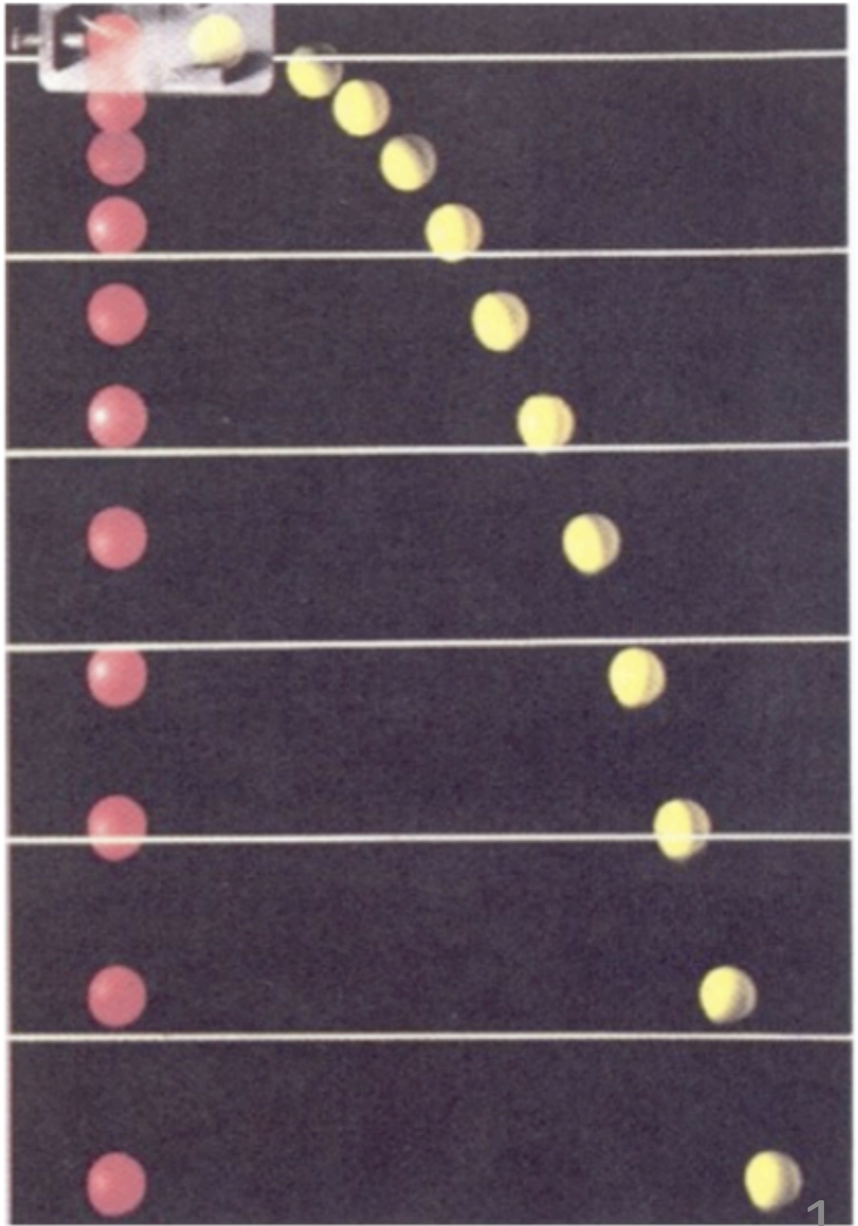
Moto dei proietti

- E' il moto di particelle che vengono lanciate con velocità iniziale $\vec{v}_0$ e sono soggette alla sola accelerazione di gravità $\vec{g}$ supposta costante.

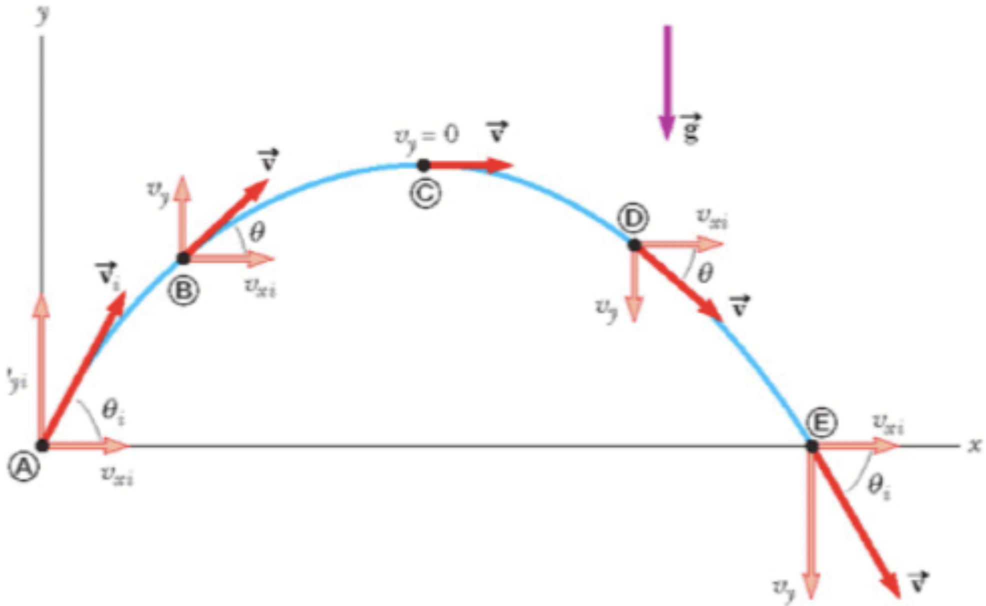
- La pallina rossa viene lasciata cadere da ferma nello stesso istante in cui l'altra è lanciata orizzontalmente verso destra con velocità $\vec{v}_0$.

- Osservazioni sperimentali:
  – gli spostamenti verticali delle due palline sono identici
  – Il moto orizzontale e il moto verticale sono indipendenti



Analisi del moto dei proietti

Il moto può essere analizzato separatamente nelle sue componenti:
– la componente orizzontale è descritta dalle relazioni cinematiche del moto rettilineo uniforme
– quella verticale dalle relazioni del moto uniformemente accelerato.



Il moto avviene nel piano individuato da $\vec{v}_0$ e $\vec{g}$: scegliamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale orientando l'asse x orizzontalmente e l'asse y lungo la verticale.

Analisi del moto dei proietti

Analizziamo separatamente il moto *orizzontale*:

$$a_x = 0, \qquad v_x = v_{0x} = \text{cost}, \qquad x = x_0 + v_{0x} t$$

e il moto *verticale*:

$$a_y = -g, \qquad v_y = v_{0y} - gt, \qquad y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta, \qquad v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

Determiniamo la *traiettoria*: il luogo geometrico dei punti occupati dal vettore posizione $\vec{r}(t)$ nel corso del tempo.

Equazione della traiettoria

Eliminiamo t fra le equazioni del moto per $x(t)$ e $y(t)$:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad y - y_0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) - \frac{1}{2}g\frac{(x - x_0)^2}{v_{0x}^2}$$

Ponendo $v_{0x} = v_0 \cos\theta$, $v_{0y} = v_0 \sin\theta$, $x_0 = y_0 = 0$, otteniamo:

$$\boxed{y = x \tan\theta - \frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x^2}$$

Questa è l'equazione di una *parabola* nel piano xy, con la curvatura rivolta verso il basso. La traiettoria è quindi *parabolica*.

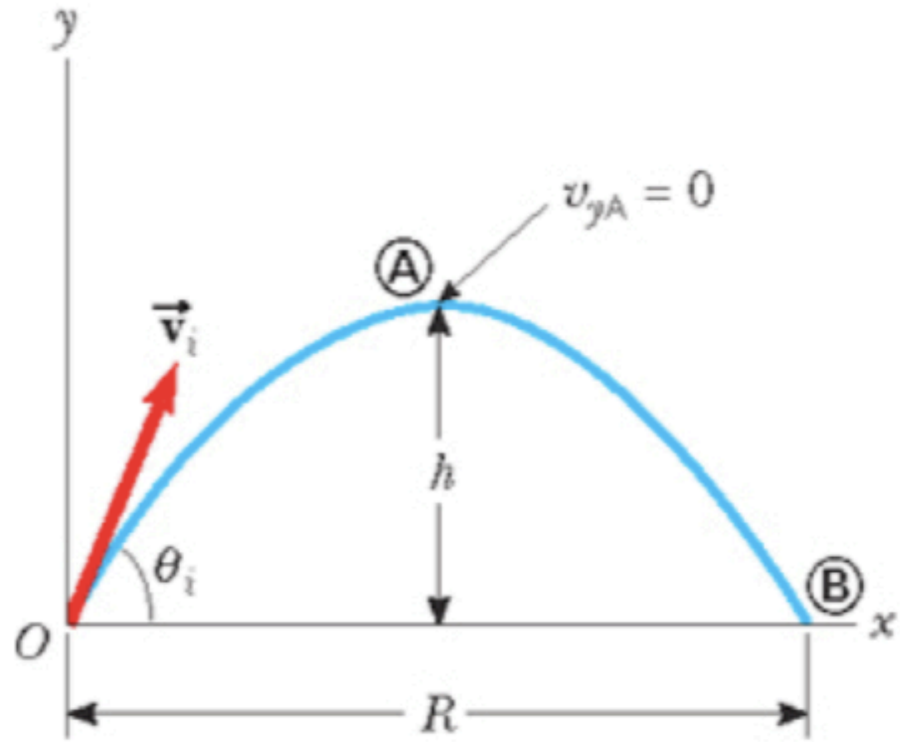
Gittata

Distanza orizzontale coperta dal proietto all'istante in cui tocca il suolo:

$$y = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

Soluzioni: $t = 0$, oppure

$$t = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$$



Sostituendo quest'ultimo in $x(t) = x_0 + v_0(\cos\theta)t$ si trova la *gittata* R:

$$x - x_0 = \frac{2v_0^2}{g} \sin\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) \equiv R$$

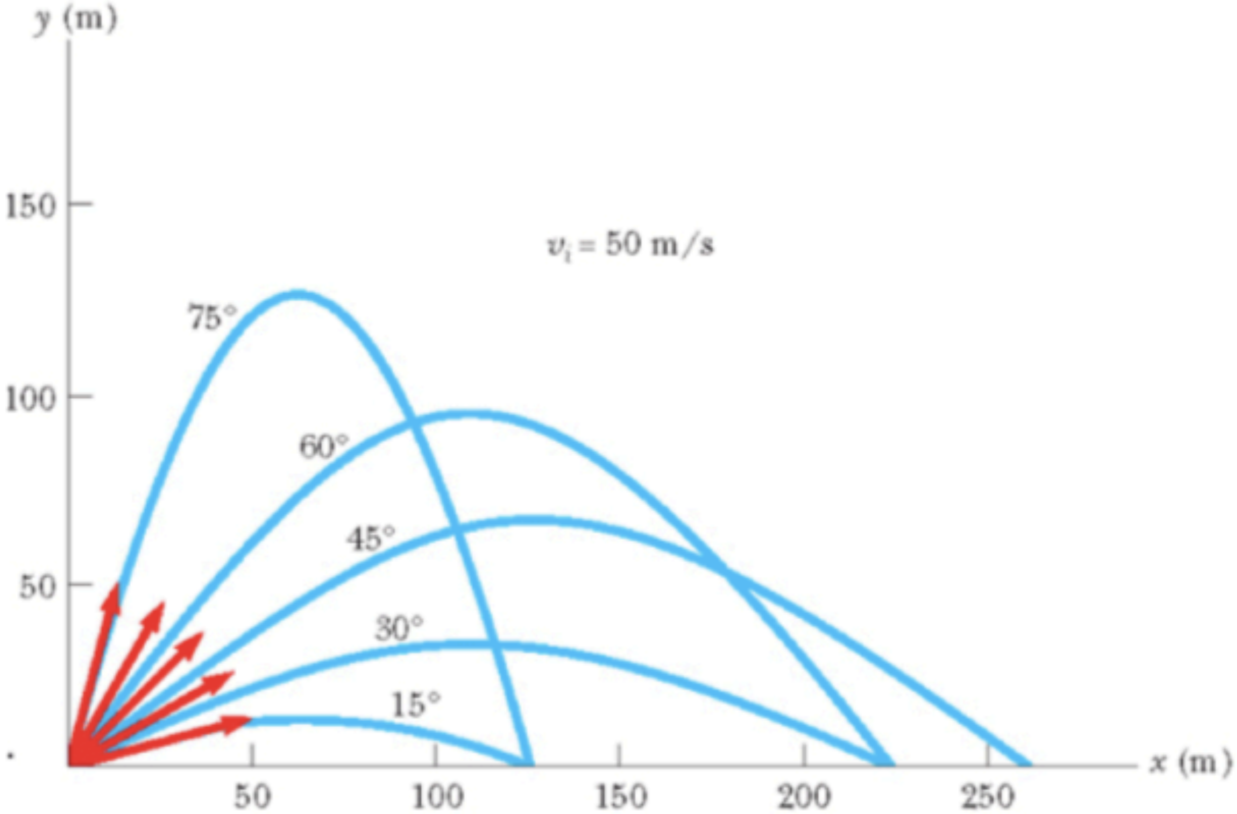
(in alternativa, si può usare l'espressione della traiettoria prima ricavata, trovare il valore di x per cui $y = 0$)

Gittata 2

La gittata R:

$$\boxed{R = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)}$$

è massima se $\theta = 45°$.



L'altezza massima h si raggiunge quando $v_y = v_0 \sin\theta - gt = 0$, ovvero per $t = \dfrac{v_0 \sin\theta}{g}$ da cui $h = \dfrac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta$ Ricordare che $y = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$

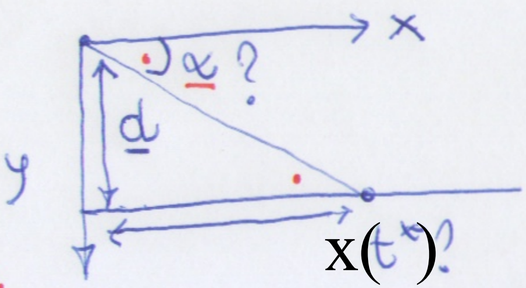
(in alternativa, si può usare l'espressione della traiettoria prima ricavata, trovare il valore x_{max} per cui $dy/dx = 0$, trovare poi $y(x_{max})$)

Es. 1.16 MAZZOLDI SAGGION

Un aereo viaggia orizzontalmente alla velocità $v = 600\,\text{Km/h}$ a un'altezza $d = 1\,\text{Km}$. All'istante $t=0$ esso sgancia un oggetto che deve cadere in un punto prestabilito P. Calcolare sotto quale angolo rispetto all'orizzontale deve essere visto P dal punto di sgancio. Trascurare gli effetti dovuti all'attrito dell'aria e alla rotazione terrestre

1) Scelta degli assi

2) Cosa posso fare x rispondere alla domanda α?



t*?

Dati

$x_0 = 0$

$v_0^y = 0$, $v_0^x = v = 600\,\text{Km/h}$

$d = 1\,\text{Km} = 10^3\,\text{m}$

$v_0^x = \dfrac{600 \times 10^3}{3.6 \times 10^3} = 166.7\,\text{m/s}$

$\vec{a}_g = 9.8\,\hat{j}\,\text{m/s}^2$

D.1 α?

Indicando con t^* il tempo di caduta

$\rightarrow \dfrac{d}{x(t^*)} = tg\,\alpha \rightarrow \alpha = atg\,\alpha$

Lungo x $\quad v_0^x = v = cost$

moto rettilineo uniforme

$x(t) = \underset{\shortparallel\,0}{x_0} + v_0^x\, t \rightarrow$ $\boxed{x(t) = v_0^x\, t}$

Lungo y $\quad a_y = g = cost$

moto uniformemente accelerato.

$y(t) = \underset{\shortparallel\,0}{y_0} + \underset{\shortparallel\,0}{v_0^y}\, t + \frac{1}{2} a t^2$ $\boxed{y(t) = \frac{1}{2} g t^2}$

Quando l'oggetto arriva a terra

$y(t^*) = d = \frac{1}{2} g t^{*2} \rightarrow \quad t^* = \sqrt{\dfrac{2d}{g}}$

di conseguenza per $t = t^*$

$x(t^*) = v_0^x \cdot t^* = v_0^x \sqrt{\dfrac{2d}{g}} \Longrightarrow tg\,\alpha = \dfrac{d}{x(t^*)}$

$x(t^*) = 2367\,m$

②

③

D.2 Descrivere la traiettoria

$$\begin{cases} x(t) = v_0^x\, t \\ y(t) = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

esprimendo t in funzione di x

$$\begin{cases} t = \dfrac{x(t)}{v_0^x} \\ \text{Traiettoria} \\ y = \frac{1}{2} g \left(\dfrac{x}{v_0^x} \right)^2 \end{cases}$$

R.2 La traiettoria è una parabola

Esercizio 1.28 Mazzoldi Saggion ①

Descrivere il moto di un punto materiale le cui leggi orarie in coordinate polari sono

$$\begin{cases} r = r_0 \operatorname{sen} \omega t \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

si assume $r_0 = 5 \times 10^{-2}\,m$

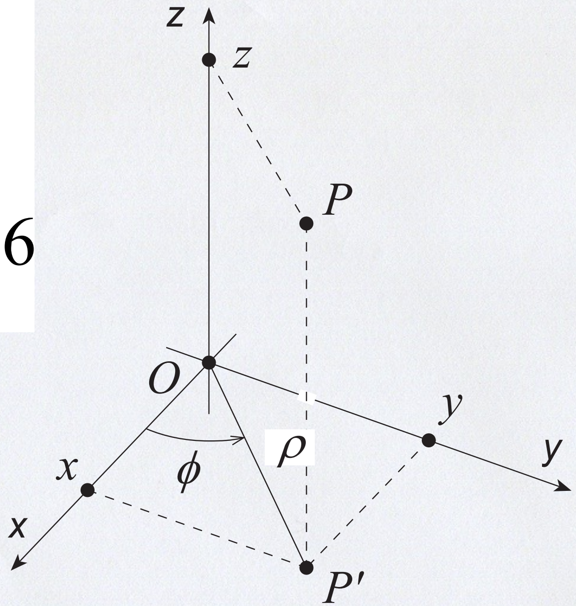
$\omega = 2\pi\ rad/s$

2

Per capire con che moto abbiamo a che fare ci conviene passare a coordinate cartesiane

$(r, \phi, z) \longrightarrow x, y, z$

da
Lez2
slide 6



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

$$\tan\phi = \frac{y}{x}\,,$$

$$z = z\,;$$

viceversa:

$$x = \rho\cos\phi$$

$$y = \rho\sin\phi$$

$$z = z\,.$$

Il moto è nel piano

$x, y \,:\, z = 0$

nota ϕ lezione $\rightarrow \theta$ esercizio!

e ρ lezione $\rightarrow$ r esercizio

Nel nostro caso

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

ma $r = r_0 \sin\omega t = r_0 \sin\theta$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = r_0 \sin\theta\cos\theta \\ y = r_0 \sin\theta \cdot \sin\theta \end{cases}$

ricordiamo che $\begin{cases} \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \\ \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \\ \sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = \dfrac{r_0}{2}\sin 2\theta \\ y = \dfrac{r_0}{2}(1-\cos 2\theta) \end{cases}$

quindi $\begin{cases} x^2 = \dfrac{r_0^2}{4}\sin^2 2\theta \\ \left(y - \dfrac{r_0}{2}\right)^2 = (-\cos 2\theta)^2 \dfrac{r_0^2}{4} \end{cases}$ $\oplus$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + \left(y - \frac{r_0}{2}\right)^2 = \frac{r_0^2}{4} = \left(\frac{r_0}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow$ Equazione di una circonferenza in x, y con centro in (x_c, y_c) e raggio R

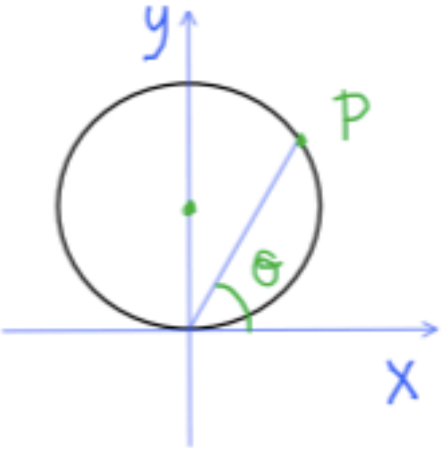
$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

per cui

$$R = \frac{r_0}{2} = 2.5 \times 10^{-2}\, m$$

$$(x_c, y_c) = \left(0, \frac{r_0}{2}\right) = (0, 2.5\times 10^{-2})\, m$$

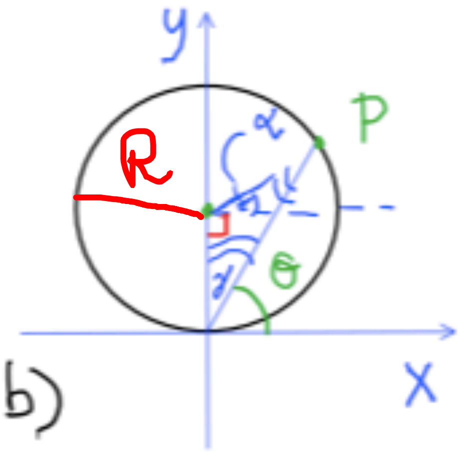
Equazioni della circonferenza



a)

$$x = \frac{r_0}{2}\sin 2\theta$$

$$y = \frac{r_0}{2}\left(1-\cos 2\theta\right)$$



b)

$$x = \frac{r_0}{2}\cos\alpha$$

$$y = \frac{r_0}{2}\sin\alpha + y_c$$

$$\alpha + \pi/2 + 2\gamma = \pi$$

$$\gamma = \pi/2 - \theta$$

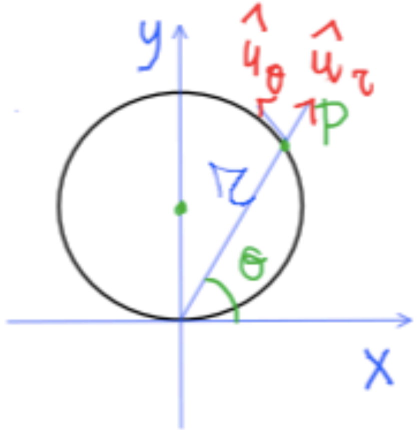
$$\cdot\ 2\gamma = \pi - 2\theta$$

$$\alpha = \pi/2 - 2\gamma$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\theta$$

Per cui deve essere
$$\begin{cases} \sin 2\theta = \cos\alpha \\ -\cos 2\theta = \sin\alpha \end{cases}$$

$\Rightarrow$ poiché $\alpha = (2\theta - \pi/2)$ questa condizione è verificata!



In coordinate polari

le componenti della velocità di P sono

$$\vec{v} = v_r\,\hat{u}_r + v_\theta\,\hat{u}_\theta$$

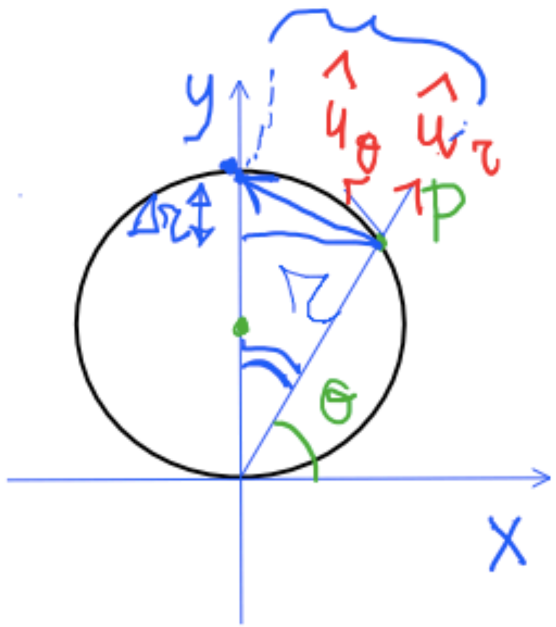
con $v_r = \dfrac{dr}{dt}$

$v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt}$

la velocità è tangente alla traiettoria ma la sto determinando in coordinate polari (r,θ)

$v_r = \dfrac{dr}{dt}$: dr è lo spostamento infinitesimo a $\theta = \text{cost}$

$v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt}$: $r\,d\theta$ è lo spostamento infinitesimo a $r = \text{cost}$



$\Delta\theta$ =)) Spostamento tangenziale
$r\Delta\theta$

Spostamento radiale

Δr

vettore spostamento

$$\Rightarrow \Delta r\,\hat{u}_r + r\Delta\theta\,\hat{u}_\theta$$

per uno spostamento infinitesimo

$$\vec{v}\,dt = dr\,\hat{u}_r + r\,d\theta\,\hat{u}_\theta$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\,\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_\theta$$

per cui $v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(r_0 \sin\omega t) = \omega r_0 \cos\omega t$

$$v_\theta = r\frac{d\theta^*}{dt} = r_0 \sin\omega t\ \omega$$

$^*\theta = \omega t$

per cui $|\vec{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \omega r_0$! $\omega r_0 = 0.31$ m/s

La traiettoria circolare

è percorsa con moto uniforme! $|\vec{v}| = \text{cost.}$

di conseguenza l'accelerazione è centripeta

e vale $\omega^2 r_0$

per casa verificarlo con a_r e a_θ !

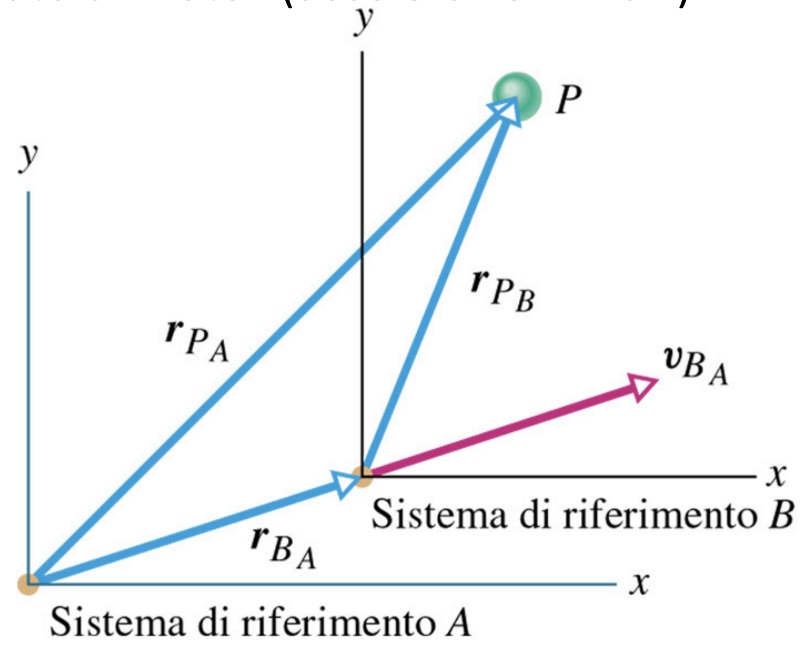
Il periodo del moto è $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $= 1$ s

I principio e sistemi inerziali

- Abbiamo detto che, la descrizione del moto dipende dal sistema di riferimento (come ad esempio le componenti del vettore posizione **r**(t)).
- Il ***I principio*** classifica i sistemi di riferimento:
  - Non tutti i sistemi di riferimento sono equivalenti
    - **Sono detti sistemi di riferimento inerziali i sistemi in cui il I principio della dinamica è valido**
      - Il moto di un punto materiale non soggetto ad interazione alcuna viene descritto come moto rettilineo a velocita costante o come stato di quiete (v=0).
  - La relatività galileiana mostra che non esiste un sistema di riferimento assoluto come l'aveva ipotizzato Newton, in quanto tutti i sistemi di riferimento in moto traslatorio uniforme rispetto ad esso hanno le sue stesse proprietà e sono quindi indistinguibili da esso.

Classe di sistemi di riferimento inerziali

- Dati 2 sistemi di riferimento, sistema-A (SA) e sistema-B (SB), che supponiamo ***Inerziali***
- Qual' è la relazione tra i 2 sistemi?
  - Sappiamo cosa deve accadere: dato il moto di un punto materiale P, questo deve registrare le stesse "variazioni del suo stato di moto" (accelerazioni n.d.r) nei due sistemi di riferimento.



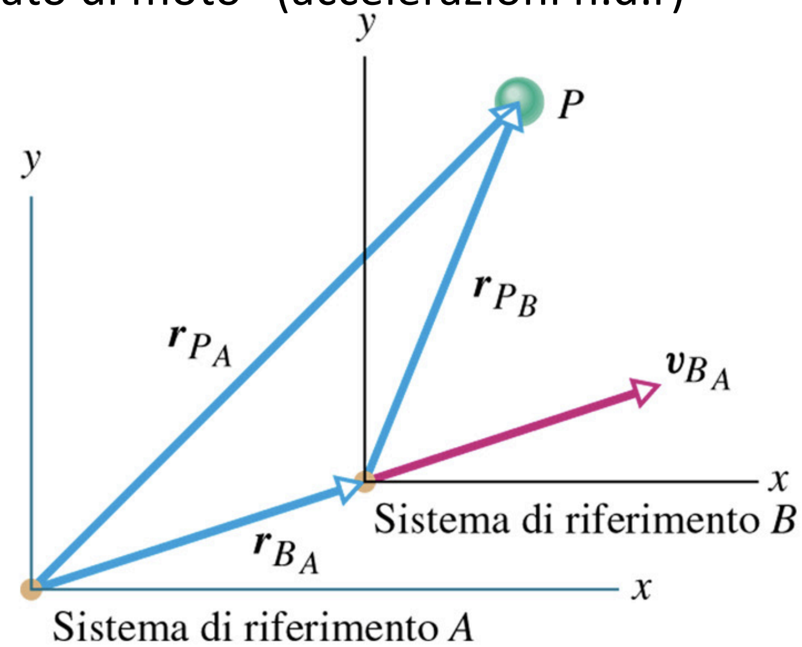
Classe di sistemi di riferimento inerziali

- Dati 2 sistemi di riferimento, sistema-A(SA) e sistema-B (SB), che supponiamo ***Inerziali***
- Qual' è la relazione tra i 2 sistemi?
  - Sappiamo cosa deve accadere: dato il moto di un punto materiale P, questo deve registrare le stesse "variazioni del suo stato di moto" (accelerazioni n.d.r) nei due sistemi di riferimento.

- Vediamo allora in quali condizioni questo può accedere: studiamo la posizione del punto P descritta nei due sistemi

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{PB} \quad \left(\frac{d}{dt}\right) \quad \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{PB}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right) \quad \vec{a}_{PA} = \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{PB}$$



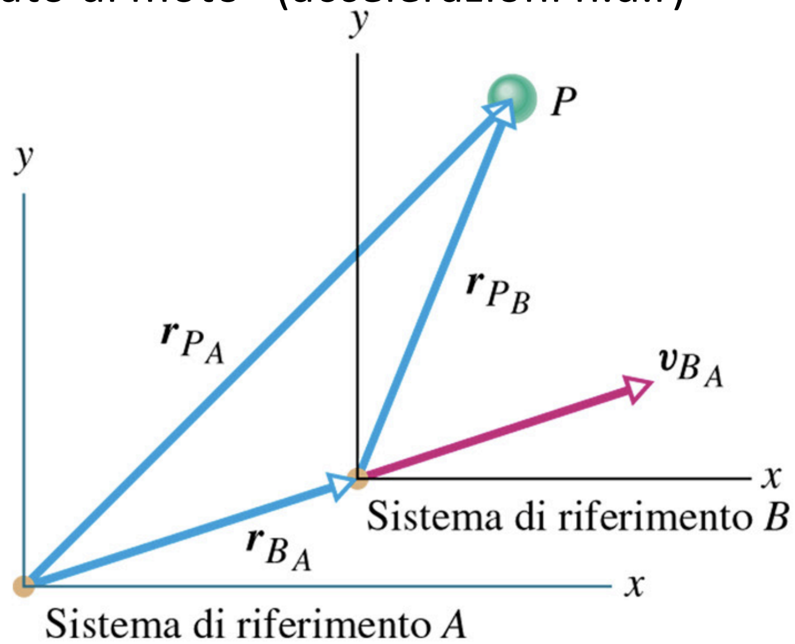
Classe di sistemi di riferimento inerziali

- Dati 2 sistemi di riferimento, sistema-A(SA) e sistema-B (SB), che supponiamo ***Inerziali***
- Qual' è la relazione tra i 2 sistemi?
  - Sappiamo cosa deve accadere: dato il moto di un punto materiale P, questo deve registrare le stesse "variazioni del suo stato di moto" (accelerazioni n.d.r) nei due sistemi di riferimento.

- Vediamo allora in quali condizioni questo può accedere: studiamo la posizione del punto P descritta nei due sistemi

$$\vec{r}_{PA}=\vec{r}_{BA}+\vec{r}_{PB} \quad \left(\frac{d}{dt}\right) \quad \vec{v}_{PA}=\vec{v}_{BA}+\vec{v}_{PB}$$

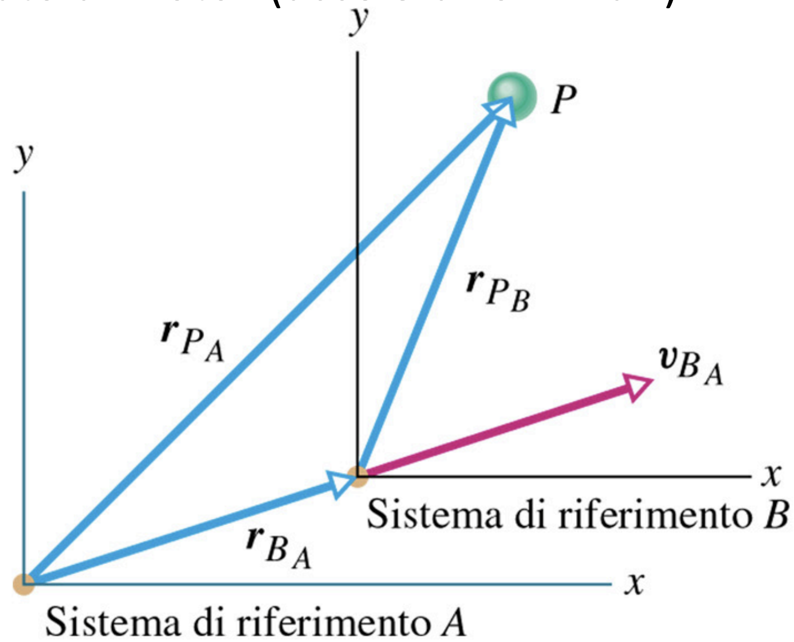
$$\left(\frac{d}{dt}\right) \quad \vec{a}_{PA}=\cancel{\vec{a}_{BA}}+\vec{a}_{PB} \quad \vec{a}_{BA} \text{ deve essere nulla}$$



Classe di sistemi di riferimento inerziali

- Dati 2 sistemi di riferimento, sistema-A(SA) e sistema-B (SB), che supponiamo ***Inerziali***
- Qual' è la relazione tra i 2 sistemi?
  - Sappiamo cosa deve accadere: dato il moto di un punto materiale P, questo deve registrare le stesse "variazioni del suo stato di moto" (accelerazioni n.d.r) nei due sistemi di riferimento.

- Vediamo allora in quali condizioni questo può accedere: studiamo la posizione del punto P descritta nei due sistemi



$$\vec{r}_{PA}=\vec{r}_{BA}+\vec{r}_{PB} \quad \left(\frac{d}{dt}\right) \quad \vec{v}_{PA}=\vec{v}_{BA}+\vec{v}_{PB}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right) \quad \vec{a}_{PA}=\cancel{\vec{a}_{BA}}+\vec{a}_{PB} \quad \vec{a}_{BA} \text{ deve essere nulla}$$

- Se B è un sistema inerziale affinché lo sia anche il sistema A il moto relativo tra essi deve essere un moto rettilineo uniforme
  - ***La classe dei sistemi di riferimento inerziali è costituita da sistemi tutti in moto relativo rettilineo uniforme***

Velocita' relativa

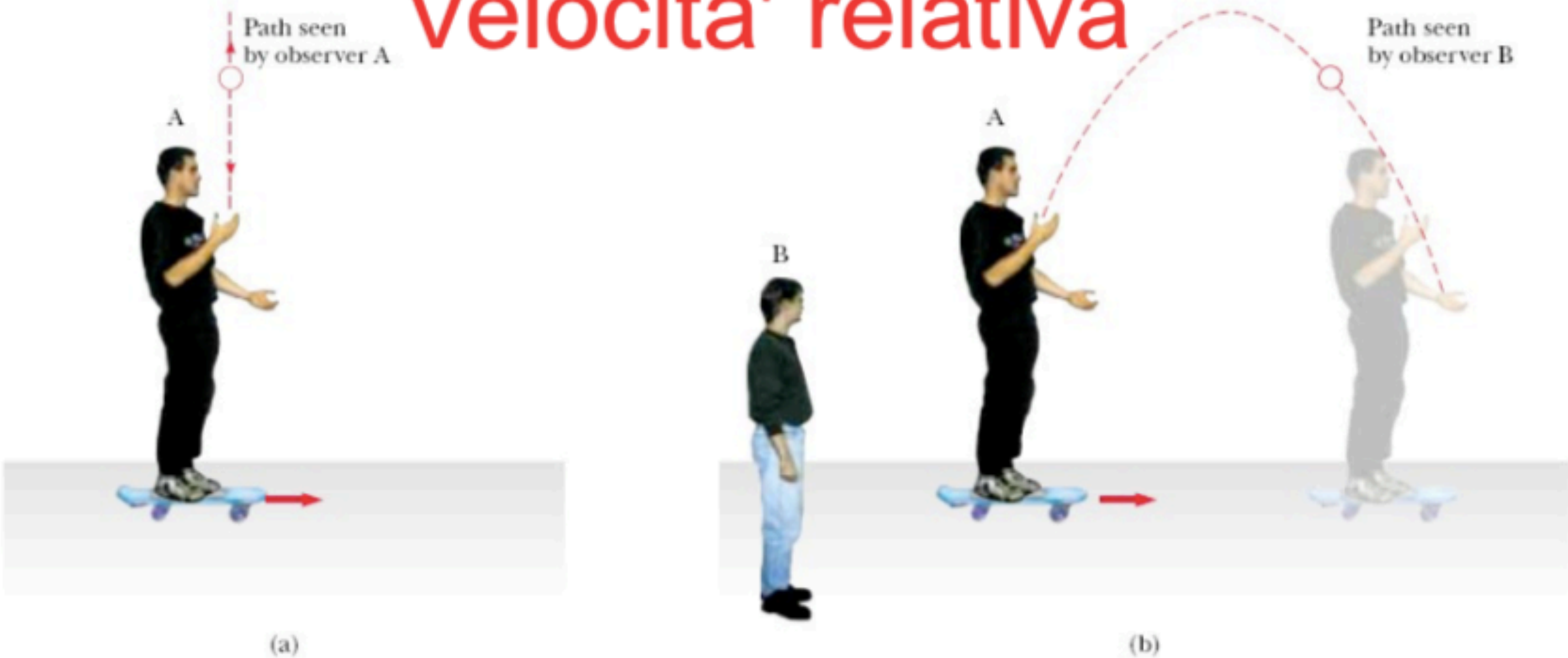


Figure 4.22 (a) Observer A on a moving skateboard throws a ball upward and sees it rise and fall in a straight-line path. (b) Stationary observer B sees a parabolic path for the same ball

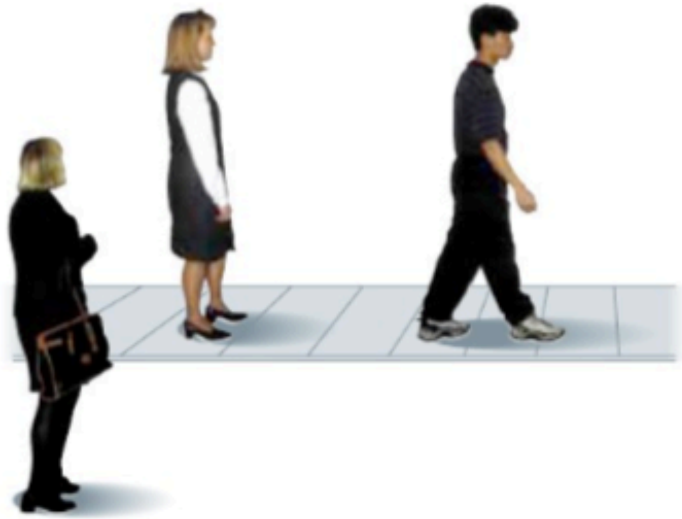


Figure 4.21 Two observers measure the speed of a man walking on a moving beltway. The woman standing on the beltway sees the man moving with a slower speed than the woman observing from the stationary floor.

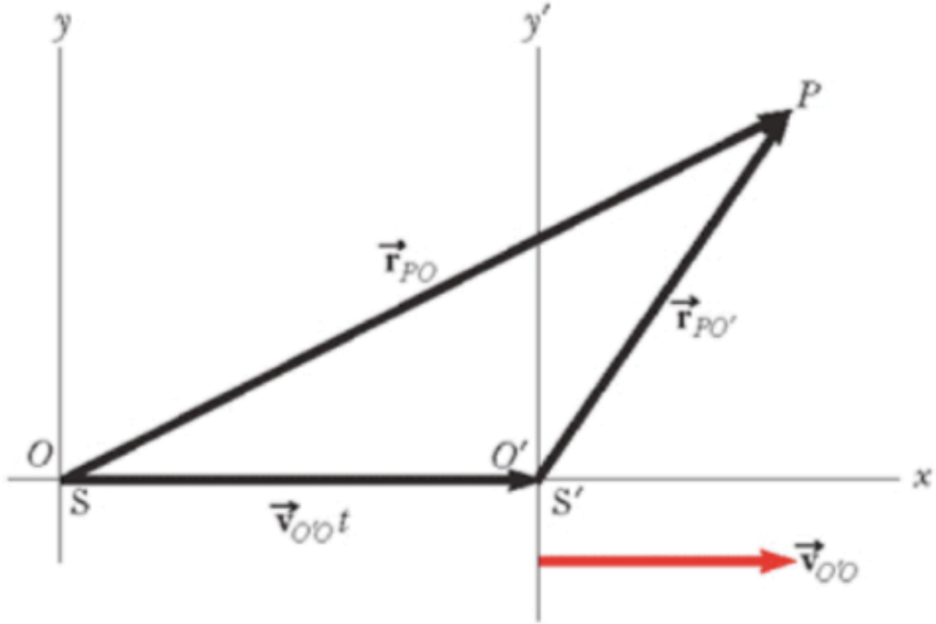
Relatività galileiana

Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma

Velocità relativa 2

- Il sistema di riferimento $\mathcal{S}$ è *stazionario o di laboratorio*

- Il sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ è in movimento con velocità (detta *di trascinamento*) $\vec{v}_0$ *costante*



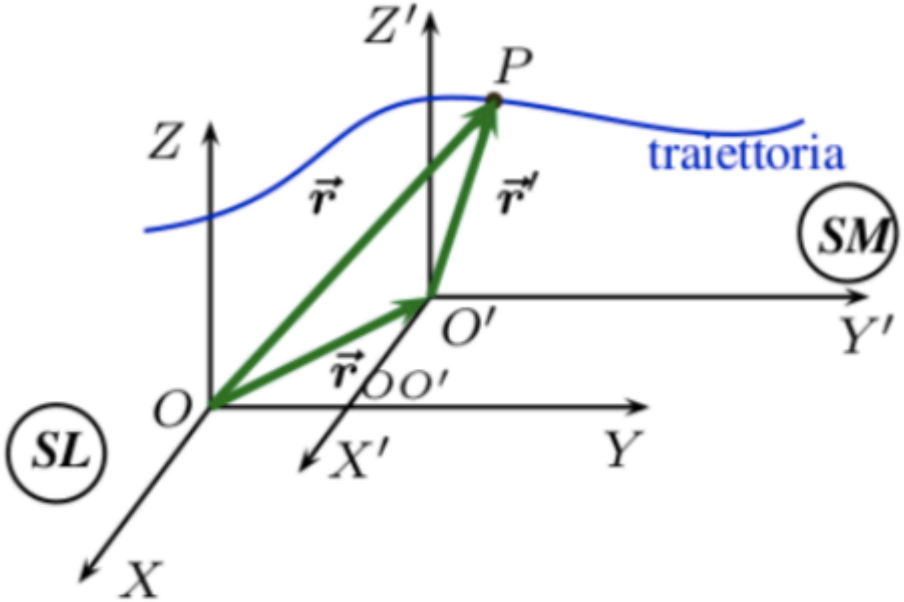
- Al tempo $t = 0$ le origini di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ coincidono. Vale: $\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}_0 t}$

- Derivando tale relazione: $\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0}$ (*trasformazione di Galileo*)

- Derivando nuovamente: $\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,'}$ perché $\vec{v}_0$ è costante

Velocità e accelerazione di trascinamento

Consideriamo ora il caso in cui il sistema di riferimento $\mathcal{SM}$ (*sistema mobile*) è in moto con velocità $\vec{v}_t$ e accelerazione $\vec{a}_t$ (che assumiamo costante) rispetto al sistema di riferimento $\mathcal{SL}$ del laboratorio

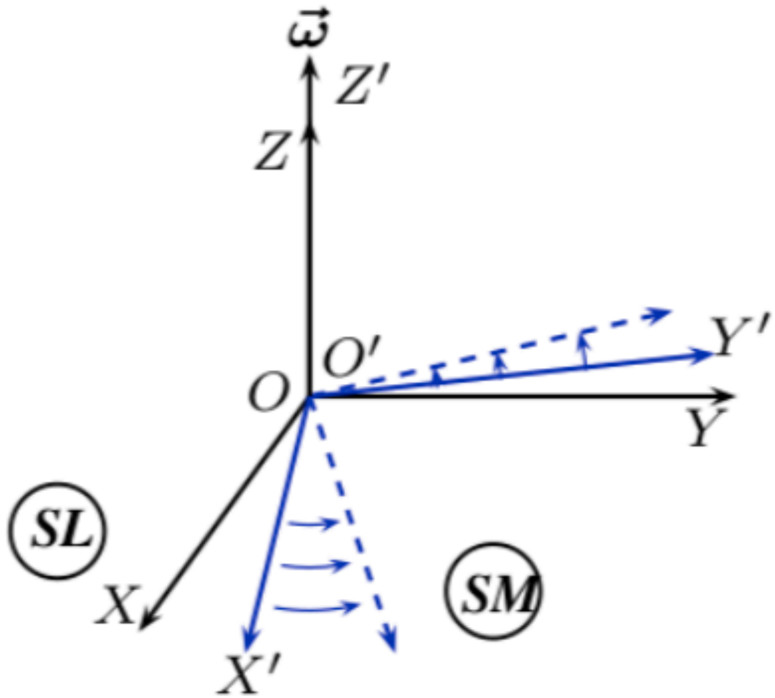


- La relazione fra le posizioni diventa $\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{OO'}(t)}$
- Derivando tale relazione: $\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_t,}$ con $\vec{v}_t = \dfrac{d\vec{r}_{OO'}}{dt}$
- Derivando nuovamente: $\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_t}$ dove $\vec{a}_t = \dfrac{d\vec{v}_t}{dt}$

a_t è detta *accelerazione di trascinamento*. Se $\vec{a} = 0$, $\vec{a}\,' = -\vec{a}_t$.

Sistemi di riferimento rotanti

Consideriamo ora il caso in figura: il sistema mobile $\mathcal{SM}$ (*ruota*) con velocità angolare $\vec{\omega}$ (assunta costante) rispetto al sistema di riferimento $\mathcal{SL}$ del laboratorio



- La rotazione di $\mathcal{SM}$ conferisce ai suoi punti una velocità di trascinamento $\boxed{\vec{v}_t = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$ che dipende dalla posizione

- L'accelerazione di trascinamento $\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}_t}{dt}$ per i punti del $\mathcal{SM}$ diventa

$$\boxed{\vec{a}_t = \vec{\omega} \times \vec{v}_t = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r}_\perp} \quad (*)$$

dove $\vec{r}_\perp$ è la proiezione di $\vec{r}$ sul piano di rotazione (non è altro che l'accelerazione centripeta del moto rotatorio).

Sistemi di riferimento rotanti (2)

- Relazione fra velocità $\vec{v}$ di un punto materiale nel sistema $\mathcal{SL}$ e $\vec{v}\,'$ nel sistema $\mathcal{SM}$: $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_t$ ovvero $\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}.}$

- La relazione fra accelerazioni richiede un po' di attenzione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r})$$

ma $\vec{v}\,'$ varia nel tempo sia per effetto del moto nel $\mathcal{SM}$ che per effetto della rotazione rispetto al $\mathcal{SL}$. Scrivendo $\vec{v}\,' = \hat{\mathbf{i}}' v'_x + \hat{\mathbf{j}}' v'_y + \hat{\mathbf{k}}' v'_z$ si trova che $\frac{d\vec{v}\,'}{dt} = \vec{a}\,' + \vec{\omega} \times \vec{v}\,'$, con $\vec{a}\,' = \hat{\mathbf{i}}' \frac{dv'_x}{dt} + \hat{\mathbf{j}}' \frac{dv'_y}{dt} + \hat{\mathbf{k}}' \frac{dv'_z}{dt}$, da cui ricordando la (*) si trova infine

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' - \omega^2 \vec{r}_\perp + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'.}$$

Se $\vec{a} = 0$ nel $\mathcal{SL}$, nel $\mathcal{SM}$ $\vec{a}\,' = \omega^2 \vec{r}_\perp - 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$.

Il termine $\omega^2 \vec{r}_\perp$ è detto *accelerazione centrifuga*.
Il termine $-2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$ è noto come *accelerazione di Coriolis*.