X, Y — INDIPENDENTI ed INCORRELATE
— INCORRELATE

INDIPENDENZA $\Rightarrow$ INCORRELAZIONE

INCORRELAZIONE $\not\Rightarrow$ INDIPENDENZA

INCORRELAZIONE $\Rightarrow$ $C_{XY} = 0$

INDIPENDENZA $\Rightarrow$ $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

Dim. IND. $\Rightarrow$ INC.

$$R_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, y\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, y\, f_X(x)\, f_Y(y)\, dx\, dy$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx}_{E[X]=\eta_X} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, dy}_{E[Y]=\eta_Y} = \eta_X \eta_Y$$

$$C_{XY} = R_{XY} - \eta_X\eta_Y = \eta_X\eta_Y - \eta_X\eta_Y = 0$$

INCORRELATE

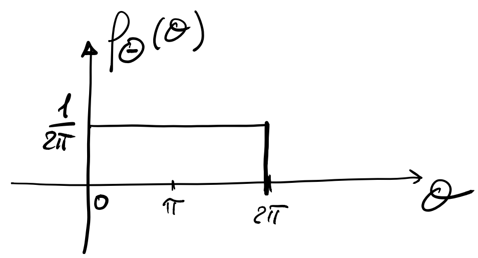
INCORRELAZIONE $\not\Rightarrow$ INDIPENDENZA

Dim.

$$\Theta \in \mathcal{U}[0, 2\pi)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \operatorname{rect}\left(\frac{x - \frac{b+a}{2}}{b-a}\right)$$

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{rect}\left(\frac{\theta - \pi}{2\pi}\right)$$



Definiamo

$$X = \cos\Theta = g(\Theta)$$
$$Y = \sin\Theta = h(\Theta)$$

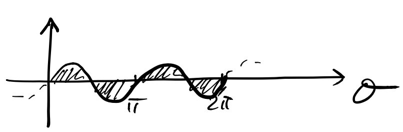
Calcoliamo la C_{XY}

$$R_{XY} \Rightarrow C_{XY} = R_{XY} - \eta_X \eta_Y$$

$$R_{XY} = E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\, h(\theta)\, f_\Theta(\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin(2\theta)\, d\theta = 0$$

$$2 \sin\theta \cos\theta = \sin 2\theta$$



$$\eta_X = E[X] = E[\cos\Theta] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\theta \, f_\Theta(\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = 0$$

$$\eta_Y = E[Y] = E[\sin\Theta] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta = 0$$

$$C_{XY} = R_{XY} - \eta_X \eta_Y = 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

X ed Y sono incorrelate

$\Rightarrow$ Sono indipendenti?

$$X^2 + Y^2 = \cos^2\Theta + \sin^2\Theta = 1$$

$$X^2 + Y^2 = 1$$

$$\bar{X}^2 + Y^2 = 1 \Rightarrow Y^2 = 1 - \bar{X}^2$$

$$Y = \pm\sqrt{1 - \bar{X}^2}$$

c'è una forte dipendenza che però non è lineare

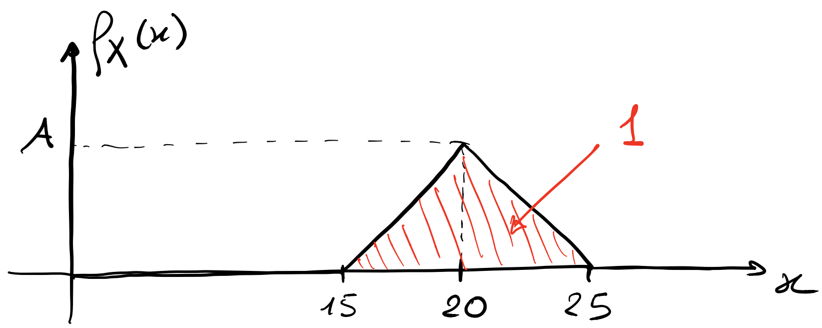
X ed Y **non** sono indipendenti

ESERCIZIO

X rappresenta il risultato del lancio (distanza in metri)

$$f_X(x) = A\left(1 - \frac{|x-20|}{5}\right)\text{rect}\left(\frac{x}{10}\right)$$

a) Calcolare il valore di A



Sol.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \frac{10 \cdot A}{2} = 1 \Rightarrow 5A = 1$$

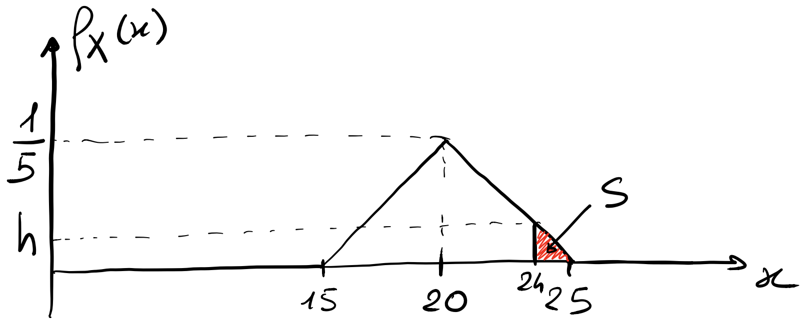
$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{5}}$$

b) Calc la prob. che il lancio superi i 24 m

$$P\{X > 24\,m\} = 1 - P\{X \leq 24\,m\}$$

$$= 1 - F_X(24) = \int_{24}^{+\infty} f_X(x)\,dx$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{24} f_X(x)\,dx$$



$$P\{X>24\} = S = \frac{h\cdot(25-24)}{2} = \frac{h}{2} = \boxed{\frac{1}{50}}$$

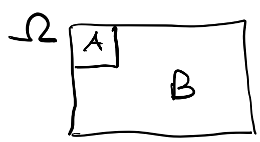
usiamo i triangoli simili per calcolare h

$$\frac{\frac{1}{5}}{5} = \frac{h}{1} \Rightarrow h = \frac{1}{25}$$

c) Calcolare la prob. che il peso superi la soglia record almeno una volta su tre lanci

$$P\{\text{almeno una volta su } N \text{ tentativi}\}$$
$$\parallel$$
$$1 - P\{\text{nessuna volta}\}$$

poichè i due eventi sono complementari



B = almeno una volta

A = mai

$p = \frac{1}{50}$ prob. su un lancio

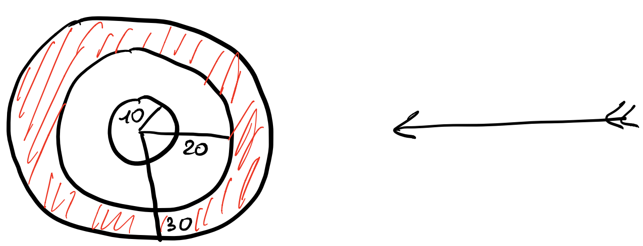
$$P\{A\} = \underbrace{(1-p)}_{\substack{\text{prob. che non si}\\ \text{verifichi al I° lancio}}}\ \underbrace{(1-p)}_{\substack{\text{prob. } \vdots\\ \text{al II° lancio}}}\ \underbrace{(1-p)}_{\substack{\vdots \\ \text{al III}}} = (1-p)^3$$

$$= \left(\frac{49}{50}\right)^3$$

$$\boxed{P\{B\} = 1 - \left(\frac{49}{50}\right)^3} \simeq 0.059$$

ESERCIZIO

X = rappresenta l'accuratezza (distanza dal centro)



$$f_X(x) = x\, e^{-x}\, u(x)$$

a) Determinare la distanza media dal centro del punto in cui si conficca la freccia

$$E[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \quad x e^{-x} u(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x}\, dx = -e^{-x} x^2 \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-x}\, 2x\, dx$$

$$= 2\int_0^{+\infty} x e^{-x}\, dx = 2\left[-e^{-x} x \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-x}\, dx \right]$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 2\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^{+\infty} = 2(1-0) = 2$$

$$\boxed{\eta_X = E[X] = 2}$$

b) Prob. che venga colpita la sagoma

$$P\{X \leq 30\,\text{cm}\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{30} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{30} x e^{-x} u(x)\, dx$$

$$= \int_0^{30} x e^{-x}\, dx = -e^{-x} x \Big|_0^{30} - \int_0^{30} -e^{-x}\, dx$$

$$= \left(-e^{-30} \cdot 30 + 0\right) + \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^{30} =$$

$$= -30e^{-30} + \left(1 - e^{-30}\right)$$

$$= \boxed{1 - 31e^{-30}} \simeq 1$$

c) Prob di colpire la sagoma nella corona circolare più esterna

$$P\{20 < X \le 30\}$$

$$= \int_{20}^{30} f_X(x)\, dx = P\{X \le 30\} - P\{X \le 20\}$$

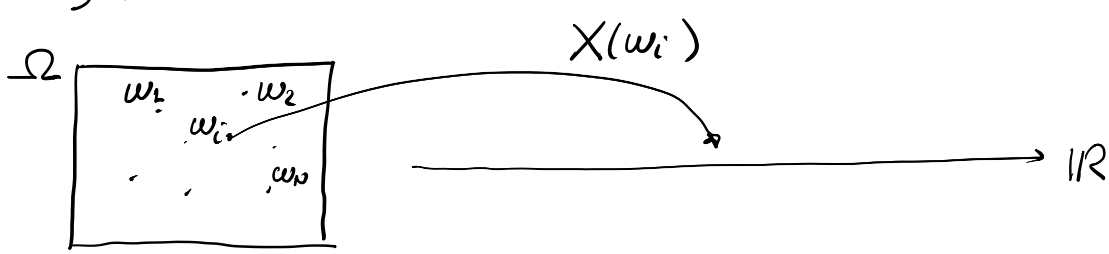
$$P\{X \le 20\} = -20e^{-20} + \left(1 - e^{-20}\right) = 1 - 21e^{-20}$$

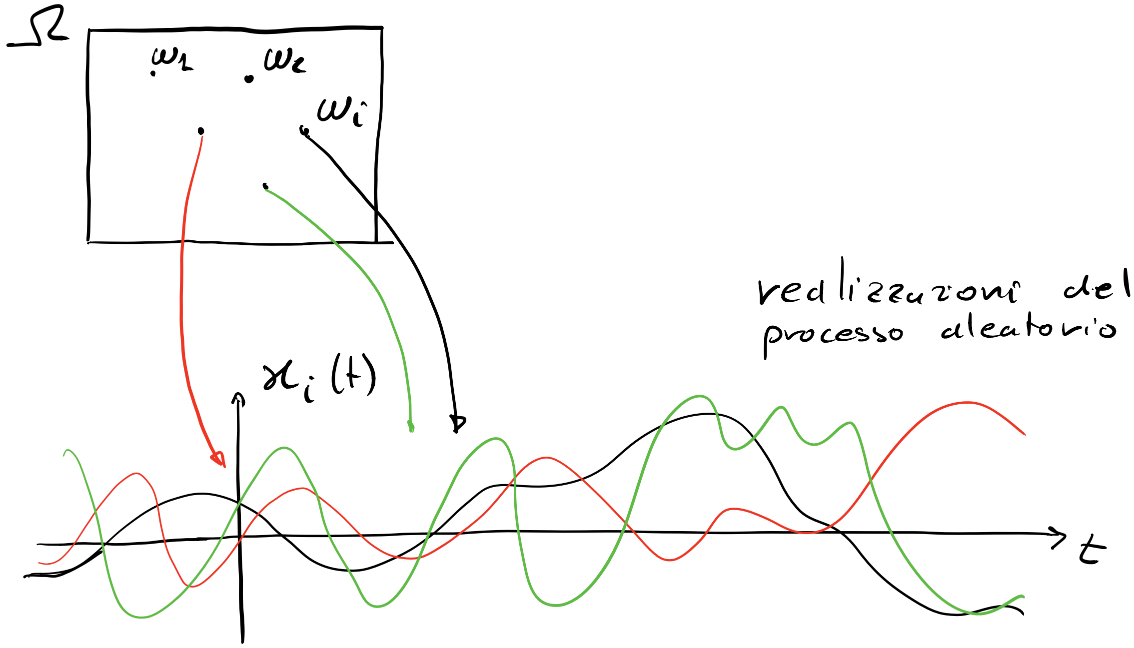
$$P\{20 < X \le 30\} = 1 - 31e^{-30} - \left(1 - 21e^{-20}\right)$$

$$= \boxed{21e^{-20} - 31e^{-30}}$$

SEGNALI ALEATORI

.) Per le V.A.



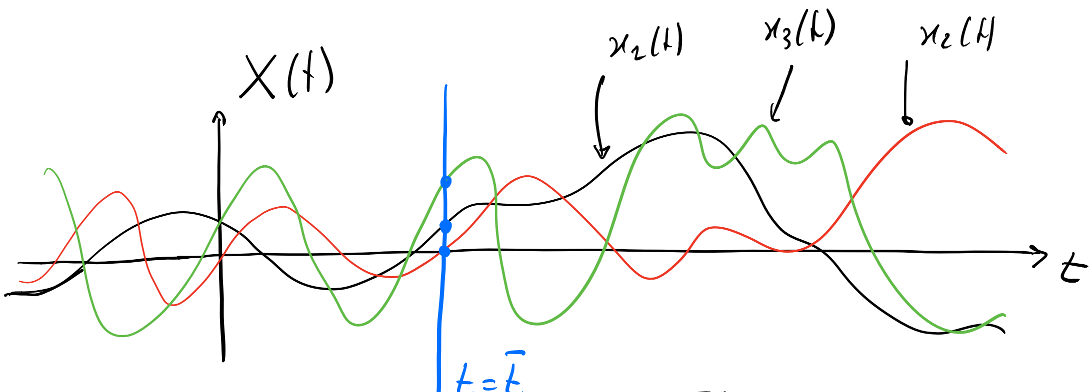


Processo aleatorio (segnale aleatorio)

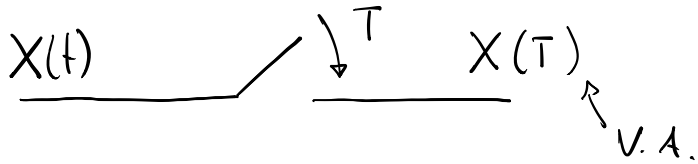
$$X(\omega_i, t) \Rightarrow X(t)$$

processo aleatorio

$x_i(t)$ sono le realizzazioni del processo



$X(\bar{t})$ è una V.A.



·) PROCESSI PARAMETRICI

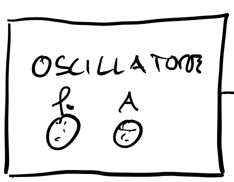
Un processo parametrico è definito da un segnale la cui aleatorietà dipende da uno o più parametri aleatori (variabili aleatorie)

Es.

$$X(t) = A \cos\left(2\pi f_0 t + \Theta\right)$$

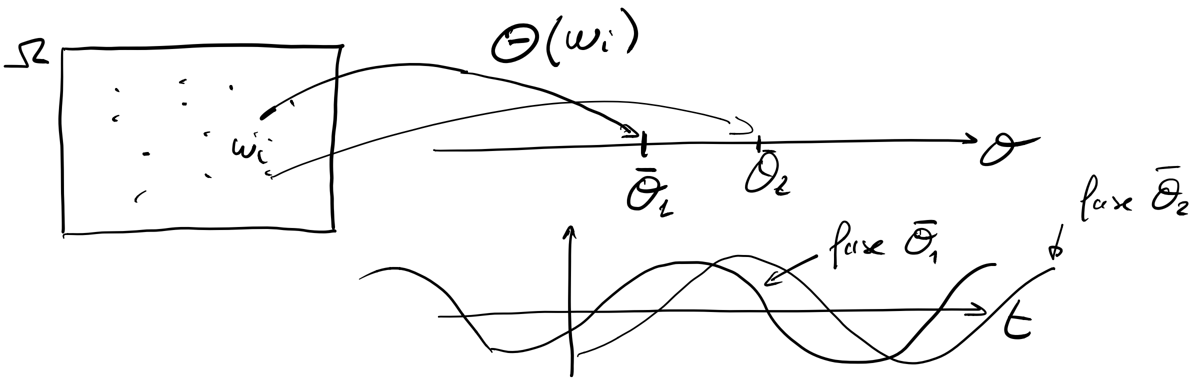
Θ è una V.A.

$\Theta \in \mathcal{U}[0, 2\pi)$



$A\cos(2\pi f_0 t + \Theta)$ è un processo aleatorio parametrico

incognito



Es. $X(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Theta)$

A: V.A. $\in \mathcal{N}(0, \sigma_A^2)$

Θ: V.A. $\in \mathcal{U}[0, 2\pi)$

2 parametri aleatori $\Rightarrow A, \Theta$

CARATTERIZZAZIONE STATISTICA DI PROCESSI (SEGNALI) ALEATORI TEMPO CONTINUI

$X(t)$

t: tempo continuo

·) Funzione <u>distribuzione di probabilità del I ordine</u>

$$F_X(x; t_1) \triangleq P\{X(t_1) \leq x\}$$

$\Rightarrow$ non è sufficiente per caratterizzare completamente il processo aleatorio

$$P\{X(t_2) > X(t_1)\}$$

non si può calcolare conoscendo solo la distr. di prob del I ordine

$\Downarrow$

dovrei conoscere la distribuzione di prob. congiunta di $X(t_1)$ e $X(t_2)$

·) Funzione distribuzione di probabilità del II ordine

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) \triangleq P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$$

-) Funzione distribuzione di prob. di ordine N

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) =$$

$$= P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \dots, X(t_N) \le x_N\}$$

⇒ La caratterizzazione completa di un processo aleatorio necessita della conoscenza della funzione di distribuzione di probabilità di ordine N, con N arbitrario.

⇒ DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI ORDINE N

$$\boxed{f_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) \triangleq \frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} F_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N)}$$

$$f_X(x_1; t_1) = \frac{d}{dx_1} F_X(x_1; t_1) \qquad N = 1$$

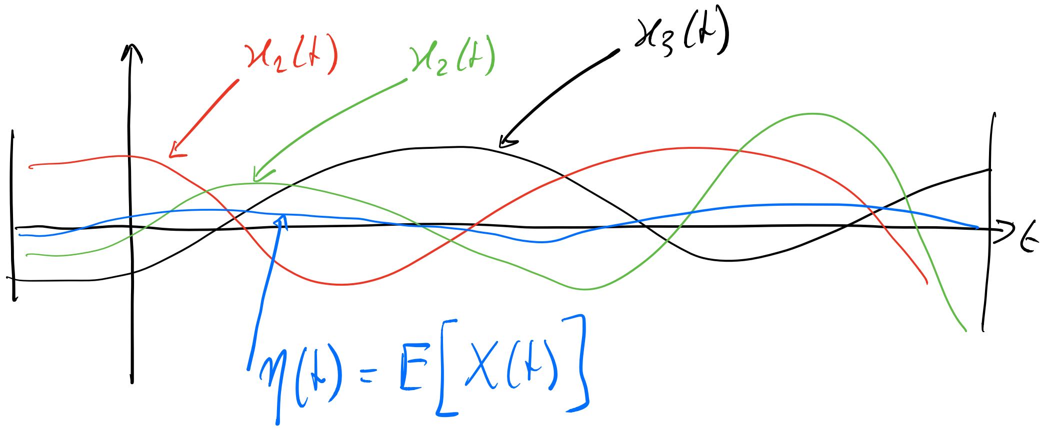
⇒ INDICI STATISTICI DEL I E DEL II ORDINE DI UN PROCESSO ALEATORIO TEMPO CONTINUO

⇒ VALOR MEDIO

I ORDINE

$$\eta_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x; t) \, dx$$

ddp del I ordine



$$\eta_X(\bar{t}) = E[X(\bar{t})] \qquad t_{min} < \bar{t} < t_{max}$$

V.M. della V.A.

V.A.

⇒ POTENZA MEDIA STATISTICA ISTANTANEA

$$P_X(t) \triangleq E\left[|X^2(t)|\right] = E\left[X^2(t)\right]$$

complesso

reale

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x;t)\, dx$$

I° ORDINE

deriva dal valor quadratico medio, calcolato per le V.A.

$\Rightarrow$ VARIANZA DI UN PROCESSO

$$\sigma_X^2(t) \triangleq E\left[\left(X(t) - \eta_X(t)\right)^2\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_X)^2 \, f_X(x;t) \, dx$$

I° ORDINE

$$\sigma_X^2(t) = P_x(t) - \eta_X^2(t)$$

Dim.

$$\sigma_X^2(t) = E\left[\left(X(t) - \eta_X(t)\right)^2\right] =$$

$$= E\left[X^2(t) + \eta_X^2(t) - 2\,\eta_X(t)\,X(t)\right]$$

$$= E\left[X^2(t)\right] + E\left[\eta_X^2(t)\right] - 2\,E\left[\eta_X(t)\,X(t)\right]$$

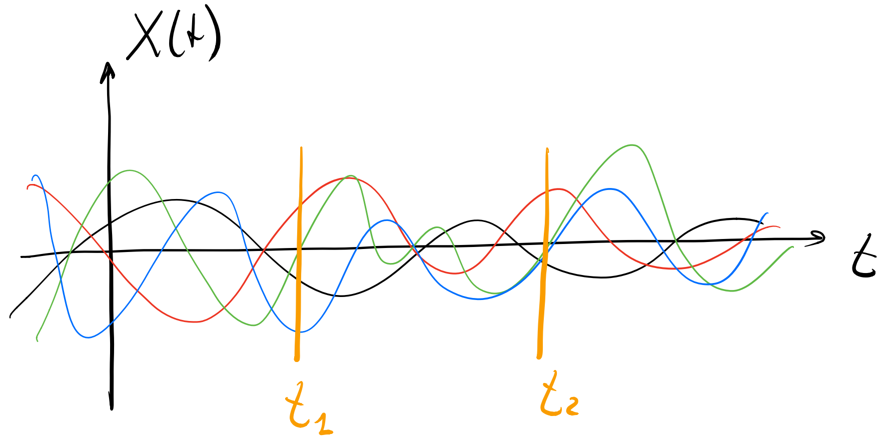
$$= P_X(t) + \eta_X^2(t) - 2\,\eta_X(t)\,\eta_X(t)$$

$$= P_X(t) - \eta_X^2(t)$$

II° ORDINE

- AUTOCORRELAZIONE
- AUTOCOVARIANZA

$\Rightarrow$ AUTOCORRELAZIONE



$X(t_1) \quad X(t_2)$ 2 V.A.

$$\boxed{R_X(t_1, t_2) \triangleq E[X(t_1)X(t_2)]}$$ AUTOCORRELAZ.

per le V.A.

$$R_{XY} = E[\underset{X(t_1)}{X}\ \underset{X(t_2)}{Y}]$$

⇒ AUTOCOVARIANZA

$$X(t) \Rightarrow X(t_1),\ X(t_2)$$

AUTOCOVARIANZA

$$\boxed{C_X(t_1,t_2) \triangleq E\Big[\big(X(t_1)-\eta_X(t_1)\big)\big(X(t_2)-\eta_X(t_2)\big)\Big]}$$

$$R_X(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 \underbrace{f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)}_{\text{II° ordine}}\, dx_1 dx_2$$

$$C_X(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \big(x_1-\eta_X(t_1)\big)\big(x_2-\eta_X(t_2)\big) \underbrace{f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)}_{\text{II° ordine}}\, dx_1 dx_2$$

$$\boxed{C_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - \eta_X(t_1)\,\eta_X(t_2)}$$

vedi dim. per V.A.

PROCESSI STAZIONARI

STAZIONARIETÀ
- IN SENSO STRETTO
- IN SENSO LATO

⇒ STAZIONARIETA' IN SENSO STRETTO (SSS)

$$f_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) = f_X(x_1, \dots, x_N; t_1+\Delta t, \dots, t_N+\Delta t)$$

$$\forall \Delta t \quad \forall N$$

⇒ IMPATTO SULLE STATISTICHE DEL I ORDINE

$$f_X(x_1; t_1) = f_X(x_1; t_1+\Delta t)$$

$$f_X(x_1; t_1) = f_X(x_1; t_2) = \dots = f_X(x_1)$$

le statistiche del I° ordine NON DIPENDONO DAL TEMPO !!

⇒ VALOR MEDIO

$$\eta_X(\underline{t}) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x; \underline{t}) \, dx$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x) \, dx = \eta_X}$$

NON DIPENDE DAL TEMPO

⇒ POTENZA

$$P_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x; \cancel{t}) \, dx = P_X$$

$\Rightarrow$ VARIANZA

$$\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2$$