Lavoro ed energia

Definizione di lavoro di una forza

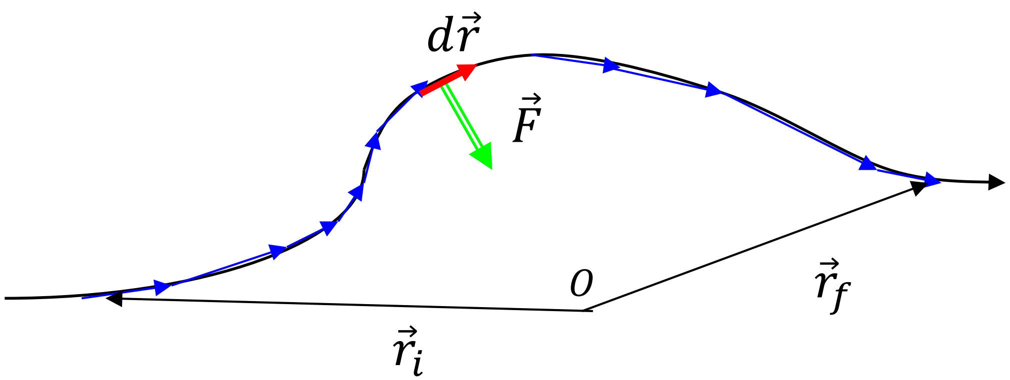
Il **lavoro** L compiuto da una forza $\vec{F}$ che agisce su un corpo mentre questo si sposta lungo una traiettoria $\mathcal{C}$ è definito come

$$L = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

dove $d\vec{r}$ è un elemento infinitesimo di spostamento lungo il percorso e il prodotto scalare $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ rappresenta la componente della forza nella direzione dello spostamento.

L'unità di misura è il $Joule$, simbolo J.

$$1\,J = 1\,N\,m = 1\,kg\,m^2\,s^{-2}$$

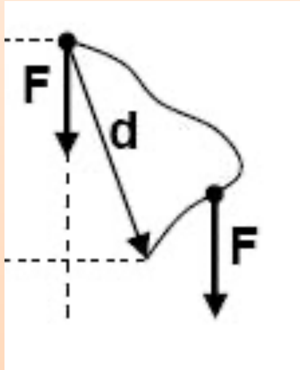


Per calcolare il lavoro, per ogni punto sulla traiettoria dobbiamo:

- esprimere $d\vec{r}$;
- conoscere $\vec{F}$;
- calcolare il prodotto $\vec{F} \cdot d\vec{r}$;
- Integrare.

Lavoro di una forza costante

Consideriamo il lavoro L di una forza $\vec{F}$ costante (cioè ha lo stesso modulo, direzione e verso in ogni punto dello spazio), quando il punto di applicazione si sposta lungo un percorso C da un punto A a un punto B:



$$L = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_C d\vec{r}.$$

Notiamo che l'integrale

$$\int_C d\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A,$$

rappresenta lo spostamento netto. $\vec{r}_A$ e $\vec{r}_B$ sono i vettori posizione dei punti A e B rispettivamente. Sostituendo, otteniamo:

$$L = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = |\vec{F}|\, |\vec{r}_B - \vec{r}_A| \cos\theta,$$

dove θ è l'angolo compreso tra $\vec{F}$ e lo spostamento $\vec{r}_B - \vec{r}_A$. Osserviamo che la quantità

$$|\vec{r}_B - \vec{r}_A| \cos\theta = \Delta r_{\parallel}$$

rappresenta la componente dello spostamento lungo la direzione della forza. Quindi, il lavoro si può scrivere anche come:

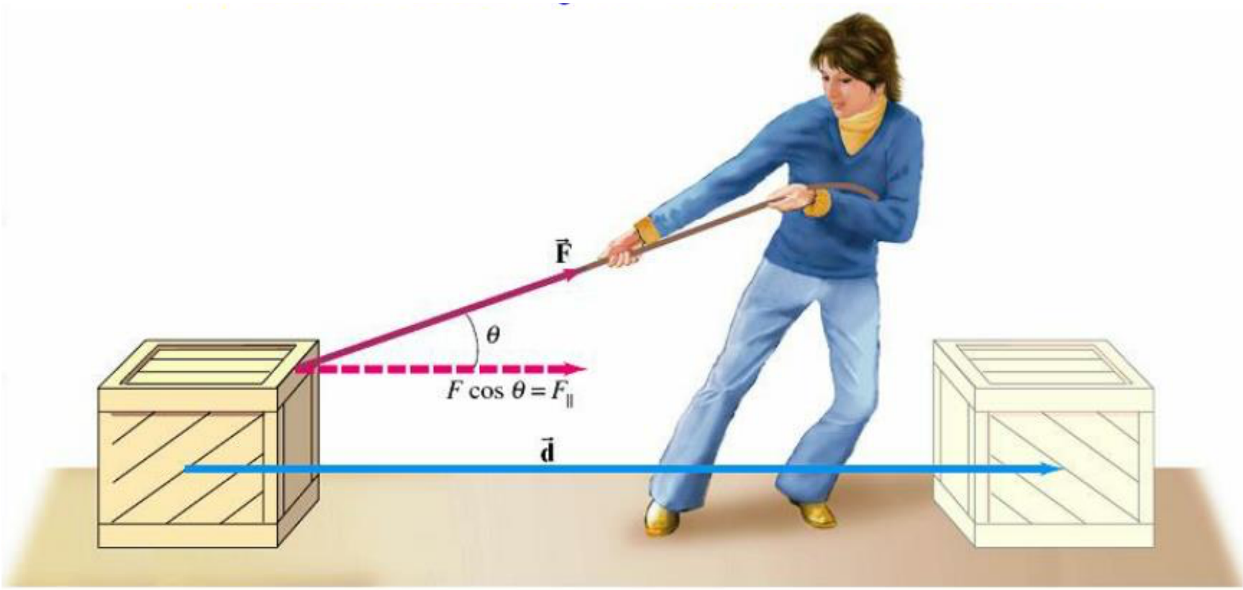
$$L = |\vec{F}|\, \Delta r_{\parallel}.$$

Lavoro di una forza costante

Consideriamo un corpo sul quel agisce una forza costante $\vec{F}$. Sia $\vec{d}$ lo spostamento del corpo.

Il lavoro fatto dalla forza è :

$L = \vec{F} \cdot \vec{d} = F\ d \cos\theta$



Se indichiamo con $d_{\parallel} = d \cos\theta$ la componente dello spostamento nella direzione della forza:

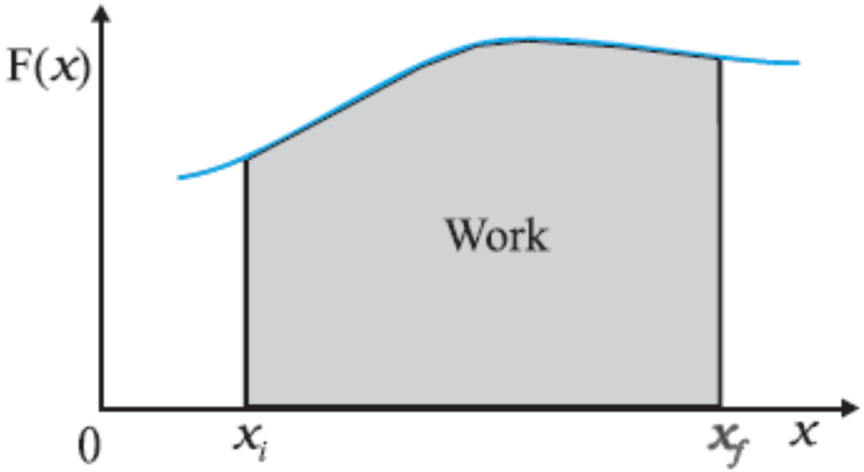
$$L = F\ d_{\parallel}$$

Se indichiamo con $F_{\parallel} = F \cos\theta$ la componente della forza nella direzione dello spostamento:

$$L = F_{\parallel}\ d$$

Forza variabile parallela allo spostamento

Consideriamo un corpo in moto rettilineo (lungo l'asse x). La forza ha la stessa direzione dello spostamento e varia con la posizione: $F = F(x)$



Il lavoro è l'integrale:

$$L = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$$

Questa è l'area sotto la curva nel grafico di $F(x)$ in funzione di x.

Lavoro e coordinate curvilinee

Supponiamo che il corpo segua una traiettoria curvilinea e introduciamo la coordinata curvilinea s, che misura la lunghezza d'arco percorsa lungo la traiettoria. Ad ogni punto della traiettoria, possiamo definire il versore tangente $\hat{t}$ in direzione dello spostamento, tale che

$$d\vec{r} = \hat{t}\, ds.$$

Sostituendo nella definizione del lavoro otteniamo:

$$L = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \hat{t}\, ds.$$

Definiamo ora la **componente tangenziale** della forza:

$$F_t = \vec{F} \cdot \hat{t}.$$

Pertanto, il lavoro si esprime in termini dell'ascissa curvilinea s e della componente tangenziale F_t come:

$$\boxed{L = \int_{s_1}^{s_2} F_t(s)\, ds,}$$

dove s_1 e s_2 rappresentano rispettivamente i punti iniziale e finale del percorso.

Lavoro e sistema di coordinate cartesiane

Forza:

$$\vec{\mathbf{F}} = F_x\,\hat{\mathbf{i}} + F_y\,\hat{\mathbf{j}} + F_z\,\hat{\mathbf{k}}$$

Spostamento infinitesimo:

$$d\vec{\mathbf{r}} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}$$

Lavoro infinitesimo:

$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = (F_x\,\hat{\mathbf{i}} + F_y\,\hat{\mathbf{j}} + F_z\,\hat{\mathbf{k}}) \cdot (dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}})$$
$$= F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Lavoro:

$$W = \int_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_0}^{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_f} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_0}^{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_f} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_0}^{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_f} F_x dx + \int_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_0}^{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_f} F_y dy + \int_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_0}^{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_f} F_z dz$$

Lavoro e sistema di coordinate cilindriche

Forza:

$$\vec{\mathbf{F}} = F_r\,\hat{\mathbf{r}} + F_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_z\,\hat{\mathbf{k}}$$

Spostamento infinitesimo:

$$d\vec{\mathbf{r}} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}$$

Lavoro infinitesimo:

$$\begin{aligned} dW &= \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = (F_r\,\hat{\mathbf{r}} + F_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_z\,\hat{\mathbf{k}}) \cdot (dr\,\hat{\mathbf{r}} + r d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}) \\ &= F_r dr + F_\theta r d\theta + F_z dz. \end{aligned}$$

Lavoro:

$$W = \int_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_0}^{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_f} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_0}^{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_f} (F_r dr + F_\theta r d\theta + F_z dz) = \int_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_0}^{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_f} F_r dr + \int_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_0}^{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_f} F_\theta r d\theta + \int_{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_0}^{\vec{\mathbf{r}}=\vec{\mathbf{r}}_f} F_z dz$$

esercizio

Consideriamo un corpo di massa m in moto circolare lungo una traiettoria di raggio costante r. Si supponga che l'accelerazione centripeta dipenda dal tempo secondo

$$a_c = k\,t^2.$$

Calcolare il lavoro compiuto dalla forza in un giro.

$$\boxed{a_c = K t^2}$$

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta}$$

$$a_r = -r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta}$$

MOTO CIRCOLARE

$$\underline{\underline{r\dot{\theta}^2}} = K t^2 \qquad \dot{\theta}^2 = \frac{K}{r} t^2 \qquad \dot{\theta} = \sqrt{\frac{K}{r}}\, t$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\dot{\theta} = \sqrt{\frac{K}{r}} \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} = r\sqrt{\frac{K}{r}} = \sqrt{Kr}$$

$$L = \int_A^B F_r\, dr + \int_A^B F_\theta\, r\, d\theta$$

MOTO CIRCOLARE $\Rightarrow$ $dr = 0$

$$L = \int_A^B F_\theta\, r\, d\theta \qquad F_\theta = m\, a_\theta = m\sqrt{Kr}$$

$$L = \int_A^B F_\theta\, r\, d\theta = \int_A^B \left(m\sqrt{Kr}\ r\right) d\theta$$

$$L = m\sqrt{kr}\; r \int_A^B d\theta = m k^{\frac{1}{2}} r^{\frac{3}{2}}\, 2\pi$$

$$L_{GIRO} = \int_{GIRO} F_t \, ds \qquad F_t = m\sqrt{kr}$$

$$= \int_{GIRO} m\sqrt{kr}\, ds = m\sqrt{kr}\int_0^{2\pi r} ds = 2\pi m \sqrt{k r^3}$$

Energia cinetica

Se un corpo di massa m si muove con velocità $\vec{v}$, l'energia cinetica è definita da:

$$K = \frac{1}{2}\, m\, v^2$$

L'energia cinetica è uno scalare. L'unità di misura è: $1\ kg\ m^2\ s^{-2} = 1\ J$

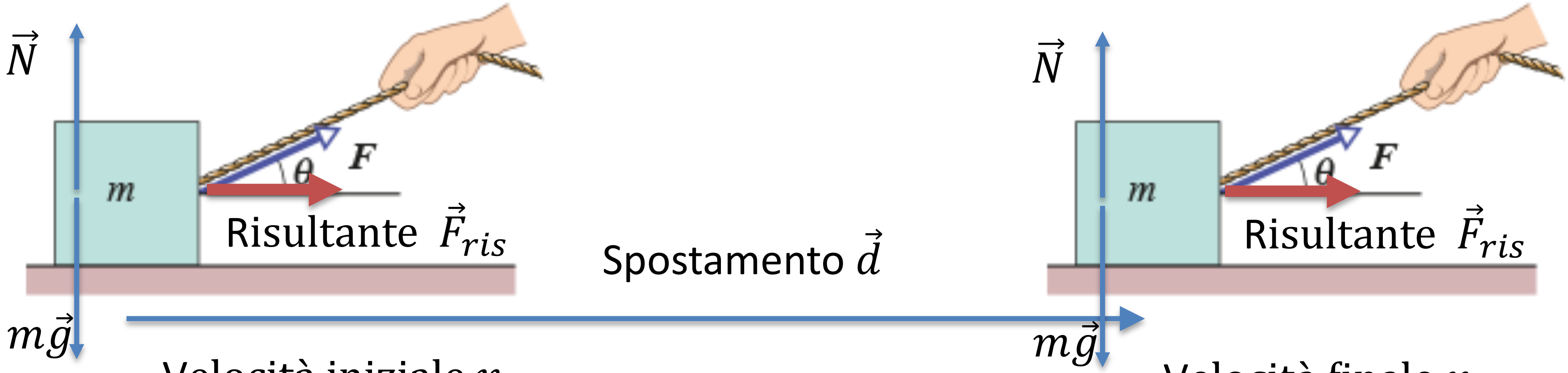
Notiamo che vale la relazione:

$$K = \frac{1}{2}\, m\, \underline{v}^2 = \frac{1}{2}\, m(\underline{\vec{v} \cdot \vec{v}})$$

Se consideriamo un sistema composto di N particelle, l'energia cinetica totale del sistema è la somma delle energie cinetiche dei costituenti:

$$K = \sum_{i=1}^{N} K_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Teorema dell'energia cinetica



Velocità iniziale v_i
Energia cinetica iniziale K_i

Velocità finale v_f
Energia cinetica finale K_f

Consideriamo un corpo di massa m sul quale agisce una forza risultante $\vec{F}_{ris}$. Sia L_{ris} il lavoro di questa forza. **La variazione di energia cinetica è uguale al lavoro** di $\vec{F}_{ris}$:

$$L_{ris} = \int_i^f \vec{F}_{ris} \cdot d\vec{r} = \Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}\, m\, v_f^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_i^2$$

Nel caso di forza risultante costante:

$$\Delta K = \vec{F}_{ris} \cdot \vec{d}$$

TEOREMA EN. CIN.

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$dL = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v}\, dt$$

$$dL = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(v^2)$$

$$dL = \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(v^2)\, dt = \frac{m}{2} d(v^2) = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

$$= dK$$

$$L_\gamma (P_1 \to P_2) = \int_{P_1 \gamma}^{P_2} dL = \int_{v_1^2}^{v_2^2} \frac{1}{2}\, d(v^2) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

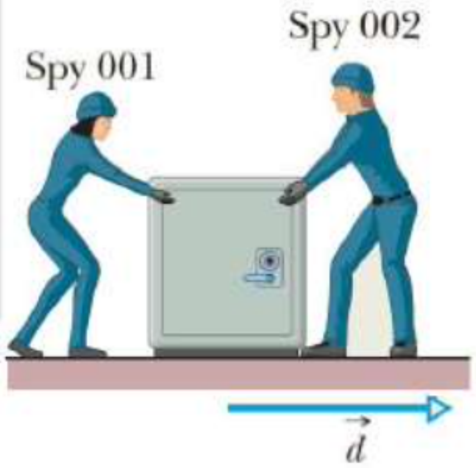
$$= K_2 - K_1$$

Esempio: 4 forze costanti

Due spie industriali spostano una cassaforte.

Lo spostamento è $\vec{d}$.

Non c'è attrito.



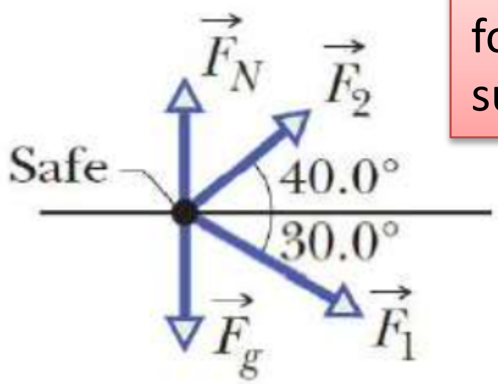


Diagramma delle forze che agiscono sulla cassaforte.

Poiché:

$$\overrightarrow{F_{ris}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_N} + \overrightarrow{F_g}$$

La variazione di energia cinetica è:

$$\Delta K = K_f - K_i = L_{ris} = \overrightarrow{F_{ris}} \cdot \vec{d} = \left(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_N} + \overrightarrow{F_g}\right) \cdot \vec{d} = \overrightarrow{F_1} \cdot \vec{d} + \overrightarrow{F_2} \cdot \vec{d} = L_1 + L_2$$

$$L_{ris} = L_1 + L_2$$

Lavoro della risultante

Supponiamo che sul corpo agiscano N forze $\{\vec{F}_i\}$, non necessariamente costanti. La risultante è.

$$\vec{F}_{ris} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Calcoliamo il lavoro della risultante, ta due punti i e f lungo un certo cammino γ:

$$L_{ris} = \int_i^f \vec{F}_{ris} \cdot d\vec{r} = \int_i^f \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{r} = \int_i^f \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i \cdot d\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\int_i^f \vec{F}_i \cdot d\vec{r} \right) = \sum_{i=1}^{N} L_i$$

Il lavoro della risultante è la somma dei lavori delle singole forze.

esercizio

Le forze costanti:

$$\vec{F}_1 = \hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + 3\,\hat{k}\ \ N \qquad (1,2,3)\ N$$

e

$$\vec{F}_2 = 4\,\hat{\imath} - 5\,\hat{\jmath} - 2\,\hat{k}\ \ N \qquad (4,-5,-2)\ N$$

Agiscono contemporaneamente su una particella che si sposta da

$$\vec{r}_1 = 7\,\hat{k}\ \ cm \qquad (0,0,7)\ cm$$

a

$$\vec{r}_2 = 20\,\hat{\imath} + 15\,\hat{\jmath}\ cm \qquad (20,15,0)\ cm$$

Determinare il lavoro totale.

$$\vec{F}_{Ris} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (5,-3,1)\ N$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (20,15,-7)\ cm$$

$$L = \vec{F}_{Ris} \cdot \Delta\vec{r} = (100 - 45 - 7)\ N \cdot cm = 49\ N \cdot cm = 0.49\ Nm$$

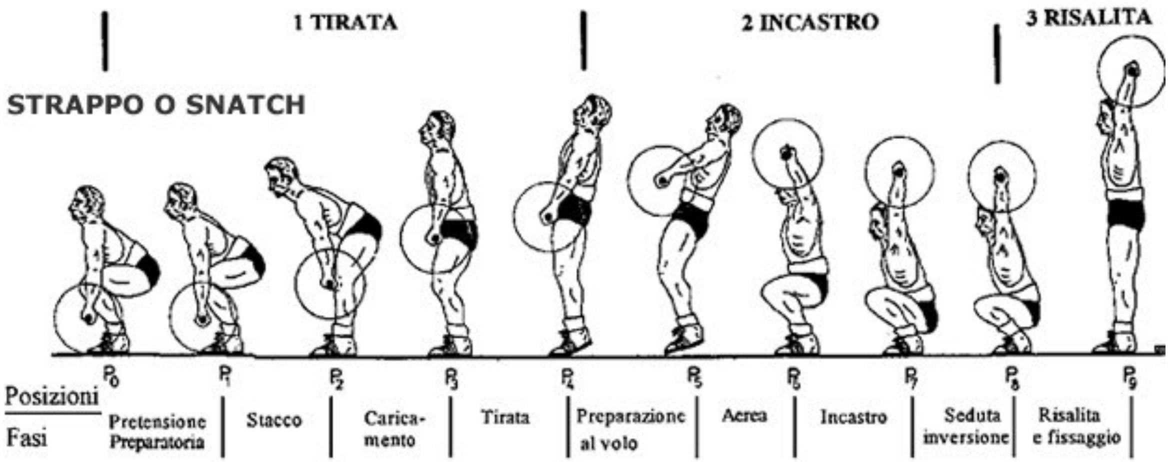
$$= 0.49\ J$$

Lavoro nel sollevamento pesi

Sul bilancere agiscono:

$M\vec{g}$ verso il basso, costante

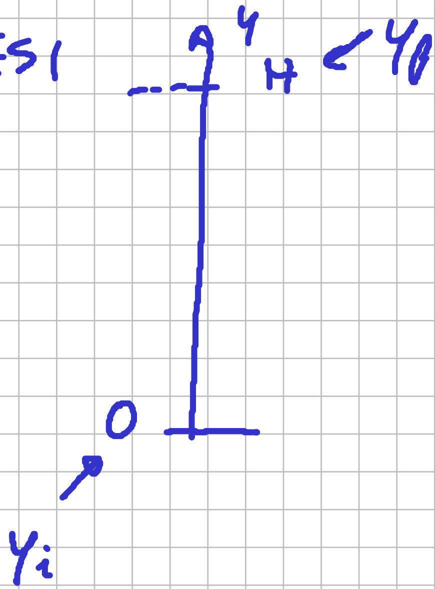
$\vec{F}_{atleta}$ verso l'alto, variabile



Per poter calcolare direttamente L_{atleta} dovremmo sapere come $\vec{F}_{atleta}$ dipende dalla posizione.

Alternativamente, possiamo utilizzare il teorema dell'energia cinetica.

SOLL. PESI



$$L_{PESO} = -mg\int_{y_i}^{y_f} dy = -mgH$$

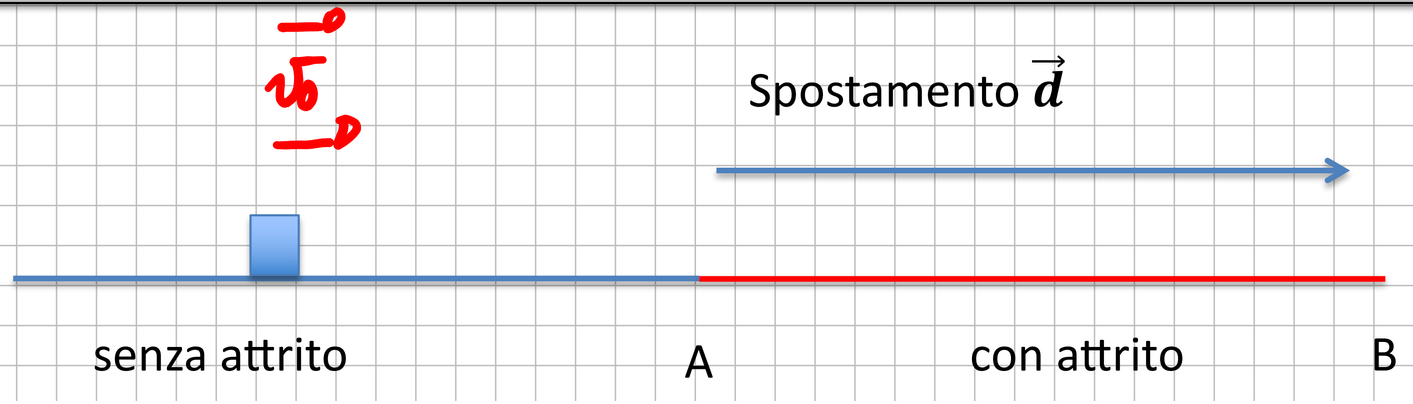
$$L_{RIS} = L_{PESO} + L_{ATLETA} = \Delta K$$

$$K_i = 0 \qquad K_f = 0 \qquad \Delta K = 0$$

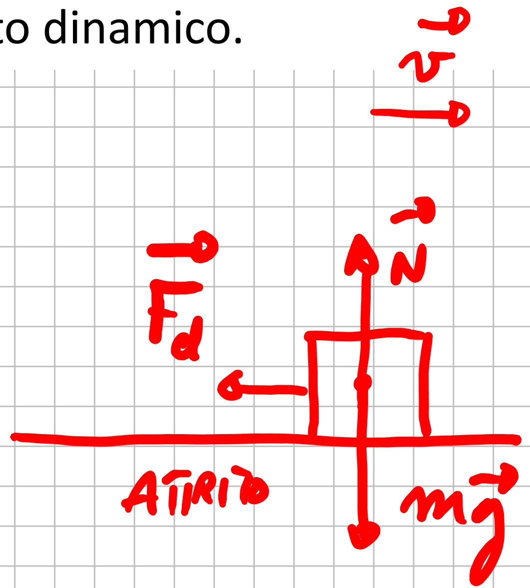
$$L_{PESO} + L_{ATLETA} = 0$$

$$L_{ATLETA} = -L_{PESO} = mgH$$

Piano orizzontale con attrito



Il corpo di massa m si muove da sinistra verso destra su un piano orizzontale con velocità iniziale di modulo v_0. A destra del punto A è presente l'attrito dinamico. Il corpo si ferma in B, dopo aver percorso un tratto lungo d. Calcolare il coefficiente di attrito dinamico.



$$K_i = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad K_f = 0$$

$$K_f - K_i = L_{RIS} = L_{ATT} = \vec{F}_{ATT} \cdot \vec{d} = -F_{ATT}\, d$$

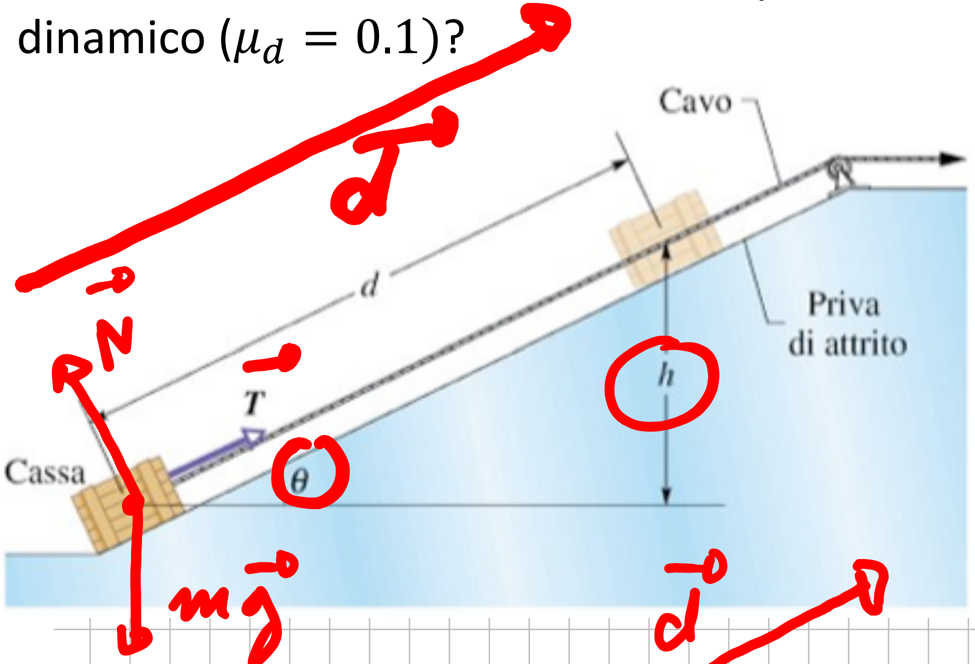
$$F_{ATT} = \mu_d N = \mu_d m g$$

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 = -\mu_d m g d$$

$$\mu_d = \frac{v_0^2}{2 g d}$$

esempio

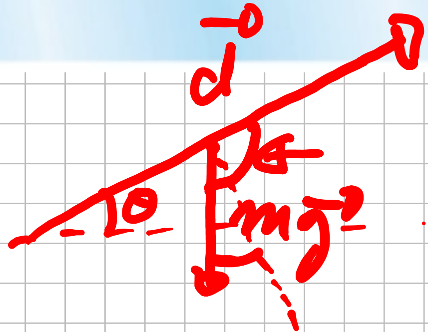
Una cassa di massa $M = 15\ kg$ viene tirata con una fune per un tratto $d = 10\ m$ lungo un piano inclinato di angolo $\theta = 30°$ a **velocità costante**. Calcolare il lavoro della tensione e il lavoro della forza peso. Cosa cambia se è presente l'attrito dinamico ($\mu_d = 0.1$)?



$$\vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} = 0$$

$$L_N = \vec{N} \cdot \vec{d} = 0$$

$$L_T = \vec{T} \cdot \vec{d} = T d$$



$$\frac{\pi}{2} + \theta$$

$L_{PESO} =$

$$= m\vec{g} \cdot \vec{d} = mgd \cos\left[\frac{\pi}{2} + \theta\right] = -mgd\sin\theta$$

$$d \sin\theta = h$$

$$L_{peso} = -mgh \qquad L_T = Td$$

$$L_{Ris} = L_T + L_{peso} = Td - mgh = 0$$

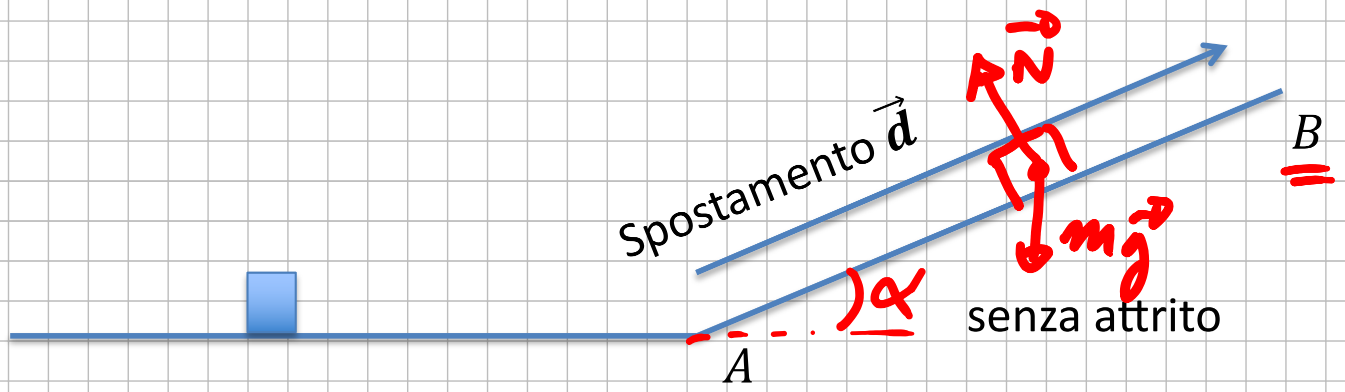
$$Td = mgh$$

CON ATTRITO:

$$L_T = Td \qquad L_{peso} = -mgh$$

$$L_{Att} = -F_{Att}\, d = -\mu_d\, mg \cos\theta\, d$$

Piano inclinato senza attrito



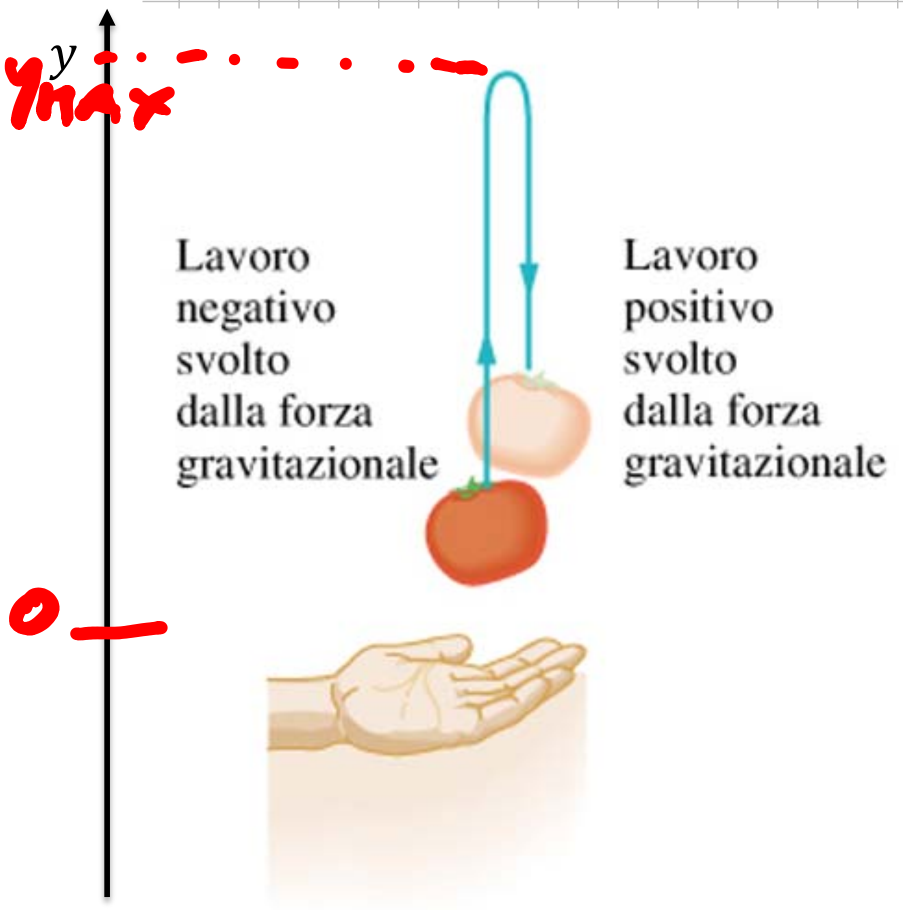
Il corpo di massa m si muove sul piano orizzontale privo di attrito con velocità di modulo v_0 da sinistra verso destra. A destra del punto A è presente un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale anch'esso privo di attrito. Il corpo raggiunge il punto B, dopo aver percorso un tratto lungo d, e torna indietro lungo il piano inclinato. Calcolare l'altezza di B rispetto ad A.

$$K_i = K_A = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad K_f = K_B = 0$$

$$L_{Peso} = L_{Ris} = -mgh = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

esempio



$$L_{peso} = -mg\Delta y$$

Conoscendo la velocità iniziale v_0, calcolare:

- la massima altezza raggiunta dalla mela;
- a velocità della mela quando viene ripresa.

$$L_{RIS} = L_{PESO} = -mg\,\Delta y$$

$$= -mg\,y_{MAX} = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$y_{MAX} = \frac{v_0^2}{2g} \qquad v_f^2 = v_0^2$$

Osservazioni

Lavoro della forza peso (asse y orientato verso l'alto):

$$L_{peso} = -mg\Delta y$$

Lavoro della forza normale ($\vec{N} \perp d\vec{r}$):

$$L_N = 0$$

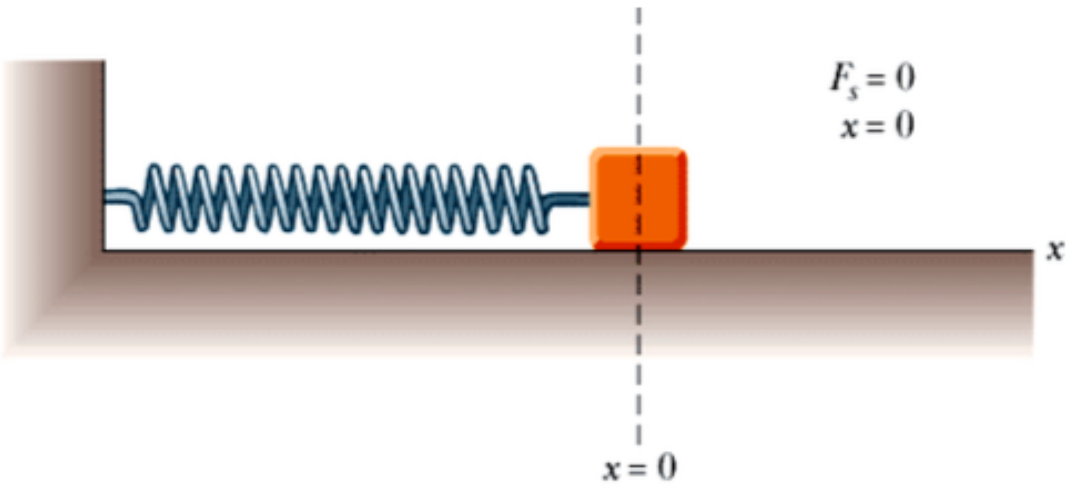
Lavoro dell'attrito dinamico (l'attrito è opposto allo spostamento):

$$L_{AD} < 0$$

Lavoro dell'attrito statico

$$L_{AS} = 0$$

Lavoro della forza elastica



Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane con origine nell'estremità libera della molla quando questa è a riposo.

La forza esercitata dalla molla quando la posizione del corpo è x è:

$$F(x) = -kx$$

Calcoliamo il lavoro della forza elastica se il corpo si sposta dalla posizione x_i alla posizione x_f:

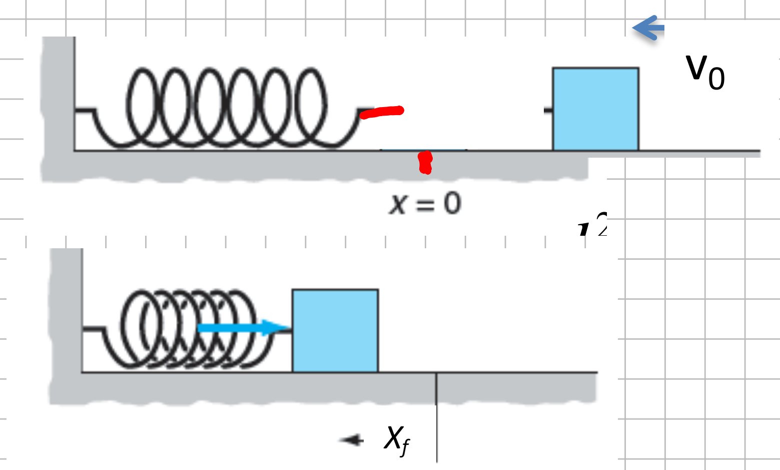
$$L_{x_i \to x_f} \equiv \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} kx dx = -\frac{k}{2}\left({x_\mathrm{f}}^2 - {x_\mathrm{i}}^2\right)$$

esercizio

Un corpo di massa m si muove con velocità iniziale v_0 su un piano orizzontale liscio contro una molla di costante elastica k.

- Determinare la coordinata di arresto del corpo x_f

$$L_{x_i \to x_f} = -\frac{k}{2}\left(x_f^2 - x_i^2\right)$$



$$x_i = 0$$

$$L = -\frac{k}{2} x_f^2 = \Delta K = K_f - K_i \qquad K_f = 0$$

$$-\frac{k}{2} X_{ARR}^2 = -K_i = -\frac{1}{2} m v_0^2 \qquad X_{ARR} = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0$$

Forze centrali

Una forza che agisce su un corpo si dice centrale se:

- In ogni punto P occupato dal corpo, la forza $\vec{\mathrm{F}}$ è diretta secondo la retta passante per P e per un punto fisso dello spazio O, detto centro della forza.

- Il modulo della forza è funzione solo della distanza di P da O

Quindi per una forza centrale possiamo scrivere:

$$\vec{F} = F(r)\hat{r}$$

Esempi:

- Forza gravitazionale
- Forza di Coulomb
- Forza elastica

Lavoro di una forza centrale

$$d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta}$$

Calcoliamo il lavoro di una forza centrale lungo un percorso $\mathcal{C}$ da un punto A a un punto B che si trovano a distanza r_A e r_B dal centro della forza:

$$L_{A\to B} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} F(r)\hat{r}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} F(r)dr = \int_{r_A}^{r_B} F(r)dr$$

Questo lavoro non dipende dal particolare cammino ma solo dalle distanze dal centro della forza r_A e r_B.

Esempio: per la forza gravitazionale abbiamo

$$L(r_1 \longrightarrow r_2) = \int_{r_1}^{r_2} -G\frac{Mm}{r^2}dr = -GMm\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1}$$

Teorema dell'energia cinetica per le forze interne

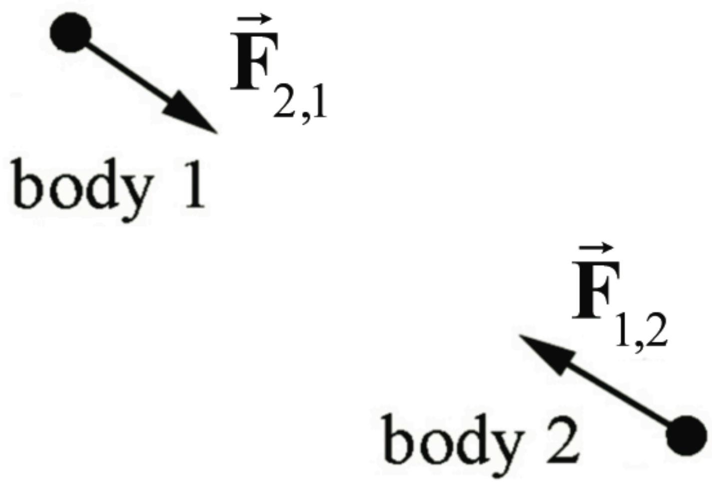
Dimostrare che il lavoro compiuto da una forza interna nel far passare un sistema formato da due particelle, di masse rispettivamente m_1 e m_2, dallo stato iniziale A allo stato finale B è dato da

$$L_{A\to B} = \frac{1}{2}\mu\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

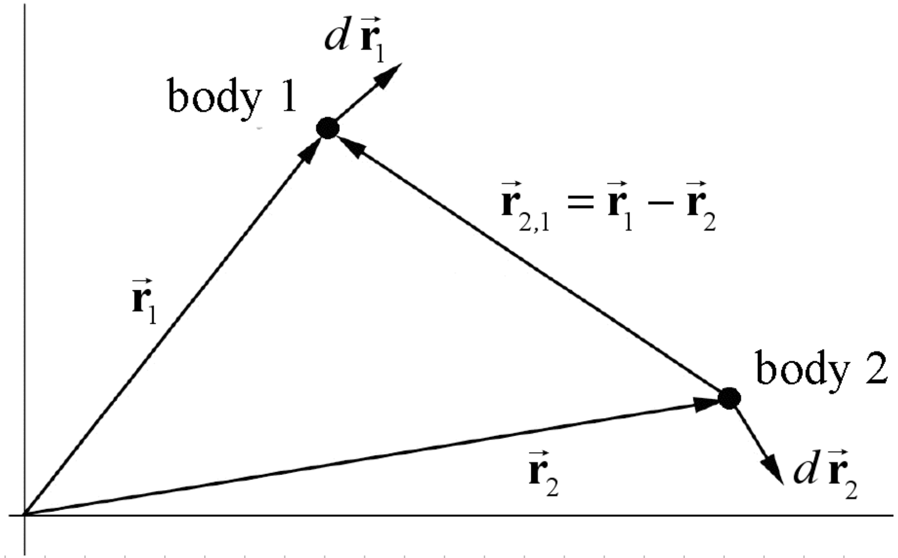
dove v_B^2 è il quadrato della velocità relativa nello stato B, v_A^2 è il quadrato della velocità relativa nello stato A e

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

è la massa ridotta del sistema.



Consideriamo questo sistema di coordinate:



SISTEMA E FORZA INTERNA

CORPO 1
$$\vec{F}_{21} = m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} \qquad \frac{\vec{F}_{21}}{m_1} = \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2}$$

CORPO 2
$$\vec{F}_{12} = m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} \qquad \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} = \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2}$$

$$\frac{\vec{F}_{21}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} = \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{21}$$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$ (COPPIA AZIONE-REAZIONE)

$$\boxed{\vec{F}_{21} \left[\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right] = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{21}}$$

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) = \frac{1}{\mu}$$

μ = MASSA RIDOTTA

$$L_{TOT} = \int_A^B \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_1 + \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_2 =$$

$$= \int_A^B \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_1 - \int_A^B \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 = \int_A^B \vec{F}_{21} \cdot \left(d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 \right) =$$

$$= \int_A^B \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_{21}$$

$$\vec{F}_{21} = \mu \frac{d^2 \vec{r}_{21}}{dt^2}$$

$$L = \mu \int_A^B \frac{d^2 \vec{r}_{21}}{dt^2} \cdot d\vec{r}_{21}$$

$$d\vec{r}_{21} = \frac{d\vec{r}_{21}}{dt} dt$$

$$L = \mu \int_A^B \left[\frac{d^2 \vec{r}_{21}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}_{21}}{dt} \right] dt$$

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{v} \cdot \vec{v} \right) = 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = 2 \vec{a} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_{21}}{dt^2}\cdot\frac{d\vec{r}_{21}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{r}_{21}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}_{21}}{dt}\right]$$

$$L=\frac{\mu}{2}\int_A^B\frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{r}_{21}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}_{21}}{dt}\right]dt$$

$$=\frac{\mu}{2}\left[\frac{d\vec{r}_{21}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}_{21}}{dt}\right]\Bigg|_A^B=$$

$$\left|\frac{d\vec{r}_{21}}{dt}\right|=v_{RELATIVA}\qquad\frac{d\vec{r}_{21}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}_{2}}{dt}=v_{RELATIVA}^2$$

$$L=\frac{\mu}{2}\left(v_{RELATIVA,B}^2-v_{RELATIVA,A}^2\right)$$