Raccolta esercizi di Analisi 2 prof. Longo

É consigliato un confronto con altre fonti, il materiale potrebbe essere parzialmente errato o incompleto.

Elenco delle risorse *pubbliche* che sono state particolarmente utili per la realizzazione di questo file:

- Lista domande analisi 2
  https://unipiit-my.sharepoint.com/personal/f_nardi12_studenti_unipi_it/_layouts/15/onedrive.aspx?originalPath=aHR0cHM6Ly91bmlwaWl0LW15LnNoYXJlcG9pbnQuY29tLzpmOi9nL3BlcnNvbmFsL2ZfbmFyZGkxMl9zdHVkZW50aV91bmlwaV9pdC9Fc2JYRU8wbXI3cEZrVm9FVmZuX3FLTUJvRTNsVU04RFZxMXN2ZW5QRGQtY2pnP3J0aW1lPUktQnNWbEk1MlVn&sortField=Modified&isAscending=false&id=%2Fpersonal%2Ff%5Fnardi12%5Fstudenti%5Funipi%5Fit%2FDocuments%2FINGEGNERIA%20INFORMATICA%2FPRIMO%20ANNO%2FAnalisi%202%2FLezioni%2FLISTA%20DOMANDE%20ANALISI%202%2Epdf&parent=%2Fpersonal%2Ff%5Fnardi12%5Fstudenti%5Funipi%5Fit%2FDocuments%2FINGEGNERIA%20INFORMATICA%2FPRIMO%20ANNO%2FAnalisi%202%2FLezioni

- Bot analisi 2 Telegram
  @Analisi2bot

- Appunti di M. Giannini
  https://drive.google.com/file/d/1tx55xHg58hMzLPzCJ5hp9C52PZLXTyR2/view

- Appunti di M. Lampis
  https://github.com/Guray00/IngegneriaInformatica/blob/master/PRIMO%20ANNO/II%20SEMESTRE/Analisi%20Matematica%20II/Analisi%20II%20teoremi%20e%20definizioni.pdf

- Temi svolti Analisi 2

- Gruppo WhatsApp Analisi 2
  In particolare sono stati fondamentali i messaggi di Cristina.
  È stato possibile raccogliere molti esercizi grazie al suo contributo,

G.G.

I seguenti esercizi sono stati presi dal documento che contiene tutte le domande fatte all'esame di Analisi 2 a.a. 20-21.

Grazie a coloro che hanno contribuito ad aggiornarlo

https://unipiit-my.sharepoint.com/personal/f_nardi12_studenti_unipi_it/_layouts/15/onedrive.aspx?originalPath=aHR0cHM6Ly91bmlwaWl0LW15LnNoYXJlcG9pbnQuY29tLzpmOi9nL3BlcnNvbmFsL2ZfbmFyZGkxMl9zdHVkZW50aV91bmlwaV9pdC9Fc2JYRU8wbXl3cEZrVm9FVmZuX3FLTUJvRTNsVU04RFZxMXN2ZW5QRGQtY2pnP3J0aW1lPUktQnNWbEk1MlVn&sortField=Modified&isAscending=false&id=%2Fpersonal%2Ff%5Fnardi12%5Fstudenti%5Funipi%5Fit%2FDocuments%2FINGEGNERIA%20INFORMATICA%2FPRIMO%20ANNO%2FAnalisi%202%2FLezioni%2FLISTA%20DOMANDE%20ANALISI%202%2Epdf&parent=%2Fpersonal%2Ff%5Fnardi12%5Fstudenti%5Funipi%5Fit%2FDocuments%2FINGEGNERIA%20INFORMATICA%2FPRIMO%20ANNO%2FAnalisi%202%2FLezioni

NC = Esercizio non completo, ND = Esercizio non fatto

Guida agli esercizi di @Analisi2bot

N°	Esercizio	Sezione	
B1	Trovare il vettore tangente e normale a una curva	2 - Vario	
B2	Trovare il piano tangente al sostegno di una superficie parametrica in un punto	2 - Vario	
B3	Equazione parametrica della retta tangente a una curva in t0	2 - Vario	
D1	Trovare il grado di omogeneità di una funzione	4 - Funzioni Introduzione	
D2	Controllare per quali k è applicabile Dini	4 - Funzioni Introduzione	
E1	Limiti di forme quadratiche	5 - Funzioni e limiti	
E2	Casi in cui si può cambiare variabile nei limiti	5 - Funzioni e limiti	
F1	Calcolare le derivate parziali di una funzione in un punto	6- Derivate	
F2	Calcolare le derivate direzionali di una funzione in un punto	6- Derivate	
F3	Determinare il gradiente in x0 di una funzione	6- Derivate	
F4	Studiare la differenziabilità di una funzione in un punto	6- Derivate	
F5	Direzione di massima pendenza di una funzione	6 - Derivate	
F6	Calcolare il piano tangente a un grafico in un punto	6- Derivate	
F7	Trovare il versore di una funzione in un punto	6- Derivate	
F8	Polinomio di Taylor	6- Derivate	
F9	Applicazione del th. di inversione locale	6- Derivate	
F10	Trovare massimo e minimo di una Hessiana e punti critici	6- Derivate	
F11	Calcolare gli estremi di una funzione su un insieme con i moltiplicatori di Lagrange	6- Derivate	
G1	Verificare che un campo è irrotazionale o integrabile	7 - Teoria dei campi	NC
G2	Calcolare tutte le primitive	7 - Teoria dei campi	
G3	Verificare l'integrabilità di una funzione	7 - Teoria dei campi	ND
G4	Calcolare l'integrale curvilineo	7 - Teoria dei campi	
G5	Lunghezza di un grafico	7 - Teoria dei campi	NC
G6	Calcolare l'area di un grafico	7 - Teoria dei campi	NC
H1	Lunghezza di una curva in coordinate polari (sferiche?)	8 - Curve	
H2	Lunghezza di una curva in coordinate cilindriche	8 - Curve	ND
H3	Calcolare lunghezza di una curva piana parametrica	8 - Curve	
H4	Calcolare l'area compresa tra una curva e l'asse x	8 - Curve	
I1	Area della corona circolare compresa tra due circonferenze	9 - Integrali Lebesque	
I2	Calcolare l'area associata a una superficie parametrica	9 - Integrali Lebesque	
I3	Calcolare volume e superficie (rotazione)	9 - Integrali Lebesque	
	Integrali vari su insiemi (7 esempi)		

	Esercizi chiesti preappello		pag
a1	- integrale su porzione di cerchio	TIPOLOGIA 1	
a2	- lunghezza arco di parabola	TIPOLOGIA 2	
a3	- studiare integrabilità forma differenziale	TIPOLOGIA 3	

	Esercizi chiesti orale 10/06/21		pag
b1	- integrale su porzione di cerchio	TIPOLOGIA 1	
b2	- integrale su insieme (2 circonferenze + bisettrice)	TIPOLOGIA 1	
b3	- lunghezza curva	TIPOLOGIA 2	
b4	- limite (cambio di variabili)	TIPOLOGIA 4	
b5	- integrale curvilineo	TIPOLOGIA 5	
b6	- scrivere insieme in coordinate polari	TIPOLOGIA 6	
b7	- integrale curvilineo	TIPOLOGIA 5	

b8	- lunghezza della curva (VEDI C1)	TIPOLOGIA 2	
Esercizi chiesti orale 11/06/21			**pag**
c1	- lunghezza della curva	TIPOLOGIA 2	
c2	- studiare differenziabilità funzione	TIPOLOGIA 3	
Esercizi chiesti orale 12/06/21			**pag**
d1	- volume solido di rotazione	TIPOLOGIA 7	
d2	- studiare punti critici	TIPOLOGIA 8	
d3	- volume solido di rotazione	TIPOLOGIA 7	
Esercizi chiesti orale 14/06/21			**pag**
e1	- studiare integrabilità forma differenziale	TIPOLOGIA 3	
e2	- lunghezza curva	TIPOLOGIA 2	
e3	- studiare differenziabilità funzione	TIPOLOGIA 3	
e4	- lunghezza curva	TIPOLOGIA 2	
e5	- scrivere insieme in coordinate polari	TIPOLOGIA 6	
e6	- studiare differenziabilità funzione (VEDI C2)	TIPOLOGIA 3	
Esercizi chiesti orale 01/07/21			**pag**
f1	- studiare punti critici	TIPOLOGIA 8	
f2	- scrivere insieme in coordinate polari (VEDI B6)	TIPOLOGIA 6	
f3	- limite	TIPOLOGIA 4	
f4	- studiare integrabilità forma differenziale	TIPOLOGIA 3	

2 - Vario

B1) Trovare il vettore tangente e normale a una curva

13/06/2018

3. Il versore **normale** alla curva parametrica $(\cos t\,,\, \sin^2 t)$ $\quad t \in [0, \pi]$, nel punto $(0,1)$ del suo sostegno, è:

A: $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ B: non è definito perché il vettore tangente è nullo C: $(0,1)$ D: N.A E: $(1,0)$

$$\varphi(t) = (\underbrace{\cos t}_{x(t)}\,,\, \underbrace{\sin t^2}_{y(t)}) \qquad t \in [0, \pi] \qquad \text{in} \quad x_0 = (0,1)$$

① controllo se φ passa per x_0

$$\begin{cases} x(t) = \cos t = 0 \\ y(t) = \sin^2 t = 1 \end{cases}$$

Quindi risolvo e trovo che

$$\begin{cases} \cos t = 0 \;\rightarrow\; \bar{t} = \pi/2 \\ \sin^2 t = 1 \;\rightarrow\; \bar{t} = \pi/2 \end{cases} \longrightarrow \varphi(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

② calcoliamo vettore tangente

$$\tau(t) = \begin{pmatrix} x'(\bar{t}) \\ y'(\bar{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\bar{t}) \\ 2\sin(\bar{t})\cos(\bar{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

③ Se necessario bisogna scambiare le componenti ed inserire un segno meno in modo tale da avere il prodotto scalare tra τ e $\varphi = 0$
[OVVERO SONO ORTOGONALI]

VETTORE NORMALE ESTERNO

$$n = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_2(t) \\ -\varphi_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

④ VERSORE

$$v = \frac{n}{|n|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B2) Trovare il piano tangente al sostegno di una superficie parametrica in un punto

15|01|2018

9. Le forme implicita e parametrica del piano tangente al sostegno di $\Phi(u,v) = (u^2+v^2, u^2 - v^3, uv$ in $(1,1,0)$ sono

A: N.A. B: $x-y=3$ $(1,1,0)+\langle(1,1,2),(2,0,1)\rangle$ C: $2x-y=1$ $(1,1,0)+\langle(1,2,0),(0,-1,1)\rangle$ D: $x-y=0$ $\langle(1,1,0),(0,0,1)\rangle$ E: non esiste

$$\Phi(u,v) = (u^2+v^2, u^2-v^3, uv) \qquad \varphi(u_0,v_0) = (1,1,0)$$

① TROVO u_0 e v_0 in $\Phi = (1,1,0)$

$$\begin{cases} u^2+v^2 = 1 \\ u^2-v^2 = 1 \\ uv = 0 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} v = -1 \\ u = 0 \end{cases}$$

② ESPLICITA

$$\psi(\alpha,\beta) = \varphi(u_0,v_0) + \varphi_u(u_0,v_0)\alpha + \varphi_v(u_0,v_0)\beta$$

$$\psi(\alpha,\beta) = \underbrace{(1,1,0)}_{\text{PUNTO di TANGENZA}} + \varphi_u(u_0,v_0)\alpha + \varphi_v(u_0,v_0)\beta$$

$$\varphi_u(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 2u \\ 2u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \varphi_u(-1,0)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_v(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 2v \\ 3v^2 \\ u \end{pmatrix} \rightarrow \varphi_v(-1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1,1,0) + \alpha(2,2,0) + \beta(0,0,1)$$

---

③ IMPLICITA

$\varphi(u_0,v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ PT di TANGENZA

$$\underset{\substack{\parallel \\ (a,b,c)}}{\varphi_u(u_0,v_0) \times} \varphi_v(u_0,v_0) \neq 0$$

$$\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)}$$

PT di TG: $(1,1,0)$

$$\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \det\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = i(2-0)-j(2-0)+k(0)$$

$$=(2,-2,0) \mathbin{/\!/} (1,-1,0) = (a,b,c)$$

$$\boxed{1(x-1)-1(y-1)+0(z-0)}$$

$$= x-y=0$$

19/09/19

2. Il piano tangente in $(1,1,1)$ al sostegno della superficie parametrica $\Phi(u,v)=(u^2v, uv^2, u^2v^2)$ è

A: N.A. B: $x+2y-3z=0$ C: $2x-y-z=0$ D: non esiste: la superficie non è regolare nel punto del dominio corrispondente ~~E~~: $2x+2y-3z=1$

1

$$\begin{cases} u^2v = 1\\ uv^2 = 1\\ u^2v^2 = 1\end{cases} \rightarrow \begin{cases} u=1\\ v=1\end{cases}$$

2

$$\Phi_u(u_0,v_0) = \begin{pmatrix}2vu\\ v^2\\ 2v^2u\end{pmatrix} \longrightarrow \Phi_u(1,1)=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\Phi_v(u_0,v_0) = \begin{pmatrix}u^2\\ 2uv\\ 2u^2v\end{pmatrix} \longrightarrow \Phi_v(1,1)=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

3

$$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \det\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

4

$$a(x-1)+b(y-1)+c(z-1)$$

$$-2(x-1)-2(y-1)+3(z-1)$$

$$-2x-2y+3z=-1$$

$$2x+2y-3z=1$$

12|06|17

2. L'equazione implicita del piano tangente al sostegno di $\Phi(u,v) = \Big(\cos u(2+\cos v), \sin u(2+\cos v), \sin v\Big)$ in $(3,0,0)$ è:

A: N.A. B: $x+y+z=3$ C: $x+y=3$ D: la superficie non è regolare in $(3,0,0)$ ~~E~~: $x=3$

① $\begin{cases} \cos u\,(2+\cos v) = 3 \\ \sin u\,(2+\cos v) = 0 \\ \sin v = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} v = 0 \\ \cos u\,(3) = 3 \Rightarrow u = 0 \end{cases}$

considero il punto $(0,0)$

② $\Phi_u = \begin{pmatrix} -(2+\cos v)\sin u \\ (2+\cos v)\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \Phi_u(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Phi_v = \begin{pmatrix} \cos u\,(-\sin v) \\ \sin u\,(-\sin v) \\ \cos(v) \end{pmatrix} \rightarrow \Phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ \det & \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = i\,(3) + j\cdot 0 + k \cdot 0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

④ $(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$

B3) Equazione parametrica della retta tangente a una curva in t0

3|07|17

3. La retta tangente in $(1,1)$ al sostegno della curva parametrica $\gamma(t) = (t^t, t^{2t})$ $t \in [1/2, 2]$ è
A: N.A. B: non esiste C: $(t, 3t-2)$ $t \in \mathbb{R}$ D: $(t, -t+2)$ $t \in \mathbb{R}$ ~~E~~: $(t, 2t-1)$ $t \in \mathbb{R}$

① $\begin{cases} t^t = 1 \\ t^{2t} = 1 \end{cases} \longrightarrow t = 1$ punto di tg

② $\dot{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} t^t(\log t + 1) \\ 2 \cdot (t^{2t}) \cdot (\log t + 1) \end{pmatrix}$ $\dot{\varphi}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

③ $z = \varphi(1,1) + \dot{\varphi}(1,1)\,(t-1)$

$z = (1,1) + (1,2)(t-1) = \begin{pmatrix} t \\ 2t-1 \end{pmatrix}$

21|02|18

1. La retta tangente alla curva parametrica $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ nel punto del suo sostegno $(-\pi, 0, \pi)$ è
A: non è definita: la curva non è regolare B: $\sigma(t) = (-\pi - t, -\pi t, \pi + t)$ C: $\sigma(t) = (-\pi - 3t, -2\pi t, \pi + t)$ D: non esiste: il punto non appartiene al sostegno E: N.A.

$\begin{cases} t\cos t = -\pi \\ t\sin t = 0 \\ t = \pi \end{cases} \rightarrow t = \pi$ tutte le altre sono verificate

$\dot{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$ $\neq 0$ LA CURVA È REGOLARE IN OGNI SUO PUNTO

punto di tangenza

$\varphi(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}}_{\varphi(\pi)} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -1-0 \\ 0-\pi \\ 1 \end{pmatrix}}_{\dot{\varphi}(\pi)} = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \\ 1 \end{pmatrix}$

velocità

$= (-\pi - t, -\pi t, \pi + t)$

4 - Funzioni intro

D1) Trovare grado omogeneità di una funzione

Si prova che

$f(tx) = t^{\gamma} f(x) \quad \forall\, t>0$

γ = GRADO

Esempio

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\downarrow$$

$$f(tx, ty) = \frac{t^2x^2 - t^2y^2}{t^2x^2 + t^2y^2} = \frac{\cancel{t^2}(x^2 - y^2)}{\cancel{t^2}(x^2 + y^2)} = t^0 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

0-omogenea

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

$$f(tx,ty) = \frac{t^2}{t} \frac{x^2 + y^2}{x - y} = t \cdot \frac{x^2 + y^2}{x - y}$$ 1-omogenea

---

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x^3 - y^3}$$

$$f(tx,ty) = \frac{t^2}{t^3} \frac{x^2 + y^2}{x^3 - y^3} = t^{-1} \frac{x^2 + y^2}{x^3 - y^3}$$ -1-omogeneo

D2) Controllare per quali k é applicabile Dini

24/7/17

7. Per quali $k \in \mathbb{R}$ all'equazione $x^3 + y^2 - y = k$ può essere applicato il teorema di Dini nell'intorno di ogni sua soluzione, per esplicitare almeno una delle due variabili in funzione dell'altra.

A: $k \neq -1/4$ B: N.A. C: $k \neq 1/2$ D: $k \neq -1/2$ e $k \neq \sqrt{3}$ E: per ogni $k \in \mathbb{R}$

1) calcolo le derivate parziali e guardo dove si annullano

$f(x,y) = x^3 + y^2 - y$

$f_x = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$f_y = 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1/2$

troviamo punti critici

2) sostituisco i punti trovati all'interno della f

$f(0, 1/2) = 1/4$

3) posso esplicitare l'equazione $\forall\, k \neq 1/4$

3/7/17

7. Per quali $k \in \mathbb{R}$, all'insieme di livello $f(x,y) = k$ della funzione $f(x,y) = x^2(1+4x) - y^2$ si può applicare il teorema di Dini rispetto a qualcuna delle variabili?

A: $k \notin \{0, 1/54\}$ B: $k \notin \{0, 1/108\}$ C: ad ogni insieme di livello D: N.A. E: $k \notin \{0\}$

1 $f(x,y) = x^2 + 4x^3 - y^2$

$f_x = 2x + 12x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \cup x = -1/6$

$f_y = -2y = 0 \Rightarrow y = 0$

2 $f(0,0) = 0$

$f(-1/6, 0) = \frac{1}{108}$

3 si può applicare Dini per $k \neq 0$ e $k \neq \frac{1}{108}$

13/06/2016

7. Alla curva implicita $x^3 + x^2 + y^2 = 0$, in un suo punto (x_0, y_0), può essere applicato il teorema di U.Dini per rappresentarla come grafico di una funzione opportuna se:

A: $(x_0, y_0) \neq (1, \pm\sqrt{2})$ B: $(x_0, y_0) \neq (0,0), (0,-1)$ C: per ogni suo punto D: $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ E: N.A.

1) $x^3 + x^2 + y^2$

$$f_x = 3x^2 + 2x = x(3x+2) = 0 \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2/3 \end{array}$$

$$f_y = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

2) $f(0,0) = 0$

$$f(-2/3, 0) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 0 = 0 \Rightarrow \frac{4}{27}$$

Si può applicare in ogni suo punto tranne che in $(0,0)$

5 - Funzioni limiti

E1) Limiti di forme quadratiche

SE f DEFINITA POSITIVA $\Rightarrow +\infty$

SE f DEFINITA NEGATIVA $\Rightarrow -\infty$

altrimenti limite NON ESISTE

Quindi devo studiare gli AUTOVALORI

2 FEBBRAIO 2016

3. Il limite $\lim_{\infty}(x^2 + 2xy + 2y^2 + yz + z^2)$

A: N.A. B: vale $-\infty$ C: non esiste D: vale $+\infty$ E: vale $\pi/2$

devo studiare il segno di $x^2 + 2xy + 2y^2 + yz + z^2$

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ x & 1 & 2 & 0 \\ y & 0 & 2 & 1 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow[\text{la rendo simmetrica}]{} \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ x & 1 & 1 & 0 \\ y & 1 & 2 & 1/2 \\ z & 0 & 1/2 & 1 \end{array} \longrightarrow x^2 + xy + yx + 2y^2 + \tfrac{1}{2}yz + \tfrac{1}{2}zy + z^2$$

1	1	0	I
1	2	1/2	II
0	1/2	1	III
0	1	1/2	II − I
0	1/2	1	III
0	0	3/4	III − II/2

1	1	0	I
0	1	1/2	II
0	0	3/4	III
1	0	−1/2	I − II
0	1	1/2	II
0	0	3/4	III
1	0	0	I + $\frac{2}{3}$ III
0	1	1/2	II
0	0	3/4	III
0	1	0	II − $\frac{2}{3}$ III
0	0	3/4	III

termini + = 3
termini − = 0
termini 0 = 0

definita POSITIVA!

In questo caso si poteva anche vedere dal fatto che tutti i segni sono positivi!

---

18 FEBBRAIO 2014

1. I limiti all'infinito di $(x,y) \to 2x^2 + 3y^2 + xy$ e $(x,y) \to x^2 - y^2$ valgono

A: $+\infty, +\infty$ B: $+\infty, -\infty$ C: N.A. D: $+\infty$, non esiste E: $+\infty, 0$

$2x^2 + 3y^2 + xy$ sicuramente $\to +\infty$

$$x^2 - y^2 \to \begin{array}{c|cc} & x & y \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & -1 \end{array}$$

termini + = 1
termini − = 1
termini 0 = 0

indefinita

E2) Casi in cui si può cambiare variabile nei limiti

Quando vale le TEOREMA?

1) quando $g(t)$ è continua in $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$

$\to \lim_{t \to L} g(t) = g(L) = M$

2) se $g(t)$ non è definita in L

$$\lim_{(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+2y^2}}$$

$t = x^2+y^2$

$$\lim_{(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+2y^2}} = \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+2y^2}} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}}$$

1

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}} = \text{1-omogenea} \Rightarrow 0$$

$x^2+y^2 \to$ 2-omogenea

$\sqrt{x^2+2y^2} \to$ 1-omogenea

$P(x)$ polinomio omogeneo di grado β

$\Downarrow$

$P(x)$ è β-omogeneo

---

se omogenea

$\alpha > 0 \to 0$

$\alpha < 0 \to \infty$

$\alpha = 0 \to \nexists$

ALTRO ESEMPIO

$$\lim_{(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$||$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t^2}{t} = 0$$

$t = \sqrt{x^2+y^2}$

$(x,y) \Rightarrow 0$

$t \to 0$

6 - Derivate

F1) Calcolare le derivate parziali di una funzione in un suo punto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad f_x(x,y) \qquad \partial_x f(x,y)$$

$$f_y(x,y) \qquad \partial_y f(x,y)$$

calcolare derivate parziali di $f(x,y) = x\sin(x+y)$ nel punto $(0,0)$

Derivata rispetto x

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0+k, y_0) - f(x_0, y_0)}{k}$$

nel nostro caso $f(0+k, 0) = k\sin(k)$

$$\lim_{k\to 0} \frac{k\sin(k)}{k} = \sin(k) = 0$$

$f_x \Rightarrow x\sin(x+y)$

$= \sin(x+y) + x\cos(x+y) \qquad (0,0)$

$= 0 + 0 \cdot 1 = 0$

ALTRO ESEMPIO

$$f(x,y) = y^2 + \frac{2}{y} - 3x^2 + 3x^2 \ln(x)$$

costanti

$$f_x = y^2 + \frac{2}{y} - 3x^2 + 3x^2 \ln x = -6x + 6x\ln x + \frac{3x^2}{x}$$

costanti

$$f_y = y^2 + \frac{2}{y} - 3x^2 + 3x^2 \ln x = 2y - \frac{2}{y^2}$$

F2) Calcolare le derivate direzionali di una funzione in un punto

$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$

$P(0,0)$ lungo $e = \frac{v}{|v|}$ $\quad v(1,1)$

- $e = \dfrac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

- dobbiamo determinare il valore del limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\overbrace{(0,0) + he}^{a}) - f(0,0)}{h}$$

a) $(0,0) + h\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\dfrac{h}{\sqrt{2}}, \dfrac{h}{\sqrt{2}}\right)$

a) $f\left(\dfrac{h}{\sqrt{2}}, \dfrac{h}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^2}{2} - \dfrac{h}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{h}{\sqrt{2}} = \dfrac{h^2}{2}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^2}{2} - 0}{h} = \frac{h}{2} = 0$$

F3) Determinare il gradiente in un punto di una funzione

$f(x,y) = x^2 + y^2$ nel punto $(1,0)$

1) derivata f_x $\quad f_x = 2x$ $\to$ valutazione in $(1,0)$ $\quad f_x(1,0) = 2$
2) derivata f_y $\quad f_y = 2y$ $\to$ valutazione in $(1,0)$ $\quad f_y(1,0) = 0$

$\nabla f(1,0) = (2,0)$

Il gradiente di una funzione indica la direzione normale alla curva di livello in quel punto

F4) Studiare differenziabilitá di una funzione in un punto

Ē continua?

NO → ✗ NON DIFFERENZIABILE

SI ↓

Ha tutte le derivate parziali?

NO → ✗ NON DIFFERENZIABILE

SI ↓

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

ESISTE ED Ē NULLO?

NO → ✗ NON DIFFERENZIABILE

SI ↓

✓ DIFFERENZIABILE

Studiare differenziabilità di $|xy|$ in $(0,0)$

1) continua?

$|xy|$ ē continua perchē composta:

$g(x,y) = xy \quad C^\infty$

$+$

$t \to |t| \quad C^0$

2) Ha tutte le derivate parziali?

$$f_{e_i}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_i) - f(x_0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(x_0 + 0\cdot t, \dots, x_0 + 1\cdot t, \dots) \right]$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \qquad f_{x_i} \qquad \partial_{x_i} f(x)}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = 0$$

3) LIMITE ESISTE ED È NULLO?

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-0h-0k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(0,0)} \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

PERCHÉ È
1-OMOGENEA
E CONTINUA

F5) Direzione di massima pendenza di una funzione

15/01/2018

2. La direzione di massima pendenza di $f(x,y) = (\sin y)^x$, in $(0, \pi/2)$

A: N.A. B: è parallela a $(1,0)$ C: è parallela a $(1,1)$ D: è parallela a $(-1,2)$ E: non è definita

$$f(x,y) = \sin y^x$$

$$f_x = \log(\sin y) \cdot (\sin y)^x \qquad f_y = x(\sin y)^{x-1} \cos y$$

$$\nabla f(0, \pi/2) = \begin{pmatrix} \log(\sin \pi/2) \cdot \sin \pi/2^{0} \\ 0 \cdot \sin(\pi/2)^{-1} \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{non è definita}$$

24/07/2017

5. Data $f(x,y) = (\sin x)^{\sin y}$, la sua direzione di massima pendenza ascendente in $(\pi/4, \pi/2)$ e il piano tangente al grafico nel punto corrispondente sono

A: $(1,0)$, $z\sqrt{2} - x = 1 - \pi/4$ B: $(-1,0)$, $z + x = \pi/4 + 1/\sqrt{2}$ C: non esiste, $z = 1/\sqrt{2}$
D: non esistono: f non è differenziabile nel punto E: N.A.

$$f(x,y) = \sin x^{\sin y}$$

x^a

$$f_x = (\sin y) \cdot (\sin x)^{(\sin y - 1)} \cdot (\cos x)$$

$$f_x(\pi/4, \pi/2) = 1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a^y

$$f_y = \log(\sin x) \cdot (\sin x)^{\sin y} \cdot \cos y$$

$$f_y(\pi/4, \pi/2) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^1 \cdot \cos(\pi/2) = 0$$

$$\nabla f(\pi/4, \pi/2) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

piano tangente

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$$

$$f(\pi/4, \pi/2) + f_x(x - \pi/4) + f_y(y - \pi/2)$$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^{\sin(\pi/2)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 0 \cdot (y - \pi/2)$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + x - \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \sqrt{2}\, z = 1 + x - \pi/4$$

$$\sqrt{2}\, z - x = 1 - \pi/4$$

F6) Calcolare il piano tangente a un grafico in un suo punto

5|2|18

7. Il piano tangente al grafico di $f(x,y) = (1+x^2)^y$, nel punto corrispondente a $(0,0)$, è

A: $z = x + 2y$ B: $z = 0$ C: non esiste D: $z = x + y + 2$ E: N.A.

$$f(x,y) = (1+x^2)^y \qquad A(0,0)$$

$$f_x = y(1+x^2)^{y-1} \cdot 2x$$

$$f_y = \ln(1+x^2)\,(1+x^2)^y$$

$$\nabla f \begin{pmatrix} y(1+x^2)^{y-1} \cdot 2x \\ \ln(1+x^2)\,(1+x^2)^y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$$

$$z = 1 + 0(x-0) + 0(y-0) = 1$$

14|1|2020

3. La direzione di massima pendenza (ascendente) di $f(x,y) = x^{(y^x)}$ in $(1,1)$, e l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto corrispondente è

A: $(0,1), z = y$ B: $(1,0), z = x$ C: N.A. D: non esiste E: $(2,1), 2x + 1 - z = 2$

PIANO TANGENTE

$$f(x,y) = x^{y^x} \quad \text{in } (1,1)$$

$$\| $$

$$e^{\log(x)\, y^x}$$

$$f_x = x^{y^x} \cdot \left(\frac{1}{x} y^x + y^x \ln y \ln x \right) = x^{y^x} \left(\frac{y^x}{x} + y^x \ln y \ln x \right)$$

$$f_x(1,1) = 1^{1^1}\left(\frac{1^1}{1} + 1^1 \ln 1 \ln 1\right) = 1$$

$$f_y = x^{y^x} \cdot \left(x\, y^{-1+x}\right) \log x$$

$$f_y(1,1) = 1 \cdot \left(1 \cdot 1^{-1-1}\right) \cdot \log 1 = 0$$

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)}$$

$$z = 1 + 1(x-1) + 0(y-1)$$

$$z = \cancel{1} + x - \cancel{1}$$

DIREZIONE MASSIMA PENDENZA

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

F7) Trovare il versore di una funzione in un punto

22|07|14

6. La direzione normale al grafico di $f(x,y) = x^x y^y$, nel punto corrispondente a $x = 1$, $y = 1$, è parallela al vettore

A: $(-1,-1,1)$ B: non esiste normale in quel punto C: N.A. D: $(0,1,1)$ E: $(1,1,1)$

$$f_x = x^x y^y = e^{x \ln x} y^y = y^y x^x [\ln(x) + 1]$$

$$f_y = x^x y^y = x^x y^y [\ln y + 1]$$

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} -f_x(1,1) \\ -f_y(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

le prime due componenti sono legate al gradiente,

l'ultima è una variabile che indica il verso

- ALTO: 1, antigradiente
- BASSO: -1, gradiente

25|07|2016

1. Il vettore normale al grafico di $f(x,y) = (\cos x)^{\cos y}$ nel punto corrispondente a $(0,0)$, orientato verso l'alto, è

$x \; y$

A: $(0,0,1)$ B: N.A. C: $(1,0,1)$ D: non è definito E: $(0,0,-1)$

$$f_x = \cos y \cdot \cos x^{\cos y - 1} \cdot (-\sin x)$$

$$f_y = \cos x^{\cos y} \cdot (-\sin y) \log(\cos x)$$

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 \cdot 0 \\ -1 \cdot 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

verso è alto $\Rightarrow \begin{pmatrix} \nabla f(0,0) \\ 1 \end{pmatrix} = (0,0,1)$

F8) Polinomio di Taylor

- La FORMULA di TAYLOR
  ↳ $f \in C^N(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto, $x e x_0 \in \Omega \Longrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + R_N(x-x_0)$

I RESTI
- Il resto di Peano: $R_N(x-x_0) = o(|x-x_0|^N)$
- Il resto di Lagrange: $R_N(x-x_0) = \frac{1}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi)(x-x_0)^{N+1}$, dove $\xi \in [x_0, x]$

Appunti Analisi 2
M.Giannini
https://drive.google.com/file/d/1tx55xHg58hMzLPzCJ5hp9C52PZLXTyR2/view

⚠ NOTE in più variabili
- K è un multiindice: $K = (k_1, k_2, \dots k_m)$
- $K! = k_1! k_2! \dots k_n!$
- $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$
- $f^{(K)} = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} f$
- $W = X - X_0 \Longrightarrow W^K = w_1^{k_1} w_2^{k_2} \dots w_n^{k_n}$ → Se $k_i = 0$: $w_i^0 = 1$ → $0! = 1$

La formula di Taylor (Gregory) vale in più variabili interpretando K come multiindice $\longrightarrow f(x_0 + w) = \sum_{|k|=0}^{N} \frac{1}{K!} f^{(K)}(x_0)\, w^K + R_N(w) =$

$$= \sum_{\substack{k_1, \dots k_n \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{m} k_i \leq N}} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} \frac{\partial^{\sum k_i}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} f(x_0)\, w_1^{k_1} w_2^{k_2} \dots w_n^{k_n} + R_N(w)$$

Altra forma: $\sum_{M=0}^{N} \sum_{\substack{k_1, k_i, k_n \geq 0 \\ \sum k_i = M}} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} f_{x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}}(x_0)\, w_1^{k_1} w_2^{k_2} \dots w_n^{k_n} + R_N(w)$

↳ Complesso dei termini di grado $M = \sum_{i}^{n} k_i$

28/01/2015

4. Il polinomio di Taylor di grado 1 di $(y+1)^{xy}$ in $(0,0)$ è

A: 1 B: $x - y$ C: $1 + x - y$ D: $1 - x + 2y$ E: N.A.

$$f(x, y) = (y+1)^{xy}$$

Si tratta solamente di calcolare le derivate parziali prime

$$f_x(x, y) = y\,(y+1)^{xy} \log(y+1)$$

$$f_y(x, y) = (y+1)^{xy} \cdot \left(\frac{1}{y+1} xy + \ln(y+1) \cdot x\right)$$

$$e^{\ln(y+1)\, xy}$$

di valutarle nel punto $(0,0)$

$$f_x(0,0) = 0$$

$$f_y(0,0) = 0$$

e di sostituire alla formula

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_n}} f(x_0)\, (x - x_0)^n$$

nel nostro caso

$= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,h + f_y(x_0, y_0)\,k + R(h, k)$

ovvero

$= 1 + 0 + 0$

10/06/14

3. Il polinomio di Taylor di grado 2 di $f(x, y) = y^x$ in $(1, 2)$ è

A: $2 + 2x + y - x^2 \lg^2 2 + 2(1 + 2\lg^2 2)xy - y^2$ B: $2 + 2\lg 2x + y + 4x^2(\lg^2 + 2) - xy\lg^2 2 - y^2(\lg^2 2 + 1)$ C: $2 + \lg^2 2 - 2(\lg^2 2 + 1)x - y\lg 2 + x^2\lg^2 2 + xy(\lg 2 + 1)$

D: N.A. E: $2\lg 2 + x - y + xy$

$f(x, y) = y^x$ $\quad x_0 = (1, 2)$

$f(1, 2) = 2^1 = 2$

▷ DERIVATE PARZIALI PRIME

$f_x = \ln y \; y^x \xrightarrow{(1,2)} 2 \ln 2$

$f_y = x\, y^{x-1} \xrightarrow{(1,2)} 2^0 = 1$

▷ DERIVATE PARZIALI SECONDE

$f_{xx} = \ln y \; y^x \cdot [\ln y] = \ln^2 y \; y^x \xrightarrow{(1,2)} \ln^2 2 \cdot 2$

$f_{yy} = x \cdot (x-1) \cdot y^{x-2} \longrightarrow 0$

$f_{xy} = y^{x-1} (x \log y - 1) \xrightarrow{(1,2)} \log 2 - 1$

$\parallel$

$f_{yx} = y^{x-1} (x \log y - 1)$

FORMULA

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot h + f_y(x_0, y_0) \cdot k +$$

$$+ \frac{1}{2!}[f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2] +$$

$$+ R(h, k)$$

F9) Applicazione del teorema di inversione locale

13-01-2016

1. Nell'intorno di quali punti al cambio di variabili $X = x^2y$, $Y = x^2 + y^2$ può essere applicato il teorema di inversione locale?

A: N.A. B: $(x, y) \neq (2, \pi)$ C: sempre D: $x \neq \{0, \pm y\sqrt{2}\}$ E: $x \neq 0$

- dove $|J| \neq 0$

$$|J| = \left|\begin{pmatrix} f_x(x^2y) & f_y(x^2y) \\ f_x(x^2+y^2) & f_y(x^2+y^2) \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}\right|$$

$$\det = (2xy)(2y) - (2x)x^2 = 4xy^2 - 2x^3 \neq 0$$

$$4xy^2 - 2x^3 = 2x(2y^2 - x^2) \neq 0$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm\sqrt{2}y \end{cases}$$

ESEMPIO

$F(\rho, \theta) = (x, y) \quad F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$G(\rho, \theta; x, y) = F(\rho, \theta) - (x, y) \quad G = 0$

$x = \rho\cos\theta$
$y = \rho\,\text{sen}\,\theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho\cos\theta - x = 0 \\ \rho\,\text{sen}\,\theta - y = 0 \end{cases}$$

$$|J| = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \rho \hookrightarrow$$

il "famoso" determinante jacobiano
$\hookrightarrow$ lo troverai...

se $\rho \neq 0$

$F: (\rho, \theta) \to (x, y)$ è invertibile vicino ad ogni suo punto $(\rho_0, \theta_0) \to (x_0, y_0)$

12-06-2017

3. Nell'intorno di quali punti alla funzione $(u, v) \to (uv, v/u)$ si può applicare il teorema di invertibilità locale?

A: in ogni punto del dominio B: $u \neq 0$ C: N.A. D: $uv \neq 0$ E: $v \neq 0$

- il det $J \neq 0$

$$|J| = \begin{vmatrix} v & -v/u^2 \\ u & 1/u \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{rispetto } u \\ \text{rispetto } v \end{array} = \frac{v}{u} - \left(-\frac{v}{u}\right) = \frac{2v}{u} \neq 0 \quad \begin{cases} u \neq 0 \\ v \neq 0 \end{cases}$$

F10) Trovare massimo e minimo di una Hessiana e punti critici

ESEMPIO

$z = x^2 + y^2 - 2x$

A) Si risolve il sistema

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x - 2 = 0 & \to x = 1 \\ f_y(x,y) = 2y = 0 & \to y = 0 \end{cases}$$

$(1,0)$ <u>Punto critico</u>

B) Si calcolano le derivate parziali seconde

$f_{xx} = 2$ $\qquad f_{xy} = 0 = f_{yx}$

$f_{yy} = 2$

C) SI CALCOLA HESSIANO

$$H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

SE

HESSIANA NEL PUNTO

- $H(x_0,y_0) > 0$
  - $f_{xx} < 0$ → PNT di MASSIMO RELATIVO
  - $f_{xx} < 0$ → PNT di MINIMO RELATIVO
- $H(x_0,y_0) < 0$ → PNT di SELLA
- $H(x_0,y_0) = 0$ → DEGENERE

3|2|17

1. I punti critici in $\mathbb{R}^2$ della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - y^3$ sono: *(in caso di hessiana degenere, si suggerisce di studiare la funzione in direzione degli assi)*

A: N.A. B: $(0,0)$ e $(0,2/3)$ selle C: $(0,0)$ minimo e $(0,2/3)$ sella D: non ha punti critici E: $(0,0)$ massimo e $(1,2)$ sella

$f(x,y) = x^2 + y^2 - y^3$

$$\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y - 3y^2 = 0 \\ \quad\; y(2-3y) \end{cases} \to (0,0) \cup (0, 2/3)$$

$f_{xx} = 2$

$f_{yy} = 2 - 6y$ $\longrightarrow$ $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-6y \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$ MINIMO

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ - & 2 \end{vmatrix} = -4$ Sella

1/07/14

8. I punti critici (liberi) di $f(x, y) = y^x$ sono

A: $(0, 1)$, minimo e $(1, 1)$ sella B: N.A. C: $(0, 1)$, massimo D: inesistenti E: $(0, 1)$, sella

$f(x,y) = y^x$

$$\begin{cases} f_x = \ln y \; y^x = 0 \\ f_y = x\, y^{x-1} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array} \qquad (0,1) \text{ CRITICO}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \ln^2 y \; y^x & \longrightarrow \quad 0 \\ f_{yy} &= (x-1)\,x\, y^{x-2} & 0 \\ f_{yx} &= y^{x-1}(x \log y + 1) & 1 \end{aligned}$$

$\parallel$

f_{xy}

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad (0,1) \text{ SELLA}$$

28/01/15

9. I punti critici di $f(x, y) = x \cos y$ in $[-1, 1] \times [-1, 2]$ sono

A: N.A. B: inesistenti C: $(0, \pi/2)$, sella e $(0,1/2)$, minimo D: $(0, 1)$, minimo 2 $(-1/2, 0)$, massimo E: $(0, \pi/2)$, sella

Ricevimento 2021-06-28ric.pdf

http://pagine.dm.unipi.it/~a005928/miei/lezioniOnLine/2021-06-28ric.pdf

F11) Calcolare gli estremi di una funzione su un insieme con i moltiplicatori di Lagrange

5|02|18

8. Gli estremi di $f(x,y) = \sin(x+y)$ su $x^2+y^2 \leq 1$ sono

A: $-\sin\sqrt{3}, \sin\sqrt{3}$ B: $-\sin\sqrt{2}/3, \sin\sqrt{2}/2$ C: N.E. D: N.A. E: $-\sin\sqrt{2}, \sin\sqrt{2}$

Appunti Analisi 2
M.Giannini
https://drive.google.com/file/d/1tx55xHg58hMzLPzCJ5hp9C52PZLXTyR2/view

→ STRATEGIA 3: Metodo dei moltiplicatori di Lagrange
Si possono trovare massimi e minimi fra le soluzioni del seguente sistema di equazioni: $\begin{cases} \nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ → Sistema di n+1 equazioni in n+1 incognite

λ incognita: MOLTIPLICATORE

$$f(x,y) = \sin(x+y) \qquad \{(x,y) : g(x,y) = x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) \\ \cos(x+y) \end{pmatrix} \qquad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f + \lambda \nabla g = \begin{pmatrix} \cos(x+y) + \lambda 2x \\ \cos(x+y) + \lambda 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cos(x+y) + \lambda 2x = 0 \\ \cos(x+y) + \lambda 2y = 0 \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases} \to \begin{cases} \lambda 2x = \lambda 2y \\ 2x^2 \leq 1 \\ 2y^2 \leq 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = y \\ -1/\sqrt{2} \leq x \leq 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \leq y \leq 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

punti critici $\overset{A}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ $\overset{B}{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ $\overset{C}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ $\overset{D}{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

$f(A) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{\sin(\sqrt{2})}$

$f(B) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$

$f(C) = 0$

$f(D) = \sin(-2/\sqrt{2}) = \underline{\sin(-\sqrt{2})}$

ESTREMI

7- Teoria dei campi

G1) Verificare che un campo irrotazionale é integrabile

20/2/19

6. Il campo $(1/x\ ,\ 1/y)$, nel suo dominio massimale,

A: è irrotazionale, ma non integrabile B: N.A. C: è integrabile, con potenziali che differiscono per una costante da $\lg|xy|$ D: non è irrotazionale E: è integrabile, con potenziali che non differiscono necessariamente per una costante da $\lg|xy|$

→ DETERMINIAMO IL DOMINIO

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \cup y \neq 0 \}$$

→ UN CAMPO È IRROTAZIONALE SE $\nabla \times F = 0$

$$\nabla \times F = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ \ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x},\ \ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

G2) Calcolare tutte le primitive

3|7|2017

9. **Tutte** le primitive di $(2xy\,dx/(1+x^2)^2 - dy/(1+x^2)$ sono

A: $-y/(1+x^2)\ +c,\ c\in\mathbb{R}$ B: $-y/(1+x^2)\ +\begin{cases} c_1 & x>0 \\ c_2 & x<0 \end{cases}\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$ C: N.A. D: non esistono primitive E: $-y^2/(1+x^2)^2\ +c,\ c\in\mathbb{R}$

$$\frac{2xy\,dx}{(1+x^2)^2} - \frac{dy}{(1+x^2)}$$

- dominio: $(1+x^2)^2 \neq 0 \Rightarrow 1+x^2 \neq 0 \Rightarrow \text{dom} = \mathbb{R}^2$ quindi avrà una c sola

1 solo insieme

una c sola

- $$\int \frac{2xy\,dx}{(1+x^2)^2} - \int \frac{dy}{(1+x^2)}$$

$1+x^2 = t$

$2x = dt$

$$= y\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx - \frac{1}{(1+x^2)}\int dy$$

$$= y\int \frac{1}{t^2}dt - \frac{y}{(1+x^2)}$$

$$= -\frac{y}{x^2+1} - \frac{y}{x^2+1} + c = \frac{-2y}{x^2+1} + c$$

19|9|2019

3. *Tutte* le primitive di $-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ nell'insieme $\{|y|<|x|\}$ sono

A: N.A. B: non è integrabile nella regione indicata C: $\arctan(y/x)+\phi(x,y)$ con $\phi = c_1$ per $x>0$ e $\phi = c_2$ per $x<0$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ D: $\arctan(x/y)$ E: $\arctan(y/x)$

$$-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \qquad |y|<|x|$$

studiamo la forma differenziale

$$\text{dom} = A = \begin{cases} x^2+y^2 \neq 0 \\ |y|<|x| \end{cases}$$

2 casi: $x>0,\quad x<y<-x$
$x<0,\quad -x<y<x$ $\}$ ho 2 insiemi

se l'insieme è sempl. connesso c sarà costante.

se lo divido in + insiemi ci saranno tante c quanti insiemi.

G3) Verificare l’integrabilitá di una funzione

G4) Calcolare l'integrale curvilineo

22/02/17

5. L'integrale (curvilineo) di $f(x,y) = x^2 + y^2$ sull'arco di spirale $\rho = \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$ vale

A: $\frac{1}{32}[\sinh(4\sinh^{-1}(2\pi)) - 4\sinh^{-1}(2\pi)]$ B: $3/2$ C: $\sinh 2\pi$ D: $\sinh(2\sinh^{-1}\pi/7) + \frac{1}{8}\sinh^{-1} 3\pi/5$ E: N.A.

angolo $\theta \in [\theta, 2\pi]$

allora ρ varia tra $[0 \text{ e } \theta]$

Quindi insieme $S = \{(\rho,\theta) : 0 \leq \rho \leq \theta,\ \theta \in [0, 2\pi]\}$

---

passo f in coordinate polari

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\theta} \rho^2 \cdot \rho \, d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{\theta^4}{4} d\theta = \frac{1}{4} \cdot \frac{\theta^5}{5} \Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^5}{5}$$

$$= 489{,}63$$

Si definisce INTEGRALE CURVILINEO di f su γ il numero $\int_\gamma f \, dl = \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t))}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{|\dot\gamma(t)|}_{\in \mathbb{R}} dt$

Ascisse curvilinee

dl oppure ds

$\Lambda(\gamma) = \int_\gamma 1 \, dl$

Esempio

$\int_\gamma xz$ $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \\ t \end{pmatrix}$ $t \in [0, 2\pi]$ $\quad f(x,y,z) = xz$

$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\int_\gamma xz = \int_0^{2\pi} \underset{x(t)}{\cos t}\ \underset{z(t)}{t} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, t\cos t = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} t\cos t\, dt = \sqrt{2}\left[t \operatorname{sen} t\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1 \operatorname{sen} t\, dt\right] =$$

$$= \sqrt{2}\left[0 + \cos t\Big|_0^{2\pi}\right] = 0$$

Appunti Analisi 2
M.Giannini
https://drive.google.com/file/d/1tx55xHg58hMzLPzCJ5hp9C52PZLXTyR2/view

G5) Lunghezza di un grafico

3|2|2020

8. La lunghezza del grafico di $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ è

A: N.A. B: $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+\sinh^{-1} 2)$ C: non è rettificabile D: $\frac{1}{4}(2\sqrt{5}+\sinh^{-1} 2)$ E: $\frac{1}{3}(\sqrt{5}+2\sinh^{-1} 2)$

$$\boxed{\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to f'^2(x) = \frac{1}{4x}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x}}\, dx$$

$t = \sqrt{x}$

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$= \int_0^1 \sqrt{4t^2+1}\, dt$$

$t = \sinh u$

$dt = \cosh t\, dt$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + 4\sinh^2 u} \cosh u\, dt = 4\int \cosh^2 u\, du$$

$$= \sinh u \cosh u - \int \cosh^2 u\, du$$

$$= \sinh u \cos u - \int \sinh^2 u\, dt + c$$

$= \sinh$

G6) Calcolare area di un grafico

3/7/17

1. Calcolare l'**area** della porzione di grafico di $f(x,y) = xy$ (*paraboloide iperbolico*) sovrastante il cerchio $x^2 + y^2 = 9$ è

A: N.A.   B: $2\pi(5\sqrt{5}-1)/3$ C: non è definita   D: $2\pi(7\sqrt{7}-1)/3$ E: $2\pi(10\sqrt{10}-1)/3$

- calcolo derivate parziali

$f_x = y$
$f_y = x$

- passo in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9 \\ \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin\theta &= 9 \\ \rho^2 &= 9 \\ \rho &= 3 \end{aligned}$$

JACOBIANO

- $\rho \in [0,3]$
  $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow A = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 d\rho \; \rho \cdot \sqrt{1+\rho^2} = \cancel{2}\pi \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \int_0^3 d\rho \; 2\rho\sqrt{1+\rho^2}$$

$$= \pi \left((1+\rho^2)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{2}{3}\pi\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

DA CONTROLLARE

NON AFFIDABILE

8- Curve

H1) Lunghezza di una curva in coordinate polari

17/09/2018

7. La lunghezza dell'arco di curva, in coordinate polari, definito da $\rho = \sin\theta$, $\theta \in [0, \pi]$ è

A: non definita: non è rettificabile B: π C: $2/\sqrt{3}$ D: $2\pi/3$ E: N.A.

$$\theta = t \rightarrow \rho = \sin t$$

$$\dot{\rho} = \cos t \qquad \dot{\rho}^2 = \cos^2 t$$

$$\Lambda(\gamma) = \int_0^{\pi} \sqrt{\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}} \, dt = \int_0^{\pi} 1 \, dt$$

$$= x\Big|_0^{\pi} = \pi$$

12-6-17

1. La lunghezza della curva in coordinate polari $\rho = \cos^4 \frac{\theta}{4}$ $\theta \in [0, 2\pi]$ è

A: non è rettificabile B: 19/4 C: 8/3 D: 4/9 E: N.A.

$$\theta = t \Rightarrow \rho = \cos^4 \frac{t}{4}$$

$$\dot{\rho} = -4 \cos^3 \frac{t}{4} \sin \frac{t}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= -\cos^3 \frac{t}{4} \sin \frac{t}{4}$$

$$\dot{\rho}^2 = \cos^6 \frac{t}{4} \sin^2 t/4$$

$$\Lambda(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^8\left(\frac{t}{4}\right) + \cos^6\left(\frac{t}{4}\right) \sin^2\left(\frac{t}{4}\right)}$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^6 \frac{t}{4} \left[\underbrace{\cos^2 \frac{t}{4} + \sin^2 \frac{t}{4}}_{1} \right]} \, dt$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \cos^3 \frac{t}{4} \, dt \qquad u = \frac{t}{4} \qquad du = \frac{1}{4}$$

$$0 \to 0 \qquad 2\pi \to \frac{1}{2}\pi$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^3 u \, du$$

$$\int \cos^m u \, du = \frac{\sin u \cos^{m-1} u}{m} + \frac{m-1}{m} \int \cos^{-2+m} du$$

utilizzo questa formula (VELOCE) ↑ $m = 3$

$$= 4 \cdot \left\{ \frac{\sin u \cdot \cos^2 u}{3} + \frac{2}{3} \int \cos u \, du \right\}$$

$$= \frac{8 \sin u}{3} + \frac{4}{3} \sin u \cos^2 u \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{8}{3} + 0 - 0 + 0 = \frac{8}{3}$$

H3) Calcolare lunghezza curva piana parametrica

curva γ di equazione $r : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$$r(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{con } t \in [a,b]$$

$$\mathcal{L}(\gamma,[a,b]) = \int_a^b \| r'(t) \| \, dt$$

$$\| $$

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$$

3) Lunghezza di curve date in forma polare

Un'altra formula che tornerà utile nella risoluzione di esercizi è quella che ha per protagoniste **le curve regolari espresse in forma polare**, cioè quelle funzioni che si presentano nella forma

$$\rho = f(\theta) \text{ con } \theta \in [\theta_0, \theta_1]$$

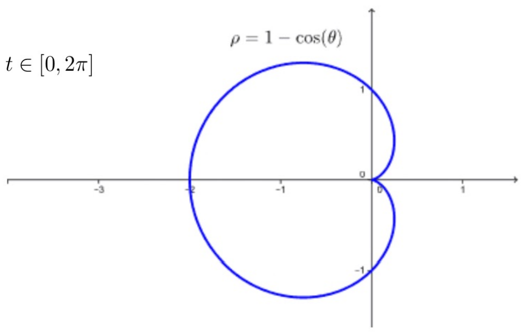
La formula della lunghezza è:

$$\mathcal{L} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} d\theta$$

Esempio: vogliamo calcolare la **lunghezza della cardioide** di equazione

$$\rho = 1 - \cos(\theta) \text{ con } \theta \in [0, 2\pi]$$

Nel piano la cardioide ha la seguente rappresentazione



Utilizzando la formula precedente otterremo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos(\theta))^2 + \sin^2\theta d\theta} \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 8 \end{aligned}$$

4/2/19

7. La lunghezza dell'arco di curva parametrica piana $\gamma(t) = (3(t - \sin t), 3(1 - \cos t))$, $t \in [0, 2\pi]$

A: N.A. B: 24 C: 5π D: 23π E: non esiste: non è rettificabile

$$r(t) = \begin{cases} 3(t - \sin t) = x \\ 3(1 - \cos t) = y \end{cases}$$

$t \in [0, 2\pi]$

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$$

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{d}{dx}\left(3(t - \sin t)\right)^2 + \frac{d}{dx}\left(3(1 - \cos t)\right)^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{9 - 18\cos x + 9\cos x^2 + 9\sin x^2}_{9 - 18\cos x + 9 \,=\, 18 - 18\cos x}} \, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{18 - 18\cos x}\, dx \qquad 1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} 6\sqrt{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 12\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 u} = 12\int_0^{\pi} \sin u \qquad u = \frac{x}{2}$$

$$= -12\cos u \Big|_0^{\pi} = 12 + 12 = 24$$

H4) Calcolare l'area compresa tra una curva e asse x

24/07/2017

3. L'area racchiusa dalla curva $\rho = \sin^2\theta \quad \theta \in [0, \pi]$ è

A: 0 B: $3\pi/16$ C: $3\pi/8$ D: $5\pi/16$ E: N.A.

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho(\theta)^2 \, d\theta$$

$$\rho(\theta) = \sin^2\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^4\theta \, d\theta$$

Use the reduction formula, $\int \sin^m(x)\,dx = -\frac{\cos(x)\sin^{m-1}(x)}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{-2+m}(x)\,dx$, where

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos\theta\sin^3\theta}{4} + \frac{3}{4}\int \sin^2\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos\theta\sin^3\theta + \frac{3}{4}\left[-\frac{\cos\theta\sin\theta}{2} + \frac{1}{2}\int \underbrace{\sin^0(x)}_{1}\,dx\right]\right]$$

$$= \frac{1}{64}\left(12x - 8\sin(2x) + \sin(4x)\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{3\pi}{16} - 0$$

$$\int -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$$= -y\int \frac{1}{y^2\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)}\,dx + x\int \frac{1}{x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}\,dy$$

$$= -\frac{1}{y}\int \frac{1}{\frac{x^2}{y^2}+1}\,dx + \frac{1}{x}\int \frac{1}{\frac{y^2}{x^2}+1}\,dy$$

$$\int -\frac{a}{x^2+a^2}\,dx$$

$$\int \frac{b}{b^2+y^2}\,dy$$

integrale notevole

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + c$$

$t = \frac{x}{y}$ $\quad dt = \frac{1}{y}$ $\quad K = \frac{y}{x}$ $\quad dK = \frac{1}{x}$

$\Phi = c_1 \quad x > 0$

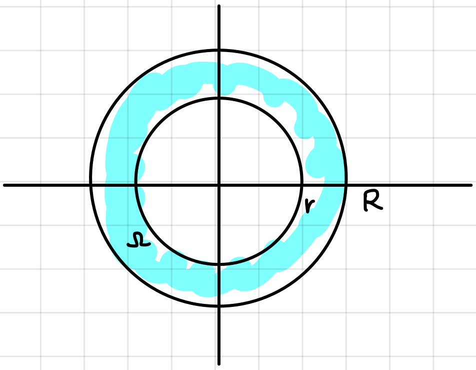
$\Phi = c_2 \quad x < 0$

$$= -\int \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int \frac{1}{K^2+1}\,dK$$

$$= -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \Phi(x,y)$$

9- Integrali di Lebesque

I1) Area della corona circolare compresa tra due circonferenze



$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2) \quad \text{Area}$$

$$\int_\Omega 1 \, dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^R \rho \, d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{2} (R^2 - r^2) \right]$$

Jacobiano

I2) Calcolare area associata ad una superficie parametrica

5|2|18

2. L'area della superficie parametrica $\Phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \theta)$, $\rho \in]0,1]$, $\theta \in [0, 4\pi]$ è
A: $2\pi(\sqrt{3}+\sinh^{-1}(2))$ B: $\pi(\sqrt{3}+\sinh^{-1}(1))$ C: N.A. D: $2\pi(\sqrt{2}+\sinh^{-1}(1))$ E: non esiste

devo applicare la formula

$$A = \int_{\Omega} | \Phi_\rho \times \Phi_\theta | \, d\rho \, d\theta$$

$$\Phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \theta)$$

1) calcoliamo le derivate parziali

$$\begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_\rho = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

costanti

$$\begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_\theta = \begin{pmatrix} -\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) calcoliamo prodotto vettore

$$\Phi_\rho \times \Phi_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 1 \end{vmatrix} = \left(\hat{i}\sin\theta \cdot 1 + \cancel{\hat{j} \cdot 0 \cdot (-\rho\sin\theta)} + \hat{k}\cos\theta \cdot \rho\cos\theta\right)$$

$$- \left(\hat{k}\sin\theta \cdot (-\rho\sin\theta) + \hat{j}\cos\theta \cdot 1 + \cancel{\hat{i}\, 0 \cdot \rho\cos\theta}\right)$$

$= \hat{i}\sin\theta - \hat{j}\cos\theta + \hat{k}\left(\cos^2\theta \cdot p + p\sin^2\theta\right)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ p\cos^2\theta + p\sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ p \end{pmatrix}$$

3) calcolare norma prodotto vettoriale

$$\left\| \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta + p^2} = \sqrt{1+p^2}$$

4) Applicare la formula

$$A = \int_0^{4\pi} d\theta \int_0^1 dp\, \sqrt{1+p^2}$$

$$= 4\pi \cdot \underbrace{\int_0^1 dp\, \sqrt{1+p^2}}$$

$$= 4\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{p^2+1}\right)p + \sinh^{-1}(p)\right)\Big|_0^1$$

$$= 2\pi \cdot \left(\sqrt{2} + \sinh^{-1}(-1)\right)$$

I3) Calcolare volume e superficie (rotazione)

13|01|16

4. Il volume e la superficie (totale) del solido generato dalla rotazione del grafico di $y = \sin z$ per $z \in [0, \pi]$, attorno all'asse z, sono:

A: $\pi, \pi/\sqrt{2}$ B: $\pi^2, 3\sinh^{-1} 1$ C: N.A. D: $\pi^2/2, 2\pi(\sqrt{2} + \sinh^{-1} 1)$ E: $\pi^2/2, 7\pi/6$

$$|E| = \int_a^b \pi f^2(z)\, dz = \int_0^\pi \pi \sin^2(z)\, dz = \pi \int_0^\pi \sin^2(z)$$

$$= \pi \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos(2x)\, dx + \frac{\pi}{2}\int_0^\pi 1\, dx$$

$$= -\frac{1}{4}\pi \sin(2x)\Big|_0^\pi + \frac{\pi x}{2}\Big|_0^\pi = \underline{\pi^2}$$

VOLUME

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^\pi \sin(z) \cdot \sqrt{1 + \cos^2(z)}$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{2}\cos(x)\sqrt{\cos^2(x) + 1} - \frac{1}{2}\sinh(\cos(x)) \Big|_0^\pi \right]$$

$$= 2\pi\sqrt{2} + \sinh^{-1}(1)$$

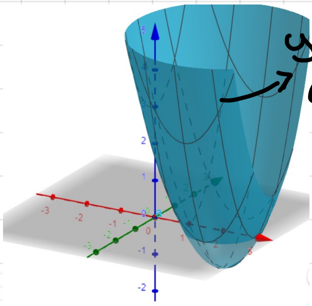
23|07|18

9. Il volume del solido (toro) ottenuto facendo ruotare intorno all'asse z il cerchio $\{y^2 + z^2 - 4y + 3 \leq 0\}$ nel piano yz è

A: N.A. B: $5\pi/6$ C: $\pi^3/6$ D: $\pi^2/4$ E: $4\pi^2$

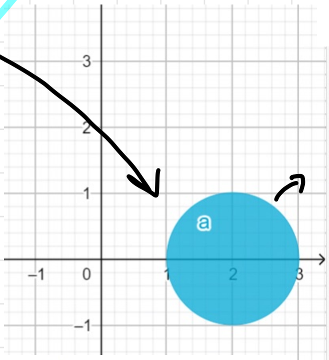
$V = 4\pi R \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 = 8\pi \cdot \frac{1}{2}\pi = 4\pi^2$

PERCHÉ...

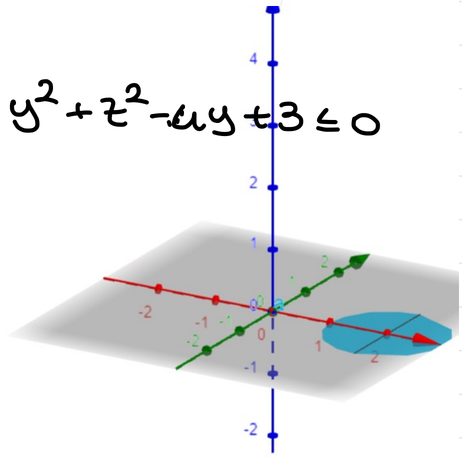


y^2+z^2-4y+3

circonferenza
$(x-2)^2+y^2=1$



$y^2+z^2-4y+3 \le 0$



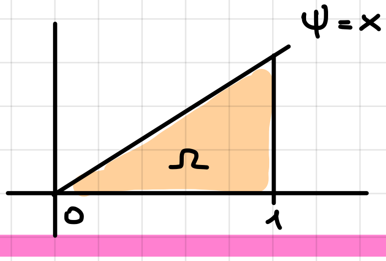
Diciamo che il toro si ottiene ruotando la regione circolare $x^2+(y-R)^2=r^2$ sulla x-asse. Si noti che questa regione circolare è la regione tra le curve: $y=\sqrt{r^2-x^2}+R$ e $y=-\sqrt{r^2-x^2}+R$.

Con il metodo Washer, il volume del solido di rivoluzione può essere espresso come:
$$V=\pi\int_{-r}^{r}\left[\left(\sqrt{r^2-x^2}+R\right)^2-\left(-\sqrt{r^2-x^2}+R\right)^2\right]dx,$$
che semplifica:
$$V=4\pi R\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$
Poiché l'integrale sopra è equivalente all'area di un semicerchio con raggio r, abbiamo
$$V=4\pi R\cdot\frac{1}{2}\pi r^2=2\pi^2r^2R$$

Integrali vari

ESEMPIO 1

$$\int_{\Omega} xy \, dx\, dy \quad \text{dove} \quad \Omega$$



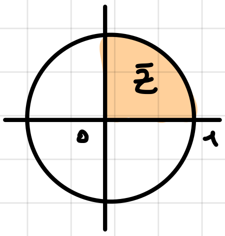
$$\int_{\Omega} xy \, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_{\varphi(x)=0}^{\varphi(x)=x} xy \, dy = \int_0^1 dx \; x \int_0^x y \, dy$$

$$= \int_0^1 dx \; x \left(\frac{1}{2} y^2\right)\Big|_0^x = \int_0^1 x \, \frac{1}{2} x^2 \, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^3 \, dx = \frac{1}{3}$$

ESEMPIO 2

$$\int_{\Xi} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\Xi =$



In questo caso ricordati $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$

Quindi $\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \rho$

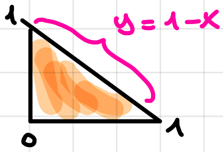
Cambio di variabile

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\rho}\, \rho \, d\rho = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 d\rho = \pi/2$$

↳ det J

ESEMPIO 3

$$\int_{\Delta_1} x^2 e^{xy} \, dy$$

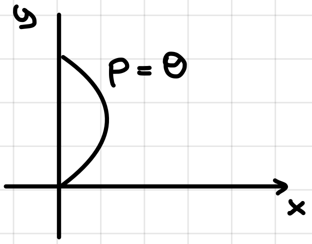


$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 e^{xy} \, dy = \int_0^1 x^2 \, dx \int_0 e^{xy} \, dy$$

$$= \int_0^1 x^2 \, dx \left[\frac{1}{x} e^{xy} \right]_0^{1-x} = \int_0^1 \cancel{x}^2 \frac{1}{\cancel{x}} \left(e^{x(1-x)} - 0 \right) dx$$

$$= \int_0^1 x \, e^{x-x^2} - x \, dx$$

ESEMPIO 4: coordinate polari piane



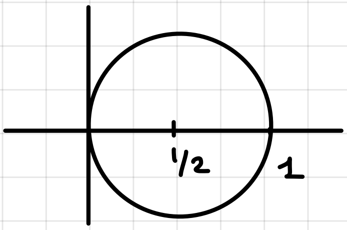
$\theta \in [0, 2\pi] \to$ porzione di spira di Archimede relativa a $\theta \in [0, \pi/2]$

$$|E| = \int_E 1 \, dx \, dy$$

ricordati:
$$\begin{cases} x(\theta) = \theta \cos\theta \\ y(\theta) = \theta \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\theta \underbrace{\rho}_{\text{det Jaco.}} \, d\rho = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \theta^2 \, d\theta = \frac{1}{6} \theta^3 \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{43} \pi^3$$

ESEMPIO 5



$$\iint_E \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

$x^2+y^2-x=0 \to \{(x,y)\in\mathbb{R}: x^2+y^2-x<0\}$

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\rho}$$

Pol

$\{(x,y)\in\mathbb{R}: x^2+y^2-x<0\} \Rightarrow \quad \rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}\theta-\rho\cos\theta<0$

$\rho^2<\rho\cos\theta$ $\quad \rho>0$

$\rho<\cos\theta$

$\cos\theta>0 \leadsto 0<\rho<\cos\theta$

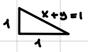
IL DOMINIO IN COORDINATE POLARI È NORMALE RISPETTO A θ DI DISEQU.

$\theta\in\left]-\pi/2,\pi/2\right[\qquad \rho\in\left]0,\cos\theta\right[$

$$\iint_E \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos\theta} d\rho\, \frac{1}{\cancel{\rho}}\cancel{\rho} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\,(\cos\theta-0) = 2$$

ESEMPIO 6

$$\int_{E} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy \qquad E = \{(x,y) : x>0,\ y>0,\ x+y<1\}$$



passo in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

→ funzione $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\rho^2} = \rho$

→ dominio $\begin{cases} \rho\cos\theta > 0 \\ \rho\,\text{sen}\,\theta > 0 \\ \rho\cos\theta + \rho\,\text{sen}\,\theta < 1 \end{cases}$ → $\theta \in [0, \pi/2]$

$$\rho(\cos\theta + \text{sen}\,\theta) < 1$$
$$\rho < \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$$

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{1/\cos\theta+\sin\theta} d\rho = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\, d\theta \underset{t=\tan\frac{\theta}{2}}{=} \int_0^1 \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

⋮ faccio tutti i calcoli

⋮

$= 1{,}25$

ESEMPIO 7

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2}\, dx\, dy$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\left(-\frac{1}{2}\right)(-2\rho)\, d\rho \underset{\substack{-\rho^2 = t \\ 2\rho\, d\rho = dt}}{=} -\pi \int_0^{-\infty} e^{-t}\, dt$$

$= -\pi$ FINE!


O
G
D
O
O
O
D

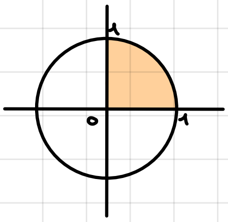
Preappello

ES. A1
Dato $\int \frac{1}{x^2 \cdot y^2}$ e l'insieme porzione di cerchio unitario del 1° quad, inizia i calcoli.

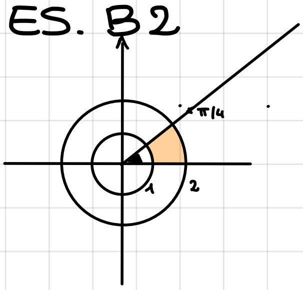
ES. A2
Calcolare lunghezza dell'arco di parabola $y = x^2$ $x \in [0,1]$

ES A3
Studiare integrabilità della forma diff. $y\,dx + x\,dy$

Orale 10/06/21

ES. B1


Calcolare $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ nella regione indicata

ES. B2


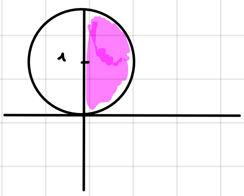
considerando nel primo quadrante
una circonferenza di raggio 1 e
una circonferenza di raggio 2,
Poi considera la bisettrice.
Prendi in considerazione la regione di spazio tra le
circonferenze sotto la bisettrice

Calcolare $\int \frac{1}{x^2+y^2}$

ES. B3
Lunghezza della curva f nel 1° quadrante della circonferenza

ES B4
$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ES B5
Calcolare l'integrale curvilineo esteso alla curva (elica)
$(\cos t, \sin t, t)$ e $f(x,y,z) = x^2 + yz$

ES B6


Prendi il primo quadrante e ci metti
mezza circonferenza con centro (0,1) e
raggio 1

Scrivi insieme in coordinate polari

ES B7

Integrale curvilineo $f(x,y,z) = xy\,sen(z)$

$\gamma(t) = (t, t^2, -t) \quad t \in [0,1]$

ES B8

Lunghezza della curva $\rho = \theta \quad \theta \in [0,\pi]$
in coordinate polari

Orale 11/06/21

ES C1

lunghezza arco curva $\rho = \theta \quad \theta \in [0, \pi/2]$

ES C2

differenziabilità $y = |xy|$ in $(0,0)$

Orale 12/06/21

ES D1

- supponi di prendere l'asse z verticale, y orizzontale sul piano del foglio, e prendi il punto (0,π), e definisci nell'intervallo verticale [0,π] la funzione y=sen(z). Poi ruota la funzoine attorno all'asse e calcola il volume del solido di rotazione.

ES D2

- f(x,y) =x^3+y^3, studiane i punti critici

ES D3

- considera la funzione y=1-z^2 nell'intervallo [-1,1] sull'asse verticale z (y quello orizzontale) [parabola a testa in giu]. ruota il grafico rispetto all'asse z e calcola il volume del solido di rotazione

Orale 14/06/21

ES E1

-studia il differenziale: -y/(√(x²+y²)) dx +x/(√(x²+y²)) dy e supponi di essere nel primo quadrante, il dominio è il primo quadrante senza l'origine. spiega l'integrabilità di questa forma differenziale?

ES E2

-calcola la lunghezza della curva γ(t)=(t²,t³) nell'intervallo [0,1]

ES E3

-prendo la funzione f(x,y)=√(x²+y²) e voglio sapere se è derivabile in (0,0)

ES E4

considera la curva $\rho=\theta/4$, con $\theta\in[0,\pi/2]$, che faresti per calcolare la lunghezza?

ES E5

prendi il semipiano delle x positive. fai una circonferenza di centro (1,0) e raggio 1. come lo scriveresti in coordinate polari?

ES E6

studia la differenziabilità di $f(x,y)=|xy|$ in (0,0). Suggerimento: calcola le derivate parziali nell'origine

Orali 01/07/21

ES F1

- $f(x,y)=x^2+xy+y^2$. Come studieresti i punti critici di questa funzione?

ES F2

- Insieme: primo quadrante, mezza circonferenza di centro (1,0) e raggio 1. Piglia i punti interni. Trasforma l'insieme in coordinate polari

ES F3

- $\lim_{(0,0)} |xy|/(x^2+y^2)$

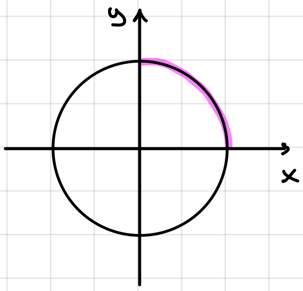
ES F4

- Studia l'integrabilità di $x\,dx + y\,dy$

Tipo 1

ESERCIZIO A1

$\int \frac{1}{x^2 y^2}$ su insieme formato dalla porzione di cerchio unitario nel 1° quadrante



Questo insieme lo posso scrivere come

$\rho = 1 \to$ raggio unitario $\to \rho \in [0,1]$

$0 < \theta < \pi/2$

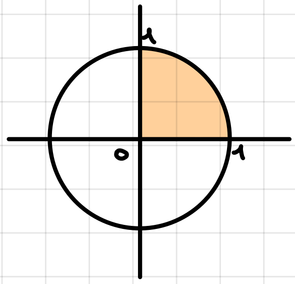
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \to \quad \frac{1}{x^2 y^2} \xrightarrow[\text{polari}]{\text{coordinate}} \frac{1}{\rho^4 \sin^2\theta \cos^2\theta}$$

DET. JACOBIANO

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{\rho^4 \sin^2\theta \cos^2\theta} \cdot \rho}_{\frac{1}{\rho^3}} \, d\rho$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \, \frac{1}{\sin^2\theta \cos^2\theta} \cdot \left[-\frac{2}{\rho^2} \right]_0^1 = \text{non converge}$$

ESERCIZIO B1



Calcolare $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$ nella regione indicata

---

LA regione è $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x^2+y^2<1 \end{cases}$

$\downarrow$

$\rho \in [0,1]$ mentre $\theta \in [0, \pi/2]$

Possiamo anche f in coordinate polari

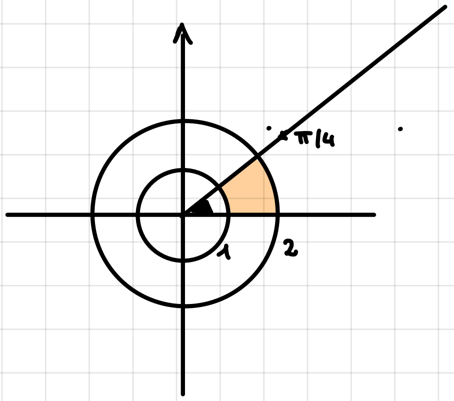
$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{1}{\sqrt{\rho^2}}$$

Quindi

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\rho} \cdot \underbrace{\rho}_{\det|J|}\, d\rho = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 1\, d\rho$$

$$= \int_0^{\pi/2} \theta\, d\theta = \pi/2$$

ESERCIZIO B2



considerando nel primo quadrante
una circonferenza di raggio 1 e
una circonferenza di raggio 2,
Poi considera la bisettrice.
Prendi in considerazione la regione di spazio tra le
circonferenze sotto la bisettrice

Calcolare $\int \frac{1}{x^2+y^2}$

cambio di variabile a coordinate polari piane

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

↑ rho

devo capire ρ e θ in quale intervalli sono compresi

→ valutando le circonferenze $\rho \in [1,2]$

→ $\theta \in [0, \pi/4]$

$\det J = \rho$

$$\int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^2 \frac{1}{\rho^2}\,\rho\, d\rho = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^2 \frac{1}{\rho}\, d\rho = \int_0^{\pi/4} d\theta\ \log|\rho|\Big|_1^2$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log|2|\ d\theta = \log|2|\cdot\frac{\pi}{4}$$

Tipo 2

ESERCIZIO A2

Calcolare lunghezza dell'arco di parabola $y = x^2 x \in [0,1]$

Soluzione

Usiamo la parametrizzazione $\varphi(t) = \varphi(t, t^3) \quad t \in [0,1]$

$$\dot{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt}$$

$$L(\varphi) = \int_0^1 \sqrt{1 + (3t^2)^2}$$

Exercise 3 *Calcolare la lunghezza dell'arco di parabola $y = x^2$ per $x \in [0,1]$.*

Soluzione es. 3. Calcolare la lunghezza dell'arco di parabola $y = x^2$ per $x \in [0,1]$. Usiamo la parametrizzazione

$$\gamma(t) = \left(t, t^2\right), \quad t \in [0,1]$$

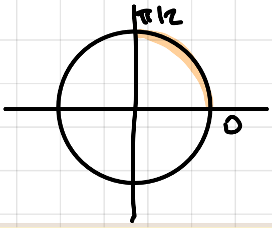
da cui

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + (2t)^2} dt \overset{s=2t}{=} \int_0^2 \frac{1}{2} \sqrt{1 + s^2} ds$$
$$= \left[\frac{x}{4}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{4}\log\left(\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|\right)\right]_0^2$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\log\left(2 + \sqrt{5}\right).$$

ESERCIZIO B3

lunghezza della curva γ nel 1° quadrante della circonferenza

→ calcolo dominio



$$\left.\begin{array}{l}\cos t>0\\ \sin t>0\end{array}\right] \rightarrow 0<t<\pi/2$$

Se $\gamma: [a, b] \to R^n$ è una curva di classe C^1 allora essa è rettificabile e la sua lunghezza $L(\gamma)$ è data dall'integrale:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

In particolare, se γ è una curva piana rappresentata, nell'intervallo [a,b] dall'equazione $y = f(x)$, con $f(x)$ continua con la sua derivata prima, la lunghezza $L(\gamma)$ è espressa da:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

Infine, se la curva γ è rappresentata, nell'intervallo $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ dall'equazione polare

$$\rho = \rho(\theta)$$

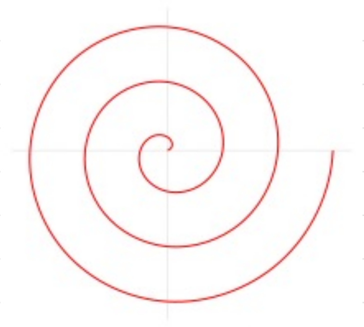
con $\rho(\theta)$ continua con la sua derivata prima, allora si ha:

$$L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = \int_0^{\pi/2} 1\, dt = \pi/2$$

ESERCIZIO C1

lunghezza curva in coordinate polari di $\rho = \theta$ $\quad \theta \in [0, \pi]$



LUNGHEZZA di UNA CURVA

$$\int_a^b \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\, d\theta$$

$\theta = t$

$\rho = t \rightarrow \rho^2 = t^2$

$\dot{\rho} = 1 \rightarrow \dot{\rho}^2 = 1$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{t^2 + 1}\ dt$$

Tipo 3

ESERCIZIO E1

-studia il differenziale: -y/(√(x²+y²)) dx +x/(√(x²+y²)) dy e supponi di essere nel primo quadrante, il dominio è il primo quadrante senza l'origine. spiega l'integrabilità di questa forma differenziale?

$$-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$$

DOMINIO: 1° QUADRANTE
− ORIGINE

Studio l'integrabilità del campo associato → irrotazionale
semplicemente connesso

IL DOMINIO È UN INSIEME È NON LIMITATO
CONVESSO

convesso → stella → semplicemente connesso

IL CAMPO È irrotazionale?

$$\begin{cases} f_x = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ f_y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\partial y} = \frac{-\sqrt{x^2+y^2} + y\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{-\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{-x^2-\cancel{y}+\cancel{y}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{\cancel{x^2}+y^2-\cancel{x^2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Da ricevimento prof. Longo 28/06/21

Appunti Analisi 2
M.Giannini
https://drive.google.com/file/d/1tx55xHg58hMzLPzCJ5hp9C52PZLXTyR2/view

Esempio

$A(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix}$ $\quad A_1(x,y) = x^2 \quad A_2(x,y) = xy$

$A \in C^\infty_{(\mathbb{R}^2)} \Longrightarrow C^1(\mathbb{R}^2)$

$(A_1)_y \overset{?}{=} (A_2)_x$: $(A_1)_y = (x^2)_y = 0$, $(A_2)_x = (xy)_x = y$ → Diverse → CN non verificata

$\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ verifica la condizione del rotore? verifica

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$A \in C^\infty(\Omega)$ $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$

$\int_\gamma A = 0$ → NON può essere integrabile

Verifica

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-(x^2+y^2)-(-y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1(x^2+y^2)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)}$$

→ La condizione del rotore NON è sufficiente

ESERCIZIO A3

Studiare integrabilità della forma diff. $y\,dx + x\,dy$

→ campo associato alla forma

punto di incremento ω

$$y\,dx + x\,dy = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \alpha\left(\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}\right) \qquad A(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

→ adesso bisogna verificare CONDIZIONE del ROTORE

CN perché A sia integrabile su Ω è che
$(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i} \quad \forall\, i=1\dots n$ → $\mathrm{rot}\,A = \nabla \times A \to \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad A_1(x,y) = y \quad A_2(x,y) = x$$

$(A_1)_y \overset{?}{=} (A_2)_x \to \left.\begin{aligned}(A_1)_y &= 1 \\ (A_2)_x &= 1\end{aligned}\right]$ UGUALI! → INTEGRABILE

15/01/2018

3. La forma differenziabile $(2x - y)^{-2}\,(2dx - dy)$

A: è integrabile sul suo dominio, ma i suoi potenziali non differiscono (necessariamente) per una costante B: N.A. C: ~~non è integrabile sul suo dominio, ma è chiusa~~ D: è integrabile sul suo dominio, e i suoi potenziali differiscono per una costante ~~E: non è chiusa~~

FORMA: $(2x-y)^{-2}\,2\,dx - (2x-y)^{-2}\,dy$

$$A_1 = (2x-y)^{-2}\,2 \qquad A_2 = -(2x-y)^{-2}$$

$(2a-y)^{-2}$

$$\to (A_1)_{\underline{y}} = 2\cdot\left((-2)\cdot(2x-y)^{-3}\cdot(-1)\right) = 4\cdot(2x-y)^{-3}$$

$$(A_2)_{\underline{x}} = -\left((-2)\cdot(2x-y)^{-3}\cdot 2\right) = 4(2x-y)^{-3}$$

$-(2x-a)^{-2}$

VARIABILI rispetto alle quali viene effettuata la derivazione

$(A_1)_y = (A_2)_x$ → integrabile
chiusa → SOON

ESERCIZIO C2

È continua? — NO → ✗ NON DIFFERENZIABILE

↓ SI

Ha tutte le derivate parziali? — NO → ✗ NON DIFFERENZIABILE

↓ SI

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

ESISTE ED È NULLO? — NO → ✗ NON DIFFERENZIABILE

↓ SI

✓ DIFFERENZIABILE

Studiare differenziabilità di $|xy|$ in $(0,0)$

1) Continua?

$|xy|$ è continua perché composta:

$g(x,y) = xy$ $\quad C^\infty$

$+$

$t \to |t|$ $\quad C^0$

2) Ha tutte le derivate parziali?

$$f_{e_i}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_i) - f(x_0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(x_0 + 0\cdot t, \dots, x_0 + 1\cdot t, \dots)\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \qquad f_{x_i} \qquad \partial_{x_i} f(x)}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = 0$$

Tipo 4

ESERCIZIO B4

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

posso fare cambio di variabile

$t = x^2 + y^2$

$(x,y) \to 0 \xrightarrow{\text{ALLORA}} t \to 0$

$$\lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}}}_{=1} = 0$$

Tipo 5

ESERCIZIO B7

Integrale curvilineo $f(x,y,z) = xy\sin(z)$

$y(t) = (t, t^2, -t) \in [0,1]$

$$\boxed{\int_\varphi f\, dt = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot |\dot{\varphi}(t)|\, dt}$$

$$f(\varphi(t)) = t \cdot t^2 \sin(-t) = -t^3 \sin(t)$$

$$\dot{\varphi}(t) = (1, 2t, -1)$$

$$|\dot{\varphi}(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 1} = \sqrt{2 + 4t^2}$$

$$\int_0^1 -t^3 \sin t \cdot \sqrt{2 + 4t^2}\, dt$$

ESERCIZIO B5

Calcolare l'integrale curvilineo esteso alla curva (elica)
$(\cos t, \sin t, t)$ e $f(x,y,z) = x^2 + yz$

$$\int_{\text{dom } \varphi} f(\varphi(t)) \cdot |\dot{\varphi}(t)| \, dt$$

$$\dot{\varphi}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$|\dot{\varphi}(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos^2 t) + 1} = \sqrt{2}$$

$$f(\varphi(t)) = \cos^2 t + \sin t \cdot t$$

QUINDI

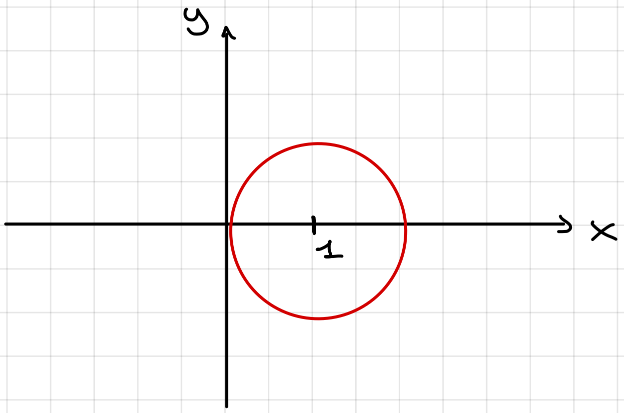
$$\int_{\text{dom } \varphi} (\cos^2 t + \sin t \, t) \sqrt{2} \, dt$$

Ha chiesto solo di impostare i calcoli

Tipo 6

ESERCIZIO E5

prendi il semipiano delle x positive. fai una circonferenza di centro (1,0) e raggio 1. come lo scriveresti in coordinate polari?



La circonferenza ha equazione

$$\boxed{(x - \text{RAGGIO})^2 + \left(y - \substack{\text{coordinata } y \\ \text{del raggio}}\right)^2 = r^2}$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 - 2x + \cancel{1} + y^2 - \cancel{1} = 0$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \rho^2\cos^2\theta - 2\rho\cos\theta + \rho^2\sin^2\theta = 0 \\ \rho\cos\theta > 0 \end{cases}$$

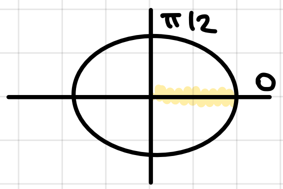
$$\boxed{\text{RICORDATI! } \rho > 0 \quad \theta \in [0, 2\pi]}$$

$$\|$$

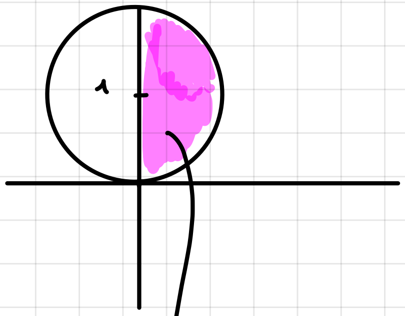
$$\begin{cases} \cancel{\rho}(\rho - 2\cos\theta) = 0 \rightarrow \rho = 2\cos\theta \\ \rho\cos\theta > 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow \cos\theta > 0$

$\hookrightarrow \theta \in [0, \pi/2] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$



ESERCIZIO B6



Prendi il primo quadrante e ci metti mezza circonferenza con centro (0,1) e raggio 1

Scrivi insieme in coordinate polari

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=1 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underbrace{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-2\rho\sin\theta}_{\rho^2-2\rho\sin\theta}+\cancel{1}=\cancel{1} \\ 0<\theta<\pi/2 \end{cases}$$

$$\rho^2-2\rho\sin\theta$$

$$\rho(\rho-2\sin\theta)=0$$

DA CONTROLLARE

Tipo 7

ESERCIZIO D1

- supponi di prendere l'asse z verticale, y orizzontale sul piano del foglio, e prendi il punto (0,π), e definisci nell'intervallo verticale [0,π] la funzione y=sen(z). Poi ruota la funzione attorno all'asse e calcola il volume del solido di rotazione.

$$\boxed{V = \int_a^b \pi f^2(z)\, dz}$$

$$V = \int_0^\pi \pi \sin^2 z \, dz = \pi \int_0^\pi \sin^2 z \, dz$$

$f = \sin z$ $\quad f' = \cos z$
$g = \sin z$ $\quad G = -\cos z$
$fG - \int f'G \, dz$

$$\boxed{\cos^2 x = 1 - \sin^2 z}$$

$$\int \sin^2 z = -\cos z \sin z + \int \cos^2 dz$$

$$\int \cos^2 dz = x - \int \sin^2 dz$$

$$2\int \sin^2 z = -\cos z \sin z + x$$

$$\int \sin^2 z = \frac{-\cos z \sin z}{2} + \frac{x}{2}$$

Quindi

$$\pi \cdot \left[\frac{-\cos z \sin z}{2} + \frac{x}{2} \right] \Bigg|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

Tipo 8

ESERCIZIO F1

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ studiare punti critici

A) si risolve il sistema

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x + y = 0 \\ f_y(x,y) = 2y + x = 0 \end{cases}$$

$y = -2x$

$-4x + x = 0$

$-3x = 0 \rightarrow x = 0$

$y = 0$

B) si calcolano le derivate parziali seconde

$f_{xx} = 2$ $\quad$ $f_{xy} = 1 = f_{yx}$

$f_{yy} = 2$

C) SI CALCOLA HESSIANO

$$H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

SE

HESSIANA NEL PUNTO

- $H(x_0, y_0) > 0$
  - $f_{xx} < 0$ — PNT di MASSIMO RELATIVO
  - $f_{xx} < 0$ — PNT di MINIMO RELATIVO
- $H(x_0, y_0) < 0$ — PNT di SELLA
- $H(x_0, y_0) = 0$ — DEGENERE

Autovalore

Data $A : X \to X$, dim X finita e non nulla, si dirà AUTOVALORE (o VALORE PROPRIO) di A ogni scalare λ per le quale esistono $u \in X$ verificanti $u \neq 0$, $A(u) = \lambda u$

Trovare autovalori

$\det[H - \lambda I]$

- $\rightarrow$ concordi < 0 MASSIMO
- $\rightarrow$ concordi > 0 MINIMO
- $\rightarrow$ discordi SELLA
- $\rightarrow$ $\lambda = 0$ DEGENERE