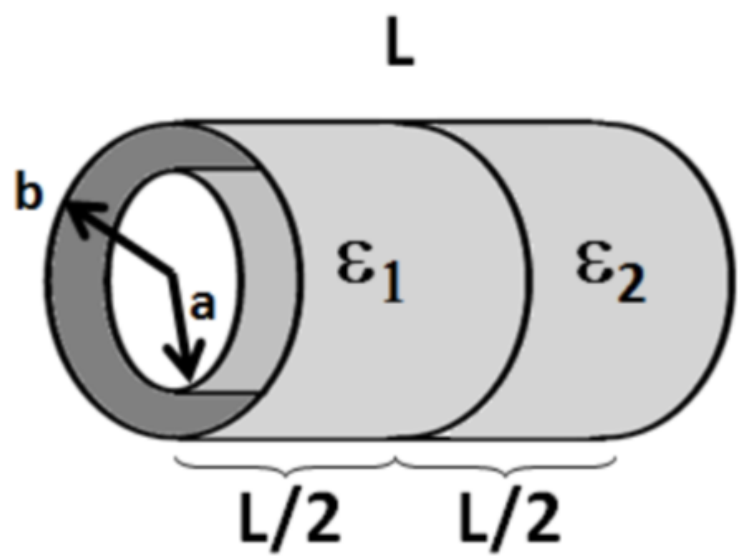
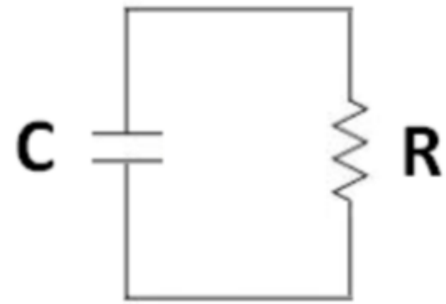
Es. del 20/5/ Ciocci

Esercizi di esame da
https://www.pi.infn.it/~ciocci/

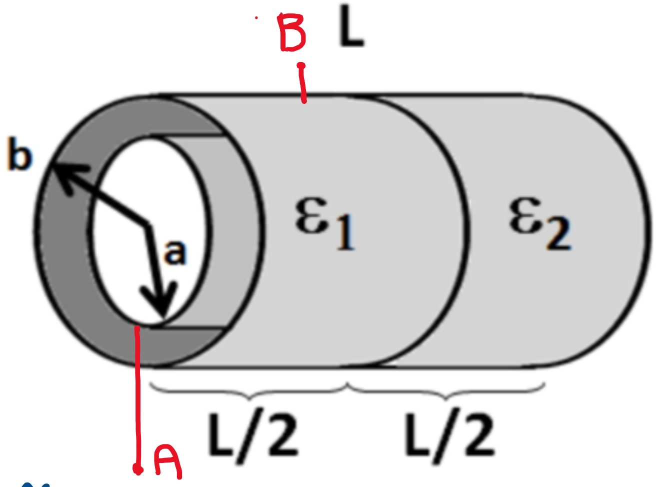
Esame di Fisica Generale del 13/01/2016: Esercizio 2





Un condensatore cilindrico di raggi a = 0.3cm e b = 1cm e di lunghezza L = 30 cm è riempito con due diversi dielettrici di costante dielettrica relativa rispettivamente $\varepsilon_{r1} = 2$ e $\varepsilon_{r2} = 3$.
Si calcoli:
a) la capacità del condensatore ($\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m). C = ...

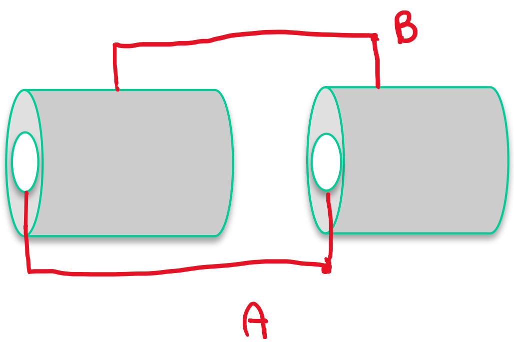
Il condensatore, caricato a una differenza di potenziale V = 50 V, viene scaricato su una resistenza R = 10 kΩ. Si calcoli:
b) l'energia totale dissipata sulla resistenza. E = ...
c) la potenza istantanea dissipata sulla resistenza dopo un tempo $t_1 = 100$ ns (1ns = 10^{-9}s). $P(t_1)$ = ...

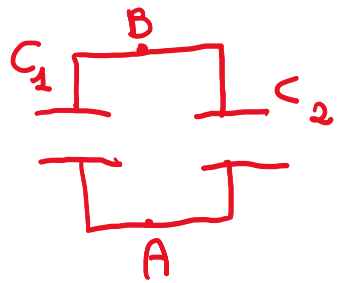


condensatore cilindrico
a = 0.3cm e b = 1cm
L = 30 cm
riempito con due diversi dielettrici
$\varepsilon_{r1} = 2$ e $\varepsilon_{r2} = 3$.

a) Si calcoli la capacità del condensatore ($\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m).
C = ...

Il condensatore è costituito da 2 condensatori cilindrici in parallelo in quanto le armature esterne di C_1 e C_2 sono allo stesso potenziale, come pure le armature interne





$C = C_1 + C_2$ con $C_1 = 2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} \frac{L}{2} / \ln b/a$

$C_2 = 2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} \frac{L}{2} / \ln b/a$

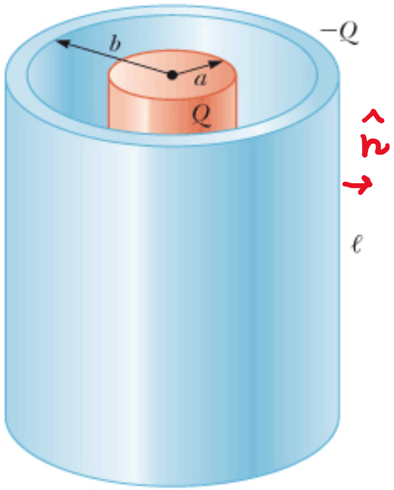
$C = 0.035 \times 10^{-9}$ F

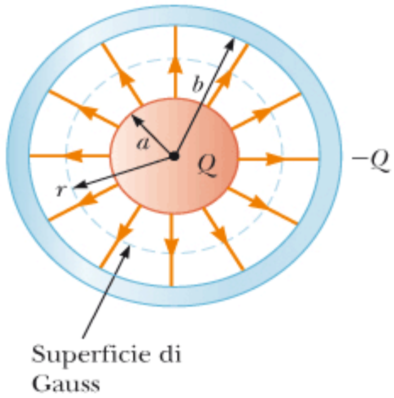
Se non ricordiamo che la capacità di un condensatore cilindrico (in generale) di lunghezza L raggio interno a raggio esterno b è data da:

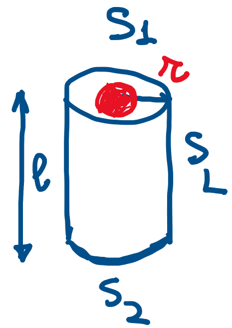
$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r L}{\ln b/a}$$

dobbiamo ricavarla!

$$C = \left|\frac{Q}{\Delta V}\right|$$







per $r < b$

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{S_{Gauss}} \vec{E}\cdot\vec{n}\, ds = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \Phi_{S_1}(\vec{E}) + \Phi_{S_2}(\vec{E}) + \Phi_{S_L}(\vec{E}) \Rightarrow \vec{E} = E_r\hat{r}$$

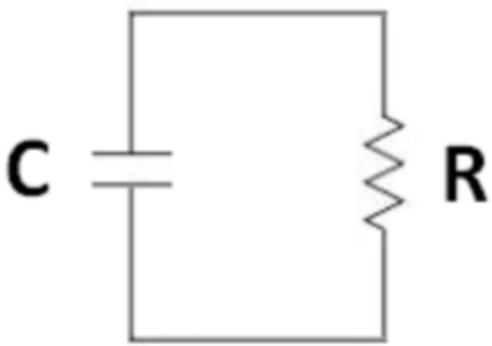
$$\Phi(\vec{E}) = \int_{S_L} E_r\,\hat{r}\cdot\hat{n}\, ds = E_r\int_{S_L} ds = E_r \cdot 2\pi r \ell = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = Q/\varepsilon_0$$

$$E_r \cdot 2\pi r \ell = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad E_r = \frac{Q}{2\pi r \ell \varepsilon_0}$$

$$V(a) - V(b) = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = \int_a^b \frac{Q}{2\pi r \ell \varepsilon_0} \hat{r} \cdot \hat{r} \, dr =$$

$$= \frac{Q}{2\pi \ell \varepsilon_0} \cdot \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi \ell \varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V(a) - V(b)} = \frac{2\pi \ell \varepsilon_0}{\ln b/a} \qquad \text{C.V.D}$$



Il condensatore, caricato a una differenza di potenziale V = 50 V, viene scaricato su una resistenza R = 10 kΩ. Si calcoli:

b) l'energia totale dissipata sulla resistenza. E = ...

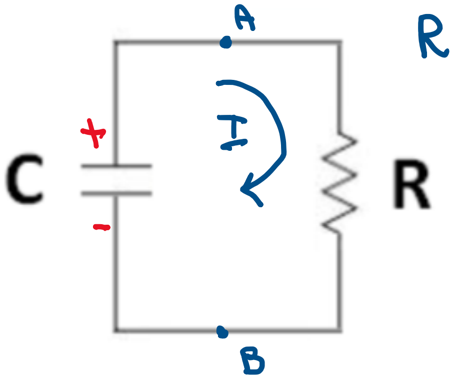
Se il condensatore è stato caricato con una tensione nota $\Rightarrow Q = CV$

Quando il condensatore verrà connesso alla resistenza TUTTA l'energia in esso immagazzinata verrà dissipata su R

Per cui $$E_{immagazzinata} = \frac{1}{2} C V^2 = E_{diss} = \int_0^\infty I^2(t)\, R\, dt = \int_0^\infty P_R(t)\, dt$$

$$E_{diss} = \frac{1}{2} C V^2 = 43.3 \times 10^{-9}\ J$$

Il condensatore, caricato a una differenza di potenziale V = 50 V, viene scaricato su una resistenza R = 10 kΩ.   c) Si calcoli la potenza istantanea dissipata sulla resistenza dopo un tempo t_1 = 100 ns (1ns = 10^{-9}s). $P(t_1)$ = ...



R e C sono in parallelo per cui $V_R(t)$ ddp ai capi di R è uguale a $V_C(t)$ ddp ai capi di C. Per cui

$$P(t) = I^2(t)R = \frac{V_R^2(t)}{R} = \frac{V_C^2(t)}{R} = \frac{Q^2(t)}{C^2R} \qquad Q(t)\,?$$

Inoltre da $\oint_{circuito} \vec{E}\cdot d\vec{l} = V_A - V_B + V_B - V_A = \emptyset = IR - \frac{Q}{C}$

$$\Rightarrow \frac{Q}{C} - IR = 0 \qquad I = -\frac{dQ}{dt} \qquad \Rightarrow \frac{Q}{C} + \frac{dQ}{dt}R = 0 \qquad \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}$$

nel circuito la corrente è positiva mentre $\frac{dq}{dt} < 0$ la carica sulle armature diminuisce nel tempo

$$\ln\frac{Q(t)}{Q_0} = -t/RC$$

$$RC = \tau \qquad \Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} \qquad \text{dove } Q_0 = V(0)\cdot C \qquad \Rightarrow Q(t) = C\underbrace{V\,e^{-t/RC}}_{V_C(t)}$$

$$P(t) = I^2(t) R = \frac{V_R^2(t)}{R} = \frac{V_C^2(t)}{R} = \frac{Q^2(t)}{C^2 R}$$

$Q(t)$? $\quad Q(t) = C \underbrace{V \; e^{-t/RC}}_{V_C(t)}$

e $V_C(t) = V \, e^{-t/RC}$

per esprimere $P(t)$ conviene utilizzare $V_C(t) \Rightarrow P(t) = \frac{V_C^2(t)}{R} \Rightarrow$ per $t = t_1 = 100\,ns$ la potenza istantanea dissipata su R vale

$$P(t_1) = \frac{V^2}{R} e^{-2t_1/RC} = 0.14\ W$$

Nota riguardo il calcolo dell'energia dissipata su R

Abbiamo calcolato $E_{diss} = \frac{1}{2} C V^2$

$$E_{diss} = \frac{1}{2} C V^2 = \int_0^\infty P_R(t)\, dt = \int_0^\infty I^2(t) R \, dt = \int_0^\infty \frac{V_R^2(t)}{R} dt = \int_0^\infty \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau} dt$$

$\alpha = 2/\tau$

$$E_{diss} = \frac{V^2}{R} \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt = \frac{V^2}{R} \left(-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_0^\infty \right) = \frac{V^2}{R} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{V^2}{R} \frac{\tau}{2} = \frac{V^2}{R} \cdot \frac{RC}{2} = \frac{1}{2} C V^2$$

CVD

Es.2 Esame di Fisica Generale del 31/1/2020

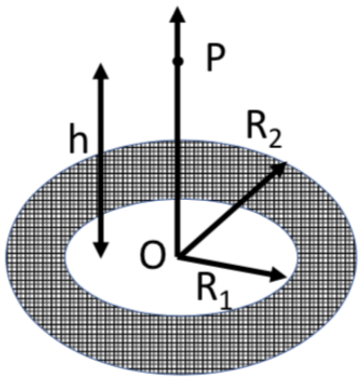


Fig.A

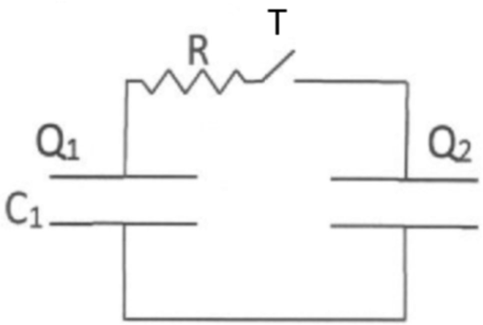


Fig.B

(Fig.A) Una carica elettrica positiva è uniformemente distribuita, con densità superficiale σ, su di una corona circolare di raggio interno R_1, raggio esterno R2 e centro in O.

2.1 Determinare l'espressione della differenza di potenziale, $\Delta V = V(O) - V(P)$, tra il punto O ed un punto P posto sull'asse del disco a distanza h da O e calcolare esplicitamente il valore della differenza di potenziale nel caso in cui $R_2 = h = 2R_1$, $\Delta V_{R2=h=2R1.}$ $\Delta V =$ ....
$\Delta V_{R2=h=2R1}=$.............

Dati: $\sigma=1.8\times10^{-11}$ C/m^2,R_1 =10 cm.

Consideriamo ora due condensatori di capacità C_1 e C_2, inizialmente caricati con carica Q_1 e Q_2 e isolati (vedi Fig.B). Se l'interruttore T viene chiuso, dopo un tempo sufficientemente lungo il sistema si porta all'equilibrio.

Calcolare:

2.2 Il valore della ddp all'equilibrio ai capi dei due condensatori, ΔV_{C1} e ΔV_{C2}.
$\Delta V_{C1} =$ ..... $\Delta V_{C2} =$ ......

2.3 La variazione di energia elettrostatica di tutto il sistema tra l'istante iniziale (E_i) e quello finale(E_f), $\Delta E = E_f - E_i$. $\Delta E =$ ....

Dati: C_1 =1μF,C_2 =2 μF,Q_1 =Q_2 =2nC.

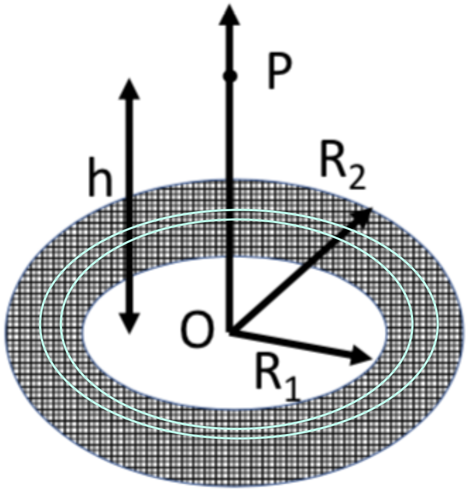


Fig.A

corona circolare

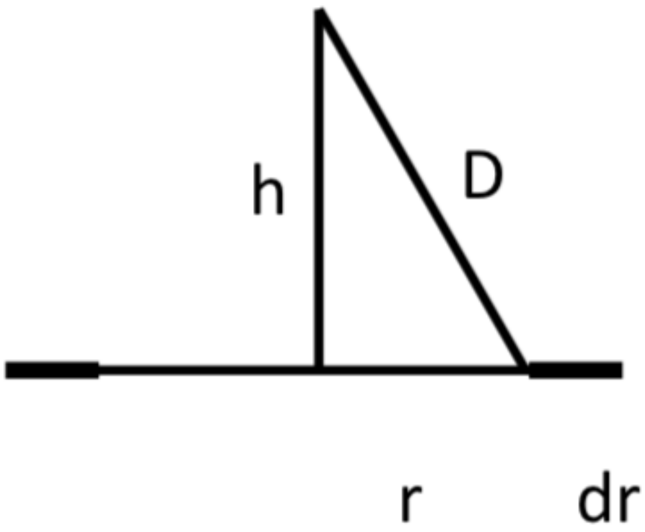
densità di carica superficiale σ uniforme

raggio interno R_1, raggio esterno R2 e centro in O.

$\sigma = 1.8 \times 10^{-11}\ C/m^2, R_1 = 10\ cm$

2.1 Determinare l'espressione della differenza di potenziale, $\Delta V = V(O) - V(P)$, tra il punto O ed un punto P posto sull'asse del disco a distanza h da O e calcolare esplicitamente il valore della differenza di potenziale nel caso in cui $R_2 = h = 2R_1$, $\Delta V_{R2=h=2R1.}$ $\Delta V =$ .... $\Delta V_{R2=h=2R1}=$.............

Il potenziale generato da una sottile corona circolare di raggio r e larghezza dr a distanza h lungo l'asse della corona è:



$$dV(r,h) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{D} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma \cdot 2\pi r\,dr}{\sqrt{h^2+r^2}}$$

dalla quale

$$V(h) = \int_{R_1}^{R_2} dV = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{2r}{\sqrt{h^2+r^2}}\,dr$$

$$V(h) = \int_{R_1}^{R_2} dV = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{2r}{\sqrt{h^2+r^2}}\, dr$$

$u = r^2 + h^2 \quad du = 2r$

per $r = R_1 \quad u_1 = R_1^2 + h^2$

per $r = R_2 \quad u_2 = R_2^2 + h^2$

$$V(h) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \int_{R_1^2+h^2}^{R_2^2+h^2} \frac{du}{u^{1/2}} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \int_{R_1^2+h^2}^{R_2^2+h^2} du\, u^{-1/2} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \left(\frac{u^{1/2}}{1/2} \Bigg|_{R_1^2+h^2}^{R_2^2+h^2} \right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{R_2^2+h^2} - \sqrt{R_1^2+h^2} \right)$$

2.1 $\Delta V = V(O) - V(P)$?

$V(O)$ corrisponde a $h=0$

$$V(0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (R_2 - R_1)$$

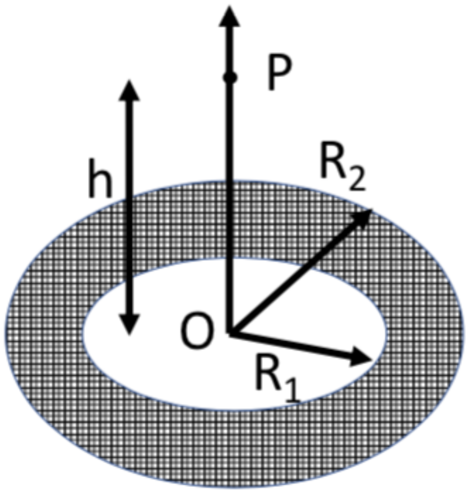


Fig.A

$$V(P) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{R_2^2+h^2} - \sqrt{R_1^2+h^2} \right)$$

$V(P)$ corrisponde a una quota generica h

$$\Delta V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(R_2 - R_1 - \sqrt{R_2^2+h^2} + \sqrt{R_1^2+h^2} \right)$$

Per $R_2 = h = 2R_1$

$\rightarrow \sqrt{R_2^2+h^2} = \sqrt{2h^2} = \sqrt{2 \cdot 4R_1^2}$

$\rightarrow \sqrt{R_1^2+h^2} = \sqrt{5R_1^2}$

$$V(0) - V_{R_2=h=2R_1} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(R_1 - \sqrt{8}\, R_1 + \sqrt{5}\, R_1 \right) = \sigma R_1/2\varepsilon_0 \left(1 + \sqrt{5} - \sqrt{8} \right) = 0.04V$$

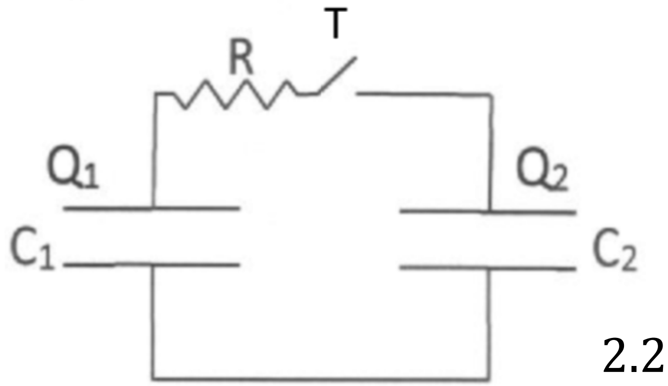


Fig.B

2 condensatori di capacità C_1 e C_2

a t=0, i condensatori hanno carica Q_1 e Q_2 e sono isolati.

L'interruttore T viene chiuso, dopo un tempo sufficientemente lungo il sistema si porta all'equilibrio.

2.2 Calcolare ddp all'equilibrio ai capi dei due condensatori: ΔV_{C1} e ΔV_{C2} . ΔV_{C1} = ... ΔV_{C2} = ... Dati: C_1 =1μF, C_2 =2 μF, Q_1 = Q_2 =2nC.

a) Non è necessario risolvere le equazioni per determinare $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$ e da queste $\Delta V_{C_1}(\infty) = \frac{Q_1(\infty)}{C_1}$ e $\Delta V_{C_2}(\infty) = \frac{Q_2(\infty)}{C_2}$

Alla chiusura dell'interruttore $\Delta V_{C_1}(0) > \Delta V_{C_2}(0)$: di conseguenza ai capi della resistenza fluirà corrente fino a quando le due capacità si portano allo stesso potenziale. Q_1 diminuisce e Q_2 aumenta

Questo processo finisce quando $\frac{Q_1(t^*)}{C_1} = \frac{Q_2(t^*)}{C_2}$ e $I(t^*)$ in R è $\emptyset$.

$\Rightarrow$ Quindi all'equilibrio

I due condensatori sono in parallelo.

$C_1 = 1\mu F, C_2 = 2\ \mu F, Q_1 = Q_2 = 2nC$

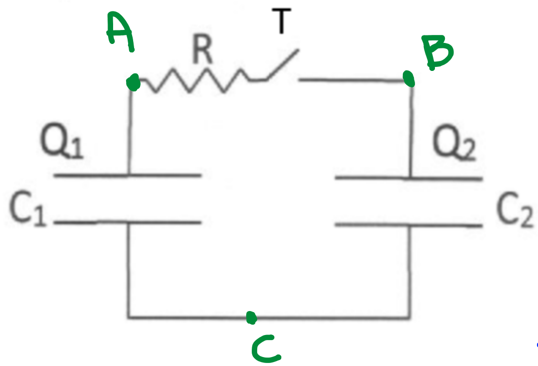


Fig.B

all'equilibrio $V(A) = V(B)$, $I(t^*) = \emptyset$ e C_1 e C_2 sono in parallelo

Nella configurazione di equilibrio il circuito è equivalente a un circuito con $C_{TOT} = C_1 + C_2$

e $\Delta V_{eq} = \Delta V_{C_1} = \dfrac{Q_{1F}}{C_1} = \Delta V_{C_2} = \dfrac{Q_{2F}}{C_2}$

$$C_1 \Delta V_{eq} + C_2 \Delta V_{eq} = Q_{1F} + Q_{2F} = Q_1(0) + Q_2(0)$$

dalla conservazione della carica: $Q_{1F} + Q_{2F} = Q_1(0) + Q_2(0) = Q_F$

$$\Delta V_{eq} = \Delta V_{C_1} = \Delta V_{C_2} = \frac{Q_F}{C_1 + C_2} = \frac{4nC}{3\mu F} = \frac{4}{3} \times 10^{-3}\ V$$

2.3 Calcolare la variazione di energia elettrostatica di tutto il sistema tra l'istante iniziale (E_i) e quello finale(E_f), $\Delta E = E_f - E_i$. $\Delta E =$ ....

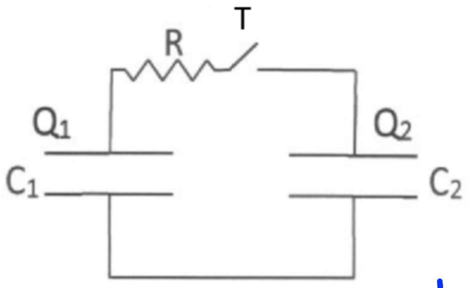


Fig.B

L'energia iniziale E_i corrisponde alle somma delle energie immagazzinate in ciascun condensatore:

$$E_i = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1^2} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2^2} = 3 \times 10^{-12}\ J$$

L'energia finale E_f, corrisponde all'energia immagazzinata nel condensatore equivalente di capacità C_F e carica Q_F

$$E_f = \frac{1}{2}\frac{Q_F^2}{C_F} = \frac{8}{3} \times 10^{-12}\ J$$

Per cui:

$$\Delta E = E_f - E_i = -\frac{1}{3} \times 10^{-12}\ J$$

Il risultato deve essere negativo perchè parte dell'energia è stata dissipata su R.

Esame di Fisica Generale del 21/02/2020: Esercizio 2, seconda parte

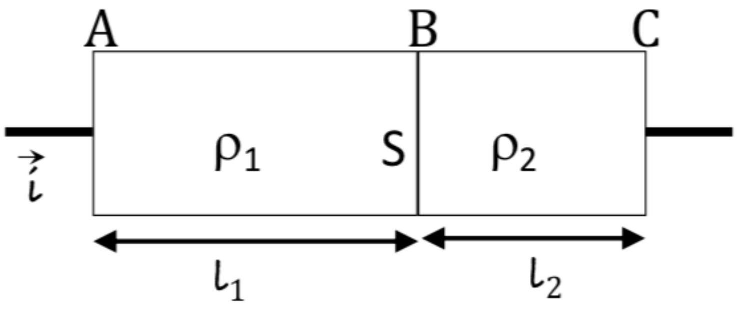


Fig.B

Con riferimento alla Fig. B due conduttori metallici di resistività ρ_1 e ρ_2, lunghezze rispettive l_1 e l_2 ed uguale sezione S, sono disposti come in Fig. B.
Se ai capi dei conduttori è presente una differenza di potenziale rispettivamente di $V_1 = V_A - V_B$ e $V_2 = V_B - V_C$

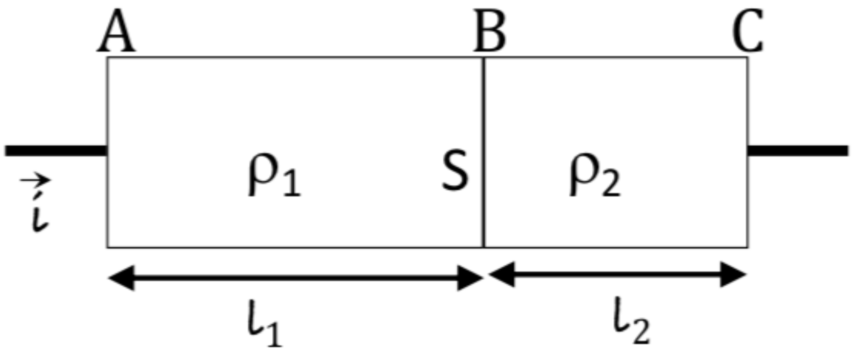
2.2 Determinare la corrente che scorre nei conduttori i. i = ...
2.3 Determinare la densità della carica elettrica superficiale presente sulla superficie S di separazione dei due conduttori, σ .σ = ...
Dati
$V_1 = 2V$, $V_2 = 3V$, $\rho_1 = 2 \times 10^{-7}\ \Omega m$, $\rho_2 = 1 \times 10^{-7}\ \Omega m$, $l_1 = 2cm$, $l_2 = 6\ cm$, $S = 100\ \mu m^2$.

2.2) I due conduttori sono in serie pertanto la corrente che in essi circola è la stessa, per cui:

$iR_1 = V_1$ e $iR_2 = V_2$ con $R_1 = \rho_1 l_1/S$ e $R_2 = \rho_2 l_2/S$

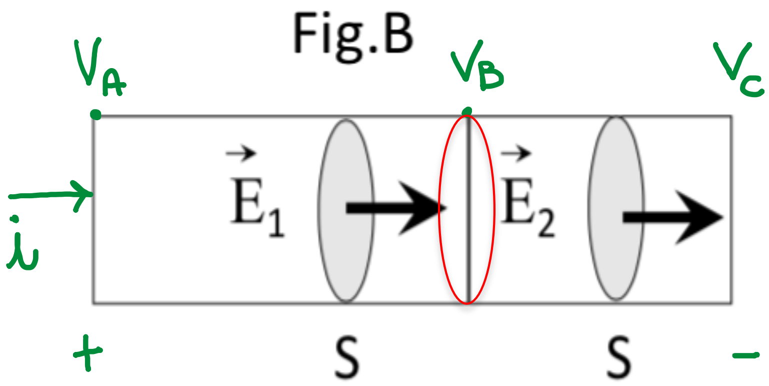
Sommando le equazioni della corrente otteniamo: $i(R_1+R_2) = V_1 + V_2$ dalla quale:

$$i = \frac{V_1 + V_2}{R_1 + R_2} = 0.05\,A$$



2.3 Determinare la densità della carica elettrica superficiale presente sulla superficie S di separazione dei due conduttori, σ .σ = ...

Dati: V_1 =2V, V_2 =3V, $\rho_1 = 2\times10^{-7}$ Ωm, $\rho_2 = 1\times10^{-7}$ Ωm, L_1 =2cm, L_2 =6 cm, S=100 μm^2



Nei due conduttori i moduli dei campi Elettrici sono dati da $E_1 = \rho_1 J$, $E_2 = \rho_2 J$ con $J = \frac{i}{S}$ Inoltre $E_1 = \frac{V_1}{l_1}$, $E_2 = \frac{V_2}{l_2}$

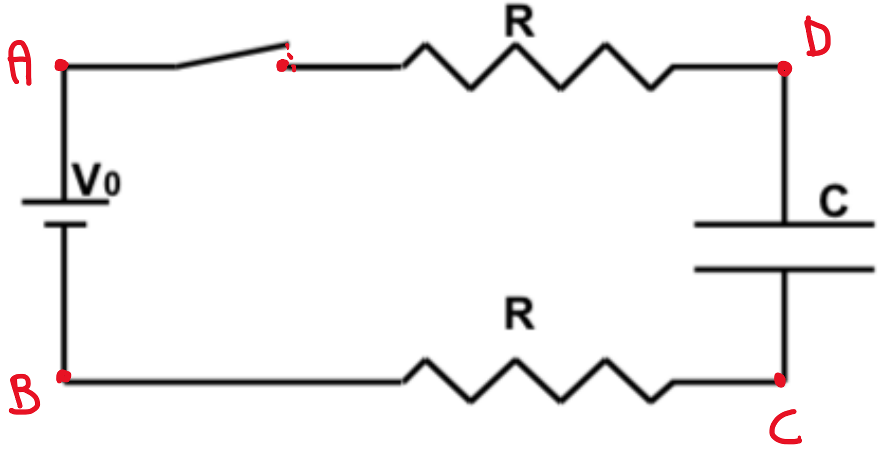
Applicando il teorema di Gauss al cilindro indicato in figura e considerando la direzione e il verso di E_1 e E_2 otteniamo

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{S_{cil.Gauss}} \vec{E}\cdot\vec{n}\,ds = \int_{S_1} \vec{E}\cdot\vec{n}\,ds + \int_{S_2} \vec{E}\cdot\vec{n}\,ds + \underbrace{\int_{S_{lat}} \vec{E}\cdot\vec{n}\,ds}_{=0\ \vec{E}\perp\vec{n}} = -E_1 S + E_2 S = S(E_2 - E_1) = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$S(E_2 - E_1) = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} = S(\rho_2 J - \rho_1 J) = i(\rho_2 - \rho_1)$$

$$\sigma = \frac{i}{S}\varepsilon_0(\rho_2 - \rho_1) = -4.5\times10^{-10}\ \frac{C}{m^2}$$

Es. 6 raccolta Padova



Nel circuito in Figura con $V_0 = 100$ V, R = 5 MΩ, C = 10μF, il condensatore è inizialmente scarico e l'interruttore è aperto.

Determinare dopo 50 secondi dall'inizio della carica del condensatore (chiusura dell'interruttore):

1. L'energia fornita dal generatore.
2. L'energia accumulata sul condensatore C.
3. L'energia dissipata su una delle resistenze R.

$$C(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 = V_A - V_B + V_B - V_C + V_C - V_D + V_D - V_A$$

lungo il circuito

$$\cancel{0} = V_0 - Ri - \frac{Q}{C} - Ri \qquad \text{equivalente a} \quad V_0 - 2Ri - \frac{Q}{C} = 0$$

Indicando con $R' = 2R$ 1) $V_0 - R'i - \frac{Q}{C} = 0 \begin{cases} \text{eq. di un RC} \\ R' = 2R \end{cases}$

1) $V_0 - R' i - \frac{Q}{C} = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{eq. di un RC} \\ R' = 2R \end{array} \right.$ Se ci riconduciamo tutto di un RC

$$Q(t) = \varepsilon C \left(1 - e^{-t/RC}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q(t) = V_0 C \left(1 - e^{-t/R'C}\right) \\ I(t) = \frac{dQ}{dt} = V_0 C \left(\frac{1}{R'C}\right) e^{-t/R'C} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_C = V_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \\ V_{R'} = V_0 C R' \left(\frac{1}{R'C}\right) e^{-t/\tau} \end{array} \right.$$

Determinare dopo 50 secondi dall'inizio della carica del condensatore (chiusura dell'interruttore):

1. L'energia fornita dal generatore.

L'energia fornita dal generatore corrisponde al lavoro fatto dal generatore per portare una carica complessiva pari a $Q(50\mu s)$ lavorando a tensione costante V_0

$$\mathcal{L}_{gen} = V_0\, Q(50\mu s) = \int dq \cdot V_0 = V_0 \int_{Q(0)}^{Q(50\mu s)} dq = V_0\, Q(50\mu s)$$

$\mathcal{L}_{gen} = V_0\, Q(50\mu s) \qquad Q(50\mu s) = V_0 C\left(1-e^{-t^*/\tau}\right) = 3.93\ mC$

$\mathcal{L}_{gen} = 3.93\ J = W_{gen}$

Determinare dopo 50 secondi dall'inizio della carica del condensatore (chiusura dell'interruttore): 2.L'energia accumulata sul condensatore C.

L'energia accumulata è $W_C = \frac{1}{2} C V_C^2(50\mu s) = \frac{1}{2} C V_0^2\left(1-e^{-t^*/\tau}\right)^2$

$W_C = 0.774\ J$

Determinare dopo 50 secondi dall'inizio della carica del condensatore (chiusura dell'interruttore): 3. L'energia dissipata su una delle resistenze R.

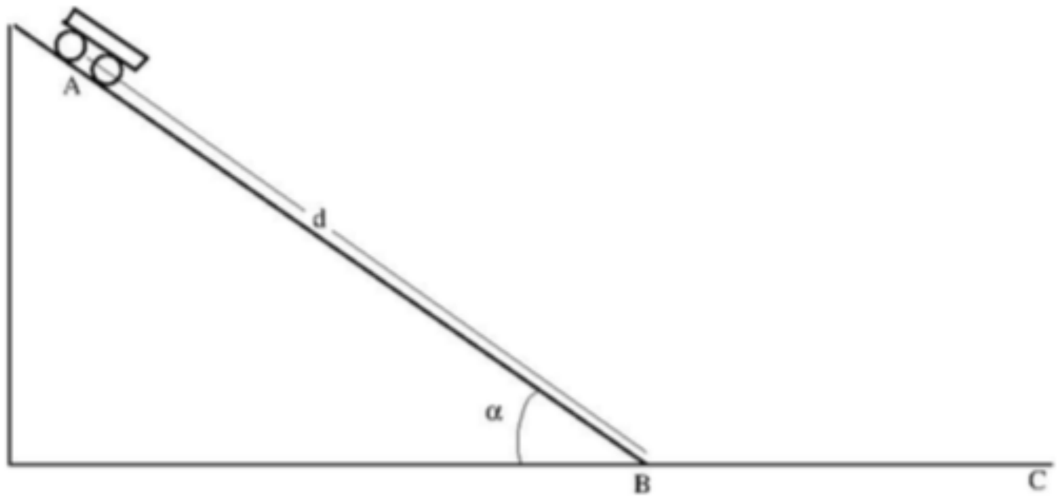
Considerando il bilancio energetico $W_{gen} = 2W_R + W_C$

cioè l'energia fornita dal generatore è in parte spesa per caricare le due resistenze uguali e in parte è immagazzinata in C

$W_{gen} = 2W_R + W_C \Rightarrow W_R = \frac{W_{gen} - W_C}{2} = 1.58\ J$

Es. 1 Esame di Fisica Generale del 11/01/2019

Un carrello può essere schematizzato da 4 ruote, ciascuna di massa m/4 e raggio R, e da un pianale di massa m. Tale carrello, partendo da fermo nel punto A (in figura) scende lungo un piano inclinato scabro lungo d (con angolo α) con moto di puro rotolamento (supporre d molto maggiore della distanza tra le due ruote).

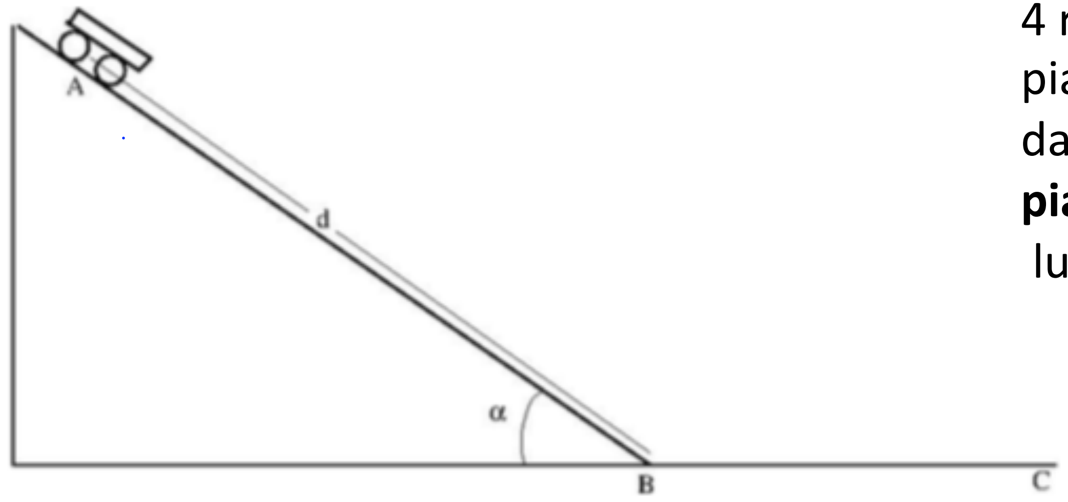


1.Calcolare la velocità, v e l'accelerazione a con cui il carrello arriva alla base del piano inclinato (punto B) e l'accelerazione che avrebbe avuto lo stesso carrello in assenza di attrito, a_{na}. v = ... a = ... a_{na} = ...

2.Giunto nel tratto orizzontale (punto B), il carrello viene fermato in un tempo Δt (nel punto C) per mezzo di un momento frenante di modulo M_f costante. Determinare M_f assumendo che, fino all'arresto, il moto sia sempre di puro rotolamento. M_f = ...

3.Calcolare il lavoro compiuto dalla forza frenante nel tratto BC per fermare il carrello. L_{freno} = ...

Dati: g=10 m/s^2, m=10 Kg, R=15 cm, α = π/6, d=10 m, Δt=5 s.



carrello

4 ruote di massa m/4 e raggio R

pianale di massa m. Il carrello, parte da fermo da A

piano inclinato scabro

lungo d (con angolo α)

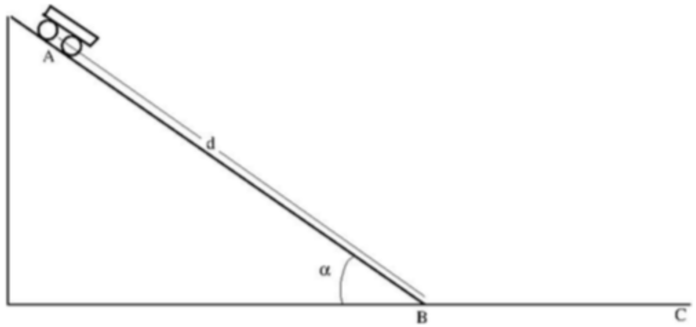
Il carrello scende da A con V(0)=0 con moto di puro rotolamento (supporre d molto maggiore della distanza tra le due ruote).

1.Calcolare la velocità, v e l'accelerazione a con cui il carrello arriva alla base del piano inclinato (punto B) e l'accelerazione che avrebbe avuto lo stesso carrello in assenza di attrito, a_{na}. v = ... a = ... a_{na} = ...

Caso con attrito

a) Nel moto di puro rotolamento il punto di contatto di ciascuna ruota è fermo, quindi il lavoro compiuto dalla forza di attrito è nullo

⇒ di conseguenza l'energia del carrello si conserva.



dalla conservazione dell'energia

$$E_i = m g h + 4 \frac{m}{4} g h$$

$$h = d \sin\alpha$$

$$E_f = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + 4\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m}{4}\right) v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}^{ruota} \omega^2\right)$$

König applicato a ciascuna ruota

nota la velocità del CM del pianale è uguale alla velocità del CM di ciascuna ruota v_{CM}

v_{CM} di ciascuna ruota:

$$v_{CM} = |\omega| R$$

$$I_{CM}^{ruota} = \left(\frac{m}{4}\right)\frac{R^2}{2}$$

ma anche $\forall$ruota $E_f = \frac{1}{2} I_c \omega^2 = \frac{1}{2}\left(I_{CM}^{ruota} + \frac{m}{4} R^2\right)\omega^2$

$$E_f = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \left(\frac{m}{4}\right) v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}^{ruote} \omega^2 \right) = E_i =$$

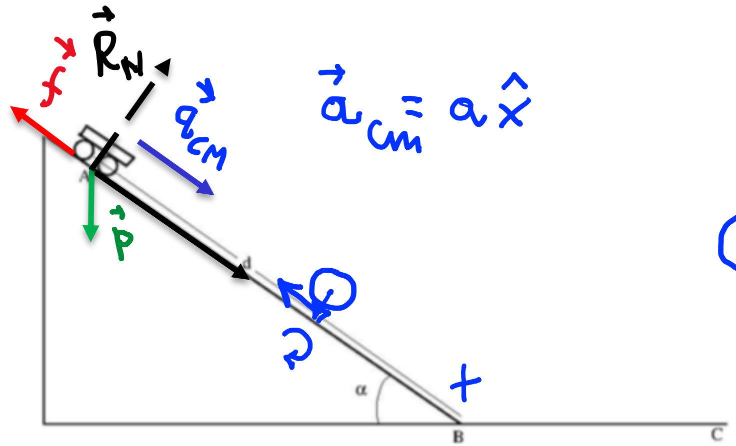
$$E_i = m g d \sin\alpha + 4 \frac{m}{4} g d \sin\alpha = 2 m g d \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad 2 m g d \sin\alpha = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{mR^2}{2} \omega^2 =$$

$$= m v_{CM}^2 + \frac{1}{4} m v_{CM}^2 = \frac{5}{4} m v_{CM}^2$$

$$\Rightarrow \quad v = v_{CM} = \sqrt{\frac{8}{5} g d \sin\alpha} \simeq 8.9 \; m/s$$

Allo stesso risultato si può arrivare usando le 2 eq. cardinali.



$\vec{a}_{cm} = a\hat{x}$

Allo stesso risultato si arriva utilizzando le due equazioni cardinali

① $\vec{P} + 4\vec{f} + \vec{R} = M\vec{a}_{cm}$ con $M = 4\frac{m}{4} + m$

② Polo sul CM; di ciascuna ruota

$$\vec{M}^{CM\,i} = \vec{R}_{CM.C} \wedge \vec{f} = I_{CM}^{ruota\,i}\,\dot{\vec{\omega}} = -Rf\hat{z} = I_{CM}^{ruota\,i}\,\dot{\omega}\hat{z}$$

con $\dot{\omega} = -\frac{a}{R}$ $\left(\omega = -\frac{v_{CM}}{R} \Rightarrow \dot{\omega} = -\frac{a}{R}\right)$

Dalla ① lungo x $Mg\sin\alpha - 4f = 2ma$

Dalla ② $-Rf\hat{z} = I_{CM}^{Ruota}\,\dot{\omega}\hat{z} = +I_{CM}^{Ruota}\left(-\frac{a}{R}\right)\hat{z}$

$\Rightarrow f = I_{CM}^{Ruota}\left(\frac{a}{R^2}\right)$

Dalla ① lungo x $\quad Mg\sin\alpha - 4f = 2ma$

Dalla ② $\quad -Rf\hat{z} = I_{CM}^{Ruote}\,\dot{\omega}\,\hat{z} = +I_{CM}^{Ruote}\left(-\frac{a}{R}\right)\hat{z}$

$$\Rightarrow f = I_{CM}^{Ruote}\left(\frac{a}{R^2}\right)$$

$$① \; Mg\sin\alpha - 4I_{CM}^{Ruote}\left(\frac{a}{R^2}\right) = 2ma \Rightarrow a\left(2m + \frac{4I_{CM}^{Ruote}}{R^2}\right) = Mg\sin\alpha$$

$$a = \frac{2mg\sin\alpha}{\left(2m + \frac{4I_{CM}^{Ruote}}{R^2}\right)} = \frac{2mg\sin\alpha}{2m + 4\,\frac{m}{4}\,\frac{R^2}{2R^2}} = \frac{2mg\sin\alpha}{2m + \frac{m}{2}} = \frac{4}{5}g\sin\alpha$$

moto unif. acc $\quad a = \text{cost} = 4\,m/s^2$ lungo x

$$\Rightarrow v = \sqrt{2ad} = \sqrt{\frac{8}{5}g\sin\alpha\, d}$$

Stessa eq. ottenuta dalla conservazione dell'energia.

1.Calcolare la velocità, v e l'accelerazione a con cui il carrello arriva alla base del piano inclinato (punto B) e l'accelerazione che avrebbe avuto lo stesso carrello in assenza di attrito, a_{na}. v = ... a = ... a_{na} = ...

In assenza di attrito le ruote non ruotano

$$E_f = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{m}{4} \right) v_{CM}^2 = E_i = 2 m g d \sin\alpha$$

$$m v_{CM}^2 = 2 m g d \sin\alpha \Rightarrow v_{CM} = \sqrt{2 g \underbrace{d \sin\alpha}_{h}} = \sqrt{2 a_{na} d}$$

$$a_{na} = g \sin\alpha = 5 \, m/s^2$$

L'accelerazione in presenza di attrito valeva $4 \, m/s^2 < a_{na}$

Questo perchè parte dell'energia potenziale viene convertita in energia rotazionale delle ruote.

2. Giunto nel tratto orizzontale (punto B), il carrello viene fermato in un tempo Δt (nel punto C) per mezzo di un momento frenante di modulo M_f costante. Determinare M_f assumendo che, fino all'arresto, il moto sia sempre di puro rotolamento. M_f = ... Δt=5 s

Il moto sul piano è determinato dalla forza di attrito che non è nulla perchè agisce il momento torcente!

(1) lungo x $\quad M a_x = -4f$ essendo la forza di attrito l'unica forza agente. Nota $M = 2m$

Mentre la II cardinale fornisce

$$\vec{M}_f + 4\,\vec{R}_{cm-cont} \wedge \vec{f} = 4 I_{CM}^{ruote}\,\dot{\omega}\,\hat{z} \Rightarrow M_f - 4fR = 4 I_{CM}^{Ruote} \cdot \dot{\omega}$$

ricordiamo che $a_x = -\dot{\omega} R = a_{cm}$ $\Rightarrow$ (2) $M_f - 4fR = -4 I_{CM}^{Ruote} \dfrac{a_x}{R}$

dalla (1) $-4f = 2m\,a_x$ $\Rightarrow$ (2) $M_f + 2m a_x R = -4 \underbrace{I_{CM}^{Ruote}}_{4\frac{m}{4}\frac{R^2}{2}} \dfrac{a_x}{R}$

$M_f + 2m a_x R = -m a_x R/2 \Rightarrow a_x = -\dfrac{2M_f}{5mR}$ = cost!

$a_x = \frac{-2M_f}{5mR} = \text{cost}!$ $\quad \{ v(t) - v(0) = at \quad$ In generale

Nel nostro caso $t = \Delta t = 5\,s$ tempo di arresto $v(t) = 0$

$$v(0) + a_x t = 0 = v(0) - \frac{2}{5}\frac{M_f}{mR} \cdot t \Rightarrow M_f = \frac{5}{2}\frac{m R v(B)}{\Delta t} = 6.7\,Nm$$

dove $v(0) = v(B) = v$ trovata al punto 1)

3. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza frenante nel tratto BC per fermare il carrello. L_{freno} =....

Nel tratto BC: $\mathcal{L}_{BC} = \mathcal{L}_{BC}(\vec{f}) + \mathcal{L}_{BC}(\vec{M}_f) = \mathcal{L}_{BC}(\vec{M}_f)$

perchè il punto di contatto delle ruote è fermo e quindi $\vec{f}$ non compie lavoro.

Dal teorema delle forze vive: $T_f - T_i = 0 - T_B = \mathcal{L}_{BC}(\vec{M}_f)$

per cui $\mathcal{L}_{BC}(\vec{M}_f) = -T_B = -E_f = -E_i = -2mdg\sin\alpha$

in quanto tutta l'energia disponibile iniziale, 2mgdsin(α) nel punto B è stata convertita in energia cinetica (T_B) di rotazione e traslazione

$\mathcal{L}_{BC} = -1000\,J$

backup