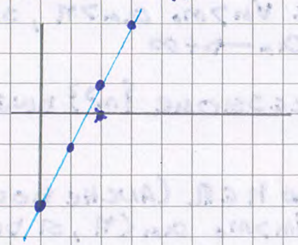
SUCCESSIONI

UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI È UNA FUNZIONE $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

LA VARIABILE INDIPENDENTE VIENE DI SOLITO INDICATA CON n MENTRE PER LA FUNZIONE ALLA NOTAZIONE $a(n)$ SI PREFERISCE a_n

$a_n = 2n-3$

$\underbrace{-3}_{a_0}$, $\underbrace{-1}_{a_1}$, $\underbrace{1}_{a_2}$ .... $\underbrace{17}_{a_{10}}$



$a_n = 2n-3$ $\quad \bullet (n, a_n)$

$f(x) = 2x-3$

UNA SUCCESSIONE $\{a_n\}$ SI DICE

+ LIMITATA INFERIORMENTE SE ESISTE $m \in \mathbb{R}$ TALE CHE $a_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$
+ LIMITATA SUPERIORMENTE SE ESISTE $M \in \mathbb{R}$ TALE CHE $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
+ LIMITATA SE ESISTONO $m \in \mathbb{R}$ E $M \in \mathbb{R}$ TALI CHE $m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

STRETTAMENTE DECRESCENTE

ESEMPIO: LA SUCCESSIONE $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ I CUI PRIMI TERMINI SONO $\{\overset{a_0}{1}, \overset{a_1}{\frac{1}{2}}, \overset{a_2}{\frac{1}{3}}, \overset{a_3}{\frac{1}{4}} ..\}$ È LIMITATA:

SI HA INFATTI CHE $0 < a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

STRETTAMENTE CRESCENTE

- LA SUCCESSIONE $\{n\}$ I CUI PRIMI TERMINI SONO $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ È INFERIORMENTE LIMITATA ($a_n \geq 0 \ \forall n$) MA NON LIMITATA SUPERIORMENTE

+ MONOTONA CRESCENTE SE $a_n \leq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$
+ MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE SE $a_n < a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$ *
+ MONOTONA DECRESCENTE SE $a_n \geq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$
+ MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE SE $a_n > a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$ *

SI DICE CHE UNA SUCCESSIONE $\{a_n\}$ POSSIEDE UNA CERTA PROPRIETA' DEFINITIVAMENTE SE ESISTE $N \in \mathbb{N}$ TALE CHE a_n SODDISFA QUELLA PROPRIETA' PER OGNI $n \geq N$

$a_n = 2n-3 \qquad \underset{a_0}{-3} \quad \underset{a_1}{-1} \quad \underset{a_2}{1} \quad \underset{a_3}{3} \quad \underset{a_4}{5} \quad \Rightarrow \{2n-3\}$ È DEFINITIVAMENTE POSITIVA

$a_n = \frac{1}{n+1} \qquad \underset{a_0}{1} \quad \underset{a_1}{\frac{1}{2}} \quad \underset{a_2}{\frac{1}{3}} \quad \underset{a_3}{\frac{1}{4}} \quad \underset{a_4}{\frac{1}{5}} \quad \Rightarrow \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ È DEFINITIVAMENTE MINORE DI $\frac{1}{3}$

LIMITI DI SUCCESSIONI

CALCOLARE IL LIMITE DI UNA SUCCESSIONE (CHE SI INDICA CON $\lim_{n\to\infty} a_n$ O $\lim a_n$) È EQUIVALENTE A CHIEDERSI CHE TIPO DI COMPORTAMENTO HA LA SUCCESSIONE QUANDO n TENDE A DIVENTARE MOLTO GRANDE.

① SE, FISSATO UN QUALUNQUE NUMERO $M \in \mathbb{R}$ (ANCHE ENORME), $a_n > M$ DEFINITIVAMENTE OVVERO SE $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\forall n > n_0\ a_n > M$, SI DICE CHE DIVERGE A $+\infty$ E SI SCRIVE $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ OPPURE $a_n \to +\infty$

ESEMPIO: $\lim_{n\to\infty} n^3 = +\infty \rightsquigarrow$ LA SUCCESSIONE $\{n^3\}$ DIVERGE A $+\infty$

② SE, FISSATO UN QUALUNQUE NUMERO $M \in \mathbb{R}$ (ANCHE MOLTO NEGATIVO), $a_n \leq M$ DEFINITIVAMENTE OVVERO SE $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\forall n > n_0\ a_n < M$, SI DICE CHE LA SUCCESSIONE DIVERGE A $-\infty$ E SI SCRIVE $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ OPPURE $a_n \to -\infty$

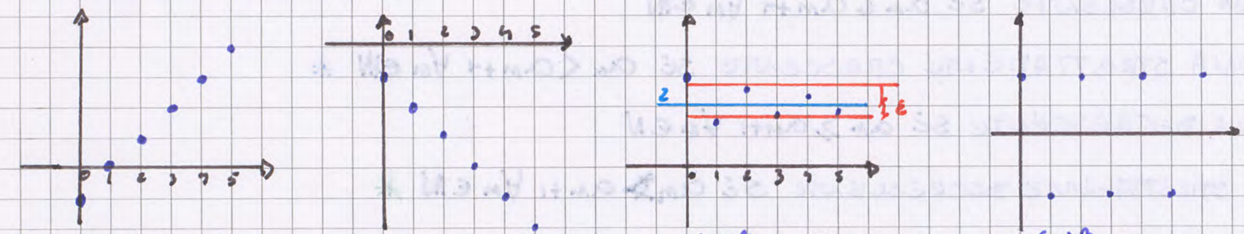
ESEMPIO: $\lim_{n\to\infty} (-n^3) = -\infty \rightsquigarrow$ LA SUCCESSIONE $\{-n^3\}$ DIVERGE A $-\infty$

③ SE ESISTE UN NUMERO REALE ℓ CHE GODE DI QUESTA PROPRIETÀ: FISSATO UN QUALUNQUE NUMERO REALE $\varepsilon > 0$ (PICCOLISSIMO) $|a_n - \ell| < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE SI DICE CHE CONVERGE E SI SCRIVE $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ OPPURE $a_n \to \ell$

ESEMPIO: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \rightsquigarrow$ LA SUCCESSIONE $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ CONVERGE

NB: SE $\ell = 0$, OVVERO SE $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, LA SUCCESSIONE SI DICE INFINITESIMA

④ SE NON SI VERIFICA NESSUNO DEI CASI PRECEDENTI $\lim_{n\to\infty} a_n$ NON ESISTE E LA SUCCESSIONE SI DICE INDETERMINATA



$a_n = n-1$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ $\quad a_n = -n-1$ $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ $\quad a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + 2$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ $\quad a_n = (-1)^n$ $\lim_{n\to\infty} a_n$: NON ESISTE

ESEMPIO:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \to \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-3n}{2n^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \to \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(1-\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}$$

SERIE NUMERICHE: INTRODUZIONE ED ESEMPI

DATA UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI $\{a_m\}$ SI CHIAMA SERIE DEI TERMINI a_m LA SOMMA DEGLI INFINITI TERMINI DESSA SUCCESSIONE; LA SERIE VIENE INDICATA CON $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ CHE SI LEGGE "SERIE PER m CHE VA DA 0 A ∞ DI a_m".

$S_0 = a_0$

$S_1 = a_0 + a_1$

$\vdots$

$S_m = a_0 + a_1 + \dots + a_m = \sum_{k=0}^{m} a_k$

LA SUCCESSIONE $\{S_m\}$ E' DETTA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI DELLA SERIE

SE ESISTE IL LIMITE DI S_m PER $m \to +\infty$ ALLORA

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m = \lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_k$$

① SE $\lim_{m\to\infty} S_m = \ell \in \mathbb{R}$ SI DICE CHE LA SERIE CONVERGE AD ℓ

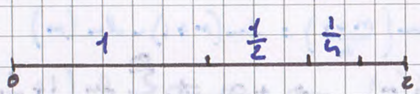
② SE $\lim_{m\to\infty} S_m = +\infty$ SI DICE CHE LA SERIE DIVERGE A $+\infty$

③ SE $\lim_{m\to\infty} S_m = -\infty$ SI DICE CHE LA SERIE DIVERGE A $-\infty$

④ SE $\lim_{m\to\infty} S_m$ = NON ESISTE SI DICE CHE LA SERIE E' INDETERMINATA O (IRREGOLARE)

ESEMPIO 1: SE $a_m = 0$ $\forall m \in \mathbb{N}$ E' CHIARO CHE $S_m = 0$ $\forall m \in \mathbb{N}$, QUINDI $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ CONVERGE A 0

ESEMPIO 2: SE $a_m = \left(\frac{1}{2}\right)^m$ $\forall m \in \mathbb{N}$ ALLORA $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ CONVERGE A 2



$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^m + \dots$

ESEMPIO 3: SE $a_m = 1$ $\forall m \in \mathbb{N}$ SI HA CHE $S_m = m+1$ $\forall m \in \mathbb{N}$, QUINDI $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ = DIVERGE A $+\infty$

ESEMPIO 4: SE $a_m = -1$ $\forall m \in \mathbb{N}$ SI HA CHE $S_m = -(m+1)$ $\forall m \in \mathbb{N}$, QUINDI $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ = DIVERGE A $-\infty$

ESEMPIO 5: SE $a_m = (-1)^m$ $\forall m \in \mathbb{N}$ SI HA CHE S_m = [1 SE m E' PARI], [0 SE m E' DISPARI] $\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} a_m$ = IND.

$S_0 = a_0 = 1$

$S_1 = a_0 + a_1 = 1 + (-1) = 0$

$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 + (-1) + 1 = 1$

$\dots$

SERIE GEOMETRICHE E TELESCOPICHE, CRITERI DI CONVERGENZA

+ LA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ CON $q \in \mathbb{R}$ È DETTA SERIE GEOMETRICA

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{SE } |q|<1 \\ +\infty & \text{SE } q \geq 1 \\ \text{N.E.} & \text{SE } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ È } \begin{cases} \text{CONVERGENTE SE } |q|<1 \\ \text{DIVERGENTE SE } q \geq 1 \\ \text{INDETERMINATA SE } q \leq -1 \end{cases}$$

ESEMPIO: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ CONVERGE (ESSENDO $\overset{q}{\frac{1}{2}} < 1$) E LA SOMMA È $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

+ LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ È DETTA SERIE DI MENGOLI $\quad a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_n = \underbrace{1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}}_{a_1} + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}}_{a_2} + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}}_{a_3} \dots + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{n-1}} - \cancel{\tfrac{1}{n}}}_{a_{n-1}} + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{n}} - \tfrac{1}{n+1}}_{a_n} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] = 1 \implies \text{LA SERIE } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \text{ CONVERGE E LA SOMMA È } 1$$

LA SERIE DI MENGOLI È IL PIÙ SEMPLICE ESEMPIO DI SERIE TELESCOPICA

UN ALTRO ESEMPIO È LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ $\quad a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$

$$S_n = \cancel{\ln(2)} - \ln(1) + \cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(2)} + \ln(4) - \cancel{\ln(3)} + \dots + \ln(n+1) - \cancel{\ln(n)} \to +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to +\infty$$

LE SERIE GEOMETRICHE E LE TELESCOPICHE SONO FACILI DA CARATTERIZZARE POICHÉ POSSIAMO RICAVARE UNA FORMULA CHIUSA PER S_n

CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ UNA SERIE CONVERGA È CHE IL TERMINE GENERALE a_n SIA INFINITESIMO (OVVERO $a_n \to 0$ PER $n \to +\infty$)

CI SONO POI DEI CRITERI CHE FORNISCONO DELLE CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA CONVERGENZA

- CRITERIO DEL RAPPORTO
- CRITERIO DELLA RADICE
- CRITERIO DEL CONFRONTO
- CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

} SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

- CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONV.
- CRITERIO DI LEIBNIZ

} SERIE A TERMINE VARIABILE

SERIE: CRITERIO DEL RAPPORTO

SIANO $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ e $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ DUE SERIE NUMERICHE CONVERGENTI E SIA $K \in \mathbb{R}$ ALLORA

① $\sum_{m=0}^{\infty}(a_m+b_m) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m + \sum_{m=0}^{\infty} b_m$ ② $\sum_{m=0}^{\infty} K a_m = K \sum_{m=0}^{\infty} a_m$

NB: SE $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ CONVERGE, ANCHE $\sum_{m=0}^{\infty} K a_m$ CONVERGE (STESSA COSA PER LA CONVERGENZA)

UNA SERIE $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ A TERMINI DEFINITIVAMENTE NON NEGATIVI (CIOE' $a_m \geq 0$ DEFIN.) CONVERGE O DIVERGE A $+\infty$: NON PUO' ESSERE INDETERMINATA.

$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^2+3^{-m}}{m^2-5}$

- $a_m \geq 0$ DEFINITIVAMENTE QUINDI LA SERIE CONVERGE O DIVERGE A $+\infty$
- $\lim_{m\to\infty} \frac{m^2+3^{-m}}{m^2-5} = 1 \Rightarrow$ LA SERIE NON CONVERGE LA SERIE DIVERGE A $+\infty$

CRITERIO DEL RAPPORTO

ESSENDO $a_m \geq 0$ $l \in [0,+\infty)$

SIA $a_m \geq 0$ DEFINITIVAMENTE E SUPPONIAMO CHE $\lim_{m\to\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = l$ OPPURE $l = +\infty$

- SE $l<1$ ALLORA $\sum a_m$ CONVERGE
- SE $l>1$ ALLORA $\sum a_m$ DIVERGE
- SE $l=1$ TUTTO E' POSSIBILE (BISOGNA CAMBIARE CRITERIO)

ESEMPIO 1: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^{2015}}{3^m}$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{(m+1)^{2015}}{2^{m+1}}}{\frac{m^{2015}}{3^m}} = \lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)^{2015}}{3\cdot \cancel{3^m}} \cdot \frac{\cancel{3^m}}{m^{2015}} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{3} \underbrace{\frac{(m+1)^{2012}}{m^{2015}}}_{\to 1} = \frac{1}{3} < 1$$

QUINDI LA SERIE CONVERGE

ESEMPIO 2: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{m^m}$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{(m+1)!}{(m+1)^{m+1}}}{\frac{m!}{m^m}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\cancel{(m+1)}\, m!}{\cancel{(m+1)}\cdot(m+1)^m} \cdot \frac{m^m}{\cancel{m!}} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^m = \frac{1}{e} < 1$$

POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE LA SERIE CONSIDERATA CONVERGE

ESEMPIO 3: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^m m!}$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}(m+1)!}}{\frac{(2m)!}{2^m m!}} = \lim_{m\to\infty} \frac{(2m+2)(2m+1)\cancel{(2m)!}}{\cancel{2}\cdot \cancel{2^m}\,\cancel{(m+1)}\,\cancel{m!}} \cdot \frac{\cancel{2^m}\,\cancel{m!}}{\cancel{(2m)!}} = \lim_{m\to\infty} (2m+1) = +\infty > 1$$

POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE LA SERIE CONSIDERATA DIVERGE A $+\infty$

SE IL RISULTATO DEL LIMITE E' 1, IL CRITERIO NON E' CONCLUSIVO

$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{m^2+1} \Rightarrow \lim_{m\to\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = \ldots = \lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)(m^2+1)}{m[(m+1)^2+1]} = 1$ } DIVERGE A $+\infty$

$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{m^3+1} \Rightarrow \lim_{m\to\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = \ldots = \lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)(m^3+1)}{m[(m+1)^3+1]} = 1$ } CONVERGE

CRITERIO DELLA RADICE e CRITERIO DEL CONFRONTO

CRITERIO DELLA RADICE

SIA $a_n \geq 0$ DEFINITIVAMENTE E SUPPONIAMO CHE $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

- SE $\ell < 1$ ALLORA $\sum a_n$ CONVERGE
- SE $\ell > 1$ ALLORA $\sum a_n$ DIVERGE
- SE $\ell = 1$ TUTTO È POSSIBILE (BISOGNA CAMBIARE CRITERIO)

ESEMPIO 1: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\frac{n}{2}}}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\log n)^{\frac{n}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \left[(\log n)^{-\frac{n}{2}}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (\log n)^{-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}} = 0 < 1$$ LA SERIE CONVERGE

ESEMPIO 2: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{e} = \frac{e}{2} > 1$$ LA SERIE DIVERGE A $+\infty$

PUO' ESSERE UTILE RICORDARE CHE $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ E $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$

CRITERIO DEL CONFRONTO

SUPPONIAMO CHE $0 \leq a_n \leq b_n$ DEFINITIVAMENTE. ALLORA VALGONO LE SEGUENTI IMPLICAZIONI

① $\sum b_n$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\sum a_n$ CONVERGE

② $\sum a_n$ DIVERGE A $+\infty$ $\Rightarrow$ $\sum b_n$ DIVERGE A $+\infty$

NB: LE IMPLICAZIONI INVERSE IN GENERALE NON VALGONO

SERIE ARMONICHE GENERALIZZATE

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ CONVERGE SE $\alpha > 1$, DIVERGE SE $\alpha \leq 1$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}$ CONVERGE SE $\alpha > 1$ O $\alpha = 1$ E $\beta > 1$, DIVERGE SE $\alpha < 1$ O $\alpha = 1$ E $\beta \leq 1$

ESEMPIO 3:

STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2$

$$0 \leq \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{PER OGNI } n \geq 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE DUNQUE IL CRITERIO DEL CONFRONTO CI ASSICURA CHE ANCHE $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2$ CONVERGE.

ESEMPIO 4:

STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$

$$0 \leq \frac{1}{n^{\log n}} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{DEFINITIVAMENTE}$$

$\log n > 2$ DEFINITIVAMENTE QUINDI $n^{\log n} > n^2$ DEFINITIVAMENTE

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE E QUINDI IL CRITERIO DEL CONFRONTO CI PERMETTE DI CONCLUDERE CHE $\sum \frac{1}{n^{\log n}}$ CONVERGE

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

DATE DUE SUCCESSIONI a_n e b_n A TERMINI DEFINITIVAMENTE POSITIVI, SE

$$a_n \sim b_n \quad \left(\text{OVVERO SE } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1\right)$$

ALLORA LE CORRISPONDENTI SERIE $\sum a_n$ e $\sum b_n$ HANNO LO STESSO CARATTERE, CIOE' O SONO ENTRAMBE CONVERGENTI O SONO ENTRAMBE DIVERGENTI

ESEMPIO 1: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3-3n}$

$$\overbrace{\frac{n+\cos n}{n^3-3n}}^{a_n} \sim \frac{n}{n^3} = \overbrace{\frac{1}{n^2}}^{b_n} \quad \left(\text{INFATTI } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2\cos n}{n^3-3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(1+\frac{\cos n}{n}\right)}{\cancel{n^3}\left(1-\frac{3}{n^2}\right)} = 1\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ CONVERGE (ARMONICA GENERALIZZATA CON } \alpha>1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3-3n} \text{ CONVERGE}$$

OSS 1: ESISTE UNA FORMULAZIONE PIÙ GENERALE DI QUESTO CRITERIO

OSS 2: NEL FARE STIME ASINTOTICHE PUO' ESSERE NECESSARIO SFRUTTARE GLI SVILUPPI TAYLOR.

SERIE A TERMINI POSITIVI: ESERCIZI SVOLTI

OSS 1: E' POSSIBILE (A VOLTE CONVIENE) COMBINARE L'UTILIZZO DI DUE CRITERI DI CONVERGE...

ESEMPIO 1: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+\cos n+2n}{6n^2+1+4^n}$

$$\frac{n^3+\cos n+2n}{6n^2+1+4^n} \sim \frac{n^3}{4^n} \underset{\text{CONFRONTO ASINTOTICO}}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+\cos n+2n}{6n^2+1+4^n} \text{ E } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{4^n} \text{ HANNO LO STESSO CARATTERE}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{4} < 1 \underset{\text{RAPPORTO}}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{4^n} \text{ CONVERGE}$$

NE SEGUE QUINDI ANCHE CHE $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+\cos n+2n}{6n^2+1+4^n}$ CONVERGE

OSS 2: A VOLTE, PER APPLICARE IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO, BISOGNA "SFRUTTARE" TA...

ESEMPIO 2: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$

RICORDANDO CHE $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ E PONENDO $x = \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] \sim \frac{1}{6n^3}$$

DALL'EQUIVALENZA ASINTOTICA APPENA RICAVATA SEGUE CHE:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$ E' UNA SERIE A TERMINI DEFINITIVAMENTE POSITIVI

- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$ CONVERGE PER CONFRONTO ASINTOTICO CON $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n^3}$

SERIE A TERMINE DI SEGNO VARIABILE: ASSOLUTA CONVERGENZA

UNA SERIE $\sum a_n$ SI DICE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE SE DIVERGE... LA SERIE $\sum |a_n|$

TEOREMA: SE LA SERIE $\sum a_n$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE, ALLORA CONVERGE. IL VICEVERSA, IN GENERALE, NON È VERO

ESEMPIO 1: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!)}{n^4}$

$$\frac{\sin(n!)}{n^4} \le \frac{1}{n^4} \underset{\text{CRITERIO CONFRONTO}}{\cancel{\Longrightarrow}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!)}{n^4} \text{ CONVERGE PER CONFRONTO CON } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$0 \le \frac{|\sin(n!)|}{n^4} \le \frac{1}{n^4} \underset{\text{CRITERIO CONFRONTO}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n!)|}{n^4} \text{ CONVERGE } \underset{\text{ASSOLUTA CONVERGENZA}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!)}{n^4} \text{ CONVERGE}$$

ESEMPIO 2: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3}{n^4+2n}$

$$\left|(-1)^n \frac{n^2+3}{n^4+2n}\right| \sim \frac{1}{n^2} \underset{\text{CONFRONTO ASINTOTICO}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n^2+3}{n^4+2n}\right| \text{ CONVERGE } \underset{\text{ASSOLUTA CONVERGENZA}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3}{n^4+2n} \text{ CONVERGE}$$

ESEMPIO 3:

STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3}{n^3+2n}$

$$\left|(-1)^n \frac{n^2+3}{n^3+2n}\right| \sim \frac{1}{n} \underset{\text{CONFRONTO ASINTOTICO}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n^2+3}{n^3+2n}\right| \text{ NON CONVERGE}$$

QUINDI $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3}{n^3+2n}$ NON CONVERGE ASSOLUTAMENTE

CRITERIO DI LEIBNIZ

SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE E SUPPONIAMO CHE:

① $a_n \geq 0$ DEFINITIVAMENTE

② $a_n \to 0$ PER $n \to \infty$

③ $a_{n+1} \leq a_n$ DEFINITIVAMENTE

ALLORA LA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ È CONVERGENTE

ESEMPIO 1: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

$a_n = \frac{1}{n!}$ È POSITIVO (ESSENDO POSITIVO $n!$) E INFINITESIMO (VISTO CHE $n! \to \infty$)

INOLTRE a_n È DECRESCENTE (ESSENDO $n!$ CRESCENTE)

} LA SERIE CONVERGE PER IL CRITERIO DI LEIBNIZ

ESEMPIO 2: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+n}$ $\Rightarrow$ CONVERGE x LEIBNIZ

$a_n = \frac{n-1}{n^2+n}$ È DEFINITIVAMENTE POSITIVO (RAPPORTO DI QUANTITÀ POSITIVE) ①

E È INFINITESIMO (GRADO DENOMINATORE > GRADO NUMERATORE) ②

$a_n \sim \frac{1}{n}$ QUINDI LA SERIE NON È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE!

$a_{n+1} \leq a_n$

$\frac{n}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{n-1}{n(n+1)}$

SOSTITUISCO E SCOMPONGO I DENOMINATORI

MOLTIPLICO A SIN E DX PER $n(n+1)(n+2)$

$n \cdot n \leq (n-1)(n+2) \to n \geq 2$ $\Rightarrow$ a_n È DEFINITIVAMENTE DECRESCENTE ③

ESEMPIO 3: STUDIARE IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{n}$ $\Rightarrow$ CONVERGE x LEIBNIZ

LA SUCCESSIONE $a_n = \frac{\log(n)}{n}$ È POSITIVA (RAPPORTO DI QUANTITÀ POSITIVE) ①

E INFINITESIMA (SCALA DI CONFRONTO A $+\infty$) ②

LA SERIE CONVERGE ASSOLUTAMENTE ($a_n \geq \frac{1}{n}$ E $\sum \frac{1}{n}$ DIVERGE)

$a_{n+1} \leq a_n$

POSSIAMO INTERPRETARE a_n COME LA RESTRIZIONE A $\mathbb{N}^+$ DELLA FUNZIONE DI VARIABILE REALE $f(x) = \frac{\log(x)}{x}$

$\frac{\log(n+1)}{n+1} \leq \frac{\log(n)}{n}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$

$0 \; + + + + \; e \; - - - - \; 0$

NE SEGUE QUINDI CHE, PER $n \geq 3$ (IL PRIMO INTERO $> e$), LA SUCCESSIONE a_n È DECRESCENTE ③

EQUAZIONI DIFFERENZIALI: INTRO E PRIMI ESEMPI

SONO EQUAZIONI IN CUI L'INCOGNITA (OVVERO L'OGGETTO DA TROVARE) È UNA FUNZIONE E IN CUI SONO PRESENTI UNA O PIÙ DERIVATE DELLA FUNZIONE INCOGNITA.

ESEMPIO 1: $f'(x) + f(x) = x$ (PRIMO ORDINE) $\longrightarrow$ RISOLVERLA SIGNIFICA TROVARE LA FUNZIONE O LE FUNZIONI CHE SODDISFANO L'EQUAZIONE

$\hookrightarrow$ IN QUESTO CASO LE SOLUZIONI SONO TUTTE LE FUNZIONI $y = f(x)$ CHE, SOMMATE ALLA LORO DERIVATA PRIMA, DANNO COME RISULTATO x

ESEMPIO 2: $f'''(x) + 3f''(x) = 9x$ (TERZO ORDINE) $\longrightarrow$ LE SOLUZIONI SONO TUTTE LE $y = f(x)$ LA CUI DERIVATA TERZA SOMMATA AL TRIPLO DELLA DERIVATA SECONDA, DÀ $9x$

L'ORDINE DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE È IL MASSIMO ORDINE DI DERIVAZIONE CHE COMPARE

ESEMPIO 3: $f'(x) = x$ $\qquad f(x) = \int f'(x)\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c \qquad y = \frac{x^2}{2} + c \longrightarrow$ SOLUZIONI INFINITE

ESEMPIO 4: $f'(x) = 2 - \sqrt{g(x)}$ $\qquad f(x) = \int f'(x)\,dx = \int [2 - \sqrt{f(x)}]\,dx$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI "ELEMENTARI" E PROBLEMI DI CAUCHY

TIPOLOGIA 1: $y' = f(x)$ BASTA INTEGRARE $\quad y = \int f(x)\,dx = F(x) + c$

ESEMPIO: $y' = 3e^{2x}$

$$y = \int 3e^{2x}\,dx = 3\int \tfrac{1}{2}\cdot 2e^{2x}\,dx = \tfrac{3}{2}e^{2x} + c \qquad y(x) = \tfrac{3}{2}e^{2x} + c$$ SOLUZIONE GENERALE

TIPOLOGIA 2: $y'' = f(x)$ INTEGRARE 2 VOLTE $\quad y' = \int f(x)\,dx = F(x) + c_1 \quad y = \int [\underbrace{F(x) + c_1}_{y'}]\,dx \longrightarrow \int F(x)\,dx + c_1 \ldots$

ESEMPIO: $y'' = 2 - \cos x$

$$y' = \int (2 - \cos x)\,dx = 2x - \sin x + c_1 \qquad y = \int (2x - \sin x + c_1)\,dx = x^2 + \cos x + c_1 x + c_2$$

$y(x) = x^2 + \cos x + c_1 x + c_2$ SOLUZIONE GENERALE

PROBLEMA DI CAUCHY $\begin{cases} \text{EQUAZIONE DIFFERENZIALE} \\ \text{CONDIZIONI INIZIALI} \end{cases} \longrightarrow$ RISOLVERLO SIGNIFICA TROVARE LE INFINITE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE QUELLA CHE SODDISFA LE COND. INIZIALI.

$$\begin{cases} y' = -e^{-x} \longrightarrow y = \int (-e^{-x})\,dx = e^{-x} + c \\ y(0) = 3 \longrightarrow 3 = e^{-0} + c \longrightarrow c = 2 \end{cases} \Longrightarrow y(x) = e^{-x} + 2$$ SOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y'' = x \longrightarrow y' = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c_1 \longrightarrow y = \int \left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)dx = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2 \\ y(0) = 1 \longrightarrow 1 = \frac{0^3}{6} + c_1 0 + c_2 \longrightarrow c_2 = 1 \\ y'(0) = 4 \longrightarrow 4 = \frac{0^2}{2} + c_1 \longrightarrow c_1 = 4 \end{cases} \Longrightarrow y(x) = \frac{x^3}{6} + 4x + 1$$ SOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI

SONO EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL I ORDINE CHE SI POSSONO RICONDURRE ALLA FORMA $y' = f(x) \cdot g(y)$

ESEMPI:

$y' = \underbrace{y}_{g(y)} \underbrace{\ln x}_{f(x)}$ $\qquad y' = \underbrace{e^x}_{f(x)} \underbrace{y \ln y}_{g(y)}$

PER RISOLVERE DEVO: SEPARARE LE VARIABILI x E y

INTEGRARE CIASCUN MEMBRO RISPETTO ALLA VARIABILE DA CUI DIPENDE

RICAVARE $y(x)$

ESEMPIO 1:

$y' = y^2 \ln x \rightarrow \frac{dy}{y^2} = \ln x \, dx \rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int \ln x \, dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x \ln x - x + c \quad (c \in \mathbb{R})$

$\rightarrow y(x) = \frac{-1}{x \ln x - x + c}$

ESEMPIO 2:

$\begin{cases} y' = \sin x \, e^y \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases} \rightarrow \frac{dy}{e^y} = \sin x \, dx \Rightarrow e^{-y} dy = \sin x \, dx \rightarrow \int e^{-y} dy = \int \sin x \, dx \Rightarrow e^{-y} = -\cos x$

$\rightarrow e^{-y} = \cos x + c \Rightarrow -y = \ln(\cos x + c) \Rightarrow y(x) = -\ln(\cos x + c)$

$\rightarrow y(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow -\ln(\cos(\frac{\pi}{2}) + c) = 1 \Rightarrow \ln(c) = -1 \Rightarrow c = \frac{1}{e}$

$y(x) = -\ln(\cos x + \frac{1}{e})$ SOLUZIONE CERCATA

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL I° ORDINE

$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$ $\qquad \underbrace{y' - x}_{a_x} y = \underbrace{2x}_{f_x} \qquad y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{a_x} \cdot y = \underbrace{4x^2}_{f_x}$

→ SE $a(x)=0$ È ELEMENTARE

→ SE $f(x)=0$ (OMOGENEA) DIVENTA UN'EQUAZIONE DIFF. A VARIABILI SEPARABILI

(STRATEGIA RISOLUTIVA FATTORE INTEGRANTE)

① TROVO UNA PRIMITIVA DI $a(x)$, CIOÈ UNA FUNZIONE $A(x)$ TALE CHE $A'(x) = a(x)$

② MOLTIPLICO ENTRAMBI I MEMBRI PER $e^{A(x)}$

$$\underbrace{y'(x)\, e^{A(x)} + a(x)\, e^{A(x)} y(x)}_{\left[y(x)e^{A(x)}\right]'} = f(x)\, e^{A(x)}$$

③ INTEGRO ENTRAMBI I MEMBRI $y(x)e^{A(x)} = \int f(x)\, e^{A(x)} dx + c$

④ RICAVO $y(x)$ MOLTIPLICANDO ENTRAMBI I MEMBRI PER $e^{-A(x)}$

$$y(x) = e^{-A(x)} \int f(x) e^{A(x)} dx + c\, e^{-A(x)}$$ SOLUZIONE GENERALE

ESEMPIO 1: $y'(x) \underbrace{-x}_{a(x)} y(x) = \underbrace{2x}_{f(x)}$

① TROVO UNA PRIMITIVA DI $a(x)$, CIOÈ UNA FUNZIONE $A(x)$ TALE CHE $A'(x) = a(x)$

$$A(x) = \int -x\, dx = -\frac{x^2}{2}$$

② MOLTIPLICO ENTRAMBI I MEMBRI PER $e^{A(x)}$

$$\underbrace{y'(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} - x\, e^{-\frac{x^2}{2}} y(x)}_{\left[y(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right]'} = 2x\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

③ INTEGRO A DESTRA E SINISTRA

$$y(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} = \int 2x\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx + c = -2e^{-\frac{x^2}{2}} + c$$

④ RICAVO $y(x)$ MOLTIPLICANDO ENTRAMBI I MEMBRI PER $e^{-A(x)}$

$$y(x)\, \cancel{e^{-\frac{x^2}{2}}\, e^{+\frac{x^2}{2}}} = -2\, \cancel{e^{-\frac{x^2}{2}}\, e^{+\frac{x^2}{2}}} + c\, e^{+\frac{x^2}{2}}$$

$$y(x) = -2 + c\, e^{\frac{x^2}{2}}$$ SOLUZIONE GENERALE.

OSS1: SE $a(x)$ ED $f(x)$ SONO FUNZIONI CONTINUE IN UN CERTO INTERVALLO I, ALLORA

$$y(x) = e^{-A(x)} \int f(x) e^{A(x)} dx + c\, e^{-A(x)}$$ È LA SOLUZIONE GENERALE $\forall x \in I$

OSS2: LA COSTANTE ARBITRARIA $c \in \mathbb{R}$ PUÒ ESSERE DETERMINATA SE VIENE FORNITA UNA CONDIZIONE INIZIALE DEL TIPO

$y(x_0) = y_0$ CON $x_0 \in I$

$$\begin{cases} y'(x) + a(x) y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Longrightarrow$$ HA UN'UNICA SOLUZIONE DEFINITA IN TUTTO L'INTERVALLO I

OSS3: NATURALMENTE FILA TUTTO LISCIO FINCHÉ SO FARE GLI INTEGRALI AL PRIMO E AL TERZO PASSAGGIO, COSA NON SCONTATA.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI OMOGENEE DEL II° ORDINE

$a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0$ CON a, b E c NUMERI REALI

$y'' + 2y' + 2y = 0$ $\quad a = 1 \quad b = 2 \quad c = 2$

$\frac{1}{4}y'' + y' = 0$ $\quad a = \frac{1}{4} \quad b = 1 \quad c = 0$

↳ L'INSIEME DELLE SOLUZIONI E' UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE 2. LA SOLUZIONE GENERALE E' QUINDI

$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

PARAMETRI LIBERI: C_1, C_2

UNA BASE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI: $y_1(x)$, $y_2(x)$

⇒ PER TROVARE UNA BASE DEVO RISOLVERE IN $\mathbb{C}$ L'EQUAZIONE CARATTERISTICA

$az^2 + bz + c = 0$

	BASE	SOLUZIONE GENERALE
⇝ 2 SOLUZIONI REALI DISTINTE $\lambda_1 \neq \lambda_2$	⇒ $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$	⇒ $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
⇝ 2 SOLUZIONI REALI COINCIDENTI $\lambda_1 = \lambda_2$	⇒ $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}$	⇒ $y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$
⇝ 2 SOLUZIONI COMPLESSE $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	⇒ $e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	⇒ $y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

ESEMPIO 1: $y'' - 5y' + 4y = 0$

EQUAZIONE CARATTERISTICA $\quad z^2 - 5z + 4 = 0$

SOLUZIONI $\quad \lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 1$ $\qquad y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{x}$

BASE $\quad e^{4x}, e^{x}$ $\qquad$ SOLUZIONE GENERALE

ESEMPIO 2:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA $\quad z^2 + 2z + 2 = 0$

SOLUZIONI $\quad \lambda_1 = -1 + i \quad \lambda_2 = -1 - i$

BASE $\quad e^{-x}\cos x, e^{-x}\sin x$ $\qquad \alpha = -1 \quad \beta = 1$

$y(x) = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x$ SOLUZIONE GENERALE

$y'(x) = -e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^{-x}(-C_1\sin x + C_2\cos x)$

$y(0) = 1 \rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$

$y'(0) = 1 \rightarrow$

$y(x) = e^{-x}(\cos x + 2\sin x)$ SOLUZIONE CERCATA

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL II ORDINE: VARIAZIONI DELLE COSTANTI

$$y''(x)+b\,y'(x)+c\,y(x)=f(x)$$

① DETERMINARE LA SOLUZIONE GENERALE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA

$$y_0(x)=c_1\,y_1(x)+c_2\,y_2(x)$$

② TROVARE UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DELLA FORMA

$$y_p(x)=c_1(x)\,y_1(x)+c_2(x)\,y_2(x)$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} c_1'(x)\,y_1(x)+c_2'(x)\,y_2(x)=0 \\ c_1'(x)\,y_1'(x)+c_2'(x)\,y_2'(x)=f(x) \end{cases}$$

③ CALCOLARE LA SOLUZIONE GENERALE SOMMANDO $y_0(x)$ e $y_p(x)$

$$y(x)=y_0(x)+y_p(x)$$

$$y''-2y'+y=\frac{e^x}{x^4}$$

① $\lambda^2-2\lambda+1=0 \Rightarrow (\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=1$

$$y_0(x)=c_1\,e^x+c_2\,x e^x$$

② $c_1'(x)\,e^x+c_2'(x)\,xe^x=0$

$$c_1'(x)\,e^x+c_2'(x)\left[e^x+xe^x\right]=\frac{e^x}{x^4}$$

$$\Rightarrow c_1'(x)=\frac{-c_2'(x)\cdot x\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}=-x\,c_2'(x)$$

$$\cancel{-x\,c_2'(x)e^x}+c_2'(x)\cancel{e^x}+\cancel{c_2'(x)\,xe^x}=\frac{\cancel{e^x}}{x^4}$$

$$\begin{cases} c_1'(x)=-\dfrac{1}{x^3} \\ c_2'(x)=\dfrac{1}{x^4} \end{cases}$$

$$c_1(x)=\int -\frac{1}{x^3}\,dx=\frac{1}{2x^2} \qquad c_2(x)=\int\frac{1}{x^4}\,dx=-\frac{1}{3x^3}$$

$$y_p(x)=\frac{1}{2x^2}\,e^x-\frac{1}{3x^3}\,xe^x=\frac{e^x}{6x^2}$$

③ $y(x)=y_0(x)+y_p(x)$

$$=c_1\,e^x+c_2\,xe^x+\frac{e^x}{6x^2}$$ SOLUZIONE CERCATA