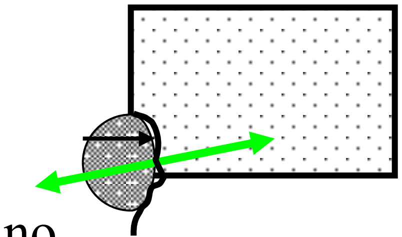
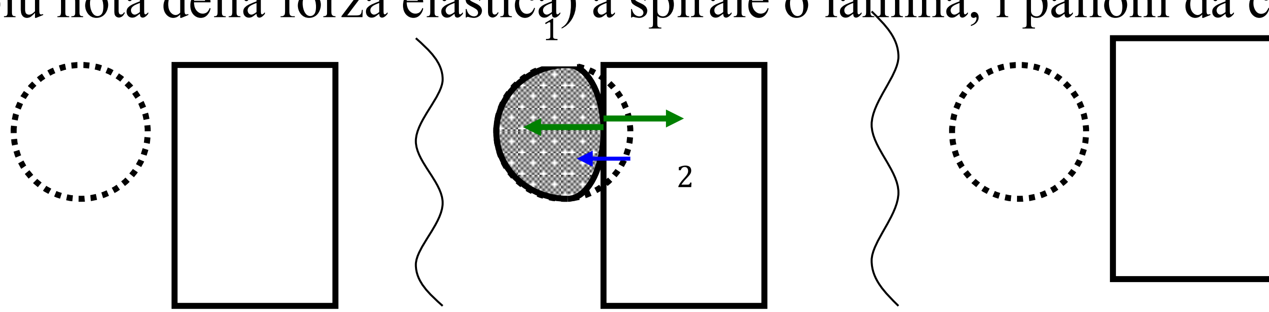
Forze di contatto:fra due corpi (o forza su un corpo) deformabili(e) elasticamente o non

- Forze dovute all'interazione fra due corpi deformabili in modo anelastico, spesso addirittura permanente.
  - In questo caso non ci sono formule generali e si può solo usare il terzo principio
  - Sono esempi le forze muscolari, le forze che si sviluppano negli incidenti stradali ...



- Forze fra due corpi deformabili elasticamente o forza su un corpo deformabile elasticamente
  - Sono esempi gli elastici, le molle (il cui simbolo è la schematizzazione grafica più nota della forza elastica) a spirale o lamina, i palloni da calcio, ...



Deformazione del corpo 1

Forza esercitata dal corpo 1 sul corpo 2

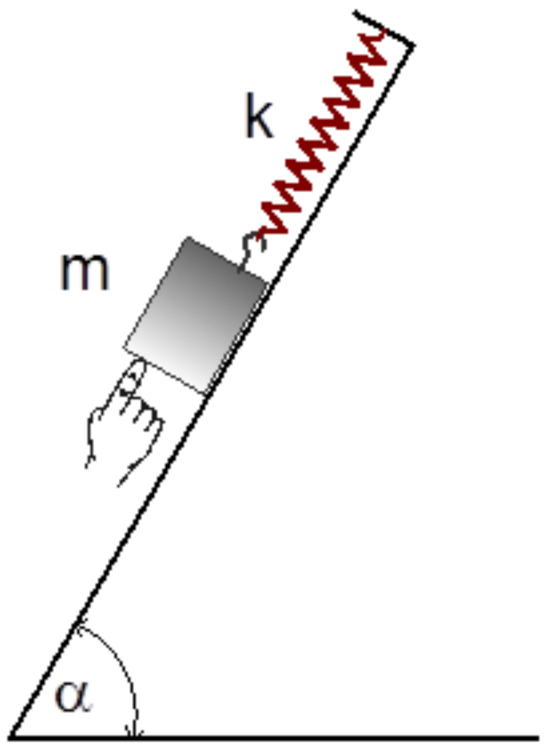
Forza esercitata dal corpo 2 sul corpo 1

Forza elastica

- La forza che un corpo deformato esercita su un altro è opposta e direttamente proporzionale alla deformazione del corpo:

$$\vec{F}_{el} = -k\Delta\vec{R}$$

nota come **legge di Hooke)**



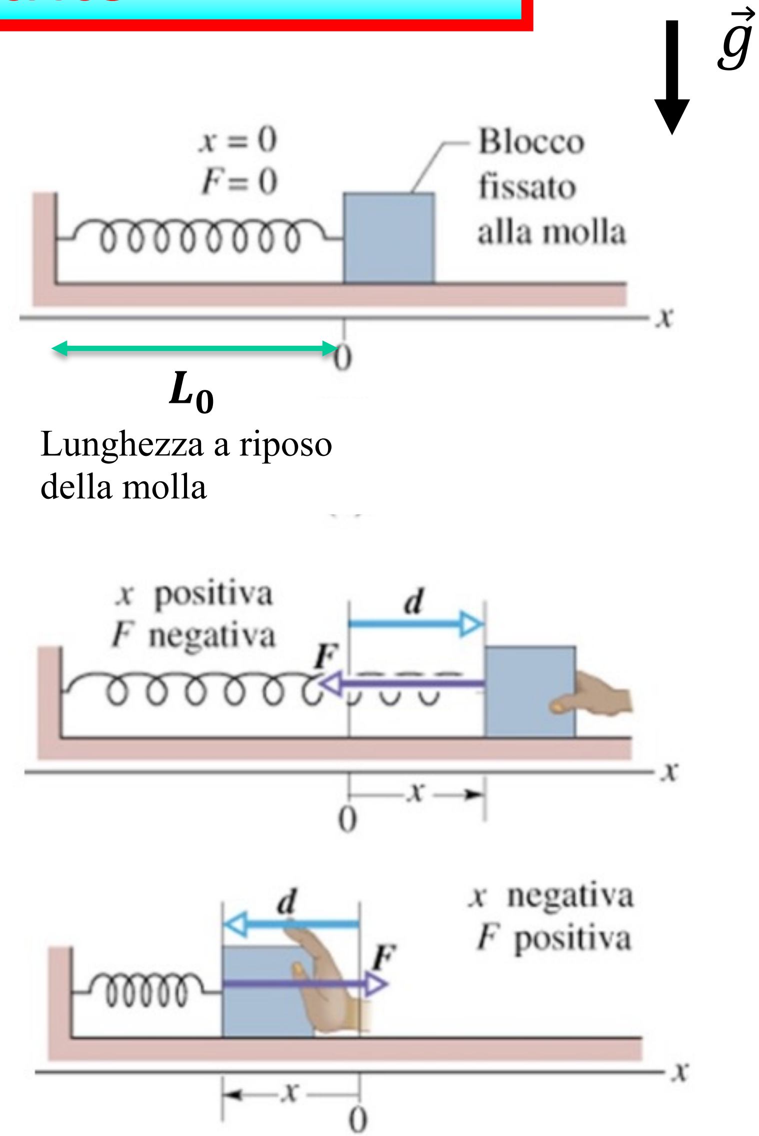
Le forze sono vettori

Forza elastica: massa attaccata a molla su piano privo di attrito

- Forza che origina dalla deformazione dei corpi. Molti corpi si comportano in modo *elastico* per piccole deformazioni rispetto all'equilibrio.

- E' una forza variabile, il cui modulo è proporzionale allo spostamento rispetto alla posizione a riposo

- Legge di Hooke: $\boxed{F(x) = -kx}$
  x è l'allungamento o compressione della molla rispetto alla lunghezza di equilibrio, k è detta costante della molla e si misura in N/m.



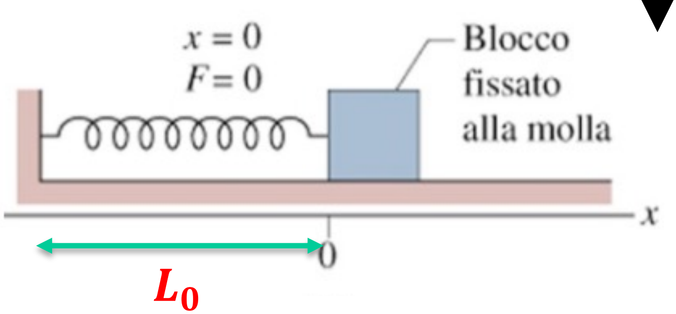
Molle ideali

- Le molle che considereremo nei problemi sono molle ideali
  - Prive di massa
  - Indeformabili $\Rightarrow$ k costante
  - con lunghezza a riposo (quando non connesse a pesi e /o sollecitate da forze)

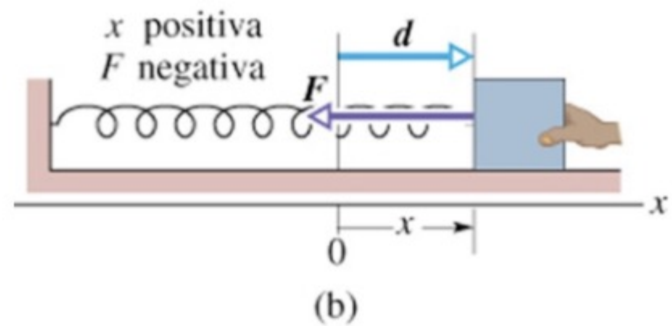
  $\boldsymbol{L_0}$ può essere anche nulla

$\vec{g}$

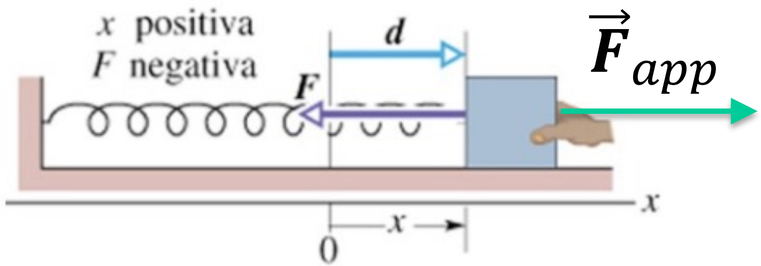
$$F = -kx$$

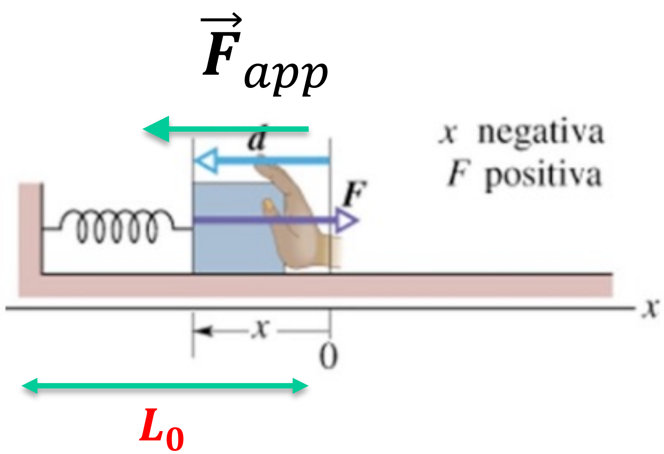


Lunghezza a riposo della molla



Esempio





- Con misure sul piano orizzontale ci accorgiamo che la forza elastica F si oppone agli effetti della forza applicata F_{app}
  - F tende a riportare il corpo verso la posizione che corrisponde alla lunghezza a riposo $\boldsymbol{L_0}$

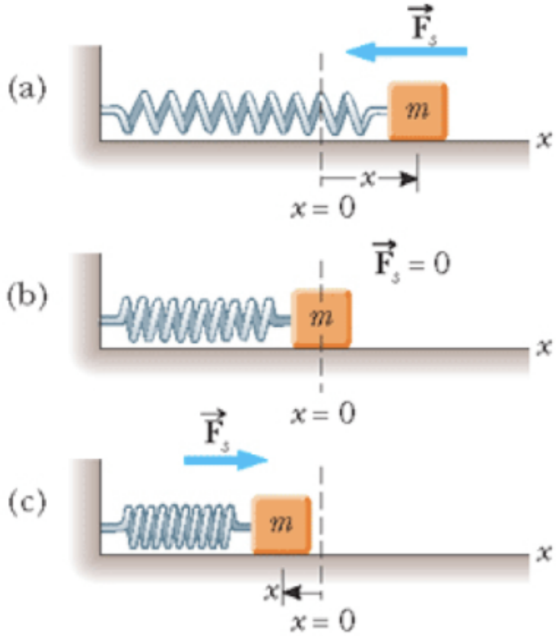
$$\vec{F} = \vec{\mathbf{F}}_{el} = -kx\,\hat{\mathbf{i}} = m\vec{\mathbf{a}}$$

- Per il principio di azione e reazione

$$\vec{F} = -\vec{F}_{app}$$

Moto armonico

Moto di una massa sottoposta ad una forza elastica su un piano orizzontale privo di attrito.



Se tendiamo o comprimiamo una molla con una massa a un estremo e poi la lasciamo andare, la massa oscillerà avanti e indietro (trascuriamo gli attriti). Questa oscillazione è chiamata *moto armonico (semplice)*.

Ad ogni istante, lungo x: $F = ma$ ma $F = -kx$ da cui

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

ovvero

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

Equazione di moto armonico

Moto armonico

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

dove si è introdotto $\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$, ovvero $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- ***ω*** prende il nome di pulsazione e si misura in s^{-1}
  - non ha nulla a che vedere con la velocità angolare!

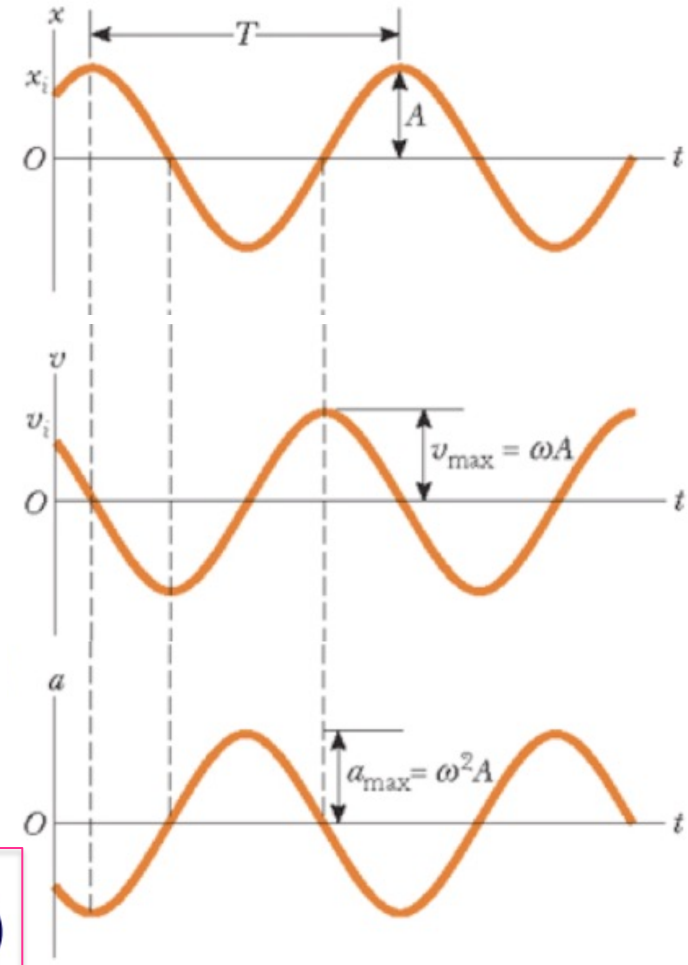
Moto armonico

La soluzione generale dell'equazione del moto armonico, $\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t),}$ è

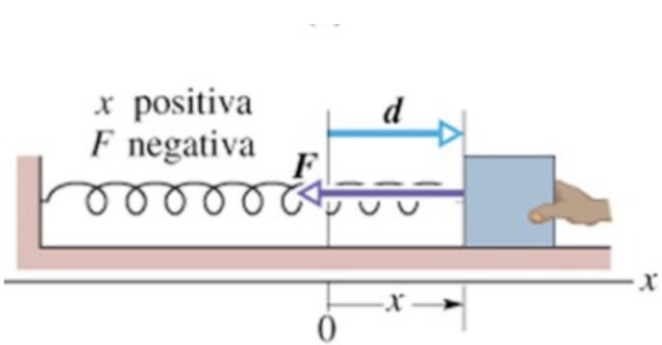
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \quad \text{da cui}$$

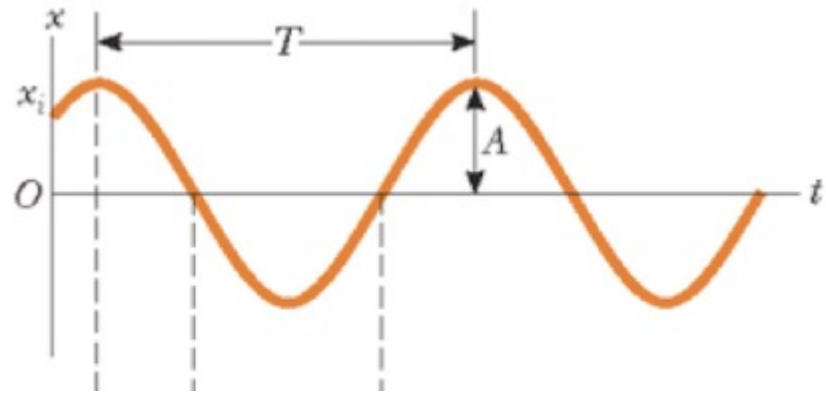
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \phi),$$

$$a(t) = \boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)}$$



Ampiezza, fase , pulsazione, periodo frequenza





Periodo T della ripetizione:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) =$$

$$= x_m \cos[\omega(t+T)+\phi] =$$

$$= x_m \cos[\omega t + \omega T + \phi]$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad [T] = s$$

$$\nu = \frac{1}{T} \quad [\nu] = s^{-1} = Hz \quad \text{(hertz)}$$

$$A = x_m$$

$$\overbrace{x(t)}^{\text{Spostamento all'istante } t} = \underbrace{x_m}_{\text{Ampiezza}} \cos\overbrace{(\omega t + \phi)}^{\text{Fase}}$$

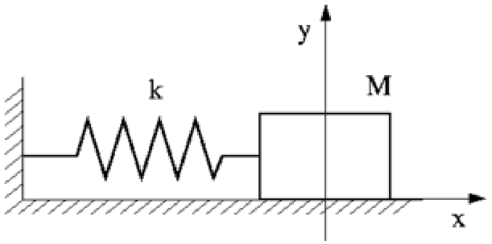
Tempo

Pulsazione ~~o frequenza angolare~~

Angolo di fase o costante di fase

Oscillatore armonico

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\,\frac{k}{m}x \quad \rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega^2 x \quad dove\;\; \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = c_1\,\cos\omega t + \,c_2\,\sin\omega t$$

- Le costanti indeterminate (c_1 e c_2) sono definite dalle **condizioni iniziali**:

$$\mathrm{x}(t=0) = \,c_1\,\cos\omega 0 + \,c_2\,\sin\omega 0 \;= c_1$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \,c_1\,(-\omega\sin\omega t) + \,c_2\,(\omega\cos\omega t) \qquad \Rightarrow per\; t = 0 \quad v(0) = \,c_2\,\omega$$

$$x(t) = \,x(0)\cos\omega t + \frac{v(0)}{\omega}\sin\omega t$$

Oscillatore armonico

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{v(0)}{\omega}\sin\omega t$$

$$x(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t = A\cos(\omega t + \varphi)$$

- Le costanti indeterminate (A e ϕ) sono definite dalla **condizioni iniziali**:

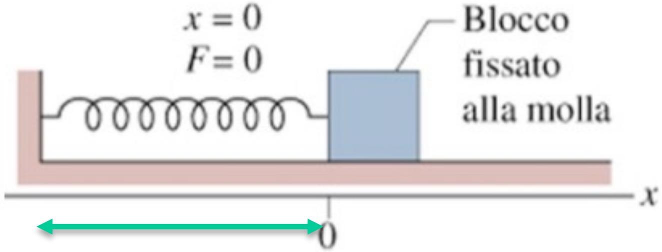
$$x(0) = A\cos(\varphi) \qquad \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \;\; per\; t = 0 \;\; v(0) = -\omega A\sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow \;\; \mathrm{tg}(\varphi) = -\frac{v(0)}{\omega x(0)} \qquad A = \sqrt{x(0)^2 + \frac{v(0)^2}{\omega^2}}$$

$$x(t) = \sqrt[2]{x(0)^2 + \frac{v(0)^2}{\omega^2}}\cos\left(\omega t + \mathrm{atan}\left(\frac{-v(0)}{\omega\, x(0)}\right)\right)$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \qquad \tan(\phi) = -\frac{c_2}{c_1}$$

Scelta dell’origine

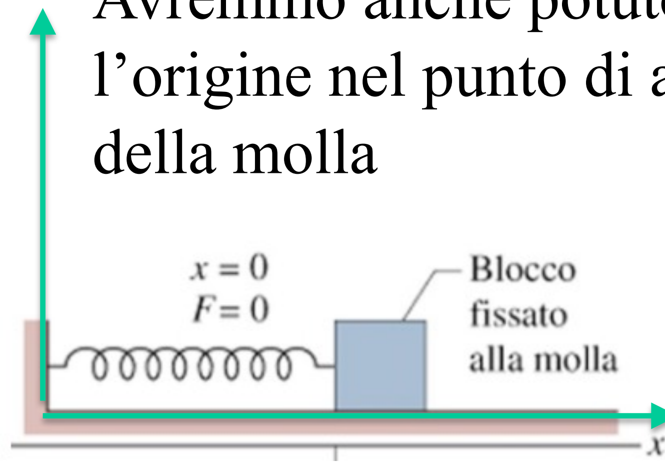


$\boldsymbol{x_0}$

Lunghezza a riposo
della molla

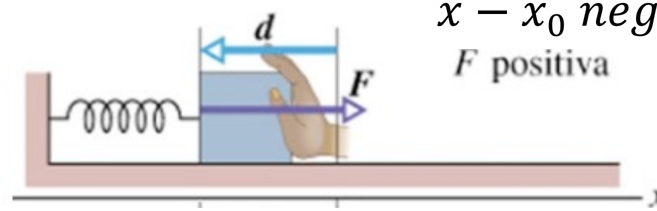
$$F = F_x = -kx$$

Avremmo anche potuto prendere l’origine nel punto di attacco della molla



$\boldsymbol{x_0}$

Lunghezza a riposo
della molla

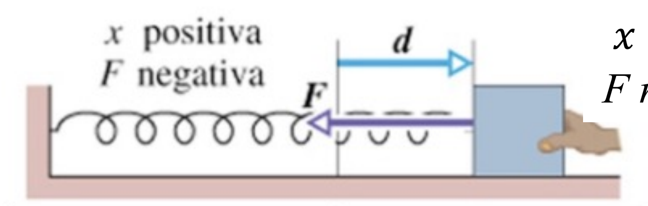


$x - x_0 \; negativa$

F positiva

Se l’origine è nel punto di attacco della molla alla parete:

$$F = F_x = -k(x - x_0)$$



$x - x_0 \; positiva$

$F \; negativa$

Esercizio

Un vagone, di massa 30 tonnellate ($m = 3{\times}10^4$ kg) connesso tramite un respingente elastico ad un locomotore frenato (e quindi fermo), compie 5 oscillazioni in 10 s. Valutare la costante elastica del respingente.

Soluzione.

Il periodo è $T = \frac{1}{f} = \frac{10}{5} s = 2s$

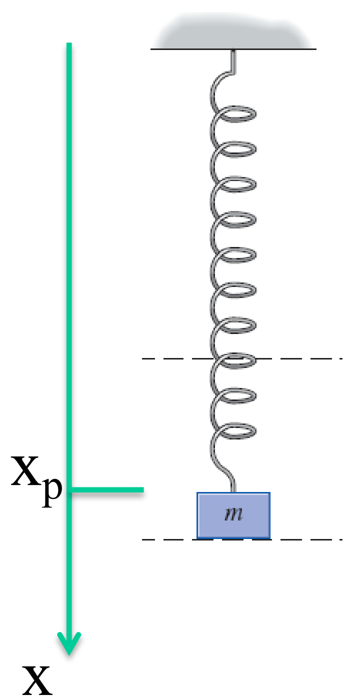
per cui:

$$k = m\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} m = \frac{4{\times}\pi^2{\times}3{\times}10^4}{2^2} N/m \approx 3{\times}10^5 \; N/m$$

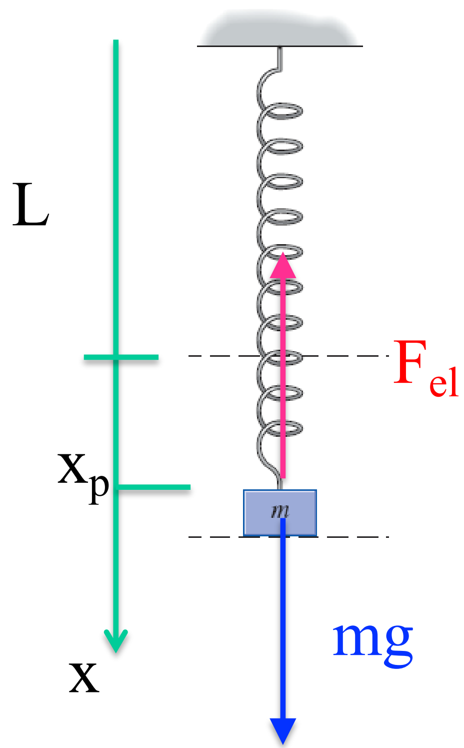
Esercizio

Una massa $M = 100$ g è appesa al soffitto con una molla di costante elastica $k = 10$ N/m e lunghezza a riposo $L = 10$ cm.
Determinare la posizione di equilibrio.

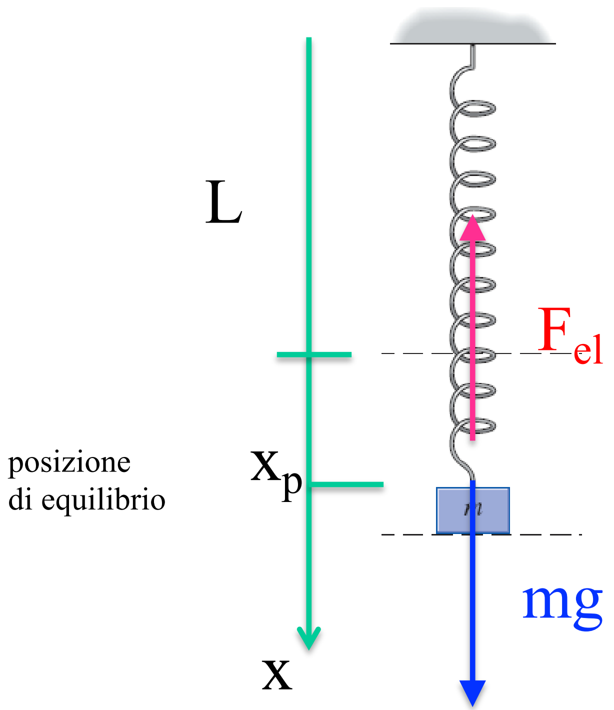
Si utilizzi un asse X verticale, diretto verso il basso con l'origine nel soffitto



posizione
di equilibrio



Posizione di equilibrio?



all'equilibrio su massa m:

$$F = 0 = mg - k(x - L)$$

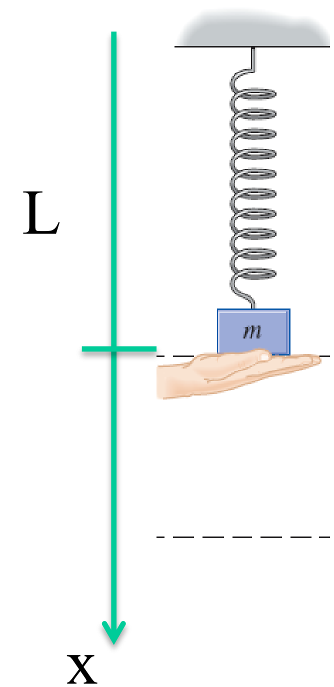
$$kx_p = mg + Lk$$

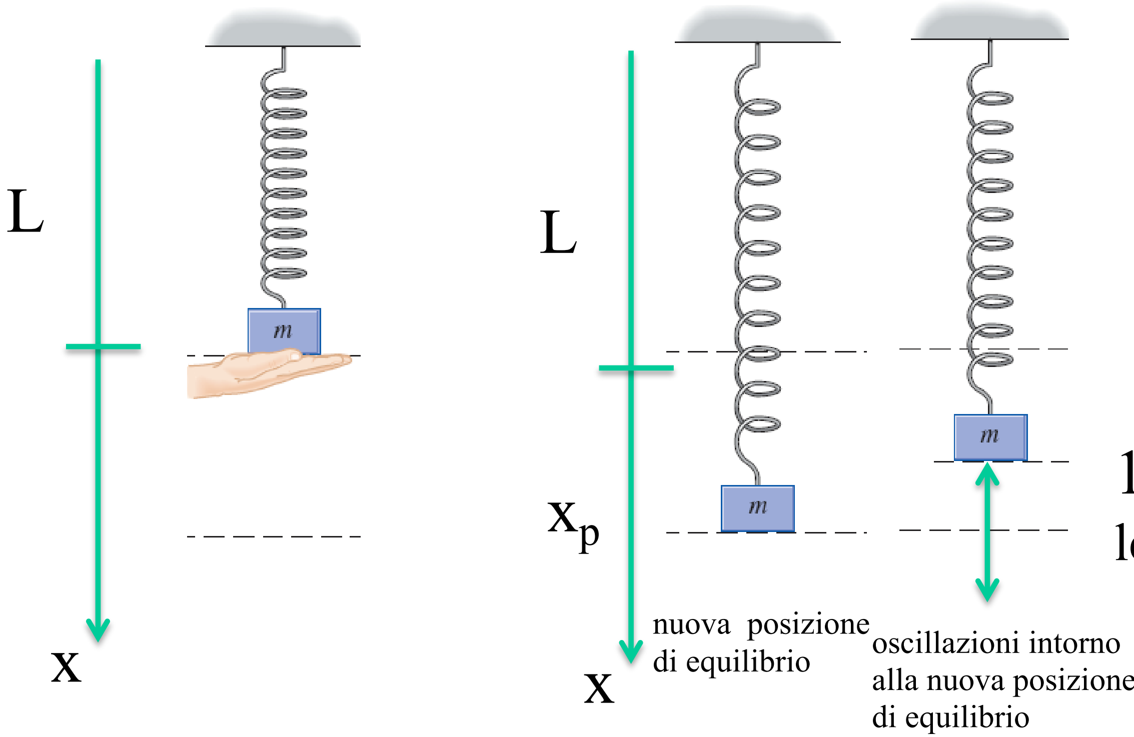
$$x_p = \frac{mg}{k} + L$$

Nuova lunghezza a riposo del sistema (massa +molla)

Esercizio . Una massa $M = 100$ g è appesa al soffitto con una molla di costante elastica $k = 10$ N/m e lunghezza a riposo $L = 10$ cm. La massa viene lasciata libera da ferma al tempo $t = 0$ in prossimità del soffitto a distanza L dal soffitto. Si utilizzi un asse X verticale, diretto verso il basso con l'origine nel soffitto, in modo che la condizione iniziale sia $X(0) = L$.

Determinare l'espressione algebrica della legge oraria della massa e calcolare numericamente il periodo e l'ampiezza delle oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.





$M = 100$ g

$k = 10$ N/m

lunghezza a riposo $L = 10$ cm

$X(0) = L$

$\dot{X}(0) = 0$

1)Espressione algebrica della legge oraria della massa x(t)?

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(\mathrm{x} - \mathrm{L}) + \mathrm{mg} = -k\left(\mathrm{x} - \mathrm{L} - \frac{mg}{k}\right) \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left(\mathrm{x} - \mathrm{L} - \frac{mg}{k}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega^2\left(\mathrm{x} - \left(\mathrm{L} + \frac{mg}{k}\right)\right)\ dove\ \ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

nuova posizione di equilibrio

$$\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\left(\mathrm{x} - (\mathrm{L} + \frac{mg}{k})\right) \qquad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$M = 100$ g
$k = 10$ N/m
$L = 10$ cm
$X(0) = L$
$\dot{X}(0) = 0$

D.1 x(t)?

- Cambio di variabile: $y = \mathrm{x} - (\mathrm{L} + \frac{mg}{k})$

$$\dot{y} = \dot{x} \qquad \ddot{y} = \ddot{x}$$

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y \qquad \rightarrow \mathrm{y(t)} = \mathrm{A}\cos(\omega t + \phi)$$

$$\Longrightarrow x(t) = y(t) + L + \frac{Mg}{k} = A\cos(\omega t + \phi) + L + \frac{Mg}{k}$$

- Condizioni iniziali:

$$\dot{x}(0) = 0 \qquad \Rightarrow -\omega A\sin(\phi) = 0 \qquad \Rightarrow \phi = 0$$

$$x(0) = L \qquad = \mathrm{A}\cos\,(\phi = 0) + L + \frac{Mg}{k} \qquad \Rightarrow \mathrm{A} = -\frac{Mg}{k}$$

$$R.1 \Longrightarrow x(t) = -\frac{Mg}{k}\cos(\omega t) + L + \frac{Mg}{k} = \frac{Mg}{k}(1 - \cos(\omega t)) + \mathrm{L}$$

nota: la massa oscilla attorno $L + \frac{Mg}{k}$ e l'ampiezza dell'oscillazione è $\frac{Mg}{k}$

D.2 Calcolare numericamente il periodo attorno alla posizione di equilibrio stabile.

$$\ddot{x} = -\frac{k}{M}(x - L) + g = \frac{d^2}{dt^2}\left\{\left(\frac{Mg}{k}\right)(1 - \cos(\omega t)) + L\right\}$$

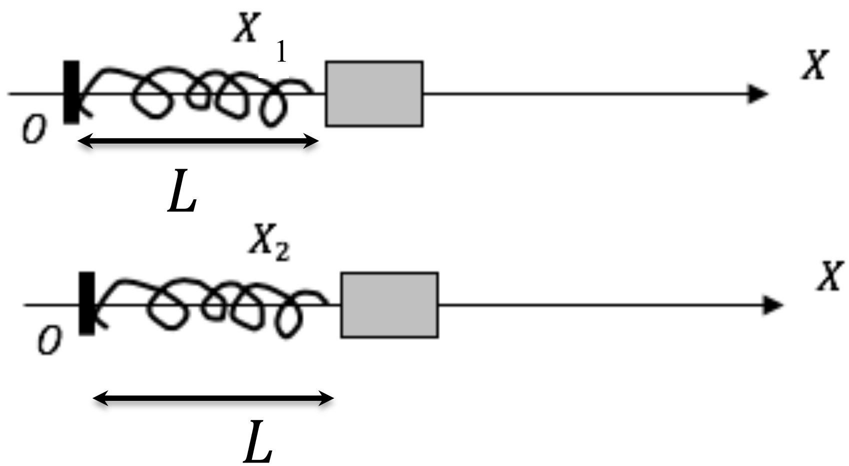
$$-\frac{k}{M}\left(x - (L + \frac{Mg}{k})\right) = \omega^2 \left(\frac{Mg}{k}\right)\cos(\omega t)$$

- Usando le condizioni iniziali ($X(0) = L$) a $t = 0$

$$\frac{k}{M}\left(\left(L + \frac{Mg}{k}\right) - L\right) = \omega^2 \left(\frac{Mg}{k}\right)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{M} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

Esercizio. Due masse identiche m sono attaccate a due molle identiche ideali (costante k, lunghezza a riposo L, massa nulla indeformabili) su due guide parallele.



La prima massa (coordinata $X_1(t)$) viene posta ferma a $t = 0$ in $X = 0$; la seconda (coordinata $X_2(t)$) viene posta ferma in $X = 0$ nell'istante in cui per la prima è trascorso <u>mezzo periodo</u> cioè al tempo $t = T/2 = \pi/\omega$.

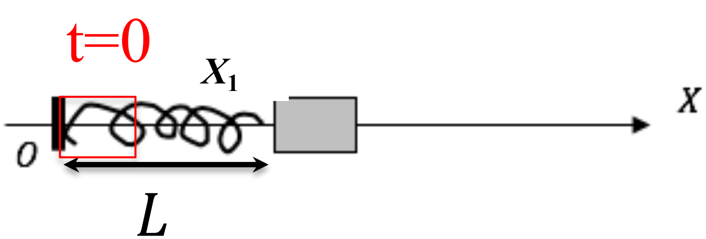
(1)Trovare le leggi orarie delle due masse
(2) riportare le leggi orarie in forma grafica
(3)Determinare gli istanti di tempo in cui le masse occupano la stessa posizione

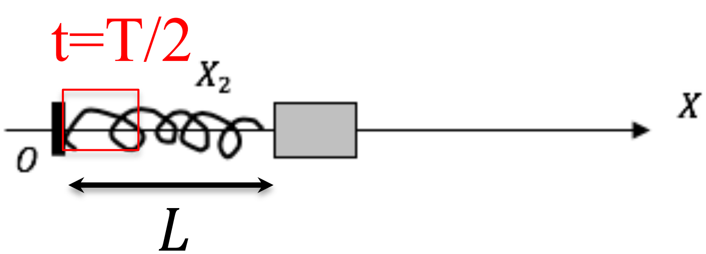
La prima massa (coordinata $X_1(t)$) viene posta ferma a $t = 0$ in $X = 0$

La prima molla a t=0 è completamente compressa

la seconda (coordinata $X_2(t)$) viene posta ferma in $X = 0$ nell'istante in cui per la prima è trascorso <u>mezzo periodo</u> cioè al tempo $t = T/2 = \pi/\omega$.

La seconda viene compressa a t=T/2



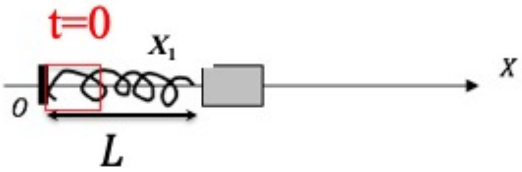


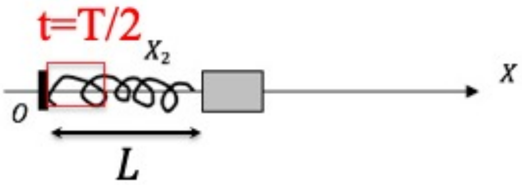
- Se sono compresse di L e L=lunghezza a riposo della molla

- mi aspetto che oscilleranno attorno alla posizione di equilibrio (L) di $\pm$ L

- quindi le due molle avranno
  - lunghezza max 2L
  - lunghezza min 0

Soluzione





Per la prima molla

$$-K(x-L) = m\ddot{x}$$

cambio di variabile $x - L = y \quad \dot{y} = \dot{x},\ \ddot{y} = \ddot{x}$

$-Ky = m\ddot{y}$ sol generale $y(t) = A(\cos(\omega t + \phi))$

Condizioni iniziali $\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_1(0) = 0 \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} y_1(0) = (x_1(0) - L) = -L \\ \dot{y}_1(0) = 0 \end{matrix}\right\}$ $\Rightarrow$ per $t=0$ $\begin{cases} A\cos\phi = -L \\ -\omega A \sin\phi = 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{matrix} -\omega A \sin\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0 \\ A\cos(0) = -L \quad A = -L \end{matrix}\right\}$$

per cui $y_1(t) = x_1(t) - L = -L\cos\omega t$

$$\Rightarrow x_1(t) = L(1 - \cos\omega t)$$

La seconda viene posta ferma in $X = 0$ nell'istante in cui per la prima è trascorso mezzo periodo cioè al tempo $t = T/2 = \pi/\omega$.

la seconda molla soddisfa la stessa equazione

ma $t' = t - T/2 = t - \pi/\omega$ per cui per $t > \pi/\omega$

$$x_2(t) = L(1 - \cos(\omega t - \pi)) = L(1 + \cos\omega t)$$

In base alle condizioni iniziali si ha:

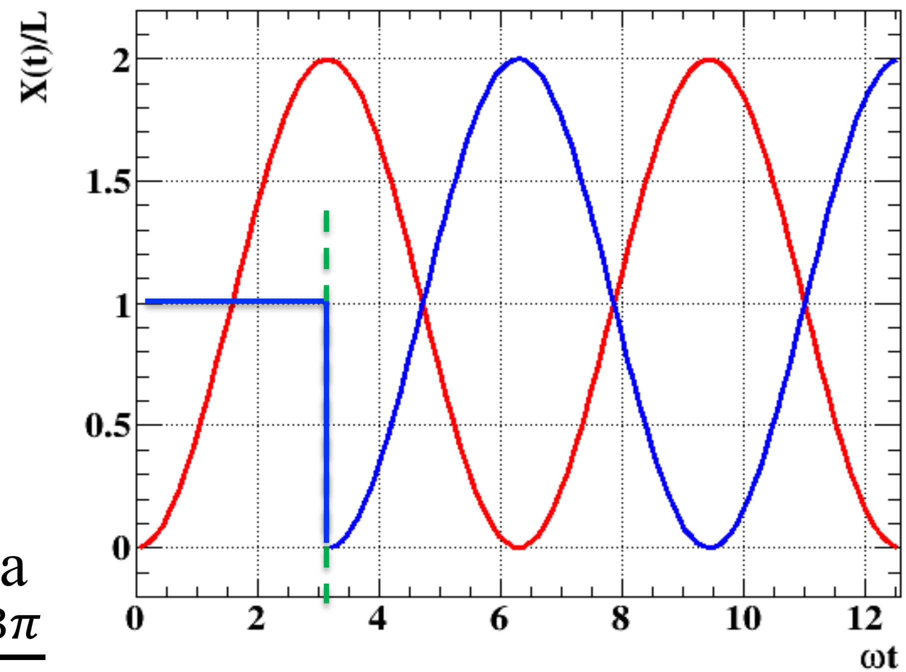
$$\begin{cases} X_1(t>0) = L(1-\cos(\omega t)). & per\ \ t>0 \\ X_2(t) = L\big(1-\cos\big(\omega(t-\pi/\omega)\big)\big) = L(1+\cos(\omega t)) & per\ t>\pi/\omega \\ X_2(t) = L & per\ 0<t<\pi/\omega \end{cases}$$

Gli incroci si verificano dall'inizio dell'oscillazione della seconda, quando:

$$L - L\cos(\omega t) = L + L\cos(\omega t)$$

$$\Longrightarrow 2\cos(\omega t) = 0$$

$$\Longrightarrow \omega t = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

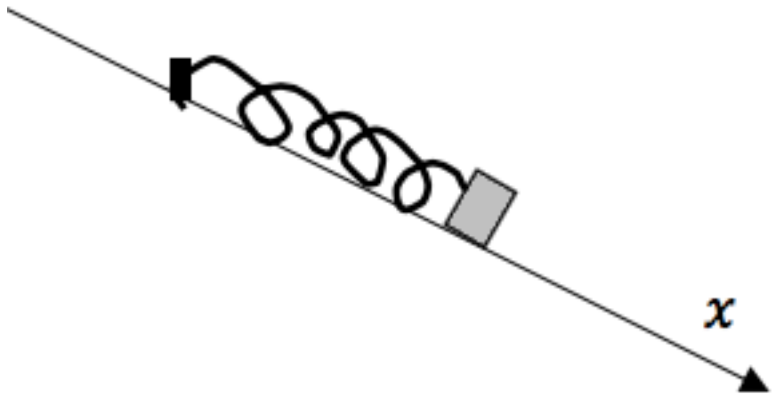


$$t' = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2} \quad \Rightarrow \omega t' = \pi$$

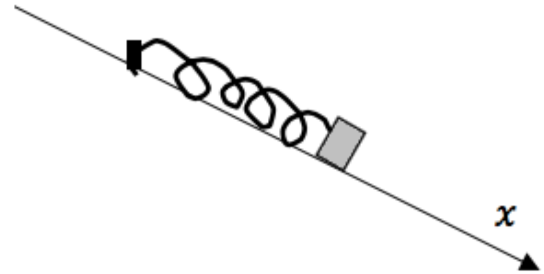
Quindi il primo punto di incontro, dato che il moto della seconda molla inizia a $t' = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$, si ha per $t^* = \frac{3\pi}{2\omega}$ cioè per $\omega\, t^* = \frac{3\pi}{2}$

in fatti per $t^* = \frac{\pi}{2\omega} < \frac{\pi}{\omega}$

Esercizio. Una massa M è appoggiata su un piano inclinato di un angolo θ, con coefficiente di attrito statico μ_s ed è connessa tramite una molla (costante elastica k e lunghezza a riposo L) ad un perno. Determinare le condizioni sull'allungamento della molla che consentono alla massa di restare in equilibrio.



Indicando con F_{sx} la componente x della forza di attrito statico e con $\vec{N}$ la reazione normale al piano l'equazione del moto in condizioni di equilibrio risulta:

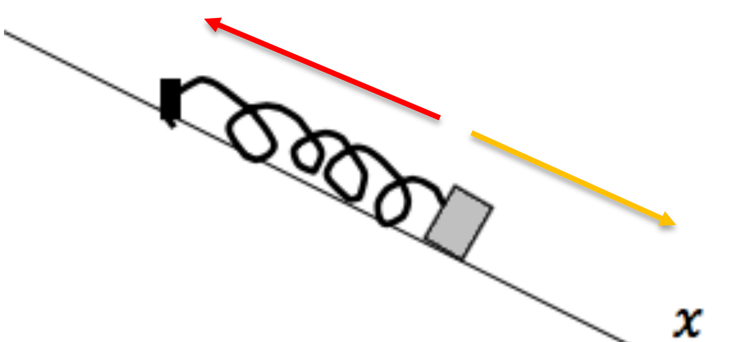


$$-k(x-L)+F_{sx}+Mg\sin\theta=0$$

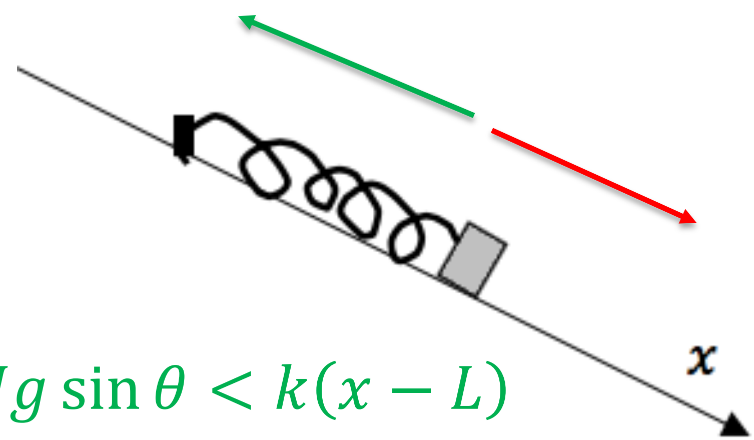
da cui

$$|k(x-L)-Mg\sin\theta|=|\vec{F}_s|\leq\mu_s|N|=\mu_s Mg\cos\theta$$

Il modulo è necessario, perché se $Mg\sin\theta>k(x-L)$ la forza F_{sx} è negativa(ostacola la discesa), mentre se $Mg\sin\theta<k(x-L)$ la forza F_{sx} è positiva (ostacola la risalita).



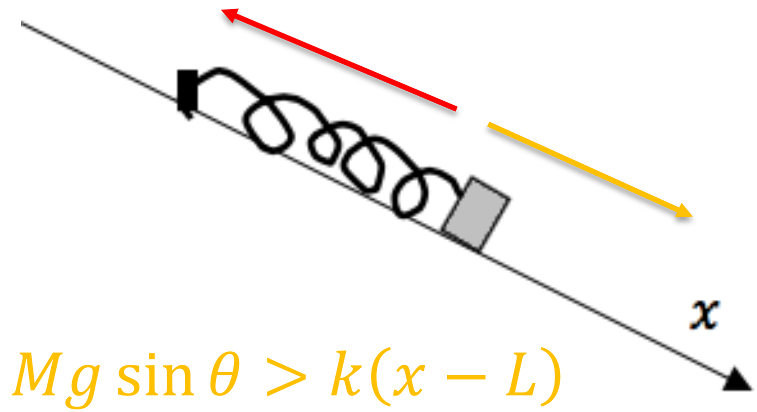
$Mg\sin\theta>k(x-L)$



$Mg\sin\theta<k(x-L)$

Determinare le condizioni sull'allungamento della molla che consentono alla massa di restare in equilibrio.

x-L per avere equilibrio?



Si hanno quindi due casi:

Caso *i*) $k(x-L) < Mg\sin\theta$

$$\Longrightarrow |k(x-L) - Mg\sin\theta| = Mg\sin\theta - k(x-L) = \left|\vec{F}_s\right| \leq \mu_s Mg\cos\theta \Longrightarrow k(x-L) \geq Mg(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)$$

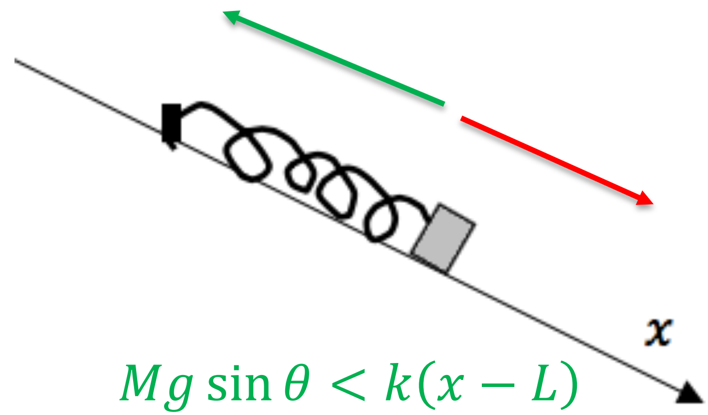
L'allungamento corrispondente possibile è quindi:

$$(x-L) \geq \frac{Mg}{k}(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)$$

$$\Longrightarrow \left(x - L - \frac{Mg}{k}\sin\theta\right) \geq -\frac{Mg\mu_s}{k}\cos\theta$$

Caso i)

$$\left(x - L - \frac{Mg}{k}\sin\theta\right) \geq -\frac{Mg\mu_s}{k}\cos\theta$$



Caso ii) $k(x-L) > Mg\sin\theta$

$$\Longrightarrow |k(x-L) - Mg\sin\theta| = k(x-L) - Mg\sin\theta$$

$$= \left|\vec{F}_s\right| \leq \mu_s Mg\cos\theta$$

$$\Longrightarrow k(x-L) \leq Mg(\mu_s\cos\theta + \sin\theta)$$

L'allungamento corrispondente è quindi:

$$(x-L) \leq \frac{Mg}{k}(\mu_s\cos\theta + \sin\theta)$$

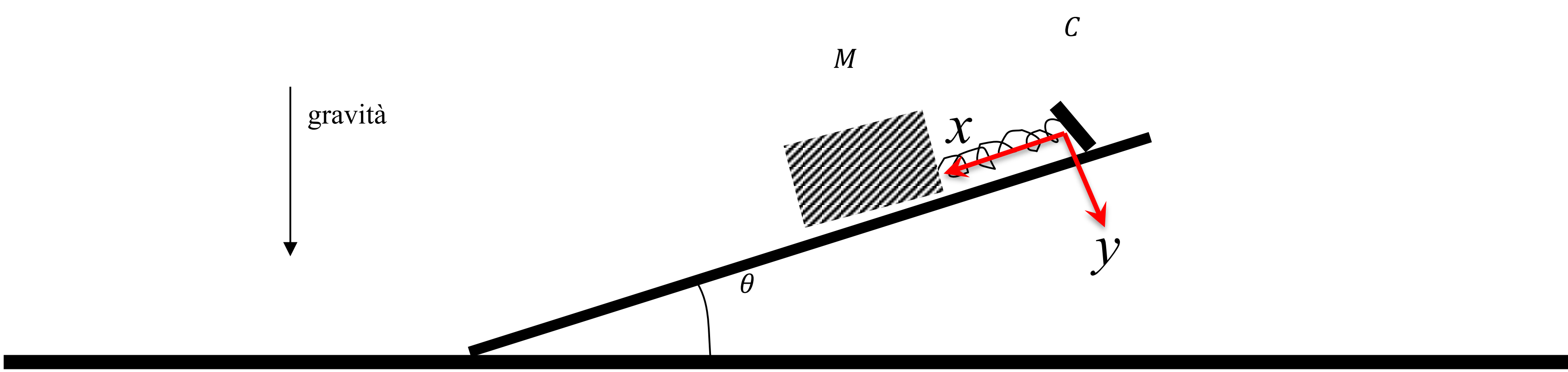
$$\Longrightarrow \left(x - L - \frac{Mg}{k}\sin\theta\right) \leq \frac{Mg\mu_s}{k}\cos\theta$$

Imponendo entrambe le condizioni si ottiene:

$$\frac{Mg}{k}(\sin\theta - \mu_s\cos\theta) \leq (x-L) \leq \frac{Mg}{k}(\mu_s\cos\theta + \sin\theta)$$

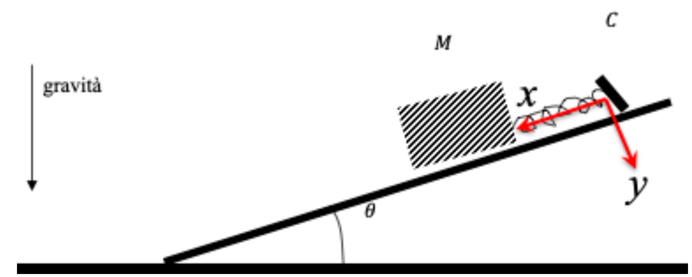
Esercizio.

Un blocco di massa $M = 100$ kg può muoversi senza attrito su un piano inclinato di un angolo $\theta = 30^{\circ}$ rispetto al piano orizzontale ed è connesso ad un chiodo C tramite una molla di costante elastica $k = 200$ N/m e lunghezza a riposo $L = 2$ m (vedi figura). Si utilizzi un sistema di coordinate in cui l'asse x abbia origine in C e sia diretto in discesa lungo il piano inclinato. Per $t = 0$ la massa è ferma in $x = 0$.



Si calcoli, per $t > 0$, la legge oraria della massa ed il valore numerico del periodo delle sue oscillazioni.

L'equazione del moto lungo la direzione del piano è:



$$M\ddot{x} = -k(x - L) + Mg\sin\theta$$
$$= -kx + kL + Mg\sin\theta$$

dalla quale: $\ddot{x} = -\frac{k}{M}\left(x - L - \frac{M}{k}g\sin\theta\right)$

ponendo $y = x - L - \frac{M}{k}g\sin\theta$ $\quad \ddot{y} = \ddot{x} \quad \dot{y} = \dot{x} \Longrightarrow \ddot{y} = -\frac{k}{M}\,y$

La cui soluzione è del tipo:

$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ con $\omega = \sqrt{k/M}$

Dalle condizioni iniziali per t=0 $\Longrightarrow$ x(0)=0 e $\dot{x}(0)$=0 per cui:

$\dot{y}(0) = \dot{x}(0) = 0 = -A\omega\sin(\varphi) \Longrightarrow \varphi = 0$

$y(0) = A\cos(\varphi) = x(0) - L - \frac{M}{k}g\sin\theta = -L - \frac{M}{k}g\sin\theta$

che per φ=0 fornisce $\Rightarrow A = -L - \frac{M}{k}g\sin\theta$

e quindi l'equazione del moto è

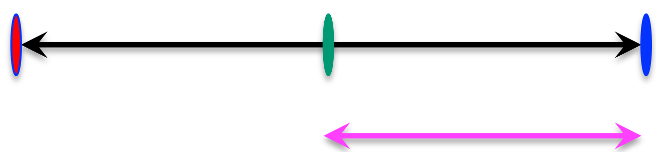
$$x(t) = y(t) + L + \frac{M}{k}g\sin\theta = -\left(L + \frac{M}{k}g sin\theta\right)\cos(\omega t) + L + \frac{M}{k}g\sin\theta$$

La molla oscilla attorno alla posizione di equilibrio $L + \frac{M}{k}g\sin\theta$

$$x(t) = -\left(L + \frac{M}{k} g sin\theta\right)\cos(\omega t) \ + L + \frac{M}{k} g \sin\theta = \left(L + \frac{M}{k} g \sin\theta\right)(1 - cos\,\omega t)$$

La massa oscilla attorno alla posizione di equilibrio del sistema $\quad L + \frac{M}{k} g \sin\theta$

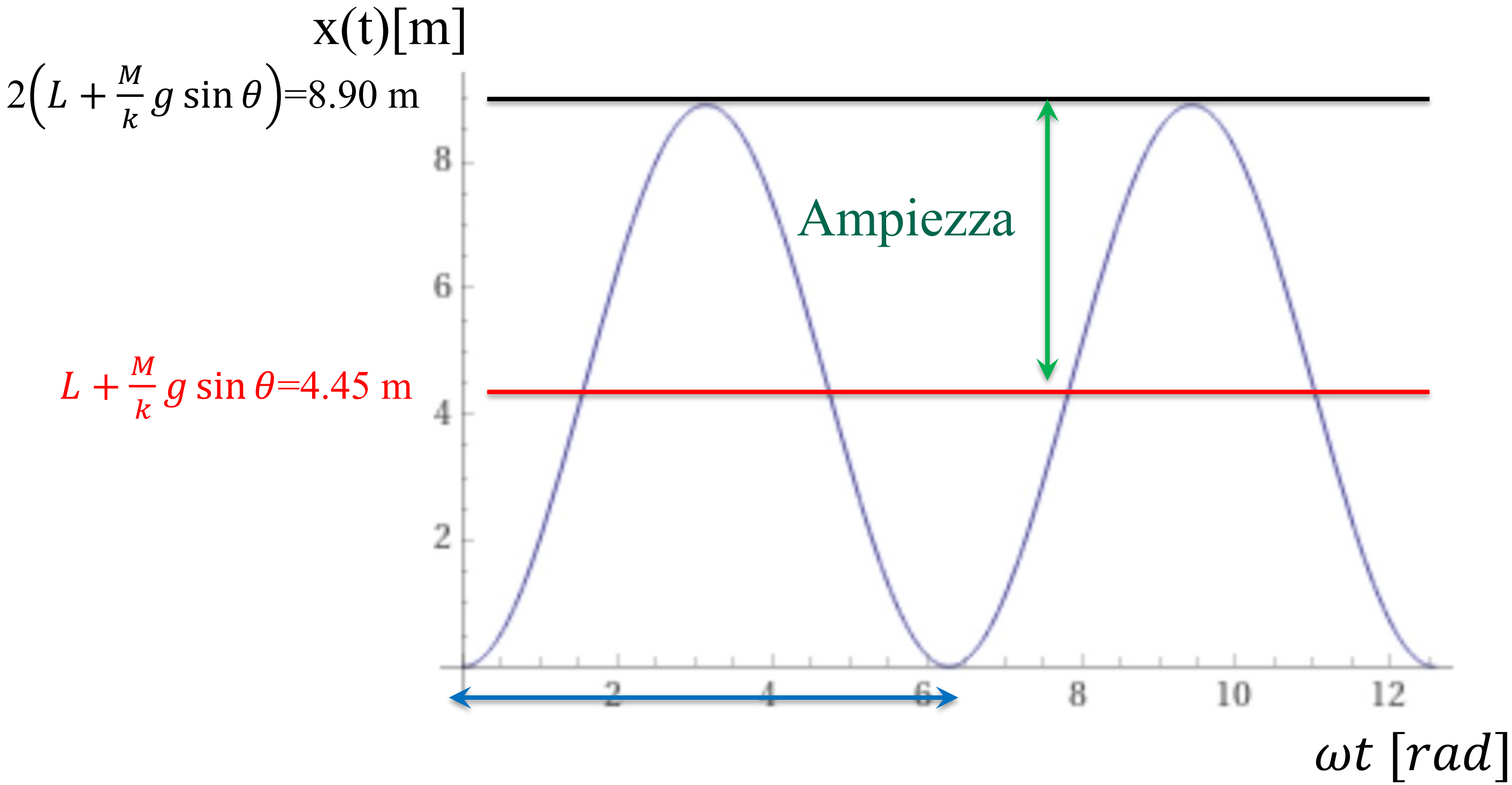
$0 \qquad L + \frac{M}{k} g \sin\theta \qquad 2\left(L + \frac{M}{k} g \sin\theta\right)$



$L + \frac{M}{k} g \sin\theta$ Ampiezza dell'oscillazione

Il periodo è chiaramente: $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$

grafico



x(t)[m]
$2\left(L+\frac{M}{k}g\sin\theta\right)$=8.90 m
$L+\frac{M}{k}g\sin\theta$=4.45 m
Ampiezza
8
6
4
2
2
4
6
8
10
12
$\omega t\ [rad]$

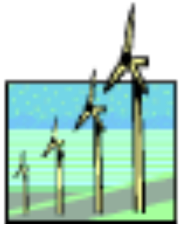
Energia e Lavoro

- Finora abbiamo descritto il moto dei corpi (puntiformi) usando le leggi di Newton, tramite le *forze*; abbiamo scritto l'equazione del moto, determinato spostamento e velocità *in funzione del tempo*.
- E' possibile trattare i problemi dinamici in modo differente, spesso più semplice e in ogni caso più potente, tramite il concetto di *Energia*.
- L'Energia è un concetto della massima importanza in Fisica. Appare sotto varie forme, come ad esempio:

  Energia Cinetica $\leftrightarrow$ velocità

  Energia Potenziale $\leftrightarrow$ posizione

  Energia Termica $\leftrightarrow$ temperatura





- Possiamo definire l'Energia come *capacità di compiere un lavoro*

Energia Cinetica

- Definizione : $\boxed{K = \frac{1}{2} m v^2}$ (per un punto materiale di massa m)
- L'energia cinetica (e non solo) si misura in *Joule*: $1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$

- Se ci sono più particelle nel sistema, l'energia cinetica complessiva del sistema è la somma delle energie cinetiche di tutte le particelle.

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

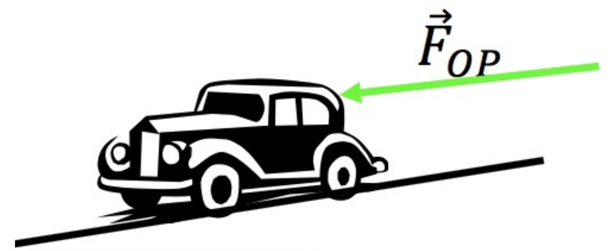
- L'energia cinetica è l'energia dovuta al moto delle particelle ed è presente *anche a livello microscopico*: l'energia "termica" o "interna" della Termodinamica in un gas è energia cinetica di atomi o molecole!

Notare che $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\vec{v} \cdot \vec{v})$.

Esempi

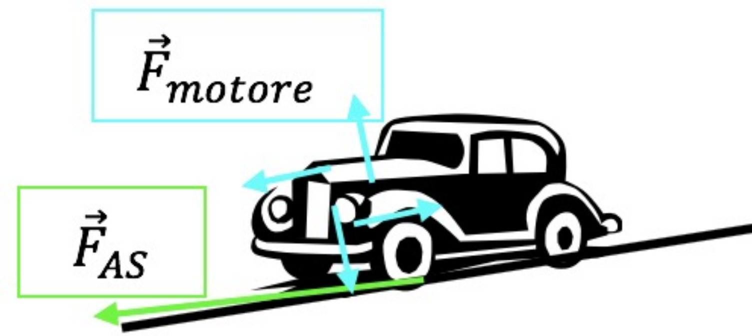
Cosa è necessario per portare un'automobilina (giocattolo) ad una velocità $\vec{V}$ partendo da ferma?

1) Possiamo spingerla con una forza esterna $\vec{F}_{OP}$, ad es. costante, per un tempo Δt , il cui impulso fornisce la quantità di moto ($M\vec{V}$) richiesta: $\vec{P}_{finale} = \vec{P}_{iniziale} + \vec{F}_{OP}\Delta t = M\vec{V}$



2) Se la macchinina ha un motore, le forze del motore possono far muovere la macchinina, purché fra le ruote ed il pavimento ci sia attrito.

Infatti **le forze del motore sono interne, per cui la forza totale del motore è nulla:** $\vec{F}_{motore} = \vec{0}$ e quindi non possono cambiare la quantità di moto.



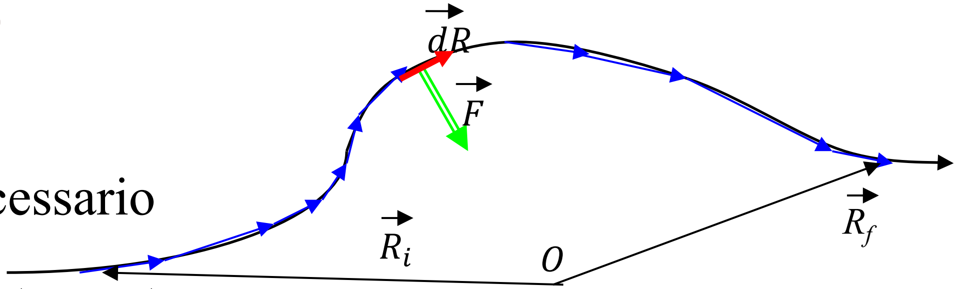
Lavoro

- Abbiamo capito che sono le forze a far variare l'energia cinetica

qual'è la relazione che lega la variazione di energia cinetica tra due punti nello spazio di un sistema ?(ad es. un punto materiale di massa m)

- Definiamo per prima cosa il lavoro L compiuto dalla forza $\vec{F}$ *agente sul* punto materiale quando esso si **sposta lungo la curva γ *dalla posizione*** $\vec{R}_\mathrm{i}$ **alla posizione** $\vec{R}_\mathrm{f}$

$$L_{\vec{R}_\mathrm{i}\rightarrow\vec{R}_\mathrm{f}} \equiv \int_{\vec{R}_\mathrm{i}\ (\text{linea}\ \gamma)}^{\vec{R}_\mathrm{f}} \vec{F}\cdot d\vec{\mathrm{R}}$$



- per ogni punto della linea γ è necessario
  - esprimere il vettore dello spostamento infinitesimo $d\vec{R}$
  - conoscere il vettore della forza $\vec{F}$ lungo la curva
  - calcolare il prodotto scalare $dL = \vec{F}\cdot d\vec{R}$

Teorema dell'energia cinetica

- **Un importante teorema detto teorema delle forze vive o dell'energia cinetica**
  - afferma che il lavoro effettuato *dalla risultante delle forze $\vec{F}$ agenti su un punto materiale di massa inerziale m* (o per un *sistema) tra $\vec{R}_{\mathrm{i}}$ (indicato con i) e $\vec{R}_{\mathrm{f}}$ (indicato con f) è uguale alla variazione dell'energia cinetica del punto materiale o del sistema) tra $\vec{R}_{\mathrm{i}}$ e $\vec{R}_{\mathrm{f}}$ (i e f)

$$\Delta K = K_f - K_i = L_{if} \equiv \int_{i\ (\text{linea}\ \gamma)}^{f} \vec{F} \cdot d\vec{R}$$

- Se il lavoro è
  - positivo, si ha aumento dell'energia cinetica
  - negativo, si ha diminuzione dell'energia cinetica

Nel seguito il lavoro sarà indicato semplicemente con L in tutti i casi non ambigui

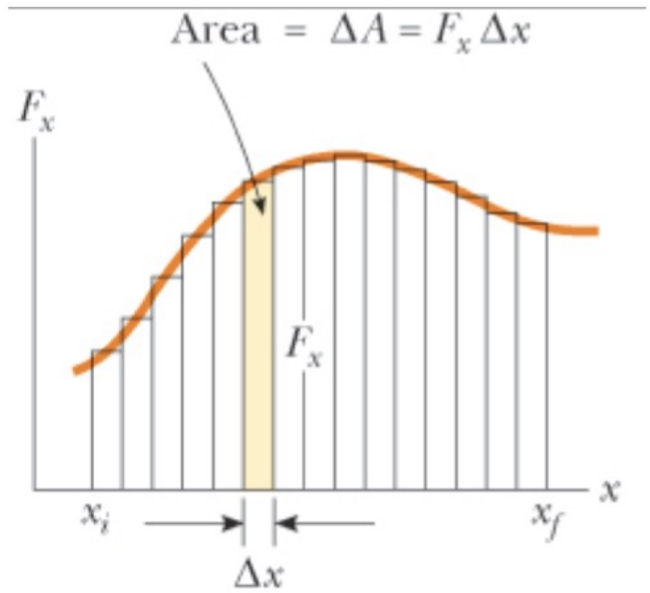
- L è una grandezza fisica scalare
- $[L] = \mathrm{Nm} = \mathrm{J}$ **(Joule)**

*lo vedremo più avanti

Lavoro, in generale

$$L_{\vec{R}_i \to \vec{R}_f} \equiv \int_{\vec{R}_i \text{ (linea } \gamma)}^{\vec{R}_f} \vec{F} \cdot d\vec{R}$$

- In generale il lavoro dipende dalla traiettoria seguita dal punto

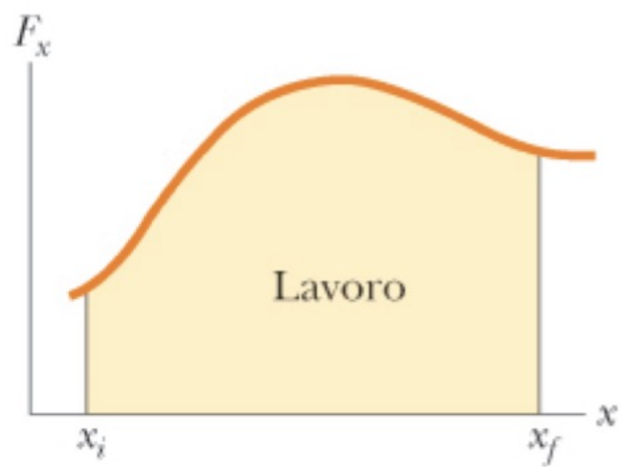


- Matematicamente il lavoro è un integrale di linea, ovvero il limite per $d\vec{R}$ tendente a 0 della somma di tanti contributi $dL = \vec{F} \cdot d\vec{R}$ piccoli, calcolati lungo la traiettoria.

Nell'esempio accanto, il calcolo e l'interpretazione geometrica del lavoro in coordinate cartesiane per

$$\vec{F} = F_x(x)\hat{\imath} \qquad d\vec{R} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$$

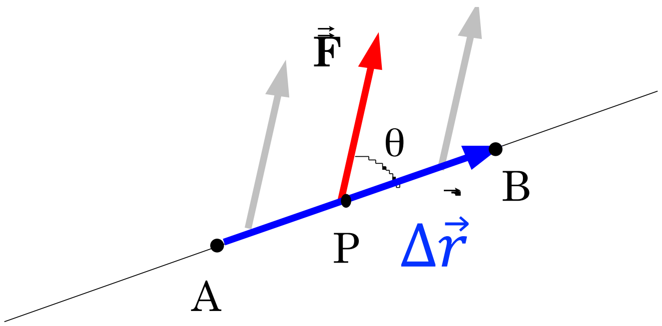
$$L_{if} \equiv \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)dx$$



Lavoro svolto da una forza costante

- Sia **F** una forza ***costante*** in direzione e modulo, e supponiamo che il punto materiale P a cui è applicata, si muova dalla posizione A alla posizione B percorrendo il segmento AB. Indichiamo con $\Delta\vec{r}$ il segmento orientato AB.

- Si definisce lavoro (**grandezza fisica scalare**) **eseguito dalla forza F** sul punto materiale P che percorre lo spostamento $\Delta\vec{r}$, il prodotto scalare tra la forza e lo spostamento:



$$L_{AB} = F\Delta r\cos\theta$$

$$da\ L_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

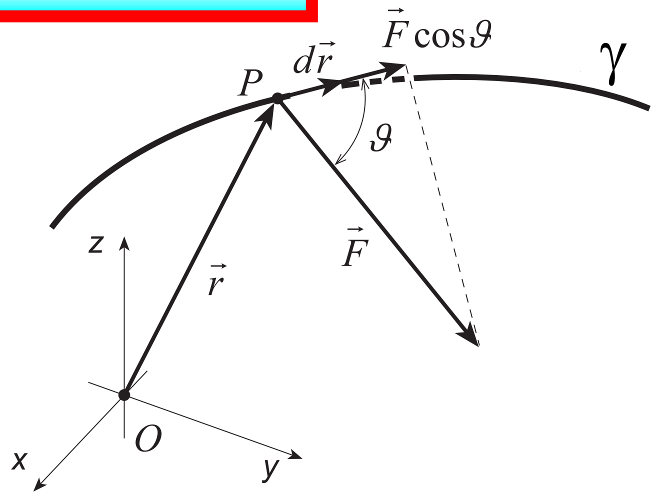
Lavoro elementare e ascissa curvilinea

- Definiamo il lavoro elementare di una forza

$$dL \equiv \vec{F}\cdot d\vec{r} = F dr \cos\vartheta$$

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(\vec{F}_t + \vec{F}_n\right)\cdot d\vec{r} = \left(\vec{F}_t + \vec{F}_n\right)\cdot\left(\hat{t}\, ds\right)$$

$$dL = F_t\, ds$$



I lavoro della forza si può scrivere in termini di tale componente:

$$L_{if} \equiv \int_{s_i}^{s_f} F_t(s)\, ds$$

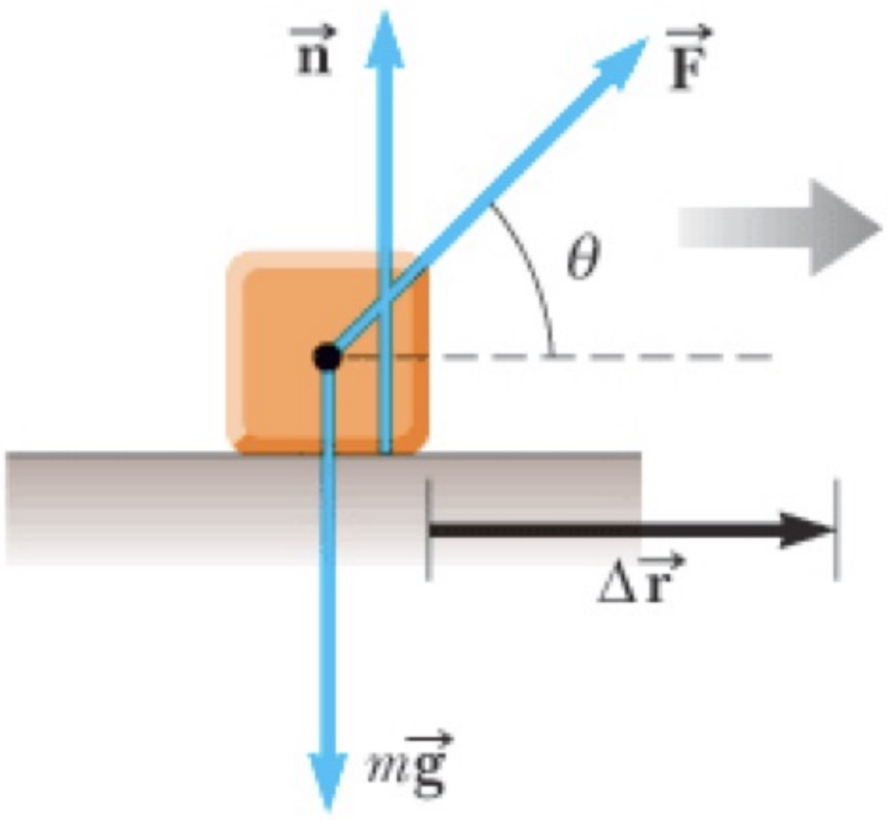
- Ovviamente il ***prodotto scalare*** può essere calcolato anche in termini delle coordinate cartesiane

$$dL = (F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k})\cdot(\mathrm{dx}\,\hat{\imath} + \mathrm{dy}\hat{\jmath} + \mathrm{dz}\hat{k}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

dove $\quad (dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}) = (v_x(t)\hat{\imath} + v_y(t)\hat{\jmath} + v_z(t)\hat{k}\,)\, dt$

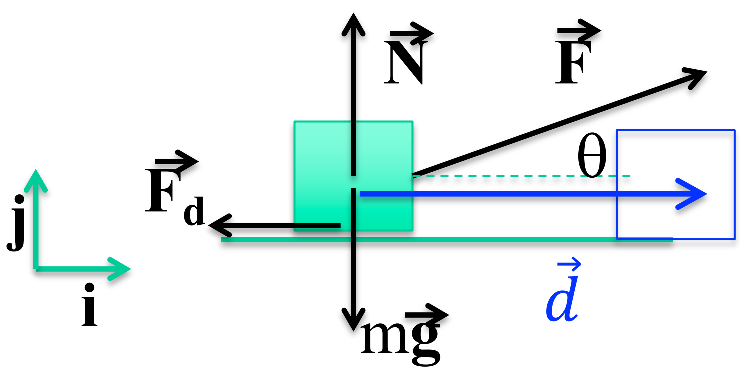
se conosciamo le leggi orarie !

Quale forza compie lavoro?



Caso forze costanti: Esempio

- Blocco trainato sul piano orizzontale scabro a **velocità costante** per un tratto $\vec{d} = d\hat{i}$



Lavoro di F: $L_F = \vec{F} \cdot \vec{d} = F\, d \cos\theta \quad (>0)$

Lavoro di N: $L_N = \vec{N} \cdot \vec{d} = 0$

Lavoro di mg: $L_{mg} = m\vec{g} \cdot \vec{d} = 0$

Lavoro di F_d: $L_d = \vec{F}_d \cdot \vec{d} = -F_d\, d = -\mu_d N d \quad (<0)$

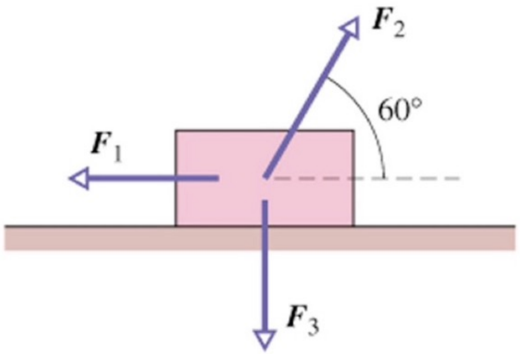
Ma il moto è a v costante ⇒ $a_x = 0$!

$$-F_d + F\cos\theta = -N\mu_d + F\cos\theta = ma_x = 0$$

Questo implica per il lavoro che $L_F + L_d = (-N\mu_d + F\cos\theta)\, d = 0$

ESEMPIO

Supponiamo che le tre forze valgano: $F_1 = 5N, F_2 = 9N, F_3 = 7.8N$. La cassa, di massa M = 3 kg, viene spostata di 3 m verso sinistra.



- Calcolare il lavoro totale fatto dalle tre forze sulla cassa.

$$L_1 = 15 \text{ J}, \; L_2 = -13.5 \text{ J}, \; L_3 = 0$$

- L'energia cinetica della cassa cresce o diminuisce?

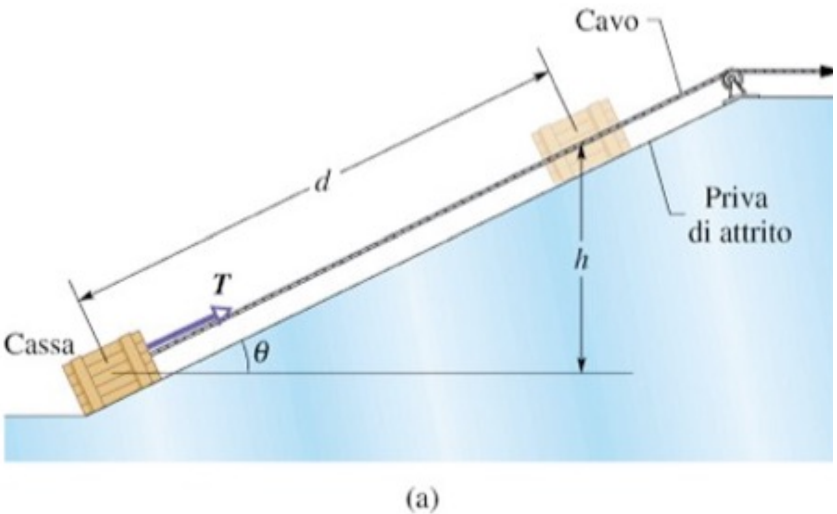
cresce perché $L = L_1 + L_2 + L_3 = 1.5 \text{ J} > 0$

- Assumendo che parta da ferma, quale sarà la sua velocità finale?

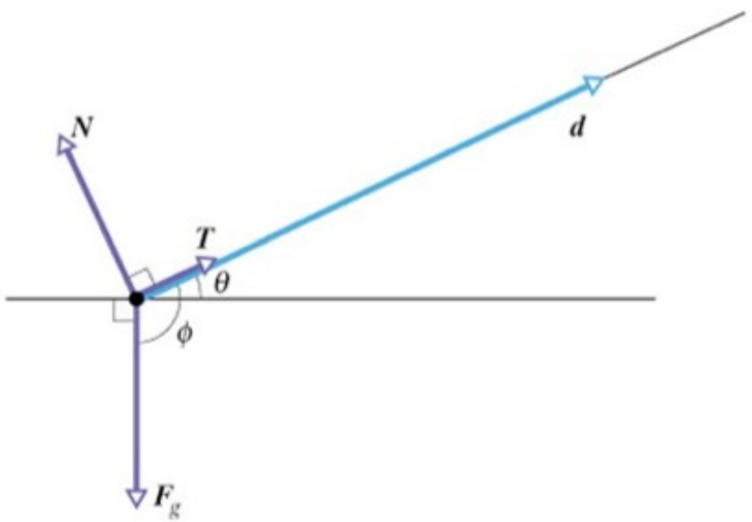
$$Mv^2/2 = 1.5 \text{ J} \rightarrow v = 1.0 \text{ m/s}$$

Esempio

Una cassa di massa $m = 15$ kg è trascinata in salita su di un piano inclinato per $d = 5.7$ m *a velocità costante*, fino ad un'altezza $h = 2.5$m



(a)



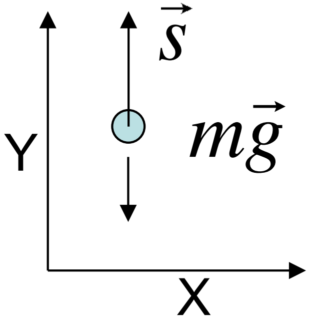
- Calcolare il lavoro fatto dalla tensione del filo e dalla forza peso

  $T = mg\sin\theta$ perché la velocità è costante; $L_T = -L_g = mgd\sin\theta = mgh = 368$J

- In presenza di attrito dinamico (coefficiente $\mu_d = 0.1$) cosa cambia?

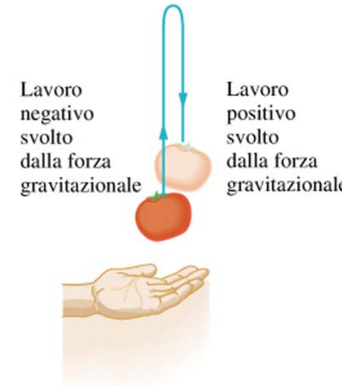
  $L_a = -\mu_d mgd\cos\theta = -75.5$J $\quad L_g$ invariato, $L_T = -L_a - L_g = 443.5$J

Caso forze costanti: Lavoro della gravità nelle vicinanze della superficie terrestre



$$L = L_{if} = m\vec{g}\cdot\vec{s} = -mg(y_f - y_i) = \begin{cases} < 0; & y_f > y_i \\ > 0; & y_f < y_i \\ = 0; & y_f = y_i \end{cases}$$

Nota: il lavoro dipende solo dalla quota finale e dalla quota iniziale



pallina di massa m che viene lanciata in aria verticalmente con una velocità iniziale v_0

- **lavoro** fatto dalla forza peso [in salita]:

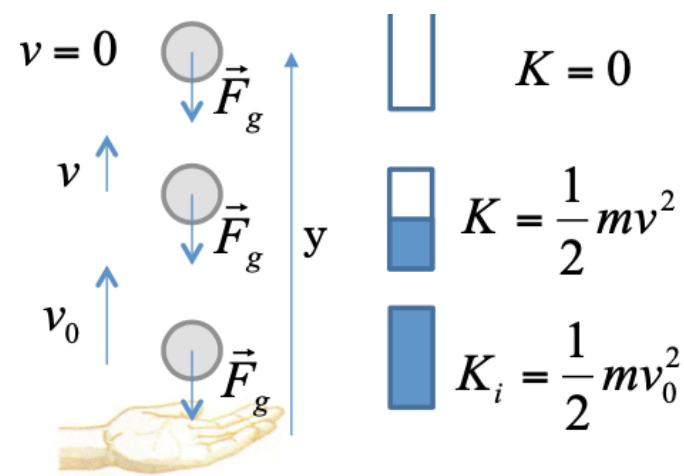
$$L_g = \vec{F}_g \cdot \vec{s} = mg\,s\cos(180^0) = -mg\,s$$

diminuzione dell'energia cinetica

dopo avere raggiunto la **massima elevazione** il corpo cade:

- **lavoro** fatto dalla forza peso [in discesa]:

$$L_g = \vec{F}_g \cdot \vec{s} = mg\,s\cos(0^0) = +mg\,s$$



Il segno positivo sta ad indicare che la forza gravitazionale trasferisce energia +mgs alla particella sotto forma di energia cinetica

Note sul lavoro: $L_{if} = \int_{i\,(\text{linea }\gamma)}^{f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta K$

Lavoro:

- della **gravità alla superficie terrestre**

$$L_{M\vec{g}} = -Mg\Delta h$$

- delle **forze vincolari (normali o con vincolo fisso)**

$$L_{\vec{N}} = 0 \left(\vec{F} \perp d\vec{r}\right)$$

sempre

- **dell'attrito dinamico**

$$L_{\vec{F}_{AD}} = \int -\mu_D \left|\vec{N}\right| |d\vec{r}| < 0$$

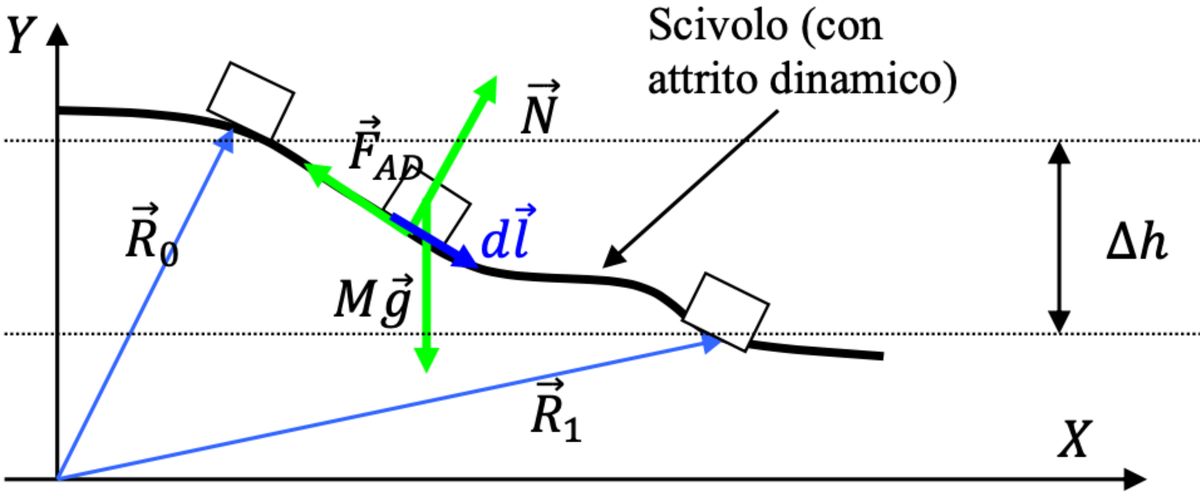
sempre

- **dell'attrito statico**

$$L_{\vec{F}_{AS}} = 0$$

sempre
perchè la velocità del punto di applicazione della forza è nulla

Esempio



- $L_{\vec{N}} = 0$: le forze vincolari compiono lavoro nullo

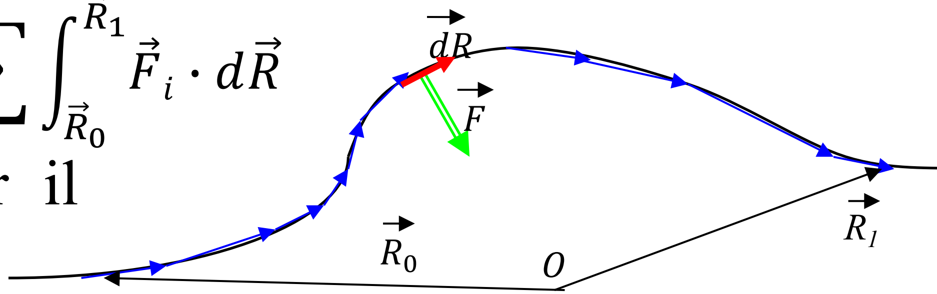
- $L_{\vec{F}_{AD}} = \int_\gamma -\mu_D |\vec{N}||d\vec{\ell}| \leq 0$
  sempre (infatti $\vec{F}_{AD}$ è diretta come $-\hat{V}$ $\quad \Longrightarrow \vec{F}_{AD} \cdot d\vec{\ell} = \vec{F}_{AD} \cdot \vec{V}dt = -|\vec{F}_{AD}||\vec{V}|dt$

- $L_{M\vec{g}} = \int_{\vec{R}_0 (linea\ \gamma)}^{\vec{R}_1} M\vec{g} \cdot d\vec{\ell} = M\vec{g} \cdot (\vec{R}_1 - \vec{R}_0) = -Mg(Y_1 - Y_0)$
  $\Longrightarrow L_{M\vec{g}} = -Mg\Delta h$

Teorema dell'energia cinetica e sua dimostrazione

Il lavoro effettuato *dalla risultante delle forze $\vec{F}$ agenti su un punto materiale di massa inerziale M* (o per un *sistema di punti materiali) quando esso si sposta da $\vec{R}_0$ a $\vec{R}_1$ è uguale alla variazione dell'energia cinetica del punto materiale (o del sistema) tra $\vec{R}_0$ e $\vec{R}_1$

$$K(\vec{R}_1) - K(\vec{R}_0) = \sum \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} \vec{F}_i \cdot d\vec{R}$$



- Dimostrazione eseguita solo per il punto materiale

\- il teorema vale anche per i sistemi di punti materiali

$$\sum \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} \vec{F}_i \cdot d\vec{R} = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} \left(\sum \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{R} = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} M\vec{a} \cdot d\vec{R} = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} M \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{R} =$$

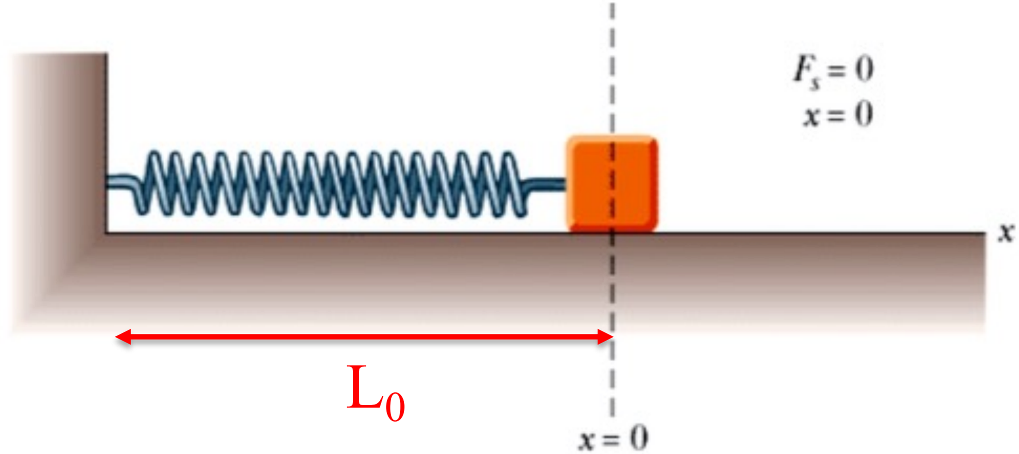
$$= \int_{t_0}^{t_1} M \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} dt = \int_{t_0}^{t_1} M \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) dt = \left[M \frac{V^2}{2} \right]_{t_0}^{t_1} = \frac{M}{2} \left(V^2(t_1) - V^2(t_0) \right)$$

$$da \quad \vec{V} \cdot \vec{V} = V^2 \qquad \Rightarrow 2 \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} = \frac{d}{dt} (V^2)$$

Lavoro svolto da una molla

indichiamo L_0 la lunghezza a riposo della molla

poniamo l'origine del SDR x=0, a distanza L_0 dalla parete



Forza elastica agente su m

$$\vec{F} = -kx\hat{\imath} \qquad F_x = -\mathrm{kx}$$

il segno negativo significa che la forza è sempre rivolta in senso contrario a quello dello spostamento dalla posizione di equilibrio x=0

La forza tende quindi sempre a riportare la molla alla posizione di equilibrio e per questo viene chiamata Forza di Richiamo

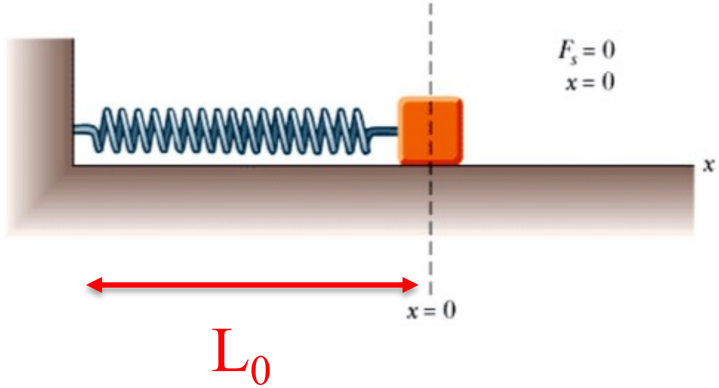
x>0 la forza è negativa,

x<0 la forza è positiva,

x=0 la molla non è deformata e la forza è nulla

Lavoro svolto da una molla(2): $L_{x_i x_f} = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)$

- colleghiamo un corpo poggiato su un piano orizzontale alla molla
- comprimiamo o allunghiamo la molla
  - esso comincerà ad oscillare attorno alla posizione di equilibrio



- Il lavoro compiuto dalla molla quando oscilla tra due posizioni x_i e x_f $\in [L_0 - L, L_0 + L]$

$$L_{x_i x_f} \equiv \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{x_i}^{x_f} kx dx = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)$$

  - esso dipende unicamente dalla posizione iniziale e finale della molla

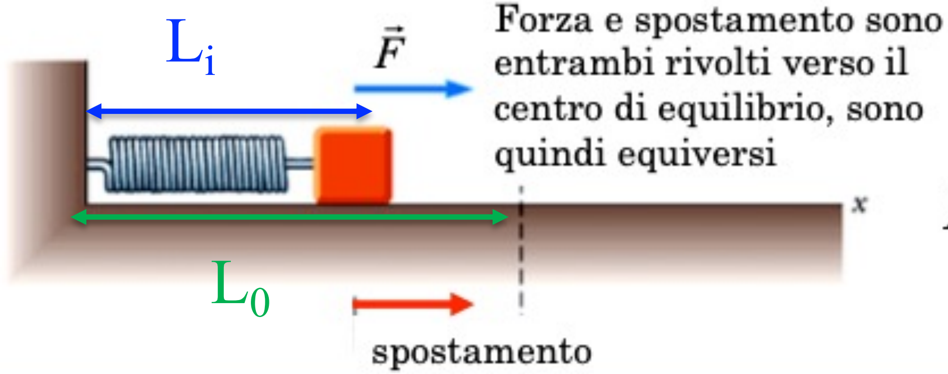
Nota $\begin{cases} x_i, x_f & \text{sono gli allungamenti (o le compressioni) della molla iniziali e finali} \\ x_i = L_i - L_0 \\ x_f = L_f - L_0 \end{cases}$

Lavoro svolto da una molla(3)

$$L_{x_i x_f} = \frac{k}{2}{x_i}^2 - \frac{k}{2}{x_f}^2 \qquad \begin{cases} x_i = L_i - L_0 \\ x_f = L_f - L_0 \end{cases}$$

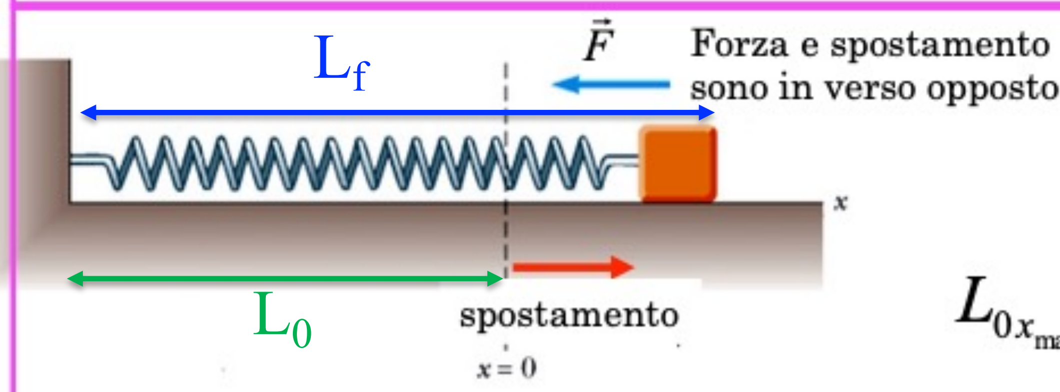
- comprimiamo la molla portandola a $-x_{max}$

$\Rightarrow$ il corpo oscillerà tra $-x_{max}$ e $+x_{max}$ passando per $x=0$



Se $x_i = -x_{max}$ ed $x_f = 0$

$$L_{-x_{max}\,0} = -\int_{-x_{max}}^{0} kx\,dx = \frac{1}{2}kx_{max}^2 > 0$$



Se $x_i = 0$ ed $x_f = x_{max}$

$$L_{0\,x_{max}} = -\int_{0}^{x_{max}} kx\,dx = -\frac{1}{2}kx_{max}^2 < 0$$

Il lavoro compiuto dalla molla per andare da $-x_{max}$ a $+x_{max}$ è quindi nullo!

$$L = -\int_{-x_{max}}^{x_{max}} kx\,dx = -\frac{1}{2}kx_{max}^2 + \frac{1}{2}kx_{max}^2 = 0$$

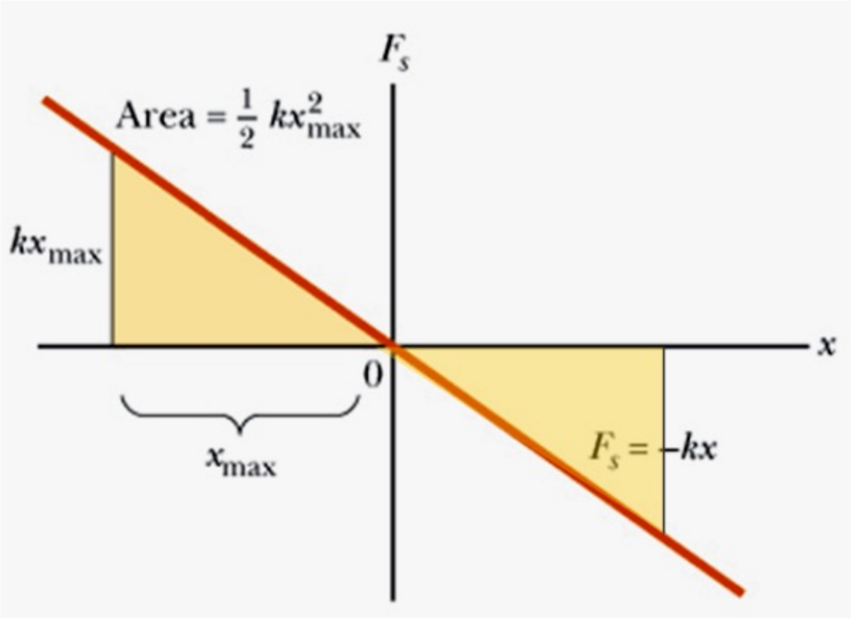
Lavoro svolto da una molla(3): $L_{x_i x_f} = -\frac{k}{2}({x_f}^2 - {x_i}^2)$

Il lavoro compiuto dalla molla per andare da $-x_{max}$ a $+x_{max}$ è quindi nullo!

$$L = -\int_{-x_{max}}^{x_{max}} kx\,dx = -\frac{1}{2}kx^2_{max} + \frac{1}{2}kx^2_{max} = 0$$

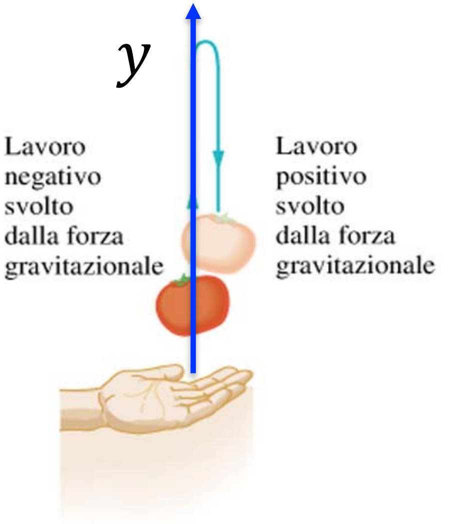
- L'area in giallino è il lavoro della forza di richiamo F della molla durante lo spostamento da $-x_{max}$ a $+x_{max}$
- le due aree triangolari (quella corrispondente al lavoro da $-x_{max}$ a 0 e quella da 0 a $+x_{max}$) si annullano a vicenda
  il lavoro è proprio la somma di queste due aree (e tenendo conto dei segni)
- il lavoro è nullo

Grafico di F_x=-kx in funzione di x



Il lavoro svolto dalla forza d richiamo della molla è nullo quando lo spostamento iniziale rispetto all'equilibrio e quello finale coincidano

Esempio Forza peso: L$= -mg(y_f - y_i)$



- ***Problema(1):*** il corpo cade sotto l'azione della forza peso iniziando il moto a velocità nulla (v_i=0) alla quota y_f . *Se è sceso di un tratto h* avrà una velocità pari a?

Se parte da fermo $\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 = -mg(y_f - y_i) = mg(y_i - y_f)$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{2g(y_i - y_f)} = \sqrt{2g(h)}$$

- ***Problema(2):*** Se il corpo viene lanciato lungo la verticale con velocità iniziale v_0 raggiungerà una quota massima *h* rispetto al lancio pari a?

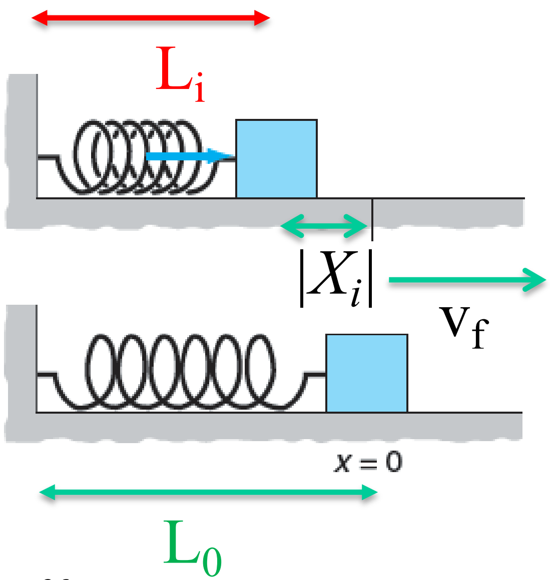
$$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = -\frac{1}{2} m v_i^2 = -mg(y_f - y_i) = -mgh$$

$$\Rightarrow h = \frac{v_i^2}{2g}$$

Esempi forza elastica: $L_{x_i x_f} = -\frac{k}{2}({x_f}^2 - {x_i}^2)$

- ***Problema (1) :*** Un corpo di massa inerziale *m* giace in quiete su un piano orizzontale liscio ed è poggiato ad una molla compressa di $|x_i|$, che all'istante t=0 viene lasciata libera di espandersi.

  Calcolare la velocità del corpo quando è in x=0.



indichiamo l'allungamento o l'accorciamento della molla con

$$\Delta L = L - L_0$$

$$x_f = 0 \quad \Rightarrow L_f - L_0 = 0 = \Delta L_f = 0$$

$$\Rightarrow L = L_0$$

molla compressa di $|x_i|$ $\quad \Rightarrow L_i - L_0 = \Delta L_i = x_i$

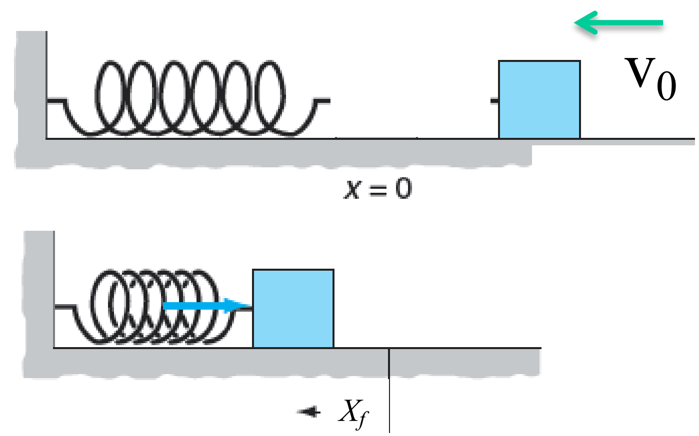
$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 = L_{molla} = \frac{1}{2} k\left(X_i^2 \right);$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{k/M}\,|X_i| = \sqrt{k/M}\,|\Delta L_i| \qquad \vec{v}_f = \sqrt{k/M}\,|\Delta L_i|\hat{\imath}$$

Esempi forza elastica: $L_{x_i x_f} = -\frac{k}{2}\left({x_f}^2 - {x_i}^2\right)$

- ***Problema(2):*** Un corpo di massa inerziale m si muove con velocità iniziale v_0 su un piano orizzontale liscio contro una molla di costante elastica k. Determinare la coordinata di arresto del corpo x_f

$$\Rightarrow L_i - L_0 = \Delta L_i = 0 = x_i$$



$$\Rightarrow L_f - L_0 = \Delta L_f = x_f$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 \quad = \quad L_{molla} = -\frac{1}{2} k\left(x_f^2 - x_i^2\right) = -\frac{1}{2} k\left(x_f^2\right)$$

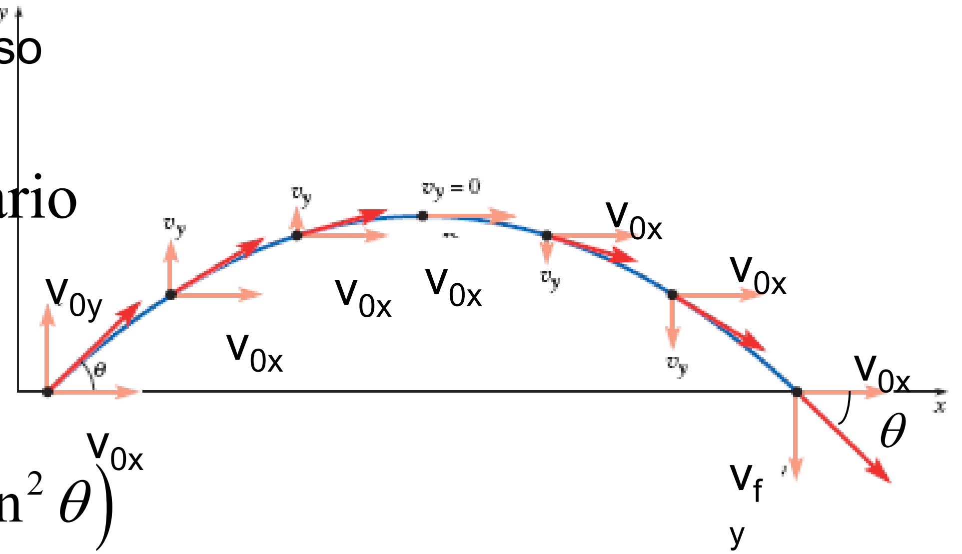
$$\Rightarrow |x_f| = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0 \qquad \Rightarrow x_f = -\sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0$$ poichè era una compressione

Esempio forza Peso: $L_{y_i y_f} = -mg(y_f - y_i)$

Moto parabolico sotto l'azione della F peso

$y_i = 0$

y_f coordinata y di un punto arbitrario della traiettoria



$$L_{peso} = -mg(y_f - y_i) = -mgy$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m\left(v_y^2 - v_0^2 \sin^2\theta\right)$$

v_f velocità di un punto arbitrario della traiettoria

La componente "x" della velocita e` costante e nella differenza si annulla

Il teorema delle Forze vive dice che :

$$-2gy = v_y^2 - (v_0 \sin\theta)^2 \Rightarrow v_y^2 = (v_0 \sin\theta)^2 - 2gy$$

Formula ricavata con la cinematica:

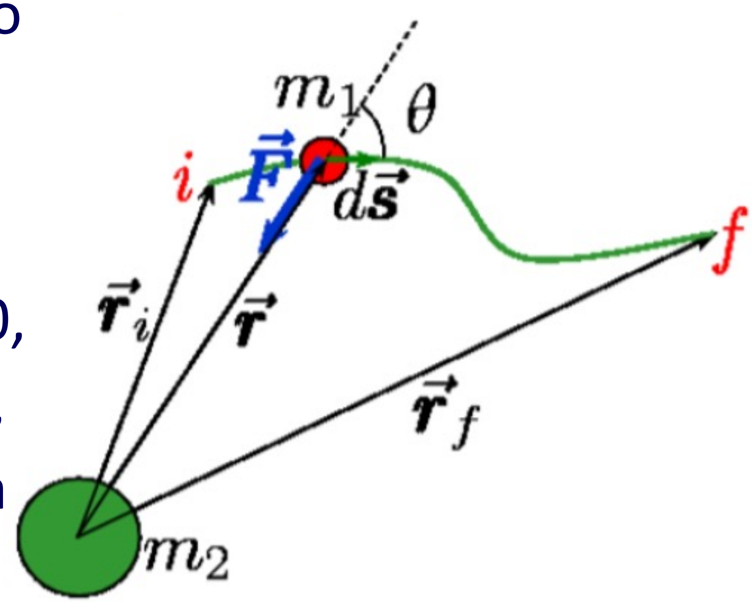
$$\mathbf{2\, a_y\, (y(t) - y_0) = v_y(t)^2 - v_{0y}^2}$$

Forza elettrostatica o gravitazionale: lavoro

- Per una forza dipendente dall'inverso del quadrato della distanza:

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\hat{r}$$

- attrattiva se k > 0, repulsiva se k < 0, es. forza gravitazionale k>0, $m_2 \gg m_1$, $\vec{F}_{2\to 1} = \vec{F}$, con la particella 2 assunta fissa nell'origine



- il lavoro fatto dipende solo dalla posizione iniziale e finale

$$L = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s} = -k\int_i^f \frac{\hat{r}\cdot d\vec{s}}{r^2} = -k\int_{r_i}^{r_f}\frac{dr}{r^2} = k\left[\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right]$$

Questo è il caso della forza elettrostatica (fra cariche) e gravitazionale (fra masse)

Potenza

- Se vi chiedessero cosa differenzia il motore di una Ferrari da quello di una 500 cosa vi verrebbe spontaneo rispondere?

  Sicuramente (SPERO) una delle risposte sarebbe i cavalli motore... o la Potenza!

Ma che cos'è la potenza?

- La Potenza è la RAPIDITÀ con cui viene sviluppata una certa quantità di lavoro

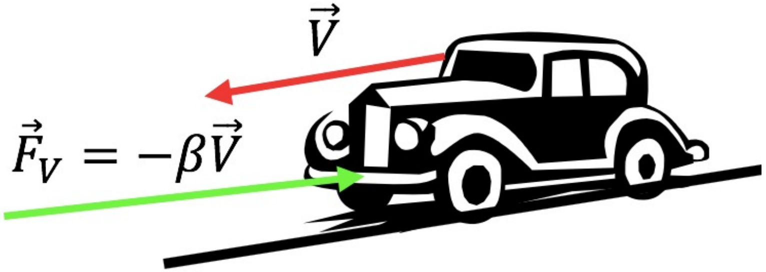
  - Potenza media $$\langle P \rangle = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{F}\cdot\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{F}\cdot\vec{v}_m$$

  - Potenza istantanea $$P = \frac{dL}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

Potenza (2) $\mathrm{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

- [P] = J/s = W (**watt**)
- è una quantità scalare
- relazione importante per la potenza istantanea
  $$P = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d}{dt}\int \vec{F} \cdot \vec{v}dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$$
  - $\vec{v}$ è la velocità del punto di applicazione
- è rilevante solo $\vec{F} \cdot \vec{v}$
  - solo la componente della forza parallela alla direzione della velocità

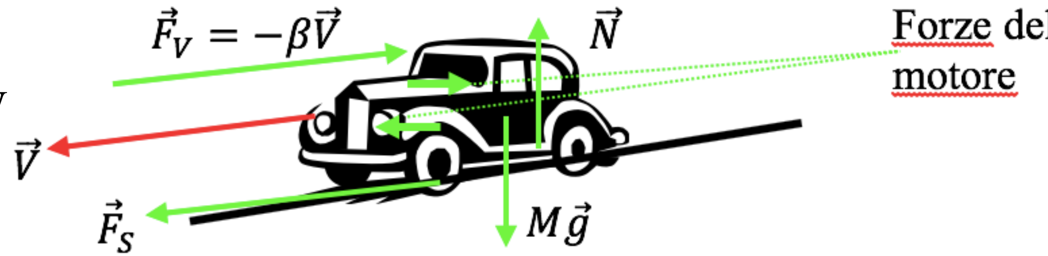
Esercizio. Un'automobile, di massa $\boldsymbol{M = 1000\ \mathrm{kg}}$, si muove ad una velocità costante $\boldsymbol{V_0 = 72\ \mathrm{km/h} = 20\ \mathrm{m/s}}$ su una strada orizzontale ed il motore eroga una potenza $\boldsymbol{P_0 = 10\ \mathrm{kW}}$. L'attrito dell'aria esercita sull'automobile una forza di tipo viscoso $-\boldsymbol{\beta\vec{V}}$; si trascurino sia i termini della forza viscosa quadratici nella velocità, sia tutte le forze di attrito interne al veicolo.



1) Si identifichino tutte le forze interne ed esterne al veicolo
2) Si calcoli la potenza sviluppata da ognuna di queste forze.

Automobile
$\boldsymbol{M}$ **= 1000 kg**,
$\boldsymbol{V = cost = V_0}$ $= \mathbf{72\,\frac{km}{h}}$**=20 m/s**
Potenza motore $\boldsymbol{P_{mot}}$ $= \mathbf{10\ kW} = 10^4$ W
Attrito dell'aria forza di tipo $-\boldsymbol{\beta\vec{V}}$

D.1) forze interne ed esterne al veicolo ?



R.1) Forze esterne: Peso, reazione normale, attrito statico* e viscoso
Forze interne: motore.

- $P_{mot} = 10^4$W (dato fornito dal problema);
- $P_{\vec{F}_{AS}} = 0$ (vero sempre);

il lavoro della forza di attrito statico è nullo, perché non c'è spostamento del punto di applicazione: $L_{\vec{F}_{AS}} = 0$.

- $P_{M\vec{g}} = 0$, $P_{\vec{N}} = 0$ (per ortogonalità: $\vec{F} \perp \vec{V}$);
- $P_{\vec{F}_{AV}} = -\beta V^2$.

D.2) Si calcoli la potenza sviluppata da ognuna di queste forze.

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\int \vec{F}\cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt}\int \vec{F}\cdot\vec{V}dt = \vec{F}\cdot\vec{V}$$

D'altra parte se la velocità è costante L= $\frac{1}{2}MV_f^2 - \frac{1}{2}MV_i^2$**=0**

per cui P= $\boldsymbol{\frac{dL}{dt}}$ **=0**

di conseguenza $\boldsymbol{P = \sum_i P_i}$=0

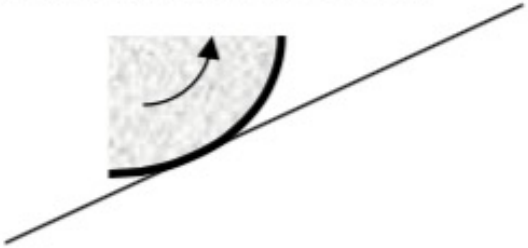
Poiché la potenza totale è nulla (velocità costante) si ha:

$$P_{mot} + P_{\vec{F}_{AS}} + P_{M\vec{g}} + P_{\vec{N}} + P_{\vec{F}_{AV}} = 0$$

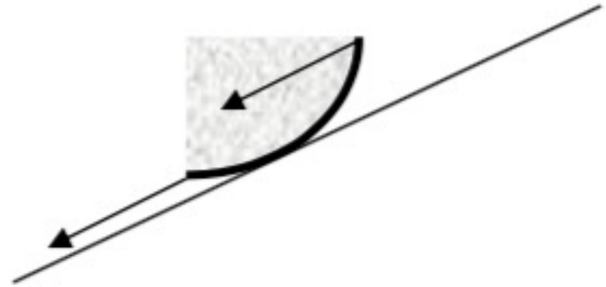
da cui $P_{\vec{F}_{AV}} = -P_{mot} = -10^4$W.

Esempio importante

Rotolamento: attrito statico



Sfregamento: attrito dinamico



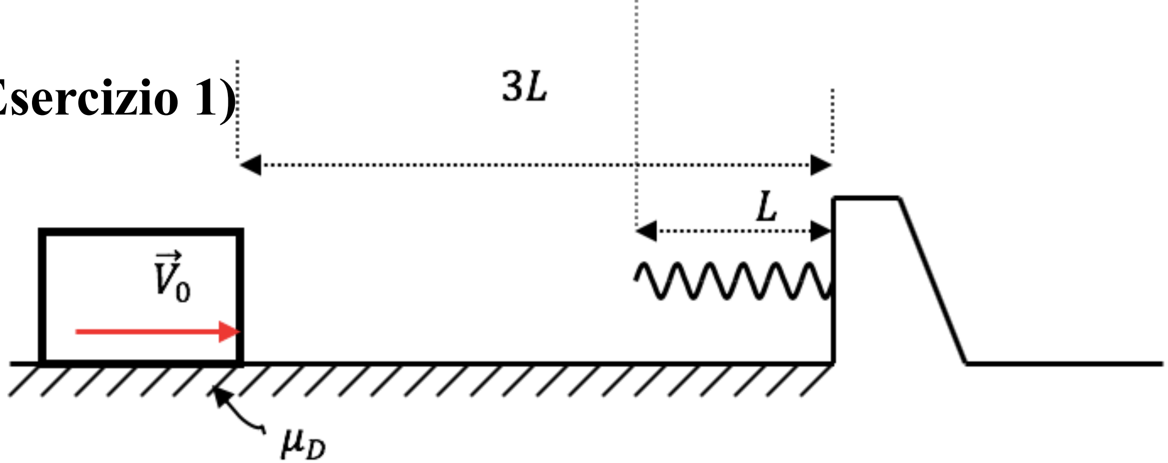
Punto di contatto istantaneamente fermo: attrito statico

Punto di contatto in movimento con velocità v: attrito dinamico

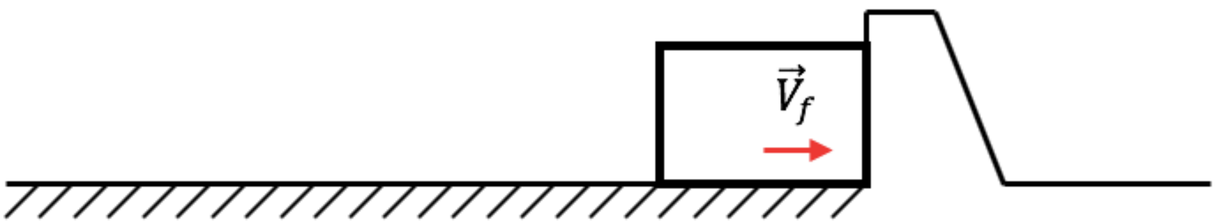
il lavoro della forza di attrito statico è nullo, perché non c'è spostamento del punto di applicazione

il lavoro della forza di attrito dinamico non è nullo, perché c'è spostamento del punto di applicazione

Esercizio 1)



Stato **iniziale** al tempo $t = 0$.
Molla con costante elastica k e lunghezza a riposo L.
Carrello di massa M.



Stato **finale**.

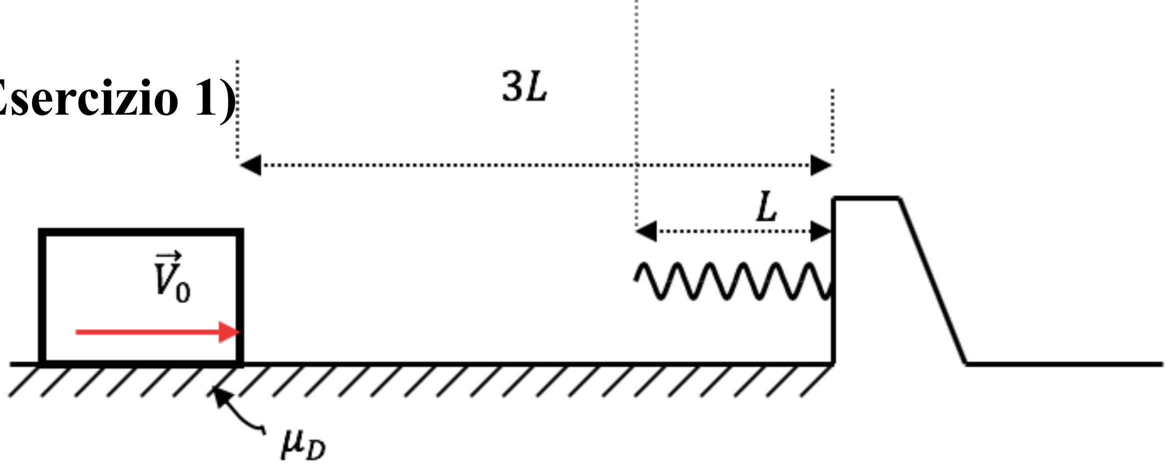
Esprimere per quali valori della velocità iniziale il carrello comprime completamente la molla (e quindi urta il respingente).

lavoro molla: $L_{x_i x_f} = -\frac{k}{2}\left(x_\mathrm{f}^{\,2} - x_\mathrm{i}^{\,2}\right)$ dove x_i e x_f sono l' allung. o la compressione iniziale e finale della molla

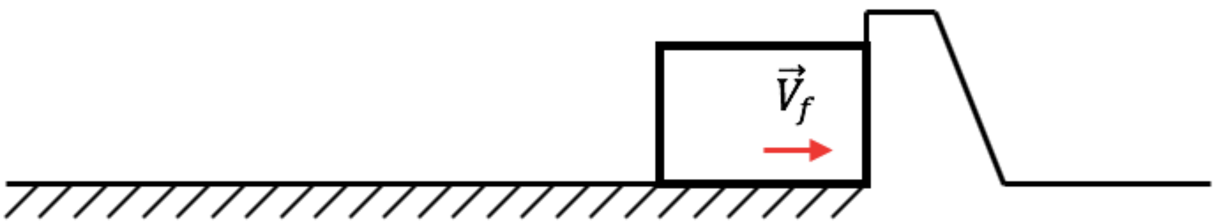
$$K_f - K_i = L_{el} + L_N + L_{Mg} + L_{F_D} = \frac{1}{2}MV_f^2 - \frac{1}{2}MV_i^2 = -\frac{1}{2}kL^2 + 0 + 0 - 3L\mu_D Mg$$

$$L_{F_D} = \int \vec{F}_\mathrm{D} \cdot d\vec{r} = \int_0^{3L} -\mu_D Mg\hat{x} \cdot \hat{x}dx = -3L\mu_D Mg$$

Esercizio 1)



Stato **iniziale** al tempo $t = 0$.
Molla con costante elastica k e lunghezza a riposo L.
Carrello di massa M.



Stato **finale**.

Esprimere per quali valori della velocità iniziale il carrello comprime completamente la molla (e quindi urta il respingente).

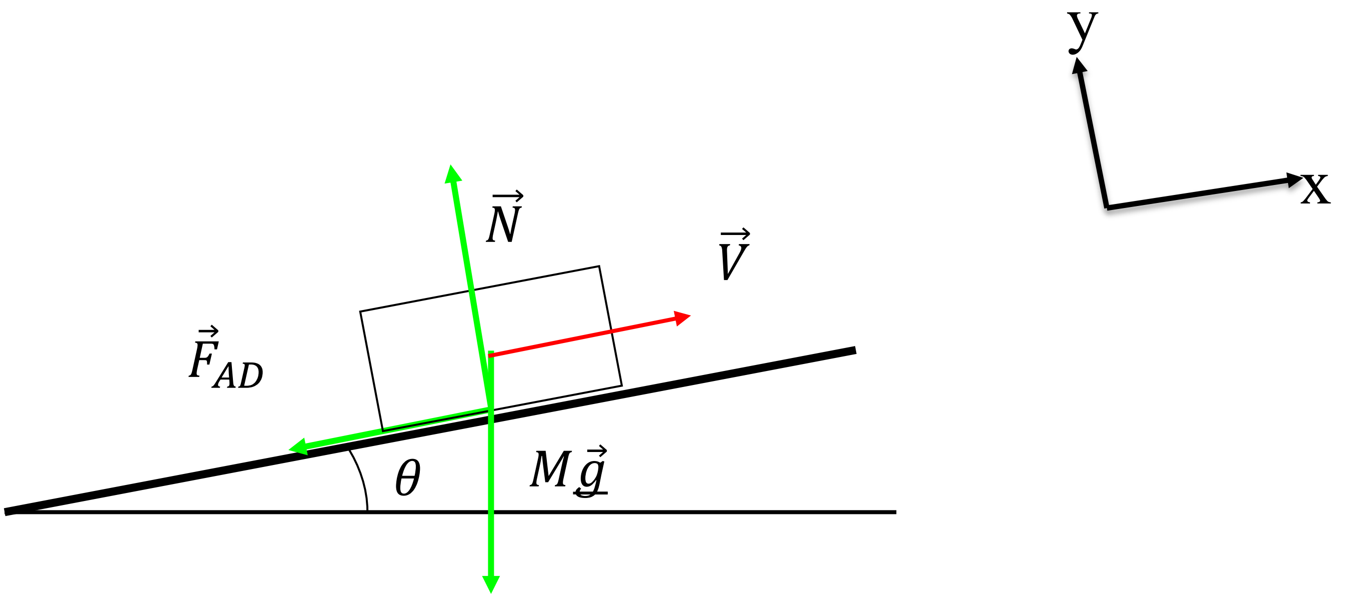
$$K_f - K_i = L_{el} + L_N + L_{Mg} + L_{F_D} = \frac{1}{2}MV_f^2 - \frac{1}{2}MV_i^2 = -\frac{1}{2}kL^2 + 0 + 0 - 3L\mu_D Mg$$

Si noti che **entrambi i lavori sono dissipativi**.

$V_f^2 = V_i^2 - \frac{kL^2}{M} + 0 + 0 - 6L\mu_D g$ che deve essere ≥ 0 affinchè il respingente sia urtato

$$\Rightarrow V_i \geq \sqrt{\frac{kL^2}{M} + 6L\mu_D g}$$

Esercizio. Un blocco (massa $M = 10$ kg) è lanciato in salita al tempo $t = 0$ con una velocità $V_0 = 10$ m/s lungo un piano inclinato di un angolo $\theta = \pi/6$ rispetto ad un piano orizzontale.
Fra blocco e piano c'è un attrito dinamico, caratterizzato da un coefficiente $\mu_D = 0.2$.
Utilizzando il teorema delle forze vive si calcoli:
1) la massima altezza raggiunta, rispetto alla quota iniziale;
2) la velocità con cui il corpo ripassa nella posizione iniziale.



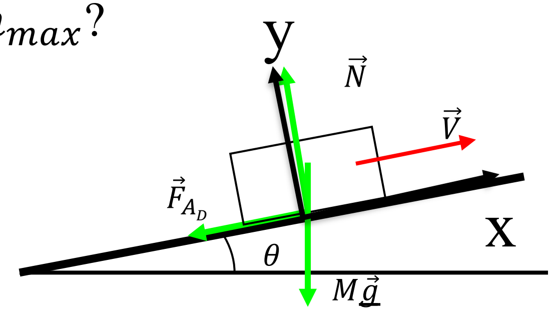
$M = 10$ kg

$V_0 = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, velocità di lancio lungo piano inclinato

$\theta = \pi/6$

attrito dinamico fra blocco e piano, $\mu_D = 0.2$

D1) massima altezza raggiunta h_{max}?



Soluzione

Salita:

$$K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}MV_0^2 = L_{AD} + L_{M\vec{g}}$$

$$L_{AD} = \int_l \vec{F}_{AD} \cdot d\vec{r} = \int_0^l -\mu_D Mg\cos\theta\hat{x} \cdot \hat{x}dx = -\mu_D Mg\cos\theta l$$

$$L_{M\vec{g}} = \int_0 -Mg\sin\theta\hat{x} \cdot \hat{x}dx = -Mg\sin\theta l$$

$$-\frac{1}{2}MV_0^2 = -\mu_D Mg\cos\theta\, l - Mgh_{max}$$

dove l è lo spostamento lungo la direzione x, legato a h_{max} dalla relazione

$$h_{max} = l\sin\theta$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}MV_0^2 = -Mgh_{max}(\mu_D\cot\theta + 1)$$

$$\Rightarrow h_{max} = \frac{V_0^2}{2g(\mu_D\cot\theta + 1)} \approx 3.75\text{ m}$$

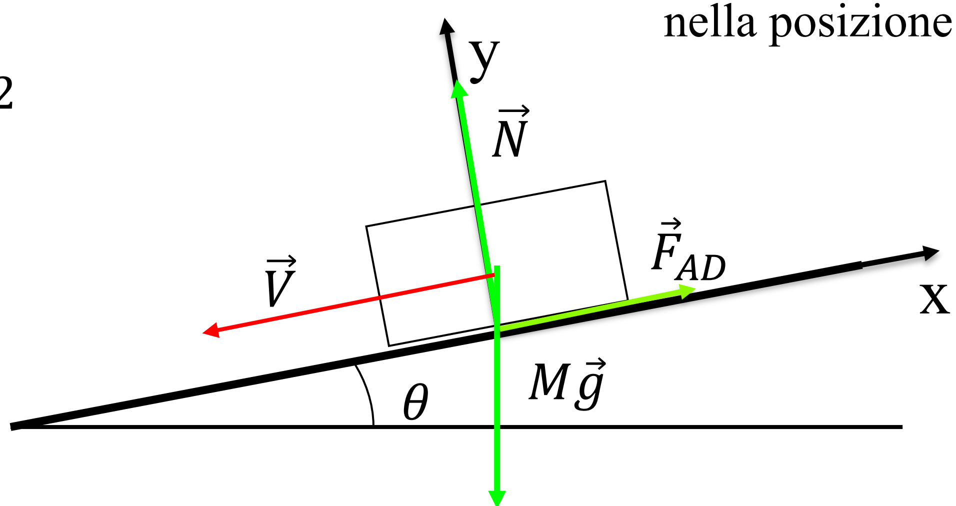
$M = 10$ kg

$V_i = 0$, velocità nel punto di inversione del moto

piano inclinato: $\theta = \pi/6$

attrito dinamico $\mu_D = 0.2$

D.2) velocità con cui il corpo ripassa nella posizione iniziale, $\vec{V}_f$?



$$K_f - K_i = \frac{1}{2}MV_f^2 - 0 = L_{\vec{F}_{AD}} + L_{M\vec{g}} \quad = -\mu_D Mg\cos\theta\, l + Mgl\sin\theta$$

$$L_{AD} = \int \vec{F}_{AD} \cdot d\vec{r} = \int_l^0 \mu_D Mg cos\theta \hat{x} \cdot \hat{x} dx = -\mu_D Mg\, cos\theta l$$

$$L_{M\vec{g}} = \int_l^0 -Mg sin\theta \hat{x} \cdot \hat{x} dx = Mg sin\theta l$$

$$\frac{1}{2}MV_f^2 = -\mu_D Mg\cos\theta\, l + Mgh_{max} \qquad = Mgh_{max}(-\mu_D \cot\theta + 1)$$

$$\frac{1}{2}MV_f^2 = -\mu_D Mg\cos\theta\, l + Mgh_{max} \qquad = Mgh_{max}(-\mu_D\cot\theta + 1)$$

Sostituendo il valore di h_{max} ricavato in precedenza:

$$\frac{1}{2}MV_f^2 = Mg(1-\mu_D\cot\theta)\frac{V_0^2}{2g(\mu_D\cot\theta + 1)} = \frac{MV_0^2(1-\mu_D\cot\theta)}{2(\mu_D\cot\theta + 1)}$$

$$\Longrightarrow \; V_f^2 = \frac{V_0^2(1-\mu_D\cot\theta)}{(\mu_D\cot\theta + 1)}$$

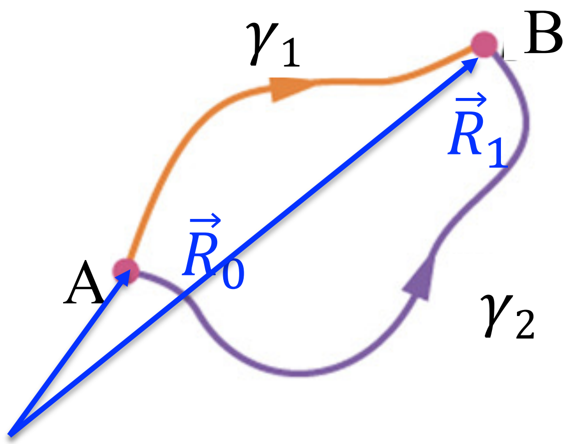
Notate che se si pone $\mu_D = 0$ si ottiene $h_{max} = \frac{V_0^2}{2g}$ e $V_f = V_0$

Forze conservative

Definizione di Forza conservativa

è una **forza $\vec{F}$ il cui lavoro non dipende dal percorso scelto per andare dal punto iniziale al punto finale, ma solo dagli estremi**

$$L = \int_{\vec{R}_0 \ \text{linea}\ \gamma}^{\vec{R}_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} \equiv \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



non dipende da $\boldsymbol{\gamma}$, ma solo da $\vec{R}_0$ e $\vec{R}_1$

Esempi di forze conservative, i cui lavori sono stati calcolati nelle lezioni precedenti:

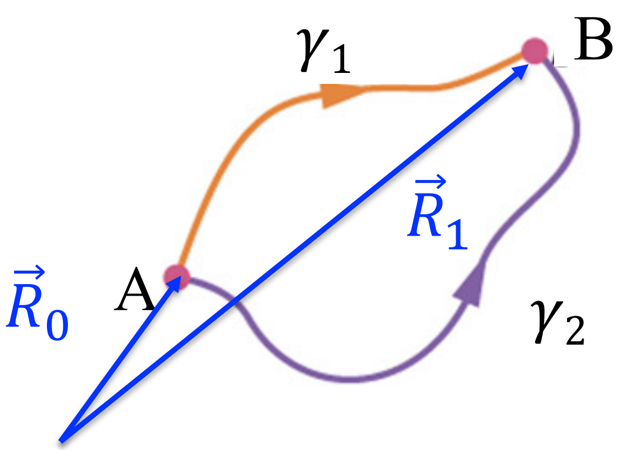
- **gravità**
- **elettrostatica**
- **elastica**

Teorema

Si consideri una forza $\vec{F}$:

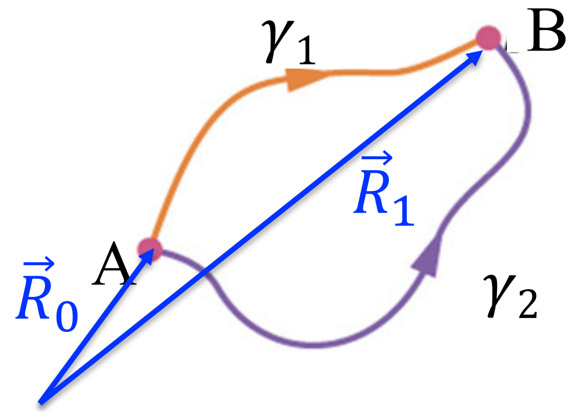
Se <u>per ogni linea chiusa γ</u> si ha: $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ $\Rightarrow \mathrm{L} \equiv \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ **non dipende da $\boldsymbol{\gamma}$**, ma solo da $\vec{R}_0$ e $\vec{R}_1$.

Il primo integrale è chiamato "Circuitazione della forza" sul percorso γ.



Es. la circuitazione lungo il percorso chiuso γ coincide con la somma del lavoro fatto dalla forza F da A a B lungo γ_1 e da B a A lungo γ_2

Dimostrazione di se $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \mathcal{L} \equiv \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} \vec{F}\cdot d\vec{l}$



È sufficiente applicare l'ipotesi ad un percorso chiuso qualsiasi formato da due linee arbitrarie γ_1 e γ_2 e con gli estremi in comune:

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0 = \int_{\vec{R}_{0,\gamma_1}}^{\vec{R}_1} \vec{F}\cdot d\vec{l} + \int_{\vec{R}_{1,\gamma_2}}^{\vec{R}_0} \vec{F}\cdot d\vec{l} \quad = \int_{\vec{R}_{0,\gamma_1}}^{\vec{R}_1} \vec{F}\cdot d\vec{l} - \int_{\vec{R}_{0,\gamma_2}}^{\vec{R}_1} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{R}_{0,\gamma_1}}^{\vec{R}_1} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_{\vec{R}_{0,\gamma_2}}^{\vec{R}_1} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

Quindi se la forza $\vec{F}$ è tale che per qualunque percorso chiuso γ: $\Rightarrow$ il lavoro fatto dalla forza $\vec{F}$ dipende unicamente dalla posizione iniziale e finale e non dal percorso scelto

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0 \qquad \Longrightarrow \int_{\vec{R}_{0,\gamma_1}}^{\vec{R}_1} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_{\vec{R}_{0,\gamma_2}}^{\vec{R}_1} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

Forze conservative

$$\oint_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0 \qquad \Longrightarrow \int_{\vec{R}_{0,\gamma_1}}^{\vec{R}_1} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_{\vec{R}_{0,\gamma_2}}^{\vec{R}_1} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

- Quindi una forza $\vec{F}$ è conservativa se:

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$$

lungo un percorso γ qualsiasi

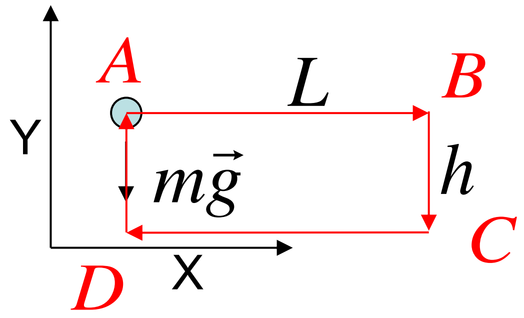
- Possiamo omettere γ

- Se la forza $\vec{F}$ è conservativa il lavoro dipende unicamente dalle posizioni inziali e finali

$$\Longrightarrow L = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} \vec{F}\cdot d\vec{l} = f(\vec{R}_0, \vec{R}_1)$$

- è una funzione delle posizioni del punto materiale (**e solo delle posizioni**) iniziale e finale

Esempio di forza conservativa: gravità nelle immediate vicinanze della terra



$$L_{ABCDA} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = 0 + mgh + 0 - mgh = 0$$

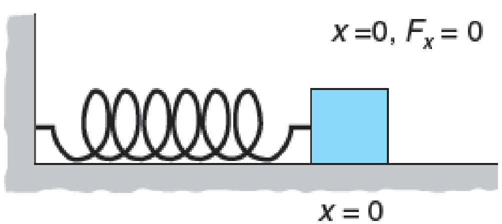
Es. di forza conservativa: Forza elastica di una molla ideale

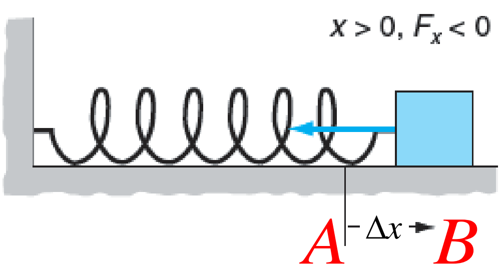
$$L_{molla} = \int_i^f \vec{F}_{molla} \cdot d\vec{s} = \int_i^f -kx dx = -\frac{1}{2}kx_f^2 + \frac{1}{2}kx_i^2 = \frac{1}{2}k\left(x_i^2 - x_f^2\right)$$

Fissiamo l'origine nel punto di equilibrio e ci muoviamo prima verso destra , da A a B, e poi verso sinistra, da B ad A, per una quantità Δx

- Da A a B espansione
  $x_i = 0 \quad x_f = \Delta x$
- Da B a A compressione
  $x_i = \Delta x \quad x_f = 0$

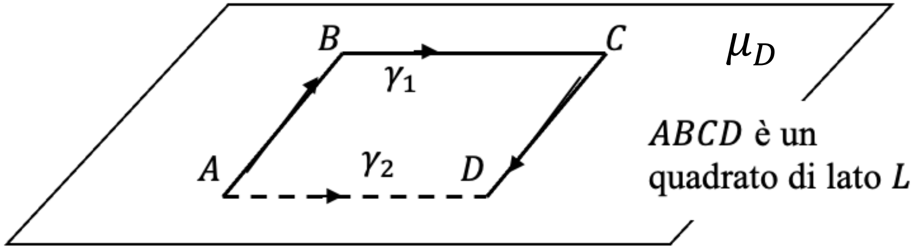
$$L_{ABBA} = L_{AB} + L_{BA} = -\frac{1}{2}k\Delta x^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 = 0$$





Esempio di forza non conservativa: forza di attrito

Una cassa di massa M, assimilabile ad un punto materiale, si muove su un piano orizzontale spinta da un uomo.



Fra la cassa ed il piano è presente una forza di attrito dinamico con coefficiente μ_D. Calcolare il lavoro svolto dalla sola forza di attrito dinamico sui seguenti percorsi:

1) Linea γ_1(percorso $ABCD$ sui tre lati).

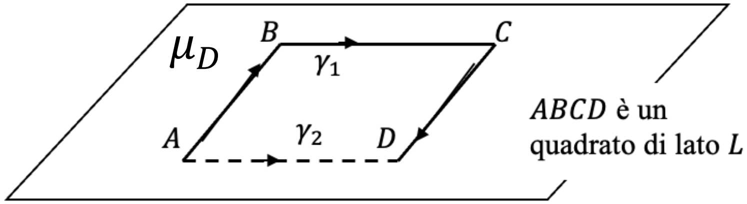
$$\int_{A(\text{linea }\gamma_1)}^{D} \vec{F}_D \cdot d\vec{l} = \int_{A(\text{linea }\gamma_1)}^{D} \left(-\mu_D M g \hat{V} \cdot d\vec{l}\right) =$$

$$\int_{A(\text{linea }\gamma_1)}^{D} \left(-\mu_D M g \widehat{dl} \cdot \widehat{dl} |d\vec{l}|\right) = \quad -3\mu_D M g L$$

dove $\hat{V}$ è il versore della velocità

Esempio Piano con attrito

2) Linea γ_2 (percorso AD lungo un lato).



$ABCD$ è un quadrato di lato L

$$\int_{A(\text{linea }\gamma_2)}^{D} \vec{F}_D \cdot d\vec{l} = \int_{A(\text{linea }\gamma_2)}^{D} \left(-\mu_D M g \hat{V} \cdot d\vec{l}\right) = -\mu_D M g L$$

3) Percorso chiuso $ABCDA$ sui quattro lati del quadrato.

$$\oint_{\text{linea }\gamma_1+\gamma_2} \vec{F}_D \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{linea }\gamma_1+\gamma_2} \left(-\mu_D M g \hat{V} \cdot d\vec{l}\right) = -4\mu_D M g L$$

4) Percorso ADA

$$\oint_{\text{linea ADA}} \vec{F}_D \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{linea ADA}} \left(-\mu_D M g \hat{V} \cdot d\vec{l}\right) = -2\mu_D M g L$$

Note:

- $L < 0$ sempre perché la forza è “dissipativa”

Note

Esempi di <u>forze NON conservative</u>:

- **attrito dinamico** (lavoro su qualunque percorso <u>sempre</u> < 0)
- **attrito viscoso** (lavoro su qualunque percorso <u>sempre</u> < 0)

Esempi di <u>forze a lavoro sempre nullo</u> su un percorso chiuso (quindi forze conservative):

- **attrito statico**
- **forze vincolari normali**

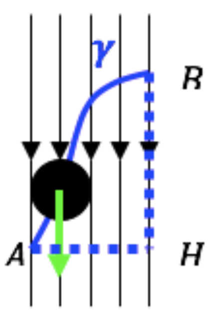
Le forze che danno un lavoro sempre nullo su un percorso chiuso sono <u>**Forze conservative**</u> in quanto il lavoro compiuto dalla <u>**forza $\vec{F}$ non dipende dal percorso scelto per andare da un punto iniziale a un punto finale**</u>

Campo di Forza e linee di forza

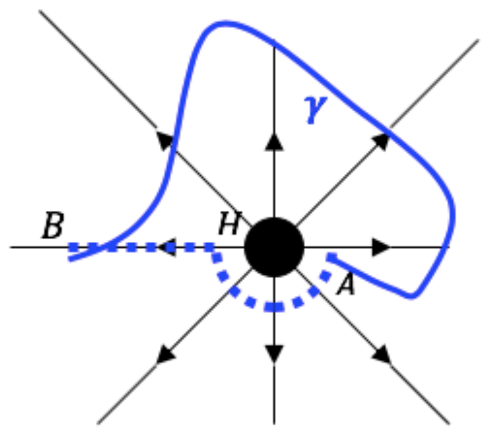
- **Campo di forze** $\vec{F}$(x,y,z)
  - l'insieme dei valori che una grandezza fisica (in questo caso una forza) assume in una certa regione dello spazio

- **Linea di forza**
  - una linea formata dall'inviluppo delle direzioni della forza nella regione del campo
  - la direzione delle forza è in ogni punto tangente alla linea di forza

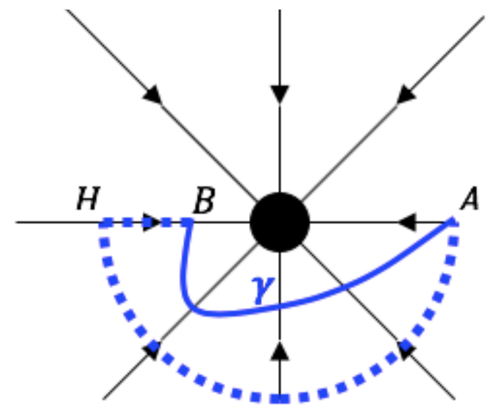
- Esempi



Campo gravitazionale alla superficie terrestre



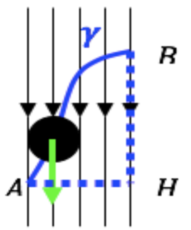
Campo elettrico di Coulomb generato da una carica positiva



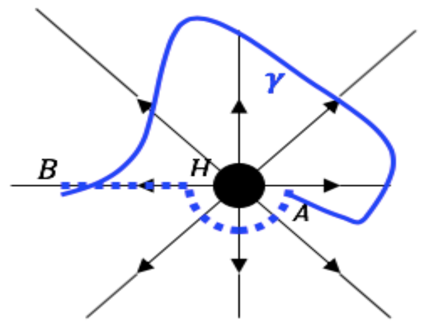
Campo elettrico di Coulomb generato da una carica negativa

Come calcolare il Lavoro

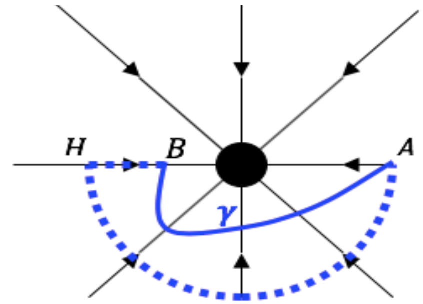
- Esempi



Campo gravitazionale alla superficie terrestre



Campo elettrico di Coulomb generato da una carica positiva



Campo elettrico di Coulomb generato da una carica negativa

- Il calcolo del lavoro sulle linee γ è in generale difficile
  - Se le forze sono conservative si può calcolare il lavoro su percorsi realizzati solo con tratti perpendicolari (AH figura) alle linee di forza o ad esse paralleli (HB figura).Infatti :

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^H \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_H^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \pm \int_H^B |\vec{F}||d\vec{l}|$$

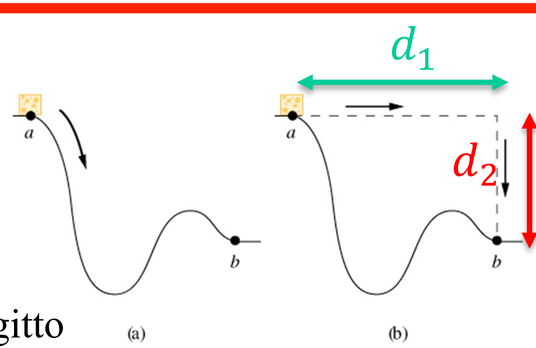
  - Il calcolo per forze conservative può quindi diventare semplice

applicazione: calcolo del lavoro utilizzando percorsi opportuni

corpo che scivola
su superficie senza attrito
da **a** a **b** di massa m

percorre 2.0 m lungo tutto il tragitto
e copre dislivello verticale di 0.80 m.

quanto lavoro compie $\mathbf{F}_g$ sul corpo?



NON posso utilizzare $L = \mathbf{F}_g \cdot \mathbf{s} = F_g\, s \cos\theta$,
infatti θ cambia continuamente

$\mathbf{F}_g$ è **conservativa** $\Longrightarrow$ calcolo L lungo un percorso opportuno tra **a** e **b**, facilitando i calcoli

scelgo il **percorso tratteggiato**

$$L_{orizzontale} = -mgd_1 cos90^0 = 0$$

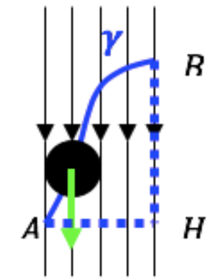
$$L_{verticale} = mgd_2 cos0^0 \qquad = mgd\cos(0^0) = (2.0kg)(9.8m/s^2)(0.80m) = 15.7J$$

$$: L_{orizzontale} + L_{verticale} = 0 + 15.7J \approx 16J$$

Proprietà delle linee di forza

- La direzione e il verso delle forza è in ogni punto tangente alla linea di forza
- Le linee di forza non si intersecano mai
  - Infatti se esistesse un punto in cui due linee di forza si intersecano la direzione della forza in quel punto non sarebbe definita, dovendo essere simultaneamente tangente a due curve diverse

- Esempi



Campo gravitazionale alla superficie terrestre

- Le linee di forza di un campo conservativo non sono mai linee chiuse

Infatti

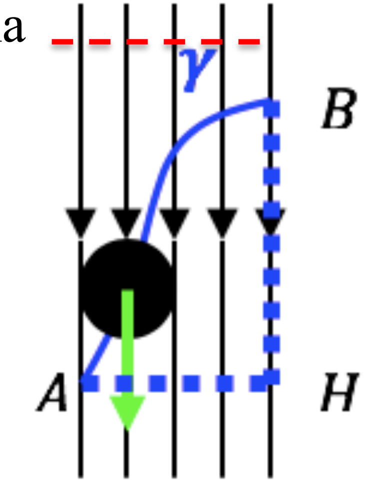
- se esistesse una linea di forza chiusa si potrebbe calcolare la circuitazione della forza lungo questa linea

  ⇒ forza e spostamento sarebbero paralleli, tutti gli addendi sarebbero positivi o negativi e l'integrale di circuitazione sarebbe diverso da zero, in contrasto con l'ipotesi di circuitazione nulla.

Superficie equipotenziale

È una superficie perpendicolare in ogni punto alla direzione delle linee di forza

- Il lavoro della forza è nullo se ci si sposta su una superficie equipotenziale

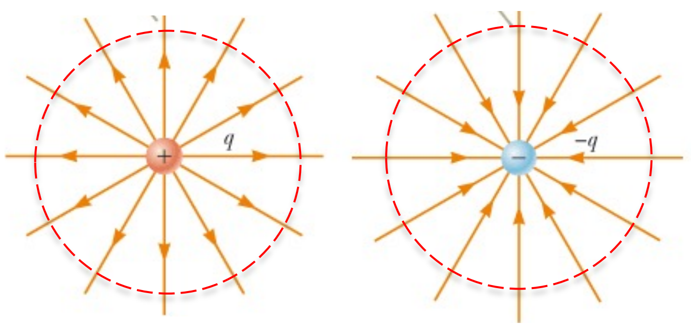


Linee di forza del campo gravitazionale vicino alla superfce terrestre

Abituatevi a "visualizzare" un campo di forze in termini di linee di forza e superfici equipotenziali

- Le superfici equipotenziali del campo gravitazionale alla superficie terrestre sono dei piani orizzontali.

- Le superfici equipotenziali del campo gravitazionale di una massa puntiforme sono delle superfici sferiche centrate nella massa

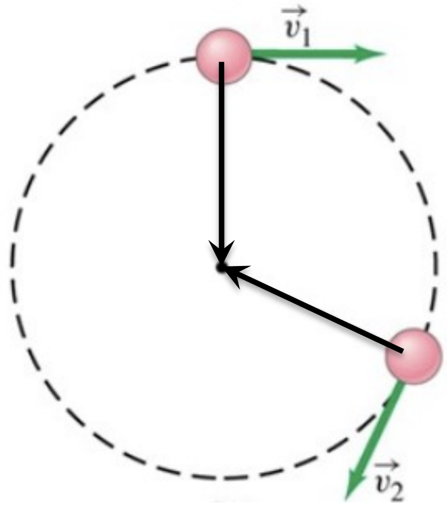


Linee di forza per una carica puntiforme positiva e negativa: nota le linee sono radiali in 3D

- Le superfici equipotenziali del campo coulombiano di una carica puntiforme sono delle superfici sferiche centrate nella carica

Attenzione Le linee di forza di un campo di forze non coincidono necessariamente con la traiettoria dei punti.

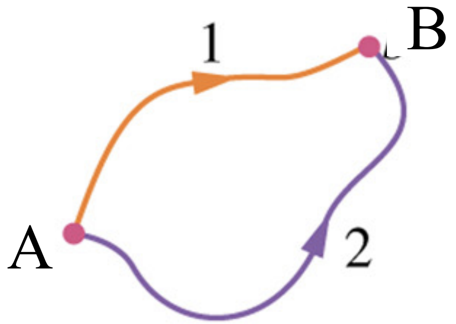
Es. moto circolare uniforme dovuto ad una forza centrale (es. la gravitazione)



La traiettoria è una circonferenza intorno al centro di forza, mentre le linee di forza sono raggi della circonferenza

Differenza di energia potenziale, energia potenziale

- Se una forza è conservativa allora esiste una funzione della posizione del punto materiale (**e solo della posizione**) tramite la quale si può esprimere il valore numerico del lavoro



$$L_{A\text{->}B\ 1} = L_{A\text{->}B\ 2} = L_{A\text{->}B} = f\,(A, B)$$

- **definizione**: si chiama **variazione di energia potenziale** l'integrale:

$$\Delta U = U(\vec{R}) - U(\vec{R}_0) \equiv -L_{\vec{R}_0 \to \vec{R}} = -\int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

- Attenzione ! È l'**opposto** del lavoro della forza $\vec{F}$!
- si può definire **solo per forze conservative**

Differenza di energia potenziale, energia potenziale (2)

- Entrambe ΔU e $U(\vec{R})$ in MKS si misurano in **Joule**

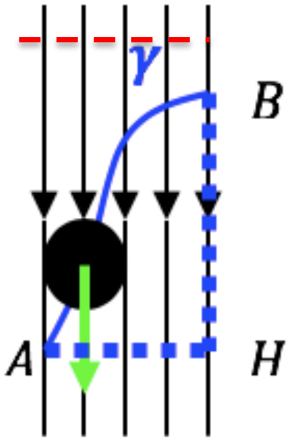
- È **definita solo la differenza** di energia potenziale

$$U(\vec{R}) - U(\vec{R}_0) \equiv -L_{\vec{R}_0 \to \vec{R}} = -\int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$\Rightarrow$ **l'energia potenziale $U(\vec{R})$ è definita a meno di una costante additiva arbitraria**

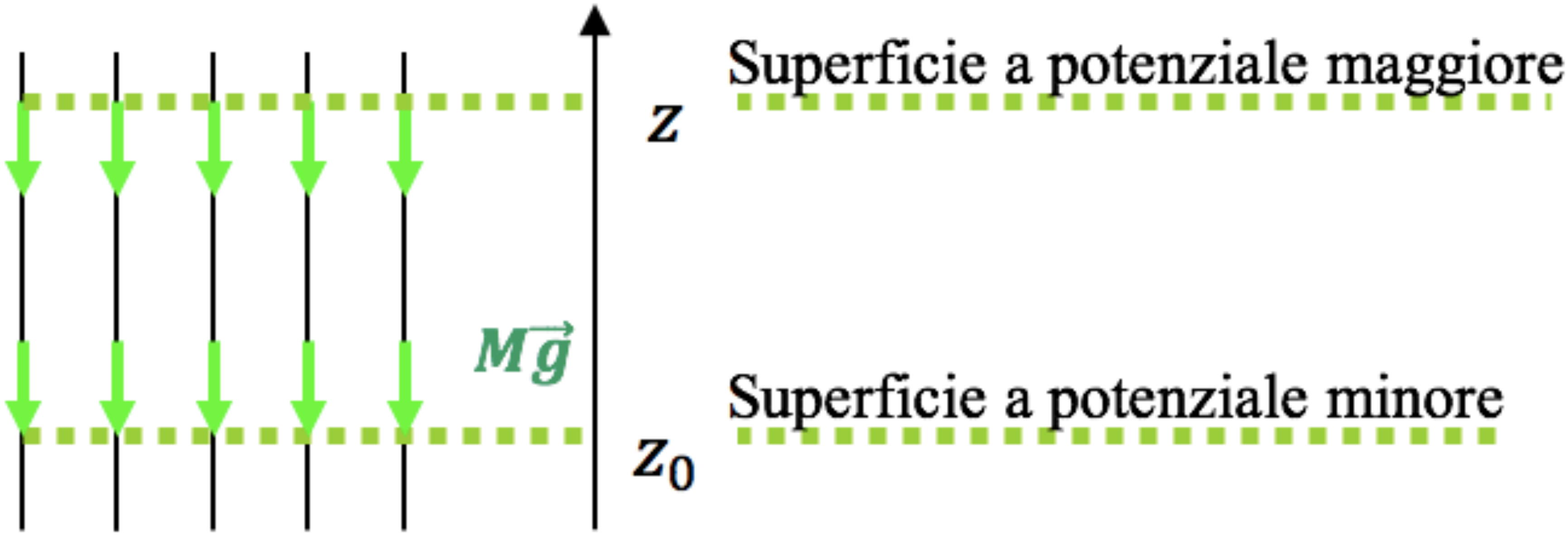
- Le superfici perpendicolari alle linee di forza del campo (**superfici equipotenziali**) hanno questo nome perché su ognuna di esse è costante il valore dell'energia potenziale.

- Le **linee di forza sono dirette dalle superfici ad energia potenziale più alta verso quelle ad energia potenziale più bassa.**



Linee di forza del campo gravitazionale vicino alla superfice terrestre

Energia potenziale gravitazionale nelle vicinanze della superficie terrestre



- $U(Z) - U(Z_0) \equiv -L_{Z_0 \to Z} = -\int_{Z_0}^{Z} M\vec{g} \cdot d\vec{l} = MgZ - Mg\,Z_0 = Mg\Delta h$

$$\Rightarrow U(Z) = MgZ + costante$$

- Normalmente si definisce $U(z_0) = Mgz_0$

$$\Rightarrow U(Z) = MgZ$$

Attenzione 1) Se si sceglie un asse (per es. Z) diretto **verso il basso**, allora $U(Z) = -MgZ + \text{costante}$ Z

Energia potenziale di una molla: caso unidimensionale

- Ricordiamo che per una molla

$$L_{x_i x_f} \equiv \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} kx dx = -\frac{k}{2}({x_\mathrm{f}}^2 - {x_\mathrm{i}}^2) = \frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{l_i} - \boldsymbol{l_0})^{\mathbf{2}} - \frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{l_f} - \boldsymbol{l_0})^{\mathbf{2}}$$

  - il lavoro dipende unicamente dalla lunghezza iniziale ($\boldsymbol{l_i}$) e dalla lunghezza finale (l_f) della molla

- Possiamo cambiare variabile indicando con x la lunghezza della molla

$$\boldsymbol{U_{el}(x)} - \boldsymbol{U_{el}(x_i)} = -\boldsymbol{L_{el}} = \frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{l_0})^{\mathbf{2}} - \frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{l_0})^{\mathbf{2}}$$

- Normalmente si pone l'origine delle coordinate in l_0 $\Leftrightarrow$ **l'energia potenziale è nulla se la "molla" è a riposo.**

$$\Rightarrow \boldsymbol{U_{el}}\ (\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{L_{el}} = \frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{l_0})^{\mathbf{2}}$$

Nota: U è proprio "dentro la molla", cioè legata alla sua struttura interna deformabile: comprimendola e portandola in giro, trasportiamo U !

Esempio: i vecchi orologi e giocattoli a molla.

Ancora sull'energia potenziale

- Il lavoro fatto dalla forza conservativa è uguale all'opposto della variazione dell'energia potenziale associata alla forza.

$$L_{\vec{R}_0 \to \vec{R}} = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\Delta U$$

  - se lo spostamento è concorde con la forza conservativa, il lavoro fatto dalla forza conservativa è positivo, di conseguenza ΔU *è negativo*

    ⇒ l'energia potenziale della forza ***F*** passa da un valore più alto ad uno più basso, parte dell'energia potenziale iniziale è stata spesa per compiere il lavoro

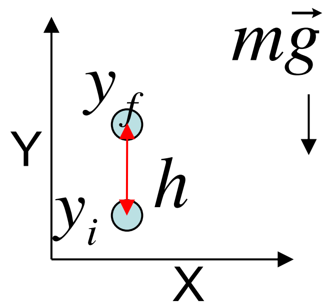
  - se lo spostamento è opposto alla forza, il lavoro fatto dalla forza conservativa è negativo. In questo caso il lavoro ***viene compiuto dalle altre forze che agiscono sul punto materiale e subito dalla forza conservativa F***. ΔU *è positivo*

    ⇒ L'energia potenziale passa da un valore più piccolo ad un valore più grande

    ⇒ il lavoro fatto **da altre forze** viene accumulato sotto forma di energia potenziale, che ci può essere restituito quando il punto materiale ritorna nella posizione di partenza

Esempi

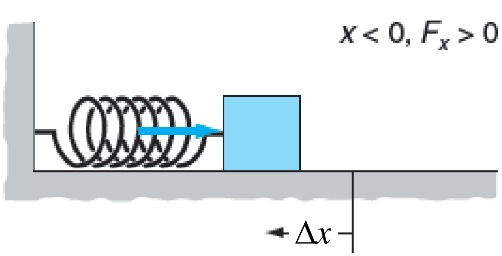
- Forza peso: si immagazzina energia potenziale innalzando la quota di un corpo di massa *m* rispetto al suolo



$$L_{peso} = -mg(y_f - y_i) = -(U(y_f) - U(y_i))$$

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mgh$$

- Forza molla (elastica): si immagazzina energia potenziale comprimendo o allungando la molla



$$L_{molla} = -\frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right) = -(U(x_f) - U(x_i))$$

Conseguenze importanti per forze conservative

- Dalla definizione di differenza di Energia Potenziale deriva:

$$U(\vec{R}) - U(\vec{R}_0) = -\int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}} \vec{F} \cdot d\vec{l} \Longrightarrow U(\vec{R}) = U(\vec{R}_0) - \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

In coordinate cartesiane si ha quindi:

$$U(x,y,z) = U(x_0,y_0,z_0) - \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

da cui:

$$F_x = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}. \qquad F_z = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}$$

- **Fare attenzione al segno negativo**

Forze conservative: nota l'energia potenziale determinare la forza

$$F_x = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}$$

- Le tre relazioni scalari precedenti si possono riassumere in un'unica equazione vettoriale:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

  - $\vec{\nabla}$ è il simbolo dell'operatore vettoriale gradiente le cui "componenti" cartesiane sono le derivate parziali rispetto ai tre assi coordinati:

$$\vec{\nabla} = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

- Se **si conosce la funzione scalare** $U(x,y,z)$ **energia potenziale nell'intorno di un punto** (non in un solo punto, altrimenti non si potrebbe calcolare la derivata) **si può immediatamente determinare il vettore forza**

Forze conservative: nota l'energia potenziale determinare la forza

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{U}$$

esempio:
Nota l'espressione dell'energia potenziale gravitazionale ricavare la forza

$$U(z) = Mgz \ + \text{costante} \qquad \Rightarrow F_z = -Mg$$

esempio:
Nota l'espressione dell'energia potenziale di una molla ricavare la forza

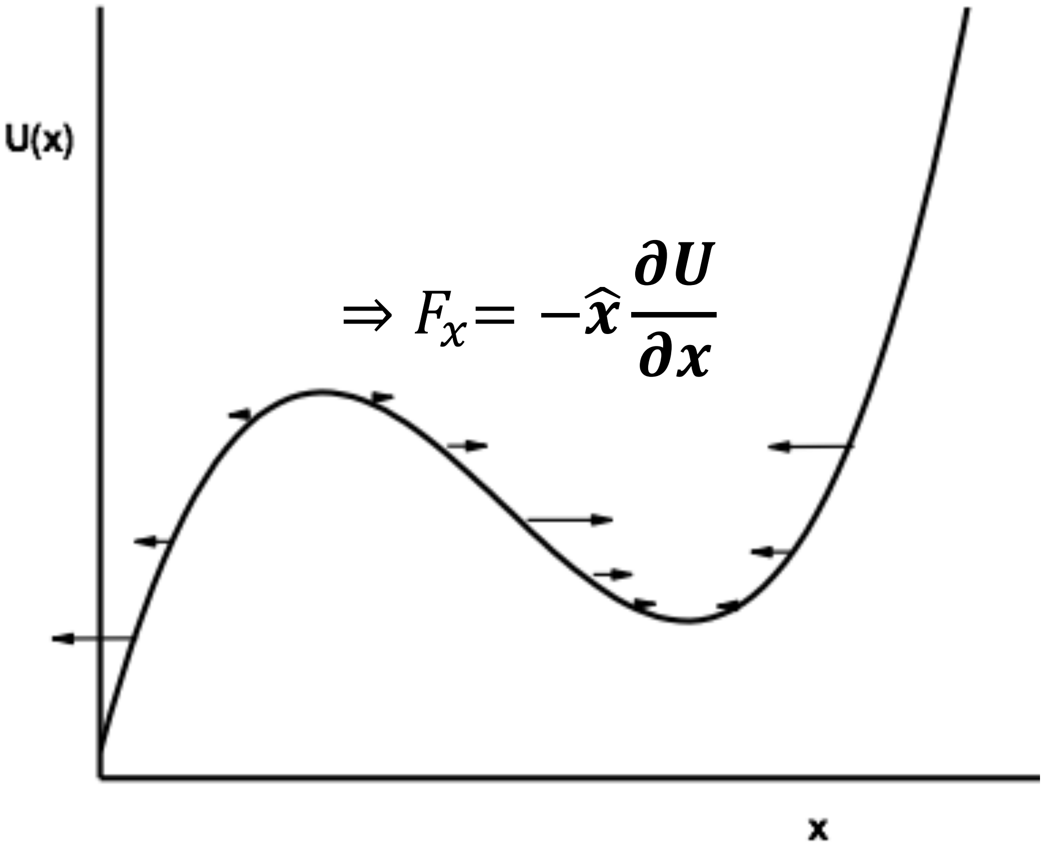
$$\boldsymbol{U_{el}(x) = \frac{k}{2}(x - l_0)^2} \qquad \Rightarrow F_x = -\frac{dU_{el}(x)}{dx} = -k(x - l_0)$$

Equilibrio stabile esempio

- Nel grafico seguente si può osservare un esempio del vettore forza ricavato da una curva dell'energia potenziale (unidimensionale)

Notiamo che la forza è negativa (diretta verso sinistra) quando $U(x, y, z)$ è crescente e positiva (diretta verso destra) quando $U(x, y, z)$ è decrescente.

$$\Rightarrow F_x = -\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\boldsymbol{\partial U}}{\boldsymbol{\partial x}}$$



- Ne deduciamo che il **minimo della funzione energia potenziale è un punto di equilibrio stabile** del sistema (in caso di spostamento la forza è di richiamo), mentre il **massimo è un punto di equilibrio instabile**.

Energia Meccanica e Principio di conservazione dell'energia meccanica

- Riprendiamo il teorema delle forze vive:

$$K_f - K_i = L_{totale} = \begin{cases} L_{\text{int}} + L_{\text{est}} & \text{irrilevante per l'energia} \\ L_{\text{cons}} + L_{\text{non cons}} = & -\left(U_f - U_i\right) + \mathcal{L}_{\text{non cons}} \Longrightarrow \end{cases}$$

- Definiamo l' **Energia meccanica:**

$$\boldsymbol{E = K + U}$$

per cui la formula precedente diventa:

$$K_f + U_f - (K_i + U_i) = \boldsymbol{E_f - E_i = L_{\text{non cons}}}$$

che è vera sempre (è un'altra formulazione del teorema dell'energia meccanica)

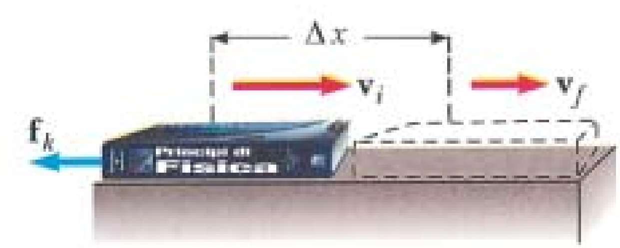
- Se $\boldsymbol{E_f = E_i}$ $\Leftrightarrow$ **il lavoro delle forze non conservative è nullo**

- **Principio di conservazione dell'energia meccanica**

  Se il lavoro delle forze non conservative è nullo l'energia meccanica si conserva!

esempio 1: corpo puntiforme

Nota l'energia si conserva sempre!



libro che scorre
su **superficie** con attrito
v_i = velocità iniziale
v_f = velocità finale

Ma si trasforma in altre forme di energia se ci sono forze dissipative

Es. sistema libro +tavolo

- il libro perde velocità per effetto della **forza di attrito**

$$L_{attrito} = \vec{f}_k \cdot \vec{\Delta x} = -f_k \Delta x = \Delta K$$

esempio 2: corpo esteso

considero come sistema la **superficie:**

- la forza di attrito del blocco compie lavoro **sulla** superficie
- la **superficie non si muove** dopo che il libro si ferma
  [violazione del teorema dell'energia cinetica per sistemi complessi !!!]

⇒ **la superficie si riscalda**

lavoro *svolto ha aumentato la* ***temperatura***
non la velocità del sistema

energia interna **[E_{int}]** $\underset{def}{=}$ energia associata a temperatura del sistema

$$L_{attrito} = \vec{f}_k \cdot \vec{\Delta x} = -f_k \Delta x = -\Delta E_{\text{int}}$$

Conservazione della energia meccanica (2)

- **Se non ci sono forze non conservative o il lavoro delle forze non conservative è nullo**

$$E(P) = K(P) + U(P) = \text{cost} = K(P_1) + U(P_1)$$

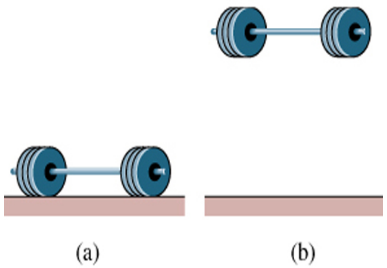
- Questo risultato vale quando sul punto materiale agiscono più forze, purché esse siano tutte conservative e come energia potenziale si usi la somma delle energie potenziali relative a ciascuna delle forze agenti
- **È un' equazione che fa corrispondere un numero alla espressione dell' energia in un istante qualsiasi, funzione delle grandezze cinematiche (velocità) e della posizione**

× energia potenziale **gravitazionale**

*energia associata allo stato di **separazione** tra i corpi*
che si attirano reciprocamente
*per effetto della **forza** di **gravità***

esempio:

sollevando dei pesi
modifico le posizioni
relative del sistema Terra-pesi.
Il lavoro svolto aumenta
energia potenziale
gravitazionale

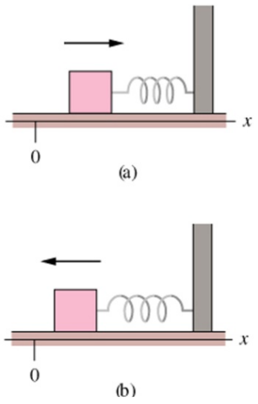


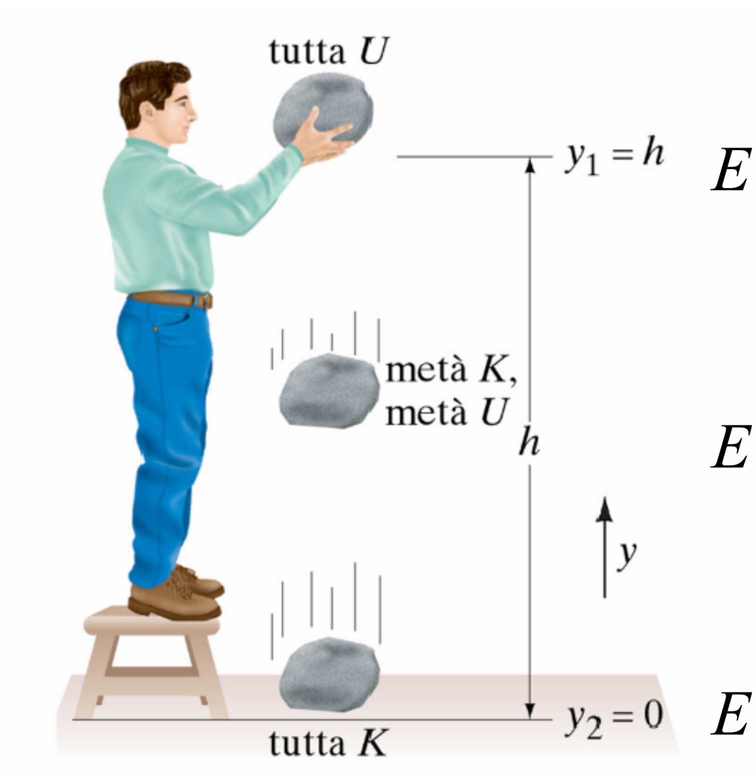
× energia potenziale **elastica**

energia associata allo stato di
compressione** o **decompressione
*di un sistema elastico [tipo **molla**].*
*La **forza** in gioco è quella della **molla**.*

esempio:

stirando o comprimendo
una molla cambio le
posizioni relative delle spire
della molla.
Il lavoro svolto aumenta
energia potenziale
elastica della molla





$$E=K+U=mgh$$

$$E=K+U=1/2\ m\ v^2 + mgh/2$$

$$E=K+U=1/2\ m\ v^2$$

in una cascata:

energia potenziale gravitazionale
del sistema acqua – Terra

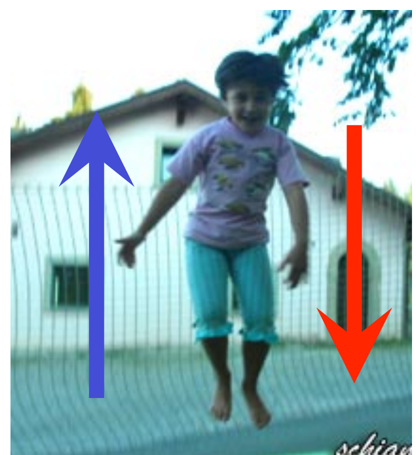
si converte in

energia cinetica acqua

in un salto:

in **salita**:

converto
energia cinetica in
energia potenziale



in **discesa**:

converto
energia potenziale in
energia cinetica