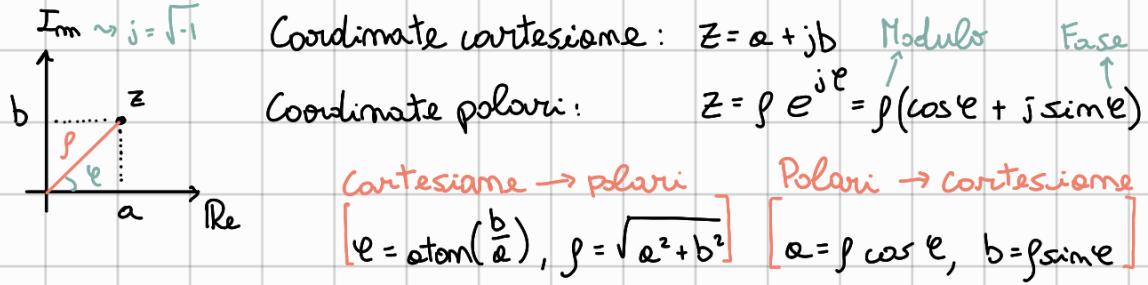


## Ripasso di matematica



## Operazioni sui numeri complessi

$$\rightarrow Z^* = a - jb$$

$$\rightarrow Z_1 \pm Z_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

$$\rightarrow Z_1 \cdot Z_2 = p_1 e^{j\phi_1} \cdot p_2 e^{j\phi_2} = (p_1 p_2) e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$= (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + j(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

$$\rightarrow Z_1 / Z_2 = p_1 e^{j\phi_1} / p_2 e^{j\phi_2} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right) e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$$

$$= \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} \cdot \frac{a_2 - jb_2}{a_2 - jb_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + j(a_1 b_2 - b_1 a_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\rightarrow |Z|^2 = Z \bar{Z} = p e^{j\phi} \cdot p e^{-j\phi} = p^2$$

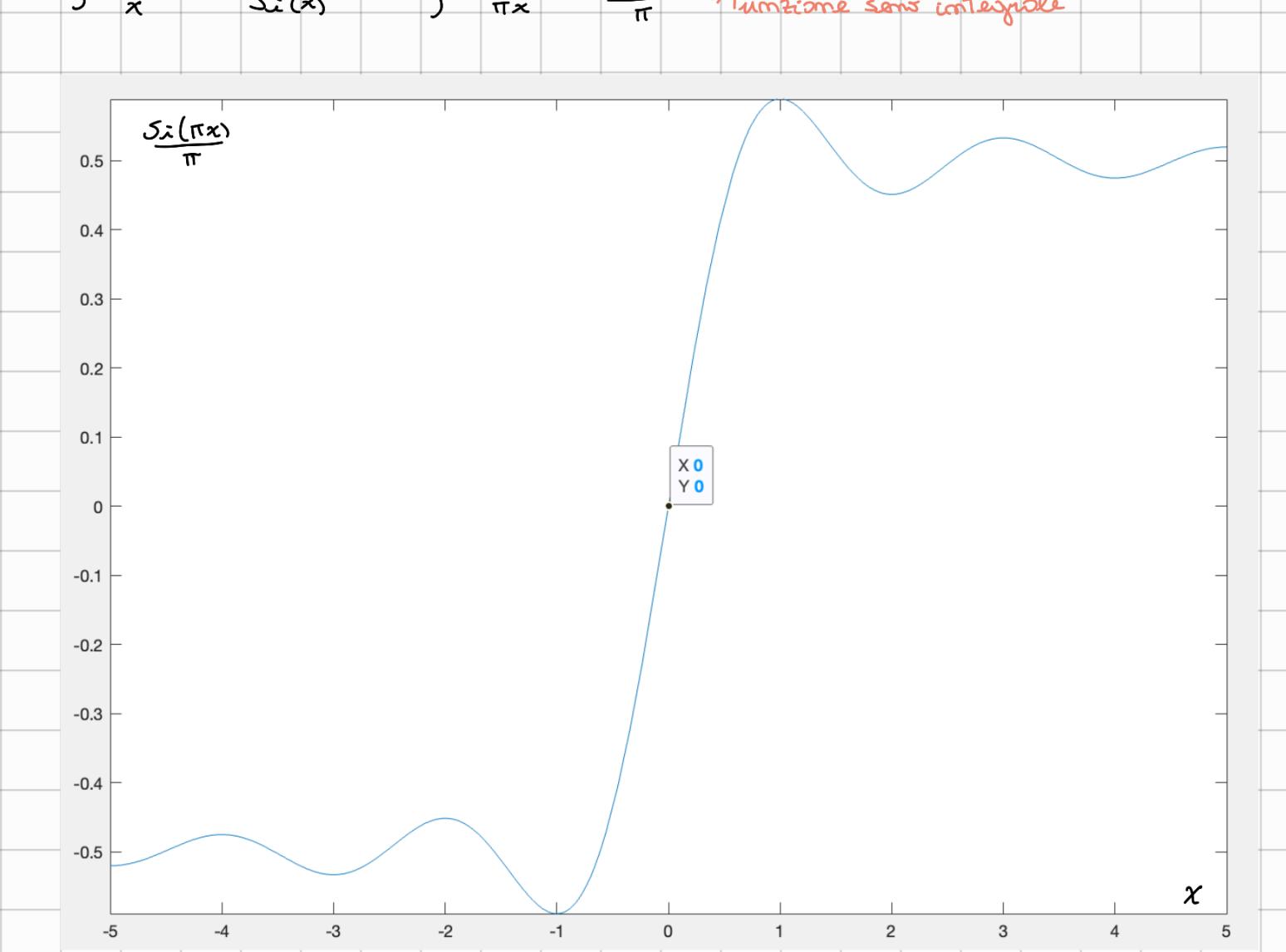
## Formule trigonometriche

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

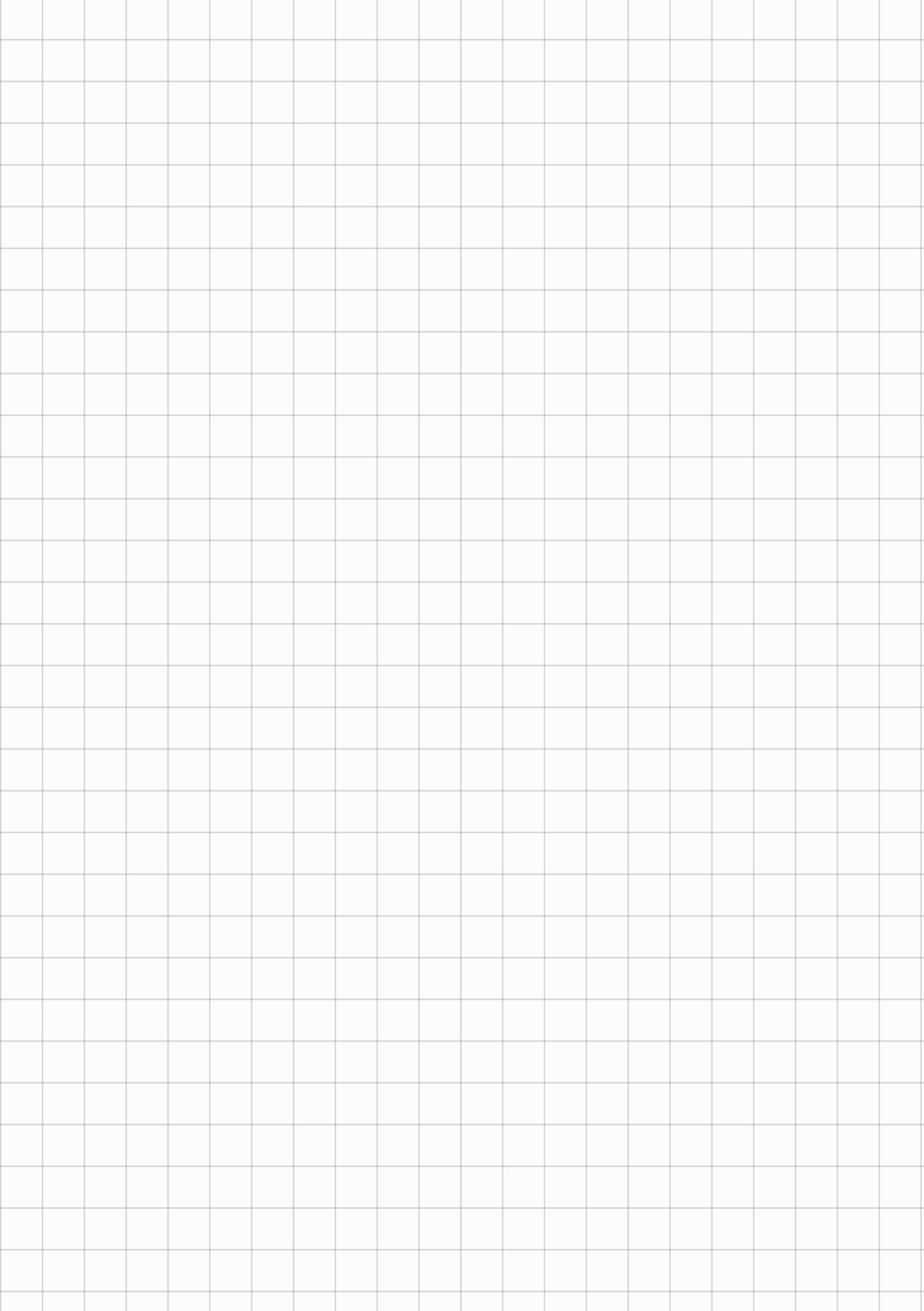
$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha)) \\ \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)) \\ 2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin(2\alpha) \end{cases}$$

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos x \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \right) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \quad \text{E} \quad \text{...} \quad + \quad -\theta$$



$$\int \left[ \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right]^2 dx = \frac{2\pi x \text{Si}(2\pi x) + \cos(2\pi x) - 1}{2\pi^2 x}$$



## Teoria dei segnali deterministici

Un segnale è qualcosa che trasporta informazione, questi si possono dividere in:

- Deterministici: segnali noti o priori, spesso descritti come funzioni di uno qualche grandezza fisica nel tempo, sono quelli di cui vi occuperemo per la prima parte del corso
- Aleatori: segnali solo statisticamente noti, di cui vi occuperemo alla fine del corso quando intavoliremo i processi

I segnali si dividono inoltre in:

- Analogici: continuu sia nel tempo che in ampiezza
- Sequenti: discreti nel tempo e continuu in ampiezza
- Quantizzati: continui nel tempo e discreti in ampiezza
- Digitali: discreti sia nel tempo che in ampiezza

Per ora tratteremo prevalentemente segnali deterministici analogici della forma  $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , per questo tipo di segnali vogliamo le seguenti definizioni:

Per estendere la def ai complessi

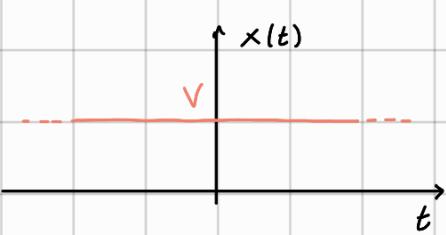
Potenza istantanea  $P_x(t) = |x(t)|^2$ , in analogia con la pot. dissipata su una R

$$\text{Energia } E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t) dt$$

Potenza media del segnale troncato  $P_{x_T} = \frac{E_{x_T}}{T} \rightsquigarrow$  Energia troncata (da  $-\frac{T}{2}$  a  $\frac{T}{2}$ )

Potenza media  $P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} P_{x_T}$

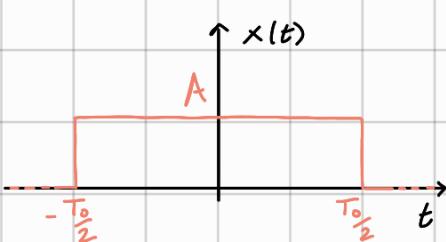
### Esempio (Segnale costante)



$$P_x(t) = |x(t)|^2 = V^2$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} V^2 dt = V^2 t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = V^2 (\infty + \infty) = +\infty$$

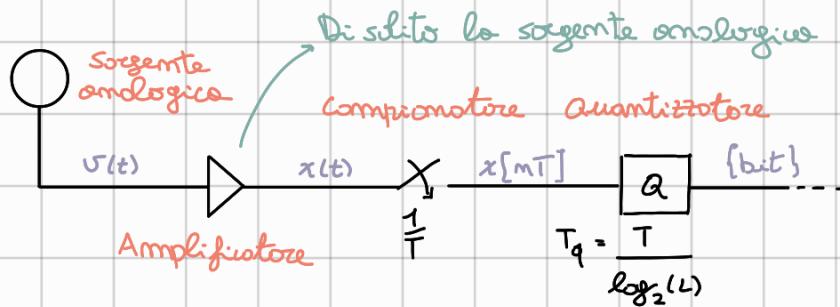
### Esempio (rettangolo)



$$P_x(t) = |x(t)|^2 = \begin{cases} 0 & \text{per } t < -\frac{T_0}{2} \text{ e } t > \frac{T_0}{2} \\ A^2 & \text{per } -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{-\frac{T_0}{2}} 0 dt + \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2 dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{+\infty} 0 dt = A^2 t \Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} = A^2 T_0.$$

Ora che sappiamo cos'è un segnale possiamo iniziare a disegnare lo schema di un **sistema di comunicazione**, ossia un sistema che estrae informazioni da un segnale e le trasmette:



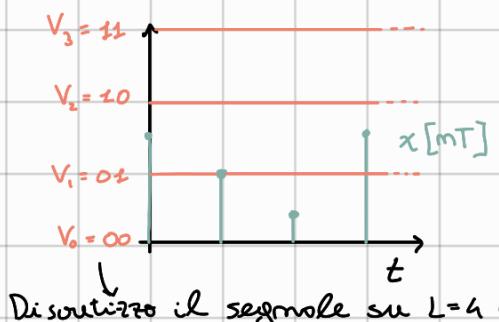
→ Il **compiontore "fotografo"** il segnale ad una frequenza di  $f = \frac{1}{T} [\text{Hz}]$



Più T è piccolo più "fotografo" meglio il segnale, tuttavia per poterlo riportare allo perfezione vedremo che mi basta sceglierlo più piccolo di un certo valore (teorema del compionamento)

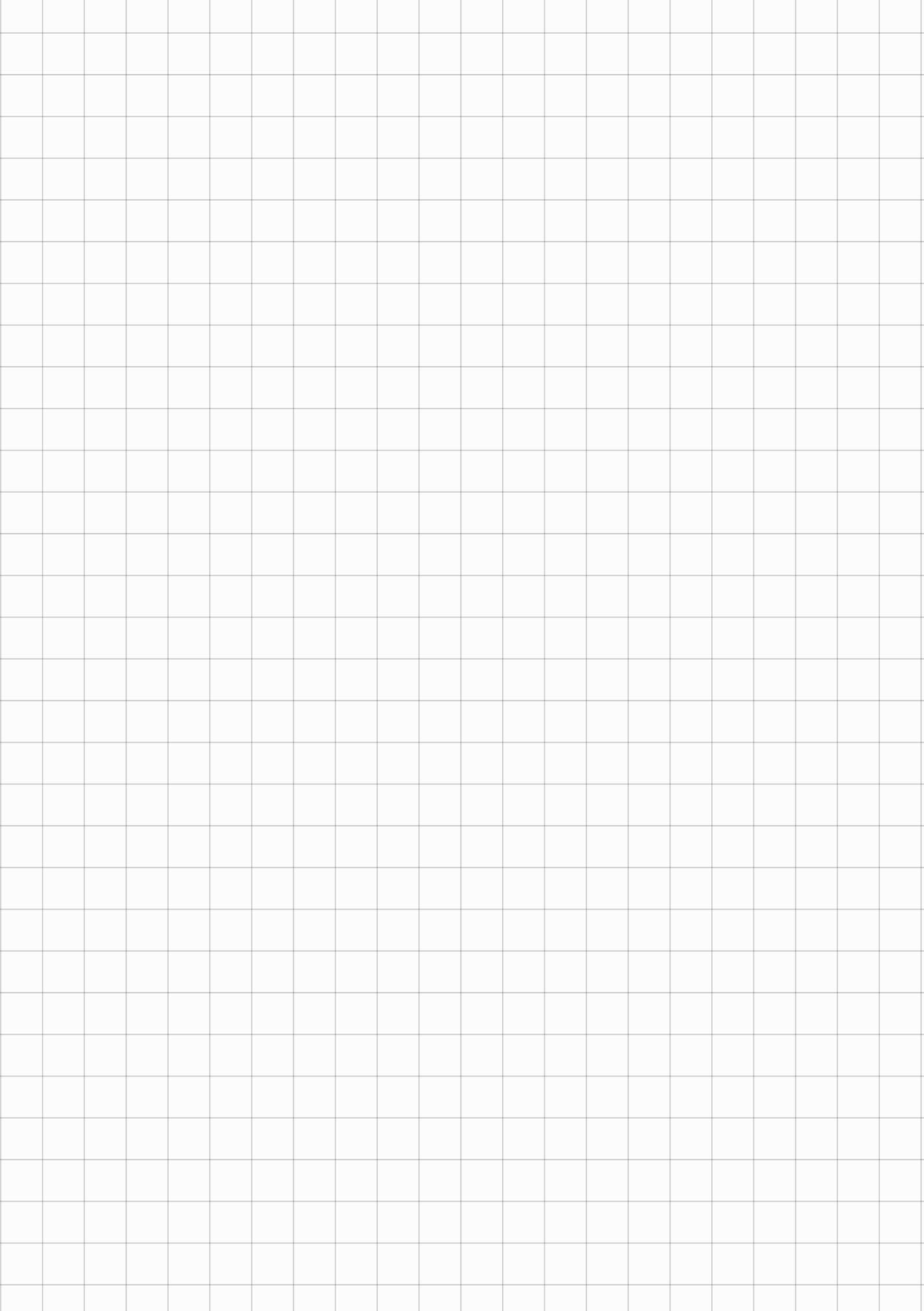
→ Il **quantizzatore** converte il segnale compionuto, ossia uno

sequenza di valori continui, in un segnale digitale, ossia una sequenza di valori discreti



A differenza di prima questo componente interesserà sempre degli errori (e meno di prendere  $L = \infty$ )

Di solito il segnale su  $L = 4$  livelli



## Trasformata continua di Fourier

Per continuare o studiare il sistema di comunicazione è necessario introdurre la trasformata continua di Fourier, un'operazione matematica che converte un segnale nelle frequenze che lo descrivono (detto spettro)

Rigorosamente ad energie finite! (un segnale fisico)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad \sim \text{equazione di analisi}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad \sim \text{equazione di sintesi}$$

La corrispondenza è bimodale!

Note:  $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$  e  $x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df$

Introduciamo la funzione rettangolare  $\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{-j2\pi f} (e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}) \\ &\sim 2j \sin f T = e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f} (-j2 \sin(\pi f T)) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

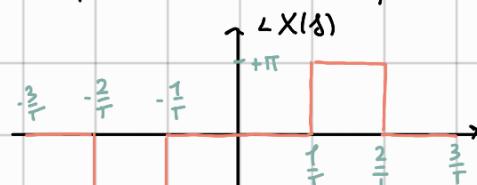
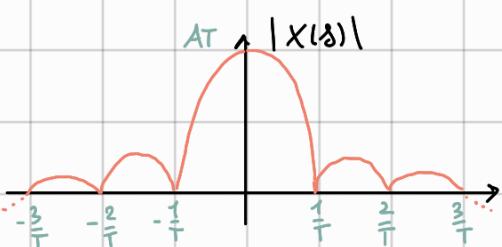
Questo trasformato ricorre così spesso che è stata definita opposta la funzione seno carolemole  $\text{sim}(x) = \frac{\sin(x)}{\pi x}$

Dunque, più in generale:  $A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow AT \text{sim}(f T)$





Note: in generale  $X(f)$  è complesso, per cui se ne discogna l'ampiezza e le fasi separatamente, in questo caso dunque:

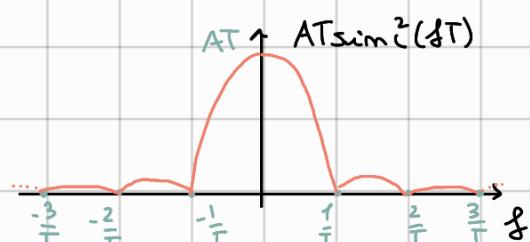
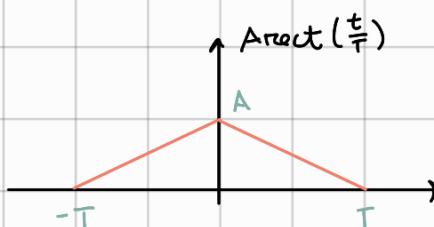


In modo analogo si può dimostrare che la funzione triangolare

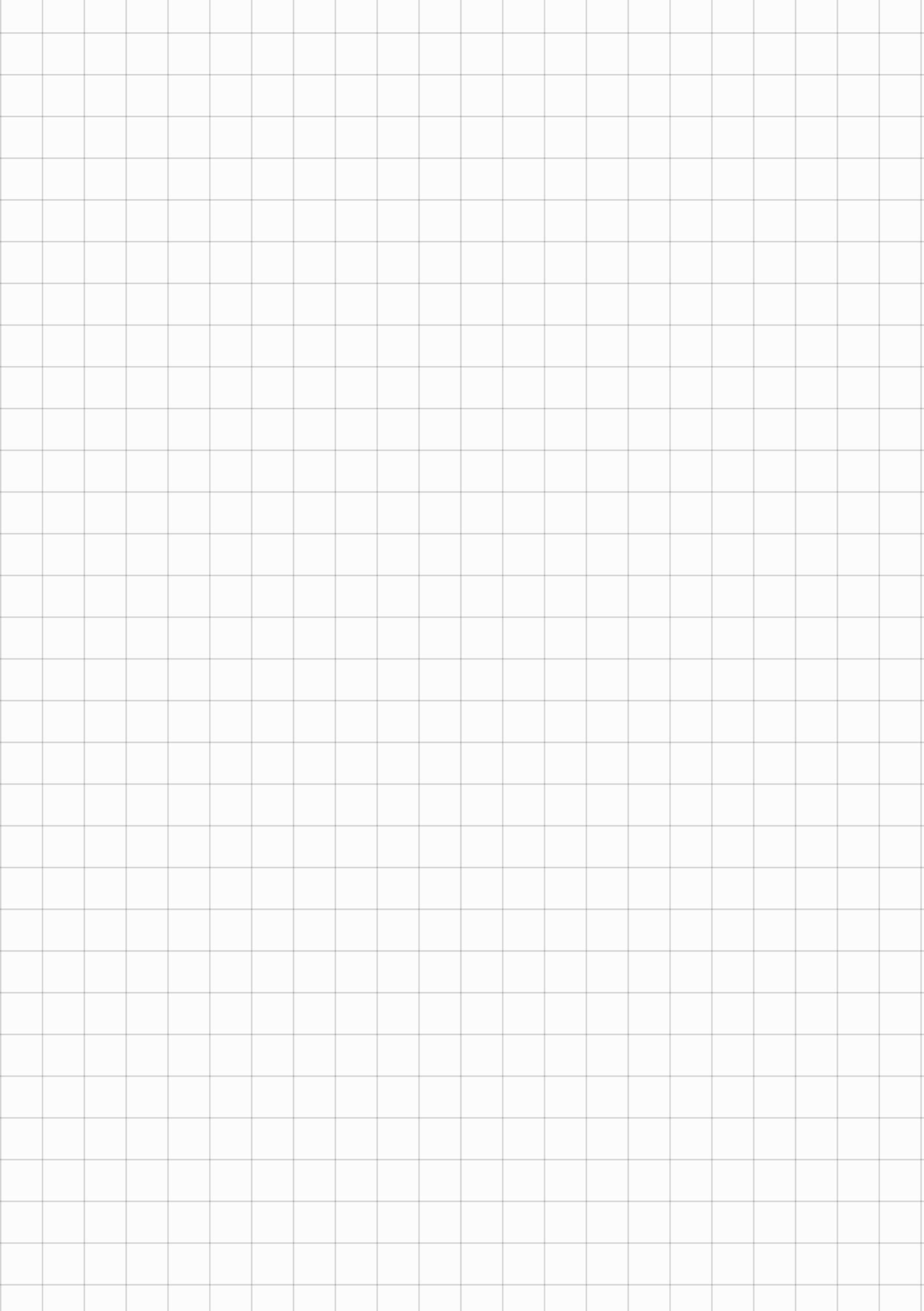
$$\text{trisng}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{T} & \text{se } -T \leq t < 0 \\ 1 - \frac{t}{T} & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ha come trasformata una simc<sup>2</sup>:

$$A \text{trisng}\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow AT \text{simc}^2(\delta T)$$



Note: Le alte frequenze sono responsabili dei cambiamenti veloci del segnale, mentre le basse frequenze sono responsabili dei cambiamenti lenti, ad esempio rett e trisng sono entrambi segnali che, rispettivamente, in  $\pm \frac{T}{2}$  e  $\pm T$  variano costantemente ed infatti il loro spettro di ampiezza si estende infinitamente.



## Teoremi delle trasformate continue di Fourier

### Simmetrie hermitiane

Supponiamo  $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (segnale reale)  $\Rightarrow x(t) = x^*(t)$

$$\text{allora } X(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^* e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = X(f)$$

$$\text{di conseguenza } X(f) = |X(f)| e^{j\phi(f)} = |X(-f)| e^{-j\phi(-f)} = X(-f)^*$$

per cui  $\begin{cases} |X(-f)| = |X(f)| \\ -\angle X(-f) = \angle X(f) \end{cases}$  ogni segnale reale ha spettro di ampiezza pari e spettro di fase dispari

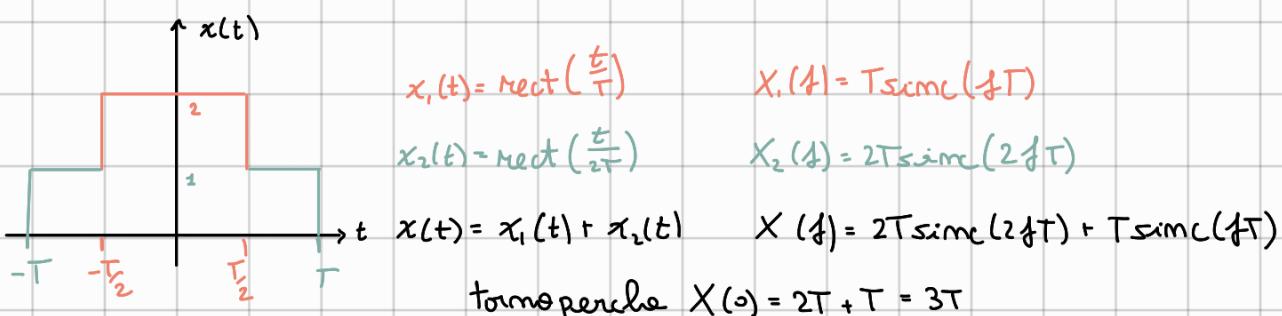
### Linearità

Dati  $x_1(t) \Leftrightarrow X_1(f)$ ,  $x_2(t) \Leftrightarrow X_2(f)$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

se  $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$  allora  $X(f) = \alpha_1 X_1(f) + \alpha_2 X_2(f)$

$$\begin{aligned} \text{dim} \quad X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \alpha_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-j2\pi ft} dt + \alpha_2 \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) e^{-j2\pi ft} dt = \alpha_1 X_1(f) + \alpha_2 X_2(f) \end{aligned}$$

### Esempio

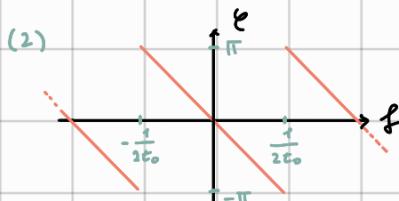


## Ritardo

Se  $x(t) \rightleftharpoons X(f)$

allora  $x(t - t_0) \rightleftharpoons X(f) e^{-j2\pi f t_0}$

(1) Traslando un segnale non cambia il suo andare "lento" o "veloce", dunque il suo spettro, in ampiezza, non deve cambiare



(2) Quando due segnali complessi si moltiplicano i moduli si moltiplicano e le fasi si sommano

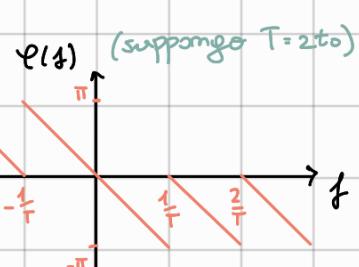
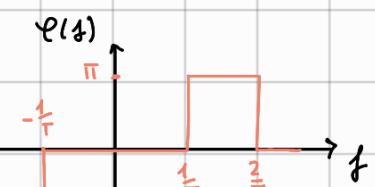
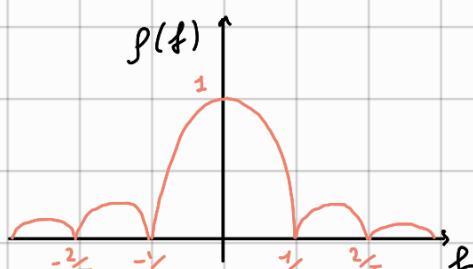
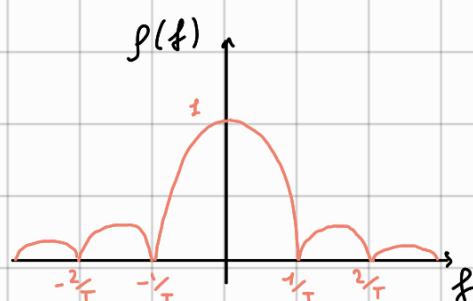
$$\text{dim} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f (\alpha + t_0)} d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f \alpha} e^{-j2\pi f t_0} d\alpha$$

\* Cambio di variabile

$$= e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha = X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

$\begin{cases} \alpha = t - t_0 \\ d\alpha = (1) dt = dt \end{cases} \quad \begin{cases} a = g(\alpha) = -\infty - t_0 = -\infty \\ b = g(b) = +\infty - t_0 = +\infty \end{cases}$

## Esempio



## Dualità

Se  $x(t) \rightleftharpoons X(f)$

allora  $X(t) \rightleftharpoons x(-f)$

\* Cambio di variabile

$$\begin{cases} f = -\alpha \\ df = -d\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} a = g(\alpha) = -(-\infty) = +\infty \\ b = g(b) = -(+\infty) = -\infty \end{cases}$$

dimo

$$\text{Dato che } x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \Rightarrow x(t) \rightleftharpoons X(f)$$

allora

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\omega) e^{-j2\pi \omega t} d\omega = - \int_{+\infty}^{-\infty} x(-\omega) e^{j2\pi \omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\omega) e^{j2\pi \omega t} d\omega \Rightarrow X(t) \rightleftharpoons x(-\omega)$$

Perché

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

quelleci ci interessano

A questo teorema è un'ulteriore prova della relazione inversa tra tempo e frequenza, infatti ci dice che ogni segno limitato nel tempo ha uno spettro illimitato in frequenza e viceversa, vediamolo con un **esempio**: per questo non riusciamo a ricostruirlo bene su matlab

$$\text{rect}(t/T) \rightleftharpoons T \text{sinc}(fT) \quad \text{la rect è pari}$$

$$T \text{sinc}(t/T) \rightleftharpoons \text{rect}(-f/T) = \text{rect}(f/T)$$

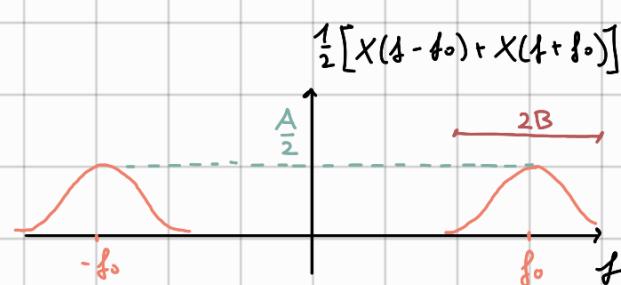
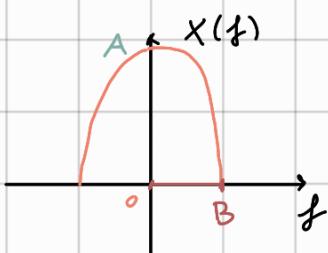
## Modulazione

Sia  $x(t) \rightleftharpoons X(f)$

$$\text{allora } x(t) \cos(2\pi f_0 t) \rightleftharpoons \frac{1}{2} [X(f-f_0) + X(f+f_0)]$$

$$\begin{aligned} \text{dimo} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{2} [e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}] e^{-j2\pi ft} dt \\ & = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt \right] \\ & = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi t(f-f_0)} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi t(f+f_0)} dt \right] \\ & = \frac{1}{2} [X(f-f_0) + X(f+f_0)] \end{aligned}$$

## Esempio



Se definiamo **banda** di un segnale come l'intervallo positivo di frequenze tale che  $|X(f)| \neq 0$  allora è immediato vedere che modulando il segnale la banda raddoppia, notare che questo è diverso dalle frequenze portanti  $f_0$ , in particolare se  $f_0 = 0$  un segnale è detto in **banda base**

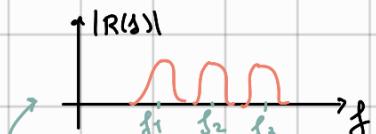
### Implicazioni del teorema:

Supponiamo di essere una stazione radio e di voler trasmettere un segnale, dobbiamo per forza modularlo per due motivi:

- Se tutti trasmettessero in banda base non si coprirebbe mai tutte le radio si parlerebbero sovrapposta) giusto per fare un esempio
- Un segnale audio ha una banda di circa 20 kHz, se volessimo trasmetterlo in banda base si può dimostrare che servirebbero antenne grosse ~ 4 Km

Adesso che sappiamo che prima o poi il segnale va modulato allora possiamo fare due cose: o lo generiamo direttamente modulato, oppure lo generiamo in banda base e poi lo moduliamo. Fra queste si preferisce la seconda perché:

- L'hardware per generare il segnale in banda base è indipendente dalla frequenza di modulazione e dunque più facile da realizzare (ed utilizzabile da più radio diverse)
- Se si generasse il segnale audio già modulato allora questo, per il teorema del campionamento (che vedremo) sarebbe più complicato da momeggiare



Supponiamo adesso di essere un ricevitore radio, di vedere vari segnali e di volerli sintetizzare su uno, immaginiamo osserviamo che prima o poi dobbiamo per forza filtrarlo, altrimenti introduciamo frequenze che non ci interessano e potrebbero disturbare i componenti elettronici, e demodularlo, perché voglio riottenere il segnale originale, otterremo dunque due opzioni: primo filtro e poi demodulatore oppure primo demodulatore e poi filtrare.

Tra le due si preferisce la seconda perché costituire un filtro da forza passare uno piccolo sette di bande ogni volta diversa e mostro ricercare, ed

una frequenza portante » di tale banda è complicato, mentre riportare il segnale con banda base e poi applicare un filtro passa basso è semplice.

Infine, se per modulare un segnale l'ho moltiplicato per un uscita allora per demodularlo vorrei dividerlo per lo stesso uscita, dal punto di vista fisico però fare questo è complicato, si può dimostrare che basta invece moltiplicarlo nuovamente per lo stesso uscita moltiplicato 2, infatti:

Saranno di n segnali modulati a varie frequenze

$$m(t) = x_1(t) \cos(2\pi f_1 t) + \dots + x_m(t) \cos(2\pi f_m t)$$

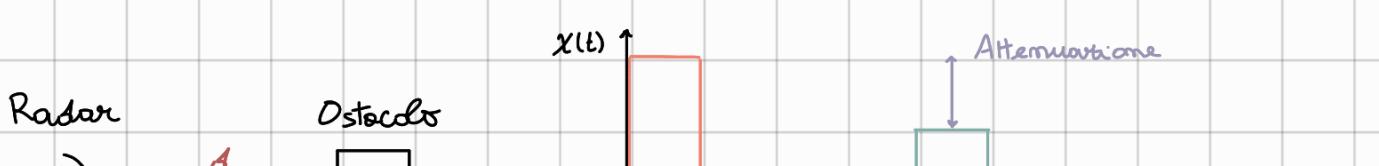
$$\Rightarrow 2m(t) \cos(2\pi f_i t) = 2(\dots + x_i(t) \cos(2\pi f_i t) + \dots) \cos(2\pi f_i t)$$

$$\begin{aligned} & \text{supponiamo che ci} \\ & \text{interessi quello} \\ & \text{modulato al } f_i \\ & = \dots 2x_i(t) \cos^2(2\pi f_i t) \dots \quad \text{cos}^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \\ & = \dots x_i(t) 2 \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos(2 \cdot 2\pi f_i t)) \\ & = \dots \boxed{x_i(t)} + x_i(t) \cos(4\pi f_i t) + \dots \text{ filtro} \end{aligned}$$

Di conseguenza  $x_i(t)$ , che mi interessava, l'ho spostato in banda base, fare agire il filtro, e a  $\pm 2f_i$ , gli altri segnali li ho invece spostati a  $f \mp f_i$  (è come se li avessi ri-modulati ad una  $f$  diversa)

Un'ulteriore applicazione di questo teorema può essere per i sistemi di tipo radar, i quali rilevano gli ostacoli trasmettendo impulsi ad altissime frequenze (THz) (questo perché più un segnale è ad alta frequenza più viene riflesso meglio dalla superficie) e vedendo se e dopo quanto questi tornano. Per generare impulsi con spettro di ampiezza dell'ordine dei THz mi serve che questi abbiano durata dell'ordine dei ps, fisicamente difficili da realizzare, quello che mi consente di fare il teorema della modulazione è generare gli impulsi a GHz, perché mi serve comunque forti picchi (rms), altimamente non faccio in tempo a mandarli che è già trascorso, e poi modularli a THz

$$\tau = \frac{2d}{c} \Rightarrow \text{se } d = 15 \text{ m } \tau = 100 \text{ ns} \Rightarrow \text{voglio } T \ll \tau$$





## Derivazione

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightleftharpoons{j2\pi f} X(f)$$

$\Rightarrow$  Derivo un segnale semplicemente facendo prodotti e antitrasformando

## Integrazione

$$\int x(t) dt \xrightleftharpoons{\frac{1}{j2\pi f}} X(f)$$

$\Rightarrow$  Integro un segnale semplicemente facendo divisioni e antitrasformando

## Prodotto

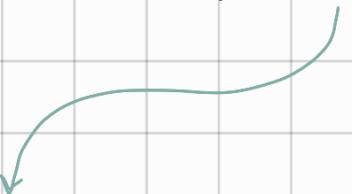
Sia  $x(t) \xrightarrow{} X(f)$  e  $y(t) \xrightarrow{} Y(f)$

Allora  $x(t)y(t) \xrightarrow{} Y(f) \odot X(f)$

$x(t)e^{-j2\pi ft} dt$  sono i per ilw

$$\begin{aligned} \text{dim} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\alpha) e^{j2\pi \alpha t} d\alpha \right) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) Y(\alpha) e^{-j2\pi t(f-\alpha)} d\alpha dt \\ \text{summo gli integrali} \quad & = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) Y(\alpha) e^{-j2\pi t(f-\alpha)} dt d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\alpha) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi t(f-\alpha)} dt \right) d\alpha \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\alpha) X(f-\alpha) d\alpha = Y(f) \odot X(f) \end{aligned}$$

definizione del prodotto di convoluzione



## Convoluzione

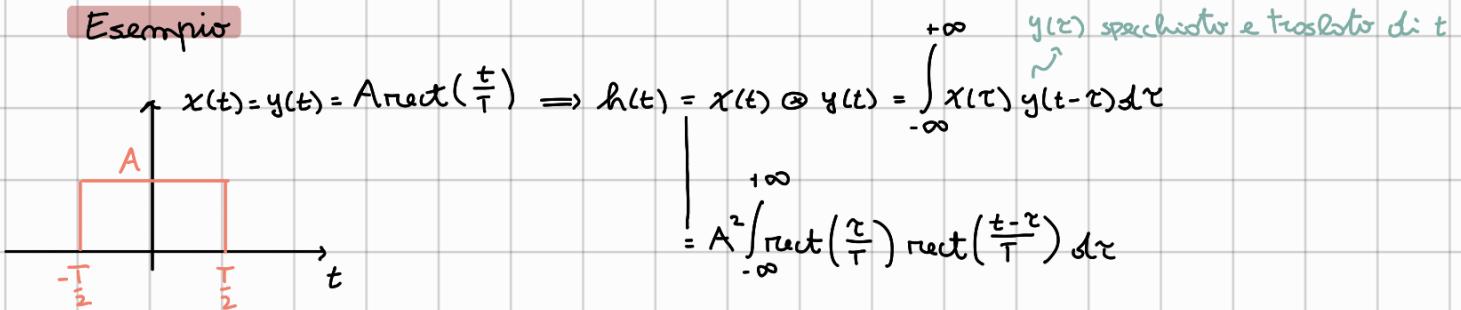
Sia  $x(t) \xrightarrow{} X(f)$  e  $y(t) \xrightarrow{} Y(f)$

Allora  $x(t) \odot y(t) \xrightarrow{} X(f)Y(f)$

$$\begin{aligned} \text{dim} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \odot y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(r) y(t-r) dr e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned}$$

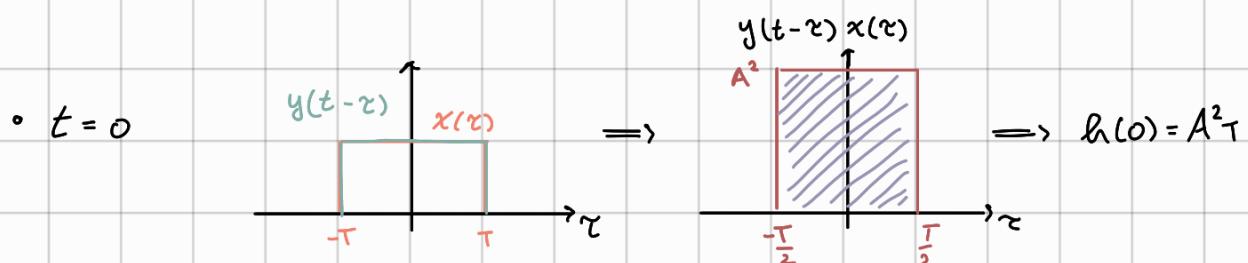
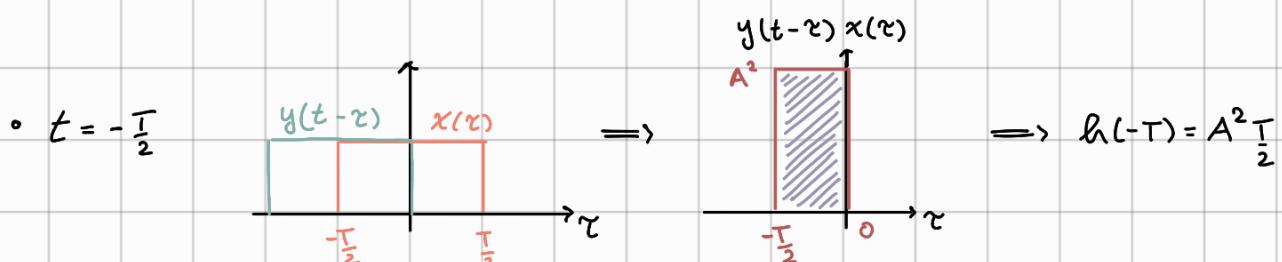
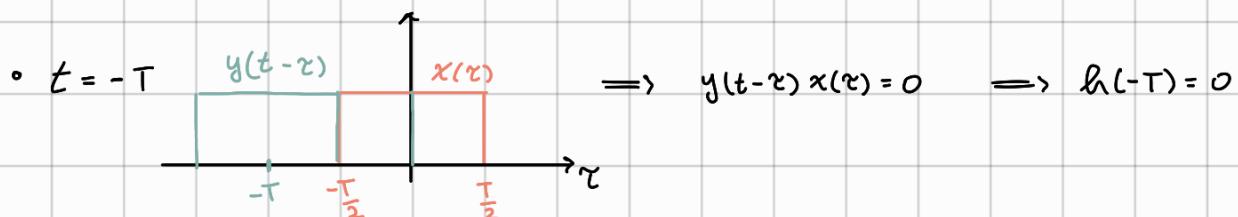
$$\begin{aligned}
 &= \iint_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) e^{-j2\pi f(t-\tau)} d\tau dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} y(t-\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau) e^{-j2\pi f(t-\tau)} dt \right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) Y(f) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = Y(f) X(f)
 \end{aligned}$$

### Esempio

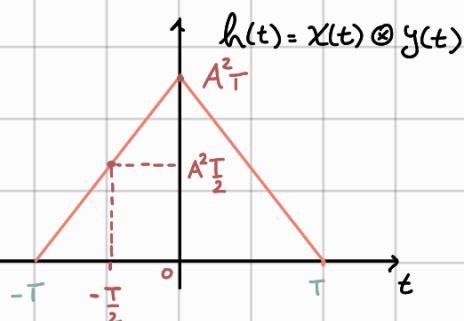


→ Per  $t < -T$  e  $t > T$   $h(t) = 0$

→ Per  $-T \leq t \leq T$ :



dunque:



risultato che ci potremo aspettare dato che per questo teorema

$$\text{Arct}(f) \otimes \text{Arct}(f) \Rightarrow AT \text{sinc}(fT) AT \text{sinc}(fT) = A^2 T^2 \text{sinc}^2(fT)$$

che è proprio la trasformata della piramide in figura ( $A^2 T \text{sinc}(\frac{f}{T})$ )

Note: La durata del prodotto di convoluzione è sempre la somma delle durate dei segnali convoluti.

### Teorema di Parseval

Per segnali deterministici:

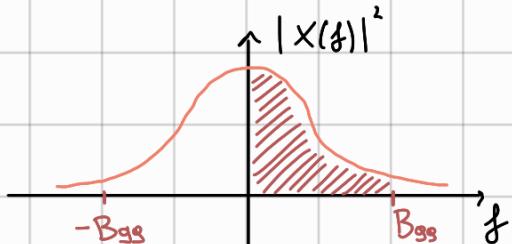
$$\text{Ricordando che } E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df, \text{ allora } E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

⇒ Ai fini dell'energia di un segnale lo spettro di fase è indifferenti

$$\begin{aligned} \text{dim} \quad E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x(t)^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \right]^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)^* e^{-j2\pi f t} df \right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)^* \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi f t} dt \right] df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)^* X(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned}$$

Il teorema ci dice che  $|X(f)|^2$  è una qualche forma di potenza, in effetti è nota come  $S_x$  densità spettrale di potenza del segnale deterministico  $x(t)$ , infatti: integrandolo trovo l'energia

Ritornando al concetto di banda, grazie a questo teorema posso definirlo in base a considerazioni energetiche, ad esempio:



$$0.99 E_x = \int_{-B_{99}}^{B_{99}} |X(f)|^2 df$$

Banda tale che contiene il 99% della potenza

→ più senso per sistemi lineari

### Funzione di autocorrelazione

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x(t-\tau) dt = x(\tau) \otimes x(-\tau) \rightarrow \text{Se il segnale è pari è la convoluzione}$$

→ in realtà sarebbe complesso coniugato ma trattando segnali reali è uguale

intuitivamente  $|R_x(\tau)| \leq |R_x(0)|$

quando  $\tau=0$  ho due  $X(f)$  con la stessa correlazione

imoltre  $R_x(\tau) = X(f)X(-f) = X(f)^*X(f) = |X(f)|^2 = S_x(f)$

in particolare, visto che  $x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df$ ,  $R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = E_x$

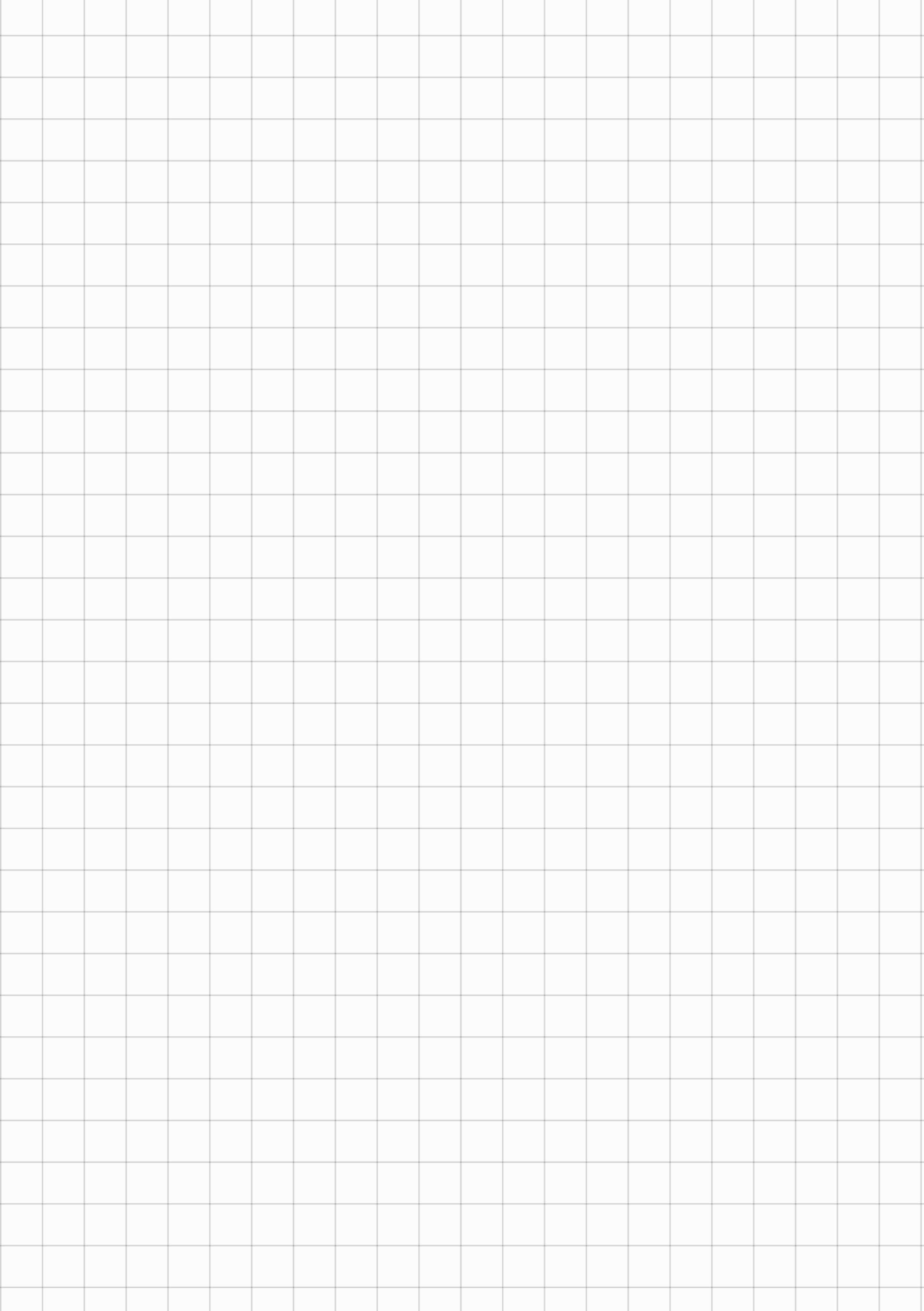
### Esempio

$$R_x(\tau) = 2B \operatorname{ sinc}(2B\tau) \Leftrightarrow \operatorname{rect}\left(\frac{\tau}{2B}\right) = |X(f)|^2 = S_x(f)$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) df = 2B$$

oppure, più semplicemente:

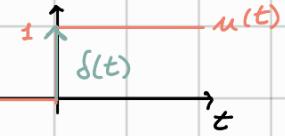
$$E_x = R_x(0) = 2B \operatorname{ sinc}(0) = 2B$$



## Funzione delta di Dirac

La funzione delta di Dirac  $\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$ :

gode delle seguenti proprietà:



- Ha integrale unitario:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

- È una funzione pari:  $\delta(t) = \delta(-t)$

- Proprietà campionatrice:  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t-t_0) dt = x(t_0)$

$$\text{dim} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t-t_0) dt = x(t) u(t-t_0) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t) u(t-t_0) dt$$

Per parti:  $\int_a^b fg' = fg \Big|_a^b - \int_a^b f'g$

$$\begin{aligned} &= x(+\infty) \cdot 1 - x(-\infty) \cdot 0 - \int_{t_0}^{+\infty} x'(t) dt \\ &= x(+\infty) - x(+\infty) + x(t_0) = x(t_0) \end{aligned}$$

- È invarianta alla convoluzione:  $x(t) \otimes \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = x(t)$   
(più in generale  $x(t) \otimes \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$ )

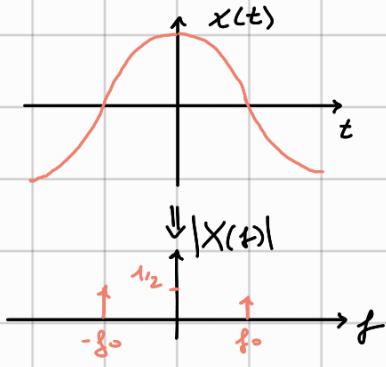
$$\bullet \delta(t) \rightleftharpoons \Delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f \cdot 0} = e^0 = 1$$

Questo ci permette, insieme al terzo dello dicitò, di calcolare lo trasformato di segnali ed emerge infinito (tra cui quelli periodici):

- Costante



• Coseno



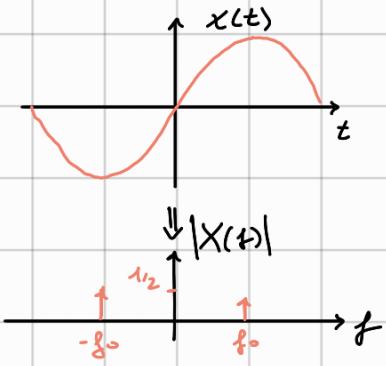
$\text{Se } \delta(t) \Rightarrow 1 \text{ allora } \delta(t-t_0) \Rightarrow e^{-j2\pi f_0 t_0}$   
quindi  $e^{-j2\pi f_0 t} \Leftarrow \delta(f-f_0)$  Linearità

$$\Rightarrow \cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \Leftarrow \frac{1}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$$

Eulero

th. ritardo

• Seno



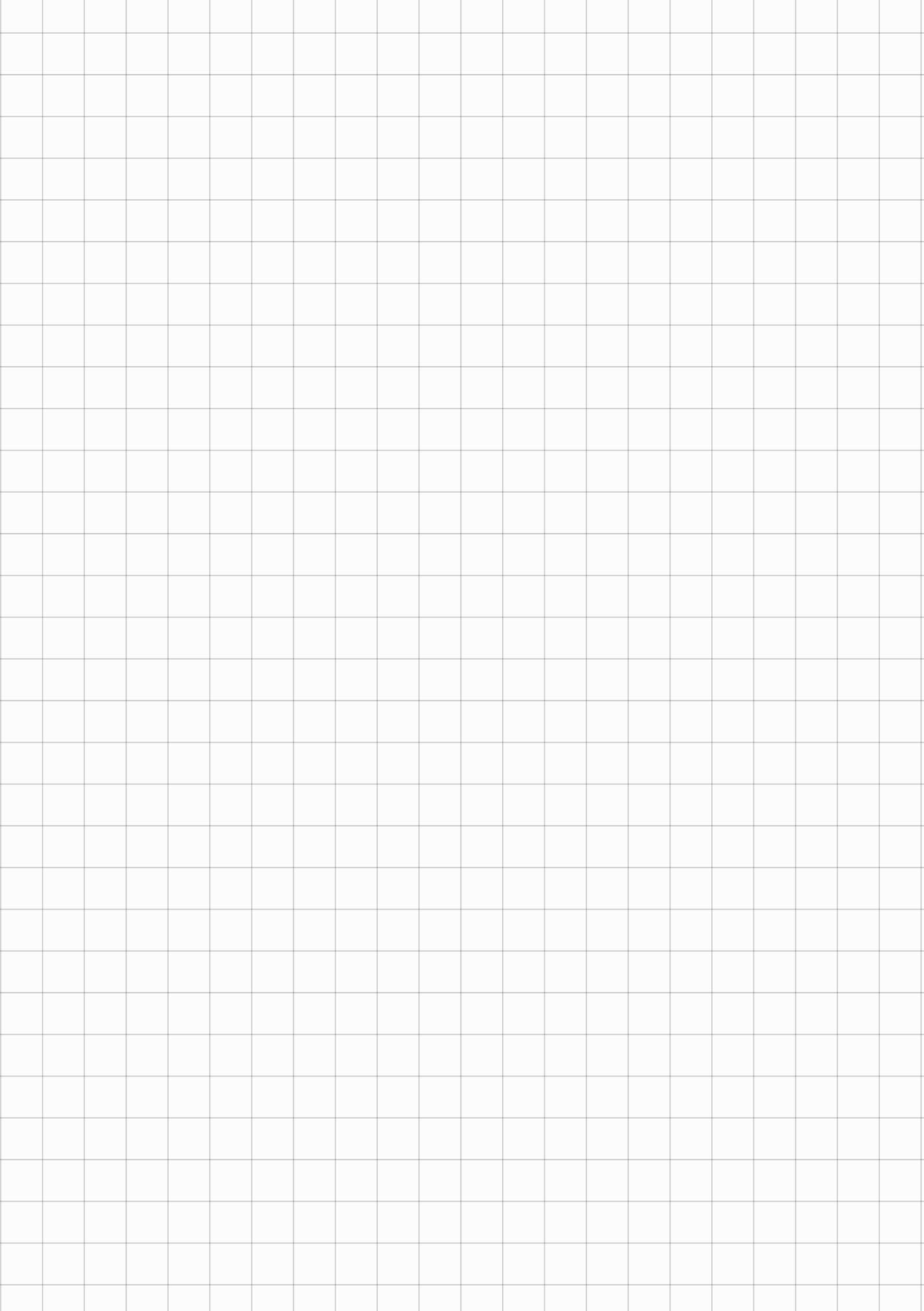
Allo stesso modo

$$\sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} \Leftarrow \frac{1}{2j} [\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]$$

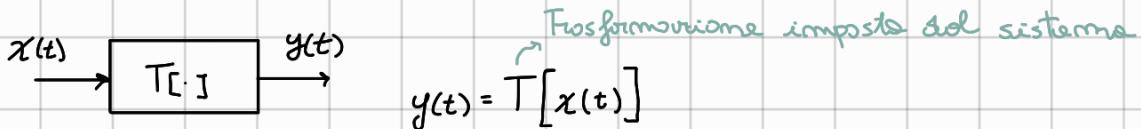
Eulero

Linearità

$\Rightarrow$  cambia solo la fase rispetto al coseno



## Sistemi LTI



- **Stazionarietà** (tempo invariante):  $y(t) = T[x(t)] \Rightarrow y(t-t_0) = T[x(t-t_0)]$
- **Causalità**:  $y(t) = T[x(\tau) | \tau \leq t]$   
 $\Rightarrow$  Le uscite del sistema dipendono solo dagli ingressi precedenti
- **Linearità**:  $\begin{cases} y_1(t) = T[x_1(t)] \\ y_2(t) = T[x_2(t)] \end{cases} \Rightarrow T[x_1(t) + x_2(t)] = T[x_1(t)] + T[x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t)$
- **Stabilità (BIBO)**:  $|x(t)| \leq M \Rightarrow |y(t)| \leq K$

Consideriamo ora un sistema lineare e tempo invariante (LTI) e definiamolo con  $h(t) = T[\delta(t)]$  risposta impulsiva del sistema, allora:

$$y(t) = T[x(t)] = T[x(t) \otimes \delta(t)] = T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} T[x(\tau)] \delta(t-\tau) d\tau$$

(l'operatore  $\int \cdot$  lo è sempre) ↑  
 ↓  
 è costante per  $T[\cdot]$        $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = x(t) \otimes h(t) = X(s) H(s)$   
 In un sistema LTI l'operatore  $T[\cdot]$  è lineare  
 Proprietà della tempo invarianza      Teorema delle convolutione

Di conseguenza se conosciamo la risposta impulsiva di un sistema LTI allora riuscire a calcolarne l'uscita per ogni  $x(t)$ , tuttavia generare un ingresso a  $\delta(t)$  è fisicamente impossibile, nella pratica possiamo fare tre cose:

$$\text{i) Mat. Int.} \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{j2\pi f_0 \tau} d\tau$$

2) Nel caso esponentiale ( $x(t) = e^{j\omega t}$ ) sono tutti i valori del trasformatore

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j2\pi f_0(t-\tau)} d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau = e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau = x(t) H(f_0)$$

dunque  $H(f_0) = \frac{y(t)}{x(t)}$  se  $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$

→ devo fare tante prove per stimare  $H(f)$  ∀ $f$

2) Cercare di approssimare  $s(t)$  con un segnale reale di breve durata ed osservare l'uscita del sistema, eventualmente applicandone lo trasformato di Fourier per ottenere  $H(f)$

3) Sapendo che  $y(f) = X(f)H(f)$  allora basta calcolare  $H(f)$  come rapporto tra la TCF di un'uscita reale e la TCF dell'ingresso che l'ha generata.

Trasformato continuo di Fourier

Anche per quanto riguarda la stabilità BIBO nei sistemi LTI basta controllare la risposta impulsiva, infatti:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$
$$\Rightarrow |y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)| |h(t-\tau)| d\tau \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau = M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \leq K$$

e questo è vero se  $h(t)$  è assolutamente integrabile ( $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$ )

Infine, un sistema LTI è causale se  $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$ , infatti:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

⇒  $y(t)$  dipende solo da ciò che succede fino a  $t$

Note: Spesso  $H(s)$  contiene forti amplificazioni o attenuazioni e dunque non è adatto ad essere trattato in scala normale, si introduce quindi l'unità di misura in scala logarithmica **decibel dB**

$$|H(s)|^2 \text{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{|H(s)|^2}{|H(s_0)|^2} \right) = 20 \log_{10} \left( \frac{|H(s)|}{|H(s_0)|} \right)$$

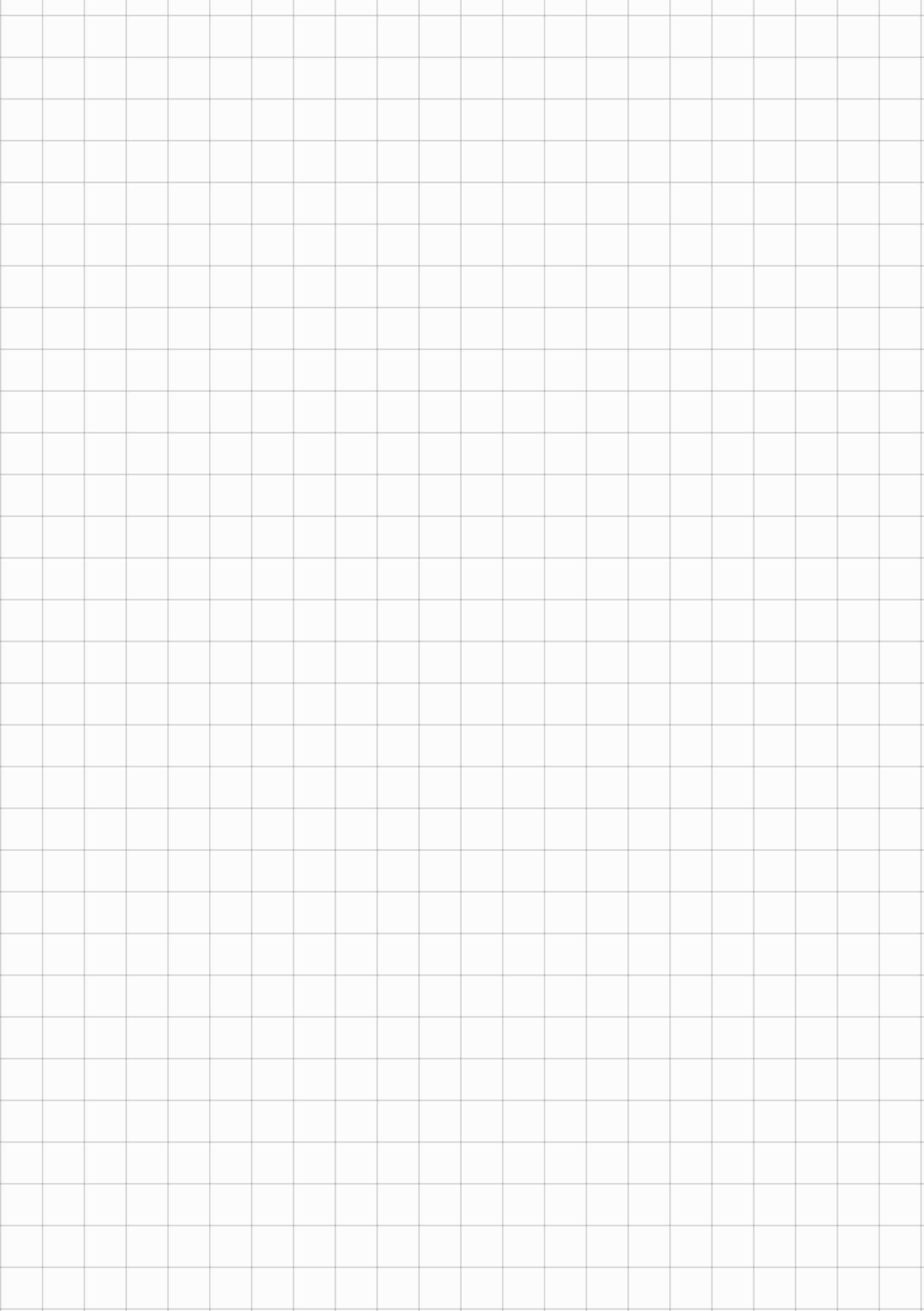
Se di un segnale ne conosciamo il modulo quadrato, come spesso accade per quanto riguarda le potenze, si preferisce lasciare il quadrato ed usare la definizione  $10 \log_{10}(\dots)$ , se invece ne conosciamo il modulo, come spesso accade nel caso delle ampiezze, allora si preferisce lasciarlo inalterato ed usare la definizione  $20 \log_{10}(\dots)$

Il denominatore  $H(s_0)$  è dato dal fatto che il dB è una grandezza relativa, deve dunque avere un riferimento (spesso su scale:  $|H(s_0)|=1$ )

$$x \text{ dB} = 10 \log_{10}(y) \Rightarrow y = 10^{\frac{x}{10}}$$

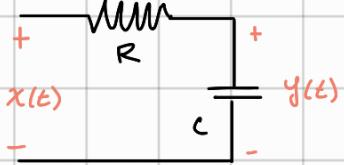
$ H(s) ^2$	dB
1	0
2	3
4	6
8	9
10	10
100	20
1000	30

$ H(s) ^2$	dB
50	$17 \rightarrow 10 \log \left( \frac{100}{2} \right) = 10 [\log(100) - \log(2)]$
25	$14 \rightarrow 10 \log \left( \frac{50}{2} \right) = 10 [\log(50) - \log(2)]$
$\frac{1}{2}$	-3
$\frac{1}{4}$	-6
$\frac{1}{10}$	-10
$\frac{1}{100}$	-20
$\frac{1}{1000}$	-30



## Filtri reali ed ideali

### Filtro RC



Se  $x(t) = u(t)$  allora  $y(t) = T[u(t)] = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})u(t)$

Sappiamo che  $h(t) = T[\delta(t)]$  e  $d(t) = \frac{d}{dt}u(t)$

$$\text{allora } h(t) = T\left[\frac{d}{dt}u(t)\right] = \frac{d}{dt}T[u(t)] = \frac{d}{dt}(1 - e^{-\frac{t}{RC}})u(t) \\ = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t) + (1 - e^{-\frac{t}{RC}})d(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

proprietà umpliontrice

$$\Rightarrow H(f) = \frac{1}{1 + jf/f_T}$$

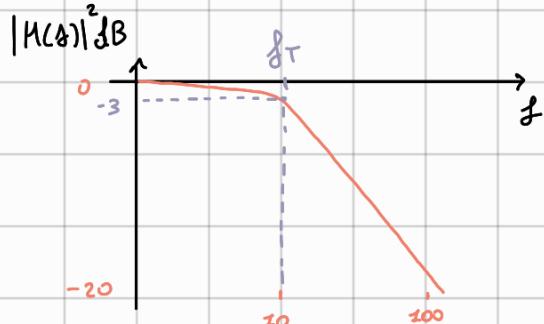
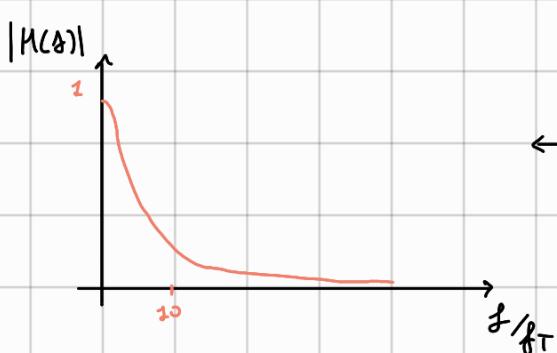
senza dim

$$\Rightarrow |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + f^2/f_T^2}}$$

dove  $f_T = \frac{1}{2\pi RC}$  è la frequenza di taglio

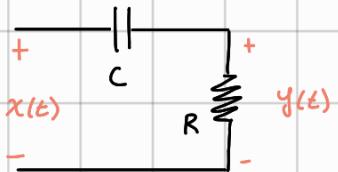
uso il modulo quadrato per togliere la radice

Supponiamo  $f_T = 10 \text{ MHz}$  ed  $f_0 = 0$  (così  $|H(s_0)|^2 = 1$ ), allora:



Di conseguenza il circuito RC si comporta come un filtro passeggiante

### Filtro CR



Vedremo direttamente  $H(f) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + jf/f_T}}$

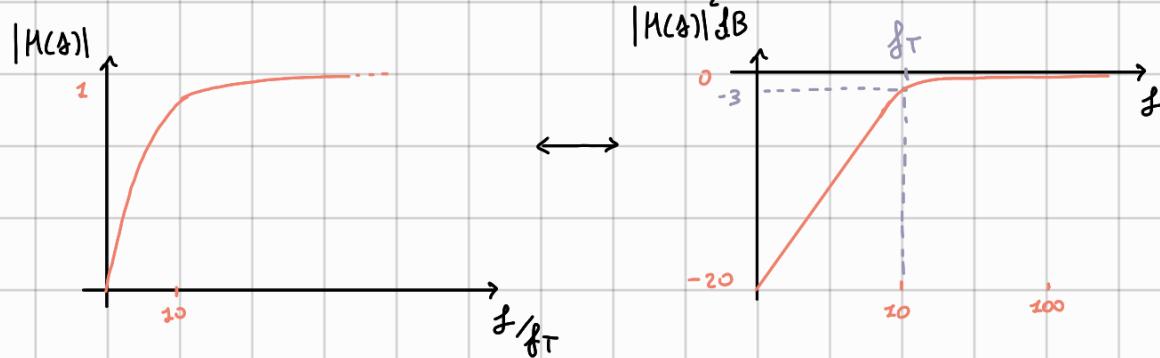
... a quello del filtro RC

$$\Rightarrow |H(f)| = \sqrt{\frac{(f/f_T)^2}{1 + (f/f_T)^2}}$$

comportamento opposto...

Supponiamo  $f = 10 \text{ MHz} \rightarrow 1/f = 100 \text{ Hz} \rightarrow |H(100)|^2 = 1/100^2 = 1/10000$

Supponiamo  $f_T = 20 \text{ Hz}$  e  $f_0 = \infty$  (così  $|H(f_0)| = 1$ ), dunque:

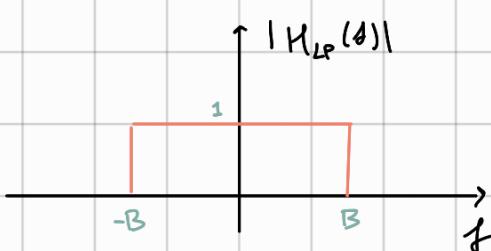


Di conseguenza il circuito CR si comporta come un filtro passa-basso.

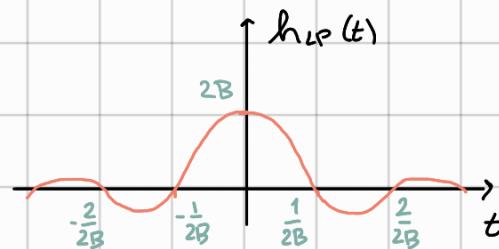
Quelli visti sopra non sono filtri particolarmente efficienti, idealmente vorremmo qualcosa del genere (supponiamo tutto LTI):

### Filtro passa basso (LP)

$$H_{LP}(f) = \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$



$$h_{LP}(t) = 2B \operatorname{sinc}(2Bt)$$



Il problema di questo filtro è che dovrei avere un segnale infinito (una sinc) per generarlo correttamente, nella pratica posso solo generare una sinc troncata a ± un certo tempo T, lo quale implica un  $|H(f)|$  tanto più preciso tanto più T è piccolo (tronca più segnale utile).

Un altro problema di questo filtro è che avendo  $h(t) = 0$  per  $t \leq 0$  non è causale, questo non è un problema se ad esempio lo voglio usare per fare post processing (l'uscita dipende dal futuro ma il futuro lo conosco già), mentre se lo volessi usare per un sistema a tempo reale allora dovrei shiftarlo di quanto lo ho troncato, introducendo dunque un ritardo.

*Teorema del ritardo*

più il filtro è selettivo in frequenza più è esteso nel tempo, dunque più tempo devo trascorrere nello tracciato per rappresentarlo correttamente e quindi più ritardo introduco

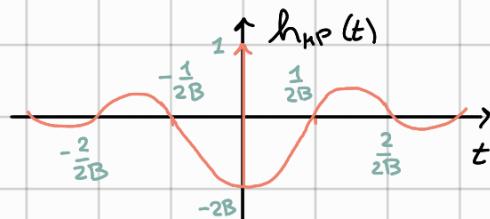
$\Rightarrow$  Intuitivamente la difficoltà di realizzazione di un filtro è  $\propto \frac{1}{B}$

### Filtro passo alto (HP)

$$H_{HP}(\delta) = 1 - H_{LP}(\delta)$$

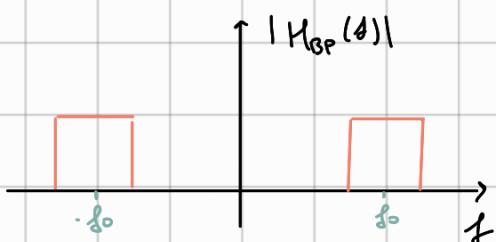


$$h_{HP}(t) = \delta(t) - h_{LP}(t) = \delta(t) - 2B \operatorname{sinc}(2Bt)$$



Anche qui vengono tutti i problemi di prima ai quali si aggiunge la difficoltà del realizzare lo  $\delta(t)$

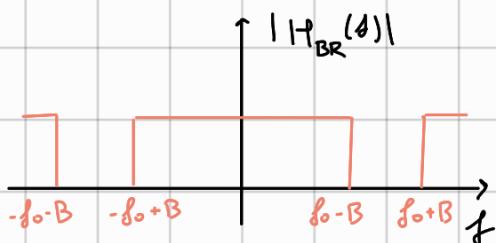
### Filtro passo banda (BP)



$$H_{BP}(\delta) = H_{LP}(\delta - f_0) + H_{LP}(\delta + f_0)$$

$$h_{BP}(t) = h_{LP}(t) \cos(2\pi f_0 t) = 2B \operatorname{sinc}(2Bt) \cos(2\pi f_0 t)$$

### Filtro elimina bande (BR)



$$H_{BR}(\delta) = 1 - H_{BP}(\delta)$$

$$h_{BR}(t) = \delta(t) - h_{BP}(t) = \delta(t) - 2B \operatorname{sinc}(2Bt) \cos(2\pi f_0 t)$$

## Filtri non distorcenziali

Un segnale è detto non distorto da un filtro se viene solamente scalato e/o shiftato ( $y(t) = A x(t - t_0)$ ), si conseguente un filtro (LTI) viene definito non distorcenziale quando:

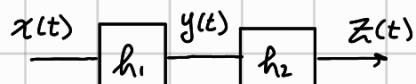
$$h(t) = A \delta(t - t_0) \Rightarrow y(t) = x(t) \otimes h(t) = A(x(t) \otimes \delta(t - t_0)) = A x(t - t_0)$$

$\downarrow$

$$H(f) = A e^{-j2\pi f t_0} \Rightarrow Y(f) = X(f) H(f) = A X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

In altre parole il filtro deve avere modulo costante  $A_f$  e fase lineare  $A_f$ , questo è un po' overkill ed effettivamente basta restituire la definizione delle bandi a cui siamo interessati, in questo modo però la non-distorsione diventa una proprietà della coppia filtro-segnale (il filtro non è più universalmente non distorcenziale)

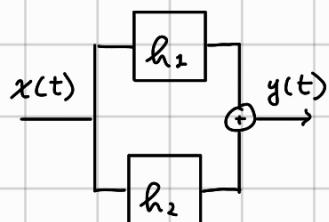
## Filtri in serie



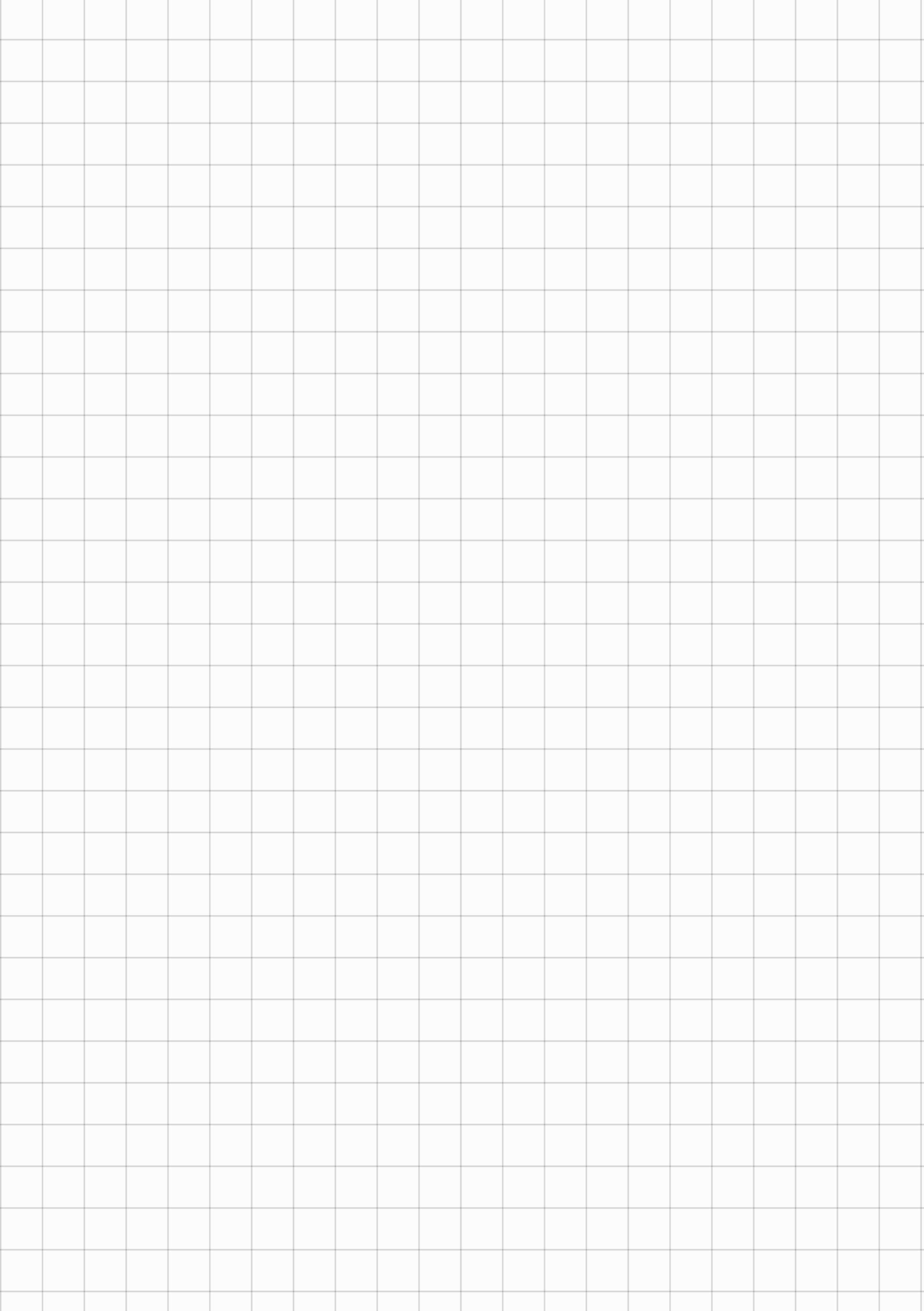
$$y(t) = x(t) \otimes h_1(t)$$

$$\begin{aligned} z(t) &= y(t) \otimes h_2(t) = (x(t) \otimes h_1(t)) \otimes h_2(t) \\ &= x(t) \otimes (h_1(t) \otimes h_2(t)) = x(t) \otimes h(t) \end{aligned}$$

## Filtri in parallelo



$$y(t) = x(t) \otimes h_1(t) + x(t) \otimes h_2(t) = x(t) \otimes (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) \otimes h(t)$$



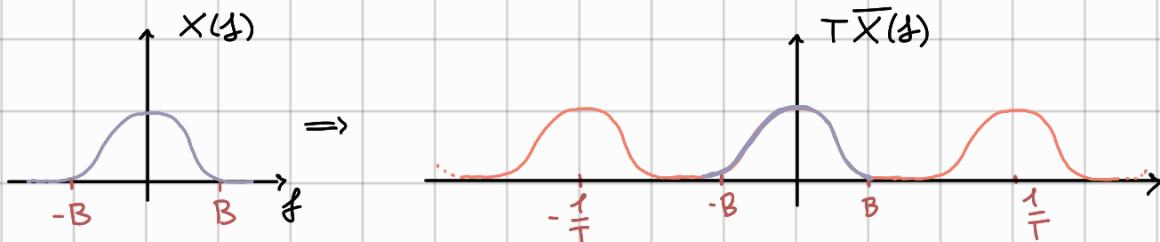
## Trasformata discreta di Fourier

La trasformata discreta di Fourier di una sequenza  $x[mT]$  è definita come:

$$\overline{X(f)} = \sum_m x[mT] e^{-j2\pi f mT} = \frac{1}{T} \sum_m X(f - \frac{m}{T})$$

Teorema della trasformata discreta, senza dim.

dunque  $\overline{X(f)}$  si ottiene a partire delle continue  $X(f)$  scelte e traslate a multipli della frequenza di campionamento  $\frac{1}{T}$ :



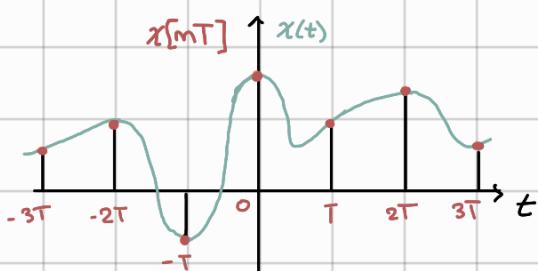
**Note:** questo non è un caso, in generale un segnale campionato ha uno spettro periodico e inverso

Supponiamo adesso di voler provare a ricostruire  $x(t)$  a partire dalle sue sequenze  $x[mT]$  campionate con una generica frequenza  $\frac{1}{T}$ :

Interpolatore

$$\dots x[mT] \xrightarrow{P} \hat{x}(t) \quad \Rightarrow \quad \hat{x}(t) = \sum_m x[mT] p(t - mT)$$

Supponiamo:



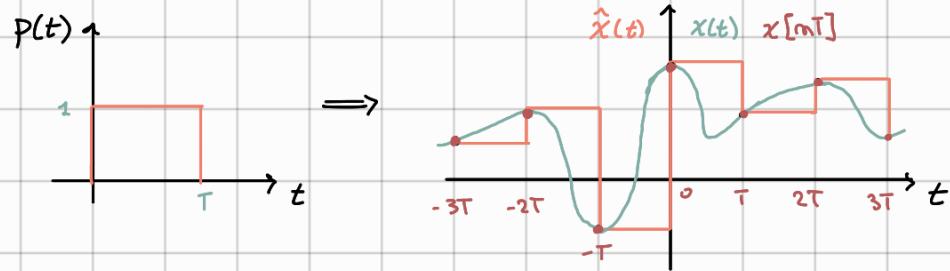
Vediamo allora alcuni tipi di interpolatore:

→ A mantenimento

$$p(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T_1}{T}\right)$$

$$P(f) = T \sin(fT) e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

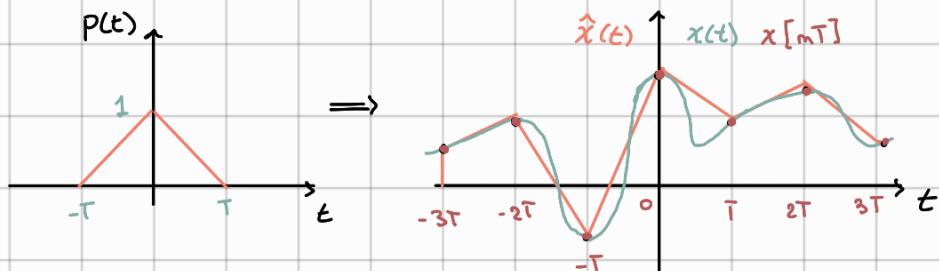
ritardo  $\frac{T}{2}$



→ Lineare

$$p(t) = t \text{u}_{[0,T]}(\frac{t}{T})$$

$$P(f) = T \sin^2(fT)$$



In entrambi i casi  $\hat{x}(t)$  non coincide con  $x(t)$ , potremo dunque chiederci se esiste  $p(t)$  tale che  $x(t) = \hat{x}(t)$  e sotto quali condizioni:

### Teorema del campionamento

Condizione di Nyquist

Dato un segnale  $x(t)$  limitato in banda e compiomento a  $\frac{1}{T} \geq 2B$ ,  
allora i campioni  $x[nt]$  possono essere usati per ricostruire senza perdita di informazione il segnale originale  $x(t)$ , a patto che si usi l'interpolatore cordimale  $p(t) = 2BT \sin(f(2Bt))$

perché usa la ↗

dim

Il segnale viene ricostruito senza perdita di informazione sse  $x(t) = \hat{x}(t) \Leftrightarrow X(f) = \hat{X}(f)$

dov'è che  $\hat{x}(t) = \sum_m x[mT] p(t-mT)$

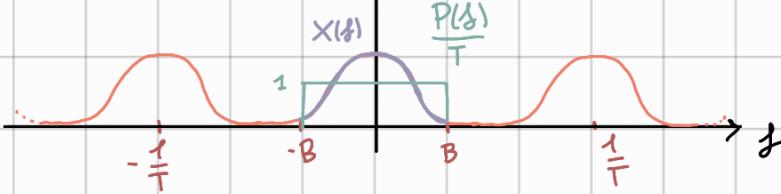
$$\text{dove } \hat{X}(f) = \sum_m x[mT] P(f) e^{-j2\pi fmT} = P(f) \sum_m x[mT] e^{-j2\pi fmT} = P(f) \bar{X}(f)$$

Fusormata discreta  
linearità Th. ritardo

per provare la tesi ( $x(t) = \hat{x}(t)$ ) dovrà quindi far vedere che  $X(f) = P(f) \bar{X}(f)$

supponendo  $p(t) = 2BT \sin(f(2Bt)) \Rightarrow P(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$  e  $\frac{1}{T} \geq 2B$  è immediato vedere graficamente che  $X(f) = P(f) \bar{X}(f)$ , e dunque la tesi è verificata

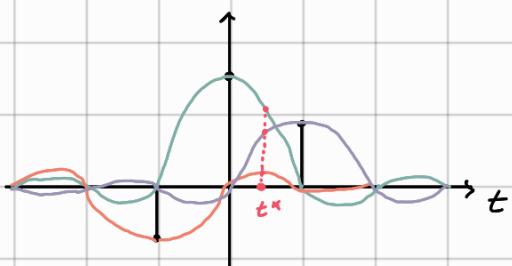
$T \bar{X}(f)$



Questo teorema ha due criticità:

- Tutt'onda segnali  $x(t)$  fisici, dunque a tempo limitato, allora questi sono infiniti in banda, e dunque per poter applicare Nyquist devo prima filtrarli, facendo così però al massimo riuscirò a ricostruire il segnale filtrato, non l'originale
- $p(t)$  uso una sinc, che è illimitata nel tempo, dunque non riesco a generarla, se la troncassi il teorema decadrebbe perché non starei più usando come  $p(t)$  una sinc pura. Anche se volessi provare ad usarla, in un sistema a tempo reale non posso, perché la sinc, anche truncata, non è causale, dovrei dunque shiftarla introducendo un ritardo

Single sinc componenti  $\hat{x}(t)$



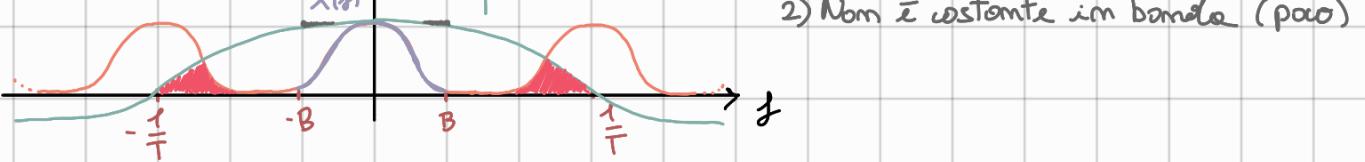
Non è causale:  $\hat{x}(t^*)$  è influenzato anche dalle sinc dei componenti a  $t > t^*$

Vediamo infine come mai gli interpolatori visti all'inizio introducono delle distorsioni:

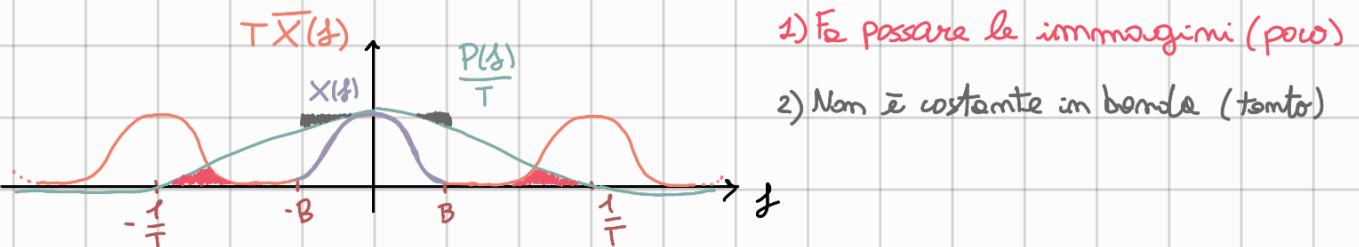
→ A momtemimento  $P(f) = T \text{sinc}(fT) e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$



↓ Fa passare le immagini (tentò)



→ Lineare  $P(f) = T \sin^2(fT)$



Mentre il secondo problema non si può risolvere (al massimo posso allungare  $\frac{1}{T}$  ma così intollerabile ritardo in un sistema a tempo reale), il primo lo si può risolvere filtrando con un passo basso anche dopo l'interpolazione, se faccio così allora tolgo usare l'interpolatorre lineare, che in banda base si comporta meglio, se invece tolgo di distorcere poco più la banda base allora posso usare l'interpolatorre lineare e risparmiare il filtro finale.

Note: La condizione di Nyquist  $\frac{1}{T} \geq 2B$  considera come un'eventuale frequenza portante  $f_0 \geq 2(B + B)$  ! È questo il motivo per cui non si compiona un segnale a radiofrequenze ma prima lo si demodula