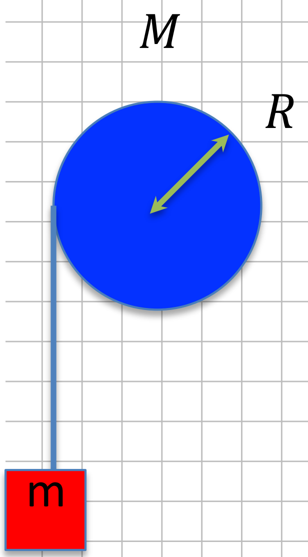
Esercizio



Ad una carrucola di massa M e raggio R, assimilabile a un disco omogeneo, vincolata a ruotare attorno ad un asse orizzontale, è avvolta una fune di massa trascurabile. Alla fune è sospeso un corpo di massa m soggetto all'azione della gravità. Mentre il corpo si sposta verso il basso, la fune si srotola rimanendo aderente alla carrucola.

- Calcolare l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$ della carrucola.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha \qquad a_t = r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$a_{\text{TANGENZIALE}} = r\,\alpha$$

NEL NOSTRO CASO : $a_t = R\,\alpha$

$$I\alpha = RT \qquad \alpha = \frac{RT}{I}$$

$\downarrow \hat{j}$

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$mg - T = ma$$

$$a = R\alpha$$

$$\begin{cases} mg - T = mR\alpha & (1) \\ \alpha = \dfrac{RT}{I} \Rightarrow T = \dfrac{I\alpha}{R} & (2) \end{cases}$$

$$mg - \frac{I\alpha}{R} = mR\alpha \qquad mg = \alpha\left(mR + \frac{I}{R}\right)$$

$$\alpha = \frac{mg}{mR + \frac{I}{R}} \qquad I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\alpha = \frac{mg}{R\left(m+\frac{M}{2}\right)} = \frac{2mg}{R(M+2m)}$$

CASO CON BLOCCO

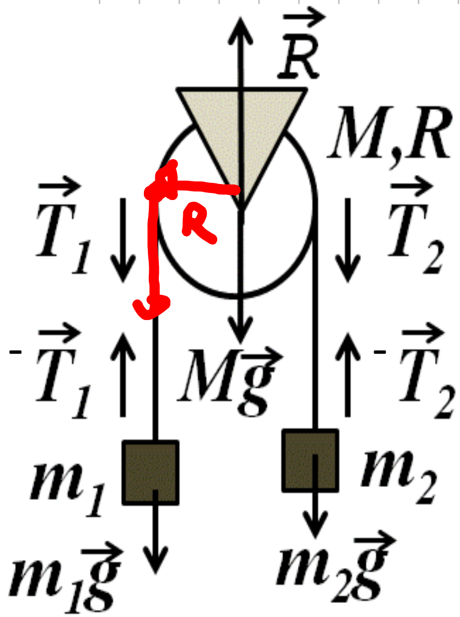
$$a = R\alpha = \frac{2mg}{M+2m}$$

$$T = \frac{I\alpha}{R} = \frac{Mm}{M+2m}g$$

$$\alpha = \frac{2T}{MR} = \frac{2F}{MR}$$

CASO CON FORZA EX APPL.

Esercizio



Sia dato un sistema formato da una carrucola di massa M e raggio R, vincolata a ruotare intorno ad un asse orizzontale senza attrito, su cui scorre senza slittare una corda di massa trascurabile.

Alle estremità della corda sono appese due masse, di valori m_1 e m_2. Calcolare:

- l'accelerazione delle due masse;
- l'accelerazione angolare della carrucola;
- le tensioni dei fili.

ATWOOD

- FILO INESTENSIBILE $\Rightarrow$ m_1 ed m_2 VINCOLATE
- $I = \frac{1}{2} M R^2$ MOMENTO DI INERZIA CARRUCOLA
- CORDA ADERENTE $\Rightarrow$ $a = R\alpha$
- NO ATTRITI ULTERIORI

$\downarrow \hat{j}$

BLOCCHI:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

$$a_2 = -a_1 \qquad a_1 = a$$

$$m_1 g - T_1 = m_1 a$$

$$m_2 g - T_2 = -m_2 a$$

$$m_1 a = m_1 g - T_1$$

$$m_2 a = T_2 - m_2 g$$

$$\tau = T_1 R - T_2 R = I \alpha$$

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

$$T_1 R - T_2 R = \frac{I}{R} a$$

$$T_1 - T_2 = \frac{I}{R^2} a$$

DALLE EQ. PER I BLOCCHI: $T_1 = m_1 g - m_1 a$

$$T_2 = m_2 a + m_2 g$$

$$T_1 - T_2 = m_1 g - m_1 a - m_2 a - m_2 g = \frac{I}{R^2} a$$

$$(m_1 - m_2) g - (m_1 + m_2) a = \frac{I}{R^2} a$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} = \frac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{1}{R} \frac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

$$T_1 = m_1 g - m_1 a = m_1 g - \frac{m_1 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} g$$

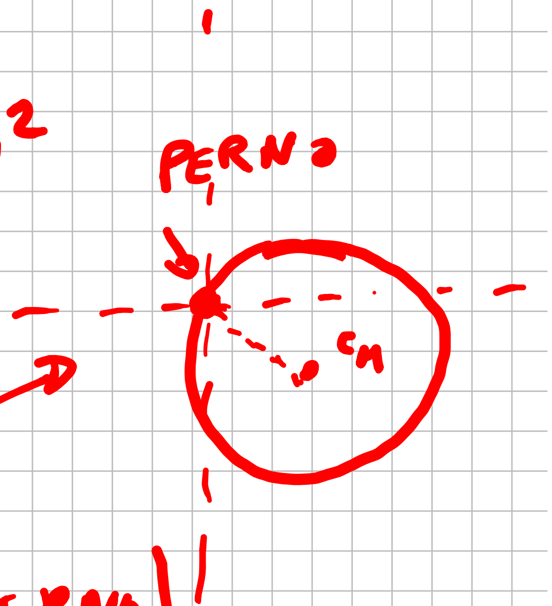
$$= \frac{m_1 \left(m_2 + \frac{M}{2}\right) g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

Energia cinetica di un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso

Un disco di massa M e raggio R sta ruotando con velocità angolare ω attorno a un asse che passa attraverso il bordo del disco ed è perpendicolare al suo piano. Il momento di inerzia del disco rispetto al centro di massa è $I_{CM} = \frac{1}{2} M R^2$.

- Qual è l'energia cinetica del disco?

$$K = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$



ASSE z USCENTE (PASSA DAL PERNO)

IL DISCO RUOTA ATTORNO ALL'ASSE z
CON VELOCITÀ ANGOLARE ω

$$V_{cm}^2 = \omega^2 R^2$$

$$K = \frac{1}{2} M \omega^2 R^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \left(I_{cm} + M R^2 \right) = \frac{1}{2} \omega^2 I_{bordo}$$

CORPO RIGIDO CHE RUOTA CON VEL. ANGOLARE ω RISPETTO AD UN ASSE FISSO S:

$$K = \frac{1}{2} I_S \omega^2$$

Corpo rigido in pura rotazione attorno ad un asse fisso

Consideriamo un corpo rigido di massa M e momento di inerzia I_{CM} rispetto ad un asse passante dal suo centro di massa. Supponiamo che il corpo ruoti attorno ad un asse fisso S, parallelo all'asse passante per il centro di massa e distante da questo d, con velocità angolare $\vec{\omega}$. Il momento angolare rispetto a un punto O sull'asse S è:

$$\vec{L}_O = I_S\vec{\omega} = (I_{CM} + Md^2)\vec{\omega}$$

Di conseguenza:

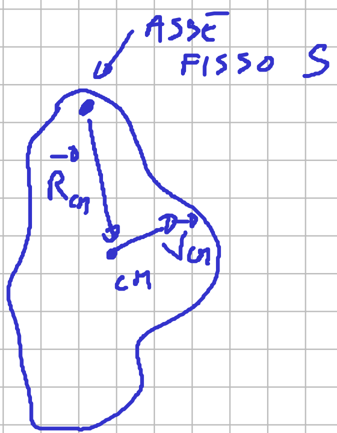
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I_S\vec{\omega})}{dt} = I_s\vec{\alpha} = \vec{\tau}$$

TEOREMA DI KÖENIG PER IL MOMENTO ANGOLARE:
MOMENTO ANGOLARE RISPETTO A UN ASSE FISSO S:

$$\vec{L}_S = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{REL}$$

$$\vec{L}_{CM} = \vec{R}_{CM} \times m\vec{V}_{CM} \qquad \vec{L}_{REL} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

SUPPONIAMO UNA PURA ROTAZIONE ATTORNO AD UN ASSE FISSO CON VELOCITÀ ANGOLARE $\vec{\omega}$



$$\vec{V}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{R}_{CM}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_{CM} = M\, \vec{R}_{CM} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}_{CM})$$

TRIPLO PRODOTTO VETTORIALE: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\Rightarrow \vec{L}_{CM} = M\left[\vec{\omega}(\vec{R}_{CM} \cdot \vec{R}_{CM}) - \vec{R}(\vec{R}_{CM} \cdot \vec{\omega})\right]$$

$$\vec{R}_{CM} \cdot \vec{\omega} = 0 \qquad \Rightarrow \vec{L}_{CM} = MR^2 \vec{\omega}$$

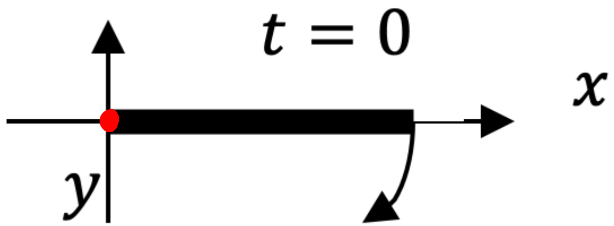
$$\Rightarrow \vec{L}_S = MR^2 \vec{\omega} + I_{CM} \vec{\omega} = (MR^2 + I_{CM})\vec{\omega}$$

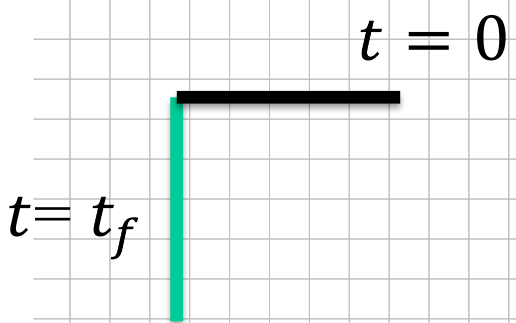
$$= I_S \vec{\omega}$$

I_S = MOMENTO DI INERZIA RISPETTO A S

Esercizio

Una sbarra omogenea (massa m e lunghezza L) è libera di ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per un suo estremo. Al tempo $t = 0$ la sbarra è ferma in posizione orizzontale ed è lasciata libera di muoversi: al tempo $t = t_f$ la sbarra ha effettuato una rotazione di $90°$ (è in posizione verticale).

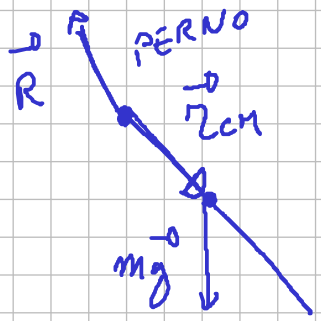




Determinare:

- le forze che agiscono sulla sbarra;
- le grandezze conservate nel moto;
- la velocità angolare della sbarra al tempo t_f.
- l'accelerazione del centro di massa della sbarra un istante dopo che è lasciata libera di ruotare.
- l'accelerazione del centro di massa della sbarra al tempo $t = t_f$.
- la reazione del perno $\vec{R}$ un istante dopo che la sbarretta è lasciata cadere.
- la reazione del perno al tempo $t = t_f$.

SBARRA



$$m\vec{a}_{cm} = \vec{R} + m\vec{g} \neq 0$$

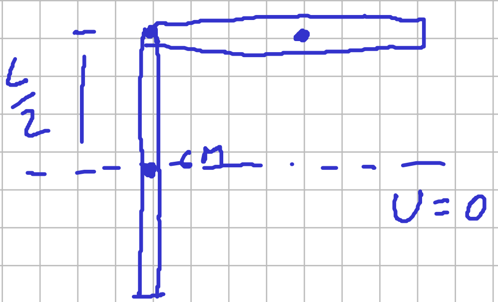
$$\frac{d\vec{P}_{sis}}{dt} = \vec{F}_{RIS,EXT} \neq 0$$

$\vec{P}_{sis}$ NON SI CONSERVA

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r}_{cm} \times m\vec{g} \neq 0$$

$\vec{L}$ NON SI CONSERVA

LAVORO DI $\vec{R} = 0$ SI CONSERVA E



$$E_i = mg\frac{L}{2}$$

$$E_f = K_f$$

$$K_f = \frac{1}{2} I_p \omega_f^2$$

I_p = MOMENTO DI INERZIA RISPETTO ALL'ASSE PASSANTE DAL PERNO

$$I_P = I_{cm} + m d^2 \qquad d = \frac{L}{2}$$

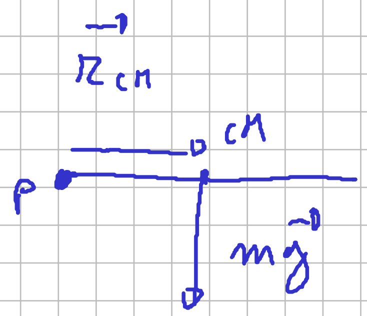
$$I_P = \frac{m L^2}{12} + \frac{m L^2}{4} = \frac{m L^2}{3}$$

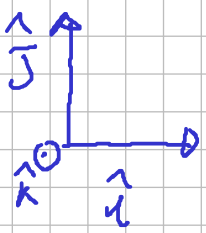
$$\frac{1}{2} I_P \, \omega_f^2 = m g \frac{L}{2} \qquad \omega_f^2 = \frac{2 m g \frac{L}{2}}{I_P} =$$

$$\omega_f^2 = \frac{3g}{L} \qquad \omega_f = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

CALCOLO DI $\vec{a}_{cm}(0)$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$





$$\vec{r}_{cm} = \frac{\ell}{2} \hat{i}$$

$$m\vec{g} = - m g \hat{j}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{cm} \times m\vec{g} = - \frac{m g \ell}{2} \hat{k}$$

$$\vec{\tau} = I_P \vec{\alpha} \qquad \vec{\alpha} = \alpha_z \hat{k}$$

$$I_P \, \alpha_z = -mg\frac{\ell}{2} \qquad \alpha_z = -\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} =$$

$$= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

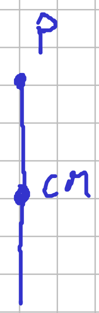
$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{r})}_{0}\vec{\omega} - \underline{\underline{(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})}}\vec{r} = -\omega^2 r \, \hat{r}$$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \qquad \vec{a}_c = -\omega^2 r \, \hat{r}$$

$$\vec{\alpha} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\hat{k}}} \qquad \vec{r}_i = \underline{\underline{\frac{\ell}{2}\hat{i}}}$$

$$\vec{a}(0) = -\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\frac{\ell}{2}\hat{j} = -\frac{3}{4}g\,\hat{j} \qquad (\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j})$$

ACCELERAZIONE FINALE



$$\vec{a}_p = -\omega_p^2 \frac{\ell}{2} \hat{r} = -\frac{3}{2} g \hat{r} =$$

$$= \frac{3}{2} g \hat{j}$$

REAZIONE: ALL'INIZIO

$$m \vec{a}_{CM} = \vec{R} + m\vec{g} \qquad \vec{g} = -g \hat{j}$$

$$\vec{R} = m \left(\vec{a}_{CM} - \vec{g} \right) = m \left(-\frac{3}{4} g + g \right) \hat{j} =$$

$$= \frac{mg}{4} \hat{j}$$

REAZIONE ALLA FINE

$$\vec{R} = m \left(\frac{3}{2} g \hat{j} + g \hat{j} \right) = \frac{5}{2} m g \hat{j}$$

OSCILLATORE ARMONICO

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$\omega =$ PULSAZIONE

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ PERIODO

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

LEGGE ORARIA

PENDOLO SEMPLICE

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(mL^2\dot{\theta})}_{\text{MOMENTO ANGOLARE}}\hat{k} = \underbrace{-mgL\sin\theta}_{\text{MOMENTO DELLA FORZA}}\hat{k}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = I\vec{\alpha} = \vec{\tau}$$ ← MOMENTO DELLA FORZA (PESO) RISPETTO AL CENTRO DEL MOTO

$$I = mL^2 \qquad \vec{\alpha} = \ddot{\theta}\hat{k}$$

MOMENTO DI INERZIA DEL PUNTO MATERIALE RISPETTO AL CENTRO DEL MOTO

$$\ddot{\theta} = \frac{-mgL\sin\theta}{mL^2}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta \qquad \theta \ll 1$$

$$\Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$$

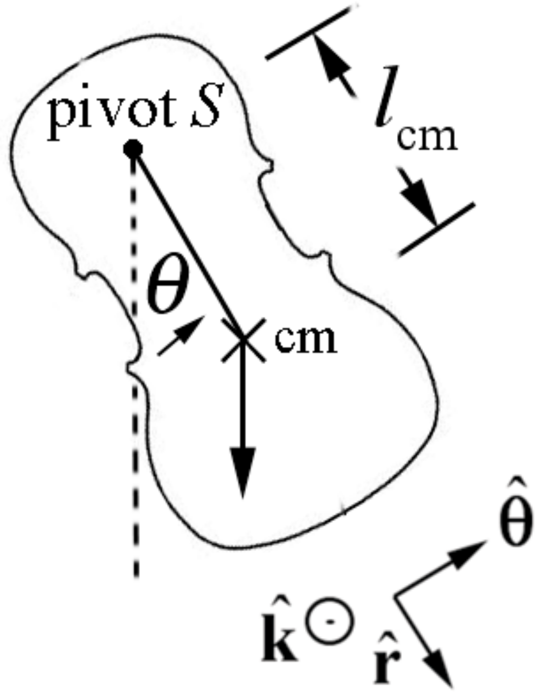
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta$$ EQUAZIONE DIFFERENZIALE PER L'OSCILLATORE ARMONICO

PULSAZIONE $\omega^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

PERIODO $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Pendolo fisico

Un pendolo fisico è costituito da un corpo rigido di massa m che subisce una rotazione attorno a un asse fisso S. La forza peso agisce nel centro di massa del pendolo fisico. Si denoti la distanza tra il centro di massa e il punto di sospensione S con l_{cm}. L'analisi del momento torcente è quasi identica a quella del pendolo semplice.



PENDOLO FISICO

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{cm} \times m\vec{g} = mg\, \ell_{cm}\, \hat{r} \times (\cos\theta\, \hat{r} - \sin\theta\, \hat{\theta}) =$$

MOMENTO TORCENTE (RISPETTO AL PERNO IN S)

$$= - \ell_{cm}\, mg \sin\theta\, \hat{k}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I_s \vec{\alpha} = I_s \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{k} = \vec{\tau}_s = -\ell_{cm}\, mg \sin\theta\, \hat{k}$$

I_s = MOMENTO DI INERZIA RISPETTO A S

$$I_s \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\ell_{cm}\, mg \sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\ell_{cm}\, mg \sin\theta}{I_s}$$

PICCOLE OSCILLAZIONI $\quad \sin\theta \simeq \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mg\,\ell_{cm}}{I_s}\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mg\,\ell_{cm}}{I_s}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_s}{mg\,\ell_{cm}}}$$

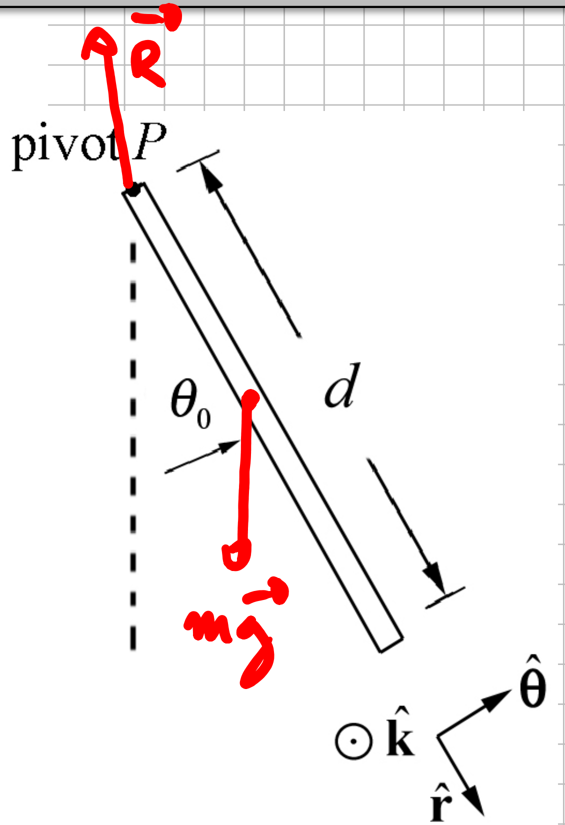
$$I_s = I_{cm} + d^2 m$$ TEOREMA ASSI PARALLELI

NEL NOSTRO CASO $d = \ell_{cm}$

$$I_s = I_{cm} + \ell_{cm}^2 m$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mg\,\ell_{cm}}{I_{cm} + \ell_{cm}^2 m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{cm}}{mg\,\ell_{cm}} + \frac{\ell_{cm}}{g}}$$

Esercizio



Un pendolo fisico è costituito da un'asta uniforme di lunghezza d e massa m sospesa ad un'estremità. Il pendolo viene inizialmente spostato lateralmente di un piccolo angolo $\theta_0 \ll 1$ e rilasciato da fermo. Determinare il periodo del pendolo usando:

(a) il metodo del momento torcente;

(b) il metodo dell'energia.

$$I\vec{\alpha} = \vec{\tau}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{k}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{d}{2}\frac{mg}{I_P}}$$

$$I_P = I_{cm} + \left(\frac{d}{2}\right)^2 m = I_{cm} + \frac{d^2}{4} m$$

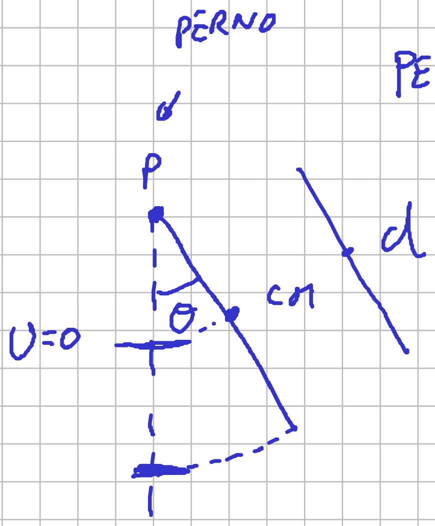
$$I_{cm} = \frac{1}{12} m d^2$$

ASTA OMOGENEA

$$I_P = \frac{1}{3} m d^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{d}{2} mg}{\frac{1}{3} m d^2}} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{g}{d}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{d}{g}}$$



PENDOLO FISICO ENERGIA

$U(0)=0$

$U(\theta) = mg\frac{d}{2}(1-\cos\theta)$

$K = \frac{1}{2} I_p \omega^2$

$E = K + U = \frac{1}{2} I_p \omega^2 + mg\frac{d}{2}(1-\cos\theta)$

E É COSTANTE $\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$

$\frac{d}{dt}K + \frac{dU}{dt} = 0$

$\frac{d}{dt}K = \frac{1}{2} I_p \frac{d}{dt}\omega^2 = I_p \omega\dot{\omega} = I_p \frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$\frac{d}{dt}U = \frac{mgd}{2}\sin\theta\,\dot{\theta} = \frac{mgd}{2}\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}$

$\frac{d\theta}{dt}\left[mg\frac{d}{2}\sin\theta + I_p\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0$

$$mg\frac{d}{2}\sin\theta + I_p\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

$$\theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$$

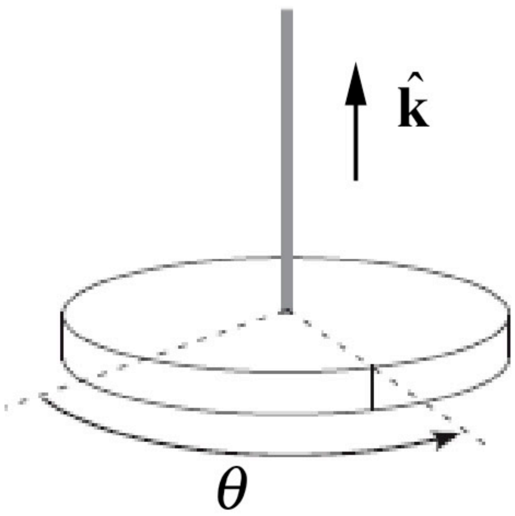
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mg\frac{d}{2}}{I_p}\theta = 0 \qquad I_p = \frac{1}{3}md^2$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3}{2}\frac{g}{d} = 0$$

PULSAZIONE $\quad \omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{d}}$

PERIODO $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2d}{3g}}$

Esercizio: oscillatore torsionale



Un disco, con momento di inerzia rispetto al centro di massa I_{cm} ruota in un piano orizzontale. Il disco è sospeso tramite una barra sottile e priva di massa. Se il disco viene spostato dalla sua posizione di equilibrio di un angolo θ, la barra esercita un momento torcente di ripristino rispetto al centro del disco con modulo $\tau_{CM} = b\theta$, dove b è una costante positiva.

Al tempo $t = 0$, il disco viene rilasciato da fermo con uno spostamento angolare di θ_0.

- Determinare la dipendenza temporale dello spostamento angolare $\theta(t)$.

PENDOLO DI TORSIONE

$$\vec{\alpha} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{k}$$

$$\vec{\tau} = -b\theta\hat{k}$$

NEL NOSTRO CASO:

$$I\vec{\alpha} = \vec{\tau}$$

$$I = I_{cm}$$

$$I_{cm}\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{k} = -b\theta\hat{k}$$

$$I_{cm}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -b\theta$$

OSCILLATORE ARMONICO

$$\omega = \sqrt{\frac{b}{I_{cm}}}$$

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

CONDIZIONI INIZIALI:

$$\theta(0) = \theta_0 \qquad A = \theta_0$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \qquad \frac{d\theta}{dt}(0) = 0 \qquad \sin\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$$

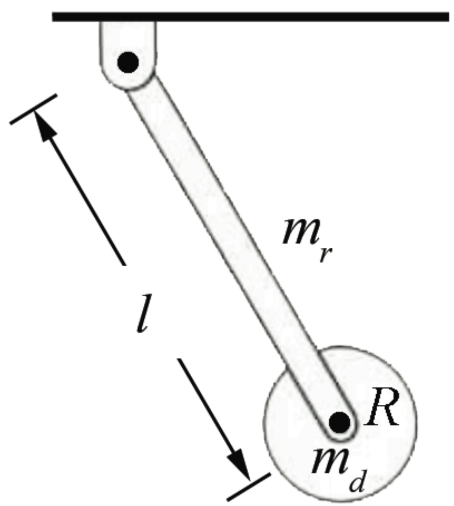
$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t) = \theta_0\cos\left[\sqrt{\frac{b}{I_{cm}}}\,t\right]$$

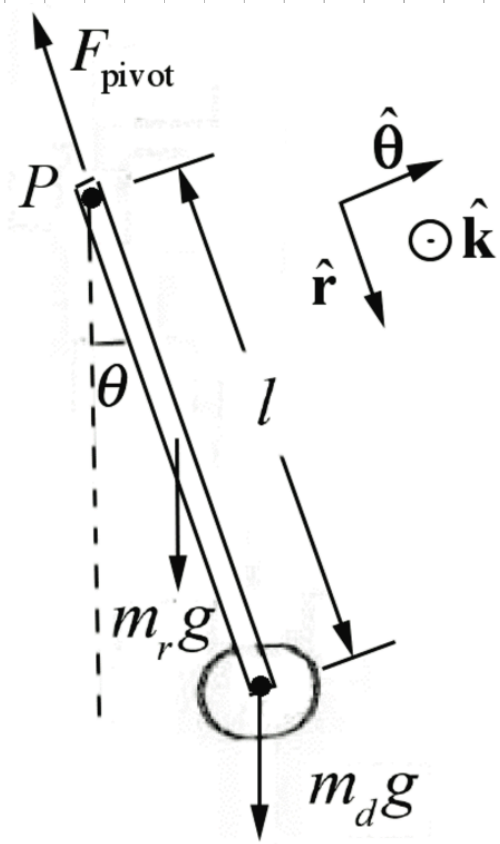
Esercizio

Un pendolo fisico composto è costituito da un disco di raggio R e massa m_d fissato all'estremità di una barra di massa m_r e lunghezza l.

(a) Determinare il periodo del pendolo.

(b) Come cambia il periodo se il disco è montato sulla barra tramite un cuscinetto senza attrito in modo che possa ruotare liberamente?





PENDOLO COMPOSTO

MOMENTO TORCENTE RISPETTO AL PERNO:

$$\vec{\tau}_P = \vec{r}_{CM} \times m_2 \vec{g} + \vec{r}_{DISCO} \times m_d \vec{g} =$$

$$= -\left(m_2 \frac{l}{2} + m_d l\right) g \sin\theta \ \hat{k}$$

$$I \vec{\alpha} = \vec{\tau}$$

$$I_{P,ASTA} = \frac{m_2 l^2}{3}$$ (MOMENTO DI INERZIA DELL'ASTA RISPETTO A P)

$$I_{P,DISCO} = \underbrace{\frac{m_d R^2}{2}}_{I_{CM}} + m_d l^2$$

$$I_P = I_{P,ASTA} + I_{P,DISCO} = \frac{1}{3} m_2 l^2 + m_d l^2 + \frac{1}{2} m_d R^2$$

$$I_P \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{k} = \tau \hat{k}$$

$$\left[\left(\frac{1}{3} m_2 + m_d\right) l^2 + \frac{1}{2} m_d R^2\right] \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left[\frac{m_2}{2} + m_d\right] g l \sin\theta$$

$$\sin\theta \simeq \theta$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{3} m_2 + m_d\right) l^2 + \frac{1}{2} m_d R^2}{\left(\frac{m_2}{2} + m_d\right) g l}}$$

CON CUSCINETTO

IL DISCO É EQUIVALENTE A UN PUNTO MATERIALE

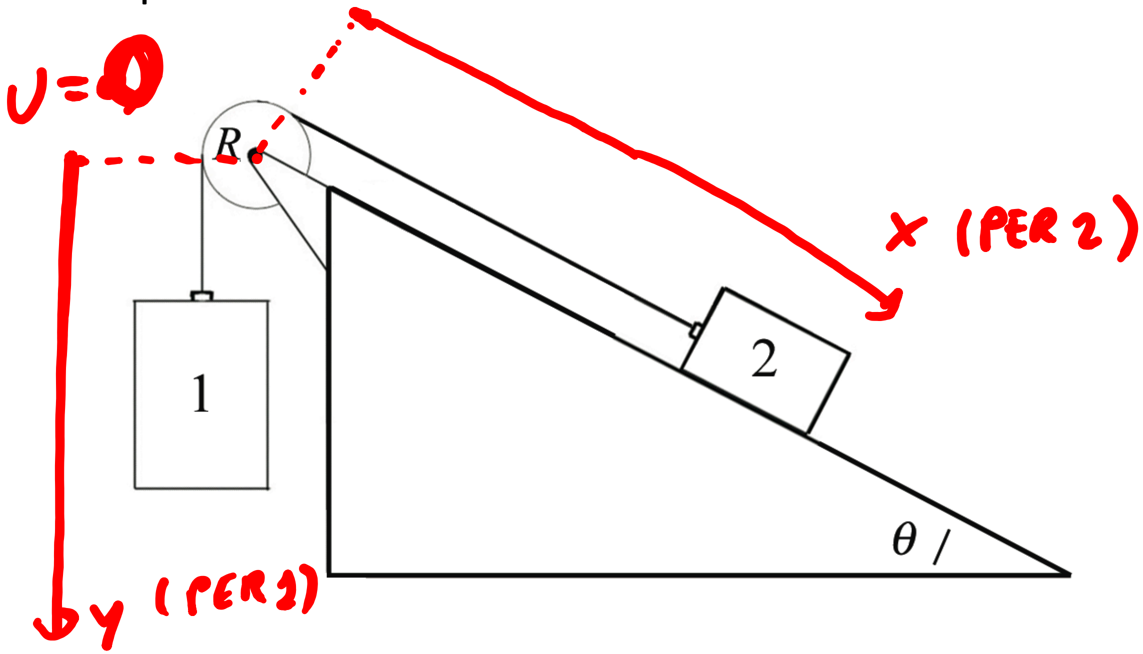
$$I_r = \frac{1}{3} m_2 l^2 + m_d l^2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{3} m_2 + m_d\right) l^2}{\left(\frac{m_2}{2} + m_d\right) g l}}$$

Esercizio

Una ruota a forma di disco uniforme di raggio R e massa M è montata su un asse orizzontale senza attrito. La ruota ha momento di inerzia rispetto al centro di massa $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$. Un cordino senza massa è avvolto attorno alla ruota, e una delle estremità del cordino è attaccata a un blocco di massa m_2 che può scivolare su o giù per un piano inclinato senza attrito. All'altra estremità del cordino è attaccato un secondo blocco di massa m_1 che pende oltre il bordo del piano inclinato. Il piano è inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo θ. Una volta che gli oggetti sono rilasciati da fermi, il cordino si muove senza slittare attorno al disco. Trascurare tutti gli attriti.

- Calcolare la velocità del blocco 2 come funzione della distanza che percorre lungo il piano inclinato.



E SI CONSERVA

$$E_i = U_i = -m_1 g y_{1,i} - m_2 g x_{2,i} \sin\theta$$

$$E_f = -m_1 g y_{1,f} - m_2 g x_{2f} \sin\theta + \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 + \frac{I_{cm}}{2} \omega^2$$

I BLOCCHI SONO VINCOLATI

$$v_{2f}^2 = v_{2f}^2 = v^2 = \omega^2 R^2$$

$$E_f = -m_1 g y_{1f} - m_2 g x_{2f} \sin\theta + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{I_{cm}}{2R^2} v^2$$

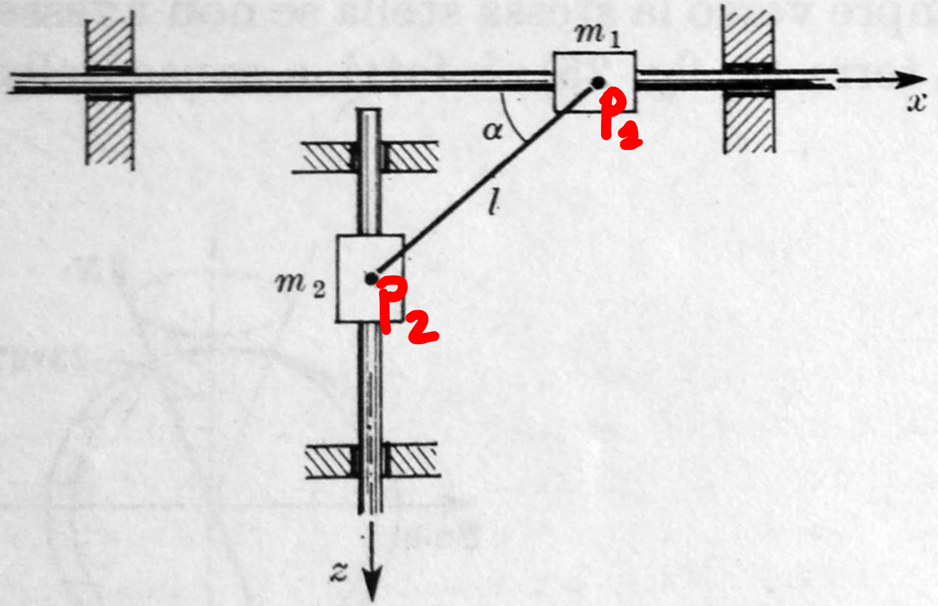
$$d = x_{2f} - x_{2i} = y_{1i} - y_{1f}$$

$$E_f = E_i$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2gd\,(m_2 \sin\theta - m_1)}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}}$$

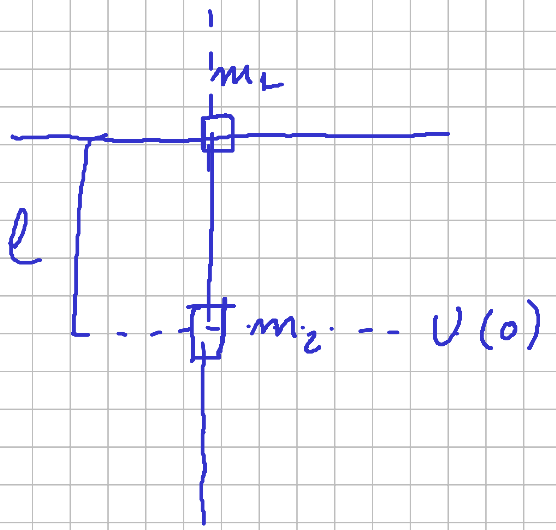
Esercizio

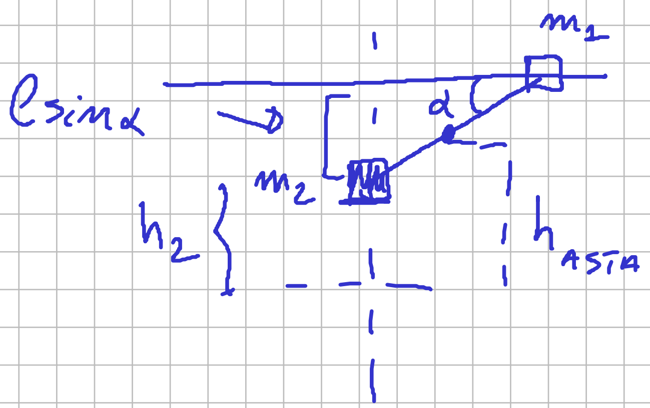
12.5 Due manicotti di masse m_1 e m_2 possono scorrere sopra due guide disposte ad angolo retto, la prima orizzontale e l'altra verticale; i due manicotti sono uniti (v. figura) da un'asta, di lunghezza l e massa m, incernierata ad essi. Tutti gli attriti sono trascurabili e il sistema viene lasciato libero di muoversi, con velocità iniziali nulle, nella posizione in cui l'asta è inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo $\alpha_0 = 45^o$. Si calcoli le velocità dei due corpi quando l'asta passa per la posizione verticale.



E si CONSERVA

Problema 5





$$U_{2i} = m g h_2 = mg(\ell - \ell \sin\alpha)$$

$$U_{ASTA,i} = m g h_{ASTA} = mg\left(\ell - \ell\sin\alpha + \frac{\ell}{2}\sin\alpha\right) =$$
$$= mg\left(\ell - \frac{\ell}{2}\sin\alpha\right)$$

$$U_{2f} = 0 \qquad U_{ASTA,f} = mg\frac{\ell}{2}$$

$$K_i = 0 \qquad K_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 + K_{ASTA,f}$$

$$v_{2f} = 0 \qquad K_{ASTA,f} = \frac{1}{2} I_{P2}\,\omega^2$$

$$I_{P2} = \frac{1}{3} m \ell^2$$

$$K_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} I_{P_2}\,\omega_f^2 \qquad v_{1f} = \omega_f \ell$$

$$\omega = \frac{v_{1f}}{l}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} \frac{m l^2}{3} \frac{v_{1f}^2}{l^2} + mg\frac{l}{2} = m_2 g (l - l \sin\alpha) +$$

$$+ mg\left(l - \frac{l}{2}\sin\alpha\right)$$

$$\Rightarrow v_{1f}^2 \left[m_1 + \frac{m}{3}\right] = 2 m_2 g l (1 - \sin\alpha) + mg l (1 - \sin\alpha)$$

$$v_{1f}^2 = \left[\frac{6 m_2 + 3m}{3 m_1 + m} g l (1 - \sin\alpha)\right]$$

$$v_{1f} = \sqrt{[\quad]} \qquad v_{2f} = 0$$