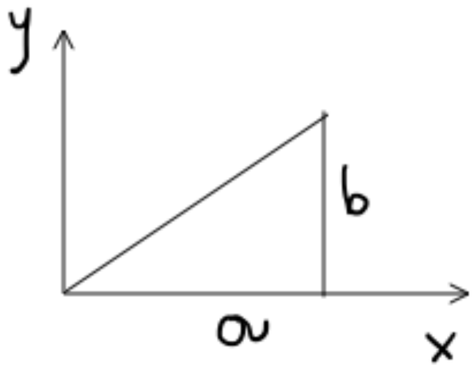
Es. del 22/4/ Ciocci

Esercizi di esame da
https://www.pi.infn.it/~ciocci/

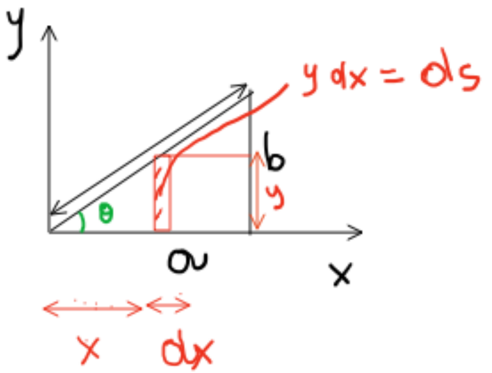
Esercizio: Determinare il C.M. di un triangolo rettangolo di densità uniforme $\sigma = \rho_S$, massa M e lati a, b



$$\frac{M}{S} = \rho_S = \frac{M \cdot 2}{ab}$$

$$X_{cm} \equiv \frac{1}{M} \int dm\, x \qquad Y_{cm} \equiv \frac{1}{M} \int dm\, y$$

$$X_{cm} = \frac{1}{M} \int \underbrace{\rho_S\, ds}_{dm}\, x \qquad Y_{cm} = \frac{1}{M} \int \rho_S\, ds\, y$$



Baricentro in x "affetto" in x

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int \rho_s \, ds \, x$$

$$ds = y \, dx$$

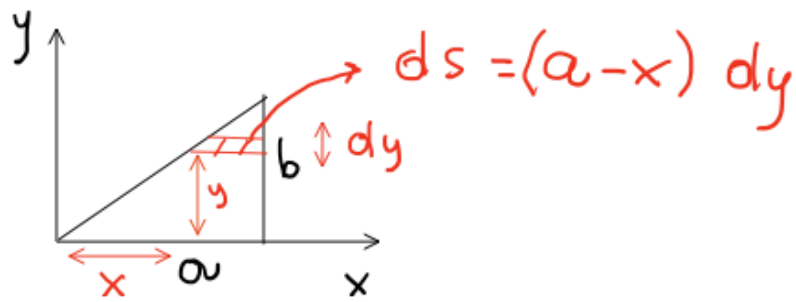
$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^a \rho_s \, y \, dx \, x$$

$$y = x \, tg\,\theta$$

$$x_{cM} = \frac{1}{M} \rho_s \int_0^a x^2 \, tg\,\theta \, dx$$

$$tg\,\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{M} \frac{2M}{ab} \frac{b}{a} \frac{a^3}{3}$$

$$x_{cM} = \frac{2}{3} a$$



Baricentro in y "affetto" in y

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int \rho_s \, ds \, y$$

$$y_{CM} = \frac{\rho_s}{M} \int_0^b (a - x) \, dy \, y$$

$$y = x \, tg\,\theta \Rightarrow x = y / tg\,\theta$$

$$y_{CM} = \frac{\rho_s}{M} \int_0^b \left(a - \frac{y}{tg\,\theta}\right) y \, dy$$

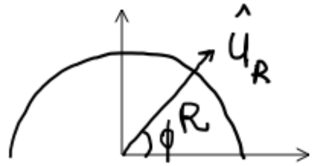
$$y_{CM} = \frac{2M}{ab} \cdot \frac{1}{M} \left(\frac{a b^2}{2} - \frac{a}{b} \frac{b^3}{3} \right)$$

$$y_{CM} = \frac{b}{3}$$

Si calcoli la posizione del C.M. di un semianello rigido omogeneo di massa m e raggio R

La massa del semianello è data da

$m = \rho_\ell \cdot \pi R$ $\quad \rho_\ell$ densità lineare $\Rightarrow \rho_\ell = \dfrac{m}{\pi R}$



$$m \vec{r}_{CM} = \int \rho_\ell \, d\ell \cdot \vec{r}$$

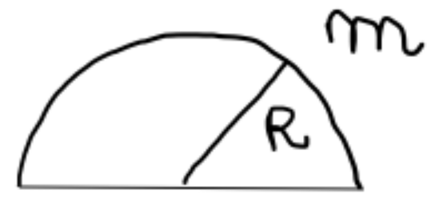
$$\vec{r} = R\cos\phi \, \hat{u}_x + R \sin\phi \, \hat{u}_y \qquad d\ell = R\,d\phi$$

$$m\, x_{CM} = \rho_\ell \int_0^\pi R\,d\phi \cdot R\cos\phi = 0 \;\Rightarrow\; x_{CM} = 0$$

$$m\, y_{CM} = \rho_\ell \int_0^\pi R\,d\phi \cdot R \sin\phi = \rho_\ell R^2 \left. -\cos\phi \right|_0^\pi = 2\rho_\ell R^2$$

$$m\, y_{CM} = 2 \frac{m}{\pi R} \cdot R^2 = 2\frac{m}{\pi} R \;\Rightarrow\; y_{CM} = \frac{2R}{\pi}$$

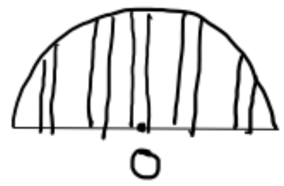
Si trovi il baricentro di una lamina omogenea piana di spessore trascurabile avente la forma di un semicerchio di massa m e raggio R



$$\rho_S = \frac{m\,2}{\pi R^2} \qquad \vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\int \rho_S \, ds \cdot \vec{r}$$

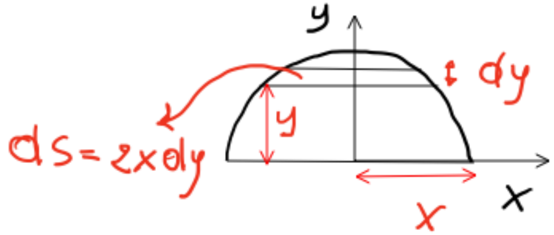
baricentro in x ⇒ "affetto" in x

distribuzione simmetrica ⇒ $X_{CM} = 0$



baricentro in y ⇒ "affetto" in y

$$y_{CM} = \frac{1}{m}\int \rho_S \, ds \; y$$



$$y_{CM} = \frac{1}{m}\rho_S \int_0^R 2x \, dy \cdot y$$

dall'equazione del cerchio $y^2 = R^2 - x^2$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \qquad dy = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx$$

per $\begin{cases} y = R & x = 0 \\ y = 0 & x = R \end{cases}$

$$y_{CM} = \frac{1}{m}\rho_S 2 \int_R^0 x \, \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\, dx \sqrt{R^2-x^2}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{m}\rho_S 2\int_R^0 x \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}dx\sqrt{R^2-x^2}$$

$$y_{CM} = -\frac{2\rho_S}{m}\int_R^0 x^2 dx = \frac{2\rho_S}{m}\frac{R^3}{3} = \frac{2}{m}\cdot\frac{2m}{\pi R^2}\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$$

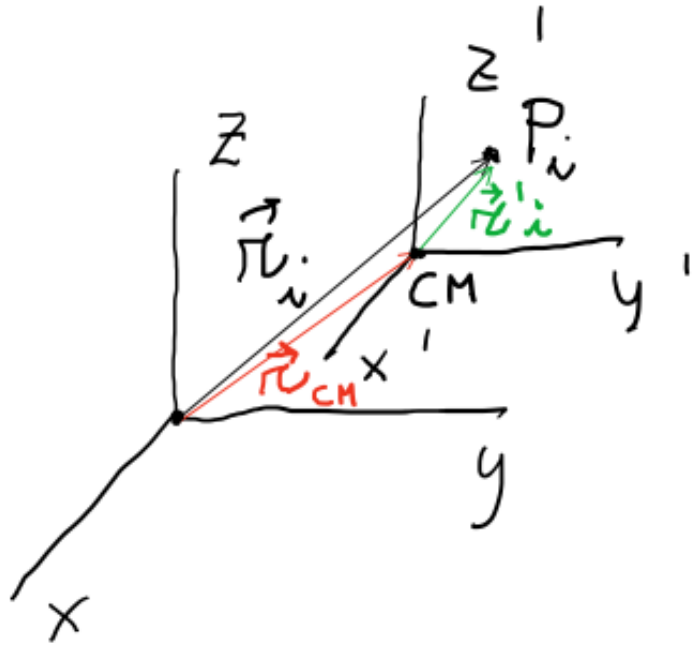
I^0 Teorema di Köenig: per l'energia cinetica

L'energia cinetica di un sistema di punti materiali è la somma dell'energia cinetica che avrebbe il corpo se tutta la sua massa fosse concentrata nel centro di massa e l'energia cinetica relativa che possiede il sistema rispetto al centro di massa, ovvero:

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}M_{tot}v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i'^2$$

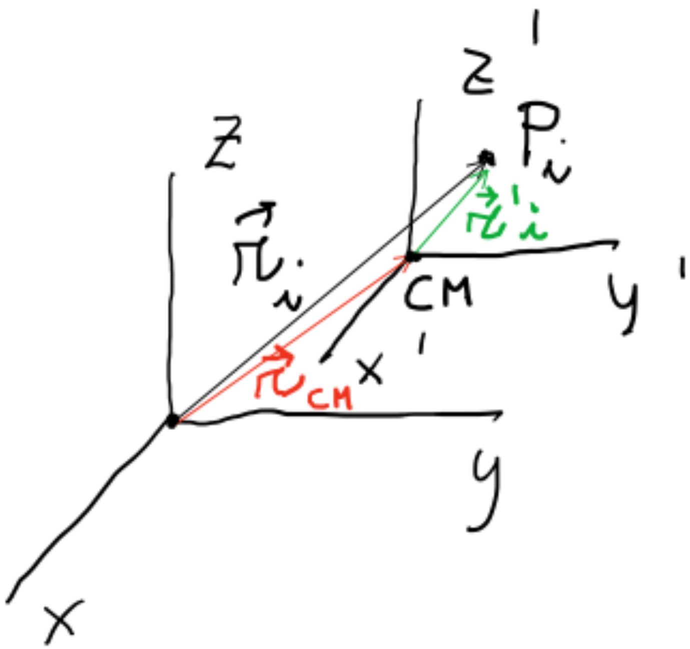
Dimostrazione

Prendiamo un sistema di punti materiali; per studiare l'insieme di punti, prendiamo due sistemi riferimento, uno esterno e inerziale, che chiameremo S_0 (x,y,z), il secondo è il sistema del centro di massa S_{CM} (x',y',z').



Primo passo determinazione della velocità di un punto materiale i-esimo del sistema rispetto a S_0 usando la relazione tra le coordinate del punto nei due sistemi di riferimento:

$$\begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i' \\ \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i' \end{cases}$$



$$
\begin{cases}
\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i^{\,\prime} \\
\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i^{\,\prime}
\end{cases}
$$

Nota:

Il sistema scelto S_{CM} ha l'origine nella posizione del CM e assi paralleli a S_0

a) non ruota

b) trasla con la velocità del CM ($\vec{v}_{CM}$)

c) la sua velocità può essere non costante l'energia cinetica di un sistema di punti materiali è data da: $K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$

mentre per un corpo continuo e rigido: $K = \frac{1}{2}\int v^2 \, dm$

Dimostreremo il Teorema per il caso discreto, il risultato è lo stesso nel caso di un corpo continuo.

$$\begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i^{\,\prime} \\ \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i^{\,\prime} \end{cases}$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i\right) =$$

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i^{\,\prime}\right)\left(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i^{\,\prime}\right) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{\prime 2} + \sum_i m_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i^{\,\prime}$$

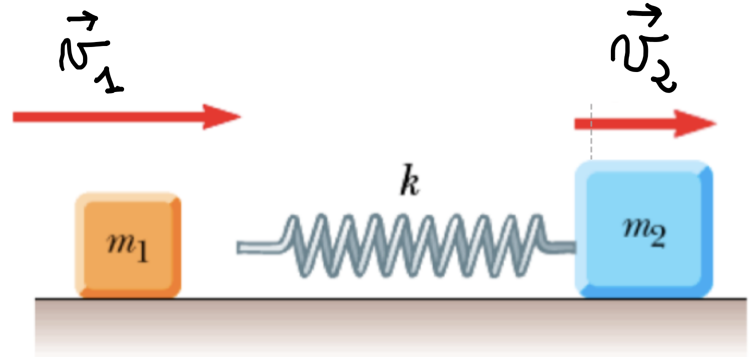
$$K = \frac{1}{2} M_{tot} v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{\prime 2} + \vec{v}_{CM} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i^{\,\prime}}_{=0}$$

$\Rightarrow$ è la velocità del CM in S_{CM}!

$$K = \frac{1}{2} M_{tot} v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{\prime 2}$$

C.V.D.

Due corpi di masse m_1 e m_2 (P.M), sono su un piano orizzontale privo di attrito, sul secondo c'è una molla né dilatata né compressa (massa nulla e lunghezza a riposo l_0) di costante K. I due corpi si muovono con velocità v_1 e v_2 note con $v_1 > v_2$ come in figura:



Determinare la massima compressione della molla

Dati v_1, m_1, v_2, m_2, K

Non ci sono forze dissipative $\Rightarrow$ L'energia si conserva

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^{f\,2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{f\,2} + \frac{1}{2} K \Delta x^2$$

Possiamo usare due vie per risolvere il problema

① Teorema di Köenig

$$E_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 + \frac{1}{2} K \Delta x^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2) V_{cm}^2 + K'_f + \frac{1}{2} K \Delta x^2$$

con $K'_f = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1f} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2f}$

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2) V_{cm}^2 + K'_f + \frac{1}{2} K \Delta x^2$$

Non ci sono forze esterne lungo $x \Rightarrow P_{cm}^x = \text{cost}$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{cost} (>0) = P_{cm} = \text{cost}$$

$$\vec{P}_{cm} = P_{cm} \hat{x} \qquad \vec{P}_{cm} = (m_1 + m_2) \vec{V}_{cm}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{P_{cm}}{m_1 + m_2} \hat{x}$$

La compressione della molla è max per $K'_f = \emptyset$

$$K'_f = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1f} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2f}$$ quindi le due masse

sono ferme in SCM!

$$* \begin{cases} \vec{v}'_{2f} = \vec{v}_{2f} - \vec{v}_{CM} = 0 \\ \vec{v}'_{1f} = \vec{v}_{1f} - \vec{v}_{CM} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{2f} = v_{CM} \\ v_{1f} = v_{CM} \end{cases}$$

$$* \quad \vec{r} = \vec{r}_{cm} + \vec{r}'$$

Quando la molla raggiunge la max compressione i due blocchi hanno la stessa velocità!

$$v_{1f} = v_{2f} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_{cm}^2 + K'_f + \frac{1}{2} K \Delta x^2$$

La compressione della molla è max per $K'_f = 0$

e $v_{cm} = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ $\Rightarrow$ sostituendo v_{cm}

Risolvendo l'equazione otteniamo

$$\Delta X = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) v_{cm}^2}{K}}$$

Oppure ② quando la molla raggiunge la compressione max la 1 è ferma nel sistema di riferimento della 2 per cui nel laboratorio

$$v_{1f} = \underbrace{v'^{1}_{Rel}}_{0} + v_{2f} \Rightarrow v_{1f} = v_{2f} = v$$

q.m. $\Rightarrow$ $m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = (m_1 + m_2) V$

$$= (m_1 + m_2) V_{cm}$$

dalla conservazione della q.m

$$(m_1 + m_2) V_{cm} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$V_{cm} = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2)$$

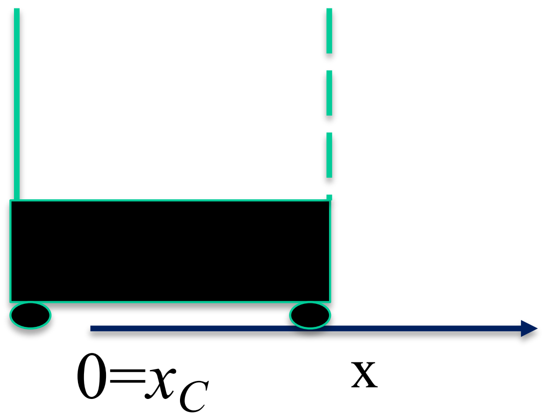
Dalla conservazione dell'Energia

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{CM}^2 + \frac{1}{2} K \Delta x^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 + \frac{1}{2} K \Delta x^2$$

Risolvendo l'equazione otteniamo in entrambi i casi ① e ②

$$\Delta x = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) v_{CM}^2}{K}}$$

Esercizio 7). Un uomo di massa m si trova all'estremo di un carrello di massa M e lunghezza l, in quiete, libero di muoversi su un binario orizzontale. Trascurando l'attrito dinamico e viscoso determinare di quanto si sposta il carrello se l'uomo si reca all'estremo opposto.



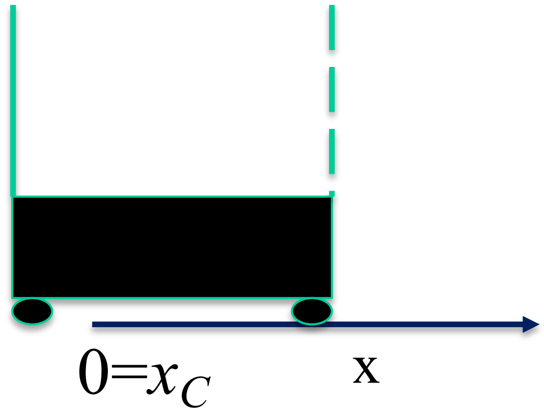
Nota: il carrello si sposta quando l'uomo è arrivato nell'estremo opposto.

Soluzione. Trascurando l'attrito dinamico e viscoso determinare di quanto si sposta il carrello se l'uomo si reca all'estremo opposto.

La risultante delle forze esterne (forza di gravità e reazione vincolare) agenti sul sistema (uomo più carrello) è nulla in quanto la forza peso è equilibrata dalla reazione vincolare: pertanto il suo centro di massa, inizialmente in quiete, resta tale dopo lo spostamento dell'uomo.

Fissato allora un asse x solidale col binario, con origine nel centro di massa C, prima e dopo lo spostamento dell'uomo,
per la coordinata x di C si avrà:

$$x_C = \left(\frac{m x_m + M x_M}{m+M}\right) = \left(\frac{m x'_m + M x'_M}{m+M}\right) = 0$$



dove x_m e x_M sono le ascisse iniziali dei centri di massa dell'uomo e del carrello e x'_m, x'_M quelle finali.

Nota: il carrello si sposta mentre l'uomo si sposta verso l'estremo opposto ma la posizione di C resta la stessa!

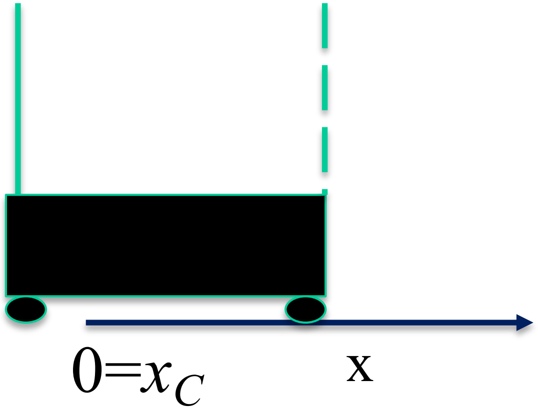
Dalla relazione precedente si ottiene:

$$M(x'_M - x_M) = -m(x'_m - x_m) \quad \Longrightarrow M\Delta x_M = -m\Delta x_m$$

essendo Δx_M e Δx_m gli spostamenti del carrello e dell'uomo rispetto al riferimento fisso.

$$M(x'_M - x_M) = -m(x'_m - x_m) \quad \Longrightarrow M\Delta x_M = -m\Delta x_m$$

Questa equazione contiene due incognite (le coordinate X del carrello e dell'uomo alla fine dello spostamento), per cui è necessaria un'altra equazione per risolvere il problema. Quest'ultima si ricava osservando che la distanza tra le ascisse iniziali dei centri di massa del carrello e dell'uomo è pari a $l/2$ e che, analogamente, la distanza tra le ascisse finali dei centri di massa dell'uomo e del carrello è pari a $l/2$, cioè:



$$x_M - x_m = \frac{l}{2}$$

$$x'_m - x'_M = \frac{l}{2}$$

Sommando le due relazioni precedenti si ottiene quindi:

$$x_M - x_m + x'_m - x'_M = l$$

Ricordando le definizioni di Δx_M e Δx_m la relazione precedente diventa:

$$\Delta x_m = l + \Delta x_M$$

Quando l'uomo è arrivato all'estremo opposto lo spostamento del carrello è Δx_M e vale:

$$M\Delta x_M = -m(l + \Delta x_M) \quad \Longrightarrow \Delta x_M = -\left(\frac{m}{m+M}\right) l$$

Trascurando l'attrito dinamico e viscoso determinare di quanto si sposta il carrello se l'uomo si reca all'estremo opposto.

$$M\Delta x_M = -m\underbrace{(l + \Delta x_M)}_{\Delta x_m} \quad \Longrightarrow \Delta x_M = -\left(\frac{m}{m+M}\right) l$$

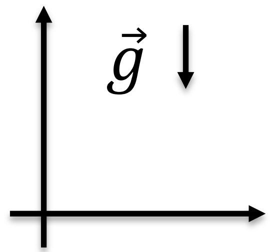
Lo spostamento del carrello è in verso opposto allo spostamento relativo dell'uomo.

Di quanto si è spostato l'uomo lungo il binario?

Nel sistema di riferimento inerziale esterno lo spostamento dell'uomo è:

$$\Delta x_m = l + \Delta x_M = l - \left(\frac{m}{m+M}\right) l = l\left(1 - \frac{m}{m+M}\right) = \left(\frac{M}{m+M}\right) l$$
$$= -\left(\frac{M}{m}\right) \Delta x_M$$

Esempio 1). Una mozzarella di massa 0.1 kg cade verticalmente e si spiaccica a terra. Al momento dell'impatto la sua velocità ha modulo $10\ \mathrm{m/s}$, ed il tempo dell'urto è $\tau = 0.1\ \mathrm{s}$. Calcolare la forza media che il pavimento esercita sulla mozzarella. Assumere per i calcoli g=10 m/s^2



Soluzione.

Applicando il teorema dell'impulso si ha:

$$\vec{I} = \int_0^\tau \vec{F}^{est} dt' = \vec{P}(\tau) - \vec{P}(0) = 0 - (-0.1 \times 10)\ \mathrm{kg\ m/s}\ \hat{y} = 1\mathrm{kg\ m/s}\ \hat{y} \Longrightarrow$$

indicando con $\vec{F}$ la forza esercitata dalla pedana:

$$\int_0^\tau \vec{F}^{est} dt' = \int_0^\tau \vec{F} dt' + M\vec{g}\,\tau = 1\mathrm{kg\ m/s}\ \hat{y}$$

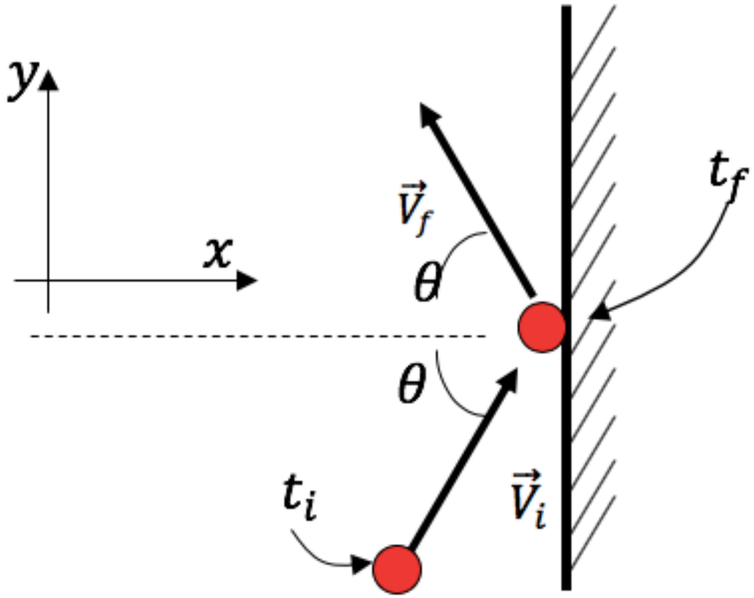
$$\langle\vec{F}\rangle + M\vec{g} = \frac{\vec{I}}{\tau} = \ 10\ \mathrm{kg\ m}/s^2\ \hat{y} \Rightarrow \langle\vec{F}\rangle = \ 10\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{s^2}\hat{y} + \mathrm{Mg}\ \hat{y} = 10\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{s^2}\hat{y} + 1\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{s^2}\hat{y} = 11\ \mathrm{N}\ \hat{y}$$

L'impulso totale delle forze è $1\ \mathrm{kg\ m/s}$, per cui la forza totale media è 10 N ($\langle\vec{F}\rangle + M\vec{g}$): poiché la forza di gravità ha modulo ~ 1 N, il pavimento esercita una forza complessiva di circa 11 N.

Nota: se si trascura la gravità si effettua un'approssimazione per difetto pari all'impulso della forza di gravità durante l'urto ($\sim 0.1\ \mathrm{kg\ m/s}$) diviso per la variazione di impulso, cioè una approssimazione del 10 %.

Esempio 2). Urto elastico di una pallina di massa M contro il muro. Esprimere l'impulso della parete in base ai dati in Figura. $|\vec{V}_i| = |\vec{V}_f| = V_0$

Soluzione.



$$\vec{P}_i = M(V_0 \cos\theta, V_0 \sin\theta)$$
$$\vec{P}_f = M(-V_0 \cos\theta, V_0 \sin\theta)$$

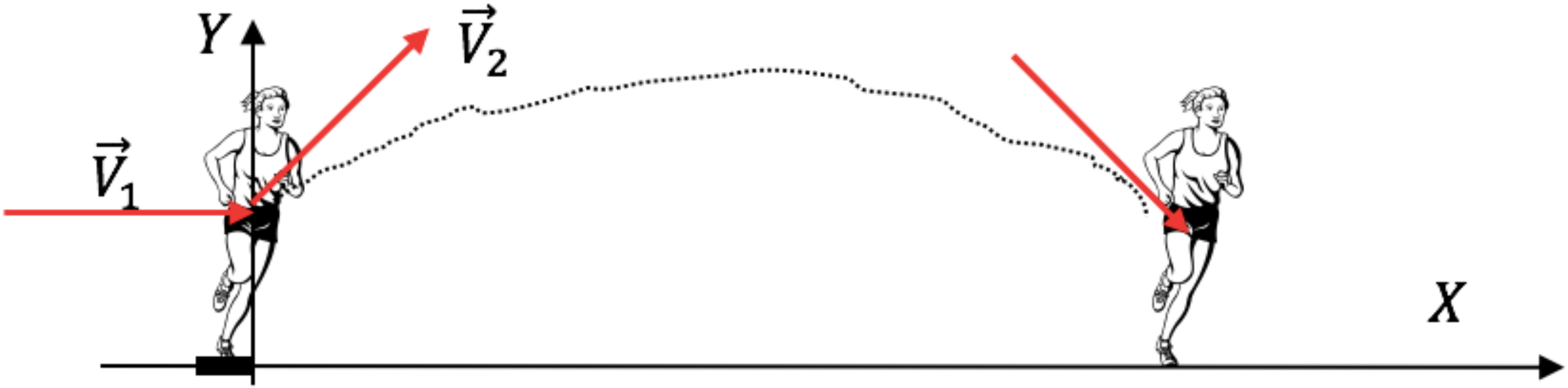
$$\vec{I} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = M(-2V_0 \cos\theta, 0)$$

La somma delle forze esterne lungo y è zero, mentre il valor medio della componente x è dato da:

$$\left(\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}\right)_x = \left(\frac{\vec{P}_f - \vec{P}_i}{t_f - t_i}\right)_x = \frac{-2MV_0 \cos\theta}{t_f - t_i}$$

Esercizio 1). Un atleta, di massa $M = 80\ \mathrm{kg}$, effettua un salto in lungo. Al momento della battuta la sua velocità è orizzontale ed ha modulo $|\vec{V}_1| = 10\ \mathrm{m/s}$ ed il tempo di battuta è $\tau = 0.1\ \mathrm{s}$. Subito dopo la battuta la velocità del centro di massa dell'atleta conserva lo stesso modulo, ma è ruotata di 45 gradi verso l'alto.

Calcolare il valore medio della forza (componente orizzontale e verticale) che la pedana effettua sull'atleta durante la battuta.



Un atleta, di massa $M = 80$ kg, effettua un salto in lungo. Al momento della battuta la sua velocità è orizzontale ed ha modulo $|\vec{V}_1| = 10$ m/s ed il tempo di battuta è $\tau = 0.1$ s. Subito dopo la battuta la velocità del centro di massa dell'atleta conserva lo stesso modulo, ma è ruotata di 45 gradi verso l'alto.

Calcolare il valore medio della forza (componente orizzontale e verticale) che la pedana effettua sull'atleta durante la battuta. Assumere per i conti g=10 m/s^2

$$\vec{V}_1 = 10\hat{x}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{V}_2 = 10\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + 10\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y}$$

Soluzione:

$\langle\vec{F}\rangle + M\vec{g} = \left(\frac{\vec{P}_2 - \vec{P}_1}{\tau}\right) = M\left(\frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\tau}\right)$ da cui:

$$\langle\vec{F}\rangle = \left(\frac{\vec{P}_2 - \vec{P}_1}{\tau}\right) - M\vec{g} = M\left(\frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\tau}\right) - M\vec{g} =$$

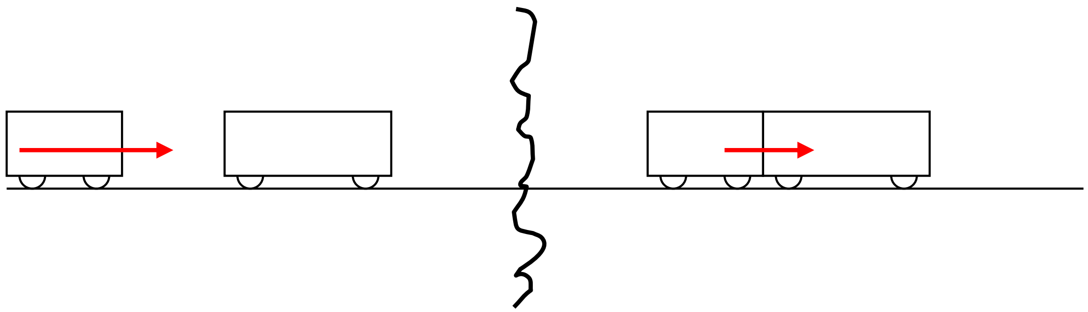
$$= \left[\frac{80\left(10\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + 10\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} - 10\hat{x}\right)}{0.1} + 80 \cdot 10\hat{y}\right] \text{N}$$

$$= 800\left[10\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\hat{x} + \left(10\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\hat{y}\right]\text{N} = (-2343\ \text{N}, 6441\ \text{N})$$

Esercizio 2). Su un binario privo di attrito un carrello A $(M_A = 50\,\mathrm{kg})$, che si muove con una velocità $|\vec{V}_1| = 4\,\mathrm{m/s}$, urta in un tempo $\tau = 0.3\,\mathrm{s}$ un secondo carrello B $(M_B = 150\,\mathrm{kg})$, che è fermo sul binario. Nell'urto i due carrelli si saldano insieme e procedono con una velocita finale $\vec{V}_2$ sul binario. Nell'urto non ci sono forze esterne ai carrelli ad eccezione della gravità e della reazione normale del piano di appoggio.

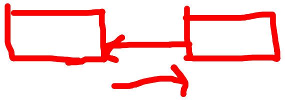
1) Calcolare $\vec{V}_2$.

2) Calcolare la forza media fra i carrelli durante l'urto.



Soluzione.

1) Calcolare $\vec{V}_2$.



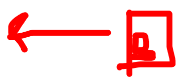
abbiamo solo forze esterne verticali la cui risultante è nulla, il moto prima e dopo l'urto avviene lungo l'asse x, la quantità di moto è conservata:

$$\text{1)} \quad M_A\vec{V}_1 = (M_A + M_B)\vec{V}_2 \Longrightarrow \vec{V}_2 = \frac{M_A}{M_A+M_B}\vec{V}_1 \Longrightarrow \left|\vec{V}_2\right| = 1 \text{ m/s}$$

2) Calcolare la forza media fra i carrelli durante l'urto. $\boxed{\vec{P}(t) - \vec{P}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}^{est} dt'}$.

$$\text{2)} \ \vec{P}_B(\tau) - \vec{P}_B(0) = \langle \vec{F}_{A\to B}\rangle\tau \Longrightarrow \left|\langle \vec{F}_{A\to B}\rangle\right| = \frac{M_B\left|\vec{V}_2\right|}{\tau} = 500 \text{ N}$$

Naturalmente si può rispondere alla 2) anche utilizzando il primo carrello:



$$\vec{P}_A(\tau) - \vec{P}_A(0) = \langle \vec{F}_{B\to A}\rangle\tau \Longrightarrow \left|\langle \vec{F}_{B\to A}\rangle\right| = \frac{M_A\left(\left|\vec{V}_1\right| - \left|\vec{V}_2\right|\right)}{\tau} = 500\ N = \left|\langle \vec{F}_{A\to B}\rangle\right|$$

Nota $\langle \vec{F}_{B\to A}\rangle = -\langle \vec{F}_{A\to B}\rangle$

Esame di Fisica Generale del 23/02/2015

Due masse puntiformi m_1 = 4.0 kg e m_2 = 1.5 kg urtano da versi opposti un'asta di lunghezza L = 4.2 m e massa M = 1.7 kg (vedere figura sottostante). Le due masse si muovono con velocità di modulo, rispettivamente, v_1 = 4.2 m/s e v_2 = 1.6 m/s. L'urto (agli estremi dell'asta) è perfettamente anelastico e avviene nello stesso istante per entrambe le masse.

Si calcoli:

a) La velocità del centro di massa subito dopo l'urto e la distanza del centro di massa dal punto O (estremo dell'asta):

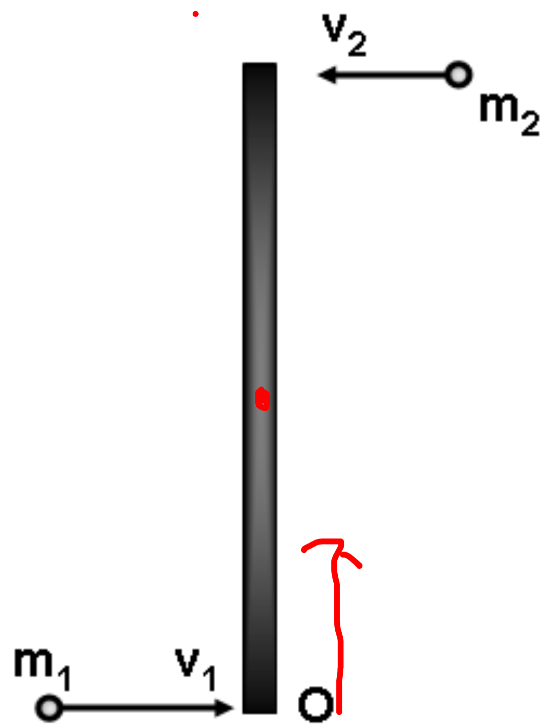
v_{cm} = ... d_{cm} = ...

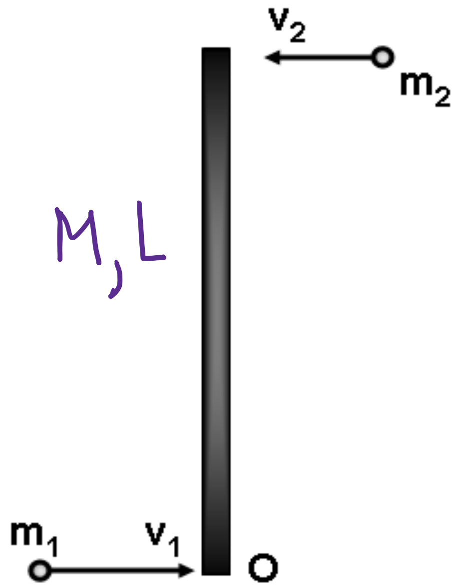
b) Il modulo della velocità angolare del sistema subito dopo l'urto:

ω_s = ...

c) L'energia meccanica dissipata nell'urto:

E_{diss} = ...





punti materiali $\begin{cases} v_1 = 4{,}2\ m/s \\ v_2 = 1{,}6\ m/s \end{cases}$ $m_1 = 4$ Kg, $m_2 = 1{,}5$ Kg

Asta $\{$ $L = 4{,}2$ m, $M = 1{,}7$ Kg

(1) m_1 e m_2 urtano contemporaneamente l'asta

(2) l'urto è anelastico

Nota: dal testo non ci sono forze esterne e il sistema NON È vincolato.

a)Si calcoli la velocità del centro di massa subito dopo l'urto e la distanza del centro di massa dal punto O (estremo dell'asta): v_{cm} = ... d_{cm} = ...

Non essendoci forze esterne $\vec{P}_i^{CM} = \vec{P}_f^{CM} = \text{cost}$ (da $(m_1 + m_2 + M)\vec{a}_{cm} = 0$)

$$M_{TOT}\vec{V}_{cm}^{\,i} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + M\vec{V} = (m_1 + m_2 + M)\vec{v}_{CM} = M_{TOT}\vec{v}_{cm}^{\,f}$$

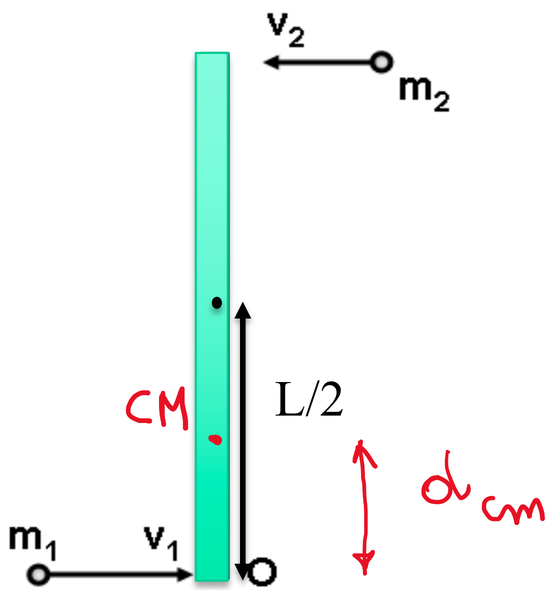
Non essendoci forze esterne $\vec{P}_i^{CM} = \vec{P}_f^{CM} = \text{cost}$ (da $(m_1+m_2+M)\vec{a}_{cm}=0$)

$$M_{TOT}\vec{V}_{cm}^{i} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + M\vec{V} = (m_1+m_2+M)\vec{v}_{CM} = M_{TOT}\vec{v}_{cm}^{f}$$

$$\vec{V}_{cm} = \text{cost} = \left(\frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1+m_2+M}, 0, 0\right) \Rightarrow V_{cm} = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1+m_2+M}$$

$V_{cm} = 2\,m/s$

a)Si calcoli la velocità del centro di massa subito dopo l'urto e la distanza del centro di massa dal punto O (estremo dell'asta): v_{cm} = ... d_{cm} = ...

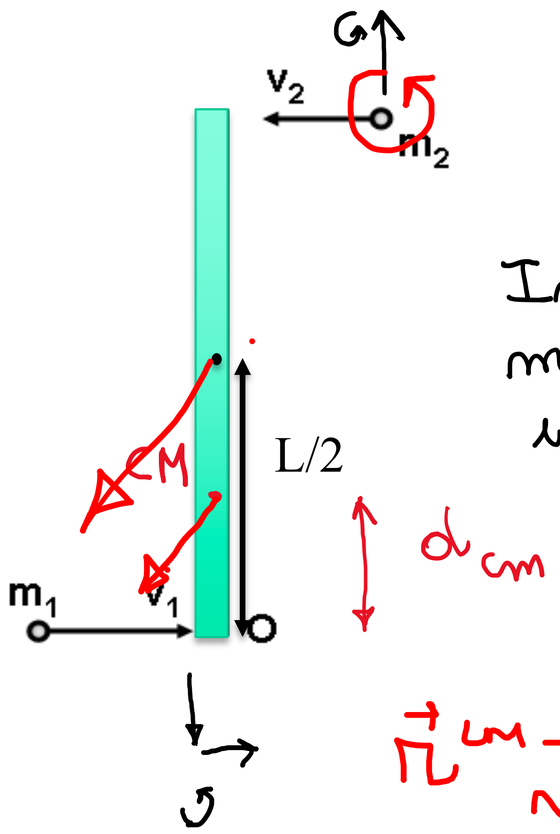


$$d_{cm} = \frac{m_1 \times \emptyset + m_2 L + M L/2}{m_1+m_2+M} = 1{,}37\,m$$

b) Si calcoli il modulo della velocità angolare del sistema subito dopo l'urto: ω_S = ...

Non ci sono forze esterne e il sistema non è vincolato

Se prendiamo come polo il CM $\quad \vec{M}^{CM} = \emptyset \Rightarrow \vec{L}^{CM} = cost$



Inoltre l'unica componente di $\vec{L}^{CM} \neq 0$ è L_z^{CM} $\qquad \vec{L}^{cm} = L_z^{cm}\hat{z}$

Indicando con L_{zi}^{CM} e L_{zf}^{CM} le componenti z del momento angolare un istante prima e un istante dopo l'urto:

$$L_{zi}^{CM} = m_1 v_1 d_{cm} + m_2 v_2 (L - d_{cm})$$

$$\vec{r}^{\,cm-m_2} \wedge m_2 \vec{v}_2$$

$$= I_z^{CM}\,\omega_S = L_{zf}^{CM} \Rightarrow \omega_S = \frac{L_{zi}^{CM}}{I_z^{CM}}$$

con $I_z^{CM} = I_{cm}^{ASTA} + M\left(L/2 - d_{cm}\right)^2 + m_1 d_{CM}^2 + m_2 (L - d_{CM})^2$

con $I_z^{CM} = I_{cm}^{ASTA} + M(L/2 - d_{cm})^2 + m_1 d_{CM}^2 + m_2 (L - d_{CM})^2$

$I_{cm}^{ASTA} = \frac{ML^2}{12}$ $\Rightarrow$ $\omega_S = \frac{L_{zi}^{CM}}{I_z^{CM}} = 1.3\, s^{-1}$

c)Si calcoli l'energia meccanica dissipata nell'urto: E_{diss} = ...

L'urto è anelastico quindi $E_f^{mecc} < E_i^{mecc}$

$E_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + M) v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_z^{CM} \omega_S^2$

$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ note!

$E_f - E_i = -3{,}4\ J$ $\Rightarrow$ L'energia persa nell'urto è 3,4 J

NOTE

ΔE = lavoro fatto da forze NC

$$T_f - T_i = U_i - U_f + \mathcal{L}_{NC}$$

$$T_f + U_f - (T_i + U_i) = \mathcal{L}_{NC}$$

$$\Delta E = \mathcal{L}_{NC}$$

$$T_f - T_i = \mathcal{L}_{Fin} + \mathcal{L}_{ext}$$

$$T_f - T_i = \mathcal{L}_{Fc} + \mathcal{L}_{Fnc}$$

backup

Quantità di moto e teorema dell'impulso

Definizione: si definisce **Quantità di moto** di un sistema di punti materiali il prodotto:

$$\boxed{\vec{P} = M\vec{V}_{CM} = \sum_i m_i \vec{V}_i}$$

Proprietà di $\vec{P}$:

- è una grandezza fisica **vettoriale**;
- $[\vec{P}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$
- Si calcola usando la definizione in due modi possibili
  - $\vec{P} = M\vec{V}_{CM}$ se conosciamo la massa totale e la velocità del centro di massa del sistema;
  - $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{V}_i$ se conosciamo massa e velocità di ogni costituente del sistema.

Ovviamente la definizione vale <u>anche per un singolo punto materiale</u>.
La quantità di moto è una grandezza che in molte situazioni fisiche (per es. i processi di urto) è <u>più significativa della massa e della velocità prese separatamente</u>.

Definizione: si definisce **Impulso di una forza** $\vec{F}$ fra due istanti di tempo t_0 e t l'integrale:

$$\boxed{\vec{I}_{t_0 \to t} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} dt'}$$

Proprietà di $\vec{I}_{t_0 \to t}$:

- è una grandezza fisica **vettoriale**;
- $[\vec{I}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$ come per la quantità di moto;
- In futuro incontrerete $\int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$: non confondeteli !

Teorema dell'impulso: la variazione della quantità di moto di un sistema è pari all'impulso totale delle forze esterne:

$$\boxed{\vec{P}(t) - \vec{P}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}^{est} dt'.}$$

Dimostrazione:

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} \vec{F}^{est} dt' = \int_{t_0}^{t} M\vec{a}_{CM} dt' = \left[M\vec{V}_{CM}\right]_{t_0}^{t} = M\vec{V}_{CM}(t) - M\vec{V}_{CM}(t_0) = \vec{P}(t) - \vec{P}(t_0)}$$

$$\vec{P}(t) - \vec{P}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}^{est} dt' = M\vec{V}_{CM}(t) - M\vec{V}_{CM}(t_0)$$

Nota:

- Dal teorema dell'impulso segue anche che: $$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}^{est}$$

  che è equivalente alla I eq. Cardinale per sistemi a massa costante, mentre la generalizza nel caso in cui <u>la massa di un sistema non sia costante</u> (per es. un razzo che espelle il carburante bruciato).

- Il teorema dell'impulso è utile per calcolare le <u>**forze impulsive**</u>, che sono molto intense, ma agiscono per un tempo molto breve rispetto a tutti gli altri tempi in gioco. In questi casi non ha senso pensare di misurare o determinare la forza in funzione del tempo, mentre è significativo l'effetto globale che produce, corrispondente alla variazione della quantità di moto del sistema a cui è applicata. Le forze impulsive sono rilevanti nei fenomeni di <u>**urto**</u>.

Se l'impulso delle forze esterne è **<u>nullo</u>** allora si ha la **<u>legge di conservazione della quantità di moto</u>**:

$$\int_{t_0}^{t} \sum \vec{F}^{est}\, dt' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{P}(t) = \vec{P}(t_0)$$

- $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$ e l'equazione precedente è vettoriale; pertanto <u>si può anche conservare solo una (o due) delle componenti</u>.
- La legge di conservazione della quantità di moto è utilizzata per il **<u>calcolo di uno stato finale</u>**, noto quello iniziale e le forze in gioco, nel caso in cui NON si sia interessati all'evoluzione temporale.
- La legge **è anche utilizzabile se** $\int_{t_0}^{t} \sum \vec{F}^{est}\, dt' \ll \vec{P}(t_0)$.
- In conclusione esistono **due situazioni standard in cui si può applicare questa legge di conservazione**:

i) La risultante delle forze esterne è nulla.

ii) Le forze esterne non sono nulle, ma esse sono limitate (per esempio la gravità) e la durata dell'interazione è trascurabile ($t - t_0 \to 0$).

- Come conseguenza importante, la **quantità di moto di un sistema isolato si conserva** e quindi anche la **quantità di moto dell'UNIVERSO è costante.**

$$\vec{P}(t) - \vec{P}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}^{est} dt'.$$

Se $\vec{P}(t) - \vec{P}(t_0)$=0 $\vec{P}(t)$=costante

N.B. $\vec{P}$ è la somma di più termini, ciascuno dei quali può variare: solo la somma deve rimanere costante.

Attenzione. Esistono parecchi casi in cui il tempo dell'urto è piccolo ($\mathrm{t} - \mathrm{t}_0 \to 0$) e le forze sono molto grandi ($F \to \infty$): in questi casi l'impulso può essere finito e non trascurabile, per cui la quantità di moto non si conserva. Questo **accade tipicamente per le reazioni vincolari**.