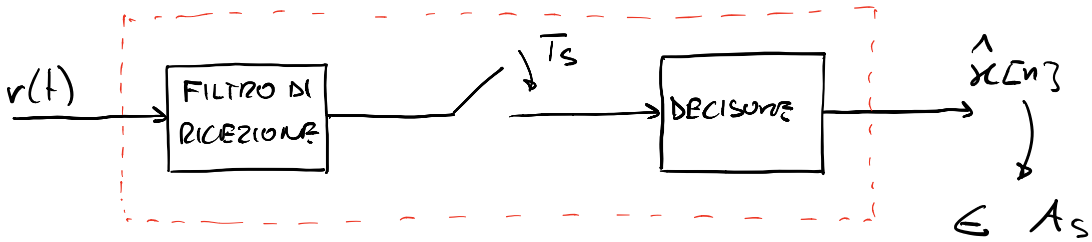
-) DEMODULATORE NUMERICO



$\Rightarrow$ Il demodulatore numerico trasforma il segnale ricevuto in simboli dell'alfabeto A_s cercando di minimizzare la probabilità di errore

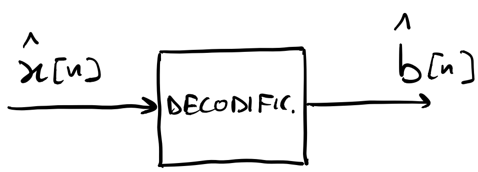
Probabilità di errore

simbolo deciso — simbolo trasmesso

-) sul simbolo : $P_{E_s} \triangleq P\{\hat{x}[n] \neq x[n]\}$

-) sul bit: $P_{E_b} \triangleq P\{\hat{b}[n] \neq b[n]\}$

Bit Error Probability (BEP) — bit deciso — bit trasmesso



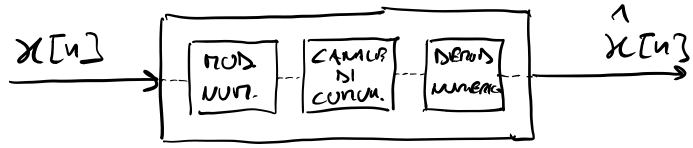
BER: Bit error rate : numero di bit errati per secondo

BEP: Bit error probability : probabilità di sbagliare un bit

bit rate = K (bit/s)

$BER = K \cdot BEP$

CANALE NUMERICO E PRESTAZIONI



$$P_{E_S} = P_E(M) = ?$$

M: numero dei simboli dell'Alfabeto $\Rightarrow A_S = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{M-1}\}$

$\Rightarrow P\{i|j\}$ prob. di transizione

$$= P\{\hat{x}[n] = \alpha_i, x[n]\, \alpha_j\}$$

$$P_E(M) \triangleq P\{\hat{x}[n] \neq x[n]\} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} P\{\hat{x} = \alpha_i, x = \alpha_j\}$$

omettiamo la dipendenza da n (STAZIONARIO)

APPLICO IL TEO. DELLA PROB. TOTALE

$$= \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} P\{\hat{x} = \alpha_i \mid x = \alpha_j\} P\{x = \alpha_j\}$$

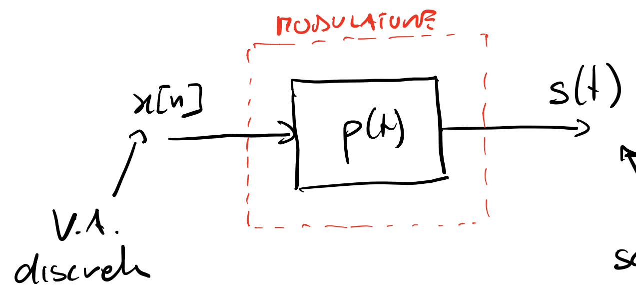
$P\{x = \alpha_j\} \quad \forall j \Rightarrow$ prob. a priori

- SIMBOLI SONO EQUIPROBABILI

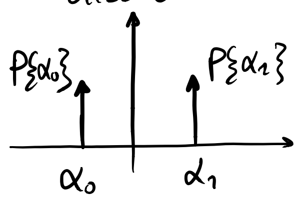
$$P\{x = \alpha_j\} = \frac{1}{M} \quad \forall j$$

→ Quando i simboli non sono equiprobabili, vanno espresse le prob. a priori

⇒ MODULAZIONI NUMERICHE IN BANDA BASE



segnale aleatorio parametrico con parametri le V.A. rappres. dai simboli emessi dalla sorgente



$$s(t) \rightarrow \begin{cases} s_0(t) = \alpha_0\, p(t) \\ s_1(t) = \alpha_1\, p(t) \\ \vdots \\ s_{M-1}(t) = \alpha_{M-1}\, p(t) \end{cases}$$

realizzazioni del processo $s(t)$

$$E_{s_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t)\, dt$$

$s_i(t)$ è il segnale trasmesso relativo al simbolo i-esimo

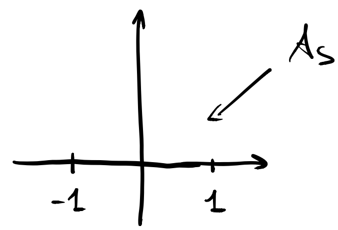
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t-nT)$$

|| MODULAZIONE NUMERICA IN BANDA BASE

$E_{s_i} = E_s \quad \forall i$ ⇒ MODULAZIONE EQUIENERGETICA

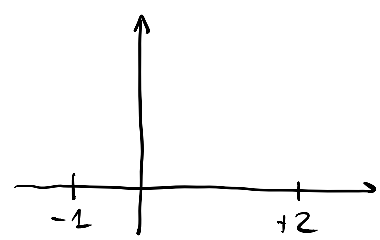
$$E_{s_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i^2\, p^2(t)\,dt = \alpha_i^2 E_p$$

$$E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t)\,dt$$



$\alpha_i^2 = 1 \quad \forall i$

equienergetico



$\alpha_0^2 = 1$

$\alpha_1^2 = 4$

non e' equienergetico

- EFFICIENZA ENERGETICA
  - Fissata una P_{E_b}, l'efficienza energetica e' definita come

$$\eta_P \triangleq \frac{1}{SNR}, \quad SNR = \frac{P_S}{P_N}$$

SNR $\downarrow$ signal-to-noise ratio

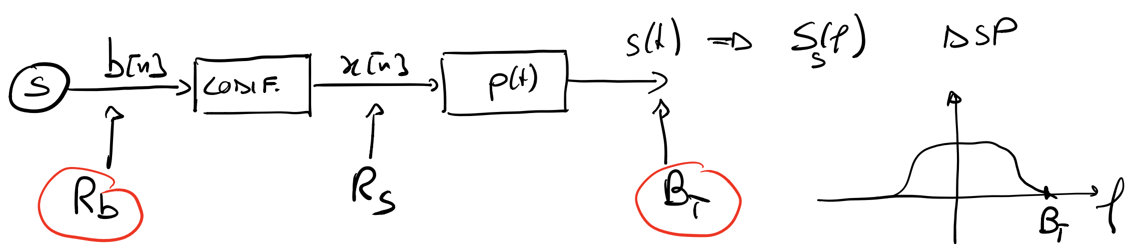
rapporto segnale-rumore

che garantisce l'ottenimento della P_{E_b} prefissata

Tanto più è elevata l'efficienza energetica tanto più performante e' il sistema.

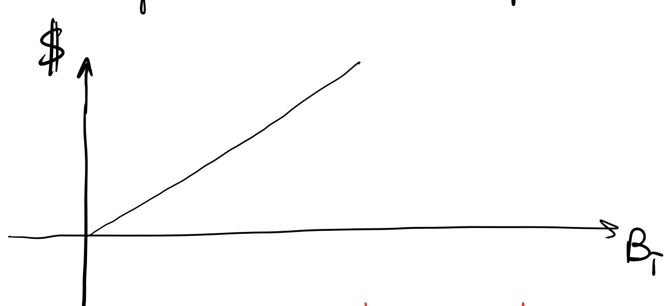
- EFFICIENZA SPETTRALE
  - Fissata la P_{Eb}
  - L'efficienza spettrale è definita come il rapporto tra il tasso di erogazione binario della sorgente e la banda di trasmissione

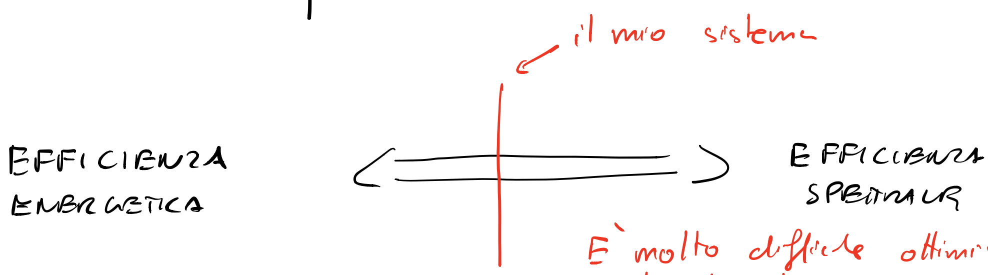
$$\eta_B \triangleq \frac{R_b}{B_T} \quad [\text{bit/s/Hz}]$$



che garantisce l'ottenimento della P_{Eb} fissata.

⇒ A parità di P_{Eb} ed R_b un sistema che utilizza una B_T minore di un altro è più efficiente dal punto di vista spettrale.



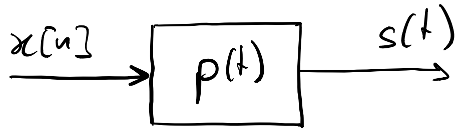


È molto difficile ottimizzare in entrambe le direzioni

PULSE AMPLITUDE MODULATION (PAM)

M-PAM $\Rightarrow$ PAM con M simboli

$$A_S = \{ \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{M-1} \}$$



DEFINIZIONE DI UNA PAM

1) $$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t - nT_s)$$

T_s = intervallo di segnalazione (erogazione) dei simboli

2) simboli

$$\alpha_i = 2i - 1 - M$$

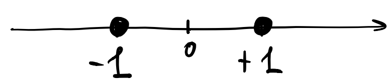
M = numero dei simboli dell'alfabeto

esempio

$M = 2$

$\alpha_1 = -1$

$\alpha_2 = 1$



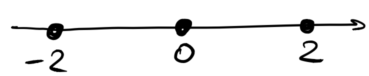
2-PAM

$M = 3$

$\alpha_1 = -2$

$\alpha_2 = 0$

$\alpha_3 = 2$



3-PAM

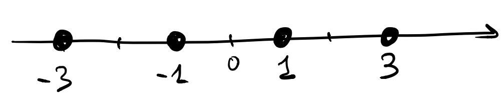
$M = 4$

$\alpha_1 = -3$

$\alpha_2 = -1$

$\alpha_3 = 1$

$\alpha_4 = 3$



4-PAM

$$E_{s_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i^2\, p^2(t-nT_s)\,dt$$

$$= (2i-1-M)^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t-nT_s)\,dt}_{E_p} = (2i-1-M)^2 E_p$$

dipende da "i"

$\Downarrow$

non è equienergia

$\Rightarrow$ Energia media per simbolo trasmesso

$$E_s = E\left[E_{s_i}\right] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t)\,dt\right] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i^2\, p^2(t-nT_s)\,dt\right]$$

$$= E\left[\alpha_i^2\right] \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t-nT_s)\,dt = E\left[\alpha_i^2\right] E_p$$

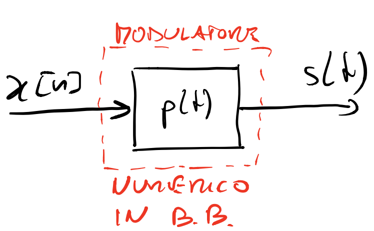
$$E_b = \frac{E_s}{\log_2 M}$$

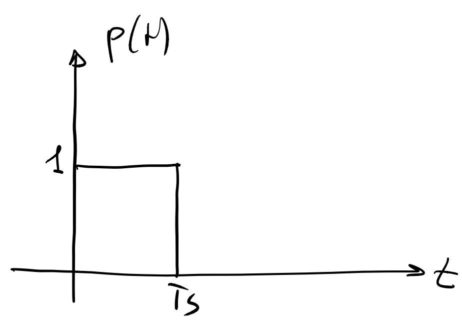
Esempio — 4-PAM

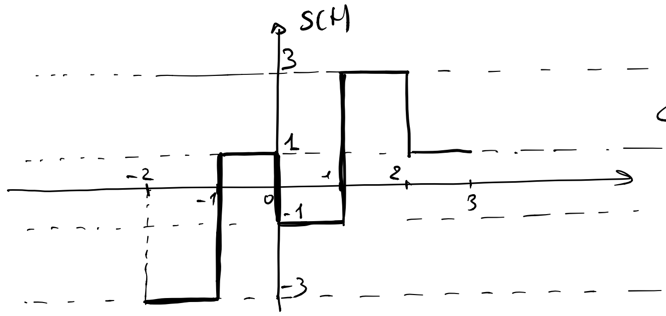
$$A_s = \{-3, -1, 1, 3\} \qquad p(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$$

$x[n] \Rightarrow \ldots,\ x[-2] = -3,\ x[-1] = +1,\ x[0] = -1,$
$x[1] = +3,\ x[2] = +1,\ \ldots$ realizzazione di simboli

$s(t) = ?$







realizzazione del segnale trasmesso

PROPRIETÀ DERIVATE DELLA PAM

1) $E\left[s(t)\right] = E\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t-nT_s)\right] =$

$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E\left[x[n]\right] p(t-nT_s)$

Ipotesi: simboli equiprobabili $\Downarrow$ $P\{\alpha_i\} = \frac{1}{M} \quad \forall i$

$\boxed{E\left[x[n]\right]} = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i P\{\alpha_i\} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\alpha_i$

$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(2i-1-M) = \frac{2}{M}\sum_{i=1}^{M} i - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} 1 - \frac{M}{M}\sum_{i=1}^{M} 1$

$= \cancel{\frac{2}{M}}\, \frac{\cancel{M}(M+1)}{\cancel{2}} - \frac{M}{M} - M = M+1-1-M = 0$

$\boxed{E\left[s(t)\right] = 0} \qquad \forall t$

2) $\boxed{S_s(f) = \frac{1}{T_s}\, \bar{S}_x(f)\, |P(f)|^2}$ formula generale

$\bar{S}_x(f) = TFS\left[R_x[m]\right]$

$R_x[m] = E\left[x[n]\, x[n-m]\right]$

$P(f) = TCF\left[p(t)\right]$

Per simboli equiprobabili

$$\bar{S}_x(f) = \sigma_x^2 = E[x^2]$$

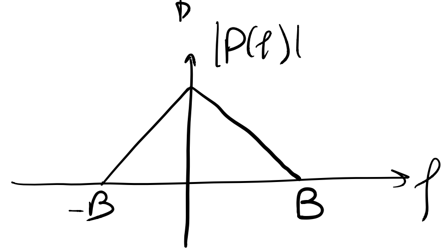
$$E[x] = 0$$

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - \underset{\overset{\|}{0}}{\eta_x^2} = E[x^2]$$

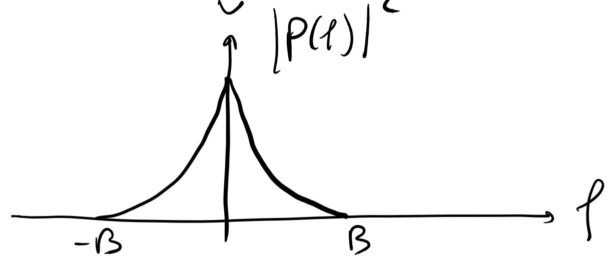
$$\Rightarrow \boxed{S_s(f) = \frac{\sigma_x^2}{T_s}|P(f)|^2}$$

Per simboli equiprobabili

$\Rightarrow$ Se $p(t)$ $\Rightarrow$ $P(f)$



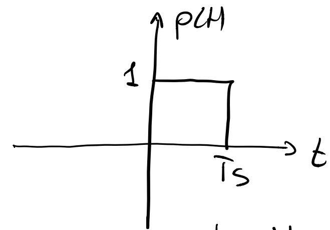
$\Downarrow$



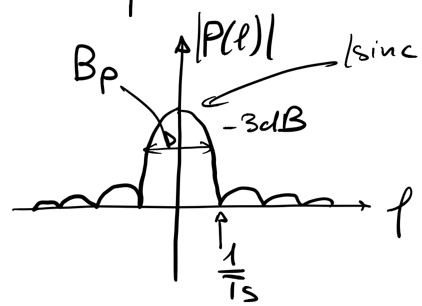
$p(t)$ è determinante per la occupazione di banda del segnale trasmesso

Esempio

$$p(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$$

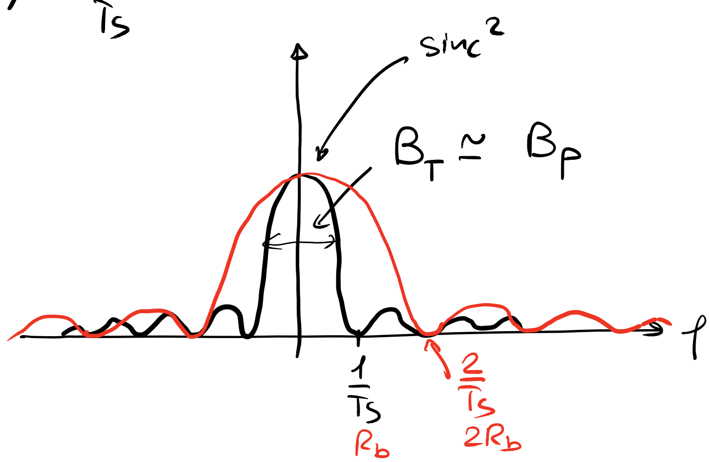


$$|P(f)| = T_s \,\mathrm{sinc}(T_s f)$$



Simboli equiprob.

$$S_s(f) = \frac{\sigma_x^2}{T_s} |P(f)|^2$$



$$\eta_B = \eta_B'$$

$$\eta_B = \frac{2R_b}{2B_T} = \eta_B'$$

2-PAM $\Rightarrow$ $T_s = T_b$ $\Rightarrow$ $R_s = R_b$

$$R_b = \frac{1}{T_s}$$

$\Rightarrow$ voglio raddoppiare il bitrate

$$R_b \to 2R_b \Rightarrow T_s \to \frac{T_s}{2}$$

σ_x^2 per una PAM $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_x^2 = \frac{M^2-1}{3}}$

impostazione del calcolo

$$\sigma_x^2 = E\left[\left(X-\eta_x\right)^2\right] = E\left[X^2\right] = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(2i-1-M\right)^2 \dots$$

3) $$P_S = \int_{-\infty}^{+\infty} S_s(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_x^2}{T_S}\left|P(f)\right|^2 df = \frac{\sigma_x^2}{T_S} E_p$$

per simboli equiprob.

$$= \frac{M^2-1}{3T_S} E_p$$

⇒ EFFICIENZA SPETTRALE M-PAM con simboli equiprobabili

$$\eta_B = \frac{R_b}{B_T} = \frac{\log_2 M}{T_S B_T} \simeq \frac{\log_2 M}{T_S B_p}$$

⇒ PAM BINARIA (BPSK = binary phase shift keying)

2-PAM

1) $$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t-nT_s)$$

$$x[n] \in A_s = \{+1, -1\}$$

$$T_s = T_b \qquad (\log_2 2 = 1)$$

$$E_{s_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^2 p^2(t-nT_s)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (+1)^2 \, p^2(t - nT_s) \, dt = E_{s_2}$$

$$E_{s_1} = E_{s_2} \Rightarrow \text{equienergia}$$

2) $E[s(t)] = 0$

3) $S_s(f) = \dfrac{1}{T_b} |P(f)|^2$

per simboli equiprob.

$$\sigma_x^2 = \frac{M^2 - 1}{3} = \frac{2^2 - 1}{3} = 1$$

4) $P_s = \dfrac{E_p}{T_b}$

5) $\eta_B = \dfrac{1}{T_b B_p}$