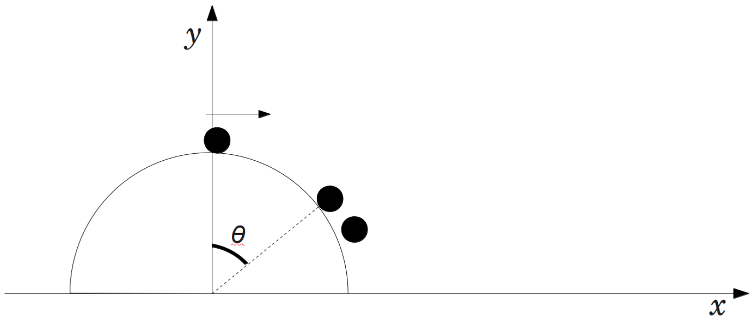
**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 15/01/2013**
**Cognome : .................................................. Nome : ..................................................**

**Matricola: .................................................. Anno di corso : ........................................**

# Esercizio 1




Un cilindro di raggio $r = 2cm$ e massa $m = 300g$ si trova appoggiato sulla sommità di una guida semicilindrica di raggio $R = 2.9m$ come mostrato in figura.
Il cilindro inizia a scivolare senza attrito, con una velocità iniziale trascurabile, dalla sommità della guida.
Si calcoli (approssimando $R + r \approx R$)

a) La velocità $v$ (modulo e direzione) del cilindro in funzione dell'angolo $\theta$ definito in figura, finchè il cilindro resta appoggiato alla guida

$|v(\theta)| =$ ........................... *direzione* $=$ ....................

b) La forza $F$ (modulo e direzione) che la guida esercita sul cilindro in funzione dell'angolo $\theta$

$|F(\theta)| =$ ........................... *direzione* $=$ ....................

c) L'angolo $\theta_{max}$ per il quale il cilindro si distacca dalla guida circolare

$\theta_{max} =$ ...........................

d) La velocità $v_f$ (componenti $x$ e $y$) del cilindro quando giunge a terra e l'intervallo di tempo $\Delta t$ tra il distacco dalla guida e l'arrivo a terra

$v_x^f =$ ........................... $v_y^f =$ ........................... $\Delta t =$ ...........................

Si consideri adesso il caso in cui il cilindro, che è da considerarsi *pieno* e di densità uniforme, sempre partendo dalla sommità del cilindro, rotoli sulla superficie della guida senza strisciare. Si calcolino anche in questo caso

e) Il modulo della velocità $|v(\theta)|$ del cilindro in funzione dell'angolo $\theta$ (prima del distacco)

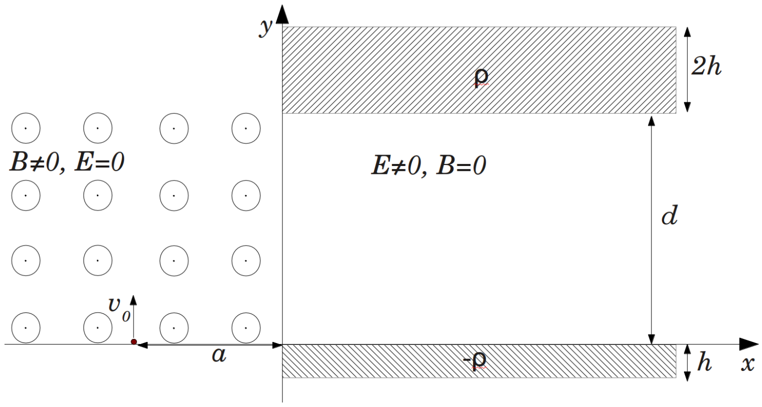
$|v(\theta)| =$ ...........................

f) La componente radiale della forza $F$ che la guida esercita sul cilindro in funzione dell'angolo $\theta$ e l'angolo $\theta_{max}$ per il quale il cilindro si distacca dalla guida circolare

$F(\theta)_{perp} =$ ........................... $\theta_{max} =$ ...........................

*(punteggio: 1.a = 1 punto, 1.b-1.c = 2 punti, 1.d = 4 punti, 1.e-1.f = 3 punti)*

## Esercizio 2




Una particella di massa $m = 1.6 \cdot 10^{-24} g$, carica $q = 1.6 \cdot 10^{-19} C$ e entra ad una velocità $v_0 = 10 km/s$ in una regione di spazio ($x < 0$, $0 < y < d$) in cui è presente un campo magnetico $B$ uniforme e diretto ortogonalmente a $v_0$. In una regione adiacente a questa ($x > 0$, $0 < y < d$), come indicato in figura, si trova invece un campo elettrico $E \neq 0$.

Il campo magnetico $B$ è prodotto da un solenoide percorso da una corrente $I = 10A$ e costituito da un avvolgimento con densità di spire $n = 8 spire/cm$.

Il campo elettrico $E$ è ottenuto con due lastre infinite, uniformemente cariche, disposte parallelamente ad una distanza $d = 1cm$ come mostrato in figura, con densità di carica $\rho$ e $-\rho$ (con $\rho = 1.0 \frac{\mu C}{m^3}$) e spessori rispettivamente $h (= 1mm)$ e $2h$.

Trascurando gli effetti di bordo,

a) si calcoli l'intensità del campo magnetico $|B|$ e il valore e la direzione del campo elettrico $E$ ;

$$|B| = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad E_x, E_y, E_z = (\ldots\ldots , \ldots\ldots , \ldots\ldots)$$

b) si descriva la traiettoria (rettilinea, circolare, parabolica, ellittica, esponenziale, ecc) e il tipo di moto (uniforme, uniformente accelerato, accelerato non uniforme, ecc..) che la particella compie nelle due regioni (motivando in brutta tale risposta)

*per* $x < 0$ : ..........................................................................................

*per* $x > 0$ : ..........................................................................................

c) sapendo che la particella carica si trova inizialmente alle coordinate $x = -1.3mm$, $y = 0$ del sistema cartesiano indicato in figura, si calcoli il punto in cui la particella passa da una regione all'altra (ovvero la coordinata $y$ quando la particella passa per $x = 0$) e la velocità della particella in tale punto (esprimendo il vettore in coordinate $v_x$ e $v_y$) ;

$$y(x = 0) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_x(x = 0) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_y(x = 0) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

d) si trovi la coordinata $x$ per la quale la particella colpisce una delle due lastre cariche e si dica quale delle due colpisce

$$x_f = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_f = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

*(punteggio: 1.a = 5 punti, 1.b = 2 punti, 1.c = 4 punti, 1.d = 4 punti)*

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 15/01/2013**
**Soluzioni**

# Soluzione esercizio 1

a) Per la conservazione dell'energia abbiamo che:

$$E_{iniziale} = E_{finale}$$

$$\frac{1}{2}m|v^i|^2 + mgh^i = \frac{1}{2}m|v^f|^2 + mgh^f$$

$$mg(h^i - h^f) = \frac{1}{2}m|v^f|^2$$

$$|v^f| = \sqrt{2g(h^i - h^f)} = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$$

dove sono state utilizzate le relazioni: $|v^i| = 0$ e $h^i - h^f = R - R\cos\theta$.

Finchè il cilindro non si staccherà dalla guida, la velocità è tangenziale alla guida stessa. Ovvero:

$$v_x^f = |v^f| \cdot \cos\theta = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)} \cdot \cos\theta$$

$$v_y^f = -|v^f| \cdot \sin\theta = -\sqrt{2gR(1-\cos\theta)} \cdot \sin\theta$$

b) La forza $F$ che la guida esercita sul cilindro è radiale. La somma delle forze lungo questa direzione è tale da mantenere il cilindro in una traiettoria circolare:

$$\Sigma F_{rad} = ma_{centripeta}$$

$$F - mg\cos\theta = -m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$F - mg\cos\theta = -m \cdot \frac{2gR(1-\cos\theta)}{R})$$

$$F = mg(3\cos\theta - 2)$$

c) Il cilindro si stacca dalla guida quando la forza F esercitata dalla guida si annulla:

$$F = 0$$

$$mg(3\cos\theta_{max} - 2) = 0$$

$$\cos\theta_{max} = \frac{2}{3}$$

$$\theta_{max} = \arccos\frac{2}{3}$$

d) Dopo il distacco l'unica forza a cui è sottoposto il cilindro è la forza peso. Si avrà quindi un moto uniforme lungo l'asse $x$ e un moto uniformemente accelerato lungo l'asse $y$. Per questo avremo che:

$$v_x^f = v_x^{dist} = v(\theta_{max}) \cdot \cos\theta_{max} = \sqrt{2gR(1-\cos\theta_{max})} \cdot \cos\theta_{max} = \sqrt{2gR(1-\frac{2}{3})} \cdot \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{2gR}{3}} \cdot \frac{2}{3} = 2.9m/s$$

dove $v_x^{dist}$ indica la componente $x$ della velocità nel momento di distacco dalla guida.

Dalla conservazione dell'energia si ottiene che il cilindro toccherà terra con una velocità:

$$|v^f| = \sqrt{2gR}$$

e quindi, usando il teorema di Pitagora, abbiamo che:

$$|v_y^f| = \sqrt{|v^f|^2 - |v_x^f|^2} = \sqrt{2gR - \frac{2gR}{3} \cdot \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{46}{27}gR} = 6.9m/s$$

Il tempo $\Delta t$ di caduta del cilindro sarà dato dalla relazione:

$$\Delta t = \frac{|v_x^f| - |v_y^{dist}|}{g} = 0.38s$$

dove $v_y^{dist}$, la velocità lungo l'asse $y$ del cilindro al momento del distacco dalla guida, si può calcolare come:

$$|v_y^{dist}| = -\sqrt{2gR(1-\cos\theta_{max})} \cdot \sin\theta_max = -\sqrt{2gR(1-\frac{2}{3})} \cdot \sqrt{1-(\frac{2}{3})^2} = -\sqrt{\frac{10}{27}gR}$$

e) Nel caso in cui il cilindro rotoli senza strisciare dalla conservazione dell'energia, analogamente al punto a), si ottiene che:

$$E_{iniziale} = E_{finale}$$
$$\frac{1}{2}m|v^i|^2 + \frac{1}{2}I|\omega^i|^2 + mgh^i = \frac{1}{2}m|v^f|^2 + \frac{1}{2}I|\omega^f|^2 + mgh^f$$
$$mg(h^i - h^f) = \frac{1}{2}m|v^f|^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\frac{|v^f|^2}{R^2} = \frac{3}{2}mR^2\cdot\frac{|v^f|^2}{R^2}$$
$$|v^f| = \sqrt{\frac{4}{3}g(h^i - h^f)} = \sqrt{\frac{4}{3}gR(1-\cos\theta)}$$

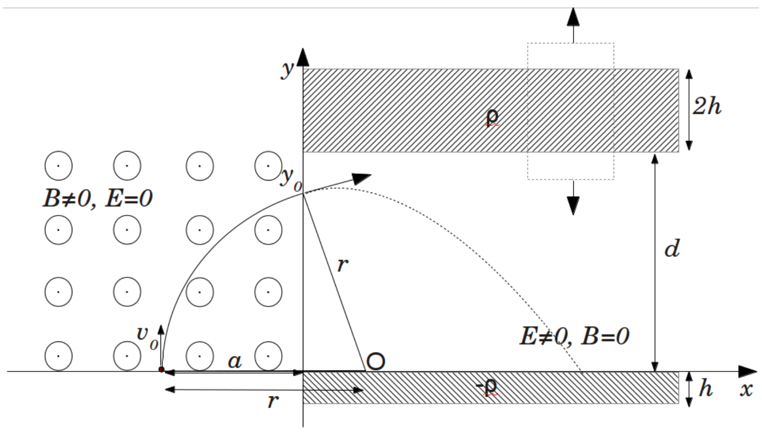
f) Analogamente al punto b), la forza vincolare $F$ delle guida sarà data da:

$$F - mg\cos\theta = -m\cdot\frac{v^2}{R}$$
$$F - mg\cos\theta = -m\cdot\frac{\frac{4}{3}gR(1-\cos\theta)}{R})$$
$$F = \frac{mg}{3}(7\cos\theta - 4)$$

Imponendo $F = 0$ si ottiene

$$7\cos\theta_{max} - 4 = 0$$
$$\cos\theta_{max} = \frac{4}{7}$$
$$\theta_{max} = \arccos\frac{4}{7}$$

# Soluzione Esercizio 2




Il campo magnetico generato dal solenoide è

$$|B| = \mu_o\cdot n\cdot I = 0.1T$$

Il campo elettrico generato da una lastra per le simmetrie del problema deve essere diretto ortogonalmente alla lastra e deve avere la stessa intensità sopra e sotto la lastra.Per calcolarne il modulo si consideri un superficie cilindrica indicata in figura con una linea tratteggiata, questa contiene una carica $Q = A\cdot 2h\cdot\rho$. Utilizzando il teorema di Gauss si ottiene che $2 * E * A = Q/\epsilon_0$ da cui segue che $E = \frac{2h\rho}{2\epsilon_0}$. Similmente per l'altra lastra si ottiene $E = \frac{h\rho}{2\epsilon_0}$. Considerando il segno delle densità di carica delle due lastre il risultante campo è:

$$E_x, E_y, E_z = (0, \frac{3h\rho}{2\epsilon_0}, 0) = (0, 170V/m, 0)$$

Il moto nella prima regione è circolare uniforme in quanto la forza, e quindi l'accelerazione, è sempre ortogonale alla velocità e costante in modulo.
Il moto nella seconda regione è uniformemente accelerato lungo $y$ in quanto il campo elettrico è uniforme (e quindi anche $F = Eq$ e $a = F/m = Eq/m$). Lungo $x$ è uniforme in quanto non ci sono forze lungo $x$. La risultante traiettoria è una parabola.

Il raggio di curvatura nella prima regione si calcola da

$$|F| = qVB, F = ma = mV^2/R \Rightarrow qVB = mV^2/R$$

da cui

$$R = \frac{qB}{mV} = 0.01m$$

La traiettoria è come detto circolare, in particolare sarà una circonferenza di raggio $R$, centrata sul punto **O** mostrato in figura. Considerando che la velocità iniziale nel punto $(-a, 0)$, e quindi la tangente alla traiettoria, hanno direzione verticale, si può ricavare che il centro della circonferenza si trova sull'asse delle $x$ ad una distanza $R$ dal punto $(-a, 0)$ quindi in posizione $O = (-a + R, 0)$.

Il punto in cui si passa da una regione all'altra, $y_0$, si può ricavare, applicando il teorema di pitagora allo schema in figura, come

$$y_0 = \sqrt{R^2 - (R-a)^2} = 0.005m$$

L'angolo percorso si può scrivere come $cos(\theta) = \frac{r-a}{r} = 1 - a/r$, da cui segue che il vettore velocità sarà:

$$v(x = 0) = (v_0 cos(\theta), v_0 sin(\theta)) = (4900, 8700)m/s$$

Il seguente moto parabolico raggiunge un massimo,$y_{max}$, in direzione della lastra caricata positivamente, per poi scendere verso la lastra caricata negativamente. Per capire quale lastra colpisce bisogna vedere se $y_{max} < d$. Nel punto di massimo $v_y = 0$, quindi da $v_y(t) = v_y(x = 0) + at$ si ricava

$$t_{max} = -\frac{v_y(x=0)}{a} = \frac{v_y(x=0)}{Eq/m} = 5 \cdot 10^{-7}s$$

e l'altezza raggiunta

$$y(t_{max}) = y(x = 0) + v_y(x = 0)t_{max} + \frac{1}{2}at^2_{max} = 0.007m < 0.01m$$

quindi non arriva a colpire la lastra superiore.

Il tempo $t_f$ a cui raggiunge la lastra inferiore si ricava prendendo la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado ottenuta da

$$y(t_f) = y(x = 0) + v_y(x = 0)t_f + \frac{1}{2}at_f^2 = 0$$

e risulta essere $t_f = 1.4 \cdot 10^{-6}$s.
Poiche il moto lungo $x$ è uniforme, la posizione finale sarà

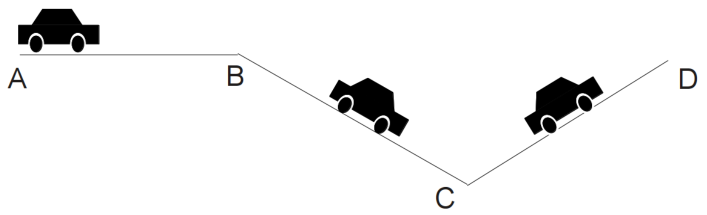
$$(v_0(x = 0) \cdot t_f, 0) = (0.007m, 0)$$

Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

**Esame di Fisica Generale del 04/02/2013**
**Cognome : ................................................. Nome : .................................................**

**Matricola: ................................................. Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1




Un auto elettrica si immette su una autostrada a velocità iniziale $v_0 = 10m/s$ ed una energia immagazzinata nelle sue batterie $E_b^i = 8KWh$. A partire dal punto $A$ accelera con il motore costantemente alla sua massima potenza, pari a $P = 30KW$, per un tempo $t_{AB} = 10s$ nel quale percorre il tratto di strada $AB = 200$ m (vedi figura).

a) calcolare la velocità $v(t)$ dell'auto in funzione del tempo nel tratto AB, e il suo valore quando giunge nel punto $B$

$v(t) =$ ........................... $v(t = 10s) =$ ...........................

b) calcolare la legge oraria $x(t)$, la lunghezza del tratto $AB$ e l'accelerazione $a(t)$ dell'auto nel tratto di strada AB:

$x(t) =$ ........................... $AB =$ ............................. $a(t) =$ ...........................

Il seguente tratto di strada $BC$ è in discesa e l'autista per mantenere una velocità costante agisce sul pedale freno dell'auto elettrica il quale riesce a recuperare il 40% dell'energia ricaricando le batterie dell'auto, mentre la restante parte è dissipata da normali freni che esercitano una forza $F_a$ sull'auto.

c) Si calcoli l'energia recuperata e la forza dissipativa esercitata sull'auto supponendo che il tratto $BC$ abbia lunghezza $l = 1$ km e che il dislivello tra B e C sia $h = 100$m.

$E_{recover} =$ ................. $F_a =$ ..........................

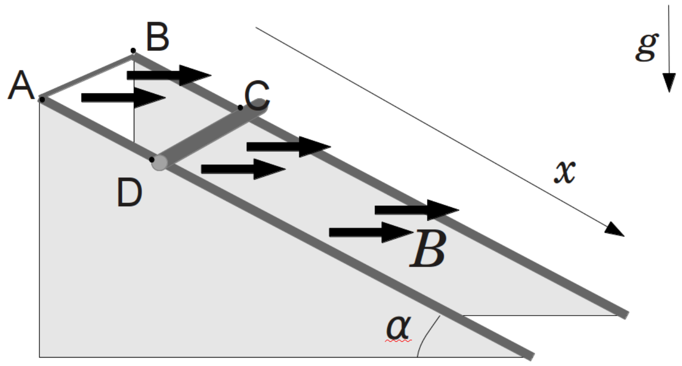
Infine l'auto si trova a percorrere il tratto $CD$ che ha una pendenza costante del 5% (ovvero $tan(\theta) = 0.05$).

d) Si calcoli la potenza necessaria per far proseguire l'auto alla velocità costante raggiunta in $B$, e l'energia rimasta nelle batterie quando la macchina raggiunge il punto $D$.

$P_{BC} =$ ........................... $E_b^f =$ ...........................

*(punteggio: 1.a-d = 4)*

# Esercizio 2




Un cilindro conduttore si trova appoggiato su due rotaie inclinate conduttrici come mostrato in figura. Le due rotaie sono chiuse da un lato da un conduttore fisso di resistenza $R$ e dall'altro dal cilindretto conduttore che può muoversi sulle rotaie strisciando senza attrito.
La distanza tra le due rotaie è $AB = CD = d$. Nella regione è presente un campo magnetico diretto orizzontalmente, omogeneo e costante nel tempo di intensità $|B|$ (vedi figura).
Si calcoli:

a) il flusso del campo magnetico attraverso il circuito ABCD e la velocità lungo la coordinata $\hat{x}$ disegnata in figura, in funzione della corrente che percorre il circuito formato dal conduttore con resistenza R, il cilindretto libero di muoversi e i due tratti di rotaia che li separano (ABCD in figura):

$$|\Phi_B| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$|v(I)| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) l'accelerazione in funzione della corrente.

$$|a(I)| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

c) Si descriva quali forze agiscono sul cilindretto libero di muoversi e quanto vale la somma di tali forze in funzione della corrente I che percorre il circuito

..........................................................................................

$$F_{tot} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d) si ricavi la corrente $I(t)$ in funzione del tempo sapendo che al tempo $t = 0$, $v(0) = 0$. [Si sfrutti il fatto che l'equazione differenziale $\frac{dI}{dt} = C - A \cdot I$ ha come soluzione $I(t) = (I(0) - \frac{C}{A})e^{-At} + \frac{C}{A}$. ]

$$|I(t)| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e) quanto vale la velocità limite (i.e. la velocità che si raggiunge asintoticamente per $\rightarrow$ inf) ?

$$|v(t \rightarrow \text{inf})| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

f) cosa succede se si inverte la direzione del campo $B$ ?

..........................................................................................

*(punteggio: 1.a = 4, 1.b = 2, 1.c = 3, 1.d = 3, 1.e = 1, 1.f = 3)*

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 04/02/2013**

# Soluzione esercizio 1

a) Per la conservazione dell'energia abbiamo che:

$$E_{iniziale} = E(t)$$

$$\frac{1}{2}m|v^i|^2 + E_b^i = \frac{1}{2}m|v(t)|^2 + E_b(t)f$$

$$|v^f(t)| = \sqrt{|v^i|^2 + 2 \cdot \frac{E_b^i - E_b(t)}{m}}$$

Considerando che per l'energia della batteria vale la relazione $\frac{dE_b(t)}{dt} = -P$, abbiamo che $E_b(t) = E_b^i - P \cdot t$. Quindi la velocità è data da:

$$|v^f(t)| = \sqrt{|v^i|^2 + 2 \cdot \frac{P \cdot t}{m}}$$

b) L'accelerazione $a(t)$ è la derivata rispetto al tempo della velocità $v(t)$. Sostituendo $v(t)$ si ottiene:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}\sqrt{|v^i|^2 + 2 \cdot \frac{P \cdot t}{m}} = \frac{1}{2\sqrt{|v^i|^2 + 2 \cdot \frac{P \cdot t}{m}}} \cdot 2\frac{P}{m} = \frac{P/m}{\sqrt{|v^i|^2 + 2 \cdot \frac{P \cdot t}{m}}}$$

La legge oraria $x(t)$ è invece data dall'integrale di $v(t)$:

$$x(t) = \int_0^t v(T)dT = \int_0^t \sqrt{|v^i|^2 + 2 \cdot \frac{P \cdot T}{m}}dT$$

per risolvere l'integrale basta cambiare la variabile nel seguente modo:

$$\begin{cases} T' = v_i^2 + 2\frac{P \cdot T}{m} \\ dT' = 2\frac{P}{m}dT \end{cases}$$

Da cui si ottiene:

$$x(t) = \int_{v_i^2}^{v_i^2 + 2\frac{P \cdot t}{m}} \sqrt{T'} \cdot \frac{m}{2P}dT' = \frac{m}{2P}\left[\frac{T'^{3/2}}{3/2}\right]_{v_i^2}^{v_i^2 + 2\frac{P \cdot t}{m}} = \frac{m}{3P}\left[\left(v_i^2 + 2\frac{P \cdot t}{m}\right)^{3/2} - \left(v_i^2\right)^{3/2}\right]$$

c) Se la macchina avesse un recupero totale dell'energia sarebbe valida la relazione:

$$E^f = E^i$$

$$E^i_{cinetica} + E^i_{gravitazionale} + E^i_b = E^f_{cinetica} + E^f_{gravitazionale} + E^f_b$$

$$\Delta E_b = E_b^f - E_b^i = E^f_{gravitazionale} - E^i_{gravitazionale} = mg(h^f - h^i) = mg\Delta h$$

dove $E^i_{cinetica} = E^f_{cinetica}$, perchè la velocità rimane costante. La macchina recupera soltanto il 40% dell'energia disponibile per cui l'energia recuperata è pari a:

$$E_{rec} = 40\% \cdot mg\Delta h$$

Per procedere a velocità costante la macchina applicherà una forza $F_a$ tale da annullare la componente della forza peso parallela al piano inclinato: $F + mg\sin\alpha = 0$, per cui:

$$F = -mg\frac{\Delta h}{l}$$

perchè $\sin\alpha = \frac{\Delta h}{l}$. Considerando che il 40% dell'energia viene assorbita dal sistema di recupero, la forza applicata dai normali freni sarà pari a:

$$F_a = 60\% \cdot \left(-mg\frac{\Delta h}{l}\right)$$

d) La potenza fornita dalla macchina è pari al lavoro fatto nell'unità di tempo: $P = \frac{dL(t)}{dt} = \frac{FdS(t)}{dt} = Fv$. La forza applicata dalla macchina per mantenere la velocità costante è, in modulo, pari alla componente della forza peso parallela al piano inclinato: $F_{CD} = mg\sin\theta$, per cui:

$$P_{CD} = F_{CD} \cdot v = mg\sin\theta \cdot v$$

Il tempo impiegato per raggiungere il punto D sarà pari a: $t_{CD} = d_{CD}/v$. L'energia consumata dalla macchina è quindi pari a: $\Delta E_b^{CD} = P_{CD} \cdot t = P_{CD} \cdot d_{CD}/v$.

L'energia finale contenuta nella batteria sarà pari a:

$$E_b^f = E_b^i - P \cdot t_{AB} + E_{rec}^{BC} - \Delta E_b^{CD}$$

dove $P \cdot t_{AB}$ corrisponde all'energia utilizzata nel primo tratto.

## Soluzione esercizio 2

a) Per definizione il flusso del campo magnetico è dato da:

$$\Phi_B = \vec{S} \cdot \vec{B}$$

Dove $\vec{S}$ è un vettore diretto perpendicolarmente alla superficie ABCD e ha modulo pari a $|\vec{S}| = l \cdot d$, dove $l$ è la distanza tra i punti AD. L'angolo compreso fra i vettori $\vec{S}$ e $\vec{B}$ è pari a $90° - \alpha$, pertanto abbiamo che:

$$|\Phi_B| = ld\cos(90° - \alpha) = ld\sin\alpha.$$

La forza elettromotrice indotta dalla variazione del flusso del campo magnetico si può calcolare come:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{dl}{dt}dB\sin\alpha = -vdB\sin\alpha.$$

Sostituendo questa relazione in $I = \frac{\epsilon}{R}$ si ottiene:

$$I = \frac{\epsilon}{R} = -\frac{vdB\sin\alpha}{R}$$

da cui si ricava:

$$|v(I)| = \frac{IR}{dB\sin\alpha}$$

b) Derivando $|v(I)|$ si ottiene:

$$|a(I)| = \frac{dv}{dt} = \frac{R}{dB\sin\alpha}\frac{dI}{dt}$$

c) Le forze che agiscono sul cilindretto sono: la forza di Lorentz, la forza peso e la reazione delle rotaie.

La forza di Lorentz si può calcolare dalla relazione $\vec{F_B} = I\,\vec{d} \times \vec{B}$ e, dato che i vettori $\vec{d}$ e $\vec{B}$ sono ortogonali tra loro, la forza ha modulo $F_B = IdB$ ed è diretta verso l'alto. Si noti che il verso della corrente indotta è tale da opporsi alla variazione del flusso del campo magnetico.

La forza peso è pari a $\vec{F_g} = m\vec{g}$, mentre la reazione $\vec{N}$ delle rotaie è perpendicolare al piano ed è tale da annullare la forza totale che agisce in questa direzione.

La forza totale è quindi parallela al piano ed è pari a:

$$F_{tot} = mg\sin\theta - IdB\sin\theta$$

dove è stato scelto come verso positivo il verso di $\vec{AD}$.

d) Sostituendo alla relazione $F = ma$ la forza ottenuta al punto c) e l'accelerazione del punto d) si ottiene:

$$F = m \cdot a$$

$$mg\sin\theta - IdB\sin\theta = m \cdot \frac{R}{dB\sin\alpha}\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dgB\sin^2\theta}{R} - \frac{d^2B^2\sin^2\theta}{Rm}I$$

La soluzione di questa equazione differenziale è data da:

$$I(t) = \left(I(0) - \frac{mg}{Bd}\right)e^{-\frac{d^2B^2\sin^2\theta}{Rm}\cdot t} + \frac{mg}{Bd}.$$

dove $I(0) = 0$.

La corrente limite è data da $I(t \to \infty) = \frac{mg}{Bd}$. La velocità limite è parallela al piano e ha modulo pari ha:

$$|v(t \to \infty)| = \frac{mg}{Bd} \cdot \frac{R}{dB \sin \alpha} = \frac{mgR}{d^2 B^2 \sin \alpha}$$

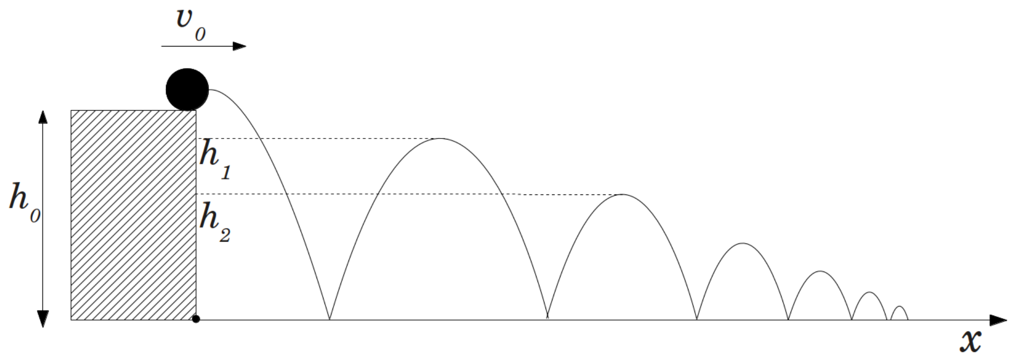
e) Se si invertisse la direzione del campo $B$ anche la corrente indotta risulterebbe invertita. Questo fa si che la forza di Lorentz non cambierebbe e il problema avrebbe quindi gli stessi risultiati.

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 27/02/2013**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1




Una pallina da ping-pong viene lanciata da un'altezza $h_0 = 1$ m, con velocità iniziale orizzontale $v_0 = 10 m/s$ come mostrato in figura. La pallina rimbalza perdendo ogni volta il 10%, in modulo, della propria velocità lungo $y$. La componente $x$ della velocità resta invece inalterata ad ogni rimbalzo.

a) calcolare il tempo $t_1$ necessario alla pallina a toccare terra la prima volta e la posizione $x(t_1)$ in cui questo rimbalzo avviene:

$t_1 =$ ........................... $x(t_1) =$ .............................

b) calcolare l'altezza massima $h_1$ raggiunta dalla pallina tra il primo e il secondo rimbalzo, il tempo a cui avviene il secondo rimbalzo $t_2$ e la posizione del secondo rimbalzo $x(t_2)$

$h_1 =$ ........................... $t_2 =$ ........................... $x(t_2) =$ ...........................

c) scrivere l'altezza massima $h_n$ raggiunta tra il rimbalzo $n$-simo e quello $(n+1)$-esimo, l'intervallo di tempo $\Delta(t_n)$ che trascorre tra essi e il tempo a cui avviene il rimbalzio $(n+1)$-esimo (suggerimento: scrivere $t_{n+1}$ come $t_1 + \sum_{i=1}^{n}$ .....)

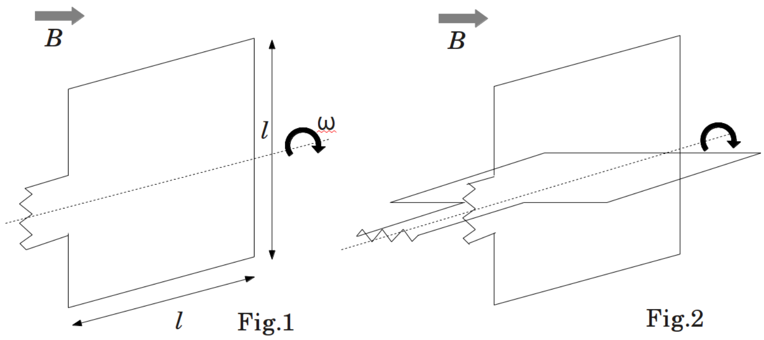
$h_n =$ ........................... $\Delta(t_n) =$ ........................... $t_{n+1} =$ .......................

d) sapendo che la somma della serie geometrica vale $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$, calcolare il punto $x_f$ in cui la pallina smette di rimbalzare:

$x_f =$ ...........................

*(punteggio: 1.a-d = 4 punti )*

# Esercizio 2




Una spira conduttrice quadrata di lato $l$, chiusa su una resistenza $R$ è posta in rotazione, con velocità angolare $\omega$ intorno ad un asse passante per i punti medi di due suoi lati come mostrato in Fig.1. La spira si trova inoltre in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico costante e uniforme di intensità $B$, diretto ortogonalmente all'asse di rotazione.
Trascurando gli effetti di autoinduzione,

a) si calcoli il flusso del campo magnetico che attraversa la spira in funzione del tempo, supponendo che al tempo $t = 0$ il piano su cui giace la spira sia ortogonale al campo magnetico $B$.

$$\phi^B(t) = \text{............................}$$

b) si calcoli la corrente che percorre il filo in funzione del tempo

$$I(t) = \text{............................}$$

c) si scriva l'espressione della potenza dissipata sulla resistenza $R$ in funzione del tempo

$$P(t) = \text{............................}$$

d) Si consideri adesso il caso in cui due spire identiche, di lunghezza $l$ e chiuse su due resistenze $R$, sono disposte ortogonalmente l'una all'altra come mostrato in Fig.2. Si dimostri che la potenza necessaria a far ruotare il sistema formato dalle due spire è costante nel tempo. In particolare, si scriva la potenza dissipata da ognuna delle due spire $P_1(t)$ e $P_2(t)$, mostrando che la somma di esse risulta essere costante $P_{tot}$:

$$P_1(t) = \text{............................}$$

$$P_2(t) = \text{............................}$$

$$P_{tot} = \text{............................}$$

*(punteggio: 2.a-d = 4 punti )*

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Soluzioni compito di Fisica Generale del 27/02/2013**

# Soluzione esercizio 1

a) Tra un rimbalzo e il successivo, il moto della pallina lungo l'asse $y$ è uniformemente accelerato. La sua legge oraria è quindi:

$$y(t) = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{i,y}t + y_i = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0$$

Lungo l'asse $x$ la pallina mantiene un moto uniforme con legge oraria:

$$x(t_1) = v_0 t$$

Il tempo necessario alla pallina per arrivare a terra si può ottenere dalla relazione:

$$0 = y = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0 \Longrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 0.451\,\mathrm{s}$$

e la distanza percorsa lungo $x$ è:

$$x(t) = v_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 4.51\,\mathrm{m}$$

b) L'istante prima di toccare terra la pallina avrà una velocità di:

$$|v_{0,y}| = gt_1 = g\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{2gh_0}$$

Dopo il rimbalzo la velocità di riduce del 10% quindi sarà pari a:

$$|v_1| = 0.9 \cdot v_{0,y} = 0.9 \cdot \sqrt{2gh_0}$$

A questo punto la pallina risalirà e raggiungerà l'altezza massima quando $v_y = 0$, in un tempo:

$$t_{salita} = \frac{|v_2|}{g} = 0.9\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

La sua massima altezza è quindi pari a:

$$h_1 = |v_1|t_{salita} - \frac{1}{2}gt^2_{salita} = gt^2_{salita} - \frac{1}{2}gt^2_{salita} = \frac{1}{2}gt^2_{salita} = (0.9)^2 h_0 = 0.81\,\mathrm{m}$$

Il tempo di discesa è uguale a quello di salita, quindi il secondo urto avverà al tempo:

$$t_2 = t_1 + 2 \cdot t_{salita} = \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} + 2 \cdot 0.9\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = (1 + 2 \cdot 0.9)\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 1.26\,\mathrm{s}$$

La posizione del secondo urto sarà data da:

$$x(t_2) = v_0 t_2 = (1 + 2 \cdot 0.9)v_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 12.6\,\mathrm{m}$$

c) Ripetendo i conti del punto b) per l'$n$-esimo rimbalzo si ottiene:

$$h_n = (0.9)^{2n}\, h_0; \quad \Delta(t_n) = 2 \cdot (0.9)^n \cdot v_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Il tempo $t_{n+1}$ sarà quindi dato dal tempo $t_1$ sommato a tutti gli intervalli di tempo $\Delta(t_i)$:

$$t_{n+1} = t_1 + \sum_{i=1}^{n} \Delta(t_i)$$

d) Per calcolare il tempo per cui la pallina inizia a rotolare, calcoliamo la sommatoria per $n \to \infty$:

$$t_f = t_1 + \sum_{i=1}^{n} \Delta(t_i) = v_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\left(1 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(0.9)^n\right)$$

Considerando che:

$$\sum_{i=1}^{n}(0.9)^n = \sum_{i=0}^{n}(0.9)^n - 1 = \frac{1}{1-0.9} - 1 = 9$$

Si ottiene

$$t_f = 19 \cdot v_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

E quindi:

$$x_f = v_0 t_f = 19 \cdot v_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 85.8\,\mathrm{m}$$

## Soluzione esercizio 2

Poichè la spira è in rotazione, l'angolo che essa forma con il campo magnetico B risulta essere

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

in particolare visto che al tempo $t = 0$ essa risulta ortogonale al campo, possiamo scegliere $\theta_0 = 0$.

Il flusso attraverso la spira si può quindi scrivere come

$$\phi_B = Bl^2 cos(\omega t)$$

dove $l^2$ è l'area di una spira quadrata di lato $l$.

La forza elettromotice indotta è

$$fem = -\frac{d\phi_B}{dt} = Bl^2\omega sin(\omega t)$$

visto che il circuito è chiuso da una resistenza $R$, dalla legge di Ohm $V = IR$ si ricava che

$$I = \frac{Bl^2\omega sin(\omega t)}{R}$$

La potenza dissipata dalla resistenza (e quindi la potenza necessaria per tenere in rotazione la spira) risulta essere

$$P = VI = I^2R = \frac{(Bl^2\omega sin(\omega t))^2}{R}$$

Nel caso di due spire ortogonali, le potenze risultano sfasate di $\pi/2$, ovvero

$$P_1 = \frac{(Bl^2\omega sin(\omega t))^2}{R}$$

$$P_2 = \frac{(Bl^2\omega sin(\omega t + \pi/2))^2}{R} = \frac{(Bl^2\omega cos(\omega t))^2}{R}$$

considerando che $cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1$, la potenza totale risulta essere

$$P_2 = \frac{(Bl^2\omega)^2}{R}$$

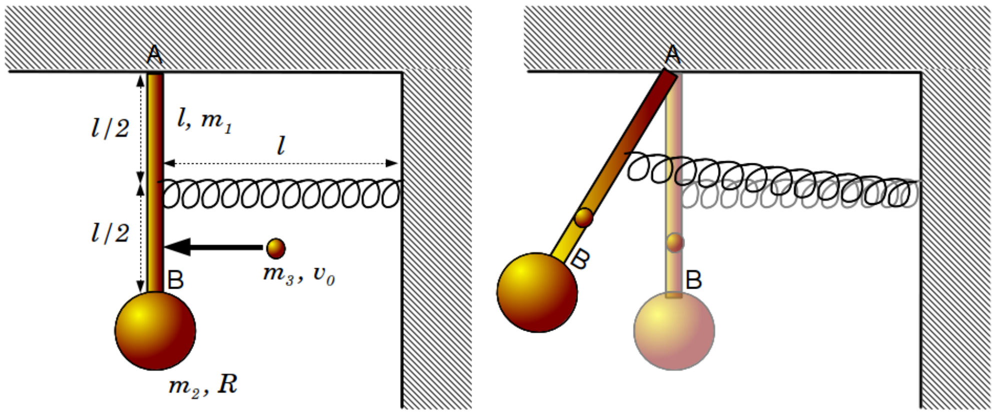
quindi indipendente dal tempo.

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 18/06/2013**
**Cognome : .................................................. Nome : ..................................................**

**Matricola: .................................................. Anno di corso : ........................................**

# Esercizio 1




Un'asta omogenea di lunghezza $l = 1$ m e massa $m_1 = 1$ Kg è appesa al soffitto nel punto $A$ e può oscillare senza attrito nel piano verticale. All'altro estremo dell'asta, $B$, è saldata una sfera di massa $m_2 = 500$ g e raggio $R = 10$ cm. Nel punto medio dell'asta, a distanza $l/2$ da $A$ e $B$, è collegata una molla ideale (massa nulla, costante elastica $k = 10$ N/m e lunghezza a riposo $l$ uguale a quella dell'asta) che, all' altro estremo e' fissata alla parete verticale. La distanza iniziale fra asta e parete verticale è $l$ ed il sistema è inizialmente in quiete. Ad un dato istante un proiettile puntiforme di massa $m_3 = 10$ g e velocità $v_0 = 100$ m/s orizzontale colpisce l'asta nel punto distante $3/4l$ dal soffitto e rimane conficcato nell'asta.

Calcolare:

a) La velocità angolare del sistema subito dopo l'urto

$$\omega = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo in $A$ durante l'urto del proiettile

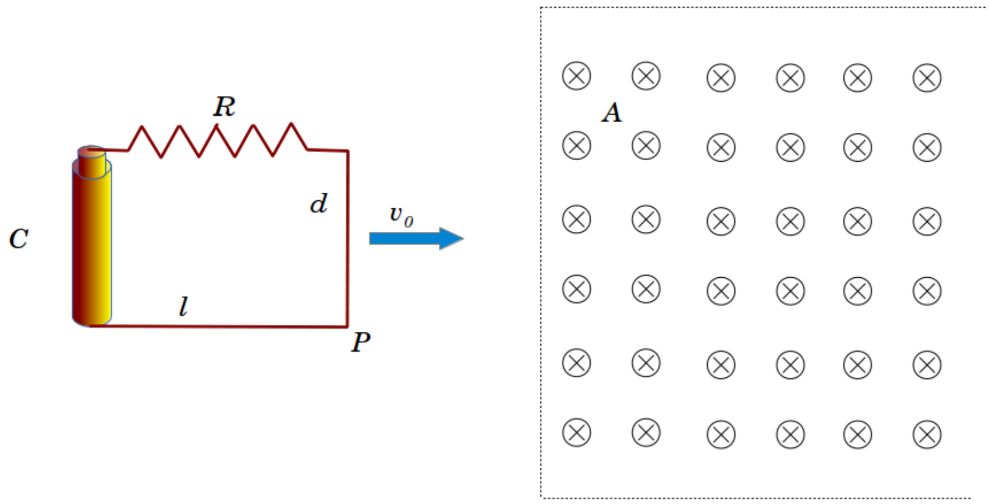
$$P = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

c) la velocità del proiettile $v_0$ necessaria affinchè la sfera raggiunga un'altezza pari a $l/2$ rispetto alla sua altezza iniziale, i.e. $h_2 = l/2$

$$v_0^{min} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*(punteggio: 1.a-c = 5 punti )*

# Esercizio 2




Un circuito rettangolare di lati $l = 20$ cm e $d = 10$ cm si muove con velocità costante $v_0 = 10$ m/s nel piano e raggiunge una zona A nella quale è presente un campo magnetico costante B di 5 Tesla perpendicolare al piano . Una forza opportuna viene applicata al circuito quando entra nella zona interessata dal campo magnetico per cui il circuito continua a spostarsi con velocità costante $v_0$ anche nella zona A. Nel circuito è presente una resistenza R di 10 $K\Omega$ ed un condensatore cilindrico di altezza $d$ con armatura interna di raggio 1 cm ed armatura esterna distante 10$\mu$m da quella interna (ovvero $r_{ext} = r_{int} + 10\mu$m) inizialmente scarico. Tra le armature del condensatore è presente un dielettrico con costante relativa $\epsilon_R = 80$

Si calcoli:

a) Il potenziale ai capi del condensatore quando l'estremo P del circuito ha percorso un tratto $l/2$ nella zona interessata dal campo magnetico

$$\Delta V = \text{............................}$$

b) La potenza istantanea dissipata in quell' istante dalla resistenza.

$$P = \text{............................}$$

c) Il lavoro compiuto dalla forza fino a quel momento.

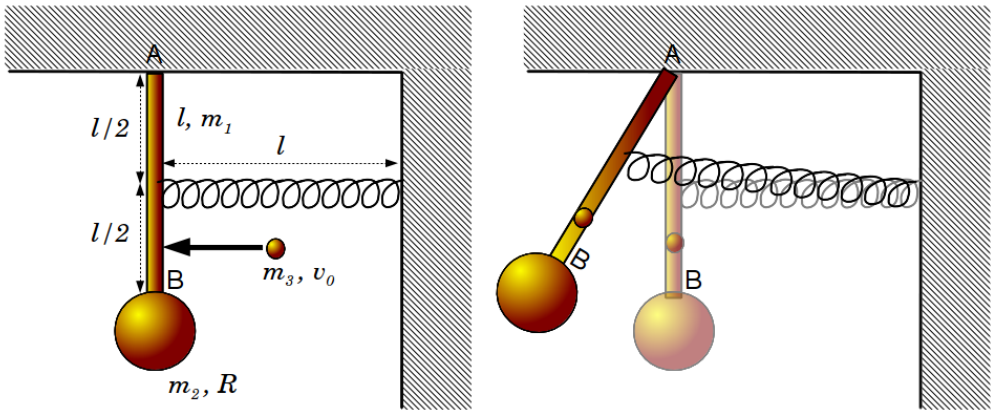
$$L = \text{............................}$$

*(punteggio: 2.a-c = 5 punti )*

Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

**Esame di Fisica Generale del 18/06/2013**
**Soluzioni**

# Esercizio 1




Un'asta omogenea di lunghezza $l = 1$ m e massa $m_1 = 1$ Kg è appesa al soffitto nel punto $A$ e può oscillare senza attrito nel piano verticale. All'altro estremo dell'asta, $B$, è saldata una sfera di massa $m_2 = 500$ g e raggio $R = 10$ cm. Nel punto medio dell'asta, a distanza $l/2$ da $A$ e $B$, è collegata una molla ideale (massa nulla, costante elastica $k = 10$ N/m e lunghezza a riposo $l$ uguale a quella dell'asta) che, all' altro estremo e' fissata alla parete verticale. La distanza iniziale fra asta e parete verticale e' $l$ ed il sistema e' inizialmente in quiete. Ad un dato istante un proiettile puntiforme di massa $m_3 = 10$ g e velocità $v_0 = 100$ m/s orizzontale colpisce l'asta nel punto distante $3/4l$ dal soffitto e rimane conficcato nell'asta.

Calcolare:

a) La velocità angolare del sistema subito dopo l'urto

$$\omega = \mathbf{0.79\ rad/s}$$

La quantià di moto del sistema asta, sfera e proiettile non è conservata in quanto il vincolo che incerniera l'asta in $A$ esercita una forza impulsiva durante l'urto. Il momento angolare rispetto al polo in $A$ è invece conservato in quanto la forza impulsiva di cui sopra ha braccio nullo.

In particolare possiamo scrivere la componente assiale del momento angolare $L_Z^i$ prima dell'urto come

$$L_Z^i = m_3 v_0 \frac{3}{4} l$$

Il momento angolare dopo l'urto si può scrivere come

$$L_Z^f = I\omega$$

dove $I$ e' il momento di inerzia totale del sistema che si può scrivere come

$$I = I_{proiettile} + I_{pendolo} = I_{proiettile} + I_{sfera} + I_{asta} =$$

$$= m_3(\frac{3}{4}l)^2 + I_{sfera}^{CM} + I_{CM\ sfera} + I_{asta}^{CM} + I_{CM\ asta} =$$

$$= m_3(\frac{3}{4}l)^2 + \frac{2}{5}m_2R^2 + m_2(l+R)^2 + \frac{1}{12}m_1l^2 + m_1l^2/4 =$$

$$= m_3(\frac{3}{4}l)^2 + \frac{2}{5}m_2R^2 + m_2(l+R)^2 + \frac{1}{3}m_1l^2 = 0.946\ Kg\ m^2$$

Si può quindi ricavare $\omega$ imponendo la conservazione del momento angolare assiale $L_Z^i = L_Z^f$ :

$$\omega = \frac{m_3 v_0 3l}{4I}$$

b) il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo in $A$ durante l'urto del proiettile

$$P = \mathbf{0.16\ N\ s}$$

L'impulso assorbito dal vincolo equivale alla differenza di quantità di moto del sistema subito dopo l'urto rispetto a prima dell'urto.

$$P = m_3 v_0 - (m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3)$$

dove le velocità $v_i$ possono essere calcolate date $\omega$ (trovata al punto precedente) e le distanze dei centri di massa dei tre corpi dal polo $A$, quindi

$$P = m_3 v_0 - (m_1 \omega \frac{l}{2} + m_2 \omega (l+R) + m_3 \omega \frac{3}{4} l)$$

c) la velocità del proiettile $v_0$ necessaria affinchè la sfera raggiunga un'altezza pari a $l/2$ rispetto alla sua altezza iniziale, i.e. $h_2 = l/2$

$$v_0^{min} = \mathbf{436\ m/s}$$

Considerando che il vincolo in $A$ non può compiere lavoro e che le rimanenti forze in gioco sono la forza di gravità e la forza elastica della molla, entrambe conservative, possiamo scrivere un'energia potenziale

$$U = U_k + U_g = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 + g(m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3).$$

Sfruttando la conservazione dell'energia meccanica e sapendo che per arrivare all'altezza indicata e' necessaria un'energia cinetica minima (e quindi una velocità iniziale minima) tale che

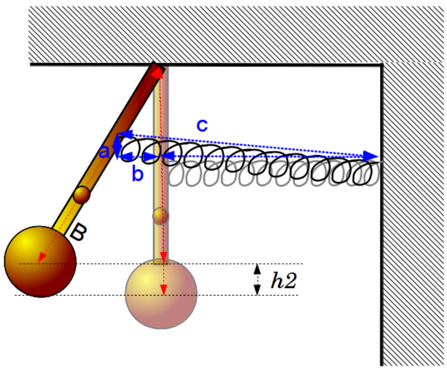
$$U(h_2 = \frac{l}{2}) + 0 = 0 + E_{kin} = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{2U(h_2 = \frac{l}{2})}{I}} = \frac{m_3 v_0 3l}{4I}$$

quindi

$$v_0 = \sqrt{\frac{2U(h_2 = \frac{l}{2})}{I}} \frac{4I}{m_3 3l}$$

dobbiamo solo calcolare $U(h_2 = \frac{l}{2})$, ovvero l'energia potenziale per l'altezza indicata.
Si tratta quindi di esprimere $\Delta x$, $h_1$ e $h_3$ in funzione di $h_2$ visto che ci viene dato il valore di $h_2$.

Le relazioni geometriche in questione si possono ricavare dalle costruzioni in figura:




In particolare è utile ricavare l'angolo $\theta$ compiuto dalla sbarretta in funzione di $h_2$ :

$$h_2 = (l+R)(1 - cos\theta) \Rightarrow (1 - cos\theta) = \frac{h_2}{l+R} \Rightarrow \theta = arccos(1 - \frac{h_2}{l+R})$$

inserendo i valori numerici otteniamo $\theta = 0.99$.

$$\Delta x = c - l = \sqrt{a^2 + (b+l)^2} - l$$

con $a$, $b$ e $c$ indicati in figura e che possiamo scrivere come

$$a = \frac{l}{2}(1 - cos\theta)$$

$$b = \frac{l}{2} sin\theta$$

da cui $\Delta x = 44$ cm.
Per finire $h_1$ e $h_3$ risultano essere

$$h_1 = \frac{l}{2}(1 - cos\theta)$$

$$h_3 = \frac{3l}{4}(1 - cos\theta).$$

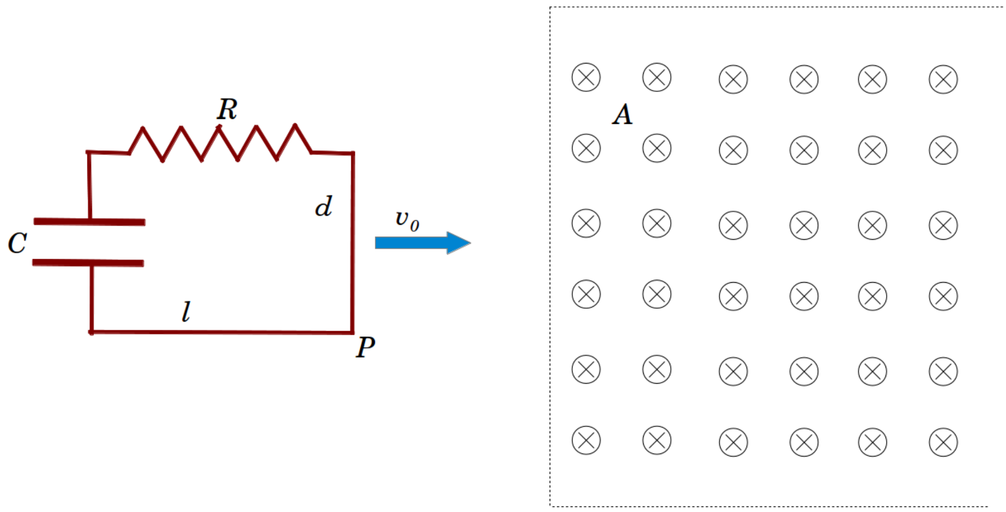
Possiamo quindi calcolare il valore di $U$ all'altezza $h_2$ data, che risulta essere $U = 5.67$ J

La velocità minima del proiettile si ottiene sostituendo $U$ nella formula precedentemente ricavata

$$v_0^{min} = \sqrt{\frac{2U(h_2 = \frac{l}{2})}{I}} \frac{4I}{m_3 3l}$$

*(punteggio: 1.a-c = 5 punti )*

## Esercizio 2




Un circuito rettangolare di lati $l = 20$ cm e $d = 10$ cm si muove con velocità costante $v_0 = 10$ m/s nel piano e raggiunge una zona A nella quale è presente un campo magnetico costante B di 5 Tesla perpendicolare al piano . Una forza opportuna viene applicata al circuito quando entra nella zona interessata dal campo magnetico per cui il circuito continua a spostarsi con velocità costante $v_0$ anche nella zona A. Nel circuito è presente una resistenza R di 10 $K\Omega$ ed un condensatore cilindrico di altezza $d$ con armatura interna di raggio 1 cm ed armatura esterna distante 10$\mu$m da quella interna (ovvero $r_{ext} = r_{int} + 10\mu$m) inizialmente scarico. Tra le armature del condensatore è presente un dielettrico con costante relativa $\epsilon_R = 80$

Calcolare:

a) Il potenziale ai capi del condensatore quando l'estremo P del circuito ha percorso un tratto $l/2$ nella zona interessata dal campo magnetico

$$\Delta V = \mathbf{4.47V}$$

La f.e.m. indotta sul circuito dalla variazione del flusso di campo magnetico risulta essere

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

poiché $v_0$ è costante e dato che mentre il circuito entra nella zona A si può scrivere il flusso come

$$\Phi_B = Bdv_0t$$

la f.e.m. risulta essere costante e uguale a

$$\epsilon = -Bdv_0$$

Il condensatore si caricherà quindi attraverso la resistenza R secondo la soluzione dell'equazione differenziale ottenuta dalla legge di Kirkhoff per le tensioni e dalla definizione di capacità di un condensatore:

$$0 = I(t)R + \Delta V(t) - \epsilon = I(t)R + \frac{Q}{C} - \epsilon$$

ovvero

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\epsilon}{R} - \frac{Q(t)}{RC}$$

la cui soluzione è

$$Q(t) = \epsilon C(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Il tempo necessario al circuito a precorrere un tratto $\frac{l}{2}$ è

$$t_{l/2} = \frac{l}{2v_0}.$$

Quindi la tensione ai capi del condensatore sarà

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = -Bdv_0(1 - e^{-\frac{l}{2v_0RC}})$$

b) La potenza istantanea dissipata in quell' istante dalla resistenza.

$$P = \mathbf{27}\ \mu\mathbf{W}$$

Questa si può calcolare da $I(t)R + \Delta V(t) - \epsilon = 0$ sapendo che la potenza dissipata da una resistenza per effetto Joule è $P = I^2 R$, quindi

$$P = I^2 R = \frac{(\Delta V(t) - \epsilon)^2}{R}$$

c) Il lavoro compiuto dalla forza fino a quel momento.

$$L = \mathbf{9.9}\ \mu\mathbf{J}$$

Il lavoro compiuto dalla forza sarà uguale alla somma dell'energia potenziale del condensatore in quel momento e dell'energia dissipata dalla resistenza fino a quel momento

$$L = \frac{1}{2} C \Delta V^2 + \int_0^t R I(t)^2 dt$$

Derivando l'espressione temporale per $Q(t)$ si ricava $I(t)$

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{\epsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

andando a sostituire nell'integrale

$$L = \frac{1}{2} C \Delta V^2 + \int_0^t \frac{\epsilon^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} dt =$$

$$= \frac{1}{2} C \Delta V^2 + \frac{\epsilon^2}{R} \int_0^t e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{1}{2} C \Delta V^2 + \frac{C\epsilon^2}{2} \int_0^t e^{\frac{2t}{RC}} d(\frac{2t}{RC}) =$$

$$= \frac{1}{2} C \Delta V^2 + \frac{C\epsilon^2}{2} (1 - e^{-\frac{2t}{RC}})$$

*(punteggio: 2.a-c = 5 punti )*

Corso di Laurea: **Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 5/07/2013**
**Cognome : .................................................. Nome : ..................................................**

**Matricola: .................................................. Anno di corso : ........................................**

# Esercizio 1

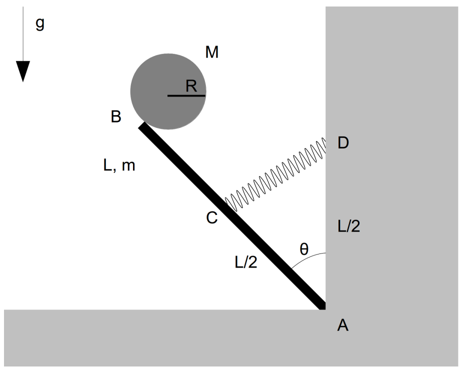



Figura 1:

Un'asta rigida di massa $m = 1.00\,\text{kg}$ e lunghezza $L = 1.00\,\text{m}$ è incernierata senza attrito al suo estremo A e può ruotare nel piano verticale. All'estremo B dell'asta è saldata una sfera di massa $M = 3.00\,\text{kg}$ e raggio $R = 25.0\,\text{cm}$. L'asta è vincolata alla parete verticale tramite una molla fissata al centro C dell'asta ed il punto D sulla parete ad altezza $L/2$. La molla ha costante elastica $k$ sconosciuta e lunghezza a riposo nulla. Inizialmente il sistema è in equilibrio e l'asta forma con l'asse verticale un angolo $\theta = 30.0°$.

a) Calcolare la distanza tra il punto $A$ e il centro di massa $O$ del sistema asta + sfera:

$$|\overline{OA}| = ...........................$$

b) Calcolare la costante elastica della molla affinchè il sistema resti in equilibrio:

$$k = ...........................$$

Se la molla si rompe,

c) calcolare con quale velocità l'estremo B dell'asta urta il piano orizzontale:

$$v_B = ...........................$$

## Esercizio 2

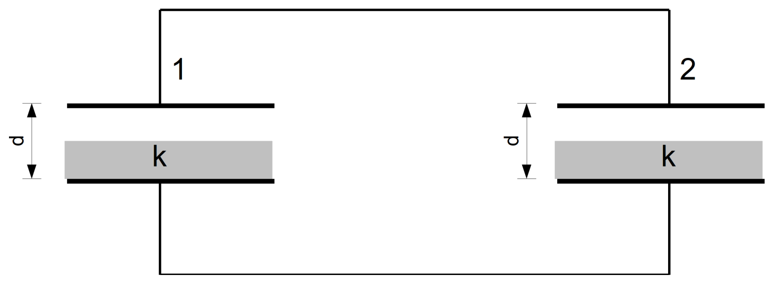



Figura 2:

Due condensatori a facce piane e parallele identici sono costituiti da due armature di area $= 200\,\mathrm{cm}^2$ separate da una distanza $d = 5.00\,\mathrm{mm}$ e sono collegate come in Figura 2. In ciascuno dei condensatori è inserita per metà spessore una lastra di materiale dielettrico di constante dielettrica relativa al vuoto $\epsilon_r = 2.00$. Sapendo che la carica sulle armature di ciascun condensatore nelle condizioni iniziali è $q = 6.00\,\mathrm{mC}$,

a) calcolare la differenza di potenziale elettrostatico tra le due armature;

$$|\Delta V_{armature}| = \text{............................}$$

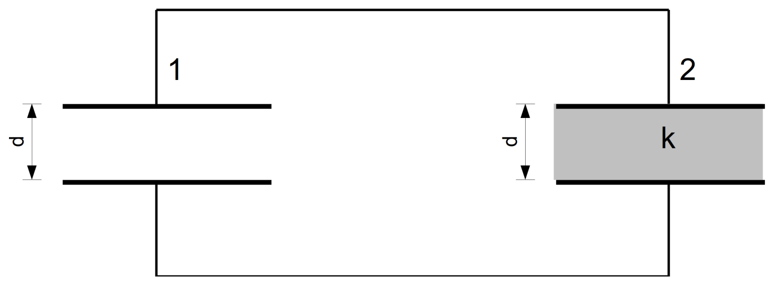



Figura 3:

Supponiamo ora di rimuovere una delle due lastre di dielettrico e di inserirlo nell'altro fino a riempire completamente lo spazio fra le armature (vedi Figura 3).

b) Calcolare la carica finale sulle armature di ciascun condensatore:

$$q_1 = \text{............................}$$

$$q_2 = \text{............................}$$

c) La variazione di energia elettrostatica:

$$\Delta E_{elettrostatica} = \text{............................}$$

*(punteggio: 1.a = 5 punti, 1.b = 5 punti, 1.c = 5 punti, 2.a = 5 punti, 2.b = 5 punti, 2.c = 5 punti)*

Corso di Laurea: **Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 5/07/2013**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : ......................................**

# Esercizio 1

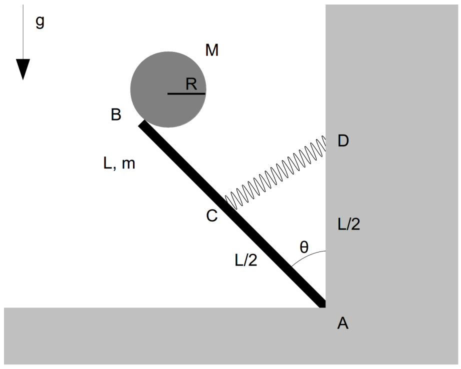



Figura 1:

a) Fissando l'asse $x$ lungo l'asta, e l'origine degli assi nel punto A, otteniamo che il centro di massa ha coordinate:

$$\begin{cases} x_{CM} & = \frac{M \cdot L + m \cdot L/2}{M+m} = 0.875\,\text{m} \\ y_{CM} & = \frac{M \cdot R + m \cdot 0}{M+m} = 0.188\,\text{m} \end{cases}$$

Pertanto la distanza $\overline{OA}$ è pari a:

$$\overline{OA} = \sqrt{x_{CM}^2 + y_{CM}^2} = 0.895\,\text{m}$$

L'angolo compreso tra il segmento $\overline{OA}$ e l'asta è:

$$\theta_0 = \arctan \frac{y_{CM}}{x_{CM}} = 0.211\,\text{rad}$$

b) Il sistema è in equilibrio stabile e quindi è in un minimo dell'energia potenziale. L'energia potenziale gravitazionale del sistema è data da:

$$E_{gravit}(\theta) = (M+m) \cdot g \cdot h_{CM} = (M+m) \cdot g \cdot \overline{OA} \cdot \cos(\theta - \theta_0)$$

L'energia potenziale elastica è invece determinata da:

$$E_{molla}(\theta) = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}k\big((L/2 \cdot \sin\theta)^2 + (L/2 \cdot (1-\cos\theta))^2\big) = \frac{1}{2}k(L/2)^2(2 - 2\cos\theta)$$

Imponiamo il minimo dell'energia potenziale:

$$\frac{d\,(E_{gravit}(\theta) + E_{molla}(\theta))}{d\,\theta} = -(M+m) \cdot g \cdot \overline{OA} \cdot \sin(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2}k(L/2)^2 2\sin\theta = 0$$

Da cui si ottiene la relazione:

$$k = \frac{(M+m) \cdot g \cdot \overline{OA} \cdot \sin(\theta - \theta_0)}{(L/2)^2(\sin\theta)} = 86.3\,\text{N/m}$$

c) L'energia potenziale dell'asta, subito dopo la rottura della molla e quando tocca terra, è pari a:

$$\begin{aligned} E_{gravit}^{iniz} &= (M+m) \cdot g \cdot h_{CM} = (M+m) \cdot g \cdot \overline{OA} \cdot \cos(\theta - \theta_0) = 33.4\,\text{J} \\ E_{gravit}^{fin} &= (M+m) \cdot g \cdot h_{CM} = (M+m) \cdot g \cdot \overline{OA} \cdot \cos(\pi/2 - \theta_0) = 7.36\,\text{J} \end{aligned}$$

Per la conservazione dell'energia, l'energia cinetica finale è pari alla variazione di energia potenziale (inizialmente l'asta è ferma):

$$E_{gravit}^{fin} - E_{gravit}^{iniz} = E_{cinetica}^{fin} = \frac{1}{2} I \omega_{fin}^2 \Longrightarrow \omega_{fin} = \sqrt{\frac{2E_{gravit}^{fin} - 2E_{gravit}^{iniz}}{I}} = 3.81\,\mathrm{rad/s}$$

Dove $I$ è stato calcolato come:

$$I = \frac{1}{3} mL^2 + \frac{2}{5} MR^2 + M(L^2 + R^2) = 3.60\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Quindi la velocità del punto B si può calcolare come:

$$v_B = \omega_{fin} \cdot L = 3.81\,\mathrm{m/s}$$

## Esercizio 2

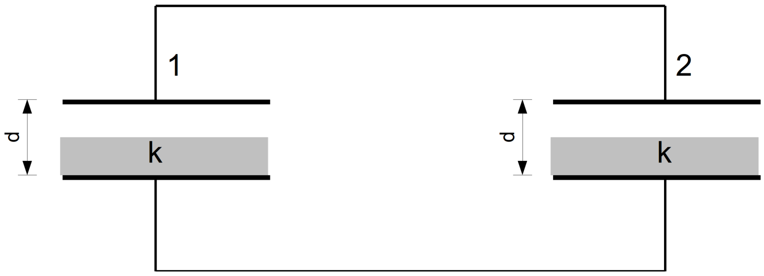



Figura 2:

a) Ogni singolo condensatore è schematizzabile come due condensatori, il primo con dielettrico e il secondo senza, disposti in serie e di spessore $d/2$. La capacità totale dei singoli condensatori è quindi data da:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{dielettrico}} + \frac{1}{C_{vuoto}} = \frac{d/2}{\epsilon_0 A}\left(\frac{1}{\epsilon_r} + 1\right) \Longrightarrow C_1 = C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{d/2}\frac{1}{\frac{1}{\epsilon_r} + 1} = 47.2\,\mathrm{pF}$$

Dove è stata utilizzata la relazione $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$. I due condensatori, essendo in parallelo, hanno la stessa differenza di potenziale:

$$\Delta V_{armature} = \frac{q_{iniziale}}{C_1} = \frac{q_{iniziale}}{C_2} = 127\,\mathrm{MV}$$

b) .

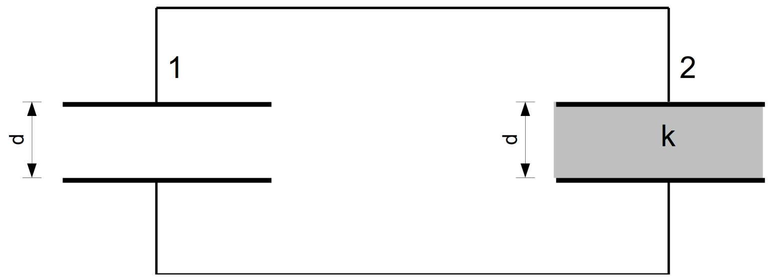



Figura 3:

I due condensatori in parallelo devono mantenere la condizione $\Delta V_1 = \Delta V_2 \Longrightarrow \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$. Per la conservazione di carica deve anche valere $q_1 + q_2 = 2\,q_{iniziale}$, dove $q_{iniziale}$ è la carica iniziale presente nelle armature. Dalle due relazioni è quindi possibile ottenere le cariche finali $q_1$ e $q_2$:

$$\begin{cases} \frac{q_1}{C_1} = & \frac{q_2}{C_2} \\ q_1 + q_2 = & 2\,q_{iniziale} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} q_1 = & \frac{2q_{iniziale}}{1+\frac{C_2}{C_1}} = 4.0\,\mathrm{mC} \\ q_2 = & \frac{2q_{iniziale}}{1+\frac{C_1}{C_2}} = 8.0\,\mathrm{mC} \end{cases}$$

dove $C_1 = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 35.4\,\mathrm{pF}$ e $C_2 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = 70.8\,\mathrm{pF}$.

b) L'energia elettrostatica di un condensatore è data da: $E_{cond} = \frac{1}{2} C \Delta V^2$. Pertanto la differenza di energia elettrostatica del sistema è data da:

$$\Delta E_{elettrostatica} = \frac{1}{2} C_1 \Delta V_{finale}^2 + \frac{1}{2} C_2 \Delta V_{finale}^2 - 2\frac{1}{2} C_{iniziale} \Delta V_{iniziale}^2 = -84\,\mathrm{KJ}$$

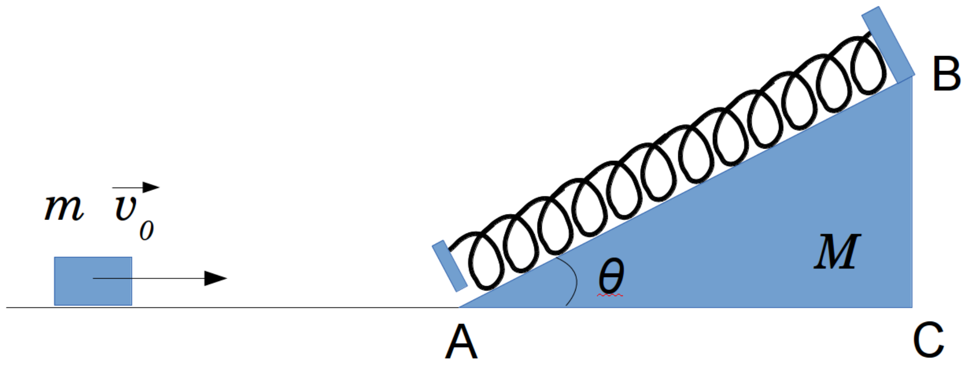
dove $C_{iniziale}$, $V_{iniziale}$, $C_1$, $C_2$ sono già state calcolate nei punti precedenti; mentre $\Delta V_{finale}$ è stata calcolata come: $\Delta V_{finale} = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} = 113\,\mathrm{MV}$.

Corso di Laurea: **Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 26/07/2013**
**Cognome : ..................................................... Nome : .....................................................**

**Matricola: ..................................................... Anno di corso : ........................................**

# Esercizio 1




Un corpo di massa $m = 500$ g si muove scivolando senza attrito con velocità iniziale $v_0 = 10$ m/s su un piano orizzontale fino a quando sale su un piano inclinato di massa $M = 10$ kg, angolo $\theta = \frac{\pi}{6}$, libero anche esso di muoversi, senza attrito, sul piano orizzontale. Il piano inclinato è inizialmente fermo.
All'estremo $B$ del piano inclinato, come mostrato in figura, è fissata una molla di costante elastica $K$ e lunghezza a riposo pari ad $\overline{AB}$. La superficie di $AB$ è scabra ed esercita una forza d'attrito tra i due corpi.

Calcolare:

a) L'altezza massima raggiunta dal corpo $m$ sul piano inclinato supponendo di conoscere l'energia disspiata dalla forza di attrito $E_{diss} = 10$ J

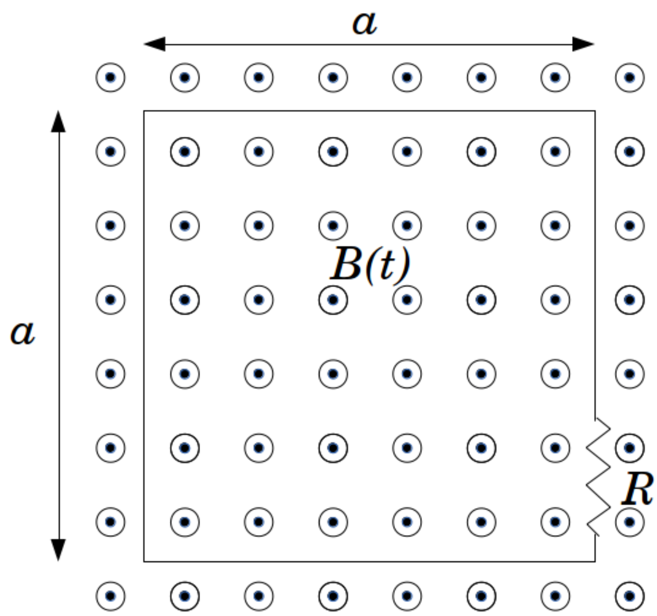
$$h_{max} = ........................$$

b) Ipotizzando che la forza di attrito dissipi la stessa energia $E_{diss}$ anche nella fase di discesa, calcolare la velocità del piano inclinato quando il corpo di massa $m$ ritorna a muoversi sul piano orizzontale

$$v_f = ......................$$

*(punteggio: 1.a = 7 punti, 1.b = 8 punti )*

## Esercizio 2




Una spira conduttrice quadrata di lato $a = 10$ cm si trova immersa in una regione nella quale il campo magnetico è inizialmente nullo. Un tratto della spira di lunghezza $d = 2$ cm ha una resistività $\rho = 10^{-2}\Omega m$ e sezione $S = 1\ mm^2$ mentre il resto della spira ha resistività trascurabile.
Ad un dato istante $t = 0$ l'intera regione viene interessata da un campo magnetico uniforme e perpendicolare alla spira, come mostrato in figura. Il campo $B(t)$ aumenta nel tempo secondo la relazione $\frac{dB}{dt} = Kt$.
Sapendo che all'istante $t_1 = 10$ s nella spira circola una corrente di 0.15 mA e trascurando i fenomeni di autoinduzione, si calcoli:

a) Il valore di $B(t)$ per $t = t_1$ e il valore di $K$ e la sua unità di misura

$B(10s) =$ ........................ $K =$ .................... $[K] =$ ...................

b) La carica complessiva circolata nella spira nei primi 10 s

$Q =$ ................................

c) L'energia dissipata per effetto joule nello stesso intervallo di tempo

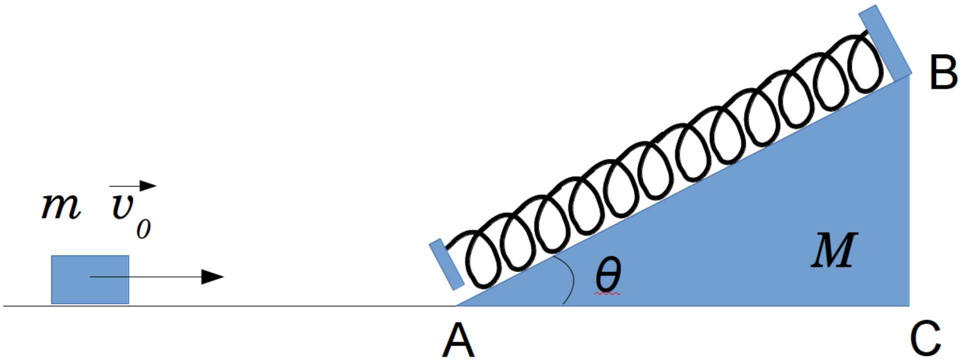
$E =$ .............................

*(punteggio: 2.a-c = 5 punti )*

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 26/07/2013**
**SOLUZIONI**

# Esercizio 1




Un corpo di massa $m = 500$ g si muove scivolando senza attrito con velocità iniziale $v_0 = 10$ m/s su un piano orizzontale fino a quando incontra un piano inclinato di massa $M = 10$ kg, angolo $\theta = \frac{\pi}{6}$, libero anche esso di muoversi senza attrito sul piano orizzontale. Il piano inclinato è inizialmente fermo.
All'estremo $B$ del piano inclinato, come mostrato in figura, è fissata una molla di costante elastica $K = 15$ $N/m$ e lunghezza a riposo pari ad $\overline{AB}$. La superficie di $AB$ è scabra ed esercita una forza d'attrito tra i due corpi.

Calcolare:

a) L'altezza massima raggiunta dal corpo $m$ sul piano inclinato supponendo di conoscere l'energia disspiata dalla forza di attrito $E_{diss} = 10$ J

La variazione di energia meccanica del sistema è uguale all'energia dissipata dall'attrito. Quando il corpo di massa $m$ giunge all'altezza massima esso sarà fermo rispetto al piano inclinato, ovvero i due corpi si muoveranno entrambi con la stessa velocità che indichiamo $v_f$.
Inoltre visto che l'unica forza esterna al sistema è la forza di gravità che ha solo componente verticale, la quantità di moto lungo l'asse orizzontale sarà conservata. Da questo possiamo ricavare che

$$mv_0 = (m + M)v_f$$

ovvero

$$v_f = \frac{m}{m+M}v_0$$

Possiamo quindi scrivere che:

$$-E_{diss} = \Delta E_{mecc} = E_f - E_i = mgh + \frac{1}{2}k\Delta x^2 + \frac{1}{2}(m+M)v_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

sostituendo $v_f$, $h = \Delta x \cdot sin\theta$ si ottiene

$$-E_{diss} = mg\Delta x \ sin\theta + \frac{1}{2}k\Delta x^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v_o^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

riscrivendo

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 + (mg \ sin\theta)\Delta x + \frac{1}{2}m(\frac{m}{m+M}v_o^2 - v_0^2) + E_{diss} = 0$$

si può risolvere per $\Delta x$

$$\Delta x = \frac{-mg \ sin\theta \pm \sqrt{(mg \ sin\theta)^2 - km(\frac{m}{m+M}v_o^2 - v_0^2 + 2E_{diss}/m)}}{k}$$

scegliamo l'unica soluzione positiva visto che avevamo posto $h = \Delta x \cdot sin\theta$ e che $h$ deve essere positiva. Ovvero $\Delta x = 1.2m$, da cui

$$h_{max} = \Delta x sin\theta = 0.6 \ m$$

c) La velocità del piano inclinato quando il corpo di massa $m$ ritorna a muoversi sul piano orizzontale

Quello che succede tra la condizione iniziale e quella finale può essere visto come un urto anaelastico in cui viene dissipata un energia $2E_{diss}$. Si può quindi risolvere imponendo le condizioni sulla variazione dell'energia e sulla conservazione della quantità di moto. Indicando con $v_1$ e $v_2$ le velocità finali dei due corpi possiamo scrivere

$$mv_0 = mv_1 + Mv_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m}{M}(v_0 - v_1)$$

e

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 + 2E_{diss}$$

mettendo a sistema e risolvendo si ottiene

$$\frac{M+m}{M}v_1^2 - 2v_0\frac{m}{M}v_1 - v_0^2 + \frac{m}{M}v_0^2 + 4E_{diss}/m = 0$$

da cui risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$v_1 = (4.28, -3.33)\ m/s$$

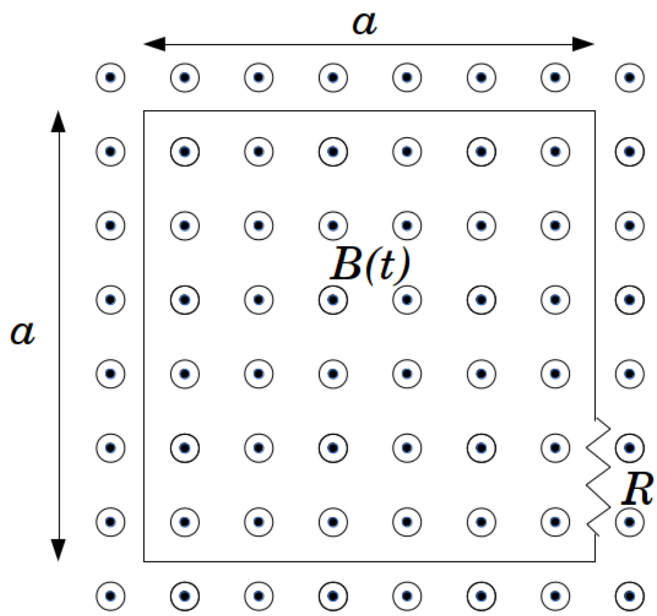
in questo caso scegliamo la soluzione tale per cui il blocco di massa $m$ si allontana verso sinistra rispetto al piano inclinato, ovvero la soluzione per cui si ottiene $v_1 < v2$, considerando che $v_2$ vale rispettivamente, a seconda del valore di $v_1$ usato:

$$v_2 = \frac{m}{M}(v_0 - v_1) = (0.28, 0.67)\ m/s$$

la coppia che verifica $v_1 < v_2$ è

$$v_1 = -3.5\ m/s \qquad v_2 = 0.67\ m/s$$

## Esercizio 2




Una spira conduttrice quadrata di lato $a = 10$ cm si trova immersa in una regione nella quale il campo magnetico è inizialmente nullo. Un tratto della spira di lunghezza $d = 2$ cm ha una resistività $\rho = 10^{-2}\Omega m$ e sezione $S = 1\ mm^2$ mentre il resto della spira ha resistività trascurabile.
Ad un dato istante $t = 0$ l'intera regione viene interessata da un campo magnetico uniforme e perpendicolare alla spira, come mostrato in figura. Il campo $B(t)$ aumenta nel tempo secondo la relazione $\frac{dB}{dt} = Kt$. Sapendo che all'istante $t_1 = 10$ s nella spira circola una corrente di 0.15 mA e trascurando i fenomeni di autoinduzione, si calcoli:

a) Il valore di $B(t)$ per $t = t_1$ e il valore di $K$

La variazione di $B$ crea una forza elettro motrice nel circuito

$$\epsilon = \frac{d\phi_B}{dt} = a^2 K t$$

All'istante $t_1$ nel circuito fluisce una corrente $I = 1.5 \cdot 10^{-3} A$ e deve essere soddisfatta l'equazione

$$\epsilon = IR = I\frac{\rho d}{S}$$

da cui si ricava

$$a^2 K t_1 = I\frac{\rho d}{S} \Rightarrow K = I\frac{\rho d}{a^2 S t_1} = 0.3T/s^2$$

Il valore di $B$ si ricava integrando la sua derivata e ponendo la condizione che $B(0) = 0$, ovvero

$$B(t_1) = \int_0^{t_1} \frac{dB}{dt} dt = \int_0^{t_1} K t dt = \frac{1}{2} K t_1^2 = 15T$$

b) La carica complessiva circolata nella spira nei primi 10 s La carica circolata si può calcolare integrando la corrente nel dato intervallo di tempo. Visto che

$$I(t) = \frac{\epsilon}{R} = \frac{a^2 K t}{R}$$

la carica sarà

$$Q = \int_0^{t_1} I(t) dt = \int_0^{t_1} \frac{a^2 K t}{R} dt = \frac{a^2 K}{2R} t_1^2 = 750\ \mu C$$

c) L'energia dissipata per effetto joule nello stesso intervallo di tempo La potenza istantanea dissipata al tempo $t$ è

$$P(t) = \frac{\epsilon(t)^2}{R} = \frac{a^4 K^2 t^2}{R}$$

integrando sull'intervallo dato

$$E = \int_0^{t_1} P(t) dt = \int_0^{t_1} \frac{a^4 K^2 t^2}{R} dt = \frac{1}{3} \frac{a^4 K^2}{R} t_1^3 = 15\ \mu J$$

*(punteggio: 2.a-c = 5 punti )*

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 17/09/2013**
**Cognome : .................................................. Nome : ..................................................**

**Matricola: .................................................. Anno di corso : .......................................**

Un carrello è costituito da un blocco di massa $M = 500$ g e da 2 coppie di ruote aventi raggi $r_1 = 10$ cm e $r_2 = 20$ cm e masse rispettivamente $m_1 = 100$ g e $m_2 = 400$ g.
Sapendo che il carrello si muove inizialmente ad una velocità di $v_0 = 10$ m/s su un piano orizzontale, e che il moto delle ruote è di puro rotolamento, si calcolino

a) le velocità angolari delle due ruote e l'energia cinetica totale del carrello.

Le ruote girano senza scivalare e quindi vale:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= v_0/r_1 = 100\,\mathrm{rad/s} \\ \omega_2 &= v_0/r_2 = 50\,\mathrm{rad/s} \end{aligned} \tag{1}$$

l'energia cinetica, traslazionale e rotazionale, è invece data da:

$$\begin{aligned} E_i^{kin} &= \tfrac{1}{2}(M + 2m_1 + 2m_2)v_0^2 + 2\tfrac{1}{2}I_1\omega_1^2 + 2\tfrac{1}{2}I_2\omega_1^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(M + 2m_1 + 2m_2)v_0^2 + 2\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}m_1r_1^2)(\tfrac{v_0}{r_1})^2 + 2\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}m_2r_2^2)(\tfrac{v_0}{r_2})^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(M + 3m_1 + 3m_2)v_0^2 \\ &= 100\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{2}$$

Dopo aver percorso il tratto orizzontale, il carrello si trova su un piano inclinato di altezza $h = 1$ m alla fine del quale, su un piano orizzontale, incontra una molla orizzontale di costante elastica $k = 500$ N/m, inizialmente con lunghezza pari alla sua lunghezza a riposo $l_0 = 2$ m, bloccata ad un estremo come mostrato in figura.
Si calcoli:

b) le velocità angolari delle due ruote alla fine del piano inclinato.

Durante la discesa non agiscono forze dissipative e pertanto vale la conservazione dell'energia. L'energia totale sarà quindi $E = E_i^{cinetica} + (M + 2m_1 + 2m_2)gh = 114\,\mathrm{J}$

Al termine della discesa si avrà solo energia cinetica e pertanto dalla (2) si può ottenere la velocità dopo la discesa:

$$v_f = \sqrt{\frac{2E}{M + 3m_1 + 3m_2}} = 10.7\,\mathrm{m/s}$$

e quindi si può calcolare:

$$\begin{aligned} \omega_1^f &= v_f/r_1 = 107.1\,\mathrm{rad/s} \\ \omega_2^f &= v_f/r_2 = 53.5\,\mathrm{rad/s} \end{aligned} \tag{3}$$

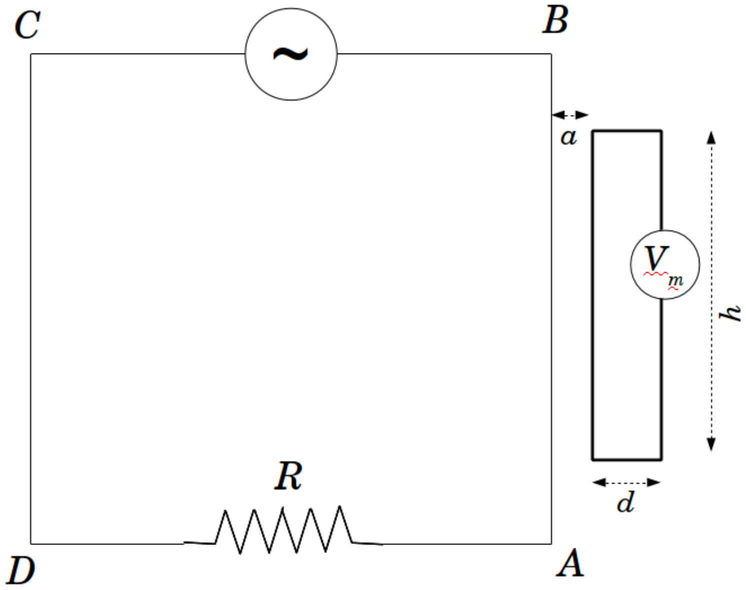
c) la compressione massima della molla.

Durante la compressione della molla non agiscono forze dissipative. La compressione della molla si può quindi ottenere dalla conservazione dell'energia:

$$E = E_{finale} = \frac{1}{2}k\Delta X^2 \Longrightarrow \Delta X = \sqrt{\frac{2E}{k}} = 0.677\,\mathrm{m}$$

$l_{min} =$ ....................................

# Esercizio 2




Il circuito ABCD è costituito da un generatore di tensione alternata ($V(t) = V_0 sin(\omega t)$) di semi-ampiezza $V_0 = 220$ V e una frequenza $\nu = 50$ Hz.
A fianco del tratto AB, ad una distanza $a = 1$ mm, viene posta una spira rettangolare di altezza $h = 50$ cm e larghezza $d = 20$ cm come mostrato in figura sulla quale è possibile misurare la $fem$ indotta grazie ad un voltmetro inicato in figura con $V_m$.
Nel tratto DA del circuito dato è inserita una resistenza $R$.
Si chiedeva di calcolare:

a) La pulsazione $\omega$ corrispondente alla frequenza data e la corrente che percorre il circuito ABCD in funzione di $R$. Dalla definizione di pulsazione e dalla legge di Ohm segue che

$$\omega = 2\pi\nu = 314\ rad/s \qquad I(t, R) = \frac{V_0}{R} sin(2\pi\nu t)$$

b) Il campo magnetico generato dal tratto di filo AB in funzione del tempo, della resistenza $R$ e della distanza $r$ dall'asse del filo. Considerando il tratto di filo AB come infinito possiamo scrivere

$$B(t, r, R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 V_0 sin(2\pi\nu t)}{2\pi R r}$$

c) Il valore misurato dal voltmetro in funzione del tempo e della resistenza $R$ (si può trascurare il campo prodotto dai tratti BC,CD e DA del circuito).
La fem indotta sulla spira rettangolare sarà

$$V_m = f.e.m. = -\frac{d\phi_B}{t}$$

Bisogna pertanto trovare $\phi_B$ in funzione del tempo. Poichè B non è uniforme sarà necessario integrare lungo la distanza radiale dal filo tra gli estremi della spira, ovvero

$$\phi_B = h\int_a^{a+d} B(t, r, R)dr = h\int_a^{a+d} \frac{\mu_0 V_0 sin(\omega t)}{2\pi R r}dr = \frac{\mu_0 V_0 sin(2\pi\nu t)}{2\pi R} h \int_a^{a+d} \frac{1}{r}dr$$

da cui

$$\phi_B = \frac{\mu_0 V_0 sin(2\pi\nu t) h}{2\pi R} ln(\frac{a+d}{a})$$

definendo $\phi_B^{max}$ come

$$\phi_B^{max} = \frac{\mu_0 V_0 h}{2\pi R} ln(\frac{a+d}{a})$$

possiamo scrivere $\frac{d\phi_B}{dt}$ come

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{d(\phi_B^{max} sin(\omega t))}{dt} = \omega cos(\omega t)\phi_B^{max}$$

e quindi

$$V_m(t, R) = -\omega cos(\omega t)\phi_B^{max}$$

Sapendo che la tensione massima letta sul voltmetro è pari a $V_m^{max} = 10\ \mu$V,

d) si calcoli il valore della resitenza $R$ e l'energia dissipata in un periodo

Il valore massimo di $V_m$ si otterrà quando $cos(\omega t) = 1$ e sarà quindi

$$V_m^{max} = \omega B_{max}$$

da cui, ponendo uguale a 10 $\mu$V ed esplicitando $\phi_B^{max}$ si ottiene

$$\frac{\mu_0 V_0}{2\pi R} ln(\frac{a+d}{a})\omega = 10\ \mu V$$

da cui

$$R = \frac{\mu_0 V_0 h}{2\pi 10\ \mu V} ln(\frac{a+d}{a})\omega = 3.7K\Omega$$

Per trovare l'energia dissipata in un periodo possiamo scrivere la potenza istantanea

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{V_0^2}{R} sin^2(\omega t) = 0.13\ J$$

l'energia dissipata in un periodo sarà quindi

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} P(t)dt = \frac{V_0^2}{R} \int_{-\pi}^{\pi} sin^2(\omega t)dt$$

sfruttando il suggerimento dato possiamo riscrivere l'equazione come

$$E = \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} P(t)dt = \frac{V_0^2}{R}\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} sin^2(\omega t) + cos^2(\omega t)dt = \frac{V_0^2}{R}\frac{1}{2\omega} \int_{-\pi}^{\pi} 1dt = \frac{V_0^2}{R}\frac{\pi}{\omega}$$

La potenza media sarà dunque

$$< P >= \frac{E}{T} = \frac{E\omega}{2\pi} = \frac{V_0^2}{2R} = 6.6\ W$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 16/01/2014**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : ......................................**

# Esercizio 1

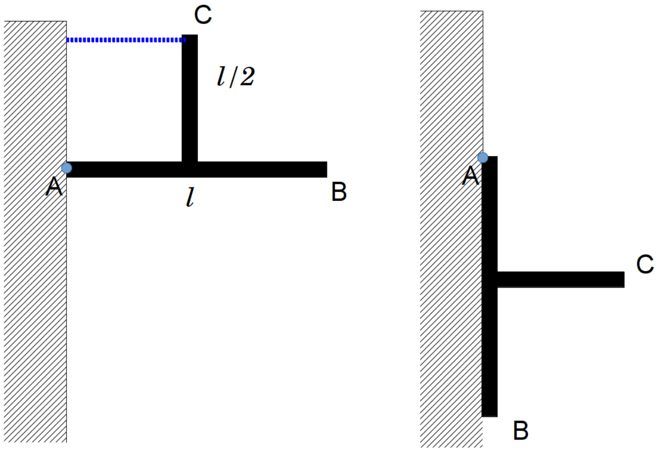



Figura 1:

Consideriamo il corpo rigido mostrato in figura: esso è costituito da due sbarre sottili (una di lunghezza $l = 80\,\text{cm}$ e una di lunghezza $l/2$) saldate fra loro come in figura nel punto mediano di $\overline{AB}$; la massa complessiva del corpo è pari a $M = 100\,\text{kg}$. L'estremo $A$ del corpo rigido è ancorato ad una parete verticale tramite una cerniera (che ne permette la libera rotazione in un piano verticale). Il sistema è mantenuto in equilibrio statico nella disposizione in figura tramite una fune orizzontale che connette l'estremo $C$ della barretta più corta alla parete. Si noti che in tale disposizione la barretta più lunga è orizzontale. Determinare:

a) la tensione della corda:

$$|\vec{T}| = \text{...........................} ;$$

b) il modulo della reazione della cerniera:

$$|\vec{F_c}| = \text{...........................} .$$

Ad un certo istante la corda si spezza ed il corpo rigido inizia a cadere ruotando intorno al punto $A$. Determinare:

c) la velocità angolare del corpo rigido nell'istante in cui esso urta la parete verticale:

$$|\omega| = \text{...........................}$$

### Soluzione

a) Il corpo è all'equilibrio, quindi il momento totale delle forze che agiscono su di esso è nullo. Se consideriamo come polo il punto $A$, i momenti delle forze $|\vec{M}_T|$ e $|\vec{M}_P|$, dovuti alla tesione della corda e alla forza peso del corpo, sono pari a:

$$|\vec{M}_T| = |\vec{T}| \cdot l/2$$

$$|\vec{M}_P| = Mg \cdot l/2$$

da cui si ottiene:

$$|\vec{M}_P| = |\vec{M}_T| \Longrightarrow |\vec{T}| = Mg = 981\,\text{N}.$$

b) Il corpo è all'equilibrio, quindi il forza totale che agisce su di esso è nulla:

$$M\vec{g} + \vec{T} + \vec{F_C} = 0 \Longrightarrow \vec{F_C} = -M\vec{g} - \vec{T}$$

dove $\vec{F_C}$ è la forza che la cerniera applica sul corpo rigido. Dato che la forza peso e la tensione della corda sono ortogonali abbiamo che:

$$|\vec{F_C}| = \sqrt{|Mg|^2 + |\vec{T}|^2} = \sqrt{2}Mg = 1387\,\mathrm{N}$$

c) Non sono presenti forze dissipative, pertanto possiamo usare la conservazione dell'energia. La variazione di energia potenziale dell'asta orizzontale e verticale sarà data da:

$$\Delta U_{vert} = M/3 \cdot g[l/4 - (-l/2)] = 1/4\, Mgl$$

$$\Delta U_{oriz} = 2/3 \cdot Mg[0 - (-l/2)] = 1/3\, Mgl$$

$$\Delta U_{tot} = \Delta U_{vert} + \Delta U_{oriz} = 7/12\, Mgl$$

Il momento d'inerzia delle due aste sarà pari a:

$$I_{vert} = 1/3 \cdot M/3 \cdot (l/2)^2 + M/3\,(l/2)^2$$

$$I_{oriz} = 1/3 \cdot 2M/3 \cdot (l)^2$$

$$I_{tot} = I_{vert} + I_{oriz} = 1/3\, Ml^2$$

Si può quindi calcolare $\omega$:

$$\Delta U_{tot} = 1/2\, I_{tot}\omega^2 \Longrightarrow \omega = \sqrt{(2\Delta U_{tot})/(I_{tot})} = \sqrt{7/2\, g/l} = 6.55\,\mathrm{rad/s}$$

# Esercizio 2

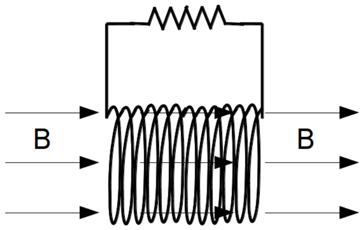



Figura 2:

Un solenoide rettilineo costituito da $N = 10^3$ spire di area $A = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$, è chiuso su una resistenza $R = 30\,\Omega$ e immerso in un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme e parallelo al suo asse. A partire dall'istante $t = 0$ il campo magnetico diminuisce secondo la legge $B(t) = B_0 - \alpha t^2$ e dopo un tempo $t_0 = 3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}$ si annulla; in questo intervallo di tempo nella resistenza $R$ fluisce una carica complessiva pari $q = 10^{-4}\,\mathrm{C}$. Si trascurino gli effetti di auto-induzione. Determinare:

a) la legge $I = I(t, B_0)$ con cui varia la corrente nel circuito e il valore $I_0 = I(t = 0, B_0)$, entrambi espressi in funzione di $B_0$:

$$I(t, B_0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad I_0(B_0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

b) i valori di $B_0$ e $\alpha$;

$$B_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

c) l'energia $W$ dissipata nel circuito nell'intervallo di tempo $t_0$:

$$W = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

**Soluzione**

a) Dato che il campo magnetico si annulla dopo un tempo $t_0$ possiamo imporre:

$$0 = B(t = t_0) = B_0 - \alpha t_0^2 \Longrightarrow \alpha = \frac{B_0}{t_0^2} \Longrightarrow B(t) = B_0 \left[1 - \left(\frac{t}{t_0}\right)^2\right]$$

Il flusso totale del campo magnetico che attraversa le spire del solenoide è pari a:

$$\Phi_B = N \cdot B(t) \cdot A = NAB_0 \left[1 - \left(\frac{t}{t_0}\right)^2\right]$$

La forza elettromotrice indotta sarà quindi:

$$fem = -\frac{d\Phi_B}{dt} = NAB_0 \left[\frac{2t}{t_0^2}\right]$$

Da cui si trova:

$$I(t, B_0) = \frac{V(t)}{R} = \frac{NAB_0}{R}\frac{2t}{t_0^2} = (11.1\,\mathrm{A/Ts}) \cdot B_0 t$$

b) La carica elettrica che attraversa la resistenza si può calcolare come:

$$q = \int_0^{t_0} I(t)dt = \int_0^{t_0} \frac{NAB_0}{R}\frac{2t}{t_0^2}dt = \left[\frac{NAB_0}{R}\frac{t^2}{t_0^2}\right]_0^{t_0} = \frac{NAB_0}{R}$$

$$\Longrightarrow B_0 = \frac{qR}{NA} = 6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T} \Longrightarrow \alpha = 0.66\,\mathrm{T/s^2}$$

c) L'energia dissipata è pari ha:

$$\int_0^{t_0} P_{diss}dt = \int_0^{t_0} RI(t)^2 dt = \int_0^{t_0} R\left(\frac{NAB_0}{R}\frac{2t}{t_0^2}\right)^2 dt = R\int_0^{t_0}\left(q\frac{2t}{t_0^2}\right)^2 dt = \frac{4}{3}\frac{Rq^2}{t_0} = 1.33 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}$$

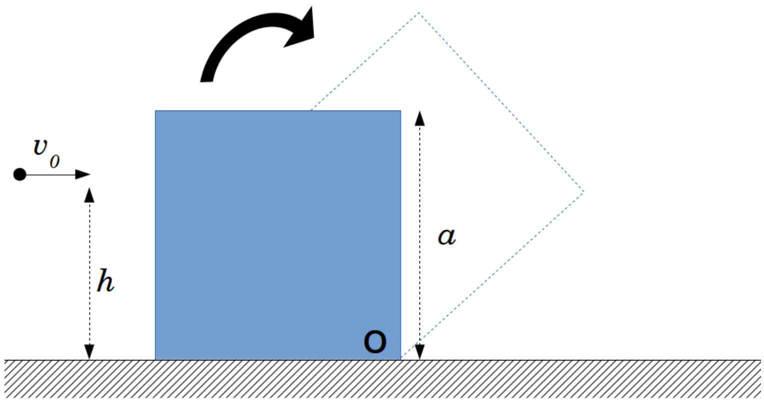
*(punteggio: 1.a = 5 punti, 1.b = 5 punti, 1.c = 5 punti, 2.a = 5 punti, 2.b = 5 punti, 2.c = 5 punti)*

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 04/02/2014**
**Cognome : .................................................. Nome : ..................................................**

**Matricola: .................................................. Anno di corso : ........................................**

# Esercizio 1




Un proiettile di massa $m = 100$ g viene sparato ad una altezza $h$ contro un cubo di legno di lato $a = 30$ cm e densita' $\rho = 0.8$ g/cm$^3$ La velocità del proiettile è orizzontale e pari a $V_0 = 100$ m/s; si consideri istantanea la penetrazione del proiettile nel legno e facciamo l' ipotesi che il proiettile si fermi a distanza $d = a/2$ dalla parete di ingresso.
Il cubo di legno si trova su una superficie scabra con attrito radente caratterizzato da un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.7$.

a) Supponendo che $h = a/2$, calcolare la distanza percorsa dal cubo prima di fermarsi.

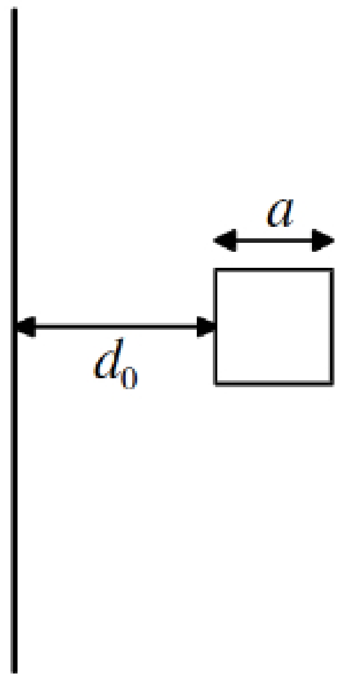
$d =$ ......................

b) Calcolare a che altezza $h$ occorre colpire il cubo per fare in modo che subito dopo l'urto il cubo ruoti di $\pi/2$ (senza scivolare) intorno allo spigolo O (in questo caso si consideri il cubo incernierato in O. Momento di inerzia di un cubo rispetto ad un asse passante per il suo baricentro $I = \frac{1}{6}ma^2$

$h =$ ......................

*(punteggio: 1.a = 5 punti, 1.b = 10 punti )*

# Esercizio 2




Una spira quadrata di lato $a = 10$ cm e resistenza $R = 0.5\ \Omega$ si trova a distanza $d = 10$ cm da un filo indefinito percorso da una corrente variabile nel tempo. In particolare, nell'intervallo di tempo compreso fra 0 e 4 s la corrente ha un andamento del tipo: $I(t) = A(t_0 - t)t$ con $A = 100A/s^2$ e $t_0 = 4$ s. La spira è indeformabile ed è trattenuta nella sua posizione iniziale da una forza opportuna.

Trovare

a) l'espressione della fem indotta nella spira in funzione del tempo ed il suo valore massimo (5punti)

$f.e.m.(t) =$ ........................ $f.e.m._{max} =$ ...........................

b) l' istante in cui la fem si annulla (5 punti)

$t =$ ........................

c) gli istanti in cui la forza con la quale si deve trattenere la spira nella sua posizione e' massima in modulo (5punti)

$t =$ ....... , ........... , .......... , .......... ,

]

*(punteggio: 2.a.b.c = 5 punti )*

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 04/02/2014**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1

cubo.png

Un proiettile di massa $m = 100$ g viene sparato ad una altezza $h$ contro un cubo di legno di lato $a = 30$ cm e densita' $\rho = 0.8$ g/cm$^3$ La velocità del proiettile è orizzontale e pari a $V_0 = 100$ m/s; si consideri istantanea la penetrazione del proiettile nel legno e facciamo l' ipotesi che il proiettile si fermi a distanza $d = a/2$ dalla parete di ingresso.
Il cubo di legno si trova su una superficie scabra con attrito radente caratterizzato da un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.7$.

a) Supponendo che $h = a/2$, calcolare la distanza percorsa dal cubo prima di fermarsi.

$$d = \text{.......................}$$

Nell'urto si conserva la quantità di moto $P$, quindi

$$\Delta P = \rho * a^3 V_f + mV_f - mV_0 = 0$$

dove si è posto che $V_f^{proiettile} = V_f^{cubo}$, visto che il proiettile resta conficcato nel cubo. quindi si ottiene

$$V_f = \frac{mV_0}{\rho * a^3 + m}$$

Il moto del cubo dopo l'urto è uniformemente decelerato

$$F_a = \mu_d M g = Ma \quad \Rightarrow \quad a = \mu_d g$$

La legge oraria della velocità del blocco sarà quindi

$$V(t) = 0 = V_f - \mu_d g t$$

da cui si può ricavare $t$

$$t_{stop} = \frac{V_f}{\mu_d g}$$

inserendo $t_{stop}$ nella legge oraria del moto uniformemente decelerato si ottiene

$$d = V_f t_{stop} - \frac{1}{2}\mu_d g t_{stop}^2$$

b) Supponendo adesso il cubo incernierato lungo lo spigolo O, calcolare la velocità angolare con cui ruota il cubo subito dopo l'urto, in funzione dell'altezza $h$ a cui viene colpito, sapendo che il momento di inerzia di un cubo è $I = \frac{1}{6}ma^2$

$$\omega(h) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il momento angolare rispetto a $O$ si conserva, quindi

$$I\omega = mV_0h \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{mV_0h}{I}$$

c) Calcolare a che altezza $h$ occorre colpire il cubo per fare in modo che subito dopo l'urto il cubo ruoti di $\pi/2$ (senza scivolare) intorno allo spigolo O (in questo caso si consideri il cubo incernierato in O. Momento di inerzia di un cubo rispetto ad un asse passante per il suo baricentro $I = \frac{1}{6}ma^2$

$$h = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'energia meccanica si conserva dopo l'urto, per ruotare di $\pi/2$ il baricentro del cubo si alza di $\Delta y = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$ da cui

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \rho a^3 g \Delta y$$

sostituendo

$$\frac{1}{2}I(\frac{mV_0h}{I})^2 = \rho a^3 g \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

da cui

$$h = \frac{\sqrt{\rho a^4 g(\sqrt{2} - 1)I}}{mV_0}$$

*(punteggio: 1.a,b,c = 5 punti)*

# Esercizio 2

`spira2.png`

Una spira quadrata di lato $a = 10$ cm e resistenza $R = 0.5\ \Omega$ si trova a distanza $d = 10$ cm da un filo indefinito percorso da una corrente variabile nel tempo. In particolare, nell'intervallo di tempo compreso fra 0 e 4 s la corrente ha un andamento del tipo: $I(t) = A(t_0 - t)t$ con $A = 100A/s^2$ e $t_0 = 4$ s. La spira è indeformabile ed è trattenuta nella sua posizione iniziale da una forza opportuna.

Trovare

a) l'espressione della fem indotta nella spira in funzione del tempo ed il suo valore massimo (5punti)

$$f.e.m.(t) = \text{.......................} \qquad f.e.m._{max} = \text{..........................}$$

Il campo magnetico generato dal filo è

$$B(t,r) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi}\frac{1}{r}$$

dove $r$ è la distanza dal filo.
Il flusso di campo magnetico attraverso la spira va integrato sull'area della spira ottenendo:

$$\phi_B(t) = \frac{\mu_0 a I(t)}{2\pi}\log\frac{d_0 + a}{a}$$

La $fem$ indotta risulta quindi

$$fem = -\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\log\frac{d_0 + a}{a}(A(t_0 - 2t))$$

La $fem$ decresce linearmente, pertanto il massimo si avrà nell'istante iniziale $t = 0$, quando la $fem$ vale:

$$fem(t=0) = -\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\log\frac{d_0 + a}{a}(At_0)$$

b) l' istante in cui la fem si annulla (5 punti)

$$t = \text{.......................}$$

La $fem$ si annulla per

$$t_0 - 2t = 0 \Longrightarrow t = t_0/2 = 2s$$

c) gli istanti in cui la forza con la quale si deve trattenere la spira nella sua posizione e' massima in modulo (5punti)

$$t = \text{.......} \quad , \quad \text{...........} \quad , \quad \text{..........} \quad , \quad \text{..........} \quad ,$$

Le forze di Lorentz che agiscono sui due segmenti paralleli al filo sono diverse visto che $B(r)$ è diverso. In particolare la forza totale vale

$$F = IaB_1 - IaB_2 = \frac{fem(t)}{R}a \cdot \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + d_0}\right)$$

$$F = (costanti)fem(t)I(t) = (costanti')(t_0 - 2t)(t_0 - t)t = (costanti')(t^3 - 3t_0t^2 + t_0^2 t)$$

i massimi/minimi del polinomio si hanno per:

$$\frac{dF}{dt} = (costanti')(3t^2 - 6t_0t + t_0^2) = 0 \Longrightarrow t = t_0\left(1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

dato che $0 < t < t_0$ basta studiare i punti in: $t = 0; t = t_0; t = t_0\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, in modulo il massimo si trova in:

$$t = t_0 = 4s$$

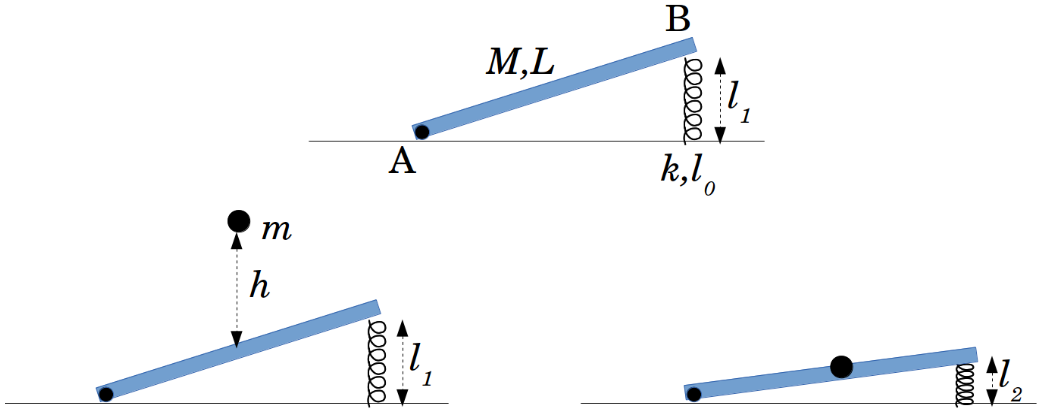
*(punteggio: 2.a.b.c = 5 punti )*

Corso di Laurea: **Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 24/02/2014**
**Cognome :** ................................................ **Nome :** ................................................

**Matricola:** ................................................ **Anno di corso :** .......................................

# Esercizio 1




Un'asta sottile di massa $M = 5$ Kg e lunghezza $L = 1$ m è incernierata a terra come in figura ad un estremo A. Nell'altro estremo B dell'asta è fissata una molla di costante elastica $K = 20\ N/m$ e lunghezza a riposo $l_0$ ancorata a terra come mostrato in figura. Il sistema è inizialmente all'equilibrio.

a) Calcolare la lunghezza della molla nella e la posizione del centro di massa dell'asta nella posizione di equilibrio.

$l_1 =$ ................................... $y_{c.m.} =$ .......................

All'equilibrio il momento totale delle forze che agiscono attorno al punto A è nullo, quindi:

$$M_{tot} = Mg\frac{L}{2}\sin\alpha - TL\sin\alpha$$

dove $T$ è la forza della molla e $\alpha$ è l'angolo compreso tra la molla e l'asta.
Si ottiene dunque:

$$T = \frac{Mg}{2}$$

Dalla relazione $|T| = k|l_1 - l_0|$ si ottiene:

$$l_1 = l_0 - \frac{|T|}{k}$$

Dalla geometria del sistema, l'altezza è:

$$y_{CM} = \frac{l_1}{2}$$

Supponiamo ora che un corpo puntiforme di massa $m = 100$ g cada in verticale da una altezza $h = 20$ m e faccia un urto completamente anelastico con la stessa (dopo l'urto il corpo rimane attaccato all'asta).

b) Calcolare la velocita' angolare istantanea omega con la quale l'asta comincia a ruotare dopo l'urto.

$\omega =$ .......................

La velocità del corpo puntiforme subito prima dell'urto è pari a:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = mg(h - y_{CM}) \Longrightarrow v_i = \sqrt{2g(h - y_{CM})}$$

Il momento angolare prima dell'urto si può calcolare come:

$$L_i = mv_i \frac{\sqrt{L^2 - l_i^2}}{2}$$

dove il braccio è stato calcolato con il teorema di Pitagora.

Il momento di inerzia del sistema dopo l'urto è pari a:

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + m(L/2)^2$$

Durante l'urto l'unica forza impulsiva presente (il vincolo in A) ha braccio nullo, quindi vale la conservazione del momento angolare:

$$L_i = L_f = I\omega \Longrightarrow \omega = \frac{L_i}{I}$$

c) Calcolare la compressione massima della molla $l_2$.

$$l_2 = \text{......................}$$

Dopo l'urto non sono presenti forze dissipative e quindi vale la conservazione dell'energia $E_i = E_f$. Abbiamo che:

$$E_i = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}k(l_1 - l_0)^2 + Mg\frac{l_1}{2}$$

$$E_f = \frac{1}{2}k(l_2 - l_0)^2 + Mg\frac{l_2}{2}$$

Definendo $\Delta l = l_2 - l_0$ , trovo:

$$E_i = E_f = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + Mg\frac{\Delta l + l_0}{2} \Longrightarrow \left(\frac{1}{2}k\right)\Delta l^2 + \left(\frac{1}{2}Mg\right)\Delta l + \left(\frac{1}{2}Mgl_0 - E_i\right)$$

che è un'equazione di secondo grado con

$$a = \left(\frac{1}{2}k\right)$$

$$b = \left(\frac{1}{2}Mg\right)$$

$$c = \left(\frac{1}{2}Mgl_0 - E_i\right)$$

costanti note.

Posso quindi individuare le soluzioni:

$$\Delta l_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e considero la soluzione con $\Delta l$ minore, che corrisponde alla massima compressione.

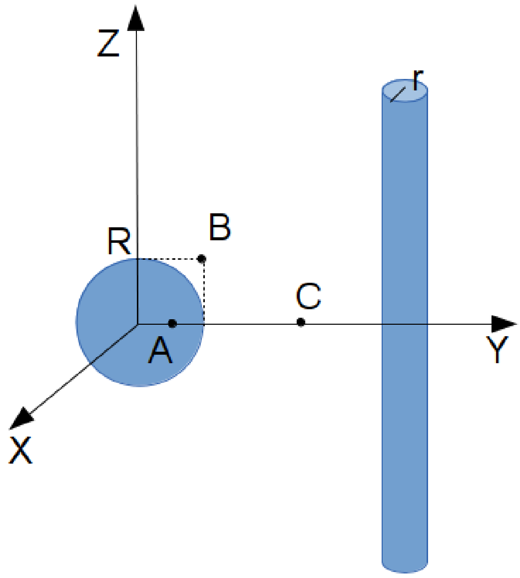
Infine trovo:

$$l_2 = l_0 + \Delta l$$

NB: per semplificare, si consideri la molla sempre verticale.

*(punteggio: 1.a,b,c = 5 punti)*

## Esercizio 2




Una sfera non conduttrice di raggio $R = 10$ cm è caricata con una densità di carica omogenea $+\rho = 10^{-6} C/m^3$ ed è posizionata nell'origine del sistema di riferimento. Un cilindro non conduttore indefinito di raggio $r$ e carico con densità lineare di carica $+\lambda = 10^{-7} C/m$ è posizionato come in figura ad una distanza $l = 3R$ dalla sfera carica.
Calcolare

a) l' intensita' della forza che agisce su una carica $-q = 0.1C$posta nel punto C di coordinate (0,2R,0)

$$F = \text{........................}$$

Il campo elettrico di una sfera, all'esterno, vale:

$$E_{sfera}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

dove $Q = \frac{4}{3}\pi r^3$
Il campo elettrico di una cilindro, all'esterno, vale:

$$E_{cilindro}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

La forza applicata nel punto C sarà dunque pari a:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}_{sfera} + \vec{E}_{cilindro}\right) \Longrightarrow F_y = -|q|\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4R^2} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}\right)$$

b) la componente verticale del campo elettrico nel punto B di coordinate (0,R,R)

$$E_z = \text{......................}$$

Il campo elettrico generato dal cilindro non ha componente lungo $\hat{z}$ per motivi di simmetria. Basta calcolare il campo elettrico generato dalla sfera

$$E_z(B) = |E(B)| \sin 45^\circ = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(\sqrt{2}R)^2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^2}$$

c) il potenziale elettrico nel punto A, interno alla sfera, di coordinate (0, R/2,0)

$$V = \text{....................}$$

Non è possibile calcolare il potenziale rispetto ad un punto a distanza infinita, calcoliamolo quindi rispetto al centro della sfera.

La differenza di potenziale tra due punti esterni al cilindo è pari a:

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{r_f}{r_i}$$

All'interno della sfera il campo elettrico e quindi la differenza di potenziale sono pari a:

$$E_{sfera}(r) = \frac{1}{3}\frac{\rho r}{\epsilon_0} \Longrightarrow \Delta V = \frac{1}{6}\frac{\rho(r_f^2 - r_i^2)}{\epsilon_0}$$

La differenza di potenziale totale tra il centro della sfera e il punto A sarà quindi:

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{7R/2}{3R} - \Delta V = \frac{1}{6}\frac{\rho((R/2)^2 - 0)}{\epsilon_0}$$

*(punteggio: 2.a.b.c = 5 punti )*

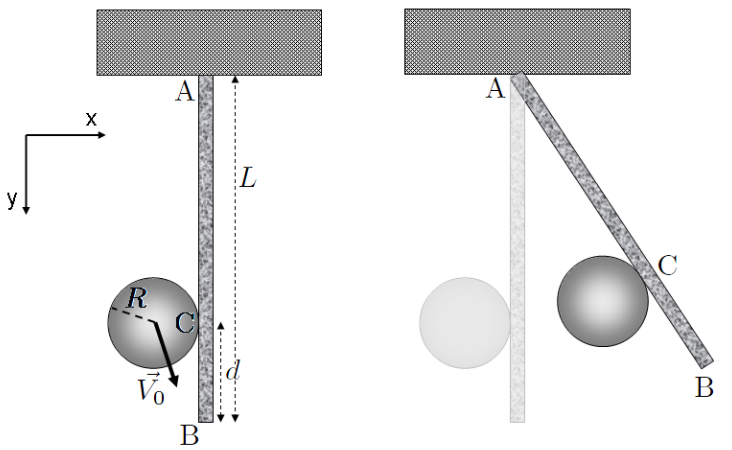
**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 16/06/2014**
**Cognome : ................................................. Nome : .................................................**

**Matricola: ................................................. Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1

Un'asta sottile omogenea di massa $M = 1$Kg e lunghezza $L = 1$m è incernierata nel suo estremo A ed è libera di oscillare nel piano verticale. L'asta è inizialmente in equilibrio.




Ad un certo istante l'asta viene colpita nel punto C da una sfera di raggio $R = 0.5$m e massa $m = 0.5$Kg. Il punto C dista $d = 0.3$m dall'estremo B dell'asta. Un attimo prima dell'urto la velocità della sfera vale $\vec{V_0} = (5; 10)\frac{\text{m}}{\text{s}}$ e l'urto è completamente anelastico (la sfera resta attaccata all'asta).

Si calcoli:

a) Quanto dista dall'estremo A il centro di massa del sistema subito dopo l'urto:

$$D = \text{...........................}$$

b) Il valore della velocità angolare $\omega$ subito dopo l'urto:

$$\omega = \text{...........................}$$

c) Qual è la massima variazione di altezza raggiunta dal centro di massa del sistema nel moto successivo all'urto:

$$\Delta H_{max} = \text{...........................}$$

# Soluzione

a) Scegliamo il punto A come origine degli assi. Le coordinate del centro di massa sono allora:

$$x_{CM} = \frac{-Rm}{m+M}$$

$$y_{CM} = \frac{M\frac{L}{2} + M(L-d)}{m+M}$$

da cui si ottiene:

$$D = \sqrt{x_{CM}^2 + y_{CM}^2}$$

b) La velocità angolare dopo l'urto si può calcolare imponendo la conservazione del momento angolare $\vec{L_i} = \vec{L_f}$. Il momento angolare iniziale è diretto lungo $\hat{z}$ e vale:

$$\vec{L_i} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

questo prodotto vettoriale può essere calcolato in coordinate cartesiane.
Infatti, dati $\vec{r} = (r_x, r_y) = (-R, L - d)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y)$ il momento angolare vale:

$$|\vec{L_i}| = L_i^{(z)} = m(r_x v_y - r_y v_x) = m(-R v_y - (L - d) v_x)$$

Infine la velocità angolare dopo l'urto si ottiene da:

$$\vec{L_i} = \vec{L_f} \Longrightarrow |\vec{L_i}| = |\vec{L_f}| = I\omega \Longrightarrow \omega = \frac{|\vec{L_i}|}{I}$$

dove il momento di inerzia vale:

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{2}{5}mR^2 + m\left(r_x^2 + r_y^2\right)$$

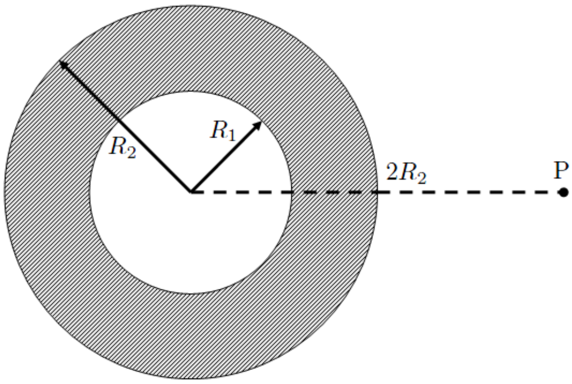
c) Dopo l'urto vale la conservazione dell'energia:

$$E_i = E_f \Longrightarrow (m + M)gh_{CM}^{(i)} + \frac{1}{2}I\omega^2 = (m + M)gh_{CM}^{(f)} \Longrightarrow (m + M)g\Delta h_{CM} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

da cui:

$$\Delta h_{CM} = \frac{I\omega^2}{2(m + M)g}$$

# Esercizio 2




Una carica negativa Q è distribuita omogeneamente nel guscio sferico di raggio interno $R_1 = 0.1$m e raggio esterno $R_2 = 0.2$m. La differenza di potenziale tra i punti a distanza $R_2$ e quelli a distanza $R_1$ è $|V_2 - V_1| = 200$V.

Si calcoli:

a) Quanto vale la carica Q :

$$Q = \text{..........................}$$

b) Il potenziale dei punti distanti $R_1$ dal centro (si assuma $V_\infty = 0$):

$$V_1 = \text{..........................}$$

c) La densità di energia elettrostatica di un punto P distante $2R_2$ dal centro della sfera:

$$u_e = \text{..........................}$$

# Soluzione

a) All'interno della sfera, dove non è presente alcuna carica elettrica, il campo elettrico è nullo per motivi di simmetria e per il teorema di Gauss. Per gli stessi motivi possiamo affermare che il campo elettrico è radiale e dipende solamente dal raggio:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r} \tag{1}$$

Nella zona dove è presente la carica ($R_1 < r < R_2$) il campo elettrico si può ottenere dal teorema di Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \tag{2}$$

dove il volume è quello di un guscio sferico di raggio interno $R_1$ e raggio estero $r$. Il flusso di campo elettrico che attraversa la superficie interna è nullo, perchè non è presente alcun campo elettrico. Sulla superficie esterna invece il flusso vale invece:

$$\oint_{ext} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r)S = 4\pi r^2 E(r)$$

dove è stata utilizzata la proprietà (1).

Il membro destro dell'equazione (2) si può calcolare come:

$$\int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{\rho}{\epsilon_0} V_{guscio} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi \left(r^3 - R_1^3\right)$$

Sostituendo nella (2) si ottiene:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi \left(r^3 - R_1^3\right) \Longrightarrow E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^3 - R_1^3}{r^2}$$

Per ottenere la differenza di poteziale ai capi del guscio sferico, si calcola:

$$\Delta V = V(R_2) - V(R_1) = \int_{R_2}^{R_1} E(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{R_2}^{R_1} E(r)dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_{R_2}^{R_1} \frac{r^3 - R_1^3}{r^2} dr$$

L'integrale si può svolgere come:

$$\int_{R_2}^{R_1} \frac{r^3 - R_1^3}{r^2} dr = \left( \frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} \right)_{R_2}^{R_1} = \frac{R_1^2}{2} + R_1^2 - \frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^3}{R_2}$$

da cui

$$\Delta V = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( \frac{R_1^2}{2} + R_1^2 - \frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^3}{R_2} \right)$$

e quindi:

$$\rho = 3\epsilon_0 \Delta V \left( \frac{R_1^2}{2} + R_1^2 - \frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^3}{R_2} \right)^{-1}$$

da cui si trova la carica totale $Q$:

$$Q = \frac{4}{3}\pi \left( R_2^3 - R_1^3 \right) \rho$$

b) All'esterno della sfera il campo elettrico è quello di una carica puntiforme. Pertanto a $r = R_2$ il potenziale vale:

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2}$$

da cui:

$$V_1 = V_2 - \Delta V$$

c) il campo elettrico alla distanza $2R_2$ è pari a:

$$E(2R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4R_2^2}$$

$$u_e(2R_2) = \epsilon_0 \frac{E^2(2R_2)}{2}$$

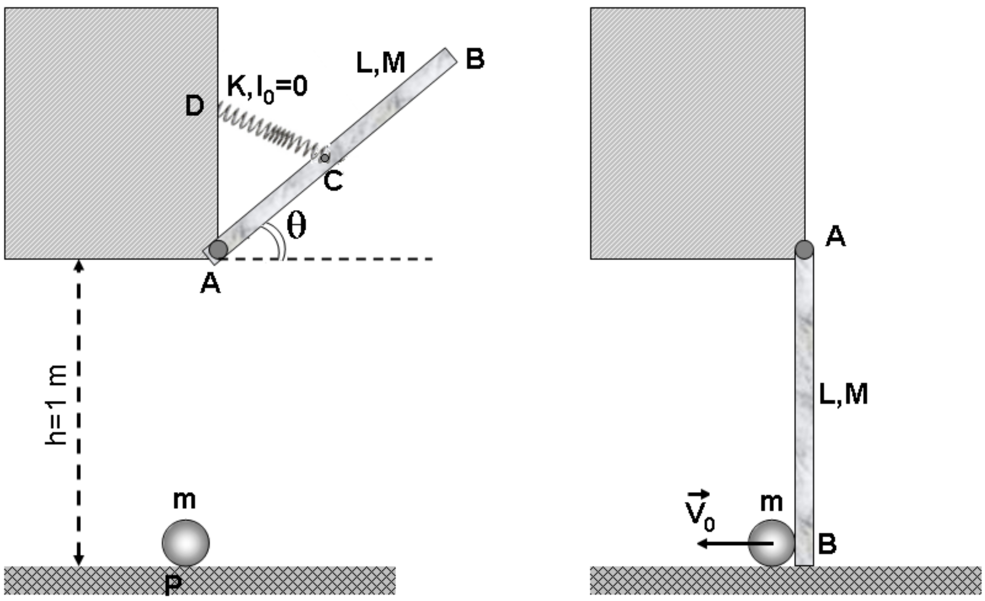
**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 07/07/2014**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : ......................................**

# Esercizio 1

Un'asta sottile omogenea di massa $M = 1$Kg e lunghezza $L = 1$m è incernierata ad una parete nel suo estremo A ed è libera di ruotare nel piano verticale. L'asta è collegata alla parete anche per mezzo di una molla di costante elastica K sconosciuta e lunghezza a riposo nulla. La molla è fissata alla parete nel punto D distante $L/2$ da A ed è fissata all'asta nel suo punto centrale C. Inizialmente il sistema è in equilibrio e l'angolo $\theta$ vale $\pi/6$.




a) Determinare la costante elastica della molla:

$$K = \text{...........................}$$

Ad un certo istante la molla si spezza e l'asta ruota nel piano verticale fino a che il suo estremo B non colpisce il punto materiale libero di massa $m = 1$kg situato in P. L'urto può essere considerato perfettamente elastico.

Si calcoli:

b) Il modulo della velocità $\overline{v_0}$ acquistata dal punto materiale dopo l'urto:

$$v_0 = \text{...........................}$$

c) Il modulo dell' impulso assorbito dal vincolo in A durante l'urto:

$$p_A = \text{...........................}$$

# Soluzione

a) Il sistema è in equilibrio stabile e quindi è in un minimo dell'energia potenziale. L'energia potenziale totale del sistema è data dalla somma dell'energia gravitazionale con quella elastica:

$$E_p(\Theta^*) = Mg\frac{L}{2}sen(\Theta^*) + \frac{1}{2}K\left(\left(\frac{L}{2}cos(\Theta^*)\right)^2 + \left(\frac{L}{2}(1 - sen(\Theta^*))\right)^2\right) =$$

$$= Mg\frac{L}{2}sen(\Theta^*) + \frac{1}{2}K\left(\frac{L}{2}\right)^2(2 - 2sen(\Theta^*))$$

Si impone il minimo dell'energia potenziale in $\Theta^* = \Theta$:

$$\left.\frac{dE_p(\Theta^*)}{d\Theta^*}\right|_{\Theta^*=\Theta} = Mg\frac{L}{2}cos(\Theta) - K\left(\frac{L}{2}\right)^2 cos(\Theta) = 0$$

Si ricava quindi K:

$$K = \frac{2Mg}{L} = 19.6\frac{N}{m}$$

Modo alternativo:

Si può uguagliare il momento della forza peso a quello della forza elastica (entrambi calcolati scegliendo come polo il punto A). Si ottiene:

$$M_p = M_e \Rightarrow Mg\frac{L}{2}cos(\Theta) = K\left(\frac{L}{2}\right)^2 cos(\Theta) \Rightarrow K = \frac{2Mg}{L}$$

b) L'energia meccanica del sistema, dopo la rottura della molla, si conserva sempre, anche in seguito all'urto dell'asta con la massa m (urto elastico). Si scrive, quindi, l'energia meccanica del sistema in tre situazioni particolari: I) subito dopo la rottura della molla; II) un istante prima dell'urto tra l'asta e la massa m; III) subito dopo l'urto elastico. In ognuno dei tre casi, lo zero dell'energia potenziale viene posto sul piano di appoggio della massa m.

I) In seguito alla rottura della molla l'energia meccanica del sistema è solo l'energia potenziale gravitazionale dell'asta:

$$E_1 = Mg\left(L + \frac{L}{4}\right) = Mg\frac{5L}{4}$$

II) Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al polo A è dato da:

$$I_{asta} = \frac{ML^2}{3}$$

Pertanto, appena prima che avvenga l'urto elastico, l'energia meccanica del sistema vale:

$$E_2 = \frac{1}{2}I_{asta}\omega_1^2 + Mg\frac{L}{2}$$

III) Dopo l'urto tra l'asta e la massa m l'energia meccanica del sistema vale:

$$E_3 = \frac{1}{2}I_{asta}\omega_2^2 + Mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Uguagliando l'energia del caso I a quella del caso II si ottiene:

$$Mg\frac{5L}{4} = \frac{1}{2}I_{asta}\omega_1^2 + Mg\frac{L}{2} \Rightarrow \omega_1 = 3\sqrt{\frac{g}{2L}}$$

Uguagliando l'energia del caso II a quella del caso III si ottiene:

$$\frac{1}{2}I_{asta}\omega_1^2 + Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I_{asta}\omega_2^2 + Mg\frac{L}{2} + \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow I_{asta}\omega_1^2 = I_{asta}\omega_2^2 + mv_0^2 \tag{1}$$

Un'altra quantità che si conserva durante l'urto è il momento angolare, non si conserva la quantità di moto perchè c'è una forza impulsiva in A che però ha momento nullo se si sceglie A come polo.

Si può scrivere, dunque:

$$I_{asta}\omega_1 = I_{asta}\omega_2 + mv_0L$$

Mettendo a sistema quest'ultima uguaglianza con la relazione 1 si ottiene:

$$I_{asta}\omega_1^2 = I_{asta}\omega_1^2 + \frac{(mv_0L)^2}{I_{asta}} - 2\omega_1 mv_0L + mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \frac{2\omega_1 LM}{M+3m} = \frac{3M\sqrt{2Lg}}{M+3m} = 3.32\frac{m}{s}$$

ed anche:

$$\omega_2 = \omega_1 - \omega_1 \frac{6mL^2M}{(M+3m)ML^2} = \omega_1 \left(1 + \frac{6m}{M+3m}\right) = 3\sqrt{\frac{g}{2L}} \left(\frac{M+9m}{M+3m}\right)$$

c) La quantità di moto non si conserva, c'è, infatti, un impulso nel vincolo A, durante l'urto. Per valutare il modulo di tale impulso si calcola la differenza tra la quantità di moto del sistema prima dell'urto e quella dopo l'urto.

$$p_{prima} = M\omega_1 \frac{L}{2}$$

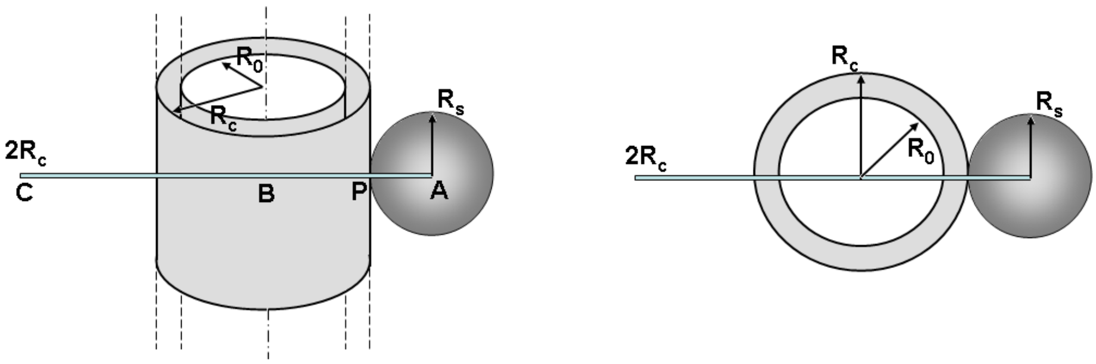
$$p_{dopo} = M\omega_2 \frac{L}{2} + mv_0$$

Il modulo dell'impulso in A è dato dalla differenza di questi due valori:

$$p_A = M\omega_1 \frac{L}{2} - M\omega_2 \frac{L}{2} - mv_0 = M\frac{L}{2}(\omega_1 - \omega_2) - mv_0 = 3M\frac{L}{2}\sqrt{\frac{g}{2L}}\frac{6m}{M+3m} - m\frac{3M\sqrt{2Lg}}{M+3m} =$$

$$= \frac{1}{M+3m}\left(\frac{3M6m\sqrt{Lg}}{2\sqrt{2}} - 3mM\sqrt{2Lg}\right) = \frac{3mM\sqrt{Lg}}{M+3m}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right) = \frac{3mM\sqrt{Lg}}{\sqrt{2}(M+3m)} = 1.66kg\frac{m}{s}$$

# Esercizio 2




Un cilindro isolante, infinito, di raggio $R_c = 20\text{cm}$ è cavo al suo interno fino ad $R_0 = 15\text{cm}$. Una sfera,piena, isolante di raggio $R_s = 10\text{cm}$ è incollata alla superficie esterna del cilindro nel punto P. Cilindro e sfera sono entrambi carichi: la densità di carica del cilindro è $\rho_c = 0.5 \cdot 10^{-9}\text{C/m}^3$ mentre quella della sfera è $\rho_s = 1 \cdot 10^{-9}\text{C/m}^3$.

Si calcoli:

a) Il modulo del campo elettrico nel punto C distante $2R_c$ dal centro B del cilindro cavo:

$$E(C) = \text{...........................}$$

b) Il potenziale nel punto C (si assuma $V_P = 0$):

$$V(C) = \text{...........................}$$

Supponiamo ora di realizzare un microscopico canale nel cilindro e nella sfera per unire i punti A e C. Le dimensioni del canale sono talmente piccole da non perturbare il campo elettrico di sfera e cilindro.

c) Calcolare con quale velocità arriverebbe nel punto A un elettrone di massa $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\text{kg}$ e di carica $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}\text{C}$ che si trovasse in C a riposo.

$$v_e(A) = \text{...........................}$$

# Soluzione

a) Il campo elettrico all'esterno di un cilindro cavo è diretto in ogni punto ortogonalmente all'asse del cilindro ed è costante su ogni superficie cilindrica coassiale di raggio r.

Applicando il teorema di Gauss

$$\oint \vec{E}_c \cdot d\vec{S} = \int \frac{\rho_c}{\epsilon_0} dV \tag{2}$$

ad una scatola cilindrica di raggio $r_c > R_c$ e altezza h si ottiene:

$$\oint_{ext} \vec{E}_c \cdot d\vec{S} = E_c(r_c) S_{laterale} = 2\pi r_c h E_c(r_c)$$

Il flusso di $E_c$ attraverso le basi della scatola cilindrica è nullo in quanto il campo è parallelo alle basi. Il membro destro dell'equazione (2) si può calcolare come:

$$\int \frac{\rho_c}{\epsilon_0} dV = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} V_{guscio} = \frac{\rho_c \pi h \left(R_c^2 - R_0^2\right)}{\epsilon_0}$$

Sostituendo nella (2) si ottiene:

$$2\pi r_c h E_c(r_c) = \frac{\rho_c \pi h \left(R_c^2 - R_0^2\right)}{\epsilon_0} \Longrightarrow E_c(r_c) = \frac{\rho_c \left(R_c^2 - R_0^2\right)}{2\epsilon_0 r_c}$$

All'esterno di una sfera il campo elettrico è quello di una carica puntiforme.

$$E_s(r_s) = \frac{\rho_s \frac{4}{3}\pi R_s^3}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_s^2} = \frac{\rho_s R_s^3}{3\epsilon_0 r_s^2}$$

Il campo elettrico nel punto C è dato dalla somma dei campi elettrici generati dal guscio cilindrico e dalla sfera in quel punto e, poichè sono diretti nello stesso modo e hanno lo stesso verso si possono sommare algebricamente:

$$E(C) = E_c(C) + E_s(C) = \frac{\rho_c\left(R_c^2 - R_0^2\right)}{2\epsilon_0 2R_c} + \frac{\rho_s R_s^3}{3\epsilon_0(R_s + 3R_c)^2} = 1.31\frac{N}{C}$$

b) In un punto all'esterno del guscio cilindrico, distante $r_1$ dall'asse, il potenziale è:

$$V(r_1) - V(R_c) = \int_{r_1}^{R_c} E_c(r)dr = \frac{\rho_c\left(R_c^2 - R_0^2\right)}{2\epsilon_0}\int_{r_1}^{R_c}\frac{dr}{r} = \frac{\rho_c\left(R_c^2 - R_0^2\right)}{2\epsilon_0} ln\left(\frac{R_c}{r_1}\right)$$

All'esterno della sfera, in un generico punto distante $r_2$ dal centro, il campo elettrico è quello di una carica puntiforme e, pertanto, il potenziale vale:

$$V(r_2) - V(R_s) = \int_{r_2}^{R_s} E_s(r)dr = \frac{\rho_s R_s^3}{3\epsilon_0(R_s)} - \frac{\rho_s R_s^3}{3\epsilon_0(r_2)} = \frac{\rho_s R_s^3}{3\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Il potenziale nel punto C vale:

$$V(C) = V_c(C) + V_s(C) = \frac{\rho_c\left(R_c^2 - R_0^2\right)}{2\epsilon_0} ln\left(\frac{R_c}{2R_c}\right) + \frac{\rho_s R_s^3}{3\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{3R_c + R_s}\right) =$$
$$= \frac{\rho_c\left(R_c^2 - R_0^2\right)}{2\epsilon_0} ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\rho_s R_s^2}{3\epsilon_0}\left(\frac{3R_c}{3R_c + R_s}\right) = -0.0198V$$

c) Il potenziale generato dalle due distribuzioni di carica in A è:

$$V(A) = V_c(A) + V_s(A) = \frac{\rho_c\left(R_c^2 - R_0^2\right)}{2\epsilon_0} ln\left(\frac{R_c}{R_c + R_s}\right) + \int_0^{R_s} E_s(r)dr =$$
$$= \frac{\rho_c\left(R_c^2 - R_0^2\right)}{2\epsilon_0} ln\left(\frac{R_c}{R_c + R_s}\right) + \frac{\rho_s R_s^2}{6\epsilon_0}$$

La differenza di energia potenziale dell'elettrone tra quando è in C e quando si trova in A è data da:

$$\Delta U = q_e V(C) - q_e V(A)$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica si ha pertanto:

$$\Delta U = \frac{1}{2}m_e v_e^2 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2\Delta U}{m_e}} = 5.2 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$$

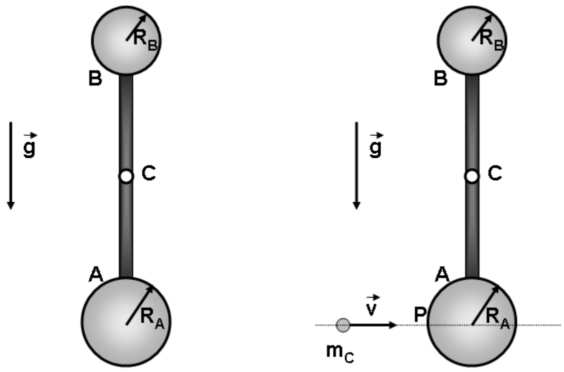
**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 22/09/2014**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : ......................................**

# Esercizio 1

Un manubrio è formato da un'asta rigida di lunghezza $l = 1$m e massa $m = 1$kg ai cui estremi A e B sono saldati due dischi rispettivamente di raggio $R_A = 20$cm e $R_B = 10$cm. Il disco di raggio $R_A$ ha massa $m_A = 1$kg mentre il disco di ragio $R_B$ ha massa $m_B = 0.3$kg.




L'asta è incernierata nel suo punto centrale C e il manubrio può ruotare senza attrito nel piano verticale. Si calcoli:

a) Il periodo delle piccole oscillazioni del manubrio (asta con i due dischi):

$$T = ...........................$$

Ad un certo istante, un corpo puntiforme di massa $m_C = 0.1$kg e velocità di modulo $v = 10$m/s urta il disco di raggio $R_A$ nel punto P (come in figura). L'urto è perfettamente anelastico. La velocità del corpo di massa $m_C$ prima dell'urto è perpendicolare all'asta AB.
Trascurando la variazione del centro di massa del sistema, dovuto alla nuova massa $m_C$, si calcoli:

b) L'impulso assorbito dal vincolo in C durante l'urto:

$$p_C = ...........................$$

c) L'altezza massima raggiunta dal punto P nel moto oscillatorio successivo all'urto :

$$h_{max}(P) = ...........................$$

## Soluzione

a) Inizialmente si calcola la posizione del centro di massa del sistema rispetto al punto C:

$$d_{cm} = \frac{m_A(R_A + l/2) - m_B(R_B + l/2)}{M_{tot}}$$

con $M_{tot} = m_A + m_B + m$

Si calcola quindi il momento d'inerzia del manubrio (asta con i due dischi) riferito al punto C:

$$I_C = \frac{1}{2}m_A R_A^2 + m_A(R_A + l/2)^2 + \frac{1}{2}m_B R_B^2 + m_B(R_B + l/2)^2 + \frac{1}{12}ml^2$$

Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{d}{dt}(M_{tot}g(d_{cm} - d_{cm}cos(\Theta)) + \frac{1}{2}I_C\dot{\Theta}^2) = 0$$

Derivando e sostituendo $sen(\Theta)$ con $\Theta$ (approssimazione di piccole oscillazioni) si ottiene:

$$M_{tot}gd_{cm}\Theta = -I_C\ddot{\Theta} \;\Rightarrow\; T = 2\pi\sqrt{\frac{I_C}{M_{tot}gd_{cm}}}$$

b) Durante l'urto si conserva il momento angolare del sistema. Sfruttando tale conservazione si può ricavare la velocità angolare del sistema dopo l'urto. Si ha pertanto:

$$m_C v(R_A + \frac{l}{2}) = I_{C1}\omega$$

con $I_{C1} = I_C + m_C((\frac{l}{2} + R_A)^2 + R_A^2)$ da cui si ottiene:

$$\omega = \frac{m_C v(R_A + \frac{l}{2})}{I_{C1}}$$

La quantità di moto non si conserva, c'è, infatti, un impulso nel vincolo C, durante l'urto. Per valutare il modulo di tale impulso si calcola la differenza tra la quantità di moto del sistema prima dell'urto ($p_{iniziale}$) e quella dopo l'urto($p_{finale}$) evitando di ricalcolare la posizione del nuovo centro di massa (come specificato nel testo dell'esercizio):

$$p_{iniziale} = m_C v$$

$$p_{finale} = (m_C + M_{tot})\omega d_{cm}$$

Da queste relazioni si ricava:

$$p_C = p_{finale} - p_{iniziale} = m_C v - (m_C + M_{tot})\omega d_{cm}$$

c) Per valutare l'altezza massima raggiunta dal punto P nel moto oscillatorio successivo all'urto si sfrutta la conservazione dell'energia tra l'istante successivo all'urto e quello in cui il punto P raggiunge la sua massima altezza. Subito dopo l'urto l'energia del sistema è data da:

$$E_{iniziale} = \frac{1}{2}I_{C1}\omega^2$$

Nel momento in cui P ha raggiunto l'altezza massima si ha:

$$E_{finale} = (M_{tot} + m_C)g(d_{cm} - d_{cm}cos(\theta_{max}))$$

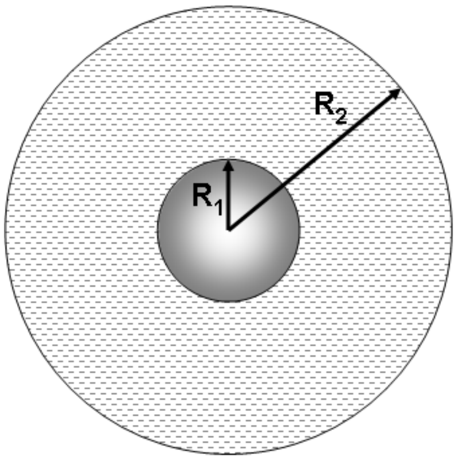
Uguagliando queste due espressioni si ricava:

$$h_{cm} = (d_{cm} - d_{cm}cos(\theta_{max})) = \frac{\frac{1}{2}I_{C1}\omega^2}{(M_{tot} + m_C)g}$$

Sfruttando i triangoli simili si ottiene:

$$h_{max}(P) = \frac{(\frac{l}{2} + R_A)h_{cm}}{d_{cm}}$$

## Esercizio 2




Una carica $Q = 2 \cdot 10^{-8}$C è distribuita uniformemente all'interno di una sfera di raggio $R_1 = 10$cm. Tale sfera si trova al centro di una sfera più grande di raggio $R_2 = 1$m che contiene una carica negativa distribuita uniformemente con una densità di carica $\rho = -4 \cdot 10^{-8}$C/m$^3$.

Si calcoli:

a) il modulo della forza che agisce su un elettrone che si trova a distanza $R_1/2$ dal centro della sfera:

$$F_e = ............................$$

b) La distanza $R$ dal centro della sfera in cui si annulla il campo elettrostatico (si escludano le soluzioni $R = 0$ e $R = \infty$):

$$R = ............................$$

c) Il lavoro necessario per spostare un elettrone da $R_1/2$ a R:

$$L = ............................$$

## Soluzione

a) All'interno della sfera il campo elettrico è, per motivi di simmetria, radiale e dipendente solamente dal raggio:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r} \tag{1}$$

Il campo elettrico si può ottenere applicando il teorema di Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \frac{\rho_{pos}}{\epsilon_0} dV \tag{2}$$

dove il volume è quello di una sfera di raggio $r$ e $\rho_{pos} = \frac{3Q}{4\pi R_1^3}$.

Sulla superficie della sfera di raggio $r$ il flusso vale:

$$\oint_{ext} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r)S = 4\pi r^2 E(r)$$

dove è stata utilizzata la proprietà (1).

Il membro destro dell'equazione (2) si può calcolare come:

$$\int \frac{\rho_{pos}}{\epsilon_0} dV = \frac{\rho_{pos}}{\epsilon_0} V = \frac{\rho_{pos}}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3$$

Sostituendo nella (2) si ottiene:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{\rho_{pos}}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \Longrightarrow E(r) = \frac{\rho_{pos}}{3\epsilon_0} r$$

Il modulo della forza che agisce su un elettrone che si trova a distanza $R_1/2$ dal centro della sfera è:

$$F_e = q_{elettrone} E(R_1/2) = q_{elettrone} \frac{\rho_{pos} R_1}{6\epsilon_0} = q_{elettrone} \frac{3Q}{24\epsilon_0 \pi R_1^2}$$

b) Sfruttando sempre il teorema di Gauss e il principio di sovrapposizione si cerca la distanza dal centro della sfera in cui il campo elettrico si annulla. All'interno della sfera carica positivamente il campo elettrico dovuto alla sola carica positiva cresce, all'esterno di questa sfera e, nella parte carica negativamente si ha, invece, il campo elettrico dovuto alla carica positiva che decresce mentre il campo elettrico prodotto dalla carica negativa aumenta. Proprio in questa regione va cercato il punto in cui il campo elettrico totale è nullo.

All'esterno della sfera carica positivamente si ha un campo elettrico dovuto alla sola carica positiva pari a:

$$E_+(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Campo elettrico generato da una carica puntiforme

All'interno del guscio sferico carico negativamente il campo elettrico (dovuto alla sola carica negativa) vale:

$$E_-(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^3 - R_1^3}{r^2}$$

Ottenuto sempre applicando il teorema di Gauss.

Il campo totale si annulla ad una distanza $R$ tale da rendere uguali i due contributi:

$$E_+(R) = -E_-(R) \Longrightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3 - R_1^3}{R^2}$$

Da cui si ottiene:

$$R = \sqrt[3]{-\frac{3Q}{4\pi\rho} + R_1^3}$$

c) Si calcola la differenza di potenziale tra i punti a distanza $R_1/2$ e $R$ dal centro della sfera. Si considerano i contributi della sfera carica positivamente e del guscio sferico carico negativamente separatamente. Il potenziale viene posto uguale a 0 al centro della sfera.

Sfera carica positivamente:

$$V_+(r) = -\frac{r^2 Q}{8\pi R_1^3 \epsilon_0}$$

per $0 < r < R_1$ e

$$V_+(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q}{8\pi R_1 \epsilon_0}$$

per $r > R_1$

Da cui si ottiene (per la sfera carica positivamente):

$$V_+(R_1/2) = -\frac{Q}{32\pi R_1 \epsilon_0}$$

e

$$V_+(R) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{8\pi R_1 \epsilon_0}$$

Sfera carica negativamente:

$$V_-(r) = 0$$

per $0 < r < R_1$.

Per ottenere il poteziale all'interno del guscio sferico ($R_1 < r < R_2$), si calcola:

$$V(r) = \int_r^{R_1} E(\tilde{r})d\tilde{r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\int_r^{R_1} \frac{\tilde{r}^3 - R_1^3}{\tilde{r}^2} d\tilde{r}$$

L'integrale si può svolgere come:

$$\int_r^{R_1} \frac{\tilde{r}^3 - R_1^3}{\tilde{r}^2} d\tilde{r} = \left(\frac{\tilde{r}^2}{2} + \frac{R_1^3}{\tilde{r}}\right)_r^{R_1} = \frac{R_1^2}{2} + R_1^2 - \frac{r^2}{2} - \frac{R_1^3}{r}$$

da cui

$$V(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{R_1^2}{2} + R_1^2 - \frac{r^2}{2} - \frac{R_1^3}{r}\right)$$

Da cui si ottiene (per la sfera carica negativamente):

$$V_-(R_1/2) = 0$$

e

$$V_-(R) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{R_1^2}{2} + R_1^2 - \frac{R^2}{2} - \frac{R_1^3}{R}\right)$$

Il lavoro necessario per spostare un elettrone da $R_1/2$ a $R$ si calcola nel seguente modo:

$$L = q_{elettrone}(V_+(R_1/2) + V_-(R_1/2) - V_+(R) - V_-(R)) =$$
$$= q_{elettrone}\left(-\frac{5Q}{32\pi R_1\epsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{R_1^2}{2} + R_1^2 - \frac{R^2}{2} - \frac{R_1^3}{R}\right)\right)$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 16/01/2015**
**Cognome : ................................................... Nome : ..................................................**

**Matricola: ................................................... Anno di corso : ........................................**

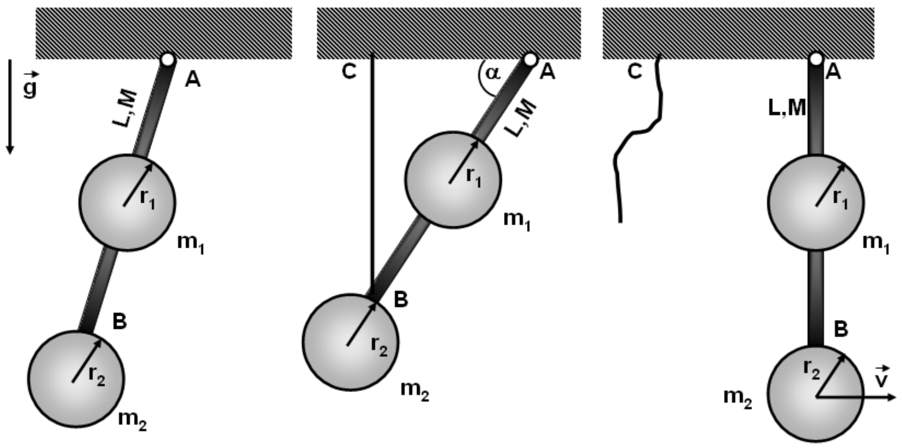
# Esercizio 1

Un'asta sottile rigida di lunghezza $L = 1$m e massa $M = 2$kg è vincolata al suo estremo in A e può muoversi senza attrito nel piano verticale. All'asta sono saldate due sfere di raggio $r_1 = r_2 = 0.1$m e massa $m_1 = m_2 = 1$kg (fig. 1.A). Il centro di $m_1$ coincide con il punto centrale dell'asta mentre il centro di $m_2$ si trova a distanza $L + r_2$ dall'estremo A. Si calcoli:

a) Il periodo delle piccole oscillazioni del sistema (asta+sfere):

$T =$ ............................

Fig. 1.A　　Fig. 1.B　　Fig. 1.C




Si supponga, ora, di fissare il punto B al punto C tramite una fune inestensibile tale che l'angolo $\alpha$ sia di $\frac{\pi}{4}$rad (fig. 1.B). Si calcoli:

b) La tensione della fune:

$F =$ ............................

In seguito alla rottura della fune (fig. 1.C), si calcoli:

c) La velocità con la quale si muove il centro di $m_2$ quando l'asta passa per la verticale :

$v =$ ............................

# Soluzione

a) Inizialmente si calcola la posizione del centro di massa del sistema rispetto al punto A:

$$d_{cm} = \frac{(m_1 + M)(L/2) + m_2(L + r_2)}{M_{tot}}$$

con $M_{tot} = m_1 + m_2 + M$

Si calcola quindi il momento d'inerzia dell'asta con le due sfere riferito al punto A:

$$I_A = \frac{2}{5}m_1r_1^2 + m_1(L/2)^2 + \frac{2}{5}m_2r_2^2 + m_2(r_2 + L)^2 + \frac{1}{3}ML^2$$

Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{d}{dt}(M_{tot}g(d_{cm} - d_{cm}cos(\Theta)) + \frac{1}{2}I_A\dot{\Theta}^2) = 0$$

Derivando e sostituendo $sen(\Theta)$ con $\Theta$ (approssimazione di piccole oscillazioni) si ottiene:

$$M_{tot}gd_{cm}\Theta = -I_A\ddot{\Theta} \;\Rightarrow\; T = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{M_{tot}gd_{cm}}}$$

b) Si uguaglia il momento della forza peso a quello della forza esercitata dalla corda (entrambi calcolati scegliendo come polo il punto A). Si ottiene:

$$M_p = M_F \Rightarrow M_{tot}gd_{cm}cos(\alpha) = FLcos(\alpha) \Rightarrow F = \frac{M_{tot}gd_{cm}}{L}$$

c) L'energia meccanica del sistema, dopo la rottura della fune, si conserva. Si scrive, quindi, l'energia meccanica del sistema in due situazioni particolari: I) subito dopo la rottura della fune; II) quando l'asta passa per la verticale. Lo zero dell'energia potenziale viene posto nel punto più basso raggiunto dal centro di massa del sistema.

I) In seguito alla rottura della fune l'energia meccanica del sistema è solo l'energia potenziale gravitazionale:

$$E_1 = M_{tot}gd_{cm}(1 - sen(\alpha))$$

II) Il momento d'inerzia del sistema rispetto al polo A è dato da $I_A$: Pertanto, quando passa per la verticale, l'energia meccanica del sistema vale:

$$E_2 = \frac{1}{2}I_A\omega^2$$

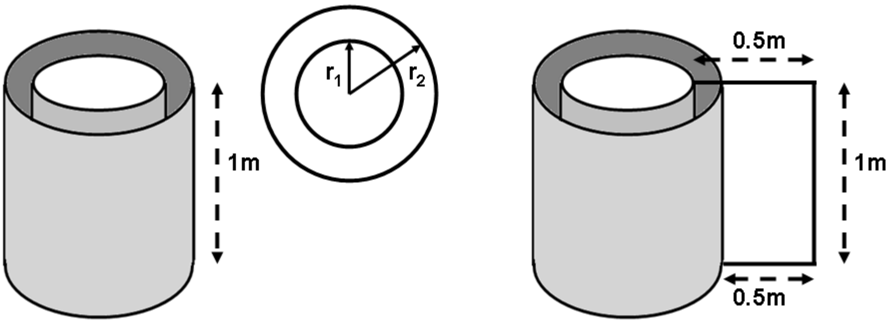
Uguagliando l'energia del caso I a quella del caso II si ottiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{2M_{tot}gd_{cm}(1 - sen(\alpha))}{I_A}}$$

e quindi la velocità con la quale si muove il centro di $m_2$ quando l'asta passa per la verticale è:

$$v = \omega(L + r_2)$$

## Esercizio 2




Un condensatore cilindrico che può essere considerato ideale, è formato da due armature concentriche di raggi $r_1 = 2$mm e $r_2 = 4$mm. Nell'ipotesi che la differenza di potenziale $\Delta V$ tra le due armature sia di 50V si calcoli:

a) la carica immagazzinata dal condensatore sulla lunghezza di 1m:

$$Q = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si supponga, quindi, di connettere le due armature tramite un filo di resistività $\rho = 2.75 \cdot 10^{-8}\Omega$m, sezione circolare di raggio $r_f = 1$mm e lunghezza totale $l = 2$m (vedere la figura). Indicando con $\tau$ la costante di tempo del circuito si calcoli:

b) la differenza di potenziale tra le armature del condensatore dopo un tempo $t = 2\tau$

$$\Delta V_f = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

c) l'istante in cui sul filo si dissipa la massima potenza e l'energia totale dissipata sulla resistenza.

$$t_{max} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; E_{dissipata} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

# Soluzione

a) Nella zona tra le armature del condensatore ($r_1 < r < r_2$) il campo elettrico si può ottenere dal teorema di Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

dove, per motivi di simmetria, si è scelta una superficie cilindrica coassiale con le armature (del condensatore), di raggio r e di lunghezza L= 1m. Il flusso di campo elettrico che attraversa le superfici di base è nullo, perchè è nullo il prodotto scalare. Sulla superficie laterale il flusso vale invece:

$$\oint_{lat} \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES = E2\pi rL$$

Da queste relazioni si ricava:

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rL}$$

Imponendo una differenza di potenziale tra le armature del condensatore nota e costante si ottiene:

$$\Delta V = \int_{r_1}^{r_2} Edr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Da cui si ha:

$$Q = \frac{\Delta V 2\pi\epsilon_0 L}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

b) La resistenza del filo è data da:

$$R = \frac{\rho l}{S}$$

con S pari a: $\pi r_f^2$ Essendo quindi un circuito RC si possono applicare le relazioni caratteristiche di questo tipo di circuiti e, in particolare, quella relativa alla variazione nel tempo della differenza di potenziale ai capi del condensatore:

$$\Delta V(t) = \Delta V e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad \Delta V_f = \Delta V e^{-2}$$

c) La potenza dissipata in un dato istante dalla resistenza presente nel filo è:

$$P(t) = \frac{\Delta V(t)^2}{R}$$

Dalla relazione riportata nel punto precedente, relativa all'andamento della differenza di potenziale tra le armature del condensatore, si può osservare che l'istante in cui sul filo si dissipa la massima potenza è quello iniziale, cioè t=0. Per valutare l'energia totale dissipata sulla resistenza bisogna integrare nel tempo la potenza dissipata. Si ottiene quindi:

$$E = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty \frac{\Delta V(t)^2}{R} dt = \int_0^\infty \frac{\Delta V^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}}{R} dt = \frac{\Delta V^2 \tau}{2R}$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 3/02/2015**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

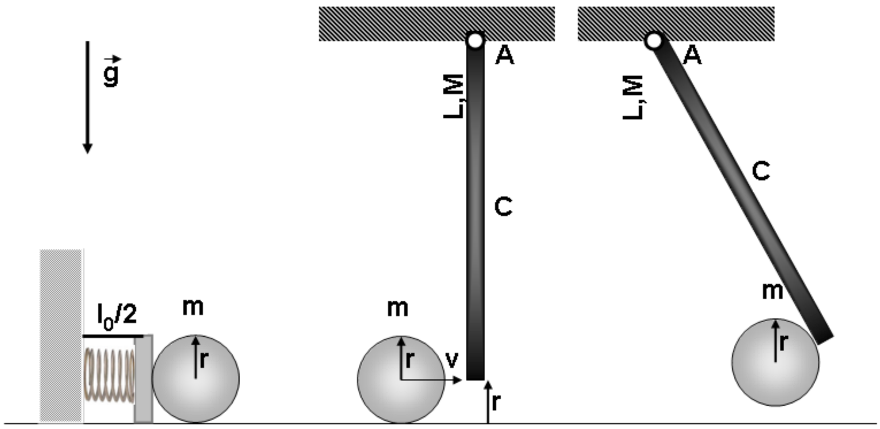
**Matricola: ................................................ Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1

Una sferetta rigida di massa $m = 0.3$kg e raggio $r = 0.2$m è inizialmente ferma nei pressi di una molla di costante elastica $k = 50\text{Nm}^{-1}$ e lunghezza a riposo $l_0 = 0.40$m. La sferetta poggia su un piano orizzontale con attrito mentre la molla è tenuta compressa per un tratto $\Delta x = l_0/2$ da un filo. Ad un certo istante il filo si spezza e la molla scatta accelerando la sferetta. Si faccia l'ipotesi che l'attrito del piano orizzontale sia tale da avere sempre rotolamento puro.
Si calcoli:

a) La velocità angolare $\omega$ della sferetta sul piano orizzontale :

$$\omega = ..........................$$




Si supponga quindi che, nel moto sul piano orizzontale, la sferetta urti anelasticamente un'asta rigida omogenea di lunghezza $L = 1$m e massa $M = 1$kg (l'asta è inizialmente ferma ed è libera di ruotare nel piano verticale intorno al vincolo liscio in A). Trascurando la componente lungo x della posizione del centro di massa, si calcoli :

b) Il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo in A durante l'urto:

$$\Delta p_A = ..........................$$

c) l'altezza massima raggiunta dal centro dell'asta C nel moto successivo all'urto:

$$h_{max}(C) = ..........................$$

# Soluzione

a) La forza di attrito presente è necessaria per avere un moto di puro rotolamento ma, siccome la sfera, da subito, si muove senza strisciare, il lavoro fatto dalla forza di attrito è nullo e l'energia si conserva. Si ottiene quindi:

$$\frac{1}{2}K\Delta x^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

con $I$ momento di inerzia della sfera rispetto al punto di contatto con il piano ($I = 2mr^2/5 + mr^2$). Dalla precedente relazione si ricava:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{I}\left(K\Delta x^2\right)} = 10.9s^{-1}$$

b) Scegliamo il punto A come origine degli assi. il centro di massa dista allora:

$$D_{CM} = \frac{M\frac{L}{2} + mL}{m + M}$$

La velocitá angolare del sistema (asta + sferetta) dopo l'urto si puó calcolare imponendo la conservazione del momento angolare $\vec{L_i} = \vec{L_f}$. Il momento angolare iniziale vale:

$$\vec{L_i} = m\vec{d} \times \vec{v}$$

da cui:

$$|\vec{L_i}| = mL\omega r$$

La velocitá angolare del sistema ($\omega_s$) dopo l'urto si ottiene da:

$$\vec{L_i} = \vec{L_f} \Longrightarrow |\vec{L_i}| = |\vec{L_f}| = I_{tot}\omega_s \Longrightarrow \omega_s = \frac{|\vec{L_i}|}{I_{tot}}$$

dove il momento di inerzia totale é dato da:

$$I_{tot} = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{2}{5}mr^2 + m\left(r^2 + L^2\right)$$

La velocitá del centro di massa del sistema dopo l'urto si ricava dalla seguente relazione:

$$v_{cm} = \omega_s D_{cm}$$

Per valutare il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo A durante l'urto si calcola la differenza tra la quantitá di moto finale e iniziale del sistema:

$$\Delta p_A = p_f - pi = (m + M)v_{cm} - m\omega r = 0.15kgms^{-1}$$

c) Per valutare l'altezza massima raggiunta dal punto C nel moto del sistema successivo all'urto si sfrutta la conservazione dell'energia tra l'istante successivo all'urto e quello in cui il punto C raggiunge la sua massima altezza. Subito dopo l'urto l'energia del sistema è data da:

$$E_{iniziale} = \frac{1}{2}I_{tot}\omega_s^2$$

Nel momento in cui C ha raggiunto l'altezza massima si ha:

$$E_{finale} = (M + m)gh_{cm}$$

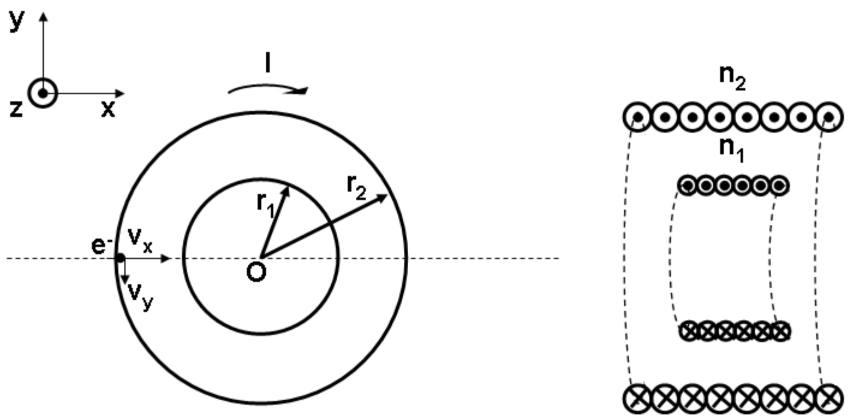
Uguagliando queste due espressioni si ricava:

$$h_{cm} = \frac{\frac{1}{2}I_{tot}\omega_s^2}{(M + m)g}$$

Sfruttando i triangoli simili si ottiene:

$$h_{max}(C) = \frac{\frac{l}{2}h_{cm}}{D_{cm}} = 0.02m$$

# Esercizio 2




Due solenoidi concentrici hanno raggio $r_1 = 10$cm e $r_2 = 20$cm. Questi solenoidi sono caratterizzati da due valori diversi di n definito come numero di spire per unità di lunghezza: $n_1 = 2\text{cm}^{-1}$, $n_2 = 1.1\text{cm}^{-1}$. All'interno dei due solenoidi circola la stessa corrente $I = 2$mA. Un elettrone di massa $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$kg e carica $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$C penetra nel campo magnetico prodotto dal sistema dei due solenoidi nel punto di coordinate (-$r_2$;0) con velocità $v = (5 \cdot 10^4; 1 \cdot 10^4)$m/s. Si calcoli:

a) il modulo della forza di Lorentz sull'elettrone nell'istante in cui entra nel solenoide più largo:

$F =$ ............................

b) il punto in cui penetra nel solenoide più piccolo:

$x_P =$ ............................ $y_P =$ ............................

c) La forza di Lorentz nell'istante in cui l'elettrone entra nel solenoide di raggio $r_1$ e la componente x della velocità dell'elettrone sempre nello stesso istante:

$F' =$ ............................ $v_x(P) =$ ............................

## Soluzione

a) Il campo magnetico generato da un solenoide percorso da corrente I è nullo all'esterno e uniforme all'interno, con modulo $B = \mu_0 nI$, direzione parallela all'asse del solenoide e verso dato dalla regola della mano destra. Si ottiene quindi:

$$B_2 = \mu_0 n_2 I$$

nella regione di spazio compresa tra i due solenoidi ($r_1 < r < r_2$).

La velocità dell'elettrone è data da:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Poichè il campo magnetico e la velocità dell'elettrone sono due vettori ortogonali, il modulo della forza di Lorentz nella regione di spazio tra i due solenoidi è:

$$F = q_e v B_2 = 0.23 \cdot 10^{-20}$$

b) Per trovare il punto in cui l'elettrone entra nel solenoide più interno è necessario calcolare l'equazione della circonferenza su cui si muove l'elettrone e trovando i punti di intersezione con la circonferenza di raggio $r_1$ e centro O(0;0).

Per scrivere l'equazione della circonferenza, che rappresenta la traiettoria dell'elettrone, se ne calcolano il centro e il raggio.

Il raggio della circonferenza R si ottiene uguagliando la forza di Lorentz alla forza centripeta:

$$R = \frac{mv}{qB}$$

mentre per trovare le coordinate del centro C si calcola l'angolo rispetto all'asse delle x che forma la velocità dell'elettrone:

$$\Theta = arcos(v_x/v)$$

Da cui si ottiene:

$$y_C = -R \cdot cos(\Theta)$$
$$x_C = -R \cdot sen(\Theta) - r_2$$

L'equazione della circonferenza che descrive la traiettoria dell'elettrone nel suo primo passaggio tra i due solenoidi è:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2 \implies x^2 + y^2 - ax - by = K$$

con $a = 2x_C$, $b = 2y_C$ e $K = R^2 - x_C^2 - y_C^2$.

Mettendo a sistema l'equazione appena trovata con l'equazione della circonferenza che descrive la sezione del solenoide più interno, si vanno a cercare i punti di intersezione:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ x^2 + y^2 - ax - by = K \end{cases}$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ ax + by = r_1^2 - K \end{cases}$$

Rinominando $K^* = r_1^2 - K$ e facendo le dovute sostituzioni si ricava:

$$\begin{cases} (K^* - by)^2 + (ay)^2 = (ar_1)^2 \\ ax + by = K^* \end{cases}$$

Concentrandosi solo sulla prima equazione si ottiene:

$$K^{*2} + b^2y^2 - 2K^*by + a^2y^2 - a^2r_1^2 = 0$$

da cui:

$$A^2y^2 - By + K' = 0$$

con $A = a^2 + b^2$, $B = 2K^*b$ e $K' = K^{*2} - a^2r_1^2$

La soluzione è pertanto:

$$y = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AK'}}{2A} \implies y_P = -0.0262m$$

$$x_P = \frac{K^* - by_P}{a} = -0.0965m$$

Per calcolare la $y_P$ si è scelta la soluzione più vicina all'origine (quella con il "+" davanti alla radice)

c) All'interno del solenoide più piccolo il campo magnetico vale:

$$B_1 = B_2 + \mu_0 n_1 I$$

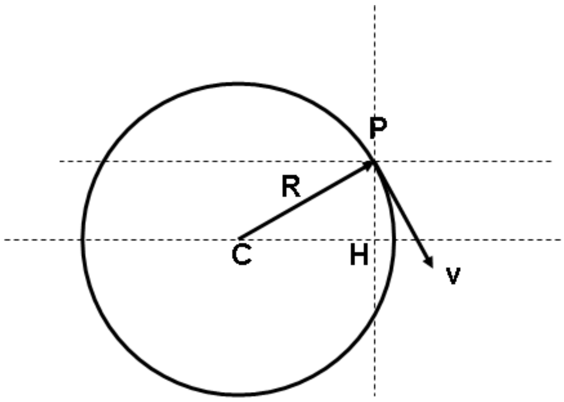
Poichè, anche in questo caso, il campo magnetico e la velocità dell'elettrone sono ortogonali, il modulo della forza di Lorentz nella regione di spazio interna al solenoide di raggio $r_1$ è:

$$F' = q_e v B_1$$

L'angolo che la velocità $v$ forma con l'asse delle x nel punto P è uguale all'angolo $H\hat{P}C$ (con riferimento alla figura sottostante) quindi:

$$v_x(P) = \frac{v\bar{PH}}{\bar{CP}}$$

Il segmento PH corrisponde alla coordinata y del punto C meno la coordinata y del punto P. Il segmento CP è, invece, il raggio della circonferenza (il precedente R).



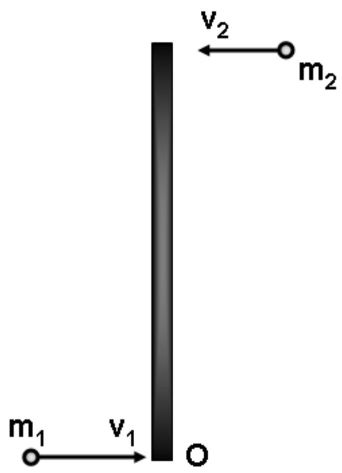
**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 23/02/2015**
**Cognome : ................................................. Nome : .................................................**

**Matricola: ................................................. Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1

Due masse puntiformi $m_1 = 4.0$kg e $m_2 = 1.5$kg urtano da versi opposti un'asta di lunghezza $L = 4.2$m e massa $M = 1.7$kg (vedere figura sottostante). Le due masse si muovono con velocità di modulo, rispettivamente, $v_1 = 4.2$m/s e $v_2 = 1.6$m/s. L'urto (agli estremi dell'asta) è perfettamente anelastico e avviene nello stesso istante per entrambe le masse.




Si calcoli:

a) La velocità del centro di massa subito dopo l'urto e la distanza del centro di massa dal punto O (estremo dell'asta):

$$v_{cm} = \text{...........................} \qquad d_{cm} = \text{...........................}$$

b) Il modulo della velocità angolare del sistema subito dopo l'urto:

$$\omega_s = \text{...........................}$$

c) L'energia meccanica dissipata nell'urto:

$$E_{diss} = \text{...........................}$$

## Soluzione

a) Per valutare la velocità del centro di massa del sistema, subito dopo l'urto, si applica la conservazione della quantità di moto, poichè sul sistema non agiscono forze esterne. La quantità di moto iniziale, è quella delle due masse (il verso positivo è quello di $v_1$):

$$P_{iniz} = m_1 v_1 - m_2 v_2$$

mentre quella finale del sistema è:

$$P_{fin} = (m_1 + m_2 + M) v_{cm}$$

Uguagliando la quantità di moto finale con quella iniziale si può ricavare la velocità del centro di massa del sistema:

$$v_{cm} = \frac{P_{iniz}}{m_1 + m_2 + M} = 2m/s$$

La distanza del centro di massa dal punto O dell'asta (dopo l'urto) si calcola nel seguente modo:

$$d_{cm} = \frac{m_2 L + ML/2}{m_1 + m_2 + M} = 1.37m$$

b) Il momento d'inerzia del sistema calcolato nel centro di massa del sistema é:

$$I = m_1 d_{cm}^2 + m_2 (L - d_{cm})^2 + ML^2/12 + M(L/2 - d_{cm})^2$$

In un sistema di riferimento solidale con il centro di massa del sistema, la componente z del momento angolare totale, subito prima dell'urto é:

$$L_z = m_1 v_1 d_{cm} + m_2 v_2 (L - d_{cm})$$

Dalla conservazione del momento angolare $\vec{L_z} = \vec{L_f}$ si ottiene:

$$L_f = I\omega = L_z \Longrightarrow \omega = \frac{L_z}{I} = 1.3s^{-1}$$

c) L'energia cinetica del sistema prima dell'urto vale:

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

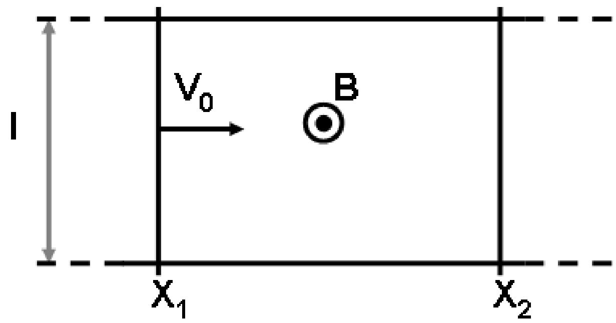
Quella dopo l'urto è:

$$E_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + M) v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

L'energia meccanica dissipata nell'urto è data, pertanto, dalla differenza tra $E_f$ e $E_i$:

$$E = E_f - E_i = 3.4J$$

## Esercizio 2




Su una guida conduttrice scorrono, senza attrito, due lati mobili di lunghezza $l = 0.9$m e massa $m = 0.15$kg. La resistenza del circuito è costante e vale $R = 16\Omega$. Il circuito si trova all'interno di un campo magnetico costante e uniforme $B = 1.3$T diretto perpendicolarmente alla superficie del circuito stesso. $X_1(t)$ e $X_2(t)$ sono le posizioni dei lati all'istante t e $V_i = dX_i(t)/dt$ le rispettive velocità. Inizialmente il lato 1 possiede velocità $V_0 = 12$m/s mentre il lato 2 è in quiete ($V_1(0) = V_0$, $V_2(0) = 0$) Si calcoli:

a) la velocità finale dei lati (assumendo che essi non arrivino mai a toccarsi):

$V_{1f} =$ ............................ $V_{2f} =$ ............................

b) la potenza dissipata al tempo $t_p = 2$s:

$P(t_p) =$ ............................

c) L'energia totale dissipata per effetto joule e l'energia cinetica finale:

$E_{diss} =$ ............................ $E_f =$ ............................

## Soluzione

a) La forza elettromotrice indotta nel circuito ($\epsilon$) è data dalla variazione, nel tempo, del flusso di campo magnetico ($\Phi$) attraverso la superficie della spira:

$$\Phi = l(X_2 - X_1)B \Longrightarrow \epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -l(V_2 - V_1)B$$

Da cui si ricava la corrente che circola nella spira:

$$I = \frac{\epsilon}{R} = -\frac{lB}{R}(V_2 - V_1)$$

Le forze agenti sui lati mobili sono date da $\pm lBI$ e sono dirette in verso opposto alle velocità. Le equazioni del moto sono pertanto:

$$m\frac{dV_1}{dt} = -lBI = \frac{l^2B^2}{R}(V_2 - V_1) \quad ; \quad m\frac{dV_2}{dt} = +lBI = -\frac{l^2B^2}{R}(V_2 - V_1)$$

Sommando e sottraendo le equazioni precedenti si ottiene:

$$\frac{d}{dt}(V_2 + V_1) = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dt}(V_2 - V_1) = -\frac{2l^2B^2}{Rm}(V_2 - V_1)$$

Da queste relazioni si ricavano le soluzioni corrispondenti alle condizioni iniziali:

$$V_2 + V_1 = V_0 \quad ; \quad V_2 - V_1 = -V_0 e^{-t/\tau}$$

con $\tau = Rm/(2l^2B^2)$. Le velocità dei lati sono pertanto:

$$V_{1,2} = \frac{V_0}{2}(1 \pm e^{-t/\tau})$$

e asintoticamente $V_{1f,2f}(t \to \infty) = \frac{V_0}{2} = 6\text{m/s}$

b) La potenza dissipata è $P = RI^2$ dove l'espressione esplicita della corrente è :

$$I = -\frac{lBV_0}{R}e^{-t/\tau}$$

Si può quindi ricavare la potenza dissipata per effetto joule al tempo $t_p$:

$$P(t_p) = \frac{l^2B^2V_0^2}{R}e^{-2t_p/\tau} = 0.13\text{W}$$

c) L'energia totale dissipata è:

$$E_{diss} = \int_0^\infty RI^2(t)dt = \frac{(lBV_0)^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/\tau}dt = \frac{(lBV_0)^2}{R}\frac{\tau}{2} = \frac{mV_0^2}{4} = 5.4J$$

ed è uguale alla differenza tra energia cinetica iniziale e finale. Si ricava quindi:

$$E_f = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{mV_0^2}{4} = \frac{mV_0^2}{4} = 5.4J$$

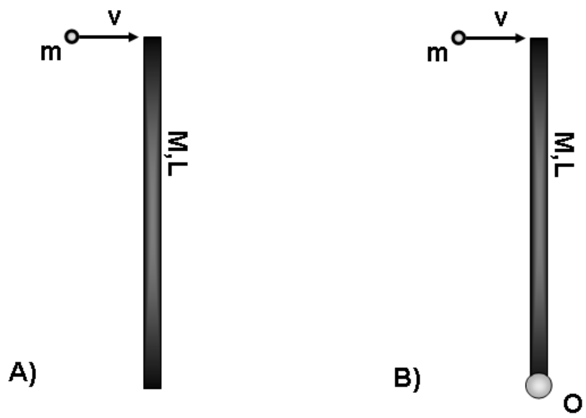
**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 14/04/2015**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : ......................................**

# Esercizio 1

Sono date le due situazioni riportate in figura. Nel primo caso una massa puntiforme $m_1 = 4.0$kg urta un'asta, libera di muoversi su un piano, di lunghezza $L = 4.2$m e massa $M = 1.7$kg. Nel secondo caso, invece, i corpi coinvolti sono gli stessi ma l'asta è vincolata in un estremo. La massa $m_1$ si muove con velocità di modulo, $v_1 = 4.5$m/s. L'urto, che avviene all'estremo dell'asta, è perfettamente anelastico.




Si calcoli:

a) La velocità angolare del sistema subito dopo l'urto nei due casi:

$\omega_A =$ ........................... $\omega_B =$ ...........................

b) L'energia dissipata nell'urto nei due casi:

$E_A =$ ........................... $E_B =$ ...........................

c) La differenza tra la quantità di moto finale del sistema nel caso A e nel caso B:

$\Delta p =$ ...........................

## Soluzione

a) Caso A:

La velocità del centro di massa del sistema, subito dopo l'urto, si ricava utilizzando la conservazione della quantità di moto, poichè sul sistema non agiscono forze esterne. La quantità di moto iniziale è quella della massa $m_1$:

$$p_{inizA} = m_1 v_1$$

mentre quella finale del sistema è:

$$p_{finA} = (m_1 + M)v_{cmA}$$

Uguagliando la quantità di moto finale con quella iniziale si può ricavare la velocità del centro di massa del sistema:

$$v_{cmA} = \frac{p_{inizA}}{m_1 + M}$$

La distanza del centro di massa dal centro dell'asta (dopo l'urto) si calcola nel seguente modo:

$$d_{cmA} = \frac{m_1 L/2}{m_1 + M}$$

Il momento d'inerzia del sistema calcolato nel centro di massa del sistema é:

$$I_A = 1/12ML^2 + Md_{cmA}^2 + m_1(L/2 - d_{cmA})^2$$

La componente z del momento angolare totale (rispetto al centro di massa), subito prima dell'urto é :

$$L_z = m_1 v_1 (L/2 - d_{cmA})$$

Dalla conservazione del momento angolare $\vec{L_z} = \vec{L_f}$ si ottiene:

$$L_f = I_A \omega_A = L_z \Longrightarrow \omega_A = \frac{L_z}{I_A} = 1.45s^{-1}$$

Caso B:

Il momento d'inerzia del sistema calcolato rispetto al polo O é:

$$I_B = ML^2/3 + m_1 L^2$$

La componente z del momento angolare totale (rispetto al polo O), subito prima dell'urto é:

$$L_z = m_1 v_1 L$$

Dalla conservazione del momento angolare $\vec{L_z} = \vec{L_f}$ si ottiene:

$$L_f = I_B \omega_B = L_z \Longrightarrow \omega_B = \frac{L_z}{I_B} = 0.94s^{-1}$$

La distanza del centro di massa dal polo O (dopo l'urto) si calcola nel seguente modo:

$$d_{cmB} = \frac{m_1 L + ML/2}{m_1 + M}$$

b) Caso A:

L'energia meccanica del sistema prima dell'urto vale:

$$E_{iA} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

Quella dopo l'urto è:

$$E_{fA} = \frac{1}{2}(m_1 + M)v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_A \omega_A^2$$

L'energia meccanica dissipata nell'urto è data, pertanto, dalla differenza tra $E_iA$ e $E_fA$:

$$E_A = E_{iA} - E_{fA} = 3.89J$$

Caso B:

L'energia meccanica del sistema prima dell'urto vale:

$$E_{iB} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

Quella dopo l'urto è:

$$E_{fB} = \frac{1}{2} I_B \omega_B^2$$

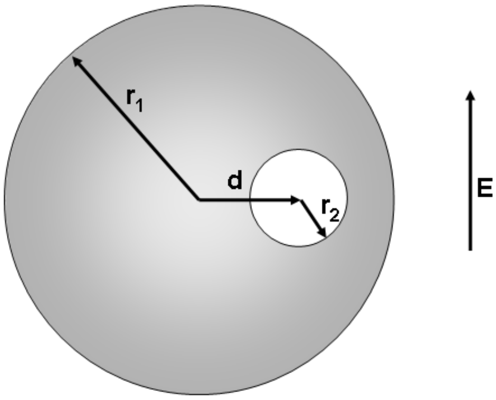
L'energia meccanica dissipata nell'urto è data dalla differenza tra $E_i B$ e $E_f B$:

$$E_B = E_{iB} - E_{fB} = 5.03J$$

c) La differenza tra la quantità di moto finale del sistema nel caso A e nel caso B è:

$$\Delta p = p_{finA} - p_{finB} = m_1 v_1 - (M + m_1) v_{cmB} = m_1 v_1 - (M + m_1) \omega_B d_{cmB} = 6.77 kgms^{-1}$$

# Esercizio 2




Una sfera di raggio $r_1 = 0.20\text{m}$ presenta una densità di carica elettrica uniforme $\rho = 0.3 \cdot 10^{-6}\text{C/m}^3$. All'interno della sfera si trova una cavità sferica di raggio $r_2 = 0.05\text{m}$ con il centro posizionato a distanza $d = 0.10\text{m}$ dal centro della sfera. Si calcoli:

a) Il modulo del campo elettrico all'interno della cavità mostrando che tale campo elettrico è uniforme:

$$E_{int} = \text{............................}$$

Si accende quindi un campo elettrico esterno uniforme $E = 20 \cdot 10^8 N/C$ diretto ortogonalmente rispetto all'asse che congiunge i centri delle due sfere (vedere figura). Calcolare:

b) Il modulo della forza sulla sfera:

$$F = \text{............................}$$

c) Il modulo del momento della forza rispetto al centro della sfera:

$$\tau = \text{............................}$$

## Soluzione

a) Una sfera uniformemente carica con una cavità interna è equivalente a una sfera piena con densità di carica uguale a quella iniziale sovrapposta ad una sfera, uguale alla cavità, con densità di carica di segno opposto. Sfruttando il teorema di Gauss si dimostra che il campo elettrico interno ad una sfera uniformemente carica è dato da:

$$\vec{E} = \frac{\rho\vec{r}}{3\epsilon_0}$$

Il campo è radiale e il modulo è proporzionale alla distanza dal centro. Il campo elettrico in un punto P interno alla cavità è quindi dato da due contributi, uno radiale rispetto al centro della sfera ed uno radiale rispetto al centro della cavità di segno opposto al primo. Il campo risultante è proporzionale alla somma vettoriale dei due contributi ed è uniforme in tutta la cavità.

$$\vec{E}_{int} = \frac{\rho\vec{d}}{3\epsilon_0} \Longrightarrow E_{int} = 1.13 \cdot 10^3 N/C$$

b) In presenza di un campo esterno $\vec{E}$ la forza risultante sulla sfera è data dalla sommatoria della forze sulle singole cariche.

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

dove Q è la carica totale. Quindi

$$\vec{F} = \frac{4}{3}\pi\rho(r_1^3 - r_2^3)\vec{E} \Longrightarrow F = 19.79N$$

La forza è la stessa che si avrebbe considerando due cariche puntiformi poste rispettivamente al centro della sfera e della cavità.

c) Schematizzando il sistema con due cariche poste rispettivamente nell'origine e nel centro della cavità si ha che solo la forza esercitata su quest'ultima ha momento diverso da zero (rispetto al centro della sfera). Quindi:

$$\vec{\tau} = \vec{d} \times \vec{F} = -\frac{4}{3}\pi\rho r_2^3\vec{d} \times \vec{E} \Longrightarrow \tau = 0.031Nm$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 16/06/2015**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : ......................................**

# Esercizio 1

Si consideri il manubrio costituito da un'asta omogenea rigida di lunghezza $l = 1$m e massa $M_1 = 2$kg alle cui estremità A e B sono saldate due sfere omogenee di massa $M_2 = 1$kg e raggio $r = 0.1$m.

16062015me.png

Il manubrio è vincolato nel punto C distante $d = 0.2$m dall'estremo A dell'asta e può ruotare intorno a C nel piano verticale. Supponendo che il manubrio si trovi inizialmente nella sua posizione di equilibrio stabile (fig. 1.A).
Si calcoli:

a) il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio.

$$T = ................$$

Ad un dato istante le due sfere vengono colpite contemporaneamente da due proiettili puntiformi di massa $m = 0.1$kg e velocità di modulo $v = 10$m/s . La velocità dei due proiettili è perpendicolare all'asta. I due proiettili si conficcano nelle sfere in superficie, a distanza r dal centro. (fig. 1.B). Si calcoli:

b) la velocità del centro di massa del sistema subito dopo l'urto.

$$v_{cm} = ................$$

c) l'angolo massimo $\Theta_{max}$ raggiunto dal manubrio nel moto successivo all'urto (fig. 1.C).

$$\Theta_{max} = ................$$

# Soluzione

a)
Il centro di massa del sistema è al centro dell'asta. Si calcola quindi il momento d'inerzia del manubrio (asta con le due sfere) riferito al punto C:

$$I_C = \frac{1}{12}M_1 l^2 + M_1 d_{cm}^2 + \frac{4}{5}M_2 r^2 + M_2(d+r)^2 + M_2(l-d+r)^2$$

Con $d_{cm} = l/2 - d$. Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{d}{dt}(M_{tot}g(d_{cm} - d_{cm}cos(\Theta)) + \frac{1}{2}I_C\dot{\Theta}^2) = 0$$

Dove $M_{tot} = M_1 + 2M_2$. Derivando e sostituendo $sen(\Theta)$ con $\Theta$ (approssimazione di piccole oscillazioni) si ottiene:

$$M_{tot}gd_{cm}\Theta = -I_C\ddot{\Theta} \;\Rightarrow\; T = 2\pi\sqrt{\frac{I_C}{M_{tot}gd_{cm}}} = 2s$$

b)
Durante l'urto si conserva il momento angolare del sistema. Sfruttando tale conservazione si può ricavare la velocità angolare del sistema dopo l'urto. Si ha pertanto:

$$mv(l+r-d) - mv(d+r) = I'_C\omega \;\Rightarrow\; mv(l-2d) = I'_C\omega$$

Dove $I'_C = I_C + m((d+r)^2 + r^2) + m((l-d+r)^2 + r^2)$ Si ricava quindi la velocità angolare del sistema dopo l'urto:

$$\omega = \frac{mv(l-2d)}{I'_C}$$

Si deve trovare quindi la posizione del centro di massa del sistema (in questo caso rispetto al centro dell'asta)

$$x_{cm} = \frac{2mr}{2m + M_{tot}}$$

La velocità del centro di massa del sistema subito dopo l'urto è pertanto:

$$v_{cm} = \omega R_{cm} = 0.13m/s$$

Dove $R_{cm} = \sqrt{(x_{cm}^2 + d_{cm}^2)}$
c)
Dopo l'urto si conserva l'energia meccanica del sistema. Subito dopo l'urto l'energia del sistema è data da:

$$E_{iniziale} = \frac{1}{2}I'_C\omega^2$$

Nel momento in cui il centro di massa ha raggiunto l'altezza massima si ha:

$$E_{finale} = (M_{tot} + 2m)gh_{finale}$$

Da cui:

$$h_{finale} = \frac{E_{iniziale}}{(M_{tot} + 2m)g}$$

Per ottenere l'angolo massimo $\Theta_{max}$ raggiunto dal manubrio nel moto successivo all'urto basta valutare l'angolo di cui si è mosso il centro di massa:

$$\Theta_{max} = arcos\left(\frac{d_{cm}}{R_{cm}}\right) + arcos\left(\frac{d_{cm} - h_{finale}}{R_{cm}}\right) = 0.16rad$$

# Esercizio 2

Un circuito circolare di raggio $r_1 = 1$m e resistenza $R_{circ} = 10\Omega$ è posizionato al centro di un solenoide di raggio $r_2 = 3$m e lunghezza $l_s = 10$m. Per realizzare il solenoide si è utilizzato un cavo di sezione $S = 1\text{cm}^2$ resistività $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}\Omega$m e lunghezza $l_f = 10$km.

16062015em.png

Supponendo di collegare il solenoide ad un generatore di tensione costante $V_0 = 100$V e trascurando gli effetti sul solenoide dovuti alla corrente che circola in $r_1$
Si calcoli:

a) il campo magnetico del solenoide in condizioni stazionarie (quando cioè la corrente che circola nel solenoide si può considerare continua)

$$B_{staz} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) l'energia immagazzinata nel solenoide ad un istante $t_1 = 0.2$s (durante la carica del circuito RL)

$$E = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

c) la corrente che circola nel circuito di raggio $r_1$ nell'istante $t_2 = 0.5$s

$$I_{circ} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

## Soluzione

a)
Si valuta la densità di spire per unità di lunghezza ($n$) del solenoide . Il numero totale di spire è dato da:

$$N = \frac{l}{2\pi r_2}$$

Dividendo il numero totale di spire per la lunghezza del solenoide si trova il numero di spire per unità di lunghezza:

$$n = \frac{N}{l_s} = 53m^{-1}$$

La resistenza del filo si ricava dalla seguente relazione:

$$R = \frac{\rho l_f}{S} = 1.7\Omega$$

Considerando la corrente che circola nel solenoide continua si ha:

$$I_{staz} = \frac{V_0}{R} = 59A$$

Si può quindi ricavare il campo magnetico che si genera al centro del solenoide:

$$B_{staz} = \mu_0 n I_{staz} = 0.39 \cdot 10^{-2} T$$

b)
L'induttanza del solenoide si ricava dalla seguente relazione:

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l_s} \pi r_2^2$$

Si valuta quindi la corrente che circola nel circuito RL all'istante $t_1$:

$$I(t_1) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt_1/L}) = 17A$$

Pertanto l'energia immagazzinata dal solenoide all'istante $t_1$ è:

$$E = \frac{1}{2} L I(t_1)^2 = 144J$$

c)
Il flusso del campo magnetico attraverso il circuito è dato da:

$$\Phi_B = \mu_0 n I(t) \pi r_1^2$$

La forza elettromotrice indotta nel circuito è:

$$\epsilon(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 n \pi r_1^2 \frac{dI(t)}{dt} = -\mu_0 n \pi r_1^2 \frac{V_0}{L} e^{-Rt/L}$$

Da cui si ricava la corrente che circola nel circuito nell'istante $t_2 = 0.5$s:

$$I_{circ} = \frac{|\epsilon(t_2)|}{R_{circ}} = 0.9mA$$

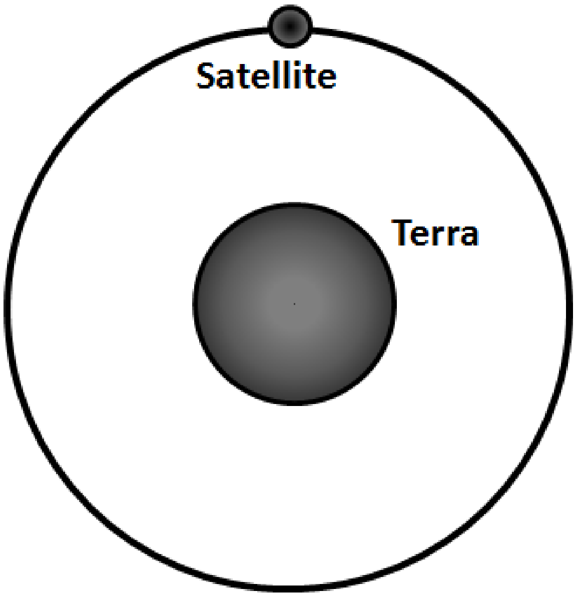
**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 07/07/2015**
**Cognome : ....................................................... Nome : .......................................................**

**Matricola: ....................................................... Anno di corso : ..........................................**

# Esercizio 1

Un satellite geostazionario di massa $m_0 = 3\text{t}$ ruota su un'orbita circolare intorno alla Terra. In un certo istante esplode in due frammenti di massa $m_1 = m_0/3$ e $m_2 = 2m_0/3$. Rispetto a un sistema di riferimento solidale con il satellite, il frammento più piccolo viene lanciato verso l'alto con una velocità verticale $v_{1s} = 200\text{m/s}$. Sono dati la costante di gravitazione universale $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2$ e la massa della Terra $M_T = 5.97 \cdot 10^{24}\text{kg}$.




Si calcoli:

a) il modulo della velocità rispetto alla Terra del frammento di maggiori dimensioni.

$$v_{2t} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) l'energia minima sviluppata dall'esplosione.

$$E_{esplosione} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

c) La distanza di minimo avvicinamento alla Terra dei due satelliti nel moto successivo all'esplosione.

$$d_{1min} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad d_{2min} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

## Soluzione

a)
Rispetto a un sistema di riferimento solidale con il satellite si conserva la quantità di moto verticale del sistema

$$0 = m_1 v_{1s} - m_2 v_{2s} \;\Rightarrow\; v_{2s} = \frac{m_1 v_{1s}}{m_2}$$

Il satellite geostazionario, prima dell'esplosione, si muove su un'orbita circolare di raggio:

$$r_{geo} = \sqrt[3]{\frac{GM_T T_{giorno}^2}{4\pi^2}}$$

Dove con $T_{giorno}$ si indica il tempo che occorre al satellite per percorrere l'orbita geostazionaria. La velocità con cui si muove il satellite prima dell'esplosione rispetto al centro della Terra è:

$$v_{sat} = r_{geo}\omega$$

Dove con $\omega$ si indica la velocità angolare del satellite ($\omega = 2\pi/T_{giorno}$) Il modulo della velocità rispetto alla Terra del frammento di maggiori dimensioni è dato da:

$$v_{2t} = \sqrt{v_{2s}^2 + v_{sat}^2} = 3071 m/s$$

b)
L'energia minima sviluppata dall'esplosione è quella necessaria a far muovere i due pezzi rispetto a un sistema di riferimento solidale con il satellite, in alto e in basso con le velocità $v_{1s}$ e $v_{2s}$

$$E_{esplosione} = \frac{1}{2} m_1 v_{1s}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2s}^2 = 3 \cdot 10^7 \mathrm{J}$$

c)
Dopo l'esplosione si conserva l'energia meccanica del sistema. Il primo frammento ha un'energia meccanica iniziale pari a:

$$E_{1iniziale} = \frac{1}{2} m_1 (v_{1s}^2 + v_{sat}^2) - \frac{GM_T m_1}{r_{geo}}$$

Nel momento in cui raggiunge il punto di minima distanza dal centro della terra la componente radiale della velocità si annulla quindi:

$$E_{1finale} = \frac{L^2}{2m_1 r_1^2} - \frac{GM_T m_1}{r_1}$$

con $L = m_1 r_{geo} v_{sat}$. Ponendo $E_{1finale} = E_{1iniziale}$ si ottiene:

$$Ar_1^2 + Br_1 - L^2 = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AL^2}}{2A}$$

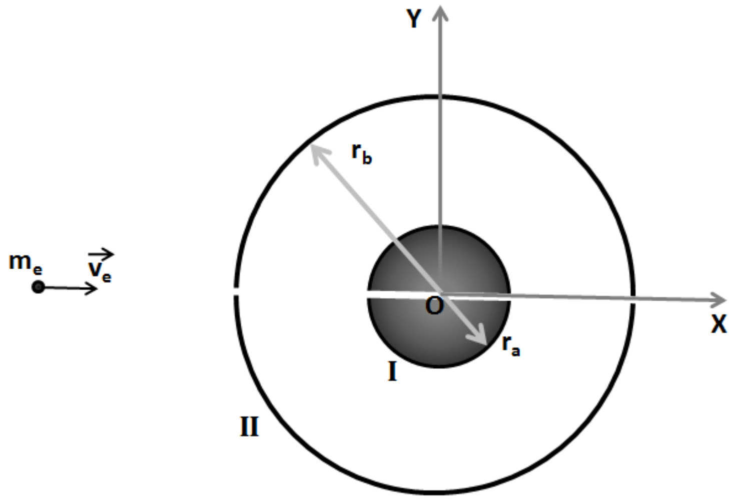
con $A = E_{1finale} 2m_1$ e $B = 2GM_T m_1^2$ Trovate le due soluzioni per $r_1$ si sceglie quella minore e si ricava:

$$d_{1min} = 39,6 \cdot 10^6 \mathrm{m}$$

Allo stesso modo si procede per calcolare $d_{2min}$

## Esercizio 2

Un condensatore cilindrico indefinito è costituito da un'armatura centrale I, realizzata con un conduttore cilindrico (pieno), di raggio $r_a = 10\text{cm}$ e un'armatura periferica II costituita da un cilindro conduttore di spessore infinitesimo e raggio $r_b = 30\text{cm}$. Il condensatore è inizialmente carico e l'energia immagazzinata in una lunghezza $l = 10\text{m}$ è $E_{imm} = 0.01\text{J}$.




Si calcoli:

a) la carica sull'amatura II su una lunghezza $l_1 = 10\text{cm}$

$$q_{II} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Nell'ipotesi che la carica sull'armatura I sia positiva si lancia contro il condensatore un elettrone ($m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\text{kg}; q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}\text{C}$) che, nel momento in cui si trova nella posizione $(-2r_b,0)$ ha velocità $v_e = 2.5 \cdot 10^7\text{m/s}$ diretta verso il centro O. Considerando la presenza di due fori nell'armatura II e un piccolo canale nell'armatura I (vedere figura), di dimensioni infinitesime e allineati in modo da permettere il passaggio dell'elettrone, si calcoli:

b) la velocità dell'elettrone quando passa per l'origine O.

$$v_O = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Se si connettono le due armature con un filo di resistenza $R = 1.8\text{M}\Omega$ si calcoli:

c) l'energia totale dissipata sulla resistenza dopo un tempo $t_1 = 0.2\text{ms}$ (Si consideri il condensatore di lunghezza $l = 10\text{m}$ ed energia immagazzinata $E_{imm} = 0.01\text{J}$).

$$E_{diss} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

## Soluzione

a)
La capacità del condensatore cilindrico di lunghezza $l = 10$m è:

$$C = \frac{2\pi l \epsilon_0}{ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}$$

Data l'energia immagazzinata nel condensatore si ha:

$$E_{imm} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \ \Rightarrow \ Q = \sqrt{2E_{imm}C}$$

Conoscendo la carica Q presente sulla lunghezza l del condensatore cilindrico si può calcolare la carica sull'amatura II su una lunghezza $l_1 = 0.1$m:

$$q_{II} = \frac{Ql_1}{l} = 0.03 \cdot 10^{-6}\text{C}$$

b)
Il campo elettrico tra le armature del condensatore è dato da:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

con $\lambda = Q/l$ Fissando lo zero del potenziale nel punto O si valuta il potenziale nel punto $(-2r_b$,0):

$$V(-r_b) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)$$

Pertanto l'energia potenziale dell'elettrone nel punto di partenza è data da:

$$U = V(-r_b)q_e$$

L'energia iniziale dell'elettrone è:

$$E_{ini} = U + \frac{1}{2}m_e v_e^2$$

Quando l'elettrone passa per il centro O tutta la sua energia potenziale si è trasformata in energia cinetica quindi:

$$E_{fin} = \frac{1}{2}m_e v_O^2$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia ($E_{ini} = E_{fin}$)si ottiene:

$$v_O = \sqrt{\frac{2E_{ini}}{m_e}} = 5.3 \cdot 10^7\text{m/s}$$

c)
In questo caso si considera la scarica di un circuito RC:

$$i(t) = \frac{Q}{RC}e^{-t/RC}$$

La potenza dissipata è:

$$P(t) = Ri(t)^2 = \frac{Q^2}{RC^2}e^{-2t/RC}$$

Da cui si ricava l'energia totale dissipata sulla resistenza dopo un tempo $t_1 = 0.2$ms:

$$E_{diss} = \frac{Q^2}{RC^2}\int_0^{t_1} e^{-2t/RC}dt = \frac{Q^2}{2C}(1 - e^{-2t_1/RC}) = 0.0036J$$

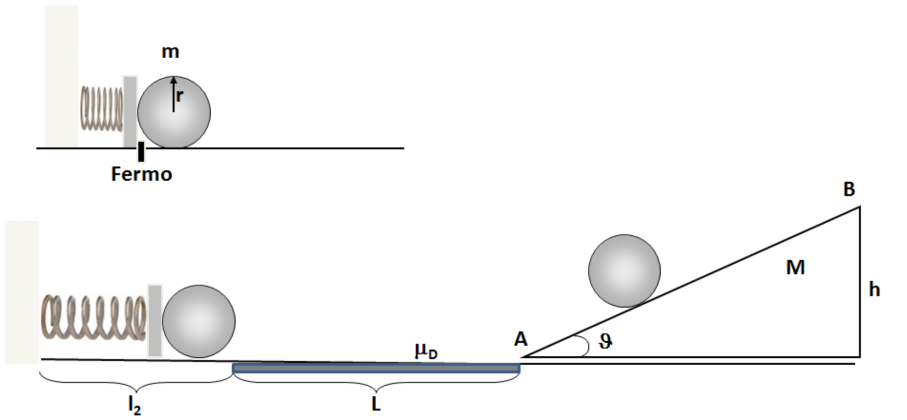
**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 28/07/2015**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : ....................................**

# Esercizio 1

Una sfera di massa $m = 1$kg e raggio $r = 0.1$m è appoggiata a una molla di costante elastica $K = 60$N/m e lunghezza a riposo $l_0 = 0.3$m. La molla è inizialmente compressa con un fermo, la sua lunghezza è $l_1 = 0.1$m. A un certo istante il fermo che trattiene la molla viene rimosso e la molla comincia a muoversi sul piano orizzontale. Il primo tratto fino alla distanza $l_2 = 0.5$m è privo di attrito, nel tratto successivo $L = 1$m è presente attrito dinamico $\mu_D = 0.4$. A distanza $l_2 + L$ dalla parete cui è ancorata la molla c'è un piano inclinato di massa $M = 2$kg, angolo $\theta = 30^o$, altezza $h = 5$m privo di attrito nel tratto AB e che può muoversi senza attrito sul piano orizzontale.




Si calcoli:

a) la velocità del centro di massa della sfera quando inizia a percorrere il tratto L con attrito

$$v_{iL} = ................$$

b) il tempo impiegato dalla sfera a raggiungere il piano inclinato partendo dalla distanza $l_2$

$$t_{totL} = ................$$

c) la velocità del piano inclinato quando la sfera raggiunge il punto di massima altezza

$$v_{finp} = ................$$

## Soluzione

a)
Per calcolare la velocità del centro di massa della sfera quando inizia a percorrere il tratto L con attrito si può applicare la conservazione dell'energia. Nel momento in cui viene rimosso il fermo, infatti, l'energia potenziale elastica della molla si trasforma in energia cinetica della sfera.

$$\frac{1}{2}K\Delta l^2 = \frac{1}{2}mv_{iL}^2 \;\Rightarrow\; v_{iL} = \sqrt{\frac{K\Delta l^2}{m}} = 1.55m/s$$

Con $\Delta l = l_0 - l_1$
b)
Inizialmente, nel tratto in cui è presente attrito, il corpo striscia ma non rotola. In questo tratto agisce la forza di attrito $F_a = \mu_D mg$ opposta al moto; quindi:

$$v_{cm}(t) = v_{iL} - \mu_D gt$$

Per effetto del momento della forza di attrito il corpo inizia a rotolare, pur continuando a strisciare. Assumendo come polo il centro di massa si ha:

$$\mu_D mgr = I_{cm}\alpha = \frac{2}{5}mr^2\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{5\mu_D g}{2r}$$

si ottiene quindi:

$$\omega(t) = \alpha t = \frac{5\mu_D gt}{2r}$$

Ad un certo istante $t_1$ si ha $v_{cm} = \omega r$ pertanto:

$$t_1 = \frac{2v_{iL}}{7\mu_D g}$$

Si possono quindi ricavare sia la distanza percorsa dalla sfera nel tempo $t_1$ sia la $\omega(t_1)$

$$d(t_1) = -\frac{1}{2}\mu_D gt_1^2 + v_{iL}t_1 \quad ; \quad \omega(t_1) = \alpha t_1$$

Da questo istante in poi la sfera procede con moto rettilineo uniforme. Il tempo che impiega a percorrere $D = L - d(t_r)$ è:

$$t_2 = \frac{D}{\omega(t_1)r}$$

il tempo totale impiegato dalla sfera a raggiungere il piano inclinato partendo dalla distanza $l_2$ è:

$$t_{totL} = t_1 + t_2 = 0.87s$$

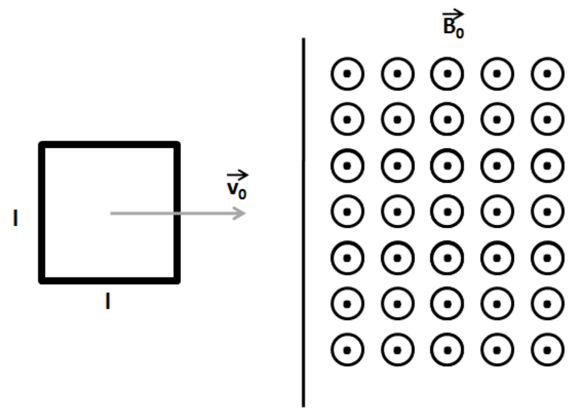
c)
Per trovare la velocità del piano inclinato quando la sfera raggiunge il punto di massima altezza basta conservare la quantità di moto lungo l'asse orizzontale (l'unica forza esterna al sistema sfera+piano inclinato è quella di gravità che però agisce verticalmente). Si ha quindi:

$$m\omega(t_1)r = (M+m)v_{finp} \;\Rightarrow\; v_{finp} = \frac{m\omega(t_1)r}{M+m} = 0.37m/s$$

Nel momento in cui la sfera raggiunge il punto di massima altezza sul piano inclinato i due corpi hanno la stessa velocità lungo l'asse orizzontale.

# Esercizio 2

Un circuito quadrato di lato $l = 10$cm e massa $m = 10$g è costituito da un filo di resistività $\rho = 0.017\Omega\ \mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$ e sezione $S = 0.1\mathrm{mm}^2$. Il circuito si sposta senza attrito su un piano orizzontale con velocità $v_0 = 1$m/s quando penetra in una regione in cui è presente un campo magnetico costante diretto verso l'alto, di modulo $B_0 = 0.1$T.




Si calcoli:

a) Il tempo impiegato dal circuito per entrare nella regione in cui è presente il campo magnetico fino a $l/2$ (si ricordi che la soluzione generale di un'equazione differenziale del tipo $\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx$ è $\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx$)

$$t_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) la forza che agisce sul circuito al tempo $t_1$

$$F_{l/2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

c) l'energia dissipata nel circuito per effetto joule nel tempo $t_1$

$$E_{diss} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

## Soluzione

a)
Quando il circuito si trova completamente fuori dalla regione con $B_0$ o quando è completamente immersa nella regione con $B_0$, il flusso di $B_0$ attraverso il circuito $\Phi(B_0)$ è costante e non circola corrente. Nella fase transitoria in cui la spira penetra nella regione con $B_0$ ma non è completamente immersa in essa, si ha che $\Phi(B_0)$ varia nel tempo e quindi circola corrente nella spira. Detta x la porzione di circuito entrata nella regione con campo $B_0$, per il flusso $\Phi(B_0)$ e per la sua derivata rispetto al tempo si può scrivere che:

$$\Phi(B_0) = B_0 l x \;\Rightarrow\; fem = -\frac{d\Phi(B_0)}{dt} = -B_0 l v(t)$$

Da cui si ricava:

$$I(t) = -\frac{B_0 l v(t)}{R}$$

Con $R = \rho 4l/S$. La forza che agisce sul circuito quando è penetrato nella zona con $B_0$ è:

$$F(t) = I(t) l B_0 = -\frac{B_0^2 l^2 v(t)}{R}$$

Da questa relazione si ottiene:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B_0^2 l^2 v(t)}{mR}$$

che ha come soluzione:

$$ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{B_0^2 l^2 t}{mR} \;\Rightarrow\; v(t) = v_0 exp\left(-\frac{B_0^2 l^2 t}{mR}\right)$$

Scrivendo $v(t) = dx/dt$ si ottiene:

$$x(t) = \frac{v_0 mR}{B_0^2 l^2}\left(1 - e^{-B_0^2 l^2 t/mR}\right)$$

Quindi il tempo che impiega la spira per entrare fino a $l/2$ è:

$$\frac{l}{2} = \frac{v_0 mR}{B_0^2 l^2}\left(1 - e^{-B_0^2 l^2 t_1/mR}\right) \;\Rightarrow\; e^{-B_0^2 l^2 t_1/mR} = 1 - \frac{B_0^2 l^3}{2 v_0 mR} \;\Rightarrow\; t_1 = -ln\left(1 - \frac{B_0^2 l^3}{2 v_0 mR}\right)\frac{mR}{B_0^2 l^2} = 0.05s$$

b)
La velocità al tempo $t_1$ è:

$$v(t_1) = v_0\left(1 - \frac{B_0^2 l^3}{2 v_0 mR}\right)$$

Quindi il modulo della forza che agisce sul circuito quando è penetrato nella zona interessata dal campo magnetico per $l/2$ è:

$$F_{l/2} = \frac{B_0^2 l^2 v(t_1)}{R} = 1.5 \cdot 10^{-3} N$$

c)
La potenza dissipata è:

$$P(t) = Ri(t)^2 = \frac{B_0^2 l^2 v(t)^2}{R}$$

Da cui si ricava l'energia dissipata sulla resistenza dopo un tempo $t_1$:

$$E_{diss} = \int_0^{t_1} P(t)dt = \frac{B_0^2 l^2}{R}\int_0^{t_1} v(t)^2 dt = \frac{v_0^2 mR}{2 B_0^2 l^2}\left(1 - e^{-2B_0^2 l^2 t_1/mR}\right) = 0.05J$$

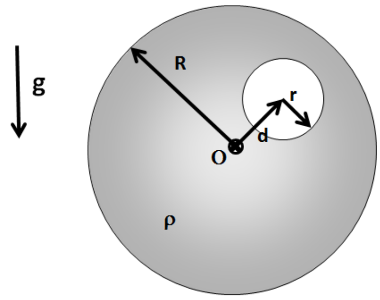
**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 09/09/2015**
**Cognome : .................................................. Nome : ..................................................**

**Matricola: .................................................. Anno di corso : ........................................**

# Esercizio 1

Un cilindro di raggio $R = 0.9$m e spessore $s = 0.15$m è costituito da un materiale di densità $\rho = 8000$kg/m$^3$. Il cilindro presenta, a distanza $d = 0.45$m dal centro, un foro sempre cilindrico di raggio $r = 0.2$m. Il cilindro è immerso in un campo gravitazionale di intensità $g = 9.8$m/s$^2$, è vincolato al centro (nel punto O) e può ruotare intorno al proprio asse centrale (come in figura). La velocità angolare del cilindro, quando il foro è in basso, è $\omega = 5$rad/s.




Si calcoli:

a) la frequenza delle piccole oscillazioni

$\nu =$ .................

b) la velocità angolare del cilindro quando il foro è in alto

$\omega_{alt} =$ .................

Se il cilindro è fermo nel suo punto di equilibrio stabile, si calcoli:

c) il momento angolare minimo che dovrebbe essere trasferito al disco per obbligarlo a fare una rotazione completa.

$L =$ .................

# Soluzione

a)
Il cilindro forato può essere scomposto in un cilindro pieno di raggio R e massa $M = \pi R^2 s\rho$ e un cilindretto, anch'esso pieno, di raggio r e massa "negativa" $m = \pi r^2 s(-\rho)$.
Inizialmente si calcola la posizione del centro di massa del sistema rispetto al punto O:

$$d_{cm} = \frac{md}{M_{tot}}$$

con $M_{tot} = M + m$
Si calcola quindi il momento d'inerzia del cilindro forato riferito al punto O:

$$I_O = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 + md^2$$

Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{d}{dt}(M_{tot}g(d_{cm} - d_{cm}cos(\Theta)) + \frac{1}{2}I_O\dot{\Theta}^2) = 0$$

Derivando e sostituendo $sen(\Theta)$ con $\Theta$ (approssimazione di piccole oscillazioni) si ottiene:

$$M_{tot}gd_{cm}\Theta = -I_O\ddot{\Theta} \;\;\Rightarrow\;\; T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{M_{tot}gd_{cm}}}$$

La frequenza delle piccole oscillazioni è:

$$\nu = \frac{1}{T} = 0.12s^{-1}$$

b)
La differenza di energia potenziale tra il cilindro con foro in basso e quello con foro in alto è:

$$E_p = 2M_{tot}gd_{cm}$$

Questa energia potenziale si trasforma in energia cinetica. Si ha quindi:

$$\frac{1}{2}I_O\omega_{alt}^2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + E_p \;\;\Rightarrow\;\; \omega_{alt} = \sqrt{\frac{I_O\omega^2 + 2E_p}{I_O}} = 5.22\frac{rad}{s}$$

c)
Si applica sempre la conservazione dell'energia. Per compiere un giro completo il cilindro forato deve avere inizialmente un'energia cinetica tale da poter passare dalla configurazione con foro in alto a quella con foro in basso. Si ha pertanto:

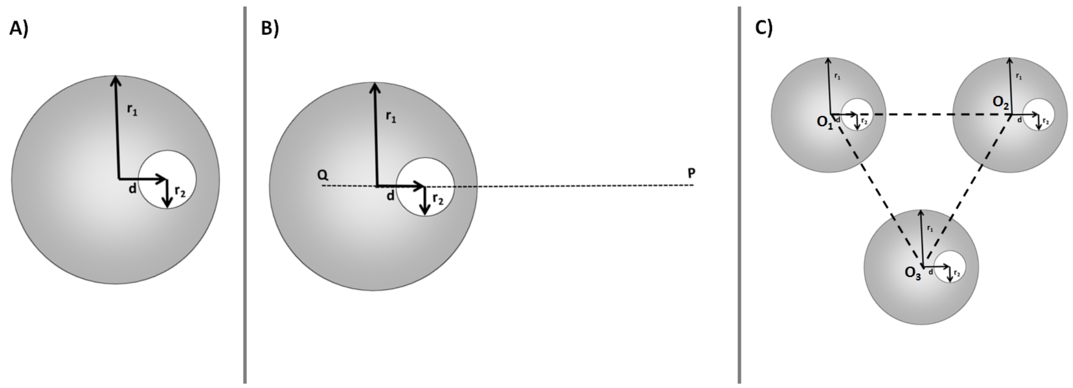
$$\frac{1}{2}I_O\omega_{ini}^2 = E_p \;\;\Rightarrow\;\; \omega_{ini} = \sqrt{\frac{2E_p}{I_O}}$$

Il momento angolare minimo iniziale che deve essere trasferito al cilindro per permettergli di compiere una rotazione completa è quindi:

$$L = I_O\omega_{ini} = 1788J$$

## Esercizio 2

Un cavo composito multipolare (si consideri il cavo composito multipolare come un conduttore di corrente omogeneo con densità di corrente costante su tutta la superficie occupata dal cavo) di raggio $r_1 = 20$cm contiene una cavità asimmetrica rispetto all'asse di raggio $r_2 = 5$cm posizionata a distanza $d = 10$cm dall'asse del conduttore (fig.A).




Supponendo che nel conduttore circoli una corrente $I = 200$A, si calcoli:

a) Il modulo del campo magnetico nel punto P a distanza $r_{ext} = 60$cm dall'asse del cavo nell'ipotesi di cavo indefinito. Il punto P è esterno al cavo (fig.B)

$$B_P = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) Il modulo del campo magnetico nel punto Q a distanza $r_{int} = 10$cm dall'asse del cavo nell'ipotesi di cavo indefinito. Il punto Q è interno al cavo (fig.B)

$$B_Q = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si considerino tre cavi composti identici, impacchettati, con i centri $O_1$, $O_2$, $O_3$, ai vertici di un triangolo equilatero di lato $L = 50$cm (fig.C). Il verso della corrente che scorre nei cavi è lo stesso. Se il filo elementare che passa per $O_3$ ha diametro $D = 2$mm, si calcoli:

c) il modulo della forza per unità di lunghezza che agisce sul filo elementare:

$$f = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

## Soluzione

a)
La densità di corrente che scorre nel conduttore è data da:

$$J = \frac{I}{\pi(r_1^2 - r_2^2)}$$

Per calcolare il modulo del campo magnetico nel punto P nell'ipotesi di cavo indefinito si usa il principio di sovrapposizione. Il campo creato sarà la somma del campo generato da un conduttore di raggio $r_1$ in cui scorre la corrente uniforme J, più quello di un conduttore di raggio $r_2$ (spazialmente coincidente con la cavità) dove scorre la corrente -J. Per trovare il campo di un singolo cilindro conduttore si usa il teorema di Ampere. Le linee di forza sono circolari e concentriche; la circuitazione sulle linee di forza è uguale a $\mu_0$ volte la corrente che scorre attraverso la superficie racchiusa. Si ha quindi:

$$2\pi r_{ext} B_{1P} = \mu_0 \pi r_1^2 J \;\Rightarrow\; B_{1P} = \frac{\mu_0 r_1^2 J}{2 r_{ext}}$$

$$2\pi(r_{ext} - d) B_{2P} = -\mu_0 \pi r_2^2 J \;\Rightarrow\; B_{2P} = \frac{-\mu_0 r_2^2 J}{2(r_{ext} - d)}$$

Il modulo del campo magnetico nel punto P vale:

$$B_P = B_{1P} + B_{2P} = 66.0 \cdot 10^{-6} T$$

b)
Lo svolgimento è simile a quello precedente facendo attenzione a quale corrente considerare nell'applicare il teorema di Ampere. Si ha quindi:

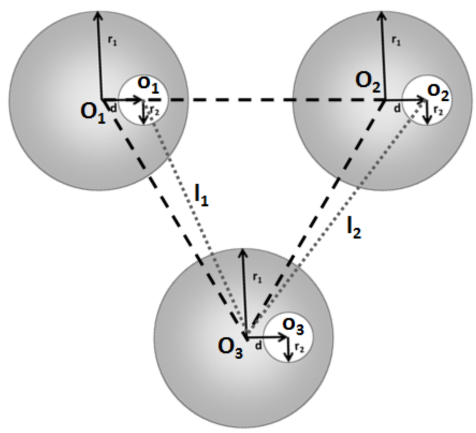
$$2\pi r_{int} B_{1Q} = \mu_0 \pi r_{int}^2 J \;\Rightarrow\; B_{1Q} = \frac{\mu_0 r_{int}^2 J}{2 r_{int}}$$

$$2\pi(r_{int} + d) B_{2Q} = -\mu_0 \pi r_2^2 J \;\Rightarrow\; B_{2Q} = \frac{-\mu_0 r_2^2 J}{2(r_{int} + d)}$$

Il modulo del campo magnetico nel punto Q vale:

$$B_Q = B_{1Q} + B_{2Q} = 93.6 \cdot 10^{-6} T$$

c)
Nel filo elementare che passa per $O_3$ scorre la corrente $I_3 = J\pi(D/2)^2$.




Per calcolare il campo magnetico che agisce sul filo bisogna tenere in considerazione il contributo di tutti i conduttori (i vari campi si calcolano sempre applicando il teorema di Ampere). A tal proposito è conveniente scomporre i campi magnetici generati dalle correnti che scorrono nei conduttori nelle componenti lungo gli assi x e y di un sistema di riferimento centrato in $O_3$.

$$B_{11} = \frac{\mu_0 r_1^2 J}{2L} \ \Rightarrow \ B_{11X} = B_{11}cos(\pi/6) \ ; \ B_{11Y} = B_{11}sin(\pi/6)$$

Campo generato in $O_3$ dal cilindro conduttore (pieno) di raggio $r_1$ centrato in $O_1$.

$$B_{12} = \frac{\mu_0 r_1^2 J}{2L} \ \Rightarrow \ B_{12X} = B_{12}cos(\pi/6) \ ; \ B_{12Y} = -B_{12}sin(\pi/6)$$

Campo generato in $O_3$ dal cilindro conduttore (pieno) di raggio $r_1$ centrato in $O_2$.
Con riferimento alla figura e sfruttando, ad esempio, il teorema dei coseni si ha:

$$l_1 = \sqrt{L^2 + d^2 - 2Ldcos(\pi/3)} \ ; \ l_2 = \sqrt{L^2 + d^2 - 2Ldcos(2\pi/3)}$$

Sfruttando il teorema dei seni si ricavano gli angoli $\alpha = O_1\hat{O}_3 o_1$ e $\beta = O_2\hat{O}_3 o_2$:

$$sin(\alpha) = \frac{dsin(\pi/3)}{l_1} \ \Rightarrow \ \alpha = arcsin\left(\frac{dsin(\pi/3)}{l_1}\right)$$

$$sin(\beta) = \frac{dsin(2\pi/3)}{l_2} \ \Rightarrow \ \beta = arcsin\left(\frac{dsin(2\pi/3)}{l_2}\right)$$

da cui si ottiene:

$$B_{21} = \frac{\mu_0 r_2^2 J}{2l_1} \ \Rightarrow \ B_{21X} = -B_{21}cos(\pi/6 - \alpha) \ ; \ B_{21Y} = -B_{21}sin(\pi/6 - \alpha)$$

$$B_{22} = \frac{\mu_0 r_2^2 J}{2l_2} \ \Rightarrow \ B_{22X} = -B_{22}cos(\pi/6 + \beta) \ ; \ B_{22Y} = +B_{22}sin(\pi/6 + \beta)$$

Per finire va considerato il campo creato dal foro cilindrico di centro $o_3$:

$$B_{23} = B_{23Y} = \frac{\mu_0 r_2^2 J}{2d}$$

Le componenti X e Y del campo magnetico totale sono:

$$B_{totX} = B_{11X} + B_{12X} + B_{21X} + B_{22X} \ ; \ B_{totY} = B_{11Y} + B_{12Y} + B_{21Y} + B_{22Y} + B_{23Y}$$

Il modulo del campo magnetico totale è

$$B_{tot} = \sqrt{B_{totX}^2 + B_{totY}^2}$$

Quindi il modulo della forza per unità di lunghezza che agisce sul filo elementare è:

$$f = B_{tot} I_3 = 0.8 \cdot 10^{-6} N/m$$

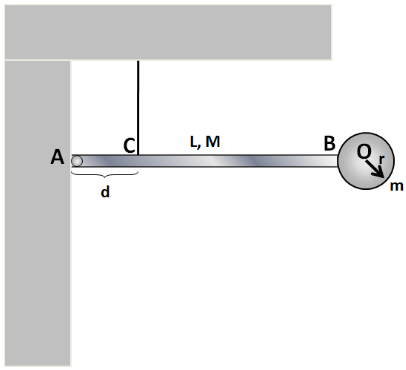
**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

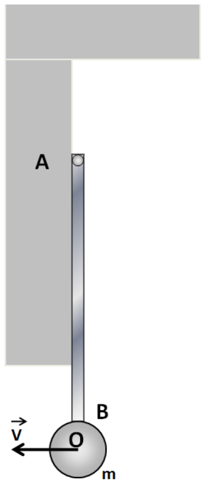
**Esame di Fisica Generale del 13/01/2016**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : ......................................**

# Esercizio 1

Una sbarra omogenea di lunghezza $L = 1\text{m}$ e massa $M = 3\text{kg}$ è incernierata su una parete verticale e può ruotare senza attrito nel piano verticale. All'estremo B dell'asta è saldata una sfera piena di raggio $r = 10\text{cm}$ e massa $m = 1\text{kg}$. Inizialmente la sbarra è tenuta in posizione orizzontale da un filo verticale, vincolato al punto C della sbarra e distante $d = 20\text{cm}$ dall'estremo A dell'asta.




Si calcoli:

a) il modulo della tensione del filo e della reazione vincolare in A

$T =$ ................ $R =$ ......................

Il filo si spezza e l'asta ruota nel piano verticale; si calcoli:
b) il modulo dell'accelerazione angolare del sistema nell'istante immediatamente successivo alla rottura del filo

$\alpha =$ ................

c) il modulo della velocità del centro O della sfera nell'istante in cui l'asta passa per la sua posizione verticale

$v =$ ................

# Soluzione

a)
Inizialmente si calcola la distanza del centro di massa del sistema dal punto A:

$$D_{cm} = \frac{ML/2 + m(L+r)}{M+m}$$

Per valutare il modulo della tensione del filo si uguaglia il momento della forza peso (P) a quello della forza esrcitata dal filo stesso (entrambi calcolati scegliendo come polo il punto A). Si ottiene:

$$M_P = M_T \Rightarrow (M+m)gD_{cm} = Td \Rightarrow T = \frac{(M+m)gD_{cm}}{d} = 127.4N$$

La reazione vincolare in A sarà tale da annullare la somma vettoriale delle forze:

$$\vec{R} + \vec{T} + \vec{P} = 0$$

Da cui si ricava che il modulo di R è:

$$R = T - P = 88.2N$$

b)
Preliminarmente si calcola il momento d'inerzia del sistema rispetto al punto A:

$$I_A = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{2}{5}mr^2 + m(r+L)^2$$

Applicando la seconda equazione cardinale considerando come polo il punto A si ottiene il modulo dell'accelerazione angolare nell'istante immediatamente ssuccessivo alla rottura del filo:

$$I_A\alpha = (M+m)gD_{cm} \Rightarrow \alpha = \frac{(M+m)gD_{cm}}{I_A} = 11.5s^{-2}$$

c)
Si applica la conservazione dell'energia. La variazione di energia potenziale del sistema si trasforma in energia cinetica. Si può pertanto ricavare la velocità angolare del sistema quando la sbarra è verticale:

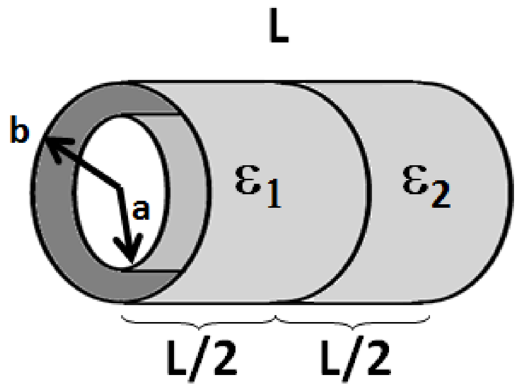
$$(M+m)gD_{cm} = \frac{1}{2}I_A\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2(M+m)gD_{cm}}{I_A}}$$

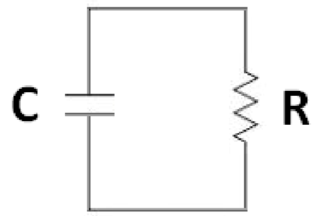
Quindi la velocità del centro della sfera quando la sbarra è verticale è:

$$v = \omega(L+r) = 5.3\frac{m}{s}$$

# Esercizio 2

Un condensatore cilindrico di raggi $a = 0.3$cm e $b = 1$cm e di lunghezza $L = 30$cm è riempito con due diversi dielettrici di costante dielettrica relativa rispettivamente $\epsilon_{r1} = 2$ e $\epsilon_{r2} = 3$.




Si calcoli:

a) la capacità del condensatore ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$F/m)

$C =$ .................

Il condensatore, caricato a una differenza di potenziale $V = 50$V, viene scaricato su una resistenza $R = 10$k$\Omega$. Si calcoli:

b) l'energia totale dissipata sulla resistenza

$E =$ .................

c) la potenza istantanea dissipata sulla resistenza dopo un tempo $t_1 = 100$ns (1ns $= 10^{-9}s$)

$P(t_1) =$ ................

## Soluzione

a)
Le capacità delle due parti del condensatore cilindrico sono rispettivamente:

$$C_1 = \pi\epsilon_0\epsilon_{r1}\frac{L}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad ; \quad C_2 = \pi\epsilon_0\epsilon_{r2}\frac{L}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Per calcolare la capacità totale del condensatore si possono considerare le due parti come due condensatori in parallelo, visto che le superfici delle armature sono equipotenziali. La capacità totale pertanto sarà data dalla somma delle due capacità:

$$C = C_1 + C_2 = 0.035 \cdot 10^{-9}F$$

b)
L'energia immagazzinata nel condensatore appena caricato è la stessa che viene dissipata dalla resistenza durante la scarica. Si ha quindi:

$$E = \frac{1}{2}CV^2 = 43.3 \cdot 10^{-9}J$$

c)
La differenza di potenziale ai capi del condensatore durante il processo di scarica presenta il seguente andamento:

$$V_C(t) = Ve^{-t/(RC)}$$

La potenza, all'istante $t_1$, dissipata su R vale:

$$P(t_1) = \frac{V^2}{R}e^{-2t_1/(RC)} = 0.14W$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 02/02/2016**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : ......................................**

# Esercizio 1

Una sfera di raggio $r = 40$cm e massa $m = 3$kg rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Il suo centro O è fissato a un punto P del piano da una molla di costante elastica $k = 60$N/m e lunghezza a riposo nulla. All'inizio O si trova sulla verticale di P.

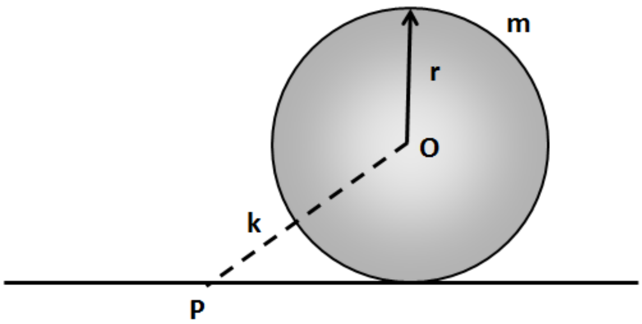



**Figura 1**

Si calcoli:

a) la lunghezza massima della molla nel caso in cui la sfera si muova inizialmente con una velocità del centro di massa $v_{cm} = 5$m/s

$$l_{max} = \text{.................}$$

b) il momento angolare minimo (rispetto al punto di contatto) che deve avere la sfera per compiere un giro completo

$$L_{min} = \text{.................}$$

c) il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio (suggerimento: scrivere l'energia del sistema in funzione dell'angolo di rotazione $\theta$)

$$T = \text{.................}$$

## Soluzione

a)
L'energia del sistema si conserva. Definendo I il momento d'inerzia della sfera riferito al punto di contatto con il piano:

$$I = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2$$

si ha che l'energia totale è:

$$E_t = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kl^2$$

dove $\omega$ rappresenta la velocità angolare della sfera e $l$ la lunghezza della molla. Pertanto, inizialmente si ha:

$$E_i = \frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}kr^2$$

con $\omega_0 = v_{cm}/r$ poichè la sfera fa un moto di puro rotolamento. alla fine, quando la sfera è ferma si ha:

$$E_f = \frac{1}{2}kl_{max}^2$$

uguagliando l'energia iniziale del sistema con quella finale si ottiene:

$$l_{max} = \sqrt{\frac{I\omega_0^2}{k} + r^2} = 1.38m$$

b)
Inizialmente vale che

$$E_{ib} = \frac{1}{2}I\omega_{0b}^2 + \frac{1}{2}kr^2$$

Dopo un giro completo, supponendo che la sfera sia ferma si ha:

$$E_{fb} = \frac{1}{2}k(r^2 + 4\pi^2 r^2)$$

Ponendo $E_{ib} = E_{fb}$ si ottiene:

$$\omega_{0b} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^2 k}{I}}$$

Il momento angolare minimo (rispetto al punto di contatto) che deve avere la sfera per compiere un giro completo risulta essere:

$$L_{min} = I\omega_{0b} = 16kgm^2/s$$

c)
Scrivendo l'energia in funzione dell'angolo di rotazione $\theta$ si ha:

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k(r^2 + r^2\theta^2)$$

Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k(r^2 + r^2\theta^2)\right) = I\dot{\theta}\ddot{\theta} + kr^2\theta\dot{\theta} = 0$$

da questa relazione si ottiene l'equazione del moto:

$$I\ddot{\theta} + kr^2\theta = 0$$

che corrisponde a quella di un oscillatore armonico. Il periodo delle piccole oscillazioni è:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{kr^2}} = 1.66s$$

## Esercizio 2

Una sfera di raggio $R_1 = 0.4$m presenta una distribuzione di carica positiva uniforme tale che il potenziale in un punto distante $2R_1$ dal centro è $V_0 = 0.2$V rispetto all'infinito(fig.2A).

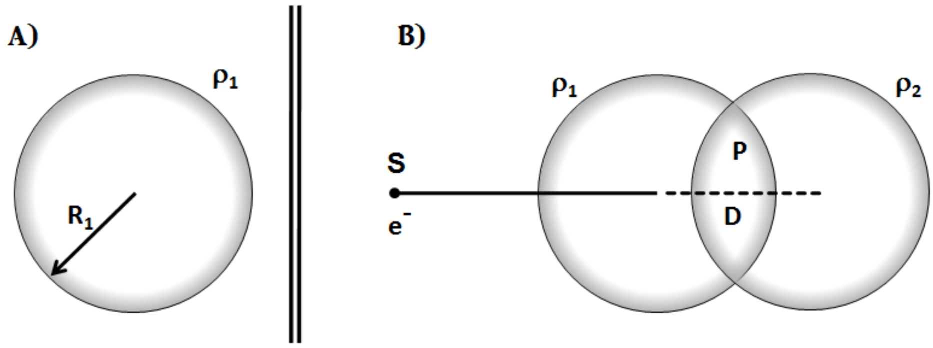



**Figura 2**

Si calcoli:

a) la densità di carica ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$F/m)

$$\rho_1 = \text{.................}$$

Un'altra sfera di raggio $R_2 = 0.4$m e densità di carica negativa uniforme ($\rho_2 = -\rho_1$) si avvicina e penetra nella precedente. Quando i centri delle due sfere distano $D = 0.6$m (fig.2B).
Si calcoli:

b) il modulo del campo elettrico in un punto P interno alla regione di sovrapposizione delle due sfere (il campo elettrico è uniforme in tutta la regione di sovrapposizione)

$$E_P = \text{.................}$$

c) l'accelerazione di un elettrone che si trova in un punto S a distanza $2R_1$ dal centro della sfera di raggio $R_1$ e giace sulla retta che passa per i centri delle due sfere ($q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$C ; $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$kg)

$$a_e = \text{................}$$

## Soluzione

a)
Ponendo il potenziale nullo all'infinito, si ha che il potenziale all'esterno di una sfera uniformemente carica è:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Conoscendo $V_0$ e sostituendo $2R_1$ a $r$ si può ricavare il valore di Q:

$$Q = 8\pi\epsilon_0 V_0 R_1$$

e quindi

$$\rho_1 = \frac{3Q}{4\pi R_1^3} = 66 \cdot 10^{-12} C/m^3$$

b)
Sfruttando il teorema di Gauss si dimostra che il campo elettrico interno ad una sfera uniformemente carica (con densità di carica $\rho$) è dato da:

$$\vec{E} = \frac{\rho\vec{r}}{3\epsilon_0}$$

Il campo è radiale e il modulo è proporzionale alla distanza dal centro. Il campo elettrico in un punto P interno alla regione di sovrapposizione delle due sfere cariche è quindi dato da due contributi, uno radiale rispetto al centro della sfera con densità di carica $\rho_1$ e uno radiale, di segno opposto al primo, rispetto al centro dell'altra sfera (con densità di carica $\rho_2$). Il campo risultante è proporzionale alla somma vettoriale dei due contributi ed è uniforme in tutta la cavità

$$\vec{E}_P = \frac{\rho_1(\vec{r_1} - \vec{r_2})}{3\epsilon_0}$$

dove con $r_1$ si indica la distanza del punto P dal centro della sfera con densità di carica $\rho_1$ e con $r_2$ la distanza del punto P dal centro dell'altra sfera. Il modulo del campo elettrico nel punto P vale:

$$E_P = \frac{\rho_1 D}{3\epsilon_0} = 1.5 N/C$$

c)
Il campo elettrico all'esterno di una sfera uniformemente carica (carica totale $Q$) è dato da:

$$\vec{E} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Anche in questo caso il campo elettrico è radiale. In un punto S esterno alle due sfere, distante (come in figura) $2R_1$ dal centro della sfera di densità di carica $\rho_1$, il campo elettrico risultante è dato dalla sovrapposizione dei campi generati dalle due sfere. Il modulo del campo elettrico, pertanto, è dato da:

$$E_S = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0(2R_1)^2} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(2R_1 + D)^2}$$

con $Q_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_1$ e $Q_2 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_2$. La forza che si esercita sull'elettrone è:

$$F_e = q_e E_S$$

Ponendo $F_e = m_e a_e$ si ricava:

$$a_e = \frac{F_e}{m_e} = 0.03 \cdot 10^{12} m/s^2$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 19/02/2016**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : ......................................**

# Esercizio 1

Una sfera di raggio $r_1 = 40\text{cm}$ e massa $m_1 = 3\text{kg}$ rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Intorno ad essa è avvolto un filo inestensibile di massa nulla, che è collegato all'estremo opposto ad un blocco di massa $m_2 = 2\text{kg}$, posto su un piano inclinato privo di attrito. Il filo è avvolto attorno a una scanalatura di profondità trascurabile, in modo da non interferire col moto di rotolamento della sfera di raggio $r_1$. L'angolo tra il piano inclinato e l'orizzontale vale $\theta = \pi/6\text{rad}$. Inizialmente il sistema è in quiete.

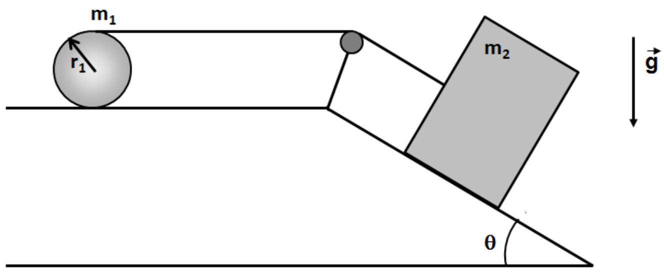



Figura 1

Dopo che la massa $m_1$ si è spostata di un tratto $l = 80\text{cm}$ Si calcoli:

a) la velocità angolare della sfera

$\omega =$ .................

b) il modulo della variazione di quantità di moto del sistema costituito da sfera, filo e blocco

$\Delta p =$ .................

c) L'accelerazione del centro di massa della sfera

$a_1 =$ .................

## Soluzione

a)
I è il momento d'inerzia della sfera riferito al punto di contatto con il piano:

$$I = \frac{2}{5}m_1r_1^2 + m_1r_1^2 = \frac{7}{5}m_1r_1^2$$

Imponendo la conservazione dell'energia meccanica si ha che:

$$m_2g2lsin(\theta) = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

dove $\omega$ rappresenta la velocità angolare della sfera e $v_2$ il modulo della velocità della massa $m_2$. Poichè il filo è inestensibile si può scrivere:

$$v_2 = 2\omega r_1$$

Sfruttando questa condizione si ottiene:

$$m_2g2lsin(\theta) = \frac{1}{2}\left(I + 4m_2r_1^2\right)\omega^2$$

Da cui:

$$\omega = \sqrt{\frac{4m_2glsin(\theta)}{I + 4m_2r_1^2}} = 4s^{-1}$$

b)
La quantità di moto non si conserva. Il modulo della variazione della quantità di moto è uguale al modulo della quantità di moto finale del sistema in considerazione.

$$\Delta p = p_{finale} = \sqrt{(m_1\omega r_1 + m_2v_2cos(\theta))^2 + (m_2v_2sen(\theta))^2} = 10.8kgm/s$$

c)
Scrivendo l'energia in funzione dell'angolo di rotazione $\varphi$ si ha:

$$E = \frac{1}{2}\left(I + 4m_2r_1^2\right)\dot{\varphi}^2 - m_2g2r_1\varphi sin(\theta)$$

Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(I + 4m_2r_1^2\right)\dot{\varphi}^2 - m_2g2r_1\varphi sin(\theta)\right) = \left(I + 4m_2r_1^2\right)\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - m_2g2r_1\dot{\varphi}sin(\theta) = 0$$

da questa relazione si ottiene l'accelerazione angolare della sfera:

$$\ddot{\varphi} = \frac{m_2g2r_1sin(\theta)}{I + 4m_2r_1^2}$$

Poichè la sfera fa un moto di puro rotolamento, l'accelerazione del centro di massa vale:

$$a_1 = r_1\ddot{\varphi} = 1.6m/s^2$$

Il moto del centro di massa della sfera è uniformemente accelerato.

## Esercizio 2

Una barretta metallica di lunghezza $L = 0.2\text{m}$ può muoversi liberamente su una guida metallica, a U, posizionata su un tavolo (vedere figura 2). La massa della barretta è $M = 100\text{g}$ e $D = 0.3\text{m}$. Barretta e guida metallica compongono un circuito elettrico rettangolare nel quale è presente una resistenza $R = 2\Omega$. Si suppone che il circuito sia immerso in un campo magnetico perpendicolare al piano del circuito e diretto verso l'alto.

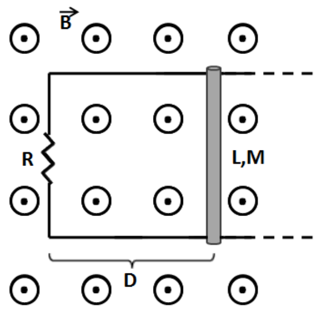


**Figura 2**

Il modulo del campo magnetico varia con il tempo secondo l'espressione $B(t) = B_0 + kt$ con $B_0 = 1\text{T}$ e $k = 0.2T/s$. Considerando la barretta bloccata nella posizione iniziale, si calcoli:

a) la corrente che circola nel circuito al tempo $t_1 = 10\text{s}$

$$I = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) il modulo della forza che agisce sulla barretta al tempo $t_1 = 10\text{s}$

$$F = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si assuma che, dopo $t_1 = 10\text{s}$, la barretta cominci a muoversi verso destra di moto rettilineo uniforme con velocità $v = 1\text{m/s}$.
Si calcoli:

c) la potenza istantanea che circola nel circuito al tempo $t_2 = 20\text{s}$

$$P_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

## Soluzione

a)
La forza elettromotrice indotta nella spira dipende dalla variazione del flusso del campo magnetico attraverso la spira stessa. Si ha pertanto:

$$\Phi(B) = B(t)LD \;\Rightarrow\; fem = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -LDk$$

Il modulo della corrente che circola nel circuito vale:

$$I = \frac{|fem|}{R} = 6 \cdot 10^{-3}A$$

b)
Il modulo della forza che il campo magnetico esercita al tempo $t_1 = 10$s sulla barra percorsa dalla corrente I è:

$$F(t_1) = ILB(t_1) = \frac{L^2Dk(B_0 + kt_1)}{R} = 3.6 \cdot 10^{-3}N$$

c)
Per ricavare la forza elettromotrice indotta nella spira al tempo $t_2$ si considera la variazione del flusso del campo magnetico attraverso la spira stessa:

$$\Phi_2(B) = B(t)L(D + x(t)) \;\Rightarrow\; fem_2 = -\frac{d\Phi_2(B)}{dt} = -(L(D + v(t_2 - t_1))k + (B_0 + kt_2)Lv)$$

la potenza dissipata dal circuito all'istante $t_2$ vale:

$$P_2 = \frac{fem_2^2}{R} = 1W$$

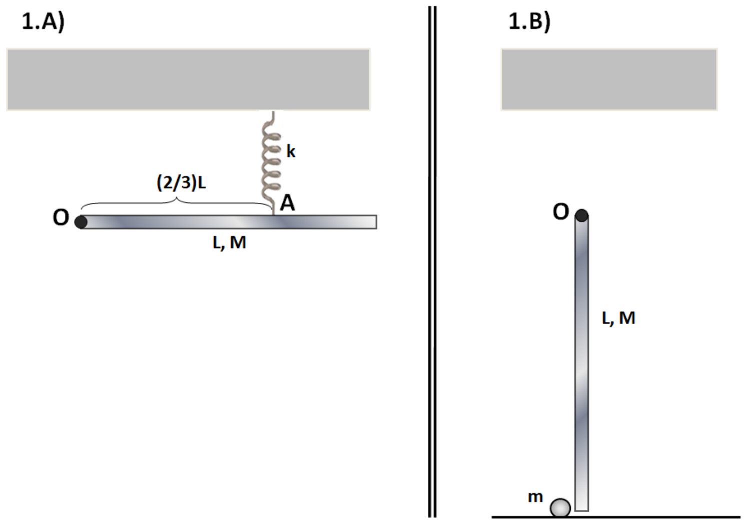
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

**Esame di Fisica Generale del 10/06/2016**
**Cognome : .................................................. Nome : ..................................................**

**Matricola: .................................................. Anno di corso : ........................................**

# Esercizio 1

Una sbarra omogenea di lunghezza $L = 0.2$m e massa $M = 0.3$kg è incernierata senza attrito a un estremo O. La sbarretta è mantenuta in posizione di equilibrio orizzontale da una molla verticale, di costante elastica $k = 20$N/m e lunghezza a riposo nulla, fissata alla sbarra nel punto A distante $\frac{2}{3}L$ dall'estremo O (Fig.1.A).




Si calcoli:

a) l'allungamento d della molla quando il sistema si trova in equilibrio e il modulo della reazione vincolare in O:

$d =$ ................ $R =$ ................

b) il periodo delle piccole oscillazioni della sbarretta (suggerimento: Data l'equazione differenziale $\ddot{x} = -\omega^2 x + cost$ il periodo delle piccole oscillazioni si ricava trascurando il termine costante)

$T =$ ................

Si supponga ora che la molla si spezzi e che la sbarretta, ruotando intorno all'estremo O, faccia un urto perfettamente elastico con il punto materiale di massa $m = 1$kg (Fig.1.B).
Si calcoli:

c) il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo:

$p =$ ................

## Soluzione

a)
Per valutare il modulo della forza esercitata dalla molla si uguaglia il momento della forza peso (P) a quello della forza elastica (entrambi calcolati scegliendo come polo il punto O). Si ottiene:

$$M_P = M_e \Rightarrow \frac{MgL}{2} = \frac{2kLd}{3} \Rightarrow d = \frac{3Mg}{4k} = 0.11m$$

La reazione vincolare in O sarà tale da annullare la somma vettoriale della forza elastica ($\vec{F_e}$) e della forza peso ($\vec{P}$) :

$$\vec{R} + \vec{F_e} + \vec{P} = 0$$

dove $F_e = kd$ è il modulo della forza elastica e $P = Mg$ quello della forza peso. Si ricava, pertanto, che il modulo di R è:

$$R = |F_e - P| = 0.74N$$

b)
Preliminarmente si calcola il momento d'inerzia del sistema rispetto al punto O:

$$I_O = \frac{1}{3}ML^2$$

Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{d}{dt}(Mg\frac{L}{2}sen(\Theta) + \frac{1}{2}I_O\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}k(d - \frac{2L}{3}sen(\Theta))^2) = 0$$

Derivando e approssimando per piccole oscillazioni si ottiene:

$$\frac{4kL^2}{9}\Theta = -I_O\ddot{\Theta} + C$$

Con C costante ($C = kd\frac{2L}{3} - mg\frac{L}{2}$) Il periodo delle piccole oscillazioni è:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{9I_O}{4kL^2}} = 0.67s$$

c)
Applica la conservazione dell'energia, prima dell'urto si ha che la variazione di energia potenziale del sistema si trasforma in energia cinetica. Si può pertanto ricavare la velocità angolare del sistema quando la sbarra è verticale:

$$Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I_O\omega_{in}^2 \Rightarrow \omega_{in} = \sqrt{\frac{MgL}{I_O}}$$

Quindi la quantità di moto della sbarra quando è verticale è:

$$p_{in} = M\omega_{in}\frac{L}{2}$$

Durante l'urto si conserva sia l'energia che il momento angolare. Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{1}{2}I_O\omega_{in}^2 = \frac{1}{2}I_O\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Scrivendo la conservazione del momento angolare rispetto al polo O si ha:

$$I_O\omega_{in} = I_O\omega_1 + mv_2L$$

Risolvendo il sistema composto da queste ultime due equazioni si ottiene:

$$v_2 = \frac{2\omega_{in}I_OL}{mL^2 + I_O} \qquad ; \qquad \omega_1 = \omega_{in}\frac{I_O - mL^2}{I_O + mL^2}$$

La quantità di moto finale del sistema è:

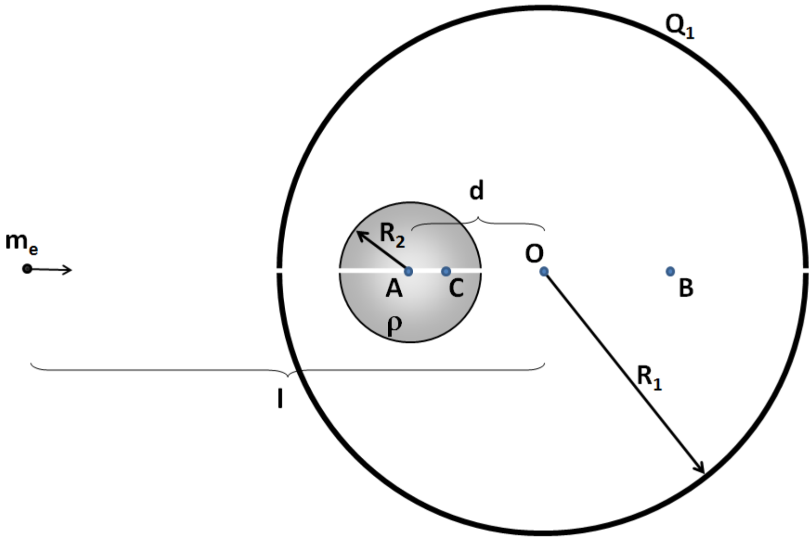
$$p_{fi} = M\omega_1\frac{L}{2} + mv_2$$

Il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo è:

$$p = p_{in} - p_{fi} = 0.2kg\frac{m}{s}$$

## Esercizio 2

Una carica $Q_1 = +10^{-9}$C è distribuita su un guscio sferico di raggio $R_1 = 0.2$m. All'interno del guscio sferico è posizionata una sfera isolante, di raggio $R_2 = 0.05$m il cui centro è collocato nel punto A, distante $d = 0.1$m dal centro del guscio di raggio $R_1$. La carica distribuita sulla sfera isolante è anch'essa positiva e la densità di carica non è uniforme ma segue la legge $\rho = kr$ con $k = 3 \cdot 10^{-6}$C/m$^4$




Si calcoli:

a) La carica totale $Q_2$ contenuta nella sferetta e il modulo del campo elettrico nel punto B simmetrico di A rispetto al centro del guscio sferico ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$F/m)

$Q_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $E_B = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) il potenziale all'interno della sfera piccola nel punto C distante $R_2/2$ da A

$V_C = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Si supponga che un elettrone di massa $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$kg e carica $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$C si trovi, fermo, a una distanza $l = 2R_1$ dal punto O, e che sull'asse delle x sia praticato un piccolo foro che permetta il passaggio attraverso guscio e sfera.
Si calcoli:

c) con quale velocità l'elettrone passa per il punto O

$v_O = \ldots\ldots\ldots\ldots$

## Soluzione

a)
Per calcolare la carica $Q_2$ contenuta nella sferetta bisogna integrare la densità di carica sul volume, si ha:

$$Q_2 = \int_0^{R_2} \rho dV = \int_0^{R_2} kr4\pi r^2 dr = \pi k R_2^4 = 5.9 \cdot 10^{-11} C$$

Il modulo del campo elettrico nel punto B può essere valutato applicando il teorema di Gauss e risulta essere:

$$E_B = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2} = 13.2 \frac{N}{C}$$

b) Il modulo del campo all'interno della sfera piccola varia con la distanza r dal centro della sfera e si trova applicando il teorema di Gauss. Si ha pertanto:

$$E_{int}(r) = \frac{kr^2}{4\epsilon_0}$$

All'esterno della sfera il campo elettrico segue l'andamento del campo generato da una carica puntiforme. All'interno del guscio sferico il campo elettrico generato dalla carica presente nel guscio è nullo mentre all'esterno ha lo stesso andamento del campo prodotto da una carica puntiforme.
Fissato il potenziale a zero all'infinito, il potenziale nel punto C (all'interno della sfera piccola) generato dalle due distribuzioni di carica è:

$$V_C = \int_{R_2/2}^{R_2} \frac{kr^2}{4\epsilon_0} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_1}^{\infty} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

Svolgendo l'integrale si ottiene:

$$V_C = \frac{7kR_2^3}{96\epsilon_0} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = 58.6V$$

c)
Inizialmente si calcolano i potenziali nel punto di partenza dell'elettrone (a una distanza $l = 2R_1$ dal punto O) e nel centro del guscio sferico (in O) dovuti alle due cariche.

$$V_e = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0(2R_1)} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(2R_1 - d)}$$

$$V_O = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0(R_1)} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0(d)}$$

Si valuta quindi la variazione di energia potenziale dell'elettrone tra il punto di partenza e il centro del guscio sferico O

$$\Delta U = (V_e - V_O)q_e$$

In questo sistema l'energia totale si conserva (le forze presenti sono conservative), pertanto, la variazione di energia potenziale può essere uguagliata all'energia cinetica acquisita dall'elettrone. Si ottiene:

$$\Delta U = \frac{1}{2} m_e v_O^2$$

da cui:

$$v_O = \sqrt{\frac{2\Delta U}{m_e}} = 3 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 01/07/2016**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1

Una sbarra omogenea di lunghezza $L = 1.2\text{m}$ e massa $M = 3\text{kg}$ ha i due estremi vincolati (vincolo bilatero) a una guida circolare di raggio $r = 1\text{m}$ (Fig.1). La guida è montata verticalmente, in presenza di gravità. Non esiste nessun tipo di attrito.

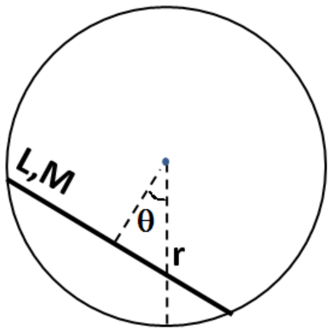



**Fig.1**

Inizialmente $\theta = 0$. Si calcoli:

a) il minimo valore di $\dot{\theta}(t = 0)$ che permette alla sbarra di percorrere un giro completo sulla guida

$$\dot{\theta}(t = 0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) il valore dell'energia e del momento angolare per $\theta = \frac{\pi}{4}$, assumendo come condizioni iniziali quelle del punto precedente

$E_{\pi/4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $L_{\pi/4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) il periodo delle piccole oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio stabile

$$T = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

## Soluzione

a)
Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al centro della guida circolare è:

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + Md^2$$

dove $d = \sqrt{r^2 - (L/2)^2}$ è la distanza tra il centro di massa dell'asta e il centro della guida. L'energia si conserva, quindi, il minimo valore di $\dot{\theta}(t=0)$ che permette alla sbarra di fare un giro completo, è quello che le permette di raggiungere il massimo dell'energia potenziale. Si ha pertanto:

$$Mg2d = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\theta}(t=0) = \sqrt{\frac{4Mgd}{I}} = 9.13s^{-1}$$

b)
L'energia si conserva quindi

$$E_{\pi/4} = Mg2d = ...J$$

la velocità angolare della sbarretta ($\dot{\theta}_1$) quando si trova a $\pi/4$ è:

$$2Mgd(1 - cos(\pi/4)) = \frac{1}{2}I\dot{\theta}_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\theta}_1 = \sqrt{\frac{2Mgd(1 - cos(\pi/4))}{I}}$$

il momento angolare della sbarretta è dato pertanto da:

$$L = I\dot{\theta}_1 = \sqrt{I2Mgd(1 - cos(\pi/4))} = 6.12Kgm^2/s$$

c)
Il periodo delle piccole oscillazioni si calcola come il periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo fisico:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 1.38s$$

## Esercizio 2

Un condensatore cilindrico è costituito da un'armatura interna di raggio $a$ e una esterna di raggio $b = 3\text{mm}$. Entrambe le armature hanno lunghezza $L = 40\text{mm}$ e vengono mantenute a una differenza di potenziale costante $V = 27\text{V}$ da una pila (Fig.2.A).

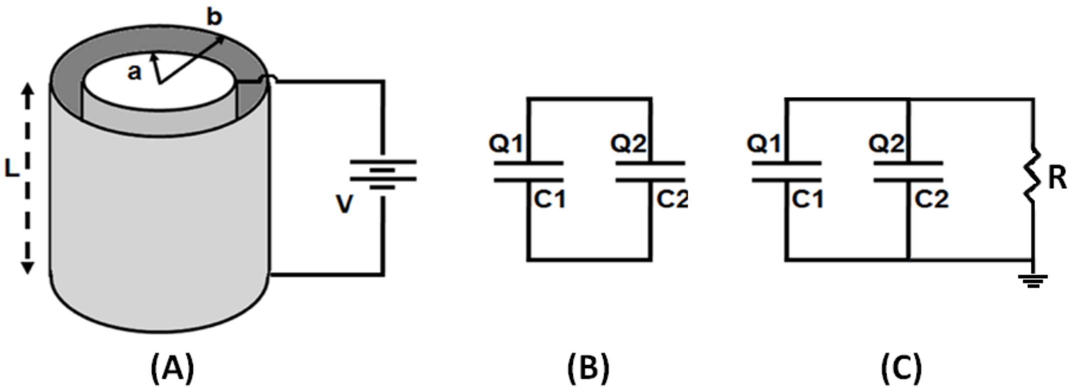



**Fig.2**

Si calcoli:

a) il raggio a dell'armatura interna affinchè su di essa il campo elettrico sia minimo e la risultante carica sul condensatore ($\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\text{F/m}$).

$a =$ ................ $\qquad$ $Q =$ ................

Si consideri il condensatore con la solita carica Q sulle armature e lo si colleghi a un altro condensatore cilindrico di capacità $C_2 = 3 \cdot 10^{-12}\text{F}$ (Fig.2.B). Si calcoli:

b) Le cariche $Q_1$ e $Q_2$ contenute rispettivamente nel primo e nel secondo condensatore dopo che sono stati collegati.

$Q_1 =$ ................ $\qquad$ $Q_2 =$ ................

Il sistema visto nel punto precedente viene connesso a una resistenza $R = 7 \cdot 10^6\Omega$ collegata a terra (Fig.2.C). Si calcoli:

c) La potenza dissipata nella resistenza a $t_1 = 2 \cdot 10^{-6}\text{s}$

$P(t_1) =$ ................

## Soluzione

a)
La capacità del condensatore cilindrico è:

$$C_1 = \frac{2\pi L\epsilon_0}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

La carica contenuta nel condensatore, in funzione di a, è:

$$Q = C_1 V = V\frac{2\pi L\epsilon_0}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Il campo elettrico all'interno di un condensatore cilindrico, a distanza r dall'asse del condensatore, può essere ricavato tramite la legge di gauss e risulta:

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 Lr}$$

Il campo elettrico sulla superficie dell'armatura interna del condensatore è dato pertanto da:

$$E = \frac{V}{ln\left(\frac{b}{a}\right)a}$$

Per valutare il minimo del campo elettrico sulla superficie interna del condensatore in funzione del raggio interno a bisogna derivare l'espressione del campo elettrico rispetto ad a e porla uguale a zero.

$$\frac{dE}{da} = \frac{V - V ln\left(\frac{b}{a}\right)}{a^2 ln^2\left(\frac{b}{a}\right)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{b}{e} = 1.1 \cdot 10^{-3} m$$

La carica contenuta nel condensatore vale pertanto:

$$Q = V\frac{2\pi L\epsilon_0}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} = 6 \cdot 10^{-11} C$$

b) I condensatori di capacità $C_1$ e $C_2$ sono collegati in parallelo. Le cariche $Q_1$ e $Q_2$ rispettivamente sul condensatore di capacità $C_1$ e $C_2$ possono essere valutate considerando la conservazione della carica

$$Q = Q_1 + Q_2$$

e imponendo la stessa differenza di potenziale ai capi dei due condensatori.

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

Mettendo a sistema queste due relazioni si ricava:

$$Q_1 = \frac{QC_1}{C_1 + C_2} = 2.55 \cdot 10^{-11} C \qquad \Rightarrow \qquad Q_2 = \frac{QC_2}{C_1 + C_2} = 3.45 \cdot 10^{-11} C$$

c)
Il circuito dell'esercizio è un circuito RC che si sta scaricando. La capacità equivalente è data da:

$$C_e = C_1 + C_2$$

la differenza di potenziale ai capi dei condensatori inizialmente vale $V_0 = \frac{Q_1}{C_1}$ la corrente che circola nel circuito in funzione del tempo è

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC_e}$$

La potenza dissipata nella resistenza a un tempo $t_1$ è:

$$P(t_1) = Ri^2(t_1) = V_0^2 e^{-2t_1/RC_e} = 102W$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 22/07/2016**
**Cognome : ................................................. Nome : .................................................**

**Matricola: ................................................. Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1

Una guida a forma di semicirconferenza ha raggio $R = 1$m e massa $M = 3$kg e può muoversi su un piano orizzontale liberamente (tra il piano e la guida non c'è attrito). Un punto materiale di massa $m = 1.6$kg è vincolato a muoversi al suo interno. La massa m viene lasciata cadere da un'altezza $h = 1.3$m all'interno della guida (Fig.1). Tutto il sistema è soggetto all'accelerazione di gravità g.

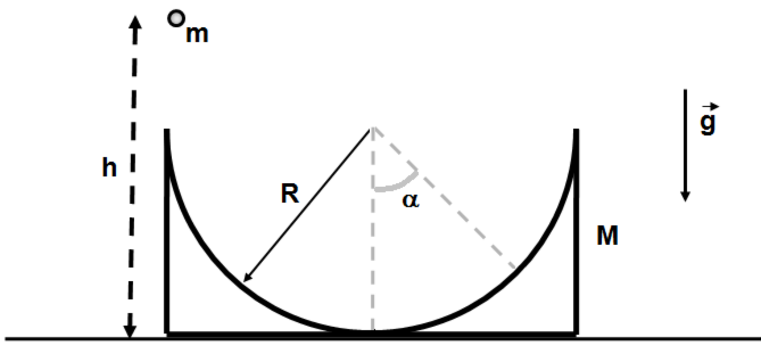



Fig.1

Si calcoli:

a) lo spostamento orizzontale d della guida quando la massa m esce dall'altro lato rispetto a quello da cui è entrata nella guida

$$d = ................$$

b) il modulo della velocità della guida quando m passa nel punto più basso della guida stessa

$$v_M = ................$$

c) la quantità di moto del sistema quando la massa m si trova a un angolo $\alpha = \frac{1}{4}\pi$

$$p = ................$$

## Soluzione

a)
La quantità di moto lungo l'asse orizzontale del sistema si conserva poichè non vi sono forze esterne al sistema che agiscono in quella direzione. La velocità orizzontale del centro di massa del sistema risulta, pertanto, nulla. Si calcola la posizione del centro di massa del sistema (lungo l'asse orizzontale) da un punto fisso che, per comodità, prendiamo nel punto di incontro tra il lato sinistro della guida e il piano.

$$X_{cm,i} = \frac{RM}{M+m}$$

$X_{cm,i}$ rappresenta la posizione iniziale del centro di massa che lungo l'asse orizzontale ha velocità nulla. Per trovare lo spostamento della guida nel momento in cui la massa m esce dalla guida stessa si ricalcola la posizione del centro di massa del sistema

$$X_{cm,f} = \frac{M(R+d) + m(2R+d)}{M+m}$$

Imponendo l'uguaglianza tra $X_{cm,i}$ e $X_{cm,f}$ si ricava

$$d = -\frac{2mR}{m+M} = -0.7\text{m}$$

b)
Per trovare la velocità della guida quando la massa m passa nel punto più basso della guida stessa si utilizza sia la conservazione dell'energia sia la conservazione della componente orizzontale della quantità di moto Usando la conservazione dell'energia si può scrivere:

$$mgh = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}mv_m^2$$

Dalla conservazione della componente orizzontale della quantità di moto si ha:

$$mv_m + Mv_M = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_m = -\frac{Mv_M}{m}$$

Si può quindi ricavare il modulo della velocità della guida che risulta essere:

$$v_M = \sqrt{\frac{2m^2gh}{M(m+M)}} = 2.17\text{m/s}$$

c)
Si conserva l'energia totale del sistema:

$$mg[h - R(1-cos(\alpha))] = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{X} + R\omega cos(\alpha)\right)^2 + (R\omega sin(\alpha))^2\right]$$

Lungo l'asse orizzontale si conserva anche la quantità di moto del sistema poichè, le uniche forze esterne che agiscono sul sitema, sono dirette verticalmente. Si ha allora:

$$M\dot{X} + m\left(\dot{X} + R\omega cos(\alpha)\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{X} = -\frac{mR\omega cos(\alpha)}{m+M}$$

Si può pertanto eliminare $\dot{X}$ e scrivere l'energia in funzione della velocità angolare $\omega$:

$$mg[h - R(1-cos(\alpha))] = \frac{1}{2}(M+m)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\left[2\dot{X}R\omega cos(\alpha) + R^2\omega^2\right]$$

$$mg[h - R(1-cos(\alpha))] = \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{mR\omega cos(\alpha)}{m+M}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left[2\left(-\frac{mR\omega cos(\alpha)}{m+M}\right)R\omega cos(\alpha) + R^2\omega^2\right]$$

$$mg[h - R(1-cos(\alpha))] = \frac{1}{2}mR^2\omega^2\left(1 - \frac{m}{m+M}cos^2(\alpha)\right) \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{2g[h-R(1-cos(\alpha))](m+M)}{R^2(m+M-mcos^2(\alpha))}}$$

La quantità di moto totale del sistema quando la massa m si trova a un angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$ risulta essere:

$$p = mR\omega sin(\alpha) = 5.53\text{kgm/s}$$

## Esercizio 2

Un disco isolante di raggio $a = 1.5$cm presenta una carica uniforme $Q = 20 \cdot 10^{-5}$C. Il disco ruota a una velocità angolare $\omega = 7 \cdot 10^2$Hz intorno a un asse passante per il centro e perpendicolare al piano del disco (Fig.2.A).

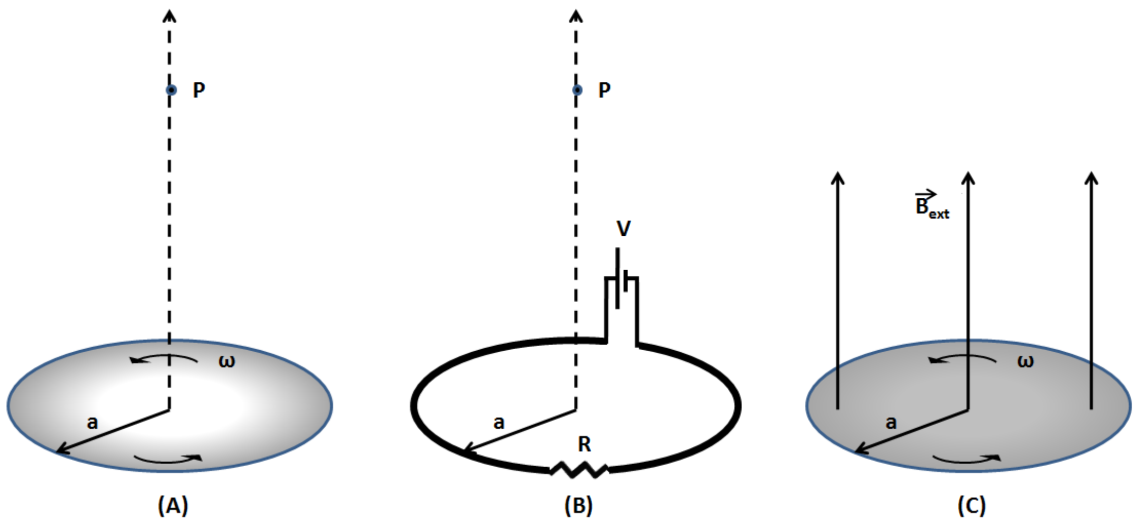



Fig.2

Si calcoli:

a) il modulo del campo magnetico lungo l'asse di rotazione nel punto P distante $d = 20$cm dal centro del disco (si consideri d>>a e $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}$H/m).

$$B_P = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il disco viene ora sostituito da una spira di ragggio a e resistenza $R = 7 \cdot 10^6\Omega$ collegata a un generatore di tensione. Si calcoli:

b) La corrente I che deve scorrere nella spira per avere lo stesso campo magnetico trovato in precedenza (nel punto P) e l'energia dissipata dalla resistenza in un tempo $t_1 = 0.2$s (Fig.2.B)

$$I = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad E_{diss}(t_1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si consideri ora il disco iniziale conduttore e scarico. Il disco ruota con la stessa $\omega$ in un campo magnetico esterno $B_{ext} = 5 \cdot 10^{-5}$T costante e uniforme parallelo a $\omega$ stessa (Fig.2.C). Si calcoli:

c) il campo elettrico nel disco in condizioni stazionarie, a distanza a/2 dal centro; il valore del campo magnetico $B_{ext}$ che si dovrebbe avere per annullare la differenza di potenziale tra il centro e la periferia del disco ($q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$C; $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$kg)

$$E_{int} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad B_{ext} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

## Soluzione

a)
Il disco carico che ruota può essere visto come una serie di spire di spessore dr in cui circola una corrente dI. Per calcolare il campo magnetico totale si considera, quindi, il campo magnetico generato da una spira sul suo asse

$$B_{spira} = \mu_0 \frac{dI\ r^2}{2(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

Se si considera z molto maggiore di r si ha:

$$B_{spira} = \mu_0 \frac{dI\ r^2}{2z^3}$$

La densità superficiale di carica è:

$$\sigma = \frac{Q}{\pi a^2}$$

da cui:

$$dI = 2\pi r dr \sigma \frac{\omega}{2\pi} = r\sigma\omega dr$$

Il campo magnetico B generato sull'asse del disco dalla singola spira di spessore dr è:

$$B_{spira} = \mu_0 \frac{dIr^2}{2z^3} = \mu_0 \frac{r^3\sigma\omega dr}{2z^3}$$

Il campo sull'asse del disco a distanza molto maggiore di a è dato da:

$$B_{asse} = \int_0^a \mu_0 \frac{r^3\sigma\omega}{2z^3} dr = \mu_0 \frac{a^4\sigma\omega}{8z^3}$$

Quindi il campo magnetico nel punto P è:

$$B_P = \mu_0 \frac{a^2 Q\omega}{8\pi d^3} = 1.97 \cdot 10^{-10}\mathrm{T}$$

b) Lo stesso campo magnetico nel punto P è prodotto da una spira di raggio a in cui circola la corrente:

$$I = \frac{2d^3 B_P}{\mu_0 a^2}$$

La potenza dissipata dalla resistenza R è quindi:

$$P = RI^2$$

e l'energia dissipata dopo un tempo $t_1$ è:

$$E_{diss}(t_1) = Pt_1 = 174\mathrm{J}$$

c)
In condizioni stazionarie, cioè quando non vi è più un flusso di elettroni verso il centro del disco, la somma vettoriale della forza dovuta al campo elettrico e della forza magnetica devono essere pari alla forza centripeta che si esercita su ogni elettrone di conduzione. Per quanto riguarda i moduli delle forze si ottiene:

$$m_e\omega^2 r = |e|\left(\omega r B_{ext} - E_i\right)$$

Da cui si ricava:

$$E_i = \frac{|e|\,\omega r B_{ext} - m_e\omega^2 r}{|e|}$$

alla distanza a/2 il modulo del campo elettrico vale:

$$E_{int} = \left(B_{ext} - \frac{m_e}{|e|}\omega\right)\omega\frac{a}{2} = 2.62 \cdot 10^{-4}\mathrm{N/C}$$

Il valore del campo magnetico $B_{ext}$ che si dovrebbe avere per annullare la differenza di potenziale tra il centro e la periferia del disco è:

$$B_{ext} = \frac{m_e}{|e|}\omega = 3.98 \cdot 10^{-9}\mathrm{T}$$

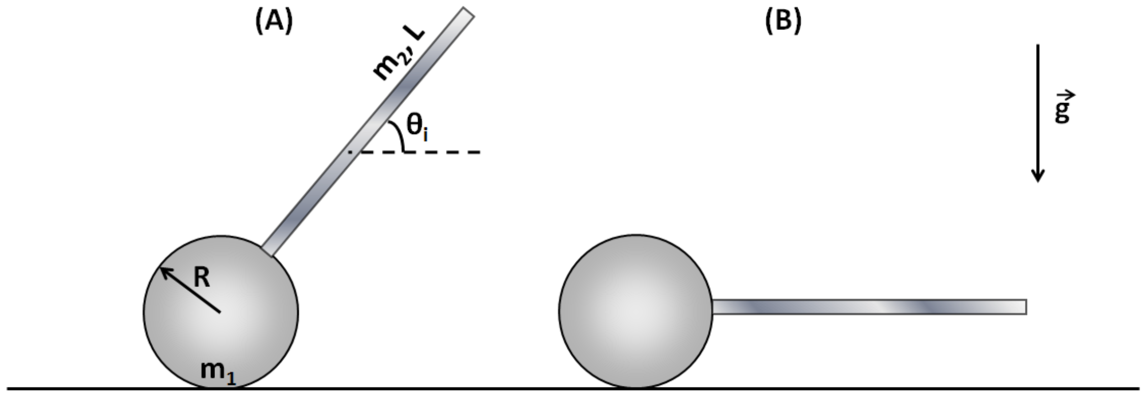
**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 14/09/2016**
**Cognome : .................................................. Nome : ..................................................**

**Matricola: .................................................. Anno di corso : ........................................**

# Esercizio 1

Un disco di massa $m_1 = 3$kg ha raggio $R = 10$cm è saldato all'estremo di un'asta lunga $L = 40$cm di massa $m_2 = 5$kg. Inizialmente il disco poggia su un piano orizzontale, e l'asta forma un angolo $\theta_i = \pi/3$rad con l'orizzontale. A un certo istante si elimina il vincolo che tiene il sistema in equilibrio, questo sistema è soggetto all'accelerazione di gravità g.




Si calcoli:

a) la velocità angolare del corpo quando l'asta è orizzontale considerando il piano orizzontale privo di attrito

$$\omega_a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) la velocità angolare del corpo quando l'asta è orizzontale considerando che il disco rotola senza strisciare sul piano

$$\omega_b = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

c) il modulo dell'accelerazione angolare quando l'asta è orizzontale considerando che il disco rotola senza strisciare sul piano

$$\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

## Soluzione

a)
La componente orizzontale della quantità di moto si conserva perchè il piano non presenta attrito. Il centro di massa si muove solo verticalente, dato che inizialmente è fermo. La posizione iniziale del centro di massa lungo l'asse y, in funzione dell'angolo $\theta$ è:

$$y_{cm} = \frac{m_2(R + L/2)sin(\theta)}{M_{tot}}$$

dove si è posto $M_{tot} = m_1 + m_2$ e lo zero a un'altezza R dal piano.
La velocità lungo y del centro di massa ($V_y$) è data da:

$$V_y = \frac{dy_{cm}}{dt} = \frac{m_2}{M_{tot}}(R + L/2)cos(\theta)\dot{\theta}$$

La distanza del centro di massa dal centro del disco quando l'asta è orizzontale è:

$$d_{cm} = \frac{m_2(R + L/2)}{M_{tot}}$$

Il momento d'inerzia rispetto al centro di massa è:

$$I_{cm} = \frac{1}{2}m_1R^2 + m_1d_{cm}^2 + \frac{1}{12}m_2L^2 + m_2(R + L/2 - d_{cm})^2$$

Utilizzando la conservazione dell'energia si ottiene:

$$\frac{1}{2}M_{tot}V_{yf}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta_{af}}^2 = M_{tot}gy_{cm} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(m_2(R + L/2)\dot{\theta_a f})^2}{M_{tot}} + I_{cm}\dot{\theta_{af}}^2 = 2M_{tot}gy_{cm}$$

Da cui si ottiene:

$$\omega_a = \dot{\theta_{af}} = \sqrt{\frac{2M_{tot}^2 gy_{cm}}{m_2^2(R + L/2)^2 + I_{cm}M_{tot}}} = 6.92s^{-1}$$

b)
Si può considerare il moto del sistema come puro rotolamento attorno al punto di contatto. Il momento d'inerzia rispetto al punto di contatto, quando l'asta è orizzontale vale:

$$I_O = \frac{1}{2}m_1R^2 + m_1R^2 + \frac{1}{12}m_2L^2 + m_2((R + L/2)^2 + R^2)$$

Quindi per la conservazione dell'energia abbiamo:

$$\frac{1}{2}I_O\dot{\theta_{bf}}^2 = M_{tot}gy_{cm}$$

Da cui si ottiene:

$$\omega_b = \dot{\theta_{bf}} = \sqrt{\frac{2M_{tot}gy_{cm}}{I_O}} = 6.45s^{-1}$$

c)
Sfruttando la seconda equazione cardinale si ha:

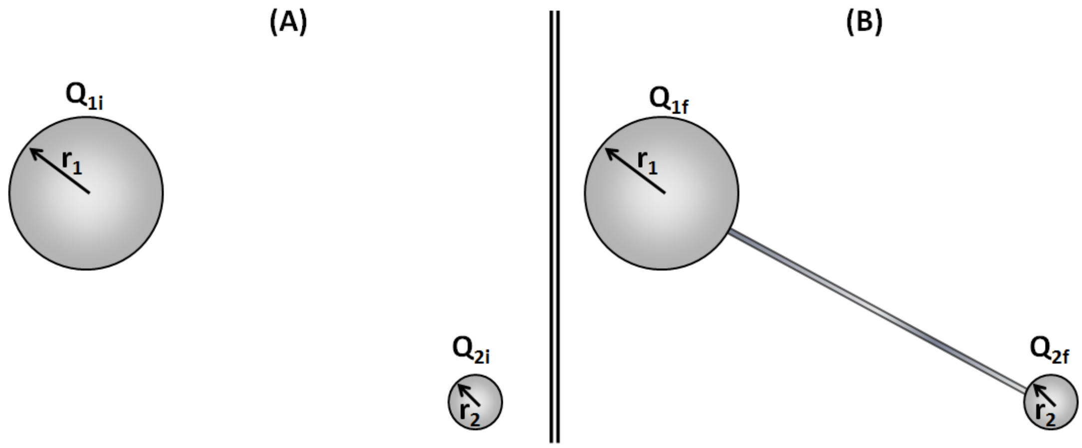
$$I_O\alpha = M_e$$

con $M_e = M_{tot}gd_{cm}$ momento delle forze esterne. Si ottiene quindi:

$$\alpha = \frac{M_e}{I_O} = 24.03s^{-2}$$

# Esercizio 2

Su una sfera conduttrice di raggio $r_1 = 20\text{cm}$ è depositata la carica $Q_{1i} = 20 \cdot 10^{-5}\text{C}$; un'altra sfera conduttrice di raggio $r_2 = 5\text{cm}$ presenta la carica $Q_{2i} = 30 \cdot 10^{-5}\text{C}$. Le sfere, inizialmente isolate, vengono poste in contatto attraverso un filo conduttore. Le sfere sono abbastanza lontane da non influenzarsi a vicenda e la carica sul filo è trascurabile ($\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\text{F/m}$).




Si calcoli:

a) la carica $Q_{1f}$ e $Q_{2f}$ presente sulle sfere rispettivamente di raggio $r_1$ e $r_2$ dopo che sono state collegate (in condizioni stazionarie)

$Q_{1f} =$ ................ $\qquad$ $Q_{2f} =$ ................

b) Il rapporto tra $E_1$ ed $E_2$ cioè tra i campi elettrici alla superficie (appena all'esterno di essa) delle sfere rispettivamente di raggio $r_1$ e $r_2$ dopo che sono state collegate

$$\frac{E_1}{E_2} = \text{................}$$

c) La variazione di energia elettrostatica tra il caso iniziale, in cui le sfere non sono collegate, e il caso finale, in cui le sfere sono unite dal filo conduttore (Si utilizzi la formula $U = 1/2CV^2$ considerando ogni sfera come un condensatore in cui la seconda armatura è a distanza infinita)

$$U_{diss} = \text{................}$$

## Soluzione

a)
La carica totale presente nei due conduttori isolati è:

$$Q_{tot} = Q_{1i} + Q_{2i}$$

Una volta che le sfere sono messe a contatto attraverso un filo conduttore, il potenziale su di esse assume lo stesso valore. Si ha pertanto:

$$\frac{Q_{1f}}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{Q_{2f}}{4\pi\epsilon_0 r_1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Q_{1f}}{r_1} = \frac{Q_{2f}}{r_1}$$

Poichè la carica si conserva si può scrivere:

$$Q_{1f} + Q_{2f} = Q_{tot}$$

Mettendo a sistema le ultime due relazioni si ottiene:

$$Q_{2f} = Q_{tot}\frac{r_2}{r_1 + r_2} = 10 \cdot 10^{-5}\mathrm{C} \qquad\qquad Q_{1f} = Q_{tot}\frac{r_1}{r_1 + r_2} = 40 \cdot 10^{-5}\mathrm{C}$$

b) Applicando il teorema di Gauss si ha

$$E_1 = \frac{Q_{1f}}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \qquad\qquad E_2 = \frac{Q_{2f}}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$$

da cui si ricava:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_{1f}}{r_1^2}\frac{r_2^2}{Q_{2f}} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \frac{Q_{1f}}{Q_{2f}} = \frac{r_2}{r_1} = 0.25$$

c)
Inizialmente, quando le sfere sono isolate, l'energia del sistema è:

$$U_{in} = \frac{1}{2}\frac{Q_{1i}^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_{2i}^2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

Quando le sfere sono collegate dal cavo conduttore l'energia del sistema è:

$$U_{fin} = \frac{1}{2}\frac{Q_{1f}^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_{2f}^2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

Dalle precedenti relazioni si ricava:

$$U_{diss} = U_{in} - U_{fin} = 4500\mathrm{J}$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 13/01/2017**
**Cognome : .................................................. Nome : ..................................................**

**Matricola: .................................................. Anno di corso : ........................................**

# Esercizio 1

Un'asta omogenea di sezione trascurabile e lunghezza $L = 1.8$m ha massa $M = 2$kg e può ruotare senza attrito intorno a un asse orizzontale passante per il punto C. La distanza di C dall'estremo B è $d = \frac{L}{3}$ (Fig.1.A). Un punto materiale di massa $m = 0.4$kg cade da una quota $h = \frac{L}{3}$ e fa un urto perfettamente anelastico con l'asta nell'estremo B.

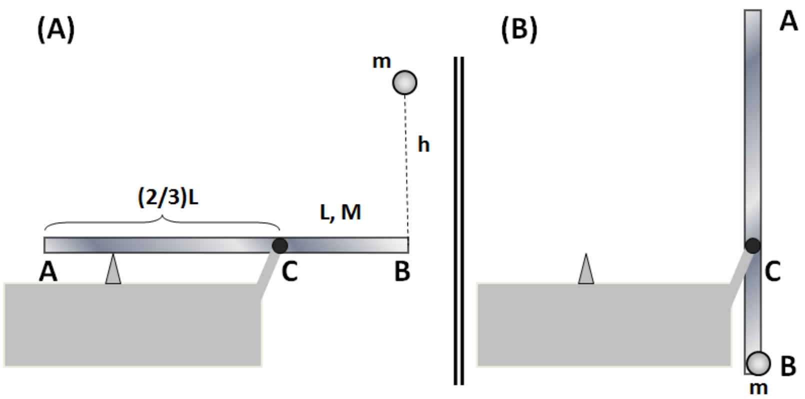



Fig.1

Si calcoli:

a) la velocità angolare dell'asta subito dopo l'urto

$\omega =$ ................

b) il minimo valore di altezza, da cui far cadere m, affinché l'estremo A raggiunga la verticale (Fig.1.B)

$h_{min} =$ ................

c) in quest'ultimo caso il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo durante l'urto di m

$\Delta p =$ ................

## Soluzione

a)
Il tempo che impiega la massa m per raggiungere l'estremo B dell'asta è:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Da cui si ricava la velocità della massa m prima dell'urto:

$$v_{in} = gt$$

Il momento angolare, valutato rispetto al vincolo, si conserva durante l'urto. Si ha quindi

$$mv_{in}\frac{L}{3} = I\omega$$

con $I = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{6}\right)^2 + m\left(\frac{L}{3}\right)^2$ momento d'inerzia dell'oggetto dopo l'urto. Si ottiene:

$$\omega = \frac{mv_{in}\frac{L}{3}}{I} = 0.95Hz$$

b)
Dopo l'urto il centro di massa del sistema è a una distanza:

$$D_{cm} = \frac{\frac{1}{2}ML}{M+m}$$

dall'estremo B. Si conserva l'energia totale del sistema dopo l'urto:

$$\frac{1}{2}I\omega_{min}^2 = (M+m)g\left(D_{cm} - \frac{L}{3}\right)$$

da cui:

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{2(M+m)g\left(D_{cm} - \frac{L}{3}\right)}{I}}$$

Per ottenere un tale valore la massa m quando raggiunge l'estremo B deve avere una velocità pari a:

$$v_{min} = \frac{3I\omega_{min}}{Lm}$$

Tale velocità è raggiunta dalla massa m quando cade dall'altezza:

$$h_{min} = \frac{v_{min}^2}{2g} = 5.4m$$

c)
La quantità di moto del sistema prima dell'urto, considerando il caso precedente è:

$$p_{ini} = mv_{min}$$

Dopo l'urto si ha:

$$p_{fin} = (m+M)\omega_{min} * \left(D_{cm} - \frac{L}{3}\right)$$

Da cui si ricava l'impulso assorbito dal vincolo:

$$\Delta p = p_{fin} - p_{ini} = 3.09kg\frac{m}{s}$$

## Esercizio 2

Una spira circolare di raggio $r = 1\text{m}$ è costituita da un filo conduttore di sezione circolare $s = 5\text{mm}^2$ e resistività $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}\Omega\text{m}$. La spira è posizionata all'interno di un grande solenoide di raggio $R = 4\text{m}$ e lunghezza $L = R = 4\text{m}$. La spira risulta concentrica e coassiale al solenoide (Fig.2). Il solenoide è costituito da $N$ spire dello stesso filo conduttore della spira per una lunghezza totale di $l = 50\text{km}$ di filo

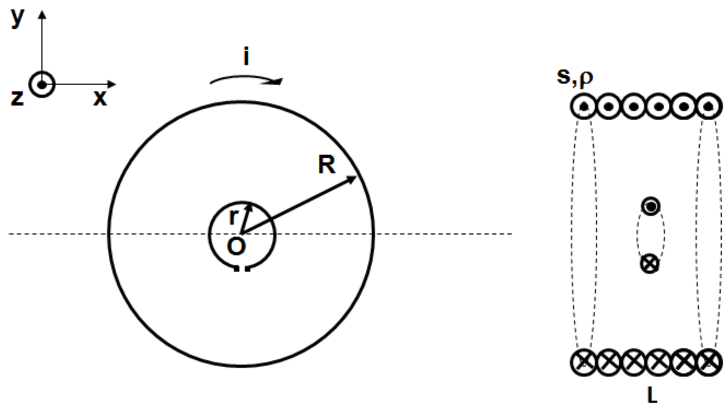



**Fig.2**

Si calcoli:

a) il modulo del campo magnetico generato dal solenoide nella posizione occupata dalla spira se in esso scorre una corrente $i = 2000\text{A}$ costante (nel calcolo del numero di avvolgimenti del filo si trascuri l'aumento di sezione del solenoide dovuto al filo stesso).

$$B_s = ................$$

b) la massima differenza di potenziale ai capi della spira quando nel solenoide viene fatta circolare una corrente $I = I_0 cos(\omega t)$ con $I_0 = 1500\text{A}$ e $\omega = 300\text{Hz}$.

$$\Delta V_{max} = ................$$

c) Nelle stesse condizioni la potenza massima sviluppata dalla corrente che circola nella spira

$$W = ................$$

## Soluzione

a)
Il numero totale di avvolgimenti di cavo (N) che costituisce il solenoide è:

$$N = \frac{l}{2\pi R} = 1990$$

Il campo magnetico nel solenoide risulta essere

$$B_{sol} = \mu_0 \frac{Ni}{L} = 1.25T$$

b) La resistenza della spira è:

$$Res = \frac{\rho 2\pi r}{s} = 2.14 \cdot 10^{-5}\Omega$$

La differenza di potenziale ai capi della bobina risulta:

$$\Delta V = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \mu_0 \omega \frac{N I_0 sin(\omega t)}{L} \pi r^2$$

si ricava quindi la d.d.p. massima ponendo pari a 1 il valore di $sin(\omega t)$:

$$\Delta V_{max} = \mu_0 \omega \frac{N I_0}{L} \pi r^2 = 886V$$

c) La resistenza della spira è:

$$Res = \frac{\rho 2\pi r}{s} = 2.14 \cdot 10^{-2}\Omega$$

La potenza massima dissipata dalla spira è quindi:

$$W = \frac{\Delta V_{max}^2}{R} = 3.67 \cdot 10^7 W$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 02/02/2017**
**Cognome : .................................................. Nome : ..................................................**

**Matricola: .................................................. Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1

Un pendolo ideale è formato da una massa puntiforme $m = 1$kg appesa a un filo inestensibile di lunghezza $l = 1$m vincolato nel punto A e può oscillare sul piano verticale. Il pendolo viene lasciato oscillare liberamente a partire dalla posizione iniziale definita dall'angolo $\theta = 30°$. Al vincolo A è appesa anche un'asta sottile di massa $M = 2$kg e lunghezza $L = 1.2$m collegata a una sfera di massa $M_s = 1.5$kg e raggio $R = 20$cm (vedere Fig.1).

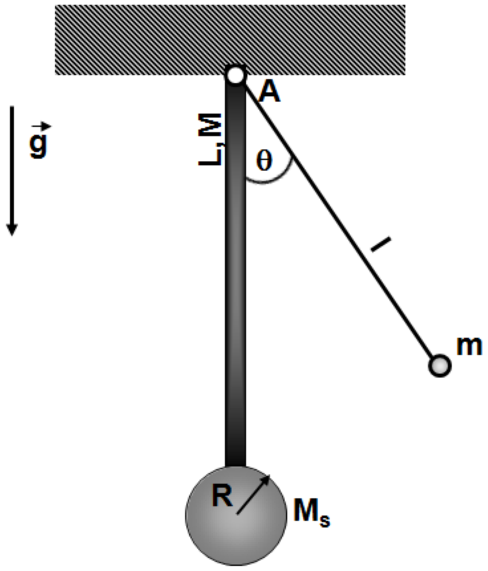



Figura 1

Si calcoli:

a) la velocità di m un'istante prima dell'urto con l'asta:

$$v_m = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Supponendo l'urto perfettamente elastico si calcoli:

b) la velocità angolare con cui l'asta inizia ad oscillare

$$\omega = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

c) il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo A durante l'urto:

$$p = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

## Soluzione

a)
Imponendo la conservazione dell'energia si ottiene:

$$mg(l - lcos(\theta) = \frac{1}{2}mv_m^2$$

da cui

$$v_m = \sqrt{2g(l - lcos(\theta)} = 1.62m/s$$

b)
Si calcola quindi il momento d'inerzia del sistema (asta + sfera) rispetto al punto A:

$$I_A = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{2}{5}M_sR^2 + M_s(L + \frac{R}{2})^2$$

In questo caso si conservano sia il momento angolare che l'energia del sistema:

$$mv_ml = I_A\omega + mv_{mf}l \qquad ; \qquad mv_m^2 = I_A\omega^2 + mv_{mf}^2$$

da cui

$$ml(v_m - v_{mf}) = I_A\omega \qquad ; \qquad m(v_m + v_{mf})(v_m - v_{mf}) = I_A\omega^2$$

dividendo membro a membro si ottiene

$$\frac{(v_m + v_{mf})}{l} = \omega \qquad ; \qquad ml(v_m - v_{mf}) = I_A\omega$$

da cui:

$$v_{mf} = v_m\frac{ml^2 - I_A}{ml^2 + I_A} = -0.90m/s$$

$$\omega = \frac{v_m(2ml^2)}{l(ml^2 + I_A)} = 0.72s^{-1}$$

c)
La quantità di moto del sistema prima dell'urto è data da:

$$p_{in} = mv_m$$

Si calcola ora la distanza del centro di massa del sistema asta+sfera dal punto A

$$d_{cm} = \frac{ML/2 + M_s(L + R/2)}{M + M_s}$$

La quantità di moto finale del sistema è:

$$p_f = mv_{mf} + (M + M_s)\omega d_{cm}$$

da cui:

$$\Delta p = |p_f - p_{in}| = 0.26kgm/s$$

## Esercizio 2

Un filo indefinito ha forma cilindrica di raggio $R = 10$cm ed è percorso da corrente perpendicolare al filo stesso e di densità superficiale $J = 2\text{A/mm}^2$. All'interno del filo sono presenti due cavità cilindriche i cui assi sono paralleli all'asse del filo e i cui centri O' e O" distano entrambi $r = 5$cm dal centro O del filo. Le due cavità hanno entrambe raggio $r$ (vedere Fig.2).

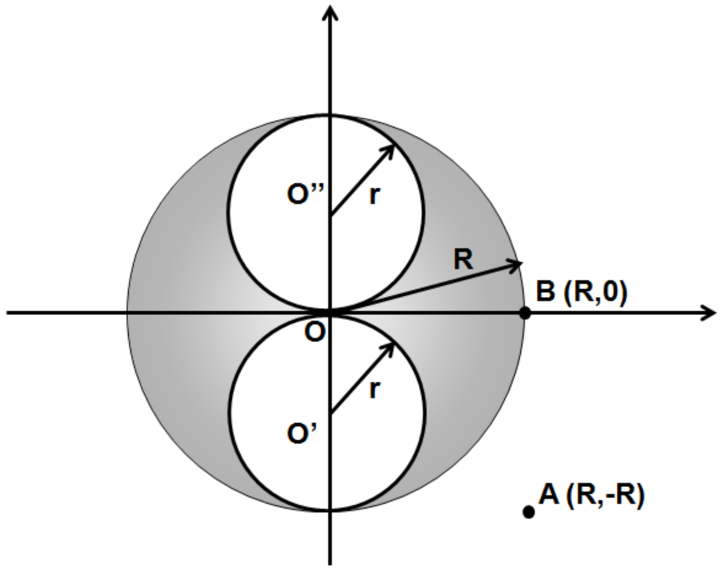



**Figura 2**

Si calcoli:

a) il modulo del campo magnetico in O

$B_O$.................

b) il modulo del campo magnetico nel punto A di coordinate (10,-10)

$B_A =$ .................

c) il modulo dell'accelerazione che subirebbe un elettrone che si trovasse a passare nel punto B=(R,0) con velocità $v_e$=($\frac{c}{100}$,0,0)

$a_e =$ .................

# Compito febbraio 2017 Ingegneria Informatica - corso Prof. Tonelli

2 febbraio 2017

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

a) Per calcolare il campo magnetico in O usiamo il principio di sovrapposizione, dunque consideriamo di avere un cilindro senza cavità dove scorre una densità di corrente $J$ e poi due fili in corrispondenza delle cavità con densità di corrente -$J$. Dato che il punto O rappresenta il centro del filo di raggio R, solo i due fili-cavità daranno contributo non nullo.

$$\vec{B}_0 = \hat{x} \cdot \mu_0 (\frac{J}{2} r - \frac{J}{2} r) = 0$$

b) Per calcolare il campo magnetico nel punto A(R,-R) applichiamo come nel caso precedente il principio di sovrapposizione. In questo caso notiamo che tutti e tre i fili daranno contributo non nullo (ognuno in direzione diversa!).

$$\begin{aligned}
\vec{B}_A &= \vec{B}_o + \vec{B}_{O'} + \vec{B}_{o''} \\
\vec{B}_O &= \mu_0 \frac{J}{2} R \sqrt{2}(1, 1, 0) \\
\vec{B}_{O'} &= \mu_0 \frac{J}{2} \sqrt{R^2 + (R/2)^2} \frac{2}{\sqrt{5}}(-1/2, -1, 0) \\
\vec{B}_{O''} &= \mu_0 \frac{J}{2} \sqrt{R^2 + (R3/2)^2} \frac{2}{\sqrt{13}}(-3/2, -1, 0)
\end{aligned}$$

c) Calcoliamo come prima cosa il campo nel punto C(R,0):

$$\begin{aligned}
\vec{B}_C &= \vec{B}_o + \vec{B}_{O'} + \vec{B}_{o''} \\
\vec{B}_O &= \mu_0 \frac{J}{2} R \sqrt{2}(0, 1, 0) \\
\vec{B}_{O'} &= \mu_0 \frac{J}{2} \sqrt{R^2 + (R/2)^2} \frac{2}{\sqrt{5}}(1/2, -1, 0) \\
\vec{B}_{O''} &= \mu_0 \frac{J}{2} \sqrt{R^2 + (R/2)^2} \frac{2}{\sqrt{5}}(-1/2, -1, 0)
\end{aligned}$$

dunque il campo $\vec{B}_C$ sarà diretto lungo l'asse y. A questo punto basta eguagliare $m\vec{a}$ alla forza magnetica $q\vec{v} \times \vec{B}_C$:

$$q\vec{v} \times \vec{B}_C = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \times \vec{B}_C \tag{1}$$

dunque $\vec{a}$ sarà diretto lungo l'asse $-\vec{z}$.

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 21/02/2017**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : ......................................**

# Esercizio 1

Due sfere, una di massa $m_1 = 2$kg e raggio $r_1 = 0.17$m la seconda di massa $m_2 = 8$kg e raggio $r_2 = 0.23$m, si urtano centralmente e rimangono attaccate senza deformarsi (troppo). La prima sfera viaggia alla velocità $v_1 = 34$m/s verso la seconda che è ferma ma ruota su se stessa con una velocità angolare $\omega_2 = 20$rad/s (vedere Fig.1).

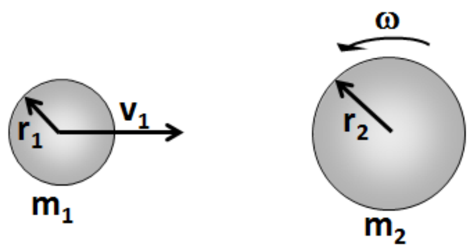



**Fig.1**

Si calcoli:

a) l'energia cinetica totale iniziale del sistema e la distanza tra il centro di massa del sistema (dopo l'urto) e il centro della prima sfera:

$E_c =$ ................ ; $d_{cm} =$ ................

b) la velocità angolare del sistema dopo l'urto e la massima velocità del centro della seconda sfera rispetto al laboratorio

$\omega =$ ................ ; $v_{max} =$ ................

c) la variazione di energia del sistema dovuta all'urto tra le due sfere:

$\Delta E =$ ................

## Soluzione

a)
Il momento d'inerzia della seconda sfera è:

$$I_2 = \frac{2}{5} m_2 r_2^2$$

L'energia cinetica totale del sistema è:

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = 1190J$$

La distanza del centro di massa del sistema dopo l'urto dal centro della prima sfera è:

$$d_{cm} = \frac{m_2(r_1 + r_2)}{m_1 + m_2} = 0.32m$$

b)
Durante l'urto si conservano sia la quantità di moto che il momento angolare del sistema. Dalla conservazione della quantità di moto si ricava la velocità del sistema composto dopo l'urto:

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 6.8m/s$$

Si calcola quindi il momento d'inerzia del sistema rispetto al centro di massa del sistema stesso:

$$I = \frac{2}{5} m_1 r_1^2 + \frac{2}{5} m_2 r_2^2 + m_1 d_{cm}^2 + m_2 (r_2 + r_1 - d_{cm})^2$$

Conservando il momento angolare del sistema si ottiene:

$$I\omega = I_2 \omega_2$$

da cui

$$\omega = \frac{I_2 \omega_2}{I} = 7.6rad/s$$

La massima velocità del centro della seconda sfera rispetto al laboratorio è:

$$v_{max} = \omega(r_2 + r_1 - d_{cm}) + v = 7.4m/s$$

c)
L'energia finale del sistema è:

$$E_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

La variazione di energia del sistema dovuta all'urto tra le due sfere è:

$$\Delta E = E_f - E_c = -912J$$

## Esercizio 2

Una barra conduttrice, di massa $m = 100$g e resistenza $R = 500\Omega$, appoggia senza attrito su due binari orizzontali di resistenza trascurabile. La distanza tra i binari è $l = 40$cm e il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $B = 0.8$T, perpendicolare ai binari ed alla barra (entrante nel foglio, vedere Fig.2). All'istante t=0 la barra è ferma e tra i binari viene posto un generatore ($V_A - V_B > 0$).

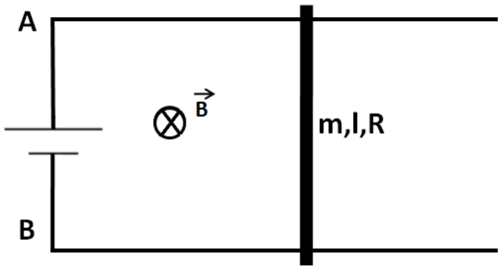



Fig.2

Il generatore fornisce una corrente costante $i_0 = 0.2$A. Si calcoli:

a) in che direzione si muove la sbarra e la velocità della sbarra al tempo $t_1 = 15$s

$$v_1 = ................$$

b) il lavoro fatto dal generatore fino al tempo $t_1$

$$L = ................$$

Se invece il generatore fornisse una FEM costante pari a $V_0 = 8$V calcolare:

c) la velocità limite della sbarra, ossia la velocità della sbarra quando si annulla l'accelerazione della sbarra stessa

$$v_{lim} = ................$$

## Soluzione

a)
La corrente gira in senso orario, ed è diretta verso il basso lungo la barretta mobile. Il campo magnetico è entrante nel foglio, quindi la forza $\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$ é diretta verso destra. Poichè il generatore mantiene la corrente costante la forza è costante, e quindi si tratta di un moto uniformemente accelerato:

$$F = ilB = m\frac{dv}{dt} \rightarrow v_1 = \frac{ilB}{m}t = 9.6m/s$$

Nota che per mantenere la corrente costante il generatore dovrà contrastare la FEM indotta dal movimento della sbarretta, e quindi dovrà generare una FEM crescente nel tempo.
b) Il lavoro fatto dal generatore sarà pari all'energia cinetica acquistata dalla sbarretta, più l'energia dissipata sulla resistenza. Essendo la corrente costante, la potenza dissipata è costante ($Ri^2$), si otterrà:

$$L = Ri^2t + \frac{1}{2}mv^2 = 305J$$

c)
Se invece di una corrente costante il generatore fornisce una tensione costante, il moto non sarà più uniformemente accelerato poichè al crescere della velocità della sbarretta cresce la FEM indotta nel circuito. La FEM indotta è pari a:

$$FEM = -\frac{d\phi(B)}{dt} = -lB\frac{dx}{dt} = -lBv$$

La velocità limite si avrà quando la FEM indotta raggiunge la tensione del generatore, da quel momento infatti non circola più corrente nel circuito, e quindi la sbarretta non è più soggetta a forze esterne:

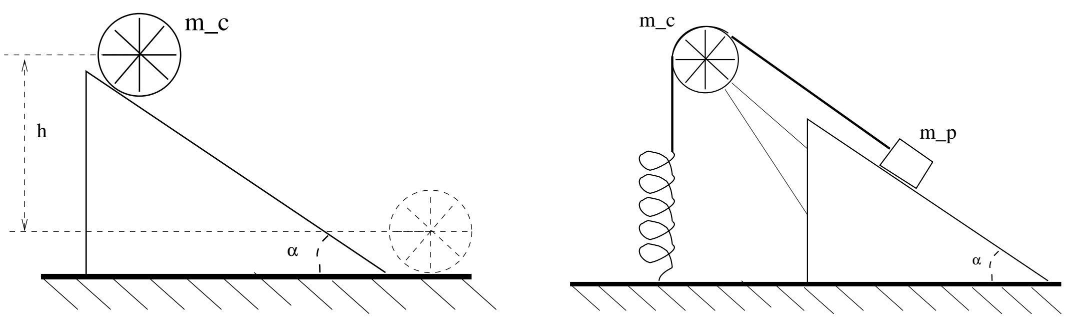
$$V_0 - vlB = 0 \rightarrow v_{lim} = \frac{V_0}{lB} = 25m/s$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 09/06/2017**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : ......................................**

# Esercizio 1




Una ruota di raggio $R = 30\ cm$ e massa $m_C = 2\ kg$ raggiunge la velocità $v = 4\ m/s$ scendendo di una quota $h = 1\ m$ con moto di puro rotolamento su un piano scabro, inclinato di un angolo $\alpha = \pi/6$ e fisso, come nella figura a sinistra. Il modulo dell'accelerazione di gravità $\vec{g}$ vale 9.8 $m/s^2$.

1. Si calcoli il momento di inerzia della ruota rispetto all'asse passante per il suo centro:
   $I =$ ...................

La stessa ruota ed un piano fisso e questa volta liscio, inclinato dello stesso angolo $\alpha$, vengono utilizzati come nella figura a destra. La ruota può ruotare senza attrito intorno al perno orizzontale fisso passante per il suo centro. Un filo ideale, inestensibile e privo di massa, appoggia sulla ruota e non slitta su di essa. Un estremo è collegato ad una massa $m_p = 1\ kg$ e l'altro ad una molla di costante elastica $k = 16\ N/m$ e lunghezza a riposo nulla.
Si calcoli:

2. la lunghezza della molla quando il sistema è in equilibrio:
   $\Delta L =$ ...............

3. il periodo delle oscillazioni del sistema:
   $T =$ ...................

Il sistema viene messo in oscillazione a partire dalla posizione di equilibrio e con un'ampiezza di oscillazione uguale alla lunghezza della molla all'equilibrio.

4. Trovare il valore massimo delle tensioni del filo dal lato delle molla $T_{molla}$ e dal lato del peso $T_P$:
   $T_{molla,max} =$ ..................
   $T_{P,max} =$ ..................

## Soluzione Esercizio 1

1. Per la conservazione dell'energia (l'attrito non compie lavoro visto che la ruota non striscia) si può scrivere:
$$m_C gh = \frac{1}{2}m_C v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$
inserendo la condizione di puro rotolamento $\omega = v/R$ si può ricavare:
$$I = m_C R^2(\frac{2gh}{v^2} - 1) = 0.040\ kg\ m^2$$

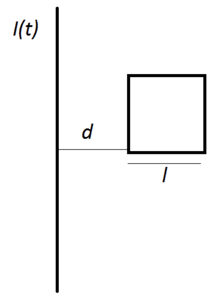
2. All'equilibrio la ruota deve avere accelerazione angolare nulla, quindi il valore delle tensioni del filo devono risultare uguali ai due lati (applicare la II Eq. cardinale alla ruota). La posizione di equilibrio è determinata dalla condizione $m_P g \sin\alpha = k\ \Delta L$, con $\Delta L$ allungamento della molla all'equilibrio:
$$\Delta L = \frac{m_P g \sin\alpha}{k} = 0.31\ m$$

3. Per semplicità si può scegliere lo zero dell'energia potenziale gravitazionale nella posizione di equilibrio. Se $y$ esprime l'allungamento aggiuntivo della molla (in verticale) rispetto alla posizione di equilibrio, in un punto generico, si noti che $y$ risulta uguale allo spostamento della massa $m_P$ lungo il piano inclinato (verso il basso) per l'inestensibilità del filo:
$$E_{cin} = \frac{1}{2}m_P\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$
$$E_{pot} = -m_P gy\sin\alpha + \frac{1}{2}k(y + \Delta L)^2$$
Si conserva l'energia meccanica:
$$E_{mecc} = \frac{1}{2}m_P\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - m_P gy\sin\alpha + \frac{1}{2}k(y + \Delta L)^2$$
e derivando rispetto al tempo si ha:
$$m_P\dot{y}\ddot{y} + I\omega\dot{\omega} - m_P g\dot{y}\sin\alpha + k(y + \Delta L)\dot{y} = 0$$
imponendo la condizione di puro rotolamento $\omega = \dot{y}/R$:
$$m_P\dot{y}\ddot{y} + I\dot{y}\ddot{y}/R^2 - m_P g\dot{y}\sin\alpha + k(y + \Delta L)\dot{y} = 0$$
sostituendo la condizione di equilibrio $m_P g\sin\alpha = k\Delta L$, si ottiene l'equazione del moto (armonico):
$$(m_P + \frac{I}{R^2})\ddot{y} + ky = 0$$
con pulsazione $\Omega$ e periodo $T = 2\pi/\Omega$ rispettivamente:
$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m_P + I/R^2}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m_P + \frac{I}{R^2}}{k}} = 1.9\ s$$

4. Per trovare le tensioni del filo ai due lati si può scrivere per la molla e la massa $m_P$ rispettivamente:
$$T_{molla} = k(y + \Delta L)$$
$$m_P g\sin\alpha - T_P = m_P\ddot{y}$$
La legge oraria dell'estremo della molla (imponendo la condizione iniziale $y(t = 0) = 0$ e l'ampiezza dell'oscillazione) risulta:
$$y(t) = \Delta L\sin(\Omega t)$$
Dato che $\ddot{y} = -\Omega^2 y(t)$, risulta:
$$T_P = m_P g\sin\alpha + m_P\Omega^2 y$$
Le tensioni risultano entrambe massime in corripondenza del massimo valore di $y = \Delta L$ (raggiunto dopo un tempo $\tau_{T_{molla,max}} = \tau_{T_{P,max}} = T/4$ dall'inizio dell'oscillazione):
$$T_{molla,max} = 2k\Delta L = 2m_P g\sin\alpha = 9.8\ N$$
$$T_{P,max} = m_P g\sin\alpha + m_P\Omega^2\Delta L = m_P g\sin\alpha(1 + \frac{1}{1 + \frac{I}{m_P R^2}}) = 8.3\ N$$

## Esercizio 2

Un filo rettilineo infinito è percorso da una corrente continua $I_0 = 2$ A. Al tempo $t = 0$ la corrente inizia a diminuire secondo la legge $I(t) = I_0 e^{-\alpha t}$ con $\alpha = 30$ s$^{-1}$. A distanza $d = 50$ cm dal filo e complanare al filo si trova una spira quadrata di lato $l = 20$ cm. La spira ha resistenza $R = 5\ \Omega$, è indeformabile ed è trattenuta nella sua posizione da una forza opportuna.




1. Si calcoli in funzione del tempo e dei parametri geometrici il flusso del campo magnetico generato dal filo $\Phi(B, t)$ attraverso la superficie della spira (si trascurino fenomeni di autoinduzione)

   $\Phi(B, t)$= ....................

2. Si calcoli la la corrente $I_S$ che circola nella spira al tempo $t = 0.2$ s

   $I_S(t)$= ....................

3. Si calcoli l'energia totale $E$ dissipata nella spira per effetto Joule

   $E$= ....................

## Soluzione Esercizio 2

1. Il campo magnetico generato dal filo a distanza $r$ dal suo asse nella regione della spira è diretto ortogonalemtente al piano della spira e vale $B(r) = \frac{\mu_o I(t)}{2\pi r}$. Pertanto il flusso del campo si scrive

$$\Phi(B,t) = \int_d^{d+l} \frac{\mu_o I(t) l}{2\pi r} dr = \frac{\mu_o I(t) l}{2\pi} ln \frac{d+l}{d} = \frac{\mu_o l I_0 e^{-\alpha t}}{2\pi} ln \frac{d+l}{d}$$

2. La corrente circolante nella spira si ottiene dividendo la forza elettromotrice indotta, pari alla variazione temporale del flusso del campo magnetico, per la resistenza del circuito. Pertanto

$$I_S(t) = \frac{\mu_o l I_0 \alpha e^{-\alpha t}}{2\pi R} ln \frac{d+l}{d}.$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene al tempo $t = 0.2$ s

$$I_S = 0.40 \ \ \text{nA}$$

3. L'energia dissipata dalla resistenza per effetto Joule si ottiene integrando la potenza istantanea $P = RI_s(t)^2$ dal tempo zero a $t = +\infty$.

$$E = R \int_0^{\infty} I_S(t)^2 dt = \frac{1}{R} \Big( \frac{\mu_o l I_0 \alpha}{2\pi} ln \frac{d+l}{d} \Big)^2 \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = \frac{\alpha}{2R} \Big( \frac{\mu_o l I_0}{2\pi} ln \frac{d+l}{d} \Big)^2$$

Sostituendo i valori numerici si trova $E = 2.2 \ 10^{-15}$ J.

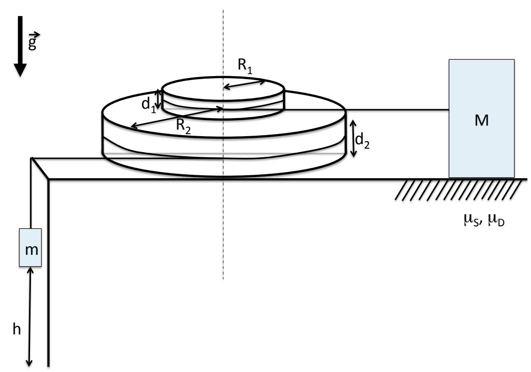
**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 30/06/2017**
**Cognome : .................................................. Nome : ..................................................**

**Matricola: .................................................. Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1

Un corpo rigido è costituito da due dischi di alluminio (densità $\rho = 2.7\ g/cm^3$) sovrapposti, rispettivamente di raggio $R_1 = 20\ cm$, spessore $d_1 = 5\ cm$ ed $R_2 = 40\ cm$, $d_2 = 10\ cm$ (si veda la figura).
Il corpo rigido può ruotare senza attrito attorno ad un asse verticale fisso passante per i centri dei due dischi. Un filo ideale è arrotolato attorno al disco inferiore e, mediante un passante senza attrito, ha un estremo collegato ad una massa $m$. Un secondo filo ideale è arrotolato attorno al disco superiore, con un estremo collegato ad una massa $M = 1.0\ kg$, posta sul piano orizzontale scabro (con coefficienti di attrito statico e dinamico rispettivamente $\mu_S = 0.6$ e $\mu_D = 0.4$). Si noti che, se il filo collegato a $m$ si srotola dal cilindro inferiore il filo collegato a $M$ si arrotola al clindro superiore, o viceversa (i fili non strisciano sui dischi). L'accelerazione di gravità vale $|\vec{g}| = 9.8\ m/s^2$.




1. Si calcoli il momento d'inerzia $I$ del corpo rigido rispetto all'asse passante per i centri dei due dischi e si trovi il massimo valore della massa $m$, $m_{max}$, affinché il sistema rimanga in equilibrio:

   $I =$ ....................
   $m_{max} =$ ..............................

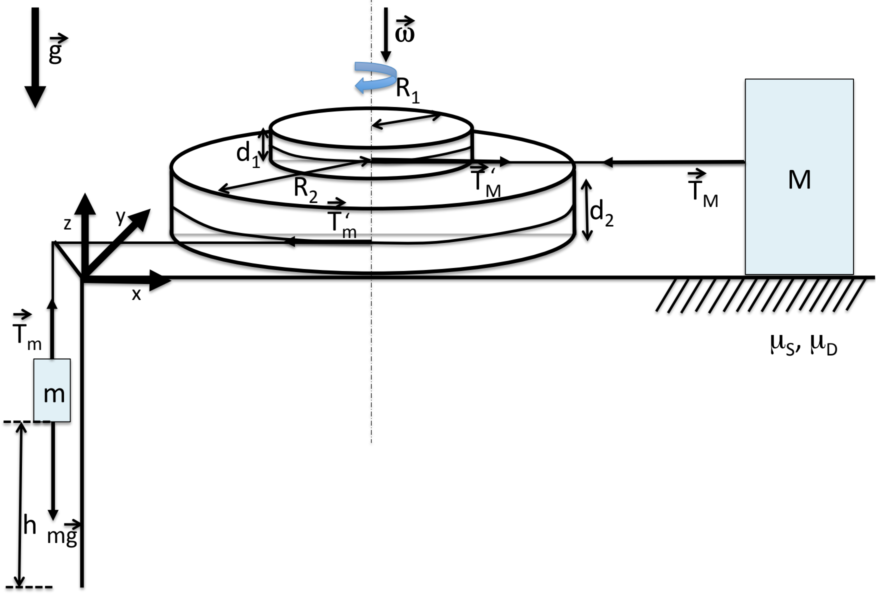
2. Si scelga ora una massa $m$ di valore $10\ kg$ (maggiore di $m_{max}$). Trovare il lavoro totale (con il relativo segno) compiuto dalla forza di attrito $L_{F_{attr}}$ dall'istante iniziale a quando la massa $m$ è scesa di una quota $h = 2\ m$:

   $L_{F_{attr}} =$ ..................

3. Calcolare il modulo della velocità angolare finale del corpo rigido, quando la massa $m$ è scesa della quota $h$:

   $|\vec{\omega_f}| =$ .................

# Soluzione Esercizio 1

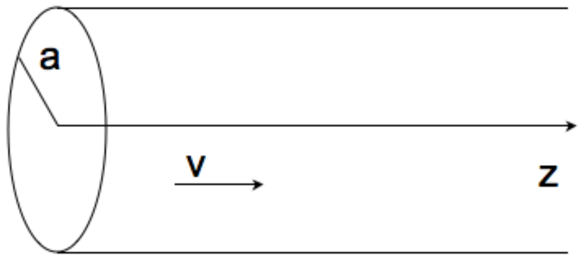



1. La massa del cilindro 1(2) vale a $m_1 = \rho\pi R_1^2 d_1$ ($m_2 = \rho\pi R_2^2 d_2$). Quindi il momento d'inerzia è:
$$I = \frac{1}{2}m_1 R_1^2 + \frac{1}{2}m_2 R_2^2 = 11.2\ kg\ m^2$$
Siano $T_m$ e $T_M$ i moduli delle tensioni dei fili ideali collegati rispettivamente ad $m$ ed $M$. Risulta $|\overrightarrow{T_m}| = |\overrightarrow{T_m'}|$ e $|\overrightarrow{T_M}| = |\overrightarrow{T_M'}|$ (vedi figura). In condizioni di equilibrio del sistema:
$$ma_z = T_m - mg = 0$$
$$MA_x = F_{attr_S} - T_M = 0$$
$$M_z = R_1 \cdot T_M - R_2 \cdot T_m = 0$$
nell'ultima relazione il polo scelto è un punto qualsiasi lungo l'asse di rotazione del corpo rigido.
Il valore della forza di attrito statico risulta $|\overrightarrow{F}_{attr_S}| \leq \mu_S R^N$, dove $R^N$ è il modulo della reazione del piano alla forza peso, con $R^N = Mg$, per cui $R_2 m_{max} g = R_1 \mu_S M g$, ottenendo:
$$m_{max} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \mu_S M = 0.30\ kg$$

2. Quando $m = 10\ kg$ ($m > m_{max}$ implica $M_z = \frac{d\omega_z}{dt} < 0$) il filo collegato a $m$ si srotola dal disco inferiore, mentre l'altro collegato ad $M$ si arrotola al disco superiore. Se il corpo $m$ scende di una quota $h$, il corpo rigido ruota di un angolo $\Delta\theta = -\frac{h}{R_2}$ ed il corpo $M$ si sposta (verso sinistra) di $\Delta X = R_1 \cdot \Delta\theta$. Il lavoro della forza di attrito risulta:
$$L_{F_{attr}} = \mu_D M g \Delta X = \mu_D M g R_1 \cdot (-\frac{h}{R_2}) = -3.9\ J$$

3. Tale lavoro è uguale alla variazione di energia meccanica del sistema costituito da $m$, $M$ e corpo rigido: $L_{F_{attr}} = \Delta E_{mecc} = E_{cin}^f - mgh$. Per la inestensibilità dei fili (non strisciano sui dischi), tra le velocità di $m$, $M$ e la velocità angolare del corpo rigido valgono le seguenti relazioni: $v_{m_z} = R_2 \cdot \omega_z$ e $v_{M_x} = R_1 \cdot \omega_z$. Sostituendo nell'energia cinetica finale:
$$E_{cin}^f = \frac{1}{2}m v_{m_z}^2 + \frac{1}{2}M v_{M_x}^2 + \frac{1}{2}I\omega_z^2 = \frac{1}{2}(mR_2^2 + MR_1^2 + I)\omega_z^2 = mgh + L_{F_{attr}}$$
si ottiene:
$$|\overrightarrow{\omega}_f| = |\omega_z| = \sqrt{\frac{2(m - \mu_D M \frac{R_1}{R_2})gh}{mR_2^2 + MR_1^2 + I}} = 5.5\ rad/s$$

# Esercizio 2




Un fascio di protoni di forma cilindrica con raggio $a = 1\ mm$ è costituito da $n = 10^{13}\ protoni/m^3$ con carica $q = 1.6 \times 10^{-19}\ C$ che viaggiano lungo l'asse z del cilindro (vedi figura), con velocità $v = 3000\ m/s$.

1. Si calcoli la carica elettrica presente per unità di lunghezza, $\lambda$:

   $\lambda =$ ..................

2. Si calcoli in un punto a distanza $a/2$ dall'asse del fascio il modulo del campo elettrico, $E(a/2)$ , e si dia la sua espressione, $\overrightarrow{E}(a/2)$, in forma vettoriale:

   $E(a/2) =$ ...................

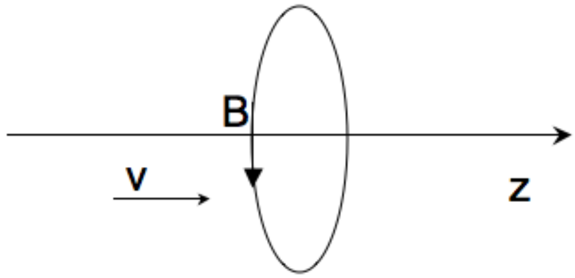
   $\overrightarrow{E}(a/2) =$ ...................

3. Si calcoli il modulo del campo magnetico in un punto a distanza $a/2$ dall'asse del fascio, $B(a/2)$, e all'esterno del fascio in un punto a distanza $2a$ dall'asse del fascio, $B(2a)$:

   $B(a/2) =$ ...................

   $B(2a) =$ ...................

## Soluzione Esercizio 2




1. La carica per unità di lunghezza è la carica presente in una parte del fascio di lunghezza l pari a 1 m. Ma tale carica è la carica contenuta in un cilindro di sezione $\pi a^2$ e lunghezza 1 m, quindi di volume $V = \pi a^2 l$. Poichè la densità di carica presente nel fascio è $\rho = nq$, la carica contenuta in tale cilindro è $Q = \rho V$, di conseguenza:
   $\lambda = nq\pi a^2 = 5.0 \times 10^{-12}\ C/m$.

2. La distribuzione di carica ha simmetria cilindrica, di conseguenza il campo elettrico è diretto radialmente rispetto all'asse di simmetria z e in verso uscente essendo la carica positiva. Il campo è inoltre costante su delle superfici cilindriche concentriche con l'asse z. Il valore del campo si ottiene applicando il Teorema di Gauss ad una superficie di Gauss cilindrica chiusa di lunghezza h con asse coincidente con z e di raggio $r = a/2$. Per cui:
   $E(r)2\pi rh = Q_{int}/\epsilon_0$ dove $Q_{int} = nq\pi r^2 h$ è la carica interna alla superfice cilindrica chiusa. Per cui:
   $E(r) = nqr/2\epsilon_0$. Per $r = a/2$, $E(a/2) = nqa/4\epsilon_0 = 45\ \ V/m$.
   Essendo il campo radiale possiamo scrivere $\overrightarrow{E}(a/2) = (nqa/4\epsilon_0)\,\hat{r}$.

3. Il problema ha simmetria cilindrica (la simmetria del filo indefinito), dunque le linee del campo di induzione magnetica sono linee circolari con centro sull'asse z. Poichè le cariche in moto sono positive (protoni), la corrente associata al moto delle cariche è nello stesso verso della velocità e quindi, per la regola della mano destra il verso delle linee di campo è antiorario rispetto all'asse $z$ come indicato in figura.
   L'espressione del modulo del campo interno si ottiene applicando il Teorema di Ampere ad una linea di campo circolare di raggio $r < a$: $B(r)2\pi r = \mu_0 i_{conc}$ dove $i_{conc}$ è la corrente concatenata con la linea circolare. Ma la densità di corrente elettrica associata con il moto delle cariche è $J = nqv$ Dunque, la corrente concatenata con la linea circolare di raggio r è $i_{conc} = J\pi r^2 = nqv\pi r^2$. Per cui $B(r) = \mu_0 nqvr/2$, che per $r = a/2$ vale $B(a/2) = \mu_0 nqva/4 = 1.5 \times 10^{-12}\ T$.
   L'espressione del modulo del campo nel caso in cui $r = 2a$ si ottiene anche in questo caso applicando il Teorema di Ampere ma ad una linea di campo circolare di raggio $r \geq a$: $B(r)2\pi r = \mu_0 i_{conc}$ dove $i_{conc}$ è la corrente concatenata con la linea circolare dovuta al fascio di protoni $i_{conc} = J\pi a^2 = nqv\pi a^2$. $B(r) = \mu_0 nqva^2/2r$, che per $r = 2a$ fornisce $B(2a) = \mu_0 nqva/4 = 1.5 \times 10^{-12}\ T$.

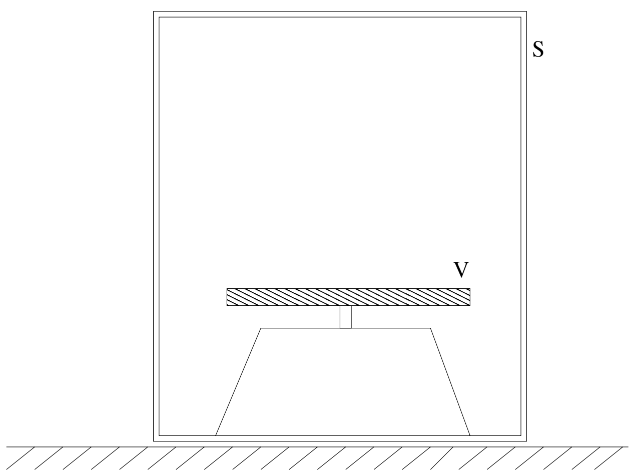
**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 21/07/2017**
**Cognome : .................................................. Nome : ..................................................**

**Matricola: .................................................. Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1

In una scatola cilindrica S è fissato, solidale alla scatola, un motore elettrico sul cui asse è montato un volano V, come in figura. La scatola, inizialmente in quiete, poggia su un piano orizzontale privo di attrito. Al tempo t=0 il volano è messo in rotazione con velocità angolare $\Omega_V = 5\pi$ rad/s rispetto alla scatola S. Il rapporto tra il momento d'inerzia del volano ($I_V$) e il momento di inerzia della scatola ($I_S$, che comprende anche il motore ad essa solidale) è dato da $I_V/I_S = 3/2$.




1. Si calcolino le velocità angolari $\omega_V$ e $\omega_S$ (con il relativo segno) del volano e della scatola nel riferimento solidale al piano orizzontale:
   $\omega_V =$ ....................
   $\omega_S =$ ....................

   Ad un certo istante, il volano viene rigidamente collegato alla scatola S per mezzo di un sistema di bloccaggio interno alla scatola stessa.

2. Quale sarà la velocità angolare finale del sistema?
   $\omega' =$ ....................

3. Calcolare il lavoro fatto (con il relativo segno) dalle forze interne, necessario per bloccare il volano e renderlo solidale alla scatola (si assuma, per questo punto, che $I_S = 2\ kg \cdot m^2$):
   $L_{int} =$ .....................

# 1 Soluzione Esercizio 1

1. Il sistema è soggetto solo a forze esterne che hanno direzioni verticali (i pesi e le reazioni vincolari) e la cui risultante è nulla. Si conserverà quindi la quantità di moto e il baricentro non si muoverà. In particolare l'asse di rotazione del volano, che indicheremo con asse z, che per motivi di simmetria contiene il centro di massa, dovrà rimanere fermo. Poichè il momento delle forze esterne rispetto a questo asse è nullo si conserverà anche il momento angolare. Essendo all'inizio il sistema fermo, si può scrivere:

   $$L_i = 0 = L_f = I_s\omega_s + I_V\omega_V$$

   dove $\omega_V$ e $\omega_S$ sono le componenti lungo z delle velocità angolari del volano e della scatola rispetto al piano. La velocità angolare del volano rispetto alla scatola S, $\Omega_V$ è un dato del problema. Nel sistema solidale al piano di appoggio (nel quale è espressa la relazione della conservazione del momento angolare) la velocità angolare $\omega_V$ è data dalla seguente relazione:

   $$\omega_V = \Omega_V + \omega_S$$

   dove come sopra, $\omega_V$ e $\omega_S$ sono le velocità angolari di volano e scatola rispetto al piano di appoggio. Le ultime due relazioni costituiscono due equazioni in due incognite. Da $\omega_S = \omega_V - \Omega_V$, sostituendo nella relazione della conservazione del momento angolare $\omega_S$ espressa in funzione di $\omega_V$ e $\Omega_V$ si ottiene:

   $$\omega_V = \frac{I_S}{I_S + I_V}\Omega_V = \frac{1}{1 + \frac{I_V}{I_S}}\Omega_V = 2\pi\ rad/s$$

   Sempre dalla condizione della conservazione del momento angolare si può ricavare $\omega_S$:

   $$\omega_S = -\frac{I_V}{I_S}\omega_V = -3\pi\ rad/s$$

   Ovvero la scatola ruota in senso opposto rispetto al volano.

2. Quando il sistema di ancoraggio interno collega rigidamente il volano alla scatola, la conservazione del momento angolare continua a essere valida (è una forza interna quella che ancora il volano alla scatola). Per cui, indicando con $\omega^{'}$ la velocità angolare comune di scatola e volano, la conservazione del momento angolare si esprime:

   $$L_i = 0 = L_f = I_S\omega^{'} + I_V\omega^{'} = 0$$

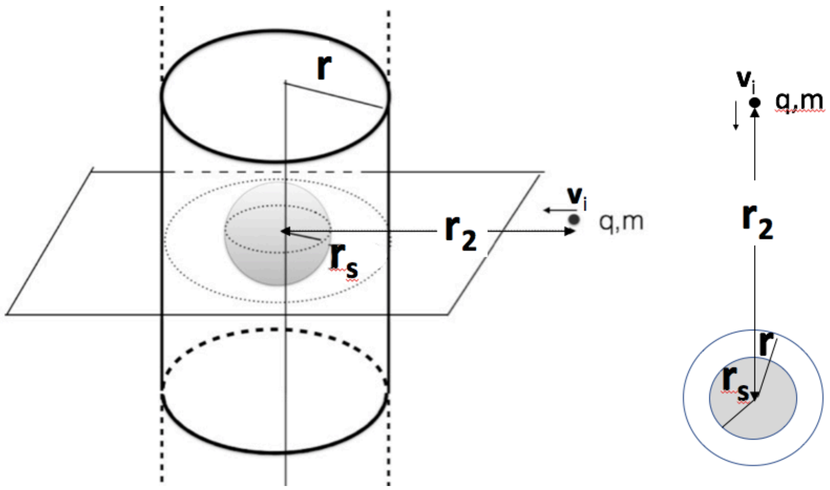
   ovvero $\omega^{'} = 0$, che vuol dire che il sistema si blocca.

3. Visto che il sistema si ferma, tutta l'energia cinetica iniziale sarà dissipata dalla forza esercitata dal sistema di connessione tra volano e scatola, ovvero (assumendo $I_S = 2\ kg \cdot m^2$)

   $$L_{int} = -(\frac{1}{2}I_S\omega_S^2 + \frac{1}{2}I_V\omega_V^2) = -147.9J$$

   Questa energia viene dissipata principalmente sotto forma di calore.

# Esercizio 2




Un cilindro infinito di raggio $r = 20\ cm$ e carico con densità uniforme di carica $\rho = 0.2\ C/m^3$, ha al suo interno una cavità sferica di raggio $r_s = r/2$, con il centro della cavità che giace sull'asse del cilindro.
Si consideri il piano che passa per il centro della cavità ortogonale all'asse del cilindro (vedi figura).

1. Si determini l'espressione del campo elettrico in funzione della distanza, $r'$, dall'asse del cilindro su tale piano, $\overrightarrow{E}(r')$:
   $\overrightarrow{E}(r') =$ ...................

2. Si calcoli modulo del campo elettrico nel punto $P$ a distanza $r_1 = 14\ cm$ dal centro della sfera, su tale piano $|\overrightarrow{E}(r_1)|$:
   $|\overrightarrow{E}(r_1)| =$ ...................

3. Una particella di massa $m = 1.5 \times 10^{-3}\ g$ e carica $q = 4\ mC$ viene lanciata su tale piano, da una distanza $r_2 = 6\ m$ verso il centro della sfera. Si calcoli il modulo della velocità, $v_i$, che deve avere la particella all'atto del lancio, per arrivare con velocità nulla sul bordo del cilindro:
   $v_i =$ ....................

# Soluzione Esercizio 2

1. Il cilindro con la cavità è equivalente al sistema composto da un cilindro pieno con densità di carica $\rho$ ed una sfera con densità di carica $\rho_s = -\rho$. Per il principio di sovrapposizione, in ogni punto il campo risultante è la somma del campo elettrico dovuto alla sfera ($\overrightarrow{E_s}$) e al cilindro pieno ($\overrightarrow{E_c}$). In particolare per un punto che giace sul piano che passa per il centro della sfera e ortogonale all'asse del cilindro, entrambi i campi hanno linee di campo dirette radialmente, con verso entrante per la sfera ed uscente per il cilindro.
   Il campo elettrico generato da una distribuzione di carica a simmetria cilindrica può essere calcolato con il teorema di Gauss. Per il cilindro, indicando con $r$ il raggio del cilindro, per $r' < r$, $E_c(r')2\pi r'h = \rho\pi r'^2 h/\epsilon_0$; $E(r') = \rho r'/2\epsilon_0$. Per $r' \geq r$: $E(r')2\pi r'h = \rho\pi r^2 h/\epsilon_0$; $E(r') = \rho r^2/2r'\epsilon_0$.
   In modo analogo, il campo per una distribuzione di carica a simmetria sferica di raggio $r_s$ può anch'esso essere calcolato usando il teorema di Gauss. Quindi per la cavità, per $r' < r_s$, quando il punto è interno alla cavità: $E_s(r')4\pi r'^2 = -\rho 4\pi r'^3/3\epsilon_0$; $E_s(r') = -\rho r'/3\epsilon_0$. Per $r' \geq r_s$, quando il punto è esterno alla cavità: $E_s(r')4\pi r'^2 = Q/\epsilon_0 = -\rho 4\pi r_s^3/3\epsilon_0$; $E_s(r') = -\rho r_s^3/3r'^2\epsilon_0$.
   Per cui poichè $\overrightarrow{E}(r') = \overrightarrow{E}_c(r') + \overrightarrow{E}_s(r')$, avremo:

   - per $0 < r' < r/2 = r_s$, il punto è interno sia al cilindro che alla sfera
     $\overrightarrow{E}(r') = \left(\frac{\rho r'}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r'}{3\epsilon_0}\right)\widehat{r'} = \frac{\rho r'}{6\epsilon_0}\widehat{r'}$;
   - per $r/2 = r_s < r' < r$, il punto è interno al cilindro e esterno alla sfera
     $\overrightarrow{E}(r') = \left(\frac{\rho r'}{2\epsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2}\right)\widehat{r'} = \left(\frac{\rho r'}{2\epsilon_0} - \frac{\rho(r/2)^3}{3r'^2\epsilon_0}\right)\widehat{r'} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left(r' - \frac{r^3}{12r'^2}\right)\widehat{r'}$;
   - per $r < r'$, il punto è esterno sia al cilindro che alla sfera
     $\overrightarrow{E}(r') = \left(\frac{\rho r^2}{2r'\epsilon_0} - \frac{\rho\left(\frac{r}{2}\right)^3}{3r'^2\epsilon_0}\right)\widehat{r'} = \frac{\rho}{2\epsilon_0 r'}\left(r^2 - \frac{r^3}{12r'}\right)\widehat{r'}$;

2. Per il punto P: $r/2 = r_s < r' = r_1 < r$, per cui $|\overrightarrow{E}(r')| = (\rho r'/2\epsilon_0 - \rho(r/2)^3/3r'^2\epsilon_0)$ che per $r' = r_1$ fornisce $|\overrightarrow{E}(r_1)| = 1.2 \times 10^9\ V/m$.

3. L'energia è conservata, pertanto $\frac{1}{2}mv_1^2 + qV(r_2) = qV(r)$, dalla quale:

   $$v_i = \sqrt{\frac{2q(V(r) - V(r_2))}{m}}$$

   Per calcolare $v_i$ dobbiamo determinare $V(r) - V(r_2)$. La differenza di potenziale tra i punti $r$ e $r_2$ è data da:

   $$V(r) - V(r_2) = \int_r^{r_2} \frac{\rho}{2\epsilon_0 r'}\left(r^2 - \frac{r^3}{12r'}\right)dr' = \frac{\rho r^2}{2\epsilon_0}\left(\ln\frac{r_2}{r} - \frac{r}{12}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\right) = 1.5 \times 10^9\ V$$

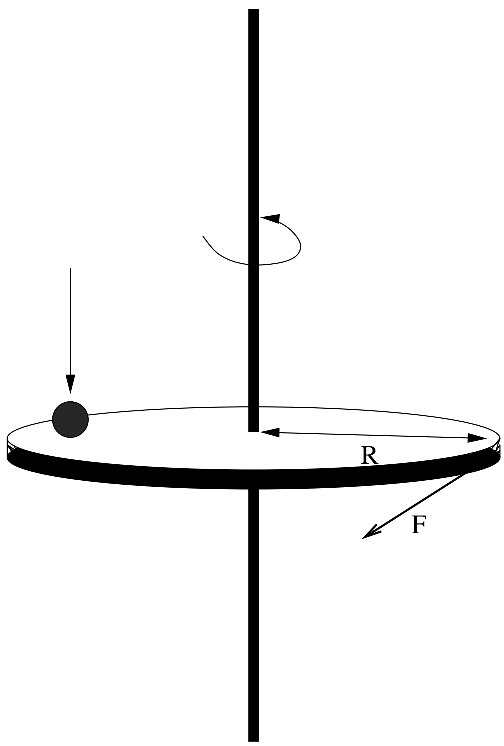
   Per cui la velocità risulta pari a $v_i = 2.83 \times 10^6\ m/s$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 30/09/2017**
**Cognome : .................................................. Nome : ..................................................**

**Matricola: .................................................. Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1




Un disco di legno (densità $\rho = 0.4\ g/cm^3$, raggio $R = 1\ m$ e spessore $d = 1\ cm$) ruota con velocità angolare $\omega_0 = 5\ rad/s$ intorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Il disco è vincolato a ruotare attorno a tale asse ed è mantenuto in posizione orizzontale. Ad un certo istante un massa (puntiforme) $m = 1\ kg$, cadendo dall'alto, si conficca ad una distanza $a = 10\ cm$ dal bordo del disco. Subito dopo viene attivato un freno per fermare il disco, equivalente ad una forza di modulo $F = 10\ N$ applicata al bordo del disco. Calcolare:

1. la velocità angolare del disco, $\omega_1$, dopo l'urto con la massa puntiforme
   $\omega_1 =$ ...................
2. quanto tempo, $t$, impiega il disco per fermarsi dopo l'attivazione del freno
   $t =$ ...................
3. quanti giri, $n$, compie il disco prima di fermarsi
   $n =$ ...................

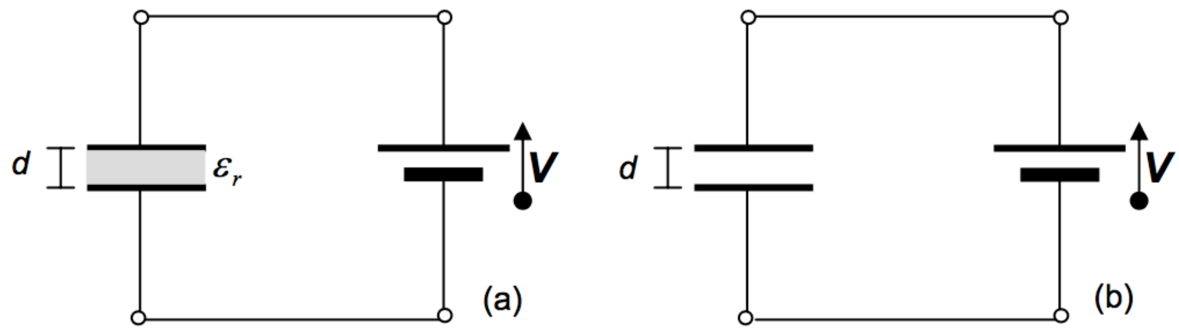
# Soluzione Esercizio 1

1. Il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse passante per il centro (che coincide con il centro di massa) è $I_0 = MR^2/2$ con $M = \pi R^2 d\rho$, ovvero $I_0 = \pi\rho d R^4/2 = 6.3\ kg\ m^2$. Dopo l'urto con la massa puntiforme il momento d'inerzia cambia, ed è pari a: $I_1 = I_0 + m(R-a)^2 = 7.1\ Kg\ m^2$. Poichè il momento delle forze esterne rispetto all'asse di rotazione del disco ha componente nulla lungo tale asse prima e dopo l'urto, la componente del momento angolare lungo tale asse del sistema (disco e massa puntiforme) è costante. Pertanto :
$$\omega_1 I_1 = \omega_0 I_0$$
Risolvendo l'equazione, $\omega_1 = 4.4\ rad/s$.

2. Dalla seconda equazione cardinale, si può scrivere per la forza frenante
$$-FR = I_1 \frac{d\omega}{dt}$$
da cui, integrando si ha che:
$$\omega(t) = \omega_1 - \frac{FR}{I_1} t$$
per cui, quando il disco si ferma si ha:
$$t = \frac{\omega_1 I_1}{FR} = 3.1\ s$$

3. Si può usare il teorema delle forze vive:
$$FR\Delta\theta = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$$
Ovvero il lavoro compiuto dalla forza frenante per fermare il disco è uguale all'energia cinetica iniziale, dove $\Delta\theta$ indica l'angolo complessivo di cui è ruotato il disco fino all'arresto. Per cui il numero di giri $n$ è dato da:
$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1}{4} \frac{I_1 \omega_1^2}{\pi F R} = 1.1\ giri$$

## Esercizio 2




Si consideri il circuito in figura (a). Le due armature del condensatore a facce piane e parallele hanno una superficie $S = 0.01\ m^2$ e sono separate da una distanza $d = 1\ mm$. Tra le due armature è presente un dielettrico con costante dielettrica $\epsilon_r = 3$. Ai capi del condensatore è posto un generatore di forza elettromotrice che genera una differenza di potenziale costante $V = 10\ V$. A un certo istante il dielettrico viene estratto dal condensatore, come mostrato in figura (b). Calcolare:

1. la quantità di carica, $\Delta q$, transitata attraverso il generatore di forza elettromotrice passando dalla prima configurazione, figura (a), alla seconda, figura (b)
   $\Delta q =$ ..................

2. il lavoro svolto dal generatore, $L_{gen}$, nel passaggio dalla prima configurazione alla seconda , discutendone il segno
   $L_{gen} =$ ..................

3. il lavoro esterno necessario per estrarre il dielettrico dal condensatore, $L_{est}$
   $L_{est} =$ ..................

## Soluzione Esercizio 2

1. Il generatore di forza elettromotrice mantiene la differenza di potenziale costante ai capi del condensatore.
   La carica iniziale è data dalla relazione:
   $$q = CV = \left(\frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d}\right) V$$
   Mentre per la carica finale, $q'$, quando dal condensatore è stato rimosso il dielettrico:
   $$q' = C'V = \left(\frac{\epsilon_0 S}{d}\right) V$$
   La carica transitata attraverso il generatore pertanto vale:
   $$\Delta q = q' - q = -\frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) SV}{d} = -1.77 \times 10^{-9}\ C$$

2. Il lavoro svolto dal generatore, $L_{gen}$, quando la carica ai capi del condensatore varia da q a q' a tensione costante, vale:
   $$L_{gen} = V\Delta q = -\frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) S}{d} V^2 = -1.77 \times 10^{-8}\ J$$
   ed è negativo (la carica sul condensatore diminuisce). Questo significa che il generatore assorbe energia dal circuito (se fosse una pila ricaricabile, si caricherebbe).

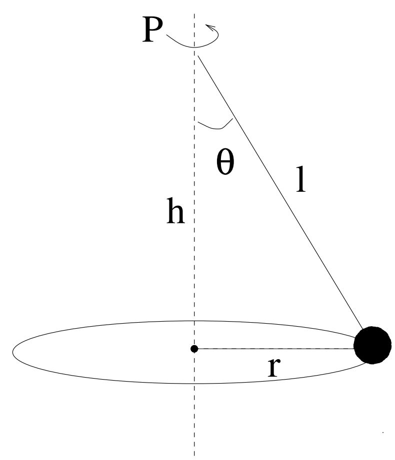
3. Il lavoro esterno, $L_{est}$, necessario per estrarre il dielettrico è fornito dal bilancio dell'energia: $U + Lgen + Lest = U'$, dove l'energia immagazzinata nel condensatore prima dell'estrazione del dielettrico ($U$) e dopo ($U'$) sono date dalle relazioni:
   $$U = \frac{1}{2} CV^2 \qquad U' = \frac{1}{2} C'V^2$$
   Pertanto
   $$L_{est} = \frac{1}{2}(C' - C)V^2 - L_{gen} = -\frac{1}{2}(\epsilon_r - 1)\frac{\epsilon_0 S}{d} V^2 + \epsilon_0 \frac{(\epsilon_r - 1) S}{d} V^2 = \frac{1}{2}(\epsilon_r - 1)\frac{\epsilon_0 S}{d} V^2 = 8.85 \times 10^{-9}\ J$$
   il lavoro esterno è positivo.

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 12/01/2018**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : .....................................**

# Esercizio 1




Una massa $m = 1\ kg$, attaccata ad un filo inestensibile e senza massa di lunghezza $l_0$, ruota attorno all'asse verticale inizialmente con velocità angolare $\omega_0$, descrivendo un cono di angolo $\theta_0$, come in figura. Da un certo istante in poi la lunghezza del filo viene lentamente aumentata in modo che comunque la massa descriva sempre un traiettoria circolare (seppure di raggio differente). Sapendo che all'inizio $l_0 = 2\ m$ e $\theta_0 = \pi/3$, si calcoli:

1. Il valore della tensione del filo e la velocità angolare iniziale:
   $T_0 =$ ..............
   $\omega_0 =$ ..............

2. Il valore della velocità angolare quando il raggio (ovvero la distanza dall'asse) diventa il doppio del raggio iniziale:
   $\omega_{2r_0} =$ ..............

3. La lunghezza del filo quando il raggio diventa il doppio del raggio iniziale:
   $l_{2r_0} =$ ...................

# 1 Soluzione Esercizio 1

1. Per trovare $\omega_0$ basta considerare la forza radiale applicata al corpo $m$, ovvero la componente del tensione lungo il raggio ed uguagliarla alla forza centripeta ($m{\omega_0}^2 r_0$). La componente radiale della tensione vale $Tsen(\theta_0)$ e, visto che non c'è movimento lungo la direzione verticale, la componente verticale deve essere uguale ed opposta al peso del corpo $m$, ovvero $Tcos(\theta_0) = mg$, da cui $T = mg/cos(\theta_0) = 19.6N$.

   La condizione di moto circolare uniforme:

$$mgtan(\theta_0) = m\omega_0^2 r_0$$

   oppure, considerando che $r_0 = l_0 sen(\theta_0)$ si ha che:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0 cos\theta_0}} = \sqrt{\frac{g}{h_0}} = 3.13\ rad/s$$

2. Le forze che agiscono sulla massa m sono la gravità e la tensione del filo. Scegliendo P come polo, la tensione ha momento nullo; la gravità essendo parallela all'asse di rotazione non ha componente del momento lungo l'asse verticale. Si conserva, quindi, il momento angolare assiale $L_z = m\omega_0 r_0^2$, dove $r_0 = l_0 sen(\theta_0)$. Quando il raggio diventa il doppio del raggio iniziale, la conservazione del momento angolare implica :

$$m\omega_0 r_0^2 = m\omega_{2r_0}(2r_0)^2$$

   ovvero $\omega_{2r_0} = \omega_0/4 = 0.78\ rad/s$ .

3. A causa della conservazione del momento angolare:

$$L_z = mr_0^2\omega_0 = mr_0^2\sqrt{\frac{g}{h_0}} = const.$$

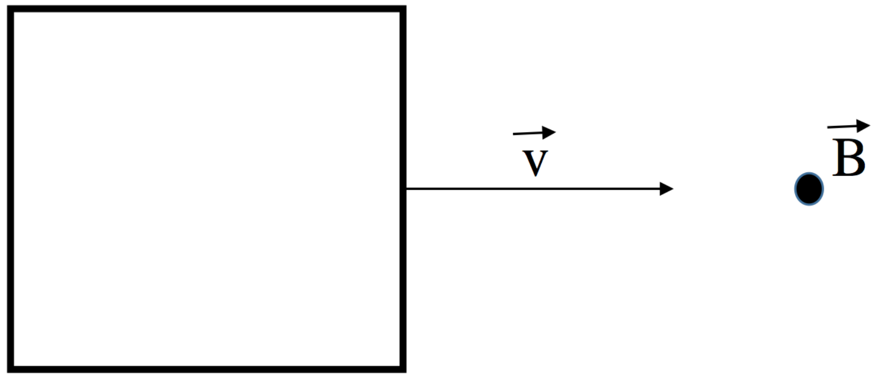
   la quantità $r^2/\sqrt{h}$ rimane costante al variare di $l$. Da questo possiamo ricavare una relazione tra r e h quando il raggio raddoppia a causa dell'allungamento del filo, ovvero:

$$\frac{r_0^2}{\sqrt{h_0}} = \frac{(2r_0)^2}{\sqrt{h_{2r_0}}}$$

   da cui $h_{2r_0} = 16h_0$. Da questo si ricava che $l$ deve essere (essendo $h_0 = l_0 cos(\pi/3)$ e $r_0 = l_0 sen(\pi/3)$):

$$l_{2r_0} = \sqrt{(2r_0)^2 + (16h_0)^2} = \sqrt{4l_0^2 * 3/4 + 256 * l_0^2 * 1/4} = \sqrt{67l_0^2} = 16.4m$$

## Esercizio 2



Una spira quadrata conduttrice con resistenza $R = 4\ \Omega$ e lato $l = 0.5$ m viene mantenuta in moto rettilineo uniforme con velocità $v = 6$ m/s, diretta lungo l'asse $x$, complanare al piano della spira. Nella stessa regione spaziale è presente un campo magnetico orientato ortogonalmente al piano della spira, che varia secondo la legge $B(x) = B_0(x/L)$ con $L = 4$ m e $B_0 = 2$ T. Supponendo che all'istante iniziale il centro della spira si trovi in $x = 0$
Si calcoli:

1. la corrente $I$ circolante nella spira e la potenza P dissipata per effetto Joule ad un generico istante
   $I =$ ......................      $P =$ ....................
2. il modulo della forza agente sulla spira, F, necessaria a mantenere il moto uniforme, specificandone direzione e verso
   $F =$ ....................
3. la potenza associata al lavoro compiuto dalla forza di cui al punto precedente, $P'$, commentando il risultato ottenuto
   $P' =$ ....................

## Soluzione Esercizio 2

1. Poiché il moto della spira è uniforme, il suo centro al tempo $t$ si trova in $x(t) = vt$. Il flusso di $\vec{B}$ attraverso la spira ad un generico istante vale

$$\Phi(B) = \int_{x-l/2}^{x+l/2} B_0 \frac{x'}{L} l dx' = B_0 \frac{xl^2}{L}.$$

La f.e.m. indotta risulta quindi pari a:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi(B)}{\partial t} = -B_0 \frac{l^2}{L}\frac{dx}{dt} = -B_0 \frac{l^2}{L} v.$$

1.1 Pertanto la corrente circolante nella spira è data da

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{B_0 v l^2}{RL} = 0.1875 \text{ A}$$

ed il suo verso è orario.

1.2 La potenza dissipata per effetto Joule vale

$$P = RI^2 = \frac{B_0^2 v^2 l^4}{RL^2} = 0.14 \text{ W}$$

2. La forza totale agente sulla spira, dovuta alla presenza del campo magnetico si ottiene sommando i contributi associati ai quattro lati del quadrato. Considerando che quelli dovuti ai lati paralleli alla velocità si elidono reciprocamente, ne segue che la forza ha direzione opposta a quella del moto; la sua intensità è data da

$$F = Il[B(x + l/2) - B(x - l/2)] = \frac{B_0 v}{R}\frac{l^3}{L} B_0 \frac{l}{L} = \frac{v}{R}\left(\frac{B_0 l^2}{L}\right)^2 = 2.3\ 10^{-2} \text{ N}$$

Pertanto per mantenere il moto uniforme è necessario applicare una forza della stessa intensità, ma diretta nella direzione del moto.

3. La potenza meccanica associata al lavoro (positivo) compiuto dalla forza esterna applicata sulla spira per mantenerla in moto uniforme è

$$P' = Fv = \frac{v^2}{R}\left(B_0 \frac{l^2}{L}\right)^2 = 0.14 \text{ W}$$

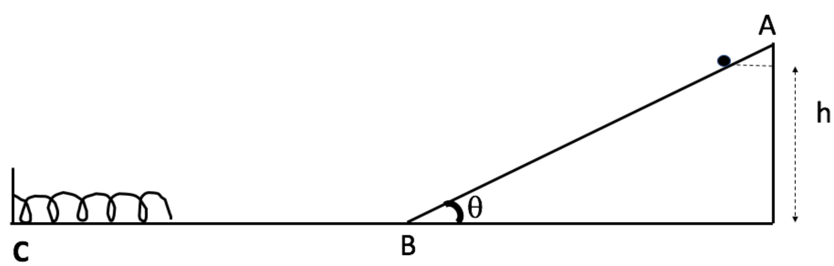
Come è ragionevole aspettarsi $P' = P$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 2/02/2018**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1




Con riferimento alla figura, un punto materiale di massa $m = 0.2\ kg$ è posto su di un piano inclinato scabro di coefficiente d' attrito dinamico $\mu_d$ che forma con il piano orizzontale un angolo $\theta = 30^0$. Il punto materiale, partendo da fermo da una altezza $h = 0.8\ m$ rispetto al piano orizzontale, scende lungo il piano inclinato che si raccorda con un piano orizzontale liscio. Alla fine del piano orizzontale, il punto materiale si attacca ad una molla posta inizialmente nella sua posizione di riposo ed inizia un moto di oscillazione. Il moto di oscillazione avviene sul piano orizzontale che è privo di attrito. La molla ha massa nulla. Durante il moto di oscillazione la molla viene compressa di una lunghezza massima pari a $x_{max} = 0.2\ m$ e il periodo di oscillazione del sistema è T=1 s.
Si calcoli:

1. la costante elastica K della molla
   $K =$ ....................

2. l'accelerazione massima $a_{max}$ e la velocità massima $v_{max}$ del moto di oscillazione
   $a_{max} =$ ....................  $v_{max} =$ ....................

3. il coefficiente di attrito dinamico $\mu_d$ esistente tra punto materiale e piano inclinato
   $\mu_d =$ ....................

## Soluzione Esercizio 1

1. Ricordiamo che $\frac{K}{m} = \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ per cui

$$K = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = 7.9\ N/m$$

2. L'accelerazione massima si ha nel punto di massima ampiezza, che corrisponde alla forza massima $ma_{max} = Kx_{max}$ per cui:

$$a_{max} = \frac{Kx_{max}}{m} = 7.9\ \frac{m}{s^2}$$

La massima velocità si ha quando l'energia cinetica è massima, cioè quando l'energia potenziale della molla è nulla, quindi quando l'elongazione della molla è nulla, essa è inoltre minima (nulla) per l'elongazione massima della molla. Per la conservazione dell'energia vale $\frac{1}{2}Kx_{max}^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2$, dalla quale:

$$v_{max} = x_{max}\sqrt[2]{\frac{K}{m}} = \omega x_{max} = 1.26\ m/s$$

3. La somma del lavoro compiuto dalla forza di gravità e del lavoro compiuto dalla forza di attrito nel tratto AB è data da:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh - \mu_d mg cos\theta \frac{h}{sin\theta}$$

Inoltre quando la molla raggiunge la massima compressione tutta l'energia cinetica del punto materiale è stata convertita in energia potenziale del sistema molla più punto materiale per cui:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}Kx_{max}^2$$

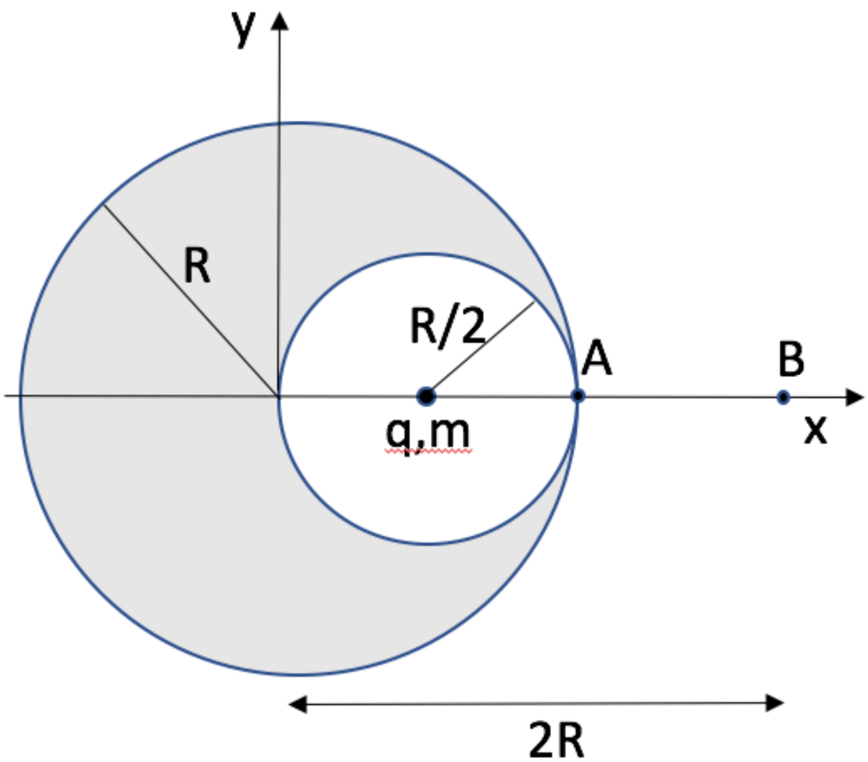
Sfruttando le ultime due equazioni e ricordando che $v_A$ è nulla:

$$\frac{1}{2}Kx_{max}^2 - mgh = -\mu_d mg cos\theta \frac{h}{sin\theta} = -\mu_d \frac{mgh}{tg\theta}$$

dalla quale

$$\mu_d = tg\theta \left(1 - \frac{Kx_{max}^2}{2mgh}\right) = 0.52$$

## Esercizio 2




Una sfera di raggio $R$ ha una distribuzione di carica $\rho_0$ uniforme. In essa viene praticato un foro sferico di raggio $R/2$. Assumendo un sistema di assi cartesiani in cui il centro della sfera ha coordinate $(0,0,0)$, Il centro del foro ha coordinate $(R/2,0,0)$. Nel centro del foro viene poi posta una carica puntiforme di carica $q$ e massa $m$.

Con riferimento alla figura, e sapendo che $\rho_0 = 1\ \mu C/m^3,\ R = 1\ m,\ q = 1\ \mu C$, e $m = 10^{-6}\ kg$:

1. determinare l'espressione del campo elettrico dovuto alla distribuzione di carica della sfera cava$\left(\overrightarrow{E}\right)$ e il suo modulo $\left(|\overrightarrow{E}|\right)$ all'interno del foro
   $\overrightarrow{E} =$ ................... $|\overrightarrow{E}| =$ ...................
2. calcolare il tempo $t$ che impiega la carica $q$ a raggiungere il punto $A$ di coordinate $(R,0,0)$ sotto l'azione del campo elettrico generato dalla sfera cava
   $t =$ ...................
3. calcolare il modulo della velocità $(v)$ della carica puntiforme $q$ nel punto $B$ di coordinate (2R,0,0)
   $v =$ ...................

## Soluzione Esercizio 2

1. La sfera con il foro è equivalente al sistema composto da una sfera piena di raggio $R$ con densità di carica $\rho_0$ e una sfera di raggio $R/2$ con densità di carica $\rho_s = -\rho_0$. Per il principio di sovrapposizione, in ogni punto il campo risultante è la somma del campo elettrico dovuto alla cavità ($\overrightarrow{E_c}$) con centro in (R/2,0,0) e alla sfera piena ($\overrightarrow{E_s}$) con centro in (0,0,0). Il campo per una distribuzione di carica a simmetria sferica di di densità $\rho$ e raggio $R$, può essere determinato utilizzando il il teorema di Gauss. Per $r < R$, quando il punto è interno alla generica sfera : $E(r)4\pi r^2 = \rho 4\pi r^3/3\epsilon_0$; $E(r) = \rho r/3\epsilon_0$. Per $r \geq R$, quando il punto è esterno alla sfera: $E(r)4\pi r^2 = Q/\epsilon_0 = \rho 4\pi R^3/3\epsilon_0$; $E(r) = \rho R^3/3r^2\epsilon_0$. In entrambe le situazioni le linee di campo sono dirette radialmente con verso entrante se la densità di carica è negativa e verso uscente se la densità di carica è positiva.
   Nel nostro caso per un generico punto:
   $$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_c} + \overrightarrow{E_s}$$
   Per un punto all'interno del foro il punto è interno sia alla sfera piena sia alla sfera associata alla cavità. Indicando con $\overrightarrow{r}$ il vettore posizione rispetto all'origine del sistema di riferimento cartesiano del testo dell'esercizio (che coincide con il centro della sfera) avremo per la sfera piena, $E_s(r)4\pi r^2 = \rho 4\pi r^3/3\epsilon_0$; per cui:
   $$\overrightarrow{E}_s(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\widehat{r}$$
   Per la cavità indicando con $\overrightarrow{r'}$ il vettore posizione rispetto al centro della cavità avremo, con riferimento alla figura:
   $$\overrightarrow{E}_c(r') = -\frac{\rho r'}{3\epsilon_0}\widehat{r'}$$
   con $r'\widehat{r'} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{d}$, dove $\overrightarrow{d}$ è il vettore che punta dall'origine degli assi cartesiani al centro della cavità. Per cui il campo elettrico all'interno del foro è dato da:
   $$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_c} + \overrightarrow{E_s} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\overrightarrow{r} - \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{d}\right) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\overrightarrow{d} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{R}{2}\widehat{x}$$
   mentre il modulo del campo elettrico è dato da:
   $$|\overrightarrow{E}| = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{R}{2} = 1.9 \times 10^4\ V/m$$

2. Essendo il campo elettrico uniforme nel foro, la particella si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione $a$ diretta lungo x, in modulo pari ad:
   $$a = qE/m = \frac{q}{m}\frac{\rho R}{6\epsilon_0}$$
   Essendo la velocità iniziale nulla e il moto uniformemente accelerato lungo x, lo spazio percorso per arrivare in $A$ è pari a R/2 e $R/2 = \frac{1}{2}at^2$ Pertanto il tempo che impiega ad arrivare in $A$ è dato da:
   $$t = \sqrt[2]{\frac{R}{a}} = \sqrt[2]{\frac{6\epsilon_0 m}{\rho q}} = 7,3\ ms$$

3. Dal teorema del lavoro, essendo la velocità iniziale della particella nulla:
   $$L = q\left(V(R/2) - V(2R)\right) = \frac{1}{2}mv^2(2R)$$
   da questa relazione si può calcolare la velocità $v(2R)$. Essendo:
   $$V(R/2) - V(2R) = \int_{R/2}^{R} E dx + \int_{R}^{2R} E_{ext}(x)dx$$
   dove il campo nel foro, E, è quello calcolato nella domanda precedente. All' esterno del foro, per $x > R$, la distribuzione complessiva di carica si comporta come una coppia di cariche, $q_1$ in x = 0 e $q_2$ in $x = R/2$, con:
   $$q_1 = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 = 4.2 \times 10^{-6}\ C \quad e \quad q_2 = -\rho\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 = -5.2 \times 10^{-7}\ C$$

Per cui la differenza di potenziale richiesta è data da:

$$V(R/2) - V(2R) = E\frac{R}{2} + \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R - \frac{R}{2}} - \frac{1}{2R - \frac{R}{2}}\right) = 22\ kV$$

Pertanto , la velocità finale è data da:

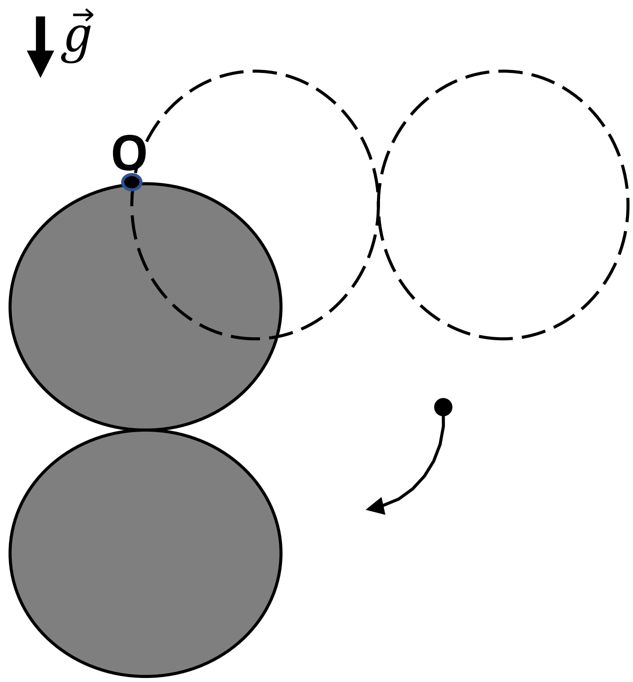
$$v(2R) = \sqrt[2]{\frac{2q}{m}\left(V(R/2) - V(2R)\right)} = 210\ m/s$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 20/02/2018**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : ......................................**

# Esercizio 1




Due dischi (vedi figura) sono uniti sul bordo e costituiscono un sistema rigido che sospeso all'estremo $O$ può ruotare attorno ad $O$ senza attrito. La rotazione avviene nel piano della figura. I due dischi hanno stessa massa $m$, ($m = 700\ g$) e raggio $R$. Il periodo delle piccole oscillazioni del sistema attorno al punto $O$ vale $T = 1.3\ s$.

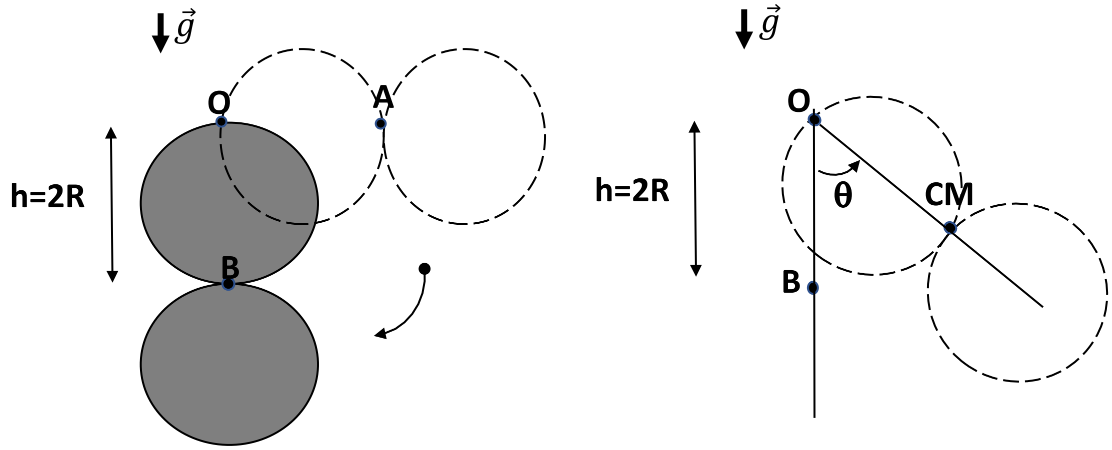
1. Esprimere il momento di inerzia totale del sistema dei due dischi, $I$, rispetto ad $O$ in funzione del raggio $R$ dei dischi
   $I =$ ......................

2. Calcolare il raggio dei dischi
   $R =$ ....................

3. Il sistema viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla dalla posizione in cui il punto di contatto tra i due dischi è allineato orizzontalmente con il punto $O$ (vedi figura). Determinare la velocità angolare, $\omega$, e il modulo della reazione del perno, $|\vec{R}_p|$, nella posizione del sistema in cui la velocità del centro di massa è massima:
   $\omega =$ ....................    $|\vec{R}_p| =$ ....................

Si assuma $g = 9.8\ m/s^2$.

## Soluzione Esercizio 1




1. Il sistema costituisce un pendolo fisico con il centro di massa ($CM$) nel punto di contatto tra i dischi. Il momento di inerzia del disco 1 rispetto ad O (usando il teorema di Huygens-Steiner) è dato da:

$$I_1 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

mentre per il disco 2:

$$I_2 = \frac{1}{2}mR^2 + m\,(3R)^2 = \frac{19}{2}mR^2$$

Per cui il momento di inerzia totale espresso in funzione di R è dato da:

$$I = I_1 + I_2 = 11mR^2$$

2. Il periodo delle piccole oscillazioni del sistema puó essere ricavato utilizzando la conservazione dell'energia. Infatti :

$$costante = \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgh(1 - cos(\theta))$$

dove il primo termine dopo il segno di uguaglianza indica l'energia cinetica dovuta alla rotazione del corpo rigido e il secondo termine l'energia potenziale del CM. M=2m è la massa del corpo rigido, h=2R indica la distanza dal centro di massa da O e $\theta$ indica l'angolo formato dalla congiungente O e la posizione del $CM$ in un istante arbitrario, con la congiungente O e il CM nella posizione in cui l'energia potenziale è minima, punto B. Derivando rispetto al tempo entrambi i membri otteniamo:

$$0 = \frac{1}{2}2I\omega\dot{\omega} + Mghsin(\theta)\dot{\theta} = I\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mghsin(\theta)\dot{\theta}$$

dividendo per $I\dot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgh}{I}sin(\theta) = 0$$

che per piccole oscillazioni ( $sin(\theta) \approx \theta$) fornisce:

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgh}{I}\theta = 0$$

L'equazione ottenuta per le piccole oscillazioni è quella di un moto armonico che ha pulsazione

$$\Omega = \sqrt{\frac{Mgh}{I}}$$

In alternativa alla conservazione dell'energia, si può utilizzare la seconda equazione cardinale. Utilizzando come polo il centro O, sul sistema agisce un momento delle forze $\vec{M}$ che tende a riportare il CM in B. Tale momento ha componente non nulla lungo l'asse ortogonale al piano ($M_z$):

$$M_z = I\alpha = -hMgsin(\theta)$$

Dalla quale:

$$I\ddot{\theta} + Mghsin(\theta) = 0$$

che per piccole oscillazioni ( $sin(\theta) \approx \theta$), fornisce lo stesso risultato per $\Omega$. Di conseguenza, il periodo delle piccole oscillazioni è dato da:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{2mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{11mR^2}{2mg2R}} = 2\pi\sqrt{\frac{11R}{4g}}$$

L'unica incognita nell'equazione del periodo T è il raggio R di entrambi i dischi, per cui R è dato da:

$$R = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{4g}{11} = 0.15\ m$$

3. Sapendo che il sistema viene lasciato cadere con velocità iniziale del CM nulla dalla posizione orizzontale (cioè dal punto A), la sua energia iniziale è solo potenziale e pari a Mgh, mentre la velocità angolare nella posizione in cui la velocità del CM è massima, si ha per $\theta = 0$, quando l'energia potenziale si annulla. Dalla conservazione dell'energia:

$$Mgh = 2mg2R = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{11}{2}mR^2\omega^2$$

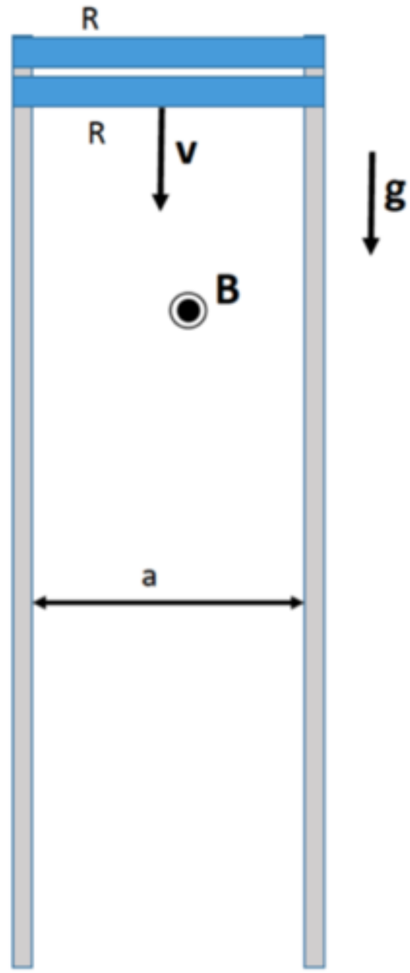
$$8g = 11R\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{8}{11}\frac{g}{R}} = 6.9\ \frac{rad}{s}$$

con $\omega$ pari alla massima velocità angolare di rotazione attorno al centro $O$ del sistema, quando il centro di massa occupa la posizione B (vedi figura) e il centro di massa ha la massima velocità $v = \omega 2R$. Possiamo usare la componente verticale della prima equazione cardinale per determinare il modulo della reazione del perno. Quando il CM ha la massima velocità $\theta = 0$: $R_P - Mg = M\omega^2(2R)$. per cui

$$R_P = Mg + M\omega^2(2R) = 33.7\ N$$

## Esercizio 2




Il circuito di figura si trova nel piano verticale in presenza del campo gravitazionale (si assuma $g = 9.8\ m/s^2$) e di un campo magnetico $\overrightarrow{B}$ costante, diretto orizzontalmente nella direzione uscente dal foglio e di intesità pari a 2 T. Le guide verticali presentano una resistenza trascurabile, mentre le sbarre orizzontali hanno entrambe lunghezza $a = 0.5$ m, resistenza $R = 20\ \Omega$ e massa $M = 20$ g. Si assuma che la barra superiore sia fissata mentre quella inferiore è libera di muoversi senza attrito lungo la direzione verticale. Al tempo $t = 0$ la sbarra inferiore inizia con velocitá nulla un moto di caduta sotto l'azione del campo gravitazionale.

1. Si scriva l'equazione del moto per la sbarra in caduta e si scriva la forma funzionale per $v(t)$, mostrando che esiste un limite asintotico $v_a$ della velocitá per $t \to \infty$ e se ne calcoli tale valore numerico:

   $v(t) =$ ..........................................   $v_a =$ ..........................................

2. Si calcoli nel limite di $t \to \infty$ la potenza dissipata per effetto Joule $P_J$ :

   $P_J =$ ..........................................

3. Sempre nel limite di $t \to \infty$, si calcoli il lavoro meccanico per unità di tempo compiuto dal campo gravitazionale $P_g$. Confrontate questo risultato con quello del punto 2 e commentate i due risultati.

   $P_g =$ ..........................................

## Soluzione Esercizio 2

1. Si orienti l'asse $z$ verticalmente verso il basso con l'origine in corrispondenza della posizione iniziale della sbarra mobile. Si ha dunque $z(t=0)=0$ e $\frac{dz}{dt}(t=0)=0$. A causa del moto della sbarretta, il flusso di campo magnetico attraverso il circuito costituito dalle due sbarre e dai binari verticali cambia nel tempo. Viene quindi indotta una f.e.m. $\mathcal{E}$ che produce una corrente $I$ il cui verso di circolazione per la legge di Lenz è orario. Utilizzando la legge di Ohm e considerando che la resistenza del circuito è pari a $2R$ si ha:
$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{2R} = \frac{1}{2R}\frac{d\phi(\mathbf{B})}{dt} = \frac{Ba}{2R}\frac{dz}{dt} = \frac{Bav(t)}{2R}. \tag{1}$$
La corrente circolante nella sbarra produce una forza magnetica agente sulla sbarra con direzione verso l'alto (tenuto conto del verso orario di I) e di modulo $BIa$. L'equazione del moto per la sbarra è quindi:
$$m\frac{dv}{dt} = mg - BIa = mg - \frac{B^2a^2v(t)}{2R}. \tag{2}$$
che descrive un moto di caduta frenato da una forza di attrito proporzionale alla velocitá.
La soluzione corrispondente alle condizioni iniziali assegnate è data da:
$$v(t) = \tau g\big(1 - e^{-t/\tau}\big) \tag{3}$$
dove $\tau = \frac{2mR}{B^2a^2} = 0.8$ s. Il valore asintotico per la velocitá $v_a$, raggiunto per $t >> \tau$ è dunque pari a:
$$v_a = \tau g = 7.8\ m/s$$
La velocità limite può anche essere determinata imponendo che per t non nullo, la forza agente sulla sbarra è nulla:
$$0 = mg - BIa = mg - \frac{B^2a^2v_a}{2R}$$

2. Quando $v(t) \simeq v_a$, il corrispondente valore della corrente è $I_a = \frac{mg}{Ba} = 0.2$ A e la potenza dissipata per effetto Joule $P_J$ vale:
$$P_J = 2RI_a^2 = \frac{2Rm^2g^2}{B^2a^2} = mg^2\tau = 1.6\ W \tag{4}$$

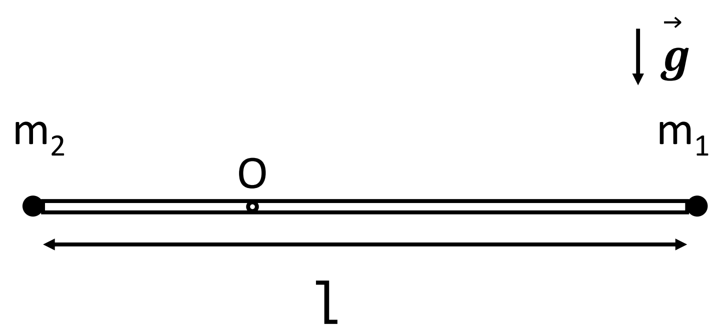
3. Il lavoro (positivo) per unitá di tempo $P_g$ svolto dal campo gravitazionale è dato da:
$$P_g = mgv_a = mg\tau g = P_J \tag{5}$$
La potenza dissipata per effetto Joule è dunque uguale a quella associata al lavoro del campo gravitazionale.

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 8/06/2018**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : ....................................**

# Esercizio 1




Un'asta rigida di massa trascurabile e di lunghezza l, ai cui estremi sono fissate due masse puntiformi $m_1$ e $m_2$, è libera di ruotare in un piano verticale intorno a un asse orizzontale fisso passante per il punto $O$ che dista $d$ dal centro dell'asta.
Il sistema è posto inizialmente in posizione orizzontale (vedi figura) e lasciato cadere con velocità iniziale nulla.

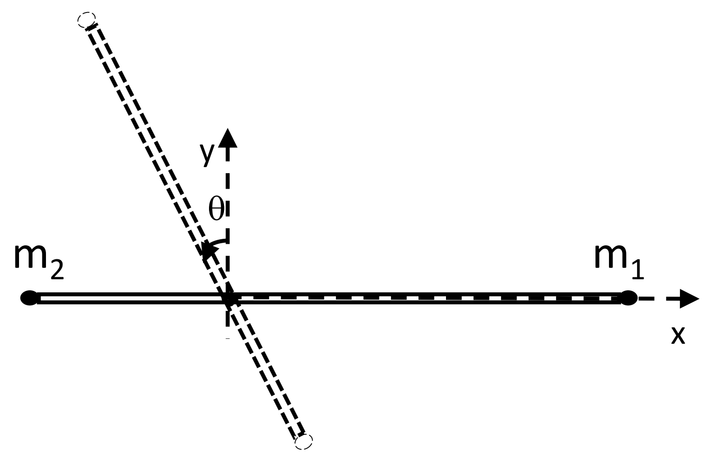
1. Calcolare il momento delle forze, $\vec{\tau}$ agente sul sistema rispetto al polo $O$, e il verso di rotazione (orario o antiorario) del sistema quando esso viene lasciato cadere motivando la risposta
   $\vec{\tau}$ = ............... *verso di rotazione* = ...............

2. Con le stesse condizioni iniziali, calcolare la velocità angolare della sbarra, $\omega$, quando questa raggiunge la posizione verticale
   $\omega$ = ...............

3. Calcolare il periodo delle oscillazioni $T$ attorno alla posizione verticale, assumendo piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio
   $T$ = ...............

[$m_1 = 400\ g$, $m_2 = 700\ g$, $l = 1.5\ m$, $d = 20\ cm$]

## Soluzione Esercizio 1




Assumiamo un sistema di assi cartesiani come quello indicato in figura con origine in O e con asse z ortogonale al piano x,y e uscente dal foglio.

1. Il momento delle forze, nella posizione orizzontale, quando il sistema viene lasciato cadere è dato da $\overrightarrow{\tau} = (m_2 g l_2 - m_1 g l_1)\hat{z}$ , con $l_1 = l/2 + d = 0.95\ m$, $l_2 = l/2 - d = 0.55\ m$, e fa ruotare il sistema in verso antiorario essendo $m_2 g l_2 - m_1 g l_1 = 0.049\ N \cdot m$ positivo.

2. Per determinare la velocità angolare della sbarretta, osserviamo che poichè la sbarretta ruota in senso antiorario la prima volta che raggiunge la posizione verticale $m_1$ è in alto e $m_2$ è in basso. Inoltre poichè non ci sono forze dissipative in gioco, l'energia totale meccanica del sistema, $E$, è conservata e assumendo l'origine sul perno possiamo scrivere:

$$E_i = K_i + U_i = 0 = E_f = K_f + T_f = \frac{1}{2} I\omega^2 + m_1 g l_1 - m_2 g l_2$$

   dove $I$ è il momento di inerzia del sistema rispetto al polo O, $I = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2$. Pertanto $I = 0.57\ kg \cdot m^2$. Pertanto la velocità angolare è data da :

$$\omega = \sqrt{\frac{2g\,(m_2 l_2 - m_1 l_1)}{I}} = 0.41\ rad/s$$

3. Per determinare il periodo delle oscillazioni attorno alla posizione verticale, calcoliamo il momento delle forze agente rispetto al polo O quando la sbarretta forma un angolo $\theta$ con l'asse delle y (notare che $\theta = -90^0$ quando la sbarra è nella posizione orizzontale).

$$I\alpha = -\,(m_2 g l_2 - m_1 g l_1)\sin(\theta)$$

   Per piccole oscillazioni, $\sin(\theta) \simeq \theta$ , possiamo scrivere:

$$I\alpha = I\ddot{\theta} = -\,(m_2 g l_2 - m_1 g l_1)\theta$$

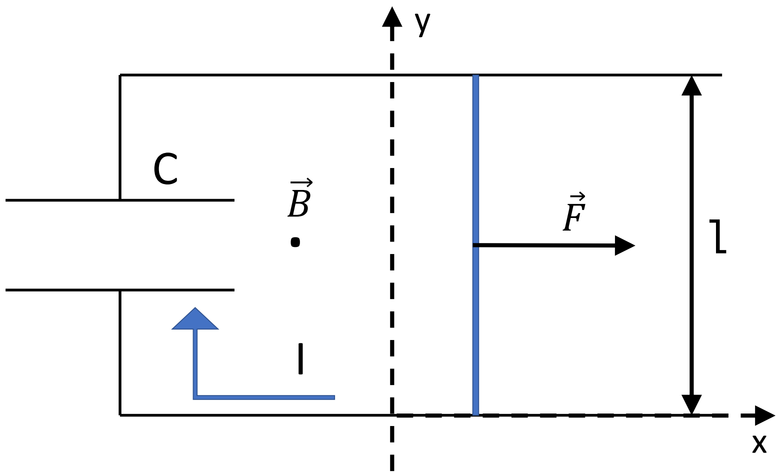
   dalla quale

$$\ddot{\theta} = -\Omega^2 \theta$$

   con $\Omega = \sqrt{\frac{(m_2 g l_2 - m_1 g l_1)}{I}} = 0.29\ rad/s$ per cui il periodo $T$ è dato da:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 21.5\ s = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{(m_2 g l_2 - m_1 g l_1)}}$$

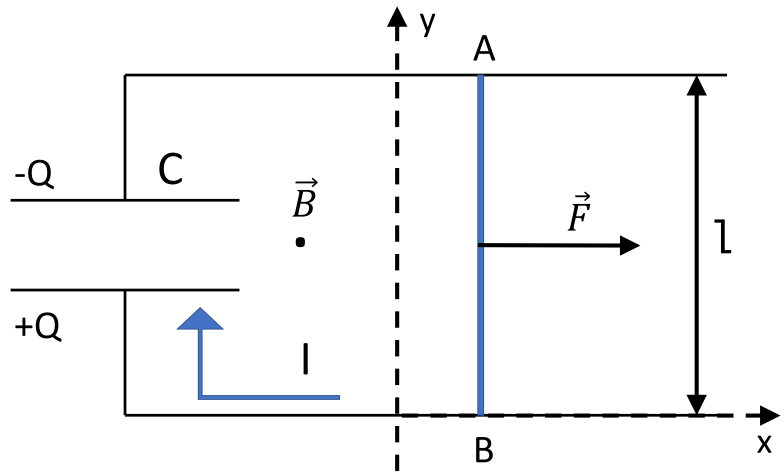
## Esercizio 2




Il circuito illustrato in figura è costituito da due conduttori paralleli che giacciono su un piano orizzontale, distanti $l = 50\ cm$, che formano due binari sui quali può scorrere senz'attrito una sbarretta anch'essa conduttrice di massa $m = 40\ g$ e da un condensatore di capacità $C = 500\ \mu F$. La resistenza di tutti i conduttori in gioco è trascurabile e il circuito è immerso in una zona di campo magnetico uniforme B= 1 T ortogonale al piano orizzontale.
Al tempo t=0 viene applicata una forza meccanica costante $F = 10^{-2}\ N$ parallela all'asse $x$ che mette in moto la sbarretta.

1. Determinare l'espressione della corrente $I$ indotta che carica il condensatore in funzione dell'accelerazione, $a$ della sbarretta. Assumere che la fem indotta si stabilisce instantaneamente ai capi della sbarretta.
   $I(a) =$ ....................
2. Determinare la forza totale agente sulla sbarretta $\vec{F}_s$ e descrivere e motivare il tipo di moto della sbarretta ( moto uniformente accelerato, moto vario, moto uniforme, ecc...)
   $\vec{F}_s =$ ....................
3. Calcolare la carica del condensatore al tempo $t = 2\ s$, $Q(2s)$, assumendo al tempo t=0 il condensatore scarico e la velocità della sbarretta nulla
   $Q(2s) =$ .....................

## Soluzione Esercizio 2




1. Il verso scelto per la corrente nella figura coincide con il verso della corrente indotta, che tende a generare un campo magnetico indotto che si oppone a $\vec{B}$. Infatti quando la sbarretta è in moto la forza di Lorentz produce un campo elettrico, $\vec{E}_L = \vec{v} \wedge \vec{B} = -vB\hat{y}$ e di conseguenza una fem tra B e A (vedi figura), il cui polo positivo (negativo) coincide con B (A). La fem indotta che si stabilisce istantaneamente ai capi della sbarretta è pari alla differenza di potenziale ai capi della capacità e vale:

$$fem = Bvl = \frac{Q}{C}$$

La carica sulle armature del condensatore aumenta al trascorrere del tempo e $\frac{dQ}{dt}$ è positiva e in accordo quindi con il verso scelto per la corrente per cui:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

L'espressione della corrente in funzione dell'accelerazione della sbarretta è quindi:

$$I(a) = \frac{dQ}{dt} = BalC$$

2. Sulla sbarretta agisce la forza $\vec{F}$ e la forza di Lorentz, $\vec{F}_l$, dovuta alla corrente I, per la quale:

$$\vec{F}_l = -IlB\hat{x}$$

Per la seconda legge della dinamica, $\vec{F}_s = ma\hat{x} = \left(F - aCl^2B^2\right)\hat{x}$ dalla quale otteniamo:

$$a + a\frac{Cl^2B^2}{m} = \frac{F}{m}$$

$$a = \frac{F}{m}\left(1 + \frac{Cl^2B^2}{m}\right)^{-1} = \frac{F}{m + Cl^2B^2} = 0.249\ m \cdot s^{-2}$$

Poichè l'accelerazione è costante si tratta di un moto uniformemente accelerato e $|F_s| = ma = 9.97 \cdot 10^-3\ N$

3. Al tempo t=0 la velocità iniziale della sbarretta è nulla e il condendensatore è scarico, pertanto poichè la corrente I è costante e pari a $I = \frac{dQ}{dt} = BalC = 62.3\ \mu A$, otteniamo: $Q(t') - Q(0) = BlCat'$ che per $t' = 2s$ e $Q(0) = 0$ fornisce:

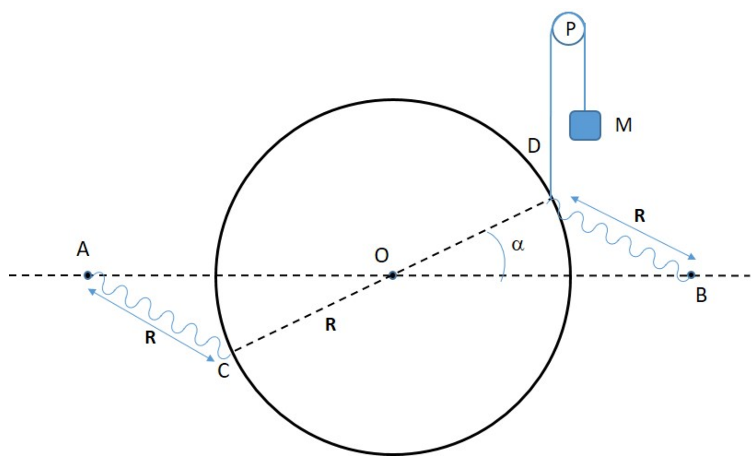
$$Q(2s) = 124.6\ \mu C$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 29/06/2018**
**Cognome : .................................................. Nome : ..................................................**

**Matricola: .................................................. Anno di corso : ........................................**

# Esercizio 1




Un disco di legno (densità $\rho_{legno}$, raggio R e spessore d) può ruotare intorno a un asse orizzontale passante per il suo centro O. Nei punti A e B, posti lungo la retta passante per il diametro orizzontale, sono disposte due molle di lunghezza a riposo nulla e costanti elastiche $k_{BD} = k$ e $k_{AC} = 2k$, i cui altri estremi sono connessi al bordo del disco, rispettivamente nei punti C e D.
Un filo ideale esercita una forza verticale nel punto D ed il sistema risulta in equilibrio nella configurazione in figura, per la quale l'angolo $\alpha = \pi/6$ e la lunghezza di ciascuna molla è pari a R.
A tale filo è appesa una massa M attraverso una carrucola fissa (P) avente massa nulla, su cui il filo può scorrere senza strisciare.

1. Calcolare il valore della massa M nella configurazione di equilibrio.
   $M =$ ...............

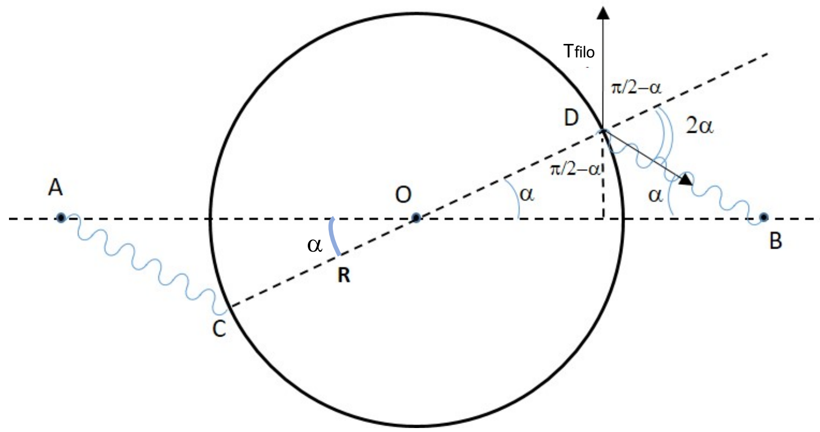
2. All'istante t=0 il filo viene tagliato. Calcolare l'accelerazione angolare, $\dot{\omega}$, e la reazione vincolare in O, $\overrightarrow{R}_O$ subito dopo il taglio del filo.

   $\dot{\omega} =$ ...............          $\overrightarrow{R}_O =$ ...............

3. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni $T$ intorno alla posizione di equilibrio del sistema molle-disco, quando il filo è tagliato
   $T =$ ...............

[ assumere l'accelerazione di gravità $g = 10\ m/s^2$, $\rho_{legno} = 0.4\ g/cm^3$, $R = 1\ m$, $d = 1\ cm$, $k = 10\ N/m$]

## Soluzione Esercizio 1




1. Scriviamo la seconda equazione cardinale per il disco di legno, rispetto al punto O (centro di rotazione e baricentro del problema):

$$\overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{T}_{filo} + \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{F}_{elDB} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{F}_{elAC} = 0$$

La condizione di equilibrio rotatorio applicata alla carrucola priva di massa, permette di ricavare il modulo della tensione del filo, $T_{filo} = Mg$.
Dalla figura si evince che l'angolo tra il vettore $\overrightarrow{OD}$ e la forza elastica è pari a $2\alpha$, mentre l'angolo tra il vettore $\overrightarrow{OD}$ e la tensione del filo è pari a $\pi/2 - \alpha$.
Se il sistema è in equilibrio, il momento delle forze ripetto al polo in $O$ , che può solo essere diretto lungo l'asse di rotazione, deve essere nullo. Tenendo conto che le lunghezze delle molle sono pari al raggio del disco (dato del problema), all'equilibrio la componente parallela all'asse di rotazione è data da (seconda equazione cardinale):

$$-k_{AC}R \cdot Rsin(2\alpha) - k_{DB}R \cdot Rsin(2\alpha) + RT_{filo}sin(\pi/2 - \alpha) = 0$$

da cui:

$$-2kR\frac{\sqrt{3}}{2} - kR\frac{\sqrt{3}}{2} + T_{filo}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

e quindi

$$T_{filo} = 3kR = Mg \rightarrow M = \frac{3kR}{g} = 3 \text{ kg}$$

2. Quando il filo si spezza le equazioni cardinali si scrivono come:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{F}_{elDB} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{F}_{elAC} = I\dot{\overrightarrow{\omega}} \\ \overrightarrow{R}_O + \overrightarrow{F}_{elAC} + \overrightarrow{F}_{elDB} + M_{disco}\overrightarrow{g} = 0 \end{cases}$$

Dove gli angoli e le forze elastiche sono quelle calcolate nella prima domanda, I è il momento di inerzia del disco rispetto al punto O, $R_O$ è la reazione del vincolo e $M_{disco} = \rho_{legno} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot d = 12.6$ kg è la massa del disco. Proiettando le equazioni cardinali lungo gli assi coordinati:

$$-\frac{3\sqrt{3}}{2}kR^2 = (\frac{1}{2}M_{disco}R^2)\dot{\omega}$$

$$R_{Ox} + k_{DB}Rcos\alpha - k_{AC}Rcos\alpha = 0$$

$$R_{Oy} - k_{DB}Rsin\alpha + k_{AC}Rsin\alpha - M_{disco}g = 0$$

da queste si ottiene:

$$\dot{\omega} = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}kR^2}{\frac{1}{2}M_{disco}R^2} = -4.1\ rad/s^2$$

$$R_{Ox} = -kR\frac{\sqrt{3}}{2} + kR\sqrt{3} = 8.7\ N$$

$$R_{OY} = kR\frac{1}{2} - kR + M_{disco}g = -120.6\ N$$

ovvero $|R_O| = 121\ N$.

3. Le piccole oscillazioni avvengono intorno alla posizione di equilibrio. In tale posizione il momento totale e la risultante delle forze devono essere nulli. Questo avviene quando le due molle sono disposte orizzontalmente, lungo la congiungente AB. In questa posizione la lunghezza delle molle è $l_{molla} = R(\sqrt{3} - 1)$, infatti $2Rcos(\alpha) = OA$ e $l_{molla} = OA - R$ dove $OA$ è la lunghezza del segmento che congiunge O ad A. All'equilibrio $\theta$ , angolo tra la molla lato destro e il piano, è nullo, in ogni altra posizione , l'energia totale si può scrivere come:

$$\frac{1}{2}k(l_{molla}^2 + R^2\theta^2) + \frac{1}{2}(2k)(l_{molla}^2 + R^2\theta^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = E_{tot}$$

Dove per una rotazione $\theta$ del disco abbiamo tenuto conto del fatto che per piccoli valori dell'angolo $\theta$ le molle si allungano rispetto alla lunghezza all'equilibrio ($l_{molla}$) di $R\theta$ nella direzione ortogonale a $AB$, mentre l'allungamento nella direzione paralallela è trascurabile. Poichè non ci sono forze dissipative l'energia si conserva, per cui la derivata di $E_{tot}$ rispetto al tempo è nulla

$$\frac{dE}{dt} = 3kR^2\theta\dot{\theta} + I\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

ovvero

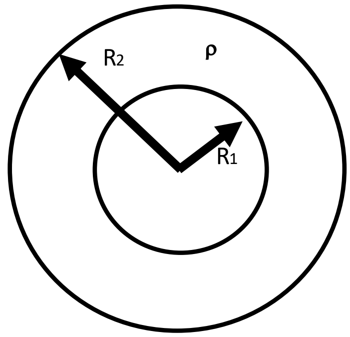
$$\ddot{\theta} + \frac{3kR^2}{I}\theta = 0$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico di pulsazione:

$$\Omega = \sqrt{\frac{3kR^2}{I}} = \sqrt{\frac{6k}{M_{disco}}} = 2.2\ \text{rad/s}$$

ovvero di periodo $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2.9\ s$.

## Esercizio 2




Una sfera cava, di raggio interno $R_1$ e raggio esterno $R_2$, ha una distribuzione di carica radiale con densità di carica di volume $\rho(r) = \rho_0 \frac{R_1}{r}$. All'interno della cavità ($r < R_1$) e all'esterno della sfera ($r > R_2$) non ci sono cariche distribuite.

1. Determinare la carica totale $Q$ presente nella sfera cava e l'espressione del campo elettrico, $\overrightarrow{E}(r)$, in funzione della distanza dal centro della sfera
   $Q =$ .....................      $\overrightarrow{E}(r) =$ .....................

2. Determinare la differenza di potenziale (d.d.p.) tra la superficie interna e la superficie esterna della sfera $V_1 - V_2$
   $V_1 - V_2 =$ .....................

3. Si supponga che nel centro della sfera cava venga posta una carica puntiforme $q$, che non alteri la distribuzione di carica e la carica complessiva della sfera cava. Determinare, se esiste, il valore della carica $q$ affinchè il nuovo valore della differenza di potenziale tra la superfice interna e la superfice esterna della sfera $V_1' - V_2'$ si annulli
   $q =$ .....................

$[R_1 = 4\ cm, \quad R_2 = 10\ cm \quad \rho_0 = 1 \cdot\ 10^{-4}\ C/m^3]$

# Soluzione Esercizio 2

1. Nota la distribuzione di carica della sfera cava, $\rho(r)$, la carica complessiva del guscio è data da:

$$Q = \int_{R_1}^{R_2} \rho(r) 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_0 R_1 \int_{R_1}^{R_2} r dr = 2\pi\rho_0 R_1 (R_2^2 - R_1^2) = 2.11 \cdot 10^{-7}\ C$$

Il campo elettrostatico può essere determinato utilizzando il teorema di Gauss. Per una sfera di Gauss di raggio r con origine nel centro della sfera cava la carica complessiva all'interno della sfera di Gauss risulta:

$$q_{int}(r) = \begin{cases} 0 & 0 \le r < R_1 \\ \mathrm{q(r)} & \mathrm{R}_1 \le r \le R_2 \\ \mathrm{Q} & \mathrm{R}_2 \le r \end{cases}$$

Dove

$$q(r) = \int_{R_1}^{r} \rho(r) 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_0 R_1 \int_{R_1}^{r} r dr = 2\pi\rho_0 R_1 (r^2 - R_1^2)$$

Data la simmetria radiale il campo elettrico, ove diverso da 0, è radiale uscente dalla superficie di Gauss scelta. Il flusso di $\overrightarrow{E}$ attraverso una sfera di raggio $r$ con centro coincidente con il centro della sfera cava è dato da:

$$\Phi(\overrightarrow{E}) = E(r) 4\pi r^2 = \frac{q_{int}(r)}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E(r) = \frac{q_{int}(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

di conseguenza:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & 0 \le r < R_1 \\ \frac{\rho_0 R_1}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right] & \mathrm{R}_1 \le r \le R_2 \\ \frac{\rho_0 R_1 \left(R_2^2 - R_1^2\right)}{2\epsilon_0 r^2} & \mathrm{R}_2 \le r \end{cases}$$

e $\overrightarrow{E} = E(r)\hat{r}$.

2. La differenza di potenziale tra la superficie interna e la superficie esterna è data da:

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \int_1^2 \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr =$$

$$\frac{\rho_0 R_1}{2\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right) dr = \frac{\rho_0 R_1}{2\epsilon_0}\left[R_2 - R_1 - R_1^2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right] = \frac{\rho_0 R_1 \left(R_2 - R_1\right)^2}{2\epsilon_0 R_2} = 8.14\ \cdot 10^3\ V$$

3. Sotto le ipotesi che la carica $q$ non perturbi la distribuzione di carica e la carica complessiva della sfera, per calcolare la differenza di potenziale tra le due superfici in presenza della carica $q$ sappiamo che vale il teorema di sovrapposizione, pertanto:

$$\Delta V' = V_1' - V_2' = \Delta V + \Delta V(q)$$

poichè $V_q(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

$$\Delta V' = \frac{\rho_0 R_1 \left(R_2 - R_1\right)^2}{2\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Imponendo $\Delta V' = 0$ otteniamo il valore di $q$

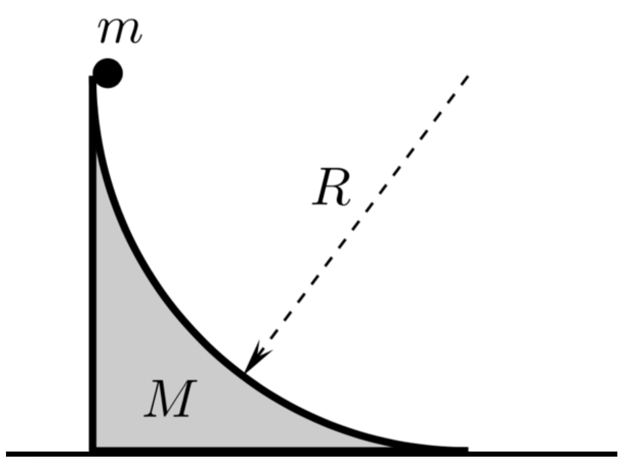
$$q = -2\pi\rho_0 R_1^2 \left(R_2 - R_1\right) = -6.03 \cdot 10^{-8}\ C$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 20/07/2018**
**Cognome : .................................................. Nome : .................................................**

**Matricola: ................................................... Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1




Un punto materiale di massa m è inizialmente fermo sulla cima di di una guida liscia con profilo circolare di raggio R (vedi figura). La guida, di massa $M$, anch'essa inizialmente ferma, può scivolare su di un piano orizzontale privo di attrito. Al tempo t = 0 il punto materiale viene lasciato libero.

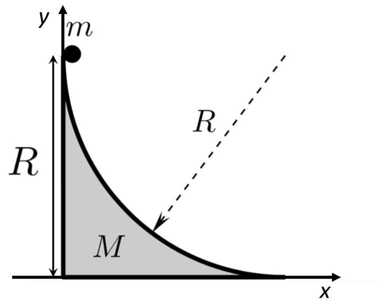
1. Calcolare la velocità finale del punto materiale $\vec{v}$ e della guida $\vec{V}$, quando il punto materiale arriva sul piano.
   $\vec{v}$ = ............... $\vec{V}$ = ...............

2. Calcolare la velocità finale del centro di massa del sistema punto materiale-guida, $\vec{V}_{cm}$, quando il punto materiale arriva sul piano.
   $\vec{V}_{cm}$ = ................

3. Come cambierebbero i risultati del punto 1 e 2 se invece di una guida con profilo circolare avessimo un piano inclinato di altezza R e angolo $\theta$?
   $\vec{v}$'=................ $\vec{V}$'=................ $\vec{V}'_{cm}$ = ................

[ $m = 2.00\ kg,\ M = 3.00\ kg, R = 0.5\ m$]

## Soluzione Esercizio 1

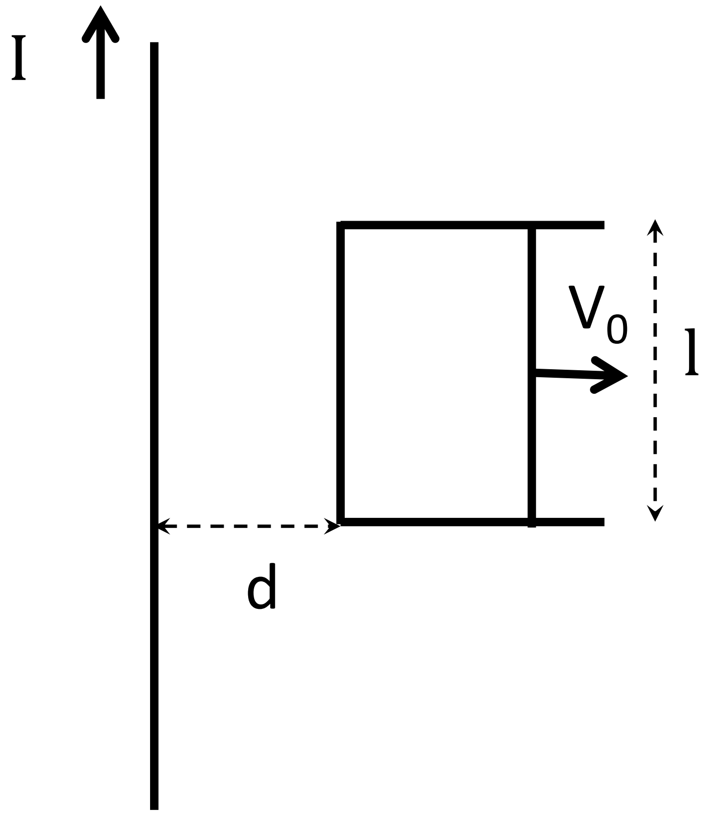



1. Lungo l'asse orizzontale (x), non ci sono forze esterne al sistema guida-punto materiale. Di conseguenza, su tale asse la quantità di moto del sistema guida-punto materiale è conservata:
$$0 = mv_x + MV_x = (m+M)V_{cmx} \tag{1}$$
dall'ultima relazione $V_{cmx} = 0$ ed è costante. Le uniche forze in gioco sono conservative, per cui vale anche la conservazione dell'energia:
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + mgy = costante$$
dove y è la quota della pallina (possiamo scegliere y = 0 sul piano e ignorare l'energia potenziale della guida che non cambia mai e comparirebbe come costante in entrambi i membri).
Poichè non ci sono forze che agiscono sul sistema lungo l'asse z ( uscente dal piano del foglio) nè sulla pallina, nè sulla guida, e neppure sul sistema guida pallina, la quantità di moto rispettivamente della pallina, della guida e del sistema guida-pallina sono costanti e uguali ai rispettivi valori iniziali lungo tale asse, quindi:
$$mv_z = 0 \quad MV_z = 0 \quad P_{cmz} = (m+M)\,V_{cmz} = mv_z + MV_z = 0$$
di conseguenza $v_z = 0$, $V_z = 0$ e $V_{cmz} = 0$ . Inoltre, poichè la guida scivola sul piano, la risultante delle forze verticali (lungo y) agenti su di essa è nulla, per cui $V_y$ è costante e uguale al suo valore iniziale, che era nullo. Quindi durante il moto la guida (il suo cm) si muove lungo l'asse x, mentre la pallina ha una velocità con componenti nel piano xy.
Quando la pallina è scesa dalla guida, sia $\overrightarrow{v}$ che $\overrightarrow{V}$ sono dirette lungo l'asse x. La conservazione dell'energia ci permette di scrivere:
$$mgR = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}MV_x^2 \tag{2}$$
Dalla conservazione della quantità di moto lungo l'asse x, 1, si ottiene
$$V_x = -\frac{m}{M}v_x$$
Sostituendo $V_x$ nell'equazione 2
$$\frac{1}{2}\frac{(m+M)}{M}v_x^2 = gR$$
Dalle quali otteniamo infine:
$$v_x = \sqrt{\frac{2MRg}{(m+M)}} = 2.42\ m/s \qquad V_x = -m\sqrt{\frac{2Rg}{M(m+M)}} = -1.62\ m/s$$

2. La velocità finale del centro di massa del sistema guida-punto materiale è nulla, essendo sia la velocità della pallina che della guida dirette lungo x sul piano e valendo la conservazione della quantità di moto lungo x (vedi equazione 1).

3. Il risultato è lo stesso delle domande 1 e 2, in quanto valgono le stesse equazioni una volta che il punto materiale è sul piano.

## Esercizio 2

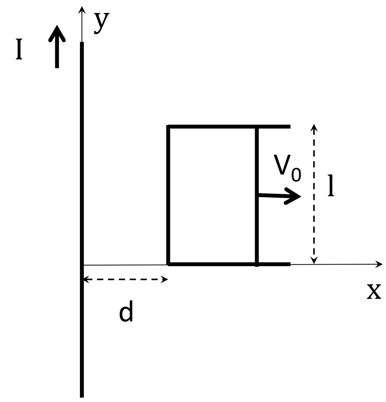



La sbarra conduttrice in figura chiude il circuito costituito da due rotaie conduttrici distanziate di $l = 30\ cm$. La sbarra, indeformabile, è mantenuta in moto perpendicolarmente alle due rotaie con velocità costante $v_0$. Il sistema è immerso nel campo magnetico generato da un filo infinito rettilineo ideale percorso da una corrente $I = 45\ A$ che giace nello stesso piano delle rotaie e della sbarra. Nell'istante iniziale la sbarra è a distanza $d = 0.2\ m$ dal filo (coincidente con l'inizio delle rotaie).

1. Determinare la velocità della sbarra $v_0$, sapendo che quando essa si trova nella posizione che dista $x_1 = 0.5\ m$ dal filo, il modulo della FEM misurata nel circuito è pari a $|FEM_1| = 0.002\ V$.
   $v_0 =$ .....................
2. Se la sbarra è costituita da un filo di rame di raggio $r = 1\ mm$ e la resistenza delle rotaie è trascurabile, calcolare il modulo della forza che agisce sulla sbarra nella posizione $x_1$, $F(x_1)$.
   $F(x_1) =$ .....................
3. Calcolare il modulo della carica Q che ha attraversato il circuito dall'istante iniziale al momento in cui la sbarra raggiunge la posizione $x_1$. $Q =$ .....................

(dati: resistività del rame $\rho_{Cu} = 17 \times 10^{-9}\ \Omega m$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ T/m\ = 1.26 \times 10^{-6}\ T/m$).

# Soluzione Esercizio 2




1. Il problema ha simmetria cilindrica, dunque le linee di forza del campo magnetico sono delle circonferenze con centro sull'asse y e parallele al piano x,z (l'asse z non indicato in figura è uscente dal foglio). Per la regola della mano destra il verso delle linee di campo è antiorario rispetto all'asse $y$.
   L'espressione del modulo del campo magnetico nella superficie della spira si ottiene applicando il Teorema di Ampere ad una linea di campo circolare di raggio generico $r = x'$
   $$B(x') = \frac{\mu_0 I}{2\pi x'}$$
   Il flusso del campo magnetico concatenato alla spira in movimento varia con il tempo. Infatti per un tratto dx di filo, il contributo al flusso è dato da $d\phi(t) = B(x')ldx'$, per cui il flusso attraverso la spira è dato da:
   $$\phi(t) = \int_d^{x(t)} B(x')ldx' = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_d^{x(t)} \frac{dx'}{x'} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} ln\left(\frac{x(t)}{d}\right)$$
   Dove x(t) indica la posizione della sbarra lungo l'asse x in funzione del tempo. Poichè la sbarra è mantenuta in moto con velocità costante, $x(t) = d + v_0 t$, pertanto:
   $$\phi(t) = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} ln\left(\frac{d + v_0 t}{d}\right)$$
   Di conseguenza, il modulo della FEM indotta al tempo t, è dato da:
   $$|FEM(t)| = |-\frac{d\phi}{dt}| = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\left(\frac{v_0}{d + v_0 t}\right)$$
   Per $t = t^*$, $x(t^*) = x_1$ e $|FEM(t^*)| = FEM_1$, si ottiene:
   $$v_0 = FEM_1 \frac{2\pi x_1}{\mu_0 Il} = 370\ m/s$$

2. Poichè la direzione del campo magnetico e della sbarra sono ortogonali, il modulo della forza sulla sbarra mobile quando questa dista $x_1$ dall'origine è dato da $F(x_1) = I'lB = \frac{FEM_1}{R} lB(x_1)$, dove
   $$R = \frac{\rho l}{S} = 1.62 \times 10^{-3}\ \Omega$$
   Pertanto:
   $$|F(x_1)| = \frac{FEM_1}{R} lB(x_1) = \frac{FEM_1}{R}\frac{\mu_0 Il}{2\pi x_1} = 6.67 \times 10^{-6}\ N$$

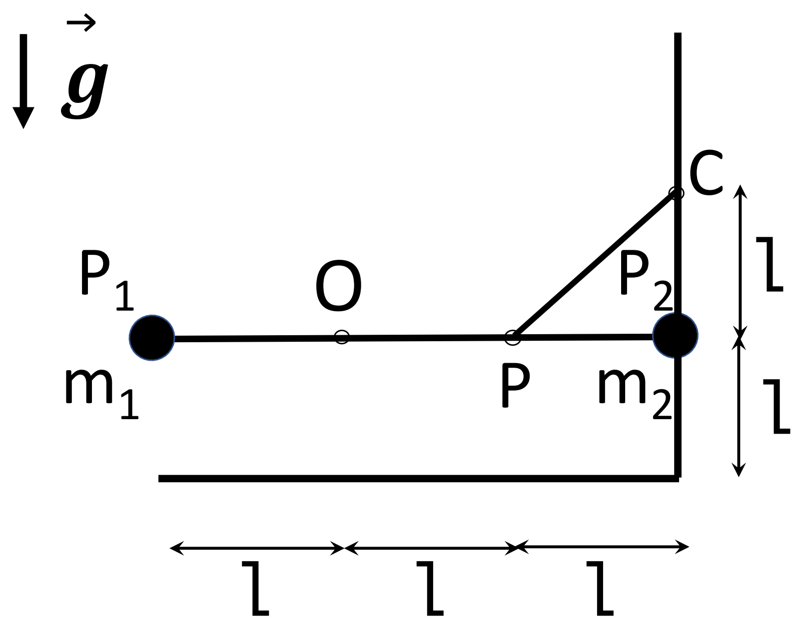
3. Per calcolare la carica dobbiamo integrare la corrente che fluisce nel circuito dall'istante iniziale all' istante in cui la sbarra occupa la posizione $x_1$
   $$Q = \int_0^{t_1} I'(t)dt = \int_0^{t_1} \frac{|FEM(t)|}{R}dt = \frac{\mu_0 Il}{2\pi R} v_0 \int_0^{t_1} \frac{dt}{d + v_0 t}$$
   Cambiando variabile $x = d + v_0 t$, $dx = v_0 dt$ e $dt = \frac{dx}{v_0}$, otteniamo :
   $$Q = \frac{\mu_0 Ilv_0}{2\pi Rv_0}\int_d^{x_1} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi R} ln\left(\frac{x_1}{d}\right) = 1.53\ mC$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 14/09/2018**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : .....................................**

# Esercizio 1




Due punti materiali di massa $m_1 = m$ e $m_2 = 2m$ sono collegati da un'asta rigida di massa trascurabile e lunghezza 3l. L'asta può ruotare, nel piano verticale, intorno al punto O, che si trova a distanza l dal corpo di massa $m_1$, come in figura. Un filo inestensibile collega il punto $P$ al punto $C$. Entrambi $P$ e $C$ (vedi figura) sono ad una distanza l dal corpo di massa $m_2$. In questa configurazione l'asta risulta in equilibrio. Determinare:

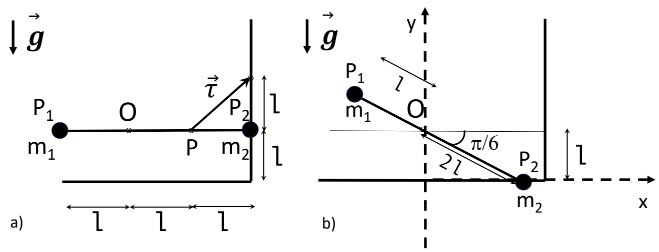
1. La reazione del vincolo in O, $\overrightarrow{R}_O$.
   $\overrightarrow{R}_O =$ ...............

2. Nell'ipotesi che ad un certo istante il filo si spezzi, calcolare la velocità angolare dell'asta, $\omega$, un istante prima dell'urto con il piano orizzontale posto a distanza l dalla posizione di equilibrio dell'asta.
   $\omega =$ ...............

3. Nell'ipotesi che, a causa dell'urto, le palline si stacchino istantaneamente dall'asta, calcolare il tempo ($t^*$) impiegato dalla seconda pallina (quella connessa all'estremo che non ha urtato il piano) per raggiungere il piano orizzontale dopo l'urto (trascurare l'effetto dell'aria).
   $t^* =$ ...............

(dati: l=20 cm; m=50 g; g=10 $m/s^2$)

# Soluzione Esercizio 1




1. All'equilibrio la risultante delle forze che agiscono sul sistema è nulla. Le forze che agiscono sul sistema sono i pesi dei punti materiali, la tensione del filo $\tau$ (figura a) e la reazione vincolare $\overrightarrow{R}_O$ in $O$ della cerniera. Pertanto la prima equazione cardinale fornisce:

$$\vec{R}_O + \vec{\tau} + 3m\vec{g} = 0$$

Inoltre all'equilibrio risulta nullo anche il momento delle forze esterne e scegliendo il punto O come polo a cui riferire i momenti, la seconda equazione cardinale, si può scrivere:

$$\vec{OP} \times \vec{\tau} + \vec{OP_1} \times m\vec{g} + \vec{OP_2} \times 2m\vec{g} = 0$$

Notando che la tensione del filo può anche essere scritta come $\vec{\tau} = \tau(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, possiamo scrivere la prima equazione cardinale per componenti:

$$\begin{cases} \mathrm{R}_{Ox} + \tau\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \mathrm{R}_{Oy} + \tau\frac{\sqrt{2}}{2} - 3mg = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione cardinale si ricava il modulo della tensione del filo:

$$l\tau sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + lmg - 2l2mg = l\tau\frac{\sqrt{2}}{2} - 3mgl = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tau = 3\sqrt{2}mg$$

e quindi, sostituendo l'espressione di $\tau$ nella prima equazione cardinale, le componenti della reazione vincolare in $O$ valgono:

$$\begin{cases} \mathrm{R}_{Ox} = -3mg = -1.5\ N \\ \mathrm{R}_{Oy} = 0 \end{cases}$$

2. Per risolvere il secondo punto si può utilizzare la conservazione dell'energia meccanica, poichè non ci sono forze dissipative. Scegliendo l'origine dell'energia potenziale nella posizione di equilibrio, in tale posizione l'energia totale è nulla. Dalla conservazione dell'energia, poco prima dell'urto l'energia totale si può scrivere come:

$$\frac{1}{2}m\omega^2 l^2 + \frac{1}{2}(2m)\omega^2(2l)^2 + mg\frac{l}{2} - 2mgl = 0$$

da cui si ottiene:

$$\omega^2 = \frac{1}{3}\frac{g}{l}$$

ovvero, poichè il sistema quando viene tagliato il filo ruota in senso orario:

$$\omega = \omega_z = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{g}{l}} = -4.08\ Hz$$

3. La pallina di massa m, nel momento dell'urto (al tempo $t = 0$) si trova ad un'altezza $y_0 = l + l/2 = 3l/2$ rispetto al piano con cui avviene l'urto (vedi figura b) ed ha una velocità $\vec{v_0} = \vec{\omega} \times \vec{OP_1} = |\omega| l \left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right), sin\left(\frac{\pi}{3}\right), 0\right)$ ovvero:

$v_{0y} = 0.8 sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.71\ m/s$ . L'equazione del moto lungo l'asse y pertanto sarà

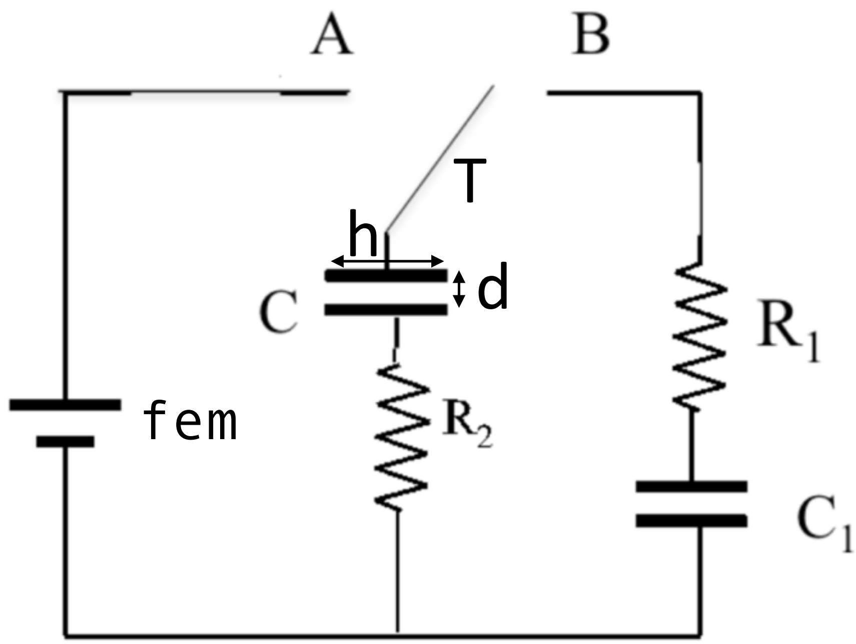
$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Quando la pallina raggiunge il piano: $y(t^*) = 0 = y_0 + v_{0y}t^* - \frac{1}{2}gt^{*2}$, risolvendo l'equazione di secondo grado, si ottengono due soluzioni una negativa e una positiva, la soluzione cercata è quella con $t^* > 0$, per cui:

$$t^* = 0.32\ s$$

.

## Esercizio 2




Un condensatore piano parallelo con armature di lati $h = 5\ mm$ e $l = 4\ mm$ e distanti $d = 3\ mm$ è riempito per metà della sua altezza ($h/2$) di un dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4.1$

1. Calcolare la capacità equivalente $C_{eq}$ del condensatore C
   $C_{eq} =$ .....................

Questo condensatore di capacità $C_{eq}$ viene quindi inserito nel circuito in figura ($C_1 = 3\ nF$, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, $fem = 4\ V$) con l'interruttore T chiuso sul punto A, e si aspetta un tempo molto lungo ( $t \gg \tau$).

2. Calcolare la carica ($Q$) e l'energia immagazzinata ($U$) nel capacitore $C$.
   $Q =$ ..................... $U =$ .....................

Successivamente, l'interruttore è spostato sulla posizione $B$, e si aspetta ancora un tempo molto lungo ($t \gg \tau'$). Calcolare in questa configurazione:

3. la carica sui capacitori $C$ ($Q_C$) e $C_1$ ($Q_{C_1}$) e le rispettive energie ($U_C$ e $U_{C_1}$) in essi immagazzinate.
   $Q_C =$ ............ $Q_{C_1} =$ ............ $U_C =$ ............ $U_{C_1} =$ ............

Dati: $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$

# Soluzione Esercizio 2

1. Il capacitore C riempito per metà di dielettrico può essere schematizzato come 2 capacitori piani in parallelo entrambi di superfice $S = lh/2$ il primo di costante dielettrica $\epsilon_0$ ed il secondo di costante dielettrica $\epsilon_0\epsilon_r$. Essendo i due condensatori piani ed in parallelo, la capacità risultante sarà:

$$C_{eq} = C_{vuoto} + C_{diel}$$

con

$$C_{vuoto} = \epsilon_0 \frac{S}{d} = 2.95 \times 10^{-14}\ F$$

e

$$C_{diel} = \epsilon_0\epsilon_r \frac{S}{d} = 1.21 \times 10^{-13}\ F$$

per cui:

$$C_{eq} = 1.5 \times 10^{-13}\ F$$

2. Quando T è chiuso su A, il capacitore C inizia a caricarsi fino a quando a regime, $(t \gg \tau)$ la corrente si annulla e la differenza di potenziale ai capi della capacità è pari alla differenza di potenziale del generatore. La carica su C è pertanto:

$$Q = C_{eq} fem = 6.02 \times 10^{-13}\ C$$

mentre l'energia immagazzinata è pari a:

$$U = \frac{1}{2} Q fem = 1.2 \times 10^{-12}\ J$$

3. In questo caso, poichè a regime la corrente è nulla, la carica iniziale si ripartisce tra il capacitore $C$ di capacità $C_{eq}$ e $C_1$, in modo che la differenza di potenziale sui rispettivi rami è la stessa. Pertanto avremo che: $Q_C + Q_{C_1} = Q$ e $V_C = V_{C_1} = V$.
Per cui : $C_{eq}V + C_1 V = Q$, ottenendo $V = Q/(C_{eq} + C_1)$.
Di conseguenza:

$$Q_C = C_{eq} \frac{Q}{C_{eq} + C_1} = 3.02 \times 10^{-17}\ C \qquad Q_{C_1} = C_1 \frac{Q}{C_{eq} + C_1} = 6.02 \times 10^{-13}\ C$$

La carica va quasi tutta sul capacitore $C_1$ che ha più alta capacità ($C_1 \sim 10^4\ C_{eq} \gg C_{eq}$).

Per le energie otteniamo:

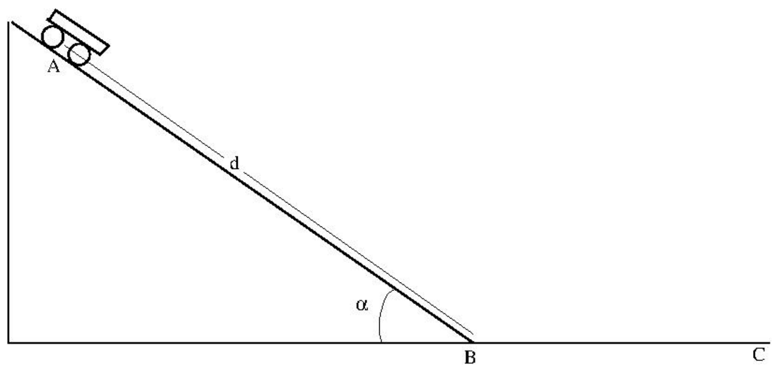
$$U_C = \frac{1}{2} \frac{Q_C^2}{C_{eq}} = 3.03 \times 10^{-21}\ J \qquad U_{C_1} = \frac{1}{2} \frac{Q_{C_1}^2}{C_1} = 6.04 \times 10^{-17}\ J$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 11/01/2019**
**Cognome : .................................................. Nome : ..................................................**

**Matricola: .................................................. Anno di corso : ........................................**

# Esercizio 1




Un carrello può essere schematizzato da 4 ruote, ciascuna di massa m/4 e raggio R, e da un pianale di massa m. Tale carrello, partendo da fermo nel punto A (in figura) scende lungo un piano inclinato scabro lungo d (con angolo $\alpha$) con moto di puro rotolamento (supporre d molto maggiore della distanza tra le due ruote).

1. Calcolare la velocità, $v$ e l'accelerazione $a$ con cui il carrello arriva alla base del piano inclinato (punto B) e l'accelerazione che avrebbe avuto lo stesso carrello in assenza di attrito, $a_{na}$.

   $v =$ ..................... $a =$ ..................... $a_{na} =$ .....................

2. Giunto nel tratto orizzontale (punto B), il carrello viene fermato in un tempo $\Delta t$ (nel punto C) per mezzo di un momento frenante di modulo $M_f$ costante. Determinare $M_f$ assumendo che, fino all'arresto, il moto sia sempre di puro rotolamento.

   $M_f =$ .....................

3. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza frenante nel tratto BC per fermare il carrello.

   $L_{freno} =$ .....................

Dati: g=10 $m/s^2$, m=10 $Kg$, R=15 $cm$, $\alpha = \pi/6$, d=10 $m$, $\Delta$t=5 $s$.

# Soluzione Esercizio 1

1. Si può risolvere con la conservazione dell'energia, visto che, nel caso di puro rotolamento, l'attrito non fa lavoro. All'inizio l'energia è puramente potenziale, alla fine (base del piano inclinato, in cui fissiamo lo 0 dell'energia potenziale) si deve tener conto sia dell'energia cinetica di traslazione che di rotazione:

$$(m + 4\frac{m}{4})gh = \frac{1}{2}(m + 4\frac{m}{4})v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

dove $h = dsin(\alpha)$ e $I = 4\frac{1}{2}\frac{m}{4}R^2 = \frac{1}{2}mR^2$ il momento di inerzia totale delle ruote e $\omega$ è la velocitaà angolare con cui ruotano le ruote. La condizione di puro rotolamento implica che $\omega = -v/R$ e quindi, dalla precedente equazione, si può ricavare $v$:

$$v = \sqrt{\frac{8}{5}gdsin(\alpha)} = 8.9\ m/s$$

Allo stesso risultato si può arrivare considerando le due equazioni cardinali. La prima equazione cardinale si può scrivere come:

$$\vec{P} + 4\vec{f} + \vec{R}_N = (m + 4\frac{m}{4})\vec{a}$$

dove $\vec{P}$ è il peso complessivo del carrello, $\vec{f}$ l'attrito tangenziale su ciascuna ruota e $\vec{R_N}$ la reazione normale. Proiettando la precedente equazione lungo la direzione del piano si ha:

$$2mgsin(\alpha) - 4f = 2ma$$

(dove con a si intende l'accelerazione lungo il piano). La seconda equazione cardinale :

$$-4fR = I\dot{\omega}$$

ovvero (considerando $\dot{\omega} = -a/r$):

$$4f = \frac{Ia}{R^2}$$

sostituendo nella proiezione della prima lungo il piano si può ricavare a:

$$a = \frac{2mgsin(\alpha)}{2m + I/R^2} = \frac{4gsin(\alpha)}{5} = 4m/s^2$$

In un moto uniformemente accelerato la relazione tra velocità e accelerazione può essere scritta come $v = \sqrt{2ad}$ e quindi $v = \sqrt{\frac{8}{5}gdsin(\alpha)}$, come nel metodo precedente.
Nello scivolamento senza attrito (in cui le ruote non girano) la velocità di arrivo alla fine del piano inclinato sarà $v_{na} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gdsin(\alpha)}$ e quindi, banalmente, $a_{na} = gsin(\alpha) = 5m/s^2$. Nel caso del rotolamente invece si è trovato $a = 4m/s^2$, per cui l'accelerazione risulta più bassa quando le ruote girano.

2. Limitandosi alla sola componente orizzontale la prima equazione cardinale si può scrivere come:

$$-4f = 2ma$$

visto che l'unica forza presente, in orizzontale, è l'attrito sulle ruote.
La seconda equazione cardinale fornisce:

$$M_f - 4fR = I\dot{\omega}$$

in quanto la forza di attrito agisce in direzione opposta rispetto al momento frenante. Dalle due equazioni cardinali (utilizzando la solita condizione di puro rotolamento):

$$a = -\frac{2M_f}{5mR}$$

Integrando rispetto al tempo, abbiamo:

$$v(t) = v_0 - |a|t$$

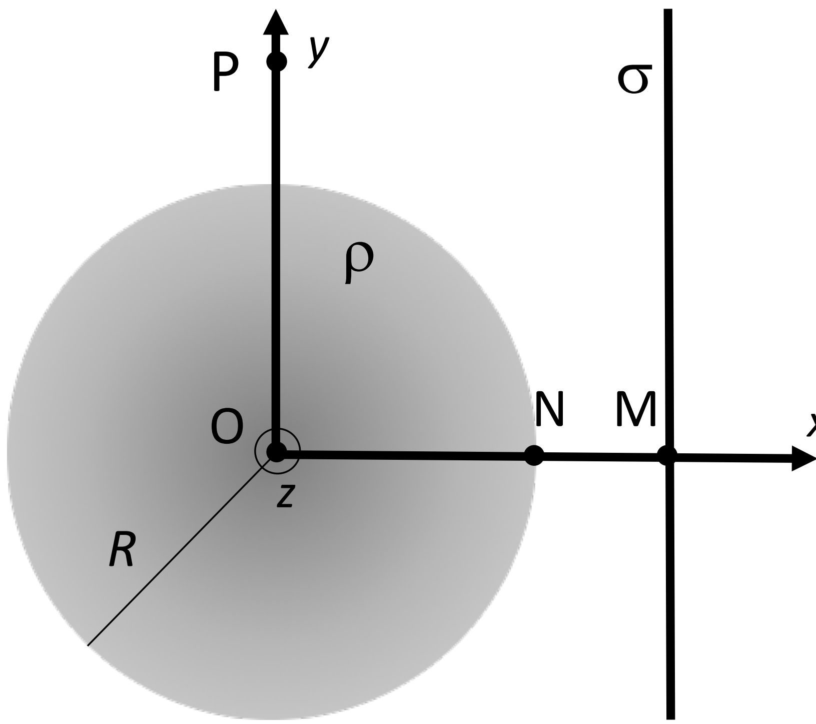
dove $v_0 = 8.9\ m/s$ è la velocità trovata al punto precedente ($v$). Dopo un tempo $\Delta t$, la velocità diventa nulla, per cui:

$$v_0 = |a|\Delta t\ \rightarrow\ M_f = \frac{5mRv_0}{2\Delta t} = 6.7\ Nm$$

3. Considerando che l'attrito non fa lavoro (moto di puro rotolamento), tutta l'energia disponibile iniziale, $2mgdsin(\alpha)$ che nel punto B è stata convertita in energia cinetica ($T_B$) di rotazione e traslazione viene dissipata dalla forza frenante, per cui, per il teorema della forze vive, il lavoro della forza frenante è pari a :

$$L_{freno} = T_C - T_B = -2mgdsin(\alpha) = -1000\ J$$

## Esercizio 2




Una sfera di raggio $R$ è carica. La carica è distribuita uniformente nel volume sfera, con densità $\rho > 0$. Sia fissato un sistema di riferimento cartesiano con origine $O$ nel centro della sfera (vedi figura). Un piano indefinito, uniformemente carico con densità di carica superficiale $\sigma < 0$, è posto a distanza $d + \epsilon = OM$ dal centro della sfera (si assuma $\epsilon$ positivo e trascurabile).

1. Si determini l'espressione del campo elettrostatico $\overrightarrow{E}$ per un generico punto dell'asse x nell'intervallo compreso tra $O$ e $M$, $\overrightarrow{E}(x, 0, 0)$, e si calcoli nel punto di coordinate (d,0,0), $\overrightarrow{E}(d, 0, 0)$.
   $\overrightarrow{E}(x, 0, 0) =$ ..................... $\overrightarrow{E}(d, 0, 0) =$ .....................

2. Si determini la differenza di potenziale tra i punti N (intersezione dell'asse x con la superficie sferica) e M, $V(N) - V(M)$
   $V(N) - V(M) =$ .....................

3. Viene posta una carica puntiforme $q$ nel punto $P$ a distanza $l = OP$ dal centro della sfera. Determinare la forza $\overrightarrow{F}$ agente sulla carica.
   $\overrightarrow{F} =$ .....................

Dati: $R = 10\ cm$, $d = 50\ cm$, $l = 30\ cm$, $\rho = 240\ \frac{\mu C}{m^3}$, $\sigma = -2.5\ \frac{\mu C}{m^2}$, $q = 1\ nC$, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m.$

## Soluzione Esercizio 2

1. Il campo elettrostatico per il principio di sovrapposizione, è dato dalla somma vettoriale dei campi generati dalla sfera e dal piano.
   Indicando con $\overrightarrow{E}_1$ il campo generato dalla sfera, stante la simmetria sferica della sua distribuzione di carica, esso è radiale rispetto al centro O e dipende solo dalla distanza da O. Quindi, per il generico punto dell'asse $x$ di coordinate $(x,0,0)$ con $0 \leq x \leq d$, $\overrightarrow{E}_1$ ha la sola componente lungo x, per cui $\overrightarrow{E}_1 = E_1\hat{x}$. Dove con $E_1$ abbiamo indicato il modulo di $\overrightarrow{E}_1$, essendo, per ogni punto sull'asse $x$ appartente all'intervallo designato, il campo diretto come l'asse $x$. Per il teorema di Gauss, si ha:

$$E_1 = \begin{cases} \frac{\rho x}{3\epsilon_0} & 0 \leq x \leq R \\ \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0 x^2} & x \geq R \end{cases}$$

   Indicando con $\overrightarrow{E}_2$, il campo generato dal piano carico, esso, in tutto il semispazio $x < d$, è perpendicolare al piano stesso (quindi parallelo all'asse x) e diretto nel verso delle x positive dato il segno della carica negativa del piano. Quindi $\overrightarrow{E}_2 = E_2\hat{x}$ con:

$$E_2 = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0},\ per\ x \leq d$$

   Per cui il campo complessivo per un punto qualsiasi sul segmento OM è dato da:

$$\overrightarrow{E}(x,0,0) = \overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{E}_2 = E\hat{x}$$

   con $E$ dato da:

$$E = \begin{cases} \frac{\rho x}{3\epsilon_0} + \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0} & 0 \leq x \leq R \\ \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0 x^2} + \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0} & R \leq x \leq d \end{cases}$$

   per cui

$$E(d,0,0) = \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0 d^2} + \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0} = 1.77 \times 10^5\ \frac{V}{m}$$

   con

$$\overrightarrow{E}(d,0,0) = E(d,0,0)\hat{x}$$

2. Per il calcolo della differenza di potenziale, noto il campo elettrico:

$$V(N) - V(M) = \int_R^d E(x)dx = \int_R^d \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0 x^2}dx + \int_R^d \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}dx = \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d}\right) + \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}(d-R) = 1.29 \times 10^5\ V$$

3. La forza a cui è sottoposta la carica q nel punto P è $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} = q\left(\overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{E}_2\right)$, con $\overrightarrow{E}_1$ stavolta diretto lungo l'asse y nel verso positivo e $\overrightarrow{E}_2$ sempre diretto lungo l'asse x. Usando l' espressione del campo elettrico per $OP = l$ otteniamo: $F_x = q\frac{|\sigma|}{2\epsilon_0} = 1.41 \times 10^{-4}\ N$, e $F_y = q\frac{R^3\rho}{3\epsilon_0 l^2} = 1 \times 10^{-4}\ N$. Per cui:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 0.17\ mN$$

   Mentre l'angolo formato da $\overrightarrow{F}$ con il semiasse positivo delle x è

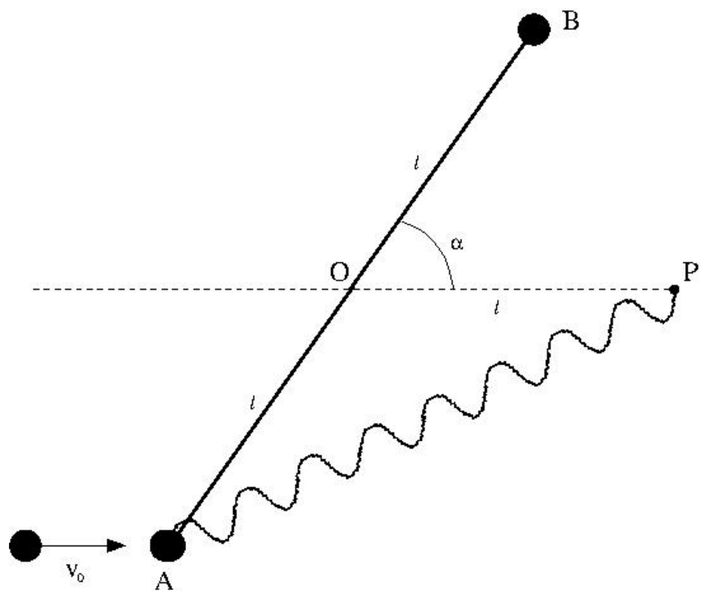
$$\alpha = arctan\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = 35.34^o$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 1/2/2019**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1




Due masse, $m_A = m$ e $m_B = 2m$, assimilabili a due punti materiali, sono connesse da una sbarretta di massa $3m$ e lunghezza $2l$, incernierata nel suo punto medio $O$, sul piano verticale. La massa $m_A$ è collegata al punto P, che si trova ad una distanza $l$ da O e alla stessa quota di O, tramite una molla di costante elastica $k$ e lunghezza a riposo trascurabile. Inizialmente il sistema è in equilibrio nella configurazione di figura con angolo $\alpha = \pi/3$.

1. Calcolare la costante elastica della molla, $k$.

$$k = ....................$$

Al tempo $t = 0$ un punto materiale di massa $m$ colpisce il punto di massa $m_A$ con velocità $v_0$, orizzontale e diretta verso destra. L'urto è perfettamente anelastico.

2. Calcolare la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto, $\omega$, e l'energia dissipata nell'urto, $E_{diss}$.

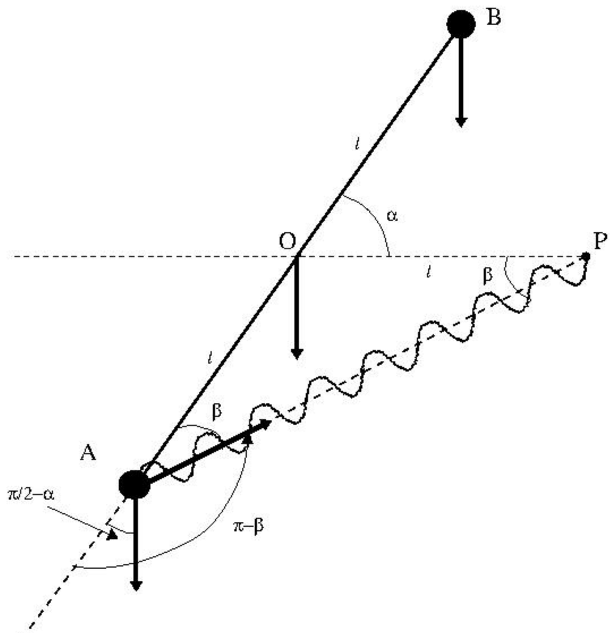
$$\omega = .................... \quad E_{diss} = ....................$$

3. Determinare la velocità, $\vec{v}_A$ con cui il punto materiale A passa dall'asse orizzontale, nel moto successivo all'urto.

$$\vec{v}_A = ....................$$

Dati: $m = 100\ g$, $l = 50\ cm$, $v_0 = 5\ m/s$, $g = 10\ m/s^2$.

## Soluzione Esercizio 1




1. La lunghezza della molla nella posizione di equilibrio può essere determinata da semplici considerazioni geometriche, osservando che il triangolo AOP, è un triangolo isoscele con angolo alla base di $\pi/6$. La base (ovvero la lunghezza della molla), vale

$$\bar{AP} = \sqrt{3}l$$

La forza elastica applicata al punto A sarà allora:

$$\vec{F}_{el} = \left(\frac{3}{2}kl, \frac{\sqrt{3}}{2}kl\right)$$

con modulo $|\vec{F}_{el}| = \sqrt{3}kl$.

Scegliendo come polo il centro O, si può scrivere la seconda equazione cardinale tenendo conto di tutte le forze presenti, ovvero i pesi dei punti A e B, della sbarretta e la forza elastica (il peso della sbarretta è applicato nel punto O, baricentro della sbarretta):

$$\vec{OA} \wedge m\vec{g} + \vec{OB} \wedge 2m\vec{g} + \vec{OA} \wedge \vec{F}_{el} = 0$$

che diventa (vedi figura):

$$lmgcos(\alpha) - 2mglcos(\alpha) + |\vec{F}_{el}|lsin(\pi - \beta) = 0$$

ovvero

$$-\frac{1}{2}mgl + \frac{\sqrt{3}}{2}kl^2 = 0$$

$$-mg + \sqrt{3}kl = 0 \rightarrow k = \frac{mg}{\sqrt{3}l} = 1.15\ N/m$$

2. Nell'urto anelastico della massa m nel punto A si conserva il momento angolare dell'intero sistema. Per cui il momento angolare rispetto al punto O prima dell'urto sarà uguale a quello dopo l'urto:

$$\vec{OA} \wedge m\vec{v}_0 = I\omega\hat{k}$$

Dove $I$ è il momento d'inerzia dell'intero sistema dopo l'urto:

$$I = 2(2m)l^2 + \frac{1}{12}(3m)4l^2 = 4ml^2 + ml^2 = 5ml^2$$

La precedente diventa:

$$lmv_0 sin(\pi - \alpha) = I\omega \rightarrow \omega = \frac{\sqrt{3}}{10}\frac{v_0}{l} = 1.73\ rad/s$$

L'energia cinetica immediatamente prima dell'urto è $\frac{1}{2}mv_0^2$ mentre subito dopo l'urto è data da $\frac{1}{2}I\omega^2$ con $\omega$ appena calcolato. La differenza tra questi due valori è proprio l'energia dissipata nell'urto:

$$E_{diss} = -\Delta T = -(\frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}mv_0^2) = 1.06\ J$$

3. Dopo l'urto la massa nel punto A è uguale alla massa nel punto B (ovvero è 2m), per cui il contributo all'energia potenziale è uguale e opposto, se fissiamo lo zero dell'energia potenziale lungo l'asse orizzontale che contiene O e P. L'energia, dopo l'urto, si conserva, per cui l'energia iniziale è uguale all'energia nel passaggio di A dall'orizzontale. In questa posizione la molla ha lunghezza nulla (pari quindi alla sua lunghezza a riposo):

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}k(\sqrt{3}l)^2 = \frac{1}{2}I\omega'^2$$

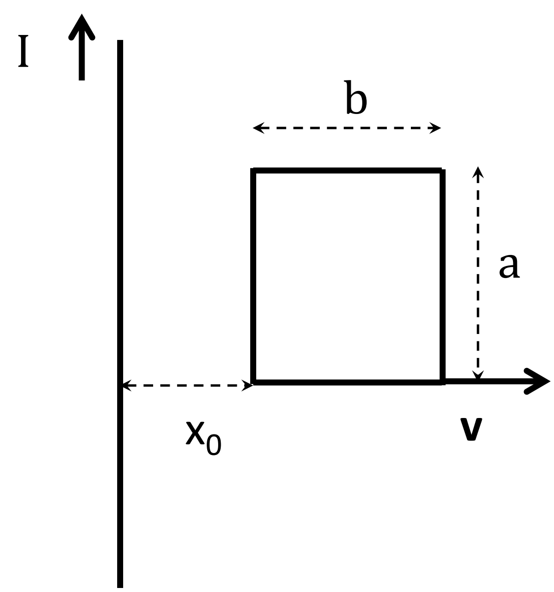
dove con $\omega'$ abbiamo indicato la velocità angolare nell' istante in cui A passa per l'asse orizzontale:

$$\omega' = \sqrt{\frac{2}{I}(\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}k(\sqrt{3}l)^2)} = \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{I}k(\sqrt{3}l)^2} = 3.15\ rad/s$$

e quindi il modulo della velocità di A sarà $v_A = \omega' l = 1.58\ m/s$, con direzione perpendicolare all'asse orizzontale e rivolta verso l'alto, per cui:

$$\overrightarrow{v}_A = (0, 1.58, 0)\ m/s$$

## Esercizio 2




Un filo conduttore ideale infinitamente lungo, è percorso da una corrente costante $I$ nel verso indicato in figura. Un avvolgimento piatto di $N$ spire di forma rettangolare con lati $a$ e $b$ indeformabile, giace nello stesso piano del filo, a distanza $x_0$, come in figura. La resistenza dell'avvolgimento di spire è $R$. Ad un certo istante ($t = 0$) l'avvolgimento di spire viene messo in moto con velocità costante $v$ a partire dalla posizione $x_0$ nella direzione indicata in figura. Si trascuri il coefficiente di autoinduzione dell'avvolgimento di spire.

1. Calcolare la corrente che circola nell'avvolgimento di spire, $I_s(t')$, all'istante $t = t'$, e determinarne il verso (orario o antiorario) motivando la risposta.

$$I_s(t') = ....................$$

2. Determinare la forza istantanea $\overrightarrow{F}(t')$ all'istante $t'$, che deve essere applicata all'avvolgimento per mantenerlo in moto con velocità costante.

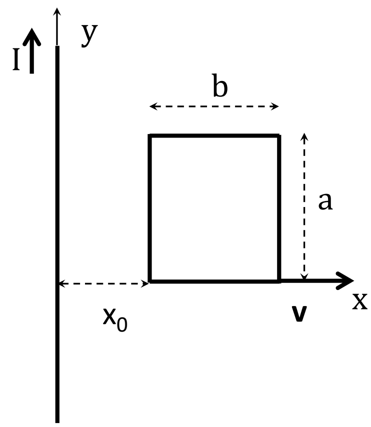
$$\overrightarrow{F}(t') = ....................$$

3. Determinare la potenza dissipata nell'avvolgimento al tempo $t = t'$, $P(t')$

$$P(t') = ....................$$

Dati: $I = 450\ A$, $N = 10000$, $a = 8\ cm$, $b = 5\ cm$, $R = 1\ \Omega$, $v = 0.5\ m/s$, $x_0 = 4\ mm$, $t' = 2\ s$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ T/m\ = 1.26 \times 10^{-6}\ T/m$.

## Soluzione Esercizio 2




1. Il problema ha simmetria cilindrica, dunque le linee di forza del campo magnetico sono delle circonferenze con centro sull'asse y e parallele al piano x,z (l'asse z non indicato in figura è uscente dal foglio). Per la regola della mano destra il verso delle linee di campo è antiorario rispetto all'asse $y$.

   L'espressione del modulo del campo magnetico nella superficie del circuito si ottiene applicando il Teorema di Ampere ad una linea di campo circolare di raggio generico $r = x'$

   $$B(x') = \frac{\mu_0 I}{2\pi x'}$$

   Il flusso del campo magnetico, attraverso un rettangolo infinitesimo dell'avvolgimento di lati $a$ e $dx'$ varia con il tempo ed è dato da $d\phi(t) = NB(x')adx'$, per cui il flusso attraverso l'avvolgimento è dato da:

   $$\phi(t) = \int_x^{x+b} B(x')adx' = N\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_x^{x+b}\frac{dx'}{x'} = N\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}ln\left(\frac{x+b}{x}\right)$$

   Dove x indica la distanza dell'avvolgimento lungo l'asse x in funzione del tempo (vedi figura). Poichè l'avvolgimento è mantenuto in moto con velocità costante, $x = x(t) = x_0 + vt$.
   La FEM indotta al tempo t, è data da:

   $$FEM(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -N\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\frac{x}{x+b}\left(\frac{x-(x+b)}{x^2}\right)\dot{x} = N\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\frac{bv}{x(x+b)} = N\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\frac{bv}{(x_0+vt)(x_0+vt+b)}$$

   Ne segue che l'espressione della corrente indotta nell'avvolgimento al tempo $t$ è data da $I_s(t) = \frac{FEM(t)}{R}$, per cui per $t = t'$:

   $$I_s(t') = \frac{FEM(t')}{R} = 1.7\ mA$$

   con $FEM(t') = 1.7\ mV$.
   Il verso della corrente è orario in quanto la corrente indotta ed il suo verso sono tali da opporsi alla variazione del flusso.

2. Per mantenere in moto l'avvolgimento con velocità costante $v$, la forza che deve essere applicata è uguale e opposta alla forza di Lorentz $\overrightarrow{F}_L(t)$ agente sull'avvolgimento. La forza di Lorentz agente sull'avvolgimento, dovuta alla presenza del campo magnetico si ottiene sommando i contributi associati ai quattro lati dell'avvolgimento. Considerando che quelli dovuti ai lati paralleli alla velocità si elidono reciprocamente, ne segue che $\overrightarrow{F}_L(t)$ ha direzione opposta a quella del moto; pertanto, poichè $\overrightarrow{F}_L(t) = NI_s(t)a\left(B(x+b) - B(x)\right)\hat{x}$, la forza istantanea che deve essere applicata per mantenere in moto l'avvolgimento con velocità costante è data da:

$$\overrightarrow{F}(t) = NI_s(t)a\left(B(x) - B(x+b)\right)\hat{x} = NI_s(t)a\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi\left(x_0+vt\right)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi\left(x_0+vt+b\right)}\right)\hat{x} =$$

$$= \frac{NI_s(t)a\mu_0 Ib}{2\pi}\left(\frac{1}{\left(x_0+vt\right)\left(x_0+vt+b\right)}\right)\hat{x}$$

per cui per $t = t'$

$$\overrightarrow{F}(t') = (5.8 \times 10^{-6}, 0, 0)\ N$$

3. La potenza che viene dissipata nell'avvolgimento al tempo $t = t'$ è data da:

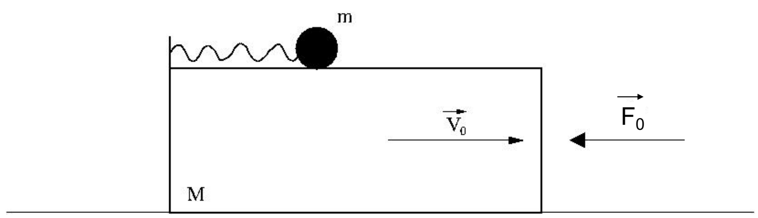
$$P(t') = I_s^2(t')R = 2.9 \times 10^{-6}\ W$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 19/2/2019**
**Cognome : .................................................. Nome : .................................................**

**Matricola: .................................................. Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1




Un blocco di massa M è appoggiato su un piano orizzontale, dove può muoversi senza attrito. Una pallina di massa m, assimilabile ad un punto materiale, è collegata ad un estremo del blocco tramite una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo $l_0$, come in figura. La pallina può muoversi senza attrito sul blocco. All'inizio il sistema trasla con velocità costante $v_0$. Da un certo istante (t=0) una forza opportuna $F_0$, non necessariamente costante, fa frenare il blocco fino a farlo fermare, con decelerazione $a_0$ costante. Sapendo che nell'istante $t = \tau$ in cui il sistema si ferma, la pallina ha velocità relativa nulla rispetto al blocco, che nello stesso istante la molla ha lunghezza $2l_0$, e che da quel momento (per $t > \tau$) il blocco rimane fermo, calcolare:

1. La velocità $v_0$, il tempo di frenata $\tau$ e il modulo dell'accelerazione $a_0$ del blocco, dovuta alla forza $\vec{F}_0$

$$v_0 = \text{...............} \qquad \tau = \text{...............} \qquad a_0 = \text{...............}$$

2. Il lavoro compiuto dalla forza frenante, $L_{frenante}$

$$L_{frenante} = \text{...............}$$

3. La lunghezza minima della molla dopo che il blocco si è fermato per $t > \tau$

$$l_{min} = \text{...............}$$

Dati: $M = 0.4\ Kg$, $m = 0.1\ Kg$, $k = 2\ N/m$, $l_0 = 40\ cm$

# Soluzione Esercizio 1

1. Scriviamo l'equazione del moto per la pallina nel sistema di riferimento non inerziale del blocco (proiettata lungo la direzione orizzontale):

$$-k(x - l_0) + ma_0 = ma_{rel} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

dove x indica la lunghezza della molla. La soluzione di questa equazione differenziale è:

$$x(t) = x^* + Acos(\omega t + \phi)$$

in cui:

$$x^* = l_0 + \frac{ma_0}{k} \; ; \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e con A e $\phi$ da determinare in base alle condizioni iniziali, ovvero la posizione iniziale della pallina e la sua velocità relativa:

$$x(0) = x^* + Acos\phi = l_0 \rightarrow Acos\phi = l_0 - l_0 - \frac{ma_0}{k} = -\frac{ma_0}{k}$$

$$v_{rel}(0) = -A\omega sin(\phi) = 0 \rightarrow \phi = 0 \rightarrow A = -\frac{ma_0}{k}$$

per cui l'equazione del moto diventa:

$$x(t) = l_0 + \frac{ma_0}{k}(1 - cos\omega t)$$

La velocità si ricava dall'equazione del moto come:

$$v_{rel}(t) = \frac{ma_0}{k}\omega sin(\omega t)$$

che  nulla per $\omega t = n\pi$, ovvero, escludendo $t = 0$ in cui la velocità relativa era nulla per dato del problema, succede per la prima volta per $n = 1$, cioè per $t = \pi/\omega = T/2$. Dopo un semiperiodo, quindi, l'elongazione della molla è massima e vale $2l_0$ quindi

$$x(T/2) = l_0 + \frac{ma_0}{k}(1 - cos\omega(T/2)) = 2l_0$$

$$x(T/2) = l_0 + \frac{2ma_0}{k} = 2l_0 \rightarrow a_0 = l_0 k/2m = 4m/s^2$$

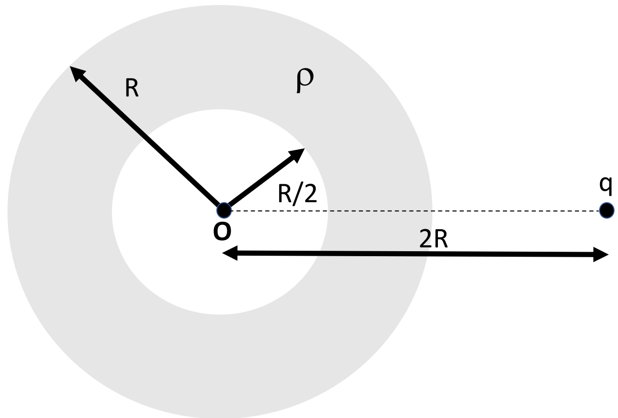
Il tempo di frenata sarà allora $\tau = T/2 = 0.7s$ e la velocità iniziale $v_0 = a_0\tau = 2.8m/s$.

2. Applichiamo il teorema dell'energia cinetica a tutto il sistema, dall'inizio ($t = 0$) fino a quando il blocco si ferma ($t = \tau$) e in quel momento anche la pallina si ferma:

$$L_{frenante} = \frac{1}{2}kl_0^2 - \frac{1}{2}(M + m)V_0^2 = -1.8 \; J$$

3. Da quando il blocco si ferma in poi ($t > \tau$) si conserva l'energia meccanica, per cui la molla inizierà ad oscillare conservando l'energia meccanica. L'ampiezza massima dell'oscillazione sarà quella iniziale, ovvero l'elongazione massima trovata nel punto 1, mentre il centro dell'oscillazione è la lunghezza a riposo della molla. Per cui la molla oscillerà tra $l = 0$ e $l = 2l_0$, passando per il centro di oscillazione a $l_0$, quindi la lunghezza minima della molla è $l_{min} = 0$.

## Esercizio 2




Una carica Q ha una distribuzione di carica nel guscio sferico di raggio interno $R/2$ e raggio esterno R (vedi figura) data da $\rho = Ar$, con $A$ costante di opportune dimensioni. Una particella di massa m e carica q (un protone) si trova a distanza $2R$ da $O$

1. Determinare la densità di carica sul bordo esterno della regione sferica, $\rho(R)$.

$$\rho(R) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Determinare l'accelerazione a cui è soggetta la particella, nella posizione da essa occupata, $a(2R)$.

$$a(2R) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. Determinare la velocità minima, $v$ che deve avere la particella carica per arrivare in $O$

$$v = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dati: $R = 20\ m$, $Q = 20\ \mu C$, $m = 1.67 \times 10^{-27}\ kg$, $q = 1.6 \times 10^{-19}\ C$.

# Soluzione Esercizio 2

1. La carica totale è data da:

$$Q = A\int_{R/2}^{R} r4\pi r^2 dr = 4A\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_{R/2}^{R} = A\pi\left(R^4 - \frac{R^4}{16}\right) = A\pi\frac{15}{16}R^4$$

per cui:

$$A = \frac{16Q}{15\pi R^4} = 4.24\times 10^{-11}\ C/m^4$$

Di conseguenza la densità di carica per $r = R$ vale:

$$\rho(R) = AR = 8.49\times 10^{-10} C/m^3$$

2. le linee di forza del campo elettrico all'esterno della distribuzione sono radiali uscenti. Il modulo del campo elettrico in ogni punto esterno al guscio sferico, per il teorema di Gauss è dato da:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

In particolare per r=2R:

$$E(2R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (2R)^2} = 1.12\times 10^2\ V/m$$

per cui il modulo dell'accelerazione è dato da

$$a = \frac{qE(2R)}{m} = 1.08\times 10^{10}\ m/s^2$$

Da notare che all'interno del guscio per $R/2 \le r \le R$ le linee di forza del CE sono sempre radiali e uscenti e il modulo del CE per il teorema di Gauss soddisfa la relazione:

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{A4\pi\int_{R/2}^{r} r'^3 dr'}{\epsilon_0}$$

Per cui:

$$E(r) = \frac{A}{4\epsilon_0 r^2}\left(r^4 - \frac{R^4}{16}\right)$$

Inoltre, sempre per il teorema di Gauss, il campo elettrico nella regione $0 \le r \le R/2$ è nullo

3. Poichè l'energia è conservata, l'energia iniziale della particella nella posizione $2R$ deve essere uguale all'energia finale in $O$.

$$\frac{1}{2}mv^2 + qV(2R) = \frac{1}{2}mv_f^2 + qV(O)$$

Il valore minimo della velocità $v$ per poter arrivare in O, corrisponde alla velocità di arrivo, $v_f$, nulla in O.
Pertanto: $v = \sqrt{\frac{2q(V(O)-V(2R))}{m}}$ e dobbiamo determinare $(V(O) - V(2R))$ per determinare $v$. Sappiamo che:

$$V(O) - V(2R) = \int_0^{2R} E(r)dr$$

Inoltre, poichè per $0 \le r < R/2$ il campo elettrico è nullo otteniamo:

$$V(O) - V(2R) = \int_{R/2}^{R} \frac{A}{4\epsilon_0 r^2}\left(r^4 - \frac{R^4}{16}\right)dr + \int_{R}^{2R}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr$$

con

$$\int_{R/2}^{R} \frac{A}{4\epsilon_0 r^2}\left(r^4 - \frac{R^4}{16}\right)dr = \frac{AR^3}{4\epsilon_0}\frac{11}{48} = 2.2\times 10^3\ V$$

e

$$\int_{R}^{2R} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \right) = 4.5 \times 10^3 \ V$$

Per cui:

$$V(O) - V(2R) = 6.7 \times 10^3 \ V$$

di conseguenza:

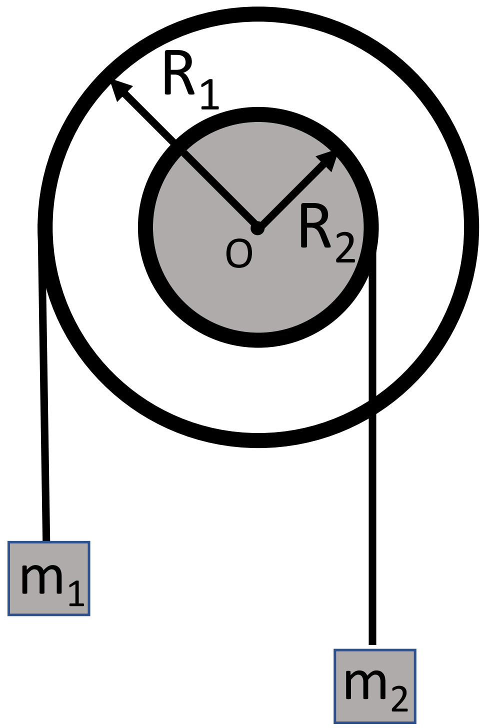
$$v = \sqrt{\frac{2q\left(V(O) - V(2R)\right)}{m}} = 1.13 \times 10^6 \ m/s$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 7/06/2019**
**Cognome : .................................................. Nome : ..................................................**

**Matricola: .................................................. Anno di corso : ........................................**

# Esercizio 1




Due dischi concentrici sono fissati uno sull'altro e possono ruotare alla stessa velocità angolare intorno ad un asse privo di attrito che passa per il centro dei due dischi ($O$, nella figura). Si arrotola una corda connessa ad una massa $m_1$ intorno alla circonferenza del disco di raggio maggiore ($R_1$) ed una seconda corda collegata ad una massa $m_2$ intorno alla circonferenza del disco di raggio minore ($R_2$). Le due corde sono inestensibili e di massa trascurabile e non slittano rispetto ai dischi su cui sono avvolte. Inoltre, se il sistema dei due dischi è in rotazione una delle due corde si arrotola e l'altra si srotola. Il momento d'inerzia complessivo dei due dischi rispetto al centro O (vedi figura), vale $I = 38\ kg \cdot m^2$. I raggi dei dischi sono sono $R_1 = 120\ cm$ e $R_2 = 50\ cm$.

1. Se $m_1 = 25\ kg$, quale dovrebbe essere il valore di $m_2$ affinchè l'accelerazione angolare del sistema dei due dischi sia nulla?

$$m_2 = \dots\dots\dots\dots$$

La massa $m_1$ viene ora portata a 35 $kg$ ed il sistema rilasciato dalla posizione di riposo. Supponendo che $m_2$ sia quello ottenuto al punto precedente, determinare:

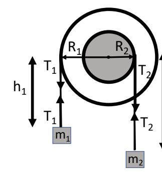
2. L'accelerazione angolare del sistema costituito dai due dischi, $\alpha$

$$\alpha = \dots\dots\dots\dots$$

3. Le tensioni di entrambe le corde, $T_1$, $T_2$

$$T_1 = \dots\dots\dots\dots \qquad T_2 = \dots\dots\dots\dots$$

# Soluzione Esercizio 1




1. All'equilibrio la forza agente sulla massa $m_1$ e quella agente sulla massa $m_2$ sono entrambe nulle inoltre il sistema dei due dischi non ruota, pertanto il momento delle forze rispetto ad O è nullo. Di conseguenza abbiamo un sistema di tre equazioni:

$$\begin{cases} \mathrm{m}_1 g - T_1 = 0 \\ \mathrm{m}_2 g - T_2 = 0 \\ \mathrm{R}_1 T_1 - R_2 T_2 = 0 \end{cases}$$

Dalle quali:

$$m_2 = m_1 \frac{R_1}{R_2} = 60\ kg$$

2. Quando $m_1 = 35\ kg$, la massa $m_1$ scende con accelerazione lineare $a_1 = \alpha R_1$, la massa $m_2$ sale con accelerazione lineare $a_2 = \alpha R_2$. Ovviamente:

$$a_1 = a_2 \frac{R_1}{R_2} > a_2$$

Durante il moto vale il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \mathrm{m}_1 a_1 = m_1 g - T_1 \\ \mathrm{m}_2 a_2 = T_2 - m_2 g \\ (\mathrm{R}_1 T_1 - R_2 T_2)\hat{z} = I\alpha\hat{z} \end{cases}$$

Ricordando che $a_1 = \alpha R_1$ e $a_2 = \alpha R_2$, si ottiene:

$$\begin{cases} \mathrm{m}_1 \alpha R_1 = m_1 g - T_1 \\ \mathrm{m}_2 \alpha R_2 = T_2 - m_2 g \\ (\mathrm{R}_1 T_1 - R_2 T_2) = I\alpha \end{cases}$$

o anche moltiplicando la prima per $R_1$ e la seconda per $R_2$:

$$\begin{cases} \mathrm{m}_1 \alpha R_1^2 = m_1 g R_1 - T_1 R_1 \\ \mathrm{m}_2 \alpha R_2^2 = T_2 R_2 - m_2 g R_2 \\ \mathrm{I}\alpha = (R_1 T_1 - R_2 T_2) \end{cases}$$

e sommando le prime due equazioni del sistema alla terza

$$\alpha \left(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + I\right) = g\left(m_1 R_1 - m_2 R_2\right)$$

dalle quali

$$\alpha = g \frac{(m_1 R_1 - m_2 R_2)}{(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + I)} = 1.14\ rad/s^2$$

Un altro modo per determinare $\alpha$ consiste, non essendoci in gioco forze non conservative, nell'utilizzare la conservazione dell'energia del sistema. Scegliendo l'origine dell'energia potenziale in $h_1 = h_2 = 0$ e ricordando che il sistema ruota in senso antiorario e che per $m_1$ che scende di $R_1\theta$ rispetto alla quota di partenza ($h_1$, $m_2$ sale di $R_2\theta$ (rispetto a $h_2$), l'energia del sistema è data da:

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\omega R_1\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\omega R_2\right)^2 + m_1 g\left(-h_1 - R_1\theta\right) + m_2 g\left(-h_2 + R_2\theta\right) = costante$$

Derivando l'energia, imponendo la conservazione dell'energia $\frac{dE}{dt} = 0$ e poichè $\dot{\theta} = \omega$, otteniamo:

$$0 = I\omega\dot{\omega} + m_1 R_1^2 \omega\dot{\omega} + m_2 R_2^2 \omega\dot{\omega} - m_1 R_1 \omega + m_2 R_2 \omega$$

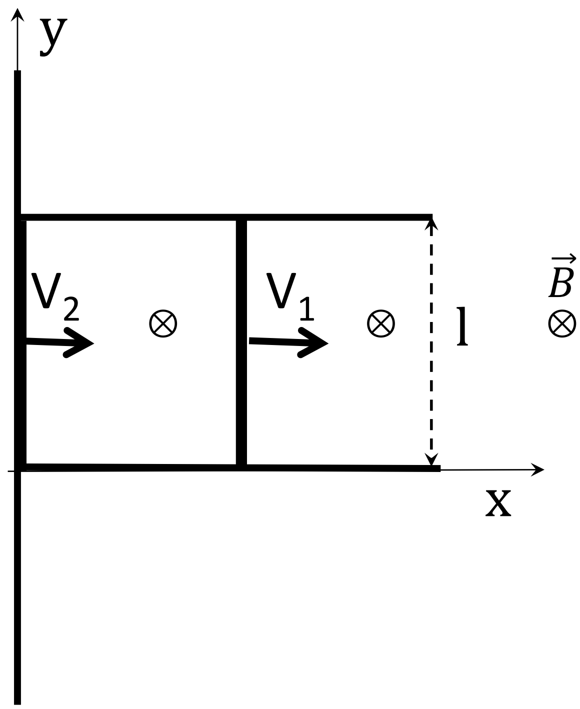
Per cui dividendo per $\omega$ e risolvendo l'equazione troviamo $\dot{\omega}$ e quindi, poichè $\dot{\omega} = \alpha$, otteniamo $\alpha$.

3. Utillizzando le prime due equazioni del secondo sistema di equazioni del punto [2], otteniamo:

$$T_1 = m_1 (g - R_1 \alpha) = 295 \ N$$

$$T_2 = m_2 (g + R_2 \alpha) = 623 \ N$$

## Esercizio 2




Due sbarrette conduttrici, ciascuna di resistenza $R = 2\ \Omega$, poggiano e possono scorrere senza attrito su due binari orizzontali di resistenza trascurabile. La distanza tra i binari è $l = 1.3\ m$. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $B = 0.5\ T$ , entrante nel piano della figura. Le sbarrette si muovono con velocità costante $v_1 = 8\ m/s$ e $v_2 = 3\ m/s$.
Determinare

1. L'intensità della corrente circolante (il suo modulo), $i$, e il verso (se orario e antiorario) giustificando la risposta

   $i =$ .....................

2. Le forze esterne $\vec{F}_{ext1}$, $\vec{F}_{ext2}$ che debbono essere applicate per mantenere rispettivamente $v_1$ e $v_2$ costanti.

   $\vec{F}_{ext1} =$ ..................... $\vec{F}_{ext2} =$ .....................

3. Determinare la potenza necessaria a mantenere in moto rispettivamente la sbarretta 1, $P_1$, e la sbarretta 2, $P_2$.

   $P_1 =$ ..................... $P_2 =$ .....................

Dati: $R = 2\ \Omega$, $l = 1.3\ m$, $B = 0.5\ T$, $v_1 = 8\ m/s$, $v_2 = 3\ m/s$.

## Soluzione Esercizio 2

1. Il flusso del campo magnetico attraverso la superficie del circuito, che coincide con la superficie tra le sbarrette vale:

$$\phi = Bl\,(x_1 - x_2)$$

Quindi la forza elettromotrice indotta vale:

$$fem = -\frac{d\phi}{dt} = -Bl\,(v_1 - v_2)$$

per cui la corrente indotta (con il suo segno) vale

$$i_{ind} = \frac{fem}{2R}$$

ed il suo verso è antiorario, infatti, dato che l'area aumenta, la corrente circolante deve essere tale da generare un campo che si oppone a quello entrante. L'intensità della corrente indotta è data pertanto da:

$$i = |i_{ind}| = 0.8\ A$$

2. Sulla sbarretta 1 viene esercitata una forza frenante diretta lungo l'asse x:

$$\overrightarrow{F}_1 = -ilB\hat{x}$$

mentre la forza esercitata sulla sbarretta 2

$$\overrightarrow{F}_2 = ilB\hat{x}$$

con $ilB = 0.53N$. Per mantenere in moto con velocità costante le sbarrette la forza risultante su ciascuna di esse deve essere nulla, pertanto le forze esterne da applicare rispettivamente sulla sbarretta 1 e la sbarretta 2 sono:

$$\overrightarrow{F}_{ext1} = ilB\hat{x}$$
$$\overrightarrow{F}_{ext2} = -ilB\hat{x}$$

3. La potenza necessaria è fornita dalle forze esterne applicate.

$$P_1 = \overrightarrow{F}_{ext1} \bullet \overrightarrow{v_1} = ilBv_1 = 4.2\ W$$

$$P_2 = \overrightarrow{F}_{ext2} \bullet \overrightarrow{v_2} = -ilBv_2 = -1.6\ W$$

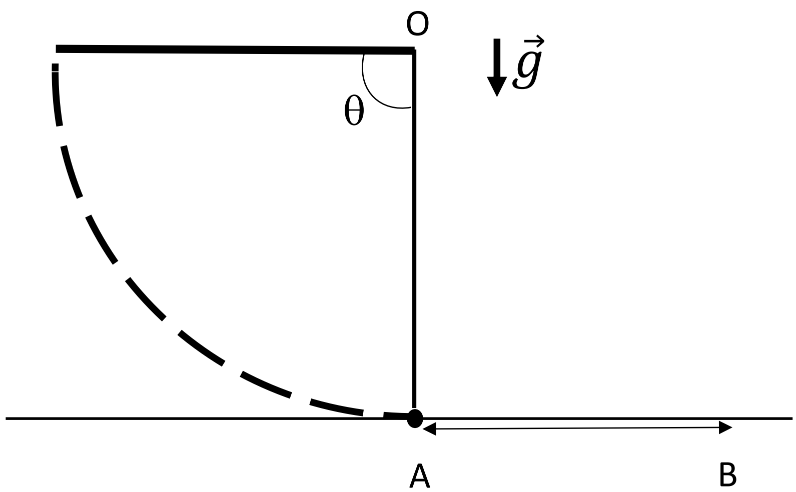
La somma di $P_1$ e $P_2$ è pari alla potenza dissipata per effetto Joule: $P_{Tot} = 2Ri^2 = 2.6\ W$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 19/07/2019**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : ......................................**

# Esercizio 1




Un'asta rigida sottile ed omogenea di massa $M = 3\ kg$ e lunghezza $l = 2\ m$ è vincolata a ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il punto fisso O. L'asta, lasciata libera di muoversi a partire dalla configurazione $\theta = 90^o$, urta in modo completamente elastico un corpo assimilabile a un punto materiale situato sulla verticale, nel punto A. Dopo l'urto, l'asta rimane in quiete.

1. Si calcoli la velocità angolare dell'asta, $\omega_0$, un'istante prima dell'urto.

$\omega_0 =$ ..............

2. Si calcoli la massa del corpo, $m$, e la sua velocità, $v_0$, immediatamente dopo l'urto.

$m =$ ..............     $v_0 =$ ..............

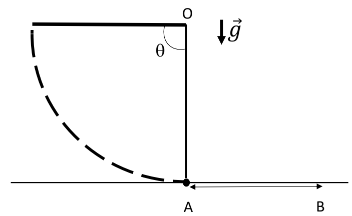
Successivamente, il corpo percorre un tratto rettilineo su una guida orizzontale scabra, caratterizzata da un coefficente di attrito dinamico $\mu_d = 0.7$.

3. Calcolare la distanza, $d$, percorsa dal corpo sul piano, dal punto A fino al punto B in cui si arresta.

$d =$ ..............

Dati: $M = 3\ kg$, $l = 2\ m$, $\theta = 90^o$, $\mu_d = 0.7$.

# Soluzione Esercizio 1




1. Durante il moto dell'asta dalla configurazione iniziale ($\theta = 90^o$) alla configurazione finale ($\theta = 0^o$), l'energia meccanica si conserva (i vincoli sono lisci). Assumendo l'origine dell'energia potenziale gravitazionale in A, dalla conservazione dell'energia otteniamo:
$$Mgl = \frac{1}{2}I_o\omega_0^2 + \frac{1}{2}Mgl$$
dove $I_O$ è il momento di inerzia dell' asta rispetto ad un asse perpendicolare al piano del foglio e passante per O.
$$I_O = \frac{Ml^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{3} = 4\ kgm^2$$
Per cui, un istante prima dell'urto:
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{I_0}} = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 3.83\ rad/s$$

2. L'asta urta il corpo in modo elastico con $\theta = 0$.
Nel processo:

a) si conserva l'energia cinetica del sistema asta-corpo, poichè si tratta di un urto completamente elastico

b) la quantità di moto del sistema non si conserva a causa della presenza della reazione vincolare di natura impulsiva applicata all'asta in $O$

c) il momento angolare del sistema calcolato rispetto al polo O si conserva poichè il momento delle forze esterne rispetto al polo $O$ è nullo.
Di conseguenza, dalla conservazione dell'energia cinetica:

1)$\frac{1}{2}I_O\omega_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$

e dalla conservazione del momento angolare (vettore ortogonale al piano xy della figura, $I_O\omega\hat{z} = lmv_0\hat{z}$):

2)$I_O\omega_0 = lmv_0$

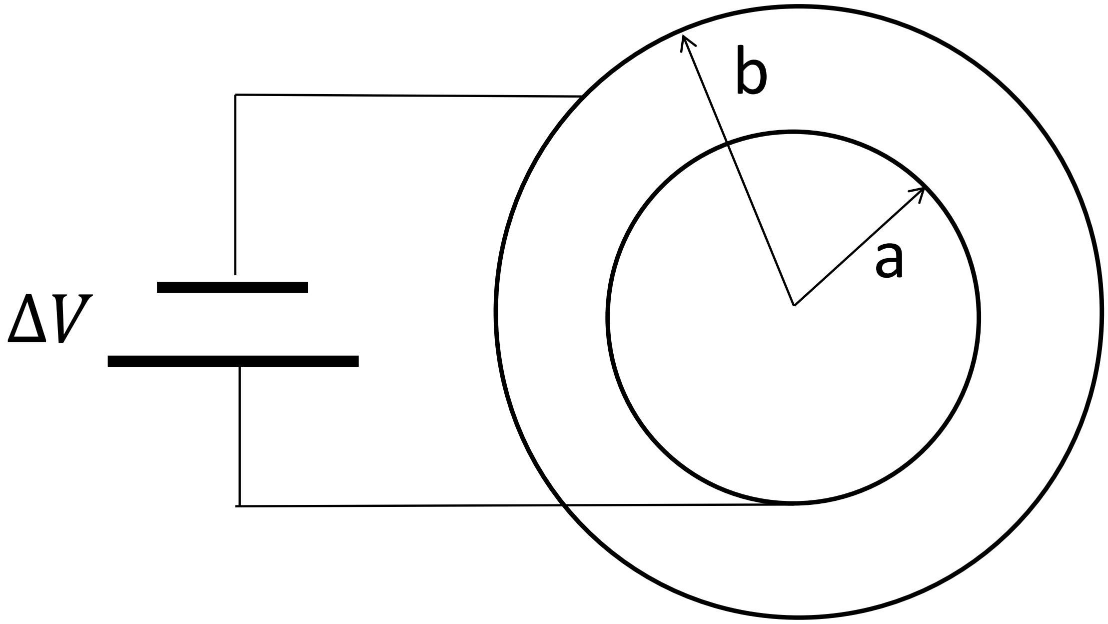
elevando al quadrato la 2) e dividendo a membro a membro l'equazione 2) per la 1) e semplificando otteniamo:

2.1
$$I_O = ml^2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{I_O}{l^2} = \frac{Ml^2}{3}\frac{1}{l^2} = \frac{M}{3} = 1\ kg$$

2.2 Sostituendo l'espressione della massa $m$ nell'equazione 2) e sfruttando l'espressione di $\omega_0$ otteniamo:
$$v_0 = \frac{I_O\omega_0}{lm} = \frac{Ml^2}{3}\sqrt{\frac{3g}{l}}\frac{1}{l}\frac{3}{M} = \sqrt{3lg} = 7.67\ m/s$$

3. Indicando con $T_f$ e $T_i$, rispettivamente l'energia cinetica finale e iniziale, poichè l'unica forza in gioco è la forza di attrito ($\overrightarrow{F}_a$), in quanto la reazione vincolare ($\overrightarrow{R}$) del piano bilancia la forza peso ($m\overrightarrow{g}$), abbiamo:
$$T_f - T_i = -\frac{1}{2}mv_0^2 = \int_A^B \overrightarrow{F}_a \bullet \overrightarrow{ds} = -\mu_d mg\int_A^B dx = -\mu_d mgd \quad \Rightarrow \quad d = \frac{v_0^2}{2\mu_d g} = \frac{3l}{2\mu_d} = 4.28\ m$$
dove $d = B - A$.

## Esercizio 2




Le armature di un condensatore sferico di raggi $a$ e $b$, e vengono mantenute ad una differenza di potenziale costante $\Delta V = V(a) - V(b)$ da una pila, come in figura.

1. Ricavare l'espressione e calcolare la capacità del condensatore, $C$, nonchè l'energia elettrostatica in esso immagazzinata, $U$.

   $C =$ .............   $U =$ .............

2. Calcolare la densità di carica sull'armatura interna $\sigma_a$.

   $\sigma_a =$ .............

3. Determinare a parità di differenza di potenziale $\Delta V$ e di raggio $b$ dell'armatura esterna, quanto deve valere il raggio dell'armatura interna $a'$ affinchè su di essa il campo elettrico $E(a')$ sia minimo.

   $a' =$ .............

Dati: $\Delta V = 10\ V$, $a = 0.6\ cm$, $b = 1\ cm$.

# Soluzione Esercizio 2

1. Per ricavare l'espressione della capacità dobbiamo determinare il rapporto di $\frac{Q}{\Delta V}$.
   Il condensatore si carica con carica $Q > 0$ sull'armatura interna e carica -$Q$ su quella esterna. La carica $Q$ è distribuita uniformemente sulla superficie di raggio $a$ mentre la carica $-Q$ è distribuita uniformemente sulla superficie di raggio $b$.
   Al campo elettrico nella regione $a \leq r \leq b$ contribuisce solo la superficie interna: data la simmetria della distribuzione di carica in questa regione esso è diretto radialmente da $a$ a $b$ con verso da $a$ a $b$ e dipende solo da $r$. Applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica concentrica al condensatore ed avente raggio r tale che $a \leq r \leq b$, otteniamo:

   $$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

   La differenza di potenziale tra le armature è data da:

   $$\Delta V = V(a) - V(b) = \int_a^b E(r)dr = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

   1.1 Di conseguenza, dalla definizione di capacità otteniamo:

   $$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} = 1.67\ pF$$

   1.2 L'energia immagazzinata nel condensatore è data da:

   $$U = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = 83.4\ pJ$$

2. La densità di carica sulla superficie interna è data da:

   $$\sigma_a = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

   che esprimendo $Q$ in funzione di $\Delta V$,

   $$Q = \Delta V 4\pi\epsilon_0 \frac{ba}{b-a}$$

   fornisce:

   $$\sigma_a = \Delta V \epsilon_0 \frac{b}{(b-a)a} = 3.7 \times 10^{-8}\ \frac{C}{m^2}$$

3. A parità di differenza di potenziale $\Delta V$ e di raggio $b$ dell'armatura esterna, per determinare il il raggio $a'$ dell'armatura interna affinchè su di essa il campo elettrico $E(a')$ sia minimo, è necessario esprimere il campo elettrico in funzione di $\Delta V$.

   $$E(a') = \frac{Q(a')}{4\pi\epsilon_0 a'^2}$$

   prendendo l'espressione di $Q(a')$ in funzione di $\Delta V$ otteniamo:

   $$E(a') = \Delta V 4\pi\epsilon_0 \frac{ba'}{b-a'} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a'^2} = \frac{\Delta V b}{a'(b-a')}$$

   dalla quale imponendo che la derivata del campo elettrico rispetto ad $a'$ sia nulla otteniamo:

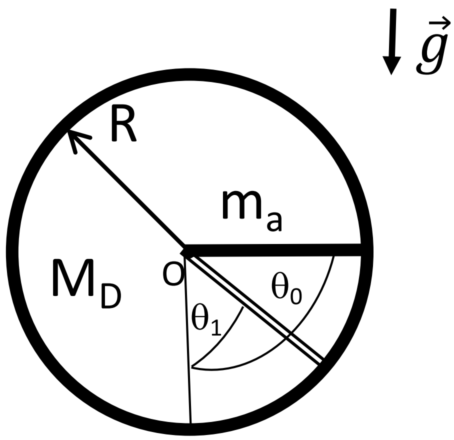
   $$\frac{dE(a')}{da'} = -\Delta V b \left(a'(b-a')\right)^{-2}(-2a' + b) = 0 \qquad \Rightarrow a' = \frac{b}{2} = 0.5\ cm$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 28/06/2019**
**Cognome : .................................................. Nome : ..................................................**

**Matricola: .................................................. Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1




Un'asta omogenea di massa $m_a$ e di lunghezza $R$ è rigidamente vincolata ad un disco omogeneo di massa $M_D$ e raggio $R$. Il sistema è libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per il centro del disco ($O$, in figura) e perpendicolare al disco.

1. Calcolare la distanza $d$ del centro di massa del sistema dal centro del disco ($O$).

$$d = \text{..............}$$

2. Determinare il momento di inerzia $I_O$ del sistema rispetto all'asse di rotazione passante per il centro del disco e calcolare la velocità angolare del sistema ($\omega_1$) quando esso raggiunge posizione indicata in figura ($\theta_1$) una volta lasciato libero di ruotare dalla posizione corrispondente a $\theta_0$.

$$I_O = \text{..............} \qquad \omega_1 = \text{..............}$$

3. Determinare il periodo delle piccole oscillazioni $T$, attorno alla posizione di equilibrio del sistema.

$$T = \text{..............}$$

Dati: $m_a = 10\ g$, $M_D = 60\ g$, $R = 30\ cm$, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

## Soluzione Esercizio 1

1. Considerando la massa del disco posizionata nel centro di massa del disco (a distanza nulla da $O$) e la massa dell'asta posizionata nel centro di massa dell'asta (a distanza $R/2$ da 0), il centro di massa giace sull'asta e la distanza del centro di massa del sistema da $O$ è data da:

$$d = \frac{M_D x_D + m_a x_a}{M_D + m_a} = \frac{m_a R/2}{M_D + m_a} = 2.14 \times 10^{-2}\ m$$

2. Il momento di inerzia $I_O$ del sistema rispetto all'asse di rotazione passante per il centro del disco ($O$), dal teorema di Steiner è dato da:

$$I_O = I^{cm}_{asta} + I^{cm}_{disco} + m_a \left(\frac{R}{2}\right)^2 = 3 \times 10^{-3}\ kgm^2$$

dove abbiamo indicato con $I^{cm}_{asta}$ e $I^{cm}_{disco}$ rispettivamente i momenti di inerzia dell'asta e del disco rispetto ai relativi centri di massa.
Il sistema è assimilabile ad un pendolo fisico. La posizione di equilibrio stabile del sistema è quella corrispondente all'asta in basso in posizione verticale ($\theta = 0$). Se posto in questa questa posizione, il sistema resta in questa configurazione, e se il sistema è ruotato di un piccolo angolo $\theta_0$, esso inizierà ad oscillare attorno alla posizione di equilibrio $\theta = 0$. Assumendo l'origine dell'energia potenziale del sistema nella posizione di equilibrio stabile, l'energia del sistema quando l'angolo è $\theta_1$ è data da:

$$E(\theta_1) = \frac{1}{2} I_O \omega_1^2 + (m_a + M_D)\, gd(1 - cos\,(\theta_1))$$

con $\omega_1 = \dot{\theta}_1$. Poichè non ci sono forze dissipative, e il sistema è lasciato libero di ruotare (velocità angolare iniziale nulla) dalla posizione iniziale $\theta_0$, vale:

$$E(\theta_1) = E(\theta_0) = (m_a + M_D)\, gd(1 - cos\,(\theta_0)) = costante$$

Di conseguenza:

$$\frac{1}{2} I_O \omega_1^2 = (m_a + M_D)\, gd(cos\,(\theta_1) - cos\,(\theta_0))$$

per cui:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\,(m_a + M_D)\, gd(cos\,(\theta_1) - cos\,(\theta_0))}{I_O}} = 2.63\ s^{-1}$$

3 Ci sono due procedure per risolvere il problema. La prima considera la conservazione dell'energia che per una posizione arbitraria del pendolo composto, $\theta$, ci permette di esprimere l'energia del sistema come:

$$E(\theta) = \frac{1}{2} I_O \omega^2 + (m_a + M_D)\, gd(1 - cos\,(\theta)) = costante$$

Per cui:

$$\frac{dE}{dt} = 0 = I_O \omega \dot{\omega} + (m_a + M_D)\, gdsin\,(\theta)\,\dot{\theta}$$

Ricordando che $\omega = \dot{\theta}$ e $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$, dividendo per $\omega$ l'ultima equazione, otteniamo:

$$I_O \ddot{\theta} + (m_a + M_D)\, gdsin\,(\theta) = 0$$

Per piccole oscillazioni: $sin\,(\theta) \simeq \theta$, per cui l'equazione diviene:

$$\ddot{\theta} + \frac{(m_a + M_D)\, gd\theta}{I_O} = 0$$

che è l'equazione differenziale dei moti oscillatori non smorzati. La legge oraria del moto è:

$$\theta(t) = \theta_0 cos(\Omega t)$$

con

$$\Omega = \sqrt{\frac{(m_a + M_D)\, gd}{I_O}} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{(m_a + M_D)\, gd}} = 2.84\ s$$

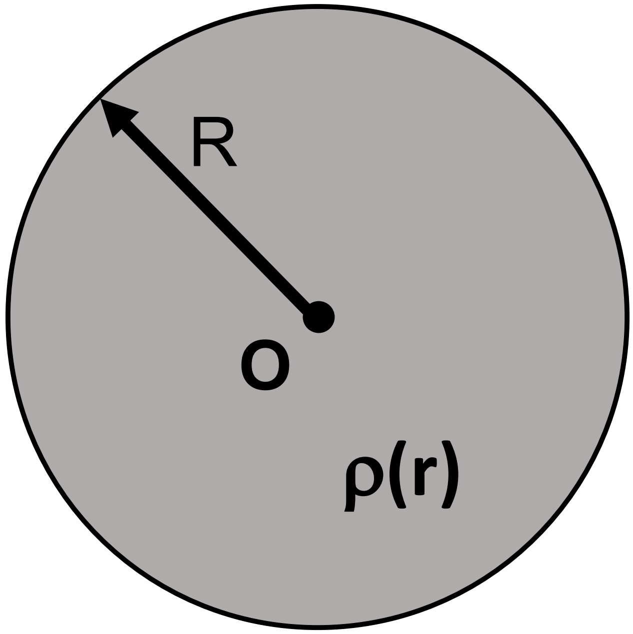
La seconda procedura sfrutta la $II^a$ equazione cardinale. Quando il pendolo composto viene spostato dalla posizione di equilibrio ($\theta = 0$) ad una posizione in cui l'angolo è $\theta$, utilizzando per il calcolo del momento delle forze O come polo, si ha un momento ($\overrightarrow{M}^O$) non nullo. In particolare:

$$\overrightarrow{M}^O = I_O \dot{\omega} \hat{z} = -(m_a + M_D) g d sin\,(\theta)\,\hat{z} \quad \Rightarrow \quad I_O \ddot{\theta} + (m_a + M_D)\, g d sin\,(\theta) = 0$$

che per piccole oscillazioni, tenendo conto che $\omega = \dot{\theta}$ porta alla stessa equazione ottenuta con il metodo della conservazione dell'energia:

$$\ddot{\theta} + \frac{(m_a + M_D)\, g d \theta}{I_O} = 0$$

## Esercizio 2




Una nuvola sferica di raggio R, ha una densità di carica variabile con la distanza dal centro con la legge:

$$\rho = A\frac{r^2}{R^2} \qquad per\ 0 \leq r \leq R$$

La nuvola ha una carica totale $Q$.
Determinare:

1. Il valore di $A$.

   $A =$ .....................

2. Il campo elettrico ad una distanza dal centro della nuvola pari a R/2, $\overrightarrow{E}\left(\frac{R}{2}\right)$, e a distanza pari a $2R$, $\overrightarrow{E}\,(2R)$.

   $\overrightarrow{E}\left(\frac{R}{2}\right) =$ ..................... $\overrightarrow{E}\,(2R) =$ .....................

3. Determinare la differenza di potenziale tra il centro, $C$, della nuvola e l'infinito, dovuta alla distribuzione di carica della nuvola, $V(C) - V(\infty)$.

   $V(C) - V(\infty) =$ .....................

Dati: $Q = 5\ nC$, $R = 10\ cm$

## Soluzione Esercizio 2

1. La carica in un guscio sferico di raggio r e spessore dr: è data da:

$$dq = \rho dV = \rho 4\pi r^2 dr = A\frac{r^2}{R^2}4\pi r^2 dr$$

Quindi la carica totale è data da:

$$Q = \frac{4\pi A}{R^2}\int_0^R r^4 dr = \left(\frac{4\pi A}{5}\right)R^3$$

per cui

$$A = \frac{5Q}{4\pi R^3} = 2\times 10^{-6}\,\frac{C}{m^3}$$

2.1 All'interno della nuvola sferica per $0 \leq r \leq R$ le linee di forza del CE sono radiali e uscenti e il modulo del CE per il teorema di Gauss soddisfa la relazione:

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi A}{\epsilon_0 R^2}\int_0^r r'^4 dr' = \frac{4\pi A}{\epsilon_0 R^2}\frac{r^5}{5}$$

Per cui per $0 \leq r \leq R$:

$$E(r) = \frac{Ar^3}{5\epsilon_0 R^2}$$

con $E\left(\frac{R}{2}\right) = 562\ V/m$

2.2 Le linee di forza del campo elettrico all'esterno della distribuzione sono radiali uscenti. Il modulo del campo elettrico in ogni punto esterno alla nuvola sferica, per $R \leq r$ per il teorema di Gauss è dato da:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

In particolare per r=2R:

$$E(2R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (2R)^2} = 11.23\times 10^2\ V/m$$

3 La differenza di potenziale tra il centro ($C$) della nuvola ed il suo bordo, utilizzando l'espressione di $E(r)$ per $0 \leq r \leq R$, è data da:

$$V(0) - V(R) = \int_0^R E(r)dr = \frac{A}{5\epsilon_0 R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{AR^2}{20\epsilon_0} = 112\ V$$

Mentre la differenza di potenziale tra il bordo della nuvola e l'infinito, utilizzando l'espressione di $E(r)$ per $R \leq r$, è data da:

$$V(R) - V(\infty) = \int_R^\infty E(r)dr = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = 449\ V$$

Per cui:

$$V(0) - V(R) + V(R) - V(\infty) = V(0) - V(\infty) = 561\ V$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 18/9/2019**
**Cognome : ................................................. Nome : .................................................**

**Matricola: ................................................. Anno di corso : .......................................**

# Esercizio 1


Una massa $M = 1\ kg$, assimilabile ad un punto materiale, oscilla su un piano orizzontale senza attrito sotto l'azione della forza elastica esercitata da una molla di costante elastica $k = 300\ N/m$. Una massa $m = 0.1\ kg$, anch'essa assimilabile ad un punto materiale, che si muove (vedi figura) con velocità orizzontale $v_0 = 30\ m/s$ sul piano, urta la massa M nel punto di massima elongazione della molla, corrispondente all'ampiezza massima di oscillazione $A_0 = 0.5\ m$. Subito dopo l'urto, la massa m resta attaccata ad M. Si calcoli:

1. La velocità del sistema $M + m$ subito dopo l'urto, $v'$

$$v' = ...............$$

2. La quantità di energia dissipata nell'urto, $E_{diss}$

$$E_{diss} = ...............$$

3. L'ampiezza massima delle oscillazioni dopo l'urto, $A_{max}$

$$A_{max} = ...............$$

Dati: $M = 1\ kg$, $k = 300\ N/m$, $m = 0.1\ kg$, $v_0 = 30\ m/s$, $A_0 = 0.5\ m$

## Soluzione Esercizio 1

1. Durante l'urto la quantità di moto del sistema m+M si conserva (non agiscono forze esterne di natura impulsiva). L'urto avviene nella configurazione in cui la molla ha raggiunto la massima elongazione (in corrispondenza quindi del punto di inversione della traiettoria, in cui la velocità della massa M si annulla) ed è completamente anelastico (m resta attaccata a M). Per cui, un istante prima dell'urto la quantità di moto totale del sitema è $mv_0$, mentre un'istante dopo l'urto essa è data da $(M+m)v'$, dove $v'$ rappresenta la velocità del sistema $m+M$ subito dopo l'urto. Quindi, applicando la conservazione della quantità di moto del sistema, otteniamo:

$$mv_0 = (M+m)v' \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{mv_0}{M+m} = 2.7\ m/s$$

2. L'energia dissipata durante l'urto si ricava calcolando la variazione di energia cinetica tra l'istante subito prima e quello subito dopo l'urto.

$$E_{diss} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)\,v'^2 = 41\ J$$

3. Il valore della massima ampiezza di oscillazione, $A_{max}$, si ottiene applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica per il sistema m+M, che vale in questo caso poichè non sono presenti forze dissipative dopo l'urto. L'energia del sistema un'istante dopo l'urto è data da:

$$\frac{1}{2}kA_0^2 + \frac{1}{2}(m+M)\,v'^2$$

Dove il primo termine rappresenta l'energia potenziale e il secondo l'energia cinetica del sistema subito dopo l'urto. Mentre la massima energia potenziale si ha quando la velocità del sistema si annulla e l'elongazione della molla è massima. Per cui quando l'elogazione della molla è massima, l'energia del sistema è data dal solo termine di energia potenziale:

$$\frac{1}{2}kA_{max}^2$$

Applicando la conservazione dell'energia, in quanto non sono presenti forze esterne dissipative. Usando l'espressione di $v'$ della seconda domanda e risolvendo otteniamo:

$$\frac{1}{2}kA_0^2 + \frac{1}{2}(m+M)\,v'^2 = \frac{1}{2}kA_{max}^2 \quad \Rightarrow \quad A_{max} = \sqrt{A_0^2 + \frac{m^2v_0^2}{k\,(m+M)}} = 0.53\ m$$

Un metodo alternativo è quello di utilizzare l'equazione della molla a cui è ora attaccata una massa $M+m$ e sfruttare le condizioni iniziali note per determinare $A_{max}$. La soluzione generale per il per il moto armonico del sistema è data da:

$$x(t) = A_{max}cos(\omega t + \phi)$$

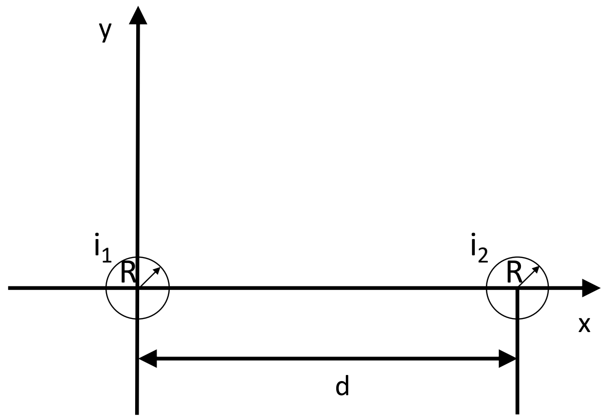
Dove $\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$.
Le condizioni iniziali, assumendo $t = 0$ un istante dopo l'urto, sono date da:

$$A_0 = x(0) = A_{max}cos(\phi) \quad v' = v(0) = \dot{x}(0) = -\omega A_{max}sin(\phi)$$

per cui $cos(\phi) = A_0/A_{max}$ e $sin(\phi) = -v'/\omega A_{max}$. Per cui quadrando e sommando membro a membro le due equazioni otteniamo:

$$1 = \frac{A_0^2}{A_{max}^2} + \frac{v'^2}{\omega^2 A_{max}^2} \quad \Rightarrow \quad A_{max} = \sqrt{A_0^2 + \frac{v'^2}{\omega^2}} = \sqrt{A_0^2 + \frac{v'^2\,(m+M)}{k}}$$

## Esercizio 2




Consideriamo due fili di materiale conduttore paralleli, di raggio $R$, posti nel vuoto, con gli assi distanti d e percorsi dalla stessa corrente $i_1 = i_2 = i$ in direzione dell'asse z (vedi figura) e con lo stesso verso (ortogonale e uscente dal foglio). Assumendo l'asse x come indicato in figura:

1. Determinare l'espressione del campo di induzione magnetica nella regione $(A)$ dell'asse x (y=z=0) corrispondente a $0 \leq x \leq R$, $\overrightarrow{B}_A(x)$ e calcolare le componenti del campo quando $x = 0$, $\overrightarrow{B}_A(0)$

$$\overrightarrow{B}_A(x) = \text{..............} \quad \overrightarrow{B}_A(0) = \text{..............}$$

2. Si determini l'espressione del campo di induzione magnetica nella regione $(B)$ dell'asse x (y=z=0), compresa tra i due fili, corrispondente a $R \leq x \leq d - R$, $\overrightarrow{B}_B(x)$, e calcolare e componenti del campo quando $x = \frac{d}{2}$, $\overrightarrow{B}_B\left(\frac{d}{2}\right)$

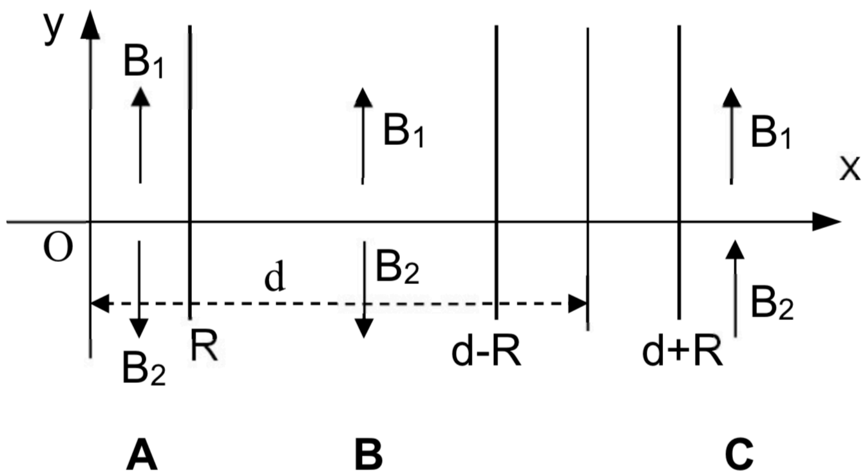
$$\overrightarrow{B}_B(x) = \text{..............} \quad \overrightarrow{B}_B\left(\frac{d}{2}\right) = \text{..............}$$

3. Si determini l'espressione del campo di induzione magnetica nella regione $(C)$ dell'asse x (y=z=0), corrispondente a $x \geq d + R$, $\overrightarrow{B}_C(x)$

$$\overrightarrow{B}_C(x) = \text{..............}$$

Dati: $d = 4\ cm$, $i = 4\ A$.

# Soluzione Esercizio 2




Le linee di campo magnetico per un filo percorso da corrente sono delle circonferenze con centro sull'asse del filo (parallelo all'asse z per i fili di questo esercizio, non indicato in figura e uscente dal foglio) e parallele al piano ortogonale al filo (x,y, per i due fili dell'esercizio). Per la regola della mano destra il verso delle linee di campo per i fili di questo esercizio è antiorario rispetto all'asse $z$.
Il verso e la direzione del campo creato da ciascun filo ($\overrightarrow{B}_1$ e $\overrightarrow{B}_2$ ), nelle regioni $A$, $B$ e $C$, sono quelli indicati nella figura (il disegno non è in scala). Per il teorema di sovrapposizione il campo magnetico risultante in ogni regione è dato dalla somma vettoriale dei campi $\overrightarrow{B}_1$ e $\overrightarrow{B}_2$ nella regione di interesse. L'espressione dei moduli dei campi magnetici in ogni regione si ottiene applicando il Teorema di Ampere ad una linea di campo circolare di raggio generico $r$:

$$B(r)2\pi r = \mu_0 I_{conc}$$

dove $I_{conc}$ è la corrente concatenata con la linea circolare ed r indica la distanza tra l'asse del filo considerato e il punto in cui si vuole calcolare il campo.

1. Nella regione $A$ per $0 \leq x \leq R$, dall'applicazione del Teorema di Ampere otteniamo per il modulo di $\overrightarrow{B}_1$:

$$B_1(x) = \frac{\mu_0 I_{conc}}{2\pi x}$$

in questo caso il campo magnetico è calcolato all'interno del filo 1 per cui:

$$I_{conc} = \frac{i}{\pi R^2}\pi x^2 \quad \Rightarrow \quad B_1(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{x}{R^2}$$

Per cui tenendo conto del verso e della direzione:

$$\overrightarrow{B}_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{x}{R^2}\hat{y}$$

Mentre, per il modulo di $\overrightarrow{B}_2$:

$$B_2(x) = \frac{\mu_0 I_{conc}}{2\pi\,(d-x)}$$

in questo caso il campo magnetico è calcolato all'esterno del filo 2 per cui:

$$I_{conc} = i \quad \Rightarrow \quad B_2(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi\,(d-x)}$$

Per cui tenendo conto del verso e della direzione:

$$\overrightarrow{B}_2 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi\,(d-x)}\hat{y}$$

Sommando per la regione $A$ i campi generati dal filo 1 e dal filo 2 otteniamo:

$$\overrightarrow{B}_A(x) = \overrightarrow{B}_1 + \overrightarrow{B}_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{x}{R^2} - \frac{1}{(d-x)}\right)\hat{y}$$

Per $x = 0$:

$$\overrightarrow{B}_A(0) = \overrightarrow{B}_1 + \overrightarrow{B}_2 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{1}{d}\hat{y} \quad con \ -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{1}{d} = -2 \times 10^{-5}\ T$$

2. Usando la stessa procedura nella regione $B$ compresa tra i due fili, corrispondente a $R \leq x \leq d - R$ e tenendo conto che in questo caso $I_{conc} = i$ per il contributo di ciascun filo, otteniamo:

$$\overrightarrow{B}_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}\hat{y}$$

$$\overrightarrow{B}_2 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi\,(d-x)}\hat{y}$$

$$\overrightarrow{B}_B(x) = \overrightarrow{B}_1 + \overrightarrow{B}_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(d-x)}\right)\hat{y}$$

per cui, per $x = d/2$ il campo magnetico è nullo.

3. Nella terza regione ($C$), corrispondente a $x \geq d + R$, applicando la stessa procedura, con $I_{conc} = i$ per il contributo di ciascun filo e poichè $\overrightarrow{B}_2$ in questo caso ha direzione e verso dell'asse y, otteniamo:

$$\overrightarrow{B}_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}\hat{y}$$

$$\overrightarrow{B}_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi\,(x-d)}\hat{y}$$

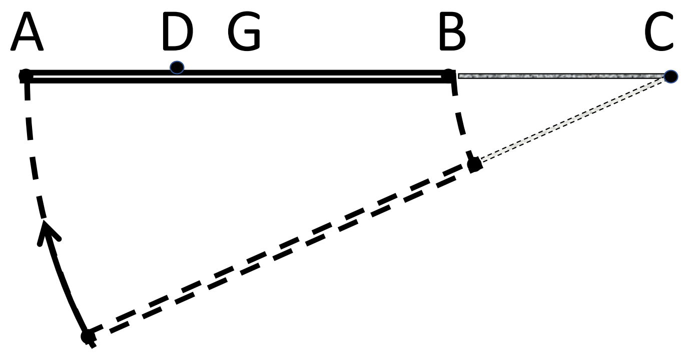
$$\overrightarrow{B}_C(x) = \overrightarrow{B}_1 + \overrightarrow{B}_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-d)}\right)\hat{y}$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 13/1/2020**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : ......................................**

# Esercizio 1




Con riferimento alla figura, un'asta rigida di lunghezza $2l$ (AB), è appoggiata su un piano orizzontale (la forza di gravità è ortogonale al piano) privo di attrito ed è collegata a un punto fisso C di questo piano mediante una corda BC, flessibile, inestensibile, di massa trascurabile e di lunghezza $l$. Due punti materiali di ugual massa $m$ sono posti negli estremi A e B dell'asta e sono solidali con essa, la massa dell'asta è trascurabile rispetto a $m$. L'asta ruota con la corda tesa intorno ad un asse verticale passante per C con una velocità angolare costante di modulo $\omega$. Ad un certo istante viene posto in un punto D un chiodo di dimensioni trascurabili su cui l'asta va ad urtare. Dopo l'urto, perfettamente anelastico, l'asta rimane in quiete. Calcolare:

1. La tensione della corda (T) prima dell'urto

$$T = ...............$$

2. L'energia meccanica persa nell'urto ($\Delta E$)

$$\Delta E = ...............$$

3. La distanza tra D e C (DC)

$$DC = ...............$$

Dati: $m = 0.3\ kg$, $\omega = 2\pi\ s^{-1}$, $l = 30\ cm$

# Soluzione Esercizio 1

1. Prima dell'urto, la risultante delle forze esterne agenti sul sistema asta più masse coincide con la tensione della corda il cui modulo è incognito. Il centro di massa del sistema coincide con il centro dell'asta e si muove su una circonferenza di raggio $2l$ con una velocità in modulo $2l\omega$. In questo moto circolare uniforme l'accelerazione del centro di massa è centripeta come la forza dovuta alla corda (tensione) ed ha modulo $a = 2l\omega^2$. Per cui:

$$T = Ma = 2m2l\omega^2 = 14.2\ N$$

2. Durante l'urto anelastico l'energia meccanica non si conserva: un istante prima dell'urto e quello immediatamente dopo non cambia l'energia potenziale. Pertanto l'energia meccanica persa coincide con l'energia cinetica persa. Quest'ultima è nulla immediatamente dopo l'urto , per cui:

$$\Delta E = T_i - T_f = \frac{1}{2} I\omega^2$$

   Dove $I$ è il momento di inerzia del sistema rigido rispetto all'asse di rotazione: $I = ml^2 + 9ml^2 = 10ml^2$ Per cui:

$$\Delta E = 5ml^2\omega^2 = 5.33\ J$$

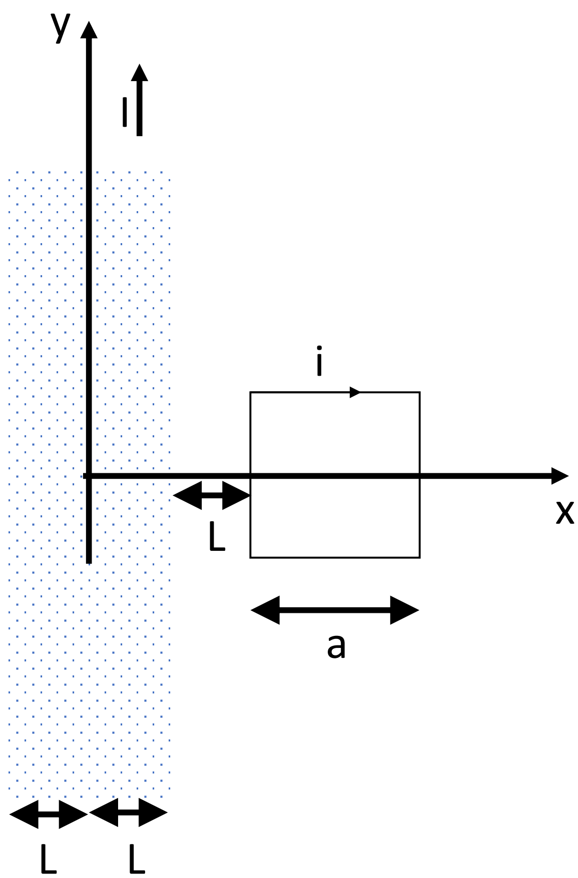
3. Possiamo in questo caso applicare la seconda equazione cardinale, osservando che se scegliamo un polo sul piano orizzontale (piano xy) il momento delle forze esterne può solo che essere ortogonale a tale piano (polo su piano e tensione sul piano) e quindi verticale (asse z), allo stesso modo poichè la quantità di moto di ciacuna massa e del chiodo o è nulla o giace sul piano xy, anche il momento angolare è diretto lungo l'asse z. Scegliendo inoltre il polo in D, il momento della forza incognita esercitata dal chiodo risulta nullo, come pure risulta nullo il momento dovuto alla tensione della corda. Pertanto il momento angolare rispetto a tale polo è costante. Poichè dopo l'urto il momento angolare ($L_f$) è nullo, tale deve essere anche prima dell'urto, per cui:

$$\vec{L}_i = \overrightarrow{DA} \wedge m\vec{v}_1 + \overrightarrow{DB} \wedge m\vec{v}_2 = \vec{L_f} = 0$$

   che si traduce in una sola equazione:

$$-3ml\omega(3l - x) + ml\omega(x - l) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{2}l = 75\ cm$$

## Esercizio 2




Consideriamo un nastro conduttore rettilineo, virtualmente infinito, di spessore trascurabile e larghezza $2L$, percorso da una corrente costante ed uniforme $I$. Nel piano del nastro è posta una spira conduttrice rigida quadrata di lato a e distanza L dal bordo del nastro. Questa spira è percorsa da una corrente costante $i$. Tutto il sistema si trova nel vuoto. Vedi la figura per i versi delle correnti.

1. Esprimere il campo magnetico, $\vec{B}$ generato dal nastro a una distanza $x > L$ dall'asse del nastro sul piano individuato dal nastro e dalla spira.

$$\vec{B}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Esprimere la forza totale $\vec{F}$ esercitata sulla spira dal nastro percorso da corrente in modulo direzione e verso in funzione di a, L, $I$, $i$.

$$\vec{F} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. Calcolare il valore della forza nel caso in cui a=L, $\vec{F}_{a=L}$.

$$\vec{F}_{a=L} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dati: $I = 5\ A$, $i = 100\ mA$.

# Soluzione Esercizio 2

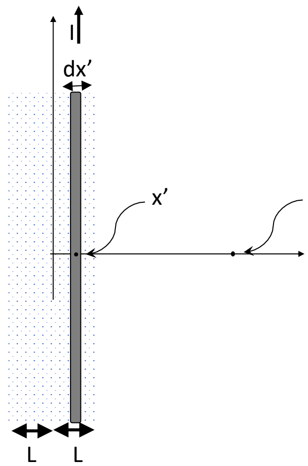


Fig.1

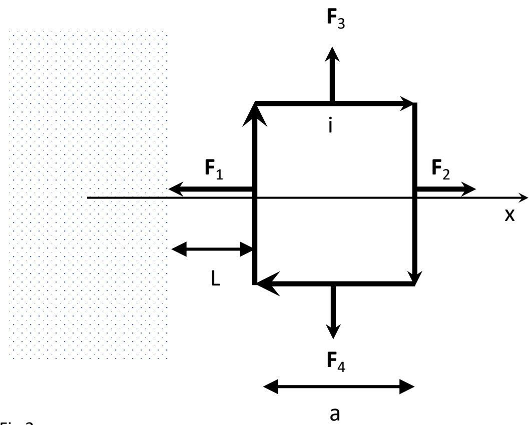


Fig.2

1. (Figura 1) Possiamo pensare di suddividere il nastro in tante striscie di larghezza $dx'$, con ciascuna striscia attraversata dalla corrente $dI$ dove:

$$dI = \frac{I}{2L}dx'$$

Da Biot-Savart, per $x > L$ il campo magnetico generato dal nastro può essere solo entrante nel foglio. Da Ampere, il modulo del campo $dB(x, x')$ nel punto esterno a distanza $x > L$, creato da una sottile striscia larga $dx'$, posizionata in $x'$ e percorsa dalla corrente $dI$ è dato da:

$$dB(dx', x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{x - x'}$$

Per cui:

$$B(x) = \int_{-L}^{L} dB(dx', x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi 2L}\int_{-L}^{L}\frac{dx'}{x - x'} = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} ln\frac{x + L}{x - L}$$

Dalla quale otteniamo:

$$\overrightarrow{B}(x) = -B(x)\hat{z}$$

2. La forza magnetica risultante sulla spira è la somma delle forze magnetiche esercitate su ciascun lato della spira percorsa dalla corrente $i$ nel verso indicato, per cui con riferimento alla Figura 2:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3 + \overrightarrow{F}_4 = -iaB(2L)\hat{x} + iaB(2L + a)\hat{x} + \overrightarrow{F}_0 - \overrightarrow{F}_0$$

Gli ultimi 2 contributi ($\overrightarrow{F}_3 = -\overrightarrow{F}_4 = \overrightarrow{F}_0$) si annullano in quanto lungo i lati 3 e 4 il campo magnetico è lo stesso, la lunghezza del lato è la stessa, ma cambia il verso della corrente. Per cui:

$$\overrightarrow{F} = ia\frac{\mu_0 I}{4\pi L}\left(-ln\frac{2L + L}{2L - L} + ln\frac{2L + a + L}{2L + a - L}\right)\hat{x} = ia\frac{\mu_0 I}{4\pi L}\left(-ln\frac{3L}{L} + ln\frac{3L + a}{L + a}\right)\hat{x}$$

3. L'espressione della forza calcolata al punto precedente fornisce per a=L:

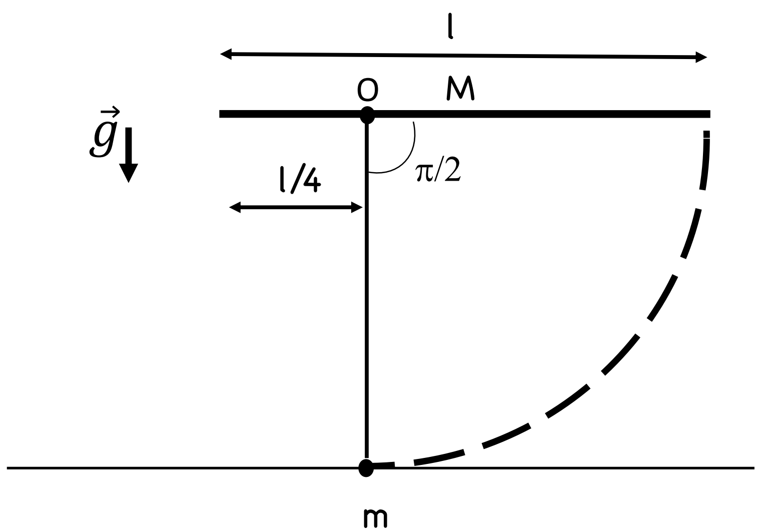
$$\overrightarrow{F}_{a=L} = i\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(-ln3 + ln2\right)\hat{x} = \frac{0.1 \times 5 \times 4\pi \times 10^{-7}}{4\pi}\left(ln2 - ln3\right) = -2 \times 10^{-8}\hat{x}\ N$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 31/1/2020**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : ....................................**

# Esercizio 1




Un'asta omogenea di lunghezza $l$ e massa $M$ è libera di ruotare nel piano verticale (vedi figura) attorno ad un perno posto in $O$ ad una distanza pari a 1/4 della sua lunghezza dal suo estremo superiore. L'asta, inizialmente in quiete in posizione orizzontale, viene lasciata cadere e quando giunge nella posizione verticale, urta elasticamente in corrispondenza del suo estremo un punto materiale di massa $m$. Si calcoli:

1. Il momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse di rotazione, $I_O$.

   $I_O =$ ..............

2. La velocità angolare della sbarra subito prima dell'urto, $\omega$.

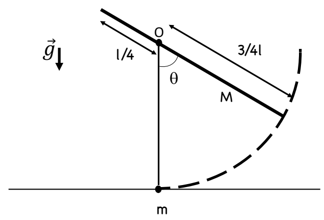
   $\omega =$ ..............

3. La velocità del punto materiale subito dopo l'urto, $v$.

   $v =$ ..............

Dati: $l = 2\ m$, $M = 5\ kg$, $m = 200\ g$

## Soluzione Esercizio 1




1. Il calcolo del momento di inerzia dell'asta rispetto ad un asse perpendicolare al piano di rotazione e passante per il punto $O$ si ottiene applicando il teorema di Huygens-Steiner.

$$I_O = I_{CM} + M\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{16} = \frac{7}{48}Ml^2 = 2.92\ kgm^2$$

Il primo termine rappresenta il momento di inerzia rispetto ad un asse perpendicolare al piano di rotazione e passante per il centro di massa dell'asta ed il secondo termine tiene conto, secondo il citato teorema, della distanza tra quest'asse e l'asse di rotazione passante per $O$.

2. Per lo studio del moto dell'asta prima dell'urto si sfrutta il principio di conservazione dell'energia meccanica. Sul sistema agisce la forza peso (conservativa) e la reazione vincolare in $O$, che non fa lavoro. Assumendo l'origine dell'energia potenziale la quota per cui l'asta è in posizione orizzontale, dalla conservazione dell'energia otteniamo:

$$-Mg\frac{l}{4}cos\theta + \frac{1}{2}I_O\omega^2 = 0$$

in cui il primo termine rappresenta l'energia potenziale dell'asta per un generico valore dell'angolo $\theta$ ed il secondo termine è l'energia cinetica in corrispondenza del medesimo angolo. Per $\theta = 0$, quando l'asta è verticale:

$$\frac{1}{2}I_O\omega^2 = Mg\frac{l}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{Mgl}{2I_O}} = 4.1\frac{rad}{s}$$

3. L'asta urta la massa $m$ in modo elastico con $\theta = 0$.
Nel processo:

a) si conserva l'energia cinetica del sistema asta-massa, poichè si tratta di un urto completamente elastico

b) la quantità di moto del sistema non si conserva a causa della presenza della reazione vincolare di natura impulsiva applicata all'asta in $O$

c) il momento angolare del sistema calcolato rispetto al polo $O$ si conserva poichè il momento delle forze esterne rispetto al polo $O$ è nullo. Di conseguenza, dalla conservazione dell'energia cinetica tra l'istante immediatamente prima dell'urto e quello immediatamente successivo :
1)$\frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}I_O\omega'^2 + \frac{1}{2}mv^2$

e dalla conservazione del momento angolare (polo in$O$), tra l'istante immediatamente prima dell'urto e quello immediatamente successivo :
2)$I_O\omega = I_O\omega' + \frac{3}{4}lmv$
dove $\omega'$ è la velocità angolare dell'asta subito dopo l'urto e v è la velocità acquisita dalla massa m in conseguenza dell'urto. Dalla 1) e dalla 2):

$$3)\ \left(\omega^2 - \omega'^2\right) = (\omega - \omega')(\omega + \omega') = \frac{mv^2}{I_O} \qquad 4)\ (\omega - \omega') = \frac{3}{4I_O}mlv$$

Dividendo la 3) per la 4) otteniamo:

$$5)\ (\omega + \omega') = \frac{4v}{3l}$$

che sommata alla 4), dopo alcuni semplici passaggi ci permette di ottenere:

$$v = \frac{\omega}{\frac{2}{3l} + \frac{3ml}{8I_O}} = 10.7\ m/s$$

## Esercizio 2

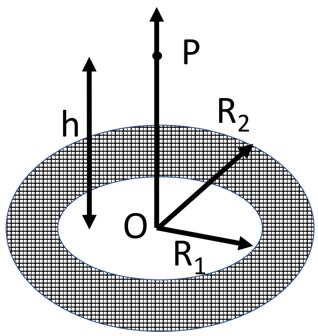



Fig.A

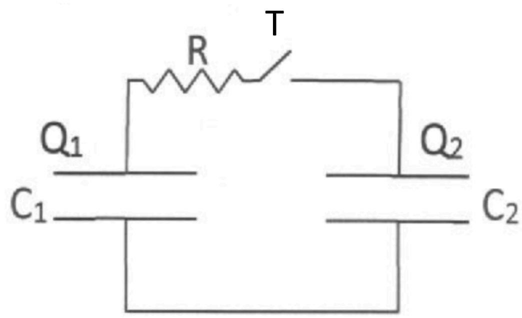



Fig.B

(Fig.A) Una carica elettrica positiva è uniformemente distribuita, con densità superficiale $\sigma$, su di una corona circolare di raggio interno $R_1$, raggio esterno $R_2$ e centro in $O$.

2.1 Determinare l'espressione della differenza di potenziale, $\Delta V = V(O) - V(P)$, tra il punto $O$ ed un punto $P$ posto sull'asse del disco a distanza $h$ da $O$ e calcolare esplicitamente il valore della differenza di potenziale nel caso in cui $R_2 = h = 2R_1$, $\Delta V_{R_2=h=2R_1}$

$$\Delta V = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Delta V_{R_2=h=2R_1=}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Consideriamo ora due condensatori di capacità $C_1$ e $C_2$, inizialmente caricati con carica $Q_1$ e $Q_2$ e isolati (vedi Fig.B). Se l'interruttore $T$ viene chiuso, dopo un tempo sufficientemente lungo il sistema si porta all'equilibrio. Calcolare:

2.2 Il valore della ddp all'equilibrio ai capi dei due condensatori, $\Delta V_{C_1}$ e $\Delta V_{C_2}$

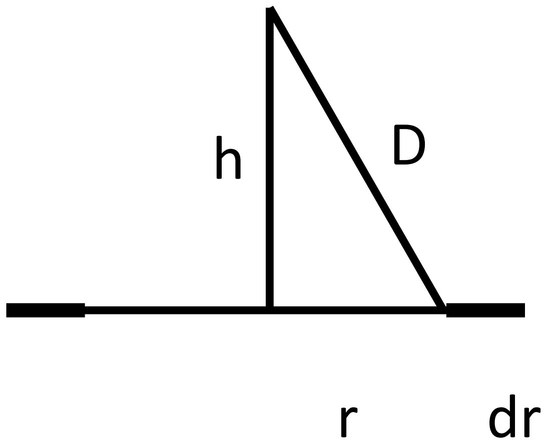
$$\Delta V_{C_1} = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Delta V_{C_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.3 La variazione di energia elettrostatica di tutto il sistema tra l'istante iniziale ($E_i$) e quello finale($E_f$), $\Delta E = E_f - E_i$

$$\Delta E = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dati: Es. Fig.A) $\sigma = 1.8 \times 10^{-11}\ C/m^2$, $R_1 = 10\ cm$. Es. Fig.B) $C_1 = 1\ \mu F$, $C_2 = 2\ \mu F$, $Q_1 = Q_2 = 2\ nC$.

## Soluzione Esercizio 2




2.1 Il potenziale generato da una sottile corona circolare di larghezza $dr$ e raggio $r$ (vedi figura) è dato da:

$$dV(r,h) = k\frac{dq}{D} = k\frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

Per cui, il potenziale dovuto alla corona di raggio interno $R_1$ e raggio esterno $R_2$, è dato da:

$$V(h) = \int_{R_1}^{R_2} dV = k\sigma\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{2rdr}{\sqrt{r^2+h^2}} = k\sigma\pi \int_{R_1^2+h^2}^{R_2^2+h^2} \frac{d(r^2+h^2)}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

dalla quale:

$$V(h) = \frac{2\sigma\pi}{4\pi\epsilon_0}\left[\sqrt{R_2^2+h^2} - \sqrt{R_1^2+h^2}\right] \qquad \Rightarrow \qquad V(O) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[R_2 - R_1\right]$$

Per cui l'espressione di $\Delta V$ è data da:

$$\Delta V = V(O) - V(h) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(R_2 - R_1 + \sqrt{R_1^2+h^2} - \sqrt{R_2^2+h^2}\right)$$

Per $R_2 = h = 2R_1$ otteniamo:

$$\Delta V_{R_2=h=2R_1} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(2R_1 - R_1 + \sqrt{R_1^2+4R_1^2} - \sqrt{4R_1^2+4R_1^2}\right) = \frac{\sigma R_1}{2\epsilon_0}\left(1+\sqrt{5}-\sqrt{8}\right) = 0.04\ V$$

2.2 Alla fine del processo, all'equilibrio non circola più corrente, la differenza di potenziale ai capi di $C_1$ e $C_2$ è la stessa, e la capacità equivalente finale ($C_F$) essendo le due capacità in parallelo, è pari a $C_F = C_1 + C_2$, mentre dalla conservazione della carica segue che $Q_F = Q_{1F} + Q_{2F} = Q_1 + Q_2$. Per cui:

$$\Delta V_{C_1} = \Delta V_{C_2} = \frac{Q_F}{C_F} = \frac{4nC}{3\mu F} = \frac{4}{3}\times 10^{-3}\ V$$

2.3 L'energia iniziale, $E_i$, corrisponde alla somma delle energie immagazzinate nei due condensatori all'istante iniziale:

$$E_i = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} = 3\times 10^{-12}\ J$$

L'energia finale, $E_f$, corrisponde all'energia immagazzinata nel condensatore equivalente di capacità $C_F$ e carica $Q_F$:

$$E_f = \frac{1}{2}\frac{Q_F^2}{C_F} = \frac{8}{3}\times 10^{-12}\ J$$

Per cui:

$$\Delta E = -\frac{1}{3}\times 10^{-12}\ J$$

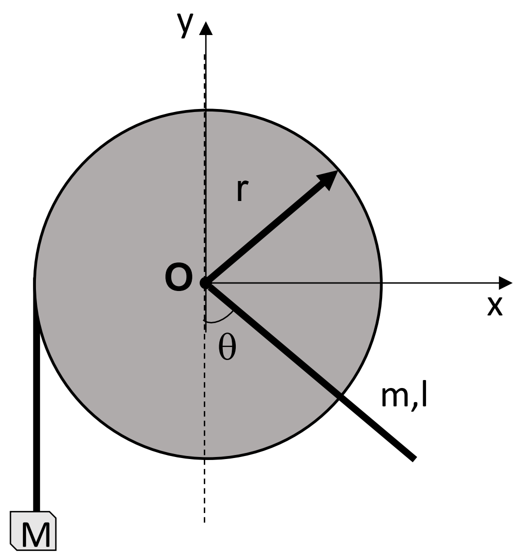
Il risultato deve essere negativo perchè parte dell'energia è stata dissipata sulla resistenza.

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**

**Esame di Fisica Generale del 21/2/2020**
**Cognome : ................................................ Nome : ................................................**

**Matricola: ................................................ Anno di corso : ......................................**

# Esercizio 1




Un sistema rigido (vedi figura) è costituito da un'asta omogenea, di massa $m$ e lunghezza $l$, della quale un estremo è saldato all'asse di un disco di raggio $r$, di massa trascurabile rispetto a quella dell'asta. L'asta giace sul piano del disco. Il sistema può ruotare senza attrito attorno all'asse del disco passante per $O$, disposto orizzontalmente, ed è tenuto in equilibrio da un corpo di massa $M$ agganciato ad un estremo di un filo ideale, mentre l'altro estremo del filo è fissato al bordo del disco. Il peso agganciato al disco è assimilabile a un punto materiale.

1.1 Determinate il modulo della tensione del filo $T$ e la reazione vincolare in forma vettoriale $\overrightarrow{R}_O$

$$T = ............... \qquad \overrightarrow{R}_O = ...............$$

1.2 Determinate l'angolo di equilibrio $\theta$

$$\theta = ...............$$

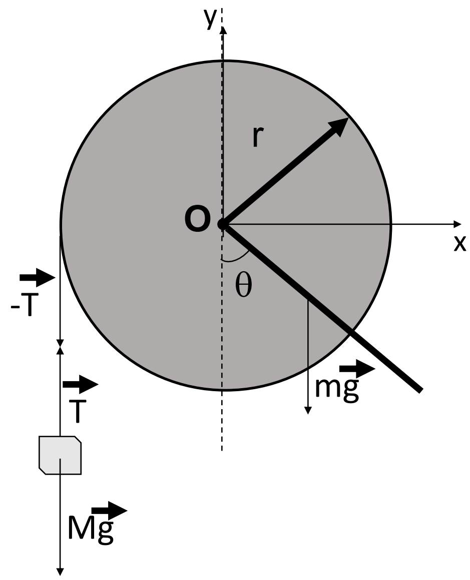
Successivamente, nella posizione di equilibrio individuata dall'angolo $\theta$ che l'asta forma con la verticale, viene agganciato al filo oltre al corpo di massa $M$ un altro corpo di massa $2M$. Assumendo che il filo si arrotola o srotola senza slittare.

1.3 Determinare la velocità angolare del sistema quando la sbarra si dispone verticalmente, $\omega$

$$\omega = ...............$$

Dati: $m = 1\ kg$, $l = 32\ cm$, $r = 10\ cm$, $M = 800\ g$

## Soluzione Esercizio 1




1.1 Applicando la condizione di equilibrio delle forze al corpo di massa $M$ (vedi Figura) otteniamo:

$$\vec{T} + M\vec{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = Mg = 7.84\ N$$

Applicando la condizione di equilibrio delle forze al sitema disco-asta-filo, e considerando il sistema di assi cartesiani indicato in figura:

$$\vec{R}_O - \vec{T} + m\vec{g} = \vec{R}_O + M\vec{g} + m\vec{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_O = (0, (m+M)g, 0) = (0, 17.6, 0)\ N$$

1.2 Imponendo l'equilibrio dei momenti delle forze esterne rispetto all'asse di rotazione, polo in $O$, la seconda equazione cardinale fornisce:

$$\vec{r} \wedge -\vec{T} + \frac{\vec{l}}{2} \wedge m\vec{g} = 0$$

poichè $T = Mg$ otteniamo:

$$rMg - \frac{l}{2}mgsin(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad sin(\theta) = \frac{2rM}{ml} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

1.3 Quando al filo oltre alla massa $M$ viene agganciata un'ulteriore massa, $2M$, i pesi agganciati al filo inizieranno a scendere, il filo si srotola e il sistema asta-disco ruota in senso antiorario rispetto al piano del disco. Poichè non ci sono forze dissipative, l'energia si conserva, per cui:

$$E_i = T_i + U_i = T_f + U_f \quad \Rightarrow \quad T_f - T_i = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}(3M)v^2 - 0 = U_i - U_f = 3Mgr(\pi-\theta) - mg\frac{l}{2}(cos(\theta)+1)$$

Dove abbiamo indicato con $E$,$T$ e $U$ rispettivamente l'energia, l'energia cinetica e l'energia potenziale, e il subindice $i$ o $f$) indica lo stato iniziale (asta ad angolo $\theta$) o lo stato finale (asta ad angolo $\pi$). Poichè la velocità con cui scende il peso è tale che $v = \omega r$:

$$\frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega^2 + \frac{1}{2}(3M)\omega^2 r^2 = g(3Mr(\pi - \theta) - m\frac{l}{2}(cos(\theta) + 1))$$

Per cui:

$$\omega = \sqrt{\frac{g(18Mr(\pi - \theta) - 3ml(cos(\theta) + 1))}{ml^2 + 9Mr^2}} = 10.5\ s^{-1}$$

# Esercizio 2

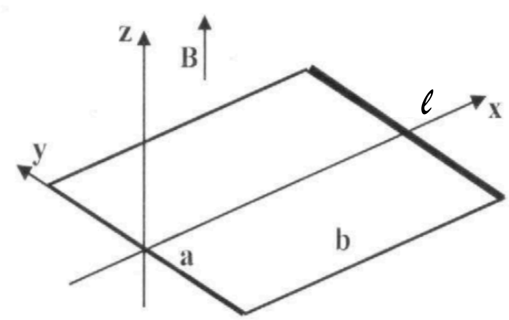



Fig.A

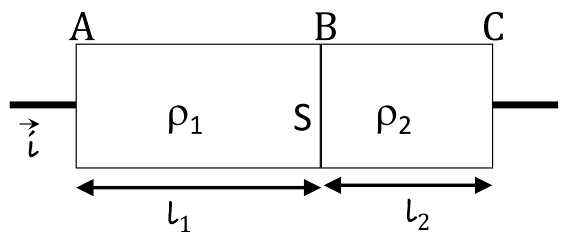



Fig.B

Con riferimento alla Fig. A, sia posto nel piano xy un circuito elettrico rettangolare di lati $a$ e $b$ con uno dei lati, $l$, libero di muoversi in direzione x. Il circuito è immerso nel campo vettoriale $\vec{B} = B\hat{z}$ con B uniforme e variabile nel tempo secondo la legge $B = \alpha t$. La resistenza per unità di lunghezza del circuito è $\rho$. Se il lato mobile del circuito è mantenuto fermo nella posizione in figura:

2.1 determinare l'espressione della forza $\vec{F}$ che è necessario applicare al lato mobile per tenerlo fermo, e calcolarne il modulo al tempo $t* = 0.5\ s$, $F(t*)$

$$\vec{F} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad F(t*) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Con riferimento alla Fig. B due conduttori metallici di resistività $\rho_1$ e $\rho_2$, lunghezze rispettive $l_1$ e $l_2$ ed uguale sezione S, sono disposti come in Fig. B. Se ai capi dei conduttori è presente una differenza di potenziale rispettivamente di $V_1 = V_B - V_A$ e $V_2 = V_C - V_B$

2.2 Determinare la corrente che scorre nei conduttori $i$

$$i = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.3 Determinare la densità della carica elettrica superficiale presente sulla superficie $S$ di separazione dei due conduttori, $\sigma$

$$\sigma = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dati:
Es. Fig.A) $a = 2\ cm$, $b = 3\ cm$, $\alpha = 20\ \frac{mT}{s}$, $\rho = 0.1\ \frac{\Omega}{m}$.
Es. Fig.B) $V_1 = 2\ V$, $V_2 = 3\ V$, $\rho_1 = 2 \times 10^{-7}\ \Omega m$, $\rho_2 = 1 \times 10^{-7}\ \Omega m$, $L_1 = 2\ cm$, $L_2 = 6\ cm$, $S = 100\ \mu m^2$.

# Soluzione Esercizio 2

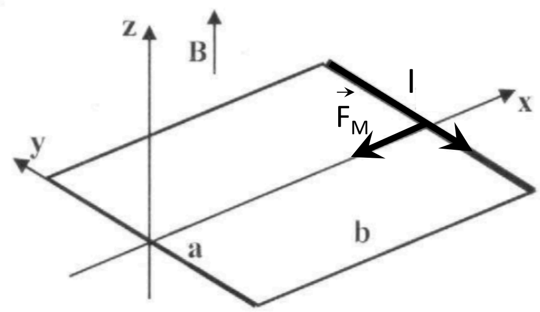



Fig.A

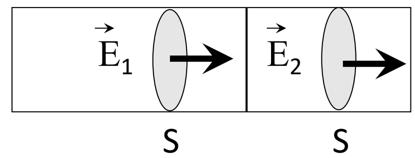



Fig.B

2.1 Il flusso di $\overrightarrow{B}$ attraverso la superficie del circuito è costante in area ma variabile nel tempo: $\phi(\overrightarrow{B}) = Bab = \alpha abt$. Per la legge di Faraday Neuman Lenz, la corrente $I$ (tenuto conto che la resistenza del circuito $R$ è pari a $2(a+b)\rho$), indicando con $f_{ind}$ e $R$ rispettivamente la forza elettromotrice indotta e la resistenza del circuito, ha la seguente espressione:

$$I = |\frac{f_{ind}}{R}| = |-\frac{d\phi}{dt}|\frac{1}{R} = |-\alpha ab|\frac{1}{R} = \frac{\alpha ab}{R}$$

e circola in verso orario nel circuito. Il lato mobile $l$ è pertanto sottoposto alla forza magnetica, $\overrightarrow{F}_M$:

$$\overrightarrow{F}_M = I\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{B} = \frac{\alpha ab}{R} a\alpha t(-\hat{x})$$

La forza $\overrightarrow{F}$ che deve essere applicata per mantenere la sbarra in moto con velocità costante sarà tale che:

$$\overrightarrow{F}_M + \overrightarrow{F} = 0$$

per cui:

$$\overrightarrow{F} = \frac{\alpha^2 a^2 b}{2\rho(a+b)} t\hat{x}$$

Per $t = t*$

$$F(t*) = \frac{\alpha^2 a^2 b}{2\rho(a+b)} t* = 24 \times 10^{-8}\ N$$

2.2 I due conduttori sono in serie pertanto la corrente che in essi circola è la stessa, per cui $iR_1 = V_1$ $iR_2 = V_2$ e sommando queste due equazioni otteniamo $i(R_1 + R_2) = V_1 + V_2$, dalla quale:

$$R_1 = \rho_1 \frac{l_1}{S} = 40\ \Omega \quad R_2 = \rho_2 \frac{l_2}{S} = 60\ \Omega \quad \Rightarrow \quad i = \frac{V_1 + V_2}{R_1 + R_2} = 0.05\ A$$

2.3 Nei due conduttori i moduli dei campi elettrici sono dati da $E_1 = \rho_1 J$ e $E_2 = \rho_2 J$, con $J = \frac{i}{S}$, inoltre valgono anche le relazioni: $E_1 = \frac{V_1}{l_1}$ e $E_2 = \frac{V_2}{l_2}$. Applicando il teorema di Gauss al cilindro indicato in figura B e tenuto conto di direzione e verso dei campi elettrici, otteniamo:

$$\phi(\overrightarrow{E}) = S(E_2 - E_1) = SJ(\rho_2 - \rho_1) = i(\rho_2 - \rho_1) = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} = \quad \Rightarrow \quad \sigma = \epsilon_0 \frac{i}{S}(\rho_2 - \rho_1) = -4.5 \times 10^{-10}\ \frac{C}{m^2}$$

# Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
## Testo n.99 - Esame di Fisica Generale sessione del 12/06/2020

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**

Il disco forato in Figura è di spessore trascurabile, di materiale omogeneo, ha raggio R= 29 cm e massa M= 2.5 kg .
I fori praticati nel disco corrispondono a due circonferenze di raggio (R/4) e due finestre rettangolari di dimensioni (R/8)×(R/2) e sono disposti come in Figura.
I centri dei fori circolari e rettangolari giacciono su di una circonferenza (tratteggiata in Figura) di raggio r=R/2 .
Al centro del disco è attaccata una molla di massa trascurabile e di costante elastica k= 208 N/m .
Nell'ipotesi in cui il disco rotola senza strisciare sulla superfice orizzontale, si calcoli:

1) La massa rimossa dal disco pieno ($m_{2r}$) corrispondente ai 2 fori rettangolari

$$m_{2r} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2) Il momento di inerzia del disco forato per rotazioni rispetto al punto di contatto con la superficie orizzontale, ($I_{pc}$)

$$I_{pc} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

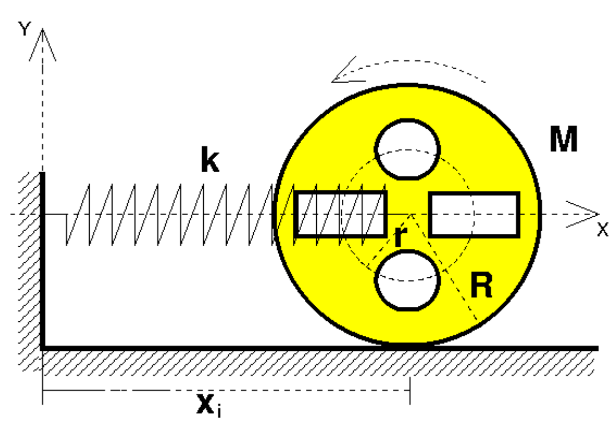
*Suggerimento:* per una lastra rettangolare sottile di massa $m$, lati $a$ e $b$ e densità di massa superficiale costante $\sigma = \frac{m}{ab}$, il momento di inerzia $I^r_{cm}$ rispetto ad un asse ortogonale al piano che contiene la lastra e passante per il suo CM al centro del rettangolo è dato da:

$$I^r_{cm} = \frac{m}{12} \left( a^2 + b^2 \right)$$

Il disco è lasciato libero da fermo dalla posizione ($x_i$) in cui la molla è allungata di $\Delta x$= 27.3 cm

3) Si calcoli l'energia cinetica di rotazione del disco ($E^{rot}_k$) nell'istante in cui il centro di massa del disco forato passa per la posizione di equilibrio della molla, per la quale l'allungamento della molla è nullo.

$$E^{rot}_k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Nella Figura(a) è rappresentata una spira $MNPQ$ con i lati $NP$, $PQ$ e $QM$ di lunghezza variabile nel tempo.
Il lato $MN$ ha una lunghezza L = 147 cm e una resistenza elettrica R = 482 mΩ .
Questa spira variabile giace in un piano orizzontale ed è immersa in un campo magnetico uniforme e costante di intensità B = 11.4 T diretto come in Figura(a).
Le equazioni orarie delle coordinate orizzontali degli estremi del lato $PQ$ sono rispettivamente:

- $x_P$(cm) = 588.0 + 73.5 cos( 0.285 $t$)
- $x_Q$(cm) = 588.0 + 73.5 cos( 0.683 $t$)

La spira, instantaneamente indeformabile, è vincolata a giacere nel piano $xy$ e non può ne ruotare ne traslare.

1) Determinare l'espressione del flusso del campo magnetico ( $\Phi_m$) attraverso la spira in funzione del tempo.

$$\Phi_m = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

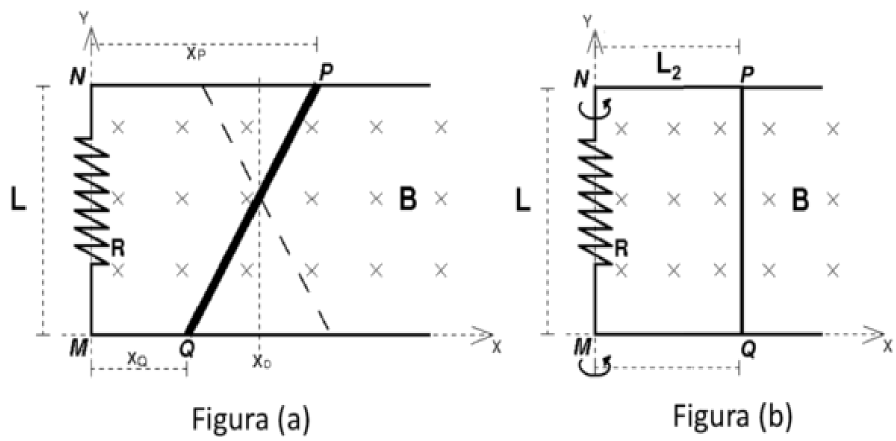
2) Determinare la f.e.m. indotta nella spira $MNPQ$ all'istante $t^*$= 22.0 s

$$fem(t^*) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Consideriamo ora una spira che si ottiene da quella di prima con le lunghezze dei lati uguali $NP$=$MQ$= 73.5 cm , immersa come la prima nello stesso campo magnetico di intensità B = 11.4 T vedi Figura(b)
Per $t = 0$ s la spira viene messa in rotazione con una velocità angolare $\overrightarrow{\Omega}$ = 0.691 $\hat{y}$ rad/s

3) Determinare la potenza dissipata nella resistenza all'istante $t^{**}$= 24.9 s

$$P(t^{**}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$




(*Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo*)

## Soluzione Esercizio 1

**Domanda.1**
Il disco ha uno spessore trascurabile, quindi calcoliamo la densità superficiale $\sigma$ (massa per unità di superficie) come il rapporto tra la massa M del disco forato di raggio R e la sua superficie (data dalla superficie del disco senza fori meno la superficie dei fori, che corrispondono a due circonferenze di raggio (R/4) e a due rettangoli di dimensioni (R/8)×(R/2)):

$$\sigma \;=\; \frac{M}{\pi\, R^2 \;-\; \pi\,\frac{R^2}{8} \;-\; \frac{R^2}{8}} \;=\; \frac{8M}{R^2}\,\frac{1}{(\,7\pi - 1\,)} \;\rightarrow\; \sigma \;\approx\; 0.3811\;\frac{M}{R^2} \tag{1}$$

Nota $\sigma$, la massa rimossa dal disco di ciascun foro circolare ($m_c$) e di ciascun foro rettangolare ($m_r$) valgono rispettivamente:

$$m_c \;=\; \pi\sigma\,\frac{R^2}{16} \;\approx\; 0.0748\;M \qquad\qquad m_r \;=\; \sigma\,\frac{R^2}{16} \;\approx\; 0.0238\;M \tag{2}$$

**Domanda.2**
I fori sono simmetrici, pertanto il centro di massa del disco che prima di praticare i fori coincide con il centro del disco, non si sposta a causa dei fori.

Il momento di inerzia del disco forato rispetto al CM del disco ($I_{CM}^{tot}$) si può ottenere considerando un disco pieno (di massa $M^*$ e raggio $R$, con $M^* = \sigma\pi R^2$), e i fori come due dischi (di massa $-m_c$ e raggio R/4), e due rettangoli (di massa $-m_r$ e dimensioni (R/8)×(R/2)).
Il calcolo è fatto rispetto al centro del disco.
I tre contributi da considerare al momento di inerzia sono vedi (3): ($I_{disc}$) per il disco di raggio R di massa $M^*$; ($I_{circ}^{hole}$) per i due dischi di raggio (R/4), ciascuno di massa $-m_c$, il cui CM ruota a (R/2) dal centro del disco pieno; ($I_{rect}^{hole}$), per le due lastre rettangolari di dimensioni (R/8)×(R/2) ciascuna di massa -$m_r$ il cui CM ruota a (R/2) dal centro del disco pieno.
Per ciascun disco massa $-m_c$ il momento di inerzia ($I_{circ0}^{hole}$) rispetto al centro del disco di massa $M^*$ è dato da (Teorema di Steiner):

$$I_{circ0}^{hole} = -\frac{m_c}{2}\left(\frac{R}{4}\right)^2 - m_c\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

Sfuttando il suggerimento del testo, per ciascun rettangolo di massa $-m_r$ il momento di inerzia ($I_{r0}^{hole}$) rispetto al centro del disco di massa $M^*$ (sempre dal Teorema di Steiner) è dato da:

$$I_{r0}^{hole} = -m_r\frac{1}{12}\left[\left(\frac{R}{8}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right] - m_r\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

ottenendo:

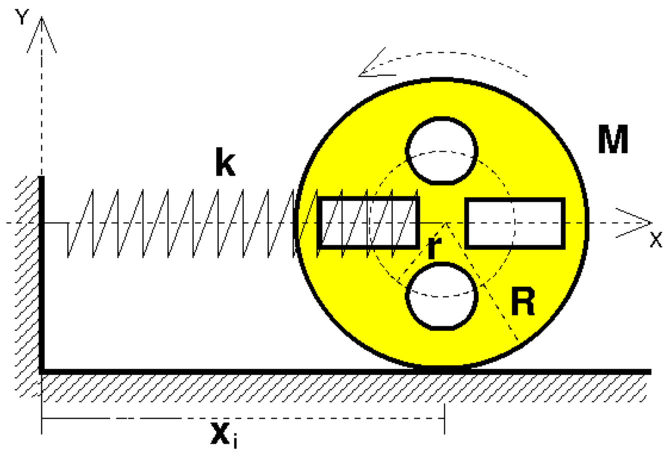
$$\begin{aligned}
I_{disc} \;&=\; M^*\,\frac{R^2}{2} \;=\; \pi\sigma\,\frac{R^4}{2} && \rightarrow\; I_{disc} \approx 0.5987\;MR^2\\
I_{circ}^{hole} \;=\; 2I_{circ0}^{hole} \;&=\; -\,2\;m_c\;R^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right) \;+\; \frac{1}{4}\right) \;=\; -\;\frac{18}{32}\;m_c\;R^2 && \rightarrow\; I_{circ}^{hole} \approx -0.0421\;MR^2\\
I_{rect}^{hole} \;=\; 2I_{r0}^{hole} \;&=\; -\,2\;m_r\;R^2\left(\frac{1}{12}\left(\frac{1}{64} \;+\; \frac{1}{4}\right) \;+\; \frac{1}{4}\right) \;=\; -\;\frac{209}{384}\;m_r\;R^2 && \rightarrow\; I_{rect}^{hole} \approx -0.0130\;MR^2\\
I_{CM}^{tot} \;=\; I_{disc} \;+\; I_{circ}^{hole} \;+\; I_{rect}^{hole} \;&=\; \Big(0.5987 \;-\; 0.0421 \;-\; 0.0130\Big)\;MR^2 && \rightarrow\; I_{CM}^{tot} \;=\; 0.5436\;MR^2\\
I_{pc} \;&=\; I_{CM}^{tot} \;+\; MR^2 \;\rightarrow\; I_{pc} \;=\; 1.5436\;MR^2
\end{aligned} \tag{3}$$

**Domanda.3**
Nel moto di puro rotolameno il punto di contatto è fermo, pertanto la forza di attrito non compie lavoro e l'energia si conserva (è costante). Di conseguenza, poichè all'inizio il sistema disco forato più molla è fermo, l'energia iniziale del sistema coincide con l'energia potenziale della molla, $\frac{1}{2}\;k\;\Delta x^2$. Mentre quando il disco passa per la posizione di equilibrio della molla l'allungamento della molla è nullo e l'energia potenziale della molla è stata convertita in energia cinetica e rotazionale del disco forato. Pertanto, indicando con $\omega$ la velocità angolare del disco e ricordando che la condizione di rotolamento puro implica che per il punto di contatto del disco sia $v_{cm} = \omega R$, dalla conservazione dell'energia otteniamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\;k\;\Delta x^2 \;=\; \frac{1}{2}\;M\;v_{cm}^2 \;+\; \frac{1}{2}\;I_{CM}^{tot}\;\omega^2 \;=\; \frac{1}{2}\left(\,M\;v_{cm}^2 \;+\; 0.5436\;MR^2\;\frac{v_{cm}^2}{R^2}\,\right)\\
\Rightarrow k\;\Delta x^2 \;=\; 1.5436\;M\;v_{cm}^2
\end{aligned} \tag{4}$$

Questa relazione fornisce $v_{cm}^2$ necessaria per calcolare l'energia cinetica di traslazione ovvero di rotazione:

$$\begin{aligned} v_{cm}^2 &\approx 0.6478 \, \frac{k}{M} \, \Delta x^2 \\ E_k^{tra} &\approx 0.3239 \, k \, \Delta x^2 \\ E_k^{rot} &\approx 0.1761 \, k \, \Delta x^2 \end{aligned} \tag{5}$$



## Soluzione Esercizio 2

**Domanda.1** Notiamo, dalla Figura (a), che i vertici oscillanti del trapezio hanno una ascissa iniziale ($x_0$) e una ampiezza massima ($x_m$) di oscillazione in comune. Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned} x_p &= x_0 + x_m \cos(\omega_p t) \\ x_q &= x_0 + x_m \cos(\omega_q t) \end{aligned} \tag{6}$$

Indicando con $A$ l'area istantanea della spira, che quando $x_p$ è diverso da $x_q$ è quella di un trapezio, il flusso del campo magnetico attraverso la spira vale :

$$\begin{aligned} \Phi_m &= B\, A = B\, \frac{L}{2}\, (x_p + x_q) \\ \Phi_m &= B\, \frac{L}{2} \left( 2\, x_0 + x_m \left( \cos(\omega_p t) + \cos(\omega_q t) \right) \right) \end{aligned} \tag{7}$$

**Domanda.2** L'area variabile della spira immersa nel campo magnetico uniforme e costante da luogo a una forza elettromotrice indotta (fem(t)) nella spira che, dalla legge di Faraday Neuman Lenz, è data dalla derivata dell'equazione (7) rispetto al tempo cambiata di segno:

$$fem(t) = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -B\, \frac{L}{2}\, x_m \left( -\omega_p \sin(\omega_p t) - \omega_q \sin(\omega_q t) \right) \tag{8}$$

Notiamo anche (vedi Figura (a)) che il campo magnetico è entrante nel piano del foglio ma non sempre il verso della corrente indotta sarà orario poichè anche la variazione di flusso concatenato ($\Phi_m$) ha una espressione sinusoidale perdiodica e quindi non necessariamente sempre positiva.

Essendo la spira costituita da conduttori, possiamo calcolare a partire dalla (8) la fem indotta al tempo $t^*$ ($V$) e, dal valore ($R$) della resistenza del lato $MN$ della spira dato nel testo, rispettivamente la relativa corrente indotta ($i$) e la potenza assorbita dalla resistenza ($P$)

$$\begin{aligned} V &= fem(t^*) \\ i &= \frac{|V|}{R} \\ P &= R\, i^2 = \frac{V^2}{R} \end{aligned} \tag{9}$$

**Domanda.3** La spira ruota con velocità angolare costante, pertanto scelta la normale alla superficie della spira al tempo t=0 (messa in rotazione) diretta e orientata come il campo magnetico, l'angolo che essa forma con il campo magnetico $\overrightarrow{B}$ in funzione del tempo è $\theta(t) = \Omega t$.

Indicando con $\Phi_B$ Il flusso attraverso la spira in rotazione, e con $fem$ la forza elettomotrice indotta si ottiene:

$$\Phi_B = BLL_2 cos(\Omega t) \qquad fem = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -BLL_2\Omega sin(\Omega t)$$

dove $LL_2$ è l'area della spira rettangolare.

Pertanto, la corrente indotta nella spira, $I(t)$ e la potenza dissipata nella resistenza R, $P(t)$, in funzione del tempo sono rispettivamente date da:

$$I(t) = \frac{|fem|}{R} = \frac{BLL_2\Omega|sin(\Omega t)|}{R} \qquad P(t) = I^2 R = \frac{(BLL_2\Omega sin(\Omega t))^2}{R}$$

per cui:

$$I_{rot} = I(t_1) = \frac{BLL_2\Omega|sin(\Omega t_1)|}{R} \qquad P_{rot} = I_{rot}^2 R$$

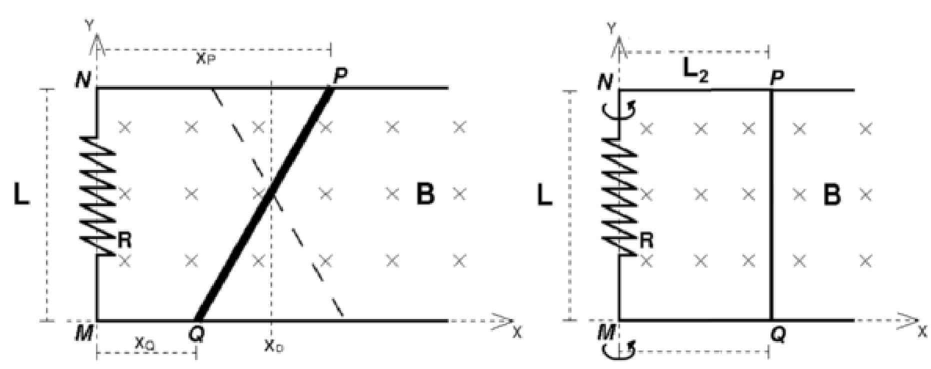



Figura (a) Figura (b)

## Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
**Testo n.11** - **Esame di Fisica Generale sessione del 03/07/2020**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**

Una sfera omogenea di massa $m$= 31.0 kg e raggio $r$= 130 cm rotola senza strisciare con velocità $v_{cm}$= 23.4 ms$^{-1}$ lungo un piano orizzontale. La sfera urta inelasticamente uno scalino di altezza $h$= 103 cm nel punto $P$ come mostrato in Figura.

Rispondere nell'ipotesi che la sfera non slitti e rimanga in contatto con il punto $P$ dove urta lo scalino:

1) Calcolare l'energia cinetica di rotazione della sfera E$_k$ un istante prima dell'urto:

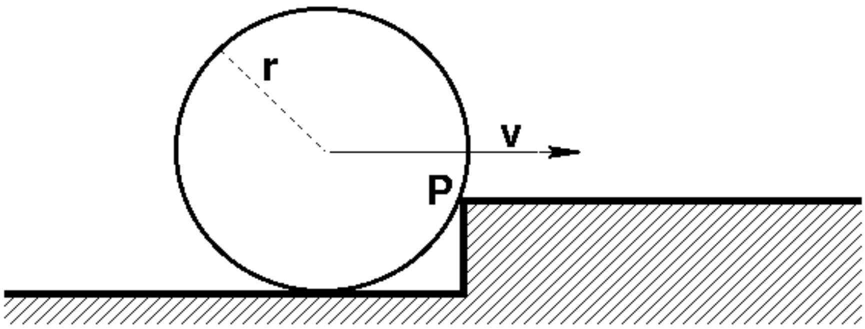
$$\mathrm{E}_k = 3395 \text{ J}$$

2) Calcolare l'energia cinetica di rotazione della sfera E$_k$ un istante dopo l'urto:

$$\mathrm{E}_k = 639 \text{ J}$$

3) Trovare la minima velocità $v^*$ che permette alla sfera di superare il gradino:

$$v^* = 8.8 \text{ m s}^{-1}$$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Un avvolgimento è realizzato con $N$= 40 strati di un filo conduttore di resistenza per unità di lunghezza $\rho$= 7.0 $10^{-3}$ $\Omega$/m disposti lungo due semi-circonferenze di raggio $r$= 79.4 cm e ortogonali come rappresentato in Figura.
Nell'avvolgimento scorre una corrente $i$= 3.0 A

1) Determinare le componenti del momento di dipolo magnetico ($\vec{\mu}$) su questo avvolgimento

$$\vec{\mu} = \ 120.640 \ ( \ 1 \ ; \ 0 \ ; \ 1 \ ) \ \text{A m}^2$$

L'avvolgimento viene immerso in una regione nella quale è presente un campo magnetico $\vec{B}$= ( 14.2 $\hat{\mathbf{i}}$ + 4.7 $\hat{\mathbf{j}}$ ) T

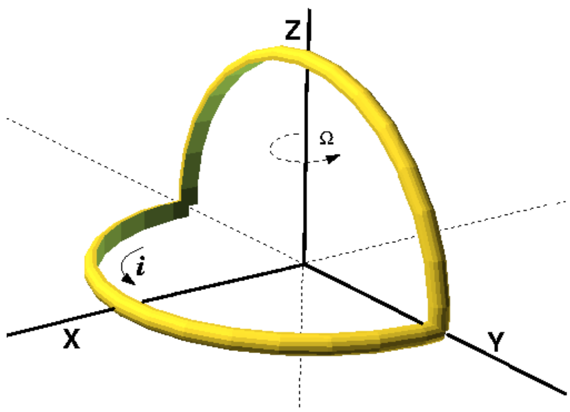
2) Determinare il modulo del momento torcente $|\vec{\tau}|$ che agisce sull' avvolgimento

$$|\vec{\tau}| = \ 1891.430 \ \text{N m}$$

Si mantiene l'avvolgimento immerso nel campo magnetico e la corrente in esso cirolante.
Per t = 0 s si mette in rotazione l'avvolgimento con velocità angolare $\vec{\Omega}$= 0.202 $\hat{\mathbf{k}}$ rad/s

3) Determinare la corrente $i_{rot}$ che circola nell'avvolgimento al tempo $t^*$= 15.6 s

$$i_{rot}(t^*) = \ 29.1 \ \text{A}$$




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

## Soluzione Esercizio 1

**Domanda.1**
Prendendo come polo il punto $P$, in quest'urto anelastico rispetto a tale polo si conserva la componente ortogonale al piano della figura del momento angolare ( essendo l'unica forza, non nulla e sul piano xy, la reazione impulsiva che si esplica in P e che è a braccio nullo rispetto a tale polo). Indichiamo con $\overrightarrow{\omega}_{rot}$ e $\overrightarrow{\omega}'_{rot}$ le velocità angolari della sfera prima e dopo l'urto e con $\mathrm{L}_i$ e $\mathrm{L}_f$ il momento angolare rispettivamente un istante prima e un istante dopo l'urto, entrambi calcolati rispetto al punto $P$ di impatto.
Un istante prima dell'urto (Teorema di König per il momento angolare) vale:

$$\overrightarrow{L}_i = \overrightarrow{d}_{ph} \wedge m\overrightarrow{v}_{cm} + I_{cm}\overrightarrow{\omega}_{rot}$$

dove con $\overrightarrow{d}_{ph}$ abbiamo indicato un vettore che punta dal punto P al centro della sfera, un istante prima di toccare lo scalino e con $I_{cm}$ il momento di inerzia rispetto al centro di massa della sfera. Per cui:

$$\overrightarrow{L}_i = (-mv_{cm}(r-h) - I_{cm}\omega_{rot})\,\hat{z}$$

Ricordando che il moto è di puro rotolamento, date le direzioni e i versi di $\overrightarrow{v}_{cm}$ e $\overrightarrow{\omega}_{rot}$, vale la relazione $v_{cm} = \omega r = |\omega_{rot}|r$. Possiamo pertanto scrivere:

$$|\overrightarrow{L}_i| = L_i = mv_{cm}(r-h) + I_{cm}\omega$$

Dalla quale, poichè per una sfera, $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$ otteniamo:

$$L_i \;=\; mv_{cm}(r-h) + \frac{2}{5}mr^2\omega \;=\; \frac{7}{5}mv_{cm}r - mv_{cm}h \qquad \Rightarrow \qquad L_i = m\omega r\left(\frac{7}{5}r - h\right)$$

**Domanda.2**
Un istante dopo l'urto, la sfera ruota attorno attorno al punto P, per cui il momento angolare rispetto al punto P è dato da:

$$\overrightarrow{L}_f = I_p\overrightarrow{\omega}'_{rot}\hat{z}$$

Dove $I_p$ è il momento di inerzia della sfera rispetto a P che coincide, un istante dopo l'urto, con il centro di rotazione:

$$I_p = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2$$

Tenendo conto come prima del verso di rotazione ($\overrightarrow{\omega'}_{rot} = -|\omega'_{rot}|\hat{z}$, è un vettore entrante nel piano del foglio), indicando con $\omega_f = |\overrightarrow{\omega'}_{rot}|$, il modulo della velocità angolare finale, possiamo scrivere:

$$|\overrightarrow{L}_f| = L_f = \left(\frac{2}{5}mr^2 + mr^2\right)\omega_f = \frac{7}{5}mr^2\omega_f$$

Imponendo per la conservazione del momento angolare, $L_i = L_f$, si ottiene:

$$\frac{7}{5}mr^2\omega_f = \frac{7}{5}mv_{cm}r - mv_{cm}h \qquad \Rightarrow \qquad \omega_f = \left(1 - \frac{5}{7}\frac{h}{r}\right)\frac{v_{cm}}{r}$$

Un istante prima dell'urto, l'energia cinetica dovuta alla sola rotazione del corpo, dal teorema di König è data da:

$$E_k = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\frac{v_{cm}^2}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{v_{cm}^2}{r^2} = \frac{1}{5}mv_{cm}^2$$

Un istante dopo l'urto la sfera ruota attorno al punto $P$, la sua energia cinetica totale attorno a tale punto è data da:

$$E = \frac{1}{2}I_P\omega_f^2 = \frac{1}{2}m\omega_f^2r^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega_f^2$$

dove per l'ultima eguaglianza abbiamo usato il teorema di König.
L'energia cinetica di rotazione un istante dopo l'urto è data dal secondo termine dell'ultima equazione che si può riscrivere in funzione dei dati del problema, permettendo di calcolare la soluzione:

$$E_k = \frac{1}{2}I_{cm}\omega_f^2 = \frac{1}{5}mr^2\left(\left(1 - \frac{5}{7}\frac{h}{r}\right)\frac{v_{cm}}{r}\right)^2$$

**Domanda.3**

Poichè nel moto successivo all'urto vale la conservazione dell'energia, affinchè la sfera possa superare il gradino, la somma dell'energia cinetica di rotazione attorno al punto P ($E$) e dell'energia potenziale (entrambe calcolate un istante dopo l'urto), deve essere maggiore o uguale alla sola energia potenziale che la sfera possiede una volta arrivata sullo scalino (la sfera deve arrivare sullo scalino anche con velocità rotazionale e traslazionale nulla).
Assumendo lo zero dell'energia potenziale sul piano di partenza, vale:

$$\frac{1}{2}I_P\omega_f^2 + mgr = mg(h+r) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}I_P\omega_f^2 = mgh$$

Dalla quale:

$$\frac{7}{10}mr^2\left(1-\frac{5h}{7r}\right)^2\left(\frac{v}{r}\right)^2 = mgh$$

Che risolta rispetto a $v$, fornisce la soluzione:

$$v^* = \frac{r}{(7r-5h)}\sqrt{70gh}$$

## Soluzione Esercizio 2

**NB.** Nel testo per un errore di deformazione professionale (il simbolo della resistività: $\rho$) abbiamo scritto "di un filo conduttore di resistività $\rho$= xxx Ω m", il testo corretto è "di un filo conduttore di resistenza per unità di lunghezza $\rho$= xxx Ω/m": terremo conto di questo nostro errore nella correzione della terza domanda del secondo esercizio.

**Domanda.1**

Il momento di dipolo magnetico $\vec{\mu}$ di una bobina piana di N avvolgimenti, è dato da $\vec{\mu} = iNA\hat{n}$ la cui direzione e verso coincide con quella del versore $\hat{n}$ normale al piano della bobina e orientato secondo la regola della mano destra, rispetto al verso della corrente nella bobina.

Nel nostro caso la bobina è costituita dall'unione di due sezioni, entrambe di area $A = \frac{\pi}{2}r^2$, la prima che giace sul piano $XY$ e la seconda che giace nel piano $YZ$.

Il momento magnetico $\vec{\mu}$ risultante avrà quindi due contributi, uno dalla porzione di spira nel piano $YZ$, il cui versore normale, dato il verso della corrente, ha componenti $(1;0;0)$ e l'altro dalla porzione che giace nel piano $XY$, il cui versore normale, dato il verso della corrente, ha componenti $(0;0;1)$. Pertanto otteniamo:

$$\vec{\mu} = NiA(1;0;0) + NiA(0;0;1) = Ni\frac{\pi}{2}r^2(1;0;1) \tag{1}$$

Dalla (1) è facile dedurre che:

$$|\vec{\mu}| = (NiA)\sqrt{(1+0+1)} = NiA\sqrt{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}Nir^2 \tag{2}$$

Sempre dalla (1) si possono calcolare le componenti del versore del momento magnetico $\overrightarrow{u}_\mu$:

$$\vec{u}_\mu = \frac{\vec{\mu}}{|\vec{\mu}|} = \frac{\frac{\pi}{2}Nir^2(1;0;1)}{\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\ N\ i\ r^2} \ = \ (\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0;\ \frac{1}{\sqrt{2}}) \tag{3}$$

**Domanda.2**

Una bobina di $N$ spire, con sezione di area $A$, con una corrente $i$ che percorre l'avvolgimento, in presenza di un campo magnetico uniforme $\vec{B}$, è soggetta ad un momento torcente $\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$ ed ha un'energia potenziale pari a $U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$.

Il momento torcente e di conseguenza il suo modulo si possono calcolare svolgendo il prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned}\vec{\tau} = \vec{\mu}\wedge\vec{B} = Ni\frac{\pi}{2}r^2\begin{bmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 0 & 1\\ B_x & B_y & 0\end{bmatrix} &= Ni\frac{\pi}{2}r^2\left(-B_y\hat{i} + B_x\hat{j} + B_y\hat{k}\right)\\ |\vec{\tau}| &= Ni\frac{\pi}{2}r^2\sqrt{2B_y^2 + B_x^2}\end{aligned} \tag{4}$$

Svolgendo invece il prodotto scalare si ottiene l'energia potenziale magnetica ($U$) dell'avvolgimento:

$$\begin{aligned}U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} \ &= -Ni\frac{\pi}{2}r^2\left(1;0;1\right)\cdot\left(B_x;B_y;0\right)\\ U &= -Ni\frac{\pi}{2}r^2B_x\end{aligned} \tag{5}$$

**Domanda.3**

Per determinare la la corrente $i_{rot}$ che circola nell'avvolgimento al tempo $t^*$ notiamo che questa sarà la somma della corrente $i$ già circolante nella bobina e della corrente $i_{ind}$ indotta, il cui verso di circolazione e quindi il segno dipende dalla legge di Lenz. Dobbiamo prima calcolare la forza elettromotrice indotta,$V_{ind}$, e per fare questo calcoliamo il flusso del campo magnetico attraverso la superfice della spira, $\phi_m$ :

$$\phi_m = \int \overrightarrow{B}\cdot\hat{n}_1 ds_1 + \int \overrightarrow{B}\cdot\hat{n}_2 ds_2$$

dove abbiamo indicato con $dS_1$ e $\hat{n}_1$ rispettivamente un elemento della superficie della porzione di avvogimento la cui area giace su $XY$ e il suo versore, in modo analogo $dS_2$ e $\hat{n}_2$ indicano rispettivamente un elemento della superficie della porzione di avvogimento la cui area giace su $YZ$ (che ruota ) e il suo versore (anche lui ruota).

Il primo contributo a $\phi_m$ è nullo, essendo il campo magnetico (che giace sul piano $XY$) ortogonale al versore $\hat{n}_1$.

Per il secondo contributo, le componenti di $\hat{n}_2$ dipendono dal tempo e vale:

$$\hat{n}_2(t) = cos(\Omega t)\hat{i} + sin(\Omega t)\hat{j}$$

infatti al tempo $t = 0$ la normale $\hat{n}_2(0)$ coincide con il versore dell'asse $x$ $(\hat{i})$ per cui :

$$\phi_m = \int \overrightarrow{B} \cdot \hat{n}_2 ds_2 = B_x cos(\Omega t) N \frac{\pi r^2}{2} + B_y sin(\Omega t) N \frac{\pi r^2}{2} \quad \Rightarrow \quad V_{ind} = -\frac{d\phi_m}{dt} = N \frac{\pi r^2}{2} \left( B_x \Omega sin(\Omega t) - B_y \Omega cos(\Omega t) \right)$$

Per determinare $i_{ind}$ dobbiamo prima calcolare la resistenza totale $R_{tot}$ dell'avvolgimento: $R_{tot} = \rho l$, dove con $l$ abbiamo indicato la lunghezza totale dell'avvolgimento (data da $2\pi r N$) e ricordiamo che $\rho$ è la resistenza per unità di lunghezza. Per cui:

$$R_{tot} = \rho 2\pi r N \qquad \Rightarrow \qquad i_{ind} = \frac{V_{ind}}{R_{tot}} = N \frac{\pi r^2}{2} \left( B_x \Omega sin(\Omega t) - B_y \Omega cos(\Omega t) \right) \frac{1}{R_{tot}} = \frac{r}{4\rho} \left( B_x \Omega sin(\Omega t) - B_y \Omega cos(\Omega t) \right)$$

Possiamo ora determinare la corrente complessiva che circola nell'avvolgimento:

$$i_{rot} = i + i_{ind}$$

Infine la potenza dissipata nella resistenza è data da:

$$P(t) = R_{tot} i_{rot}^2$$

con $i_{rot}$ che dipende dal tempo.

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**
**Testo n.0 - Esame di Fisica Generale sessione del 24/07/2020**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**

Un punto materiale di massa $m$= 16.3 kg può muoversi senza attrito su un piano orizzontale. Al punto sono collegate due molle ideali di costanti elastiche $k_1$= 71 Nm$^{-1}$ e $k_2$= 571 Nm$^{-1}$ , rispettivamente, come mostrato in figura. Nella posizione $x_0$=0 m il blocco è in equilibrio e le molle sono a riposo. All'istante $t$=0 s il punto materiale di massa $m$ viene lasciato, da fermo, dalla posizione x= 133 cm . Determinare:

1) la pulsazione $\omega$ delle oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio:

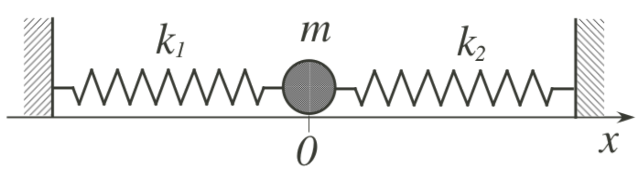
$\omega$ = ......................

2) la legge oraria del punto per $t \geq$0 s e il modulo della massima accelerazione $|a_{max}|$ raggiunta dal punto durante il suo moto:

$|a_{max}|$ = ...................... ; $x(t)$ =......................

3) l'energia meccanica totale $E_{tot}$ del punto al tempo $t$=T/ 19 (con T periodo del moto oscillatorio):

$E_{tot}$ = ......................




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

I due solenoidi in figura sono rettilinei, di lunghezza infinita, coassiali con l'asse in comune lungo l'asse $Z$ e hanno raggi $r_1$= 21 mm ed $r_2$= 112 mm . I solenoidi hanno entrambi $n$= 5.38 $10^5$ spire $m^{-1}$ e sono percorsi da una medesima corrente $i_0$= 36 A ma in versi opposti, come rappresentato in figura. Si determinino:

1) Il grafico di $B(r)$ in funzione della distanza $r$ dall'asse $Z$ e
l'espressione del campo magnetico $\vec{B}(r, \varphi, z)$ $\forall r \geq 0$ ; $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$ ; $\forall z \in \mathbb{R}$

$$\vec{B}(r, \varphi, z) = \text{.....................}$$

2) Calcolare l'intensità del campo magnetico $|\vec{B}\Big(0, \varphi, z\Big)|$ $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$ ; $\forall z \in \mathbb{R}$

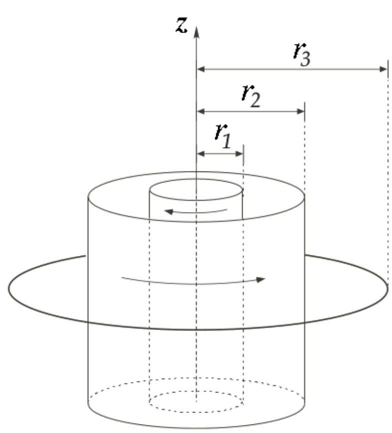
$$|\vec{B}\Big(0, \varphi, z\Big)| = \text{.....................}$$

Intorno ai due solenoidi, e coassialmente ad essi, viene collocata una spira circolare, di raggio $r_3$= 71 cm e resistenza ohmica R= 119 Ω, mentre la corrente che scorre nei solenoidi viene fatta variare con legge $i(t) = 24.1\ t$ . Determinare:

3) la potenza $P$ dissipata in (mW) sulla spira per effetto Joule

$$P = \text{.....................}$$

**Costanti Utili:** $\mu_0 = 1.257\ 10^{-6}$ TmA$^{-1}$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

## Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
**Testo n.0 - Esame di Fisica Generale sessione del 24/07/2020**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**

Un punto materiale di massa $m$= 16.3 kg può muoversi senza attrito su un piano orizzontale. Al punto sono collegate due molle ideali di costanti elastiche $k_1$= 71 $\mathrm{Nm}^{-1}$ e $k_2$= 571 $\mathrm{Nm}^{-1}$ , rispettivamente, come mostrato in figura. Nella posizione $x_0$=0 m il blocco è in equilibrio e le molle sono a riposo. All'istante $t$=0 s il punto materiale di massa $m$ viene lasciato, da fermo, dalla posizione x= 133 cm . Determinare:

1) la pulsazione $\omega$ delle oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio:

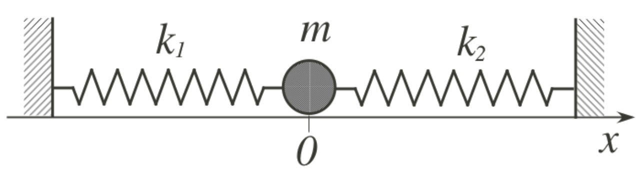
$$\omega = \ 6.3 \text{ rad/s}$$

2) la legge oraria del punto per $t \geq 0$ s e il modulo della massima accelerazione $|a_{max}|$ raggiunta dal punto durante il suo moto:

$$|a_{max}| = \ 52.40 \text{ ms}^{-2} \qquad ; \qquad x(t) = 1.33 \cos(\ 6.28\ t)$$

3) l'energia meccanica totale $E_{tot}$ del punto al tempo $t$=T/ 19 (con T periodo del moto oscillatorio):

$$E_{tot} = \ 567.8 \text{ J}$$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

I due solenoidi in figura sono rettilinei, di lunghezza infinita, coassiali con l'asse in comune lungo l'asse $Z$ e hanno raggi $r_1$= 21 mm ed $r_2$= 112 mm . I solenoidi hanno entrambi $n$= 5.38 $10^5$ spire $\mathrm{m}^{-1}$ e sono percorsi da una medesima corrente $i_0$= 36 A ma in versi opposti, come rappresentato in figura. Si determinino:

1) Il grafico di $B(r)$ in funzione della distanza $r$ dall'asse $Z$ e
l'espressione del campo magnetico $\vec{B}(r, \varphi, z)$ $\forall r \geq 0$ ; $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$ ; $\forall z \in \mathbb{R}$

$$\vec{B}(r, \varphi, z) = (0;\ 0;\ 24.35\ )\ \mathrm{T}\ \mathit{per}\ r \in [r_1, r_2] \qquad \text{e} \qquad \vec{B}(r, \varphi, z) = (0;\ 0;\ 0)\ \mathrm{T\ altrove}$$

2) Calcolare l'intensità del campo magnetico $|\vec{B}\Big(0, \varphi, z\Big)|$ $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$ ; $\forall z \in \mathbb{R}$

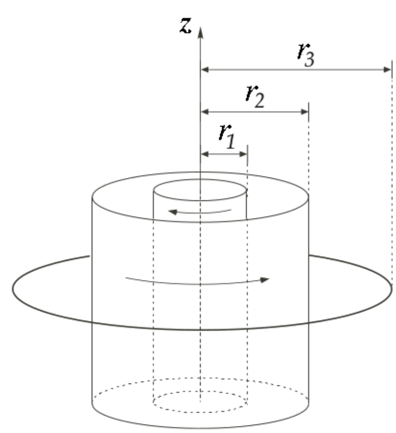
$$|\vec{B}\Big(0, \varphi, z\Big)| = \ 0\ \mathrm{T}$$

Intorno ai due solenoidi, e coassialmente ad essi, viene collocata una spira circolare, di raggio $r_3$= 71 cm e resistenza ohmica R= 119 Ω, mentre la corrente che scorre nei solenoidi viene fatta variare con legge $i(t) = 24.1\ t$ . Determinare:

3) la potenza $P$ dissipata in (mW) sulla spira per effetto Joule

$$P = \ 3.23\ \mathrm{mW}$$

**Costanti Utili:** $\mu_0 = 1.257\ 10^{-6}\ \mathrm{TmA}^{-1}$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

## Soluzione Esercizio 1

**Domanda.1**

Per qualsiasi spostamento ($x$) della massa dalla posizione di equilibrio, le forze esercitate dalle molle sul punto materiale sono parallele e concordi, per cui la forza totale è $F(x) = -(k_1 + k_2)x$, che è l'equazione di un oscillatore armonico $\ddot{x} + \left(\frac{k_1+k_2}{m}\right) x = 0$. Pertanto il moto è armonico con:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

Possiamo anche usare al posto di $k_1 + k_2$, $k_{eq} = k_1 + k_2$ quindi il sistema delle 2 molle è equivalente in questo caso a un'unica molla di costante $k_{eq}$.

**Domanda.2**

Il punto materiale si muove di moto armonico con pulsazione pulsazione $\omega$. Al tempo t=0, $x(0) = x_1$ con $x_1 = x$ e velocità iniziale nulla, $v(0) = 0$ (dati del problema). La legge oraria è del tipo $x(t) = Acos(\omega t + \phi)$, per cui imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(0) = x_1 = Acos(\phi) \\ \dot{x}(0) = 0 = -\omega Asin(\phi) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \phi = 0 \\ A = x_1 \end{cases}$$

La legge oraria risulta pertanto:

$$x(t) = x_1 cos(\omega t)$$

Dall'equazione del moto possiamo determinare l'espressione della velocità e dell'accelerazione del punto materiale:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\omega x_1 sin(\omega t) \\ \ddot{x}(t) = -\omega^2 x_1 cos(\omega t) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} |v_{max}| = \omega x_1 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} x_1 \\ |a_{max}| = \omega^2 x_1 = \frac{k_1+k_2}{m} x_1 \end{cases}$$

**Domanda.3**

Il punto si muove con velocità $v(t) = \dot{x}(t) = -\omega x_1 sin(\omega t)$, per cui la sua energia cinetica è:

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 sin^2(\omega t)$$

per cui al tempo $t = T/n$ , ricordando la relazione tra $T$ e $\omega$ e l'espressione di $\omega$ (Domanda 1) avremo:

$$E_k = E_k(T/n) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\, x_1^2 sin^2\left(\omega\frac{T}{n}\right) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\, x_1^2 sin^2\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{n}\right) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\, x_1^2 sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

L'energia potenziale è la somma delle energie potenziali associate alle due molle quindi:

$$E_p(t) = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}k_2 x_1^2 cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}k_{eq} x_1^2 cos^2(\omega t)$$

Al tempo $t = \frac{T}{n}$ esprimendo $E_k$ in funzione dei dati del problema otteniamo:

$$E_p = E_p\left(\frac{T}{n}\right) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\, x_1^2 cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Infine, l'energia totale $E_{tot}$, poichè non sono in gioco forze non conservative, è costante ed è pari a:

$$E_{tot} = E_k(t) + E_p(t) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\, x_1^2$$

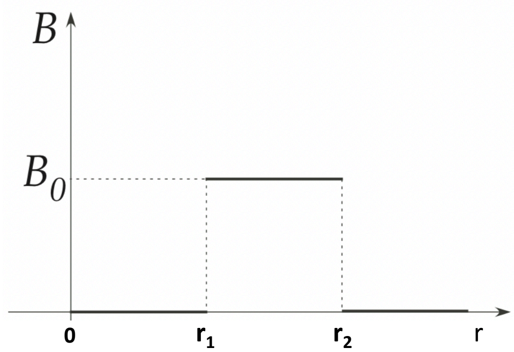
## Soluzione Esercizio 2

**Domanda.1**

Il campo generato da ciascuno dei due solenoidi è nullo all'esterno di ciascun solenoide, mentre all'interno di ciascun solenoide è uniforme ed ha modulo pari a $B_0 = \mu_0 n i_0$. I due campi all'interno di ciascun solenoide sono inoltre entrambi diretti lungo l'asse $Z$ (vedi figura) ma hanno versi opposti. Assumendo i versi delle correnti mostrati in figura, all'interno del solenoide di raggio minore il campo magnetico, che indichiamo con $\vec{B}_1$, vale $\vec{B}_1 = -B_0\hat{z}$ , mentre, all'interno dell'altro, $\vec{B}_2 = \mu_0 n i_0 \hat{z}$. Dal teorema di sovrapposizione il campo totale è dato dalla somma vettoriale dei due. Pertanto $\overrightarrow{B}$, $|\overrightarrow{B}|$ e $\hat{B}$ sono dati rispettivamente dalle seguenti relazioni:

$$\overrightarrow{B}(r) = \overrightarrow{B}_1(r) + \overrightarrow{B}_2(r) = \begin{cases} 0 & r < r_1 \\ B_0\hat{z} & r_1 < r < r_2 \\ 0 & r > r_2 \end{cases} \qquad |\overrightarrow{B}(r)| = \begin{cases} 0 & r < r_1 \\ B_0 & r_1 < r < r_2 \\ 0 & r > r_2 \end{cases} \qquad \hat{B} = \begin{cases} 0 & r < r_1 \\ \hat{z} & r_1 < r < r_2 \\ 0 & r > r_2 \end{cases}$$

Il grafico di $B(r)$ in funzione della distanza $r$ dall'asse $Z$ è riportato nella figura seguente:




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

**Domanda.2**

Per il calcolo di $|\overrightarrow{B}|$, ad una distanza nulla dall'asse $Z$ o pari a $2r_1 + 2r_2$ l'intensità del campo magnetico è nulla (vedi risposta al punto 1, per il modulo di B) mentre per una distanza dall'asse pari a $r = (r_1 + r_2)/2$, l'intensità dipende dal valore della distanza r, e si determina utilizzando l'espressione per il modulo del campo magnetico in funzione di r ottenuta al punto 1.

**Domanda.3**

Per rispondere alle domande del punto 3 calcoliamo dapprima il flusso del campo magnetico attraverso la superfice della spira, $\phi_m$, che in generale è dato da:

$$\phi_m = \int \overrightarrow{B} \cdot \hat{n} ds$$

Quando la corrente che scorre nei solenoidi viene fatta variare secondo la legge assegnata, mantenendo il verso di percorrenza iniziale dei solenoidi, $\overrightarrow{B}(r,t)$ è dato da:

$$\overrightarrow{B}(r,t) = \overrightarrow{B}_1(r,t) + \overrightarrow{B}_2(r,t) = \begin{cases} 0 & r < r_1 \\ \mu_0 n i(t)\hat{z} & r_1 < r < r_2 \\ 0 & r > r_2 \end{cases}$$

Poichè il raggio della spira soddisfa $r_3 > r_2$, al flusso di $\overrightarrow{B}$ concatenato con la superfice della spira contribuisce solo la regione in cui il campo magnetico non è nullo ($r_1 < r < r_2$), pertanto in questo caso:

$$\phi_m = \mu_0 n i(t) \pi \left(r_2^2 - r_1^2\right)$$

di conseguenza, dalla legge di Lenz possiamo determinare la forza elettromotrice indotta $\varepsilon_i$ :

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\mu_0 n \pi \left(r_2^2 - r_1^2\right) \frac{di}{dt} = -\mu_0 n \pi \left(r_2^2 - r_1^2\right) k$$

Questa quantità è negativa, pertanto, avendo scelto la normale al circuito concorde con il campo magnetico, per la regola della mano destra, la corrente indotta circola in verso orario nella spira, e tende ad opporsi alla variazione di flusso che la ha generata. Infine la potenza dissipata sulla resistenza della spira, $P$, è data da:

$$P = \varepsilon_i^2 / R$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**
**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 13/1/2021**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**

Con riferimento alla figura, una carrucola, di massa $M$= 0.5 kg e di forma cilindrica e omogenea, è libera di ruotare senza attrito intorno al proprio asse orizzontale. Essa è fissata alla sommità di un piano inclinato formante un angolo $\theta$= 30$^o$ rispetto al piano orizzontale. Intorno alla carrucola è avvolto un filo, inestensibile e di massa trascurabile, alla cui estremità libera è fissato un corpo di massa $m$= 0.3 kg, di forma cubica e assimilabile a un punto materiale, che giace sul piano inclinato. Il filo si mantiene sempre parallelo al piano e non slitta sulla carrucola. Tra il corpo e piano inclinato si esercita attrito radente dinamico, caratterizzato dal coefficiente $\mu$= 0.3 . Il corpo di massa $m$ è inizialmente fermo.

Determinare:

1. La tensione del filo durante la discesa lungo piano$|\overrightarrow{T}|$

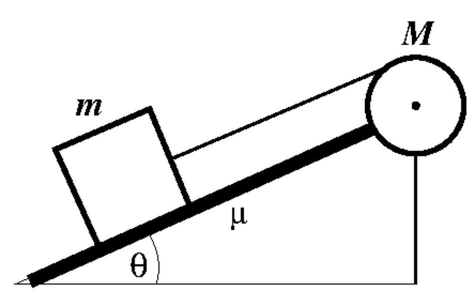
$$|\overrightarrow{T}| = ......................$$

2. Calcolare la velocità del corpo di massa $m$ dopo che ha percorso un tratto di lunghezza $L$= 3 m lungo il piano inclinato

$$\text{v} = ......................$$

3. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza di attito $\mathscr{L}$ quando la massa $m$ ha percorso il tratto di lunghezza $L$ lungo il piano.

$$\mathscr{L}= ......................$$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Con riferimento alla figura, una sfera uniformemente carica di raggio $R_1$= 0.03 m e carica $Q$= 1.1 nC, è contenuta all'interno di una superficie sferica di raggio $R_2$= 0.05 m, sulla quale è distribuita la stessa carica $Q$ in modo uniforme. Le due sfere sono concentriche con centro in $O$ e il sistema si trova nel vuoto.

1. Si determini il campo elettrico $\overrightarrow{E}$ in tutto lo spazio e si disegni il grafico del modulo del campo elettrico in funzione della distanza dal centro delle sfere.

$$\overrightarrow{E} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

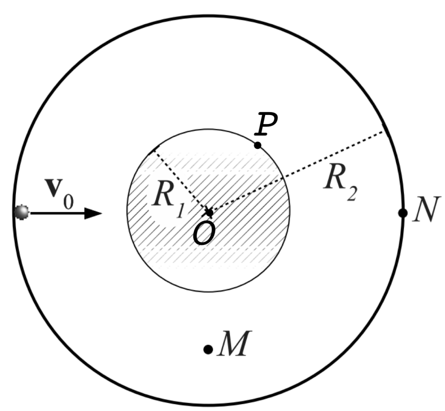
2. Determinare la differenza di potenziale $V_{MN} = V(M) - V(N)$ tra il punto $M$, posto a distanza $\frac{(R_1+R_2)}{2}$ dal centro delle sfere, e il punto $N$, posto a distanza $R_2$ sempre dal centro delle sfere.

$$V_{MN} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. Determinare la velocità minima iniziale, $v_0$, con cui deve essere lanciata una particella puntiforme di massa $m$= $4{\times}10^{-12}$ kg e carica $q$=3 pC dalla superfice sferica esterna verso il centro delle sfere per raggiungere la superficie sferica interna.

$$v_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

**Costanti Utili:** $\epsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}$ F/m




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

## Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 13/1/2021**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**

Con riferimento alla figura, una carrucola, di massa $M$= 0.5 kg e di forma cilindrica e omogenea, è libera di ruotare senza attrito intorno al proprio asse orizzontale. Essa è fissata alla sommità di un piano inclinato formante un angolo $\theta$= 30$^o$ rispetto al piano orizzontale. Intorno alla carrucola è avvolto un filo, inestensibile e di massa trascurabile, alla cui estremità libera è fissato un corpo di massa $m$= 0.3 kg, di forma cubica e assimilabile a un punto materiale, che giace sul piano inclinato. Il filo si mantiene sempre parallelo al piano e non slitta sulla carrucola. Tra il corpo e piano inclinato si esercita attrito radente dinamico, caratterizzato dal coefficiente $\mu$= 0.3 . Il corpo di massa $m$ è inizialmente fermo.

Determinare:

1. La tensione del filo durante la discesa lungo piano $|\overrightarrow{T}|$

$$|\overrightarrow{T}| = \ 0.32 \text{ N}$$

2. L'accelerazione del corpo durante la discesa lungo piano $a$

$$a = \ 1.28 \text{ m/s}^2$$

3. Calcolare la velocità del corpo di massa $m$ dopo che ha percorso un tratto di lunghezza $L$= 3 m lungo il piano inclinato

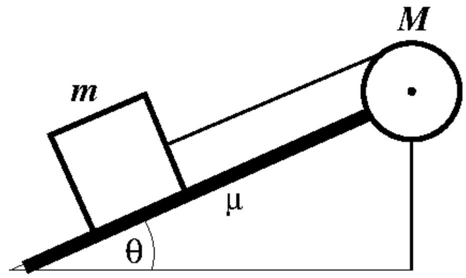
$$\text{v} = \ 2.77 \text{ ms}^{-1}$$

4. Calcolare il tempo, $t_d$, che il corpo massa $m$ impiega a percorrere un tratto di lunghezza $L$ = 3 m lungo il piano inclinato, partendo dalla posizione iniziale.

$$t_d = \ 2.16 \text{ s}$$

5. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza di attito $\mathscr{L}$ sul corpo quando la massa $m$ ha percorso il tratto $L$ lungo il piano.

$$\mathscr{L} = \ \text{-2.29 J}$$



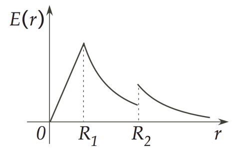

(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Con riferimento alla figura, una sfera uniformemente carica di raggio $R_1$= 0.03 m e carica $Q$= 1.1 nC, è contenuta all'interno di una superficie sferica di raggio $R_2$= 0.05 m, sulla quale è distribuita la stessa carica $Q$ in modo uniforme. Le due sfere sono concentriche con centro in $O$ e il sistema si trova nel vuoto.

1. Si determini il campo elettrico $\overrightarrow{E}$ in tutto lo spazio e si disegni il grafico del modulo del campo elettrico in funzione della distanza dal centro delle sfere.

$$\overrightarrow{E}(r) = \; E(r)\hat{r} \qquad\qquad E(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R_2 \end{cases}$$




2. Determinare la differenza di potenziale $V_{MN} = V(M) - V(N)$ tra il punto $M$, posto a distanza $\frac{(R_1+R_2)}{2}$ dal centro delle sfere, e il punto $N$, posto a distanza $R_2$ sempre dal centro delle sfere.

$$V_{MN} = \; 49.5 \text{ V}$$

3. Determinare la differenza di potenziale $V_{OP} = V(O) - V(P)$ tra il punto $O$, centro delle sfere, e il punto $P$, posto a distanza $R_1$ sempre dal centro delle sfere.

$$V_{OP} = \; 14.8 \text{ V}$$

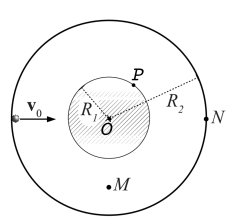
4. Determinare la velocità minima iniziale, $v_0$, con cui deve essere lanciata una particella puntiforme di massa $m$= 4×10$^{-12}$ kg e carica $q$=3 pC dalla superfice sferica esterna verso il centro delle sfere per raggiungere la superficie sferica interna.

$$v_0 = \; 14.1 \text{ m}s^{-1}$$

5. Determinare la velocità minima iniziale, $v_0$, con cui deve essere lanciata una particella puntiforme di massa $m$= 4×10$^{-12}$ kg e carica $q$=3 pC dalla superfice sferica esterna verso il centro delle sfere per raggiungere la superficie sferica interna con velocità $v_1 = 5\ ms^{-1}$.

$$v_0 = \; 14.9 \text{ m}s^{-1}$$

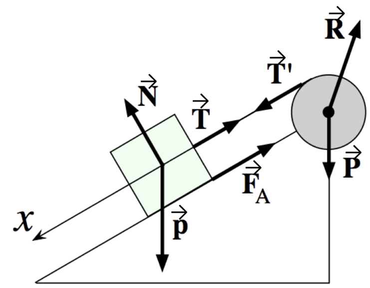
**Costanti Utili:** $\epsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}$ F/m




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

## Soluzione Esercizio 1

**Domanda.1**




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Con riferimento alla Figura, indichiamo con $\overrightarrow{N}$ la reazione vincolare del piano, con $\overrightarrow{p}$ la forza peso agente sulla massa $m$, con $\overrightarrow{P}$ la forza peso agente sulla carrucola di massa $M$, con $\overrightarrow{T}'$ la tensione del filo dal lato $M$, con $\overrightarrow{T}$ la tensione del filo dal lato $m$, con $\overrightarrow{F}_A$ la forza di attrito esercitata dal piano e con $\overrightarrow{R}$ la reazione vincolare del perno attorno al quale ruota la carrucola.
Poichè il corpo non presenta accelerazione nella direzione ortogonale al piano, lungo tale direzione la risultante delle forze ad esso applicate deve essere nulla. Pertanto, $N = mgcos\theta$ e $F_A = \mu N = \mu mgcos\theta$.
Per il moto del corpo lungo l'asse x, dalla seconda legge di Newton:

$$mgsin\theta - \mu mgcos\theta - T = ma \tag{1}$$

Per la rotazione della carrucola attorno al proprio asse, dalla seconda equazione cardinale:

$$\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{T}' = I\overrightarrow{\alpha} = rT'\hat{z} = I\alpha\hat{z} \tag{2}$$

Dove con $I$ abbiamo indicato il momento di inerzia della carrucola di forma cilindrica con $I = \frac{Mr^2}{2}$ dove $r$ è il raggio della carrucola. Dall'ultima eguaglianza dell'equazione (2) poichè $|\overrightarrow{T}'| = |\overrightarrow{T}|$ e l'accelerazione di un punto della corda coincide con l'accelerazione del corpo $a = \alpha r$, possiamo scrivere:

$$rT = I\alpha = \frac{Mr^2}{2}\frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}Ma \tag{3}$$

sommando l'ultima equazione della(3) all'equazione (1) otteniamo:

$$mgsin\theta - \mu mgcos\theta = ma + \frac{1}{2}Ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g\left(sin\theta - \mu cos\theta\right)}{1 + \frac{M}{2m}}$$

Sostituendo infine l'espressione dell'accelerazione $a$ nell'ultima equazione della(3) otteniamo:

$$T = \frac{1}{2}M\frac{g\left(sin\theta - \mu cos\theta\right)}{1 + \frac{M}{2m}} = \frac{mg\left(sin\theta - \mu cos\theta\right)}{1 + \frac{2m}{M}}$$

**Domanda.2**
Il corpo scivola sul piano inclinato con accelerazione costante, e con velocità iniziale nulla di un tratto $L$ pertanto:

$$L = \frac{1}{2}at_d^2 \quad \Rightarrow \quad t_d = \sqrt{\frac{2L}{a}}$$

inoltre la velocità dopo aver percorso un tratto $L$ nel tempo $t_d$ è

$$v = at_d = \sqrt{2aL}$$

**Domanda.3**
Il lavoro compiuto dalla forza di attrito quando la massa $m$ scende del tratto $L$ è pari a:

$$\mathscr{L} = -\mu mgcos\theta L$$

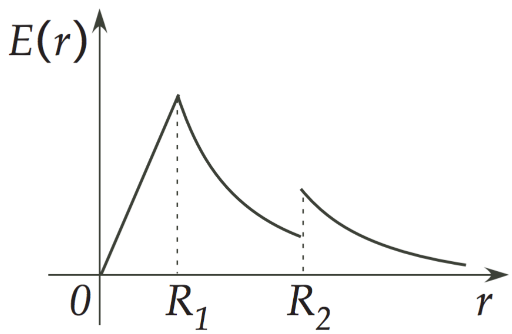
## Soluzione Esercizio 2

**Domanda.1**

Applicando la legge di Gauss ad una sfera di raggio $r$ concentrica al sistema, sfruttando la simmetria sferica della distribuzione di carica si ottiene il campo elettrostatico $\overrightarrow{E}$ in tutto lo spazio, che ha un diverso andamento nelle tre regioni ($r < R_1,\ R_1 < r < R_2,\ r > R_2$) ed è diretto radialmente:

$$\overrightarrow{E}(r) = \quad E(r)\hat{r} \qquad\qquad E(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R_2 \end{cases}$$

Il campo è diretto sempre nella direzione radiale, con verso uscente dal centro ($O$) del sistema (poichè $Q > 0$).
Per cui il grafico di E(r) è il seguente:




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

**Domanda.2**

Indicando con $V(M)$ e $V(N)$ i valori del potenziale nei punti M e N rispettivamente, e poichè il campo elettrico per i punti a distanza $r$ dal centro con $R_1 < r < R_2$, è dato da $E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, otteniamo:

$$V_{MN} = V(M){-}V(N) = \int_{\frac{R_1+R_2}{2}}^{R_2} E(r)dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\frac{R_1+R_2}{2}}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\mid_{\frac{R_1+R_2}{2}}^{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{R_1+R_2} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\frac{R_2-R_1}{R_1+R_2}$$

Indicando con $V(O)$ e $V(P)$ i valori del potenziale nei punti O e P rispettivamente, e poichè il campo elettrico per i punti a distanza $r$ dal centro con $0 < r < R_1$, è dato da $E(r) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3}$ otteniamo:

$$V_{OP} = V(O) - V(P) = \int_0^{R_1} E(r)dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3}\int_0^{R_1} r dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3}\frac{R_1^2}{2} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R_1}$$

**Domanda. 3**

Poichè la carica è positiva la forza elettrostatica è diretta come $\hat{r}$ e quindi rallenta il moto della particella. La velocità minima $v_0$ che è necessario impartire alla particella è pertanto quella che le permette di arrivare sulla superficie sferica interna con velocità nulla. Inoltre, il potenziale dipende solo dalla distanza dal centro, per cui possiamo prendere come posizione di partenza della particella qualsiasi punto sulla superficie esterna (ad esempio, N). Indicando con P un generico punto sulla superficie sferica interna, per la conservazione dell'energia meccanica vale la seguente relazione:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + qV(N) = qV(P) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = q(V(P) - V(N)) = q\int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}$$

Dall'ultima equazione otteniamo:

$$v_0 = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}}$$

Nel caso in cui la particella deve arrivare in $N$ con una velocità $v_1$, per la conservazione dell'energia meccanica vale la seguente relazione:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + qV(N) = qV(P) + \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = q(V(P) - V(N)) + \frac{1}{2}mv_1^2 = q\int_{R_1}^{R_2} E(r)dr + \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2} + \frac{1}{2}mv_1^2$$

Dall'ultima equazione otteniamo:

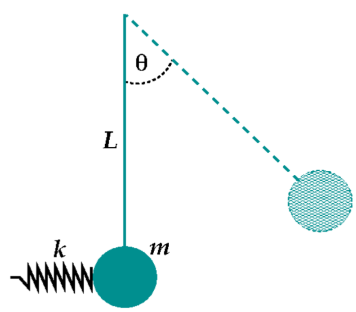
$$v_0 = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2} + v_1^2}$$

# Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
## Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 29/1/2021

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, un corpo assimilabile a un punto materiale di massa $m = 100\ g$ è collegato ad un filo, indeformabile e privo di massa, di lunghezza $L = 50\ cm$. Inizialmente il punto materiale è tenuto fermo nella posizione in cui il filo forma un angolo $\theta_0 = 45^0$ con la verticale. Ad un certo istante, il punto materiale viene lasciato cadere. Calcolare:

1.a Il modulo della tensione del filo, $T$, un istante dopo che è stato lasciato cadere

$T =$ ......................

1.b Il modulo della componente normale alla traiettoria del corpo della forza $F_n$ che agisce su di esso, un istante dopo che il corpo è stato lasciato cadere

$F_n =$ ......................

2.a Il modulo della velocità $v_1$ del punto quando il filo forma un angolo $\theta_1 = 30^0$ con la verticale e il modulo della forza $F_1$ che agisce su di esso

$v_1 =$ ...................... $F_1 =$ ......................

2.b Il modulo della velocità $v_1$ del punto quando il filo forma un angolo $\theta_1 = 30^0$ con la verticale, e il modulo delle componenti normale, $a_{1n}$, e tangenziale, $a_{1t}$, alla traiettoria della sua accelerazione

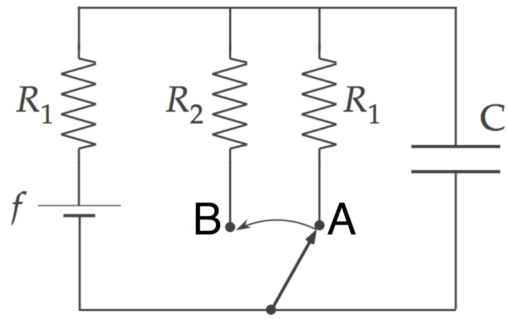
$v_1 =$ ...................... $a_{1n} =$ ...................... $a_{1t} =$ ......................

Supponiamo ora che nel suo moto di discesa il corpo vada a comprimere una molla di $d = 1.0\ cm$ (notare che $d \ll L$). La molla giace sul piano, è fissata a un estremo, è ideale, ha massa nulla, costante elastica k e quando raggiunge la massima compressione ($d$) il filo forma un angolo $\theta = 0^0$.

3. Determinare la costante elastica della molla $k$

$$k = \text{......................}$$

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, il generatore di f.e.m. ha una resistenza interna trascurabile e stabilisce una d.d.p. di 12 $V$, le resistenze valgono rispettivamente $R_1 = 3\ \Omega$ e $R_2 = 0.6\ \Omega$, mentre il condensatore ha una capacità $C = 4\ \mu F$. Inizialmente il deviatore è commutato su A.
Una volta che il circuito ha raggiunto la condizione di regime, determinare:

1.1 La potenza $P$ erogata dal generatore e la carica $Q$ del condensatore

$P$= ..................... $Q$= .....................

1.2 La potenza $P$ erogata dal generatore e la differenza di potenziale, $V_C$ ai capi del condensatore

$P$= ..................... $V_C$= .....................

Il deviatore viene poi commutato nella posizione $B$.
Una volta che il circuito ha raggiunto la condizione di regime, si determini:

2.1 L'energia dissipata, $E_{diss}$ nelle resistenze dopo un intervallo di tempo di $\Delta t$ secondi

$E_{diss}$= .....................

2.2 La variazione di energia elettrostatica del sistema, $\Delta E = E_B - E_A$, tra quando il commutatore è deviato su $B$ e quando lo è su $A$ in condizione di regime per entrambi i casi

$\Delta E$= .....................

Sempre con il deviatore commutato nella posizione $B$ si riempie il condensatore con un materiale di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 3$ e si aspetta che il circuito raggiunga una nuova condizione di regime. Si determini:

3.1 la variazione di energia elettrostatica del sistema, $\Delta E' = E'_B - E_B$

$\Delta E'$= .....................

3.2 la carica $Q'$ del condensatore

$Q'$= .....................

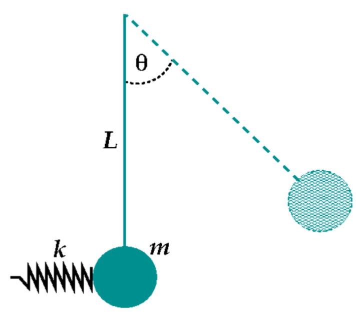
**Costanti Utili:** $\epsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}$ F/m

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**
**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 29/1/2021**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, un corpo assimilabile a un punto materiale di massa $m = 100\ g$ è collegato ad un filo, indeformabile e privo di massa, di lunghezza $L = 50\ cm$. Inizialmente il punto materiale è tenuto fermo nella posizione in cui il filo forma un angolo $\theta_0 = 45^0$ con la verticale. Ad un certo istante, il punto materiale viene lasciato cadere. Calcolare:

1.a Il modulo della tensione del filo, $T$, un istante dopo che è stato lasciato cadere

$$T = \quad 0.69\ \text{N}$$

1.b Il modulo della componente normale alla traiettoria del corpo della forza $F_n$ che agisce su di esso, un istante dopo che il corpo è stato lasciato cadere

$$F_n = \quad 0\ \text{N}$$

2.a Il modulo della velocità $v_1$ del punto quando il filo forma un angolo $\theta_1 = 30^0$ con la verticale e il modulo della forza $F_1$ che agisce su di esso

$$v_1 = \quad 1.25\ \text{m}s^{-1} \qquad F_1 = \quad 5.8\times10^{-1}\ \text{N}$$

2.b Il modulo della velocità $v_1$ del punto quando il filo forma un angolo $\theta_1 = 30^0$ con la verticale, e il modulo delle componenti normale, $a_{1n}$, e tangenziale, $a_{1t}$, alla traiettoria della sua accelerazione

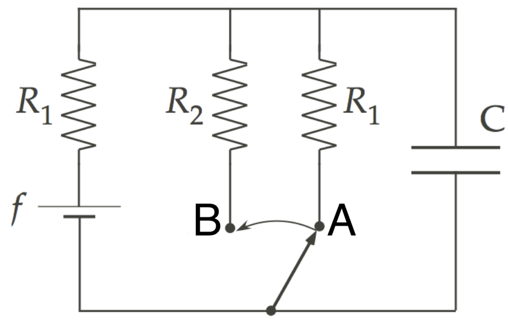
$$v_1 = \quad 1.25\ \text{m}s^{-1} \qquad a_{1n} = \quad 3.1\ \text{m}s^{-2} \qquad a_{1t} = \quad 4.9\ \text{m}s^{-2}$$

Supponiamo ora che nel suo moto di discesa il corpo vada a comprimere una molla di $d = 1.0\ cm$ (notare che $d \ll L$). La molla giace sul piano, è fissata a un estremo, è ideale, ha massa nulla, costante elastica k e quando raggiunge la massima compressione ($d$) il filo forma un angolo $\theta = 0^0$.

3. Determinare la costante elastica della molla $k$

$$k = \quad 2.9{\times}10^3 \ \mathrm{N}m^{-1}$$

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, il generatore di f.e.m. ha una resistenza interna trascurabile e stabilisce una d.d.p. di 12 $V$, le resistenze valgono rispettivamente $R_1 = 3\ \Omega$ e $R_2 = 0.6\ \Omega$, mentre il condensatore ha una capacità $C = 4\ \mu F$. Inizialmente il deviatore è commutato su A.
Una volta che il circuito ha raggiunto la condizione di regime, determinare:

1.1 La potenza $P$ erogata dal generatore e la carica $Q$ del condensatore

$P=$ 24 $W$ $\qquad$ $Q=$ 24$\times 10^{-6}$ C

1.2 La potenza $P$ erogata dal generatore e la differenza di potenziale, $V_C$ ai capi del condensatore

$P=$ 24 $W$ $\qquad$ $V_C=$ 6 $V$

L'interruttore viene poi portato nella posizione $B$. Una volta che il circuito ha raggiunto la condizione di regime, si determini:

2.1 L'energia dissipata, $E_{diss}$ nelle resistenze dopo un intervallo di tempo di $\Delta t$ secondi

$E_{diss}=$ 120 $J$

2.2 La variazione di energia elettrostatica del sistema, $\Delta E = E_B - E_A$, tra quando l'interruttore è chiuso su $B$ e quando è chiuso su $A$ in condizione di regime per entrambi i casi

$\Delta E=$ - 64 $\times 10^{-6}$ $J$

Sempre con il deviatore commutato nella posizione $B$ si riempie il condensatore con un materiale di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 3$ e si aspetta che il circuito raggiunga una nuova condizione di regime. Si determini:

3.1 la variazione di energia elettrostatica del sistema, $\Delta E' = E'_B - E_B$

$\Delta E'=$ 16 $\times 10^{-6}$ $J$

3.2 la carica $Q'$ del condensatore

$Q'=$ 24 $\times 10^{-5}$ $C$

**Costanti Utili:** $\epsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}$ F/m

## Soluzione Esercizio 1

**Domanda.1**

Immediatamente dopo il lancio la velocità della massa $m$ è nulla e poichè la sua traiettoria è circolare, la componente della forza normale alla traiettoria, $F_n$, agente sulla massa $m$ è anch'essa nulla. Infatti, in ogni punto di una traiettoria circolare vale $F_n = \frac{mv^2}{L}$. Proiettando le forze agenti sulla massa $m$ lungo la direzione della forza centripeta e indicando con $T$ il modulo della tensione, si ottiene:

$$F_n = T - mgcos\theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad T = mgcos\theta_0 = 0.69\ N$$

**Domanda.2**

Durante la fase di discesa, sul sistema compie lavoro solo la forza di gravità che è conservativa, (la tensione sul punto materiale è ortogonale allo spostamento e il punto di applicazione delle forze al vincolo è fisso) di conseguenza l'energia del sistema si conserva. La velocità richiesta, $v_1$, può essere calcolata usando la conservazione dell'energia. Prendendo l'origine dell'energia potenziale gravitazionale nella posizione in cui il filo forma l'angolo $\theta = 0$ con la verticale, indicando con $h = L(1-cos\theta_0)$ la quota corrispondente a $\theta_0$ con $h'$ la quota di $m$ quando l'angolo è $\theta_1$, con $h'= L(1 - cos\theta_1)$, applicando la conservazione dell'energia:

$$mgh' + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2g\,(h - h')} = \sqrt{2gL\,(cos\theta_1 - cos\theta_0)} = 1.25\ ms^{-1}$$

La componente normale dell'accelerazione ($a_{1n}$) nella posizione individuata dall'angolo $\theta_1$ può essere calcolata direttamente conoscendo il valore della velocità in quel punto. Infatti

$$a_{1n} = \frac{v_1^2}{L} = 2g(cos\theta_1 - cos\theta_0) = 3.1\ ms^{-2}$$

La componente tangenziale dell'accelerazione si ricava dalla seconda legge di Newton. Nel nostro caso:

$$F_{1t} = mgsin\theta_1 \quad \Rightarrow \quad a_{1t} = gsin\theta_1 = 4.9\ ms^{-2}$$

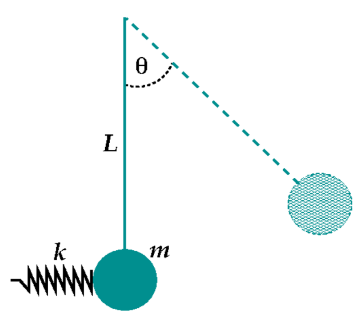
Utilizzando le ultime due equazioni possiamo determinare $F_1$:

$$F_1 = \sqrt{F_{1t}^2 + F_{1n}^2} = mg\sqrt{sin^2\theta_1 + 4(cos\theta_1 - cos\theta_0)^2} = 5.8 \times 10^{-1} N$$

**Domanda.3**

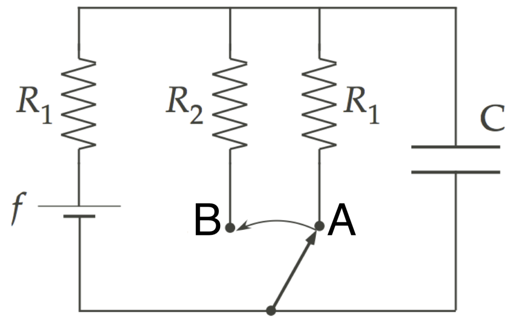
Anche in questo caso, sul sistema agiscono solo forze conservative, la forza elastica e la forza di gravità, di conseguenza l'energia del sistema si conserva e la massima compressione della molla può essere ricavata dalla conservazione dell'energia tra la posizione in cui la massa viene lasciata cadere e il punto in cui si ferma. Prendendo l'origine dell'energia potenziale gravitazionale nella posizione in cui la massa $m$ si ferma, dalla conservazione dell'energia:

$$mgh = \frac{1}{2}kd^2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2mgh}{d^2} = \frac{2mgL\,(1 - cos\theta_0)}{d^2} = 2.9 \times 10^3\ Nm^{-1}$$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

## Soluzione Esercizio 2




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

**Domanda.1**
In condizioni di regime il ramo in cui è inserita la capacità si comporta come un circuito aperto e il condensatore ha raggiunto il valore massimo della sua carica, per cui la corrente che circola nel circuito $i$ è data, indicando con $f$ la d.d.p.del circuito, da $i = \frac{f}{2R_1}$ ed è costante, pertanto la potenza erogata dal generatore coincide con la potenza dissipata nelle due resistenze in serie che hanno lo stesso valore ($R_1$):

$$P = i^2(2R_1) = \left(\frac{f}{2R_1}\right)^2 2R_1 = \frac{f^2}{2R_1} = 24\ W$$

Nella configurazione indicata, la differenza di potenziale ai capi di della capacità è pari a quella ai capi della resistenza ad essa in parallelo ($R_1$) e in cui circola la corrente $i$, per cui:

$$V_C = iR_1 = \frac{f}{2R_1}R_1 = \frac{f}{2} = 6\ V \qquad \Rightarrow \qquad Q = CV_C = C\frac{f}{2} = 24 \times 10^{-6}C$$

**Domanda.2**
Nella nuova configurazione, a regime, il parametro che viene cambiato del circuito è la resistenza che è passata da $R_1$ a $R_2$ nel ramo dell'interruttore, per cui indicando con $i'$ la corrente in questo caso, $i' = \frac{f}{R_1+R_2}$ e la differenza di potenziale ai capi di $C$, $V'_C = i'R_2 = \frac{f}{R_1+R_2}R_2$. La potenza dissipata è costante per cui l'energia dissipata dopo che è trascorso un tempo $\Delta t$ è data da:

$$E_{diss} = i'^2(R_1 + R_2)\Delta t = \left(\frac{f}{R_1 + R_2}\right)^2 (R_1 + R_2)\Delta t = \frac{f^2}{R_1 + R_2}\Delta t = 120\ J$$

Mentre la variazione di energia elettrostatica è data da:

$$\Delta E = \frac{1}{2}CV_C'^2 - \frac{1}{2}CV_C^2 = -64 \times 10^{-6}\ J$$

**Domanda.3**
Dopo l'inserzione del dielettrico la capacità ($C'$) del condensatore aumenta, $C' = \varepsilon_r C$, mentre la differenza di potenziale ai suoi capi resta costante e pari a $V'_C$, per cui la variazione di energia elettrostatica è data da:

$$\Delta E' = \frac{1}{2}\varepsilon_r CV_C'^2 - \frac{1}{2}CV_C'^2 = 16 \times 10^{-6}\ J$$

Per le stesse considerazioni, la carica del condesatore dopo l'inserimento del dielettrico è data da

$$Q' = \varepsilon_r CV'_C = 24 \times 10^{-5}\ C$$

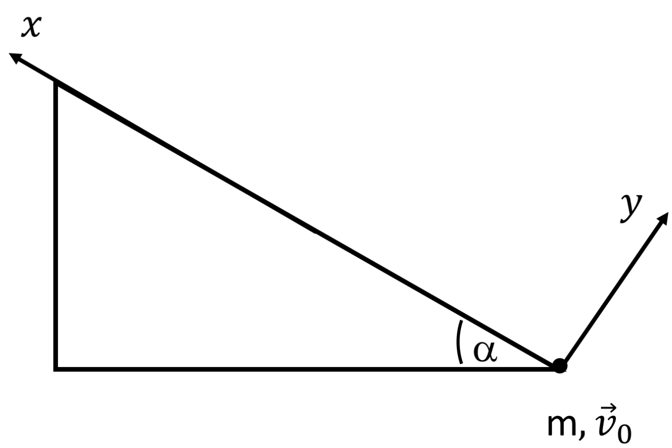
## Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 19/2/2021**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, a un punto materiale che si trova nell'origine del sistema di assi cartesiani indicato, viene fornita all'istante $t = 0$ una velocità $\vec{v}_0 = (10, 0)\ ms^{-1}$. Il moto del punto materiale negli istanti successivi avviene lungo un piano inclinato, con un angolo di base $\alpha = 30^0$, e scabro. Indichiamo con $\mu_s$ e $\mu_d$ rispettivamente il coefficiente di attrito statico e dinamico tra il piano ed il punto materiale, con $\mu_d$=0.3.

1.a Scrivere la legge oraria per lo spazio percorso lungo il piano nel moto di salita

$$x(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1.b Esprimere la velocità in funzione del tempo, $v(t)$, nel moto di salita lungo il piano

$$v(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.a Calcolare il tempo necessario , $t^*$ perchè il punto materiale si fermi e la corrispondente quota massima rispetto al suolo, $h_{max}$, raggiunta dal punto nella salita

$t^*$= ...................... $h_{max}$= ......................

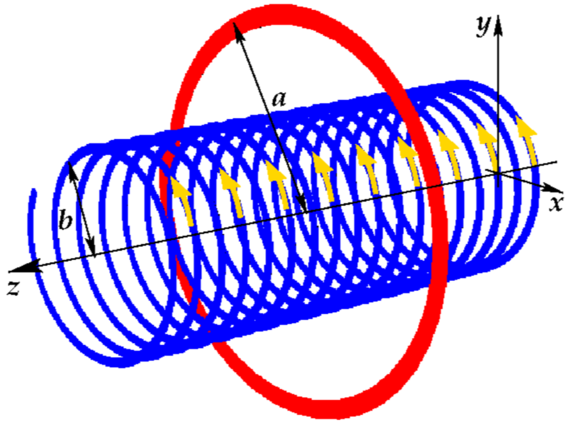
2.b Calcolare il tempo necessario, $t'$, affinchè il punto materiale nel moto di salita raggiunga una velocità pari a $v(t') = v_0/2$ e la corrispondente quota, $h'$, rispetto al suolo

$t'$= ...................... $h'$= ......................

3.a Determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico, $\mu_s^{min}$, per cui, una volta raggiunta la posizione di massima quota rispetto al suolo, il punto rimane in equilibrio.

$$\mu_s^{min} = \text{.....................}$$

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Una spira circolare conduttrice giace in un piano ortogonale all'asse di un solenoide ed è ad esso coassiale. La spira ha raggio $a = 10\ mm$ e resistenza $R = 4\ m\Omega$, mentre il solenoide ha raggio $b = a/2$ e $n = 10^3$ spire/mm, spire per unità di lunghezza. Nell'ipotesi in cui la corrente nel solenoide è $i_0 = 0.5\ A$ e nel verso indicato in figura:

1.a Determinare l'espressione del campo di induzione magnetica $\overrightarrow{B}$ in tutto lo spazio, e calcolare il campo in un punto che giace in un piano parallelo alla spira e distante $a/4$ dall'asse del solenoide

$\overrightarrow{B}=$ ...................... $\overrightarrow{B}_{a/4}=$ ......................

1.b Determinare l'espressione del campo di induzione magnetica $\overrightarrow{B}$ in tutto lo spazio, e calcolare il campo in un punto che giace in un piano parallelo alla spira e distante $a$ dall'asse del solenoide

$\overrightarrow{B}=$ ...................... $\overrightarrow{B}_{a}=$ ......................

Nell'ipotesi in cui la corrente che scorre nel solenoide sia variabile nel tempo e data da $i(t) = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, con $\tau = 1\ ms$:

2.a Si determini l'espressione della corrente $I$ che circola nella spira e il suo verso (giustificando la risposta e con un disegno)

$I =$ ......................

3.a Calcolare l'energia complessivamente dissipata nella spira, $E_{diss}$

$E_{diss} =$ ......................

3.b Calcolare il valore massimo della potenza dissipata nella spira $P_{max}$

$P_{max} =$ ......................

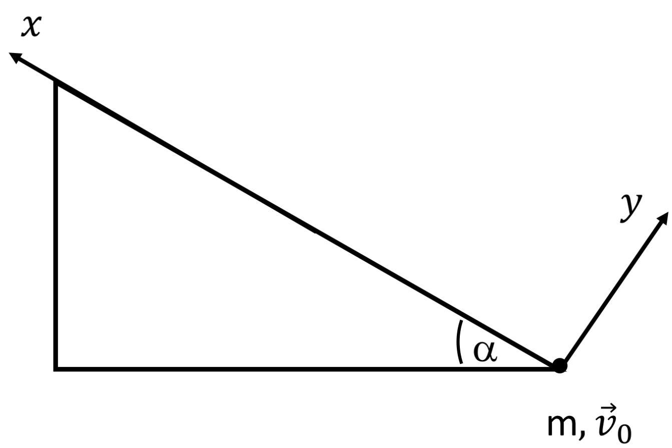
**Costanti Utili:** $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m

## Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 19/2/2021**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, a un punto materiale che si trova nell'origine del sistema di assi cartesiani indicato, viene fornita all'istante $t = 0$ una velocità $\vec{v}_0 = (10, 0)\ ms^{-1}$. Il moto del punto materiale negli istanti successivi avviene lungo un piano inclinato, con un angolo di base $\alpha$= $30^0$, e scabro. Indichiamo con $\mu_s$ e $\mu_d$ rispettivamente il coefficiente di attrito statico e dinamico tra il piano ed il punto materiale, con $\mu_d$=0.3.

1.a Scrivere la legge oraria per lo spazio percorso lungo il piano nel moto di salita

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g\,(sin\alpha + \mu_d cos\alpha)\, t^2$$

1.b Esprimere la velocità in funzione del tempo, $v(t)$, nel moto di salita lungo il piano

$$v(t) = v_0 - g\,(sin\alpha + \mu_d cos\alpha)\, t$$

2.a Calcolare il tempo necessario , $t^*$ perchè il punto materiale si fermi e la corrispondente quota massima rispetto al suolo, $h_{max}$, raggiunta dal punto nella salita

$t^*$= 1.34 s $h_{max}$= 3.36 m

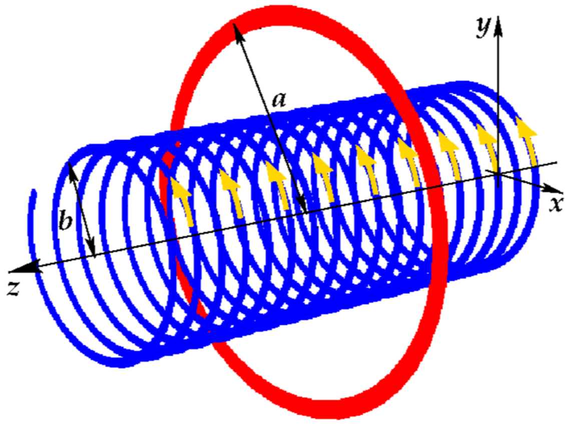
2.b Calcolare il tempo necessario, $t'$, affinchè il punto materiale nel moto di salita raggiunga una velocità pari a $v(t') = v_0/2$ e la corrispondente quota, $h'$, rispetto al suolo

$$t' = \quad 0.67 \text{ s} \qquad\qquad h' = \quad 2.52 \text{ m}$$

3.a Determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico, $\mu_s^{min}$, per cui, una volta raggiunta la posizione di massima quota rispetto al suolo, il punto rimane in equilibrio.

$$\mu_s^{min} = \quad 0.577$$

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Una spira circolare conduttrice giace in un piano ortogonale all'asse di un solenoide ed è ad esso coassiale. La spira ha raggio $a = 10\ mm$ e resistenza $R = 4\ m\Omega$, mentre il solenoide ha raggio $b = a/2$ e $n = 10^3$ spire/mm, spire per unità di lunghezza. Nell'ipotesi in cui la corrente nel solenoide è $i_0 = 0.5\ A$ e nel verso indicato in figura:

1.a Determinare l'espressione del campo di induzione magnetica $\overrightarrow{B}$ in tutto lo spazio, e calcolare il campo in un punto che giace in un piano parallelo alla spira e distante $a/4$ dall'asse del solenoide

$$\overrightarrow{B} = \ B(r)\hat{z} \qquad B(r) = \begin{cases} \mu_0 n i_0 & 0 \leqslant r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$\mu_0 n i_0 = \ 0.628\ T \qquad \overrightarrow{B}_{a/4} = \ 0.628\ \hat{z}\ T$$

1.b Determinare l'espressione del campo di induzione magnetica $\overrightarrow{B}$ in tutto lo spazio, e calcolare il campo in un punto che giace in un piano parallelo alla spira e distante $a$ dall'asse del solenoide

$$\overrightarrow{B} = \ B(r)\hat{z} \qquad B(r) = \begin{cases} \mu_0 n i_0 & 0 \leqslant r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$\mu_0 n i_0 = \ 0.628\ T \qquad \overrightarrow{B}_{a} = \ 0.0\ \hat{z}\ T$$

Nell'ipotesi in cui la corrente che scorre nel solenoide sia variabile nel tempo e data da $i(t) = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, con $\tau = 1\ ms$:

2.a Si determini l'espressione della corrente $I$ che circola nella spira e il suo verso (giustificando la risposta e con un disegno)

$$I = I(t) = \frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2}{R\tau} e^{-t/\tau}$$

3.a Calcolare l'energia complessivamente dissipata nella spira, $E_{diss}$

$$E_{diss} = \ 3.04 \times 10^{-4}\ J$$

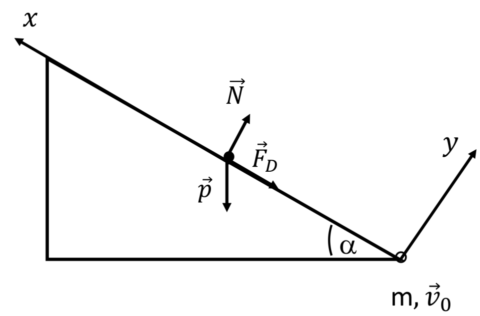
3.b Calcolare il valore massimo della potenza dissipata nella spira $P_{max}$

$$P_{max} = \ 6.09 \times 10^{-1}\ W$$

**Costanti Utili:** $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m

## Soluzione Esercizio 1

**Domanda.1**




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Con riferimento alla Figura, indichiamo con $\overrightarrow{N}$ la reazione vincolare del piano, con $\overrightarrow{p}$ la forza peso agente sulla massa $m$, e con $\overrightarrow{F}_D$ la forza di attrito dinamico esercitata dal piano durante il moto di salita. La forza risultante agente sul punto materiale nel moto di salita è data da:

$$\overrightarrow{p} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F}_D = m\overrightarrow{a}$$

Le componenti della risultante delle forze agenti sul punto (forza peso, reazione normale del piano e forza di attrito) lungo le direzioni parallela e ortogonale al piano, orientate rispettivamente nel verso della velocità iniziale e in quello della normale uscente dal piano, sono date da:

$$\begin{cases} F_x = -mgsin\alpha - F_D = ma_x \\ F_y = N - mgcos\alpha = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad a_x = -g\left(sin\alpha + \mu_d cos\alpha\right)$$

Il moto lungo il piano è uniformemente accelerato, poichè l'accelerazione, $a_x$ è costante. Prendendo come origine il punto alla base del piano da cui il punto inizia il suo moto, per lo spazio percorso lungo il piano, tenuto conto che la velocità iniziale lungo x è $v_{0x} = v_0$, si ottiene:

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}g\left(sin\alpha + \mu_d cos\alpha\right)t^2$$

l'espressione della velocità in funzione del tempo è data da:

$$v(t) = v_0 - g\left(sin\alpha + \mu_d cos\alpha\right)t$$

**Domanda.2**

Il tempo necessario $t^*$ affinchè nel moto di salita il punto materiale si fermi, si determina sapendo che nel punto di arresto la velocità è nulla, per cui:

$$v_x(t^*) = 0 = v_0 - g\left(sin\alpha + \mu_d cos\alpha\right)t^* \qquad \Rightarrow \qquad t^* = \frac{v_0}{g\left(sin\alpha + \mu_d cos\alpha\right)} = 1.34\ s$$

Mentre la quota massima corrispondente si può determinare utilizzando il teorema dell'energia cinetica detto anche delle forze vive, che applicato al nostro caso fornisce:

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = U_i - U_f - \mu_d mgcos(\alpha)x(t^*) = -mgh_{max} - \mu_d mgcos(\alpha)x(t^*) = -mgh_{max} - \mu_d mgcos(\alpha)\frac{h_{max}}{sin\alpha}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = h_{max}mg\left(1 + \frac{\mu_d}{tg\alpha}\right) \qquad \Rightarrow \qquad h_{max} = \frac{v_0^2}{2g\left(1 + \frac{\mu_d}{tg\alpha}\right)} = 3.36\ m$$

Il tempo necessario affinchè nella salita il punto materiale raggiunga la velocità $v_0/2$, si ottiene usando l'equazione della velocità in funzione del tempo:

$$v_x(t') = \frac{v_0}{2} = v_0 - g\left(sin\alpha + \mu_d cos\alpha\right)t' \qquad \Rightarrow \qquad t' = \frac{v_0}{2g\left(sin\alpha + \mu_d cos\alpha\right)} = 0.671\ s$$

La quota corrispondente a $t = t'$, si può ottenere come prima dal teorema delle forze vive:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = U_i - U_f - \mu_d mgcos(\alpha)x(t') = -mgh' - \mu_d mgcos(\alpha)x(t') = -mgh' - \mu_d mgcos(\alpha)\frac{h'}{sin\alpha}$$

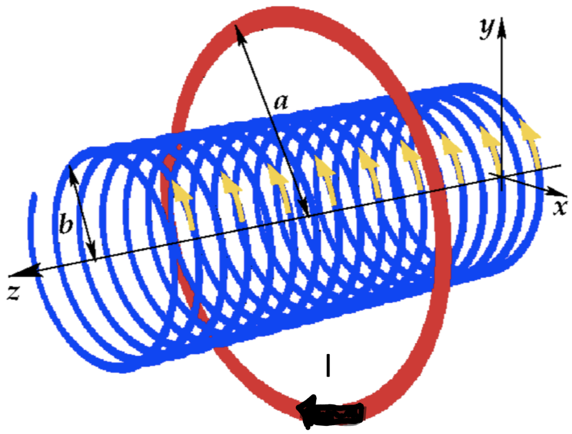
$$\frac{3}{8}mv_0^2 = h'mg\left(1+\frac{\mu_d}{tg\alpha}\right) \quad\Rightarrow\quad h' = \frac{3}{4}\frac{v_0^2}{2g\left(1+\frac{\mu_d}{tg\alpha}\right)} = 2.52\ m$$

**Domanda.3**

Quando il punto materiale raggiunge la massima quota esso si ferma e su di esso agisce l'attrito statico, affinchè esso resti fermo e non torni indietro, la componente della forza peso lungo il piano deve essere minore della forza di attrito massimo che il piano può esercitare. Pertanto:

$$mgsin\alpha \leq F_{as}^{max} = \mu_s N = \mu_s mgcos\alpha \quad\Rightarrow\quad \mu_s \geq tg\alpha \quad\Rightarrow\quad \mu_s^{min} = tg\alpha = 0.577$$

## Soluzione Esercizio 2




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

**Domanda.1**
Il campo magnetico è presente solo all'interno del solenoide, in cui esso è uniforme e (introducendo una terna di assi cartesiani i cui versori sono indicati in figura) con direzione e verso di $\hat{z}$. Dal teorema di Ampere, il modulo del campo magnetico all'interno del solenoide è dato da $\mu_0 n i_0$. Pertanto:

$$\overrightarrow{B} = \; B(r)\hat{z} \qquad\qquad B(r) = \begin{cases} \mu_0 n i_0 & 0 \leqslant r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

Dalle precedenti relazioni si ricava:

$$\overrightarrow{B}_{a/4} = 0.628\hat{z}\ T \qquad \overrightarrow{B}_a = 0$$

**Domanda.2**
Quando la corrente del solenoide dipende dal tempo, il campo magnetico all'interno del solenoide  anch'esso funzione del tempo:

$$\overrightarrow{B} = \; B(r)\hat{z} \qquad\qquad B(r) = \begin{cases} \mu_0 n i_0 e^{-t/\tau} & 0 \leqslant r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

Di conseguenza anche il flusso del campo magnetico $\phi(\overrightarrow{B})$ attraverso la superficie $S$ della spira varia nel tempo e la sua espressione è data da:

$$\phi(\overrightarrow{B}) = \mu_0 n i_0 e^{-t/\tau} \pi b^2$$

Nella spira si genera per la legge di Lentz una f.e.m. indotta dipendente dal tempo:

$$f.e.m.(t) = -\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2}{\tau} \mu_0 n i_0 e^{-t/\tau} \pi b^2$$

La corrente indotta nella spira è funzione del tempo ed è data da:

$$I = I(t) = \frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2}{R\tau} e^{-t/\tau}$$

e circola nel verso indicato in figura.

**Domanda.3**
La potenza dissipata nella spira è anch'essa funzione del tempo:

$$P(t) = I^2(t)R = \left(\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2}{R\tau}\right)^2 e^{-2t/\tau} R$$

La potenza dissipata è massima per $t = 0$

$$P(0) = P_{max} = \frac{1}{R}\left(\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2}{\tau}\right)^2 = 0.609\ W$$

Poichè la corrente si annulla per $t$ tendente a $\infty$, l'energia complessivamente dissipata nella spira è data da:

$$E_{diss} = \int_0^\infty P(t)dt = \frac{1}{R}\left(\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2}{\tau}\right)^2 \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{R}\left(\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2}{\tau}\right)^2 \left(-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau}|_0^\infty\right) = \frac{1}{R}\left(\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2}{\tau}\right)^2 \frac{\tau}{2} = 3.04 \times 10^{-4}\ J$$

# Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
## Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 11/06/2021

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**

In figura è rappresentato un sistema costituito da tre corpi: $A$, $B$, e $C$. $A$ è un cilindro pieno di densità uniforme, di massa $M_A = 30.2\ kg$ e raggio$R_A = 25\ cm$. $B$ è una puleggia, assimilabile a un disco, anch'esso di densità uniforme, massa $M_B = 14.4\ kg$ e raggio $R_B = 14.0\ cm$. $C$ è assimilabile ad un punto materiale di massa $M_C = 66.2\ kg$. Attorno al cilindro ($A$) è avvolta una fune sottile, inestensibile e priva di massa, che passa attraverso la puleggia ($B$) e non scivola su di essa, che è collegata al corpo $C$. Nell'ipotesi in cui $A$ rotola senza strisciare sul piano inclinato di $\theta = 9^0$, determinare:
1) l'accelerazione, $\overrightarrow{a}_C$, del corpo $C$

$$\overrightarrow{a}_C\text{=-7.534 } \hat{x} \text{ ms}^{-2}$$

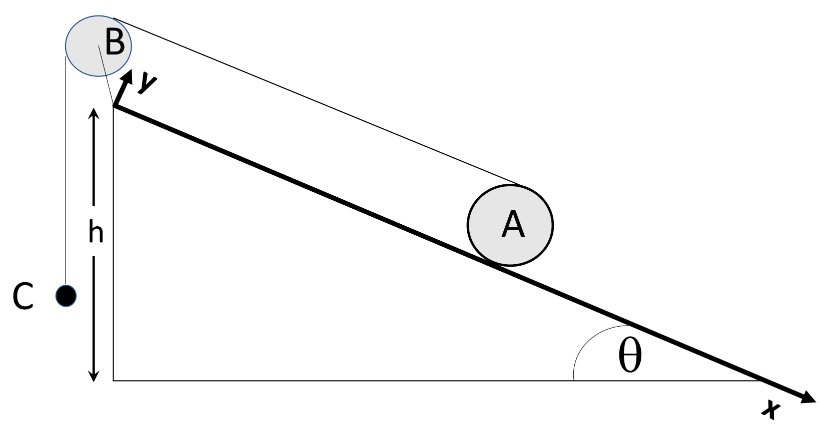
2) l'accelerazione angolare $\overrightarrow{\alpha}_A$ del cilindro

$$\overrightarrow{\alpha}_A\text{=15.068 } \hat{z} \text{ s}^{-2}$$

3) Il modulo della forza dovuta alla tensione del filo ($T_C$) esercitata su $C$

$$T_C\text{=163.249 N}$$

[ **NB: Si assuma per i conti** $g = 10\ ms^{-2}$ ]




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Si realizza un elemento resistivo mettendo a contatto tre blocchi A, B e C disposti come in Figura di tre diversi materiali conduttori. L'interfaccia longitudinale tra i blocchi B e C è isolata elettricamente mentre le sezioni dei blocchi sono in contatto elettrico.
L'elemento che si ottiene ha dimensioni ( 2L= 582 $\times$ 2d= 19 $\times$ W= 12) cm$^3$.
Le resistività degli elementi valgono rispettivamente $\rho_A$= 3.3 $\Omega$ m, $\rho_B$= 44.5 $\Omega$ m e $\rho_C$= 151.0 $\Omega$ m.
La faccia esterna del blocco A viene mantenuta ad un potenziale V$_A$= 63 V mentre la superficie D esterna e comune ai blocchi B e C viene mantenuta ad un potenziale V$_D$= -81 V come indicato in Figura.

1) Calcolare il valore in (k$\Omega$) della resistenza R$_C$

$$R_C = 38.6 \text{ k}\Omega$$

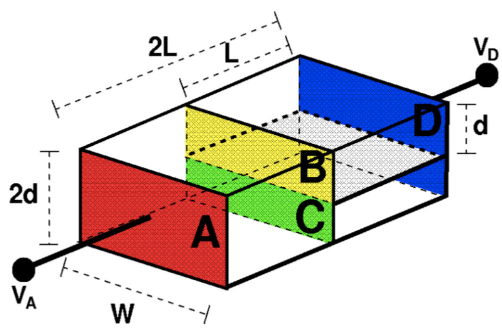
2) Calcolare la d.d.p. $\Delta V_C$ ai capi dell'elemento C e l'intensità del campo elettrico $|\vec{E}_C|$ nell'elemento R$_C$

$$\Delta V_C = 137.4 \text{ V} \qquad |\vec{E}_C| = 47.2 \text{ V/m}$$

Considerando che le densità di portatori di carica dei tre blocchi sono rispettivamente:
$n_A$= 9.2 $\cdot 10^{28}$ $e^- m^{-3}$ ; $n_B$= 0.8 $\cdot 10^{28}$ $e^- m^{-3}$ ; $n_C$= 8.6 $\cdot 10^{28}$ $e^- m^{-3}$ :

3) Calcolare in (nm $s^{-1}$) la velocità di deriva $v_C$ degli $e^-$ nel blocco C

$$v_C = 0.023 \text{ nm } s^{-1}$$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo dell'elemento resistivo costituito dai 3 blocchi*)

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**
**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 11/06/2021**

| | |
|---|---|
| **Nome:** | **Matricola:** |
| **Cognome:** | **Anno di Corso:** |

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**

In figura è rappresentato un sistema costituito da tre corpi: $A$, $B$, e $C$. $A$ è un cilindro pieno di densità uniforme, di massa $M_A = 30.2\ kg$ e raggio$R_A = 25\ cm$. $B$ è una puleggia, assimilabile a un disco, anch'esso di densità uniforme, massa $M_B = 14.4\ kg$ e raggio $R_B = 14.0\ cm$. $C$ è assimilabile ad un punto materiale di massa $M_C = 66.2\ kg$. Attorno al cilindro ($A$) è avvolta una fune sottile, inestensibile e priva di massa, che passa attraverso la puleggia ($B$) e non scivola su di essa, che è collegata al corpo $C$. Nell'ipotesi in cui $A$ rotola senza strisciare sul piano inclinato di $\theta = 9^0$, determinare:
1) l'accelerazione, $\overrightarrow{a}_C$, del corpo $C$

$\overrightarrow{a}_C$=..............................

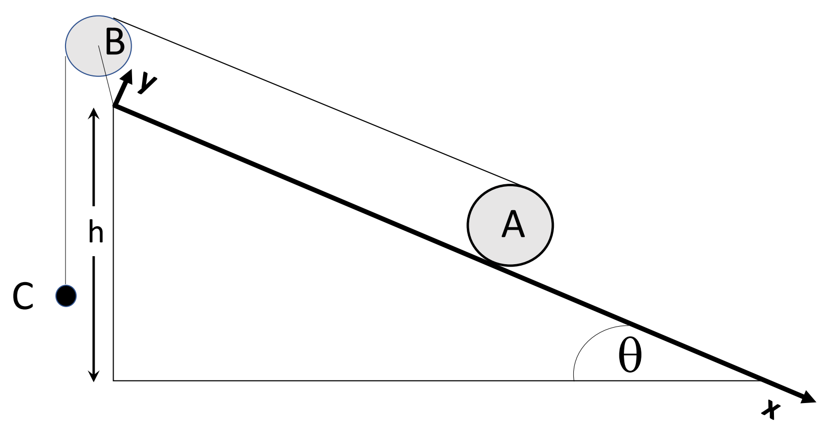
2) l'accelerazione angolare $\overrightarrow{\alpha}_A$ del cilindro

$\overrightarrow{\alpha}_A$ = ..............................

3) Il modulo della forza dovuta alla tensione del filo ($T_C$) esercitata su $C$

$T_C$=..............................

[ **NB: Si assuma per i conti** $g = 10\ ms^{-2}$ ]




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**
Si realizza un elemento resistivo mettendo a contatto tre blocchi A, B e C disposti come in Figura di tre diversi materiali conduttori. L'interfaccia longitudinale tra i blocchi B e C è isolata elettricamente mentre le sezioni dei blocchi sono in contatto elettrico.
L'elemento che si ottiene ha dimensioni ( 2L= 582 $\times$ 2d= 19 $\times$ W= 12) $cm^3$.
Le resistività degli elementi valgono rispettivamente $\rho_A$= 3.3 Ω m, $\rho_B$= 44.5 Ω m e $\rho_C$= 151.0 Ω m.
La faccia esterna del blocco A viene mantenuta ad un potenziale $V_A$= 63 V mentre la superficie D esterna e comune ai blocchi B e C viene mantenuta ad un potenziale $V_D$= -81 V come indicato in Figura.

1) Calcolare il valore in (kΩ) della resistenza $R_C$

$$R_C = ......................$$

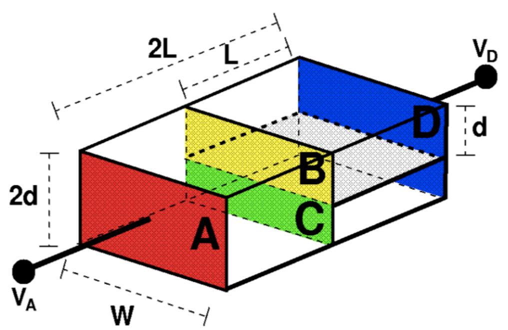
2) Calcolare la d.d.p. $\Delta V_C$ ai capi dell'elemento C e l'intensità del campo elettrico $|\vec{E}_C|$ nell'elemento $R_C$

$$\Delta V_C = ...................... \qquad |\vec{E}_C| = ......................$$

Considerando che le densità di portatori di carica dei tre blocchi sono rispettivamente:
$n_A$= 9.2 $\cdot 10^{28}$ $e^- m^{-3}$ ; $n_B$= 0.8 $\cdot 10^{28}$ $e^- m^{-3}$ ; $n_C$= 8.6 $\cdot 10^{28}$ $e^- m^{-3}$ :

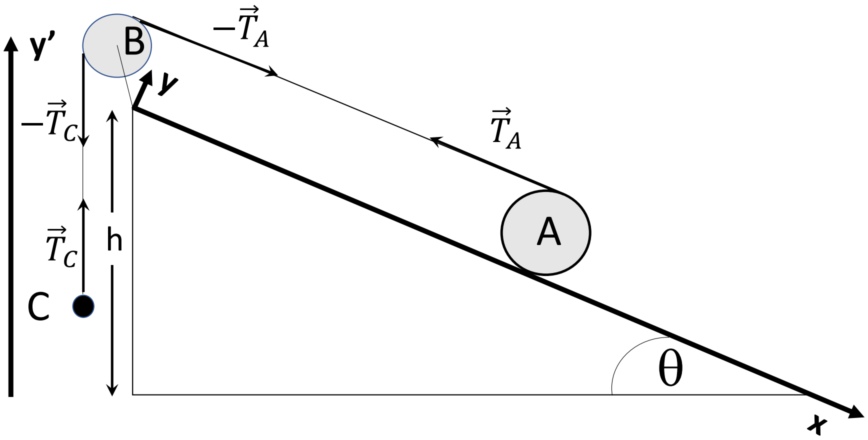
3) Calcolare in (nm $s^{-1}$) la velocità di deriva $v_C$ degli $e^-$ nel blocco C

$$v_C = ......................$$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo dell'elemento resistivo costituito dai 3 blocchi*)

# Soluzione Esercizio 1




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda.1**
Nel moto di puro rotolamento il punto di contatto è fermo, pertanto la forza di attrito non compie lavoro, di conseguenza l'energia del sistema si conserva (è costante) poichè non ci sono forze dissipative. L'energia del sistema è data dalla somma delle energie potenziali e delle energie cinetiche dei tre corpi. Indicando con $E_p^A$, $E_p^B$ e $E_p^C$ l'energia potenziale dei tre corpi, l'energia potenziale del sistema,$E_p$, assumendo l'origine dell'energia potenziale in $y' = 0$ (vedi figura), è data da:

$$E_p = E_p^A + E_p^B + E_p^C = M_A g\left(h' - x sin(\theta)\right) + M_B g y'_B + M_C g y'_C$$

dove $h'$ è la quota del centro di massa iniziale e $y'_B$ e $y'_C$ rappresentano la coordinata y' (vedi figura) del CM rispettivamente di $B$ e di $C$. L'energia cinetica del sistema è data dalla somma delle energie cinetiche dei tre corpi. Per il teorema di König, il corpo $A$ ha energia cinetica rotazionale e traslazionale, mentre la puleggia ha solo energia rotazionale. Pertanto, l'energia cinetica del sistema $E_k$ è data da:

$$E_k = \frac{1}{2}M_A v_A^2 + \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 + \frac{1}{2}I_B\omega_B^2 + \frac{1}{2}M_C V_C^2$$

dove abbiamo indicato con $I_A$ e $I_B$ i momenti di inerzia del corpo $A$ e del corpo $B$ rispetto ai rispettivi centri di massa:

$$I_A = \frac{M_A R_A^2}{2} \qquad\qquad I_B = \frac{M_B R_B^2}{2}$$

La velocità del centro di massa $\vec{v}_A$ è diretta lungo l'asse $x$, $\vec{v}_A = v_A\hat{x}$, mentre la velocità di $C$ è diretta lungo $y'$, $\vec{v}_C = v_C\hat{y'}$. La velocità dei punti del filo coincide con la velocità periferica di $B$, $-\omega_B R_B$ diretta come $\hat{y'}$ dal lato peso e come $\hat{x}$ dal lato cilindro, che a sua volta coincide con la velocità di $C$, diretta come $\hat{y'}$ che a sua volta coincide con la velocità periferica di $A$, $-2\omega_A R_A = 2v_A$, diretta come $\hat{x}$. Pertanto valgono le seguenti relazioni:

$$v_C = -\omega_B R_B = 2v_A = -2\omega_A R_A \quad\Rightarrow\quad a_C = 2a_A \quad \alpha_A = -\frac{a_A}{R_A} \quad \alpha_B = -\frac{2a_A}{R_B}$$

Riscrivendo l'energia cinetica totale, sostituendo l'espressione dei momenti di inerzia e esprimendo ad es. tutto in funzione di $v_A$ (avremmo potuto utilizzare $v_C$ o $\omega_A$ o $\omega_B$) otteniamo:

$$E_k = \frac{1}{2}M_A v_A^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}M_A R_A^2\frac{v_A^2}{R_A^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}M_B R_B^2\left(\frac{2v_A}{R_A}\right)^2 + \frac{1}{2}M_C\left(2v_A\right)^2 = \frac{1}{2}v_A^2\left(\frac{3}{2}M_A + 2M_B + 4M_C\right)$$

Sommando l'energia potenziale a quella cinetica e derivando l'energia rispetto al tempo, otteniamo:

$$\frac{d(E_k + E_p)}{dt} = 0 = -M_A g\dot{x}sin(\theta)) + M_C g\dot{y'} + \frac{1}{2}2v_A\dot{v}_A\left(\frac{3}{2}M_A + 2M_B + 4M_C\right)$$

dalla quale ricordando che $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_A$ e che $\dot{y'} = \frac{dy'}{dt} = 2v_A$ otteniamo:

$$-M_A g v_A sin(\theta)) + M_C g 2v_A + \frac{1}{2}2v_A\dot{v}_A\left(\frac{3}{2}M_A + 2M_B + 4M_C\right) = 0$$

poichè $\dot{v}_A = a_A$ dividendo entrambi i membri per $v_A$ e risolvendo l'equazione otteniamo:

$$a_A = g\left(\frac{M_A sin(\theta) - 2M_C}{\frac{3}{2}M_A + 2M_B + 4M_C}\right) \qquad a_C = 2a_A = 2g\left(\frac{M_A sin(\theta) - 2M_C}{\frac{3}{2}M_A + 2M_B + 4M_C}\right)$$

da notare che se $M_A sin(\theta) > 2M_C$ il corpo $A$ scende sul piano inclinato ($a_A > 0$) e il corpo C sale verso l'alto ($a_C > 0$), se $M_A sin(\theta) < 2M_C$ il corpo $A$ sale sul piano inclinato ($a_A < 0$) e il corpo C scende verso il basso ($a_C < 0$), l'accelerazione è nulla se $M_A sin(\theta) = 2M_C$. L'espressione di $\vec{a}_C = a_C \hat{y}'$, puo' anche essere espressa nel sistema di riferimento $xy$, in questo caso essa è data da:

$$\vec{a}_C = a_C(-sin(\theta)\hat{x} + cos(\theta)\hat{y})$$

Allo stesso risultato si arriva utilizzando la prima equazione cardinale per $A$ e $C$, e la seconda cardinale per $A$ e $B$.
Durante il moto vale il seguente sistema di equazioni (prima cardinale lungo x per il corpo $A$ e lungo $y'$ per il corpo $B$):

$$\begin{cases} \mathrm{M}_A a_A = -T_A + M_A g sin(\theta) + f_{xa} \\ \mathrm{M}_C a_C = T_C - M_C g \end{cases}$$

dove con $f_{xa}$ abbiamo indicato la componente lungo $x$ della forza di attrito. Dalla seconda cardinale per la puleggia $B$ e il cilindro $A$:

$$\begin{cases} (\mathrm{R}_B T_C - R_B T A)\hat{z} = I_B \dot{\omega}_B \hat{z} \\ (\mathrm{R}_A T_A + R_A f_{xa})\hat{z} = I_A \dot{\omega}_A \hat{z} \end{cases}$$

Ricordando che:

$$a_A = -\dot{\omega}_A R_A \qquad a_C = -\dot{\omega}_B R_B = 2a_A$$

ed esprimendo le accelerazioni (anche quelle angolari) in funzione di $a_A$, si ottiene un sistema di 4 equazioni in quattro incognite ($a_A$, $T_A$, $T_C$, $f_{ax}$) la cui soluzione fornisce le risposte a tutte le domande del problema.

**Domanda.2**

Indicando con l'asse z il terzo asse del sistema $xy$ con l' asse z uscente dal foglio:

$$\vec{\alpha}_A = -\frac{a_A}{R_A}\hat{z} = -\frac{g}{R_A}\left(\frac{M_A sin(\theta) - 2M_C}{\frac{3}{2}M_A + 2M_B + 4M_C}\right)\hat{z} \qquad \vec{\alpha}_B = -\frac{2a_A}{R_B}\hat{z} = -\frac{2g}{R_B}\left(\frac{M_A sin(\theta) - 2M_C}{\frac{3}{2}M_A + 2M_B + 4M_C}\right)\hat{z}$$

dalle quali se il corpo A scende, il cilindro ruota in verso orario come pure la puleggia.

**Domanda.3**

Applicando la seconda equazione cardinale al corpo $B$, con riferimento alla figura, indicando con $T_A$ e $T_B$ i moduli delle tensioni rispettivamente del lato cilindro e del lato peso, si ottiene:

$$(-R_B T_A + R_B T_C)\hat{z} = I_B \alpha_B \hat{z} \quad \Rightarrow \quad I_B \alpha_B = \frac{1}{2}M_B R_B^2 \alpha_B \quad \Rightarrow \quad T_C - T_A = \frac{1}{2}M_B R_B\left(-\frac{2a_A}{R_B}\right) = -M_B a_A$$

La tensione $T_C$ entra nell'equazione del moto del corpo $C$:

$$T_C - M_C g = M_C a_C = M_C 2a_A$$

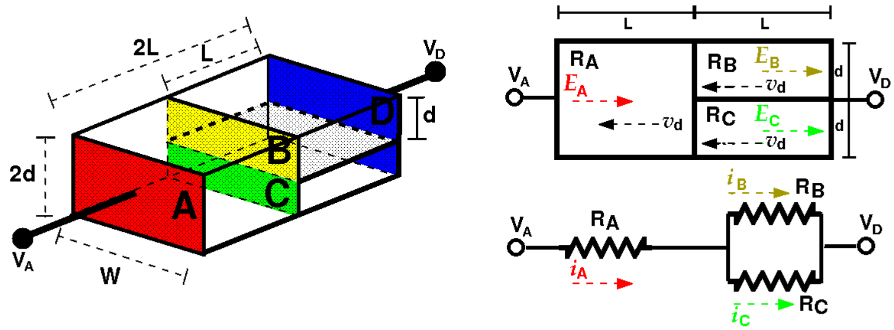
Utilizzando la seconda cardinale per $B$ e l'equazione del moto per il corpo $C$ otteniamo quindi:

$$T_A = 2M_C a_A + M_B a_A + M_C g \qquad T_C = M_C\,(g + 2a_A)$$

## Soluzione Esercizio 2

**Premessa**

Notiamo che i tre blocchi possono essere schematizzati con tre resistenze concentrate R$_A$, R$_B$ e R$_C$ .
Questa schematizzazione è possibile perchè "...l'interfaccia longitudinale tra i blocchi B e C è isolata elettricamente ..."




**Domanda.1**

Il calcolo della resistenze di ogni elemento procede (dopo avere fatto le opportune equivalenze per le dimensioni dei blocchi) secondo la relazione (1) dove $l$ indica la lunghezza dell'elemento (nel nostro caso: $l = L$ per tutti gli elementi) e $S$ ne indica la superficie trasversa (nel nostro caso: $S_A \; = \; 2dW$ ; $S_B = S_C = \; dW$ )

$$R_X \; = \; \rho \, \frac{l}{S} \quad \rightarrow \quad R_A \; = \; \rho_A \, \frac{L}{2dW} \qquad R_B \; = \; \rho_B \, \frac{L}{dW} \qquad R_C \; = \; \rho_C \, \frac{L}{dW} \tag{1}$$

**Domanda.2**

Le domande sono collegate poichè bisogna calcolare la d.d.p. ai capi dei blocchi per stimare l'intensità del campo elettrico in ciascuno di essi. Lo schema elettrico equivalente suggerisce di considerare due elementi in serie: il blocco A in serie al parallelo di B e C. La corrente $i_{tot}$ sarà la stessa in questi due elementi mentre la d.d.p. complessiva $V_0 \; = \; V_A - V_D$ sarà anche la somma delle d.d.p. parziali $V_0 \; = \; \Delta V_A + \Delta V_{BC}$ *(dove indichiamo con il simbolo $\Delta V_{BC}$ il fatto che i blocchi B e C hanno la stessa d.d.p.).*
Per determinare $i_{tot}$ bisogna calcolare la resistenza equivalente del circuito e applicare la prima legge di Ohm.
La resistenza equivalente R$_{eq}$ è quella del parallelo di R$_B$ e R$_C$ in serie con R$_A$. Il calcolo è riportato in (2)

$$R_{eq} = \; R_A \; + \; \frac{R_B \; R_C}{R_B \; + \; R_C} \tag{2}$$

La corrente $i_{tot}$ che fluisce nel circuito è quindi:

$$i_{tot} = \frac{V_0}{R_{eq}} \tag{3}$$

Dalla 3 si può calcolare la caduta di tensione $\Delta V_A$ sul blocco A, mentre conoscendo $V_0$ e $\Delta V_A$ per differenza possiamo calcolare $\Delta V_{BC}$, quella dei blocchi B e C. Queste risultano essere:

$$\Delta V_A = \; R_A \; i_{tot} \qquad \Delta V_{BC} = \; V_0 \; - \; \Delta V_A \tag{4}$$

Di conseguenza, il modulo del campo elettrico nei rispettivi blocchi vale:

$$|\vec{E}_A| = \; \frac{\Delta V_A}{L} \qquad |\vec{E}_{B(C)}| = \; \frac{\Delta V_{BC}}{L} \tag{5}$$

**Domanda.3**

Indicando con $n_X$ la densità di portatori di carica, e con $e$ la loro carica elettrica (nei conduttori i portatori di carica sono elettroni, $e = -1.602\ 10^{-19}$ C), la carica elettrica complessiva che fluisce in un tratto $dl$ di un conduttore con sezione di area $S$, se i portatori si muovono con velocità ( velocità di deriva) $v_d$, è data da:

$$dq = neSdl = n|e|Sv_d dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} = i = n|e|Sv_d$$

dove con $i$ abbiamo indicato la corrente nel tratto $dl$. Pertanto otteniamo la relazione (6) per $v_d$ (anche legata alla densità di corrente $\vec{J} = \frac{i}{S}\hat{n}_S$ con $\hat{n}_S$ versore normale ad S e nel verso della corrente).
Per calcolare la velocità di deriva negli elementi $A$, $B$ e $C$ bisogna prima calcolare le correnti.
La corrente che fluisce attraverso l'elemento A è: $i_A = i_{tot}$
come si divide $i_{tot}$ negli elementi B e C va calcolato dalla legge di Ohm: $i_B = \frac{\Delta V_{BC}}{R_B}$ $\qquad i_C = \frac{\Delta V_{BC}}{R_C}$

$$|\vec{v}_d| = \frac{|\vec{J}|}{n|e|} = \frac{i_X}{nS_X|e|} \qquad (X = A, B, C) \tag{6}$$

## Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 2/07/2021**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**

Un'asta omogenea di lunghezza $L$ = 107.4 m e massa $m$ = 248 kg giace su un piano orizzontale privo di attrito. Due corpi assimilabili a due punti materiali, di massa $m_1$= 62 kg e $m_2$= 31 kg, si muovono sullo stesso piano orizzontale con velocità rispettivamente $v_1$ = 8 ms$^{-1}$ e $v_2$ = 16 ms$^{-1}$ in direzione ortogonale alla sbarra e versi opposti come in figura. I due corpi colpiscono contemporaneamente l'asta, rispettivamente alle distanze $d_1$ = 17.9 m e $d_2$ = 35.8 m dal suo centro e rimangono attaccati ad essa.

1.a Dire quali delle seguenti grandezze fisiche si conserva nell'urto, giustificando la risposta:
- ◦ Energia del sistema, $E$
- ◦ quantità di moto del sistema, $\overrightarrow{P}$
- ◦ momento angolare con polo nel centro dell'asta, $\overrightarrow{L}^o$

L'energia del sistema non si conserva in quanto l'urto è anelastico, la quantità di moto del sistema si conserva essendo nulla la risultante delle forze esterne, ed il sistema non vincolato. Il momento angolare del sistema si conserva rispetto a qualunque polo non essendoci forze esterne impulsive (il sistema non è vincolato), e in quanto la forza peso e la reazione vincolare, che giacciono sulla stessa retta di applicazione, sono in modulo uguali e hanno verso opposto, dando contributo nullo al momento delle forze.

2.a Calcolare la posizione $\overrightarrow{R}_{cm}$ e la velocità $\overrightarrow{v}_{cm}$ del centro di massa dopo l'urto

$$\overrightarrow{R}_{cm}= \quad (0,0,0) \text{ m} \qquad\qquad \overrightarrow{v}_{cm}= \quad (0,0,0) \text{ m/s}$$

2.b Calcolare il momento angolare del sistema dopo l'urto rispetto al centro dell'asta, $\overrightarrow{L}$

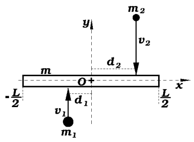
$$\overrightarrow{L}=-2.66\times10^4 \ \hat{z} \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$$

3.a Calcolare l'energia cinetica $K$ del sistema dopo l'urto

$$K=1190 \text{ J}$$

3.b Calcolare l'energia cinetica rotazionale $E_{rot}$ del sistema dopo l'urto

$$E_{rot}=1190 \text{ J}$$




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Con riferimento alla Figura, una spira rettangolare di lati $a = 4$ cm e $b = 8$ cm e resistenza $R = 819$ m$\Omega$ è posta in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme e costante ortogonale al piano della spira con $\overrightarrow{B}_0 = (0\ ; 0\ ;\ 7)$ T per $(-\infty \le x \le 0\ ;\ y \in \mathcal{R})$. La spira viene poi portata nella regione del piano in cui l'intensità del campo magnetico è nulla $(0 < x \le \infty\ ;\ y \in \mathcal{R})$ a velocità costante $\overrightarrow{v}_0 = v_0\hat{x}$ con $v_0 = 30$ m/s.
Si trascuri l'induttanza della spira.

1.a Esprimere il flusso del campo magnetico attraverso la spira in funzione della posizione $x$ del lato $a$ destro della spira, e farne il grafico, $\phi(\overrightarrow{B}, x)$ per $-\infty \le x \le \infty$

$$\phi(\overrightarrow{B}, x) = \begin{cases} B_0 ab & x \le 0 \\ B_0 a(b - x) & 0 < x < b \\ 0 & b \le x \end{cases}$$

$\phi(\overrightarrow{B}, x) =$ 2.24 $\times 10^{-2}$ wb per $-\infty \le x \le 0$ e $\phi(\overrightarrow{B}, x) = ($ 2.24 $\times 10^{-2}$ - 2.8 $\times 10^{-1}$ $x)$ wb per $0 < x \le b$

1.b Determinare la corrente $i(x)$ che circola nella spira in funzione della posizione $x$ del lato destro della spira e il suo verso (quando non è nulla) motivando la risposta anche con un disegno. Fare il grafico di $i(x)$ per $-\infty \le x \le \infty$

$i(x)=$ 10.26 A per $0 < x < b$

$$i(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{B_0 a v_0}{R} & 0 < x < b \\ 0 & b \le x \end{cases}$$

2.a Calcolare la forza esterna $\overrightarrow{F}$ che è necessario applicare nel tratto $(0 < x < b)$ al lato destro della spira per estrarla dalla zona di campo magnetico

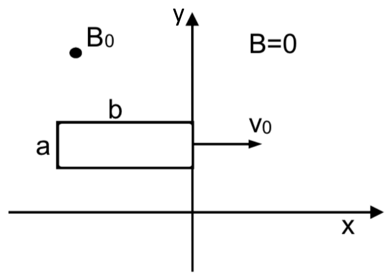
$$\overrightarrow{F} = 2.87 \times 10^{-1}\hat{x}\ N$$

3.a Si calcoli il lavoro $L$ necessario per estrarre la spira dalla regione in cui è presente il campo magnetico

$L$=0.23 J

3.b Si calcoli l'energia complessivamente dissipata per effetto Joule nella spira durante il processo di estrazione $E_{Diss}$.

$E_{Diss}$=0.23 J




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo* )

# Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
## Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 2/07/2021

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**

Un'asta omogenea di lunghezza $L = 107.4$ m e massa $m = 248$ kg giace su un piano orizzontale privo di attrito. Due corpi assimilabili a due punti materiali, di massa $m_1$= 62 kg e $m_2$= 31 kg, si muovono sullo stesso piano orizzontale con velocità rispettivamente $v_1 = 8$ ms$^{-1}$ e $v_2 = 16$ ms$^{-1}$ in direzione ortogonale alla sbarra e versi opposti come in figura. I due corpi colpiscono contemporaneamente l'asta, rispettivamente alle distanze $d_1 = 17.9$ m e $d_2 = 35.8$ m dal suo centro e rimangono attaccati ad essa.

1.a Dire quali delle seguenti grandezze fisiche si conserva nell'urto, giustificando la risposta:
- ∘ Energia del sistema, $E$
- ∘ quantità di moto del sistema, $\overrightarrow{P}$
- ∘ momento angolare con polo nel centro dell'asta, $\overrightarrow{L}^o$

2.a Calcolare la posizione $\overrightarrow{R}_{cm}$ e la velocità $\overrightarrow{v}_{cm}$ del centro di massa dopo l'urto

$\overrightarrow{R}_{cm}$= ...................... $\overrightarrow{v}_{cm}$= ......................

2.b Calcolare il momento angolare del sistema dopo l'urto rispetto al centro dell'asta, $\overrightarrow{L}$

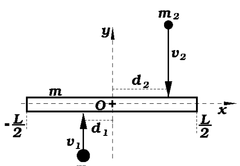
$\overrightarrow{L}$ = ......................

3.a Calcolare l'energia cinetica $K$ del sistema dopo l'urto

$K$ = ......................

3.b Calcolare l'energia cinetica rotazionale $E_{rot}$ del sistema dopo l'urto

$E_{rot}$ = ......................




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Con riferimento alla Figura, una spira rettangolare di lati $a = 4$ cm e $b = 8$ cm e resistenza $R = 819$ m$\Omega$ è posta in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme e costante ortogonale al piano della spira con $\overrightarrow{B}_0 = (0\ ;0\ ;\ 7)$ T per $(-\infty \leq x \leq 0\ ;\ y \in \mathcal{R})$. La spira viene poi portata nella regione del piano in cui l'intensità del campo magnetico è nulla $(0 < x \leq \infty\ ;\ y \in \mathcal{R})$ a velocità costante $\overrightarrow{v}_0 = v_0\hat{x}$ con $v_0 = 30$ m/s.

Si trascuri l'induttanza della spira.

1.a Esprimere il flusso del campo magnetico attraverso la spira in funzione della posizione $x$ del lato $a$ destro della spira, e farne il grafico, $\phi(\overrightarrow{B}, x)$ per $-\infty \leq x \leq \infty$

$$\phi(\overrightarrow{B}, x) = \text{......................}$$

1.b Determinare la corrente $i(x)$ che circola nella spira in funzione della posizione $x$ del lato destro della spira e il suo verso (quando non è nulla) motivando la risposta anche con un disegno. Fare il grafico di $i(x)$ per $-\infty \leq x \leq \infty$

$$i(x) = \text{......................}$$

2.a Calcolare la forza esterna $\overrightarrow{F}$ che è necessario applicare nel tratto $(0 < x < b)$ al lato destro della spira per estrarla dalla zona di campo magnetico

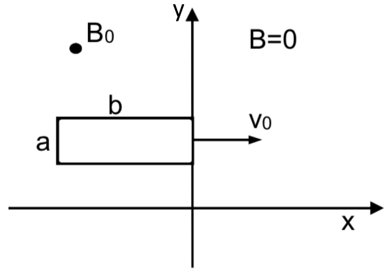
$$\overrightarrow{F} = \text{......................}$$

3.a Si calcoli il lavoro $L$ necessario per estrarre la spira dalla regione in cui è presente il campo magnetico

$$L = \text{......................}$$

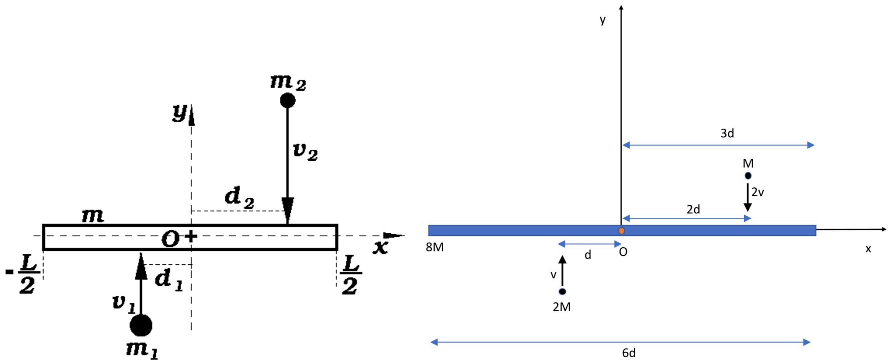
3.b Si calcoli l'energia complessivamente dissipata per effetto Joule nella spira durante il processo di estrazione $E_{Diss}$.

$$E_{Diss} = \text{......................}$$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

# Soluzione Esercizio 1




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda.1**
L'energia del sistema non si conserva in quanto l'urto è anelastico, la quantità di moto del sistema si conserva essendo nulla la risultante delle forze esterne, ed il sistema non vincolato. Il momento angolare del sistema si conserva rispetto a qualunque polo non essendoci forze esterne impulsive (il sistema non è vincolato), e in quanto la forza peso e la reazione vincolare, che giacciono sulla stessa retta di applicazione, sono in modulo uguali e hanno verso opposto, dando contributo nullo al momento delle forze.
**Domanda.2**
Notiamo che: $m = 8m_2 = 8M$, $m_1 = 2m_2 = 2M$, $d_2 = 2d_1 = 2d$ e $v_2 = 2v_1 = 2v$ Subito dopo l'urto, assumendo l'origine nel centro dell'asta, e indicando con $m_{tot} = m + m_1 + m_2 = 8M + 2M + M$ la massa del sistema, per la posizione del centro di massa otteniamo:

$$x_{cm} = \frac{m(0) + (m_1)(-d_1) + m_2(d_2)}{m_{tot}} = 0 \quad y_{cm} = 0 \quad z_{cm} = 0$$

Ovviamente, si ottiene lo stesso risultato se usiamo le espressioni delle masse e delle distanze in funzione di $d$ e $M$

$$x_{cm} = \frac{8M(0) + (2M)(-d) + M(2d)}{m_{tot}} = 0 \quad y_{cm} = 0 \quad z_{cm} = 0$$

Per cui la posizione del centro di massa coincide con il centro dell'asta O:

$$\overrightarrow{R}_{cm} = (0, 0, 0)$$

Dalla conservazione della quantità di moto del sistema, $\overrightarrow{P}_i = \overrightarrow{P}_f$, otteniamo per le tre componenti:

$$\begin{cases} 0 = m_{tot} v_{cm}^x = 0 \\ m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_{tot} v_{cm}^y = 0 \\ 0 = m_{tot} v_{cm}^z = 0 \end{cases}$$

Oppure vedi fig.b usando $M$ e $v$:

$$\begin{cases} 0 = m_{tot} v_{cm}^x = 0 \\ (2M)v - M(2v) = m_{tot} v_{cm}^y = 0 \\ 0 = m_{tot} v_{cm}^z = 0 \end{cases}$$

Per cui:

$$\overrightarrow{v}_{cm} = (0, 0, 0)$$

Subito dopo l'urto, assumendo l'origine nel centro dell'asta, e indicando con $m_{tot} = M + 2M + 8M$ la massa del sistema vale :

$$x_{cm} = \frac{M(2d) + (2M)(-d) + 8M(0)}{m_{tot}} = 0 \quad y_{cm} = 0 \quad z_{cm} = 0$$

Per cui la posizione del centro di massa coincide con il centro dell'asta O e con la posizione del centro di massa prima dell'urto:

$$\overrightarrow{R}_{cm} = (0, 0, 0)$$

Come era prevedibile dalla conservazione della quantità di moto, dalla conservazione della velocità del cm e dal fatto che quest'ultima è nulla.

Dalla conservazione del momento angolare $\overrightarrow{L}_i^o = \overrightarrow{L}_f^o$ si ottiene:

$$\overrightarrow{L}_i^o = -\left(m_2 v_2 d_2 + m_1 v_1 d_1\right)\hat{z} = \overrightarrow{L}_f^o = \overrightarrow{L}$$

ma anche usando $M$, $v$ e $d$:

$$\overrightarrow{L}_i^o = -\left(M(2v)(2d) + (2M)vd\right)\hat{z} = -6Mvd\hat{z} = \overrightarrow{L}_f^o = \overrightarrow{L}$$

**Domanda.3**

Dalla conservazione del momento angolare (domanda 2)

$$\overrightarrow{L}_i^o = -\left(m_1 v_1 d_1 + m_2 v_2 d_2\right)\hat{z} = \overrightarrow{L}_f^o = I_O \omega \hat{z}$$

ma anche usando $M$, $v$ e $d$:

$$\overrightarrow{L}_i^o = -\left(M(2v)(2d) + (2M)vd\right)\hat{z} = -6Mvd\hat{z} = \overrightarrow{L}_f^o = I_O \omega \hat{z}$$

con $I_O$ momento di inerzia rispetto al centro di rotazione che coincide con il cm del sistema dato da:

$$I_0 = \frac{1}{12}(m)(L)^2 + m_2(d_2)^2 + m_1 d_1^2$$

ma anche, notando che $L = 6d$, e usando $M$ e $v$ e $d$ :

$$I_0 = \frac{1}{12}(8M)(6d)^2 + M(2d)^2 + 2Md^2 = (24 + 4 + 2)Md^2 = 30Md^2$$

Di conseguenza dopo l'urto poichè il centro di massa è fermo (domanda 2) e coincide con il centro dell'asta, il sistema ruoterà attorno ad esso (domanda 2) con velocità angolare $\omega$ data da:

$$\omega = -\frac{(m_2 v_2 d_2 + m_1 v_1 d_1)}{I_0}$$

ma anche, usando $M$ e $v$ e $d$

$$\omega = -\frac{6Mvd}{30Md^2} = -\frac{v}{5d}$$

Utilizzando il teorema di Koenig per determinare l'energia cinetica del sistema dopo l'urto, otteniamo:

$$K = \frac{1}{2} m_{tot} v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{30Md^2 v^2}{25d^2} = \frac{3}{5} M v^2$$

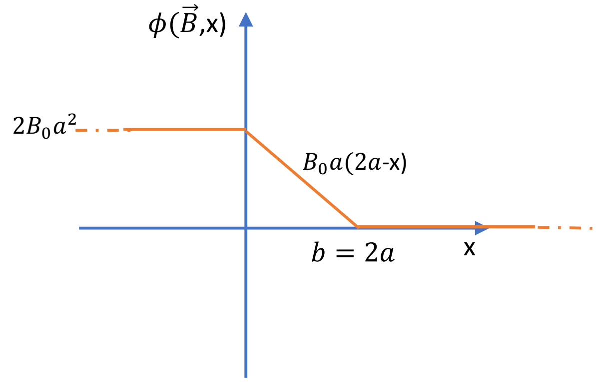
Poichè l'energia cinetica è solo rotazionale: $K = E_{rot}$

Soluzione Esercizio 2

**Domanda 1.a**

Notando che b=2a, il flusso del campo magnetico attraverso la spira è dato da:

$$\phi(\vec{B}, x) = \begin{cases} B_0 ab = 2B_0 a^2 & x \leq 0 \\ B_0 a(b-x) = B_0 a(2a-x) & 0 < x < b \\ 0 & b \leq x \end{cases}$$

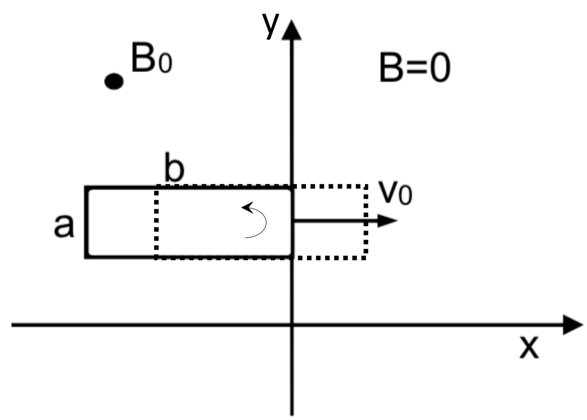



**Domanda 1.b**

La corrente indotta nella spira è non nulla solo per $0 < x < b$ dove il flusso non é costante in funzione del tempo. In questa regione dalla legge di Lentz:

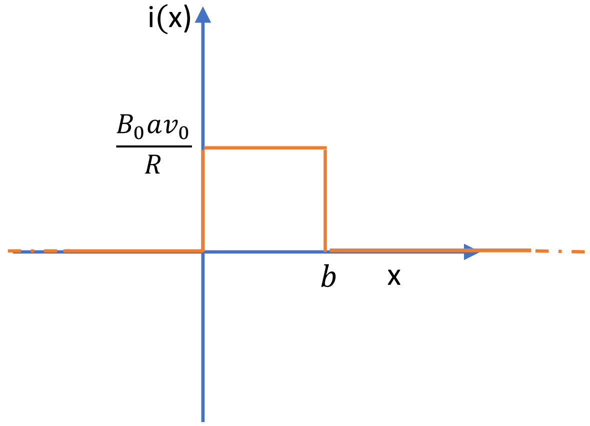
$$fem = -\frac{d\phi}{dt} = B_0 a \frac{dx}{dt} = B_0 a v_0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{B_0 a v_0}{R}$$

dove con $fem$ abbiamo indicato la forza elettromotrice indotta e con $i$ la corrente indotta che circola nella spira. Poichè nella regione $0 < x < b$ il flusso diminuisce, il verso della corrente indotta sarà tale da opporsi alla variazione di flusso che l'ha prodotta, e pertanto, dato che il flusso del campo magnetico diminuisce, il suo verso è antiorario, in modo da generare un campo indotto concorde a $B_0$. Il verso della corrente indotta è indicato nella seguente figura.




La corrente indotta in funzione della coordinata $x$ del lato $a$ destro è data da:

$$i(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{B_0 a v_0}{R} & 0 < x < b \\ 0 & b \leq x \end{cases}$$




**Domanda 2.a**
Poichè la spira è percorsa da corrente per $0 < x < b$, essa è sottoposta su ciascun lato L alla forza magnetica (forza di Laplace) $i\overrightarrow{L} \wedge \overrightarrow{B}$. Le forze sui due lati paralleli alla velocità sono uguali in modulo e direzione ma hanno versi opposti in quanto il campo magnetico è lo stesso ma il verso della corrente è opposto nei due lati, la forza che si esercita sul lato a che si trova all'interno del campo $B \neq 0$ è $\overrightarrow{F}(a) = -iaB_0\hat{x}$, mentre la forza che si esercita sul lato a che si trova all'interno del campo $B = 0$ è nulla. Per cui la forza magnetica risultante è $\overrightarrow{F}(a) = -iaB_0\hat{x}$. D'altra parte se la spira si muove con velocità costante durante l'estrazione, la forza totale agente sulla spira deve essere nulla:

$$\overrightarrow{F}(a) + \overrightarrow{F} = 0$$

per cui la forza esterna applicata durante l'estrazione è

$$\overrightarrow{F} = iaB_0\hat{x} = \frac{B_0 a v_0}{R} aB_0\hat{x} = \frac{B_0^2 a^2 v_0}{R}\hat{x}$$

**Domanda 3.a**
Il lavoro L compiuto dalla forza $\overrightarrow{F}$ per estrarre tutta la spira è dato da:

$$L = \int_0^b \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dl} = F \cdot b = \frac{B_0^2 a^2 v_0}{R} b = \frac{2B_0^2 a^3 v_0}{R}$$

**Domanda 3.b**
Poiche la potenza $(W)$ dissipata sulla resistenza è costante, l'energia dissipata per effetto Joule sara uguale alla potenza dissipata $(W\ )$ per il tempo t* necessario ad estrarre tutta la spira:

$$W = i^2 R = \frac{fem^2}{R} = \frac{(B_0 a v_0)^2}{R} \qquad \Rightarrow \qquad E_{Diss} = \int_0^{t*} W dt = W t* = W\frac{b}{v_0} = \frac{2B_0^2 a^3 v_0}{R}$$

Ovviamente l'energia dissipata coincide con il lavoro fatto dalla forza esterna $(L)$ per estrarre la spira.

## Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
### Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 23/07/2021

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**

Un cilindro omogeneo di massa $m = 6.3\ kg$ e raggio $r = 64\ cm$ rotola senza strisciare su un piano orizzontale scabro sotto l'azione di una forza $F$ orizzontale applicata al baricentro $C$ del cilindro (vedi figura) di modulo $F = 12\ N$. Sapendo che il cilindro parte da fermo e che il coefficiente di attrito statico fra il cilindro e il piano orizzontale è $\mu_s = 0.55$, determinare:

1.a il modulo dell'accelerazione del cilindro $a$ e la Forza di attrito statico $\overrightarrow{F}_s$

$$a{=}1.27\ ms^{-2} \qquad \overrightarrow{F}_s{=}\ -4\hat{x}\ \text{N}$$

1.b il modulo della velocità $v$ del cilindro dopo un tempo $t^* = 4.2\ s$ dalla messa in moto

$$v{=}5.33\ ms^{-1}$$

2.a l'energia cinetica $K$ del cilindro dopo un tempo $t^* = 4.2\ s$ dalla messa in moto

$$K{=}1.34{\times}10^2\ J$$

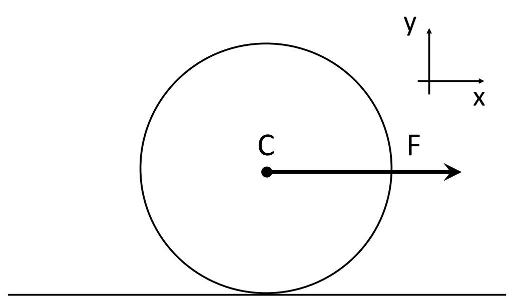
2.b il lavoro $\mathcal{L}$ fatto dalla forze agenti sul cilindro in un tempo $t^* = 4.2\ s$ dall'inizio del moto

$$\mathcal{L}{=}1.34{\times}10^2\ J$$

3.a il valore massimo del modulo della forza esterna orizzontale che può essere applicata affinchè il rotolamento avvenga senza strisciare, $F_{max}$

$$F_{max}{=}1.04{\times}10^2\ N$$

Assumere per i calcoli $g = 10$ m$/s^2$




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**
Con riferimento alla figura, due fili indefiniti paralleli, posti a distanza $r = 2\ m$ e perpendicolari al piano del foglio, sono percorsi dalla stessa corrente costante $i_0 = 3\ A$ nei versi indicati in figura. Si calcoli:

1.a la forza $\overrightarrow{F}_L^{12}$ per unità di lunghezza che il filo 1 esercita sul filo 2

$$\overrightarrow{F}_L^{12} = \ 9 \times 10^{-7}\ \hat{x}\ \mathrm{N/m}$$

1.b la forza $\overrightarrow{F}_L^{21}$ per unità di lunghezza che il filo 2 esercita sul filo 1

$$\overrightarrow{F}_L^{21} = \ -9 \times 10^{-7}\ \hat{x}\ \mathrm{N/m}$$

Nel punto $P$ indicato in figura, a distanza $r$ da entrambi i fili è posta una spira circolare conduttrice di raggio $a = 2\ cm$, con $a \ll r$ e di resistenza $R_s = 4\ \mu\Omega$, la cui normale forma un angolo $\theta = 45^0$ con l'asse $y$. Determinare:

2.a Il campo magnetico $\overrightarrow{B}$ nel punto $P$, e il flusso del campo magnetico $\phi\left(\overrightarrow{B}\right)$ attraverso la spira.

$$\overrightarrow{B} = 3 \times 10^{-7}\ \hat{y}\ T \qquad \phi\left(\overrightarrow{B}\right) = \ 2.67 \times 10^{-10}\ Wb$$

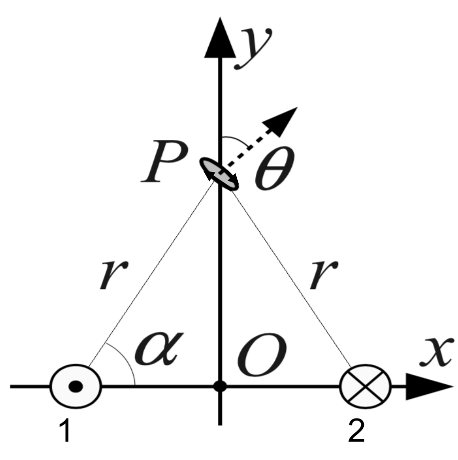
Dal tempo $t = 0$ la corrente nei fili varia nel tempo ed è data da $i(t) = i_0 + \beta t$, con $\beta = 10$ A/s. Si determini (trascurando l'autoinduzione):

3.a la forza elettromotrice, $fem$, indotta nella spira e l'energia in essa dissipata, $E_{Diss}$, al tempo $t^* = 5\ s$.

$$fem = -8.89 \times 10^{-10}\ V \qquad E_{Diss} = 9.88 \times 10^{-13}\ J$$

3.b la corrente che circola nella spira $i_s$ e il suo verso (motivando la risposta e con un disegno), e la potenza dissipata $P$ al tempo $t^* = 5\ s$

$$i_s = 2.22 \times 10^{-4}\ A \text{ orario} \qquad P = 1.98 \times 10^{-13}\ W$$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo* )

## Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 23/07/2021**

| **Nome:** | **Matricola:** |
| --- | --- |
| **Cognome:** | **Anno di Corso:** |

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**
Un cilindro omogeneo di massa $m = 6.3\ kg$ e raggio $r = 64\ cm$ rotola senza strisciare su un piano orizzontale scabro sotto l'azione di una forza $F$ orizzontale applicata al baricentro $C$ del cilindro (vedi figura) di modulo $F = 12\ N$. Sapendo che il cilindro parte da fermo e che il coefficiente di attrito statico fra il cilindro e il piano orizzontale è $\mu_s = 0.55$, determinare:

1.a il modulo dell'accelerazione del cilindro $a$ e la Forza di attrito statico $\overrightarrow{F}_s$

$a =$ ...................... $\overrightarrow{F}_s =$ ......................

1.b il modulo della velocità $v$ del cilindro dopo un tempo $t^* = 4.2\ s$ dalla messa in moto

$v =$ ......................

2.a l'energia cinetica $K$ del cilindro dopo un tempo $t^* = 4.2\ s$ dalla messa in moto

$K =$ ......................

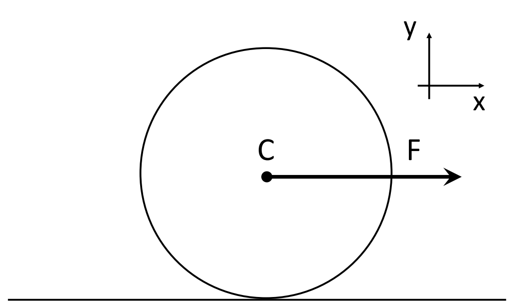
2.b il lavoro $\mathcal{L}$ fatto dalla forze agenti sul cilindro in un tempo $t^* = 4.2\ s$ dall'inizio del moto

$\mathcal{L} =$ ......................

3.a il valore massimo del modulo della forza esterna orizzontale che può essere applicata affinchè il rotolamento avvenga senza strisciare, $F_{max}$

$F_{max} =$ ......................

Assumere per i calcoli $g = 10$ m$/s^2$



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**
Con riferimento alla figura, due fili indefiniti paralleli, posti a distanza $r = 2\ m$ e perpendicolari al piano del foglio, sono percorsi dalla stessa corrente costante $i_0 = 3\ A$ nei versi indicati in figura. Si calcoli:

1.a la forza $\overrightarrow{F}_L^{12}$ per unità di lunghezza che il filo 1 esercita sul filo 2

$$\overrightarrow{F}_L^{12} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1.b la forza $\overrightarrow{F}_L^{21}$ per unità di lunghezza che il filo 2 esercita sul filo 1

$$\overrightarrow{F}_L^{21} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nel punto $P$ indicato in figura, a distanza $r$ da entrambi i fili, è posta una spira circolare conduttrice di raggio $a = 2\ cm$, con $a \ll r$ e di resistenza $R_s = 4\ \mu\Omega$, la cui normale forma un angolo $\theta = 45^0$ con l'asse $y$. Determinare:

2.a Il campo magnetico $\overrightarrow{B}$ nel punto $P$, e il flusso del campo magnetico $\phi\left(\overrightarrow{B}\right)$ attraverso la spira.

$$\overrightarrow{B} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \phi\left(\overrightarrow{B}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

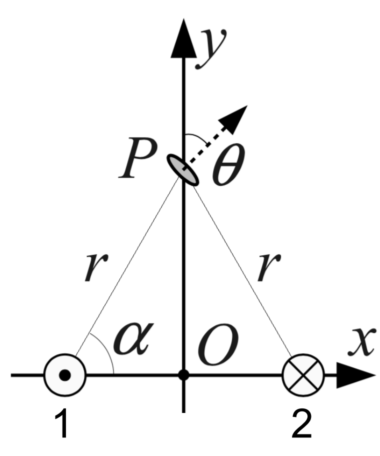
Dal tempo $t = 0$ la corrente nei fili varia nel tempo ed è data da $i(t) = i_0 + \beta t$, con $\beta = 10$ A/s.
Si determini (trascurando l'autoinduzione):

3.a la forza elettromotrice, $fem$, indotta nella spira e l'energia in essa dissipata, $E_{Diss}$, al tempo $t^* = 5\ s$.

$$fem = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad E_{Diss} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

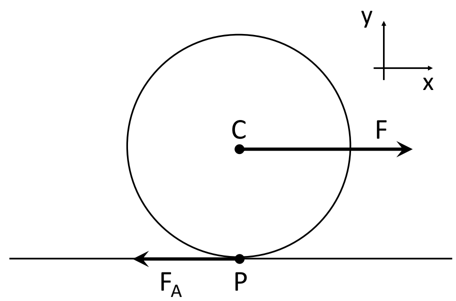
3.b la corrente che circola nella spira $i_s$ e il suo verso (motivando la risposta e con un disegno), e la potenza dissipata $P$ al tempo $t^* = 5\ s$

$$i_s = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad P = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo* )

## Soluzione Esercizio 1




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda.1a**

Le forze agenti sul cilindro sono la forza esterna F e la forza d'attrito statico $F_s$ (vedi figura ), la forza peso e la forza perpendicolare di reazione del piano di appoggio che hanno lo stesso modulo e direzione ma verso opposto. La posizione del centro di massa del disco (CM) coincide con $C$. La prima e la seconda equazione cardinale (scegliendo come polo per il calcolo dei momenti il $CM$) forniscono, tenuto conto che la forza di attrito statico ha solo la componente $x$ diversa da 0 essendo parallela alla risultante delle forze parallele al piano agenti:

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{F}_s = m\vec{a}_{CM} \\ \vec{M} = I_{CM}\alpha_z\hat{z} \end{cases}$$

che si possono riscrivere, considerando la proiezione lungo $x$ per la prima cardinale, come:

$$\begin{cases} F + F_{sx} = ma_{xCM} = ma \\ F_{sx}r\hat{z} = I_{CM}\alpha_z\hat{z} \quad \Rightarrow \quad F_{sx}r = I_{CM}\alpha_z \end{cases}$$

Poichè il moto è di puro rotolamento $a = -\alpha_z r$, sostituendo otteniamo, tenuto conto che il momento di inerzia del cilindro è $I_{CM} = mr^2/2$ :

$$\begin{cases} F_{sx}r = I_{CM}\alpha_z \quad \Rightarrow \quad F_{sx} = -ma/2 \\ F + F_{sx} = ma = F - ma/2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}\frac{F}{m} \\ F_{sx} = -ma/2 = -m\frac{1}{3}\frac{F}{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_s = (-\frac{1}{3}F, 0, 0) \end{cases}$$

La forza di attrito statico in questo caso è parallela al piano ed ha verso opposto alla velocità del CM. Si poteva anche utilizzare questa informazione fin dall'inizio ($F_{sx} = -F_s$).

**Domanda.1b**

Si ottengono ovviamente gli stessi risultati per l'accelerazione considerando l'asse di rotazione passante per il punto P di contatto; in questo caso il momento d'inerzia, per il teorema di Huygens-Steiner, vale:

$$I_P = I_{CM} + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

mentre la seconda equazione cardinale e la relazione tra $a$ e $\alpha_z$ forniscono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} -rF = I_P\alpha_z = \frac{3}{2}mr^2\alpha_z \\ a = -\frac{\alpha_z}{r} = \frac{2}{3}\frac{F}{m} \end{cases}$$

Notiamo che l'accelerazione è costante, per cui il moto è uniformemente accelerato. Pertanto, la velocità v dopo un tempo $t^*$ è data da :

$$v = at^* = \frac{2}{3}\frac{F}{m}t^*$$

**Domanda.2a**

L'energia cinetica può essere calcolata utilizzando il teorema di König considerando l'energia di rotazione attorno al centro di massa più l'energia di traslazione del CM:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{3}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2 = \frac{F^2t^{*2}}{3m}$$

Lo stesso calcolo si può effettuare considerando la rotazione attorno al punto fisso P; in questo caso non vi è traslazione ma solo rotazione attorno a P, e il momento di inerzia da utilizzare è $I_P$, pertanto:

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2 = \frac{3}{4} m r^2 \omega^2 = \frac{3}{4} m v^2$$

che concide con il risultato ottenuto in precedenza.
**Domanda.2b**

L'unica forza che compie lavoro è $F$ in quanto la forza di attrito statico agisce su un punto fermo e quindi non vi è spostamento. La forza F agisce sul centro di massa che si muove di moto uniformemente accelerato, partendo da fermo, con accelerazione a trovata sopra, quindi il suo spostamento nel'intervallo di tempo $t^*$ è dato da:

$$s = \frac{1}{2} a t^{*2} = \frac{F t^{*2}}{3m}$$

Il lavoro compiuto nel tempo $t^*$ è pertanto:

$$\mathcal{L} = \int_0^s \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{ds} = Fs = \frac{F^2 t^{*2}}{3m}$$

Tale espressione corrisponde alla variazione di energia cinetica in accordo con il teorema dell'energia cinetica: lo stesso teorema si sarebbe potuto utilizzare per calcolare tale lavoro.

**Domanda.3**
Dalla relazione $\frac{1}{3}F = F_s \leq \mu_s m g$ otteniamo che la forza massima che può essere applicata per il moto di puro rotolamento è:

$$F_{max} = 3 \mu_s m g$$

# Soluzione Esercizio 2

**Domanda 1.a**

Per ciascun filo, per l'invarianza del campo magnetico per rotazioni attorno all'asse del filo e traslazioni lungo l'asse, le linee di campo magnetico sono delle circonferenze con centro sul filo e che giacciono su piani paralleli al piano $xy$ (l'asse $z$ non indicato in figura è uscente dal foglio). Per la regola della mano destra il verso di percorrenza delle linee di campo è antiorario rispetto all'asse $z$ per il filo 1, e orario per il filo 2.

Utilizzando il teorema di Ampere per calcolare il campo magnetico generato dal filo 1 in ogni punto del filo 2 e la regola della mano destra, si ottiene:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}\,(\hat{y})$$

Dalla legge di Laplace la forza esercitata dal filo 1 su un tratto $L_2$ del filo 2 è data da

$$\vec{F}^{12} = i_2 \vec{L}_2 \wedge \vec{B}_1 = i_0 L_2 \left( -\hat{z} \wedge \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r}\hat{y} \right) = L_2 \frac{\mu_0 i_0^2}{2\pi r}\hat{x}$$

Per cui la forza esercitata per unità di lunghezza dal filo 1 sul filo 2 è data da:

$$\vec{F}_L^{12} = \frac{\mu_0 i_0^2}{2\pi r}\hat{x}$$

**Domanda 1.b**

Per calcolare la forza esercitata per unità di lunghezza dal filo 2 sul filo 1 basta osservare che mentre la direzione il modulo e il verso del campo magnetico sono identici a quelli del campo magnetico sul filo 1 il verso della corrente è opposto. Pertanto:

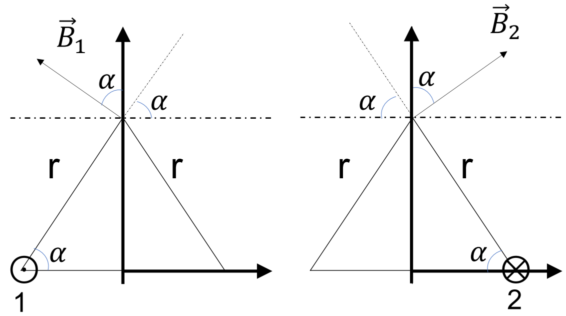
$$\vec{F}_L^{21} = -\frac{\mu_0 i_0^2}{2\pi r}\hat{x}$$

**Domanda 2.a**

Per un triangolo equilatero $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Il campo $\vec{B}$ dovuto ai due fili nel punto P si ottiene, in base al principio di sovrapposizione, sommando vettorialmente i campi magnetici dovuti ai due fili considerati separatamente. I campi magnetici dovuti al filo 1 e al filo 2 hanno stesso modulo (essendo i due fili percorsi dalla stessa corrente ed equidistanti dal punto $P$. Con ( vedi figura):

$$\vec{B}_1 = (-B_1 sin\alpha, B_1 cos\alpha) \qquad \vec{B}_2 = (B_2 sin\alpha, B_2 cos\alpha)$$

e $B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r}$




Per cui il campo magnetico risultante in P è dato da:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 2cos\alpha \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r}\hat{y}$$

Sfruttando il fatto che essendo $a \ll r$ il campo magnetico può essere considerato uniforme su tutta la superficie della spira, e pari a $\vec{B}$ in $P$, il flusso di $\vec{B}$ concatenato con la spira, poichè il campo magnetico è uniforme e la superficie orientata della spira ha normale fissa $\hat{n}$, è dato da:

$$\phi\left(\vec{B}\right) = \vec{B}\cdot\hat{n}S = Bcos\theta\pi a^2 = 2cos\alpha\frac{\mu_0 i_0}{2\pi r}cos\theta\pi a^2 = \frac{\mu_0 i_0 a^2}{r}cos\alpha cos\theta$$

**Domanda 3.a**

Per determinare la forza elettromotrice indotta dobiamo utilizzare la corrente $i(t)$ al posto di $i_0$ nell'espressione del flusso concatenato con la spira (che dipenderà quindi dal tempo) e la legge di Faraday-Neumann-Lenz. Pertanto, per il flusso otteniamo:

$$\phi(\vec{B}, t) = \frac{\mu_0(i_0 + \beta t)a^2}{r}cos\alpha cos\theta$$

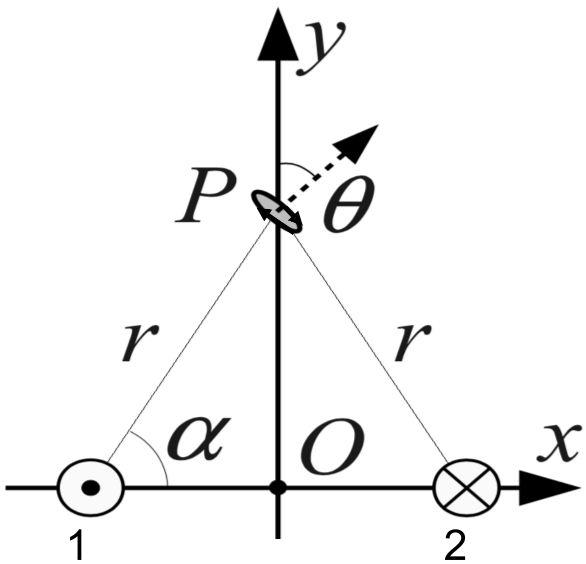
e dalla legge di di Faraday-Neumann-Lenz:

$$fem = -\frac{d\phi(\overrightarrow{B},t)}{dt} = -\frac{\mu_0 \beta a^2}{r} cos\alpha cos\theta$$

Poichè la fem è costante anche la corrente indotta nella spira $i_s$ è costante come lo è la potenza P dissipata nella spira. Pertanto: $P = i_s^2 R_s = \frac{fem^2}{R_s}$ L'energia dissipata al tempo $t^*$ sarà data da :

$$E_{Diss} = \int_0^{t*} Pdt = Pt^* = \frac{fem^2}{R_s} t^*$$

**Domanda 3.b**
il verso della corrente indotta sarà tale da opporsi alla variazione di flusso che l'ha prodotta, e pertanto, dato che il flusso del campo magnetico aumenta nel tempo per i dati del problema, il suo verso è orario rispetto alla normale orientata della spira. Il verso della corrente indotta è indicato nella seguente figura.




la sua intensità è data da:

$$i_s = \frac{\mid fem \mid}{R_s}$$

mentre la potenza dissipata (vedi anche Domanda 3.a per espressione alternativa) è data da

$$P = i_s^2 R_s$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**
**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 17/09/2021**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**
Un piano inclinato forma un angolo $\theta$= 40.0° con l'orizzontale ed ha un'altezza $h$= 0.5 m.
Una sfera di massa $M$= 8.7 kg e raggio $R$= 10 cm viene rilasciata da ferma dalla sommità del piano.
La metà più alta del piano è perfettamente liscia, mentre nella metà più bassa il coefficiente di attrito dinamico tra sfera e piano vale $\mu$= 8.7.

1.a Calcolare il modulo della velocità $v_0$ con cui la sfera arriva alla fine della parte liscia del piano

$$v_0 = \quad 2.21 \text{ m/s}$$

1.b Calcolare l'energia cinetica $E_0$ con cui la sfera arriva alla fine della parte liscia del piano

$$E_0 = \quad 21.3 \text{ J}$$

2.a Calcolare l'accelerazione $\vec{a}_{cm}$ del centro di massa della sfera non appena entra nel tratto scabro *(fare riferimento al sistema di riferimento indicato in figura)*

$$\vec{a}_{cm} = \quad -58.6\ \hat{x} \text{ m/s}^2$$

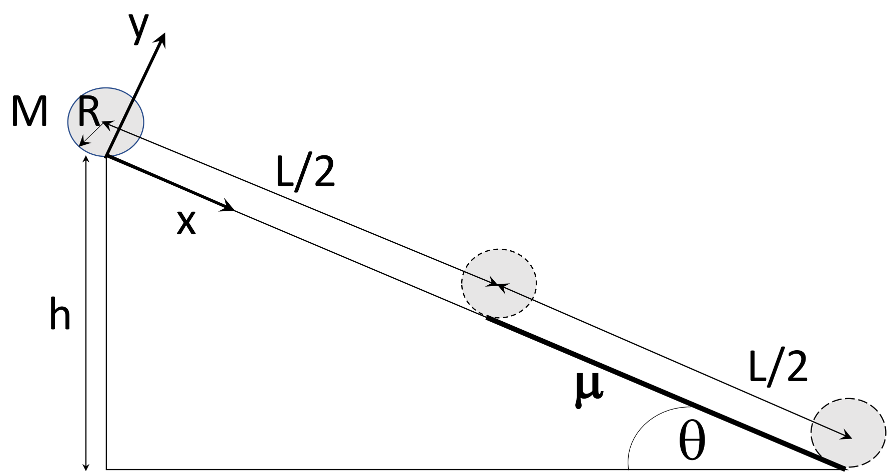
2.b Calcolare il modulo dell'accelerazione angolare $\alpha$ della sfera non appena entra nel tratto scabro

$$\alpha = \quad 1.62{\times}10^3 \text{ rad}/s^2$$

3 Determinare il tempo $t^*$ (assumendo $t = 0$ l'istante in cui la sfera entra nel tratto scabro) al quale la sfera inizia il moto di puro rotolamento

$$t^* = \quad 0.01 \text{ s}$$

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $g = 9.81$ m/s$^2$




($Figura$ $qualitativa$ $e$ $non$ $in$ $scala$ $a$ $scopo$ $illustrativo$)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Un cilindro ideale di lunghezza infinita è costituito di materiale isolante, ha un raggio $R = 2.7\ cm$ ed ha una densità volumetrica di carica elettrica che dipende dalla distanza $r$ dall'asse del cilindro (asse z della figura) con $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$.

1.a Scrivere l'espressione del campo elettrico $\overrightarrow{E}$ in coordinate cilindriche in tutto lo spazio e determinare per quale valore $r_{max}$ della distanza $r$ dall'asse z del cilindro (vedi figura) l'intensità del campo elettrico è massima.

$$\overrightarrow{E} = E_r(r)\hat{r} \equiv (E_r(r), 0, 0) \quad con \quad E_r\left(r\right) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{3R}\right) & 0 \leq r < R \\ \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0 r} & r \geq R \end{cases}$$

$r_{max}$=0.02025 m

2.a Calcolare il rapporto $\frac{|\overrightarrow{E}\left(\frac{R}{2}\right)|}{|\overrightarrow{E}(2R)|}$ tra le intensità del campo elettrico a distanza dall'asse z pari a $\frac{R}{2}$ e $2R$

$\frac{|\overrightarrow{E}\left(\frac{R}{2}\right)|}{|\overrightarrow{E}(2R)|}$=2

2.b Calcolare il rapporto $\frac{|\overrightarrow{E}(3R)|}{|\overrightarrow{E}\left(\frac{R}{4}\right)|}$ tra le intensità del campo elettrico a distanza dall'asse z pari a $3R$ e $\frac{R}{4}$

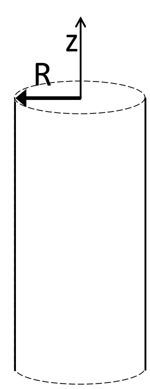
$\frac{|\overrightarrow{E}(3R)|}{|\overrightarrow{E}\left(\frac{R}{4}\right)|}$=7/15=0.47

3.a Determinare $\rho_{0-max}$, il massimo valore di $\rho_0$, affinchè l'intensità del campo elettrico non superi in nessun punto dello spazio il valore massimo di $E_{max}$ = 1.27 $10^7$ V/m . Successivamente, calcolare la differenza di potenziale elettrico $\Delta V_{0-100R}$, tra un punto sull'asse del cilindro e un punto a distanza (100 R) dal medesimo asse, quando $\rho_0 = \rho_{0-max}$

$\rho_{0-max}$= $2.22\times10^{-2}\ \frac{C}{m^3}$ $\Delta V_{0-100R}$= $1.66\times10^{6}$ V

3.b Determinare $\rho_{0-max}$, il massimo valore di $\rho_0$, affinchè l'intensità del campo elettrico non superi in nessun punto dello spazio il valore massimo di $E_{max}$ = 1.27 $10^7$ V/m . Successivamente, calcolare la differenza di potenziale elettrico $\Delta V_{0-R/2}$, tra un punto sull'asse del cilindro e un punto a distanza (R/2) dal medesimo asse, quando $\rho_0 = \rho_{0-max}$

$\rho_{0-max}$= $2.22\times10^{-2}\ \frac{C}{m^3}$ $\Delta V_{0-R/2}$= 8.89 $\times10^{4}$ V




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo* )

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**
**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 17/09/2021**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**
Un piano inclinato forma un angolo $\theta$= 40° con l'orizzontale ed ha un'altezza $h$= 0.5 m.
Una sfera di massa $M$= 8.7 kg e raggio $R$= 10 cm viene rilasciata da ferma dalla sommità del piano.
La metà più alta del piano è perfettamente liscia, mentre nella metà più bassa il coefficiente di attrito dinamico tra sfera e piano vale $\mu$= 8.7

1.a Calcolare il modulo della velocità $v_0$ con cui la sfera arriva alla fine della parte liscia del piano

$$v_0 = ................$$

1.b Calcolare l'energia cinetica $E_0$ con cui la sfera arriva alla fine della parte liscia del piano

$$E_0 = ................$$

2.a Calcolare l'accelerazione $\vec{a}_{cm}$ del centro di massa della sfera non appena entra nel tratto scabro *(fare riferimento al sistema di riferimento indicato in figura)*

$$\vec{a}_{cm} = ................$$

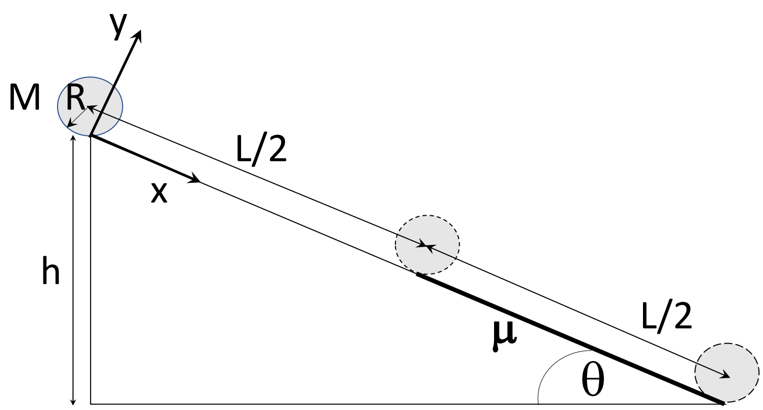
2.b Calcolare il modulo dell'accelerazione angolare $\alpha$ della sfera non appena entra nel tratto scabro

$$\alpha = ................$$

3 Determinare il tempo $t^*$ (assumendo $t = 0$ l'istante in cui la sfera entra nel tratto scabro) al quale la sfera inizia il moto di puro rotolamento

$$t^* = ................$$

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $g = 9.81$ m/s$^2$




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Un cilindro ideale di lunghezza infinita è costituito di materiale isolante, ha un raggio $R = 2.7\ cm$ ed ha una densità volumetrica di carica elettrica che dipende dalla distanza $r$ dall'asse del cilindro (asse z della figura) con $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$.

1.a Scrivere l'espressione del campo elettrico $\overrightarrow{E}$ in coordinate cilindriche in tutto lo spazio e determinare per quale valore $r_{max}$ della distanza $r$ dall'asse z del cilindro (vedi figura) l'intensità del campo elettrico è massima.

$$\overrightarrow{E} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad r_{max} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.a Calcolare il rapporto $\frac{|\overrightarrow{E}(\frac{R}{2})|}{|\overrightarrow{E}(2R)|}$ tra le intensità del campo elettrico a distanza dall'asse z pari a $\frac{R}{2}$ e $2R$

$$\frac{|\overrightarrow{E}(\frac{R}{2})|}{|\overrightarrow{E}(2R)|} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.b Calcolare il rapporto $\frac{|\overrightarrow{E}(3R)|}{|\overrightarrow{E}(\frac{R}{4})|}$ tra le intensità del campo elettrico a distanza dall'asse z pari a $3R$ e $\frac{R}{4}$

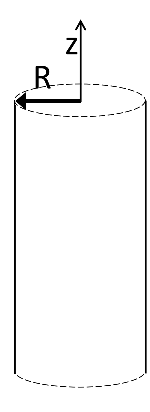
$$\frac{|\overrightarrow{E}(3R)|}{|\overrightarrow{E}(\frac{R}{4})|} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3.a Determinare $\rho_{0-max}$, il massimo valore di $\rho_0$, affinchè l'intensità del campo elettrico non superi in nessun punto dello spazio il valore massimo di $E_{max} = 1.27\ 10^7$ V/m . Successivamente, calcolare la differenza di potenziale elettrico $\Delta V_{0-100R}$, tra un punto sull'asse del cilindro e un punto a distanza (100 R) dal medesimo asse, quando $\rho_0 = \rho_{0-max}$

$$\rho_{0-max} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Delta V_{0-100R} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

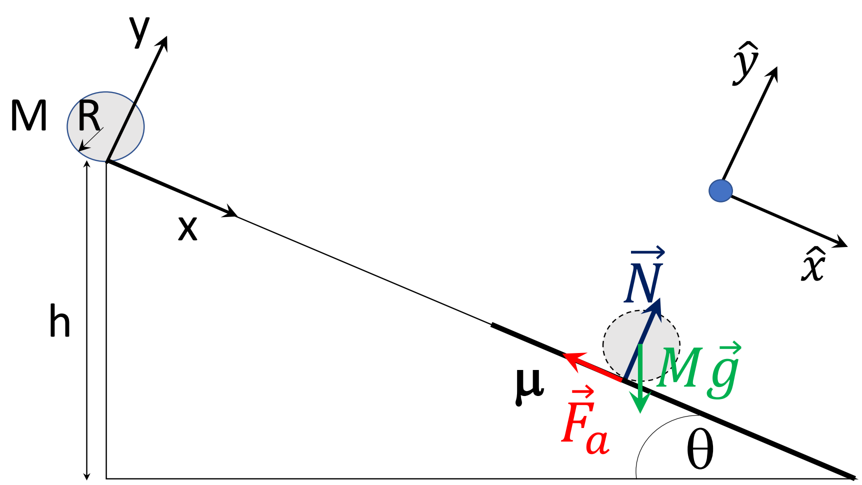
3.b Determinare $\rho_{0-max}$, il massimo valore di $\rho_0$, affinchè l'intensità del campo elettrico non superi in nessun punto dello spazio il valore massimo di $E_{max} = 1.27\ 10^7$ V/m . Successivamente, calcolare la differenza di potenziale elettrico $\Delta V_{0-R/2}$, tra un punto sull'asse del cilindro e un punto a distanza (R/2) dal medesimo asse, quando $\rho_0 = \rho_{0-max}$

$$\rho_{0-max} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Delta V_{0-R/2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo* )

## Soluzione Esercizio 1




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda.1**
Nel primo tratto la sfera scende senza ruotare perchè la forza di attrito è nulla e la forza peso (applicata nel centro di massa) e la reazione normale (la cui direzione contiene il centro di massa) hanno entrambe momento nullo rispetto al centro di massa. L'energia si conserva perchè il lavoro delle forze non conservative è nullo. Imponendo la conservazione dell'energia ed assumendo ad esempio l'origine dell'energia potenziale alla base del piano possiamo determinare $v_0$:

$$Mg\,(h+R) \;=\; \frac{1}{2}Mv_0^2 + Mg\left(\frac{h}{2}+R\right) \quad\Rightarrow\quad v_0 = \sqrt{g\,h}$$

Per il calcolo dell'energia cinetica, la sfera non ruota e pertanto non vi è energia cinetica di rotazione acquistata dalla sfera fino al tratto scabro. L'energia $E_0$ con cui la sfera arriva alla fine della parte liscia del piano corrisponde alla differenza di energia potenziale del centro di massa tra la posizione inziale e l'inizio del tratto scabro. Dalla conservazione dell'energia, e assumendo lo zero dell'energia potenziale alla base del piano, otteniamo $E_0$:

$$E_0 \;= Mg\,(h+R) - Mg\left(\frac{h}{2}+R\right) = \frac{1}{2}Mgh$$

**Domanda.2**
Inizialmente le forze da considerare sono: la forza peso $\vec{F}_g = M\vec{g} = Mg(\sin\theta\hat{x} - \cos\theta\hat{y})$, la reazione vincolare normale al piano inclinato $\vec{N} = N\hat{y}$ e la forza di attrito dinamico $\vec{F}_a = -\mu N\;\hat{x}$.

Poichè entrando nel tratto scabro la sfera non sta rotolando, la velocità del suo punto di contatto è diversa da zero e quindi si sviluppa un attrito dinamico: la forza di attrito in questo caso è diretta come la velocità ed ha verso opposto ad essa. Questa forza ha momento $\vec{\tau} = -\mu MgR\cos\theta\;\hat{z}$ rispetto al centro di massa e provoca un accelerazione angolare. In accordo con il sistema di assi cartesiani scelto in cui l'asse $z$ è ortogonale a $xy$ e con verso verso chi legge il foglio (vedi figura) e ricordando che il momento di inerzia baricentrico per una sfera di massa $M$ e raggio $R$ è $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$, scrivendo la prima equazione cardinale si ottiene proiettando lungo $y$, e osservando che la coordinata $y$ del c.m. è costante per cui $a^y_{cm} = 0$ :

$$N - Mg\cos\theta = Ma^y_{cm} = 0 \quad\Rightarrow\quad N = Mg\cos\theta$$

Mentre sempre dalla prima equazione proiettando lungo $x$

$$Mg\sin\theta - \mu N = Ma^x_{cm} = \quad\Rightarrow\quad a^x_{cm} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

lungo $z$ non ci sono forze, di conseguenza $a^z_{cm} = 0$ per cui otteniamo:

$$\vec{a}_{cm} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)\hat{x}$$

Dalla seconda equazione cardinale usando come polo il centro di massa si ottiene

$$-\mu MgR\cos\theta\hat{z} = \;I_{cm}\;\vec{\alpha} = \;I_{cm}\;\alpha_z\hat{z} \quad\Rightarrow\quad \mid\vec{\alpha}\mid = \alpha = \frac{\mu MgR\cos\theta}{I_{cm}} = \frac{5}{2}\frac{\mu g\cos\theta}{R}$$

Notiamo che l'accelerazione angolare è costante.

**Domanda.3**

Il moto nella parte scabra è uniformemente accelerato angolarmente, essendo l'accelerazione angolare costante. Valendo la relazione $\alpha_z = \dot{\omega}_z$, integrando tra 0 e t otteniamo $\omega_z(t) = \alpha_z t$, essendo al tempo $t = 0$ $\omega_z(0) = 0$. Ovviamente la sfera da questa equazione ruota in senso orario rispetto all'asse $z$ con la velocità angolare che in modulo aumenta. Anche il moto del centro di massa che è rettilineo (lungo $x$) nella parte scabra è uniformemente accelerato. Possiamo quindi scrivere che:

$$v_{cm}(t) = v_0 + a_{cm}^x t \qquad\qquad \omega_z(t) = \alpha_z t$$

Il puro rotolamento viene raggiunto nell'istante $t^*$ quando la velocità del punto di contatto diventa nulla, e la velocità del c.m. soddisfa le seguenti relazioni:

$$v_{cm}(t^*) = -\omega_z(t^*)R \quad \rightarrow \quad v_0 + a_{cm}^x t^* = \alpha \;\; t^* R$$

Per cui la condizione di puro rotolamento è raggiunta al tempo:

$$t^* = \frac{v_0}{\alpha R - a_{cm}^x}$$

## Soluzione Esercizio 2

**Domanda 1.a**

Data la simmetria cilindrica del problema, il campo elettrico in coordinate cilindriche ha solo componente radiale $E_r$ e dipende unicamente dalla distanza dall'asse del cilindro, $r$, essendo esso invariante per rotazioni attorno all'asse z, per traslazioni lungo il medesimo asse, e per rotazioni di $\pi$ attorno al piano $xy$, per cui in coordinate cilindriche $\overrightarrow{E} = E_r(r)\hat{r} \equiv (E_r(r), 0, 0)$. Considerando un cilindro coassiale all'asse del cilindro (asse $z$) con centro sull'asse del cilindro di altezza h e raggio r, applicando la legge di Gauss otteniamo:

$$\phi(\overrightarrow{E}) = E_r(r)2\pi rh = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

dove $Q_{int}$ è la carica interna al cilindro di Gauss ed è data da:

$$Q_{int} = \begin{cases} \int_0^r \rho(r')2\pi r'hdr' = \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r'}{R}\right) 2\pi r'hdr' = 2\pi\rho_0 h \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}\right) & 0 < r < R \\ \int_0^R \rho(r')2\pi r'hdr' = \int_0^R \rho_0 \left(1 - \frac{r'}{R}\right) 2\pi r'hdr' = 2\pi\rho_0 h \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3R}\right) = 2\pi\rho_0 h\frac{R^2}{6} & R \leq r \end{cases}$$

dove per calcolare la carica contenuta nella superficie gaussiana abbiamo integrato su elementi infinitesimi di volume, $dV = 2\pi r'hdr'$ che contengono la carica infinitesima $dQ_{int} = \rho(r')dV$.

Per cui per il campo elettrico otteniamo:

$$\mathrm{E}_r(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{3R}\right) & 0 \leq r < R \\ \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0 r} & r \geq R \end{cases}$$

Il valore massimo che può assumere il campo elettrico per $r \geq R$ si ha per $r = R$ e corrisponde a $\frac{\rho_0 R}{6\varepsilon_0}$, mentre per $0 \leq r < R$ il valore massimo del campo si ottiene imponendo che la derivata prima del campo elettrico sia nulla. In quest'ultimo caso, derivando, il massimo si ottiene per $r = \frac{3}{4}R$ e l'intensità del campo elettrico è data da $\frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0}\frac{3}{16}$. Per cui il valore massimo del campo elettrico si ottiene nell'ultimo caso e corrisponde a $r_{max} = \frac{3}{4}R$.

**Domanda 2.a**

Utilizzando l'espressione del C.E. per $0 \leq r < R$ per $r = \frac{R}{2}$ otteniamo:

$$\mid \overrightarrow{E}\left(\frac{R}{2}\right) \mid = \frac{\rho_0 R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\rho_0 R}{6\varepsilon_0}$$

mentre utilizzando l'espressione del C.E. per $r \geq R$ per $r = 2R$ otteniamo:

$$\mid \overrightarrow{E}(2R) \mid = \frac{\rho_0 R}{12\varepsilon_0}$$

per cui:

$$\frac{\mid \overrightarrow{E}\left(\frac{R}{2}\right) \mid}{\mid \overrightarrow{E}(2R) \mid} = 2$$

**Domanda 2.b**

Utilizzando l'espressione del C.E. per $0 \leq r < R$ per $r = \frac{R}{4}$ otteniamo:

$$\mid \overrightarrow{E}\left(\frac{R}{4}\right) \mid = \frac{\rho_0 R}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right) = \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0}\frac{5}{48}$$

mentre utilizzando l'espressione del C.E. per $r \geq R$ per $r = 3R$ otteniamo:

$$\mid \overrightarrow{E}(3R) \mid = \frac{\rho_0 R}{18\varepsilon_0}$$

per cui:

$$\frac{\mid \overrightarrow{E}(3R) \mid}{\mid \overrightarrow{E}\left(\frac{R}{4}\right) \mid} = \frac{7}{15}$$

**Domanda 3.a**

Dalla risposta alla prima domanda il valore massimo dell'intensità del campo elettrico è data da $\frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0}\frac{3}{16}$, tale espressione deve essere minore o uguale al valore di $E_{max}$, per cui, $\rho_{0-max}$ ̀dato dalle seguenti equazioni:

$$\frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0}\frac{3}{16} \leq E_{max} \qquad \Rightarrow \qquad \rho_{0-max} = \frac{16\varepsilon_0 E_{max}}{3R}$$

Sfruttando il fatto che per le stesse proprietà di simmetria, assumendo un sistema di coordinate cilindriche r,$\theta$,$z$, il potenziale dipende unicamente dalla coordinata radiale r e che quindi tutti i punti sull'asse (r=0) sono allo stesso potenziale, come pure tutti i punti alla stessa distanza dall'asse sono allo stesso potenziale, utilizzando la relazione che lega il potenziale al campo elettrico otteniamo:

$$\Delta V_{0-100R} = V(0) - V(100R) = \int_0^{100R} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_0^{100R} E_r(r)dr = \int_0^R E_r(r)dr + \int_R^{100R} E_r(r)dr$$

$$= \frac{\rho_{0-max}}{\varepsilon_0}\int_0^R \left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3R}\right)dr + \frac{\rho_{0-max}R^2}{6\varepsilon_0}\int_R^{100R}\frac{dr}{r}$$

Svolgendo gli integrali si ottiene:

$$\Delta V_{0-100R} = \frac{\rho_{0-max}}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}\frac{R^2}{2} - \frac{1}{3R}\frac{R^3}{3}\right) = \frac{\rho_{0-max}R^2}{\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{6}ln(100)\right]$$

Semplificando:

$$\Delta V_{0-100R} = \frac{\rho_{0-max}R^2}{\varepsilon_0}\left[\frac{5 + 6ln(100)}{36}\right]$$

**Domanda 3.b**

La prima domanda coincide con la prima domanda del 3.a, pertanto:

$$\rho_{0-max} = \frac{16\varepsilon_0 E_{max}}{3R}$$

Facendo le stesse considerazioni della seconda domanda del 3.a in questo caso otteniamo:

$$\Delta V_{0-R/2} = V(0) - V(R/2) = \int_0^{\frac{R}{2}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_0^{\frac{R}{2}} E_r(r)dr = \frac{\rho_{0-max}}{\varepsilon_0}\int_0^{\frac{R}{2}}\left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3R}\right)dr$$

Svolgendo gli integrali si ottiene:

$$\Delta V_{0-R/2} = \frac{\rho_{0-max}}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}\frac{R^2}{8} - \frac{1}{3R}\frac{R^3}{24}\right) = \frac{\rho_{0-max}R^2}{\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{72}\right)\right.$$

Semplificando:

$$\Delta V_{0-R/2} = \frac{\rho_{0-max}R^2}{\varepsilon_0}\left[\frac{7}{144}\right]$$

# Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
## Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 13/01/2022

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**

Con riferimento alla figura, al soffitto di una stanza di altezza $h = 3\ m$ è appesa una molla priva di massa e ideale di costante elastica $K = 40\ N/m$ e lunghezza a riposo $l_0 = 1\ m$. All' estremità della molla attaccata una pallina di massa $m = 1\ kg$, assimilabile a un punto materiale. Il sistema può oscillare solo in verticale.

1.a Si calcoli a quale distanza dal soffitto $d_e$ si trova la posizione di equilibrio della pallina. Se il sistema viene spostato dalla posizione di equilibrio, con quale periodo $T$ oscillerà la pallina?

$d_e =$ ...................... $T =$ ......................

1.b Si calcoli a quale distanza dal pavimento $h_e$ si trova la posizione di equilibrio della pallina. Se il sistema viene spostato dalla posizione di equilibrio, con quale frequenza $f$ oscillerà la pallina?

$h_e =$ ...................... $f =$ ......................

2.a La molla viene allungata fino a che la pallina tocca il pavimento e poi rilasciata. Dimostrare che la pallina arriva a colpire il soffitto e determinare l' energia cinetica $E_c$ della pallina un istante prima di toccare il soffitto

$E_c =$ ................

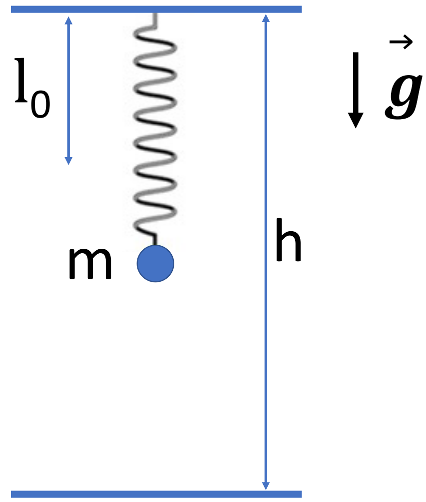
2.b La molla viene allungata fino a che la pallina tocca il terra e poi rilasciata. Dimostrare che la pallina arriva a colpire il soffitto e determinare la differenza di energia potenziale, $E_{pf} - E_{pi}$, tra l'energia potenziale della pallina un istante prima di toccare il soffitto ($E_{pf}$) e l'energia potenziale iniziale quando la molla è allungata fino a toccare il pavimento ($E_{pi}$).

$E_{pf} - E_{pi} =$ ................

3.a Dopo aver colpito il soffitto, la pallina inverte il proprio moto ma non arriva a terra e si ferma per un istante ad un'altezza $h^{'}$=1 m dal pavimento prima di invertire nuovamente il suo moto. Si calcoli l'energia persa $E_{diss}$ nell'urto con il soffitto.

$E_{diss} =$ ................

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$



(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2** – **Elettromagnetismo**
Con riferimento alla figura, un protone di massa $m = 1.67 \times 10^{-27}\ kg$ e carica $q = 1.6 \times 10^{-19}\ C$, in moto con una velocità $v_0 = 10^5\ ms^{-1}$ diretta orizzontalmente lungo lasse x. All'istante $t = 0\ s$ entra nel punto medio tra le facce di un condensatore carico. Le facce del condensatore sono quadrate, di lato $l = 1\ cm$, distanti $d = 1\ mm$ e parallele al piano $xz$ (vedi figura). Il condensatore è mantenuto a una differenza di potenziale ignota. Si consideri trascurabile la forza di gravità.

1.a All'uscita del condensatore la traiettoria del protone forma un angolo $\alpha = 5.50^0$ con l'asse x verso il basso, cioè verso $y < 0$. Si calcoli il tempo $t^*$ impiegato dal protone a uscire dal condensatore e la differenza di potenziale $(V_A - V_B)$ tra l'armatura inferiore $(V_A)$ e l'armatura superiore $(V_B)$.

$t^* =$ ...................... $V_A - V_B =$ ......................

1.b All'uscita del condensatore la traiettoria del protone forma un angolo $\alpha = 5.50^o$ con l'asse x verso il basso, cioè verso $y < 0$. Si calcoli il tempo $t^*$ impiegato dal protone a uscire dal condensatore e il campo elettrico $\overrightarrow{E}$ nella regione tra le armature del condensatore.

$t^* =$ ...................... $\overrightarrow{E} =$ ......................

2.a Determinare il campo magnetico $\overrightarrow{B} = B_z\hat{z}$ che è necessario applicare lungo $z$ affinchè il protone attraversi il condensatore senza essere deflesso.

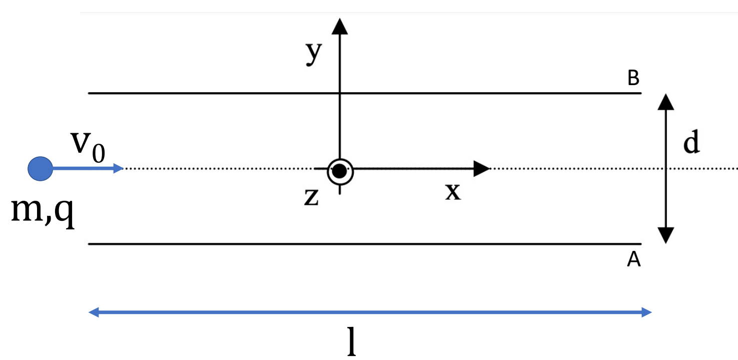
$\overrightarrow{B} =$ ......................

3.a Supponiamo di annullare la differenza di potenziale tra le armature, lasciando invariato il campo magnetico trovato. Determinare l'angolo di deflessione $\beta$ rispetto all'orizzontale e la velocità $\overrightarrow{v}_B$ all'uscita del condensatore

$\beta =$ ...................... $\overrightarrow{v}_B =$ ......................

3.b Supponiamo di annullare la differenza di potenziale tra le armature, lasciando invariato il campo magnetico trovato. Determinare l'angolo di deflessione $\beta$ rispetto all'orizzontale e la lunghezza della traiettoria $L$ percorsa dal protone all'interno del condensatore

$\beta =$ ...................... $L =$ ......................




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo* )

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**
**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 13/01/2022**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**
Con riferimento alla figura, al soffitto di una stanza di altezza $h = 3\ m$ è appesa una molla priva di massa e ideale di costante elastica $K = 40\ N/m$ e lunghezza a riposo $l_0 = 1\ m$. All' estremità della molla attaccata una pallina di massa $m = 1\ kg$, assimilabile a un punto materiale. Il sistema può oscillare solo in verticale.

1.a Si calcoli a quale distanza dal soffitto $d_e$ si trova la posizione di equilibrio della pallina. Se il sistema viene spostato dalla posizione di equilibrio, con quale periodo $T$ oscillerà la pallina?

$$d_e = 1.25\ m \qquad T = 9.93\times10^{-1}\ \mathrm{s}$$

1.b Si calcoli a quale distanza dal pavimento $h_e$ si trova la posizione di equilibrio della pallina. Se il sistema viene spostato dalla posizione di equilibrio, con quale frequenza $f$ oscillerà la pallina?

$$h_e = 1.75\ m \qquad f = 1.01\ s^{-1}$$

2.a La molla viene allungata fino a che la pallina tocca il pavimento e poi rilasciata. Dimostrare che la pallina arriva a colpire il soffitto e determinare l' energia cinetica $E_c$ della pallina un istante prima di toccare il soffitto

$$h > 2d_e \quad \Rightarrow \quad 3\ m > 2.5\ m \qquad E_c = 30\ J$$

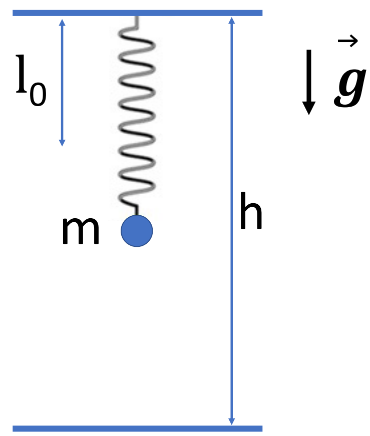
2.b La molla viene allungata fino a che la pallina tocca il terra e poi rilasciata. Dimostrare che la pallina arriva a colpire il soffitto e determinare la differenza di energia potenziale, $E_{pf} - E_{pi}$, tra l'energia potenziale della pallina un istante prima di toccare il soffitto ($E_{pf}$) e l'energia potenziale iniziale quando la molla è allungata fino a toccare il pavimento ($E_{pi}$).

$$h > 2d_e \quad \Rightarrow \quad 3\ m > 2.5\ m \qquad E_{pf} - E_{pi} = -30\ J$$

3.a Dopo aver colpito il soffitto, la pallina inverte il proprio moto ma non arriva a terra e si ferma per un istante ad un'altezza $h^{'}$=1 m dal pavimento prima di invertire nuovamente il suo moto. Si calcoli l'energia persa $E_{diss}$ nell'urto con il soffitto.

$$E_{diss} = 50\ J$$

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$




$(Figura\ qualitativa\ e\ non\ in\ scala\ a\ scopo\ illustrativo)$

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Con riferimento alla figura, un protone di massa $m = 1.67 \times 10^{-27}\ kg$ e carica $q = 1.6 \times 10^{-19}\ C$, in moto con una velocità $v_0 = 10^5\ ms^{-1}$ diretta orizzontalmente lungo lasse x. All'istante $t = 0\ s$ entra nel punto medio tra le facce di un condensatore carico. Le facce del condensatore sono quadrate, di lato $l = 1\ cm$, distanti $d = 1\ mm$ e parallele al piano $xz$ (vedi figura). Il condensatore è mantenuto a una differenza di potenziale ignota. Si consideri trascurabile la forza di gravità.

1.a All'uscita del condensatore la traiettoria del protone forma un angolo $\alpha = 5.50^o$ con l'asse x verso il basso, cioè verso $y < 0$.Si calcoli il tempo $t^*$ impiegato dal protone a uscire dal condensatore e la differenza di potenziale $(V_A - V_B)$ tra l'armatura inferiore $(V_A)$ e l'armatura superiore $(V_B)$.

$$t^* = \ 1 \times 10^{-7}\ s \qquad V_A - V_B = \ \text{-1.01}\ V$$

1.b All'uscita del condensatore la traiettoria del protone forma un angolo $\alpha = 5.50^o$ con l'asse x verso il basso, cioè verso $y < 0$. Si calcoli il tempo $t^*$ impiegato dal protone a uscire dal condensatore e il campo elettrico $\overrightarrow{E}$ nella regione tra le armature del condensatore.

$$t^* = \ 1 \times 10^{-7}\ s \qquad \overrightarrow{E} = \ (0, -1.01 \times 10^3, 0)\ Vm^{-1}$$

2.a Determinare il campo magnetico $\overrightarrow{B} = B_z\hat{z}$ che è necessario applicare lungo $z$ affinchè il protone attraversi il condensatore senza essere deflesso.

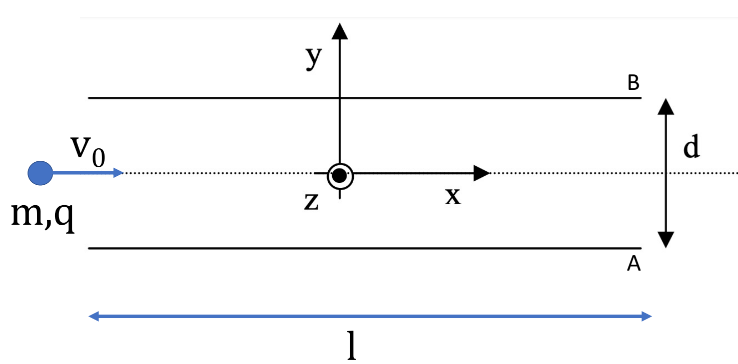
$$\overrightarrow{B} = \ -1.01 \times 10^{-2}\hat{z}\ T$$

3.a Supponiamo di annullare la differenza di potenziale tra le armature, lasciando invariato il campo magnetico trovato. Determinare l'angolo di deflessione $\beta$ rispetto all'orizzontale e la velocità $\overrightarrow{v}_B$ all'uscita del condensatore

$$\beta = \ 5.53^o \qquad \overrightarrow{v}_B = \ (9.95 \times 10^4, 9.63 \times 10^3, 0)\ ms^{-1}$$

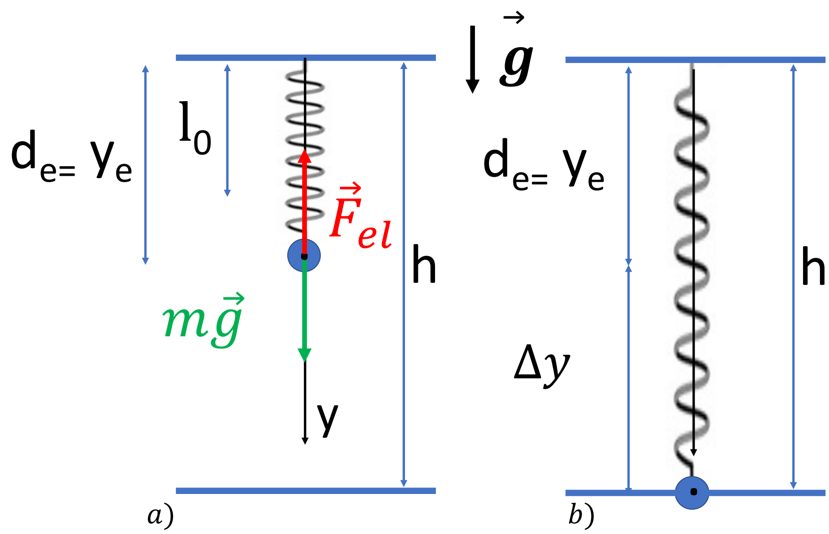
3.b Supponiamo di annullare la differenza di potenziale tra le armature, lasciando invariato il campo magnetico trovato. Determinare l'angolo di deflessione $\beta$ rispetto all'orizzontale in radianti e la lunghezza della traiettoria $L$ percorsa dal protone all'interno del condensatore

$$\beta = \ 5.53^o \qquad L = \ 0.01\ m$$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo* )

Soluzione Esercizio 1




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda.1**
Le forze agenti sulla pallina sono la forza peso e la forza di richiamo della molla. All'equilibrio la somma di tali forze è nulla per cui, nel sistema di riferimento indicato in figura a):

$$-K(y_e - l_0) + mg = 0 \quad \Rightarrow \quad d_e = y_e = l_0 + \frac{mg}{K}$$

dove abbiamo indicato con $y_e$ la posizione di equilibrio della pallina e del sistema (pallina più molla) nel sistema di riferimento indicato, che corrisponde alla distanza $d_e$ dal soffitto. Mentre la distanza dal pavimento è pari a $h_e = h - d_e$
Quando il sistema viene spostato dalla posizione di equilibrio, l'equazione del moto è quella di un oscillatore armonico:

$$m\ddot{y} = -K(y - l_0) + mg \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} + \frac{K}{m}\left(y - l_0 - \frac{m}{k}g\right)$$

la cui pulsazione è $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$, e $l_0 + \frac{m}{k}g$ è la lunghezza della molla in condizioni di equilibrio . Per cui:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

Il sistema se spostato dalla posizione di equilibrio di $\mid \Delta y \mid$, oscillerà attorno alla posizione di equilibrio con:

$$y(t) \in [y_e - \mid \Delta y \mid, y_e + \mid \Delta y \mid]$$

L'ampiezza dell'oscillazione attorno alla posizione di equilibrio dipende dall'allungamento (o dalla compressione) rispetto alla posizione di equilibrio.

**Domanda.2**
Quando la molla viene allungata fino a portare la pallina sul pavimento,(vedi figura b), l'allungamento della molla rispetto alla posizione di equilibrio è $\Delta y = h - \left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)$. Affinchè la pallina arrivi a colpire il soffitto è necessario che $\Delta y = h - \left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) > \left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)$, per cui $h > 2\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)$. I dati del problema verificano questa relazione.
Prima dell'urto con il soffitto, poichè le forze in gioco, forza gravitazionale e forza elastica, sono forze conservative, si conserva l'energia meccanica. Ponendo l'origine dell'energia potenziale gravitazionale a quota nulla dal terra, dalla conservazione dell'energia, indicando con $E_i$ ed $E_f$ l'energia iniziale e finale del sistema molla-pallina, possiamo scrivere:

$$E_i = \frac{1}{2}K\left(h - l_0\right)^2 \quad E_f = \frac{1}{2}K\left(l_0\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

Per cui l'energia cinetica della pallina quando arriva sul soffitto è data da:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Kh\left(h - 2l_0\right) - mgh$$

Ponendo l'origine dell'energia potenziale gravitazionale a quota nulla dal terra, l'energia potenziale iniziale e finale sono date rispettivamente da:
$E_{pi} = \frac{1}{2}K\left(h - l_0\right)^2 \quad \Rightarrow \quad E_{pf} = \frac{1}{2}K\left(l_0\right)^2 + mgh$ dalle quali $E_{pf} - E_{pi} = -\frac{1}{2}Kh\left(h - 2l_0\right) + mgh$

**Domanda.3**

In questo caso, se la pallina non arriva a terra ma si ferma vuol dire che l'urto è anelastico e l'energia non si conserva. L'energia dissipata è data da $E_i - E_f^{'}$, dove $E_i$ è stata determinata nella Domanda 2 e $E_f^{'}$ si ottiene da:

$$E_f' = \frac{1}{2}K\left(h - l_0 - h'\right)^2 + mgh^{'}$$

Per cui l'energia dissipata è data da:

$$E_{diss} = \frac{1}{2}K\left(h - l_0\right)^2 - \frac{1}{2}K\left(h - l_0 - h'\right)^2 - mgh'$$

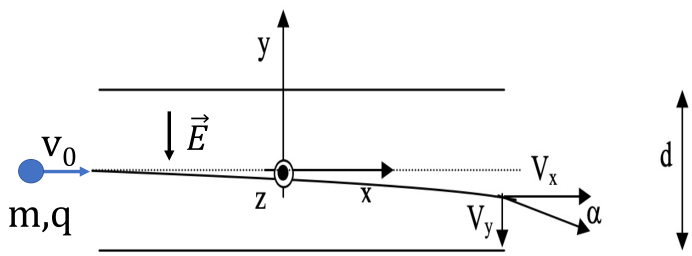
## Soluzione Esercizio 2

**Domanda 1**

Il campo elettrico è diretto lungo l'asse $y$ per cui $\overrightarrow{E} = E_y\hat{y}$. La forza $\overrightarrow{F}$ agente sulla massa m quando questa è all'interno del condensatore è $\overrightarrow{F} = (0, qE_y, 0)$. Per cui, lungo x il moto è rettilineo ed uniforme con $v_x = v_0$. Usando il sistema di coordinate assegnato, $x(t) = -\frac{l}{2} + v_0 t$. Da $x(t^*) = \frac{l}{2}$ si ottiene che il tempo impiegato ad attraversare il condensatore è pari a $t^* = \frac{l}{v_0}$. Lungo y, il moto è uniformemente accelerato con $a_y = \frac{qE_y}{m}$ dalla quale $v_y(t^*) = a_y t^* = \frac{qE_y}{m}\frac{l}{v_0}$ Dalle quali:

$$\frac{v_y(t^*)}{v_x} = \frac{qE_y}{m}\frac{l}{v_0^2} = -tg(\alpha) \quad \Rightarrow \quad E_y = -\frac{m}{q}\frac{v_0^2}{l}tg\alpha \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{E} = \left(0, -\frac{m}{q}\frac{v_0^2}{l}tg\alpha, 0\right)$$

$$V_A - V_B = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} E_y dy = E_y d = -\frac{m}{q}\frac{v_0^2}{l}dtg\alpha$$




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

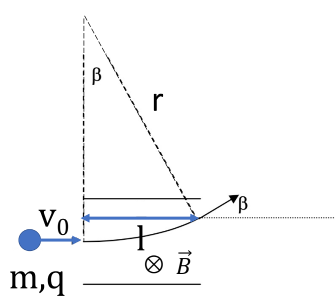
**Domanda 2**

Affinchè il protone non venga deflesso la risultante delle forza elettrica ($\overrightarrow{F}_{el}$) e magnetica ($\overrightarrow{F}_m$) agenti sul protone deve essere nulla:

$$\overrightarrow{F}_{el} + \overrightarrow{F}_m \quad \Rightarrow \quad qE_y\hat{y} = -q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = -qv_0\hat{x} \wedge B_z\hat{z} = qv_0 B_z\hat{y} = qE_y\hat{y} \quad \Rightarrow \quad B_z = \frac{E_y}{v_0} = -\frac{m}{q}\frac{v_0}{l}tg\alpha$$

**Domanda 3**

Se nello spazio occupato dal condensatore è presente solo il campo magnetico uniforme determinato nella domanda 2, il protone compie un moto circolare uniforme nel piano $xy$ fino a quando è all'interno del condensatore.




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

L'unica forza agente è infatti la forza magnetica e vale $\frac{mv_0^2}{r} = qv_0 B$, per cui il raggio di curvatura del moto è $r = \frac{mv_0}{qB}$. Pertanto, all'uscita del condensatore (vedi figura) l'angolo di deflessione si ottiene dalle seguenti relazioni:

$$sin\beta = \frac{l}{r} = \frac{lqB}{mv_0} \quad \Rightarrow \quad \beta = asin\left(\frac{lqB}{mv_0}\right)$$

Con riferimento alla figura, la lunghezza della traiettoria $L$ e la velocità $\overrightarrow{v}_B$ all'uscita del condensatore sono rispettivamente date da:

$$L = r\beta \qquad \overrightarrow{v}_B = (v_0 cos\beta, v_0 sin\beta)$$

# Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
## Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 28/01/2022

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1** – **Meccanica**
Un'asta rigida sottile ed omogenea, di lunghezza $l =$ 1.2 $m$ e massa $M =$ 8.0 $Kg$, è incernierata in $O$ ed è libera di ruotare attorno ad un'asse orizzontale passante per $O$. L'asta è inizialmente nella posizione di equilibrio. Un corpo assimilabile ad un punto materiale di massa m = 2.5 kg viene lasciato cadere da fermo lungo un piano inclinato scabro di angolo $\alpha =$ $30^o$. Il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo e il piano è $\mu_d =$ 0.30. Dopo essere disceso di un'altezza $h =$ 50 $cm$, il corpo urta l'estremità inferiore dell'asta. Con riferimento alla figura:

1.a Determinare con che velocità $v$ il corpo colpisce l'asta e il lavoro $\mathcal{L}$ fatto dalla forza di attrito nella discesa del corpo

$v =$ ...................... $\mathcal{L} =$ ......................

1.b Determinare con che velocità $v$ il corpo colpisce l'asta e l'energia dissipata $E_{Diss}$ nella discesa del corpo

$v =$ ...................... $E_{Diss} =$ ......................

2.a Dopo l'urto il punto materiale è fermo. Calcolare la velocità angolare $\overrightarrow{\omega}$ della sbarretta un istante dopo l'urto, utilizzando il sistema di versori indicato in figura con $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$. Determinare, motivando la risposta, se l'urto è anelastico o elastico.

$\overrightarrow{\omega}=$ ................

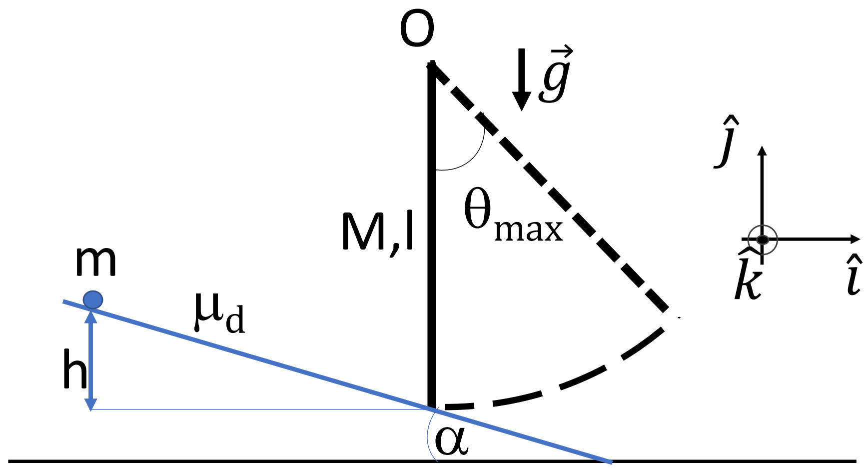
2.b Dopo l'urto il punto materiale è fermo. Calcolare il momento angolare $\overrightarrow{L}$ dell'asta un istante dopo l'urto, utilizzando il sistema di versori indicato in figura con $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$. Determinare, motivando la risposta, se l'urto è anelastico o elastico.

$\overrightarrow{L}=$ ................

3.a Calcolare il massimo angolo in radianti, $\theta_{max}$, formato dall'asta con la verticale nel moto seguente.

$\theta_{max}=$ ................

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $g = 9,81$ m/s$^2$




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**
Un circuito piano rettangolare di area $S = 10\ cm^2$, è formato da una resistenza $R = 1\ M\Omega$ collegata in serie ad un condensatore a facce piane e parallele distanti $d = 2\ mm$ e con capacità $C = 1\ nF$. All'interno del volume occupato dal circuito al tempo $t = 0$ viene generato un campo magnetico $\overrightarrow{B}$ uniforme diretto lungo l'asse z (vedi figura), perpendicolare al piano del circuito, e variabile in funzione del tempo, che per $t \geq 0$ ha la seguente espressione:

$$\overrightarrow{B} = \left(B_0 \frac{t}{t_0}\right) \hat{k}$$

con $t_0 = 1\ s$ e $B_0 = 0.05\ T$.

1.a Determinare il flusso $\phi_B(t)$ del campo magnetico attraverso il circuito e la corrente $I(t)$ che scorre nel circuito in funzione del tempo per $t \in [-\infty, \infty]$. Nel caso in cui la corrente non è nulla, determinare il suo verso motivando la risposta e con un disegno.

$\phi_B(t) =$ ...................... $I(t) =$ ......................

1.b Determinare il flusso $\phi_B(t)$ del campo magnetico attraverso il circuito e la carica $Q(t)$ presente sull'armatura superiore $(B)$ del condensatore (vedi figura) in funzione del tempo per $t \in [-\infty, \infty]$.

$\phi_B(t) =$ ...................... $Q(t) =$ ......................

2.a Fare un grafico della corrente $I(t)$ in funzione del tempo per $t \in [-\infty, \infty]$, riportando sul grafico il valore massimo, $I_{max}$ e a quale istante $t^*$ esso viene raggiunto, e la corrente finale per $t \to \infty$, $I(\infty)$

$I_{max} =$ ...................... $t^* =$ ...................... $I(\infty) =$ ......................

2.b Fare un grafico della carica $Q(t)$ presente sull'armatura superiore $(B)$, per $t \in [-\infty, \infty]$ , riportando sul grafico il valore massimo $Q_{max}$ e a quale istante $t'$ esso viene raggiunto, e la carica iniziale $Q(0)$ per $t = 0$

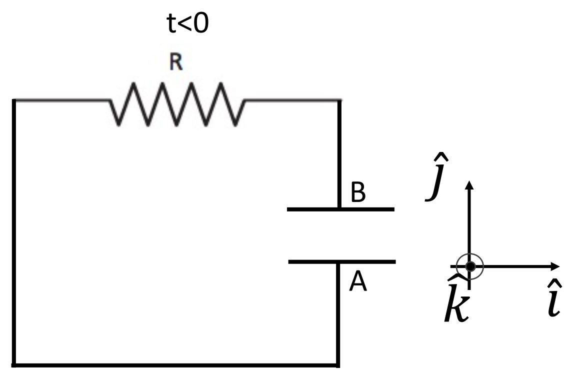
$Q_{max} =$ ...................... $t' =$ ...................... $Q(0) =$ ......................

3.a Determinare l'energia dissipata nella resistenza $E^R_{diss}$ tra $t = 0$ e $t = \infty$

$E^R_{diss} =$ ......................

3.b Determinare il campo elettrico $\overrightarrow{E}(\infty)$ all'interno del condensatore per $t \to \infty$

$\overrightarrow{E}(\infty) =$ ......................




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo* )

## Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 28/01/2022**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**
Un'asta rigida sottile ed omogenea, di lunghezza $l =$ 1.2 $m$ e massa $M =$ 8.0 $Kg$, è incernierata in $O$ ed è libera di ruotare attorno ad un'asse orizzontale passante per $O$. L'asta è inizialmente nella posizione di equilibrio. Un corpo assimilabile ad un punto materiale di massa m = 2.5 kg viene lasciato cadere da fermo lungo un piano inclinato scabro di angolo $\alpha =$ $30^o$. Il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo e il piano è $\mu_d =$ 0.30. Dopo essere disceso di un'altezza $h =$ 50 $cm$, il corpo urta l'estremità inferiore dell'asta. Con riferimento alla figura:

1.a Determinare con che velocità $v$ il corpo colpisce l'asta e il lavoro $\mathcal{L}$ fatto dalla forza di attrito nella discesa del corpo

$$v= \ 2.17\ m/s \qquad \mathcal{L}= \ \text{-6.37}\ J$$

1.b Determinare con che velocità $v$ il corpo colpisce l'asta e l'energia dissipata $E_{Diss}$ nella discesa del corpo

$$v= \ 2.17\ m/s \qquad E_{Diss}= \ 6.37\ J$$

2.a Dopo l'urto il punto materiale è fermo. Calcolare la velocità angolare $\overrightarrow{\omega}$ della sbarretta un istante dopo l'urto, utilizzando il sistema di versori indicato in figura con $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$. Determinare, motivando la risposta, se l'urto è anelastico o elastico.

$$\overrightarrow{\omega}= \ 1.47\hat{k}\ rad/s \qquad \text{l'urto è anelastico perchè } E_F - E_I= \ \text{-1.75}\ J \text{ è} < 0$$

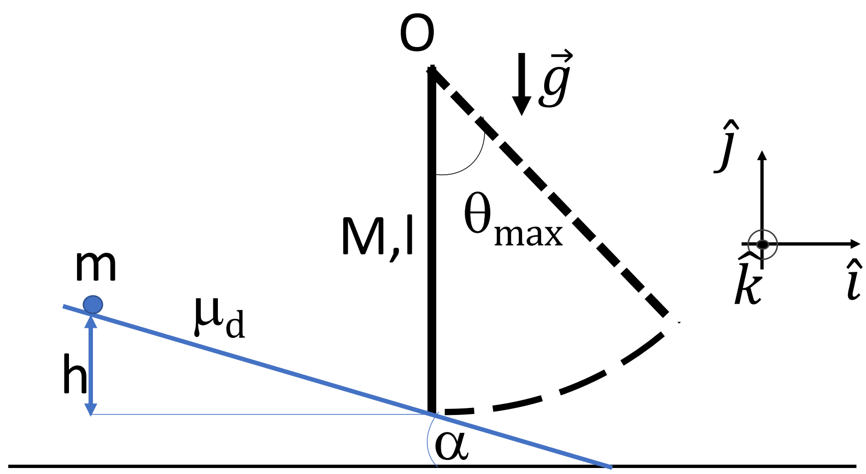
2.b Dopo l'urto il punto materiale è fermo. Calcolare il momento angolare $\overrightarrow{L}$ dell'asta un istante dopo l'urto, utilizzando il sistema di versori indicato in figura con $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$. Determinare, motivando la risposta, se l'urto è anelastico o elastico.

$$\overrightarrow{L}= \ 5.64\hat{k}\ kgm^2/s \qquad \text{l'urto è anelastico perchè } E_F - E_I= \ \text{-1.75}\ J \text{ è} < 0$$

3.a Calcolare il massimo angolo in radianti, $\theta_{max}$, formato dall'asta con la verticale nel moto seguente.

$$\theta_{max} = \ 0.423\ rad$$

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $g = 9,81$ m/s$^2$




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Un circuito piano rettangolare di area $S = 10\ cm^2$, è formato da una resistenza $R = 1\ M\Omega$ collegata in serie ad un condensatore a facce piane e parallele distanti $d = 2\ mm$ e con capacità $C = 1\ nF$.

All'interno del volume occupato dal circuito al tempo $t = 0$ viene generato un campo magnetico $\overrightarrow{B}$ uniforme diretto lungo l'asse z (vedi figura), perpendicolare al piano del circuito, e variabile in funzione del tempo, che per $t \geq 0$ ha la seguente espressione:

$$\overrightarrow{B} = \left(B_0 \frac{t}{t_0}\right) \hat{k}$$

con $t_0 = 1\ s$ e $B_0 = 0.05\ T$.

1.a Determinare il flusso $\phi_B(t)$ del campo magnetico attraverso il circuito e la corrente $I(t)$ che scorre nel circuito in funzione del tempo per $t \in [-\infty, \infty]$. Nel caso in cui la corrente non è nulla, determinare il suo verso motivando la risposta e con un disegno.

$$\phi_B(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \left(B_0 \frac{t}{t_0}\right) S = 5 \times 10^{-5} t\ Wb & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{I(t)=} \begin{cases} 0 & & t < 0 \\ I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 5 \times 10^{-11} e^{-\frac{t}{0.001}}\ A & \textit{verso orario} & t \geq 0 \end{cases}$$

1.b Determinare il flusso $\phi_B(t)$ del campo magnetico attraverso il circuito e la carica $Q(t)$ presente sull'armatura superiore $(B)$ del condensatore (vedi figura) in funzione del tempo per $t \in [-\infty, \infty]$.

$$\phi_B(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \left(B_0 \frac{t}{t_0}\right) S = 5 \times 10^{-5} t\ Wb & t \geq 0 \end{cases} \quad Q(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 5 \times 10^{-14} \left(1 - e^{\frac{t}{0.001}}\right)\ C & t \geq 0 \end{cases}$$

2.a Fare un grafico della corrente $I(t)$ in funzione del tempo per $t \in [-\infty, \infty]$, riportando sul grafico il valore massimo, $I_{max}$ e a quale istante $t^*$ esso viene raggiunto, e la corrente finale per $t \to \infty$, $I(\infty)$

$$I_{max} = \ 5 \times 10^{-11}\ A \quad per\ t^* = \ 0\ s \qquad\qquad I(\infty) = 0\ A$$

2.b Fare un grafico della carica $Q(t)$ presente sull'armatura superiore $(B)$, per $t \in [-\infty, -\infty]$ , riportando sul grafico il valore massimo $Q_{max}$ e a quale istante $t^{'}$ esso viene raggiunto, e la carica iniziale $Q(0)$ per $t = 0$

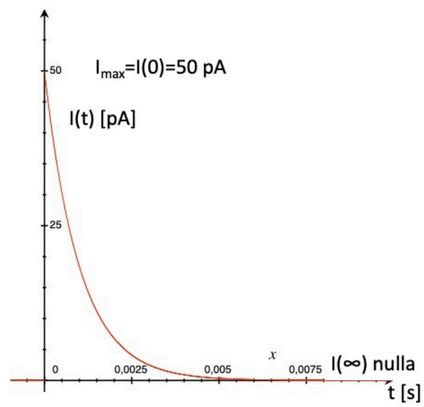
$$Q_{max} = \ 5 \times 10^{-14}\ C \quad t^{'} \to \infty \qquad\qquad Q(0) = \ 0\ C$$

3.a Determinare l'energia dissipata nella resistenza $E^R_{diss}$ tra $t = 0$ e $t = \infty$

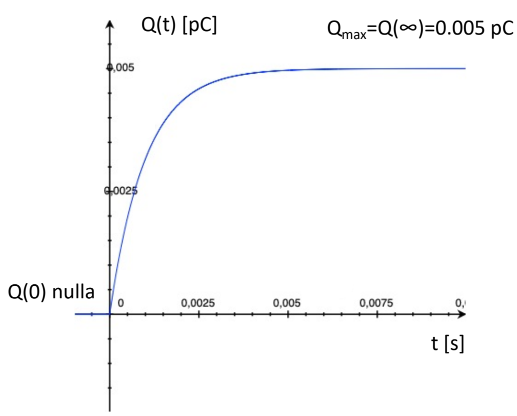
$$E^R_{diss} = \ 1.25 \times 10^{-18}\ J$$

3.b Determinare il campo elettrico $\overrightarrow{E}(\infty)$ all'interno del condensatore per $t \to \infty$

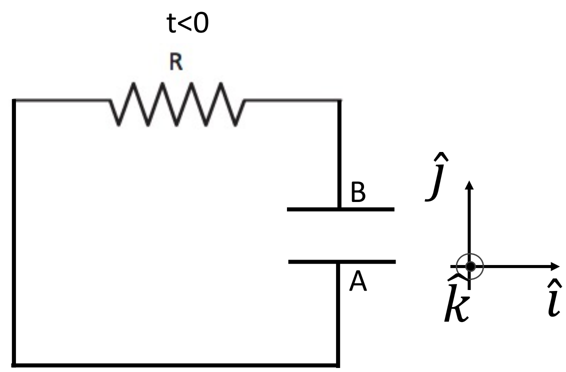
$$\overrightarrow{E}(\infty) = \ -2.5 \times 10^{-2} \hat{y}\ \frac{V}{m}$$




($Figura$ $qualitativa$ $a$ $solo$ $scopo$ $illustrativo$ )

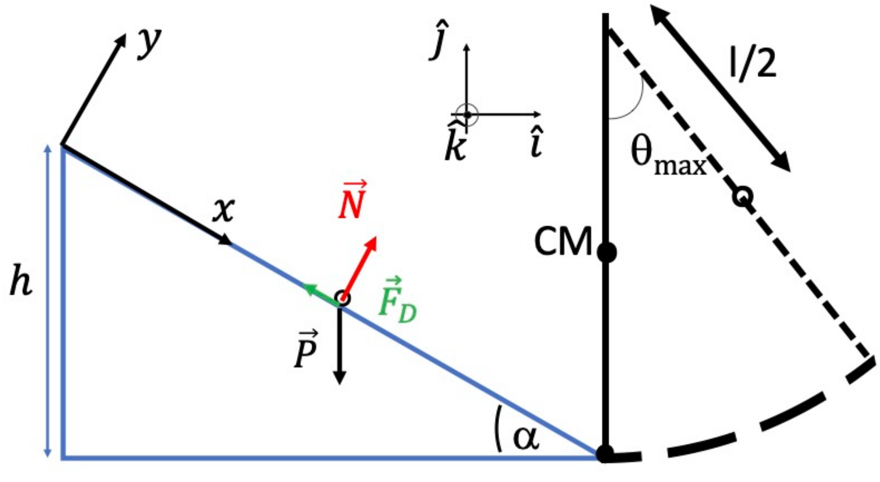



($Figura$ $qualitativa$ $a$ $solo$ $scopo$ $illustrativo$ )




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Soluzione Esercizio 1




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda.1**
Con riferimento alla figura, le forze agenti sul corpo sono la forza peso ($\overrightarrow{P}$) la forza di attrito ($\overrightarrow{F}_a$) e la reazione del piano ($\overrightarrow{N}$). Scomponendo il moto del corpo nella direzione parallela ($x$) e perpendicolare ($y$) al piano otteniamo:

$$\begin{cases} Ma_x = Psin\alpha - F_a \\ Ma_y = N - Pcos\alpha \end{cases}$$

con $P = Mg$, $F_a = \mu_d N$, $N = Pcos\alpha$. Dalle relazioni trovate possiamo determinare $a_x$ che è costante:

$$a_x = g\left(sin\alpha - \mu_d cos\alpha\right)$$

Di conseguenza il moto è uniformente accelerato lungo $x$.
Nella discesa di un tratto $h$ il corpo percorre un tratto di lunghezza $L_h = \frac{h}{sin\alpha}$ e applicando le fomule per il moto uniformemente accelerato e considerando che il corpo parte da fermo abbiamo che:

$$\frac{1}{2}a_x t^2 = L_h \qquad v = a_x t \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2a_x L_h}$$

dove con t abbiamo indicato il tempo impiegato a scendere di un tratto $h$.
Dal teorema dell'energia cinetica, poichè il corpo parte da fermo e le uniche forze in gioco che compiono lavoro sono la forza peso (conservativa, C) e la forza di attrito (non conservativa, NC) possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mathcal{L}_C + \mathcal{L}_{NC} = U_i - U_f + \mathcal{L}_{NC} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{NC} = \frac{1}{2}mv^2 + U_f - U_i$$

dove abbiamo indicato con $\mathcal{L}_C$ il lavoro fatto dalla forza di gravità che corrisponde alla differenza tra l'energia gravitazionale potenziale iniziale ($U_i$) e finale ($U_f$) , e con $\mathcal{L}_{NC}$ il lavoro fatto dalla forza di attrito Inoltre valgono le seguenti relazioni:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(2a_x L_h\right) = ma_x\frac{h}{sin\alpha} = mg\left(sin\alpha - \mu_d cos\alpha\right)\frac{h}{sin\alpha}$$

e assumendo l'origine dell'energia potenziale ad es. nel punto dell'urto vale:

$$U_f - U_i = -mgh \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - mgh = mg\left(sin\alpha - \mu_d cos\alpha\right)\frac{h}{sin\alpha} - mgh = -\mu_d mgcos\alpha\frac{h}{sin\alpha}$$

L'altro modo per calcolare $\mathcal{L}$ consiste nel calcolare direttamente il lavoro fatto dalla forza di attrito nel tratto di discesa:

$$\mathcal{L} = \int \overrightarrow{F}_a \cdot \overrightarrow{dl} = -\mu_d mgcos\alpha\int_0^{L_h} dx = -\mu_d mgcos\alpha L_h = -\mu_d mgcos\alpha\frac{h}{sin\alpha}$$

L'energia dissipata nella discesa è data dalla differenza tra l'energia iniziale e quella finale del corpo, $E_i - E_f$, dove:

$$E_i = mgh \quad E_f = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad E_{Diss} = -\mathcal{L}$$

**Domanda.2**

Assumendo come polo per il calcolo dei momenti il punto O, poichè non ci sono forze impulsive a braccio non nullo, il momento delle forze rispetto a tale polo è nullo nella brevissima durata dell'urto e il momento angolare con polo in O si conserva nell'urto. Per cui il momento angolare un'istante prima dell'urto ($\overrightarrow{L}_i$) è uguale al momento angolare un istante dopo l'urto ($\overrightarrow{L}_f$). Utilizzando la terna di versori indicata in figura per il calcolo dei momenti otteniamo:

$$\overrightarrow{L}_i = mvlsin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\hat{z} = \overrightarrow{L}_f = mvlcos\alpha\hat{k} = I_O\overrightarrow{\omega} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{\omega} = \frac{\overrightarrow{L}_i}{I_O}$$

dove $I_O$ è il momento di inerzia dell'asta rispetto a O e vale:

$$I_O = \frac{Ml^2}{3}$$

Dalle relazioni trovate per la velocità angolare si ottiene:

$$\overrightarrow{\omega} = \frac{3mvcos\alpha}{Ml}\hat{k}$$

L'urto è elastico se l'energia si conserva, altrimenti è anelastico con l'energia del sistema un istante dopo l'urto $E_F$ minore di quella un istante prima dell'urto $E_I$.

Nel nostro caso vanno quindi confrontate $E_I$ e $E_F$ per stabilire se l'urto è elastico o anelastico

$$E_I = \frac{1}{2}mv^2 \qquad E_F = \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

dove quando l'asta è in posizione verticale la sua energia potenziale è $Mg\frac{l}{2}(1 - cos(0)) = 0$, come pure è nulla l'energia potenziale del punto materiale.

**Domanda.3**

Dopo l'urto l'energia dell'asta si conserva. Indicando con $\Delta d$ la variazione di quota del centro di massa dell'asta, dalla conservazione dell'energia otteniamo:

$$\frac{1}{2}I_O\omega^2 = Mg\Delta d \qquad \Rightarrow \qquad \Delta d = \frac{I_O\omega^2}{2Mg}$$

Inoltre con riferimento alla figura possiamo determinare $\theta_{max}$ :

$$\Delta d = \frac{l}{2}(1 - cos\theta_{max}) \qquad \Rightarrow \qquad cos\theta_{max} = \left(\frac{l}{2} - \Delta d\right)/\frac{l}{2} = 1 - \frac{2\Delta d}{l} \qquad \Rightarrow \qquad \theta_{max} = acos(\theta_{max})$$

## Soluzione Esercizio 2

**Domanda 1**

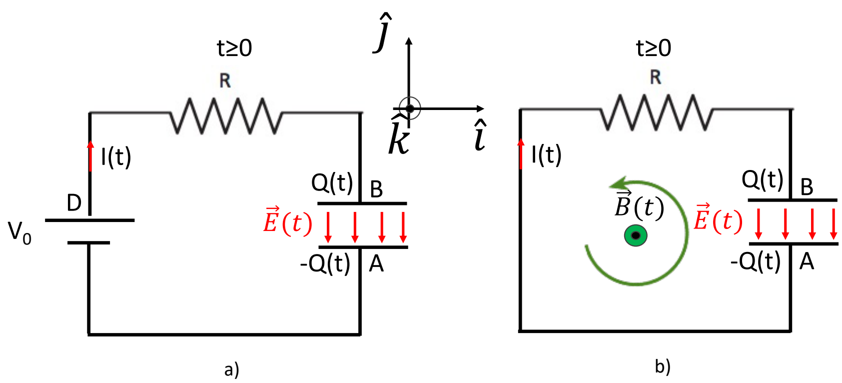
Il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito è nullo per $t < 0$ mentre per $t \geq 0$, orientando la normale alla superficie piana racchiusa dal circuito come $\hat{z}$, $\phi_B(t) = \left(B_0 \frac{t}{t_0}\right) S$.
Per cui:

$$\phi_B(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \left(B_0 \frac{t}{t_0}\right) S & t \geq 0 \end{cases}$$

Per determinare la corrente che scorre nel circuito dobbiamo prima calcolare la forza elettromotrice $\varepsilon(t)$ indotta nel circuito. Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lentz al flusso determinato nella Domanda 1 otteniamo:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\left(\frac{B_0 S}{t_0}\right) & t \geq 0 \end{cases}$$

Per cui per $t \geq 0$ il circuito è un $RC$ serie con una forza elettromotrice costante e pari in modulo a $\left(\frac{B_0 S}{t_0}\right) = V_0$, che fa circolare la corrente indotta, in rosso nella figura a), in senso orario (in verso contrario al verso scelto come positivo per la convenzione sulla normale della Domanda 1). Di conseguenza l'armatura superiore ($B$) si carica positivamente. Il circuito con specificata la corrente indotta e il suo verso (in rosso) e le polarità della fem indotta che fa circolare la corrente indotta nel verso indicato è mostrato in figura a).




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Oppure, con riferimento alla figura b) scegliendo per la circuitazione del campo elettrico il percorso chiuso e orientato $A - B - A$ in accordo con la scelta della normale della Domanda 1, possiamo scrivere, tenuto conto che il verso scelto come positivo della corrente è quello indicato in verde (antiorario), dalla legge di Faraday-Neumann-Lentz :

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} = V_A - V_B + V_B - V_A = -\frac{Q}{C} - IR \quad \Rightarrow \quad V_0 = \frac{Q}{C} + IR$$

Per cui la carica sull'armatura positiva del condensatore ($B$) è data dalle ben nota formula per la carica di un condensatore:

$$Q(t) = CV_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

con $\tau = RC$. La corrente è data anch'essa dalla ben nota formula:

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{dQ}{dt}$$

**Domanda 2**
Dall'espressione di $Q(t)$, la carica finale del condensatore sull'armatura superiore $(B)$ per $t \longrightarrow \infty$, che corrisponde alla carica massima , è data da:

$$Q(\infty) = Q_{max} = CV_0$$

mentre per $t \leq 0$ la carica è nulla e $Q(0) = 0$.
Dall'espressione di $I(t)$, la corrente che scorre nel circuito è nulla per $t < 0$, è massima all'istante iniziale $t = 0$, con $I_{max} = I(0) = \frac{V_0}{R}$ e tende a $I(\infty) = 0$ per $t \longrightarrow \infty$. I grafici della carica sull'armatura in $(B)$ del condensatore e della corrente sono riportati rispettivamente nelle figure della soluzione con i risultati numerici.

**Domanda 3**
L'energia dissipata nella resistenza per $t \longrightarrow \infty$ si ottiene integrando la potenza dissipata nella resistenza tra $t = 0$ e $t = \infty$:

$$E^R_{diss} = \int_0^\infty I^2(t)Rdt = \frac{V_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}}dt = \frac{V_0^2}{R}\left(-\frac{\tau}{2}e^{-2\frac{t}{\tau}}\,|_0^\infty\right) = \frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{1}{2}Q_{max}V_0$$

Con riferimento alla figura, poichè l'armatura che si carica positivamente è quella superiore $(B)$ il campo elettrico ha direzione e verso di $-\hat{y}$ . Inoltre vale per $t \geq 0$ $V_B - V_A = \frac{Q}{C} = \int_B^A \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -E_y d$, per cui per $t \longrightarrow \infty$, essendo la carica sul condensatore pari a $Q_{max} = CV_0$, si ottiene:

$$E_y = -\frac{V_0}{d} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{E} = -\frac{V_0}{d}\hat{y}$$

Il campo elettrico è diretto lungo l'asse $y$ per cui $\overrightarrow{E} = E_y\hat{y}$.

# Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

## Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 18/02/2022

| | |
|---|---|
| **Nome:** | **Matricola:** |
| **Cognome:** | **Anno di Corso:** |

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**

Con riferimento alla figura, ad un'estremo di un' asta omogenea di massa $M_A$ è attaccato un anello omogeneo di massa $M_B$ con $M_B = 0,2\ kg = \frac{1}{5}M_A$. L'asta è lunga $L = 1\ m$ e il raggio dell'anello è $R = \frac{L}{4}$. Il sistema asta-anello è libero di muoversi su un piano orizzontale liscio.

Un punto materiale di massa $m = 2M_B$ urta anelasticamente il sistema asta-anello con una velocità $v_m = 1\ \frac{m}{s}$ e a una distanza $\frac{L}{4}$ dal centro di massa dell'asta, restando ad esso attaccato.

1.a Dire quali delle seguenti grandezze fisiche del sistema si conserva nell'urto, giustificando la risposta:

- Energia, $E$
- quantità di moto, $\overrightarrow{P}$
- momento angolare e rispetto a quale polo (o poli nel caso ve ne sia più di uno), $\overrightarrow{L}^o$

2.a Calcolare la posizione del centro di massa $\overrightarrow{CM}_F$ un istante dopo l'urto, nel sistema di riferimento indicato in figura con origine nel centro dell'asta e il valore del momento di inerzia dell'anello $I_{CM_{F_{Anello}}}$ subito dopo l'urto rispetto ad un'asse verticale (parallelo a $z$ ) passante per tale posizione.

$$\overrightarrow{CM}_F = \dots\dots\dots\dots \qquad I_{CM_{F_{Anello}}} = \dots\dots\dots\dots$$

2.b Calcolare la posizione del centro di massa $\overrightarrow{CM}_F$ un istante dopo l'urto, nel sistema di riferimento indicato in figura con origine nel centro dell'asta e il valore del momento di inerzia dell'asta $I_{CM_{F_{Asta}}}$ subito dopo l'urto rispetto ad un'asse verticale (parallelo a $z$ ) passante per tale posizione.

$$\overrightarrow{CM}_F = \dots\dots\dots\dots \qquad I_{CM_{F_{Asta}}} = \dots\dots\dots\dots$$

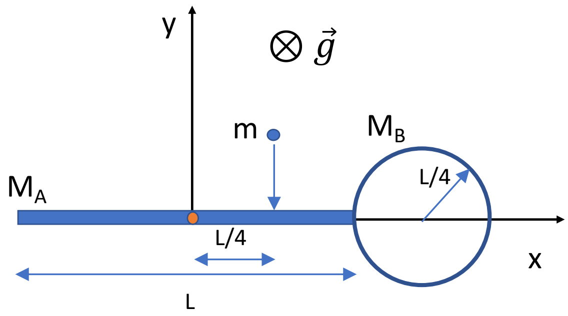
3.a Calcolare il valore della velocità del centro di massa $\overrightarrow{v}_{CM}$ e l'energia rotazionale $E_R$ del sistema entrambe subito dopo l'urto.

$$\overrightarrow{v}_{CM} = \dots\dots\dots\dots \qquad E_R = \dots\dots\dots\dots$$

3.b Calcolare il valore della velocità angolare $\overrightarrow{\omega}$ del sistema subito dopo l'urto e l'energia meccanica $E_{Diss}$ dissipata nell'urto anelastico.

$$\overrightarrow{\omega} = \dots\dots\dots\dots \qquad E_{Diss} = \dots\dots\dots\dots$$

**Nota Bene:** *si consiglia, per calcolare $\overrightarrow{CM}_F$ di esprimere le masse in funzione della massa $M_B$ dell'anello.*




($\textit{Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo}$)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Con riferimento alla figura, un guscio cilindrico infinito, di raggio interno $R_1 = 10\ cm$ e raggio esterno $R_2 = 2R_1$ ha una densità di carica $\rho = \frac{K}{r}$ con $K = -0.5\ \frac{\mu C}{m^2}$.

All'interno del guscio è presente un filo metallico carico, anch'esso infinito, con densità di carica lineare $\lambda = 1\ \frac{\mu C}{m}$ e raggio interno $a = 1\ cm$ (la sezione del filo non è mostrata in figura).

1.a Determinare l'espressione del campo elettrico $\overrightarrow{E}$ in tutto lo spazio

$$\overrightarrow{E} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.a Determinare l'espressione della differenza di potenziale, $\Delta V_0 = V(R_2) - V(r_0)$ in funzione di $r_0$ con $a < r_0 < R_1$

$$\Delta V_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.b Determinare l'espressione della differenza di potenziale , $\Delta V_1 = V(R_2) - V(r_1)$ in funzione di $r_1$ con $R_1 < r_1 < R_2$

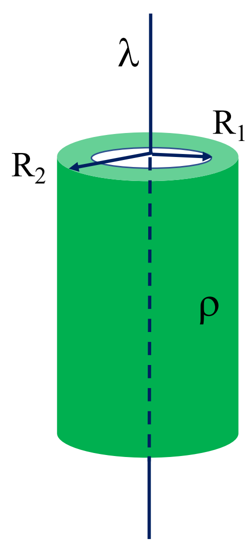
$$\Delta V_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3.a Determinare il valore di $K$ massimo, $K_{max}$ affinchè un elettrone, di carica $q = -1.6 \times 10^{-19}\ C$ e massa $m = 9.1 \times 10^{-31}\ kg$, inizialmente fermo sulla superficie esterna del guscio cilindrico, non penetri all'interno del guscio

$$K_{max} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3.b Calcolare la velocità $v_f$ con la quale un elettrone, di carica $q = -1.6 \times 10^{-19}\ C$ e massa $m = 9.1 \times 10^{-31}\ kg$, inizialmente fermo sulla superficie esterna del guscio cilindrico raggiunge la superficie interna del guscio dopo averlo attraversato

$$v_f = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo* )

# Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
## Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 18/02/2022

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**

Con riferimento alla figura, ad un'estremo di un' asta omogenea di massa $M_A$ è attaccato un anello omogeneo di massa $M_B$ con $M_B = 0,2\ kg = \frac{1}{5}M_A$. L'asta è lunga $L = 1\ m$ e il raggio dell'anello è $R = \frac{L}{4}$. Il sistema asta-anello è libero di muoversi su un piano orizzontale liscio.
Un punto materiale di massa $m = 2M_B$ urta anelasticamente il sistema asta-anello con una velocità $v_m = 1\ \frac{m}{s}$ e a una distanza $\frac{L}{4}$ dal centro di massa dell'asta, restando ad esso attaccato.

1.a Dire quali delle seguenti grandezze fisiche del sistema si conserva nell'urto, giustificando la risposta:

- Energia, $E$
- quantità di moto, $\overrightarrow{P}$
- momento angolare e rispetto a quale polo (o poli nel caso ve ne sia più di uno), $\overrightarrow{L}^o$

L'energia del sistema non si conserva in quanto l'urto è anelastico, la quantità di moto del sistema si conserva essendo nulla la risultante delle forze esterne impulsive poichè il sistema non è vincolato. Il momento angolare del sistema si conserva rispetto a qualunque polo non essendoci forze esterne impulsive (il sistema non è vincolato).

2.a Calcolare la posizione del centro di massa $\overrightarrow{CM}_F$ un istante dopo l'urto, nel sistema di riferimento indicato in figura con origine nel centro dell'asta e il valore del momento di inerzia dell'anello $I_{CM_{F_{Anello}}}$ subito dopo l'urto rispetto ad un'asse verticale (parallelo a $z$ ) passante per tale posizione.

$$\overrightarrow{CM}_F = \quad (0.156,0,0\ )\ m \qquad I_{CM_{F_{Anello}}} = \quad 8.3{\times}10^{-2}\ kgm^2$$

2.b Calcolare la posizione del centro di massa $\overrightarrow{CM}_F$ un istante dopo l'urto, nel sistema di riferimento indicato in figura con origine nel centro dell'asta e il valore del momento di inerzia dell'asta $I_{CM_{F_{Asta}}}$ subito dopo l'urto rispetto ad un'asse verticale (parallelo a $z$ ) passante per tale posizione.

$$\overrightarrow{CM}_F = \quad (0.156,0,0\ )\ m \qquad I_{CM_{F_{Asta}}} = \quad 1.08{\times}10^{-1}\ kgm^2$$

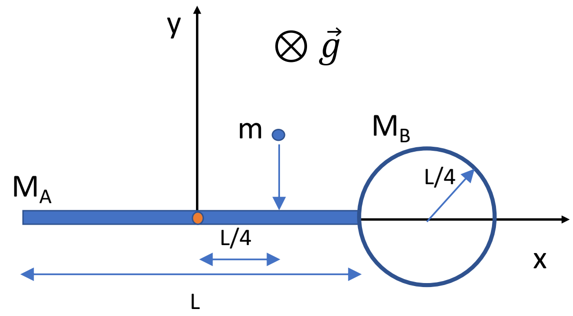
3.a Calcolare il valore della velocità del centro di massa $\overrightarrow{v}_{CM}$ e l'energia rotazionale $E_R$ del sistema entrambe subito dopo l'urto.

$$\overrightarrow{v}_{CM} = \quad (0,\text{-}0.25,0)\ ms^{-1} \qquad E_R = \quad 0.0036\ J$$

3.b Calcolare il valore della velocità angolare $\overrightarrow{\omega}$ del sistema subito dopo l'urto e l'energia meccanica $E_{Diss}$ dissipata nell'urto anelastico.

$$\overrightarrow{\omega} = \quad (0,0,\text{-}0.193)\ rads^{-1} \qquad E_{Diss} = \quad 0.1464\ J$$

**Nota Bene:** *si consiglia, per calcolare $\overrightarrow{CM}_F$ di esprimere le masse in funzione della massa $M_B$ dell'anello.*




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Con riferimento alla figura, un guscio cilindrico infinito, di raggio interno $R_1 = 10\ cm$ e raggio esterno $R_2 = 2R_1$ ha una densità di carica $\rho = \frac{K}{r}$ con $K = -0.5\ \frac{\mu C}{m^2}$.

All'interno del guscio è presente un filo metallico carico, anch'esso infinito, con densità di carica lineare $\lambda = 1\ \frac{\mu C}{m}$ e raggio interno $a = 1\ cm$ (la sezione del filo non è mostrata in figura).

1.a Determinare l'espressione del campo elettrico $\overrightarrow{E}$ in tutto lo spazio

$$\overrightarrow{E} = E_r \hat{r} \qquad \Rightarrow \qquad E_r(r) = \begin{cases} 0 & 0 \le r < a \\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & a \le r < R_1 \\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{K}{\varepsilon_0}\frac{(r-R_1)}{r} & R_1 \le r < R_2 \\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{K}{\varepsilon_0}\frac{(R_2-R_1)}{r} & R_2 \le r \end{cases}$$

2.a Determinare l'espressione della differenza di potenziale, $\Delta V_0 = V(R_2) - V(r_0)$ in funzione di $r_0$ con $a < r_0 < R_1$

$$\Delta V_0 = V(R_2) - V(r_0) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{r_0}{R_2} + \frac{K}{\varepsilon_0}(R_1 - R_2) - \frac{K}{\varepsilon_0} R_1 ln\frac{R_1}{R_2}$$

2.b Determinare l'espressione della differenza di potenziale , $\Delta V_1 = V(R_2) - V(r_1)$ in funzione di $r_1$ con $R_1 < r_1 < R_2$

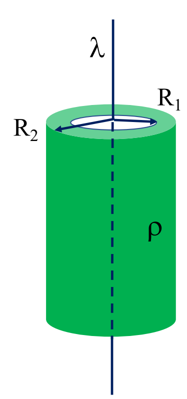
$$\Delta V_1 = V(R_2) - V(r_1) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{r_1}{R_2} + \frac{K}{\varepsilon_0}(r_1 - R_2) - \frac{K}{\varepsilon_0} R_1 ln\frac{r_1}{R_2}$$

3.a Determinare il valore di $K$ massimo, $K_{max}$ affinchè un elettrone, di carica $q = -1.6 \times 10^{-19}\ C$ e massa $m = 9.1 \times 10^{-31}\ kg$, inizialmente fermo sulla superficie esterna del guscio cilindrico, non penetri all'interno del guscio

$$K_{max} = \text{-1.59} \times 10^{-6}\ Cm^{-2}$$

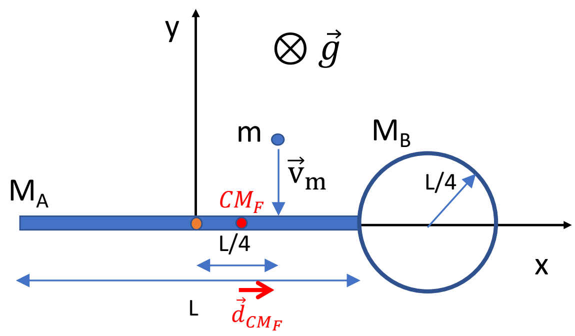
3.b Calcolare la velocità $v_f$ con la quale un elettrone, di carica $q = -1.6 \times 10^{-19}\ C$ e massa $m = 9.1 \times 10^{-31}\ kg$, inizialmente fermo sulla superficie esterna del guscio cilindrico raggiunge la superficie interna del guscio dopo averlo attraversato

$$v_f = 6.14 \times 10^{7}\ ms^{-1}$$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo* )

## Soluzione Esercizio 1




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda.1**
Nell'urto, l'energia del sistema non si conserva in quanto l'urto è anelastico, la quantità di moto del sistema si conserva essendo nulla la risultante delle forze esterne impulsive poichè il sistema non è vincolato. Il momento angolare del sistema si conserva rispetto a qualunque polo non essendoci forze esterne impulsive (il sistema non è vincolato).

**Domanda.2**
Dopo l'urto il centro di massa del sistema avrà componenti:

$$CM_{F_x} = \frac{m\frac{L}{4} + M_B\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{4}\right)}{M_A + M_B + m} = \frac{M_B\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{2}+\frac{L}{4}\right)}{8M_B} = \frac{5}{32}L \quad CM_{F_y} = 0 \quad CM_{F_z} = 0$$

Il valore del momento di inerzia del sistema dopo l'urto rispetto a un asse verticale passante per il centro di massa calcolato sopra si ottiene applicando il teorema di Steiner:

$$I_{CM_F} = I_{CM_{F_{Asta}}} + I_{CM_{F_{Anello}}} + I_{CM_{F_m}}$$

Dove i tre termini dopo l'uguaglianza corrispondono rispettivamente ai momenti di inerzia calcolati rispetto alla posizione del centro di massa dopo l'urto di asta, anello e massa m, le cui espressioni sono date da:

$$I_{CM_{F_{Asta}}} = M_A\frac{L^2}{12} + M_A CM_{F_x}^2 = 5M_B\frac{L^2}{12} + 5M_B\left(\frac{5}{32}L\right)^2 = \frac{1655}{3072}M_BL^2$$

$$I_{CM_{F_{Anello}}} = M_B\frac{L^2}{16} + M_B\left(\frac{3}{4}L - CM_{F_x}\right)^2 = M_BL^2\left[\frac{1}{16} + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{32}\right)^2\right] = M_BL^2\frac{425}{1024}$$

$$I_{CM_{F_m}} = m\left(\frac{L}{4} - CM_{F_x}\right)^2 = 2M_BL^2\left(\frac{1}{4} - \frac{5}{32}\right)^2 = 2M_BL^2\left(\frac{9}{1024}\right)$$

Per cui:

$$I_{CM_F} = \frac{2984}{3072}M_BL^2 = 0.971M_BL^2$$

**Domanda.3**
Dalla Conservazione della quantità di moto:

$$m\vec{v}_m = (M_A + M_B + m)\,\vec{v}_{CM} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{CM} = \frac{m}{(M_A + M_B + m)}\vec{v}_m = \frac{1}{4}\vec{v}_m$$

Poichè $\vec{v}_m = -v_m\hat{y}$ per la velocità del centro di massa otteniamo:

$$\vec{v}_{CM} = \left(0, -\frac{1}{4}v_m, 0\right)$$

Poichè la risultante delle forze esterne sul sistema è nulla, dopo l'urto il CM si muoverà con velocità costante sul piano, con valore dato dall'espressione sopra. Dalla conservazione del momento angolare, prendendo come polo il CM subito dopo l'urto ($\overrightarrow{CM}_F$) per i dati del problema (vedi figura):

$$\vec{L}_i = \vec{d}_{CM_F} \bigwedge (m\vec{v}_m)$$

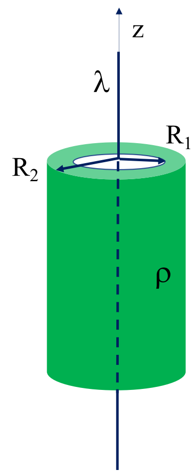
con $\overrightarrow{d}_{CM_F} = \left(\frac{L}{4} - CM_{F_x}\right)\hat{x}$. Per cui:

$$\overrightarrow{L}_i = -m\left(\frac{L}{4} - CM_{F_x}\right)v_m\hat{z} = \overrightarrow{L}_f = I_{CM_F}\overrightarrow{\omega} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\omega} = -m\left(\frac{L}{4} - CM_{F_x}\right)\frac{v_m}{I_{CM_F}}\hat{z} = -\frac{72}{373}\frac{v_m}{L}\hat{z}$$

$$E_R = \frac{1}{2}I_{CM_F}\omega^2 = 0.018M_Bv_m^2$$

$$E_{Diss} = T_i - T_f = \frac{1}{2}mv_m^2 - \frac{1}{2}M_{TOT}v_{CM}^2 - \frac{1}{2}I_{CM_F}\omega^2 = \frac{1}{2}2M_Bv_m^2 - \frac{1}{2}8M_Bv_{CM}^2 - \frac{1}{2}I_{CM_F}\omega^2 = 0.732M_Bv_m^2$$

Soluzione Esercizio 2




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda 1**

Il filo è metallico per cui il campo elettrico è ortogonale alla superficie del cilindro associato al filo e per il teorema di Gauss, al suo interno, essendo la carica nulla, il campo elettrico è nullo. La distribuzione di carica è invariante per rotazioni attorno all'asse del cilindro (asse$z$ della figura, per traslazioni lungo l'asse del cilindro e per riflessioni rispetto a un piano ortogonale all'asse del cilindro. Di conseguenza il campo elettrico in coordinate cilindriche ha solo componente radiale con $\overrightarrow{E} = E_r(r)\hat{r}$. Possiamo usare il Teorema di Gauss per calcolare $E_r$. A tale scopo consideriamo un cilindro coassiale all'asse del cilindro (asse $z$) con centro sull'asse del cilindro di altezza h e raggio r. Applicando il teorema di Gauss otteniamo:

$$\phi(\overrightarrow{E}) = E_r(r)2\pi rh = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

dove $Q_{int}$ è la carica interna al cilindro di Gauss ed abbiamo considerato solo il flusso uscente dalla superficie laterale del cilindro, essendo nulli i contributi al flusso dalle basi superiore e inferiore del cilindro, dove $\overrightarrow{E}$ e la normale alla superficie sono ortogonali. La carica interna al cilindro di Gauss in esame è data da:

$$Q_{int} = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ \lambda h & a < r < R_1 \\ \lambda h + \int_{R_1}^{r} \rho(r')2\pi r' h dr' = \lambda h + \int_{R_1}^{r} \frac{K}{r'}2\pi r' h dr' = \lambda h + K2\pi h\,(r - R_1) & R_1 < r < R_2 \\ \lambda h + \int_{R_1}^{R_2} \rho(r')2\pi r' h dr' = \lambda h + \int_{R_1}^{R_2} \frac{K}{r'}2\pi r' h dr' = \lambda h + K2\pi h\,(R_2 - R_1) & R_2 \le r \end{cases}$$

dove per calcolare la carica contenuta nella superficie gaussiana dovuta alla distribuzione di carica $\rho$ abbiamo integrato su elementi infinitesimi di volume, $dV = 2\pi r' h dr'$ che contengono la carica infinitesima $dQ_{int} = \rho(r')dV$.

Per cui per il campo elettrico otteniamo:

$$\overrightarrow{E} = E_r\hat{r} \qquad \Rightarrow \qquad E_r\,(r) = \begin{cases} 0 & 0 \le r < a \\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & a \le r < R_1 \\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{K}{\varepsilon_0}\frac{(r-R_1)}{r} & R_1 \le r < R_2 \\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{K}{\varepsilon_0}\frac{(R_2-R_1)}{r} & R_2 \le r \end{cases}$$

**Domanda 2**

Per $a \le r_0 \le R_1$:

$$V\,(R_2) - V\,(r_0) = \int_{R_2}^{r_0} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{R_2}^{R_1} \left( \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{K}{\varepsilon_0}\frac{(r - R_1)}{r} \right) dr + \int_{R_1}^{r_0} \left( \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \right) dr$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{r_0}{R_2} + \frac{K}{\varepsilon_0}\,(R_1 - R_2) - \frac{K}{\varepsilon_0} R_1 ln\frac{R_1}{R_2}$$

Per $R_1 \leq r_1 \leq R_2$:

$$V(R_2) - V(r_1) = \int_{R_2}^{r_1} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{R_2}^{r_1} \left( \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{K}{\varepsilon_0} \frac{(r - R_1)}{r} \right) dr$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln \frac{r_1}{R_2} + \frac{K}{\varepsilon_0}(r_1 - R_2) - \frac{K}{\varepsilon_0} R_1 ln \frac{r_1}{R_2}$$

**Domanda 3**

Affinchè l'elettrone, che è fermo in $R_2$, non penetri all'interno del guscio è necessario che la forza agente sull'elettrone in $R_2$ sia repulsiva (spinga l'elettrone a raggi maggiori di $R_2$) o nulla. Per cui $q\overrightarrow{E}(R_2) = c\hat{r}$ con $c \geq 0$. Da questa relazione:

$$qE_r(R_2)) \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad q\left( \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{K}{\varepsilon_0} \frac{(R_2 - R_1)}{R_2} \right) \geq 0$$

Quindi poichè la carica è negativa :

$$\left( \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{K}{\varepsilon_0} \frac{(R_2 - R_1)}{R_2} \right) \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad K \leq -\frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{(R_2 - R_1))} \qquad \Rightarrow \qquad K_{max} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{(R_2 - R_1))}$$

Per calcolare la velocità $v_f$ con la quale l'elettrone inizialmente fermo sulla superficie esterna del guscio cilindrico, raggiunge la superficie interna del guscio, non essendoci in gioco forze non conservative, possiamo utilizzare la conservazione dell'energia. In $R_2$ l'energia cinetica è nulla e l'energia potenziale è $U_i = qV(R_2)$, mentre nella posizione finale, $R_1$ l'energia cinetica è $\frac{1}{2}mv_f^2$ e l'energia potenziale è $U_f = qV(R_1)$. Dalla conservazione dell'energia otteniamo:

$$qV(R_2) = \frac{1}{2}mv_f^2 + qV(R_1) \qquad \Rightarrow \qquad v_f = \sqrt{\frac{2q(V(R_2) - V(R_1))}{m}}$$

con

$$V(R_2) - V(R_1) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln \frac{R_1}{R_2} + \frac{K}{\varepsilon_0}(R_1 - R_2) - \frac{K}{\varepsilon_0} R_1 ln \frac{R_1}{R_2}$$

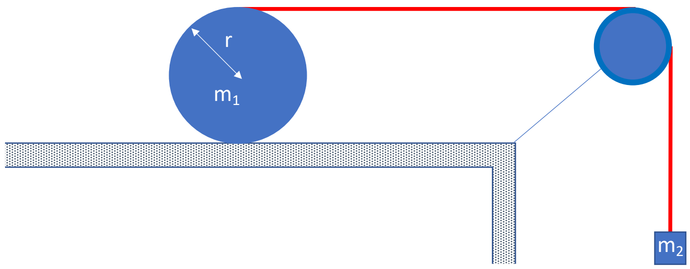
Dove abbiamo utilizzato l'espressione per $V(R_2) - V(r_1)$ con $r_1 = R_1$ (vedi Domanda 2.b).

# Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
## Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 8/06/2022

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Una corda inestensibile e priva di massa è avvolta attorno ad un cilindro di massa $m_1$= 250 g e raggio $r$ =10 cm appoggiato su un piano orizzontale (vedi figura). La corda passa da una carrucola priva di massa e priva di attrito ed è collegata all'altra estremità ad un corpo di massa $m_2$=375 g assimilabile a un punto materiale. La massa $m_2$ viene lasciata libera di cadere, partendo da ferma, sotto l'azione della forza di gravità. Nell'ipotesi in cui il moto del cilindro è di puro rotolamento:

1 Determinare il modulo dello spostamento $|\vec{d}_1|$ del CM del cilindro $m_1$ se la massa $m_2$ scende di un tratto $d_2$=25 cm

$|\vec{d}_1|$= ................

2 Determinare il modulo della velocità $|\vec{v}_2|$ di $m_2$ dopo essere scesa del tratto $d_2$

$|\vec{v}_2|$= ................

3. Determinare il modulo dell'accelerazione $|\vec{a}_2|$ di $m_2$ e il modulo della tensione $|\vec{T}|$ della corda

$|\vec{a}_2|$= ................ $|\vec{T}|$ = ......................

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $g = 9,81$ m/s$^2$

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**
Un cilindro ideale di lunghezza infinita e raggio $R = 1\ cm$ è costituito da un materiale omogeneo isolante. Il cilindro è immerso nel vuoto e al suo interno ha una distribuzione volumetrica di carica che dipende dalla distanza r dall'asse del cilindro (asse $z$ della figura) con $\rho = \rho_0 \frac{r}{R}$ e $\rho_0 = 1.2 \times 10^{-3}\ C/m^3$.

1 Scrivere l'espressione del vettore campo elettrico $\overrightarrow{E}$ in tutto lo spazio in coordinate cilindriche. Determinare l'espressione del modulo del campo elettrico $E$ in funzione della distanza $r$ dall'asse del cilindro e fare un grafico qualitativo di $E$ in funzione di $r$.

$\overrightarrow{E}=$ ............... $E =$ .....................

2 Calcolare la differenza di potenziale $\Delta V = V(A) - V(B)$ esistente fra i punti A e B (vedi figura) di coordinate cartesiane **A**=(2R,0,0), **B**=(3R,0,R)

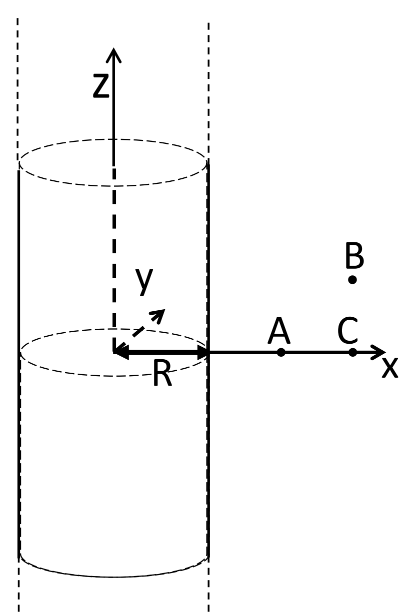
$\Delta V=$ ...............

Supponiamo ora che la densità di carica (di conseguenza il materiale isolante) è in moto rettilineo uniforme con velocità $v_z = 1 \times 10^6\ m/s$, dove l'asse z coincide con l'asse del cilindro (vedi Figura):

3. Determinare il vettore campo magnetico $\overrightarrow{B}$ in coordinate cartesiane nel punto A

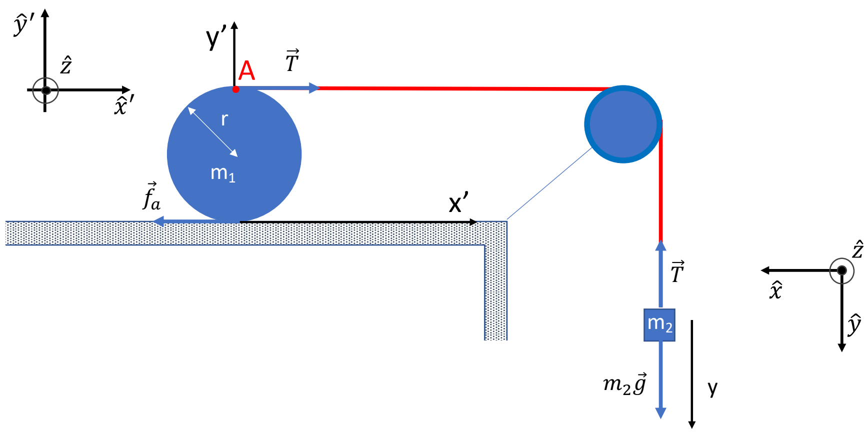
$\overrightarrow{B}=$ ...............

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ Tm/A = 1.26 \times 10^{-6}\ Tm/A$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo* )

## Soluzione Esercizio 1




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda.1**
Poichè il cilindro si muove di moto di puro rotolamento il punto A del cilindro ha una velocità pari al doppio della velocità del CM del cilindro. Inoltre la velocità del punto A del cilindro corrisponde alla velocità di $m_2$. Pertanto se $m_2$ scende di $d_2$, il CM di $m_1$ si sposta di $d_2/2 = 0.125\ m$.

**Domanda.2**
Nella discesa si conserva l'energia del sistema essendo nullo il lavoro risultante compiuto dalle forze non conservative. Infatti, la forza di attrito statico nel moto di puro rotolamento non compie lavoro, la reazione del piano è ortogonale allo spostamento e non compie lavoro sul sistema, la tensione essendo la corda ideale (inestensibile) fornisce un lavoro complessivamente nullo sul sistema. Quindi nella discesa si conserva l'energia. Pertanto, indicando per il sistema rispettivamente con $k_i$ e $k_f$ l'energia cinetica iniziale e finale e con $U_i$ e $U_f$ l'energia potenziale iniziale e finale vale:

$$k_f - k_i = U_i - U_f$$

Poichè la quota di $m_1$ non cambia $U_i - U_f$ è la variazione di energia potenziale di $m_2$ per cui $U_i - U_f = m_2 g d_2$. L'energia cinetica iniziale del sistema è nulla mentre l'energia cinetica finale è data da:

$$k_f = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

dove abbiamo usato il teorema di *König* per esprimere l'energia cinetica di $m_1$ e $I = \frac{m_2 r^2}{2}$ è il momento di inerzia del cilindro rispetto al suo CM. Essendo il moto di puro rotolamento $v_1 = \omega_1 r$ con $\omega_1$ pari al modulo della velocità angolare attorno al punto di contatto del cilindro, inoltre vale (vedi risposta Domanda 1) $v_1 = \frac{1}{2}v_2$. Esprimendo l'energia cinetica finale funzione di $v_2$ otteniamo:

$$k_f = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_1\frac{v_2^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{m_1 r^2}{2}\frac{v_2^2}{4r^2} = \frac{v_2^2}{2}\left(m_2 + \frac{m_1}{8} + \frac{m_1}{4}\right) = \frac{v_2^2}{2}\left(m_2 + \frac{3}{8}m_1\right)$$

Applicando la conservazione dell'energia determiniamo quindi $v_2$:

$$\frac{v_2^2}{2}\left(m_2 + \frac{3}{8}m_1\right) = m_2 g d_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{2m_2 g d_2}{(m_2 + \frac{3}{8}m_1)}} = 1.98\ \frac{m}{s}$$

**Domanda.3**
Possiamo utilizzare due metodi per rispondere alla domanda 3. Il primo metodo sfrutta la I e la seconda cardinale del corpo 1 e la prima cardinale del corpo 2 . Con riferimento alla figura per la scelta degli assi e dove abbiamo indicato per semplicità solo

le forze che hanno componenti non nulle nelle equazioni utilizzate, poichè dalla condizione di puro rotolamento e dalla risposta alla domanda 1 valgono le seguenti relazioni:

$$a_{1x'} = a_1 = -\alpha_{1z} r = \alpha_1 r \quad v_{1x'} = v_1 = \frac{1}{2} v_{2y} = \frac{1}{2} v_2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{2} a_{2y} = \frac{1}{2} a_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1z} = -\frac{a_2}{2r}$$

per il corpo 1, considerando la proiezione lungo $x'$ della I cardinale e dalla seconda cardinale, otteniamo:

$$\begin{cases} T - f_a = m_1 a_{1x'} = \frac{1}{2} m_1 a_2 \\ -rT - r f_a = I \alpha_{1z} = -I \frac{a_2}{2r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T - f_a = \frac{1}{2} m_1 a_2 \\ T + f_a = \frac{m_1 r^2}{2} \frac{a_2}{2r^2} = \frac{1}{4} m_1 a_2 \end{cases} \Rightarrow 2T = m_1 a_2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4} m_1 a_2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{3}{8} m_1 a_2$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo sommato le due equazioni del sistema. Consideriamo per il corpo 2 la proiezione lungo y della I cardinale, sostituendo l'espressione di $T$ in funzione di $a_2$ ottenuta in precedenza otteniamo:

$$m_2 g - T = m_2 a_2 = m_2 g - \frac{3}{8} m_1 a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{m_2 g}{m_2 + \frac{3}{8} m_1} = 7.85 \ \frac{m}{s^2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{3}{8} m_1 a_2 = \frac{m_1 m_2 g}{\left( \frac{8}{3} m_2 + m_1 \right)} = 0.74 \ N$$

Il secondo metodo sfrutta la conservazione dell'energia e la proiezione della prima cardinale lungo y (vedi figura) del corpo 2. Assumendo l'origine dell'energia potenziale in y=0, l'energia $E$ del sistema quando $m_2$ è a una quota $y$ nel moto di discesa ha la seguente espressione:

$$E = m_2 g \left( costante - y \right) + \frac{v_2^2}{2} \left( m_2 + \frac{3}{8} m_1 \right)$$

Dove per l'energia cinetica abbiamo utilizzato l'espressione ottenuta per essa in funzione di $v_2$ nella risposta alla domanda 2. Poichè l'energia si conserva:

$$\frac{dE}{dt} = 0 = -m_2 g \dot{y} + \frac{2}{2} v_2 \dot{v}_2 \left( m_2 + \frac{3}{8} m_1 \right)$$

Poichè $\dot{y} = v_2$, otteniamo:

$$0 = -m_2 g v_2 + \frac{2}{2} v_2 \dot{v}_2 \left( m_2 + \frac{3}{8} m_1 \right) \quad \Rightarrow \quad -m_2 g + \frac{2}{2} \dot{v}_2 \left( m_2 + \frac{3}{8} m_1 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{v}_2 = a_2 = \frac{m_2 g}{\left( m_2 + \frac{3}{8} m_1 \right)} = 7.85 \ \frac{m}{s^2}$$

Per il corpo 2 utilizziamo la proiezione della prima cardinale lungo y (vedi figura) del corpo 2 per ottenere il modulo della tensione:

$$T = m_2 \left( g - a_2 \right) = 0.74 \ N$$

**Note**

Nelle nostre ipotesi abbiamo assunto che la forza di attrito fosse diretta come in figura. Dalla proiezione della I cardinale lungo x' si può verificare se la nostra ipotesi è giusta o se dobbiamo cambiare verso alla forza di attrito:

$$T - f_a = \frac{1}{2} m_1 a_2 \quad \Rightarrow \quad f_a = T - \frac{1}{2} m_1 a_2 = -2.45 \times 10^{-1} \ N$$

Per cui la forza di attrito ha verso opposto a quello indicato nella figura.
Per il calcolo della velocità della Domanda 2 avremmo potuto anche potuto rispondere prima alla Domanda 3, determinando $a_2$. Osservando che $a_2$ è costante, dalle condizioni iniziali si ottiene:

$$v_2 = \sqrt{2 a_2 d_2} = \sqrt{\frac{2 m_2 g d_2}{\left( m_2 + \frac{3}{8} m_1 \right)}}$$

## Soluzione Esercizio 2

**Domanda 1**

Data la simmetria cilindrica del problema, il campo elettrico in coordinate cilindriche ha solo componente radiale $E_r$ e dipende unicamente dalla distanza dall'asse del cilindro, $r$, essendo esso invariante per rotazioni attorno all'asse z, per traslazioni lungo il medesimo asse, e per rotazioni di $\pi$ attorno al piano $xy$, per cui in coordinate cilindriche $\overrightarrow{E} = E_r(r)\hat{r} \equiv (E_r(r), 0, 0)$. Considerando un cilindro coassiale all'asse del cilindro (asse $z$) con centro sull'asse del cilindro di altezza h e raggio r, applicando la legge di Gauss, otteniamo:

$$\phi(\overrightarrow{E}) = E_r(r)2\pi rh = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

dove $Q_{int}$ è la carica interna al cilindro di Gauss ed è data da:

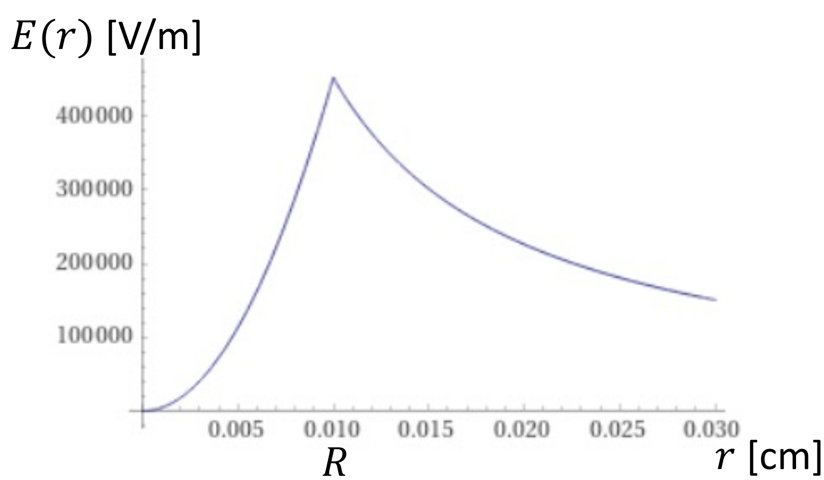
$$Q_{int} = \begin{cases} \int_0^r \rho(r')2\pi r'hdr' = \int_0^r \rho_0 \frac{r'}{R} 2\pi r'hdr' = 2\pi\rho_0 h\frac{r^3}{3R} & 0 \leq r \leq R \\ \int_0^R \rho(r')2\pi r'hdr' = \int_0^R \rho_0 \frac{r'}{R} 2\pi r'hdr' = 2\pi\rho_0 h\frac{R^3}{3R} = 2\pi\rho_0 h\frac{R^2}{3} & R \leq r \end{cases}$$

dove per calcolare la carica contenuta nella superficie gaussiana abbiamo integrato su elementi infinitesimi di volume, $dV = 2\pi r'hdr'$ che contengono la carica infinitesima $dQ_{int} = \rho(r')dV$.

Per cui per il campo elettrico otteniamo:

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{3\varepsilon_0 R} & 0 \leq r \leq R \\ \frac{\rho_0 R^2}{3\varepsilon_0 r} & r \geq R \end{cases}$$

Essendo $\rho_0 > 0$ $E_r(r) = E(r)$. Il campo $E(r)$ è quadratico in $r$ per $r < R$ e scende come $\frac{1}{r}$ per $r > R$. Il grafico di $E(r)$ in funzione di $r$ è mostrato nella figura seguente:




(*Grafico del modulo del campo elettrico in funzione della distanza dall'asse* )

**Domanda 2**

Noto il campo elettrico fuori del cilindro, scegliamo come percorso di integrazione il percorso ACB, in coordinate cartesiane, tenendo conto che $E_z(r)$ è nullo:

$$\Delta V = V(A) - V(B) = \int_A^B \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^C \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_C^B \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^C \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dx} + \int_C^B \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dz}$$

$$= \int_A^C E_x dx = \int_{2R}^{3R} \frac{\rho_0 R^2}{3\varepsilon_0 x} dx = \frac{\rho_0 R^2}{3\varepsilon_0} ln\frac{3}{2} = 1.83 \times 10^3 \ V$$

Si può anche fare direttamente l'integrale da A a C dicendo che il campo elettrico non ha componenti lungo z, oppure dicendo che poichè il campo elettrico è radiale le superfici equipotenziali sono dei cilindri coassiali al cilindro in esame di conseguenza

$V(B) = V(C)$ o anche fare, in base all'ultima asserzione, direttamente l'integrale in coordinate cilindriche.

**Domanda 3**

Nel caso in cui la densità di carica $\rho$ è in moto, ad essa è associata una densità di corrente $\overrightarrow{J}(r) = \rho(r) v_z \hat{z} = \rho_0 \frac{r}{R} v_z \hat{z}$ Il problema ha simmetria cilindrica (la simmetria del filo indefinito), dunque le linee del campo di induzione magnetica sono circonferenze che giacciono su piani ortogonali all'asse $z$ con centro sull'asse z. Poichè la densità di carica in moto è positiva, la corrente associata è nello stesso verso della velocità e quindi, per la regola della mano destra il verso delle linee di campo è antiorario rispetto all'asse $z$ come indicato in figura.

Il vettore campo magnetico nel caso in cui $r = 2R$ si ottiene applicando il Teorema di Ampere a una linea di campo circolare di raggio $r \geq R$ percorsa nel verso indicato ed esprimendo il campo magnetico in coordinate cilindriche come $\overrightarrow{B} = (0, B_T, 0)$:

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{conc} \quad \Rightarrow \quad B_T 2\pi r = \mu_0 I_{conc}$$

dove $I_{conc}$ è la corrente concatenata con la linea circolare.

Per $r \geq R$ la corrente concatenata è data da:

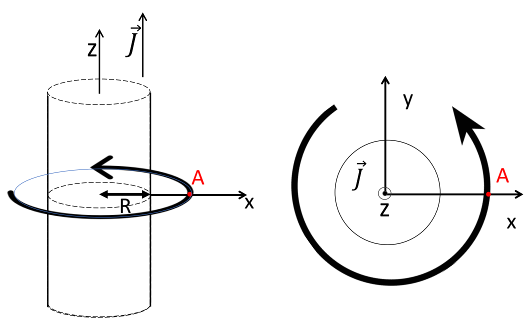
$$I_{conc} = \int \overrightarrow{J} \cdot \hat{z} dS = \int_0^R \rho_0 \frac{r}{R} v_z 2\pi r dr = \frac{\rho_0}{R} v_z 2\pi \frac{R^3}{3} = \frac{2\pi}{3} \rho_0 v_z R^2$$

Per cui il campo magnetico per $r \geq R$ la seguente espressione in funzione di r:

$$B_T(r) = \mu_0 \rho_0 v_z \frac{R^2}{3r} \quad \Rightarrow \quad B_T(2R) = \mu_0 \rho_0 v_z \frac{R}{6} = 2.51 \times 10^{-6}\ T$$

Tenuto conto del verso di percorrenza delle linee di campo, il campo magnetico ha la seguente espressione in coordinate cartesiane nel punto A=(2R,0,0) :

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 \rho_0 v_z \frac{R}{6} \hat{y}$$



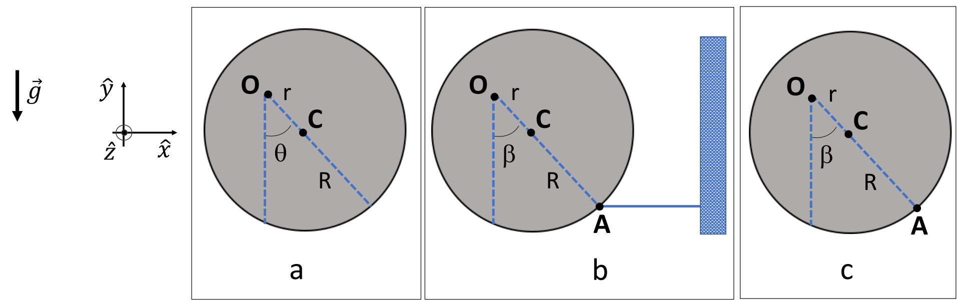

(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

# Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
## Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 29/06/2022

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Un disco rigido omogeneo di raggio $R = 30\ cm$ e massa $M = 150\ g$ è disposto su un piano verticale. Esso può ruotare senza attrito attorno ad un asse fisso perpendicolare al disco e passante per un punto $O$ ad esso appartenente, posto a distanza $r = 6\ cm$ dal centro (vedi figura a).

1 Determinare, giustificando il procedimento, la frequenza $f$ delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio

$f$= ................

Il disco viene poi collegato nel punto $A$ tramite un filo inestensibile e privo di massa a una parete verticale. Si osserva che il sistema è in equilibrio quando il filo è in posizione orizzontale e il segmento $OC$ forma un angolo $\beta = 20^0$ con la verticale ( vedi figura b).

2 Determinare in questa configurazione il modulo della tensione $\vec{T}$ del filo e la reazione vincolare $\vec{N}$ esercitata dall'asse di rotazione, quando il sistema è in equilibrio, utilizzando ove necessario la terna di versori indicata (figura b)

$|\vec{T}|$= ................ $\vec{N}$ = ......................

Con riferimento alla figura c, supponiamo ora che il filo venga rimosso e il sistema in esame è costituito, come nella Domanda 1, dal solo disco libero di ruotare attorno ad $O$. Al sistema viene impartita una velocità angolare iniziale $\omega_i$ attorno ad $O$ con $\vec{\omega}_i = -\omega_i \hat{z}$ quando il segmento $OC$ forma l' angolo $\beta = 20^0$ con la verticale (posizione di equilibrio della Domanda 2).

3 Determinare il valore minimo $\omega_{imin}$ della velocità angolare iniziale $\omega_i$ affinchè il disco compia un giro completo tornando nella posizione di partenza

$\omega_{imin}$= ................

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $g = 9,81$ m/s$^2$

**ESERCIZIO.2** – **Elettromagnetismo**
Si consideri il circuito rettangolare mostrato in figura, con un lato mobile costituito da una sbarra conduttrice indeformabile, libera di muoversi senza attrito sui due binari conduttori tra di loro paralleli, ed ortogonali alla sbarra, chiuso da un lato di lunghezza a. Il lato opposto alla sbarretta ha resistenza $R = 8\ \Omega$ ed è mantenuto a una distanza fissa pari a $x_0 = 5\ cm$ da un filo che giace nello stesso piano del circuito. Il filo è percorso da una corrente $i = 12\ A$ che scorre nel verso indicato.
All'istante $t_0$ si osserva che il lato mobile del circuito è posizionato in modo da formare un rettangolo di lati $a = 10\ cm$ e $b = 20\ cm$ ed ha una velocità di modulo $v_0 = 5\ m/s$ in direzione ad esso ortogonale nel verso indicato in figura.
Con riferimento alla figura:

1 Scrivere l'espressione del flusso $\phi(x)$ in funzione della posizione x della sbarretta mobile per $x \geq x_0$ e calcolare il valore del flusso $\phi_0$ corrispondente all'istante $t_0$ in cui la sbarretta si trova alla distanza $b$ da $x_0$

$\phi(x)$= ................ $\phi_0$ = ......................

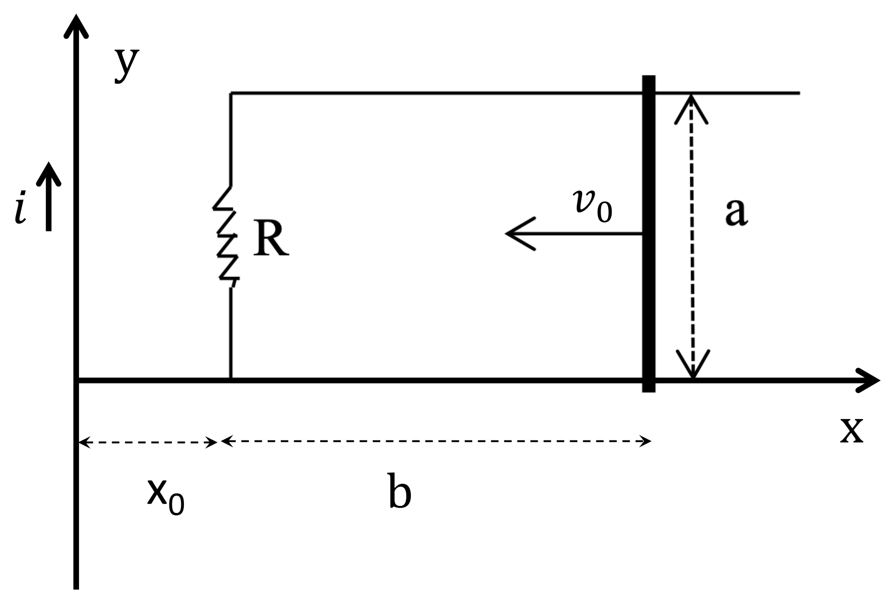
2 Calcolare la forza elettromotrice $fem(t_0)$ indotta nel circuito all'istante $t_0$ e indicare con un disegno il verso della corrente indotta motivando la risposta.

$fem(t_0)$= ................

3 Deteminare la forza $\vec{F}$ che agisce sul lato mobile al tempo $t_0$

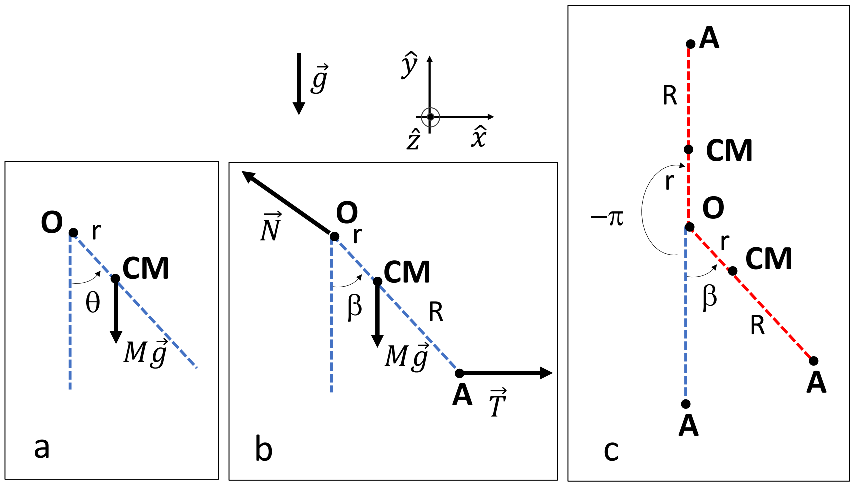
$\vec{F}$= ................

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ Tm/A\ = 1.26 \times 10^{-6}\ Tm/A$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo* )

Soluzione Esercizio 1




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda.1**

Il sistema costituisce un pendolo fisico con il centro di massa ($CM$) nel centro del disco (vedi figura a). Il momento di inerzia del disco rispetto ad un'asse parallelo a $\hat{z}$ passante per O (usando il teorema di Huygens-Steiner) è dato da:

$$I_O = \frac{1}{2}MR^2 + Mr^2 = \frac{1}{2}M\left(R^2 + 2r^2\right)$$

dove il primo termine è il momento di inerzia del disco rispetto ad un'asse parallelo a $\hat{z}$ passante per il centro di massa.

Il periodo delle piccole oscillazioni del sistema può essere ricavato in questo caso utilizzando la conservazione dell'energia o il momento delle forze.

L'energia si conserva in quanto non ci sono forze non conservative che compiono lavoro (la reazione vincolare ha un punto di applicazione che è fisso). Con riferimento alla figura l'energia del sistema $E$ può essere espressa in funzione dell'angolo $\theta$, dove $\theta$ indica l'angolo formato dalla congiungente O e la posizione del $CM$, che coincide con C, in un istante arbitrario, con la congiungente O e il CM nella posizione in cui l'energia potenziale è minima ($\theta = 0$):

$$E(\theta) = costante = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + Mgr(1 - cos(\theta))$$

l'origine dell'energia potenziale corrisponde a $\theta = 0$ e il primo termine indica l'energia cinetica dovuta alla rotazione del corpo rigido e il secondo termine l'energia potenziale del CM. Derivando rispetto al tempo entrambi i membri, e poichè vale la relazione $\omega = \dot{\theta}$, otteniamo :

$$0 = \frac{1}{2}2I_O\omega\dot{\omega} + Mgrsin(\theta)\dot{\theta} = I_O\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mgrsin(\theta)\dot{\theta}$$

dividendo per $I_O\dot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgr}{I_O}sin(\theta) = 0$$

che per piccole oscillazioni ( $sin(\theta) \approx \theta$) fornisce:

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgr}{I_O}\theta = 0$$

L'equazione ottenuta per le piccole oscillazioni è quella di un moto armonico che ha pulsazione:

$$\Omega = \sqrt{\frac{Mgr}{I_O}}$$

In alternativa alla conservazione dell'energia, si può utilizzare la seconda equazione cardinale. Utilizzando come polo il centro O, sul sistema agisce un momento delle forze $\vec{M}$ che tende a riportare il CM nella posizione di equilibrio ($\theta = 0$). Tale momento ha componente non nulla lungo l'asse ortogonale al piano ($M_z$). Al momento rispetto a tale polo contribuisce solo la forza peso essendo la reazione vincolare a braccio nullo rispetto a tale polo (vedi figura a, dove è indicata solo la forza peso):

$$M_z = I_O\alpha_z = -rMgsin(\theta)$$

Dalla quale:

$$I_O\ddot{\theta} + Mgrsin(\theta) = 0$$

che per piccole oscillazioni ( $sin(\theta) \approx \theta$), fornisce lo stesso risultato per $\Omega$. Di conseguenza, la frequenza delle piccole oscillazioni $f$ è data in entrambi i casi da:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mgr}{I_0}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2gr}{R^2 + 2r^2}} = 0.55\ Hz$$

**Domanda.2**

Nella nuova configurazione all'equilibrio la risultante delle forze che agiscono disco è nulla. Le forze che agiscono sul disco (vedi figura b) sono la forza peso $M\vec{g}$, la tensione del filo di modulo T e la reazione vincolare $\overrightarrow{N}$ in $O$. Pertanto la prima equazione cardinale fornisce:

$$M\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} = 0$$

Inoltre all'equilibrio risulta nullo anche il momento delle forze esterne. Scegliendo il punto O come polo a cui riferire i momenti, la seconda equazione cardinale, ci permette di determinare il modulo della tensione del filo $|\overrightarrow{T}| = T$:

$$\vec{OC} \wedge M\vec{g} + \vec{OA} \wedge \vec{T} = I_O\vec{\alpha} = 0 = -Mgrsin\beta\hat{z} + (r+R)\,Tsin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\hat{z} \quad \Rightarrow \quad T = |\overrightarrow{T}| = \frac{Mgrsin\beta}{(r+R)\,cos\beta} = 8.93 \times 10^{-2}\ N$$

dove $I_O$ è il momento di inerzia rispetto a O che dista r dal CM (vedi risposta Domanda 1) e dove (vedi figura b) $T_x = T$ e $T_y = 0$. Proiettando la I cardinale lungo $\hat{x}$ e lungo $\hat{y}$, possiamo scrivere la prima equazione cardinale per componenti e quindi, sostituendo il modulo della tensione $T$ ottenuto dalla seconda equazione cardinale, determinare le componenti della reazione vincolare in $O$:

$$\begin{cases} \mathrm{N}_x + T = 0 \\ \mathrm{N}_y - Mg = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{N}_x = -T = -8.93 \times 10^{-2}\ N \\ \mathrm{N}_y = Mg = 1.47\ N \end{cases}$$

**Domanda.3**

Il sistema è uguale a quello considerato nella Domanda 1, dove il disco parte dalla posizione individuata dall'angolo $\beta = 20^0$ determinato nella Domanda 2, con una velocità angolare iniziale pari a $\omega_i$. Per le stesse considerazioni della Domanda 1 vale la conservazione dell'energia. Per $\omega_i \geq \omega_{imin}$ il disco descrive delle rotazioni complete durante ciascuna delle quali il valore della velocità angolare massima finale si ottiene quando il punto A passa per la verticale in $O$ e si trova nel punto più basso, mentre il valore minimo della velocità angolare finale si ottiene quando il punto A passa sempre per la verticale ma si trova nel punto più alto (vedi figura b). Chiaramente il valore più basso della velocità angolare finale permesso per $\theta = -\pi$ è $\omega_f(-\pi) = 0$.

Dalla conservazione dell'energia otteniamo

$$E(\beta) = \frac{1}{2}I_O\omega_i^2 + Mgr(1 - cos(\beta)) = E(-\pi) = \frac{1}{2}I_O\omega_f^2 + Mgr(1 - cos(-\pi)) \quad \Rightarrow \quad \omega_i^2 = \omega_f^2 - Mgr(1 - cos(\beta))\frac{2}{I_O} + 2Mgr\frac{2}{I_O}$$

$$\omega_i^2 = \omega_f^2 + Mgr(1 + cos(\beta))\frac{2}{I_O}$$

Poichè il secondo termine dell'ultima equazione è positivo e $\omega_f^2 \geq 0$, il valore minimo di $\omega_i$ si ottiene per $\omega_f = 0$ per cui

$$\omega_{imin} = \sqrt{\frac{4Mgr(1 + cos(\beta))}{M\,(R^2 + 2r^2)}} = 2\sqrt{\frac{gr(1 + cos(\beta))}{(R^2 + 2r^2)}} = 6.85\ rads^{-1}$$

## Soluzione Esercizio 2

**Domanda 1**

Il problema ha simmetria cilindrica, dunque le linee di forza del campo magnetico generato dal filo sono delle circonferenze con centro sull'asse y e parallele al piano x,z (l'asse z non indicato in figura è uscente dal foglio). Per la regola della mano destra il verso delle linee di campo è antiorario rispetto all'asse $y$.
L'espressione del modulo del campo magnetico nella superficie del circuito si ottiene applicando il Teorema di Ampere ad una linea di campo circolare di raggio generico $r = x'$

$$B(x') = \frac{\mu_0 i}{2\pi x'}$$

Il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito in movimento varia con il tempo. Infatti poichè il campo magnetico dipende da $x'$, il contributo al flusso nella regione $x' > 0$, scegliendo la normale al circuito orientata come $\overrightarrow{B}$, è dato da $d\phi(x) = B(x')adx'$, per cui il flusso attraverso il circuito è dato da:

$$\phi(x) = \int \overrightarrow{B} \cdot \hat{n} dS = \int_{x_0}^{x(t)} B(x')adx' = \frac{\mu_0 ia}{2\pi}\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{x'} = \frac{\mu_0 ia}{2\pi} ln\left(\frac{x(t)}{x_0}\right)$$

Dove x(t) indica la posizione della sbarra lungo l'asse x in funzione del tempo, abbiamo assunto il versore normale al circuito $\hat{n} = -\hat{z}$ e (per la regola della mano destra) per $x' > 0$, $\overrightarrow{B} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi x'}\hat{z}$
Per $t = t_0$, $x(t) = x_0 + b$, pertanto:

$$\phi_0 = \phi(x_0 + b) = \frac{\mu_0 ia}{2\pi} ln\left(\frac{x_0 + b}{x_0}\right) = 3.86 \times 10^{-7}\ Tm^2 = 3.86 \times 10^{-7}\ Wb$$

**Domanda 2**

La forza elettromotrice indotta al tempo t, è data dalla legge di Faraday Neuman Lenz:

$$fem(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 ia}{2\pi}\left(\frac{\dot{x}}{x}\right)$$

Per $t = t_0$, $x(t_0) = x_0 + b$ e $\dot{x}(t_0) = -v_0$ per cui:

$$fem(t_0) = -\frac{d\phi}{dt}|_{t_0} = -\frac{\mu_0 ia}{2\pi}\left(\frac{-v_0}{x_0 + b}\right) = \frac{\mu_0 ia}{2\pi}\left(\frac{v_0}{x_0 + b}\right) = 4.8\ \mu V$$

e la corrente circola in verso orario (vedi anche figura) in modo da opporsi alla variazione di flusso che la ha generata.

**Domanda 3**

La forza agente sulla sbarretta è la forza di Laplace al tempo $t = t_0$ esercitata dal campo magnetico generato dal filo sul circuito percorso dalla corrente indotta $I_c$:

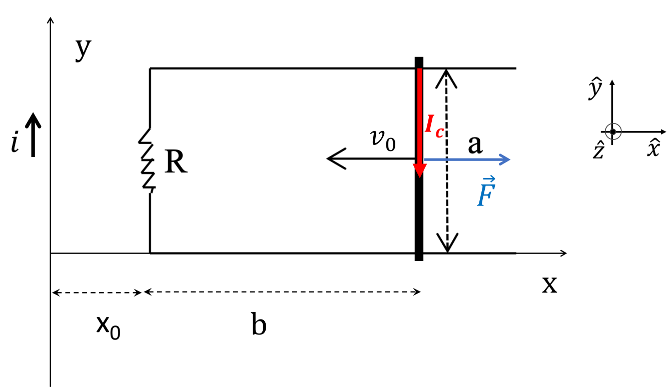
$$\overrightarrow{F} = I_c a(-\hat{y}) \wedge B(x_0 + b)(-\hat{z}) = I_c a B(x_0 + b)\hat{x}$$

dove con $I_c$ abbiamo indicato la corrente nel circuito al tempo $t = t_0$ e con $B(x_0 + b)$ il modulo del campo magnetico agente sul lato mobile sempre al tempo $t_0$ le cui espressioni sono rispettivamente

$$I_c = \frac{fem(t_0)}{R} = \frac{\mu_0 ia}{2\pi R}\left(\frac{v_0}{x_0 + b}\right) \qquad B(x_0 + b) = \frac{\mu_0 i}{2\pi\,(x_0 + b)}$$

per cui:

$$I_c a B(x_0+b) = \frac{\mu_0 i a^2}{2\pi R}\left(\frac{v_0}{x_0 + b}\right)\frac{\mu_0 i}{2\pi\,(x_0 + b)} = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi\,(x_0 + b)}\right)^2 \frac{a^2 v_0}{R} = (B(x_0 + b))^2\,\frac{a^2 v_0}{R} = 5.76\times 10^{-13}\ N \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{F} = 5.76\times 10^{-13}\hat{x}\ N$$



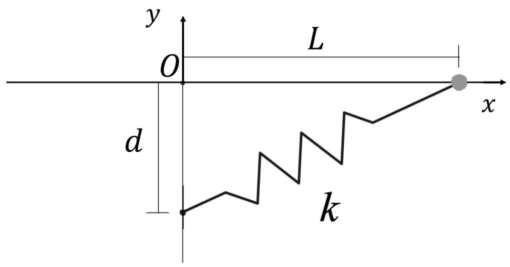

(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

# Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
## Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 20/07/2022

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, una perlina assimilabile a un punto materiale (pm) di massa $m = 50\ g$ può muoversi su una guida rettilinea orizzontale. La guida è scabra e il coefficiente di attrito dinamico tra perlina e guida vale $\mu_d = 0.18$. La perlina è collegata a uno dei due estremi di una molla. L'altro estremo della molla è fissato su un asse ortogonale al piano formato dalla guida e dalla molla, a distanza $d = 20\ cm$ dalla guida. La molla di massa e lunghezza a riposo trascurabili, ha una costante elastica di richiamo $k = 1\ N/m$.
Inizialmente la perlina è tenuta ferma a distanza $L = 40\ cm$ dal punto $O$ della guida. A un certo istante la perlina viene lasciata libera di muoversi.
Si determini:

1 il valore della distanza $d_{pO}$ del pm da $O$ per il quale l'accelerazione del pm si annulla per la prima volta dopo il rilascio

$d_{pO}$= ................

2 il tempo $t^*$ impiegato dal pm per raggiungere il punto $O$, una volta lasciato libero

$t^*$= ................

3 il valore minimo del coefficiente di attrito statico $\mu_{s-min}$ affinchè il pm si fermi una volta raggiunto il primo punto di inversione del moto

$\mu_{s-min}$ = .....................

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $g = 9,81$ m/s$^2$

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Due anelli, costituiti da un materiale dielettrico omogeneo di raggio $R = 1\ cm$, sono disposti come in figura. I due anelli sono coassiali, con asse diretto lungo l'asse $x$ e i rispettivi centri hanno coordinate $(-a, 0, 0)$ e $(a, 0, 0)$ con $a = 2\ cm$. Su di essi è distribuita una densità lineare di carica uniforme $\lambda = 100\ pC/m$.

1 Ricavare l'espressione del potenziale elettrico $V(x, 0, 0)$ generato dai due anelli in ogni punto dell'asse x, per $(-\infty \leq x \leq \infty; y = 0; z = 0)$

$V(x, 0, 0)=$ ................

2 Ricavare l'espressione del vettore campo elettrico $\overrightarrow{E}$ generato dai due anelli in ogni punto dell'asse x, per $(-\infty \leq x \leq \infty; y = 0; z = 0)$

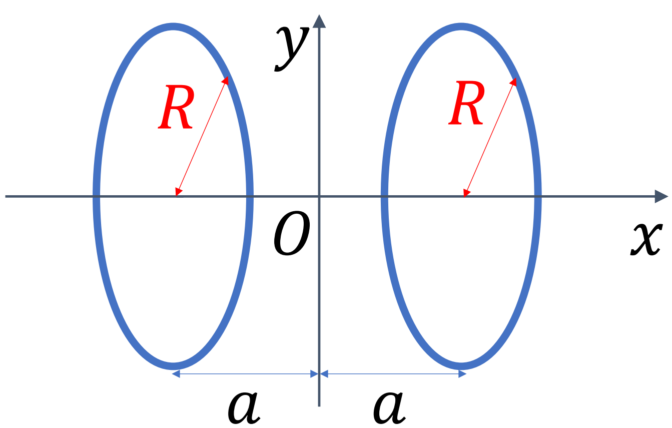
$\overrightarrow{E}=$ ................

Un protone di massa $m_p = 1.67 \times 10^{-24}\ g$, carica $q = 1.6 \times 10^{-19} C$, viene rilasciato nel punto P di coordinate $(2a, 0, 0)$ con una velocità $\overrightarrow{v} = -v\hat{x}$

3 Determinare la velocità minima $v_{min}$ che deve essere impartita al protone all'atto del rilascio per arrivare nel punto di coordinate $(x = a, 0, 0)$ motivando la risposta (trascurare la gravità)

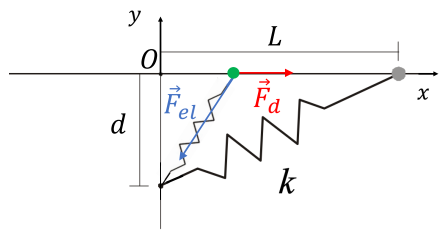
$v_{min}=$ ................

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo* )

## Soluzione Esercizio 1




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda.1**
Indichiamo con $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{R}_N$,$\overrightarrow{F}_d$ e $\overrightarrow{F}_{el}$ rispettivamente la forza peso, la reazione normale della guida, la forza di attrito dinamico e la forza elastica e scegliendo un sistema di riferimento con origine in $O$ gli assi $x$ e $y$ coincidenti rispettivamente con la guida orizzontale e l'asse verticale (verso l'alto) come in figura. La seconda equazione della dinamica per il moto fino al tempo $t'$ al quale il pm arriva al punto di inversione del moto (in cui forza di attrito cambia verso) è data da:

$$\left\{ \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}_N + \overrightarrow{F}_d + \overrightarrow{F}_{el} = m\overrightarrow{a} = 0 \right. \quad \text{proiettando lungo x e lungo y otteniamo:}$$

$$\begin{cases} x: & F_d - kx = m\ddot{x} \\ y: & -mg - kd + R_N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_d - kx = m\ddot{x} \\ R_N = mg + kd \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_d = \mu_d R_N = \mu_d(mg+kd) \\ \mu_d R_N - kx = m\ddot{x} = \mu_d(mg+kd) - kx \end{cases}$$

Nella figura sono mostrate per semplicità solo la direzione e il verso delle forza elastica e di attrito dinamico nel moto successivo all'istante iniziale, prima di raggiungere il punto di inversione del moto, dove si inverte il verso della forza di attrito dinamico.

La coordinata $x_0$ del pm per cui l'accelerazione si annulla nel moto di andata è data da:

$$m\ddot{x} = 0 = \mu_d(mg+kd) - kx_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{\mu_d}{k}(mg+kd) = 0.12\ m$$

Essendo $x_0 > 0$ essa coincide con la distanza da $O$ del pm per cui:

$$x_0 = d_{pO} = 0.12\ m$$

**Domanda.2**
Dalla conoscenza dell'equazione del moto e dalle condizioni iniziali possiamo determinare il tempo impiegato dal pm a raggiungere l'origine una volta lasciato libero di muoversi. L' equazione del moto del pm è quella di un oscillatore armonico, che per il moto fino al tempo $t'$ al quale il pm arriva al punto di inversione del moto (in cui forza di attrito cambia verso) è data da:

$$\ddot{x} - \frac{\mu_d}{m}(mg+kd) + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + \frac{k}{m}\left(x - \frac{\mu_d}{k}(mg+kd)\right) = \ddot{x} + \omega^2(x - x_0) = 0$$

dove $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Infatti ponendo $x - x_0 = x'$, l'equazione può essere riscritta come:

$$\ddot{x}' + \omega^2 x' = 0$$

La cui soluzione è $x'(t) = Acos(\omega t + \phi)$. Dalle condizioni iniziali $(a)$ $x'(0) = L - x_0 = Acos\phi$ e $(b)$ $\dot{x}'(0) = \dot{x}(0) = -\omega Asin\phi = 0$, si ricavano $\phi$ ed $A$. Dalla condizione $(b)$ $\phi = 0$ e dalla condizione $(a)$ si ottiene $L - x_0 = Acos0$ per cui $A = L - x_0$. L'equazione oraria è quindi:

$$x'(t) = (L - x_0)\,cos\omega t \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + (L - x_0)\,cos\omega t$$

Per cui il tempo $t^*$ necessario a raggiungere l'origine $O$ si ottiene imponendo $x(t^*) = 0$:

$$x(t^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{1}{\omega}arcos\left(\frac{x_0}{x_0 - L}\right) = 4.56 \times 10^{-1}\ s$$

**Domanda.3**
La posizione del punto di inversione del moto si ottiene ricavando l'istante di tempo $t'$ (successivo a $t = 0$, istante in cui il pm

viene lasciato libero) corrispondente all'inversione del moto e sostituendolo nella legge oraria. La velocità del pm si annulla negli istanti $t_i$ tali che:

$$\dot{x}(t_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad -(L - x_0)\,\omega sin\omega t_i = 0 \quad \Rightarrow \quad t_i = \frac{i\pi}{\omega}$$

$i = 0$ corrisponde al tempo del rilascio ($t = 0$) di conseguenza $t_1$ corrisponde tempo necessario per raggiungere il punto di inversione del moto, e sostituendolo nell'equazione oraria si ottiene:

$$t' = \frac{\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad x(t') = x_0 + (L - x_0)\,cos\omega t' = 2x_0 - L$$

Oppure, semplicemente osservando che il sistema oscilla tra $x_0 + (L - x_0)$ e $x_0 - (L - x_0)$, il primo punto di inversione del moto si ha per $x(t') = 2x_0 - L$ e corrisponde a $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$.
Il valore minimo del coefficiente di attrito statico affinchè il pm si fermi nel primo punto di inversione del moto si ottiene imponendo che nel punto di inversione il corpo resti fermo con accelerazione nulla e sfruttando il valore massimo del modulo della forza di attrito statico nel punto di inversione del moto.
Nel punto di inversione del moto, un istante successivo a $t' = \frac{\pi}{\omega}$ la forza di attrito statico ha direzione e verso di $-\hat{x}$, e la seconda equazione della dinamica fornisce :

$$\begin{cases} x: & -k\,(2x_0 - L) - F_s = m\ddot{x}|_{x=2x_0-L} = 0 \\ y: & -mg - kd + R_N = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -k\,(2x_0 - L) - F_s = 0 \\ R_N = mg + kd \end{cases}$$

Da queste equazioni otteniamo:

$$-k\,(2x_0 - L) = F_s \leq \mu_s R_N = \mu_s\,(mg + kd) \quad \Rightarrow \quad \mu_s \geq \frac{k\,(L - 2x_0)}{mg + kd} = 0.22$$

Per cui:

$$\mu_{s-min} = 0.22$$

## Soluzione Esercizio 2

**Domanda 1**

Il contributo al potenziale generato da un elemento di un'anello di lunghezza $dl$ e raggio $R$ lungo l'asse $x$, con l'anello posizionato come in figura, è dato in generale da:

$$dV(x, y=0, z=0) = k_e \frac{dq}{d} = k_e \frac{\lambda dl}{\sqrt{R^2 + x^2}} = k_e \frac{\lambda R d\theta}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

dove $k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ e $d$ è la distanza dal centro di $dl$ del punto $P$ di coordinate $(x, 0, 0)$. Per cui, il potenziale dovuto a un anello uniformemente carico di raggio $R$ è dato nel punto $P$ da:

$$V(x, y=0, z=0) = V(x) = \int_0^{2\pi} dV = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il potenziale che vogliamo determinare è la somma del potenziale generato da ciascun anello. Tenuto conto del sistema di riferimento indicato nella domanda, indicando con la sottoscritta 1 e 2 rispettivamente l'anello con centro nel punto di coordinate (-a,0,0) e quello con centro in (a,0,0):

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + (x+a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + (x-a)^2}} \right]$$

**Domanda 2**

La distribuzione di carica è invariante per rotazioni attorno all'asse degli anelli (asse x) di conseguenza il campo elettrico lungo l'asse degli anelli ha solo componente $x$, per cui lungo l'asse $x$, $\overrightarrow{E} = E_x \hat{x}$. Dalla relazione $\overrightarrow{E} = -\nabla V$ si ottiene:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \left[ -\frac{1}{2} \frac{2(x+a)}{\left(R^2 + (x+a)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2} \frac{2(x-a)}{\left(R^2 + (x-a)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \left[ \frac{(x+a)}{\left(R^2 + (x+a)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x-a)}{\left(R^2 + (x-a)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Oppure (strada più lunga...) avremmo potuto utilizzare l'espressione generale del campo elettrico generato da un anello ( o meglio ricavarla) e applicando il principio di sovrapposizione e utilizzando il sistema indicato ottenere la stessa espressione per il campo elettrico risultante, sia in coodinate cartesiane che cilindriche.

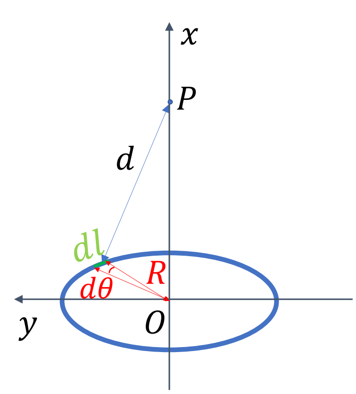
**Domanda 3**

Dalla risposta alla Domanda 2 il campo elettrico è tale che per $x \geq a$ $E_x > 0$ e quindi la forza elettrostatica agente sul protone rallenta (decelera) sempre il protone di conseguenza lungo il percorso la velocità del protone diminuisce. La velocità minima $v_{min}$ che è necessario impartire al protone è pertanto quella che gli permette di arrivare nel punto di coordinate $(a, 0, 0)$ con velocità nulla. Nel sistema considerato non sono presenti forze non conservative per cui l'energia meccanica si conserva. Per la conservazione dell'energia vale la seguente relazione:

$$\frac{1}{2} m_p v_{min}^2 + qV(2a) = qV(a) \quad \Rightarrow \quad v_{min} = \sqrt{\frac{2q}{m_p} \left(V(a) - V(2a)\right)}$$

Dall'espressione di $V(x)$ della Domanda 1 otteniamo:

$$V(a) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + 4a^2}} + \frac{1}{R} \right] = 7.02\ V \quad V(2a) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + 9a^2}} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right] = 3.46\ V \quad \Rightarrow \quad v_{min} = 2.61 \times 10^4\ m/s$$




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

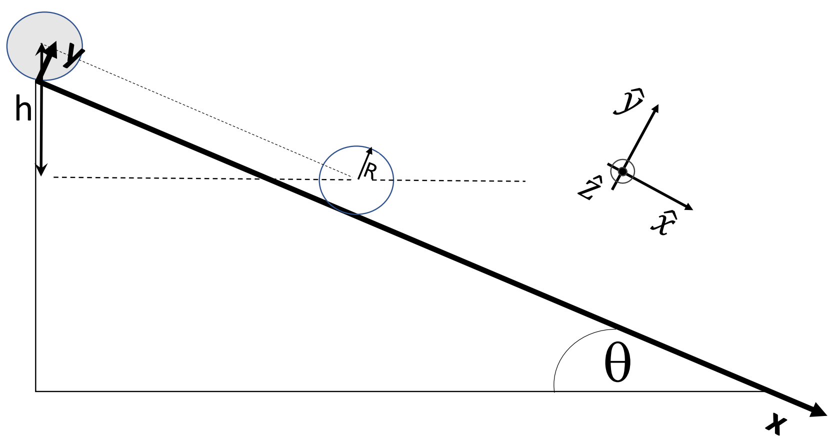
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 14/09/2022

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Un cilindro pieno omogeneo ed indeformabile di massa $M = 2\ kg$ e raggio $R = 5\ cm$ e un cilindro cavo con la stessa massa $M$ e lo stesso raggio $R$ possono rotolare su un piano inclinato di un angolo $\theta = 30^o$ rispetto all'orizzontale.

1.1 Calcolare il modulo dell'accelerazione del centro di massa (cm) di ciascun cilindro nell'ipotesi di puro rotolamento, (indicando con $a_{p-cm}$ l' accelerazione del cm del cilindro pieno e con $a_{v-cm}$ quella del cilindro vuoto)

$a_{p-cm}$= ................ $a_{v-cm}$ = ......................

I due cilindri vengono lasciati partire da fermi sul piano inclinato, sempre nell'ipotesi di moto di puro rotolamento:

1.2 calcolare il modulo della velocità dei centri di massa dei due cilindri (indicando con $v_{p-cm}$ la velocità del cm del cilindro pieno e con $v_{v-cm}$ quella del cilindro vuoto) quando i loro centri di massa sono scesi di una quota $h = 20\ cm$ rispetto alla posizione iniziale

$v_{p-cm}$= ................ $v_{v-cm}$ = ......................

Se il coefficiente di attrito statico tra il piano inclinato e i cilindri è $\mu_s = 0.2$:

1.3 determinare, giustificando la risposta, se sono verificate le condizioni di puro rotolamento per ciascuno dei due cilindri

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Con riferimento alla fig.$a$, un protone di massa $m = 1.67 \times 10^{-27}\ kg$ e carica $q = 1.6 \times 10^{-19}\ C$, viaggia con velocità in modulo pari a $v$ lungo l'asse $x$, nel verso delle x positive. Nel semispazio $x > 0$ è presente un campo magnetico costante ed uniforme diretto lungo l'asse z con $\overrightarrow{B} = B_0\hat{z}$ con $B_0 = -6\ mT$. Nel piano x=0 è posto uno schermo di spessore infinitesimo con un forellino $A$ di dimensioni trascurabili in $z = y = 0$ attraverso cui entra il protone, ed un secondo forellino $E$ di coordinate $(0, 5\ cm, 0)$.

2.1 Determinare il modulo della velocità $v$ per cui il protone esce dalla regione di campo magnetico passando dal forellino $B$

$v$= ................

2.2 Determinare quanto tempo ($t_{1-2}$) impiega il protone ad andare dal primo al secondo forellino

$t_{1-2}$= ................

Con riferimento alla fig.$b$, se il protone, invece che lungo l'asse $x$, si muove inizialmente con velocità $v'$ lungo la retta di equazione $y = x$ entrando dal forellino $A$:

2.3 determinare il modulo della velocità $v'$ affinchè il protone esca dalla regione di campo magnetico dal forellino $E$

$v'$= ................

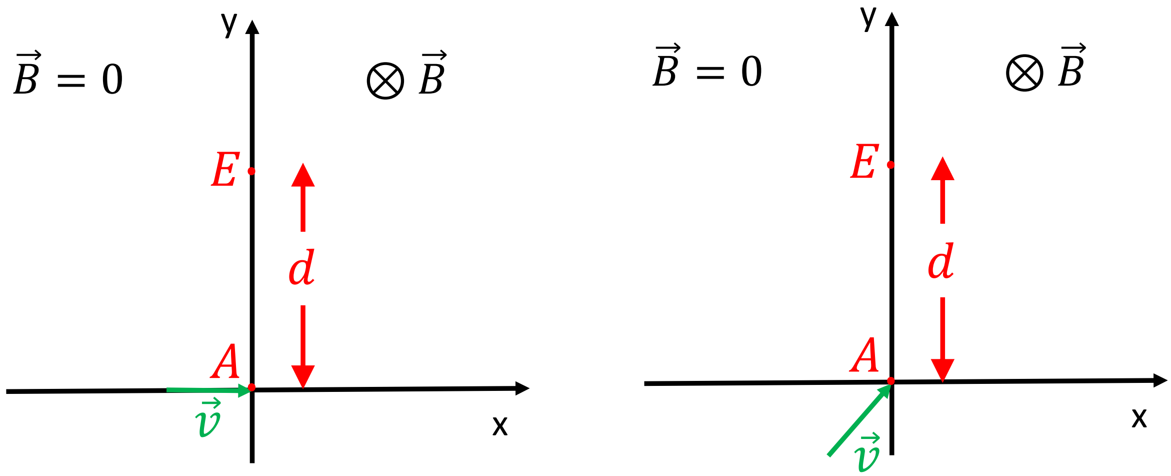
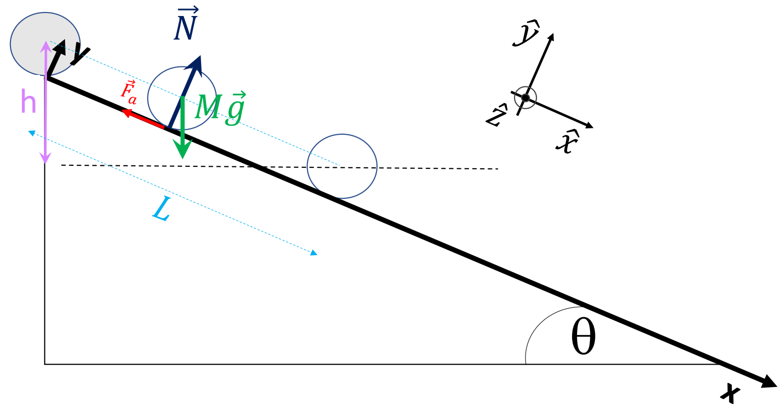



fig.$a$)　　fig.b)

(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo* )

## Soluzione Esercizio 1




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda 1.1**
Con riferimento alla figura, il momento delle forze agenti su un corpo di massa $M$, in questo caso cilindro o sfera di raggio $R$, che rotola con polo nel punto di contatto è dato da

$$\overrightarrow{\tau_c} = I_c\overrightarrow{\alpha} = -MgRsin\theta\hat{z} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\alpha} = -\frac{MgRsin\theta}{I_c}\hat{z}$$

dove $\overrightarrow{\alpha}$ è l'accelerazione angolare e $I_c$ è il momento di inerzia del corpo che rotola rispetto al punto di contatto.
Indichiamo con $I_{c-cm}$ il momento di inerzia del generico cilindro rispetto al centro di massa. Usando il teorema di Steiner per il cilindro pieno otteniamo:

$$I_c = I_{c-cm} + MR^2 \Rightarrow I_p = I_{p-cm} + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

dove con $I_{p-cm} = \frac{MR^2}{2}$ abbiamo indicato il momento di inerzia del cilindro pieno rispetto all'asse del cilindro. Mentre per il cilindro vuoto:

$$I_c = I_{c-cm} + MR^2 \Rightarrow I_v = I_{v-cm} + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$

dove con $I_{v-cm} = MR^2$ abbiamo indicato il momento di inerzia del cilindro vuoto rispetto all'asse del cilindro.
Poichè il moto è di puro rotolamento, per un corpo che rotola, nel sistema di riferimento indicato, in generale otteniamo per l'accelerazione $\overrightarrow{a} = a_x\hat{x}$ con $a_x = a = -\alpha_z R = \frac{MgRsin\theta R}{I_c}$ Questa relazione ci permette di determinare l'accelerazione del cm per il cilindro pieno:

$$a \Rightarrow a_{p-cm} = \frac{Mgsin\theta R^2}{I_p} = \frac{Mgsin\theta R^2}{\frac{3}{2}MR^2} = \frac{2}{3}gsin\theta = 3.27\ m/s^2$$

Mentre per il cilindro vuoto otteniamo:

$$a \Rightarrow a_{v-cm} = \frac{Mgsin\theta R^2}{I_v} = \frac{Mgsin\theta R^2}{2MR^2} = \frac{1}{2}gsin\theta = 2.45\ m/s^2$$

**Domanda 1.2**
Nel moto si conserva l'energia meccanica in quanto l'unica forza che compie lavoro è la forza di gravità essendo nullo il lavoro compiuto dalla reazione del piano ( la reazione è ortogonale allo spostamento) e dalla forza di attrito statico (il punto di contatto è istantaneamente fermo). Dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{c-cm}\omega^2$$

dove abbiamo indicato in generale per il corpo che rotola con $v_{cm}$ la velocità del cm, con $I_{c-cm}$ il momento di inerzia rispetto al cm del corpo e con $\omega$ il modulo della velocità angolare ed infine abbiamo applicato il teorema di K$\ddot{o}$*nig* dell'energia.
Per il moto di puro rotolamento in generale vale:

$$|\overrightarrow{v}_{cm}| = |\overrightarrow{\omega}|R = \omega R \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_{cm}}{R}$$

Per cui in generale sostituendo l'espressione di $\omega$ in funzione di $v_{cm}$ nell'equazione della conservazione dell'energia otteniamo:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2\left(1+\frac{I_{c-cm}^2}{MR^2}\right) \quad \Rightarrow \quad v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I_{c-cm}}{MR^2}}}$$

Per cui per il cilindro pieno e il cilindro vuoto otteniamo rispettivamente:

$$v_{p-cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I_{p-cm}}{MR^2}}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 1.62\ m/s \qquad v_{v-cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I_{v-cm}}{MR^2}}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+1}} = \sqrt{gh} = 1.4\ m/s$$

Si ottengono gli stessi risultati se si considera che il moto per entrambi i cilindri è uniformemente accelerato con le accelerazioni ricavate nella domanda 1.1 e la distanza percorsa dal cm dei cilindri è $L = \frac{h}{sin\theta}$.

**Domanda 1.3**

Nell'ipotesi di puro rotolamento le forze che agiscono sui cilindri sono la forza peso $M\vec{g}$, la reazione normale del piano, $\vec{N}$ e la forza di attrito statico tra cilindro e piano, $\vec{F}_s$. La prima equazione cardinale della dinamica proiettata lungo la direzione perpendicolare al piano inclinato ($y$) e nella direzione del moto ($x$) dà, per il generico cilindro, come risultato le due equazioni:

$$\begin{cases} x: Mgsin\theta + F_{sx} = Ma = \frac{MgR^2sin\theta}{I_c} = \frac{MgR^2sin\theta}{MR^2+I_{c-cm}} = \frac{Mgsin\theta}{1+\frac{I_{c-cm}}{MR^2}} \\ y: N - Mgcos\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{sx} = Mgsin\theta\left(\frac{1}{1+\frac{I_{c-cm}}{MR^2}} - 1\right) = -Mgsin\theta\frac{\frac{I_{c-cm}}{MR^2}}{1+\frac{I_{c-cm}}{MR^2}} \\ N = Mgcos\theta \end{cases}$$

la condizione $\mid \vec{F}_s \mid = Mgsin\theta\frac{\frac{I_{c-cm}}{MR^2}}{1+\frac{I_{c-cm}}{MR^2}} \leq \mu_s N$ impone che:

$$\mu_s \geq tg\theta\frac{\frac{I_{c-cm}}{MR^2}}{1+\frac{I_{c-cm}}{MR^2}}$$

Per cui per il cilindro cavo:

$$\mu_s \geq \frac{1}{2}tg\theta = 0.289$$

di conseguenza il moto non è di puro rotolamento per il valore di $\mu_s$ assegnato (0.2). Per il cilindro pieno, il moto è di puro rotolamento essendo

$$\mu_s \geq \frac{1}{3}tg\theta = 0.192$$

## Soluzione Esercizio 2

**Domanda 2.1**
Con riferimento alla fig.$c$, il protone nella zona in cui è presente il campo magnetico percorre una traiettoria circolare sul piano $xy$ con moto circolare uniforme poichè il campo magnetico ha modulo direzione e verso costanti

Il moto si svolge nel piano $xy$ poichè la forza magnetica ($\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$) è ortogonale a $\vec{B}$. La velocità del protone nella regione di campo magnetico è costante in modulo perchè in ogni punto della traiettoria nella regione di campo magnetico la forza magnetica è ortogonale alla velocità. Infatti dal teorema delle forze vive, per una qualunque coppia di punti, $i$ e $f$, della traiettoria del protone vale:

$$\frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = \int_{l_i}^{l_f} \vec{F}_m \bullet d\vec{l} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_m \bullet \vec{v}\,dt = 0$$

dove nell'ultimo passaggio l'integrale è nullo essendo $\vec{F}_m \perp$ a $\vec{v}$. Per cui il modulo della velocità è costante. Di conseguenza il modulo dell'accelerazione $a$ è costante essendo in ogni punto della traiettoria $|\vec{a}| = |\frac{qvB}{m}|$. Quindi, come affermato, poichè il modulo della velocità è costante, l'accelerazione in modulo è costante e ortogonale alla velocità in ogni punto della traiettoria, la traiettoria è circolare, il moto è circolare uniforme ed è nel piano $xy$.
Dal fatto che il moto è circolare uniforme:

$$m\vec{a} = \vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad -m\frac{v^2}{R}\hat{u}_N = -qvB\hat{u}_N \quad \Rightarrow \quad m\frac{v}{R} = qB \quad \Rightarrow \quad v = \frac{qBR}{m}$$

Dove abbiamo indicato con $u_N$ il versore normale alla traiettoria. Se il protone entra dal forellino $A$ di coordinate $(0,0,0)$ ed esce dal forellino $E$ di coordinate $(0,d,0)$ percorrendo una traiettoria circolare di raggio $R$, $d = 2R$. Di conseguenza

$$v = \frac{qBd}{2m} = 14.4 \times 10^3 \ m/s$$

**Domanda 2.2**
Il protone percorre la semicirconferenza in fig.$c$ a velocità costante in modulo, per cui vale:

$$t_{1-2} = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi d}{2v} = 5.47 \times 10^{-6} \ s$$

**Domanda 2.3**
Con riferimento alla fig.$d$, la retta $y = x$ corrisponde ad un angolo di ingresso del protone di $45^0$. Per le stesse considerazioni di prima, la traiettoria è sempre circolare, ma (vedi fig.$d$) la relazione che lega il raggio a $d$ è

$$R'cos(45^0) = \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad R' = \frac{\sqrt{2}}{2}d$$

quindi:

$$v' = \frac{qBR'}{m} = \frac{qB\sqrt{2}d}{2m} = \sqrt{2}v = 20.3 \times 10^3 \ m/s$$

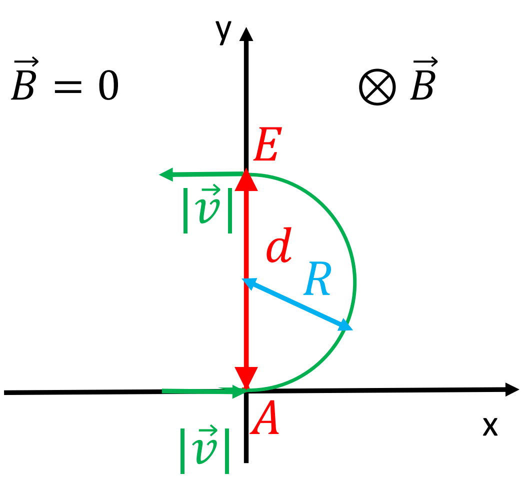


fig.$c$)

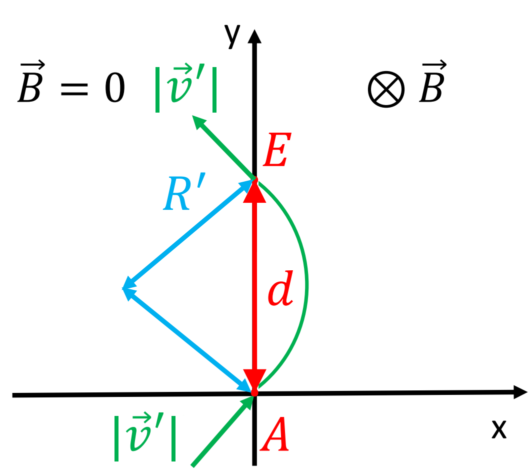


fig.d)

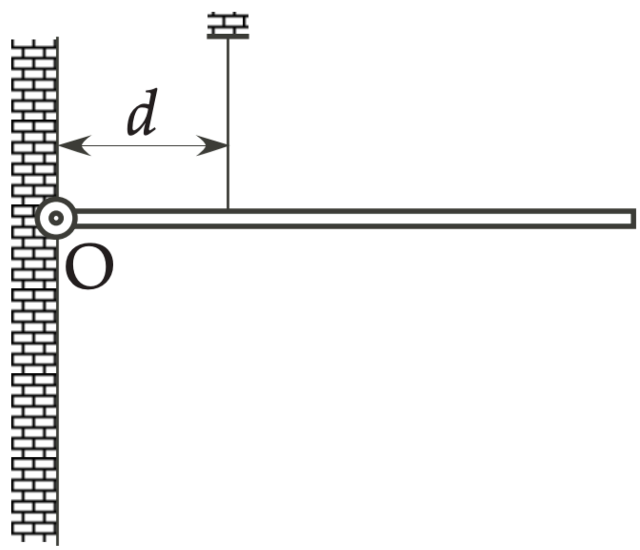
(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

## Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 11/01/2023**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Un' asta omogenea di lunghezza $L = 1\ m$ e massa $m = 2\ kg$ è incernierata su una parete verticale mediante un perno in $O$ che le consente di ruotare senza attrito intorno ad un asse orizzontale passante per esso. Come mostrato in figura, l'asta è tenuta in posizione orizzontale da un filo verticale ad essa fissato a una distanza $d = 20\ cm$ dal perno.

1.1 Calcolare il modulo della tensione del filo $T$ e la reazione del perno $\vec{R}$ in $O$

$T=$ ................ $\vec{R} =$ ......................

Il filo viene tagliato. Calcolare:

1.2 il modulo dell'accelerazione angolare $\alpha_0$ dell'asta un istante dopo il taglio del filo

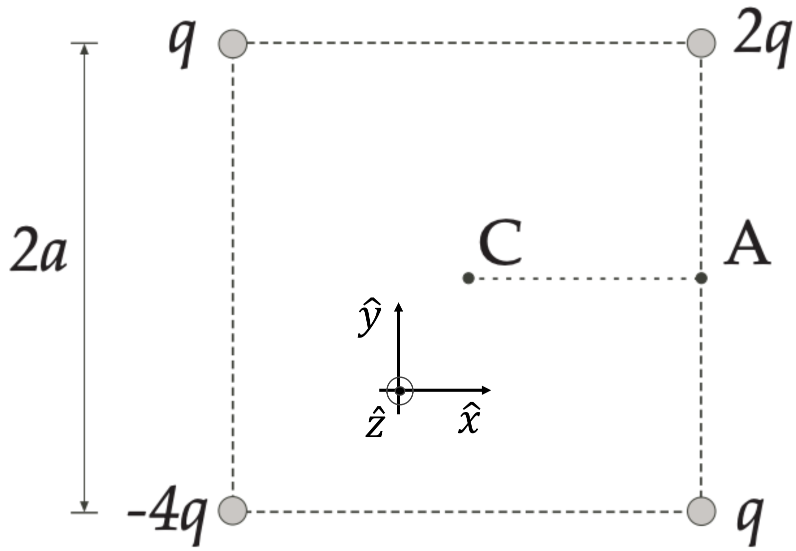
$\alpha_0=$ ................

1.3 l'energia cinetica $K$ dell'asta nell'istante in cui essa colpisce la parete verticale.

$K=$ ................

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo* )

Come mostrato in figura, quattro particelle cariche puntiformi sono disposte sui vertici di un quadrato di lato $2a$, con $a = 10\ cm$. Le cariche delle singole particelle sono indicate in figura, dove $q = 1\ \mu C$.
Calcolare:

2.1 l'energia elettrostatica totale (detta anche energia potenziale totale) $U$ del sistema di cariche e il potenziale elettrostatico $V_C$ da esse generato nel centro del quadrato

$U$= ................ $V_C$ = ......................

Una quinta particella puntiforme e di carica $Q = 5\ \mu C$ viene posta nel centro del quadrato.
Calcolare:

2.2 la forza $\overrightarrow{F}$ esercitata dal sistema delle quattro cariche puntiformi sulla carica $Q$

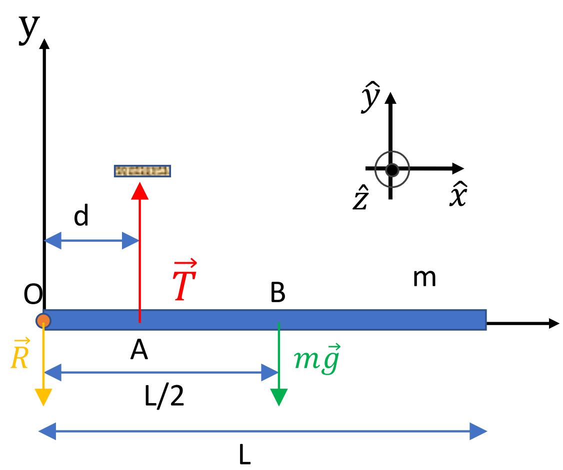
$\overrightarrow{F}$= ................

2.3 l'energia cinetica $T_C$ minima che deve essere fornita alla particella di carica $Q$ posta nel centro del quadrato affinchè essa arrivi nel punto $A$ indicato in figura

$T_C$= ................

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$

## Soluzione Esercizio 1




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda 1.1**

Le forze esterne applicate alla sbarra sono la reazione vincolare $\overrightarrow{R}$, la forza peso $m\overrightarrow{g}$ e la tensione del filo $\overrightarrow{T}$ mostrate in figura. In condizione di equilibrio la risultante delle forze esterne e la risultante dei loro momenti devono essere nulle. Prendendo come polo il punto O, il momento della reazione vincolare in $O$ è nullo. Pertanto, imponendo che la risultante dei momenti delle forze esterne è nulla, utilizzando i versori indicati in figura, si ottiene:

$$0 = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{T} + \overrightarrow{OB} \wedge m\overrightarrow{g} = \left(Td - mg\frac{L}{2}\right)\hat{z} \quad \Rightarrow \quad T = mg\frac{L}{2d} = 49.1\ N$$

Mentre imponendo che la risultante delle forze esterne è nulla otteniamo:

$$m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{R} = 0$$

che risolta per componenti fornisce: $\begin{cases} x : R_x = 0 \\ y : T - mg + R_y = mg\left(\frac{L}{2d} - 1\right) + R_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_y = -mg\left(\frac{L}{2d} - 1\right) = -29.4\ N \end{cases}$

Come mostrato in figura, all'equilibrio la reazione del perno ha solo componente lungo $\hat{y}$:

$$\overrightarrow{R} = -29.4\hat{y}\ N$$

**Domanda 1.2**

Dopo il taglio del filo le uniche forze in gioco sono la forza peso e la reazione della cerniera, quest'ultima sempre applicata in $O$. La seconda equazione cardinale, utilizzando come polo per il calcolo dei momenti il punto $O$, un istante dopo il taglio diviene:

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OB} \wedge m\overrightarrow{g} = I\vec{\alpha}_0$$

dove $I$ è il momento di inerzia dell'asta rispetto al polo $O$, che utilizzando il teorema di Steiner e indicando con $I_{cm}$ il momento di inerzia dell'asta rispetto al centro di massa è dato da:

$$I = I_{cm} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = m\frac{L^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = m\frac{L^2}{3}$$

Inoltre, essendo entrambi i vettori del prodotto vettoriale giacenti sul piano $xy$ l'accelerazione angolare è diretta lungo $\hat{z}$. Pertanto dalla seconda equazione cardinale:

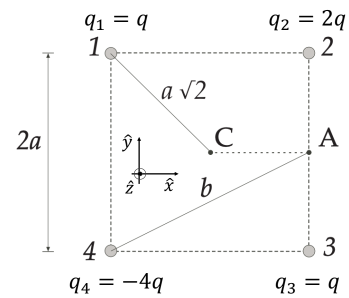
$$\frac{L}{2}\hat{x} \wedge (-mg\hat{y}) = -mg\frac{L}{2}\hat{z} = I\alpha_{0z}\hat{z} = m\frac{L^2}{3}\alpha_{0z} \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \frac{3g}{2L} = 14.7\ \frac{rad}{s^2}$$

**Domanda 1.3**

Quando il filo viene tagliato, non essendo in gioco forze non conservative che compiono lavoro (la reazione vincolare non compie lavoro poichè il punto di applicazione è fermo) l'energia meccanica si conserva. Di conseguenza indicando con $K_f(K_i)$ l'energia cinetica finale (iniziale) e con $U_f(U_i)$ l'energia potenziale finale (iniziale), vale $K_f - K_i = U_i - U_f$. Poichè l'asta è lasciata cadere con velocità iniziale nulla, $K_i = 0$, $U_i - U_f = mg(h_i - h_f) = mg\frac{L}{2}$ e poichè $K_f = K$, per l'energia cinetica finale otteniamo:

$$K = mg\frac{L}{2} = 9.81\ J$$

## Soluzione Esercizio 2




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda 2.1**
Con riferimento alla figura, numerando le cariche come in figura con $q_1$, $q_2$, $q_3$, $q_4$ l'energia elettrostatica del sistema è definita dalla relazione:

$$U = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j=1}^{4}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_1q_4}{r_{14}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}} + \frac{q_2q_4}{r_{24}} + \frac{q_3q_4}{r_{34}}\right)$$

dove $q_i$ è la i-esima carica $r_{ij}$ è la distanza tra la carica $i$ e la carica $j$ e il fattore $\frac{1}{2}$ prima del simbolo della sommatoria deriva dal fatto che le coppie vanno considerate una sola volta. Considerando i sei termini distinti della sommatoria, con le relative cariche e distanze, si ottiene:

$$U = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(4 + \frac{7}{\sqrt{2}}\right) = -0.40\ J$$

Il potenziale nel punto C, rispetto all'infinito, dal teorema di sovrapposizione degli effetti lo si ottiene sommando i potenziali dovuti alle singole cariche puntiformi $q_i$, equidistanti dal punto $C$, con distanza pari a $a\sqrt{2}$.

$$V_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}}\left(q + 2q + q - 4q\right) = 0$$

**Domanda 2.2**
La forza esercitata sulla carica $Q$, posta nel punto $C$, la si ottiene sommando vettorialmente le forze dovute alle singole cariche puntiformi $q_i$, tutte alla distanza $a\sqrt{2}$ da $C$. In particolare, i contributi delle cariche $q_1$ e $q_3$ alla forza risultante hanno lo stesso modulo la stessa direzione e verso opposto e si cancellano vicendevolmente, mentre quelli delle cariche $q_2$ e $q_4$ hanno la stessa direzione ( diagonale del quadrato) e lo stesso verso dando luogo ad una forza, diretta come la diagonale e verso verso il vertice del quadrato in cui è posta la carica $q_4$ e di modulo pari alla somma dei moduli delle forze pertanto :

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{2}a\right)^2}\left(2qQ + 4qQ\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}\right) = -13.5\ N\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Per cui scritta per componenti la forza risultante è data da:

$$\overrightarrow{F} = \left(-\frac{1}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a^2}\left(6qQ\right), -\frac{1}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a^2}\left(6qQ\right)\right) = (-9.55, -9.55)\ N$$

**Domanda 2.3**
Poichè non sono in gioco forze non conservative che compiono lavoro sul sistema, vale la conservazione dell'energia del sistema, inoltre le 4 cariche sono ferme ed hanno la stessa energia iniziale e finale. Pertanto, dalla conservazione dell'energia:

$$T_C + QV_C = T_A + QV_A$$

dove il primo termine e il secondo termine dell'uguaglianza rappresentano rispettivamente la somma delle energie cinetiche e potenziali iniziali e finali. L'energia cinetica minima che deve essere fornita corrisponde a $T_A = 0$ per cui:

$$T_C = Q\left(V_A - V_C\right)$$

Dalla risposta alla domanda 2.1, $V_C = 0$, mentre per $V_A$ (vedi figura per la definizione di $b$):

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{b} + \frac{2q}{a} + \frac{q}{a} - \frac{4q}{b}\right)$$

Dal teorema di Pitagora, vedi figura, $b = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$, pertanto:

$$T_C = Q\left(V_A - V_C\right) = \frac{3qQ}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0.746\ J$$

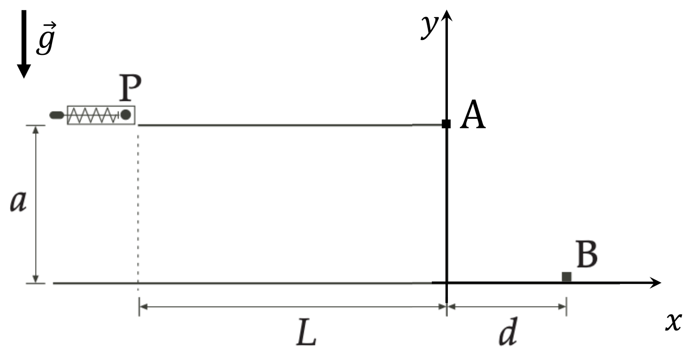
## Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 1/02/2023**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, un punto materiale $P$ di massa $m$ viene lanciato, mediante una molla di costante elastica $k$, su un piano orizzontale di lunghezza $L = 2\ m$, posto alla quota $a = 1\ m$ rispetto al suolo (vedi figura). Calcolare:

1.1 il modulo della velocità $\mid \overrightarrow{v}_A \mid$ che $P$ deve possedere alla fine del piano a quota $a$, nel punto $A$, per colpire un bersaglio puntiforme, posto al suolo in $B$ a una distanza $d = 1\ m$ dall'origine degli assi cartesiani

$\mid \overrightarrow{v}_A \mid =$ ................

1.2 l'angolo di impatto al suolo $\phi_B$ in radianti (l'angolo che forma la direzione del punto materiale $P$ in $B$ con l'asse delle $x$)

$\phi_B =$ ................

Se $\frac{m}{K} = 2 \times 10^{-3} s^2$ determinare:

1.3 le compressioni $\delta$ e $\delta^{'}$ della molla necessarie affichè il punto materiale $P$ colpisca il bersaglio posto in $B$ rispettivamente nel caso in cui il piano a quota $a$ è liscio e nel caso in cui esso è scabro e con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.5$

$\delta =$ ................ $\delta^{'} =$ ......................

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $g = 9,81$ m/s$^2$

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**
Con riferimento alla figura, si consideri un cavo conduttore di materiale omogeneo costituito da un cilindro rettilineo di lunghezza infinita e raggio $R_1 = 1\ cm$. In esso scorre una corrente $i_1 = 3\ mA$ avente densità di corrente uniforme sulla sezione del cavo. Il cavo è circondato da una buccia cilindrica coassiale al cavo, anch'essa infinitamente lunga, di raggio $R_2 = 3\ cm$ e spessore trascurabile. In essa scorre una corrente $i_2 = 2\ mA$, di verso opposto a $i_1$, distribuita uniformemente lungo la sezione della buccia. Tutto il sistema è nel vuoto.

2.1 Determinare il vettore campo magnetico $\overrightarrow{B}$ in coordinate cilindriche in tutto lo spazio, e fare un grafico del modulo del campo magnetico, $|\ \vec{B}\ |$, in funzione della distanza dall'asse comune ai due cilindri

$$\overrightarrow{B} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.2 Determinare in coordinate cartesiane la forza $\overrightarrow{F}$ agente su una particella di carica $q = 1\ nC$ all'istante $t_0$, quando essa si trova nel punto $P$ a una distanza $d = 4\ cm$ dall'asse comune ai due cilindri ed è in moto con una velocità $v_0 = 100\ \frac{m}{s}$, diretta come in figura

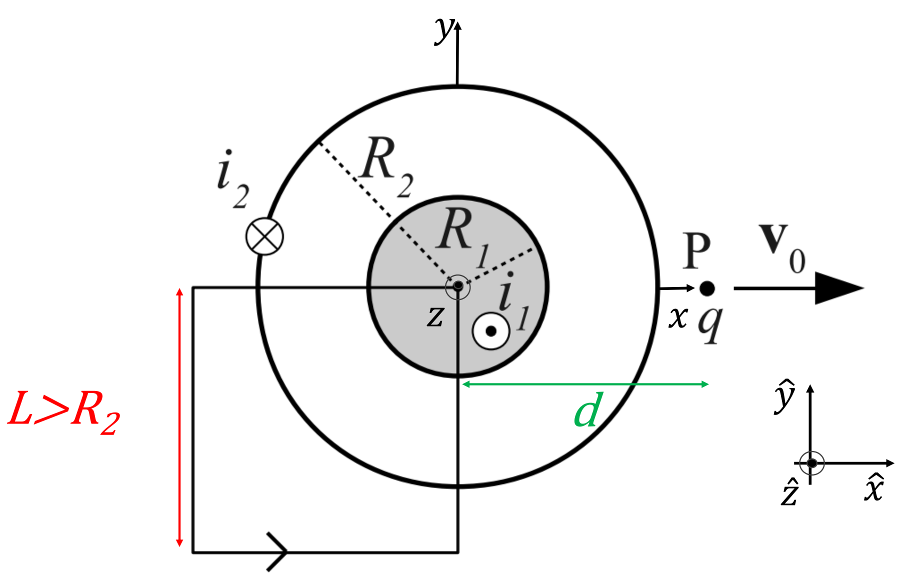
$$\overrightarrow{F} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sia ora data una linea chiusa orientata $C$, di forma quadrata con lato $L$ maggiore di $R_2$, disposta su un piano perpendicolare all'asse di simmetria del sistema e con un vertice su di esso, come in figura.

2.3 Si determini la circuitazione del campo $\overrightarrow{B}$ lungo la linea orientata C.

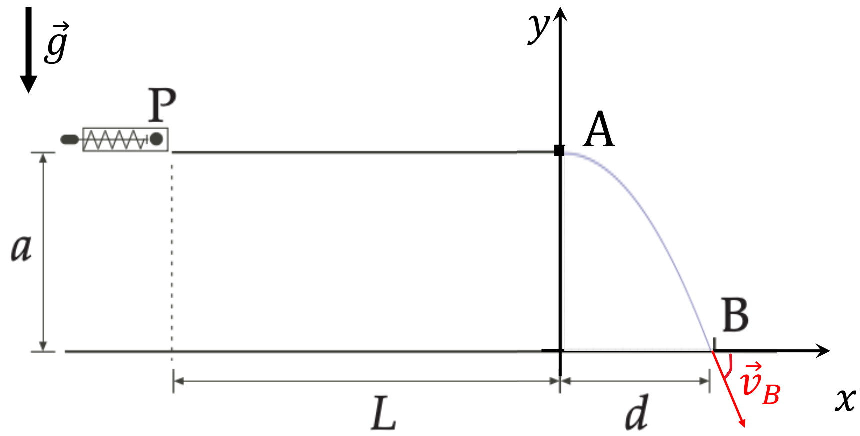
$$\oint_C \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

**Costanti Utili:** $\mu_0 = 1.257\ 10^{-6}$ TmA$^{-1}$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo* )

## Soluzione Esercizio 1




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda 1.1**
Dopo la fine del piano orizzontale, il punto segue una traiettoria parabolica sul piano $xy$ con accelerazione $(0, g)$, velocità iniziale $(v_A, 0)$, e posizione iniziale $(0, a)$, avendo scelto il sistema di riferimento con asse orizzontale sul suolo e asse verticale passante per il punto $A$. Il moto è quindi uniformemente accelerato lungo $y$ e rettilineo uniforme lungo x. Affinchè il punto materiale $A$ colpisca il bersaglio la sua traiettoria parabolica deve passare per il punto $B$ di coordinate $(d, 0)$. Scrivendo le leggi orarie lungo x e lungo y otteniamo:

$$\begin{cases} x = v_A t \\ y = a - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_x = v_A \\ v_y = -gt \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{per x=d e y=0} \begin{cases} v_A = \frac{d}{t^*} \\ t^* = \sqrt{\frac{2a}{g}} \quad \Rightarrow \quad v_A = d\sqrt{\frac{g}{2a}} \\ v_x(d,0) = v_A = v_{Bx} \\ v_y(d,0) = -gt^* \quad \Rightarrow \quad v_y(d,0) = -g\sqrt{\frac{2a}{g}} = v_{By} \end{cases}$$

per cui:

$$v_A = d\sqrt{\frac{g}{2a}} = 2.21 \ \frac{m}{s}$$

**Domanda 1.2**
La tangente dell'angolo formato dalla traiettoria del punto materiale con l'asse delle $x$ nel punto $B$ è data dal rapporto tra le componenti della velocità $\vec{v}_B = (v_{Bx}, v_{By})$ nel punto $B$ di coordinate $(d, 0)$:

$$tg(\phi_B) = \frac{v_{By}}{v_{Bx}} = -\frac{g}{d}\frac{2a}{g} = -\frac{2a}{d} = -2 \quad \Rightarrow \quad \phi_B = -arctan(2) = -1.11 rad$$

**Domanda 1.3**
Il punto materiale per colpire il bersaglio in $B$, deve avere nel punto $A$ la velocità in modulo calcolata nella domanda 1.1, $v_A$. Nel caso in cui il piano a quota $a$ è liscio, vale la conservazione dell'energia essendo nullo il lavoro compiuto dalle forze esterne non conservative (l'unica forza esterna potenzialmente non conservativa è la reazione del piano, che però è ortogonale allo spostamento) pertanto:

$$\frac{1}{2}k\delta^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 \quad \Rightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{m}{k}}v_A = \sqrt{\frac{mg}{2ak}}d = 9.9 \times 10^{-2} \ m$$

Nel caso in cui il piano è scabro con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d$, vale:

$$T_f - T_i = \frac{1}{2}mv_A^2 = U_i - U_f + \mathcal{L}_{NC} = \frac{1}{2}k\delta'^2 - \mu_d mgL \quad \Rightarrow \quad \delta' = \sqrt{\frac{m}{k}\left(v_A^2 + 2\mu_d gL\right)} = \sqrt{\frac{mg}{k}\left(\frac{d^2}{2a} + 2\mu_d L\right)} = 0.221 \ m$$

dove abbiamo indicato con $T_f$ e $T_i$, e $U_f$ e $U_i$ rispettivamente le energie cinetiche e potenziali finali e iniziali, e infine con $\mathcal{L}_{NC}$ il lavoro fatto dalle forze non conservative, in questo caso la forza di attrito.

# Soluzione Esercizio 2

**Domanda 2.1**

Data la simmetria cilindrica del sistema, le linee del campo magnetico $\overrightarrow{B}$ sono delle circonferenze centrate sull'asse del sistema e giacenti su piani perpendicolari ad esso. Pertanto $\overrightarrow{B}$ in coordinate cilindriche ha solo componente tangenziale in coordinate cilindriche. Fissando come verso convenzionalmente positivo quello antiorario per la circuitazione di $\overrightarrow{B}$, la componente tangenziale di $\overrightarrow{B}$ si determina applicando il teorema di Ampere lungo il percorso chiuso orientato scelto per la circuitazione. Esprimendo il campo magnetico in coordinate cilindriche come $\overrightarrow{B} = (0, B_T, 0)$, dal teorema di Ampere:

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{conc} \quad \Rightarrow \quad B_T 2\pi r = \mu_0 I_{conc}$$

dove $I_{conc}$ è la corrente concatenata con la linea circolare.
Per $r \leq R_1$ la corrente concatenata è data da:

$$I_{conc} = \int \overrightarrow{J_1} \cdot \hat{z} dS = \int_0^r \frac{i_1}{\pi R_1^2} dS = \frac{i_1}{\pi R_1^2} \pi r^2$$

Per $R_1 \leq r < R_2$ la corrente concatenata è data da $i_1$. Infine per $r > R_2$ la corrente concatenata vale $i_1 - i_2$. Per cui il campo magnetico ha la seguente espressione in funzione di r in coordinate cilindriche:

$$\overrightarrow{B} = B_T \hat{u}_T \equiv (0, B_T, 0) \quad con \quad B_T(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i_1 r}{2\pi R_1^2} & 0 \leq r < R_1 \\ \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} & R_1 \leq r < R_2 \\ \frac{\mu_0 (i_1 - i_2)}{2\pi r} & r > R_2 \end{cases}$$

Si osservi che $i_1 > i_2$, per cui le linee di campo magnetico sono sempre antiorarie qualunque sia r.
Il grafico del modulo del campo magnetico, $|\overrightarrow{B}|$, in funzione della distanza $r$ dall'asse dei cilindri è riportato in figura a.

**Domanda 2.2**

Una particella di carica $q$ posta nel punto $P$ con velocità $\overrightarrow{v}_0 = v_0 \hat{x}$ al tempo $t_0$ è sottoposta alla forza di Lorentz $\overrightarrow{F}_L$ data da:

$$\overrightarrow{F}_L = q v_0 \hat{x} \wedge \overrightarrow{B}(P)$$

Il punto $P$ è esterno ai due cilindri, di conseguenza in P:

$$\vec{B}(P) = B_T(d)\hat{u}_T = \frac{\mu_0 (i_1 - i_2)}{2\pi d} \hat{u}_T$$

Guardando la figura b, in coordinate cartesiane:

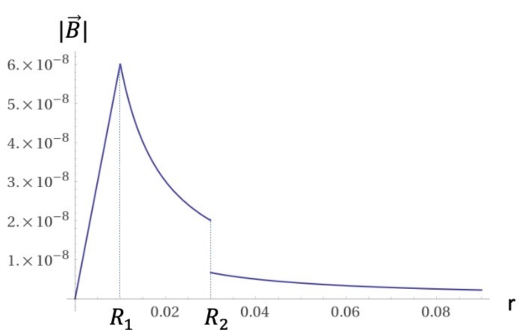
$$\overrightarrow{B}(P) = \frac{\mu_0 (i_1 - i_2)}{2\pi d} \hat{y} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{F}_L = q v_0 \hat{x} \wedge \frac{\mu_0 (i_1 - i_2)}{2\pi d} \hat{y} = \frac{q v_0 \mu_0 (i_1 - i_2)}{2\pi d} \hat{z} = \left(5 \times 10^{-16}\ N\right) \hat{z}$$

**Domanda 2.3**

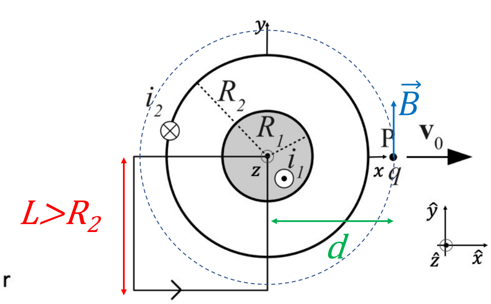
Dal teorema di Ampere e per il percorso orientato scelto:

$$\oint_C \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{conc} = \mu_0 \frac{(i_1 - i_2)}{4} = 3.15 \times 10^{-10}\ Tm$$

poichè per il percorso scelto la corrente uscente è $\frac{i_1}{4}$ e quella entrante è $\frac{i_2}{4}$.




a




b

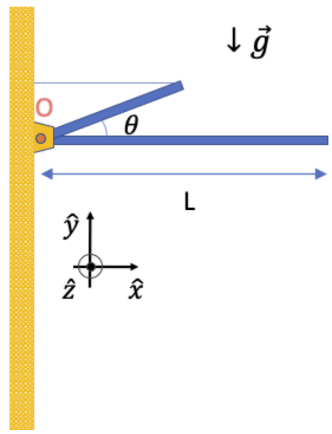
(*Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo*)

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**
**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 15/02/2023**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, si consideri un corpo rigido costituito da due aste sottili e omogenee dello stesso materiale, una di lunghezza $L = 80\ cm$ e una di lunghezza $L/2$, saldate a un estremo $O$ e che formano un angolo di $\theta = 45^o$. La massa complessiva del corpo rigido costituito dalle due aste è $M = 100\ kg$ ed esso è ancorato in $O$ a una parete verticale tramite un perno attorno al quale può ruotare senza attriti nel piano $xy$.
Il corpo è mantenuto in equilibrio statico nella disposizione indicata in figura tramite l'azione di una fune orizzontale e ideale (priva di massa e inestensibile) connessa a un estremo all'asta più corta, e all'altro estremo alla parete verticale. Si calcoli:

1.1 il modulo della tensione $|\overrightarrow{T}|$ della fune

$$|\overrightarrow{T}| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1.2 La reazione $\overrightarrow{R}$ del perno

$$\overrightarrow{R} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

A un certo istante la fune viene tagliata.

1.3 Determinare la velocità angolare $\omega$ del corpo rigido un istante prima dell'urto con la parete verticale.

$$\omega = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$

**ESERCIZIO.2** – **Elettromagnetismo**
Con riferimento alla figura, un solenoide rettilineo indefinito, con $n = 5\ cm^{-1}$ spire per unità di lunghezza e sezione quadrata di lato $a$, è percorso dalla corrente continua $i = 4\ A$.

2.1 Si determini il campo magnetico $\overrightarrow{B}$

in tutto lo spazio in coordinate cilindriche se l'asse z coincide con l'asse del solenoide, (non utilizzando semplicemente la formula ma ricavandola nel caso in esame)

$$\overrightarrow{B} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Una spira quadrata di lato $b = 3\ cm$ con $b < a$ e resistenza totale $r = 2\ m\Omega$, giacente in un piano ortogonale all'asse del solenoide, è parzialmente inserita in esso, attraverso una sottile fenditura praticata sulla superficie dello stesso (si trascurino i corrispondenti effetti di bordo).

2.2 Calcolare il flusso di $\overrightarrow{B}$ concatenato con la spira, $\phi_B$, quando essa si trova nella posizione indicata in figura.

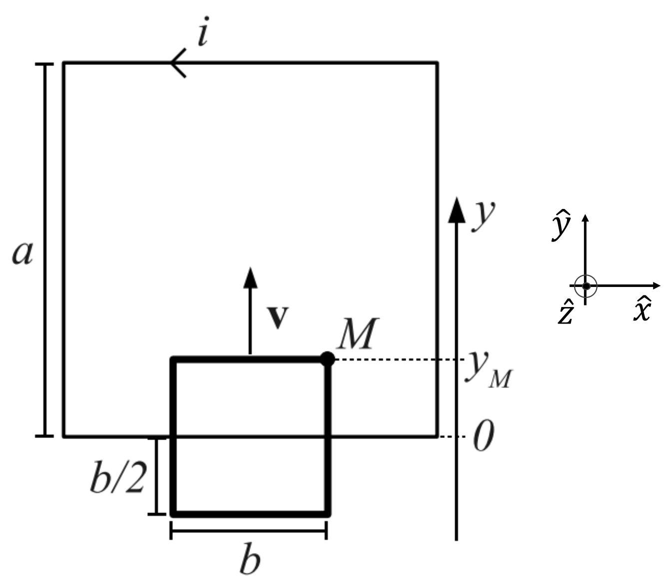
$$\phi_B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dall'istante $t = 0$ la spira viene posta in moto con velocità costante, di modulo $v = 3\ m/s$, e diretta come indicato in figura. Corrispondentemente, la legge oraria per il punto $M$ della spira nel riferimento scelto è : $y_M = \frac{b}{2} + vt$ (per $t > 0$).

2.3 Si calcoli il valore della corrente indotta $i_{ind}(t)$ nella spira in funzione del tempo fino a quando la spira ha coordinata $y_M = a$ e se ne faccia un grafico qualitativo dal tempo $t = 0$ al tempo $t = t'$ in cui il vertice M della spira ha coordinata $y_M = a$. Inoltre, nel caso in cui $i_{ind} \neq 0$, si determini il verso della corrente nella spira, giustificando la risposta e con un disegno.

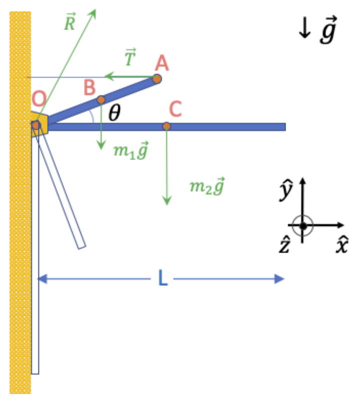
$$i_{ind}(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

**Costanti Utili:** $\mu_0 = 1.257\ 10^{-6}\ \mathrm{TmA}^{-1}$




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo* )

## Soluzione Esercizio 1




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda 1.1**

Il corpo rigido è stato ottenuto saldando due aste sottili omeogenee dello stesso materiale. Pertanto poichè un'asta ( che indicheremo con 2) ha lunghezza $L$ e l'altra ( che indicheremo con 1) ha lunghezza $L/2$, vale la seguente relazione tra le masse $m_1$ e $m_2$ delle aste 1 e 2: $m_2 = 2m_1$. Inoltre poichè la massa totale delle due aste è $M$ vale:

$$m_1 + m_2 = M = m_1 + 2m_1 \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{1}{3}M \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{2}{3}M$$

Il corpo rigido è inizialmente in equilibrio e quindi la risultante delle forze esterne e dei momenti delle forze esterne che agiscono su di esso è nulla. Le forze esterne sono la tensione del filo $\overrightarrow{T}$, la forza peso applicata al centro di massa (cm) del corpo rigido, $M\overrightarrow{g}$, che è la somma delle forze applicate al cm di ciascuna asta, $m_1\overrightarrow{g} + m_2\overrightarrow{g}$, la reazione del perno applicata in $O$. La prima equazione cardinale pertanto fornisce:

$$M\vec{g} + \vec{T} + \vec{R} = 0$$

Scegliendo il punto $O$ come polo a cui riferire i momenti, la seconda equazione cardinale, tenendo conto che $\overrightarrow{R}$ agisce in $O$, fornisce:

$$\vec{OA} \wedge \vec{T} + \vec{OB} \wedge m_1\vec{g} + \vec{OC} \wedge m_2\vec{g} = I_O\vec{\alpha} = 0 = \left(\frac{1}{2}TLsin\theta - \frac{L}{4}m_1gcos\theta - \frac{L}{2}m_2g\right)\hat{z}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}TLsin\theta - \frac{L}{12}Mgcos\theta - \frac{L}{6}2Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{4 + cos\theta}{6sin\theta}Mg = \frac{8 + \sqrt{2}}{6\sqrt{2}}Mg = \frac{1 + 4\sqrt{2}}{6}Mg = 1.09 \times 10^3 \ N$$

dove $I_O$ è il momento di inerzia rispetto al polo in $O$

**Domanda 1.2**

Mentre dalla seconda equazione cardinale all'equilibrio, proiettando lungo $x$ e lungo $y$ la risultante delle forze, otteniamo:

$$\begin{cases} \mathrm{R}_x - T = 0 \\ \mathrm{R}_y - Mg = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{R}_x = T = 1.09 \times 10^3 \ N \\ \mathrm{R}_y = Mg = 9.81 \times 10^2 \ N \end{cases}$$

**Domanda 1.3**

Quando la fune viene tagliata, il corpo rigido scende ruotando intorno al perno in $O$. Non essendo presenti forze non conservative che compiono lavoro (il punto di applicazione della reazione $\overrightarrow{R}$, $O$, è fisso) l'energia meccanica si conserva:

$$\Delta K = -\Delta U = K_f - K_i = U_i - U_f = K_f = m_1g(h_{1i} - h_{1f}) + m_2g(h_{2i} - h_{2f}) = \frac{M}{3}g\frac{L}{4}(sin\theta + cos\theta) + \frac{2}{3}Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

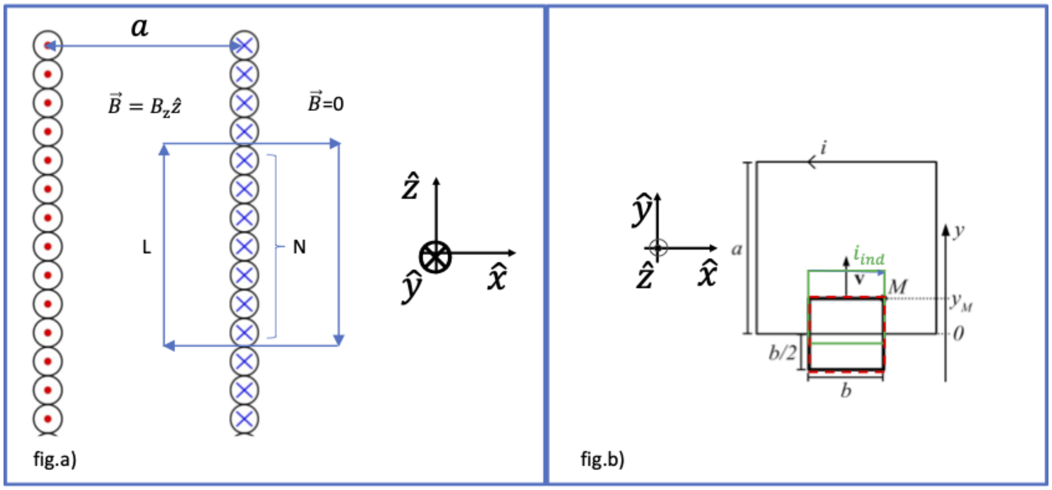
dove con $K$ e $U$ abbiamo indicato rispettivamente l'energia cinetica e potenziale iniziale (pedice $i$) e finale (pedice $f$), e $\frac{L}{4}(sin\theta + cos\theta)$ e $\frac{L}{2}$ sono le quote di cui scendono rispettivamente i centri di massa dell'asta corta e dell'asta lunga (equivalente ad assumere l'origine dell'energia potenziale in $y = 0$). Infine $I_O$, momento di inerzia del corpo rispetto al polo in $O$, si calcola usando il teorema di Steiner:

$$I_O = I_{O1} + I_{O_2} = \frac{m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2}{12} + m_1\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \frac{m_2L^2}{12} + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{M}{3}\frac{L^2}{4}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{3}ML^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = \frac{ML^2}{3}\left(\frac{1}{12} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}ML^2$$

Per cui:

$$\frac{1}{8}ML^2\omega^2 = \frac{MgL}{3}\left(\frac{1}{4}(sin\theta + cos\theta) + 1\right) \ \Rightarrow \ \omega = \sqrt{\frac{8}{3}\left[\frac{1}{4}(sin\theta + cos\theta) + 1\right]\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + 4\right)\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\sqrt{2} + 4\right)\frac{g}{L}} = 6.65 \ rad/s$$

## Soluzione Esercizio 2




(*Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo*)

Trattandosi di un solenoide rettilineo indefinito, dal teorema di Ampere, e sapendo che il campo è nullo al di fuori di esso ed è uniforme all'interno e parallelo all'asse $z$ otteniamo:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{conc} \quad \Rightarrow \quad B_z L = \mu_0 I_{conc}$$

dove $I_{conc} = Ni$ è la corrente concatenata con la linea chiusa e orientata scelta per la circuitazione (vedi figura a), il segno algebrico è positivo, dato che per l'orientazione scelta del percorso la corrente concatenata è uscente per la regola della mano destra).
Dalla figura a, $B_z = \mu_0 i \frac{N}{L} = \mu_0 in$ per cui in coordinate cilindriche:

$$\vec{B} = B_z\hat{z} \quad dove \quad B_z = \begin{cases} \mu_0 ni = 2.5\ mT & \text{dentro il solenoide} \\ 0 & \text{fuori del solenoide} \end{cases}$$

**Domanda 2.2**

Orientando la spira in verso antiorario, la normale all'elemento $ds$ della spira $\hat{n} = \hat{z}$ e il flusso del campo magnetico attraverso di essa è dato da:

$$\oint \vec{B} \cdot \hat{n} ds = B_z b \frac{b}{2} = \frac{1}{2}\mu_0 nib^2 = 1.13 \mu T m^2$$

**Domanda 2.3**

$$\phi_B(t) = \begin{cases} \mu_0 nib\left(\frac{b}{2} + vt\right) & 0 \le t \le t_1 \\ \mu_0 nib^2 & t > t_1 \text{ e } y_M < a \end{cases}$$

Quando la spira si muove con velocità v diretta come nella figura b, il flusso del campo magnetico ad essa concatenato aumenta in funzione tempo fino a quando la spira entra completamente nel solenoide (all'istante $t = t_1 = \frac{b}{2v} = 0.005\ s$). Quando la spira è entrata completamente nel solenoide, il flusso è massimo e rimane costante. Poichè tra 0 e $t_1$ in flusso aumenta nella spira viene indotta una corrente che si oppone all'aumento del flusso e che pertanto circola in verso orario nella spira (vedi figura b). Mentre, per $t > t_1$ essendo il flusso costante la corrente indotta è nulla. Pertanto:

$$\mathrm{i}_{ind} = \frac{1}{r} \mid \frac{d\phi_B(t)}{dt} \mid = \begin{cases} \frac{\mu_0 nibv}{r} = 113\ mA & 0 \le t \le t_1 \\ 0 & t > t_1 \text{ e } y_M < a \end{cases}$$

Il grafico della corrente indotta in funzione del tempo è mostrato nella figura c.

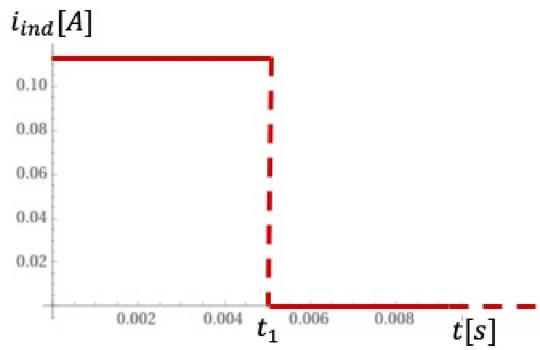


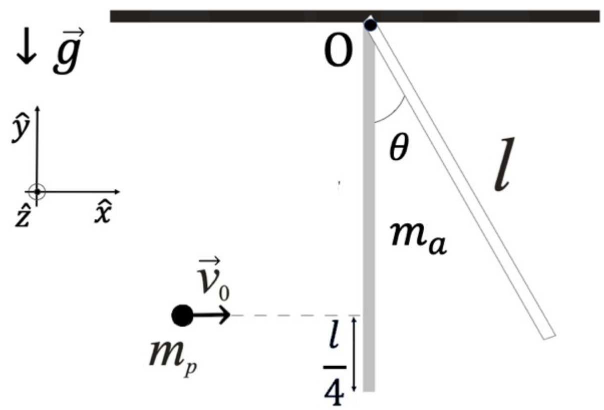

fig.c)

(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

# Corso di Laurea: Ingegneria Informatica
## Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 7/06/2023

| | |
|---|---|
| **Nome:** | **Matricola:** |
| **Cognome:** | **Anno di Corso:** |

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Una asta di lunghezza $l = 1\ m$ e massa $m_a = 1\ kg$, inizialmente ferma in posizione verticale, è appesa per un estremo al soffitto. Un proiettile di massa $m_p = 10\ g$, che si muove con velocità orizzontale di modulo $v_0 = 100\ m/s$, urta l'asta a distanza $l/4$ dal suo estremo libero (vedi figura), rimanendovi conficcato. Si calcoli:

1.1 la velocità angolare $\overrightarrow{\omega}$ posseduta dal sistema un istante dopo l'urto

$$\overrightarrow{\omega} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1.2 la differenza $\Delta\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P}_f - \overrightarrow{P}_i$, tra le quantità di moto del sistema asta proiettile, un istante dopo e un istante prima dell'urto

$$\Delta\overrightarrow{P} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1.3 l'angolo massimo $\theta_{max}$ formato dall'asta con la verticale nel moto successivo all'urto e il periodo delle piccole oscillazioni $T$ del sistema asta proiettile

$$\theta_{max} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad T = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $g = 9,81$ m/s$^2$

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**

Una sfera di raggio $R = 10\ cm$ è caricata in modo tale che il campo elettrostatico $\overrightarrow{E}$ al suo interno in un sistema di coordinate sferiche con origine nel centro della sfera sia diretto radialmente verso l'esterno con $\overrightarrow{E} = \alpha r^2 \hat{r}$ dove con $r$ si è indicata la distanza dal centro della sfera e $\alpha = 9\ kV/m^3$. Determinare:

2.1 la carica della sfera $Q$

$Q$= ................

2.2 il potenziale elettrostatico $V(r)$ in funzione della distanza $r$ dal centro $O$ della sfera e calcolare $V_O = V(0)$ nel centro della sfera

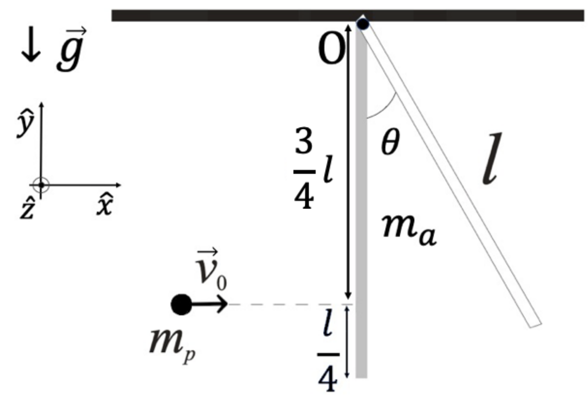
$V(r)$= ................ $V_O$ = ......................

2.3 il modulo della velocità $v$ con cui arriva al centro della sfera un elettrone che parte da fermo dalla superficie della sfera

$v$= ................

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $\varepsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}\ F/m$, massa elettrone $m = 9.1 \times 10^{-31}\ kg$, carica dell'elettrone $q = -1.6 \times 10^{-19}\ C$

## Soluzione Esercizio 1




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda 1.1**
Nell'urto si conserva il momento angolare con polo in $O$ perchè le uniche forze esterne applicate sono la reazione dell'asse attorno al quale avviene la rotazione (che ha braccio nullo per definizione) e la gravità, che non è impulsiva. Dalla conservazione del momento angolare rispetto a tale asse:

$$\overrightarrow{L}_i = m_p v_0 \frac{3}{4} l \hat{z} = \overrightarrow{L}_f = I_O \overrightarrow{\omega} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\omega} = \frac{m_p v_0 3l}{4 I_O} \hat{z}$$

dove $I_O$ è il momento di inerzia del sistema (asta più proiettile) dopo l'urto rispetto all'asse di rotazione passante per $O$:

$$I_O = m_p \left(\frac{3}{4} l\right)^2 + m_a \frac{l^2}{3} = 0.339\ kgm^2$$

Dalle ultime due equazioni si ricava:

$$\overrightarrow{\omega} = 2,21\ rad/s \hat{z}$$

**Domanda 1.2**
Non si conserva la quantità di moto del sistema asta-punto materiale nell'urto in quanto in $O$ si sviluppa una reazione impulsiva. Di conseguenza $\Delta \overrightarrow{P} \neq \overrightarrow{0}$ La differenza tra la quantità di moto del sistema un istante dopo e un istante prima dell'urto è data da

$$\Delta \overrightarrow{P} = (m_p v_1 + m_a v_2 - m_p v_0)\, \hat{x}$$

dove le velocità $v_1$ e $v_2$ possono essere calcolate nota $\omega$ e le distanze dei centri di massa dell'asta e del punto materiale da $O$. Per cui:

$$\Delta \overrightarrow{P} = \left(m_p \omega \frac{3}{4} l + m_a \omega \frac{l}{2} - m_p v_0\right) \hat{x} = 0.123\ Ns\ \hat{x}$$

**Domanda 1.3**
Considerando che la reazione vincolare in O non può compiere lavoro poiché il suo punto di applicazione è fisso e che la rimanente forza in gioco è la forza di gravità che è conservativa, l'energia meccanica nel moto dopo l'urto si conserva. Di conseguenza, l'angolo massimo formato dall'asta con la verticale si ottiene applicando la conservazione dell'energia meccanica, determinando la posizione dell'asta in cui l'energia cinetica si annulla. Per cui, prendendo l'origine dell'energia potenziale alla quota dell'estremo inferiore dell'asta in cui l'asta forma un angolo di $0^o$, le quote iniziali e finali dell'asta ($h_i^a$,$h_f^a$) e del proiettile ($h_i^p$,$h_f^p$) sono date da:

$$h_i^a = \frac{l}{2} \quad h_f^a = \frac{l}{2} + \frac{l}{2}(1 - cos\theta_{max}) \quad h_i^p = \frac{l}{4} \quad h_f^p = \frac{l}{4} + \frac{3}{4} l (1 - cos\theta_{max})$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$T_f - T_i = U_i - U_f = 0 - \frac{1}{2} I_O \omega^2 = m_p g \left(h_i^p - h_f^p\right) + m_a g \left(h_i^a - h_f^a\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \left(\frac{1}{2} m_a + \frac{3}{4} m_p\right) gl(1 - cos\theta_{max})$$

$$\Rightarrow \quad cos\theta_{max} = 1 - \frac{I_O \omega^2}{\left(m_a + \frac{3}{2} m_p\right) gl} \quad \Rightarrow \quad \theta_{max} = 0.586\ rad (33.6^o)$$

Ovviamente avremmo potuto anche usare il teorema di $König$ per esprimere l'energia cinetica.

Il sistema è assimilabile ad un pendolo fisico. La posizione di equilibrio stabile del sistema è quella corrispondente all'asta in basso in posizione verticale ($\theta = 0$). Se posto in questa questa posizione, il sistema resta in questa configurazione, e se il sistema è ruotato di un'angolo molto minore di un radiante, $\theta_0$ ( $\theta_0 \leq 0.17 rad$) esso inizierà ad oscillare attorno alla posizione di equilibrio $\theta = 0$. Ci sono due procedure per determinare $T$. La prima considera la conservazione dell'energia che per una posizione arbitraria $\theta$ del pendolo fisico composto da asta più proiettile, ci permette di esprimere l'energia del sistema come:

$$E(\theta) = \frac{1}{2} I_O \omega^2 + m_p gl \left(1 - \frac{3}{4} cos\theta\right) + m_a gl \left(1 - \frac{1}{2} cos\theta\right) = costante$$

Per cui:

$$\frac{dE}{dt} = 0 = I_O \omega\dot{\omega} + m_p gl \frac{3}{4} sin\theta\dot{\theta} + m_a gl \frac{1}{2} sin\theta\dot{\theta}$$

Ricordando che $\omega = \dot{\theta}$ e $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$, dividendo per $\omega$ l'ultima equazione, otteniamo:

$$I_O \ddot{\theta} + m_p gl \frac{3}{4} sin\theta + m_a gl \frac{1}{2} sin\theta = 0$$

Per piccole oscillazioni: $sin\,(\theta) \simeq \theta$, per cui l'equazione diviene:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{m_p gl \frac{3}{4} + m_a gl \frac{1}{2}}{I_O}\right) \theta = 0$$

che è l'equazione differenziale dei moti oscillatori non smorzati. La legge oraria del moto è:

$$\theta(t) = \theta_0 cos(\Omega t + \phi)$$

con

$$\Omega = \sqrt{\frac{m_p gl \frac{3}{4} + m_a gl \frac{1}{2}}{I_O}} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{m_p gl \frac{3}{4} + m_a gl \frac{1}{2}}} = 1.64\ s$$

La seconda procedura sfrutta la $II^a$ equazione cardinale. Quando il pendolo composto viene spostato dalla posizione di equilibrio ($\theta = 0$) ad una posizione in cui l'angolo è $\theta$, utilizzando per il calcolo del momento delle forze O come polo, si ha un momento ($\overrightarrow{M}^O$) non nullo. In particolare:

$$\overrightarrow{M}^O = I_O \dot{\omega} \hat{z} = -\left(m_a gl \frac{1}{2} + m_p gl \frac{3}{4}\right) sin\theta \hat{z} \quad \Rightarrow \quad I_O \ddot{\theta} + \left(m_a gl \frac{1}{2} + m_p gl \frac{3}{4}\right) sin\theta = 0$$

che per piccole oscillazioni, tenendo conto che $\omega = \dot{\theta}$ porta alla stessa equazione ottenuta con il metodo della conservazione dell'energia:

$$\ddot{\theta} + \frac{\left(m_a gl \frac{1}{2} + m_p gl \frac{3}{4}\right) \theta}{I_O} = 0$$

## Soluzione Esercizio 2

**Domanda 2.1**
La sfera è caricata in modo tale che il campo elettrico (CE) al suo interno per $0 \le r \le R$ è radiale, con $\overrightarrow{E} = E_r\hat{r} = \alpha r^2\hat{r}$, in coordinate sferiche con origine del sistema di coordinate nel centro della sfera e dove abbiamo indicato con $r$ la distanza da centro della sfera. Se il campo è radiale, la densità di carica $\rho$ della sfera è invariante per rotazioni attorno a qualsiasi asse passante per il centro della sfera e dipende unicamente dalla distanza dal centro della sfera. Di conseguenza, anche all'esterno della sfera il CE è radiale. Per il teorema di Gauss, la carica $Q$ racchiusa dalla superficie della sfera che ha raggio R, e che coincide con la carica della sfera stessa è data da:

$$\oint_S \overrightarrow{E} \cdot \hat{n} dS = \oint_S E_r\hat{r} \cdot \hat{r} dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \alpha R^2 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad Q = 4\pi\varepsilon_0\alpha R^4 = 1.0 \times 10^{-10}\ C$$

Allo stesso risultato si arriva osservando che per $r \ge R$ il CE è lo stesso di quello generato da una carica puntiforme $Q$ posta al centro della sfera, per cui per $r = R$:

$$E_r(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha R^2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

**Domanda 2.2**
Per $r \ge R$ sia il potenziale che il CE sono gli stessi di quelli generati da una carica puntiforme Q posta nel centro della sfera per cui:

$$\text{per } r \ge R \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Di conseguenza all'infinito il potenziale è nullo: $V(\infty) = 0$.
Per $0 \le r \le R$:

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty E_r(r')dr' = \int_r^R E_1(r')dr' + \int_R^\infty E_2(r')dr' \quad \Rightarrow \quad V(r) = \int_r^R \alpha r'^2 dr' + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} = \frac{\alpha}{3}R^3 - \frac{\alpha}{3}r^3 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

usando infine (Domanda 2.1) $Q = 4\pi\varepsilon_0\alpha R^4$ otteniamo per $0 \le r \le R$:

$$V(r) = \frac{\alpha}{3}R^3 - \frac{\alpha}{3}r^3 + \frac{4\pi\varepsilon_0\alpha R^4}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{3}\alpha\left(4R^3 - r^3\right)$$

Riassumendo:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{3}\alpha\left(4R^3 - r^3\right) & 0 \le r \le R \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\alpha R^4}{r} & r \ge R \end{cases}$$

Pertanto:

$$V_O = V(0) = \frac{4}{3}\alpha R^3 = 12\ V$$

**Domanda 2.3**
Poichè l'unica forza in gioco è la forza elettrostatica agente sull'elettrone, che è una forza conservativa, per il teorema dell'energia cinetica, indicando con $K_f$ e $K_i$ rispettivamente l'energia cinetica finale e iniziale dell'elettrone e con $U_f$ e $U_i$ la sua energia potenziale finale e iniziale, vale:

$$K_f - K_i = U_i - U_f = K_f - 0 = q(V(R) - V(0)) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = q\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{4}{3}\alpha R^3\right) = q\left(\frac{4\pi\varepsilon_0\alpha R^4}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{4}{3}\alpha R^3\right) = -\frac{1}{3}q\alpha R^3$$

Per cui:

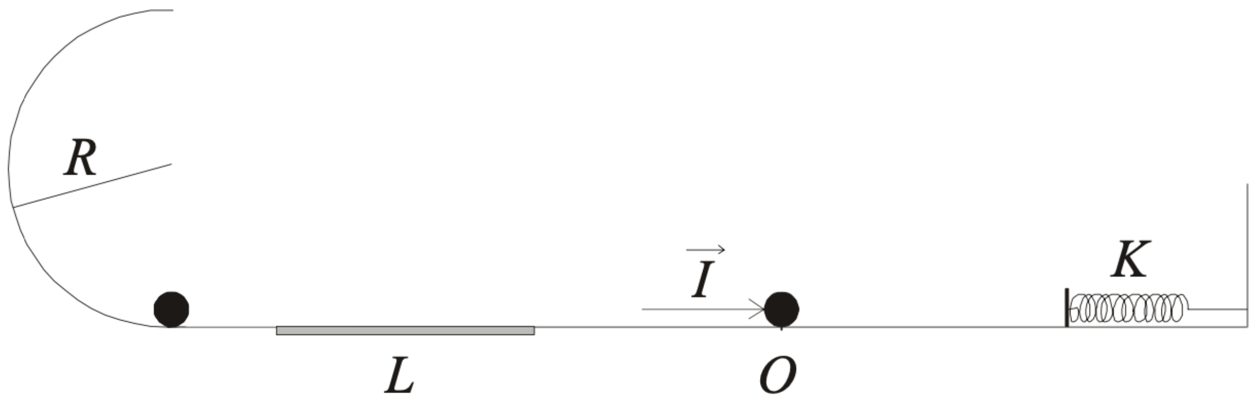
$$v = \sqrt{-\frac{2q\alpha R^3}{3m}} = 1.03 \times 10^6 m/s$$

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**
**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 28/06/2023**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, un impulso orizzontale di intensità $I$ mette in moto un punto materiale di massa $m = 1\ kg$, che si trova nella posizione O sulla parte priva di attrito di un piano orizzontale. Nel moto successivo il punto materiale urta e rimbalza su un estremo di una molla elastica a riposo orizzontale, che ha l'altro estremo fisso. La molla ha massa trascurabile e costante elastica $K = 10^4\ N/m$. Dopo l'urto con la molla, il punto materiale ripassa per il punto $O$ e percorre un tratto di lunghezza $L = 20\ cm$ nel quale il coefficiente di attrito dinamico vale $\mu_d = 0.2$. Infine, esso urta in modo perfettamente anelastico un punto materiale identico e insieme salgono per un tratto $s = 0.628\ m$ (lunghezza dell'arco) lungo una guida liscia circolare di raggio $R = 60\ cm$, prima di invertire il moto.
Si determini:

1.1 il modulo dell'impulso orizzontale $I$ che mette in moto il punto materiale, che permette al sistema composto dai due punti materiali di percorrere il tratto di lunghezza $s$

$I =$ ................

1.2 la massima compressione $\Delta l$ della molla a seguito dell'impulso $I$

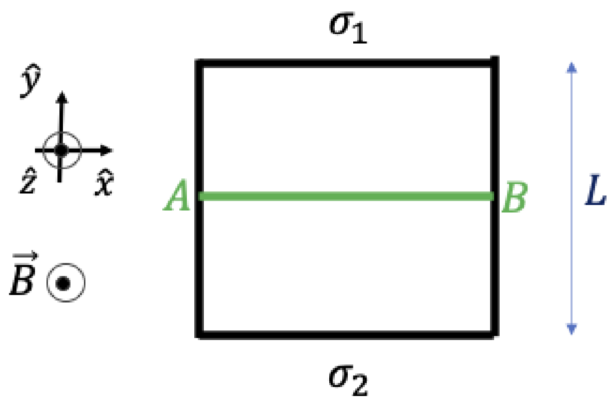
$\Delta l =$ ................

1.3 il numero di volte $N$ in cui il sistema costituito dai due punti materiali passa per il tratto $L$ (non necessariamente attraversandolo tutto).

$N =$ ................

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, una spira quadrata conduttrice di lato $L = 20\ cm$ è saldata a una sbarretta anch'essa conduttrice. La sbarretta, di lunghezza pari a $L$, è disposta nel piano della spira ortogonalmente a una coppia dei lati della spira e passa per il suo centro. Il raggio della sezione dei fili che costituiscono la spira è $r = 2\ mm$. La parte superiore ed inferiore della spira hanno, rispettivamente, conducibilità elettriche $\sigma_1 = 3\ \Omega^{-1}m^{-1}$ e $\sigma_2 = 2\sigma_1$. La sbarretta ha resistenza trascurabile. Il sistema è immerso in un campo di induzione magnetica uniforme $\vec{B} = 0.3\hat{z}\ T$. All'istante $t = 0$, quando la normale al piano della spira è parallela al campo, il sistema composto dalla spira e la sbarretta viene posto in rotazione attorno all'asse $AB$ con velocità angolare costante $\omega = 0.349\ rad/s$. L'induttanza del circuito è trascurabile. Si determini:

2.1 l'espressione del flusso del campo magnetico attraverso la superfice superiore, $\phi_1$, e inferiore, $\phi_2$, delimitate dalla sbarretta.

$\phi_1$= ................ $\phi_2$ = ......................

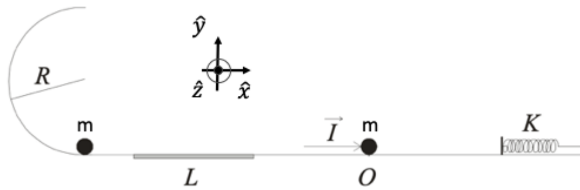
2.2 la corrente $I(t^*)$ che scorre nella sbarretta $AB$ all'istante $t^* = 3\ s$, e indicare con un disegno il verso della corrente indotta

$I(t^*)$= ................

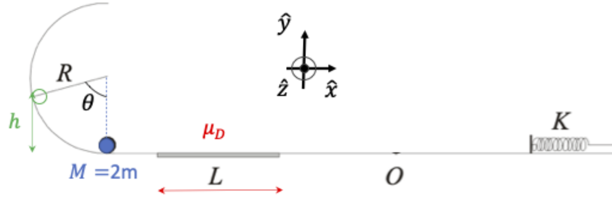
2.3 La potenza $P(t^*)$ erogata al tempo $t^* = 3\ s$ per mantenere costante la velocità angolare del sistema

$P(t^*)$= ................

# Soluzione Esercizio 1




(*a*)*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)




(*b*) *Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domande 1.1 e 1.2**
A seguito dell'impulso fornito (fig.$a$), il punto materiale (PM) acquista la velocità $v_i$ lungo l'asse x essendo la sua velocità iniziale ($\overrightarrow{v}_0$) nulla:

$$I\hat{x} = m\overrightarrow{v}_i - m\overrightarrow{v}_0 = mv_{ix}\hat{x} = mv_i\hat{x} \quad \Rightarrow \quad I = mv_i$$

Nel moto sul piano liscio e nell'urto con la molla si conserva l'energia meccanica in quanto oltre alla gravità e alla forza elastica (entrambe conservative), la reazione vincolare non compie lavoro essendo ortogonale allo spostamento del PM. In particolare, quando la compressione è massima la velocità del punto materiale è nulla. Pertanto applicando la conservazione dell'energia quando la compressione della molla è massima vale:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}K\Delta l^2$$

dove con $\Delta l$ abbiamo indicato la compressione della molla. Per cui:

$$\Delta l = \frac{I}{\sqrt{mK}}$$

Nel tratto di piano scabro l'energia meccanica non si conserva, ma il modulo della velocità $v_1$ alla fine del tratto $L$ si ricava dal teorema dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -\mu_d mgL \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{v_i^2 - 2\mu_d gL}$$

Nell'urto che è anelastico si conserva la quantità di moto, per cui:

$$mv_1 = 2mv_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{\sqrt{v_i^2 - 2\mu_d gL}}{2}$$

dove abbiamo indicato con $v_2$ il modulo della velocità del sistema dei due PM subito dopo l'urto.
Nel moto lungo la guida circolare successivo all'urto tra i due PM (fig.$b$) si conserva l'energia meccanica. Pertanto applicando la conservazione dell'energia, e assumendo l'origine per l'energia potenziale gravitazionale al livello del piano orizzontale, si ottiene:

$$\frac{1}{2}2mv_2^2 = 2mgh \;\; \text{con} \;\; h = R\left(1 - cos\theta\right)) \;\; \text{e} \;\; \theta = \frac{s}{R} \quad \Rightarrow v_2^2 = \frac{v_i^2 - 2\mu_d gL}{4} = 2gR\left(1 - cos\frac{s}{R}\right) \quad \Rightarrow v_i = \sqrt{8gR\left(1 - cos\frac{s}{R}\right) + 2\mu_d gL}$$

Per cui:

$$I = mv_i = 4.93\ Ns \quad \text{e} \quad \Delta l = \frac{I}{\sqrt{mK}} = 4.93\ cm$$

**Domanda 1.3**
L'energia dissipata ad ogni passaggio per il tratto scabro è $E_{diss} = 2\mu_d mgL$ mentre quella disponibile (posseduta) dal sistema dei due punti materiali all'inizio è $E_{disp} = \frac{1}{2}2mv_2^2 = \frac{v_i^2 - 2\mu_d gL}{4}m = 2mgR\left(1 - cos\frac{s}{R}\right)$, per cui $\frac{E_{disp}}{E_{diss}} = 7,5$ Pertanto Il sistema costituito dalle sue masse si ferma nel tratto scabro del piano e lo attraversa 8 volte :

$$N = 8$$

## Soluzione Esercizio 2

**Domanda 2.1**

Scegliendo al tempo $t = 0$ la normale a ciascuna delle due sezioni rettangolari delimitate dalla sbarretta orientata come $\vec{B}$, l'espressione del flusso del campo magnetico attraverso ciascuna delle due sezioni rettangolari è lo stesso, ed è ottenibile dalle seguenti relazioni:

$$\phi(\vec{B}) = \phi_1(\vec{B}) = \phi_2(\vec{B}) = \int \vec{B} \cdot \hat{n(t)} dS = B cos\omega t \int dS = B\frac{L^2}{2} cos\omega t$$

dove dalla convenzione sulla normale alle due sezioni abbiamo assunto le fem positive quando fanno circolare la corrente in senso antiorario in ciascuna delle due sezioni.

**Domanda 2.2**

Di conseguenza, anche le forze elettromotrici indotte, $\epsilon_1$ e $\epsilon_2$, in ciascuna delle due sezioni sono identiche:

$$\epsilon(t) = \epsilon_1(t) = \epsilon_2(t) = -\frac{d\phi_1}{dt} = -\frac{d\phi_2}{dt} = +B\frac{L^2}{2}\omega sin\omega t$$

Applicando le leggi di Kirchoff alle due maglie costituite dalle due sezioni rettangolari con le correnti di maglia $I_1$ e $I_2$ scelte positive in verso antiorario, otteniamo:

$$\epsilon(t) = R_1 I_1(t) \qquad \epsilon(t) = R_2 I_2(t)$$

Per cui la corrente che scorre nella sbarretta $I(t)$ è data da:

$$I(t) = I_1 - I_2 = \epsilon(t)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = B\frac{L^2}{2}\omega sin\omega t\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

con $\frac{1}{R_1} = \sigma_1\frac{\pi r^2}{2L}$ e $\frac{1}{R_2} = \sigma_2\frac{\pi r^2}{2L} = 2\sigma_1\frac{\pi r^2}{2L}$ per cui $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = -\frac{\sigma_1 \pi r^2}{2L}$ e $I(t) = -B\pi\frac{L}{4}\sigma_1 r^2\omega sin\omega t$

Per cui per al tempo $t^*$:

$$I(t^*) = -1.71 \times 10^{-7}\ A \quad \text{e la corrente nel tratto AB circola nel verso indicato in figura}$$

**Domanda 2.3**

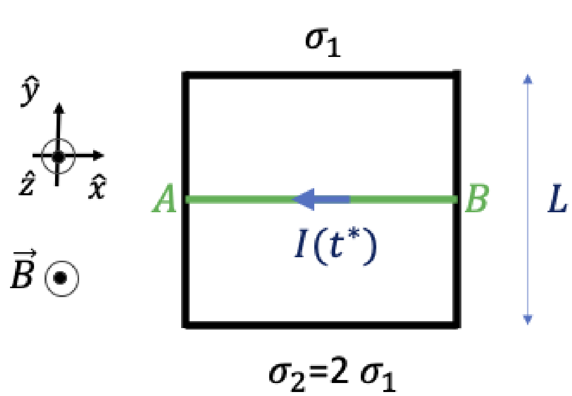
La potenza erogata al tempo $t^*$ per mantenere in rotazione con velocità costante il sistema è pari alla potenza complessiva dissipata nelle resistenze $R_1$ e $R_2$ dei due settori rettangolari:

$$P(t^*) = I_1^2(t^*)R_1 + I_2^2(t^*)R_2 = \epsilon^2(t)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = B^2\frac{L^4}{4}\omega^2 sin^2\omega t\left(3\sigma_1\frac{\pi r^2}{2L}\right) = \frac{3}{8}\pi r^2\sigma_1 B^2 L^3\omega^2 sin^2\omega t$$

Per cui:

$$P(t^*) = 9.3 \times 10^{-10}\ W$$

**Nota:** il segno della corrente indotta per dati differenti da quelli usati nel testo xx può essere positivo o negativo dipendendo dal segno del prodotto $-sin\omega t^*$



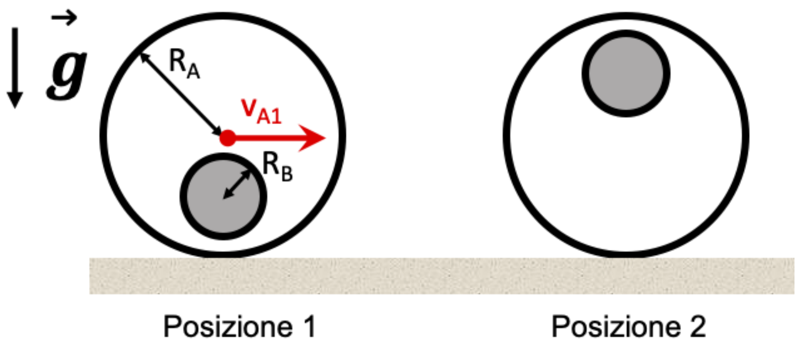

(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Corso di Laurea: Ingegneria Informatica**
**Testo n.xx - Esame di Fisica Generale sessione del 19/07/2023**

**Nome:** **Matricola:**

**Cognome:** **Anno di Corso:**

**ESERCIZIO.1 – Meccanica**




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

Sulla superficie di un disco $A$ di raggio $R_A = 0.30\ m$ e massa $M_A = 30\ kg$ è saldato un disco $B$ di raggio $R_B = 0.12\ m$ e massa $M_B = 12\ kg$. Il centro del disco $B$ dista $d = 0.15\ m$ dall'asse passante per il centro del disco $A$ ad esso ortogonale. Il disco $A$ poggia su un piano orizzontale e sia il coefficiente di attrito statico tra piano e disco tale da garantire un moto di puro rotolamento. Gli spessori di entrambi i dischi sono trascurabili. Con riferimento alla figura, nella posizione 1 il centro del disco $A$ ha una velocità $v_{A1} = 1.5\ m/s$. Dopo mezzo giro il sistema si trova nella posizione 2.
Quando il sistema è nella posizione 1, calcolare:

1.1 la velocità angolare del sistema, $\omega_1$

$\omega_1 =$ ................

1.2 L'energia energia cinetica, $E_{k1}$, del sistema

$E_{k1} =$ ................

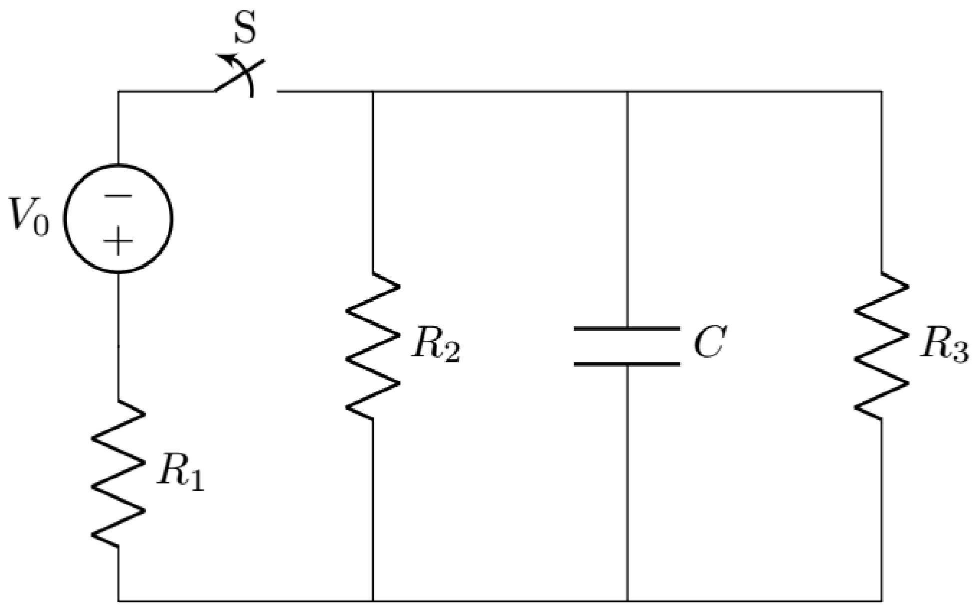
Quando il disco è nella posizione 2, calcolare:

1.3 l'energia cinetica, $E_{k2}$, del sistema e la velocità del centro del disco $B$, $v_{B2}$

$E_{k2}=$ ................ $v_{B2} =$ ......................

**Nota Bene:** *assumere per i calcoli* $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$

**ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo**




(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo* )

Con riferimento alla figura, si consideri un circuito costituito da un generatore che eroga una *d.d.p.* $V_0 = 12\ V$, un condensatore di capacità $C = 10\ pF$, una resistenza $R_1 = 2\ k\Omega$ e due resistenze $R_2 = R_3 = R = 8\ k\Omega$. All'inizio il condensatore è scarico e l'interruttore $S$ è aperto. Successivamente l'interruttore S viene chiuso.

2.1 Nell'ipotesi in cui l'interruttore sia stato chiuso per un tempo sufficientemente lungo (ovvero le correnti hanno raggiunto un regime stazionario), si calcoli la carica $Q_0$ accumulata sull' armatura positiva del condensatore e la corrente $I_C$ che lo attraversa.

$Q_0$= ................ $I_C$ = ......................

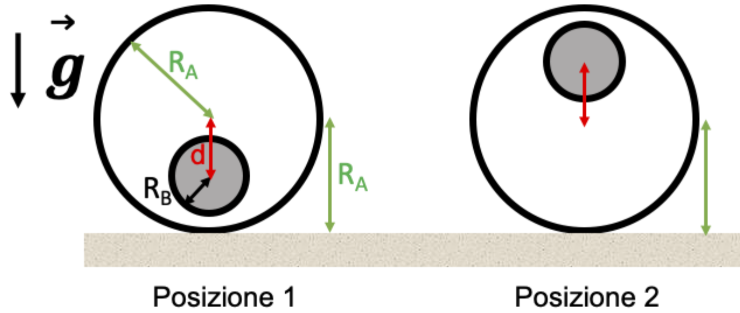
2.2 Nella stessa ipotesi del punto precedente, determinare le correnti $I_1$, $I_2$ e $I_3$ attraversano rispettivamente le resistenze $R_1$, $R_2$ e $R_3$.

$I_1$= ................ $I_2$ = ...................... $I_3$ = ......................

2.3 Dopo che il condensatore è stato caricato, l'interruttore $S$ viene aperto. Calcolare il tempo necessario $t^*$ dall'apertura dell'interruttore affinchè la carica sulle armature del condensatore raggiunga un valore pari a $Q_0/2$

$t^*$ = ................

# Soluzione Esercizio 1




(*Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda 1.1**
Poichè il moto è di puro rotolamento e il centro del disco $A$ dista $R_A$ dall'asse istantaneo di rotazione, ortogonale al piano della figura e passante per il punto di contatto del sistema, la velocità angolare nella posizione 1 è:

$$\omega_1 = \frac{v_{A1}}{R_A} = 5\ rad/s$$

**Domanda 1.2**
Il momento di inerzia rispetto all'asse passante per il punto di contatto, che coincide con l'asse di rotazione istantaneo del sistema, in base al teorema di Huygens-Steiner è dato da:

$$I_1 = \frac{1}{2}M_A R_A^2 + M_A R_A^2 + \frac{1}{2}M_B R_B^2 + M_B\left(R_A - d\right)^2 = 4.406\ kgm^2$$

Pertanto l'energia cinetica del sistema nella posizione 1 è data da:

$$E_{k1} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = 55.1\ J$$

**Domanda 1.3**
Poichè non sono presenti forze non conservative che compiono lavoro (l'attrito è statico e la reazione è applicata al punto di contatto che è fermo), l'energia meccanica si conserva. La variazione di energia potenziale gravitazionale del sistema, poichè la posizione del $CM$ del disco $A$ non cambia, è dovuta unicamente alla variazione di quota del $CM$ del disco $B$ e risulta (ad esempio prendendo come origine del potenziale il punto di contatto):

$$E_{p2} - E_{p1} = M_B g(R_A + d) - M_B g(R_A - d) = M_B g 2d$$

dove abbiamo indicato con $E_{p2}$ e $E_{p1}$ l'energia potenziale rispettivamente finale e iniziale del sistema. Pertanto applicando la conservazione dell'energia otteniamo:

$$E_{k2} - E_{k1} = E_{p1} - E_{p2} \quad \Rightarrow \quad E_{k2} = E_{k1} - M_B g 2d = 19.8\ J$$

Nella posizione 2 cambia anche il momento di inerzia rispetto all'asse istantaneo ddi rotazione poichè varia la distanza dall'asse di rotazione istantaneo di $B$

$$I_2 = \frac{1}{2}M_A R_A^2 + M_A R_A^2 + \frac{1}{2}M_B R_B^2 + M_B\left(R_A + d\right)^2 = 6.566\ kgm^2$$

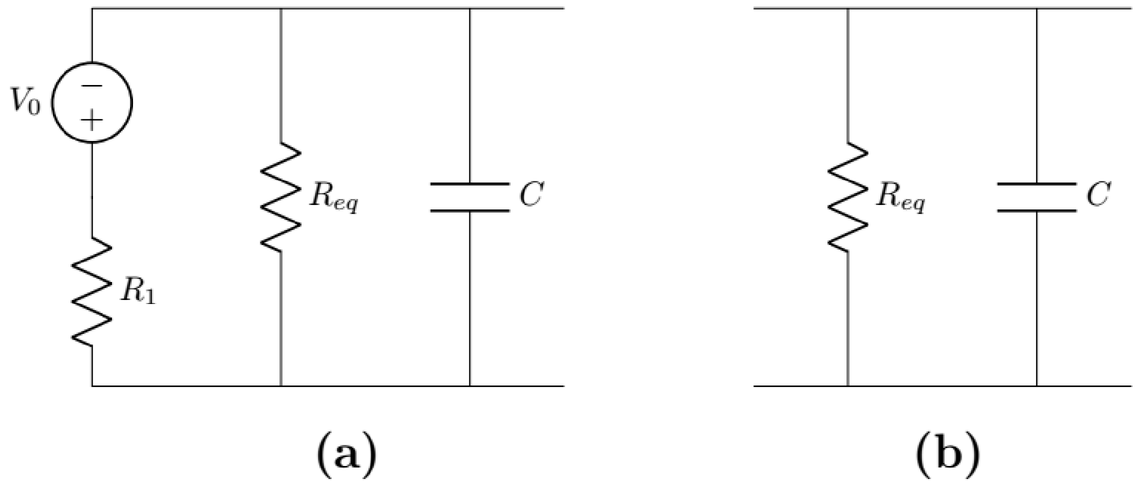
Inoltre

$$E_{k2} = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2E_{k2}}{I_2}} = 2.46\ rad/s$$

Per cui, poichè il moto è di puro rotolamento e nella posizione 2 il centro di $B$ è a una distanza pari a $R_A + d$ dal punto di contatto:

$$v_{B2} = \omega_2\left(R_A + d\right) = 1.10\ m/s$$

Soluzione Esercizio 2




(*Figure qualitative e non in scala a scopo illustrativo*)

**Domanda 2.1**
Trascorso un tempo sufficientemente lungo, il condensatore è carico e il ramo in cui è inserita la capacità $C$ si comporta come un tratto di circuito aperto ($I_c = 0$), con le resistenze $R_2$ e $R_3$ in parallelo. La resistenza equivalente del parallelo di $R_2$ e $R_3$ è data da:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{2}{R} \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = \frac{R}{2} = 4\ k\Omega$$

La differenza di potenziale ai capi di $C$ è identica a quella ai capi di $R_{eq}$ Dalla $II^a$ legge di Kirchhoff per il circuito a una maglia in figura $a$)

$$V_0 - I_1 R_1 - I_1 R_{eq} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{V_0}{R_1 + \frac{R}{2}}$$

La differenza di potenziale ai capi di $C$ è la stessa di quella ai capi di $R_{eq}$, per cui:

$$\frac{Q_0}{C} = I_1 R_{eq} \quad \Rightarrow \quad Q_0 = C I_1 R_{eq} = C \frac{V_0}{R_1 + \frac{R}{2}} \frac{R}{2} = 80\ pC$$

**Domanda 2.2**
Poichè le resistenze $R_2$ e $R_3$ sono in parallelo ed hanno lo stesso valore pari a $R$ in ognuna di esse circola una corrente pari a $I_1/2$, per cui:

$$I_1 = \frac{V_0}{R_1 + \frac{R}{2}} = 2 \times 10^{-3}\ A \quad \Rightarrow \quad I_2 = I_3 = I_1/2 = 1 \times 10^{-3}\ A$$

**Domanda 2.3**
Dopo la carica del condensatore e l'apertura dell'interruttore $S$ il circuito equivalente è mostrato in figura $b$) e il condensatore si scarica sulla resistenza equivalente $R_{eq}$. Nel processo di scarica la carica sull'armatura positiva del condensatore, $Q(t)$ avrà la seguente espressione:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/R_{eq}C} \quad \text{che per } t = t^* \text{ diviene} \quad Q(t^*) = \frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-t^*/R_{eq}C} \quad \Rightarrow \quad t^* = R_{eq} C ln2 = \frac{R}{2} C ln2 = 28\ ns$$