Capitolo 2

Lezioni di PLI

2.1 *intlinprog* standard

Questo formato è il formato utilizzato in Matlab per risolvere problemi di PLI.

$$\begin{cases} \min\ c \cdot x \\ A \cdot x \leq b \\ A_{eq} \cdot x = b_{eq} \\ LB \leq x \leq UB \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

Lancio del linprog. Dopo aver inviato i comandi precedenti lanciamo il linprog

```
[x, v] = intlinprog(c, I, A, b, Aeq, beq, LB, UB);
```

dove x sarà la soluzione ottima, e v il valore massimo o minimo della funzione obiettivo.

- La dimensione dei vari elementi sono le stesse viste per il *linprog*.
- L'unica differenza rilevante è il secondo parametro in ingresso I, dove indichiamo se una certa variabile è intera o meno (con 1 o 0).

Facciamo un esempio! Supponiamo di avere due variabili x_1, x_2: Vogliamo porre che $x_1 \in \mathbb{Z}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$.

```
I=[1 0]
```

Osservazione. Possibile avere problemi misti con variabili intere e reali.

INTRODUZIONE ALLA RISOLUZIONE DI UN PROBLEMA DI PLI

VALUTAZIONE INFERIORE E VALUTAZIONE SUPERIORE, IL GAP

PRENDIAMO IL PROBLEMA DELLO ZAINO PER INTRODURRE LA STRATEGIA RISOLUTIVA DEI PROBLEMI DI "PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA" (PLI).

→ NOVITÀ: VINCOLI DI INTEREZZA SULLE VARIABILI.

Immaginiamo un contenitore che ha capacità C, all'interno del quale vogliamo porre degli oggetti. Abbiamo a disposizione n oggetti (oppure n tipologie di oggetti), ciascuno di esso caratterizzato da un valore v_i e un peso p_i. Vogliamo capire quali degli n oggetti (o quanti oggetti di ciascuna tipologia) inseriremo nel contenitore rispettando la capacità C e massimizzando il valore totale.

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i & \leftarrow \text{MASSIMIZZAZIONE} \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq b \\ x_i \in \{0,1\} \qquad \text{oppure } x_i \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

1. **Tipologie di caricamento e variabili di decisione.**

   Abbiamo n variabili di decisione x_j, una per oggetto. Distinguiamo le tipologie di caricamento:

- *caricamento binario divisibile* (problema di PL).
  Si parla di singoli oggetti che sono o non sono posti nel contenitore. Gli oggetti possono essere posti nel contenitore anche in parte.
  $$0 \leq x_j \leq 1$$

- *caricamento intero divisibile* (problema di PL).
  Si parla di tipologie di oggetti, possibile mettere più oggetti di una certa tipologia nel contenitore. Gli oggetti possono essere posti nel contenitore anche in parte.
  $$x_j \geq 0$$

- *caricamento binario indivisibile* (problema di PLI).
  Si parla di singoli oggetti che sono o non sono posti nel contenitore. Gli oggetti devono essere interamente posti nel contenitore.
  $$x_j = \begin{cases} 1 & \text{L'oggetto } j \text{ va nel contenitore} \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

- *caricamento intero indivisibile* (problema di PLI).
  Si parla di tipologie di oggetti, possibile mettere più oggetti di una certa tipologia nel contenitore. Gli oggetti devono essere interamente posti nel contenitore.
  $$x_j \in \mathbb{N}$$

PER RISOLVERE UN PROBLEMA DI PLI FACCIAMO UNA VALUTAZIONE, CIOÈ DEFINIAMO UN "GAP" (UN INTERVALLO) ALL'INTERNO DEL QUALE SARÀ PRESENTE LA SOLUZIONE OTTIMA.

$$v_i \leq v_{OTT} \leq v_S$$

VALUTAZIONE INFERIORE
PER MEZZO DI "ALGORITMI GREEDY" (GOLOSI...)

L'ALGORITMO RESTITUISCE UNA SOLUZIONE AMMISSIBILE E INTERA.

VALORE OTTIMO (INTERO)

VALUTAZIONE SUPERIORE
PER "RILASSAMENTO CONTINUO"

(PROBLEMA DI PL)

[DEF. DI RILASSAMENTO CONTINUO NELLA PAGINA SUCCESSIVA.]

ATTENZIONE. ABBIAMO CONSIDERATO UN PROBLEMA DI MAX! IN UN PROBLEMA DI MINIMO LE COSE SI INVERTONO

$v_i \longleftarrow$ RILASSAMENTO CONTINUO DI (PI)

$v_S \longleftarrow$ METODO GREEDY, SOLUZIONE AMMISSIBILE DI (PI)

RICORDARSI CHE RIMUOVENDO VINCOLI LA REGIONE AMMISSIBILE CRESCE (IL POLIEDRO)

IN UN QUALUNQUE PROBLEMA DI PLI:

1) CALCOLIAMO I PRIMI VALORI DI v_i E v_s (PRIMO GAP)
2) INTERVENIAMO RIDUCENDO IL GAP (VALORI v_i E v_s SEMPRE PIÚ VICINI)

UN BUON ALGORITMO GREEDY RESTITUISCE PICCOLI GAP (ATTENZIONE ALL'ERR. RELATIVO, $\frac{v_s - v_i}{v_i}$)

ATTENZIONE:
- v_i É SICURAMENTE AMMISSIBILE, NON É DETTO SIA VALORE OTTIMO
- v_s NON É DETTO SIA AMMISSIBILE (IL DUBBIO NON É SOLO CHE SIA OTTIMO)

DEF. RILASSAMENTO CONTINUO. IL RILASSAMENTO CONTINUO DI UN PROBLEMA DI PLI É IL PROBLEMA STESSO PRIVATO DEI VINCOLI DI ~~INTEREZZA~~. (UN PROBLEMA DI PL!)

LEGAME TRA PL E PLI

- NELLA PL BASTA LA VALUTAZIONE SUPERIORE: SI HA L'OTTIMO. (VERSIONE DIVISIBILE DEL PROBLEMA)
- NELLA PLI (VERSIONE INDIVISIBILE DEL PROBLEMA) SI FANNO ENTRAMBE LE VALUTAZIONI E SI PROCEDE CON UN ALGORITMO DI RIDUZIONE DEL GAP.

SI OSSERVI CHE SE LA SOLUZIONE OTTIMA DEL RILASSAMENTO CONTINUO DI (P) É AMMISSIBILE IN (P) ALLORA ABBIAMO GIÁ TROVATO L'OTTIMO

QUALUNQUE SOLUZIONE AMMISSIBILE $\longleftarrow$ $v_i = v_s$ (GAP NULLO) $\longrightarrow$ RILASSATO CONTINUO

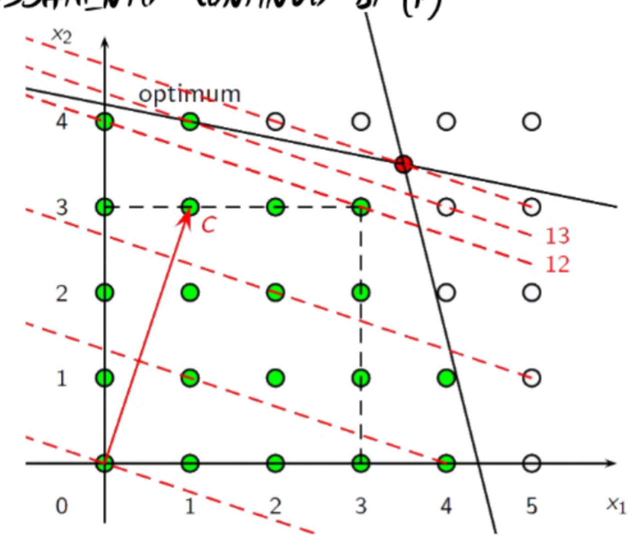
SOLUZIONE DEL RC DI (P) AMMISSIBILE IN (P)

ESEMPIO: PROBLEMA DELL'ASSEGNAMENTO E PROBLEMA DEL TRASPORTO.

DATA UNA SOLUZIONE OTTIMA DEL RILASSAMENTO CONTINUO DI (P)

BASTA ARROTONDARE PER AVERE L'OTTIMO DI (P)? NO!

ESEMPIO:
$$\begin{cases} \max \; x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ x_i \geq 0 \;\; \forall i \\ x_i \in \mathbb{Z} \;\; \forall i \end{cases}$$



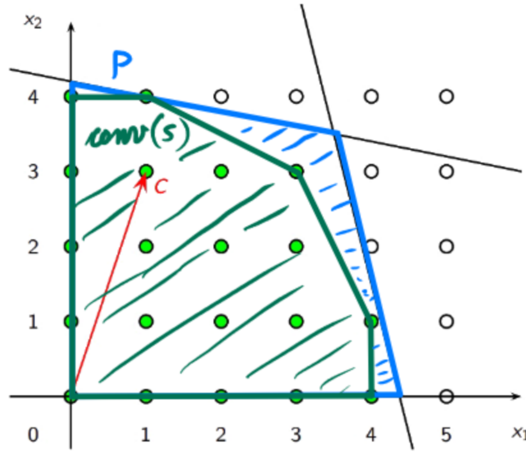
NEL R.C. DI (P) L'OTTIMO É $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$
ARROTONDANDO OTTENGO (3,3),
MA (3,3) NON É L'OTTIMO IN (P).
L'OTTIMO IN (P) É (1,4)

FACCIAMO UN CONFRONTO RISPETTO ALLE REGIONI AMMISSIBILI

$$\begin{cases} \max\ c \cdot x \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^m \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \max\ cx \\ Ax \leq b \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$V_{PLI} \qquad\qquad\qquad V_P$$



SOLUZIONE OTTIMA DEL PROBLEMA DI PLI

SOLUZIONE OTTIMA DEL RILASSATO CONTINUO

$S = \{ Ax \leq b : x \in \mathbb{Z}^m \}$ $\qquad$ $P = \{ Ax \leq b \}$

POSSIAMO DIRE CHE $V_{PLI} \leq V_P$ POICHÉ, TOGLIERE VINCOLI IMPLICA SEMPRE UN'ESPANSIONE DELLA REGIONE AMMISSIBILE (SI OSSERVI LA FIGURA)

OSSERVIAMO CHE S É INCLUSO ALL'INTERNO DEL PIÚ PICCOLO POLIEDRO CONVESSO CONTENENTE S: conv(S) !!!

(NUMERO DI PUNTI FINITI IN S)

QUINDI NOI VOGLIAMO TROVARE $V_{conv\,S} = \max\limits_{x \in conv(S)} cx$

É IMMEDIATO $V_{conv\,S} \leq V_P$, INOLTRE $V_{conv\,S} \geq V_{PLI}$ (REGIONE conv(S) PIÚ VASTA DI S)

$$\boxed{V_{PLI} \leq V_{conv\,S} \leq V_P}$$

INTRODUCIAMO UN NUOVO TEOREMA

TEOREMA DI EQUIVALENZA TRA PL E PLI.

DATO UN POLIEDRO $P = \langle A, b, c \rangle$ LIMITATO, SIA S IL CORRISPONDENTE POLIEDRO IN PLI CON A, b INTERI (AL PIU RAZIONALI), SIA v_S L'OTTIMO IN S. POSSIAMO DIRE CHE

$$v_S = V_{conv\,S}$$

PROBLEMA DI PLI $\qquad$ PROBLEMA DI PL !!!

APPARENTEMENTE PONIAMO AL RIBASSO LA DIFFICOLTÁ DEL PROBLEMA DI PLI, MA C'É SEMPRE UNA QUESTIONE: IL POLIEDRO CONV S SI TROVA CON COMPLESSITÁ ESPONENZIALE

$$\tilde{A}x \leq \tilde{b}$$

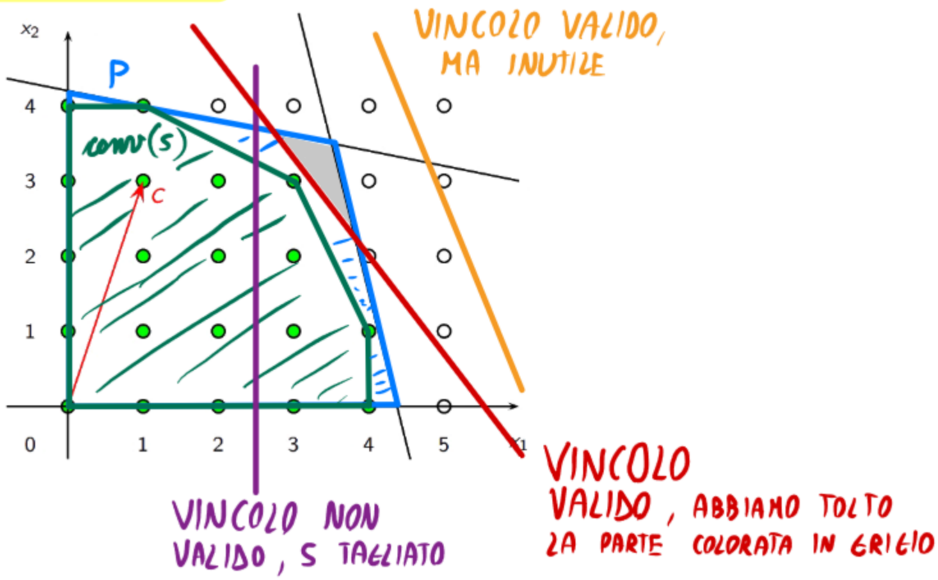
QUESTO TEOREMA É LA BASE PER I COSIDDETTI "TAGLI DI GOMORY"

PIANI DI TAGLIO DI GOMORY (METODO DI RIDUZIONE DEL GAP)

INTRODUZIONE

IMMAGINIAMOCI DI TOGLIERE "PORZIONI" DI P (UN PO' COME GLI AFFETTATI IN GASTRONOMIA). LO FACCIAMO INTRODUCENDO NUOVI VINCOLI CHE RIDUCONO LA DIMENSIONE DELLA REGIONE AMMISSIBILE (IL POLIEDRO P)

ABBIAMO DI GIÁ $\boxed{Ax \leq b}$, INTRODUCIAMO $\boxed{\gamma x \leq \gamma_0}$
SI OSSERVI CHE IL VINCOLO NON DEVE INTACCARE S, QUINDI $\boxed{\gamma x \leq \gamma_0 \quad \forall x \in S}$
SI PARLA DI DISUGUAGLIANZA VALIDA



NEL CASO IN CUI LA PARTE TAGLIATA CONTENGA L'OTTIMO V_S DEL RILASSATO CONTINUO ALLORA OTTEREMO UN NUOVO VALORE V_S MINORE, PIÚ VICINO ALL'OTTIMO DEL PROBLEMA DI PLI. IN QUEL CASO AVREMO

$$\boxed{\gamma x_{RC} > \gamma_0}$$

DOVE x_{RC} É L'OTTIMO DEL RILASSATO CONTINUO.

LE DISUGUAGLIANZE VALIDE DOVE $\gamma x_{RC} > \gamma_0$ É VERO SONO DETTE PIANI DI TAGLIO.

QUANDO SMETTO DI INSERIRE TAGLI? QUANDO x_{RC} AVRÁ SOLO COMPONENTI INTERE!!!

PIANI DI TAGLIO DI GOMORY PER DUALE STANDARD

A NOI INTERESSANO I COSIDDETTI "PIANI DI TAGLIO DI GOMORY".

$$(P) = \begin{cases} \min \ c \cdot x \\ A \cdot x = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

x_{RC} OTTIMO DEL RILASSAMENTO CONTINUO DI (P)

A_B BASE OTTIMA

$(x_{RC})_r$ UNA COMPONENTE FRAZIONARIA

QUINDI:

1) PONIAMO IL PROBLEMA NEL FORMATO SCELTO (SE NECESSARIO)

2) TROVIAMO X_{RC} (OTTIMO DEL R.C.) E CALCOLIAMO $\tilde{A} = A_B^{-1} A_N$

3) INDIVIDUIAMO UNA COMPONENTE NON INTERA IN X_{RC}.
SE NON C'È SIAMO ALL'OTTIMO E CI SI FERMA!

4) CALCOLO IL PIANO DI TAGLIO INDICATO NEL TEOREMA

5) INCLUDO IL NUOVO VINCOLO NEL R.C. DEL PROBLEMA, TROVO X_{RC}
E TORNO AL PUNTO (3)

PARTE FRAZIONARIA $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$ CON $a \in \mathbb{R}$

ES1: $\left\{ \frac{7}{5} \right\} = \frac{2}{5}$ ES2: $\left\{ -\frac{1}{5} \right\} = \frac{4}{5}$ ES3: $\left\{ -\sqrt{2} \right\} = -\sqrt{2} - (-2) = -\sqrt{2} + 2$

TEOREMA (PIANI DI TAGLIO DI GOMORY). DATE LE COSE PRECEDENTI SI DEFINISCE PIANO DI TAGLIO DI GOMORY

$$\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j \geq \{(X_{RC})_r\}$$

"LA r-ESIMA COMPONENTE DI X_{RC}"

"LA j-ESIMA COMPONENTE DELLA r-ESIMA RIGA"

ESEMPIO INTRODUTTIVO. PRENDIAMO IL SEGUENTE X_{RC} (SOLUZIONE OTTIMA DEL R.C.)

$$X_{RC} = \left(0, 3, 0, \frac{7}{3}, 0, 0\right)$$

BANALMENTE VEDIAMO $B = \{2, 4\}$
QUINDI $N = \{1, 3, 5, 6\}$

$r = 4$ COMPONENTE r-ESIMA NON INTERA (UNICA POSSIBILE, UN SOLO PIANO DI TAGLIO DI GOMORY POSSIBILE)

$$\boxed{\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j \geq \{(X_{RC})_r\}} \implies \sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{4j}\} x_j \geq \{(X_{RC})_4\}$$

$$\{(X_{RC})_4\} = \left\{ \frac{7}{3} \right\} = \frac{1}{3}$$

$$\{\tilde{a}_{41}\} x_1 + \{\tilde{a}_{43}\} x_3 + \{\tilde{a}_{45}\} x_5 + \{\tilde{a}_{46}\} x_6 \geq \frac{1}{3}$$

DOVE $j \in N$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{25} & \tilde{a}_{26} \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{43} & \tilde{a}_{45} & \tilde{a}_{46} \end{pmatrix}$$

SI HA 2×4 E NON 4×2
PERCHÉ LAVORIAMO COL DUALE

ESEMPIO 1

PRENDIAMO IL SEGUENTE PROBLEMA (PROBLEMA DI PRODUZIONE)

$$(P) = \begin{cases} \min \ 12x_1 + 7x_2 \\ 8x_1 + 7x_2 \geq 52 \\ 6x_1 + 8x_2 \geq 41 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \\ x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \end{cases}$$

PER PRIMA COSA VOGLIAMO CALCOLARE VALUTAZIONE SUPERIORE E INFERIORE.
N.B: SIAMO IN UN PROBLEMA DI MINIMO!!!

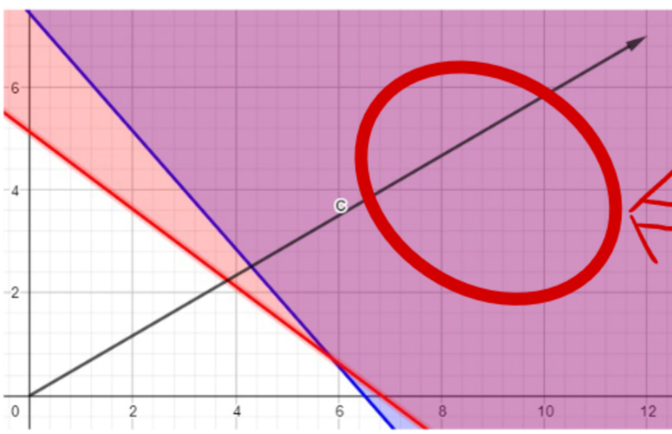
- V_I : RILASSAMENTO CONTINUO $\longrightarrow V_I = 0 + 7 \cdot \frac{52}{7} = 52$

  LA SOLUZIONE DEL RILASSAMENTO CONTINUO DI (P) É $\bar{x} = \left(0, \frac{52}{7}\right)$ $B = \{2,4\}$

- V_S: ALGORITMO GREEDY (ARROTONDO $\bar{x}$ PER ECCESSO) $\longrightarrow V_S = 0 + 7 \cdot 8 = 56$

QUINDI $\boxed{52 = V_I \leq v_{OTT} \leq 56 = V_S}$

MOTIVAZIONE PER L'ALGORITMO GREEDY SCELTO:
- COEFFICIENTI DI UN PROBLEMA DI PRODUZIONE SEMPRE POSITIVI
- SEMIPIANI DEFINITI COL $\geq$
- MINIMO



SE ARROTONDIAMO PER ECCESSO FINIAMO SICURAMENTE DENTRO LA REGIONE AMMISSIBILE

RIDUCIAMO IL GAP RICORRENDO A GOMORY. SCRIVIAMO IL DUALE STANDARD

$$(D) = \begin{cases} \min \ 12x_1 + 7x_2 \\ 8x_1 + 7x_2 - x_3 = 52 \\ 6x_1 + 8x_2 - x_4 = 41 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \\ x_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 8 & 7 & -1 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \{2,4\} \Longrightarrow A_B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_N = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \bar{x} = \left(0, \frac{52}{7}, 0, \frac{129}{7}\right) \in \mathbb{R}^4$$

COLONNE IDENTIFICATE CON INDICI $\in N$

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ 8/7 & -1 \end{pmatrix}$$

CALCOLIAMO $\tilde{A} = A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ 8/7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 3 \end{matrix} \\ & \begin{pmatrix} 8/7 & -\frac{1}{7} \\ \dots & \dots \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \end{array}$

RIGHE IDENTIFICATE CON INDICI $\in B$

POSSIBILI DUE TAGLI: $r=2$ o $r=4$. FACCIAMO $r=2$

$$\left\{\frac{8}{7}\right\}x_1 + \left\{-\frac{1}{7}\right\}x_3 \geq \left\{\frac{52}{7}\right\} \implies \frac{1}{7}x_1 + \frac{6}{7}x_3 \geq \frac{3}{7}$$

L'EQ. OTTENUTA PUÒ ESSERE INCLUSA NEL R.C. ORIGINARIO. CI ASPETTIAMO DAL CALCOLO UN V_S PIÙ VICINO A V_I (O ADDIRITTURA $V_I = V_S$, IN QUEL CASO SIAMO ALL'OTTIMO).

ESEMPIO 2

Esercizio 3. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\,x_1 + 14\,x_2 \\ 18x_1 + 8x_2 \leq 55 \\ 14x_1 + 18x_2 \leq 61 \\ x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

Calcolare una valutazione superiore ed una inferiore del valore ottimo. Calcolare un taglio di Gomory.

VALUTAZIONE SUPERIORE.

PROBLEMA DI MASSIMO, RISOLVIAMO IL RILASSAMENTO CONTINUO

$$\begin{cases} \max\ 5x_1 + 14x_2 \\ 18x_1 + 8x_2 \leq 55 \\ 14x_1 + 18x_2 \leq 61 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$\boxed{c = [-5\ -14]}$ $\qquad Aeq = [\,] \quad beq = [\,]$

RICORDARSI FORMATO LINPROG: C'È IL MIN

$A = [18\ \ 8;\ 14\ \ 18] \qquad b = [55;61]$

RICORDARSI DI CAMBIARE SEGNO A v RESTITUITO DA LINPROG

$LB = [0\ \ 0] \qquad UB = [\,]$

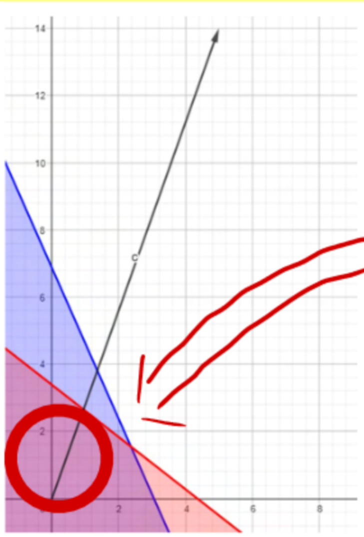
ARROTONDO PER DIFETTO

$$\implies \bar{x} = \left(0 \quad \frac{61}{18}\right) \qquad V_S = \frac{427}{9} \approx 47$$

VALUTAZIONE INFERIORE.

ADOTTIAMO UNA VARIANTE DELL'ALGORITMO GREEDY VISTO COI PROBLEMI DI PRODUZIONE

- COEFFICIENTI POSITIVI
- SEMIPIANI DEFINITI COL $\leq$
- MASSIMO



SE ARROTONDIAMO PER DIFETTO FINIAMO SICURAMENTE DENTRO LA REGIONE AMMISSIBILE

QUINDI: ARROTONDO PER DIFETTO $\bar{x}$ DELLA VALUTAZIONE SUPERIORE

$$\bar{x} = (0 \quad 3) \implies V_I = 42$$

APPLICHIAMO I TAGLI DI GOMORY. PER PRIMA COSA RICORDIAMO IL FORMATO

$$(P) = \begin{cases} \min \; c \cdot x \\ A \cdot x = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^m \end{cases}$$

PONIAMO IL PROBLEMA NEL FORMATO INTRODOTTO

$$\begin{cases} \max \; 5x_1 + 14x_2 \\ 18x_1 + 8x_2 \leq 55 \\ 14x_1 + 18x_2 \leq 61 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow (PD) = \begin{cases} \min \; -5x_1 - 14x_2 \\ 18x_1 + 8x_2 + x_3 = 55 \\ 14x_1 + 18x_2 + x_4 = 61 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 18 & 8 & 1 & 0 \\ 14 & 18 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

TROVIAMO L'OTTIMO CON MATLAB $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 61/18 & 251/9 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \{2,3\}$!!!

CALCOLO

$$A_B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 18 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_N = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 14 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_B) = -18$$

$$A_B^{-1} = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -18 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/18 \\ 1 & -4/9 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \tilde{A} = A_B^{-1} A_N = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 1 & 4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 7/9 & 1/18 \\ \frac{106}{9} & -4/9 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

POSSIBILE UN TAGLIO A SCELTA TRA $r = 2$ E $r = 3$

$$\boxed{\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j \geq \{(x_{RC})_r\}}$$

$r = 2$

$$\{7/9\} x_1 + \{1/18\} x_4 \geq \{61/18\}$$

$$7/9 \, x_1 + 1/18 \, x_4 \geq 7/18$$

$$14x_1 + x_4 \geq 7$$

$$\cancel{14x_1} + 61 - \cancel{14x_1} - 18x_2 \geq 7$$

$$-18x_2 \geq -54 \longrightarrow 3x_2 \leq 18 \longrightarrow \boxed{x_2 \leq 6}$$

$r = 3$

$$\left\{\frac{106}{9}\right\} x_1 + \left\{-\frac{4}{9}\right\} x_4 \geq \left\{\frac{251}{9}\right\}$$

$$\frac{7}{9} x_1 + \frac{5}{9} x_4 \geq \frac{8}{9}$$

$$7x_1 + 5x_4 \geq 8$$

$$\boxed{7x_1 + 10x_2 \leq 33}$$

$$7x_1 + 5(61 - 14x_1 - 18x_2) \geq 8$$

$$-63x_1 - 90x_2 \geq -297 \longrightarrow -7x_1 - 10x_2 \geq -33$$

ESEMPIO 3

Esercizio 6. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 9\,x_1 + 6\,x_2 \\ 9\,x_1 + 5\,x_2 \le 65 \\ 6\,x_1 + 8\,x_2 \le 61 \\ x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

Calcolare una valutazione superiore ed una inferiore del valore ottimo. Calcolare un taglio di Gomory.

VALUTAZIONE SUPERIORE.

PROBLEMA DI MASSIMO, RISOLVIAMO IL RILASSAMENTO CONTINUO

$$\begin{cases} \max\ 9x_1 + 6x_2 \\ 9x_1 + 5x_2 \le 65 \\ 6x_1 + 8x_2 \le 61 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

RICORDARSI FORMATO LINPROG ← $\boxed{c = [-9 \quad -6]}$ $\qquad A_{eq} = [\,] \quad b_{eq} = [\,]$

$A = [9 \quad 5\ ;\ 6 \quad 8] \qquad b = [65\ ;\ 61]$

$LB = [0 \quad 0] \qquad UB = [\,]$

ARROTONDO PER DIFETTO

$$\Longrightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{215}{42} & \frac{53}{14} \end{pmatrix} \qquad V_S = \frac{963}{14} \approx 68$$

VALUTAZIONE INFERIORE.

ARROTONDO PER DIFETTO $\bar{x}$ DELLA VALUTAZIONE SUPERIORE

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow V_I = 63$$

APPLICHIAMO I TAGLI DI GOMORY.

PONIAMO IL PROBLEMA NEL FORMATO INTRODOTTO

$$\begin{cases} \max\ 9x_1 + 6x_2 \\ 9x_1 + 5x_2 \le 65 \\ 6x_1 + 8x_2 \le 61 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \min\ -9x_1 - 6x_2 \\ 9x_1 + 5x_2 + x_3 = 65 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_4 = 61 \\ x_1 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \quad x_4 \ge 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TROVIAMO L'OTTIMO CON MATLAB $x_{RC} = \begin{pmatrix} \frac{215}{42} & \frac{53}{14} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \{1,2\}$!!!

CALCOLO $\quad A_B = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_B^{-1} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/21 & -5/42 \\ -1/7 & 3/14 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = A_B^{-1} A_N = A_B^{-1} I = A_B^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 4/21 & -5/42 \\ -1/7 & 3/14 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

POSSIBILE UN TAGLIO A SCELTA TRA $r=1$ E $r=2$

$$X_3 = 65 - 9X_1 - 5X_2$$
$$X_4 = 61 - 6X_1 - 8X_2$$

$r = 1$

$$\left\{\frac{4}{21}\right\} X_3 + \left\{-\frac{5}{42}\right\} X_4 \geq \left\{\frac{215}{42}\right\}$$

$$\frac{4}{21} X_3 + \frac{37}{42} X_4 \geq \frac{5}{42}$$

$$8 X_3 + 37 X_4 \geq 5$$

$$8(65 - 9X_1 - 5X_2) + 37(61 - 6X_1 - 8X_2) \geq 5$$

$$-294 X_1 - 336 X_2 \geq -2772$$
$$-98 X_1 - 112 X_2 \geq -924$$
$$-14 X_1 - 16 X_2 \geq -132$$
$$-7X_1 - 8X_2 \geq -66 \longrightarrow \boxed{7X_1 + 8X_2 \leq 66}$$

$r=2$

$$\left\{-\frac{1}{7}\right\} X_3 + \left\{\frac{3}{14}\right\} X_4 \geq \left\{\frac{53}{14}\right\}$$

$$\frac{6}{7} X_3 + \frac{3}{14} X_4 \geq \frac{11}{14}$$

$$12 X_3 + 3 X_4 \geq 11$$

$$12(65 - 9X_1 - 5X_2) + 3(61 - 6X_1 - 8X_2) \geq 11$$

$$-126 X_1 - 84 X_2 \geq -952$$
$$-18 X_1 - 12 X_2 \geq -136$$
$$-9X_1 - 6X_2 \geq -68 \longrightarrow \boxed{9X_1 + 6X_2 \leq 68}$$

ESEMPIO 4

Esercizio 5. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 10\,x_1 + 7\,x_2 \\ 9\,x_1 + 8\,x_2 \geq 52 \\ 18\,x_1 + 6\,x_2 \geq 59 \\ x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

Calcolare una valutazione inferiore ed una valutazione superiore. Calcolare un taglio di Gomory.

VALUTAZIONE INFERIORE. PROBLEMA DI MINIMO, RISOLVIAMO IL RILASSAMENTO CONTINUO

$$\begin{cases} \min\ 10x_1 + 7x_2 \\ 9x_1 + 8x_2 \geq 52 \\ 18x_1 + 6x_2 \geq 59 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$c = [10 \quad 7]$ $\qquad$ $Aeq = [\,]$ $\quad$ $beq = [\,]$

ATTENZIONE AL $\leq$ NEL FORMATO LINPROG

$\boxed{A = [-9 \quad -8\ ; -18 \quad -6\,]}$ $\quad$ $b = [-52\ ; -59]$

$LB = [0 \quad 0]$ $\qquad$ $UB = [\,]$

ARROTONDO PER ECCESSO

$\Longrightarrow \bar{x} = \left(\frac{16}{9} \quad \frac{9}{2}\right)$ $\qquad$ $v_I = \frac{887}{18} \approx 50$

VALUTAZIONE SUPERIORE. ARROTONDO PER ECCESSO $\bar{x}$ DELLA VALUTAZIONE INFERIORE

$\bar{x} = (2 \quad 5) \Longrightarrow V_S = 55$

APPLICHIAMO I TAGLI DI GOMORY.

PONIAMO IL PROBLEMA NEL FORMATO INTRODOTTO

ATTENZIONE AL SEGNO DI x_3 E x_4 (ABBIAMO IL $\geq$)

$$\begin{cases} \min\ 10x_1 + 7x_2 \\ 9x_1 + 8x_2 \geq 52 \\ 18x_1 + 6x_2 \geq 59 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \min\ 10x_1 + 7x_2 \\ 9x_1 + 8x_2 \boxed{-} x_3 = 52 \\ 18x_1 + 6x_2 \boxed{-} x_4 = 59 \\ x_1 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & -1 & 0 \\ 18 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

TROVIAMO L'OTTIMO CON MATLAB $x_{RC} = \left(\frac{16}{9} \quad \frac{9}{2} \quad 0 \quad 0\right)$ $\qquad$ $B = \{1, 2\}$!!!

CALCOLO $A_B = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad$ $A_N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A_B^{-1} = \frac{1}{-90}\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -18 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/15 & 4/45 \\ 1/5 & -1/10 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = A_B^{-1} A_N = -A_B^{-1} I = -A_B^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1/15 & -4/45 \\ -1/5 & 1/10 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

POSSIBILE UN TAGLIO A SCELTA TRA $r = 1$ E $r = 2$

$$\boxed{\begin{aligned} x_3 &= -52 + 9x_1 + 8x_2 \\ x_4 &= -59 + 18x_1 + 6x_2 \end{aligned}}$$

$r = 1$

$$\left\{\tfrac{1}{15}\right\} x_3 + \left\{-\tfrac{4}{45}\right\} x_4 \geq \left\{\tfrac{16}{9}\right\}$$

$$\tfrac{1}{15} x_3 + \tfrac{41}{45} x_4 \geq \tfrac{7}{9}$$

$$3x_3 + 41x_4 \geq 35$$

$$3(-52 + 9x_1 + 8x_2) + 41(-59 + 18x_1 + 6x_2) \geq 35$$

$$765x_1 + 270x_2 \geq 2610$$

$$255x_1 + 90x_2 \geq 870$$

$$85x_1 + 30x_2 \geq 290$$

$$\boxed{17x_1 + 6x_2 \geq 58}$$

$r = 2$

$$\left\{-\tfrac{1}{5}\right\} x_3 + \left\{\tfrac{1}{10}\right\} x_4 \geq \left\{\tfrac{9}{2}\right\}$$

$$\tfrac{4}{5} x_3 + \tfrac{1}{10} x_4 \geq \tfrac{1}{2}$$

$$8x_3 + x_4 \geq 5$$

$$8(-52 + 9x_1 + 8x_2) - 59 + 18x_1 + 6x_2 \geq 5$$

$$90x_1 + 70x_2 \geq 480$$

$$18x_1 + 14x_2 \geq 96$$

$$\boxed{9x_1 + 7x_2 \geq 48}$$

ESEMPIO 5

Esercizio 10. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 14\,x_1 + 8\,x_2 \\ 11\,x_1 + 13\,x_2 \leq 46 \\ 13\,x_1 + 11\,x_2 \leq 45 \\ x_i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

Calcolare una valutazione superiore ed una inferiore. Calcolare un taglio di Gomory.

VALUTAZIONE SUPERIORE. PROBLEMA DI MASSIMO, RISOLVIAMO IL RILASSAMENTO CONTINUO

$$\begin{cases} \max\ 14x_1 + 8x_2 \\ 11x_1 + 13x_2 \leq 46 \\ 13x_1 + 11x_2 \leq 45 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

RICORDARSI FORMATO LINPROG ← $\boxed{c = [-14\ \ -8]}$ $\quad Aeq = [\,]\quad beq = [\,]$

$A = [11\ \ 13\ ;\ 13\ \ 11] \quad b = [46\ ;45]$

$LB = [0\ \ 0] \quad UB = [\,]$

$$\Longrightarrow \quad \bar{x} = \left(\tfrac{45}{13}\ \ 0\right) \qquad v_S = \tfrac{630}{13} \approx 48$$

VALUTAZIONE INFERIORE. ARROTONDO PER DIFETTO $\bar{x}$ DELLA VALUTAZIONE SUPERIORE

$$\bar{x} = (3\ \ 0) \quad \Longrightarrow \quad v_I = 42$$

APPLICHIAMO I TAGLI DI GOMORY.

PONIAMO IL PROBLEMA NEL FORMATO INTRODOTTO

$$\begin{cases} \max\ 14x_1 + 8x_2 \\ 11x_1 + 13x_2 \leq 46 \\ 13x_1 + 11x_2 \leq 45 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \min\ -14x_1 - 8x_2 \\ 11x_1 + 13x_2 + x_3 = 46 \\ 13x_1 + 11x_2 + x_4 = 45 \\ x_1 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \qquad x_4 \geq 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 1 & 0 \\ 13 & 11 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TROVIAMO L'OTTIMO CON MATLAB $x_{RC} = \left(\tfrac{45}{13}\ \ 0\ \ \tfrac{103}{13}\ \ 0\right)$ $\quad B = \{1, 3\}$!!!

CALCOLO $\quad A_B = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \quad A_N = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_B^{-1} = \frac{1}{-13}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -13 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/13 \\ 1 & -\tfrac{11}{13} \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = A_B^{-1}A_N = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 2 & 4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -11/13 & 1/13 \\ 48/13 & -11/13 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

POSSIBILE UN TAGLIO A SCELTA TRA $r = 1$ E $r = 3$

$r = 1$

$$\left\{\frac{11}{13}\right\} x_2 + \left\{\frac{1}{13}\right\} x_4 \geq \left\{\frac{45}{13}\right\}$$

$$\boxed{x_4 = 45 - 13x_1 - 11x_2}$$

$$\frac{11}{13} x_2 + \frac{1}{13} x_4 \geq \frac{6}{13}$$

$$11 x_2 + x_4 \geq 6$$

$$\cancel{11x_2} + 45 - 13x_1 \cancel{- 11x_2} \geq 6$$

$$-13 x_1 \geq -39 \longrightarrow \boxed{x_1 \leq 3}$$

$r = 3$

$$\left\{\frac{48}{13}\right\} x_2 + \left\{-\frac{11}{13}\right\} x_4 \geq \left\{\frac{103}{13}\right\}$$

$$\frac{9 x_2}{13} + \frac{2 x_4}{13} \geq \frac{12}{13}$$

$$9 x_2 + 2 x_4 \geq 12$$

$$9 x_2 + 2\left(45 - 13x_1 - 11x_2\right) \geq 12$$

$$-26 x_1 - 13 x_2 \geq -78$$

$$-2 x_1 - x_2 \geq -6 \longrightarrow \boxed{2 x_1 + x_2 \leq 6}$$

ESEMPIO 6

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\,x_1 + 14\,x_2 \\ 9\,x_1 + 5\,x_2 \le 48 \\ 8\,x_1 + 9\,x_2 \le 52 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in Z \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento =	$v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile =	$v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$	taglio:

VALUTAZIONE SUPERIORE. RISOLVO CON MATLAB

$c = [-10 \ \ -14]$ $\quad Aeq = [\,]$ $\quad beq = [\,]$

$A = [9 \ \ 5;\ 8 \ \ 9]$ $\quad b = [48;\ 52]$

$LB = [0 \ \ 0]$ $\quad UB = [\,]$

$\Longrightarrow x = \left(0 \ \ \frac{52}{9}\right) \qquad V_S = \frac{728}{9} \approx 80$

VALUTAZIONE INFERIORE. ARROTONDO PER DIFETTO $\bar{x}$ DELLA VALUTAZIONE SUPERIORE

$\bar{x} = (0 \ \ 5) \Longrightarrow V_I = 70$

APPLICHIAMO I TAGLI DI GOMORY.

PONIAMO IL PROBLEMA NEL FORMATO INTRODOTTO

$$\begin{cases} \max\ 10x_1 + 14x_2 \\ 9x_1 + 5x_2 \le 48 \\ 8x_1 + 9x_2 \le 52 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \min\ -10x_1 - 14x_2 \\ 9x_1 + 5x_2 + x_3 = 48 \\ 8x_1 + 9x_2 + x_4 = 52 \\ x_1 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \quad x_4 \ge 0 \end{cases} \qquad A = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 9 & 5 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

TROVIAMO L'OTTIMO CON MATLAB $x_{RC} = \left(0 \ \ \frac{52}{9} \ \ \frac{172}{9} \ \ 0\right)$ $\quad B = \{2, 3\}$!!!

CALCOLO $A_B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \quad A_N = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_B^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{9} \\ 1 & -\frac{5}{9} \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = A_B^{-1} A_N = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & \quad 4 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{41}{9} & -\frac{5}{9} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$

POSSIBILE UN TAGLIO A SCELTA TRA $r=2$ E $r=3$

$r=2$

$$\left\{\frac{8}{9}\right\}x_1 + \left\{\frac{1}{9}\right\}x_4 \geq \left\{\frac{52}{9}\right\}$$

$$\boxed{x_4 = 52 - 8x_1 - 9x_2}$$

$$\frac{8}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_4 \geq \frac{7}{9}$$

$$8x_1 + x_4 \geq 7$$
$$\cancel{8x_1} + 52 - \cancel{8x_1} - 9x_2 \geq 7$$
$$-9x_2 \geq -45 \longrightarrow \boxed{x_2 \leq 5}$$

$r=3$

$$\left\{\frac{41}{9}\right\}x_1 + \left\{-\frac{5}{9}\right\}x_4 \geq \left\{\frac{172}{9}\right\}$$

$$\frac{5}{9}x_1 + \frac{4}{9}x_4 \geq \frac{1}{9}$$

$$5x_1 + 4x_4 \geq 1$$

$$5x_1 + 4(52 - 8x_1 - 9x_2) \geq 1$$

$$-27x_1 - 36x_2 \geq -207$$
$$-9x_1 - 12x_2 \geq -69$$
$$-3x_1 - 4x_2 \geq -23$$

$$\boxed{3x_1 + 4x_2 \leq 23}$$

"BRANCH AND BOUND" (METODO DI RIDUZIONE DEL GAP)

"POTARE L'ALBERO" $\qquad < V_I, V_S >$

PROBLEMA DI MINIMO

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE PROBLEMA DI PLI

$$(P) = \begin{cases} \min \ cx \\ Ax = b \\ x \in \{0,1\}^n \end{cases}$$

PROBLEMA BINARIO

ES: TSP SIMMETRICO

RILASSAMENTO $\rightarrow V_I(P)$

METODO GREEDY $\rightarrow V_S(P)$

ABBIAMO A DISPOSIZIONE LE VALUTAZIONI $V_I(P)$ e $V_S(P)$. IL "BRANCH AND BOUND" SI BASA SU UNA "ESPLORAZIONE EFFICIENTE DELL'ALBERO DI ENUMERAZIONE TOTALE".

L'ALBERO DI ENUMERAZIONE TOTALE

CON L'ALBERO DI ENUMERAZIONE TOTALE RAPPRESENTIAMO I VALORI CHE OGNI COMPONENTE DEL VETTORE $\bar{x}$ PUÒ ASSUMERE. CONSIDERIAMO COME ESEMPIO IL SEGUENTE PROBLEMA

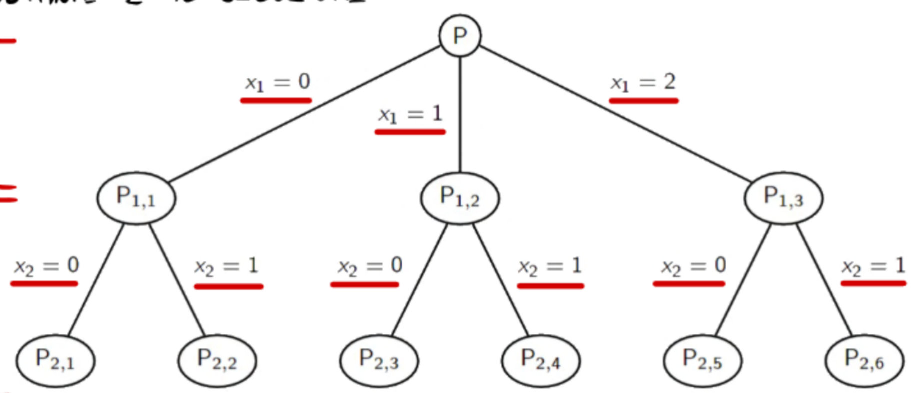
$$(P) = \begin{cases} \max \ 5x_1 + 6x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases} \longrightarrow$$

OSSERVIAMO DAL VINCOLO CHE $x_1 \in \{0,1,2\}$ $\quad x_2 \in \{0,1\}$

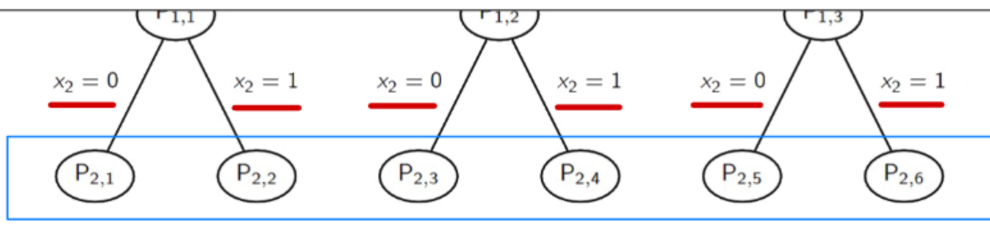
L'ALBERO RISULTANTE È IL SEGUENTE

VALORI CHE PUÒ ASSUMERE X_1

VALORI CHE PUÒ ASSUMERE X_2



- OGNI LIVELLO DELL'ALBERO RAPPRESENTA UNA VARIABILE X_k
- SI PARTE CON LA RADICE, CHE RAPPRESENTA X_1. TRE ARCHI CON CUI RAPPRESENTO I VALORI CHE X_1 PUÒ ASSUMERE: $X_1 = 0$, $X_1 = 1$, $X_1 = 2$
- NEL LIVELLO INFERIORE RAPPRESENTIAMO X_2 CON UN NUMERO MAGGIORE DI NODI E ARCHI: SI TIENE CONTO IN OGNI NODO/ARCO DI UN DETERMINATO VALORE ASSUNTO DA X_1. PER QUANTO RIGUARDA GLI ARCHI NE ABBIAMO DUE PER NODO: UNO RAPPRESENTA $X_2 = 0$, L'ALTRO $X_2 = 1$



- LE FOGLIE DELL'ALBERO RAPPRESENTANO LE POSSIBILI SOLUZIONI:

$P_{2,1}$:	$x_1 = 0,\ x_2 = 0$	AMMISSIBILE	$v = 0 + 0 = 0$
$P_{2,2}$:	$x_1 = 0,\ x_2 = 1$	AMMISSIBILE	$v = 0 + 6 \cdot 1 = 6$
$P_{2,3}$:	$x_1 = 1,\ x_2 = 0$	AMMISSIBILE	$v = 5 \cdot 1 + 0 = 5$
$P_{2,4}$:	$x_1 = 1,\ x_2 = 1$	AMMISSIBILE	$v = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 11 \rightarrow$ OTTIMO
$P_{2,5}$:	$x_1 = 2,\ x_2 = 0$	AMMISSIBILE	$v = 5 \cdot 2 + 0 = 10$
$P_{2,6}$:	$x_1 = 2,\ x_2 = 1$	NON AMMISSIBILE	

$$(P) = \begin{cases} \max\ 5x_1 + 6x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

SOSTITUISCO x_1 E x_2 NEL VINCOLO E VERIFICO CHE QUESTO SIA RISPETTATO

CALCOLO I VALORI DELLA FUNZIONE OBIETTIVO E INDIVIDUO L'OTTIMO

IL VALORE DELLE FOGLIE È IL VALORE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO.

IL SOTTOPROBLEMA $P_{i,j}$

ABBIAMO VISTO IL PROBLEMA P INTRODUCENDO L'ALBERO DI ENUMERAZIONE TOTALE. $P_{i,j}$ È UN SOTTOPROBLEMA DI (P) DOVE PONIAMO ALCUNE VARIABILI UGUALI A ZERO O 1 (RITORNIAMO NEL CONTESTO BINARIO INTRODOTTO INIZIALMENTE):

- i INDICA IL NUMERO DI VARIABILI ISTANZIATE
- j DETERMINA COME ABBIAMO ISTANZIATO LE VARIABILI

NUOVI VINCOLI!

ESEMPI. $P_{1,1}$: SOTTOPROBLEMA DOVE $x_1 = 0$ E x_2 DA DETERMINARE
$P_{1,2}$: SOTTOPROBLEMA DOVE $x_1 = 1$ E x_2 DA DETERMINARE

ALGORITMO (INEFFICIENTE) DI ENUMERAZIONE TOTALE

UNO POTREBBE PENSARE COME ALGORITMO DI VISITARE TUTTO L'ALBERO FINO ALLE FOGLIE, VERIFICANDO AMMISSIBILITÀ E VALORE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO PER OGNI SINGOLA SOLUZIONE (COME ABBIAMO FATTO PRIMA).

L'ALGORITMO È POSSIBILE, MA ALTAMENTE INEFFICIENTE: IL NUMERO DI NODI DA VISITARE CRESCE ESPONENZIALMENTE, ALL'AUMENTARE DEL NUMERO DI VARIABILI.

IL NUMERO DI NODI IN UN ALBERO BINARIO È 2^h, DOVE h È IL NUMERO DI LIVELLI E QUINDI DI VARIABILI CONSIDERATE.

RICORDIAMO (SI VEDA SEZ. DISPENSA SUL TSP):

$V_I(P_{ij})$: "K-ALBERO DI COSTO MINIMO IN CUI PRENDO L'ARCO ENTRANTE NEL NODO P_{ij}"

$V(P_{ij})$: "CICLO HAMILTONIANO DI COSTO MINIMO IN CUI PRENDO L'ARCO..."

L'ALGORITMO E LE REGOLE DI TAGLIO

"BRANCH" ⟶ POTARE / TOGLIERE RAMI

L'IDEA ALLA BASE DEL BRANCH AND BOUND È DI "TAGLIARE" RAMI DELL'ALBERO (COME UN ALBERO VERO!). ATTRAVERSO DELLE "REGOLE DI TAGLIO" INDIVIDUEREMO QUALI RAMI TAGLIARE: SI PARLA DI "VISITA IMPLICITA DEL RAMO" IN QUANTO QUESTE REGOLE CI DARANNO CERTEZZA CHE IN QUEL RAMO NON SIA PRESENTE L'OTTIMO SENZA VISITARLO.

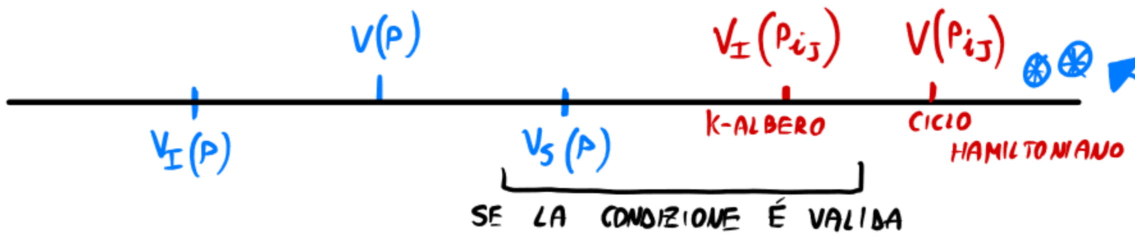
SICURAMENTE PIÙ IN ALTO TAGLIAMO, PIÙ SIAMO FELICI (L'APICE È LA RADICE)!

↓

SCARTIAMO UN MAGGIOR NUMERO DI SOLUZIONI

1) $P_{ij} = \emptyset$ L'ISTANZIAMENTO DI ALCUNE VARIABILI CREA UNA SITUAZIONE DI INAMMISSIBILITÀ DEFINITIVA (SOLUZIONE INAMMISSIBILE AL DI LÀ DI COME ISTANZIERÒ LE VARIABILI RIMASTE).

2) SE $\underbrace{V_I(P_{ij})}_{\text{LA CALCOLO AD OGNI STEP.}} \geq V_S(P)$ ALLORA TAGLIO! ABBIAMO VISTO CHE IN PLI $V_I(P) \leq V(P) \leq V_S(P)$



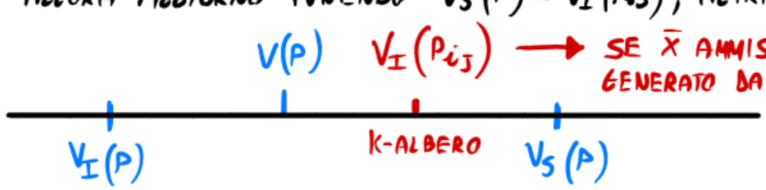
SI CONSIDERI CHE LA REGIONE AMMISSIBILE SI RESTRINGE ISTANZIANDO NUOVE VARIABILI (ABBIAMO INTRODOTTO NUOVI VINCOLI), $V_I(P_{ij})$ AUMENTA E PUÒ SCAVALCARE $V_S(P)$.

OTTIMO VS VALUTAZ. INFERIORE

$V(P_{ij}) > V_I(P_{ij})$ OVVIAMENTE (CICLO HAMILTONIANO VS K-ALBERO)

SE ISTANZIO ULTERIORI VARIABILI TROVO VALORI OTTIMI $> V(P_{ij})$ QUINDI QUESTI VALORI SONO $> V_S(P)$. IL MINIMO NON È QUA.

3) SE $V_I(P_{ij}) < V_S(P)$ E IL VETTORE $\bar{x}$ DA CUI OTTENGO $V_I(P_{ij})$ È AMMISSIBILE ALLORA AGGIORNO PONENDO $V_S(P) = V_I(P_{ij})$, ALTRIMENTI TAGLIO.



⟶ SE $\bar{x}$ AMMISSIBILE ALLORA $V_I(P_{ij})$ È GENERATO DA UN CICLO HAMILTONIANO, ABBIAMO TROVATO UNA SOLUZIONE MIGLIORE DI $V_S(P)$ POICHÉ $V_I(P_{ij}) < V_S(P)$

CRITERIO DI TERMINAZIONE: ABBIAMO FINITO DOPO AVER POTATO IL POTABILE, LA SOLUZIONE OTTIMA È DATA DA $V_S(P)$

PROBLEMA DI MASSIMO

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE PROBLEMA DI PLI

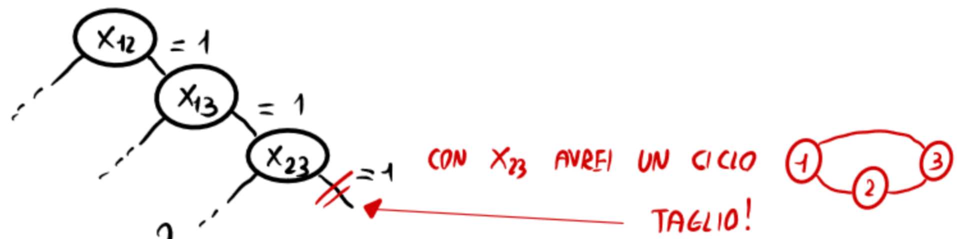
$$(P) = \begin{cases} \max cx \\ Ax = b \\ x \in \{0,1\}^n \end{cases}$$ PROBLEMA BINARIO

METODO GREEDY $\downarrow$ RILASSAMENTO $\downarrow$

ANCHE QUA ABBIAMO A DISPOSIZIONE LE VALUTAZIONI $V_I(P)$ E $V_S(P)$.

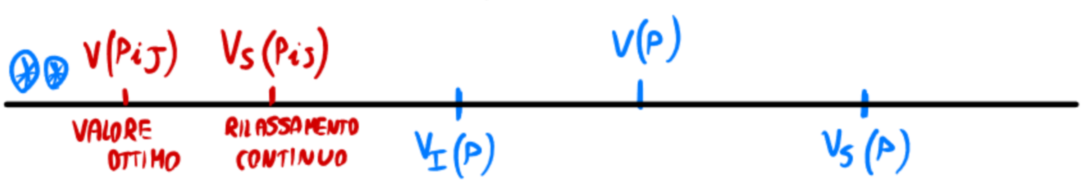
1) $P_{ij} = \emptyset$ L'ISTANZIAMENTO DI ALCUNE VARIABILI CREA UNA SITUAZIONE DI INAMMISSIBILITÀ DEFINITIVA (SOLUZIONE INAMMISSIBILE AL DI LÀ DI COME ISTANZIERÒ LE VARIABILI RIMASTE).

ESEMPIO: PRESENZA DI UN SOTTOCICLO (SI VIOLA IL CONCETTO DI TSP)



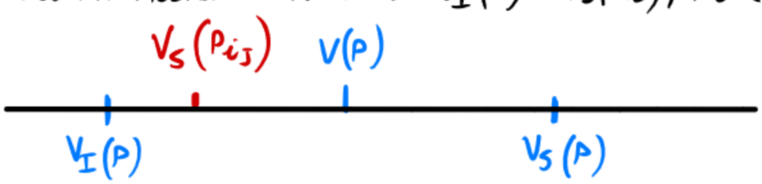
NON ME NE ACCORGO?
MI ACCORGERÒ APPLICANDO LE ALTRE REGOLE DI TAGLIO.

2) SE $\underbrace{V_S(P_{ij})}_{\text{LA CALCOLO AD OGNI STEP.}} \leq V_I(P)$ ALLORA TAGLIO! ABBIAMO VISTO CHE IN PLI $V_I(P) \leq V(P) \leq V_S(P)$



STESSI RAGIONAMENTI, IMPONENDO ULTERIORI ISTANZIAMENTI LA REGIONE SI RESTRINGE: I VALORI DELLE SOLUZIONI SARANNO $< V(P_{ij})$ E QUINDI $< V_I(P)$. NON HO L'OTTIMO. (*) (*)

3) SE $V_S(P_{ij}) > V_I(P)$ E IL VETTORE $\bar{x}$ DA CUI OTTENGO $V_S(P_{ij})$ È AMMISSIBILE ALLORA AGGIORNO PONENDO $V_I(P) = V_S(P_{ij})$, ALTRIMENTI TAGLIO.



COME PRIMA OTTENGO UNA SOLUZIONE MIGLIORE, AGGIORNO $V_I(P)$ E CONSIDERO QUESTO VALORE NEGLI STEP SUCCESSIVI, ALTRIMENTI TAGLIO.

CRITERIO DI TERMINAZIONE: ABBIAMO FINITO DOPO AVER POTATO IL POTABILE, LA SOLUZIONE OTTIMA È DATA DA $V_I(P)$

ESEMPIO INTRODUTTIVO (TSP SIMMETRICO)

CONSIDERIAMO LA SEGUENTE TABELLA DEI COSTI

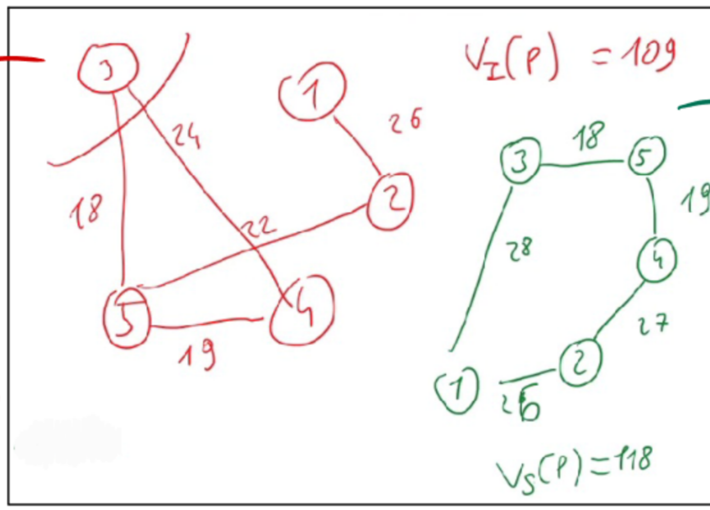
	2	3	4	5
1	26	28	32	36
2		31	27	22
3			24	18
4				19

3-ALBERO, NODO PIÙ VICINO DA 3. APPLICHIAMO IL BRANCH AND BOUND ISTANZIANDO x_{35}

- VALUTAZIONE INFERIORE E SUPERIORE.
  COSTRUIAMO LE VALUTAZIONI NEI MODI VISTI PER IL TSP SIMMETRICO.

COSTRUISCO IL 3-ALBERO APPLICANDO KRUSKAL E COLLEGANDO IL NODO 3 CON I DUE ARCHI DI COSTO MINIMO

$V_I(P) = 109$



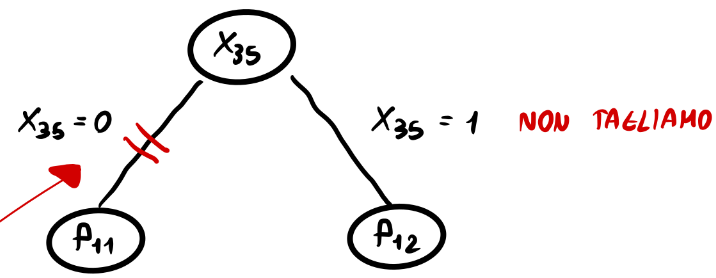
APPLICO L'ALGORITMO DEL NODO PIÙ VICINO PARTENDO DAL NODO 3 ⇒

$V_S(P) = 118$

- DISEGNO I NODI SENZA ARCHI, ISOLANDO IL NODO 3.
- SCORRO GLI ARCHI PARTENDO DA QUELLO DI COSTO MINIMO, E LI INCLUDO NEL DISEGNO SOLO SE PERMETTONO COLLEGAMENTI TRA NODI NON ANCORA COLLEGATI. IGNORO GLI ARCHI RELATIVI AL NODO 3.
- MI FERMO QUANDO TUTTI I NODI (TRANNE IL 3) SONO COLLEGATI
- COLLEGO IL NODO 3 PONENDO, TRA GLI ARCHI RELATIVI AL NODO 3, I DUE DI COSTO MINORE (IN QUESTO CASO 18 E 24).

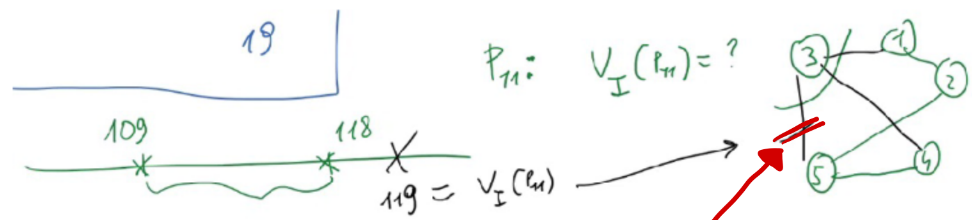
- PARTO DAL NODO 3
- OGNI VOLTA PASSO AL NODO PIÙ VICINO: PRENDO GLI ARCHI RELATIVI AL NODO CORRENTE E ATTRAVERSO QUELLO DI COSTO MINORE.
- NON RITORNO NEI NODI GIÀ VISITATI, TRANNE ALLA FINE (NODI TUTTI VISITATI, SI RITORNA AL NODO DI PARTENZA).

- COSTRUIAMO L'ALBERO PARTENDO DA X_{35} E APPLICHIAMO LE REGOLE DI TAGLIO



P_{11} : "3-ALBERO DI COSTO MINIMO DOVE L'ARCO ENTRANTE IN P_{11} NON PUÓ ESSERE CONSIDERATO"

DISEGNO IL K-ALBERO NEI MODI APPENA VISTI, IGNORANDO L'ARCO DETTO



OTTENIAMO

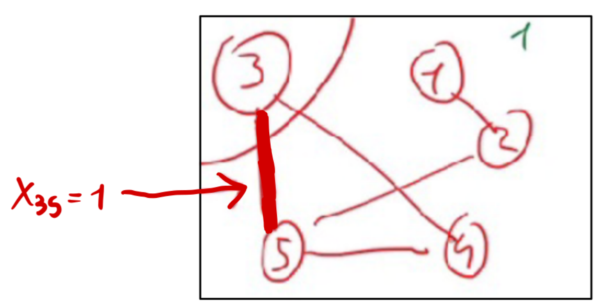
$V_I(P_{11}) = 119 > V_S(P) = 118$

TAGLIO (SI APPLICA LA REGOLA 2)

A SITUAZIONE NORMALE LO AVREI INCLUSO (NEL COLLEGARE IL NODO 3 A QUANTO OTTENUTO CON KRUSKAL), IN QUESTO CASO LO IGNORO E PASSO A CONSIDERARE L'ARCO SUCCESSIVO.

P_{12} : "3-ALBERO DI COSTO MINIMO DOVE L'ARCO ENTRANTE IN P_{12} DEVE ESSERE CONSIDERATO".

RIAPPLICO L'ALGORITMO COME PRIMA: KRUSKAL MI RESTITUISCE LO STESSO OUTPUT. NEL COLLEGARE IL NODO 3 IMPONGO LA PRESENZA DELL'ARCO



OTTENIAMO $V_I(P_{12}) = 109$

→ NON É SODDISFATTA LA REGOLA 2 POICHÉ $V_I(P_{12}) = 109 < V_S(P) = 118$

→ NON E SODDISFATTA LA REGOLA 3 PERCHÉ NON SI HA UN CICLO HAMILTONIANO. ⟹ NON SI TAGLIA

VINCOLO DI GRADO DEL NODO 5 NON SODDISFATTO

ESEMPIO 1 (ZAINO)

PRENDIAMO IL SEGUENTE PROBLEMA

$$\begin{cases} \max \ 5x_1+7x_2+4x_3+9x_4+11x_5 \\ 11x_1+13x_2+9x_3+16x_4+19x_5 \leq 37 \\ x \in \{0,1\}^5 \end{cases}$$

CALCOLIAMO IL VETTORE DEI RENDIMENTI

$$\bar{r} = \left(\frac{5}{11}, \frac{7}{13}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{11}{19}\right) = (\overset{4°}{0.45}, \overset{3°}{0.53}, \overset{5°}{0.44}, \overset{2°}{0.56}, \overset{1°}{0.57})$$

CON I METODI INTRODOTTI CALCOLIAMO V_I E V_S

$V_I(P) = 20 \longleftarrow \bar{x} = (0, 0, 0, 1, 1)$

3) 2) 1)

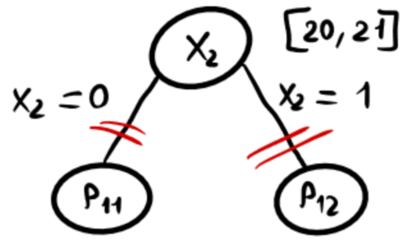
1) PARTO DAL BENE DI MASSIMO RENDIMENTO SE LA CAPACITÁ É SUFFICIENTE A CONTENERLO LO METTO NEL CONTENITORE ($x_K = 1$)
2) CONSIDERO GLI OGGETTI DI RENDIMENTO MINORE E MI PONGO LA STESSA DOMANDA.
3) PONGO SOLTANTO GLI OGGETTI CHE POSSONO ESSERE POSTI INTERAMENTE NEL CONTENITORE. SE QUALCOSA NON PUÓ ESSERE POSTO LO SCARTO E PASSO AGLI OGGETTI DI RENDIMENTO MINORE.

3) 2) 1)

$\bar{x} = (0, \frac{2}{13}, 0, 1, 1) \longrightarrow V_S(P) = 21$

1) PARTO DAL BENE DI MASSIMO RENDIMENTO SE LA CAPACITÁ É SUFFICIENTE A CONTENERLO LO METTO NEL CONTENITORE ($x_K = 1$)
2) CONSIDERO GLI OGGETTI DI RENDIMENTO MINORE E MI PONGO LA STESSA DOMANDA.
3) MI FERMO AL PRIMO OGGETTO CHE NON ENTRA INTERAMENTE: SATURO IL CONTENITORE PONENDO PARTE DI QUEL BENE.

FACCIAMO UN PASSO DEL BRANCH AND BOUND! NORMALMENTE SI ISTANZIA LA VARIABILE FRAZIONARIA DELL'OTTIMO DEL RILASSATO CONTINUO, IN QUESTO CASO x_2.



CALCOLIAMO $V_S(P_{11})$ E APPLICHIAMO LE REGOLE DI TAGLIO

1) PRIMA REGOLA NON SCATTA (P_{11} NON VUOTO, CIOÉ IMPORRE $x_2 = 0$ NON COMPORTA AVERE SOLO SOLUZIONI INAMMISSIBILI)

2) $V_S(P_{11}) \leq 20$?? $\quad (\frac{2}{11}, 0, 0, 1, 1) \Longrightarrow \lfloor 20 + \frac{2}{11} 5 \rfloor = 20$ TAGLIO!

CALCOLIAMO $V_S(P_{12})$ E APPLICHIAMO LE REGOLE DI TAGLIO

1) STESSA COSA DI P_{11}

2) $V_S(P_{12}) \leq 20$?? $\quad (0, 1, 0, \frac{5}{16}, 1) \Longrightarrow 7 + 11 + \frac{5}{16} \cdot 9 = \lfloor 18 + \frac{45}{16} \rfloor \approx 20.81$
$\Longrightarrow V_S = 20$ TAGLIO!

SIAMO GIÁ ALL'OTTIMO! $\boxed{V_I(P) = 20 \longleftarrow \bar{x} = (0, 0, 0, 1, 1)}$

ESEMPIO 2 (ZAINO)

CONSIDERIAMO I SEGUENTI DATI CON UNO ZAINO DI CAPIENZA 22

VALORE	7	8	11	14	19
VOLUME	6	7	8	11	12

MODELLO MATEMATICO.

$$\begin{cases} \max\ 7x_1 + 8x_2 + 11x_3 + 14x_4 + 19x_5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 11x_4 + 12x_5 \leq 22 \\ x_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

CALCOLIAMO IL VETTORE DEI RENDIMENTI

$$\bar{r} = \left(\frac{7}{6} \quad \frac{8}{7} \quad \frac{11}{8} \quad \frac{14}{11} \quad \frac{19}{12}\right) = \left(1.16 \quad 1.14 \quad 1.37 \quad 1.27 \quad 1.58\right)$$

VALUTAZIONE INFERIORE. $\bar{x} = (0, 0, 1, 0, 1)$ $\quad V_I = 11 + 19 = 30$

1) PONGO, MAX RENDIMENTO $P: 22 \longrightarrow 10$

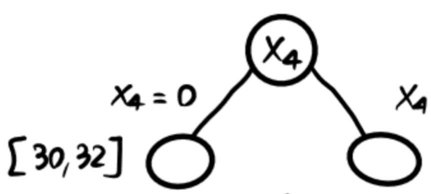
2) PONGO, SECONDO RENDIMENTO PIÚ ALTO $P.\ 10 \longrightarrow 2$

3) FINITO, NESSUN ALTRO BENE PUÓ ESSERE POSTO PER INTERO NELLO ZAINO

VALUTAZIONE SUPERIORE. $\bar{x} = \left(0, 0, 1, \frac{2}{11}, 1\right)$ $\quad V_S = \left\lfloor 30 + \frac{2}{11} 14 \right\rfloor = 32$

RECUPERO LA V_I E USO IL BENE COL TERZO RENDIMENTO PIÚ ALTO PER SATURARE LO ZAINO

PASSO DEL BRANCH & BOUND. PARTO DA x_4, COMPONENTE FRAZIONARIA



$32 > 30$, NON TAGLIAMO!!

POSSIAMO DIRE CHE $V_S(P_{11}) \leq 30$?? CALCOLIAMO $V_S(P_{11})$!!!

APPLICHIAMO L'ALGORITMO PER LA VALUTAZIONE SUPERIORE, PONENDO A PRIORI $x_4 = 0$ OTTENIAMO

$\bar{x} = \left(\frac{2}{6}, 0, 1, 0, 1\right)$ $\quad V_S(P_{11}) = \left\lfloor 30 + 7 \cdot \frac{2}{6} \right\rfloor = 32 > 30$

NON TAGLIO!!!

PER FORZA $x_4 = 0$

PER SATURARE LO ZAINO PRENDO IL BENE COL QUARTO RENDIMENTO PIÚ ALTO

ESEMPIO 3 (TSP)

PRENDIAMO LA SEGUENTE TABELLA

	2	3	4	5
1	26	20	24	19
2		34	23	22
3			27	21
4				32

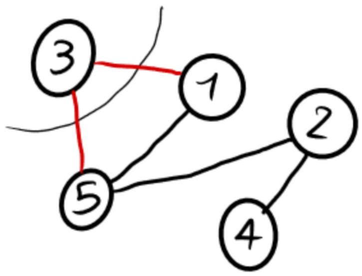
NODO DA CUI INIZIARE LA V_S

VARIABILI DA ISTANZIARE PER IL B&B

3-ALBERO, NODO 2, $x_{15}\ x_{35}\ x_{45}$

ALBERO DI COSTO MINIMO DA COSTRUIRE PER LA V_I

VALUTAZIONE INFERIORE.



	2	3	4	5
1	26	20	24	19
2		34	23	22
3			27	21
4				32

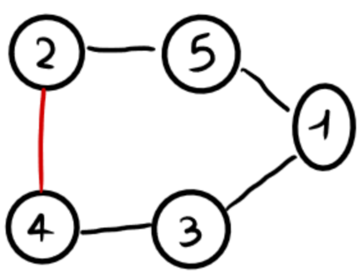
COSTRUIAMO IL 3-ALBERO DI COSTO MINIMO IN DUE FASI:

1) APPLICAZIONE DI KRUSKAL ESCLUDENDO IL NODO 3
   - PONGO L'ARCO 1-5 $(c = 19)$
   - PONGO L'ARCO 2-5 $(c = 22)$
   - PONGO L'ARCO 2-4 $(c = 23)$
   - A POSTO, TUTTI I NODI TRANNE 3 SONO COLLEGATI

2) COLLEGAMENTO DEL NODO 3 CON I DUE ARCHI RELATIVI DI COSTO MINIMO
   - PONGO L'ARCO 1-3 $(c = 20)$
   - PONGO L'ARCO 3-5 $(c = 21)$

QUINDI: $V_I = 19+22+23+20+21 = 105$

VALUTAZIONE SUPERIORE.



APPLICO ALGORITMO DEL NODO PIÚ VICINO PARTENDO DAL NODO 2.

- IL NODO PIÚ VICINO A 2 É 5 $(c = 22)$ PONGO L'ARCO 2-5
- IL NODO, PIÚ VICINO A 5, ESCLUSO I PRECEDENTI, É 1 $(c = 19)$. PONGO L'ARCO 1-5
- IL NODO, PIÚ VICINO A 1, ESCLUSO I PRECEDENTI, É 3 $(c = 20)$. PONGO L'ARCO 1-3
- IL NODO, PIÚ VICINO A 3, ESCLUSO I PRECEDENTI, É 4 $(c = 27)$. PONGO L'ARCO 3-4

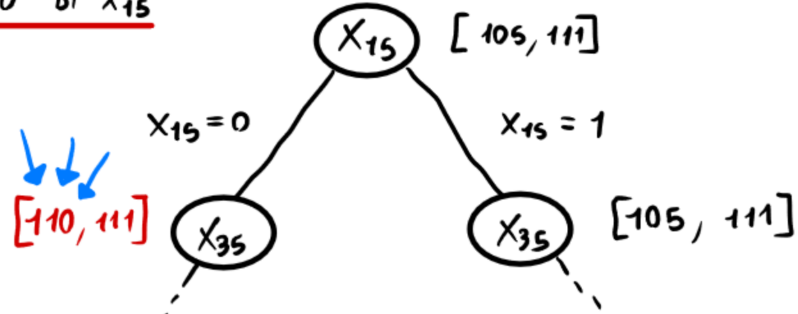
- RITORNIAMO AL NODO INIZIALE PONENDO L'ARCO 2-4 $(c = 23)$

QUINDI: $V_S = 22+19+20+27+23 = 111$

APPLICAZIONE DEL BRANCH AND BOUND

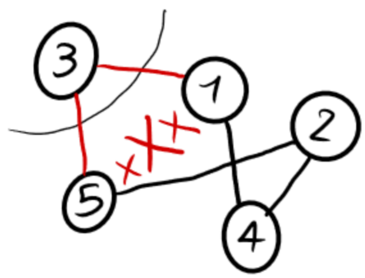
ISTANZIAMO LE VARIABILI RICHIESTE. RICORDARSI CHE L'OTTIMO STA IN $V_S(P)$

ISTANZIAMENTO DI X_{15}



ATTENZIONE A COME ISTANZIAMO: NEL 3-ALBERO DI COSTO MINIMO L'ARCO 1-5 È PRESENTE, ERGO LE VALUTAZIONI SI RESTRINGONO IMPONENDO $X_{15} = 0$, CIOÈ IMPONENDO L'ASSENZA DI UN ARCO PRESENTE NEL 3-ALBERO DI COSTO MINIMO. RICALCOLIAMO LA VALUTAZIONE INFERIORE:

VALUTAZIONE INFERIORE



	2	3	4	5
1	26	20	24	~~19~~
2		34	23	22
3			27	21
4				32

ARCO 1-5 SOSTITUITO DALL'ARCO 1-4.

COSTRUIAMO IL 3-ALBERO DI COSTO MINIMO

1) APPLICAZIONE DI KRUSKAL ESCLUDENDO IL NODO 3 E L'ARCO 1-5
   - ~~PONGO L'ARCO 1-5 ($c = 19$)~~
   - PONGO L'ARCO 2-5 ($c = 22$)
   - PONGO L'ARCO 2-4 ($c = 23$)
   - PONGO L'ARCO 1-4 ($c = 24$)
   - A POSTO, TUTTI I NODI TRANNE 3 SONO COLLEGATI

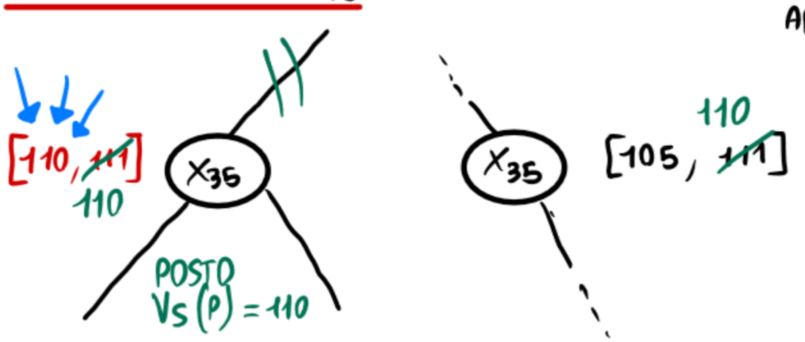
2) COLLEGAMENTO DEL NODO 3 CON I DUE ARCHI RELATIVI DI COSTO MINIMO ESCLUDENDO L'ARCO 1-5
   - PONGO L'ARCO 1-3 ($c = 20$)
   - PONGO L'ARCO 3-5 ($c = 21$)

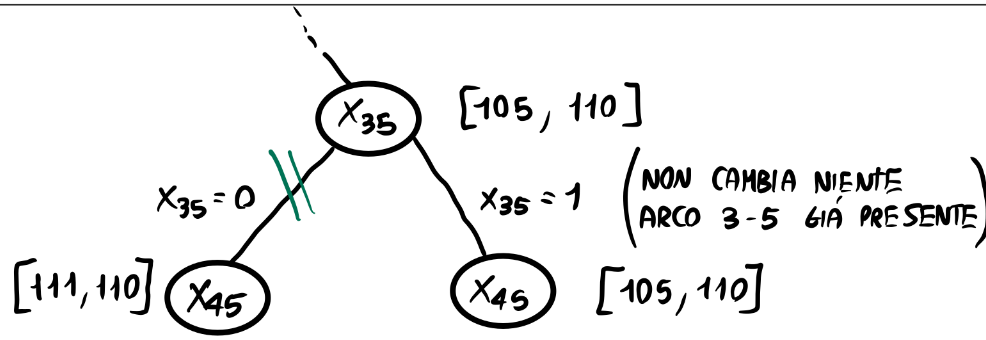
QUINDI: $V_I = \cancel{19}\ 24 + 22 + 23 + 20 + 21 = 110$

- PRIMA REGOLA NON SI APPLICA (PONENDO $X_{15} = 0$ NON SI HA INAMMISSIBILITÀ)
- SECONDA REGOLA: $V_I(P_{11}) \geq 111$?? NO, NON TAGLIAMO NIENTE
- TERZA REGOLA: $V_S(P) > V_I(P_{11})$ E $\bar{x}$ AMMISSIBILE ? SÌ, TAGLIO!!!

ABBIAMO UN CICLO HAMILTONIANO (ATTENZIONE ALLA FIGURA, TUTTI I NODI HANNO GRADO 2)

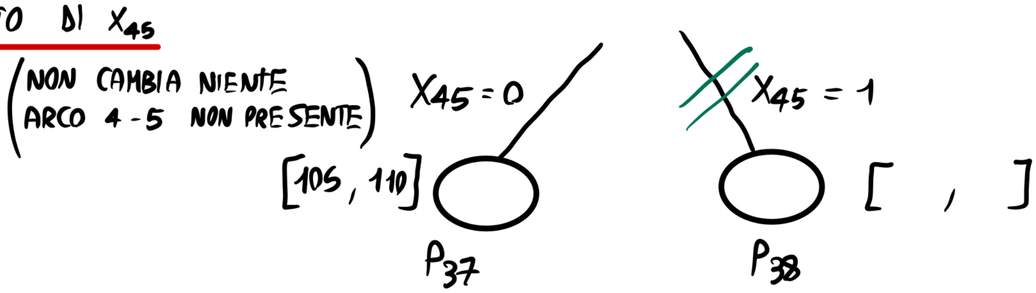
ISTANZIAMENTO DI X_{35}





POSSIAMO DIRE $V_I(P_{23}) \geq 110$?? SÍ, TAGLIAMO. NEL CALCOLO DI $V_I(P_{23})$ CONSIDERO IL 3-ALBERO DI COSTO MINIMO DOVE $x_{15} = 1$ E $x_{35} = 0$: IL RISULTATO É $V_I(P_{23}) = 111$

ISTANZIAMENTO DI x_{45}

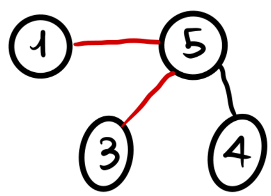


ATTENZIONE, TAGLIAMO PER INAMMISSIBILITÁ (REGOLA 1): VIOLAZIONE DEL VINCOLO DI GRADO DEL NODO 5

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 2$$

GIÁ ISTANZIATO IN MODO DEFINITIVO $x_{15} = 1$

GIÁ ISTANZIATO IN MODO DEFINITIVO $x_{35} = 1$ $\Rightarrow$ SIAMO GIÁ A DUE



SE IO PONGO $x_{25} = 1$ O $x_{45} = 1$ OTTERREI UNA SOMMA > 2, QUINDI UN QUALCOSA DI DEFINITIVAMENTE INAMMISSIBILE

IN BREVE: SOLUZIONE (FINO AD ORA) AMMISSIBILE SOLO IMPONENDO $x_{45} = 0$

ABBIAMO FINITO? NO, L'ALBERO NON É POTATO DEL TUTTO. C'É IL RAMO CON $x_{45} = 0$

CI FERMIAMO LO STESSO: L'ESERCIZIO CHIEDEVA DI ISTANZIARE SOLO TRE VARIABILI

ESEMPIO 4

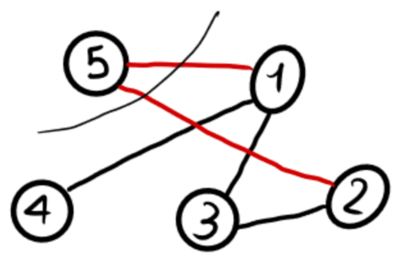
Esercizio 1. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 cittá, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

cittá	2	3	4	5
1	24	21	20	9
2		23	40	13
3			30	25
4				28

Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo. Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 1. Risolvere il problema con l'algoritmo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{34}, x_{24} e x_{45}.

VALUTAZIONE INFERIORE. CALCOLIAMO IL 5-ALBERO DI COSTO MINIMO

cittá	2	3	4	5
1	24	21	20	9
2		23	40	13
3			30	25
4				28

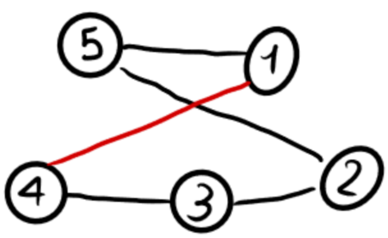


APPLICO KRUSKAL PRENDENDO GLI ARCHI DI COSTO MINIMO
- 1 – 4 $(c = 20)$
- 1 - 3 $(c = 21)$
- 2 – 3 $(c = 23)$
- NON CI SERVE ALTRO, TUTTI I NODI (TRANNE IL 5) SONO COLLEGATI

CONCLUDO PONENDO I DUE ARCHI DI COSTO MINORE RELATIVI A 5:
- 1 - 5 $(c = 9)$
- 2 - 5 $(c = 13)$

MORALE DELLA FAVOLA: $V_I = 20 + 21 + 23 + 9 + 13 = 86$

VALUTAZIONE SUPERIORE. APPLICO L'ALGORITMO DEL NODO PIÙ VICINO. PARTENDO DAL NODO 1



cittá	2	3	4	5
1	24	21	20	9
2		23	40	13
3			30	25
4				28

- IL NODO PIÙ VICINO A 1 È 5 $(c = 9)$ PONGO L'ARCO 1- 5
- IL NODO PIÙ VICINO A 5, ESCLUSO I PRECEDENTI, È 2 $(c = 13)$. PONGO L'ARCO 2 - 5
- IL NODO PIÙ VICINO A 2, ESCLUSO I PRECEDENTI, È 3 $(c = 23)$. PONGO L'ARCO 2 - 3
- IL NODO PIÙ VICINO A 3, ESCLUSO I PRECEDENTI, È 4 $(c = 30)$. PONGO L'ARCO 3 - 4

  (ATTENZIONE, QUA ABBIAMO PRESO L'ARCO DI COSTO MAGGIORE, ABBIAMO ESCLUSO QUELLI DI COSTO MINORE POICHÉ RELATIVI A NODI GIÀ COLLEGATI)
- RITORNIAMO AL NODO INIZIALE PONENDO L'ARCO 1 – 4 $(c = 20)$

MORALE DELLA FAVOLA: $V_S = 9 + 13 + 23 + 30 + 20 = 95$

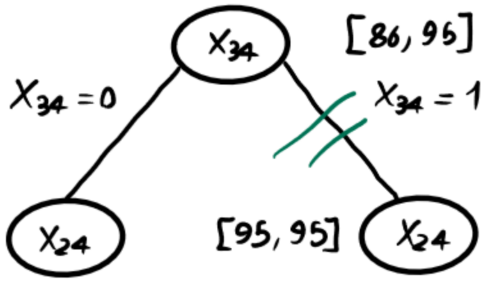
APPLICAZIONE DEL BRANCH AND BOUND.

ISTANZIAMENTO DI X_{34}

L'ARCO NON É PRESENTE NEL GRAFICO DELLA V_I

IMPORRE $X_{34}=0$ NON CAMBIA NIENTE! → $[86, 95]$

$V_I(P_{11}) = 86$

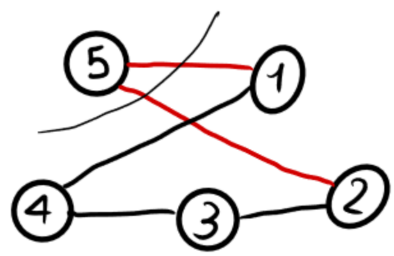


IMPONGO LA PRESENZA DELL'ARCO 3-5.

CALCOLIAMO $V_I(P_{12})$

VALUTAZIONE INFERIORE. CALCOLIAMO IL 5-ALBERO DI COSTO MINIMO

cittá	2	3	4	5
1	24	21	20	9
2		23	40	13
3			30	25
4				28



APPLICO KRUSKAL PRENDENDO GLI ARCHI DI COSTO MINIMO
- PER PRIMA COSA IMPONIAMO L'ARCO 3-4 $(c=30)$
- 1-4 $(c=20)$
- ~~1-3 $(c=21)$~~
- 2-3 $(c=23)$
- NON CI SERVE ALTRO, TUTTI I NODI (TRANNE IL 5) SONO COLLEGATI

CONCLUDO PONENDO I DUE ARCHI DI COSTO MINORE RELATIVI A 5:
- 1-5 $(c=9)$
- 2-5 $(c=13)$

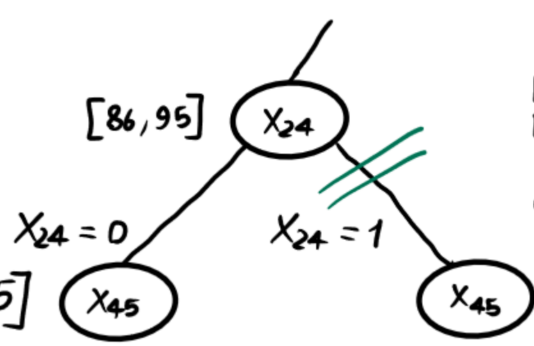
MORALE DELLA FAVOLA: $V_I = 20 + \overset{30}{\cancel{21}} + 23 + 9 + 13 = 95$

REGOLA 1: //
REGOLA 2: $V_I(P_{12}) \geq V_S(P) = 95$??? SÍ, TAGLIO!!!
REGOLA 3: //

ISTANZIAMENTO DI X_{24}

L'ARCO NON É PRESENTE NEL GRAFICO DELLA V_I

IMPORRE $X_{24}=0$ NON CAMBIA NIENTE! → $[86, 95]$



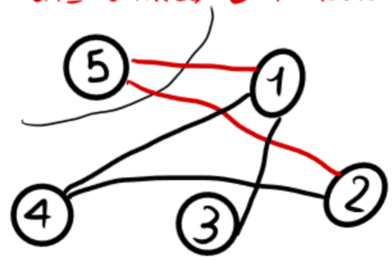
IMPONGO LA PRESENZA DELL'ARCO 2-4.

CALCOLIAMO $V_I(P_{22})$ NELLA PAG. SUCCESSIVA

$[103, 95]$

VALUTAZIONE INFERIORE: CALCOLIAMO IL 5-ALBERO DI COSTO MINIMO
RICORDARSI CHE L'ARCO 3-4 NON PUÓ STARCI

città	2	3	4	5
1	24	21	20	9
2		23	40	13
3			30	25
4				28



APPLICO KRUSKAL PRENDENDO GLI ARCHI DI COSTO MINIMO
- PER PRIMA COSA IMPONIAMO L'ARCO 2-4 $(c=40)$
- 1-4 $(c=20)$
- 1-3 $(c=21)$
- ~~2-3 (c=23)~~
- NON CI SERVE ALTRO, TUTTI I NODI (TRANNE IL 5) SONO COLLEGATI

CONCLUDO PONENDO I DUE ARCHI DI COSTO MINORE RELATIVI A 5:
- 1-5 $(c=9)$
- 2-5 $(c=13)$

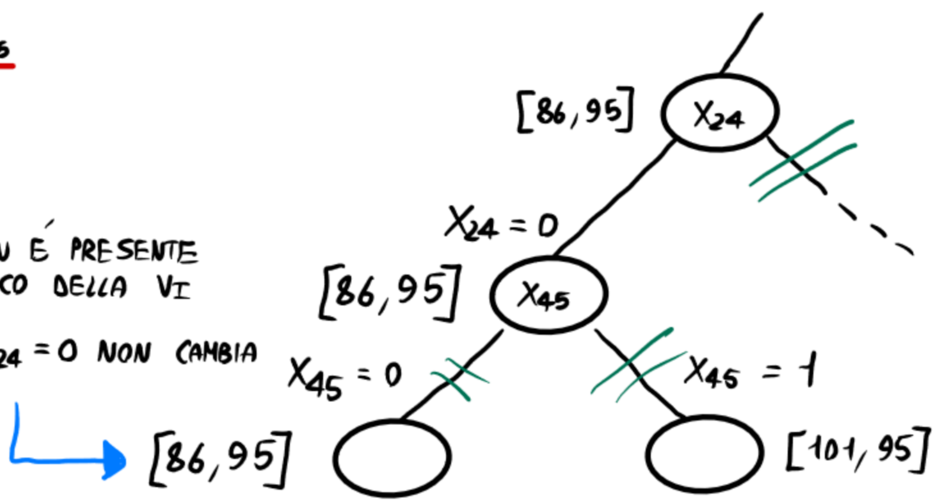
MORALE DELLA FAVOLA: $V_I = 40+20+21+9+13 = 103$

REGOLA 1: //
REGOLA 2: $V_I(P_{22}) \geq V_S(P) = 95$??? SÍ, TAGLIO!!!
REGOLA 3: //

ISTANZIAMENTO DI X_{45}

L'ARCO NON É PRESENTE NEL GRAFICO DELLA V_I

IMPORRE $X_{24}=0$ NON CAMBIA NIENTE!

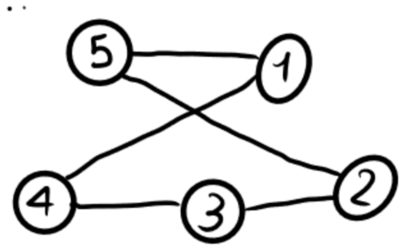


NELLA PAGINA SUCCESSIVA É STATO CALCOLATO $V_I(P_{32})$ (SI VEDA PAG. DOPO)

REGOLA 1: VIOLAZIONE DEFINITIVA DEL VINCOLO DI GRADO DEL NODO 4
REGOLA 2: $V_I(P_{32}) \geq V_S(P) = 95$??? SÍ, TAGLIO!!!
REGOLA 3: //

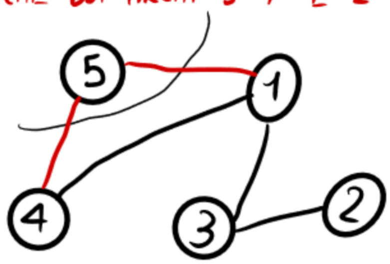
ABBIAMO PROPRIO FINITO, $V_S = 95$ É IL MINIMO

ARCHI: $\underbrace{(1,5),(2,5),(2,3),(3,4),(1,4)}_{\text{DALLA } V_S \text{ CALCOLATA ALL'INIZIO}}$



VALUTAZIONE INFERIORE. CALCOLIAMO IL 5-ALBERO DI COSTO MINIMO
RICORDARSI CHE GLI ARCHI 3-4 E 2-4 NON POSSONO STARCI.

città	2	3	4	5
1	24	21	20	9
2		23	40	13
3			30	25
4				28



APPLICO KRUSKAL PRENDENDO GLI ARCHI DI COSTO MINIMO

- 1 – 4 $(c = 20)$
- 1 - 3 $(C = 21)$
- 2 – 3 $(c = 23)$
- NON CI SERVE ALTRO, TUTTI I NODI (TRANNE IL 5) SONO COLLEGATI

CONCLUDO PONENDO I DUE ARCHI DI COSTO MINORE RELATIVI A 5:

- PER PRIMA COSA IMPONIAMO L'ARCO 4-5 $(c = 28)$
- 1 - 5 $(c = 9)$
- ~~2 - 5 (c = 13)~~

MORALE DELLA FAVOLA: $V_I = 20 + 21 + 23 + 9 + \overset{28}{\cancel{13}} = 101$

A PROPOSITO DELLA VIOLAZIONE DEL VINCOLO DI GRADO DEL NODO 4.
LA QUESTIONE É DIVERSA RISPETTO ALL'ESEMPIO PRECEDENTE

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} = 2$$

GIÁ ISTANZIATO IN MODO DEFINITIVO $x_{14} = 0$

GIÁ ISTANZIATO IN MODO DEFINITIVO $x_{24} = 0$

SE IO IMPONESSI $x_{45} = 0$ AVREI 3 VARIABILI SU 4 UGUALI A ZERO: SIGNIFICHEREBBE AVERE AL PIÚ GRADO 1, QUINDI INAMMISSIBILITÁ DEFINITIVA.
(IMPONENDO $x_{34} = 1$)

SUGGERIMENTO: PREPARARSI PRIMA DELL'ESAME IL MODELLO MATEMATICO DEL TSP, PRONTO ALL'USO PER MATLAB.

ESEMPIO 5

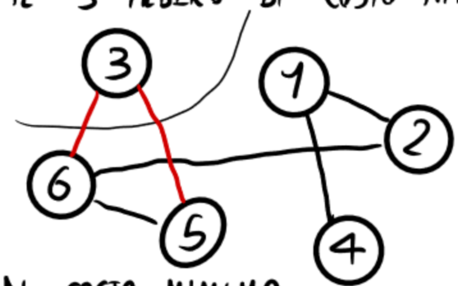
Esercizio 4. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 cittá, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

cittá	2	3	4	5	6
1	17	10	20	35	–
2		11	21	–	15
3			–	6	7
4				29	30
5					26

Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo. Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 4. Risolvere il problema con il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{56}, x_{26}, x_{36}.

VALUTAZIONE INFERIORE. CALCOLIAMO IL 3-ALBERO DI COSTO MINIMO

cittá	2	3	4	5	6
1	17	10	20	35	–
2		11	21	–	15
3			–	6	7
4				29	30
5					26



APPLICO KRUSKAL PRENDENDO GLI ARCHI DI COSTO MINIMO

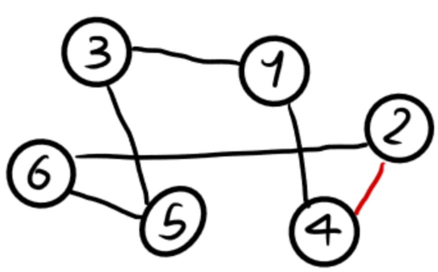
- 2 - 6 (c = 15)
- 1 - 2 (c = 17)
- 1 - 4 (c = 20)
- 2 - 4 (c = 21) NON SI METTE (NON AGGIUNGE COLLEGAMENTI NUOVI)
- 5 - 6 (c = 26)
- NON CI SERVE ALTRO, TUTTI I NODI (TRANNE IL 3) SONO COLLEGATI

CONCLUDO PONENDO I DUE ARCHI DI COSTO MINORE RELATIVI A 3:

- 3 - 5 (c = 6)
- 3 - 6 (c = 7)

MORALE DELLA FAVOLA: $V_I = 15 + 17 + 20 + 26 + 6 + 7 = 91$

VALUTAZIONE SUPERIORE. APPLICO L'ALGORITMO DEL NODO PIÚ VICINO. PARTENDO DAL NODO 4



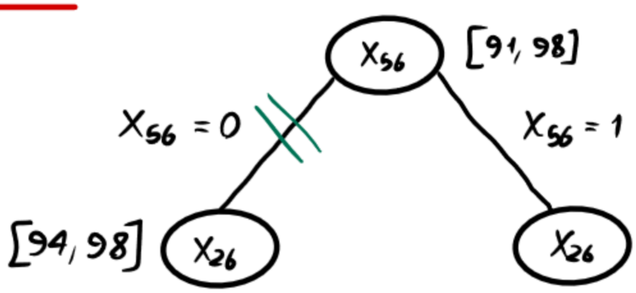
- IL NODO PIÚ VICINO A 4 É 1 (c = 20) PONGO L'ARCO 1 - 4
- IL NODO, PIÚ VICINO A 1, ESCLUSO I PRECEDENTI, É 3 (c = 10). PONGO L'ARCO 1-3
- IL NODO, PIÚ VICINO A 3, ESCLUSO I PRECEDENTI, É 5 (c = 6). PONGO L'ARCO 3 - 5
- IL NODO, PIÚ VICINO A 5, ESCLUSO I PRECEDENTI, É 6 (c = 26). PONGO L'ARCO 5 - 6
- IL NODO, PIÚ VICINO A 6, ESCLUSO I PRECEDENTI, É 2 (c = 15). PONGO L'ARCO 2 - 6
- RITORNIAMO AL NODO INIZIALE PONENDO L'ARCO 2 - 4 (c = 21)

cittá	2	3	4	5	6
1	17	10	20	35	–
2		11	21	–	15
3			–	6	7
4				29	30
5					26

MORALE DELLA FAVOLA: $V_S = 6 + 10 + 15 + 20 + 26 + 21 = 98$

APPLICAZIONE DEL BRANCH AND BOUND.

ISTANZIAMENTO DI X_{56}



L'ARCO È GIÀ PRESENTE NEL GRAFICO DELLA V_I

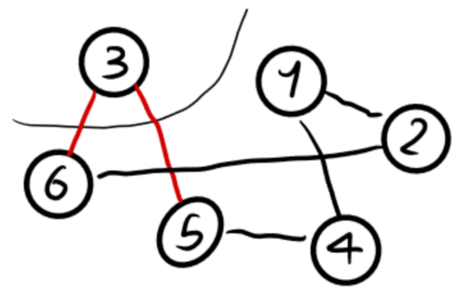
IMPORRE $X_{56} = 1$ NON ALTERA IL GRAFICO

[91, ~~98~~] 94

CALCOLIAMO $V_I(P_{11})$

VALUTAZIONE INFERIORE. CALCOLIAMO IL 3-ALBERO DI COSTO MINIMO ESCLUDENDO L'ARCO 5-6

cittá	2	3	4	5	6
1	17	$\boxed{10}$	20	35	–
2		$\boxed{11}$	21	–	15
3			–	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$
4				29	30
5					26



APPLICO KRUSKAL PRENDENDO GLI ARCHI DI COSTO MINIMO
- 2 - 6 $(c = 15)$
- 1 - 2 $(c = 17)$
- 1 - 4 $(c = 20)$
- 2 - 4 $(c = 21)$ NON SI METTE (NON AGGIUNGE COLLEGAMENTI NUOVI)
- ~~5 - 6 (c = 26)~~
- 4 - 5 $(c = 29)$
- NON CI SERVE ALTRO, TUTTI I NODI (TRANNE IL 3) SONO COLLEGATI

CONCLUDO PONENDO I DUE ARCHI DI COSTO MINORE RELATIVI A 3:
- 3 - 5 $(c = 6)$ - 3 - 6 $(c = 7)$

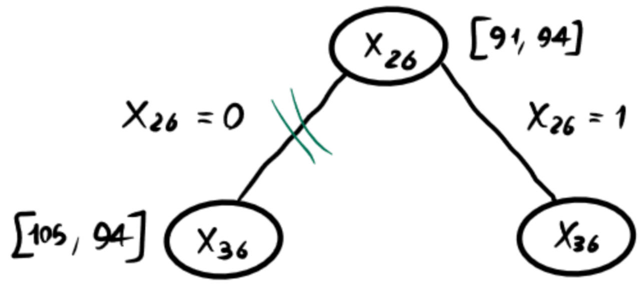
MORALE DELLA FAVOLA: $V_I = 15 + 17 + 20 + \cancel{26}^{29} + 6 + 7 = 94$

REGOLA 1: //

REGOLA 2: $V_I(P_{11}) \geq V_S(P) = 95$??? NO, NON TAGLIO!!!

REGOLA 3: $V_I(P_{11}) < V_S(P)$ E $\bar{x}$ AMMISSIBILE? SÍ, ABBIAMO UN CICLO HAMILTONIANO PONGO $V_S(P) = 94$ E TAGLIO.

ISTANZIAMENTO DI X_{26}



L'ARCO È GIÀ PRESENTE NEL GRAFICO DELLA V_I

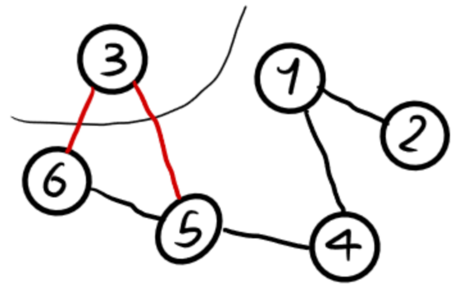
IMPORRE $X_{26} = 1$ NON ALTERA IL GRAFICO

[91, 94]

CALCOLIAMO $V_I(P_{23})$

VALUTAZIONE INFERIORE. CALCOLIAMO IL 3-ALBERO DI COSTO MINIMO ESCLUDENDO L'ARCO 2-6 E INCLUDENDO 5-6

città	2	3	4	5	6
1	17	10	20	35	–
2		11	21	–	15
3			–	6	7
4				29	30
5					26



APPLICO KRUSKAL PRENDENDO GLI ARCHI DI COSTO MINIMO

- ~~2-6 (c = 15)~~
- 5-6 (c = 26)
- 1-2 (c = 17)
- 1-4 (c = 20)
- 2-4 (c = 21) NON SI METTE (NON AGGIUNGE COLLEGAMENTI NUOVI)
- 4-5 (c = 29)
- NON CI SERVE ALTRO, TUTTI I NODI (TRANNE IL 3) SONO COLLEGATI

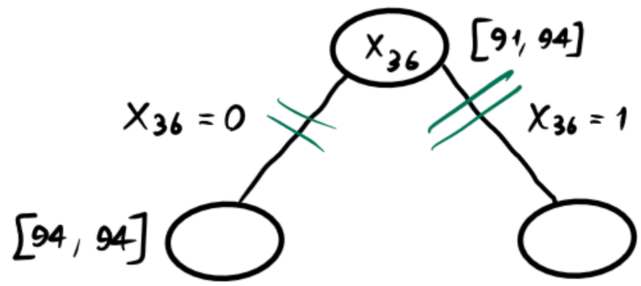
CONCLUDO PONENDO I DUE ARCHI DI COSTO MINORE RELATIVI A 3:

- 3-5 (c = 6)   - 3-6 (c = 7)

MORALE DELLA FAVOLA: $V_I = \cancel{15}\,26 + 17 + 20 + 29 + 6 + 7 = 105$

REGOLA 1: //
REGOLA 2: $V_I(P_{23}) \geq V_S(P) = 94$??? SÌ, TAGLIO!!!
REGOLA 3:

ISTANZIAMENTO DI X_{36}



ATTENZIONE, VIOLAZIONE DEL VINCOLO DI GRADO DEL NODO 6 IMPONENDO $X_{36} = 1$

$X_{16} + X_{26} + X_{36} + X_{46} + X_{56} = 2$

GIÁ ISTANZIATI IN MODO DEFINITIVO $X_{26} = 1$, $X_{56} = 1$

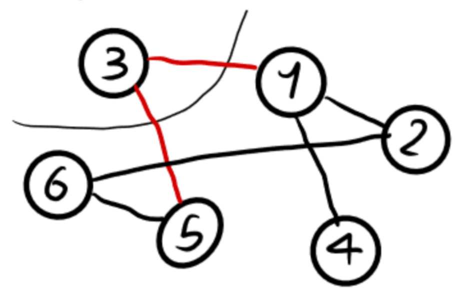
QUINDI TAGLIO PER LA REGOLA 1

CALCOLIAMO $V_I(P_{37})$

VALUTAZIONE INFERIORE

CALCOLIAMO IL 3-ALBERO DI COSTO MINIMO ESCLUDENDO L'ARCO 3-6 E INCLUDENDO GLI ARCHI 2-6 E 5-6

cittá	2	3	4	5	6
1	17	10	20	35	–
2		11	21	–	15
3			–	6	7
4				29	30
5					26



APPLICO KRUSKAL PRENDENDO GLI ARCHI DI COSTO MINIMO
- 2-6 ($c = 15$)
- 5-6 ($c = 26$)
- 1-2 ($c = 17$)
- 1-4 ($c = 20$)
- NON CI SERVE ALTRO, TUTTI I NODI (TRANNE IL 3) SONO COLLEGATI

CONCLUDO PONENDO I DUE ARCHI DI COSTO MINORE RELATIVI A 3:
- 3-5 ($c = 6$) ~~- 3-6 ($c = 7$)~~ - 1-3 ($c = 10$)

MORALE DELLA FAVOLA: $V_I = 15 + 26 + 17 + 20 + 6 + 10 = 94$

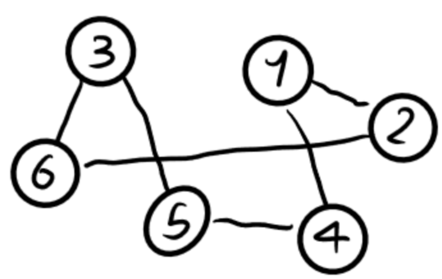
REGOLA 1: //
REGOLA 2: $V_I(P_{37}) \geq V_S(P) = 94$??? SÍ, TAGLIO!!!
REGOLA 3:

ABBIAMO POTATO TUTTO, SIAMO ALL'OTTIMO!

$V(P) = 94$

ARCHI: (1,2), (2,6), (3,6), (3,5), (5,4), (1,4)

SI VEDA GRAFICO DI $V_I(P_{11})$



BRANCH AND BOUND PER PLI NON COMBINATORIA

NEGLI ESEMPI ABBIAMO VISTO SOLO PROBLEMI DI PLI COMBINATORI. E SE VOLESSI APPLICARE IL BRANCH AND BOUND A PROBLEMI NON COMBINATORI?

COMPLICHIAMOCI LA VITA (SOLITAMENTE SI APPLICA GOMORY, CHE É MOLTO COMODO...)

IDEA DI BASE. PORRE LE VARIABILI IN BINARIO.

ES. $x_1 \in \{0,1,2,3\}$ $\qquad X_1 = (z_2 z_1)_2$

$\Longrightarrow 2^2 - 1 = 3$ ✓ $\qquad \Longrightarrow$ $z_1 \in \{0,1\}$ PRIMA CIFRA; $z_2 \in \{0,1\}$ SECONDA CIFRA

→ DUE BIT SUFFICIENTI

PROBLEMI
- NUMERO ELEVATO DI VARIABILI
- POLIEDRO DEVE ESSERE PER FORZA LIMITATO

ESERCIZIO. CONSIDERIAMO IL SEGUENTE PROBLEMA

$$\begin{cases} \max\ 5x_1 + 7x_2 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 58 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 67 \\ x_i \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \quad P$$

MINIMIZZATO

TROVIAMO U_1, CIOÉ QUEL VALORE TALE CHE $x_1 \le U_1 \ \forall x_1 \in P$

- CALCOLO PRECISO. RISOLVO CON LINPROG QUANTO SEGUE.

$$\begin{cases} \max\ x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 58 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 67 \\ x_i \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \max\ x_1 \\ Ax \le b \end{array}}$$

CALCOLARE X_1 E X_2 SIGNIFICA TROVARE UN "BOX" AL CUI INTERNO É RACCHIUSO IL POLIEDRO.

- STIMA. PRENDO OGNI VINCOLO E PONGO A ZERO TUTTE LE VARIABILI TRANNE x_1

$$4x_1 + \cancel{5x_2} \le 58 \longrightarrow x_1 \le \frac{58}{4}$$

$$3x_1 + \cancel{4x_2} \le 67 \longrightarrow x_1 \le \frac{67}{3}$$

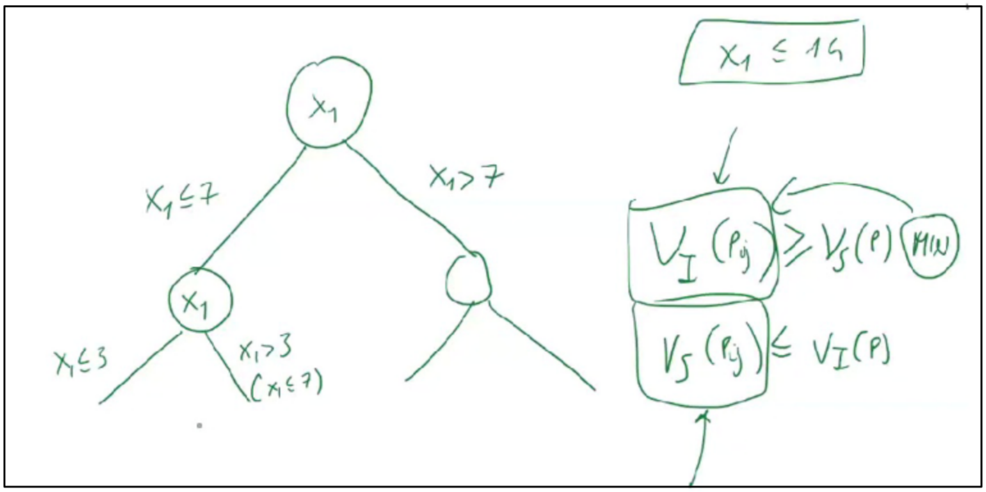
PONGO PARTE INTERA E TROVO IL MINIMO

$$\bar{U}_1 = \min\left(\left\lfloor \frac{58}{4} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{67}{3} \right\rfloor\right) = \min(14, 22) = 14$$

DOVE $U_1 \leq \bar{U_1}$!!!

IN SOSTANZA TROVIAMO $x_1 \leq 14$

CONCLUDIAMO CON L'ALBERO DI COPERTURA, PARTIZIONANDO PER PIÙ LIVELLI IL DOMINIO DI x_1. TAGLIO I RAMI CON LE REGOLE DEL BRANCH AND BOUND.



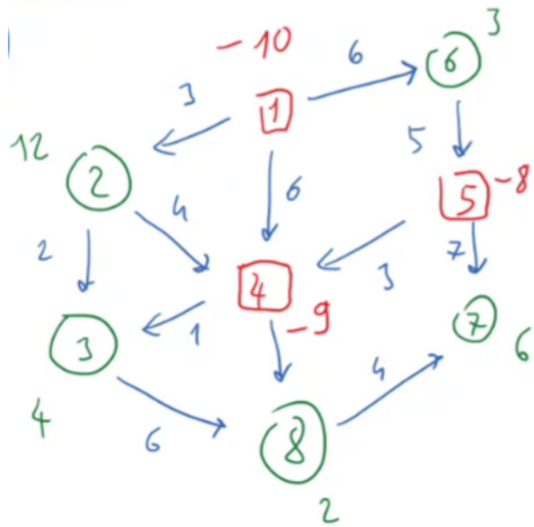
Capitolo 3

Lezioni di PL su reti

3.1 Flusso di costo minimo su reti non capacitate

3.1.1 Concetti base

Supponiamo di avere una rete caratterizzata da nodi e archi.



- Poniamo $N = \{1, \ldots, n\}$ come insieme dei nodi e A come insieme degli archi (che è $A \subseteq N \times N$, con $|A| = m$).
- Disegnamo i nodi distinguendone due tipologie (nel disegno abbiamo dei nodi verdi e tondi, ma anche dei nodi quadrati e rossi): immaginiamoci una rete informatica, dove i nodi rossi sono server e i nodi verdi utenti. In particolare:
  - i nodi rossi forniscono il flusso della rete;
  - i nodi verdi richiedono il flusso della rete.
- Per ogni nodo si indica quanto viene prodotto o quanto viene richiesto (in base alla tipologia di nodo). Rappresentiamo questa cosa col vettore del *bilancio dei nodi*

  $$b = (b_1, \ldots, b_n)$$

  dove poniamo (convenzione)
  - $b_k > 0$ se si vuole rappresentare un nodo che richiede il flusso della rete;
  - $b_k < 0$ se si vuole rappresentare un nodo che fornisce il flusso della rete.
- Associamo dei numeri ai vari archi. Dato il nodo i e il nodo j, entrambi $\in N$, e l'arco $(i, j) \in A$. Il valore sull'arco mi rappresenta il costo per trasportare l'unità di flusso sull'arco.

Le reti che ci interessa trattare sono dette *reti bilanciate*

Definizione di *Rete bilanciata*.

Data una rete con l'insieme dei nodi N, l'insieme degli archi $A \subseteq N \times N$ e il vettore dei bilanci b, questa è bilanciata se la somma dei bilanci è nulla

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = 0$$

dove n è il numero di nodi presenti nella rete.

Cosa succede nel caso di reti non bilanciate? Cosa succede nel caso in cui la somma dei bilanci risulti diversa da zero? Si tenga a mente le convenzioni adottate sul segno di b_k

- Se la somma dei bilanci è strettamente positiva allora il problema è vuoto.

  La richiesta è maggiore della produzione. Si ricordi che dato il nodo k abbiamo $b_k > 0$ se il nodo richiede flusso. Se la somma dei bilanci è positiva allora significa che la richiesta è maggiore della produzione.

- Se la somma dei bilanci è strettamente negativa allora il flusso prodotto è superiore al flusso richiesto.

  Si ricordi che dato il nodo k abbiamo $b_k < 0$ se il nodo restituisce flusso. Per ottenere un problema bilanciato, in questo caso, possiamo introdurre un di *nodo fittizio*, una sorta di deposito dove finisce il "flusso inutilizzato". In presenza di questo nodo otterremo una rete bilanciata.

3.1.2 Modello matematico

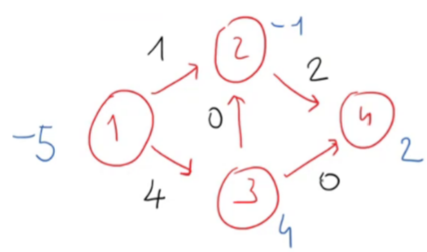
Scriviamo il modello matematico

$$\begin{cases} \min c \cdot x \\ E \cdot x = b \\ x_{ij} \geq 0 \qquad \forall <i,j> \in A \end{cases}$$

dove n è il numero dei nodi, m il numero degli archi, $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^m$, $E \in \mathbb{R}^{n \times m}, b \in \mathbb{R}^n$.

1. **Variabili di decisione**.

   Rappresentiamo il flusso sulla rete col vettore x, avente per componenti le variabili x_{ij}. Con x_{ij} indichiamo il numero di unità di flusso che decidiamo di far passare dall'arco $<i,j>$. Prendiamo ad esempio la seguente "maglia di rete"

   Due esempi di flussi sono i seguenti

   $$x_{c1} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad x_{c2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Si ricordi che gli archi hanno una direzione precisa, quindi $<i,j> \neq <j,i>$.

2. **Funzione obiettivo**.

   Il problema richiede l'individuazione del *flusso di rete a costo minimo*. Poichè devo minimizzare i costi pongo nella funzione obiettivo tutti i costi relativi agli archi. Il costo c_{ij} relativo all'arco $<i,j>$ assumerà rilevanza nel calcolo solo in caso di passaggio di unità di flusso nell'arco stesso, quindi se $x_{ij} > 0$. Riprendiamo l'esempio di maglia appena visto e calcoli i costi dei due esempi di flussi, considerando i costi c_{ij}

   $$c = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
   $$c1 = 6 \cdot 0 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 38$$
   $$c2 = 6 \cdot 1 + 6 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 34$$

Ribadiamo: possibili più flussi, ciascuno con un suo costo. Nell'esempio appena visto il secondo flusso ci piace di più, poichè $C2 < C1$.

3. **Vincoli**.

   - **Variabili positive e intere**.
     Ovviamente le variabili devono essere positive.

     $$x_{ij} \geq 0 \;\; \forall < i, j >$$

     Attenzione al flusso: è divisibile o indivisibile? Non è necessario porre vincoli di interezza: le componenti delle soluzioni sono intere in virtù del *teorema sulla matrice di incidenza non singolare*.

   - **Rispetto del bilancio**.
     Abbiamo già detto che sono di nostro interesse le sole *reti bilanciate*. Quello che dobbiamo fare è garantire il bilancio di ogni singolo nodo. Usiamo sempre il solito esempio di maglia

     $$\begin{array}{lr} 1. & -x_{12} - x_{13} = -5 \\ 2. & x_{12} + x_{32} - x_{24} = -1 \\ 3. & x_{24} + x_{34} = 2 \end{array}$$

     Abbiamo segni negativi nelle variabili relative ad archi in uscita, e segni positivi nelle variabili relative ad archi in entrata (convenzione del segno di b_k: positivo quando si richiede - arco entrante - negativo quando si restituisce - arco uscente). Ogni somma deve essere uguale al valore b_i (a quanto vuole il nodo). Quanto detto può essere rappresentato attraverso la *matrice di incidenza* E

     Solito esempio di maglia:

     $$E \cdot x = b \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{13} \\ x_{24} \\ x_{32} \\ x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Definizione di *Matrice di incidenza della rete*.

Data una rete caratterizzata da n nodi ed m archi definiamo *matrice di incidenza* la matrice $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$ dove una componente

$$E_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{Nodo } a \text{ è la destinazione dell'arco } b =< i, j >\text{, cioè } a = j \\ -1 & \text{Nodo } a \text{ è l'origine dell'arco } b =< i, j >\text{, cioè } a = i \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

La matrice è costituita da n righe ed m archi (con a indico la riga della matrice, con $b =< i, j >$ la colonna). Si tenga a mente che questa matrice è solitamente moltiplicata con x, quindi con le variabili x_{ij}.

3.1.3 Soluzioni di base (o *flussi di base*)

3.1.3.1 Premessa: dipendenza lineare e rango

Ai fini del simplesso duale scriviamo il modello matematico nel seguente modo

$$\begin{cases} \min c \cdot x \\ E \cdot x = b \\ x_{ij} \geq 0 \qquad \forall <i,j> \in A \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \min c \cdot x \\ x^T \cdot E^T = b \\ x_{ij} \geq 0 \qquad \forall <i,j> \in A \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} \min y \cdot b \\ y \cdot A = c \\ y \geq 0 \end{cases}}$$

dove E^T è la matrice trasposta di E.

- Consideriamo E^T

$$E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow E^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

  Si noti che in ogni riga abbiamo sempre un 1 e un -1.

- Sommiamo le colonne, che in questo caso sono vettori $\in \mathbb{R}^5$. Otteniamo zero!!!

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Le colonne sono linearmente dipendenti[1]. La cosa non ci sorprende.

- Ricordiamoci la PL: nell'applicazione dell'algoritmo del simplesso andiamo ad estrarre sottomatrici di base aventi dimensione $n \times n$ (in questo caso 4×4). Prendiamo il caso attuale: possiamo avere matrici quadrate 4×4 invertibili? No, perchè abbiamo visto dai calcoli precedenti che le colonne sono linearmente dipendenti.

N.B. Il rango è il massimo numero di righe/colonne linearmente indipendenti!!

- Negli esercizi di PL avevamo sempre matrici di rango n, qua la cosa cambia! Siamo in presenza di poliedri che non hanno soluzione di base.

  $$\boxed{\longrightarrow \text{Il simplesso nella forma vista non è applicabile.}}$$

- **Il dramma in realtà è molto più contenuto**: avere dipendenza lineare significa avere un'equazione di troppo! Quello che possiamo fare è:

  - eliminare una colonna nel caso di E^T (la matrice assume dimensione $m \times (n-1)$);
  - eliminare una riga nel caso di E (la matrice assume dimensione $(n-1) \times m$).

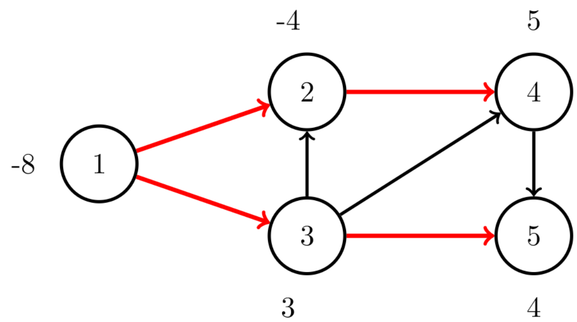
  A quel punto otterremo soluzioni di base rappresentate da matrici $(n-1) \times (n-1)$! Ritornando sul problema: se tutti gli $n-1$ nodi sono bilanciati allora l'ultimo n-esimo nodo è sempre verificato. Questo perchè il rango è $n-1$.

[1] n vettori si dicono *linearmente indipendenti* se otteniamo quanto segue solo con $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

3.1.3.2 Teorema sulla matrice di incidenza non singolare

Disegnamo il seguente grafo ponendo un albero di copertura (gli archi scelti sono evidenziati con le linee rosse), che ricordiamo avere sempre $n-1$ archi, dati n nodi di partenza.



La matrice E^T (dimensione 7×5, in realtà 7×4) è la seguente (rimuoviamo una colonna, nodo 1)

$$E^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow E^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vogliamo individuare un albero di copertura a partire da E^T. L'albero di copertura, con cinque nodi, è una matrice $(n-1)\times(n-1) = 4\times 4$ (e non 4×5 in quanto abbiamo eliminato il nodo 1). Scriviamo questa matrice per mezzo di una *visita posticipata per foglie*.

- Prendiamo una foglia dell'albero: 5! Pongo la foglia 5 e l'arco della foglia 35 come primi indici di righe e colonna della matrice. Immediato: ricordarsi che una foglia ha per definizione un solo arco nell'albero.
- Cancelliamo mentalmente arco-foglia, prendiamo una nuova foglia. Prendiamo 3 e l'arco 13.
- Proseguiamo fino a esaurimento, ottenendo il seguente risultato

	5	...
35	...	
⋮		

$\Longrightarrow$

	5	3	...
35	...		
13	...		
⋮			

$\Longrightarrow$

	5	3	4	2
35	1	-1	0	0
13	0	1	0	0
24	0	0	1	-1
12	0	0	0	1

Abbiamo ottenuto la triangolare superiore! Essendo foglie ho tutti elementi diversi da zero lungo la diagonale. In conclusione: la matrice di incidenza di un albero di copertura è non singolare! Questo perchè il determinante delle triangolari superiori è il prodotto degli elementi sulla diagonale.

Teorema sulla matrice di incidenza non singolare.

La matrice di incidenza di un albero di copertura è una matrice non singolare con

$$\det A = \pm 1$$

ergo è una matrice invertibile! In più:

- Il rango di E^T è $n-1$.
- Ogni sottomatrice $(n-1)\times(n-1)$ invertibile è relativa ad un albero di copertura.

Non solo gli alberi di copertura sono matrici invertibili, ma le matrici invertibili sono sempre alberi di copertura! Le soluzioni di base sono tutte e sole quelle generate dagli alberi di copertura.

Le soluzioni di base di questi problemi sono a componenti intere!

Abbiamo un problema di linprog, non è necessario distinguere il problema intero dal problema non intero: otteniamo risolvendo un problema di PL una soluzione accettabile, che è accettabile anche in PLI visto le componenti intere.

3.1.3.3 Generalizzazione dei concetti: matrice unimodulare

Generalizziamo la questione introducendo il concetto di *matrice unimodulare*.

Definizione di *Matrice unimodulare*.

Una matrice $m \times n$, con $n > m$ e rango massimo n si dice *unimodulare* se tutte le sottomatrici quadrate $n \times n$ invertibili hanno $\det A = \pm 1$

Teorema (12) sull'interezza.

Le soluzioni di base di problemi di PL con matrice A unimodulare sono a componenti intere! Dimostrazione immediata ricordando il *metodo di Cramer* per calcolare l'inversa.

I problemi di PL su reti rispettano il teorema sull'interezza!

3.1.4 Simplesso per reti (duale)

Supponiamo di avere il seguente problema di PL

$$(D) = \begin{cases} \min c \cdot x \\ E \cdot x = b \\ x_{ij} \geq 0 \qquad \forall < i,j > \in A \end{cases}$$

Sia T un albero di copertura ammissibile. Siano L gli archi non facenti parte dell'albero di copertura. Si calcoli $\overline{x} = (x_T, x_L)$ mediante la *visite posticipata per foglie.* L'albero è ammissibile se $x_i \geq 0, \forall i \in T$.

Definizione di *Problema dei potenziali della rete*.

Data un problema di flusso di costo minimo di partenza definiamo il *problema dei potenziali della rete*, le cui soluzioni sono le complementari dei flussi di base

$$\begin{cases} \max b \cdot \pi \\ E^T \cdot \pi \leq c \end{cases}$$

Definizione di *Potenziale di base (non capacitato)*.

Dato un flusso di base $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_T & x_L \end{pmatrix}$ definiamo potenziale di base il seguente calcolo

$$\pi = c \cdot E_T^{-1}$$

in realtà svolgeremo questo calcolo evitando il calcolo delle matrici inverse.

- **Verifica dell'ottimo**.

  Calcolo la complementare di $\overline{x}$ risolvendo il *problema dei potenziali della rete*, cioè calcolando il *potenziale di base* $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$. Se seguiamo alla lettera il simplesso duale avremo fatto il seguente calcolo

  $$\pi = c \cdot (E_T)^{-1}$$

  In realtà possiamo evitare il calcolo delle inverse, l'aspetto più antipatico del simplesso. Sfruttiamo la struttura di E^T: ogni riga rappresenta un arco ij, e al suo interno abbiamo un 1 e un -1, tutto il resto 0. Otteniamo, per ogni arco ij, che la differenza tra i potenziali dei nodi j ed i è uguale al costo per attraversare l'arco.

  $$E^T \cdot \pi = c \Longrightarrow \boxed{-\pi_i + \pi_j = c_{ij}, \forall < i,j >}$$

  Il calcolo del potenziale di base avviene mediante una *visita anticipata della radice.* Partiamo dalla radice i e costruiamo le equazioni $-\pi_i + \pi_j = c_{ij}$, il numero necessario per coprire tutti i potenziali. Prima di fare i calcoli poniamo $\pi_k = 0$ (k è il nodo relativo all'equazione rimossa da E^T). Concludo verificando l'ammissibilità del potenziale di base considerando le equazioni

  $$-\pi_i + \pi_j \leq c_{ij}, \forall < i,j > \in L$$

  Se sono tutte verificate siamo all'ottimo!

Consideriamo adesso la seguente definizione, ulteriore formalizzazione di quanto detto:

Definizione di *Costo ridotto dell'arco*.

Dato un potenziale di base definiamo

$$\overline{c}_{ij}^{\pi} = c_{ij} + \pi_i - \pi_j$$

il *costo ridotto dell'arco* ij.

- Il costo ridotto di un arco in base è 0 (poichè $c_{ij} = -\pi_i + \pi_j$).
- Il costo ridotto di un arco non in base non si può dire a priori:
  - se il costo ridotto è nullo siamo in presenza di un caso degenere;
  - se non ci troviamo in un contesto degenere tutti i costi ridotti sono $\neq 0$.
- La condizione di ammissibilità di un potenziale di base può essere posta nel seguente modo

$$-\pi_i + \pi_j \leq c_{ij},\, \forall (i,j) \in L \Longrightarrow 0 \leq c_{ij} + \pi_i - \pi_j \Longrightarrow c_{ij} + \pi_i - \pi_j \geq 0$$
$$\Longrightarrow \boxed{c_{ij}^{\pi} \geq 0,\, \forall (i,j) \in L}$$

L'ultima considerazione è ciò che noi chiameremo *teorema di Bellman*

Definizione di *Potenziale di base ammissibile (non capacitato)*.

Dato un potenziale di base π affermiamo che questo è ammissibile se

$$c_{ij}^{\pi} \geq 0 \, \forall (i,j) \in L$$

Definizione di *Potenziale di base non ammissibile (non capacitato)*.

Dato un potenziale di base π affermiamo che questo non è ammissibile se

$$\exists (i,j) \in L : c_{ij}^{\pi} < 0$$

Teorema (13) di Bellman (C.S.).

Sia T un albero di copertura che genera un flusso (x_T, x_L) ammissibile (cioè $x_T \geq 0$). Se

$$c_{ij}^{\pi} \geq 0, \forall (i,j) \in L$$

allora siamo all'ottimo. Detta in altro modo, abbiamo un criterio con cui individuare T non ammissibile $\exists (i,j) \in L : c_{ij}^{\pi} < 0$.

- **Ottimo non presente**. Non parliamo di indici, ma di archi!
  - **Arco entrante**.
    Prendiamo il primo arco ij (si applica benissimo la regola anticiclo di Bland) tra gli archi $\in L$ che non soddisfa la condizione di Bellman.

    $$\min(i, j) \in L : c_{ij}^{\pi} < 0$$

    Nel determinare l'arco minimo si considera l'ordine lessicografico degli archi.
  - **Arco uscente**.
    Si dice in gergo che l'arco entrante crea un ciclo (non abbiamo più un albero di copertura), nella scelta dell'arco noi dobbiamo rompere questo ciclo ottenendo nuovamente un albero di copertura!
    1. **Individuazione di un ciclo e di un verso**.
       Gli archi che costituiscono il ciclo appartengono a C. Si stabilisce un verso concorde all'arco entrante.
    2. **Divisione del ciclo in due sottoinsiemi**.
       Divido C in due sottoinsiemi:
       * C^+ contiene gli archi concordi al verso del ciclo;
       * C^- contiene gli archi discordi al verso del ciclo.

       cioè $C = C^+ \cup C^-$.
    3. **Aggiornamento del flusso**.
       Aggiorno il flusso ponendo un parametro $\theta \geq 0, \theta \in \mathbb{N}$.

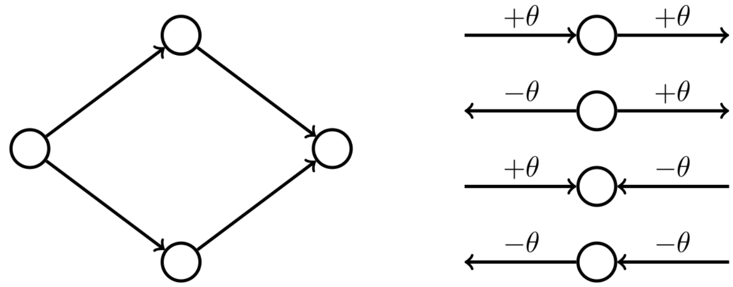
       $$\overline{x}(\theta) = \begin{cases} \overline{x}_{ij} + \theta & (i, j) \in C^+ \\ \overline{x}_{ij} - \theta & (i, j) \in C^- \\ \overline{x}_{ij} & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

       Mando θ unità di flusso in più sugli archi di C^+, θ unità di flusso in meno sugli archi di C^-, lascio invariato il resto.
    4. **Variazione nella funzione obiettivo**.
       Pongo il nuovo flusso sulla funzione obiettivo (conto che diamo per buono, dimostrazione è sul libro).

       $$c \cdot \overline{x}(\theta) = c \cdot \overline{x} + \theta c_{ij}^{\pi}$$

       Individuiamo che la funzione obiettivo corrente viene modificata di θ volte il costo ridotto dell'arco entrante c_{ij}^{π}. Si osservi che l'arco entrante ha costo ridotto $c_{ij}^{\pi} < 0$, questo significa che abbiamo una diminuzione della funzione obiettivo (tenendo conto che $\theta \geq 0$): il problema è di minimo, si ha un miglioramento.
    5. **Ammissibilità del nuovo flusso**.
       Dobbiamo verificare l'ammissibilità del nuovo flusso (attenzione, non flusso di base). Le cose che dobbiamo controllare sono due:
       * positività delle componenti (come prima);
       * rispetto dei bilanci (novità, dovuta al fatto che non ci muoviamo nella logica delle basi come fatto fino ad ora).

       A proposito dei bilanci andremo a vedere soltanto quelli relativi al ciclo, gli unici che sono stati alterati. All'interno del ciclo individuiamo quattro tipologie di nodi, quelle mostrate in figura.



∗ **Rispetto dei bilanci**.
Cosa succede con θ? Calcoliamo i bilanci dei singoli nodi, quelli a lato della figura. Ricordarsi che si ha $+\theta$ per gli archi concordi $\in C^+$, $-\theta$ con gli archi discordi $\in C^-$. Troviamo che i bilanci sono rispettati per qualunque θ.

$$\begin{aligned} +\theta - (+\theta) &= 0 & \qquad -(-\theta) + (-\theta) &= 0 \\ \theta + (-\theta) &= 0 & \qquad -(-\theta) + (-\theta) &= 0 \end{aligned}$$

Segno negativo in caso di arco uscente, segno positivo in caso di arco entrante.

∗ **Positività delle componenti e arco uscente**.
Sappiamo che nel duale standard è necessario che ogni componente sia ≥ 0. Abbiamo alterato il flusso agendo sugli archi di C^+ e C^-.

· Negli archi $\in C^+$ non ci sono problemi: abbiamo incrementato, la componente rimarrà sicuramente positiva.

· Negli archi $\in C^-$ dobbiamo stare attenti: un valore θ troppo altro potrebbe rendere la componente negativa, rendendo la soluzione non ammissibile.

Per quanto detto è nostro interesse trovare il valore di θ più alto possibile, rimanendo all'interno della regione ammissibile. Risolviamo prendendo il più piccolo valore possibile tra i flussi degli archi $\in C^-$

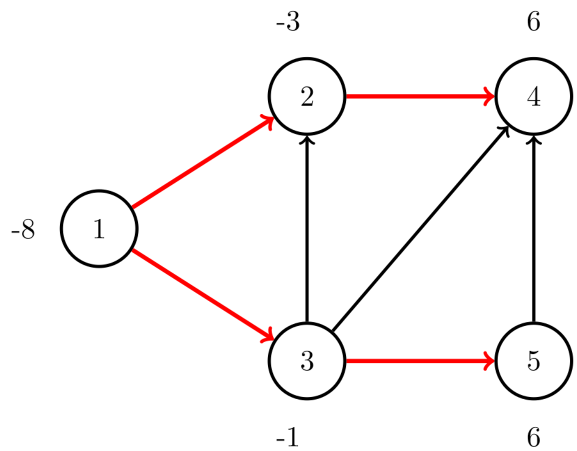
$$\theta = \min_{(i,j) \in C^-} \{\overline{x}_{ij}\}$$

Si osservi che questa operazione porterà un arco ad avere flusso nullo: abbiamo trovato l'arco uscente!

Non abbiamo cicli poichè l'arco entrante sta negli archi di C^+ (è colui che stabilisce il verso): segue che l'arco uscente non è sicuramente l'arco entrante!

3.1.5 Primo esempio di calcolo di una soluzione di base

Dopo la premessa precedente e il teorema sappiamo che la base è rappresentata da un albero di copertura. Consideriamo il seguente grafo, con albero di copertura evidenziato.



Si rappresentano i vari archi con le componenti

$$X = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{24} & x_{32} & x_{34} & x_{35} & x_{54} \end{pmatrix}$$

Per prima cosa escludiamo gli archi che non fanno parte dell'albero di copertura

$$X = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{24} & 0 & 0 & x_{35} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_T & & X_L \end{pmatrix}$$

Valori tutti nulli: stiamo lavorando in un duale standard! T è l'albero di copertura, mentre L sono gli archi "vuoti" (non inclusi nell'albero di copertura). In un senso possiamo parlare di archi non di base (ricordare gli *indici non di base*)! Adesso le strade sono due:

1. usare *linprog* (stiamo risolvendo un duale standard);
2. ricorrere alla *visita posticipata per foglie*.

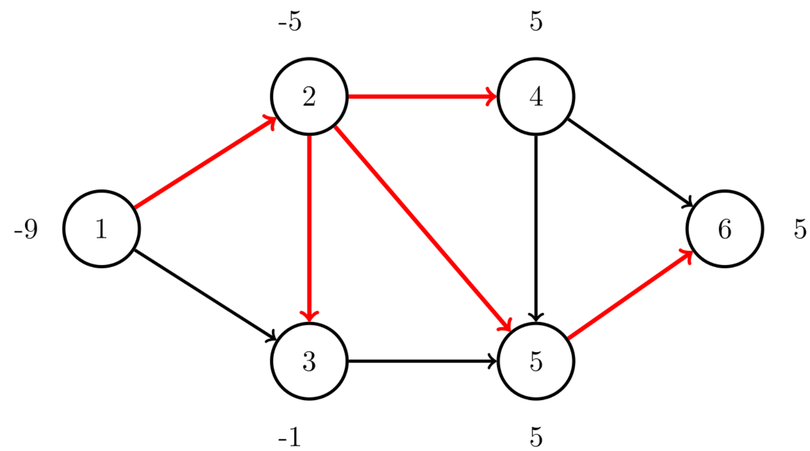
Prendiamo il metodo (2).

1. Parto da una foglia, prendiamo il nodo 5. Essendo foglia ha un solo arco (35), e poichè $b_5 = 6 > 0$ si ha una richiesta da parte del nodo: pongo $x_{35} = 6$.
$$X = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{24} & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$
2. Prendiamo il nodo 3, che tolto 5 diventa foglia. Essendo foglia ha un solo arco (13, gli archi $32, 34$ non fanno parte dell'albero di copertura). Abbiamo $b_3 = -1 < 0$, questo significa che il nodo produce 1. Poichè il nodo 5 richiedeva 6 allora poniamo $x_{13} = -1 + 6 = 5$.
$$X = \begin{pmatrix} x_{12} & 5 & x_{24} & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$
3. Prendiamo il nodo 1, che tolto 3 diventa foglia. Essendo foglia ha un solo arco (12). Poichè il nodo 1 produce 8 e abbiamo rilasciato 5 al nodo 3 (p.to precedente, $x_{13} = 5$) allora poniamo $x_{12} = 3$
$$X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & x_{24} & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$
4. Rimane solo il nodo 2, che produce 3 e riceve 3 dal nodo 1. Concludiamo con $x_{24} = 6$.
$$X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$
Si osservi che non abbiamo controllato il bilancio del nodo 4: non serve farlo, per il rango!

La soluzione ottenuta è ammissibile, poichè $x_{ij} > 0, \forall < i, j >$.

3.1.6 Secondo esempio di calcolo di una soluzione di base

Prendiamo un altro esempio. Consideriamo il seguente grafo, con albero di copertura evidenziato.



Si rappresentano i vari archi con le componenti

$$X = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{35} & x_{45} & x_{46} & x_{56} \end{pmatrix}$$

Per prima cosa escludiamo gli archi che non fanno parte dell'albero di copertura

$$X = \begin{pmatrix} x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} & x_{25} & 0 & 0 & 0 & x_{56} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_T & & X_L \end{pmatrix}$$

Ricorriamo alla *visita posticipata per foglie*.

Osservazione: possiamo dire al volo sugli archi solo se relativi a foglie.

1. Parto da una foglia, prendiamo il nodo 1. Essendo foglia ha un solo arco (12), e poichè $b_1 = -9 < 0$ si ha un rilascio da parte del nodo: pongo $x_{12} = 9$.

   $$X = \begin{pmatrix} 9 & 0 & x_{23} & x_{24} & x_{25} & 0 & 0 & 0 & x_{56} \end{pmatrix}$$

   Tutto il flusso passerà dal nodo 2, ma non rimarrà tutto lì.

2. Consideriamo un'altra foglia, il nodo 6. Essendo foglia ha un solo arco (56). Poichè $b_6 = 5 > 0$ si ha una richiesta da parte del nodo: pongo $x_{56} = 5$

   $$X = \begin{pmatrix} 9 & 0 & x_{23} & x_{24} & x_{25} & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Prendiamo il nodo 4, anch'esso foglia. Essendo foglia ha un solo arco (24). Poichè $b_4 = 5 > 0$ si ha una richiesta da parte del nodo: pongo $x_{24} = 5$.

   $$X = \begin{pmatrix} 9 & 0 & x_{23} & 5 & x_{25} & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Prendiamo il nodo 5, anch'esso foglia escludendo il nodo 6 e l'arco 56. Essendo foglia ha un solo arco (25). Abbiamo $b_5 = 5 > 0$, quindi una richiesta, ma dobbiamo tenere a mente che dal nodo 5 passa anche quanto richiesto dal nodo 6 ($b_6 = 5$). Segue $x_{25} = 5 + 5 = 10$.

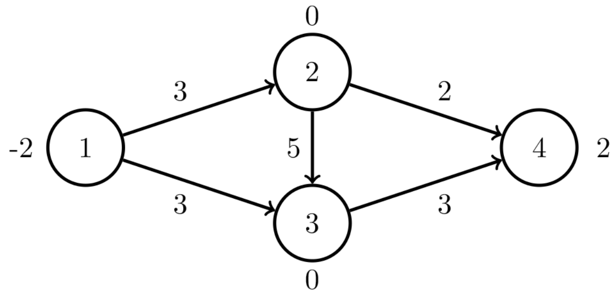
   $$X = \begin{pmatrix} 9 & 0 & x_{23} & 5 & 10 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Prendiamo il nodo 3, anch'esso foglia. Essendo foglia ha un solo arco (23). Siamo in una sorta di vicolo cieco: rilascia 1 poichè $b_3 = -1 < 0$, ma l'arco relativo alla foglia va da 2 a 3, e non il contrario. Otteniamo $x_{23} = -1$

   $$X = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -1 & 5 & 10 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La soluzione ottenuta non è ammissibile, poichè $x_{23} = -1 < 0$.

3.1.7 Terzo esempio di calcolo di una soluzione di base (semplificato)



- **Quanti archi in base ci sono?**

  Abbiamo detto che una soluzione di base è in primis associata a un albero di copertura. Dati n nodi un albero di copertura sarà caratterizzato da $n-1$ archi: segue che avremo, nell'esempio affrontato, 3 archi.

- **Quanti archi non in base ci sono?**

  Prendiamo il numero di archi complessivo: m! Banalmente porremo

  $$m-(n-1)=m-n+1=5-4+1=2$$

- **Che dimensioni hanno le matrici?**

  La matrice E^T ha dimensione 5×3 (togliendo un nodo), mentre ogni matrice di copertura avrà dimensione 3×3.

- **Qual è il percorso migliore?**

  L'applicazione del metodo visto nei due esempi precedenti è senza ombra di dubbio valida, ma in reti molto semplici potrebbe essere possibile fare calcoli "ad occhio". Questo è il caso: si osservi che i nodi centrali $(2,3)$ non fanno nulla, 1 rilascia e 4 richiede. I percorsi possibili sono i seguenti

  1. $1 \to 2 \to 4 \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
  2. $1 \to 3 \to 4 \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
  3. $1 \to 2 \to 3 \to 4 \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

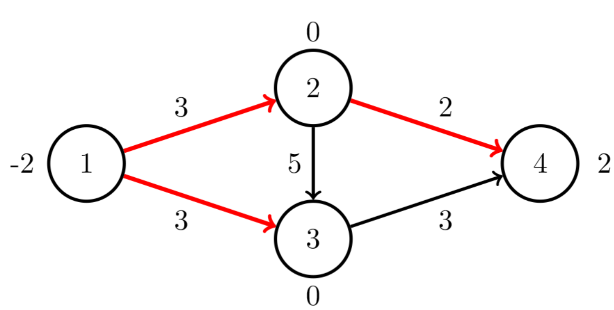
  Dai costi nel grafico osserviamo che:

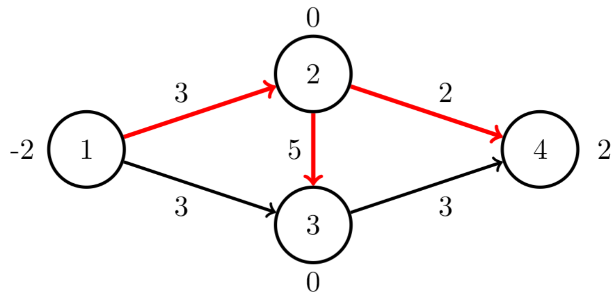
  - $c_1 = 2(3+2) = 10$
  - $c_2 = 2(3+3) = 12$
  - $c_3 = 2(3+5+3) = 22$

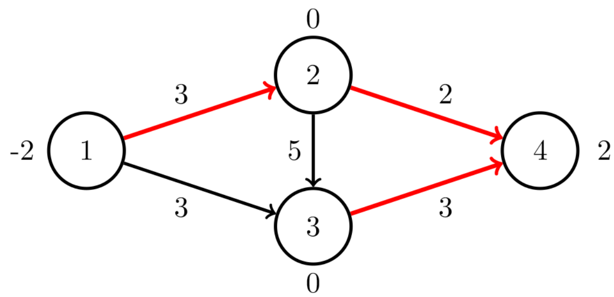
  Chiaramente si ha costo minimo con $1 \to 2 \to 4$.

- **A quale base (cioè albero di copertura) associamo il percorso ottimo?**

  Tre basi possibili (che restituiscono lo stesso costo, visto il comportamento dei nodi centrali)



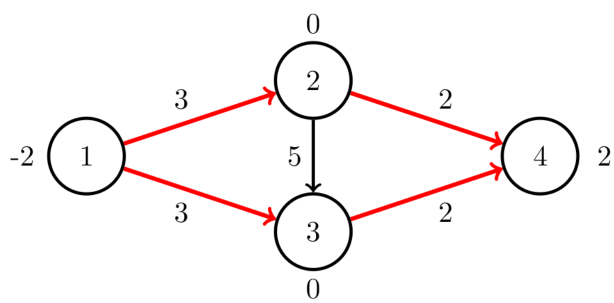




- **La soluzione è un "vertice"?**

  Attenzione!!! Dire a priori che la soluzione è un "vertice" è cosa sbagliatissima. Modifichiamo leggermente il grafo ponendo 2 come costo dell'arco 34 (e non 3). Prendiamo la seguente soluzione che chiaramente è non di base

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



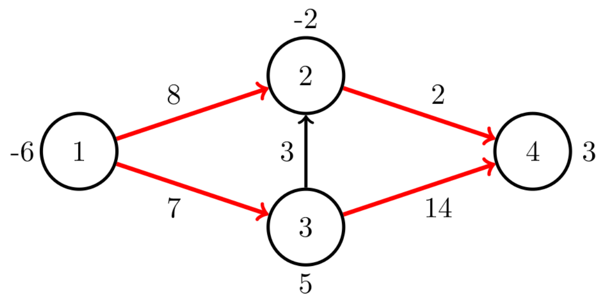
Il costo derivante da questa soluzione è comunque uguale a quello della soluzione di base ottima precedentemente detta (che va bene lo stesso, pure con il cambio attuato al costo dell'arco)

$$c = 3 + 2 + 3 + 2 = 10$$

E lo abbiamo ottenuto da un qualcosa che non è un albero di copertura.

3.1.8 Primo esempio di calcolo del potenziale di base

Prendiamo il seguente esempio



La soluzione di base, applicando la visita posticipata per foglie, è la seguente

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vogliamo vedere se l'albero è ottimo! Dobbiamo calcolare i potenziali di base: lo facciamo per mezzo di una *visita anticipata dalla radice*, calcoliamo il potenziale di base senza passare dall'inversione della radice. Ricordarsi che il vettore del potenziale ha tante componenti quanti i nodi!

- **Sistema parametrico**.

  Come al solito dobbiamo "sbarazzarci" di un nodo. In questo caso ignoreremo il nodo 1: si ricordi dall'Algebra lineare che nella rimozione di un'equazione trattiamo il sistema come un sistema parametrico, cioè imponiamo un valore arbitrario. Mettiamo $\pi_1 = 0$!

  $$\pi = \begin{pmatrix} 0 & \dots \end{pmatrix}$$

- **Calcolo della complementare**.

  Consideriamo i vari archi, partendo dalla radice 1.

  1. Considero l'arco 12
     $$-\pi_1 + \pi_2 = 8 \longrightarrow \pi_2 = 8$$
     Segue
     $$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 8 & \dots \end{pmatrix}$$
  2. Considero l'arco 13
     $$-\pi_1 + \pi_3 = 7 \longrightarrow \pi_3 = 7$$
     Segue
     $$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & \dots \end{pmatrix}$$
  3. Ci manca da determinare solo π_4. Prendiamo un'equazione dove è coinvolto il nodo 4, chiaramente quella relativa all'arco 24
     $$-\pi_2 + \pi_4 = 2 \longrightarrow -8 + \pi_4 = 2 \longrightarrow \pi_4 = 10$$
     Finito!
     $$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

  Abbiamo trovato la complementare senza fare inversioni di matrice!!!!

- **Ammissibilità della complementare**.

  Chiaramente il test di ottimalità ci richiede di verificare l'ammissibilità del potenziale. Deve soddisfare tutti i vincoli $\leq$ non di base, in questo caso quelli relativi agli archi $23, 24$ (gli archi che non fanno parte dell'albero di copertura)

  $$-\pi_3 + \pi_2 \leq c_{32} \qquad\qquad -\pi_3 + \pi_4 \leq c_{34}$$

  Otteniamo

  $$-7 + 8 \leq 3 \text{ OK!} \qquad\qquad -7 + 10 \leq 14 \text{ OK!}$$

  La soluzione è ammissibile: abbiamo trovato l'albero ottimo!!!! La cosa non ci sorprende perchè abbiamo escluso l'arco 14, avente costo 14.

- **E se avessi imposto $\pi_1 = k \neq 0$?**

  Avrei ottenuto

  $$\pi = \begin{pmatrix} 5 & 13 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

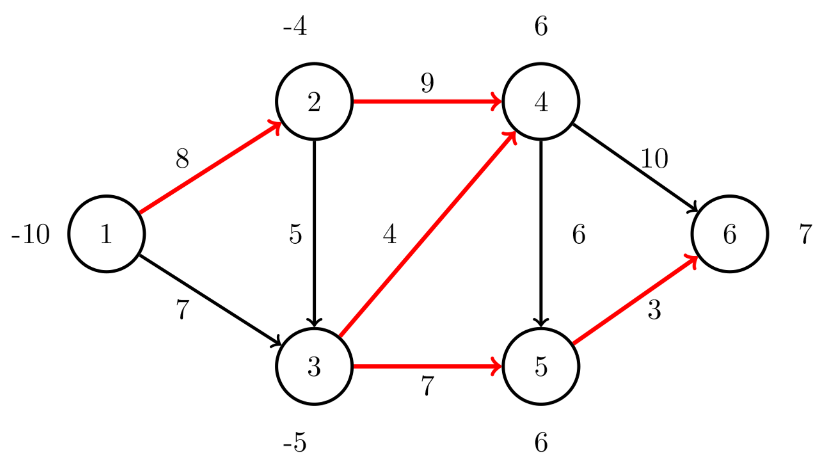
  cioè

  $$\pi = \begin{pmatrix} k + \pi_1 & k + \pi_2 & k + \pi_3 & k + \pi_4 \end{pmatrix}$$

  Quindi porre $\pi_1 = 0$ è banalmente una convenzione: non avremo esiti diversi nell'ammissibilità!

3.1.9 Secondo esempio di calcolo del potenziale di base

Prendiamo il seguente esempio



1. **Premessa**.

   La soluzione a occhio non è sicuramente ottima: il nodo 3 fornisce 5 ed è l'unica fonte possibile per i nodi 5 e 6, che complessivamente richiedono 13. Segue che calcolando il potenziale di base non avremo una soluzione ammissibile. La soluzione è, guarda caso

   $$\overline{x} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 14 & -8 & -13 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

   che non è ammissibile per $x_{34} < 0$.

2. **Calcolo del potenziale di base**.

   Calcoliamo il potenziale di base per mezzo di una *visita anticipata per radice*. Il potenziale di base è il seguente

   $$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 13 & 17 & 20 & 23 \end{pmatrix}$$

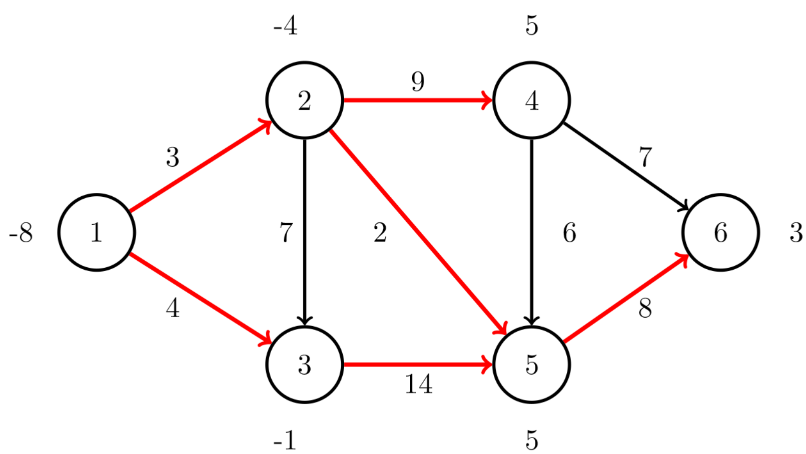
3. **Verifica dell'ammissibilità del potenziale di base**.

   Prendiamo le equazioni relative agli archi che non fanno parte dell'albero di copertura

$$-\pi_1 + \pi_3 \leq 7 \qquad\qquad -\pi_2 + \pi_3 \leq 5$$
$$-\pi_4 + \pi_5 \leq 6 \qquad\qquad -\pi_4 + \pi_6 \leq 10$$

   Nei calcoli possiamo fermarci già alla prima disuguaglianza ($-\pi_1 + \pi_3 \leq 7$), che non risulta verificata. L'albero precedentemente calcolato non è quello ottimo!

3.1.10 Esempio di applicazione del simplesso in flussi non capacitati



1. **Individuazione del flusso di base**.

   Mediante la *visita posticipata per foglie* individuiamo il flusso di base.

   - Pongo a 0 gli archi che non fanno parte dell'albero di copertura: $x_{23} = x_{45} = x_{46} = 0$

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

   - Parto dalla foglia 6: richiede 3, quindi $x_{56} = 3$

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   - Passo al nodo 5, che togliendo 6 diventa foglia: richiede 5, ma da esso passa pure quanto richiesto dal nodo 6. Otteniamo $x_{35} = 5 + 3 = 8$

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots & 0 & 8 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   - Passo al nodo 4, che è già foglia per conto suo. Richiede 5, segue $x_{24} = 5$

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \dots & 0 & 5 & 0 & 8 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   - Prendo il nodo 3, che togliendo 5 diventa foglia. Rilascia 1, quindi dal nodo passerà quanto richiesto dai nodi 5 e 6, meno uno. $x_{13} = 8 - 1 = 7$

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \dots & 7 & 0 & 5 & 0 & 8 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   - Ci rimane l'ultimo nodo, il 2. Rilascia 4, in più devo considerare quanto richiesto dal nodo 5. Concludiamo ponendo $x_{12} = 5 - 4 = 1$.

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 5 & 0 & 8 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   Abbiamo finito, ottenendo come costo complessivo $3 + 28 + 50 + 112 + 24 = 217$.

2. **Calcolo del potenziale di base**.

   Calcoliamo il potenziale di base per mezzo della *visita anticipata della radice*. Costruiamo le equazioni e poniamo per convenzione $\pi_1 = 0$

   - Partiamo dagli archi 12 e 13, relativi al nodo radice 1.

   $$\begin{cases} -\pi_1 + \pi_2 = c_{12} \\ -\pi_1 + \pi_3 = c_{13} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \pi_2 = 3 \\ \pi_3 = 4 \end{cases} \Longrightarrow \pi = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & \dots \end{pmatrix}$$

   - Prendiamo l'arco 24 relativo al nodo 2

   $$-\pi_2 + \pi_4 = c_{24} \Longrightarrow -3 + \pi_4 = 10 \Longrightarrow \pi_4 = 13 \Longrightarrow \pi = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 13 & \dots \end{pmatrix}$$

   - Prendiamo l'arco 35, relativo al nodo 3

   $$-\pi_3 + \pi_5 = c_{35} \Longrightarrow -4 + \pi_5 = 14 \Longrightarrow \pi_5 = 18 \Longrightarrow \pi = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 13 & 18 & \dots \end{pmatrix}$$

   - Concludiamo con l'arco 56, relativo al nodo 6

   $$-\pi_5 + \pi_6 = c_{56} \Longrightarrow -18 + \pi_6 = 8 \Longrightarrow \pi_6 = 26 \Longrightarrow \pi = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 13 & 18 & 26 \end{pmatrix}$$

3. **Verifica dell'ottimo con Bellman**.

   Adesso dobbiamo verificare se l'albero è ottimo o meno. Facciamo una premessa osservando che in alcuni casi è possibile capire a priori se stiamo trattando l'albero ottimo o meno, o se questo è ammissibile:

   - scelta degli archi (se abbiamo un nodo foglia che produce palesemente qualcosa non va);
   - costo degli archi (se gli archi presenti in T sono estremamente costosi palesemente non abbiamo l'ottimo).

   Verifichiamo il rispetto di Bellman calcolando i costi ridotti degli archi $\in L$.

   - Primo arco considerato è il 23

   $$c^{\pi}_{23} = c_{23} + \pi_2 - \pi_3 = 7 + 3 - 4 = 6 > 0$$

     Potevo aspettarmelo a priori? Sì, in quanto adottare l'arco 23 come arco entrante significa creare un ciclo $1-2-3-1$ in cui sarebbe uscito l'arco 13, ma a quel punto i costi sarebbero aumentati (costo per unità $3 + 7 > 4$)!

   - Prendiamo l'arco 25

   $$c^{\pi}_{25} = c_{25} + \pi_2 - \pi_5 = 2 + 3 - 18 = -13 < 0$$

     Abbiamo trovato l'arco entrante: 24!

   Introducendo l'arco 24 otteniamo il ciclo $1-2-5-3-1$. Poniamo i due sottoinsiemi

   $$C^+ = \{(1,2),(2,5)\} \qquad\qquad C^- = \{(1,3),(3,5)\}$$

   Dobbiamo trovare θ, cioè

   $$\theta = \min_{C^-} \overline{x}_{ij} = \min_{C^-}\{x_{13}, x_{35}\} = \min\{7, 8\} = 7$$

   Abbiamo trovato l'arco uscente: 13! Adesso possiamo aggiornare il flusso

   $$\overline{x}(7) = \begin{pmatrix} 1+7 & 7-7 & 0 & 5 & 0+7 & 8-7 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   Addizionato negli archi $\in C^+$, sottratto negli archi $\in C^-$. Adesso il costo è minore: 126.

3.2 Flusso di costo minimo su reti capacitate

Nella realtà le reti sono *capacitate*: un qualunque arco ij non può portare flusso indiscriminatamente elevato. Pensiamo a una conduttura idrica, a una strada o una rete informatica. Non esistono archi a portata $+\infty$.

3.2.1 Vettore delle capacità e modello matematico

Introduciamo un vettore delle capacità $u \in \mathbb{R}^m$. Banalmente

$$x_{ij} \leq u_{ij}, \forall(i,j)$$

Otteniamo un modello matematico leggermente diverso, che poniamo in modo tale da avere un problema in formato duale standard (introduciamo le variabili di scarto, poste nel vettore w)

$$\begin{cases} \min c \cdot x \\ E \cdot x = b \\ 0 \leq x \leq u \end{cases} \implies \begin{cases} \min c \cdot x \\ E \cdot x = b \\ x + w = u \\ x \geq 0, w \geq 0 \end{cases}$$

cioè $x_{ij} + w_{ij} = u_{ij}, \forall(i,j)$. Abbiamo $2m$ variabili, $m+n-1$ vincoli.

- $2m$ variabili in quanto consideriamo le m variabili di partenza x_{ij} (tante quante gli archi, m) e le m variabili di scarto (tante quante le variabili x_{ij}, m).
- $m+n-1$ vincoli poichè: considero che ho la matrice di incidenza non trasposta avente $n-1$ righe (ricordarsi che si rimuove una riga per le questioni affrontate); considero che ho, con le variabili di scarto, tanti vincoli quante le variabili x_{ij} (m).

3.2.2 Tripartizione degli archi

Alternativamente possiamo scrivere il modello nel seguente modo

$$\begin{cases} \min c \cdot x \\ (x^T, w^T) \cdot \begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ u \end{pmatrix} \\ x \geq 0, w \geq 0 \end{cases}$$

tenendo a mente che $x + w = I \cdot x + I \cdot w$. Complessivamente affermiamo che il *poliedro dei flussi* ha dimensione $2m \times (m+n-1)$.

- $I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ poichè $x + w = I \cdot x + I \cdot w$
- (x^T, w^T) è l'unione di due vettori riga, entrambi di dimensione $\mathbb{R}^{1 \times m}$.
  Segue $(x^T, w^T) \in \mathbb{R}^{1 \times 2m}$.
- $\begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ u \end{pmatrix}$ è una matrice a blocchi:
  - ha sicuramente $2m$ righe (altrimenti non potrei fare il prodotto matriciale),
  - ed ha $m+n-1$ colonne ($n-1$ colonne dovute ad E^T, m invece dovuto ad I).

Concludiamo ponendo il seguente teorema

Teorema (11bis).

Dato il seguente modello

$$\begin{cases} \min c \cdot x \\ (x^T, w^T) \cdot \begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ u \end{pmatrix} \\ x \geq 0, w \geq 0 \end{cases}$$

Il rango della matrice $\begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix}$ è $m + n - 1$. Il determinante della matrice è ± 1.

La conseguenza rilevante di questo teorema è che anche il problema del flusso di costo minimo su reti capacitate è un problema di PL, anche in presenza di beni divisibili! Necessario intervenire con nuovi concetti: è venuta meno l'associazione base - albero di copertura! Andiamo a introdurre la *tripartizione degli archi*.

Teorema della tripartizione degli archi.

Dato l'insieme degli archi A, consideriamo una qualunque tripartizione $\{T, L, U\}$, dove

- $T \cup L \cup U = A$;
- $T \cap L = \emptyset, T \cap U = \emptyset, L \cap U = \emptyset$

Effettuiamo una tripartizione $\{T', L', U'\}$ anche delle variabili di scarto poste nel vettore w. Affermiamo che l'insieme

$$B = T \cup U \cup T' \cup L'$$

è una base!

Questo, unito al teorema precedente, ci porta a fare dei parallelismi con le reti non capacitate (schematizzazione estremamente informale)

- **Reti non capacitate**.
  1. Se il rango della matrice è $n - 1$ allora abbiamo det $= \pm 1$.
  2. Basi $\Longleftrightarrow$ Alberi di copertura
- **Reti capacitate**.
  1. Se il rango della matrice è $n + m - 1$ allora abbiamo det $= \pm 1$.
  2. Basi $\Longleftrightarrow$ Tripartizione (T, L, U)

3.2.3 Calcolo del flusso di base

Scegliere una base equivale a *scegliere indici di riga*:

- si parte, considerando tutte e sei le partizioni, da $m + m$ righe
- la base è costituita da $m + n - 1$ righe

Come nel caso delle reti non capacitate è nostro interesse calcolare la soluzione di base senza invertire matrici $(m + n - 1) \times (m + n - 1)$ (già nelle reti non capacitate le matrici ci sembravano grandi, figuriamoci qua).

$$(x, w) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} T & L & U & T' & L' & U' \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} & & & \phantom{w_{T'}} & \phantom{w_{L'}} & \phantom{w_{U'}} \end{array} \right) \end{array} = \begin{pmatrix} x_T & x_L & x_U & w_{T'} & w_{L'} & w_{U'} \end{pmatrix}$$

1. **Quante componenti ha il vettore** (x, w)**?** $m + m = 2m$
2. **Quanti elementi in base abbiamo?** $m + n - 1$
3. **Quanti elementi non in base abbiamo?** $2m - m - n + 1 = m - n + 1$
4. **Blocchi in base e blocchi non in base**.

   Distinguiamo i blocchi non in base ponendo $X_L = 0, w_{U'} = 0$

   $$(x, w) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} T & L & U & T' & L' & U' \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} & 0 & & & & 0 \end{array} \right) \end{array} = \begin{pmatrix} x_T & 0 & x_U & w_{T'} & w_{L'} & 0 \end{pmatrix}$$

5. **Calcoli dalle variabili di scarto**.

   Ricordiamo dal modello matematico che $x + w = u$, dove w è il vettore delle variabili di scarto. Cioè

   $$x_T + w_{T'} = u_T \qquad x_L + w_{L'} = u_L \qquad x_U + w_{U'} = u_U$$

   precedentemente abbiamo posto $x_L = 0, w_{U'} = 0$, segue

   $$0 + w_{L'} = u_L \Longrightarrow w_{L'} = u_L \qquad x_U + 0 = u_U \Longrightarrow x_U = u_U$$

   aggiorniamo

   $$(x, w) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} T & L & U & T' & L' & U' \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} & 0 & u_U & & u_L & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

   Concludiamo prendendo $x_T + w_{T'} = u_T$

   $$x_T + w_{T'} = u_T \Longrightarrow w_{T'} = u_T - x_T$$

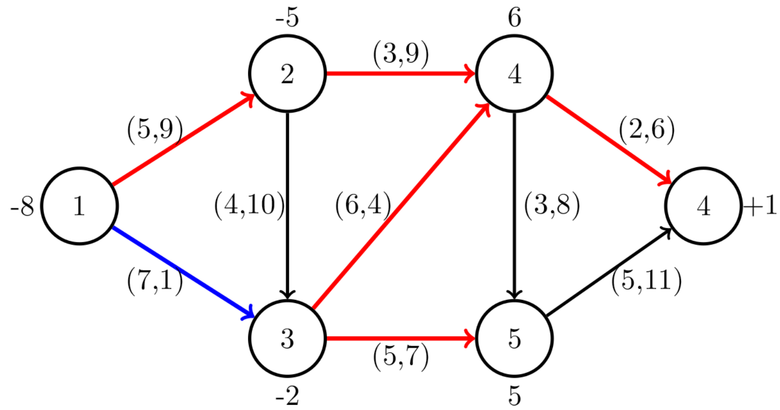
   $$\boxed{(x, w) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} T & L & U & T' & L' & U' \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} x_T & 0 & u_U & u_T - x_T & u_L & 0 \end{array} \right) \end{array}}$$

6. **Osservazione**.

   In sostanza otteniamo che la partizione L rappresenta archi vuoto, mentre la partizione U rappresenta archi saturi (visto che si pone la capienza u_u). Chi decide quali sono gli archi pieni e gli archi vuoti, tra quelli $\notin T$? Non ha importanza, in qualunque caso otterremo un flusso di base, in virtù dei teoremi introdotti.

3.2.3.1 Esempio di calcolo del flusso di base

Consideriamo il seguente albero. Poniamo negli archi (c_{ij}, u_{ij}), dove c_{ij} è il costo dell'arco ed u_{ij} la capacità dell'arco.



In rosso, come al solito, poniamo gli archi $\in T$. In blu poniamo l'arco 13, che poniamo nella partizione U (questo significa che lo saturiamo): ribadiamo che la scelta è casuale, e che in ogni caso avremo un vettore $\mathbb{R}^{18}$ unico!

1. **Variabili nulle in virtù dell'albero proposto**.

   Abbiamo detto che la base è $T \cup U \cup T' \cup L'$, quindi ciò che non è in base sta in $U' \cup L$. In virtù di ciò poniamo uguale a zero le seguenti componenti:

   - $x_{ij} = 0$, dove $(i, j) \in L$ (quindi gli archi che abbiamo deciso di mantenere vuoti)

     $$x_{23} = 0 \qquad x_{45} = 0 \qquad x_{56} = 0$$

   - $w_{ij} = 0$, dove $(i, j) \in U'$ (le variabili di scarto relative agli archi che abbiamo deciso di saturare).

     $$w_{13} = 0$$

2. **Variabili degli archi saturi**.

   Poniamo $x_{ij} = u_{ij}$, dove $(i, j) \in U$ (insieme degli archi che abbiamo deciso di porre saturi) e u_{ij}, ricordiamo, è la capienza dell'arco.

   $$x_{13} = 1$$

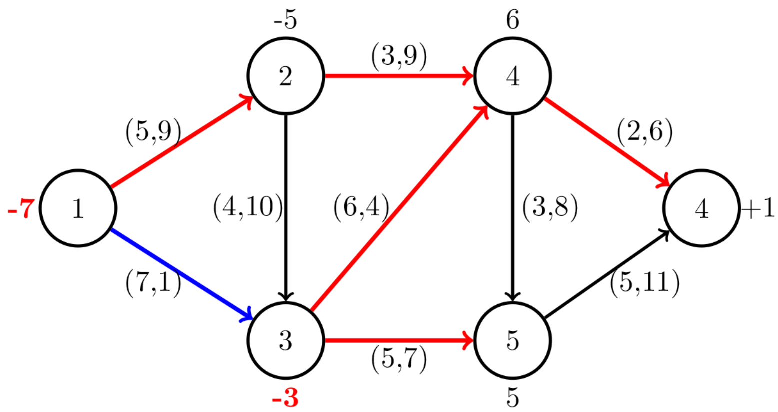
3. **Variabili di scarto degli archi vuoti**.

   Prendiamo la partizione L', relativa alle variabili di scarto degli archi $\in L$ (quelli che abbiamo lasciato vuoti). Poniamo $w_{ij} = u_{ij}$, dove $(i, j) \in L$ e u_{ij}, ricordiamo, è la capienza dell'arco

   $$w_{23} = 10 \qquad w_{45} = 8 \qquad w_{56} = 11$$

4. **Variabili rimanenti**.

   Ci rimangono solo le variabili relative agli archi dell'albero di copertura T, con annesse variabili di scarto (T'). Effettuiamo una *visita posticipata per foglie*, tenendo conto di quanto fatto fino ad ora. Aggiorniamo i bilanci, ponendo $b_1 = -8 + 1 = -7$ (il nodo 1 rilascia 8, col passaggio di 1 dall'arco 13 rilascerà 7) e $b_3 = -3 + 1 = -2$ (il nodo 3 rilascia 2, poichè riceve 1 per mezzo dell'arco 13 rilascerà 3).



Adesso possiamo trattare gli archi $\in U$ come archi qualunque non appartenenti a T. Il risultato della visita posticipata è il seguente

$$x = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 12 & -2 & 5 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo le variabili di scarto ricordandoci che $w_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$. Otteniamo

$$w = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 & -3 & 6 & 2 & 8 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Abbiamo finito!

5. **Ammissibilità del flusso di base**.

   Il flusso di base non è ammissibile: abbiamo $x_{34} < 0$ e $w_{24} < 0$. La seconda variabile è diventata negativa perchè $x_{24} > u_{24}$ (numero di unità superiore alla capienza massima dell'arco). In sostanza $0 \leq x_T \leq U_T$

3.2.4 Potenziale su reti capacitate

Dato un vertice del poliedro dei flussi è nostro interesse trovare l'ottimo. Dobbiamo calcolare, nell'applicazione del simplesso, la complementare (il potenziale)! Il modello matematico è il seguente

$$\begin{cases} \max\ b \cdot \pi + u \cdot \mu \\ \begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ \mu \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Abbiamo $m+n-1$ (dalle colonne della matrice, avente dimensione $2m \times (m+n-1)$): non a caso abbiamo $\pi \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $\mu \in \mathbb{R}^m$. I coefficienti nel secondo membro della disuguaglianza sono i coefficienti della funzione obiettivo del duale. Applichiamo l'ultima affermazione al contrario per ottenere i coefficienti della funzione obiettivo del problema del potenziale. Si osservi che $c \in \mathbb{R}^m, 0 \in \mathbb{R}^m$.

3.2.4.1 Calcolo del potenziale di base

Sia data una tripartizione $\{T, L, U\}$ che genera un flusso ammissibile, con la conseguente tripartizione delle variabili di scarto in $\{T', L', U'\}$. Poniamo il focus sulla matrice

$$\begin{array}{c|c|c|} T & E_T^T & \\ L & E_L^T & I \\ U & E_U^T & \\ \hline T' & & \\ L' & 0 & I \\ U' & & \end{array} \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scriviamo le equazioni della soluzione di base, ricordandoci che una base è costituita dalle partizioni $T \cup U \cup T' \cup L'$.

$$\begin{cases} E_T\pi + \mu = c \\ \mu = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E_T^T\pi + \mu_T = c_T \\ E_U^T\pi + \mu_U = c_U \\ \mu_T = 0 \\ \mu_L = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E_T^T\pi = c_T \\ E_U^T\pi + \mu_U = c_U \\ \mu_T = 0 \\ \mu_L = 0 \end{cases}$$

Il sistema ottenuto ha $m + n - 1$ equazioni ed $m + n - 1$ incognite. La soluzione è unica in virtù del $\det = \pm 1$.

$$\begin{array}{lcccccc} & \text{n-1} & & \mu_T & \mu_L & \mu_U & \\ (\pi, \mu) = \big(& & | & & & & \big) \end{array}$$

Prima di procedere introduciamo un teorema rilevante

> ***Teorema (14) sul calcolo del potenziale su reti capacitate.***
>
> Il potenziale su reti capacitate si calcola con le stesse tecniche di quello su reti non capacitate.

Non ci meravigliamo: le prime due formule, pur in presenza delle variabili di scarto, sono le stesse formule viste per il potenziale di reti non capacitate.

1. **Variabili nulle**.

   Dal sistema abbiamo trovato in modo immediato che $\mu_T = 0$ e $\mu_L = 0$. Segue

$$\begin{array}{lcccccc} & \text{n-1} & & \mu_T & \mu_L & \mu_U & \\ (\pi, \mu) = \big(& & | & 0 & 0 & & \big) \end{array}$$

2. **Potenziale**.

   In virtù del teorema 14 possiamo muoverci in modo identico a quanto visto per il potenziale su reti non capacitate.

$$\begin{array}{lcccccc} & \text{n-1} & & \mu_T & \mu_L & \mu_U & \\ (\pi, \mu) = \big(& \text{Uguale} & | & 0 & 0 & & \big) \end{array}$$

3. **Variabile di scarto $\mu_{U'}$**.

   Prendiamo la seconda equazione del sistema, otteniamo

$$E_U^T\pi + \mu_U = c_U \implies \mu_U = c_U - E_U^T$$

   segue

$$\begin{array}{lcccccc} & \text{n-1} & & \mu_T & \mu_L & \mu_U & \\ (\pi, \mu) = \big(& \text{Uguale} & | & 0 & 0 & c_U - E_U^T & \big) \end{array}$$

4. **Ammissibilità del potenziale**.

   Quando possiamo dire che (π, μ) è ammissibile? Quando le equazioni non di base sono soddisfatte col $\leq$! Quali sono le equazioni non di base? Quelle relative alle partizioni L, U'.

$$\begin{cases} E_L^T\pi \leq c_L \\ \mu_u \leq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E_L^T\pi \leq c_L \\ c_U - E_U^T\pi \leq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} E_L^T\pi \leq c_L \\ E_U^T\pi \geq c_U \end{cases}$$

Le equazioni sono letteralmente le stesse già viste nelle reti non capacitate. Conludiamo

$$\begin{cases} -\pi_i + \pi_j \leq c_{ij} & \forall (i,j) \in L \\ -\pi_i + \pi_j \geq c_{ij} & \forall (i,j) \in U \end{cases}$$

Una cosa bellissima: è sparito μ!!!!! Non ci serve calcolare le variabili di scarto. Riscriviamo le condizioni ricorrendo al costo ridotto

$$\begin{cases} c^{\pi}_{ij} \geq 0 & \forall (i,j) \in L \\ c^{\pi}_{ij} \leq 0 & \forall (i,j) \in U \end{cases}$$

A questo punto concludiamo introducendo l'equivalente del teorema di Bellman per reti non capacitate

Teorema (13bis) di Bellman (C.S.).

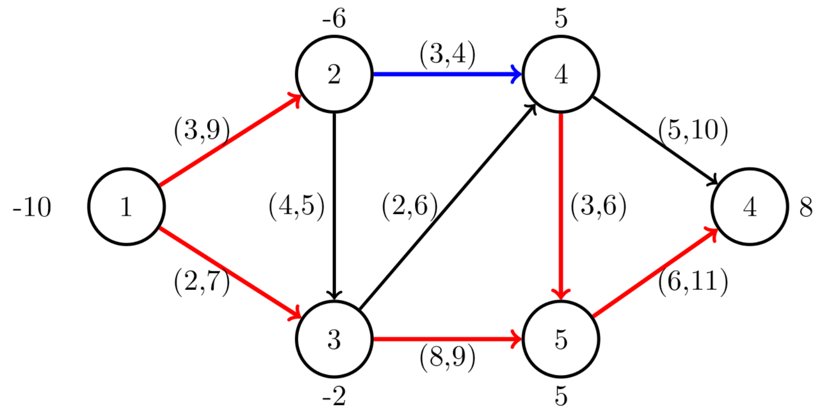
Data una tripartizione $\{T, L, U\}$ che genera un flusso ammissibile, se valgono le condizioni di Bellman

$$\begin{cases} c^{\pi}_{ij} \geq 0 & \forall (i,j) \in L \\ c^{\pi}_{ij} \leq 0 & \forall (i,j) \in U \end{cases}$$

allora siamo all'ottimo.

3.2.4.2 Esempio di calcolo del potenziale di base

Prendiamo il seguente albero (arco blu appartenente alla partizione U)



1. **Calcolo del potenziale di base**.

   Il potenziale di base è il seguente

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 7 & 10 & 16 \end{pmatrix}$$

2. **Verifica dell'ottimo**.

   Andiamo al sodo della questione e verifichiamo l'ottimo, controllando le condizioni di Bellman

   - $-\pi_2 + \pi_3 \leq 4 \longrightarrow -3 + 2 \leq 4$ OK!
   - $-\pi_2 + \pi_4 \geq 3 \longrightarrow -3 + 7 \geq 3$ OK
   - $-\pi_3 + \pi_4 \leq 2 \longrightarrow -2 + 7 \leq 2$ NO!

   Il potenziale non è ammissibile: l'ultima condizione di Bellman non è valida! Non siamo all'ottimo

3. **Soluzione degenere?**

   Verifichiamo se la soluzione è degenere verificando l'ultimo arco: 46.

$$c^{\pi}_{46} = 5 + 7 - 16 = -4$$

   La soluzione non è degenere, poichè $c^{\pi}_{46} \neq 0$!

4. **E se io volessi scrivere per intero** (π, μ)**?**.

   Supponiamo di voler scrivere la soluzione di base per intero. Come ci muoviamo? Sono nulle tutte le componenti tranne quelle relative agli archi $\in U$. In questo caso abbiamo un solo arco

$$c_U - E^T_U \longrightarrow c^{\pi}_{24} = c_{24} + \pi_2 - \pi_4 = 3 + 3 - 7 = -1$$

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2.5 Algoritmo del simplesso su reti capacitate

Il vero algoritmo che applicheremo negli esercizi

Riprendiamo l'algoritmo del simplesso introdotto precedentemente, e adattiamolo al contesto delle reti capacitate.

- **Arco entrante**.

  Gli aspetti relativi all'arco entrante rimangono uguali: ricerca del primo arco che non rispetta le condizioni di Bellman

$$\begin{cases} c_{ij}^{\pi} \geq 0 & \forall (i,j) \in L \\ c_{ij}^{\pi} \leq 0 & \forall (i,j) \in U \end{cases}$$

- **Arco uscente** (con arco entrante ij tale che $c_{ij}^{\pi} < 0, (i,j) \in L$).

  Per quanto riguarda l'arco uscente:

  - l'individuazione del ciclo e la divisione dello stesso in C^+ e C^- è uguale;
  - il ragionamento fatto sul rispetto dei bilanci è uguale;
  - si hanno delle novità a proposito dell'ammissibilità.

  Il modello matematico prevede l'introduzione di un *Upper Bound* per mezzo del vettore u.

$$\begin{cases} \min c \cdot x \\ E \cdot x = b \\ 0 \leq x \leq u \end{cases}$$

  - Finchè ragioniamo sugli archi $\in C^-$ la storia è la stessa: con un valore di θ troppo grande si rischia di ottenere componenti negative che non rispettano il *Lower Bound*. Segue

$$\theta^- = \min_{(i,j) \in C^-} \{x_{ij}\}$$

  - Per quanto riguarda gli archi $\in C^+$ non siamo più al sicuro come prima: sommando θ otterremo sicuramente una componente positiva, ma corriamo il rischio di violare l'*Upper Bound* (le capacità degli archi)! Risolviamo prendendo il più piccolo valore possibile tra gli spazi rimasti negli archi $\in C^+$

$$\theta^+ = \min_{(i,j) \in C^+} \{u_{ij} - x_{ij}\}$$

  Chi ha la meglio tra θ^+ e θ^-?

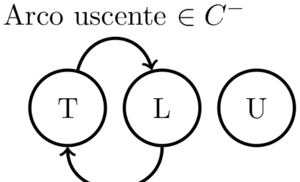
$$\theta = \min\{\theta^+, \theta^-\}$$

  - **Collocazione dell'arco uscente nella tripartizione**.

    Data la partizione $\{T, L, U\}$ dove collochiamo l'arco uscente? Casi possibili:

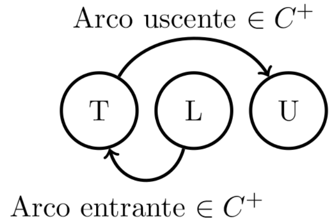
    * $\theta = \theta^-$. L'arco uscente, sottraendo θ, viene svuotato. Lo poniamo in L

Arco uscente $\in C^-$



Arco entrante $\in C^+$

* $\theta = \theta^+$. L'arco uscente, addizionando θ, viene saturato. Lo poniamo in U.



Problemi di loop? L'arco entrante e uscente sono dello stesso insieme (C^+). In realtà no: si consideri che l'arco uscente non ritorna in L, ma in U! Si consideri che nel passaggio dall'insieme L all'insieme U cambia pure la condizione di Bellman considerata.
Extra: potrei avere $\theta = 0$? Certo, significa che uno dei flussi di C^- era nullo, ma siccome gli archi di $C^- \in T$ allora significa che abbiamo un caso degenere.

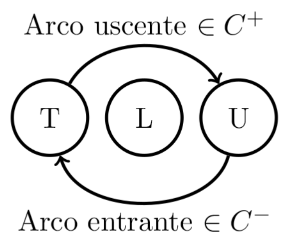
- **Arco uscente** (con arco entrante ij tale che $c^\pi_{ij} > 0, (i,j) \in U$).

  L'arco entrante, in questo caso, non può dare il verso: non posso mandare θ unità di flusso verso gli archi già saturi! Apportiamo una modifica: gli archi concordi in verso con l'arco entrante vanno in C^- e non in C^+ come fatto fino ad ora. La funzione obiettivo che otteniamo è la seguente

$$c \cdot x(\theta) = c \cdot \overline{x} - \theta c^\pi_{ij}$$

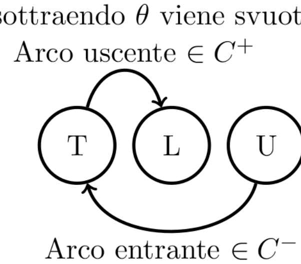
  dove $x(\theta)$ è la stessa formula di sempre. La formula ci piace perchè scegliendo $c^\pi_{ij} > 0$ (non negativo come abbiamo fatto fino ad ora) otteniamo un miglioramento della funzione obiettivo.

  – **Collocazione dell'arco uscente nella tripartizione**.
    Ritorna la solita questione: data la partizione $\{T, L, U\}$ come ci comportiamo?
    * $\theta = \theta^+$. L'arco uscente, sommando θ viene saturato.



Sicuramente l'arco uscente non sarà l'arco entrante, visto gli insiemi diversi.

* $\theta = \theta^-$. L'arco uscente, sottraendo θ viene svuotato.



Qua si ritorna al sottocaso già visto, possibilissimo! Non si va in loop per le stesse ragioni di prima: cambio della partizione e della condizione di Bellman.

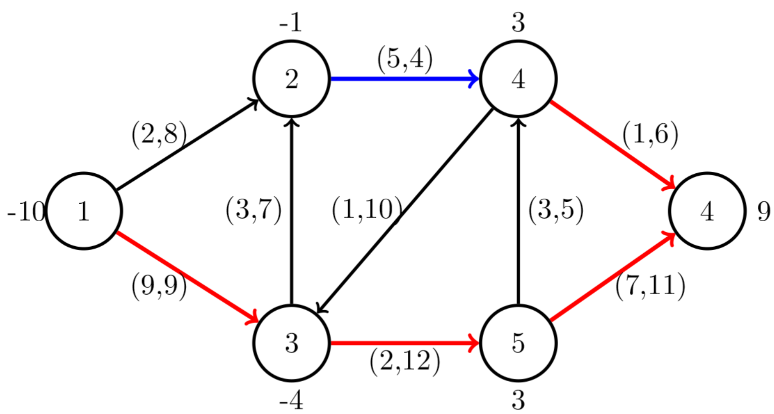
Recap.
Data una tripartizione $\{T, L, U\}$ individuiamo che le variazioni delle funzioni obiettivo sono le seguenti

$$\begin{cases} c \cdot x(\theta) = c \cdot \overline{x} - \theta c_{ij}^{\pi} & \text{Arco entrante } \in U \\ c \cdot x(\theta) = c \cdot \overline{x} + \theta c_{ij}^{\pi} & \text{Arco entrante } \in L \end{cases}$$

Nel primo caso abbiamo $c_{ij}^{\pi} > 0$, nel secondo $c_{ij}^{\pi} < 0$ (condizioni di Bellman non rispettate): la funzione obiettivo migliora (problema di minimo).

3.2.6 Esempio di applicazione del simplesso su reti capacitate

Prendiamo il seguente albero



dove

$$\begin{aligned} T &= \{(1,2), (1,3), (3,5), (4,6), (5,6)\} \\ U &= \{(2,4)\} \\ L &= \{(3,2), (4,3), (5,4)\} \end{aligned}$$

Partiamo

$$\overline{x} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 12 & 13 & 24 & 32 & 36 & 43 & 46 & 54 & 56 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} & & & & & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

1. **Componenti nulle**.

   Poniamo subito uguali a zero le componenti relative agli archi vuoti, quelli $\in L$

   $$\overline{x} = \begin{array}{ccccccccc} 12 & 13 & 24 & 32 & 36 & 43 & 46 & 54 & 56 \\ & & & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

2. **Componenti di archi saturi**.

   Prendiamo gli archi $\in U$, quelli saturi, e poniamo il flusso uguale alla capienza massima.

   $$\overline{x} = \begin{array}{ccccccccc} 12 & 13 & 24 & 32 & 36 & 43 & 46 & 54 & 56 \\ & & 4 & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

3. **Componenti rimanenti**.

   Poniamo le componenti rimanenti mediante una *visita posticipata per foglie*. Non essendo l'argomento fondamentale dell'esempio poniamo diretto il flusso

   $$\overline{x} = \begin{array}{ccccccccc} 12 & 13 & 24 & 32 & 36 & 43 & 46 & 54 & 56 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & 11 & 0 & 1 & 0 & 8 \end{array}$$

Il potenziale, ottenuto con *visita posticipata alla radice*, è il seguente

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 9 & 17 & 11 & 18 \end{pmatrix}$$

4. **Arco entrante**.

   Individuiamo il primo arco che viola Bellman. Ricordiamoci le condizioni di Bellman

$$\begin{cases} c_{ij}^{\pi} \geq 0 & \forall (i,j) \in L \\ c_{ij}^{\pi} \leq 0 & \forall (i,j) \in U \end{cases}$$

   Scorriamo gli archi in ordine lessicografico: il primo da verificare è $(2,4)$!!!! Non ignorare per il solo fatto che appartenga ad U.

$$c_{24}^{\pi} = 5 + 2 - 17 = -10$$

   L'arco va bene perchè rispetta la condizione di Bellman per gli archi $\in U$. Vediamo gli altri $\in L$

$$\begin{aligned} c_{32}^{\pi} &= 3 + 9 - 2 > 0 \\ c_{43}^{\pi} &= 1 + 17 - 9 > 0 \\ c_{54}^{\pi} &= 3 + 11 - 17 = -3 < 0 \end{aligned}$$

   Il primo arco che viola Bellman è 54, quindi 54 è l'arco entrante.

5. **Arco uscente e aggiornamento del flusso**.

   Otteniamo il ciclo $\{(4,5),(5,6),(4,6)\}$. L'arco va in C^+ poichè l'arco viene da L. Gli insiemi sono i seguenti

$$C^+ = \{(1,6),(5,4)\} \qquad\qquad C^- = \{(5,6)\}$$

   θ^+ lo prendiamo dagli archi $\in C^+$

$$\theta^+ = \min\{u_{54} - x_{54}, u_{46} - x_{46}\} = \{5 - 0, 6 - 1\} = \min\{5,5\} = 5$$

   Per quanto riguarda θ^- lo prendiamo dagli archi $\in C^-$.

$$\theta^- = \min\{x_{56}\} = \min\{8\} = 8$$

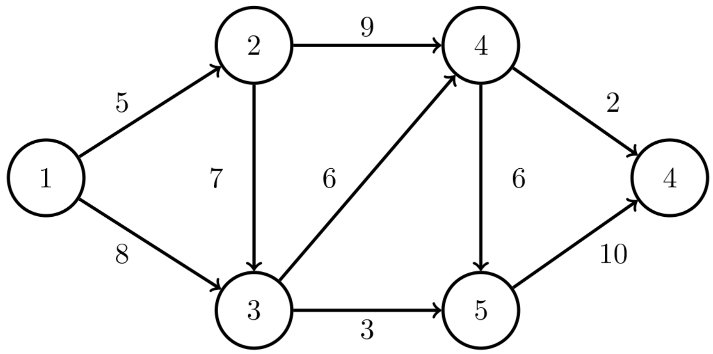
   concludiamo: $\theta = \min\{\theta^+, \theta^-\} = \min\{5,8\} = 5$ L'arco uscente è prodotto da due archi: 54 e 46. Per la regola anticiclo di Bland l'arco uscente è il 46. A questo punto aggiorniamo il flusso

$$\overline{x} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 12 & 13 & 24 & 32 & 36 & 43 & 46 & 54 & 56 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 0 & 11 & 0 & 1+5 & 0+5 & 8-5 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 12 & 13 & 24 & 32 & 36 & 43 & 46 & 54 & 56 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 0 & 11 & 0 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

3.3 Massimo flusso

3.3.1 Introduzione

Introduciamo l'ultima tipologia di problema del corso. Prendiamo la seguente rete, dove indichiamo soltanto le portate massime degli archi u_{ij} (niente bilanci b_i, niente costi c_{ij}).



La figura presenta anche un nodo sorgente (1) e un nodo destinatario (6). In senso informatico immaginiamo il gestore della rete che deve inviare il maggior numero di pacchetti possibili da un nodo i sorgente a un nodo j destinatario. Ci chiediamo: qual è il flusso massimo che posso spedire da 1 a 6? Vogliamo spedire un blocco di unità, il maggior numero possibile, in un unico percorso. Facciamoci meglio l'idea scrivendo alcuni esempi di percorsi:

- $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6$.

  Posso spedire "in un colpo solo" al più 2 unità.

- $1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6$.

  Posso spedire "in un colpo solo" al più 3 unità.

- $1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6$.

  Posso spedire "in un colpo solo" al più 6 unità.

- In realtà possiamo considerarli insieme e dividere tra essi quanto vogliamo passare dal nodo 1 al nodo 6:

  - $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6$
  - $1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6$
  - $1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6$.

  Questo è l'ottimo del problema!

Quando non riusciamo a trovare percorsi migliori significa che siamo alla portata massima della rete. Sicuramente, nell'esempio, indicato, non potrò inviare $12, 13, 15, \ldots$ unità "in un colpo solo": questo perchè nessun arco ha tali portate massime.

Algoritmo di enumerazione totale? No, il numero di cammini da considerare è esponenziale!

3.3.2 Modello matematico

Visto la rete ci piacerebbe utilizzare la matrice di incidenza della rete, il problema è che non abbiamo bilanci e costi.

$$\begin{cases} \max v \\ E \cdot x = b \\ 0 \leq x \leq u \end{cases} \qquad \text{dove } b_i = \begin{cases} -v & i \text{ sorgente} \\ 0 & \text{altrimenti} \\ v & i \text{ destinatario} \end{cases}$$

Il modello ci risulta un pelino indigesto, visto che abbiamo due bilanci come incognite (v, il fatto è che noi non diciamo a priori quanto desideriamo trasportare, vogliamo che siano i calcoli a dirci il massimo che possiamo trasportare). Riprendiamo l'ultimo esempio (quello ottimo) visto nella pagina precedente: otteniamo

$$\begin{array}{c} \\ (\overline{x}, v) = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} {\scriptstyle 12} & {\scriptstyle 13} & {\scriptstyle 23} & {\scriptstyle 24} & {\scriptstyle 34} & {\scriptstyle 35} & {\scriptstyle 45} & {\scriptstyle 46} & {\scriptstyle 56} & {\scriptstyle v} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 & 2 & 6 & 3 & 6 & 2 & 9 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

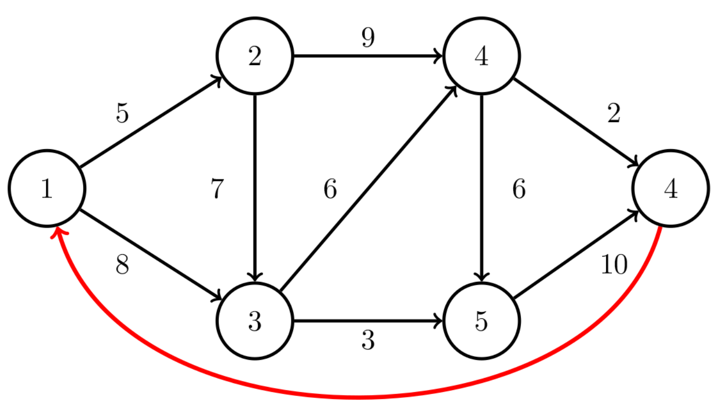
Possiamo definirlo un problema di PL su reti? Ad occhio non possiamo dirlo, visto quanto detto poco prima e visto il max nella funzione obiettivo (i problemi visti fino ad ora sono problemi di minimo). Il problema è sicuramente un problema di PL su reti: dimostriamolo riconducendo il modello a quello per il flusso di costo minimo!

- **Scriviamo le equazioni di $E \cdot x = b$** spostando l'incognita v nel primo membro (in b abbiamo solo termini noti, promemoria)

$$\begin{cases} -x_{12} - x_{13} = -v \\ x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0 \\ x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} = 0 \\ x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} = 0 \\ x_{35} + x_{45} - x_{56} = 0 \\ x_{46} + x_{56} = v \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -x_{12} - x_{13} + v = 0 \\ x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0 \\ x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} = 0 \\ x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} = 0 \\ x_{35} + x_{45} - x_{56} = 0 \\ x_{46} + x_{56} - v = 0 \end{cases}$$

- **Introduzione di un arco fittizio e bilanci nulli**.

  Questo v continua a risultarci indigesto, ma comincia a piacerci se lo immaginiamo come un arco fittizio che collega il nodo destinatario col nodo sorgente!



  dove $v = x_{61}$!!! Si osservi che se spostiamo tutto nel primo membro allora avremo un vettore b con bilanci tutti nulli.

- **Passaggio da** max **a** min **nella funzione obiettivo, e costi nella rete**.

  Sfruttando la nota uguaglianza poniamo

  $$\max 0x + v = -\min 0x_{12} + \cdots - 1 \cdot v = -\min 0x_{12} + \cdots - 1 \cdot x_{61}$$

  si osservi che il coefficiente relativo a v ha assunto segno negativo. Nella funzione obiettivo del problema di flusso minimo poniamo i costi: segue che tutti gli archi tranne l'arco fittizio avranno costo nullo, mentre l'arco fittizio avrà costo pari a -1.

  – Il valore negativo rappresenta un guadagno, ed è ciò che porterà il simplesso a far passare il maggior flusso possibile al suo interno.

  – Dall'arco fittizio non passerà un numero infinito di elementi, poichè i bilanci degli altri archi devono essere rispettati.

  – Il bilancio dell'arco fittizio è $+\infty$.

Ecco il problema di PL su reti! ■

3.3.3 Algoritmo di Ford-Fulkerson

3.3.3.1 Premesse concettuali e teorema sul taglio di costo minimo

Introduciamo il concetto di *taglio della rete* e di *capacità del taglio*.

Definizione di *Taglio della rete*.

Il taglio della rete è una partizione dei nodi N in due sottoinsiemi: N_S ed N_t

$$N = N_S \cup N_t$$

ad N_S appartiene almeno il nodo sorgente, ad N_t appartiene almeno il nodo destinatario.

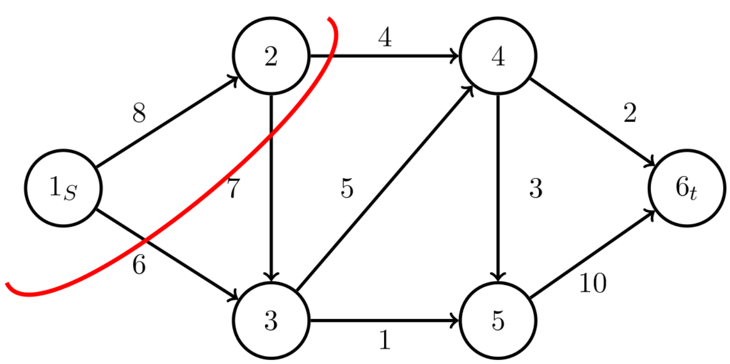
Definizione di *Capacità del taglio*.

La capacità del taglio è la sommatoria delle capacità u_{ij}, per $i \in N_S$ e $j \in N_t$

$$u(N_S, N_t) = \sum_{i \in N_S, j \in N_t} u_{ij}$$

In un certo senso si rappresenta un confine, si afferma che da quel taglio non passeranno più di un certo numero di unità.

Per avere le idee chiare consideriamo la seguente rete



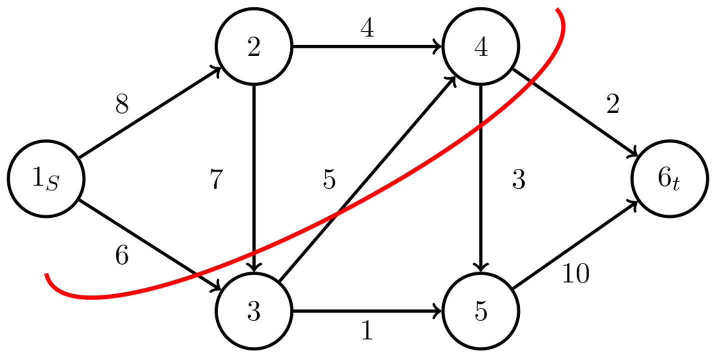
individuiamo, tra i possibili tagli, il seguente:

$$N_S = \{1, 2\} \qquad\qquad N_t = \{3, 4, 5, 6\}$$

Il taglio è valido poichè $1 \in N_S$ e $6 \in N_t$. In questo caso la capacità del taglio è la seguente:

$$u(N_S, N_t) = 6 + 7 + 4 = 17$$

abbiamo considerato gli archi che partono da nodi $\in N_S$ e arrivano in nodi $\in N_t$: 13, 23 e 24. Adesso consideriamo il seguente taglio



$$N_S = \{1, 2, 4\} \qquad\qquad N_t = \{3, 5, 6\}$$

In questo caso la capacità sarà

$$u(N_S, N_t) = 6 + 7 + 3 + 2 = 18$$

Abbiamo considerato gli archi 13, 23, 45 e 46. Attenzione: non abbiamo considerato l'arco 34!!! Questo perchè il taglio chiede di considerare solo gli archi che partono da un nodo di N_S e arrivano in un nodo di N_t, e non il contrario!

Perchè ci interessano questi concetti? Per il seguente teorema:

> ***Teorema di taglio sulla rete (*Max-Flow-Min-Cut*)*.**
>
> Il problema del taglio di capacità minima è il duale del flusso massimo!

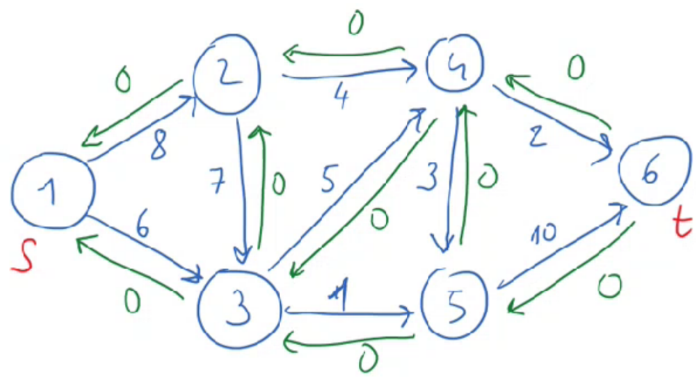
Sulla base del teorema, e quindi del concetto di taglio della rete, andiamo ad applicare il cosiddetto *Algoritmo di Ford-Fulkerson*.

> ***Teorema di correttezza di Ford-Furkelson*.**
>
> L'algoritmo di *Ford-Furkelson* è corretto.

3.3.3.2 Inizializzazione

L'algoritmo prevede la costruzione del *grafo residuo*

> **Definizione di *Grafo residuo*.**
>
> Il grafo residuo è un grafo che ha gli stessi nodi del grafo posto in ingresso, e per ogni arco ij si pone un corrispondente arco ji.



Gli archi ji sono archi fittizi che non esistono nella rete vera. Si parte da un flusso ammissibile, in partenza $\overline{x} = 0$. Dotiamo gli archi (sia reali che fittizi) di una *capacità residua*.

> **Definizione di *Capacità residue*.**
>
> Dato un arco ij (reale o fittizio) definiamo la *capacità residua* nel seguente modo
>
> $$r_{ij} = u_{ij} - x_{ij} + x_{ji}$$

Prendiamo ad esempio gli archi 12 e 21

$$r_{12} = 8 - 0 + 0 = 8 \qquad\qquad r_{21} = u_{21} - x_{21} + x_{12} = 0$$

Osserviamo che all'inizio:

- la capacità residua degli archi reali è pari alla capacità massima u_{ij};
- la capacità residua degli archi fittizi è nulla (quanto flusso c'è sull'arco vero).

Altro concetto di cui abbiamo bisogno è quello di *cammino aumentante*.

> **Definizione di *Cammino aumentante*.**
>
> Definisco *cammino aumentante* un cammino orientato dal nodo sorgente S al nodo destinatario t formato da archi con capacità residua $r_{ij} > 0$.

Un esempio nel grafo di cammino aumentante è il cammino $1 \to 2 \to 4 \to 6$

- $r_{12} = u_{12} = 8 > 0$
- $r_{24} = u_{24} = 4 > 0$
- $r_{46} = u_{46} = 2 > 0$

Un esempio nel grafo di cammino non aumentante è il cammino $1 \to 2 \longrightarrow 4 \to 3 \to 5 \to 6$, visto che $r_{43} = u_{43} = 0 \leq 0$.

3.3.3.3 Passi dell'algoritmo

Algoritmo di Ford-Fulkerson.

1. Cerco un cammino aumentante C_{aum} ricorrendo alla *procedura di Edmunds-Krap*. Se non lo trovo siamo all'ottimo, altrimenti calcolo

$$\delta = \min_{(i,j) \in C_{aum}} r_{ij}$$

2. Aumento il flusso di δ sul cammino aumentante C_{aum}

$$\overline{x} = \begin{cases} \overline{x}_{ij} + \delta & (i,j) \in C_{aum} \\ \overline{x}_{ij} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   e aggiorno i relativi r_{ij}: decremento negli archi reali (i,j) e incremento negli archi fittizi (j,i).

3. Torno al punto (1).

Il teorema sulla correttezza di Ford-Furkelson ci garantisce che la terminazione è corretta, e che quindi l'assenza di un cammino aumentante è a tutti gli effetti un test di ottimalità.

3.3.3.4 Procedura di Edmunds-Karp per la ricerca di un cammino aumentante

Introduciamo la procedura per individuare un cammino aumentante C_{aum}.

1. Immaginiamo di costruire due vettori: uno contenente i nodi visitati e un altro relativo ai nodi non ancora visitati.
   - Il vettore dei nodi visitati contiene, inizialmente, il nodo sorgente.
   - Il vettore dei nodi da visitare è inizialmente vuoto.
2. Si estrae dai nodi visitati il primo inserito (FIFO, *First In, First Out*).
3. Si pone nel vettore dei nodi da visitare la *stella uscente*, cioè l'insieme dei nodi che si possono raggiungere dal nodo estratto con archi orientati.
   - Il nodo j si pone nel vettore dei nodi da visitare solo se il relativo arco ij avrà capacità residua $r_{ij} > 0$, altrimenti lo si scarta. Se a causa di questo criterio non sono in grado di arrivare al nodo destinatario allora siamo all'ottimo.
   - **Criterio di stop**. Mi fermo se con questo spostamento poniamo il nodo destinatario nel vettore dei nodi da visitare.
4. Estraggo il primo nodo tra i nodi da visitare e lo pongo nei nodi visitati.
5. Ritorno al punto (2).

Fatto questo possiamo proseguire nell'esecuzione di Ford-Fulkerson, individuando tra gli r_{ij} del cammino aumentante quello minore, che sarà δ.

3.3.3.5 Esempio di applicazione

Riprendiamo il grado della pagina precedente. Si pone di base il nodo 1 tra i nodi visitati, mentre l'altro vettore è inizialmente vuoto.

1. **Primo passo**.

   - Estraggo il nodo 1 dall'insieme dei nodi visitati e aggiungo i nodi 2 e 3 (archi 12 e 13) nell'insieme dei nodi da visitare.
     $r_{12} = 8 > 0$ e $r_{13} = 6 > 0$
   - Sposto il nodo 2 dall'insieme dei nodi da visitare a quello dei nodi visitati. Il nodo 2 può raggiungere 3 e 4: 3 l'ho già visitato, quindi aggiungo solo 4.
     $r_{24} = 4 > 0$
   - Sposto il nodo 3 dall'insieme dei nodi da visitare a quello dei nodi visitati. Il nodo 3 può raggiungere il nodo 4 e il nodo 5: 4 l'ho già visitato, quindi aggiungo solo 5.
     $r_{35} = 1 > 0$
   - Sposto il nodo 4 dall'insieme dei nodi da visitare a quello dei nodi visitati. Il nodo 4 può raggiungere i nodi 5 e 6: 5 l'ho già visitato, quindi aggiungo solo 6.
     $r_{46} = 2 > 0$
   - Ecco 6, il nodo destinatario: abbiamo trovato il cammino aumentante (ripercorrere all'indietro)
     $$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6$$

   Troviamo, riprendendo Ford-Furkelson, che $\delta = 2$. A questo punto aggiorniamo i bilanci e le capacità residue degli archi.

   - Incremento di due le unità di flusso agli archi del cammino aumentante
     $$x_{12} = 0 + 2 = 2 \qquad x_{24} = 0 + 2 = 2 \qquad x_{46} = 0 + 2 = 2$$
     cioè
     $$\begin{array}{cccccccccc} & 12 & 13 & 23 & 24 & 34 & 35 & 45 & 46 & 56 \\ \overline{x} = & (2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0) \end{array}$$
   - Aggiorno le capacità residue degli archi reali
     $$r_{12} = 8 - 2 = 6 \qquad r_{24} = 4 - 2 = 2 \qquad r_{46} = 2 - 2 = 0$$
     Che consiste in quanto posso ancora mandare sugli archi veri. L'arco 46 è saturato.
   - Aggiorno le capacità residue degli archi fittizi.
     $$r_{21} = 0 + 2 = 2 \qquad r_{42} = 0 + 2 = 2 \qquad r_{46} = 0 + 2 = 2$$

   Si osservi che la somma tra capacità residua dell'arco fittizio ji e capacità residua dell'arco reale ij fa sempre la u_{ij} iniziale. Allo stato attuale abbiamo trasportato il seguente numero di unità
   $$v = 0 + \delta = 0 + 2 = 2$$

2. **Secondo passo**.

   - Estraggo il nodo 1 dall'insieme dei nodi visitati e aggiungo i nodi 2 e 3 (archi 12 e 13) nell'insieme dei nodi da visitare.
     $r_{12} = 6 > 0$ e $r_{13} = 6 > 0$

- Sposto il nodo 2 dall'insieme dei nodi da visitare a quello dei nodi visitati. Il nodo 2 può raggiungere 3 e 4: 3 l'ho già visitato, quindi aggiungo solo 4.

  $r_{24} = 2 > 0$
- Sposto il nodo 3 dall'insieme dei nodi da visitare a quello dei nodi visitati. Il nodo 3 può raggiungere il nodo 4 e il nodo 5: 4 l'ho già visitato, quindi aggiungo solo 5.

  $r_{35} = 1 > 0$
- Sposto il nodo 4 dall'insieme dei nodi da visitare a quello dei nodi visitati. Il nodo 4 può raggiungere i nodi 5 e 6: 5 l'ho già aggiunto, mentre 6 ha la capacità residue nulla. Non aggiungo niente.

  $r_{46} = 0 \leq 0$
- Sposto il nodo 5 dall'insieme dei nodi da visitare. Questo è collegato solo a 6, per mezzo dell'arco 56.

  $r_{56} = 10 > 0$
- Siamo nuovamente al nodo destinatario. Abbiamo trovato il cammino aumentante

$$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6$$

Troviamo che $\delta = 1$. Aggiorniamo di conseguenza le capacità residue.

- Incremento di due le unità di flusso agli archi del cammino aumentante

$$x_{13} = 0 + 1 = 1 \qquad x_{35} = 0 + 1 = 1 \qquad x_{56} = 0 + 1 = 1$$

  cioè

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} \scriptstyle 12 & \scriptstyle 13 & \scriptstyle 23 & \scriptstyle 24 & \scriptstyle 34 & \scriptstyle 35 & \scriptstyle 45 & \scriptstyle 46 & \scriptstyle 56 \end{array} \\ \overline{x} = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Aggiorno le capacità residue degli archi reali

$$r_{13} = 6 - 1 = 5 \qquad r_{35} = 1 - 1 = 0 \qquad r_{56} = 10 - 1 = 9$$

  Che consiste in quanto posso ancora mandare sugli archi veri. L'arco 35 è saturato.
- Aggiorno le capacità residue degli archi fittizi.

$$r_{31} = 0 + 1 = 1 \qquad r_{53} = 0 + 1 = 1 \qquad r_{65} = 0 + 1 = 1$$

La somma tra capacità residua dell'arco fittizio ji e capacità residua dell'arco reale ij è SEMPRE uguale alla u_{ij} iniziale. Allo stato attuale abbiamo trasportato il seguente numero di unità

$$v = 2 + \delta = 2 + 1 = 3$$

3. **Terzo passo**.

- Estraggo il nodo 1 dall'insieme dei nodi visitati e aggiungo i nodi 2 e 3 (archi 12 e 13) nell'insieme dei nodi da visitare.

  $r_{12} = 6 > 0$ e $r_{13} = 5 > 0$
- Sposto il nodo 2 dall'insieme dei nodi da visitare a quello dei nodi visitati. Il nodo 2 può raggiungere 3 e 4: 3 l'ho già visitato, quindi aggiungo solo 4.

  $r_{24} = 2 > 0$

- Sposto il nodo 3 dall'insieme dei nodi da visitare a quello dei nodi visitati. Il nodo 3 può raggiungere il nodo 4 e il nodo 5: 4 l'ho già visitato, mentre 5 ha relativa capacità residua nulla. Non aggiungo niente.

  $r_{35} = 0 \leq 0$
- Sposto il nodo 4 dall'insieme dei nodi da visitare a quello dei nodi visitati. Il nodo 4 può raggiungere i nodi 5 e 6: il aggiungiamo il nodo 5 e scartiamo il 6, vista la relativa capacità residua nulla.

  $r_{45} = 3 > 0$, $r_{46} = 0 \leq 0$
- Sposto il nodo 5 dall'insieme dei nodi da visitare. Questo è collegato solo a 6, per mezzo dell'arco 56.

  $r_{56} = 9 > 0$
- Siamo nuovamente al nodo destinatario. Abbiamo trovato il cammino aumentante

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6$$

Troviamo che $\delta = 2$. Aggiorniamo di conseguenza le capacità residue.

- Incremento di due le unità di flusso agli archi del cammino aumentante

$$x_{13} = 0 + 1 = 1 \qquad x_{35} = 0 + 1 = 1 \qquad x_{56} = 0 + 1 = 1$$

  cioè

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} 12 & 13 & 23 & 24 & 34 & 35 & 45 & 46 & 56 \end{array} \\ \overline{x} = & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Aggiorno le capacità residue degli archi reali

$$r_{13} = 6 - 1 = 5 \qquad r_{35} = 1 - 1 = 0 \qquad r_{56} = 10 - 1 = 9$$

  Che consiste in quanto posso ancora mandare sugli archi veri. L'arco 35 è saturato.
- Aggiorno le capacità residue degli archi fittizi.

$$r_{31} = 0 + 1 = 1 \qquad r_{53} = 0 + 1 = 1 \qquad r_{65} = 0 + 1 = 1$$

Allo stato attuale abbiamo trasportato il seguente numero di unità

$$v = 3 + \delta = 3 + 2 = 5$$

4. **Quarto passo**.

   Il quarto passo, che omettiamo, restituisce il seguente cammino aumentante

$$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6$$

   con $\delta = 1$. Il flusso aggiornato è il seguente

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} 12 & 13 & 23 & 24 & 34 & 35 & 45 & 46 & 56 \end{array} \\ \overline{x} = & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

   Allo stato attuale abbiamo trasportato il seguente numero di unità

$$v = 5 + \delta = 5 + 1 = 6$$

5. **Quinto passo**.

   Al quinto passo ci accorgiamo, costruendo un nuovo cammino aumentante, che non siamo in grado di raggiungere il nodo destinatario 6. Escludendo nodi già visitati e nodi le cui relative capacità residue sono ≤ 0 non potremo completare il percorso.

   Questa cosa ci conferma che il cammino aumentante individuato al quarto passo ci restituisce l'ottimo! Abbiamo ottenuto il seguente taglio

   $$N_S = \{1, 2, 3, 4\} \qquad\qquad N_t = \{5, 6\}$$

   se proviamo a calcolare la capacità del taglio otteniamo, non a caso, v

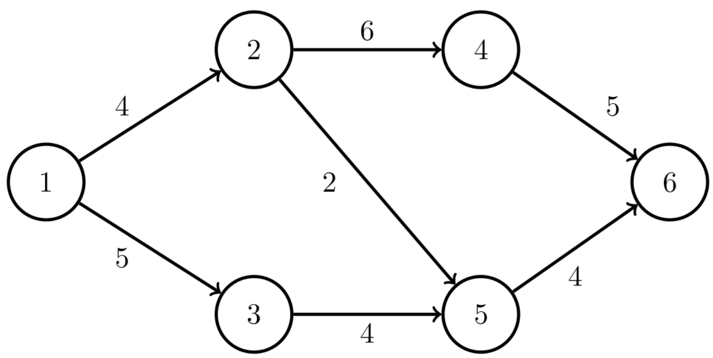
   $$u(N_S, N_t) = u_{34} + u_{45} + u_{46} = 6 = v$$

3.3.3.6 Utilità degli archi fittizi

Dopo aver letto il mio esempio la prima cosa che salta all'occhio è l'apparente inutilità degli archi fittizi. Perchè abbiamo calcolato le capacità residue degli archi fittizi, se poi non le abbiamo utilizzate? Buona parte degli esercizi possono essere fatti con Ford-Fulkerson senza archi fittizi, ma non tutti. Si consideri che

$$\boxed{\text{La capacità residua degli archi fittizi è il flusso lungo l'arco reale.}}$$

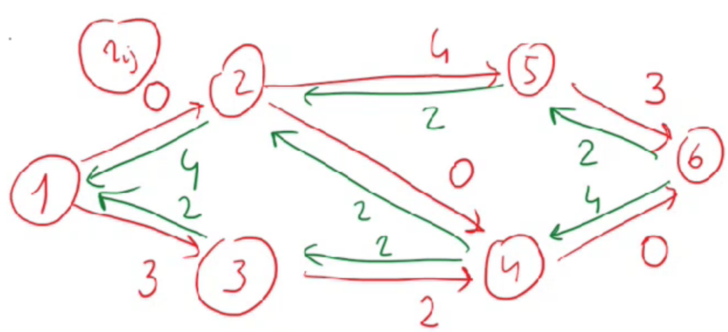
Quello che possiamo fare (anche nello scritto), per comodità, è rimandare la questione degli archi fittizi al termine di una risoluzione senza gli stessi. Consideriamo la seguente rete:



Applicando Ford-Fulkerson otterremo la seguente tabella

C_{aum}	δ	12	13	24	25	34	46	56	v
1246	2	2	0	2	0	0	2	0	2
1256	2	4	0	2	2	0	2	2	4
1346	2	4	2	2	2	2	4	2	6

Si osservi che $v = 6$, cosa impossibile nel cammino aumentante $1 \to 3 \to 4 \to 6$ (al più posso avere $v = 4$). Senza considerare gli archi fittizi ci sembrerebbe di aver già finito, ma qualcosa non va. Risolviamo introducendo gli archi fittizi, considerando le relative capacità residue.



Dalla foto emerge chiaro che nell'applicazione di Ford-Fulkerson senza archi fittizi mi dovrei fermare (capacità residue dell'arco 46 uguale a 0). In realtà osservo che l'arco fittizio 42 ha una capacità residua 2!!! A questo punto proseguo nell'applicazione di Ford-Fulkerson spostandomi dal nodo 4 al nodo 2. Otteniamo:

C_{aum}	δ	12	13	24	25	34	46	56	v
134256	2	4	4	0	4	4	4	4	8

Il flusso è stato aggiornato come al solito, ma nel caso dell'arco 24 poniamo

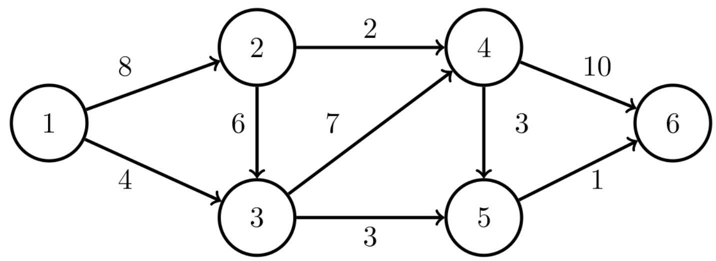
$$x_{24} = 2 - 2 = 0 \qquad x_{42} = 0 + 2 = 2 \qquad r_{24} = 0 + 2 = 2 \qquad r_{42} = 2 - 2 = 0$$

E' come se io avessi posto un ripensamento sul flusso precedentemente posto su 24!!

3.4 Cammini di costo minimo orientati

3.4.1 Introduzione

Il problema dei cammini minimi è il problema più noto della PL su reti. Rappresentiamo un rete con costi sugli archi.



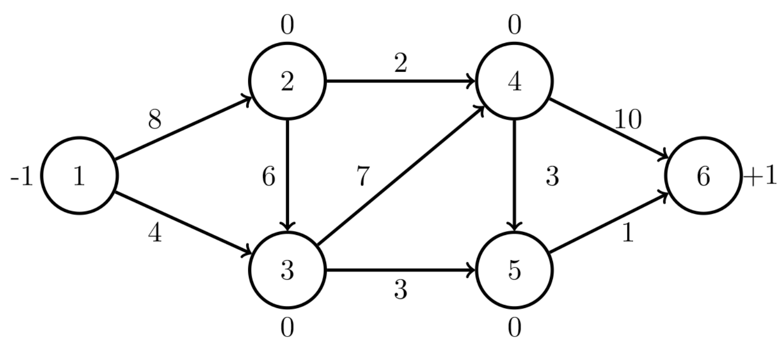
3.4.1.1 Variante: singolo percorso da nodo i a nodo j

Ci chiediamo quale sia il cammino minimo orientato da un nodo i a un nodo j della rete. Per comodità poniamo $c_{ij} \geq 0, \forall (i,j)$. Le strade possibili sono due:

1. ad ogni nodo scorrere tutti gli archi possibili, individuando ogni volta quello di costo minimo, partendo dal nodo i fino ad arrivare al nodo j;

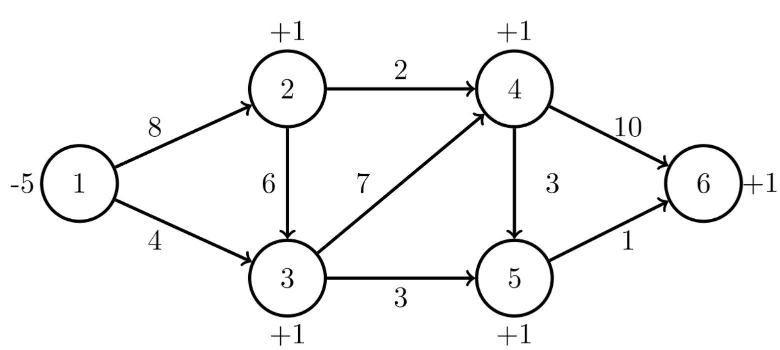
2. utilizzare il simplesso su reti.

La seconda via ci piace di più, poichè la prima diventa impraticabile con un numero elevato di nodi e archi! Per avere meglio l'idea immaginiamoci che il percorso dal nodo i al nodo j sia attraversato da una unità di flusso. Porremo $b_i = -1$, $b_j = 1$ e $b_k = 0, k \notin \{i,j\}$.



3.4.1.2 Variante: cammini minimi di radice r

Dato un nodo r vogliamo trovare l'*albero dei cammini minimi*, cioè individuare i percorsi per raggiungere, a costo minimo, tutti gli altri nodi della rete. Possiamo ottenere in un colpo solo tutti i percorsi ponendo i bilanci nel seguente modo



Abbiamo ottenuto un albero orientato: la cosa non ci sorprende perchè tutti i nodi, tranne la radice, hanno bilancio +1! Questo significa che con gli archi raggiungeremo i tutti i nodi, per forza!

3.4.2 Algoritmo del simplesso per i cammini minimi

L'algoritmo del simplesso per i cammini minimi è una versione particolare dell'algoritmo del simplesso per le reti.

Semplificazioni

- **Niente regole anticiclo di Bland**.

  Non abbiamo sicuramente soluzioni di base degeneri: ricordiamoci che Bland ci permette di evitare cicli in soluzioni di base degeneri.

  - Si ha flusso degenere se uno degli archi dell'albero ha flusso zero.
  - Nel problema affrontato non può succedere: tutti sono con bilanci 1, si deve passare da tutti i nodi per forza.
  - La certezza di avere vertici non degeneri mi garantisce che ad ogni passaggio avrò un miglioramento della funzione obiettivo (in presenza di casi degeneri incorrere in una soluzione degenere significa poter effettuare un cambio di base senza miglioramento della funzione obiettivo).

  $$c \cdot x(\theta) = c \cdot \overline{x} + \theta \cdot c_{ij}^{\pi}$$

  Quale vantaggio possiamo trarre dall'assenza della regola anticiclo? Maggiore velocità nell'esecuzione complessiva: si sceglie tra i possibili costi ridotti $c_{ij}^{\pi} < 0$ quello più piccolo (miglioramento pazzesco, in un colpo solo, del valore della funzione obiettivo).

- **Bellman CNS (e non solo CS)**.

  In assenza di soluzioni degeneri Bellman non è solo condizione sufficiente (classico), ma anche condizione necessaria. Se è verificato siamo all'ottimo, se non è verificato non lo siamo.

Algoritmo Sia T un albero di copertura, che presenta un particolare nodo sorgente.

1. **Verifica dell'ottimo**.

   Applichiamo Bellman per verificare se siamo all'ottimo: calcolo del potenziale π e controllo dei costi ridotti. Se

   $$c_{ij}^{\pi} > 0, \forall (i,j) \in L$$

   allora siamo all'ottimo. Attuiamo un cambio di base nel caso in cui si abbiano costi ridotti negativi.

2. **Cambio di base**.

   - **Arco entrante**.
     Si considerino i costi ridotti $c_{ij}^{\pi} < 0$: prendiamo il più piccolo c_{ij}^{π} tra quelli presenti!
   - **Arco uscente**.
     Dato l'arco entrante (i,j) pongo l'arco (k,j) come arco uscente.

3.4.3 Algoritmo di Dijkstra per l'individuazione dei cammini minimi

Supponiamo di avere una rete (dove poniamo un nodo radice) e di voler trovare l'albero dei cammini minimi. Applichiamo l'algoritmo di Dijkstra, che dati n nodi termina in n passi.

- **Inizializzazione dei vettori**.

  Dobbiamo inizializzare il *vettore delle etichette* π e il *vettore dei predecessori* p. Dati n nodi entrambi i vettori saranno $\in \mathbb{R}^n$

  - **Vettore delle etichette**. Al passo iniziale π è posto

    $$\pi = \begin{pmatrix} 0 & +\infty & \dots & +\infty \end{pmatrix}$$

    pongo 0 alla radice e "infinito" agli altri nodi (in realtà si pongono valori altissimi).

    Dopo l'ultimo passo questo vettore conterrà, per ogni nodo, il costo necessario per raggiungere quel nodo.
  - **Vettore dei predecessori**. Al passo iniziale p è posto

    $$p = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

    pongo 1 alla radice e -1 "come simbolo" agli altri nodi. Dopo l'ultimo passo questo vettore conterrà, alla componente relativa al nodo i-esimo, il predecessore del nodo stesso all'interno dell'albero dei cammini minimi.

- **Algoritmo**.

  1. **Estrazione del nodo**.

     Estraggo il nodo i, di etichetta minima. Al primo passo è sicuro il nodo 1. Osservazione stupida: non si estraggono nodi già estratti.
  2. **Aggiornamento del nodo**.

     Si calcola la stella uscente del nodo estratto i, cioè i nodi che si possono raggiungere partendo dal nodo i. Per ogni nodo appartenente alla stella uscente mi chiedo se

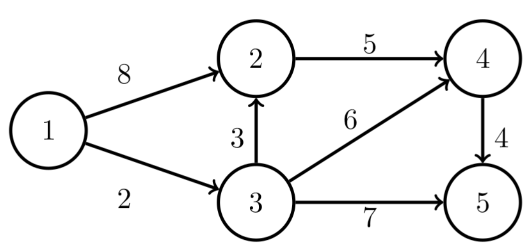
     $$\pi_j > \pi_i + c_{ij}$$

     se la condizione è soddisfatta aggiorno, altrimenti non aggiorno. Si aggiorna ponendo i seguenti valori

     $$\pi_j = \pi_i + c_{ij} \qquad\qquad p_j = i$$

3.4.3.1 Esempio

Prendiamo la seguente rete e applichiamo l'algoritmo di Dijkstra.



1. **Inizializzazione**.

   Inizializzo vettore delle etichette e vettore dei predecessori

   $$\pi = \begin{pmatrix} 0 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Procediamo con gli n passi, in questo caso 5 passi!

2. **Primo passo**.

   Estraggo il nodo di etichetta minima, in questo caso il nodo radice (è sempre così al primo passo) 1. Calcolo la stella uscente del nodo $i = 1$

   $$\text{FS}(1) = \{2, 3\}$$

   Verifichiamo se le condizioni sono soddisfatte

   $$\begin{aligned} &\pi_2 > \pi_1 + c_{12} \longrightarrow +\infty > 0 + 8 && \text{Sì, aggiorniamo ponendo } \pi_2 = 8, p_2 = 1 \\ &\pi_3 > \pi_1 + c_{13} \longrightarrow +\infty > 0 + 2 && \text{Sì, aggiorniamo ponendo } \pi_3 = 2, p_3 = 1 \end{aligned}$$

   segue

   $$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \end{pmatrix} \qquad p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. **Secondo passo**.

   Estraggo il nodo di etichetta minima, in questo caso il nodo 3. Non prendo 0 in quanto distinguo i nodi già visitati da quelli non visitati. Calcolo la stella uscente del nodo $i = 3$

   $$\text{FS}(3) = \{2, 4, 5\}$$

   Verifichiamo se le condizioni sono soddisfatte

   $$\begin{aligned} &\pi_2 > \pi_3 + c_{32} \longrightarrow 8 > 2 + 3 && \text{Sì, aggiorniamo ponendo } \pi_2 = 5, p_2 = 3 \\ &\pi_4 > \pi_3 + c_{34} \longrightarrow +\infty > 2 + 6 && \text{Sì, aggiorniamo ponendo } \pi_4 = 8, p_4 = 3 \\ &\pi_5 > \pi_3 + c_{35} \longrightarrow +\infty > 2 + 7 && \text{Sì, aggiorniamo ponendo } \pi_5 = 9, p_5 = 3 \end{aligned}$$

   segue

   $$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 & 7 & 9 & +\infty & +\infty \end{pmatrix} \qquad p = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. **Terzo passo**.

   Estraggo il nodo di etichetta minima, in questo caso il nodo 4. Calcolo la stella uscente del nodo $i = 4$

   $$\text{FS}(4) = \{5\}$$

   Verifichiamo se le condizioni sono soddisfatte

   $$\pi_5 > \pi_4 + c_{45} \longrightarrow 9 > 7 + 4 \qquad \text{No, non aggiorniamo}$$

   rimane tutto uguale

   $$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 & 7 & 9 & +\infty & +\infty \end{pmatrix} \qquad p = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. **Quarto passo**.

   Estraggo il nodo di etichetta minima, in questo caso il nodo 2. Calcolo la stella uscente del nodo $i = 2$

   $$\text{FS}(2) = \{4\}$$

   Verifichiamo se le condizioni sono soddisfatte

   $$\pi_4 > \pi_2 + c_{24} \longrightarrow 7 > 8 + 5 \qquad\qquad \text{No, non aggiorniamo}$$

   rimane tutto uguale

   $$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 & 7 & 9 & +\infty & +\infty \end{pmatrix} \qquad p = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

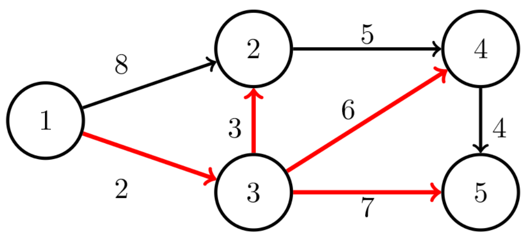
6. **Quinto passo**.

   Estraggo il nodo di etichetta minima, in questo caso il nodo 5. Calcolo la stella uscente del nodo $i = 5$

   $$\text{FS}(5) = \{\emptyset\}$$

   Abbiamo finito, non ci sono nodi nella stella!

Il risultato ottenuto è il seguente albero di copertura, che ricostruiamo osservando i predecessori dal vettore p:



Il costo totale è il seguente

$$c = 2 + (2 + 3) + (2 + 6) + (2 + 7) = 24$$