

# Moto di pura traslazione per un corpo a simmetria cilindrica o sferica su un piano

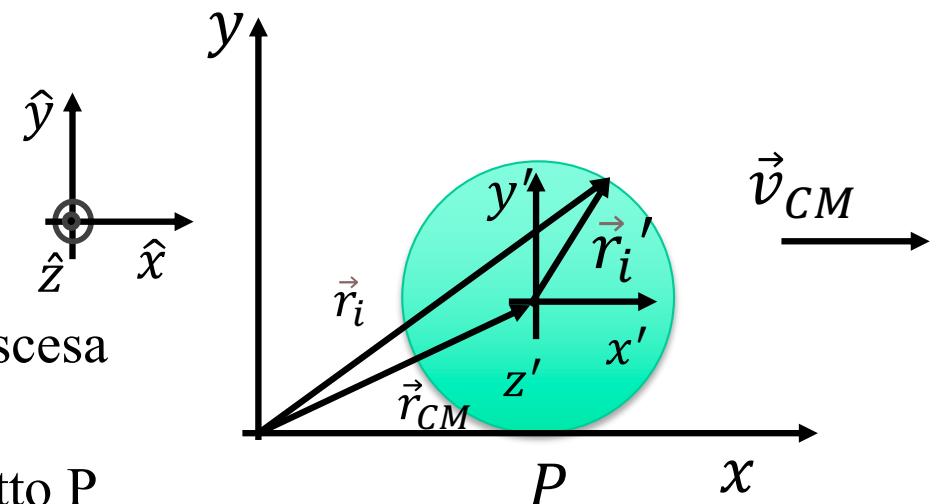
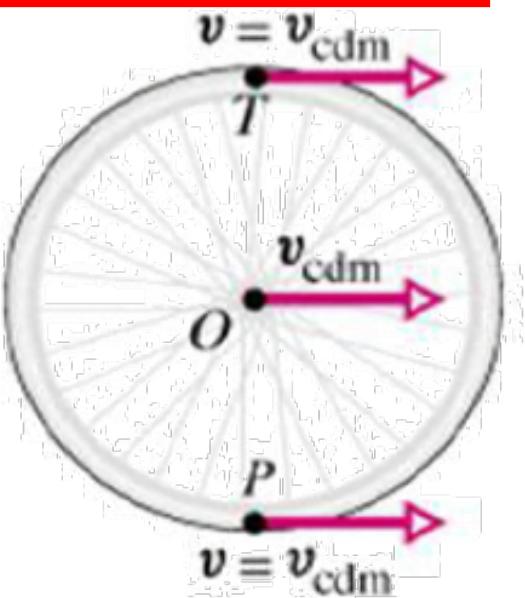
- Consideriamo un corpo a simmetria sferica o cilindrica (sfera, cilindro, disco anello, ruota ecc) ad es una ruota, in moto rispetto a un piano con attrito
  - Se le velocità di tutti i punti i del corpo sono uguali e parallele al piano e uguali alla velocità del CM
    - il moto è di pura traslazione**
    - il corpo striscia**
- $\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} = \vec{v}_P$
- il punto di contatto P ha una velocità pari a  $\vec{v}_{CM}$
- In questo caso nel SCM e del laboratorio valgono le seguenti relazioni

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{a}_i = \vec{a}_{CM}$$

- Es. ruota di bicicletta frenata su una discesa (con attrito) molto ripida
  - attrito dinamico sul punto di contatto P



## Moto di pura rotazione per un corpo a simmetria cilindrica o sferica su un piano

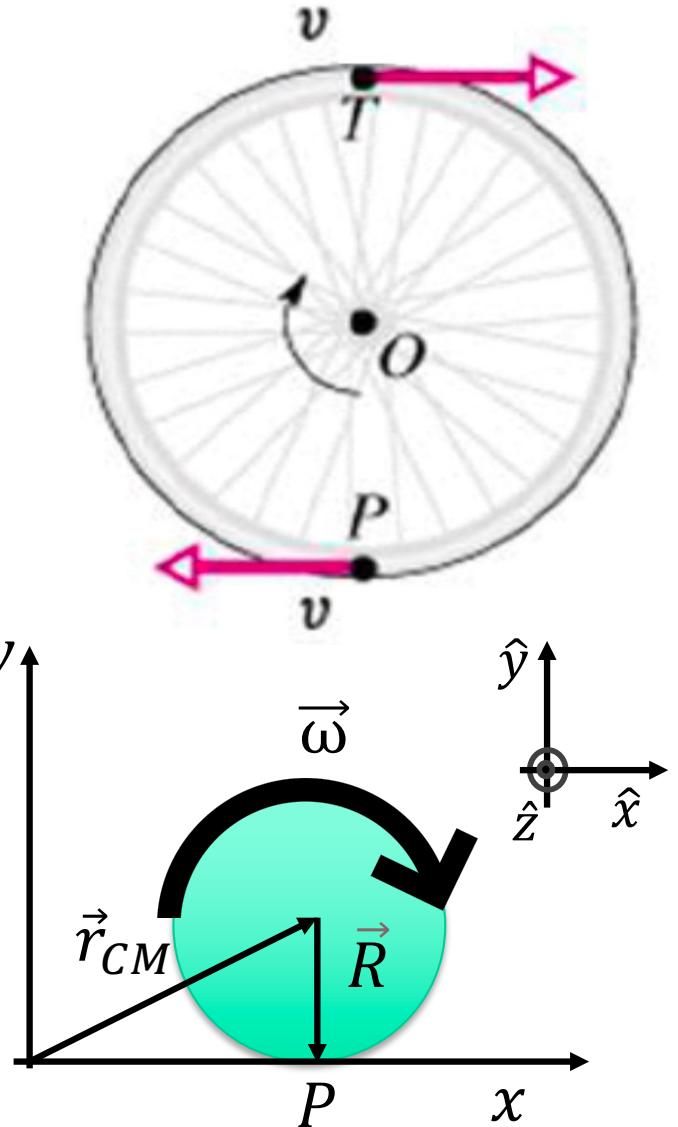
- Se il moto è **di pura rotazione intorno al CM con velocità angolare**  $\vec{\omega} = \omega_z \hat{z}$
- In questo caso nel SCM e del laboratorio valgono le seguenti relazioni

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i$$

$$\vec{a}_i = \vec{a}'_i$$

- il CM è fermo
- il punto di contatto P ha una velocità pari a  $\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{R} = -\omega R \hat{x}$
- T, il punto diametralmente opposto a P, ha una velocità pari a  $\vec{v}_T = \omega R \hat{x}$
- Es. ruota che slitta completamente (come quando c'è ghiaccio, attrito nullo) la ruota gira a vuoto senza traslare

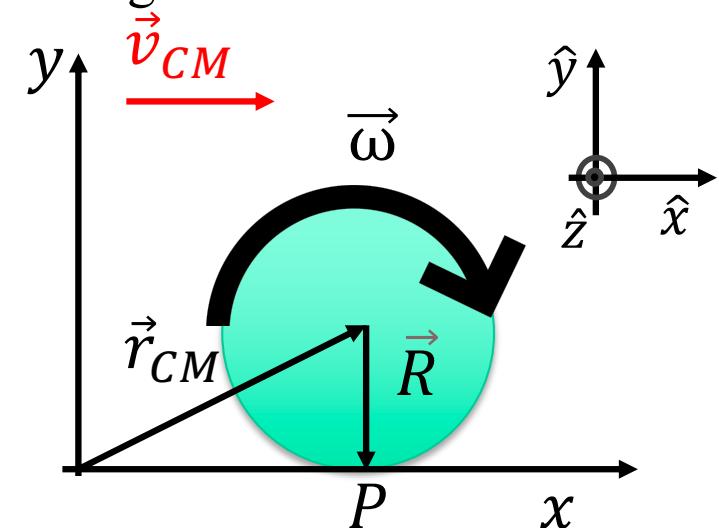


# Moto di rototraslazione per un corpo a simmetria cilindrica o sferica su un piano

- In generale il moto è una combinazione di traslazione del CM e **rotazione attorno al CM**
- Nelle roto-traslazioni il moto attorno al CM è una **pura rotazione** per cui si ha
 
$$\vec{v}_i' = \vec{\omega} \Lambda \vec{r}_i'$$

$$\vec{a}_i' = \vec{\alpha} \Lambda \vec{r}_i'$$
  - dove  $\vec{r}_i'$  è il raggio vettore che individua il punto i-esimo rispetto al CM
- In questo caso nel SCM e del laboratorio valgono le seguenti relazioni
 
$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \Lambda \vec{r}_i'$$

$$\vec{a}_i = \vec{a}_{CM} + \vec{\alpha} \Lambda \vec{r}_i'$$
  - il moto è caratterizzato dal fatto che **il punto di contatto ha una velocità non nulla**
$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \Lambda \vec{R}$$
  - **il corpo rotola e striscia**
- Es. moto roto-traslatorio di una ruota su un piano con attrito in cui il punto di contatto della ruota in parte striscia



# Moto di puro rotolamento su un piano

- Quando il punto di contatto P ha velocità nulla

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \wedge \vec{R} = 0$$

- il moto è chiamato **rotolamento senza strisciamento o di puro rotolamento**
- l'attrito tra il punto di contatto e il piano è statico
- Es. quando (in teoria...) c'è perfetta aderenza tra ruota e strada

- Nel moto di puro rotolamento per il punto di contatto vale

$$\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{a}_{CM} = -\vec{\alpha} \wedge \vec{R}$$

- nota: T, il punto diametralmente opposto a P ha

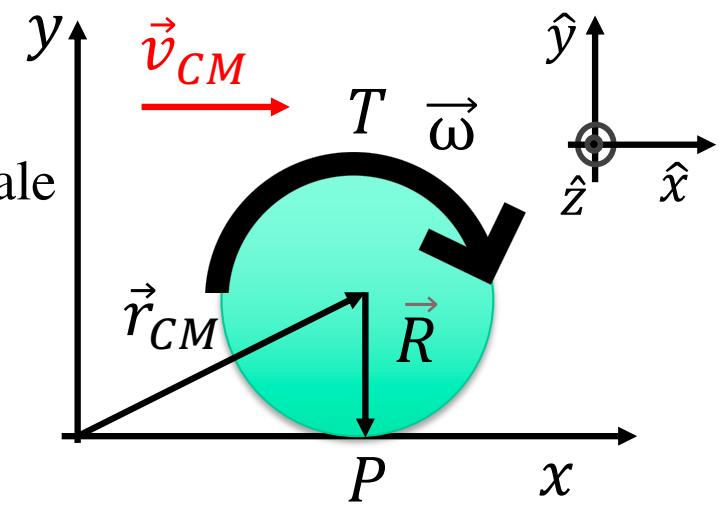
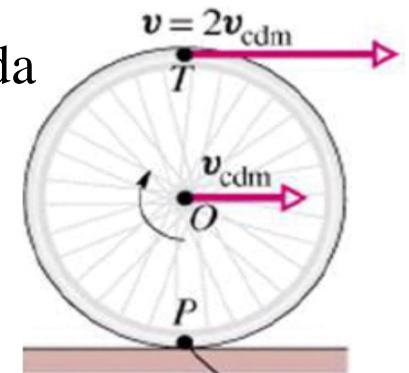
$$\vec{v}_T = \vec{v}_{CM} - \vec{\omega} \wedge \vec{R} = -2\vec{\omega} \wedge \vec{R}$$

- Nell'esempio in figura per il moto di puro rotolamento in generale, per il punto di contatto vale

$$\vec{\omega} = -\omega \hat{z} \quad \vec{R} = -R \hat{y}$$

$$\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \wedge \vec{R} = -\omega R \hat{z} \wedge \hat{y} = \omega R \hat{x}$$

$$\vec{a}_{CM} = -\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{R} = \dot{\omega} R \hat{x}$$



## Moto di puro rotolamento su un piano

- Con riferimento alla figura, assumendo  $\omega$  costante (condizione verificata su un piano orizzontale)

$$\Rightarrow \vec{v}_{CM} = (\omega R, 0)$$

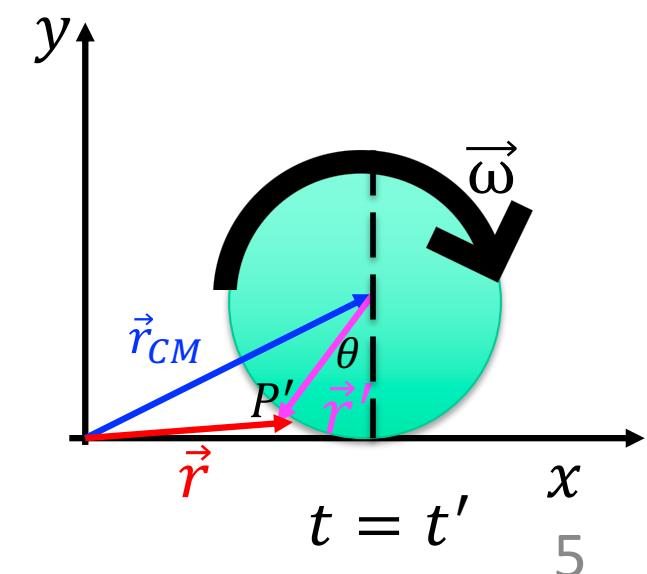
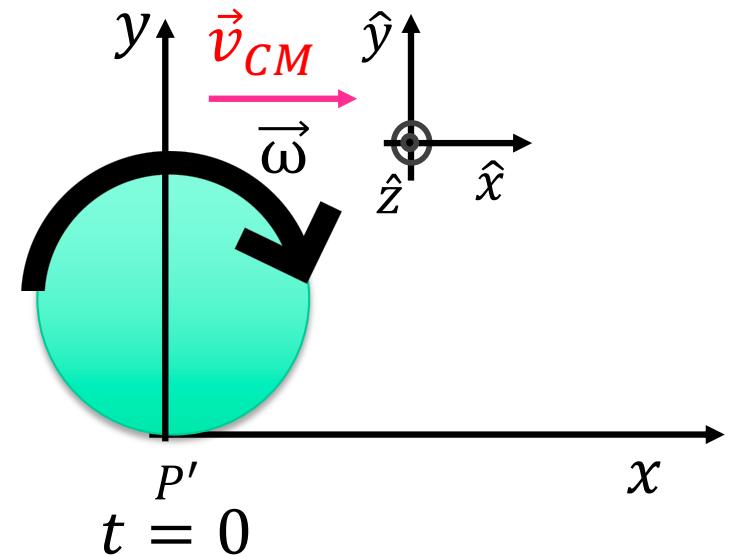
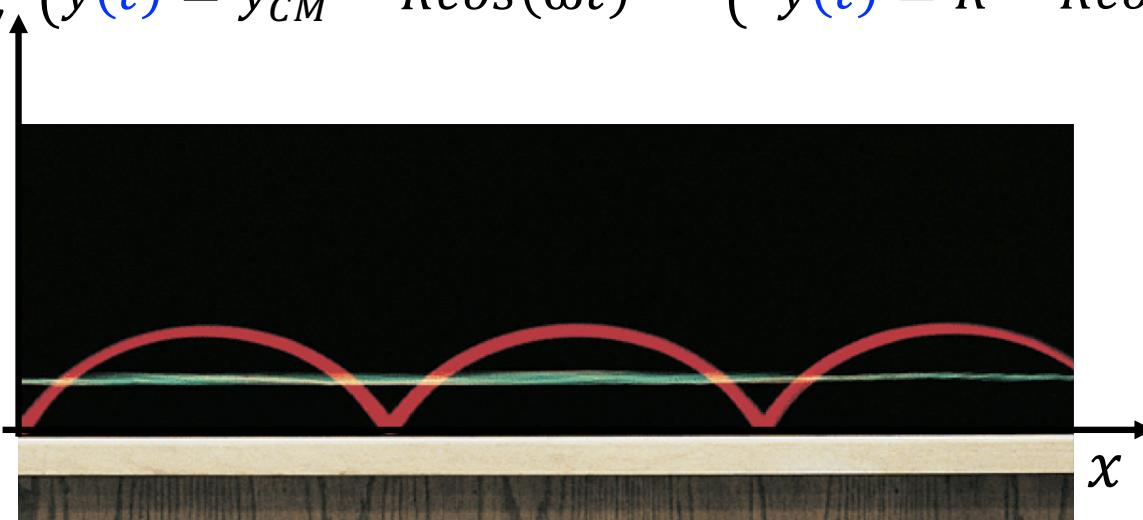
$$\Rightarrow \vec{r}_{CM} = (\omega R t, R)$$

- la legge oraria di un punto  $P'$  sulla superficie esterna della ruota che al tempo  $t=0$  ha coordinate  $x(t=0) = 0$   $y(t=0) = 0$

è data da

$$\begin{cases} x(t) = x_{CM} - R \sin(\omega t) \\ y(t) = y_{CM} - R \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \omega R t - R \sin(\omega t) \\ y(t) = R - R \cos(\omega t) \end{cases}$$



## Moto di puro rotolamento su un piano

$$\begin{cases} x(t) = \omega R t - R \sin(\omega t) \\ y(t) = R - R \cos(\omega t) \end{cases}$$

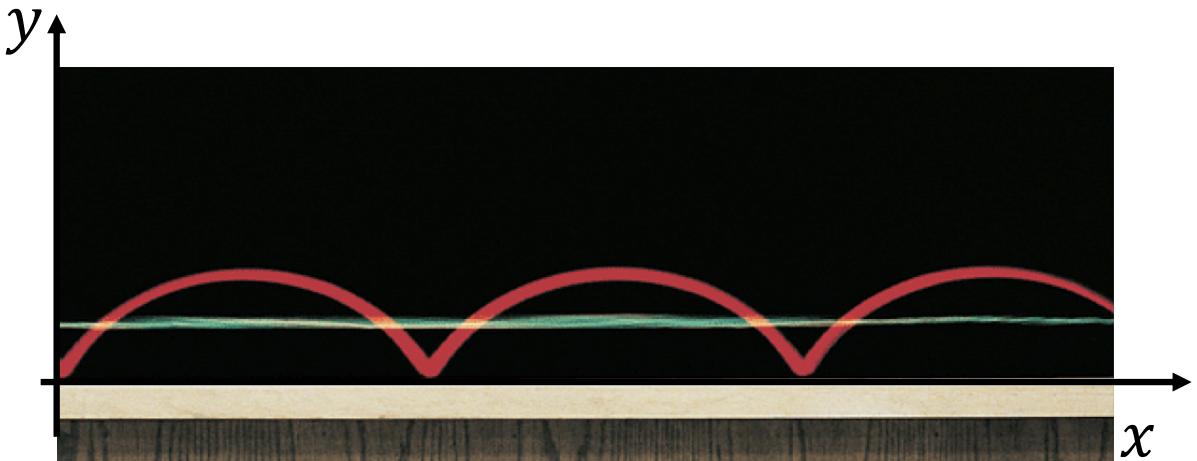
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- la velocità del punto  $P'$  sulla superficie esterna della ruota è data da

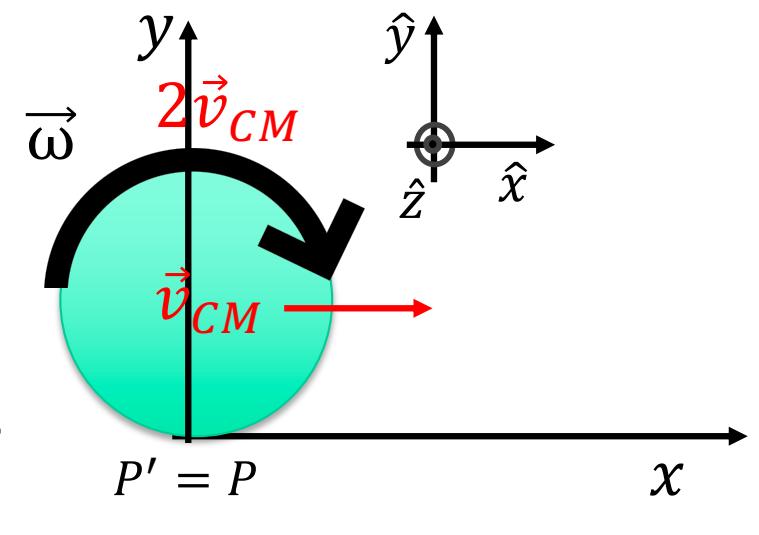
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \omega R - \omega R \cos(\omega t) \\ \dot{y}(t) = \omega R \sin(\omega t). \end{cases}$$

- Si noti che ogni volta che  $P'$  coincide con il punto di contatto della ruota P ( $t = n \frac{2\pi}{\omega}$ , con n nullo o intero) la sua velocità è nulla
- Un punto diametralmente opposto al punto di contatto ha velocità

$$\begin{cases} \dot{x}\left(\frac{n2\pi}{\omega} + \frac{\pi}{\omega}\right) = \omega R - \omega R \cos((2n+1)\pi) = 2\omega R \\ \dot{y}\left(\frac{n2\pi}{\omega} + \frac{\pi}{\omega}\right) = \omega R \sin((2n+1)\pi) = 0 \end{cases}$$



- In verde la traiettoria del centro di massa (che è il centro della ruota), in rosso la traiettoria del punto  $P'$ , nota come cicloide



# Moto di puro rotolamento su un piano

- Il moto di puro rotolamento può anche essere descritto come un moto di rotazione con velocità angolare  $\omega$  attorno ad un asse istantaneo passante per il punto P

- il punto P ha velocità nulla
- il centro di massa ha velocità  $\vec{v}_{CM} = (\omega R, 0)$
- il punto T ha velocità  $2\vec{v}_{CM} = (2\omega R, 0)$

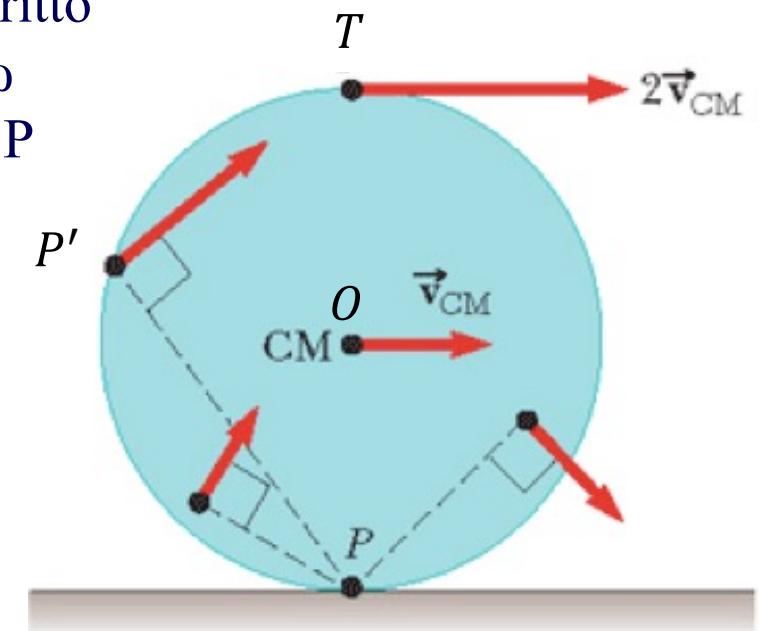
Gli altri punti del corpo si muovono con un moto di rotazione attorno a P

- Dimostrazione**

- Consideriamo un qualunque punto  $P'$

$$\begin{aligned}\vec{v}(P') &= \vec{v}(P') - 0 = \vec{v}(P') - \vec{v}(P) = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \Lambda \overrightarrow{OP'} \\ &= \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \Lambda \overrightarrow{OP'} - (\vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \Lambda \overrightarrow{OP}) = \vec{\omega} \Lambda (\overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{PO}) = \vec{\omega} \Lambda \overrightarrow{PP'}\end{aligned}$$

Le velocità dei punti della ruota dell'esempio saranno quelle indicate da questa figura senza la necessità di comporre vettorialmente i due moti come nelle generiche roto-traslazioni

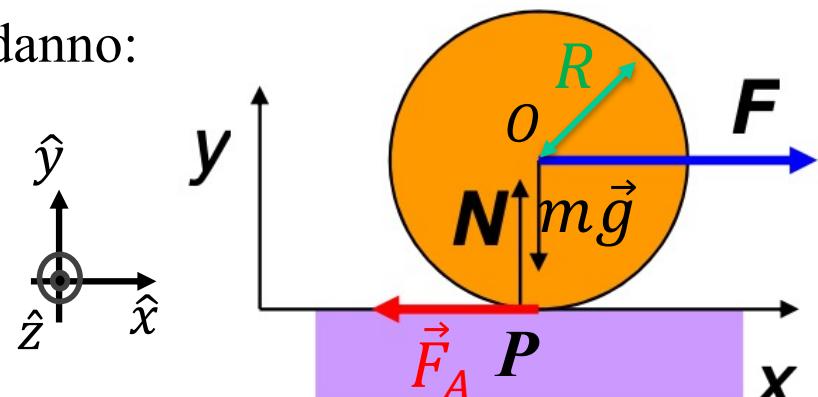


# Dinamica del Corpo che rotola su piano orizzontale Es.1

- Corpo di massa  $m$  e raggio  $R$  (anello disco ecc.) che fa puro rotolamento sul piano orizzontale sotto l'azione di una forza  $F$  orizzontale: determinare la forza di attrito e l'accelerazione

La I e la II Cardinale (polo rispetto al CM) danno:

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{F}_A + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_{cm} \\ \vec{\tau} = \overrightarrow{OP} \Lambda \vec{F}_A \end{cases}$$



- Proiettando la I Cardinale

$$\begin{cases} \text{lungo } x: F - F_A = ma_{cmx} = ma_{cm} \\ \text{lungo } y: N - mg = 0. \end{cases}$$

$$\vec{\tau} = I_{cm} \vec{\alpha} = \overrightarrow{OP} \Lambda \vec{F}_A = -R F_A \hat{z} \Rightarrow \vec{\alpha} = -\frac{R F_A}{I_{cm}} \hat{z} \Rightarrow \vec{\alpha} = \alpha_z \hat{z}$$

- Se il moto è di puro rotolamento per il punto di contatto vale ( $\vec{R} = \overrightarrow{OP}$ )

$$\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \Lambda \vec{R}$$

$$\vec{a}_{CM} = -\vec{\alpha} \Lambda \vec{R}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{R F_A}{I_{cm}} \hat{z} \Lambda (-R) \hat{y} = \frac{R^2 F_A}{I_{cm}} \hat{x} = -\alpha_z R \hat{x}$$

- sostituendo nella proiezione lungo x della I cardinale

$$F = F_A + ma_{cm} = F_A + \frac{mR^2 F_A}{I_{cm}} = F_A \left( 1 + \frac{mR^2}{I_{cm}} \right) \Rightarrow F_A = \frac{F}{1 + \frac{mR^2}{I_{cm}}}$$

## Dinamica del Corpo che rotola su piano orizzontale Es.1

$$\vec{a}_{cm} = \frac{R^2 F_A}{I_{cm}} \hat{x} \quad F_A = \frac{F}{1 + \frac{mR^2}{I_{cm}}} \Rightarrow a_{cm} = \frac{R^2}{I_{cm}} \frac{F}{\left(1 + \frac{mR^2}{I_{cm}}\right)} = \frac{R^2 F}{(I_{cm} + mR^2)}$$
$$\vec{a}_{cm} = -\alpha_z R \hat{x}$$

- Naturalmente essendo  $F_A$  una forza di attrito statico deve necessariamente verificarsi

$$F_A \leq \mu_s N = \mu_s mg \Rightarrow \frac{F}{1 + \frac{mR^2}{I_{cm}}} \leq \mu_s mg \Rightarrow F \leq \mu_s mg \left(1 + \frac{mR^2}{I_{cm}}\right)$$

- Per casa: dimostrare che si ottengono gli stessi risultati prendendo come polo il punto di contatto P

## Dinamica del Corpo che rotola su piano orizzontale Es.2

Il corpo sia ora sotto l'azione di un momento

costante  $M$  applicato all'asse  $\vec{M} = -M \hat{z}$

- Quanto detto prima per la reazione del vincolo continua a valere, eccetto che ora la forza d'attrito deve opporsi al moto del punto di contatto e quindi
- Proiettando la I Cardinale

$$\begin{cases} \text{lungo } x: F_A = ma_{cmx} = ma_{cm} \\ \text{lungo } y: N - mg = 0 \end{cases}$$

$$\vec{\tau} = \vec{M} + \overrightarrow{OP} \Lambda \vec{F}_A = -M\hat{z} + R F_A \hat{z} = I_{cm} \vec{\alpha}$$

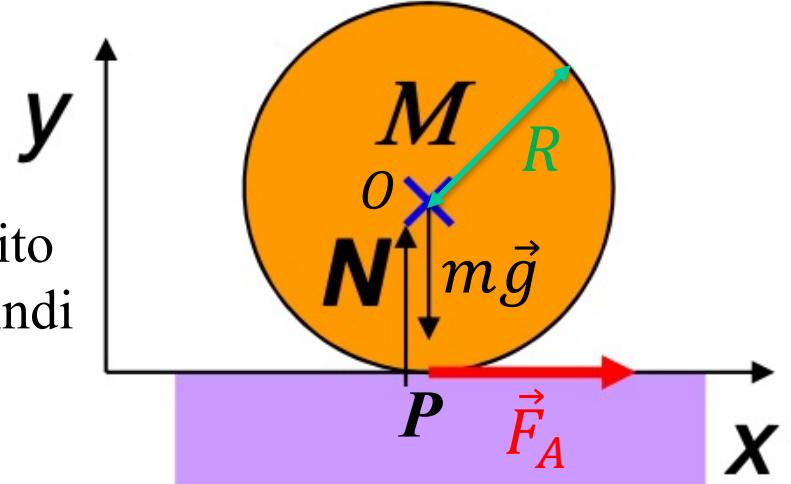
$$\Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{R F_A - M}{I_{cm}} \hat{z} = \frac{R ma_{cm} - M}{I_{cm}} \hat{z} \Rightarrow \alpha_z = \frac{R ma_{cm} - M}{I_{cm}}$$

- Se il moto è di puro rotolamento per il punto di contatto vale ( $\vec{R} = \overrightarrow{OP}$ )

$$\vec{v}_{CM} = -\vec{\omega} \Lambda \vec{R}$$

$$\vec{a}_{CM} = -\vec{\alpha} \Lambda \vec{R}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{CM} &= -\alpha_z \hat{z} \Lambda (-R) \hat{y} = -\alpha_z R \hat{x} = -\left(\frac{R ma_{cm} - M}{I_{cm}}\right) R \hat{x} \Rightarrow a_{cm} \left(1 + \frac{mR^2}{I_{cm}}\right) = \frac{MR}{I_{cm}} \\ \Rightarrow a_{cm} &= \frac{MR}{(mR^2 + I_{cm})} \end{aligned}$$

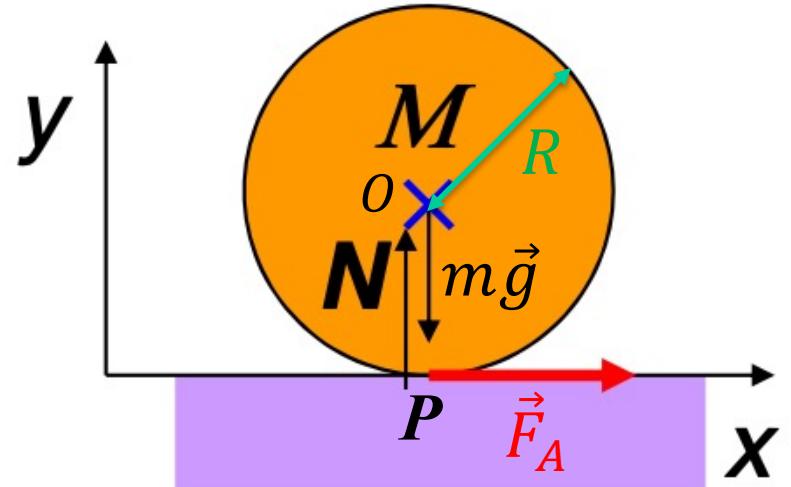


## (2) Dinamica del Corpo che rotola su piano orizzontale Es.2

$$\Rightarrow a_{cm} = \frac{MR}{(mR^2 + I_{cm})}$$

$$\begin{cases} \text{lungo } x: F_A = ma_{cmx} = ma_{cm} \\ \text{lungo } y: N - mg = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_A = \frac{mMR}{(mR^2 + I_{cm})}$$



- Vediamo qual'è il massimo modulo di  $M$  affinché l'attrito sia statico

$$F_A \leq \mu_s N = \mu_s mg \quad \Rightarrow \frac{mMR}{(mR^2 + I_{cm})} \leq \mu_s mg$$

$$\Rightarrow M \leq \mu_s mg \left( \frac{mR^2 + I_{cm}}{mR} \right)$$

## Sommario degli esempi 1 e 2 applicati alle ruote di un automobile a trazione anteriore

- Esempio 2  $F_A = ma_{cm}$
- In questo caso la forza di attrito provoca l'accelerazione del CM



- quando un motore fa girare una ruota, è la forza  $\vec{F}_A$  d'attrito a spingere avanti la ruota

$$\vec{\tau} = -M\hat{z} + R \vec{F}_A \hat{z} = I_{cm} \vec{\alpha}$$

- Il momento della forza di attrito si oppone al momento della forza torcente

- Condizione di Puro rotolamento:  $\vec{a}_{CM} = -\alpha_z R \hat{x}$

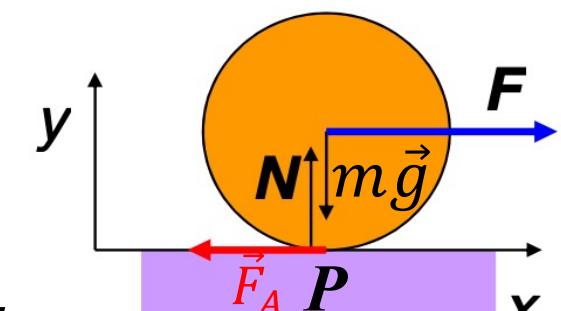
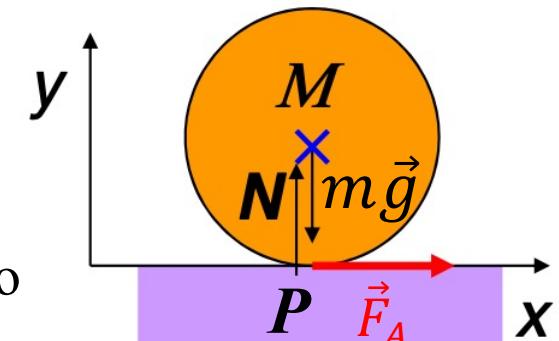
$$\alpha_{cm} = \frac{MR}{(mR^2 + I_{cm})} \Rightarrow F_A = \frac{mMR}{(mR^2 + I_{cm})}$$

- Esempio 1

Stessa condizione di puro rotolamento:  $\vec{a}_{CM} = -\alpha_z R \hat{x}$

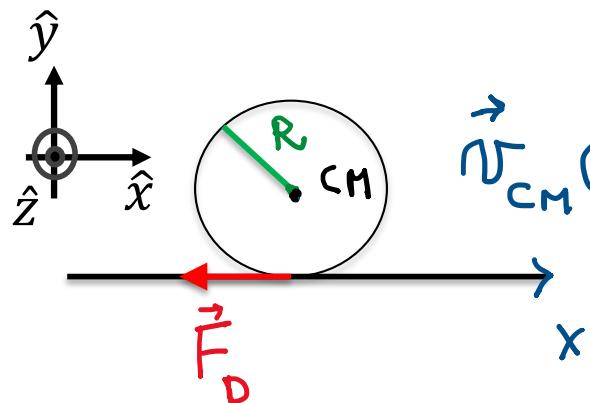
$$\vec{\tau} = -R F_A \hat{z} = I_{cm} \vec{\alpha} = I_{cm} \alpha_z \hat{z} \Rightarrow F_A = \frac{-I_{cm} \alpha_z}{R}$$

$$F - F_A = m a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{R^2}{I_{cm}} \frac{F}{\left(1 + \frac{mR^2}{I_{cm}}\right)} = \frac{R^2 F}{(I_{cm} + mR^2)}$$



**Esercizio.** Un cilindro di massa  $M$  e raggio  $R$  è appoggiato su un piano orizzontale scabro di lunghezza infinita e coefficiente di attrito dinamico  $\mu_D$ . All'istante  $t = 0$  al centro di massa del cilindro viene impressa una velocità orizzontale di modulo  $V_0$ , mentre la velocità angolare iniziale del cilindro è nulla.

- 1) Calcolare in funzione del tempo la velocità del CM
- 2) Calcolare l'intervallo di tempo necessario affinché il cilindro raggiunga la condizione di puro rotolamento.



come polo per il calcolo del momento abbiamo usato il CM per non annullare il momento dovuto alla forza di attrito dinamico che determina il moto successivo del cilindro.

*Note:* il CM è sull'asse z

Fino al raggiungimento della condizione di puro rotolamento il moto del cilindro è una generica combinazione di una traslazione orizzontale del centro di massa e di una rotazione intorno al centro di massa. È quindi necessario utilizzare la prima e seconda equazione cardinale della meccanica

$$\begin{cases} M\vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_{ext} = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_D \\ \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = I_{CM}\vec{\alpha} = \frac{MR^2\vec{\alpha}}{2} = \sum \vec{\tau}_{ext} = \vec{R} \wedge \vec{F}_D = -\mu_D RMg\hat{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ma_{CMy} = 0 = N - Mg & Ma_{CMx} = -\mu_D Mg \\ \frac{dL_{CM}}{dt} = I_{CM}\vec{\alpha} = \frac{MR^2}{2}\vec{\alpha} = -\mu_D RMg|\hat{z}| \end{cases}$$

$$\textcircled{1} M_{CMx} = -\mu_D Mg \hat{x} \quad \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = I_{CM} \vec{\alpha} = \frac{MR^2}{2} \vec{\alpha} = -\mu_D RMg \hat{z} \Rightarrow$$

$$-I_{CM} |\vec{\alpha}| \hat{z} = -\mu_D Mg R \hat{z} \Leftrightarrow \textcircled{2} I_{CM} \alpha = \mu_D Mg R = |\vec{F}_D| R$$

$$\textcircled{2} I_{CM} \dot{\omega} = |\vec{F}_D| R$$

\textcircled{1} Moto uniformemente decelerato  $N_{CM}(t) = N_{CM}(0) - \mu_D g t$

$$\textcircled{2} \dot{\omega} = \frac{|\vec{F}_D| R}{I} \Rightarrow \text{moto unif. accelerato in } \Theta(t)$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{|\vec{F}_D|R}{I} t$$

$\omega_0$  at  $t=0$

$\Rightarrow$  al trascorrere del tempo diminuisce  $N_{CM}$  e aumenta  $\omega$  fino a quando il moto diviene di pura rotolamento  $\Rightarrow N_{CM}(t^*) = \omega(t^*) R$

$$N_{CM}(t) = N_{CM}(0) - \mu_D g t \quad \omega(t) = \frac{I \vec{F}_D / R}{I} t \quad \text{per } t = t^* \Rightarrow$$

$$N_{CM}(t^*) = \omega(t^*) R$$

$$N_{CM}(0) - \mu_D g t^* = \frac{\vec{F}_D R t^*}{I} R = \frac{\mu_D M g R^2 t^*}{I}$$

$$t^* (\mu_D g) \left( \frac{M R^2}{I} + 1 \right) = N_{CM}(0) \Rightarrow t^* = \frac{N_0}{\mu_D g} \frac{I}{M R^2 + I}$$

per  $t > t^*$  il moto è di puro rotolamento.

$$N_{CM} = N_{CM}(0) - \mu_D g t^* = V_0 - \cancel{\mu_D g} \frac{N_0}{\cancel{\mu_D g}} \frac{I}{M R^2 + I} = \text{cost}$$

per cui:

$$N_{CM}(t \in [0, t^*]) = V_0 - \mu_D g t$$

$$N_{CM}(t > t^*) = V_0 \left( 1 - \frac{I}{M R^2 + I} \right) = \omega R = \boxed{\text{cost}}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{CM} = \vec{R} \wedge \vec{F}_A = \emptyset = I \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{F}_A = 0! \quad \vec{\alpha} = -\dot{\omega} \hat{z}$$

3) Calcolare il lavoro compiuto dalla forza di attrito dinamico nell'intervallo di tempo necessario per il raggiungimento del puro rotolamento.

L'energia cinetica iniziale del cilindro è di pura traslazione, mentre una volta raggiunto il puro rotolamento è di rototraslazione. Si noti che a partire da questo istante in poi l'attrito è nullo, per cui l'energia cinetica rimane invariata. Il lavoro compiuto dall'attrito dinamico, per il teorema delle forze vive, è quindi:

$$\mathcal{L} = \Delta K = \frac{MV_{CM}^2(t^*)}{2} + \frac{1}{2}I\omega^2(t^*) - \frac{MV_0^2}{2} = \frac{MV_{CM}^2(t^*)}{2} + \frac{1}{2}\frac{MR^2\omega^2(t^*)}{2} - \frac{MV_0^2}{2}$$

$$\mathcal{L} = \frac{3MV_{CM}^2(t^*)}{4} - \frac{MV_0^2}{2}$$

dove abbiamo inserito

$$I = \frac{MR^2}{2} \quad \text{e} \quad V_{CM}(t^*) = \omega(t^*)R$$

La velocità  $V_{CM}(t^*)$  è:  $V_{CM}(t^*) = V_0 - \mu_D g t^*$

$$t^* = \frac{V_0}{\mu_D g} \quad \frac{I}{MR^2+I} = \frac{V_0}{\mu_D g} \cdot \frac{\frac{MR^2}{2}}{\frac{3}{2}(MR^2)} = \frac{V_0}{\mu_D g} \cdot \frac{1}{3}$$

$$V_{CM}(t^*) = V_0 - \mu_D g \frac{V_0}{3\mu_D g} = V_0 - \frac{V_0}{3} = \frac{2V_0}{3}$$

$$\mathcal{L} = \frac{3M}{4} \left( \frac{2V_0}{3} \right)^2 - \frac{MV_0^2}{2} = MV_0^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{MV_0^2}{6}$$

Un modo particolare per mettere in rotazione o per far rotolare un corpo rigido e' di applicargli per un tempo molto breve una forza impulsiva.

$$\vec{I} = \int \vec{F} dt = M \vec{v}_{CM}^f - M \vec{v}_{CM}^i$$

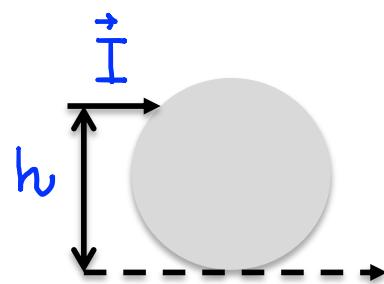
$$\text{D'altra parte se si fa un polo } O: \vec{r}_O^0 \wedge \vec{I} = \vec{r}_O^0 \wedge M \vec{v}_{CM}^f - \vec{r}_O^0 \wedge M \vec{v}_{CM}^i$$

$$\text{ma anche } \vec{r}_O^0 \wedge \vec{I} = \vec{L}_{f CM}^0 - \vec{L}_{i CM}^0$$

E.s. palle da biliardo (non vincolate!) colpite da una stecca da biliardo (forza impulsiva)

## Esercizio

A che quote  $h$  (vedi figura) è necessario colpire con una stecca de biliardo una palla da biliardo di raggio  $r$  per avere rotolamento puro?

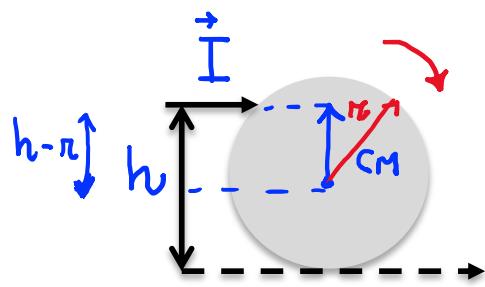


Il colpo della stecca fornisce un impulso

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} \cdot dt = M \vec{v}_{cm}(t) - M \vec{v}_{cm}(0) = M \vec{v}_{cm}(t)$$

per cui subito dopo l'urto  $M \vec{v}_{cm}(t^*) = \vec{I} = M \vec{v}_{cm}$

Un istante dopo agiscono le forze di attrito e in generale l'oggetto può rotolare e strisciare.



Valutiamo il momento angolare  
segniamo come polo il CM delle palle  
de bilanciato

$$\vec{\tau}_{CM-I}^{CM} \wedge \vec{I} = (\vec{h} - \vec{r}) \wedge \vec{I} = \vec{L}_{CMf}^{CM} - \vec{L}_{CMI}^{CM} = \underbrace{\vec{r}_{CM}^{CM}}_{CM-CM} \wedge \vec{P}_{CM} + \vec{I}_{CM} \vec{\omega}$$

↔                          ↗                          ↗

$$\Rightarrow (\vec{h} - \vec{r}) \wedge \vec{I} = I_{CM} \vec{\omega} \quad \Rightarrow -(\vec{h} - \vec{r}) I \hat{z} = -I_{CM} \omega \cdot \hat{z}$$

$$(h - r) I = I_{CM} \omega \quad \text{ma } I = M N_{CM} \quad \text{e ne vogliamo}$$

che le p.d.b. abbia un moto di puro rotolamento

$$N_{CM} = \omega \cdot r \Rightarrow \frac{I}{M} = \omega r \quad \text{per cui } \omega = \frac{I}{Mr}$$

$$(h-r)I = I_{CM} \omega$$

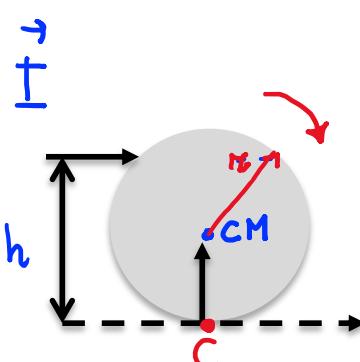
$$\omega = \frac{I}{Mr}$$

$$\Rightarrow (h-r)I = I_{CM} \cdot \frac{I}{Mr}$$

dalle quali sostituendo  
 $I_{CM} = \frac{2}{5} Mr^2$

$$(h-r) = \frac{2}{5} r \quad e \quad h = \frac{7}{5} r \text{ è la quota a cui deve}$$

colpire le P.d.b. per avere un moto di puro rotolamento.  
 Usando il punto di contatto come polo si dimostri  
 che si ottiene lo stesso risultato.



Dalle figure:  $\vec{h} \wedge \vec{I} = I_{CM} \vec{\omega} + \vec{r}_{C-CM} \wedge \vec{P}_{CM}$   
 $= -h \vec{I} \hat{z} + \vec{r}_{C-CM} \vec{P}_{CM} \cdot \hat{z} = -I_{CM} \omega \hat{z}$

$$\Rightarrow h\vec{I} - \vec{r} P_{CM} = I_{CM} \omega$$

notar:  $P_{CM} = M v_{CM} = I \Rightarrow (h-r)I = I_{CM} \omega$

C.V.D

$$\Rightarrow hI - \pi P_{CM} = I_{CM} \omega$$

not:  $P_{CM} = M N \tau_{CM} = I$

$$\Rightarrow hI = \pi I + I_{CM} \omega \quad \text{delle quale se } h = \pi \Rightarrow \omega = 0$$

per cui per  $h = \pi$  le polle strisci e basta.

- Se  $h$  aumenta rispetto a  $\pi$   $\omega$  aumenta
- Se  $h$  diminuisce rispetto a  $\pi$   $\omega$  diventa ne  
gativo

Concludendo  $hI = \pi I + I_{CM} \cdot \omega$

$\rightarrow$  rotolamento puro  $h = \frac{7}{5}r$  ↗

$\rightarrow$  rotolo e strisci  $h > \frac{7}{5}r$  ↗

$\rightarrow$  rotolo e strisci ma con  $\omega$   $r \leq h < \frac{7}{5}r$   
che diminuisce fino a quando  
per  $h=r$   $\omega=0$ ! tresso e basta ↗

$\rightarrow$  per  $h < r$  rotolo e strisci ma ↘

## Moto di puro rotolamento: Energia cinetica e Lavoro

- L'energia cinetica di un corpo che trasla e ruota attorno a P è

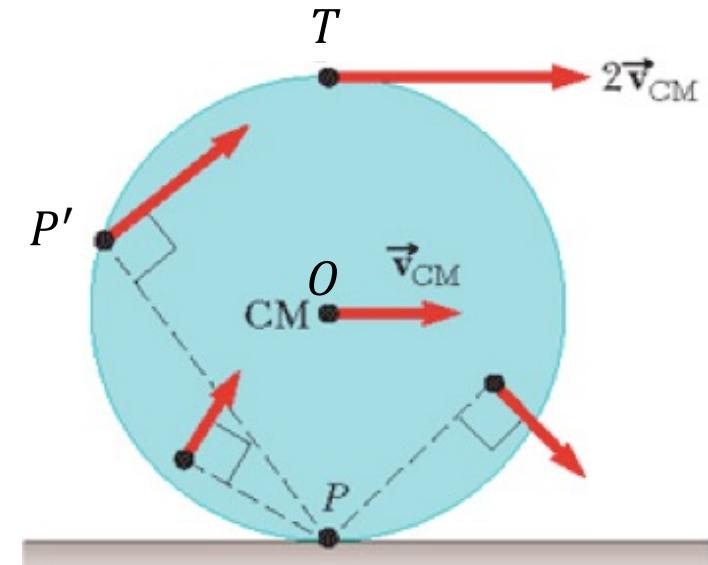
$$K = \frac{1}{2} I_p \omega^2 = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

- dove

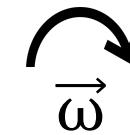
$$v_{CM} = \omega R$$

e dal Teorema di Steiner

$$I_p = MR^2 + I_{CM}$$



- Il moto di puro rotolamento richiede **in generale** la presenza di attrito nel punto di contatto
  - Tuttavia l'attrito nel moto di puro rotolamento non compie lavoro perchè il punto P di contatto è fermo



# Esercizio su moto di puro rotolamento su piano inclinato(1)

Determinare la velocità che raggiunge alla fine del percorso un corpo rigido di massa  $M$  e raggio  $R$  che rotola senza strisciare partendo da una quota  $h$  su un piano inclinato di un angolo  $\theta$

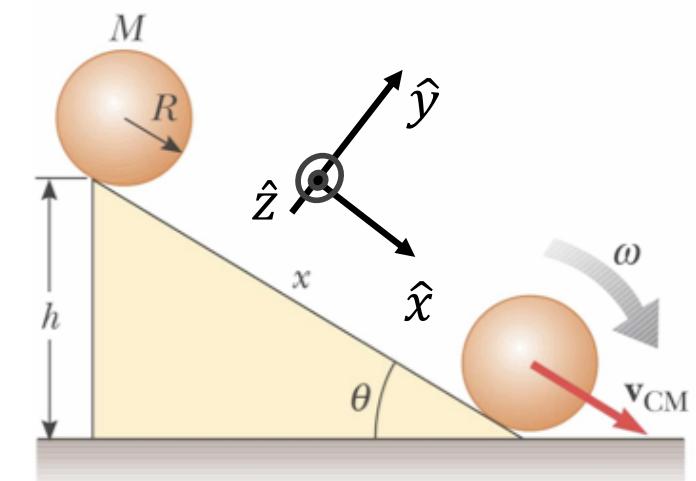
- Non ci sono forze non conservative che compiono lavoro (la forza di attrito statico non compie lavoro, la reazione vincolare è ortogonale allo spostamento)

$$\Rightarrow K_f - K_i = Mg(h_i - h_f) = Mg(h + \text{cost}) - Mgc\text{ost} = K_f - 0 = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \\ = \frac{1}{2}I_P\omega^2$$

- Dalla condizione di puro rotolamento

$$v_{cmx} = -\omega_z R = \omega R = v_{cm} \Rightarrow \omega = \frac{v_{cm}}{R}$$

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{CM} \frac{v_{cm}^2}{R^2} \Rightarrow 2gh = v_{cm}^2 + I_{CM} \frac{v_{cm}^2}{MR^2} \Rightarrow v_{cm} =$$



- Se il corpo scivola senza attrito

$$\Rightarrow v_{cm} = \sqrt{2gh}$$

- Nota: tutto ciò è valido nell'ipotesi che il corpo rotoli senza strisciare
- Nota:  $v_{cm} < \sqrt{2gh}$ , velocità finale senza rotolamento, per qualunque  $I_{CM}$ . Perchè?

## Esercizio su moto di puro rotolamento su piano inclinato(2)

Determinare l'accelerazione e la forza di attrito statico agente durante il moto di puro rotolamento

$$\begin{cases} \vec{F}_A + \vec{N} + M\vec{g} = M\vec{a}_{cm} \\ \vec{\tau} = \overrightarrow{OP} \Lambda \vec{F}_A \end{cases}$$

- Proiettando la I Cardinale

$$\begin{cases} \text{lungo } x: Mgsin\theta - F_A = Ma_{cmx} = Ma_{cm} \\ \text{lungo } y: N - Mgcos\theta = 0. \end{cases}$$

- Dalla II cardinale

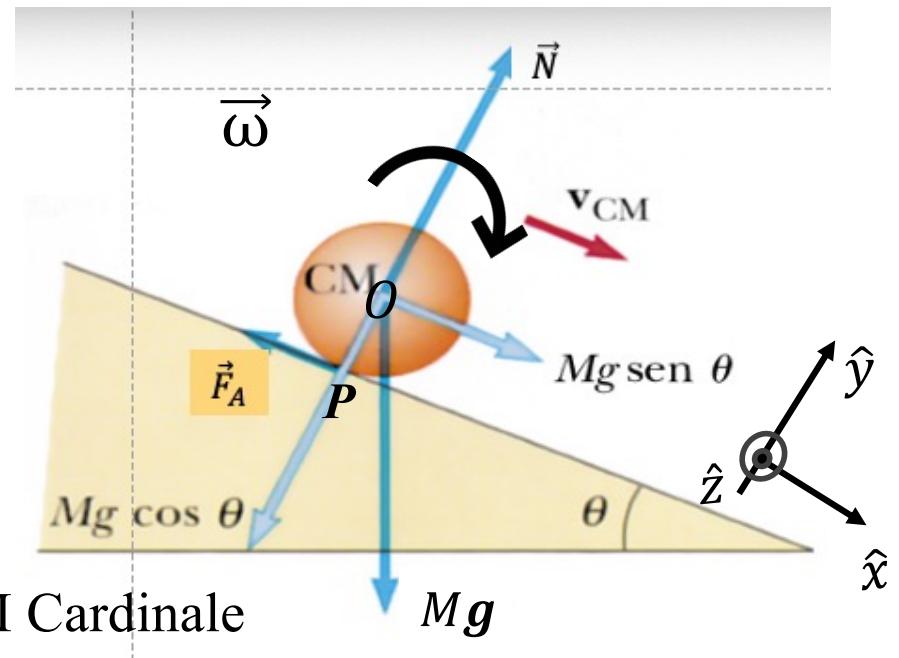
$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \overrightarrow{OP} \Lambda \vec{F}_A = -R F_A \hat{z} = I_{cm} \vec{\alpha} \\ \Rightarrow \vec{\alpha} &= \alpha_z \hat{z} = -\frac{R F_A}{I_{cm}} \hat{z} \end{aligned}$$

- Dalla condizione di puro rotolamento

$$\begin{aligned} a_{cm} &= -\alpha_z R = \frac{R^2 F_A}{I_{cm}} \\ \Rightarrow F_A &= \frac{I_{cm} a_{cm}}{R^2} \end{aligned}$$

- sostituendo nella proiezione lungo x della I Cardinale

$$\begin{aligned} Mgsin\theta - F_A &= Ma_{cm} = Mgsin\theta - \frac{I_{cm} a_{cm}}{R^2} \quad \Rightarrow Mgsin\theta \frac{R^2}{I_{cm}} = a_{cm} \left( 1 + \frac{MR^2}{I_{cm}} \right) \\ \Rightarrow a_{cm} &= \frac{R^2}{I_{cm}} \frac{Mgsin\theta}{\left( 1 + \frac{MR^2}{I_{cm}} \right)} = \frac{R^2 Mgsin\theta}{(I_{cm} + MR^2)} \quad \Rightarrow F_A = \frac{Mgsin\theta}{\left( 1 + \frac{MR^2}{I_{cm}} \right)} \end{aligned}$$



## Esercizio su moto di puro rotolamento su piano inclinato(3)

Determinare l'accelerazione e la forza di attrito statico agente durante il moto di puro rotolamento

- Oppure possiamo sfruttare la conservazione dell'energia insieme alla condizione di puro rotolamento e la proiezione lungo x della I cardinale

$$E = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + Mg(h - xsin\theta + R)$$

- $x$  corrisponde allo spazio percorso dal CM lungo  $x$

- Condizione di puro rotolamento per la velocità

$$\dot{x} = v_{cmx}(t) = -\omega_z R$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\frac{\dot{x}^2}{R^2} + Mg[h + R - xsin\theta]$$

- Essendo  $E$  costante la sua derivata rispetto al tempo è nulla, per cui:

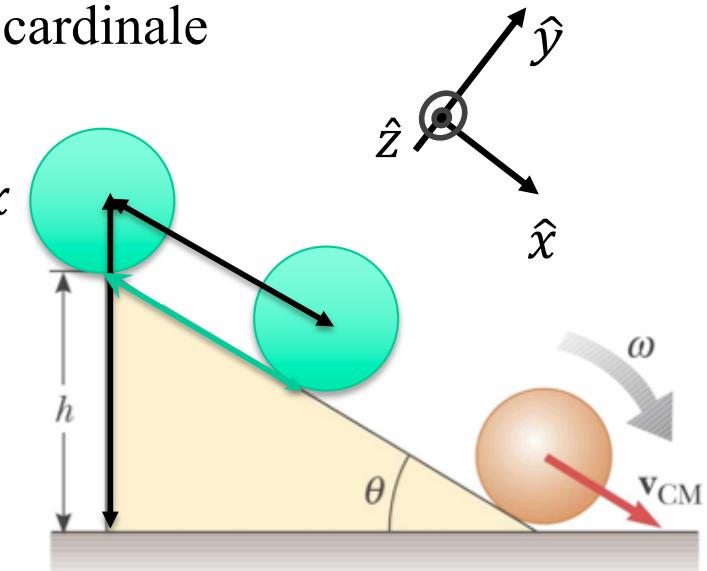
$$\frac{dE}{dt} = Mv_{cm}\dot{v}_{cm} + \frac{I_{CM}}{R^2}v_{cm}\dot{v}_{cm} - Mg v_{cm} sin\theta = 0$$

Poichè  $v_{cm}$  è chiaramente diversa da zero, dividiamo per  $v_{cm}$ , portiamo l'ultimo termine a secondo membro cambiandolo di segno per poi ottenere  $a_{cm} = \dot{v}_{cm}$ :

$$\Rightarrow a_{cm} = \frac{Mgsin\theta}{\left(M + \frac{I_{cm}}{R^2}\right)}$$

$$da Mgsin\theta - F_A = Ma_{cm}$$

$$\Rightarrow F_A = \frac{Mgsin\theta}{\left(1 + \frac{MR^2}{I_{cm}}\right)}$$



# Teorema dell'impulso angolare o del momento dell'impulso

- Possiamo scrivere una espressione simile a quella già ricavata per il teorema dell'impulso:

$$\vec{I} = \int_{t_0}^t \vec{F} dt' = \Delta \vec{p} = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0)$$

utilizzando i momenti delle forze

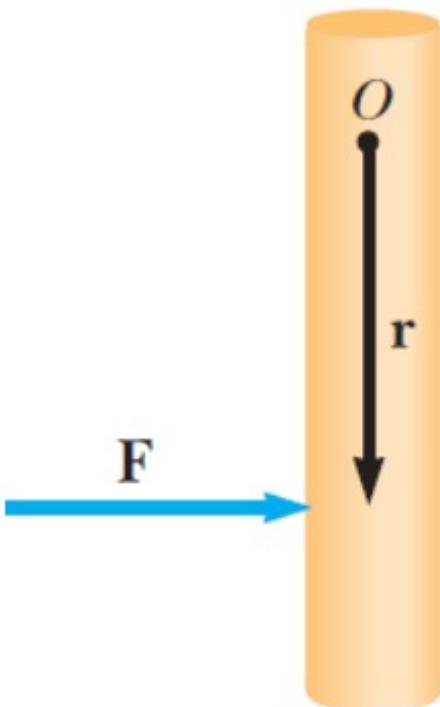
- In questo caso abbiamo (**teorema dell'impulso angolare**) :

$$\vec{J} = \int_{t_0}^t \vec{\tau} dt' = \Delta \vec{L} = \vec{L}(t) - \vec{L}(t_0)$$

- Assumendo che una forza  $\vec{F}$  venga applicata per un intervallo di tempo piccolo (forza impulsiva) a distanza  $r$  da un polo  $O$  con  $O$  appartenente a un corpo rigido

$$\vec{J} = \int_{t_0}^t \vec{\tau} dt' = \int_{t_0}^t \vec{r} \wedge \vec{F} dt' = \vec{r} \wedge \int_{t_0}^t \vec{F} dt' = \vec{r} \wedge \vec{I} = \Delta \vec{L} = \vec{L}(t) - \vec{L}(t_0)$$

La grandezza  $\vec{r} \wedge \vec{I}$  è il momento dell'impulso e questo teorema, **teorema del momento dell'impulso**, dimostra che un impulso porta non solo ad una variazione di quantità di moto ma anche di momento angolare.



## Impulso angolare su un asta

Si consideri un pendolo composto costituito da un'asta di lunghezza  $l$  e massa  $m$ , libera di ruotare attorno a un asse orizzontale passante per un suo estremo O. Inizialmente l'asta è ferma in posizione verticale. Determinare l'impulso  $I$  da applicare ad una distanza  $r \leq l$  da O in modo da far compiere all'asta una rotazione di  $90^\circ$  (e arrivare in orizzontale).

Il momento dell'impulso da applicare rispetto ad O è  $\vec{r} \times \vec{I}$ , quindi applicando il teorema dell'impulso angolare

$$\vec{r} \times \vec{I} = \vec{\Delta L}$$

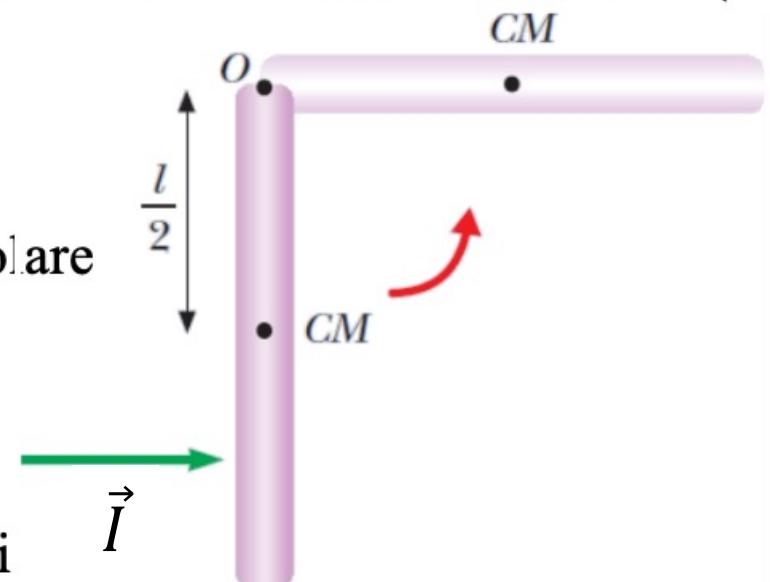
$$r I = I_O \omega_f - I_O \omega_i$$

Dove, il momento d'inerzia per un'asta rispetto all'estremo è  $I_O = \frac{1}{3} m l^2$ , inizialmente  $\omega_i = 0$ , quindi

$$r I = \frac{1}{3} m l^2 \omega \Rightarrow \omega = \frac{3 r I}{m l^2}$$

Possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica rispetto al CM, che in seguito alla rotazione si è sollevato di  $\frac{l}{2}$

$$m g \frac{l}{2} = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$



## Impulso angolare su un asta

$$m g \frac{l}{2} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \Rightarrow m g l = I_O \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{m g l}{I_O}} \Rightarrow$$

Dal teorema dell'impulso avevamo ottenuto  $\omega = \frac{3 r I}{m l^2}$

$$\frac{3 r I}{m l^2} = \sqrt{\frac{m g l}{\frac{1}{3} m l^2}}$$

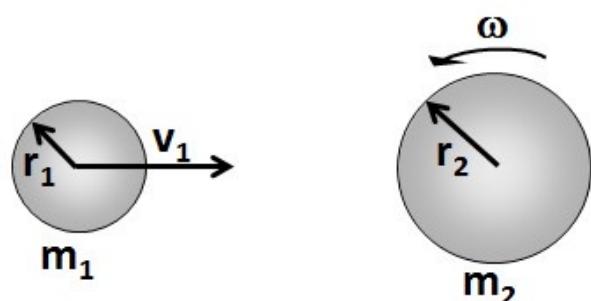
$$\frac{3 r I}{m l^2} = \sqrt{\frac{3 g}{l}} \Rightarrow$$

$$I = \frac{\sqrt{3g} m l^2}{3 r \sqrt{l}} = \frac{m l}{r} \sqrt{\frac{g l}{3}}$$

# Esame di Fisica Generale del 21/02/2017

## Esercizio 1

Due sfere, una di massa  $m_1 = 2 \text{ kg}$  e raggio  $r_1 = 0.17 \text{ m}$  la seconda di massa  $m_2 = 8 \text{ kg}$  e raggio  $r_2 = 0.23 \text{ m}$ , si urtano centralmente e rimangono attaccate senza deformarsi (troppo). La prima sfera viaggia alla velocità  $v_1 = 34 \text{ m/s}$  verso la seconda che è ferma ma ruota su se stessa con una velocità angolare  $\omega_2 = 20 \text{ rad/s}$  (Fig.1).



Si calcoli:

a) l'energia cinetica totale iniziale del sistema e la distanza tra il centro di massa del sistema (dopo l'urto) e il centro della prima sfera:

$$E_c = \dots ; \quad d_{cm} = \dots$$

Fig.1

b) la velocità angolare del sistema dopo l'urto e la massima velocità del centro della seconda sfera rispetto al laboratorio

$$\omega = \dots ; \quad v_{max} = \dots$$

c) la variazione di energia del sistema dovuta all'urto tra le due sfere:

$$\Delta E = \dots$$

de due sfere si scontrano frontalmente e rimangono attaccate.

① L'urto è anelastico

② Non ci sono forze esterne

③  $E_f < E_i \Rightarrow T_f < T_i$

④  $\vec{P}$  conservato,  $\vec{L}$  conservato

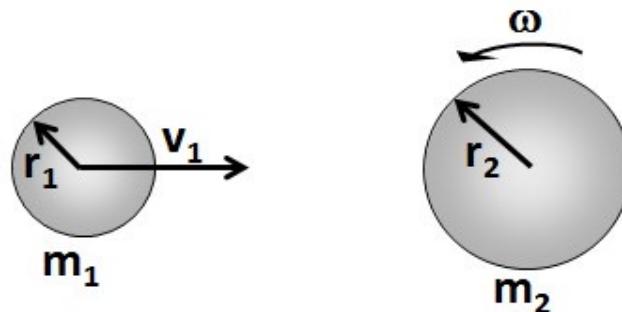


Fig.1

Sfera 1

$$m_1 = 2 \text{ kg}$$

$$r_1 = 0.17 \text{ m}$$

$$\nu_1 = 34 \text{ m/s}$$

Sfera 2

$$m_2 = 8 \text{ kg}$$

$$r_2 = 0.23 \text{ m}$$

$$\nu_2 = 34 \text{ m/s}$$

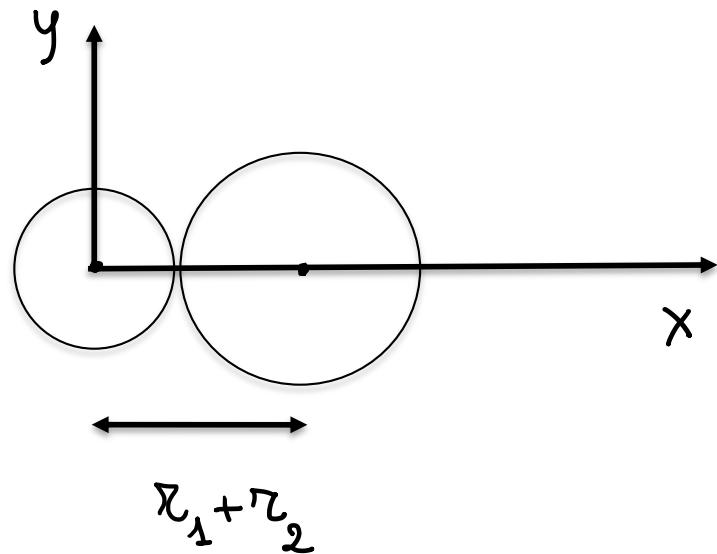
a) Si calcoli l'energia cinetica totale iniziale del sistema e la distanza tra il centro di massa del sistema (dopo l'urto) e il centro della prima sfera:  $E_c = \dots$   $d_{cm} = \dots$

$$T_i = \frac{1}{2} m_1 \nu_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega^2$$

$$I_2 = \frac{2}{5} m_2 r_2^2 = 0.169 \text{ kg m}^2$$

$$E_c = 1190 \text{ J}$$

a) Si calcoli l'energia cinetica totale iniziale del sistema e la distanza tra il centro di massa del sistema (dopo l'urto) dal centro della prima sfera:  $E_c = \dots$   $d_{cm} = \dots$



$$d_{cm} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 (r_1 + r_2)}{m_1 + m_2} = 0.32 \text{ m}$$

b) Si calcoli la velocità angolare del sistema dopo l'urto e la massima velocità del centro della seconda sfera rispetto al laboratorio:  $\omega = \dots$   $v_{max} = \dots$

Dalle conservazione di  $\vec{P}$  fissa la direzione dell'asse x concorde con  $\vec{v}_1$

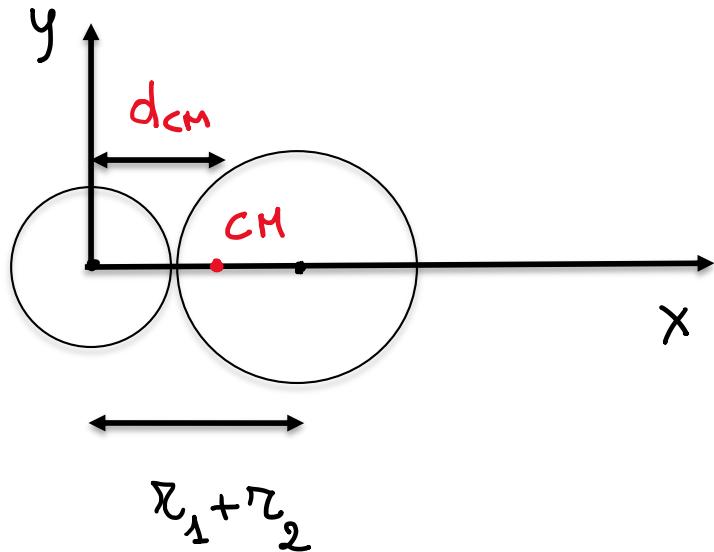
$$P = m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v = v_{cm} M = \text{cost}$$

per cui  $v_{cm} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$

e  $\vec{v}_{cm} = \left( \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, 0, 0 \right)$

Quindi  $N_{CM} = N = \text{cost}$  e  $\vec{N}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \cdot \hat{x} = 6,8 \hat{x} m_S$

di conseguenza il CM si muove lungo  $\hat{x}$  di moto rettilineo uniforme!



Possiamo usare le conservazioni del momento angolare usando come polo il CM.

$$\begin{aligned}\vec{L}_{CM} &= \vec{r}_{CM_1}^{CM} \wedge \vec{P}_{CM_1} + I_1 \vec{\omega}_1 + \vec{r}_{CM_2}^{CM} \wedge \vec{P}_{CM_2} \\ &= \emptyset : // \quad = \emptyset \quad = \emptyset : \vec{P}_{CM_2} = 0 \\ &+ I_2 \vec{\omega}_2 = I_2 \omega_2 \hat{z} = \vec{L}_{SM}^C = I \omega \hat{z}\end{aligned}$$

per cui  $\omega = \frac{I_2 \omega_2}{I}$

$I$  è il momento d'inerzia del sistema

rispetto all'asse di rotazione ( $// \hat{z}$ ) che passa per il CM del sistema

$$I = I_{cm}^{S1} + m_1 d_{CM}^2 + I_{cm}^{S2} + m_2 (r_1 + r_2 - d_{CM})^2$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Steiner}}$        $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Steiner}}$

$$I = I_{cm}^{sfere\ 1} + m_1 d_{cm}^2 + I_{cm}^{sfere\ 2} + m_2 (r_1 + r_2 - d_{cm})^2$$

$\underbrace{I_{cm}^{sfere\ 1} + m_1 d_{cm}^2}_{\text{Steiner}}$        $\underbrace{I_{cm}^{sfere\ 2} + m_2 (r_1 + r_2 - d_{cm})^2}_{\text{Steiner}}$

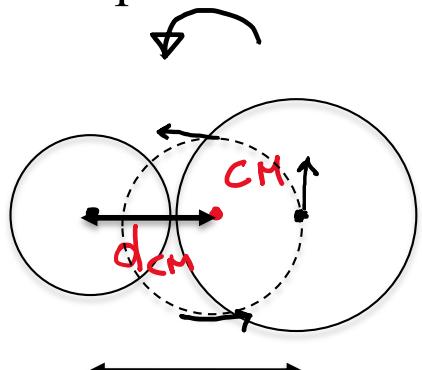
Dove  $I_{cm}^{sfere\ 1} = \frac{2}{5} m_1 r_1^2$        $I_{cm}^{sfere\ 2} = \frac{2}{5} m_2 r_2^2 = I_2$

$$I = 0.45 \text{ Kg m}^2$$

$$\omega = \frac{I_2 \omega_2}{I} = 7,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b) Si calcoli la velocità angolare del sistema dopo l'urto e la massima velocità del centro della seconda sfera rispetto al laboratorio:  $\omega = \dots \dots \dots$        $v_{max} = \dots \dots \dots$

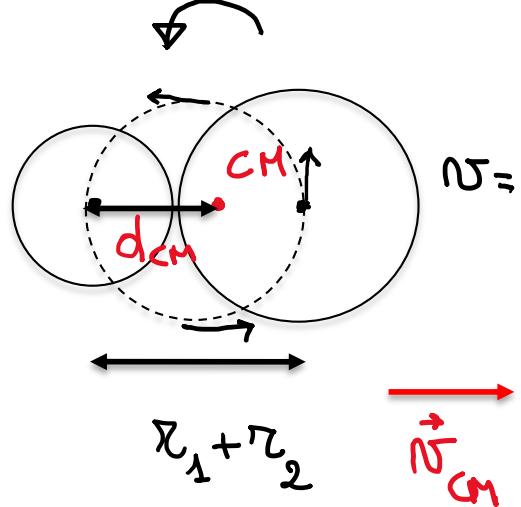
- dopo l'urto il sistema trasla con velocità  $v_{CM}$  e ruota intorno al CM



$$N = \omega (r_1 + r_2 - d_{CM})$$

*Con gelosio le Tredesime*  
 Il centro delle II<sup>a</sup> sfere  
 ruota attorno al CM con  
 velocità  $\sim$  tangente alla  
 traiettoria tratteggiata  $\Rightarrow N = \text{cost}$

$$r_1 + r_2$$



$$v = \omega (r_1 + r_2 - d_{CM})$$

poiche  $\vec{v}$  è tangente alle traiettorie e a queste si somma vettorialmente  $\vec{v}_{CM}$

la velocità è max nel sistema del laboratorio per  $\vec{v}$  diretta come  $\vec{v}_{CM}$

$$v_{max} = v + v_{CM} = \omega(r_1 + r_2 - d_{CM}) + v_{CM}$$

$$v_{max} = 7,4 \text{ m/s}$$

c) Calcolare la variazione di energia del sistema dovuta all'urto tra le due sfere:

$$\Delta E = \dots$$

$$\Delta E = E_f - E_i$$

L'energia finale del sistema è

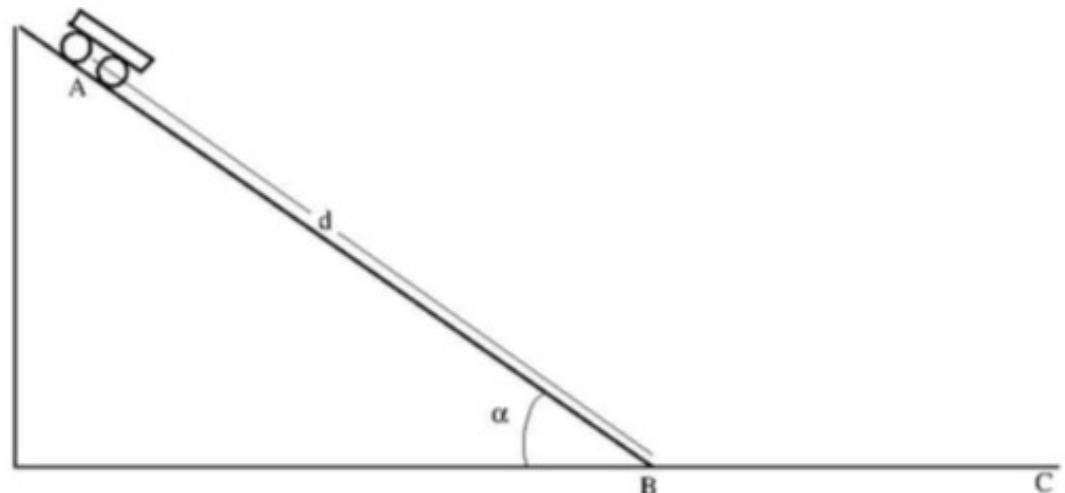
$$E_f = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = 278 \text{ J}$$

$$E_i = 1190 \text{ J}$$

$$\left. \begin{aligned} E_f - E_i &= \\ -912 \text{ J} & \end{aligned} \right\}$$

## Es. 1 Esame di Fisica Generale del 11/01/2019

Un carrello può essere schematizzato da 4 ruote, ciascuna di massa  $m/4$  e raggio  $R$ , e da un pianale di massa  $m$ . Tale carrello, partendo da fermo nel punto A (in figura) scende lungo un piano inclinato scabro lungo  $d$  (con angolo  $\alpha$ ) **con moto di puro rotolamento** (supporre  $d$  molto maggiore della distanza tra le due ruote).



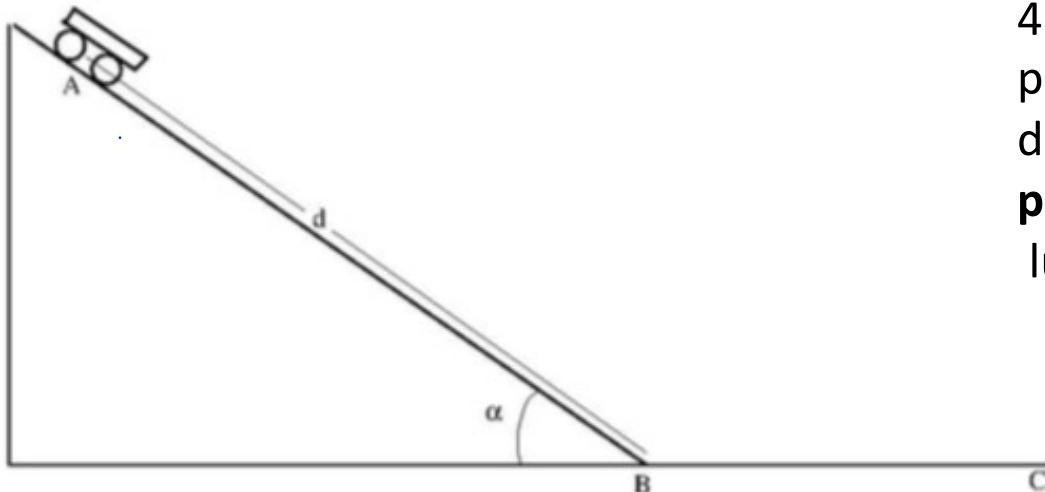
1. Calcolare la velocità,  $v$  e l'accelerazione  $a$  con cui il carrello arriva alla base del piano inclinato (punto B) e l'accelerazione che avrebbe avuto lo stesso carrello in assenza di attrito,  $a_{na}$ .  $v = \dots$   $a = \dots$   $a_{na} = \dots$

2. Giunto nel tratto orizzontale (punto B), il carrello viene fermato in un tempo  $\Delta t$  (nel punto C) per mezzo di un momento frenante di modulo  $M_f$  costante. Determinare  $M_f$  assumendo che, fino all'arresto, il moto sia sempre di puro rotolamento.  $M_f = \dots$

3. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza frenante nel tratto BC per fermare il carrello.

$$L_{freno} = \dots$$

Dati:  $g=10 \text{ m/s}^2$ ,  $m=10 \text{ Kg}$ ,  $R=15 \text{ cm}$ ,  $\alpha = \pi/6$ ,  $d=10 \text{ m}$ ,  $\Delta t=5 \text{ s}$ .



### carrello

4 ruote di massa  $m/4$  e raggio  $R$   
pianale di massa  $m$ . Il carrello, parte da fermo  
da A

### piano inclinato scabro

lungo d (con angolo  $\alpha$ )

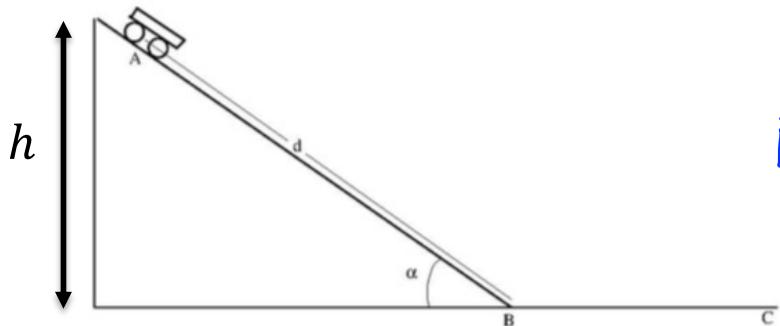
Il carrello scende da A con  $V(0)=0$   
con moto di puro rotolamento  
(supporre d molto maggiore della  
distanza tra le due ruote).

1. Calcolare la velocità,  $v$  e l'accelerazione  $a$  con cui il carrello arriva alla base del piano inclinato  
(punto B) e l'accelerazione che avrebbe avuto lo stesso carrello in assenza di attrito,  $a_{na}$ .  $v =$   
 $a = \dots \dots \dots \quad a_{na} = \dots \dots \dots$

### Caso con attrito

④ Nel moto di puro rotolamento il punto di contatto di ciascuna ruota è fermo, quindi il lavoro compiuto dalle forze di attrito è nullo.

⇒ di conseguenza l'energia del carrello si conserva.



dalla conservazione dell'energia

$$E_i = mgh + \frac{1}{4}mgh$$

$$h = d \sin \alpha$$

$$E_f = \frac{1}{2}mN_{CM}^2 + 4\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m}{4}\right)N_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}^{ruote} \omega^2\right)$$



Koenig applicato a ciascuna ruota

$N_{CM}$  di ciascuna ruota:

$$N_{CM} = |\omega| R$$

$$I_{CM}^{ruote} = \left(\frac{m}{4}\right) \frac{R^2}{2}$$

nota le velocità del CM  
del piano e è uguale alle  
velocità del CM di ciascuna  
ruota  $N_{CM}$

- indicando con C il punto di contatto vale anche

$$F_{ruote} E_f = \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{1}{2} \left( I_{CM}^{ruote} + \frac{m}{4} R^2 \right) \omega^2$$

$$E_f = \frac{1}{2} m N_{CM}^2 + 4 \cdot \left( \frac{1}{2} \left( \frac{m}{4} \right) N_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}^{rotante} \omega^2 \right) = E_i$$

$$\cdot = mg dsin\alpha + 4 \frac{m}{4} g dsin\alpha = 2mg dsin\alpha$$

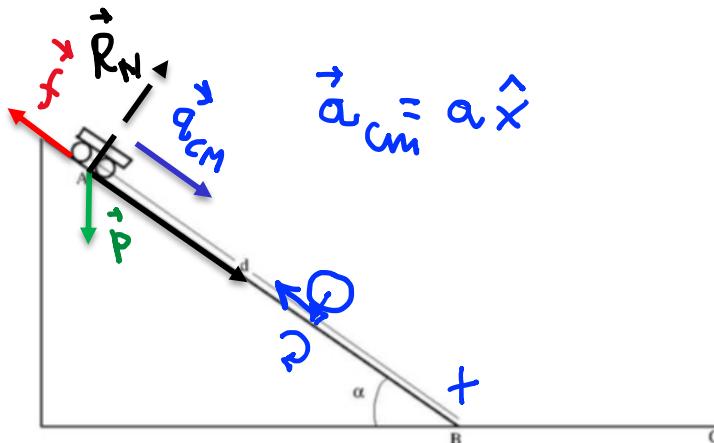
$$I_{CM}^{rotante} = \left( \frac{m}{4} \right) \frac{R^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2mg dsin\alpha = \frac{1}{2} m N_{CM}^2 + \frac{1}{2} m N_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{mR^2}{2} \omega^2 =$$

$$= m N_{CM}^2 + \frac{1}{4} m N_{CM}^2 = \frac{5}{4} m N_{CM}^2$$

$$\Rightarrow N = N_{CM} = \sqrt{\frac{8}{5} g dsin\alpha} = 8.9 \text{ m/s}$$

allo stesso risultato si può arrivare usando le 2 eq. Cardi  
nali.



Allo stesso risultato si arriva utilizzando le due equazioni cartesiane

$$\textcircled{1} \quad \vec{P} + 4\vec{f} + \vec{R} = M\vec{a}_{cm} \quad \text{con } M = 4\frac{m}{4} + m$$

\textcircled{2} Polo sul CM: di ciascuna ruota

$$\vec{M}_{cm,i} = \vec{R}_{cm,C} \wedge \vec{f} = I_{cm}^{ruote,i} \cdot \vec{\omega} = -R_f \hat{z} = I_{cm}^{ruote,i} \dot{\omega}_z \hat{z}$$

$$\text{con } \dot{\omega}_z = -\frac{\alpha}{R} \quad \left( \omega_z = -\frac{N_{cm}}{R} \Rightarrow \dot{\omega}_z = -\frac{\alpha}{R} \right)$$

Dalle \textcircled{1} lungo x      Maggiori  $-4f = 2ma$

$$\text{Dalle \textcircled{2}} \quad -R_f \hat{z} = I_{cm}^{ruote} \dot{\omega}_z \hat{z} = +I_{cm}^{ruote} \left(-\frac{\alpha}{R}\right) \hat{z}$$

$$\Rightarrow f = I_{cm}^{ruote} \left(\frac{\alpha}{R^2}\right)$$

Dalle ① lungo x  $Mg \sin\alpha - 4f = 2ma$

Dalle ②  $-R f \hat{z} = I_{cm}^{Ruote} \dot{\omega}_z \hat{z} = +I_{cm}^{Ruote} \left(\frac{a}{R}\right) \hat{z}$

$$\Rightarrow f = I_{cm}^{Ruote} \left(\frac{a}{R^2}\right)$$

$$① Mg \sin\alpha - 4 I_{cm}^{Ruote} \left(\frac{a}{R^2}\right) = 2ma \Rightarrow a \left(2m + 4 \frac{I_{cm}^{Ruote}}{R^2}\right) = Mg \sin\alpha$$

$$a = \frac{2mg \sin\alpha}{\left(2m + 4 \frac{I_{cm}^{Ruote}}{R^2}\right)} = \frac{2mg \sin\alpha}{2m + 4 \frac{M}{4} \frac{R^2}{2R^2}} = \frac{2mg \sin\alpha}{2m + \frac{M}{2}} = \frac{4}{5} g \sin\alpha$$

moto unif. acc  $a = \text{cost} = 4m/s^2$  lungo x

$$\Rightarrow N = \sqrt{2ad} = \sqrt{\frac{8}{5} g \sin\alpha} \quad \text{Stessa eq. ottenuta dalla conservazione dell'energia.}$$

1. Calcolare la velocità,  $v$  e l'accelerazione  $a$  con cui il carrello arriva alla base del piano inclinato (punto B) e l'accelerazione che avrebbe avuto lo stesso carrello **in assenza di attrito**,  $a_{na}$ .  $v = \dots$   $a = \dots$   $a_{na} = \dots$

In assenza di attrito le ruote non ruotano

$$E_f = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + 4 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{4} v_{CM}^2 \right) = E_i = 2 mg d \sin \alpha$$

$$m N_{CM}^2 = 2mgd \sin \alpha \Rightarrow N_{CM} = \sqrt{2g d \sin \alpha} = \sqrt{2a_{na} d}$$

$$a_{na} = g \sin \alpha = 5 \text{ m/s}^2$$

L'accelerazione in presenza di attrito valore  $4 \text{ m/s}^2 < a_{na}$

Questo perché parte dell'energia potenziale viene convertita in energia rotazionale delle ruote.

2. Giunto nel tratto orizzontale (punto B), il carrello viene fermato in un tempo  $\Delta t$  (nel punto C) per mezzo di un momento frenante di modulo  $M_f$  costante. Determinare  $M_f$  assumendo che, fino all'arresto, il moto sia sempre di puro rotolamento.  $M_f = \dots$   $\Delta t = 5$  s



- Durante il moto sul piano la velocità angolare di rotazione delle ruote non è costante perché è presente un momento torcente!

- la forza di attrito  $f$  (di attrito statico) agisce in direzione opposta rispetto al momento frenante
- Proiettando la I cardinale

$$\begin{cases} \text{lungo } x: -4f = Ma_x \\ \text{lungo } y: N - Mg = 0 \end{cases}$$

- dove  $M$  è la massa del carrello (incluse le ruote)

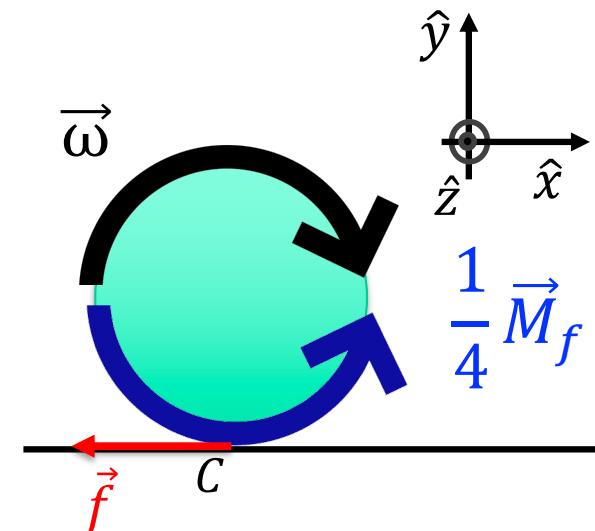
$$M=2\text{m}$$

- Dalla II cardinale

$$\vec{\tau} = \vec{M}_f + 4\vec{R}_{CM-C}\Lambda\vec{f} = 4I_{CM}^{Ruota}\dot{\omega}_z\hat{z} \Rightarrow M_f - 4Rf = 4I_{CM}^{Ruota}\dot{\omega}_z$$

- dalla condizione di puro rotolamento

$$a_x = -\dot{\omega}_z R \quad \Rightarrow M_f - 4fR = -4I_{CM}^{Ruota} \frac{a_x}{R}$$



2. Giunto nel tratto orizzontale (punto B), il carrello viene fermato in un tempo  $\Delta t$  (nel punto C) per mezzo di un momento frenante di modulo  $M_f$  costante. Determinare  $M_f$  assumendo che, fino all'arresto, il moto sia sempre di puro rotolamento.  $M_f = \dots$   $\Delta t = 5$  s

$$\begin{cases} \text{lungo } x: -4f = Ma_x = 2ma_x & M_f - 4fR = -4I_{CM}^{Ruota} \frac{a_x}{R} \\ \text{lungo } y: N - Mg = 0 \end{cases}$$

$$M_f + 2ma_x R = -4I_{CM}^{Ruota} \frac{a_x}{R} = -4 \left[ \left( \frac{m}{4} \right) \left( \frac{R^2}{2} \right) \right] \frac{a_x}{R} = -ma_x \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow ma_x R \left( 2 + \frac{1}{2} \right) = -M_f \quad \Rightarrow a_x = -\frac{2 M_f}{5 m R} \quad \Rightarrow a_x \text{ è costante!}$$

$$\{ v(t) - v(0) = at \quad \text{In generale}$$

Nel nostro caso  $t = \Delta t = 5$  s tempo di arresto  $v(t) = 0$

$$v(0) + a_x t = 0 = v(0) - \frac{2}{5} \frac{M_f}{m R} \cdot t$$

dove  $v(0) = v(B) = v$  trovata al punto 1)

$$\Rightarrow M_f = \frac{5}{2} \frac{m R v}{\Delta t} = 6.7 \text{ Nm}$$

3. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza frenante nel tratto BC per fermare il carrello.  $L_{\text{freno}} = \dots$

- Nel tratto BC l'unica forza che compie lavoro è la forza frenante poiché la forza di attrito statico non compie lavoro essendo il punto di contatto fermo

$$\mathcal{L}_{BC} = \mathcal{L}_{BC}(\vec{M}_f)$$



Dal teorema delle forze vive:  $T_f - T_i = \sigma - T_B = \mathcal{L}_{BC}(\vec{M}_f)$

per cui  $\mathcal{L}_{BC}(\vec{M}_f) = -T_B = -E_f = -E_i = -2 \text{ m} \text{d} \text{g} \text{sin}\alpha$

- tutta l'energia disponibile iniziale,  $2mgd\sin(\alpha)$  nel punto B è stata convertita in energia cinetica ( $T_B$ ) di rotazione e traslazione

$$\mathcal{L}_{BC} = -1000 \text{ J}$$

## Esame di Fisica Generale del 09/09/2015

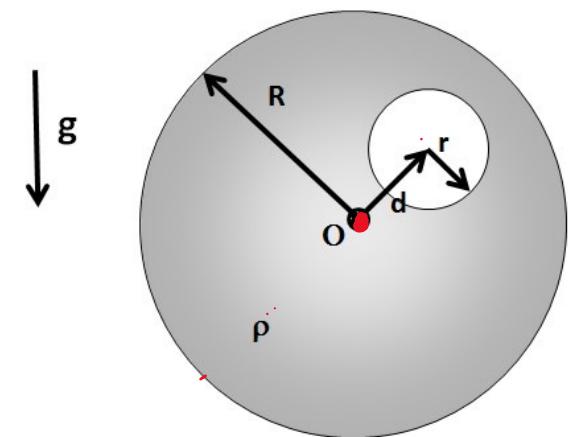
Un cilindro di raggio  $R = 0.9 \text{ m}$  e spessore  $s = 0.15 \text{ m}$  è costituito da un materiale di densità  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ . Il cilindro presenta, a distanza  $d = 0.45 \text{ m}$  dal centro, un foro sempre cilindrico di raggio  $r = 0.2 \text{ m}$ . Il cilindro è immerso in un campo gravitazionale di intensità  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ , è vincolato al centro (nel punto O) e può ruotare intorno al proprio asse centrale (come in figura). La velocità angolare del cilindro, quando il foro è in basso, è  $\omega = 5 \text{ rad/s}$ .

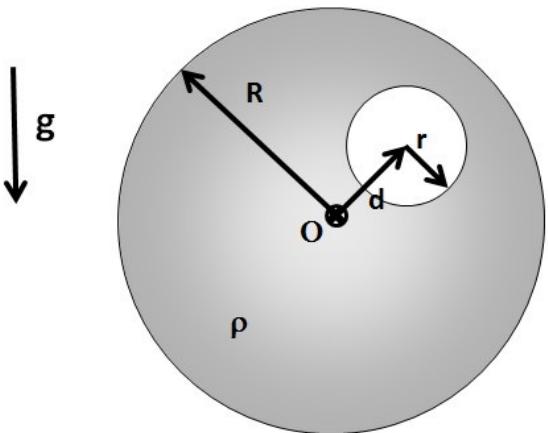
Si calcoli:

- a) la frequenza delle piccole oscillazioni.  $v = \dots$
- b) la velocità angolare del cilindro quando il foro è in alto.  
 $\omega_{alt} = \dots$

Se il cilindro è fermo nel suo punto di equilibrio stabile, si calcoli:

- c) il momento angolare minimo che dovrebbe essere trasferito al disco per obbligarlo a fare una rotazione completa.  $L = \dots$





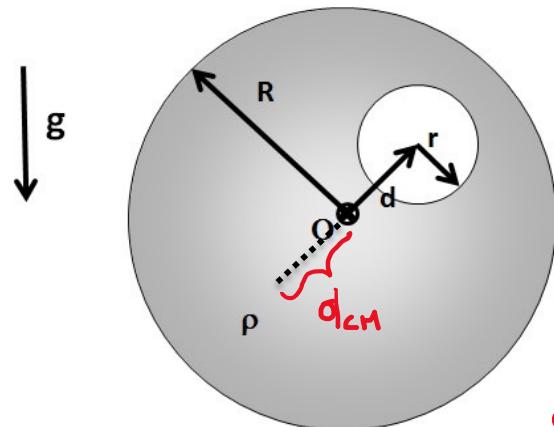
Cilindro: raggio  $R$ , spessore  $S$ , densità  $\rho$

Foro cilindrico: raggio  $r$   
distanza tra il centro del foro e il centro  
del cilindro  $d$

Il sistema è sotto l'azione di  $g$  e può ruotare attorno ad un'asse verticale passante per  $O$ .

$\omega$  è la velocità di rotazione quando il foro è in basso

a) Si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni.  $v = \dots$



1) non ci sono forze dissipative  $\Rightarrow E = \text{cost.}$

2) Il sistema è rimbalzato a ruotare  
attorno ad  $O$ .

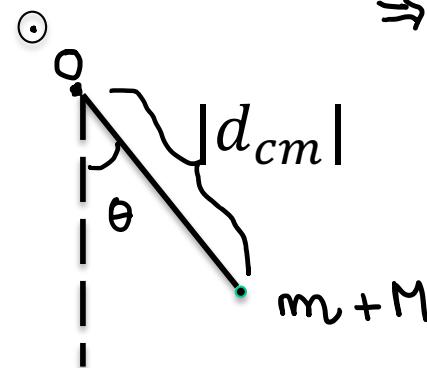
Il cilindro può essere scomposto in un  
cilindro pieno + 1 ruoto di massa negativa.

$$\text{(Cilindro pieno)} M = g \pi R^2 S$$

$$\text{(ruoto)} m = -g \pi r^2 S \Rightarrow M + m = M_{\text{tot}}$$

Indicando con  $d_{CM}$  la posizione del C.M. rispetto a  $O$   $d_{CM} = \frac{md}{m+M} < 0!$

foro



Il sistema è schematizzabile con un pendolo fisico  
⇒ Il sistema è composto da un corpo rigido di massa  $m+M$   
⇒ Il sistema ruota attorno ad O e possiede un momento di inerzia  $I_0$ :

$$I_0 = I_{CM}^{\text{pieno}} + I_{CM}^{\text{ruoto}} + m d^2 = \frac{MR^2}{2} + \frac{mr^2}{2} + md^2$$

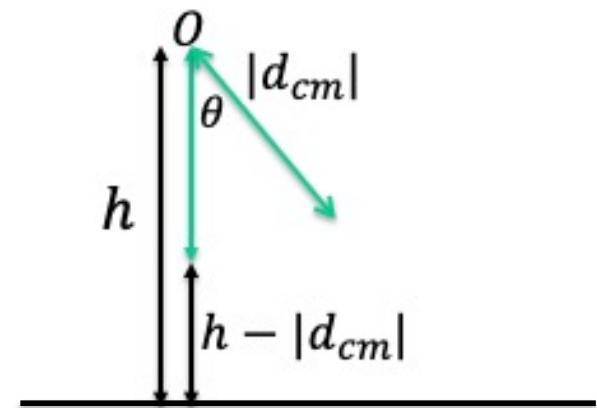
- Non ci sono forze non conservative che compiono lavoro
  - L'energia si conserva
  - possiamo scrivere l'energia in funzione dell'angolo  $\theta$  formato dal pendolo fisico con la verticale

$$E = E_{ROT} + E_p = \frac{1}{2} I_0 \dot{\omega}^2 + M_{TOT} g h_{cm}(\theta)$$

$$\text{con } h_{cm}(\theta) = h - |d_{cm}| + |d_{cm}|(1 - \cos \theta)$$

$$\omega = \dot{\theta}$$

$$E = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + M_{TOT} g(h - |d_{cm}| \cos \theta)$$



$$E = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 + M_{TOT} g (h - |d_{cm}| \cos \theta)$$

- Essendo  $E$  costante la sua derivata rispetto al tempo è nulla, per cui:

$$\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{1}{2} 2I_O \dot{\theta} \ddot{\theta} + M_{TOT} g |d_{cm}| \sin \theta \dot{\theta}$$

- Poiché  $\dot{\theta}$  è chiaramente diverso da zero, è possibile dividere per  $\dot{\theta}$

$$I_O \ddot{\theta} + M_{TOT} g |d_{cm}| \sin \theta = 0$$

- Per piccole oscillazioni ( $\theta \ll 10^\circ$ )  $\sin \theta \cong \theta$ 
  - approssimando  $\sin \theta$  con  $\theta$  otteniamo l'equazione differenziale dell'oscillatore armonico

$$\ddot{\theta} + \frac{M_{TOT} g |d_{cm}|}{I_O} \theta = 0$$

- Per cui la pulsazione  $\Omega$  e la corrispondente frequenza sono date rispettivamente da

$$\Omega = \sqrt{\frac{M_{TOT} g |d_{cm}|}{I_O}} \quad \nu = \frac{\Omega}{2\pi} = 0.12 \text{ s}^{-1} = 0.12 \text{ Hz}$$

- Oppure avremmo dovuto determinare la posizione di equilibrio

- corrisponde alla situazione in cui l'energia potenziale è minima  
 $\theta = 0$

- Se il sistema viene spostato dalla posizione di equilibrio nella posizione indicata in figura

- esso tende a ritornare nella posizione di equilibrio: agisce un momento

- II cardinale
  - polo in O per il calcolo dei momenti
  - nullo il contributo della reazione vincolare

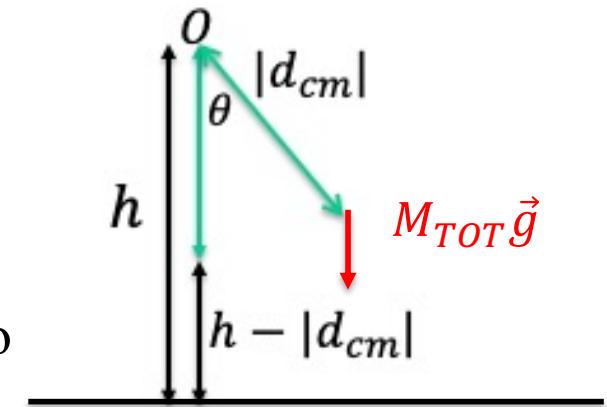
$$\vec{\tau} = I_O \vec{\alpha} = \vec{R}_{OCM} \wedge M_{TOT} \vec{g}$$

$$\vec{\tau} = I_O \alpha_z \hat{z} = -R_{OCM} M g \sin\theta \hat{z} = -|d_{CM}| M_{TOT} g \sin\theta \hat{z}$$

$$da \alpha_z = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \Rightarrow I_O \ddot{\theta} = -|d_{CM}| M_{TOT} g \sin\theta$$

- Dall'ultima equazione per  $\theta \ll 10^0$ , approssimando  $\sin\theta$  con  $\theta$  otteniamo, come in precedenza

$$\ddot{\theta} + \frac{M_{TOT} g |d_{CM}|}{I_O} \theta = 0$$



b) Si calcoli la velocità angolare del cilindro quando il foro è in alto.  $\omega_{alt} = \dots$

Sappiamo che quando il foro è in basso  $\omega = 5 \text{ rad/s}$

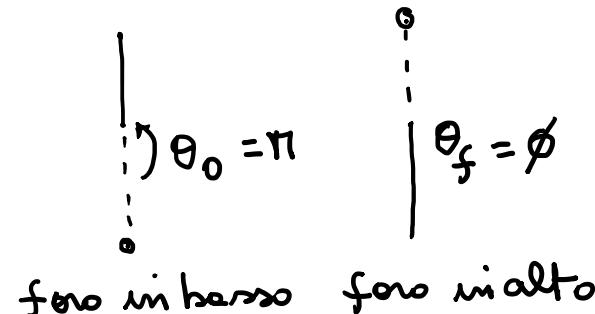
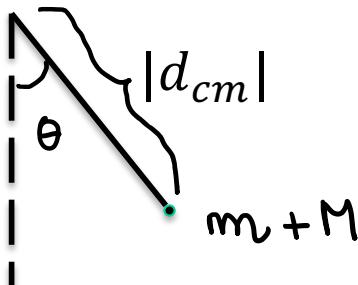
$\Rightarrow$  vale la conservazione dell'energia

- la scelta dell'origine dell'energia potenziale è arbitraria quando si fanno differenze tra energia meccanica finale e iniziale
  - origine dell'energia potenziale a  $\theta=0$  (posizione di quilibrio stabile)

$$E_i = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + M_{TOT} g |d_{cm}| (1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2} I_0 \omega_{alt}^2 +$$

$$+ M_{TOT} g |d_{cm}| (1 - \cos \theta_f) = E_f$$

○



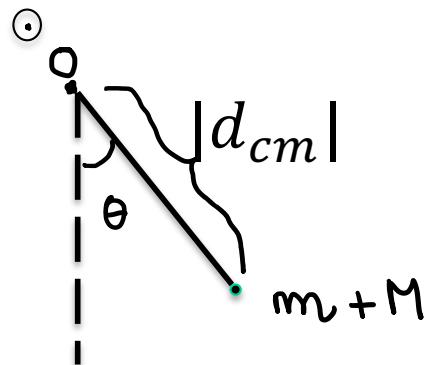
$$E_i = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + M_{TOT} g |d_{cm}|^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega_{alt}^2 \Rightarrow \omega_{alt}^2 = \omega^2 + 2 M_{TOT} g |d_{cm}| \cdot \frac{2}{I_0}$$

$$\omega_{alt} = \sqrt{(I_0 \omega^2 + 4 M_{TOT} g |d_{cm}|)/I_0} = 5.22 \text{ rad/s}$$

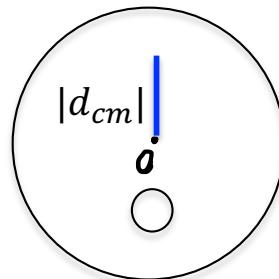
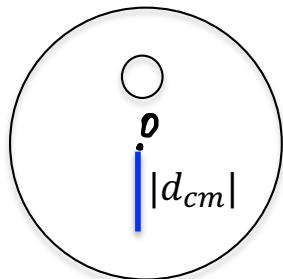
c) Se il cilindro è fermo nel suo punto di equilibrio stabile, si calcoli il momento angolare minimo che dovrebbe essere trasferito al disco per obbligarlo a fare una rotazione completa.  $L = \dots$

La posizione di equilibrio stabile è quella in cui l'energia potenziale è minima che corrisponde a  $\theta = 0 \Rightarrow E_p = M_{TOT} g |d_{cm}|(1 - \cos \theta)$

foro



Per fare almeno un giro completo:



deve ruotare di almeno  $\pi$

$$\frac{1}{2} I_0 \omega_{ini}^2 + \varnothing = M_{TOT} g |d_{cm}| (1 - \cos \theta^*) \quad \text{con } \theta^* = 180^\circ$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_2$

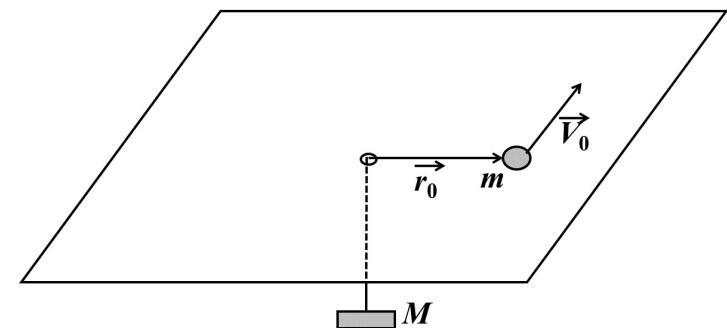
$$\omega_{ini} = \sqrt{\frac{4 M_{TOT} g |d_{cm}|}{I_0}} \Rightarrow L = I_0 \omega_{ini} = 1788 \text{ J.s}$$

### Esercizio 1

Su un tavolo senza attrito di dimensioni illimitate è appoggiato un disco di massa  $m$ , assimilabile ad un punto materiale. Il disco è connesso, tramite una corda inestensibile di lunghezza  $l$  e di massa trascurabile passante per un piccolissimo foro praticato sulla superficie del tavolo, ad un corpo di massa  $M$  sospeso sotto al piano del tavolo, come in Figura.

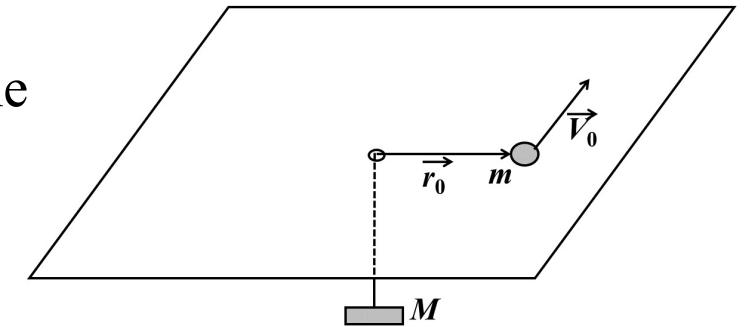
All’istante  $t = 0$  il disco si trova ad una distanza  $r_0$  dal foro ed ha una velocità  $\vec{V}_0$  la cui direzione forma un angolo di  $90^\circ$  con la parte della corda distesa sul tavolo compresa fra il disco ed il foro (schematizzabile come in Figura con un vettore  $\vec{r}_0$ ).

Tutti gli attriti sono trascurabili.



- 1) Si dica quali delle seguenti quantità si conservano sicuramente durante il moto e perché: a) quantità di moto del disco; b) quantità di moto del corpo di massa  $M$ ; c) energia totale del sistema (disco + corpo + fune); d) momento angolare del disco rispetto al foro.

1) Le forze agenti sul sistema sono la forza di gravità sul corpo di massa  $M$  e sul disco di massa  $m$ , la reazione perpendicolare del piano del tavolo sul disco e la forza di tensione della fune, che è una forza interna ed è applicata sul disco e su  $M$ .



La reazione perpendicolare compensa  $m\vec{g}$ , ma la forza di tensione  $\vec{T}$  della fune non è compensata, per cui il disco è accelerato con accelerazione data da  $\vec{T}/m$ .

Anche il corpo di massa  $M$  si muove in generale di moto accelerato, perché su di esso agiscono  $M\vec{g}$  e  $\vec{T}$  che non sono eguali ed opposte, tranne che nel caso particolare del punto 2), come vedremo.

**Pertanto le quantità di moto del disco e del corpo di massa  $M$  non si conservano.**

L'unica forza non compensata agente su  $m$ , cioè la tensione  $\vec{T}$ , segue la direzione istantanea della corda per cui è una forza centrale, diretta in ogni istante dal disco al foro. Tale forza non ha quindi momento rispetto al foro, per cui  **$\vec{L}_m$  il momento angolare del disco rispetto al foro si conserva**.

L'unica forza presente potenzialmente non conservativa è la tensione  $\vec{T}$ , il cui lavoro è nullo a causa della inestensibilità della corda

Di conseguenza **si conserva l'energia totale del sistema (disco + corpo + fune)**.

2) Si calcoli in funzione di  $r_0$  il valore di  $V_0$  necessario affinché il disco compia un moto circolare uniforme.

2) Affinché il disco possa compiere un moto circolare uniforme sul tavolo è necessario che la forza di tensione  $\vec{T}$  imprima al disco stesso l'accelerazione centripeta necessaria per mantenersi su una traiettoria circolare di raggio  $r_0$ .

Le equazioni del moto per il disco e la massa  $M$  sono quindi:

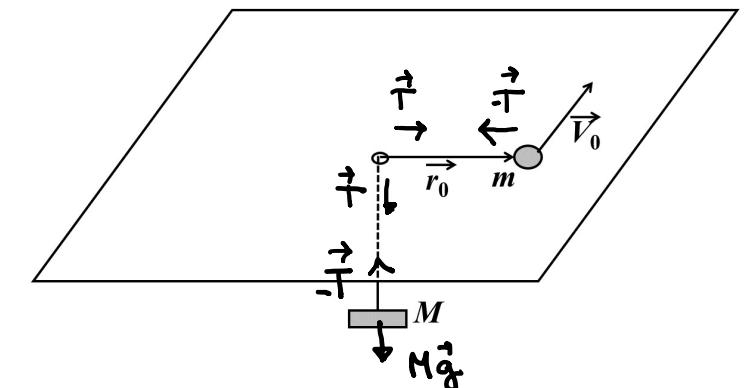
$$\begin{cases} -\vec{T} = m\vec{a}_c = -m \frac{V_0^2}{r_0} \hat{r}_0 \\ -\vec{T} + M\vec{g} = 0 \end{cases}$$

Pertanto si può sostituire nella prima equazione del sistema il modulo della tensione ricavandolo dalla seconda e determinare  $V_0$ :

$$\left| -m \frac{V_0^2}{r_0} \hat{r}_0 \right| = m \frac{V_0^2}{r_0} = |\vec{T}| = Mg \quad \Rightarrow V_0^2 = \frac{Mgr_0}{m} \quad \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{Mgr_0}{m}}$$

D'altra parte, essendo la corda inestensibile, il corpo di massa  $M$  deve mantenersi ad una quota fissa di valore  $-(l - r_0)$  rispetto alla superficie del tavolo, cioè deve rimanere fermo nella posizione in cui è stato inizialmente sospeso, sotto l'azione della sua forza peso e della tensione della corda.

Notiamo che in questo caso particolare si conserva anche la quantità di moto del corpo di massa  $M$  che rimane sempre fermo.

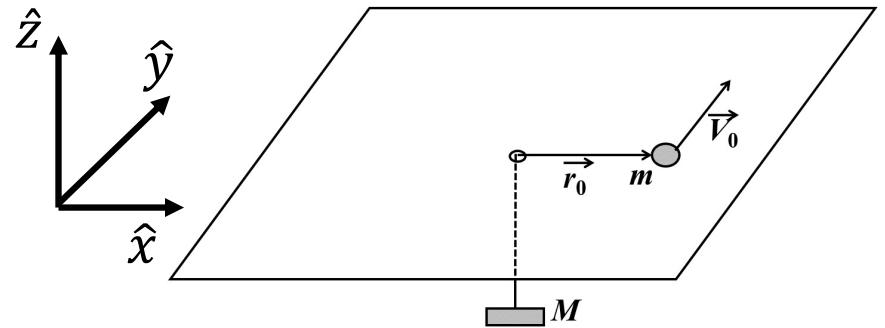


3) Si supponga ora che  $V_0$  sia diverso dal valore calcolato nel punto 2), per cui la distanza del disco dal foro non è più fissa. Indicando con  $r$  questa distanza e con  $\omega(r)$  la velocità angolare del disco quando è a distanza  $r$  dal foro si usi una delle quantità conservative determinate nel punto 1) per ricavare la relazione fra  $\omega$  e  $r$ .

3) si conserva  $\vec{L}_m$ , momento angolare del disco rispetto al foro e l'energia totale del sistema

Poiché il momento angolare del disco rispetto al foro si conserva possiamo scrivere:

$$\vec{L}(r) = \vec{r} \wedge m\vec{V}(r) = m \vec{r} \wedge (\dot{r}\hat{\vec{r}} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}) = mr^2\vec{\omega} = \vec{L}(r_0) = \vec{r}_0 \wedge m\vec{V}_0 = mr_0V_0\hat{\vec{z}}$$

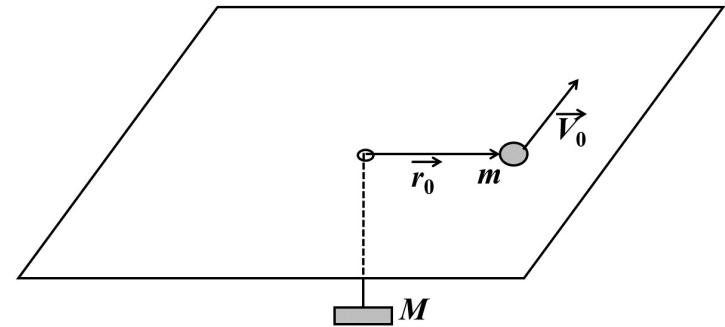


dove si è sfruttata l'ortogonalità fra  $\vec{\omega}$  e  $\vec{r}$  e si è introdotto l'asse  $\hat{z}$  perpendicolare al piano del tavolo. Per definizione la velocità angolare  $\vec{\omega}$  è parallela a  $\hat{z}$ . Si ottiene quindi:

$$mr^2\vec{\omega} = mr_0V_0\hat{\vec{z}} \quad \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{r_0V_0}{r^2}\hat{\vec{z}} \quad \Rightarrow \omega = \frac{r_0V_0}{r^2}$$

4) (**Difficile.**) Si utilizzi un'altra delle grandezze conservate determinate nel punto 1) per dimostrare che la distanza del disco dal foro è compresa fra un minimo  $r_{min}$  ed un massimo  $r_{max}$  (senza calcolarli !) e quindi in particolare che il disco non può precipitare nel foro.

L'altra grandezza fisica conservata è l'energia totale del sistema, che si compone dell'energia cinetica del disco e della massa  $M$ , e dell'energia potenziale di  $M$ .



L'energia potenziale del disco è irrilevante perché il disco è sempre appoggiato sul tavolo, per cui la sua quota non può cambiare. Scegliendo quindi lo zero dell'energia potenziale sulla superficie del tavolo, l'energia totale del sistema quando il disco si trova a distanza  $r$  dal foro prende la forma:

$$E = K_m + K_M + U_M = \frac{mV_m^2}{2} + \frac{MV_M^2}{2} - Mg(l - r)$$

in quanto  $(l - r)$  è la lunghezza del tratto di corda che sporge al di sotto del tavolo.

$$E = K_m + K_M + U_M = \frac{mV_m^2}{2} + \frac{MV_M^2}{2} - Mg(l - r)$$

Notiamo innanzitutto che il termine  $-Mgl$  è una costante additiva che può essere omessa per l'arbitrarietà della scala dell'energia potenziale. Inoltre la velocità  $\vec{V}_M$ , diretta verticalmente, è proprio la derivata rispetto al tempo della quota della massa  $M$  rispetto al tavolo, cioè:

$$\vec{V}_M = \frac{d}{dt}(-(l - r)\hat{z}) = \dot{r}\hat{z} \quad \Rightarrow V_M^2 = \dot{r}^2$$

Infine la velocità  $\vec{V}_m$  ha, come nella (3), sia la componente radiale  $\dot{r}\hat{r}$  sia la componente tangenziale  $\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \omega r\hat{\theta}$  dove  $\hat{\theta}$  è il versore tangenziale ortogonale a  $\hat{r}$ .

Quindi:  $V_m^2 = \dot{r}^2 + \omega^2 r^2$

$$E = \frac{m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)}{2} + \frac{M\dot{r}^2}{2} + Mgr + \text{cost} = \frac{(m + M)\dot{r}^2}{2} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} + Mgr + \text{cost}$$

$\omega = \frac{r_0 V_0}{r^2}$  come determinato dalla conservazione del momento angolare

$$\Rightarrow E = \frac{(m + M)\dot{r}^2}{2} + \frac{mr_0^2 V_0^2}{2r^2} + Mgr + \text{cost}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(m+M)\dot{r}^2}{2} + \frac{mr_0^2V_0^2}{2r^2} + Mgr + \text{cost}$$

Poiché l'energia totale è costante, la variabile  $r$  non può assumere qualsiasi valore: infatti **il secondo termine diverge per  $r \rightarrow 0$** , mentre **il terzo diverge per  $r \rightarrow \infty$** . Quindi il disco non può allontanarsi arbitrariamente dal foro (ovvero esiste un  $r_{max}$ ) e non può neanche avvicinarsi arbitrariamente ad esso (ovvero esiste un  $r_{min}$ ).

La determinazione di  $r_{min}$  e  $r_{max}$  si effettua notando che nei punti estremali della variabile  $r$  (funzione del tempo) la sua derivata temporale deve essere nulla, per cui nell'ultima equazione  $\dot{r} = 0$  per  $r = r_{min}$  e  $r = r_{max}$ .

Poichè  $r_0$  e  $\vec{V}_0$  sono noti, i valori estremi  $r_{min}$  e  $r_{max}$  sono le radici dell'equazione di terzo grado:

$$E = \frac{mr_0^2V_0^2}{2r^2} + Mgr = E_0 = \frac{mV_0^2}{2} + Mgr_0$$

in cui la costante (comune a  $E$  e  $E_0$ ) è stata ovviamente omessa.

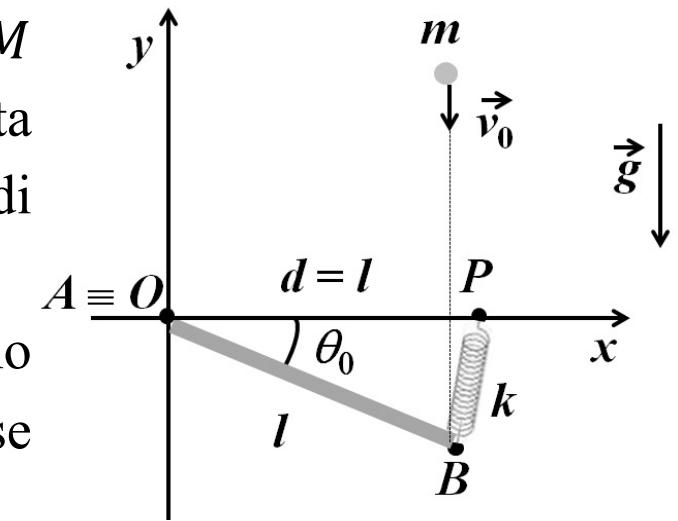
## Prova scritta 30/06/2017: Esercizio 1 Non è sulla raccolta [www.pi.infn.it/~ciocci](http://www.pi.infn.it/~ciocci)

Una sbarra omogenea  $AB$  di lunghezza  $l = 1 \text{ m}$ , massa  $M = 2 \text{ kg}$  e sezione di dimensioni trascurabili è incernierata con il suo estremo  $A$  nel punto  $O$ , origine del sistema di riferimento mostrato in Figura.

La sbarra può ruotare senza attrito intorno ad  $A$  in un piano verticale. L'estremità  $B$  è collegata ad un punto  $P$  dell'asse  $x$ , fisso ad una distanza  $d = l$  dall'origine  $O$ , tramite una molla di costante elastica  $k = 9.81 \text{ N/m}$  e lunghezza a riposo nulla.

L'asta è inizialmente in condizione di equilibrio.

- 1) Si calcoli l'angolo  $\theta_0$  formato dall'asta con l'asse  $x$  quando il sistema è fermo. Una sferetta di massa  $m = M/3$  e dimensioni trascurabili urta nel punto  $B$  di congiunzione fra l'asta e la molla con velocità iniziale  $v_0 = 2 \text{ m/s}$  diretta nel verso negativo dell'asse  $y$ . **L'urto è completamente anelastico**, per cui la sferetta rimane attaccata all'asta.
- 2) Si dica se e quali delle seguenti grandezze fisiche si conservano durante l'urto e perché: a) quantità di moto totale; b) momento angolare totale rispetto al perno  $A$ ; c) energia meccanica totale.
- 3) Utilizzando la legge di conservazione opportuna si determini la velocità angolare  $\omega_0$  dell'asta subito dopo l'urto.
- 4) Si calcoli l'impulso sviluppato dalla reazione del perno  $A$  durante l'urto.

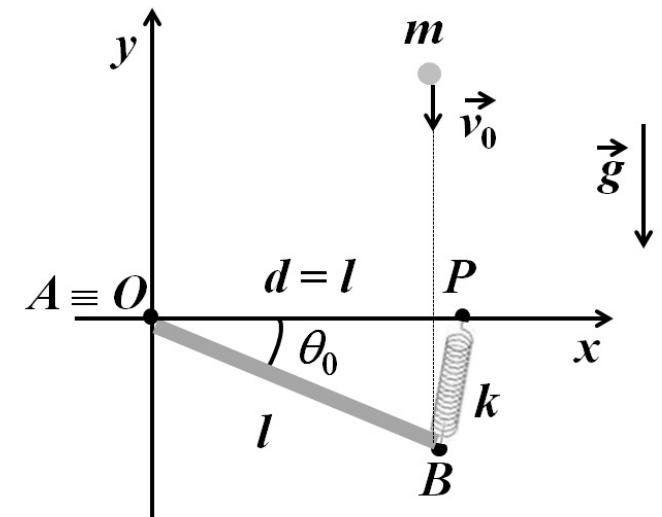


Dati

Asta: Massa  $M$  e lunghezza  $l$

Molla :  $k$  cost. elas. e lunghezza a riposo nulla

1) Sistema in equilibrio: Si calcoli l'angolo  $\theta_0$  formato dall'asta con l'asse  $x$  quando il sistema è fermo.



1) Poiché la sbarra può ruotare intorno al perno  $A$ , rispetto a cui sono non nulli i momenti della forza peso  $M\vec{g}$  e della forza elastica  $\vec{F}_{el}$ , è sufficiente imporre che il momento risultante rispetto ad  $A$  sia zero per garantire l'equilibrio.

Il vantaggio di utilizzare l'equazione del momento rispetto ad  $A$  rispetto al centro di massa (CM) è che al momento rispetto al CM contribuisce anche la reazione del perno  $A$ .

La condizione di equilibrio rispetto al perno  $A$

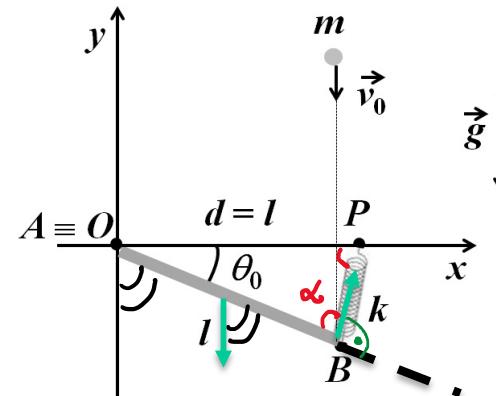
è data da :

$$\vec{\tau}_{M\vec{g}} + \vec{\tau}_{\vec{F}_{el}} = 0 = \vec{R}_{OCM-Asta} \wedge M\vec{g} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_{el}$$

$$0 = -\frac{Mgl}{2} (\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_0) \hat{z} + l F_{el} \sin(\pi - \alpha) \hat{z}) =$$

$$-\frac{Mgl}{2} (\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_0) \hat{z} + l F_{el} \sin(\alpha) \hat{z})$$

$$-\frac{Mgl}{2} (\cos(\theta_0) \hat{z} + l F_{el} \sin(\alpha) \hat{z})$$



$$\begin{aligned}\textcolor{green}{\theta} &= \frac{\pi}{2} - \theta_0 \\ \textcolor{green}{\alpha} &= \pi - \alpha \\ 2\alpha + \theta_0 &= \pi \\ \alpha &= \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\end{aligned}$$

Il triangolo  $ABP$  è isoscele per ipotesi, per cui se indichiamo con  $\alpha$  uno dei due angoli alla base  $BP$  otteniamo:

$$2\alpha + \theta_0 = \pi \quad \Rightarrow \alpha = \frac{\pi - \theta_0}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \quad \Rightarrow \sin \alpha = \cos \left( \frac{\theta_0}{2} \right); \quad \cos \alpha = \sin \left( \frac{\theta_0}{2} \right)$$

L'allungamento della molla  $L$  si ricava sfruttando il fatto che il triangolo è isoscele:

$$\Rightarrow L = 2l \sin \left( \frac{\theta_0}{2} \right)$$

$$-\frac{Mgl}{2} (\cos(\theta_0) \hat{z} + l 2kl \sin \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \hat{z}) = -\frac{Mgl}{2} (\cos(\theta_0) \hat{z} + l kl \sin(\theta_0) \hat{z}) = 0$$

$$\Rightarrow \tan(\theta_0) = \frac{Mg}{2kl} = \frac{2 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2}{2 \times 9.81 \text{ N/m} \times 1 \text{ m}} = 1 \quad \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{4}$$

Una sferetta di **massa**  $m = M/3$  e dimensioni trascurabili urta nel punto  $B$  di congiunzione fra l'asta e la molla con velocità iniziale  $v_0 = 2 \text{ m/s}$  diretta nel verso negativo dell'asse  $y$ . **L'urto è completamente anelastico**, per cui la sferetta rimane attaccata all'asta.

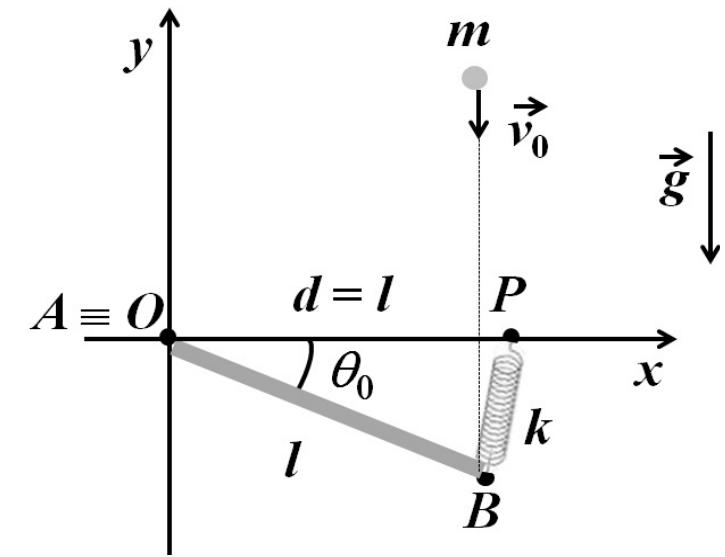
2) Si dica se e quali delle seguenti grandezze fisiche si conservano **durante l'urto** e perché:

- a) quantità di moto totale;
- b) momento angolare totale rispetto al perno  $A$ ;
- c) energia meccanica totale.

2) a) La quantità di moto totale non si conserva, perché il sistema è soggetto ad una forza impulsiva, la reazione della cerniera  $A$ .

b) Il momento angolare totale rispetto alla cerniera  $A$  si conserva, perché le forze esterne che hanno braccio non nullo rispetto all'asse passante per la cerniera sono la forza peso e la forza elastica della molla, entrambe non impulsive, e quindi durante la brevissima durata dell'urto il loro contributo al momento in  $O$  è nullo mentre la reazione della cerniera è impulsiva ma è a braccio nullo. Essendo il momento delle forze rispetto a  $O$  nullo durante l'urto il momento angolare si conserva.

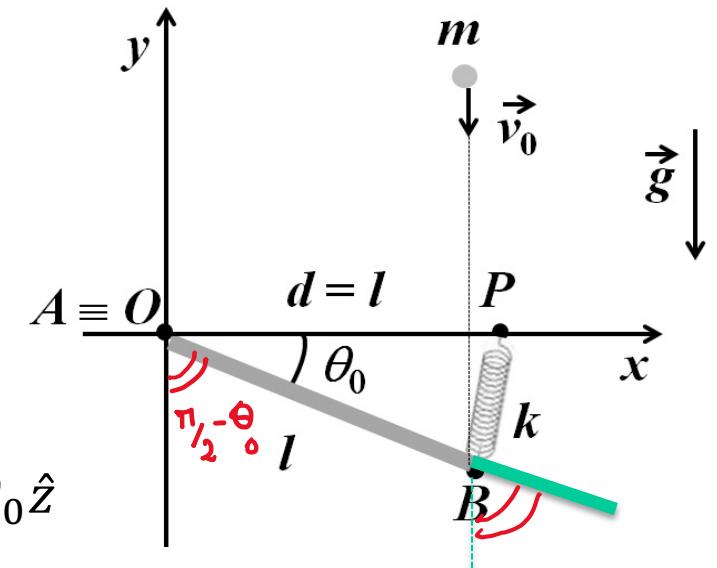
c) L'energia meccanica non si conserva a causa delle forze anelastiche che si sviluppano durante l'urto: **l'urto è completamente anelastico**.



3) Utilizzando la legge di conservazione opportuna si determini la velocità angolare  $\omega_0$  dell'asta subito dopo l'urto.

In base al risultato del punto 2) **utilizziamo la conservazione del momento angolare totale rispetto alla cerniera A**. Il momento angolare prima dell'urto è dovuto solo alla massa  $m$  e vale:

$$\vec{L}_{in} = \vec{l} \Lambda m \vec{v}_0 = -mlv_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) \hat{z} = -mlv_0 \cos \theta_0 \hat{z}$$



in cui il segno “-“ indica che la rotazione corrispondente a questo momento angolare è oraria.

Il momento angolare dopo l'urto si può scrivere utilizzando la velocità angolare del sistema (sbarra + massa  $m$ ), in cui la massa  $m$  si trova a distanza  $l$  dalla cerniera:

$$\vec{L}_{fin} = \frac{Ml^2}{3} \vec{\omega}_0 + ml^2 \vec{\omega}_0 = \left(\frac{3m+M}{3}\right) l^2 \vec{\omega}_0 \quad \text{Nota: } \mathbf{m} = \frac{M}{3}$$

$$\vec{L}_{in} = \vec{L}_{fin} = -mlv_0 \cos \theta_0 \hat{z} = \left(\frac{3m+M}{3}\right) l^2 \vec{\omega}_0 \quad v_0 = 2 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_0 = -\left(\frac{3m}{3m+M}\right) \frac{v_0}{l} \cos \theta_0 \hat{z} = -\left(\frac{3m}{6m}\right) \frac{v_0}{l} \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \hat{z} \text{ rad/s}$$

- 4) Si calcoli l'impulso sviluppato dalla reazione del perno  $A$  durante l'urto.  
 4) La reazione impulsiva della cerniera si calcola utilizzando la variazione della quantità di moto del sistema prima e dopo l'urto.  $\vec{I} = \vec{p}_{fin} - \vec{p}_{in}$

Prima dell'urto è in moto solo la massa  $m$ , per cui

la quantità di moto iniziale è:  $\vec{p}_{in} = m\vec{v}_0 = -m\vec{v}_0\hat{y}$

La quantità di moto finale corrisponde alla somma vettoriale delle quantità di moto della sbarra e della massa  $m$  conficcata nella sbarra dopo l'urto.

In questo caso sia la sbarra che la massa  $m$  compiono un moto di rotazione intorno alla cerniera  $A$ , per cui la quantità di moto dopo l'urto è:

$$\vec{p}_{fin} = M\vec{\omega}_0\Lambda\left(\frac{\vec{l}}{2}\right) + m\vec{\omega}_0\Lambda\vec{l} = \frac{5}{2}m(\vec{\omega}_0\Lambda\vec{l}) = -\frac{5}{2}m\left(\frac{3m}{3m+M}\right)\frac{v_0}{l}\cos\theta_0(\hat{z}\Lambda\vec{l})$$

Nota:  $m = \frac{M}{3}$

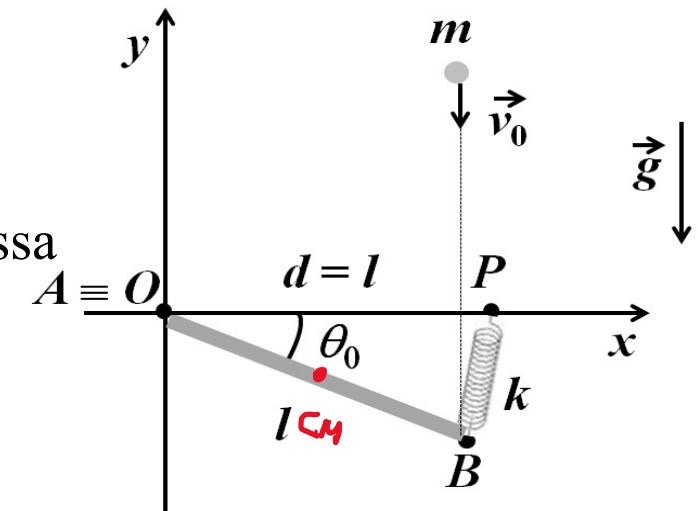
Da risposta 3)

$$\vec{\omega}_0 = -\left(\frac{3m}{3m+M}\right)\frac{v_0}{l}\cos\theta_0\hat{z}$$

Il prodotto vettoriale  $(\hat{z}\Lambda\vec{l})$  si calcola osservando che:

$$(\hat{z}\Lambda\vec{l}) = \hat{z}\Lambda l(\hat{x}\cos\theta_0 - \hat{y}\sin\theta_0) = l(\hat{y}\cos\theta_0 + \hat{x}\sin\theta_0)$$

$$\vec{p}_{fin} = -\frac{5}{2}m\left(\frac{3m}{3m+M}\right)\frac{v_0}{l}\cos\theta_0 l(\hat{y}\cos\theta_0 + \hat{x}\sin\theta_0)$$



$$\vec{p}_{fin} = -\frac{5}{2}m \left( \frac{3m}{3m+M} \right) \frac{v_0}{l} \cos \theta_0 l (\hat{y} \cos \theta_0 + \hat{x} \sin \theta_0)$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{fin} = -\frac{5}{2}m \left( \frac{3m}{3m+M} \right) v_0 \cos \theta_0 (\hat{y} \cos \theta_0 + \hat{x} \sin \theta_0)$$

In conclusione, ricordando che  $\theta_0 = \pi/4$ , che  $M = 3m$  e  $\vec{p}_{in} = m\vec{v}_0 = -mv_0\hat{y}$ :

$$\vec{I} = \vec{p}_{fin} - \vec{p}_{in} = -\frac{5m}{2} \frac{1}{2} v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{x} + \hat{y}) + mv_0\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{I} = mv_0 \left( -\frac{5}{8}\hat{x} + \left( -\frac{5}{8} + 1 \right)\hat{y} \right) = -\frac{mv_0}{8} (5\hat{x} + 3\hat{y})$$

Sostituendo i valori numerici:  $m = M/3 = 2/3$  kg e  $v_0 = 2$  m/s si ha:

$$\vec{I} = -\left( \frac{5}{6}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y} \right) \text{ N}\times\text{s}$$