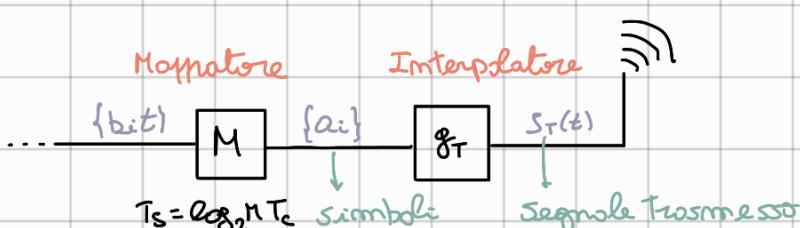
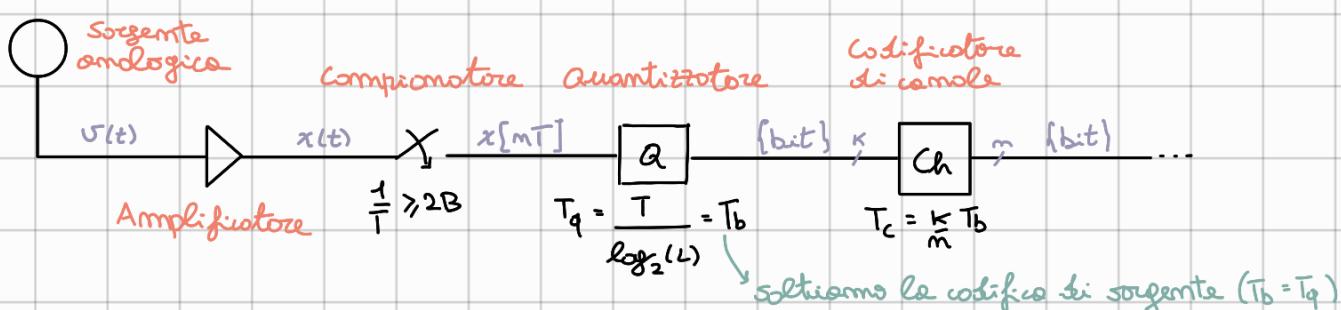


Sistemi PAM: Trasmettitore

Un sistema di comunicazione numerico ha lo scopo di convogliare sequenze di bit da un trasmittore ad un ricevitore: il trasmittore deve generare segnali fisici con determinati valori di ampiezza, fase e frequenza che il ricevitore dovrà interpretare.

Per fare ciò è necessario avere una mappa, ossia una corrispondenza biunivoca tra gruppi di bit e valori di ampiezza / fase / frequenza, detti **simboli**: un tipico sistema di comunicazione numerico è il **PAM** (Pulse Amplitude Modulation), dove i simboli corrispondono all'ampiezza degli impulsi di tensione in uscita

Vediamo ora come completare lo schema del trasmittore supponendo di voler realizzare un sistema PAM che trasmetta in banda base:



Mappatore

Il compito del trasmettore è quello di raggruppare i bit in ingresso e, ogni T_s secondi, codificarli in un simbolo a appartenente ad un alfabeto A di M simboli di modulazione unici.

Generalmente le mappe che associano bit a simboli sono antipodali (vediamo dopo perché), ossia con simboli dispari e distribuiti in modo simmetrico rispetto allo zero, vediamo alcuni esempi:

→ Mappa binaria

bit	a
0	1
1	-1

→ Mappa quaternario

bit	a
00	-3
01	-1
10	1
11	3

Più i simboli sono vicini e più è facile confonderli per via del rumore (vedremo che si utilizza una strategia a minima distanza euclidea), comunque fare in modo che simboli adiacenti abbiano un solo bit di differenza (**codifica di Gray**), così da minimizzare la probabilità di errore sul singolo bit codificato (in questo esempio avrei fatto scambiare 10 e 11)

↳ se sbaglio il simbolo (con quello vicino) sbaglierò solo $\frac{1}{m}$ bit

→ Mappa (senza un norme particolare)

bit	a
000	-7
001	-5
011	-3
010	-1
110	1
111	3
101	5
100	7

Vediamo ora di mettere in relazione il tempo di uscita dei simboli T_s con il tempo di ingresso dei bit T_c (e dunque con quello di campionamento T),

In generale possiamo notare che $T_s = \log_2 |A| T_c = \log_2 M T_c$, allora:

$$T_s = \log_2 M T_c = \log_2 M \frac{K}{m} T_b = \log_2 M m T_q = \log_2 M m \frac{1}{\log_2 L} T = m \frac{\log_2 M}{\log_2 L} T$$

note $\frac{K}{m}$

$$f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{mT} \frac{\log_2 L}{\log_2 M} = \frac{1}{m \log_2 M} \frac{\log_2 L}{T}$$

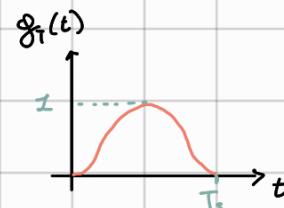
$\frac{\text{band}}{\text{bit}}$ $\frac{\text{bit}}{\text{s}}$

$[\text{band/s}] = [\text{simboli/s}]$

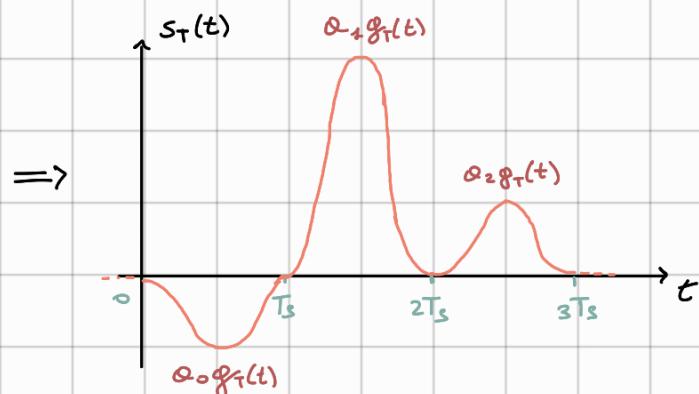
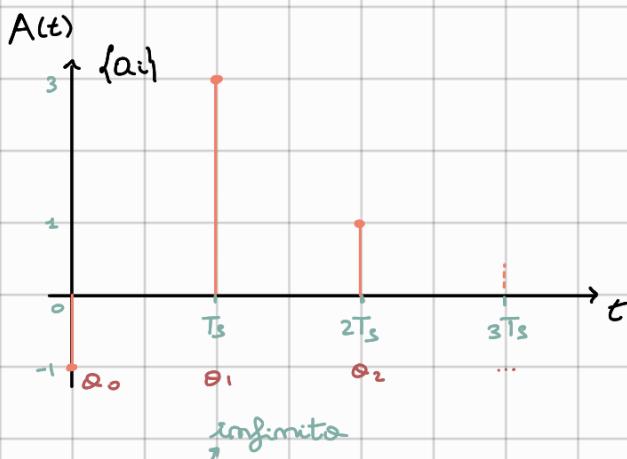
- Se m diminuisce il band rate aumenta (imserito più ridondanza \Rightarrow rumore più robusto)
- Se L aumenta il band rate aumenta (ohe più bit \Rightarrow rumore più robusto)
- Se M aumenta il band rate diminuisce (trasmette più bit con un simbolo)

Interpolatore

Consideriamo adesso l'interpolatore, questo dispositivo ha il compito di tradurre la sequenza dei simboli in un segnale (analogo) $s_T(t)$, si forma tale da poter essere trasmesso sul canale di comunicazione.



Ad esempio, supponendo $g_T(t)$ della forma:



La sequenza di simboli $A(t) = \{a_i\}$ è un processo aleatorio discreto basato sulla variabile aleatoria discreta ed equiprobabile a_i : $P_{a_i}(a_i) = \frac{1}{3}$

Il processo così definito è SSS perché il suo valore medio è costante e la sua funzione di autocorrelazione può essere espressa in funzione dello istante.

tra due istanti temporali generici i e k:

$$m_\alpha = E[\alpha_i] = \sum_i \alpha_i p_\alpha(\alpha_i)$$

$$R_\alpha(i, k) = E[\alpha_i \alpha_k^*] = \dots$$

Assumendo che i bit siano indipendenti

$$\text{se } i \neq k \Rightarrow \dots = E[\alpha_i] E[\alpha_k^*] = m_\alpha m_\alpha = m_\alpha^2 \quad \text{per definizione}$$

$$\text{se } i = k \Rightarrow \dots = E[|\alpha_i|^2] = \sum_i |\alpha_i|^2 p_\alpha(\alpha_i) = P_\alpha = \sigma_\alpha^2 + m_\alpha^2$$

$$\Rightarrow R_\alpha(i, k) = R_\alpha(k - i, 0) = R_\alpha(m) = \sigma_\alpha^2 d(m) + m_\alpha^2$$

\downarrow
 $m = k - i$

Allora, dato che il sistema è SSL, la sua densità spettrale di potenza può essere calcolata come la trasformata (discreta) di Fourier della f. di autocorrelazione:

$$R_\alpha(m) \rightleftharpoons S_\alpha(f) = \sum_m R_\alpha(m) e^{-j2\pi f m T_s} = \sum_m m_\alpha^2 e^{-j2\pi f m T_s} + \sigma_\alpha^2$$

$$\text{Tr. trasformato discreto} \quad = \frac{1}{T_s} \sum_m \delta(f - \frac{m}{T_s}) m_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2$$

Considerando l'interpolatore $g_T(t)$ come sistema LTI, allora il segnale in uscita $s_T(t) = \sum_i \alpha_i g_T(t - iT_s)$ è un processo aleatorio continuo SSL tale che:

ciò perché $\{\alpha_i\}$ è un processo discreto

$$\begin{aligned} S_S(f) &= \frac{1}{T_s} S_\alpha(f) |G_T(f)|^2 = \frac{1}{T_s} \left[\frac{1}{T_s} \sum_m \delta(f - \frac{m}{T_s}) m_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2 \right] |G_T(f)|^2 \\ &= \frac{\sigma_\alpha^2}{T_s} |G_T(f)|^2 + \frac{m_\alpha^2}{T_s^2} \sum_m |G_T(\frac{m}{T_s})|^2 \delta(f - \frac{m}{T_s}) \end{aligned}$$

$$P_S = \int_{-\infty}^{+\infty} S_S(f) df = \frac{\sigma_\alpha^2}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_T(f)|^2 df + \frac{m_\alpha^2}{T_s^2} \sum_m \int_{-\infty}^{+\infty} |G_T(\frac{m}{T_s})|^2 \delta(f - \frac{m}{T_s}) df = \frac{\sigma_\alpha^2}{T_s} E_{g_T} + \frac{m_\alpha^2}{T_s^2} \sum_m |G_T(\frac{m}{T_s})|^2$$

Note: i processi aleatori si caratterizzano tramite densità spettrale di potenza perché la loro trasformata continua di fourier sarebbe aleatoria.

Si definiscono inoltre le seguenti grandezze:

→ Energia media per simbolo trasmesso $E_s = P_s T_s$

→ Energia media per bit trasmesso $E_d = P_s T_c = \frac{P_s T_s}{\log_2 M} = \frac{E_s}{\log_2 M}$

Se la messa è omopolare allora la sequenza dei simboli è a media nulla

e dunque tutti i risultati ottenuti precedentemente si semplificano:

$$m_\alpha = 0, R_\alpha(m) = \sigma_\alpha^2 \delta(m), S_\alpha(f) = \sigma_\alpha^2$$

$$S_s(f) = \frac{\sigma_\alpha^2}{T_s} |G_T(f)|^2, P_s = \frac{\sigma_\alpha^2}{T_s} E_{g_T}$$

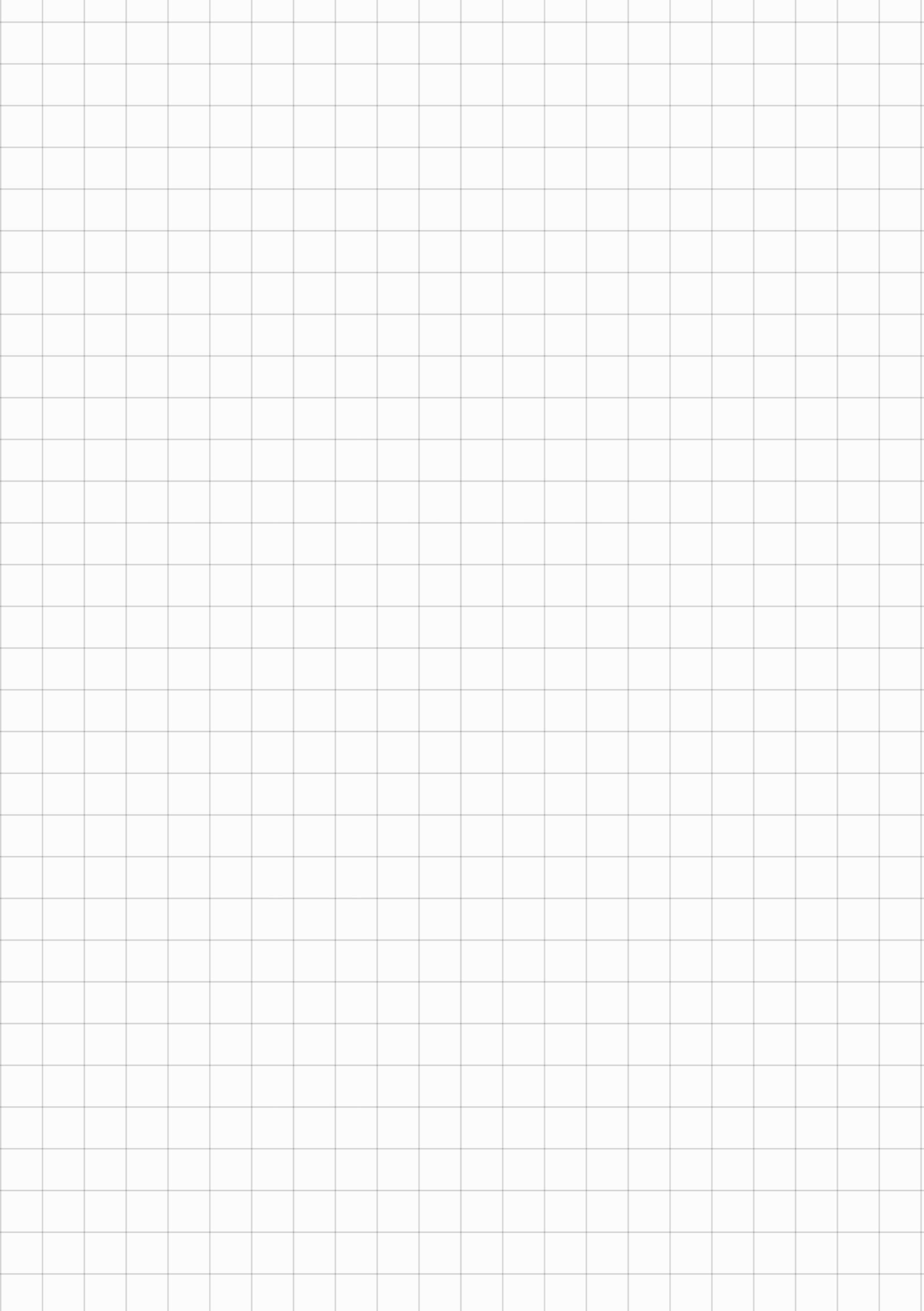
in particolare nel caso di PAM con simboli indipendenti si dimostra che:

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{\pi^2 - 1}{3} = R_\alpha(0) = P_s = S_\alpha(f)$$

Note: In generale la banda di compionamento della sorgente analogia è diversa da quella con cui il segnale viaggia nel canale di comunicazione, supponendo ad esempio $g_T(t) = \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T_s}{2}}{T_s}\right)$ allora il segnale trasmesso $S_T(t) = \sum_i \alpha_i g_T(t - iT_s)$ ha trasformata di fourier (deltone) $S_T(f) = \sum_i \alpha_i G_T(f) e^{-j\pi f T_s} \approx G_T(f)$ trascurando la parte deltonica

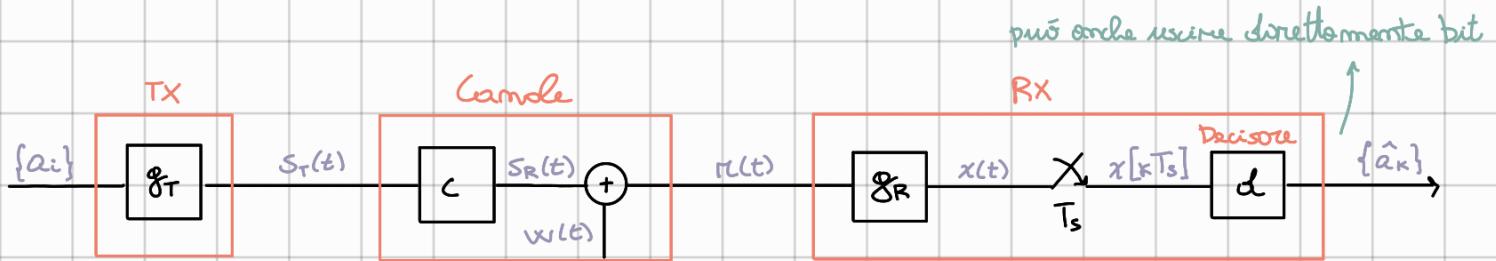
Approssimando dunque la banda dello seme del suo primo lobe si ottiene che $S_T(f)$ ha banda $\frac{1}{T_s} = \frac{1}{\log_2 M T_c} = \frac{1}{\pi \log_2 M T_b} = \frac{\log_2 L}{\pi \log_2 M} \frac{1}{T} \neq 2B$

\Rightarrow compionare con più di $2B$ non aumenta la qualità ma introduce più indistinzione aiutando il ricevitore



Sistemi PAM: Ricevitore

Completiamo adesso lo schema di comunicazione aggiungendo il canale ed il ricevitore, supponendo sempre di operare con PAM in banda base:



in particolare:

- $g_T(t)$ deve essere scelto in modo che abbia banda pari a quella riservata al segnale $s_T(t)$ nel sistema di comunicazione
- Abbiamo supposto di poter modellizzare il canale come un filtro LTI
- $w_R(t)$ è rumore termico, che per il teorema limite centrale può essere approssimato come processo Gaussiano bianco
 $\Rightarrow M_w = 0, S_w(f) = \frac{N_0}{2}$ No × cost. di Boltzmann · temperatura antenna
↳ lo supponiamo sempre
- Il filtro $g_R(t)$ serve per limitare in banda il rumore termico, senza togliere componente utile del segnale (vediamo dopo come seglierlo)
- Il campionatore non l'entra nulla con Nyquist, deve semplicemente campionare i simboli con la stessa frequenza con cui vengono mandati.

Per caratterizzare il segnale ricevuto possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} x(t) &= n(t) \odot g_R(t) = s_R(t) \odot g_R(t) + w(t) \odot g_R(t) = s_R(t) \odot g_R(t) + m(t) \\ &= s_T(t) \odot c(t) \odot g_R(t) + m(t) = \sum_i \alpha_i g_T(t - iT_s) \odot c(t) \odot g_R(t) + m(t) \\ &= \sum_i \alpha_i g(t - iT_s) + m(t) \end{aligned}$$

dove:

$$\rightarrow g(t) = g_T(t) \odot c(t) \odot g_R(t)$$

$\alpha_i(t)$ è il rate di simboli ricevuti con la i-esima intensità (se i è 1, allora $\alpha_i = 1$)

$\rightarrow m(t)$ è ancora un processo gaussiano SSL non più normale (ma con diversi accorgimenti)

$$S_m(f) = S_w(f) |G_R(f)|^2 = \frac{N_0}{2} |G_R(f)|^2$$

$$\eta_m = \eta_w |G_R(0)| = 0$$

$$P_m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_m(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_R(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} E g_R = \sigma_m^2$$

Allora: K -esimo campione ricevuto

$$x(k) = x(kT_s) = \sum_i \alpha_i g(kT_s - iT_s) + m(k) = \sum_i \alpha_i g((k-i)T_s) + m(k)$$

$$\rightarrow k-i = m$$

Tanto $m(t)$ è SSL, esistono tutte p.e. al tempo $m+i$ o k è uguale

$$= \sum_{k-m} \alpha_{k-m} g(mT_s) + m(m+i) = \sum_m \alpha_{k-m} g(mT_s) + m(k)$$

Tanto la somma è infinita, scriverci $k-m$, m è uguale

$$= \underbrace{\alpha_k g(0)}_{\text{Segnale utile}} + \underbrace{\sum_{m \neq 0} \alpha_{k-m} g(mT_s)}_{\text{Rumore (termico)}} + m(k)$$

Segnale utile Inter-Symbol Interference

L'ISI è un nuovo tipo di disturbo caratteristico dei sistemi di comunicazione digitali, tuttavia, a differenza del rumore termico, è possibile annullarlo completamente, basta scegliere $g(t)$ tale che soddisfi la cosiddetta condizione

$$\text{di Nyquist: } g(mT_s) = \begin{cases} g(0) & m=0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

se siamo a questo punto il segnale scompare

Note: non mi interessa sapere com'è fatto $g(t)$, mi basta conoscere i punti $g(mT_s)$, allora, ricordando che $g(t) = g_u(t) \otimes g_r(t)$ e che lo svolto sul prodotto di convolutione è la somma delle durate, una condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché volga Nyquist è che la somma delle durate dei filtri $g_r(t)$ e $g_u(t)$ sia inferiore a $2T_s$

Spesso è più semplice verificare questa condizione in frequenza:

$$\text{dato che } \overline{G(f)} = \sum_m g(mT_s) e^{-j2\pi f m T_s} = \frac{1}{T_s} \sum_k G(f - \frac{k}{T_s})$$

Frequenze continue

$$\text{allora Nyquist è soddisfatto se } g(0)e^{-j\omega_0 T_s} = \frac{1}{T_s} \sum_k G(f - \frac{k}{T_s}) \Rightarrow \sum_k G(f - \frac{k}{T_s}) = T_s g(0)$$

in altre parole affinché Nyquist sia soddisfatto le copie dello trasformato continuo di Fourier di $g(t)$ poste a multipli di $\frac{1}{T_s}$ e sommate devono avere un valore costante (pari a $T_s g(0)$), ad esempio:



Si vede facilmente che la condizione sufficiente illustrata prima ha senso: se $g(t)$ avesse derivate superiori a $2/T_s$ allora in frequenza avrebbe buchi inferiori a $\frac{1}{2T_s}$, e di conseguenza $\sum_k G(f - \frac{k}{T_s})$ non sarebbe cost. (arrebatte dei buchi)

Banda minima di Nyquist

Abbiamo visto prima che il canale non crea problemi, questo perché, nel caso più semplice di canale non distorcente punto-punto nel vuoto, si può esprimere come $c(t) = A \delta(t - \tau)$, dove:

$$\rightarrow A \text{ è l'attenuazione: } A^2 = 1 / (\frac{4\pi d}{\lambda})^2$$

$\rightarrow \lambda = \frac{c}{f}$ è la lunghezza d'onda sul segnale trasmesso

$\rightarrow d$ è la distanza fra trasmettitore e ricevitore

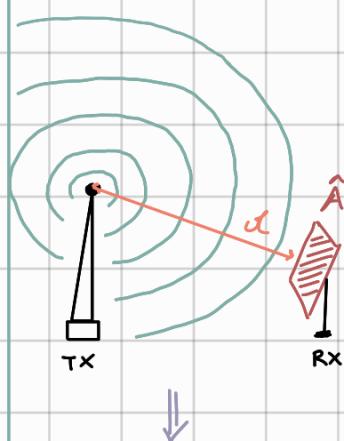
$\rightarrow \tau = \frac{d}{c}$ è il ritardo di propagazione

Togliendo l'ipotesi di comunicazione nel vuoto il canale farebbe considerare anche tutte le repliche del segnale dovute a riflessioni e refrazioni, ognuna con una sua attenuazione ed un suo ritardo (il ricevitore si sovrappone su quello più piccolo): $c(t) = \sum_i A_i \delta(t - \tau_i)$

\Rightarrow viene introdotto IST anche se la condizione di Nyquist è soddisfatta

Noi considereremo sempre comunicazione non distorcente punto-punto nel vuoto, con $A=1$ e $\tilde{r}=0$

Note:



Dato che con le ipotesi sopra ed una normale antenne la radiazione si irradia in modo sferico, allora

La potenza ricevuta da un'antenna di area \hat{A} è

$$P_{RX} = P_{TX} \frac{\hat{A}}{sfero} = P_{TX} \frac{\hat{A}}{4\pi d^2}, \text{ si può dimostrare che l'area}$$

ottima in ricezione è $\hat{A} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$, dunque $P_{RX} = P_{TX} \frac{\lambda^2}{(4\pi d)^2}$

$$\text{e quindi l'attenuazione } A^2 = \frac{P_{RX}}{P_{TX}} = \frac{1}{(\frac{4\pi d}{\lambda})^2} \quad \begin{matrix} \text{Nel caso ideale!} \\ \text{spresso è } 3 \sim 4 \end{matrix}$$

Per avere $A=1$, \hat{A} dovrebbe essere una sfera enorme

\Rightarrow Il traffico a 5GHz non è intrinsecamente più veloce di quello a 2.4GHz, lo è perché attenuandosi più velocemente ci sono meno segnali simili in aria e quindi è possibile usare più banda, ma se potessi usare la stessa banda a 2.4GHz sarebbe veloce uguale!

Vediamo meglio come scegliere $g_R(t)$:

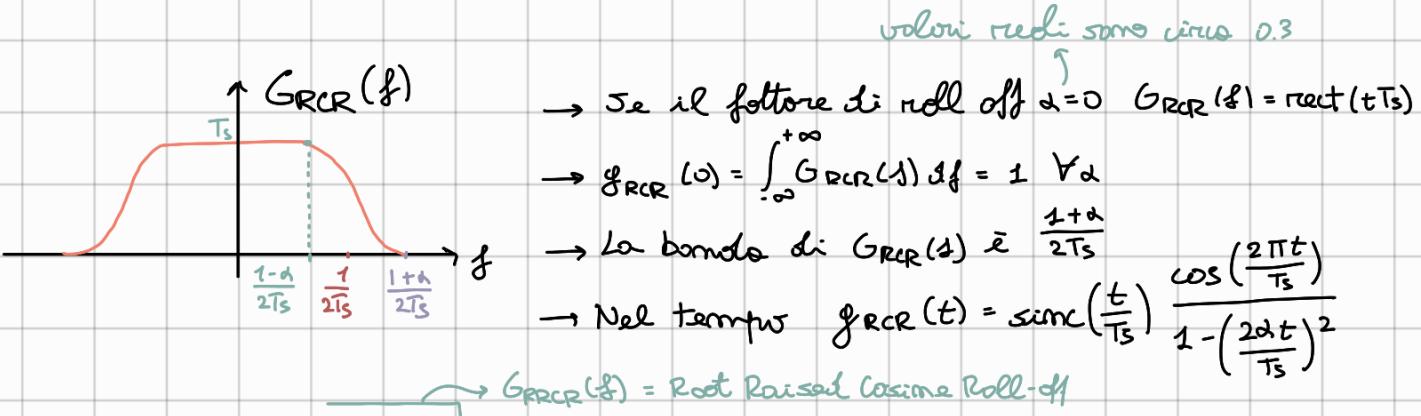
Se vole Nyquist allora $x(k) = \alpha_k g(0) + m_k$ dove $m_k \in N(0, \frac{N_0}{2} E_{gr})$ e dunque $g_R(t)$ contiene sia nella varianza del rumore che nella componente utile del segnale, per questo motivo un criterio di scelta di $g_R(t)$ può essere quello che massimizza il rapporto segnale - rumore:

$$\begin{aligned} SNR &= \frac{\text{Potenza media segnale utile}}{\text{Potenza media rumore}} = \frac{E[|\alpha_k g(0)|^2]}{E[|m_k|^2]} = \frac{|g(0)|^2}{\frac{N_0}{2} E_{gr}} E[|\alpha_k|^2] \\ &= E[|\alpha_k|^2] \frac{|g(0)|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_R(t)|^2 dt} = E[|\alpha_k|^2] \frac{2}{N_0} \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} g_T(\alpha) g_R(-\alpha) d\alpha \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |g_R(t)|^2 dt} \\ &\quad \begin{matrix} \text{Nel PAM} \sim \\ \text{i filtri} \\ \text{sono reali} \end{matrix} \\ &= E[\alpha_k^2] \frac{2}{N_0} \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_T(\alpha) g_R(-\alpha) d\alpha \right)^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |g_R(t)|^2 dt} \quad \begin{matrix} \text{Schwartz} \\ \uparrow \end{matrix} \leq E[\alpha_k^2] \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |g_T(\alpha)|^2 d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} |g_R(-\alpha)|^2 d\alpha}{\int_{-\infty}^{+\infty} |g_R(t)|^2 dt} \frac{2}{N_0} = E[\alpha_k^2] \frac{2}{N_0} E_{gr} \end{aligned}$$

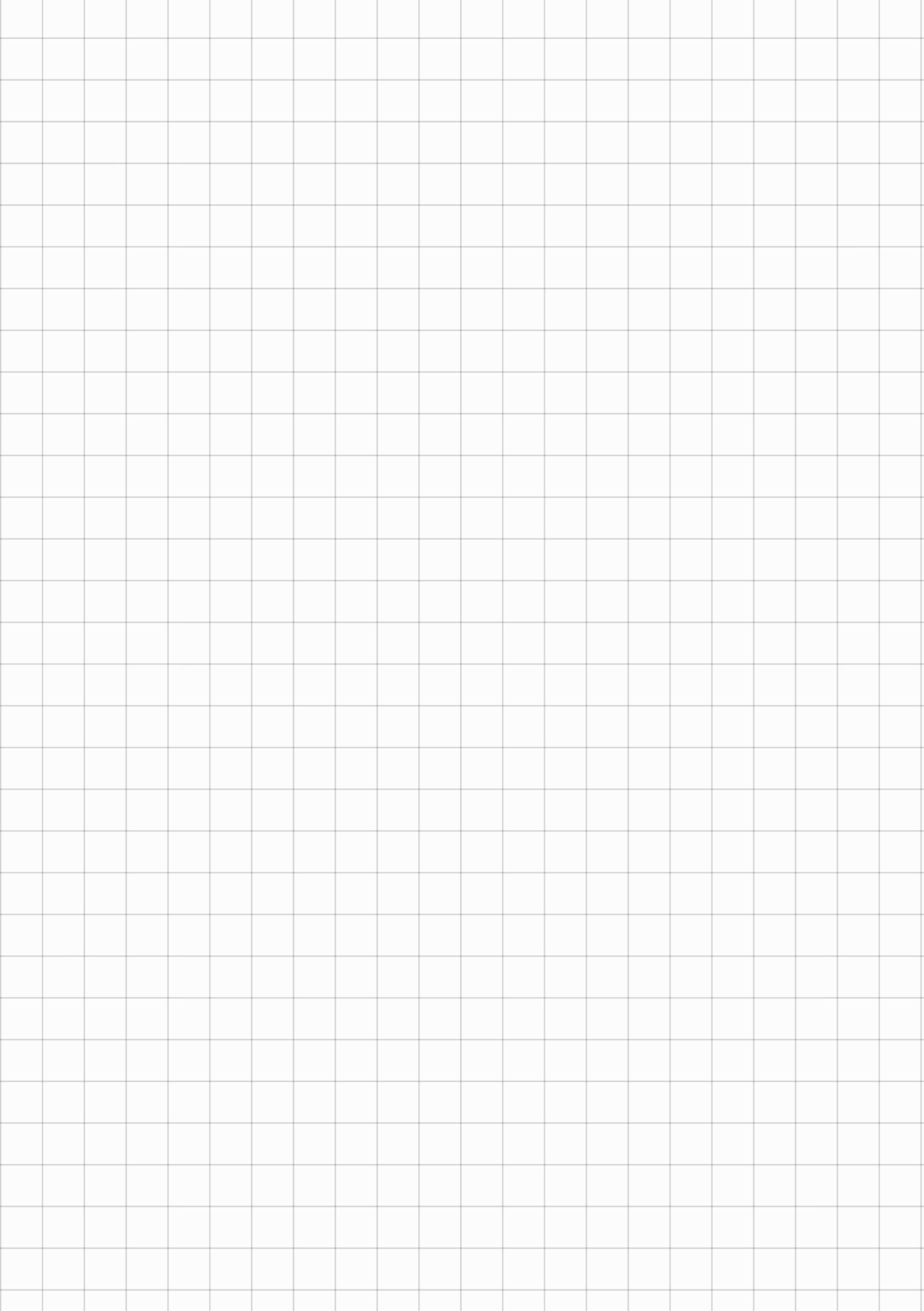
costo complesso

Di conseguenza l'SNR massimo si ottiene quando $g_R(t) = g_T(-t)^*$,
condizione detta "di filtro ottimale"

Consideriamo la funzione fisicamente realizzabile di wiener realizzato:

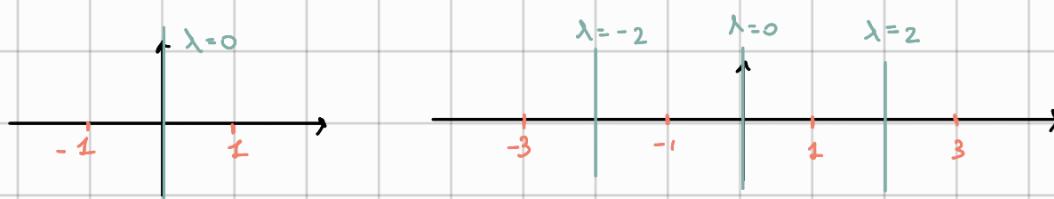


Se $G_R(f) = G_T(f) = \sqrt{G_{RCR}(f)}$ allora la condizione di filtro ottimale è verificata perché $G_R(f) = G_T(f)^* \Leftrightarrow g_R(t) = g_T(-t)^*$ ed inoltre è anche soddisfatta la condizione di Nyquist perché $G(f) = G_R(f) G_T(f) = G_{RCR}(f)$, che per le caratteristiche illustrate sopra soddisfa Nyquist.



Sistemi PAM: Probabilità di errore

Supponendo soddisfatta la condizione di Nyquist ($\chi(k) = \alpha_k g(0) + m_k$), la mappa antipodale ed i simboli equiprobabili ed indipendenti, allora per decidere è la strategia ottima è quella a minima distanza euclidea con $M=1$ soglie equidistanti, ad esempio:



Operando in questo modo, la probabilità di errore sul simbolo (SER) è dunque:

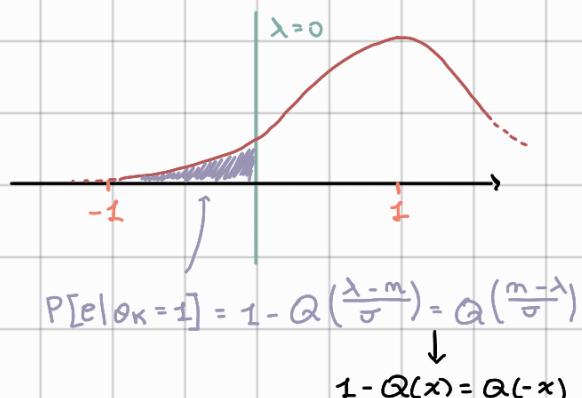
$$SER = \sum_i P[e | \alpha_k = \alpha^{(i)}] P[\alpha_k = \alpha^{(i)}] = \frac{1}{M} \sum_i P[e | \alpha_k = \alpha^{(i)}]$$

↓
Th. probabilità totale ↓
I simboli sono equiprobabili ↓
Symbol Error Rate

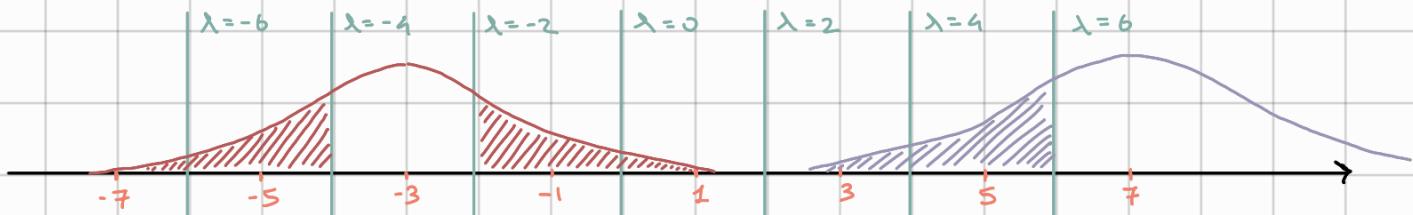
tuttavia, nel calcolo delle generiche $P[e | \alpha_k = \alpha^{(i)}]$ devo stare attento che al deviore non posso passare direttamente $\chi(k) = \alpha_k g(0) + m_k$ ma devo compenstarne il $g(0)$, quindi summa $Z(k) = \frac{\chi(k)}{g(0)} = \alpha_k + \tilde{m}_k$ dove $\tilde{m}_k \in N(0, \frac{\sigma_m^2}{g(0)^2})$ (posso farlo perché l'unico suo segnale utile lo rumore per lo stesso numero non cambia nulla, le prestazioni dipendono dal rapporto)

Esempio (caso binario)

$$\begin{aligned} SER &= \frac{1}{2} P[e | \alpha_k = 1] + \frac{1}{2} P[e | \alpha_k = -1] \\ &= \frac{1}{2} Q\left(\frac{1-0}{\frac{\sigma_m}{g(0)}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{-1-0}{\frac{\sigma_m}{g(0)}}\right) \\ &= Q\left(\frac{g(0)}{\sigma_m}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{1}{2} N_0 E_{gr}}\right) \end{aligned}$$



Esempio (caso M=8)



Dove che tutte le zone di decisione tranne quelle agli estremi sono uguali:

scegliere solo per rappresentare i due casi possibili: un mezzo e agli estremi

$$SER = \frac{6}{8} P[e | \alpha_k = -3] + \frac{2}{8} P[e | \alpha_k = 7] = \frac{6}{8} \left(2Q\left(\frac{-3-(-1-4)}{\sigma_m}\right) \right) + \frac{2}{8} Q\left(\frac{7-6}{\sigma_m}\right) = \frac{14}{8} Q\left(\frac{1}{\sigma_m}\right)$$

Da qui possiamo derivare che in caso di M generico:

$$SER = P_s[e] = \frac{M-2}{M} \left(2Q\left(\frac{1}{\sigma_m}\right) \right) + \frac{2}{M} Q\left(\frac{1}{\sigma_m}\right) = \left(\frac{2M-4}{M} + \frac{2}{M} \right) Q\left(\frac{1}{\sigma_m}\right) = \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{1}{\sigma_m}\right) = \frac{2M-2}{M} Q\left(\sqrt{\frac{g(s)}{2} E_{\text{gr}}}\right)$$

A noi però interessa la probabilità di errore sul bit (BER), perché è quello che studiamo nel resto della teoria dei codici. Se la modulazione è binaria viene subito che SER = BER, tuttavia in generale possiamo solo stima:

$$\underline{\text{SER}} \leq \text{BER} \leq \overline{\text{SER}}$$

$\log_2 M$ ~ modi bit per simbolo

In particolare l'uguaglianza SER = $\log_2 M$ BER vale solamente nel caso in cui lo codice della mappa sia di Gray e la varianza σ_m^2 sia abbastanza piccola da permetterci di trovarne gli errori su simboli non adiacenti (questo equivale a richiedere che l'SNR sia abbastanza alto).

Note

Sopondo che a monte del trasmettitore e a valle del ricevitore si opera con parole di codice (blocki di bit) allora anche il decodore farebbe operare con blocchi di simboli (quelli contenenti i bit che formano le parole di codice), in altre parole:

decodifica a massima verosimiglianza

→ Fin'ora abbiamo applicato la ML sul singolo simbolo α_k :

$$\hat{\alpha}_k = \underset{\tilde{\alpha} \in A}{\operatorname{argmax}} \{ f(x(k) | \alpha_k = \tilde{\alpha}) \} = \underset{\tilde{\alpha} \in A}{\operatorname{argmin}} \{ \|x(k) - \tilde{\alpha}\|^2 \}$$

densità di probabilità di $x(k)$

→ In realtà saremmo dovuti applicarla alla sequenza $\vec{\alpha}_k = [\alpha_1, \dots, \alpha_k]$:

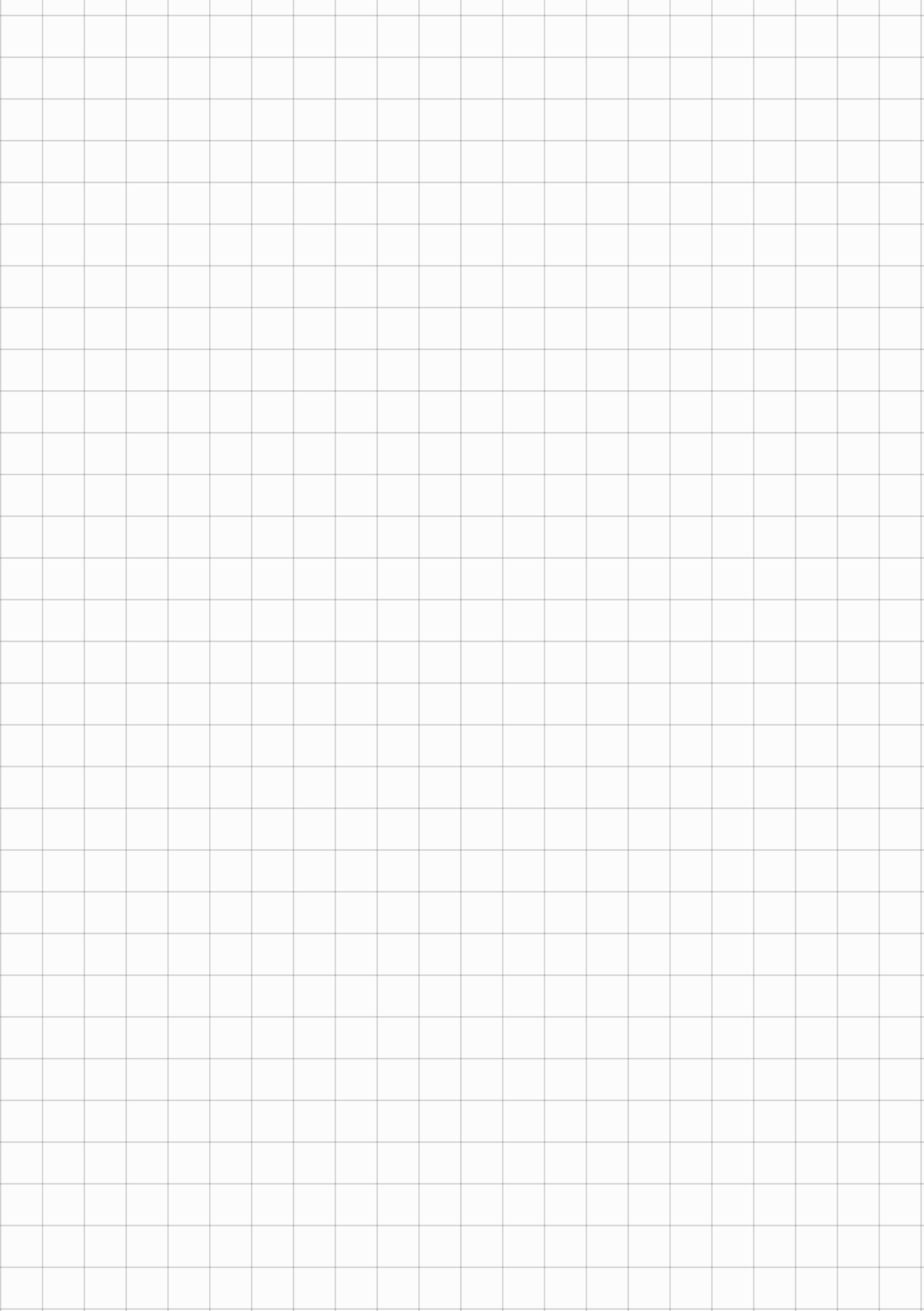
$$\vec{\hat{\alpha}}_k = \underset{\vec{\alpha} \in A^k}{\operatorname{argmax}} \{ f(\vec{x}_k | \vec{\alpha}_k = \vec{\tilde{\alpha}}) \} = \underset{\vec{\alpha} \in A^k}{\operatorname{argmin}} \{ \|\vec{x}_k - \vec{\alpha}\|^2 \}$$

Sequenza di k simboli ricevuta

Tuttavia, se le v.o. $x(i)$ condizionate agli eventi $\alpha_i = \tilde{\alpha}_i$ sono indipendenti allora le due strategie sono uguali, infatti:

$$\begin{aligned} \max_{\vec{\alpha} \in A^k} \{ f(\vec{x}_k | \vec{\alpha}_k = \vec{\tilde{\alpha}}) \} &= \max_{\vec{\alpha} \in A^k} \{ f(x(1), \dots, x(k) | \alpha_1 = \tilde{\alpha}_1, \dots, \alpha_k = \tilde{\alpha}_k) \} \\ &= \max_{\vec{\alpha} \in A^k} \left\{ \prod_{i=1}^k f(x(i) | \alpha_i = \tilde{\alpha}_i) \right\} \\ &= \prod_{i=1}^k \max_{\alpha \in A} \{ f(x(i) | \alpha_i = \hat{\alpha}) \} \end{aligned}$$

Dato che, per un sistema PAM generico, $x(k) = Q_k g(o) + \sum_{m \neq 0} \alpha_{k-m} g(mT_s) + n(k)$, supponendo $g_R = g_T = g_{RRCR}$, $g(o) = 1$ e $JSI = 0$, allora $x(k) = Q_k + n(k)$, e di conseguenza le v.o. $x(k)$ condizionate all'evento $\alpha_k = \hat{\alpha}_k$ sono delle Gaussiane con funzione di autocorrelazione nulla, ma allora queste sono anche indipendenti, per cui le due strategie sono equivalenti.



Sistemi PAM: Efficienza

Efficienza spettrale

$$\eta_{sp} = \frac{R_b}{B_s} \left[\frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}} \right] \rightarrow \text{può anche essere } > 1 \quad \text{dove consideriamo quelle con cui escono} \quad (R_b = \frac{\log_2 M}{T_s})$$

→ $R_b = \frac{1}{T_s} = \frac{n \log_2 M}{T_s} \left[\frac{\text{bit}}{\text{s}} \right]$ è la frequenza con cui arrivano bit al classificatore

→ $B_s [\text{Hz}]$ è la banda del segnale trasmesso (ad esempio se $g_T = g_{RRR}$ $B_s = \frac{1+\alpha}{2T_s}$)

Efficienza energetica

Per valutare l'efficienza energetica si osserva la curva del SER, in scala log, in funzione del rapporto $\frac{E_d}{N_0}$ (o $\frac{E_s}{N_0}$, tanto è uguale), in dB, dato:

→ E_d è l'energia media del bit ricevuto

→ N_0 è (praticamente) l'energia del rumore termico

→ $\frac{E_d}{N_0}$ è (curvo) equivalente all'SNR

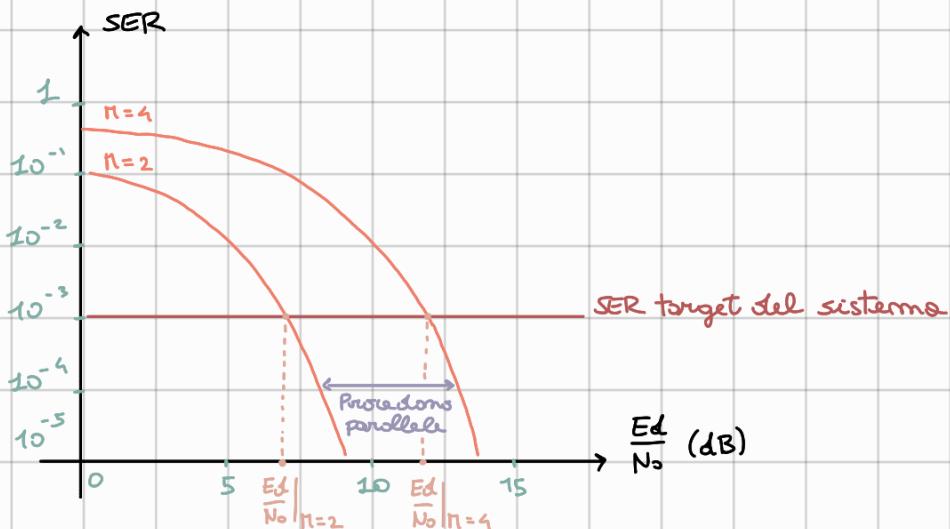
Note: L'energia media per bit e simbolo ricevuto è uguale a quella per bit e simbolo trasmesso se e solo se $c(t) = s(t)$ (cioè che abbiamo già detto assumere sempre), se invece teniamo conto dell'ottimizzazione allora le energie ricevute vanno moltiplicate per A^2

Per una M-PAM generica in banda base, supponendo un filtro adatto a radice di uscita realizzato, tale curva può essere espressa come segue:

$$SER = \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{g(0)}{\sqrt{E_d g_R \frac{N_0}{2}}}\right) = \frac{2M-2}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)$$

$$E_s = P_s T_s = T_s \int_{-\infty}^{+\infty} S_s(f) df = T_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_s} R_o(0) |G_T(f)|^2 df = R_o(0) E_{g_T} = \frac{n^{2-1}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{E_s}{N_0} = \frac{M^2 - 1}{3N_0} \Rightarrow \frac{1}{N_0} = \frac{3}{M^2 - 1} \frac{E_s}{N_0} \Rightarrow \text{SER} = \frac{2M-2}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1} \frac{E_s}{N_0}}\right)$$



Esempio

Fissato un SER target di 10^{-3} , quanto mi costa energeticamente garantirlo in un sistema 4-PAM rispetto ad un 2-PAM?

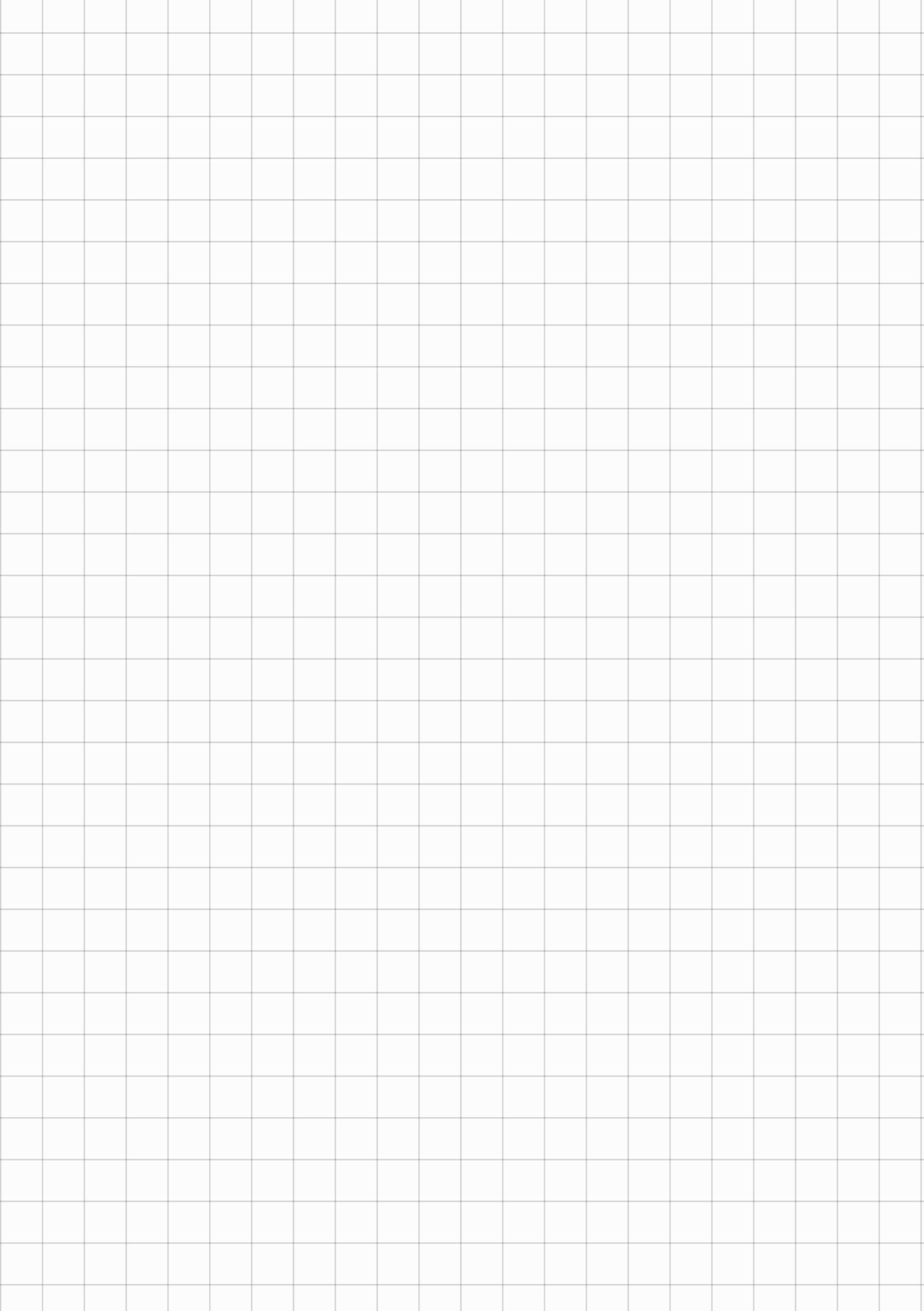
Trascurando i coefficienti multipliottivi:

$$\text{SER}|_{M=2} \approx Q\left(\sqrt{2 \frac{E_s}{N_0}}\right)$$

$$\text{SER}|_{M=4} \approx Q\left(\sqrt{2 \cdot \frac{2}{5} \frac{E_s}{N_0}}\right)$$

Allora, ponendo $\text{SER}|_{\text{target}} = \text{SER}|_{M=2} = \text{SER}|_{M=4}$:

$$Q\left(\sqrt{2 \left(\frac{E_s}{N_0}\right)_{M=2}}\right) = Q\left(\sqrt{2 \cdot \frac{2}{5} \left(\frac{E_s}{N_0}\right)_{M=4}}\right) \Rightarrow 2 \frac{E_s}{N_0}|_{M=2} = 2 \cdot \frac{2}{5} \frac{E_s}{N_0}|_{M=4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0}|_{M=4} = \frac{5}{2} \frac{E_s}{N_0}|_{M=2}$$

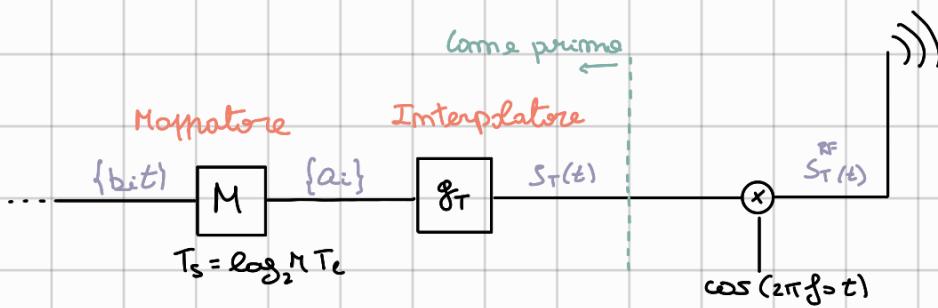


Sistemi PAM in banda passante

Abbiamo visto come realizzare un sistema di comunicazione numerico PAM in banda base, adesso vediamo come modificarlo per trasmettere il segnale in banda passante:

Trasmettitore

Sappiamo che per modulare un segnale basta moltiplicarlo per un coseno:



$$S_T^{\text{RF}}(t) = S_T(t) \cos(2\pi f_0 t) \Rightarrow S_s^{\text{RF}}(f) = \frac{S_s(f - f_0) + S_s(f + f_0)}{2}$$

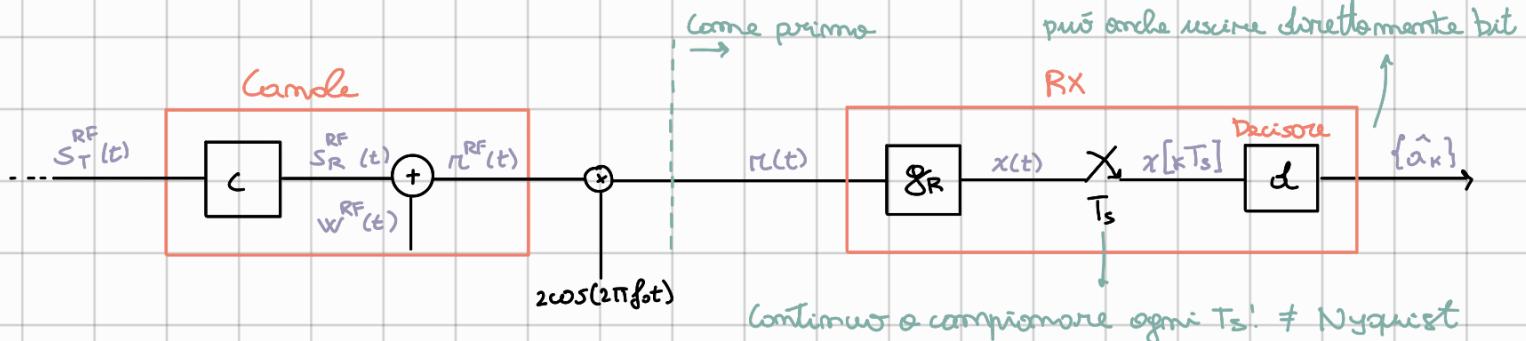
⇒ La banda del segnale modulato è il doppio rispetto a quella del segnale in banda base, di conseguenza l'efficienza spettrale è la metà.

⇒ La potenza (e quindi anche l'energia) del segnale modulato è la metà rispetto a quello del segnale in banda base, infatti:

$$P_s^{\text{RF}} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_s^{\text{RF}}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_s(f - f_0) + S_s(f + f_0)}{2} df = \frac{1}{2} \left[2 \int_{-\infty}^{+\infty} S_s(f - f_0) df \right] = \frac{1}{2} 2 P_s = \frac{1}{2} P_s$$

Ricevitore

Sappiamo che per demodulare un segnale basta rimmoltiplicarlo per un coseno:



$$\text{Dunque } x(t) = n(t) \oplus g_R(t) = n^{RF}(t) 2\cos(2\pi f_0 t) \oplus g_R(t)$$

$$= 2\cos(2\pi f_0 t) S_T^{RF}(t) \oplus g_R(t) + w^{RF}(t) 2\cos(2\pi f_0 t) \oplus g_R(t)$$

$$= 2\cos(2\pi f_0 t) S_T^{RF}(t) \oplus g_R(t) \oplus c(t) + w(t) \oplus g_R(t)$$

$$= 2\cos^2(2\pi f_0 t) S_T(t) \oplus g_R(t) \oplus c(t) + w(t) \oplus g_R(t)$$

$$= (S_T(t) + S_T(t) \cos(4\pi f_0 t)) \oplus g_R(t) \oplus c(t) + m(t) = S_T(t) + m(t)$$

$$\cos^2(\omega) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega))$$

Venne filtrato da g_R

$$c(t) = d(t)$$

dove:

senza dopp, e doppio di 2 de moltiplica il rumore

$$w(t) = 2\cos(2\pi f_0 t) w^{RF}(t) \Rightarrow S_w(f) = \frac{1}{2} \frac{S_{wR}^{RF}(f-f_0) + S_{wR}^{RF}(f+f_0)}{2} = \frac{1}{4} \cdot N_0 = N_0$$

$$m(t) = w(t) \oplus g_R(t) \Rightarrow \sigma_m^2 = P_m = \int_{-\infty}^{\infty} |S_w(f)| |G_R(f)|^2 df = N_0 E_{g_R}$$

\Rightarrow La densità spettrale di potenza del rumore è il doppio

Allora la probabilità di errore sul simbolo diventa:

$$SER^{RF} = \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{g(t)}{\sqrt{N_0 E_{g_R}}}\right)$$

In particolare se $g = g_{RCR}$ allora $SER^{RF} = \frac{2M-2}{M} Q\left(\sqrt{\frac{1}{N_0}}\right)$ anziché $\frac{2M-2}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right)$ che avremmo ottenuto in fondo, sembrerebbe dunque funzionare peggio, in realtà, come uno si può aspettare, funziona esattamente uguale, infatti confrontando i SER in funzione di $\frac{E_d}{N_0}$ si ottiene lo stesso risultato.

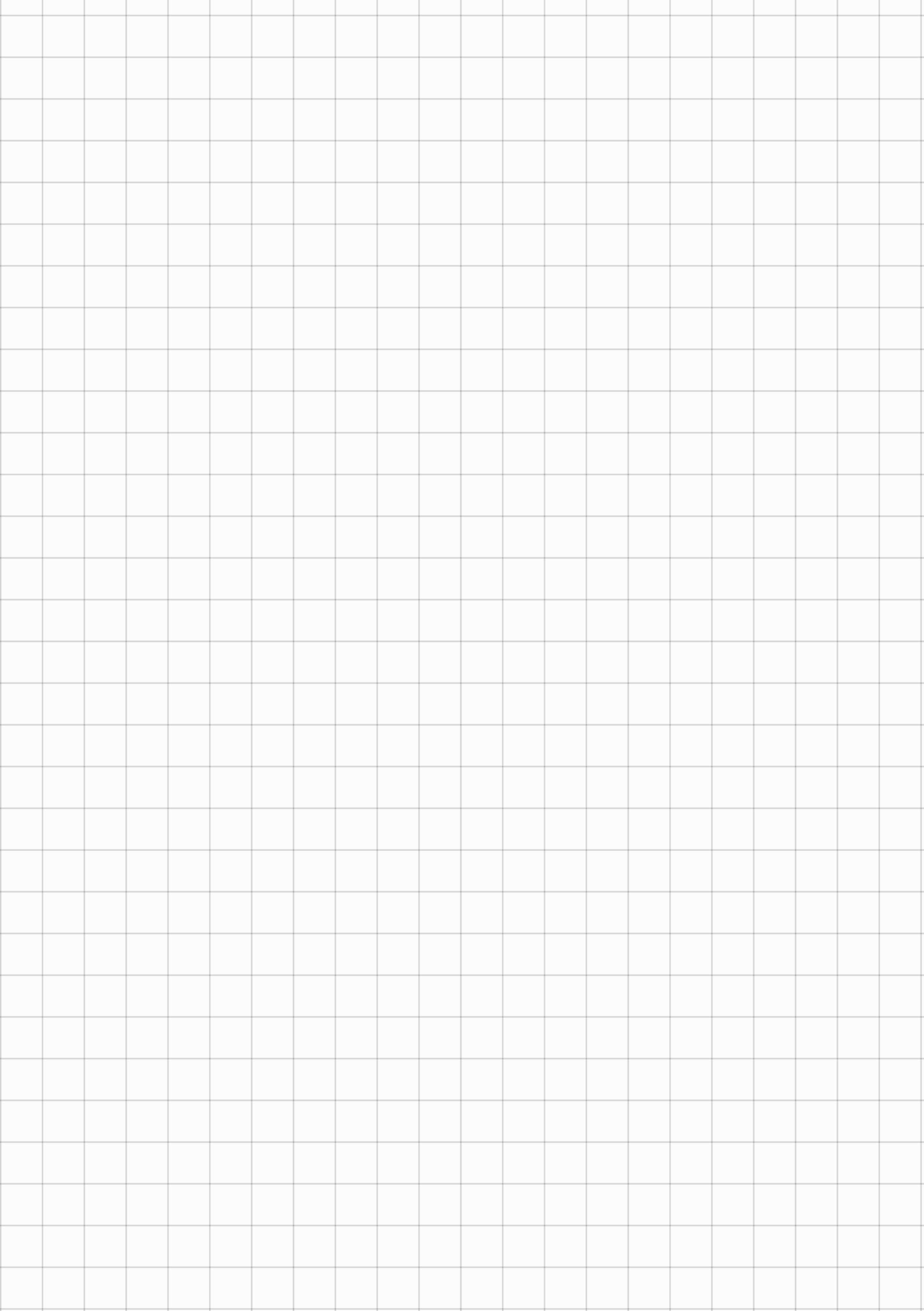
$$SER = \frac{2M-2}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M \frac{E_d}{N_0}}{M^2 - 1}}\right)$$

$$SER^{RF} = \frac{2M-2}{M} Q\left(\sqrt{\frac{1}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M \frac{E_d}{N_0}}{M^2 - 1}}\right)$$

$$\rightarrow E_S^{RF} = T_S P_S^{RF} = \frac{1}{2} T_S P_S = \frac{1}{2} T_S \frac{1}{T_S} \sigma_a^2 E g_T = \frac{1}{2} \frac{M^2 - 1}{3}$$

$$\rightarrow \frac{E_S^{RF}}{N_0} = \frac{1}{N_0} \frac{M^2 - 1}{6} \Rightarrow N_0 = \frac{M^2 - 1}{6 \frac{E_S^{RF}}{N_0}} = \frac{M^2 - 1}{6 \log_2 M \frac{E_S}{N_0}}$$

Note: se il 2 d coseno lo mettessimo al trasmettitore veniva il contrario, ossia la potenza del segnale trasmesso raddoppiava e la sensito spettrale si potenzia del numero dimezzava, facendo ovviamente rimanere inviato il SER in funzione di $\frac{E_S}{N_0}$

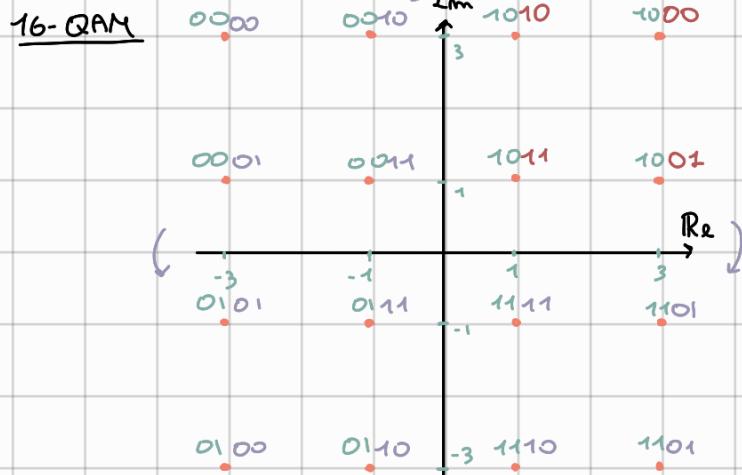
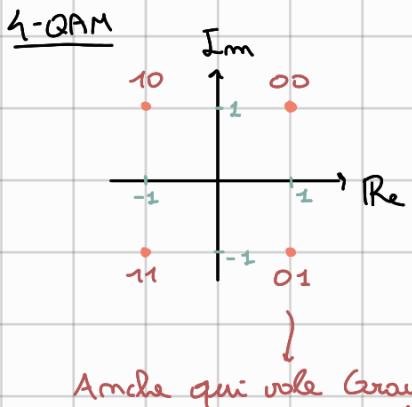


sistemi QAM

Fin' ora abbiamo visto sistemi di tipo PAM, dove i simboli in uscita corrispondono all'ampiezza del segnale in uscita, vediamo ora i sistemi Quadrature Amplitude Modulation, dove ad ogni simbolo (complesso) sono associati due valori di ampiezza, trasmessi a fasi diverse

I sistemi QAM sono solo un bando  portante

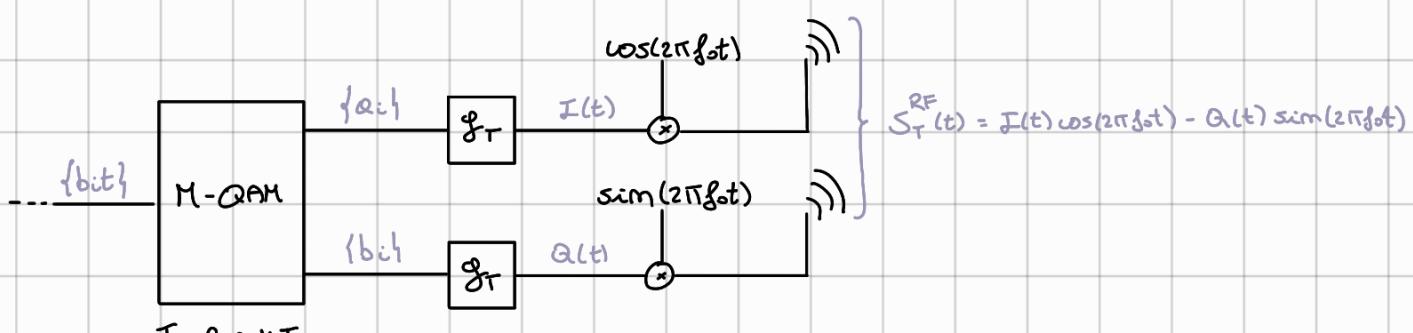
Esempio



1. Disegno un quadrante
2. lo specchio negl'altri 3
3. Numero i quadranti

Essendo i simboli complessi il trasmettitore ed il ricevitore vorranno necessariamente cambiare perché non possiamo fisicamente realizzare un segnale complesso, è facile intuire che ogni costellazione M-QAM può essere trattata come due FSK-PAM indipendenti, in altre parole $C_k = Q_k + j B_k$:

Trasmettitore

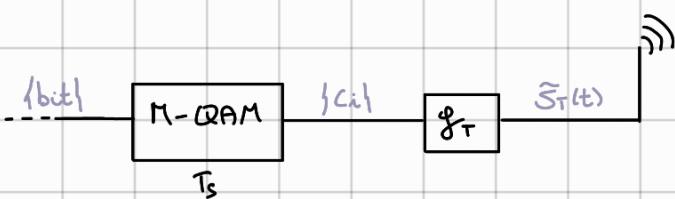


$$I_s = \log_2 M I_c$$

dare $I(t) = \sum_i \alpha_i g_T(t - iT_s)$ è il numero del simbolo o **Im-Fase**

$A(t) = \sum_i b_i g_T(t - iT_s)$ è il numero del simbolo o **Quadratura** \rightarrow ritardo di 90°

In particolare, $S_T^{RF}(t)$ può essere scritto come $S_T^{RF}(t) = \operatorname{Re} \left[\tilde{S}_T e^{j2\pi f_0 t} \right]$ dare
 $\tilde{S}_T = I(t) + jA(t) = \sum_i c_i g_T(t - iT_s)$ (chiamosi **simbolo complesso**), questo dimostra che il sistema QAM descritto sopra è equivalente al seguente sistema PAM (con simboli complessi):



allora $S_S^{RF}(\delta) = \frac{S_{\tilde{S}}(\delta - \delta_0) + S_{\tilde{S}}(\delta + \delta_0)}{4}$ dare $S_{\tilde{S}}(\delta) = \frac{1}{T_s} R_c(0) |G_T(\delta)|^2$

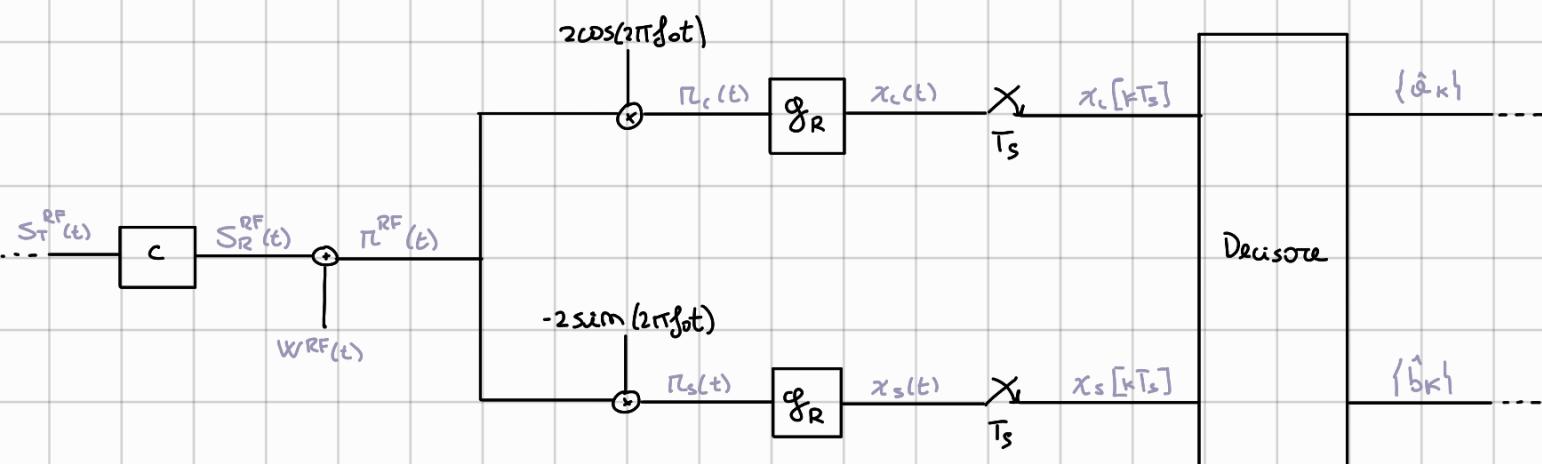
in particolare $R_c(0) = E\{|c_i|^2\} = E\{|a_i + jb_i|^2\} = E\{(a_i + jb_i)(a_i + jb_i)^*\} = E\{(a_i + jb_i)(a_i - jb_i)\}$
 $= E\{a_i^2 + b_i^2 + ja_i b_i - ja_i b_i\} = E\{a_i^2\} + E\{b_i^2\} = \frac{\sqrt{M-1}}{3} + \frac{\sqrt{M-1}}{3} = 2 \frac{M-1}{3}$

di conseguenza $E_S^{RF} = T_s P_S^{RF} = \frac{1}{2} T_s P_{\tilde{S}} = \frac{1}{2} T_s \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\tilde{S}}(\delta) d\delta = \frac{1}{2} T_s \left[\frac{1}{T_s} R_c(0) |G_T(\delta)|^2 \right] d\delta = \frac{1}{2} R_c(0) E g_T = \frac{M-1}{3}$

dim. uguale al costo PAM in banda passante

se $g_T = g_{REC}$

Ricevitore



Nel numero superiore (coseno):

$$\begin{aligned} x_c(t) &= r_c(t) \odot g_R(t) = r_c^{RF}(t) 2\cos(2\pi f_0 t) \odot g_R(t) \\ &= 2\cos(2\pi f_0 t) S_R^{RF}(t) \odot g_R(t) + w^{RF}(t) 2\cos(2\pi f_0 t) \odot g_R(t) \\ &= 2\cos(2\pi f_0 t) S_T^{RF}(t) \odot g_R(t) \odot c(t) + w_c(t) \odot g_R(t) \\ &= 2\cos(2\pi f_0 t) (I(t) \cos(2\pi f_0 t) - A(t) \sin(2\pi f_0 t)) \odot g_R(t) \odot c(t) + w_c(t) \odot g_R(t) \end{aligned}$$

$$= (2\cos^2(2\pi f_0 t) I(t) - 2\cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t) Q(t)) \otimes g_R(t) \otimes c(t) + w_c(t) \otimes g_R(t)$$

$$= (I(t) + \cos(4\pi f_0 t) I(t) - \sin(4\pi f_0 t) Q(t)) \otimes g_R(t) \otimes c(t) + m_c(t) = I(t) + m_c(t)$$

$$2\cos^2(\alpha) = 1 + \cos(2\alpha), 2\cos\alpha\sin\alpha = \sin(2\alpha) \quad \text{vicino filtrato da gr}$$

$$c(t) = d(t)$$

dare:

senza dim, è doppio di 2 che moltiplica il seno

$$w_c(t) = 2\cos(2\pi f_0 t) w^{RF}(t) \Rightarrow S_{w_c}(f) = \frac{1}{4} \frac{S_w^{RF}(f-f_0) + S_w^{RF}(f+f_0)}{+ \infty} = \frac{1}{4} \cdot N_0 = N_0$$

$$m_c(t) = w_c(t) \otimes g_R(t) \Rightarrow \sigma_{m_c}^2 = P_{m_c} = \int_{-\infty}^{\infty} |S_{w_c}(f)| G_R(f)|^2 df = N_0 E_{g_R}$$

dimostrazione uguale al caso PAM in bassa base

$$\Rightarrow X_c(k) = Q_k + m_c(k) \quad \text{con } m_c(k) \in N(0, N_0 E_{g_R})$$

Nel normo inferiore (seno):

$$x_s(t) = I_s(t) \otimes g_R(t) = I_s^{RF}(t) - 2\sin(2\pi f_0 t) \otimes g_R(t)$$

$$= -2\sin(2\pi f_0 t) S_{I_s}^{RF}(t) \otimes g_R(t) + w^{RF}(t) - 2\sin(2\pi f_0 t) \otimes g_R(t)$$

$$= -2\sin(2\pi f_0 t) S_{I_s}^{RF}(t) \otimes g_R(t) \otimes c(t) + w_s(t) \otimes g_R(t)$$

$$= -2\sin(2\pi f_0 t) (I(t) \cos(2\pi f_0 t) - Q(t) \sin(2\pi f_0 t)) \otimes g_R(t) \otimes c(t) + w_s(t) \otimes g_R(t)$$

$$= (2\sin^2(2\pi f_0 t) Q(t) - 2\cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t) I(t)) \otimes g_R(t) \otimes c(t) + w_s(t) \otimes g_R(t)$$

$$= (Q(t) - \cos(4\pi f_0 t) Q(t) - \sin(4\pi f_0 t) Q(t)) \otimes g_R(t) \otimes c(t) + m_s(t) = Q(t) + m_s(t)$$

$$2\sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha), 2\cos\alpha\sin\alpha = \sin(2\alpha) \quad \text{vicino filtrato da gr}$$

$$c(t) = d(t)$$

dare:

senza dim, è doppio di -2 che moltiplica il seno

$$w_s(t) = -2\sin(2\pi f_0 t) w^{RF}(t) \Rightarrow S_{w_s}(f) = \frac{1}{4} \frac{S_w^{RF}(f-f_0) + S_w^{RF}(f+f_0)}{+ \infty} = \frac{1}{4} \cdot N_0 = N_0$$

$$m_s(t) = w_s(t) \otimes g_R(t) \Rightarrow \sigma_{m_s}^2 = P_{m_s} = \int_{-\infty}^{\infty} |S_{w_s}(f)| G_R(f)|^2 df = N_0 E_{g_R}$$

dimostrazione uguale al caso PAM in bassa base

$$\Rightarrow X_s(k) = Q_k + m_s(k) \quad \text{con } m_s(k) \in N(0, N_0 E_{g_R})$$

Infine:

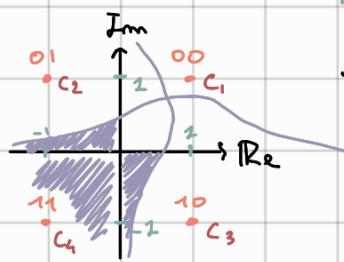
$$X(k) = X_c(k) + j X_s(k) = Q_k + m_c(k) + j(b_k + m_s(k)) = Q_k + j b_k + m_c(k) + j m_s(k) = C_k + m(k)$$

dare:

$$C_k = Q_k + j b_k \quad \text{la somma di due gaussiane è gaussiana con } M = M_x + M_y \text{ e } \Sigma^2 = \Sigma_x^2 + \Sigma_y^2 - 2\Sigma_{xy}$$

$$m(k) = m_c(k) + j m_s(k) \quad \text{con } m_c, m_s \in N(0, N_0 E_{g_R}) \Rightarrow m \in N(0, 2N_0 E_{g_R})$$

Vediamo allora di calcolare la SER per una 4-QAM:



Probabilità totale simboli equiprobabili

$$SER = \sum_i P(c_i) P\{e | c_k = c^{(i)}\} = \frac{1}{4} \sum_i P\{e | c_k = c^{(i)}\}$$

simmetria delle probabilità

una qualsiasi

Possesso delle probabilità di errore

$$P\{e | c_k = c^{(1)}\} = P\{x_c(k) \leq 0 \cup x_s(k) \leq 0 | c_k = c^{(1)}\}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &\quad - P(A \cap B) \\ P(A \cap B) &= P(A) P(B) \quad \text{perché i simboli sono indip.} \\ &= P\{x_c(k) \leq 0 | \theta_k = a^{(1)}\} + P\{x_s(k) \leq 0 | b_k = b^{(1)}\} - P\{x_c(k) \leq 0 \cap x_s(k) \leq 0 | c_k = c^{(1)}\} \\ &= (1 - Q(-\frac{1}{\sqrt{N_0}})) + (1 - Q(-\frac{1}{\sqrt{N_0}})) - (1 - Q(-\frac{1}{\sqrt{N_0}}))(1 - Q(-\frac{1}{\sqrt{N_0}})) \\ &= 2Q(\frac{1}{\sqrt{N_0}}) - Q(\frac{1}{\sqrt{N_0}})^2 \approx 2Q(\frac{1}{\sqrt{N_0}}) \quad \text{senza supporre } g_R = g_{RRCR} \text{ sarebbe } 2Q\left(\frac{g(0)}{\sqrt{N_0} E g_R}\right) \end{aligned}$$

Possesso delle probabilità di corretta ricezione

$$P\{e | c_k = c^{(1)}\} = 1 - P\{c | c_k = c^{(1)}\} = 1 - P\{x_c(k) > 0 \cap x_s(k) > 0 | c_k = c^{(1)}\}$$

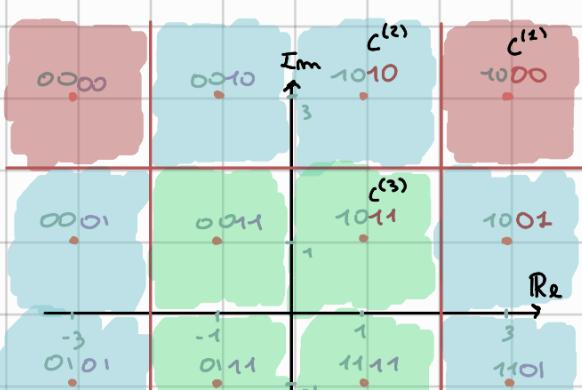
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) P(B) \\ &\quad \text{perché i simboli sono indip.} \\ &= 1 - P\{x_c(k) > 0 | \theta_k = a^{(1)}\} P\{x_s(k) > 0 | b_k = b^{(1)}\} \\ &= 1 - Q(-\frac{1}{\sqrt{N_0}}) Q(-\frac{1}{\sqrt{N_0}}) = 1 - (1 - Q(\frac{1}{\sqrt{N_0}}))^2 \\ &= 1 - (1 - 2Q(\frac{1}{\sqrt{N_0}}) + Q(\frac{1}{\sqrt{N_0}})^2) = 2Q(\frac{1}{\sqrt{N_0}}) - Q(\frac{1}{\sqrt{N_0}})^2 \approx 2Q(\frac{1}{\sqrt{N_0}}) \end{aligned}$$

Sappiamo inoltre che per una QAM generica con $g_R = g_{RRCR}$ $E_S^{\text{RF}} = \frac{M-1}{3}$, allora:

$$E_S^{\text{RF}} = \frac{M-1}{3N_0} \Rightarrow \frac{1}{N_0} = \frac{3}{M-1} \frac{E_S^{\text{RF}}}{N_0} = \frac{3 \log_2 M}{M-1} \frac{E_S}{N_0}$$

$$SER \stackrel{4-\text{QAM}}{\approx} 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 4}{M-1} \frac{E_S}{N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{2} \frac{E_S}{N_0}\right)$$

... e facciamo lo stesso per la 16-QAM:



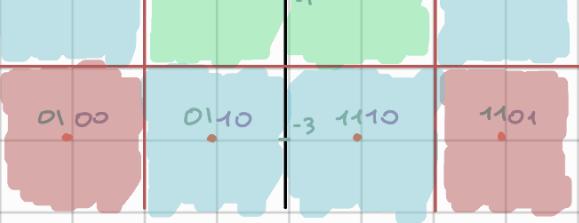
Th probabilità totale

$$SER = \sum_i P\{e | c_k = c^{(i)}\} P\{c_k = c^{(i)}\} = \frac{1}{16} \sum_i P\{e | c_k = c^{(i)}\}$$

simmetria delle probabilità

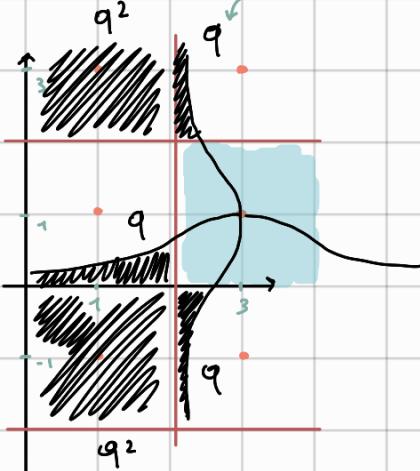
$$= \frac{1}{16} [4P\{e | c_k = c^{(1)}\} + 8P\{e | c_k = c^{(2)}\} + 4P\{e | c_k = c^{(3)}\}]$$

simboli equiprobabili:

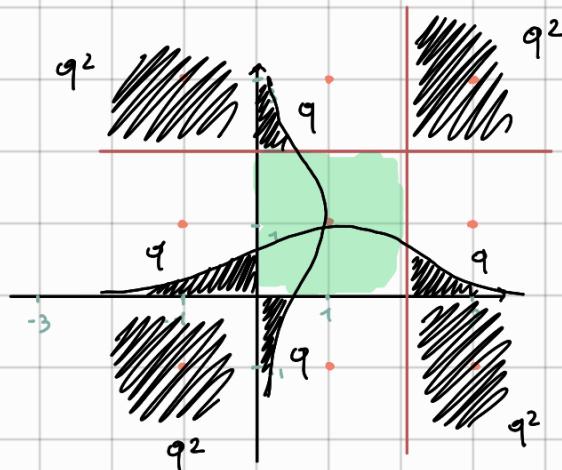


$$P\{e|c_k = C^{(1)}\} = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)^2 \text{ perché è uguale al caso 4-QAM}$$

$$P\{e|c_k = C^{(2)}\} = 3Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)^2$$



$$P\{e|c_k = C^{(3)}\} = 4Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) - 4Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)^2$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{SER}^{16\text{-QAM}} &= \frac{1}{16} \left[4P\{e|c_k = C^{(1)}\} + 8P\{e|c_k = C^{(2)}\} + 4P\{e|c_k = C^{(3)}\} \right] \\ &= \frac{1}{16} \left[4(2q - q^2) + 8(3q - 2q^2) + 4(4q - 4q^2) \right] \\ &= \frac{1}{16} \left[8q - 4q^2 + 24q - 16q^2 + 16q - 16q^2 \right] = \frac{1}{16} [48q - 36q^2] \\ &= 3Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) - \frac{3}{4}Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)^2 \approx 3Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) \end{aligned}$$

Sappiamo inoltre che per uno QAM generico con $\gamma_R = \gamma_{RR}c_R$ $E_S^{RF} = \frac{M-1}{3}$, allora:

$$\frac{E_S^{RF}}{N_0} = \frac{M-1}{3N_0} \Rightarrow \frac{1}{N_0} = \frac{3}{M-1} \frac{E_S^{RF}}{N_0} = \frac{3\log_2 M}{M-1} \frac{E_S}{N_0}$$

$$\text{SER}^{16\text{-QAM}} \approx 3Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) = 3Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 16}{16-1} \frac{E_S}{N_0}}\right) = 3Q\left(\sqrt{\frac{1}{5} \frac{E_S}{N_0}}\right)$$

Per confronto:

$$SER^{2\text{-PAM}} \approx Q\left(\sqrt{2 \frac{Ed}{N_0}}\right)$$

$$SER^{4\text{-PAM}} \approx Q\left(\sqrt{\frac{1}{5} \frac{Ed}{N_0}}\right)$$

$$SER^{16\text{-PAM}} \approx Q\left(\sqrt{\frac{1}{10} \frac{Ed}{N_0}}\right)$$

$$SER^{4\text{-QAM}} \approx Q\left(\sqrt{2 \frac{Ed}{N_0}}\right)$$

$$SER^{16\text{-QAM}} \approx Q\left(\sqrt{\frac{1}{5} \frac{Ed}{N_0}}\right)$$

\Rightarrow A parità di $\frac{Ed}{N_0}$:

$$SER^{4\text{-QAM}} \approx SER^{2\text{-PAM}} < SER^{16\text{-QAM}} = SER^{4\text{-PAM}} < SER^{16\text{-PAM}}$$

$\xleftarrow{P(e) \text{ più piccola}}$

$\xrightarrow{P(e) \text{ più grande}}$