17 Gennaio 2019

Es. 2 - In un sistema di comunicazione numerico in banda passante il segnale trasmesso è $s(t) = \sum_k x[k]\, p(t - kT)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$, con $f_0 \gg \frac{1}{T}$, dove i simboli $x[k]$ appartengono all'alfabeto $A = \{-1, +3\}$ e hanno probabilita' a priori $P(-1) = \frac{2}{3}$ e $P(3) = \frac{1}{3}$, e $p(t) = 2B\mathrm{sinc}^2(Bt)\cos(\pi B t)$. La risposta impulsiva del canale è $c(t) = \delta(t)$. Il canale introduce anche rumore $w(t)$ Gaussiano additivo bianco in banda la cui densità spettrale di potenza è $S_W(f) = \frac{N_0}{2}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_0}{2/T}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+f_0}{2/T}\right)\right]$. Il segnale ricevuto $r(t)$ è in ingresso al ricevitore in Figura 1. La risposta impulsiva del filtro in ricezione è quella di un passa basso ideale di banda $\frac{3}{2}B$. Il segnale in uscita al filtro in ricezione è campionato con passo di campionamento $T = \frac{1}{B}$ e i campioni costituiscono l'ingresso del decisore che ha soglia di decisione pari a λ=0. Determinare:

1) L'energia media per simbolo trasmesso, 2) Determinare il valore di θ per cui si ha assenza di cross-talk, 3) Verificare se è soddisfatta la condizione di Nyquist, 4) Calcolare la potenza di rumore in uscita al filtro in ricezione P_{nu}, 5) Calcolare la probabilità di errore sul bit, $P_E(b)$.

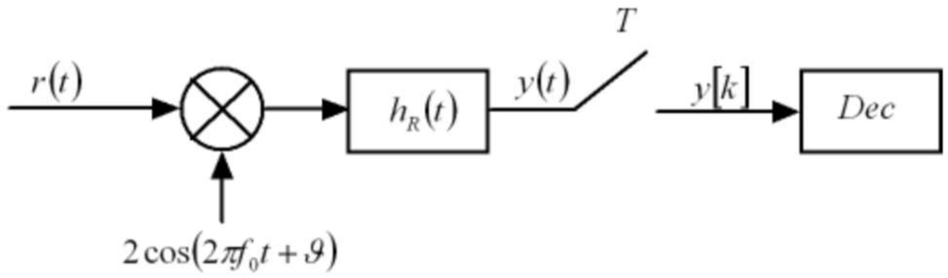


Fig. 1

Soluzione :

1° PUNTO : ENERGIA MEDIA PER SIMBOLO TRASMESSO.

$$E_S = \frac{1}{2} E[x^2] E_P$$

$$E[x^2] = P(x = \alpha_1)(\alpha_1)^2 + P(x = \alpha_2)(\alpha_2)^2 = \frac{2}{3}(-1)^2 + \frac{1}{3}(3)^2 = \frac{2}{3} + 3 = \frac{11}{3}$$

$P(f) = TCF[p(t)] = TCF\left[2B\,\mathrm{sinc}^2(Bt)\cos\left(2\pi \frac{B}{2} t\right)\right]$

Sia $x_0(t) = 2B\,\mathrm{sinc}^2(Bt)$, allora, dal teorema della MODULAZIONE, sappiamo che:

$X(f) = TCF[x(t)] = TCF[x_0(t)\cos(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2}X_0(f+f_0) + \frac{1}{2}X_0(f-f_0)$ dove

$X_0(f) = TCF[x_0(t)]$

Per fare un ripasso dimostriamo il teorema della MODULAZIONE COSINUSOIDALE:

Ipotesi: 1) $x(t) = x_0(t)\cos(2\pi f_0 t)$

2) $x_0(t) \xleftrightarrow{TCF} X_0(f)$

Tesi: $X(f) = \frac{1}{2}X_0(f+f_0) + \frac{1}{2}X_0(f-f_0)$

DIMOSTRAZIONE:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t)\cos(2\pi f_0 t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t)\left[\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}\right]e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\, e^{-j2\pi f t}\, dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t)\, e^{-j2\pi f_0 t}\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t)\, e^{-j2\pi (f-f_0)t}\, dt}_{\text{DEFINIAMO } \tilde{f} = f - f_0} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t)\, e^{-j2\pi (f+f_0)t}\, dt}_{\text{DEFINIAMO } \bar{f} = f + f_0} =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t)\, e^{-j2\pi \tilde{f} t}\, dt}_{X_0(\tilde{f})} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t)\, e^{-j2\pi \bar{f} t}\, dt}_{X_0(\bar{f})} =$$

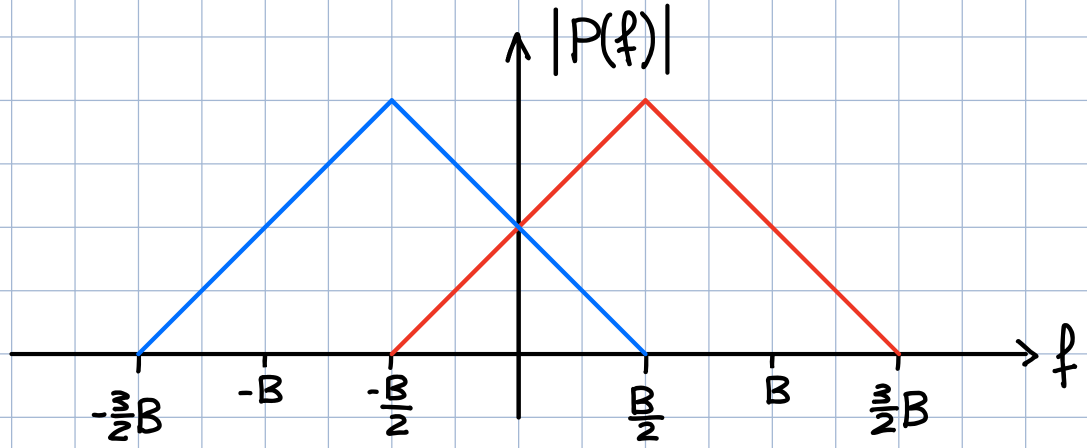
$$= \frac{1}{2} X_0(\tilde{f}) + \frac{1}{2} X_0(\bar{f}) = \frac{1}{2} X_0(f - f_0) + \frac{1}{2} X_0(f + f_0)$$

c.v.d.

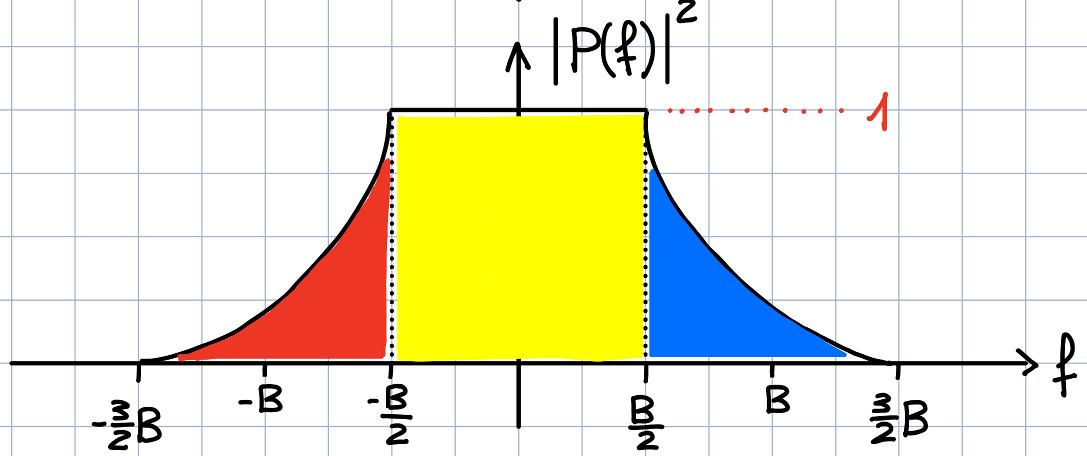
Ora possiamo scrivere $P(f) = \frac{1}{2} X_0\left(f - \frac{B}{2}\right) + \frac{1}{2} X_0\left(f + \frac{B}{2}\right)$

$X_0(f) = 2\left[1 - \frac{|f|}{B}\right] \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$

$$\Rightarrow P(f) = \left[1 - \frac{|f - B/2|}{B}\right] \mathrm{rect}\left(\frac{f - B/2}{2B}\right) + \left[1 - \frac{|f + B/2|}{B}\right] \mathrm{rect}\left(\frac{f + B/2}{2B}\right)$$



$$\Downarrow$$



AREA ROSSA = AREA BLU = $\displaystyle\int_{-B}^{0} \left(\frac{1}{B} f + 1\right)^2 df = \int_{-B}^{0} \frac{1}{B^2} f^2 \, df + \int_{-B}^{0} df + \int_{-B}^{0} \frac{2}{B} f \, df =$

$$= \frac{1}{3B^2} f^3 \Big|_{-B}^{0} + B + \frac{1}{B} f^2 \Big|_{-B}^{0} = 0 + \frac{B}{3} + \cancel{B} + -\cancel{B} = B/3$$

AREA GIALLA = B

$\Rightarrow E_p$ = AREA ROSSA + AREA BLU + AREA GIALLA $= \frac{2}{3}B + B = \frac{5}{3}B$

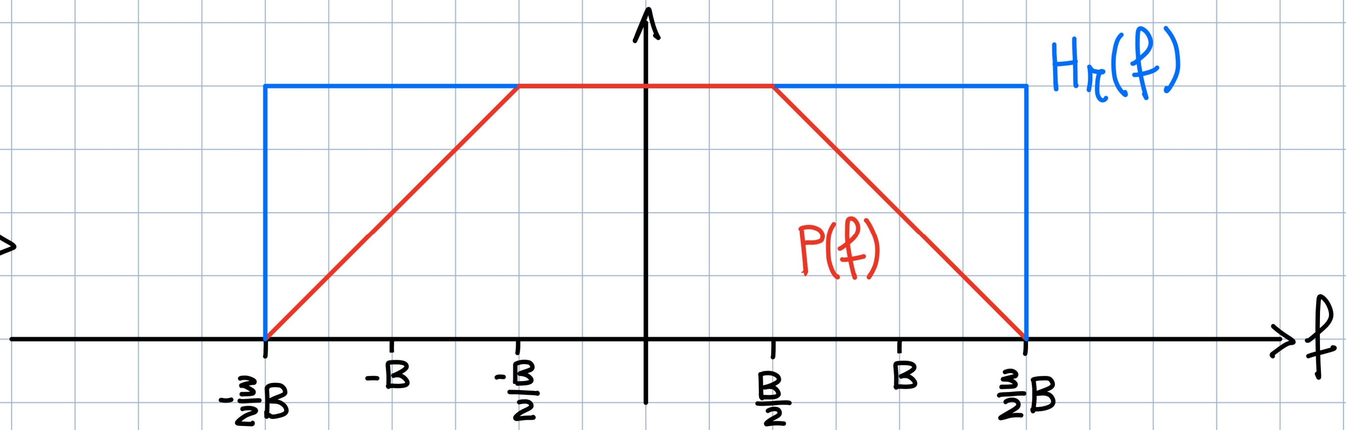
$\Rightarrow E_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} B \cdot \frac{11}{3} = \frac{55}{18} B$

2° PUNTO : In una PAM in BANDA PASSANTE non sono presenti componenti di CROSS-TALK.

3° PUNTO : Verificare la CONDIZIONE di NYQUIST.

$$h(t) = p(t) \otimes \underbrace{\tilde{c}(t)}_{= \delta(t)} \otimes h_r(t) = p(t) \otimes h_r(t)$$

$H(f) = P(f)\, H_r(f) \Rightarrow$



$H(f) = P(f)$

$$h(t) = p(t) \Rightarrow h(kT_s) = p(kT_s) = 2B\,\text{sinc}^2(BKT_s)\cos(2\pi \tfrac{B}{2} KT_s) =$$

$$= 2B\,\text{sinc}(BK\tfrac{1}{B})\,\text{sinc}(BK\tfrac{1}{B})\cos(2\pi \tfrac{B}{2} K \tfrac{1}{B}) =$$

$$= 2B\,\underbrace{\text{sinc}(k)}_{\delta(K)}\,\underbrace{\text{sinc}(k)}_{\delta(K)}\,\underbrace{\cos(\pi K)}_{=1\ \forall K \in \mathbb{Z}} = 2B\,\delta(K)$$

Condizione di Nyquist verificata.

4° PUNTO : P_{n_u}

Per una PAM in BANDA PASSANTE sappiamo che $P_{n_u} = N_0 E_{h_r}$

$$E_{h_r} = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{f}{3B}\right) df = \int_{-\frac{3}{2}B}^{3/2B} df = 3B$$

$$P_{n_u} = 3N_0B$$

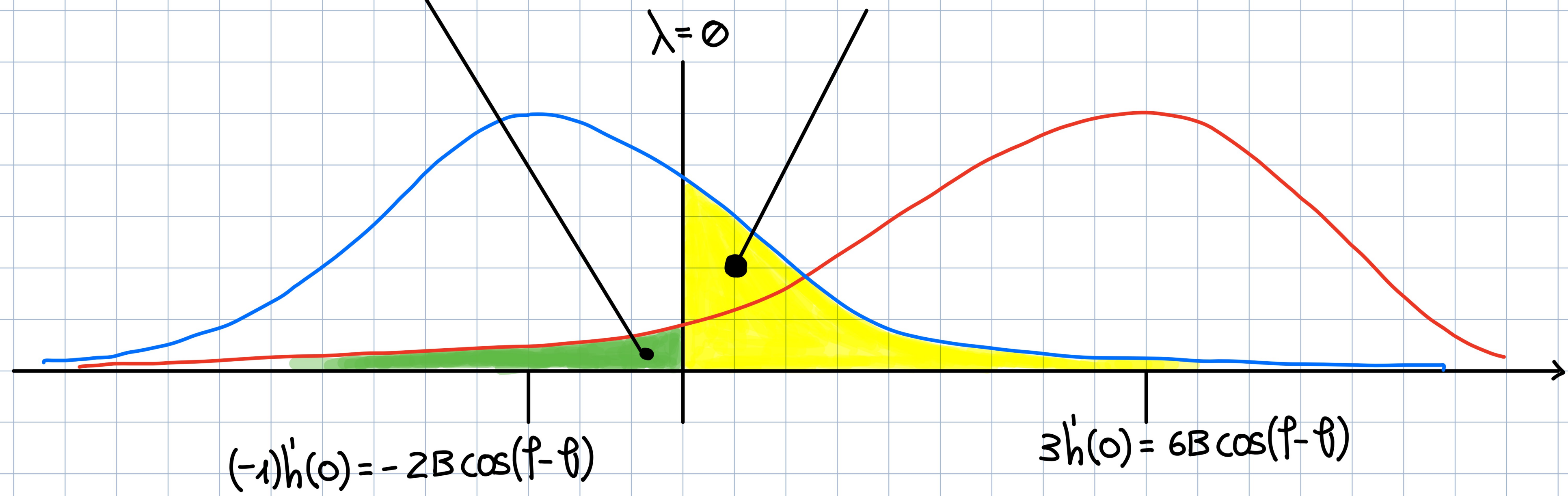
5° PUNTO: $P_E(b)$

Si noti che siamo in presenza di sfasamento!

1) La CONDIZIONE DI NYQUIST È VERIFICATA $\Longrightarrow$ ASSENZA DI ISI

2) $h'(0) = h(0)\cos(\varphi - \theta) = p(0)\cos(\varphi - \theta) = 2B\cos(\varphi - \theta)$

$$\Longrightarrow \quad P_E(b) = P(\hat{x} = -1 \mid x = 3)\,P(x=3) + \underbrace{P(\hat{x} = 3 \mid x = -1)}\,P(x=-1)$$



$$\boxed{P_E(b) = \frac{1}{3}Q\left(\frac{6B\cos(\varphi-\theta)}{\sqrt{3N_0B}}\right) + \frac{2}{3}Q\left(\frac{2B\cos(\varphi-\theta)}{\sqrt{3N_0B}}\right)}$$