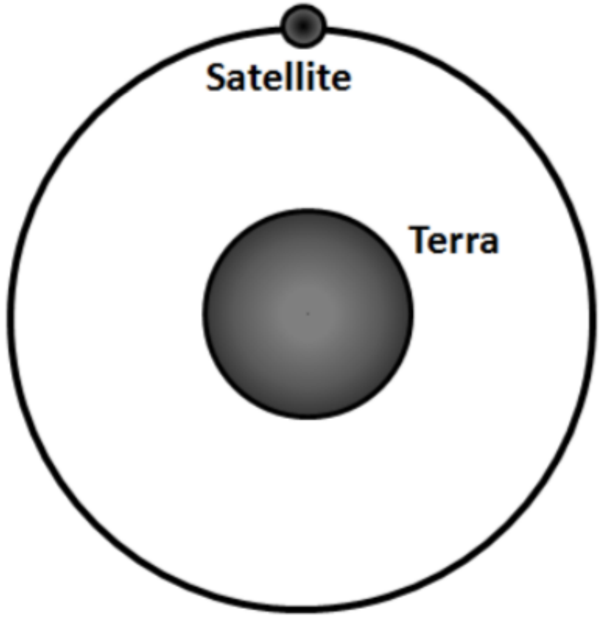
Es. del 15/5/ Ciocci

Esercizi di esame da
https://www.pi.infn.it/~ciocci/

Esercizio 1 **Esame di Fisica Generale del 7/7/2015**

Un satellite geostazionario di massa m_0 = 3t ruota su un'orbita circolare intorno alla Terra. In un certo istante esplode in due frammenti di massa $m_1 = m0/3$ e $m_2 = 2m_0/3$. Rispetto a un sistema di riferimento solidale con il satellite, il frammento più piccolo viene lanciato verso l'alto con una velocità verticale v_{1s} = 200m/s. Sono dati la costante di gravitazione universale $G = 6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$ e la massa della Terra $M_T = 5.97 \cdot 10^{24}$kg.

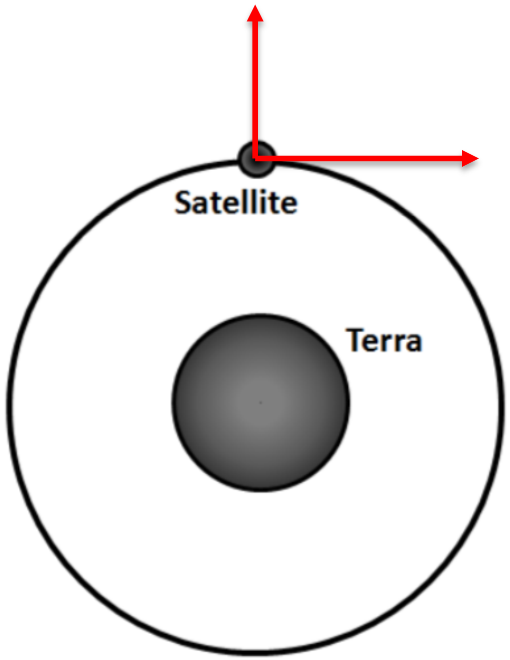


Si calcoli:

a) il modulo della velocità rispetto alla Terra del frammento di maggiore massa. v_{2t} = ...

b) l'energia minima sviluppata dall'esplosione. $E_{esplosione}$ = ...

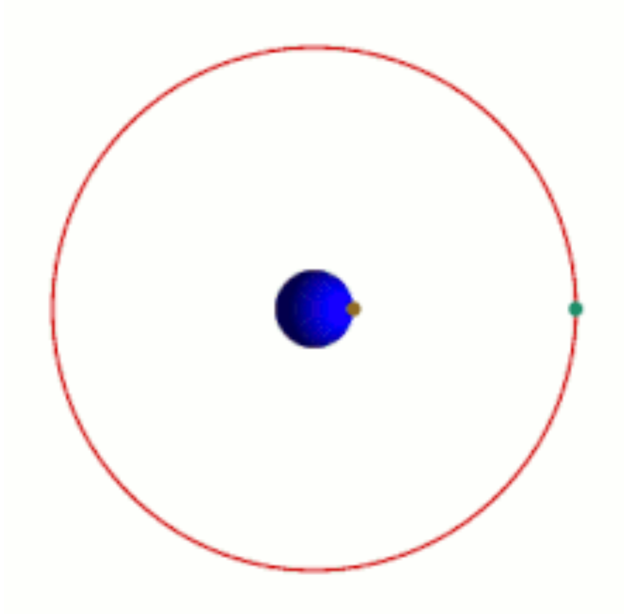
c) La distanza di massimo avvicinamento alla Terra dei due frammenti nel moto successivo all'esplosione. d_{1min} = ... d_{2min} = ...

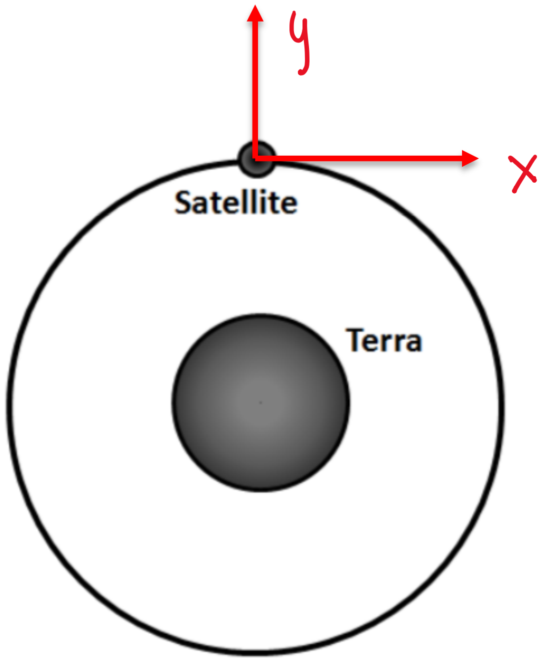


Dati
satellite geostazionario su orbita circolare intorno alla Terra
massa m_0 = 3t

Prodotto dell'esplosione
due frammenti di massa
$m_1 = m0/3$ e $m_2 = 2m_0/3$.
In S.D.R. solidale con il satellite, il frammento m_1 ha $\vec{v}_1 = (0, v_{1s})$ con v_{1s} =200m/s.
$G = 6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$
$M_T = 5.97 \cdot 10^{24}$kg.

Si calcoli:
a) il modulo della velocità rispetto alla Terra del frammento di maggiore massa.
v_{2t} = ...

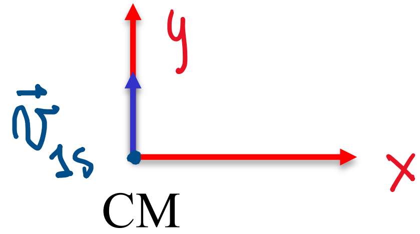




Si calcoli:

a) il modulo della velocità rispetto alla Terra del frammento di maggiore massa.

v_{2t} = ...



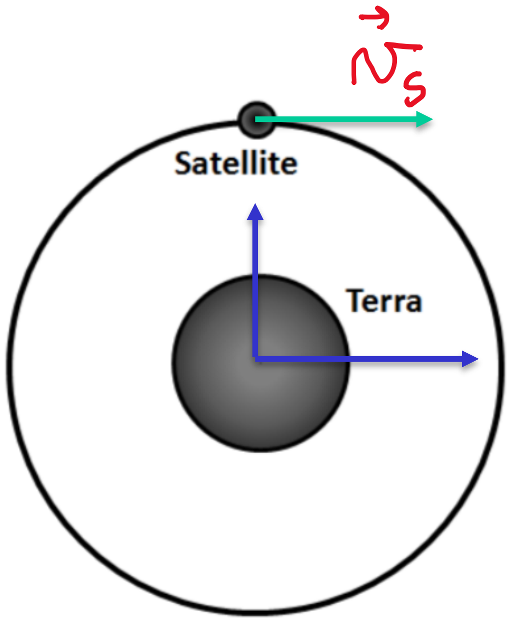
Nel sistema solidale al CM. del satellite si conserva la quantità di moto del CM

poichè in questo SDR $\vec{a}_{CM}, \vec{v}_{CM}, \vec{x}_{CM} = 0$!

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = M \vec{v}_{CM} = 0 \quad \text{in SCM}$$

$$m_1 v_{1s} + m_2 v_{2s}^y = \emptyset \qquad v_{2s}^y = -\frac{m_1 v_{1s}}{m_2}$$

$$v_{2s}^y = -\frac{m_0}{3} \cdot \frac{3}{2 m_0} v_{1s} = -\frac{1}{2} v_{1s}$$



$$\vec{v}_{2t} = \vec{v}_{2s} + \vec{v}_s$$

con $\vec{v}_{2s}$ velocità del satellite in SCM satellite $= \left(0, -\frac{1}{2} v_{1s}\right)$

$\vec{v}_s$ velocità del CM del satellite

$\vec{v}_s = \omega \, r_{geo} \, \hat{x}$ con r_{geo} raggio dell'orbita e ω velocità angolare di rotazione del satellite intorno alla terra

$$v_{2t} = \sqrt{v_{2s}^2 + v_s^2}$$

ma quanto vale v_s?

$$v_{2t} = \sqrt{v_{2s}^2 + v_s^2}$$

ma quanto vale v_s?

$$v_s = \omega\, r_{geo}$$

Per un satellite geostazionario il periodo di rivoluzione intorno alla terra coincide con il periodo di rotazione terrestre $T = 24\,h$ affinché questo avvenga

$$F = G\frac{M_T m_0}{r_{geo}^2} = m_0\,\omega^2 r_{geo} = m_0 \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r_{geo}$$

$$G\frac{M_T m_0}{r_{geo}^2} = m_0 \frac{4\pi^2}{T^2} r_{geo} \Rightarrow \qquad r_{geo} = \sqrt[3]{\frac{G M_T T^2}{4\pi^2}}$$

per cui r_{geo} è lo stesso per TUTTI i satelliti geostazionari

$$v_s = \frac{2\pi}{T} \cdot r_{geo} \Longrightarrow v_{2t} = \sqrt{v_{2s}^2 + v_s^2} = 3071\,m/s$$

b) Si calcoli:l'energia minima sviluppata dall'esplosione. $E_{esplosione}$ = ...

Un istante prima dell'esplosione ed un istante dopo l'energia potenziale del satellite (o dei suoi frammenti) non cambia

Köenig

$$E^{\text{liberata}}_{\text{esplosione}} = \underbrace{\frac{1}{2} M_S v_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{1S}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2S}^2}_{} - \underbrace{\frac{1}{2} M_S V_{CM}^2}_{}$$

Nota: $$U_f = -\frac{G M_T m_1}{r_{geo}} - \frac{G M_T m_2}{r_{geo}} = U_i = -\frac{M_S G M_T}{r_{geo}}$$

poiché $m_1 + m_2 = M_S$

per cui:

$$E_{esplosione} = \frac{1}{2} m_1 v_{1S}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2S}^2 = 3 \times 10^7 \text{ J}$$

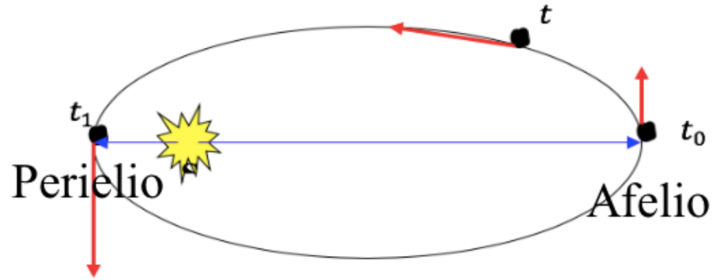
c) Si calcoli la distanza di massimo avvicinamento alla Terra dei due frammenti nel moto successivo all'esplosione. d_{1min} = ... d_{2min} = ...

1) Non ci sono forze dissipative ⇒ l'energia di ciascun frammento è costante

2) Ciascun frammento nel suo moto (centrale!) avrà un momento angolare costante
⇒ la forza esercitata dalla terra è centrale

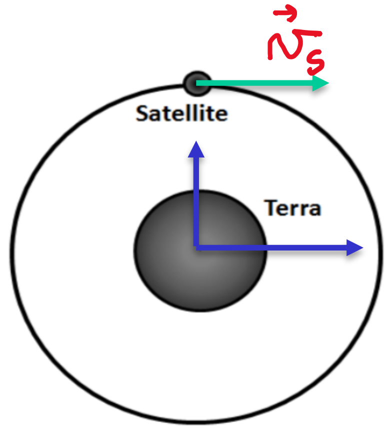
3) La distanza di max avvicinamento corrisponde alla distanza più piccola dalla terra:
l'orbita sarà ellittica con la terra in uno dei 2 fuochi e la velocità assume il valore massimo nel punto di massimo avvicinamento.

1) Scriviamo l'energia e il momento angolare di ciascun frammento



$$E_{i\,1} = cost = \frac{1}{2} m_1 v_{1t}^2 - \frac{G m_1 M_T}{r_{geo}} \qquad \text{dove} \quad v_{1t} = \sqrt{v_{1s}^2 + v_s^2}$$

$$E_{f\,1} = E_{i\,1} = \frac{1}{2} m_1 v_{1tf}^2 - \frac{G m_1 M_T}{r_1}$$



$$E_{i_2} = \frac{1}{2} m_2 v_{2t}^2 - \frac{G m_2 M_T}{r_{geo}}$$

$$E_{f2} = E_{i\,2} = \frac{1}{2} m_2 v_{2tf}^2 - \frac{G m_2 M_T}{r_2}$$

2) Vale la conservazione del momento angolare

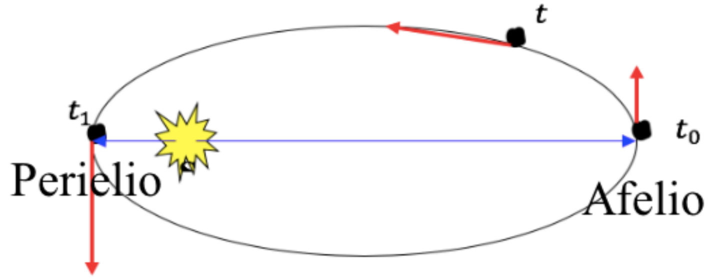
$$\vec{L}_1^{\,i} = m_1 \vec{r}_{geo} \wedge \left(v_{1t}^y \hat{J} + v_s \hat{x} \right) \Rightarrow |L_1^i| = r_{geo} v_s m_1$$

$$\vec{L}_1^{\,f} = m_1 \vec{r}_1 \wedge \vec{v}_{1tf} \Rightarrow |L_1^f| = m_1 r_1 v_{1tf}$$

3) $\vec{L}^f_1 = \underbrace{m_1 \vec{r}_1 \wedge \vec{v}_{1tf}} \Rightarrow |L^f_1| = m_1 r_1 v_{1tf}$

nel punto di max avvicinamento

$\vec{v}_{1tf} \perp \vec{r}_1$

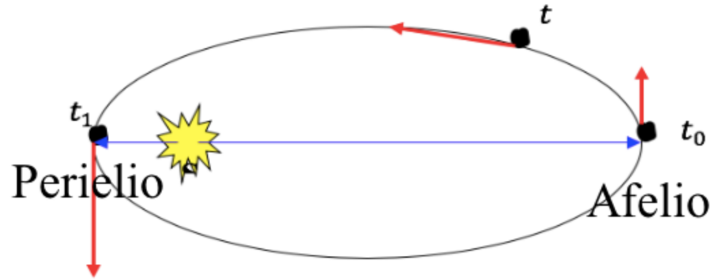


dalla 3) $v_{1tf} = \dfrac{|\vec{L}^f_1|}{m_1 r_1} = \dfrac{|\vec{L}^i_1|}{m_1 r_1}$ con $|L^i_1|$ noto!

per cui $E_{if} = \frac{1}{2} m_1 \left(\dfrac{L^i_1}{m_1 r_1}\right)^2 - \dfrac{G m_1 M_T}{r_1} = E_{1i} =$ NOTA

Quindi abbiamo un' equazione di II° in r_1

$$\underbrace{2 m_1 E_{1i}}_{a} r_1^2 + \underbrace{2 G m_1^2 M_T}_{b} r_1 - L^2_{1i} = 0$$



$$a r_1^2 + b r_1 - L_{1i}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4aL_{1i}^2}}{2a}$$

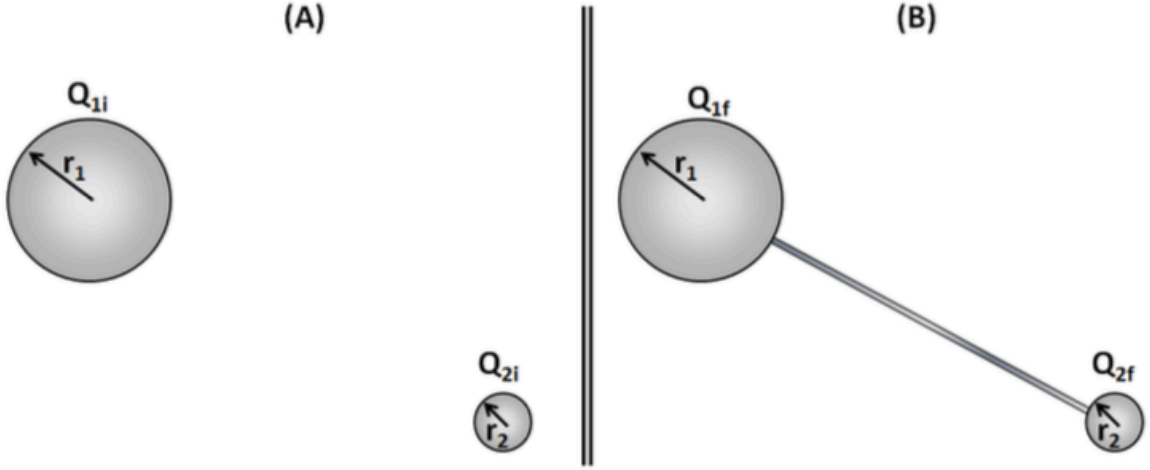
la soluzione cercata corrisponde al valore più piccolo (perielio) l'altra corrisponde all'afelio!

$$r_{1\,min} = d_{1\,min} = 39.6 \times 10^6 \ m$$

Allo stesso modo si procede per calcolare $d_{2\,min}$

Esercizio 2 **Esame di Fisica Generale del 14/9/2016**

Su una sfera conduttrice di raggio $r_1 = 20$ cm è depositata la carica $Q_{1i} = 20 \cdot 10^{-5}$C; un'altra sfera conduttrice di raggio $r_2 = 5$ cm presenta la carica $Q_{2i} = 30 \cdot 10^{-5}$C. Le sfere, inizialmente isolate, vengono poste in contatto attraverso un filo conduttore. Le sfere sono abbastanza lontane da non influenzarsi a vicenda e la carica sul filo è trascurabile ($\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10$-^{12}F/m).

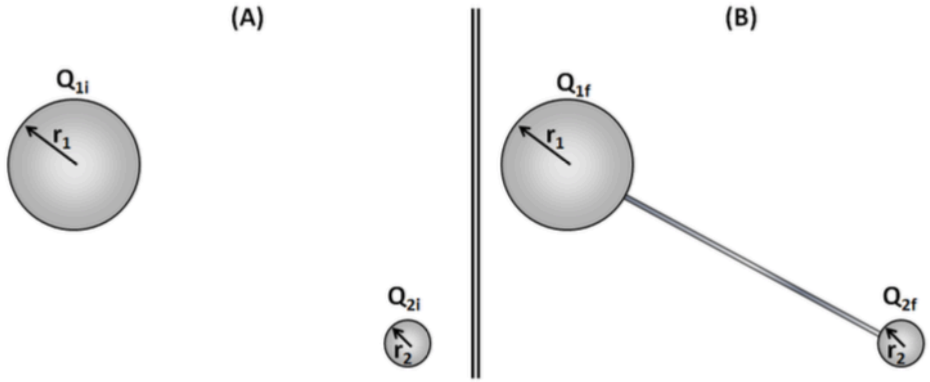


Si calcoli:

a) la carica Q_{1f} e Q_{2f} presente sulle sfere rispettivamente di raggio r_1 e r_2 dopo che sono state collegate (in condizioni stazionarie). Q_{1f} = ... Q_{2f} = ...

b) Il rapporto tra E_1 ed E_2 cioè tra i campi elettrici alla superficie (appena all'esterno di essa) delle sfere rispettivamente di raggio r_1 e r_2 dopo che sono state collegate. E_1/E_2=....................

c) La variazione di energia elettrostatica tra il caso iniziale, in cui le sfere non sono collegate, e il caso finale, in cui le sfere sono unite dal filo conduttore (Si utilizzi la formula $U = 1/2CV^2$ considerando ogni sfera come un condensatore in cui la seconda armatura è a distanza infinita). Udiss = ...



Due sfere conduttrici isolate

Sfera 1

$r_1 = 20$ cm, $Q_{1i} = 20 \cdot 10^{-5}$C

Sfera 2

$r_2 = 5$ cm, $Q_{2i} = 30 \cdot 10^{-5}$C.

Poste poi in contatto attraverso un filo conduttore

Le sfere sono abbastanza lontane da non influenzarsi a vicenda e la carica sul filo è trascurabile

($\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$F/m).

Si calcoli:

a) la carica Q_{1f} e Q_{2f} presente sulle sfere rispettivamente di raggio r_1 e r_2 dopo che sono state collegate (in condizioni stazionarie). Q_{1f} = ... Q_{2f} = ...

a)La carica totale presente nei due conduttori isolati è: $Q_{tot} = Q_{1i} + Q_{2i}$

poichè la carica si conserva, dopo che le due sfere sono collegate: $Q_{tot} = Q_{1f} + Q_{2f}$

Inoltre essendo due conduttori, dopo il collegamento, all'equilibrio hanno lo stesso potenziale :

$$V_1 = V_2 = \frac{Q_{1f}}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = \frac{Q_{2f}}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \Rightarrow \frac{Q_{1f}}{r_1} = \frac{Q_{2f}}{r_2}$$

$$\begin{cases} 1) \quad \dfrac{Q_{1f}}{r_1} = \dfrac{Q_{2f}}{r_2} \\ 2) \quad Q_{1f} + Q_{2f} = Q_{1i} + Q_{2i} = Q_{TOT} \end{cases} \qquad \begin{cases} 1) \quad Q_{2f} = Q_{1f} \cdot \dfrac{r_2}{r_1} \\ 2) \quad Q_{1f}\left(1 + \dfrac{r_2}{r_1}\right) = Q_{TOT} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_{1f} = Q_{TOT} \dfrac{r_1}{r_1 + r_2} = 40 \times 10^{-5}\,C \\ Q_{2f} = Q_{TOT} \dfrac{r_2}{r_1 + r_2} \simeq 10 \times 10^{-5}\,C \end{cases}$$

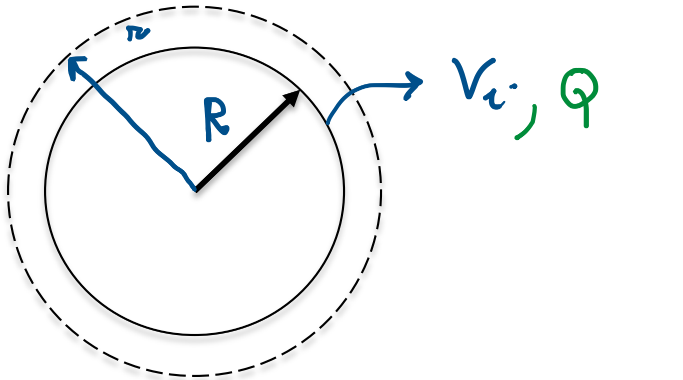
a) Il rapporto tra E_1 ed E_2 cioè tra i campi elettrici alla superficie (appena all'esterno di essa) delle sfere rispettivamente di raggio r_1 e r_2 dopo che sono state collegate.
E_1/E_2=....................

dal teorema di Gauss $\quad E_1 4\pi\varepsilon_0 r_1^2 = Q_{1f} \qquad E_2 \cdot 4\pi\varepsilon_0 r_2^2 = Q_{2f}$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot Q_{1f}/Q_{2f} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \frac{r_1}{r_2} \simeq \frac{r_2}{r_1} \simeq 0.25$$

c) Si calcoli la variazione di energia elettrostatica tra il caso iniziale, in cui le sfere non sono collegate, e il caso finale, in cui le sfere sono unite dal filo conduttore (Si utilizzi la formula U = 1/2CV [2] considerando ogni sfera come un condensatore in cui la seconda armatura è a distanza infinita). Udiss = ...

Se non conosciamo la capacità di un condensatore sferico dobbiamo calcolarla in questo caso una delle armature è a ∞



$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$\Delta V = V_i - V_\infty = \int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \vec{E}\,?$$

per $r \geq R$ da Gauss $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \hat{r}$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow C = \frac{Q}{Q} \cdot 4\pi\varepsilon_0 R$$

Nel nostro caso

$$C_i = 4\pi\varepsilon_0 r_i$$

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} C \frac{Q^2}{C^2} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$\Rightarrow \quad U_f = \frac{1}{2} \frac{Q_{1f}^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_{2f}^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

$$U_i = \frac{1}{2} \frac{Q_{1i}^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_{2i}^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

$$\Rightarrow \quad U_f - U_i = -4500 \text{ J}$$

$\Rightarrow$ l'energia dissipata è 4500 J

Esercizio 2 **Esame di Fisica Generale del 5/7/2013**

Due condensatori a facce piane e parallele identici sono costituiti da due armature di area = 200 cm^2 separate da una distanza d = 5.00 mm e sono collegate come in Figura 2. In ciascuno dei condensatori è inserita per metà spessore una lastra di materiale dielettrico di constante dielettrica relativa al vuoto $\varepsilon_r = 2.00$. Sapendo che la carica sulle armature di ciascun condensatore nelle condizioni iniziali è q = 6.00 mC,

a) calcolare la differenza di potenziale elettrostatico tra le due armature;

|ΔVarmature| = ...

Figura 2:

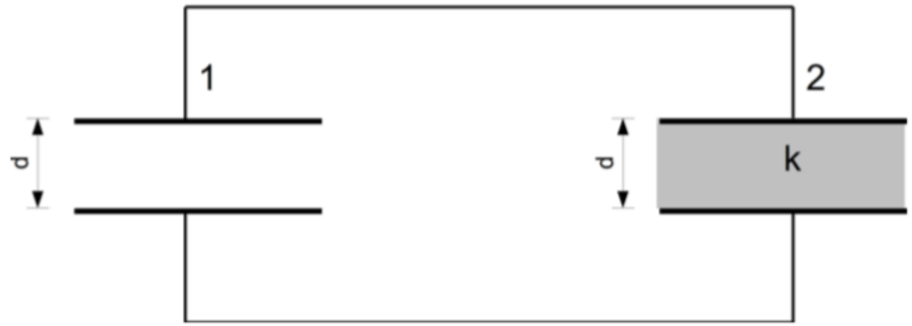


Figura 3:

Supponiamo ora di rimuovere una delle due lastre di dielettrico e di inserirlo nell'altro fino a riempire completamente lo spazio fra le armature (vedi Figura 3).

b) Calcolare la carica finale sulle armature di ciascun condensatore:

q1 = ... q2 = ...

c) Calcolare lsa variazione di energia elettrostatica: ΔEelettrostatica = ...

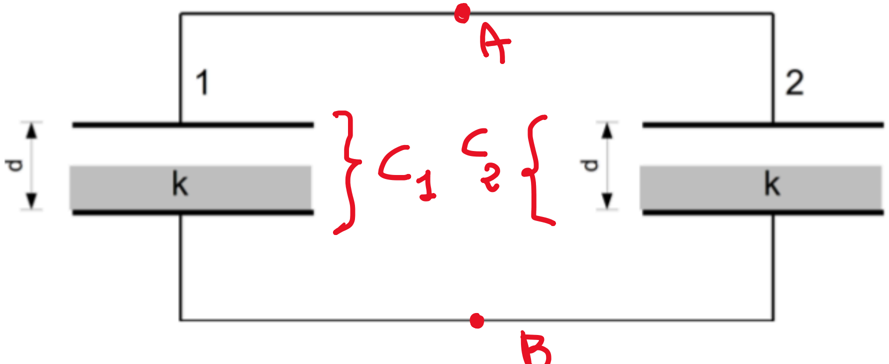


Figura 2:

2 condensatori a facce piane e parallele identici armature di area = 200 cm^2 separate da una distanza d = 5.00 mm collegate come in Figura 2.
In ogni condensatore è inserita per metà spessore una lastra di materiale dielettrico $k=\varepsilon_r = 2.00$.
carica sulle armature di ciascun condensatore $q = 6.00$ mC,

a) calcolare la differenza di potenziale elettrostatico tra le due armature;
|ΔVarmature| = ...

a) Ogni singolo condensatore è schematizzabile come la serie di due condensatori, il primo con dielettrico e il secondo senza, di spessore d/2. La capacità totale dei singoli condensatori (1) e (2) che sono identici è quindi data da:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{dielettrico}} + \frac{1}{C_{vuoto}} = \frac{d/2}{\varepsilon_0 A}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} + 1\right)$$

$$C_1 = C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{d/2}\left(\frac{1}{1/\varepsilon_r + 1}\right) = 47.2 \text{ pF}$$

C_1 e C_2 sono in parallelo

$$C_1 = C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{d/2}\left(\frac{1}{1/\varepsilon_r + 1}\right) = 47.2\ pF$$

C_1 e C_2 sono in parallelo

poiché la carica su ciascun condensatore è nota e vale q:

$$\left|\frac{q}{C_1}\right| = \left|\frac{q}{C_2}\right| = |\Delta V_{armature}| = 127\ MV$$

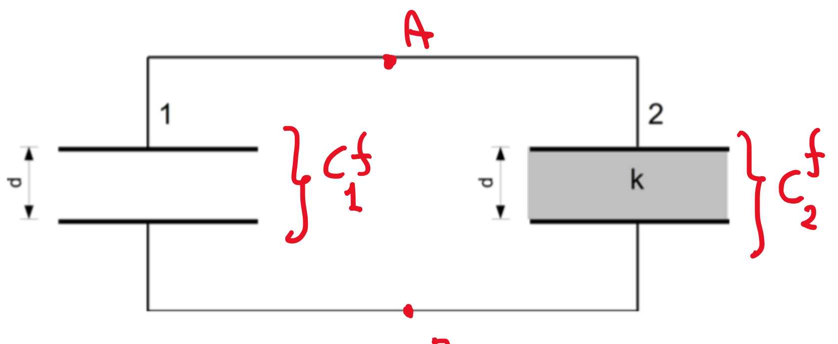


Figura 3:

Una delle due lastre di dielettrico viene rimossa da uno e inserita nell'altro fino a riempire completamente lo spazio fra le armature (vedi Figura 3).

b) Calcolare la carica finale sulle armature di ciascun condensatore:
q1 = ……….   q2 = …….

1) vale la conservazione della carica $\quad q_1 + q_2 = 2q$

2) i due condensatori sono in parallelo $\quad q_1/C_1^f = q_2/C_2^f$

$$\begin{cases} a) & q_1 + q_2 = 2q \\ b) & q_1/C_1^f = q_2/C_2^f = V_{A'} - V_{B'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b) & q_2 = q_1 \dfrac{C_2^f}{C_1^f} \\ a) & q_1 + q_1 \dfrac{C_2^f}{C_1^f} = 2q \end{cases}$$

$$\begin{cases} a & q_1 = \dfrac{2q}{1 + \dfrac{C_2^f}{C_1^f}} \\ b & q_2 = \dfrac{2q}{\dfrac{C_1^f}{C_2^f} + 1} \end{cases}$$

Con $C_1^f = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$, $C_2^f = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d}$

$C_1^f = 35.4\ pF$ $\quad C_2^f = 70.8\ pF$

$q_1 = 4\ mC$ $\qquad q_2 = 8\ mC$

c) Calcolare la variazione di energia elettrostatica tra la configurazione iniziale e quella finale: ΔEelettrostatica = ...

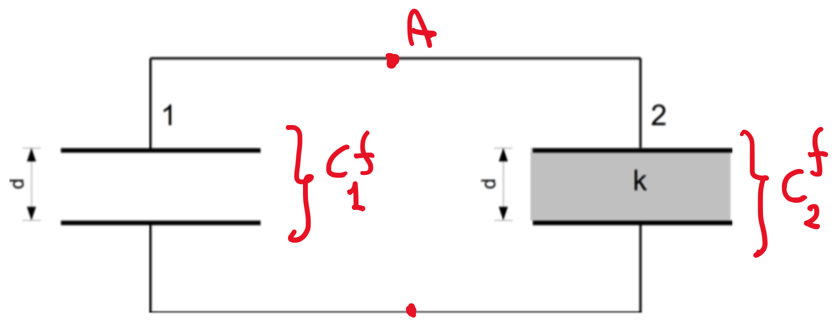


Figura 3:

I 2 condensatori sono in parallelo nella configurazione finale per cui

$$E_f = \frac{1}{2} C^f_{eq} \Delta V_f^2 = \frac{1}{2}\left(C_1^f + C_2^f\right)\Delta V_f^2 = \frac{1}{2}\left(C_1^f + C_2^f\right)\left(\frac{Q_1}{C_1^f}\right)^2$$

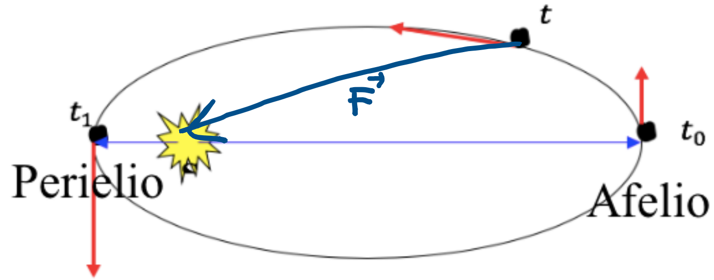
$$= \frac{1}{2}\left(C_1^f + C_2^f\right)\left(\frac{Q_2}{C_2^f}\right)^2$$

sono in parallelo anche nella configurazione iniziale per cui:

$$E_i = \frac{1}{2} C_{eq} \Delta V_i^2 = \frac{1}{2}\left(C_1 + C_2\right)\Delta V_i^2 = \frac{1}{2}\cdot 2 C_1 \left(\Delta V_{armature}\right)^2$$

$$E_f - E_i = -84\ KJ$$

backup



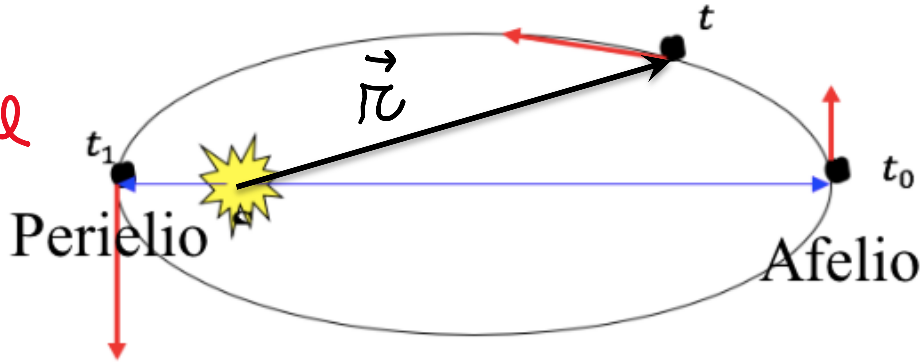
La forza esercitata dalla terra sul frammento è una forza centrale:

$$\vec{F}_{Tf} = -\frac{G M_T m_f}{r^2_{Tf}} \hat{r}_{Tf}$$

$$\vec{F}_{Tf} = -\vec{\nabla} U \Rightarrow -\frac{dU}{dr_{Tf}} \hat{r}_{Tf} = -\frac{G M_T m_f}{r^2_{Tf}} \hat{r}_{Tf}$$

$$\frac{dU}{dr_{Tf}} = \frac{G M_T m_f}{r^2_{Tf}} \Rightarrow U = -\frac{G M_T m_f}{r_{Tf}}$$

Moti centrali: conservazione del momento angolare

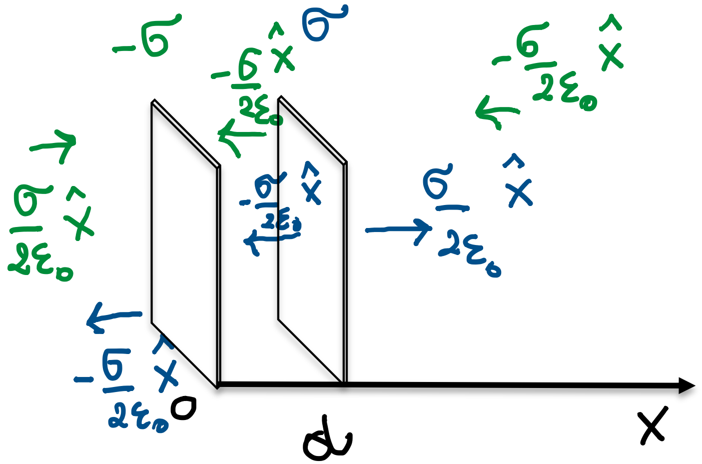


$$\vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge F_r \hat{r} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cost$$

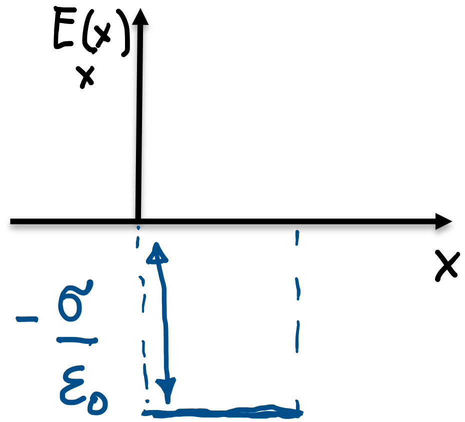
oppure $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{r} \wedge m\vec{v}\right) = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

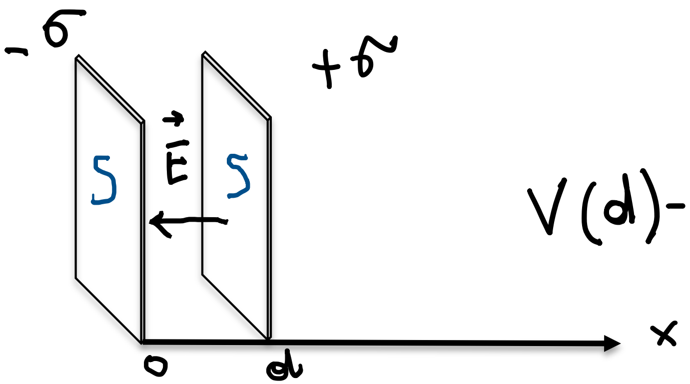
$= \vec{r} \wedge m\vec{a} = \vec{r} \wedge \vec{F} = 0$ se il moto è centrale $(\vec{F} = F_r \hat{r})$

Come si calcola la capacità di un condensatore piano?



$$\vec{E} = E_x\,\hat{x}$$





$$V(d) - V(0) = \int_d^0 \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_d^0 \hat{x}\cdot\hat{x}\,dl = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,d = \frac{Q}{S\varepsilon_0}\,d$$

$$\Rightarrow \quad C = Q/\Delta V = \varepsilon_0 S/d$$

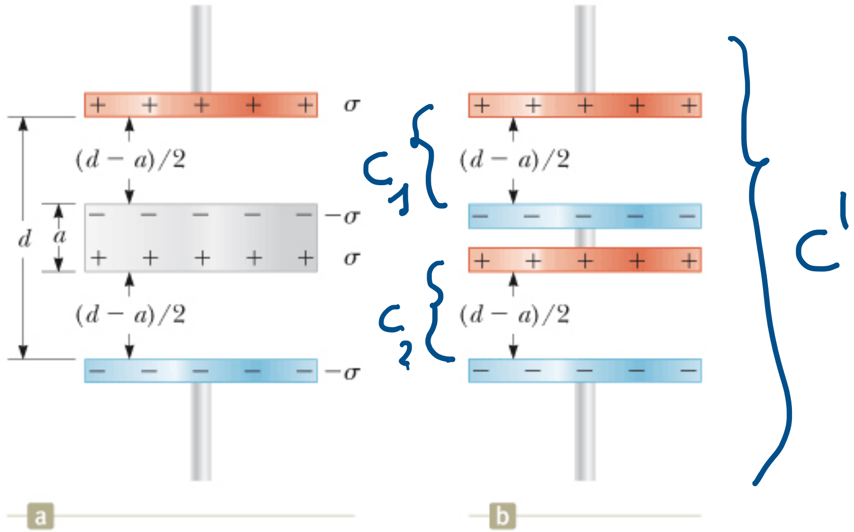


Figura 26.23 (Esempio 26.7) (a) Un condensatore piano con le armature distanti *d* fra le quali è stata introdotta una lastra metallica di spessore *a*. (b) Il circuito equivalente del sistema mostrato in (a) è il collegamento in serie di due condensatori che hanno entrambi le armature a distanza $(d - a)/2$.

Prima dell'inserimento della lastra metallica di spessore a

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Dopo l'inserimento

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 A}{d-a/2}} + \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 A}{d-\frac{a}{2}}}$$

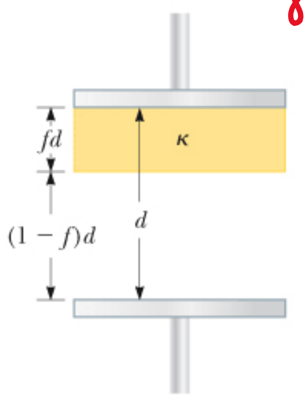
$$C' = \frac{\varepsilon_0 A}{d-a}$$

per $a \to \emptyset$ $\quad C' = C$

poichè l'inserimento di una lastra sottile metallica con spessore tendente a $\emptyset$ non altera la capacità.

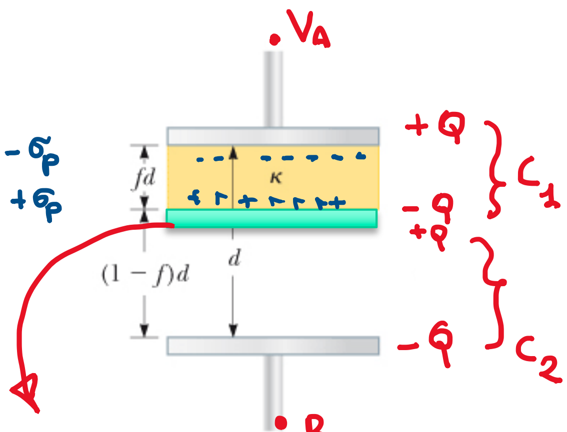
inserendo una lastra metallica e facendo poi tendere a $\emptyset$ il suo spessore la capacità C_0 non cambia

C_0 incognita



↓

equivalente a



C_0 è equivalente alla serie di C_1 e C_2

$V_C \Rightarrow$ conduttore → superficie equipotenziale

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$