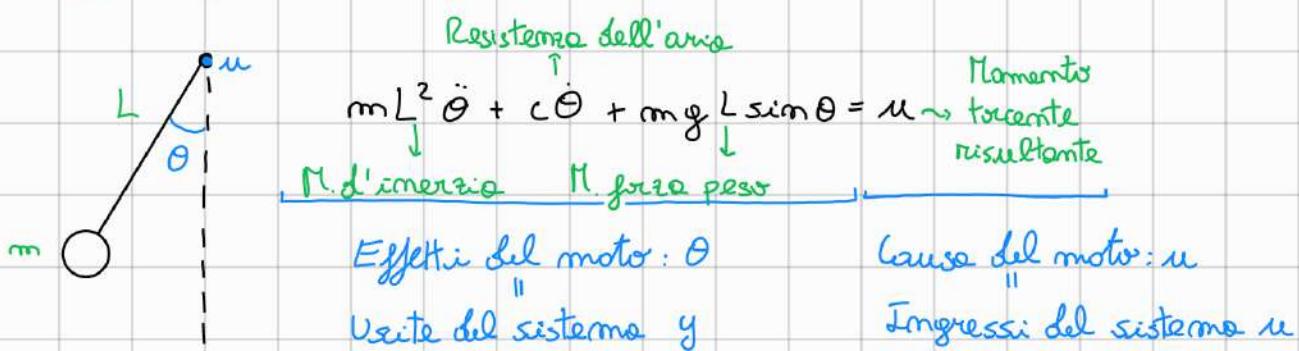


Fin'ora abbiamo sempre studiato sistemi tramite funzioni di trasferimento, tuttavia questo non è l'unico modo per rappresentare un sistema, ogni forma standard ha i suoi pregi e difetti (ad esempio la rappresentazione tramite funzione di trasferimento è adatta a progettare un controllore), quella che tratteremo ora è la rappresentazione in forma di stato

Partiamo con un esempio:



Supponiamo di avere le condizioni iniziali $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$.

Possiamo generalizzare l'equazione differenziale sopra:

$$F(y(t), \dots, y^{(m)}(t), u(t), \dots, u^{(P)}(t), t) = 0$$

Si definisce in **forma normale** un sistema descritto dall'equazione sopra esplicitando lo $y^{(m)}(t)$

$$y^{(m)}(t) = \tilde{F}(y(t), \dots, \overset{(m-1)}{y}(t), u(t), \dots, u^{(P)}(t), t)$$

Nell'esempio di prima:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{mL^2} (u - c\dot{\theta} - mgL \sin \theta)$$

Aumentando il processo si può ripetere nel caso in cui le eq. siano più di uno ↑

Quest'equazione è in generale difficile da risolvere, quello che possiamo fare è scrivere, al posto di **un'equazione differenziale di grado m**, un problema equivalente usando m equazioni differenziali di primo grado, cioè del tipo:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_m, t) \rightarrow \dot{x}_1 = [x_1(t)] \quad [f_1(\dots)]$$

$$x(t) - g(x(t), u(t), t) = \begin{bmatrix} ? \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? \\ \vdots \\ f_m(\dots) \end{bmatrix}$$

Allora una rappresentazione equivalente alla forma normale è

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x(t), u(t), t) \\ y(t) = f_2(x(t), u(t), t) \end{cases} \rightarrow \text{Nella scrittura che sia una f. vettoriale}$$

questo sistema prende il nome di **forma di stato**

$x(t)$ è detto **stato del sistema** ed è un vettore di variabili necessarie e sufficienti a descrivere il sistema in ogni istante nel tempo, ovvero a conoscere $x(t), y(t) \forall t > t_0$ sapendo solamente $x(t_0)$ e $u(t) \forall t > t_0$

Primo di vedere come passare dalla forma normale alla forma di stato è necessario conoscere le principali proprietà di un sistema dinamico:

cause e proprie sono sinonimi ↑

Un sistema dinamico è detto causale se l'uscita

1) Causalità: all'istante t ($y(t)$) dipende solo dagli ingressi $u(\tau)$ con $\tau \leq t$ → se $\tau < t$ strettamente causale
se $m > p$ strettamente causale

→ Un sistema in forma normale è causale se $m > p$

Se p fosse $> m$ il sistema sarebbe non causale e questo vorrebbe dire che l'uscita del sistema dipende dal futuro

→ Per definire come un sistema in forma di stato è sempre causale, lo è strettamente se y non dipende da u ($y(t) = g(x(t), t)$)

Un sistema dinamico è detto stationario se

2) Stationarietà o tempo-invarianza: a fronte delle stesse condizioni iniziali e degli stessi ingressi le uscite sono invarianti rispetto a traslazioni temporali → sempre uguali oggi e

→ Un sistema in forma normale è stazionario se \hat{F} non dipende da t

→ Un sistema in forma di stato è stazionario se f e g non dip. da t

Un sistema dinamico è detto lineare se \hat{F} dipende

3) Linearità: linearmente da y con le sue derivate e da u con le sue derivate

→ Un sistema in forma normale è lineare se si può scrivere come

$$y^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} -\alpha_i(t) y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^p \beta_j(t) u^{(j)}(t)$$

Se è stazionario questi non dipendono da t (ed \hat{F} non esiste)

→ Un sistema in forma di stato è lineare se si può scrivere come

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) = A(t)x + B(t)u \\ y = g(x, u, t) = C(t)x + D(t)u \end{cases}$$

m° var. di stato m° ingressi = dim u
 A $m \times m$ B $m \times m$
 C $l \times m$ D $l \times m$

m° uscite = dim y

esito di
specificare
 $x(t), u(t)...$

Attenzione:

questi: [Ordine degli ingressi p ! = m° ingressi m
 Ordine delle uscite n ! = m° uscite l]

In generale, quest'ultimo è ormai diverso dal numero di variabili di stato m (stesso nome, cose diverse), che corrisponde alla somma degli ordini delle uscite \Rightarrow (per sistemi SISO i due m sono uguali)

Single input \uparrow Single output

Note: Un sistema è detto SISO se $m = l = 1$, MIMO altrimenti
 ↘ Multiple ...

Sistemi lineari godono delle seguenti proprietà:

- Omogeneità: se $u(t) \Rightarrow y(t)$ allora $\lambda u(t) \Rightarrow \lambda y(t) \forall \lambda$
- Sovrapposizione: se $u_1(t) \Rightarrow y_1(t)$ allora $u_1(t) + u_2(t) \Rightarrow y_1(t) + y_2(t)$
 $u_2(t) \xrightarrow{e} \Rightarrow y_2(t)$

Inoltre, dato che ogni soluzione di un'eq. differenziale lineare è somma di due contributi: soluzione omogenea e soluzione particolare,
 ingressi nulli, solo c.f. \downarrow C.F. nulli, solo u \downarrow
 bba vale anche il principio di sovrapposizione degli effetti,

- Sia per le condizioni iniziali:

Se $y_1(t), \dots, y_m(t)$ sono m soluzioni omogenee linearmente indipendenti allora ogni sol. omogenea è loro combinazione lineare e i coeff. dipendono solo dalle condizioni iniziali:

Sia $\begin{cases} y(t_0) = y_{a0} \\ \dot{y}(t_0) = \dot{y}_{a0} \end{cases}$ set a di c.i. $\begin{cases} y(t_0) = y_{b0} \\ \dot{y}(t_0) = \dot{y}_{b0} \end{cases}$ set b di c.i.

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ y_{0a}(t) \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{c} \downarrow \\ y_{0b}(t) \end{array}$$

Sol. omogenea corrispondente alla pura evoluzione delle c.i.

Allora $\forall \alpha, \beta$: $\begin{cases} y(t_0) = \alpha y_{a0} + \beta y_{b0} \\ \dot{y}(t_0) = \alpha \dot{y}_{a0} + \beta \dot{y}_{b0} \end{cases}$ } Nuovo set di c.i. comb. lin di a e b
 \Downarrow
 $y(t) = \alpha y_a(t) + \beta y_b(t)$ } La sol. omogenea è comb. lineare delle soluzioni omogenee con gli stessi coefficienti

- Che per gli ingressi:

Sia $u_a \rightarrow y_{pa}$ e $u_b \rightarrow y_{pb}$

= All'ingresso u_a corrisponde l'usata particolare y_{pa} (c.i. nulli)

Allora $\forall \alpha, \beta$: $u = \alpha u_a + \beta u_b \Rightarrow y_p = \alpha y_{pa} + \beta y_{pb}$

Infine :

Se $y_p(t)$ è soluzione particolare per $u(t)$ allora anche
 $\dot{y}_p(t)$ è soluzione particolare per $u'(t)$

Vogliamo fare questo passaggio:

$$\begin{aligned} \downarrow y^{(m)}(t) &= \hat{F}(y(t), \dots, y^{(m-1)}(t), u(t), \dots, u^{(P)}(t), t) \\ \downarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \end{aligned}$$

Caso $P = 0$

Scegliemolo come stato $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(m-1)} \end{bmatrix}$

Per ogni sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \vdots \\ \dot{y}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ \hat{F}([y, \dots, y^{(m-1)}], u, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ \hat{F}(x, u, t) \end{bmatrix} \\ y &= x_1 = g(x, u, t) \quad \text{È nella forma che volevamo} \end{aligned}$$

È nella forma
che volevamo

Per sistemi lineari: $y^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} -\alpha_i(t) y^{(i)}(t) + u(t) \rightsquigarrow P=0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\alpha_0 \dots -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

Notare detto in forma compagna orizzontale inferiore

imoltre le condizioni iniziali sulle $y \dots \overset{(m-1)}{y}$ diventano su x_1, \dots, x_m

Esempio (del pendolo)

Sistema non lineare

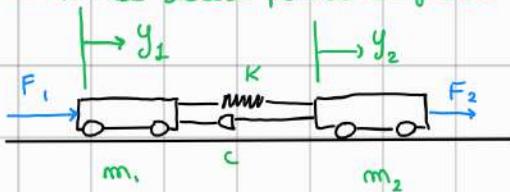
$$\ddot{\theta} = \frac{1}{mL^2} \left(u - c\dot{\theta} - mgL \sin \theta \right) \quad \uparrow$$

$\nwarrow p=0$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{mL^2}(u - cx_2 - mgL \sin x_1) \end{bmatrix} \\ y = x_1 \rightarrow \text{perché } y \text{ ossia l'uscita è } \theta \text{ dunque } x_1 \end{cases} \text{ e CI: } x(0) = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix}$$

Esempio (dei carrellini)

Distanze dalle pos. di origine



$$m_1 \ddot{y}_1 + c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k(y_2 - y_1) = F_1$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k(y_2 - y_1) = F_2$$

Forme normate

$$\ddot{y} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} (F_1 - c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k(y_2 - y_1)) \\ \frac{1}{m_2} (F_2 - c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k(y_2 - y_1)) \end{bmatrix}$$

In questo caso:

$$p=0 \quad m=2 \rightarrow \text{ordine max uscite}$$

$$m=2 \quad l=2 \quad n=4$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \text{dim. } u \quad \text{dim. } y \quad \text{dim. } x$$

→ Usando il procedimento generale

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{1}{m_1} (u_1 - c(x_3 - x_4) - k(x_1 - x_2)) \\ \frac{1}{m_2} (u_2 - c(x_3 - x_4) - k(x_2 - x_1)) \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{e CI: } x(0) = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

Usando il procedimento per sistemi lineari

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \\ y = \end{cases}$$

A
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix}$
x_1
x_2
x_3
x_4

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} u_1$$

B
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$
u_1
u_2

C
$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
x_1
x_2
x_3
x_4

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

D
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
y_1
y_2

Caso $0 < p < m$ per sistemi lineari

Dalle ipotesi: $y^{(m)}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} -\alpha_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^p B_j u^{(j)}(t)$

Si usa un'equazione ausiliaria: $\dot{z}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} -\alpha_i z^{(i)}(t) + u(t)$ (1)
 la cui soluzione $z(t)$ è la risposta del sistema all'
 impulso $u(t)$; ma allora, per linearità, se $y(t)$ è la
 risposta del sistema ad una combinazione lineare delle
derivate di z allora questa sarà una combinazione
lineare delle derivate di z con gli stessi coefficienti:

$$y(t) = \sum_{j=0}^p B_j z^{(j)}(t) \quad (2)$$

Questa proprietà ci suggerisce che un buon stato potrebbe essere

$X = \begin{bmatrix} z \\ \vdots \\ (m-1) \\ z \end{bmatrix}$ perché questo descrive bene l'evoluzione dello stesso ⁽¹⁾ e dell'esito ⁽²⁾ guardando ⁽¹⁾ è come se $p=0$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\alpha_0 & \dots & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

A e B sono le stesse matrici del caso $p=0$ lineare

$$y = \sum_{i=1}^{p+1} B_{i-1} x_i = \underbrace{\begin{bmatrix} B_0 & \dots & B_p & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{p+1} X + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{m} u$$

uguale alla (2)

Caso $p=m$ per sistemi lineari

Consideriamo come prima

$$y^{(m)}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} -\alpha_i y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^p B_j u^{(j)}(t)$$

$$\dot{z}^{(m)}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} -\alpha_i z^{(i)}(t) + u(t)$$

$$X = \begin{bmatrix} z \\ \vdots \\ (m-1) \\ z \end{bmatrix} \quad y(t) = \sum_{j=0}^p B_j z^{(j)}(t)$$

Allora dalle ipotesi: $y(t) = \sum_{i=1}^m B_{i-1} x_i + B_m z^{(m)}$ } è uguale alla (2) di prima

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^m B_{i-1} x_i - B_m \left[\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i z^{(i)}(t) + u(t) \right] \\ &= \sum_{i=1}^m B_{i-1} x_i - B_m \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{i-1} x_i + B_m u(t) \\ &= \sum_{i=1}^m (B_{i-1} - B_m \alpha_{i-1}) x_i + B_m u(t) \end{aligned}$$

di conseguenza le matrici A e B rimangono uguali, mentre:

$$y = [B_0 - B_m \alpha_0 \dots B_{m-1} - B_m \alpha_{m-1}] X + [B_m] u$$

Esempi

$$1) \ddot{y} + y = 2u + ii \rightarrow \ddot{y} = -y + 2u + ii$$

$m=2 \quad p=1$
 $m=2 \quad l=1 \quad m=1$

Siamo nel caso $p < m$ per sistemi lineari

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x + [0]u$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $-2 \cdot y \quad -d_2 \dot{y}$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $B_0 u \quad B_1 ii$

$$2) \ddot{\ddot{y}} = -y + 2u + ii$$

$m=3 \quad p=1$
 $m=3 \quad l=1 \quad m=1$

Siamo nel caso $p < m$ per sistemi lineari

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + [0]u$$

$$3) \ddot{\ddot{y}} = -2\ddot{y} - 3\dot{y} - y + 2u + ii + 3ii$$

$m=3 \quad p=3$
 $m=3 \quad l=1 \quad m=1$

Siamo nel caso $p=m$ per sistemi lineari

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -6 \end{bmatrix} x + [3]u$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $B_0 - B_2 d_0 \quad B_1 - B_3 d_2 \quad B_m ii$

$" \quad " \quad "$
 $2 - 1 \cdot 1 \quad 0 - 3 \cdot 2$

Utilizzo di uno stato arbitrario

Nella traduzione da forma normale a forma di stato abbiamo scelto lo stato x in modo da semplificare i conti, tuttavia questo non è l'unico scelta possibile, dobbiamo dunque trovare un modo per poter usare le trasformazioni studiate con qualsiasi stato.

Se x è lo stato di un sistema allora $\hat{x} = \phi(x)$ è una rappresentazione equivalente $\Leftrightarrow \phi$ biettiva (esiste unico ϕ^{-1})

Studiamo solo il caso di ϕ lineari, dunque esprimibili in forma matriciale $\hat{x} = \phi(x) = Tx$ con $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$: $\det(T) \neq 0$

Vogliamo sapere come cambiano le matrici della forma di stato:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \rightsquigarrow \quad \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

$$y = Cx + Du \quad \quad \quad y = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u$$

per fare questo basta usare la definizione $\hat{x} = Tx$:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= T\dot{x} = TAx + TBu = \underbrace{TAT^{-1}\hat{x}}_{\hat{A}\hat{x}} + \underbrace{TBu}_{\hat{B}u} \implies \hat{A} = TAT^{-1} \quad \hat{B} = TB \\ y &= Cx + Du = \underbrace{(CT^{-1})\hat{x}}_{\hat{C}\hat{x}} + \underbrace{Du}_{\hat{D}u} \quad \quad \quad \hat{C} = CT^{-1} \quad \hat{D} = D \end{aligned}$$

Riprendiamo l'esempio dei carrellini:

A

0	0	1	0	x_1
0	0	0	1	x_2
$\frac{k}{x_1}$	$\frac{k}{x_2}$	$\frac{c}{x_1}$	$\frac{c}{x_2}$	x_3

B

0	0	m_1	$= \dot{x}$
0	0	m_2	
$\frac{1}{m_1}$	0	m_2	

$$\frac{K}{m_1} - \frac{K}{m_2} \quad \frac{C}{m_1} - \frac{C}{m_2}$$

$$x_3$$

$$0 \quad \frac{1}{m_2}$$

C

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} +$$

D

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y$$

Supponiamo di voler cambiare stato da x a \hat{x}

$$x = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 - y_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 - \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix} = \phi(x) \Rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} x$$

Dunque $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\hat{A} = T A T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K}{m_1} & \frac{K}{m_1} & -\frac{C}{m_1} & \frac{C}{m_1} \\ \frac{K}{m_2} & -\frac{K}{m_2} & \frac{C}{m_2} & -\frac{C}{m_2} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e così via ...

Linearizzazione di un sistema

Dato un sistema $\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases}$ e dati: $t = t_0 \rightarrow$ un istante iniziale
 $u = \bar{u} \rightarrow$ un particolare impresso
 $x(0) = x_0 \rightarrow$ delle condizioni iniziali
 allora \bar{x} che soddisfa $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}, t_0)$ e $\bar{x}(0) = x_0$ è detto **movimento dello stato** e rappresenta come questo varia al fronte delle terne di valori specificate sopra, $\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}, t_0)$ è invece il corrispondente movimento dell'uscita.

Note:

Nel caso non lineare non è detto che dato uno termo arbitrario esista un \bar{x} che lo soddisfi, e nel caso ne esista uno che lo soddisfi non è detto che sia unico.

Nel caso di sistemi tempo invarianti $\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases}$ dati $| \begin{array}{l} u = \bar{u} \\ x(0) = x_0 \end{array}$
 se $u = \bar{u}$ è un impresso costante allora \bar{x} che soddisfa $\bar{x}(0) = x_0$ e $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ se esiste è detto **movimento o stato di equilibrio**

Movimento perturbato
Stato di equilibrio

↑
Perturbazione

In particolare perturbando lo stato di equilibrio $x(t) = \bar{x}(t) + \delta x(t)$ ottengo $\dot{x}(t) = \cancel{\dot{\bar{x}}(t)} + \dot{\delta x}(t) = \dot{\delta x}(t)$, dunque la dinamica del movimento perturbato dipende solo dalla dinamica della perturbazione.

Allora, dato che per Taylor:

$$\boxed{\dot{x} = f(x, u) \approx f(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} (x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} (u - \bar{u})}$$

$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \delta x}_{A}$
 $\underbrace{\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \delta u}_{B}$

A B sono matrici
 C D Jacobiane

$$\boxed{y = g(x, u) \approx g(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} (x - \bar{x}) + \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} (u - \bar{u})}$$

La dinamica di un sistema tempo invariante attorno ad uno stato di equilibrio \bar{x} per \bar{u} può essere approssimata con il sistema lineare:

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = \dot{\bar{x}} - \dot{x} \approx \dot{x} = 0 \\ \delta y = y - \bar{y} \approx g(\bar{x}, \bar{u}) + C\delta x + D\delta u - g(\bar{x}, \bar{u}) = C\delta x + D\delta u \end{cases} = \begin{cases} \delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u \\ \delta y = C\delta x + D\delta u \end{cases}$$

Esempio del pendolo

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{mL^2}(u - cx_2 - mgL \sin x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\ y = x_1 \end{cases}$$

Dare le condizioni di equilibrio erano:

$$\text{se } u=0 \quad \begin{cases} x_2=0 \\ x_1=0 \vee x_1=\pi \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{se } \frac{u}{mgL} \geq 1 \quad \begin{cases} x_2=0 \\ 2 \text{ soluzioni} \end{cases}$$

Supponiamo: $m=1 \text{ kg}$ $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ $L=1 \text{ m}$ $c=1 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$

$\bar{u}=5 \text{ N/m}$ è un ingresso di equilibrio? se si linearizzarlo

\downarrow è cond. di equilibrio!

$$\frac{u}{mgL} = \frac{1}{2} \quad \bar{x} = \arcsin\left(\frac{u}{mgL}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \quad \begin{array}{l} \frac{\pi}{6} \\ \frac{5\pi}{6} \end{array}$$

Devo trovare le A, B, C e D di $\begin{cases} \delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u \\ \delta y = C\delta x + D\delta u \end{cases}$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{g}{L} \cos(x_i) & -\frac{c}{mL^2} \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \xrightarrow{x_i = \frac{5}{6}\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{pmatrix}$$

$$C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = (1 \ 0) \Bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = (1 \ 0)$$

$$D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = (0) \Bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = (0)$$

Soluzioni delle equazioni in forme di stato

Esempio: studio delle sol. di equilibrio per il pendolo

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{mL^2} (\mu - c\dot{\theta} - mgL \sin \theta) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{mL^2} (\mu - cx_2 - mgL \sin x_1) \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

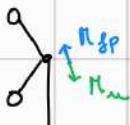
Per trovare le soluzioni di equilibrio si deve imporre $\dot{x} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ \frac{1}{mL^2} (\mu - mgL \sin x_1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = \arcsin\left(\frac{\mu}{gL}\right) \end{cases}$$

abbiamo dunque vari casi:

$$\rightarrow \text{se } \mu = 0 \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \vee x_1 = \pi \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{se } \frac{\mu}{mgL} < 1 \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ 2 \text{ soluzioni} \end{cases}$$



Le coppie di forze sono in equilibrio, non il pendolo!

$$\rightarrow \text{se } \frac{\mu}{mgL} > 1 \text{ nessuna soluzione}$$

Note: Per sistemi lineari

Il caso generale $\dot{x}_e = 0$ diventa $\dot{x}_e = Ax_e + Bu_e = 0$, dunque:

- se A è invertibile $x_e = -A^{-1}Bu_e$
- altrimenti se esiste una soluzione x_e allora anche

$x'_\epsilon = x_\epsilon + x_N$ è soluzione con $x_n \in \text{Ker}(A)$

Studio delle soluzioni generali per sistemi lineari

Dobbiamo risolvere equazioni del tipo:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

→ single input single output

Caso sistemi SISO con $\dim(x) = 1$

$\dot{x} = ax + bu$ è detta forma di Legendre e ha come soluzione:

$$x(t) = x_0 e^{at} + b \int_0^t e^{a(t-\tau)} u(\tau) d\tau$$

Dimostrazione:

$$x(t) = x_0 e^{at} + b e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} u(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x_0 a e^{at} + b a e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} u(\tau) d\tau + b e^{at} e^{-at} u(t) \\ &= a(x_0 e^{at} + b \int_0^t e^{a(t-\tau)} u(\tau) d\tau) + bu(t) \\ &= a x(t) + bu(t)\end{aligned}$$

Caso sistemi MIMO con $\dim(x) > 1$

(evoluzione libera)

Soluzione omogenea

$\underbrace{\dots}_{At}$

Soluzione particolare

$\underbrace{\dots}_{\text{At} + \dots}$

(evoluzione forzata)

Dagli ingressi

$$X(t) = e^{\lambda t} x_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} B u(s) ds$$

Esponenziale di matrice

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + \frac{M}{1!} + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} \dots$$

Proprietà:

- $(e^M)^{-1}$ esiste sempre e coincide con e^{-M}
- $e^{T^* M T} = T^{-1} e^M T$
- $\frac{d}{dt} e^{Mt} = M e^{Mt}$

~ la BIBO stabilità studia ingressi e uscite, qui dentro x

Concetto di stabilità intorno

Generato da \tilde{x} e $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$...

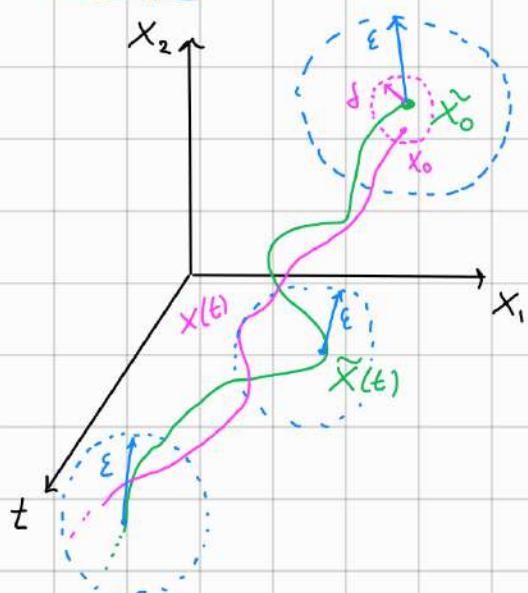
Si parla di stabilità del movimento, non del sistema!

$\tilde{x}(t)$ è un movimento **stabile** (detto anche semplicemente stabile o marginalmente stabile) per il sistema se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x_0 : \|x_0 - \tilde{x}_0\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t) - \tilde{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > 0$$

In altre parole se esiste sempre un range di incertezza sulle condizioni iniziali tale che i movimenti generati da c. i appartenenti a questo range restano vicini quanto voglio al movimento \tilde{x}

Esempio



$\tilde{x}(t)$ è instabile se non è stabile

$\tilde{x}(t)$ è asintoticamente stabile se è stabile ed inoltre

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \tilde{x}(t)\| = 0$$

Studio della stabilità di sistemi LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Prendiamo un sistema LTI

sia \tilde{x} un suo movimento dello stato per u e $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$

C.I. perturbate

Perturbiamo le sue condizioni iniziali di un certo δx ($\delta x(0) = \delta x_0 = x_0 - \tilde{x}_0$)

studiando la dinamica del movimento originale \tilde{x} e di quello perturbato

$$\ddot{x} = A\tilde{x} + Bu$$

$\dot{x} = Ax + Bu \rightarrow$ l'ingresso è lo stesso, sono perturbate solo le C.I.

$$\Rightarrow \dot{\delta x} = \dot{x}(t) - \tilde{x}(t) = Ax - A\tilde{x} = A\delta x \Rightarrow \delta x(t) = e^{At} \delta x_0$$

Riconoscendo la condizione di stabilità per \tilde{x} :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_0 : \| \delta x_0 \| \leq \delta \Rightarrow \| \delta x \| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

Si evince che questo dipende strettamente da $\delta x(t) = e^{At} \delta x_0$, o
presumere dal movimento \tilde{x} , dunque per sistemi LTI la
stabilità è una proprietà dell'intero sistema (non del particolare
movimento) e dipende solo dalla matrice e^{At} e dunque da A

Studiamo allora la matrice e^{At} :

Ricorda che
 $m_a \geq m_g$
sempre

Multiplicità
algebraica
↓
Multiplicità
geometrica

Autovettori
di A
↑
Autovetori di A

\rightarrow se A diagonalizzabile $\Leftrightarrow A = T \Lambda T^{-1} \Leftrightarrow m_a = m_g \forall \lambda$

$$\text{allora } e^{At} = T e^{\Lambda t} T^{-1}$$

$$\text{dove } e^{\Lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} t^k = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k t^k & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_m^k}{k!} t^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & e^{\lambda_m t} \end{bmatrix}$$

Dunque $\mathbf{f}_x(t)$ è combinazione lineare delle sole funzioni $e^{\lambda_i t}$
Se gli autovetori fossero complessi (e dunque coniugati perché $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)
questo non sarebbe un problema perché la g. $e^{(\sigma+j\omega)t}$ ed $e^{(\sigma-j\omega)t}$
si combinerebbero come funzioni semisordate del tipo $e^{\sigma t} \sin(\omega t)$
e $e^{\sigma t} \cos(\omega t)$

$m_a > m_g$ per ottenere un λ

→ Se invece A non è diagonalizzabile (matrice difettiva) si sfrutta
il fatto che esiste sempre la decomposizione $A = Q J Q^{-1}$ dove:

J è la matrice degli autovettori generalizzati (non ci interessa)

J è una matrice in forma di Jordan

Ossia una matrice diag. o blocchi (quadrati)

tale che ogni blocco J_i è del tipo:

Un certo valore λ risulta su tutte le diag.

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_N \end{bmatrix}$$

Gli autovettori di A sono proprio gli elementi diagonali sui vari blocchi di Jordan, le loro m_a è uguale al numero di volte che compare sulla diagonale e le loro m_g è uguale al numero di blocchi di Jordan in cui compare

Esempio

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & -1 & \\ -1 & 1 & 0 & \\ 0 & -1 & \end{bmatrix} \quad \lambda = -1 \quad m_a = 5 \quad m_g = 2$$

✓

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 0 & 2 & & \\ & & 3 & 1 & 0 \\ & & 0 & 3 & 1 \\ & & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \lambda = 2 \quad m_a = 2 \quad m_g = 1$$

✓

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 0 & 2 & 1 & \\ & & 3 & 1 & 0 \\ & & 0 & 3 & 1 \\ & & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \lambda = 3 \quad m_a = 5 \quad m_g = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 0 & 2 & 1 & \\ & & 3 & 1 & 0 \\ & & 0 & 3 & 1 \\ & & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

No forme
di Jordan

✗

Allora $e^{At} = Q^{-1} e^{St} Q =$

$$\begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_N t} \end{bmatrix} \quad \text{diag. a blocchi}$$

Perché $e^{J_i t}$ è diagonalizzabile

$$\text{Sare } e^{J_1 t} = e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}} = e^{(\lambda I + J_0)t} = e^{\frac{\lambda t}{I}} \cdot e^{J_0 t} = e^{\frac{\lambda t}{I}} \cdot e^{S_0 t}$$

Solare matrice $Q \times Q$

Quello con 1 sopra alle diagonale
dobbiamo dunque vedere che cos'è $e^{J_{\text{tot}}}$.

$$e^{J_{\text{tot}}} = I + J_{\text{tot}} + J_{\text{tot}}^2 \frac{t^2}{2} + \dots + J_{\text{tot}}^{q-1} \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

dim blocco di Jordan J_i
 $0_{q \times q} \Rightarrow J_0$ si dice milpotente
di ordine q

dunque $e^{J_{\text{tot}}} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{q-1}/(q-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

Allora le funzioni che si combinano linearmente in $e^{J_{\text{tot}} t}$
sono esattamente $\frac{t^k e^{\sigma t}}{k!}$ per $0 \leq k \leq q-1$

se λ fosse complesso coniugato avremmo

$$\frac{t^k}{k!} e^{\sigma t} \sin(\omega t) \text{ e } \frac{t^k}{k!} e^{\sigma t} \cos(\omega t) \text{ per } 0 \leq k \leq q-1$$

Note: In questo caso ci può essere utile il fatto che

$$\begin{bmatrix} \sigma & w \\ -w & \bar{\sigma} \end{bmatrix} \text{ è simile a } \begin{bmatrix} \sigma + jw & 0 \\ 0 & \sigma - jw \end{bmatrix}$$

Due blocchi di Jordan

$$\begin{bmatrix} \sigma & w & 1 & 0 \\ -w & \sigma & 0 & 1 \\ \sigma & w & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ è simile a }$$

$$\begin{bmatrix} \sigma + jw & 1 & & \\ \sigma + jw & \sigma + jw & & \\ & & \sigma - jw & 1 \\ & & \sigma - jw & \sigma - jw \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma w & 1 & 0 & & \\ -w \sigma & 0 & 1 & & \\ \sigma w & 0 & 0 & 1 & \\ -w \sigma & 0 & 0 & 1 & \\ \sigma w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ è simile a }$$

$$\begin{bmatrix} \sigma + jw & 1 & 0 & & \\ 0 & \sigma + jw & 1 & & \\ 0 & 0 & \sigma + jw & & \\ & & & \sigma - jw & 1 \\ & & & 0 & \sigma - jw \\ & & & 0 & 0 & \sigma - jw \end{bmatrix}$$

e così via ...

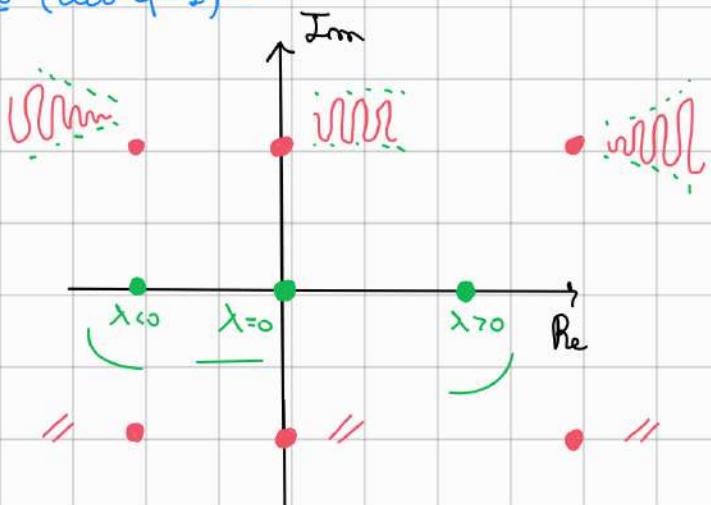
Criterio di stabilità per sistemi LTI

detti modi

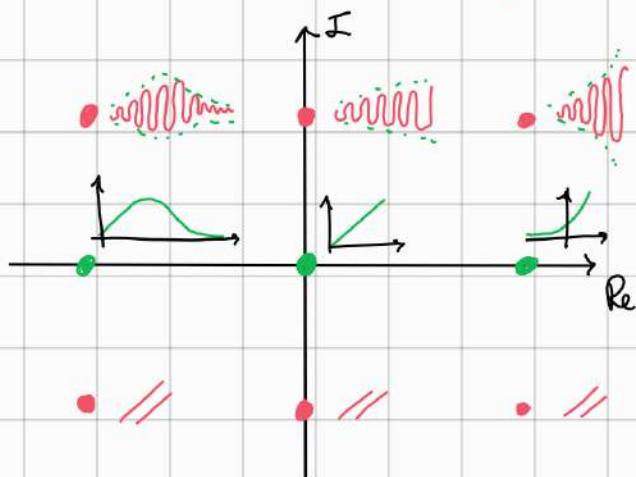
Alessio che sappiamo, a seconda degli autovettori di A , quali funzioni si combinano linearmente in e^{At} , possiamo tirare fuori qualche criterio:

Se l'autovettore viene da un blocco di J con $\text{dim } z$

Esempio ($\cos \varphi = 1$)



Esempio ($\cos \varphi = 2$, disegno solo la funzione con $k=1$, quelle con $k=0$ è sopra)



STABILITÀ \leftrightarrow MODI \leftrightarrow AUTOVALORI sono dunque strettamente collegati:

STABILITÀ	MODI	AUTOVALORI
Asintotica	$\rightarrow 0$	$\{\text{Re}\} < 0$
Semplice o Margimale	$N_b \rightarrow \infty$ Almeno uno $\rightarrow 0$	$N_o \{\text{Re}\} > 0$ Almeno uno $\{\text{Re}\} = 0$ Tutti quelli con $\{\text{Re}\} = 0$ hanno $m_2 = m_0$ caso $q=1$

Instabile

Almeno uno $\rightarrow \infty$

Almeno uno con $\{Re\} > 0$

Almeno uno con $\{Re\} = 0$ con $m_a \neq m_g$
caso $q > 1$

Esempio

(1)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -1$$

$$m_a = 5$$

$$m_g = 3$$

Modi:

Possiamo pure togliere il K!

Bloco 1: $q=3$ $e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}$

Bloco 2: $q=1$ e^{-t}

Bloco 3: $q=1$ e^{-t}

$$\Rightarrow \{e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}\}$$

\Rightarrow Sistema asintoticamente stabile

(2)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1 + 2j \quad m_a = m_g = 1$$

$$\lambda_2 = -1 - 2j \quad m_a = m_g = 1$$

$$\lambda_3 = 0 \quad m_a = m_g = 1$$

Bloco simile a:
 $\begin{bmatrix} -1+2j & 0 \\ 0 & -1-2j \end{bmatrix}$

Modi:

Bloco 1: $e^{-t} \sin(2t), e^{-t} \cos(2t)$

Bloco 2: 1

\Rightarrow Sistema marginalmente stabile

(3)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1-2j \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2 \quad m_a = 2 \quad m_g = 1$$

$$\lambda_2 = -2 + j \quad m_a = m_g = 1$$

$$\lambda_3 = -2 - j \quad m_a = m_g = 1$$

Bloco simile a:
 $\begin{bmatrix} -2+j & 0 \\ 0 & -2-j \end{bmatrix}$

Modi:

Bloco 1: e^{-2t}, te^{-2t}

Bloco 2: $e^{-2t} \sin(t), e^{-2t} \cos(t)$

\Rightarrow Sistema asintoticamente stabile

Modi:

Bloco 1: 1

Bloco 2: $\sin(t) \cos(t)$

(4)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad m_a = m_g = 1$$

$$\lambda_2 = j \quad m_a = m_g = 1$$

$$\lambda_3 = -j \quad m_a = m_g = 1$$

\Rightarrow Sistema marginalmente stabile

⑤

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

simile a

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad m\omega = 2 \quad mg = 1$$

$$\lambda_2 = 3 \quad m\omega = 2 \quad mg = 1$$

$$\lambda_3 = -3 \quad m\omega = 2 \quad mg = 1$$

Modi:

Bloco 1: 1 t

Blocco 2: cost simt

tcost tsint

\Rightarrow Sistema instabile (plasmorbidamente)

⑥

$$A = \begin{bmatrix} s & & & \\ 1 & 2 & & \\ -2 & 1 & & \\ & -2 & 1 & 0 \\ & 0 & -2 & 1 \\ & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 5 \quad m\omega = mg = 1$$

$$\lambda_2 = 1 + 2j \quad m\omega = mg = 1$$

$$\lambda_3 = 1 - 2j \quad m\omega = mg = 1$$

$$\lambda_4 = -2 \quad m\omega = 3 \quad mg = 1$$

Modi:

Bloco 1: e^{st}

Bloco 2: $e^t \sin(2t) \quad e^t \cos(2t)$

Bloco 3: $e^{-2t} \quad t e^{-2t} \quad t^2 e^{-2t}$

\Rightarrow Sistema instabile (esponenzialmente)

La stabilità è una caratteristica del sistema solo per sistemi lineari

Stabilità di un movimento per un sistema non lineare

Una cosa che possiamo fare è studiare il sistema linearizzato, anche detto (LTI associato), volgono infatti i seguenti teoremi:

Dato \tilde{x} stato di equilibrio corrispondente all'ingresso u per il sistema non lineare tempo invariante $\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases}$, allora:

Intorno a \tilde{x}

- LTI associato o.s. $\Rightarrow \tilde{x}$ a.s.
- LTI associato instabile $\Rightarrow \tilde{x}$ instabile

(LTI marginalmente stabile non implica nulla)

A simbolicamente
stabile

Esempio del pendolo

Le condizioni di equilibrio erano:

- Caso 1: $(\frac{\pi}{6}, 0)$

Sappiamo che il sistema è linearizzato con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + \lambda + 5\sqrt{3} = 0$, non ci interessa risolverlo ma solo sapere il segno delle parti reali delle radici, che in questo caso è 20, dunque il sistema linearizzato è asintoticamente stabile e dunque anche il movimento lo è, e questo è fatto del punto di vista fisico



- Caso 2: $(\frac{5\pi}{6}, 0)$

Sappiamo che il sistema è linearizzato con $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 5\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$
il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + \lambda - 5\sqrt{3} = 0$, non ci interessa risolverlo ma solo sapere il segno delle parti reali delle radici, che in questo caso è uno <0 e uno >0, dunque il sistema linearizzato è instabile e dunque anche il movimento lo è, e questo intorno del punto di vista fisico:



Criterio di Lyapunov

Serve per stabilire la stabilità di uno stato di un sistema NL il cui sistema LTI associato è marginalmente stabile

Sia V una funzione: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua (dopo vediamo quale usare), questa è definita ^{negativo} positiva in $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ se $V(\tilde{x}) = 0$ ed inoltre $\exists \delta > 0: \forall x^* \in B(\tilde{x}, \delta), x^* \neq \tilde{x} \quad V(x^*) < 0$

Assume valori positivi/negativi in un suo intorno

Vogliamo dunque i seguenti risultati:

- Se esiste $V(x)$ DP in \tilde{x} tale che $\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(x) \leq 0$ SDN in \tilde{x} allora \tilde{x} è un punto di equilibrio stabile del sistema

- Se esiste $V(x)$ DP in \bar{x} tale che $\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(x) \leq 0$ DN in \bar{x}
allora \bar{x} è un punto di equilibrio asintoticamente stabile del sistema
- Se esiste $V(x)$ DP in \bar{x} tale che $\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(x) > 0$ DP in \bar{x}
allora \bar{x} è un punto di equilibrio instabile del sistema

Quale $V(x)$ usare? Non ce n'è una standard, di solito si usano funzioni che descrivono l'energia di un sistema o forme quadratiche
dunque $V(x) = x^T M x$ DP in $x=0 \Leftrightarrow M = M^T$ e M def. pos
DN in $x=0 \Leftrightarrow M = M^T$ e M def. neg

Note: una matrice è def. positiva se tutti i minori principali di testa sono > 0 (criterio di Sylvester)

Esempio

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1^3 - x_2^2 + x_1 x_2^2 \\ x_1 x_2 - x_2^3 - x_1^2 x_2 + u \end{bmatrix} \quad \text{Studiare l'equilibrio per } \bar{u} = 0$$

$f(x, \bar{u}) = 0$ sicuramente ha come soluzione $\bar{x} = (0, 0)$

Studiamo la stabilità del movimento di equilibrio \bar{x} corrispondente all'ingresso \bar{u} (ci interessa A della linearizzazione)

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 + x_2^2 & -2x_2 + 2x_1 x_2 \\ x_2 - 2x_1 x_2 & x_1 - 3x_2^2 - x_1^2 \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = 0 \quad m_\lambda = 2 \quad mg = 2$$

questo è marginalmente stabile, dunque non possiamo dire nulla su \bar{x} , proviamo allora ad applicare Lyapunov:

se è una scelta cosidduta (DP)

$$\text{Supponiamo } V(x) = x^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x$$

\bar{x} è DP dunque $V(x)$ è DP in $x=(0,0)$

Sappiamo la dim=2

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T I x = \frac{1}{2} x^T x = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)$$

$x_1 = x_1(t)$ f. composta

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} (V(x)) = \frac{1}{2} (2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2)$$

le sostituisco dalla stato \dot{x}

$$= x_1 (-x_1^3 - x_2^2 + x_1 x_2^2) + x_2 (x_1 x_2 - x_2^3 - x_1^2 x_2) \rightsquigarrow \bar{u}=0$$

$$= -x_1^4 - x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^2 - x_2^4 - x_1^2 x_2^2$$

$$= -x_1^4 - x_2^4$$

$\Rightarrow \bar{x}$ definita negativa in \bar{x} in $(0,0)$

$\Rightarrow \bar{x}$ è un punto asintoticamente stabile per il sistema NL

Se mi usivo marginalmente stabile potrei solo dire che non è instabile perché magari con un'altra funzione di Lyapunov veniva asintoticamente stabile

Esempio

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad \text{Studiare l'equilibrio per } \bar{x} = (0,0)$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2x_1 x_2 - 1 & -x_1^2 + 1 \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\{\lambda_i\} > 0$$

\Rightarrow Sistema LTI instabile $\Rightarrow \bar{x}$ per NL è instabile

Vediamo se con Lyapunov troviamo lo stesso risultato

$$V(x) = x^T J x = x_1^2 + x_2^2 \quad V(x) \text{ DP intorno } \bar{x} = (0,0)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 + 2x_2(-(x_1^2 - 1)x_2 - x_1) \\ &= 2(x_1x_2 - x_1^2x_2^2 + x_2^2 - x_1x_2) \\ &= 2x_2^2(1 - x_1^2)\end{aligned}$$

Per $x = \bar{x}$ $\dot{V}(x) = 0$ intorno \bar{x}

e quando $\|x\|$ è "piccolo" $V(x) > 0 \quad \forall x \neq \bar{x} \Rightarrow \bar{x}$ instabile per NL

Criterio di Lyapunov per sistemi lineari

Vediamo come si usa Lyapunov per sistemi LTI, come alternativa allo studio di e^{At} , nel caso in cui $u = 0$

$\dot{x} = Ax + Bu \Rightarrow \dot{x} = Ax \Rightarrow$ Un movimento di equilibrio è sicuramente $x = (0, \dots, 0)$, studiare la stabilità di questo movimento equivale a studiare la stabilità del sistema:

Seguiamo $P = P^T$ def. pos. allora $V(x) = x^T Px$ lo chiamiamo
 $\dot{V}(x) = \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} = x^T A^T Px + x^T PAx = x^T (A^T P + PA)x = -x^T Q x$ -Q

Teorema

Sistema LTI asintoticamente stabile \Leftrightarrow Prima era \Rightarrow

$\forall Q = Q^T$ def. positiva $\exists P = P^T$ def. positiva : $A^T P + PA = -Q$

Esempio

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 3x_2$$

$$\dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Premendo una qualsiasi $Q = Q^T$ DP e ricavare P da $A^T P + PA = -Q$

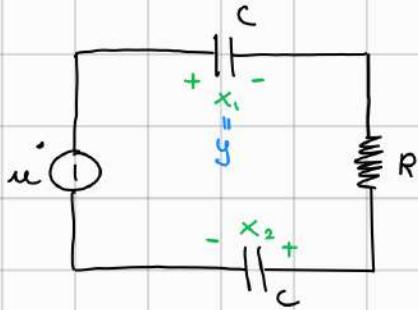
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2a + 4b & -2b + 4c \\ -3a - 2b & -3b - 2c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2a + 4b & -3a - 2b \\ -2b + 4c & -3b - 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2a + 4b - 2a + 4b = -1 \\ -2b + 4c - 3a - 2b = 0 \\ -3a - 2b - 2b + 4c = 0 \\ -3b - 2c - 3b - 2c = -1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -4a + 8b = -1 \\ -3a - 4b + 4c = 0 \\ \cancel{-3a - 4b + 4c = 0} \\ -6b - 4c = -1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1+8b}{4} = \frac{9}{32} \\ c = \frac{1-6b}{4} = \frac{23}{128} \\ b = \frac{1}{64} \end{array} \right.$$

$$P = \frac{1}{128} \begin{bmatrix} 36 & 2 \\ 2 & 23 \end{bmatrix} =, \text{ è def. positiva} \Rightarrow \text{sistema asintoticamente stabile}$$

Dato il sistema:



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{CR} (x_1 + x_2 - u) \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{CR} (x_1 + x_2 - u) \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\hat{x}_1 = x_1 + x_2$$

Supponiamo di fare un cambio di stato $\hat{x}_2 = x_1 - x_2$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -\frac{2}{RC} (x_1 + x_2 - u) = -\frac{2}{RC} (\hat{x}_1 - u) \rightsquigarrow \text{è influenzabile} \\ \dot{\hat{x}}_2 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 0 \rightsquigarrow \text{non è influenzabile direttamente da } u! \end{cases}$$

$$y = x_1 = \frac{1}{2} (\hat{x}_1 + \hat{x}_2)$$

Dunque una domanda che ci possiamo chiedere è se manipolando come vogliamo e possiamo sempre raggiungere lo stato desiderato, vogliamo trovare un modo di sapere quali variabili di stato sono influenzabili da u e quali no, questa è la proprietà di raggiungibilità.

Dato un sistema LTI in forma di stato, uno stato \tilde{x} si dice raggiungibile se esistono: $t^* > 0$, $\tilde{u}(t)$ definito per $0 \leq t \leq t^*$ tali che: se $\tilde{x}_f(t)$ definito per $0 \leq t \leq t^*$ è il movimento forzato generato da $\tilde{u}(t)$ oltre $\tilde{x}_f(t^*) = \tilde{x}$: in altre parole la capacità di portare un sistema dall'origine ad uno stato qualsiasi (in tempo finito).

Questa proprietà divide gli stati in due categorie:

- Quelli raggiungibili: X_R
- Quelli non raggiungibili: X_{NR}

$$\left. \begin{array}{l} X_{NR} + X_R = \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

Note che questa proprietà non dipende mai dall'uscita!

Infatti si parla anche di raggiungibilità delle coppie (A, B)

Un sistema per il quale $X_{NR} = \emptyset$ si dice completamente raggiungibile

Un sistema lineare in forma di stato è completamente raggiungibile

$\Leftrightarrow M_n = [B, AB, A^2B, \dots, A^{m-1}B]$ è tale che $\text{rank}(M_n) = m$

Matrice di raggiungibilità tutti blocchi $m \times m$, dunque $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Se il sistema non è completamente raggiungibile si può pensare di isolare la parte non raggiungibile: (come nell'esempio sopra, in cui con un cambio di stato rivelavamo le variabili non influenzate da u)

- Chiammo $m_r = \text{rank}(M_r)$, dato che il sistema non è completamente raggiungibile sicuramente $m_r < m$
- Effettuo un cambio di variabile tramite la matrice T_r

$$\hat{x} = T_r x \quad \hat{\tilde{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

tale che le matrici \hat{A} e \hat{B} vengono della seguente forma:

$$\hat{A} = T_r A T_r^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ \dots & \dots \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{B} = T_r B = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\hat{B}_a \in \mathbb{R}^{m_r \times m}$
 $\hat{A}_a \in \mathbb{R}^{m_r \times m_r}$

Può anche essere zero

Basis sottospazio di raggiungibilità

- T_r viene scelta in questo modo:
- | | |
|-------------------|-------------------|
| m_r colonne lin | $m - m_r$ colonne |
| indipend di M_r | lin. indipend. |

Allora posso partizionare anche \hat{x} :

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \dots \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_r}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}}_a = \hat{A}_a \hat{x}_a + \hat{A}_{ab} \hat{x}_b + \hat{B}_a u \\ \dot{\hat{x}}_b = \hat{A}_b \hat{x}_b \end{cases}$$

Ora non componere u! Allora sono la parte non raggiungibile

Note: $\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix}$ è triangolare a blocchi: Detti autov. parte raggiungibile
 $\text{autov}(\hat{A}) = \text{autov}(A) = \text{autov}(\hat{A}_a) + \text{autov}(\hat{A}_b)$

Detti autov. parte irraggiungibile

Esempio (riprendiamo il circuito)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{RC}(x_1 + x_2 - u) \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{RC}(x_1 + x_2 - u) \end{cases} \rightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

$$y = x_1$$

(A, B) è completamente raggiungibile?

$$M_R = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2 C^2} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2 C^2} \end{array} \right] \quad \text{rank}(M_R) = 1 \Rightarrow \text{Sistema non completamente raggiungibile}$$

Quale parte dello stato non sono raggiunte?

$$T_R^{-1} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Scegli io, l'ho indip} \\ \text{e fai per fare} \\ \text{i valori} \end{array} \rightarrow T_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{x} = \begin{cases} \hat{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \hat{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{stesso trasp. dell'iniz} \\ \uparrow \end{array}$$

Moltiplicare di $\frac{1}{RC}$

$$\text{allora } \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = -\frac{2}{RC}(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 - u) = -\frac{2}{RC}(\hat{x}_1 - u) \\ \dot{\hat{x}}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{A} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{RC} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \hat{A}_{00} \sim -\frac{2}{RC} \text{ outav. posste} \\ \text{ragg.} \\ \uparrow \\ \text{o outav. posste} \\ \text{ragg.} \\ \downarrow \\ \text{Lo sopevo già} \end{array}$$

sono in \Leftrightarrow

Per sistemi LTI il concetto di raggiungibilità coincide con quello di controllabilità:

(in tempo limitato)

Capacità di portare il sistema da uno stato qualsiasi all'origine

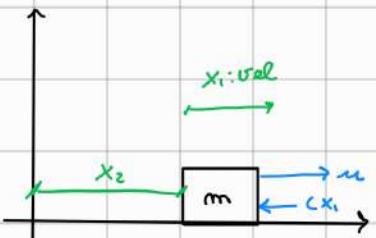
Se la parte non controllabile di un sistema è asintoticamente stabile

(\Rightarrow la matrice A è esponenzialmente stabile)

($\exists e \forall x \text{ non controllabile } \exists u$) il sistema si dice **stabilizzabile**

Per un sistema **completamente controllabile** esiste sempre almeno un ingresso che permette al sistema di spostarsi da uno stato x_A ad uno stato x_B \leadsto percorso $x_A \leadsto \text{origine} \leadsto x_B$





$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{c}{m}x_1 + \frac{u}{m} \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

$y = x_1 \rightarrow x_2$ in nessun modo influenza l'uscita
 $\Rightarrow x_2$ è una parte non osservabile

Dato un sistema LTI in forma di stato, uno stato $\tilde{x} \neq \vec{0}$ si dice non osservabile se: $\forall t^* > 0$ finito l'evoluzione libera dell'uscita generata da \tilde{x} $\exists t^*$ tale che $y_e(t) = 0 \quad \forall t \in [0, t^*]$



In altre parole se andiamo un qualsiasi tratto dell'uscita libera $y_e(t)$ generata da \tilde{x} non riesco a distinguere dall'uscita libera generata dall'origine $x = \vec{0}$

Questa proprietà divide gli stati in due categorie:

- Quelli osservabili: X_o
 - Quelli non osservabili: X_{no}
- $$\left. \begin{array}{l} X_o + X_{no} = \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

Note che questa proprietà non dipende mai dall'ingresso!

Infatti si parla anche di osservabilità della coppia (A, C)

Un sistema per il quale $X_{no} = \emptyset$ si dice completamente osservabile

Un sistema lineare in forma di stato è completamente osservabile

$$\Leftrightarrow M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{m-1} \end{bmatrix} \text{ è tale che } \text{rank}(M_o) = m \xrightarrow{\text{massimo}} \text{ tutti i blocchi sono } l \times m \text{ dunque } \mathbb{R}^{ml \times m}$$

Se il sistema non è completamente osservabile si può pensare di

fare $P = t \cdot \min \text{rang}(P)$:

sempre se m_0 non è osservabile.

- Chiamiamo $m_0 = \text{rank}(M_0)$, dato che il sistema non è completamente osservabile sicuramente $m_0 < m$
- Effettuo un cambio di variabile tramite la matrice T_n

$$\hat{x} = T_n x \quad \hat{\dot{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

tale che le matrici \hat{A} e \hat{C} vengono della seguente forma:

$$\hat{A} = T_n A T_n^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ab} & \hat{A}_b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{C} = T_n C = \begin{bmatrix} \hat{C}_a & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \hat{C}_a \in \mathbb{R}^{l \times m_0} \\ \hat{A}_a \in \mathbb{R}^{m_0 \times m_0} \end{array}$$

Base sottospazio di osservabilità

- Si dice sotto spazio di osservabilità: $\begin{bmatrix} m_0 \text{ vettori lin. indipendenti} \\ m - m_0 \text{ vettori lin. indipendenti} \end{bmatrix}$ (o loro multipli scalari)
- $\sum_i: M_0 \sum_i = 0 \quad (= \text{span}\{\sum_i\} = X_{n_0})$

Allora posso partizionare anche \hat{x} :

$$\hat{x} \in \mathbb{R}^{m_n} \quad \hat{y} = \hat{C}_a \hat{x}_a \Rightarrow \hat{x}_b \text{ non influenza su } y: \text{ è la parte non osservabile}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \dots \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x}_a = \hat{A}_a \hat{x}_a \\ \hat{x}_b = \hat{A}_{ab} \hat{x}_a + \hat{A}_b \hat{x}_b \end{cases}$$

Note: $\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ab} & \hat{A}_b \end{bmatrix}$ è triangolare a blocchi: Detti autov. parte osservabile
 $\text{autov}(\hat{A}) = \text{autov}(A) = \text{autovol}(\hat{A}_a) + \text{autovol}(\hat{A}_b)$

Detti autovol. parte non osservabile

Riprendiamo l'esempio iniziale

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{c}{m} x_1 + \frac{u}{m} \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & : & 0 \\ -\frac{c}{m} & : & \dots \\ 1 & 0 & \\ \hat{A}_{ab} & \hat{A}_b & \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \hat{C}_a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = x_1$$

\Rightarrow Già in forma giusta

\Rightarrow Sicuramente M_0 non è di rango massimo

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{m} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det(M_0) = 0 \rightarrow \text{rank}(M_0) = 1 \neq 2 \text{ (max)}$$

Legame tra le forme di stato e la funzione di trasferimento

Ricordiamo che una funzione di trasferimento è:

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

risultante corrispondente all'ingresso

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$(1) \dots sX(s) - AX(s) = x(0) + BU(s)$$

$$X(s)(sI - A) = x(0) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Ricordando che

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

C.I. Evoluzione forzata

L'unica che mi interessa per calcolare $G(s)$ ($x(0)=0$)

$$(2) \dots Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

$$\text{Allora } Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Ricordando che $M^{-1} = \frac{\text{adj}(M)}{\det(M)} \sim \text{cof}^T(M)$: $(\text{cof}(M))_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$

↓
tolgo riga c e col j

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{C \text{adj}(sI - A)B + D}{\det(sI - A)} = \frac{C \text{adj}(sI - A)B + D p_A(s)}{p_A(s)}$$

Ma elementi di grado $m-1$

max grado $m-1$

grado esattamente m

dunque $\frac{C \text{adj}(sI - A)B + D p_A(s)}{p_A(s)}$, allora: (Ricorda che la f.t di trasf. può essere una matrice)

- Il sistema è causale se $\deg(\text{denom}) \geq \deg(\text{num})$
una volta semplificate le cose
- In generale i poli della funzione di trasferimento sono un sottoinsieme degli autovettori di A (eventuali cancellazioni)

Un sistema può essere sia non completamente osservabile che non completamente raggiungibile, è possibile dimostrare che esiste sempre una scomposizione, detta **scomposizione di Kalman**, che porta il sistema in una forma che evidenzia tutte le parti raggiungibili e non, osservabili e non, detta **forma canonica**:

$$\hat{x} = T_k x \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ \hat{y} = \hat{C}\hat{x} + Du \end{cases}$$

Kalman

con $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ \hat{x}_c \\ \hat{x}_d \end{bmatrix}$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{aa} & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ \hat{A}_{ba} & 0 & \hat{A}_{bd} & 0 \\ 0 & \hat{A}_{ca} & \hat{A}_{cd} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{A}_{dd} & 0 \end{bmatrix}$$

Parte raggiungibile

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ \hat{B}_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_b & 0 & \hat{C}_d \end{bmatrix}$$

Parte osservabile

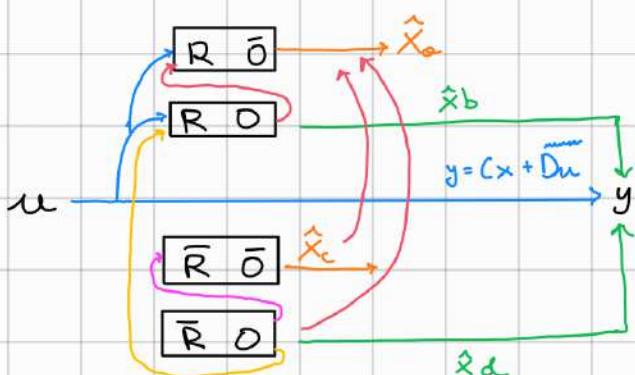
Dato che gli autovektori sono separati si può studiare la stabilità delle singole parti:

$\Rightarrow \hat{x}_b$ parte completamente osservabile e raggiungibile

\hat{x}_a parte raggiungibile ma non osservabile

\hat{x}_d parte osservabile ma non raggiungibile

\hat{x}_c parte né osservabile né raggiungibile



Riprendiamo la soluzione $y(t)$ scritta con \hat{x} in forma canonica:

$$y(t) = \hat{C} e^{\hat{A}t} \hat{x}_0 + \int_0^t \hat{C} e^{\hat{A}(t-\tau)} \hat{B} u(\tau) d\tau + D u(t)$$

$$\hat{Y}(s) = \hat{C}(\hat{sI} - \hat{A})^{-1} \hat{x}_0 + [\hat{C}(\hat{sI} - \hat{A})^{-1} \hat{B} + D] U(s)$$

f. di trasferimento $G(s)$

Come si ricava $G(s)$ usando le matrici che abbiamo ricavato prima?

$$\text{Immaginiamo} \quad \hat{C} e^{\hat{A}(t-\tau)} \hat{B} = [0 \ \hat{C}_b \ 0 \ \hat{C}_d] \begin{bmatrix} e^{\hat{A}_a(t-\tau)} \\ e^{\hat{A}_b(t-\tau)} \\ 0 \\ e^{\hat{A}_c(t-\tau)} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= [0 \ \hat{C}_b e^{\hat{A}_b(t-\tau)} \ * \ *] \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{C}_b e^{\hat{A}_b(t-\tau)} \hat{B}_b$$

$$\Rightarrow \hat{C} e^{\hat{A}(t-\tau)} \hat{B} = \hat{C}_b e^{\hat{A}_b(t-\tau)} \hat{B}_b$$

$$\text{allora } y(t) = \hat{C} e^{\hat{A}t} \hat{x}_0 + \int_0^t \hat{C}_b e^{\hat{A}_b(t-\tau)} \hat{B}_b u(\tau) d\tau + D u(t)$$

$$\text{dunque } G(s) = \hat{C}_b (sI - \hat{A}_b)^{-1} \hat{B}_b + D$$

\Rightarrow Dipende solo dalla parte completamente osservabile e raggiungibile!

\Rightarrow I famosi poli di $G(s)$ sono proprio gli autovetori di \hat{A}_b

Esempio: Studiare le proprietà del sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \quad D = [0]$$

Stabilità:

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 \Rightarrow$ Asintoticamente stabile

\Rightarrow possiamo già dire che è anche BIBO stabile

Raggiungibilità:

$$M_n = [B \mid AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(M_n) = 1 \neq 2 \text{ (max)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

non completamente raggiungibile

- λ - 1 Punto raggiungibile
- 2 Punto non raggiungibile

Osservabilità:

$$M_0 = [C | CA] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(M_0) = 2 \text{ (max)}$$

completamente osservabile

Funzione di trasformamento:

$$\text{Possiamo subito dire che: } G(s) = \frac{\deg(\text{Num})=0}{\deg(\text{Dem})=1 \rightarrow (s+1)}$$

< deg(Dem) perché D=0

\uparrow
 $\deg(\text{Num})=0$

\downarrow
 $\deg(\text{Dem})=1 \rightarrow (s+1)$

dim Punto compl. oss > nagg

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D^0$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cof}(sI - A) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cof}^T(sI - A) = \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = (s+1)(s+2) \rightarrow (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow C(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \rightarrow G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{2}{s+1}$$

Ispezione diretta della complete raggiungibilità

"si vede a occhio"

Vogliamo sapere se ci sono alcuni casi in cui la complete raggiungibilità può essere verificata per ispezione diretta delle matrici A e B .

- Partiamo dal caso di un sistema SISO con A diagonale

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \xleftarrow{\text{dim 2}} \quad M_n = \left[\begin{array}{c|cc|c} b_1 & \lambda_1 b_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m & \lambda_m b_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} b_m \end{array} \right]$$

$$\text{rank}(M_n) = \max \left\{ \begin{array}{l} B \text{ non ha elementi nulli} \\ \lambda \text{ sono tutti diversi} \end{array} \right\}$$

- Generalizziamo ora il caso di un sistema MIMO con A in f. di Jordan

Lemme PBK per la raggiungibilità:

Le coppie A, B è completamente raggiungibile

$$\Leftrightarrow \text{rank}(P(\lambda)) = \max \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{dove } P(\lambda) := [\lambda I - A \mid B] \in \mathbb{R}^{m \times (m+m)}$$

Osservazione: Per λ_i non autovalore di A $\text{rank}(\lambda_i I - A) = \max (l=m)$

Per λ_i autovalore di A $\text{rank}(\lambda_i I - A) \neq \max$

Dimostrazione \Leftarrow

Supponiamo che esista $\lambda_i \in \mathbb{C}$: $\text{rank}(P(\lambda_i)) < \max (l=m)$

Allora $\exists q \neq 0 \in \mathbb{C}^m$: $q^T P(\lambda_i) = q^T [\lambda_i I - A \mid B] = 0 \quad | \quad q \in \text{Ker}(P(\lambda_i))$

$$\Rightarrow \begin{cases} q^T B = 0 \\ q^T A = \lambda_i q^T \end{cases}$$

Quindi, post-moltiplichiamo iterativamente la seconda eq. per $A^k B$ otengo:

$$q^T A B = \lambda_i q^T B = 0 \quad k=0$$

$$q^T A^2 B = \lambda_i^2 q^T B = 0$$

$$q^T A^{m-1} B = \lambda_i q^T A^{m-1} B = 0 \quad k=m-1$$

$$\Rightarrow q^T [B | AB \dots A^{m-1} B] = q^T M_n = 0 \text{ con } q \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(M_n) < m$$

Riprendiamo il caso che stavamo studiando:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & 0 & & \lambda_2 \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_p \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & B_{1,m_1} & \\ & & & \vdots \\ & & & B_{p,1} \\ & & & & \ddots \\ & & & & & B_{p,m_p} \end{bmatrix}$$

dim blocco 1

dim blocco p

f di Jordan comp blocchi

Allora:

- Per λ_i non autovettore $\text{rank}(M_n) = m$
- Per λ_i autovettore si ottengono tante righe nulle (in $\lambda_i I - A$) quanti sono i blocchi di Jordan corrispondenti a λ_i ($= m_g$)
[sono quelle con solo λ senza λ' e fanno]

Affinché $P(\lambda_i) = [\lambda_i I - A | B]$ abbia rango massimo $\forall \lambda_i \in \mathbb{C}$ allora tutti i B_{j,m_j} dei blocchi di un particolare autovettore devono essere linearmente indipendenti

\Rightarrow Se un sistema SISO ha un λ con $m_g + 1$ non è comp. raggiung.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & 1 & & \\ 0 & 0 & -1 & & \\ & & & -1 & 1 & \\ & & & 0 & -1 & \\ & & & & 2 & 1 & \\ & & & & & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 00 \\ 00 \\ 01 \\ 00 \\ 10 \\ 00 \\ 11 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

lin dep.

✓

✗

Ispettazione diretta della complete osservabilità

Il lemma PBH diventa il seguente:

La coppia A, C è completamente osservabile

$$\Leftrightarrow \text{rank } K(P(\lambda)) = \max \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ dove } P(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_p \end{bmatrix}$$

$$C = [C_{1,1} \dots C_{1,m_1} \mid \dots \mid C_{p,1} \dots C_{p,m_p}]$$

Allora affinché $P(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{bmatrix}$ abbia rango massimo $\forall \lambda_i \in \mathbb{C}$
tutte le colonne (i, i) dei blocchi corrispondenti a λ_i devono
essere linearmente indipendenti

\Rightarrow Se un sistema SISO ha un λ con $m_\lambda + 1$ min è comp. osserv.

legame tra le f. di trasf e le forme di stato (passaggio inverso)

Li aspettiamo do ottenere infinite soluzioni (infinte scelte equivalenti delle variabili di stato)

$$G(s) = \frac{N_{G(s)}}{D_{G(s)}} = \frac{B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \dots + B_1 s + B_0}{s^m + d_{m-1} s^{m-1} + \dots + d_1 s + d_0}$$

Tutto non serve a s^m (dunque tutto il resto)

Forme più generale
(consideriamo $N_{G(s)} \leq D_{G(s)}$)

$$= \frac{\hat{B}_{m-1} s^{m-1} + \dots + \hat{B}_0}{s^m + d_{m-1} s^{m-1} + \dots + d_1 s + d_0} + \hat{B}_m \quad \text{dove } \hat{B}_i = B_i - B_m d_i$$

Per costruzione è sempre completamente raggiungibile

1° Rappresentazione possibile: forma canonica di raggiungibilità

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ -d_0 & \dots & \dots & -d_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \hat{B}_0 & \dots & \hat{B}_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$D = \hat{B}_m$$

⇒ La completa osservabilità dipende solo dai polinomi a filtro comune tra DeN

Per costruzione è sempre completamente osservabile

2° Rappresentazione possibile: forma canonica di osservabilità

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -x_0 \\ 1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & -d_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \vdots \\ \hat{B}_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \hat{B}_m$$

\Rightarrow La complete raggiungibilità dipende solo dai polinomi a filtri comuni tra D e N

Esempio



$$M\ddot{y} = -c\dot{y} - Ky + u \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Forma normale}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ \dot{x}_1 = \dot{y} \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = -c\dot{y} - Ky + u \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + 0u \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Forma di stato}$$

$$\left. \begin{array}{l} s^2 M Y(s) + s C Y(s) + K Y(s) = U(s) \\ G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1/M}{s^2 + C_M s + K_M} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Funzione di trasformata}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & 0 \end{bmatrix} \quad D = [0] \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{Forma normale} \\ \text{raggiungibilità} \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{K}{M} \\ 1 & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = [0] \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{Forma canonica} \\ \text{osservabilità} \end{array} \right\}$$

Forma minimale

Un sistema completamente raggiungibile ed osservabile è detto in forma minima; ossia non è possibile utilizzare un numero inferiore di variabili di stato per descrivere le stesse relazioni tra ingresso e uscita (se avessi parti non raggiungibili o osservabili potrei buttarle via nello studio delle relazioni
tra ingresso e uscita) ^{solo} con questo ambito

Per sistemi in forma minima la BIBO stabilità implica la stabilità intorno asintotica

