Soluzioni prova scritta
Ingegneria Informatica 14/01/2025

Esercizio 1

Il primo quesito consiste in 1 **domanda a risposta aperta** da 2 punti. Per i quesiti 2, 3 e 4 ci si deve esprimere sulla **correttezza o falsità di 6 affermazioni**. Si ottengono 0, 1 e 2 punti in base al numero di risposte corrette, errori o risposte in bianco, secondo lo schema:

6 corrette → 2 punti
5 corrette + 1 errore → 1 punto
5 corrette + 1 bianca → 1 punto
4 corrette + 2 bianche → 1 punto
Tutti gli altri casi → 0 punti

1. $\boxed{\text{4 Punti}}$ Date due matrici A, B con ugual numero di righe e $\alpha \in \mathbb{C}$, definiamo la matrice triangolare inferiore a blocchi

$$T_{A,B,\alpha} := \begin{bmatrix} \alpha \cdot I & 0 \\ A & B \end{bmatrix},$$

con I matrice identità di dimensione uguale al numero di colonne di A e 0 che indica un blocco di zeri di opportuna dimensione

Si scriva il codice Matlab/Octave di una funzione `costruisci_T` che prende in ingresso lo scalare α, le matrici A, B e restituisce la matrice $T_{A,B,\alpha}$, **senza utilizzare cicli for o while**. La funzione deve controllare che A, B abbiano lo stesso numero di righe e in caso contrario restituire un messaggio di errore.

```
function T = costruisci_T(α, A, B)
    [m, n] = size(A);
    [p, q] = size(B);
    if m ~= p
      error('Numero di righe diverso')
    end
    T = [α * eye(n), zeros(n, q); A, B];
end
```

– N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire **chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi 2, 3 e 4**.

2. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Indicare quali delle seguenti disuguaglianze fra norme sono vere **per ogni matrice** $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ed **ogni vettore** $x \in \mathbb{C}^n$.

V $\boxed{\text{F}}$ $||x||_\infty \leq ||x||_1$

$\boxed{\text{V}}$ F $||A||_\infty \leq ||A||_1$

V $\boxed{\text{F}}$ $||x||_\infty \geq \frac{||x||_2}{\sqrt{n}}$

$\boxed{\text{V}}$ F $||A||_2 \geq ||A||_F$

$\boxed{\text{V}}$ F $\det(A) \geq ||A||_2$

$\boxed{\text{V}}$ F $\det(A) \leq ||A||_2$

3. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Dati $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, si consideri il problema ai minimi quadrati $\min_{x\in\mathbb{R}^n} ||Ax - b||_2$. Si indichino con $\boxed{\text{V}}$ le condizioni **necessarie all'esistenza di almeno una soluzione** del problema e con $\boxed{\text{F}}$ le non necessarie.

$\boxed{\text{V}}$ F $\det(A) \neq 0$.

$\boxed{\text{V}}$ F Rango di $(A \mid b)$ uguale a rango di A.

$\boxed{\text{V}}$ F $m \geq n$.

$\boxed{\text{V}}$ F A di rango massimo.

$\boxed{\text{V}}$ F A diagonalizzabile.

$\boxed{\text{V}}$ F $A \neq 0$ (qui 0 indica la matrice con tutte le entrate uguali a 0).

4. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si indichino con $\boxed{\text{V}}$ le quantità che sono calcolate (utilizzando l'algoritmo più efficiente possibile) con complessità asintotica $\mathcal{O}(n)$ e con $\boxed{\text{F}}$ le altre.

V $\boxed{\text{F}}$ $||x||_2$ con $x \in \mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{V}}$ F $A \cdot B$ con $A, B \in \mathbb{R}^{\sqrt{n}\times\sqrt{n}}$.

V $\boxed{\text{F}}$ $A \cdot x$ con $A \in \mathbb{R}^{\sqrt{n}\times\sqrt{n}}$ e $x \in \mathbb{R}^{\sqrt{n}}$.

V $\boxed{\text{F}}$ $x^T y$ con $x, y \in \mathbb{R}^n$.

V F Traccia di A con $A \in \mathbb{R}^{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}$.

V F Soluzione del sistema lineare $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangolare inferiore.

Esercizio 2

Si consideri l'insieme $\mathcal{F}$ dei numeri floating point rappresentati utilizzando la notazione esponenziale normalizzata in base 10 con 3 cifre per la mantissa ed esponente intero fra -98 e 100:

$$\mathcal{F} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \; x = \text{segno}(x) \cdot 10^e \sum_{j=1}^{3} \alpha_j 10^{-j}, \; \alpha_j \in \{0, 1, \dots, 9\}, \; \alpha_1 \neq 0, \; e \in \{-98, -97, \dots, 99, 100\} \right\}.$$

(i) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Calcolare il piú piccolo ed il piú grande numero positivo nell'insieme $\mathcal{F}$.

(ii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Utilizzando l'arrotondamento round-to-nearest (arrotondando per eccesso quando la prima cifra trascurata è 5), si calcoli il risultato di

$$\frac{(x+2)^2 - 4}{x}$$

per $x = 6.00 \cdot 10^{-3}$, nell'aritmetica floating point su $\mathcal{F}$. Si scrivano nel dettaglio i vari passaggi del calcolo.

(iii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Si ripeta il calcolo precedente per $x = 2.00 \cdot 10^{-3}$ e si determini l'errore relativo della quantità calcolata.

(i) Il più piccolo è 10^{-99}, mentre il più grande è $9.99 \cdot 10^{99}$.

(ii) Il risultato finale è 6.67.

(iii) Il risultato finale è 0 ed il corrispondente errore relativo è 1.

Esercizio 3

Sia data la tabella di valori

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$

(i) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Si determini l'espressione della retta $r(x)$ che approssima $f(x)$ nel senso dei minimi quadrati.

(ii) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Si determini la funzione di miglior approssimazione di $f(x)$, nel senso dei minimi quadrati, ottenuta come combinazione lineare delle funzioni modello

$$\varphi_0(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \qquad \varphi_1(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \qquad \varphi_2(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left((x+1)\frac{\pi}{4}\right).$$

(i) L'espressione della retta di miglior approssimazione nel senso dei minimi quadrati è

$$r(x) = 0.9x + 2.$$

(ii) La funzione di miglior approssimazione è

$$\frac{7}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left((x+1)\frac{\pi}{4}\right).$$

Esercizio 4

(i) $\boxed{\text{5 Punti}}$ Determinare i coefficienti a_0, a_1, b_0, b_1 in modo che la formula di quadratura

$$\int_0^1 f(x)dx \approx a_0 f(0) + a_1 f(1) + b_0 f'(0) + b_1 f'(1)$$

abbia grado di precisione massimo e determinare tale grado.

(ii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Si calcoli il nucleo di Peano associato alla formula di quadratura trovata al punto precedente.

Reminder: data una formula di quadratura J_n con grado di precisione m, il nucleo di Peano è definito come

$$G(t) = \int_0^1 s_m(x-t)dx - J_n(s_m(x-t)), \qquad s_m(x-t) = \begin{cases} (x-t)^m & \text{se } x \geq t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Imponendo l'esattezza per $1, x, x^2, x^3$ si ottiene $a_0 = a_1 = \frac{1}{2}$, $b_0 = \frac{1}{12}$ e $b_1 = -\frac{1}{12}$. Il grado di esattezza è 3.

(ii) Il nucleo di Peano associato a questa formula di quadratura è

$$\frac{1}{4}(1-t)^4 - \frac{1}{2}(1-t)^3 + \frac{3}{12}(1-t)^2.$$