Esercizi sui codici

1. Il codice a blocco sistematico $\mathcal{C}(k,n)$ con $n=5$ e $k=3$ ha matrice generatrice $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

   (a) Determinare la matrice di controllo di parità $\mathbf{H}$;

   (b) Trovare la $d_{\min}$ per il codice;

   (c) Data la parola ricevuta $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e} = [1,1,1,1,0]$ trovare le parole di codice che minimizzano la distanza di Hamming da $\mathbf{y}$.

   (d) Nel caso che ci sia più di una parola a distanza minima, verificare se le varie soluzioni appartengono allo stesso coset oppure no e motivare la risposta.

(a) $G = [I_k | P] \Rightarrow H = [P^T | I_{n-k}] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

(b)

m	c = mG
0 0 0	00000
0 0 1	00101
0 1 0	01001
0 1 1	01100
1 0 0	10010
1 0 1	10111
1 1 0	11011
1 1 1	11110

$\Rightarrow d_{min} = 2$

(c) $y = x + e = [1\,1\,1\,1\,0]$ è una parola di codice $\Rightarrow \hat{x} = [1\,1\,1\,1\,0]$

(d) C'è una sola parola a distanza minima

---

2. Il codice a blocco $\mathcal{C}$ con $n=4$ e $k=2$ ha le seguenti parole di codice:

$$\mathcal{C} = \{0000, 1011, 0101, 1110\}$$

   (a) Trovare una matrice generatrice del codice;

   (b) Determinare i coset del codice;

   (c) Decodificare la parola ricevuta $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e} = [0,1,0,0]$, utilizzando i coset leader. La parola decodificata è univoca? Motivare la risposta.

(a) Scegliendo G incognita $\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \end{bmatrix}$ e sapendo che $c = mG$:

$$\begin{cases} [0000] = [00]G \\ [1011] = [01]G \Rightarrow [1011] = [g_{21}\ g_{22}\ g_{23}\ g_{24}] \\ [0101] = [10]G \Rightarrow [0101] = [g_{11}\ g_{12}\ g_{13}\ g_{14}] \\ [1110] = [11]G \Rightarrow [1110] = [g_{11}+g_{21}\ \ g_{12}+g_{22}\ \ g_{13}+g_{23}\ \ g_{14}+g_{24}] \end{cases} \Rightarrow G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per conferma

(b) Indico i $2^{n-k} = 2^{4-2} = 2^2 = 4$ coset distinti:

$C_0 = \{0000, 1011, 0101, 1110\}$

$C_1 = \{0001, 1010, 0100, 1111\}$

$C_2 = \{0010, 1001, 0111, 1100\}$

$C_3 = \{0011, 1000, 0110, 1101\}$

(c) $y = x + e = [0100] \Rightarrow C_y = C_1$ perche $y \in C_1 \Rightarrow \hat{e} = 0100$ oppure 0001

$\Rightarrow \hat{x} = 0100 + 0100 = 0000$ oppure $0100 + 0001 = 0101$

La parola decodificata non è univoca perchè ci sono due coset leader, detto in altro modo ci sono due parole di codice equidistanti dalla parola ricevuta, il risultato ottenuto ha senso perchè avendo $d_{min} = 2$ il codice riesce a correggere con certezza 0 errori

---

3. Il codice a blocco sistematico C con $n = 6$ e $k = 3$ ha la matrice generatrice $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(a) Determinare la matrice di controllo di parità $\mathbf{H}$.

(b) Trovare la $d_{\min}$ del codice.

(c) Decodificare la parola ricevuta $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e} = [1, 1, 1, 1, 1, 0]$ utilizzando la decodifica a sindrome.

(a) $G=[I_k \mid P] \Rightarrow H=[P^T \mid I_{n-k}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0&1&1&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&1 \end{array}\right]$

(b)

m	c = mG
000	000 000
001	001 110
010	010 101
011	011 011
100	100 011
101	101 101
110	110 110
111	111 000

$\Rightarrow d_{min} = 3$

$s = yH^T = eH^T$

s	$\hat{e}$
000	000000
001	000001
010	000010
011	100000
100	000100
101	010000
110	001000
111	001001, 100100, 010010

basta scegliere le righe di H^T

(c) $s = yH^T = [111110]\left[\begin{array}{ccc} 0&1&1\\ 1&0&1\\ 1&1&0\\ \hline 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{array}\right] = [1\,1\,0]$

In un caso reale avrei dovuto precalcolare la tabella sindrome → coset leader e guardarla per ogni y ricevuto, all'esame mi basta calcolare solo il coset leader della sindrome collegata alla y ricevuta:

$$\hat{e} = \underset{e}{\operatorname{argmin}} \{ s = eH^T \} = \underset{e}{\operatorname{argmin}} \left\{ 110 = e \left[\begin{array}{ccc} 0&1&1\\ 1&0&1\\ 1&1&0\\ \hline 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{array}\right] \right\} = 001000 \Rightarrow \hat{x} = y + \hat{e} = 110110$$

---

4. Si consideri il codice di Hamming sistematico $\mathcal{C}_H(3)$ con matrice di controllo di parità **H**

$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&1&1&1&0&0\\ 1&1&0&1&0&1&0\\ 1&1&1&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

(a) Determinare la matrice generatrice **G**;

(b) Determinare la $d_{\min}$ per il codice;

(c) Data la parola ricevuta $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e} = [0,1,1,1,1,1,0]$, impiegare la decodifica a sindrome per trovare le parole di codice che minimizzano la distanza di Hamming da **y**.

(a) $m=3 \Rightarrow n = 2^m - 1 = 7,\ k = 2^m - m - 1 = 4$

$H = [P^T \mid I_{n-k}] \Rightarrow G = [I_k \mid P] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&0&0&1&1&1\\ 0&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&1&1&0 \end{array}\right]$

(b) Ogni codice di Hamming ha $d_{min} = 3$

(c) $s = yH^T = [0\,1111110]\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = 110$

$\Rightarrow \hat{e} = \underset{e}{\arg\min}\{s = eH^T\} = \underset{e}{\arg\min}\left\{110 = e\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\} = 0001000$

$\Rightarrow \hat{x} = y + \hat{e} = 0110110$

---

5. Derivare un bound per la probabilità di errore sul bit a valle del decodificatore per un codice a blocco $\mathcal{C}(4,7)$ con $d_{\min} = 3$ per una trasmissione con probabilità di errore sul bit non decodificato pari a $p = 10^{-3}$.

Supponendo il canale binario, simmetrico e senza memoria (le probabilità di errore sono indipendenti per ogni bit), allora la probabilità di errore sulla parola di codice decodificata è esattamente:

$$P_w(e) = \sum_{i=t+1}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad \text{dove } t = \left\lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \right\rfloor$$ ↳ n° massimo di errori che riesco a correggere

La probabilità di errore sul bit decodificato invece non può essere calcolata esattamente perché, in presenza di un numero di errori non correggibile (dunque > di t), la decodifica stesso può introdurne ulteriori

Dato che la decodifica restituisce sempre una parola di codice, allora ogni volta che c'è un errore in decodifica i bit errati sono sempre almeno d_{min}, allora possiamo stimare la probabilità di errore sul bit decodificato come:

$$P_b(e) \approx \frac{d_{min}}{n} P_w(e) \approx \frac{d_{min}}{n}\binom{n}{t+1} p^{t+1}(1-p)^{n-(t+1)}$$

stima ulteriore considerando solo il caso più probabile di $P_w(E)$

In questo caso dunque:

$$P_b(e) \approx \frac{3}{7}\binom{7}{2}(10^{-3})^2(1-10^{-3})^5 \approx \frac{3}{7}\,\frac{7\cdot 6}{2}\,10^{-6} = 9\cdot 10^{-6}$$

assumo lineare

6. La sonde Voyager 1 tramette a terra messaggi codificati con un codice a blocco $\mathcal{C}(12, 24)$ che ha $d_{\min} = 8$.

   (a) Determinare il numero massimo di errori che la stazione a terra è in grado di correggere in una parola di 24 bit.

   (b) Assumendo che la modulazione utilizzata sia 2-PAM, derivare una buona approssimazione per la probabilità di errore sul bit e calcolare il valore della maggiorazione quando $E_b/N_0 = 9.8$ dB (usare $Q(x) \approx \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}x}$ come approssimazione per la funzione Q). (**3** punti)

(a) Un codice lineare a blocco con $d_{min} = 8$ è in grado di correggere fino a $t = \left\lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \right\rfloor = 3$ errori

(b) Supponendo che il sistema PAM utilizzi un filtro $g = g_{RCR}$, dunque ISI nulla e $g(0) = 1$, e che la densità spettrale di potenza del rumore termico introdotto dal canale sia $S_W(f) = \frac{N_0}{2}$, allora il campione in ingresso al decisore è $x(k) = a_k + n(k) \in N(0, \frac{N_0}{2})$ e dunque la prob. di errore sul simbolo, che, essendo una PAM binaria, coincide con quella sul bit, è:

$9.8 = 10 \log_{10} x \Rightarrow 0,98 = \log_{10} x \Rightarrow x = 10^{0,98} = 9.55$

$$BER = SER = Q\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_d}{N_0}}\right) \approx Q(4.37) \approx \frac{e^{-\frac{4.37^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,4,37} \approx 6.51 \cdot 10^{-6} = p$$

In modo analogo all'esercizio 5 si ottiene:

$$P_b(e) \approx \frac{d_{min}}{n} P_W(e) \approx \frac{d_{min}}{n} \binom{n}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{n-(t+1)} \approx \frac{8}{24} \binom{24}{4} (6.51 \cdot 10^{-6})^4 \approx 6.36 \cdot 10^{-18}$$