esercizio

Una particella di massa m si muove sotto una forza la cui energia potenziale è:

$$U(x) = k(x^2 - 4xl)$$

con k costante positiva. Trovare:

- la posizione di equilibrio stabile;
- la frequenza delle oscillazioni di piccola ampiezza attorno alla posizione di equilibrio.

$$U(x) = K(x^2 - 4x\ell) = Kx^2 - 4K\ell x \qquad K>0$$

FORZA

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -2Kx + 4K\ell$$

EQUILIBRIO : $F(x_{EQ}) = 0$

$$-2Kx_{EQ} + 4K\ell = 0 \Rightarrow x_{EQ} = 2\ell$$

STABILITÀ

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = 2K \qquad K>0 \qquad \text{EQ. STABILE}$$

$$F(x) = -2Kx + 4K\ell$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2Kx + 4K\ell \qquad y = x - 2\ell$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2K}{m}y \qquad \omega^2 = \frac{2K}{m}$$

$$y = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \omega = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{m}}$$

Energia meccanica

Consideriamo un corpo di massa m sul quale agisce una forza conservativa $\vec{F}$. Il corpo, sotto l'azione di questa forza, si sposta dal punto A al punto B.

La variazione di energia potenziale è

$$\Delta U_{A\rightarrow B} = U(B) - U(A) = -L_{A\rightarrow B}$$

D'altra parte, il teorema dell'energia cinetica afferma:

$$\Delta K_{A\rightarrow B} = K(B) - K(A) = L_{A\rightarrow B}$$

Sommando queste due equazioni otteniamo:

$$\Delta K_{A\rightarrow B} + \Delta U_{A\rightarrow B} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta(K+U)_{A\rightarrow B} = 0$$

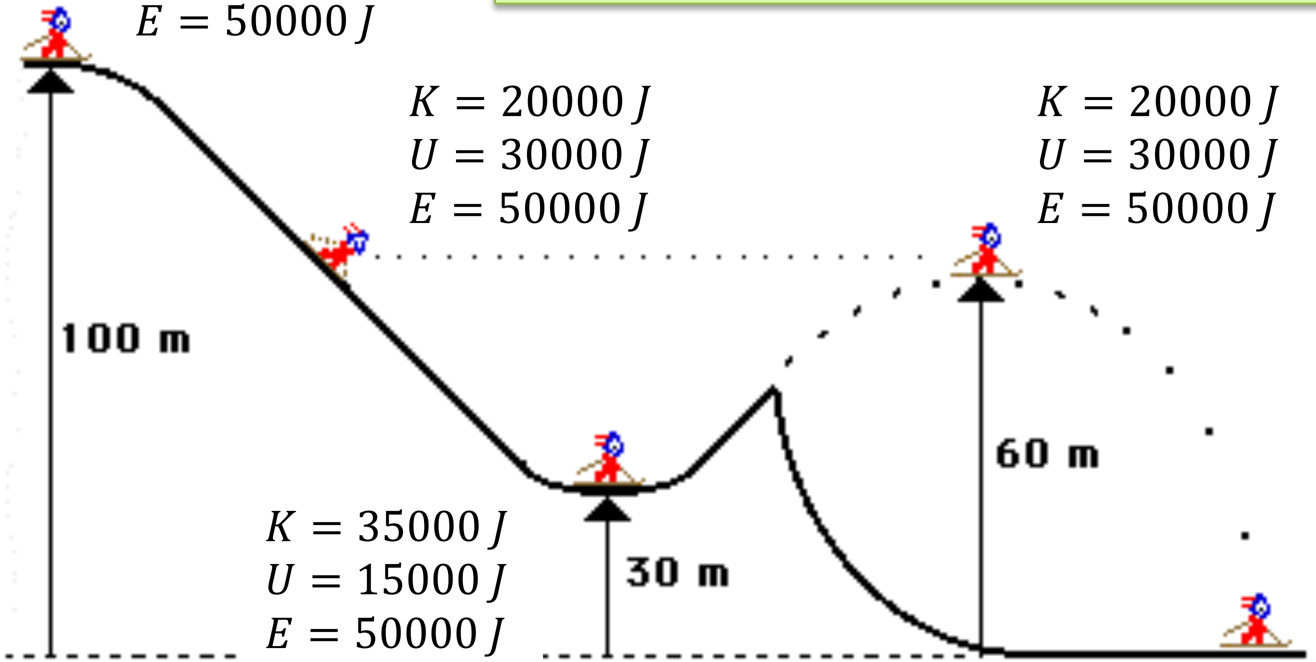
$E = K + U$ è detta energia meccanica. **Se agisce una forza conservativa, la variazione di energia meccanica è nulla:**

$$\Delta E = 0$$

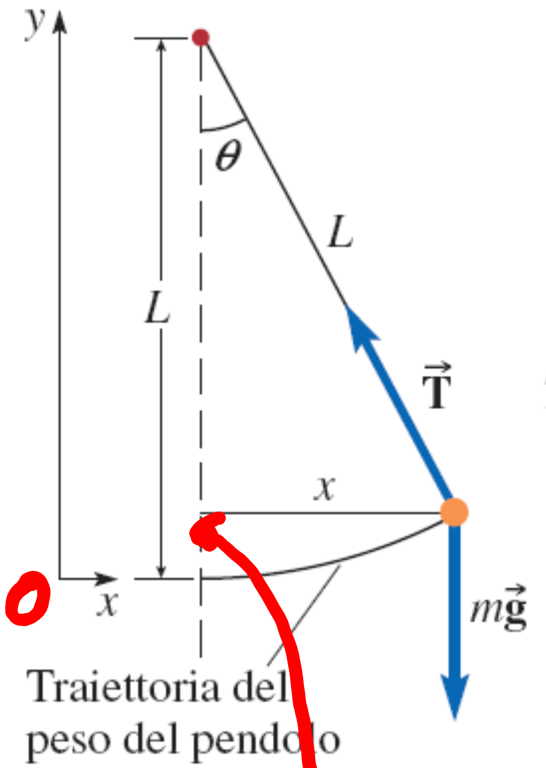
Conservazione dell'energia meccanica

Se le forze cha compiono lavoro sono conservative, la risultante $\vec{F}_{ris}$ è conservativa, e **l'energia maccanica** $E = K + U$ **non cambia**. I valori di energia cinetica e energia potenziale variano lungo il cammino ma la loro somma non cambia.

Esempio: salto con gli sci.
Non ci sono attriti e solo il peso compie lavoro.
$\vec{F}_{ris}$ è conservativa. L'energia meccanica non cambia



Esempio: pendolo semplice



Per un pendolo semplice di lunghezza L e massa m, determinare:

- la posizione in cui è massima la velocità;
- il valore della velocità massima, in funzione dell'angolo iniziale θ_0;
- la massima tensione del filo, in funzione dell'angolo iniziale θ_0.

$$U(y=0)=0$$

$$h(\theta) = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta)$$

$$U(\theta) = mg\,h(\theta) = mg\,L(1-\cos\theta)$$

PENDOLO

$$U(\theta) = mgL(1-\cos\theta)$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \qquad v = \omega L = L\frac{d\theta}{dt}$$

$$K = \frac{1}{2} m L^2 \omega^2$$

EN. MECC. SI CONSERVA

$$E = U + K = \text{COSTANTE}$$

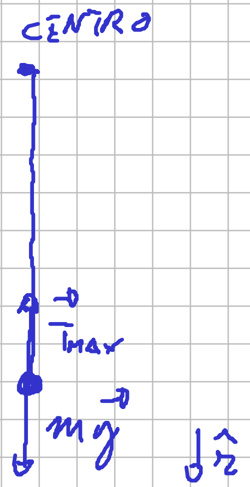
θ_0 (ANGOLO INIZIALE) $v_0 = 0$

$$E_i = U(\theta_0) + 0 = mgL(1-\cos\theta_0)$$

$$E_f = \frac{1}{2} m v_{MAX}^2$$

$$mgL(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2} m v_{MAX}^2 \qquad v_{MAX} = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}$$

CALCOLO DELLA TENSIONE IN $\theta = 0$

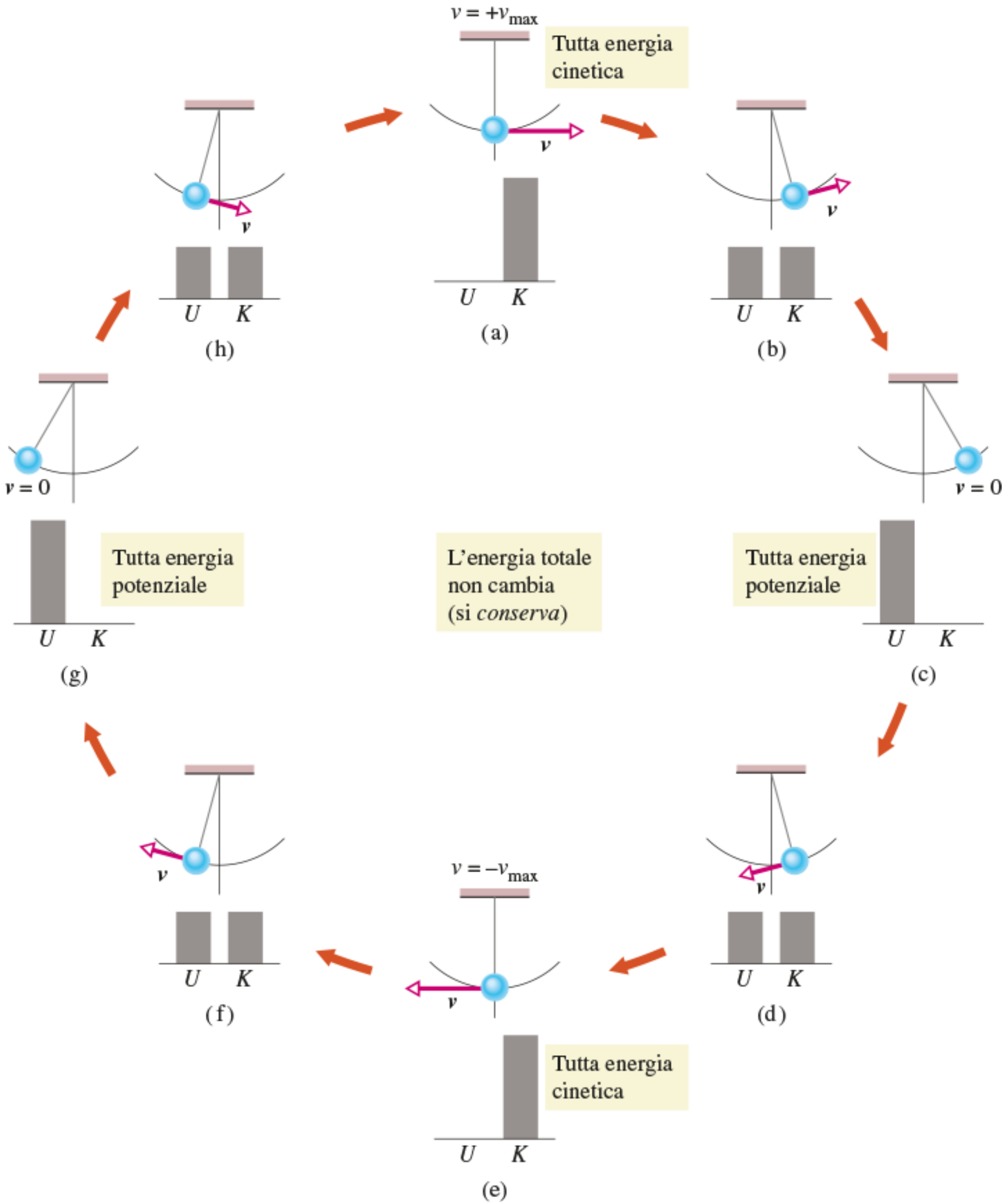


$$T_{MAX} - mg = ma = \frac{m v_{MAX}^2}{L}$$

$$T_{MAX} = mg + \frac{m v_{MAX}^2}{L} = mg + \frac{m}{L}\left[2gL\,(1-\cos\theta_0)\right] =$$

$$= mg\left[3 - 2\cos\theta_0\right]$$

Energia del pendolo semplice



esercizio

Si consideri un pendolo semplice costituito da una massa m appesa a un filo inestensibile di lunghezza R. Il pendolo viene messo in moto in modo tale che la velocità massima, raggiunta nel punto più basso, sia

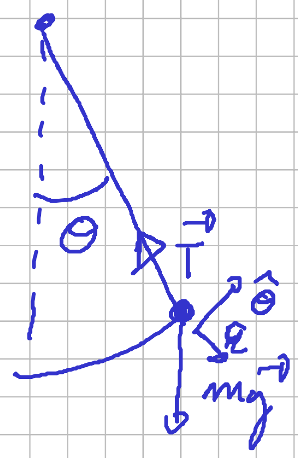
$$v_{\mathrm{max}} = 2\sqrt{gR}\,.$$

Si richiede di:

1. Determinare l'angolo al quale la tensione del filo si annulla.
2. Descrivere come procede il moto della massa dopo che il filo diventa lasco.

PENDOLO 2

$U(\theta=0)=0$



$-T + mg\cos\theta = -m\dfrac{v^2}{R}$

$T - mg\cos\theta = m\dfrac{v^2}{R}$

$T = m\dfrac{v^2}{R} + mg\cos\theta$

$T = 0$ (ANNULLAMENTO TENSIONE)

$m\dfrac{v^2}{R} + mg\cos\theta = 0 \qquad v^2 = -gR\cos\theta \qquad (1)$

$v_{MAX} = 2\sqrt{gR}$

$E_0 = \dfrac{1}{2}m\,v_{MAX}^2 = \dfrac{1}{2}m(4gR) = 2mgR$

$\Delta h = R - R\cos\theta = R(1-\cos\theta)$

$\dfrac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\theta) = E_0 = 2mgR$

$\dfrac{1}{2}mv^2 = mgR(1+\cos\theta)$

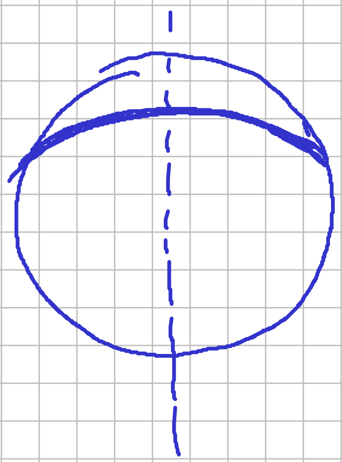
$v^2 = 2gR(1+\cos\theta) \qquad (2)$

$1 = 2$

$$-gR\cos\theta = 2gR(2+\cos\theta)$$

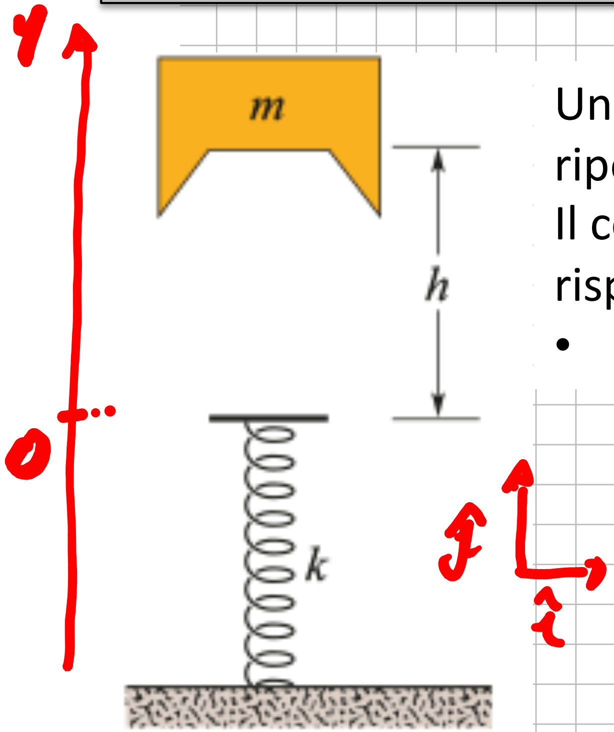
$$-\cos\theta = 2 + 2\cos\theta$$

$$\cos\theta = -\frac{2}{3} \qquad \theta = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$$



MOTO PARABOLICO

esercizio



Un corpo di massa m cade sull'estremità libera di una molla a riposo di costante elastica k come in figura.
Il corpo parte da fermo e inizialmente si trova ad altezza h rispetto alla molla.

- Determinare la massima compressione della molla.

Compressione Massima di una Molla con Caduta Libera

Enunciato

Un corpo di massa m, partendo da fermo, cade da un'altezza h rispetto all'estremità libera di una molla verticale a riposo. Determinare la massima compressione della molla utilizzando la conservazione dell'energia meccanica.

Sistema di riferimento

Consideriamo un asse verticale y orientato verso l'alto, con origine all'estremità libera della molla a riposo. Indichiamo con k la costante elastica della molla e con y_{max} la posizione della massa quando la molla è compressa al massimo.

Conservazione dell'energia meccanica

L'energia meccanica totale del sistema si conserva, poiché non ci sono forze dissipative. L'energia iniziale del sistema è data dall'energia potenziale gravitazionale della massa rispetto all'origine:

$$E_{\text{iniziale}} = mgh.$$

All'istante di massima compressione, la velocità della massa è nulla, quindi l'energia meccanica è data solo dall'energia elastica immagazzinata nella molla e dall'energia potenziale gravitazionale del corpo. Se la compressione massima della molla è y_{max}, allora l'energia finale è:

$$E_{\text{finale}} = \frac{1}{2}ky_{\text{max}}^2 - mgy_{\text{max}}.$$

Imponendo la conservazione dell'energia meccanica:

$$mgh = \frac{1}{2}ky_{\text{max}}^2 - mgy_{\text{max}}.$$

Determinazione della compressione massima

Riscriviamo l'equazione:

$$\frac{1}{2}ky_{\text{max}}^2 - mgy_{\text{max}} - mgh = 0.$$

Si tratta di un'equazione quadratica in y_{max}:

$$\frac{k}{2}y_{\text{max}}^2 - mgy_{\text{max}} - mgh = 0.$$

Risolvendo con la formula del secondo grado:

$$y_{\text{max}} = \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^2 + 2kmgh}}{k}.$$

Poiché la compressione y_{max} deve essere positiva, scegliamo la soluzione con il segno positivo:

$$y_{\text{max}} = \frac{mg + \sqrt{(mg)^2 + 2kmgh}}{k}.$$

Energia meccanica e forze non conservative

Se, tra le forze cha compiono lavoro, ve ne sono di non conservative, **l'energia maccanica** $E = K + U$ **cambia**.

La variazione di energia meccanica sarà uguale al lavoro delle forze non conservative:

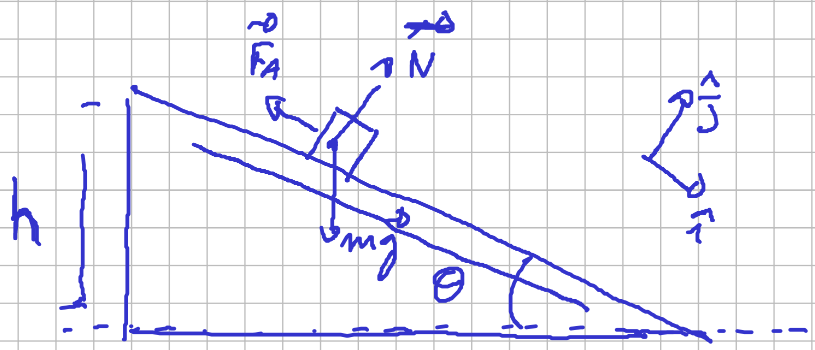
$$K_f + U_f - (K_i + U_i) = E_f - E_i = L_{non\ cons}$$

Osservazione: in un sistema isolato, la somma di tutte le forme di energia (meccanica, interna, ecc.) si conserva, anche in presenza di forze interne non conservative. In questo caso, però, la sola energia meccanica non si conserva necessariamente: se agiscono forze interne non conservative (ad esempio attriti, deformazioni inelastiche, ecc.), parte dell'energia meccanica si trasforma in energia interna. Di conseguenza, l'energia totale del sistema rimane costante, ma la frazione meccanica può diminuire a favore di altre forme di energia.

esercizio

Un corpo scivola giù da un piano inclinato ruvido, con pendenza rispetto all’orizzontale di $30°$. Supponiamo che nella discesa venga dissipato il 70% dell’energia potenziale.

- Determinare il coefficiente di attrito.



$\theta = 30°$

$E_p = mgh$ EN. POT. INIZIALE

$L_{AT} = 0.7\, mg\,\Delta y = -0.7\, mgh$ (70% DISSIPATO)

$L_{AT} = -\mu N d$ $\qquad N = mg\cos\theta$

$L_{AT} = -\mu\, mg\cos\theta\, d$ $\qquad h = d\sin\theta$

$d = \dfrac{h}{\sin\theta}$

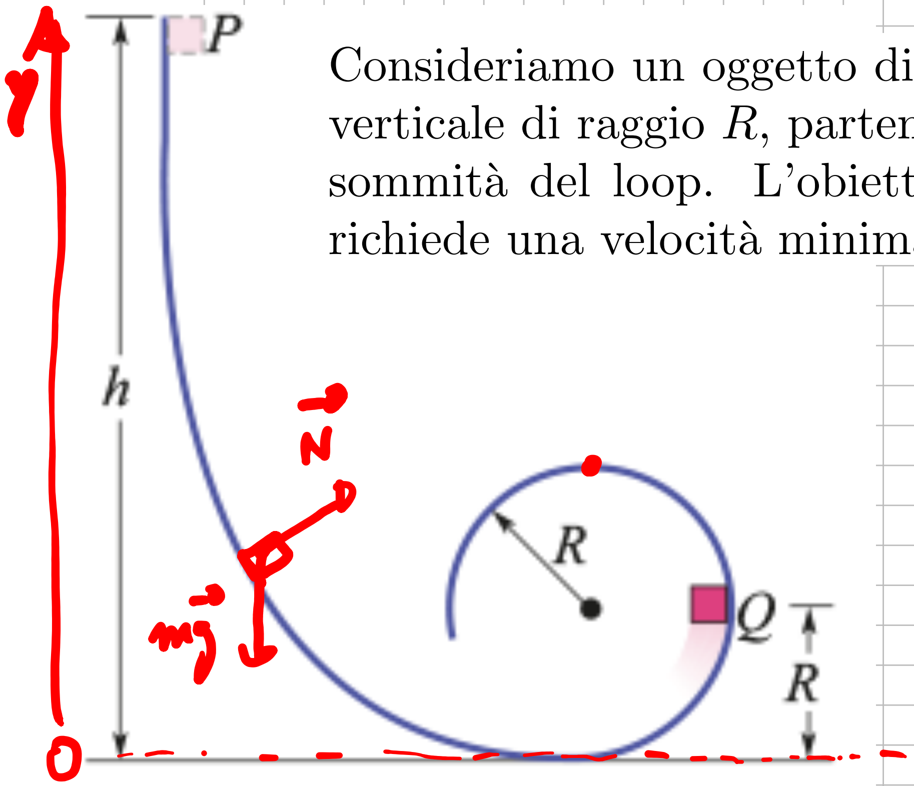
$$L_{AT} = -\mu mg\cos\theta \frac{h}{\sin\theta} =$$

$$= -\mu mgh\,\cot\theta$$

$$\mu mgh\cot\theta = 0.7\, mgh$$

$\mu = 0.7\tan\theta$ $\qquad \mu = 0.404$

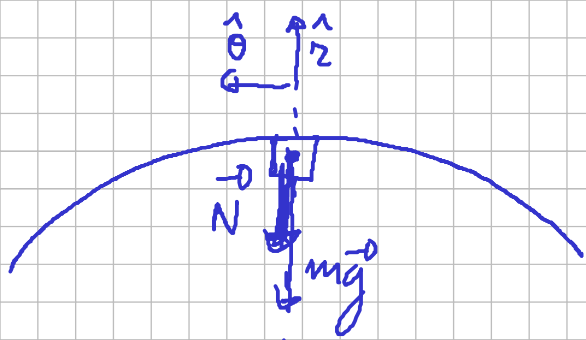
esercizio



Consideriamo un oggetto di massa m che si muove lungo un percorso circolare verticale di raggio R, partendo da un punto a un'altezza maggiore rispetto alla sommità del loop. L'obiettivo è completare l'intero giro senza cadere, il che richiede una velocità minima alla sommità.

$E = \text{cost} = mgh$

GIRO DELLA MORTE



$$-N - mg = -m\frac{v^2}{R}$$

$$\frac{mv^2}{R} = N + mg$$

$$N = \frac{mv^2}{R} - mg \geq 0 \qquad \frac{mv^2}{R} \geq mg$$

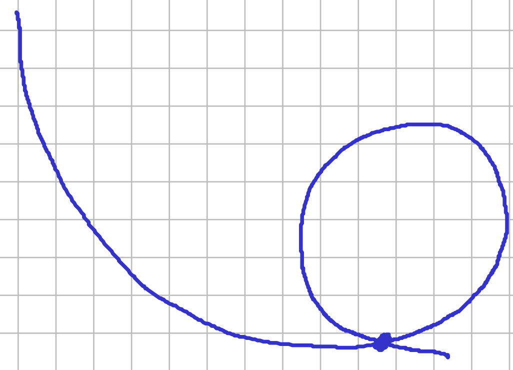
$$v_{MIN} = \sqrt{gR}$$ VELOCITÀ MINIMA POSSIBILE ALLA SOMMITÀ

$$E = mgh \qquad E_{somm} = \frac{1}{2} m v_{sommità}^2 + mg(2R) =$$

$$= \frac{1}{2} m\, gR + mg(2R)$$

$$mgh = \frac{1}{2} mgR + mg\, 2R$$

$$h = \frac{5}{2} R$$ ALTEZZA MINIMA



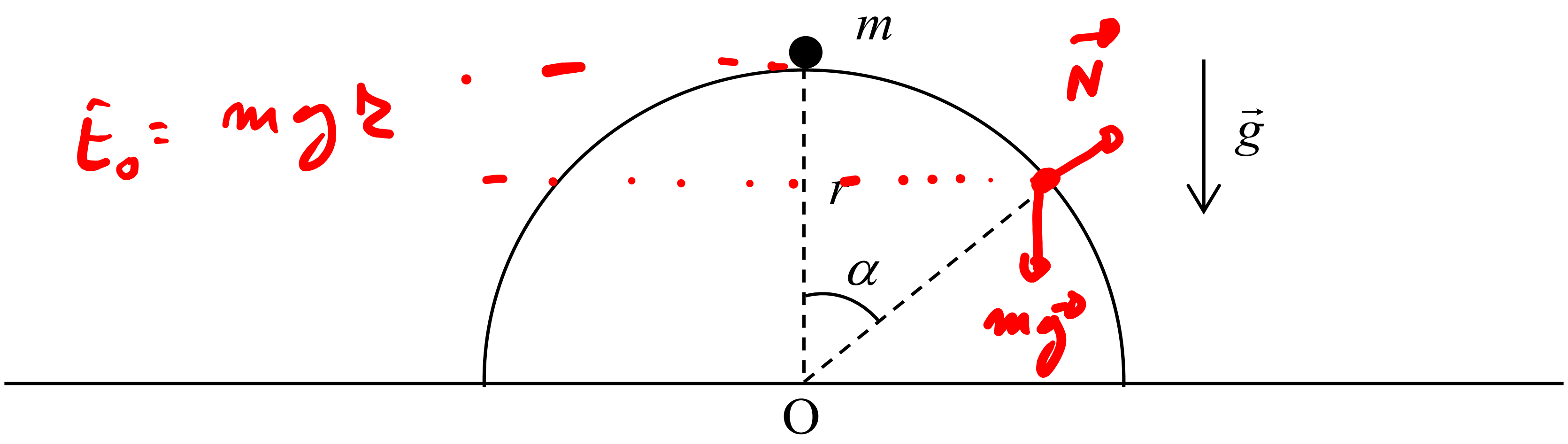
$$a_c = \frac{v^2_{base}}{R} = 5g\frac{R}{R} = 5g$$

ACCELERAZIONE ALLA BASE DEL LOOP

esercizio

Un punto materiale di massa *m*, appoggiato sulla sommità di una guida circolare ed inizialmente in quiete, inizia a scivolare senza attrito lungo la guida .
A quale angolo α^* avviene il distacco del punto dalla guida?

$E_0 = mgr$



$$m a_r = N - mg \sin\theta$$

$$a_r = -m \frac{v^2}{r}$$

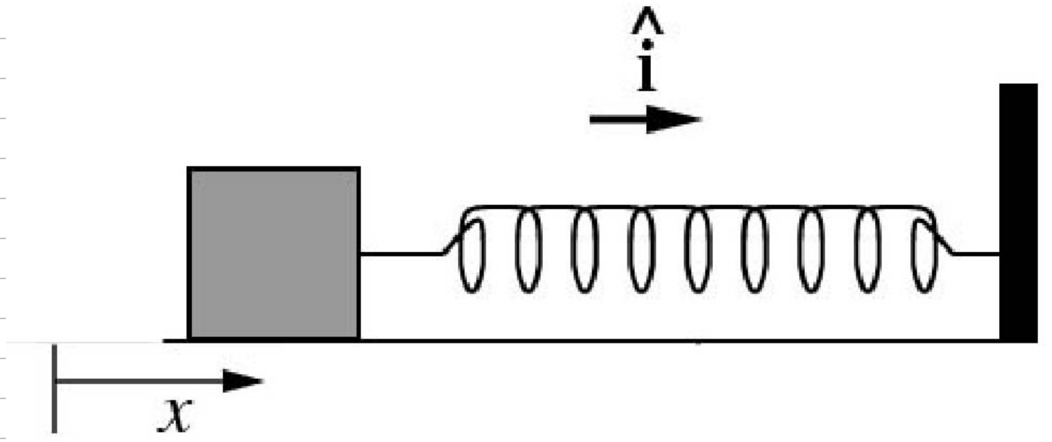
$$N = mg \sin\theta - m \frac{v^2}{r}$$

esercizio

Un blocco di massa m scivola su un tavolo orizzontale con velocità iniziale v_0. All'istante $x = 0$ il blocco colpisce una molla con costante elastica k e, durante la compressione della molla, subisce una forza di attrito. Il coefficiente di attrito è variabile e vale

$$\mu(x) = b\,x,$$

dove b è una costante positiva. Determinare la perdita di energia meccanica (cioè, l'energia dissipata per attrito) quando il blocco si ferma momentaneamente per la prima volta.



$K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$ $\qquad$ $E_1 = \frac{1}{2} k x_1^2$

ENERGIA INIZIALE $\qquad$ ENERGIA FINALE

Blocco che Colpisce una Molla con Attrito Variabile

Enunciato

Un blocco di massa m scivola su un tavolo orizzontale con velocità iniziale v_0. All'istante $x = 0$ il blocco colpisce una molla con costante elastica k e, durante la compressione della molla, subisce una forza di attrito. Il coefficiente di attrito è variabile e vale

$$\mu(x) = b\,x,$$

dove b è una costante positiva. Determinare la perdita di energia meccanica (cioè, l'energia dissipata per attrito) quando il blocco si ferma momentaneamente per la prima volta.

Svolgimento

Energia Iniziale e Finale

Inizialmente, il blocco possiede energia cinetica

$$E_{\text{iniziale}} = E_{k0} = \frac{1}{2} m\,v_0^2.$$

Quando il blocco si ferma momentaneamente, tutta l'energia meccanica residua è immagazzinata nella molla come energia potenziale elastica:

$$E_{\text{finale}} = E_{\text{molla}} = \frac{1}{2} k\,x_f^2,$$

dove x_f è la compressione massima della molla.

Lavoro dell'Attrito

Durante la compressione della molla, il blocco subisce una forza di attrito, il cui coefficiente varia con la posizione:

$$\mu(x) = b\,x.$$

Pertanto, la forza di attrito è

$$F_{\text{attr}}(x) = -\mu(x)\,mg = -b\,x\,mg.$$

Il lavoro della forza di attrito è:

$$L_{\text{attr}} = \int_0^{x_f} F_{\text{attr}}(x)\,dx = -\int_0^{x_f} (b\,x\,mg)\,dx = -mg\,b \int_0^{x_f} x\,dx = -mg\,b \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_f} = -\frac{1}{2}\,mg\,b\,x_f^2.$$

Bilancio Energetico

Il lavoro dell'attrito è uguale alla variazione di energia meccanica:

$$L_{\text{attr}} = E_{\text{finale}} - E_{\text{iniziale}}.$$

Sostituendo:

$$-\frac{1}{2}\,mg\,b\,x_f^2 = \frac{1}{2} k\,x_f^2 - \frac{1}{2} m\,v_0^2.$$

Raggruppando i termini:

$$\frac{1}{2} m\,v_0^2 = \frac{1}{2}\,(k + mg\,b)\,x_f^2.$$

Da cui ricaviamo:

$$x_f^2 = \frac{m\,v_0^2}{k + mg\,b}.$$

Perdita di Energia Meccanica

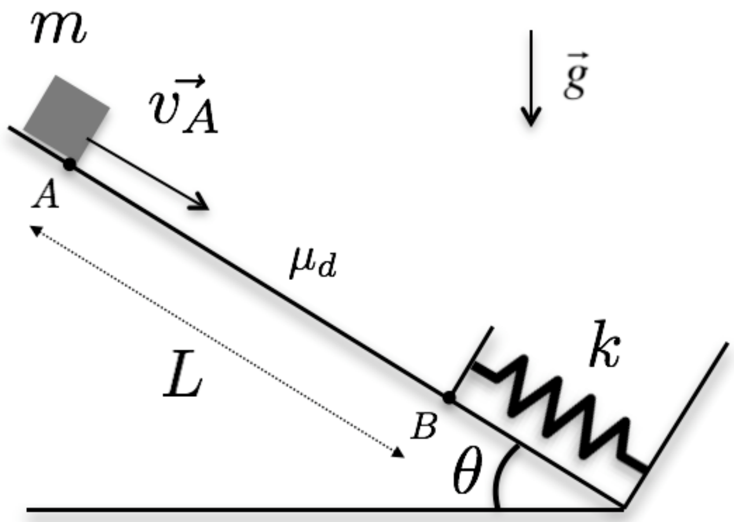
L'energia meccanica dissipata (perdita di energia meccanica) è

$$E_{\text{dissipata}} = E_{\text{iniziale}} - E_{\text{finale}} = -L_{\text{attr}}.$$

Quindi:

$$E_{\text{dissipata}} = \frac{1}{2}\, m g\, b\, x_f^2 = \frac{1}{2}\, m g\, b\, \frac{m\, v_0^2}{k + m g\, b} = \frac{1}{2}\, \frac{m^2\, g\, b\, v_0^2}{k + m g\, b}.$$

esercizio



Una corpo (punto materiale) di massa *m=5Kg* scivola lungo un piano avente un coefficiente di attrito dinamico μ_d=0.2 ed inclinato di un angolo θ=30° rispetto all'orizzontale. Nel punto A, il corpo possiede inizialmente una velocita' $v_A = 1m/s$ diretta lungo il piano inclinato (vedi Figura 1). Dopo aver percorso un tratto *L*=1m lungo il piano, il corpo incontra nel punto B l'estremo libero di una molla ideale di costante elastica *k* e la comprime. Si misura che la massima compressione della molla e' pari a Δx=20cm.

Determinare:
a) il lavoro della forza di attrito nel tratto AB di lunghezza L;
b) il modulo della velocita' del corpo nel punto B;
c) la costante elastica k della molla;
d) il tempo tra l'istante in cui il corpo passa per il punto B e l'istante in cui la molla ha raggiunto la massima compressione

[N.B. l'attrito e' presente lungo tutto il piano inclinato e quindi anche durante la fase di compressione della molla.]