

# **Appunti di Analisi Matematica II**

*A.A 2023/2024*

*Tommaso Renzoni*



# Indice

Questi appunti sono stati scritti in preparazione ai compitini del corso di Analisi II e rappresentano un tentativo di organizzare in modo chiaro gli argomenti trattati, seguendo le lezioni e gli esempi del prof. Stepanov. Tengo a precisare che **è possibile che ci siano degli errori** e che, in ogni caso, raccomando di integrare questo materiale con le lezioni in presenza e con il libro consigliato.

## Parte 1 - Calcolo differenziale

Lezione 1: Topologia in $\mathbb{R}^n$ , successioni, funzioni .....	1
Lezione 2: Limiti e continuità, curve parametriche .....	4
Lezione 3: Derivabilità e differenziabilità .....	9
Lezione 4: Massima pendenza, velocità istantanea, lunghezza d'arco .....	13
Lezione 5: Chain rule, curve regolari, coordinate sferiche e cilindriche .....	15
Lezione 6: Superfici parametriche .....	19
Lezione 7: Cambi di coordinate, teorema di Fermat, derivate di ordine superiore .....	23
Lezione 8: Sviluppi di Taylor, matrice Hessiana, condizione sufficiente ai max /min .....	28
Lezione 9: Teorema di Dini e moltiplicatori di Lagrange .....	32
Lezione 10: Dimostrazione che 1 è il massimo numero naturale .....	40
Lezione 11: Dimostrazione del teorema dei moltiplicatori di Lagrange .....	42

## Parte 2 - Integrazione

Lezione 12: Idea di volume e integrale di Riemann .....	44
Lezione 13: Calcolo di integrali, teorema di Fubini .....	49
Lezione 14: Integrali multipli, cambio di variabili .....	55
Lezione 15: Esercizi di integrazione, integrali generalizzati .....	59
Lezione 16: Integrali curvilinei .....	65
Lezione 17: Campi conservativi, operatore nabla, teorema di Poincarè .....	69
Lezione 18: Formula di Gauss-Green nel piano, forme differenziali .....	75
Lezione 19: Integrali su superfici .....	82
Lezione 20: Superficie orientabili, teorema della divergenza .....	86
Lezione 21: Teoremi di integrazione per parti, laplaciano, identità di Green .....	89

**Questo materiale è gratuito e ogni sfruttamento economico è da considerarsi abusivo**

# Topologia in $\mathbb{R}^n$ , successioni, funzioni

Analisi 2 studia le funzioni in più variabili, ad esempio la funzione che definisce l'area di un rettangolo:

$$A(x, y) = xy, \quad x, y \in \mathbb{R}^2$$

Nello studio di funzioni reali a variabile reale non si considerano funzioni definite su insiemi più complicati di un intervallo, ma ora non è più possibile descrivere i domini come unione di un numero finito di insiemi di forma semplice. Lo studio di insiemi e proprietà si chiama topologia e le proprietà di una funzione continua dipendono dalle proprietà topologiche di un insieme.

Distanza tra due punti:  $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

Norma euclidea:  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

## 1. Concetti fondamentali

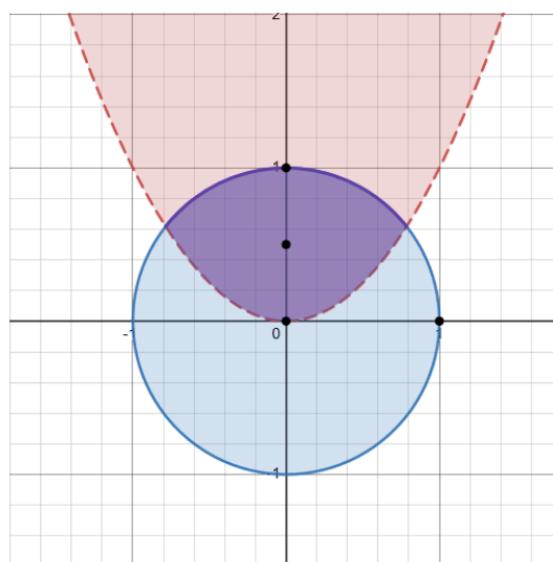
**Palla aperta:**  $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}$ , sfera di raggio  $r > 0$  e centro in  $x \in \mathbb{R}^n$ . Si chiama anche intorno sferico, e una definizione equivalente è  $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$

**Definizione (punto interno, esterno, di frontiera):** Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  si dice:  
interno a  $E$  se  $\exists B_r(x_0) \subset E$

esterno a  $E$  se  $\exists B_r(x_0) \subset E^c$  (complementare di  $E$ )

di frontiera per  $E$  se  $\exists c_1 \in E, c_2 \in E^c : c_1, c_2 \in B_r(x_0) \forall B_r(x_0)$

**esempio:**  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y > x^2\}$



$\left(0, \frac{1}{2}\right)$  è un punto interno ad  $E$ ;  $(1, 0)$  è un punto esterno ad  $E$ ,  $(0, 0)$  è un punto di frontiera per  $E$ ,

ma non appartiene a  $E$ ,  $(0, 1)$  è un punto di frontiera per  $E$  e appartiene a  $E$

Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  è aperto se ogni suo punto è interno a  $E$ , chiuso se il suo complementare è aperto. Si può formulare una definizione equivalente di insieme aperto

**Definizione (insieme aperto):**  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è aperto  $\iff \exists \delta > 0 : B_\delta(x) \subset A \forall x \in A$

**esempio:**  $A = ]0, 1] \times ]0, 1]$  non è aperto, poiché la palla non è completamente contenuta nell'insieme, in ogni suo punto.  $B = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  è aperto poiché gli estremi non sono compresi.

Attenzione: un insieme può essere aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Inoltre  $\emptyset$  e  $\mathbb{R}^n$  sono aperti e chiusi allo stesso tempo.

Possiamo estendere il concetto di intorno sferico con una definizione più generale di intorno: un intorno di  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  è un qualsiasi insieme aperto contenente  $x_0$

**Definizione (bordo di una palla):** Sia  $V \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\partial V := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists v_1, v_2 \in B_\delta(x) \forall \delta > 0, v_1 \in V, v_2 \in V^c \right\}$$

Una palla è un insieme aperto e il suo bordo sono i punti tali che la palla centrata in quel punto interseca sia  $V$  che  $V^c$

**esempio:** in  $\mathbb{R}^2$  il bordo della palla è una circonferenza. In  $\mathbb{R}$  la palla è un segmento aperto e il bordo sono gli estremi.

**Definizione (insieme limitato):** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$A$  è limitato  $\iff \exists r > 0, x \in \mathbb{R}^n : A \subset B_r(x)$   
oppure se  $\exists k > 0 : |x| < k \forall x \in A$

**esempio:**  $B = ]0, 1[ \times ]0, 1[^2$  è un quadrato, ed è limitato.

## 2. Successioni

$\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^n$  è una successione

**Definizione ( $x_n$  convergente):** Sia  $x_n \in \mathbb{R}^n$  una successione,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l \in \mathbb{R}^n \iff \forall \delta > 0 \exists \bar{n}_\delta > 0 : x_{\bar{n}} \in B_\delta(l) \forall n > \bar{n}$$

ovvero, presa una palla nell'origine, tutte le  $x_n$  rientrano nella palla (definitivamente)

Osservazione:  $v_n = (x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v = (x, y) \iff d(v_n, v) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , ovvero la distanza tra l'origine e la successione tende a 0 se e solo se entrambi gli addendi tendono a 0.

**esempio:**  $v_n = ((-1)^n, -1) \in \mathbb{R}^2$ , questa successione rappresenta i punti  $(1, -1)$  e  $(-1, -1)$ , non ha limite, poiché non si può "intrappolare" nella palla

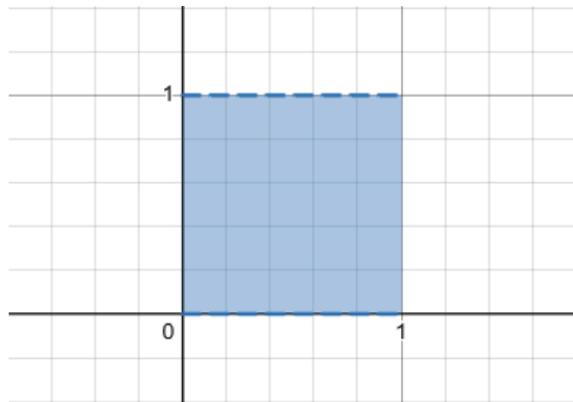
Possiamo ora dare un'altra definizione di insieme chiuso:

**Definizione (insieme chiuso):** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$A$  è chiuso  $\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v \implies v \in A \quad \forall \{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$

ovvero,  $A$  è chiuso se contiene tutti i limiti di tutte le successioni

**esempio:**  $B = ]0, 1[^2$  non è chiuso poiché una successione può tendere al lato del quadrato, dove non è presente la figura.



$B = ]0, 1] \times ]0, 1]$  non è chiuso,  $B = [0, 1]^2$  invece è chiuso e limitato.

### 3. Funzioni

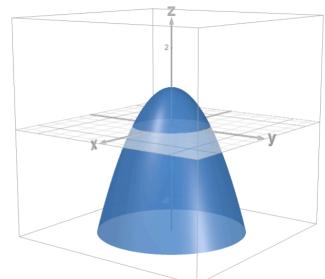
$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  è una funzione.

**Casi particolari:**

- $n = 1, k = 1$ : funzioni di una variabile, viste ad analisi 1
- $n \geq 1, k = 1$ : funzioni scalari
- $n = 1, k \geq 1$ : curve (parametriche)
- $n \geq 1, k > 1$ : funzioni vettoriali

**esempio:**  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

$D(f) = \mathbb{R}^2, Im(f) = f(\mathbb{R}^2), graph(f) = \{(x, y, f(x)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$



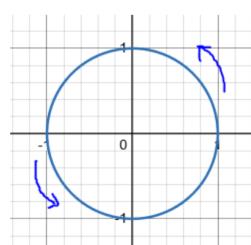
$f(\mathbb{R}^2) = ]-\infty, 1]$ . Per verifica, 1 è nell'insieme, ed è il massimo. Se prendo  $\alpha < 1$  riesco a trovare

$$(x, y) : 1 - x^2 - y^2 = \alpha \iff x^2 + y^2 = 1 - \alpha \text{ (equazione di una circonferenza)}$$

**esempio 2:** Una formica si muove sul piano  $O_{xy}$  secondo la legge  $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi[$

$f : [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  si chiama curva.

Non è solo una circonferenza, conosco anche la velocità e la direzione



## Limiti e continuità, curve parametriche

### 1. Limiti e continuità

**Definizione (funzione convergente):** Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $l \in \mathbb{R}^k$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff x_k \rightarrow x_0 \implies f(x_k) \rightarrow l \quad \forall x_k \in \mathbb{R}^n$$

ovvero  $|f(x_k) - l| \rightarrow 0$

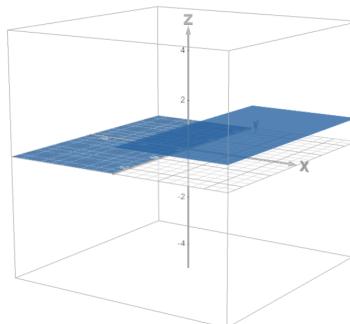
**Definizione (funzione continua):** se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  allora  $f$  è continua

**esempio:**  $f(x, y) = \sqrt{1 + \ln^2(x^2 + y^2 + 1)}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$D(f) = \mathbb{R}^2$ , questa funzione è continua perché composizione di funzioni continue

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y) = f(0, 1) = \sqrt{1 + \ln^2(2)}$$

**esempio 2 (funzione di Heaviside):**  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$



$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} f(x, y) = N.E.$  poiché per  $x_k \geq 0$  si ha che  $(x_k, y_k) \rightarrow 0 \implies f(x_k, y_k) \rightarrow 1$ ,  
per  $x_k < 0$  si ha che  $(x_k, y_k) \rightarrow 0 \implies f(x_k, y_k) \rightarrow 1$

**esempio 3 (teorema del confronto):**  $f(x, y) = \frac{x^4}{x^2 + y^2}$

$$D(f) = \mathbb{R}^2 - \{0\}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow 0} f(x, y) = ?$$

L'origine è nel bordo del dominio di definizione. In qualunque altro punto del dominio si può calcolare il limite per sostituzione diretta. Qual'è il comportamento asintotico al bordo?

$$f(x, y) = x^2 \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq x^2 \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = x^2 \implies \begin{matrix} 0 \leq f(x, y) \leq 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{matrix}$$

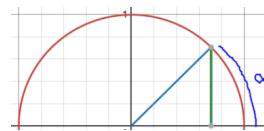
**esempio 4 (passaggio alla forma polare):**  $f(x, y) = \frac{\sin^2(xy)}{x^2 + y^2}$

$$D(f) = \mathbb{R}^2 - \{0\}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow 0} f(x, y) = ?$$

In generale,  $|\sin \alpha| \leq \alpha$

Questo perché l'angolo  $\alpha$  è la lunghezza d'arco, che è chiaramente più grande della componente verticale. Per dimostrarlo si utilizza lo sviluppo di Taylor.

$$\Rightarrow \sin^2(xy) \leq x^2y^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{\sin^2 xy}{x^2y^2} \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$



Purtroppo non posso usare il teorema del confronto, passo allora alle coordinate polari.

$$(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \Rightarrow \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{\rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} = \rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \leq \rho^2 \rightarrow 0$$

questo perché  $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \rho = 0$

**Definizione (limite all'infinito):** Sia  $v$  un vettore di  $\mathbb{R}^n$

$$v_k \rightarrow +\infty \Leftrightarrow |v_k| \rightarrow +\infty \text{ per } k \rightarrow +\infty$$

Questo vuol dire che il modulo di  $v_k$  tende a infinito con l'aumentare di  $k$ . Questo si verifica quando almeno una delle componenti  $v_{ki}$  di  $v_k$  cresce indefinitamente in modulo.

$v_k = (v_{k1}, \dots, v_{kn})$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = \left( \lim_{k \rightarrow +\infty} v_{k1}, \dots, \lim_{k \rightarrow +\infty} v_{kn} \right)$ . Se ciascuna componente tende a un

valore definito allora il limite del vettore nel suo insieme esisterà.

**esempio:**  $\lim_{(x,y) \rightarrow +\infty} xy \cdot e^{-(x^2+y^2)} = ?$

$$|xy \cdot e^{-(x^2+y^2)}| = \rho^2 |\sin \theta \cos \theta| e^{-\rho^2} \leq \rho^2 e^{-\rho^2} = \frac{\rho^2}{e^{\rho^2}} \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} 0$$

Allora  $\begin{matrix} -\rho^2 e^{\rho^2} & \leq f(x, y) & \leq \rho^2 e^{-\rho^2} \\ \rightarrow 0 & \rightarrow 0 & \rightarrow 0 \end{matrix}$  per il teorema del confronto

**esempio 2:**  $\lim_{(x,y) \rightarrow +\infty} xy \cdot e^{(x^2+y^2)} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \rho^2 \sin \theta \cos \theta e^{\rho^2} \neq +\infty$

Poiché per  $\theta = 0$ ,  $xy e^{(x^2+y^2)} = 0 \rightarrow 0$ , per  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho^2 \frac{e^{\rho^2}}{2} \rightarrow +\infty$

Se mi allontano dall'origine allora la funzione va a  $+\infty$ , se mi allontano lungo l'asse  $x$  va a 0, quindi il limite non esiste

**esempio 3:**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{(y-1)^2 \sin \pi x}{(x-2)^2 + (y-1)^2} = ?$

la funzione non è definita al bordo. Numeratore e denominatore tendono a 0, ma "vince" il numeratore.

$\frac{(y-1)^2}{(x-2)^2 + (y-1)^2} \sin \pi x = A(x, y) \sin \pi x$  con  $0 \leq A(x, y) \leq 1$ . In generale, il rapporto tra polinomi è sempre una quantità limitata.

Quindi  $|f(x, y)| = |A(x, y)| \cdot |\sin \pi x| \leq 1 \cdot |\sin \pi x| \rightarrow 0$ , ho maggiorato  $f(x, y)$  con qualcosa che tende a 0 per  $(x, y) \rightarrow (2, 1)$ . Addirittura,  $y$  può tendere a qualsiasi valore.

$$\begin{aligned} -|\sin \pi x| &\leq f(x, y) \leq |\sin \pi x| \\ \rightarrow 0 &\quad \rightarrow 0 \quad \rightarrow 0 \end{aligned}$$

**Esempio 4:**  $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{x} = N.E.$  poiché se  $y = 0$ ,  $f(x, y) = \frac{x^2}{x} \rightarrow 0$ . Se  $y = \sqrt{x}$   $f(x, y) = \frac{x^2 + x}{x} = x + 1 \rightarrow 1$ . Se mi avvicino lungo l'asse  $x$ , il limite fa 0, se mi avvicino lungo la funzione  $\sqrt{x}$ , il limite fa 1.

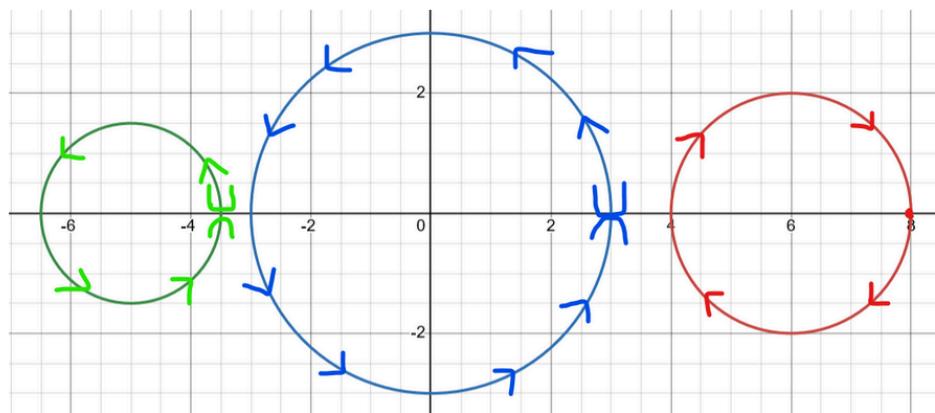
## 2. Curve parametrizzate nello spazio

**Definizione (curva parametrica):** Sia l'intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$   
 $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  si chiama curva parametrica

Per  $t \in I$ ,  $r(t) \in \mathbb{R}^n$  ci dice dove sta l'oggetto al tempo  $t$ .  $r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$  dove ogni componente è una funzione scalare a variabile reale. Una curva è un **vettore di funzioni**.

- **Curva continua:** ogni componente è continuo, ovvero l'oggetto si muove "senza salti".
- **Curva differenziabile:** ogni componente è differenziabile:  $\dot{r}(t) = (\dot{r}_1(t), \dots, \dot{r}_n(t))$   
 (Questa notazione si utilizza in fisica per comunicare che la curva è in funzione del tempo).
- **Sostegno della curva:**  $r(I)$ , ovvero l'immagine

**Esempi:**  $r(t) = \left( \frac{3}{2} \cos t - 5, \frac{3}{2} \sin t - 5 \right)$ ,  $s(t) = (3 \cos t, 3 \sin t)$ ,  $q(t) = (2 \sin t + 6, 2 \cos t + 6)$   
 $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $s : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $q : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

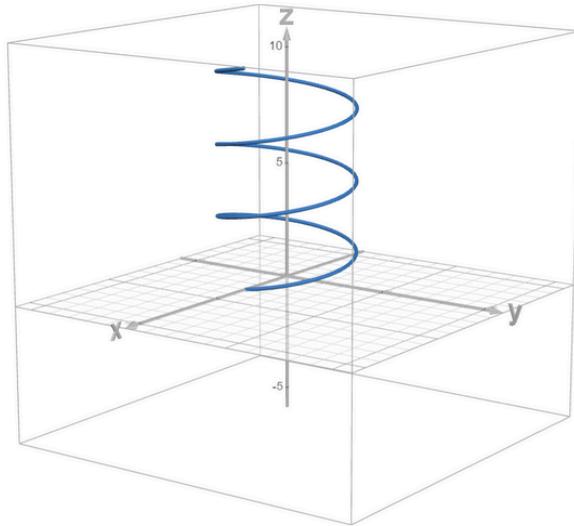


Il sostegno delle curve è la circonferenza, ma non ci fornisce abbastanza informazioni.

**Esempio 2:**  $r(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$

Ellisse di equazione  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  in direzione antioraria

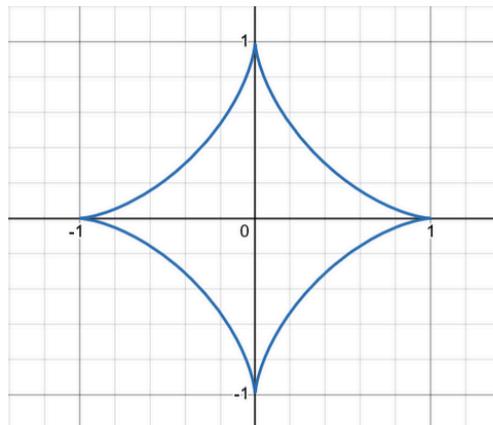
**esempio 3 (elica cilindrica):**  $r(t) \in \mathbb{R}^3$ ,  $r(t) = (a \cos t, a \sin t, vt)$ ,  $a, v > 0$ ,  $t \in [0, 6\pi]$   
 Sul piano  $O_{xy}$  rappresenta una circonferenza di raggio  $a$ . Sull'asse  $z$  va con velocità lineare  $v$



**esempio 4 (astroide):**

Il luogo geometrico dei punti tali che  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$  si chiama astroide. Questa eq definisce un qualche oggetto nel piano che però non è una curva.

$f(x, y) = \text{tutti gli } (x, y) : x^{2/3} + y^{2/3} = 1$  (ovvero gli insiemi di livello)



Attenzione: il termine curva viene spesso utilizzato per riferirsi agli insiemi di livello o al sostegno.

Una curva è invece una parametrizzazione dell'astroide, come ad esempio  
 $r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , ma anche altre...

## 2.1. Linee di livello

Le linee di livello sono equazioni del tipo  $f(x, y) = k$  costante. Le curve di livello sono più fitte dove il grafico della funzione è più ripido.

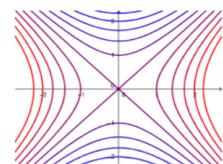
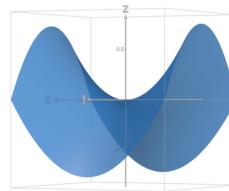
Più in generale, se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Le curve di livello sono  $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = k\}$

**esempio:**

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

Le sue linee di livello sono le curve  $x^2 - y^2 = k$

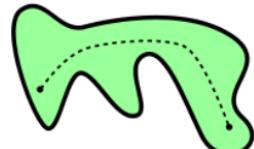


## 2.2. Insiemi connessi per archi

**Definizione (insieme connesso per archi):** Sia  $E \subset \mathbb{R}^n$

$E$  si dice *connesso per archi* se per ogni coppia di punti  $x, y \in E$ , esiste una curva parametrica  $\gamma$  continua che connette  $x, y$

Ovvero  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(1) = y$ ,  $\gamma(t) \in E \forall t \in [0, 1]$



**esempi:**

- Un cerchio in  $\mathbb{R}^2$  è connesso per archi
- Un anello in  $\mathbb{R}^2$  non è connesso per archi
- $E := \mathbb{R}^2 - \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$  non è connesso per archi
- $E := \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$  è un insieme connesso per archi, poiché ho tolto una curva chiusa di dimensione inferiore.

## 2.3. Teorema degli zeri

**Teorema (Teorema degli zeri):** Sia  $E \subset \mathbb{R}^n$  connesso per archi e sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continua  
Se  $x, y \in E : f(x) \leq 0, f(y) \geq 0 \implies \exists z \in E : f(z) = 0$

**Dimostrazione:**

Senza perdere generalità assumo  $f(x) < 0, f(y) > 0$

Sia  $\Gamma : [a, b] \rightarrow E$  una curva continua tale che  $\Gamma(a) = x, \Gamma(b) = y$

$f \circ \Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua perché composizione di funzioni continue.

Allora  $\exists t \in [a, b] : (f \circ \Gamma)(t) = 0$ , grazie al teorema degli zeri di Analisi 1  $\square$

**Corollario** Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una curva continua e sia  $E := \{x : f(x) \neq 0\}$

Se  $E$  è connesso per archi, allora  $f$  non cambia segno su  $E$

## 2.4. Teorema di Weierstrass

**Teorema (Teorema di Weierstrass):** Sia  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $E$  compatto (ovvero chiuso e limitato) e con  $f$  continua

Allora  $\exists x_1 \in E, x_2 \in E : f(x_1) = \min_{y \in E} f(y), f(x_2) = \max_{y \in E} f(y)$

## Derivabilità, differenziabilità

### 1. Derivate direzionali e parziali

**Definizione (derivata direzionale):** Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \epsilon v) - f(x_0)}{\epsilon |v|}$$

con  $v$  vettore di  $\mathbb{R}^n$

Significa fare la derivata della funzione a più variabili per la direzione di  $v$ . Nel caso  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , posso derivare per ogni direzione del piano:  $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \epsilon v_1, y_0 + \epsilon v_2) - f(x_0, y_0)}{\epsilon |v|}$  e  $x(t) = x_0 + vt$  è l'equazione parametrica della retta lungo cui si deriva.

Una **definizione equivalente** è  $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(x_0 + tv)$

ovvero restringo  $f$  alla retta uscente da  $x_0$  in direzione di  $v$

**Osservazione:** la condizione che  $A$  sia un insieme aperto è data dal fatto che è necessario che  $x_0 + \epsilon v$  faccia parte del dominio.

**Definizione (derivata parziale):** Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \epsilon e_j) - f(x_0)}{\epsilon}$$

con  $e_j$  la  $j$ -esima componente della base canonica di  $\mathbb{R}^n$

Le derivate parziali sono particolari derivate direzionali, corrispondenti alle derivate lungo i vettori canonici.

Una **definizione equivalente** è  $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(x_0 + te_j)$ ,

ovvero restringo  $f$  alla retta uscente da  $x_0$  in direzione di  $e_j$

**Notazioni:**  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \partial x_i f \equiv \partial_i f \equiv f_{x_i} \equiv D_{x_i} f$  e tante altre...

Se  $f$  è derivabile in  $x_0$ , ovvero se esistono tutte le derivate parziali, posso introdurre il **gradiente**:

$$\nabla f(x_0) := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

Se, al posto di una funzione scalare, ho una funzione a valori vettoriali  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  e ogni componente di  $f$  è derivabile, allora posso scrivere la **matrice jacobiana** della funzione:

$$Df_{n \times k} := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$(k = 1 \implies Df = \nabla f(x_0))$

**esempio:**  $\nabla f(x, y) = \nabla(x^2 + y^2 + xy) = (2x - y, 2y - x)$

**esempio 2:**  $f(x, y, z) = ze^{x^2+y}$

$Dom(f) = \mathbb{R}^3$ ,  $f$  è continua in tutto il dominio

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2xze^{x^2+y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = ze^{x^2+y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f_z = e^{x^2+y}$$

$$\nabla f = (2xze^{x^2+y}, ze^{x^2+y}, e^{x^2+y}), \quad \nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$$

**esempio 3 (funzione non derivabile):**  $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$

$Dom(f) = \mathbb{R}^2$ ,  $f$  è continua in  $\mathbb{R}^2$

$$f_x = x \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \implies \text{non esiste derivata parziale in } (0, 0)$$

$$f_y = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \implies (x, y) \neq (0, 0)$$

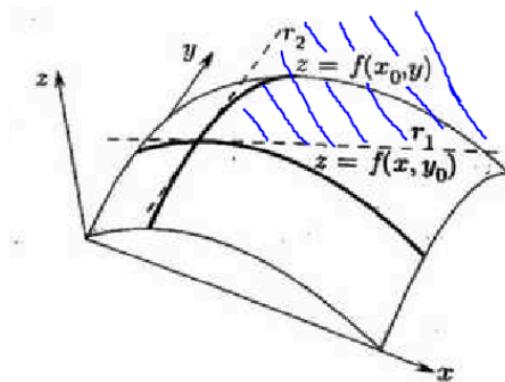
## 2. Differenziabilità

### 2.1. Piano tangente in $\mathbb{R}^3$

Proviamo a trovare il piano tangente ad una curva  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

Prendo la retta  $r_1$  tangente alla curva  $z = f(x, y_0)$  e la retta  $r_2$  tangente

alla curva  $z = f(x, y_0)$ . Intersecandosi individuano il piano tangente alla curva  $z = f(x, y)$



$$r_1 : \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + f_{x_0}(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + f_{y_0}(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}$$

Il piano ha equazione  $z = f(x_0, y_0) + f_{x_0}(x - x_0) + f_{y_0}(y - y_0)$ , ma non posso dire che è sicuramente il piano tangente!

Il problema è che il piano tangente deve contenere, anche tutte le rette tangenti alle altre curve che si ottengono sezionando il grafico con un piano verticale qualsiasi (tutte le direzioni!). Se in  $\mathfrak{R}$ , la derivabilità implica la continuità ed equivale all'esistenza della retta tangente, in  $\mathfrak{R}^n$  non implica né la continuità né l'esistenza del piano tangente.

Ad analisi 1 abbiamo visto che la proprietà fondamentale della retta tangente è che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{o(h)}{h},$$

ovvero  $f(x)$  si avvicina a  $f(x_0)$  più di quanto  $x$  si avvicina ad  $x_0$ . Il concetto analogo è quello di differenziabilità in più variabili:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = f_{x_0} + f_{y_0} + \frac{o(\sqrt{h^2 + k^2})}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Se questa condizione è verificata, il piano tangente è  $z = f(x_0, y_0) + f_{x_0}(x - x_0) + f_{y_0}(y - y_0)$  e si dice che la funzione è **differenziabile**.

## 2.2. Differenziabilità

**Definizione (funzione differenziabile):** Sia  $f : A \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $A$  aperto.  $f$  si dice *differenziabile in  $x_0 \in A$*  se

$$\exists l \in \mathfrak{R}^n : f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + o(|x - x_0|) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

$x_{n+1} = f(x_0) + l(x - x_0)$  è l'equazione dell'iperpiano tangente in  $x_0$

In modo equivalente,  $f$  è differenziabile se  $\exists l \in \mathfrak{R}^n : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - lh}{h} = 0$

**Teorema (differenziabilità  $\implies$  derivabilità):** Sia  $f$  differenziabile in  $x_0$ , allora  $f$  è derivabile in tutte le direzioni di  $x_0$  e  $f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$

**Osservazioni:**

- Nel caso unidimensionale,  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$ . Ora è la stessa cosa, ma anziché  $f'(x_0)$  scriviamo  $\nabla f(x_0)$ . Questo generalizza il concetto di differenziabilità in  $\mathfrak{R}$ .

- Il gradiente si considera come vettore riga perché, essendo un vettore  $x_0$  un vettore colonna,
- $\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$  è un prodotto scalare che restituisce una matrice  $1 \times 1$
- Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  con  $k \geq 1$ , allora  $f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$

**Dimostrazione:**

Ipotesi:  $f$  è differenziabile

Tesi:  $\exists v \in \mathbb{R}^n : \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \epsilon v) - f(x_0)}{\epsilon |v|}$

$$f(x_0 + \epsilon v) = f(x_0) + l\epsilon v + o(|\epsilon v|) = f(x_0) + l\epsilon v + |\psi|o(\epsilon) = f(x_0) + l\epsilon v + o(\epsilon)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon l v + o(\epsilon)}{\epsilon |v|} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{l v}{|v|} + \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \right) \frac{1}{|v|} = l \frac{v}{|v|}$$

Ora dimostro che  $l$  è il vettore gradiente ed ho fatto

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \frac{v}{|v|} l \implies \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = l \frac{e_j}{1} = l e_j = l_j \forall j. \text{ Quindi } l = \nabla f(x_0) \quad \square$$

**Osservazione:**

Dalla dimostrazione ho scoperto che la derivata direzionale è il prodotto scalare del gradiente per il vettore unitario di  $v$ , se  $f$  è differenziabile.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \frac{v}{|v|}$$

**Teorema (Teorema del differenziale totale):** Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto, tale che esistono  $f_{x_j}$  continue per ogni  $j$ . Allora  $f$  è differenziabile in ogni punto di  $A$

$C^1(A)$  è l'insieme di tutte le funzioni con derivate parziali continue in  $A$ .  $C(A)$  è l'insieme di funzioni continue in  $A$ .

## Massima pendenza, velocità istantanea, lunghezza d'arco

Come riscaldamento, alcuni esempi di funzioni differenziabili e non.

**esempio:**  $f(x, y) = e^x y + x \cos y$

$$\nabla f(x, y) = (e^x y \cos y, e^x - x \sin y)$$

Il piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(1, 2)$  è  $z = f(1, 2) + \nabla f(1, 2)(x - 1, y - 2) = 2e + \cos 2 + (2e + \cos 2)(x - 1) + (e - \sin 2)(y - 2)$

$$f \text{ differenziabile} \implies \text{derivabile. } v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{\partial f}{\partial v}(1, 2) = \nabla f(1, 2)v = \frac{1}{\sqrt{2}}(3e + \cos 2 - \sin 2)$$

**esempio:**  $f(x, y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}}$

Non posso dire a priori che è differenziabile in tutti i punti. Sicuramente è derivabile in  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  perché prodotto di funzioni derivabili.

Calcolo intanto la derivata parziale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \frac{d}{dt} f(0 + t, 0) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left( t^{\frac{2}{3}} \cdot 0 \right) \Big|_{t=0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \frac{d}{dt} f(0, 0 + t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left( 0 \cdot t^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_{t=0} = 0$$

Quindi so che esistono le derivate parziali e  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$

- Per vedere se è differenziabile in  $(0, 0)$ , considero  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $|v| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \frac{d}{dt} f(0 + tv_x, 0 + tv_y) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (tv_x)^{\frac{2}{3}} (tv_y)^{\frac{1}{3}} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left( tv_x^{\frac{2}{3}} v_y^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_{t=0} = v_x^{\frac{2}{3}} v_y^{\frac{2}{3}}$$

Quindi  $f$  non è differenziabile in  $(0, 0)$ , perché  $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) \neq \nabla f(0, 0) \cdot v = 0$  (falso per  $v_x, v_y \neq 0$ )

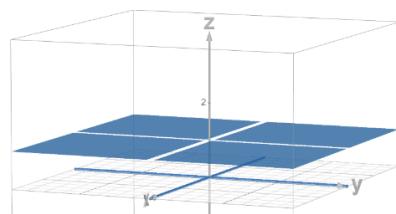
- Se vogliamo dimostrare che è differenziabile in ogni altro punto, prendo  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$

$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{2}{3} x_0^{-\frac{1}{3}} y_0^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3} x_0^{\frac{2}{3}} y_0^{-\frac{2}{3}} \right)$ . Se prendo un intorno  $r := B_\epsilon(x_0, y_0)$ , le derivate parziali sono continue in questo intorno, quindi  $f$  è differenziabile ovunque su  $r$ , in particolare su  $(x_0, y_0)$

**esempio:**  $f(x, y) = \begin{cases} 0, & x = 0 \vee y = 0 \\ 1, & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$$

$$v = (v_x, v_y) : v_x \neq 0, v_y \neq 0$$



$g(t) := f(0 + tv_x, 0 + tv_y)$  non è continua in 0, quindi  $f$  non è differenziabile.

In questo caso esistono le derivate parziali, ma  $f$  non è manco continua!

## 1. Direzione di massima pendenza

Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $x_0 \in A$  aperto

$$v \in \mathbb{R}^n, |v| = 1, \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v, \left| \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \right| = |\nabla f(x_0) \cdot v| \leq |\nabla f(x_0)| \cdot |v|$$

(diseguaglianza di Cauchy - Schwarz)

La norma euclidea del gradiente è maggiore o uguale della derivata direzionale in ogni direzione. Quindi la direzione di  $\nabla f(x_0)$  è la massima pendenza del grafico di  $f$  in  $x_0$  e  $|\nabla f(x_0)|$  è il suo valore.  $\nabla f(x_0)$  è perpendicolare alla curva di livello.

## 2. Gradiente di una curva parametrica

Sia  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva parametrica,  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

Se  $t_0 \in I$ , allora  $\gamma_j = \gamma_j(t_0) + \dot{\gamma}_j(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|)$ , per  $t \rightarrow t_0$

dove  $\dot{\gamma}(t_0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_0 + \epsilon) - \gamma(t_0)}{\epsilon}$  è il vettore velocità nell'istante  $t_0$  (velocità istantanea)

- Equazione della retta tangente a  $\gamma$  in  $t_0$ :  $x = \gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0)(t - t_0)$
- La lunghezza d'arco della curva parametrica è  $l(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$

**esempio: (perimetro della circonferenza)**

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = a \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

$$t_0 = \frac{\pi}{4}, \gamma(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \end{bmatrix} = \frac{a}{\sqrt{2}}(-1, 1)$$

$$\text{La retta tangente a } \gamma \text{ in } t_0 \text{ è } v(t) = \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}}\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}}\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$$

$$|\dot{\gamma}(t)| = |(-a \sin t, a \cos t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} = \sqrt{a^2} = |a|$$

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_0^{2\pi} |a| dt = 2\pi |a|$$

# Chain rule, curve regolari, sistemi di coordinate 3D

## 1. Recap

Abbiamo visto che se  $f$  è differenziabile, il suo grafico è ben approssimabile in un intorno di  $x_0$  con un oggetto lineare (affine) in  $x$ . Ad esempio, in  $\mathbb{R}^3$ , vuol dire che  $f$  è ben approssimabile con un piano tangente in  $x_0$

- $$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) \text{ dove}$$
- $f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$  si dice "affine",
  - $Df(x_0)(x - x_0)$  è lineare in  $x_0$  ("fine").

Abbiamo visto che se  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile in  $x_0 \in A$  allora

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : |v| = 1 \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := f'_t(x + tv) \Big|_{t=0}$$

## 2. Chain rule

Generalizzazione della derivata della funzione composta, già vista ad analisi 1.

Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una curva e sia  $\theta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow A$  una funzione vettoriale che ha come valori delle curve  $\theta(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_n(t))$ . Sia  $g(t) := f \circ \theta(t) = f(\theta_1(t), \dots, \theta_n(t))$ .

$$g'(t_0) = \nabla f(\theta(t_0)) \cdot \dot{\theta}(t_0)$$

### Dimostrazione:

Sia  $\theta$  differenziabile in  $t_0$  e  $f$  differenziabile in  $x_0 = \theta(t_0)$

$$\begin{aligned} f(\theta(t)) &= f(x_0) + \nabla f(x_0)(\theta(t) - x_0) + o(|\theta(t) - x_0|) = \\ &= f(\theta(t_0)) + \nabla f(\theta(t_0))(\theta(t) - \theta(t_0)) + o(|\theta(t) - \theta(t_0)|) \text{ per } t \rightarrow t_0 \end{aligned}$$

Poichè  $t - t_0 \implies \theta(t) \rightarrow \theta(t_0) = x_0$

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \dot{\theta}(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|) \text{ per } t \rightarrow t_0$$

Quindi

$$f(\theta(t)) = f(\theta(t_0)) + \nabla f(\theta(t_0))(\dot{\theta}(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|) + o(|\dot{\theta}(t_0)(t - t_0)|) + o(|t - t_0|))$$

Per il teorema di Cauchy-Schwarz e per le proprietà degli  $o$  piccoli:

$$o(|\dot{\theta}(t)(t - t_0) + o(|t - t_0|)|) \leq o(|\dot{\theta}(t)| \cdot |t - t_0| + o(|t - t_0|)) = o(|t - t_0|)$$

Quindi  $f(\theta(t_0)) = f(\theta(t_0)) + \nabla f(\theta(t_0)) \cdot \dot{\theta}(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|)$

$$g(t) = g(t_0) + f(\theta(t_0)) + \nabla f(\theta(t_0)) \cdot \dot{\theta}(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|) \text{ per } t \rightarrow t_0$$

Ovvero,  $g(t)$  è differenziabile in  $t_0$  e  $g'(t_0) = \nabla f(\theta(t_0)) \cdot \dot{\theta}(t_0)$   $\square$

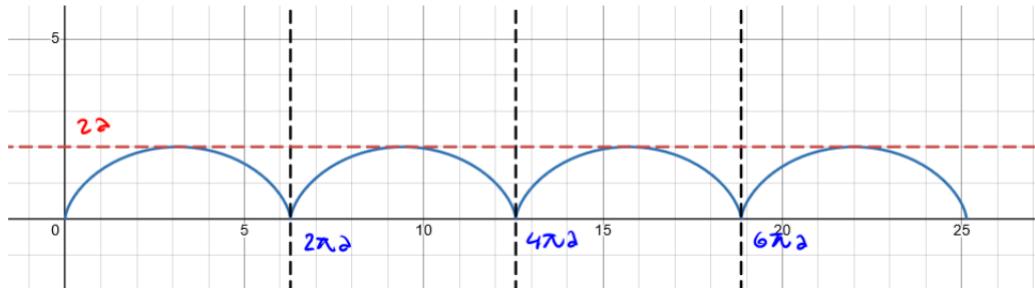
### Osservazione:

Supponiamo che  $f(\theta(t))$  sia costante. Allora  $\frac{d}{dt}f(\theta(t)) = \nabla f(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) = 0$  ovvero  $\nabla f(x_0)$  è perpendicolare al piano tangente all'insieme di livello (che esiste poiché  $\theta$  è differenziabile)

### 3. La cicloide

Sia  $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$  con  $t \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$

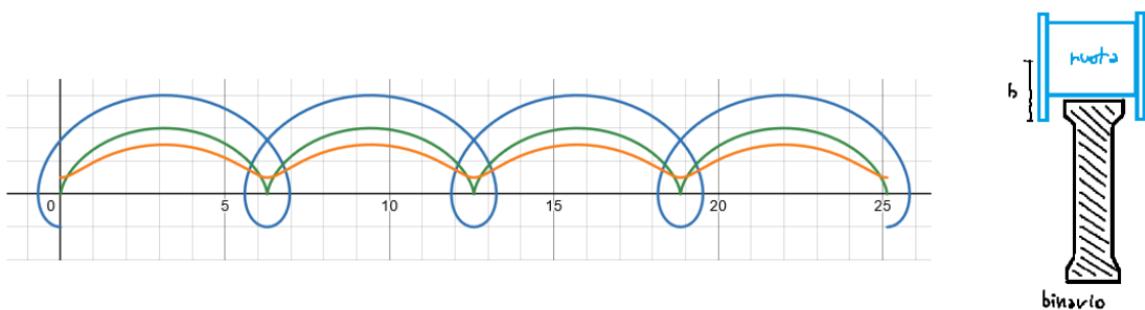
$\gamma(t)$  definisce la cicloide: luogo geometrico dei punti su una circonferenza che rotola senza strisciare su una retta.



$$\begin{aligned}\gamma(t + 2\pi) &= (x(t + 2\pi), y(t + 2\pi)) = (a(t + 2\pi - \sin t), a(1 - \cos t)) = \gamma(t) + 2\pi a(1, 0) \\ &= \gamma(t) + 2\pi a e_1\end{aligned}$$

Posso anche assumere che il punto che osservo non si trovi esattamente sulla circonferenza  $\gamma_1(t) = (at - b \sin t, a - b \cos t)$  dove  $a$  è il raggio della circonferenza e  $b$  la distanza del punto dal centro della circonferenza.

- $b = a$ : cicloide ordinaria
- $b < a$ : cicloide accorciata
- $b > a$ : cicloide allungata (ad esempio la ruota dei treni, dove la ruota scende sotto il livello del binario)



$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} a - b \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, b \sin t = 0 \implies t = k\pi, \gamma(t) = a - b \cos k\pi$$

**esempio (lunghezza d'arco di cicloide):**

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a(t - \sin t) \\ a(1 - \cos t) \end{pmatrix} \implies \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} a(1 - \cos t) \\ a \sin t \end{pmatrix}$$

$$l = \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt =$$

$$= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt$$

Dato che  $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - (1 - \cos^2 t) = 2\cos^2(t) - 1 \implies \cos t = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1 \implies 1 - \cos t = 2 - 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = 2\left(1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$

$$\begin{aligned} a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt &= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt = 2a \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin u du \Big|_{\substack{u=t/2 \\ dt=2du}} \\ &= 2a \int_0^\pi \sin u 2 du = 4a \int_0^\pi \sin u du = -4a \cos u \Big|_0^\pi = 8a \end{aligned}$$

**esercizio 2 (eq. retta tangente alla cicloide in  $t = \pi/2$ )**

$$\dot{\gamma}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} a(1 - \cos(\pi/2)) \\ a \sin(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \quad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} a(\pi/2 - \sin(\pi/2)) \\ a(1 - \cos(\pi/2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\pi/2 - 1) \\ a \end{pmatrix}$$

La retta tangente ha equazione parametrica  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\pi/2 - 1) \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}$

$$\text{Se voglio scrivere in cartesiana: } t - \frac{\pi}{2} = \frac{y - a}{a} \implies x = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + y - 1 \iff x - y = a\frac{\pi}{2}$$

**esercizio 3 (retta tangente in  $t = 0$ )**

$\dot{\lambda}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ma non ha senso dire che  $\vec{0}$  è tangente alla curva.

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \dot{\gamma}(0)(t - 0) + o(t - 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + o(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + o(t) \text{ per } t \rightarrow t_0$$

La retta sarebbe il punto più l'immagine della derivata, ma qui otteniamo solo un punto. Esiste lo sviluppo di Taylor ma non trovo la retta tangente, nonostante la curva sia differenziabile. Come mai?

### 3.1. Curva regolare e parametrizzazione di una curva

**Definizione (curva regolare):** Sia  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $\gamma$  si dice *regolare* se  $\gamma \in C^1(I)$ ,  $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \forall t \in I$

Il cicloide non è una curva regolare. La circonferenza è una curva regolare.

esempio:  $\gamma(t) = (t, t^2)$ ,  $t \in [-1, 2]$

Questa curva rappresenta un pezzo di parabola  $y = x^2$

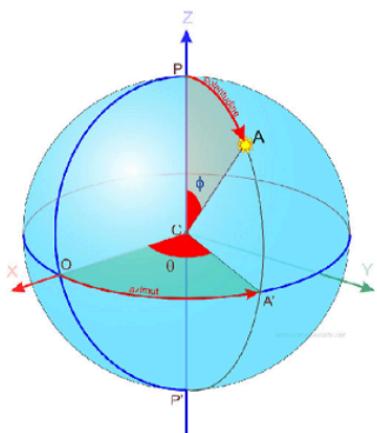
$$l = \int_{-1}^2 \left| \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \right| dt = \int_{-1}^2 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \dots$$

In generale, dato il grafico  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , può essere parametrizzato come

$$x(t) = t, \quad y(t) = f(t). \quad \text{La lunghezza d'arco del grafico è } l = \int_a^b \left| \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \right| dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

## 4. Sistemi di coordinate

### 4.1. Coordinate sferiche

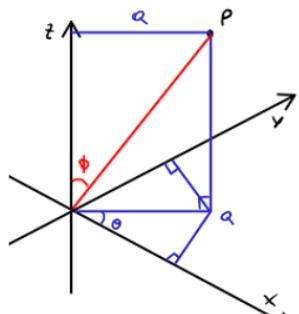


In coordinate cartesiane, un punto  $P$  nello spazio viene individuato da una terna di valori  $P = (x, y, z)$ , ma si possono usare anche le coordinate sferiche:  $P = (r, \phi, \theta)$   
Dove  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$

$$(x, y, z) = (r \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \tan \theta = \frac{y}{x}$$

**Spiegazione:**



- $z = r \cos \phi$  perché  $\cos \phi = \frac{z}{r}$
- $x = r \sin \phi \cos \theta$  perché  $\cos \theta = \frac{x}{q}$  dove  $q = r \sin \phi$ , quindi  $x = q \cos \theta = r \cos \theta \sin \phi$
- $y = r \sin \theta \sin \phi$  per lo stesso ragionamento

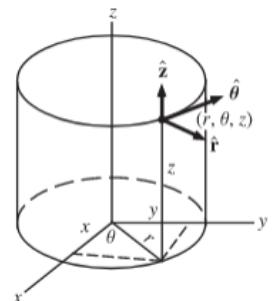
$\theta$  si chiama longitudine

$\phi$  si chiama colatitudine ( $\pi/2 - \phi$  è la latitudine)

### 4.2. Coordinate cilindriche

$$P(x, y, z) \leftrightarrow P(r, \theta, z) \text{ dove } r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, z \in \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \Leftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan \theta = \frac{y}{x}, z = z$$



# Superfici parametriche

## 1. Recap

Sia  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  una curva parametrica.

$t_0 \in I$ ,  $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0 \implies \dot{\gamma}(t_0)$  è tangente al sostegno della curva nel punto  $\gamma(t_0)$

**esempio (elica cilindrica):**

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, vt) \in \mathbb{R}^3, a, v > 0, I = [0, 2\pi]$$

$\dot{\gamma}(t) = (-a \sin t, a \cos t, v) \neq 0$  quindi  $\gamma$  è una **curva regolare**.

$$\dot{\gamma}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-a \frac{\sqrt{2}}{2}, a \frac{\sqrt{2}}{2}, v\right), \gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(a \frac{\sqrt{2}}{2}, a \frac{\sqrt{2}}{2}, v \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{La retta tangente nel punto } \gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ è } r(t) = \gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0)(t - t_0) = \dots = \begin{pmatrix} \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2}(t - t_0) \\ \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}(t - t_0) \\ v \frac{\pi}{4} + v(t - t_0) \end{pmatrix}$$

$$\text{La lunghezza d'arco } l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + \cos^2 t + v^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + v^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + v^2}$$

## 2. Superfici parametrizzate

**Definizione** Sia  $\Gamma: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f$  si dice superficie parametrizzata (di solito  $m = 3$ )

### 2.1. Superfici parametrizzate regolari e piano tangente

Una curva  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  è regolare se  $\gamma \in C^1(I)$  e  $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \forall t \in I$  ovvero la curva dev'essere continua e derivabile con derivata continua e la derivata non deve essere mai uguale al vettore nullo. Ciò significa che posso avere qualche componente della derivata che si annulla ma non devono annullarsi tutte le componenti contemporaneamente.

**Definizione (superficie regolare):**

La condizione di regolarità di una superficie è l'estensione della condizione di regolarità di una curva.

$\Gamma: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  è regolare se

$\Gamma \in C^1(A)$

$\Gamma$  è iniettiva

Esiste il piano tangente alla superficie in ogni suo punto, ovvero le derivate non si annullano simultaneamente.

Algebricamente, la terza condizione richiede che la somma dei quadrati dei minori di ordine 2 della matrice Jacobiana sia nonnegativa.  $J_\Gamma = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix}$ .

Ovvero  $[x_u y_v - y_u x_v]^2 + [x_u z_v - z_u x_v]^2 + [y_u z_v - z_u y_v]^2 \neq 0 \iff \text{rank}(J_\Gamma) = 2 \forall (u, v) \in A$

Ragionamento:

$$\Gamma: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \Gamma = (x, y, z)^T = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}, (u, v) \in A$$

Se fisso  $v = v_0$  e faccio variare  $u$  ottengo una famiglia di curve, se fisso  $u = u_0$  e faccio variare  $v$  ottengo un'altra famiglia di curve. Queste si chiamano linee coordinate: per ogni punto della superficie passa esattamente una curva di ciascuna delle due famiglie.

**esempio (sfera parametrica):**

$$\text{La sfera di raggio } R \text{ e centro in } (0, 0, 0): \Gamma = \begin{pmatrix} R \sin \phi \cos \theta \\ R \sin \phi \sin \theta \\ R \cos \phi \end{pmatrix}, \phi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi)$$

I parametri  $(\phi, \theta)$  si chiamano colatitudine e longitudine rispettivamente.

Le linee  $\phi = \phi_0$  sono i paralleli, quelle  $\theta = \theta_0$  sono i meridiani; per ogni punto della sfera (a eccezione dei poli per cui la parametrizzazione non è regolare) passano esattamente un meridiano e un parallelo.

Tornando a una generica supericie  $\Gamma = \Gamma(u, v)$ , le linee coordinate hanno equazioni

$$\Gamma = \Gamma(u, v_0), \Gamma = \Gamma(u_0, v)$$

Il vettore tangente a una linea coordinata è dato da

$$r_u(u_0, v_0) = (x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), z_u(u_0, v_0))$$

$$r_v(u_0, v_0) = (x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), z_v(u_0, v_0))$$

Questi vettori sono ben definiti assumendo che  $\Gamma$  sia differenziabile. Il piano tangente è ben definito se i vettori sono entrambi non nulli e inoltre non sono paralleli. Se  $\Gamma_u(u_0, v_0)$  e  $\Gamma_v(u_0, v_0)$  sono linearmente indipendenti, allora determino il piano tangente. Queste condizioni si esprimono chiedendo che  $\Gamma_u(u_0, v_0) \times \Gamma_v(u_0, v_0) \neq 0$ , o alternativamente,  $\text{rank}(J_\Gamma) = 2$ .

**Osservazione:**

$$\Gamma_u(u_0, v_0) \times \Gamma_v(u_0, v_0) =: \bar{n}(u_0, v_0) \text{ vettore normale a } \Gamma(A) \text{ nel punto } \Gamma(u_0, v_0)$$

$$\bar{n}(u_0, v_0) \cdot (x - \Gamma(u_0, v_0)) = 0 \text{ è l'**equazione nonparametrica** del piano tangente, } x = (x_1, x_2, x_3)$$

**esempio (sfera parametrica):**

Determina se è regolare e trovo il piano tangente in forma parametrica e nonparametrica

$$A = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

$$\Gamma(\theta, \phi) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi)$$

$$\Gamma(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, R > 0\} = \partial B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$$

$$\Gamma_\theta(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \Gamma_\phi(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \cos \phi \\ -R \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \phi & R \cos \theta \cos \phi \\ R \cos \theta \sin \phi & R \sin \theta \cos \phi \\ 0 & -R \sin \phi \end{pmatrix} = ???$$

Prodotto vettoriale:  $\Gamma_\theta \times \Gamma_\phi = \det \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -R \sin \theta \sin \phi & R \cos \theta \sin \phi & 0 \\ R \cos \theta \cos \phi & R \sin \theta \cos \phi & -R \sin \phi \end{vmatrix} \leftarrow \Gamma_\theta \quad \leftarrow \Gamma_\phi$

$$= \dots = R^2 (-e_1 \sin^2 \phi \cos \theta - e_2 \sin^2 \phi \sin \theta - e_3 \sin \phi \cos \phi)$$

Osservo che  $|\Gamma_\theta \times \Gamma_\phi| = \sqrt{R^4 ((-\sin^2 \phi \cos \theta)^2 + (-\sin^2 \phi \sin \theta)^2 + (-\sin \phi \cos \phi)^2)} = R^2 \sqrt{\sin^4 \phi + \sin^2 \phi \cos^2 \phi} = R^2 \sqrt{\sin^2 \phi} = R^2 |\sin \phi| = 0 \iff \phi \in \{0, \pi\}$  (**punti singolari**)

La sfera è regolare in tutti i punti tranne i poli (punti singolari della superficie). L'equazione del piano tangente nel punto  $\Gamma\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$

$$\Gamma\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} R\sqrt{2}/4 \\ R\sqrt{2}/4 \\ R\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_\theta\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -R\sqrt{2}/4 \\ R\sqrt{2}/4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_\phi\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} R\sqrt{6}/4 \\ R\sqrt{6}/4 \\ -R/2 \end{pmatrix}$$

L'equazione parametrica del piano tangente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\sqrt{2}/4 \\ R\sqrt{2}/4 \\ R\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R\sqrt{2}/4 \\ R\sqrt{2}/4 \\ 0 \end{pmatrix} \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) + \begin{pmatrix} R\sqrt{6}/4 \\ R\sqrt{6}/4 \\ -R/2 \end{pmatrix} \left( \phi - \frac{\pi}{6} \right)$$

Ovvero:

$$\begin{cases} x = R\sqrt{2}/4 - R\sqrt{2}/4 \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) + R\sqrt{6}/4 \left( \phi - \frac{\pi}{6} \right) \\ y = R\sqrt{2}/4 + R\sqrt{2}/4 \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) + R\sqrt{6}/4 \left( \phi - \frac{\pi}{6} \right) \\ z = R\sqrt{3}/2 - R/2 \left( \phi - \frac{\pi}{6} \right) \end{cases}$$

Per trovare l'equazione nonparametrica:

$$(\Gamma_\theta \times \Gamma_\phi)\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right) = -R^2 \begin{pmatrix} \sqrt{2}/8 \\ \sqrt{2}/8 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix} \quad \Gamma\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right) = R \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -R^2 \begin{pmatrix} \sqrt{2}/8 \\ \sqrt{2}/8 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - R \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = 0 &\implies \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\implies \sqrt{2} \left( x - \frac{\sqrt{2}}{y} \right) + \sqrt{2} \left( y - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) + 2\sqrt{3} \left( z - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

## 2.2. Superfici di rotazione

Superfici ottenute facendo ruotare una curva, detta generatrice, attorno a un asse. Sia  $z$  l'asse attorno a cui ruota la curva  $\gamma = (x(t), z(t))$ . Allora la superficie che si ottiene con una rotazione completa della curva  $\gamma$  attorno all'asse  $z$  è:

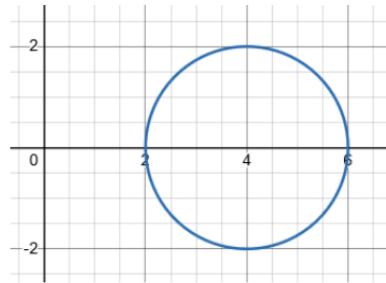
$$\Gamma = (x, y, z) = (x(t)\cos \theta, x(t)\sin \theta, z(t)), t \in I, \theta \in [0, 2\pi)$$

**esempio (toro di rotazione):**

Da me soprannominato anche "ciambella di blender"

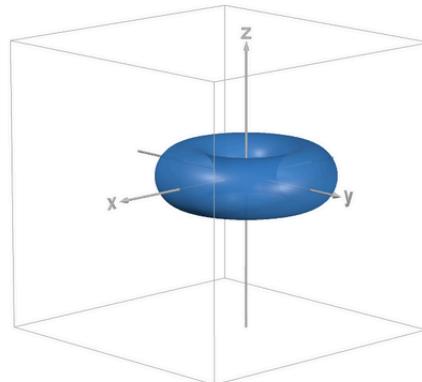
$$\gamma = (x, z) = (R + r \cos \phi, r \sin \phi), R > r > 0, \phi \in [0, 2\pi]$$

$$\text{Il sostegno della curva: } (x - R)^2 + z^2 = r^2$$



La superficie di rotazione è

$$\begin{cases} x(\phi, \theta) := (R + 2 \cos \phi) \cos \theta \\ y(\phi, \theta) := (R + 2 \cos \phi) \sin \theta \\ z(\phi, \theta) := r \sin \phi \end{cases}$$



**esercizio (parametrizzazione regolare del toro di rotazione):**

$$\Gamma_\phi(\phi, \theta) = (-r \sin \phi \cos \theta, -r \sin \phi \sin \theta, 2 \cos \phi)$$

$$\Gamma_\theta(\phi, \theta) = (-(R + 2 \cos \phi) \sin \theta, (R + 2 \cos \phi) \cos \theta, 0)$$

$$\begin{aligned} n(\phi, \theta) &= \Gamma_\phi \times \Gamma_\theta = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ -r \sin \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta & 2 \cos \phi \\ -(R + 2 \cos \phi) \sin \theta & (R + 2 \cos \phi) \cos \theta & 0 \end{bmatrix} = \dots = \\ &= r(R + 2 \cos \phi)(\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, -\sin \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\Gamma_\phi \times \Gamma_\theta| &= r(R + 2 \cos \phi) \sqrt{\cos^2 \phi \cos^2 \theta + \cos^2 \phi \sin^2 \theta + \sin^2 \phi} = \\ &= r(R + 2 \cos \phi) \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = r(R + 2 \cos \phi) > 0 \text{ sempre. Ho trovato una parametrizzazione regolare del toro.} \end{aligned}$$

# Cambi di coordinate, differenziale di composizione, teorema di Fermat, derivate di ordine superiore

## Varietà n-dimensionali

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$

Casi particolari:

- $k = 1, n \geq 1$ : funzione scalare
- $n < k$ : varietà n-dimensionali in  $\mathbb{R}^n$
- $n = 1, k \geq 1$ : curva (varietà unidimensionale in  $\mathbb{R}$ )
- $n = 2, k \geq 2$ : superficie (varietà bidimensionale in  $\mathbb{R}^2$ )

## 1. Cambio di coordinate

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f$  può mappare un cambio di coordinate.

Gli esempi che seguono sono cambi di coordinate, di cui definiremo il determinante Jacobiano.

### esempio (da polari a cartesiane):

$f : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$f(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$  fa il passaggio dalle coordinate polari a cartesiane in  $\mathbb{R}^2$

$$f \text{ è differenziabile all'interno del dominio: } Df(\rho, \phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \end{bmatrix}$$

$J(\rho, \theta, \phi) := \det(D(f(\rho, \phi)))$  si chiama **determinante jacobiano**.

$\det(D(f(\rho, \phi))) = \rho \cos^2 \phi + \rho \sin^2 \phi = \rho$  è sempre non degenere. Se  $\rho = 0$  non ha nemmeno senso parlare di derivabilità

Osservazione: il dominio può anche essere  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , identificando  $\phi$  come  $\phi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

### esempio 2 (da sferiche a cartesiane):

$f : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$f(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi)$

$$Df(\rho, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{bmatrix}$$

$J(\rho, \theta, \phi) = \dots = -\rho^2 \sin \phi = 0 \iff \rho = 0 \vee \phi = 0 \vee \phi = \pi$

Ma ciò non accade mai, poiché tutti quei punti fanno parte del bordo.

**esempio 3 (da cilindriche a cartesiane):**

$$f : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(\rho, \phi, z') = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z')$$

$$J(\rho, \phi, z') := \det Df(\rho, \phi, z') = \det \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho, \text{ non degenero.}$$

**esempio 4 (coordinate cilindriche ellittiche):**  $f(\rho, \phi, z) = (a\rho \cos \phi, b\rho \sin \phi, z)$ ,  $a, b > 0$

$$\det Df(\rho, \phi, z) = \det \begin{bmatrix} a \cos \phi & -a\rho \sin \phi & 0 \\ b \sin \phi & b\rho \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (ab\rho \cos^2 \phi + ab\rho \sin^2 \phi) = ab\rho$$

$$ab\rho \neq 0 \iff \rho \neq 0$$

## 2. Differenziale di funzioni composte

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $g : B \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f(A) \subseteq B$

$g \circ f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

**Casi particolari:**

Siano  $x_0$  punto interno di  $A$ ,  $f(x_0)$  punto interno di  $B$  con  $f$  diff in  $x_0$  e  $g$  diff in  $f(x_0)$   
 $g$  è differenziabile in  $x_0$ ?

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \implies (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \implies \gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$  (curva),  $g : B \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(g \circ \gamma)'(t_0) = \nabla g(\gamma(t_0)) \cdot \dot{\gamma}(t_0)$
- $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \implies \nabla(g \circ f)(x_0) = g'(f(x_0))\nabla f(x_0)$

**Caso generale:**

**Teorema (differenziale di composizione):** Siano  $f$  diff. in  $x_0$ ,  $g$  diff. in  $f(x_0)$   
 $g \circ f$  è differenziabile in  $x_0$  e  $D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0)$

La dimostrazione è simile a quella fatta per la chain rule

**esercizio:**

$$h(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

$$h = g \circ f, \quad g(z) = \sin(z), \quad f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\nabla g(x, y) = g'(f(x, y))\nabla f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)(2x, 2y) = (2x \cos(x^2 + y^2), 2y \cos(x^2 + y^2))$$

**esercizio 2:**

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\lambda(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad a, b > 0$$

$$(f \circ \lambda)'(t) = \nabla f(\lambda(t))\dot{\lambda}(t) = (2\lambda_x(t), 2\lambda_y(t)) \cdot (\dot{\lambda}_x(t), \dot{\lambda}_y(t)) = \dots = 2(b^2 - a^2) \sin t \cos t$$

Si può trovare anche senza usare il teorema:

$$(f \circ \gamma)'(t) = (a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t)' = 2(b^2 - a^2) \sin t \cos t \quad (\text{ez})$$

Osservazione: se  $a = b \implies (f \circ \gamma)'(t) = 0$

lungo il percorso l'altezza non cambia. L'ellisse diventa una circonferenza.

### 3. Ricerca di massimi e minimi

**Definizione (punto di minimo):** Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione scalare differenziabile

$x_0$  è un punto di minimo locale se  $\exists \delta > 0 : f(x_0) \leq f(x) \forall x \in B_\delta(x_0)$

$x_0$  è un punto di minimo locale stretto se  $\exists \delta > 0 : f(x_0) < f(x) \forall x \in B_\delta(x_0)$

$x_0$  è un punto di minimo (globale) se  $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in A$

$x_0$  è un punto di minimo (globale) stretto se  $f(x) < f(x_0) \forall x \in A$

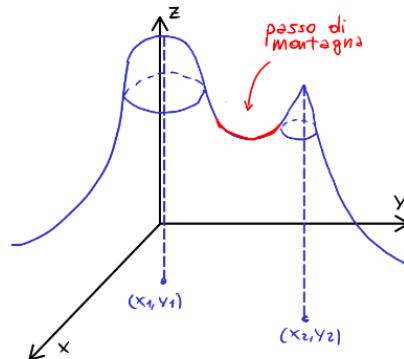
**esempio:**

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, y_1) > f(x_2, y_2) > 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0, f(x, y) > 0$$

$(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  sono punti di massimo globale stretto.  $(x_1, y_1)$  sono punti di massimo globale

Il punto rosso si chiama passo di montagna e, anche se la derivata fa 0, non è un punto di massimo / minimo



### 4. Teorema di Fermat

**Teorema (Teorema di Fermat):** Se  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ammette min / max locale in  $x_0 \in A$  ed è derivabile in direzione di  $\bar{n}$  di  $x_0$ , allora  $\frac{\partial f}{\partial \bar{n}}(x_0) = 0$

**Corollario** Sotto ipotesi del teorema di Fermat e se  $f$  è derivabile in tutte le direzioni in  $x_0$ , allora  $\nabla f(x_0) = 0$ . In particolare, vale se  $f$  è differenziabile in  $x_0$

**Dimostrazione:**

$h(t) := f(x_0 + \bar{n}t)$  per cui 0 è un punto di minimo per ipotesi.

Allora ottengo una funzione  $h(t)$  in cui  $\exists I : h(t) > h(0) \forall t \in I$ . Allora applico il teorema di Fermat per le funzioni a una variabile e ottengo  $h'(0) = 0$ .

Riscrivendo come  $f$ :  $\frac{\partial f}{\partial \bar{n}}(x_0) = 0$

Scegliendo  $\bar{n} = e_i$  dove  $e_i$  sono gli elementi della base canonica di  $\mathbb{R}^n$  ottengono che se esistono tutte le derivate direzionali allora  $\nabla f(x_0) = 0 \quad \square$

Per essere precisi,  $I = \left( \frac{-r}{|\bar{n}|}, \frac{r}{|\bar{n}|} \right)$ , dove  $r$  è il minimo tra i due raggi degli intorni di  $x_0$  per cui il punto è interno all'insieme e di minimo relativo. Se  $\bar{n}$  è un versore allora  $I = (-r, r)$

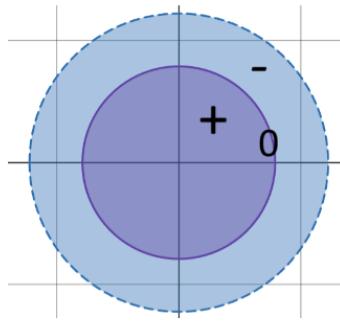
**esempio:**

Trova punto di massimo globale di  $f(x, y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$

$\text{Dom}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 - y^2 > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$  cerchio aperto di raggio 2.

$$4 - x^2 - y^2 \geq 1 \iff \ln(4 - x^2 - y^2) \geq 0$$

Ovvero  $x^2 + y^2 \leq 3$ . Questo è un cerchio chiuso e limitato (compatto), quindi  $f$  ammette massimo per il teorema di Weierstrass.



Dove si trova il massimo?

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y - x^2 - y^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{y - x^2 - y^2} = 0 \end{cases} \iff (x, y) = 0 \text{ è un punto di massimo}$$

Anzichè calcolare subito la derivata, devo prima usare il teorema di Fermat correttamente.

#### 4.1. Condizione sufficiente ai massimi in $\mathbb{R}$

Ad analisi 1 abbiamo fornito una condizione sufficiente per i massimi e minimi:

Sia  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  aperto:

- $\exists f'(x_0) \wedge x_0 \in I \wedge x_0$  punto di max/min locale  $\implies f'(x_0) = 0$  (teorema di Fermat)
- $x_0 \in I \wedge \exists f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0 \implies x_0$  punto di massimo locale, (condizione sufficiente) segue dallo sviluppo di Taylor.

Prima di fornire un enunciato generale per  $\mathbb{R}^n$ , devo prima definire le derivate di ordine superiore e gli sviluppi di Taylor.

## 4.2. Derivate di ordine superiore

**Definizione (derivate di ordine 2):** Sia  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A$  aperto, Se  $\nabla f(x_0) = (f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$  esiste per un intorno di  $x_0$  e ciascuna  $f_{x_i}$  è derivabile in qualsiasi direzione  $x_k$ , allora  $\frac{\partial f_{x_j}}{\partial x_k} =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ . In particolare:  $\frac{\partial f_{x_k}}{\partial x_k} =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$

Se queste funzioni sono definite e differenziabili in un intorno di  $x_k$  allora posso calcolare la derivata terza, e così via.

**Notazione multimatrice:**

Sia  $a = (a_1, \dots, a_n) : a_j \in N$

$$D^a f = D^{(a_1, \dots, a_n)} f := \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}}$$

**esempio:**

$$n = 3, a = (1, 0, 2), |a| = 3 \implies D^a f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}$$

$$n = 5, a = (2, 1, 0, 1, 3), |a| = 7 \implies D^a f = \frac{\partial^7 f}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_4 \partial x_5^3}$$

**Matrice Hessiana:**

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right), D^2 f = \text{Hess}(f) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

La matrice Hessiana è una matrice simmetrica perché  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  ( $\text{Hess}(f) = \text{Hess}(f)^T$ )

**esempio:**

$$f(x, y) = e^{-x^2+3y^2}$$

$$\nabla f(x, y) = e^{-x^2+3y^2} (-2x, 6y)$$

$$\text{Hess}(f) := \begin{bmatrix} -2e^{-x^2+3y^2} + (2x)^2 e^{-x^2+3y^2} & -2xe^{-x^2+3y^2} \cdot 6x \\ -2xe^{-x^2+3y^2} \cdot 6x & 6e^{-x^2+3y^2} + 6ye^{-x^2+3y^2} 6y \end{bmatrix}$$

# Teorema di Schwartz. Sviluppi di Taylor di ordine 2 con resto di Peano. Matrice Hessiana e condizione sufficiente di esistenza di min/max locali

## 1. Recap (derivate di ordine superiore)

$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A$  aperto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Big|_{x_0} \text{ o notazioni alternative } f_{x_i x_j}, f_{ij}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

La notazione multimatrice:  $D^{(2,1,2)}f = D^\alpha f = \frac{\partial^5 f}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3^2}$

**Attenzione:** in generale  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

## 2. Teorema di Schwartz

**Teorema (teorema di Schwartz):** Sia  $f \in C^2(A)$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$  aperto

$$\text{Allora } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Più generalmente, se tutte le derivate parziali  $D^\alpha f \forall \alpha : |\alpha| \leq k$  sono continue, ovvero  $f \in C^k(A)$ , allora l'ordine di derivazione non conta.

In particolare, allora  $Hess f = D^2 f = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1} & \dots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$  è simmetrica.

## 3. Sviluppi di Taylor di ordine 2 e condizione sufficiente ai minimi

Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in A$  aperto

**Formula di Taylor di ordine 1 nel punto  $x_0$ :**

$$f \in C^1(A) \implies f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

**Formula di Taylor di ordine 2 nel punto  $x_0$ :**

$$f \in C^2(A) \implies f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T D^2 f(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|^2)$$

per  $x \rightarrow x_0$

**Corollario (condizione sufficiente ai minimi):** Sia  $f \in C^2(A)$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in A$ :  $\nabla f(x_0) = 0$   
Se  $D^2f(x_0)$  è definita positiva, allora  $x_0$  è un punto di minimo locale stretto di  $f$

### Matrici definite positive:

Una matrice simmetrica è semidefinita positiva se  $Ah \cdot h \geq 0 \forall h \in \mathbb{R}^n$

Se è semidefinita positiva e inoltre  $Ah \cdot h = 0 \iff h = 0$  allora è definita positiva.

Per il teorema spettrale, se  $A_{n \times n}$  è simmetrica allora esiste una base ortonormale di autovettori di  $A$  rispetto al prodotto scalare standard, ovvero  $A$  è diagonalizzabile mediante  $M$  ortogonale. In altre parole, gli autovalori di matrici simmetriche sono reali e gli autovettori sono ortogonali.

- Di conseguenza, una matrice simmetrica è semidefinita positiva se  $\lambda_j \geq 0 \forall \lambda_j \in \sigma(A) := \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  dove  $\sigma(A)$  è lo spettro di  $A$ , ovvero l'insieme di tutti gli autovalori di  $A$ . Una matrice simmetrica è definita positiva se  $\lambda_j > 0$

### Dimostrazione:

Sia  $x_0 \in A : \nabla f(x_0) = 0$

$$\text{Allora } f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T D^2 f(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) = \\ = f(x_0) + D^2 f(x_0)(x - x_0), \quad x - x_0 + o(|x - x_0|)$$

$$\text{So che } D^2 f(x_0) \text{ è definita positiva, ovvero } \langle Ah, h \rangle = Q^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} Qh, h \geqslant \\ = \left( \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} Qh, Qh \right) = \sum \lambda_i Qh_i \geqslant \lambda_1 \sum Qh_i = \lambda_1 |Qh|^2 = \lambda_1 |h|^2$$

$$\text{Allora } \inf_{|x-x_0|=r} (D^2 f(x_0)(x - x_0), x - x_0) \geqslant \lambda_1 |x - x_0|^2 = \lambda_1 r^2$$

$$f(x) \geqslant f(x_0) + \lambda_1 |x - x_0|^2 + o(|x - x_0|^2)$$

$$\text{Scelgo } \epsilon > 0 : |x - x_0| \leqslant \epsilon \implies |o(|x - x_0|^2)| < \frac{\lambda_1}{2} |x - x_0|^2$$

Vuol dire che per  $|x - x_0| \leqslant \epsilon$  si ha

$$f(x) \geqslant f(x_0) + \lambda_1 |x - x_0|^2 - \frac{\lambda_1}{2} |x - x_0|^2 = f(x_0) + \frac{\lambda_1}{2} |x - x_0|^2 > f(x_0)$$

Quindi  $x_0$  è un punto di minimo locale  $\square$

### Osservazione:

Nel caso particolare di  $n = 1$ ,  $x_0 \in I \subset \mathbb{R} : f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0$

Allora  $x_0$  è un punto di minimo locale stretto.

**esercizio 1 (limite di funzione a due variabili):**

$f(x, y) = xy + x^2 + y^4$ ,  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$ ,  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  poiché è un polinomio.

Trova il limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow +\infty} f(x, y)$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} f_x(y) &= +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_y(x) = +\infty, \quad \text{posso ipotizzare che } \lim_{(x,y) \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty \\ x^2 - 2|x| \cdot |y| + y^2 \geq 0 &\implies x^2 + y^2 \geq 2|x| \cdot |y| \implies |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \implies \\ -\frac{x^2 + y^2}{2} \leq xy &\leq \frac{x^2 + y^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) = xy + x^2 + y^4 &\leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + x^2 + y^4 = \frac{3x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + y^4 \geq -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + x^2 + y^4 = \\ &= \frac{x^2}{2} \left( y^4 - \frac{y^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{x^2}{2} + \left( y^4 - \frac{y^2}{2} \right) \leq f(x, y) \leq \frac{3x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + y^4 & \implies \lim_{(x,y) \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty \\ \downarrow & \downarrow & \\ +\infty & & +\infty \end{array}$$

**esercizio 1-bis (studio di massimi e minimi della funzione precedente):**

$f(x, y)$  non ha massimo globale perché tende a  $+\infty$ . Non so dire nulla, per adesso, sul minimo poiché il teorema di Weierstrass funziona solo su insiemi compatti. Però, sapendo che la funzione cresce se mi allontano dall'origine, posso prendere una palla tale che fuori non c'è minimo: per il teorema di Weierstrass posso dire che il minimo esiste ed è contenuto nella palla, dato che è compatta.

Cerco ora massimi e minimi locali:  $\nabla f(x) = (y + 2x, x + 4y^3)$

$$(D^2 f)(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} y + 2x = 0 \\ x + 4y^3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -4y^3 \\ y - 8y^3 = 0 \end{cases} \implies y = 0 \vee y = \pm \frac{1}{\sqrt{8}}$$

- $y = 0 \implies x = -4y^3 = 0$
- $y = 1/\sqrt{8} \implies x = -4y^3 = -1/4\sqrt{2}$
- $y = -1/\sqrt{8} \implies x = 1/4\sqrt{2}$

$$A = (0, 0)$$

$$B = \left( -\frac{1}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$C = \left( \frac{1}{4\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$D^2f(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 12y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^2f(B) = D^2f(C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Caso A):  $\sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Mi ricordo che  $\prod \lambda_i = \det(M)$ ,  $\sum \lambda_i = \text{tr}(M)$   
 Allora  $\lambda_1 \lambda_2 = 2 \cdot 0 - 1 = -1$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 2 + 0 = 2$

Non posso usare il corollario poiché la matrice  $D^2f(A)$  non è definita positiva

Caso B, C):  $\sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 \lambda_2 = 3 - 1 = 2$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 2 + 3/2 = 7/2$

La matrice  $D^2f(B) = D^2f(C)$  è definita positiva, quindi  $B$ ,  $C$  sono punti di minimo locale stretto.  
 Addirittura, sono punti di minimo globale.

### esercizio 2:

$$f(x, y) = \left( \frac{x^2}{2} + y^2 \right) e^{-(x^2+y^2)}$$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$ ,  $f$  è continua,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0 \text{ poiché } 0 \leq \left( \frac{x^2}{2} + y^2 \right) e^{-(x^2+y^2)} \leq (x^2 + y^2) e^{-(x^2+y^2)} = \rho^2 e^{-\rho^2}$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0$$

$f$  ammette minimo (globale),  $\min f = 0 = f(0, 0)$

$f$  ammette massimo:

$$\begin{cases} f_x = xe^{-(x^2+y^2)} + \left( \frac{x^2}{2} + y^2 \right) e^{-(x^2+y^2)} (-2x) = e^{-(x^2+y^2)} \left( \left( \frac{x^2}{2} + y^2 \right) (-2x) + x \right) = 0 \\ f_y = 2ye^{-(x^2+y^2)} + \left( \frac{x^2}{2} + y^2 \right) e^{-(x^2+y^2)} (-2y) = e^{-(x^2+y^2)} \left( \left( \frac{x^2}{2} + y^2 \right) (-2y) + 2y \right) = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$A = (0, 0)$ ,  $B = (0, \pm 1)$   $C = (\pm 1, 0)$ ,

So già che  $A$  è un punto di minimo globale.

$$f(B_1) = f(B_2) = e^{-1}$$

$$B_1 = (0, 1), B_2 = (0, -1), C_1 = (1, 0), C_2 = (-1, 0) \quad f(C_1) = f(C_2) = e^{-1}/2$$

Tra questi punti c'è un punto di massimo, quindi  $B_1, B_2$  sono i punti di massimo (globale).

$C_1, C_2$  possono essere punti di minimo locale, massimo locale, o nessuno di questi.

Procedo come l'esercizio precedente calcolando la Hessiana e studiando i punti  $C_1, C_2$

## Teorema di U.Dini e moltiplicatori di Lagrange

### 1. Teorema di U. Dini

Anche chiamato **Teorema della funzione implicita**. La rappresentazione implicita di una funzione è quella che individua i punti del grafico della funzione come luogo di zeri di un'altra funzione. Nel caso di una sola variabile una funzione implicita è descritta da  $F(x, y) = 0$ . Ad esempio l'equazione implicita della circonferenza unitaria è  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

Il teorema di Dini fornisce le condizioni per cui un'equazione definisce una funzione implicita, ovvero stabilisce quando il luogo di zeri di un'equazione implicita si può esplicitare rispetto a una variabile.

#### 1.1. Caso bidimensionale

Sia  $G : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

E' vero che l'insieme  $G(x, y) = 0$  è grafico di una funzione  $y = y(x)$ ?

#### Teorema 1 (Teorema di Dini 2D):

Sia  $G : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G \in C^1(U(x_0, y_0))$  dove  $(x_0, y_0) \in A$

Inoltre sia questo punto tale che  $G(x_0, y_0) = 0$ ,  $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Allora esiste un intorno  $U(x_0, y_0)$  e una funzione  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \in C^1(\mathbb{R})$  tale che  $\{(x, y) : G(x, y) = 0\} \cap U = \{(x, y(x))\} \cap U$

Il teorema di Dini stabilisce che una funzione di classe  $C^1$  del tipo  $G(x, y)$  definisce implicitamente una funzione del tipo  $y = y(x)$  in un intorno di  $(y_0, x_0)$  tale che  $G(a, b) = 0 \wedge \frac{\partial G}{\partial y}(a, b) \neq 0$

**esempio:**

$$G(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = 2y \neq 0 \text{ sse } y \neq 0$$

Se  $G(x_0, y_0) = 0$  e  $y_0 \neq 0$  allora sono soddisfatte le condizioni del teorema.

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \iff (x_0, y_0) \notin \{(-1, 0), (1, 0)\}$$

$$-1 < x < 1, y_0 > 0 \implies G(x, y) = 0 \iff x^2 + y^2 = 1 \iff y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$-1 < x < 1, y_0 < 0 \implies G(x, y) = 0 \iff x^2 + y^2 = 1 \iff y_0 = -\sqrt{1 - x^2}$$

In un intorno di  $(x_0, y_0)$

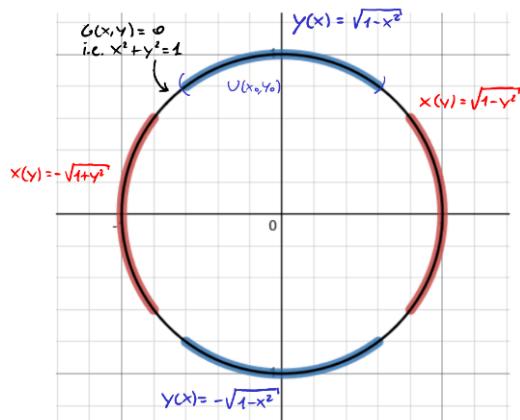
Cosa succede invece nei punti  $(-1, 0), (1, 0)$ ?

$\{(x, y) : G(x, y) = 0\}$  non è il grafico di  $y = y(x)$ , ma  $\frac{\partial G}{\partial x}(\pm 1, 0) = \pm 2 \neq 0$

Allora, sempre per il teorema,  $\{(x, y) : G(x, y) = 0\}$  in un intorno di  $(x_0, y_0)$  è il grafico di una funzione in  $x(y) \in C^1$

**Osservazione:** Se, oltre alle condizioni del teorema, aggiungo anche che  $\nabla G(x_0, y_0) \neq 0$  allora esiste un intorno  $U(x_0, y_0)$  tale che  $\{(x, y) : G(x, y) = 0\} \cap U$  è il grafico di una funzione  $y = y(x)$  oppure  $x = x(y)$

In altre parole, posso girare opportunamente il sistema di coordinate.



**esempio:**

$$G(x, y) = \max(x^2 + y^2 - 1, 0)$$

$z = x^2 + y^2 - 1$  è un paroloide di rotazione intorno all'asse  $z$ , quindi

$z = (x^2 + y^2 - 1) \vee 0$  è un paroloide troncato.

$\{(x, y) : G(x, y) = 0\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$  è il cerchio unitario di raggio 1

Per ogni punto del cerchio  $\nabla G = 0$ , e in effetti non definisce una funzione implicita, indipendentemente dal sistema di coordinate.

**esercizio (YouMath):**

Data  $g(x, y) = (x - 2)^2 + e^y - y^2$ , dimostra che l'equazione  $g(x, y) = 0$  definisce un'unica funzione隐式的:  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e determinala.

Determino un punto tale che  $g(x, y) = 0$ , per assicurarmi che l'insieme  $\{(x, y) : g(x, y) = 0\} \neq \emptyset$ .  
 $x_0 = 2$ ,  $y_0 \in [-1, 0]$ , poiché so che  $(x - 2)^2$  si annulla per  $x = 2$  e  $e^y - y^2$  si annulla per un punto compreso tra  $-1$  e  $0$ .

$g_y(x, y) = e^y - 2y$ , la derivata parziale non si annulla mai: ammette minimo assoluto per  $y = \ln(2)$ , il minimo assoluto vale  $2 - \ln(2) > 0$ . Le condizioni del teorema di Dini sono verificate.

## 1.2. Caso n-dimensionale

**Teorema 2 (Teorema di Dini):**

Sia  $G : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{x} \in A : G \in C^1(U(\bar{x}))$ ,  $\nabla G(\bar{x}) \neq 0$

Allora  $\exists U(\bar{x}) : \{x : G(x) = 0\} \cap U$  è grafico di una funzione di  $n - 1$  variabili  $C^1$  (con opportuno sistema di coordinate).

In particolare,  $\frac{\partial G}{\partial x_n}(\bar{x}) \neq 0 \implies \{x : G(x) = 0\} \cap U = \{x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})\} \cap I$  con  $f \in C^1$

**esempio:**

$$G = G(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) : \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$$

Quindi  $G(x, y) = 0 \iff y = y(x)$  in un intorno  $U(\bar{x}, \bar{y})$

Voglio ora trovare  $y'(x)$

$G(x, y(x)) = 0$  in un  $U(\bar{x}, \bar{y})$

$$\frac{d}{dx} G(x, y(x_0)) = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (\text{teorema per funzione composta})$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} y' = 0 \text{ in un intorno di } \bar{x}, \text{ ovvero } y'(x) = \frac{-\frac{\partial G}{\partial x}(x)}{\frac{\partial G}{\partial y}(x)}$$

Si vede come mai  $\frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ , perché in un intorno il denominatore non si annulla.

**esempio 2:**

$$G = G(x_1, \dots, x_n), \bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \frac{\partial G}{\partial x_n}(\bar{x}) \neq 0$$

$G(x) = 0 \iff x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$  per un qualche  $f \in C^1$  in un intorno  $U(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$

Trova  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  con  $j = 1, \dots, n - 1$

$G(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$  in un intorno  $U(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0 \implies \frac{\partial G}{\partial x_j} + \frac{\partial G}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \implies$$

$$\implies \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{-\frac{\partial G}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))}{-\frac{\partial G}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))}$$

Ovvero  $\nabla f = \frac{-\nabla_{(n-1)} G}{\frac{\partial G}{\partial x_n}}$  con  $\nabla_{(n-1)} G$  le prime  $n - 1$  componenti del gradiente n-dimensionale

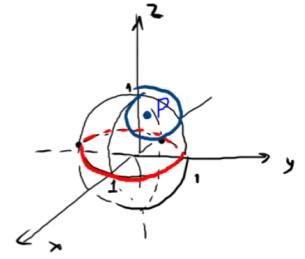
### esempio 3:

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$G(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$z = z(x, y)?$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 2z \neq 0 \text{ sono tutti i punti della sfera tranne il cerchio rosso } z = 0$$



Esiste un intorno di del punto  $P$  tale che la sfera intersecata con la palla è il grafico di una funzione

**Caso 1:**  $z_0 > 0 \Rightarrow z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  in un intorno  $B(x_0, y_0, z_0)$   
 $z_0 < 0 \Rightarrow z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Considero il caso  $z_0 > 0$  e verifico il conto delle derivate di  $z(x, y)$

Per il Teorema di Dini:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial z}} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial z}} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$$

$(x, y, z) : x^2 + y^2 + z = 1$ , ho esprezzo la  $z$  in funzione di  $(x, y)$  in termini di funzioni elementari

Per conto diretto:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{z^2}} = -\frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \dots = -\frac{y}{z}$$

Se  $z_0 = 0$

**Caso 2:**  $z_0 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 1$  circonferenza unitaria centrata in 0

Sull'equatore,  $\frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 2z_0 = 0$ . Il teorema non ci dice niente e in effetti in un intorno di un punto sull'equatore, la sfera non è esprimibile come grafico.

Però,  $\frac{\partial G}{\partial x} = 2x_0 \neq 0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0$ , allora la sfera è grafico di  $x = x(y, z)$

Allo stesso modo, se  $y_0 \neq 0$ , la sfera è grafico di  $y = y(x, z)$

In un intorno di  $(x_0, y_0, z_0)$

## 2. Massimi e minimi vincolati

Ricerca di massimi e minimi su una funzione vincolata. Ad esempio, trovare massimo e minimo di  $f(x, y) = 2x + y$  sulla circonferenza  $\partial B_2((1, 0))$

Abbiamo già visto che, se la funzione non fosse vincolata (insieme aperto), posso vedere se la funzione è differenziabile, dove il gradiente fa 0 eccetera... Ora ho una funzione ristretta a un chiuso.

Ci sono due metodi principali: la **parametrizzazione** e la **regola dei moltiplicatori di Lagrange** (lasciando il vincolo in forma implicita).

## 2.1. Parametrizzazione

**Idea:** parametrizzo il vincolo  $S$ , ovvero lo rappresento come sostegno di curva o superficie parametrica.

**esempio:**

Trova massimo e minimo di  $f(x, y) = 2x + y$  sulla circonferenza  $\partial B_2((1, 0))$

$\partial B_R(x_0, y_0)$ , in generale, può essere parametrizzato come  $\begin{cases} x = x_0 + R \cos \phi \\ y = y_0 + R \sin \phi \end{cases}, \phi \in [0, 2\pi[$

Nel nostro caso  $x = 1 + 2 \cos \phi, y = 2 \sin \phi$

$$f(x, y) = f(x(\phi), y(\phi)) = 2x(\phi) + y(\phi) = 2(1 + 2 \cos \phi) + 2 \sin \phi = 2 + 2 \sin \phi + 4 \cos \phi = g(\phi), \text{ dove } \dim g(\phi) = 1$$

$$g'(\phi) = 2 \cos \phi - 4 \sin \phi = 0 \iff \tan \phi = \frac{1}{2}, \phi_1 = \arctan \frac{1}{2}, \phi_2 = \pi + \arctan \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2 \cos \phi_1 = 1 + 2 \cos \left( \arctan \frac{1}{2} \right) \\ y_1 = 2 \sin \phi_1 = 2 \sin \left( \arctan \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

Trovo  $x_2, y_2$  allo stesso modo.

La funzione ammette massimo e minimo per il teorema di Weierstrass. Non basta vedere però i punti in cui  $f' = 0$ , ma anche  $0, 2\pi$

$$f(x_1, y_1) = 2(1 + 2 \cos \phi_1) + 2 \sin \phi_1$$

$$f(x_2, y_2) = 2(1 + 2 \cos \phi_2) + 2 \sin \phi_2$$

$$f(x_3, y_3) = f(3, 0) = 6$$

$$g'_+(\phi) \Big|_{\phi=0} = -4 \sin 0 + 2 \cos 0 = 2 \implies \text{a dx di 0 è più grande, quindi (3, 0) non è punto di max}$$

$f(x_1, y_1) > f(x_2, y_2) \implies (x_1, y_1)$  è punto di massimo globale

$f(x_2, y_2) < 2 < f(x_3, y_3) \implies (x_2, y_2)$  è punto di minimo globale

(3, 0) non è punto né di massimo, né di minimo

## 2.2. Moltiplicatori di Lagrange

**Esempio introduttivo (Khan Academy):**

Devo massimizzare la funzione  $f(x, y) = x^2y$  sull'insieme  $x^2 + y^2 = 1$

$\nabla f$  ha la caratteristica di essere perpendicolare alle linee di livello di  $f(x, y)$ .

Definisco la funzione implicita  $g(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $\nabla g$  è perpendicolare alle linee di livello di  $g(x, y)$ . Il massimo si ha quando le linee di livello delle due funzioni sono tangenti, e i due gradienti saranno proporzionali, sullo stesso punto e nella stessa direzione e verso.

$\nabla f(x_m, y_m) = \lambda \nabla g(x_m, y_m)$  dove  $\lambda$  si chiama moltiplicatore di Lagrange

$$\nabla g = \nabla(x^2 + y^2) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

$$\nabla f = \nabla a(x^2 y) = \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

Mi resta da aggiungere il vincolo nel sistema, ovvero

$$\begin{cases} 2xy = \lambda 2x \\ x^2 = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Se  $x \neq 0 \implies x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $y = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$

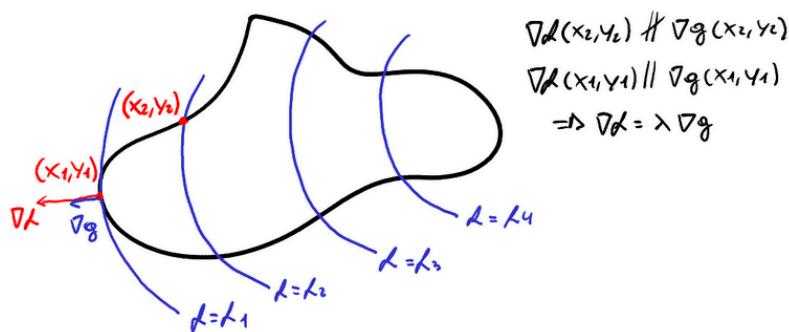
Se  $x = 0 \implies y = 0$ , ma non è possibile perché  $x^2 + y^2 = 1$  non è soddisfatta

Ci sono 4 punti potenziali che massimizzano la funzione vincolata. Metto i valori nella funzione e vedo qual'è il valore che la massimizza.

**Idea (Stepanov):**

Setting:  $\begin{cases} f(x, y) \rightarrow \max / \min \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$

Per il Teorema di Dini, nell'intorno di un punto  $g(x, y) = 0$  definisce una curva grafico di funzione implicita.



**Teorema 3 (Moltiplicatori di Lagrange):**

Sia  $(x_0, y_0)$  punto tale che  $f, g$  differenziabili in un suo intorno e  $f(x_0, y_0) = \max(f(x, y))$  (o min) per ogni  $(x, y)$  tale che  $g(x, y) = 0$

Allora succede una delle due cose:

$$\nabla g(x_0, y_0) = 0 \text{ oppure } \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0) \text{ per un qualche } \lambda \in \mathbb{R}$$

Operativamente, posso riscrivere queste due alternative definendo la funzione di Lagrange:

**Funzione di Lagrange:**  $L(x, y) := f + \lambda g \implies \nabla L = \nabla f + \lambda \nabla g$

$$\nabla L = 0 \iff \nabla f = -\lambda \nabla g$$

Quindi ci sono due alternative:

- Caso irregolare:  $\nabla g(x_0, y_0) = 0$
- Caso regolare:  $\nabla L(x_0, y_0) = 0$

### 2.2.1. Forma Fritz-John

Posso anche fare una riformulazione equivalente (per ingegneri) che include entrambi i casi:

$$L(x, y) := \lambda_0 f(x, y) + \lambda_1 g(x, y)$$

A questo punto  $\nabla L(x_0, y_0) = 0$  per qualche coppia  $\lambda_0, \lambda_1 \in \Re$  tali che  $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 \neq 0$  (ovvero che non si annullano contemporaneamente)

Verifichiamo che è una formulazione equivalente:

$$\nabla L(x_0, y_0) = 0 \iff \lambda_0 \nabla f(x_0, y_0) + \lambda_1 \nabla g(x_0, y_0) = 0$$

- $\lambda_0 = 0 \implies \lambda_1 \neq 0 \implies \lambda_1 \nabla g(x_0, y_0) = 0$  (caso irregolare)
- $\lambda_0 \neq 0 \implies \nabla f(x_0, y_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \nabla g(x_0, y_0) = 0$  (caso regolare)

#### Moltiplicatori di Lagrange in forma Fritz-John:

Se  $(x_0, y_0)$  è un punto di massimo o minimo (locale) di  $f$  vincolato a  $\{g = 0\}$  e  $f, g \in C^1$  in un intorno di  $(x_0, y_0)$  allora

$$\exists \lambda_0, \lambda_1 \in \Re : \exists L(x, y; \lambda_0, \lambda_1) : \nabla_{(x,y)} L(x, y; \lambda_0, \lambda_1) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = 0$$

**esempio:**

$$\begin{cases} 2x + y \rightarrow \max / \min \\ (x - 1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Sono entrambe curve liscie, quindi sono tranquillo.

$$f(x, y) = 2x + y, \quad g(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 - 4 \text{ funzione implicita}$$

$$\nabla L(x, y) = \lambda_0(2x + y) + \lambda_1((x - 1)^2 + y^2 - 4) \text{ dove } \lambda_0^2 + \lambda_1^2 \neq 0$$

$$\nabla L = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2\lambda_0 + 2\lambda_1(x - 1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \lambda_0 + 2\lambda_1y = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{sistema di 3 equazioni in 2 incognite e 2 parametri}$$

Caso irregolare:  $\lambda_0 = 0 \implies \lambda_1 \neq 0 \implies x = 1, y = 0$ , ma ciò non è possibile perché non soddisfa il vincolo

$$\text{Caso regolare: } \lambda_1 = 0 \implies \lambda_0 \neq 0 \implies \begin{cases} 1 + x(x - 1) = 0 \\ 1 - 2xy = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{sistema di 3 equazioni in 3 incognite}$$

$$\implies x = 1 \pm \frac{4}{\sqrt{5}}, y = \mp \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Quindi i punti critici sono  $(x_1, y_1) = \left(1 + \frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ,  $(x_2, y_2) = \left(1 - \frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$  (simmetrici)

$f(x_2, y_2) < f(x_1, y_1) \implies (x_2, y_2)$  punto di minimo,  $(x_1, y_1)$  punto di massimo.

# Dimostrazione che 1 è il massimo numero naturale

## 1. Esempio di calcolo di massimi e minimi vincolati

**esempio:**  $\begin{cases} f(x, y, z) := x + z^2 \rightarrow \max / \min \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Sto cercando massimi e minimi sul cilindro, non su tutto il dominio della funzione.

Dal grafico vedo che non esiste massimo perché sul piano  $Oxz$  non c'è massimo

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} f(x, y, z)_{x=0, y=\pm 1} = +\infty$$

$f$  ha minimo?

Per ora facciamo solo il calcolo, non mi basterà per concludere, ma vediamo dove ci porta.

$$L(x, y, z; \lambda_0, \lambda_1) := \lambda_0(x + z^2) + \lambda_1(x^2 + y^2 - 1)$$

$L \in C^1$  perché composizione di funzioni  $C^1$

Per il th. moltiplicatori di Lagrange in forma Fritz-John:

$$\nabla L = (\lambda_0 + 2\lambda_1 x, 2\lambda_1 y, 2\lambda_0 z) = 0 \iff \begin{cases} \lambda_0 + 2\lambda_1 x = 0 \\ 2\lambda_1 y = 0 \\ 2\lambda_0 z = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Caso irregolare:

$$\lambda_0 = 0 \iff \lambda_1 \neq 0$$

$$\text{la (1) diventa } \begin{cases} 2\lambda_1 x = 0 \\ 2\lambda_1 y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ non si può mai verificare.}$$

Caso regolare:

$$\lambda_0 \neq 0$$

$$\text{la (1) diventa } \begin{cases} 2\lambda_1 x = -\lambda_1 \\ 2\lambda_1 y = 0 \\ 2\lambda_0 z = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda x = -1 \\ 2\lambda y = 0 \\ 2z = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{-1}{2\lambda} \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

$$x = \mp 1, y = 0, z = 0$$

Punti critici:  $(1, 0, 0)$  e  $(-1, 0, 0)$

Ora che abbiamo fatto il calcolo, vediamo se  $f$  ammette minimo (globale) sul cilindro. Se non ci fosse tutto il cilindro, ma solo un pezzo, allora per il teorema di Weierstrass ci sarebbe sia massimo che minimo. Ma il mio cilindro è illimitato.

$$f(1, 0, 0) = 1, f(-1, 0, 0) = -1$$

$$x^2 + y^2 \leq 1 \implies -1 \leq x \leq 1$$

$$-1 + z^2 \leq f(x, y, z) = x + z^2 \leq 1 + z^2$$

$$\text{se } |z| > 2 \text{ allora } f(x, y, z) \geq 1 + 2^2 = 5$$

Ho troncato il cilindro a  $z = 2$  e  $z = -2$ . Il minimo va cercato solo sul pezzo troncato, e c'è per il teorema di Weierstrass. Al di fuori del pezzo troncato la funzione è maggiore, quindi esiste minimo.

$$C_2 = \{x^2 + y^2 = 1 : |z| \leq 2\} \text{ la } f \text{ ammette minimo per th. Weierstrass}$$

$$\min_{C_2} f \leq f(-1, 0, 0) = -1, f(x, y, z) \geq 0 \iff (x, y, z) \notin C_2 \text{ quindi } f \text{ ammette minimo su tutto il cilindro } \{x^2 + y^2 = 1\} \text{ e lo ammette in } C_2$$

Di conseguenza,  $(-1, 0, 0)$  è un punto di minimo globale. Non ci sono altri punti di minimo.

Che cosa è  $(1, 0, 0)$ ?

$$f(x, y, z) = x + z^2 = 1$$

- $f(1, 0, z) = 1 + z^2, z = 0$  è minimo di  $f(1, 0, 0)$

- $f(\cos \phi, \sin \phi, 0) = \cos \phi$ ,

$$x = \cos \phi, y = \sin \phi, z = 0$$

$$\max(f, \cos \phi, \sin \phi, 0) = 1$$

Lungo la retta verticale è minimo, lungo la circonferenza è massimo, quindi non è un pt di minimo o massimo locale.

Tirando le somme

- Non esiste massimo globale e locale
- Minimo locale e globale è unico ed è nel punto  $(-1, 0, 0)$

## 2. Dimostrazione che il massimo numero naturale è 1

Dato che mi sento funny e witty, voglio dimostrare che il massimo numero naturale è 1.

Sia  $n$  il massimo numero naturale

$n^2 \geq n$ , ma  $n$  è massimo ed  $n^2$  non può maggiorarlo. Quindi  $n^2 = n$

$n^2 - n = 0 \implies n(n - 1) = 0 \implies n = 0$  oppure  $n = 1$ . Allora 1 è il massimo numero naturale

Dov'è il problema? Ho assunto un oggetto inesistente e ho fatto manipolazioni algebriche che mi hanno portato ad una soluzione sbagliata. Prima avrei dovuto dimostrare l'esistenza del massimo numero naturale.

Se esiste il massimo numero naturale allora è 1. Questo è corretto.

Se esiste il massimo numero naturale allora è 128. Anche questo è corretto.

Falso implica sempre vero.

## Dimostrazione del teorema dei moltiplicatori di Lagrange (caso 2D)

**Teorema (moltiplicatori di Lagrange):**

$$\begin{cases} f(x, y) \rightarrow \min / \max \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Siano  $f, g : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto,  $f, g \in C^1(A)$

Se  $(x_0, y_0) \in A$  è una soluzione di (1), allora vale l'alternativa

- $\nabla g(x_0, y_0) = 0$  (caso irregolare)
- $\nabla G(x_0, y_0; \lambda) = 0$  (caso regolare)  
dove  $G(x, y; \lambda) := f(x, y) + \lambda g(x, y)$

In modo equivalente (**forma Fritz-John**)

$$\nabla L(x_0, y_0; \lambda_0, \lambda_1) = 0$$

$$\text{dove } L(x, y; \lambda_0, \lambda_1) := \lambda_0 f(x, y) + \lambda_1 g(x, y) \text{ con } \lambda_0^2 + \lambda_1^2 \neq 0$$

### Dimostrazione:

Sia  $(x_0, y_0) \in A$  soluzione di (1)

Per il teorema di Dini  $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0 \implies \{g(x, y) = 0\} \cap B_\rho((x_0, y_0))$  è una curva parametrica regolare.

Ossia  $\exists I \subset \mathbb{R}$  aperto e  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\begin{aligned} g(x(t), y(t)) &= 0 \quad \forall t \in I, \\ x(t_0) &= x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \in I \end{aligned} \quad (2)$$

Per la (2)  $\frac{d}{dt}(g(x(t), y(t))) = \nabla g(x(t), y(t)) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  (chain rule)  
 $t = t_0 \implies \nabla g(x_0, y_0) \cdot (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)) = 0$  ovvero

$$\nabla g(x_0, y_0) \cdot J = 0 \quad (3)$$

D'altronde il punto  $t = t_0$  è di min/max della funzione  $t \in I \rightarrow f(x(t), y(t))$

Allora, per il teorema di Fermat,  $\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) \Big|_{t=t_0} = 0$

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) \Big|_{t=t_0} = \nabla f(x(t_0), y(t_0)) \cdot (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot J$$

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot J = 0 \quad (4)$$

Per la (3) e la (4)  $\rightarrow \exists \gamma \in \Re : \nabla f(x_0, y_0) = \gamma \nabla g(x_0, y_0)$

ovvero  $\nabla(f(x, y) - \gamma g(x - y)) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0$

$$\lambda := -\gamma \implies \nabla(f(x, y) + \lambda g(x - y)) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0, \text{ ma } \nabla(f(x, y) + \lambda g(x - y)) = G(x, y, \lambda) \quad \square$$

# Integrazione

L'integrazione è il calcolo di volumi n-dimensional (lunghezze, aree, volumi...)

## 1. Concetto intuitivo del volume

(1) Definisco un rettangolo n-dimensionale (scatola)  $R := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$

Ad esempio, nel caso  $n = 3$  è un parallelepipedo,  $n = 1$  è un segmento.

Il volume è il prodotto della lunghezza di tutti i lati:  $V_n(R) = |b_1 - a_1| \cdot |b_2 - a_2| \cdot \dots \cdot |b_n - a_n|$

(2) Il volume di un qualsiasi oggetto  $E \subset \mathbb{R}^n$  rimane invariato se ci applico una  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  traslazione e/o rotazione. Ovvero  $V_n(E) = V_n(f(E))$ .

In generale,  $f$  può essere una qualunque **isometria nello spazio** (mappa che conserva le distanze):

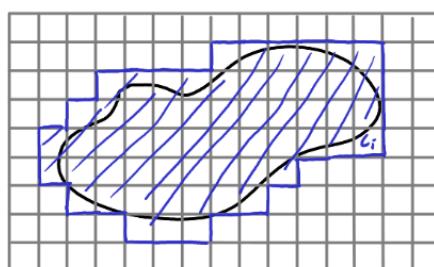
- Rotazioni:  $SO(n)$  (Special Orthogonal), tutte le applicazioni lineari il cui determinante è 1
- Simmetrie:  $O(n)$  (Orthogonal), tutte le applicazioni che hanno matrice associata ortogonale

(3) Se ho  $E_1, E_2, \dots, E_n \subset \mathbb{R}^n$  disgiunti (ovvero  $E_j \cap E_i = \emptyset$ ) allora  $V_n\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) = \sum_{i=1}^N V_n(E_i)$

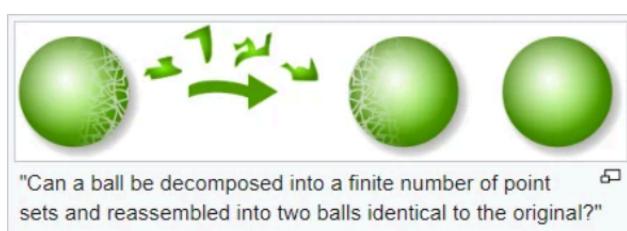
Questo vale anche per infiniti pezzi, basta che siano numerabili

(4)  $V_n(E) \geq 0$

(5)  $V_n(E) \approx \sum_{\substack{c_i \text{ caselle} \\ c_i \cap E \neq \emptyset}} V(c_i)$  con errore infinitesimo quando le  $c_i$  diventano piccole



Purtroppo applicare questi concetti intuitivi al calcolo del volume è impossibile. Posso prendere un insieme bellissimo come un quadrato. Lo divido in pezzi, li traslo e li ruoto in modo da comporre due quadrati uguali (**paradosso di Banach-Tarski**). I pezzi sono insiemi molto strani che non si possono nemmeno disegnare. Posso solo dimostrare la loro esistenza. Questo paradosso fu scoperto solo circa 100 anni fa.



## Conclusioni:

- Non ci sarà un volume definito per tutti gli insiemi (non vuol dire che il volume è 0, ma che non ha proprio senso parlare del volume come funzione sull'insieme). Il volume non è una caratteristica di qualsiasi sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$
- Ci saranno diversi "volumi", diverse definizioni e regole di calcolo, diverse classi di insiemi dove sono definiti. Ad esempio, integrale / volume di Riemann, integrale / volume di Lebesgue.

## 2. Integrale di Riemann (informale)

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  limitato,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  limitata

Scrivo la funzione in termine della sua parte positiva e negativa:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \text{ con } f^+(x) := \max\{f(x), 0\} = f(x) \vee 0, f^-(x) = f^+(x) - f(x)$$

### Pseudo-definizione 1 (Integrale di Riemann):

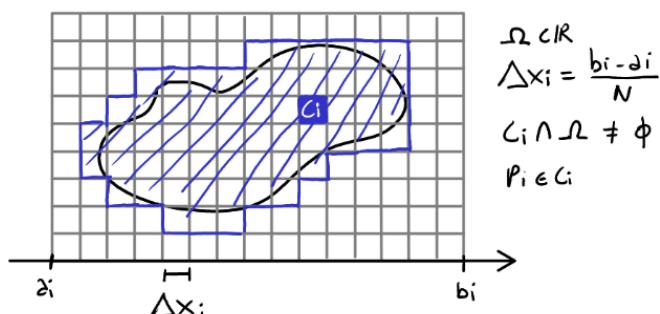
$$\int_{\Omega} f(x) dx := V_{n+1}(\{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x \in \Omega, 0 \leq x_{n+1} \leq f^+(x)\}) - V_{n+1}(\{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x \in \Omega, 0 \geq x_{n+1} \geq f^-(x)\})$$

Questa non è una definizione perché non è chiaro che cosa sia il volume  $(n+1)$ -dimensionale.

### Pseudo-definizione 2 (Integrale di Riemann):

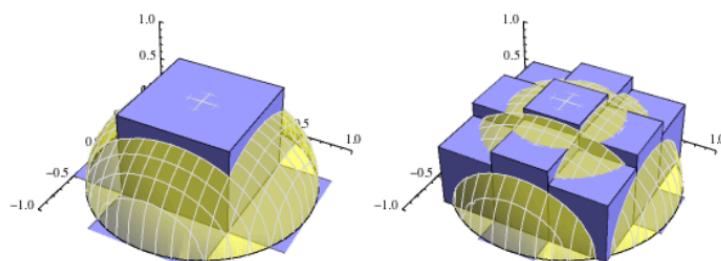
Sia  $g: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \geq 0$

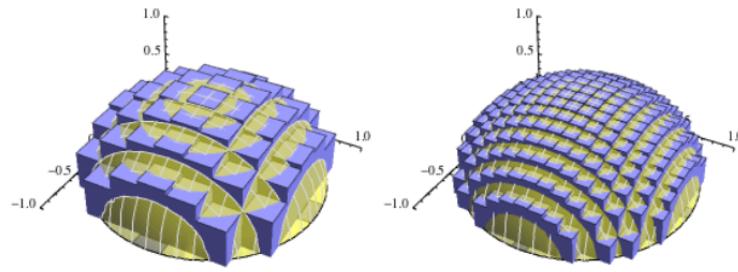
$$\int_{\Omega} g(x) dx = V_{n+1}(\{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x \in \Omega, 0 \leq x_{n+1} \leq g(x)\}) := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{c_i \cap \Omega \neq \emptyset} f(p_i) V_n(c_i)$$



Ma che è  $V_n(c_i)$ ? Non è una veramente una definizione, è molto sus. Come scelgo  $p_i$ ? Il limite esiste? Non ci importa.

### Significato geometrico:





Piuttosto che prendere partizioni di un intervallo, è possibile prendere 'griglie' (o prodotti cartesiani di partizioni).

### Notazione breve:

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} f^+(x) dx - \int_{\Omega} f^-(x) dx$$

Se esistono i due integrali allora si dice che la funzione è integrabile secondo Riemann.

Questa definizione per ingegneri va bene perché mi fornisce un modo per approssimare. Voglio però sapere quali funzioni sono integrabili e su quali domini.

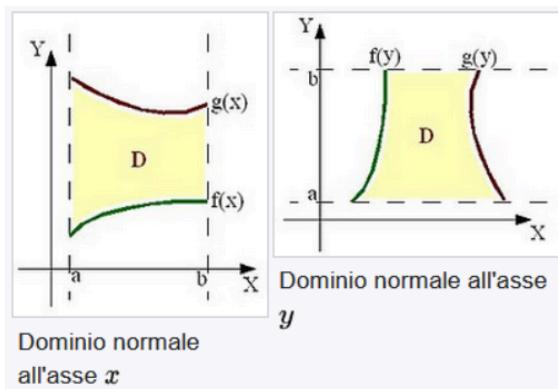
## 2.1. Domini semplici

I domini di funzioni a più variabili possono presentare una forma di regolarità per cui è possibile delimitare la regione da intervalli e grafici di funzione.

In  $\mathbb{R}^2$  esistono due casi di domini semplici (**trapezoidi curvilinei**):

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x), f, g \in C[a, b]\}$$
 rispetto all'asse  $x$

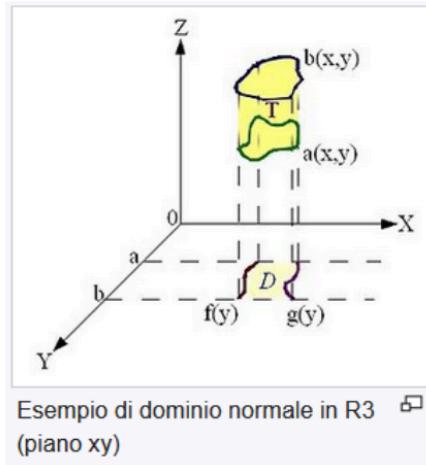
$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b, f(y) \leq x \leq g(y), f, g \in C[a, b]\}$$
 rispetto all'asse  $y$



In  $\mathbb{R}^3$  esistono 6 tipi diversi di domini semplici, mi limito a fornire un esempio (cilindroide)

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, a(x, y) \leq z \leq b(x, y)\}$$
 con

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b, f(y) \leq x \leq g(y)\}$$



### Domini "semplici":

$$\Omega := \{x_1, \dots, x_n\} \text{ dove } \begin{cases} a \leq x_1 \leq b \\ \underline{f}_2(x_1) \leq x_2 \leq \overline{f}_2(x_1) \\ \underline{f}_3(x_1, x_2) \leq x_3 \leq \overline{f}_3(x_1, x_2) \\ \dots \\ \underline{f}_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \overline{f}_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{cases}$$

Ciascuna funzione successiva è limitata da due grafici di funzioni che dipendono dalle variabili precedenti. Inoltre,  $\underline{f}_2, \overline{f}_2, \dots, \underline{f}_n, \overline{f}_n \in C[a, b]$

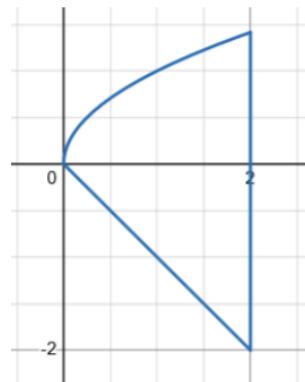
### esempio (fetta di pizza):

$$\Omega := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

Divido il dominio in  $\Omega_+$  e  $\Omega_-$

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\} = \\ &= \{(x, y) : 0 \leq y \leq \sqrt{2}, y^2 \leq x \leq 2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_- &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq 0\} = \\ &= \{(x, y) : -2 \leq y \leq 0, -y \leq x \leq 2\} \end{aligned}$$



In realtà  $\Omega \neq \Omega_+ \cup \Omega_-$  poiché la linea che sta sull'ascissa è in entrambi  $\Omega_+$  e  $\Omega_-$ . Non importa perché il volume della linea è nullo

### esempio (palla aperta):

$$\Omega := B_1((3, 4)) = \{(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 1\}$$

Palla di raggio 1 centrata in (3,4).

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{ (x, y) : 2 \leq x \leq 4, 4 - \sqrt{1 - (x-3)^2} \leq y \leq 4 + \sqrt{1 - (x-3)^2} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y) : 3 \leq y \leq 5, 3 - \sqrt{1 - (y-3)^2} \leq x \leq 3 + \sqrt{1 - (y-4)^2} \right\}\end{aligned}$$

**Teorema**  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  semplice,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua

Allora  $f$  è integrabile su  $\Omega$

Condizione di integrabilità secondo Riemann per funzioni scalari definite su domini semplici

**Osservazione:** è integrabile anche in  $\overline{\Omega}$  e  $\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\overline{\Omega}} f(x) dx$

**Teorema (teorema di Fubini):**

Sia  $f(x_1, \dots, x_n)$  integrabile su  $\Omega$  semplice, allora

$$\int_{\Omega} f dx = \int_a^b dx_1 \left( \int_{\underline{f}_2(x_1)}^{\bar{f}_2(x_1)} dx_2 \left( \int_{\underline{f}_3(x_1, x_2)}^{\bar{f}_3(x_1, x_2)} dx_3 \left( \dots \left( \int_{\underline{f}_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\bar{f}_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \right) \right) \right)$$

# Calcolo di integrali

## 1. Proprietà dell'integrale di Riemann

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  limitato

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  limitata

$$\int_{\Omega} f dx \equiv \frac{\iint \dots \int f dx}{n}$$

**Proprietà ovvie:**

$f \geq 0 \Rightarrow \int_{\Omega} f dx \geq 0$	$f \leq 0 \Rightarrow \int_{\Omega} f dx \leq 0$	$\int_{\Omega} 0 dx = 0$
$f(x) \equiv 1 \Rightarrow \int_{\Omega} dx =  \Omega $ (volume di $\Omega$ )	$\int_{\Omega} \lambda f dx = \lambda \int_{\Omega} f dx, \lambda \in \mathbb{R}$	$f_1, f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\int_{\Omega} f_1 + f_2 = \int_{\Omega} f_1 + \int_{\Omega} f_2$

**Notazione:**  $\int_{\Omega} f dx = \int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int \dots \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$

**Proprietà**  $|\Omega| = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} f dx = 0$  dove  $|\Omega|$  è il volume  $n$ -dimensionale

**Dimostrazione:**

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{c_i: c_i \cap \Omega \neq \emptyset} |c_i| = 0$$

ma per  $f \geq 0$  si ha  $\int_{\Omega} f dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{c_i: c_i \cap \Omega \neq \emptyset} f(p_i) |c_i| \leq M \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{c_i: c_i \cap \Omega \neq \emptyset} |c_i| = M \cdot 0 = 0$

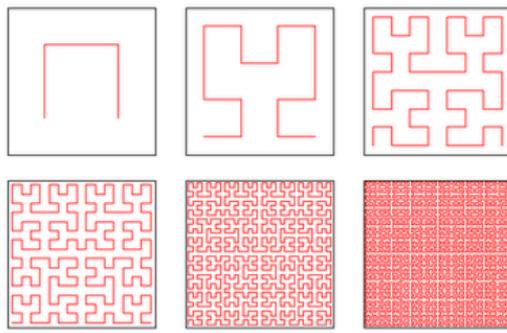
Perchè io so che per ipotesi  $f$  è limitata ovvero  $|f(x)| \leq M$   $\square$

**Osservazione importante:**

Quali insiemi  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  hanno volume 0?

- $\Omega = \{P\} \Rightarrow |\Omega| = 0$

Fino alla fine dell'800 la gente pensava che in  $\mathbb{R}^2$  tutte le curve avessero area 0, ma non è vero in generale. Il matematico italiano Giuseppe Peano ha inventato un esempio di una curva parametrica con volume nonzero (**curva di Peano**)



- $\Omega$  è un grafico di una funzione continua (no dim)
- $\Omega$  è il sostegno di una curva parametrica di lunghezza finita

In particolare, i bordi di molti insiemi "buoni" hanno volume 0. Per esempio, una palla in  $\mathbb{R}^3$  ha come bordo una sfera. La sfera è composta da due emisfere, ciascuna delle quali è grafico di una funzione continua. Allora il bordo della palla ha volume 0. L'ellisse in  $\mathbb{R}^2$  ha come bordo l'ellisse, che si può esprimere come unione di due grafici di due funzioni continue. Tutti gli insiemi di cui parleremo hanno bordi nulli.

$$\text{Proprietà } \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n \text{ disgiunti} \implies \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f dx = \int_{\Omega_1} f dx + \int_{\Omega_2} f dx$$

In realtà,  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  basta che siano "**quasi**" **disgiunti**, ovvero  $|\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = (\Omega_1 - \Omega_2) \cup (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup (\Omega_2 - \Omega_1). \text{ Questi tre insiemi sono tutti disgiunti, quindi}$$

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f dx = \int_{\Omega_1 - \Omega_2} f dx + \int_{\Omega_2 - \Omega_1} f dx + \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f dx = \int_{\Omega_1} f dx + \int_{\Omega_2} f dx$$

Se la loro intersezione è piccola, ovvero ha volume n-dimensionale nullo, allora va bene.

$$\text{Proprietà } m \leq f(x) \leq M \implies m|\Omega| \leq \int_{\Omega} f dx \leq M|\Omega|$$

## 2. Teorema di Fubini e dimostrazione intuitiva

Se **calcolare** le derivate è sempre possibile (ma magari non esistono), non è detto che sia possibile calcolare un integrale. Nella maggioranza dei casi, un integrale si può solo approssimare, ma non si può avere una formula precisa.

Abbiamo visto una condizione sufficiente per l'integrabilità di una funzione definita su un insieme semplice, e abbiamo visto un metodo per calcolare l'integrale: il teorema di Fubini (o anche chiamato metodo di Cavalieri).

### Richiamiamo il teorema di Fubini:

Sia  $f(x_1, \dots, x_n)$  integrabile su  $\Omega$  semplice, allora

$$\int_{\Omega} f dx = \int_a^b dx_1 \left( \int_{\underline{f}_2(x_1)}^{\overline{f}_2(x_1)} dx_2 \left( \int_{\underline{f}_3(x_1, x_2)}^{\overline{f}_3(x_1, x_2)} dx_3 \left( \dots \left( \int_{\underline{f}_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\overline{f}_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \right) \right) \right)$$

Dove  $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$  dove

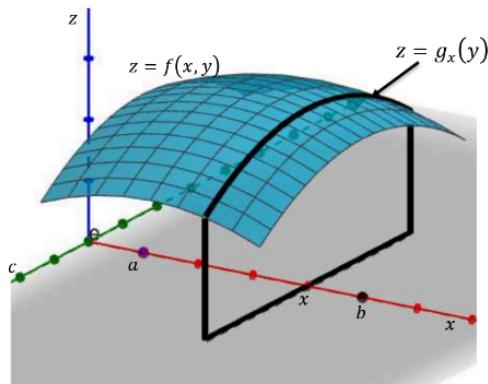
$$\begin{cases} a \leq x_1 \leq b \\ \underline{f}_2(x_1) \leq x_2 \leq \overline{f}_2(x_1) \\ \underline{f}_3(x_1, x_2) \leq x_3 \leq \overline{f}_3(x_1, x_2) \\ \dots \\ \underline{f}_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \overline{f}_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{cases}$$

Come mai il teorema funziona? Ipotizziamo di integrare in  $\mathbb{R}^3$ . Nel caso di  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , il teorema è chiamato (da me) metodo dell'affettatrice per il prosciutto:

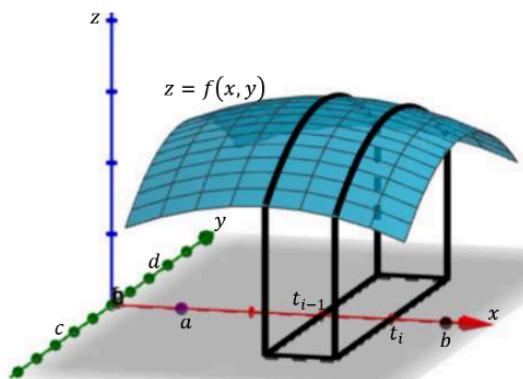
Sia  $f : \Omega = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e  $f(x, y) \geq 0$

Sia  $t_0, \dots, t_n$  una partizione di  $[a, b]$

Definisco  $g_x(y) := f(x, y)$ , ovvero fisso  $x \in [a, b]$



L'area sotto il grafico di  $f$  sopra  $\{x\} \times [c, d]$  è  $\int_c^d g_x = \int_c^d f(x, y) dy$



Il volume della regione sotto il grafico di  $f$  e sopra  $[t_{i-1}, t_i] \times [c, d]$  è approssimativamente  $(t_i - t_{i-1}) \int_c^d f(x, y) dy$  per ogni  $x \in [t_{i-1}, t_i]$ .

Dunque  $\int_{\Omega} f = \sum_{i=1}^n \int_{[t_{i-1}, t_i] \times [c, d]} f \approx \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \int_c^d f(x_i, y) dy$  con  $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$

Sia  $h(x) := \int_c^d g_x = \int_c^d f(x, y) dy$ . Allora, per il teorema di Fubini,  $h(x)$  è integrabile su  $[a, b]$  e  $\int_{\Omega} f = \int_a^b h = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$

### 3. Esempi ed esercizi

**esempio 1:**

$$\iint_{[0,1]^2} xy \, dx \, dy$$

Usando il teorema di Fubini:  $\int_0^1 dx \int_0^1 xy \, dy$

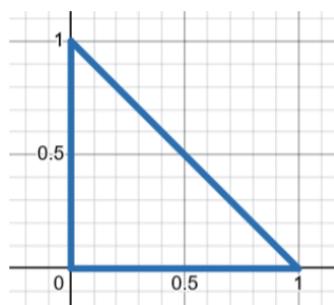
Si legge da destra a sinistra (come un manga)

$$\int_0^1 x \, dx \int_0^1 y \, dy \Big|_{y=x} = \left( \int_0^1 x \, dx \right)^2 = \left( \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

**In generale:**  $\int_{[a,b] \times [c,d]} f(x)g(y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \left( \int_c^d f(x)g(y) \, dy \right) = \int_a^b f(x) \, dx \int_c^d g(y) \, dy$

**esempio 2:**

Trovare il baricentro del triangolo  $T = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$



$$(\bar{x}, \bar{y}) : \bar{x} = \bar{\int}_T x \, dx \, dy, \bar{y} = \bar{\int}_T y \, dx \, dy$$

N.B.  $\bar{\int}_{\Omega} f \, dx := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f \, dx$  si chiama **integrale barrato**, ovvero la media integrale di  $f$

**Significato fisico:**  $f \, dx$  è la densità puntuale,  $\bar{\int}_{\Omega} f \, dx$  è la densità media,  $|\Omega|$  è il volume.

Tornando a noi:  $T = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$

$$\bar{x} = \oint_T x \, dxdy = \frac{1}{|T|} \int_T x \, dxdy = \frac{1}{1/2} \int_0^1 dx \int_0^x y \, dy = 2 \int_0^1 x \, dx \int_0^x y \, dy$$

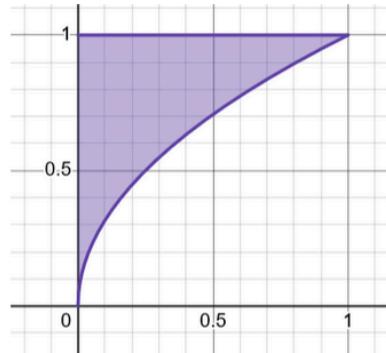
Attenzione: questo non è un prodotto tra integrali!

$$= 2 \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3} = \bar{x}$$

$$\bar{y} = ?? \text{ Anzichè fare il calcolo, mi accorgo che è simmetrica} \implies \bar{y} = \frac{2}{3}$$

### esempio 3:

$$\int_D \sin y^3 \, dxdy, D := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$$

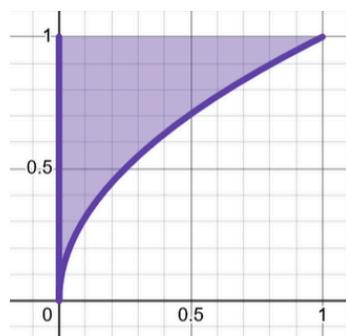


$$\iint_D \sin y^3 \, dxdy = \int_{[0,1]} dx \int_{[\sqrt{x},1]} \sin y^3 \, dy$$

Non si può calcolare l'integrale di  $\sin y^3$  in termini di funzioni elementari.

Proviamo a cambiare ordine di integrazione:

$$\text{Vedo come insieme } D_1 := \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$$



$$\begin{aligned} \text{Allora } \iint_{D_1} \sin y^3 \, dxdy &= \int_{[0,1]} \sin y^3 \, dy \int_{[0,y^2]} \, dx = \int_{[0,1]} y^2 \sin y^3 \, dy = \frac{1}{3} \int_{[0,1]} \sin y^3 \, dy^3 = \\ &= \frac{1}{3} (-\cos y^3) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (1 - \cos 1) \end{aligned}$$

### esempio 4:

Trova l'area del cerchio di raggio  $R$

$$D := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\} = \{(x, y) : -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}$$

Per il teorema di Fubini:  $|D| = \iint_D dxdy = \int_{[-R,R]} dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = (*)$

$$x = R \sin t, \quad t \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} (*) &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \\ &= 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos t| \cos t dt = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(x + \sin t \cos t) dt = 2R^2 \frac{\pi}{2} = \pi R^2 \end{aligned}$$

Archimede ha dimostrato la formula dell'area del cerchio senza conoscere il calcolo integrale  
(vedere appunti di analisi 1)

# Esempi di integrali multipli, cambio di variabili

## 1. Esempi di integrali multipli

### 1.1. esempio 1 (passaggio a coordinate polari):

$$\int_D x^2 y^2 \, dx dy = I$$

$$D := \{x, y : x^2 + y^2 \leq 2\}$$

Facendo il calcolo come nell'esempio precedente, si arriva a  $I = \frac{2}{3} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)^{3/2} x^2 dx$

Questo integrale è sicuramente positivo poiché la funzione si annulla solo agli estremi dell'intervallo, poi è strettamente positiva.

**Metodo bovino:** Trovo la primitiva, ma è parecchio laborioso

**Metodo astuto:** passo alle coordinate polari

$$\int_D g(x) dx = \int_{f(\Omega)} g(x) dx \Big|_{x=f(y)} = \int_{\Omega} g(f(y)) J(y) dy$$

$$\text{dove } J(y) := \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial} & \dots \\ \vdots & \end{bmatrix} \right|$$

$$\text{Allora } \int_D g(x, y) dx dy = \int_{\Omega} g(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) J(\rho, \phi) d\rho d\phi$$

Dove  $\Omega$  è un cerchio di raggio  $\sqrt{2}$  in coordinate polari:  $\Omega$  è un rettangolo sul piano  $(\rho, \phi)$

$$J(\rho, \phi) = \left| \det \begin{bmatrix} x_\rho & x_\phi \\ y_\rho & y_\phi \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \right|$$

$$\text{Allora } \int_D g(x, y) dx dy = \int_{\Omega} g(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \rho d\rho d\phi$$

Un fisico avrebbe detto che ho trovato la trasformazione della **forma volume** dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari.  $dx dy$  forma volume in coordinate cartesiane,  $\rho d\rho d\phi$  forma volume in coordinate polari.

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi (\rho \cos \phi)^2 (\rho \sin \phi)^2 = \int_0^{\sqrt{2}} \rho^5 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \sin^2 \phi d\phi$$

Siccome gli integrali non dipendono tra di loro, devo fare semplicemente un prodotto tra due integrali.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} \sin 2\phi \right)^2 d\phi = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\phi \, d\phi = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos^4 \phi}{2} d\phi = \\
&= \frac{1}{6} \left( \int_0^{2\pi} d\phi - \int_0^{2\pi} \cos^4 \phi \, d\phi \right) = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Calcolo alternativo:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin^2 2\phi \, d\phi &= \int_0^{2\pi} \cos^2 2\phi \, d\phi = A \text{ poiché integrale di funzione periodica su tutto il periodo} \\
A + A &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 2\phi + \cos^2 2\phi) \, d\phi = ...
\end{aligned}$$

**Osservazione:** Nell'integrale c'è l'area di una semicirconferenza... (vedere appunti lezione)

### 1.2. esempio 2 (area di un'ellisse):

$$\Omega := \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}; \quad a, b > 0$$

$$Area(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy$$

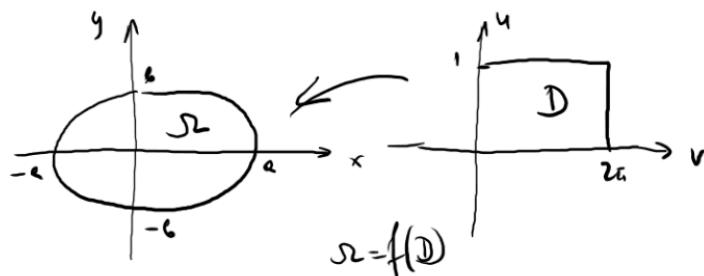
$$\Omega = \left\{ (x, y) : -b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} < y < b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, -a < x < a \right\}$$

Per il Teorema di Fubini:

$$\begin{aligned}
Area(\Omega) &= \int_{-a}^a dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy = \int_{-a}^a y \Big|_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx \dots \\
&= \frac{2b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = ...
\end{aligned}$$

**Metodo astuto (coordinate ellittiche):** Un'ellisse in coordinate polari non diventa un rettangolo.

Allora mi invento un nuovo sistema di coordinate  $u, v$  tale che  $x = au \cos v$ ,  $y = bv \sin v$



Se  $a = b = 1$  queste sono esattamente le coordinate polari.

$$u^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \tan v = \frac{ay}{bx}$$

$$\int_{\Omega} g(x, y) dx dy = \int_D g(au \cos v, bu \sin v) J(u, v) du dv$$

dove  $J(u, v) = \left| \det \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} a \cos v & -au \sin v \\ b \sin v & bu \cos v \end{bmatrix} \right| = |abu \cos^2 v + abu \sin^2 v| = abu$

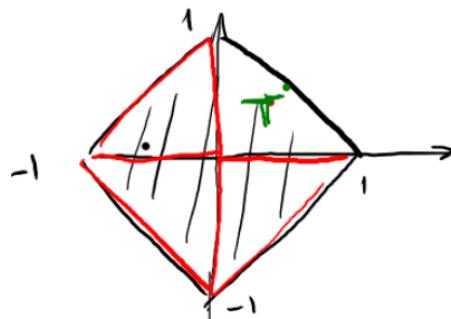
$$\int_{\Omega} g(x, y) dx dy = \int_D g(au \cos v, bu \sin v) abu du dv$$

Forma volume  $(x, y)$  in coordinate ellittiche è  $abu du dv$

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\Omega} dx dy = \int_0^1 u du \int_0^{2\pi} dv = ab2\pi \frac{u^2}{2} \Big|_0^1 = \pi ab$$

### 1.3. esempio 3:

$$\int_{|x|+|y|\leq 1} x^2 y^2 dx dy$$

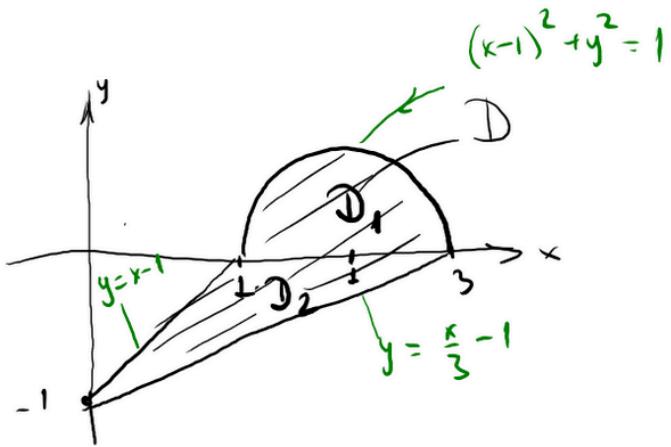


La funzione è simmetrica rispetto a entrambi gli assi: posso calcolare  $4 \int_T x^2 y^2 dx dy$

$$\begin{aligned} &= 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 y^2 dy = 4 \int_0^1 x^2 dx \frac{y^3}{3} \Big|_0^{1-x} = \frac{4}{3} \int_0^1 x^2 (1-x)^3 dx = \\ &= \frac{4}{3} \int_0^1 x^2 (1-3x+3x^2-x^3) dx = \frac{4}{3} \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{4}{3} \left( \frac{1}{60} \right) \end{aligned}$$

### 1.4. esempio 4:

$$\int_D xy dx dy = I = ?$$



Mi conviene spezzare il dominio in 2: il semicerchio  $D_1$  e il triangolo  $D_2$

$$D_1 := \left\{ (x, y) : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - (x-2)^2} \right\}$$

$$D_2 := \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 3, \frac{x}{3} - 1 \leq y \leq x - 1 \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{D_1} xy \, dx dy + \int_{D_2} xy \, dx dy = \int_1^3 x dx \int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} y dy - \int_0^3 x dx \int_{x-1}^{\frac{x}{3}-1} y dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_2^3 x dx (1 - (x-1)^2) - \frac{1}{2} \int_0^3 x dx y^2 \Big|_{x-1}^{\frac{x}{3}-1} = \frac{1}{2} \int_2^3 dx (x - (-x^2 + 2x)) - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^3 x dx \left( \left( \frac{x}{3} - 1 \right)^2 - (x-1)^2 \right) = \frac{1}{2} \int_2^3 (-x^3 + 4x^2 - 3x) dx + \frac{1}{2} \int_0^3 x dx \left( -\frac{8}{9}x^2 + \frac{4}{3}x \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_1^3 - \frac{1}{2} \left( -\frac{8}{9}\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \dots \end{aligned}$$

Controlli per evitare errori: se calcolo positiva l'integrale dev'essere positivo. Se integro qualcosa di negativo l'integrale dev'essere negativo.

## 2. Cambio di variabili

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f: \Omega \rightarrow D$ ,  $f$  biunivoca su  $\Omega$

$$x = (x_1, \dots, x_n), f = (f_1(x), \dots, f_n(x)), D = f(\Omega)$$

$$\int_D g(x) dx = \int_{f(\Omega)} g(x) dx \Big|_{x=f(y)} = \int_{\Omega} g(f(y)) J(y) dy$$

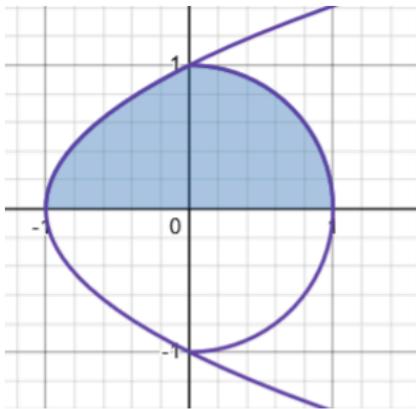
$$\text{dove } J(y) := \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(y) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(y) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(y) \end{bmatrix} \right|$$

# Esercizi di integrazione e integrali generalizzati

## 1. Esercizi di riscaldamento

### Esercizio 1:

Calcola l'area di  $D : y^2 - 1 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}$  con  $0 \leq y \leq 1$



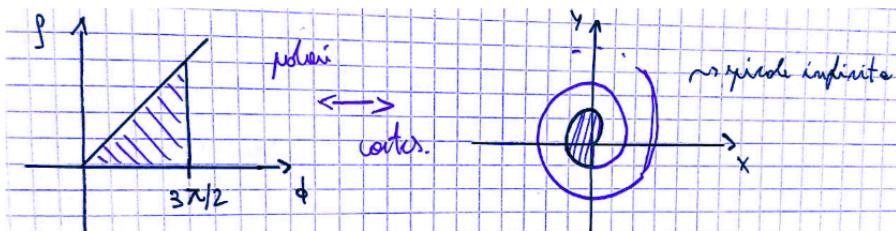
$x = y^2 - 1$  è una parabola,  $\sqrt{1 - y^2}$  è un pezzo di circonferenza.  $x = \sqrt{1 - y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x > 0 \end{cases}$

$$\text{Area}(D) := \iint_D dx dy = \int_0^1 dy \int_{y^2-1}^{\sqrt{1-y^2}} dx = \int_0^1 dy x \Big|_{y^2-1}^{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^1 (\sqrt{1-y^2} - (y^2 - 1)) dy = \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy - \int_0^1 y^2 - 1 dy = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}, \text{ so che } \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = \frac{2\pi}{4} \text{ poichè è } \frac{1}{4} \text{ di circonferenza}$$

### Esercizio 2:

$$\text{Calcola } I := \iint_{\Omega} \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy \text{ con } \Omega := \left\{ (\rho, \phi) : \rho < \theta, 0 \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2} \right\}$$

Disegno il dominio  $\Omega$ . In coordinate polari è un triangolo, in coordinate cartesiane è una spirale



$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  è continua fino al bordo del dominio  $(0, 0)$

$$f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) = \frac{\rho^2 \sin \phi \cos \phi}{\rho^2} = \frac{1}{2} \sin 2\phi, \text{ non dipende da } \rho$$

Quando  $(x, y) \rightarrow 0$ , il limite non esiste, quindi la funzione non è continua nell'origine. Ci serve un ulteriore studio per dimostrare che è integrabile, ma assumiamo che lo sia.

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D \frac{xy}{x^2+y^2} dxdy = \int_0^{3\pi/2} dy \int_0^\phi \frac{1}{2} \sin(2\phi) \rho d\rho \text{ (forma-volume in coordinate polari)} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{3\pi/2} \sin 2\phi d\phi \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^\phi = \frac{1}{4} \int_0^{3\pi/2} \phi^2 \sin 2\phi d\phi \\
&= \dots \text{da risolvere per parti (analisi 1 department)} \dots \approx 3
\end{aligned}$$

### Esercizio 3:

Calcola  $I := \iint_{\Omega} \frac{x^3y}{x^2+y^2} dxdy$  dove  $\Omega := [0, 1] \times [0, 1]$

Questa volta mi conviene scrivere  $\Omega$  in forma cartesiana:  $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^3y}{x^2+y^2} dy$ , la funzione non è continua in  $(0, 0)$ . Per far sì che la funzione sia continua posso definirla uguale a 0 nel punto di discontinuità, ma chissene frega.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^3 dx \int_0^1 \frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 dx + \ln(x^2+y^2) \Big|_{y=0}^1 = \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 (\ln(1+x^2) - \ln x^2) dx = \\
&= \frac{1}{2} \left( \int_0^1 x^{x^2} \ln(1+x^2) dx \Big|_{t=x^2} - 2 \int_0^1 x^3 \ln x dx \right)^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \int_0^1 t \ln(1+t) dt - 2 \int x^3 \ln x dx \right) = \\
&= \frac{1}{4} \int_0^1 \ln(1+t) dt^2 - \left( \int_0^1 \ln x dx^4 \right) \frac{1}{4} = \frac{1}{8} t^2 \ln(1+t) \Big|_0^1 - \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt - \frac{1}{4} x^4 \ln x \Big|_0^1 + \\
&+ \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{x^4}{x} dx = \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t} + \frac{1}{4} \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{8} \ln 2 + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t} \stackrel{(2)}{=} = \frac{1}{8} \ln 2 + \frac{1}{16} - \\
&- \frac{1}{8} \left( -\frac{1}{2} + \ln 2 \right) = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

(1) Cosa è questa sostituzione?

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^3 \ln(1+x^2) dx &= \int_0^1 x^2 \ln(1+x^2) \underline{x dx} = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \ln(1+x^2) d \\
&= 1/2 dx^2
\end{aligned}$$

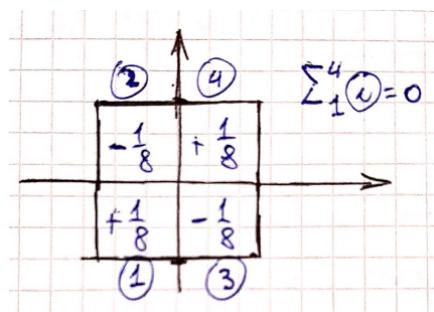
(2) Faccio la divisione tra polinomi:

$$t^2 / t + 1 = (t - 1) \left( \frac{1}{t + 1} \right)$$

### Esercizio 4:

Calcola  $I := \iint_{[-1,1] \times [-1,1]} \frac{x^3y}{x^2+y^2} dxdy$

Vedo subito che fa 0:



## 2. Esercizi di integrali generalizzati

### 2.1. Integrale generalizzato con le palle

Ricordate quando ad analisi 1 abbiamo studiato la convergenza della **funzione degli errori**? Adesso possiamo addirittura calcolare l'integrale!

$$\text{Calcola } I := \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Sto integrando una superficie di rotazione a forma di campana di Gauss, su un dominio illimitato. Non è possibile integrare secondo Riemann, ma posso calcolare l'integrale generalizzato

Calcolo l'integrale tramite  $B_R(0)$  con  $R \rightarrow +\infty$ , ovvero con una palla molto grossa



$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x) dx dy := \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R(0)} f(x) dx dy$$

$$\iint_{B_R(0)} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} dy \int_0^R \rho d\rho e^{-\rho^2} = \dots = \pi(1 - e^{-R^2}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \pi$$

### 2.2. Integrale generalizzato con i quadrati

$$\text{Calcola } I := \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Questa volta, anziché usare le palle, posso usare una scatola:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x) dx dy := \lim_{L \rightarrow +\infty} \iint_{[-L,L]} f(x) dx dy$$

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{[-L,L]} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_{[-L,L]} dx \int_{[-L,L]} dy e^{-(x^2+y^2)} = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L}^L e^{-x^2} dx \int_{-L}^L e^{-y^2} dy = \\ &= \lim_{L \rightarrow +\infty} \left( \int_{-L}^L e^{-x^2} dx \right)^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 \text{ (integrale improprio)} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = (\sqrt{\pi})^2 = \pi \end{aligned}$$

Ho fatto un calcolo unidimensionale dell'area sotto la gaussiana, con strumenti bidimensionali. Ad analisi 1 potevamo solo dire che questo integrale esiste. Ora possiamo anche calcolarlo.

### 2.3. Integrale generalizzato con funzione integranda illimitata

$$\text{Calcola } \int_{B_1(0)} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} dx dy$$

La funzione integranda è discontinua e illimitata, ha senso calcolare l'integrale in tutti i punti tranne che in  $(0,0)$ . Siccome c'è irregolarità, tolgo un cerchio di raggio  $\epsilon$  centratò in  $(0,0)$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_1(0) \setminus B_\epsilon(0)} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} dx dy = 2\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_\epsilon^1 \rho^{1-\alpha} d\rho = \begin{cases} 2\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\rho(2-\alpha)}{2-\alpha} \Big|_\epsilon^1, & 1-\alpha > -1 \\ +\infty, & 1-\alpha \leq -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha}, & \alpha < 2 \\ +\infty, & \alpha \geq 2 \end{cases}$$

## 2.4. Integrale generalizzato

Calcola  $\int_D \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha} dx dy$  dove  $D := \{x^2 + y^2 > 1\}$ . La funzione è continua e limitata per  $\alpha > 0$ , il problema è che il dominio è illimitato.

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\{R > x^2 + y^2 > 1\}} \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha} dx dy &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^R \frac{\rho d\rho}{\rho^\alpha} = 2\pi \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \rho^{1-\alpha} d\rho = \\ &= 2\pi \begin{cases} \frac{\rho^{2-\alpha}}{2-\alpha} \Big|_1^R, & 2-\alpha < 0 \\ +\infty & 2-\alpha \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## 3. Esercizi su integrali tripli

### 3.1. Volume di una palla

Trova il volume di  $B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$

**Metodo 1 (coordinate sferiche):**

$$V(B_R(0)) = \iiint_{B_R(0)} dx dy dz = ?$$

$(x, y, z) \mapsto (\rho, \phi, \theta)$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$  longitudine,  $\theta \in [0, \pi]$  colatitudine

$$\begin{cases} z = \rho \cos \theta \\ x = \rho \sin \theta \cos \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} J &= \left| \det \begin{bmatrix} x_\rho & x_\phi & x_\theta \\ y_\rho & y_\phi & y_\theta \\ z_\rho & z_\phi & z_\theta \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi & \rho \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta & 0 & -\rho \sin \theta \end{bmatrix} \right| = \rho^2 |\sin \theta| \\ &= \rho^2 \sin \theta \text{ poiché } \theta \in [0, \pi] \end{aligned}$$

I geografi usano la latitudine per tradizione, i matematici usano la colatitudine poiché il segno è già positivo e i calcoli sono più facili.

La forma volume delle coordinate sferiche  $dx dy dz \rightsquigarrow \rho^2 \sin \theta d\rho d\phi d\theta$

$$\begin{aligned} V(B_R(0)) &= \iiint_{B_R(0)} dx dy dz = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \rho^2 \sin \theta d\theta = \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

### Metodo 2:

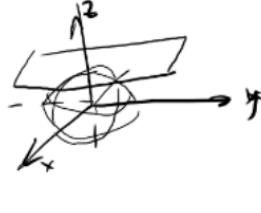
Il bordo della palla è  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \implies$

$$B_R(0) := \left\{ x^2 + y^2 \leq R^2 \wedge -\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \leq z \leq \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \right\}$$

$$\begin{aligned} V(B_R(0)) &= \iiint_{B_R(0)} dx dy dz = \iint_{\{(x,y): x^2 + y^2 \leq R^2\}} dx dy - \int_{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} dz = \\ &2 \iint_{\{(x,y): x^2 + y^2 \leq R^2\}} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} dx dy = 2 \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{R^2 - \rho^2} = \\ &2\pi \cdot 2 \int_0^R \rho d\rho \sqrt{R^2 - \rho^2} = \frac{4\pi}{2} \int_0^R d\rho^2 \sqrt{R^2 - \rho^2} = -2\pi \int_0^R d(R^2 - \rho^2) \sqrt{R^2 - \rho^2} = \\ &-2\pi \frac{2}{3} (R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}+1} \Big|_0^R = -\frac{4\pi}{3} (R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^R = \frac{4\pi}{3} R^{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3} R^3 \end{aligned}$$

### Metodo 3:

$$B_R(0) = \left\{ \begin{array}{l} -R \leq z \leq R \\ x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2 \end{array} \right. \text{ taglio la palla con piani paralleli a } O_{xy}$$



$$\begin{aligned} \iiint_{B_R(0)} dx dy dz &= \int_{-R}^R dz \iint_{\{(x,y): x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2\}} dx dy = \int_{-R}^R dz \pi(R^2 - z^2) = \\ &= \pi \int_{-R}^R dz (R^2 - z^2) = \pi \left( R^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \pi \left( 2R^2 R - \frac{2R^3}{3} \right) = \end{aligned}$$

### 3.2. Massa e baricentro di un cono

Sia  $\Omega$  il cono  $x^2 + y^2 < (1-z)^2$ ,  $0 < z < 1$  con densità  $f(x, y, z) = z$ .

Trovare massa totale e coordinate del baricentro.

#### Massa totale:

$$\begin{aligned} M &:= \iiint_{\Omega} f dx dy dz = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} dx dy \int_0^{1-\sqrt{x^2 + y^2}} z dz = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} dx dy \frac{z^2}{2} \Big|_0^{1-\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi (1 - \rho) = \dots = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

#### Baricentro:

Il baricentro ha coordinate  $(x_c, y_c, z_c)$

$$x_c' = \int_{\Omega} x f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Omega} x z dx dy dz = 0 \text{ questo poiché la funzione è simmetrica in } x$$

$$y_c' = \int_{\Omega} y z dx dy dz = 0 \text{ per lo stesso motivo}$$

$$z_c' = \int_{\Omega} z^2 dx dy dz = \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{(1-\rho)^2} z^2 dz = 2\pi \int_0^1 \rho d\rho \frac{z^3}{3} \Big|_0^{(1-\rho)^2} = \frac{2\pi}{3} \int_0^1 \rho (1 - \rho)^6 d\rho$$

$$\text{Per il binomio di newton: } = \frac{2\pi}{3} \int_0^1 \rho (1 - 6\rho + 15\rho^2 - 20\rho^3 + 15\rho^4 - 6\rho^5 + \rho^6) = \dots$$

Per trovare le coordinate del baricentro, divido tutto per la massa.  $(x_c, y_c, z_c) = \left(0, 0, \frac{z_c'}{M}\right)$

### 3.3. Volume di un ellissoide

$$\text{Calcola il volume di } D := \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

**Metodo 1:**

$$\begin{aligned} D &:= \left\{ (x, y, z) : -c \leq z \leq c \wedge \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2} \right\} = \\ &= \left\{ -c \leq z \leq c \wedge x^2 / \left( a \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \right) + y^2 / \left( b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \right) \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(D) &= \iiint_D dx dy dz = \int_{-c}^c dz \int_{E_z} dx dy = \int_{-c}^c \text{Area}(E_z) dz = \int_{-c}^c \pi \left( a \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \right) \left( b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \right) dz \\ &= \pi ab \int_{-c}^c \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) dz = \pi ab \left( z - \frac{z^3}{3c^2} \right) \Big|_{-c}^c = \pi ab \left( 2c - \frac{2c^2}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} abc \end{aligned}$$

**Metodo 2 (coordinate ellittiche):**

Mappa di cambio coordinate:

$$(x, y, z) \mapsto (\rho, \phi, \theta)$$

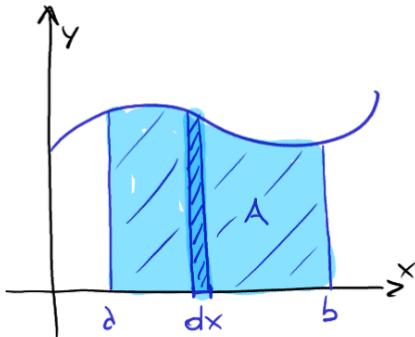
$$\begin{cases} x = a\rho \sin \theta \cos \phi \\ y = b\rho \sin \theta \sin \phi \\ z = c\rho \cos \theta \end{cases} \text{ con } \begin{cases} \phi \in [0, 2\pi] \\ \theta \in [0, \pi] \\ \rho \in [0, 1] \end{cases}$$

# Integrali curvilinei

## 1. Integrali curvilinei di prima specie

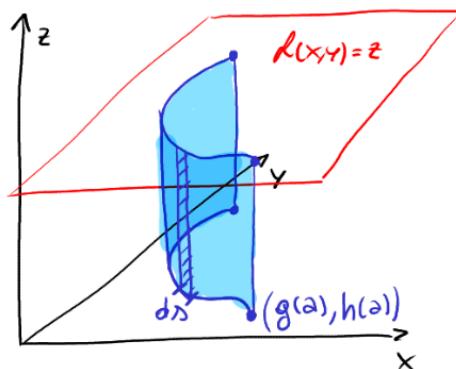
### 1.1. Introduzione motivazionale (Khan Academy)

Ad analisi 1 abbiamo visto come calcolare l'area sotto una curva in  $\mathbb{R}^2$  il cui sostegno è  $y = f(x)$ .



$$A = \int_a^b f(x)dx \text{ dove } f(x) \text{ "altezza", al variare di } x \text{ e } dx \text{ variazione infinitesimale di "lunghezza".}$$

Possiamo estendere questo concetto alle curve in  $\mathbb{R}^3$  per calcolare l'area di un "muro curvilineo"



$$\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma : \begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}, t \in [a, b]$$

$$\gamma(t) \Big|_{t=a} = (g(a), h(a)), \gamma(t) \Big|_{t=b} = (g(b), h(b))$$

$$A = \int_{t=a}^{t=b} f(x, y) ds \text{ dove } ds \text{ è un cambiamento infinitesimale di lunghezza d'arco.}$$

$$= \int_{t=a}^{t=b} f(x, y) \sqrt{dx^2 + dy^2} \text{ (teorema di Pitagora)}$$

$$= \int_{t=a}^{t=b} f(x(t), y(t)) \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\text{Moltiplicando per } \frac{dt}{dt}: \sqrt{dx^2 + dy^2} \frac{dt}{dt} = \frac{1}{dt} \sqrt{dx^2 + dy^2} dt = \sqrt{\frac{1}{dt^2} (dx^2 + dy^2)} dt =$$

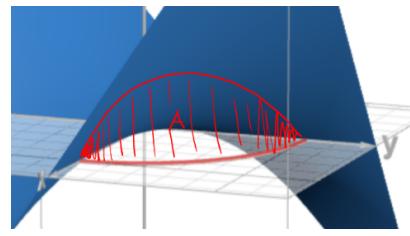
$$= \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}} dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2} = \sqrt{\dot{\gamma}(t)^2} = |\dot{\gamma}(t)|$$

Quindi  $A = \int_{t=a}^{t=b} f(x, y) \cdot |\dot{\gamma}(t)| \Big|_{\substack{x=x(t) \\ y=y(t)}}$  è l'area del "muro" determinato dalla curva  $\gamma$  e la superficie  $f$

**esempio:**

$$f(x, y) = xy$$

$$\gamma: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ (quarto di circonferenza)}$$



$$A = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} x(t)y(t) ds \Big|_{\substack{x(t)=\cos t \\ y(t)=\sin t}} = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sin t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t$$

$$u = \sin t, \frac{du}{dt} = \cos t \implies du = \cos t dt$$

$$= \int_{u=0}^{u=1} u du = \frac{1}{2} u^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

## 1.2. Massa della curva (Stepanov)

$\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\theta \in C^1[a, b]$ ,  $\rho(x_1, \dots, x_n)$  densità lineare

Trovare la **massa totale** della curva

$$l = \int_a^b |\dot{\theta}(t)| dt \text{ è la lunghezza della curva.}$$

$$m = \int_a^b \rho(\theta(t)) \cdot |\dot{\theta}(t)| dt$$

Abbiamo fatto lo stesso integrale dell'introduzione motivazionale, solo che anziché una superficie abbiamo una funzione che identifica la densità lineare. Banalmente, più "alta" è la funzione e più il  $ds$  inciderà sul valore dell'integrale. Un po' come dire che "il muro è più alto".

In generale definisco l'integrale curvilineo di prima specie:

Sia  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funzione scalare (tipo densità)

$\gamma \subset D$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$  curva regolare (a tratti)

$$\text{Allora } \int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

**esempio (coordinate del baricentro):**

$$\theta: \begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = a \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\rho(x, y) = |x|$$

Trovare la massa totale di  $\theta$  e le coordinate del baricentro.

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} |x(t)| |\dot{\theta}(t)| dt = \int_0^{2\pi} a |\cos t| \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} a |\cos t| \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} |\cos t| dt = a^2 \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos t dt \right) = 4a^2 = m \end{aligned}$$

$$x_c = \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} x \rho |\dot{\theta}(t)| dt = \frac{1}{4a^2} \int_0^{2\pi} x(t) |x(t)| a dt = \frac{a^3}{4a^2} \int_0^{2\pi} \cos t |\cos t| dt =$$

$$= \frac{a}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t |\cos t| dt = \frac{a}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt - \frac{a}{4} \int_{\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = 0$$

$$y_c = \frac{1}{4a^2} \int_0^{2\pi} y \rho |\dot{\theta}(t)| dt = \frac{1}{4a^2} \int_0^{2\pi} a \sin t |a \cos t| a dt = \dots = 0$$

**Definizione (parametrizzazione equivalente):**

Sia  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  
sia  $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  dove  $\gamma(t) = \theta(\phi(t))$ ,  $\phi(c) = a$ ,  $\phi(d) = b$  con  $\phi$  invertibile e crescente

Allora si dice che  $\theta$  e  $\phi$  sono parametrizzazioni equivalenti.

$$u := \phi(t) \implies \gamma(u) = \theta(u) \implies \int_c^d \rho(\gamma(t)) \cdot |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_c^d \rho(\theta(\phi(t))) \cdot \left| \frac{d}{dt}(\gamma(\phi(t))) \right|_{u=\phi(t)} du =$$

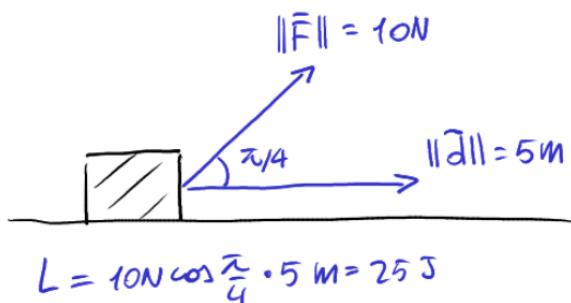
$$= \int_a^b \rho(\theta(u)) \cdot |\dot{\theta}(u)| du$$

**Teorema** L'integrale di linea di prima specie non cambia per riparametrizzazione (anche con cambio di direzione).

## 2. Integrali curvilinei di seconda specie

### 2.1. Introduzione motivazionale (Khan Academy)

**Lavoro** = magnitudine della forza nella direzione dello spostamento moltiplicata per la distanza



$$L = |\vec{F}| \cos \theta \cdot |\vec{d}| = |\vec{d}| |\vec{F}| \cos \theta =: \langle \vec{d}, \vec{F} \rangle \text{ prodotto scalare}$$

Sia  $f(x, y) = P(x, y)e_1 + Q(x, y)e_2$  un campo vettoriale

Sia  $\gamma(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2$ ,  $t \in [a, b]$  la curva lungo la quale si muove una particella

Qual'è il lavoro del campo sulla particella?

$$\frac{dr}{dt} = x'(t)e_1 + y'(t)e_2 \implies dr = x'(t) dt e_1 + y'(t) dt e_2$$

$$\text{Quindi } L = \int_{t=a}^{t=b} P(x(t), y(t)) x'(t) dt + Q(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

Diagram of a curve  $Y$  with a tangent vector  $\vec{r}$  and a differential vector  $d\vec{r}$ . The formula for work is given as  $dL = \vec{r} \cdot d\vec{r}$  and the total work as  $\int_Y \vec{r} \cdot d\vec{r}$ .

## 2.2. Di seconda specie

Sia  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo di forze e sia  $\theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\theta \in C^1([a, b])$

Trovare il lavoro di questo campo per spostare una massa puntiforme unitaria lungo  $\theta$  (**lavoro del campo**)

**Definizione (curva semplice):**

Se  $\theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\theta(a) = \theta(b)$  allora  $\theta$  è chiusa

Se  $\theta$  è anche iniettiva su  $[a, b]$  allora  $\theta$  è semplice

Se  $\theta$  è chiusa semplice allora  $L = \int_a^b F(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) dt = \oint F \cdot \theta dt$  circuitazione di  $F$  lungo  $\theta$

**Forma differenziale:**

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b F(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) dt = \\ &= \int_a^b F_1(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) dt + \int_a^b F_2(x(t), y(t), z(t)) \dot{y}(t) dt + \int_a^b F_3(x(t), y(t), z(t)) \dot{z}(t) dt = \\ &= \int_a^b F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_{\theta} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \end{aligned}$$

dove  $dx = \dot{x}(t) dt$ ,  $dy = \dot{y}(t) dt$ ,  $dz = \dot{z}(t) dt$

**Teorema** L'integrale di linea di seconda specie non cambia per riparametrizzazione, eccetto il segno che cambia se cambia il verso di percorrenza della riparametrizzazione.

**esempio:**

$$v = (-y, x)$$

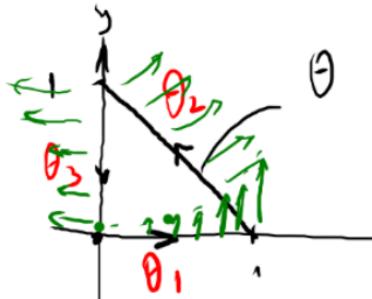
$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (a \sin t, a \cos t), \quad t = [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} v \cdot \dot{\gamma} &= \int_{\gamma} v_1 dx + v_2 dy = \int_0^{2\pi} -a \cos t \cdot a \cos t dt + \int_0^{2\pi} a \sin t \cdot (-a \sin t) dt = \\ &= -a^2 \int_0^{2\pi} dt = -2\pi a^2 \end{aligned}$$

# Campi conservativi

## 1. Esempio particolare

Trovare il lavoro del campo  $F(x, y) = (y^2, x^2)$  lungo la curva  $\theta$ , di cui non ho una parametrizzazione.



Il lavoro del campo non dipende dalla parametrizzazione. Questa curva è fatta da tre pezzi con verso di percorrenza antiorario:

$$A = \int_{\theta} y^2 dx + x^2 dy = \oint_{\theta} y^2 dx + x^2 dy = \int_{\theta_1} (\dots) + \int_{\theta_2} (\dots) + \int_{\theta_3} (\dots) \text{ dove}$$

- $\theta_1 = (t, 0), t \in [0, 1]$
- $\theta_2 = (1-t, t), t \in [0, 1]$
- $\theta_3 = (1-t, 0), t \in [0, 1]$

$$\int_{\theta_1} y^2 dx + x^2 dx = \int_{\theta_1} y^2 dx = \int_{\theta_1} 0^2 dt = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{\theta_2} y^2 dx + x^2 dy &= \int_0^1 t^2 d(1-t) + \int_0^1 (1-t)^2 dt = - \int_0^1 t^2 dt - \int_0^1 (1-t)^2 d(1-t) = \\ &= \frac{-t^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{(1-t)^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \end{aligned}$$

$$\int_{\theta_3} y^2 dx + x^2 dy = \int_0^1 (1-t)^2 d(1-t) + \int_0^1 0^2 d(1-t) = 0$$

$A = 0$ . In generale, se la curva è chiusa (semplice) la circuitazione fa 0. Come mai?

## 2. Campi conservativi

**Definizione (campo conservativo):**

Sia  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\Omega$  aperto,  $F \in C^0(\Omega)$

$F$  si dice campo conservativo sse

$\exists U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, U \in C^1(\Omega): F(x) = \nabla U(x) \forall x \in \Omega$

$U$  è una funzione scalare e si chiama **potenziale**

**esempio:**

$$\Omega = \mathbb{R}^2, n = 2$$

$F(x, y) = (y, x)$  è conservativo

$$U = U(x, y) : \nabla U = f \iff \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = y \\ \frac{\partial U}{\partial y} = x \end{cases} \iff U = xy + c$$

Il potenziale non è unico, basta aggiungere una costante  $c$

**Teorema (teorema in  $\mathbb{R}^2$ ):**

$$F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) \text{ è conservativo e } C^1 \implies \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

**Dimostrazione:**

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = F_1(x, y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = F_2(x, y) \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) \end{cases} \text{ per il teorema di Schwartz: } \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \square$$

**Teorema (teorema in  $\mathbb{R}^3$ ):**

$$F(x, y, z) \text{ è conservativo e } C^1 \implies \operatorname{rot} F = 0$$

Dove  $\operatorname{rot} F = \operatorname{curl} F = \nabla \times F$  è il rotore di  $F$ .

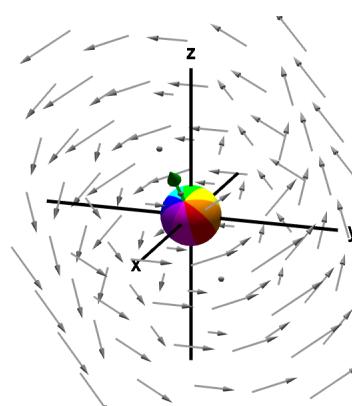
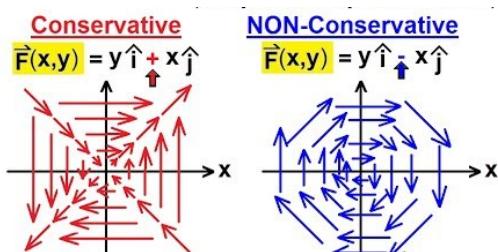
$$\text{Operatore di Hamilton: } \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \text{ vettore simbolico}$$

**Dimostrazione:**

$$F \text{ conservativo} \implies F = \nabla U, F \in C^1 \implies \nabla U \in C^2$$

$$\operatorname{rot} F = \operatorname{rot} \nabla U = \nabla \times (\nabla U) = \nabla \times \left( \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U}{\partial x_1} & \frac{\partial U}{\partial x_2} & \frac{\partial U}{\partial x_3} \end{bmatrix} =$$

$$0i + 0j + 0k = 0 \text{ (teorema di Schwartz)} \quad \square$$



(rappresentazione grafica del rotore)

### Osservazione:

Il caso  $n = 2$  può essere visto come un caso particolare di  $n = 3$

$$F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) \sim F(x, y, z) = (F_1(x, y), F_2(x, y), 0)$$

$$F = \nabla U, U = U(x, y) = U(x, y, z)$$

$$\text{rot } F = (F_{3,2} - F_{2,3}; F_{1,3} - F_{3,1}; F_{2,1} - F_{1,2}) = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)k$$

$$\text{rot } F = 0 \implies \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

## 2.1. Operatore nabla come gradiente, rotore, divergenza

$$\text{L'operatore differenziale vettoriale (nabla)} \nabla := \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

possiede proprietà analoghe a quelle dei vettori comuni. Esso è utile nel definire tre grandezze che si impiegano in applicazioni pratiche:

$$\text{Gradiente: Sia } F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ un campo scalare } C^1. \nabla F = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} U, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} U \right) = \text{grad } U$$

La componente di  $\nabla F$  nella direzione del versore  $v$  è data da  $\nabla F \cdot v$  ed è detta derivata direzionale di  $F$  nella direzione di  $v$ .

**Divergenza:** Sia  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vettoriale  $C^1$  con  $n$  arbitrario.

$$\nabla \cdot F = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot (F_1, \dots, F_n) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \text{div } F \text{ (funzione scalare)}$$

Si noti l'analogia con  $v \cdot w = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$ .

Si potrebbe dire che la divergenza è "duale" al gradiente, vedremo meglio cosa vuol dire.

**Significato fisico:** la divergenza del campo di velocità tiene conto della variazione del flusso del fluido. In particolare,  $\text{div } \vec{v} = 0$  vuol dire che il fluido si muove senza dilatarsi e senza comprimersi. In generale, quando la divergenza è nulla, si dice che il campo è solenoidale.

**Rotore:** Sia  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  campo vettoriale  $C^1$  con  $n = 3$

$$\nabla \times F = \text{rot } F = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \partial / \partial x_1 & \partial / \partial x_2 & \partial / \partial x_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} = (F_{3,2} - F_{2,3}; F_{1,3} - F_{3,1}; F_{2,1} - F_{1,2})$$

**Significato fisico:** il rotore del campo di velocità è multiplo del vettore velocità angolare. In particolare,  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{w} = \vec{0}$ . Per questo motivo si dice che un campo è irrotazionale quando il suo rotore è nullo. Questa terminologia si usa anche nei casi più generali. Quando si considera, ad esempio, il moto di un fluido,  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$  indica assenza di vorticità.

## 2.2. Lavoro / integrale curvilineo di un campo conservativo

Sia  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $\Omega$  aperto e **connesso per archi**,  $F \in C^0$

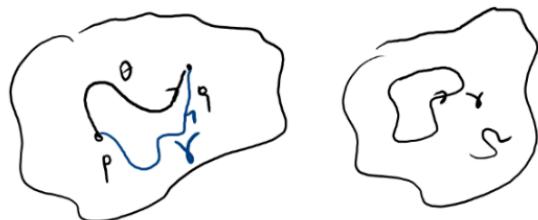
Sia  $\theta : [a, b] \rightarrow \Omega$  curva  $C^1$ . Allora

$$\begin{aligned} \int_{\theta} F \cdot d\theta \Big|_{F=\nabla U} &= \int_a^b \nabla U(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) dt = \\ \int_a^b \frac{d}{dt} U(\theta(t)) dt &= U(\theta(t)) \Big|_a^b = \quad (\text{teorema del differenziale della funzione composta}) \\ &= U(\theta(b)) - U(\theta(a)) \end{aligned}$$

Applicazione fisica importante:

Quindi  $\int_{\theta} F \cdot d\theta = \int_{\theta} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = U(q) - U(p)$  se  $F = \nabla U$

In particolare,  $\oint_{\theta} F \cdot d\theta = 0$



**Teorema (affermazioni equivalenti):**

Sia  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\Omega$  aperto e connesso per archi,  $F$  continuo.

Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti

(a)  $F$  è conservativo

(b)  $\int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = \int_{\theta} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = U(q) - U(p)$

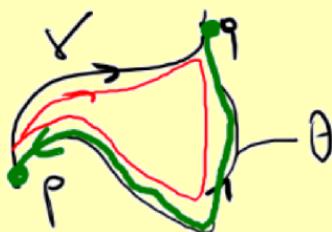
(c)  $\oint_{\sigma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = 0$  se  $\sigma \subset \Omega$  chiusa semplice

**Dimostrazione:**

(a)  $\Rightarrow$  (b), (c): dimostrato prima

(b)  $\Rightarrow$  (c): dimostrato prima

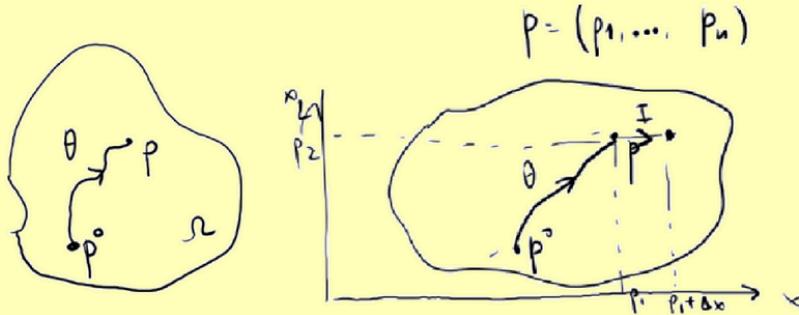
(c)  $\Rightarrow$  (b):  $\oint_{\sigma} F d\sigma = 0$ ,  $\sigma \subset \Omega$  curva chiusa semplice. Sia  $\gamma, \theta \subset \Omega$



$$\int_{\gamma} F d\gamma - \int_{\theta} F d\theta = \oint_{\sigma} F d\sigma \text{ poiché } \int_{\theta} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = \int_p^q F(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) dt =$$

$$= - \int_{\tilde{\theta}} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n \text{ dove } \tilde{\theta}(t) := \theta(1-t)$$

$$(b) \Rightarrow (a): U(p) := \int_{\theta} F d\theta, \nabla U = ?$$



$$\frac{\partial U}{\partial x_1}(p) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(p_1 + \Delta x, p_2, \dots, p_n) - U(p_1, \dots, p_n)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left( \int_{\theta} F d\theta + \int_I F dI \right) - \int_{\theta} F d\theta}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_I F dI = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_0^1 F_1(p_1 + \Delta x, p_2, \dots, p_n) \Delta x dt \Big|_{\substack{s=\Delta x \\ ds=\Delta x dt}} = (*)$$

con  $I: \begin{cases} x_1 = p_1 + \Delta x \\ x_2 = p_2 \\ \dots x_n = p_n \end{cases} \quad t \in [0, 1]$

$$(*) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} F_1(p + s, \dots, p_n) ds = F_1(p_1, \dots, p_n) \text{ dato che } F \text{ è continua}$$

Quindi abbiamo calcolato  $\frac{\partial U}{\partial x_1} = F_1(p) \Rightarrow \frac{\partial F_j}{\partial x_j} = F_j(p)$

Allora  $\nabla U(p) = F(p) \quad \forall p \in \Omega \Rightarrow F \text{ è conservativo} \quad \square$

### 2.3. Teorema di Poincarè

**Esempio (campo conservativo, ma irrotazionale):**

$$n = 2, \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$F(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} i - \frac{x}{x^2 + y^2} j$$

$$\begin{aligned} \text{rot } F &= \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) k = \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right) k = -k \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right) \\ &= -k \left( \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

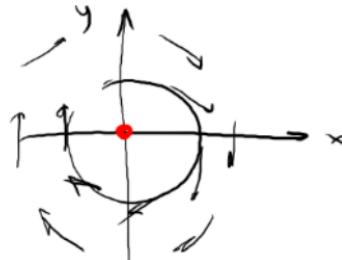
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{x^2 + y^2} + x \left( \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\theta = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$$

$$\oint_{\theta} F d\theta = \int_0^{2\pi} (-F_1(\cos t, \sin t) \sin t + F_2(\cos t, \sin t) \cos t) dt = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\sin^2 t}{1} - \frac{\cos^2 t}{1} \right) dt = \\ = - \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -2\pi \neq 0$$

Quindi  $F$  non è conservativo.  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  è un dominio "bucato"



### Teorema (Teorema di Poincarè):

Se  $F: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F \in C^1$ ,  $\text{rot } F = 0$

e anche  $\Omega$  è semplicemente connesso, allora  $F$  è conservativo.

### Definizione (Insieme semplicemente connesso):

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aperto si dice semplicemente connesso se ogni curva chiusa semplice in  $\Omega$  può essere deformata con continuità in  $\Omega$  (senza strappi) a un punto in  $\Omega$

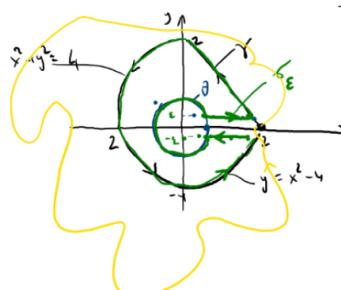
Un insieme semplicemente connesso vuol dire che è "senza buchi"



esempio:

$$n = 2, \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, F(x, y) = \left( \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\oint_{\sigma_\epsilon} F \cdot d\sigma_\epsilon = \int_{\gamma} F d\gamma - \int_{\theta} F d\theta = 0 \implies \int_{\gamma} F d\gamma = \int_{\theta} F d\theta = -2\pi$$



# Formula di Gauss-Green nel piano e forme differenziali

## 1. Formula di Gauss-Green nel piano

Relazione tra integrali doppi e integrali di linea.

Sia  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ ,  $F \in C^1(D)$  con  $D$  semplice.

Si dice che il bordo  $\partial D$  è orientato positivamente ( $\partial^+ D$ ) quando su di esso è fissato il verso di percorrenza antiorario.

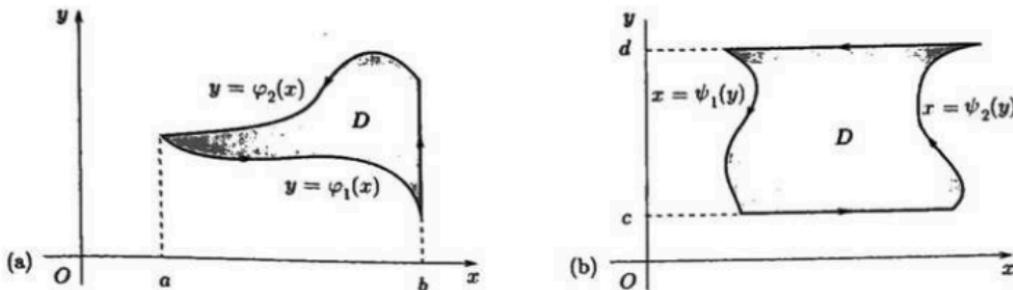
Per semplicità, assumo

(a)  $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$  con  $\varphi_{1,2}$  continue su  $[a, b]$

$$\text{allora } \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy := \iint_D P_y dx dy = - \int_{\partial^+ D} P dx$$

(b)  $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$  con  $\psi_{1,2}$  continue su  $[c, d]$

$$\text{allora } \iint_D Q_x dx dy = \int_{\partial^+ D} Q dy$$



Ricordiamo che l'integrale di linea  $\int_{\partial^+ D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial^+ D} P dx + Q dy$

**Teorema (Formula di Gauss-Green nel piano):**

Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  limitato, semplice rispetto a entrambi gli assi. Sia  $F(x, y) = P(x, y)\mathbf{e}_1 + Q(x, y)\mathbf{e}_2$

$$\text{Allora } \int_{\partial^+ D} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

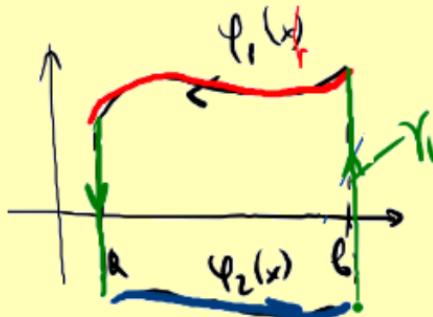
Se il verso di percorrenza di  $\partial D$  è invertito:  $\int_{\partial^- D} P dx + Q dy = - \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$

Questo teorema è molto utile perché, di solito, gli integrali di linea sono più difficili da calcolare degli integrali doppi.

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \iint_D P_y \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} P_y \, dy = \int_a^b dx P(x, y) \Big|_{y=\phi_1(x)}^{y=\phi_2(x)} = \\
 & = \int_a^b P(x, \phi_2(x)) \, dx - \int_a^b P(x, \phi_1(x)) \, dx = \\
 & = \int_a^b P(x, \phi_2(x)) \, dx - \int_a^b P(x, \phi_1(x)) \, dx + \int_{\gamma_1} P \, dx + \int_{\gamma_2} P \, dx = - \int_{\partial D} P \, dx
 \end{aligned}$$

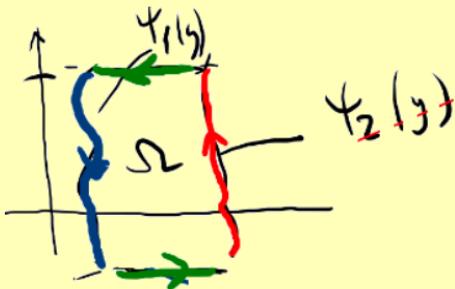
poiché  $\int_{\gamma_1} P \, dx = 0, \int_{\gamma_2} P \, dx = 0$



$$\begin{aligned}
 \gamma_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = b \\ y \in [\phi_1(x), \phi_2(x)] \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = b \\ y = \phi_2(b) + (1-t)\phi_1(b), t \in [0, 1] \end{array} \right. \\
 \gamma_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = a \\ y = \phi_1(a) + (1-t)\phi_2(a), t \in [0, 1] \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & \iint_D Q_x \, dx \, dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} Qx \, dx = \int_c^d (Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)) \, dy = \\
 & = \int_c^d (Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)) \, dy + \int_{\theta_1} Q \, dy + \int_{\theta_2} Q \, dy = \int_{\partial D} Q \, dx
 \end{aligned}$$

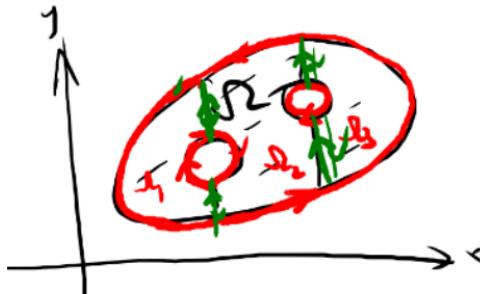
poiché  $\int_{\theta_1} Q \, dy = 0, \int_{\theta_2} Q \, dy = 0$



Sommando (a) e (b):

$$\iint_D (Q_x - P_y) \, dx \, dy = \int_{\partial D} P \, dx + Q \, dy \quad \square$$

**Osservazione:** se ho un dominio "bucato", posso dividerlo in parti e applicare comunque il teorema.



$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy &= \iint_{\Omega_1} (Q_x - P_y) dx dy + \iint_{\Omega_2} (Q_x - P_y) dx dy + \iint_{\Omega_3} (Q_x - P_y) dx dy = \\ &= \int_{\partial^+ \Omega_1} P dx + Q dy + \int_{\partial^+ \Omega_2} P dx + Q dy + \int_{\partial^+ \Omega_3} P dx + Q dy = \int_{\partial^+ \Omega} P dx + Q dy \end{aligned}$$

**Attenzione:** le curve che corrispondono ai "buchi", se orientate positivamente, sono percorse in senso orario. Il trucco è lasciare sempre il dominio di integrazione  $\Omega$  alla propria sinistra quando si percorre la curva.

**Corollario (area di  $D$ ):**

$$\begin{aligned} \cdot \int_{\partial D} y dx &= - \int_{\Omega} 1 dx dy = - \int_{\Omega} dx dy = - \text{Area}(D) \\ \cdot \int_{\partial D} x dy &= \int_{\Omega} 1 dx dy = \text{Area}(D) \\ \implies \text{Area}(D) &= - \int_{\partial D} y d x = \int_{\partial D} x dy = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (x dy - y dx) \end{aligned}$$

**esempio:**

$$D := \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} \implies \partial D : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\text{Area}(D) = \int_{\partial D} x dy = \int_0^{2\pi} a \cos t b \cos t dt = \int_0^{2\pi} ab \cos^2 t dt = \pi ab$$

## 2. Cenni di forme differenziali

I concetti di lavoro di campo vettoriale, campo conservativo, campo irrotazionale, possono essere espressi tramite le forme differenziali. Entrambi i linguaggi sono usati nella letteratura scientifica. Se il linguaggio dei campi vettoriali corrisponde più al punto di vista fisico, quello delle forme differenziali corrisponde più al punto di vista matematico.

Una **forma differenziale** è un oggetto che estende la nozione di funzione a più variabili. Per utilizzare le forme differenziali è sufficiente basarsi su una definizione simile a quella di polinomio: una forma differenziale è semplicemente una scrittura formale di un certo tipo. Si definiscono operazioni come quella di somma, prodotto (come vettori) e integrale su un insieme opportuno.

Assumiamo, per semplicità di lavorare in  $\mathbb{R}^3$

- Una 0-forma differenziale è semplicemente una funzione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile
- Una 1-forma differenziale  $w = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$  dove  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_{1,2,3} = f(x, y, z)$
- Una 2-forma differenziale  $w = f_1 dx \wedge dy + f_2 dx \wedge dz + f_3 dy \wedge dz = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} f_{ij} dx_i \wedge dx_j$

Dove  $\wedge$  si chiama **prodotto wedge** o prodotto esterno (da non confondere con il prodotto vettoriale). Il prodotto wedge è per definizione antisimmetrico:  $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ .

In particolare:  $dx_i \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_i \Rightarrow 2dx_i \wedge dx_i = 0 \Rightarrow dx_i \wedge dx_i = 0$

**esempio:**

$$(xdx + ydy) \wedge (ydx + xdy) = xy(dx \wedge dx) + x^2(dx \wedge dy) + y^2(dy \wedge dx) + xy(dy \wedge dy) = \\ = x^2(dx \wedge dy) - y^2(dx \wedge dy) = (x^2 - y^2)(dx \wedge dy)$$

Notare come il prodotto wedge di due 1-forme differenziali è una 2-forma differenziale.

## 2.1. k-forme differenziali e algebra di Lie

- Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Una k-forma differenziale è un'espressione della forma

$$w = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, i_2, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

dove  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e, per ogni k-upla di indici  $i \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n$ , la funzione  $a_{i_1, i_2, \dots, i_k} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Possiamo definire l'espressione  $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  in questo modo: possiamo scambiare l'ordine di due indici consecutivi cambiando il segno davanti. Per esempio

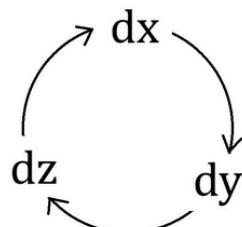
$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_3} \wedge dx_{i_4} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = -dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{i_4} \wedge dx_{i_3} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

In particolare, se due indici consecutivi sono uguali (ad esempio  $i_1 = i_2$  oppure  $i_{k-1} = i_k$ ) allora  $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = 0$

Per esempio, per una 3-forma differenziale:

$$dx \wedge dy \wedge dz = -dy \wedge dx \wedge dz = dy \wedge dz \wedge dx = -dz \wedge dy \wedge dx \text{ ecc...}$$

Si nota come in  $\mathbb{R}^2$ , l'unica possibile 3-forma differenziale  $dx \wedge dy \wedge dx$ ,  $dx \wedge dx \wedge dy, \dots$  è 0  
La regola dei segni assomiglia molto al prodotto vettoriale, c'è una sorta di ciclicità:



**Algebra di Lie:**

Un'algebra di Lie è un'algebra su campo il cui prodotto soddisfa delle proprietà aggiuntive. Le algebre di Lie sono strutture algebriche usate anche per studiare le varietà differenziabili.

Un'algebra di Lie è uno spazio vettoriale  $\mathfrak{g}$  su un campo (ad esempio,  $\mathbb{R}$ ) con un operatore binario  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , detto prodotto di Lie, che soddisfa le seguenti proprietà:

- è **bilineare**, cioè  $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$  e  $[a, \alpha x + \beta y] = \alpha[z, x] + \beta[z, y]$
- soddisfa l'**identità di Jacobi**, cioè  $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0 \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$
- è **nilpotente**, cioè  $[x, x] = 0 \forall x \in \mathfrak{g}$

Ad esempio,  $\mathbb{R}^3$  diventa un'algebra di Lie munendolo del prodotto di Lie fornito dal prodotto esterno fra vettori.

## 2.2. Differenziale esterno, forma chiusa, forma esatta.

Se  $\omega$  è una k-forma differenziale, allora  $d\omega$  è una  $(k+1)$ -forma differenziale.

Ad esempio, il differenziale di una 0-forma  $w = f$  è  $dw := \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ .

Il diff. di una 1-forma  $w = f_1dx + f_2dy + f_3dz$  è  $dw := df_1 \wedge dx + df_2 \wedge dy + df_3 \wedge dz$

### Definizione (forma chiusa e forma esatta):

- Se  $d\omega = 0$  allora  $\omega$  si chiama forma chiusa
- Se  $\omega = d\eta$ , dove  $w$  è una  $(k+1)$ -forma e  $\eta$  è una k-forma, allora  $\omega$  si chiama esatta

### esempio:

In  $\mathbb{R}^2$  per semplicità.  $d(xdx + ydy) = 1dx1dx + 0dy \wedge dx + 0dx \wedge dy + 1dy1dy = 0$

La forma  $w = xdx + ydy$  è chiusa ed esatta:  $x dx + y dy = d\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)$

### Proposizione (forma esatta $\implies$ forma chiusa):

Se  $\omega$  è una  $(k+1)$ -forma esatta allora  $\omega$  è anche una forma chiusa

### Verifica ( $k=0$ ) in $\mathbb{R}^3$

$$\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3 \quad (f \text{ è una 0-forma, } \omega \text{ è una 1-forma})$$

Verifichiamo che  $d\omega = 0$  (ovvero  $\omega$  chiusa)

$$d\omega = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \wedge dx_1 + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \wedge dx_2 + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) \wedge dx_3 =$$

$$\begin{aligned} &= f_{x_1x_1}dx_1 \wedge dx_1 + f_{x_1x_2}dx_2 \wedge dx_1 + f_{x_1x_3}dx_3 \wedge dx_1 + \\ &+ f_{x_2x_1}dx_1 \wedge dx_2 + f_{x_2x_2}dx_2 \wedge dx_2 + f_{x_2x_3}dx_3 \wedge dx_2 + \\ &+ f_{x_3x_1}dx_1 \wedge dx_3 + f_{x_2x_3}dx_2 \wedge dx_3 + f_{x_3x_3}dx_3 \wedge dx_3 = 0 \end{aligned}$$

Si nota che questo assomiglia molto al calcolo del rotore.

### Proposizione

Il differenziale esterno di una 1-forma in  $\mathbb{R}^2$ :  $w = f_1dx + f_2dy$  è  
 $d\omega = (f_{2,x} - f_{1,y})dx \wedge dy$

$d\omega$  è una 2-forma differenziale che misura la differenza tra le derivate parziali incrociate dei componenti della 1-forma  $\omega$ . Di conseguenza  $d(d\omega) = 0$  sempre. Questo vuol dire che il rotore del campo vettoriale corrispondente a una 1-forma in  $\mathbb{R}^2$  è nullo, ovvero che il campo è irrotazionale.

#### Dimostrazione:

Supponiamo di avere una 1-forma in  $\mathbb{R}^2$ :  $\omega = f_1 dx + f_2 dy$  dove  $f_{1,2} = f(x, y)$   
 $d\omega = d(f_1 dx + f_2 dy) = d(f_1 dx) + d(f_2 dy) = df_1 \wedge dx + df_2 \wedge dy$  è una 2-forma.

Ricordiamo che  $df_1$  e  $df_2$  sono i differenziali di  $f_1$  e  $f_2$ :

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy, \quad df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy$$

Sostituendo, ottengo  $d\omega = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy \right) \wedge dy =$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial f_2}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy \wedge dy = \frac{\partial f_1}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial f_2}{\partial x} dx \wedge dy$$

Per la proprietà di antisimmetria:  $d\omega = -\frac{\partial f_1}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial f_2}{\partial x} dx \wedge dy = \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy$

#### Integrale di una 1-forma esatta:

Sia  $\omega$  una 1-forma in  $\mathbb{R}^2$ ,  $\omega = f_1 dx + f_2 dy$ ,  $\gamma = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  curva  $C^1$

$$\int_{\gamma} \omega := \int_{\gamma} f_1 dx + f_2 dy = \int_a^b f_1(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + f_2(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_2(t) dt$$

se  $\omega$  è esatta (ovvero  $\omega = df$ ) allora  $(f_1, f_2) = \nabla f$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

#### Integrale di una 2-forma esatta:

Se  $\omega$  è una 2-forma esatta in  $\mathbb{R}^2$  (ovvero  $\omega = d\eta$ , con  $\eta = Pdx + Qdy$  1-forma)

Allora, per il lemma del differenziale di 1-forme:  $\omega = d\eta = (Q_x - P_y)dx \wedge dy$

#### Teorema (formula di Gauss-Green / teorema di Stokes per forme differenziali):

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  "buono"

Sia  $\omega$  una 2-forma esatta in  $\mathbb{R}^2$  ovvero  $\omega = d\eta = (Q_x - P_y)dx \wedge dy$

$$\iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy \implies \int_{\Omega} d\eta = \int_{\partial\Omega} \eta$$

### 2.3. Campi vettoriali vs forme differenziali

Per ricapitolare, propongo, dal libro di testo, la tabella che compara il linguaggio dei campi vettoriali con quello delle forme differenziali.

Sia  $f = (f_1, f_2, f_3)$

Linguaggio dei campi vettoriali	Linguaggio delle forme differenziali
Lavoro elementare di $f$ : $dL = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$	Forma differenziale $\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$
Lavoro del campo $f$ sul cammino $\gamma$ : $\int_{\gamma} f \cdot dr = \int_a^b f(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt$	Integrale della forma $\omega$ sul cammino $\gamma$ : $\int_{\gamma} \omega = \int_a^b f(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt$
$f$ è conservativo: $\exists U : f = \nabla U$	$\omega$ è esatta $\exists f : \omega = df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$
$f$ è irrotazionale: $\text{rot } f = 0$	$\omega$ è chiusa $\text{rot } f = 0$
"Un campo conservativo è irrotazionale."	"Una forma differenziale esatta è chiusa"
"Un campo irrotazionale in un aperto semplicemente connesso è conservativo".	"Una forma differenziale chiusa in un aperto semplicemente connesso è esatta".

# Integrali su superfici (!)

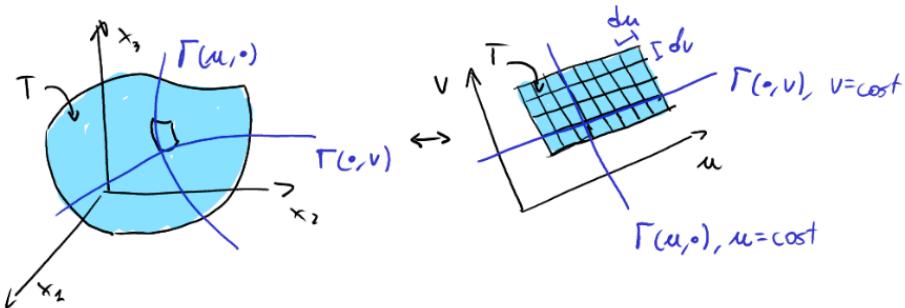
## 1. Integrali su superfici di prima specie

### 1.1. Area di superficie

$T : T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $n > 2$  (di solito 3) e  $T$  dominio semplice oppure "buono" ovvero spezzabile in unione di domini semplici.

Estendiamo il concetto di lunghezza della curva  $l = \int_I |\dot{\gamma}(t)| dt$  alle superfici:

$$\Gamma = \Gamma(u, v) = (x_1(u, v), \dots, x_n(u, v)), \quad \Gamma \in C^1(T)$$



Anche se  $T$  non è "bellino" come un rettangolo non importa perché i rettangolini sono infinitesimi.

$$\text{L'area del rettangolino è } \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(u, v) dv \times \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(u, v) du = |\Gamma_u \times \Gamma_v|(u, v) du dv$$

$$\text{Quindi } A = \iint_T |\Gamma_u \times \Gamma_v|(u, v) du dv$$

### 1.2. Massa totale di superficie

Sia la superficie  $\Sigma = \Gamma(t)$  con densità  $\rho = \rho(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$

$$m_\Sigma = \iint_T \rho(\Gamma(u, v)) |\Gamma_u \times \Gamma_v|(u, v) du dv$$

In generale, data  $f = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f$  continua:

$$\int_\Sigma f d\rho := \iint_T f(\Gamma(u, v)) |\Gamma_u \times \Gamma_v|(u, v) du dv$$

Questo si può fare nel caso  $T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , se  $\Gamma : T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  allora  $|\Gamma_u \times \Gamma_v|$  diventa  $|\Gamma_u \wedge \Gamma_v|$ , il volume del parallelogramma con lati  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_v$  in  $\mathbb{R}^n$

**esempio (sfera unitaria):**

$$S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

Parametrizzo in coordinate sferiche:  $\begin{cases} z = \cos \theta \\ y = \sin \theta \cos \phi, \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi] \\ x = \sin \theta \sin \phi \end{cases}$

$$\text{Quindi } T := [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

$$\Gamma(\theta, \phi) = (x(\theta, \phi), y(\theta, \phi), z(\theta, \phi))$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \phi} = (-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_\phi \times \Gamma_\theta &:= n = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi & -\sin \theta \\ -\sin \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi & 0 \end{bmatrix} = \\ &= i(\sin^2 \theta \cos \phi) + j(\sin^2 \theta \sin \phi) + k(\cos \theta \sin \theta)\end{aligned}$$

$$|n| = \sqrt{\sin^4 \theta \cos^2 \phi + \sin^4 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \theta} = \dots = |\sin \theta|$$

$$\text{Area}(S^2) = \iint_T |\sin \theta| d\theta = 2\pi(-\cos \theta) \Big|_0^\pi = 4\pi$$

La sfera di raggio 1 ha area  $4\pi$ . So che quella i raggio  $R$  ha area  $4\pi R^2$  poiché nel determinante le righe sono moltiplicate per  $R$ . Moltipicare una riga del determinante per  $R$  vuol dire moltiplicare il determinante per  $R$ . Quindi davanti all'integrale viene fuori  $R^2$ .

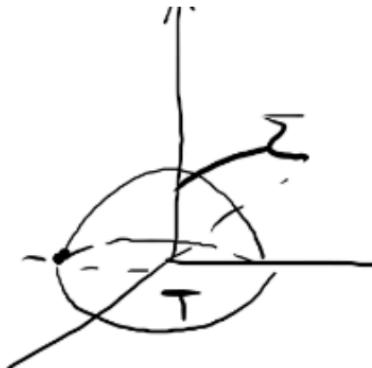
### Omotetie:

- Quando una curva viene ingrandita la sua grandezza aumenta  $R$  volte
- Quando una superficie viene ingrandita la sua area aumenta  $R^2$  volte
- Quando un solido viene ingrandito il suo volume aumenta  $R^3$  volte

### Esempio (emisfero unitario):

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \implies z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

$$T = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$



$$\Gamma(u, v) := (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$$

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Sigma) &= \iint_T |\Gamma_u \times \Gamma_v|(u, v) du dv = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \left| \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -\frac{u}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}} \\ 0 & 1 & -\frac{v}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}} \end{bmatrix} \right| \\ &= \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} \left| e_1 \frac{u}{\sqrt{...}} + e_2 \frac{v}{\sqrt{...}} + e_e \right| du dv = \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} \sqrt{\frac{u^2}{1 - u^2 - v^2} + \frac{v^2}{1 - u^2 - v^2} + 1} du dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \sqrt{\frac{u^2+v^2+1-u^2-v^2}{1-u^2-v^2}} du dv = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \sqrt{\frac{1}{1-u^2-v^2}} du dv \Big|_{\substack{u=\rho \cos \phi \\ v=\rho \sin \phi}} = \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \rho d\rho (1-\rho^2)^{-1/2} = 2\pi \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{(1-\rho^2)^{1/2}} = -\pi \int_0^1 \frac{d(1-\rho^2)}{(1-\rho^2)^{1/2}} = \\
&= -2\pi \sqrt{1-\rho^2} \Big|_0^1 = 2\pi \text{ (ok)}
\end{aligned}$$

### 1.2.1. Superficie grafica

$$z = f(x, y), (x, y) \in T$$

$$\Gamma = \Gamma(x, y) = (x, y, f(x, y)) \rightsquigarrow \Gamma_x = (1, 0, f_x), \Gamma_y = (0, 1, f_y)$$

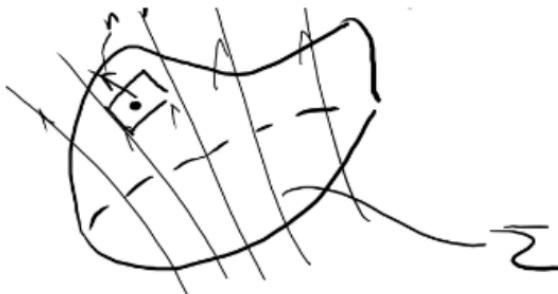
$$|\Gamma_x \times \Gamma_y| = \left| \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{bmatrix} \right| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$$

$$Area = \iint_T \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy = \iint_T \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx dy$$

### 1.3. Integrali su superfici di seconda specie

Fatto quasi vero: sia  $V = (V_1, V_2, V_3)$  un campo vettoriale  $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Sia  $\Gamma: T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Gamma \in C^1(T)$



Il flusso del campo  $V$  attraverso la superficie  $\Sigma = \Gamma(t)$  è  $\iint_{\Sigma} V \cdot \hat{n} d\sigma$ , dove  $\hat{n}$  è versore normale

alla superficie. Il problema è che la normale  $n$  non è definita univocamente: sia  $\hat{n}$  che  $-\hat{n}$  sono versori normali, quali dei due scelgo?

$$\begin{aligned}
n := \frac{\Gamma_u \times \Gamma_v(u, v)}{|\Gamma_u \times \Gamma_v|(u, v)} &\implies \int_{\Sigma} V \cdot n ds = \iint_T V(r(u, v)) \cdot \frac{\Gamma_u \times \Gamma_v}{|\Gamma_u \times \Gamma_v|} |\Gamma_u \times \Gamma_v| du dv = \\
&= \iint_T V(r(u, v)) \cdot \Gamma_u \times \Gamma_v du dv
\end{aligned}$$

**esempio (sfera di raggio  $R$ ):**

$$\text{Calcola il flusso del campo } V(x, y, z) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$T = [0, \pi] \times [0, 2\pi], \Gamma: \begin{cases} z = \cos \theta \\ x = \sin \theta \cos \phi, \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi] \\ y = \sin \theta \sin \phi \end{cases}$$

$$\Gamma_\theta \times \Gamma_\phi = R^2 (\sin^2 \theta \cos \phi, \sin^2 \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \theta),$$

$$V = \frac{1}{R} (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

$$V \cdot (\Gamma_\theta \times \Gamma_\phi) = R (\sin^3 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \cos^2 \theta \sin \theta) = R \sin \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = R \sin \theta$$

Calcola il flusso **esterno** di  $V$  attraverso  $\Sigma$  (esterno):

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \iint_T R \sin \theta \, d\phi \, d\theta = R \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = 4\pi R$$

# Superfici orientabili e teorema della divergenza

## 1. Superficie orientabile

**Definizione (superficie orientabile):**

$\Sigma$  (oppure  $\Gamma : T \rightarrow \Sigma$ ) è una superficie orientabile se esiste una scelta del campo di versori normali  $\bar{n} := \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  tali che

- $\gamma : [a, b] \rightarrow \Sigma$  è chiusa, ovvero  $\gamma(a) = \gamma(b)$
- $\bar{n} \circ \gamma$  è continua, ovvero  $n(\gamma(b)) = \lim_{t \rightarrow b} n(\gamma(t)) = \gamma(\gamma(a))$

**Osservazione 1:**

Se  $D \subset \mathbb{R}^3$  è aperto e connesso e  $\partial D$  è una superficie regolare (ovvero  $C^1$ ), allora  $D$  è orientabile.

**Osservazione 2:**

Sia  $\Sigma = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$  superficie in forma grafica con  $f \in C^1$ , allora  $D$  è orientabile.

**Dimostrazione:**

$$(x, y) \in T, z = f(x, y), \Gamma(x, y) := (x, y, f(x, y)), \Gamma_x = (1, 0, f_x(x, y)), \Gamma_y = (0, 1, f_y(x, y))$$

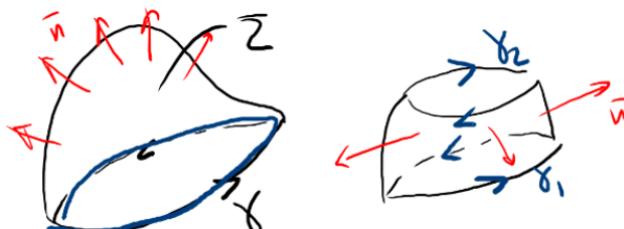
$$\Gamma_x \times \Gamma_y = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{bmatrix} = -f_x i - f_y j + k \implies \int_T F \circ (-f_x, -f_y, 1) \, du \, dv =$$

$$= \int_T (-F_1 f_x - F_2 f_y + F_3) \, du \, dv \quad \square$$

**Osservazione 3:**

Scelta un'orientazione di  $\Sigma$ , si sceglie automaticamente anche l'orientazione del bordo.

Orientazione canonica: si vede  $\Sigma$ , ovvero la sua "faccia esterna" dalla mano sinistra.



Ma cosa è il bordo della superficie? Nel caso di emisfera il bordo era l'equatore, però non abbiamo definito il concetto di bordo di una superficie arbitraria. Siccome siamo ingegneri, non ce ne frega un cazzo, ma NON è il bordo topologico che abbiamo definito all'inizio del corso.

**esercizio:**

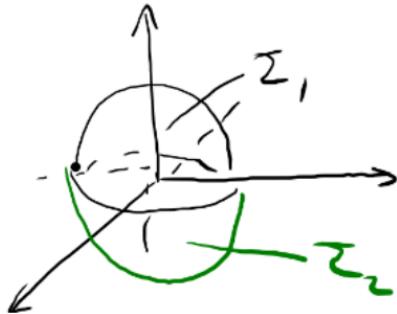
$$F(x, y, z) = xe_1 + ye_3 = (x, 0, y), \Sigma = \partial B_1(0)$$

Le direzioni per calcolare il flusso sono 2: verso l'interno o verso l'esterno. Di default, quando

penso a un flusso attraverso la frontiera di un solido intendo flusso verso l'esterno.

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma \text{ con } n \text{ versore normale a } \Sigma \text{ esterno alla palla}$$

$$= \int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma + \int_{\Sigma_2} F \cdot n \, d\sigma \text{ (divido la palla in due emisferi)}$$



$$\underline{\text{Parte 1: }} \Sigma_1 : (x, y)_{x^2+y^2 \leq 1} \mapsto (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$$

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, f_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \, dx \, dy + \iint_{x^2+y^2 \leq 1} y \, dx \, dy =: I_1 + I_2$$

$$\text{Passo alle coordinate polari: } I_1 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \rho d\rho \cdot \frac{\rho^2 \cos^2 \phi}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi \int_0^1 \frac{d\rho^2 \cdot \rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{tdt}{\sqrt{1-t}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 t \, d(\sqrt{1-t}) \cdot (-2) = -\pi t (\sqrt{1-t}) \Big|_0^1 + \pi \int_0^1 \sqrt{1-t} \, dt =$$

$$= -\pi \frac{2}{3} (1-t)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}$$

$$I_2 = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} y \, dx \, dy = \frac{2\pi}{3}$$

$$\underline{\text{Parte 2: }} g(x, y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$\int_{\Sigma_2} (x, 0, y) \cdot n \, d\sigma = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x, 0, y) \cdot (-g_x, -g_y, 1) \, dx \, dy =$$

$$- \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x, 0, y) \cdot \left( \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1 \right) \, dx \, dy = \iint \dots = \frac{2\pi}{3}$$

$$\underline{\text{Risposta: }} \int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

## 2. Teorema della divergenza

O anche teorema di Gauss-Green (da non confondere con la formula di Gauss-Green nel piano).

**Teorema (teorema della divergenza):**

Sia  $D \subset \mathbb{R}^3$  aperto, limitato e connesso e sia il suo bordo  $\partial D \in C^1$

Sia  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vettoriale  $C^1$

$$\text{Allora } \int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = \int_D \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$$

**esercizio precedente:**

$$D = B_1(0), \partial D = \partial B_1(0), F = (x, 0, y), \int_{\partial B_1(0)} F \cdot n \, d\sigma = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{D'altronde, } \operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x, 0, y) \text{ prodotto scalare simbolico}$$

$$= 1 + 0 + 0 = 1$$

$$\text{Per il teorema della divergenza: } \int_{B_1(0)} \operatorname{div}(F) \, dx \, dy \, dz = \int_{B_1(0)} 1 \, dx \, dy \, dz = \operatorname{Vol}(B_1(0)) = \frac{4\pi}{3}$$

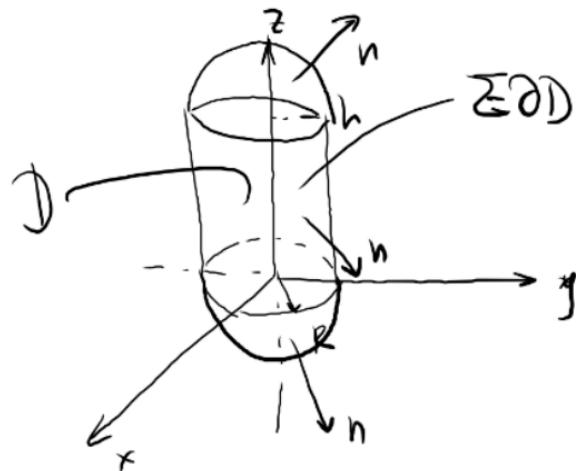
**Osservazione:**

$$\int_{\partial B_\epsilon(P)} F \cdot n \, d\sigma = \int_{B_\epsilon(P)} \operatorname{div}(F) \, dx = \text{produzione totale di fonti di } F \text{ in } B_\epsilon(P)$$

$$\frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\epsilon(P))} \int_{B_\epsilon(P)} \operatorname{div}(F) \, dx \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} (\operatorname{div}(F))(P)$$

**esercizio:**

$$F(x, y, z) = y^2 e_1 + z^2 e_2 + x^2 e_3$$



$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma &= \int_D \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = 0 \text{ poiché } \operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (y^2, x^2, z^2) = \\ &= 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

## Due teoremi di integrazione per parti

### 1. Teorema di Gauss-Green (o teorema della divergenza)

**Teorema (teorema della divergenza):**

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  aperto, limitato, connesso (oppure "buono"),  
sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vettoriale  $C^1$

Allora  $\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx$   
dove  $n$  è normale a  $\partial\Omega$  e esterna a  $\Omega$

Cosa c'entra con integrazione per parti?

#### 1.1. Collegamento con analisi 1

**Teorema 1-Dim:**

Ad analisi 1 abbiamo visto la formula  $\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx + f(b)g(b) - f(a)g(a)$

Il teorema della divergenza lega l'integrale della divergenza di un campo ( $\sim$  derivata) ad una somma di qualche funzione sul bordo.

**Teorema 3-Dim:**

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  che soddisfa le ipotesi,  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni scalari,  
sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F(x) = f(x)g(x)e_1 = (f(x)g(x), 0, 0)$

$$(1) \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} fg \cdot n_1 \, d\sigma \text{ (per il teorema della divergenza)}$$

$$(2) \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot F \, dx = \int_{\Omega} \frac{\partial(fg)}{\partial x_1} \, dx = \int_{\Omega} f_{x_1}g + g_{x_1}f \, dx \text{ (derivata del prodotto)}$$

$$\text{Mettendo insieme la (1) e la (2) ottengo } \int_{\Omega} f_{x_1}g + g_{x_1}f \, dx = \int_{\partial\Omega} fg \cdot n_1 \, d\sigma$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} fg_{x_1} \, dx = \int_{\partial\Omega} fg \cdot n_1 \, d\sigma - \int_{\Omega} f_{x_1}g \, dx +$$

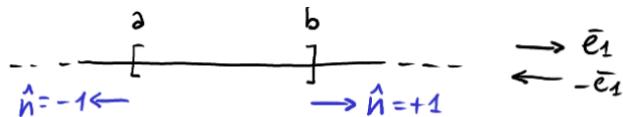
assomiglia molto alla formula di integrazione per parti che abbiamo visto ad analisi 1.

**Teorema N-Dim:**

Invece di  $x_1, n_1$  (prima componente), posso prendere  $x_i, n_i$  generici

$$\int_{\Omega} fg_{x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} fg \cdot n_i \, d\sigma - \int_{\Omega} f_{x_i}g \, dx \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Nel caso particolare di funzioni  $F(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = f(x)g(x)$  dove  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\Omega = [a, b]$ ,  $x = x_1$ ,  $n = \pm 1$



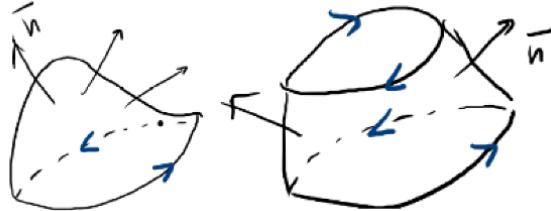
$$\int_{\Omega} fg' dx = f(b)g(b) \cdot (+1) + f(a)g(a) \cdot (-1) - \int_a^b f'g dx \Rightarrow \int_a^b fg' dx = fg \Big|_a^b - \int_a^b f'g dx$$

## 2. Teorema di Stokes (o teorema del rotore)

**Teorema (teorema di Stokes):**

Sia  $\Sigma \subset \Re^3$  una superficie  $C^1$  orientabile, orientata con il campo di versori normali  $\hat{n}$ , di bordo  $\partial\Sigma$  fatto di un numero finito di curve  $C^1$  con l'orientazione corrispondente a quella di  $\Sigma$

Allora  $\int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n d\sigma = \oint_{\partial\Sigma} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$



Riformulando questo teorema possiamo dire che "Il flusso del rotore di un campo vettoriale attraverso una superficie è pari alla circuitazione del campo lungo la curva di bordo di tale superficie".

Questo teorema lega un integrale su un dominio di dimensione superiore al bordo del dominio, che ha dimensione inferiore (lega un integrale bidimensionale con uno unidimensionale).

**Osservazione 1:**

entrambi i teoremi in realtà sono istanze di un unico teorema per forme differenziali (th. Stokes)

$$\int_{\Sigma} d\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega \text{ dove } \int_{\Sigma} d\omega \text{ è una } k\text{-forma e } \int_{\partial\Sigma} \omega \text{ è una } (k-1)\text{-forma}$$

Nel caso di  $k = 2$  si riconduce al teorema di Gauss-Green. Nel caso di  $k = 3$  al teorema di Stokes.

**Osservazione 2:**

Il teorema di Stokes in  $\Re^2$  si può ricondurre alla formula di Gauss-Green nel piano:

Sia  $D \subset \Re^2$  aperto, connesso, limitato, con bordo  $C^1$ , fatto da un numero finito di curve. In  $\Re^3$  si può vedere come una superficie piatta:

$$F: \Re^2 \rightarrow \Re^2, F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

$$\tilde{F}: \Re^3 \rightarrow \Re^3, \tilde{F}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$$



$$\operatorname{rot} \tilde{F} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{bmatrix} = i \frac{\partial Q}{\partial z} - j \frac{\partial P}{\partial z} + k(Q_x - P_y)$$

$$\Rightarrow \int_D \operatorname{rot} \tilde{F} \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial D} \tilde{F}_1 dx_1 + \tilde{F}_2 dx_2 + \tilde{F}_3 dx_3$$

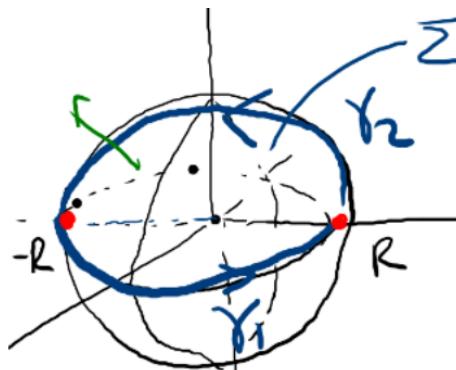
$$\text{Siccome } \int_D \operatorname{rot} \tilde{F} \cdot n \, d\sigma = \int_D (Q_x - P_y) \, dx \, dy \text{ e } \int_{\partial D} \tilde{F}_1 dx_1 + \tilde{F}_2 dx_2 + \tilde{F}_3 dx_3 = \int_{\partial D} P dx + Q dy$$

$$\text{allora si ottiene la formula di Gauss-Green nel piano: } \int_D (Q_x - P_y) \, dx \, dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy$$

### 3. Esempi ed esercizi

**esempio 1:**

$\Sigma := \frac{1}{4}$  di sfera.  $\theta \in [0, \pi/2]$  colatitudine,  $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  longitudine



$\partial\Sigma$  è fatto da 2 semicerchi, ma i punti rossi non hanno un'unica retta tangente. Però va bene comunque purché siano curve  $C^1$  in numero finito.

$F := (x, 0, y)$ . Calcola il flusso del rotore di  $F$  attraverso la superficie

$$\operatorname{rot} F = \det[\dots] = i,$$

$$\hat{n} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \left[ \frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right] : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$\operatorname{rot} F \cdot \hat{n} = \frac{x}{R}$$

$$\int_{\Sigma} \frac{x}{R} d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\sigma R^2 \sin \theta \frac{R \sin \theta \cos \phi}{R} \text{ dove } R^2 \sin \theta \text{ è il fattore area}$$

$$= R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \cos \phi \int_{0}^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = R^2 \left( \sin \phi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \right) =$$

$$= \frac{2R^2}{2} \int_0^{\pi/2} 1 - \cos 2\theta \, d\theta = R^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/2} \right) = R^2 \frac{\pi}{2}$$

Verifichiamo che vale il teorema del rotore (orientazione corretta):

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}, \quad t \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

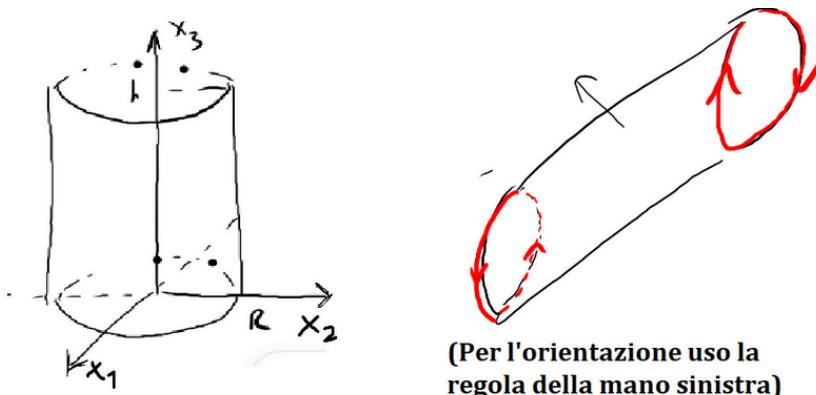
$$\gamma_2 : \begin{cases} z = R \sin t \\ y = R \cos t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi]$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz &= \int_{\partial\Sigma} x dx + y dz = \int_{\gamma_1} x dy + y dz + \int_{\gamma_2} x dx + y dz = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R \cos t \, dx + R \sin t \, dz + \int_0^\pi 0 + R \cos t \, dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R \cos t \, d(R \cos t) + R \sin t \, d0 + \\ &+ \int_0^\pi 0 \, d0 + R \cos t \, d(R \sin t) = R^2 \frac{\cos^2 t}{2} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + R^2 \int_0^\pi \cos^2 t \, dt = R^2 \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Abbiamo calcolato direttamente il flusso del rotore attraverso la superficie. La circuitazione lungo il bordo del campo orientata correttamente ha ottenuto lo stesso risultato.

### esempio 2:

$$C := B_R(0) \times [0, h], \quad \Sigma := \partial C$$



Calcola  $\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma$  dove  $F(x, y, z) := ix - jy + kz$ .

Il bordo non è  $C^1$ : la normale esiste dovunque tranne che sui due cerchi di base. Ma non ce ne frega nulla.

Soluzione 1:  $\int_{\partial C} F \cdot n \, d\sigma = \int_C \operatorname{div} F \, dx \, dy \, xz = \int_C (1 - 1 + 1) \, dx \, dy \, dz = \operatorname{Vol}(C) = \pi R^2 h$   
(teorema della divergenza)

Soluzione 2: divido  $\Sigma$  in  $\Sigma_1$  base sotto,  $\Sigma_2$  base sopra,  $\Sigma_0$  area laterale.

$$\int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma \Big|_{n=-e_3} = \int_{\Sigma_1} (x, -y, z)(-e_3) \, dx \, dy = \int_{x^2+y^2 \leq R^2} -z \, dx \, dy = 0$$

$$\int_{\Sigma_2} F \cdot n \, d\sigma \Big|_{n=e_3} = \int_{\Sigma_2} (x, -y, z)(e_3) \, dx \, dy = \int_{x^2+y^2 \leq R^2} z \, dx \, dy = \pi R^2 h$$

$$\int_{\Sigma_0} F \cdot n \, d\sigma \Big|_{n=\frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \int_{\Sigma_0} \left[ \frac{x^2}{R} - \frac{y^2}{R} \right] d\sigma$$

$n = \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \begin{bmatrix} \frac{x}{R}, \frac{y}{R} \\ x^2 + y^2 \leq R \end{bmatrix}$

Parametrizzo  $\Sigma_0$ :  $\begin{cases} x = R \cos \phi \\ y = R \sin \phi \end{cases}, \Gamma(\phi, z) = (R \cos \phi, R \sin \phi, z)$ ,

$$\Gamma_\phi = (-R \sin \phi, R \cos \phi, 0), \Gamma_z = (0, 0, 1)$$

$$\Gamma_\phi \times \Gamma_z := \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ -R \sin \phi & R \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R(i \cos \phi + j \sin \phi)$$

$$|\Gamma_\phi \times \Gamma_z| = R$$

$$\int_{\Sigma_0} F \cdot n \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz (R \cos \pi, -R \sin \phi, z) \cdot R(\cos \phi, \sin \phi, z)$$

$$\text{dove } (\cos \phi, \sin \phi, z) = (x, -y, z)$$

$$= R^2 h \int_0^{2\pi} d\phi (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = R^2 h \int_0^{2\pi} \cos 2\phi \, d\phi = \frac{R^2 h}{2} \cdot \frac{\sin 2\phi}{2} \Big|_0^{2h} = 0$$

$$\text{Quindi } \int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = 0 + 2R^2 h + 0$$

#### 4. Laplaciano e identità di green

Le identità di Green sono due corollari del teorema della divergenza per funzioni continue e differenziabili al second'ordine.

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  "buono".

Siano  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f, g \in C^1$

$$\int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dx = \int_{\Omega} f_{x_1} g_{x_1} \, dx + \int_{\Omega} f_{x_2} g_{x_2} \, dx + \int_{\Omega} f_{x_3} g_{x_3} \, dx$$

Posso usare la formula di integrazione per parti e ottengo

$$\begin{aligned} &= - \int_{\Omega} f_{x_1 x_1} g \, dx + \int_{\partial \Omega} f_{x_1} g \, n_1 \, d\sigma - \int_{\Omega} f_{x_2 x_2} g \, dx + \int_{\partial \Omega} f_{x_2} g \, n_2 \, d\sigma - \\ &\quad \int_{\Omega} f_{x_3 x_3} g \, dx + \int_{\partial \Omega} f_{x_3} g \, n_3 \, d\sigma = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\Omega} (f_{x_1 x_1} + f_{x_2 x_2} + f_{x_3 x_3}) g \, dx + \int_{\partial\Omega} (f_{x_1} n_1 + f_{x_2} n_2 + f_{x_3} n_3) g \, d\sigma = \\
&= - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \nabla f) g \, dx + \int_{\partial\Omega} \nabla f \cdot n \, g \, d\sigma
\end{aligned}$$

Dove  $\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \operatorname{div} \nabla f$  = operatore "laplaciano"

**Corollario (identità di Green):**

**1° formula di Green:**

$$\int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dx = \int_{\Omega} (-\nabla^2 f) g \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial n} g \, d\sigma$$

**2° formula di Green:**

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 f \cdot g - \nabla^2 g \cdot f) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial n} g - \frac{\partial g}{\partial n} f \right) d\sigma$$

**Dim. 2° formula di Green:**

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dx &= \int_{\Omega} (-\nabla^2 g) f \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial n} f \, d\sigma \\
0 &= \int_{\Omega} (\nabla^2 g \cdot f - \nabla^2 f \cdot g) \, dx + \int_{\partial\Omega} \left( -\frac{\partial g}{\partial n} f + \frac{\partial f}{\partial n} g \right) d\sigma \\
\Rightarrow \int_{\Omega} (\nabla^2 f \cdot g - \nabla^2 g \cdot f) \, dx &= \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial n} g - \frac{\partial g}{\partial n} f \right) d\sigma \quad \square
\end{aligned}$$