Corso di Laurea in Ingegneria Informatica. Anno Accademico 2024/25

Algebra Lineare e Analisi Matematica II [591AA]

Prova d'esame di Analisi Matematica II

Appello del 13 giugno 2025

Soluzioni

Esercizio 1. Si consideri la curva $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ di coordinate cartesiane

$$q(t) \coloneqq \begin{bmatrix} \cos t \\ \\ \sqrt{2}\sin t - t \end{bmatrix}$$

i. Fare un disegno qualitativo della curva. È iniettiva $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$?

ii. Calcolare la lunghezza della curva sull'intervallo $[0, t]$.

iii. Calcolare la curvatura e dire in quali punti è massima e in quali è minima.

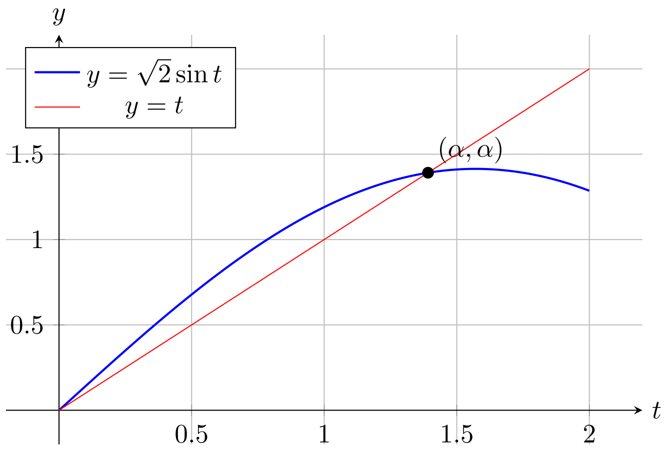
Soluzione.

i. La curva non è iniettiva. Per esempio, se α è la solzione positiva dell'equazione

$$\sqrt{2}\sin t - t = 0,$$

si trova $\alpha = 1.39155...$ e

$$q(\alpha) \coloneqq \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \\ 0 \end{bmatrix} = q(-\alpha).$$



ii. Calcoliamo le derivate prima e seconda del vettore $q(t)$, e le loro norme:

$$\dot{q}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \sqrt{2}\cos t - 1 \end{bmatrix}, \qquad \ddot{q}(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sqrt{2}\sin t \end{bmatrix}$$

Calcoliamo ora le norme al quadrato:

$$\begin{aligned}
\|\dot q(t)\|^2 &= (-\sin t)^2 + (\sqrt{2}\cos t - 1)^2\\
&= \sin^2 t + 2\cos^2 t - 2\sqrt{2}\cos t + 1\\
&= (1-\cos^2 t) + 2\cos^2 t - 2\sqrt{2}\cos t + 1\\
&= \cos^2 t - 2\sqrt{2}\cos t + 2 = (\sqrt{2}-\cos t)^2;\\
\|\ddot q(t)\|^2 &= (-\cos t)^2 + (-\sqrt{2}\sin t)^2 = \cos^2 t + 2\sin^2 t = 2 - \cos^2 t.
\end{aligned}$$

Definiamo la funzione

$$s(t) := \text{lunghezza}(q,[0,t])$$

e calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\dot s(t) &= \|\dot q(t)\| = \sqrt{2} - \cos t > 0,\\
\ddot s(t) &= \sin t.
\end{aligned}$$

Quindi,

$$s(t) = \int_0^t (\sqrt{2} - \cos\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sqrt{2}t - \sin t.$$

iii. Calcoliamo ora la curvatura della traiettoria in $q(t)$:

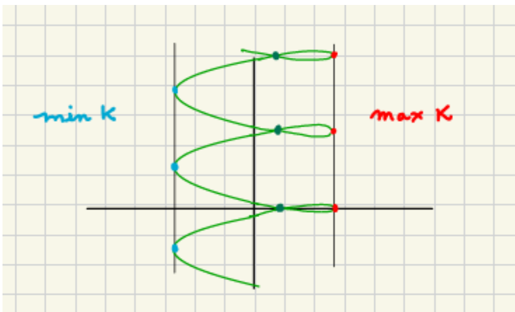
$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\sqrt{\|\ddot q(t)\|^2 - (\ddot s(t))^2}}{(\dot s(t))^2}\\
&= \frac{\sqrt{2-\cos^2 t - \sin^2 t}}{(\sqrt{2}-\cos t)^2} = (\sqrt{2}-\cos t)^{-2}.
\end{aligned}$$

Il massimo della curvatura si ha per $\cos t = 1$, cioè quando $t = 2m\pi$, con $m \in \mathbb{Z}$. In tal caso:

$$\kappa_{\max} = (\sqrt{2}-1)^{-2} = (\sqrt{2}+1)^2 \quad \text{e} \quad q(2m\pi) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2m\pi \end{bmatrix}$$

Il minimo della curvatura si ha per $\cos t = -1$, cioè quando $t = (2m+1)\pi$, con $m \in \mathbb{Z}$. In tal caso:

$$\kappa_{\min} = (\sqrt{2}+1)^{-2} = (\sqrt{2}-1)^2 \quad \text{e} \quad q((2m+1)\pi) = \begin{bmatrix} -1 \\ -(2m+1)\pi \end{bmatrix}$$



Esercizio 2. Determinare l'insieme $I \subset \mathbb{R}$ di numeri reali

$$I := \left\{(x+y+z)e^{-x^2-y^2-z^2} : \ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Soluzione. L'insieme I è l'immagine della funzione C^∞

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) := (x+y+z)\,e^{-x^2-y^2-z^2}.$$

Poiché $f(x,y,z) \to 0$ per $\|(x,y,z)\| \to \infty$, e f è continua su tutto $\mathbb{R}^3$, per una variante del teorema di Weierstrass, concludiamo che f ammette massimo e minimo.

Calcoliamo il gradiente $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$:

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y,z) &= (1 - 2x(x+y+z))\, e^{-x^2-y^2-z^2}, \\
\partial_y f(x,y,z) &= (1 - 2y(x+y+z))\, e^{-x^2-y^2-z^2}, \\
\partial_z f(x,y,z) &= (1 - 2z(x+y+z))\, e^{-x^2-y^2-z^2}.
\end{aligned}$$

Per trovare i punti critici, poniamo $\nabla f(x,y,z) = 0$. Osservando che il fattore esponenziale è non nullo, abbiamo che $\nabla f(x,y,z) = \mathbf{0}$ se e solo se

$$2x(x+y+z) = 1, \quad 2y(x+y+z) = 1, \quad 2z(x+y+z) = 1.$$

Sottraendo a due a due le equazioni otteniamo $x = y = z$, e sostituendo in una delle equazioni, $6x^2 = 1$, cioè $x^2 = \frac{1}{6}$.
Dunque i punti critici sono

$$P_+ = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad P_- = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

e abbiamo

$$\begin{aligned}
f(P_+) &= \frac{3}{\sqrt{6}}\, e^{-1/2} = \sqrt{\frac{3}{2e}}, \\
f(P_-) &= -\frac{3}{\sqrt{6}}\, e^{-1/2} = -\sqrt{\frac{3}{2e}}.
\end{aligned}$$

Quindi, P_+ è un punto di massimo globale e P_- un punto di minimo globale per f.
In conclusione,

$$I = f(\mathbb{R}^3) = [\min f, \max f] = [f(P_-), f(P_+)] = \left[-\sqrt{\frac{3}{2e}}, \sqrt{\frac{3}{2e}}\right].$$

Esercizio 3. Usare il *teorema della divergenza* per calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F} \coloneqq x^2\, \mathbf{i} + y^2\, \mathbf{j} + z^2\, \mathbf{k}$$

uscente dalla superficie di contorno della palla

$$B \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 \leq 9\}.$$

Soluzione. Per il *teorema della divergenza*, abbiamo

$$\iint_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

Calcoliamo la divergenza del campo:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2x + 2y + 2z.$$

Quindi, dobbiamo calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iint_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = 2 \iiint_B (x+y+z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

Passiamo alle *coordinate sferiche* (*NB:* B è la palla di centro $(2,0,3)$ e raggio 3):

$$\begin{aligned}
x &= 2 + \rho \sin\phi \cos\theta, \\
y &= \rho \sin\phi \sin\theta, \qquad\qquad \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \rho^2 \sin\phi\ \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\theta, \\
z &= 3 + \rho \cos\phi,
\end{aligned}$$

con $\rho \in [0,3]$, $\theta \in [0,2\pi]$, $\phi \in [0,\pi]$.

Allora

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2+\rho\sin\phi\cos\theta+\rho\sin\phi\sin\theta+3+\rho\cos\phi \\ &= 5+\rho\left(\sin\phi(\cos\theta+\sin\theta)+\cos\phi\right) \end{aligned}$$

e, quindi,

$$\begin{aligned} 2\iiint_B (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{3}\Big(5+\rho(\sin\phi\cos\theta+\sin\phi\sin\theta+\cos\phi)\Big)\rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\ &= 10\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{3}\rho^2\sin\phi\ \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\ &\quad + \underbrace{2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{3}\rho^3(\sin\phi\cos\theta+\sin\phi\sin\theta+\cos\phi)\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta}_{=0} \end{aligned}$$

(osservando che $\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 0$)

$$\begin{aligned} &= 10\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{3}\rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\ &= 10\left(\int_0^3\rho^2\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right) \\ &= 10\cdot\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^3\cdot[-\cos\phi]_0^{\pi}\cdot[\theta]_0^{2\pi} \\ &= 10\cdot\frac{27}{3}\cdot(1+1)\cdot 2\pi = 10\cdot 9\cdot 2\cdot 2\pi = 360\pi. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_Q \frac{xy}{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

nel quarto di disco

$$Q \coloneqq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geq 0,\, y\geq 0,\, x^2+y^2\leq 4\}.$$

Soluzione. Passiamo alle *coordinate polari*:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta, \\ y &= \rho\sin\theta, \end{aligned} \qquad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta.$$

Il dominio Q corrisponde al rettangolo

$$0\leq\rho\leq 2,\quad 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}.$$

Allora, calcoliamo

$$\begin{aligned} \iint_Q \frac{xy}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \frac{\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta}{\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \cos\theta\sin\theta\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= \left(\int_0^2\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right) \end{aligned}$$

(ricordando che $\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$)

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\cdot\left[-\frac{1}{4}\cos(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\cdot\left(-\frac{1}{4}(\cos\pi - \cos 0)\right) \\
&= 2\cdot\left(-\frac{1}{4}(-1-1)\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}
$$

NB: Alternativamente, invece di usare la formula $\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$, possiamo calcolare

$$
\mathcal{I} \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta
$$

integrando per parti, cioè usando $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$. Poniamo $u = \sin\theta$, quindi $\mathrm{d}u = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, e $\mathrm{d}v = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, quindi $v = \sin\theta$. Allora,

$$
\mathcal{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = [\sin\theta\cdot\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cdot\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \mathcal{I}
$$

e, perciò,

$$
\mathcal{I} = \frac{1}{2}\left[\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}.
$$

Tornando al conto, abbiamo

$$
\begin{aligned}
\iint_Q \frac{xy}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \frac{\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta}{\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \cos\theta\sin\theta\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= \left(\int_0^2 \rho\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right) = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^2\cdot\mathcal{I} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}
$$