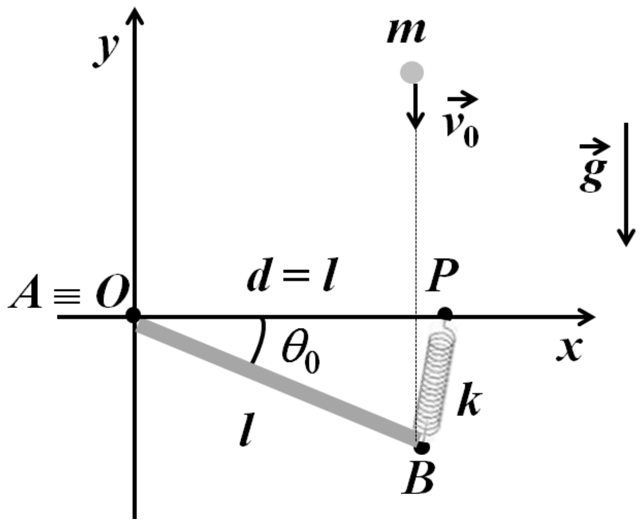
Es. del 13/5/ Ciocci

Esercizi di esame da
https://www.pi.infn.it/~ciocci/

Prova scritta 30/06/2017: Esercizio 1 **Non è sulla raccolta www.pi.infn.it/~ciocci**



Una sbarra omogenea AB di lunghezza $l = 1$ m, massa $M = 2$ kg e sezione di dimensioni trascurabili è incernierata con il suo estremo A nel punto O, origine del sistema di riferimento mostrato in Figura.

La sbarra può ruotare senza attrito intorno ad A in un piano verticale. L'estremità B è collegata ad un punto P dell'asse x, fisso ad una distanza $d = l$ dall'origine O, tramite una molla di costante elastica $k = 9.81$ N/m e lunghezza a riposo nulla.

L'asta è inizialmente in condizione di equilibrio.

1) Si calcoli l'angolo θ_0 formato dall'asta con l'asse x quando il sistema è fermo.

Una sferetta di massa $m = M/3$ e dimensioni trascurabili urta nel punto B di congiunzione fra l'asta e la molla con velocità iniziale $v_0 = 2$ m/s diretta nel verso negativo dell'asse y. L'urto è completamente anelastico, per cui la sferetta rimane attaccata all'asta.

2) Si dica se e quali delle seguenti grandezze fisiche si conservano durante l'urto e perché: a) quantità di moto totale; b) momento angolare totale rispetto al perno A; c) energia meccanica totale.

3) Utilizzando la legge di conservazione opportuna si determini la velocità angolare ω_0 dell'asta subito dopo l'urto.

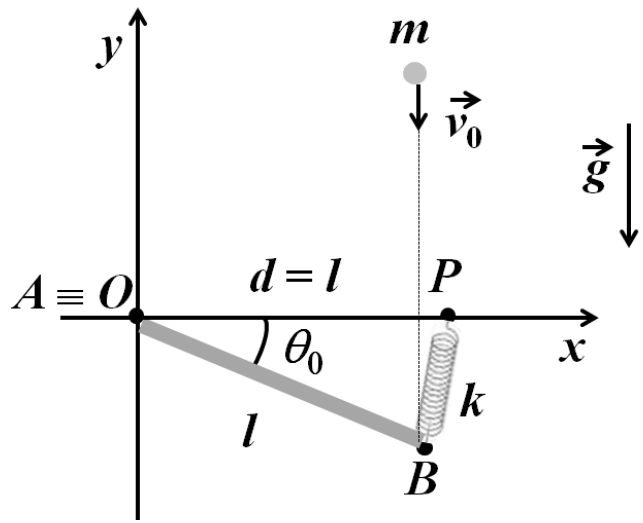
4) Si calcoli l'impulso sviluppato dalla reazione del perno A durante l'urto.

Dati

Asta: Massa M e lunghezza l

Molla : k cost. elas. e lunghezza a riposo nulla

1) Sistema in equilibrio: Si calcoli l'angolo θ_0 formato dall'asta con l'asse x quando il sistema è fermo.



1)Poiché la sbarra può ruotare intorno al perno A, rispetto a cui sono non nulli i momenti della forza peso M$\vec{g}$ e della forza elastica $\vec{F}_{el}$, è sufficiente imporre che il momento risultante rispetto ad A sia zero per garantire l'equilibrio.

Il vantaggio di utilizzare l'equazione del momento rispetto ad A rispetto al centro di massa (CM) è che al momento rispetto al CM contribuisce anche la reazione del perno A.

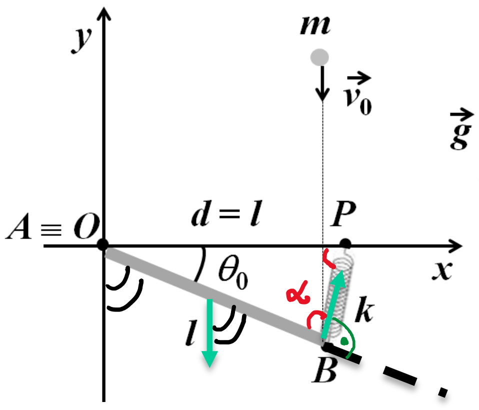
La condizione di equilibrio rispetto al perno A è data da :

$$\vec{\tau}_{M\vec{g}}+\vec{\tau}_{\vec{F}_{el}}= 0 = \vec{R}_{OCM-Asta} \wedge M\vec{g} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_{el}$$

$$0 = -\frac{Mgl}{2}(\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_0)\,\hat{z} + l\ F_{el}\sin(\pi\text{-}\ \alpha)\,\hat{z} =$$

$$-\frac{Mgl}{2}(\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_0)\,\hat{z} + l\ F_{el}\sin(\alpha)\,\hat{z}$$

$$-\frac{Mgl}{2}(\cos(\theta_0)\,\hat{z} + l\ F_{el}\sin(\alpha)\,\hat{z}$$



$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \theta_0$

$\vartheta = \pi - \alpha$

$2\alpha + \theta_0 = \pi$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}$

Il triangolo ABP è isoscele per ipotesi, per cui se indichiamo con α uno dei due angoli alla base BP otteniamo:

$$2\alpha + \theta_0 = \pi \quad \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi-\theta_0}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \quad \Longrightarrow \sin\alpha = \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right);\ \ \cos\alpha = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

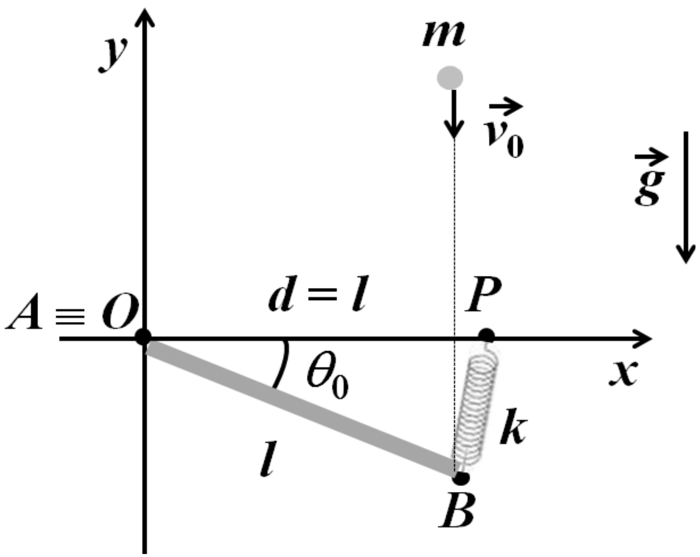
L'allungamento della molla L si ricava sfruttando il fatto che il triangolo è isoscele:

$$\Longrightarrow L = 2l\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$-\frac{Mgl}{2}(\cos(\theta_0)\,\hat{z} + l\ 2kl\ \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\ \hat{z} = -\frac{Mgl}{2}(\cos(\theta_0)\,\hat{z} +\ l\,kl\ \sin(\theta_0)\ \hat{z}=0$$

$$\Longrightarrow \mathrm{tg}(\theta_0)=\frac{Mg}{2kl} = \frac{2\ \mathrm{kg} \times 9.81\ \mathrm{m/s^2}}{2 \times 9.81\ \mathrm{N/m} \times 1\ \mathrm{m}} = 1 \quad \Longrightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{4}$$

Una sferetta di massa $m = M/3$ e dimensioni trascurabili urta nel punto B di congiunzione fra l'asta e la molla con velocità iniziale $v_0 = 2\ \mathrm{m/s}$ diretta nel verso negativo dell'asse y. L'urto è completamente anelastico, per cui la sferetta rimane attaccata all'asta.



2) Si dica se e quali delle seguenti grandezze fisiche si conservano durante l'urto e perché:

a) quantità di moto totale;

b) momento angolare totale rispetto al perno A;

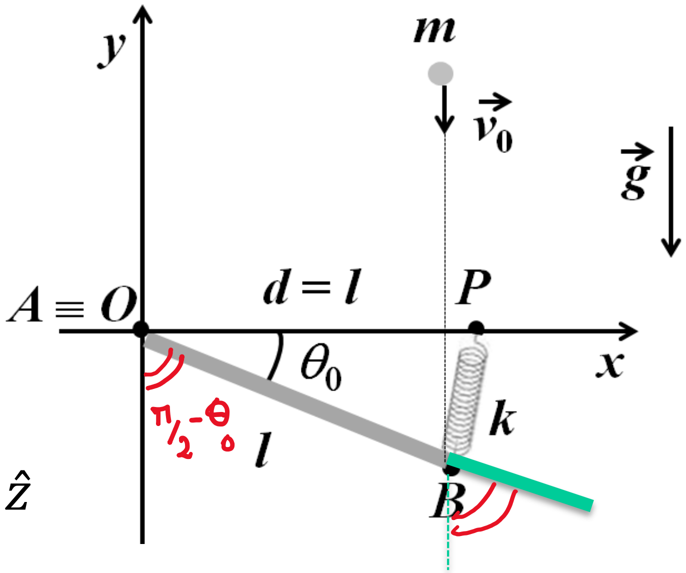
c) energia meccanica totale.

2) a) La <u>quantità di moto totale non si conserva</u>, perché il sistema è soggetto ad una forza impulsiva, la reazione della cerniera A.

b) Il <u>momento angolare totale rispetto alla cerniera A si conserva</u>, perché le forze esterne che hanno braccio non nullo rispetto all'asse passante per la cerniera sono la forza peso e la forza elastica della molla, entrambe non impulsive, e quindi durante la berevissima durata dell'urto il loro contributo al momento in O è nullo mentre la reazione della cerniera è impulsiva ma è a braccio nullo. Essendo il momento delle forze rispetto a O nullo durante l'urto il momento angolare si conserva.

c) <u>L'energia meccanica non si conserva</u> a causa delle forze anelastiche che si sviluppano durante l'urto: l'urto è completamente anelastico.

3) Utilizzando la legge di conservazione opportuna si determini la velocità angolare ω_0 dell'asta subito dopo l'urto.



In base al risultato del punto 2) utilizziamo la conservazione del momento angolare totale rispetto alla cerniera A. Il momento angolare prima dell'urto è dovuto solo alla massa m e vale:

$$\vec{L}_{in} = \vec{l} \Lambda m\vec{v}_0 = -mlv_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)\hat{z} = -mlv_0 \cos\theta_0 \hat{z}$$

in cui il segno "-" indica che la rotazione corrispondente a questo momento angolare è oraria.

Il momento angolare dopo l'urto si può scrivere utilizzando la velocità angolare del sistema (sbarra + massa m), in cui la massa m si trova a distanza l dalla cerniera:

$$\vec{L}_{fin} = \frac{Ml^2}{3}\vec{\omega}_0 + ml^2\vec{\omega}_0 = \left(\frac{3m+M}{3}\right) l^2 \vec{\omega}_0$$

$$\vec{L}_{in} = \vec{L}_{fin} = -mlv_0 \cos\theta_0 \hat{z} = \left(\frac{3m+M}{3}\right) l^2 \vec{\omega}_0$$

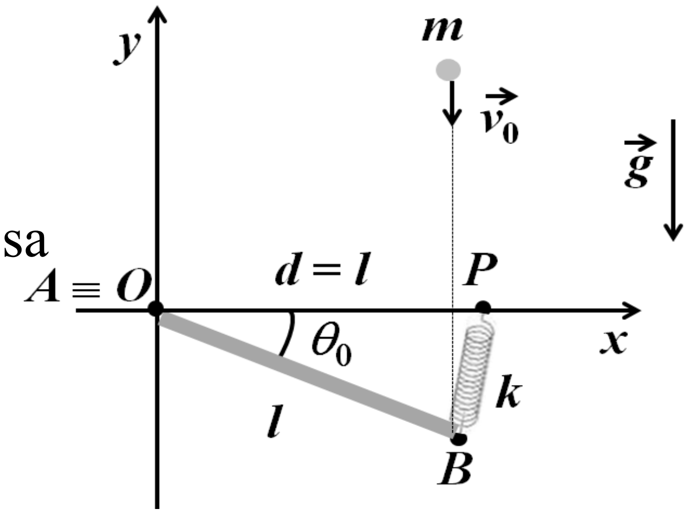
Nota: $m = \frac{M}{3}$

$$\Longrightarrow \vec{\omega}_0 = -\left(\frac{3m}{3m+M}\right)\frac{v_0}{l}\cos\theta_0 \hat{z} = -\left(\frac{3m}{6m}\right)\frac{v_0}{l}\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z}\ \mathrm{rad/s}$$

4) Si calcoli l'impulso sviluppato dalla reazione del perno A durante l'urto.

4) La reazione impulsiva della cerniera si calcola utilizzando la variazione della quantità di moto del sistema prima e dopo l'urto. $\vec{I} = \vec{p}_{fin} - \vec{p}_{in}$

Prima dell'urto è in moto solo la massa m, per cui la quantità di moto iniziale è: $\vec{p}_{in} = m\vec{v}_0 = -mv_0\hat{y}$



La quantità di moto finale corrisponde alla somma vettoriale delle quantità di moto della sbarra e della massa m conficcata nella sbarra dopo l'urto.

In questo caso sia la sbarra che la massa m compiono un moto di rotazione intorno alla cerniera A, per cui la quantità di moto dopo l'urto è:

$$\vec{p}_{fin} = M\vec{\omega}_0 \Lambda \left(\frac{\vec{l}}{2}\right) + m\vec{\omega}_0 \Lambda\, \vec{l} = \frac{5}{2} m(\vec{\omega}_0 \Lambda\, \vec{l}) = -\frac{5}{2} m \left(\frac{3m}{3m+M}\right)\frac{v_0}{l}\cos\theta_0 (\hat{z}\,\Lambda\, \vec{l})$$

Nota: $m = \frac{M}{3}$

Da risposta 3)

$$\vec{\omega}_0 = -\left(\frac{3m}{3m+M}\right)\frac{v_0}{l}\cos\theta_0 \hat{z}$$

Il prodotto vettoriale $(\hat{z}\,\Lambda\, \vec{l})$ si calcola osservando che:

$$(\hat{z}\,\Lambda\, \vec{l}) = \hat{z}\,\Lambda\, l(\hat{x}\cos\theta_0 - \hat{y}\sin\theta_0) = l(\hat{y}\cos\theta_0 + \hat{x}\sin\theta_0)$$

$$\vec{p}_{fin} = -\frac{5}{2} m \left(\frac{3m}{3m+M}\right)\frac{v_0}{l}\cos\theta_0\, l(\hat{y}\cos\theta_0 + \hat{x}\sin\theta_0)$$

$$\vec{p}_{fin} = -\frac{5}{2}m\left(\frac{3m}{3m+M}\right)\frac{v_0}{l}\cos\theta_0 l(\hat{y}\cos\theta_0 + \hat{x}\sin\theta_0)$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{fin} = -\frac{5}{2}m\left(\frac{3m}{3m+M}\right)v_0\cos\theta_0(\hat{y}\cos\theta_0 + \hat{x}\sin\theta_0)$$

In conclusione, ricordando che $\theta_0 = \pi/4$, che $M = 3m$ e $\vec{p}_{in} = m\vec{v}_0 = -mv_0\hat{y}$:

$$\vec{I} = \vec{p}_{fin} - \vec{p}_{in} = -\frac{5m}{2}\frac{1}{2}v_0\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x}+\hat{y}) + mv_0\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{I} = mv_0\left(-\frac{5}{8}\hat{x} + \left(-\frac{5}{8}+1\right)\hat{y}\right) = -\frac{mv_0}{8}(5\hat{x}+3\hat{y})$$

Sostituendo i valori numerici: $m = M/3 = 2/3$ kg e $v_0 = 2$ m/s si ha:

$$\vec{I} = -\left(\frac{5}{6}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}\right)\ \mathrm{N{\times}s}$$

Esercizio 2 **Esame di Fisica Generale del 2/2/2016**

Una sfera di raggio $R_1 = 0.4$m presenta una distribuzione di carica positiva uniforme tale che il potenziale in un punto distante $2R_1$ dal centro è $V_0 = 0.2$V rispetto all'infinito (fig.2A).

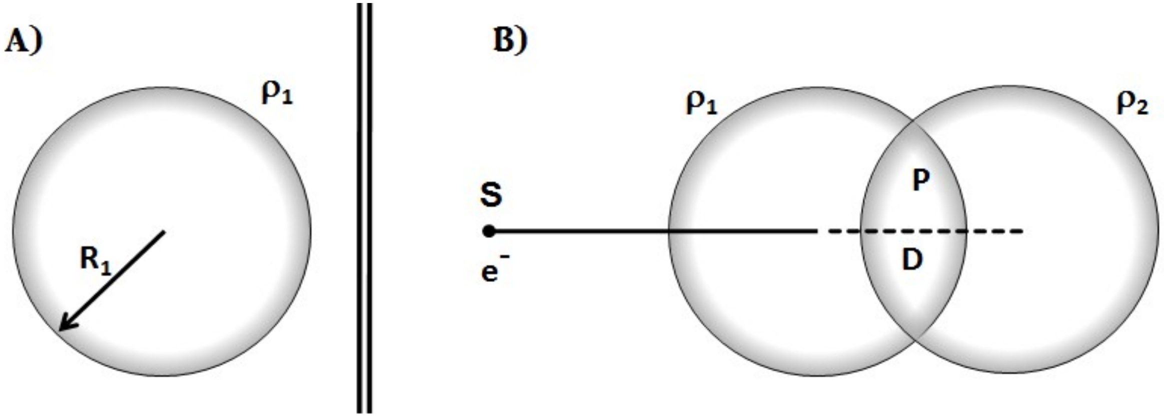


Figura 2

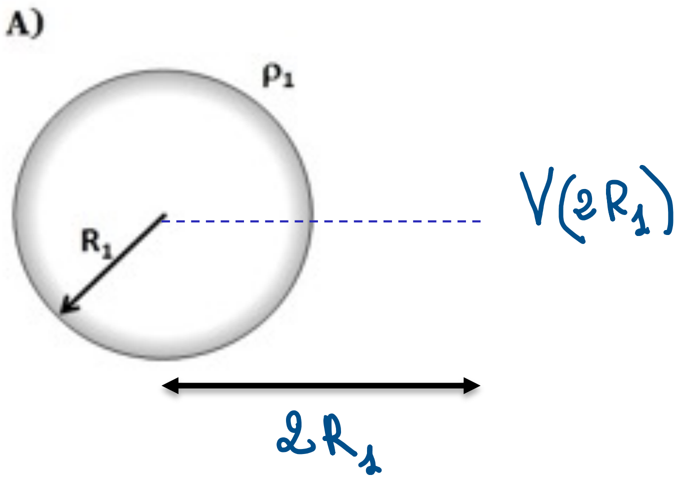
Si calcoli:

a) la densità di carica ($\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$F/m). $\rho_1 =$ ....

Un'altra sfera di raggio $R_2 = 0.4$m e densità di carica negativa uniforme ($\rho_2 = -\rho_1$) si avvicina e penetra nella precedente. Quando i centri delle due sfere distano D = 0.6m (fig.2B), si calcoli:

b) il modulo del campo elettrico in un punto P interno alla regione di sovrapposizione delle due sfere (il campo elettrico è uniforme in tutta la regione di sovrapposizione)
$E_P =$.................

c) l'accelerazione di un elettrone (Fig.2) che si trova in un punto S a distanza $2R_1$ dal centro della sfera di raggio R_1 e giace sulla retta che passa per i centri delle due sfere ($q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$C ; $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$kg) $a_e =$ ....



Sfera unif. carica
raggio R_1
$V(2R_1) = V_0$

Si calcoli:
a) la densità di carica ($\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$F/m).
$\rho_1 =$ ....

$$V(2R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2R_1} \Rightarrow Q = 4\pi\varepsilon_0 2R_1 V(2R_1)$$

$$\rho = \frac{Q}{V} \Rightarrow \rho_1 = \frac{8\pi\varepsilon_0 R_1 V(2R_1)}{4/3\pi R_1^3} = 66 \times 10^{-12}\frac{C}{m^3}$$

B)

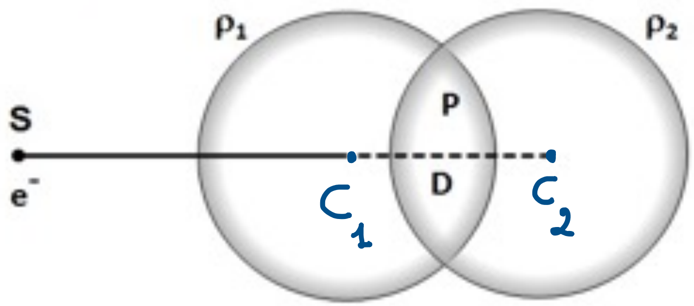


Figura 2

Dati

$D = \overline{C_1 C_2}$

R_1

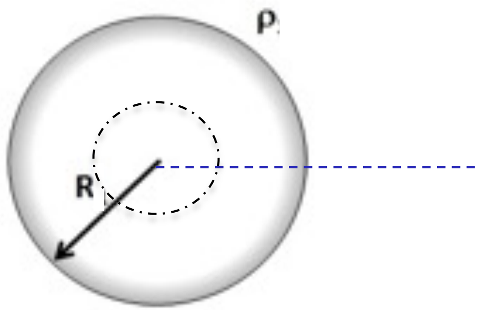
$R_2 = R_1$

$\rho_2 = -\rho_1$

b) Si calcoli il modulo del campo elettrico in un punto P interno alla regione di sovrapposizione delle due sfere (il campo elettrico è uniforme in tutta la regione di sovrapposizione)

E_P =.................

Quando le sfere sono sovrapposte un punto P all'interno della zona di sovrapposizione è interno ad entrambe le sfere



Il campo elettrico può essere determinato usando il Teorema di Gauss:

per $r \leq R$ $\quad \Phi(\vec{E}) = \int \vec{E} \cdot \vec{n}\, ds = \dfrac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$E_r(r) \cdot 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3} \frac{\pi r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r(r) = \rho \cdot r / 3\varepsilon_0$$

Quindi in generale per una sfera unif. carica per un punto all'interno della sfera e a distanza r dal centro:

$$E_r(r) = \rho \cdot r/3\varepsilon_0 \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r}$$

Nel nostro caso assumendo come origine delle coordinate il centro della sfera di raggio R_1:

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_1}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$

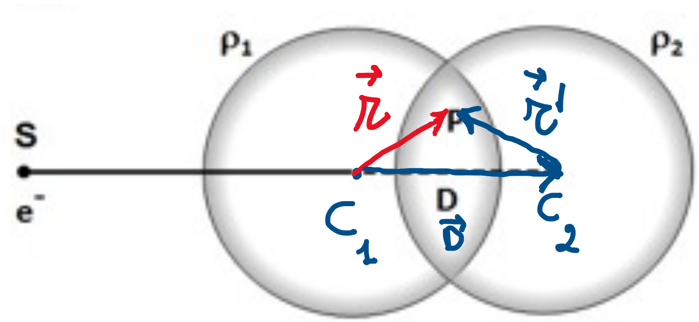


Figura 2

$$\vec{D} = (D, 0, 0)$$

poiché dalla Figura

$$\vec{D} + \vec{r}\,' = \vec{r} \Rightarrow \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{D}$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\rho_1}{3\varepsilon_0}\vec{r}\,' = -\frac{\rho_1}{3\varepsilon_0}(\vec{r} - \vec{D})$$

per il teorema di sovrapposizione $\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho_1}{3\varepsilon_0}\vec{D} = \frac{\rho_1}{3\varepsilon_0}|D|\hat{x}$

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho_1}{3\varepsilon_0}\vec{D} = \frac{\rho_1}{3\varepsilon_0}|D|\hat{x} \Rightarrow E_P = \frac{\rho_1 D}{3\varepsilon_0} = 1.5\, N/C$$

Nota: il C.E all'interno della zona di sovrapposizione è costante ed è diretto lungo x $\forall$ punto.

c) Si calcoli l'accelerazione di un elettrone (Fig.2) che si trova in un punto S a distanza $2R_1$ dal centro della sfera di raggio R_1 e giace sulla retta che passa per i centri delle due sfere ($q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$C ; $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$kg) a_e = ...

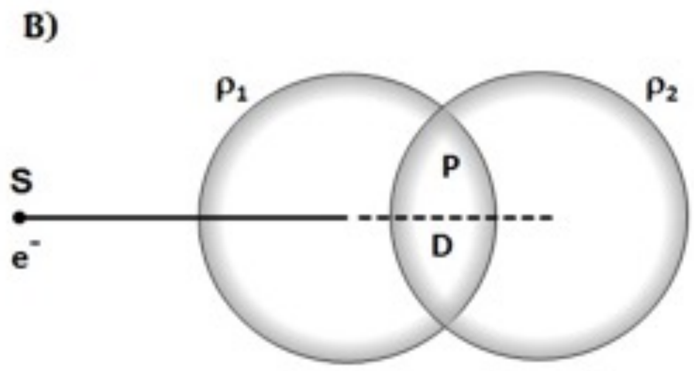


Figura 2

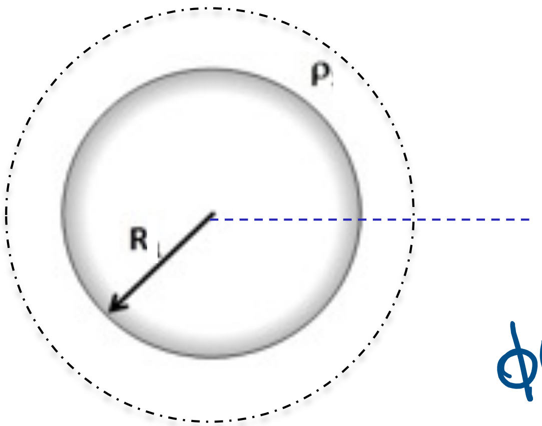
Dati

$q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$C
$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$kg
S $=2R_1$

$$\vec{F}_c = q_e \vec{E} = m_e \vec{a}_e \Rightarrow \vec{a}_e = \frac{q_e \vec{E}}{m_e}$$

dove $\vec{E} = \vec{E}(S) = \vec{E}_1(S) + \vec{E}_2(S)$

Il punto S è all'esterno di entrambe le sfere.



In generale dal teorema di Gauss per un punto all'esterno di una sfera carica $r > R$ con $\rho = \text{cost}$ o $\rho = \rho(r)$

$$\Phi(\vec{E}) = \int \vec{E} \cdot \hat{n} \, ds = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E_r(r) \, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

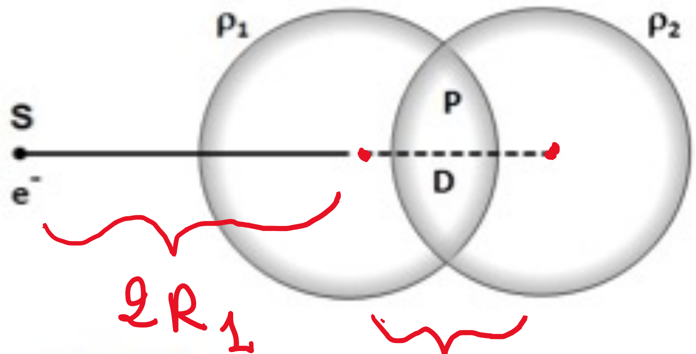


Figura 2

per cui

$$\vec{E}_1(S) = -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\hat{x}$$

con $r_1 = 2R_1$

Notiamo che $r_2 = D + r_1$ per cui $\vec{E}_2(S) = -\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 (D+r_1)^2}\cdot\hat{x}$

per cui $\vec{E}_1(S) + \vec{E}_2(S) = -\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 (D+r_1)^2}\right)\cdot\hat{x}$

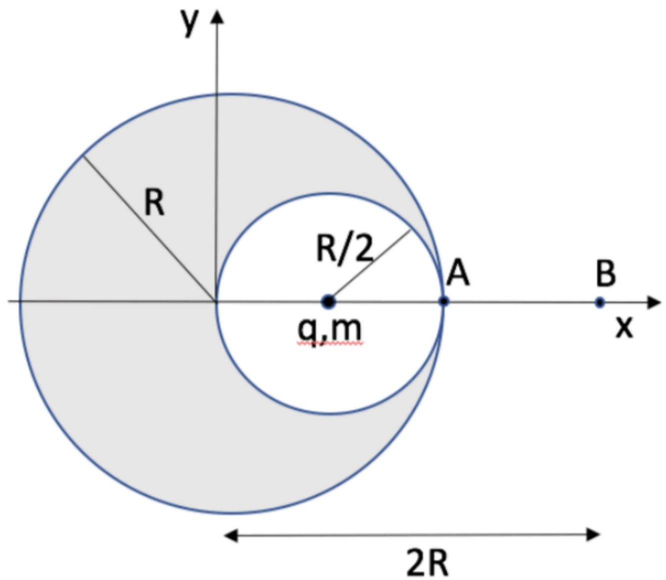
poiché $Q_1 = \rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3$ e $Q_2 = -\rho_1 \frac{4}{3}\pi R_1^3$

$$\vec{E}_1(S) + \vec{E}_2(S) = -\frac{\rho_1}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{(2R_1)^2}\hat{x} + \frac{\rho_1}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{(2R_1+D)^2}\hat{x} = -\frac{\rho_1}{3\varepsilon_0}R_1^3\hat{x}\left(\frac{1}{(2R_1)^2} - \frac{1}{(2R_1+D)^2}\right)$$

per cui $a_e = \frac{|\vec{F}_e|}{m_e} = \frac{|q_e|}{m_e}\frac{\rho_1 R_1^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(2R_1)^2} - \frac{1}{(2R_1+D)^2}\right) = 0.03\times 10^{12}\,\frac{m}{s^2}$

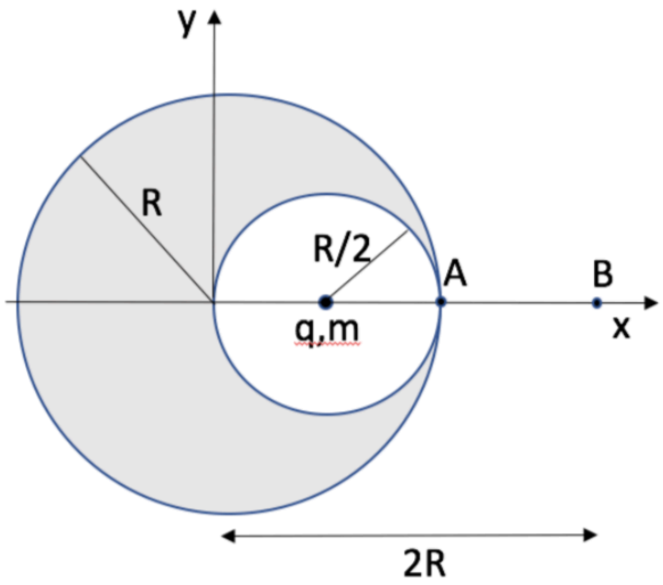
Esame di Fisica Generale del 2/2/2018

Una sfera di raggio R ha una distribuzione di carica ρ_0 uniforme. In essa viene praticato un foro sferico di raggio R/2. Assumiamo un sistema di assi cartesiani in cui il centro della sfera ha coordinate (0, 0, 0), Il centro del foro ha coordinate (R/2, 0, 0).
Nel centro del foro viene poi posta una carica puntiforme di carica q e massa m.



Con riferimento alla figura, e sapendo che ρ_0 = 1 μC/m^3, R=1 m, q=1 μC,e m=10^{-6} kg:

1. determinare l'espressione del campo elettrico dovuto alla distribuzione di carica della sfera cava $\vec{E}$ e il suo modulo E all'interno del foro. $\vec{E}$ = ... E= ....
2. calcolare il tempo t che impiega la carica q a raggiungere il punto A di coordinate (R, 0, 0) sotto l'azione del campo elettrico generato dalla sfera cava. t = ...
3. calcolare il modulo della velocità (v) della carica puntiforme q nel punto B di coordinate (2R,0,0). v = ...



Dati

Sfera
$\rho_0 = 1\ \mu C/m^3$
R=1 m

Foro
raggio R/2
coordinate del centro del foro (R/2,0,0)

Carica Puntiforme
q=1 μC
$m=10^{-6}$ kg:
posta in (R/2,0,0)

1. determinare l'espressione del campo elettrico dovuto alla distribuzione di carica della sfera cava $\vec{E}$ e il suo modulo E all'interno del foro. $\vec{E}$ = ... E= ....

Prima di produrre il foro $\quad Q = \rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$

dopo $\quad Q' = \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3 - \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3_{foro}$

Quindi è come se avessimo due sfere cariche una con densità di carica ρ_0 e raggio R e l'altra con densità di carica $-\rho_0$ e raggio $R/2$. Per cui il CE sarà dovuto alla somma vettoriale dei campi generati dalle 2 sfere

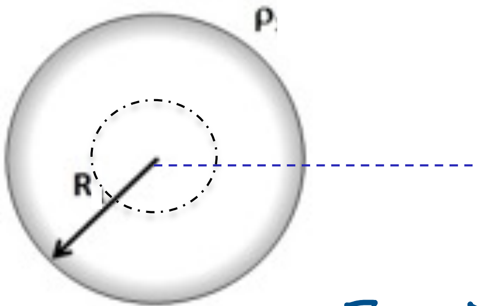
Per il teorema di sovrapposizione $\vec{E}(x,y,z) = \vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_s$

$\vec{E}_c \Rightarrow$ CE associato alla sfera di densità di carica $-\rho_0$ e raggio $R/2$

$\vec{E}_s \Rightarrow$ CE " " di densità di carica ρ_0 e raggio R

$\forall$ ogni punto all'interno del foro il punto è all'interno sia della "cavità" sia della sfera piena.

In generale usando il Teo. di Gauss per calcolare il C.E in un punto interno a una sfera di raggio R e densità ρ



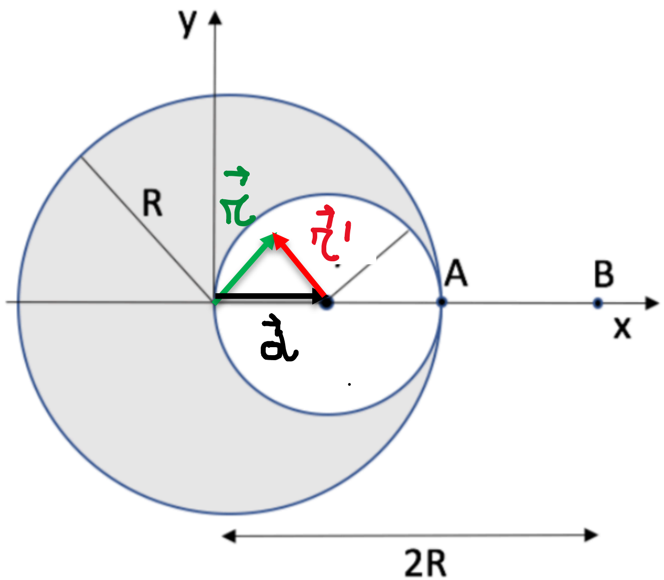
per $r \leq R$ $\quad \Phi(\vec{E}) = \int \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = \dfrac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$E_r(r) \cdot 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3} \frac{\pi r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r(r) = \rho \cdot r / 3\varepsilon_0$$

$\Rightarrow \quad E_r(r) = \rho \cdot r / 3\varepsilon_0$

per cui per un punto interno sia a C che a S

$$\begin{cases} \vec{E}_C = -\dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r' \hat{r}' = -\dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \vec{r}' \\ \vec{E}_S = \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r \hat{r} = \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \vec{r} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_C + \vec{E}_S = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\vec{r} - \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\vec{r}'$$



Indicando con $\vec{d} = (R/2, 0, 0)$

$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{d} \Rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{d}$

all'interno del foro

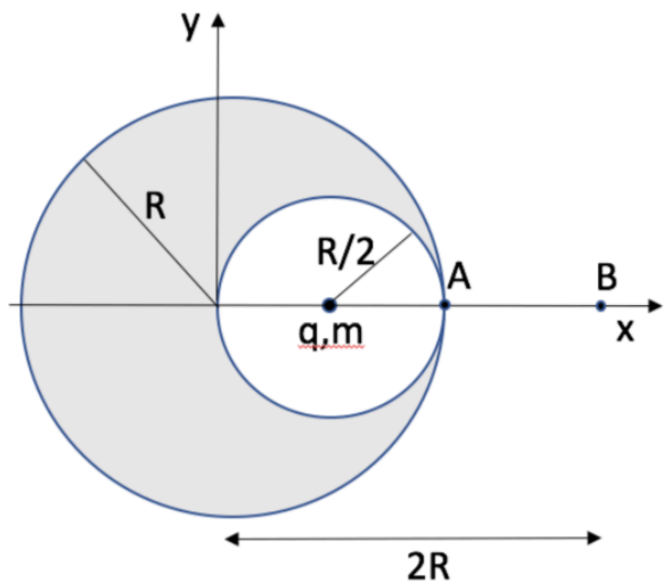
$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\vec{r} - \frac{\rho_0(\vec{r} - \vec{d})}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\vec{d}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\vec{r} - \frac{\rho_0(\vec{r}-\vec{d})}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\vec{d} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} d\,\hat{x} = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0\, 2}\hat{x}$$

con $|\vec{E}| = 1.9\times 10^4\ V/m$ $\qquad \vec{E} = 1.9\times10^4\ V/m\ \hat{x}$

2. calcolare il tempo t che impiega la carica q a raggiungere il punto A di coordinate (R, 0, 0) sotto l'azione del campo elettrico generato dalla sfera cava. t = ...

Carica Puntiforme
q=1 μC
m=10^{-6} kg:
posta in (R/2,0,0)



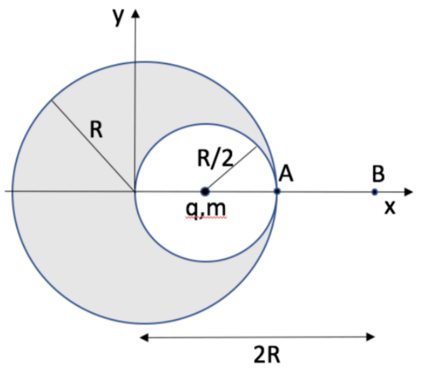
Poiché $\vec{E}$ è costante all'interno del foro sulla carica q di massa m agisce $\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$

con $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} = \frac{q}{m}\frac{\rho_0 R}{6\varepsilon_0}\hat{x}$ $\quad\rightarrow$ moto unif. acc. lungo x

$$x(t) - x(0) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

con $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} = \frac{q}{m}\frac{\rho_0 R}{6\varepsilon_0}\hat{x}$ → moto unif. acc. lungo x

$x(t) - x(0) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

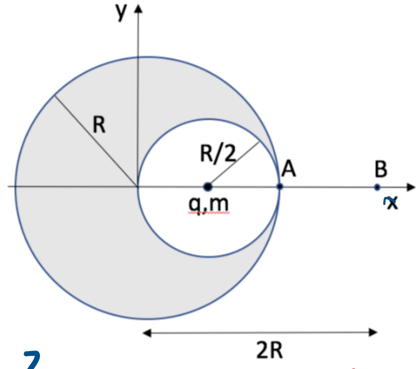


$$R - \frac{R}{2} = 0 + \frac{1}{2}\frac{q}{m}\frac{\rho_0 R}{6\varepsilon_0}t^2 = \frac{R}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{R}{a}} = \sqrt{\frac{R\, m\, 6\varepsilon_0}{q\rho_0 R}} = \sqrt{\frac{6 m \varepsilon_0}{q\rho_0}}$$

$t = 7.3$ ms

3. calcolare il modulo della velocità (v) della carica puntiforme q nel punto B di coordinate (2R,0,0). v = ...



Carica Puntiforme

q=1 μC

m=10^{-6} kg:

posta in (R/2,0,0)

v(2R)?

Non ci sono forze dissipative per cui

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2(2R) - \frac{1}{2} m \underbrace{v^2(R/2)}_{=0} = T_f - T_i = U_i - U_f =$$

$$= q V(R/2) - q V(2R) = q\left(V(R/2) - V(2R)\right)$$

$$\Rightarrow v(2R) = \sqrt{\frac{2q}{m}\left(V(R/2) - V(2R)\right)}$$

per determinare $v(2R)$ dobbiamo determinare

$V(R/2) - V(2R)$

$$V\left(\frac{R}{2}\right) - V(2R) = \int_{R/2}^{2R} \vec{E}' \cdot d\vec{r} = \int_{R/2}^{R} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{R}^{2R} \vec{E}_{est} \cdot d\vec{r}$$

dove $\vec{E} = \dfrac{\rho_0 R}{6\varepsilon_0} \hat{r}$ per $x \in \left[\frac{R}{2}, R\right]$

per cui il primo integrale $\displaystyle\int_{R/2}^{R} \frac{\rho_0 R}{6\varepsilon_0} \hat{r} \cdot \hat{r}\, dr = \overbrace{\frac{\rho_0 R}{6\varepsilon_0}}^{E} \cdot \frac{R}{2}$

mentre per $r > R$ (per $x > R$ il punto è all'esterno di entrambe le sfere)

il campo $\vec{E}_{est}$ è dovuto alla somma dei campi

dovuti a $Q_1 = \frac{4}{3} \pi \rho_0 R^3$ (posta in $x = 0$) e a

$Q_2 = -\frac{4}{3} \pi \rho_0 \left(\frac{R}{2}\right)^3$ (posta in $x = \frac{R}{2}$)

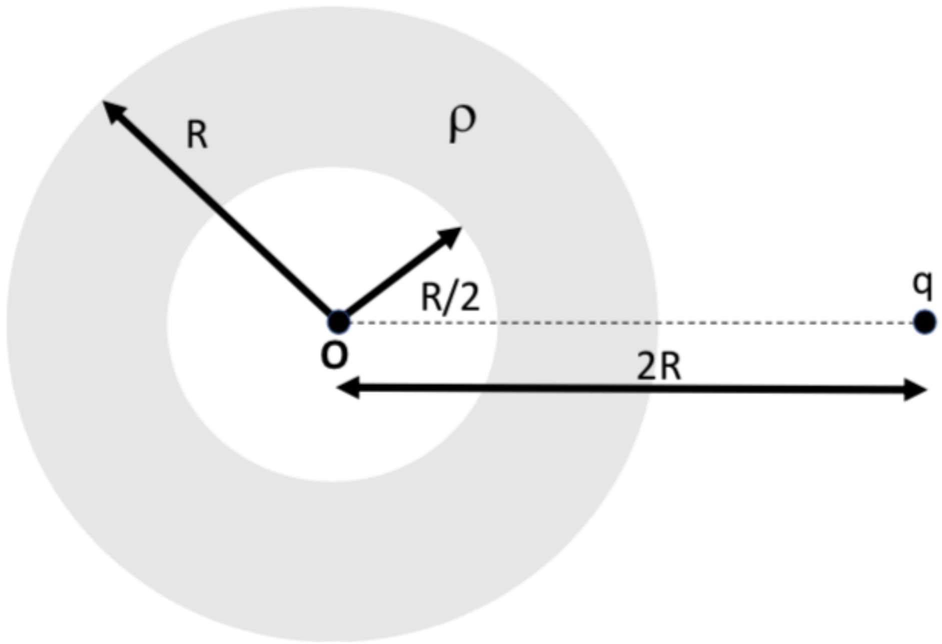
per cui: $\int_R^{2R} \vec{E}_{est} \cdot d\vec{r} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\Big|_R^{2R}\right) + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r-R/2}\Big|_R^{2R}\right)$

$$\Rightarrow V(R/2) - V(2R) = E\frac{R}{2} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) +$$

$$+ \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R-R/2} - \frac{1}{2R-R/2}\right) = 22\,\text{KV}$$

pertanto $v(2R) = \sqrt{\frac{2q}{m}\left(V(R/2) - V(2R)\right)} = 210\,\text{m/s}$

Esame di Fisica Generale del 19/2/2019



Una carica Q ha una distribuzione di carica nel guscio sferico di raggio interno R/2 e raggio esterno R (vedi figura) data da $\rho = Ar$, con A costante di opportune dimensioni. Una particella di massa m e carica q (un protone) si trova a distanza 2R da O

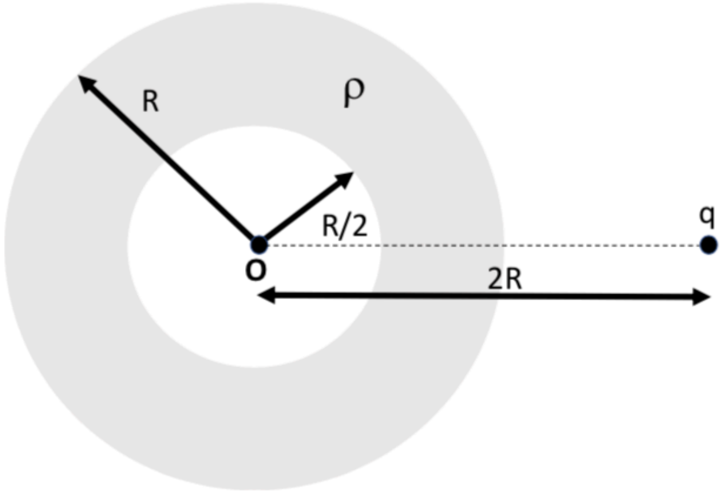
1. Determinare la densità di carica sul bordo esterno della regione sferica, $\rho(R)$.

   $\rho(R) =$ ....

2. Determinare l'accelerazione a cui è soggetta la particella, nella posizione da essa occupata, a(2R). a(2R) = ...

3. Determinare la velocità minima, v che deve avere la particella carica per arrivare in O. v = ...

Dati: R=20 m,Q=20 μC,m=1.67×10^{-27} kg, q=1.6×10^{-19} C.



Dati

Guscio Sferico

$\rho(r) = Ar$ non è uniforme ma dipende solo dal raggio

$R_{esterno} = R = 20$ m, $R_{interno} = R/2$, $Q = 20\ \mu C$

Particella carica puntiforme

$m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg , $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C, distanza da O 2R.

1. Determinare la densità di carica sul bordo esterno della regione sferica, $\rho(R)$. $\rho(R)$ = ...

A è incognita in $\rho(r) = Ar$ ma $Q = \int \rho\, dV \Rightarrow$

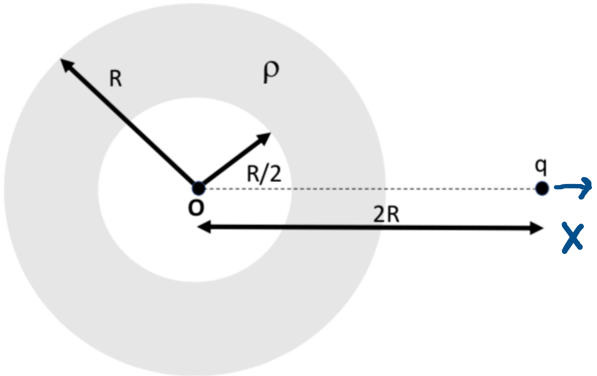
dV per una sfera $= 4\pi r^2 dr$

per cui $Q = \int_{R/2}^{R} Ar\, 4\pi r^2\, dr = A\, 4\pi \int_{R/2}^{R} r^3 dr = 4\pi A \left.\frac{r^4}{4}\right|_{R/2}^{R}$

$Q = \pi A \left(R^4 - \frac{R^4}{16}\right) = \frac{15}{16} \cdot \pi A R^4 \Rightarrow A = \frac{16}{15} \frac{Q}{\pi R^4}$

$A = 4.24 \times 10^{-11}\ C/m^4 \Rightarrow \rho(R) = AR = 8.49 \times 10^{-10}\ C/m^3$

2. Determinare l'accelerazione a cui è soggetta la particella, nella posizione da essa occupata, a(2R). a(2R) = ...



Per il teorema di Gauss, che possiamo applicare data la simmetria (invarianza per rotazioni rispetto ad un qualsiasi asse passante per O) per $r \geq R$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$ che per $r = 2R$

fornisce $$\vec{E}(2R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 4R^2}\cdot\hat{r} = 1.12 \times 10^2 \frac{V}{m}\hat{r}$$

dalla quale $$\vec{F} = q\vec{E}(2R) \Rightarrow a_{x2R} = \frac{qE(2R)}{m} = 1.08 \times 10^{10} \frac{m}{s^2}$$

3. Determinare la velocità minima, v che deve avere la particella carica per arrivare in O.

v = ...

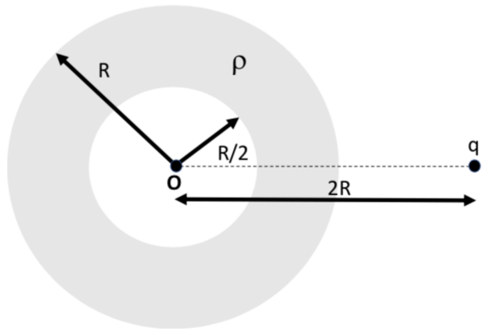
Poiché sono presenti solo forze conservative l'energia è costante.

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 + V(2R)q = \frac{1}{2} m v_f^2 + V(0) q$$

La velocità iniziale è minima per $v_f = \emptyset$ per cui:

$$\frac{1}{2} m v^2 = q\left(V(0) - V(2R)\right) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q}{m}\left(V(0) - V(2R)\right)}$$

$$V(0) - V(2R) = \int_0^{2R} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$



$$V(0)-V(2R)=\int_0^{2R}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

possiamo usare il Teorema di Gauss data la simmetria per calcolare $\vec{E}(r)$: le linee di forza del C.E. sono radiali uscenti

per $r \geq R/2$

$$\Phi(\vec{E}) = \int \vec{E}\cdot\vec{n}\, dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \int E(r)\cdot\hat{r}\cdot\hat{r}\, dS = E(r)\cdot 4\pi r^2$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 4\pi r^2}\hat{r} = \begin{cases} \emptyset & 0<r<R/2 \\ \dfrac{A}{4\varepsilon_0 r^2}\left(r^4-\dfrac{R^4}{16}\right)\hat{r} & \frac{R}{2}\leq r\leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & R\leq r \end{cases}$$

$$Q_{int} = \begin{cases} \emptyset & r\leq R/2 \\ \displaystyle\int_{R/2}^{r} \underbrace{A r'}_{\rho(r)}\, \underbrace{4\pi r'^2 dr'}_{dV} = A\left(r^4-\frac{R^4}{16}\right)\pi & \frac{R}{2}\leq r\leq R \\ Q & R\leq r \end{cases}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 4\pi r^2}\hat{r} = \begin{cases} \emptyset & 0 < r < R/2 \\ \frac{A}{4\varepsilon_0 r^2}\left(r^4 - \frac{R^4}{16}\right)\hat{r} & \frac{R}{2} \leq r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & R \leq r \end{cases}$$

$$V(0) - V(2R) = \int_0^{2R} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_0^{R/2} \emptyset \cdot d\vec{r} + \int_R^R \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_R^{2R} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r}$$

$$= \emptyset + \underbrace{\frac{A}{4\varepsilon_0}\int_{R/2}^{R} \frac{1}{r^2}\left(r^4 - \frac{R^4}{16}\right) dr}_{①} + \underbrace{\int_R^{2R/2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr}_{②}.$$

① $$\frac{A}{4\varepsilon_0}\left\{ \frac{r^3}{3}\Big|_{R/2}^{R} + \frac{R^4}{16}\cdot\frac{1}{r}\Big|_{R/2}^{R} \right\} = \frac{AR^3}{4\varepsilon_0}\,\frac{11}{48} = 2.2\times 10^3\,V$$

② $$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\Big|_R^{2R}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R} = 4.5\times 10^3\,V$$

per cui $V(0)-V(2R) = ① + ② = 2.2\times10^3\,V + 4.5\times10^3\,V$

$= 6.7\times10^3\,V$

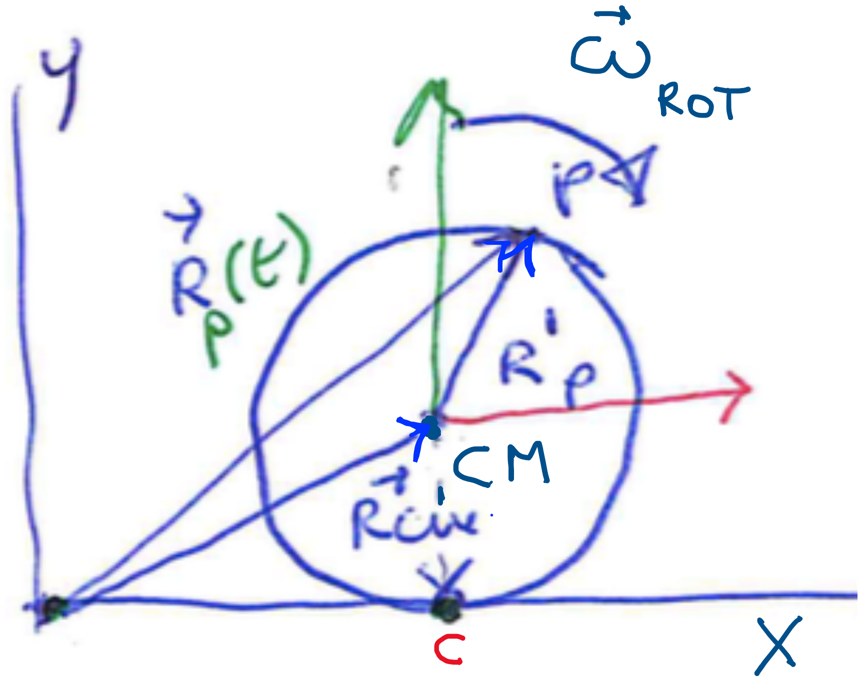
di conseguenza $v = \sqrt{\frac{2q}{m}\,V(0)-V(2R)} = 1.13\times10^6\,\frac{m}{s}$

backup

$$\vec{R}_P(t) = \vec{R}_{CM} + \vec{R}'_P(t)$$

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'(t)$$

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega}_{ROT} \wedge \vec{R}'_P$$



$$\vec{\omega}_{Rot} = +\omega\hat{z}$$

$\omega > \emptyset$ ↺ $\omega < \emptyset$ ↻

per P = al punto di contatto = C

$$\vec{v}_C = 0 \Rightarrow \vec{v}_{CM} = -\vec{\omega}_{Rot} \wedge \vec{R}'_{CM} = -\omega\hat{z} \wedge R'_{CM}(-\hat{y})$$

$$\vec{v}_{CM} = \omega R\, \hat{z} \wedge \hat{y}$$

$$\vec{v}_{CM} = -\omega R\, \hat{x}$$ nell'es $\omega < 0$