Teorema delle funzione implicita

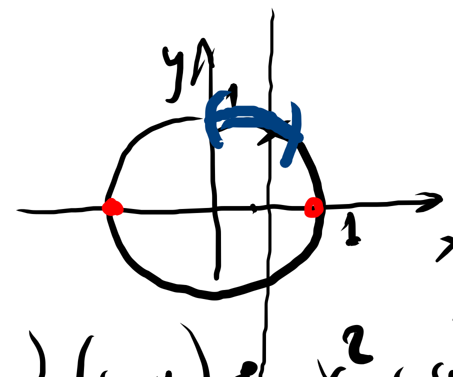
(di U. Dini)

1° $G : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ A aperto

(1) $G(x,y) = 0$ "risolvere"

$$\cancel{\Updownarrow} \; ??$$

$$y = y(x)$$



Es. $G(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$$\{(x,y) : G(x,y) = 0\} = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

non è grafico

Th (U. Dini, versione 2D)

Sia $(x_0,y_0) \in A$ tale che G è C^1 in un intorno di (x_0,y_0) ed inoltre

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$$

Allora, esiste un intorno U di (x_0,y_0) e una funzione C^1 $\underline{y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ in un intorno di x_0 tale che

$$\{(x,y) : G(x,y) = 0\} \cap U = \{(x, y(x))\} \cap U$$

Esempio $\quad G(x,y) = x^2+y^2-1 \qquad A=\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 2y \neq 0 \quad \text{sse} \quad y = 0$$

(x_0,y_0) : $G(x_0,y_0)=0$ e $y_0 \neq 0$

allora per questi (x_0,y_0) sono soddisfatte le condizioni del th. di U. Dini

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2=1 \\ y_0\neq 0 \end{cases} \iff (x_0,y_0) \notin \{(-1,0),(1,0)\}$$

1) $-1 < x_0 < 1$, $y_0 > 0$, Allora $G(x,y) = 0 \iff$

$\iff x^2+y^2 = 1 \iff$

$\iff y = \sqrt{1-x^2}$

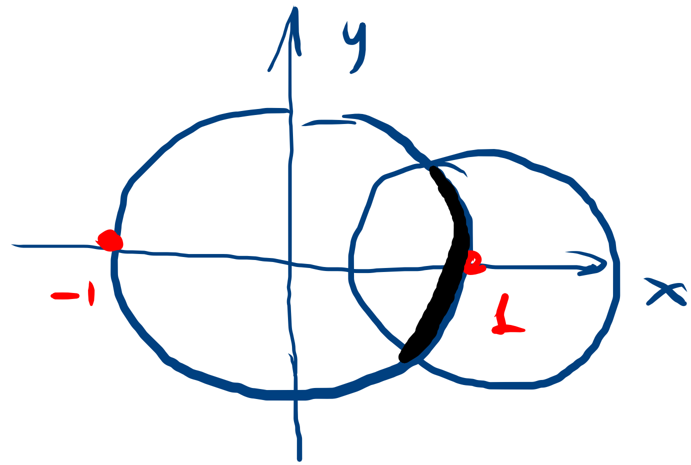
in un intorno di (x_0, y_0)

2) $-1 < x_0 < 1$, $y_0 < 0$, Allora $G(x,y) = 0 \iff$

$\iff x^2+y^2 = 1 \iff$

$\iff y = -\sqrt{1-x^2}$

3) Cosa accade nei punti $(-1,0)$ e $(1,0)$



$\{(x,y): G(x,y)=0\}$
non è grafico di
$y=y(x)$

MA $\quad \dfrac{\partial G}{\partial x}(x_0,y_0) = 2x_0 = \pm 2 \neq 0$

$x_0 = \pm 1,$
$y_0 = 0$

Allora, per il th. di U. Dini, $\{(x,y): G(x,y)=0\}$ in un intorno di (x_0,y_0) è grafico di una funzione C^1 $\quad x = x(y)$

Formulazione più generale del Th. di U. Dini

Th. $(x_0, y_0) \in A$, G è C^1 in un intorno di (x_0, y_0) e

$$\nabla G(x_0, y_0) \neq 0$$

Allora esiste un intorno $\bar{U}$ di (x_0, y_0) tale che

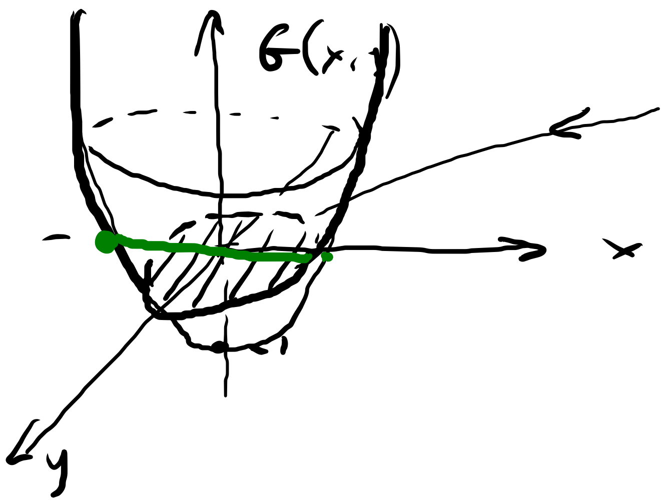
$\{(x,y) : G(x,y) = 0\} \cap \bar{U}$ è grafico di una funzione C^1 $y = y(x)$ oppure $x = x(y)$

(girando opportunamente il sistema di coordinate)

Quando non vale il th di U. Dini.

Es. $G(x,y) := \max\left(x^2+y^2-1,\ 0\right) =$

$$= \left(x^2+y^2-1\right) \vee 0$$



$z = x^2+y^2-1$

(paraboloide di rotazione attorno a Oz)

$$\left\{(x,y) : G(x,y)=0\right\} = \left\{(x,y) : \underset{\substack{\Updownarrow \\ x^2+y^2\le 1}}{x^2+y^2-1 \le 0}\right\}$$

2° Caso n-dimensionale

$$G : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$G = G(x_1, \dots, x_n)$$

Th. Sia $\bar{x} \in A$: G è C^1 di un intorno di $\bar{x}$, e in più

$$\nabla G(\bar{x}) \neq 0$$

Allora esiste un intorno U di $\bar{x}$ tale che $\{x : G(x) = 0\} \cap U$ è grafico di una funzione C^1 di $(n-1)$ variabile.

In particolare $\frac{\partial G}{\partial x_n}(\bar{x}) \neq 0$, allora

$$\{x : G(x) = 0\} \cap U = \{x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})\} \cap U$$

con f funzione C^1 di un intorno di $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$

Es 1) $G = G(x,y)$; $(\bar{x},\bar{y})$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$$

$G(x,y) = 0 \iff y = y(x)$ in un intorno di $(\bar{x},\bar{y})$

Trovare $y'(x)$

Sol. $G(x,y(x)) = 0$ in un intorno di $\bar{x}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dx} G(x,y(x)) = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} y' = 0$$ in un intorno di $\bar{x}$

ovvero

$$\boxed{y'(x) = \frac{-\frac{\partial G}{\partial x}(x)}{\frac{\partial G}{\partial y}(x)}}$$

2) $\quad G = G(x_1, \dots, x_n) \qquad \bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$

$$\frac{\partial G}{\partial x_n}(\bar{x}) \neq 0$$

in un intorno di $\bar{x}$

$$G(x) = 0 \iff x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$$ per una

qc f C^1 in un intorno di $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$

Trovare $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n-1$

Sol. $\quad G(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$

in un intorno di $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\text{——} , \text{——} \Big) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_j} + \frac{\partial G}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \implies$$

$$\implies \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}) = - \frac{\dfrac{\partial G}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))}{\dfrac{\partial G}{\partial x_n}(\text{——}, \text{——}, \text{——})}$$

$$\nabla_{\!p} f = - \frac{\nabla_{(n-1)} G}{\frac{\partial G}{\partial x_n}}$$

$n-1$ dimensionale

le prime $n-1$ componenti del gradiente n dimensionale

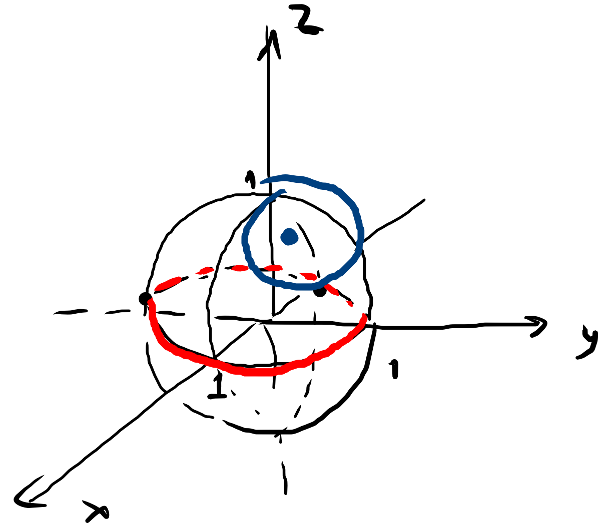
Es $\quad G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$$G(x,y,z)=0 \iff x^2+y^2+z^2=1$$

$$\Updownarrow$$

$$z = z(x,y) \;?$$

$$0 \neq \frac{\partial G}{\partial z} = 2z$$



$z_0 > 0 \implies z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$z_0 < 0 \implies z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$

in un intorno di (x_0, y_0, z_0)

Consideriamo per esempio il caso $z_0 > 0$ e verifichiamo il cont delle derivate di $z(x,y)$

.) Th. di Dini:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial z}} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}$$

$(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial y} \Big/ \frac{\partial G}{\partial z} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$$

.) Conto diretto

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{1-x^2-y^2} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2-y^2}} \cdot (-\cancel{2}x) =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = -\frac{x}{z}$$

Analogamente per $\frac{\partial z}{\partial y}$

•) E cosa succede se $z_0 = 0$?

$$\Updownarrow$$

$x_0^2 + y_0^2 = 1$

equatore

In questo caso $\frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 2z_0 = 0$

e sfera $\{G = 0\}$ non è grafico di $z = z(x, y)$

MA $\frac{\partial G}{\partial x} = 2x_0 \neq 0$ se $x_0 \neq 0$

Allora se $x_0 \neq 0 \implies$

la sfera $\{G = 0\}$ in un intorno di (x_0, y_0, z_0)

è grafico di $x = x(y, z)$

$\frac{\partial G}{\partial y} = 2y_0 \neq 0$ se $y_0 \neq 0$

la sfera $\{G = 0\}$ in un intorno di (x_0, y_0, z_0) è grafico di $y = y(x, z)$

Massimi e minimi vincolati

Esercizio

Trovare massimi e minimi della funzione $f(x,y) = 2x+y$ sulla circonferenza $\partial B_2((1,0))$

"vincolo"

di raggio 2 con centro in $(1,0)$

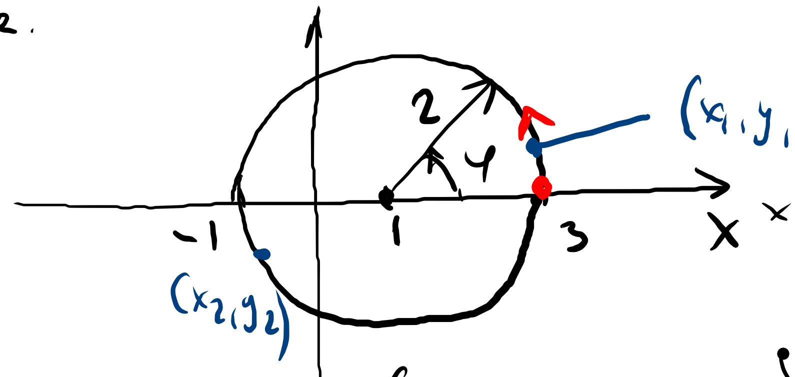
$$\begin{cases} f(x,y) \longrightarrow \max/\min \\ \text{Vincolo} \quad (x,y) \in S \end{cases}$$

dato

2 metodi per trovare max/min vincolati

1 metodo : parametrizzazione

Idea: "parametrizzare S" ovvero rappresentare S come (sostegno di) curva/superficie parametrica.



In generale $\partial B_R(x_0, y_0)$ può essere parametrizzata, ad esempio, come

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\varphi \\ y = y_0 + R\sin\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

Nel nostro caso $\begin{cases} x = 1 + 2\cos\varphi \\ y = 2\sin\varphi \end{cases}$

$$f(x,y) = f\big(x(\varphi), y(\varphi)\big) = 2x(\varphi) + y(\varphi) =$$

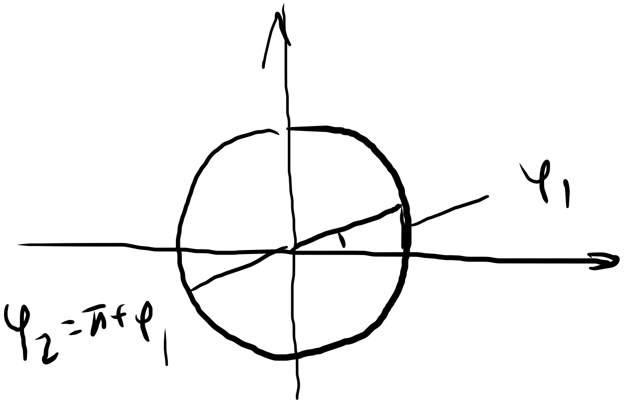
$$= 2(1 + 2\cos\varphi) + 2\sin\varphi =$$

$$= 2 + 2\sin\varphi + 4\cos\varphi = g(\varphi)$$

$$g'(\varphi) = 2\cos\varphi - 4\sin\varphi = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$$



$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \approx 0{,}46$$

$$\varphi_2 = \pi + \varphi_1 = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2\cos\varphi_1 = 1 + 2\cos \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \\ y_1 = 2\sin\varphi_1 = 2 \sin \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \end{cases}$$

e analogamente (x_2, y_2)

$$f(x_1, y_1) = 2(1 + 2\cos\varphi_1) + 2\sin\varphi_1$$

$$\left[\begin{array}{l} f(x_2, y_2) = 2(1 + 2\cos\varphi_2) + 2\sin\varphi_2 < 2 < f(x_1, y_1) \\ f(x_3, y_3) = f(3, 0) = 6 \end{array}\right.$$

$$x_3 = 1 + 2\cos 0 = 3$$

$$y_3 = 2\sin 0 = 0$$

$$g'_+(\varphi)\Big|_{\varphi=0} = -4\cancel{\sin 0}^{\,0} + 2\cos 0 = 2 \Rightarrow (3, 0)$$ non è punto di max

(x_1, y_1) – punto di massimo di f

$$f = f(x_1, y_1)$$

(x_2, y_2) — — " — minimo di f

$$f = f(x_2, y_2)$$

2 <u>metodo</u>

$$\begin{cases} 2x + y \longrightarrow \text{max/min} \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \longleftarrow \text{vincolo in forma implicita} \end{cases}$$

Regola di moltiplicatori di Lagrange.

Regola di moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{cases} f(x,y) \longrightarrow \max/\min \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

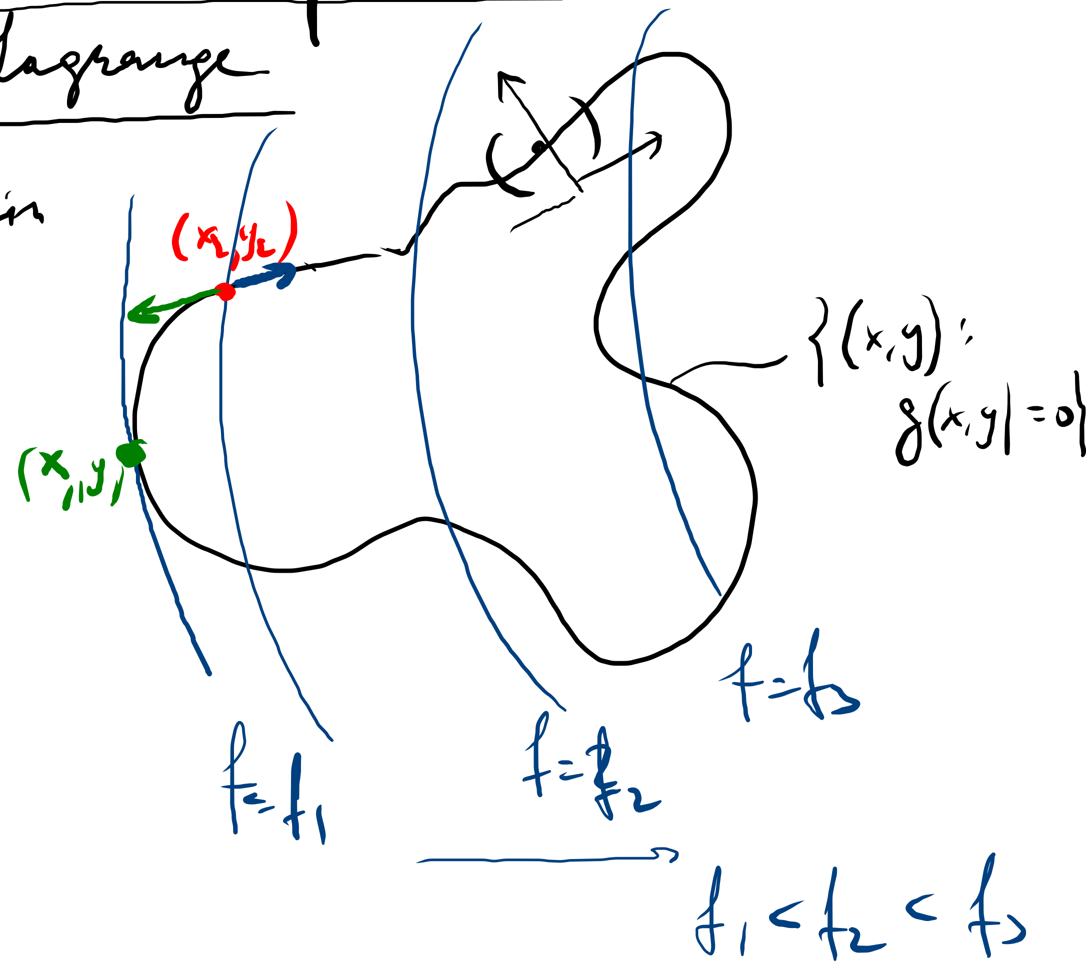
normale all $\{f = f(x_1,y_1)\}$

normale all $\{g = 0\}$

$$\nabla f(x_1,y_1) \parallel \nabla g(x_1,y_1)$$

allineati

$$\nabla f(x_2,y_2) \nparallel \nabla g(x_2,y_2)$$



$$\nabla f \parallel \nabla g \iff \nabla f = \lambda \nabla g \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

Ovvero, vale la seguente regola:

Th (sul moltiplicatore di Lagrange)

Sia (x_0, y_0) un punto tale che sia f che g sono C^1 in un suo intorno, e $f(x_0, y_0) = \max_{(x,y):\, g(x,y)=0} f(x,y)$ min

Allora o $\nabla g(x_0, y_0) = 0$

o $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$

per un qualche $\lambda \in \mathbb{R}$

moltiplicatore di Lagrange

Operativamente

$\nabla f = -\lambda g \iff \nabla L = 0$

$L(x,y) := f + \lambda g$

funzione di Lagrange

$\left(\nabla L = \nabla f + \lambda \nabla g = 0 \iff \nabla f = -\lambda \nabla g \right)$

Quindi il th. dice:

caso irregolare

$\to$ o $\nabla g(x_0, y_0) = 0$

regolare

$\to$ o $\nabla L(x_0, y_0) = 0$

dove $L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

(per un qualche $\lambda \in \mathbb{R}$)

moltiplicatore di Lagrange

riformulazione equivalente

$$L(x,y) := \lambda_0 f(x,y) + \lambda_1 g(x,y)$$

Allora $\nabla L(x_0, y_0) = 0$

per qualche coppia di moltiplicatori di Lagrange $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 \neq 0$$

Verifichiamo:

$$\nabla L(x_0, y_0) = 0 \iff$$

$$\lambda_0 \nabla f(x_0, y_0) + \lambda_1 \nabla g(x_0, y_0) = 0$$

<u>Caso 1</u> $\lambda_0 = 0 \implies \lambda_1 \neq 0$

$$\cancel{\lambda_1} \nabla g(x_0, y_0) = 0$$

<u>Caso 2</u> $\lambda_0 \neq 0 \implies \nabla f(x_0, y_0) + \overset{\lambda}{\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \nabla g(x_0, y_0) = 0$

Quindi, regola da ricordare:

Regola di moltiplicatori di Lagrange nella forma di Fritz John

se (x_0, y_0) è punto di max/min (locale) di f su $\{g=0\}$ e sia f che g sono C^1 nell'interno di (x_0, y_0), allora

$\exists\, (\lambda_0, \lambda_1)$ — moltiplicatori di Lagrange;

$\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$

$$\nabla_{(x,y)} L(x, y; \lambda_0, \lambda_1)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = 0, \quad \lambda_0^2 + \lambda_1^2 \neq 0$$

Torniamo all'esempio:

$$\begin{cases} 2x+y \to \max/\min \\ (x-1)^2+y^2=4 \end{cases}$$

$f(x,y) = 2x+y$

$g(x,y) = (x-1)^2+y^2-4$

$$L(x,y) = \lambda_0 (2x+y) + \lambda_1 \left((x-1)^2+y^2-4\right)$$

$$\nabla L = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2\lambda_0 + 2\lambda_1(x-1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \lambda_0 + 2\lambda_1 y = 0 \\ (x-1)^2+y^2=4 \end{cases}$$

~~Caso 1~~ $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq 0 \Rightarrow x = 1$

$y = 0$

$(x-1)^2+y^2 = 0 \neq 4$

Caso 2 $\lambda_0 \neq 0$

$$\begin{cases} 1+\lambda(x-1) = 0 \\ 1+2\lambda y = 0 \\ (x-1)^2+y^2=4 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 1-\frac{1}{\lambda}$$

$y = -1/2\lambda$

$$\left(1-\frac{1}{\lambda}-1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 4$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 4$$

$$5/4\lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{5}{16}$$

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{4} \Rightarrow x = 1-\frac{1}{\lambda} = 1 \mp \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$y = -\frac{1}{2\lambda} = \mp \frac{2}{\sqrt{5}}$$

I pt. di restrizione sono

$$(x_1, y_1) = \left(1+\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$ punto di massimo

$$(x_2, y_2) = \left(1-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$ punto di minimo

$$f(x,y) = 2x + y$$

$$f(x_2, y_2) < f(x_1, y_1)$$