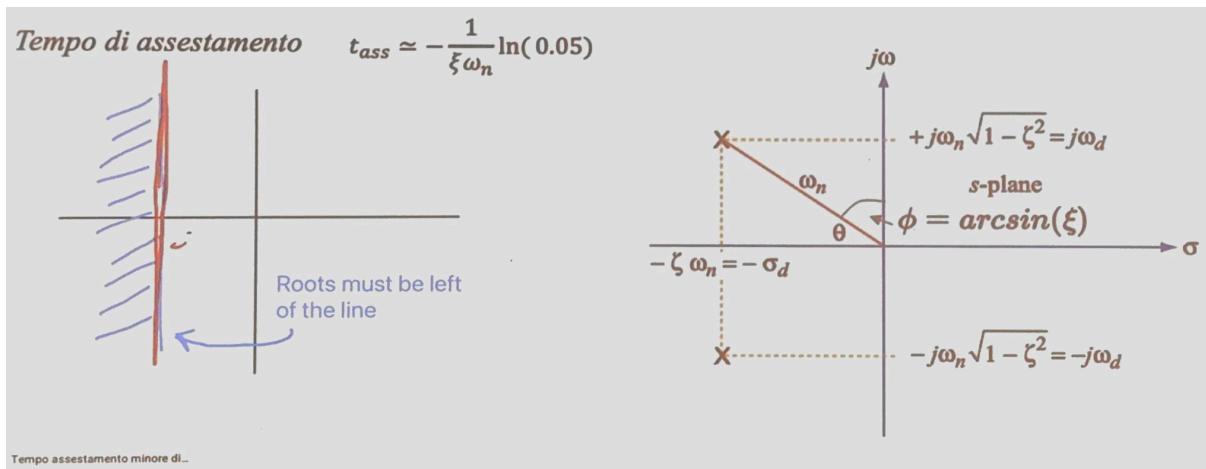
$$\bar{\xi} \rightarrow \theta = \arcsin(\bar{\xi})$$

Ottieniamo un **cono** corrispondente allo smorzamento desiderato (sinistra). Tutti i poli che si trovano internamente al cono sono ammissibili.



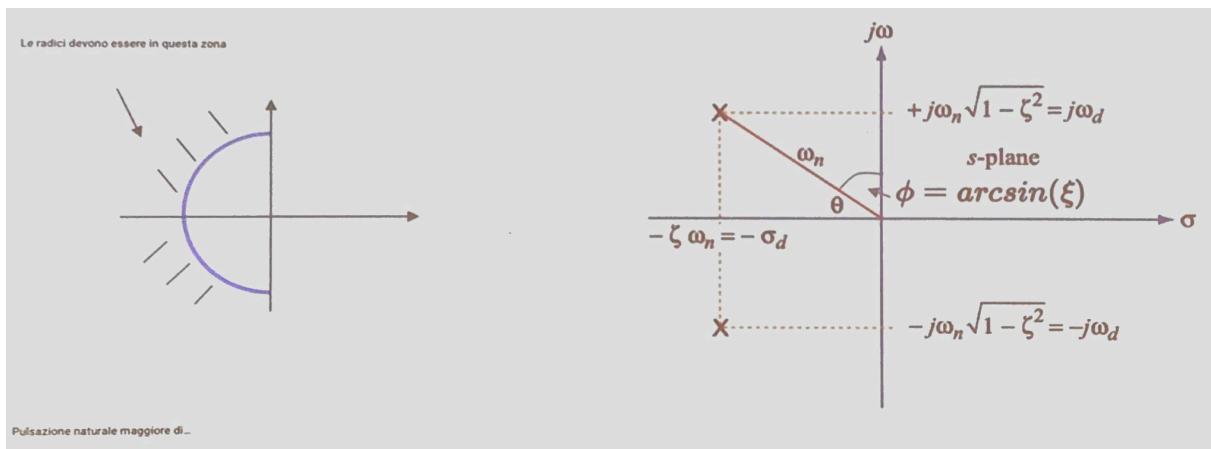
## Vincoli sul tempo di assestamento

Fissare un tempo di assestamento massimo significa fissare una retta verticale e spostarci alla sua sinistra:

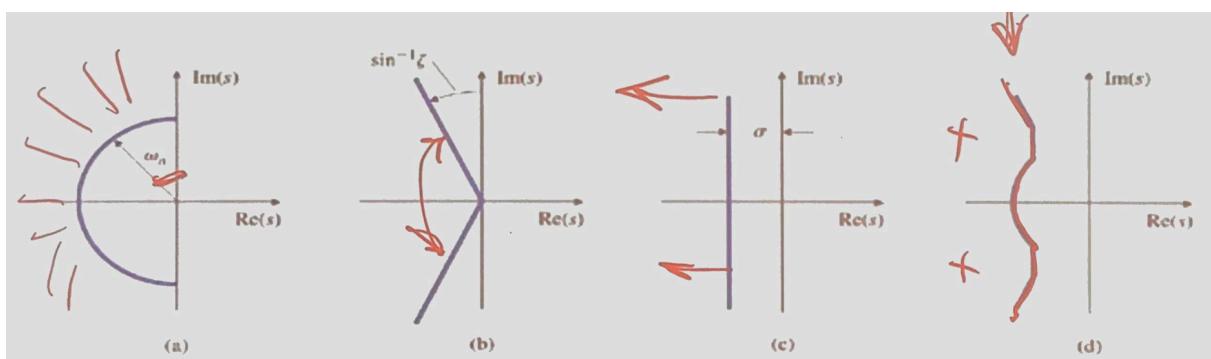
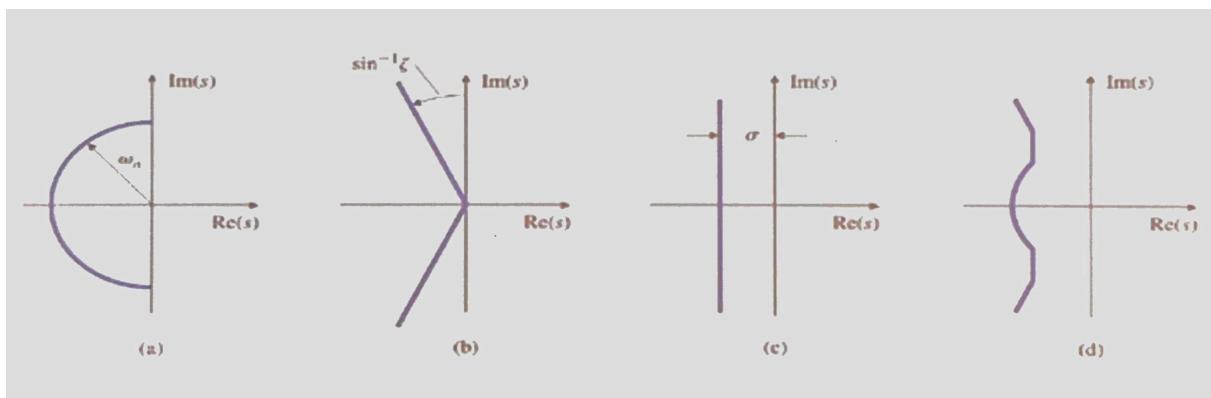


## Vincoli sulla pulsazione

Se infine fissiamo una pulsazione naturale minima, questo significa che dobbiamo spostarci all'esterno della circonferenza di raggio  $\bar{\omega}_n$ :



## Vincoli multipli



Anche nel caso di **vincoli multipli** avremo la simmetria rispetto all'asse reale. Quindi, lungo l'asse immaginario, tutto ciò che succede sopra l'asse reale, succederà specularmente al di sotto.

## Sistemi di ordine superiore a 2

Tutte le cose dette fino ad ora valgono solo per i sistemi del secondo ordine, ovvero sistemi con due poli. Non valgono su **sistemi di ordine maggiore di 2** con più di due poli. In questi casi, si considerano delle approssimazioni e si

considerano i due **poli dominanti** in un certo transitorio. Esaurito il transitorio la posizione dei due poli dominanti determinerà la risposta del sistema (quindi escluderò gli altri poli del sistema).

## Ancora sul tracciamento del I.d.r.

### Regola generale

#### Regola generale

Il luogo delle radici ha **rami** che non si sovrappongono mai; al massimo si incrociano in punti singolari, detti **punti multipli**.

In un punto multiplo la **radice multipla**  $s_i$  è soluzione di:

$$\begin{cases} d(s) + Kn(s) = 0 \\ d'(s) + Kn'(s) = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{d'(s)}{d(s)} = \frac{n'(s)}{n(s)}$$

Nel caso di una funzione con  $m$  zeri e  $n$  poli, si verifica che:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i}$$

Riprendiamo il solito esempio  $K \cdot G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$

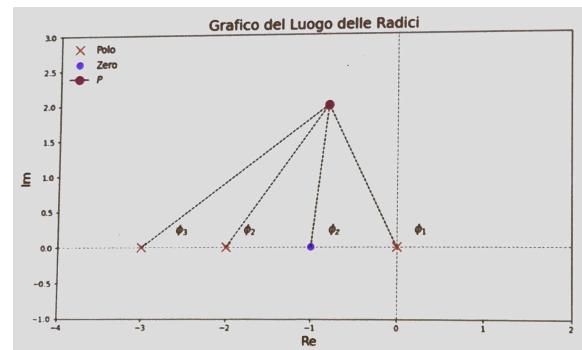
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} \rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} = 0$$

$$s + 1 + s = 0 \rightarrow s = -\frac{1}{2} \quad (\text{punto multiplo})$$

### Asintoti del luogo delle radici

Vediamo qual è il percorso che fanno le radici per  $K \rightarrow \infty$

Partendo da un punto  $P$  (molto lontano dall'asse reale), questo formerà con ciascun punto di singolarità un angolo  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ . Ma se  $P$  è molto lontano (è un punto all'infinito), tutti questi angoli sono molto simili e approssimabili a  $\phi_\infty$ .



Applicando la condizione di fase:

$$\begin{cases} \angle n(s) - \angle d(s) = -\pi \pm 2h\pi & \text{se } K > 0 \\ \angle n(s) - \angle d(s) = \pm 2h\pi & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

$$\phi_1 \approx \phi_2 \approx \phi_3 \approx \phi_4 \approx \phi_\infty$$

Per  $K > 0$  avremo che:

$$\phi_\infty \cdot (n_z - n_p) = -\pi \pm 2h\pi$$

L'angolo degli asintoti è:

$$\phi_\infty = \frac{-\pi \pm 2h\pi}{n_z - n_p}$$

Per  $K < 0$  avremo che:

$$\phi_\infty \cdot (n_z - n_p) = \pm 2h\pi$$

L'angolo degli asintoti è:

$$\phi_\infty = \frac{\pm 2h\pi}{n_z - n_p}$$

## Regola pratica

### Regola pratica sugli angoli di partenza degli asintoti dall'asse reale

Gli asintoti dividono il piano complesso in parti **equiangole** e **simmetriche** rispetto all'asse reale.

I **rami uscenti** (o **entranti**) in **poli** (o **zeri**) di molteplicità maggiore di uno, dividono il piano in parti equiangole e simmetriche rispetto all'asse reale.

## Centro degli asintoti

Il **centro degli asintoti** è nel baricentro individuato da poli e zeri

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

$n - m$  rappresenta la differenza tra poli e zeri e  $\sigma$  è il punto sull'asse reale in cui tutti gli **asintoti** si incontrano.

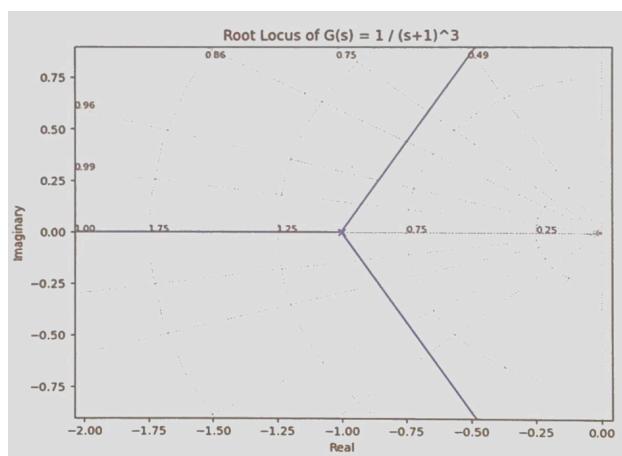
Riprendendo il solito esempio  $K \cdot G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} = \frac{0 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$$

## Esempio 1

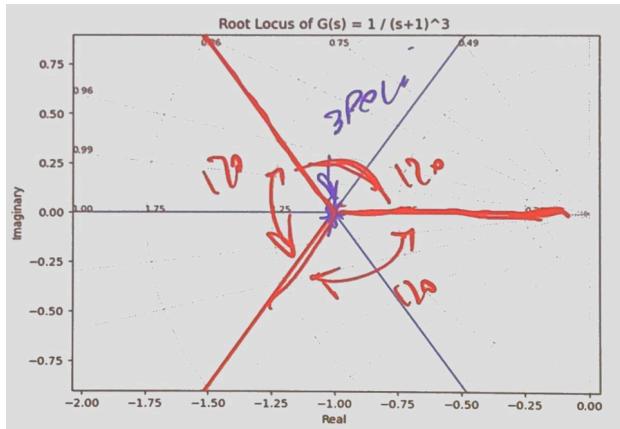
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

Iniziamo trattando il caso per  $K > 0$



Il centro degli asintoti in questo caso coincide con la posizione dei tre poli. Gli asintoti mi dicono come si comporta il luogo delle radici per  $K$  che va a infinito, dividendo il piano in sezioni equiangole. Un asintoto già lo conosco proprio perché per  $K > 0$  devo lasciare a destra un numero dispari di singolarità, di conseguenza l'unica soluzione ammissibile è per  $s < -1$ . Gli altri due asintoti si tracciano sfasando il primo di  $120^\circ$  e poi di altri  $120^\circ$  ( $360^\circ/3=120^\circ$ ).

Nel caso di  $K < 0$  invece avremo



## Esempio 2

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

$$1 + K \cdot G(s) = 0$$

$$s(s+1)(s+2) + K = 0 \rightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

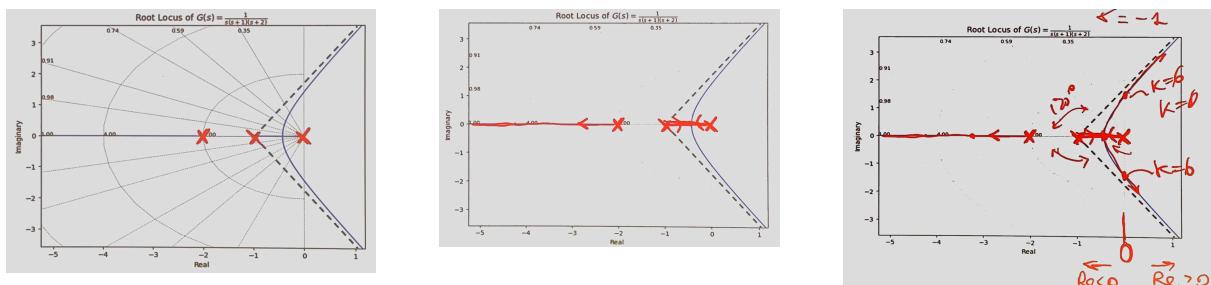
3	1	2
2	3	$K$
1	$6 - K$	0
0	$K$	

Si ottiene quindi un'equazione con un parametro  $K$ , che possiamo studiare con il **criterio di Routh**.

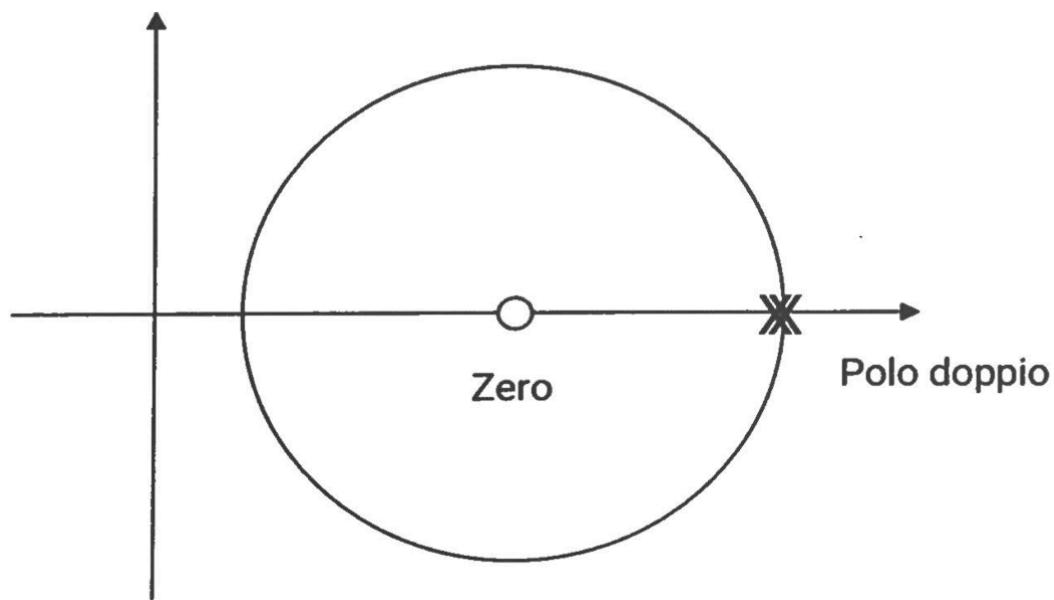
Dall'equazione ausiliaria  $3s^2 + K_{CR} = 0 \rightarrow K = K_{CR} = 6 \rightarrow 3s^2 + 6 = 0 \rightarrow \omega_{CR} = \sqrt{2}$ .

Applicando la regola per  $K > 0$  il luogo delle radici sarà per  $s < -2$  e per  $-1 < s < 0$ . In quest'ultimo intervallo è anche presente un **punto multiplo** (calcolabile). Gli **asintoti** sono quelli tratteggiati nel grafico.

Nota che i poli si muovono sulla curva blu che è luogo delle radici e che segue gli asintoti. I due poli si staccheranno dall'asse reale andando verso gli asintoti. Nota bene che a un certo punto i poli passeranno dall'asse reale negativo a quello reale positivo, diventando i **poli instabili**. Questo accadrà esattamente per il  $K$  calcolato prima ovvero  $K = 6$ .

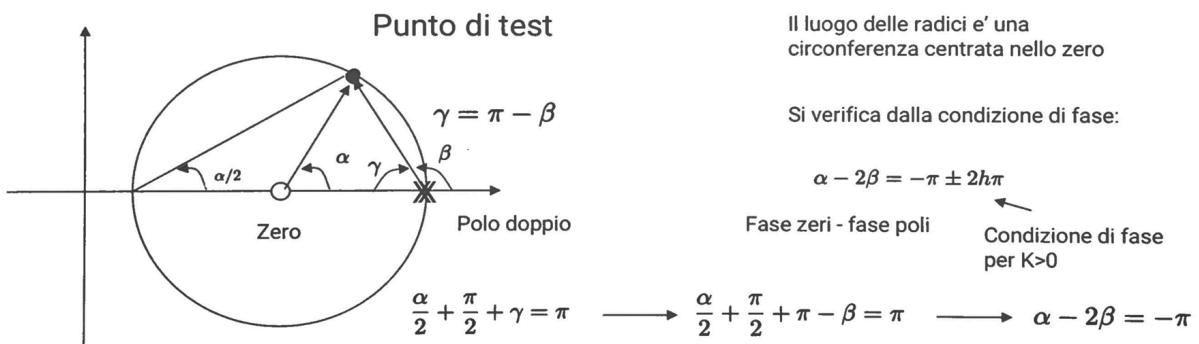


### Esempio 3 - due poli e uno zero finito



In questo caso il luogo delle radici è una circonferenza centrata nello zero.

Verifichiamolo tramite la condizione di fase:

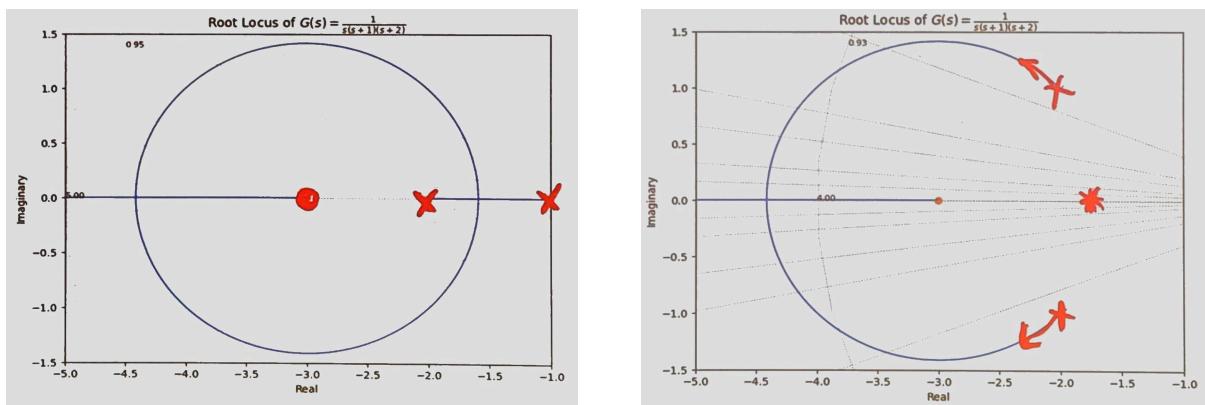


Viene fuori che la condizione di fase (imponendo che la somma degli angoli interni di un triangolo è  $180^\circ$ ) è:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} + \gamma = \pi \rightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi - \beta = \pi \rightarrow \alpha - 2\beta = -\pi$$

Abbiamo quindi visto che verifica la condizione di fase.

Questo ci interessa perché possiamo generalizzare i seguenti casi, semplicemente trovando il valore di  $K$  appropriato:



## Angoli di partenza dei poli

### Regola per l'asse reale

I rami uscenti dai poli con molteplicità maggiore di uno dividono il piano in parti equiangole e simmetriche rispetto all'asse reale

Partiamo sempre dalla condizione di fase  $\angle n(s) - \angle d(s) = -\pi$ ,  $K > 0$ , consideriamo però il polinomio  $d^*(s) = \frac{d(s)}{s - p_1}$  con  $p_1$  il polo complesso sotto analisi. Allora sarà:

$$\theta_{p_1} = \pi + \angle n(s) - \angle d^*(s) \Big|_{s=p_1}$$

### Esempio

Prendiamo come esempio:

$$G(s) = \frac{s+5}{s(s^2+6s+109)} = \frac{s+5}{s(s+3+10i)(s+3-10i)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Centro asintoti} \quad c &= \frac{-3 - 10i - 3 + 10i + 5}{2} = -\frac{1}{2} \\
 \text{Punti diramazione} \quad c &= \frac{-3 - 10i - 3 + 10i + 5}{2} = -\frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s+3+10i} + \frac{1}{s+3-10i} = \frac{1}{s+5} \\
 &\downarrow \\
 &s^3 + 11s^2 + 139s + 545 + 2s^3 + 16s^2 + 30s = s^3 + 6s^2 + 109s \\
 &\downarrow \\
 \text{Una sola radice reale in } -10.57 &\quad \leftarrow 2s^3 + 21s^2 + 50s + 545 = 0
 \end{aligned}$$

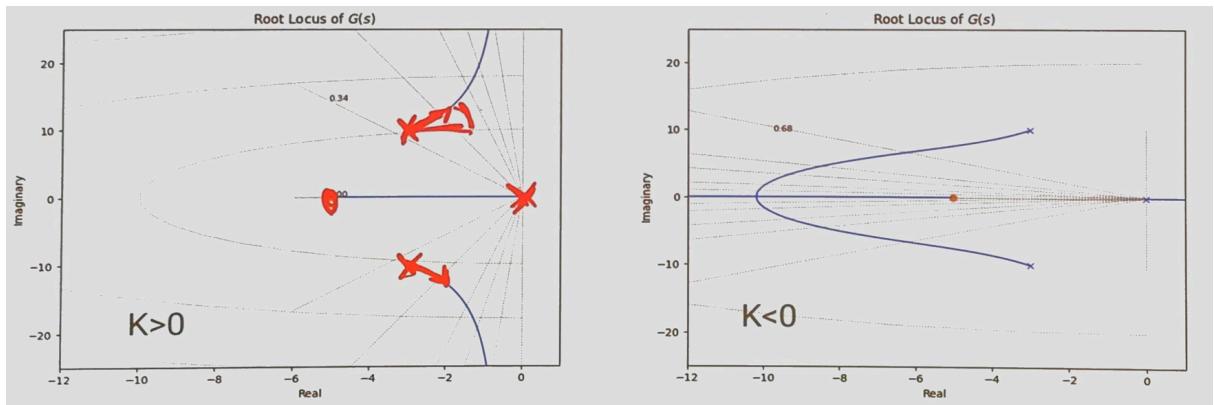
Abbiamo ricavato che c'è solo una radice reale in -10.57, dopodiché applico

$$\theta_{p_1} = \pi + \angle n(s) - \angle d^*(s) \Big|_{s=p_1}$$

L'angolo di partenza del polo  $p_1 = -3 + 10i$  è:

$$\begin{aligned}
 \theta_{p_1} &= \pi + \underbrace{\angle(2 + 10i)}_{\angle(s+5)|_{s=p_1}} - \underbrace{\angle(-3 + 10i)}_{\angle(s)|_{s=p_1}} - \underbrace{\angle(20i)}_{\angle(s+3-10i)|_{s=p_1}} \\
 &= 180^\circ + 78.7^\circ - 106.7^\circ - 90^\circ = 62^\circ
 \end{aligned}$$

Vado a calcolare quindi la fase di ognuno dei contributi nel polo che mi interessa e andando a sommarle ottengo  $62^\circ$ . Questo significa che nel luogo delle radici avremo:



Dove l'angolo disegnato è proprio di  $62^\circ$ .

[Lezione 22 - 24/04/2025](#)



# Lezione 22 - 24/04/2025

[Lezione 21 - 16/04/2025](#)

## Ancora sul luogo delle radici

### Angoli di partenza dei poli

**Regola per l'asse reale:** i **rami uscenti dai poli** con molteplicità > 1 dividono il piano in parti equiangole e simmetriche rispetto all'asse reale.

Partiamo sempre dalla condizione di fase:  $\angle n(s) - \angle d(s) = -\pi, \quad K > 0$

Consideriamo però il polinomio  $d^*(s)$ :  $d^*(s) = \frac{d(s)}{s - p_1}$

Allora:  $\theta_{p_1} = \pi + \angle n(s) - \angle d^*(s) \Big|_{s=p_1}$  Polo complesso sotto analisi

### Esempio

$$\theta_{p_1} = \pi + \angle n(s) - \angle d^*(s) \Big|_{s=p_1}$$

$$G(s) = \frac{(s+5)}{s \cdot (s^2 + 6s + 109)} = \frac{(s+5)}{s \cdot (s+3+10i)(s+3-10i)}$$

$$\text{Centro asintoti} \quad c = \frac{-3-10i-3+10i+5}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Punti diramazione} \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s+3+10i} + \frac{1}{s+3-10i} = \frac{1}{s+5}$$

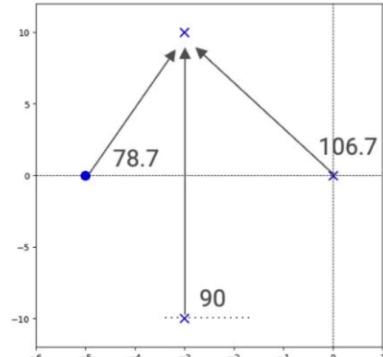
$$s^3 + 11s^2 + 139s + 545 + 2s^3 + 16s^2 + 30s = s^3 + 6s^2 + 109s$$

$$\downarrow \\ \text{Una sola radice reale in } -10.57 \quad \leftarrow 2s^3 + 21s^2 + 50s + 545 = 0$$

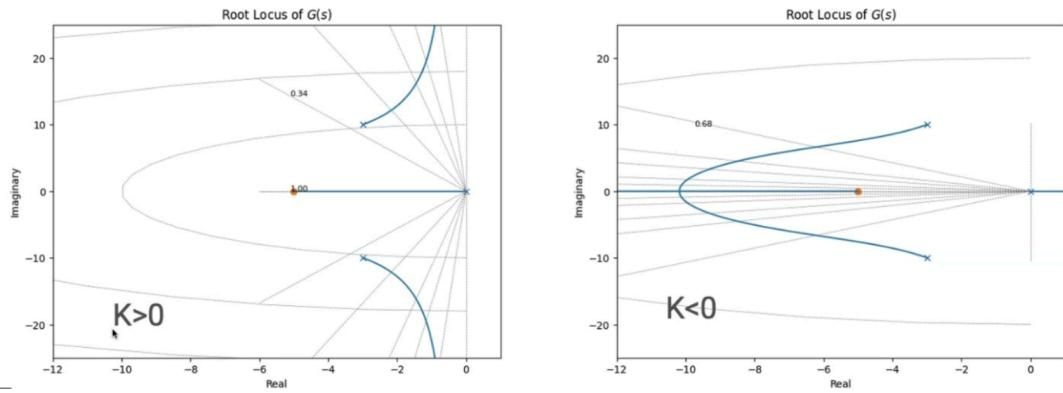
Angolo di partenza polo:  $p_1 = -3 + 10i$

$$\theta_{p_1} = \pi + \angle(2+10i) - \angle(-3+10i) - \angle(20i) = 180^\circ + 78.7^\circ - 106.7^\circ - 90^\circ = 62^\circ$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \angle(s+5)|_{s=p_1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \angle(s)|_{s=p_1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \angle(s+3-10i)|_{s=p_1} \end{array}$$



Ho preso la fase di tutte le componenti del polinomio eccetto il polo sotto analisi. Se disegniamo il luogo delle radici ottengo:



I punti di singolarità ovviamente sono gli stessi, però distinguiamo i casi per  $K$  positivo e negativo. Nel grafico è inoltre possibile evidenziare gli asintoti e l'angolo di  $62^\circ$  trovato prima.

Esiste una **continuità sul luogo delle radici**. Ovvero, è possibile sovrapporre il caso positivo a quello negativo ottenendo un grafico continuo.

## Angoli di arrivo sugli zeri

**Regola per l'asse reale:** i **rami entranti sugli zeri** con molteplicità  $> 1$  dividono il piano in parti equiangole e simmetriche rispetto all'asse reale.

Partiamo sempre dalla condizione di fase:  $\angle n(s) - \angle d(s) = -\pi, \quad K > 0$

Consideriamo però il polinomio  $n^*(s)$ :  $n^*(s) = \frac{n(s)}{s - z_1}$

$$\theta_{z_1} = -\pi + \angle d(s) - \angle n^*(s) \Big|_{s=z_1}$$

Zero complesso sotto analisi

## Esempio

$$\theta_{z_1} = \pi + \angle d(s) - \angle n^*(s) \Big|_{s=z_1}$$

$$G(s) = \frac{s^2 + 20s + 101}{s \cdot (s + 5)^3} = \frac{(s + 10 + i)(s + 10 - i)}{s \cdot (s + 5)^3}$$

Centro asintoti  $c = \frac{-15 + 10 - i + 10 + i}{2} = \frac{5}{2}$

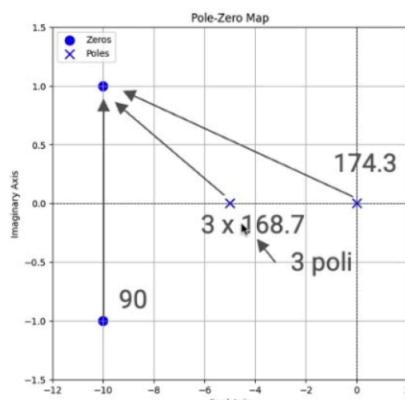
Punti diramazione  $\frac{1}{s} + \frac{3}{s+5} = \frac{1}{s+10+i} + \frac{1}{s+10-i}$

$$(s+5) \cdot (s^2 + 20s + 101) + 3s \cdot (s^2 + 20s + 101) = s \cdot (s+5) \cdot (2s+20)$$

$$2s^3 + 55s^2 + 404s + 505 = 0 \longrightarrow \text{Radici reali in: } -15.56, -10.37, -1.56$$

Angolo arrivo in:  $s = -10 + i$   $\theta_{z_1} = -\pi + \angle(-10 + i) + 3 \cdot \angle(-10 + i + 5) - \angle(-10 + i + 10 + i)$

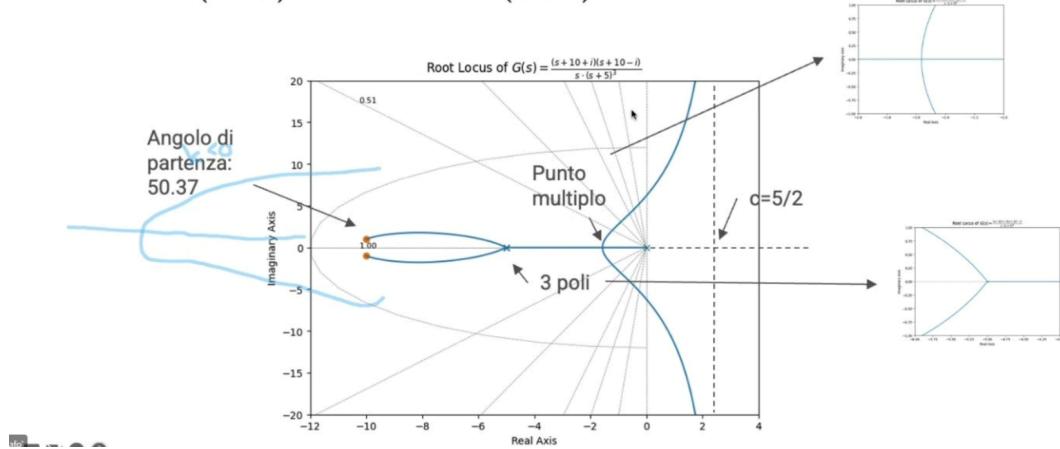
Ho tre poli  $= -180^\circ + 174.3^\circ + 506.07^\circ - 90^\circ = 410.37^\circ \longrightarrow 410.37 - 360 = 50.37$



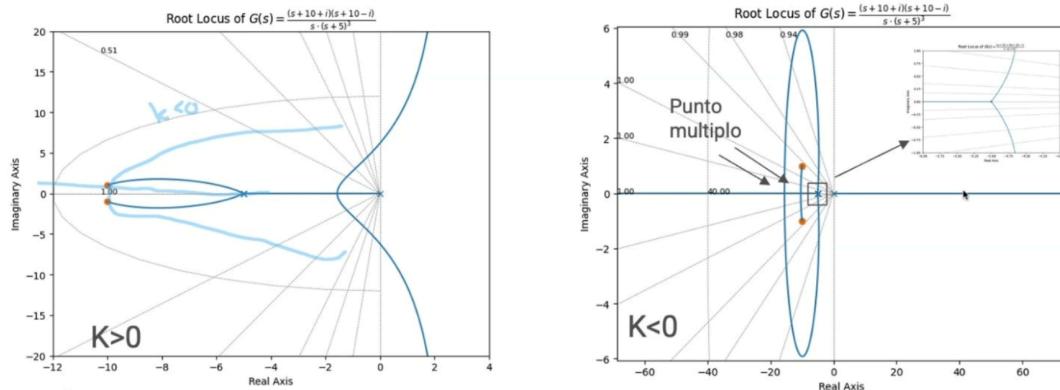
Questo risultato ottenuto di circa  $410^\circ$  implica un'operazione di "rifasamento" (termine appena inventato da me non è tecnico) che riporta l'angolo a  $50.37^\circ$ .

Disegnando il luogo delle radici viene fuori questo diagramma (non considerare il grafico disegnato a mano):

$$G(s) = \frac{s^2 + 20s + 101}{s \cdot (s + 5)^3} = \frac{(s + 10 + i)(s + 10 - i)}{s \cdot (s + 5)^3}$$



Le figure a destra rappresentano gli zoom sul punto multiplo e sui 3 poli. Bisogna sempre considerare l'analisi per  $K$  positivo o negativo che deve lasciare un numero pari o dispari di singolarità (vedi regola 4 e 5).



Ricorda inoltre, che quando l'asse reale è positivo il sistema diventa instabile e possiamo calcolare i limiti di stabilità con il **criterio di Routh**.

## Riassunto sul I.d.r.

- Il luogo delle radici è una tecnica per determinare lo spostamento dei poli dal ciclo aperto al ciclo chiuso.
- Al variare del guadagno  $K$  i poli in ciclo chiuso cambiano di posizione. La metodologia è la seguente:
  - Si fissano i poli/zeri del regolatore per quanto possibile sulla base delle specifiche (tipo 0, tipo 1, ...)
  - Si varia  $K$  per individuare il valore che fissa i poli dominanti del sistema in ciclo chiuso nella regione opportuna del semipiano sinistro del piano complesso.

- Alle posizioni dei poli dominanti corrispondono precise specifiche sulla risposta transitoria del sistema in ciclo chiuso.
- Il luogo delle radici obbedisce a regole analitiche ben precise (condizione di fase e di modulo).

## Esempio sul luogo delle radici

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+9)}$$

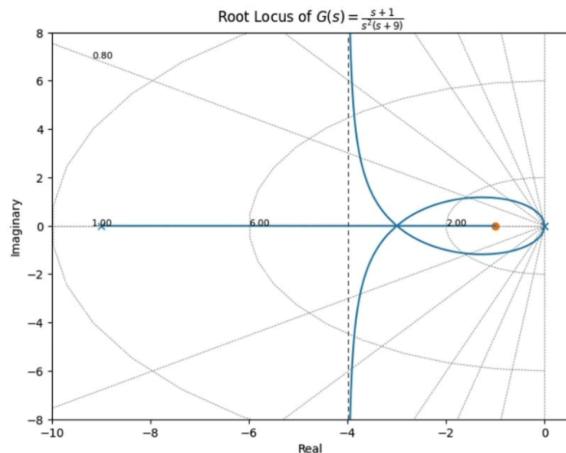
$$c = \frac{-9 - (-1)}{3 - 1} = -4 \quad G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+9)}$$

Punti multipli

$$\frac{2}{s} + \frac{1}{s+9} = \frac{1}{s+1}$$

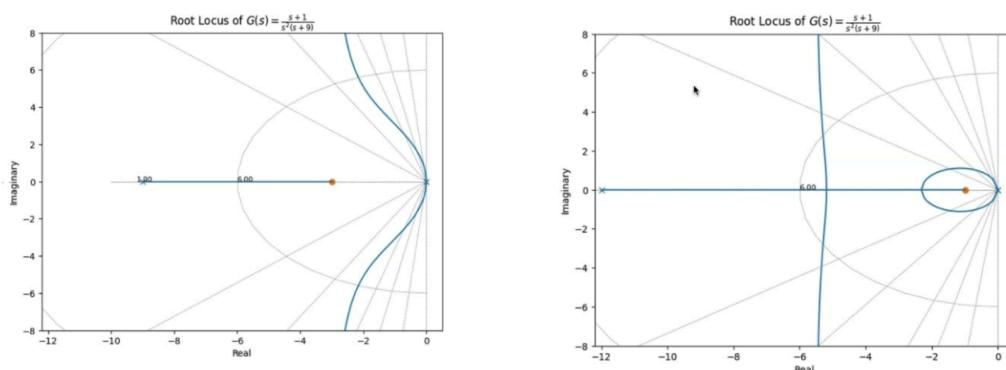
$$c = \frac{-9 - (-1)}{3 - 1} = -4$$

Risolvendo l'ultima si ottiene l'equazione da cui poter ricavare i punti multipli.



Tutta la parte che è sull'asse reale minore di -1 appartiene perché lascia a destra un numero dispari di singolarità (ricorda che in 0 ci sono due poli). Tutti e tre i poli arrivano nel punto -3 che è l'unico punto multiplo. Uno dei tre poli va sull'asse orizzontale, gli altri due vanno verso gli asintoti.

Se spostiamo il terzo polo più a sinistra, il luogo delle radici cambia significativamente.



La distanza relativa tra poli e zeri influisce notevolmente sul luogo delle radici.

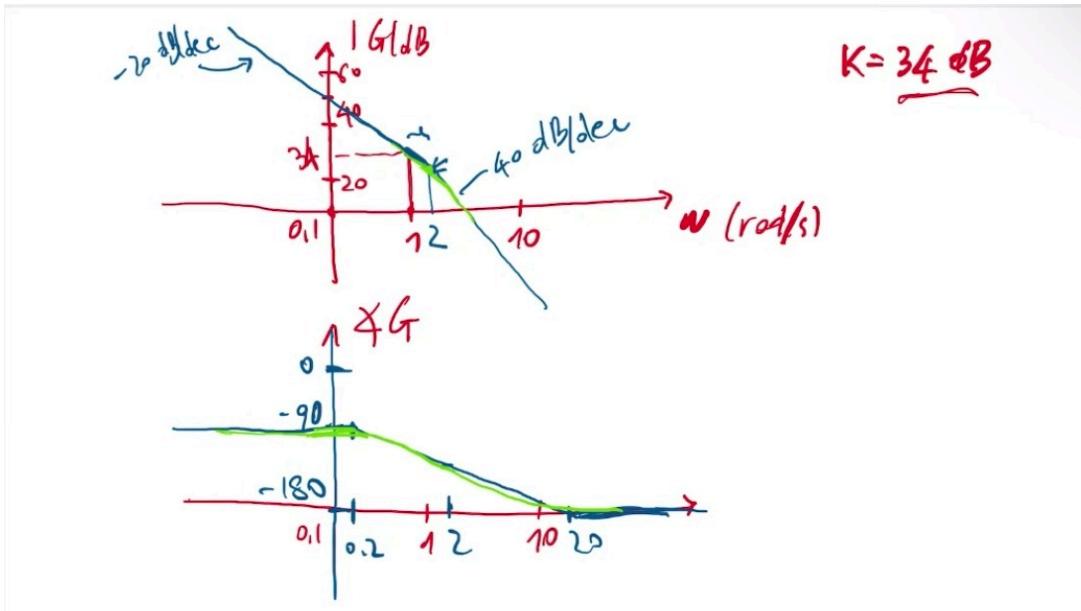
**Nota su Matlab:** le rette e le circonferenze tracciate da Matlab in grigio sono **linee a smorzamento costante** e le circonferenze indicano la **pulsazione**. Vale a dire, che per avere un determinato smorzamento o una determinata pulsazione bisogna spostare i poli dominanti in quelle direzioni.

## Esercizio sui diagrammi di Bode

$$G(s) = \frac{100}{s(2+s)}, \quad G(0) = \frac{100}{2} = 50, \quad G(s) = 50 \frac{1}{s(1+\frac{s}{2})}$$

$$k = 50 \rightarrow |k|_{dB} = 20 \log_{10}(50) = 20 \log_{10}(5) + 20 \approx 34 dB$$

$$\frac{1}{s} \rightarrow \begin{cases} -20 dB/dec & \omega = 1 rad/s \\ -\frac{\pi}{2} & 0 dB \end{cases} \quad 1 + \frac{s}{2} \rightarrow \begin{cases} -20 dB/dec & \omega = +2 \\ \angle \begin{cases} 0 & \omega < 2 \\ -\frac{\pi}{2} & \omega > 2 \end{cases} & \end{cases}$$



Abbiamo anche aggiunto degli **smussamenti**, nel primo caso per ammorbidire il grafico applicando 3 dB, mentre nel secondo caso perché sappiamo che si tratta di un arctangente.

## Esercizio 2

Iniziamo questo esercizio oggi, ma lo finiremo lunedì, nella prossima lezione.

$$G(s) = 25 \frac{s(s+100)}{(10+s)^2(s+\frac{1}{1200})}$$

Capiamo per prima cosa se è in forma di Bode, e se non lo è la portiamo in quella forma.

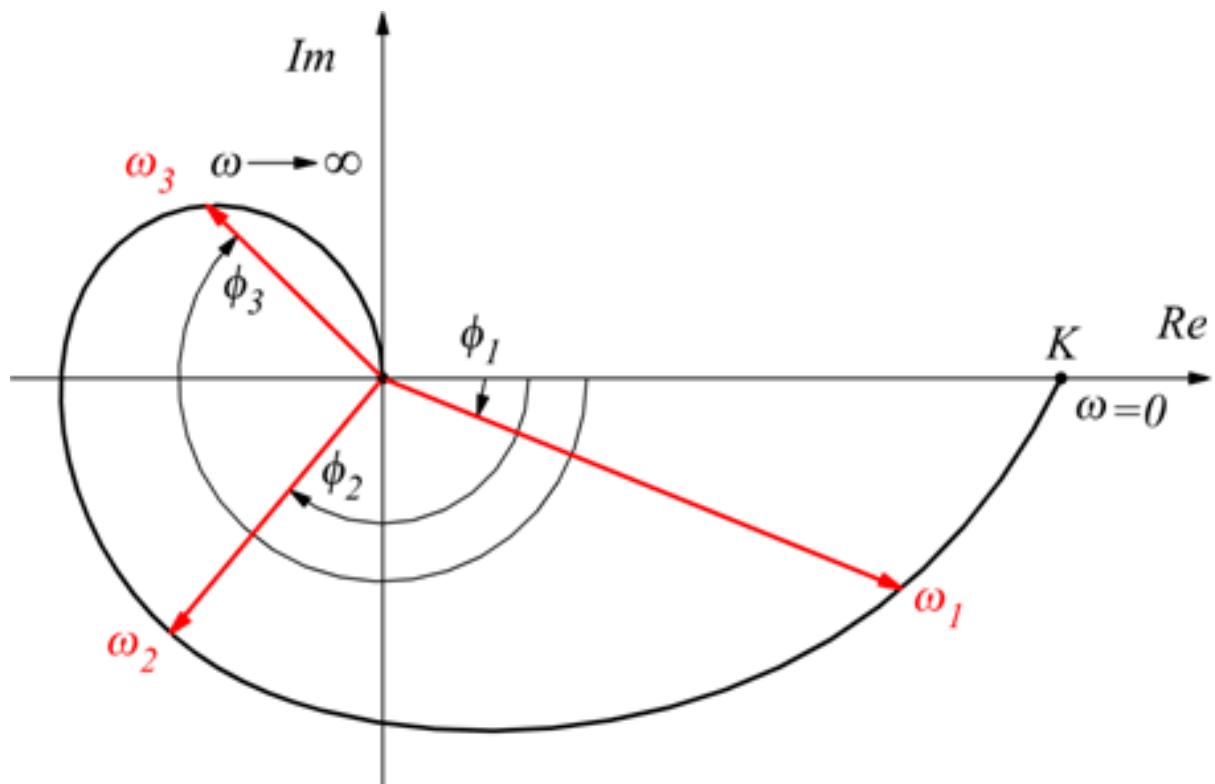
$$G(0) = \frac{25 \cdot 100}{100 \cdot \frac{1}{1200}} = 30000 = k_B \rightarrow \log(30000) = 20 \log(3) + 20 \log(10000) = 9 + 80 \approx 89 \approx 90$$

$$G(s) = k_B \frac{s(1 + \frac{s}{100})}{(1 + \frac{s}{10})^2(1 + 1200s)}$$

[Lezione 23 - 28/04/2025](#)

## 6

# Diagrammi di Nyquist





# Lezione 23 - 28/04/2025

## Lezione 22 - 24/04/2025

La prima parte della lezione include un'esercitazione su Bode (non ancora recuperata).

## I diagrammi di Nyquist

### Nyquist - caso SISO

Rappresentano la **forma polare** della **risposta in frequenza** associata alla funzione di trasferimento di un sistema lineare  $G(s)$ .

Costruiamo una curva nel piano complesso parametrizzata dalla pulsazione (o dalla frequenza) dove:

- L'asse delle ascisse riporta i valori di  $Re(G(j\omega))$
- L'asse delle ordinate riporta i valori di  $Im(G(j\omega))$
- Tutti gli assi sono espressi in **scala lineare**

Il **diagramma di Nyquist** non prevede l'additività dei termini elementari. Per pulsazioni elevate non riesce a specificare nel dettaglio l'andamento della **risposta armonica** quando il modulo tende a diventare piccolo.

### Caratteristiche

- I diagrammi sono graduati in funzione della pulsazione  $\omega$ .
- I diagrammi polari sono molto importanti per lo **studio della stabilità dei sistemi in retroazione (criterio di stabilità di Nyquist)**.
- Se conosciamo la funzione di trasferimento  $G(s)$ , il diagramma polare si può tracciare per punti separando le parti reali e immaginarie di  $G(j\omega)$  e determinandone i valori corrispondenti a vari valori di  $\omega$ .

### Risposta armonica

Partiamo dalla corrispondente funzione di risposta armonica di  $G(s)$

$$G(j\omega) = K_1 \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \cdots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \cdots (j\omega - p_n)}$$

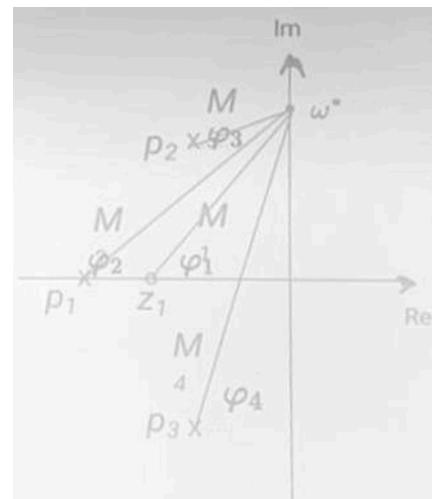
## Esempio

Prendiamo un esempio con uno zero e tre poli:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= K_1 \frac{j\omega - z_1}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)(j\omega - p_3)} \\ &= K_1 \frac{M_1}{M_2 M_3 M_4} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)} \end{aligned}$$

I **moduli**  $M_i$  e le **fasi**  $\varphi_i$  sono determinabili facilmente anche per via grafica.

Per ogni valore di pulsazione  $\omega = \omega^*$  è allora possibile ricavare il modulo e la fase di  $G(j\omega^*)$



## Metodo analitico

Un altro modo per tracciare il diagramma di Nyquist consiste nello scomporre il numero complesso  $G(j\omega)$  nella sua parte reale e immaginaria, valutando quindi le coppie di valori:

$$\left[ Re(G(j\omega)), Im(G(j\omega)) \right]$$

al variare della pulsazione  $\omega$ .

## Tracciamento per punti

$$G(s) = k_1 \cdot \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + s^m}{s^h \cdot (a_h + a_{h-1}s + a_{h-2}s^2 + \cdots + s^{n-h})}$$

Supponiamo che il sistema sia di tipo 0 ( $h=0$ ), non ci sono poli nell'origine

$$G(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = k_1 \cdot \frac{b_0}{a_0} \quad \text{con fase: } \begin{cases} \varphi_{\omega \rightarrow 0} = 0 & \text{se } k_1 \cdot \frac{b_0}{a_0} > 0 \\ \varphi_{\omega \rightarrow 0} = -\pi & \text{se } k_1 \cdot \frac{b_0}{a_0} < 0 \end{cases}$$

$$G(s) = k_1 \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + s^m}{s^h \cdot (a_h + a_{h-1} s + a_{h-2} s^2 + \cdots + s^{n-h})}$$

Sistema tipo 0 ( $h=0$ ), non ci sono poli nell'origine

$$G(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = k_1 \cdot \frac{b_0}{a_0} \quad \text{con fase: } \begin{cases} \varphi_{\omega \rightarrow 0} = 0 & \text{se } k_1 \cdot \frac{b_0}{a_0} > 0 \\ \varphi_{\omega \rightarrow 0} = -\pi & \text{se } k_1 \cdot \frac{b_0}{a_0} < 0 \end{cases}$$

Sistema NON tipo 0 ( $h \neq 0$ ), ci sono poli nell'origine

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \infty, \quad \text{con fase} \quad \angle G(j\omega) = \frac{1}{s^h} = -h \cdot \frac{\pi}{2}$$

Se  $K_1 > 0$

$$G(s) = k_1 \cdot \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + s^m}{s^h \cdot (a_h + a_{h-1} s + a_{h-2} s^2 + \cdots + s^{n-h})}$$

$\omega \rightarrow \infty$

$$G(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } n > m \\ k_1 & \text{se } n = m \end{cases} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{1cm}} G(s) \approx \frac{s^m}{s^n} = \frac{1}{s^{n-m}}. \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} G(s) \approx \frac{k_1 s^m}{s^m} = k_1. \longrightarrow \text{e la fase di } K_1 \end{array}$$

Se  $n > m$

con fase corrispondente alla fase di

$$\frac{1}{s^{n-m}},$$

se  $k_1$  ha segno positivo.

La lezione continua con un esercizio fatto alla lavagna.

## Lezione 24 - 29/04/2025



# Lezione 24 - 29/04/2025

[Lezione 23 - 28/04/2025](#)

## Diagrammi di Nyquist

### Caso SISO

- I diagrammi sono graduati in funzione della pulsazione  $\omega$
- I diagrammi polari sono molto importanti per lo studio della stabilità dei sistemi in retroazione (criterio di stabilità di Nyquist)
- Se conosciamo la funzione di trasferimento  $G(s)$ , il diagramma polare si può tracciare per punti separando le parti reali e immaginarie di  $G(j\omega)$  e determinandone i valori corrispondenti a vari valori di  $\omega$

Partiamo dalla corrispondente funzione di risposta armonica di  $G(s)$

$$G(j\omega) = K_1 \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \cdots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \cdots (j\omega - p_n)}$$

### Punti notevoli sul grafico

$$G(s) = k_1 \cdot \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + s^m}{s^h \cdot (a_h + a_{h-1} s + a_{h-2} s^2 + \cdots + s^{n-h})}$$

### Caso per $\omega$ che tende a 0

Supponiamo che il sistema sia di tipo 0 ( $h = 0$ ), con nessun polo nell'origine

$$G(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = k_1 \cdot \frac{b_0}{a_0} \quad \text{con fase: } \begin{cases} \varphi_{\omega \rightarrow 0} = 0 & \text{se } k_1 \frac{b_0}{a_0} > 0 \\ \varphi_{\omega \rightarrow 0} = -\pi & \text{se } k_1 \frac{b_0}{a_0} < 0 \end{cases}$$

Se il sistema non è di tipo 0 ( $h \neq 0$ ), ci sono poli nell'origine

$$G(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \infty \quad \text{con fase } \angle G(j\omega) = \frac{1}{s^h} = -h \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{se } k_1 > 0$$

## Caso per $\omega$ che tende a $\infty$

$\omega \rightarrow \infty$

$$G(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } n > m \\ k_1 & \text{se } n = m \end{cases}$$

$G(s) \approx \frac{s^m}{s^n} = \frac{1}{s^{n-m}}$ .  
 $G(s) \approx \frac{k_1 s^m}{s^m} = k_1$ .  $\longrightarrow$  e la fase di  $K_1$

Se  $n > m$

con fase corrispondente alla fase di

$$\frac{1}{s^{n-m}},$$

se  $k_1$  ha segno positivo.

Una volta concluso lo studio per 0 e infinito, abbiamo tracciato il valore di  $G(j\omega)$  in due punti (che sono per  $\omega = 0$  e  $\omega = +\infty$ ).

## Altri punti notevoli

Per tracciare il resto del diagramma possiamo usare il calcolatore, oppure usare alcuni trucchetti:

Per esempio, possiamo tracciare il valore di  $G$  per le intersezioni con gli assi

Usiamo il metodo analitico,

- poniamo la parte reale = 0 e troviamo l'intersezione con l'asse immaginario
- poniamo la parte immaginaria = 0 e troviamo l'intersezione con l'asse reale

## Esempio

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \quad \rightarrow \quad s = j\omega \rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2}$$

Troviamo il valore di  $G(j\omega)$  per  $\omega = 0$  e  $\omega = \infty$ :

$$\left. \frac{1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} \right|_{\omega=0} = \frac{1}{2}, \angle = 0 \quad \left. \frac{1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} \right|_{\omega=\infty} = \frac{1}{\infty} = 0, \angle = -180$$

Sul piano di Gauss il primo punto ( $\omega = 0$ ) è un punto di valore  $\frac{1}{2}$  sull'asse reale, il secondo punto è un vettore di modulo 0 e di fase  $-180^\circ$ . Questo implica un vettore tangente all'asse reale che punta verso l'origine (da sinistra verso destra).

Adesso, convertiamo  $G(j\omega) \rightarrow x + jy$  per dividere parte reale e parte immaginaria:

$$\frac{1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} = \frac{1}{(2 - \omega^2) + 3j\omega} \frac{(2 - \omega^2) - 3j\omega}{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2}$$

- poniamo la parte reale = 0 e troviamo l'intersezione con l'asse immaginario

$$\frac{(2 - \omega^2)}{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{-3\sqrt{2}}{2 \cdot 9} = -\frac{\sqrt{2}}{6} \approx -0.236$$

- poniamo la parte immaginaria = 0 e troviamo l'intersezione con l'asse reale

$$\frac{-3\omega j}{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2} = 0 \Rightarrow \omega = 0, \omega = \infty$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\frac{1}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2} \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2}, \angle = 0$$

(1)

$$\frac{1}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2} \Big|_{\omega=\infty} = \frac{1}{\infty} = 0, \angle = -180$$

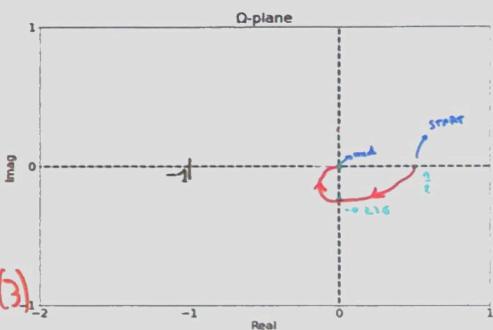
(2)

$$\frac{(2 - \omega^2)}{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{-3\sqrt{2}}{2 \cdot 9} = -\frac{\sqrt{2}}{6} \approx -0.236$$

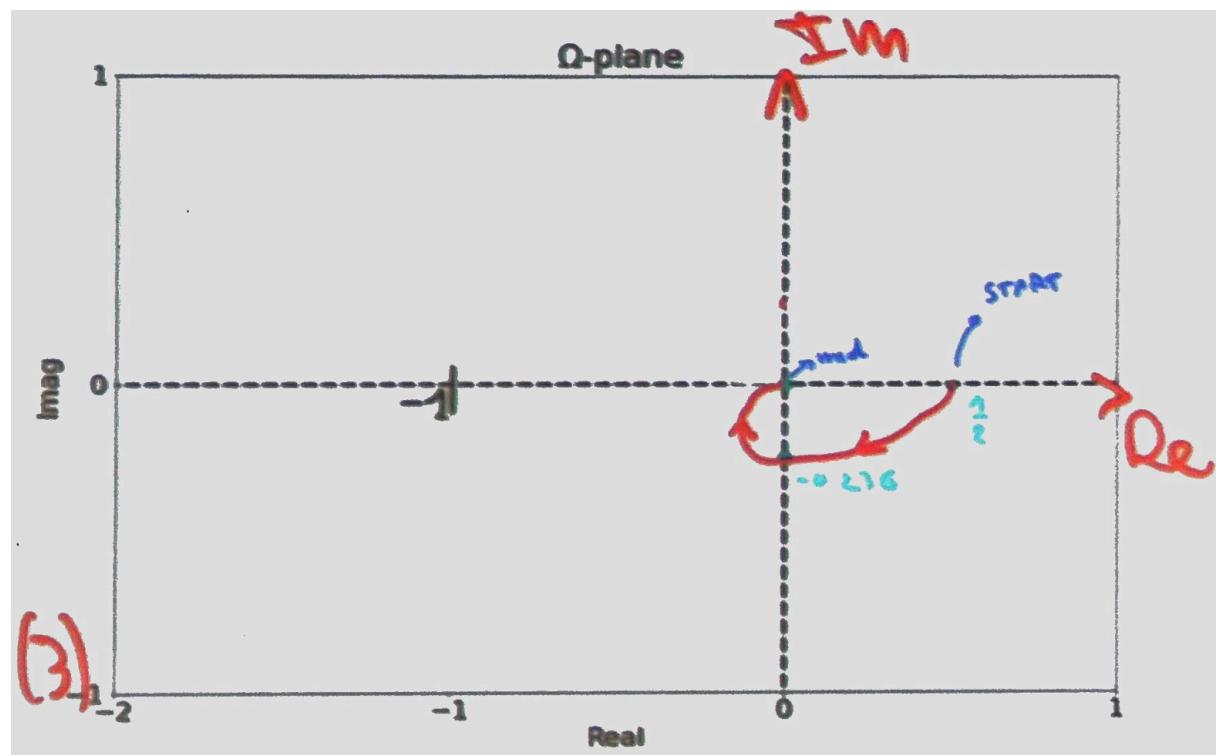
(3)

$$\frac{-3\omega j}{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2} = 0 \Rightarrow \omega = 0, \omega = \infty$$

(4)



Tracciando adesso i 4 punti che ci siamo trovati otteniamo il seguente diagramma di Nyquist:



Anche i diagrammi di Nyquist adoperano delle frecce che ci indicano il verso di percorrenza, sono i punti che abbiamo collegato in ordine decrescente.

Ancora non lo abbiamo accennato ma nel diagramma è presente un punto critico situato in -1.

## Da Bode a Nyquist

### Regola pratica

I diagrammi di Nyquist possono essere ricavati in via qualitativa a partire dalla conoscenza dei corrispondenti diagrammi di Bode, in modulo e fase.

Questo dipende proprio dal fatto che la funzione di trasferimento è la stessa. Ovviamente ciò funziona se il diagramma di Bode è disegnato bene.

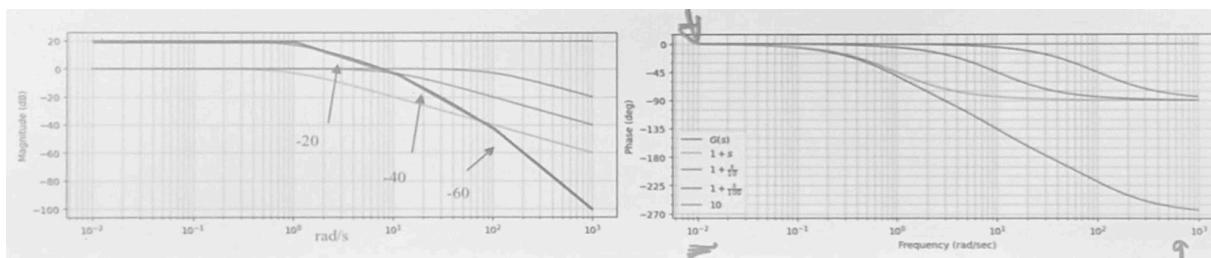
### Traccio il diagramma di Bode

Prendiamo per esempio:

$$G(s) = \frac{K}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}$$

$$\rightarrow G(s)|_{s=j\omega} = \frac{K}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)}$$

- Per  $\omega = 0$ :  $G(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = K$  con fase 0, perché  $K > 0$
- Per  $\omega = \infty$ :  $G(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(j\omega) = 0$  con fase del polo triplo,  $-270^\circ$ .



Nel diagramma ho dato dei valori numerici alle costanti  $T_1, T_2, T_3$ , ovvero  $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$ . Dopo aver tracciato i diagrammi dei tre poli traccio  $|G|_{dB}$ , ovvero la linea più scura nel grafico, che corrisponde alla somma delle prime tre.

### Passaggio a Nyquist

## Quali sono i quadranti coinvolti?

I quadranti coinvolti sono solo 3, ovvero tutti tranne il primo. Questo dipende dal fatto che la fase nel nostro esempio varia tra 0 e -270°.

## Disegniamo i punti che conosciamo

Il diagramma di Nyquist non è in scala logaritmica, questa è una nota importante. Infatti, implica la trasformazione da numero in scala logaritmica in un numero in scala lineare.

- Il primo punto che disegniamo (quello con pulsazione nulla) ha valore 10 (20 dB in scala lineare vale 10).
- Vediamo cosa succede sull'asse immaginario negativo, ovvero quando la fase è -90° (con modulo un numero compreso tra 0 e 20, circa 12 dB visivamente). In questo caso si avrà un numero minore di -10j (perché siamo al di sotto dei 20 dB corrispondenti a 10, ma con fase -90° avremo un valore compreso tra 0 e -10 j) (trasformando 12 dB in scala lineare ottengo 3,98, con fase -90° diventa -3,98 j).
- Sull'asse reale negativo, ovvero con fase -180°, si avrà un numero ancora più piccolo (-20 dB in scala lineare fa 0,1).
- Infine per la fase a -270° avremo un vettore che rientra nell'origine.

Alcune osservazioni: fintanto che il modulo rimane costante, possiamo tracciare il diagramma di Nyquist come una sezione di circonferenza per quei valori di pulsazione

## Esempio 1

$$G(s) = \frac{K}{s(1+sT)} \rightarrow G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega T)}$$

- Per  $\omega = 0$ :  $G(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = +\infty$  con fase -90° (questo ci dice che è presente un asintoto per  $\omega = 0$ )
- Per  $\omega = \infty$ :  $G(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(j\omega) = 0$  con fase -180°.
- Il modulo è sempre decrescente
- La fase decresce da -90° a -180°.

## Calcolo dell'asintoto

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \frac{-KT}{1+\omega^2T^2} \quad \operatorname{Im}(G(j\omega)) = \frac{-K\omega}{\omega(1+\omega^2T^2)}$$

- La parte reale per  $\omega \rightarrow 0$  va a  $-KT$  (valore finito)

- La parte immaginaria va a infinito

Un metodo alternativo, applicabile solo nei casi in cui abbiamo una forma del tipo

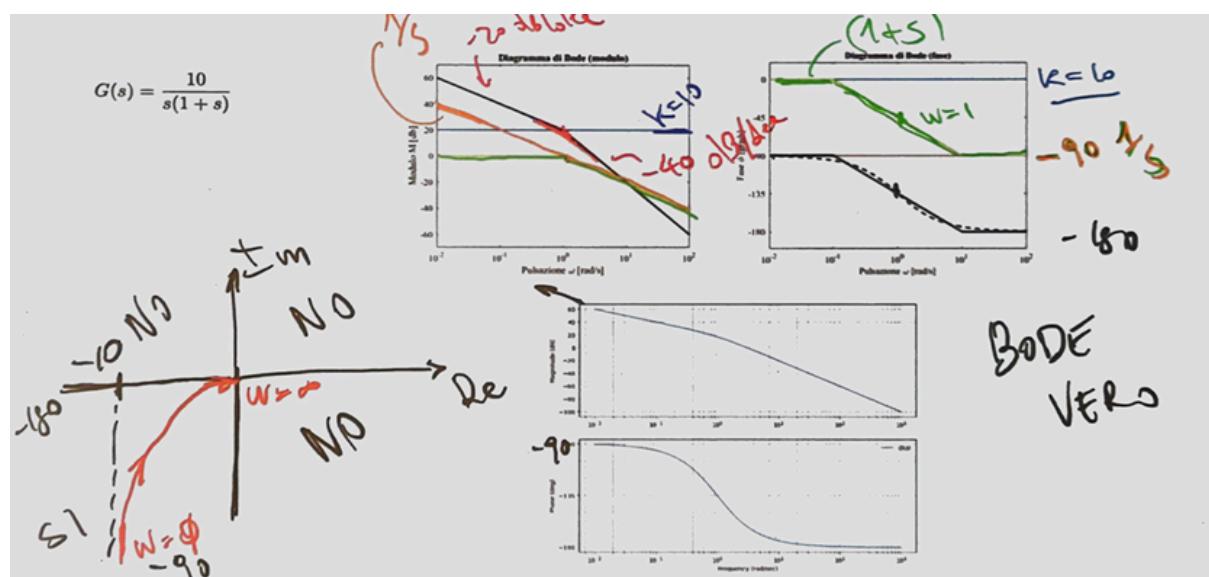
$\frac{1}{1+x}$  possiamo usare un'approssimazione di Taylor del primo ordine per  $x \rightarrow 0$ ,

$$\text{ovvero: } \frac{1}{1+x} \approx 1 - x.$$

- $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \rightarrow G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega T)} \approx \frac{K}{j\omega(1 + j\omega T)}(1 - j\omega T), \quad \omega \rightarrow 0$

Da questa vedo subito che la parte reale è  $-KT$ .

## Diagramma



## Esempio 2

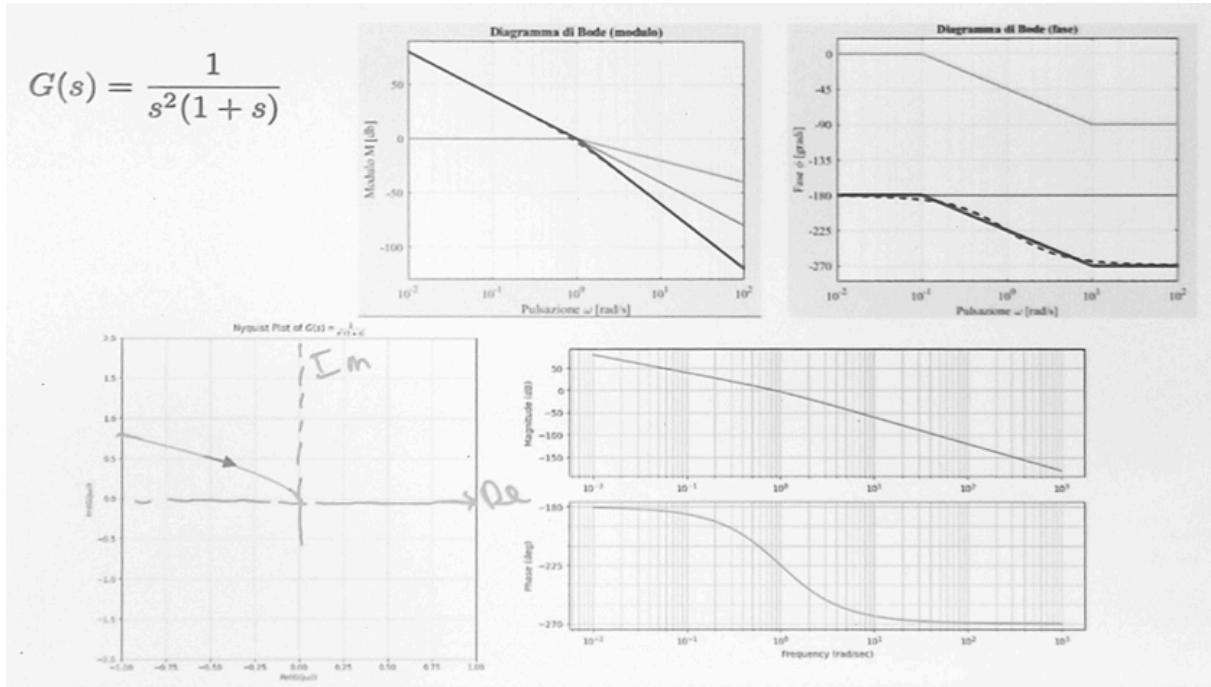
Questo esempio è leggermente più particolare perché presenta un polo doppio nell'origine

$$G(s) = \frac{1}{s^2(1+s)} \rightarrow G(j\omega) = -\frac{1}{\omega^2(1+j\omega)}$$

## Asintoto

$$-\frac{1}{\omega^2(1+j\omega)} \underset{\omega \rightarrow 0}{\approx} \frac{-(1-j\omega)}{\omega^2} \rightarrow \begin{cases} \Re\left(\frac{-(1-j\omega)}{\omega^2}\right) = -\frac{1}{\omega^2} \\ \Im\left(\frac{-(1-j\omega)}{\omega^2}\right) = \frac{1}{\omega} \end{cases}$$

## Diagramma



## Esempio 3

Questo caso presenta un ritardo

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{j\omega} = \frac{\cos(j\omega) - j \sin(j\omega)}{j\omega}$$

- Asintoto:  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} -\frac{\sin \omega}{\omega} = -1$

Guardiamo la fase  $\angle G = -\omega - \frac{\pi}{2}$

- Intersezione asse reale negativo: cerco il valore di  $\omega$  che corrisponde alla fase  $-180^\circ$

$$\angle G(j\omega) = -\omega - \frac{\pi}{2} = -\pi \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{\pi}{2}$$

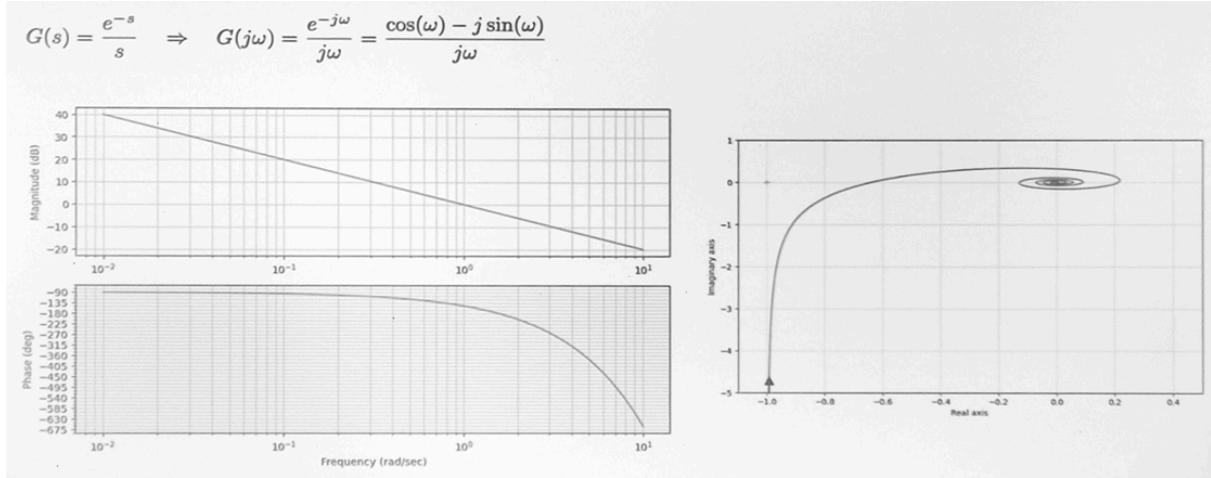
$$\text{Modulo} = \left| \frac{1}{j\omega} \right|_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

- Intersezione asse reale negativo: cerco il valore di  $\omega$  che corrisponde alla fase  $-360^\circ$

$$\angle G(j\omega) = -\omega - \frac{\pi}{2} = -2\pi \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Modulo} = \left| \frac{1}{j\omega} \right|_{\omega \rightarrow \frac{3\pi}{2}} = \frac{2}{3\pi}$$

## Diagramma

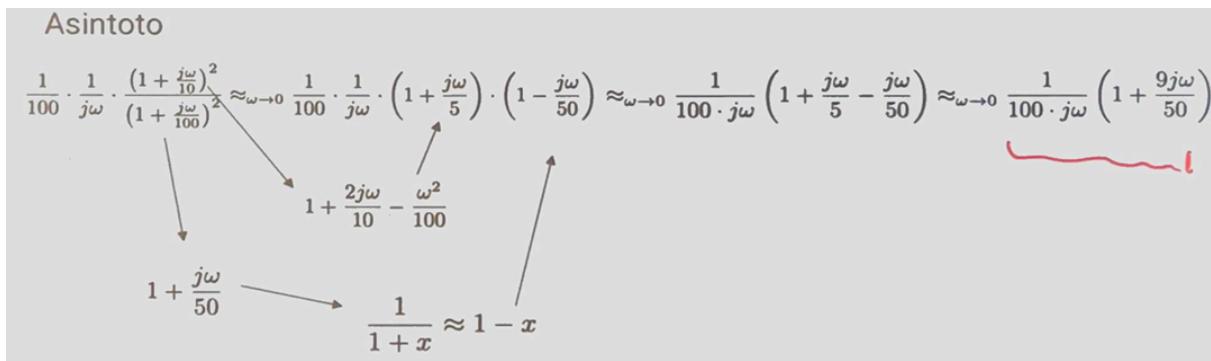


C'è un asintoto in -1 ed è presente un' "arrotolamento" vicino all'origine, che è causato proprio dal ritardo.

## Esempio 4

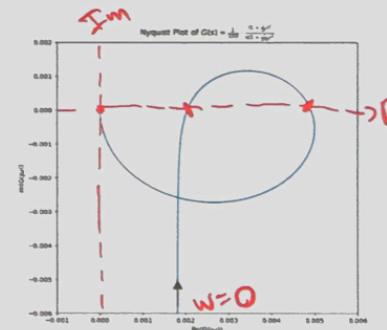
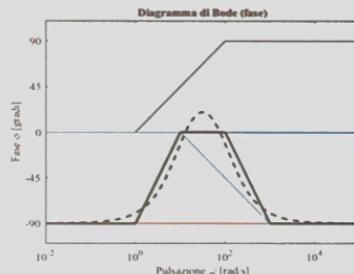
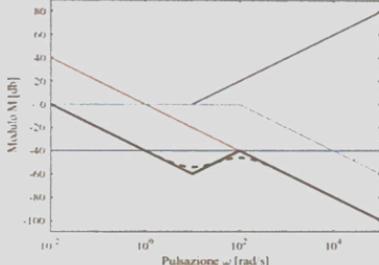
$$G(s) = \frac{(s+10)^2}{s(s+100)^2} = G(s) = \frac{1}{100} \cdot \frac{(1 + \frac{s}{10})^2}{s(1 + \frac{s}{100})^2} \rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{100} \cdot \frac{(1 + \frac{j\omega}{10})^2}{j\omega(1 + \frac{j\omega}{100})^2}$$

## Asintoto



## Diagramma

$$G(s) = \frac{(s+10)^2}{s \cdot (s+100)^2} = \frac{1}{100} \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{10}\right)^2}{s \cdot \left(1 + \frac{s}{100}\right)^2} \quad \longrightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{100} \cdot \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)^2}{j\omega \cdot \left(1 + \frac{j\omega}{100}\right)^2}$$



## Lezione 25 - 30/04/2025



# Lezione 25 - 30/04/2025

## Lezione 24 - 29/04/2025

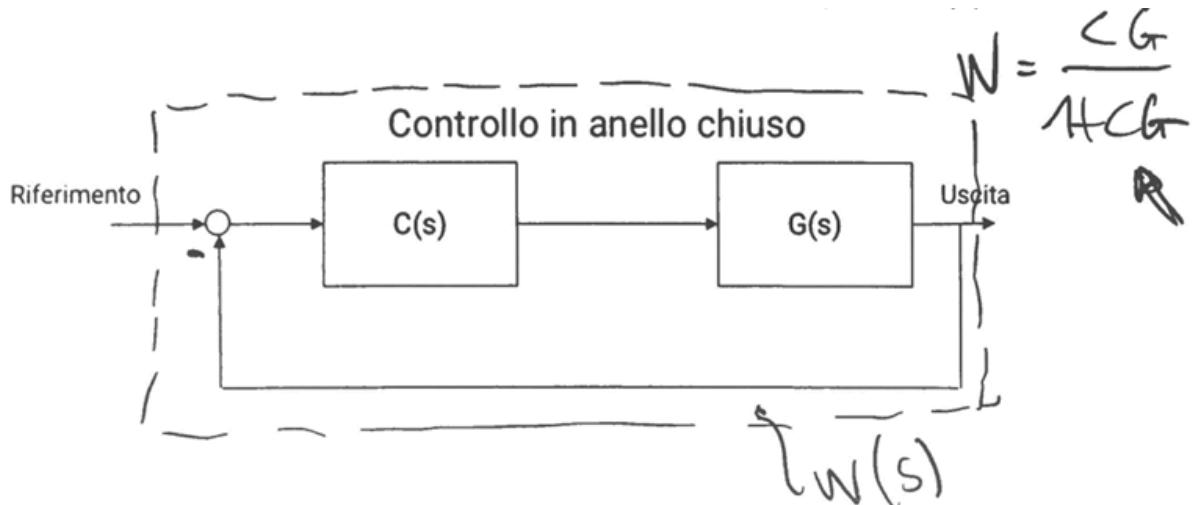
Festival della robotica (9 + 10-11 Maggio): <https://roboticafestival.it/robotica-e-ingegneria-2025/>

## Il criterio di Nyquist

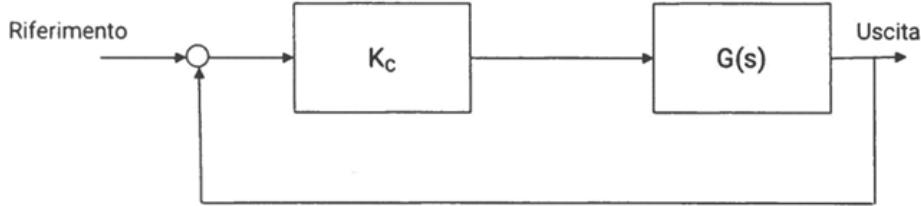
Rappresenta il motivo per cui è essenziale tracciare i **diagrammi di Nyquist**: ovvero ci permette di studiare nel piano complesso l'effetto della **reazione negativa** sui poli del sistema in catena chiusa a partire dalla conoscenza della funzione di trasferimento in catena aperta  $G(s)$ .



A partire quindi dalla  $G(s)$  saremo in grado di studiare la  $W$  senza doverla ricavare esplicitamente.



Useremo sempre un **controllore proporzionale** (le formule sono le stesse già viste nelle lezioni precedenti).

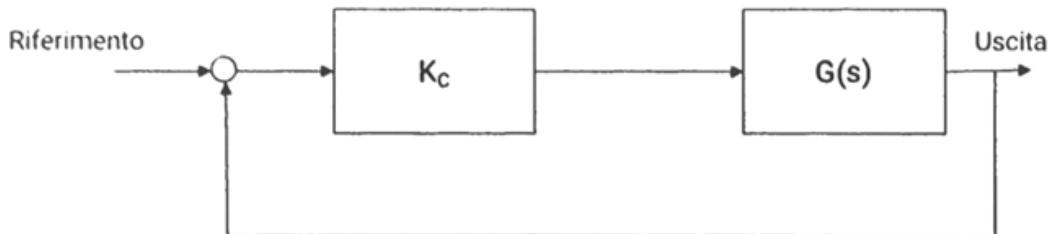


$$K_C \cdot G(s) = K_E \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = K_E \frac{n(s)}{d(s)}$$

$$W(s) = \frac{K_C \cdot G(s)}{1 + K_C \cdot G(s)} = K \frac{n(s)}{d(s) + K \cdot n(s)}$$

$$K = K_c K_E$$

L'ultimo passaggio sarà quello di ricavare la funzione di trasferimento in anello chiuso  $W(s)$  (rinominiamo  $G(s)$  in  $\hat{G}(s)$  perché la prima non la possiamo riutilizzare).



$$W(s) = \frac{K_C \cdot G(s)}{1 + K_C \cdot G(s)} = K \frac{n(s)}{d(s) + K \cdot n(s)} = \frac{\hat{G}}{1 + \hat{G}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Il sistema in ciclo chiuso  $W(s)$  è **asintoticamente stabile** se le radici dell'equazione caratteristica hanno tutte parte reale negativa. I poli in ciclo chiuso sono le radici dell'equazione  $1 + \hat{G}(s) = 0$ .

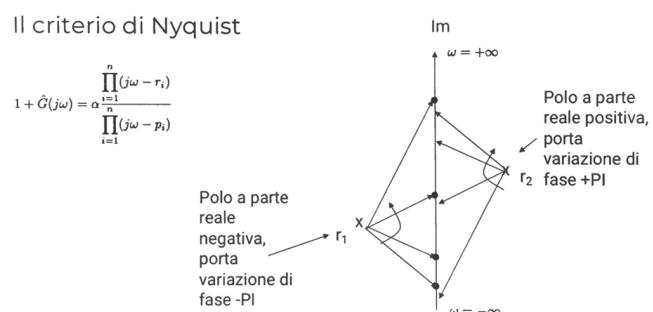
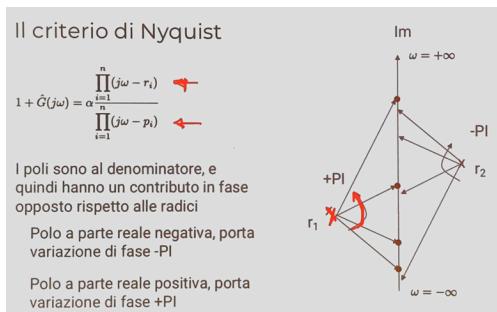
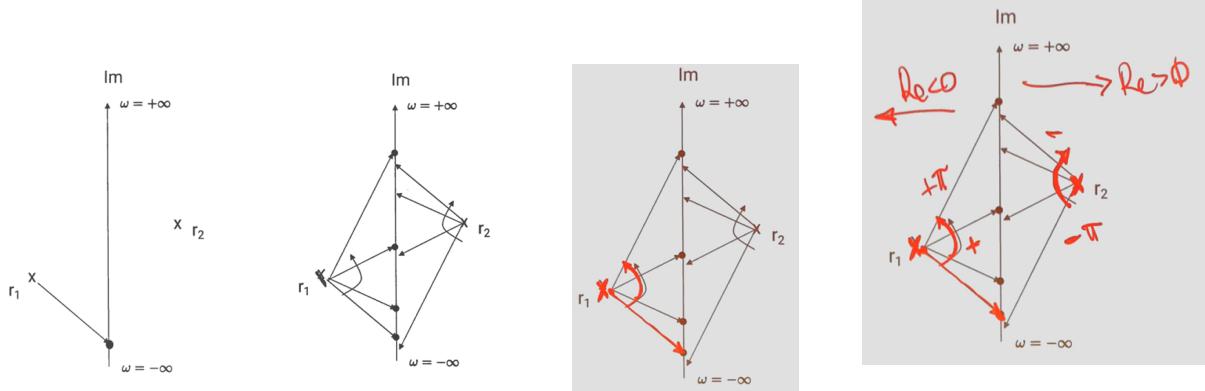
L'equazione  $1 + \hat{G}(s) = 0$  non deve presentare soluzioni per il diagramma di Nyquist di  $\hat{G}(j\omega)$  passa per il punto  $(-1, 0)$  (per questo -1 è detto **punto critico**).

## Condizioni di stabilità in ciclo chiuso

1. Nessuna radice deve andare nel semipiano  $Re > 0$  al variare del guadagno  $k_c$
2.  $\hat{G}(j\omega) \neq -1$

$$1 + \hat{G}(s) = 1 + K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \Rightarrow 1 + \hat{G}(j\omega) = \alpha \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (j\omega - r_i)}{\prod_{i=1}^m (j\omega - p_i)}$$

$$\alpha = 1 + \hat{G}(\infty) = \begin{cases} 1, & \text{se } m < n \\ 1 + K, & \text{se } m = n \end{cases}$$



Questo ci dice che una radice che si trova a destra dell'asse immaginario spazierà un angolo di  $-\pi$ , mentre una che si trova a sinistra dell'asse immaginario spazierà un angolo di  $\pi$ . Si parte sempre da valori di  $\omega = -\infty$  andando verso  $\omega = +\infty$ , e da ogni radice si tracerà il vettore con direzione

pari alla pulsazione (che corrisponde alla soluzione di  $(j\omega - r_i)$  per un certo  $\omega$ ).

I poli sono al denominatore e quindi hanno un contributo di fase che è opposto rispetto alle radici:

- Un polo a parte reale negativa porta una variazione di fase di  $-\pi$ .
- Un polo a parte reale positiva porta una variazione di fase di  $+\pi$ .

## Radice sull'asse immaginario

L'unico caso in cui non posso applicare il meccanismo dei vettori che si spostano al variare della pulsazione è quando ho delle radici sull'asse immaginario, che farebbero esplodere la formula in quanto l'angolo non è definito.

L'unico caso problematico da studiare sarebbe quello di **radici situate sull'asse immaginario**. Ma questo caso in ciclo chiuso è escluso dalla condizione  $\hat{G}(j\omega) \neq -1$ . Questo caso si può studiare ugualmente prendendo una radice traslata di  $\varepsilon$  (che farebbe comunque esplodere  $\omega$ ).



Vedi contrassegno 1 dell'audio per ulteriori spiegazioni.

## Terminologia

- $R^{(+)}$  numero di radici a parte reale positiva
- $R^{(-)}$  numero di radici a parte reale negativa
- $P^{(+)}$  numero di poli a parte reale positiva
- $P^{(-)}$  numero di poli a parte reale negativa
- $P^{(0)}$  numero di poli sull'asse immaginario

$$\begin{cases} R^{(+)} + R^{(-)} = n \\ P^{(+)} + P^{(-)} + P^{(0)} = n \end{cases}$$

La **variazione totale di fase** allora sarà:

$$\langle 1 + \hat{G}(j\omega) = R^{(+)} \cdot -\pi + R^{(-)} \cdot \pi + P^{(+)} \cdot \pi + P^{(-)} \cdot -\pi + P^{(0)} \cdot -\pi$$

$$\langle 1 + \hat{G}(j\omega) = \pi \left( -R^{(+)} + R^{(-)} + P^{(+)} - P^{(-)} - P^{(0)} \right) = \pi \left( \cancel{\pi} - 2 \cdot R^{(+)} - \cancel{\pi} + 2 \cdot P^{(+)} \right)$$

La variazione di fase non dipende dall'ordine n del sistema, dipende solo da dove sono i poli e le radici

$$\begin{cases} R^{(+)} + R^{(-)} = n \\ P^{(+)} + P^{(-)} + P^{(0)} = n \end{cases}$$

$$\langle 1 + \hat{G}(j\omega) = 2\pi \left( P^{(+)} - R^{(+)} \right)$$

## Condizione di stabilità

$$\langle 1 + \hat{G}(j\omega) = 2\pi \left( P^{(+)} - R^{(+)} \right)$$

Dalla variazione totale di fase siamo riusciti a ricavare una **condizione di stabilità**:

$$R^{(+)} = 0$$

Ma questo implica che il numero di rotazioni in verso antiorario deve essere uguale ai poli in anello aperto con parte reale positiva:

$$N_{ao} = P^{(+)}$$

Tutte queste informazioni sono ricavabili tramite i **diagrammi di Nyquist**.

## Criterio di Nyquist nella pratica

Affinché il sistema in ciclo chiuso sia stabile, il numero di rotazioni antiorarie  $N_{ao}$  della funzione  $\langle 1 + \hat{G}(j\omega)$  intorno all'origine del piano di Gauss, al variare di  $\omega$  da meno infinito a più infinito deve essere uguale al numero di poli a parte reale positiva della funzione in ciclo aperto  $\hat{G}(j\omega)$ , e quindi avremo  $N_{ao} = P^{(+)}$ . Di conseguenza, se il sistema in anello aperto non ha poli a parte reale positiva, allora  $N_{ao} = 0$ .

## Problema 1

La funzione di trasferimento è nota solo per pulsazioni positive. Il diagramma di Nyquist è detto diagramma polare per pulsazioni  $\omega \geq 0$ , mentre per  $\omega \in$

$(-\infty, +\infty)$  è detto diagramma completo. Per ovviare al problema consideriamo che:

- Basta conoscere il diagramma di  $\hat{G}(j\omega)$  per  $\omega \geq 0$ 
  - Per la simmetria di  $\hat{G}(j\omega)$  e di  $\hat{G}(-j\omega)$  nel diagramma polare rispetto all'asse reale.

## Problema 2

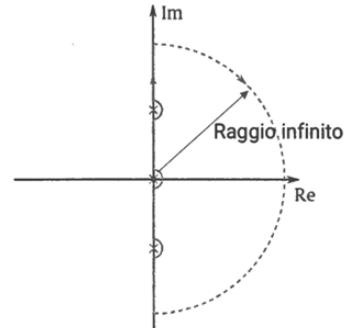
Il criterio richiede la conoscenza di  $1 + \hat{G}(j\omega)$ , ma noi abbiamo  $G(j\omega)$  che è la funzione di trasferimento in anello aperto. Allora consideriamo le seguenti cose:

- Il numero di rotazioni intorno all'origine di  $\langle 1 + \hat{G}(j\omega) \rangle$  è uguale al numero di rotazioni di  $\hat{G}(j\omega)$  attorno al punto  $(-1, 0)$ .
  - Oppure nel caso  $\hat{G}(j\omega) = K \cdot G(j\omega)$ , è pari al numero di rotazioni di  $G(j\omega)$  attorno al punto  $\left(-\frac{1}{K}, 0\right)$ .

## Percorso di Nyquist

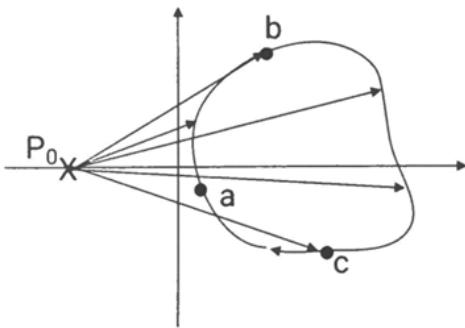
Si definisce **percorso di Nyquist** la curva che percorre tutto l'asse immaginario al variare di  $\omega$  da  $-\infty$  a  $+\infty$  e poi si richiude (sempre a  $+\infty$ ) per tornare al punto di partenza, per comprendere tutto il semipiano a parte reale positiva.

Questa curva racchiude tutte le **radici instabili** che possiamo avere

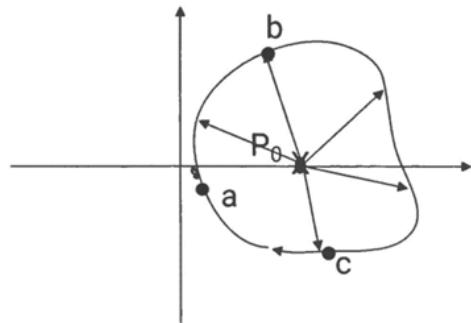


## Richiuse all'infinito

Prendiamo una curva chiusa e consideriamo i seguenti due casi:



Rotazione oraria di un vettore lungo una curva chiusa ( $P_0$  esterno)

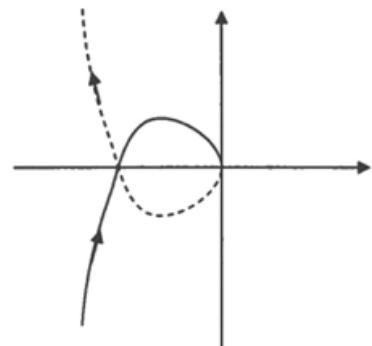
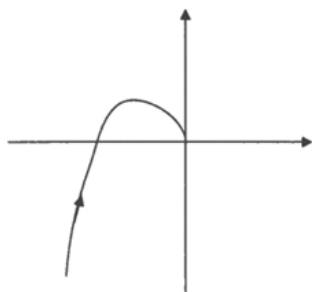


Rotazione oraria di un vettore lungo una curva chiusa ( $P_0$  interno)

Nel primo caso, con punto esterno, l'angolo che spiazzo è di 0, mentre nel secondo caso, con punto interno, è di  $2\pi$ . Questo ci aiuta perché ho bisogno di conoscere il numero di rotazioni della funzione di trasferimento per poter applicare il **criterio di Nyquist**.

### Sistemi con poli nell'origine

In questo caso non è immediato capire la forma chiusa rispetto al cui contorno occorre valutare il numero di rotazioni. Sono infatti presenti asintoti all'infinito:



Per prima cosa facciamo il simmetrico rispetto all'asse reale.

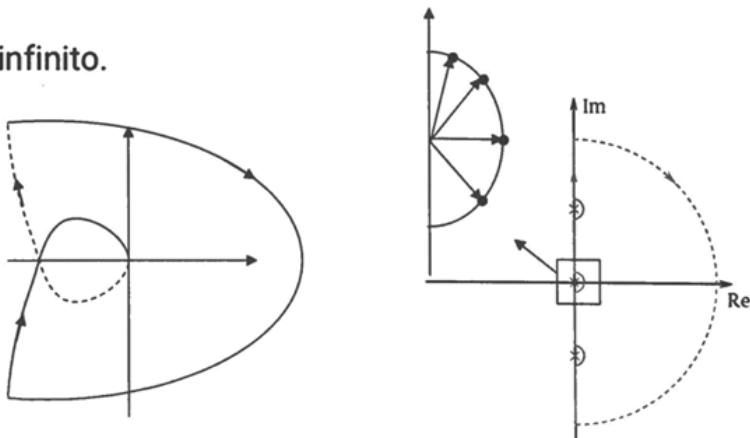
Quando evitiamo i poli nell'origine ci spostiamo di raggio  $\varepsilon$ . Consideriamo il caso con 1 polo nell'origine dato da qualcosa nella forma:

$$\frac{1}{s} \quad s = \varepsilon e^{j\theta}, \quad \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

si sostituisce  $s$  e si riporta al numeratore cambiando il segno della fase.

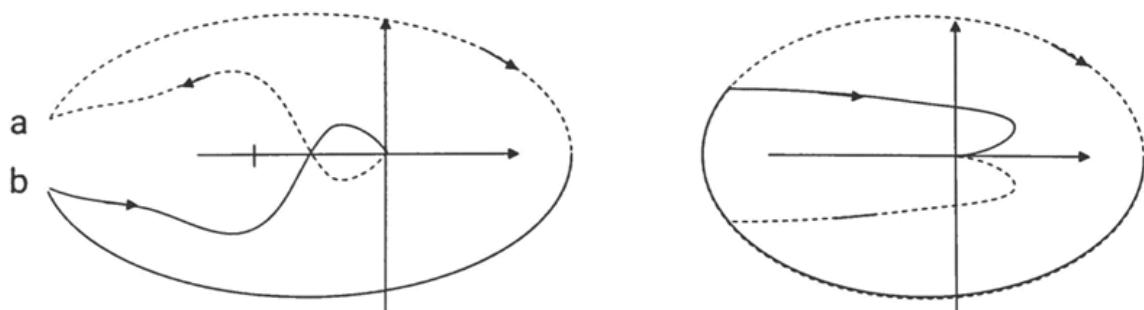
**Sistemi con poli nell'origine:** non e' immediato capire la forma chiusa rispetto al cui contorno occorre valutare il numero di rotazioni

Ci sono infatti gli asintoti all'infinito.



Nel caso di due poli nell'origine si prenderà una forma del tipo  $\frac{1}{s^2}$  con  $s = \varepsilon e^{j\theta}$ .

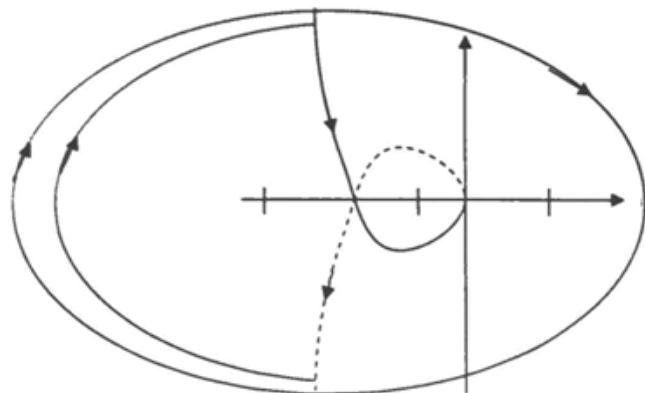
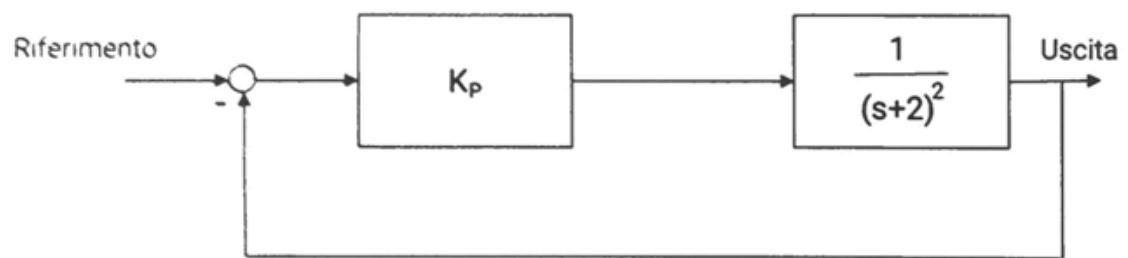
**Sistemi con poli nell'origine:** non e' immediato capire la forma chiusa rispetto al cui contorno occorre valutare il numero di rotazioni



Richiusura orario, di un giro, all'infinito per un sistema di tipo 2

Se prendiamo infine un sistema di tipo 3, ovvero con 3 poli nell'origine, avremo 3 richiusure all'infinito (3 mezzi giri per chiudere il diagramma all'infinito).

Avremo qualcosa del tipo:



Lezione 26 - 06/05/2025 - [edit]



# Lezione 26 - 06/05/2025 - [ ]

[Lezione 25 - 30/04/2025](#)

Lezione di riepilogo sullo studio dei sistemi con funzione di trasferimento.  
Esercitazione su Bode, Nyquist, e Luogo delle radici.

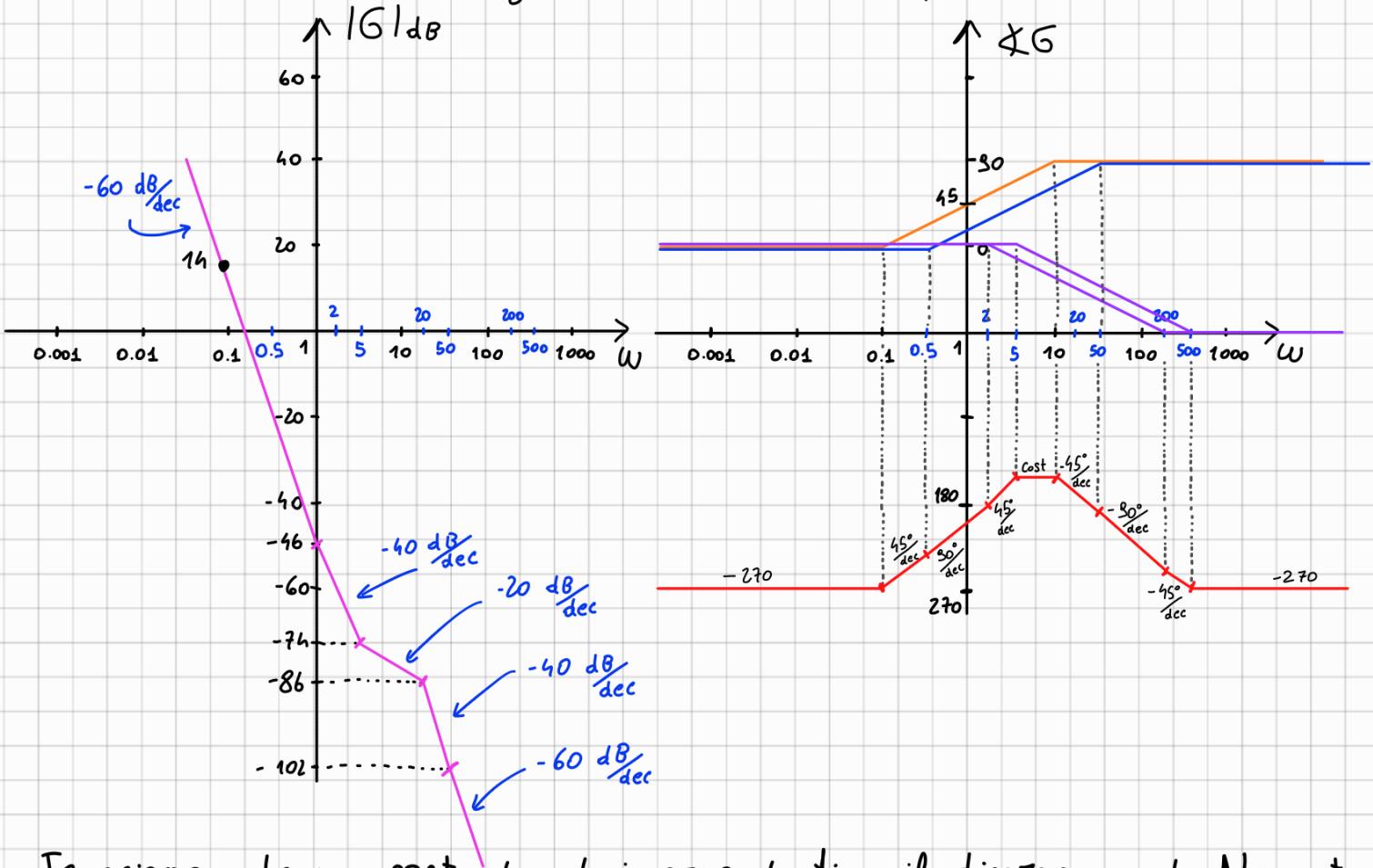
[attachment:d229593e-fe98-453f-9721-0de50163513d:Lezione\\_26\\_250506.pdf](#)

[Lezione 27 - 07/05/2025](#)

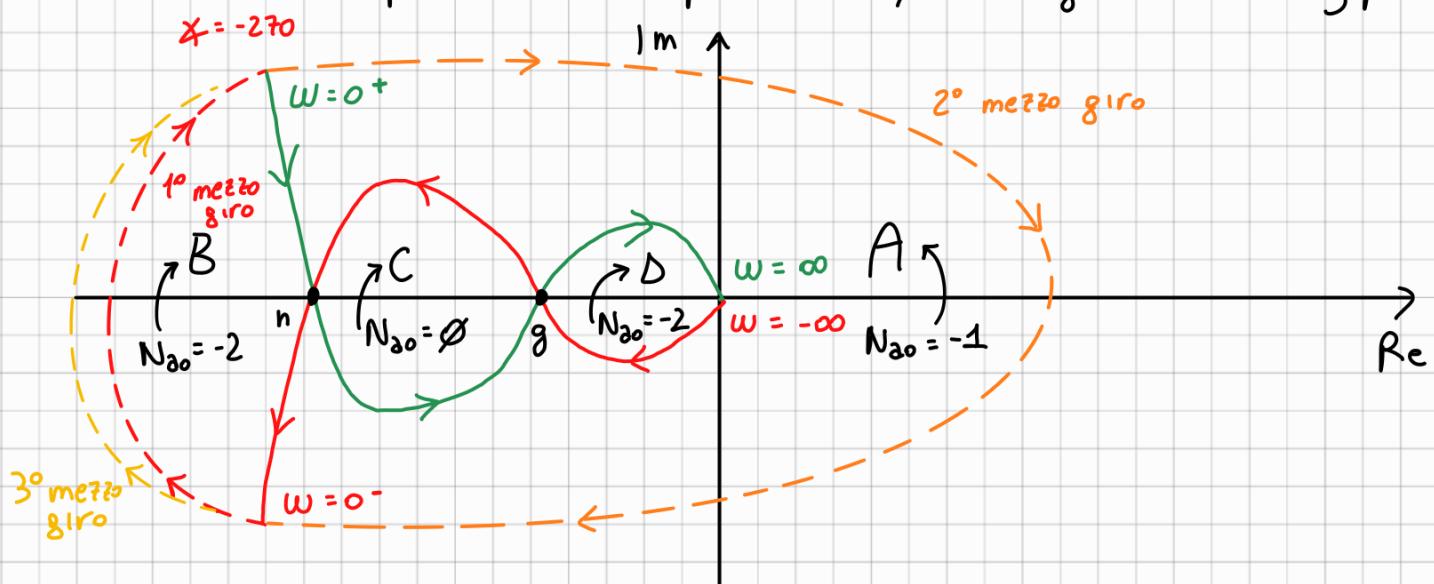
# Esercizio con Bode e Nyquist

$$G(s) = \frac{1}{200} \frac{(1+s)(1+\frac{s}{5})}{s^3(1+s/20)(1+s/50)} \quad \stackrel{s=j\omega}{\Rightarrow} \quad G(j\omega) = \frac{1}{200} \frac{(1+j\omega)(1+\frac{j\omega}{5})}{(j\omega)^3(1+j\omega/20)(1+j\omega/50)}$$

Tracchiamo adesso il diagramma di Bode (punti critici in blu)

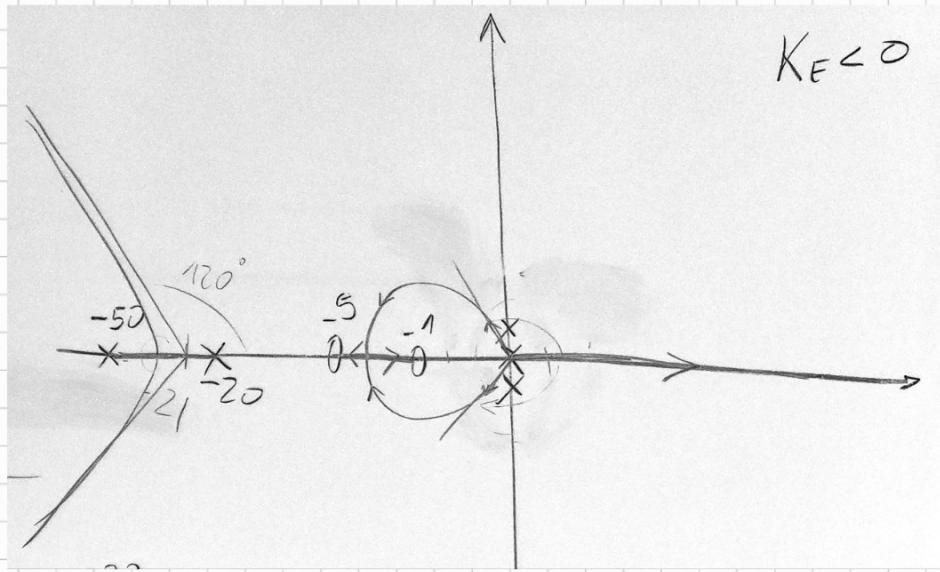
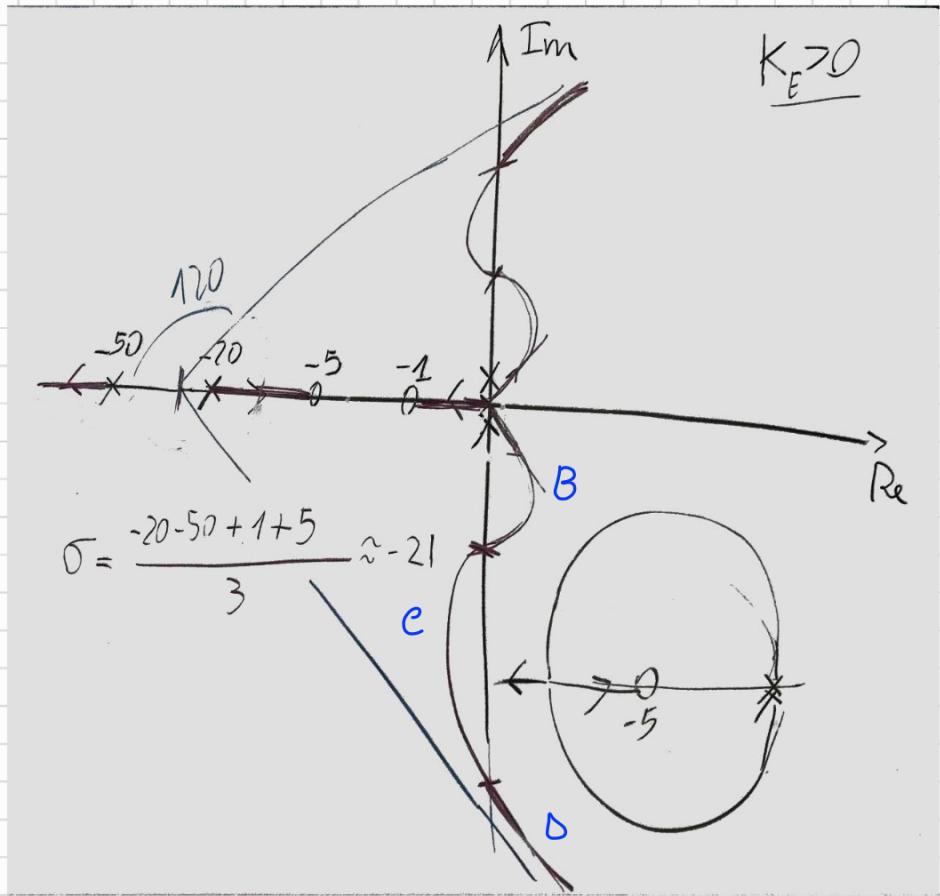


Tracchiamo adesso pertanto dai precedenti, il diagramma di Nyquist



- Ci sono tre poli nell'origine, faremo quindi tre metà giri per tracciare le richiusure all'infinito.
- Per il criterio di Nyquist  $N_{20} = P^+$ , questo succede solo nelle zone C. Ovvero il sistema in ciclo chiuso è stabile quando varia il guadagno K, il mio punto  $-1/K$  ricade nelle zone C, ovvero le zone a parte reale comprese tra i punti H e g.

# STESO ESERCIZIO MA CON LUOGO DELLE RADICI



In questo caso con  $K_E < 0$  non ci sono radici stabili

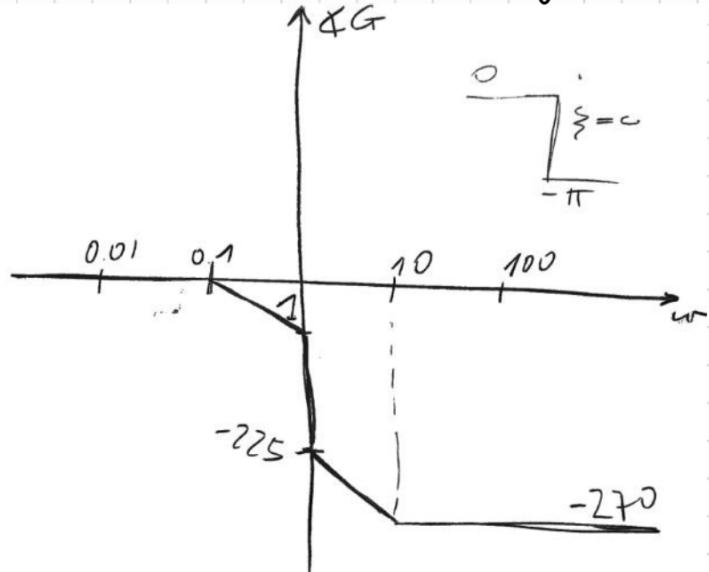
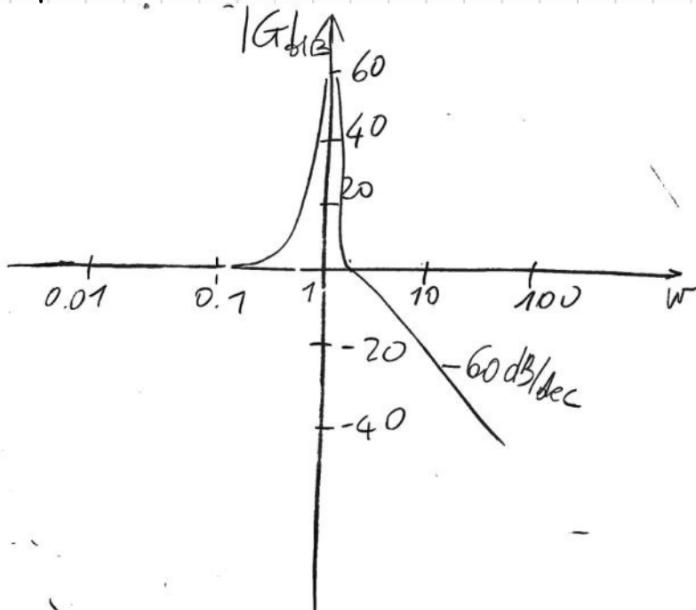
## ALTRÒ ESERCIZIO

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$

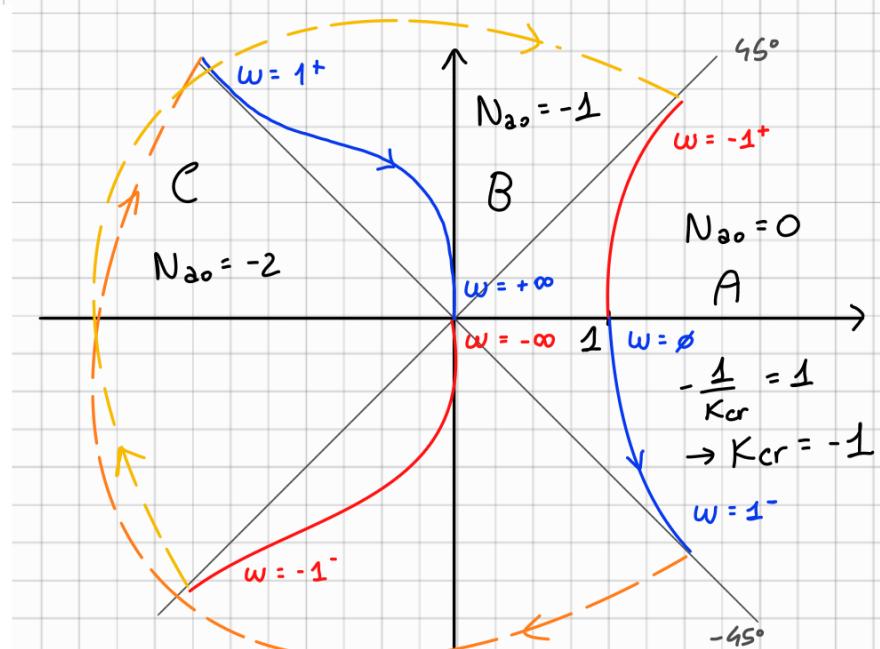
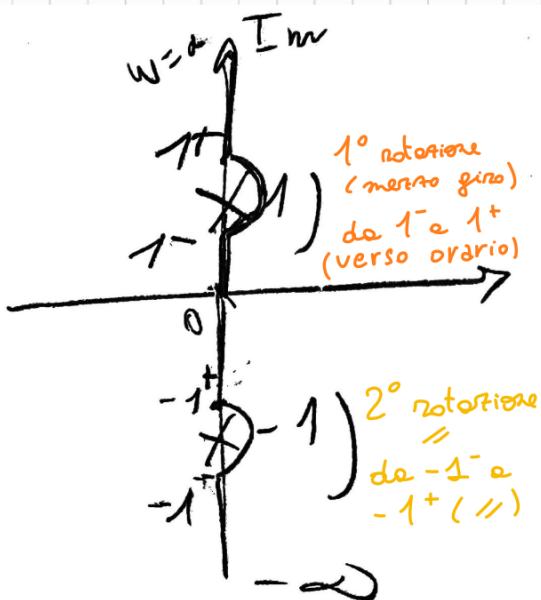
(anche in questo caso sono  
esse ricerche del valore di  $K$ )

Per prime cose tracciamo il diagramma di Bode

- Il polo semplice non contribuisce assintoticamente.
- I poli complessi e coniugati costituiscono il caso dello smorzamento. In prossimità di 1 (da sinistra) il grafico di  $|G|_{dB}$  va a +∞, mentre subito dopo (da destra) il grafico scende da +∞ e scende con -60 dB/dec (per la presenza di 3 poli).
- Il picco di risonanza dei poli complessi e coniugati causa un picco a +∞ nel modulo e una discontinuità nelle fasi.

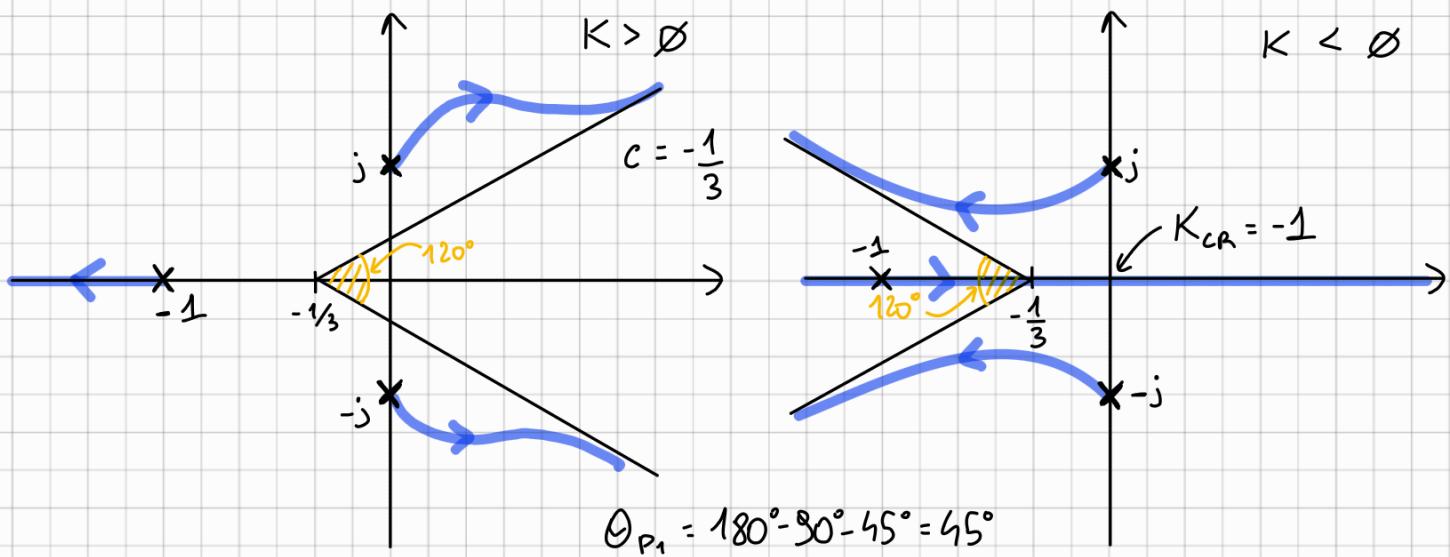


Il diagramma di Nyquist risulta leggermente più complesso



Studiando la stabilità per  $-1/K$ , l'unica zona stabile è A, ovvero dopo il punto 1. È facile allora calcolare il  $K$  critico ( $K_{cr}$ ) imponendo  $-1/K_{cr} = 1$  da cui ottengo  $K_{cr} = -1$ . Sono stabile per  $K < K_{cr} = -1$ .

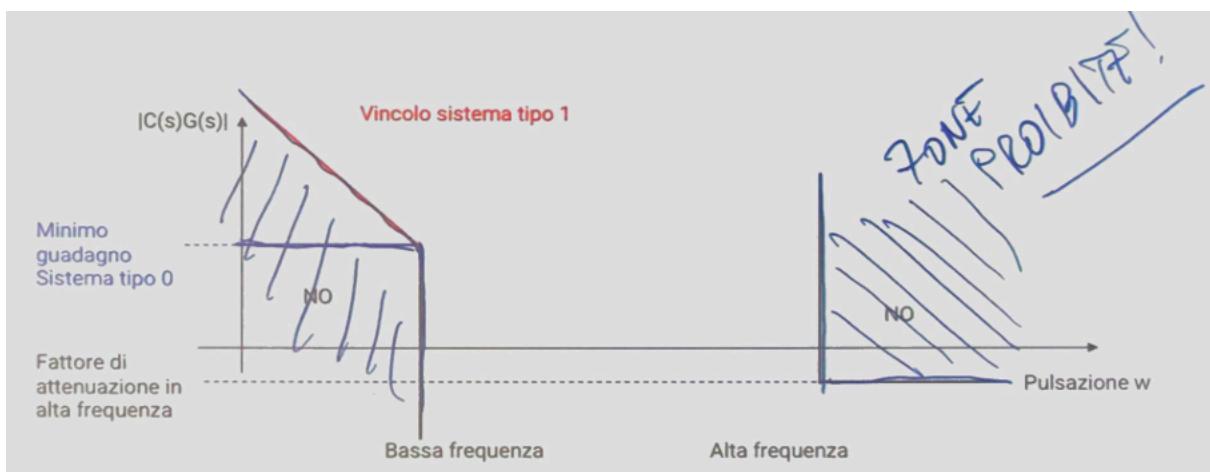
Confermiamo ciò che già detto con Nyquist con il lungo delle radici.



### ALTRO ESERCIZIO

$$G(s) = \frac{1+s}{s\left(\frac{s}{10} - 1\right)} \rightarrow G(s) = -1 \frac{1+s}{s\left(1 - \frac{s}{10}\right)}$$

# Progettazione del controllore





# Lezione 27 - 07/05/2025

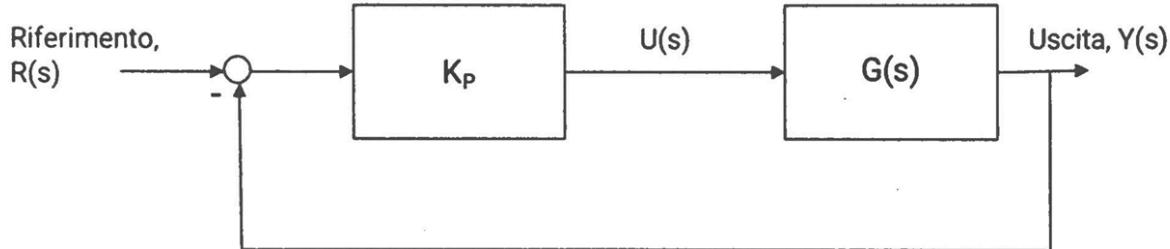
[Lezione 26 - 06/05/2025 - \[edit\]](#)

Gli ultimi argomenti da trattare sono le prestazioni che il sistema deve raggiungere e il modo in cui bisogna scrivere i nostri controllori. Questi argomenti saranno al centro delle lezioni di queste ultime settimane.

## Margini di ampiezza e fase

Quello che intendiamo con margini di ampiezza e fase, è andare a trattare l'ultimo aspetto che ci interessa nella realizzazione dei controllori, ovvero la **robustezza**.

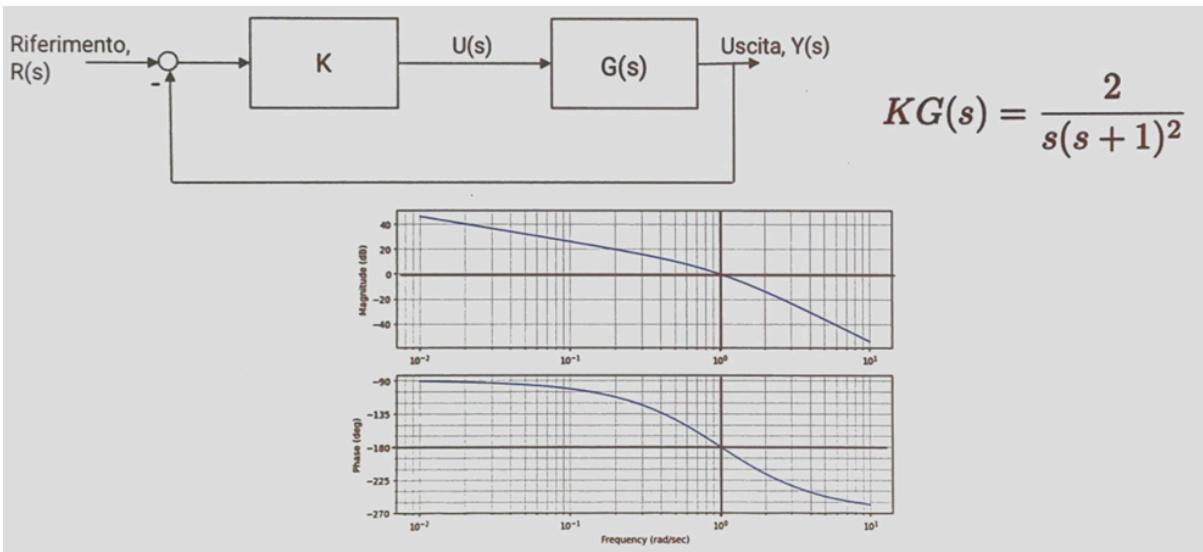
## Robustezza



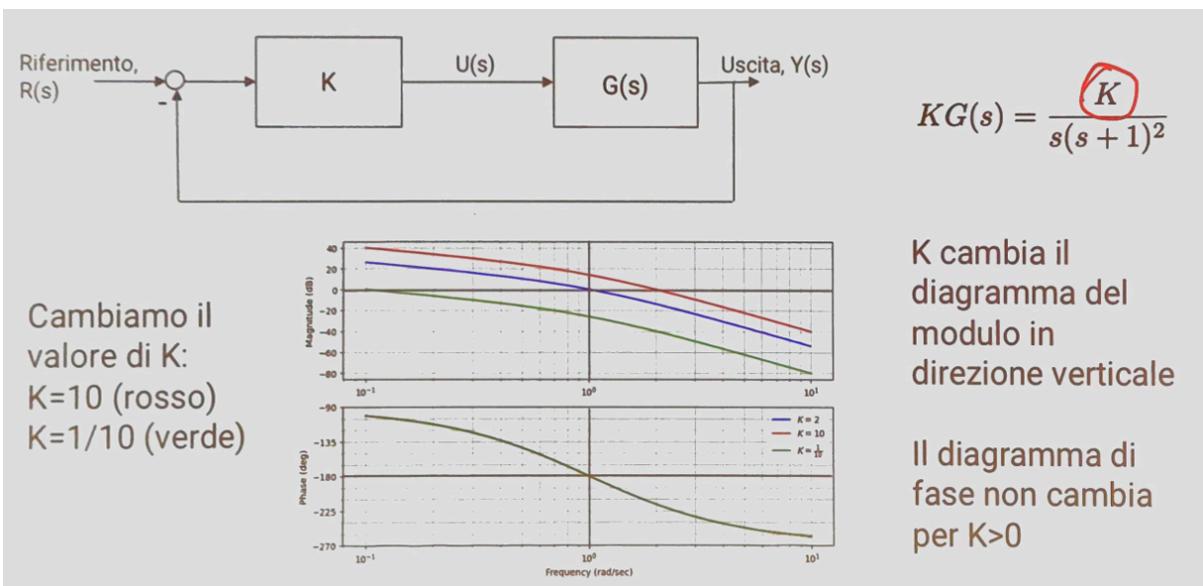
$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)} = \frac{\hat{G}(s)}{1 + \hat{G}(s)}$$

Partiamo dal porci due domande: possiamo quantificare la stabilità di un sistema in ciclo chiuso, dalla conoscenza della risposta armonica in catena aperta? È possibile che un sistema sia più stabile di un altro?

## Esempio



Quello che vedo è che il diagramma di Bode per  $\omega = 1$  attraversa l'asse a 0 (0 dB), mentre per  $\omega < 1$  ho una pendenza di -20 dB/dec, infine per  $\omega > 1$  ho una pendenza di -60 dB/dec (per l'azione di tre poli).



Il guadagno **K cambia il diagramma del modulo in direzione verticale**, mentre se il guadagno è positivo non cambia il diagramma di fase, in particolare il punto in cui passa per  $-180^\circ$  nella fase rimane sempre per  $\omega = 1$  rad/sec. La linea rossa nel grafico corrisponde al caso instabile mentre quella verde corrisponde al caso stabile. Nel caso blu siamo nel caso di stabilità marginale con radici sull'asse immaginario.

## Regola generale

Per avere la **stabilità**:

- La **fase** deve essere maggiore di  $-180$  quando il modulo vare  $0$  dB;
- Il **modulo** deve essere minore di  $0$  dB quando la fase vale  $-180$ .

Possiamo estendere questa regola alla regola sui margini di fase e di ampiezza:

Introduciamo per prima cosa due nuovi parametri che ci consentono di definire le condizioni di stabilità di un sistema di controllo:

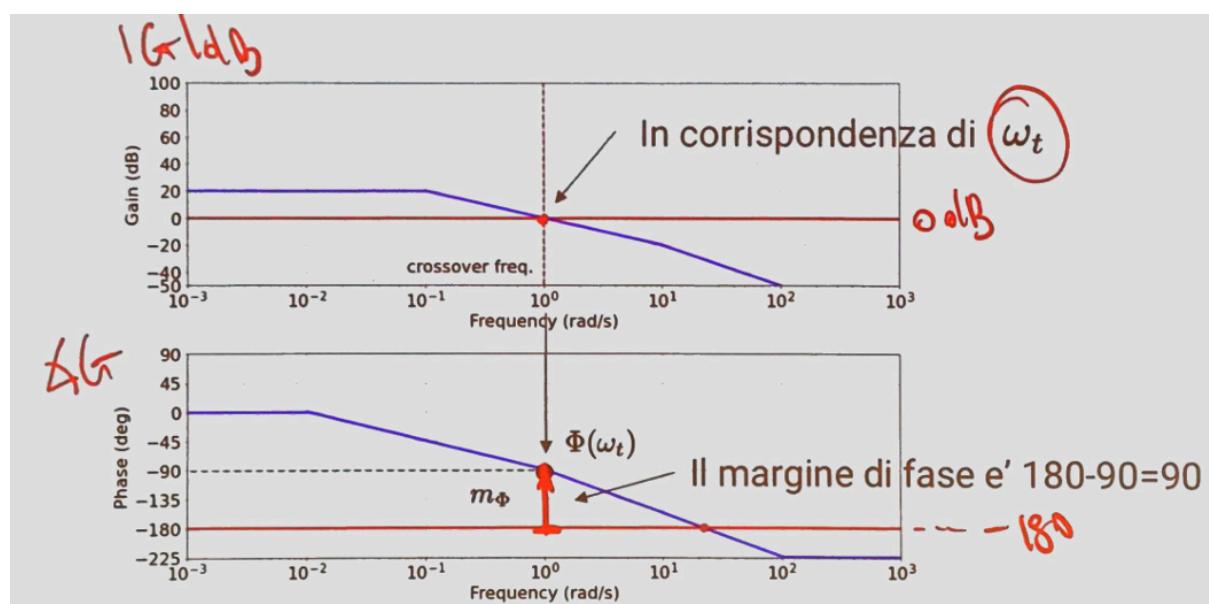
1. **Margine di fase**
2. **Margine di guadagno (o di ampiezza)**

## Margini di fase

Il **margine di fase** è definito come:

$\omega_t$  è detta **pulsazione di crossover**. Il margine di fase è l'angolo che si ricava dalla somma di  $180^\circ$  più la fase della funzione di trasferimento ad anello aperto alla pulsazione di crossover.

Un  $m_\Phi$  buono è positivo e implica stabilità.



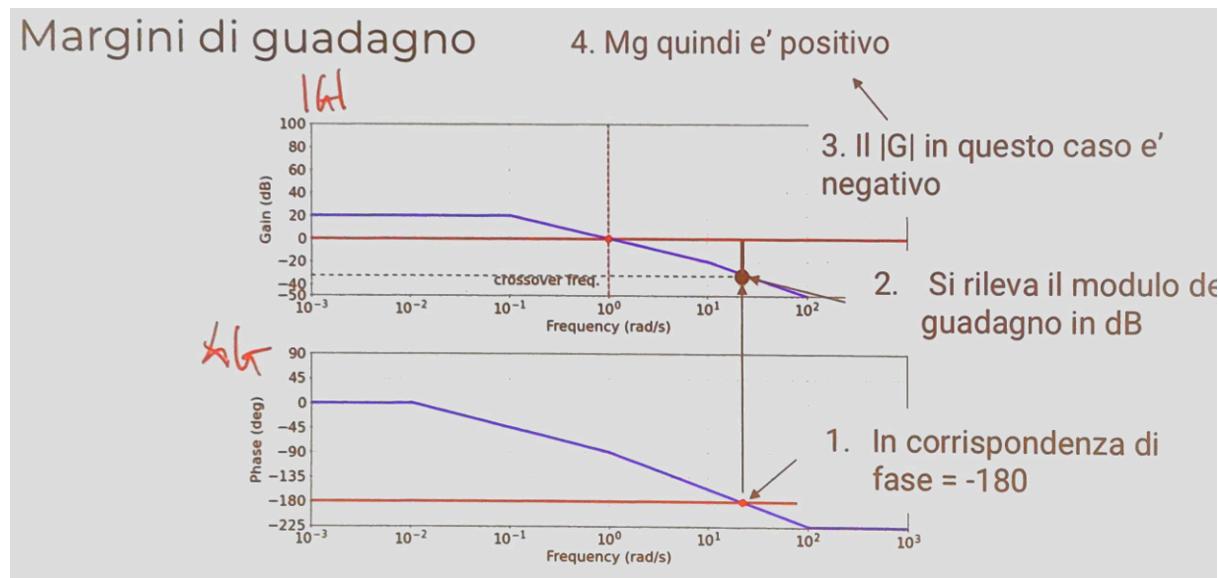
## Margini di guadagno (o di ampiezza)

Il **margine di guadagno** è definito come:

Ovvero, è la differenza tra 0 e il valore in dB del modulo della  $G(s)$  quando la fase della  $G(s)$  ad anello aperto vale  $-180^\circ$ .

Per convenzione si ha:

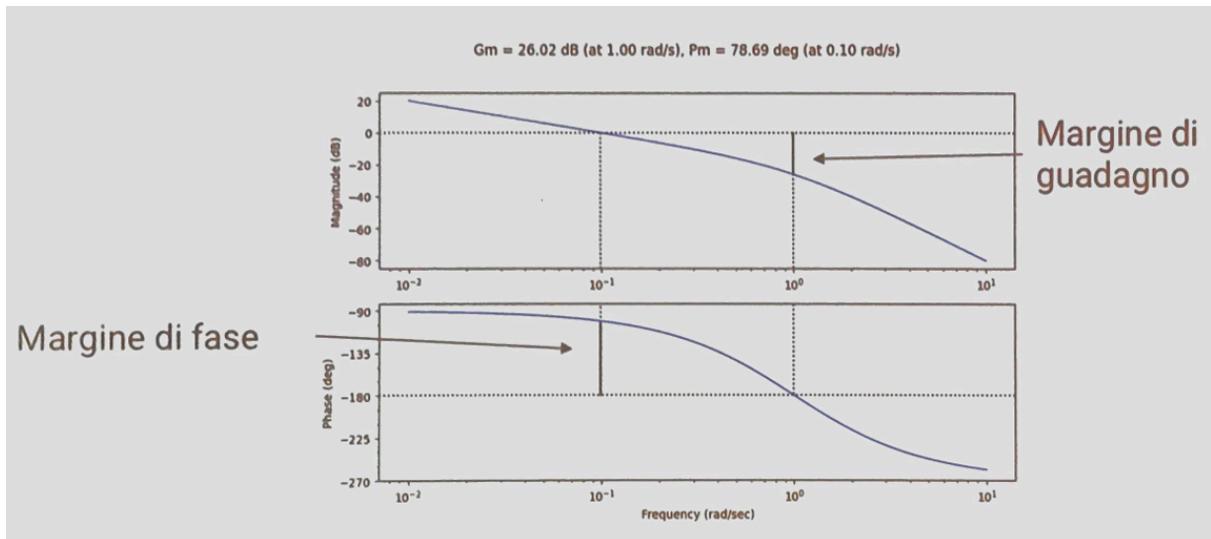
- $Mg$  positivo se  $|G(s)|$  è al di sotto dell'asse a 0 dB quando la fase è  $-180^\circ$ .
- $Mg$  negativo (sistema instabile) se  $|G(s)|$  è al di sopra dell'asse a 0 dB quando la fase è  $-180^\circ$ .



Nella pratica, il margine di guadagno indica quanto è possibile aumentare il guadagno del sistema sino a raggiungere l'instabilità.

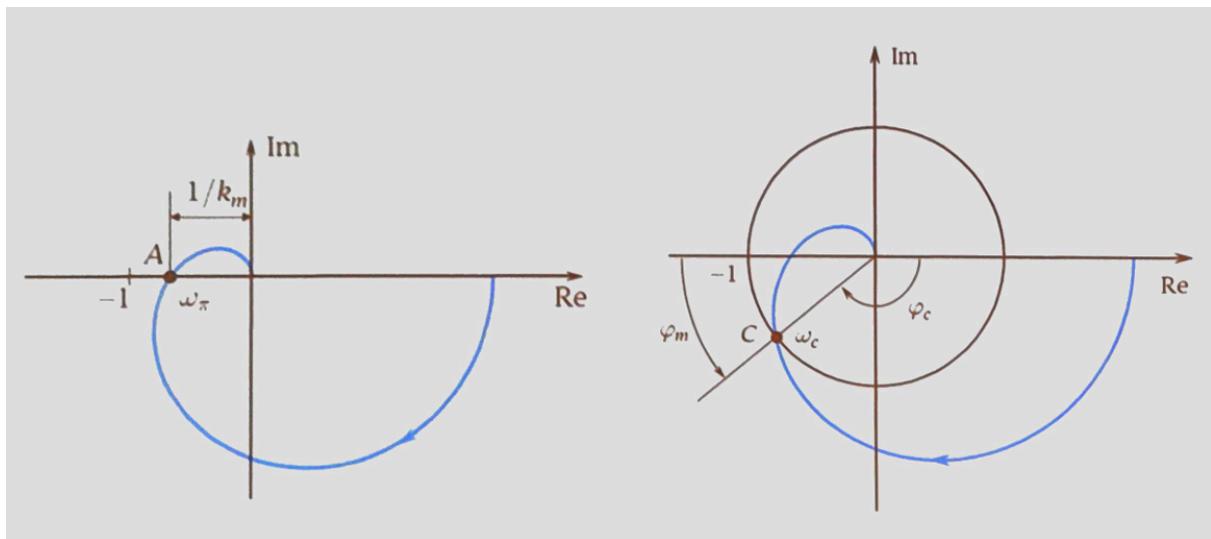
## Margini di stabilità (Bode)

Mettendo insieme i due margini di guadagno e di fase ottengo un diagramma del tipo:



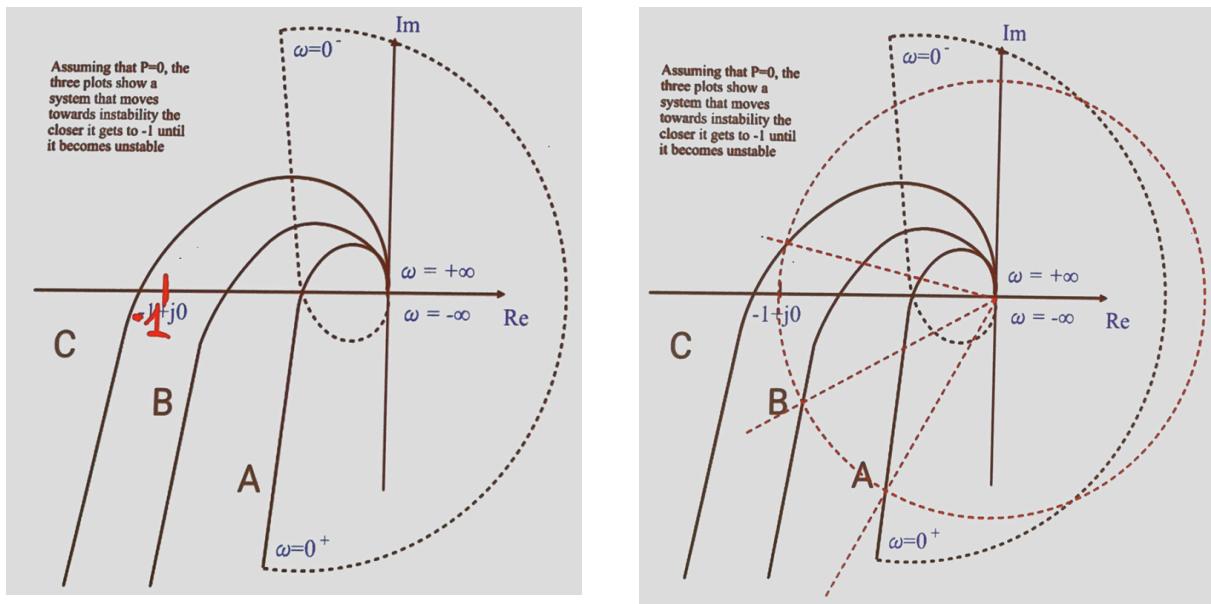
Quando tracciamo Bode con python  $G_m$  indica il gain margin (marginе di guadagno) mentre  $P_m$  il phase margin (marginе di fase).

## Margini di stabilità (Nyquist)



Su Nyquist devo vedere essenzialmente quanto il mio diagramma è lontano dal **punto critico -1**. Per prima cosa traccio la circonferenza di raggio 1 (corrispondente a un modulo di 0 dB). Nel caso di Nyquist il margine di fase, detto stavolta  $\varphi_m$  è l'angolo tra la fase di  $-180^\circ$  e l'angolo formato con il punto che interseca la circonferenza unitaria. Il margine di guadagno è invece indicato con  $k_m$  (nel grafico non vediamo  $k_m$  ma vediamo solo  $-\frac{1}{k_m}$ ). La distanza che adesso andremo a cercare è quella tra -1 e il punto A (più vicino sono all'origine e più lontano sono da -1).

Prendiamo questo caso:



Tra le tre curve preferirei lavorare con A o al limite con B, in quanto C rappresenta un caso di instabilità (margini di fase negativo), con A abbiamo invece un margine di guadagno e anche di fase maggiore rispetto che in B.

## Requisiti di progetto

In genere per dei buoni sistemi bisogna raggiungere un **margine di guadagno maggiore di circa 4 o 6 dB**, mentre per un buon margine di fase di solito i requisiti impongono un **margine di fase maggiore di 35°**. Questi requisiti garantiscono delle buone condizioni di stabilità.

## Sistemi non regolari

Le definizioni viste sono poco significative quando i sistemi sono **non regolari**.

Un sistema in retroazione ha un andamento regolare se l'ampiezza della funzione di trasferimento a ciclo aperto è funzione monotona decrescente della pulsazione (l'andamento del modulo e della fase sono decrescenti).

Quando si hanno più intersezioni con l'asse reale negativo nel piano di Nyquist o quando il diagramma polare ha **intersezioni multiple** con la circonferenza unitaria del piano di Nyquist, la definizione perde univocità.

Alcuni esempi:

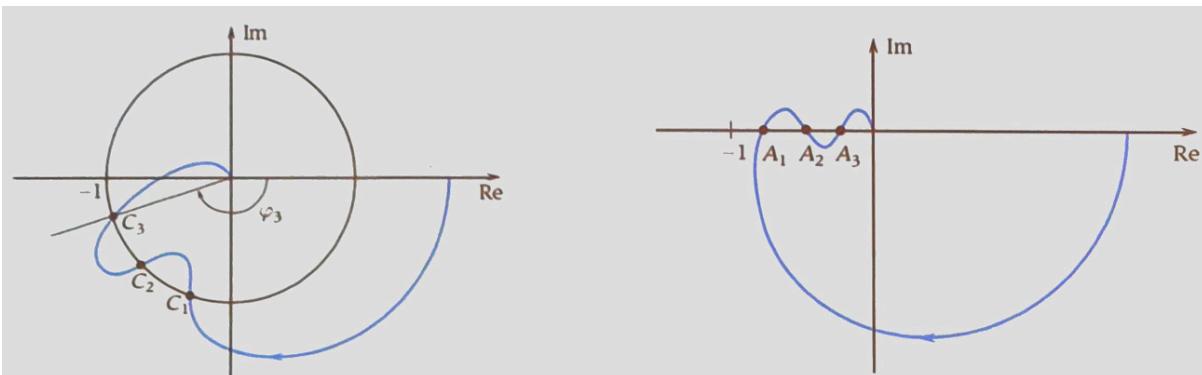


Diagramma polare con intersezioni multiple della circonferenza unitaria.

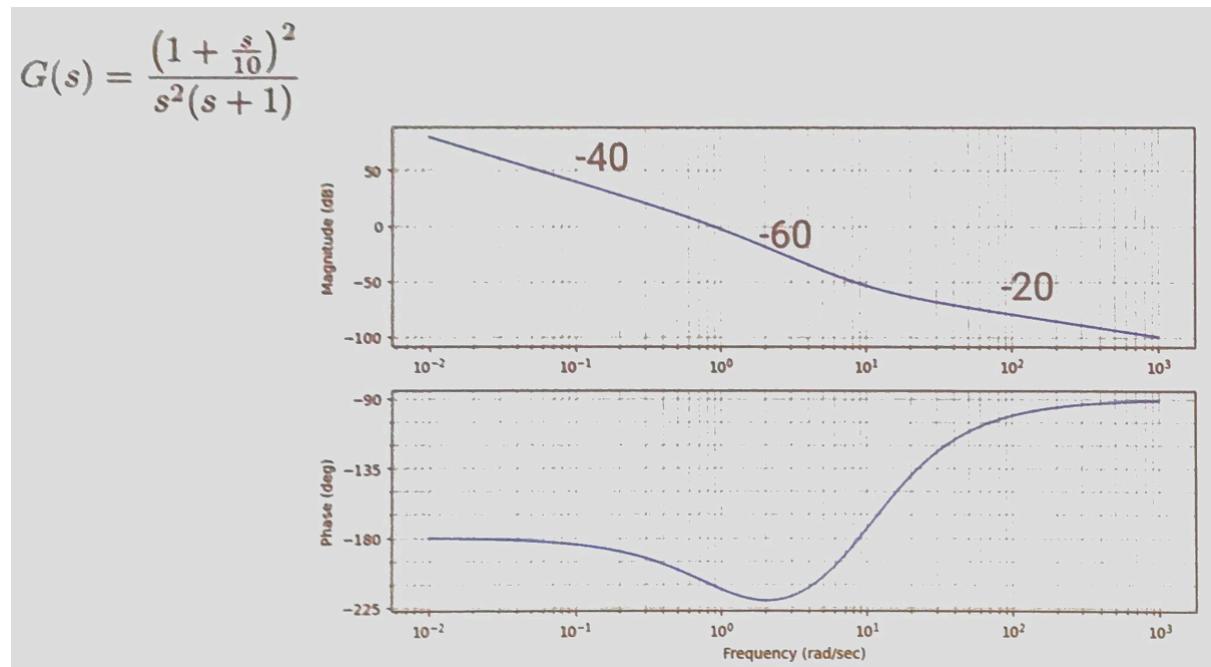
Diagramma polare con intersezioni multiple del semiasse reale negativo.

Nel primo caso ho problemi sul margine di fase, nel secondo sul guadagno. In entrambi i casi posso ragionare partendo dal caso peggiore.

### Casi particolari di sistemi non regolari

Troviamo alcuni sistemi che sono instabili per bassi guadagni e che tornano ad essere stabili con guadagni alti

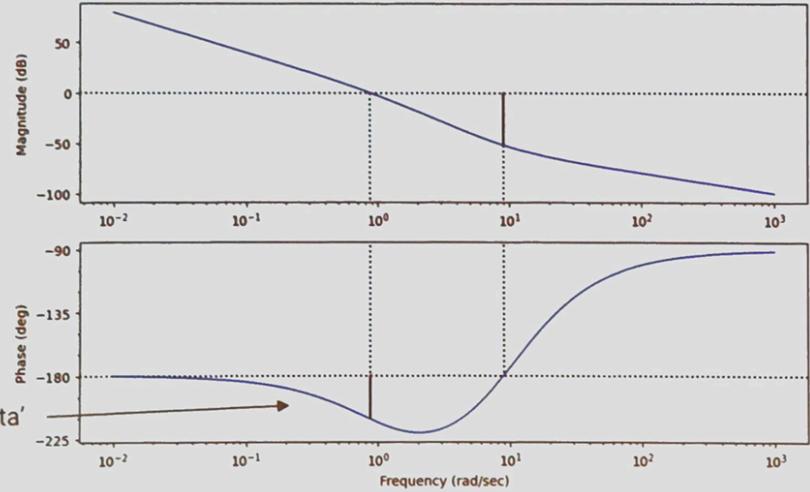
Prendiamo un esempio; tracciamo per prima cosa il diagramma di Bode:



Tracciamo adesso i margini di fase e guadagno:

$$G(s) = \frac{(1 + \frac{s}{10})^2}{s^2(s + 1)}$$

$G_m = 52.04 \text{ dB}$  (at  $8.94 \text{ rad/s}$ ),  $P_m = -31.11 \text{ deg}$  (at  $0.87 \text{ rad/s}$ )



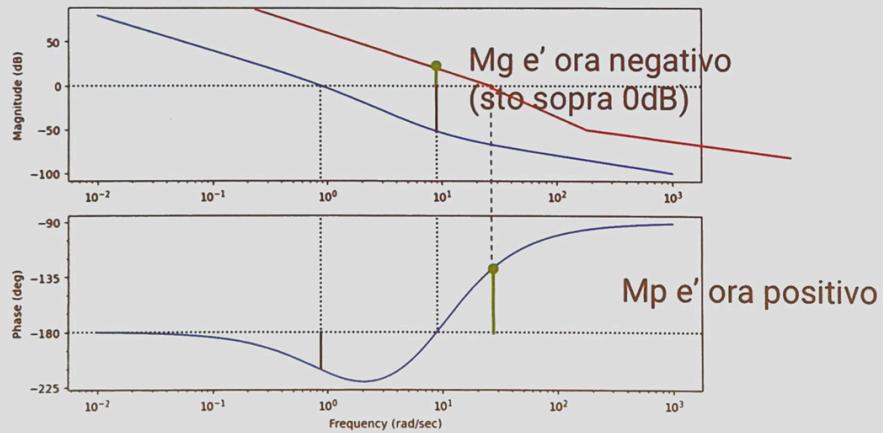
Per tracciare i diagrammi possiamo usare in Python la [Python Control Library](#) che è molto simile a quella in Matlab.

Se nello stesso diagramma aumento il guadagno ottengo il seguente:

$$G(s) = \frac{(1 + \frac{s}{10})^2}{s^2(s + 1)}$$

$G_m = 52.04 \text{ dB}$  (at  $8.94 \text{ rad/s}$ ),  $P_m = -31.11 \text{ deg}$  (at  $0.87 \text{ rad/s}$ )

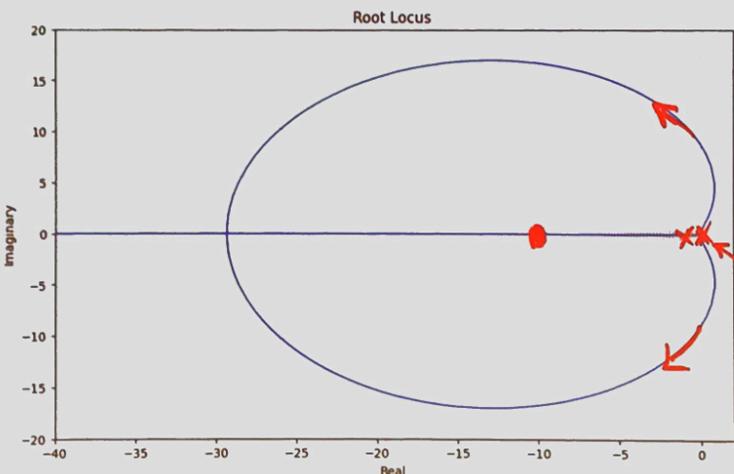
Cosa succede se aumentiamo il guadagno?



Se traccio il luogo delle radici ho una conferma immediata che per un guadagno piccolo il sistema è instabile, mentre per un guadagno grande il sistema torna a essere stabile.

$$G(s) = \frac{(1 + \frac{s}{10})^2}{s^2(s + 1)}$$

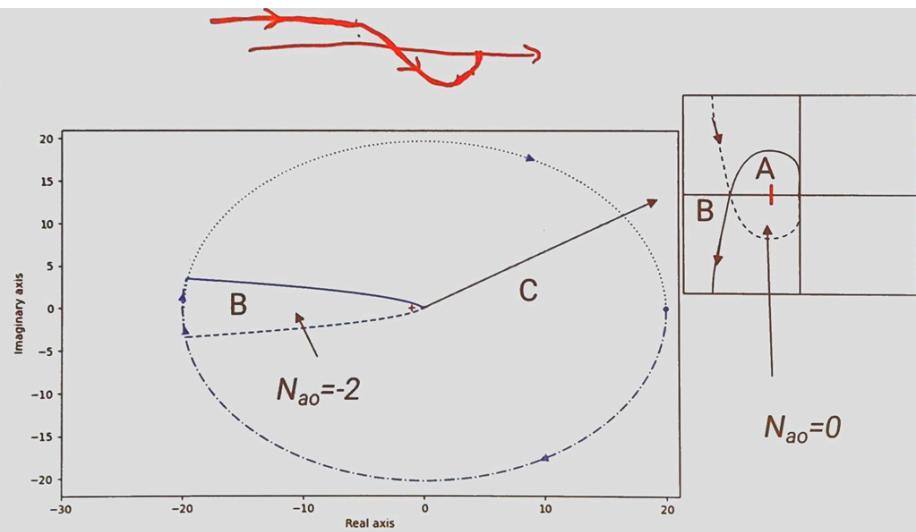
Cosa succede se aumentiamo il guadagno?



Infine, con Nyquist ottengo la seguente cosa:

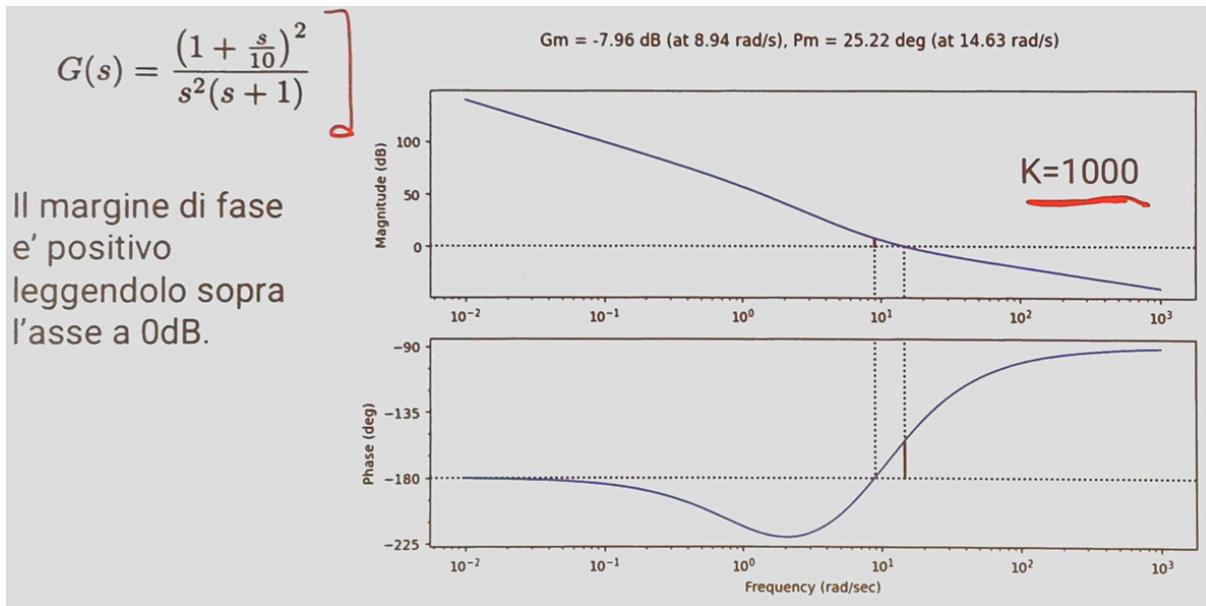
$$G(s) = \frac{(1 + \frac{s}{10})^2}{s^2(s + 1)}$$

Cosa succede se aumentiamo il guadagno?



Nota bene: Matlab non disegna dettagliatamente il grafico, ma quello che succede intorno a -1 (che è deducibile da Bode), è che il diagramma curva verso il basso e insieme al suo simmetrico costituisce una nuova zona A.

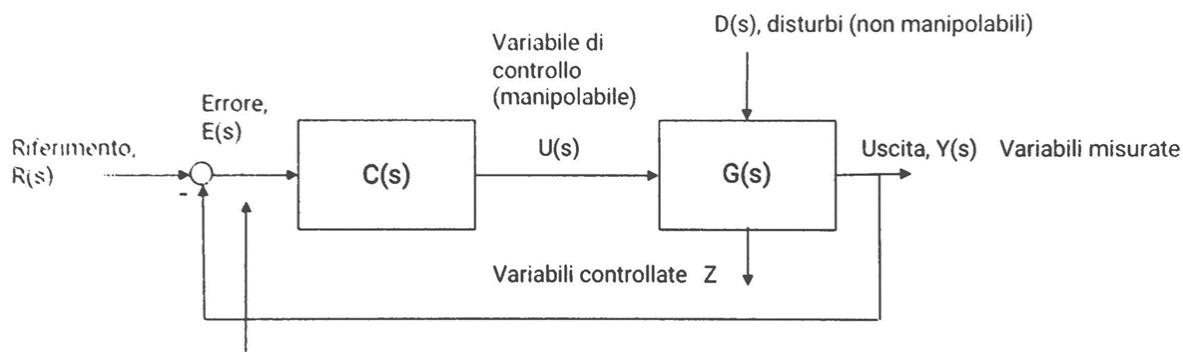
Secondo il criterio di Nyquist l'unica zona che rispetta la condizione di stabilità è la zona A (in cui rientro appunto solo per valori grandi del guadagno). Anche Nyquist conferma come il luogo delle radici la presenza di due radici instabili per bassi valori di  $K$ .



Quello che risulta in definitiva è che con Bode si era data una falsa interpretazione del sistema. Il caso che abbiamo preso costituisce un caso particolare in cui bisogna invertire la definizione di margine di guadagno per comprendere al meglio il nostro sistema (in particolare dobbiamo ragionare pensando di quanto possiamo abbassare il guadagno prima che il sistema diventi instabile).

## Sistemi di controllo

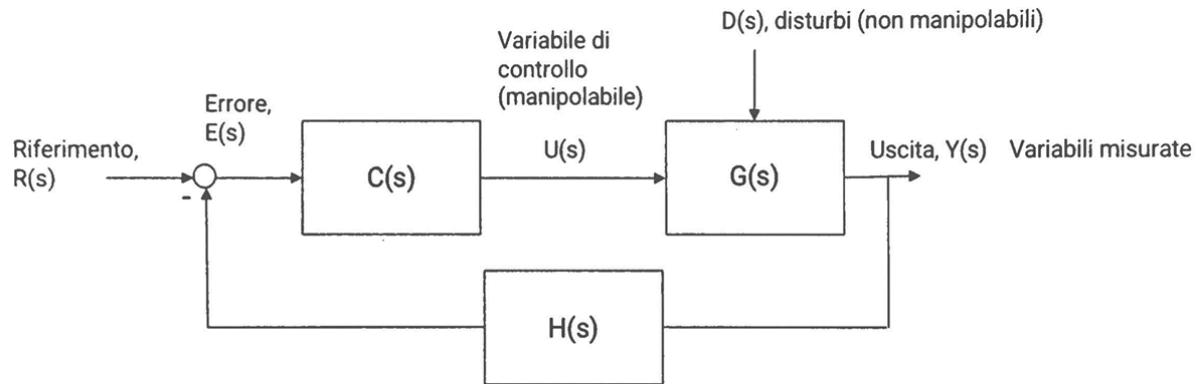
Da ora in avanti metteremo insieme gli strumenti visti per progettare sistemi di controllo (**creazione dei controllori**)



Il comportamento desiderato è che  $y(t) \rightarrow r(t)$  dove  $r$  è il riferimento, ovvero l'uscita desiderata.

L'azione di controllo  $U(s)$  dipende dall'entità dell'errore. Non vogliamo più che il sistema in ciclo chiuso sia stabile ma abbiamo anche altri requisiti (**specifiche di progetto**):

- **Adeguata precisione** (statica e dinamica, ovvero anche nel transitorio), in quanto vogliamo che l'uscita tenda al riferimento in modo abbastanza preciso
- **Adeguata stabilità** (che rispetti una determinata incertezza e determinati margini)



Posso anche aggiungere una certa  $H(s)$  ma in genere assumiamo una  $H(s) = 1$  (ma in questo caso la funzione di trasferimento cambierebbe)

$$H(s) = 1 \rightarrow \frac{CG}{1 + CG} = W(s) \quad H(s) \neq 1 \rightarrow \frac{CG}{1 + CGH} = W(s)$$

In alternativa posso mettere in ingresso  $\frac{1}{H}$  e ricondurre lo schema a blocchi nel schema a blocchi senza  $H$ .

## Definizioni e specifiche

**Performance desiderate** in ciclo chiuso:

- Il sistema in ciclo chiuso deve essere **stabile** (questo requisito è dato per scontato, la stabilità in ciclo chiuso è obbligatoria)
- **Inseguire i riferimenti**: risposta rapida, smooth a variazioni nei riferimenti (set-point tracking)
- **Reiettare i disturbi**: gli effetti dei disturbi devono essere minimizzati

Queste specifiche si classificano in tre categorie:

- **Specifiche statiche**
- **Specifiche dinamiche**
- **Specifiche di robustezza**

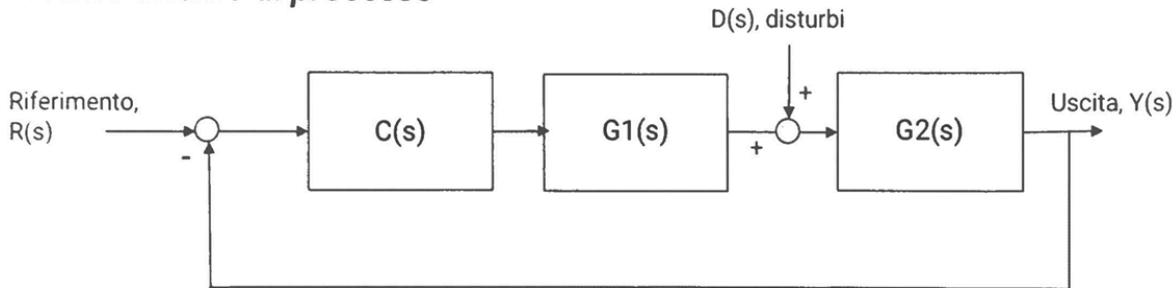
### Specifiche statiche

Le specifiche statiche riguardano il **comportamento a regime** di un sistema controllato e quindi comprendono la scelta di un controllore in grado di annullare o ridurre l'errore

in risposta a un riferimento o a un segnale di disturbo.

L'errore a regime indica un orizzonte temporale teoricamente infinito ( $t \rightarrow \infty$ ).

### **Disturbo interno al processo**



$$Y(s) = W(s) \cdot R(s) + W_d(s) \cdot D(s)$$

$$W(s) = \frac{C(s)G_1(s)G_2(s)}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)} \quad W_d(s) = \frac{G_2(s)}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)}$$

Nella  $Y(s)$  considero il primo prodotto con  $R(s)$  non nullo e  $D(s)$  nullo, mentre nel secondo prodotto ho un  $R(s)$  nullo e un  $D(s)$  diverso da zero. Sfruttando la linearità ottengo la relazione di  $Y(s)$ .

### **Specifiche di robustezza**

Le **specifiche di robustezza** sono esplicitate in margine di fase e margine di guadagno.

[Lezione 28 - 08/05/2025](#)



# Lezione 28 - 08/05/2025

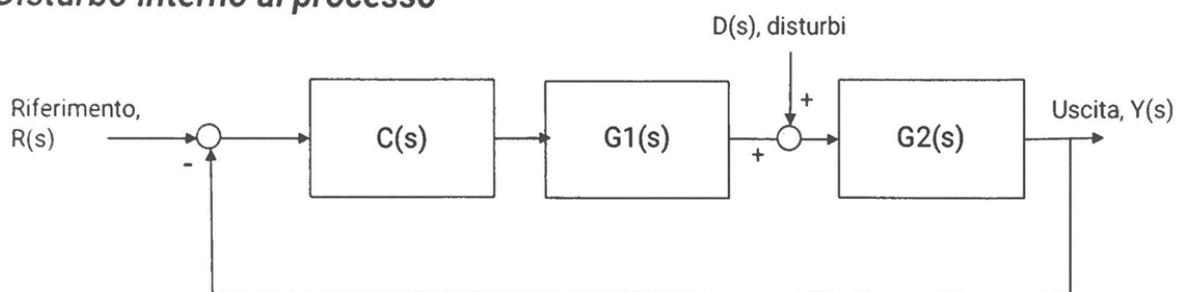
[Lezione 27 - 07/05/2025](#)

## Specifiche statiche

### Disturbo interno al processo

#### Controllore di tipo 0

##### *Disturbo interno al processo*



$$Y(s) = W(s) \cdot R(s) + W_d(s) \cdot D(s)$$

$$W(s) = \frac{C(s)G_1(s)G_2(s)}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)} \quad W_d(s) = \frac{G_2(s)}{1 + C(s)G_1(s)G_2(s)}$$

Per i sistemi di tipo 0 con ingresso a gradino sappiamo che dal teorema del valore finale, i guadagni statici delle funzioni di trasferimento in anello chiuso sono i valori della risposta a regime. Idealmente vorremmo ottenere  $W(0) = 1$  e  $W_d(0) = 0$ .

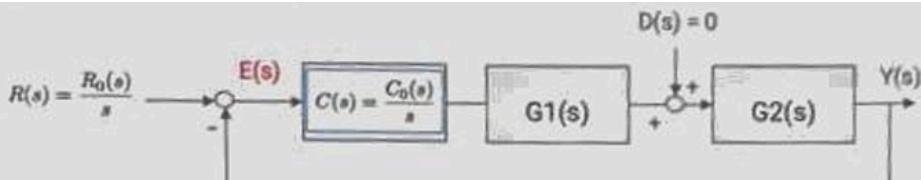
#### Controllore di tipo 1 o maggiore

## Regola generale

Per controllori di tipo 1, o maggiore di 1, si ha l'annullamento dell'effetto del disturbo al gradino.

Affinché **a regime venga annullato l'effetto di un disturbo a gradino**, occorre che sia presente nella catena diretta, a **monte** del punto di ingresso del disturbo, un termine integrale.

La regola vale per i soli sistemi stabili.



Riferimento a gradino, assenza di disturbo

Per sistemi di tipo 0 (stabili)

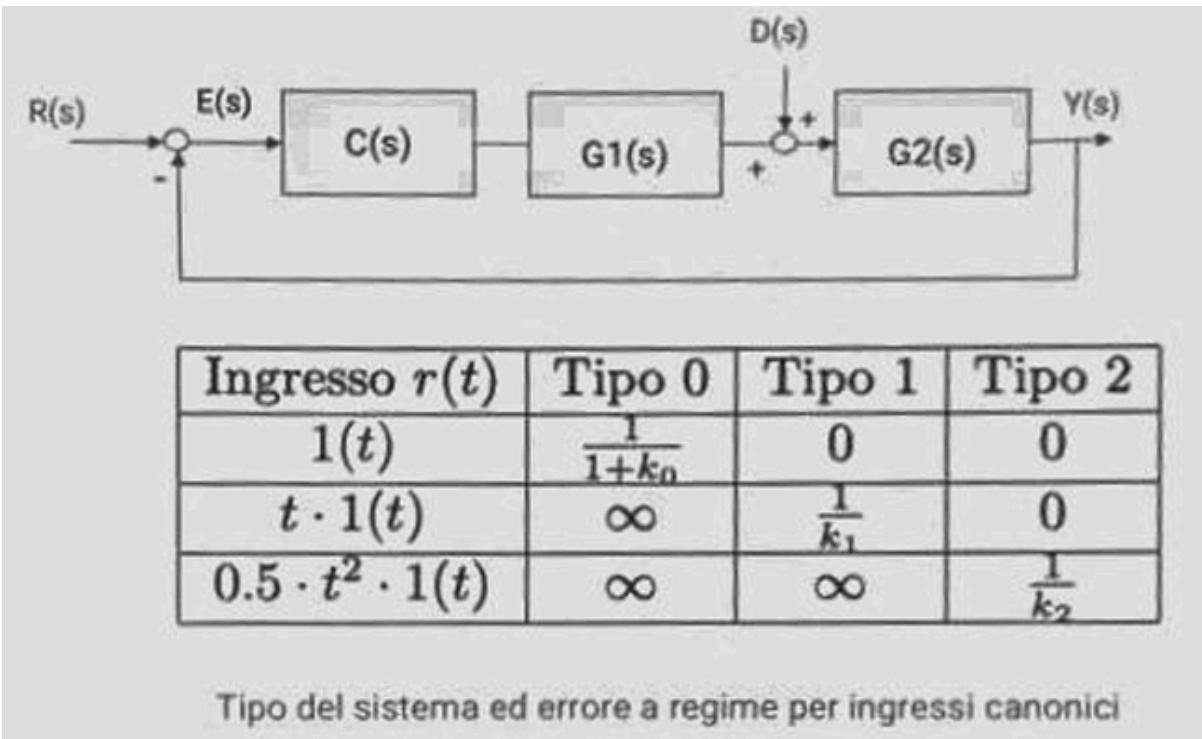
$$\text{Errore a regime: } e(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{1 + C(0) \cdot P(0)} = \frac{1}{1 + k_0}$$

Per sistemi di tipo 1 o >1 (stabili)

$$\text{Errore a regime: } e(t \rightarrow \infty) = 0$$

### Regola (per sistemi stabili)

Affinché a regime venga annullato l'errore in risposta ad un ingresso a gradino, occorre che nella catena diretta sia presente un termine integrale.



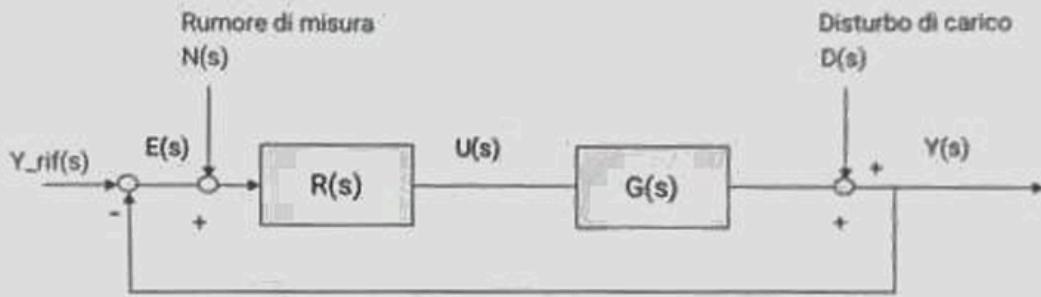
Più è alto il **tipo del sistema**, più è facile avere errore nullo a regime, ma allo stesso tempo un tipo più alto implica maggiori difficoltà per il sistema di essere stabile.

→ Nella pratica quando studio l'errore a regime di un sistema e voglio che questo sia nullo devo aggiungere al controllore un polo nell'origine (ingresso a gradino) o più poli, per raggiungere il tipo desiderato.

Traiamo alcune conclusioni:

- Affinché il sistema in catena chiusa abbia **errore nullo a regime** in risposta ad un ingresso, occorre che la funzione di trasferimento della catena diretta (cioè la funzione prodotto tra il controllore e il processo) sia in grado di generare un **modo uguale al modo del segnale in ingresso**.
- Per reiettare il disturbo a regime, occorre che il modo caratteristico del disturbo sia riprodotto nei blocchi posti a monte del punto di immissione del disturbo stesso.

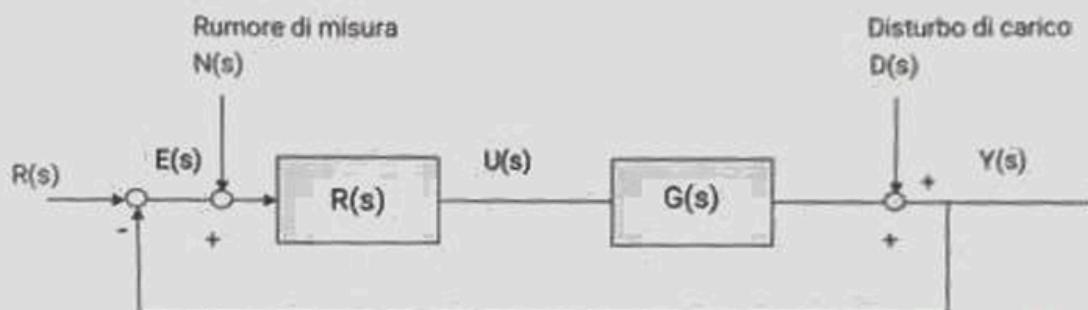
## Funzioni di trasferimento ingresso-uscita



$$E = \frac{1}{1+RG} Y_{rif} \quad Y = \frac{1}{1+RG} D \quad U = \frac{R}{1+RG} Y_{rif}$$

$$Y = \frac{RG}{1+RG} Y_{rif} \quad Y = \frac{RG}{1+RG} N$$

## Funzione di anello



$$L(s) = R(s)G(s) \quad \text{FUNT. DI ANELLO.}$$

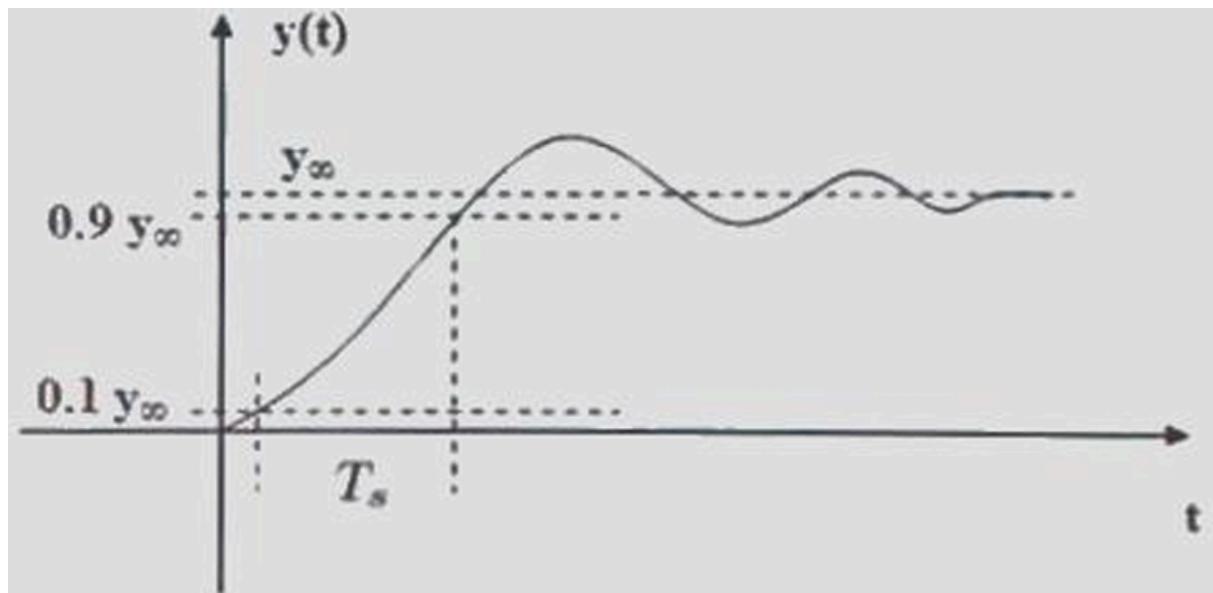
Tutte le f.d.t. dell'anello hanno per denominatore la funzione  $1 + RG$ . La stabilità di una qualsiasi delle f.d.t. implica la stabilità delle altre tre.

## Specifiche nel dominio del tempo

Definiamo le seguenti caratteristiche della risposta al gradino:

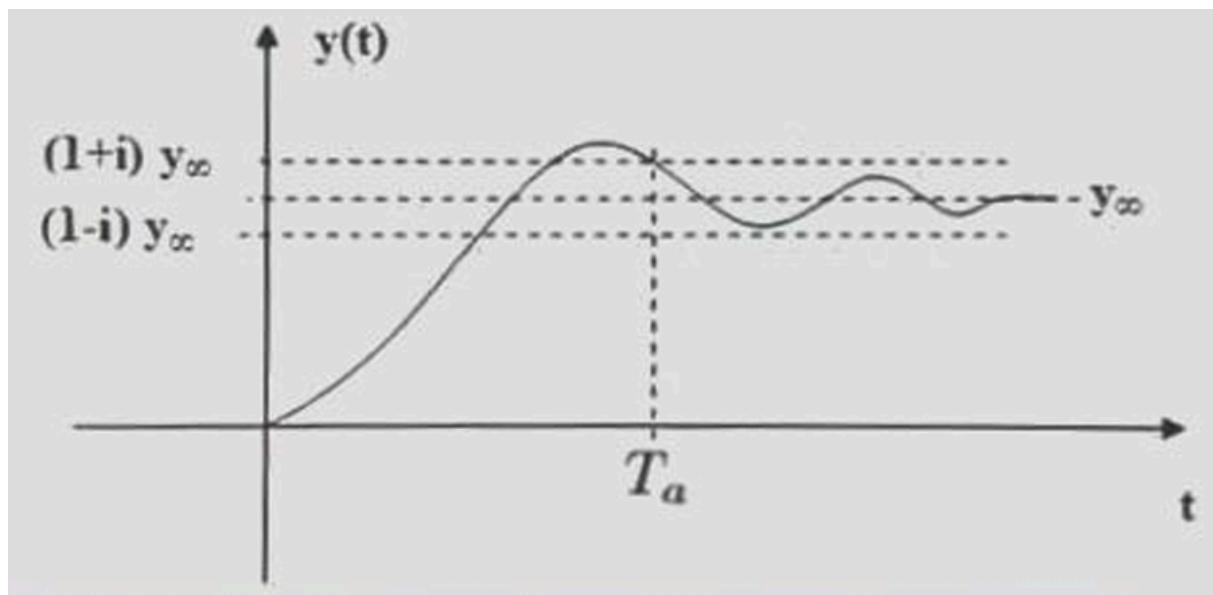
### 1 - Tempo di salita

$T_s$  è il tempo impiegato dall'uscita per passare dal 10% al 90% (o dal 5% al 95%) del valore finale.



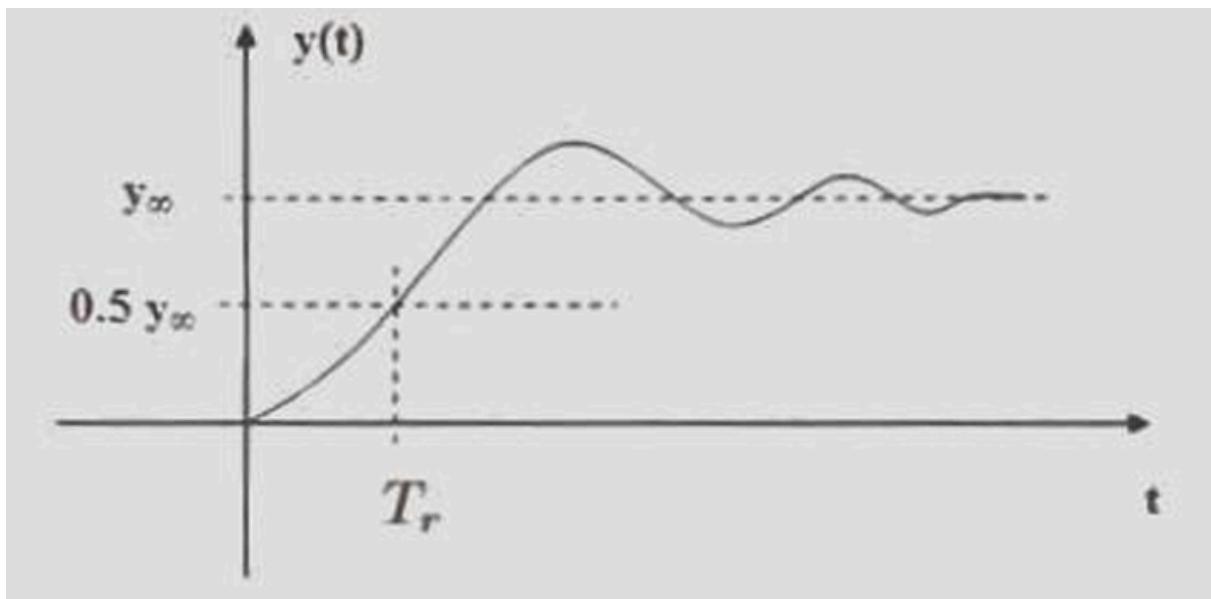
## 2 - Tempo di assestamento

$T_a$  è il tempo oltre il quale l'uscita si discosta meno del 5% rispetto al valore finale (con specifiche più restrittive si considera anche il 2%).



## 3 - Tempo di ritardo

$T_r$  è il tempo richiesto perché l'uscita raggiunga il 50% del valore finale.

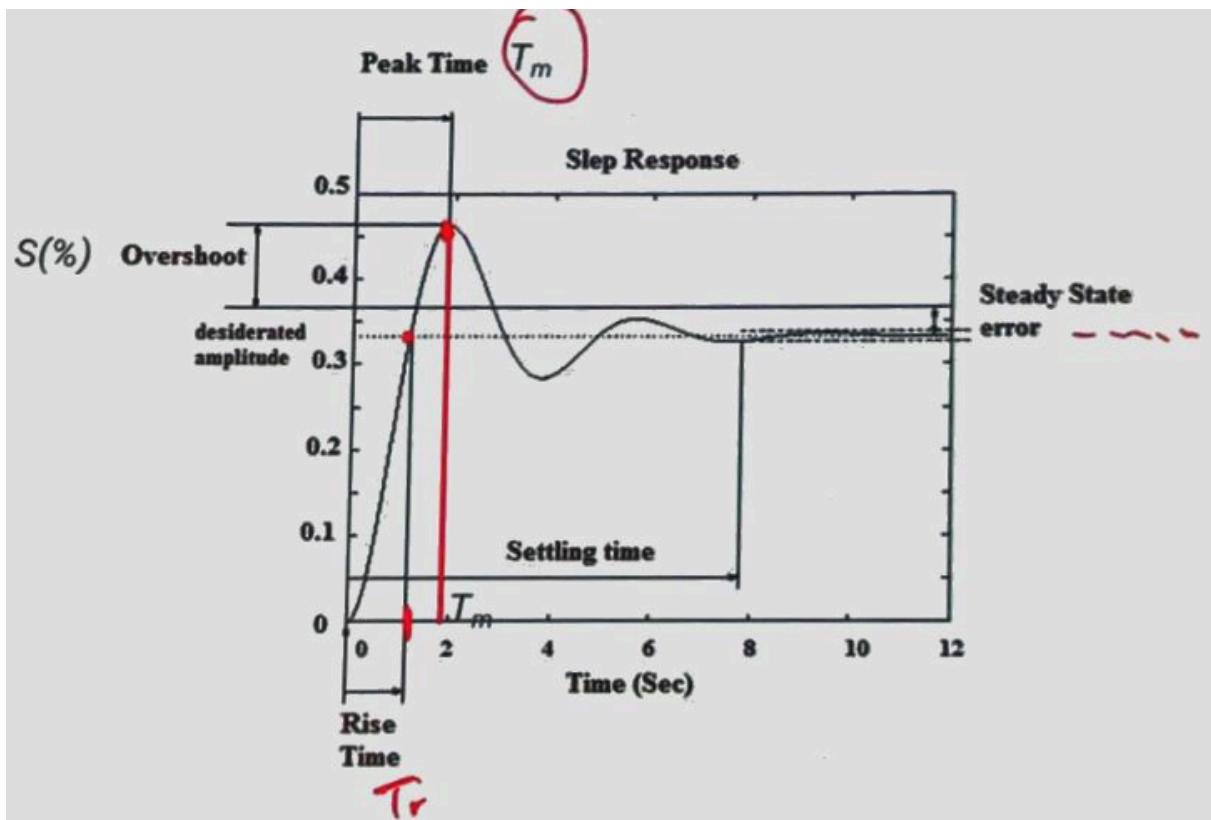


#### 4 - Istante di massima sovraelongazione

$T_m$  è l'istante in cui si ha la massima sovraelongazione

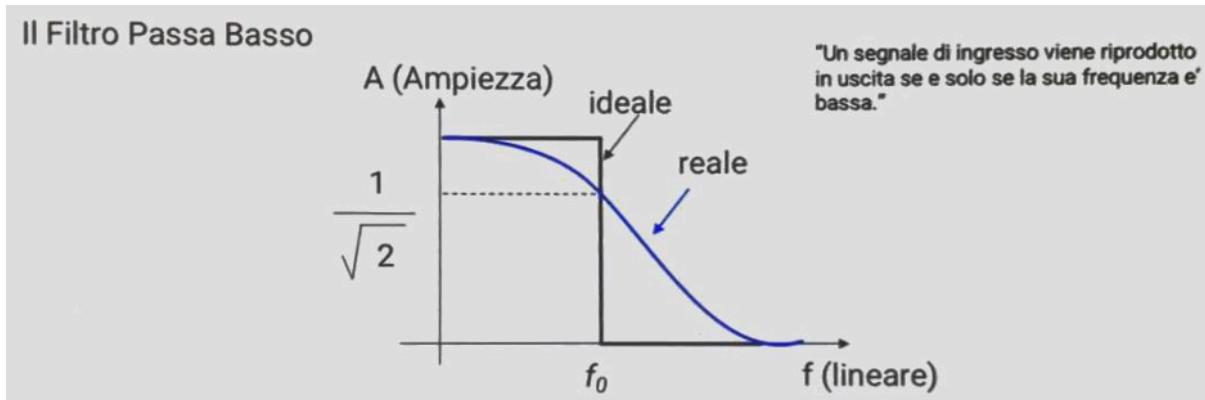
#### 5 - Massima sovraelongazione

$S(\%)$  è il valore del massimo scostamento dell'uscita rispetto al valore di regime  $y(\infty)$ . Solitamente espresso in percentuale rispetto al valore di regime.



# Specifiche nel dominio della frequenza

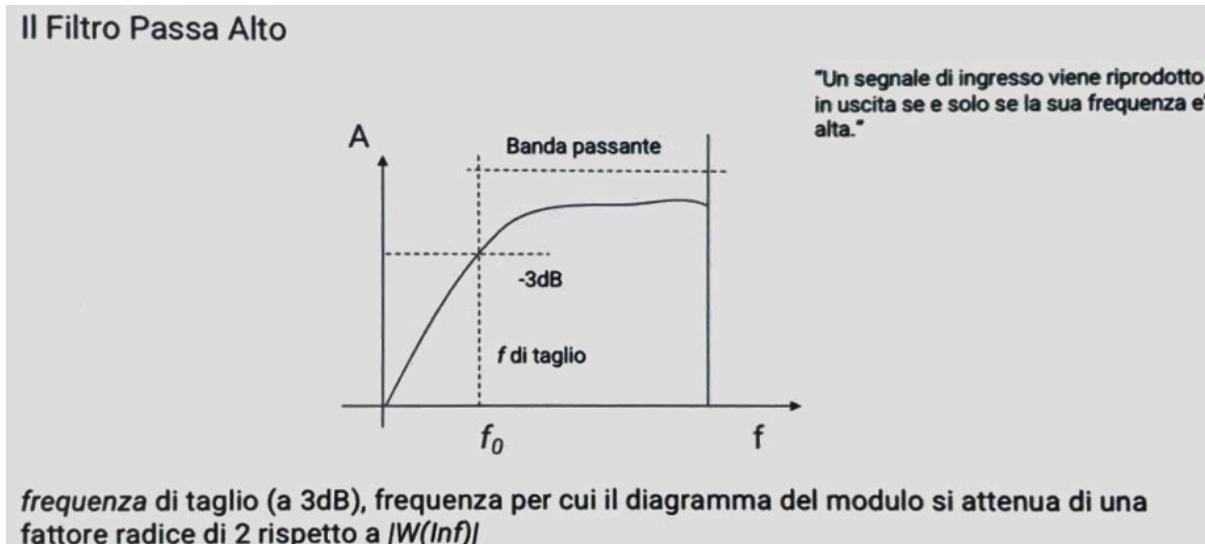
## Filtro passa basso



## Banda passante a 3 dB

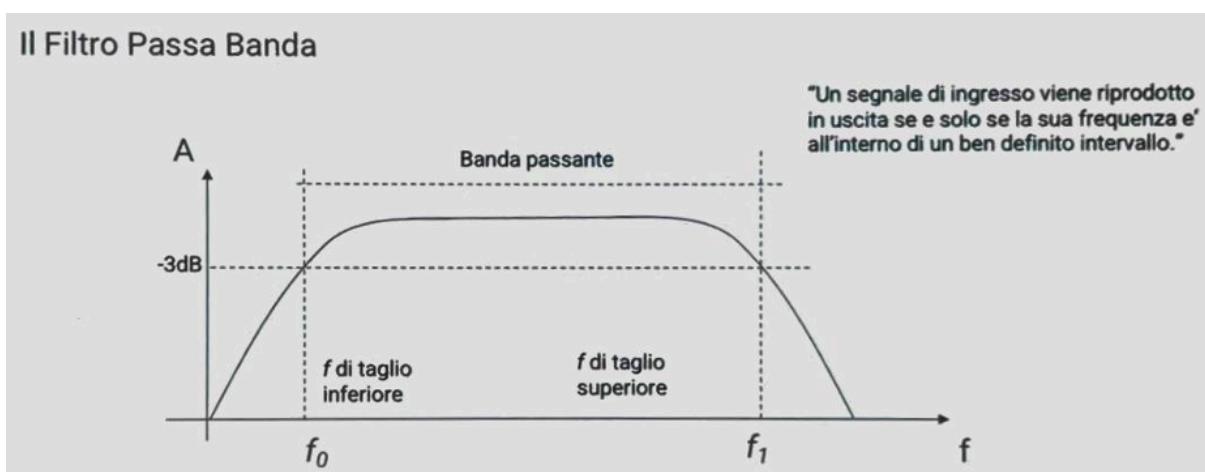
Si intende la frequenza per cui il diagramma di modulo si attenua di un fattore di radice di 2 (ovvero 3 dB) rispetto al valore  $|W(0)|$

## Filtro passa alto



## Filtro passa banda

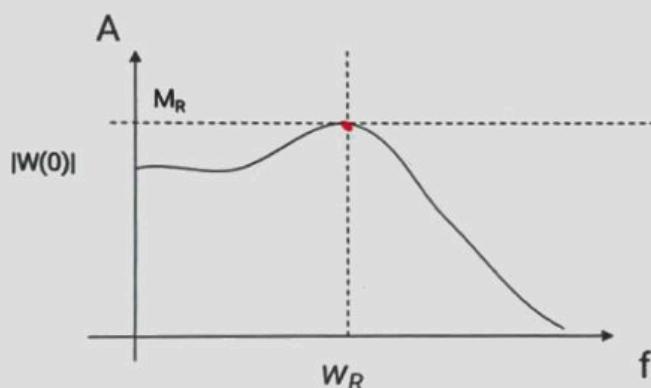
## Il Filtro Passa Banda



## Risonanza

### Risonanza

"Un segnale di ingresso viene riprodotto in uscita con frequenza che genera il valore massimo del modulo della risposta armonica."

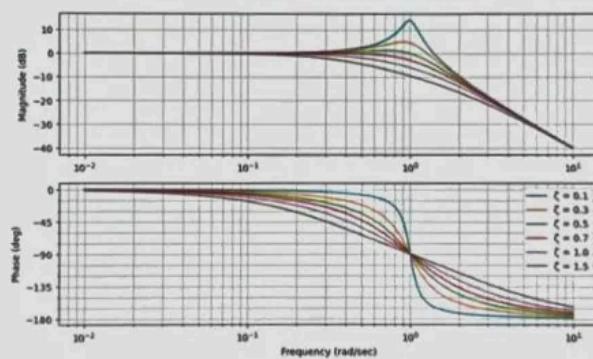


## Diagrammi di Bode e la risonanza

Il picco di risonanza  $M_R$  e' il valore massimo raggiunto dal diagramma delle ampiezze

La pulsazione di risonanza  $w_R$  e' la pulsazione alla quale esso si verifica.

STORIAMENTO  
e3



# Legami tempo-frequenza-Laplace

Una regola fondamentale in tal senso è la seguente:

$$B_{3\text{ dB}} \cdot T_s \approx 0.35$$

Più allarghiamo la **banda passante**, più diventa rapida la risposta del sistema nel dominio del tempo.

In pratica, interessa conoscere la banda passante in catena chiusa, ma in genere è disponibile solo la risposta in frequenza del processo da controllare in catena aperta.



[Lezione 29 - 09/05/2025](#)



# Lezione 29 - 09/05/2025

[Lezione 28 - 08/05/2025](#)

## Progettazione del controllore

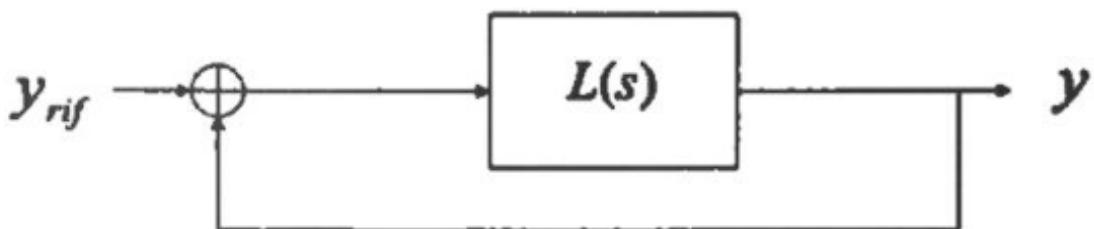
Le specifiche che il controllore deve avere sono sempre commissionate e si conoscono in partenza.

Il metodo che useremo è il **trial and error**, che data l'infinità di controllori esistenti, ci permetterà di analizzare le casistiche e con un paio di tentativi saremo in grado di trovare quello più adatto.

- Useremo la **risposta in frequenza** per basare il nostro progetto, andando ad approfondire la tecnica del **loop shaping**. Quando usiamo il loop shaping guardiamo la funzione di anello  $L(s)$  e verifichiamo le prestazioni dell'impianto in ciclo chiuso.

Gli strumenti che useremo per l'analisi dei sistemi sono il luogo delle radici e i diagrammi di Bode.

- La progettazione consistrà nel trovare  $R(s)$  tale che  $L(s) = R(s)G(s)$  rispetti particolari caratteristiche. La progettazione di  $R(s)$  consiste nella scelta dei poli, degli zeri e del guadagno statico del regolatore.



La funzione di trasferimento in ciclo chiuso sarà  $H(s)$  (in precedenza chiamata anche  $W(s)$ ):

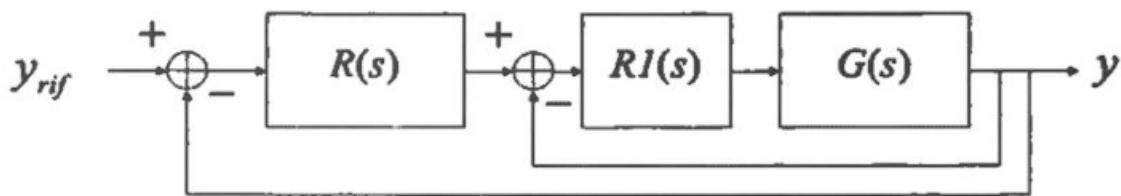
$$W(s) = H(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad L(s) = R(s)G(s)$$

- Obiettivo di analisi: proprietà di  $H(s)$  sulla base dei diagrammi di Bode di  $L$

- **Ipotesi:**  $L$  BIBO stabile, a meno di massimo due poli nell'origine (da qui in avanti l'ipotesi è sempre considerata)

## Caso con funzione $G$ non stabile

Nel caso in cui  $G$  sia instabile è possibile applicare un primo regolatore che ha l'unico obiettivo di stabilizzare l'impianto. Si progetta di conseguenza un secondo regolatore per soddisfare le specifiche di prestazioni:



## Risposta armonica del sistema in ciclo chiuso

Vogliamo adesso analizzare la relazione tra la risposta armonica della funzione di anello  $L(j\omega)$  e la risposta armonica del sistema in ciclo chiuso  $H(j\omega)$ .

$$|H(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} = \frac{|L(j\omega)|}{\sqrt{|L(j\omega)|^2 + 1}}$$

Per  $\omega \rightarrow 0$  e  $|L(j\omega)| \gg 1$  avremo  $|H(j\omega)| \approx \frac{|L(j\omega)|}{|L(j\omega)|} = 1$ , ovvero precisione a regime.

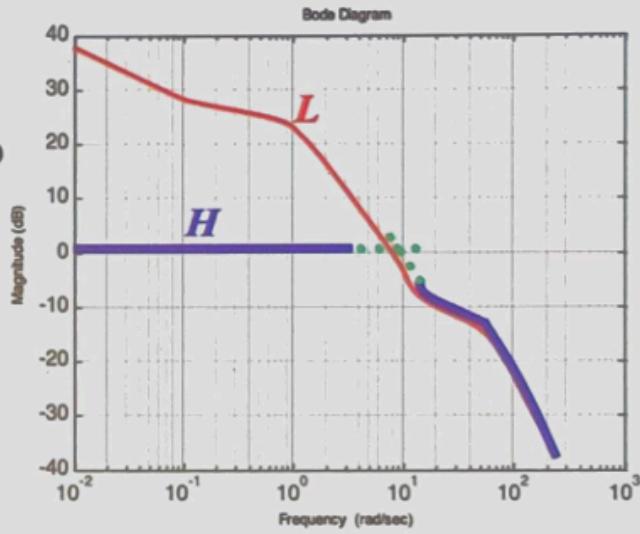
Dire che il modulo di  $L$  deve essere molto maggiore di 1 significa che si deve comportare come un **filtro passa basso**, ovvero che abbia integratori a bassa frequenza. Questo implica che  $H$  sia circa 1 e che ci sia una garanzia di **precisione a regime**.

Per  $\omega \rightarrow \infty$  e  $|L(j\omega)| \ll 1$  avremo  $|H(j\omega)| \approx \frac{|L(j\omega)|}{1} = |L(j\omega)|$ , in quanto  $L$  come ogni sistema fisico, ha più poli che zeri.

## Approssimazioni del primo e secondo ordine

### Media frequenza

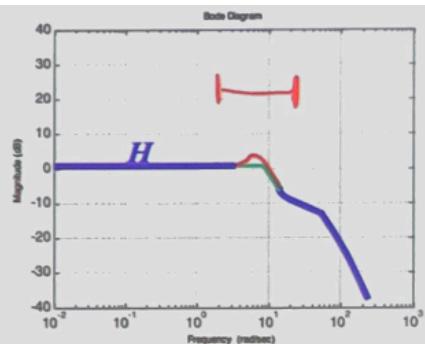
**Media frequenza:**  
 $|L(j\omega)| \approx 1$   
(frequenza di taglio  
di  $L$  a 0 dB)  
Considerando  
l'approssimazione  
dei poli dominanti,  
 $H$  avrà un  
comportamento o  
del primo o del  
secondo ordine



## Altre condizioni

Sotto le condizioni esposte per l'analisi di stabilità, questo ci permette di definire altre regole:

$M_\phi > 75^\circ \Rightarrow$  primo ordine  
 $M_\phi \leq 75^\circ \Rightarrow$  secondo ordine



la approx della funzione di trasferimento in ciclo chiuso con sistemi del **primo** o del **secondo** ordine è conseguenza del valore del margine di fase

Regola empirica da verificare con simulazioni – utile come guida nel progetto

## Conclusioni

Traiamo le **conclusioni** sull'approssimazione della funzione di trasferimento in ciclo chiuso:

- Il sistema in ciclo chiuso ha un comportamento del tipo passa-basso
- $H$  è caratterizzata da un polo dominante reale se  $M_F > 75^\circ$ , altrimenti da una coppia di poli dominanti complessi coniugati.
- La pulsazione di rottura (primo ordine) o la pulsazione naturale (secondo ordine) sono approssimate dalla pulsazione di taglio a 0 dB della funzione di anello  $L$  (pulsazione critica).

- La pulsazione critica è anche una approssimazione (per difetto se  $M_F < 90^\circ$ ; per eccesso altrimenti) della **banda passante** del sistema in ciclo chiuso.
- Lo smorzamento del sistema in ciclo chiuso è approssimato da:

$$\xi \approx \frac{M_\varphi}{100} \quad M_\varphi \leq 75^\circ$$

## Sintesi dei controllori

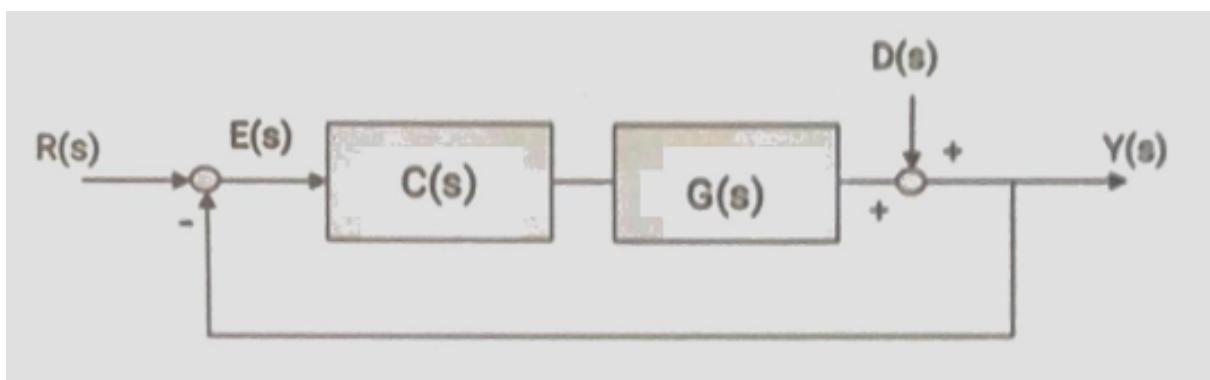
Definizione specifiche:

- Statiche
- Dinamiche
- Robustezza
  - Stabilità robusta (margini di fase e ampiezza, spesso indicati come disuguaglianze)

Controllore Trial-and-Error (guidato)

### Specifiche statiche

1. Stabilità
2. Frequenza di taglio e banda passante
  - Difficoltà legata ai sistemi a fase non minima (non verificano questa specifica) che pongono limiti sulla scelta della banda.
3. Verifica specifiche statiche (di regime)



### Sistema di tipo 0

Un sistema di tipo 0 non ha poli nell'origine, le sue particolarità sono:

- Guadagno statico  $K_0 = C(0)P(0)$

- Errore a regime  $e(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{1 + C(0)P(0)} = \frac{1}{1 + K_0}$

## Sistema di tipo 1

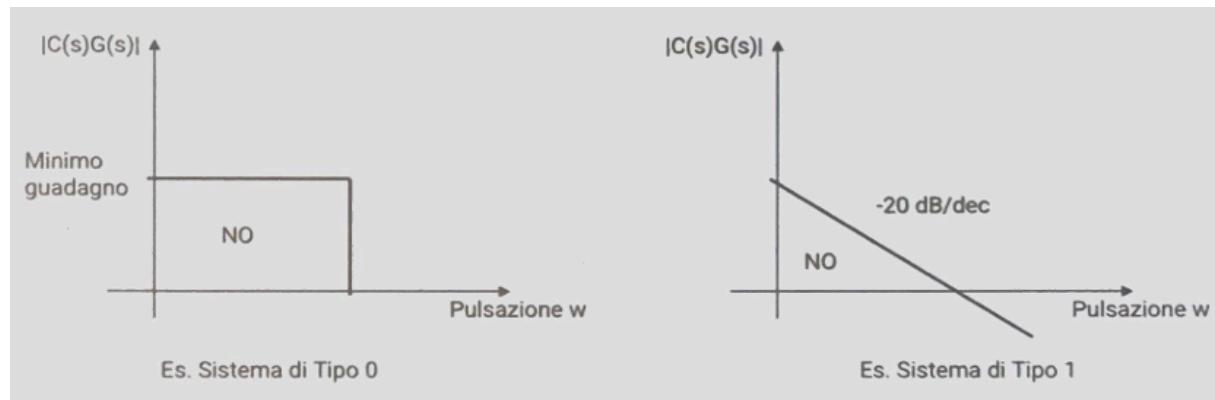
Ha un polo nell'origine

- Errore a regime  $e(t \rightarrow \infty) = \left. \frac{1}{1 + \frac{C(0)P(0)}{s}} \right|_{s \rightarrow 0} = 0$

## Sistema di tipo n

Considerando che  $L = CG$ , devo agire sul controllore  $C$  andando a vedere i vincoli che derivano dal principio del modello interno.

Per i sistemi di tipo 0 e di tipo 1 otteniamo che:



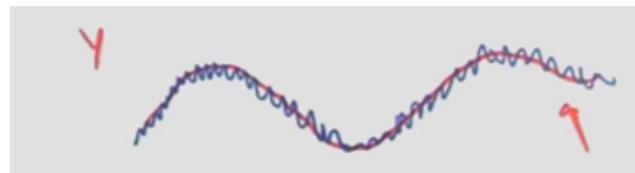
Ricaviamo così una zona in cui la mia  $CG$  non può esistere, che interessa le basse frequenze.

## Posizione del disturbo

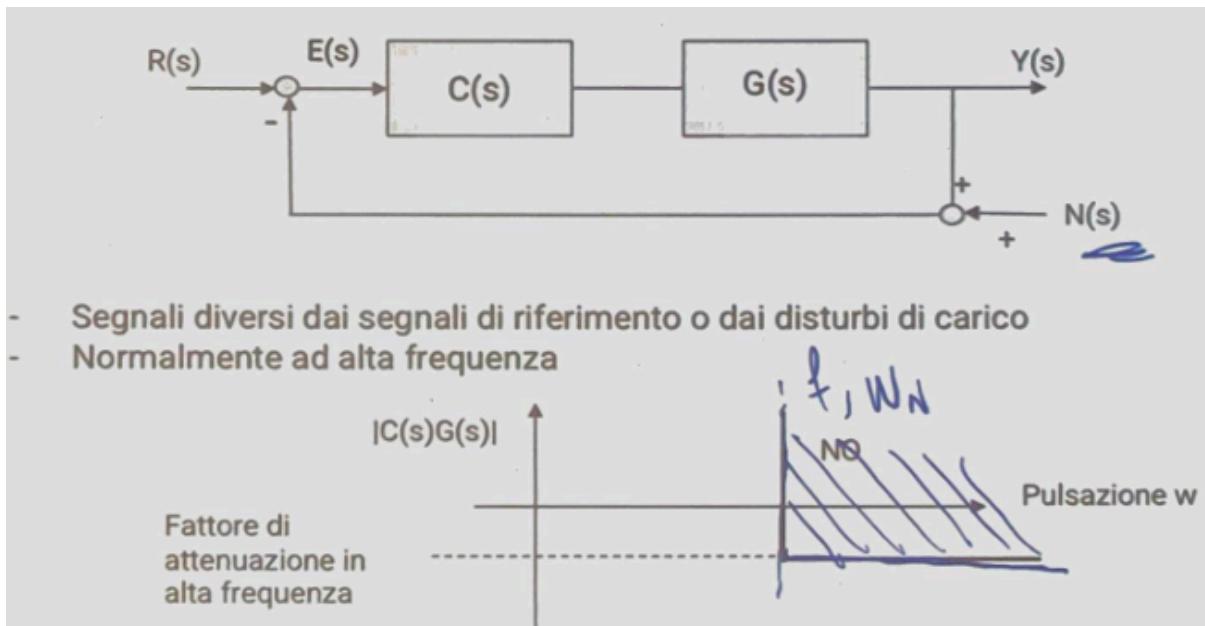
Troviamo due possibili configurazioni del disturbo, nel primo caso è a monte dell'impianto, mentre nel secondo caso è a valle di un possibile attuatore  $A(s)$ . Il controllore del secondo caso lo chiameremo  $\tilde{C}$  in quanto una sua parte non può essere progettata da noi ma ne dobbiamo tenere conto.

## Rumore di misura

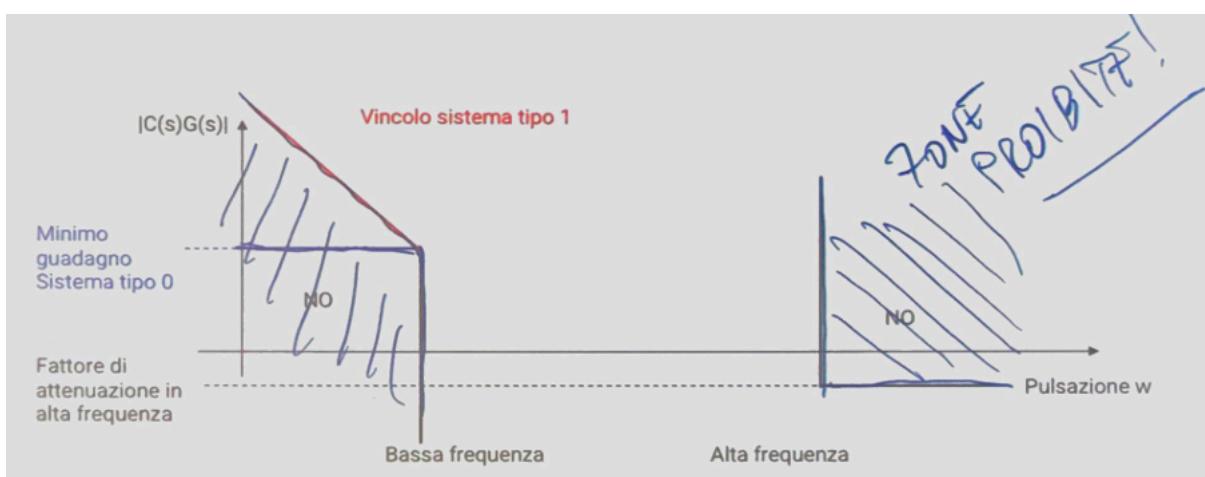
Si tratta di oscillazioni intorno al valore vero che costituiscono errore di misura. Normalmente questo succede solo ad alta frequenza, se succedesse a bassa frequenza le onde si sovrapporrebbero al segnale reale e sarebbe un grosso problema.



Io voglio attenuare i rumori ad alta frequenza, andando così ad isolare una certa zona di frequenze:



Andando a mettere tutto insieme ricaviamo:



Queste sono tutte zone proibite che ci vengono segnalate nelle specifiche di progetto, si considerano i vincoli sulle basse frequenze, i vincoli del sistema di tipo 1 con integratori che agiscono contro gli errori (per esempio un integratore per porre a zero gli errori a gradino) e infine i vincoli sul rumore di misura per le alte frequenze. Se passa da queste zone la funzione ad anello non va bene. La scelta della forma

della funzione ad anello per evitare le zone proibite costituisce proprio la tecnica del loop shaping.

## Specifiche dinamiche

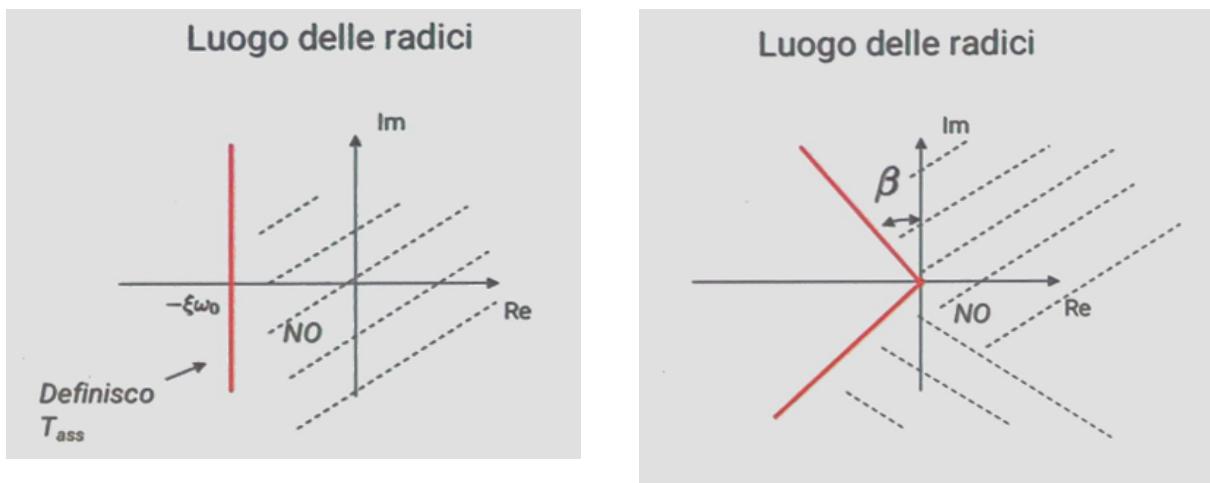
1. Overshoot
2. Tempo di assestamento

Io so che  $\xi\omega_0 \geq \frac{3}{T_{ass}}$ , quindi mi torna molto comodo come strumento il **luogo delle radici** che mi permette di vedere facilmente lo smorzamento e la pulsazione naturale. Quindi una specifica sul tempo di assestamento diventa una specifica anche su questi due parametri.

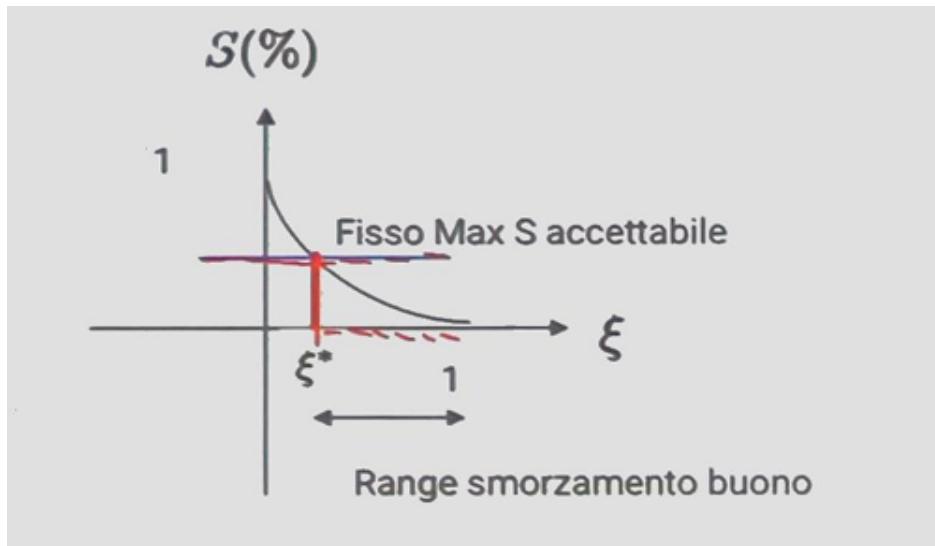
Altri vincoli degni di nota sono:

$$\beta = \arcsin \xi \quad S(\%) = e^{\frac{-e\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Ottengo quindi la seguente zona in cui i miei poli in ciclo chiuso devono stare per rispettare il requisito di massima sovraelongazione:



Inoltre, nel caso di  $0 \leq \xi \leq 1$  abbiamo una relazione grafica di questo tipo:



Unisco le specifiche di overshoot (rette con pendenza  $\beta$ ) alla specifica sul tempo di assestamento (retta verticale) ottenendo:



Attraverso questi vincoli sto andando a decidere la posizione dei poli dominanti in ciclo chiuso.

### Margine di fase e smorzamento

Idealmente vorremmo  $M_f$  di circa  $90^\circ$  (come un integratore). Potrebbe essere difficile ottenerlo ma possiamo avvantaggiarci usando la regola empirica:

$$M_f \geq M_f^* \approx 100\xi^* \quad (\text{in gradi})$$

Dove  $\xi^*$  era il valore legato all'overshoot desiderato (quello che abbiamo calcolato in precedenza).

L'overshoot uguale a zero implica un'approssimazione del primo ordine della funzione in ciclo chiuso (poli reali), oppure approssimazioni a poli dominanti, che mi porta a:

$$H(s) = W_{CL}(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

## Soluzione pratica

### 1. Cancellare poli/zeri

$C(s)$  cancella (parte) della  $G(s)$ . Posso scegliere:

$$C(s) = G^{-1}(s)$$

Questo processo è alla base dell'Internal Model Control.

#### Attenzione:

Questo processo può essere fatto ma solo finché non elimino poli a parte reale positiva o nulla (elementi instabili). Questo succede perché nella pratica le cancellazioni non sono mai effettive, e sul luogo delle radici compare un ramo instabile.

## Loop shaping

Le barriere poste sul diagramma di Bode rappresentano una prima introduzione al loop shaping.

Le specifiche di progetto vengono:

- tradotte in requisiti sul diagramma di Bode della funzione di anello;
- rappresentate graficamente come regioni ammissibili / non ammissibili del modulo della funzione di anello.

Il regolatore viene quindi progettato per "modellare" la funzione di anello all'interno delle regioni ammissibili.

## Esempio

Prendiamo l'esempio della macchinina

$$G(s) = \frac{\gamma}{m} \cdot \frac{1}{s + \frac{\beta}{m}} = 10 \frac{1}{s + 0.1}$$

Non consideriamo nessun disturbo  $\theta$

Specifiche:

- errore nullo in risposta al gradino, errore < 5% in risposta alla rampa;

- nessuna sovraelongazione, tempo di assestamento al 95% in risposta al gradino < 15 secondi.

Metodologia:

- traduzione delle specifiche in requisiti sulla risposta armonica della funzione di anello;
- progetto del regolatore  $R$  in modo che  $L = CG$  soddisfi i requisiti richiesti.

## Traduzione delle specifiche

- Errore nullo in risposta al gradino si traduce in un sistema di tipo 1, ovvero il regolatore deve avere un polo nell'origine (Vedi [Lezione 28 - 08/05/2025](#), in cui è spiegato che un ingresso a gradino in un sistema di tipo 1 produce sempre una risposta a gradino nulla)
- Errore < 5% in risposta alla rampa, ovvero guadagno in velocità > 20 ( $K > 26 \text{ dB}$ )

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)} \Rightarrow e = \frac{1}{K_v} \rightarrow K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

Come  $G(s)$  considero una  $G(s)$  con un polo nell'origine (forma del controllore di tipo 1) e quindi  $G(s) = \frac{10}{s(s + 0.1)}$ , adesso proseguo nel calcolare la risposta alla rampa:

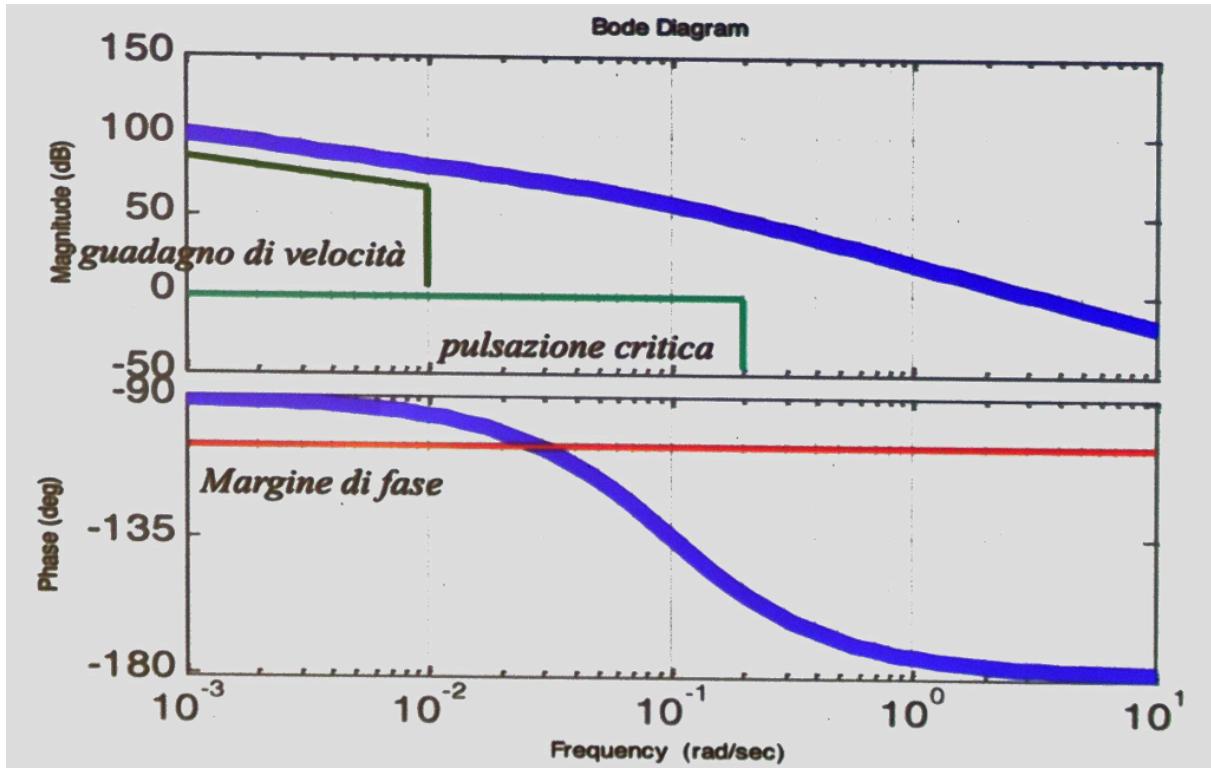
$$e = \frac{1}{K_v} \leq 0.05 \rightarrow K_v \geq 20 \quad (26 \text{ dB}); \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot 10}{s(s + 0.1)} = 100$$

Il valore trovato del guadagno di velocità rispetta le specifiche di risposta alla rampa, di conseguenza non ho bisogno di modificare il guadagno statico del controllore (infatti sostituendo ho che  $\frac{1}{100} \leq 0.05 \rightarrow 0.01 \leq 0.05$  e che va bene. Se non fosse andato bene il valore del guadagno di velocità avrei scelto un controllore non della forma  $C(s) = \frac{1}{s}$  ma piuttosto della forma  $C(s) = \frac{K}{s}$  e facendo il limite avrei ottenuto il valore di  $K$ ; nota bene  $K$  guadagno statico e  $K_v$  guadagno di velocità).

- Nessuna sovraelongazione significa che il polo dominante deve essere reale, e di conseguenza il margine di fase di almeno 75°.
- Tempo di assestamento al 95% < 15 secondi. Nel caso di poli dominanti reali usiamo l'approssimazione  $t_{ass} \approx \frac{3}{\xi \omega_n} \rightarrow t_{ass} \approx \frac{3}{\omega_c} \Rightarrow 15 \geq \frac{3}{\omega_c} \rightarrow \omega_c \geq \frac{3}{15} = 0.2$ . Abbiamo così trovato che la traduzione di questa specifica implica che la pulsazione critica deve essere maggiore di 0.2 rad/s

Mettiamo adesso tutto insieme e vediamo se rispetta tutte le specifiche:

$$C(s)G(s) = \frac{10}{s(s + 0.1)} \quad \text{da portare in forma di Bode}$$



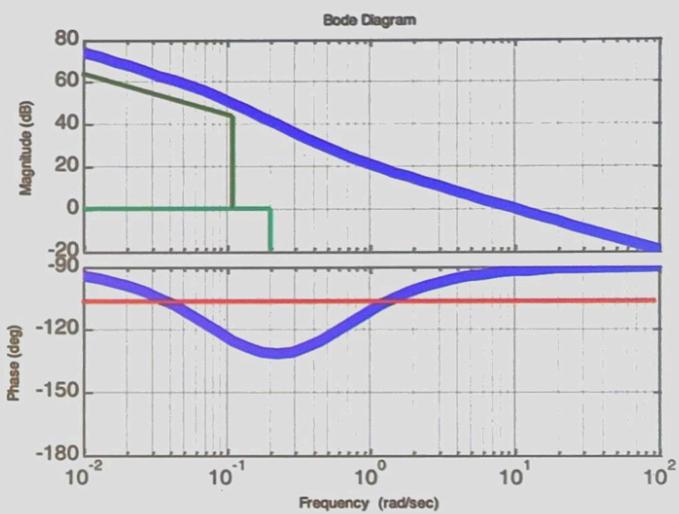
Il margine di fase non è rispettato quindi proviamo un nuovo controllore:

### Una possibile soluzione

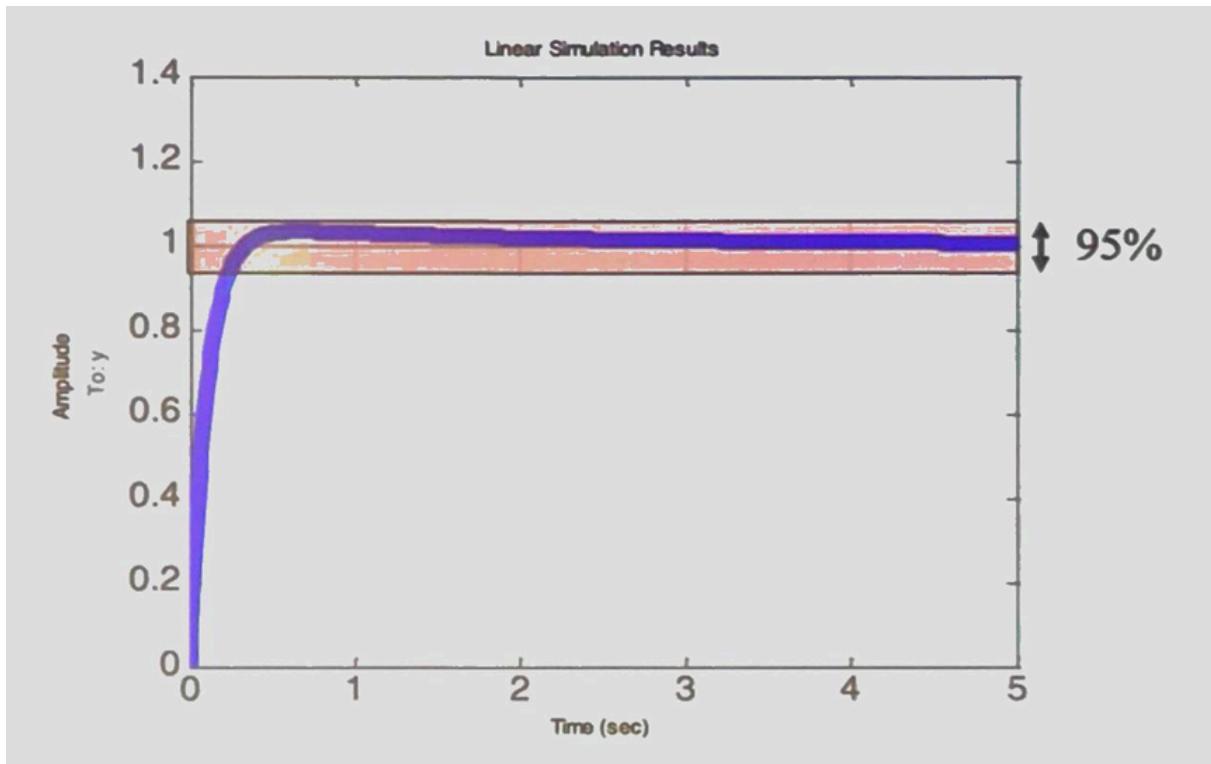
$$C(s) = \frac{(s + 0.5)}{s}$$

$$G(s) = \frac{10}{s + 0.1}$$

Il regolatore aggiunge uno zero per alzare la fase alla pulsazione critica;

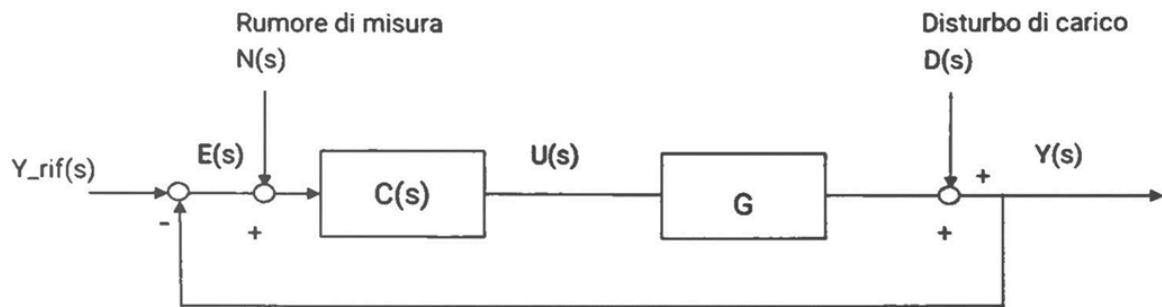


Testiamo anche la risposta al gradino:



## Caso con disturbo

Nel precedente esempio non avevo nessun disturbo. Nel caso in cui considerassi dei disturbi avrei:



$$Y(s) = \frac{1}{1 + CG} D(s) = \frac{1}{1 + L(s)} D(s)$$

Dove  $\frac{L}{1 + L}$  è detta funzione di sensitività.

Adesso possiamo legare  $S$  a  $H$

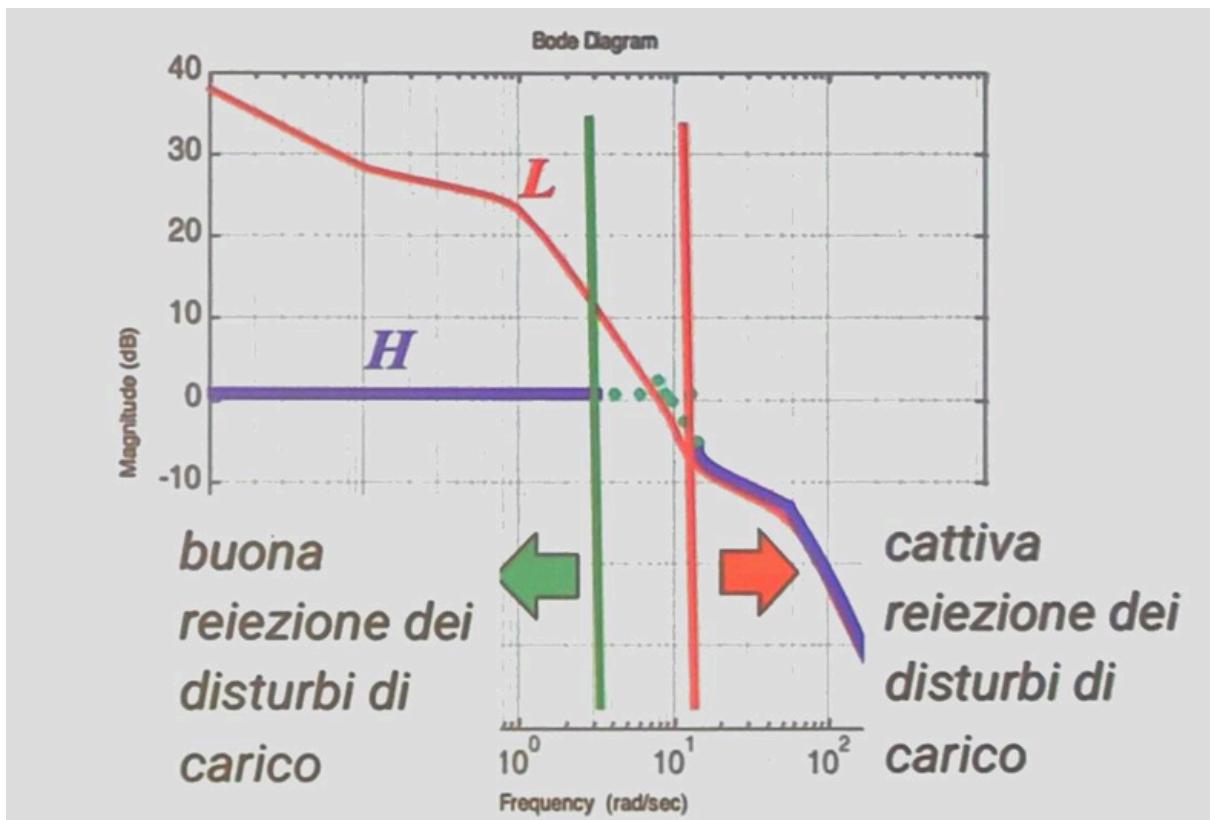
$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad H(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

Osservazione fondamentale:

$$S + H = \frac{1}{1 + L(s)} + \frac{L(s)}{1 + L(s)} = 1$$

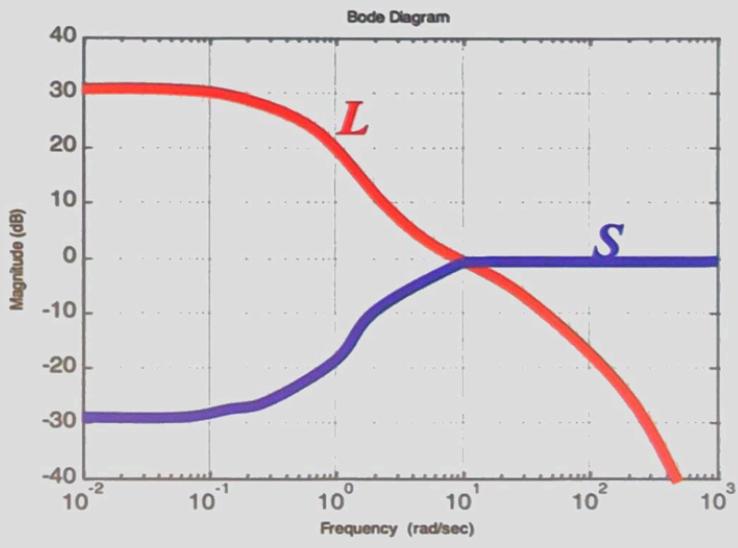
Non è possibile ottenere robustezza ai disturbi di carico alle frequenze in cui la FdT  $\frac{L}{1 + L}$  è piccola. Ma  $H$  è piccola ad alte frequenze.

### Reiezione di disturbi di carico in alta e bassa frequenza



### Funzione d'anello e sensitività

*Non è possibile contrastare l'effetto del disturbo di carico per pulsazioni superiori alla pulsazione critica*



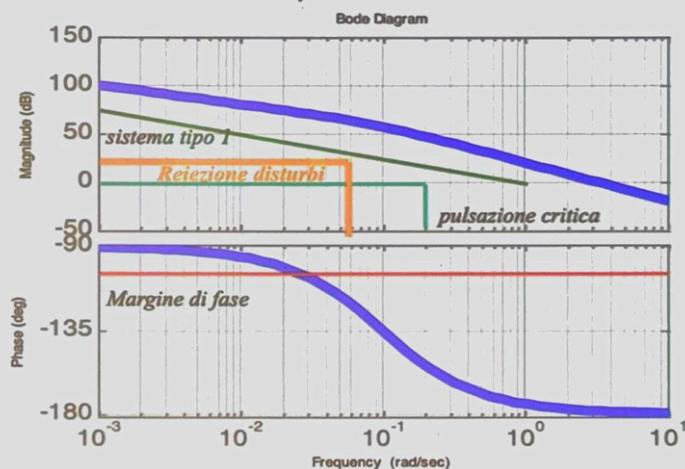
### Specifiche di reiezione dei disturbi di carico

$$|S(j\omega)| \leq \varepsilon_n \text{ per } \omega \in [0, \omega_n]$$

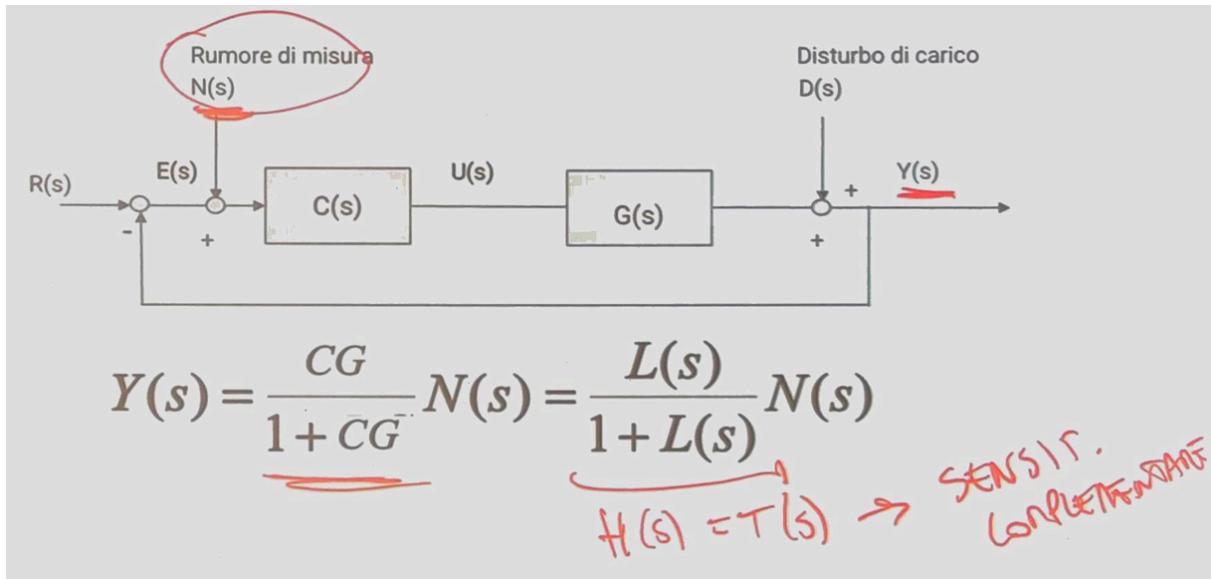
$$\begin{aligned} |S(j\omega)| \leq \varepsilon_n &\Rightarrow |1 + L(j\omega)| \geq \frac{1}{\varepsilon} \\ &\sim |L(j\omega)| \geq \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

La specifica si traduce in una ulteriore barriera in bassa frequenza sul diagramma di Bode della funzione di anello

Attenuazione dei disturbi di carico di almeno 20 dB fino alla frequenza di 0.01 Hz (pulsazione: 0.06 rad/s)



## Reiezione del rumore di misura di carico



- La f.d.t. fra rumore di misura ed uscita è la sensitività complementare.
- Si richiede che la sensitività complementare sia circa 1 a regime (basse frequenze) per soddisfare gli obiettivi di controllo
- La specifica di reiezione del rumore di misura potrà quindi essere solo del tipo:  $H \ll 1$  per  $\omega \gg \dots$
- Non è possibile avere precisione a regime con sensori rumorosi in bassa frequenza !!!

$$|H(j\omega)| \leq \varepsilon_n \text{ per } \omega \in [\omega_n, \infty]$$

$$|H(j\omega)| \leq \varepsilon_n \Rightarrow \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \leq \varepsilon_n$$

$$\sim |L(j\omega)| \leq \varepsilon_n$$

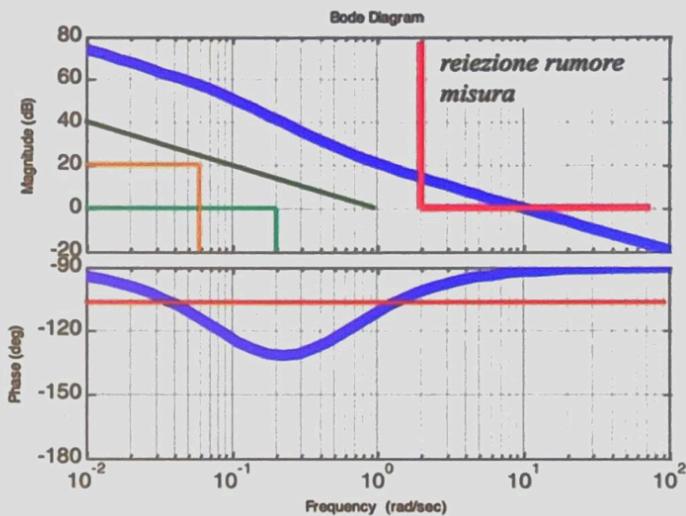
La specifica si traduce in una barriera in alta frequenza sul diagramma di Bode della funzione di anello

## Conclusione dell'esempio della macchinina

$$C(s) = \frac{(s + 0.5)}{s}$$

$$G(s) = \frac{10}{s + 0.1}$$

La soluzione proposta in precedenza *non* garantisce reiezione dei disturbi di misura nella banda 2 – 10 rad/s



Lezione 30 - 13/05/2025



# Lezione 30 - 13/05/2025

[Lezione 29 - 09/05/2025](#)

## Loop shaping

Per ricapitolare, con il **loop shaping** andiamo a modellare la funzione ad anello  $L(s) = C(s) \cdot G(s)$  affinché si comporti nel modo desiderato e vada incontro a quelli che sono i requisiti di progetto, andando a delineare regioni ammissibili e regioni non ammissibili sul diagramma di Bode.

## Riepilogo

La funzione di trasferimento in ciclo chiuso che rappresenta la relazione tra ingresso e uscita in ciclo chiuso dipende direttamente dalla funzione di anello:

$$H(s) = \frac{C \cdot G}{1 + C \cdot G} = \frac{\underbrace{L}_{\substack{\text{fun. di sensitività } S(s) \\ \text{fun. complementare } T(s)}}}{1 + L} = \frac{Y}{R}$$

Nel caso di funzione con disturbi, la **relazione che lega il disturbo all'uscita** è:

$$Y(s) = \frac{1}{1 + CG} D(s) = \frac{1}{1 + L} D(s)$$

Invece, **l'errore legato alla risposta** è:

$$W(s) = \frac{1}{1 + CG} = \frac{E(s)}{R(s)}$$

## Sensitività al controllo

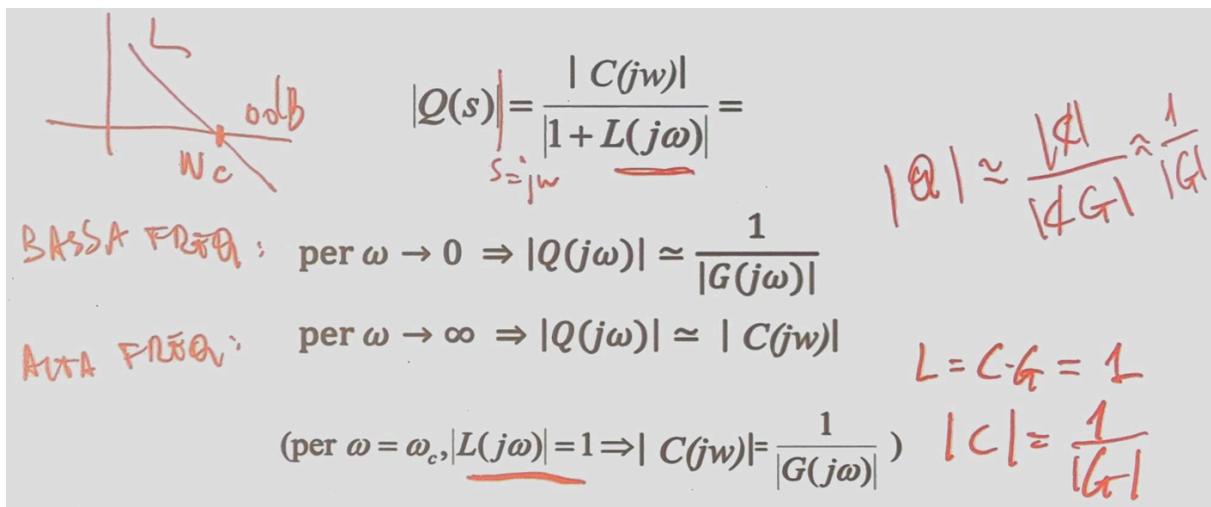
La **sensitività al controllo** è data dalla relazione  $Q(s) = \frac{C(s)}{1 + L(s)}$

Possiamo anche ricavare una relazione tra uscita  $U$  sensitività al controllo  $Q$  e ingresso  $R$ :

$$U(s) = \frac{C}{1+CG}R(s) = \frac{C}{1+L}R(s) = Q(s)R(s)$$

La funzione  $Q(s)$  rappresenta l'**amplificazione dell'azione di controllo** in conseguenza dell'ingresso di riferimento e/o del disturbo di misura dell'uscita. Inoltre, consente di inserire nel progetto i vincoli dovuti alle **limitazioni fisiche degli attuatori**.

### Diagramma di Bode della sensitività al controllo



In ultimo con  $\omega = \omega_c$  ovvero la pulsazione di taglio per cui la  $L$  interseca l'asse a 0 dB, otteniamo che il modulo del nostro regolatore sarà l'inverso del nostro impianto.

### Conseguenze dovute alla sensitività

Se la frequenza di crossover supera  $\omega_{BP}$  ovvero la banda dell'impianto, l'impianto  $G$  assume la caratteristica **passa basso**, ovvero l'impianto ha modulo molto minore di 1. Ne deriva che:

$$|G(j\omega)| \ll 1 \quad \text{per} \quad \omega \geq \omega_{BP}$$

$$\begin{aligned} \text{Se } \omega_c > \omega_{BP} \Rightarrow |L(j\omega)| &> 1 \text{ per } \omega \in (\omega_{BP}, \omega_c) \\ \Rightarrow |Q(j\omega)| \approx \frac{1}{|G(j\omega)|} &\gg 1 \text{ per } \omega \in (\omega_{BP}, \omega_c) \end{aligned}$$

Il tentativo di allargare la banda passante dell'impianto conduce a valori di controllo molto elevati, e che non sempre sono accettabili.

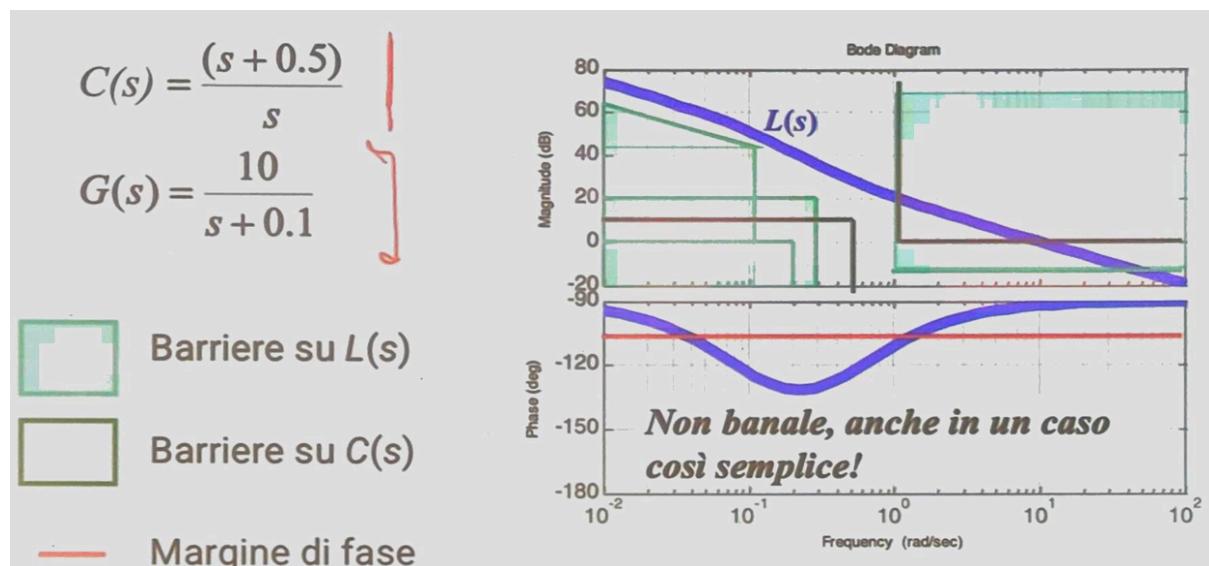
Nota importante: **mai cercare di estendere eccessivamente l'ampiezza di banda dell'impianto.**

## Specifiche sulla sensitività

$$\begin{cases} |L(j\omega)| < \varepsilon_u & \text{per } \omega \geq \omega_u \\ |C(j\omega)| < \varepsilon_{ru} & \text{per } \omega \geq \omega_{ru} \end{cases}$$

Le frequenze  $\varepsilon_u$ ,  $\varepsilon_{ru}$  sono date dalle specifiche di progetto, mentre  $\omega_u$ ,  $\omega_{ru}$  sono barriere che imponiamo noi in alta frequenza sulla funzione di anello e sulla funzione del controllore. In particolare  $\omega_{ru}$  in molti casi è dato dalle specifiche dei sensori.

## Esempio



## Limitazioni intrinseche all'azione di controllo

L'esempio precedente mostra come una serie di specifiche troppo stringenti possano rendere difficile o impossibile il progetto del sistema di controllo.

Bisogna sempre verificare che le specifiche di progetto siano compatibili con il problema: è meglio comprare sensori migliori che impegnarsi nel progetto di un regolatore con specifiche troppo stringenti.

 [Lezione 31 - 14/05/2025](#) - 



# Lezione 31 - 14/05/2025 - [ ]

 [Lezione 30 - 13/05/2025](#)

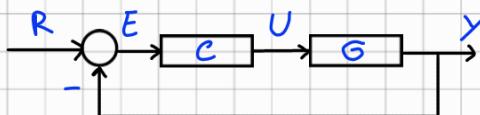
Esercitazione fatta in aula e riportata di seguito

[attachment:9ea79cf5-7763-4edf-83fc-82c1cefe6fb9:Lezione\\_31\\_25060  
1.pdf](#)

 [Lezione 32 - 15/05/2025 - \[ !\[\]\(321b5d2e0e50ae6fb76ccf48f93a5ea8\_img.jpg\) \]](#)

## Esercizio di riepilogo

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$



Specifiche:

- $e_2 = \phi$  errore al gradino unitario
- overshoot < 20%
- $T_s < 1$  s tempo di arrestamento

Riconosce per prima cosa che si tratta di un sistema di tipo  $\phi$

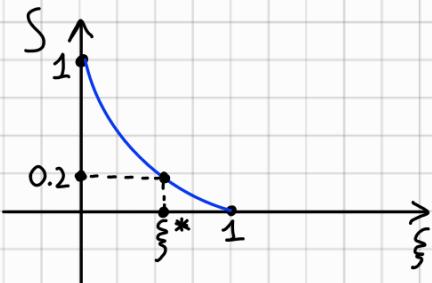
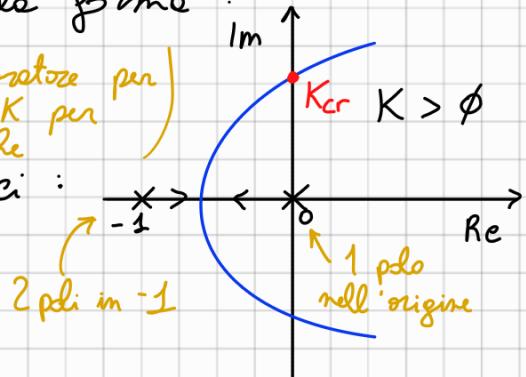
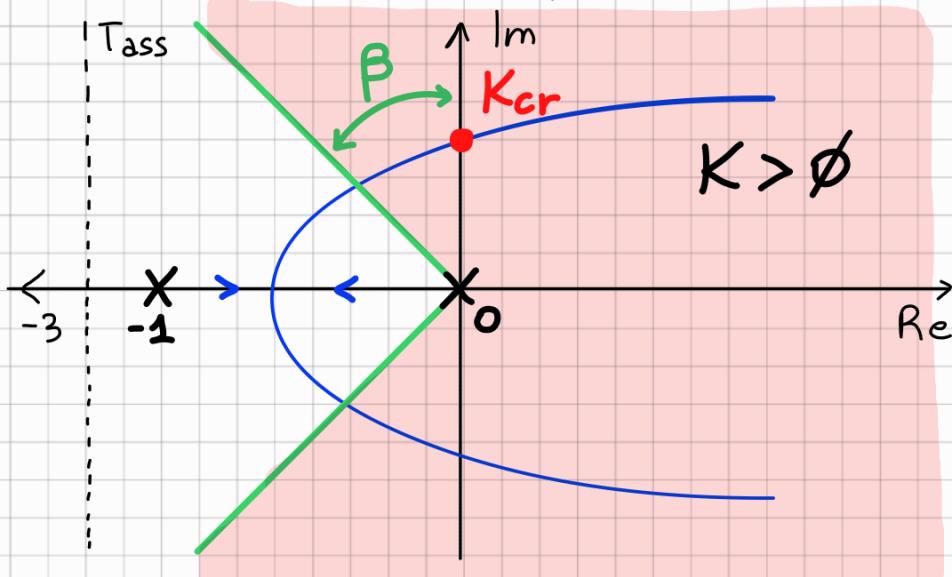
Dalle specifiche so che l'errore al gradino unitario deve essere nullo. Iniziamo scegliendo un controllore della forma:

$$C(s) = \frac{K}{s} \quad \begin{array}{l} \text{(il controllore deve essere un integratore per} \\ \text{rispettare } e_2 = \phi \text{ e deve avere } K \text{ per} \\ \text{rispettare le altre specifiche)} \end{array}$$

Disegniamo adesso il luogo delle radici:

Ricordiamoci che:

$$S(\%) = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}, \quad \beta = \arcsin(\xi)$$

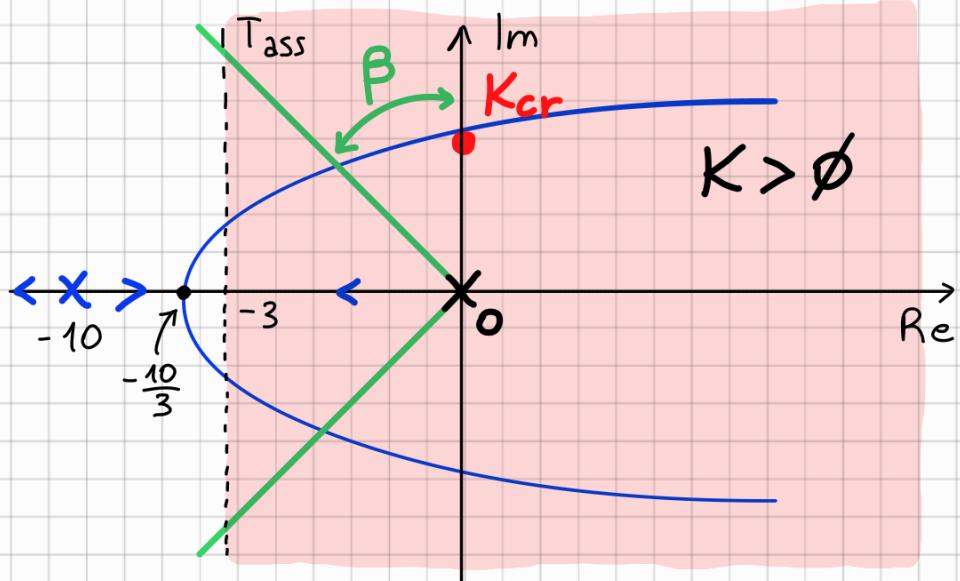


$$C(s) = \frac{K}{s} \frac{(1+s)^2}{(1+\frac{s}{10})^2}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{2}{(s+10)} = \phi$$

$$s + 10 + 2s = \phi \rightarrow s = -\frac{10}{3}$$

$$CG \rightarrow |CG|_{s=-\frac{10}{3}} = 1$$



## Esercizio

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Spec:  $\left\{ \begin{array}{l} C_K \leq \frac{1}{20} \\ M_\phi \geq 45^\circ \\ M_G \geq 6 \text{ dB} \end{array} \right.$

errore rampa  
margine fase  
margine guadagno

$M_G \geq 6 \text{ dB}$  significa che posso raddoppiare il guadagno della funzione di servizio senza perdere di stabilità.

### Errore alla rampa

Seppiamo che il problema va affrontato con Bode (ci sono  $M_\phi$  e  $M_G$ ) quindi scrivo la funzione in forma di Bode.

Ci torna comodo in quanto l'errore alle rampe è  $\frac{1}{K}$ , quindi posso pensare già di calcolare il  $K$  necessario.

$$e_K = \frac{1}{K} \leq \frac{1}{20} \rightarrow K = (0) G(0) = 20 \quad (\text{Questo } K \text{ è già in})$$

forma di Bode

$$\Rightarrow C(s)G(s) = \frac{20}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{2}}$$

**Osservazione:** La  $G(s)$  data all'inizio è in forma di Evans, noi le abbiamo riscritta in forma di Bode scegliendo un controllore proporzionale. Abbiamo così ottenuto un  $K$  in forma di Bode pari a 20 che riportato in forma di Evans diventa  $C(s) = K_p = 40$ . Chi ha dato i dati del problema lo ha fatto in forma di Evans, quindi dovranno usare le stesse per riportare i risultati.

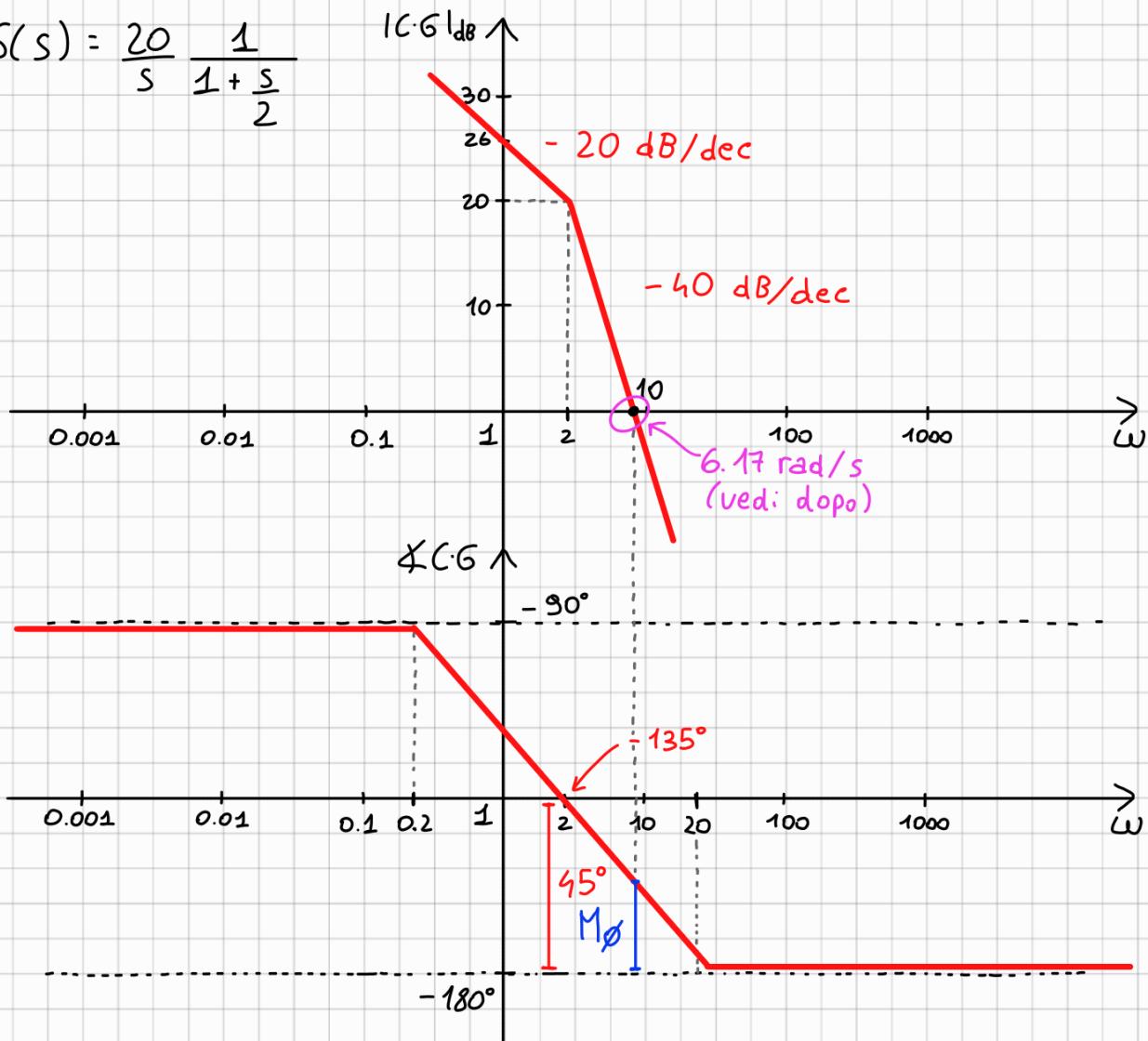
Proseguiamo:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \cancel{CG}} \quad \stackrel{\text{+ dovuto alla retroazione}}{=} \quad = \frac{1}{1 + \frac{K}{s(s+2)}} = \frac{s(s+2)}{s(s+2)+K}$$

Applico il th. del valor finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{s(s+2)}} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{K} \leq \frac{1}{20} \quad K=40$$

$$C(s)G(s) = \frac{20}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{2}}$$



Trovare l'intervallone con l'asse a 0 dB, per poi trovare il margine di fase  $M\phi$ .

$$|C(j\omega)G(j\omega)| = 1 \quad \left| \frac{20}{j\omega} \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{2}} \right| = 1$$

Se uso delle approssimazioni asintotiche ottengo:

$$\frac{20}{s} \cdot \frac{1}{s/2} \quad (\text{appross. asint.}) = \frac{40}{s^2} = 1 \rightarrow s = j\omega \rightarrow \omega = \sqrt{40}$$

$$\omega = \sqrt{40} \approx 6.32 \text{ rad/s} \quad (\omega \text{ pulsazione di taglio})$$

Se invece non uso approssimazioni ottengo il valore esatto:

$$\frac{\frac{20}{\omega}}{\sqrt{1 + \omega^2/4}} = 1 \rightarrow \frac{20}{\omega} = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4}} \rightarrow \frac{400}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega^2}{4}$$

$$1600 = 4\omega^2 + \omega^4 \rightarrow \omega = 6.17 \text{ rad/s}$$

Introduciamo una classe di controllori detti reti anticipatrici e reti ritardatrici. I controllori hanno la forma:

$$C(s) = \frac{1 + s\tau_z}{1 + s\tau_p}$$

zero ← zero  
polo ← polo

Questi sono detti filtri del primo ordine

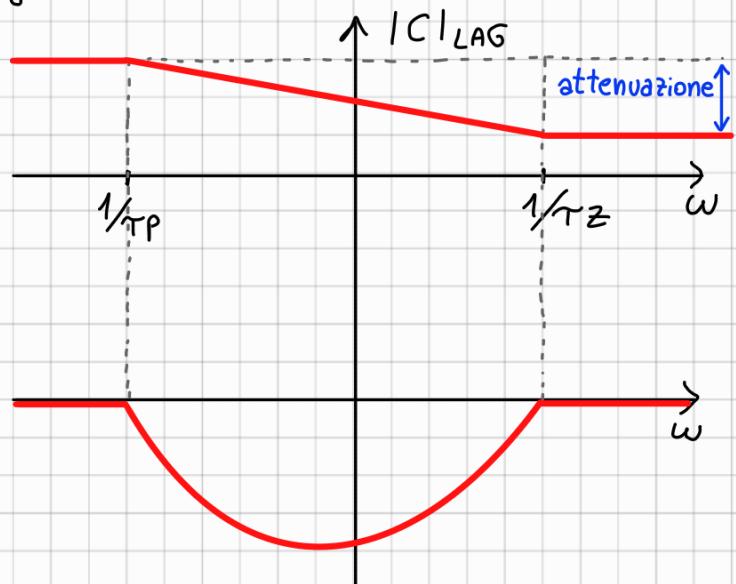
Se il polo precede lo zero il controllore si dice rete ritardatrice (rete lag) e il filtro si comporta da filtro passa basso (ovvero lascia passare le basse frequenze)

In particolare disegnando il diagramma di Bode del controllore:

$$C(s) = \frac{s + z}{s + p}$$

Si ha un'attenuazione pari alla pendenza dovuta all'azione del polo (se la pendenza è 20 dB/dec, l'attenuazione è 20 dB).

Si ha attenuazione anche se non c'è variazione di fase.

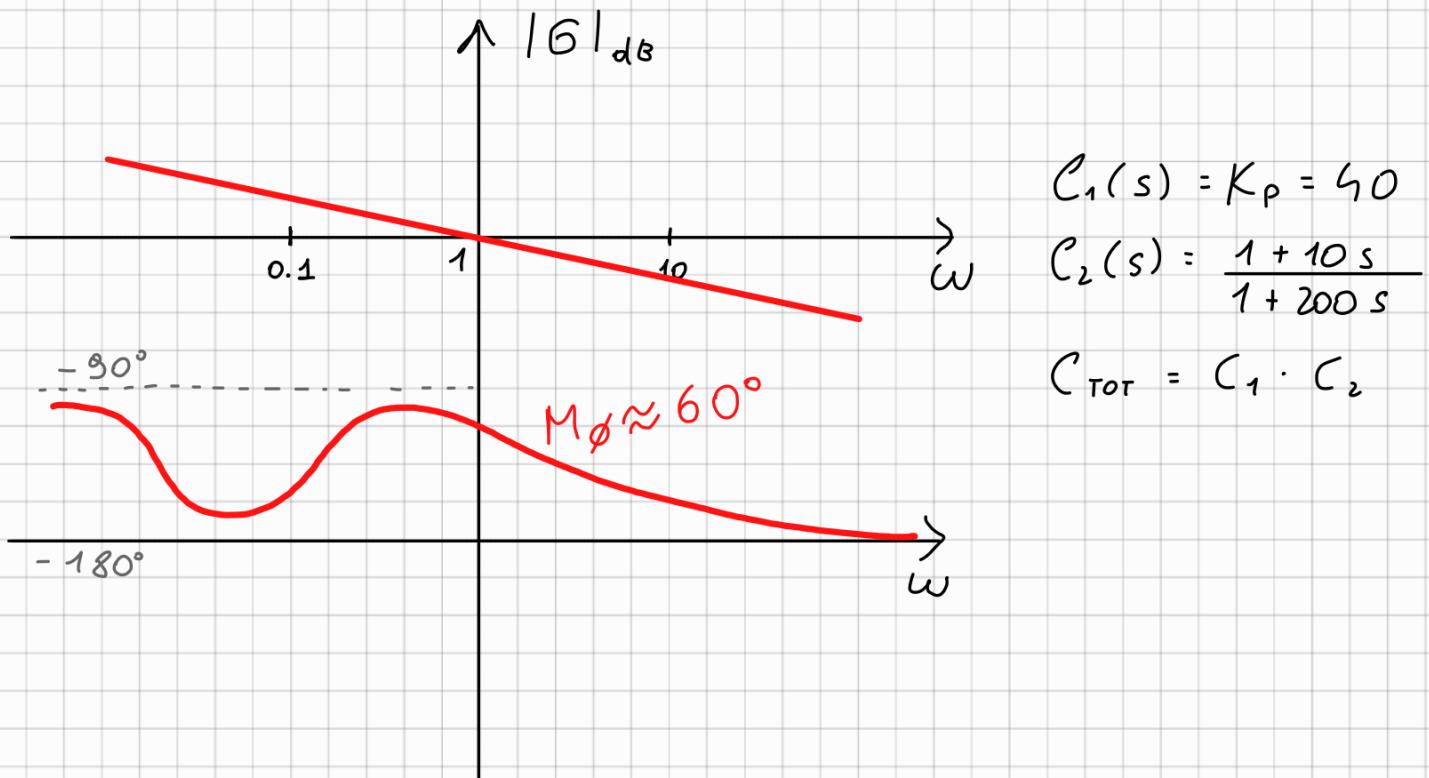


Ritornando al nostro esempio:

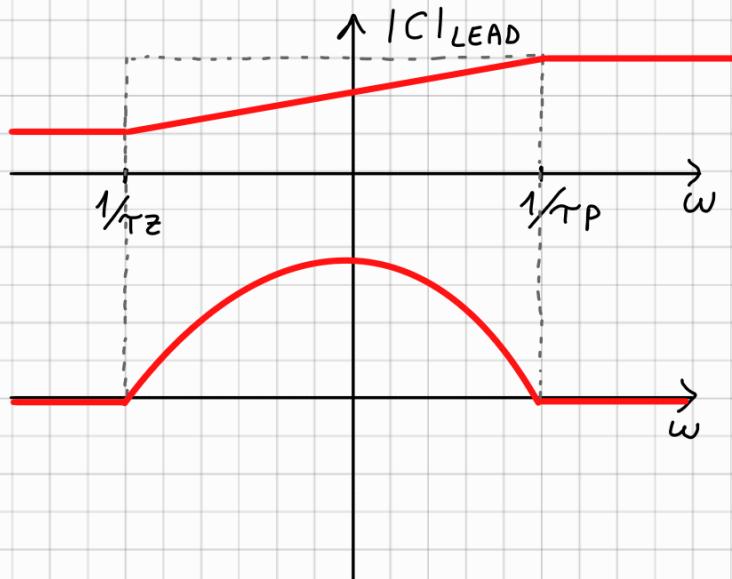
Vogliamo calcolare l'attenuazione in  $\omega = 2$  per poi calcolare il nostro margine di fase

Scelgo  $C(s)$  delle forme  $C(s) = \frac{1 + 10s}{1 + 200s}$

Questo ci dice che c'è un'attenuazione di 26 dB in  $\omega = 2$



Possiamo invece ottenere un filtro passa alto quando lo zero precede il polo. Si ottiene così una rete anticipatrice (rete lead)



Con un filtro passa alto stiamo cercando di allargare le bande del sistema, andando a velocizzare il controllore.

Però esistono limitazioni fisiche sugli attuatori che non ci permettono di allargare le bande a piacere.

In genere il filtro passa alto è più difficile da usare del passo basso e porta a conseguenze indesiderate.

Nel nostro esempio possiamo usare un LEAD nel seguente modo:

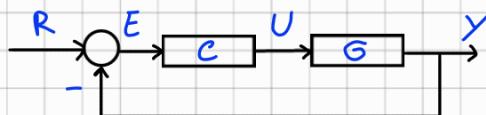
$$C(s)G(s) = \frac{20}{s} \frac{1}{1 + \frac{s}{2}} \quad ) \text{ voglio eliminare } (1 + \frac{s}{2}) \text{ per lasciare solo } 20/s \text{ che rispetta } \epsilon_F \leq 1/20$$

$$C(s) = \frac{1 + s\tau_z}{1 + s\tau_p} = \frac{1 + \frac{s}{2}}{1 + \frac{s}{200}} \quad ) \text{ elimina il polo} \\ ) \text{ è obbligato a dx de non intersecare il margine di fase M}_\phi$$

Un ultimo percorso che possiamo fare è studiare  $Q(s) = \frac{U(s)}{R(s)}$  per verificare che si tratti di segnali ragionevoli.

## Esercizio

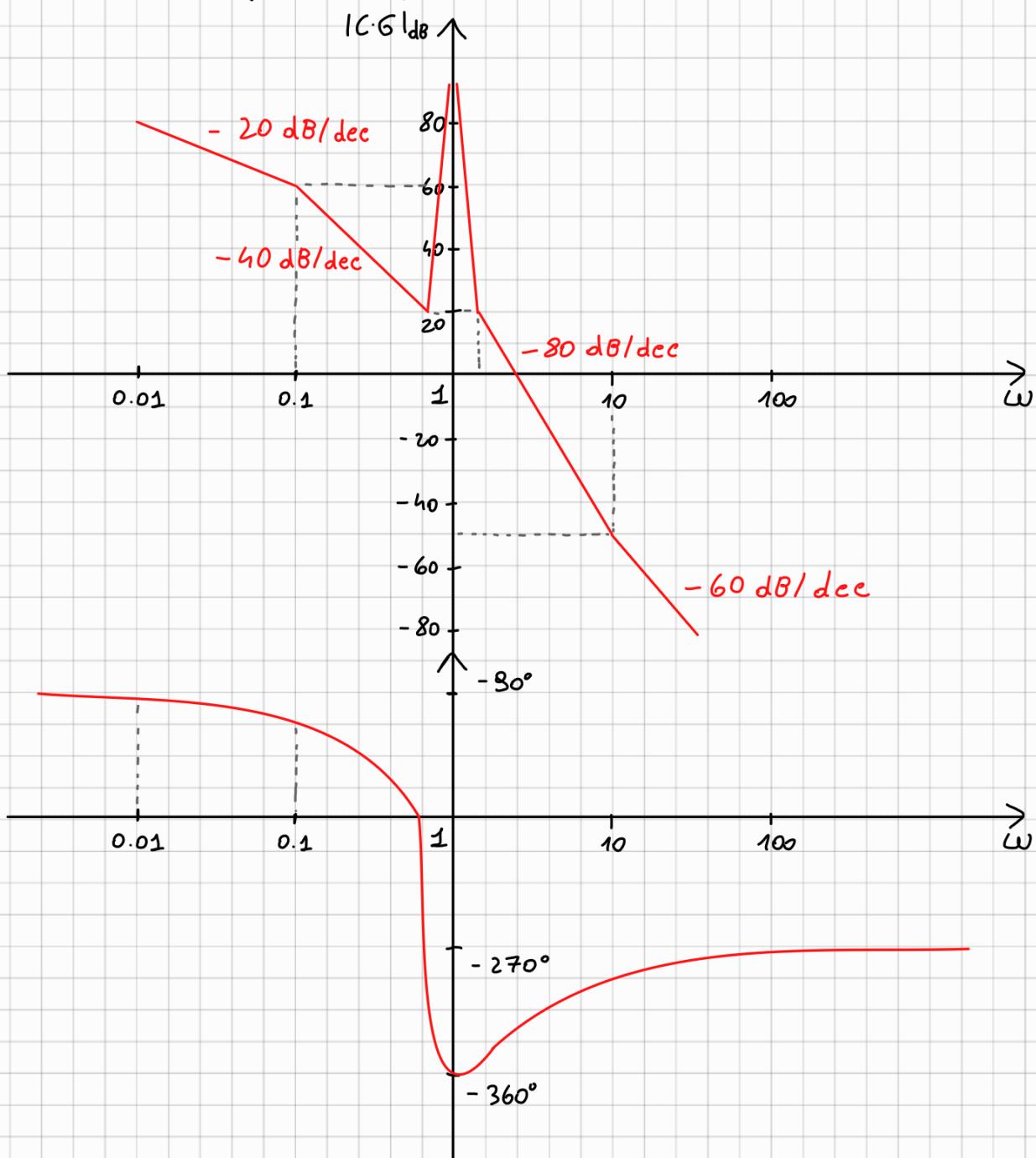
$$G(s) = \frac{10 (1 + s/10)}{s(1+s^2)(s + 1/10)}$$



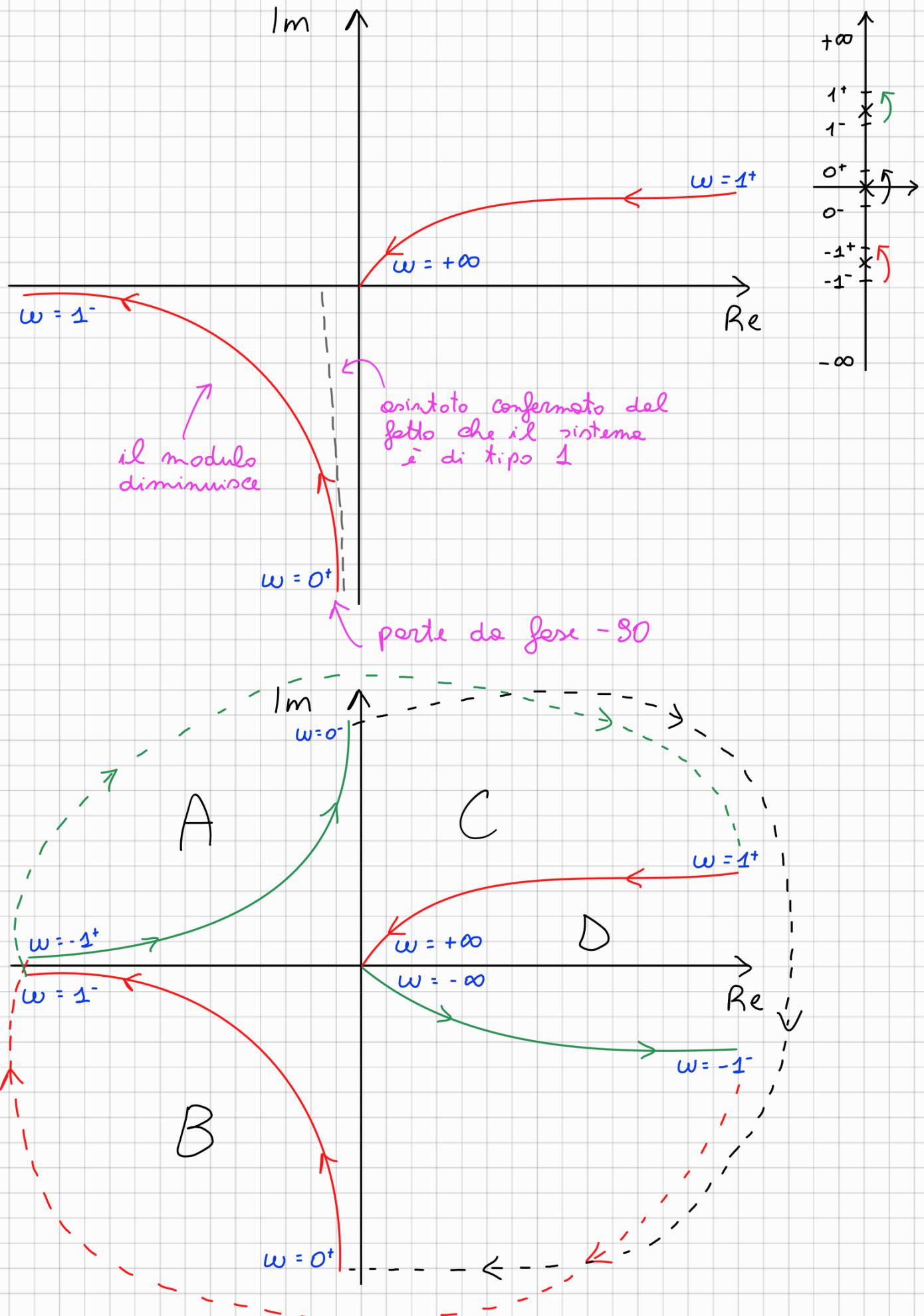
Ci sono poi immaginari: non avremo problemi con Bode ma dobbiamo stare attenti con Nyquist.

Portiamo in forma di Bode la  $G(s)$

$$G(s) = \frac{10 (1 + s/10)}{s(1+s^2)(s + 1/10)} \Rightarrow G(s) = \frac{100}{s} \frac{\left(1 + \frac{s}{10}\right)}{(1+s^2)(1+10s)}$$



Riprendiamo il diagramma di Bode per tracciare Nyquist



Infine tracciamo il luogo delle radici  
Coso per  $K > 0$ :

Ci sono due radici a parte reale positiva e non è possibile usare un controllore puramente proporzionale per stabilizzare il sistema

Anche per  $K < 0$  non possiamo stabilizzare il sistema.

Come possiamo proseguire?

- Non possiamo eliminare nessuna dinamica perché non ci sono elementi stabili, e gli elementi immaginari vanno tenuti.



# Lezione 32 - 15/05/2025 - [ ]

 [Lezione 31 - 14/05/2025 - \[ !\[\]\(6e6a0c9cb40a7d9e7d5bf851c94e9ea4\_img.jpg\) \].](#)

Esercitazione fatta in aula e riportata di seguito

[attachment:e3fe8976-50c6-43fc-a108-52488ddcfb17:Lezione\\_32\\_250515.pdf](#)

 [Lezione 33 - 17/05/2025 - \[ !\[\]\(7a195e562187a1f728cecafe0a94f7b5\_img.jpg\) \].](#)

## Esercizio

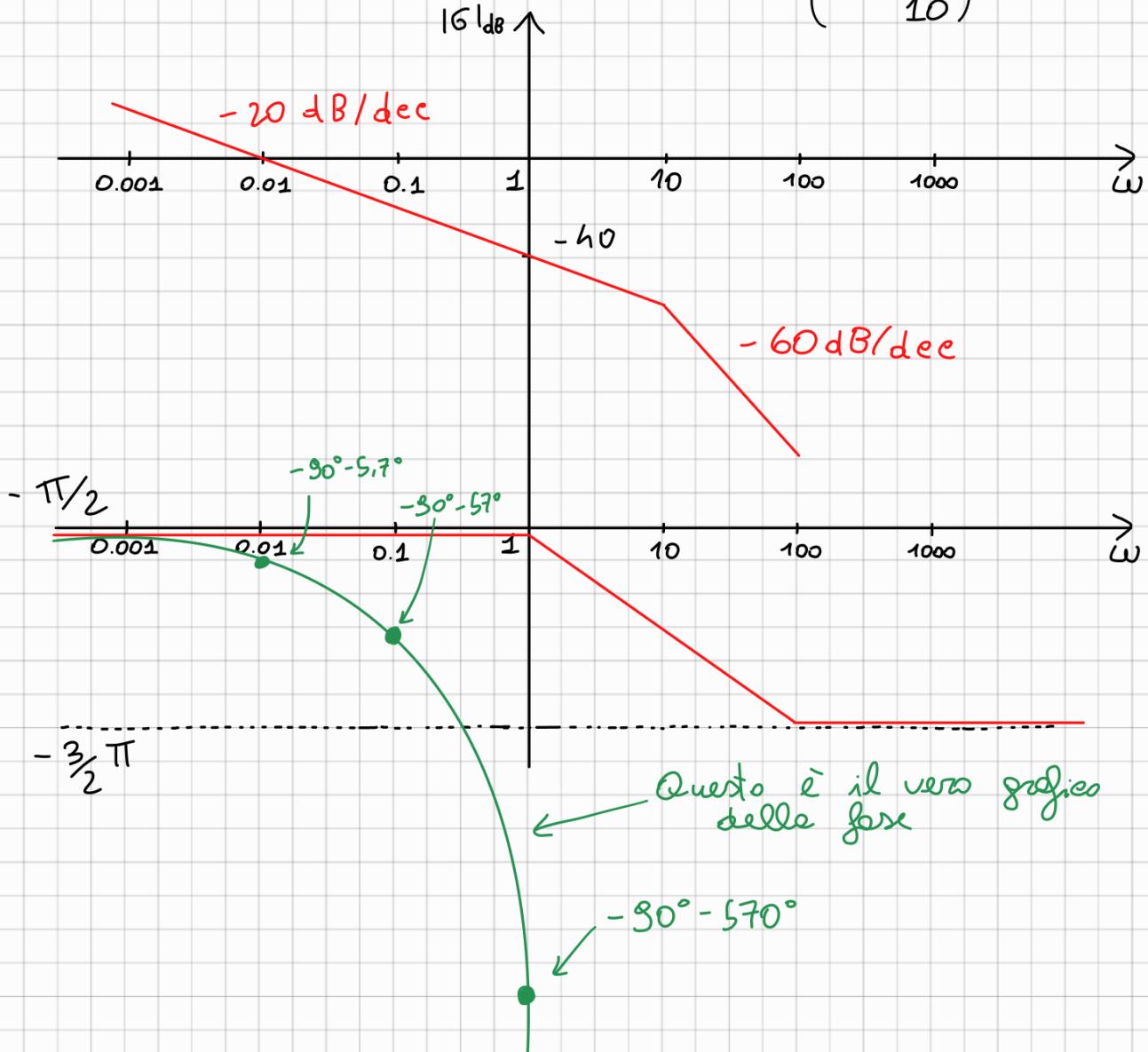
$$G(s) = \frac{e^{-10s}}{s(s+10)^2}$$

• Sistema di tipo 1 con ritardo

→ Non possiamo usare il l.d.r. a causa del ritardo.

Tracchiamo il diagramma di Bode

$$G(s) = \frac{e^{-10s}}{s(s+10)^2} \Rightarrow G(s) = \frac{1}{100} \frac{e^{-10s}}{s \left(1 + \frac{s}{10}\right)^2}$$



Volutiamo adesso il ritardo dovuto a  $e^{-10s}$

$$e^{-10s} \Big|_{s=j\omega} = e^{-10j\omega} \Rightarrow \text{Ritardo di } -10\omega$$

Vediamo questo ritardo in alcuni punti particolari

$$\begin{aligned} \text{■ } \omega = 0.01 &\Rightarrow -10 \cdot 1/100 = -0.1 \text{ rad} \approx -5.7^\circ \\ \text{■ } \omega = 0.1 &\Rightarrow -10 \cdot 1/10 = -1 \text{ rad} \approx -57^\circ \\ \text{■ } \omega = 1 &\Rightarrow -10 \text{ rad} \approx -570^\circ \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Ridisegna} \\ \text{le fasi} \end{array} \right\}$$

Possiamo adesso a Nyquist

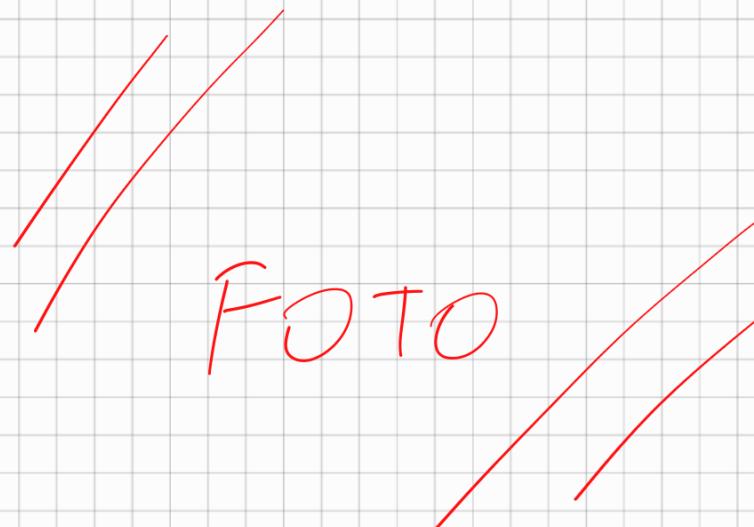
Per esprimere il ritardo con Nyquist usiamo l'espressione di Taylor per ricondurre a una forma polinomiale:

$$e^{-10s} \approx 1 - 10s \quad (\text{usando } e^x \approx 1+x) \quad \text{Consideriamo } \omega \approx 0$$

$$G(s) = \frac{1}{100} \frac{1 - 10s}{s(1 + \frac{s}{10})^2} \Big|_{s=j\omega} \Rightarrow \frac{1}{100} \frac{1 - 10j\omega}{j\omega(1 + \frac{j\omega}{5})} = 1 - \frac{\omega^2}{100} + \frac{j\omega}{5}$$

Usando  $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$  (sempre per valori vicini a 0):

$$\frac{1}{100} \frac{(1 - 10j\omega)}{j\omega} \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{5}} \approx \frac{1}{100} \frac{(1 - 10j\omega)(1 - \frac{j\omega}{5})}{j\omega}$$



Scriuiamoci delle specifiche per il nostro controllore  
(in genere non usiamo Nyquist per i controllori)

$$\left\{ \begin{array}{l} N_\phi \geq 40^\circ \\ M_G \geq 6 \text{ dB} \\ K = 1 \end{array} \right.$$

Per avere  $K = 1$  dobbiamo fissare di  $C(s) = K_p = 100$   
tale che  $L(s) = C(s) G(s) = 10^6 \cdot \frac{1}{100} = 1 = K$

$K_p \uparrow$  ↗ Guadagno della  $G(s)$

→ SPIEGAZIONE NELL'AUDIO, FINO A SEGNA 3

Scegliamo  $C(s)$  nella forma  $C(s) = \frac{1 + 10^3 s}{1 + 10^5 s}$

## Esercizio

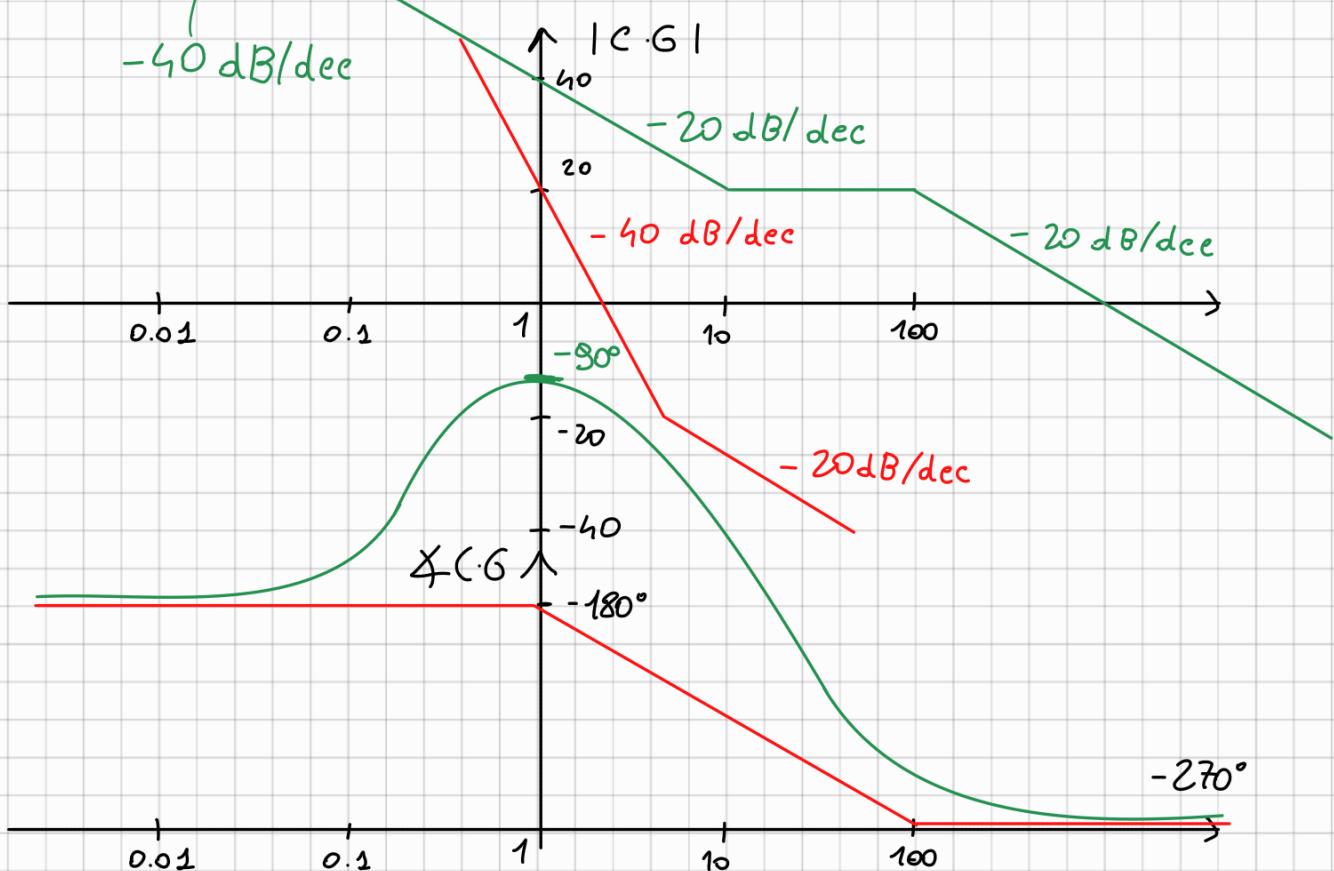
$$G(s) = \frac{1 - s/10}{s^2}$$

$K_A = 10 \rightarrow$  costante di accelerazione dante  
al fatto che il sistema è  
di tipo 2. Si tratta di una  
costante da impostare a regime.

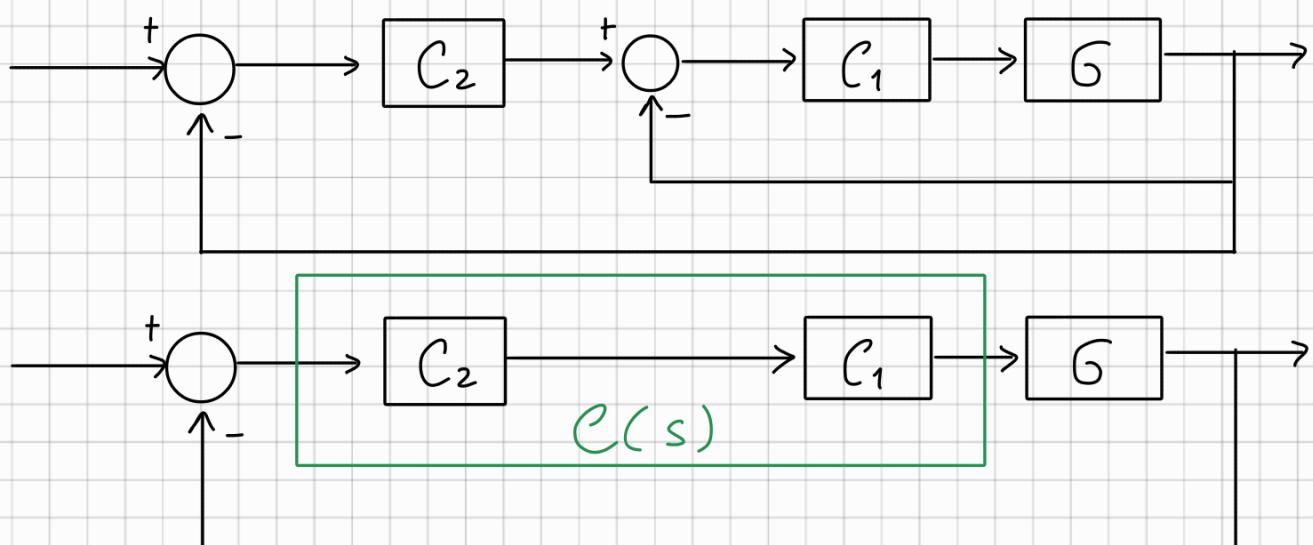
$$G(s) = // \Rightarrow C \cdot G =$$

$\frac{10(1 - s/10)}{s^2}$

-40 dB/dec



È difficile avere pendenze  $-20 \text{ dB/dec}$  con fasi  $-\frac{\pi}{2}$  per  
rispettare le specifiche che ci interessano



Non ci serve avere un secondo anello di controllo quindi  
scelgono una forma del secondo tipo

~~$C_1(s)$~~

$$C_1(s) = \frac{1 + 10s}{1 + s/100}$$



# Lezione 33 - 17/05/2025 - [ ]

[Lezione 32 - 15/05/2025 - \[ \]](#)

## Esercitazione

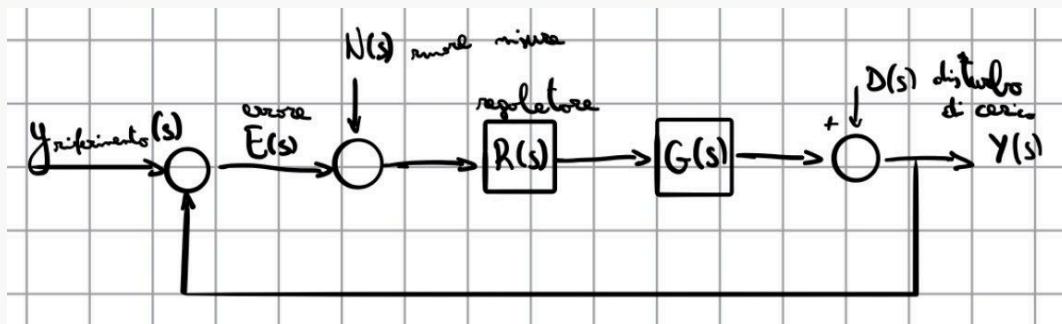
Questa è una tipica traccia d'esame.

Sia la funzione di trasferimento  $G(s) = 10 \frac{(20-s)}{(s+1)(s+25)^2}$ , bisogna progettare il regolatore  $R(s)$ , affinché si abbia:

- Errore a regime, in risposta al gradino  $e_z \leq 3\%$
- Attenuazione dei disturbi di carico di almeno  $20 dB$ , per  $\omega \leq 0.1 rad/s$
- Reiezione dei rumori di misura di almeno  $-20 dB$ , per  $\omega \geq 40 rad/s$
- Margine di fase  $M_\phi \geq 45^\circ$



L'anello di controllo preso in considerazione è sempre lo stesso (vedi disegno), e in particolare presenta  $N(s)$  come rumore di misura (precede sia  $R$  sia  $G$ ) e  $D(s)$  il disturbo di carico (segue a  $G$ ).



### ▼ Errore a regime

Partiamo con lo studio dell'errore a regime, andando a valutare la relazione tra il segnale errore e il segnale di riferimento. Studiare questo significa andare a

studiare la relazione tra l'ingresso e l'uscita, tentando di far sì che l'uscita insegua il segnale di riferimento.

Il sistema è di tipo 0 quindi non avendo un polo nell'origine mi aspetto di avere un certo errore a regime. Per cui andiamo a scrivere il [Teorema del valore finale](#):

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + R(s)G(s)} Y_{rif}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + RG} \frac{1}{s} \leq 0.03$$

Quello che abbiamo fatto è stato applicare il teorema del valore finale usando come segnale di riferimento  $Y_{rif}(s) = \frac{1}{s}$ , ovvero il gradino per cui vogliamo studiare il comportamento del sistema. Non c'è stato bisogno di aggiungere un polo nell'origine perché la specifica non richiedeva errore a regime nullo. Dalla precedente equazione ricaviamo che:

$$\text{per } s = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1 + \underbrace{R(0)G(0)}_{K \text{ guadagno statico}}} \leq 0.03$$

$$\text{In particolare possiamo calcolare } G(0) = 10 \frac{(20 - 0)}{(0 + 1)(0 + 25)^2} = \frac{8}{25} = 0.32$$

$$\frac{1}{1 + R(0)G(0)} = \frac{1}{1 + K_p G(0)} = \frac{1}{1 + K_p \frac{8}{25}} \leq \frac{3}{100} \longrightarrow K_p \geq \frac{2425}{24} \approx 101$$

Una volta trovati sia  $R(0)$  che  $G(0)$  siamo in grado di scrivere  $L(0) =$

$$R(0)G(0) = \frac{97}{3}.$$

## ▼ Attenuazione dei disturbi di carico

Per studiare il secondo requisito del sistema, bisogna studiare la relazione tra i disturbi di carico e l'uscita. In particolare, la relazione tra queste due unità è data proprio dalla funzione  $S(s)$ , ovvero la funzione di sensitività, definita come:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)}$$

Chiedere un'attenuazione di almeno 20 dB sui disturbi di carico, significa imporre che il modulo della funzione di sensitività, nella risposta in frequenza, sia più piccolo di -20 dB (il segno meno è dovuto al fatto che si tratta di un'attenuazione). Inoltre, i disturbi di carico agiscono solo a basse frequenze, pertanto, come già ci ricorda la traccia, imponiamo lo studio per  $\omega \leq 0.1 \text{ rad/s}$ .

$$\left| S(j\omega) \right|_{s=j\omega} = \left| \frac{1}{1 + R(j\omega)G(j\omega)} \right|_{\omega \leq 0.1} \leq -20 \text{ dB}$$

$$\left| 1 + L(j\omega) \right|_{\omega \leq 0.1} \geq 20 \text{ dB}$$

Un'attenuazione richiesta sulla funzione di sensitività, quindi sulla funzione di trasferimento in ciclo chiuso tra il disturbo e l'uscita, è diventata una richiesta di amplificazione a bassa frequenza sulla funzione di anello  $L$ . Il guadagno statico trovato prima deve essere sufficiente a garantire anche questo

requisito, infatti  $|L(0)| = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{97}{3} \right) \approx 30.19 \text{ dB}$ , quindi in questo esempio, rispettando il primo requisito, rispettiamo automaticamente anche il secondo.

Combinando la prima e la seconda specifica otteniamo che:

$$\left| L(j\omega) \right|_{\omega \leq 0.1} \geq 31 \text{ dB} \quad (1+2)$$

## ▼ Reiezione dei rumori di misura

Per la terza specifica, sulla reiezione dei rumori di misura, prendiamo in considerazione la funzione di trasferimento tra il rumore di misura e l'uscita, ovvero la funzione di sensitività complementare:

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = H(s) = T(s) = \left| \frac{RG}{1 + RG} \right|_{\omega \geq 40} \leq -20 \text{ dB}$$

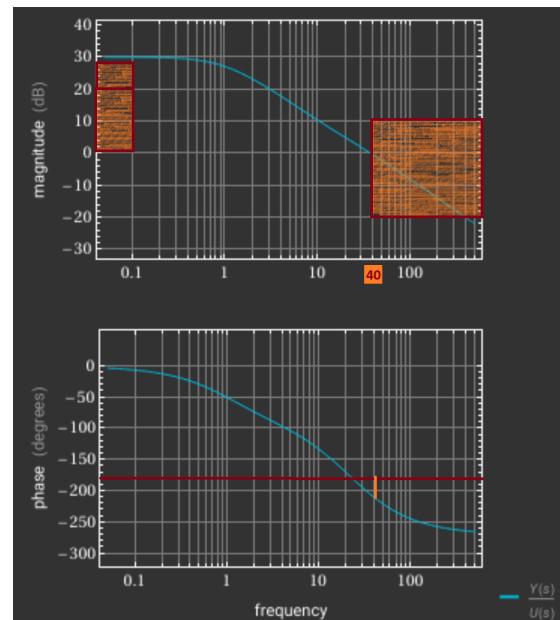
Ma a noi serve un vincolo sulla funzione di anello, da imporre ad alta frequenza, perciò trascurro  $RG$  rispetto a 1 e ottengo che la terza barriera sul diagramma di Bode è:

$$\left| L(j\omega) \right|_{\omega \geq 40} \leq -20 \text{ dB} \quad (3)$$

## ▼ Diagramma di Bode

$$G(s) = 32 \frac{(1 - \frac{s}{20})}{(1 + s)(1 + \frac{s}{25})^2}$$

- Il sistema è di tipo 0 quindi a bassa frequenza segue il vincolo che avevamo imposto.
- Ad  $\omega = 1$  entra in gioco il primo polo quindi il grafico scende con una pendenza di -20 dB/dec.
- In  $\omega = 20$  l'azione dello zero genera un tratto costante (pendenza di 20 dB/dec dello zero bilanciata dalla pendenza di -20 dB/dec del polo).
- In  $\omega = 25$  il secondo polo agisce, ed essendo con molteplicità 2, il grafico ha pendenza di -40 dB/dec.



Da questo diagramma riscontriamo due problemi: il primo problema è che nel diagramma del modulo il grafico passa per una zona proibita, ovvero dalla zona vincolata per la reiezione dei rumori di misura di almeno -20 dB per  $\omega \geq 40 \text{ rad/s}$ ; il secondo problema ha a che fare con il margine di fase che calcolato alla frequenza di crossover viene addirittura negativo (la formula è  $180^\circ - |\arg(G(j\omega_{gc}))|$ ).

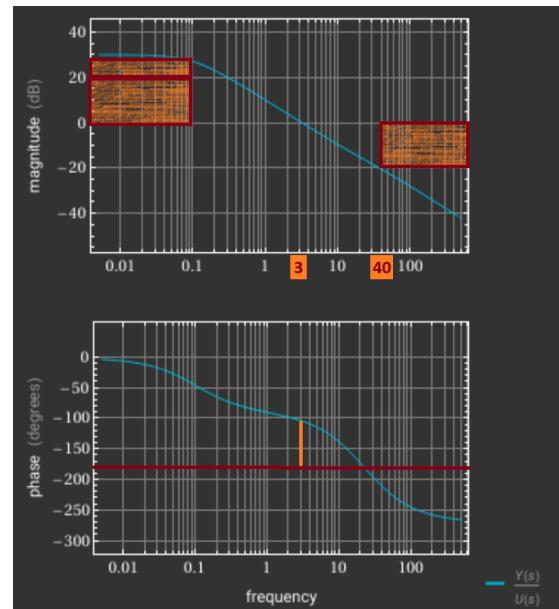
## ▼ Creazione del nuovo controllore

Procedendo per tentativi creiamo un nuovo controllore, da moltiplicare alla nostra  $G(s)$ . Usiamo come strategia la seguente:

$$C(s)G(s) = \frac{(1+s)}{(1+\frac{s}{0.1})} \cdot 32 \frac{(1 - \frac{s}{20})}{(1+s)(1+\frac{s}{25})^2}$$

- Anticipiamo la discesa del modulo semplificando il polo in 1 con uno zero, e aggiungiamo un polo in 0.1. Così facendo non solo anticipo la discesa del modulo evitando il vincolo 3, ma anticipo anche la frequenza di crossover portandola in un punto precedente all'azione dei poli multipli che fanno crollare rapidamente la fase.

Con il controllore scelto riusciamo a rispettare tutte le specifiche di progetto (i vincoli non sono violati e il margine di fase è di circa 80°) quindi possiamo ritenerci soddisfatti, e l'esercizio concluso.



## Controllori PID

Trattandosi di un argomento piuttosto limitato, mi limito a riportare le sole slide sui controllori PID (più che sufficienti).

[attachment:e0138a40-9e15-4675-beb8-5dc55b9099f8:Lezione\\_33\\_-17052025.pdf](#)

# Controllori PID

Classico regolatore standard: Proporzionale Integrale Derivativo

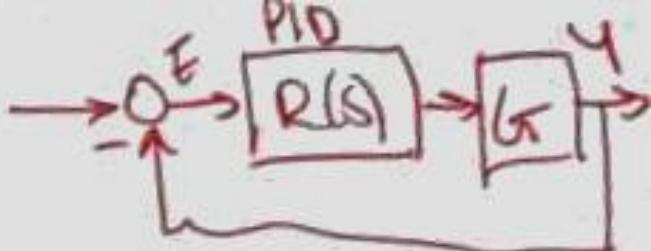
Implementa la funzione

$$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad R(s) = k_p + \frac{k_I}{s} + k_D s$$

Possono essere implementate anche solo le versioni P e PI

Il 95% dei controllori industriali sono PI(D)

## Controllori PID



Classico regolatore standard: Proporzionale Integrale Derivativo

Implementa la funzione

$$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

IMPLEMENTAZIONE

$$R(s) = k_p + \frac{k_I}{s} + k_D s$$

Possono essere implementate anche solo le versioni P e PI

Il 95% dei controllori industriali sono PI(D)

## Funzione di Trasferimento di un PID

$$\begin{aligned} R(s) &= k_p + \frac{k_I}{s} + k_D s = \frac{k_D s^2 + k_p s + k_I}{s} = \\ &= k_p \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right) = \\ &= k_p \frac{\tau_I \tau_D s^2 + \tau_I s + 1}{\tau_I s} \end{aligned}$$

$k_p, k_I, k_D$       Parametri di Progetto

$\tau_I, \tau_D$       (parametri equivalenti): costanti di tempo  
integrale e derivativa

## Funzione di Trasferimento di un PID

Un regolatore PID ideale ha una f.d.t con un polo nell'origine e due zeri in:

$$z_{1,2} = \frac{-\tau_I \pm \sqrt{\tau_I(\tau_I - 4\tau_D)}}{2\tau_I\tau_D}$$

Il comportamento ideale del PID è mantenuto solo fino ad una pulsazione massima, al di sopra della quale la f.d.t. di un PID reale è caratterizzata da un roll-off dovuto a poli ad alta frequenza.

Nei PID digitali la pulsazione max è legata alla frequenza di campionamento max del dispositivo

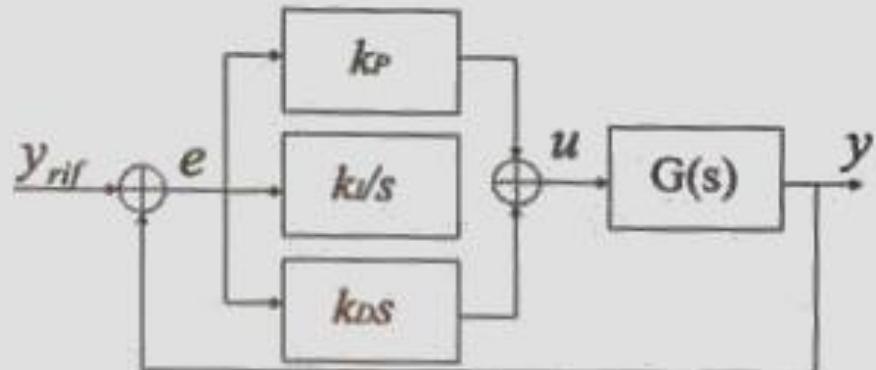
## Perche' il PID

$$R(s) = k_p \frac{\tau_I \tau_D s^2 + \tau_I s + 1}{\tau_I s}$$

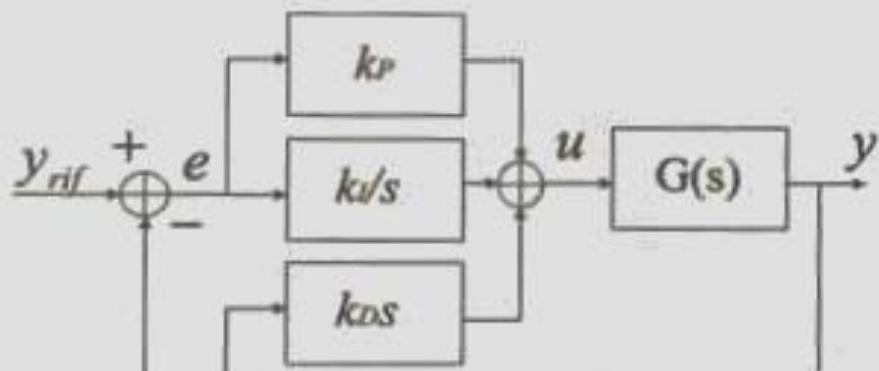
Qualitativamente, il polo nell'origine garantisce prestazioni di precisione a regime, mentre gli zeri consentono di recuperare fase e, assieme alla costante di guadagno, di soddisfare le specifiche di transitorio.

La disponibilità di un regolatore PID consente da un lato di poter usare una struttura standard per il controllo, dall'altro diminuisce i gradi di libertà nel progetto del regolatore

# Montaggio di un PID

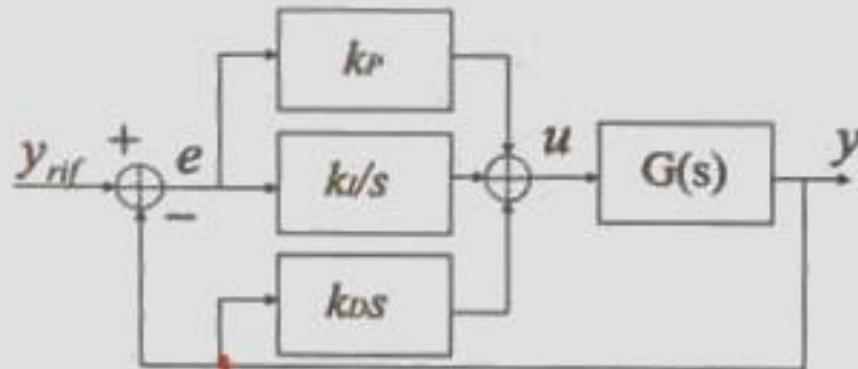
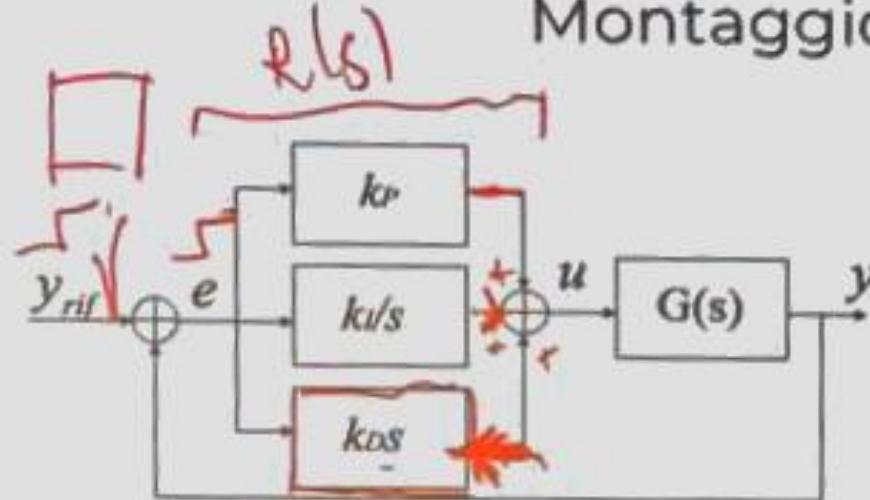


L'azione derivativa sul segnale di errore può causare segnali di controllo a frequenza molto elevata.



E' più conveniente derivare direttamente il segnale di uscita ( $\dot{e} = \dot{y}$ )

## Montaggio di un PID

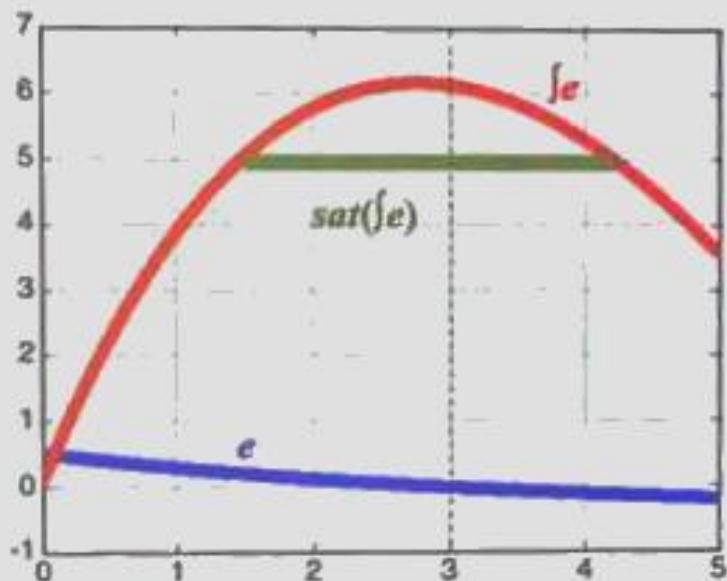


L'azione derivativa sul segnale di errore può causare segnali di controllo a frequenza molto elevata.



E' più conveniente derivare direttamente il segnale di uscita ( $\dot{e} = \dot{y}$ )

## Wind-up dell'azione integrale



Se l'integrale dell'errore cresce eccessivamente, il controllo  $u$  raggiunge i limiti di saturazione degli attuatori  
L'accumulo dell'azione integrale fa rimanere un termine residuale, anche quando l'errore raggiunge lo zero

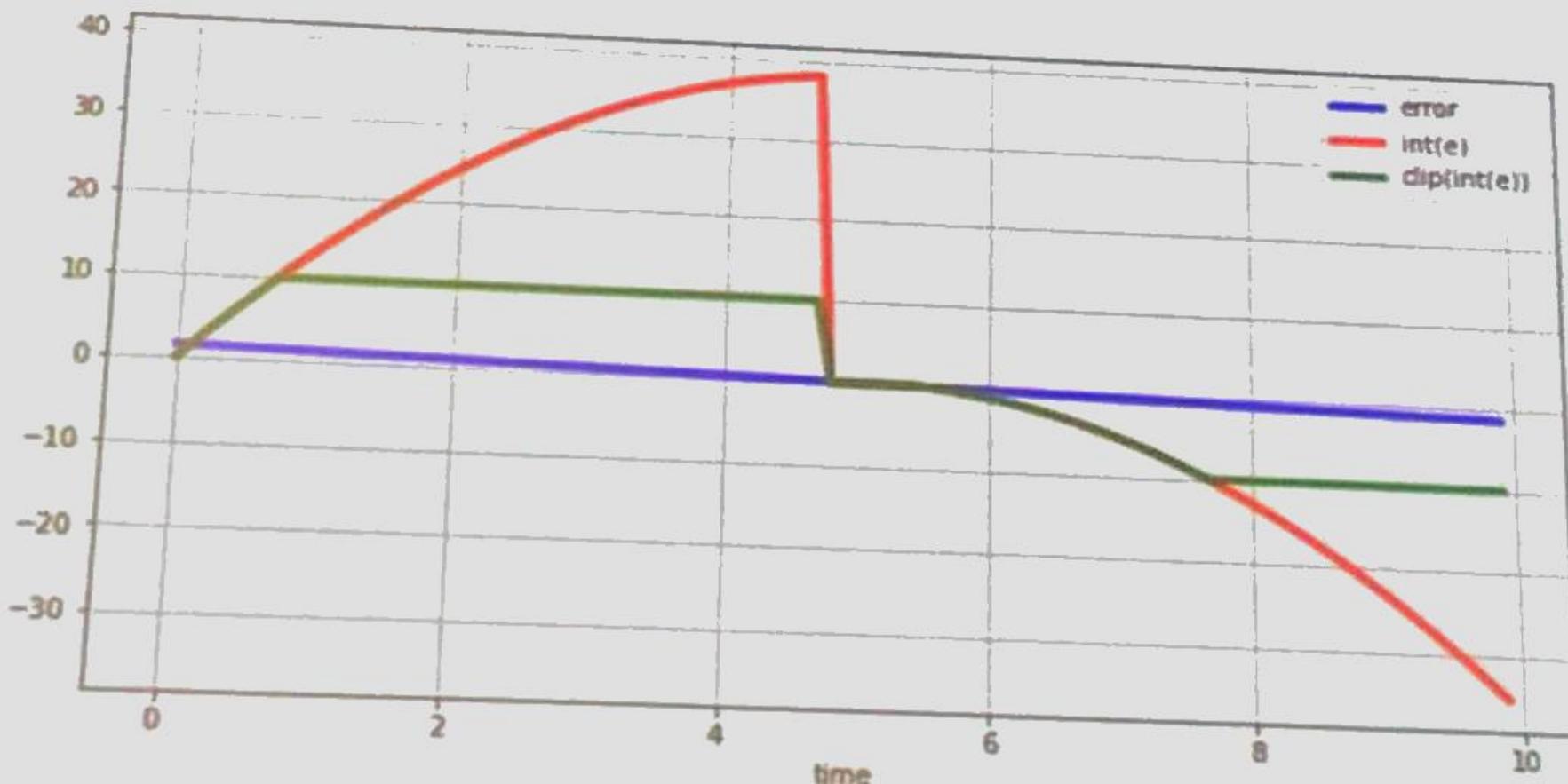
## Procedure anti-wind-up

Esistono degli schemi analogici per la realizzazione di regolatori PID con compensazione dell'azione di wind-up e desaturazione.

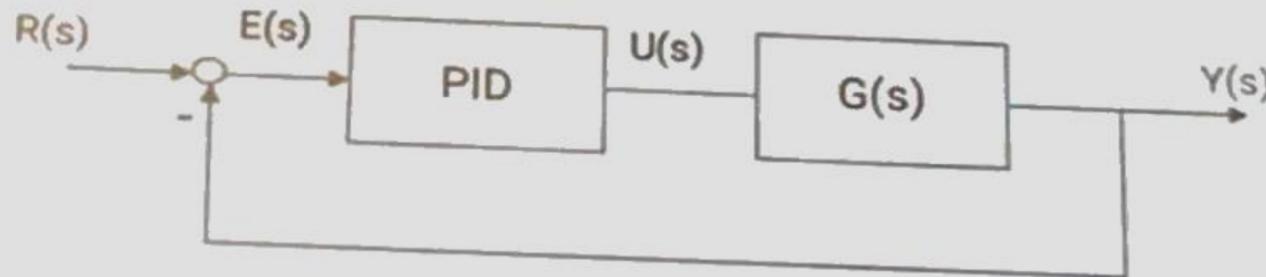
La disponibilità di regolatori digitali con funzione PID "built-in" rende possibile applicare procedure di desaturazione di tipo logico:

- bloccare l'azione integrale quando è raggiunta la soglia di saturazione (mantenendo l'attuatore al livello di saturazione);
- azzerare il contributo integrale non appena l'errore raggiunge lo zero e ricominciare

# Procedure anti-wind-up



# Taratura di un PID

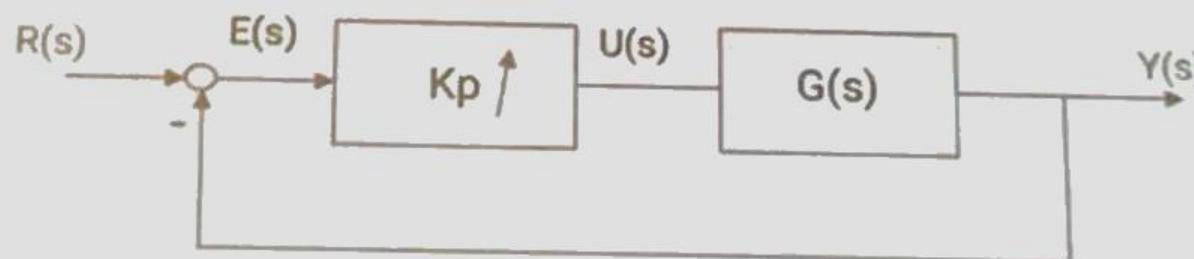


**Tecniche relative a prove su impianti con f.d.t. non nota;**  
Prove semplici da realizzare in pratica e parametri scelti in base a regole standard che rappresentano un buon compromesso  
precisione/banda/robustezza per la maggio parte degli impianti caratterizzati da uno-due poli dominanti ed un ritardo di tempo  
**Regole da NON seguire se si è alla ricerca di prestazioni molto spinte da parte del sistema di controllo**

## Procedura di Ziegler e Nichols per la taratura automatica dei PID

$G(s)$  BIBO stabile;  $G(0) > 0$

si chiude l'anello con la sola parte proporzionale del regolatore;  
si dà un ingresso a gradino e si incrementa il guadagno fino che l'uscita  
non inizia a oscillare



Siano  $k^*$  e  $t^*$  il guadagno critico e il corrispondente periodo di oscillazione

## Tabella di Ziegler e Nichols

Sulla base dei parametri  $k^*$  e  $\tau^*$  individuati sperimentalmente si tarano i guadagni del regolatore PID secondo la tabella:

$R(s)$	$k_P$	$\tau_I$	$\tau_D$
$P$	$0.5k^*$		
$PI$	$0.45k^*$	$0.8\tau^*$	
$PID$	$0.6k^*$	$0.5\tau^*$	$0.125\tau^*$

## Perche' le regole di Ziegler e Nichols

Il parametro  $k^*$  è il margine di guadagno del sistema con controllo proporzionale.

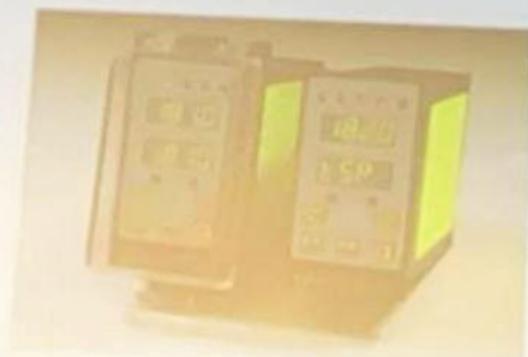
La pulsazione critica è  $2\pi/t^*$ .

La regola per il controllore  $P$  corrisponde a imporre un margine di guadagno di 6 dB

Il termine integrale, qualitativamente, migliora le prestazioni di regime ma diminuisce la banda passante e il margine di fase

Il termine derivativo aumenta la banda passante ed il margine di fase

## Controllori Industriali



Nel settore dell'automazione industriale i produttori di componenti (Rockwell, Siemens, Mitsubishi, ...) forniscono prodotti già dotati di un controllore in forma standard, di cui vanno configurati i parametri

Oggi i controllori industriali sono tutti digitali, ed implementano inoltre una serie estesa di funzionalità di supervisione e controllo – cfr. PLC

8

# Utilità





# Modello a variabili di stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Forniamo una rappresentazione standard per rappresentare la dinamica di un sistema.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x : \text{stato}, u : \text{ingresso} \\ y = Cx + Du, & y : \text{uscita} \end{cases}$$

$$u \in \mathbb{R}^r, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m, \\ A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad C \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{m \times r}$$

- Risolvendo la prima equazione del sistema, che è una differenziale ricaviamo  $x(t)$ , che è anche detta **movimento dello stato del sistema**. La seconda equazione  $y(t)$  è detta **movimento dell'uscita del sistema**.
- La seconda relazione rappresenta la relazione ingresso uscita. Nel caso in cui il sistema non dipendesse dallo stato, allora la relazione  $Du$  rappresenterebbe una relazione diretta tra ingresso e uscita. Ad esempio dalla prima legge di Ohm ricaviamo  $V = RI$  (con  $V$  uscita,  $R = D$  e  $I$  ingresso).

Osservando la struttura del sistema possiamo trarre alcune considerazioni:

- La matrice  $[A]$  evidenza una proprietà di **stabilità**.
- La coppia di matrici  $[A, B]$  evidenzia la proprietà di **controllabilità**.
- La coppia di matrici  $[A, C]$  evidenzia la proprietà di **osservabilità**.



# Matrice in forma compagna

## Principio di sovrapposizione degli effetti

Il **principio di sovrapposizione degli effetti** è di fondamentale importanza, in quanto consente di calcolare il movimento generato da più cause, cioè stati iniziali e ingressi, semplicemente come somma pesata dei singoli effetti provocati dalle cause suddette. Stabilendo una forma generale, avremo che:

$$F(y(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), \dots, u^{(p)}(t), t) = 0$$
$$y^n(t) = \hat{F}(y(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t), \dots, u^{(p)}(t), t)$$

Riconosciamo quindi alcune delle componenti fondamentali di questa equazione. Le variabili  $y(t), y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$  identificano le uscite e le derivate di esse del sistema (gli effetti provocati da una o più cause), mentre gli ingressi  $u(t), u^{(1)}, \dots, u^{(p)}$  sono appunto gli ingressi e le derivate influenti sul sistema.

## Rappresentazioni equivalenti

Data la forma generale possiamo dire che avremo equazioni di ordine  $n$  e sistemi di ordine 1:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\dots) \\ \vdots \\ f_n(\dots) \end{bmatrix} \stackrel{\text{se lineare}}{=} Ax + Bu$$

## Rappresentazioni equivalenti per $p = 0$

Se  $p = 0$  scelgo come stato  $x_1 = y$ :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\dots) \\ \vdots \\ f_n(\dots) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \hat{F}([y, \dots, y^{(n-1)}], u, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \hat{F}(x, u, t) \end{bmatrix} = \bar{f}(x, u, t)$$

Inoltre per i sistemi lineari vale che:

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t)y^{(i)}(t) + u(t) \quad (p=0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad p=0 \\ y = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] x + [0] u \end{array} \right.$$

Quest'ultima matrice è detta **matrice in forma compagna orizzontale inferiore**.

### Rappresentazioni equivalenti per $0 < p < n$

Nel caso in cui abbiamo  $0 < p < n$  nei sistemi lineari

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t)y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^p \beta_j u^{(j)}(t) \quad (0 < p < n)$$

Scriviamo l'equazione ausiliaria:

$$z^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t)z^{(i)}(t) + u(t) \quad \longleftrightarrow \quad x = \begin{bmatrix} z \\ \vdots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Rappresenta la risposta del sistema all'ingresso  $u(t)$ .

Proprio per il fatto che il sistema è lineare possiamo dire che la combinazione lineare degli ingressi equivale alla combinazione lineare delle uscite. Abbiamo

ottenuto che l'uscita  $y(t)$  è data dalla combinazione lineare delle derivate di  $z$ , con gli stessi coefficienti:

$$y(t) = \sum_{j=0}^p \beta_j z^{(j)}(t)$$

Scriviamo infine il sistema per  $0 < p < n$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \sum_{i=1}^{p+1} \beta_{i-1} x_i = [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_p \ 0 \ \dots \ 0] x + [0] u \end{array} \right.$$

Osserva che le matrici  $A$  e  $B$  sono le stesse di prima per  $p = 0$  e l'equazione di uscita contiene  $p + 1$  elementi non nulli.

### Rappresentazioni equivalenti per $p = n$

Ripartiamo dalle equazioni per  $0 < p < n$ :

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t) y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^p \beta_j u^{(j)}(t) \quad (0 < p < n)$$

Facciamo qualche passaggio già visto in precedenza per esplicitare  $p = n$  e sfruttando le proprietà di linearità ottenere le equazioni per il caso di  $p = n$

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} x_i + \beta_n z^{(n)}, \quad z^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t) z^{(i)}(t) + u(t)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} x_i - \beta_n \sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} x_i + \beta_n u(t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [\beta_0 - \beta_n \alpha_0 \quad \beta_1 - \beta_n \alpha_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1}] x + [\beta_n] u \end{array} \right.$$

## Esempio

Prendiamo un'equazione differenziale generica con  $p < n$ :

$$y^{(2)} + y = 2u + \dot{u}$$

Riconducibile alla forma:

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t)y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^p \beta_j^{(j)} u(t)$$

In questo caso abbiamo che  $p = 1$

Dobbiamo ricercare la forma standard  $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ , troviamo quindi che:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -\alpha_0 y & -\alpha_2 \dot{y} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 2 \\ \underbrace{\beta_0 u}_{\beta_1 \dot{u}} \end{bmatrix} x + [0] u$$

## Realizzazione minima di una f.d.t.

Per produrre la realizzazione minima di un impianto ci basta riscrivere la  $G(s)$  in questa forma:

$$G(s) = \frac{\beta_0 + \beta_1 s + \cdots + \beta_m s^m}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Assumendo  $p = m$  il grado del numeratore e  $n$  il grado del denominatore, abbiamo una forma propria con ( $p < n$ ) e possiamo trattarla con la rappresentazione equivalente per  $0 < p < n$ .



# Risposta libera e forzata

## Formula di Lagrange

Sia dato  $\dot{x} = Ax + Bu \quad x(t_0 = 0) = x_0; \quad x(t) \in \mathbb{R}$

Si dimostra che la soluzione dell'equazione differenziale, ovvero il movimento dello stato in corrispondenza di un certo ingresso  $u(t) \neq 0$  è data dalla **Formula di Lagrange**:

$$\dot{x} = Ax + Bu \implies x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\text{risposta libera}} + \int_0^t \underbrace{e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{risposta forzata}}$$

Nota bene in un sistema più generico con  $t_0 \neq 0$  abbiamo:

$$x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)}x_0}_{\text{risposta libera}} + \int_{t_0}^t \underbrace{e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{risposta forzata}}, \quad t \geq t_0, x_0 = x(t_0)$$

- **Risposta libera**  $\phi(t, t_0, x_0, u(t) = 0)$ :

Il contributo al movimento dello stato e dell'uscita funzione solo dello stato iniziale, cioè quello che si avrebbe se, a pari stato iniziale, l'ingresso fosse nullo, si chiama **movimento libero**, ed è:

$$x_l(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 \quad y_l(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0$$

### Risposta libera

La risposta libera è la risposta del sistema dovuta esclusivamente alle condizioni iniziali quando l'ingresso è zero. In altre parole è come il sistema reagisce al suo stato iniziale, senza alcuna influenza esterna.

→ Nell'equazione differenziale ingresso-uscita pongo nulli  $u(t)$  e le sue derivate.

- **Risposta forzata**  $\phi(t, t_0, x(t) = 0, u(t))$ :

Il contributo funzione solo dell'ingresso, cioè quello che si avrebbe se, a pari ingresso, lo stato iniziale fosse nullo, si chiama **movimento forzato**, ed è:

$$x_f(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad y_f(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t)$$

## Risposta forzata

La risposta forzata di un sistema è la sua uscita quando si applica un ingresso specifico, considerando che il sistema parte da condizioni iniziali nulle. In altre parole è la parte della risposta del sistema dovuta esclusivamente all'ingresso, senza considerare la risposta libera dovuta alle condizioni iniziali.

→ Pongo nulli  $y(0)$  e le sue derivate nella trasformata dell'equazione differenziale ingresso-uscita.

Al **movimento dello stato**  $x(t)$  dal sistema LTI ricaviamo anche il corrispondente **movimento dell'uscita**:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

9

Esami

# Uni Popi Popi





# Appello 03/06/2025 - [ ]

Sono riportati di seguito solo alcuni degli esercizi presentati nell'appello del 03/06/2025.

Per gli esercizi discussi in questa pagina si fa riferimento al pdf situato su [questa pagina GitHub](#).

## Tipologia 1

### Esercizio 1.1

#### Metodo 1

1. Antitrasformo la f.d.t. per ottenere l'equazione differenziale ingresso-uscita
2. Faccio la trasformata di Laplace dell'equazione differenziale ingresso-uscita tenendo conto delle condizioni iniziali e pongo nullo l'ingresso (vedi  [Risposta libera e forzata](#)).
3. Riscrivo in termini di  $Y(s)$  e antitrasformo nuovamente.

Partendo dalla funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{s+4}{s(s+2)^2}$  ricostruiamo l'equazione differenziale. In particolare troviamo che  $G(s) = \frac{s+4}{s(s+2)^2} = \frac{Y(s)}{U(s)}$  e di conseguenza:

$$\begin{aligned}
s(s+2)^2Y(s) &= (s+4)U(s) \rightarrow (s^3 + 4s^2 + 4s)Y(s) = (s+4)U(s) \\
y^{(3)}(t) + 4y^{(2)}(t) + 4y^{(1)}(t) &= u^{(1)}(t) + 4u(t) \quad [*_1] \\
y^{(3)}(t) + 4y^{(2)}(t) + 4y^{(1)}(t) &= 0 \\
\mathcal{L}\{y^{(3)}(t) + 4y^{(2)}(t) + 4y^{(1)}(t)\} &= 0 \\
\begin{cases} \mathcal{L}\{y^{(3)}(t)\} = s^3Y(s) - s^2y(0) - sy^{(1)}(0) - y^{(2)}(0) \\ \mathcal{L}\{4y^{(2)}(t)\} = 4s^2Y(s) - 4sy(0) - 4y^{(1)}(0) \\ \mathcal{L}\{4y^{(1)}(t)\} = 4sY(s) - 4y(0) \end{cases} \quad [*_2] \\
s^3Y(s) - s^2y(0) - sy^{(1)}(0) - y^{(2)}(0) + 4s^2Y(s) - 4sy(0) - 4y^{(1)}(0) + 4sY(s) - 4y(0) &= 0 \\
s^3Y(s) - sy^{(1)}(0) - y^{(2)}(0) + 4s^2Y(s) - 4y^{(1)}(0) + 4sY(s) &= 0 \quad [*_3] \\
s^3Y(s) + s - 1 + 4s^2Y(s) + 4 + 4sY(s) &= 0 \quad [*_4] \quad [*_5] \\
s^3Y(s) + 4s^2Y(s) + 4sY(s) + s + 3 &= 0 \\
Y(s)(s(s+2)^2) &= -(s+3) \rightarrow Y(s) = -\frac{s+3}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} \\
A = -\frac{3}{4} \quad B = \frac{3}{4} \quad C = \frac{1}{2} \quad [*_6] &
\end{aligned}$$

- $[*_1]$  avrei potuto anche semplificare prima con  $U(s) = 0$ , infatti  $U(s) = 0 \Leftrightarrow u(t) = 0$
- $[*_2]$  ho usato  $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
- $[*_3]$  impongo  $y(0) = 0$
- $[*_4]$  impongo  $\dot{y}(0) = -1$
- $[*_5]$  impongo  $\ddot{y}(0) = 1$
- $[*_6]$  ho usato il teorema dei residui, in particolare la forma per i poli multipli data da:

$$A_i = \frac{1}{(\mu-i)!} \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{\partial^{\mu-i} [(s-p_i)^\mu \cdot F(s)]}{\partial s^{\mu-i}} \quad i = 1, 2, \dots, \mu$$

$\mu$  molteplicità del polo

L'ultimo passaggio è antitrasformare la nuova  $Y(s)$ :

$$\begin{aligned}
Y(s) &= -\frac{s+3}{s(s+2)^2} = -\frac{\frac{3}{4}}{s} + \frac{\frac{3}{4}}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{(s+2)^2} \\
\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\frac{3}{4}}{s} + \frac{\frac{3}{4}}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{(s+2)^2} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\frac{3}{4}}{s} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{3}{4}}{s+2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{2}}{(s+2)^2} \right\} \\
y_l(t) &= -\frac{3}{4} e^{0t} + \frac{3}{4} e^{-2t} + \frac{1}{2} t e^{-2t}
\end{aligned}$$

## Metodo 2 (idea)

Il metodo 2 consiste nel trovare la realizzazione minima della  $G(s)$ , di conseguenza trovare il modello a variabili di stato e imporre le condizioni iniziali date prima con il vettore  $x_0$ .

#### 4. 💬 Usa la soluzione del sistema dinamico con ingressi nulli

La dinamica del sistema è:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Calcoliamo  $x(t)$  risolvendo il sistema dinamico con quei dati iniziali.

Poiché il sistema è lineare a coefficienti costanti, possiamo usare la trasformata di Laplace:

Passaggio nel dominio di Laplace:

$$sX(s) - x_0 = AX(s) \Rightarrow (sI - A)X(s) = x_0 \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 \Rightarrow Y(s) = CX(s)$$

Quindi:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0$$

#### 5. 📈 Calcolo effettivo

Con  $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , calcola:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0$$

Ti antiprovo che facendo questi conti (inverso di matrice  $3 \times 3$ , prodotto con  $x_0$ , e infine con  $C$ ), ottieni esattamente:

$$Y(s) = \mathcal{L} \left\{ -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} \right\}$$

Quindi, invertendo la trasformata di Laplace:

$$y_l(t) = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t}$$

Questo metodo non ha alcuna utilità nella pratica in quanto il metodo 1 è più che sufficiente per risolvere l'esercizio ma può tornare utile nel momento in cui partiamo da un modello a variabili di stato e non vogliamo sviluppare (o approssimare) l'esponenziale della matrice. Infatti, non passando dal dominio di Laplace avremmo dovuto risolvere il sistema nel dominio temporale tramite le equazioni differenziali e

saremmo arrivati alla soluzione  $y_l(t) = Ce^{At}x_0$  (giustificato a dovere nelle prime lezioni del corso).

## Stabilità BIBO

Per quanto riguarda la stabilità BIBO è facile verificare che il sistema non è BIBO stabile in quanto i poli devono essere tutti a parte reale strettamente negativa.

Il termine associato al polo in  $s = 0$  genera una componente costante nella risposta all'impulso o a ingressi limitati (es., gradino). Quindi, ad esempio, un ingresso a gradino (costante) potrebbe causare un'uscita che non resta limitata, o comunque non tende a zero.

## Variante 1.1.2

Per questioni di semplicità e per evitare ridondanza considero nuovamente la f.d.t. dell'esercizio 1.1 e le sue condizioni iniziali. Svolgo pertanto, solo il punto 2 dell'esercizio che chiede la realizzazione minima e il modello a variabili di stato:

$$Y(s) = \frac{s+4}{s(s+2)^2} = \frac{4+s}{s^3 + 4s^2 + 4s}$$

Per la realizzazione minima si fa riferimento a [Matrice in forma compagna](#), da ciò, usando la realizzazione equivalente per  $0 < p < n$  ricavo il modello a variabili di stato:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} = \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [4 \quad 1 \quad 0] x + [0] u \end{cases}$$

## Esercizio 1.2

1. Trasformo nel dominio di Laplace l'equazione differenziale ingresso-uscita
2. Elimino le condizioni iniziali (vedi [Risposta libera e forzata](#)) e moltiplico l'ingresso a gradino.
3. Antitrasformo per tornare nel dominio del tempo.

$$\begin{aligned}
& \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{u} + 4u \\
& \mathcal{L}\{\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{u} + 4u\} = (s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 4)U(s) \\
& (s + 1)(s + 2)Y(s) = (s + 4)U(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{s + 4}{(s + 1)(s + 2)}U(s) \\
& Y(s) = \frac{s + 4}{s(s + 1)(s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s + 2} \\
& Y(s) = \frac{2}{s} + \frac{-3}{s + 1} + \frac{1}{s + 2} \\
& y_f = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{-3}{s + 1} + \frac{1}{s + 2}\right\} \Rightarrow y_f(t) = 2 - 3e^{-t} + e^{-2t}
\end{aligned}$$

La funzione di trasferimento la avevamo già trovata in precedenza, quindi esplicitiamola:

$$Y(s) = \frac{s + 4}{(s + 1)(s + 2)}U(s) \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 4}{(s + 1)(s + 2)}$$

Per quanto riguarda la stabilità BIBO è facile verificare che il sistema è BIBO stabile in quanto i poli devono essere tutti a parte reale strettamente negativa.