TRASFORMATE NOTEVOLI

$$e^{-\alpha|t|} \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{\alpha - j2\pi f} + \frac{1}{\alpha + j2\pi f} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$ BILATERA

$$e^{-\alpha t} \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$ MONOLATERA

TRASFORMATE NOTEVOLI

$$A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

$$A f_0\,\mathrm{sinc}^2(f_0 t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} A f_0 \cdot \frac{1}{f_0}\left(1 - \frac{|f|}{f_0}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)$$

$$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$$A f_0\,\mathrm{sinc}(f_0 t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} A f_0 \cdot \frac{1}{f_0}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_0}\right)$$

$$TCF\ \delta(t) = 1 \quad \forall f$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\alpha)\,d\alpha$$

50

$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

$$U(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

V. EFFICACE $x_{eff} = \sqrt{P_x}$

V. MEDIO $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$

POTENZA MEDIA $P_x = |x(t)|^2$

ENERGIA $\int_{-\infty}^{+\infty} P_x\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt$

SEGNALE PERIODICO $x(t) = x(t - mT_0)$ $\quad f_0 = \frac{1}{T_0}$ T_0 PERIODO

POTENZA MEDIA nei segnali periodici $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T_0}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt$

TRASFORMATA SERIE DI FOURIER $X_m = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,e^{-j2\pi m f_0 t}\,dt$

16 (TSF) si applica a segnali periodici

$$\delta(t) \Longleftrightarrow 1 \quad \forall f$$

$$\Rightarrow \delta(t-t_0) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} e^{-j2\pi f t_0}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = e^{-j2\pi f t_0}$$

PER LA DUALITÀ, se prendo:

$$e^{-j2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow \delta(-f-f_0)$$

$$e^{j2\pi(-f_0)t} \Longleftrightarrow \delta(f+f_0)$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow \delta(f-f_0)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{j2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow \delta(f-f_0) \\ e^{j2\pi(-f_0)t} \Longleftrightarrow \delta(f+f_0) \end{array}}$$

POTENZA MEDIA DI UN SEGNALE PERIODICO

63

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} |x(t)|^2\, dt \quad \text{nel tempo}$$

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 \quad \text{in frequenza}$$

PER SEGNALI PERIODICI

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt \quad \text{nel tempo}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df \quad \text{in frequenza}$$

PER SEGNALI APERIODICI AD EN. FINITA

DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA PER SEGNALI PERIODICI

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df \qquad S_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2\, \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

ANTITRASFORMATA SERIE DI FOURIER (ATSF)

17

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, e^{j2\pi n f_0 t}$$

SIMMETRIA HERMITIANA TSF 21

$x(t)$ è PERIODICO E REALE $\rightarrow x(t) = \overline{x}(t)$

$\Downarrow$

$$\boxed{X_{-n} = \overline{X}_n}$$

$|X_{-n}| = |\overline{X_n}|$ MODULO PARI

$\angle X_{-n} = -\angle X_n$ FASE DISPARI

SEGNALI PERIODICI REALI E PARI 22

$x(t)$ è periodico e TRASFORMABILE

$x(t)$ è REALE $\Rightarrow x(t) = \overline{x(t)}$

$x(t)$ è PARI $\Rightarrow x(t) = x(-t)$

$\Downarrow$

$X_{-n} = X_n$ è REALE E PARI

DISPARI

$x(t) = -x(-t)$

$\Downarrow$

$X_{-n} = -X_n$

$x(t) \rightarrow$ RE e DISP.

$X_n \rightarrow$ DISP. E IMM.

SEGNALI APERIODICI AD EN. FINITA 26

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \Rightarrow \text{ESISTE TCF}$$

TRASFORMATA CONTINUA DI FOURIER (TCF)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, e^{-j2\pi f t} \, dt$$

TCF $\Updownarrow$ ATCF

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \, e^{j2\pi f t} \, dt$$

VALGONO LE STESSE SIMMETRIE DI TSF

$x(t) \Leftrightarrow X(f)$ $\rightarrow$ DUALITA' 33

$X(t) \Leftrightarrow x(-f)$

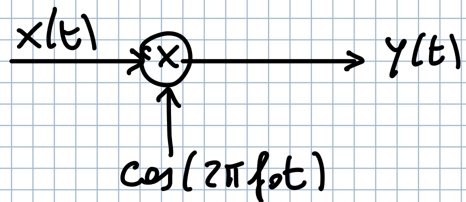
TH. DEL RITARDO (34) con DIM. $Y(f) = \int y(t) \; ---$

Ip. $\begin{cases} x(t) \Leftrightarrow X(f) \\ y(t) = x(t-t_0) \end{cases} \Rightarrow$ TH. $Y(f) = X(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$

TH. CAMBIAMENTO DI SCALA (35)

Ip. $\begin{cases} x(t) \Leftrightarrow X(f) \\ y(t) = x(\alpha t) \quad \alpha \neq 0 \end{cases} \Rightarrow Y(f) = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$

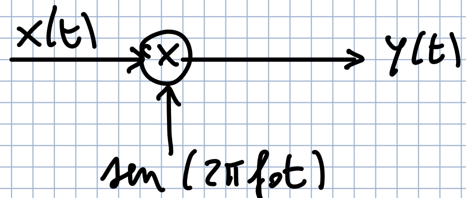
TH. MODULAZIONE (COSENO)



$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$

Ip. $\begin{cases} y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) \\ x(t) \Leftrightarrow X(f) \end{cases} \Rightarrow$ TH. $Y(f) = \frac{1}{2} X(f-f_0) + \frac{1}{2} X(f+f_0)$

TH. MODULAZIONE (COSENO)



$y(t) = x(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$

Ip. $\begin{cases} y(t) = x(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) \\ x(t) \Leftrightarrow X(f) \end{cases} \Rightarrow$ TH. $Y(f) = \frac{1}{2j} X(f-f_0) + \frac{1}{2j} X(f+f_0)$

TH. MODULAZIONE CON FASE GENERICA (38)

Ip. $\begin{cases} y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi) \\ x(t) \Leftrightarrow X(f) \end{cases} \Rightarrow Y(f) = \frac{e^{j\varphi}}{2} X(f-f_0) + \frac{e^{-j\varphi}}{2} X(f+f_0)$

TH. MODULAZIONE CON ESP. COMPLESSO (39)

Ip. $\begin{cases} y(t) = x(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \\ x(t) \Leftrightarrow X(f) \end{cases} \Rightarrow Y(f) = X(f-f_0)$

DUALITÀ: $x(t-t_0) \Leftrightarrow X(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$, $x(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f-f_0)$

TH. DERIVAZIONE (39)

$$\text{Ip.}\begin{cases} x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \\ y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \end{cases} \Rightarrow Y(f) = j2\pi f X(f)$$

TH. DELL' INTEGRAZIONE (40)

$$\text{Ip.}\begin{cases} x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \\ y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = 0 \end{cases} \Rightarrow Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

TEOREMA DELLA DERIVAZIONE IN FREQUENZA 43

$$\text{Ip.}\begin{cases} Y(f) = \frac{d}{df}X(f) \\ x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \end{cases} \Rightarrow y(t) = -j2\pi t\, x(t)$$

TEOREMA DELL' INTEGRAZIONE IN FREQUENZA 43

$$\text{Ip.}\begin{cases} Y(f) = \int_{-\infty}^{f} X(\alpha)\, d\alpha \\ x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)\, d\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = -\frac{x(t)}{j2\pi t}$$

TH. CONVOLUZIONE 44

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

$$\text{Ip.}\begin{cases} z(t) = x(t) \otimes y(t) \\ x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \\ y(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} Y(f) \end{cases} \Rightarrow Z(f) = X(f)\, Y(f)$$

PROPRIETA' DELLA CONVOLUZIONE 45

•) COMMUTATIVA

$$x(t) \otimes y(t) = y(t) \otimes x(t)$$

DIM.

$t - \tau = \tau'$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau')\, y(\tau')\, d\tau' = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau')\, x(t-\tau')\, d\tau' =$$

$$= y(t) \otimes x(t)$$

•) DISTRIBUTIVA

$$x(t) \otimes [y(t) + z(t)] = x(t) \otimes y(t) + x(t) \otimes z(t)$$

DIM.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, [y(t-\tau) + z(t-\tau)]\, d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, z(t-\tau)\, d\tau = x(t) \otimes y(t) + x(t) \otimes z(t)$$

•) ASSOCIATIVA

$$x(t) \otimes [y(t) \otimes z(t)] = [x(t) \otimes y(t)] \otimes z(t) = x(t) \otimes y(t) \otimes z(t)$$

DIM

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} y(\alpha)\, z[(t-\tau) - \alpha]\, d\alpha\, d\tau$$

$$x(t) \otimes y(t) \otimes z(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \cdot [Y(f) \cdot Z(f)]$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$[x(t) \otimes y(t)] \otimes z(t) \Longleftrightarrow [X(f) \cdot Y(f)] \cdot Z(f)$$

•) TH. DEL PRODOTTO 45

$$I_p. \begin{cases} z(t) = x(t) \cdot y(t) \\ x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f)\ ,\ y(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} Y(f) \end{cases} \Longrightarrow Z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

PROPRIETA' FONDAMENTALI $\delta(t)$

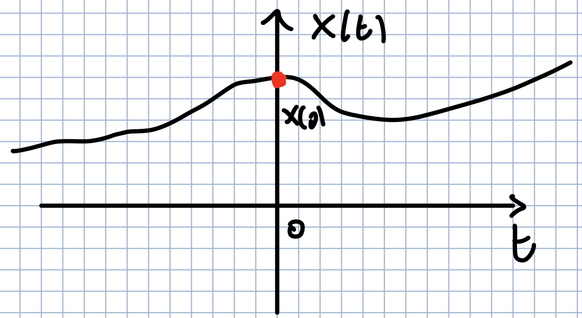
1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

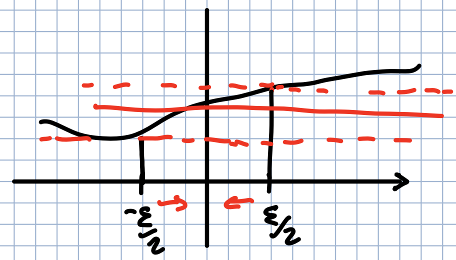
2) PROPRIETA' CAMPIONATRICE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)\, dt = x(t)\Big|_{t=0} = x(0)$$

$\boxed{\text{Ip. } x(t) \text{ CONTINUA in } t=0}$

SE PRENDO UN SEGNALE $x(t)$ QUALUNQUE, LA 2ª PROPRIETA' MI RESTITUISCE IL VALORE DEL SEGNALE in $t=0$





TH. MEDIA

PIU' STRINGO L'INTERVALLO PIU' MI AVVICINO A $x(0)$

⇒ PROPRIETA' INTEGRALI DELLA DELTA DI DIRAC

1) $\delta(t) = \delta(-t)$ PARITA'

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-t)x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)x(t)\, dt$$

SIGNIFICATO DI PARITA' IN SENSO DI INTEGRALE

DIM.

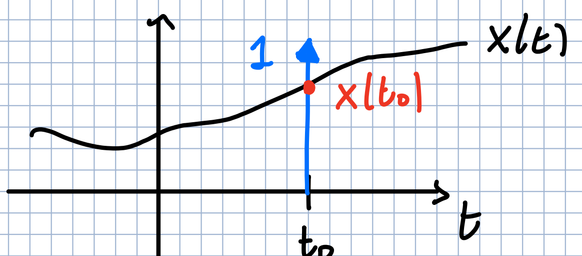
$t' = -t \quad t = -t'$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-t)x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t')x(-t')\, dt' = x(-t')\Big|_{t'=0} = x(0)$$

2) TRASLAZIONE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)\, dt = x(t_0)$$

$t - t_0 = t'$
$t = t' + t_0$

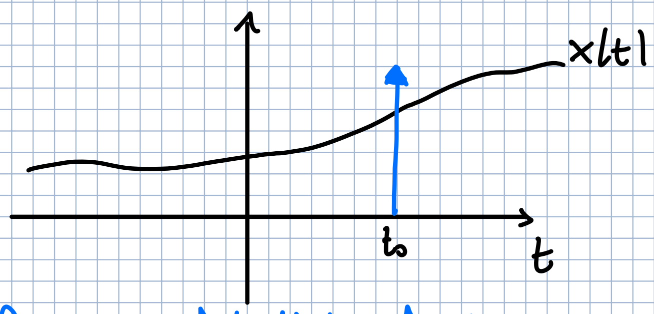


DIM.

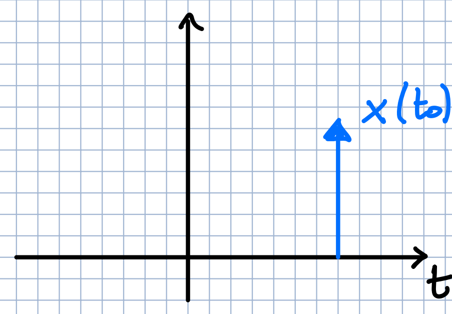
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t'+t_0)\delta(t')\, dt' = x(t'+t_0)\Big|_{t'=0} = x(t_0)$$

DA QUESTA PROPRIETA'
DERIVA QUESTA

3) $x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$



$\Rightarrow$



IL PRODOTTO DI UNA DELTA CON UNA FUNZIONE CONTINUA E' UN'ALTRA DELTA, DOVE PERO' VARIA L'AREA.

IL RISULTATO È UNA DELTA CON AREA X CALCOLATA in t_0

L'AREA VIENE MOLTIPLICATA PER IL VALORE DEL PUNTO DOVE E' APPLICATA LA DELTA $\rightarrow t_0$

4) CONVOLUZIONE

$$x(t) \otimes \delta(t) = x(t)$$

DIM.

per la parità

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(\tau-t)\,d\tau = x(t)$$

per la campionatrice

$\Rightarrow$ la Delta di Dirac è l'elemento neutro per l'operazione convoluzione (OPERA SU FUNZIONI)

$$\Rightarrow \boxed{x(t) \otimes \delta(t-t_0) = x(t-t_0)}$$

FARE LA CONVOLUZIONE CON LA DELTA TRASLATA VUOL DIRE TRASLARE IL SEGNALE

5) CAMPIONAMENTO CON CAMBIO DI SCALA 49

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(\alpha t)\,dt = \frac{x(0)}{|\alpha|} \qquad (\alpha \neq 0)$$

TEOREMA DELL' INTEGRAZIONE COMPLETO 52

$$\text{Ip.}\begin{cases} x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \\ y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{Y(f) = \underbrace{\frac{X(0)}{2}\delta(f)} + \frac{X(f)}{j2\pi f}}$$

COMPARE QUANDO:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt \neq 0 \;(\in TCF) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = X(0) = X(f)\Big|_{f=0} = \left.\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt\right|_{f=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt$$

ANALISI ENERGETICA DEI SEGNALI APERIODICI 55

•) CORRELAZIONE TRA SEGNALI

x,y SONO SEGNALI

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*\underbrace{(t-\tau)}\, dt$$

diff. tra correl. e convoluzione.

•) AUTOCORRELAZIONE

$$C_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

PROPRIETA':

1) $$C_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = E_x$$ → ENERGIA DI X

2) $C_x^*(\tau) = C_x(-\tau)$ HERMITIANA

DIM.

$$C_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-(-\tau))\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t+\tau)\, dt =$$

$t+\tau = t'$
$t = t' - \tau$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t'-\tau)\, x^*(t')\, dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t')\, x(t'-\tau)\, dt' =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, x^*(t'-\tau)\, dt'\right]^* = C_x^*(\tau)$$

SE $x(t)$ è REALE $\Rightarrow C_x(-\tau) = C_x(\tau)$ REALE E PARI

TCF AUTOCORRELAZIONE 56 con DIM.

$$\boxed{C_x(\tau) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} |X(f)|^2 = S_x(f) \Rightarrow \text{DENSITÀ SPETTRALE DI ENERGIA}}$$

TH. DI PARSEVAL 57

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, Y^*(f)\, df$$

$\Downarrow$

DA QUESTA DERIVA

$x(t) = y(t)$

$\Downarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

- CORRELAZIONE E CONVOLUZIONE 58

$$C_{xy}(\tau) = x(\tau) \otimes y^*(-\tau)$$

DIM

$$x(\tau) \otimes y^*(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \cdot y^*[-(\tau-\alpha)]\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, y^*(\alpha-\tau)\, d\alpha = C_{xy}(\tau)$$

- PERIODICIZZAZIONE DI SEGNALI APERIODICI

$x(t)$ APERIODICO

$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0)$ è PERIODICO di PERIODO T_0

DIM.

SE PERIODICO di T_0

$$y(t - kT_0) = y(t)$$

$$y(t-kT_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_0 - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-(k+n)T_0) = \qquad k+n = n'$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - n'T_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0)$$

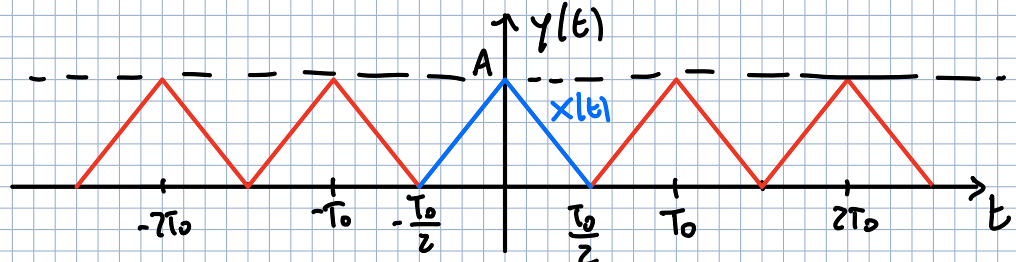
RELAZIONE TRA TSF e TCF 58

$y(t)$ è periodico ottenuto per periodicizzazione di un $x(t)$ APERIODICO

$T_0 \in \mathbb{R}^+$

$$\text{Ip.} \begin{cases} y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0) \\ x(t) \Longleftrightarrow X(f) \end{cases} \Rightarrow Y_n = TSF[y(t)] = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

$\Rightarrow$ la TSF si ottiene "CAMPIONANDO" la TCF



$y(t)$ periodico $\Rightarrow$ posso sempre trovare almeno un $x(t)$:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0)$$

Calcolo della TSF di $y(t) \Rightarrow Y(f)$

$\Downarrow$

1) Trovo $x(t)$: $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0)$

2) Calcolo $X(f) = TCF[x(t)]$

3) Calcolo $Y_n = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{T_0}\right)$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0), \quad x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f)$$

$$\Rightarrow Y_n = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

FORMULE DI POISSON 60

$$\boxed{1) \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(t-mT_0) = \frac{1}{T_0}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{m}{T_0}\right) e^{j2\pi \frac{m t}{T_0}}}$$

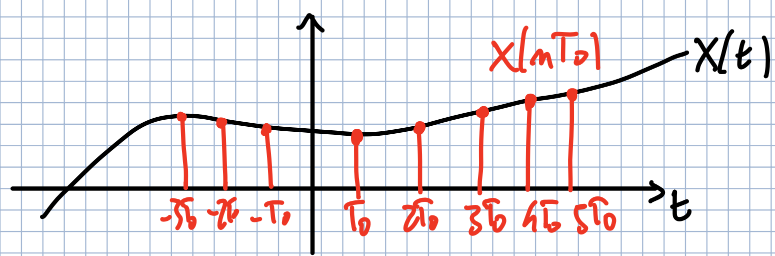
DIM.

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(t-mT_0) \qquad Y_m = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{m}{T_0}\right)$$

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Y_m e^{j2\pi m f_0 t} \qquad \text{ATSF}[y(t)]$$

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(t-mT_0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X\left(\frac{m}{T_0}\right) e^{j2\pi \frac{m t}{T_0}}$$

$$\boxed{2) \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(mT_0) e^{-j2\pi f m T_0} = \frac{1}{T_0}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X\left(f-\frac{m}{T_0}\right)}$$



$x(mT_0) \rightarrow$ CAMPIONAMENTO DEL SEGNALE $x(t)$

APPLICAZIONE DELLE FORMULE DI POISSON ALLA $\delta(t)$

$$1) \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(t-mT_0) = \frac{1}{T_0}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{m}{T_0}\right) e^{j2\pi \frac{m t}{T_0}}$$

$x(t) = \delta(t)$

$X(f) = 1 \quad \forall f \quad \Rightarrow \boxed{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-mT_0) = \frac{1}{T_0}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \frac{m t}{T_0}}}$

$$2) \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(mT_0) e^{-j2\pi f m T_0} = \frac{1}{T_0}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X\left(f-\frac{m}{T_0}\right)$$

$X(f) = \delta(f)$

$x(t) = 1 \quad \forall t \quad \Rightarrow \boxed{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f m T_0} = \frac{1}{T_0}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f-\frac{m}{T_0}\right)}$

TCF DI SEGNALI PERIODICIZZATI 61 con DIM.

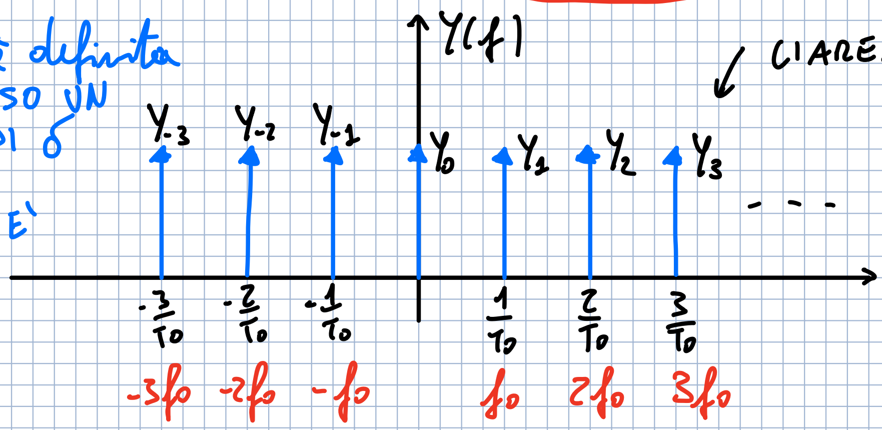
Ip. $\begin{cases} y(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(t - mT_0) & T_0 \in \mathbb{R}^+ \\ x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) & \text{APERIODICO} \end{cases}$

Si può calcolare la $Y(f) = TCF[y(t)] =$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{m}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{m}{T_0}\right) = \boxed{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} Y_m \, \delta\left(f - \frac{m}{T_0}\right)} \quad \text{dove } Y_m = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{m}{T_0}\right)$$

SPETTRO DI UN SEGNALE PERIODICO

LA TCF è definita ATTRAVERSO UN TRENO DI δ e L'AREA SOTTESA E' LA TSF



L'AREA E' DATA DALLA TSF $\rightarrow Y_m$

LA STRUTTURA DELLO SPETTRO E' SEMPRE DI QUESTA FORMA, CAMBIANO SOLO GLI Y_m

ESISTONO SOLO LE FREQUENZE ARMONICHE

TH. PARSEVAL PER SEGNALI PERIODICI (TCF) 62

$$x(t) \text{ periodico} \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_m \, \delta\left(f - \frac{m}{T_0}\right)$$

$$y(t) \text{ periodico} \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} Y(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Y_m \, \delta\left(f - \frac{m}{T_0}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, y^*(t)\, dt = \frac{1}{T_0^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_0\left(\frac{m}{T_0}\right) Y_0^*\left(\frac{m}{T_0}\right)}$$

$$X_0(f) = TCF[x_0(t)] \quad , \quad x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_0(t - mT_0)$$

$$Y_0(f) = TCF[y_0(t)] \quad , \quad x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y_0(t - mT_0)$$

$$X_m = \frac{1}{T_0} X_0\left(\frac{m}{T_0}\right) \quad , \quad Y_m = \frac{1}{T_0} Y_0\left(\frac{m}{T_0}\right)$$

TH. PARSEVAL PER SEGNALI PERIODICI (TSF) 63 con DIM

$x(t)$ periodico $\overset{TSF}{\Longleftrightarrow}$ X_n

$y(t)$ periodico $\overset{TSF}{\Longleftrightarrow}$ Y_n

$$\boxed{\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} x(t)\, y^*(t)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n Y_n^*}$$

CARATTERIZZAZIONE DEI SISTEMI LINEARI E STAZIONARI (SLS) 66

·) RISPOSTA IMPULSIVA DI UN SISTEMA GENERICO

IMPULSO: IMPULSO DI DIRAC (δ)

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \xrightarrow{h(t)} \qquad \underbrace{h(t) = T[\delta(t)]}_{\text{RISPOSTA IMPULSIVA}}$$

Un sistema SLS è completamente caratterizzato dalla sua $h(t)$, in particolare l'uscita ad un determinato ingresso è calcolabile.

$$\boxed{y(t) = x(t) \otimes h(t)}$$

DIM.

$$y(t) = T[x(t)] = T[\underbrace{x(t) \otimes \delta(t)}_{x(t)}] = \underset{(t)}{T}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\, d\tau\right] \overset{\text{PER LINEARITÀ}}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, T[\delta(t-\tau)]\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = x(t) \otimes h(t)$$

PER STAZIONARIETÀ

- **CAUSALITÀ**

$$y(t) = T[x(\alpha) ; \alpha \leq t]$$

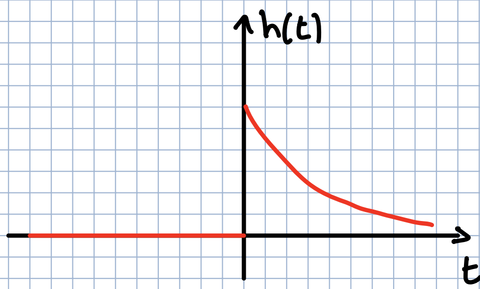
L'USCITA ALL'ISTANTE "t" PUÒ DIPENDERE SOLO DAI VALORI DELL'INGRESSO ANTECEDENTI O AL PIÙ $= t$

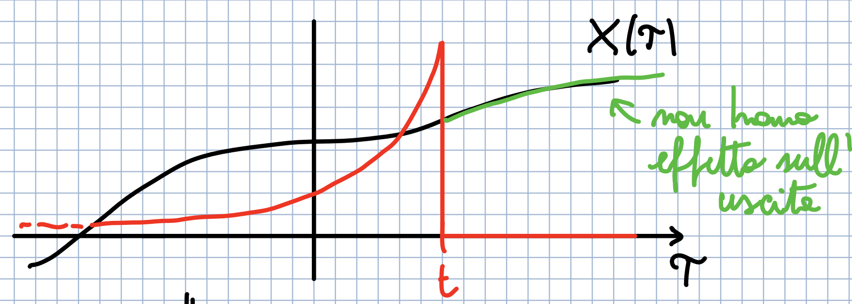
PER UN SLS VALE CHE IL SISTEMA È CAUSALE $\Leftrightarrow$ $h(t)$ è CAUSALE

$$\Downarrow$$

$$h(t) = 0 \quad \text{per } t < 0$$

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$



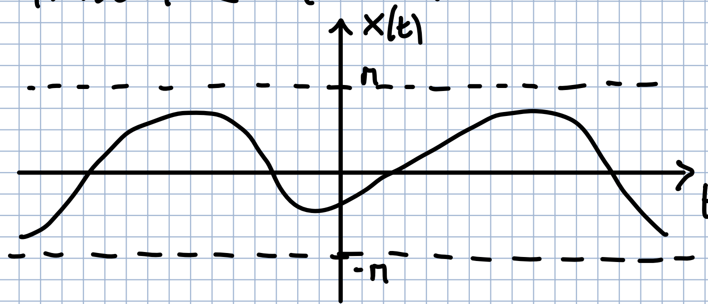


$$\Downarrow$$

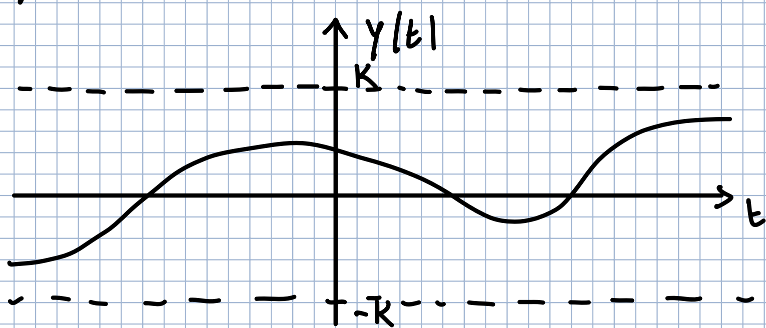
$$y(t) = T[x(\tau) ; \tau \leq t]$$

- **STABILITÀ BIBO** (BOUNCHED INPUT BOUNCHED OUTPUT)

Se $|x(t)| \leq M \quad \forall t$



$$\Rightarrow |y(t)| = |T[x(t)]| \leq K \quad \forall t$$



- PER SLS

se $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = K < \infty \Rightarrow$ $\boxed{\text{IL SISTEMA È BIBO STABILE}}$

DIM.

$$|y(t)| = |x(t) \otimes h(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \right| \overset{\text{SHWARTZ}}{\leq} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|\, d\tau \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} M\, |h(t-\tau)|\, d\tau = M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|\, d\tau = M \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau')|\, d\tau'}_{= K} = M \cdot K = K'$$

$$\left.\begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = K \\ |x(t)| \leq M \quad \forall t \end{array}\right\} |y(t)| \leq K'$$

- MEMORIA

  - SISTEMA SENZA MEMORIA

$$y(t) = T[x(\alpha);\ \alpha = t]$$

L'USCITA ALL'ISTANTE "t" DIPENDE SOLO DAI VALORI DELL'INGRESSO ALL'ISTANTE "t"

SISTEMA ISTANTANEO

UN SISTEMA CON MEMORIA NON RISPETTA QUESTE PROPRIETÀ.

- INVERTIBILITÀ

se $y(t) = T[x(t)] \Rightarrow x(t) = T^{-1}[y(t)]$

DEVE ESISTERE LA $T^{-1}[\cdot]$

ESERCIZIO

$$y(t) = \int_{T}^{t} x(\alpha)\, d\alpha \qquad y(t) = T[x(t)]$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow y(t)$$

Si chiede di verificare le seguenti proprietà:

1) LINEARITÀ ✓

2) STAZIONARIETÀ ✗

3) STABILITÀ ✗

4) MEMORIA (ISTANTANEITÀ) ✓

SVOLGIMENTO

1) LINEARITÀ

$$x(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \Rightarrow y(t) = a T[x_1(t)] + b T[x_2(t)]$$

$$y(t) = \int_T^t x(\alpha)\, d\alpha = \int_T^t a x_1(\alpha) + b x_2(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= a \int_T^t x_1(\alpha)\, d\alpha + b \int_T^t x_2(\alpha)\, d\alpha = a T[x_1(t)] + b T[x_2(t)]$$ ✓

2) STAZIONARIETÀ

$$y(t) = T[x(t)] \qquad y(t-t_0) \overset{?}{=} T[x(t-t_0)]$$

$$T[x(t-t_0)] = \int_T^t x(\alpha - t_0)\, d\alpha = \qquad \begin{aligned} \alpha - t_0 &= \alpha' \\ \alpha &= \alpha' + t_0 \end{aligned}$$

$$= \int_{T-t_0}^{t-t_0} x(\alpha')\, d\alpha' = \underbrace{\int_{T-t_0}^{T} x(\alpha')\, d\alpha'}_{K \neq 0} + \underbrace{\int_T^{t-t_0} x(\alpha')\, d\alpha'}_{y(t-t_0)} = K + y(t-t_0)$$

$K \neq 0 \Rightarrow$ NON È STAZIONARIO

3) STABILITÀ

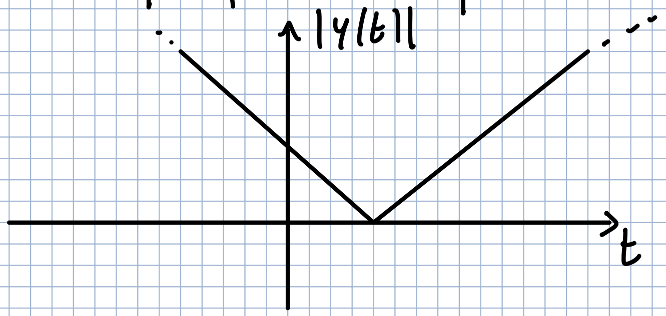
$$|x(t)| \leq M \quad \forall t \Rightarrow |y(t)| \leq K \quad \forall t$$

$$|y(t)| = \left| \int_T^t x(\alpha)\, d\alpha \right|$$

ESEMPIO

$$x(\alpha) = M' < M$$

$$|y(t)| = \left|\int_T^t M' \, d\alpha\right| = |M'(t-T)|$$



DIVERGE

HO TROVATO UN CASO PER CUI LA STABILITÀ BIBO NON È VERIFICATA

·) MEMORIA

·) SENZA MEMORIA $\Rightarrow y(t) = T[x(\alpha);\ \alpha = t]$

$$y(t) = \int_T^t x(\alpha)\, d\alpha$$

y ALL' ISTANTE "t" DIPENDE DA VALORI DELL' INGRESSO AD ISTANTI ANCHE DIVERSI DA "t". $\Rightarrow$ HA MEMORIA

ESERCIZIO

$$y(t) = x^2(t) + \frac{d}{dt}x(t)$$

1) LINEARITÀ

$$x(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \Rightarrow y(t) = aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)]$$

$$y(t) = [a x_1(t) + b x_2(t)]^2 + \frac{d}{dt}[a x_1(t) + b x_2(t)] =$$

$$= a^2 x_1^2(t) + b^2 x_2^2(t) + 2ab\, x_1(t) x_2(t) + a\frac{d}{dt}x_1(t) + b\frac{d}{dt}x_2(t)$$

NON È LINEARE

$$\neq$$

$$\boxed{aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)]}$$

2) STAZIONARIETÀ

$$y(t) = T[x(t)] \qquad y(t-t_0) \overset{?}{=} T[x(t-t_0)]$$

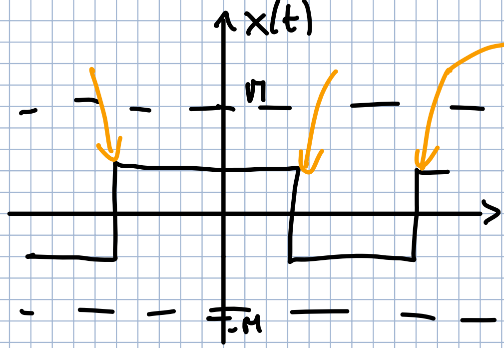
$$x^2(t-t_0) + \frac{d}{dt}x(t-t_0) = y(t-t_0)$$ $\Rightarrow$ È STAZIONARIO

3) STABILITÀ BIBO

$|x(t)| \leq t \quad \forall t \quad , \quad |x^2(t)| \leq M^2 \quad \forall t \quad \checkmark$

$\frac{d}{dt} x(t)$

ESEMPIO



HA DEI PUNTI DI DISCONTINUITA' PER CUI

$\frac{d}{dt} x(t) \to \infty$

NEI PUNTI DI DISC.

NON E' BIBO STABILE

4) MEMORIA

$y(t) = x^2(t) + \frac{d}{dt} x(t)$

DIPENDE SOLO DALL' ISTANTE "t"

DIPENDE SOLO DALL' ISTANTE "t"

$\Rightarrow$ NON HA MEMORIA

RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN SLS

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

SLS

$x(t) = e^{j2\pi f t} = \cos(2\pi f t) + j \,\text{sen}(2\pi f t)$

$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t}\, h(t-\tau)\, d\tau = \qquad t-\tau = \tau' \qquad \tau = t-\tau'$

$= e^{j2\pi f t} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau')\, e^{-j2\pi f t}\, d\tau'}_{H(f)} = H(f)\, e^{j2\pi f t} = y(t) = H(f)\, x(t)$

1) $H(f) = TCF[h(t)]$

2) $H(f) = \left.\frac{y(t)}{x(t)}\right|_{x(t) = e^{j2\pi f t}}$

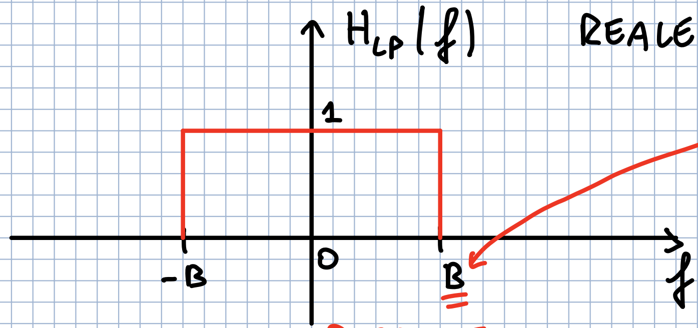
3) $H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$

$\Rightarrow$ TRE DEFINIZIONI DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

FILTRI IDEALI

•) PASSO BASSO DI BANDA B

LP = LOW PASS



REALE

BANDA: l'intervallo delle frequenze positive dove la risposta in frequenza è NON-NULLA.

$$H_{LP}(f) = rect\left(\frac{f}{2B}\right)$$

RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN FILTRO LP DI BANDA B

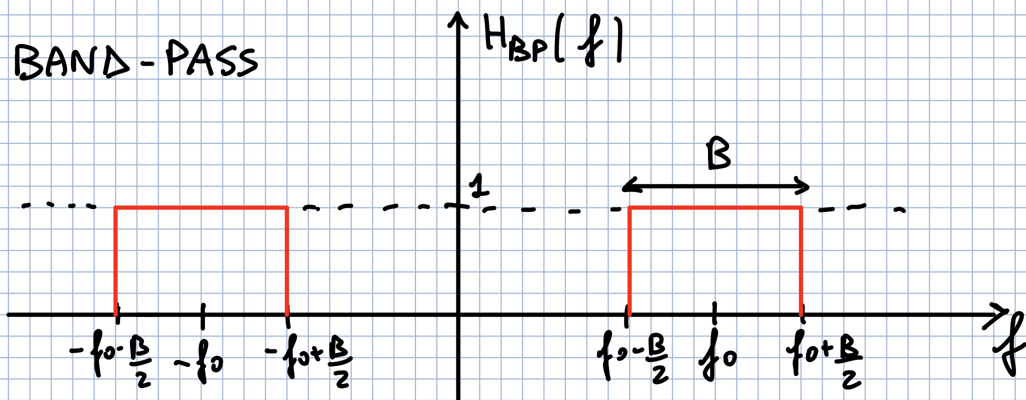
$$h_{LP}(t) = ATCF[H_{LP}(f)] =$$

$$= 2B \, sinc(2Bt)$$

RISPOSTA IMPULSIVA

•) PASSA-BANDA DI BANDA B

BP = BAND-PASS



$$H_{BP}(f) = rect\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + rect\left(\frac{f+f_0}{B}\right) \longrightarrow$$

RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN FILTRO BP DI BANDA B IDEALE

$$h_{BP}(t) = B\,sinc(Bt)\,e^{j2\pi f_0 t} + B\,sinc(Bt)\,e^{-j2\pi f_0 t} =$$

$$= B\,sinc(Bt)\cos(2\pi f_0 t) + \cancel{j B\,sinc(Bt)\,sen(2\pi f_0 t)} +$$

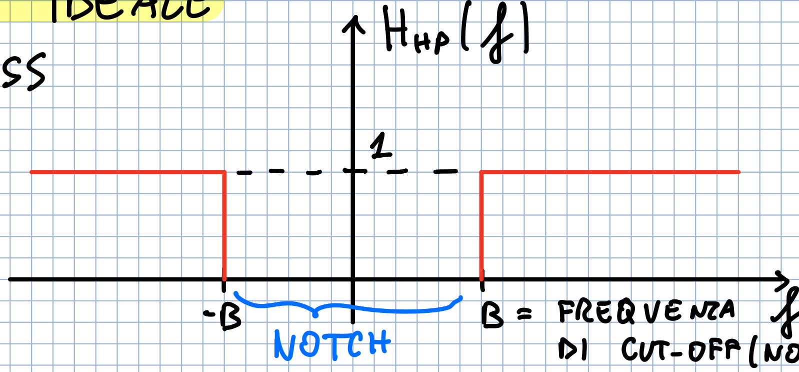
$$+ B\,sinc(Bt)\cos(2\pi f_0 t) - \cancel{j B\,sinc(Bt)\,sen(2\pi f_0 t)} = \boxed{2B\,sinc(Bt)\cos(2\pi f_0 t)}$$

RISPOSTA IMPULSIVA

FATTORE Q QUALITA' $Q = \frac{f_0}{B}$

•) PASSA-ALTO IDEALE

HP = HIGH-PASS



B = FREQUENZA DI CUT-OFF (NON E' UNA BANDA)

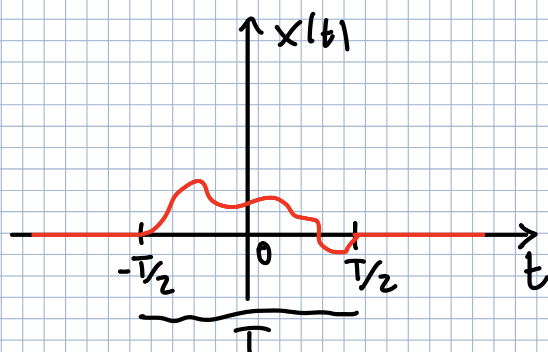
B = BANDA DEL NOTCH

$$H_{HP}(f) = 1 - \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$ RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN FILTRO HP DI BANDA B IDEALE

$$h_{HP}(t) = \delta(t) - 2B\,\mathrm{sinc}(2Bt)$$ RISPOSTA IMPULSIVA

DURATA E BANDA DI UN SEGNALE 76

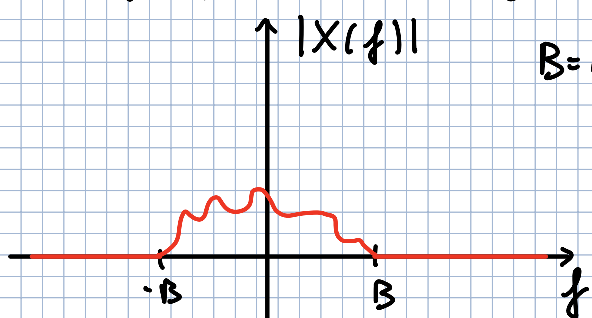
•) SEGNALE A DURATA "RIGOROSAMENTE" LIMITATA



$x(t) = 0$ per $|t| > \frac{T}{2}$

T = DURATA

•) SEGNALE A BANDA "RIGOROSAMENTE" LIMITATA



B = BANDA

$|X(f)| = 0$

$|f| > B$

PROPRIETA'

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) \text{ ha DURATA RIGOROSAMENTE LIMITATA} \\ \Downarrow \\ X(f) \text{ ha BANDA INFINITA} \end{array}}$$

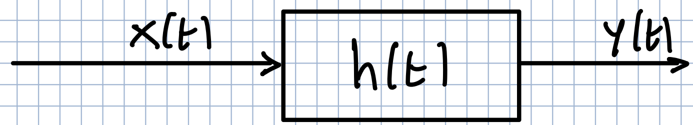
•) PROPRIETÀ SEGNALI A BANDA RIGOROSAMENTE LIMITATA

$X(f)$ HA BANDA RIGOROSAMENTE LIMITATA 77

$\Downarrow$

$x(t)$ HA DURATA INFINITA

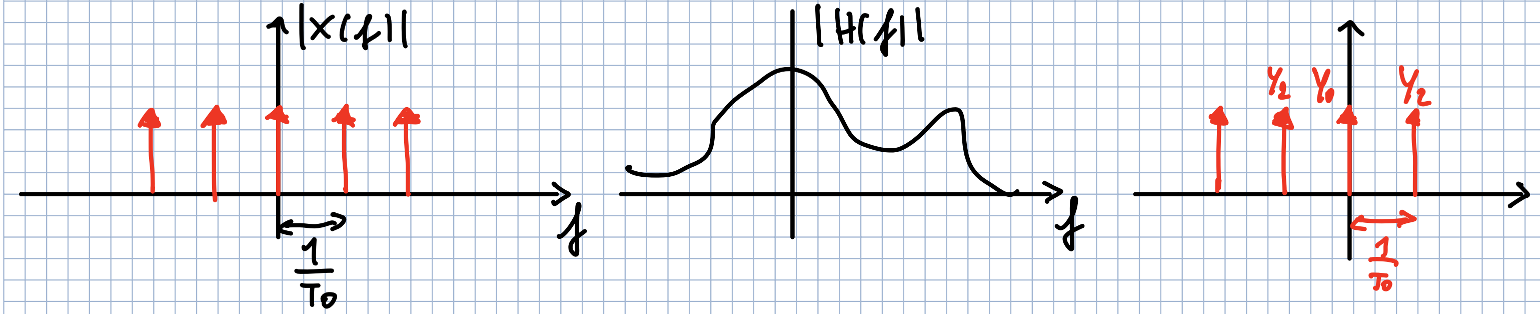
•) IN GENERALE SUL FILTRAGGIO DI UN SEGNALE PERIODICO 79



$x(t)$ è periodico con T_0 = periodo

$\Downarrow$

$y(t)$ è periodico con T_0 = periodo



$Y_n = X_n H\left(\frac{n}{T_0}\right)$

PER CAMPIONATURA

$$Y(f) = X(f)\,H(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) H(f) = \sum X_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) H\left(\frac{n}{T_0}\right) =$$

$$= \sum X_n H\left(\frac{n}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = \sum Y_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

$y(t) = \text{ATCF}[Y(f)] \Rightarrow y(t)$ periodico di T_0

$$\boxed{Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \quad \text{con} \quad Y_n = X_n H\left(\frac{n}{T_0}\right)}$$

DISTORSIONI LINEARI 80

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

·) **REPLICA "FEDELE" DI UN SEGNALE**

$y(t)$ è una replica fedele di $x(t)$ se

$$y(t) = K\,x(t-t_0) \qquad K, t_0 \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow \text{TCF}$$

$$Y(f) = K\,X(f)\,e^{-j2\pi f t_0}$$

·) **FILTRO FEDELE**

$$H(f) = K\,e^{-j2\pi f t_0}$$

se K è COMPLESSO $\rightarrow$ $H(f) = |K|\,e^{-j2\pi f t_0}\,e^{j\angle K} =$

$$= |K|\,e^{-j(2\pi f t_0 - \angle K)}$$

$$\Rightarrow h(t) = K\,\delta(t-t_0) \qquad K \in \mathbb{C}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_{FEDELE}(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = K\,x(t-t_0) \rightarrow \text{replica fedele}$$

$\Rightarrow$ UN FILTRO "FEDELE" PRODUCE SEMPRE UN'USCITA CHE È REPLICA FEDELE DELL'INGRESSO

N.B. NON VALE IL CONTRARIO!

SE NON HO UN FILTRO FEDELE $\Rightarrow$ $\boxed{h(t) \neq K\,\delta(t-t_0)}$

ANALISI ENERGETICA IN PRESENZA DI SLS

SEGNALI APERIODICI AD EN. FINITA

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\overset{\text{SLS}}{h(t)}} \longrightarrow y(t)$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$ AUTOCORRELAZIONE DEL SEGNALE IN INGRESSO

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, y^*(t-\tau)\, dt$$ AUTOCORRELAZIONE DEL SEGNALE IN USCITA

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) = R_x(\tau) \otimes R_h(\tau)$$

$$* \quad h(\tau) \otimes h(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, h(t-\tau)\, dt = R_h(\tau)$$

$$S_x(f) = TCF[R_x(\tau)] = |X(f)|^2$$

$$S_y(f) = TCF[R_y(\tau)] = |Y(f)|^2 =$$

$$= TCF[R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)] = S_x(f)\, H(f)\, H^*(f) = S_x(f)\, |H(f)|^2$$

DENSITA' SPETTRALE DI ENERGIA DEL SEGNALE DI USCITA

$$\boxed{S_y(f) = S_x(f)\, |H(f)|^2}$$

$\Rightarrow$ PER SEGNALI PERIODICI 84 con DIM.

$$x(t) = x(t - kT_0) \quad , \; k \in \mathbb{Z} \; , T_0 \in \mathbb{R}^+$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$ AUTOCORRELAZIONE DEL SEGNALE IN INGRESSO (PERIODICO)

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} y(t)\, y^*(t-\tau)\, dt$$ AUTOCORRELAZIONE DEL SEGNALE IN USCITA (PERIODICO

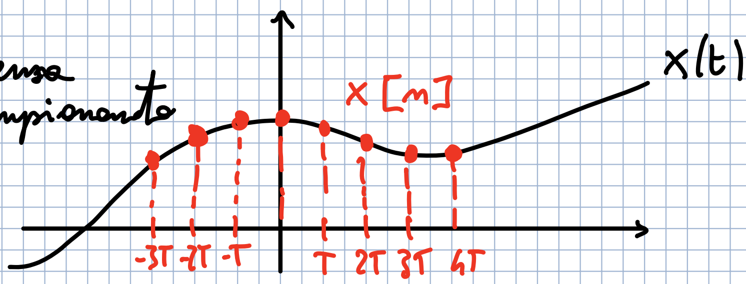
$$\Rightarrow R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

SEGNALI CAMPIONATI

SEGNALE ANALOGICO → $x(t)$ — CAMPIONATORE — $\downarrow T$ = INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO — $x[n]$ ↖ SEQUENZA

$$x[n] = x(nT) \qquad n \in \mathbb{Z}, \ T \in \mathbb{R}^+$$

$f_c = \frac{1}{T}$ frequenza di campionamento



I CAMPIONI SONO I VALORI DELLA SEQUENZA

TRASFORMATA DI FOURIER DI UNA SEQUENZA 88

$$x[n] \overset{TFS}{\Longleftrightarrow} \overline{X}(f)$$

$$\boxed{\overline{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi f n T}}$$

TRASFORMATA DI FOURIER DI UNA SEQUENZA

PROPRIETÀ

- $\overline{X}(f)$ è PERIODICA DI PERIODO $\frac{1}{T}$

$$\overline{X}(f) = \overline{X}\left(f - \frac{n}{T}\right) \qquad n \in \mathbb{Z}, T \in \mathbb{R}^+$$

RELAZIONE TRA LA TFS ($\overline{X}(f)$) E LA TCF ($X(f)$) 90 con DIM.

$x(t)$, $X(f)$ — $\downarrow T$ — $x[n]$, $\overline{X}(f)$

$$x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \qquad x[n] \overset{TFS}{\Longleftrightarrow} \overline{X}(f)$$

$$\boxed{\overline{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right)} \Rightarrow$$

PERIODICIZZAZIONE DELLA TCF CON PERIODO $\frac{1}{T}$

ANALISI ENERGETICA DI SEQUENZE

- CORRELAZIONE TRA SEQUENZE

$$R_{xy}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, y^*[n-k]$$

- AUTOCORRELAZIONE

$$R_x[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, x^*[n-k]$$

- DENSITÀ SPETTRALE DI ENERGIA

$$\bar{S}_x(f) = \mathrm{TFS}\left[R_x[k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_x[k]\, e^{-j2\pi f kT} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, x^*[n-k]\, e^{-j2\pi f kT} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[n-k]\, e^{-j2\pi f kT} = \qquad n-k = k'$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} x^*[k']\, e^{-j2\pi f (n-k')T} =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi f nT}}_{\bar{X}(f)} \cdot \underbrace{\left[\sum_{k'=-\infty}^{+\infty} x^*[k']\, e^{-j2\pi f k'T}\right]^*}_{\bar{X}^*(f)} = |\bar{X}(f)|^2$$

$$\boxed{E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} |\bar{X}(f)|^2\, df}$$

$$E_x = R_x[0] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, x^*[n-k]\Big|_{k=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

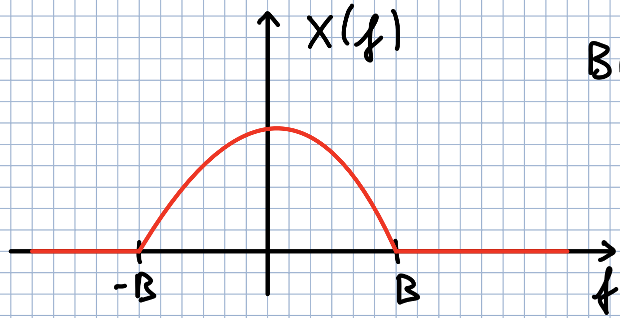
TH. PARSEVAL PER SEQUENZE

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, y^*[n] = T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f)\, \bar{Y}^*(f)\, df$$

CONDIZIONE DI NYQUIST

Si applica a segnali con banda rigorosamente limitata

SEGNALE IL CUI SPETTRO DIVENTA NULLO A PARTIRE DA UNA CERTA FREQUENZA



BANDA RIG. LIM. B

·) CAMPIONO CON UN INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO

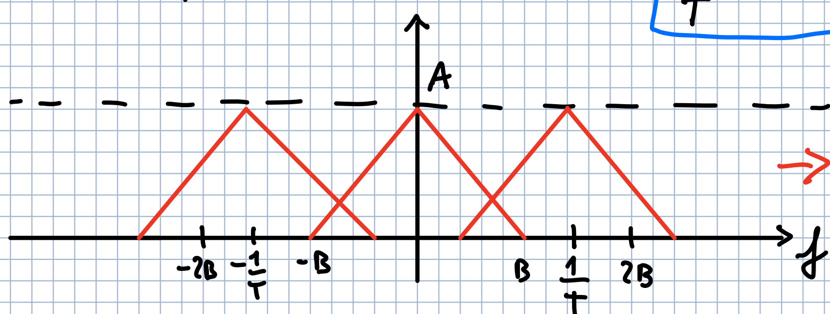
T

$T > \frac{1}{2B}$ $\qquad$ $T \leq \frac{1}{2B}$

1) $T > \frac{1}{2B}$ $\Rightarrow$ ALIASING

$$\overline{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

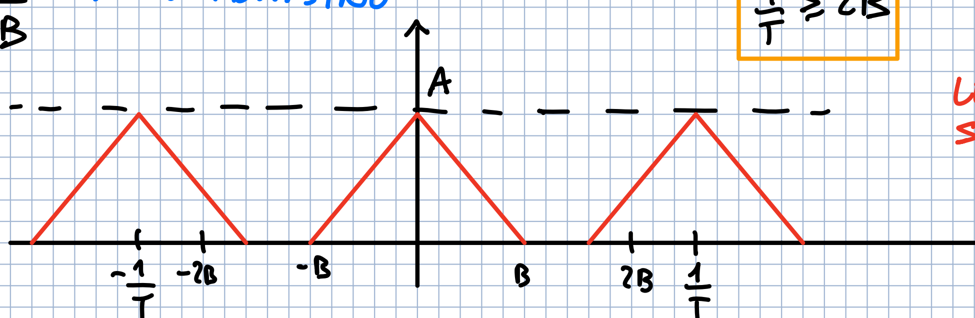
$\boxed{\frac{1}{T} < 2B}$ $\Rightarrow$ $T > \frac{1}{2B}$, $2B > \frac{1}{T}$ $\quad$ $\frac{1}{T} < 2B$



→ LE REPLICHE SI SOVRAPPONGONO E SI PARLA DI ALIASING

2) $T \leq \frac{1}{2B}$ $\Rightarrow$ NO ALIASING

$\boxed{\frac{1}{T} \geq 2B}$



LE REPLICHE NON SI SOVRAPPONGONO

CONDIZIONE DI NYQUIST: è una condizione che si applica sull'intervallo di campionamento affinché non si produca ALIASING

$$\boxed{f_c \geq 2B} \qquad \boxed{T \leq \frac{1}{2B}} \quad , \quad B = \text{Banda (RIG. LIM.) del segnale da campionare}$$

f_c = FREQ. DI CAMPIONAMENTO

⇓

BISOGNA CAMPIONARE CON UNA FREQ. DI CAMP. ALMENO IL DOPPIO DELLA BANDA DEL SEGNALE

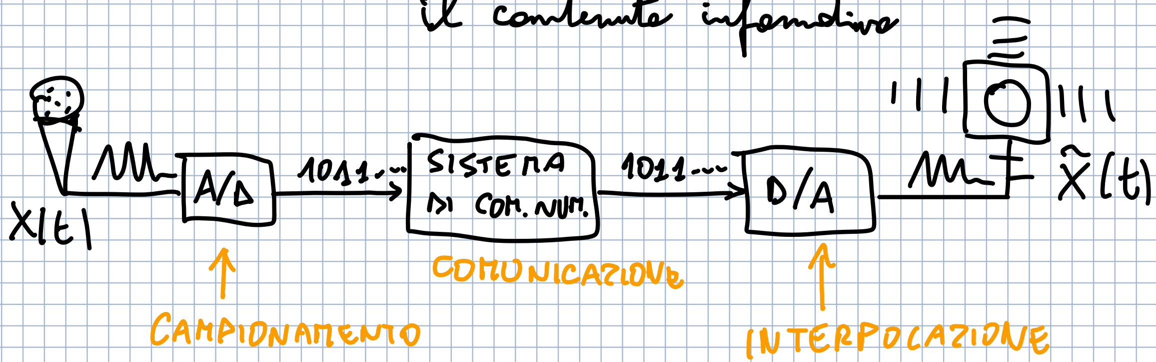
RICOSTRUZIONE DI UN SEGNALE ANALOGICO

$$\xrightarrow{x(t)} \text{CAMP.} \longrightarrow x[n] \longrightarrow \boxed{\text{INTERPOLATORE}} \longrightarrow \tilde{x}(t)$$

SEGNALE INTERPOLATO

INTERPOLATORE: permette di ottenere un segnale analogico a partire da un segnale tempo-discreto (SEQUENZA)

$\tilde{x}(t) \longrightarrow x(t)$ per mantenere il più possibile inalterato il contenuto informativo



INTERPOLATORE

$$\xrightarrow{x[n]} \boxed{p(t)} \xrightarrow{\tilde{x}(t)}$$

$p(t)$ = funzione interpolatrice

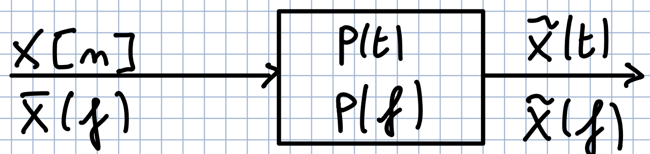
$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t - nT)$$

USCITA

INGRESSO

INTERPRETAZIONE INTERPOLATORE NEL DOMINIO DI FREQUENZA

95



$x[n] \overset{TFS}{\Longleftrightarrow} \bar{X}(f)$, $p(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} P(f)$, $\tilde{x}(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} \tilde{X}(f)$

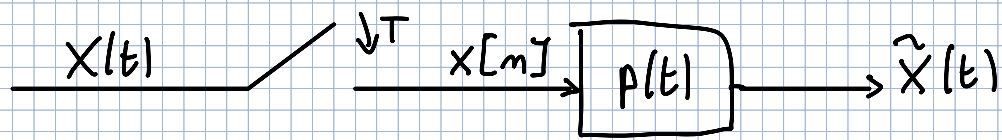
$$\Rightarrow \boxed{\tilde{X}(f) = \bar{X}(f)\, P(f)}$$

TH. DEL CAMPIONAMENTO

$$Ip: \begin{cases} x(t) \text{ segnale a banda rigorosamente lim. } B \\ T \leq \frac{1}{2B} \quad T \text{ intervallo di campionamento} \\ p(t) = 2B \operatorname{sinc}(2Bt) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

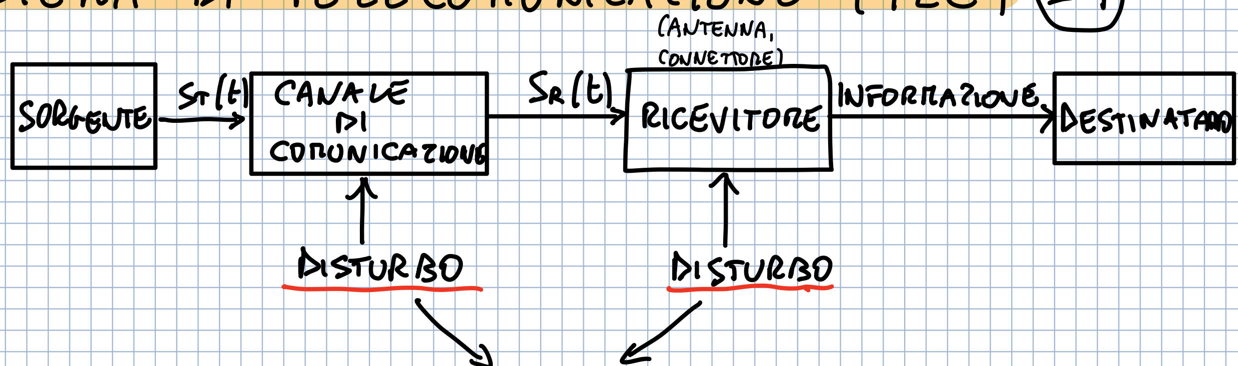
TH: POSSO RICOSTRUIRE IL SEGNALE $x(t)$ PERFETTAMENTE A PARTIRE DAI SUOI CAMPIONI



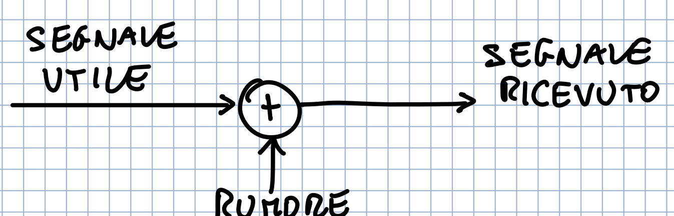
REPLICA FEDELE DI $x(t)$

SISTEMA DI TELECOMUNICAZIONE (TLC)

97



RUMORE $\Rightarrow$ SEGNALE ALEATORIO ADDITIVO (PROCESSO ALEATORIO)

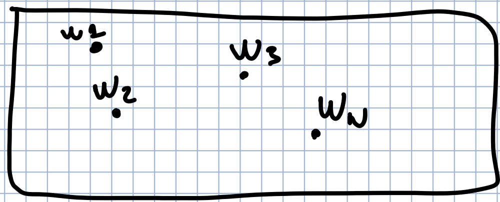


CI SERVE

$\Rightarrow$ CARATTERIZZARE IL RUMORE TRAMITE STATISTICHE

•) DESCRIZIONE FORMALE DI UN ESP. CASUALE

SPAZIO CAMPIONE



$\Omega = \{w_1, w_2 \, ---- \, w_N\}$

TUTTI I POSSIBILI RISULTATI DI UN ESPERIMENTO CASUALE

ES. "LANCIO DI UN DADO A SEI FACCE"

$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_i --- w_6\}$ $\quad w_i$ = ESCE LA FACCIA "6"

⇒ **EVENTO** : è un sottoinsieme dello spazio campione che soddisfa le seguenti condizioni:

•) SE A è un evento, allora anche il suo complemento $\bar{A}$, rispetto a Ω è un EVENTO

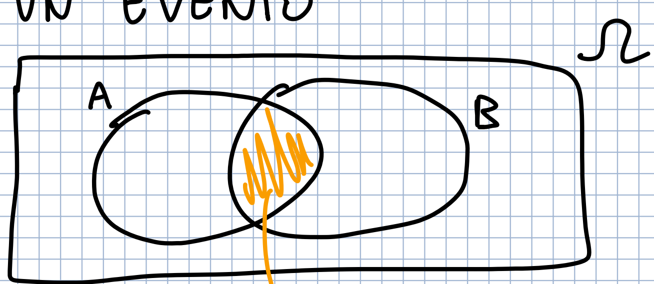
$$A \text{ è un EVENTO} \Rightarrow \bar{A} \text{ è un EVENTO}$$

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

•) SE A e B sono EVENTI, anche la loro unione $A \cup B$ è un EVENTO

⇒ **PROPRIETÀ EVENTI**

1) $A \cap B$ è UN EVENTO



$A \cap B$ è un EVENTO

DIM.

$\bar{A}$ è un EVENTO

$\bar{B}$ è un EVENTO $\quad \Rightarrow \quad \bar{A} \cup \bar{B}$ è un EVENTO

$\bar{A} \cup \bar{B}$ è un EVENTO

$$\Downarrow$$

$$\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = A \cap B$$

2) $A \cup \bar{A} = \Omega$ è un EVENTO CERTO

3) $A \cap \bar{A} = 0$ è un EVENTO IMPOSSIBILE

$A \to$ NUM. PARI
$\bar{A} \to$ NUM. DISPARI $\Rightarrow$ IMPOSSIBILE

CARATTERIZZAZIONE ESPERIMENTO CASUALE

$\Rightarrow$ ELEMENTI NECESSARI ALLA COMPLETA DESCRIZIONE DI UN EVENTO CASUALE

1) DESCRIZIONE DI UNO SPAZIO CAMPIONE Ω

2) DEFINIZIONE E PROPRIETÀ DEGLI EVENTI

3) LEGGE DI PROBABILITÀ: associa a ogni elemento definito una misura della probabilità che esso si presenti

DEFINIZIONE ASSIOMATICA DI PROBABILITÀ (KOLMOGOROV)

1) la probabilità di un evento A è non-negativa

$$P\{A\} \geq 0$$

2) la probabilità dell'evento CERTO è unitaria

$$P\{\Omega\} = 1$$

3) Dati 2 EVENTI, A e B, MUTUAMENTE ESCLUSIVI (NON SI POSSONO VERIFICARE CONTEMPORANEAMENTE $\to A \cap B = 0$), la probabilità dell'evento unione è PARI alla somma delle probabilità dei singoli eventi.

$$A \cap B = 0 \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

PROPRIETÀ

1) $P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A})$

$$P(\Omega) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A \cup \bar{A}) = 1$$

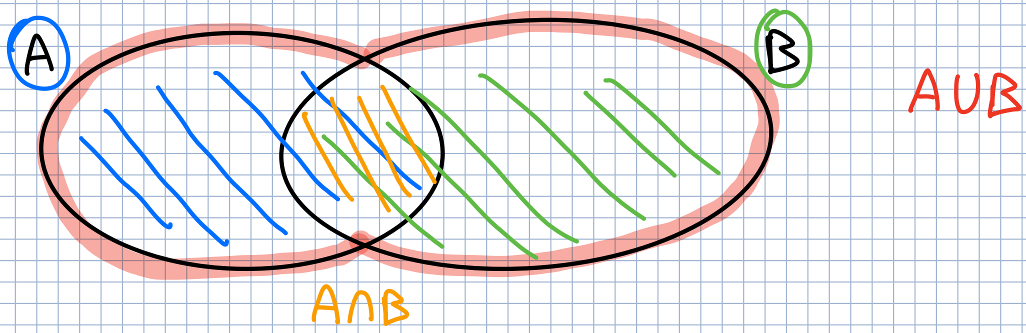
$$A \cap \bar{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A})$$

2) $P\{\emptyset\} = 0$ $\quad \emptyset$ EVENTO IMPOSSIBILE

3) $0 \le P(A) \le 1$

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



•) NOTAZIONE SEMPLIFICATA

$A \cup B \Rightarrow A + B$

$A \cap B \Rightarrow A \cdot B$

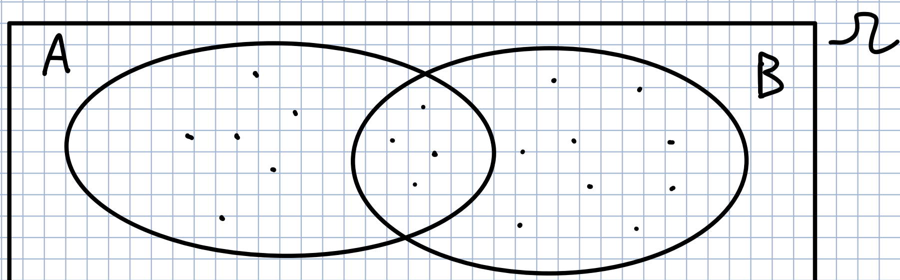
$P(AB) = P(A \cap B) \Rightarrow$ PROBABILITÀ CONGIUNTA

$P(A)$ e $P(B) \Rightarrow$ PROBABILITÀ MARGINALI (DEI SINGOLI EVENTI)

•) PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}}$$

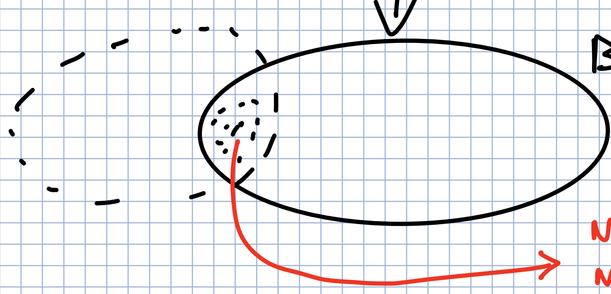
CALCOLA LA $P(A)$ DOPO CHE SI È VERIFICATO L'EVENTO B
+ INFO HO + SONO PRECISO



$P(A) \Rightarrow (\cdot)$

$P(A \mid B)$

nel momento che osservo "B", lo spazio campione si riduce a B e non più Ω



$B = \Omega' \rightarrow$ NUOVO SPAZIO CAMPIONE

NUOVO EVENTO CHE DEVO CONSIDERARE NEL MIO NUOVO SPAZIO CAMPIONE

$P(A)$ PROBABILITÀ "A PRIORI" (PRIMA CHE SI OSSERVI QUALCOSA)

$P(A|B)$ PROBABILITÀ "A POSTERIORI" (DOPO OSSERVAZIONE)

- PROBABILITÀ "CLASSICA" (PASCAL)

$$\boxed{P(A) = \frac{N_F(A)}{N_P}}$$

$N_F(A)$ = NUM. CASI FAVOREVOLI AD A (RISULTATI $\in A$)

N_P = NUM. CASI POSSIBILI

ES. DADO A 6 FACCE

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$

$P(A) = ? = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\qquad N_F = 3 \quad N_P = 6$

CONTROESEMPIO

$\Rightarrow$ DADO TRUCCATO $\quad P(A) = \frac{N_F(A)}{N_P}$ $\Rightarrow$ NON È UTILIZZABILE PERCHÈ NON TIENE CONTO DEL FATTO CHE UN NUMERO POSSA USCIRE PIÙ DEGLI ALTRI

$$\boxed{P(w_i) = P \quad \forall i}$$

PROB. A PRIORI

TUTTI I RISULTATI DEVONO ESSERE EQUIPROBABILI

$\Rightarrow$ SODDISFA GLI ASSIOMI ?

1) $P(A) \geq 0 \Rightarrow P(A) = \frac{N_F(A)}{N_P} \geq 0 \qquad N_F(A) \geq 0 \quad N_P > 0$ ✓

2) $P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(\Omega) = \frac{N_P}{N_P} = 1 \qquad N_F(A) = N_P$ ✓

$N_F(\Omega) = N_P$

3) $P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{N_F(A \cup B)}{N_P} = \frac{N_F(A) + N_F(B)}{N_P}$ ✓

$A \cap B = \emptyset$

$$= \frac{N_F(A)}{N_P} + \frac{N_F(B)}{N_P} = P(A) + P(B)$$

• PROBABILITÀ "FREQUENTISTA" (VON MISES)

Viene fuori dagli esperimenti

$$\boxed{P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}}$$

N_A = N° DI VOLTE CHE ESCE UN RISULTATO FAVOREVOLE AD A

N = N° ESPERIMENTI FATTI

⇒ SODDISFA GLI ASSIOMI ?

1) $P(A) \geq 0$ $\quad N_A \geq 0,\ N > 0 \Rightarrow P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N} \geq 0$ ✓

2) $P(\Omega) = 1$ $\quad N_A = N \Rightarrow P(\Omega) = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{N} = 1$ ✓

3) $P(A \cup B)$ $\Rightarrow P(A\cup B) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_{A\cup B}}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_A + N_B}{N} =$ ✓

$A \cap B = \emptyset$

MUT. ESCL.

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N} + \lim_{N\to\infty} \frac{N_B}{N} = P(A) + P(B)$$

INDIPENDENZA TRA EVENTI

A e B SONO INDIPENDENTI SE:

$$\boxed{P(A|B) = P(A)}$$

⇒ Se A e B sono INDIPENDENTI

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B)}$$

TH. BAYES

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}} \qquad P(A), P(B) \neq 0$$

DIM.

$P(A \cdot B) = P(B \cdot A) \quad \Leftarrow \quad A \cap B = B \cap A$

$P(A \cdot B) = P(A|B) \cdot P(B) \quad \Leftarrow \quad P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

$\qquad\qquad\qquad\quad \parallel$

$P(B \cdot A) = P(B|A) \cdot P(A)$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$\Downarrow \; P(B) \neq 0$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

•) PARTIZIONE DI UNO SPAZIO CAMPIONE

è tale che scegliendo N eventi B_i, $i = 1 \ldots N$ con le proprietà:

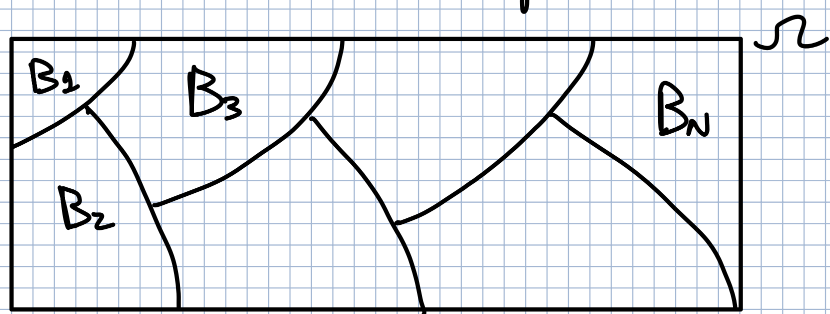
1) $B_i \cap B_K = 0 \qquad \forall i, K \quad i \neq K$

TUTTI MUT. ESCLUSIVI

2) $\bigcup_{i=1}^{N} B_i = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots B_N = \Omega$

$\Rightarrow$ L'INSIEME dei B_i è una partizione di Ω

ESEMPIO:



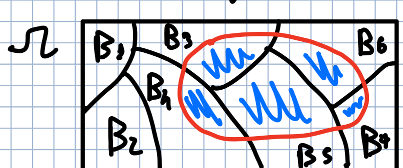
TH. DELLA PROBABILITÀ TOTALE

Se B_i è una partizione di Ω allora: se A è un EVENTO

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(A|B_i)\,P(B_i)}$$

DIM.

$$P(A) = P(A \cdot \Omega) = P\Big(A \sum_{i=1}^{N} B_i\Big) = P\Big(\sum_{i=1}^{N} A B_i\Big) = *$$



$$\bigcup_{i=1}^{N} B_i = B_1 \cup B_2 \cup \ldots B_N = B_1 + B_2 + \ldots B_N = \sum_{i=1}^{N} B_i$$

$A \cdot B_i \cap AB_k \quad i \neq k \quad \forall i,k$

$$* = \sum_{i=1}^{N} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{N} P(A|B_i)P(B_i) \quad \text{c.v.d.}$$

$$P(AB_i) = P(A|B_i) \cdot P(B_i) \Leftarrow P(A|B_i) = \frac{P(AB_i)}{P(B_i)}$$

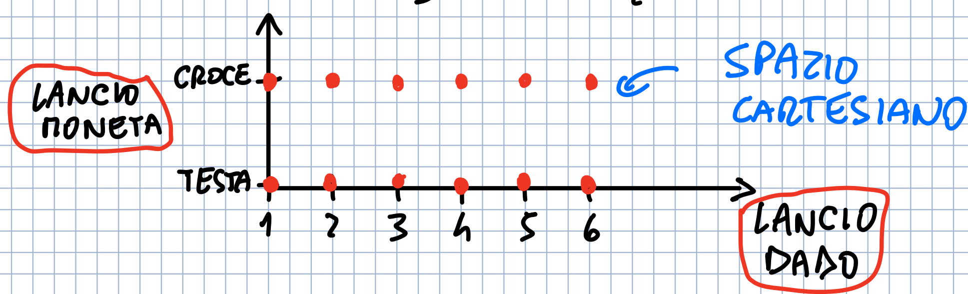
ESPERIMENTO ALEATORIO COMPOSTO

⇒ quando si considerano contemporaneamente 2 o più esperimenti CASUALI

<u>ES.</u>: LANCIO DI UN DADO E DI UNA MONETA

⇒ lo SPAZIO CAMPIONE DI UN ESPERIMENTO AL. COMPOSTO è il PRODOTTO CARTESIANO TRA GLI SPAZI CAMPIONE DEI SINGOLI ESPERIMENTI

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 - - - \times \Omega_N$$



RISULTATO = COPPIA "ORDINATA" DEI SINGOLI ESPERIMENTI

ES. "FACCIA DEL DADO "1" e "TESTA" "

EVENTO: è costituito dal PR. CARTES. dei singoli eventi

$$A = A_1 \times A_2 - - - - \times A_N$$

⇒ Se i singoli esperimenti ALEATORI sono indipendenti dagli altri:

$$\Rightarrow P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) - - - P(A_N)$$

$P(A_i) \quad i = 1 \ldots N$ sono le probabilità dei singoli eventi

N.B. NON POSSO RISALIRE ALLA LEGGE DI PR. DELL' EVENTO "A" A PARTIRE DALLA LEGGE DEI SINGOLI EVENTI

⇓

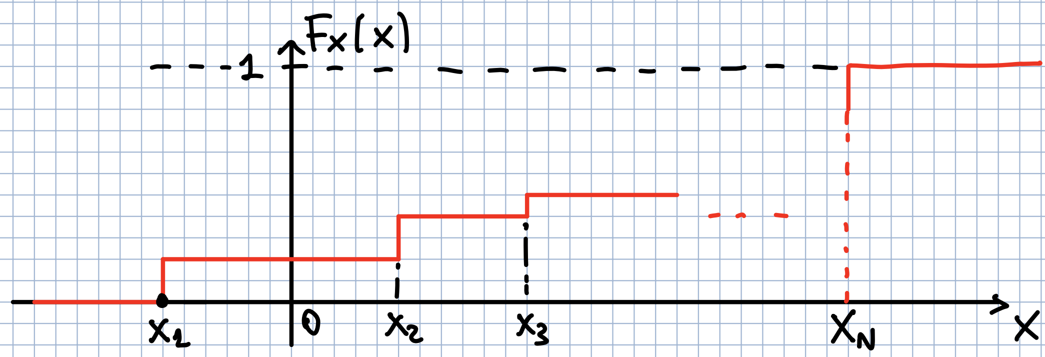
VALE SOLO SE GLI EVENTI SONO INDIPENDENTI

TIPOLOGIE DI V.A.: DISCRETE, CONTINUE, MISTE

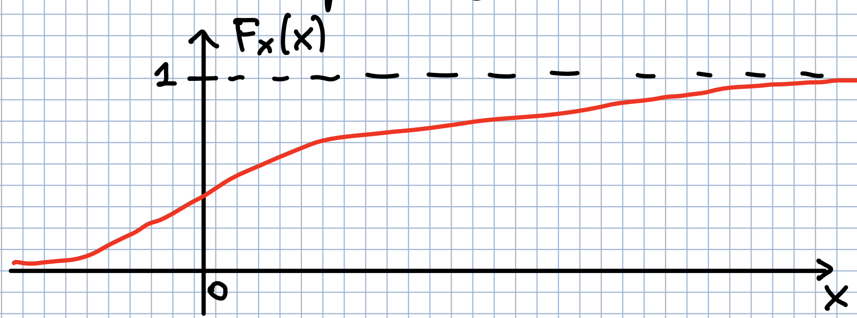
X DISCRETA

$$F_X(x) = \sum_n P\{X = x_n\}\, u(x - x_n)$$

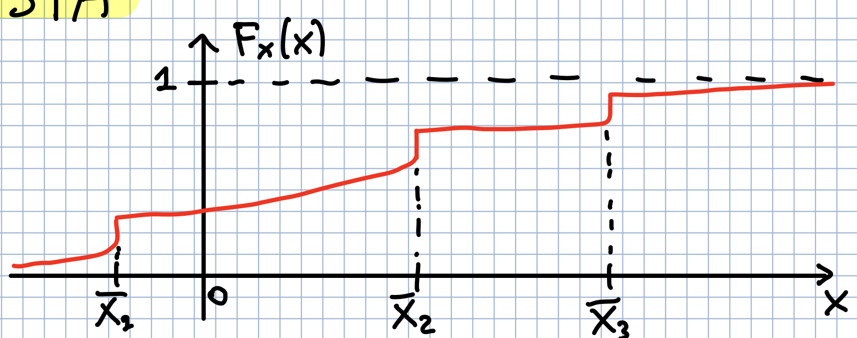
$P\{X = x_n\}$ masse di probabilità



X CONTINUA → produce una $F_X(x)$ continua senza discontinuità



X MISTA



DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI UNA V.A.

$$\boxed{f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)}$$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ (ddp)

$$\Downarrow$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha$$

PROPRIETÀ DELLA DDP 115

- $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x$ POICHÉ la $F_X(x)$ è MONOTONA NON DECRESCENTE

- $P\{a < X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a) =$

$$= \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx = \int_{a}^{b} f_X(x)\,dx = P\{a < X \leq b\}$$

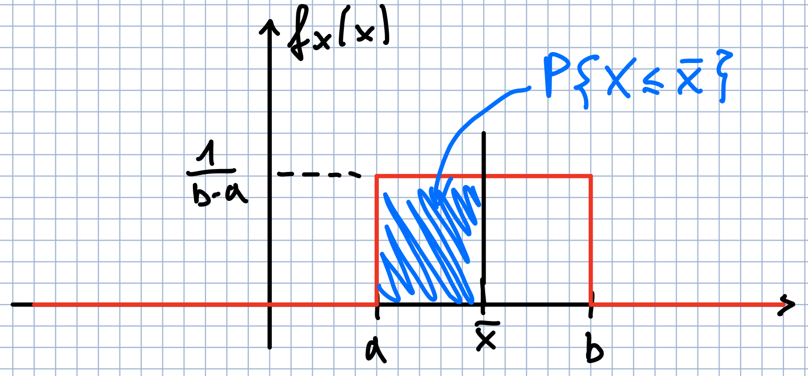
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$ (EVENTO CERTO)

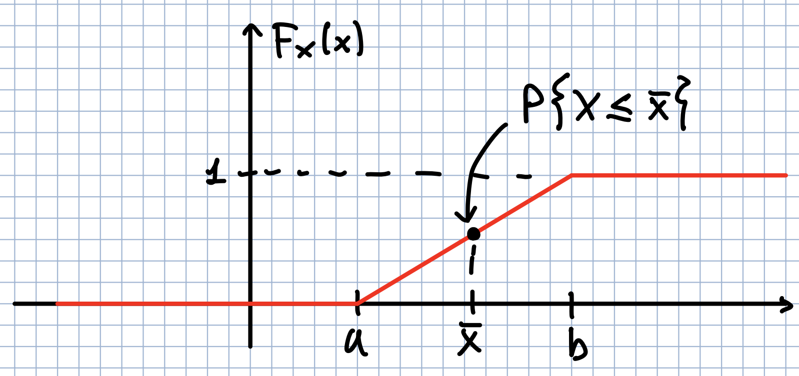
V.A. NOTEVOLI 116

- V.A. UNIFORME

X è una v.a. uniforme su (a, b) se:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathrm{rect}\left(\frac{x - \frac{b+a}{2}}{b-a}\right)$$





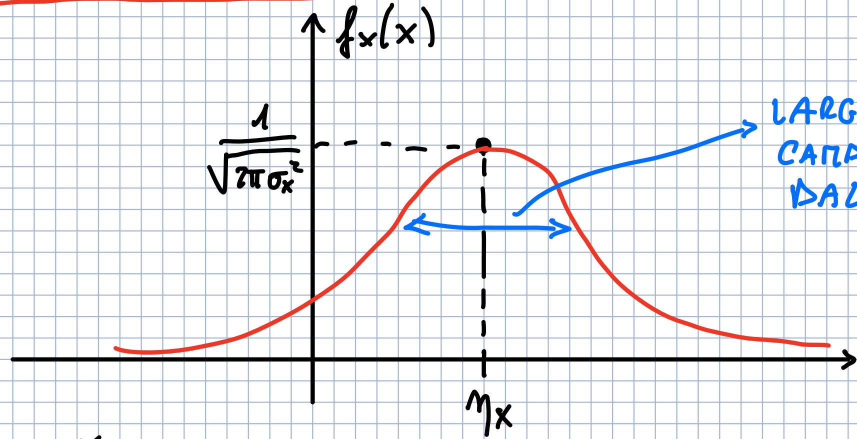
V.A. GAUSSIANA (o NORMALE)

$$X \in \mathcal{N}(\eta_x, \sigma_x^2)$$

SIMBOLOGIA

$$\boxed{f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}}}$$

DDP



LARGHEZZA DELLA CAMPANA È DETERMINATA DAL VALORE di σ_x^2

+ è grande e + è AMPIA

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(\alpha-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}} d\alpha$$

NON ESISTE UNA FORMA CHIUSA

V.A. GAUSSIANA STANDARD

$$X \in \mathcal{N}(0, 1) \qquad \eta_x = 0 \quad \sigma_x^2 = 1$$

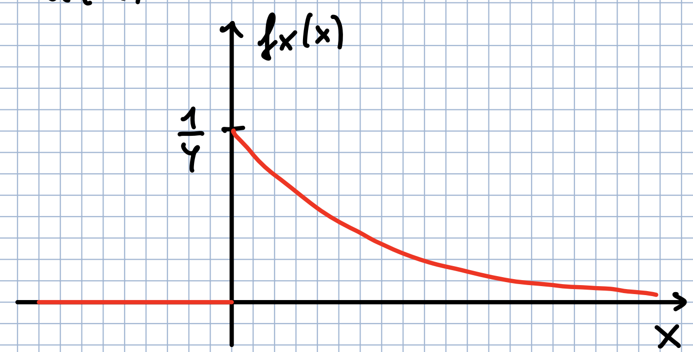
$$\boxed{f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

↑ STANDARD

$$F_N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \Phi(x)$$

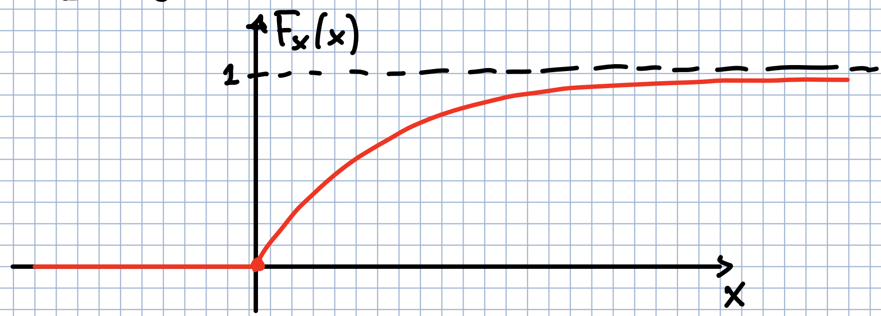
V.A ESPONENZIALE (UNILATERA)

$$f_x(x) = \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{x}{\gamma}} u(x)$$



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{\alpha}{\gamma}} u(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{\gamma}\int_{0}^{x} e^{-\frac{\alpha}{\gamma}}\, d\alpha = \frac{1}{\gamma}(-\gamma)\, e^{-\frac{\alpha}{\gamma}}\Big|_{0}^{x}$$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{\gamma}} \qquad x \geq 0$$



TRASFORMAZIONE DI V.A. 118

$$X \longrightarrow y = g(x)$$

$\downarrow$ se V.A.

$$X \longrightarrow Y = g(X)$$

$f_x(x)$ ddp della V.A. X e $f_Y(y) = ?$

TH. FOND. DELLA TRASFORMAZIONE DI V.A.

$$f_Y(y) = \sum_{i=1} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

$x_i \quad i = 1 \ldots N$

↳ sono le soluzioni della trasformazione inversa

$$x_i = g^{-1}(y)$$

APPLICAZIONE del T.F.

1) A seconda del valore di y

·) $\{x_i\}$ è un insieme vuoto $\Rightarrow f_Y(y) = 0$

·) $\{x_i\}$ contiene un numero finito oppure infinito ma numerabile di soluzioni

INDICI CARATTERISTICI DI UNA V.A 120

·) VALOR MEDIO (SPERANZA)

$$\eta_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx$$

PER V.A. DISCRETE

$$\eta_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \sum_{k=1}^{N} p_k\, \delta(x-x_k)\, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} p_k \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \delta(x-x_k)\, dx = \sum_{k=1}^{N} p_k x_k$$

$\Rightarrow$ OPERATORE VALOR MEDIO

$$\eta_x = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx$$

$\Rightarrow$ TH. VALOR MEDIO

$$Y = g(x)$$

$$\eta_Y = E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, dy$$

comporta l'applicazione del T.F. per le trasformazioni di V.A.

$$\boxed{\eta_Y = E[Y] = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_x(x)\, dx}$$

si evita il calcolo di $f_Y(y)$

$\Rightarrow$ si applica la linearità

$$y = \alpha g(x) + \beta h(x)$$

$$\eta_Y = \alpha E[g(x)] + \beta E[h(x)]$$

VARIANZA DI UNA V.A.

$$\sigma_x^2 = E[(x-\eta_x)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\eta_x)^2 f_x(x)\, dx$$

VALOR QUADRATICO MEDIO

$$m_x^2 = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x)\, dx$$

$$\sigma_x^2 = m_x^2 - \eta_x^2 = E[(X-\eta_x)^2] = E[X^2 + \eta^2 - 2\eta_x X] =$$

$$E[x^2] + E[\eta_x^2] - 2E[\eta_x X] = m_x^2 + \eta_x^2 - 2\eta_x E[x] =$$

$$= m_x^2 + \eta_x^2 - 2\eta_x^2 = \boxed{E[x^2] - \eta_x^2}$$

INDICI CARATTERISTICI DI V. A. GAUSSIANE 122

·) V. MEDIO

$$E[X] = \eta_x$$

VARIANZA 123

$$E[(X-\eta_x)^2] = \sigma_x^2 \quad \text{VARIANZA}$$

RELAZIONE TRA V. A. GAUSSIANE STD e NON STD. 123

STD) $N \in \mathcal{N}(0,1)$

NON STD) $X \in \mathcal{N}(\eta_x, \sigma_x^2)$ $\quad \eta_x \neq 0$ e/o $\sigma_x^2 \neq 1$

DA STD A NON STD :

$$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2}{2}} \rightarrow \qquad \sigma_x > 0$$

$X = g(N) = \sigma_x N + \eta_x$ TRASF. LINEARE

$N = \frac{X-\eta_x}{\sigma_x}$ UNICA SOL. INVERSA $\{x_i\} = n$

$$f_X(x) = \frac{f_N(n)}{|g'(n)|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{x-\eta_x}{\sigma_x}\right)^2}{2}}}{\sigma_x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_x} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$\Phi(x) = F_X(x) =$ $\qquad X \in \mathcal{N}(0,1)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$$

$$Q(x) = 1 - \Phi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$$

↓

PROB. DI ERRORE IN SISTEMI DI COM. NUMERICI

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$$

CORRELAZIONE E COVARIANZA DI 2 V.A.

$X \qquad Y$

$R_{xy} = E[X \cdot Y] =$ **CORRELAZIONE**

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \, f_{xy}(x,y)\, dx\, dy$$

$f_{xy}(x,y)$ ddp congiunta

$C_{xy} = E[(x-\eta_x)(y-\eta_y)] =$ **COVARIANZA**

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\eta_x)(y-\eta_y)\, f_{xy}(x,y)\, dx\, dy$$

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE

$$\rho_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

INDIPENDENZA ED INCORRELAZIONE

⇒ **INCORRELAZIONE**: due V.A. X e Y sono incorrelate se

$$C_{xy} = 0$$

⇒ **INDIPENDENZA**: nasce a priori e non è legata ad alcun parametro statistico

Se 2 Variabili sono indipendenti

$$\Downarrow$$

$$f_{xy}(x,y) = f_x(x)\, f_y(y)$$

X e Y sono INDIPENDENTI

$$\Downarrow$$

X e Y sono INCORRELATE

NON VALE IL CONTRARIO!

PROCESSI ALEATORI

I ORDINE

⇒ **V. MEDIO** 131

$$\eta_x(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_x(x;t)\, dx$$

DDP del I ordine

⇒ **POTENZA MEDIA STATISTICA ISTANTANEA**

$$P_x(t) = E[|x^2(t)|] = E[x^2(t)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x;t)\, dx$$

⇒ **VARIANZA DI UN PROCESSO**

$$\sigma_x^2(t) = E[(X(t) - \eta_x(t))] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\eta_x)^2 f_x(x;t)\, dx$$

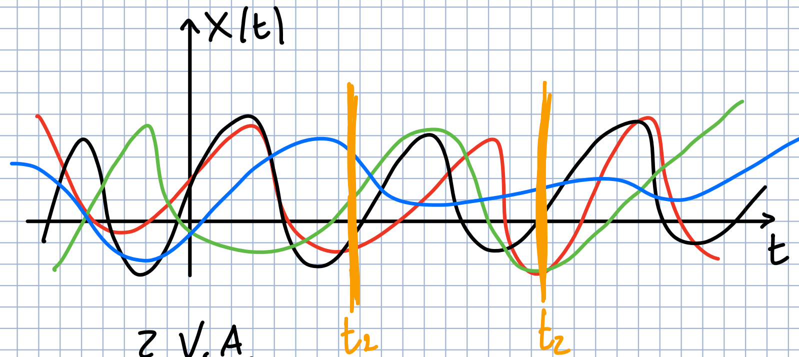
$$\sigma_x^2(t) = P_x(t) - \eta_x^2(t)$$

II ORDINE

AUTOCORRELAZIONE E AUTOCOVARIANZA

AUTOCORRELAZIONE

$$\boxed{R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)\cdot X(t_2)]}$$



2 V.A. X(t1) X(t2)

AUTOCOVARIANZA

$$X(t) \Rightarrow X(t_1),\, X(t_2)$$

AUTOCOVOLUZIONE

$$\boxed{C_X(t_1,t_2) = E[(X(t_1) - \eta_x(t_1))\cdot(X(t_2) - \eta_x(t_2))]}$$

$$R_x(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 \underbrace{f_x(x_1,x_2;t_1,t_2)}_{\text{II ORDINE}}\, dx_1\, dx_2$$

$$C_x(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \eta_x(t_1))(x_2-\eta_x(t_2)) \underbrace{f_x(x_1,x_2;t_1,t_2)}_{\text{II ORDINE}}\, dx_1\, dx_2$$

$$\boxed{C_x(t_1,t_2) = R_x(t_1,t_2) - \eta_x(t_1)\eta_x(t_2)}$$

⇒ STAZIONARIETÀ IN SENSO STRETTO (SSS)

⇒ V. MEDIO

$$\eta_x(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x;t)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x)\,dx = \eta_x$$ → NON DIPENDE DAL TEMPO

⇒ POTENZA

$$P_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x;\cancel{t})\,dx = P_x$$

⇒ VARIANZA

$$\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2$$

STAZIONARIETÀ IN SENSO LATO (SSL) 133

Un processo aleatorio è SSL se:

1) il suo V. MEDIO è costante $\eta_x(t) = \eta_x$

2) la sua autocorrelazione dipende dalla differenza $t_1 - t_2$ e non separatamente da t_1 e t_2

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2) = R_x(\tau) \qquad \tau = t_1 - t_2$$

·) AUTOCOVARIANZA DI UN PROCESSO SSL

$$C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - \eta_x^2(t) = R_x(t_1 - t_2) - \eta_x^2 = C_x(\tau)$$

$\tau = t_1 - t_2$

·) PROPRIETÀ DELLA AUTOCORRELAZIONE DI UN SSL

1) $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ PARI

2) $R_x(0) = E[x(t)x(t)] = E[x^2(t)] = P_x \geq 0$

3) $R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$

4) Se $R_x(\tau)$ non contiene componenti periodiche:

$$\Rightarrow \lim_{\tau \to \infty} R_x(\tau) = \eta_x^2$$

SIGNIFICATO DI AUTOCORRELAZIONE

$N(t)$ processo di un rumore

$N(t_1)$ $N(t_2)$ 2 campioni del rumore

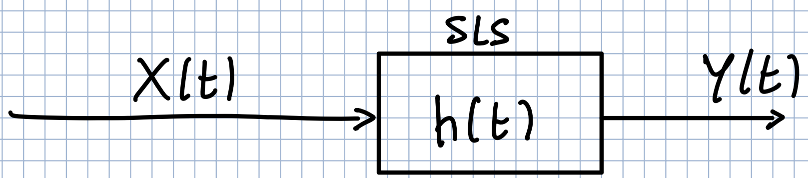
$\Downarrow$

2 V.A. estratte dal processo di rumore

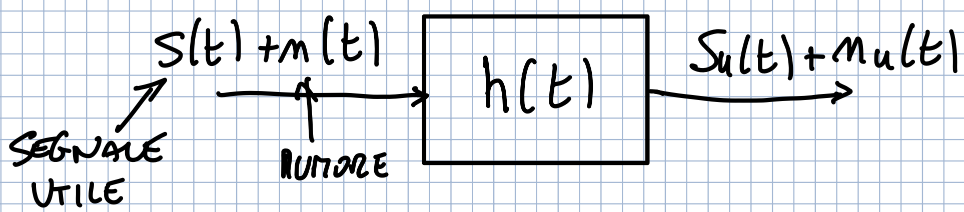
2 V.A. sono CORRELATE se la loro COVARIANZA è non NULLA

$$R_x(\tau) = C_x(\tau) + \eta_x^2$$

FILTRAGGIO DI SEGNALI ALEATORI 134



·) nei sistemi di comunicazione sono presenti SLS, così come è presente del rumore



$$S_u(t) = s(t) \otimes h(t)$$

$$n_u(t) = n(t) \otimes h(t)$$

per la LINEARITÀ

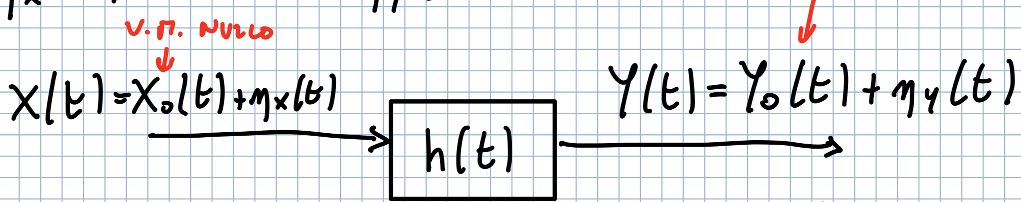
⇒ CALCOLO INDICI STATISTICI DI $Y(t)$

V. MEDIO

$$\eta_y(t) = \eta_x(t) \otimes h(t)$$

·) $\eta_x(t) = 0 \implies \eta_y(t) = 0$

·)



$$\eta_x(t) = E[X(t)]$$

$$Y_0(t) = X_0(t) \otimes h(t)$$

$$\boxed{\eta_y(t) = \eta_x(t) \otimes h(t)}$$ V. MEDIO PROCESSO USCITA

AUTOCORRELAZIONE DEL PROCESSO IN USCITA 137 DIM

$$R_Y(t_1,t_2) = E[Y(t_1)Y(t_2)] = R_X(t_1,t_2) \otimes h(t_1) \otimes h(t_2)$$

FILTRAGGIO DI PROCESSI ALEATORI SSL 138

·) VALOR MEDIO

$$\eta_Y(t) = \eta_X(t) \otimes h(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_X(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \eta_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\, d\tau = \eta_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(t')\, dt' = \boxed{\eta_X \underbrace{H(0)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j2\pi f t} \Big|_{f=0} =$$

$$= H(f)\Big|_{f=0} = H(0)$$

ANCHE $\eta_Y(t)$ non DIPENDE DAL TEMPO $\eta_Y(t) = \eta_Y$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$X(t)$ SSL

·) $\eta_X(t) = \eta_X$

·) $R_X(t_1,t_2) = R_X(\tau) \qquad \tau = t_1 - t_2$

AUTOCORRELAZIONE 138 DIM.

$$R_Y(t_1,t_2) \Rightarrow R_Y(t, t-\tau)$$

$$R_Y(t,t-\tau) = \boxed{R_Y(\tau) = R_X(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)}$$

R_Y DIPENDE SOLO DA $\tau = t_1 - t_2$

Se $X(t)$ è SSL

$$Y(t) = X(t) \otimes h(t)$$

$$\Downarrow$$

$Y(t)$ è SSL

SSL → V. MEDIO COSTANTE

SSL → AUTOCORRELAZIONE DIP. SOLO DA $\tau = t_1 - t_2$

DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DI UN PROCESSO SSL

I processi di rumore sono di classe energetica $\qquad$ 139
- potenza finita
- Energia infinita

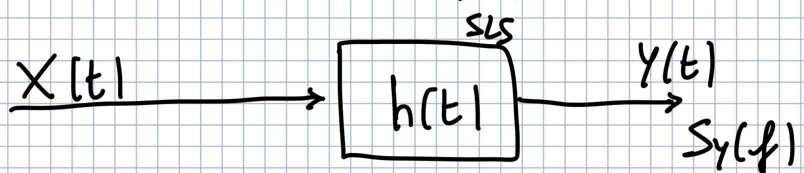
$\Rightarrow$ **TH. DI WIENER**

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \qquad \boxed{S_x(f) = TCF[R_x(\tau)]}$$

PROPRIETÀ DELLA $S_x(f)$ (DSP) $\qquad$ 141

1) $S_x(f)$ è REALE E PARI poiché R_x è REALE E PARI
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df = P_x$
3) $S_x(f) \geq 0 \quad \forall f$ NON-NEGATIVA

FILTRAGGIO DI UN PROCESSO SSL E CALCOLO DELLA DSP DEL PROCESSO IN USCITA



$X(t)$ è SSL

$$S_y(f) = TCF[R_y(\tau)] =$$

POSSO GIÀ DIRE CHE $Y(t)$ è SSL

$$= TCF[\underbrace{R_x(\tau) \otimes h(t) \otimes h(-\tau)}_{R_y(\tau)}] = S_x(f)\, H(f)\, H^*(f) = S_x(f)\, |H(f)|^2$$

$$\boxed{S_y(f) = S_x(f)\, |H(f)|^2}$$

POTENZA MEDIA DEL PROC. AL. IN USCITA

$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, |H(f)|^2\, df$$

PROCESSO DI RUMORE BIANCO

$x(t)$ si dice BIANCO se:

1) $\eta_x = 0$

2) $R_x(\tau) = K\,\delta(\tau) = C_x(\tau)$

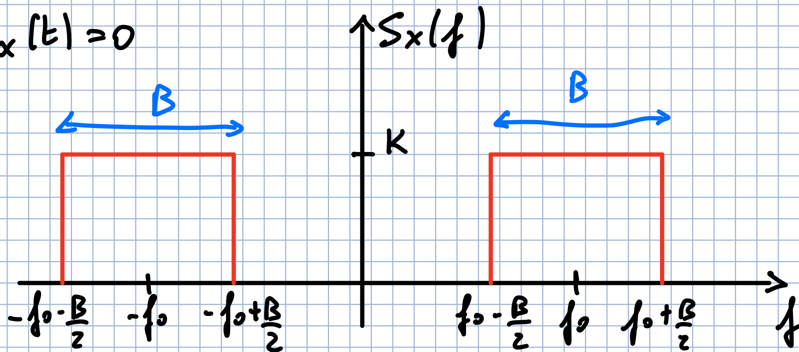
RUMORE BIANCO E' SSL

3) $S_x(f) = K \quad \forall f$

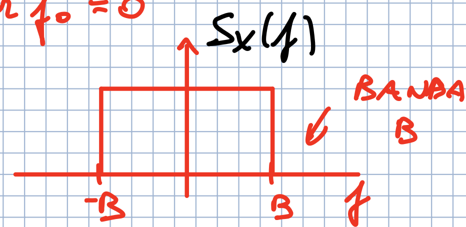
RUMORE BIANCO IN BANDA

144

$\eta_x(t) = 0$

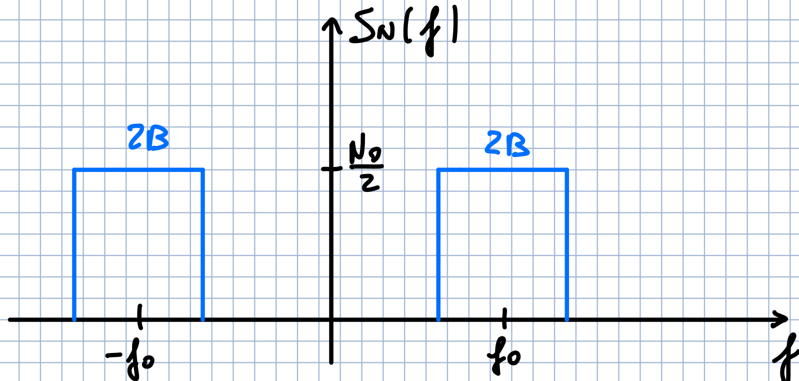


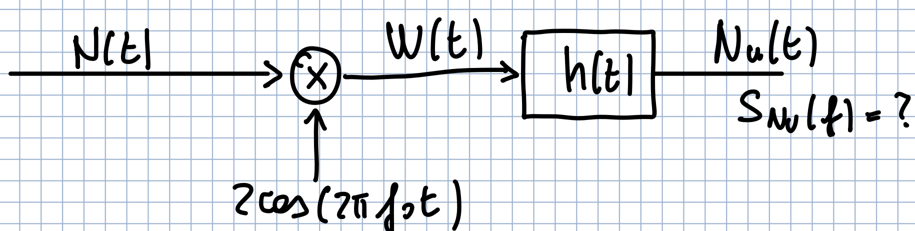
per $f_0 = 0$



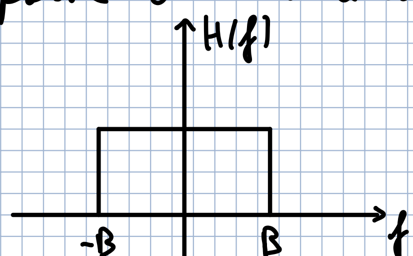
DEMODULAZIONE DI UN RUMORE BIANCO IN BANDA PASSANTE

144





$h(t)$ è un passa-basso ideale di banda B



$$S_N(f) = \frac{N_0}{2}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_0}{2B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+f_0}{2B}\right)\right]$$

$R_N(\tau) = 2N_0 B \, \text{sinc}(2B\tau)\cos(2\pi f_0 \tau)$

$W(t) = 2N(t)\cos(2\pi f_0 t)$ è ANCORA GAUSSIANO

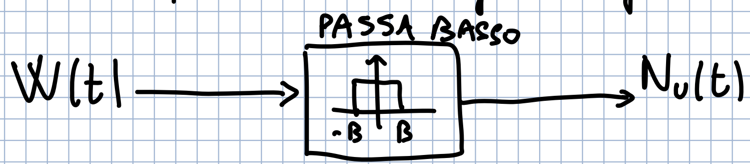
$\eta_w(t) = 0$

$R_w(t_1,t_2) = E[w(t_1)\, w(t_2)] =$

$= 2R_N(t_1-t_2)[\cos(2\pi f_0(t_1+t_2))\cos(2\pi f_0(t_1-t_2))]$

$R_N(\tau) = 2N_0 B \, \text{sinc}(2B\tau)\cos(2\pi f_0 \tau)$

$= 2N_0 B \, \text{sinc}(2B\tau) +$ termini a $f \to 2f_0$

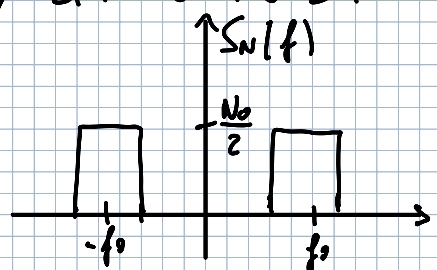


$R_{N_u}(t_1,t_2) = R_w(t_1,t_2) \otimes h(t_1) \otimes h(t_2)$

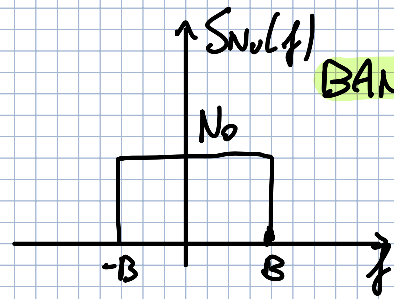
$R_{N_u}(t_1,t_2) = 2N_0 B \, \text{sinc}(2B(t_1-t_2)) = 2N_0 B \, \text{sinc}(2B\tau)$

$S_{N_u}(f) = N_0 \, \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$

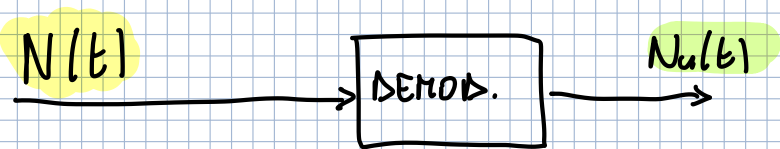
PARTO DA UN RUMORE
BIANCO IN BANDA PASSANTE



DEMODUL.
$\Rightarrow$

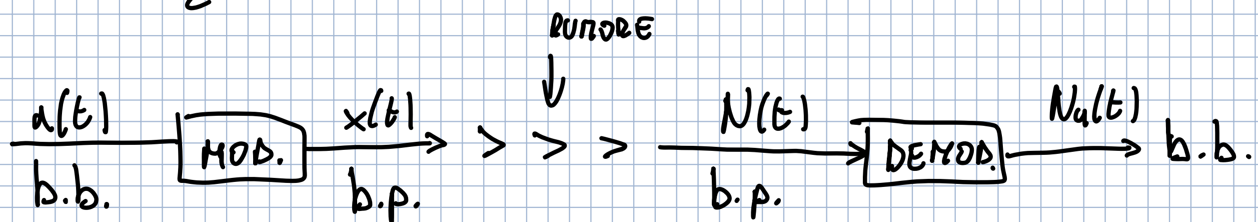


BANDA BASE



$S_N(f) = \frac{N_0}{2}$ in banda

$S_{N_u}(f) = N_0$ in banda

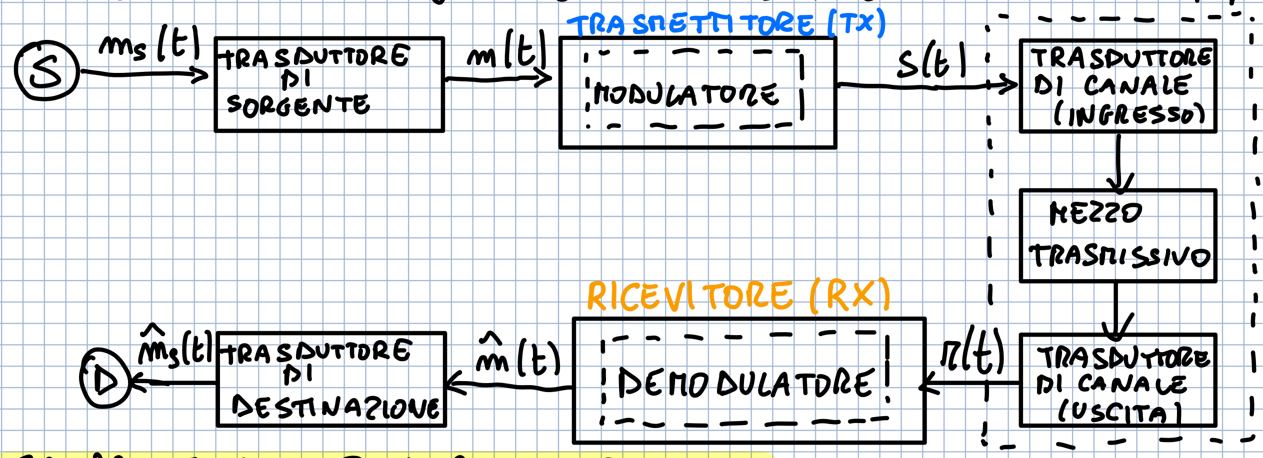


PASSA
BASSO

$x(t) = a(t)\cos(2\pi f_0 t)$

$x(t) \Rightarrow y(t) = x(t)\, 2\cos(2\pi f_0 t) \otimes h(t)$

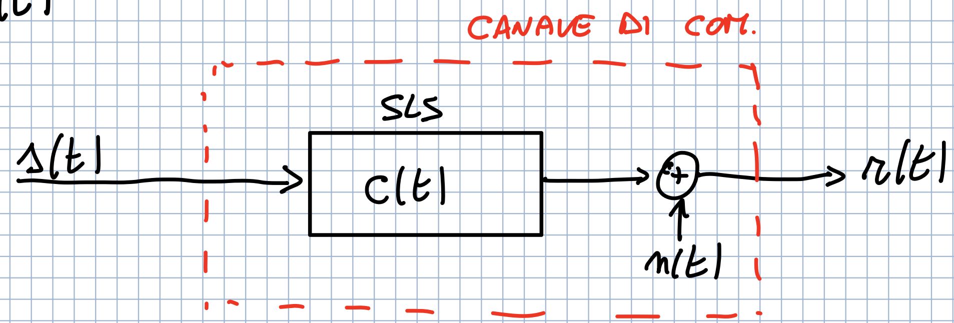
•) SCHEMA DI PRINCIPIO di un SISTEMA DI COM. P.P. 146



CANALE DI COMUNICAZIONE

•) Distorsioni lineari di $s(t)$

•) Aggiunge rumore



$c(t)$ = risposta impulsiva del canale

$n(t)$ = rumore additivo (PR. AL. ADDITIVO)

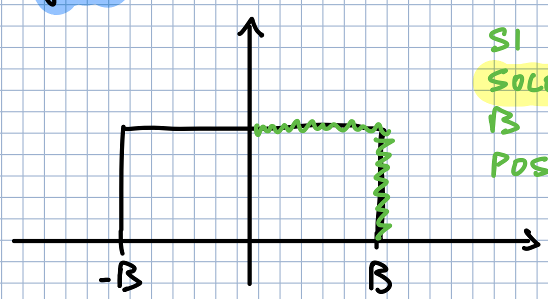
$$r(t) = \underbrace{s(t) \otimes c(t)}_{\text{COMPON. UTILE}} + \underbrace{n(t)}_{\text{COMP. RUMORE}}$$

CANALE IDEALE

$$\left.\begin{array}{l} \cdot)\ c(t) = \delta(t) \\ \cdot)\ n(t) = 0 \end{array}\right\} \quad r(t) = s(t)$$

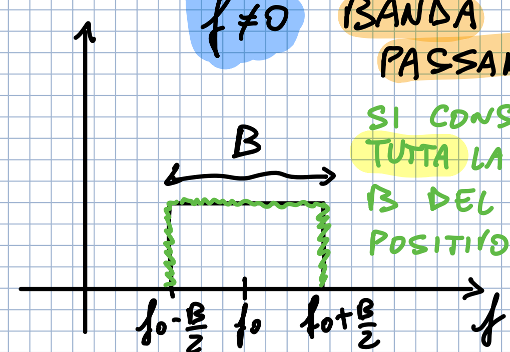
•) In generale noi considereremo il canale di comunicazione come una porzione di spettro intorno alle FREQUENZA f_0 di banda B

$f_0 = 0$ BANDA BASE



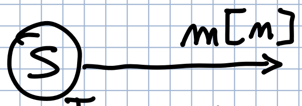
SI CONSIDERA SOLO LA BANDA B DEL SEMIASSE POSITIVO

$f \neq 0$ BANDA PASSANTE



SI CONSIDERA TUTTA LA BANDA B DEL SEMIASSE POSITIVO

SISTEMI DI COM. NUMERICI

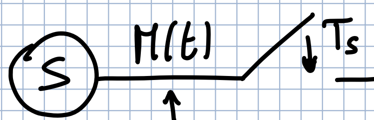


$T_s \rightarrow$ PERIODO DI SEGNALAZIONE DELLA SORGENTE

$m[n] \Rightarrow$ SIMBOLI

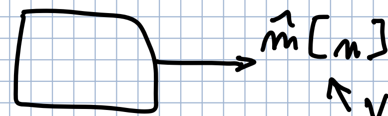
$m[n] \in A_s = \{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_M\}$

$\boxed{M \geq 2}$



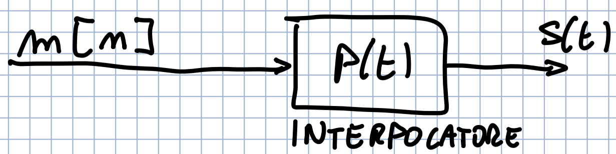
$m[n] \rightarrow$ V.A.

PROCESSO ALEATORIO $\in A_s$



V.A. $\neq m[n]$

·) TRASFORMAZIONE DA SEQUENZA DI V.A. A SEGNALE AL. ANALOGICO

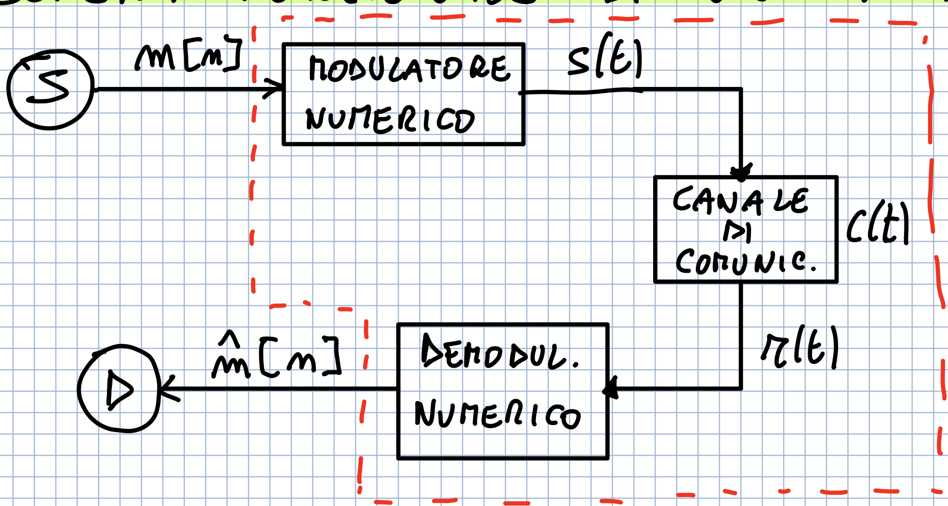


R_s = tasso erogazione sorgente

$$\boxed{R_s = \frac{1}{T_s}}$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m[n]\, p(t - nT_s)$$

SCHEMA FUNZIONALE DI UN SIST. DI COM. NUM.



CANALE NUMERICO

$r(t) = s(t) \otimes c(t) + n(t)$

$\hat{m}[n] = m[n] \;\; \forall n \rightarrow$ CANALE NUM. IDEALE

$\Rightarrow$ In pratica un canale numerico non è <u>mai</u> IDEALE

$\Rightarrow$ PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE

$$P\{i \mid j\} = P\{\hat{m}[n] = \alpha_i \mid m[n] = \alpha_j\}$$

RICEVA

CONDIZIONATO DALL'AVER TRASMESSO DALLA SORGENTE

- CANALE IDEALE

$P\{i \mid j\} = 0 \quad \forall i \neq j$

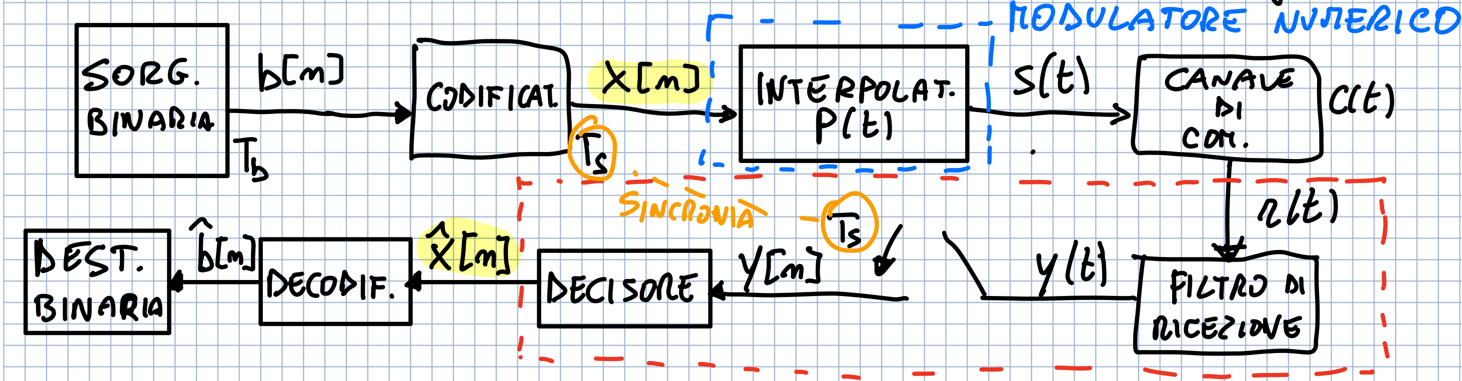
$P\{i \mid i\} = 1 \quad \forall i$

le prob. non cambiano nel tempo

$\Rightarrow$ le $P\{i \mid j\}$ non dipendono solo dal canale di comunicazione, ma anche dalla coppia mod/demodulatore

È IMPORTANTE $\to$ PROGETTARE IN MODO EFFICACE MOD. E DEMOD.

SISTEMI DI COM. NUMERICI (BANDA BASE) $f_0 = 0$



M = cardin. alfabeto $(M = 2^K)$

$T_s = \log_2 M \cdot T_b \qquad R_s = \dfrac{1}{\log_2 M \cdot T_b}$

(152)

$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, p(t - mT_s)$

- FILTRO DI RICEZIONE: serve a eliminare/attenuare l'effetto dannoso del rumore e per bilanciare eventuali effetti distorsivi del canale

$\Rightarrow$ INTERPOLATORE (IN BANDA BASE)

TRASFORMA UN SEGNALE NUMERICO IN ANALOGICO

p(t) = funzione interpolatrice $\Rightarrow$ impulso sagomatore

p(t) $\to$ BANDA $\Rightarrow P(f)$

p(t) $\to$ ENERGIA $\Rightarrow E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2\,df$

$x[m] \Rightarrow$ V.A. $\Rightarrow$ s(t) è un processo ALEATORIO STAZIONARIO

$\Downarrow$

$R_s(\tau),\ S_s(f)$

POTENZA MEDIA

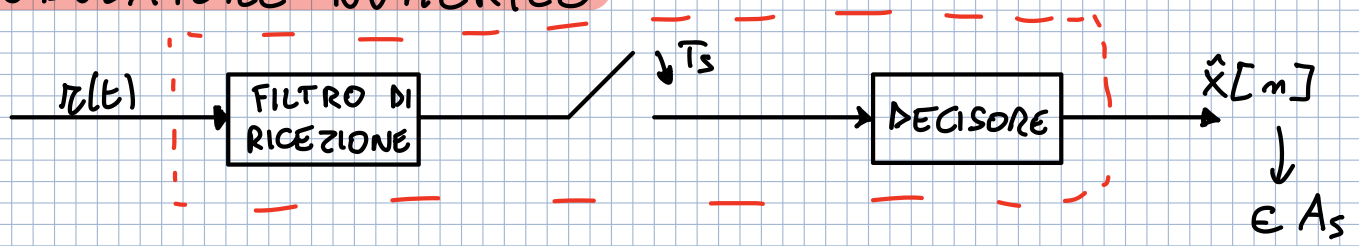
$$P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} S_s(f)\, df = R_s(0)$$

ENERGIA PER BIT $= E_b$

$$E_b = \frac{T_s P_s}{\log_2 M} = \frac{E_s}{\log_2 M}$$

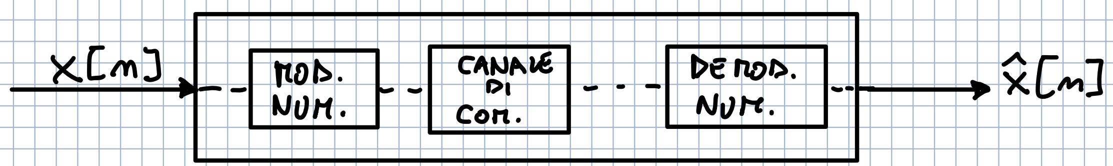
DEMODULATORE NUMERICO

153



⇒ TRASFORMA IL SEGNALE RICEVUTO IN SIMBOLI $\in A_s$ CERCANDO DI MINIMIZZARE LA PROB. DI ERRORE

CANALE NUMERICO E PRESTAZIONI



$P_{E_s} = P_E(M) = ?$ $\qquad M$: n° simboli dell'alfabeto $\Rightarrow A_s = \{\alpha_0 \dots \alpha_{M-1}\}$

$\Rightarrow P\{i \mid j\}$ prob. di transizione $= P\{\hat{x}[n] = \alpha_i ,\ x[n] = \alpha_j\}$

$$P_E\{M\} = P\{\hat{x}[n] \neq x[n]\} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} P\{\hat{x} = \alpha_i ,\ x = \alpha_j\} =$$

PROB. TOTALE

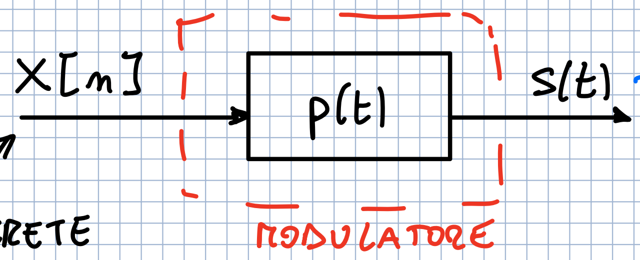
$$= \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} P\{\hat{x} = \alpha_i \mid x = \alpha_j\}\, P\{x = \alpha_j\}$$

$P\{x = \alpha_j\}\ \forall j \Rightarrow$ PR. A PRIORI

SIMBOLI SONO EQUIPROBABILI

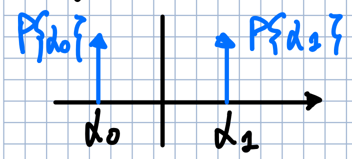
$$P\{x = \alpha_j\} = \frac{1}{M} \quad \forall j$$

Quando i simboli non sono equiprobabili, sono date le prob. a priori



SEGNALE ALEATORIO PARAMETRICO CON PARAMETRI LE V.A. RAPPRESENTATE DAI SIMBOLI EMESSI DALLA SORGENTE

V.A. DISCRETE



$$s(t) \rightarrow \begin{cases} s_0(t) = \alpha_0\, p(t) \\ s_1(t) = \alpha_1\, p(t) \\ \vdots \\ s_{M-1} = \alpha_{M-1}\, p(t) \end{cases}$$

REALIZZAZIONI DEL PROCESSO $s(t)$

$$E_{s_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t)\, dt$$

$s_i(t)$ è il segnale trasmesso relativo all'i-esimo simbolo

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n]\, p(t - nT)$$

MOD. NUM. IN BANDA BASE

$E_{s_i} = E_s \quad \forall i \Rightarrow$ MODULAZIONE EQUIENERGETICA

$$E_{s_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i^2 p^2(t)\, dt = \alpha_i^2 E_p$$

$$E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t)\, dt$$

PULSE AMPLITUDE MODULATION (PAM)

M-PAM $\Rightarrow$ PAM con M simboli $\quad A_s = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{M-1}\}$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{p(t)} \longrightarrow s(t)$$

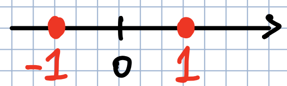
DEFINIZIONE DI UNA PAM

1) $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t - nT_s)$ $\qquad T_s$: intervallo di erogazione simboli

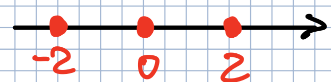
2) SIMBOLI : $\alpha_i = 2i - 1 - M$ $\qquad M$: n° simboli

ESEMPIO

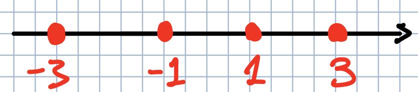
$M = 2$ $\qquad \alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ $\qquad$ 2-PAM



$M = 3$ $\qquad \alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 2$ $\qquad$ 3-PAM



$M = 4$ $\qquad \alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 3$ $\qquad$ 4-PAM



$$E_{s_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i^2 p^2(t - nT_s)\,dt = (2i-1-M)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t - nT_s)\,dt =$$

DIPENDE DA i e quindi NON E' EQUIENERGIA $\rightarrow$ $= (2i - 1 - M)^2 E_p$

EN. MEDIA PER IMPULSO TRASMESSO

$$E_s = E[E_{s_i}] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t)\,dt\right] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i^2 p(t - nT_s)\,dt\right] =$$

$$= E[\alpha_i^2] \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t - nT_s)\,dt = E[\alpha_i^2]\, E_p$$

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2 M}$$

PROPRIETÀ DERIVATE DELLA PAM

1) $E[s(t)] = 0 \quad \forall t$

2) $$\boxed{S_s(f) = \frac{1}{T_s} \bar{S}_x(f) |P(f)|^2}$$ FORMULA GENERALE → DSP per simboli PAM

$$\bar{S}_x(f) = TFS[R_x[m]]$$

$$R_x[m] = E[x[n]\, x[n-m]]$$

$$P(f) = TCF[p(t)]$$

PER SIMBOLI EQUIPROBABILI

$$\bar{S}_x(f) = \sigma_x^2 = E[x^2] \qquad E[x] = 0$$

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - \underbrace{\eta_x^2}_{=0} = E[x^2]$$

$$\boxed{S_s(f) = \frac{\sigma_x^2}{T_s} |P(f)|^2}$$ PER SIMBOLI EQUIPROBABILI

PRESTAZIONI DEI SIST. DI COM. NUM. (IN BANDA BASE)

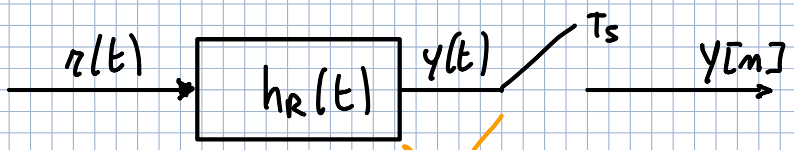
160

- Due fenomeni peggiorativi

① INTERFERENZA INTER-SIMBOLICA (ISI)

② RUMORE

⇒ ISI (SENZA RUMORE)



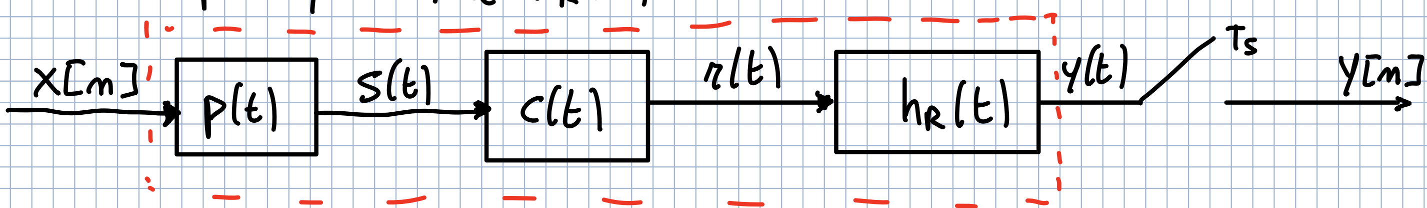
$$r(t) = s(t) \otimes c(t) + \cancel{n(t)} =$$

SIAMO IN CONDIZIONI DI ASSENZA DI RUMORE

$$= \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, p(t-kT_s)\right] \otimes c(t)$$

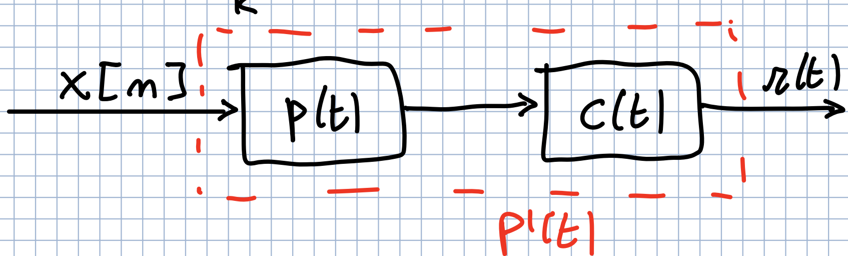
$$y(t) = r(t) \otimes h_R(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, p(t-kT_s)\right] \otimes c(t) \otimes h_R(t)$$

⇒ Per poter valutare la presenza o meno di ISI devo considerare $p(t)$, $c(t)$ e $h_R(t)$



POSSO VEDERLO COME UN UNICO OGGETTO?

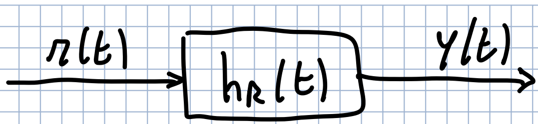
$$s(t) \otimes c(t) = \sum_k x[k]\, p'(t-kT_s)$$ con $p'(t) = p(t) \otimes c(t)$



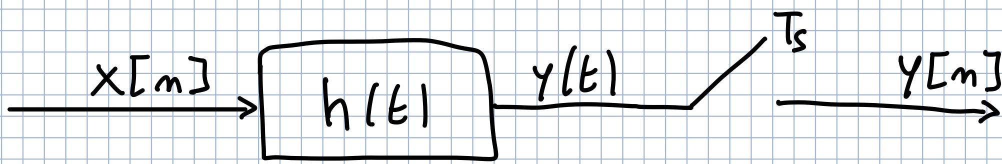
$$r(t) = \sum_k x[k]\, p'(t-kT_s)$$

$$y(t) = r(t) \otimes h_R(t) = \sum_k x[k]\, h(t-kT_s)$$

$$h(t) = p'(t) \otimes h_R(t)$$



$$\boxed{h(t) = p'(t) \otimes h_R(t) = p(t) \otimes c(t) \otimes h_R(t)}$$



INTERPOLATORE EQUIVALENTE

$$y(t) = \sum_k x[k]\, h(t - kT_s)$$

$$y(t)\Big|_{t=nT_s} = y[n] = \sum_k x[k]\, h(nT_s - kT_s) = \sum_k x[k]\, h((n-k)T_s) =$$

COMPONENTE DI y[n] CHE DIPENDE SOLO DA x[n]

$$= \underbrace{x[k]\, h(0)}_{k=n} + \underbrace{\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{+\infty} x[k]\, h((n-k)T_s)}$$

COMPONENTE DI y[n] CHE DIPENDE DA TUTTI GLI ALTRI SIMBOLI

CRITERIO DI NYQUIST PER L'ASSENZA DI ISI

163

$$\left[\, h[n] = h(nT) = \delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \right]$$

TEMPO

$\Downarrow$

si può estendere anche al caso più generico

$$h[n] = k\,\delta[n] \quad , \; k \in \mathbb{R} \qquad k\,x[k] = h(0)\, x[k]$$

CRITERIO DI NYQUIST PER L'ASSENZA DI ISI (IN FREQUENZA)

$$h[n] = k\,\delta[n]$$

$\Downarrow$ TFS

$$\overline{H}(f) = k = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = k\,T_s = h(0)\,T_s = \text{costante}}$$

FREQUENZA

In assenza di ISI questa somma $(\overline{H}(f))$ è costante

- Per verificare l'assenza di ISI

NEL TEMPO

$h(nT_s) = K\delta[n]$

IN FREQUENZA

$\overline{H}(f) = \text{COST.}$

$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{m}{T_s}\right) = \text{cost.}$

PASSI

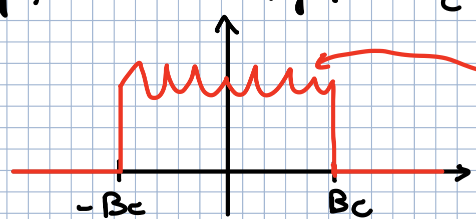
$\Rightarrow h(t) = p(t) \otimes c(t) \otimes h_R(t)$ $\Rightarrow$ COND. NYQUIST nel tempo

$\Rightarrow H(f) = P(f)\, C(f)\, H_R(f)$ $\Rightarrow$ COND. NYQUIST in frequenza

CONDIZIONE NECESSARIA PER L'ASSENZA DI ISI

- Canale a banda rigorosamente limitata

$C(f) = 0 \qquad |f| > B_c$ = banda del canale

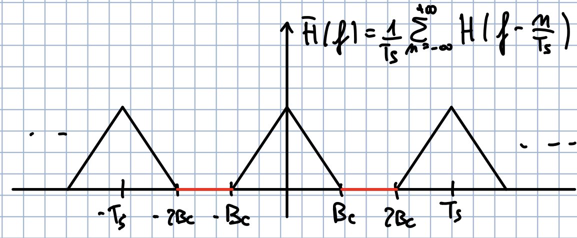


166

- $B_T = B_c = B_{HR}$

$\Rightarrow$ CONDIZIONE PER CUI NON SI PUÒ ELIMINARE L'ISI

$$\boxed{T_s < \frac{1}{2B_c}}$$



CONDIZIONE DI T_s MINIMO

$$\boxed{T_s^{(MIN)} = \frac{1}{2B_c}}$$ $\Rightarrow$ HO UN'UNICA SOLUZIONE per $H(f)$

Questa soluzione ha 2 PROBLEMI:

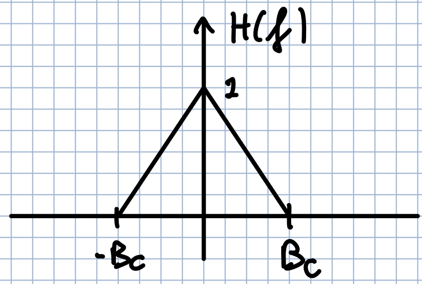
1) REALIZZABILITÀ di una $H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B_c}\right)$

il criterio di Weiner dice che non può esistere una $h(t)$ che realizza questa $H(f)$

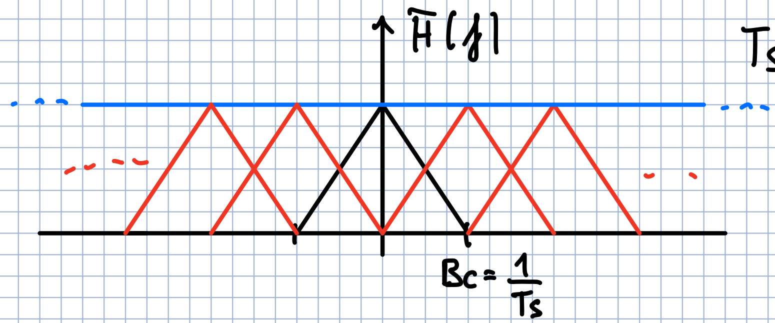
2) Piccoli errori di campionamento provocano un grosso ISI

CONDIZIONE PRATICABILE E A BASSO IMPATTO SULL'ISI

$$T_s > \frac{1}{2B_c}$$

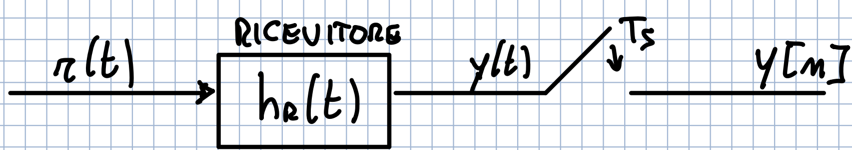


INFINITE SOLUZIONI TALI CHE : $\bar{H}(f) = \text{COST.}$



$$T_s = \frac{1}{B_c}$$

RICEVITORE OTTIMO IN PRESENZA DI RUMORE BIANCO



OTTIMO ⇒ CRITERIO DI OTTIMALITA' ⇒ MAX RAPPORTO SEGNALE/RUMORE

y[m] ha max SNR. ⇒ IL FILTRO $h_R(t)$ è "ADATTATO"? SI

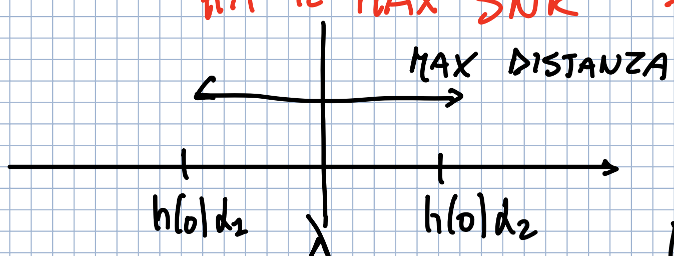
$$h_R(t) = K\,p'(-t)$$

$$p'(t) = p(t)$$

$p(t)$ è REALE E PARI ⇐ $P(f)$ REALE E PARI

$p(-t) = p(t) = h_R(t) \rightarrow h_R(t) = p(-t) = p'(-t)$

HA IL MAX SNR → $\boxed{h_R(t) = K\,p'(t)}$ $K = 1$



MAX SNR ⇒

P media del segnale in uscita al campionatore

$$\frac{E[h^2(0)\,x^2[n]]}{P_{nu}} = \frac{h^2(0)\,E[x^2]}{P_{nu}} =$$

$$= \frac{E[x^2]}{\frac{N_0}{T}} h^2(0) \longrightarrow \text{MAX } h^2(0) \Rightarrow \text{MAX } h(0)$$

$\Downarrow$

MAX DISTANZA TRA I SIMBOLI $\rightarrow$ MINIMA $P_E(b)$

CRITERIO A MASSIMA PROBABILITÀ A POSTERIORI (MAP)

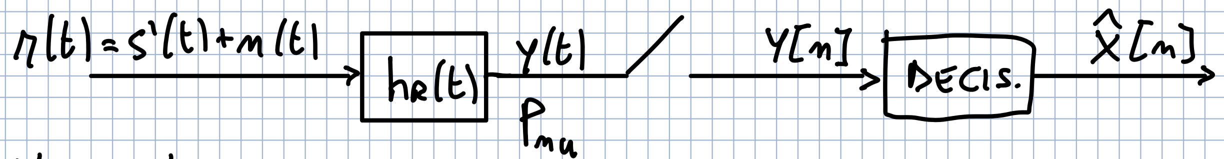
- Viene introdotto per trovare una soluzione al crit. di min. prob. di errore
- Si dimostra che massimizzando la prob. a posteriori $\Rightarrow$ si massimizza la prob. di errore

172

CRITERIO MAP $\Rightarrow$ CRITERIO MINIMA $P_E(M)$

$\Rightarrow$ CASO GAUSSIANO BIANCO

174



$s'(t) = s(t) \otimes c(t)$

IN ASSENZA DI ISI

$$Y[n] = h(0)\,x[n] + n_u$$

è una V.A. GAUSSIANA con V. MEDIO NULLO e VARIANZA $\sigma_{nu}^2 = P_{nu}$

ANALISI DELLE PERFORMANCE DI SISTEMI DI COMUNICAZIONE IN BANDA BASE CON MODULAZIONE PAM (ANCHE NON STD)

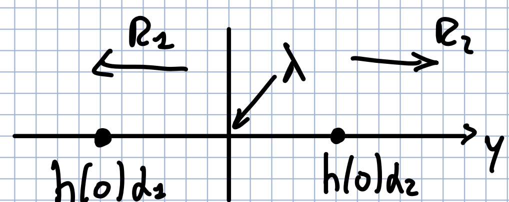
$\rightarrow \alpha_i \neq 2i-1-M$

$\Downarrow$

CALCOLARE le P_E

178

- soglia di decisione "λ" nota



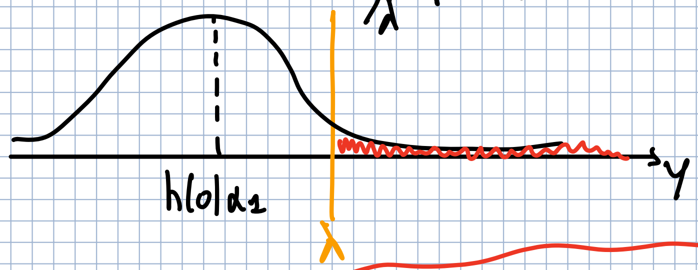
$$P_E(b) = P\{\hat{b} = \alpha_1 \mid b = \alpha_2\}\, P\{b = \alpha_2\} + P\{\hat{b} = \alpha_2 \mid b = \alpha_1\}\, P\{b = \alpha_1\}$$

$$\Rightarrow P\{\hat{b}=\alpha_1 \mid b=\alpha_2\} = Q\left(\frac{h(0)\alpha_2-\lambda}{\sigma_{nu}}\right)$$

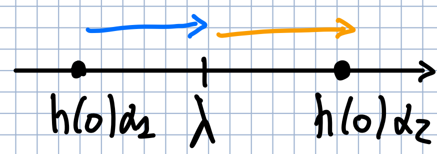
$$\Rightarrow P\{\hat{b}=\alpha_2 \mid b=\alpha_1\} = \int_{\lambda}^{+\infty} f_y(y \mid x=\alpha_1)\,dy = Q\left(\frac{\lambda-h(0)\alpha_1}{\sigma_{nu}}\right)$$

$$\Uparrow$$

$$y|\alpha_1 = h(0)\alpha_1 + n_u$$



$$\boxed{\begin{aligned} P\{\hat{b}=\alpha_1 \mid b=\alpha_2\} &= Q\left(\frac{h(0)\alpha_2-\lambda}{\sigma_{nu}}\right) \\ P\{\hat{b}=\alpha_2 \mid b=\alpha_1\} &= Q\left(\frac{\lambda-h(0)\alpha_1}{\sigma_{nu}}\right) \end{aligned}}$$



$$P_E(b) = P\{\alpha_1\}\, Q\left(\frac{\lambda-h(0)\alpha_1}{\sigma_{nu}}\right) + P\{\alpha_2\}\, Q\left(\frac{h(0)\alpha_2-\lambda}{\sigma_{nu}}\right)$$

$\sigma_{nu}^2 = \boxed{P_{nu}}$ $\Rightarrow$ lo devo calcolare all'uscita di $h_R(t)$

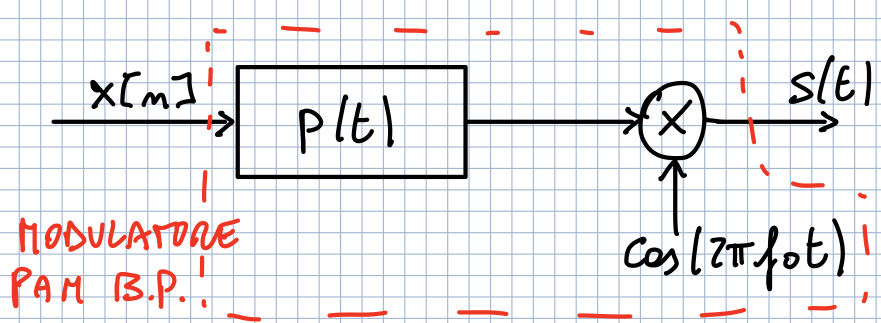
$$\boxed{P_{nu} = \frac{N_0}{2} E_{hR}} \quad \rightarrow \quad \sigma_{nu} = \sqrt{P_{nu}} = \sqrt{\frac{N_0}{2} E_{hR}}$$

$\Rightarrow$ PAM IN BANDA PASSANTE

179

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t-nT_s)\cos(2\pi f_0 t) \qquad \text{BANDA PASSANTE}$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t-nT_s) \qquad \text{BANDA BASE}$$



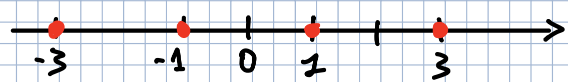
$x[n] \in A_s = \{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n\}$ $\alpha_i = 2i - 1 - M$ Per PAM STD.

$s_i(t) = \alpha_i \, p(t) \cos(2\pi f_0 t)$ è il segnale trasmesso relativo a α_i

$s_i(t) = Re\{\tilde{s}_i(t) e^{j2\pi f_0 t}\}$

$\tilde{s}_i(t) = \alpha_i \, p(t)$ è REALE

$p(t)$ è REALE $\Rightarrow$ α_i sono REALI



SPAZIO DEI SIMBOLI

EN. MEDIA PER SIMBOLO TRASMESSO

$$\boxed{E_s = \frac{1}{2} E[x^2] E_p}$$

MODULAZIONE QAM 181

$$\boxed{s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c[n] p(t - nT_s) \cos(2\pi f_0 t) - x_s[n] p(t - nT_s) \sin(2\pi f_0 t)}$$

SEGNALE MODULATO QAM

$\tilde{x}[n] = x_c[n] + j x_s[n]$

$$\tilde{x}[n] \longrightarrow \boxed{\text{MODULATORE QAM}} \xrightarrow{s(t)} \text{REALE}$$

$s(t) = Re\{\tilde{s}(t) e^{j2\pi f_0 t}\}$ è REALE, quindi la parte COMPLESSA NON LA CONSIDERO

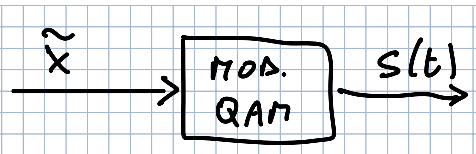
$$Re\{\tilde{s}(t) e^{j2\pi f_0 t}\} = x_c[n] p(t) \cos(2\pi f_0 t) - x_s[n] p(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

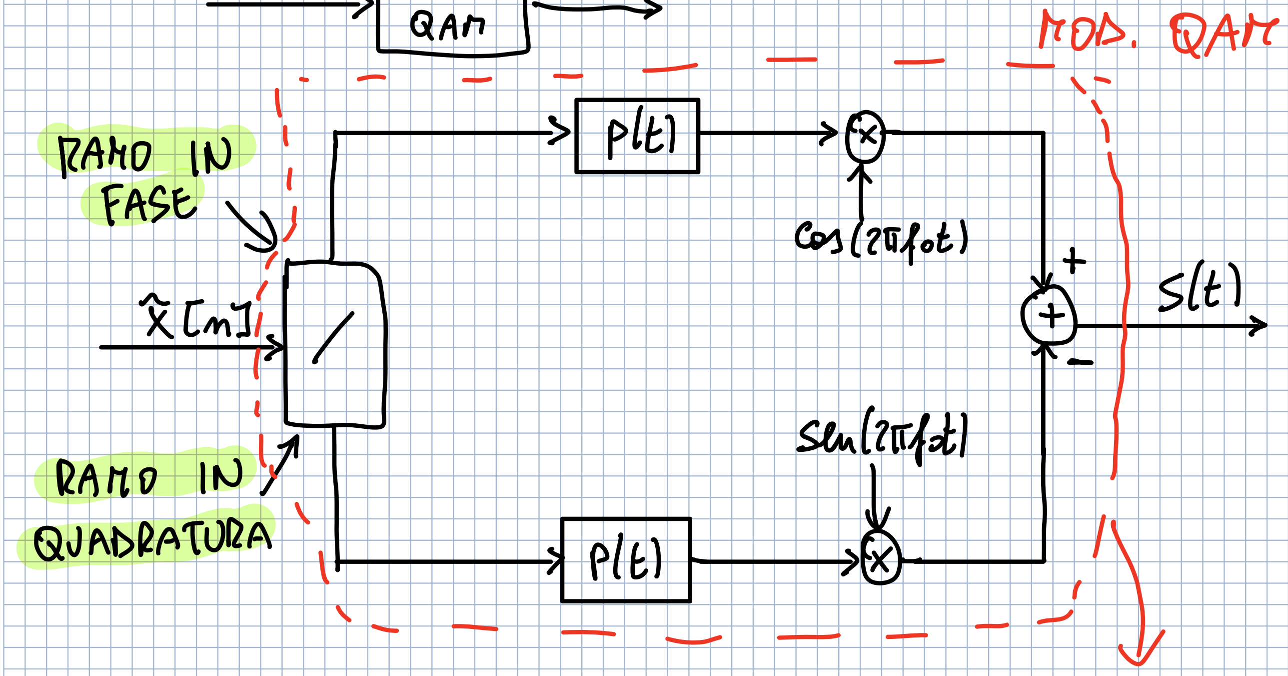
$\tilde{x} = x_c + j x_s$

$$\boxed{E_s = \frac{1}{2} E[x_c^2] E_p + \frac{1}{2} E[x_s^2] E_p}$$ DIM. 182

Parte reale (x_c) $\Rightarrow$ parte in fase

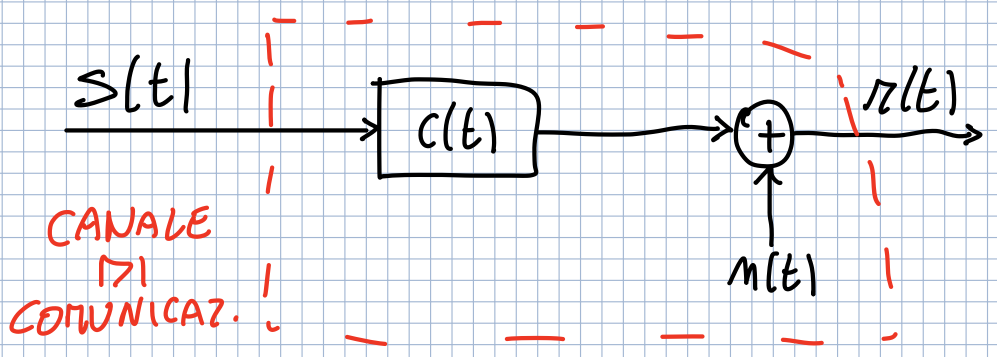
Parte immaginaria (x_s) $\Rightarrow$ parte in quadratura





$$\boxed{s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c[n]\, p(t-nT_s) \cos(2\pi f_0 t) - x_s[n]\, p(t-nT_s)\, \mathrm{sen}(2\pi f_0 t)}$$

CANALE DI COMUNICAZIONE PASSA-BANDA



c(t) è la risposta impulsiva di un canale passa-banda

$$C(f) = TCF[c(t)] = \begin{cases} C(f) \neq 0 & f_0 - \frac{B}{2} \leq f \leq f_0 + \frac{B}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

CANALE IDEALE

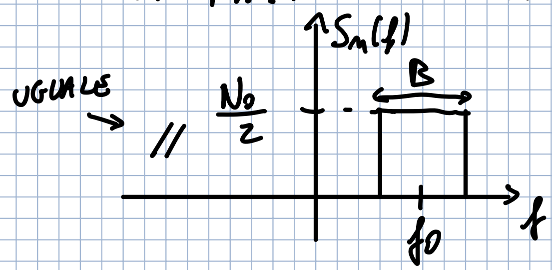
$$\begin{cases} C(f) = 1 & f_0 - \frac{B}{2} \leq f \leq f_0 + \frac{B}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Ip: $B = B_T$

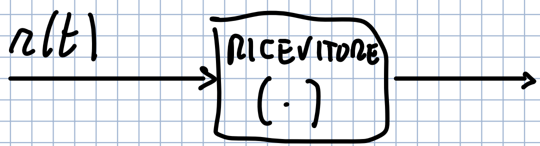
B_T = banda del segnale trasmesso

⇒ CARATTERISTICHE DEL RUMORE PASSA-BANDA

- Rumore Gaussiano
- Bianco in banda → v. medio = 0 $\quad \eta_n = 0$
  → DSP PIATTA IN BANDA

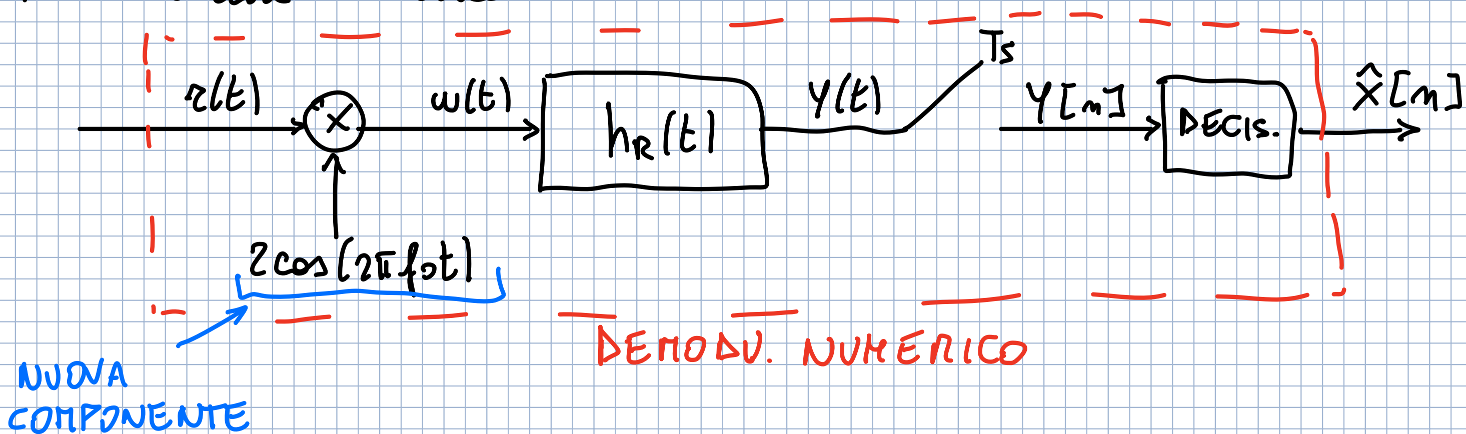


⇒



PAM IN BANDA PASSANTE

Demodulatore numerico



⇒ CASO DI SOLO SEGNALE UTILE

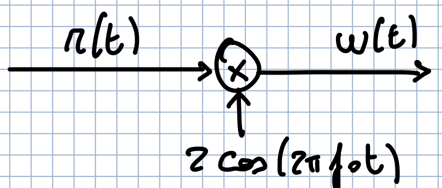
$$r(t) = s(t) \otimes c(t) \qquad \text{(NO RUMORE)}$$

$$c(t) = 2\tilde{c}(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$\tilde{c}(t)$ è PASSA-BASSO

⇒ AL RICEVITORE

$$w(t) = r(t)\cdot 2\cos(2\pi f_0 t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p'(t-nT_s)\,[1+\cos(4\pi f_0 t)]$$

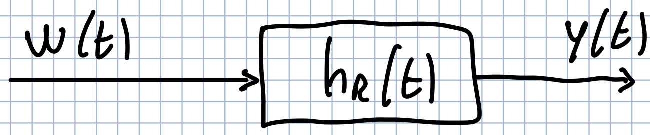


$$p'(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t)$$

$$c(t) = 2\tilde{c}(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

b.b $r(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,p'(t-mT_s)$ con $p'(t)=p(t)\otimes c(t)$

b.p. $r(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,p'(t-mT_s)\cos(2\pi f_0 t)$ con $p'(t)=p(t)\otimes \tilde{c}(t)$



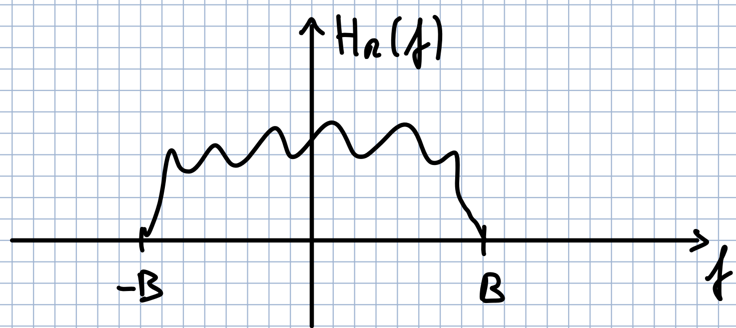
$y(t)=w(t)\otimes h_R(t)$

$w(t)$ → b.b. $\Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,p'(t-mT_s)$

→ $2f_0 \Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,p'(t-mT_s)\cos(4\pi f_0 t)$

$h_R(t)$ è un filtro passa-basso di banda B

B è la stessa banda di $p(t)$

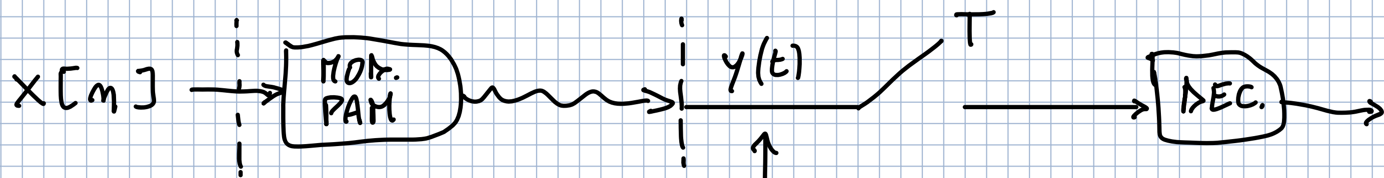


tutte le componenti frequenziali superiori a B vengono tagliate

$h(t)=p'(t)\otimes h_R(t)$

$$\boxed{y(t)=\sum_m x[m]\,h(t-mT_s)}$$

$h(t)=p(t)\otimes \tilde{c}(t)\otimes h_R(t)$



già qui il segnale è indistinguibile da quello di una PAM in b.b.

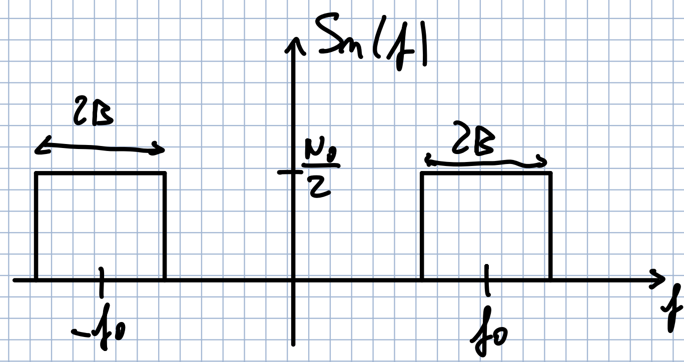
187 DIM.

⇒ RUMORE

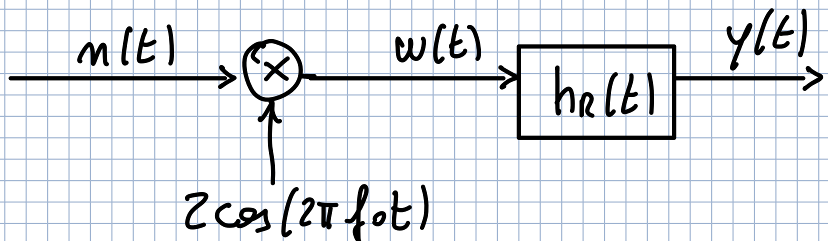
$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p'(t-nT_s) + n(t)$$

$n(t)$ GAUSSIANO BIANCO IN BANDA

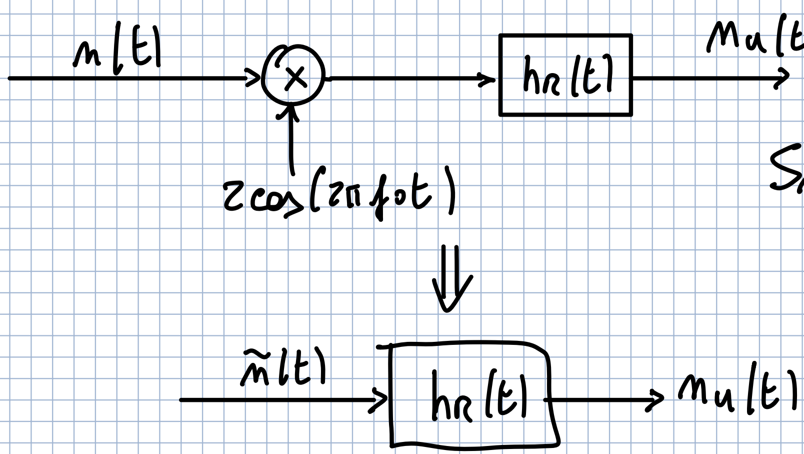
- $S_n(f) = \frac{N_0}{2}\left[\operatorname{rect}\left(\frac{f-f_0}{2B}\right) + \operatorname{rect}\left(\frac{f+f_0}{2B}\right)\right]$
- $E[n(t)] = 0$



Al ricevitore



SCHEMA EQUIVALENTE



$n(t)$ BIANCO IN BANDA PASSANTE

$S_n(f) = \frac{N_0}{2}$

$\tilde{n}(t)$ BIANCO IN B.B.

$S_{\tilde{n}}(f) = N_0$

$n_u(t)$ ⇒ GAUSSIANO, con $S_{n_u}(f) = N_0 |H_R(f)|^2$

$E[w(t)] = 0 \qquad E[n_u(t)] = \underbrace{\eta_w(t)}_{0} \otimes h_R(t) = 0$

$$y(t) = \sum_n x[n]\, h(t-nT_s) + n_u(t)$$

← è noto

$h(t) = p(t) \otimes \bar{c}(t) \otimes h_R(t)$

$$\boxed{y[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, h[(k-n)T_s] + n_u[k]}$$

⇒ componente utile

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, h[(k-n)T_s] = x[k]h(0) + \underbrace{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq k}}^{+\infty} x[n]\, h[(k-n)T_s]}_{ISI}$$

⇒ Procedura

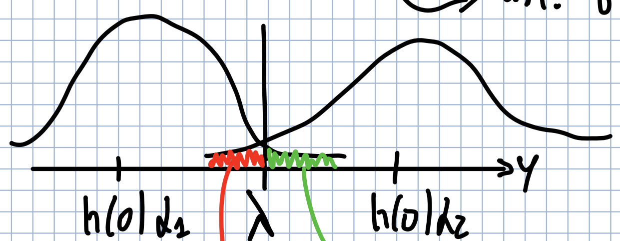
- Verifichiamo assenza ISI
- Calcolo $h(0)$
- Calcolo $P_{n_u} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{n_u}(f)\, df = N_0 E_{h_R}$ $\qquad S_{n_u}(f) = N_0 |H_R(f)|^2$
- Calcolo P_E

in ASSENZA DI ISI

$$y[k] = h(0)\, x[k] + n_u[k]$$

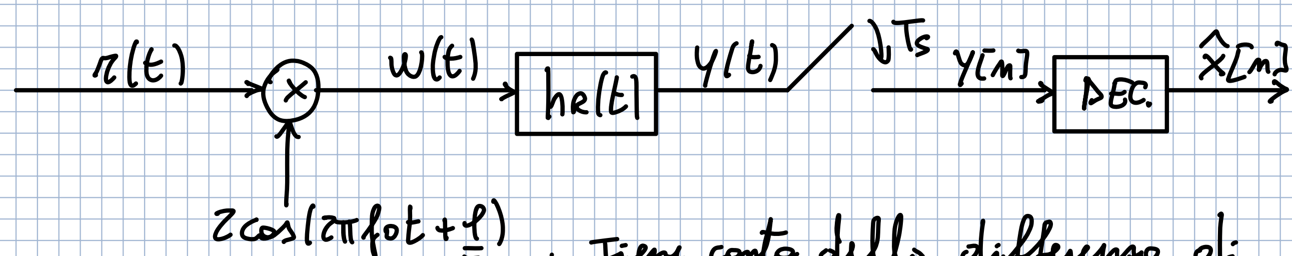
→ V.A. GAUSSIANA $\in \mathcal{N}(0, P_{n_u})$

$M = 1$



$$P_E(b) = P\{\hat{x}=\alpha_1 \mid x=\alpha_2\}\, P\{\alpha_2\} + P\{\hat{x}=\alpha_2 \mid x=\alpha_1\}\, P\{\alpha_1\}$$

PRESENZA DI FASE NEL MODULATORE



$\varphi \longrightarrow$ Tiene conto della differenza di fase tra gli oscillatori in tx e in rx

$$r(t) = \sum_n x[n]\, p'(t - nT_s) \cos(2\pi f_0 t) + n(t)$$

$\Rightarrow$ parte utile di $r(t)$

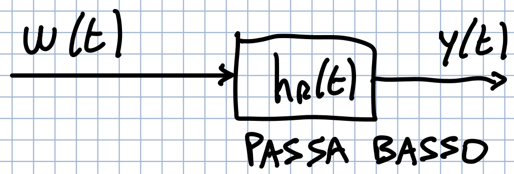
$$\sum_n x[n]\, p'(t - nT_s) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$w(t) = 2 \sum_n x[n]\, p'(t - nT_s) \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) =$$

$$= \sum_n x[n]\, p'(t - nT_s) \Big[\underbrace{\cos(4\pi f_0 t + \varphi)} + \underbrace{\cos\varphi} \Big]$$

NON CI INTERESSA perché è a $2f_0$

SOPRAVVIVE SOLO QUELLA CONTINUA



$$y(t) = \sum_n x[n]\, p'(t - nT_s) \cos\varphi$$

$$y[n] = h(0)\, x[n] \cos\varphi$$

$$= h'(0)\, x[n]$$

IN ASSENZA DI ISI e RUMORE

$$h'(0) = h(0) \cos\varphi$$

$$|\cos\varphi| \leq 1$$

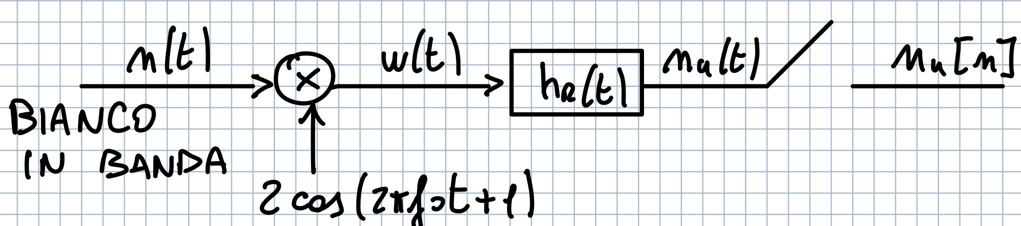
$\Rightarrow$ AGGIUNGO RUMORE

$$y[n] = \underbrace{h'(0)\, x[n]} + n_u[n]$$

PARTE UTILE

DI UN FATTORE $\cos\varphi$

COSA SUCCEDE AL RUMORE ?



$$S_n(f) = \frac{N_0}{2}\left[\operatorname{rect}\left(\frac{f-f_0}{2B}\right) + \operatorname{rect}\left(\frac{f+f_0}{2B}\right)\right]$$

$$R_n(\tau) = 2 N_0 B \operatorname{sinc}(2B\tau)\left[\frac{e^{-j2\pi f_0\tau} + e^{j2\pi f_0 \tau}}{2}\right] =$$

$$= 2N_0B \operatorname{sinc}(2B\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$$

$$w(t) = 2n(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$E[w(t)] = \eta_w(t) = E[2n(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)] = 2\underbrace{E[n(t)]}_{=0}\cos = 0$$

$$R_w(t_1,t_2) = E[w(t_1)w(t_2)] =$$

$$= 4\underbrace{E[n(t_1)n(t_2)]}_{R_n(\tau)}\underbrace{\cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi)\cos(2\pi f_0 t_2 + \varphi)} =$$

$$= 2\cdot 2N_0B\operatorname{sinc}[2B(t_1-t_2)]\cos[2\pi f_0(t_1-t_2)]\cdot$$

$$\cdot\left[\cos[2\pi f_0(t_1+t_2)+2\varphi] + \cos[2\pi f_0(t_1-t_2)]\right] =$$

$$= 2N_0B\operatorname{sinc}[2B(t_1-t_2)]\left[\cos(4\pi f_0 t_1 + 2\varphi) + \cos(4\pi f_0 t_2 + 2\varphi) + 1 + \cos(4\pi f_0(t_1-t_2))\right] =$$

$$= \begin{cases} 2N_0B\operatorname{sinc}[2B(t_1-t_2)] & \text{comp. in b. b.} \\ 3 \text{ componenti a } 2f_0 \end{cases}$$

$$w(t) \longrightarrow \boxed{h_R(t)} \longrightarrow n_u(t)$$

FILTRO PASSA BASSO

$R_n(\tau)$ è la stessa che abbiamo calcolato quando $\varphi = 0$ poichè la componente in b. b. di $w(t)$ $\Rightarrow$ $R_w(\tau)$ non dipende da φ ed è identica al caso $\varphi = 0$

$S_{n_u}(f) = N_0 |H_R(f)|^2$ INDIPENDENTE DA φ

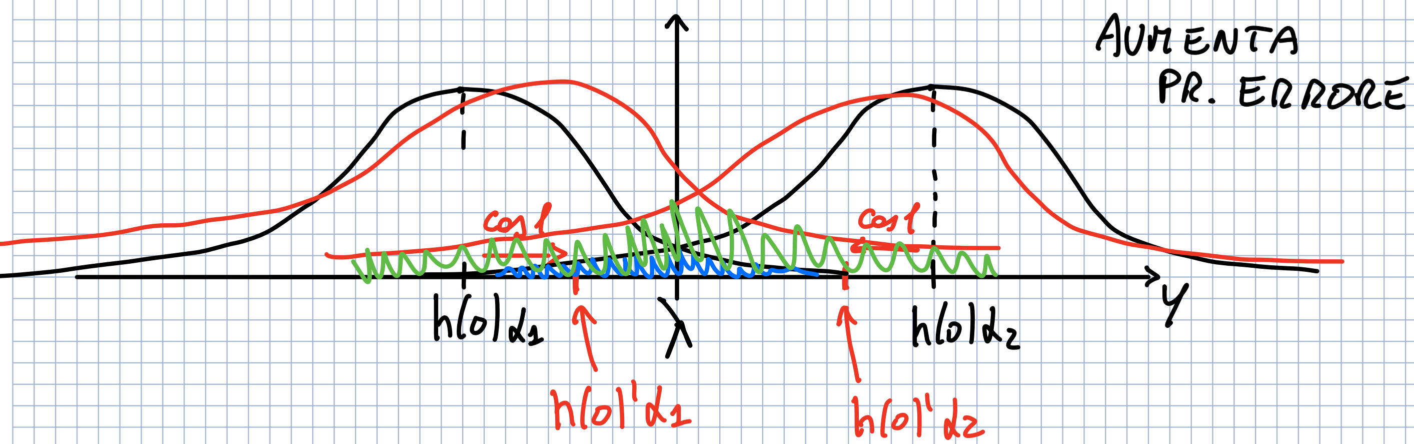
$n_u[n] \in \mathcal{N}(0, P_{nu})$

$P_{nu} = N_0 E_{hR}$ IND. DA φ

$y[n] = h'(0)\, x[n] + n_u[n]$ → è rimasto uguale

↓ si è ridotto per effetto di φ

=> RIDUZIONE DI SNR

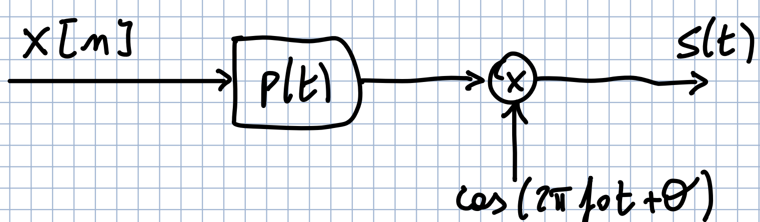


L'AREA DOPO LA RIDUZIONE PER EFFETTO DI φ È AUMENTATA. SE FACCIO AVVICINARE VERSO LA SOGLIA LE 2 CAMPANE ROSSE VADO AD AUMENTARE LA PROB. CONDIZIONATA.

Cosa cambia quando $\varphi \neq 0$

$h(0) \Rightarrow h'(0) \Longrightarrow Q\left(h'(0) \right)$

- IN TX:



$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, p(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t + \theta)$

$r(t) = s(t) \otimes c(t) + n(t)$

$c(t) = 2\,\tilde{c}(t) \cos(2\pi f_0 t)$

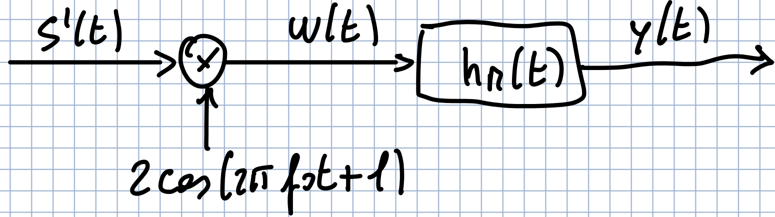
$$s'(t) = s(t) \otimes c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\, c(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= 2 \sum_n x[n] \int_{-\infty}^{+\infty} p(t-nT_s) \cos(2\pi f_0 t + \theta) \cdot \tilde{c}(t-\tau) \cos(2\pi f_0 (t-\tau))\, d\tau =$$

$$= \sum_n x[n] \int_{-\infty}^{+\infty} p(t-nT_s)\, \tilde{c}(t-\tau) \Big[\cos(2\pi f_0 t + \theta) + \underbrace{\cos(4\pi f_0 \tau + 2\pi f_0 t + \theta)}_{FA\ 0} \Big] d\tau$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p'(t-nT_s) \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

$$s'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p'(t-nT_s) \cos(2\pi f_0 t + \theta) \qquad p'(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t)$$



$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p'(t-nT_s) \left[\cos(\theta - \varphi) + \cos(4\pi f_0 t + \theta + \varphi) \right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p'(t-nT_s) \cos(\theta - \varphi) + \text{comp. a } 2 f_0$$

$$y(t) = \sum_n x[n]\, h(t-nT_s) \cdot \cos(\theta - \varphi)$$

CROSS TACK

$$\Rightarrow \min P_E(b) \Rightarrow \theta = \varphi$$

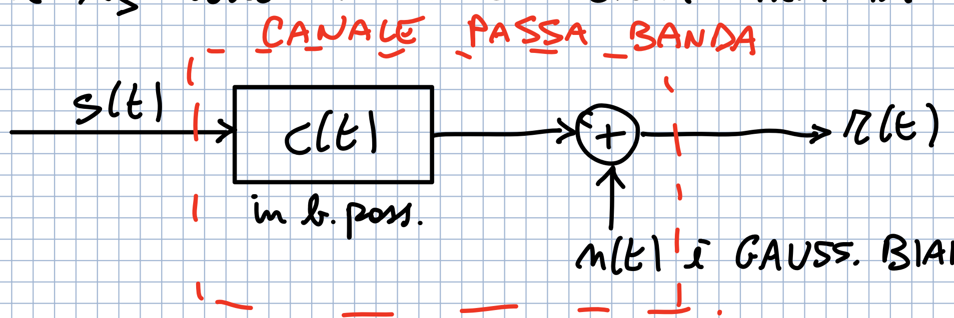
QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

⇒ MODULAZIONE IN BANDA PASSANTE

$$s(t) = \sum_n \Big[\underbrace{x_c[n]\, p(t-nT_s) \cos(2\pi f_0 t)}_{\text{FASE}} - \underbrace{x_s[n]\, p(t-nT_s) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)}_{\text{QUADRATURA}} \Big]$$

X_c e X_s sono INDIPENDENTI TRA DI LORO

$$\hat{X}[n] = X_c[n] + j X_s[n]$$



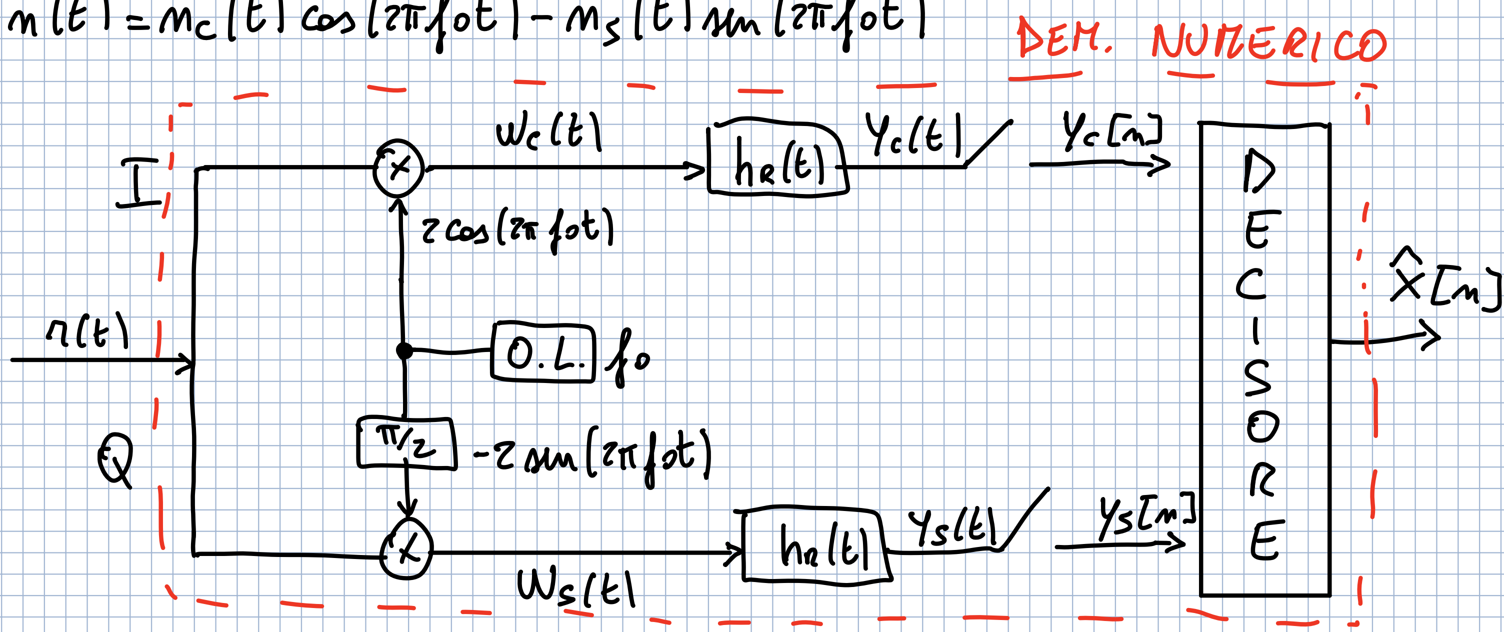
$n(t)$ è GAUSS. BIANCO in banda

$$r(t) = s(t) + n(t) =$$

$$= \sum_n x_c(t)\, p(t-nT_s) \cos(2\pi f_0 t) + \underbrace{n_c(t) \cos(2\pi f_0 t)} \qquad \text{I fase}$$

$$- \sum_n x_s(t)\, p(t-nT_s) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t) + \underbrace{n_s(t) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)} \qquad \text{Q Quadratura}$$

$$n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - n_s(t) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)$$



$$\hat{X}[n] = \hat{X}_c[n] + j \hat{X}_s[n]$$

⇒ RAMO FASE (I)

1) ASSENZA DI RUMORE

$$w_c(t) = 2\sum_m x_c[m]\, p(t-mT_s)\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t) -$$
$$- 2\sum_m x_s[m]\, p(t-mT_s)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) =$$
$$= \sum_m x_c[m]\, p(t-mT_s)\left[1+\cos(4\pi f_0 t)\right] +$$
$$- \sum_m x_s[m]\, p(t-mT_s)\,\mathrm{sen}(4\pi f_0 t) =$$
$$= \sum_m x_c[m]\, p(t-mT_s) + \text{comp. a } 2f_0$$

$$w_c(t) \longrightarrow \boxed{h_R(t)} \xrightarrow{\;y_c(t)\;}$$

$$y_c(t) = w_c(t) \otimes h_R(t) = \sum_m x_c[m]\, h(t-mT_s)$$

$\Rightarrow$ $y_c(t)$ contiene solo i simboli in fase, è come se la componente in quadratura del segnale trasmesso non esistesse

$\Rightarrow$ RAMO IN QUADRATURA (Q)

$$w_s(t) = -2\sum_m x_c[m]\, p(t-mT_s)\cos(2\pi f_0 t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) +$$
$$-(-2)\sum_m x_s[m]\, p(t-mT_s)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) =$$

$$\cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\mathrm{sen}(\alpha-\beta)$$

$$\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

$$= -\sum_m x_c[m]\, p(t-mT_s)\,\mathrm{sen}(4\pi f_0 t) + \sum_m x_s[m]\, p(t-mT_s)\left[1-\cos(4\pi f_0 t)\right]$$
$$= \sum_m x_s[m]\, p(t-mT_s) + \text{comp. a } 2f_0$$

$$y_s(t) = w_s(t) \otimes h_R(t) = \sum_m x_s[m]\, h(t-mT_s)$$

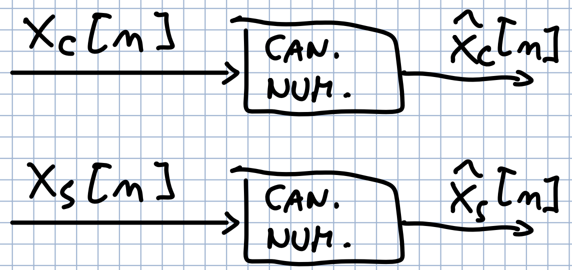
SOLO SIMBOLI IN Q

$\Rightarrow$ le componenti in I e Q che erano state sommate al TX sono di nuovo separate al RX.

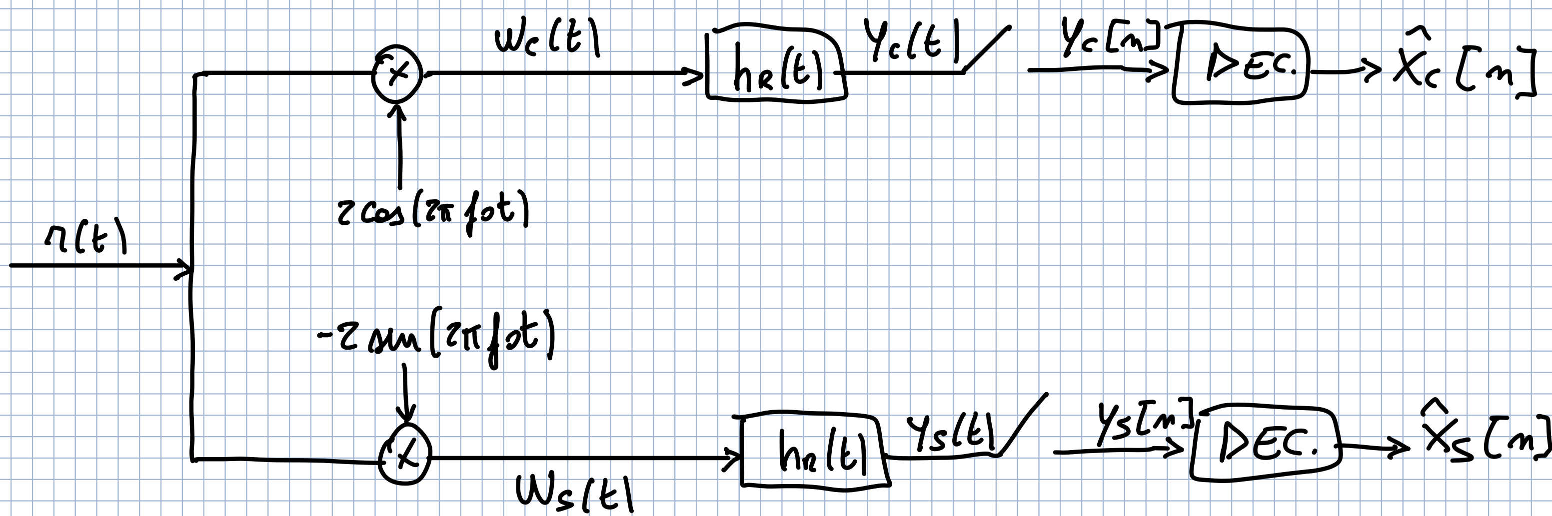
$QAM = 2\ PAM$ → in fase
→ in quadratura

↳ raddoppia il bit-rate rispetto alla PAM a parità di banda occupata ⇒ raddoppia η_B e EFFICIENZA SPETTRALE

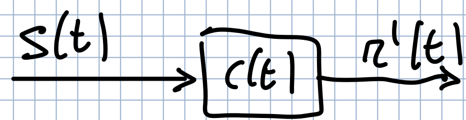
INTERPRETAZIONE DELLA QAM



la decisione sui simboli $x_c[n]$ è INDIPENDENTE da quella sui simboli $x_s[n]$



$$r(t) = \underbrace{s(t) \otimes c(t)}_{\text{parte utile}} + n(t)$$



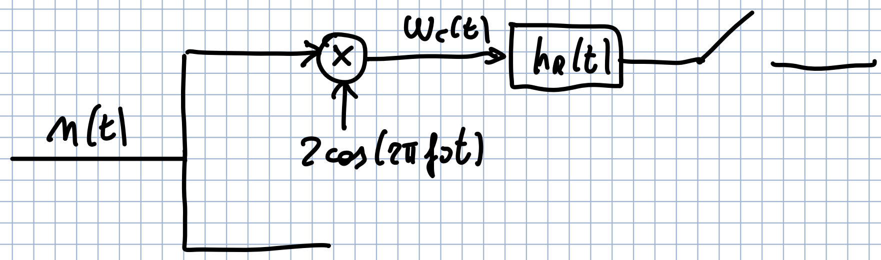
$$c(t) = 2\,\tilde{c}(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$\boxed{\begin{gathered} r'(t) = \sum_n x_c[n]\, p'(t-nT_s)\cos(2\pi f_0 t) - \sum_n x_s[n]\, p'(t-nT_s)\sin(2\pi f_0 t) \\ \text{con } p'(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t) \end{gathered}}$$

$$h(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t) \otimes h_R(t)$$

$$y_c(t) = \sum_n x_c[n]\, h(t-nT_s) + n_u^c(t)$$

$$y_s(t) = \sum_n x_s[n]\, h(t-nT_s) + n_u^s(t)$$



$$n(t) = n_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - n_s(t)\,\text{sen}(2\pi f_0 t)$$

$$w_c(t) = \underbrace{2n_c(t)\cos^2(2\pi f_0 t)}_{\text{FASE}} - \underbrace{2n_s(t)\,\text{sen}(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t)}_{\text{QUADRATURA}}$$

$$R^I_{w_c}(t_1,t_2) = \underbrace{\underbrace{R_{w_{c0}}(t_1,t_2)}_{\text{in b.b.}} + \underbrace{R_{w_{ch}}(t_1,t_2)}_{2f_0}}_{\text{relativa alla parte in fase} \Rightarrow \text{RIS. NOTO di PAM b.p.}}$$

$$R^Q_{w_c}(t_1,t_2) = E\left[2n_s(t_1)\,\text{sen}(2\pi f_0 t_1)\cos(2\pi f_0 t_1)\cdot 2n_s(t_2)\,\text{sen}(2\pi f_0 t_2)\cos(2\pi f_0 t_2)\right]$$

$\Rightarrow$ non esistono componenti in b.b.

$$R_{w_c}(t) = R_{w_{c0}}(t_1-t_2) + \text{comp. a } 2f_0$$

$$w_c(t) \longrightarrow \boxed{h_R(t)} \longrightarrow n_{u_c}(t)$$

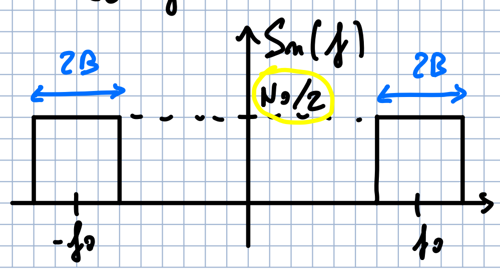
$$R_{n_{u_c}}(\tau) = R_{w_{c0}}(\tau) \otimes h_R(\tau) \otimes h_R(-\tau)$$

poichè le componenti a $2f_0$ vengono filtrate

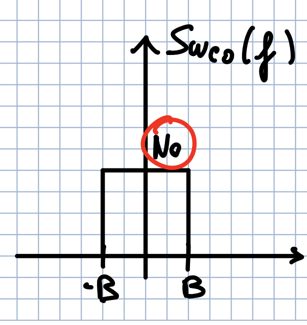
$$S_{n_u}(f) = S_{w_{c0}}(f)\,|H_R(f)|^2$$

in caso di rumore bianco in banda

$S_{w_{c0}}(f) = N_0$ 2 volte $\frac{N_0}{2}$



$\Rightarrow$



$$P_{n_{uc}} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{n_{uc}}(f)\,df = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2\,df = N_0 E_{h_R}$$

$$E[n_{uc}(t)] = 0$$

$$E[n(t)] = 0 \rightarrow E[n_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - n_s(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$E[n_c(t)] = E[n_s(t)] = 0$$

$$E[w_c(t)] = E[\underset{\overset{\parallel}{0}}{n_c(t)}\cos^2(2\pi f_0 t) - \underset{\overset{\parallel}{0}}{n_s(t)}\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t)] = 0$$

$$\xrightarrow[\eta_{w_c}=0]{w_c(t)} \boxed{h_R(t)} \xrightarrow[\eta_{uc}=0]{n_{uc}(t)}$$

$n_{uc}(t)$ è GAUSSIANO con $\eta_{n_{uc}} = 0$ e $P_{n_{uc}} = N_0 E_{h_R} = \sigma^2_{n_u}$

$$n_{uc}(t) \xrightarrow{\downarrow T} n_{uc}[n] \longrightarrow \text{V.A.} \in \mathcal{N}(0, P_{n_u})$$

$$\Downarrow$$

identico a PAM

=> la stessa cosa si può dimostrare per rumore in quadratura

$n_{us}(t)$ è GAUSSIANO con $\eta_{n_{us}} = 0$ e $P_{n_{us}} = N_0 E_{h_R} = \sigma^2_{n_{us}}$

$n_{us}[n]$ è una V.A. $\in \mathcal{N}(0, P_{n_{us}})$

$$\boxed{P_{n_{us}} = P_{n_{uc}} = N_0 E_{h_R}}$$

$$y_c(t) = \sum_n x_c[n]\,h(t - nT_s) + n_{uc}(t)$$

$$y_s(t) = \sum_n x_s[n]\,h(t - nT_s) + n_{us}(t)$$

=> DOPO IL CAMPIONAMENTO

$$y_c[k] = \sum_n x_c[n]\,h((k-n)T_s) + n_{uc}[k]$$

GIA' NOTA

$$= h(0)\,x_c[k] + \underbrace{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{+\infty} x_c[n]\,h((k-n)T_s)} + n_{uc}[k]$$

ISI

⇒ ASSENZA DI ISI ①

$$y_c[n] = h(0)\,x_c[n] + n_{uc}[n]$$
$$y_s[n] = h(0)\,x_s[n] + n_{us}[n]$$

→ V.A. con stesse caratteristiche

③ $P_{n_{us}} = P_{n_{uc}}$

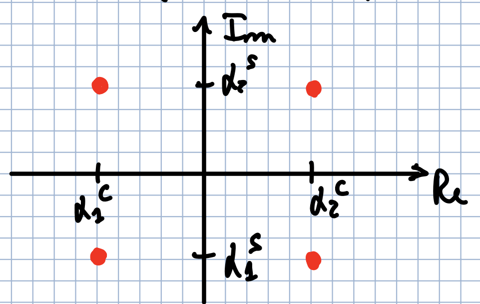
② $h(0) = h(t)\big|_{t=0}$ con

$$h(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t) \otimes h_R(t)$$

$P_E(M) = ?$

⇒ CASO 4-QAM $\qquad M=4$ (minimo)

$$x_c[n] \in A_s^c = \{\alpha_1^c, \alpha_2^c\}$$
$$x_s[n] \in A_s^s = \{\alpha_1^s, \alpha_2^s\}$$



④ $$P_E(M) = P_E^c(b)\cdot\left(1 - P_E^s(b)\right) + P_E^s(b)\left(1 - P_E^c(b)\right) + P_E^c(b)\,P_E^s(b)$$

$X = X_c + jX_s$
→ X_c è sbagliato ma X_s GIUSTO
→ X_c è giusto ma X_s è SBAGLIATO
→ sia X_c e X_s sono sbagliati

Indipendenza degli errori:

$y_c[n]$, $y_s[n]$ INDIPENDENTI
→ $X_c[n]$ ind. da $X_s[n]$
→ $n_c(t)$ ind. da $n_s(t)$

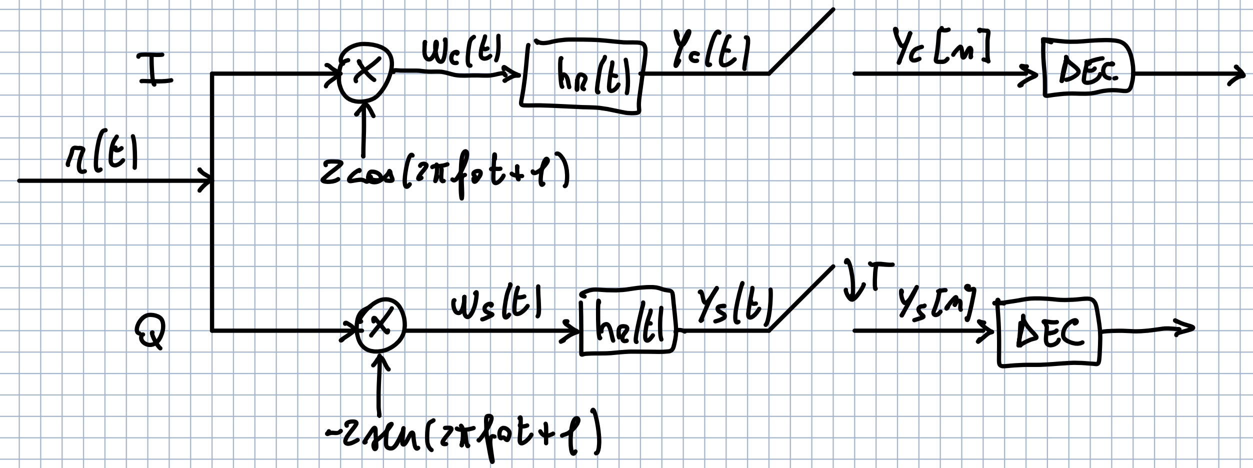
⇓

errori indipendenti

⇓

prodotto delle probabilità

PROBLEMA DELLA SINCRONIZZAZIONE DI FASE [QAM]



$$r(t)=\sum_m x_c[m]p'(t-mT_s)\cos(2\pi f_0t+\theta)-\sum_m x_s[m]p'(t-mT_s)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0t+\theta)$$

con $\varphi\neq\theta$

$\Rightarrow$ RAMO IN FASE

$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

$2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta=\mathrm{sen}(\alpha+\beta)+\mathrm{sen}(\alpha-\beta)$

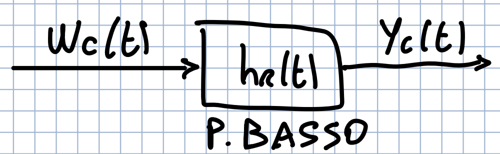
$$w_c(t)=2r(t)\cos(\pi f_0t+\varphi)=$$

$$=2\sum_m x_c[m]p'(t-mT_s)\cos(2\pi f_0t+\theta)\cos(\pi f_0t+\varphi)+$$

$$-2\sum_m x_s[m]p'(t-mT_s)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0t+\theta)\cos(\pi f_0t+\varphi)=$$

$$=\sum_m x_c[m]p'(t-mT_s)\left[\cos(4\pi f_0t+\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi)\right]+$$

$$-\sum_m x_s[m]p'(t-mT_s)\left[\mathrm{sen}(4\pi f_0t+\theta+\varphi)+\mathrm{sen}(\theta-\varphi)\right]=$$



$$Y_c(t)=\cos(\theta-\varphi)\sum_m x_c[m]h(t-mT_s)-\mathrm{sen}(\theta-\varphi)\sum_m x_s[m]h(t-mT_s)$$

$\Downarrow$

Sono presenti anche i simboli in quadratura

$\Downarrow$

CROSS-TALK Fenomeno negativo che va evitato

$$Y_c(t)=\cos(\theta-\varphi)\sum_m x_c[m]h(t-mT_s)$$

+ RUMORE + INTERFERENZA CROSS-TALK

(dovuta ai simboli in quadratura)

2 perdite rispetto alla sola PAM in B. P.

attenuazione del coseno

⇒ la stessa cosa la si può dimostrare per il ramo in quadratura, solo che ora modulo col seno

$2 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta)$

$2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = -\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

⇓

ottengo una attenuazione di $\cos(\theta-\varphi)$

+

INTERFERENZA CROSS-TALK (dei simboli in fase)

⇒ Per la QAM, a differenza della PAM in b.p. quando è presente cross-talk non siamo in grado di calcolare la $P_E(b)$