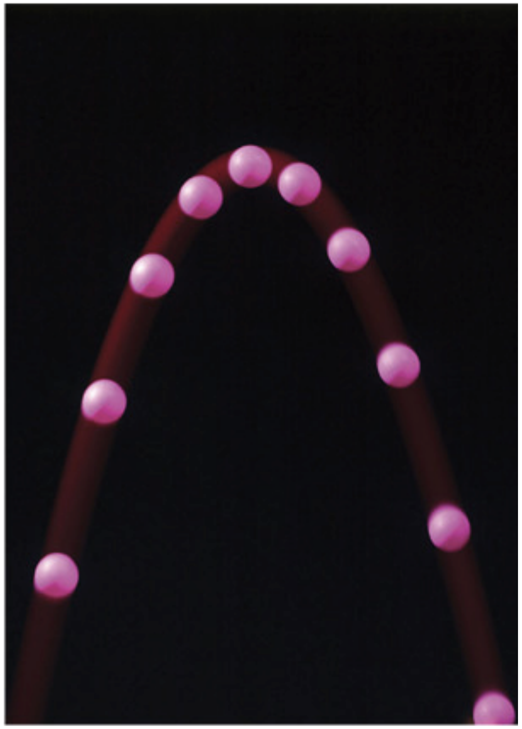
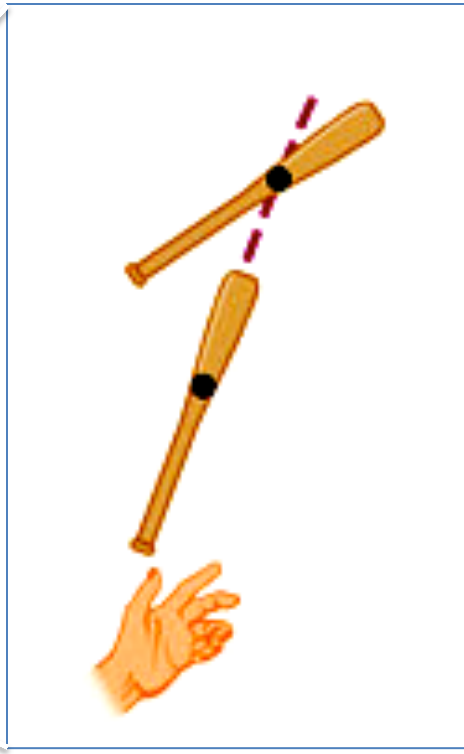
Moto di un corpo composto

- Per corpo composto s'intende un **sistema di punti materiali**.

- Assimilabile al moto di un punto materiale



- Moto di un corpo rigido

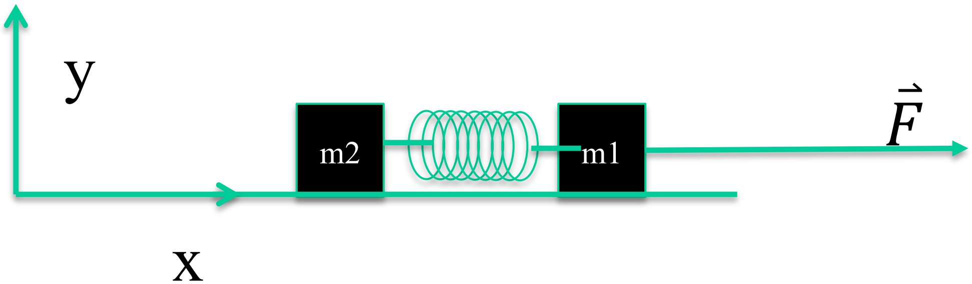


- I vari punti del corpo hanno moti differenti

Sistema di 2 punti materiali

Due punti materiali di massa inerziale m_1 ed m_2 sono connessi tra loro tramite una molla di costante elastica *k,* lunghezza di riposo l_0 e di massa trascurabile. Sul corpo 1 è applicata una forza **F**

- Consideriamo come un ***sistema*** a se stante i due ***punti materiali*** e la ***molla***



- Questo sistema complesso interagirà con il mondo esterno circostante:
  - la reazione vincolare del piano di appoggio
  - la forza peso nei pressi della superficie terrestre
  - la forza **F**
- differenza di concetto tra la **forza interna** al sistema *esercitata dalla molla* sui due punti materiali e le altre **forze esterne**
- **Cercheremo di risolvere il problema, per il moto di m_1 ed m_2 determineremo cioè le rispettive leggi orarie**

Quantità di moto

- Dato un corpo di massa m che si sta muovendo con velocità **v** , si chiama ***quantità di moto*** del corpo la grandezza *vettoriale*:

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

- Cioè il prodotto di uno scalare, la massa, che è un numero positivo, per un vettore, la velocità

  - Ha la stessa direzione e lo stesso verso di **v**
  - Le sue dimensioni sono quelle di una massa per una velocità
  - Nel Sistema Internazionale si misura in kg m s^{-1}

Mv=80 kg * 80 km/h=
=1778 kg m s^{-1}

- se una **bambina** piccola (18 kg)
vi corresse incontro,
probabilmente la prendereste in braccio:
è **piccola** non può far danni.

- se un **giocatore di football** (100 kg)
facesse la stessa cosa,
probabilmente vi scansereste velocemente.

se il giocatore vi venisse incontro **camminando tranquillamente** e vi urtasse, non vi preoccupereste molto.

***p* descrive la *differenza* fra i due oggetti in moto**

$$\left.\begin{aligned} m_{bambina} &= 18\,kg \\ v_{bambina} &= 3\,m/s \end{aligned}\right\} \quad p_{bambina} = 54\,kg\ m/s$$

a che **velocità** dovrebbe andare il giocatore per avere la stessa quantità di moto?

$$m_{giocatore} = 100\,kg$$

$$p_{giocatore} = p_{bambina}$$

$$m_{giocatore} v_{giocatore} = m_{bambina} v_{bambina}$$

$$v_{giocatore} = \frac{m_{bambina}}{m_{giocatore}} v_{bambina} = 54\,cm/s$$

il giocatore dovrebbe andare **MOLTO** lentamente!

I e II legge della dinamica e impulso

- In termini di quantità di moto il principio di inerzia (la I legge di Newton) si può esprimere dicendo che la "quantità di moto di un punto materiale isolato resta costante", infatti la sua massa non varia e, in base al principio di inerzia, neppure la sua velocità

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \mathrm{m}\vec{a} = \vec{F}$$

- Se invece la velocità del punto materiale cambia per effetto dell'accelerazione prodotta dalla risultante **F** delle forze applicate (**F** = m**a** in base alla II legge di Newton), allora anche la quantità di moto varierà nel tempo. Possiamo calcolare la rapidità con cui essa varia calcolando la sua derivata rispetto al tempo:

$$\Delta\vec{p} = \overrightarrow{p_f} - \overrightarrow{p_i} = \int_i^f \vec{F}\,dt$$

Impulso di una Forza

- **Si definisce l'impulso di una forza di una forza** $\vec{F}$ fra due istanti di tempo t_0 e t l'integrale:

$$\vec{I}_{t_0 \to t} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} dt'$$

- **Proprietà di** $\boldsymbol{\vec{I}_{t_0 \to t}}$
  - è una grandezza fisica **vettoriale**
  - $[\vec{I}] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$ come per la quantità di moto

- **Teorema dell'impulso**
  la variazione della quantità di moto di un punto materiale è pari all'impulso totale delle forze esterne:

$$\vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F} \ \ dt'$$

Dimostrazione

$$\int_{t_0}^{t} \vec{F} \ \ dt' = \int_{t_0}^{t} m\vec{a} dt' = [m\vec{v}]_{t_0}^{t} = m\vec{v}(t) - m\vec{v}(t_0) = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0)$$

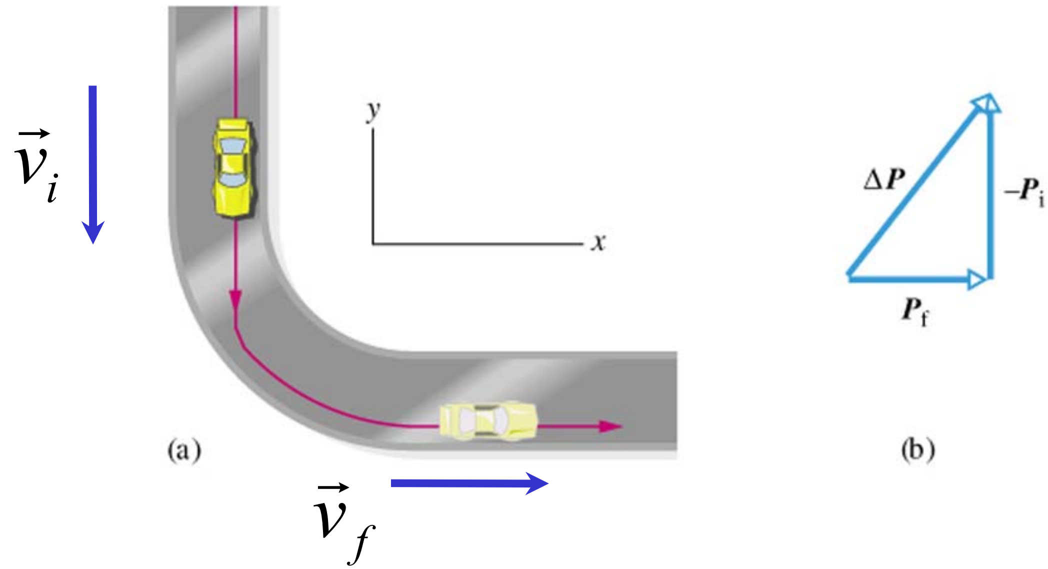
esempio: pista automobili giocattolo

$$m = 2.0\,kg$$

$$v_i = 0.50\,m/s$$

$$v_f = 0.40\,m/s$$

$$\Delta\vec{p} = ?$$



$$\vec{p}_i = (2.0\,kg)(-0.50\,m/s)\vec{j}$$

$$\vec{p}_f = (2.0\,kg)(0.40\,m/s)\vec{i}$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$$= (2.0\,kg)(0.40\,m/s)\vec{i} - (2.0\,kg)(-0.50\,m/s)\vec{j}$$

$$= (0.8\vec{i} + 1.0\,\vec{j})\,kg\,m/s$$

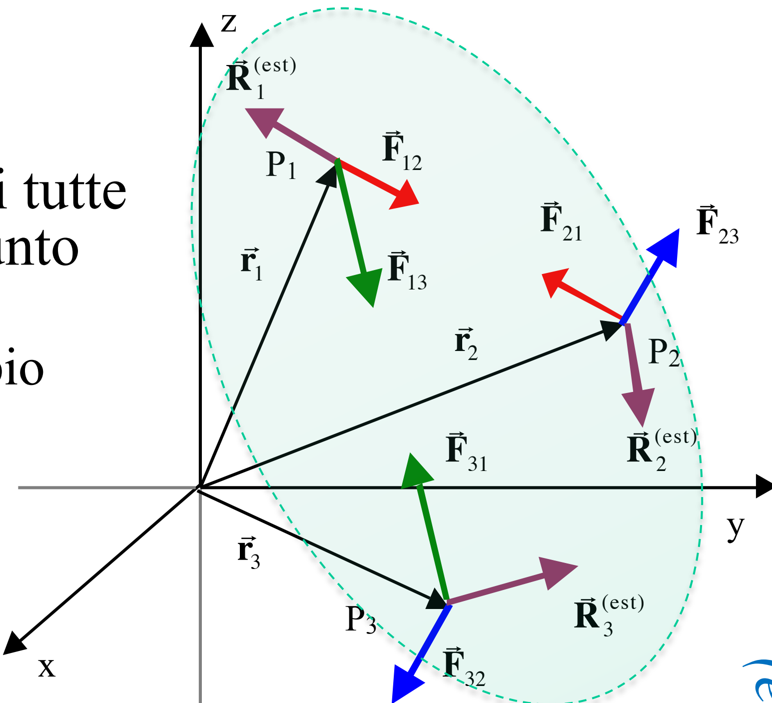
Ha agito una forza esterna,
che ha prodotto una accelerazione
con componente <u>tangenziale e centripeta</u>

Dinamica di un sistema di punti materiali

- Per ciascuno dei punti materiali del sistema possiamo sicuramente scrivere che

$$m\vec{a}_i = \vec{R}_i$$

- Dove $\vec{R}_i$ rappresenta la risultante di tutte le forze che agiscono su ciascun punto materiale:
  - **forze interne** (la molla dell'esempio precedente)
  - **forze esterne** di risultante $\vec{R}_i^{(est)}$



(eq_cinematica) $\rightarrow$

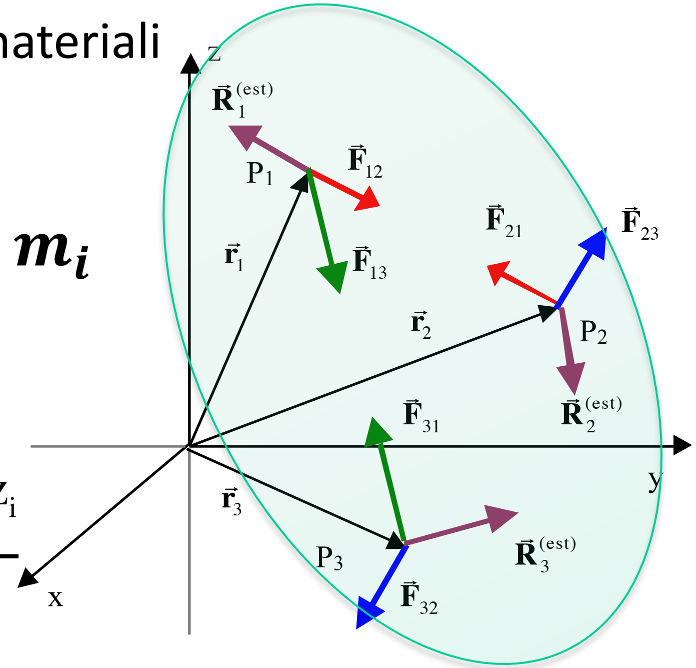
$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{R}_i^{(est)} + \sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i^{(est)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij}}_{\text{perchè in una somma è possibile cambiare l'ordine degli addendi}}$$

$\leftarrow$ *(eq_dinamica)*

(eq_cinematica) Cinematica, definizioni

- Consideriamo un sistema discreto n di punti materiali
- Definiamo ***Centro di massa*** (CM) del sistema

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M} \qquad M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$



- Le coordinate cartesiane del ***CM*** *sono*

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M} \qquad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M} \qquad z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M}$$

- Definiamo la **velocità del *Centro di massa*** del sistema

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M}$$

- Definiamo l'impulso **del *Centro di massa***

$$\vec{P}_{CM} = M\vec{v}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

- Le variabili cinematiche del CM

$$\underbrace{\vec{\mathbf{v}}_{CM} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{CM}}{dt}}_{\text{per definizione}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{M}\right) = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{r}}_i\right)}_{\text{perchè } \frac{1}{M} \text{ è costante}} = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt}}{M}}_{\substack{\text{perchè la derivata si può} \\ \text{distribuire sulla somma} \\ \text{e perchè } m_i \text{ è costante}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{v}}_i}{M}$$

$$\vec{P}_{CM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots.. = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \qquad \Rightarrow \vec{P}_{CM} = M\,\vec{v}_{CM}$$

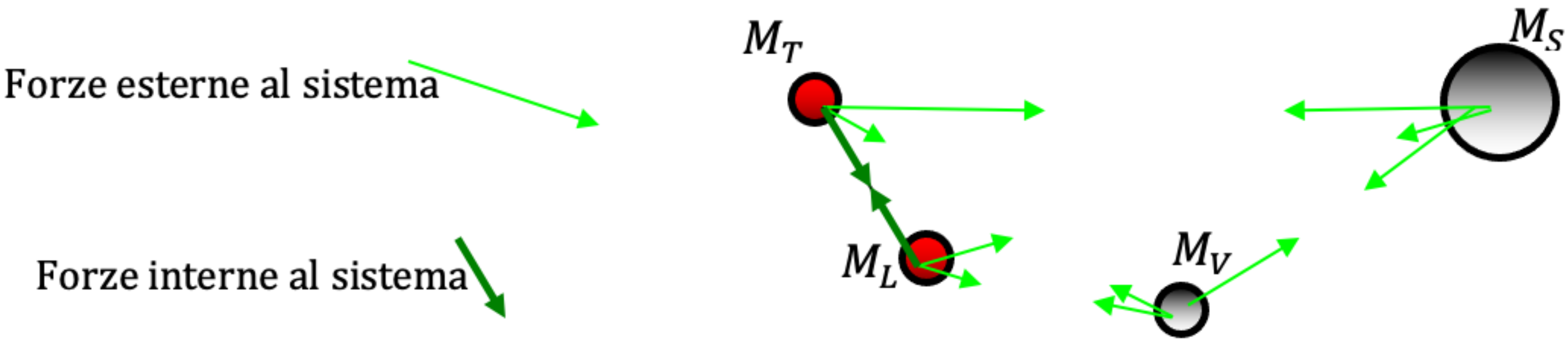
- ***Primo teorema del CM***

  - la quantità di moto totale di un sistema di punti materiali è uguale alla quantità di moto che avrebbe un punto materiale di massa uguale alla massa totale e velocità uguale a quella del C.M. del sistema

$$\vec{P}_{CM} = M\,\vec{v}_{CM}$$

Forze interne agenti su sistemi di punti materiali

- Consideriamo il sistema (punti rossi) composto dalla Terra e dalla Luna, che interagiscono secondo la legge di gravitazione e che sono in vicinanza del Sole e di Venere.



  - Consideriamo solo il moto del sistema Terra-Luna: rispetto a questo sistema esistono forze **esterne** ed **interne**

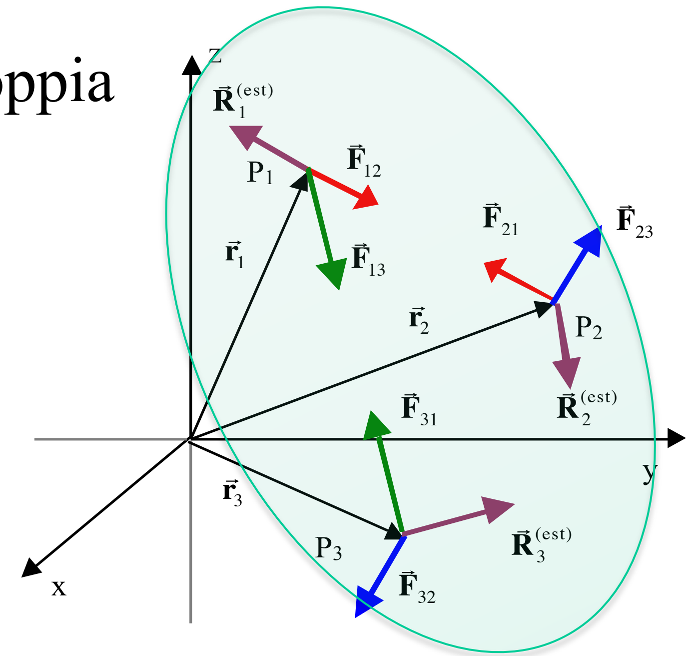
- Si definiscono **forze interne (ad un sistema)** le **forze fra due punti materiali entrambi interni al sistema**

Nel sistema considerato la forza interna è l'attrazione gravitazionale reciproca fra Terra e Luna, mentre le altre attrazioni gravitazionali, dovute al Sole ed a Venere, sono forze esterne

Forza agente su un sistema di punti materiali

- da $\vec{P}_{CM} = \mathrm{M}\,\vec{v}_{CM} \;\Rightarrow \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = M\,\vec{a}_{CM}$
- Indichiamo con

- $\vec{\mathrm{f}}_{ij}$ le forze di interazione (interne) tra la coppia di punti materiali ij
- $\vec{\mathrm{R}}_i^{(est)}$ la risultante delle forze esterne agenti sullo i-esimo punto materiale del sistema



$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathbf{a}}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{\mathbf{R}}_i^{(est)} + \sum_{j\neq i}\vec{\mathbf{f}}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\vec{\mathbf{R}}_i^{(est)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\vec{\mathbf{f}}_{ij}}_{\text{perchè in una somma è possibile cambiare l'ordine degli addendi}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\overrightarrow{f_{ij}} = \overrightarrow{F_{12}} + \overrightarrow{F_{21}} + \overrightarrow{F_{31}} + \overrightarrow{F_{13}} + \overrightarrow{F_{32}} + \overrightarrow{F_{23}} + \ldots\ldots = 0$$

La risultante delle forze interne è nulla ! $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathrm{R}}_i^{(est)}$

Forza agente su un sistema discreto di punti materiali (2)

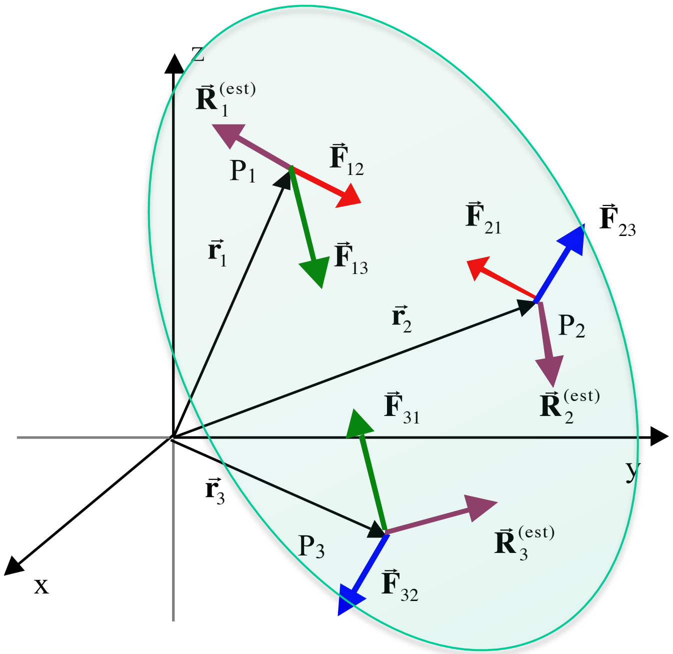
$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i^{(est)}$$

- ***Prima equazione cardinale dei sistemi***: La derivata della quantità di moto totale di un sistema è uguale alla risultante delle sole forze esterne

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$$

$$= M\,\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i^{(est)}$$

$$M\vec{\mathbf{a}}_{CM} = \vec{\mathbf{R}}^{(est)}$$

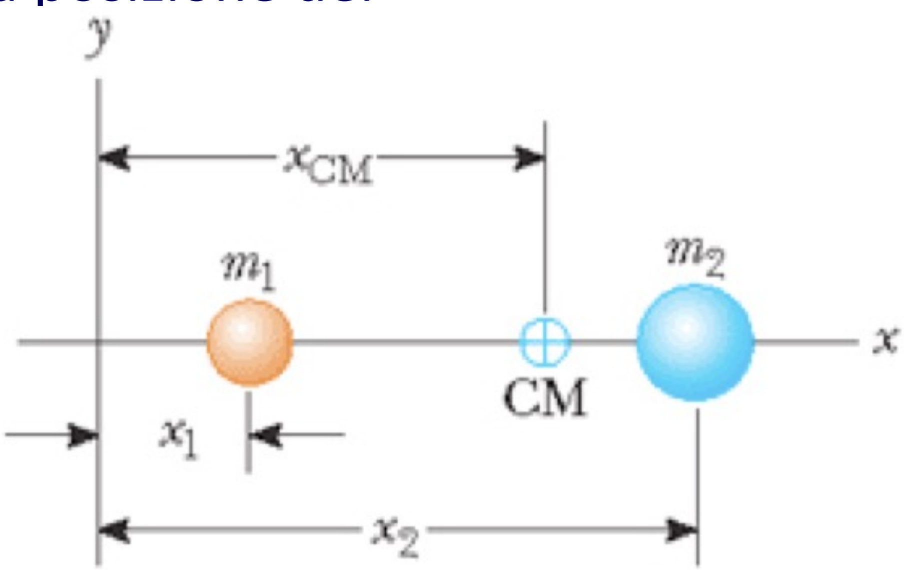


- ***Secondo teorema del CM***: il C.M. di un sistema di punti materiali si muove come un punto di massa totale M soggetto alla risultante delle forze esterne

Calcolo centro di massa, esempi sistema discreto di punti materiali

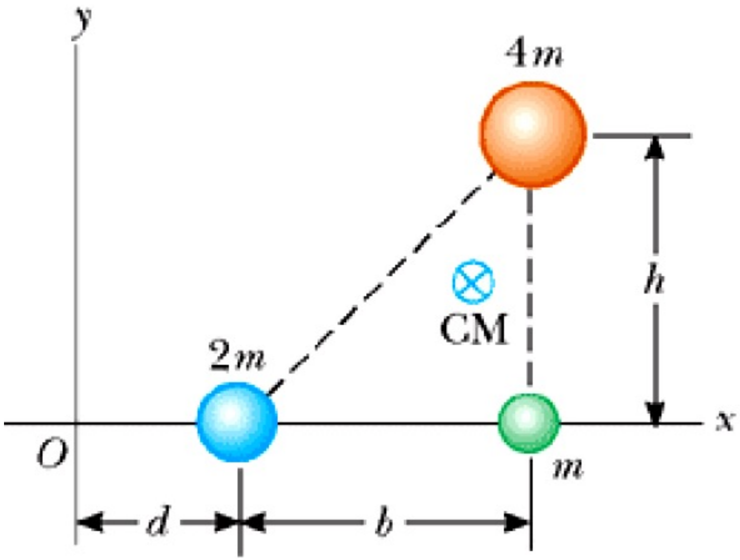
- Per due particelle di massa m_1 ed m_2 su di una retta nelle posizioni x_1 e x_2 , la posizione del centro di massa x_2 è data da

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



- il centro di massa è nel centro della congiungente le due particelle se m_1 = m_2
- in caso contrario, il centro di massa è spostato verso la particella più pesante

- Centro di massa di tre particelle di massa m_1, m_2 e m_3 come mostrate in figura



$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\vec{r}_1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = d \\ y_1 = 0 \\ m_1 = 2m \end{cases} \qquad \vec{r}_2 \rightarrow \begin{cases} x_2 = d + b \\ y_2 = 0 \\ m_2 = m \end{cases} \qquad \vec{r}_3 \rightarrow \begin{cases} x_3 = d + b \\ y_3 = h \\ m_3 = 4m \end{cases}$$

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2md + m(d+b) + 4m(d+b)}{2m + m + 4m} = \frac{7md + 5mb}{7m} = d + \frac{5}{7}b$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{0 + 0 + 4mh}{7m} = \frac{4}{7}h$$

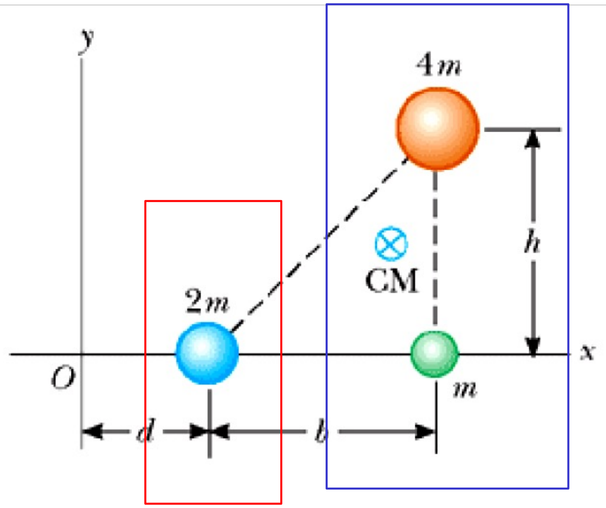
$$\vec{R}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} = \left(d + \frac{5}{7}b\right)\hat{i} + \frac{4}{7}b\hat{j}$$

CM per un sistema composto da più parti

- Nel caso di un sistema composto ad es da due parti, di massa M_1 ed M_2, la posizione di centro di massa è:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{M_1\vec{R}_{1CM} + M_2\vec{R}_{2CM}}{M_1 + M_2}$$

può essere calcolata come se la massa di ciascuna delle due parti fosse concentrata nel suo centro di massa



- Dimostrazione
  - Supponiamo che il sistema sia composto da due parti, formate rispettivamente da n_1 e n_2 punti punti materiali

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1+n_2} m_i\vec{R}_i}{M_1 + M_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} m_i\vec{R}_i + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} m_i\vec{R}_i}{M_1 + M_2}$$

$$= \frac{M_1\vec{R}_{1CM} + M_2\vec{R}_{2CM}}{M_1 + M_2} \qquad \text{CVD}$$

Calcolo centro di massa, esempio corpo rigido

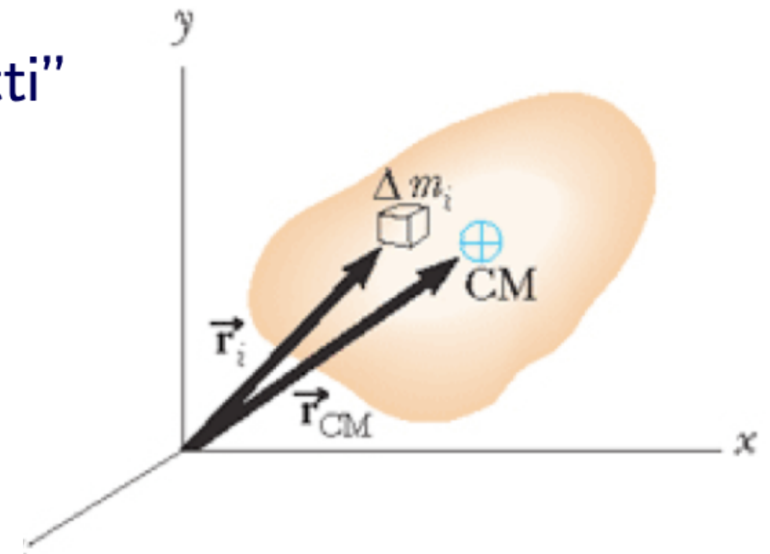
Per due particelle

In tre dimensioni: $\vec{r}_{cm} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$. Per molte particelle:

$\vec{r}_{cm} = \dfrac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \dfrac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i$, dove $M = \sum_i m_i$ è la massa totale.

Oggetto esteso: dividiamo in "cubetti"

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i \Delta m_i\vec{r}_i$$



Nel limite di "cubetti" infinitesimi:

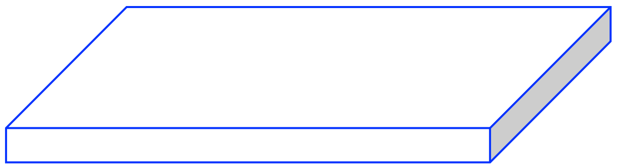
$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}dm,$$

che diventa un integrale sul volume:

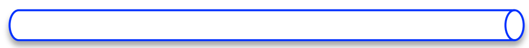
$\vec{r}_{cm} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int \vec{r}\rho(\vec{r})dV$ introducendo la densità $\rho = \frac{dm}{dV}$

Definizioni di densità di massa volumetrica, superficiale e lineare

- **Densità (di volume) di massa:** $\boldsymbol{\rho_m = \frac{dM}{dV}}$ $\quad [\rho_m] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- **Densità superficiale di massa:** $\boldsymbol{\sigma_m = \frac{dM}{dA}}$ $\quad [\sigma_m] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$
  - si utilizza quando lo spessore può essere trascurato (perché il corpo è realmente sottile rispetto alle altre dimensioni o perché lo spessore non è influente)
  - es. il legno di un parquet di spessore 1 cm ha una densità superficiale di massa di circa $9\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$
  - $\sigma_m = \rho_m \times \text{spessore}$



- **Densità lineare di massa:** $\boldsymbol{\lambda_m = \frac{dM}{dl}}$ $\quad [\lambda_m] = \frac{\text{kg}}{\text{m}}$
  - È definita per corpi in cui l'unica dimensione rilevante è la lunghezza.
  - Esempio: calcolare la densità lineare di massa di un filo elettrico di rame di raggio 1 mm. $\quad \pi r^2 \rho_m = \pi \times 10^{-6}\,\text{m}^3 \times 8.96 \times 10^3\,\text{kg m}^{-3} = 28\,\frac{\text{g}}{\text{m}}$
  - $\lambda_m = \rho_m \times sezione$



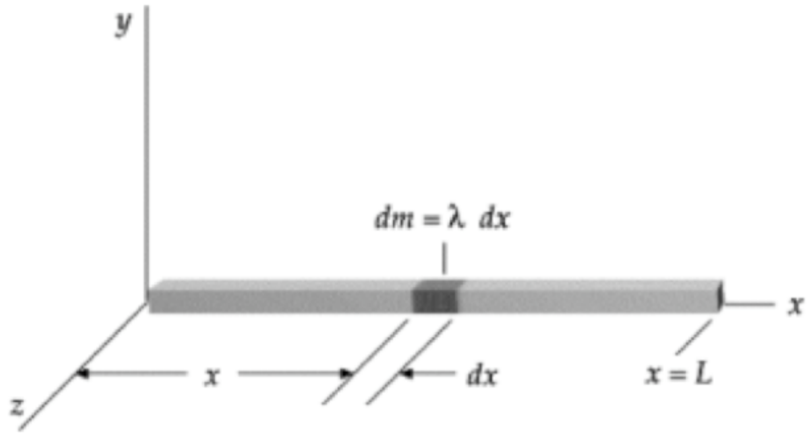
- $\boldsymbol{\rho_m, \sigma_m, \lambda_m}$ sono in generale funzioni delle coordinate del punto nello spazio che viene considerato

Calcolo centro di massa, esempi per corpi rigidi

- Il calcolo del CM di un corpo non è in generale semplice, ma lo è per oggetti di densità costante e di forma semplice

  - Esempio:
    Una sbarra di lunghezza L e massa M con densità lineare di massa λ costante

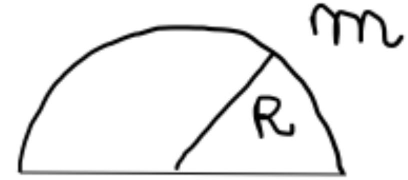
Ha senso calcolare solo la coordinata x del baricentro



$$\lambda = \frac{dm}{dx} = \frac{M}{L} \qquad dm = \lambda\, dx$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda dx = \frac{\lambda}{M}\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = \frac{\lambda}{M}\frac{L^2}{2} = \frac{\mathrm{L}}{2}$$

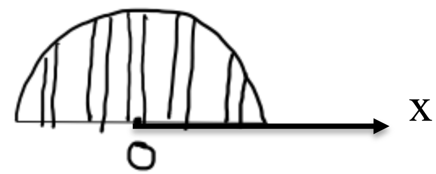
Si trovi il baricentro di una lamina omogenea piana di spessore trascurabile avente la forma di un semicerchio di massa m e raggio R



$$\rho_S = \frac{m\,2}{\pi R^2} \qquad \vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\int \rho_S \, dS \cdot \vec{r}$$

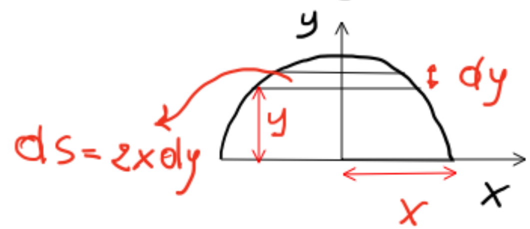
baricentro in x ⇒ "affetto" in x

distribuzione simmetrica ⇒ $X_{CM} = 0$



baricentro in y ⇒ "affetto" in y

$$y_{CM} = \frac{1}{m}\int \rho_S \, dS \; y$$



$$y_{CM} = \frac{1}{m}\rho_S \int_0^R 2x\,dy \cdot y$$

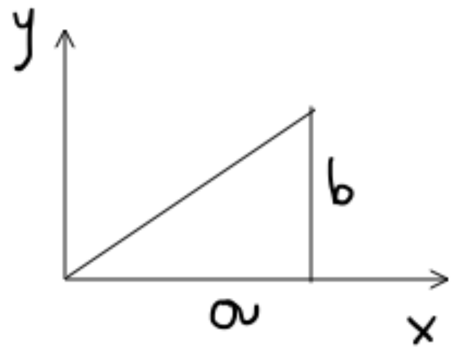
dall'equazione del cerchio $y^2 = R^2 - x^2$ $\qquad y = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$dy = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx \qquad \text{per} \begin{cases} y = R & x = 0 \\ y = 0 & x = R \end{cases}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{m}\rho_S 2 \int_R^0 x \frac{(-x)}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$y_{CM} = -\frac{2\rho_S}{m}\int_R^0 x^2\,dx = \frac{2\rho_S}{m}\frac{R^3}{3} = \frac{2}{m}\cdot\frac{2m}{\pi R^2}\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$$

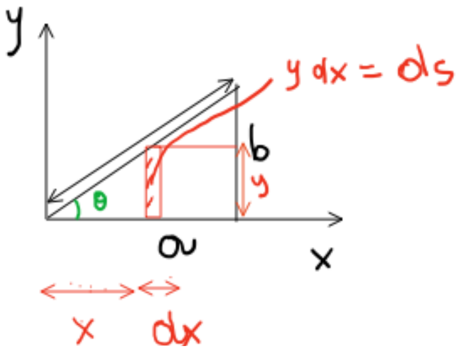
Esercizio: Determinare il C.M. di un triangolo rettangolo di densità uniforme $\sigma = \rho_S$, massa M e lati a, b

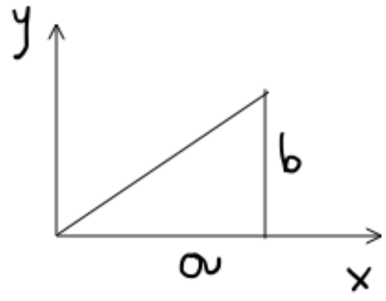


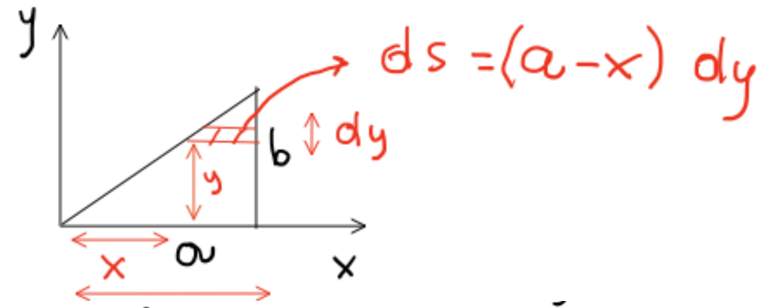
$$\frac{M}{S} = \rho_S = \frac{M \cdot 2}{ab}$$

$$x_{cm} \equiv \frac{1}{M}\int dm\, x \qquad y_{cm} \equiv \frac{1}{M}\int dm\, y$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int \underbrace{\rho_S\, ds}_{dm}\, x \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\int \rho_S\, ds\, y$$







$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int \rho_s \, ds \; x$$

Baricentro in x "affetto" in x

$$ds = y\,dx$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^a \rho_s \, y \, dx \; x$$

$$y = x \, tg\,\theta$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\rho_s \int_0^a x^2 \, tg\,\theta \, dx$$

$$tg\,\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{M}\frac{2M}{ab}\frac{b}{a}\frac{a^3}{3}$$

$$x_{CM} = \frac{2}{3}a$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int \rho_s \, ds \; y$$

Baricentro in y "affetto" in y

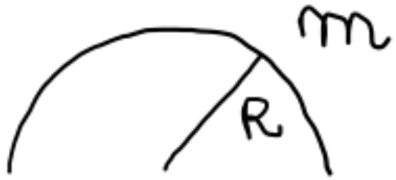
$$y_{CM} = \frac{\rho_s}{M}\int_0^b (a-x)\,dy \; y$$

$$y = x \, tg\,\theta \Rightarrow x = y/tg\,\theta$$

$$y_{CM} = \frac{\rho_s}{M}\int_0^b \left(a - \frac{y}{tg\,\theta}\right) y \, dy$$

$$y_{CM} = \frac{2M}{ab}\cdot\frac{1}{M}\left(\frac{ab^2}{2} - \frac{a}{b}\frac{b^3}{3}\right)$$

$$y_{CM} = \frac{b}{3}$$

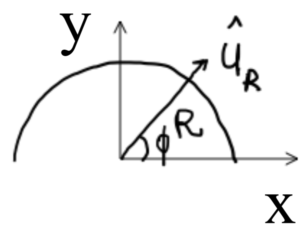


Si calcoli la posizione del C.M. di un semianello rigido omogeneo di massa m e raggio R

La massa del semianello è data da

$$m = \rho_\ell \cdot \pi R \qquad \rho_\ell \text{ densità lineare} \Rightarrow \rho_\ell = \frac{m}{\pi R}$$

$$m\vec{r}_{CM} = \int \rho_\ell \, d\ell \cdot \vec{r}$$

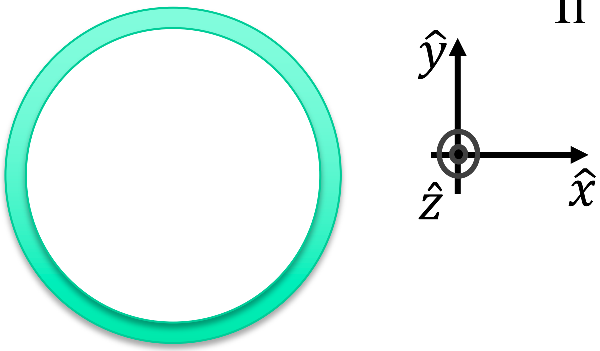


$$m\, x_{CM} = \rho_\ell \int_0^\pi R\, d\phi \cdot R\cos\phi = 0 \Rightarrow x_{CM} = 0$$

$$m\, y_{CM} = \rho_\ell \int_0^\pi R\, d\phi \cdot R\sin\phi = \rho_\ell R^2 \left(-\cos\phi \Big|_0^\pi \right) = 2\rho_\ell R^2$$

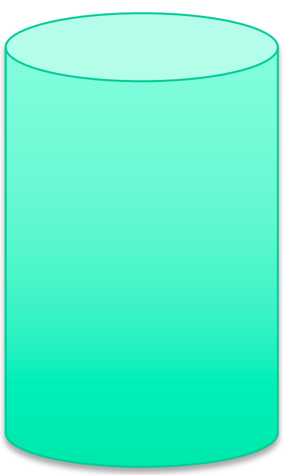
$$m\, y_{CM} = 2\frac{m}{\pi R} \cdot R^2 = 2\frac{m}{\pi} R \Rightarrow y_{CM} = \frac{2R}{\pi}$$

Considerazioni su simmetrie per il calcolo del CM



Il CM coincide con il centro dell'anello se λ è costante

- Invarianza della distribuzione di massa
    - per rotazioni attorno a un asse z passante per il centro
    - per rotazioni di π attorno a un asse x passante per il centro

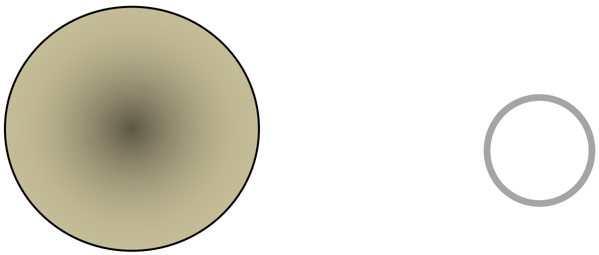


Il CM coincide con il centro del cilindro se ρ dipende unicamente dalla distanza dall'asse y passante per il centro

- Invarianza della distribuzione di massa
    - per rotazioni attorno a un asse y passante per il centro
    - per rotazioni di π attorno a un asse qualsiasi ortogonale all'asse y passante per il centro

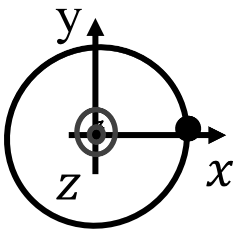
Considerazioni su simmetrie

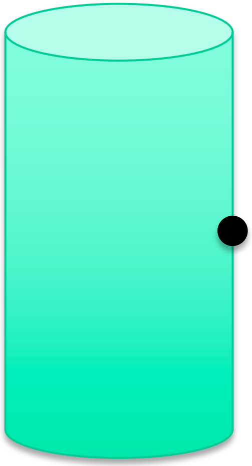
Una pallina da tennis (massa concentrata sul bordo) e la Terra (densità variabile con R) hanno il centro di massa coincidente con il centro geometrico a causa della loro simmetria sferica.



Esempio corpo composto

Esempio Un cilindro omogeneo ha raggio R e massa M ed ha un chiodo di massa $M/4$ infisso sul bordo alla stessa quota del CM del cilindro. Determinare la distanza del CM del sistema da CM del cilindro.

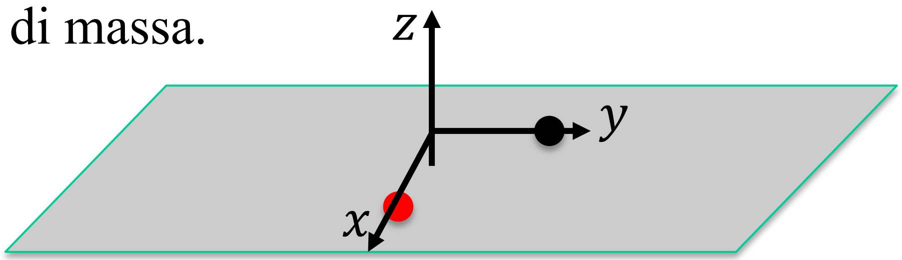




$$R_{CM} = \frac{M \cdot 0 + (M/4)R}{(5/4)M} = \frac{R}{5}$$

Esercizio

Due masse $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 0.6$ kg, inizialmente in quiete, sono disposte su un piano (x, y) privo di attrito. Le coordinate di m_1 siano $(0; 3\text{ m})$ e quelle di m_2 $(4\text{ m}; 0)$. Si applichino ad esse le rispettive forze $\vec{F}_1 = 4N\hat{x}$, $\vec{F}_2 = 3N\hat{y}$.
Determinare le equazioni del moto del centro di massa.



Dalla prima equazione della dinamica dei sistemi:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (m_1 + m_2)\vec{a}_{CM}$$

$$a_{xCM} = \frac{F_{1x} + F_{2x}}{m_1 + m_2} = \frac{F_1}{m_1 + m_2} = 2.5\text{ m/s}^2$$

$$a_{yCM} = \frac{F_{1y} + F_{2y}}{m_1 + m_2} = \frac{F_2}{m_1 + m_2} = 1.87\text{ m/s}^2$$

Poichè l'accelerazione del CM lungo x e lungo y è costante il moto del centro di massa è uniformemente accelerato lungo x e lungo y

- Per determinare le equazioni del moto del CM dobbiamo in generale determinare la posizione e la velocità iniziali del CM
  - Le coordinate iniziali del centro di massa sono

$$\begin{cases} x_{0CM} = \left(\dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}\right) = 1.5 \text{ m} \\ y_{0CM} = \left(\dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}\right) = 1.87 \text{ m} \end{cases}$$

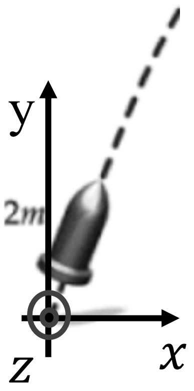
Dalle condizioni iniziali $v_{xcM}(0) = v_{ycM}(0) = 0$

Le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} x_{CM}(t) = x_{0CM} + \left(\dfrac{F_1}{m_1 + m_2}\right)\dfrac{t^2}{2} = 1.5 \text{ m} + 1.25 \text{ m/s}^2 t^2 (\text{s}) \\ y_{CM}(t) = y_{0CM} + \left(\dfrac{F_2}{m_1 + m_2}\right)\dfrac{t^2}{2} = 1.87 \text{ m} + 0.93 \text{ m/s}^2 t^2 (\text{s}) \end{cases}$$

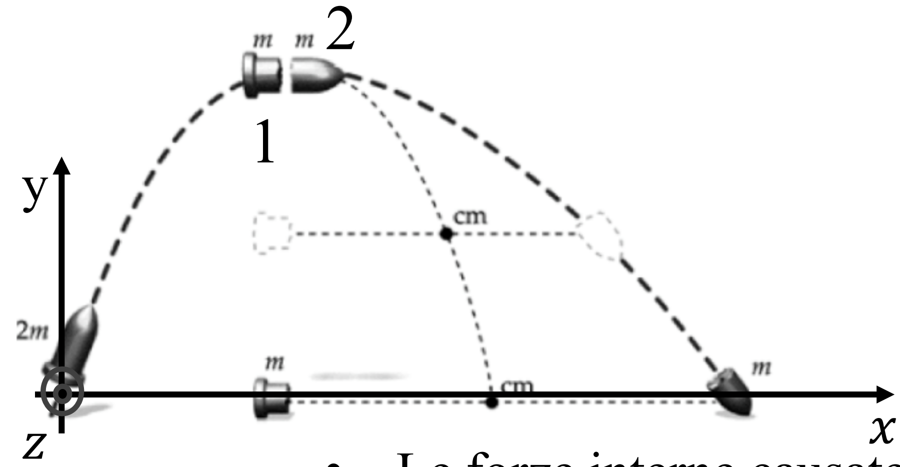
Esercizio

Un proiettile lanciato ad un angolo $\theta = 36.9°$ con velocità iniziale $v = 24.5$ m/s si frammenta in due pezzi di massa uguale nel punto più alto della traiettoria. Uno dei frammenti cade giù in verticale. Dove atterra l'altro?



Dati

- $m_1 = m_2 = m$
- $\theta = 36.9^0$
- $v_0 = 24.5 \text{ m/s}$



- Il CM per effetto della gravità ha un moto parabolico
  - atterra a distanza lungo x pari alla gittata (R)
- la coordinata x del CM quando è a terra è

- Le forze interne causate dall'esplosione non influiscono sul moto del centro di massa

$$x_{CM} = R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} = \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}\right)$$

- La frammentazione avviene alla quota massima raggiunta dal proiettile
  - la coordinata x_{CM} alla quota max corrisponde a R/2
  - Uno dei frammenti cade giù in verticale

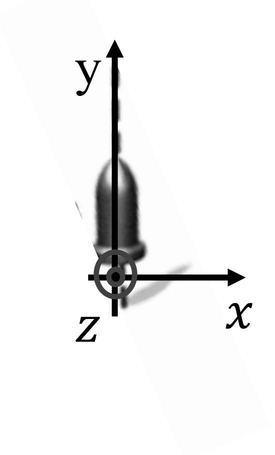
la coordinata x_1 del frammento che cade in verticale corrisponde a R/2

$$x_{CM} = R = \left(\frac{m\frac{R}{2} + m x_2}{2m}\right) \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} R \qquad R = 58.8 \text{ m}, \; x_2 = 88.1 \text{ m}$$

Esercizio

Un proiettile, sparato in verticale verso l'alto con velocità iniziale V_0, esplode appena lanciato in due frammenti di ugual massa. Dopo t_1 secondi dall'esplosione uno dei frammenti raggiunge la quota h_1. Determinare la quota dell'altro frammento allo stesso istante.

- Velocità iniziale proiettile $\vec{V}_p = (0, V_0)$
- 2 frammenti da esplosione di egual massa
- Dopo t_1 secondi dall'esplosione uno dei frammenti raggiunge la quota h_1.
- Determinare la quota dell'altro frammento allo stesso istante.



Soluzione.

Fissiamo come sistema di riferimento un asse verticale rivolto verso l'alto e con origine nel punto di lancio

- Le forze interne causate dall'esplosione non influiscono sul moto del centro di massa.

- poiché la gravità è l'unica forza esterna, il centro di massa si muove di moto rettilineo uniformemente decelerato lungo y
  - all'istante t_1 raggiunge la quota:

$$y_{CM}(t_1) = V_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$$

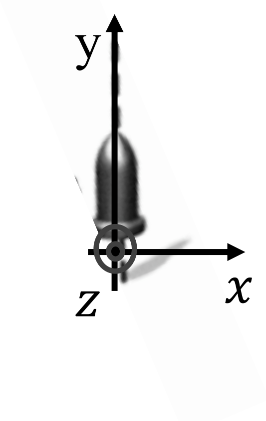
- Inoltre:

$$y_{CM} = \left(\frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{y_1 + y_2}{2}$$ in quanto le due masse sono eguali

Al tempo t_1 $y_1 = h_1$ si ha:

$$y_2 = h_2 = 2y_{CM} - h_1 = 2V_0 t_1 - g t_1^2 - h_1$$

- Velocità iniziale proiettile $\vec{V}_p = (0, V_0)$
- 2 frammenti da esplosione di egual massa
- Dopo t_1 secondi dall'esplosione uno dei frammenti raggiunge la quota h_1.
- Determinare la quota dell'altro frammento allo stesso istante.



$$y_{CM}(t_1) = V_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \qquad y_{CM} = \left(\frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Al tempo t_1 $\quad y_1 = h_1$

$$y_2 = h_2 = 2y_{CM} - h_1 = 2V_0 t_1 - g t_1^2 - h_1$$

Si osservi ora che la coordinata x dei frammenti non risulta determinata perché dipende dalle velocità vettoriali acquistate all'istante dell'esplosione.

- il centro di massa non è soggetto a forze in direzione orizzontale
- $V_{xCM}(t) = \text{costante} = V_{xCM}(0) = 0$

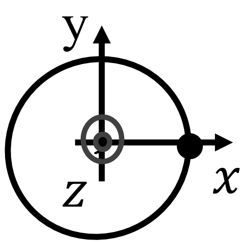
$\Rightarrow x_{CM}(t) = costante = x_{CM}(0) = 0$

Nel caso in esame deve essere quindi soddisfatta la condizione

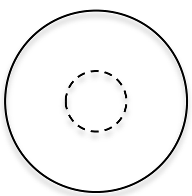
$$x_{CM} = \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = -x_2$$

Esercizio

Determinare la velocità, l’accelerazione del centro di massa C e la risultante delle forze esterne di un disco omogeneo di massa $M = 10$ kg e raggio $R = 30$ cm, sul cui bordo è fissato un oggetto di massa $m = 300$ g, che ruota attorno al suo asse con velocità angolare $\omega = 100$ rad/s costante su un piano privo di attrito.



- In base alla scelta degli assi cartesiani, la distanza del CM del sistema dall’origine durante il moto di rotazione è costante e pari a $$|\vec{R}_{CM}(t)| = \left(\frac{M\cdot 0+mR}{M+m}\right) = \frac{mR}{m+M}$$
- Il CM ruoterà attorno all’asse z con velocità angolare ω a una distanza fissa dal centro del disco: MOTO CIRCOLARE UNIFORME



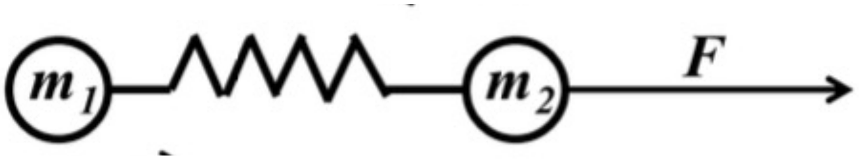
$$|\vec{V}_{CM}| = \omega\,|\vec{R}_{CM}(t)| = \frac{m}{m+M}\omega R = \frac{0.3\times 100\times 0.3}{10.3} = 0.873\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$|\vec{a}_{CM}| = \omega^2|\vec{R}_{CM}(t)| = \frac{m}{m+M}\omega^2 R = \frac{0.3\times 100^2\times 0.3}{10.3} = 87.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

- La velocità è diretta ortogonalmente alla congiungente della posizione dell’oggetto con il centro del disco e tangente alla traiettoria tratteggiata
- l’accelerazione è centripeta

Esercizio

Due blocchi di massa m_1 ed m_2, collegati mediante una molla di costante elastica k e di massa trascurabile, poggiano su un piano orizzontale privo di attrito. Alla massa m_2 è applicata una forza orizzontale F costante. Determinare l'allungamento della molla supponendo che il sistema non oscilli.

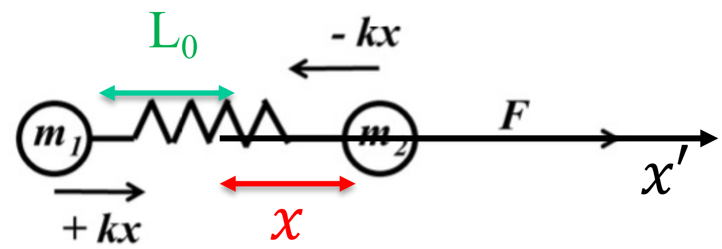


Determinare l'allungamento della molla supponendo che il sistema non oscilli.

Soluzione.

- La <u>forza elastica è una forza interna</u>, per cui non influisce sull'accelerazione del centro di massa, che è data da:

$$\vec{a}_C = \frac{\vec{F}}{(m_1+m_2)}$$



  - l'accelerazione è diretta lungo x:

$$a_{xC} = a_C = \frac{F}{(m_1+m_2)}$$

- Se non si sono instaurate oscillazioni, questa è anche l'accelerazione di ciascun blocco

- Detto x l'allungamento della molla, per il blocco m_2 abbiamo:

$$F - kx = m_2 a_C \quad \Longrightarrow x = \frac{F - m_2 a_C}{k} \quad = \frac{F}{k}\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{F}{k}\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

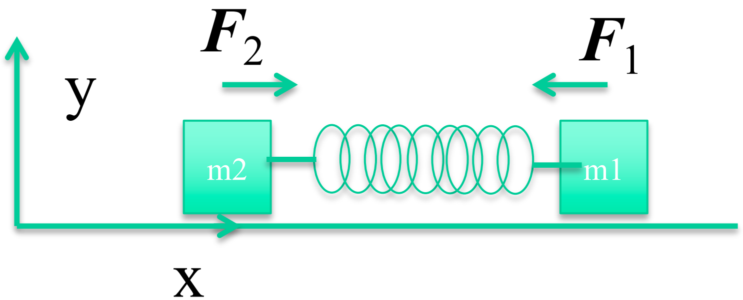
e per il blocco m_1: $\quad kx = m_1 a_C$

Pertanto: $\quad x = \frac{m_1}{k} a_C = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\frac{F}{k}$

Le due relazioni conducono allo stesso risultato, come prevedibile in quanto la forza elastica è una forza interna al sistema

Conservazione della quantità di moto

- Consideriamo il solito sistema 2 masse m_1 e m_2 connesse da una molla su un piano privo di attrito
  - Se estendiamo la molla, allontanando i due punti materiali e lasciando quindi il sistema libero (*) di evolversi nel tempo: la molla trasmette ai suoi estremi due forze identiche in modulo, ma dirette in versi opposti



$$\frac{d\overrightarrow{p_1}}{dt} = \frac{d(m_1\overrightarrow{v_1})}{dt} = \overrightarrow{F_1} \qquad \frac{d\overrightarrow{p_2}}{dt} = \frac{d(m_2\overrightarrow{v_2})}{dt} = \overrightarrow{F_2}$$

$$\overrightarrow{F_2} = -\overrightarrow{F_1}$$

- Definiamo il vettore *quantità di moto totale* del sistema $\vec{P}$

$$\vec{P} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} \qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{p_1}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{p_2}}{dt} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = 0$$

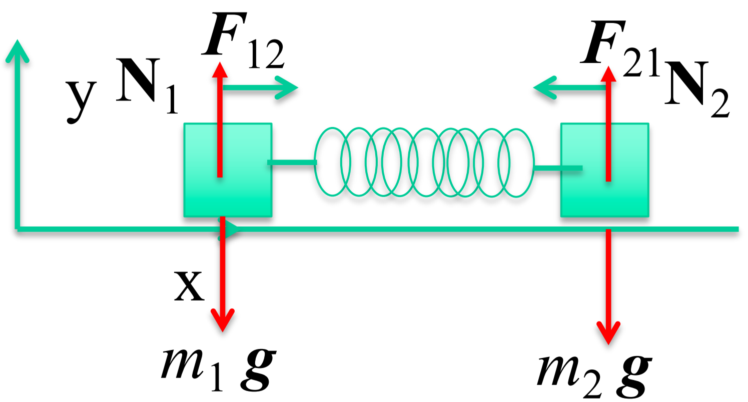
$\Rightarrow$*la quantità di moto totale si conserva cioè è costante nel tempo*

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

- Se i 2 punti materiali erano inizialmente (*) fermi $\overrightarrow{P_i} = \overrightarrow{P_f} = 0$

$$\vec{0} = m_1\vec{v}_{1f}(t) + m_2\vec{v}_{2f}(t) \qquad \vec{v}_{1f}(t) = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_{2f}(t)$$

- Concludiamo quindi che se su un sistema di punti materiali non agiscono che ***forze interne*** al sistema allora la quantità di moto ***P del sistema*** è un **vettore costante** nel tempo



- Ricordiamo che: forza peso e reazione vincolare, sono forze esterne al sistema
  - Lungo l'asse y il sistema è in equilibrio dinamico, la risultante delle forze è nulla. Il sistema è immobile e quindi la sua quantità di moto lungo y è nulla e si mantiene nulla durante l'evoluzione del sistema

- Possiamo concludere quindi che: la quantità di moto ***P*** totale di un sistema di punti materiali è **un vettore costante** nel tempo se sul sistema agiscono **soltanto forze interne** o se **le forze esterne hanno risultante nulla**

Conservazione della quantità di moto di un sistema di punti materiali (PM)

- Riassumiamo ora quello che abbiamo capito
  - Quantità di moto del CM

$$\vec{P}_{CM} \equiv M\vec{v}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i \equiv \vec{P}_{TOT}$$

  - Prima equazione cardinale dei sistemi

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{R}^{(est)} = \frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt} = \sum_i m_i \vec{a}_i$$

  - Teorema dell'impulso

$$\vec{P}_{CM}(t) - \vec{P}_{CM}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{R}^{(est)} dt' = \vec{P}_{TOT}(t) - \vec{P}_{TOT}(t_0)$$

- Conseguenza
  - **Se** l'impulso delle forze esterne di un sistema di PM è **<u>nullo</u>** vale la **<u>legge di conservazione della quantità di moto del CM o del sistema totale</u>**

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathrm{F}}_i^{(est)} dt' = 0 \quad \Leftrightarrow \vec{P}_{CM}(t) - \vec{P}_{CM}(t_0) = \vec{P}_{TOT}(t) - \vec{P}_{TOT}(t_0)$$

(2) Conservazione della quantità di moto di un sistema di punti materiali (PM)

- **Se** l'impulso delle forze esterne di un sistema di PM è **nullo** vale la **legge di conservazione della quantità di moto del CM ovvero del sistema totale**

$$\int_{t_0}^{t} \vec{R}^{est} dt' = 0 \quad \Leftrightarrow \vec{P}_{CM}(t) - \vec{P}_{CM}(t_0) = \vec{P}_{TOT}(t) - \vec{P}_{TOT}(t_0)$$

- $\vec{P}_{TOT} = \left(P_{TOTx}, P_{TOTy}, P_{TOTz}\right)$
  - l'equazione precedente è vettoriale: pertanto si può anche conservare solo una (o due) delle componenti

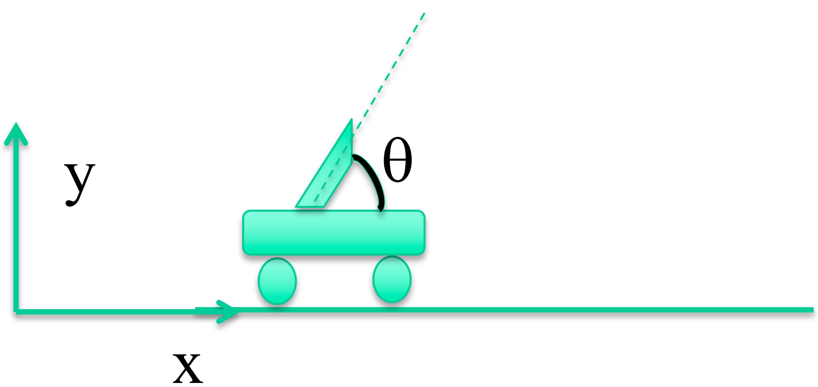
- La legge di conservazione della quantità di moto è utilizzata per il **calcolo di uno stato finale**, noto quello iniziale e le forze in gioco, nel caso in cui NON si sia interessati all'evoluzione temporale.

- In conclusione esistono **due situazioni standard in cui si può applicare questa legge di conservazione**

1) La risultante delle forze esterne è nulla
2) Le forze esterne non sono nulle, ma esse sono limitate (per esempio la gravità) e la durata dell'interazione è trascurabile $(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0 \rightarrow 0)$

Esempio: conservazione quantità di moto sistema vagone-cannone-proiettili

- Un cannone si trova su un vagone che può muoversi su una rotaia priva di attrito. Il vagone si trova inizialmente in quiete. La massa totale **cannone + vagone+ proiettili =** ***M***. Il cannone spara ad un angolo θ rispetto all'orizzontale un proiettile di massa ***m*** con velocità iniziale v_0. Trovare la velocità di rinculo del vagone v_C.



- Lasciamo evolvere il sistema sotto l'azione delle forze presenti, tutte dirette lungo l'asse y:
  - forza peso sulle masse inerziali: M **g**, m **g**
  - reazioni vincolari: esterna la reazione vincolare del piano orizzontale **N**

- Lungo l'asse x non abbiamo forze esterne, quindi per il sistema si conserva la componente della quantità di moto lungo l'asse x

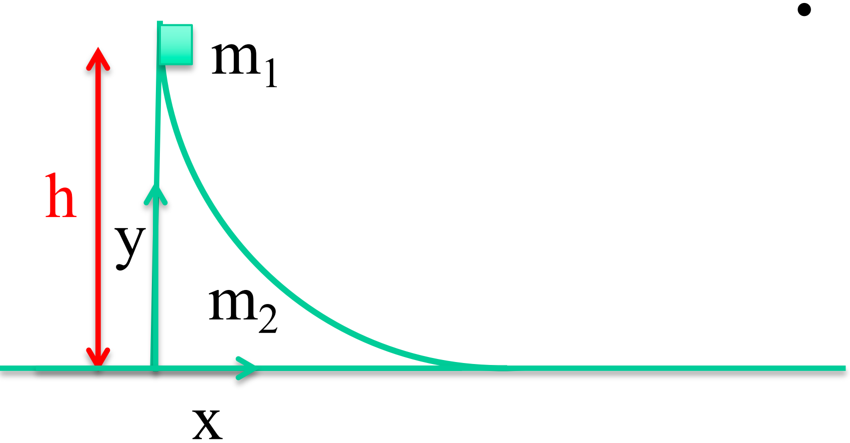
$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}^{ext}=0 \quad \Longrightarrow P_{TOTx}(\mathrm{t})= P_{TOTx}(\mathrm{t}_0)= \text{costante} \quad \equiv P_{CMx}(\mathrm{t})= P_{CMx}(\mathrm{t}_0)$$

$$0 = P_{TOTxi} = P_{TOTxf} = mv_0 \cos\theta + (M-m)v_c \quad \Longrightarrow v_c = -\frac{mv_0 \cos\theta}{(M-m)}$$

Esempio

Sia dato un punto materiale di massa inerziale m_1 ed un profilo cilindrico di massa m_2 come in figura, corrispondente ad ¼ di cerchio di raggio h. Questi due corpi costituiscono un sistema, sono in contatto tra loro e si trovano su di un piano orizzontale nei pressi della superficie terrestre. Trascuriamo la forza di attrito tra le superfici presenti nel problema.

Determinare le velocità di m_1 ed m_2, quando m_1 raggiunge la fine del profilo cilindrico



- Lasciamo evolvere il sistema sotto l'azione delle forze presenti
  - forza peso sulle masse inerziali $m_1 \mathbf{g}$, $m_2 \mathbf{g}$
  - reazioni vincolari: forze interne (contatto tra m_1 ed m_2), esterna la reazione vincolare del piano orizzontale

- Ragioniamo sulle quantità che si conservano:
  - **Si conserva l'Energia** meccanica totale: siamo in presenza di forza peso (cons.) e di reazioni vincolari che non compiono lavoro
  - **Lungo l'asse x si conserva la quantità di moto** del sistema visto che non abbiamo forze esterne agenti

Determinare le velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ di m_1 ed m_2, quando m_1 raggiunge la fine del profilo cilindrico

- Applichiamo la conservazione dell'energia
  - **l`energia potenziale gravitazionale della massa m_1 è interamente convertita in energia cinetica, sia di m_1 che di m_2**
  - La massa **m_2 non varia la sua energia potenziale** visto che la sua quota verticale non cambia.

$$\boxed{m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}$$

$\vec{v}_1 = v_{1x}\hat{x}$ con $v_{1x}>0$ $\qquad \vec{v}_2 = v_{2x}\hat{x}$

- Questa è una equazione che contiene 2 incognite: v_1 e v_{2x}. Per risolvere il problema applichiamo la conservazione della quantità di moto lungo l'asse x: la quantità di moto era nulla all'istante iniziale e tale deve rimanere

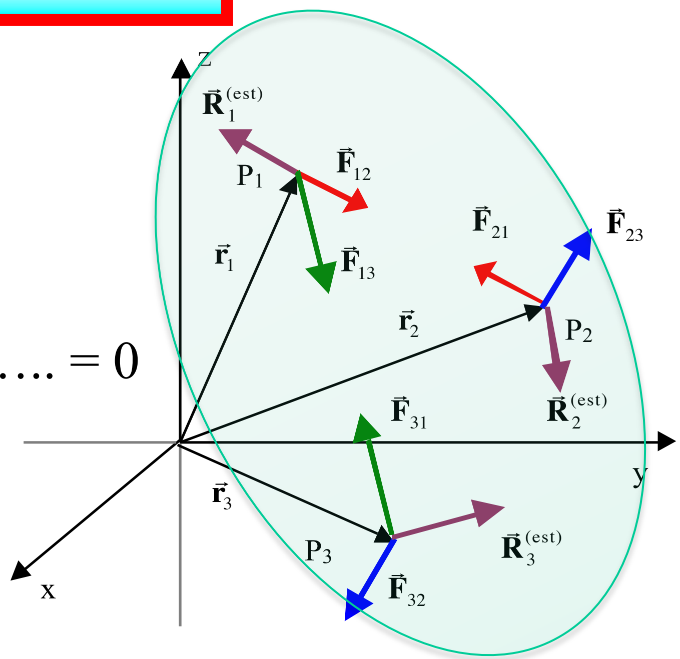
$$\sum_i \left(\vec{F}_{ext\_i}\right)_x = 0 \Rightarrow \left(\vec{P}\right)_x = \text{cost} \;\; \Rightarrow P_{xf} = 0 = m_1 v_1 + m_2 v_{2x} \qquad \Rightarrow v_{2x} = -\frac{m_1}{m_2} v_1$$

- abbiamo 2 equazioni in due incognite la cui soluzione fornisce

$$gh = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) v_1^2 \Longrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2 m_2 gh}{m_1 + m_2}} \qquad v_{2x} = -\sqrt{\frac{2 m_1^2 gh}{(m_1 + m_2) m_2}}$$

Sistema di punti materiali : Lavoro

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{R}_i^{(est)} + \sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i^{(est)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij}}_{\text{perchè in una somma è possibile cambiare l'ordine degli addendi}}$$



$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\overrightarrow{f_{ij}} = \overrightarrow{F_{12}} + \overrightarrow{F_{21}} + \overrightarrow{F_{31}} + \overrightarrow{F_{13}} + \overrightarrow{F_{32}} + \overrightarrow{F_{23}} + \ldots\ldots = 0$$

La risultante delle forze interne è nulla !

Vediamo cosa accade al lavoro delle forze interne,
Esempio tra i punti i e j

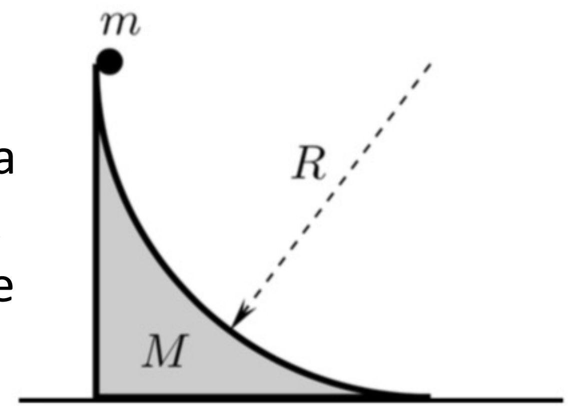
$$dL_{ij} = \overrightarrow{F_{ij}} \cdot d\vec{r}_i + \overrightarrow{F_{ji}} \cdot d\vec{r}_j = \overrightarrow{F_{ij}} \cdot d\vec{r}_i - \overrightarrow{F_{ij}} \cdot d\vec{r}_j = \overrightarrow{F_{ij}} \cdot \left(d\vec{r}_i - d\vec{r}_j\right) \neq 0$$

- Il lavoro delle forze interne, diversamente dalla somma delle forze, non è in generale nullo!
  - Quindi le forze interne compiono lavoro
- Dobbiamo allora riscrivere uno dei teoremi importanti, quello delle forze vive

$$K^{sist} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_i^2$$

$$K_f^{sist} - K_i^{sist} = L_{interne} + L_{esterne} = \int\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{R_i^{(est)}} \cdot d\vec{r}_i + \int\sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j}\overrightarrow{F_{ij}} \cdot d\vec{r}_i$$

Es 1 Esame del 20/7/2018



Un punto materiale di massa m è inizialmente fermo sulla cima di di una guida liscia con profilo circolare di raggio R (vedi figura). La guida, di massa M, anch'essa inizialmente ferma, può scivolare su di un piano orizzontale privo di attrito.
Al tempo t = 0 il punto materiale viene lasciato libero.

1. Calcolare la velocità finale del punto materiale $\vec{v}$ e della guida $\vec{V}$, quando il punto materiale arriva sul piano.

   $\vec{v} =$ .... $\vec{V} =$ ....

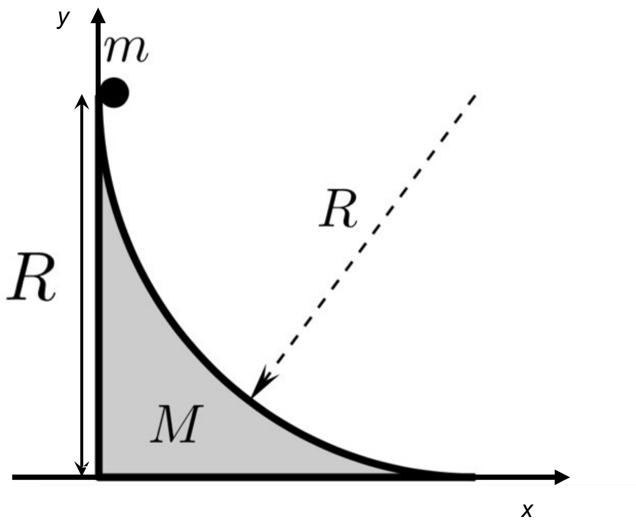
2. Calcolare la velocità finale del centro di massa del sistema punto materiale-guida, $\vec{V}_{cm}$, quando il punto materiale arriva sul piano.

   $\vec{V}_{cm} =$ ....

3. Come cambierebbero i risultati del punto 1 e 2 se invece di una guida con profilo circolare avessimo un piano inclinato di altezza R e angolo θ?

$\vec{v}' =$ .... $\vec{V}' =$ .... $\overrightarrow{V'}_{cm} =$ ....

[$m = 2.00\ kg$, $M = 3.00\ kg$, $R = 0.5\ m$]

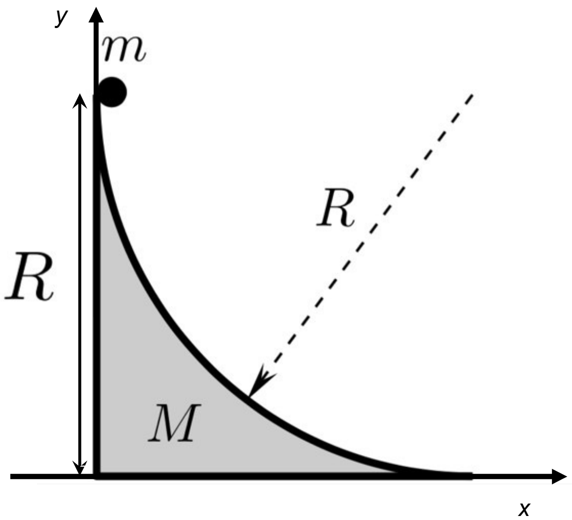


Sistema costituito da:
- P.M.
  - di massa m
  - inizialmente fermo sulla cima di una guida liscia semi-circolare
- Guida
  - liscia e di profilo semicircolare
  - raggio R
  - inizialmente ferma
  - può scorrere sul piano orizzontale su cui poggia, senza attrito

A t=0 il P.M viene lasciato libero

1. Calcolare la velocità finale del punto materiale $\vec{v}$ e della guida $\vec{V}$, quando il punto materiale arriva sul piano.

   $\vec{v} =$ .... $\vec{V} =$ ....



1. Calcolare la velocità finale del punto materiale $\vec{v}$ e della guida $\vec{V}$, quando il punto materiale arriva sul piano.
$\vec{v}$ = ... $\vec{V}$ = ...

Dati

- M =3.00 kg
- m=2.00 kg
- R=0.5 m
- $\vec{V}(0) = 0$
- $\vec{v}(0) = 0$

1) l'energia del sistema si conserva?

Non ci sono forze non conservative che compiono lavoro, pertanto l'energia si conserva e quando la pallina arriva sul piano:

$$E_i = mgR + Mgh_{cm} = E_f = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 + Mgh_{cm}$$

2) la quantità di moto del sistema si conserva?

a) Si conserva la quantità di moto lungo X del sistema in quanto le uniche forze esterne al sistema (reazione normale del piano e gravità) sono dirette lungo y

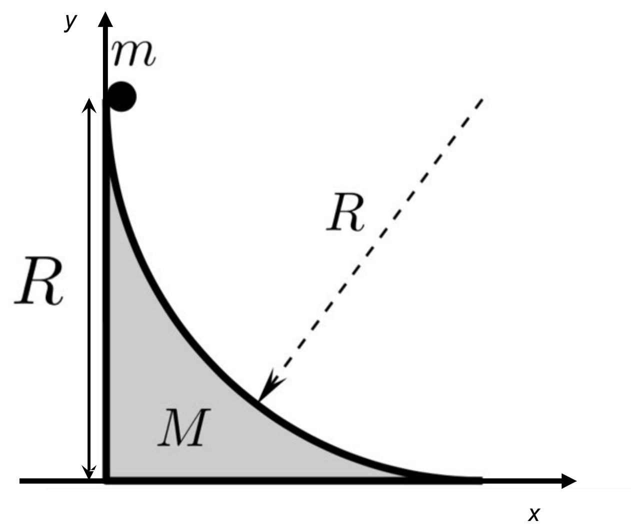
$$\frac{dP^x_{cm}}{dt} = (m+M)\,a^{cm}_x = 0 \Rightarrow P^x_{cm} = \text{cost} \Rightarrow \underbrace{P^x_{cm_i} = P^x_{cm_f}}_{\text{q.m di cm lungo x}}$$

$$\begin{cases} 0 = m v_x + M V_x = (m+M)\,V_{cm\,x} \\ \Rightarrow V_{cm\,x} = \emptyset \quad \text{SEMPRE!} \end{cases}$$

quindi

2.1) $v_x = -\dfrac{M}{m} V_x$

2.2) $V_{cm\,x} = \emptyset$



b) Si conserva la quantità di moto lungo z del sistema in quanto l'unica forza esterna è diretta lungo y (gravità)

Inoltre, sulla guida non ci sono forze esterne che agiscono lungo z, per cui possiamo scrivere:

1) $m v_z + M V_z = 0 = P_{z\,cm} = \text{cost}$

2) $\dfrac{dP_{z\,guida}}{dt} = M A_z = 0 \Rightarrow V_z = \text{cost} = V_{zi} = 0$

dalla 1) $V_z = 0 \Rightarrow v_z = 0$

e $V_{zcm} = \dfrac{m v_z + M V_z}{m + M} = 0 = \text{cost}!$

3) La coordinata y del cm della guida cambia?

La guida scivola sul piano di conseguenza (ovunque essa sia) la coordinata y del c.M della guida non cambia.

$$y_{CM\,GUIDA} = cost \Rightarrow \frac{dy_{CM\,GUIDA}}{dt} = \emptyset \Rightarrow V_y = \emptyset$$

Concludendo: dai principi di conservazione

durante il moto in generale

$\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$ Punto materiale

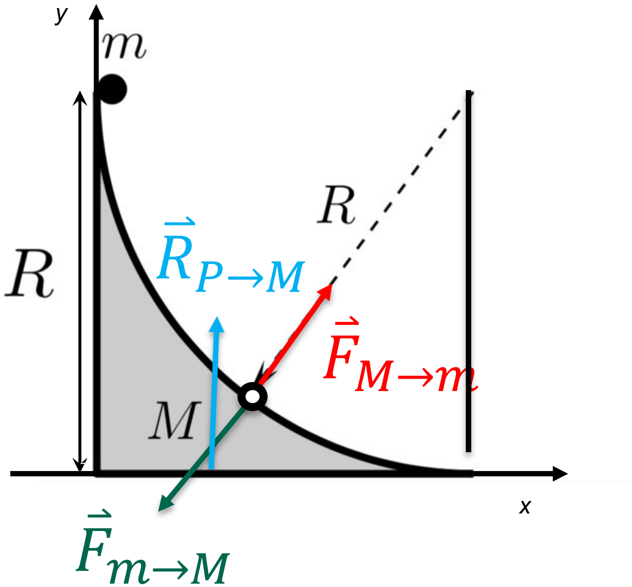
$\vec{V} = (V_x, 0, 0)$ Guida

- ma quando la pallina è sul piano v_y=0!

$\vec{v} = (v_x, 0, 0)$

$\vec{V} = (V_x, 0, 0)$

Fare per casa es10.19 Duo Taroni



Sulla guida agisce:

$$\vec{F}_{m\to M}, M\vec{g} \text{ e } \vec{R}_{P\to m}$$

$$\vec{F}_{m\to M} + M\vec{g} + \vec{R}_{P\to M} = M\vec{a}_{CM}^{guida}$$

la guida si muove solo lungo x di conseguenza

$$y_{CM}^{guida} = costante \quad \Rightarrow V_{CMy}^{guida} = V_y = 0 = \text{costante}$$

$$\Rightarrow a_{CMy}^{guida} = 0$$

$$Nota:\ \vec{F}_{m\to M} \neq m\vec{g}$$

- Per il sistema dalla conservazione della quantità di moto totale del sistema lungo x e lungo z $\quad a_{CMx}=0 \qquad a_{CMz}=0$

- Per il sistema poichè la componente y della velocità della pallina cambia durante il moto

$$a_{CMy} = \frac{m a_y^{pallina} + M a_{CMy}^{guida}}{m+M} \neq 0$$

$$(m+M)a_{CMy} = R_{P\to M} - (\mathrm{m}+\mathrm{M})\mathrm{g} = m a_y^{pallina} \neq 0$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{v} &= (v_x, 0, 0)\\ \vec{V} &= (V_x, 0, 0)\end{aligned}\right\}$$

dalla conservazione dell'energia

① $mgR = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} M V_x^2$

dalla conservazione dell'impulso lungo x

② $m v_x + M V_x = \emptyset$

con $v_x > 0$

$$\left\{\begin{aligned} &V_x = -\frac{m}{M} v_x \quad ②\\ &\frac{1}{2}\left(\frac{m+M}{M}\right) v_x^2 = gR \quad ①\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &① \quad v_x = \sqrt{\frac{2MRg}{m+M}}\\ &② \quad V_x = -m\sqrt{\frac{2Rg}{M(m+M)}}\end{aligned}\right.$$

$\vec{v} = (2.42, 0, 0)\, m/s \qquad \vec{V} = (-1.62, 0, 0)\, m/s$

Calcolare la velocità finale del centro di massa del sistema punto materiale-guida, $\vec{V}_{cm}$, quando il punto materiale arriva sul piano.

$\vec{V}_{cm} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m\vec{v} + M\vec{V}}{m+M} = (0,0,0) \; !$$

conservazione q. moto lungo x $\Rightarrow V_{x\,cm} = \dfrac{m v_x + M V_x}{m+M} = \emptyset$ VERA SEMPRE!

Sul piano v_y, V_y nulle $\Rightarrow V_{y\,cm} = \dfrac{m v_y + M V_y}{m+M} = 0$

V_y cm guida nulla

y_{cm} guida = cost.

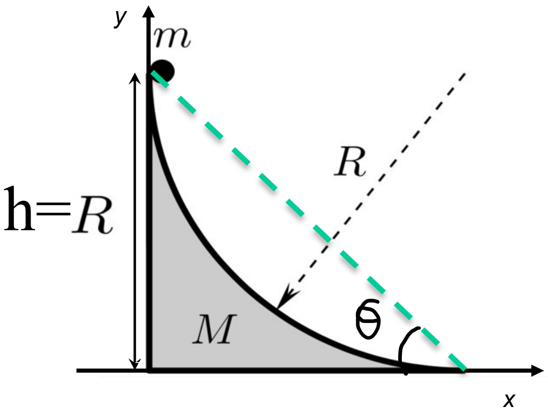
v_y nulla sul piano!

Conservazione q. moto lungo z $\Rightarrow V_{z\,cm} = \dfrac{m v_z + M V_z}{m+M} = 0$ vera sempre!

inoltre $V_z = v_z = \emptyset$

3. Come cambierebbero i risultati del punto 1 e 2 se invece di una guida con profilo circolare avessimo un piano inclinato di altezza R e angolo θ?

$\vec{v}' =$ .... $\vec{V}' =$ .... $\overrightarrow{V'}_{cm} =$ ....



Non cambia nulla perché valgono gli stessi principi di conservazione, e come prima quando la pallina arriva sul piano ha velocità diretta lungo x

$\vec{v} = (2.42, 0, 0)$ m/s $\vec{V} = (-1.62, 0, 0)$ m/s $\vec{V}_{cm} = (0, 0, 0)$ m/s

Un uomo di massa m si trova all'estremo sinistro di un carrello di massa M e lunghezza l, in quiete, libero di muoversi su un binario orizzontale. Trascurando l'attrito dinamico e viscoso determinare di quanto si sposta il carrello se l'uomo si reca all'estremo opposto nel sistema indicato. Determinare lo spostamento dell'uomo Nota: il carrello si sposta quando l'uomo è arrivato nell'estremo opposto.

- Fissiamo un asse x solidale col binario, con origine in O, dove si trova l'uomo
- Prima e dopo lo spostamento dell'uomo, non ci sono forze lungo x

P_{CMx}=cost = P^i_{CMx}=0 $\Rightarrow x_C$=cost

- per la coordinata x di C si avrà a t =0:

$$x_C = \left(\frac{m\times 0+Ml/2}{m+M}\right)=\frac{Ml}{2(m+M)}$$

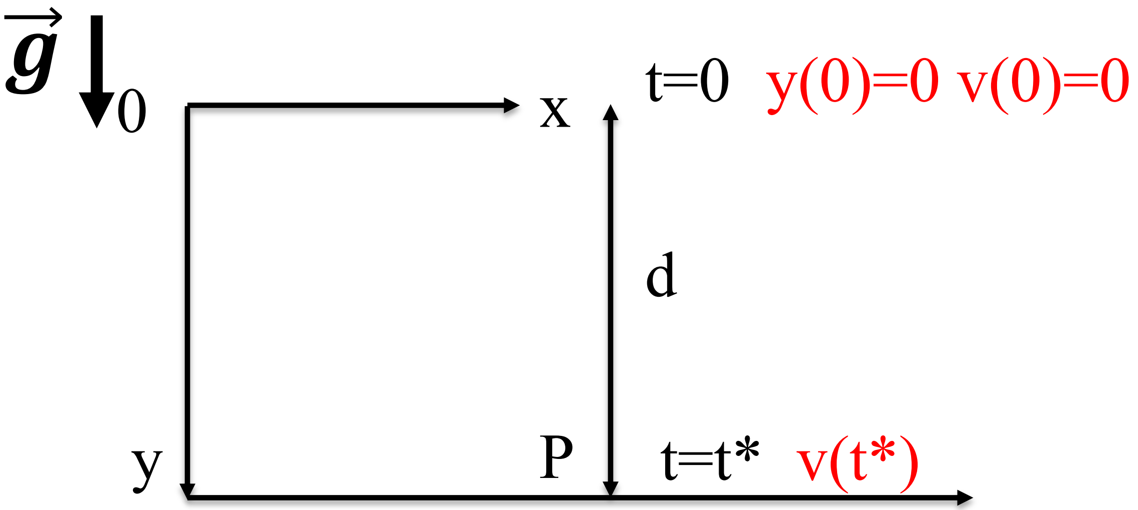
La coordinata del cm è costante, e quando l'uomo arriva alla fine del carrello la guida si è spostata di d:

$$x_C = \left(\frac{mx'_m + Mx'_M}{m+M}\right) = \left(\frac{m(d+l)+M(d+\frac{l}{2})}{m+M}\right)$$

$$\left(\frac{m(d+l)+M(d+\frac{l}{2})}{m+M}\right)=\frac{Ml}{2(m+M)} \qquad d=\frac{-ml}{(m+M)} \qquad d+l=\frac{Ml}{(m+M)}$$

Esercizio

Un aereo viaggia orizzontalmente alla velocità v=600 Km/h a un'altezza d=1 km. All'istante t=0 esso sgancia un oggetto che deve cadere in un punto prestabilito P. Calcolare sotto quale angolo rispetto all'orizzontale deve essere visto P dal punto di sgancio. Trascurare gli effetti dovuti all'attrito dell'aria e alla rotazione terrestre.

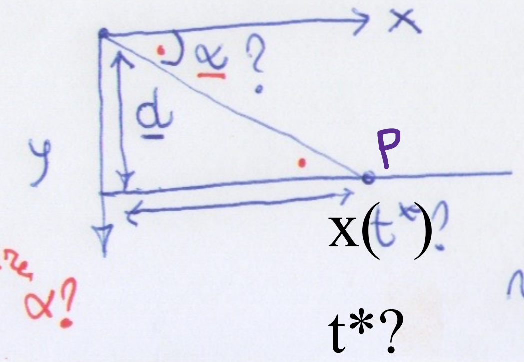


Es. 1.16 MAZZOLDI SAGGION

Un aereo viaggia orizzontalmente alla velocita $v = 600\,Km/h$ a un'altezza $d = 1\,Km$. All'istante $t=0$ esso sgancia un oggetto che deve cadere in un punto prestabilito P. Calcolare sotto quale angolo rispetto all'orizzontale deve essere visto P dal punto di sgancio. Trascurare gli effetti dovuti all'attrito dell'aria e alla rotazione terrestre

1) Scelta degli assi

2) Cosa posso fare x rispondere alla domanda α?



Dati

$x_0 = 0$

$v_0^y = 0, \quad v_0^x = v = 600\,Km/h$

$d = 1\,Km = 10^3\,m$

$v_0^x = \frac{600 \times 10^3}{3.6 \times 10^3} = 166.7\,m/s \quad \vec{a}_g = 9.8\,\hat{j}\,m/s^2$

D.1 α?

Indicando con t^* il tempo di caduta

$\rightarrow \dfrac{d}{x(t^*)} = tg\,\alpha \rightarrow \alpha = atg\,\alpha$

Lungo x $\quad v_0^x = v = cost$

moto rettilineo uniforme

$x(t) = \underset{=0}{x_0} + v_0^x\, t \rightarrow$ $\boxed{x(t) = v_0^x\, t}$

Lungo y $\quad a_y = g = cost$

moto uniformemente accelerato.

$y(t) = \underset{=0}{y_0} + \underset{=0}{v_0^y}\, t + \frac{1}{2} a t^2$ $\boxed{y(t) = \frac{1}{2} g t^2}$

Quando l'oggetto arriva a terra

$y(t^*) = d = \frac{1}{2} g t^{*2} \rightarrow \quad t^* = \sqrt{\dfrac{2d}{g}}$

di conseguenza per $t = t^*$

$x(t^*) = v_0^x \cdot t^* = v_0^x \sqrt{\dfrac{2d}{g}}$ $\Longrightarrow tg\,\alpha = \dfrac{d}{x(t^*)}$

$x(t^*) = 2367\,m$

②

③

D.2 Descrivere la traiettoria

$$\begin{cases} x(t) = v_0^x\, t \\ y(t) = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

esprimendo t in funzione di x

$$\begin{cases} t = \dfrac{x(t)}{v_0^x} \\ \text{Traiettoria} \\ y = \frac{1}{2} g \left(\dfrac{x}{v_0^x}\right)^2 \end{cases}$$

R.2 La traiettoria è una parabola