

Fisica Generale I

Meccanica

Introduzione

- La fisica è una SCienza Sperimentale che fornisce una DESCRIZIONE QUANTITATIVA dei fenomeni che avvengono
- └ prevede Osservazioni Sperimentali seguite da ANALISI MATEMATICA che permette l'elaborazione della teoria utile all'analisi del processo → EQUAZIONI
- ↓
- Danno gli STESSI RISULTATI in CONDIZIONI IDENTICHE e permettono di PREDIRE cosa accade in altre condizioni
- Permette delle MISURE
- cosa → NON è una SPECULAZIONE INTELLETTUALE
 - come
 - in che UNITÀ gli Sperimenti → TEORIA ed ESPERIMENTO sono COMPLEMENTARI
- Una teoria può avere validità anche solo entro certi LIMITI di misura → la DISCREPANZA permette di GENERALIZZARE
- IL METODO SCIENTIFICO → Composto da: Osservazioni, misurazioni, esperimenti, logica
- └ raccolto le LEGGE condizioni ≠
- VARIE FASI
- Osservazione
 - Scelta grandezze CAMBIO
 - Ipotesi NO
 - ESPERIMENTO per verificare la CORRETTEZZA delle ipotesi
 - riproducibile un CERTOAMENTE e OGNI VOLTA Si ipotesi diventa Legge
- +
- METODO DEDUTTIVO → Parte da osservazioni ed esperimenti
- Le LEGGI: relazioni tra GRANDEZZE FISICHE e COSETTI → descrizione QUANTITATIVA attraverso
- elaborazione teorica
 - matematica
 - statistica

Le grandezze fisiche

→ Una grandezza fisica ha senso se è stata definita con un' UNITÀ CAMPIONE con 3 caratteristiche

- Facilmente disponibile
- Precisa e stabile nel tempo
- Rapido da utilizzare

Insieme dei campioni = SISTEMA INTERNAZIONALE → unità di misura FONDAMENTALI:

- Lunghezza: metro, m
- Masse: chilogrammo, kg
- Tempo: secondo, s
- Temperatura: kelvin, K
- Intensità di corrente: Ampero, A

→ Esistono anche DERIVATE

→ Gli ORDINI di GRANDEZZA: Moltiplicazione del moltiplicatore per una POTENZA di 10 → Per esprimere ordine in una simbolo ~



→ La MASSA: Campione = cilindro di Platino-Iridio a Parigi → massa di 1 kg di H₂O a 4°C e p. atmosferica
Poco preciso: Adesso c'è c.t.e di Planck · v luce

→ La LUNGHEZZA: Campioni → 1799: 10⁷ distanza tra polo Nord ed equatore
1860: Distanza tra due tacche di sbarrata di platino-iridio
1983: 1650 763,73 lunghezza d'onda luce risonanza di lampada Krypton-86

→ Il TEMPO: campioni → Inizialmente: 1/86400 del giorno solare medio
1967: CRONOGRAFO ATOMICO: periodo delle vibrazioni di un atomo di cesio

→ L'ANALISI DIMENSIONALE → Dimensione = natura fisica di una grandezza

$$[L] = \text{lunghezza}$$

$$[M] = \text{massa}$$

$$[T] = \text{tempo}$$

Per verificare la CORRETTEZZA di un'espressione → Quantità possono avere nomi diversi se hanno le STESE DIMENSIONI

→ Esempio corretto se entrambi i lati hanno le STESE DIMENSIONI

Esempio

$$x = \frac{1}{2} at^2 \rightarrow \text{tempo} \rightarrow [L] = \frac{1}{2} [M] \cdot [T]^2 : \checkmark$$

Le grandezze non sono eserci CONVERTIRE moltiplicando per il fattore di conversione

→ La PRECISIONE e le CIFRE SIGNIFICATIVE

→ L'accuracy dipende dalla precisione dello strumento e dal numero di cifre significative

→ ERRORE ASSOLUTO: Precisione della misura (indicato con ±)

Ex: Errore relativo: rapporto tra errore cercato e misura

→ CIFRE SIGNIFICATIVE: Comprendono anche la PRIMA CIFRA INCERTA

→ Lo 0 è significativo se NON usato per mostrare la posizione della virgola

Esempi

$$1,87 \rightarrow 4,10.000 \rightarrow 6,0,0001 \rightarrow$$

→ MOLTIPLICAZIONE: risulta che il numero più piccolo di cifre significative

(divisione) ADDIZIONE: numero minimo di decimali di ciascun termine

→ ATT. ALLA AMBIGUITÀ: 1,500 è AMBIGUO → mentre $1,5 \cdot 10^3$ m per 2 C.S., $1,50 \cdot 10^3$ m per 3 C.S. e così via

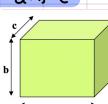
→ ARROTONDAMENTO: ultimo cifra conservata va aumentata di 1 se successiva è > 5, mentre va diminuita di 1 se è < 5. Se è 5 va arrotondata al numero pari più vicino

→ Le MISURE di SUPERFICI e VOLUMI → PARALLElepipedo

$$S_{base} = a \cdot b$$

$$S_{tot} = 2(lab + ac + ca)$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

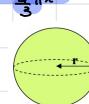


SPERA

$$S_{coppia} = 4\pi r^2$$

$$S_{tot} = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

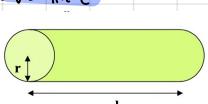


CILINDRO

$$S_{coppia} = 2\pi r l + 2\pi r^2$$

$$S = 2\pi r l + 2\pi r^2$$

$$V = \pi r^2 l$$



3) SISTEMI DI RIFERIMENTO

SISTEMI UNIDIMENSIONALI



MOTO SU UNA RETTA: sufficiente fissare ORIGINE e VERSO di PERCORRENZA

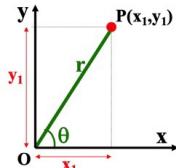
$$P \rightarrow x = +d$$

$$P' \rightarrow x = -d'$$

EQUIVALENTE a LINEA CURVA:

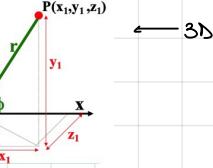


di COORDINATE CARTESIANE



$$\text{CARTESIANE: } P(x_1, y_1)$$

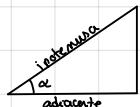
$$\text{POLARI: } P(r, \theta)$$



$$\text{CARTESIANE: } P(x_1, y_1, z_1)$$

$$\text{POLARI: } P(r, \theta, \phi)$$

IMPORTANTE: TRIGONOMETRIA → angolo: misura dell'apertura tra due rette che si intersecano → rapporto tra arco sottetto e raggio dell'arco



$\alpha = \text{arco} \rightarrow$ Se eguali: $1 \rightarrow 1$ radiente → Un angolo giro ha 2π radienti

FORMULE IMPORTANTI → $\sin \alpha = \frac{\text{opposto}}{\text{ipotenusa}}$ → PERIODO e FREQUENZA: $y = A \sin \omega t$

→ $\cos \alpha = \frac{\text{adiacente}}{\text{ipotenusa}}$

→ $\tan \alpha = \frac{\text{opposto}}{\text{adiacente}}$

$$T = \text{PERIODO. } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \text{frequenza} = \frac{1}{T}$$

SISTEMI 2D

Nel piano cartesiano l'asse y è ruotato di 90° rispetto all'asse x e l'origine coincide con la loro INTERSEZIONE

Coordinate $x, y \rightarrow$ Proiezione di P su y

Coordinate POLARI $r, \theta \rightarrow$ angolo formato con asse x espresso in RADIANTI

POSITIVO se asse x viene ruotato in senso ANTICLORARIO
NEGATIVO se ruotato in senso CLORARIO

COME CAMBIARE le COORDINATE

DA cartesiane A polari: $x^2 + y^2$

$$\Theta = \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \quad x > 0$$

$$\Theta = \pi + \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \quad x < 0$$

DA polari A cartesiane: $x = r \cos \Theta$

$$y = r \sin \Theta$$

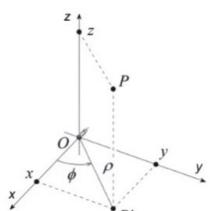
SISTEMI 3D: tecniche x, y, z , assi ortogonali fra di loro → TERNA DESTROSA con x in pollice, y in indice e z in medio

Per determinare proiezione → Congiungere O e P_{xy} → $P_x = //$ ad asse y fino ad intersecare x

$P_y = //$ ad asse x fino ad intersecare y

Per determinare P_z su una segmento $//$ a P_{xy}

COORDINATE CILINDRICHE: estensione 3D coordinate polari: (ρ, ϕ, z)



DA CARTESIANE a CILINDRICHE: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\tan \phi = \frac{y}{x}$$

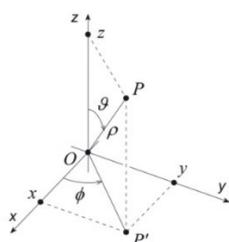
$$z = z$$

DA CILINDRICHE a CARTESIANE: $x = \rho \cos \phi$

$$y = \rho \sin \phi$$

$$z = z$$

COORDINATE SFERICHE: terza (ρ, ϕ, θ)



DA CARTESIANE a SFERICHE: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\tan \phi = \frac{y}{x}$$

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

DA SFERICHE a CARTESIANE: $x = \rho \sin \theta \cos \phi$

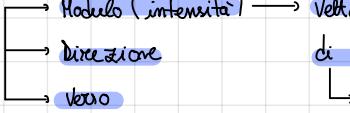
$$y = \rho \sin \theta \sin \phi$$

$$z = \rho \cos \theta$$

→ Grandezze scalari e grandezze vettoriali

→ Scalari: Specificate da valore ed unità di misura (massa, volume)

→ Vettoriali: Specificate da → Modulo (intensità) → Vettore SPOSTAMENTO: vettore che va da posizione di partenza a posizione di arrivo e non è influenzato dal cammino percorso



Simbologia utilizzata (vettore \vec{A})

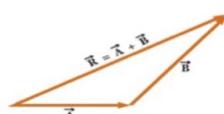
→ Nome del vettore: \vec{A} , A , \underline{A}

→ Intensità: $|A|$ o A → Unità di misura della grandezza rappresentata

→ Operazioni sui vettori

→ UGUALIANZA: Stesso modulo e direzione orientata → sovrapponibili con traslazione

→ SOMMA tramite il metodo grafico (parallelogramma)

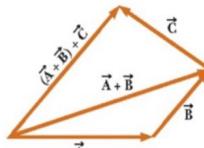
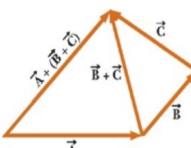


→ Vettore risultante va dalla coda di \vec{A} alla testa di \vec{B}

→ PROPRIETÀ

→ COMMUTATIVA (dimostrazione attraverso il grafico)

ASSOCIAUTA: $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$



quando si fanno
più di 2 vettori

Vettore risultante va dalla coda del primo
alla punta dell'ultimo

→ VETTORE OPPOSTO

→ d'opposto del vettore \vec{A} è definito in modo tale che $\vec{A} + (-\vec{A}) = 0$ → Stesso modulo e verso opposto

→ DIFFERENZA

→ $\vec{A} - \vec{B}$ è definita come $\vec{A} + (-\vec{B})$

vettore opposto di \vec{B}

→ MULTIPLO SCALARE

→ $m\vec{A}$ ha la stessa direzione di \vec{A} e verso dipendente dal segno di m

scalar

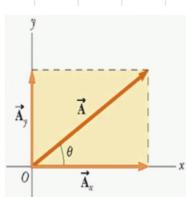
il modulo $|m\vec{A}|$ è dato da $|m|\vec{A}$

> 0 = stesso verso

< 0 = verso opposto

→ Vettori in COMPONENTI CARTESIANE

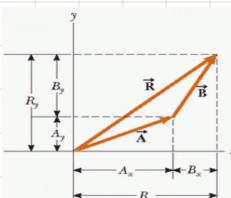
→ vettori possono essere scomposti nelle loro proiezioni sui 3 assi cartesiani



$$\vec{A} = \underbrace{\vec{A}_x}_{\text{vettori componenti}} + \underbrace{\vec{A}_y}_{\text{lungo x e y}} = (A_x, A_y)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \text{Si ha } A_x = A \cos \theta \quad \text{e} \quad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\ &\qquad \qquad \qquad A_y = A \sin \theta \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{A_y}{A_x} \right) \end{aligned}$$

da somma in coordinate cartesiane →



$$\begin{aligned} \vec{A} &= (A_x, A_y, A_z) \Rightarrow \vec{R} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \\ \vec{B} &= (B_x, B_y, B_z) \end{aligned}$$

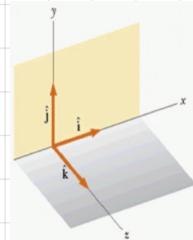
→ I VERSORI (vettori unitari): vettori adimensionali di modulo 1 → $\vec{A} \cdot \vec{A} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{A}}{|\vec{A}| |\vec{A}|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{A}}{|\vec{A}|^2} = 1$

→ servono per individuare una direzione ed un verso nello spazio

→ Presenti 3 versori ortogonali $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ che rappresentano gli assi x, y, z di segno +

Possibile rappresentare un vettore attraverso l'utilizzo dei 3 versori

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$



Il PRODOTTO SCALARE

DEFINIZIONE 1: $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$ → angolo compreso tra i due vettori

Proiezione di \vec{B} su \vec{A} → Grazie alla proprietà associativa della moltiplicazione vale anche il vice-versa

PROPRIETÀ $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$: proprietà commutativa

$$(a\vec{A}) \cdot (b\vec{B}) = (ab)(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$
: proprietà distributiva

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$$

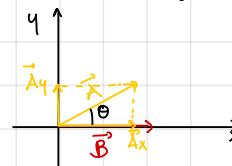
TRA i VERSORI $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$ → $\cos 0 = 1$ e $i = j = k = 1$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$$
 → Dall'ortogonalità ($\cos \pi/2 = 0$)

DEFINIZIONE 2: Se $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ → $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

validità definizioni

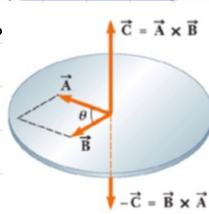


$$\vec{A} (A_x, A_y)$$

$$\vec{B} (B_x, 0)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x = A \cos \theta B$$

Il PRODOTTO VETTORE



DEFINIZIONE: $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ oppure $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

modulo: $AB \sin \theta$ → angolo compreso tra i 2 vettori → il più piccolo

direzione: perpendicolare ad entrambi i vettori

verso: regola della mano destra



Dita puntate su \vec{A} e poi ruotate verso \vec{B}
Se ruota in verso antiorario verso sul pollice
Se ruota in senso orario verso opposto

PROPRIETÀ

$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$$

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$
 (sempre)

$|\vec{A} \times \vec{B}|$ = area del parallelogramma individuato da \vec{A} e \vec{B}

TRA i VERSORI $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

$$\begin{aligned}\hat{i} \cdot \hat{j} &= -\hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{k} &= -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i} \\ \hat{k} \cdot \hat{i} &= -\hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j}\end{aligned}$$

$$\hat{i} \wedge \hat{j} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \wedge B \hat{i} = A_x \hat{i} \wedge B \hat{i} + A_y \hat{j} \wedge B \hat{i} + A_z \hat{k} \wedge B \hat{i} = A_x B \hat{i} + A_y B \hat{j} + A_z B \hat{k}$$

COORDINATE CARTESIANE: $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ → $(A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \wedge (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) = A_x B_x \hat{i} \wedge \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \wedge \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \wedge \hat{k} + A_y B_x \hat{j} \wedge \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \wedge \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \wedge \hat{k} + A_z B_x \hat{k} \wedge \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \wedge \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \wedge \hat{k}$
 $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$

$$+ A_x B_y \hat{i} \wedge \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \wedge \hat{k} + A_y B_z \hat{j} \wedge \hat{k} + A_z B_x \hat{k} \wedge \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \wedge \hat{j}$$

$$+ A_z B_z \hat{i} \wedge \hat{k} = \hat{i} (A_y B_z - A_z B_y) + \hat{j} (A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k} (A_x B_y - A_y B_x)$$

da regola del determinante

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} (A_y B_z - A_z B_y) - \hat{j} (A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k} (A_x B_y - A_y B_x)$$

IL teorema di Levi-Civita

$$C_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$$

0	se 1 o + indici sono uguali
1	se la classe di permutazione è pari
-1	se la classe di permutazione è dispari

1 2 3 → PARI: 0 permutazioni

1 3 2 → DISPARI: 1 permutazione

3 1 2 → PARI: 2 permutazioni

$$C_1 = \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2$$

$$C_2 = \epsilon_{231} A_3 B_1 + \epsilon_{213} A_1 B_3 = A_3 B_1 - B_3 A_1$$

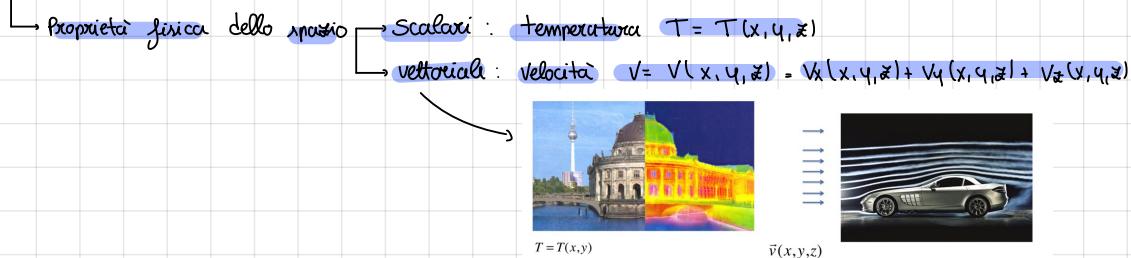
$$C_3 = \epsilon_{321} A_2 B_1 + \epsilon_{312} A_1 B_2 = A_2 B_1 - A_1 B_2$$

Le leggi fisiche sono INDEPENDENTI del SISTEMA DI COORDINATE

Prodotto scalare invariante rispetto alle rotazioni del sistema

Legge come relazione tra quantità vettoriali è covariante: $\vec{F} = m \vec{a}$ → Variamo allo STESSO MONDO

3 CAMPI



ESEMPIO

$$\vec{A} = (0, 1, -4) \text{ m}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (0, -2, -2) \text{ m}$$

$$\vec{B} = (0, -3, 2) \text{ m}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (0, 4, -6) \text{ m} = (0\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}) \text{ m}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 + (-4) \cdot 2 = -3 - 8 = -11 \text{ m}^2$$

$$\cos \hat{\vec{A}} \hat{\vec{B}} = \frac{-11 \text{ m}^2}{\sqrt{17} \text{ m} \sqrt{13} \text{ m}}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = i(2 - 12) = -10\hat{i}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta \rightarrow \sin \theta = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{AB} = \frac{10 \text{ m}^2}{\sqrt{17} \sqrt{13} \text{ m}}$$

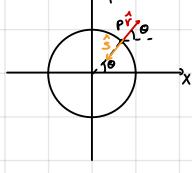
—> TROVARE VETTORI ORTOGONALI

dato $\vec{A} = (a, b)$, il vettore ad esso ortogonale è dato da $\vec{B} = (-b, a)$

Esercizi dalle slide

① Si consideri una circonferenza di raggio $r = 2 \text{ m}$ centrata nell'origine del sistema di assi.

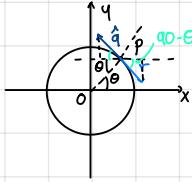
a. Ricavare le espressioni dei vettori tangenti e perpendicolari alla circonferenza nel generico punto P sul piano xy .



→ VERSORI NORMALI

- DETERMINO \hat{r} : $\hat{r} = \frac{\vec{OP}}{|\vec{OP}|} \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta) \rightarrow \hat{r} = (\cos \theta, \sin \theta)$

- DETERMINO \hat{s} → $\hat{s} = -\hat{r}$, quindi $\hat{s} = (-\cos \theta, -\sin \theta)$



→ VERSORI TANGENTI

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} \cdot \vec{OP} = 0 \text{ per ORTHOGONALITÀ } ① \\ r_x^2 + r_y^2 = 1 \text{ per } |\vec{r}| = 1 \quad ② \end{array} \right.$$

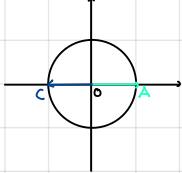
$$① r_x \cdot r \cos \theta + r_y \cdot r \sin \theta = 0 \rightarrow r_x = -r_y \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \rightarrow r_x = \mp \sin \theta$$

$$\hat{q} = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

$$\hat{r} = (\sin \theta, -\cos \theta)$$

$$② r^2 y \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + r^2 y = 1 \rightarrow r^2 y \left(\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) = 1 \rightarrow \frac{r^2 y}{\cos^2 \theta} = 1 \rightarrow r_y = \pm \cos \theta$$

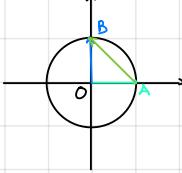
b. ① CALCOLARE $\vec{OC} - \vec{OA}$



$$\vec{OC} = -r \hat{i} \rightarrow \vec{OC} - \vec{OA} = -r \hat{i} - r \hat{i} = -2r \hat{i} = (-4, 0) \text{ m}$$

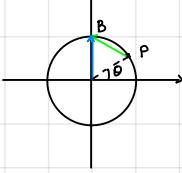
$$\vec{OA} = r \hat{i}$$

② CALCOLARE \vec{AB}



$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = 2\hat{j} - 2\hat{i} = (-2, 2) \text{ m}$$

③ CALCOLARE \vec{PB}



$$\vec{OP} + \vec{PB} = \vec{OB} \rightarrow \vec{PB} = \vec{OB} - \vec{OP} = r \hat{j} - (r \cos \theta, r \sin \theta) = (-r \cos \theta, r - r \sin \theta) \text{ m}$$

$$④ \vec{PB} \text{ per } \theta = \frac{\pi}{6} \rightarrow \left(-r \frac{\sqrt{3}}{2}, r \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right) = (-\sqrt{3}, 1)$$

Il moto in una dimensione

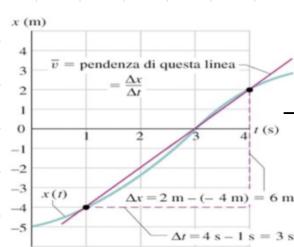
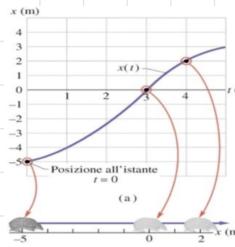
- Il PUNTO MATERIALE → particelle che posiede massa ma viene considerata di dimensione nulla
 - Caratteristiche
 - dimensione effettiva NON ha importanza
 - processi interni NON influenzano il moto
- da POSIZIONE: posizione occupata dal punto materiale rispetto all'origine del sistema di riferimento in ogni istante
 - da SPOSTAMENTO Δx = variazione della posizione in un certo intervallo di tempo: $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ [m], $\Delta t = t_2 - t_1$ [s]
 - pò essere positivo o negativo
 - da distanza: lunghezza comune percorso

da VELOCITÀ

- Velocità MEDIA: rapporto fra spostamento ed intervallo di tempo: $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ [m/s] → può essere + o -
- Velocità SCALARE MEDIA: $v_{\text{media}} = \frac{d}{\Delta t}$ → distanza
- Velocità INSTANTANEA: $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ [m/s] oppure $\frac{dx}{dt}$ → SCALARE: $|v|$

da LEGGE ORARIA o DIAGRAMMA ORARIO

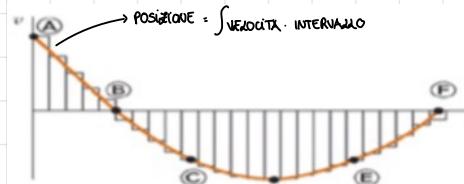
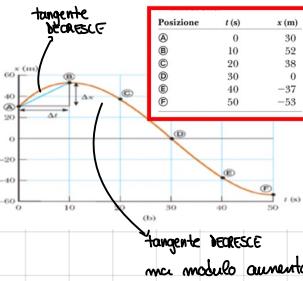
- Rappresenta la coordinata x in funzione del tempo
 - t su asse x (ascisse)
 - posizione su asse y (ordinate)



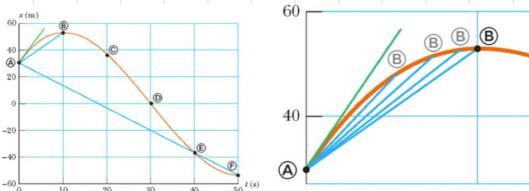
Velocità media = pendenza retta che congiunge punti di partenza ed arrivo
tangente dell'angolo formato dalla congiungente con l'asse x

$$\text{Esempio: } \bar{v} \text{ tra } 1 \text{ e } 4 \rightarrow x(4\text{s}) - x(1\text{s}) = \frac{2\text{m} - (-4\text{m})}{3\text{s}} = \frac{6\text{m}}{3\text{s}} = 2 \text{ m/s}$$

Dividendo ulteriormente l'asse delle ascisse è possibile rappresentare anche il grafico della velocità



da VELOCITÀ ISTANTANEA



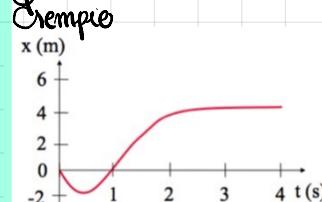
Mano a mano che gli intervalli si rimpiccidiscono, la tangente si riduce ad essere la tangente nel punto A

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

d'ACCELERAZIONE

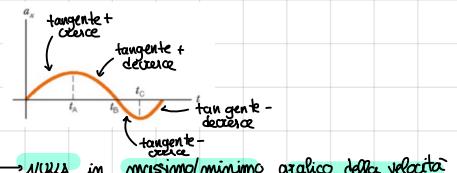
- Accelerazione media: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ [m/s²]
- Accelerazione istantanea: $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Esempio



$$\bar{v} \text{ nei primi } 4 \text{ secondi: } \frac{6\text{m} - 0\text{m}}{4\text{s} - 0\text{s}} = 1 \text{ [m/s]}$$

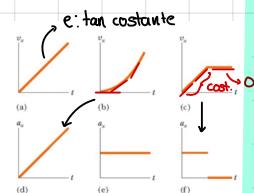
$$v \text{ a } t=4? : 0 \text{ m/s perché l'angolo è nullo}$$



SINTESI: Se è nota $x(t)$ è possibile determinare velocità ed accelerazione

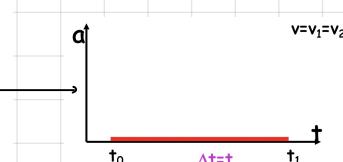
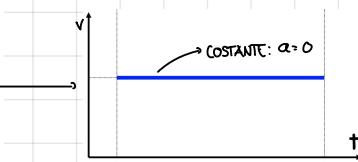
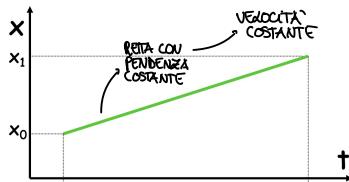
$$v = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$a = \frac{dv(t)}{dt}$$



Il moto RETTILINEO UNIFORME: velocità costante

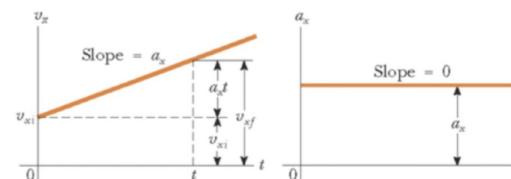
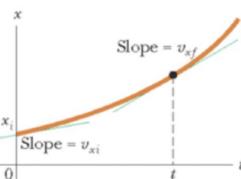
$$\begin{aligned} \rightarrow x &= x_0 + v t \\ \rightarrow v &= \text{Costante} = \frac{x - x_0}{t} \\ \rightarrow a &= 0 \end{aligned}$$



CON GLI INTEGRALI: $x = \int_{t_0}^{t_1} v dt$

Il moto UNIFORMEMENTE ACCELERATO: accelerazione costante

$$\begin{aligned} \rightarrow x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 : [x] = m \quad [t] = s \quad [a] = m/s^2 \\ \rightarrow v &= v_0 + a t \quad (v(t) = v_0 + a t) \\ \rightarrow a &= \text{costante} = \frac{v - v_0}{t} \rightarrow [a/T^2] = m/s^2 \end{aligned}$$



DIMOSTRAZIONE legge oraria

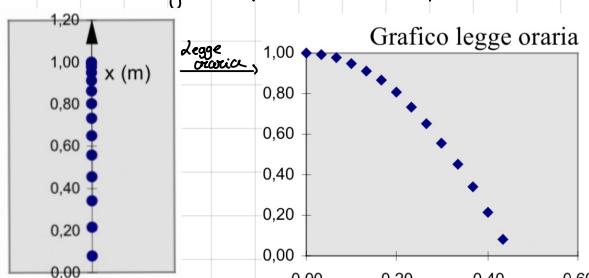
$$\int_{t_0}^t v(t') dt' = \int_{t_0}^t dx = \int_{t_0}^t x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t (v_0 + a t') dt' = v_0(t-t_0) + \frac{1}{2} a (t-t_0)^2 \rightarrow \text{QUINDI: } x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2} a (t-t_0)^2$$

legge velocità

RELAZIONI UTILI

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{da } v = v_0 + a t \text{ ricavo } t = \frac{v - v_0}{a} \\ \rightarrow \text{da } x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \text{ ricavo, sostituendo } t: x = x_0 + v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2, \text{ ovvero } x - x_0 = \left(v_0 + \frac{1}{2} a \frac{v - v_0}{a} \right) \left(\frac{v - v_0}{a} \right) = \left(\frac{v + v_0}{2} \right) \left(\frac{v - v_0}{a} \right) = \\ = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} (x - x_0) \rightarrow \text{ottenuta sostituendo } \bullet t = \frac{v - v_0}{a} \\ \bullet x = x_0 + \frac{1}{2} (v + v_0) t, \text{ ottenuta sostituendo } a = \frac{v - v_0}{t} \text{ nella LEGGE ORARIA} \end{aligned}$$

La TRAIETTORIA: luogo dei punti descritto dal punto materiale



→ Moto di un GRAVE con accelerazione di gravità: $9,81 \text{ m/s}^2$ diretta verso il basso
 $x = 1.0 - \frac{1}{2} 9,8 t^2$

Passare dall'accelerazione al diagramma orario

$$\begin{aligned} \rightarrow a &= \frac{dv}{dt}, \text{ quindi } dv = a dt \rightarrow \int_{t_0}^t dv = v(t) - v_0 = \int_{t_0}^t a(t') dt' = a \int_{t_0}^t dt' = a(t-t_0) \rightarrow v(t) = v_0 + a(t-t_0) \\ \text{OPPURE: } dx &= v dt \rightarrow \int_{t_0}^t dx = x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t v(t') dt' \rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (v_0 + a(t'-t_0)) dt \rightarrow x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2} a (t-t_0)^2 \end{aligned}$$

Su un sistema CURVILINEO

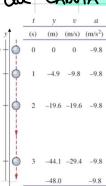
$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Velocità scalare media: } &\left\{ \begin{aligned} V_S^m(t_1, t_2) &= \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (\text{tra } t_1 \text{ e } t_2) \\ \Delta t &= t_2 - t_1 > 0 \end{aligned} \right. \\ \rightarrow \text{Velocità scalare istantanea: } &v_S(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \\ \rightarrow \text{Accelerazione scalare media: } &a_S^m(t_1, t_2) = \frac{v_S(t_2) - v_S(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (\text{tra } t_1 \text{ e } t_2) \\ \Delta t &= t_2 - t_1 > 0 \\ \rightarrow \text{Accelerazione scalare istantanea: } &a_S(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_S(t+\Delta t) - v_S(t)}{\Delta t} \quad (\text{tra } t \text{ e } t+\Delta t) \end{aligned}$$

$$a_S(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

L'ACCELERAZIONE di GRAVITÀ

STESSA per ogni oggetto → ogni oggetto lanciato libero di cadere è soggetto all'accelerazione di gravità

da CANTO LIBERA dei gravi



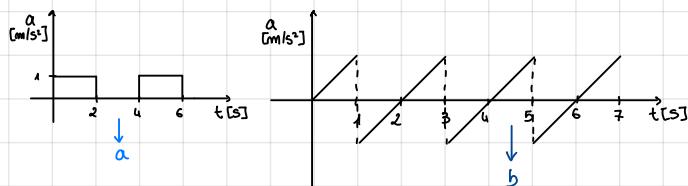
→ L'accelerazione è COSTANTE: il moto è UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$-g \hat{j}, \text{ quindi } v(t) = g t \hat{j}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow q &= \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + q_0 \\ \rightarrow v &= v(t) = a t + v_0 \quad , \text{ dove } a = -g \\ \rightarrow q &= q_0 + \frac{1}{2} (v + v_0 t) \\ \rightarrow v^2 - v_0^2 &= 2 a (q - q_0) \end{aligned}$$

Esercizi dalle slide

① Deducere e disegnare la velocità in funzione del tempo e i diagrammi orari di 2 punti materiali che si muovono di moto rettilineo e con le accelerazioni mostrate nelle seguenti figure. In entrambi i casi $v(0) = 0$, $s(0) = 0$



- a. La velocità è costante tra $t=2$ e $t=4$, mentre il moto è uniformemente accelerato negli altri intervalli. In quei tratti il grafico è una parabola.

GRAFICO VELOCITÀ

$$\begin{aligned} \rightarrow t \in [0,2]: v(t) &= v_0 + \int_0^t a dt = v_0 + a(t-0) = v_0 + 2a = 2 \text{ m/s} \\ \rightarrow t \in [2,4]: v &= 2: \text{ RETTA ORIZZONTALE} \\ \rightarrow t \in [4,6]: v(6) &= 2 + \int_4^6 a dt = 2 + a(6-4) = 2 + 2a = 2 + 2 = 4 \text{ m/s} \\ \rightarrow t \in [6,8]: v &= 4: \text{ RETTA ORIZZONTALE} \end{aligned}$$

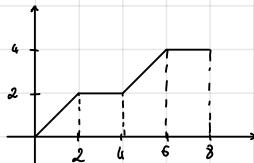


GRAFICO POSIZIONE

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v(t') dt' = s_0 + \int_{t_0}^t v_0 + at' dt' = s_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2} a(t-t_0)^2$$

Applico formula dimostrata

$$s(0) = 0$$

$$s(2) = 0 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \text{ m} \longrightarrow \text{PARABOLA TRA } 0 \text{ e } 2$$

$$s(4) = 2 + 2 \cdot 2 = 6 \text{ m} \longrightarrow \text{RETTA TRA } 2 \text{ e } 4$$

$$s(6) = 6 + 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 6 + 4 + 2 = 12 \text{ m} \longrightarrow \text{PARABOLA}$$

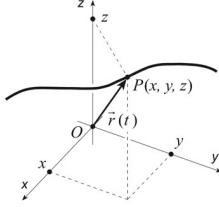
$$s(8) = 12 + 4 \cdot 2 + 0 = 20 \text{ m} \longrightarrow \text{RETTA}$$

- b. L'accelerazione in questo caso NON è costante, quindi cambiere analizzare il moto nei vari intervalli dove l'accelerazione è una retta

↪ intervalli $[0,1], [1,3], [3,5], [5,7]$

→ Analisi intervallo $[0,1]$

Il moto in più dimensioni



Leggi orarie per ciascuna coordinata:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

La curva descritta si chiama TRAIETTORIA

$$\mathbf{OP}(t) = \mathbf{r}(t) = i x(t) + j y(t) + k z(t)$$

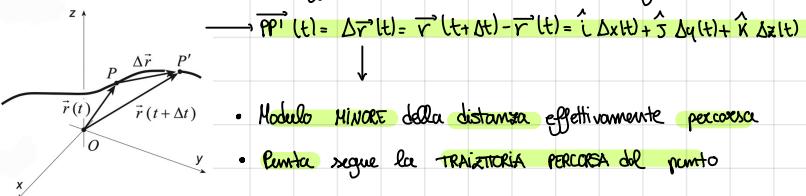
Grandezze fondamentali di posizione, velocità ed accelerazione sono individuate da vettori con modulo, direzione e verso

$$\begin{cases} \vec{s} = \vec{s}(t) \\ \vec{v} = \vec{v}(t) \\ \vec{a} = \vec{a}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x(t) & \left\{ \begin{array}{l} v_x = v_x(t) \\ a_x = a_x(t) \end{array} \right. \\ y = y(t) & \left\{ \begin{array}{l} v_y = v_y(t) \\ a_y = a_y(t) \end{array} \right. \\ z = z(t) & \left\{ \begin{array}{l} v_z = v_z(t) \\ a_z = a_z(t) \end{array} \right. \end{cases}$$

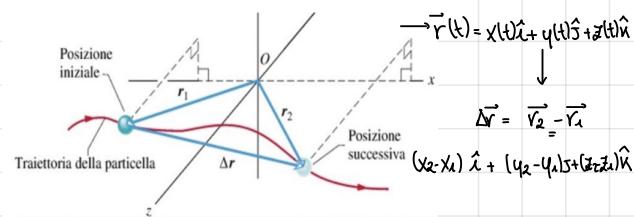
Il VETTORE POSIZIONE: parte dall'origine del sistema di riferimento ed indica alla posizione del punto materiale.

Il VETTORE SPOSTAMENTO: vettore differenza tra vettore posizione finale e vettore posizione iniziale

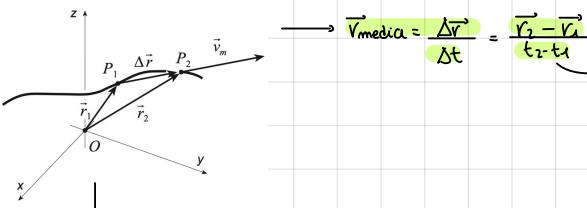


$$\overrightarrow{pp'}(t) = \Delta \vec{r}(t) = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \hat{i} \Delta x(t) + \hat{j} \Delta y(t) + \hat{k} \Delta z(t)$$

- Modulo minore della distanza effettivamente percorsa
- Punta segue la TRAIETTORIA PERCORSO del punto



La VELOCITÀ MEDIA: sono necessari i VETTORI



$$\overline{v}_{\text{media}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Essendo uno SCALARE, il tempo modifica solo l'INTENSITÀ

Il vettore è diretto lungo $\Delta \vec{r}$ ed è INDEPENDENTE del percorso

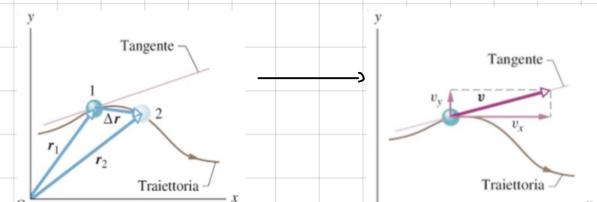
La VELOCITÀ ISTANTANEA

Definita come la derivata del vettore posizione rispetto al tempo

Limite della velocità media con $\Delta t \rightarrow 0$ (derivata rispetto a t)

Tangente alla traiettoria nel punto dove è calcolata

$$\overrightarrow{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d \vec{r}}{dt} \rightarrow \overrightarrow{v}(t) = v_x(t) \hat{i} + v_y(t) \hat{j} + v_z(t) \hat{k} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$$

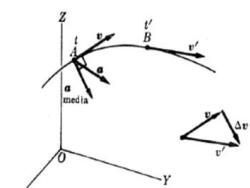


La ACCELERAZIONE MEDIA

$$\overrightarrow{a}_{\text{media}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \rightarrow \text{Vettore diretto lungo } \Delta \vec{r}, \text{ la cui direzione è ricavata } -\vec{v}_i \text{ a } \vec{v}_f$$

La ACCELERAZIONE ISTITANTANEA

$$\overrightarrow{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d \vec{r}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \rightarrow \overrightarrow{a}(t) = a_x(t) \hat{i} + a_y(t) \hat{j} + a_z(t) \hat{k} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k}$$



Le LEGGI ORARIE: Un moto in 3 dimensioni può essere modellizzato come 3 moti indipendenti lungo gli assi x, y e z. Le leggi del moto rettilineo sostituendo $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ nelle leggi del moto rettilineo

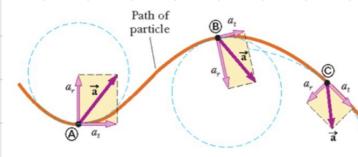
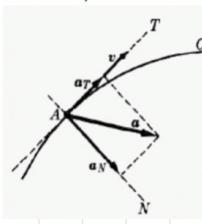
- $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$ → non è diretto né come \vec{v} né come \vec{a}
- $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$

Il moto su un generico PERCORSO CURVILINEO

La velocità VARIA sia in direzione che in modulo → La velocità è tangente alla traiettoria, mentre l'accelerazione forma un angolo qualiasi con essa → diretta verso la CONCAVITÀ della traiettoria

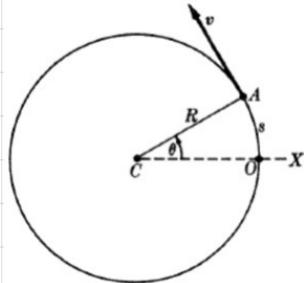
L'accelerazione può essere scomposta in TANGENZIALE e RADIALE → utilizzati VERSORI \hat{v}_T e \hat{v}_N → normale

- da velocità è solo TANGENZIALE: $\vec{v} = v\hat{v}_T$
- Accelerazione: $\vec{a} = a_T \hat{v}_T + a_N \hat{v}_N = \frac{dv^2}{dt} \hat{v}_T + v \frac{d\hat{v}_T}{dt}$ → a_T dipende dal tempo ma $\frac{d(v_T \cdot v_T)}{dt} = \frac{d}{dt}(v_T^2) = 0$ → derivata del prodotto
- a_T fa variare il modulo di \vec{v}
- a_N fa variare la direzione di \vec{v}



→ raggio = raggio di CURVATURA della traiettoria

Il MOTO CIRCOLARE UNIFORME



→ Moto caratterizzato da $\vec{v} \perp \vec{R}$, con R costante.

→ Il modulo della velocità è costante, mentre la sua direzione cambia → GENERA ACCELERAZIONE

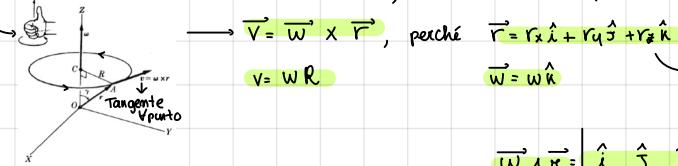
Il vettore ACCELERAZIONE è \perp alla traiettoria → Se non fosse, si avrebbe un'accelerazione tangenziale che farebbe VARIARE la velocità

↓
distanza percorso lungo la circonferenza: $s = R\theta \rightarrow v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$

Periodo = tempo impiegato per una rivoluzione completa → $T = 2\pi R/v$ (secondi), da cui si ha la frequenza: $f(v) = \frac{1}{T}$ (giri al secondo)

→ La grandezza $w = \frac{d\theta}{dt}$ si definisce VELOCITÀ ANGOLARE w e si misura in rad/s o s⁻¹ → Si definisce anche $w = \frac{2\pi}{T}$

La VELOCITÀ ANGOLARE ha modulo w , direzione \perp al piano e verso dato dalla regola della mano destra



$$\begin{aligned} \vec{w} \wedge \vec{r} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & w \\ rx & ry & rz \end{vmatrix} = \hat{i}(-wry) - \hat{j}(-wxz) = -wry\hat{i} + wxz\hat{j} \rightarrow \text{Rimane } \vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} \\ \vec{v} &= \vec{w} \wedge \vec{r} = -wx\hat{i} + wz\hat{j} \\ |\vec{v}| &= |\vec{w} \wedge \vec{r}| = \sqrt{w^2 r_y^2 + w^2 r_z^2} = w \sqrt{r_y^2 + r_z^2} = wR \end{aligned}$$

NON DÀ CONTRIBUTO: Vettori \hat{k} sono \parallel

COORDINATE X PARTICELLA

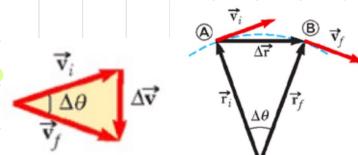
Quindi si conclude che $\vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{r} = \vec{w} \wedge \vec{R}$

L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA: deriva dalla variazione di direzione della velocità

→ Diretta verso il CENTRO

→ La punta del vettore descrive una circonferenza → Essendo che il modulo di \vec{v} è costante si ha

$$\text{che } v \Delta\theta : v w \Delta t = \frac{v^2}{r} \Delta t \rightarrow a_c = \frac{v^2}{r} = w^2 r$$



Traiettoria circolare → In tempi uguali percorre lo STESSO arco di circonferenza → Angolo spazzato nell'unità di tempo è COSTANTE (w)

Il MOTO CIRCOLARE VARIO: traiettoria circolare ma variano modulo e direzione velocità

→ Componente TANGENZIALE ACCELERAZIONE

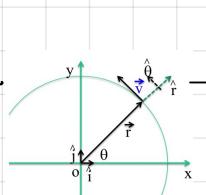
At ogni punto della traiettoria vengono introdotti i vettori TANGENZIALI e NORMALI →

da VELOCITÀ: $\vec{v} = v(t)\hat{\theta}$

L'ACCELERAZIONE: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v(t)\hat{\theta}) = \frac{dv}{dt}\hat{\theta} + v \frac{d\hat{\theta}}{dt}$

$$|\vec{a}_T| = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \Rightarrow |\vec{a}_T| = \sqrt{v^2 + a_t^2}$$

$$|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{r}$$



$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} \\ &= \frac{d\theta}{dt}\hat{r} = -\frac{v}{r}\hat{r} \end{aligned}$$

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{r} + \frac{dv}{dt}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{r} + \frac{v^2}{r^2}\hat{\theta}$$

$$\text{Ottenerlo ruotando } \hat{\theta} \text{ di } 90^\circ$$

$$\hat{\theta} = \hat{i} \cos\theta + \hat{j} \sin\theta$$

X: NEGATIVA

→ EQUAZIONE della CIRCONFERENZA

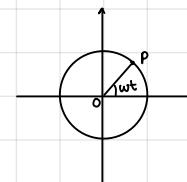
$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t) \\ y(t) = A \sin(\omega t) \end{cases}$$

⚠ ATT: Gli argomenti del seno e del coseno sono ANIDIMENSIONALI

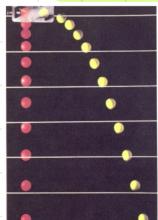
TRAETTORIA: dividere per A e poi: $x(t)^2 + y(t)^2 = A^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = A^2 (1) = A^2$

↪ Il punto P descrive una circonferenza: $\overline{OP} = A \cos \omega t \hat{i} + A \sin \omega t \hat{j}$

↪ Dopo T ritorna in posizione iniziale: $T = \frac{2\pi}{\omega}$



→ Il moto dei PROGETILI

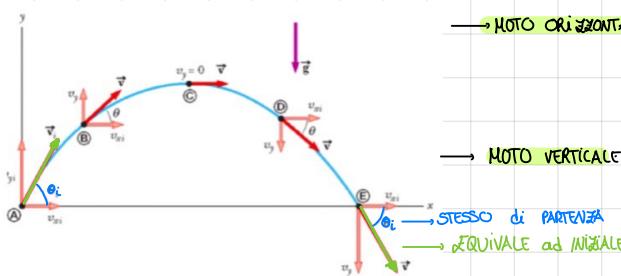


→ Agisce la forza di gravità su entrambe → ACCELERAZIONE di gravità costante
↪ STESSO MOTO VERTICALE

→ MOTO ORIZZONTALE DIVERSO: velocità COSTANTE → Indipendente dal moto sull'asse delle x

↪ Hanno velocità iniziale v_0 e sono soggetti solo a \vec{g} , COSTANTE

→ I due moti su x ed y possono essere analizzati SEPARATAMENTE



→ MOTO ORIZZONTALE: $a_x = 0$

$$\begin{aligned} &\rightarrow v_x = v_0 x \rightarrow \text{COSTANTE} \\ &\rightarrow x = x_0 + v_0 x t \end{aligned}$$

→ MOTO VERTICALE: $a_y = -g$

$$\begin{aligned} &\rightarrow v_y = v_0 y - gt \\ &\rightarrow y = y_0 + v_0 y t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

$$x(t) = v_0 x t, \text{ da cui } t = \frac{x - x_0}{v_0 x}$$

$$+ y(t) = y_0 + v_0 y t - \frac{1}{2} g t^2 \text{ e quindi}$$

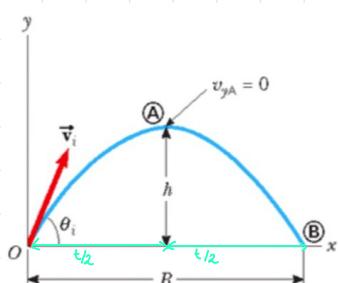
$$y - y_0 = \frac{v_0 y}{v_0 x} (x - x_0) - \frac{1}{2} \frac{g (x - x_0)^2}{v_0^2 x}$$

$$\text{e SOSTITUENDO } v_0 x \text{ e } v_0 y \text{ si ha, con } y_0 = x_0 = 0$$

$$y = x \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta}$$

PARABOLA con concavità verso il BASSO

da CITATA



→ R: gittata = distanza massima lungo x per corso del proiettile

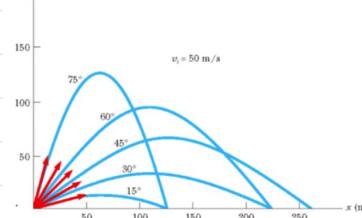
$$y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow y = 0: \text{TOSCA TERRA}, \text{ quindi si ha } t (v_0 \sin \theta - \frac{1}{2} g t) = 0 \quad \begin{array}{l} t=0: \text{ORIGINE} \\ t=2v_0 \sin \theta / g: \text{TEMPO IMPIEGATO} \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\downarrow v_0 y \\ &\text{Ricavare } x(t) \rightarrow usare } x(t) = x_0 + v_0 \cos \theta t \implies x - x_0 = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} = R \end{aligned}$$

→ La gittata VARIA con il vario dell'angolo θ , tenendo v_0 e g FISSATI → gittata MASSIMA a $\theta = 45^\circ$

→ L'altezza massima: si ha quando $v_y = 0$, quindi $v_0 \sin \theta - gt = 0$ e quindi si ricava che $t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$
↓ sostituendo in $y(t)$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$



Esercizi slide

$$\begin{cases} x(t) = A \cos \omega t \\ y(t) = A \sin \omega t \end{cases} \quad \text{con } \omega \text{ costante}$$

a. Determinare $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$

↳ Utilizzo delle DERIVATE

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t)$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_x(t) + \vec{a}_y(t)$$

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{cases} = \begin{cases} \frac{dA \cos \omega t}{dt} \\ \frac{dA \sin \omega t}{dt} \end{cases} = \begin{cases} -\omega A \sin \omega t \\ \omega A \cos \omega t \end{cases} = \vec{v}_x(t) + \vec{v}_y(t) \rightarrow \vec{v}(t) = -\omega A \sin \omega t \hat{i} + \omega A \cos \omega t \hat{j}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \end{cases} = \begin{cases} \frac{d(-\omega A \sin \omega t)}{dt} \\ \frac{d(\omega A \cos \omega t)}{dt} \end{cases} = \begin{cases} -\omega^2 A \cos \omega t \\ \omega^2 A \sin \omega t \end{cases} = -\omega^2 A \cos \omega t \hat{i} - \omega^2 A \sin \omega t \hat{j}$$

b. Determinare il tipo di traiettoria \rightarrow togliere la DIPENDENZA del TEMPO

$$\begin{cases} x(t) = A \cos \omega t \\ y(t) = A \sin \omega t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x(t)}{A} = \cos \omega t \\ \frac{y(t)}{A} = \sin \omega t \end{cases} \rightarrow \left(\frac{x(t)}{A} \right)^2 + \left(\frac{y(t)}{A} \right)^2 = 1 \rightarrow x'(t)^2 + y'(t)^2 = A^2 \rightarrow \text{CIRCONFERENZA di Raggio } A \text{ e Centro O}$$

c. Determinare il modulo della velocità

$$v = \sqrt{w^2 A^2 \sin^2 \omega t + w^2 A^2 \cos^2 \omega t} = wA \rightarrow \text{costante}$$

d. Determinare il modulo di \vec{a}

$$a = \sqrt{w^4 A^2 \sin^2 \omega t + w^4 A^2 \cos^2 \omega t} = w^2 A$$

e. Dimostrare che $\vec{a} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{v} = 0$

$$\vec{a} = A \cos \omega t \hat{i} + A \sin \omega t \hat{j}$$

$$\vec{v} = -wA \sin \omega t \hat{i} + wA \cos \omega t \hat{j}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = -wA^2 \cos \omega t \sin \omega t \hat{i} \cdot \hat{i} + wA^2 \sin \omega t \cos \omega t \hat{j} \cdot \hat{j} = 0 \cdot v$$

f. Dimostrare che $\vec{a} \perp \vec{v}' \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{v}' = 0$

$$\vec{v}' = -wA \cos \omega t \hat{i} - wA \sin \omega t \hat{j}$$

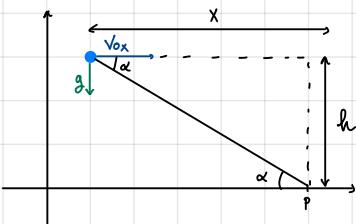
$$\vec{a} = -w^2 A \cos \omega t \hat{i} - w^2 A \sin \omega t \hat{j}$$

$$\vec{v}' \cdot \vec{a} = w^3 A^2 \sin \omega t \cos \omega t \hat{i} \cdot \hat{i} - w^3 A^2 \cos \omega t \sin \omega t \hat{j} \cdot \hat{j} = 0 \cdot v$$

② $v = 600 \text{ km/h}$

$d = 1 \text{ km}$

Angolo rispetto a terra: ?



$$V_0 x = 600 \text{ km/h} \rightarrow \frac{600 \cdot 10^3}{60 \cdot 60} = 167 \text{ m/s}$$

$$h = 1 \text{ km} = 1 \cdot 10^3 \text{ m}$$

$$y(t) = y_0 + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$0 = 1 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot t^2 \rightarrow \frac{1 \cdot 10^3}{2} = 1 \cdot 10^3 \rightarrow t = \sqrt{\frac{1 \cdot 10^3 \cdot 2}{9.81}} = 16.3 \text{ s}$$

$$x(t) = x_0 + V_0 x t = 0 + 167 \cdot 16.3 = 2380.1 \text{ m}$$

Voglio trovare α

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{h}{x} = \tan^{-1} \frac{1 \cdot 10^3}{2380} = 22.7^\circ$$

Voglio trovare la traiettoria

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + V_0 x t = V_0 x t \\ y(t) = y_0 + V_0 y t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \rightarrow \text{TROVO } t: t = \frac{x(t)}{V_0 x}$$

$$0 = y_0 + V_0 y \frac{x(t)}{V_0 x} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x(t)}{V_0 x} \right)^2$$

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{2} g \left(\frac{x(t)}{V_0 x} \right)^2 \rightarrow \text{PARABOLA}$$

④ $R = 50 \text{ cm} \rightarrow 0.50 \text{ m}$

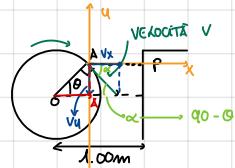
$w = 4 \text{ rad/s} (4.00)$

$\theta = 30^\circ$

$d = 1 \text{ m da O}$

+ voto...?

V voto = ?



CALCOLO IL TEMPO DI VOLO

① RICONO COMPONENTI VELOCITÀ

$\alpha = 90 - 30 = 60^\circ$

$$v_x = v \cos 60 = v \cdot \frac{1}{2} = \frac{wR}{2} = \frac{\pi \cdot 0.5}{2} = 1 \text{ m/s}$$

$$v_y = v \sin(-60) = -v \sin(60) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = 1 \hat{i} \text{ m/s} - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{j} \text{ m/s}$$

② ANALISI DEL MOTORE

→ uniformemente accelerato lungo y → $s(t) = s_0 + \frac{1}{2} a_y t^2 - \frac{1}{2} g t^2$

→ rettilineo uniforme lungo x → $s(t) = s_0 + v_{0x} t$

③ $OA = R \cos 30 = \frac{\pi \sqrt{3}}{2} = 0.5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m}$

④ DISTANZA DA PERCORSERE: $10 \text{ m} - \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m}$

⑤ $10 \text{ m} - \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m} = 0 + 1t \rightarrow t = 0.57 \text{ s}$

⑥ CALCOLO VF

$$v_f = \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fy}^2}$$

$$v_{fx} = 1 \text{ m/s}$$

$$\theta: \tan^{-1} \frac{-7.32}{1} = -32.2^\circ$$

$$v_{fy} = -\sqrt{3} - g(0.57) = -7.32 \text{ m/s}$$

$$v_f = 7.39 \text{ m/s}$$

⑦ Calcolare velocità e accelerazione di un satellite geostazionario

$$R = 62.000 \text{ Km} \rightarrow 6.2 \cdot 10^4 \text{ Km} = 6.2 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$T = 1 \text{ g} \rightarrow 2\pi \cdot 60 \cdot 60 = 36000 \pi = 3.6 \cdot 10^4 \text{ s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3.6 \cdot 10^4} = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$V = \omega R = 3.05 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a = \frac{V^2}{R} = 0.22 \text{ m/s}^2$$

⑧ Calcolare velocità e accelerazione della Terra nel suo moto di rivoluzione intorno al Sole

$$R = 1.495 \cdot 10^8 \text{ Km} = 1.495 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$T = 1 \text{ anno} = 3.16 \cdot 10^7 \text{ s}$$

Moto circolare uniforme intorno al Sole

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3.16 \cdot 10^7} = 1.99 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V = \omega R = 1.99 \cdot 10^{-7} \cdot 1.495 \cdot 10^{11} = 3.10^4 \text{ m/s} = 30 \text{ km/s}$$

$$a = \frac{V^2}{R} = 6.02 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

⑨ Un'automobile che si muove nel piano xy, parte a $t=t_0=0$ dal punto $A=(R,0)$ e percorre in verso antiorario la semicirconferenza di raggio $R = 1 \text{ km} = 1 \cdot 10^3 \text{ m}$ e arriva a O fino al punto $B=(-R,0)$. Poi prosegue in linea retta fino al punto C di coordinate $C=(-R, -3R)$ che raggiunge al tempo $t=t_f$; durante tutto il moto la velocità ha un modulo costante $v_0 = 20 \text{ m/s}$

a. Calcolare $\int_0^{t_f} \vec{v} \cdot d\vec{r}$

→ Rappresenta l'area sotto la curva del grafico della velocità e perciò lo spostamento del corpo compiuto dal corpo a partire da O fino ad arrivare a t_f

E' necessario dividere il moto in 2 parti

→ Moto circolare uniforme → Distanza percorso = πR → $\int_0^{t_f} |\vec{v}| dt = (\pi + 3)R$

→ Moto rettilineo uniforme → Distanza percorso = $3R$

$$\int_0^{t_f} \frac{d\vec{R}}{dt} dt = \int_0^{t_f} |\vec{dR}| dt$$

b. Calcolare $\int_0^{t_f} \vec{v} \cdot d\vec{r}$

$$\int_0^{t_f} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_0^{t_f} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{R}}{dt} dt = \vec{R}(t_f) - \vec{R}(0) = (-R, -3R) - (R, 0) = (-2R, -3R) = -R(\hat{i}, 3\hat{j})$$

$$c. \text{ Calcolare } \int_0^{t_f} \vec{a} dt = \int_0^{t_f} \frac{d\vec{v}}{dt} dt = \int_0^{t_f} d\vec{v} = \vec{V}(t_f) - \vec{V}(t_0)$$

$$\rightarrow \text{Trovato } \vec{V}_f = (0, -V_0 \hat{j})$$

$$\rightarrow \text{Trovato } \vec{V}(t_0): \text{ Essendo un moto circolare uniforme, la velocità è sempre tangente alla traiettoria circolare e per questo si ha } \vec{V}(0) = (0, V_0 \hat{j})$$

$$\vec{V}(t_f) - \vec{V}(0) = (0, -V_0 \hat{j}) - (0, V_0 \hat{j}) = (0, -2V_0 \hat{j})$$

d. Determinare il tempo $t_c(t_f)$ in cui l'auto raggiunge il punto C

$$\hookrightarrow \text{essendo che la velocità è sempre costante, posso calcolare il tempo impiegato come } \frac{\text{distancia percorsa}}{\text{velocità di percorrenza}} \rightarrow \frac{(T+3)R}{20 \text{ m/s}} = \frac{(T+3) \cdot 1 \cdot 10^3 \text{ m}}{20 \text{ m/s}} = 307 \text{ s}$$

e. Determinare $x(t)$ e $y(t)$ per $0 < t < T$ e costruire i grafici

$$\hookrightarrow \text{Equazioni generali moto circolare uniforme} \quad \begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t) \\ y(t) = R \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = R \cos\left(\frac{V_0 t}{R}\right) \\ y(t) = R \sin\left(\frac{V_0 t}{R}\right) \end{cases}$$

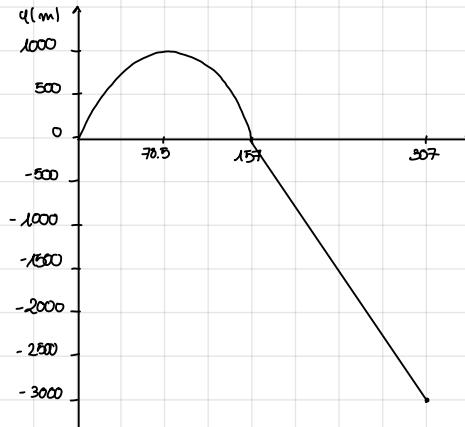
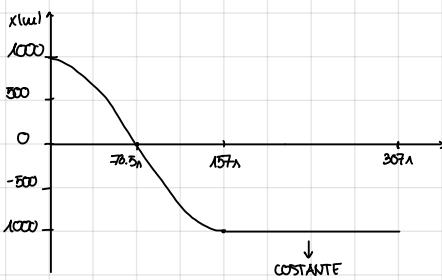
Calcolo tempo di percorrenza della semicirconferenza

$$\hookrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow T = \frac{2\pi R}{V}, \text{ ma questo è un giro completo}$$

$$V = WR \rightarrow \omega = \frac{V}{R} \quad \text{quindi si ha } \frac{T}{2} = \frac{\pi R}{V} \rightarrow V_0$$

Equazioni orarie moto rettilineo uniforme

$$\begin{cases} x(t) = B \\ y(t) = y_0 + V_0(t-t_0) \end{cases}$$



③ Determinare il moto di un punto materiale le cui leggi orarie in coordinate polari sono

$$\begin{cases} r = r_0 \sin \omega t \\ \theta = \omega t \end{cases} \quad \begin{matrix} r_0 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ \omega = 2\pi \text{ rad/s} \end{matrix}$$

Transformare in COORDINATE CARTESIANE

$$x = r \cos \theta \rightarrow x = r_0 \sin \omega t \cos \omega t = \frac{r_0}{2} \sin 2\omega t$$

$$y = r \sin \theta \rightarrow y = r_0 \sin \omega t \sin \omega t = r_0 \sin^2 \omega t = r_0 \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) = \frac{r_0}{2} \left(1 + \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) = \frac{r_0}{2} \left(1 - \cos 2\omega t \right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{r_0}{2} \sin \omega t \\ y = \frac{r_0}{2} (1 - \cos 2\omega t) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{trovo la} \\ \text{traiettoria} \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{r_0^2}{4} \sin^2 \omega t \\ \left(y - \frac{r_0}{2}\right)^2 = \cos^2 \omega t \cdot \frac{r_0^2}{4} \end{cases}$$

Utilizzo la relazione fondamentale della trigonometria $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$$x^2 + y^2 - r_0 y + \frac{r_0^2}{4} = \frac{r_0^2}{4} \rightarrow x^2 + y^2 - r_0 y = 0$$

$$\hookrightarrow \text{Centro: } \left(0, \frac{r_0}{2}\right) = \left(0, 2.5 \cdot 10^{-2}\right) \text{ m}$$

$$\text{Raggio: } \frac{1}{2} \sqrt{0 + r_0^2 - 0} = \frac{r_0}{2} = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{2} = 2.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

È necessario adesso determinare le equazioni del moto

\hookrightarrow La velocità è SEMPRE tangente alla traiettoria \rightarrow Nel sistema di coordinate polari presenta una componente radiale di una componente tangenziale

$$\hookrightarrow \vec{v} = v_L \hat{u}_L + v_T \hat{u}_T, \text{ adesso devo determinare } v_L \text{ e } v_T \rightarrow v_L = \frac{dx}{dt}$$

$$v_T = r \frac{d\theta}{dt} \quad \text{w istantanea}$$

A questo punto è necessario trovare il vettore che unisce il centro ad un qualsiasi punto sulla circonferenza, ovvero il vettore spostamento \vec{OP}

$\vec{OP} = r \hat{v}_1 \rightarrow$ Si avrà che $\vec{V} = V_1 \hat{v}_1 + V_t \hat{v}_t$

↓

$$\frac{d\vec{OP}}{dt} = \frac{d(r\hat{v}_1)}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{v}_1 + r \frac{d\hat{v}_1}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{v}_1 + r \frac{d\theta}{dt} \hat{v}_t$$

$$V_t = \frac{dr}{dt} r \cos \omega t = w r \cos \omega t \quad V_t = r \frac{d\theta}{dt} = r \omega \cos \omega t$$

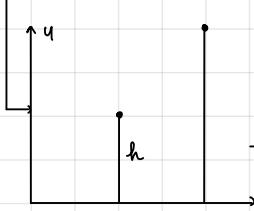
$$\text{Modulo della velocità: } v = \sqrt{V_1^2 + V_t^2} = \sqrt{w^2 r^2 \cos^2 \omega t + w^2 r^2 \sin^2 \omega t} = \sqrt{w^2 r^2} = w r = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 0.31 \text{ m/s} \rightarrow \text{Moto UNIFORME}$$

$$\text{Accelerazione CENTRIPETA: } a_c = \frac{V^2}{r} = \frac{(0.31)^2}{5 \cdot 10^{-2}} = 1.97 \text{ m/s}^2$$

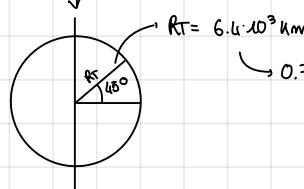
$$\text{Periodo del moto: } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ s}$$

I sistemi di riferimento inertiali e non inertiali

→ Descrizione di corpi in movimento da un sistema in movimento → Relatività galileiana: sistemi di riferimento INERTIALI



→ E' possibile definirlo STAZIONARIO? da terra ruota intorno al suo asse e intorno al Sole



$$R_E = 6.4 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$0.7 \cdot 6.4 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot 6.28 = \frac{3 \cdot 10^4 \text{ km}}{24 \text{ h}}$$

Effetti virtualmente ignorati ma in teoria è ACCELERATO e MOLTO COMPRESSO

Velocità ALTA, che però può essere IGNORATA ragionando tempi di caduta PICCOLI rispetto alle 24h.

In questo modo la velocità dell'oggetto NON rientra a camminare → In questo caso è INERTIALE

Quindi, in sostanza, è presente un sistema INERTIALE di riferimento da notare utilizzarlo nel caso di un sistema ACCELERATO in tempi ridotti

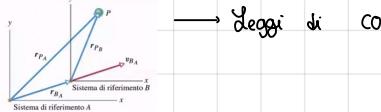
→ Come descrivere le leggi

Sistemi A e B, il primo statico ed il secondo in moto rettilineo uniforme con \vec{V}_{BA}

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PA} + \vec{r}_{PB}$$

$$\vec{V}_{PA} = \vec{V}_{PA} + \vec{V}_{PB}$$

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PA} + \vec{a}_{PB}$$



Leggi di COMPOSIZIONE galileiana

$$\text{Altra forma: } \vec{V}_{BA} = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{trasc}$$

velocità con cui il sistema B

si muove da A

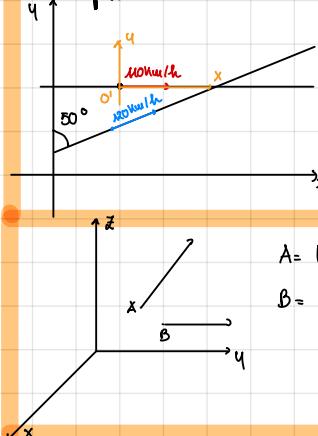
In qualunque sistema di riferimento INERTIALE le leggi della fisica sono le stesse

Esempio: la luce rimane c anche se la luce parte da un oggetto in movimento

In questo caso si contrae lo SPAZIO: Relatività SPECIALE

⚠ ATTENZIONE: formule importanti e sottovalutate

Esempio



Voglio trovare la velocità apparente del treno

$$\vec{V}_a = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{trasc} \rightarrow \vec{V}_{rel} = \vec{V}_a - \vec{V}_{tr}$$

$$\vec{V}_{tr} (100 \text{ km/h}, 0 \text{ km/h})$$

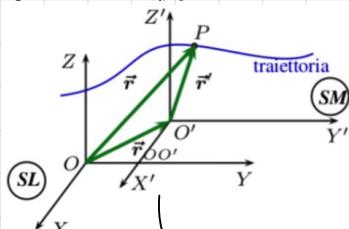
$$\vec{V}_a = (120 \cos 40^\circ, 120 \sin 40^\circ) \text{ km/h}$$

$$\vec{V}_{rel} = (120 \cos 40^\circ - 10, 120 \sin 40^\circ) \text{ km/h} \quad V_{rel} = \sqrt{V_{relx}^2 + V_{rely}^2}$$

$$A = (V_{Ax}, V_{Ay}, V_{Az}) \rightarrow \vec{V}_{rel} = \vec{V}_a - \vec{V}_{tr}$$

$$B = (V_{Bx}, V_{By}, V_{Bz})$$

→ Sistemi NON INERTIALI



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{OO'}(t)$$

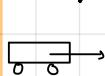
$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_{tr} \quad \text{con} \quad \vec{V}_{tr} = \frac{d\vec{r}_{OO'}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{tr} \quad \text{con} \quad \vec{a}_{tr} = \frac{d\vec{V}_{tr}}{dt} \quad \text{NON legata a leggi fisiche}$$

$$\vec{r}_{OO'} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}_{tr} t^2 \quad \text{derivando} \quad \textcircled{1} \quad \vec{V}_a = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{tr}$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{a}_a = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} \quad \text{Non sono solo perché il riferimento è accelerato: FATTORIE}$$

Esempio



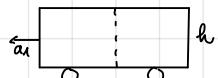
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}_{tr} t^2$$

$$\vec{a}_a = 0$$

$$0 = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} \quad \text{"vedo" il solo accelerazione: NESSUNA FORZA}$$

Esempi

① $\vec{a}_a = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr}$ ② \vec{V}_{tr} : costante; la vite cade sul pavimento in quanto il sistema è sismico



③ Il treno decelera con decelerazione costante

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_a - \vec{a}_{tr}$$

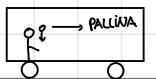
$$- \vec{a}_a = (0, -g) \text{ m/s}^2$$

$$- \vec{a}_{tr} = (-a_t, 0) \text{ m/s}^2$$

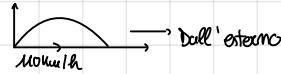
$$\vec{a}_a = (a_a, -g)$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_a t^2 \\ y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \rightarrow \text{LEGGI ORARIE DEL MOTORE}$$

④



→ Come mai la pallina torna in mano? Fa un moto parabolico



→ Lancio la pallina contro il vagone, come mi accorgo che accelera? Se non cade nella mano

3) SISTEMI ROTANTI

Se un sistema è rotante si ha che l'accelerazione di trascinamento e l'accelerazione centripeta



$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{a}_T = \vec{\omega} \times \vec{v}_T = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{0} \wedge \vec{0} \wedge \vec{r} = \vec{0}$$

Vettore rotante

$$\vec{a}_T = -\vec{r} \omega^2$$

$$\vec{a}_T = -\vec{r} \omega^2 \Rightarrow \vec{a}_T = -\vec{r} \omega^2$$

Relazioni generali:

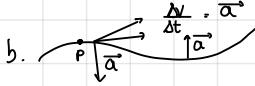
$$\vec{v}_T = \frac{dr}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{a}_T = \vec{\omega} \times \vec{v}_T = -\vec{\omega}^2 \vec{r}_\perp$$

diretta verso il centro

Esempi

① a.

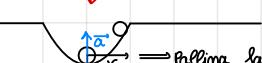


→ Accelerato in quanto non essendo rettilineo deve esercitare un'accelerazione che fa cambiare direzione
↪ \vec{a} è CENTRIPETA

②



> tensione sul filo?



= Pallina fa moto circolare con $\vec{a} = -m\omega^2 \vec{r}$

$$\vec{F} + \vec{mg} = -m\omega^2 \vec{r} \rightarrow \vec{F} = -mg - m\omega^2 \vec{r}$$

Relazioni che collegano sistemi sismici a sistemi rotanti

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{tr}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{rel}}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \frac{d\vec{v}_{rel}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}) \text{ da cui } \vec{a}_a = \vec{a}_{rel} - \vec{\omega}^2 \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}, \text{ dove } \vec{a}_{tr} = -\vec{r} \omega^2 + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$$

ACC. CENTRIFUGA con - davanti: ACCELERAZIONE DI CORIOLIS

Esempi

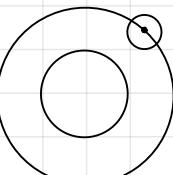
①



$$\vec{a}_{rel} = 0 \rightarrow 0 = \vec{a}_a - \vec{a}_{tr}, \text{ quindi } \vec{a}_a = \vec{a}_{tr}$$

Se fosse tenuto da una molla: $-k\Delta l = -m\omega^2 R \rightarrow$ Corpo in equilibrio tra accelerazione centrifuga (fittizia) e forza esercitata dalla molla

②



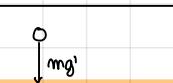
400 Km/h

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr}$$

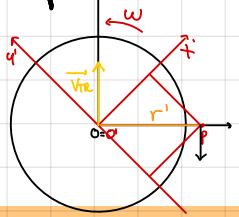
$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_a - \vec{a}_{tr}$$

$$0 = mg' - m\omega^2 r \rightarrow mg' = m\omega^2 r \rightarrow g' = \omega^2 r: \text{TUTTA l'accelerazione è erogata per l'orbita circolare}$$

↪ L'oggetto è VINTO TERZO perché in equilibrio tra a. centripeta (annuale) e gravità



Esempio



$$\vec{v}_p = (0, 0)$$

$$\vec{a}_p = (0, 0)$$

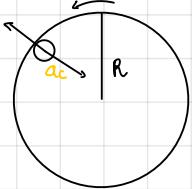
$$\vec{x}_p = (x_p, 0)$$

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_a - \vec{a}_{TR} = \vec{a}_a + \vec{w} \cdot \vec{r}' - 2\vec{w} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_a - \vec{v}_{TR}$$

$$\vec{v}_{TR} = \vec{w} \wedge \vec{r}'$$

— L'accelerazione di Coriolis: $-2\vec{w} \wedge \vec{v}_{rel} = \vec{a}_c$



\vec{a}_c data dalla reazione (spinta verso il centro) dei sedili



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$-mv^2 \frac{\vec{R}}{R} = -mw^2 \vec{R}$$

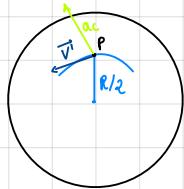
$$\vec{a}_a = -mw^2 \vec{R}$$

$\vec{a}_{TR} = 0 = -w^2 R - \vec{a}_a = 0$ (Io vedo fermo se sono nella girella)

$$\text{Quindi } -\vec{a}_{TR} = +w^2 R \rightarrow \vec{a}_{TR} = -w^2 \vec{R}$$

Non c'è accelerazione di Coriolis perché manca v_{rel}

Cosa accade se un ragazzo prosegue?

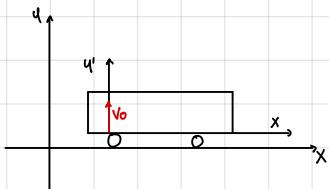


$$a_c < a_c' = \frac{v'^2}{R}$$

Essendo maggiore, è spinto a muoversi verso raggi maggiori perché non è più sufficiente l'attrito

Esercizi slide

① Su un treno che si muove di moto rettilineo con accelerazione costante $a = 0.25 \frac{m}{s^2}$ (rispetto alla terra) un diodo, che si trova sul pavimento, viene lanciato con velocità $v_0 = 6 \frac{m}{s}$ diretta verticalmente (rispetto al treno). Calcolare a quale distanza è dal punto di lancio ricadra il corpo sul pavimento.



$$\begin{aligned}\vec{a}_a &= \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} \\ \vec{a}_a &= (a_{relx}, a_{ely}, a_{eq}) \text{ m/s}^2 \\ \vec{v}_a &= \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{tr} \\ \vec{v}_{rel} &= (0, 6) \text{ m/s}\end{aligned}$$

Analizziamo il moto della pallina: l'accelerazione di trascinamento della pallina è quella generata dal movimento del treno, mentre l'accelerazione assoluta è quella data dall'accelerazione di gravità. Per questo è necessario calcolare l'accelerazione relativa

$$\text{Utilizzando la relazione } \vec{a}_a = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} \rightarrow \vec{a}_{rel} = \vec{a}_a - \vec{a}_{tr}$$

$$\vec{a}_{rel} = (0 - 0.25, -9.81 - 0) = (-0.25, -9.81) \text{ m/s}^2$$

Il moto quindi è un moto uniformemente accelerato sia nell'asse x che nell'asse y , che quindi conviene analizzare separatamente

$$\hookrightarrow \text{Velocità lungo asse } x: \vec{v}_a = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{tr} \quad \vec{v}_{trx} = \vec{a}_{tr} t \rightarrow \vec{v}_{ax} = \vec{a}_{tr} x$$

$$v_{relx} = 0$$

$$\hookrightarrow \text{Velocità lungo asse } y: \vec{v}_{ay} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{tr} \quad \vec{v}_{try} = 0$$

$$v_{rely} = 6 - 9.81 t$$

A questo punto trovo il tempo di volo della pallina utilizzando le componenti relative di velocità ed accelerazione

$$\hookrightarrow 0 = 0 + st - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow gt - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \rightarrow t \left(6 - \frac{1}{2}t \right) = 0 \quad \begin{matrix} \text{t=0: NO, starting point} \\ \text{posizione di partenza/così (su x)} \end{matrix}$$

$$-\frac{1}{2}gt = -6 \rightarrow t = \frac{12}{g} = 1.22 \text{ s}$$

Allora trovo la gittata (rispetto al pavimento)

$$s_x(t) = s_0 + v_{relx}t - \frac{1}{2}a_{relx}t^2$$

$$s_x(1.22) = 0 + 0 + \frac{0.25}{2}t^2 = 0.187 \text{ m} = 18.7 \text{ cm}$$

Determinare la traiettoria del diodo vista da terra

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_{0x}t^2 = x_0 + v_{0x}t \quad \text{Moto rettilineo uniforme} \rightarrow \text{Moto di un paraciglio: la traiettoria è una parabola} \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_{0y}t^2 = 6 - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{Moto di caduta libera} \end{cases}$$

Determinare la traiettoria come se il corpo fosse visto dal treno

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_{0x}t^2 = \frac{1}{2}0.25t^2 \quad \text{Uniformemente accelerato} \rightarrow \text{La parabola in questo caso NON è simmetrica rispetto all'asse } y \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_{0y}t^2 = 6t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{Uniformemente accelerato} \end{cases}$$

Se il treno fosse in moto con velocità costante, qual è la traiettoria vista da un osservatore sul treno?

→ Il sistema in questo caso è inerziale, quindi le leggi della fisica NON cambiano e perciò il corpo lanciato verso l'alto atterrà sulla posizione dove è stato lanciato, ma vediamo meglio

$$\begin{aligned}\vec{a}_a &= \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} = \vec{a}_a = \vec{a}_{rel} = (0, -g) \text{ m/s}^2 \\ \vec{v}_a &= \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{tr} = (0, c.t.e., v_0 - gt) = (c.t.e., v_0 - gt) \text{ m/s}\end{aligned}$$

Leggi orarie RELATIVE

$$\begin{aligned} \text{Asse } x &\rightarrow x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_{0x}t^2 = x_0 \\ \text{Asse } y &\rightarrow y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_{0y}t^2 = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

→ Cade nella stessa posizione

Nelle medesime condizioni, calcolare la traiettoria rispetto a terra

→ Leggi orarie ASSOLUTE

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_{0x}t^2 = x_0 + c.t.e. \quad \text{PARABOLA} \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_{0y}t^2 = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

La dinamica

- Forze: modo in cui un corpo interagisce con l'esterno o con altri corpi → Newton: NON è richiesto il contatto
 - legge di gravitazione universale: $F = \frac{G M_1 M_2}{r^2} \hat{r}$ → NON è necessario il contatto
 - Misura tramite DINAMOMETRI
 - Divise in 2 GRUPPI
 - Forze di CONTATTO: si esercitano attraverso il contatto fisico tra i corpi
 - Forze di CAMPO: NON richiedono il contatto fisico
- Divisione NON NETTA: Anche le forze di contatto sono dovute alle forze elettriche (di campo)
 - Forze fondamentali sono di campo: attrazione gravitazionale, forze elettromagnetiche, forze nucleari forti e deboli
- Prima legge di Newton: se non ci sono interazioni, è possibile identificare un sistema di riferimento inerziale dove l'accelerazione è nulla (princípio di inerzia)
 - NON viene modificato lo stato di quiete o moto rettilineo uniforme
 - Formulazione alternativa: In assenza di forze esterne e se osservato da un sistema di riferimento inerziale, un corpo in quiete rimane in quiete ed un corpo in moto continua nel suo movimento con la stessa velocità

Quando su un corpo non agiscono forze, l'accelerazione è nulla → INERZIA: tendenza di un corpo a mantenere il suo stato di quiete o moto

- La MASSA: proprietà di un corpo che misura la resistenza opposta ai cambiamenti di velocità → UNITÀ di MISURA del Si: chilogrammo (kg)
- supponendo di avere due corpi di masse m_1 e m_2 a cui sono applicate le accelerazioni a_1 e a_2 si ha: $m_1/m_2 = a_1/a_2$
- Seconda legge di Newton: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ → \vec{p} : quantità di moto = $m\vec{v}$ → Se $\vec{F} = 0$ si ha la prima legge perché $d\vec{p}/dt = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{costante}$
 - $\vec{F} = m\vec{a}$, che deriva dalla precedente se la massa è COSTANTE: $\vec{p} = m\vec{v}$, quindi $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow m\vec{a}$
- $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ significa che \vec{F} parallelo a \vec{p} e se \vec{F} in una direzione è nulla, \vec{p} è costante in quella direzione → 0 se $m = \text{cte}$

→ Sistema libero (nessuna interazione esterna): interazioni DEBOLI non importanti per il problema

- ALTRA FORMA: $\vec{F} dt = d\vec{p}$ → $d\vec{p}$ significativamente ≠ 0 \iff $\vec{F} dt$ significativamente ≠ 0: IMPULSO della forza
 - molto piccolo, infinitesimo
 - CASO in cui \vec{p} può NON variare → se $\vec{p} = 0$ (resta), con $\vec{F} \neq 0$ e $dt \neq 0$ si ha $d\vec{p} \approx 0$

Esempio

$$V_0 = \sqrt{2gh}$$

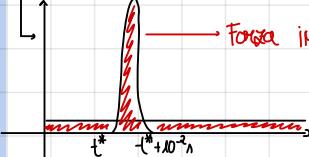
$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = -m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = -2m\vec{v}_0 - \Delta\vec{p}$$

$$\vec{p}_i = m\vec{v}_0$$

$$\vec{p}_f = -m\vec{v}_0$$

$$dt = 10^{-2}s$$

Sottoposta a reazione vincolare, forza zero ed altre forze costanti → NON sono importanti per la quantità di moto perché non sono in grado di produrre variazioni significative di \vec{p}



→ **Forza IMPULSIVA**: riesce a produrre variazione di quantità di moto in tempo piccolo

→ **ATT:** La forza da considerare è la RISULTANTE $\sum \vec{F}$ → Equivale a $\sum F_x = m a_x$, $\sum F_y = m a_y$, $\sum F_z = m a_z$

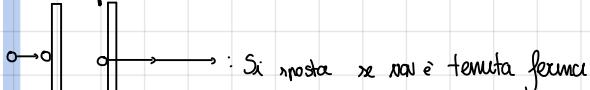
→ Unità di misura: N (Newton) → 1N = forza che, applicata ad un corpo di massa 1 kg, produce l'accelerazione di 1 m/s²

- $1N = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$

→ PRINCIPIO di CONSERVAZIONE delle QUANTITÀ di MOTO

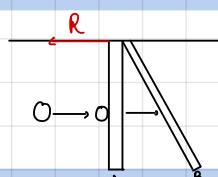
- $\vec{p} = m\vec{v}$ costante se $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, $m = \text{costante}$
 - A: $\vec{F} = 0$: corpo libero → \vec{p} è COSTANTE
 - B: $\vec{F} \neq 0$: \vec{p} NON è costante
 - $d\vec{p}$ infinitesimo → \vec{F} impulsiva, quindi $\infty \rightarrow \vec{p}$ NON costante
 - At limito: sono presenti ACCELERAZIONI → \vec{p} NON è costante

Esempio



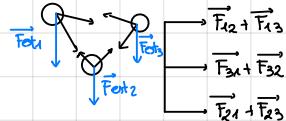
→ da FORZA GRAVITAZIONALE

- Tutti i corpi sono attratti dalla Terra dalla forza gravitazionale \vec{F}_g , diretta verso il centro della Terra e la cui intensità si chiama PESO → Applicando la seconda legge di Newton ad un corpo in caduta libera si ha $\vec{F}_g = m\vec{g}$, dove m in questo caso identifica la massa gravitazionale, ovvero l'intensità dell'attrazione tra Terra e corpo → ANALOGA a massa inerziale



R è IMPULSIVA perché NON permette al corpo di ripartirsi

→ Terza legge di Newton: Se il corpo 1 esercita sul corpo 2 una forza $\vec{F}_{1,2}$, il corpo 2 esercita sul corpo 1 una forza di modulo e direzione uguali (princípio di azione-reazione) e viceversa → Si chiamano forze INTERNE e sviluppandosi a coppie, la loro somma è nulla.

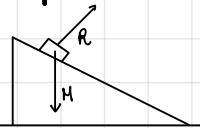


La DINAMICA è data solo dalle forze ESTERNE: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \frac{d\vec{p}}{dt}$

→ Per verificare $\vec{p} = \text{cost}$ si utilizzano solo le forze ESTERNE

→ La forza applicata dal corpo 1 sul corpo 2 viene chiamata azione, mentre l'inversa si chiama reazione.
Le forze di azione e reazione agiscono su CORPI DIVERSI ma sono dello STESSO TIPO

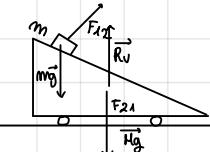
Esempio



Sistema: corpo di massa m

Interazioni: Tocco e piano inclinato

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{mg} + \vec{R} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \vec{ma}$$



Sistema: piano M e corpo m

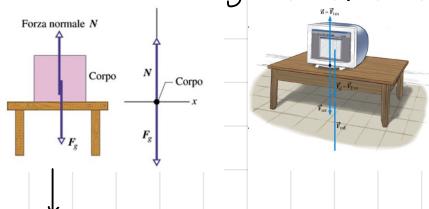
La quantità di moto è determinata solo dalle forze ESTERNE

Forze interne: $\vec{F}_{1,2}, \vec{F}_{2,1}$

Forze esterne: $\vec{mg}, \vec{Mg}, \vec{R}_V \rightarrow$ Somma: 0

La FORZA NORMALE

→ Generata dal contatto fra 2 corpi e ORTOGONALE al piano se le superfici sono PRIVE di ATTRITO



→ $\vec{F}_N = \vec{F}_{\text{nt}}$, quindi la reazione è data da $\vec{F}_{\text{rm}} = -\vec{F}_{\text{nt}}$

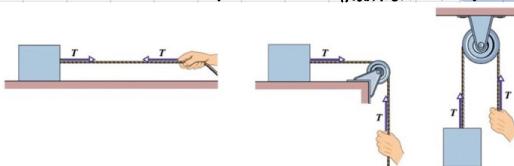
→ Il monitor NON è accelerato perché appoggiato sul tavolo che esercita la forza normale $\vec{m} = \vec{F}_{\text{tm}}$

Dalla seconda legge di Newton si ha $\sum \vec{F} = \vec{m} + \vec{mg} = 0$ e quindi $\vec{m} = \vec{mg}$

Il primo diagramma, che rappresenta le forze agenti su UN SOLO CORPO si chiama diagramma di forza, mentre il secondo da diagramma, che utilizza la rappresentazione di un punto materiale si chiama diagramma di corpo libero

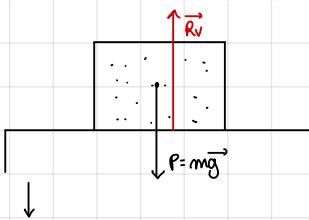
La TENSIONE di un filo

↓ → è diretta nella direzione del filo ed è applicata nel punto dove la corda è finita → È uguale e contraria alla sollecitazione



→ Per semplificare ha massa trascurabile ed è INESTENSIBILE
↓ → tutte le forze sono date a forze ELETROMAGNETICHE

SCHEMA FORZE



$\vec{P} = \sum \vec{F}$ = forze microscopiche date dalle singole molecole applicate nel CENTRO DI MASSA

$\vec{R} = \sum \vec{F}$ = reazioni visibili infinitesime date dal piano

↓ Possiamo esercitare tutte in un unico punto per semplificare

Se un oggetto NON subisce accelerazioni, la forza totale è NULLA, mentre non lo è se è presente accelerazione

→ Equilibrio: quando l'accelerazione è nulla → La somma delle forze su x, y e z è nulla

$$\vec{ma} = \sum \vec{F} = 0, \text{ ovvero } \sum F_x = \sum F_y = \sum F_z$$

Metodo risolutivo problemi

→ Analisi e diagramma problema

→ Verificare se si tratta di un problema di equilibrio o seguendo la seconda legge

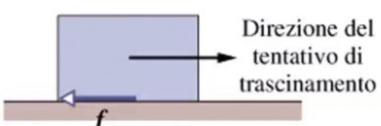
→ Disegnare diagrammi di corpo libero per tutti gli oggetti

→ Scegliere sistema di coordinate, verificare correttezza unità di misura, applicare equazioni e risolvere per incognite

→ Verificare consistenza risultati con diagrammi e così limite

La forza di attrito

→ Manifestazione macroscopica di forze eletromagnetiche

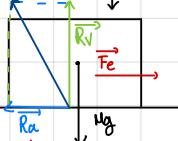


Un corpo appoggiato sul piano è "trattenuto" da una forza quando viene spostato → Attrito STATICO

↓ → Dipende dalle caratteristiche presenti sulla superficie → Data che le asperità sono piccole, la PRESSIONE $P = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S}$ è MOLTO ALTA

↓ Si hanno quindi delle microfissioni che devono essere rotte per avere movimento

Come muore la forza di attrito?



→ Cosa accade se il corpo è fermo? L'attrito è presente ma NON è presente la REAZIONE di ATTRITO perché se vi fosse, farebbe muovere il corpo

Se la forza esterna PARALLELA alla superficie di contatto fosse applicata ad una superficie priva di attrito NON sarebbe compresa la forza di attrito

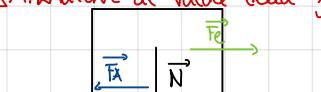
⚠ ATT: La forza esterna deve avere ANTAO UNA COMPONENTE // alla superficie

ATTRITO STATICO: il corpo NON si muove perché la forza applicata NON è sufficiente

$\vec{F}_A \leq \mu_s \vec{N}$ e quindi $\vec{F}_{A\text{ MAX}} = \mu_s \vec{N}$ → la forza di attrito statico massima è quella che si ha un attimo prima che il corpo si muova

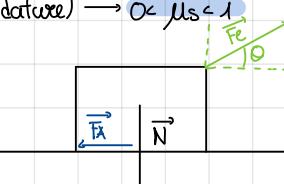
Coefficiente di ATTRITO STATICO: dipende dalla superficie (dalle microscaldature) → $0 < \mu_s < 1$

⚠ ATTENZIONE al valore della forza di attrito



$\vec{F}_A = \vec{F}_E$! e NON $F_A = \mu_s N$.

Se $\vec{F}_E > \vec{F}_A$ il corpo si muove

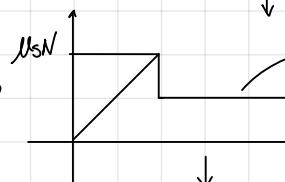


→ Conviene questa \vec{F}_E perché la componente verticale fa diminuire \vec{N} e di conseguenza $\vec{F}_{A\text{ MAX}}$



$\mu_s N = mg$: si muove

$\mu_s N > mg$: sta fermo → Accade se pesano

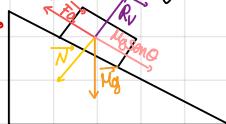


Costante: $\mu_s N$ (dinamico)

Una volta rotolato lo scorrimento, è possibile applicare una forza minore, chiamata attrito dinamico

Le microfissioni sono meno robuste perché si formano mentre il corpo si muove → $F_d = \mu_d N$: Velocità ugualmente

⚠ ATTENZIONE: Forza perpendicolare \vec{N} →



$$\vec{N} = \vec{R}_v - \vec{mg} \cos \theta$$

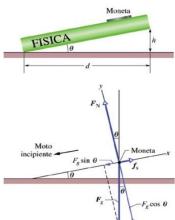
$$\vec{F}_d = \mu_d \vec{N} = \mu_d mg \cos \theta$$

su y: $R_v - mg \cos \theta = 0 \rightarrow \theta = 0$: costante

su x: $mg \sin \theta - \mu_d mg \cos \theta = Ma \rightarrow a = g \sin \theta - \mu_d g \cos \theta$: costante

→ Vede la legge oraria $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

Calcolo del coefficiente di attrito statico



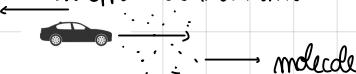
$$mg \sin \theta = F_s = \mu_s mg \cos \theta \rightarrow \text{l'oggetto inizia a muoversi}$$

$$\mu_s = \tan \theta$$

→ Il MOTO in un FLUIDO: Moto DECELERATO

→ L'origine si individua nel fatto che ogni corpo è immerso in un fluido →

\vec{F} : si oppone al movimento

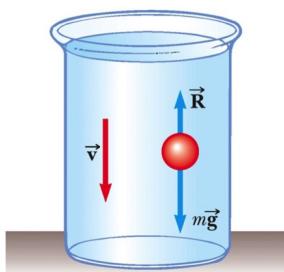


Costituito da MOLECOLE che creano attrito ed è PROPORZIONALE alla velocità: $\vec{F} = -\beta \vec{v}$ → Aumenta con il crescere della velocità

→ La resistenza dipende dal fluido: $\beta_{H_2O} > \beta_{aria}$

→ Aumenta se il corpo è più GRANDE perché sposta più MOLECOLE

Caduta di un grano all'interno di un fluido



$$mg - \beta v = m a$$

$$a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{\beta}{m} v : EQUAZIONE DIFFERENZIALE$$

→ a costante $\frac{dv}{dt} = a \rightarrow x(t) = \text{quadratica nel tempo}$

$$x(t) = A + Bt + Ct^2$$

→ dipendenza del tempo $\frac{dx}{dt} = \lambda t^2 \rightarrow x(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4$

→ dipendenza della velocità $\rightarrow a(v) = -\beta v \rightarrow \frac{dv}{dt} = \beta v \rightarrow \frac{dv}{v} = \beta dt \rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \beta dt$

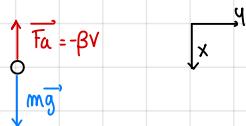
$$\rightarrow \ln v = \beta t + c \text{ e quindi } v = A e^{-\beta t} \rightarrow v(0) = A$$

→ esponenziale decrescente

È possibile quindi ricavare l'equazione oraria integrando di muovo: $\int dx = \int v_0 e^{-\beta t} dt \rightarrow x - x_0 = \frac{-v_0}{\beta} e^{-\beta t} \Big|_0^t = \frac{-v_0}{\beta} e^{-\beta t} + \frac{v_0}{\beta}$
da cui si conclude $x - x_0 = \frac{v_0}{\beta} (1 - e^{-\beta t})$

Le equazioni orarie in questo caso sono quindi $v(t) = v_0 e^{-\beta t}$
 $x(t) = \frac{v_0}{\beta} (1 - e^{-\beta t})$

da velocità limite



$$\vec{ma} = \frac{d^2x}{dt^2} = \vec{mg} - \beta \vec{v}$$

Moto rettilineo uniforme se $\sum \vec{F} = 0 \rightarrow mg = \beta v_{\text{lim}}$ e quindi $v_{\text{lim}} = \frac{mg}{\beta}$

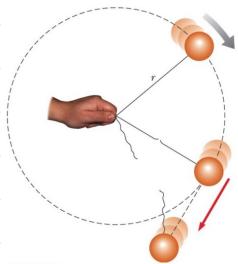
Formalizzazione del moto

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} + \beta v = mg \rightarrow \text{soluzione omogenea} + \text{soluzione particolare} \\ m \frac{dv}{dt} + \beta v = 0 \\ v(t) = v_0 e^{-\beta t} \end{cases}$$

$$v(t) = \text{cost} = c \rightarrow \beta c = mg \rightarrow c = \frac{mg}{\beta}$$

Si ha quindi che $v(t) = A e^{-\beta t} + \frac{mg}{\beta}$, che per $t=0$ diventa $\frac{mg}{\beta} = A$ e quindi si ha $v(t) = \frac{mg}{\beta} (1 - e^{-\beta t})$

→ Le FORZE in un MOTO CIRCOLARE UNIFORME



→ È presente un'accelerazione (e quindi una forza) CENTRIPETA

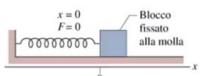
$$\vec{F}_c = \frac{mv^2}{r} \text{ oppure } \vec{F}_c = m \omega^2 r$$

La forza è diretta VERSO IL CENTRO del cerchio in direzione del raggio

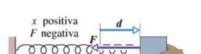
La forza è applicata al filo che permette al corpo di proseguire il suo moto circolare

Provoca una variazione del vettore velocità

→ da FORZA ELASTICA



→ Legge di Hooke: $F(x) = -kx$ $\rightarrow x = \text{compressione / allungamento} \rightarrow \text{Meglio } F = -k \Delta x, \Delta x = (l - l_0)$

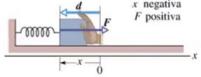


at una forza di RICHIAMO: diretta verso la posizione di equilibrio e quindi opposta allo spostamento

Se viene spostato dalla posizione di equilibrio e rilasciato si muove di moto accelerato perché oggetto

ad una forza risultante: $a_x = -\frac{k}{m} x \rightarrow$ Modulo proporzionale allo spostamento e verso opposto

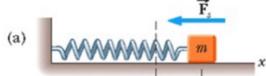
Moto ARMONICO



Quando passa del punto di equilibrio l'accelerazione è nulla, mentre è massima nel punto iniziale

Velocità MASSIMA nel punto di equilibrio

→ Il MOTO ARMONICO



→ $a(x) = -kx$ e quindi $ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \rightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m} x(t) = -\omega^2 x(t)$

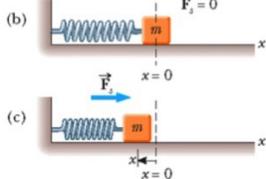
⚠ per comodità si sceglie

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$x(t) = A \cos \omega t$$

$$v(t) = -A \omega \sin \omega t$$

$$a(t) = -A \omega^2 \cos \omega t$$



Più nello specifico si ha che le equazioni del moto sono date da

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = -A \omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -A \omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

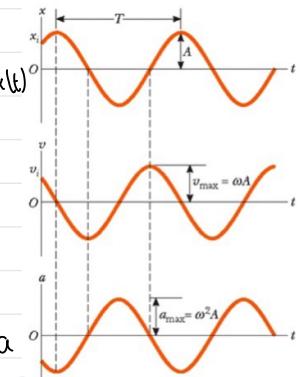
A = ampiezza = massimo valore della posizione

w = pulsazione (rad/s) = quanto velocemente avvengono le oscillazioni

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ϕ = costante di fase: Se il corpo si trova ad A in $t=0$, allora $\phi=0$

$\omega t + \phi$ = fase del moto



Periodo del moto armonico: tempo impiegato per compiere un ciclo completo $\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$

↓

Frequenza: numero di oscillazioni per unità di tempo $\rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

Velocità ed accelerazione massima $\rightarrow v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A$

$$\rightarrow a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$$

Differenze di fase tra x, v, a \rightarrow V difference in fase di x di $\phi = 90^\circ$, ovvero dove x è massima, v è minima e vice-versa
 $\rightarrow a$ difference in fase di x di $\phi = 180^\circ$, ovvero entrambe hanno il massimo nello stesso punto ma con segno opposto

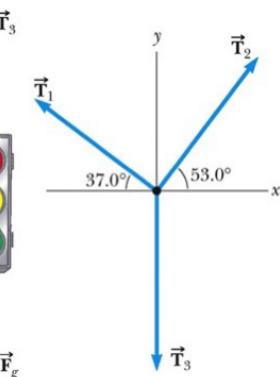
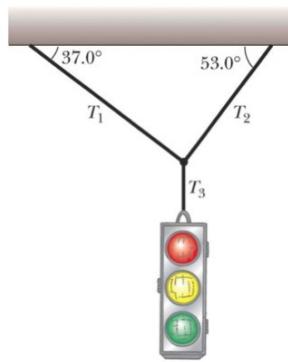
Modelli di Analisi

→ Modello 1: Sistema in EQUILIBRIO

Semaforo di perno M&N

Cavi si riconpongono se la forza eccede 100N

Si riconpongono?



Il sistema è in EQUILIBRIO, quindi la somma delle forze è nulla: $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3 = \vec{0}$

Calcolo le forze agenti sui fili: Avendo un piano cartesiano, conviene riconporre le forze in componenti

$$\vec{T}_3 = (0, -T_3)$$

$$\vec{T}_2 = (T_2 \cos 53^\circ, T_2 \sin 53^\circ)$$

$$\vec{T}_1 = (-T_1 \cos 37^\circ, T_1 \sin 37^\circ) = (-T_1 \cos 37^\circ, T_1 \sin 37^\circ)$$

$$\text{Quindi si ha} \begin{cases} -T_1 \cos 37^\circ + T_2 \cos 53^\circ = 0 \\ T_1 \sin 37^\circ + T_2 \sin 53^\circ = T_3 \end{cases}$$

$$T_1 = T_2 \frac{\cos 53^\circ}{\cos 37^\circ}$$

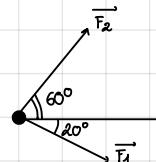
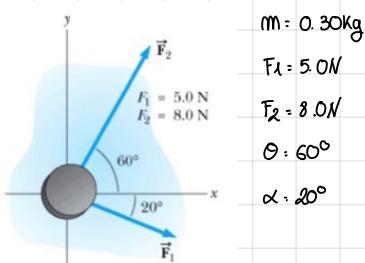
$$T_2 \cos 53^\circ \sin 37^\circ + T_2 \sin 53^\circ = T_3$$

→ Diretta nel VERSO OPPOSTO a \vec{F}_g

$$\begin{cases} T_1 = T_2 \frac{\cos 53^\circ}{\cos 37^\circ} \\ T_2 = \frac{T_3}{\cos 53^\circ \sin 37^\circ + \sin 53^\circ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 = 73.6 \text{ N} \\ T_2 = 97.6 \text{ N} \end{cases} \rightarrow \text{ Nessuno dei due fili si spezza}$$

→ Modello 2: Forza totale NON NULLA



→ Diagramma di CORPO LIBERO

Calcolo dell'accelerazione utilizzando la seconda legge di Newton per m costante $\vec{F} = m\vec{a}$

Ottenendo la forza un vettore, conviene riconporla nelle sue componenti x ed y

$$F_{1x} = 5.0 \cos(-20^\circ) = 4.70 \text{ N} \quad F_{1y} = 5.0 \sin(-20^\circ) = -1.71 \text{ N}$$

$$F_{2x} = 8.0 \cos(60^\circ) = 4.0 \text{ N} \quad F_{2y} = 8.0 \sin(60^\circ) = 6.93 \text{ N}$$

$$F_{3x} = 5.0 \cos(60^\circ) = 2.5 \text{ N}$$

$$F_{3y} = -5.0 \sin(60^\circ) = -4.33 \text{ N}$$

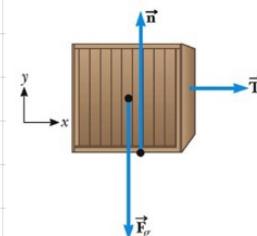
$$a_x = 8.70 / 0.30 = 29 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = 5.22 / 0.30 = 17 \text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{29^2 + 17^2} = 34 \text{ m/s}^2$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{17}{29}\right) = 30^\circ$$

→ Modello 3: Tensione corda (resistenza attrito)



→ 3 forze agenti

→ Tensione \vec{T} della corda

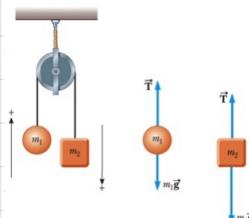
→ Forza gravitazionale \vec{F}_g

→ Forza normale \vec{n} → Reazione del pavimento

Tipo di moto: Anche in questo caso conviene dividere l'andata del moto in x ed in y → Poi applicare $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{T}{m} \\ a_y = \frac{\sum F_y}{m} = \frac{F_g - n}{m} = \frac{F_g - F_g}{m} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Moto uniformemente accelerato se } T \text{ è c.t.e}$$

→ Modello 4: Macchina di Atwood



→ Forze agenti

- Tensione \vec{T} comune ai due oggetti
- Forza gravitazionale

→ Oggetti fanno la STESSA ACCELERAZIONE

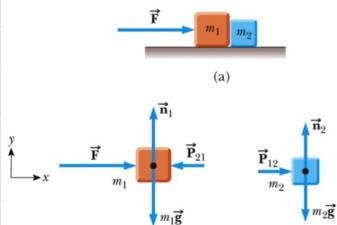
Calcolo delle forze agenti

$$\begin{cases} \text{Su } m_1: T - m_1 g \\ \text{Su } m_2: m_2 g - T \end{cases} \xrightarrow{\text{II legge Newton}} T - m_1 g = m_1 a \quad m_2 g - T = m_2 a$$

Ricavo l'accelerazione in quanto comune ad entrambi i corpi

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a_x \\ m_2 g - T = m_2 a_x \end{cases} \quad \begin{cases} m_2 g - m_2 a_x = m_2 a_y \\ T = m_2 g - m_2 a_y \end{cases} \quad \begin{cases} a_y = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} g \\ T = m_2 g - m_2 \left(\frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \right) g = \frac{m_1 m_2 g + m_1^2 g - m_1^2 g + m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

→ Modello 5: Corpi multipli



→ II legge di Newton sul sistema totale: $\sum F_x = m_{\text{tot}} a_x \rightarrow$ L'unica forza esterna è quella su x

→ Per quanto riguarda i singoli corpi si ha

$$a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

→ Sul blocco orizzontale: $\vec{F} + \vec{m}_1 g + \vec{P}_{21} = m_1 a_x$

→ Sul blocco orizzontale: $\vec{P}_{12} + \vec{m}_2 g + \vec{m}_2 \vec{g} = m_2 a_x$

↓ Rimane da verificare che $P_{12} = P_{21}$

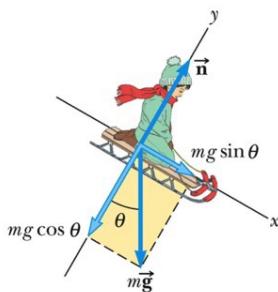
$$P_{12} = m_2 \frac{F}{m_1 + m_2}$$

$$F - P_{21} = m_1 \frac{F}{m_1 + m_2}$$

$$P_{21} (m_1 + m_2) = F m_1 + F m_2 - m_1 F$$

$$P_{21} = \frac{F m_2}{m_1 + m_2} \rightarrow \text{uguaglianza verificata}$$

→ Modello 6: Piano inclinato



→ Analisi delle forze agenti

→ La forza NORMALE \vec{n} ha direzione ortogonale al piano

→ La forza gravitazionale è VERTICALE

Scegliendo come x il piano inclinato, si ha che la forza di gravitazione ha 2 componenti x e y, delle quali solo la prima genera accelerazione, in quanto la seconda è compensata dalla reazione vincolare

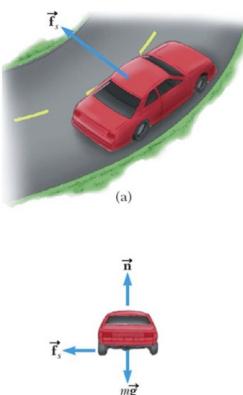
→ $F_{g,x} = m g \sin \theta \rightarrow$ Per la seconda legge di Newton si ha che $a_x = g \sin \theta$

→ Equilibrio su y: $m - m g \cos \theta = 0 \rightarrow m = m g \cos \theta$

→ Modello 7: il moto di un'automobile

→ La forza che permette all'automobile di muoversi è l'attrito con il suolo, in quanto la forza generata dal motore viene applicata sulle ruote che, grazie all'attrito con il fondo stradale, generano il movimento dell'auto

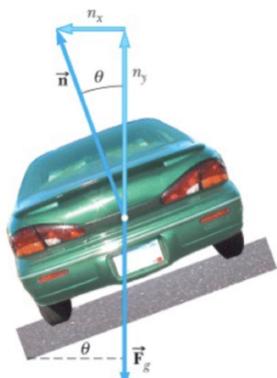
→ Moto su una curva piatta



→ La forza centripeta è data da una forza di ATTRITO STATICO → La macchina si muove nella direzione puntata dalle ruote, mentre nell'altra è "ferma" e per questo, per non farla sbandare, si genera una forza di attrito statico che non le permette di muoversi in tale direzione

→ La forza di attrito statico MASSIMA è data da: $\frac{mv^2}{r} = \mu_s mg$ e quindi la velocità limite è data da $v = \sqrt{\mu_s gr}$

→ Moto su una curva SOPRAELEVATA



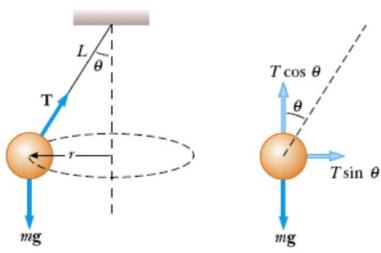
→ Voglio trovare il valore di θ per il quale i passeggeri NON risentono di forza laterale

→ Avviene se la forza centripeta è data dalla componente m_x della reazione vincolare \vec{n}

→ $m_y = m g \cos \theta = m g \rightarrow \tan \theta = \frac{v^2}{rg}$

→ $m_x = m g \sin \theta = \frac{mv^2}{r}$

→ Modello 8: IL PENDOLO CONICO



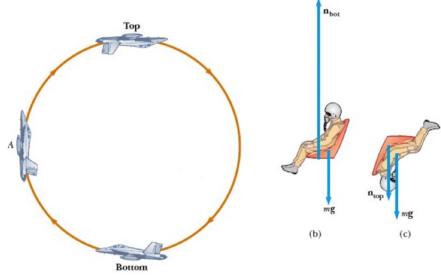
→ Forze agenti: Forza peso e tensione del filo

↳ dimostra che fa un moto circolare, e necessaria una FORZA CENTRIPETA mv^2/r

$$T \cos \theta = mg$$

$$T \sin \theta = \frac{mv^2}{r}$$

→ Modello 9: IL GIRO DELLA MORTE

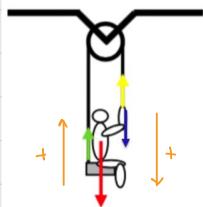


$$m_{\text{bot}} - mg = \frac{mv^2}{r} \rightarrow \frac{m_{\text{bot}}}{mg} = \frac{v^2}{gr} + 1$$

$$m_{\text{top}} + mg = \frac{mv^2}{r} \rightarrow \frac{m_{\text{top}}}{mg} = \frac{v^2}{gr} - 1$$

Esercizi slide

- ① Dimostrare che un uomo, utilizzando una coracola, può solire verticalmente applicando una forza inferiore al proprio peso.
Calcolare la sua accelerazione in funzione della forza da lui esercitata.



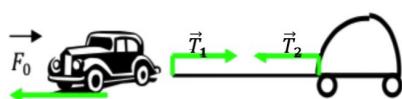
→ Forze agenti sull'uomo: \vec{T}_2 e mg
→ Forza esercitata: \vec{F} → genera tensione \vec{T}_1

$$T_1 = T_2 = F$$

La somma delle forze produce l'accelerazione del sistema, la quale massa è data da m (massa dell'uomo)
 $\sum F = ma \rightarrow T - mg + T = ma \rightarrow 2T - mg = ma$, quindi $a = \frac{2T}{m} - g$

Situazione di equilibrio: $-mg + 2T = 0 \rightarrow T = \frac{mg}{2}$ ma $T = F$, quindi $F < Mg$

- ② Un'automobile (massa $M_1 = 1500\text{kg}$) tratta una roulotte (massa $M_2 = 500\text{kg}$) su una strada orizzontale. La forza esercitata dalle ruote dell'automobile parallellamente alla strada ha modulo $F_0 = 100\text{N}$. Si calcoli l'accelerazione dell'automobile e la forza sul gancio fra auto e roulotte.



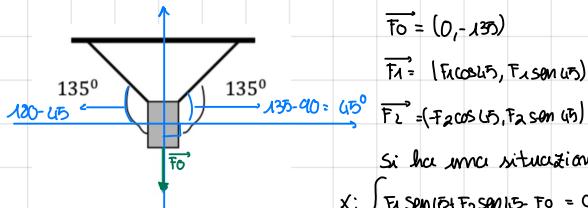
Le forze \perp al piano non si considerano in quanto non sono coinvolte nel moto
Si ha che $T_1 = T_2$ in quanto connesse allo stesso filo. → La forza F_0 è quindi "trasmessa" senza perdite alla roulotte

Forze sulla macchina: $F_0 - T_1 = M_1 a$

Forze sulla roulotte: $T_2 = M_2 a$

$$\begin{aligned} \text{Rindendo il sistema: } & \begin{cases} F_0 - T = m_1 a \\ T = m_2 a \end{cases} \quad \begin{cases} F_0 - m_1 a = m_2 a \\ T = m_2 a \end{cases} \quad \begin{cases} (m_1 + m_2) a = F_0 \\ T = m_2 a \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{F_0}{m_1 + m_2} = 0.5 \text{ m/s}^2 \\ T = \frac{m_2 F_0}{m_1 + m_2} = 250 \text{ N} \end{cases} \\ \text{con } T_2 = T_1 \end{aligned}$$

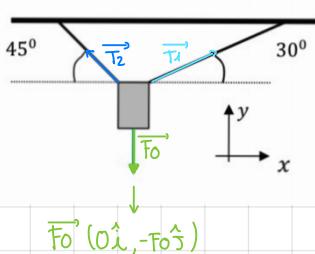
- ③ Su un punto materiale il peso esercita verso il basso una forza \vec{F}_0 di modulo 100N . Il corpo è fermo ed è attaccato con due fili al soffitto: ognuno dei due fili forma un angolo di 135° rispetto alla direzione verticale. Calcolare il modulo della forza che ciascun filo esercita sul corpo.



Si ha una situazione di equilibrio, quindi le forze su x ed y sono 0

$$\begin{aligned} x: & F_1 \cos(45^\circ) - F_2 \cos(45^\circ) - F_0 = 0 \quad \begin{cases} F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - 100 = 0 \longrightarrow F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - 100 = 0 \longrightarrow F_1 = \frac{100}{\sqrt{2}} = 70.7 \text{ N} = F_2 \\ F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \longrightarrow F_1 = F_2 \end{cases} \\ y: & F_1 \sin(45^\circ) - F_2 \sin(45^\circ) = 0 \end{aligned}$$

- ④ Su un punto materiale il peso esercita verso il basso una forza \vec{F}_0 di modulo 100N . Il corpo è fermo ed è attaccato con due fili al soffitto. Il primo filo forma un angolo di 45° rispetto alla direzione orizzontale, il secondo di 30° . Calcolare il modulo della forza e la forza che ciascun filo esercita sul corpo.



Il corpo è in equilibrio, quindi la somma delle forze sia su x che su y è pari a 0

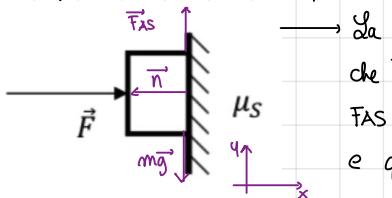
$$\begin{aligned} x: & T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 45^\circ = 0 \quad \begin{cases} T_1 \frac{\sqrt{3}}{2} - T_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ T_1 = T_2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 73.2 \text{ N} \end{cases} \\ y: & T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 45^\circ - F_0 = 0 \quad \begin{cases} T_1 \frac{1}{2} + T_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - 100 = 0 \\ T_2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + T_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - 100 = 0 \longrightarrow T_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 100 \end{cases} \end{aligned}$$

$$T_2 = \frac{100}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = 89.6 \text{ N}$$

$$T_1 (63.4 \text{ N}, 36.6 \text{ N})$$

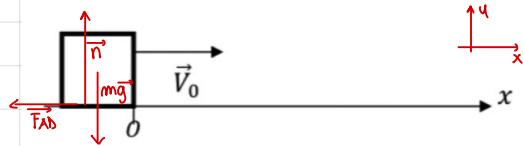
$$T_2 (-63.3 \text{ N}, 63.3 \text{ N})$$

- ⑤ Un blocco (massa $M = 10\text{kg}$) è premuto contro una parete verticale con una forza orizzontale \vec{F} . Per quali valori del modulo di \vec{F} il corpo si mantiene in equilibrio se il coefficiente di attrito statico fra parete e corpo è $\mu_s = 0.6$?



→ La forza di attrito statico è data da $\vec{F}_{AS} \leq \mu_s \vec{n}$, dove n in questo caso è data da \vec{F} , quindi si ha che $\vec{F}_{AS} \leq \mu_s \vec{F}$. Essendo che F_{AS} è opposta a mg e voglio l'equilibrio, si deve avere che $F_{AS} - mg = 0$ e quindi $F_{AS} = mg$. Dalla definizione di forza di attrito statico si ha $mg \leq \mu_s F$ e quindi $F \geq \frac{mg}{\mu_s}$.

⑥ Al tempo $t=0$ un corpo viene lanciato su un piano orizzontale con velocità di modulo v_0 . Calcolare l'istante t^* e la posizione $x(t^*)$ in cui si ferma, se il coefficiente di attrito dinamico fra corpo e piano è μ_s

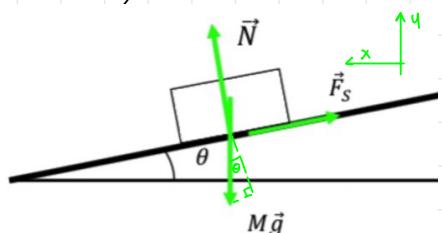


Sul moto agiscono soltanto le forze sull'asse x , quindi solo la forza di attrito dinamico. Si ha quindi $\sum F = ma$ e quindi $-F_d = ma$
 Essendo $F_d = \mu_s mg$ si ha $F_d = \mu_s mg$ e quindi $-\mu_s mg = ma \rightarrow a = -\mu_s g$: c.t.e
 La velocità si riduce facendo $v(t) = v_0 + \int_0^t -\mu_s g dt' = v_0 - \mu_s gt$
 Voglio trovare il tempo impiegato a fermarsi e quindi $0 = v_0 - \mu_s gt$ da cui $t = \frac{v_0}{\mu_s g}$

$$\text{La legge oraria si ricava ponendo } x(t) = x_0 + \int_0^t v_0 - \mu_s g t' dt' = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} \mu_s g t^2$$

Sostituendo $t = \frac{v_0}{\mu_s g}$ si ha $\frac{v_0}{\mu_s g} = \frac{1}{2} \mu_s g \frac{v_0^2}{\mu_s^2 g^2} = \frac{v_0^2}{\mu_s^2 g^2}$

⑦ Un corpo assimilabile ad un punto materiale di massa M giace su un piano inclinato scabro. Calcolare il valore minimo di μ_s se il corpo smette di muoversi quando $\theta = 30^\circ$

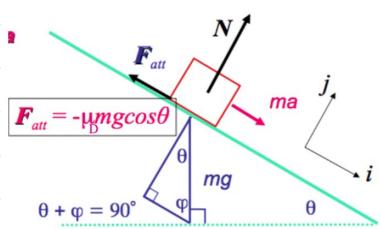


Si ha che $F_s \leq \mu_s N$
 $N = mg \cos \theta$ e quindi $F_s \leq \mu_s mg \cos \theta$

Se il corpo smette di muoversi con $\theta = 30^\circ$ si ha $F_s = \mu_s mg \cos 30^\circ = \mu_s mg \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$x: \begin{cases} mg \sin \theta - F_s = 0 \rightarrow mg \sin \theta = F_s \rightarrow \mu_s mg \cos \theta > mg \sin \theta \rightarrow \mu_s > \tan \theta \\ y: N - mg \cos \theta = 0 \end{cases}$$

⑧ Un blocco di legno (massa $m = 10 \text{ kg}$) assimilabile a un punto materiale, inizialmente fermo su un piano inclinato di angolo $0 = 30^\circ$ rispetto ad un piano orizzontale, viene lanciato libero di muoversi al tempo $t=0$. Fra il corpo ed il piano è presente attrito dinamico, caratterizzato da un coefficiente $\mu_d = 0.2$. Si esprime la velocità del blocco in funzione del tempo $v(t)$. Si determini l'accelerazione a .

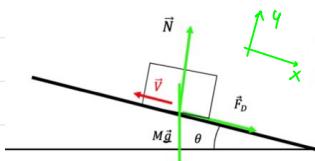


Per l'accelerazione nono importando soltanto le forze parallele al piano. In questo modo si ha $\sum F_{||} = ma$

$$\begin{aligned} P_{||} - F_d &= ma \\ P_{||} = mg \sin 30^\circ &\implies mg \sin 30^\circ - \mu_d mg \cos 30^\circ = ma \\ F_d = mg \cos 30^\circ / \mu_d &\implies \frac{g}{2} - \mu_d g \frac{\sqrt{3}}{2} = a \implies a = \frac{g}{2} \left(1 - \mu_d \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3.2 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t \frac{g}{2} \left(1 - \mu_d \frac{\sqrt{3}}{2} \right) dt = v_0 + \frac{g}{2} \left(1 - \mu_d \frac{\sqrt{3}}{2} \right) t$$

Se il corpo è lanciato in salita al tempo $t=0$ con $v = 10 \text{ m/s}$, come cambia il risultato? Con quale velocità riposa nel punto di partenza?



Anche in questo caso le forze che influenzano il moto sono quelle parallele al piano. Si ha quindi $\sum F_{||} = ma$

$$\begin{aligned} P_{||} + F_d &= ma \implies mg \sin \theta + \mu_d mg \cos \theta = ma \\ a &= \frac{g}{2} \left(1 + \mu_d \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Si ottiene quindi che } v(t) = v_0 + \int_0^t \frac{g}{2} \left(1 + \mu_d \frac{\sqrt{3}}{2} \right) dt = v_0 + \frac{g}{2} \left(1 + \mu_d \frac{\sqrt{3}}{2} \right) t$$

$$\text{Trovò il tempo } t^* \text{ che impiega a fermarsi: } 0 = -10 + \frac{g}{2} \left(1 + \mu_d \frac{\sqrt{3}}{2} \right) t^* \implies t^* = \frac{20}{g \left(1 + \mu_d \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = 1.51 \text{ s}$$

$$\text{Trovò lo spazio percorso: } x(t) = \int_0^t -10 + \frac{g}{2} \left(1 + \mu_d \frac{\sqrt{3}}{2} \right) t' dt' = -10t + \frac{g}{4} \left(1 + \mu_d \frac{\sqrt{3}}{2} \right) t^2$$

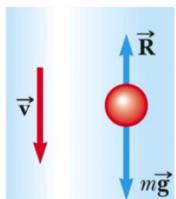
$$x(t^*) = -10(1.51) + \frac{g}{4} \left(1 + \mu_d \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (1.51)^2 = -7.57 \text{ m: Posizione finale}$$

L'accelerazione in discesa è 3.2 m/s^2 come nel caso precedente

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2} \cdot 3.2 \cdot t^2 \implies t = \sqrt{\frac{7.57}{1.6}} = 2.18 \text{ s: tempo impiegato a scendere}$$

$$v(2.18) = 0 + 3.2 \cdot (2.18) = 6.96 \text{ m/s}$$

9) Al tempo $t=0$ un corpo sferico di massa $M=100\text{g}$ e $R=10$ cm viene lanciato libero da fermo in aria. La forza fra corpo e aria è di tipo vincolo con una costante $\beta=0.1 \text{ kg/s}$



→ Forza di attrito vincolo $\vec{R} = -\beta v$

Per la seconda legge di Newton si ha: $\sum F = m\alpha \rightarrow mg - \beta v = ma$

Voglio ricavare la velocità in funzione del tempo, quindi posso scrivere $m\frac{dv}{dt} = mg - \beta v$ e quindi $\frac{dv}{dt} = g - \frac{\beta}{m}v$, che si può scrivere così $v'(t) = g - \frac{\beta}{m}v(t)$

E' un'equazione differenziale risolvibile con il metodo del fattore integrante

$$b(t) = g$$

$$a(t) = -\frac{\beta}{m} \rightarrow A(t) = \int -\frac{\beta}{m} dt = -\frac{\beta}{m}t$$

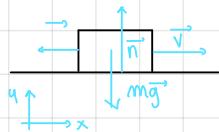
$$\Rightarrow e^{-\frac{\beta}{m}t} \int e^{\frac{\beta}{m}t} g dt = \frac{m}{\beta} e^{\frac{\beta}{m}t} g + e^{\frac{\beta}{m}t} c = \frac{mg}{\beta} + e^{\frac{\beta}{m}t} c$$

$$\text{Calcolo } c \text{ ponendo che } v(0)=0 \rightarrow 0 = \frac{mg}{\beta} + c \rightarrow c = -\frac{mg}{\beta} \text{ e quindi } v(t) = \frac{mg}{\beta} (1 - e^{-\frac{\beta}{m}t})$$

Calcolo della velocità limite: In questo caso si muove di moto rettilineo uniforme

Se $a=0$, allora $\sum F=0$ e quindi $mg - \beta v = 0$ e $v_{\text{lim}} = \frac{mg}{\beta}$

10) Un'automobile di massa $M=1000\text{kg}$ si muove con una velocità $v_0=20 \text{ m/s}$ su una strada orizzontale. Al tempo $t=0$ il motore si spegne e su di essa si esercita solo la forza di attrito vincolo dell'aria $-\beta v x$. Si calcoli il coefficiente β se la velocità è $v_1=10 \text{ m/s}$ al tempo $t_1=10\text{s}$



→ Utilizzando la seconda legge di Newton si ha: $\sum F_x = m\alpha$ e quindi $-R = m\alpha$

da ciò si ha $-\beta v = m\alpha$ e quindi $\alpha = -\frac{\beta v}{m}$

$$\text{Da questo ricavo la velocità: } v'(t) = -\frac{\beta}{m}v$$

$$\rightarrow a(t) = -\frac{\beta}{m} \rightarrow A(t) = -\frac{\beta}{m}t$$

$$e^{-\frac{\beta}{m}t} \int e^{\frac{\beta}{m}t} \cdot 0 = ce^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$\text{Ricavo } c \text{ ponendo } v(0)=20 \text{ m/s} \rightarrow 20 = ce^0 \rightarrow c=20 \text{ e quindi } v(t) = 20e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$\text{Si ha quindi } 10 = 20 e^{-\frac{\beta}{m} \cdot 10} \rightarrow e^{-\frac{\beta}{m} \cdot 10} = \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{\beta}{m} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \beta = 100 \ln(2) = 69.3 \text{ kg/s}$$

11) Un'automobile di massa $M=1000\text{kg}$ si muove con una velocità $v_0=20 \text{ m/s}$ su una strada in discesa con una pendenza del 5%. Al tempo $t=0$ il motore dell'auto si spegne e su di essa si esercitano la forza di attrito vincolo dell'aria $F_x = -\beta v x$, con $\beta=70 \text{ kg/s}$, e la componente della forza di gravità parallela alla strada.



Le forze che influenzano il movimento sono \vec{R} e \vec{P}_{\parallel} .

$$\vec{R} = -\beta v$$

$$P_{\parallel} = mg \sin \theta$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{5}{100}\right) = 2.85^\circ$$

$$\text{Si ha quindi che } -\beta v + mg \sin \theta = m\alpha, \text{ da cui } a = -\frac{\beta}{m}v + g \sin \theta$$

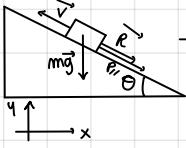
$$\text{A questo punto ricavo la velocità: } v'(t) = -\frac{\beta}{m}v + g \sin \theta \rightarrow a(t) = -\frac{\beta}{m} \rightarrow A(t) = -\frac{\beta}{m}t \rightarrow e^{-\frac{\beta}{m}t} \int e^{\frac{\beta}{m}t} g \sin \theta dt = \frac{mg \sin \theta}{\beta} + c e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$\text{Imponendo la condizione iniziale } v(0)=20 \text{ m/s}, \text{ si risulta: } v_0 = \frac{mg \sin \theta}{\beta} + c \rightarrow c = v_0 - \frac{mg \sin \theta}{\beta}$$

$$\text{Quindi si ha: } \frac{mg \sin \theta}{\beta} + \left(v_0 - \frac{mg \sin \theta}{\beta}\right) e^{-\frac{\beta}{m}t} \rightarrow v(t) = \frac{mg \sin \theta}{\beta} (1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}) + v_0 e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

La velocità limite si ha quando non c'è accelerazione e quindi se $-\beta v + mg \sin \theta = 0 \rightarrow v = \frac{mg \sin \theta}{\beta}$

Adesso ricava la velocità nel caso in cui vo via diretta in solita



$$\sum F_{\parallel} = ma \rightarrow R + P_{\parallel} = ma \rightarrow \beta V + mg \sin \theta = ma \text{ e quindi } a = \frac{\beta}{m} V + g \sin \theta$$

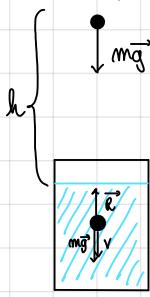
$$V(t) = \frac{\beta}{m} V + g \sin \theta \rightarrow a(t) = \frac{\beta}{m} \rightarrow A(t) = \frac{\beta}{m} t \rightarrow e^{\frac{\beta}{m} t} \int e^{-\frac{\beta}{m} t} g \sin \theta dt = -\frac{m}{\beta} g \sin \theta + e^{\frac{\beta}{m} t} C$$

$$\rightarrow b(t) = g \sin \theta$$

$$\text{Condizione iniziale: } V_0 = -\frac{m}{\beta} g \sin \theta + C \rightarrow C = \frac{m}{\beta} g \sin \theta - V_0 \text{ e quindi } V(t) = \frac{m}{\beta} g \sin \theta (e^{\frac{\beta}{m} t} - 1) - V_0 e^{\frac{\beta}{m} t}$$

$$\text{Velocità limite: } \beta V = -mg \sin \theta \rightarrow V_{\lim} = \frac{-mg \sin \theta}{\beta}$$

- (12) Una sferetta di massa $m = 1 \text{ kg}$ è lanciata cadendo da ferma da un'altezza $h = 2 \text{ m}$ sulla superficie libera di una vasca piena d'acqua. All'interno della vasca la sferetta subisce una forza di attrito viscoso caratterizzabile con $\beta = 10 \text{ kg/s}$ e la profondità dell'acqua è tale che la sferetta raggiunge la velocità limite prima di toccare il fondo



- ① Velocità V_0 con cui tocca l'acqua

$$\hookrightarrow \text{Moto uniformemente accelerato (di caduta libera)}: V(t) = gt \rightarrow V(t^*) = gt^* = 6.26 \text{ m/s}$$

$$S(t) = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.641 \text{ s}$$

- ② Velocità limite: Moto rettilineo uniforme ($a=0$)

$$\hookrightarrow \sum F = 0 \rightarrow mg + R = 0 \rightarrow mg - \beta V = 0 \rightarrow V = \frac{mg}{\beta} = 0.981 \text{ m/s}$$

$$\hookrightarrow R = \beta V$$

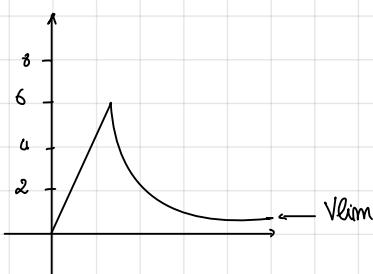
- ③ Equazione del moto nell'acqua + eq. velocità + grafico velocità

$$\sum F = ma \rightarrow mg - \beta V = ma \rightarrow a = g - \frac{\beta}{m} V \rightarrow V'(t) = g - \frac{\beta}{m} V(t) \rightarrow a(t) = -\frac{\beta}{m} V(t) \rightarrow A(t) = -\frac{\beta}{m} t \rightarrow e^{\frac{\beta}{m} t} \int e^{-\frac{\beta}{m} t} g dt =$$

$$= \frac{mg}{\beta} + e^{-\frac{\beta}{m} t} C$$

$$\text{Condizione iniziale: } V(0) = 6.26 \text{ m/s} \rightarrow V_0 = \frac{mg}{\beta} + C \rightarrow C = V_0 - \frac{mg}{\beta}, \text{ quindi } V(t) = \frac{mg}{\beta} (1 - e^{-\frac{\beta}{m}(t-t_0)}) + V_0 e^{-\frac{\beta}{m}(t-t_0)}$$

Il grafico è quindi una retta fino a t^* e poi un'esponentiale decrescente fino a V_{\lim}

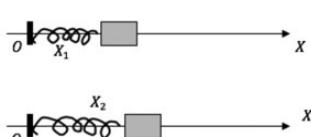


- (13) Un vagone, di massa $3 \cdot 10^4 \text{ kg}$, viene trattenuto tramite un respingente elastico ad un locomotore frenato (e quindi fermo), compie 5 oscillazioni in 10 s. Valutare la costante elastica del respingente

$$\text{Si ha che } w = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ e quindi } k = mw^2$$

$$w = \frac{2\pi}{T} \text{ e } T \text{ in questo caso si ottiene ponendo } \frac{10s}{5} = 2s. \text{ Si ha quindi } k = 3 \cdot 10^4 \cdot \frac{(2\pi)^2}{4} = 3 \cdot 10^7 \text{ N}$$

- (14) Due masse identiche m sono attaccate a due molle ideali (costante K , lunghezza a riposo l , molla nulla, indefinibile) su due guide parallele. La prima molla viene posta ferma a $t=0$ in $x=0$; la seconda viene posta ferma in $x=0$ nell'istante in cui per la prima è trascorso mezzo periodo, cioè al tempo $t = \frac{\pi}{2} \omega$



$$\rightarrow \text{Forza elastica: } F = -Kx = -K(x_f - x_i) = -K(x_f - l) \rightarrow \text{II legge Newton: } -K(x_f - l) = ma : \text{UNICA FORZA}$$

$$\hookrightarrow \text{eq. diff: } -K(x - l) = mx''$$

$$\hookrightarrow -Kx + Kl = mx'' \rightarrow mx'' + Kx = Kl e^{i\omega t} \cos(\omega t) \rightarrow \text{Sol. generale: } m\lambda^2 + K = 0$$

$$\downarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{K}{m}} = \pm \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\text{Soluzione generale: } A \cos\left(\frac{\sqrt{k}}{m} t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{k}}{m} t\right)$$

Soluzione particolare: $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = \omega$: NO RESONANZA $\rightarrow \alpha_1 = x_1(t), x_1'(t) = x_1''(t) = 0$

$$Kx_1 = Kl \rightarrow \alpha_1 = l$$

$$\alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t) + l = 0 \rightarrow \alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t) = -l \xrightarrow[\text{Aritmetico}]{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} \cos(\omega t + \phi) = -l \xrightarrow{\text{occorre} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cos(\omega t + \phi) = -l \rightarrow A \cos(\omega t + \phi) = -l$$

$$\text{Condizioni iniziali: } x(0) = 0 \rightarrow A \cos(\phi) + l = 0 \rightarrow A \cos(\phi) = -l \rightarrow A = -l$$

$$x'(0) = 0 \rightarrow -A \omega \sin(\phi) = 0 \rightarrow \phi = 0$$

$$x(t) = -l \cos(\omega t) + l = l(1 - \cos(\omega t))$$

L'onda seconda molla: Posa in $x=0$ quando per la prima è trascorso $\frac{T}{2}$, quindi $t + \frac{T}{2} = t$, da cui $t_1 = t - \frac{T}{2}$ e quindi, avendo che $T = \frac{2\pi}{\omega}$ si ricava $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$ e quindi $t_1 = t - \frac{\pi}{\omega}$

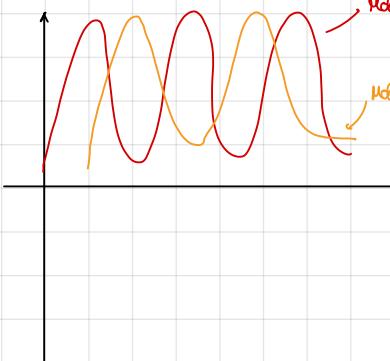
$$\text{Sostituendo in } x(t_1) = l(1 - \cos(\omega t - \pi))$$

ARCO ASSOCIATO: $-\cos(\omega t)$ e quindi $x(t_1) = l(1 + \cos(\omega t))$

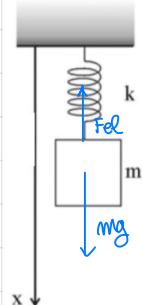
Molla 1

$$\Rightarrow \text{Punto di incontro: } l \cdot l \cos(\omega t) = l \cdot l \cos(\omega t) \rightarrow 2l \cos(\omega t) = 0 \rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{Primo punto: } K=0 : t = \frac{\pi}{2\omega}$$



(15)



$$M = 100g = 0.100 \text{ kg}$$

$$K = 10 \text{ N/m}$$

$$d = 10 \text{ cm} \rightarrow 0.10 \text{ m}$$

$$mg - F_{el} = ma \rightarrow mg - K(x-d) = mx''$$

$$mg - Kx + Kd = mx'' \rightarrow mx'' + Kx = mg + Kd$$

$$\text{Sol generale: } mx^2 + K = 0 \rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{K}{m}} i \rightarrow \text{SG: } A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\begin{aligned} \text{Sol particolare 1: } & mg : mge^{ot} \cos(\omega t) : \alpha_1 \beta_1 \rightarrow \alpha_1, \text{ con derivate} = 0 \\ & Kd : Kde^{ot} \cos(\omega t) : \alpha_1 \beta_1 \rightarrow \beta_1, \text{ con derivate} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Trovo soluzione particolare 1: } Kd = mg \rightarrow \alpha_1 = \frac{mg}{K}$$

$$\text{Trovo soluzione particolare 2: } K\beta_1 = Kd \rightarrow \beta_1 = d$$

$$\begin{aligned} \text{Equazione oraria: } x(t) &= A \cos(\omega t + \phi) + \frac{mg}{K} + d \\ v(t) &= -\omega A \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

$$x(0) = 0 \rightarrow A + \frac{mg}{K} + d = 0 \rightarrow A = -\frac{mg}{K} - d$$

$$x'(0) = 0 \rightarrow -\omega A \sin(\phi) = 0 \rightarrow \phi = 0$$

$$x(t) = \left(\frac{mg}{K} + d \right) (1 - \cos(\omega t))$$

$$\text{Ampiezza: } -\frac{mg}{K} - d = -\frac{0.1 \cdot 9.81}{10} - 0.10 = 0.108 \text{ m}$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ e quindi determiniamo ω da $a(t)$, ricordando che in equilibrio $a(t)=0$ e di conseguenza $\sum F = 0$

$$a(t) = x''(t)$$

$$\sum F = mg - K(x-d)$$

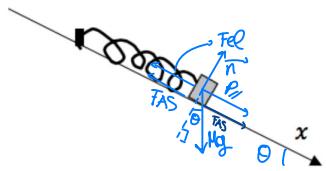
$$x'(t) = \left(\frac{mg}{K} + d \right) \omega \sin(\omega t)$$

$\rightarrow 0$: non equilibrio. Si ottiene $\sum F = mg + Kd$

$$x''(t) = \left(\frac{mg}{K} + d \right) \omega^2 \cos(\omega t)$$

$$\left(\frac{mg}{K} + d \right) \omega^2 \cos(\omega t) = mg + Kd \rightarrow \left(\frac{mg}{K} + d \right) \omega^2 = mg + Kd \rightarrow \left(\frac{mg}{K} + d \right) \omega^2 = g + \frac{Kd}{m} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \text{ e quindi } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

16



Massa M , angolo θ , μ_s , costante elastica K , lunghezza a riposo x_0

Voglio che rimanga in equilibrio, quindi si deve avere $\sum F = 0$

Le forze che agiscono su M e condizionano il moto sono P_{\parallel} , F_{el} , F_{AS}

$$P_{\parallel} = Mg \sin \theta \quad Mg \sin \theta - K(x_0) - F_{\text{AS}} = 0 \implies F_{\text{AS}} = Mg \sin \theta - K(x_0)$$

$$n = Mg \cos \theta$$

$$F_{\text{el}} = -K(x-x_0)$$

DEF: $F_{\text{AS}} \leq \mu_s n = \mu_s Mg \cos \theta$ in MOTTO \rightarrow Ha verso

davanti a seconda se il corpo sale o scende

Caso 1: $P_{\parallel} > F_{\text{el}}$

$$\downarrow \boxed{Mg \sin \theta > K(x_0)} \rightarrow \text{In questo caso si ha che } F_{\text{AS}} = \underbrace{Mg \sin \theta - K(x_0)}_{> 0}. \text{ Si aveva che, in modulo: } |Mg \sin \theta - K(x_0)| \leq \mu_s Mg \cos \theta$$

Avendo un moto di discesa, la forza di attrito punta verso il verso negativo del sistema di riferimento e quindi si ha $Mg \sin \theta - K(x_0) \leq \mu_s Mg \cos \theta \rightarrow K(x_0) \leq \mu_s Mg \cos \theta \rightarrow K(x_0) \geq Mg \sin \theta / \mu_s \cos \theta \rightarrow K(x_0) \geq Mg (\sin \theta / \mu_s \cos \theta)$

da condizione sull'allungamento, imponendo la condizione iniziale: $\frac{Mg \sin \theta}{K} > x_0 > \frac{Mg (\sin \theta / \mu_s \cos \theta)}{K}$

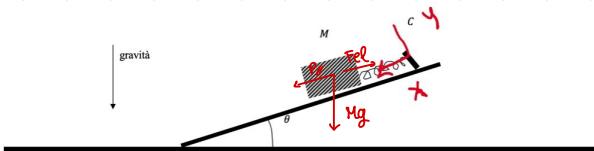
Caso 2: $F_{\text{el}} > P_{\parallel}$

$$\downarrow K(x_0) > Mg \sin \theta \rightarrow \text{In questo caso si ha che } F_{\text{AS}} = \underbrace{-Mg \sin \theta + K(x_0)}_{< 0}$$

$$-Mg \sin \theta + K(x_0) \leq \mu_s Mg \cos \theta \rightarrow K(x_0) \leq \mu_s Mg \cos \theta + Mg \sin \theta = Mg / (\mu_s \cos \theta + \sin \theta)$$

$$\frac{Mg \sin \theta}{K} < x_0 \leq \frac{Mg}{K} / (\mu_s \cos \theta + \sin \theta)$$

17



$$M = 100 \text{ kg}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$K = 200 \text{ N/m}$$

$$d = 2 \text{ m}$$

condizioni iniziali: $x(0) = 0$

$$v(0) = x'(0) = 0$$

$$\sum F_{\parallel} = Mx'' \rightarrow P_{\parallel} - K(x-d) = Mx'' \rightarrow Mg \sin \theta - K(x-d) = Mx'' \rightarrow Mg \sin \theta - Kx + Kd = Mx'' \rightarrow Mx'' + Kx = Mg \sin \theta + Kd$$

$$\text{Soluzione generale: } m\lambda^2 + K = 0 \rightarrow A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{Soluzioni particolari: } \boxed{Mg \sin \theta} \rightarrow \alpha K = Mg \sin \theta \rightarrow \alpha = \frac{Mg \sin \theta}{K}$$

$$\boxed{\nu d} \rightarrow \beta K = \nu d \rightarrow \beta = \nu d$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + \frac{Mg \sin \theta}{K} + \alpha t \rightarrow \text{CONDIZIONI INIZIALI} \quad \boxed{0 = A \cos(\phi) + \frac{Mg \sin \theta}{K} + \alpha t} \rightarrow x(t) = \left(-\frac{Mg \sin \theta}{K} - \alpha \right) (1 - \cos(\omega t))$$

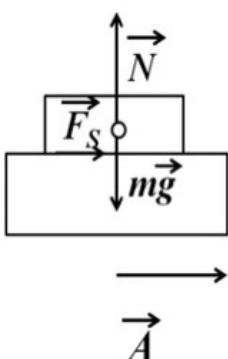
$$\boxed{0 = -\omega A \sin(\phi)} \rightarrow \phi = 0$$

$$\text{Ampiezza: } \left| -\frac{Mg \sin \theta}{K} - \alpha \right| = 6.65 \text{ m}$$

$$\text{Periodo: } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = 4.44 \text{ s}$$

(ω è definito come $\sqrt{\frac{K}{m}}$)

18



$$\vec{A} = 2m/\lambda^2: \text{ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO}$$

① calcolare il minimo coefficiente di attrito statico fra superficie del tetto e cartellina in modo che essa non voli via

↳ La forza di attrito dipende dalla forza normale tra cartellina e tetto. Si considera la macchina come un sistema di riferimento NON INERZIALE

L'unica forza che influenza il "moto" della cartellina è quella apparente generata dall'accelerazione di trascinamento.

$$\downarrow \leq F_{\text{app}} = m a_t$$

L'attrito statico è dato da $F_{\text{AS}} \leq \mu_s n = \mu_s mg$

Per avere l'equilibrio quindi si avrà che $F_s = m a_t = 0$ e quindi $F_s = m a_t$

Si può quindi concludere con $\mu_s m g \leq m a_t \rightarrow \mu_s \geq a_t / g$ e quindi $\mu_s \min = a_t / g = 0.206$

② Moto nel caso in cui la cartellina sia in movimento e $\mu_s = 0.15$

↳ La forza di attrito si oppone al moto. In più in un sistema non inertiale vale la relazione $\sum \vec{F} = m(\vec{a}_{\text{tr}} + \vec{a}_{\text{tr}}$)

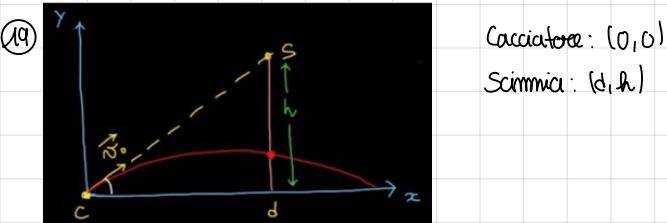
$$\text{da cui si ottiene } \sum \vec{F} - \frac{m \vec{a}_{\text{tr}}}{F_{\text{app}}} = m \vec{a}_{\text{tr}}$$

L'unico forza da considerare se viene preso come sistema di riferimento il terreno è l'attrito dinamico

$$\sum \vec{F} = ma \rightarrow F_{AD} = ma \rightarrow M_{AD}g = m/a \rightarrow a = M_{AD}g = 1.67 \text{ m/s}^2 : \text{ACCELERAZIONE RISpetto A TERRA} \rightarrow \text{Moto rettilineo uniforme}$$

Accelerazione rispetto al veicolo

$$\sum \vec{m} = \sum \vec{F} - \vec{m} \vec{a} \rightarrow a_r = \frac{F_{AD} - M_{AT}}{m} = \frac{M_{AD}g - M_{AT}}{m} = M_{AD}g - a_T = 1.67g - 2 = -0.53 \text{ m/s}^2 \rightarrow \text{Moto rettilineo uniforme}$$



SISTEMA INERZIALE

$$\rightarrow \text{moto del proiettile} \rightarrow x(t) = x_0 + v_0 \cos \theta t = v_0 \cos \theta t$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\rightarrow \text{moto della scimmia} \rightarrow y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x(t) = d$$

$$\begin{cases} v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 = h - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_0 \cos \theta t = d \end{cases} \begin{cases} v_0 \sin \theta \frac{d}{v_0 \cos \theta} = h \\ t^* = \frac{d}{v_0 \cos \theta} \end{cases} \rightarrow \tan \theta = h \rightarrow \theta = \arctan \frac{h}{d}$$

SISTEMA NON INERZIALE: Scimmia che corre

$$\sum m_p \vec{a}_r = \sum \vec{F} - m_p \vec{a}_T \rightarrow m_p \vec{a}_r = m_p \underbrace{(g-g)}_{m_p g} = 0 : \text{MOTO RETTILINEO UNIFORME}$$

$$x_S(t) = 0$$

$$x_P(t) = -d + v_0 \cos \theta t$$

$$y_S(t) = 0$$

$$y_P(t) = -h$$

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(0 - (-h))}{(0 - (-d))} = \frac{h}{d} \rightarrow \theta = \arctan \frac{h}{d}$$

Lavoro ed energia

→ Sistema: entità separata da altri corpi dal suo **CONTORNO** → È possibile effettuare scambi tra il sistema e l'ambiente

- Sistema **ISOLATO**: NON effettua scambi con l'ambiente esterno
- Sistema **NON ISOLATO**: Avengono scambi tra sistema ed ambiente tramite il **contorno del sistema**

└ PRINCIPIO di CONSERVAZIONE dell'**ENERGIA**: Se l'energia di un sistema subisce una variazione, è necessario che una quantità di energia pari alla variazione abbia attraversato i confini del sistema

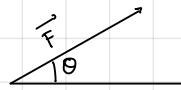
└ L'energia di un sistema **NON VARIA**

- Se **agiscono forze**
 - Se agiscono **sono forze conservative**
 - Agiscono forze interne/esterne non conservative (es: $d\vec{r} = 0 \text{ o } \theta = \frac{\pi}{2}$) che non fanno lavoro

→ **Il LAVORO** ($\delta o w$): Il lavoro compiuto su un sistema da un agente che esercita su di esso una **forza costante** è uguale al prodotto tra il modulo F della forza, il modulo dr dello spostamento del punto di applicazione della forza e $\cos\theta$, dove θ è l'angolo tra il vettore forza ed il vettore spostamento.

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = d \quad : \text{d'AVORO DIRETTARE} \rightarrow 3 \text{ casi di lavoro nullo}$$

$\vec{F} = 0$
 $d\vec{r} = 0$
 $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ se } \theta = \frac{\pi}{2}$

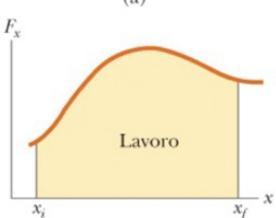
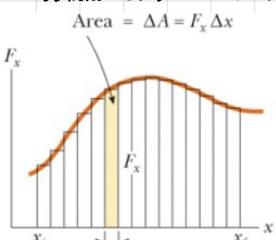


→ Può essere positivo o negativo a seconda che la proiezione di \vec{F} su $d\vec{r}$ abbia verso concorde o discorda allo spostamento.

→ Unità di misura: newton-metro = Joule (J)

→ Ottengendo uno scambio di energia, se è positivo indica che l'energia è trasferita al sistema, mentre se è negativo l'energia è trasferita dal sistema

→ **Il LAVORO di una FORZA VARIABILE**



→ Se la forza non è costante, è necessario ricorrere al caso di una forza costante riducendo i Δx in modo da approssimare la forza ad una costante in quei tratti. In questo modo è possibile poi sommare tutti i contributi dati da $W = F \Delta x$. Per trovare il lavoro totale quindi sarà necessario porre $W = \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$ e quindi, per definizione, $\int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$, avendo fatto tendere a 0 i singoli Δx

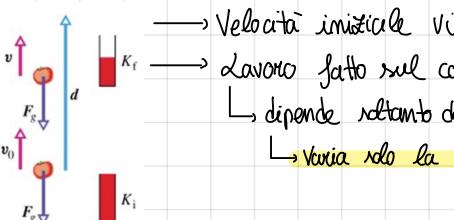
→ Se ci sono Più FORZE, il lavoro è dato dalla **RISULTANTE**

$$\text{Si ha } F = \sum_n F_n \text{ e quindi } d = \int_i^f (\sum_n F_n) \cdot d\vec{r} = \sum_n \int_i^f F_n \cdot d\vec{r} = \sum_n d_n \rightarrow \text{SOMMA dei singoli lavori}$$

→ Se la forza è COSTANTE si ha che $d = \vec{F} \cdot \vec{dr}$ → vettore spostamento da posizione iniziale a finale

$$\text{Formula più GENERALE: } \int_{x_i}^{x_f} F(r) \cdot dr$$

→ **Il lavoro della FORZA PESO**



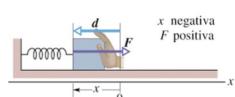
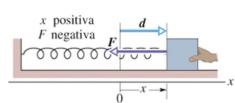
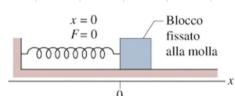
→ Velocità iniziale v_i

→ Lavoro fatto sul corpo dalla forza peso ad altezza d : $d = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -mgd < 0$, da cui $d = K_f - K_i \rightarrow V_f < V_i$

└ dipende soltanto dalla differenza di quota fra punto iniziale e punto finale

└ Varia solo la **POTENZA** in base allo spostamento

→ **Il lavoro della FORZA ELASTICA**



→ Forza elastica: $F_{el} = -kx \rightarrow$ Legge di Hooke

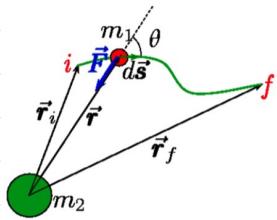
└ Forza di richiamo: opposta ad allungamento / compressione della molla

$$\rightarrow \text{Lavoro compiuto dalla forza elastica: } d = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = -k \frac{x^2}{2} \Big|_{x_i}^{x_f} = \frac{1}{2} k(x_f^2 - x_i^2)$$

Se la posizione iniziale e la posizione finale coincidono, il lavoro è NULLO

$$\rightarrow \text{Lavoro compiuto da una forza esterna: } dext = \int_{x_i}^{x_f} kx dx = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2$$

→ Lavoro di una forza proporzionale a $\frac{1}{r^2}$



$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \hat{r}$$

(esempio: $-G \frac{m_1 m_2}{r^2}$)

$$\text{Lavoro: } \mathcal{L} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = -k \int_i^f \frac{\hat{r} \cdot d\vec{s}}{r^2} = -k \int_i^f \frac{dr}{r^2} = k \left[\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right]$$

→ L'ENERGIA CINETICA

→ Definizione: $K = \frac{1}{2} mv^2$ e misurata in Joule come per il lavoro

→ TEOREMA dell'ENERGIA CINETICA: Quando si compie lavoro su un sistema e come effetto si ha solo una variazione del modulo della velocità, il lavoro complessivo compiuto sul sistema è uguale alla variazione della sua energia cinetica: $K_f - K_i = \Delta K$

- Se $\Delta K < 0$: K diminuisce
- Se $\Delta K > 0$: K aumenta

$$\text{DIMOSTRAZIONE: } K = \frac{1}{2} mv^2, \quad dK = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m d\vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\text{quindi } dK = m \vec{v} \cdot d\vec{v} = m d\vec{v} \cdot \vec{v} = m \vec{v} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{dt} = m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Si può quindi concludere integrando: $\int dK = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$, da cui $K_f - K_i = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta K$

→ Se un sistema è costituito da più oggetti, l'energia cinetica sarà data dalla somma di tutte le energie cinetiche

⚠ ATT: L'energia cinetica varia solo se varia il modulo della velocità → Esempio: Nel moto circolare uniforme NON varia perché varia solo la direzione e la forza centripeta NON fa lavoro perché ⊥ allo spostamento

→ La POTENZA

→ Lavoro svolto in una determinata unità di tempo

$$\text{Potenza MEDIA: } P = \frac{\Delta K}{\Delta t}$$

$$\text{Potenza ISTANTANEA: } P = \frac{dK}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Unità di misura: WATT

→ Forze CONSERVATIVE e NON CONSERVATIVE

↪ Caratteristiche di una forza conservativa

↪ Il lavoro compiuto NON dipende dal percorso

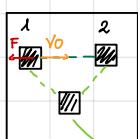
↓

↪ Il lavoro compiuto su un percorso chiuso è NULLO

Le forze NON conservative NON le rispettano

Esempi

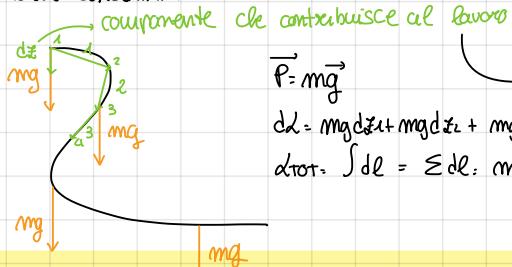
① Forza NON conservativa



$$F_f = -\mu_s mg \rightarrow \text{LAVORO: } -\mu_s mg d \text{ e quindi } \frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = -\mu_s mg d \rightarrow \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 + \mu_s mg d$$

PERCORSO d'UNO: triangolo rettangolo di ipotenuse $\overline{12}$ → Si ha quindi $\overline{12} < \overline{13} + \overline{32}$, da cui si può concludere $\frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 + \mu_s mg (\overline{13} + \overline{32}) \rightarrow \text{LAVORO MAGGIORI}$

② Forza CONSERVATIVA



componente che contribuisce al lavoro

$$\vec{P} = mg \vec{v}$$

$$dl = mg dx_1 + mg dx_2 + mg dx_3$$

$$\text{dtr: } \int dl = \sum dl: mg \int dx_i = mg \Delta z = mgh$$

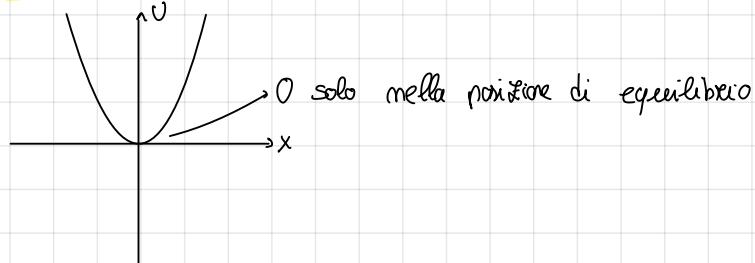
Le componenti \perp NON contribuiscono al lavoro

L'ENERGIA POTENZIALE

- lavoro riguardante le FORZE CONSERVATIVE: lavoro di una forza conservativa = $\Delta U \rightarrow U_i - U_f \rightarrow$ varia con la configurazione del SISTEMA
- energia potenziale GRAVITAZIONALE: $U(y) = mg y$ —> base del trasferimento di energia impiegata per sollevare il corpo fino ad y
- Δ ATT: Scelta dello zero:
 - $mg y$ perde $y > 0$ $U = mg y$
 - $-mg y$ (negativo) perde $y < 0$

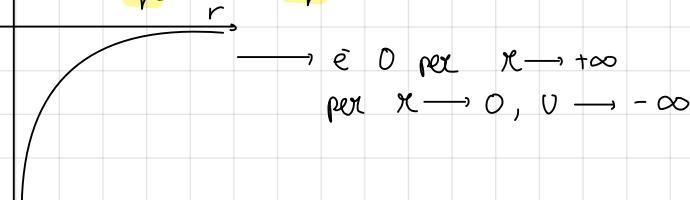
- energia potenziale ELASTICA: $U(x) = \frac{1}{2} Kx^2$ —> viene misurata rispetto alla posizione di EQUILIBRIO

Δ ATT: è sempre POSITIVA



- energia potenziale di una forza del tipo $\frac{-K}{r^2}$: $U(r) = -\frac{K}{r}$

Δ ATT: Sempre negativa



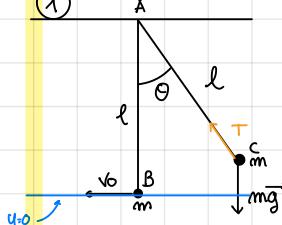
L'ENERGIA MECCANICA

- $E = K + U$: Energia meccanica in presenza di forze conservative: $dE = dK + dU = 0$

costante del moto se agiscono forze conservative

Esempi

(1)



① P è costante?

$$\begin{aligned} a) \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 &\implies \text{NON è possibile utilizzare questa cosa. NON si conserva} \\ b) \vec{v} &= \text{costante} \end{aligned}$$

(2)

$E = \text{costante?} \rightarrow$ Forze interne \rightarrow Tutte le forze devono essere conservative

Forze esterne

Forza peso: conservativa

T NON è conservativa ma NON fa lavoro: ✓ (è \perp allo spostamento)
 $\vec{T} \cdot d\vec{s} = 0$

L'energia si conserva quindi abbiamo $E_{hi} = E_{lf}$

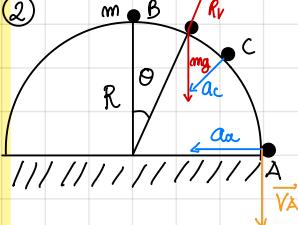
$$E_{hi} = U_{hi} = U = mg y \rightarrow y(\theta) = l - AB = l - l \cos \theta = l(1 - \cos \theta)$$

$$E_{hi} = mg(l(1 - \cos \theta))$$

$$E_{lf} = E_{hi} = \frac{1}{2} mv_0^2$$

Si ha che $T = mg + \frac{mv^2}{l}$ e quindi da $mg(l(1 - \cos \theta)) = \frac{1}{2} mv_0^2$ si ha $v_0 = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta)}$, che bruta sostituisce in T

(2)



Non può arrivare in A perché NON c'è accelerazione centripeta

$a_c > a_g$: Ha preso velocità

in B: $\vec{F}_c + \vec{mg} = -\frac{mv^2}{R} \vec{er}$

diminuisce e quando diventa nulla si stacca $\rightarrow \theta^*$: $0 = Rv = -\frac{mv^2}{R} + mg \cos \theta^*$: 1^a eq
 conserv. energici: 2^a eq

$$mgR = \frac{1}{2} mv^2 + mg R \cos \theta^*$$

Velocità: $\vec{v} = (v_x, v_y)$ $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$$\vec{v} \perp \vec{R}: R = (x_0, y_0) \quad R \cdot v = ax_0 + by_0 = 0$$

$$v = (a, b)$$

$a: 1$ FISSATA \rightarrow Possibile trovare $b \rightarrow b = -\frac{x_0}{y_0} \rightarrow$ Quindi è possibile porre il modulo

uguale a quello desiderato

→ ENERGIA MECCANICA in presenza di **forze NON CONSERVATIVE**

↪ $\Delta(K+U)$: da → lavoro della **forza di attrito**: **SEMPRE NEGATIVO** → d'energia si **convertiva neopale** e quella "di perda" si **trasforma in energia termica**

Esempio



$$F_{\text{ad}} = -\mu_m mg$$

$$\Delta E_{\text{mecc}} + \Delta E_{\text{f}} \rightarrow \Delta E_{\text{mecc f}} - \Delta E_{\text{mecc i}} = \Delta E_{\text{non cons}}$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}v_i^2 = \mu_m g l$$

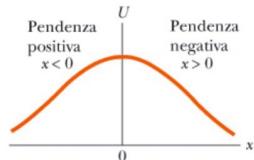
→ Relazione tra **FORZE CONSERVATIVE** ed **ENERGIA POTENZIALE**

↪ **Lavoro di una forza conservativa (W_{int})** = $-\Delta U$ → da questo si ha che $\Delta U = U_f - U_i = - \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$, da cui si può ricavare $U_f = U_i - \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$

Se il punto di applicazione compie uno spostamento infinitesimo si ha che $dU = -F_x dx$, da cui $F(x) = -\frac{dU}{dx}$, che è possibile generalizzare in tre dimensioni: $\vec{F} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -\nabla U(x, y, z)$: **GRADIENTE**

→ **Energia potenziale elastica**: $U(x) = \frac{1}{2}Kx^2 \rightarrow F = -\frac{dU}{dx} = -Kx$

→ **Energia potenziale gravitazionale**: $U(y) = mgy \rightarrow F = -\frac{dU}{dy} = -mg$



La forza è nulla nei minimi e massimi → Nei minimi si ha **equilibrio STABILE**

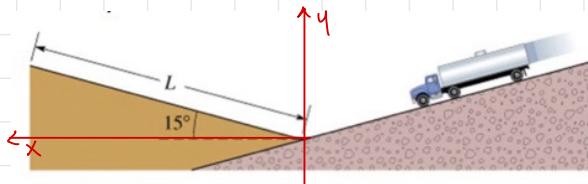
↪ Punti di equilibrio

↪ Nei massimi si ha **equilibrio INSTABILE**

→ Appena è fatto un piccolo spostamento, la forza che manca sposta dalla pos. di equilibrio

Esercizi slide

- ① Un camion che viaggia a $V = 130 \text{ km/h}$ imbocca la corsia di emergenza, che consente un tratto lungo L in realtà di pendenza 15° . In assenza di attrito, calcolare il minimo valore di L affinché il camion si ferri.

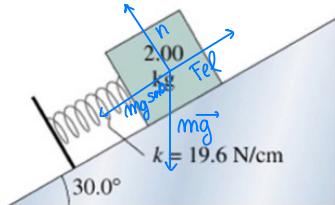


$$\Delta E_i = \Delta E_f \rightarrow K_i + U_i \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = mgy \rightarrow d \sin 15^\circ$$

$$K_f + U_f \rightarrow \cancel{K_f} + \cancel{U_f}$$

$$\text{risolvendo: } \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{130 \cdot 1000}{3600}}_{36.1 \text{ m/s}} \right)^2 = gL \cdot 0.26 \rightarrow L = \frac{\frac{1}{2} \cdot 36.1^2}{0.26g} = 255 \text{ m}$$

- ② Inizialmente la molla è compresa di 20 cm , poi è lanciata libera. Quanto lontano lungo il piano inclinato viene spinto il blocco?



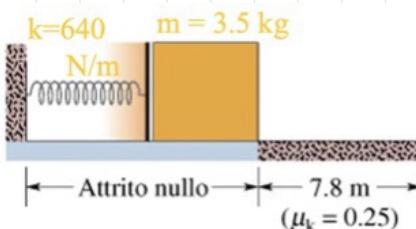
$$\Delta E_i = \Delta E_f$$

$$K_i + U_i \rightarrow U_i = U_{el} = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}(19.6)(0.2)^2 \rightarrow \frac{1}{2}(19.6 \cdot 10^2)(0.2^2) = 2g d \sin 30^\circ$$

$$K_f + U_f \rightarrow U_f = U_{grav} = mgh = mg d \sin 30^\circ = 2gsm \rightarrow d \sin 30^\circ$$

$$d = \frac{(19.6 \cdot 10^2)(0.2^2)}{4gsm} = 6 \text{ m}$$

- ③ Il blocco di massa $m = 3.5 \text{ kg}$ viene spinto via da una molla di costante $K = 640 \text{ N/m}$ inizialmente compresa, si distacca quando la molla ha raggiunto la posizione di riposo, si ferma dopo 7.8 m per attrito ($\mu_k = 0.25$). Di quanto era compresa la molla inizialmente?



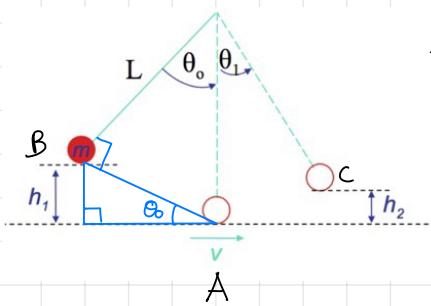
$$\rightarrow \text{lavoro della forza di attrito} = -F \cdot l$$

$$\rightarrow \Delta E = \Delta E_{NC} \rightarrow \Delta E_i = Kx + U_i \rightarrow \frac{1}{2}Kx^2 \rightarrow f \cdot \frac{1}{2}Kx^2 = \mu_k m g \cos(0^\circ)(7.8)$$

$$\Delta E_f = Kf + Uf \rightarrow 0$$

$$x = \sqrt{\frac{2\mu_k m g (7.8)}{K}} = 0.66 \text{ m}$$

- ④ La pallina m è inizialmente ferma ad un'altezza h_1 . Quanto vale e in quale punto è massima la sua velocità? A quale altezza h_2 ricade dall'altro lato? Se $L=1 \text{ m}$ e $\theta = 15^\circ$, calcolare la velocità di m nella posizione $\theta_1 = 10^\circ$



→ Il punto dove ha velocità massima è A → $\Delta E = K + U \rightarrow \Delta E_B = Kx + U_i = mgh_1$

$$V = \sqrt{2gh_1 \cdot 0.018} \quad h_1 = d \cdot d \cos 15^\circ = d(1 - \cos 15^\circ) = 1 - \cos(15^\circ) = 0.034$$

$$\Delta E_C = U_C + K_C \rightarrow mg h_2 + \frac{1}{2}mv_C^2 \rightarrow v_C = \sqrt{v_A^2 - 2gh_2} = 0.61 \text{ m/s}$$

$$\Delta E_A = U_A + K_A \rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2$$

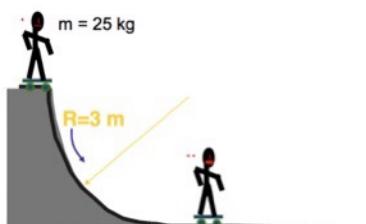
$$\Delta E = K + U \rightarrow K + U_i = \mu_k g R \rightarrow V = \sqrt{2gR} = 7.67 \text{ m/s}$$

$$K_f + U_f \rightarrow K_f + U_f = \frac{1}{2}mv^2$$

Se $v_f = 7 \text{ m/s}$, quanto vale il lavoro fatto dalle forze di attrito?

$$\Delta E = \Delta K \rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2}m(50.8 - 64) = -13.5$$

⑤

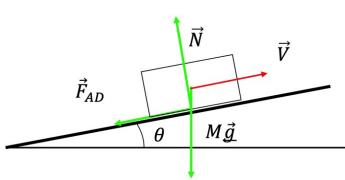


$$M = 25 \text{ kg}$$

$$R = 3 \text{ m} \rightarrow \text{altezza} = 3 \text{ m}$$

Esercizi esercitazioni

①



$$M = 10 \text{ kg}$$

$$V_0 = 10 \text{ m/s} \text{ a } t=0$$

$$\Theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\mu_s = 0.2$$

① Massima altezza raggiunta

Per il teorema delle forze vive si ha $\Delta K = d \rightarrow$ le forze che fanno lavoro in questo caso sono \rightarrow Forza peso \rightarrow Forza di attrito

$$\Delta K \rightarrow K_f = \frac{1}{2} M V_0^2$$

$$K_f = 0 : \text{Si ferma ad } h_{\max}$$

$$\Delta F_{AD} = \int \vec{F}_{AD} \cdot d\vec{l} = -\mu_s M g \cos \theta l$$

$$\Delta F_P = \int \vec{m g} \cdot d\vec{l} = -M g \sin \theta l$$

triangolo rettangolo di ipotenusa l: h_{\max} raggiunta

$$-\frac{1}{2} M V_0^2 = -\mu_s M g \cos \theta l - M g h_{\max} \rightarrow \frac{1}{2} M V_0^2 = \mu_s M g \cos \theta l + M g h_{\max}$$

↓

Essendo il cateto adiacente si ha che per trovare l'opposto è necessario moltiplicare per tanθ.

Quindi per ottenere $\cos \theta$ è necessario moltiplicare lseno per $\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$, ovvero cotθ

↓

$$\frac{1}{2} V_0^2 = g h_{\max} (\mu_s \cot \theta + 1) \rightarrow h_{\max} = \frac{V_0^2}{2g(\mu_s \cot \theta + 1)} = 3.78 \text{ m}$$

② Velocità con cui il corpo passa dalla posizione iniziale

$$d = \Delta K \rightarrow K_i = 0$$

$$K_f = \frac{1}{2} M V_f^2$$

$$\Delta mg = \int \vec{m g} \cdot \vec{l} = M g \sin \theta l$$

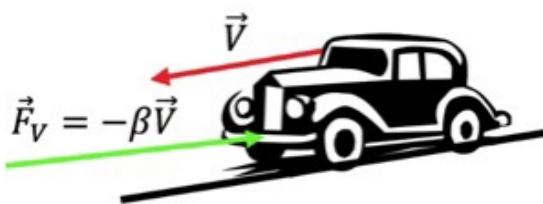
$$\Delta F_{AD} = \int \vec{F}_{AD} \cdot \vec{l} = -\mu_s M g \cos \theta l$$

$$\frac{1}{2} M V_f^2 = M g \sin \theta l - \mu_s M g \cos \theta l$$

$$l = \frac{h_{\max}}{\sin \theta} = 2 h_{\max}$$

$$V_f = \sqrt{2g h_{\max}(1 - \mu_s \cot \theta)} = 6.96 \text{ m/s}$$

②



$$M = 1000 \text{ kg}$$

$$V_0 = 72 \text{ km/h} \rightarrow 20 \text{ m/s}$$

$$P_0 = 10 \text{ kW}$$

$$\vec{F}_{AV} = -\beta \vec{V}$$

① Forze interne ed esterne al veicolo

Forze interne: L'unica forza interna è quella che genera la potenza del motore

Forze esterne: Le forze esterne sono: la forza peso, la reazione del piano, la forza di attrito dell'aria e la forza di attrito del terreno che permette all'auto di muoversi
STATICO e quindi NON fa lavoro

② Definizione di potenza: $P = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{V}$

Potenza della forza peso = potenza della reazione vincolare = 0 → ORTOGONALI ALLO SPOSTAMENTO

Potenza della forza di attrito viscoso → Si ha che $\Delta K = 0$ in quanto V è costante e di conseguenza anche $P_{TOT} = 0$ perché $d = 0$ → $P_{TOT} + P_{FAV} = 0 \rightarrow P_{TOT} = -P_{FAV} \in$ quindi $P_{FAV} = -10 \text{ kW}$

③ Calcolo della costante β

$$P_{FAV} = -\beta V \cdot V \rightarrow \beta = \frac{P_{FAV}}{-V^2} = \frac{-10^4}{-400} = 25 \text{ kg/s}$$

③ Il di benzina produce un lavoro di 8 MJ . Quanti km/litro si percorrono in pianura a 72 km/h ? Ed a 114 km/h ?

$$\textcircled{1} \quad V = \text{c.te} = 20 \text{ m/l}$$

Utilizzando la potenza, si ha quanto fornisce una correlazione tra lavoro e velocità

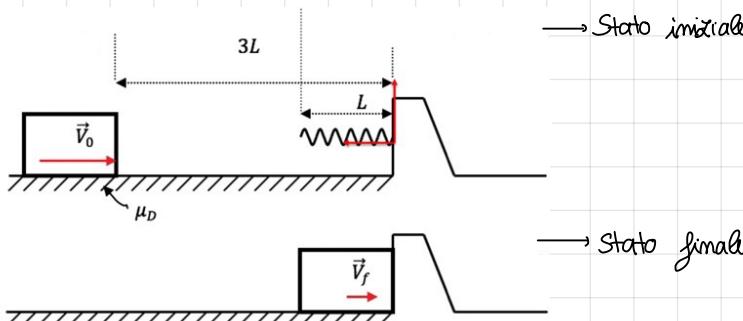
$$\hookrightarrow P = \frac{dL}{dt}, \text{ dove } P = \beta V^2, \beta = 25 \text{ kg/l} \rightarrow \text{essendo la velocità costante si può scrivere: } dL = Pt, \text{ dove } t = \frac{x}{V}$$

$$\text{A questo punto si ha } dL = \beta V^2 \cdot \frac{x}{V} \rightarrow dL = \beta Vx \text{ e quindi } x = \frac{dL}{\beta V} = 16 \cdot 10^3 \text{ m} = 16 \text{ km}$$

$$\textcircled{2} \quad V = \frac{114 \text{ km}}{h} = \frac{114 \cdot 1000}{3600} = 30 \text{ m/s}$$

$$\hookrightarrow x = \frac{dL}{\beta V} = 8 \text{ km (diminuiti)}$$

\textcircled{4}



→ Stato iniziale: Molla con costante elastica K e lunghezza a riposo L . Carrello di massa M

→ Stato finale

① Indicare per quali valori della velocità iniziale il carrello compriene completamente la molla

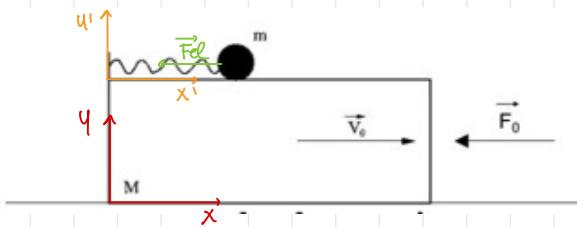
$$\hookrightarrow \Delta K = \alpha_{\text{TOT}} \rightarrow \Delta_{\text{FE}} + \Delta_{\text{FP}} + \Delta_{\text{N}} + \Delta_{\text{AD}} \rightarrow -\frac{1}{2} \frac{K(x-L)^2}{2} + 0 + 0 + \int \mu g \cdot M \cdot l \rightarrow -\frac{1}{2} K L^2 - 3L \mu Mg$$

$$\frac{1}{2} M v_i^2 - \frac{1}{2} M v_f^2$$

O per sistema di riferimento accelerato

$$\hookrightarrow \frac{1}{2} M v_i^2 = \frac{1}{2} K L^2 + 3L \mu Mg \rightarrow v_i > \sqrt{\frac{KL^2 + 6L\mu Mg}{M}}$$

\textcircled{5} \quad \Delta \text{ATT: Esercizio di esame}



Blocco di massa M , pallina di massa m , c.te elastica K , lunghezza a riposo l_0

Da $t=0$ agisce una forza F_0 NON costante su fremono il corpo con accelerazione $a_0 = \text{c.te}$ → Si ferma per $t=T$

Im $t=T$ la pallina ha velocità relativa NULLA rispetto al blocco e la molla ha lunghezza l_0

① Velocità v_0 , T , Modulo a_0 dovuta a F_0

Suggerimento: Per questa tipologia di esercizi è NECESSARIO negligenzare il sistema di riferimento SOUDATO al blocco che si muove

Per trovare l'accelerazione posso utilizzare la seconda legge di Newton per corpi di massa NON variabile

$$\hookrightarrow \sum F = ma$$

↓ → **ATTENZIONE!**: questa è l'accelerazione RISpetto a TERRA

$$-K(x-l_0) + ma_0 = m \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow -Kx(t) + Kl_0 + ma_0 = mx''(t) \rightarrow mx''(t) + Kx(t) = Kl_0 + ma_0$$

RISOLVENDO l'equazione generale si ha: $mx^2 + K = 0 \rightarrow x = \sqrt{\frac{K}{m}} \sin(\omega t + \phi)$

SOLUZIONI PARTICOLARI $\rightarrow Kl_0 \rightarrow \alpha_1: \text{ha derivate} = 0 \rightarrow \alpha_1 K = Kl_0 \rightarrow \alpha_1 = l_0$

$\rightarrow ma_0 \rightarrow \beta_1: \text{ha derivate} = 0 \rightarrow \beta_1 K = ma_0 \rightarrow \beta_1 = \frac{ma_0}{K}$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + l_0 + \frac{ma_0}{K} \rightarrow \text{Condizioni iniziali} \rightarrow x(0) = l_0 \rightarrow A \cos(\phi) + \frac{ma_0}{K} = l_0 \rightarrow A = -\frac{ma_0}{K}$$

$$\rightarrow x'(0) = -A \omega \sin(\phi) = 0 \rightarrow \phi = 0$$

$$x(t) = \frac{ma_0}{K} (1 - \cos(\omega t)) + l_0$$

$$\rightarrow x(T) = 2l_0 \rightarrow 2l_0 = l_0 + \frac{ma_0}{K} (1 - \cos(\pi \omega T)) \rightarrow l_0 = 2m a_0 \rightarrow a_0 = \frac{l_0}{2m}$$

$$x'(T) = 0 \rightarrow \frac{ma_0}{K} \omega \sin(\pi \omega T) = 0 \rightarrow \omega T = \pi \rightarrow T = \frac{\pi}{\omega}$$

TROVO VELOCITÀ v_0

La pallina fa un moto uniformemente DECCELERATO con $a(t) = \text{costante} = a_0$
 $v(t) = v_0 + \int_0^t a_0 dt = v_0 + a_0 t \rightarrow$ Si ha che $v(T) = 0$ e quindi si ha $0 = v_0 + a_0 T$ e si può concludere $v_0 = -a_0 T = \frac{k l_0}{m} \cdot \frac{\pi}{w}$

Sostituendo i valori numerici si ha $T = 0.71$, $a_0 = 6 \text{ m/s}^2$ e $v_0 = 2.8 \text{ m/s}$

(2) Calcolare il lavoro compiuto dalla FORZA FRENAnte

Utilizzo il teorema delle FORZE VIVE: $\Delta E = \Delta K \rightarrow$ Il lavoro si divide in lavoro di forze conservative e non conservative

Penso quindi a distinguere le forze

CONSERVATIVE: Forza elastica $\rightarrow \Delta E_c = -\Delta U$
NON CONSERVATIVE: Forza frenante $\rightarrow \Delta E_{fren}$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)v_f^2 = \underbrace{v_i - v_f}_{0} + \Delta E_{fren}$$

$$0 : v_f = 0$$

Dato dalla MOLLA: Si ha che $v_i = 0$ in quanto la molla è a riposo mentre $v_f = \frac{1}{2}k(l_0 - l_0)^2 = \frac{1}{2}kl_0^2$

$$\text{dalla relazione precedente si ha } \Delta E_{fren} = \frac{1}{2}kl_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)v_i^2 = -18J$$

(3) Lunghezza minima della molla per $t > T$

La molla ha posizione di equilibrio in l_0 e l'oscillazione di ampiezza massima arriva in $2l_0$. Si ha quindi che la posizione minima è in $l_0 - l_0 = 0$ in quanto l'ampiezza A è pari a l_0

9 sistemi di più particelle e gli urti

→ I sistemi sono costituiti da **MOLTE PARTICELLE**, ciascuna con propria posizione, velocità ed accelerazione

↳ Nei **corpi rigidi** le particelle sono **tutte legate tra loro** → avendo vincoli, le posizioni relative rimangono **COSTANTI**

Il moto può essere ridotto a quello di un punto materiale

↳ **CENTRO DI MASSA**: il centro di massa di due particelle m_1 e m_2 alle posizioni x_1 e x_2

$$\text{si trova in } \vec{x}_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \rightarrow \text{Spesso verso l'oggetto PIÙ PESANTE}$$

↳ Al centro se $m_1 = m_2$

Definizione generale: $\vec{R}_{CM} = \frac{M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2}{M_1 + M_2}$ e da questa si può generalizzare: $\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \vec{R}_{CM}$: PER N CORPI TRASURABILI

$$\text{Se } m_2 \gg m_1: \vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2}{m_1 + M_2} \rightarrow 1 \gg \frac{m_1}{m_2} \rightarrow \text{TRASURABILE}: \vec{R}_{CM} = \frac{\frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1 + \vec{r}_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = \frac{\vec{m}_1 \vec{r}_1 + \vec{r}_2}{m_2 + 1} \rightarrow \text{TRASURABILE}$$

→ Oggetti **ZOTSI**: l'oggetto viene diviso in molti cubetti, che vengono resi infinitesimi e dei quali viene fatta la somma: Si passa quindi da $\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i$ a $\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$

Conoscendo la **densità** è infine possibile utilizzare un integrale di volume → densità $\rho = \frac{dm}{dV}$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \rightarrow \int r dV \text{ e infine } \vec{R}_{CM} = \int \rho(r) dV$$

Esempi

$$(1) \text{ Densità lineare costante: } \lambda = \frac{m}{L} \rightarrow dm = \lambda dx \quad \text{da cui } \vec{x}_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{\lambda}{M} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{1}{M} \frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

$$(2) \text{ Se la densità NON è costante: } \lambda = kx = \frac{dm}{dx} \rightarrow \vec{x}_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^L x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{1}{M} \int_0^L x kx dx = \frac{1}{M} k \int_0^L x^2 dx = \frac{K}{M} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \frac{K}{M} \frac{L^3}{3}$$

$$(3) \text{ Sistema di più corpi} \quad \begin{array}{c} L \\ \hline \text{---} \\ \text{MA CHIUSA} \end{array} \quad \begin{array}{c} R \\ \hline \text{---} \\ \text{MA APERTA} \end{array} \quad \rightarrow \frac{\text{MA CHIUSA} + \text{MA APERTA}}{\text{MA CHIUSA} + \text{MA APERTA}}$$

→ OGGETTI COMPOSTI: Il centro di massa può essere calcolato come il centro di massa di **TUTTI i centri di massa** → Avendo già ridotto a punti materiali gli altri oggetti è possibile calcolarlo

Indicando $\vec{r}_i^{(N)}$ la posizione sulla parte N -esima si ha: $\vec{R}_{CM}^{(N)} = \frac{\sum_i^{(N)} m_i \vec{r}_i^{(N)}}{\sum_i^{(N)} m_i} = \frac{\sum_i^{(N)} m_i \vec{r}_i}{M^{(N)}}$

$$\text{Da ciò si ricava: } \vec{R}_{CM} = \frac{\sum N \vec{R}_{CM}^{(N)}}{\sum N}$$

NOTA del CENTRO di MASSA

$$\text{Velocità del centro di massa: } \vec{v}_{CM} = \frac{d \vec{R}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d \vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i, \text{ che equivale a } \vec{M} \vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \vec{P}_{TOT}$$

$$\text{Accelerazione ottenuta DERIVANDO: } \vec{a}_{CM} = \frac{d \vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d \vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \xrightarrow[\text{Newton}]{\text{II legge di}} \vec{M}_{ACCA} = \frac{N}{M} \vec{m}_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

\vec{F}_i rappresenta sia le forze interne che quelle esterne, ma per la III di Newton si ha che $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \text{ int} = 0$ poiché si sviluppano A COPPIE E SI ANNULLANO → Si ottiene quindi che $\vec{M}_{ACCA} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{i, \text{ ext}}$

Èquivalente ad un moto di un punto materiale su cui agiscono le **rette forze ESTERNE**

da QUANTITÀ di MOTO

↳ DEFINIZIONE: $\vec{p} = m \vec{v}$: quantità di moto di una particella o di un oggetto schematizzato come una particella di massa m e velocità \vec{v} .

Per un sistema di più particelle è la **SOMMA VETTORIALE** delle singole quantità di moto: $\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \vec{M} \vec{v}_{CM}$

→ In un **SISTEMA ISOLATO** (non sono presenti forze esterne) si **CONSERVA** ed è **COSTANTE**

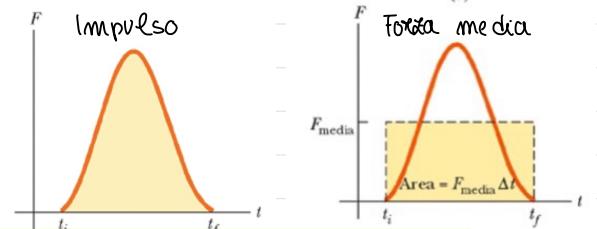
↳ particelle di massa m_1 ed m_2 e SOLO FORZE INTERNE: $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$, da cui $m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0$, che non definisce e' analogo a $m_1 \frac{d \vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d \vec{v}_2}{dt} = 0$ ed essendo le masse costanti si ha $\frac{d m_1 \vec{v}_1}{dt} + \frac{d m_2 \vec{v}_2}{dt} = 0$, da cui $\frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$ e quindi $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ costante.

→ In un sistema **NON ISOLATO**: Sono presenti **FORZE ESTERNE** agenti sul sistema: $\frac{dp}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$: **La legge di Newton**.

Integrando l'equazione precedente dall'istante t_i a t_f si ottiene $\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F}_{\text{ext}} dt$.

↳ **TEOREMA DELL'IMPULSO**: L'impulso si definisce come $\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F}_{\text{ext}} dt$
e la variazione della quantità di moto
dipende da esso.

Forza media $\langle \vec{F} \rangle = \frac{\vec{I}}{t_f - t_i}$: Forza costante che imprime al punto materiale lo stesso impulso della forza variabile



Esempio



X: Acoswt

Urto ANELASTICO: $\rightarrow QdM = \text{costante?}$

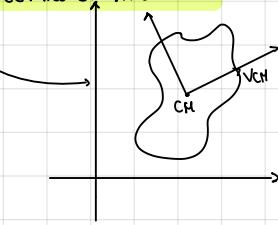
$$\frac{dp}{dt} = \vec{F} \quad \frac{dp}{dt} = \vec{F} dt$$

IMPULSO → in questo caso è TRASCURIBILE perché dt è INFINITESIMO

$$m\vec{v}_i + m\vec{v}_0 = 2m\vec{v}_f : \text{È come se i corpi fossero LIBERI}$$

Quantità di moto relativa ad un centro di massa

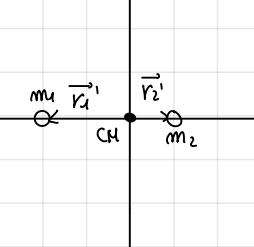
$$\sum_{i=1}^m m_i \vec{v}_i \rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i$$



$$\rightarrow \vec{QdM} = \sum_{i=1}^m m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i) = \sum_{i=1}^m m_i \vec{v}_{CM} +$$

$$\sum_{i=1}^m m_i \vec{v}'_i = M \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^m m_i \vec{v}'_i \downarrow$$

Qdm centro di massa rispetto al centro di massa



Calcolo del centro di massa di un sistema NEL CENTRO DI MASSA

$$\rightarrow \frac{m_1 \vec{r}_1' + m_2 \vec{r}_2'}{m_1 + m_2} = \vec{R}_{CM} = 0 \rightarrow m_1 \vec{r}_1' + m_2 \vec{r}_2' = 0, \text{ quindi } \frac{d}{dt} m_1 \vec{r}_1' + \frac{d}{dt} m_2 \vec{r}_2' = 0 \text{ ed infine}$$

$$m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = 0$$

NON c'è quantità di moto RELATIVA

⚠ ATT: La quantità di moto è l'unica che appare sul CdM → l'energia cinetica RIMANE a causa del quadrato

→ I sistemi di MASSA VARIABILE → Un reattore varia la sua quantità di moto espellendo i suoi gas esauriti. Il reattore riceve da esterni quantità di moto e quindi ACCELERÀ, com il suo centro di massa che si muove di moto RETTILINEO UNIFORME

Il reattore di massa M espelle massa Δm di gas in tempo Δt con velocità u relativa al reattore.

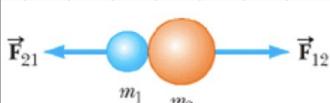
Si ha quindi $p_f = p_i + F \Delta t \rightarrow p_i = (M + \Delta m)v$

$$\rightarrow p_f = (M + \Delta m)v + \Delta m(v - u) \rightarrow M \frac{dv}{dt} - u \Delta m = F \Delta t \text{ e se } \Delta t \rightarrow 0: \frac{MdV}{dt} = F - u \frac{dM}{dt}$$

Considerando F trascurabile: $M \frac{dv}{dt} = -u \frac{dM}{dt}$ e risolvendo $\int_0^{V(t)} \frac{dv}{u} = - \int_{M_0}^{M(t)} \frac{dM}{M}$ si ottiene $V(t) = u \log \left(\frac{M_0}{M(t)} \right)$ avendo assunto $v(0) = 0$ e $M(0) = M_0$

→ Gli URTI: eventi in cui due oggetti entrano a contatto e comunicano tramite forze → PIÙ INTENSE di tutte le altre

↳ Le forze di collisione sono INTERNE al sistema e quindi viene CONSERVATA la QUANTITÀ DI MOTTO



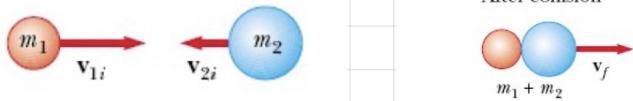
→ Due particelle di massa m_1 ed m_2 viaggiano con velocità v_{1i} e v_{2i} , con $v_{1i} > v_{2i}$ e si URTANO → le velocità dopo la collisione sono date da v_{1f} e v_{2f} . Allora vale:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f}$$

→ Urto ANELASTICO: L'energia cinetica NON viene conservata ma si dissipa in altre energie

Urto PERFETTAMENTE ANELASTICO: Le particelle RIMANGONO ATTACCADE

After collision



e proseguono con una massa $m_1 + m_2$ e velocità $v_f = v_{1i} + v_{2i}$

$$\rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

→ Energia con particelle ferme inizialmente: $K_i = \frac{p_i^2}{2m_i}$ $K_f = \frac{p_f^2}{2(m_1 + m_2)}$ → $K_f < K_i$

Urti elastici: Viene conservata l'ENERGIA CINETICA (in caso di corpi liberi = NO FORZE IMPULSIVE)



$$p_i = p_f : m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$

$$K_i = K_f : \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

→ Dalla seconda equazione si ha: $m_1 v_{1i}^2 - v_{1f}^2 = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \rightarrow m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})$

→ Dalla prima si ha: $m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{1f} - v_{2i})$

↓

Dividendo la prima per la seconda si ha: $v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2i}) \rightarrow v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$

$$\rightarrow v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad \text{Se } v_{2i} = 0 \rightarrow v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}$$

$$\rightarrow v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}$$

↓ Se $v_{2i} = 0$

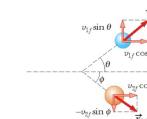
Se la particella incidente è pesante

↪ $m_1 > m_2$, quindi $v_{1f} \approx v_{1i}$, $v_{2f} \approx 2v_{1i}$ → velocità oggetto leggero ↪ $v_{1f} \approx -v_{1i}$, $v_{2f} \approx 0$ → L'oggetto di massa ∞ rimane fermo
RAMMOLATA ↪ velocità oggetto di massa ∞ immaterizzata ↪ RIMBALZA con velocità iniziale nel verso opposto

→ Collisioni in TRE DIMENSIONI

↪ È stato stabilito il PARAMETRO d'URTO: distanza tra la velocità e il centro del corpo urtato

↓ La traiettoria dopo l'urto dipende dalla sua geometria



La quantità di moto si conserva su ciascun asse di movimento dei corpi

↪ Nel caso elastico si conserva ANCHE l'energia cinetica

↓

CASO PARTICOLARE: urto elastico con una particella ferma

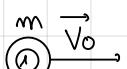
↪ ① Conservazione della quantità di moto: $\vec{p}_{i1} = \vec{p}_{f1} + \vec{p}_{f2}$ → elevando al quadrato

$$p_{i1}^2 = p_{f1}^2 + p_{f2}^2 + 2\vec{p}_{f1} \cdot \vec{p}_{f2}$$

↪ ② Conservazione dell'energia cinetica: $\frac{p_{i1}^2}{2m} = \frac{p_{f1}^2}{2m} + \frac{p_{f2}^2}{2m} \Rightarrow p_{i1}^2 = p_{f1}^2 + p_{f2}^2$

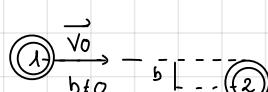
Ne segue che $\vec{p}_{f1} \cdot \vec{p}_{f2} = 0$ e quindi $p_{f1} \perp p_{f2}$ ($v_{f1} \perp v_{f2}$)

Caso 1: $b=0$

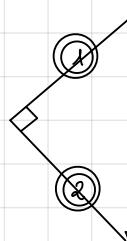


$$\textcircled{1} \quad \vec{v}_0 \quad \textcircled{2} \quad \vec{v}_i = 0 \quad b=0$$

Caso 2: $b \neq 0$



① ② \vec{v}_0 → proseguono entrambi con v_0



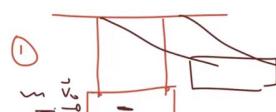
La pallina 1 prosegue con v_{1i}

La pallina 2 acquisisce v_{1f}
Si scambiano questa velocità

Esempio

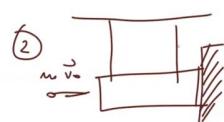
Il pendolo balistico: urto COMPLETAMENTE ANELASTICO → utilizzato per calcolare la velocità di un proiettile

↓ La quantità di moto si conserva → **NON** in TUTTI i CASI



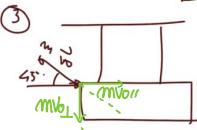
→ Nell'urto si conserva la quantità di moto: $m_1 v_0 = (m_1 + M) v_1$

→ Dopo l'urto si conserva l'energia: $\frac{1}{2} (m_1 + M) v_1^2 = (m_1 + M) g h$



→ Forza impulsiva: Reazione vincolare

↪ Agisce nella stessa direzione dello scambio della qdm. → NON si conserva



Viene annullata dal vincolo perché agisce una forza che tiene l'oggetto attaccato al soffitto → la qdm NON si conserva perché la forza del vincolo è impulsiva

Nel caso che vogliamo analizzare però si CONSERVA

→ dalle equazioni ① $m_1 v_0 = (m+M) v_1$

$$② \frac{1}{2} (m+M) v_1^2 = (m+M) g h$$

$$\text{otteniamo } v_0 = \frac{(m+M) v_1}{m}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{m}{2gh}} \rightarrow v_0 = \frac{(m+M)}{m} \sqrt{2gh}$$

→ L'energia potenziale di un CORPO ESTESO

→ come se tutta la massa fosse concentrata nel CENTRO DI MASSA

$$U = \sum_i m_i g h_i = g (\sum_i m_i) h_{CM} = M g h_{CM}, \text{ dove } h_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i h_i$$

→ TEOREMA di KOENIG per l'energia cinetica

→ $K = \frac{1}{2} M_{TOT} V_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ → la posizione di ognun punto materiale è data dalla somma del vettore che congiunge il sistema di riferimento al sistema di riferimento "accentato" ed il vettore che va dall'origine del sistema accentato al punto → Il sistema accentato ha il CM nell'origine

$$\begin{aligned} \text{Per un corpo discoto si ha } K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i) (\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i) = \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_i m_i \vec{V}_{CM} \cdot \vec{v}_i = \\ &= \frac{1}{2} M_{TOT} V_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \vec{V}_{CM} \cdot \sum_i m_i \vec{v}_i \end{aligned}$$

O: qdm rispetto al cm

Esercizi esercitazione

① Due masse $m_1 = 1\text{kg}$, $m_2 = 0.6\text{kg}$, inizialmente in quiete, sono disposte su un piano (x,y) privo di attrito. Le coordinate di m_1 sono $(0,3\text{m})$ e quelle di m_2 $(1\text{m},0)$. Si applichi ad esse la forza $\vec{F}_1 = 4\text{N} \hat{x}$, $\vec{F}_2 = 3\text{N} \hat{y}$ → Trovare le equazioni del moto del centro di massa

$$\rightarrow \text{Coordinate del centro di massa} \rightarrow x_0 = \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \right) = 1.5\text{m}$$

$$\rightarrow y_0 = \left(\frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \right) = 1.87\text{m}$$

$$\rightarrow \text{Accelerazione del centro di massa: } a_{CM} = \frac{\sum \vec{F}_i}{\sum m_i} \rightarrow a_{xCM} = \frac{4\text{N}}{1.6\text{kg}} = 2.5\text{m/s}^2$$

$$\rightarrow a_{yCM} = \frac{3\text{N}}{1.6\text{kg}} = 1.87\text{m/s}^2$$

$$\rightarrow \text{Velocità del centro di massa: } \vec{V}_{CM} \rightarrow V_{xCM}(t) = V_{0x} + \int_0^t a_{xCM} dt = 2.5t$$

$$V_{yCM}(t) = V_{0y} + \int_0^t a_{yCM} dt$$

$\rightarrow O$

$$\rightarrow \text{raggi orari: } x_{CM}(t) = 1.5 + \frac{1}{2} \cdot 2.5 \cdot t^2 = 1.5 + 1.25t^2$$

$$y_{CM}(t) = 1.87 + \frac{1}{2} \cdot 1.87 \cdot t^2 = 1.87 + 0.93t^2$$

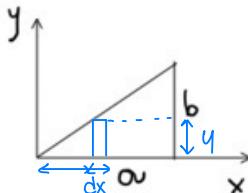
② Un proiettile, lanciato verticalmente verso l'alto con velocità V_0 , esplode in due frammenti di ugual massa. Dopo t secondi dall'esplosione uno dei frammenti raggiunge la quota h . Determinare la quota dell'altro frammento allo stesso istante

$$\hookrightarrow \text{Il moto avviene tutto lungo } y \text{ ed il centro di massa ha posizione } y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{2m} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\hookrightarrow \text{Si muove di moto UNIFORMEMENTE ACCELERATO con } a=g \rightarrow y_{CM}(t) = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\text{Umando le due equazioni per } t \text{ si ha: } y_2 = 2V_0 t - g t^2 - h$$

③ Determinare il centro di massa di un triangolo di densità uniforme $\delta = ps$, massa M e lati a, b



$$\rightarrow \text{Definizione di densità: } \frac{\text{Massa}}{\text{Area}} \rightarrow \frac{M}{\frac{1}{2}ab} \rightarrow ps = \frac{2M}{ab}$$

$$\rightarrow \text{Oggetto continuo: centro di massa va fatto con gli integrali} \\ \hookrightarrow x_{CM} = \frac{1}{M} \int x dm \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm, \text{ ma definiamo chi è } dm$$

→ densità superficiale

$$dm \text{ è la massa di un "pezzettino infinitesimo"} \rightarrow dm = \int_a^b \int_0^y ps dx dy$$

$$\text{Risolviamo le singole equazioni: } x_{CM} = \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^b \int_0^y x ps dy dx$$

→ RETTANGOLO INFINITESIMO CELESTINO chiaro: $ds = dx dy$

$$2 \text{ incognite? NO!} \rightarrow \text{considero il triangolo rettangolo di cateti } x \text{ ed } y. \text{ A questo punto vale la relazione } y = x \tan \theta$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^a x \frac{a}{b} x \tan \theta dx = \frac{1}{M} \frac{a^3}{3} \frac{b}{\tan \theta} = \frac{2}{3} a$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^b y dm = \frac{1}{M} \int_0^b (a-x) y ps dy = \frac{1}{M} \int_0^b \left(a - \frac{y}{\tan \theta} \right) y dy = \frac{b}{3}$$

→ VERTICALE: $ds = (a-x) dy$

→ SEMPRE PIÙ PICCOLO

④ Si calcoli la posizione del centro di massa di un semicilindro rigido omogeneo di massa M e raggio R



$$\rightarrow \text{densità} = \frac{\text{massa}}{\text{Area}} \rightarrow \frac{M}{\pi R^2} \rightarrow p_s = \frac{M}{\pi R^2}$$

essendo anche questo un corpo continuo, è possibile calcolare il centro di massa utilizzando gli integrali

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{m} \int_R \rho d\ell \downarrow$$

$$\overrightarrow{r} = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j}$$

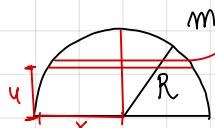
$$d\ell = R d\theta \longrightarrow \Delta \text{MOT CIRCOLARE UNIFORME: } \Delta l = r \Delta \theta$$

Forse è meglio dividerli 😊

$$\xrightarrow{\pi \rightarrow \Delta \text{AREA}} X_{CM} = \frac{1}{m} \int_0^{\pi} R \cos \theta \rho R d\theta = \frac{1}{m} \rho R^2 \sin \theta \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{m} \int_0^{\pi} R \sin \theta \rho R d\theta = \frac{1}{m} \frac{R^2}{\pi R} (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} = \frac{R}{\pi} (1+1) = \frac{2R}{\pi}$$

- ⑤ Si trovi il baricentro di una lamina omogenea piana di peso trascurabile avente la forma di un semicerchio di massa m e raggio R



$$\text{altezza: } dy \rightarrow \text{densità} = \frac{\text{massa}}{\text{area}} \rightarrow \frac{m}{\pi R^2 / 2} \quad PS = \frac{2m}{\pi R^2}$$

Sia $X_{CM} = 0$ perché la lamina è omogenea e simmetrica

$$Y_{CM} = \frac{1}{m} \int_0^R \rho S y dy = \frac{1}{m} \rho \int_0^R x dy$$

+ perché sono PARTE SUPERIORE

$$\text{Equazione della circonferenza: } x^2 + y^2 = R^2 \longrightarrow y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\text{Trovare } dy: dy = \frac{-dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

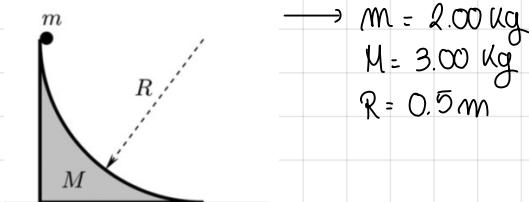
Per $y=0 \rightarrow x=R$

Per $y=R \rightarrow x=0$

$$\frac{2}{m} \rho \int_{R \sqrt{R^2 - x^2}}^0 \sqrt{R^2 - x^2} dx = -\frac{2}{m} \rho \int_0^R x^2 dx =$$

$$-\frac{2}{m} \rho \int_0^R x^2 dx = \frac{2}{m} \frac{\pi R^4}{12} \cdot \frac{R^2}{3} = \frac{4}{3} \frac{R^5}{\pi}$$

- ⑥ Un punto materiale di massa m è inizialmente fermo sulla cima di una guida liscia con profilo circolare di raggio R. La guida, di massa M, anch'essa inizialmente ferma, può scivolare su di un piano orizzontale privo di attrito. Al tempo t=0 il punto materiale viene lanciato libero



- ① Calcolare la velocità finale del punto materiale \vec{v} e della guida \vec{V} , quando il punto materiale arriva sul piano

→ In questo caso sono assenti forze non conservative e l'unica forza esterna agente è la forza di gravità. L'energia quindi si conserva **ATT: La guida è un corpo estero del quale bisogna considerare il centro di massa**

$$\mathcal{E}_i = (U_{mi} + U_{Mi} + K_{Mi} + K_{Mi}) \longrightarrow mgR + MgR$$

$$\mathcal{E}_f = (U_{mf} + U_{Mf} + K_{Mf} + K_{Mf}) \longrightarrow MgR + \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} M V^2$$

$$mgR = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} MV^2$$

Anche la quantità di moto si conserva in quanto l'unica forza agente (forza di gravità) NON fa lavoro. Si ha quindi che $p_i = p_f$

Per il moto di un centro di massa è importante ricordare che $\overline{a}_{CM} = \sum_{i=1}^N \overline{F}_i = 0$: Forze agenti NELLE su x

Dato che l'accelerazione è la derivata della velocità, si avrà che la velocità dovrà essere costante. Si ha che $\overline{v}_{CM} = \overline{v}_{TOT} = \text{costante}$

Dalla conservazione della quantità di moto applicata al centro di massa si ha: $(m+M)v_{CMi} = (m+M)v_{CMf}$ da cui $(M+m)v_{CMf} = 0$, da cui infine $v_{CM} = 0$

l'altra relazione utile può essere la seguente, sempre derivante dalla conservazione della quantità di moto

$$\underbrace{mV_x + mV_x}_{\text{SISTEMA SEPARATO}} = \underbrace{(M+m)V_{cm,x}}_{\text{SISTEMA UNITO}} \rightarrow 0 \quad \rightarrow mV_x + MV_x = 0, \text{ da cui } V_x = -\frac{m}{M}V_x$$

tempo finale
tempo iniziale

Sull'asse y non c'è movimento, quindi non c'è velocità

Axse y — Agisce la forza di gravità, che quindi è costante e conservativa

Il punto materiale ha velocità lungo y

Il centro di massa non ha velocità lungo y perché il corpo scivola lungo il piano $\rightarrow V_{cm,y} = 0$

I vettori velocità sono quindi identificati da $\vec{v} (V_x, V_y, 0)$ —> nell'istante in cui tocca il terreno $\vec{v} (V_x, 0, 0)$ il vettore \vec{v} è dato da $\vec{v} = (V_x, 0, 0)$

Dalla legge sulla conservazione dell'energia si ha quindi $mgR = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}MV_x^2$, a cui posso sostituire

$$V_x \text{ ricavata precedentemente} \rightarrow mgR = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}M \cdot \frac{m^2}{M^2} V_x^2 \rightarrow mgR = mv_x^2 + \frac{m^2}{M} V_x^2 = \frac{Mm + m^2}{M} V_x^2$$

$$\rightarrow m(M+m) V_x^2 = mgR \rightarrow V_x = \sqrt{\frac{mgR}{m(M+m)}} = \sqrt{\frac{mgR}{M+m}}$$

$$V_x = -\frac{m}{M} \sqrt{\frac{mgR}{M+m}} = -m \sqrt{\frac{gR}{M(M+m)}}$$

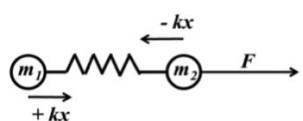
② Calcolare la velocità finale del centro di massa del sistema punto materiale - guida, \vec{V}_{cm} , quando il punto materiale arriva sul piano

↳ dalle considerazioni fatte precedentemente si ha che $V_{cm} = 0$

③ Come cambierebbero i risultati del punto 1 e 2 se invece di una guida con profilo circolare avessimo un piano inclinato di altezza R e angolo θ ?

↳ Non cambierebbe nulla perché si avrebbero le stesse forze agenti e quindi sarebbero le stesse leggi di conservazione di energia e quantità di moto.

⑦ Due blocchi di massa m_1 ed m_2 , collegati mediante una molla di costante elastica K e di massa trascurabile, poggiino su un piano orizzontale privo di attrito. Alla massa m_2 è applicata una forza orizzontale F costante. Determinare l'allungamento della molla supponendo che il sistema non oscilli.



→ Utilizzo il centro di massa

↳ La sua accelerazione dipende SOLO dalla forza \vec{F} in quanto è l'unica forza esterna $\rightarrow a_{cm} = \frac{F}{m_1 + m_2}$, che è anche l'accelerazione di ciascun blocco NON essendo presenti oscillazioni

Avendo quindi fornito delle regole per l'accelerazione dei singoli blocchi, ci interessa adesso analizzare il corpo m_2 → Seconda legge di Newton: $\sum \vec{F} = m \vec{a}$

$$F - kx = m_2 a \quad \downarrow$$

$$F - kx = m_2 \frac{F}{m_1 + m_2}$$

$$x = \frac{F}{k} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)$$

→ Si considera $x = 0$ la posizione di equilibrio della molla

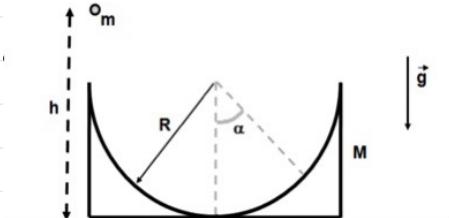
$$R = 1m$$

$$M = 3kg$$

$$m = 1.6kg$$

$$h = 1.3m$$

Sistema soggetto a \vec{g}



① Spostamento orizzontale d della guida quando la massa m esce dall'altro lato rispetto a quello da cui è entrata nella guida
 ↳ Analizzando le forze notiamo che NON sono presenti forze dissipative in quanto agisce soltanto la forza peso che è conservativa. La quantità di moto della pallina NON si conserva, mentre invece si conserva la quantità di moto del centro di massa sul X e \downarrow

La x del centro di massa è R in quanto il corpo è simmetrico all'asse mediano. Si ha che la x_{CM} rimane COSTANTE lungo il moto
 ↳ Si ha che $x_{CM} = \frac{M \cdot 0 + mR}{m+M} \rightarrow$ Centro di massa della guida $\rightarrow x_{CM} = \frac{mR}{m+M}$

All'inizio la pallina è nell'ORIGINE

Il moto avviene lungo x_0 , quindi NON consideriamo z , dato che non vi è nessuna forza agente.

Assumendo che la pallina rotola sulla guida si ha che $\dot{y}_{CM} = 0 = \text{COSTANTE}$
 \downarrow

Anche nell'asse y la guida rimane ferma, quindi è importante analizzare il moto sull'asse X .

Diciamo che la guida si sposterà di un tratto d . Se la pallina percorre una traiettoria circolare ed esce dalla guida si ha che la sua x_f sarà $2R+d$
 \downarrow ↳ guida
 traiettoria circolare

Ahhiamo detto che, non agendo forze su X , la posizione del centro di massa DEL SISTEMA rimarrà COSTANTE

↪ Si aveva quindi: $x_i = \frac{RM}{m+M}$ come avevamo calcolato in precedenza
 \downarrow ↳ centro di massa della guida

$$x_f = \frac{M(R+d) + m(2R+d)}{m+M} \rightarrow \text{centro di massa della pallina}$$

Dal ciò si ricava che $x_i = x_f$ e quindi $\frac{RM}{m+M} = \frac{M(R+d) + m(2R+d)}{m+M} \rightarrow M(R+d) + m(2R+d) = M(R+d) + 2Rm + md$
 $\rightarrow 0 = (M+m)d + 2Rm \rightarrow d = -\frac{2Rm}{M+m}$

② Modulo della velocità della guida quando m passa nel punto più basso

$$V_m = (V_{mx}, V_{my})$$

$$V_M = (V_{mx}, 0)$$

$V_{CM} = (0, V_{CMy}) \rightarrow$ rimane costante su X ma invece si muove su y essendo che la quantità di moto di m NON si conserva
 \downarrow

Si ha che $V_{CMy} = \frac{p_{My}}{m} \leq \frac{p_{My}}{M} \rightarrow p_{My} = MV_{My} = 0 \rightarrow V_{CMy} = \frac{mV_{my}}{M+m}$

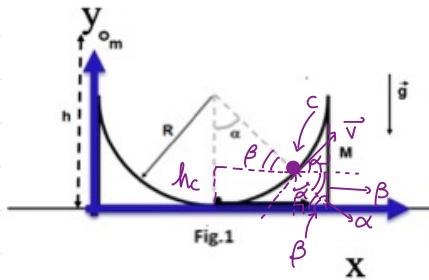
La quantità di moto si conserva lungo x , quindi possiamo dire che V_{mx} generico (solo x)
 ↳ $mV_{mx} + M V_{mx} i = mV_{mx} + M V_{mx} \rightarrow mV_{mx} = -MV_{mx} \rightarrow V_{mx} = -\frac{MV_{mx}}{m} \rightarrow V_M$
 $\downarrow 0 \quad \downarrow 0$

L'energia invece si conserva per tutto il sistema: Da notare in questo caso è che richiedendo la velocità della pallina nel punto più basso, in questo punto la pallina NON ha energia potenziale in quanto $h=0 \rightarrow$ chiameremo B questo punto
 $E_A (E_i) = mgh \rightarrow mgh = \frac{1}{2} mV_{mx}^2 + \frac{1}{2} MV_{mx}^2 \rightarrow mgh = \frac{1}{2} m \left(\frac{MV_{mx}}{m} \right)^2 + \frac{1}{2} MV_{mx}^2$
 $E_B = \frac{1}{2} mV_{my}^2 + \frac{1}{2} MV_{my}^2$

$$mgh = \frac{1}{2} \frac{M^2 V_m^2}{m^2} + \frac{1}{2} M V_m^2 \rightarrow mgh = \frac{1}{2} \frac{M V_m^2}{m} \left(\frac{M}{m} + 1 \right) \rightarrow mgh = \frac{1}{2} \frac{M V_m^2 (M+m)}{m}$$

$$m^2 gh = \frac{1}{2} M V_m^2 (M+m) \rightarrow V_m = \sqrt{\frac{2m^2 gh}{M(M+m)}}$$

(3) Quantità di moto quando la mazza m si trova ad $\alpha = \pi/4$



Abbiamo già verificato che $p_{cm} = (0, p_{cm}, 0)$
La velocità della pallina è TANGENTE al percorso, quindi
si ha $\vec{V}_m = (wR \cos\alpha, wR \sin\alpha)$ → Questa è la velocità
RELATIVA negliendo il moto
di riferimento della guida

da velocità assoluta si ha scrivendo

$$\begin{cases} V_x = V_{xTR} + V_{xR} \\ V_y = V_{yTR} + V_{yR} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_x = V_{xTR} + wR \cos\alpha \\ V_y = wR \sin\alpha \end{cases}$$

Anche l'energia si conserva, quindi si ha $\Delta E_A = \Delta E_C$

$$\Delta E_A = mgh$$

$$\Delta E_C = \frac{1}{2} m (V_x^2 + V_y^2) + \frac{1}{2} M V_{xTR}^2 + mg h_c$$

$$R - R \cos\alpha = R(1 - \cos\alpha)$$

$$((V_{xTR} + wR \cos\alpha)^2 + wR \sin^2)$$

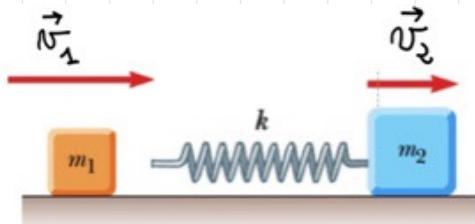
dato X la quantità di moto si conserva → Δ La quantità di moto del SISTEMA
Si ha che $p_i = p_f$ → $0 = M V_{xTR} + m (V_{xTR} + wR \cos\alpha) \rightarrow M V_{xTR} + m V_{xTR} + m w R \cos\alpha = 0$

$$\text{e quindi } (M+m) V_{xTR} = -m w R \cos\alpha \rightarrow V_{xTR} = -\frac{m w R \cos\alpha}{M+m}$$

$$\text{Sostituendo si ha } mg(h - R(1 - \cos\alpha)) = \frac{1}{2} (M+m) \left(\frac{m w R \cos\alpha}{M+m} \right)^2 + \frac{1}{2} m (2 w R \cos\alpha)(-m w R \cos\alpha) + \frac{1}{2} m w^2 R^2$$

$$w = \sqrt{\frac{2g[h - R(1 - \cos\alpha)](M+m)}{R^2(m - m \cos^2\alpha + M)}}$$

9



Due corpi di massa m_1 e m_2 , sono su un piano orizzontale privo di attrito, sul secondo c'è una molla né dilatata né compresa di costante K . I due corpi si muovono con velocità v_1 e v_2 mote con $v_1 > v_2$. Determinare la massima compressione della molla

Conservazione: Energia? Sì perché non agiscono forze non conservative

Quantità di moto? Sì perché non ci sono forze impulsive

Conservazione dell'energia:

$$\Delta E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\Delta E_f = \frac{1}{2} m_1 v_{f1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f2}^2 + \frac{1}{2} K \Delta x^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{CM}^2 + \cancel{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2} + \cancel{\frac{1}{2} K \Delta x^2}$$

→ th. di Koening

Conservazione della quantità di moto

$$\begin{aligned} \vec{p}_i &= m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \implies m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V_{CM} \implies V_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{p}_f &= (m_1 + m_2) V_{CM} \end{aligned}$$

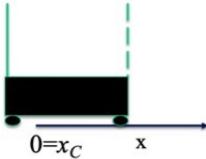
Quando la molla è nel punto di massima compressione le velocità dei due corpi rispetto al centro di massa sono NULLE

Utilizzando le relazioni $V_f = V_{CM} + \frac{V_{rf}}{K}$ —> $V_f = V_{rf} = V_{CM}$

Ammettiamo quindi che $V_1 = V_2 = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2} = V_{CM}$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{CM}^2 + \frac{1}{2} K \Delta x^2 \longrightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - (m_1 + m_2) V_{CM}^2}{K}}$$

⑩



Un corpo di massa m si trova all'estremo di un carrello di massa M e lunghezza l , in quiete, libero di muoversi su un binario orizzontale. Tralasciando l'attrito dinamico e tenendo determinare di quanto si sposta il carrello se l'uomo si reca all'estremo opposto

Conservazione Energia: Non necessaria ($\partial = 0$)

Quantità di moto del SISTEMA —> Si conserva lungo x

Quantità di moto calcolata rispetto al CDM —> $P_i = 0$ e quindi anche $P_f = 0$

Essendo che si ha che $P_{CM} = (m+M) \frac{dx_{CM}}{dt} = 0$ si ha che x_{CM} rimane COSTANTE

$$\text{Calcolo } x_{CM} = \frac{(M x_M + m x_m)}{M + m} = \frac{(M x_{Mf} + m x_{mf})}{M + m} \longrightarrow m x_m + M x_M = m x_{Mf} + M x_{mf}$$

$$\longrightarrow M(x_{Mf} - x_M) = -m(x_{mf} - x_m)$$

Si ha inoltre che $x_M - x_m = \frac{l}{2}$ ed essendo la x_{CM} COSTANTE si ha $-x_{Mf} + x_{mf} = \frac{l}{2}$

$$\longrightarrow \underbrace{x_M - x_{Mf}}_{-\Delta x_M} - \underbrace{x_m + x_{mf}}_{\Delta x_m} = \frac{l}{2} \longrightarrow -\Delta x_M + \Delta x_m = \frac{l}{2} \longrightarrow \Delta x_m = \frac{l}{2} + \Delta x_M$$

Sostituendo nell'equazione precedente si ha: $M \Delta x_M = -m(l + \Delta x_M)$ —> $M \Delta x_M = -ml - m \Delta x_M$

$$\longrightarrow \Delta x_M = -\left(\frac{m}{m+M}\right)l$$

Spostamento uomo: Spostamento carrello + Spostamento uomo sul carrello

$$- \left(\frac{m}{m+M}\right)l \quad \downarrow \quad l \quad \downarrow$$

$$\rightarrow l - \left(\frac{m}{m+M}\right)l = \left(1 - \frac{m}{m+M}\right)l = \left(\frac{M}{m+M}\right)l$$

⑪ Una motocicletta di massa 0.1 kg cade verticalmente e si appoggia a terra. Al momento dell'impatto la sua velocità ha modulo 10 m/s , ed il tempo dell'urto $T = 0.1 \text{ s}$. Calcolare la forza media che il pavimento esercita sulla motocicletta. Assumere che $g = 10 \text{ m/s}^2$

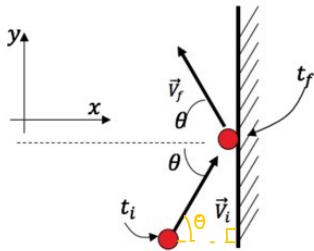
$\langle F \rangle = \frac{I}{t_f - t_i} \longrightarrow \Delta t$

Teorema dell'impulso: $\Delta p = \int_0^T \vec{F}_{ext} dt = \underline{\int_0^T \vec{F}_{est} dt}$

$$\rightarrow \int_0^T \vec{F}_{est} dt = \int_0^T \vec{F}_{imp} + mg dt = \int_0^T \vec{F}_{imp} + mg T = -mv_0$$

$$\text{Si ha quindi che } \langle \vec{F} \rangle + \vec{mg} = \frac{\vec{I}}{T} \longrightarrow \langle \vec{F} \rangle = \frac{\vec{I}}{T} - \vec{mg}$$

12) Urto elastico di massa M contro il muro. Eprimere l'impulso della palla e i dati in base ai dati in figura



L'impulso si determina come la VARIAZIONE della quantità di moto. Calcoliamo quindi \vec{P}_i e \vec{P}_f
 $\vec{P}_i = M(V \cos \theta, V \sin \theta)$ $\rightarrow \vec{I} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = M(-2V \cos \theta, 0)$
 $\vec{P}_f = M(-V \cos \theta, V \sin \theta)$

$$\text{Valore forza media su } x: \frac{I_x}{\Delta t} = \frac{-2MV \cos \theta}{t_f - t_i}$$

13)



Un atleta, di massa $M = 80\text{kg}$, effettua un salto in lungo. Al momento della battuta la sua velocità è orizzontale ed ha modulo $|v_i| = 10\text{ m/s}$ ed il tempo di battuta è $T = 0.1\text{s}$. Subito dopo la battuta la velocità del centro di massa conserva lo stesso modulo, ma è ruotata di 45° verso l'alto. Calcolare il valore medio della forza che la pedata effettua sull'atleta durante la battuta.

In questo caso conviene dividere l'analisi del problema per gli assi x ed y
 Sull'asse x NON agiscono altre forze esterne oltre a quella impulsiva

$$\Delta p = \int_0^T F_{\text{imp}} dx \rightarrow p(T) - p(0) = I$$

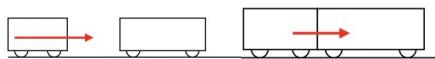
$$MV \cos 45^\circ - MV_1 = I \rightarrow I = MV_1 (\cos 45^\circ - 1) \rightarrow \langle F_x \rangle = \frac{MV_1 (\cos 45^\circ - 1)}{T}$$

Sull'asse y invece agisce anche la forza di gravità \rightarrow NON ha comp. y $\rightarrow T$

$$\Delta p = \int_0^T F_{\text{imp}} - Mg dt \rightarrow \text{Calcolo } \Delta p: p(T) - p(0) = MV_1 \sin 45^\circ - 0 = I$$

$$\langle F_y \rangle - Mg T = \frac{I}{T} \rightarrow \langle F_y \rangle = \frac{MV_1 \sin 45^\circ + Mg T}{T}$$

14)



Se un binario privo di attrito un carrello A ($M_A = 50\text{kg}$) che si muove con una velocità $V_A = 4\text{ m/s}$, urta in un tempo $T = 0.3\text{s}$ un secondo carrello B ($M_B = 150\text{kg}$), che è fermo sul binario. Nell'urto i due carrelli si fondono e procedono a velocità V_2 sul binario. Nell'urto non ci sono forze esterne ai carrelli ad eccezione della gravità e della reazione normale del piano di appoggio

1) Calcolare \vec{V}_2

Non avendo forze esterne nella direzione del movimento, la quantità di moto si conserva.
 Posso quindi scrivere: $P_i = P_f \rightarrow M_A V_A + 0 = (M_A + M_B) V_2 \rightarrow V_2 = \frac{M_A V_A}{M_A + M_B}$

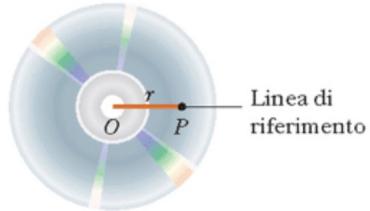
2) Forza media dei carrelli durante l'urto

$$\Delta \vec{p} = \int_0^T F_{\text{urto}} dt \rightarrow \frac{p(T) - p(0)}{T} = \langle F_{\text{urto}} \rangle \rightarrow \langle F_{\text{urto}} \rangle = \frac{M_B V_2}{T}$$

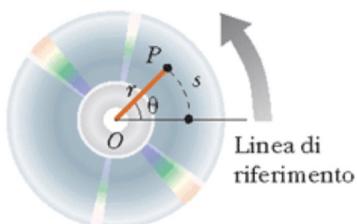
ATT: considerare UN SOLO CARRELLO perché la $\langle F \rangle$ agisce su ciascun carrello

Le dinamiche rotazionali

→ La POSIZIONE ANGOLARE



Moto



Linea di riferimento

→ Viene scelta una linea di riferimento e la posizione di un generico punto P viene espressa mediante le coordinate POLARI: $P(r, \theta)$

- \downarrow r : distanza dall'origine
- \downarrow θ : angolo misurato in senso ANTICORARIO

Il punto P compie un moto ROTATORIO esattamente come le altre particelle del corpo in quanto stiamo trattando un CORPO RIGIDO

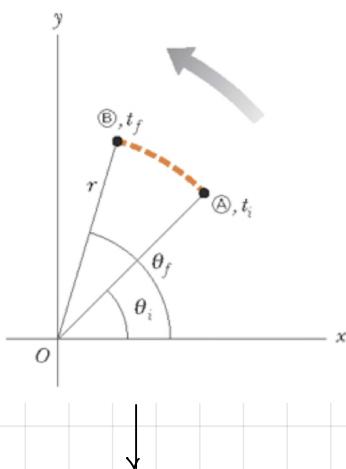
→ Possiamo definire la posizione angolare come l'angolo tra la retta di riferimento ed il raggio vettore dell'origine ad un qualsiasi punto del corpo

→ La coordinate che varia è θ , mentre r rimane COSTANTE

Il punto P percorre un arco s dato da $s = r\theta$, da cui si ha che $\theta = \frac{s}{r}$

→ **MONDO PURO** (adimensionale)

→ Lo SPOSTAMENTO, la VELOCITÀ e l'ACCELERAZIONE



Velocità ed accelerazione angolare sono COMUNI per ogni punto del corpo rigido

→ Analogamente al moto lineare, anche per il moto circolare è possibile definire le 3 grandezze fondamentali di spostamento, velocità e accelerazione ANGOLARI

→ Spostamento angolare: Angolo di rotazione percorso in un tempo FINITO

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i \rightarrow \text{Angolo Spansuto}$$

→ Velocità angolare: $\omega_{\text{media}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ → Instantanea: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} [\text{rad/s}]$

Positiva se gira in senso antiorario, negativa se gira in senso orario

→ Accelerazione angolare: $\alpha_{\text{media}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ → Instantanea: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} [\text{rad/s}^2]$

Positiva se la velocità aumenta in senso antiorario o diminuisce in senso orario

→ DIREZIONE e VERSO della velocità e dell'accelerazione angolare

→ La DIREZIONE segue l'asse di rotazione

→ Il VERSO è INTRANTE se ruota in senso antiorario

↓ USCENTE se ruota in senso orario

Regola della mano destra: ω segue il pollice, che è rivolto verso l'alto o verso il basso

a seconda di come sono posizionate le dita piegate



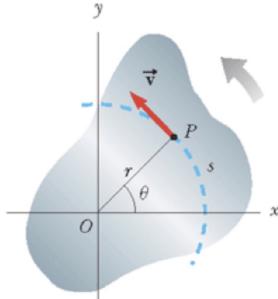
→ Le LEGGI ORARIE (la cinematica ROTATORIALE)

$$\alpha(t) = \ddot{\theta}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega t$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

→ La VELOCITÀ e l'ACCELERAZIONE LINEARI

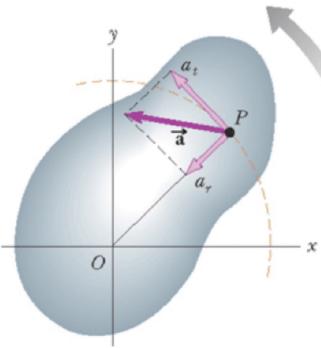


→ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$: Velocità TANGENZIALE

↓
Il modulo è dato da $v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega$

↑ Aumenta verso l'ESTERNO

$$\begin{aligned} \omega_f^2 &= \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \\ \theta_f &= \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \end{aligned}$$



→ L'accelerazione si divide in accelerazione RADIALE (a_r) e TANGENZIALE (a_t)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{w}}{dt} \times \vec{r} + \vec{w} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r_t^2 \omega^2 + r_r^2 \omega^4} = r \sqrt{\omega^2 + \omega^4}$$

$$a_r = \frac{v^2}{r} = r \omega^2$$

→ Energia cinetica ROTAZIONALE

↪ $K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \rightarrow$ Energia cinetica IN OGNI singola particella

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \omega^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

→ Momento di inerzia

⚠ ATTENZIONE: A differenza della quantità di moto, l'energia cinetica relativa al centro di massa può NON essere nulla → Questo sarà però utile dopo

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i \rightarrow$$
 Velocità NEL sistema di riferimento del centro di massa

↓ Velocità del centro di massa

$$K = \sum_i \frac{1}{2} M_i V_i^2 = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i V_{cm}^2 + \frac{1}{2} m_i v_i^2 + m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_{cm} \right) \rightarrow K = K_{cm} + K_R = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

↪ $\sum m_i v_i = 0 \rightarrow$ Definizione centro di massa

→ MOMENTO di INERZIA

↪ $I = m_i r_i^2$ con unità di misura $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ → "equivale" alla massa per un moto rettilineo, ovvero rappresenta la tendenza di un corpo ad opporsi alla variazione del suo moto rotatorio

Può essere calcolato suddividendo il corpo in piccoli intervalli di volume di massa Δm_i . Si ottiene quindi $I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i$, che per $\Delta m_i \rightarrow 0$ diventa: $I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm$

↪ L'integrale precedente si può scrivere come $I = \int p r^2 dV$

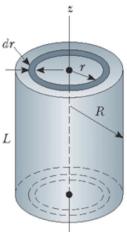
$$\begin{aligned} p &= \text{densità di volume } \text{m}/\text{m}^3 \\ \sigma' &= \text{densità superficiale } \text{m}/\text{s} \\ \lambda &= \text{densità lineare } \text{pa} \text{ m}/\text{m} \end{aligned}$$

MOMENTI di INERZIA di CORPI SEMPLICI

① Molecola biammonica omonucleare: due atomi di massa μ a distanza d da un'asse centrale

$$I = M \left(\frac{d}{2} \right)^2 + \mu \left(-\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} M d^2$$

② Cilindro omogeneo attorno al suo asse



$$P = \frac{M}{\pi R^2 L}$$

$$dm = p (2\pi r L) dr$$

$$I = \int_0^R r^2 p (2\pi r L) dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4L} = \frac{MR^2}{2}$$

= DISCO CIRCOLARE

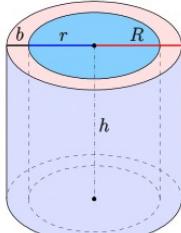
③ Cilindro cilindrico sottile

$$\rightarrow I = MR^2$$

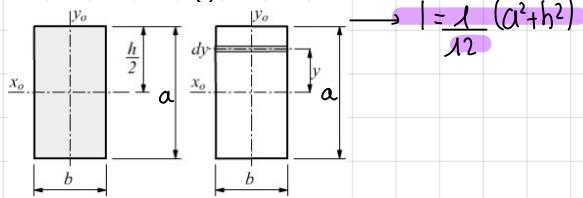


④ Cilindro CONICO

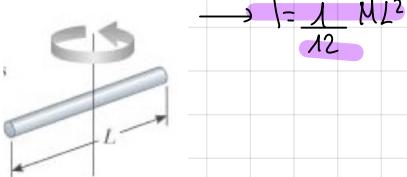
$$\rightarrow I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$$



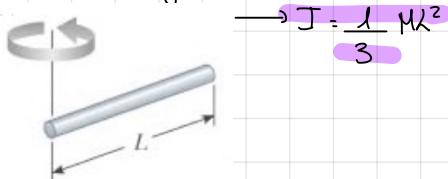
5) Piastra rettangolare



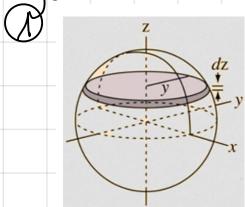
6) Sbarretta lunga e sottile (asse di rotazione per il centro)



7) Sbarretta lunga e sottile (asse di rotazione per un estremo)



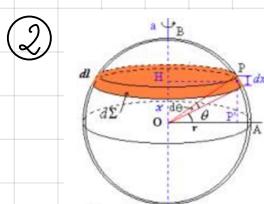
8) Sfera



$$I = \int_{-R}^R \left(\frac{\rho \pi y^2}{2} \right) y^2 dz = \rho \pi \int_0^R y^4 dz$$

↳ Utilizzando $y^2 + z^2 = R^2$ $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$

$$I = \frac{3M}{4R^3} \int_0^R (R^4 - z^2)^2 dz = \frac{3M}{4R^3} \int_0^R (R^4 + z^4 - 2R^2 z^2) dz = \frac{3M}{4R^3} \left[R^4 z + \frac{z^5}{5} - 2R^2 \frac{z^3}{3} \right]_0^R = \frac{2MR^2}{5}$$



$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \pi (R \cos \theta)^2 \frac{(R \cos \theta)^2 R \cos \theta d\theta}{dV} \rightarrow \rho R^5 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta = \frac{3}{4} MR^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta) d\theta$$

→ Il TEOREMA degli ASSI PARALLELI

↳ $I = I_{CM} + Md^2$ → I_{CM} è il momento di inerzia rispetto ad un asse parallelo a quello considerato, distante d da questo, e passante per il centro di massa del sistema considerato.

Dimostrazione

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i [(\vec{r}_i + \vec{d})]^2 = \sum_i m_i r_i^2 + \sum_i m_i \vec{d}^2 + 2 \sum_i (\vec{m}_i \vec{r}_i) \cdot \vec{d}$$

→ Il MOMENTO di una forza

↳ Per produrre la rotazione di un corpo è necessario un MOMENTO

↓

Definito come $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$, dove \vec{r} è il "raggio" che indica la distanza del POLO (Arbitrario)

↳ Nullo se $F = 0$

- Il polo coincide con il punto di applicazione ($r=0$)
- r ed F sono PARALLELI

Indica la tendenza di una forza a far ruotare un corpo → SOLO la forza \perp produce momento angolare

↳ Modulo: $T = rF \sin \phi = Fd$ → d si chiama BRACCIO: distanza fra asse di rotazione e retta di azione → retta che contiene il vettore applicato (vettore della forza)

Aumenta al crescere del braccio e SOLO la forza \perp produce rotazioni

↳ Positivo se la rotazione prodotta è ANTICORARIA, negativo se la rotazione è ORARIA

↳ Unità di misura: N·m

→ Il MOMENTO ANGOLARE

↳ Si consideri un punto materiale di massa m , a cui è associata la quantità di moto \vec{p} e la cui posizione sia individuata dal vettore \vec{r}

↓

Legge traslazionale: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ per \vec{r} $\vec{r} \times \vec{\tau} = \sum \vec{T} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$ Aggiungendo $\frac{d\vec{r} \times \vec{p}}{dt}$ $\sum \vec{T} = r \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r} \times \vec{p}}{dt}$

→ Si ha che il secondo membro è la derivata di $\vec{r} \times \vec{p}$ e quindi $\sum \vec{\tau} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt}$

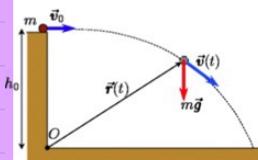
Il momento angolare $\vec{\omega}_0$ di un punto materiale rispetto ad un asse passante per l'origine O è, ad un certo istante, il prodotto vettoriale tra il vettore posizione \vec{r} del punto materiale e la sua quantità di moto \vec{p} : $\vec{\omega}_0 = \vec{r} \times \vec{p}$

→ Ha lo stesso ruolo che ha \vec{p} nel moto traslatorio

La relazione $\sum \vec{\tau} = \frac{d \vec{\omega}_0}{dt}$ è valida SOLO SE sono misurati rispetto allo stesso asse

→ La direzione, il modulo ed anche il verso di $\vec{\omega}_0$ dipendono dalla rotazione dell'asse → la direzione è perpendicolare al piano di \vec{r} e \vec{p} , ed il verso è dato dalla regola della mano destra, mentre il modulo è dato da $|\vec{\omega}_0| = m v_{\text{rel}} / r$

Esempio



→ Equazioni del moto

$$\rightarrow \begin{cases} \text{Velocità} \\ \rightarrow V_x(t) = V_0 \\ \rightarrow V_y(t) = -gt \end{cases}$$

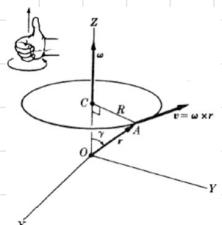
$$\rightarrow \begin{cases} \text{Posizione} \\ \rightarrow X(t) = V_0 t \\ \rightarrow Y(t) = h_0 - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\text{Momento angolare: } \vec{\omega}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v} = m \left(X V_y - Y V_x \right) \hat{k} = -m V_0 \left(h_0 + \frac{1}{2} g t^2 \right) \hat{k}$$

$$\text{Momento forza di gravità: } \vec{T} = \vec{r} \times \vec{F_g} = m \vec{r} \times \vec{g} = -m g x \hat{i} = -m (V_0 t) \hat{i}$$

$$\text{Derivando il momento angolare: } \frac{d}{dt} \left(-m V_0 \left(h_0 + \frac{1}{2} g t^2 \right) \hat{k} \right) \stackrel{!}{=} -m (V_0 g) \hat{i}$$

→ Momento angolare di un corpo rigido in ROTAZIONE



→ Tutti i punti del corpo rigido si muovono con velocità angolare ω
→ La forza centripeta ha momento nullo rispetto a C e quindi si ha che $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F_C} = 0$, da cui $\frac{d \vec{\omega}_0}{dt} = 0$

Il vettore $\vec{\omega}_0$ è COSTANTE, ha modulo $|\vec{\omega}_0| = m \omega r^2$ e direzione perpendicolare al piano

$$\text{Rispetto ad un punto generico CO nell'asse si ha } \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \text{ e quindi } \vec{\omega}_0 = \vec{r} \times \vec{p} =$$

$$= \vec{r} \times (m \vec{\omega} \times \vec{r}) = \underbrace{m \omega r^2}_{\vec{\omega}_0 \parallel} \underbrace{\vec{r} \times (\vec{\omega} \cdot \vec{r})}_{\vec{\omega}_0 \perp} = \frac{d \vec{\omega}_0}{dt} = \vec{T}$$

$$\text{Derivando si ha } \frac{d \vec{\omega}_0}{dt} = I \frac{d \omega}{dt} = I \alpha \rightarrow \sum \tau_{\text{ext}} = I \alpha$$

Valida anche se l'asse è in movimento e passa per il centro di massa di un oggetto simmetrico

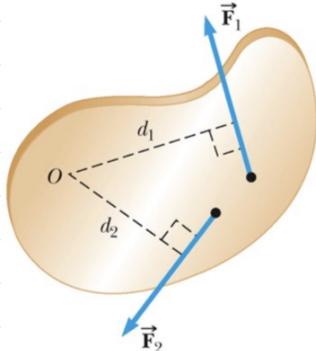
→ Momento angolare di un SISTEMA di PARTICELLE

$$\vec{\omega}_{\text{TOT}} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \dots + \vec{\omega}_n = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i \rightarrow \frac{d \vec{\omega}_{\text{TOT}}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d \vec{\omega}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i = \vec{\tau}_{\text{ext}}$$

Le forze interne non danno momento perché si annullano per la 3^a legge di Newton

$$\Delta \vec{\omega}_{\text{TOT}} = \int (\sum \tau_{\text{ext}}) dt \rightarrow \text{Teorema momento angolare - impulso angolare}$$

→ L'EQUILIBRIO ROTAZIONALE



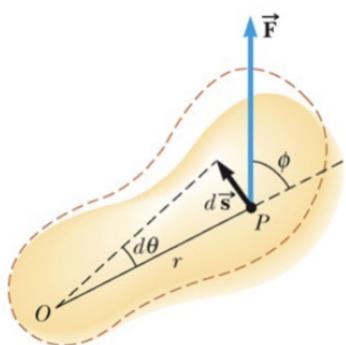
- ① La risultante delle FORZE ESTERNE deve essere NULLA
→ $\sum \vec{F}_{ext} = 0 \rightarrow$ Equilibrio TRASATORIO: $a_{CM} = 0$
 - ② La risultante dei momenti esterni calcolati rispetto a qualsiasi asse deve essere NULLA
→ $\sum \vec{T}_{ext} = 0 \rightarrow$ Equilibrio ROTATORIO: $\alpha = 0$
- Si ha equilibrio STATICO se anche $V_{CM} = 0$ e $\omega = 0$

→ La CONSERVAZIONE del MOMENTO ANGOLARE

Il momento angolare di un corpo è CONSERVATO se la risultante dei momenti esterni è NULLA → $\dot{\alpha}_0 = \text{costante} \rightarrow \alpha_{CM} = \dot{\alpha}_0 t$

Vero anche se la massa si redistribuisce ed il momento varia nel processo. In questo caso si ha che $\dot{\alpha}_0 = I_f \omega_f - I_i \omega_i$

→ ENERGIA in un moto ROTAZIONALE



$$\begin{aligned} & \rightarrow d\omega = \vec{F} \cdot \vec{ds} = \underbrace{(\vec{F}_{\text{senz}}) r}_{\text{Componente tangenziale di } \vec{F}} d\theta \quad \text{quindi } d\omega = \tau d\theta \\ & \rightarrow \text{da potenza si ricava dividendo per } dt \rightarrow P = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\tau d\theta}{dt} = \tau \omega \\ & \rightarrow \text{Teorema delle forze vive: } W = \int_{\phi_i}^{\phi_f} \tau d\theta = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I \omega d\omega = \Delta K_R \rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 \end{aligned}$$

→ Analogie tra moto traslatorio e moto rotatorio

Moto traslatorio

$$M = \sum_i m_i \ddot{x}_i$$

$$\bar{V} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \bar{v}_i$$

$$\bar{P} = M \bar{V}$$

$$K = \frac{1}{2} M \bar{V}^2$$

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{F} = M \vec{a} = \frac{d \vec{p}}{dt}$$

$$\bar{P} = \text{costante}$$

$$P = \vec{F} \cdot \bar{V}$$

→ TEOREMA di KOENIG per il MOMENTO ANGOLARE

Il momento angolare di un corpo rigido rispetto ad un polo fisso O si può scrivere come
 $\vec{\alpha}_0 = M \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + I_{CM} \vec{\omega}$

$$\downarrow$$

$$\vec{\alpha}_0 = \sum m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum m_i (\vec{r}_i + \vec{R}_{CM}) \times (\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i) = (\sum m_i \vec{r}_i) \times \vec{V}_{CM} + M \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} +$$

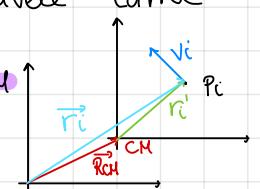
$$+ \vec{R}_{CM} \times \sum m_i \vec{v}_i + \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = M \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \sum m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_i'$$

$$\downarrow$$

$$\vec{\alpha}_0 = M \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \sum m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_i' \quad \text{O: qdm del CM im SCM}$$

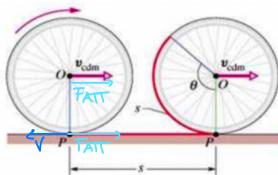
$$\vec{\alpha}_0 = \sum m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \Rightarrow M \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + I_{CM} \vec{\omega}$$

momento di inerzia rispetto ad un asse passante per CM parallelo a $\vec{\omega}$



→ Il moto di Puro Rotolamento

→ Il corpo rotola senza strisciare, quindi la velocità del punto di contatto lungo il piano è nulla → La forza di attrito nel punto P fa procedere tutto in avanti



→ Se nel punto P NON c'è attrito c'è una velocità wR e quindi la ruota gira su se stessa
→ Se FATT è adeguata, la ruota viene accelerata in avanti
 ↳ "TRASMESSA" al cdm

CONDIZIONI

$$\rightarrow S = R\theta \rightarrow \text{Nel tempo in cui la ruota compie un giro completo, il centro di massa percorre } 2\pi R$$

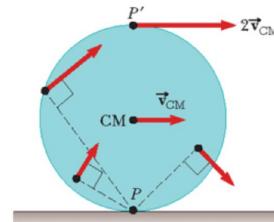
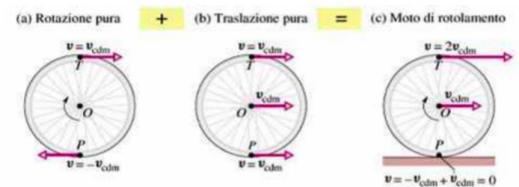
$$\rightarrow V_{CM} = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = RW$$

$$a_{CM} = \frac{dV_{CM}}{dt} = \frac{dRW}{dt} = Rx$$

Degli orarie

$$\rightarrow x(t) = R\sin(\omega t) + RT$$

$$\rightarrow y(t) = R\cos(\omega t) + RT$$



Moto di rotazione intorno ad un asse intorno passante per il punto P, di velocità angolare w
↳ $V_{CM} = wR$, $v^P = \omega w R$

ENERGIA CINETICA: $K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I w^2 = \frac{1}{2} (M R^2 + I) w^2 = \frac{1}{2} I' w^2 \rightarrow I' = MR^2 + I$

→ I' è la conseguenza del teorema degli assi paralleli.
In questo caso l'energia coincide con quella di un moto di SOLO ROTAZIONE

Forze e lavoro → Nel moto di Puro Rotolamento l'attrito è STATICO, quindi NON FA LAVORO

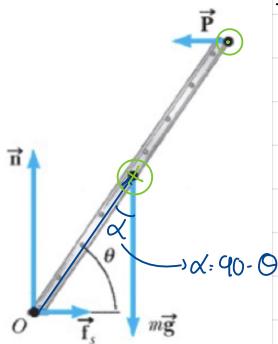
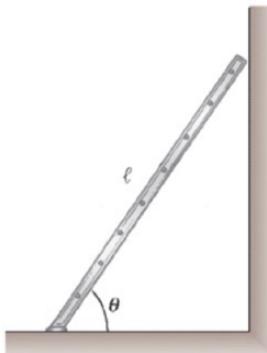
$$\downarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x(t) = R\omega \cos(\omega t) + wR \\ V_y(t) = -R\omega \sin(\omega t) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} V_x(\pi/w) = 0 \\ V_y(\pi/w) = 0 \end{array} \right.$$

Se c'è anche strisciamento allora c'è attrito dinamico e quindi l'energia viene dissipata

Esercizi di esempio

①



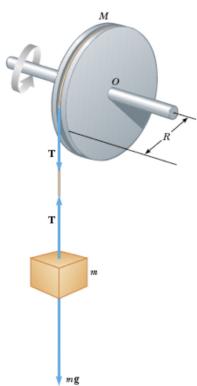
$\rightarrow \theta_{\min}$ per il quale la ruota si muove

Equilibrio

$$\begin{aligned} &\rightarrow \text{Traslatorio: } \sum \vec{F} = 0 \rightarrow \vec{F}_{AS} \leq \mu s \vec{n} \\ &\rightarrow \text{Rotazionale: } \sum \vec{T} = 0 \rightarrow T_p + T_{mg} = 0 \rightarrow mg \leq \cos \theta \cdot P \leq \mu s n \end{aligned}$$

$$P = \frac{mg}{2 \tan \theta} \rightarrow \frac{mg}{2 \tan \theta} \leq \mu s n \rightarrow \tan \theta > \frac{1}{2 \mu s} \rightarrow \tan \theta = \arctan \left(\frac{1}{2 \mu s} \right)$$

②



\rightarrow Accelerazione angolare della ruota, tensione della corda e accelerazione dell'oggetto

$$\text{Legge della dinamica sul corpo sospeso} \rightarrow \sum \vec{F} = ma$$

Si ha quindi $mg - T = ma$, da cui $a = \frac{mg - T}{m}$

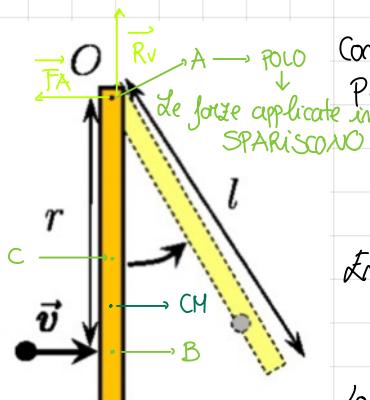
$$\text{La ruota e il corpo hanno la stessa accelerazione } a = \alpha r \text{ per } r = R$$

e quindi $\alpha = \frac{mg - T}{Rm}$, ma $\alpha = \frac{IR}{I} = \frac{\Gamma}{I}$ da $I\alpha = \Gamma$

$$\text{Da queste relazioni si ha che } \frac{mg - T}{Rm} = \frac{IR}{I} \rightarrow mgI - TI = TR^2m$$

$$\text{da cui } T = \frac{mg}{1 + (MR^2/I)}$$

③



Conservazione?

P \rightarrow Forze impulsive? Si, è presente una forza impulsiva sul vincolo poiché altrimenti il corpo si muoverebbe verso DESTRA

La quantità di moto NON si conserva
mecc? Non si conserva perché la forza di deformazione NON è conservativa, mentre R_V ed F_A NON influenzano l'energia perché il corpo è FERMO e quindi NON fanno lavoro

Io? Anche in questo caso contiamo solo quelle che danno un MOMENTO IMPULSIVO

$$\hookrightarrow \text{Si conserva: } \vec{\omega}_i = \vec{\omega}_f \rightarrow \Delta \vec{\omega} = \vec{M}_V \rightarrow r \perp p$$

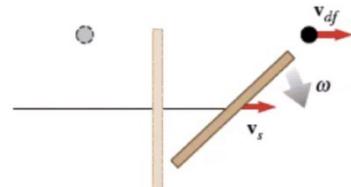
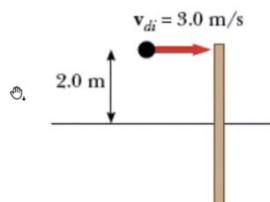
$$\Delta \vec{\omega} = Iw \rightarrow w = \frac{Mv_0r}{I}$$

$$\text{Impulso assorbito dal vincolo: } \int \vec{F}_A dt = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$(m+M) \omega r c_m$

Δ Nel caso di un corpo vincolato, scegliere il vincolo come polo

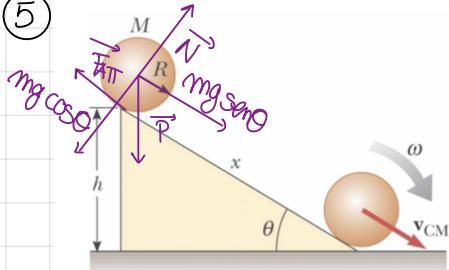
(4)



NON ci sono vincoli, quindi si conserva la quantità di moto e l'energia PUÒ CONSERVARSI se l'urto è elastico → Δ ENERGIA CINETICA: centro di massa e intorno al cdm
 ↓
 ↗ traslazionale ↗ rotazionale

Si conserva anche il MOMENTO ANGOLARE → Δ Scegli il cdm dell'arco

(5)



→ Moto di PIANO ROTAZIONE

↓ L'energia si conserva perché l'attrito NON FA LAVORO

$$K = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{v^2}{2} \left(M + \frac{I}{R^2} \right)$$

$$U = mg\gamma \text{ dove } \Delta \gamma \text{ è la quota del CENTRO di MASSA}$$

$$\Delta E_i = Mg(h+R) = \frac{v^2}{2} \left(M + \frac{I}{R^2} \right) + MgR = \Delta E_f$$

Dinamica

↓ lungo il piano: $Ma = Mg\sin\theta - F_{att}$ ↗ parallele al piano: $N = mg\cos\theta$ → N = reazione vincolare

$F_a \leq \mu s N$ altrimenti il corpo scivola

Equazioni della dinamica: $\begin{cases} \vec{F}_{est} = \vec{ma} \\ \vec{r} \times \vec{F}_{est} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{I}\alpha \end{cases}$ → Dinamica traslazionale: ①

→ Dinamica rotazionale: ②

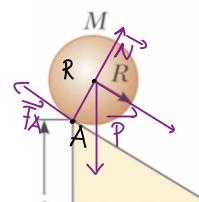
$$\text{da ②: } I\alpha = RFa \rightarrow Fa = \frac{Ia}{R^2}$$

$$\text{Sostituendo in ①: } Ma = Mg\sin\theta - \frac{Ia}{R^2} \rightarrow \left(M + \frac{I}{R^2} \right) a = Mg\sin\theta \rightarrow a = \frac{Mg\sin\theta}{M + I/R^2}$$

Quindi $F_a = \frac{Ia}{MR^2 + I}$, dove $a = Mg\sin\theta$ è la forza che spinge il corpo

↓ $F_a \leq \mu s N = \mu s Mg\cos\theta$ → Se NON è vera, il corpo STRISCA e NON può fare rotolamento puro: $\theta =$ angolo massimo

Si puo' risolvere anche per un arco puntuale per il punto di contatto istantaneo
 ↓ $I\alpha = T = RMg\sin\theta$, dove $I = I + MR^2$ (assi paralleli)



$$\begin{aligned} & \vec{r} \times \vec{F}_a = 0 \\ & \vec{r} \times (N - mg\cos\theta) = 0 \\ & \vec{r} \times mg\sin\theta = \vec{r} = I\alpha \end{aligned}$$

↓ SOLO questa forza ha braccio

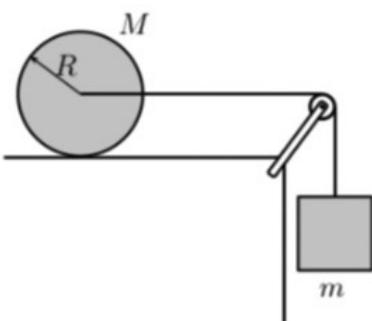
→ Massima γ per cui il moto è di puro rotolamento con μs e M_d

$$\begin{cases} Ma = mg - T \\ Ma = T - Fa \\ I\alpha = RFa \end{cases}$$

$$\downarrow 1+2: (m+M)a = mg - Fa$$

$$\downarrow 3: \frac{m}{2}a = Fa \rightarrow \frac{Ma}{2} \leq \mu s Mg \rightarrow \frac{m}{2m+3M} \leq \mu s$$

(6)



↑ filo inestensibile

Con strisciamento: STESE EQUAZIONI ma al Rd

$$\rightarrow \text{da 1+2: } (m+M)a = mg - \mu s Mg \rightarrow a = \frac{mg - \mu s Mg}{m+M}$$

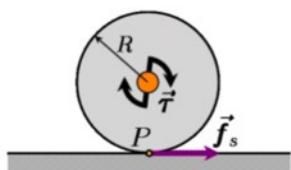
$$\rightarrow \text{da 3: } \alpha = \frac{\mu s Mg}{I}$$

→ Puro rotolamento: $\begin{cases} Ma = Fa : \text{ moto traslazionale} \\ I\alpha = T - RFa \end{cases}$

$$a = \alpha R \rightarrow a = \frac{RT}{I + MR^2}, \quad Fa = \frac{MRT}{I + MR^2} \rightarrow \text{Springe in avanti}$$

$$Fa \leq \mu s N, \text{ dove } N = Mg$$

⑦



1) ATT: Esercizio di esame

Due masse puntiformi $m_1 = 6.0 \text{ kg}$ e $m_2 = 1.5 \text{ kg}$ ruotano da versi opposti attorno a un'asta di lunghezza $l = 6.2 \text{ m}$ e massa $M = 1.7 \text{ kg}$. Le due masse si muovono con velocità di modulo $v_1 = 6.2 \text{ m/s}$ e $v_2 = 1.6 \text{ m/s}$. L'urto è perfettamente elastico e avviene nello istante iniziale per entrambe le masse.

① Velocità del centro di massa subito dopo l'urto e la distanza del centro di massa dal punto O

1.a Conservazione: Energia: NO

Quantità di moto? Sì, non ci sono forze esterne

↓

$$\text{Si ha quindi } p_i = p_f \rightarrow p_i = M_1 v_1 - M_2 v_2 + OM \rightarrow V_{CM} = \frac{M_1 v_1 - M_2 v_2}{M_1 + M_2 + M}$$

$$p_f = (m_1 + m_2 + M) V_{CM}$$

1.b Distanza del centro di massa da O

→ Centro di massa del sistema = centro di massa dei centri di massa

$$y_{CM} = 0 + M_2 l + \frac{M_1 l}{M_1 + M_2 + M}$$

② Modulo della velocità angolare dopo l'urto

→ ATT: Quando non c'è il vincolo come in questo caso scegliere il centro di massa come polo

da scelta del centro di massa del polo ci permette di utilizzare la conservazione del momento angolare in quanto non agiscono forze che hanno momento angolare

$$\alpha_{xi} = \alpha_{zf} \rightarrow \alpha_{xi} = M_1 v_1 d_{CM} + M_2 v_2 (l - d_{CM}) \rightarrow \omega_S = \frac{M_1 v_1 d_{CM} + M_2 v_2 (l - d_{CM})}{I_{Z_{CM}}^{CM}}$$

$$\alpha_{zf} = I_{Z_{CM}}^{CM} \omega_S$$

Dovendo calcolare $I_{Z_{CM}}^{CM}$ → Teorema degli assi paralleli

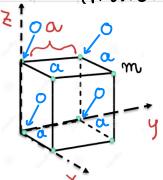
$$I_{Z_{CM}}^{CM} = I_{CM,sta} + M(l/2 - d_{CM})^2 + M_1 d_{CM}^2 + M_2 (l - d_{CM})^2$$

③ Energia dissipata ΔE_{diss}

$$\Delta E_{diss} = E_i - E_f \rightarrow E_i = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2$$

$$\rightarrow E_f = \frac{1}{2} I_{Z_{CM}}^{CM} \omega_S^2 + \frac{1}{2} (M_1 + M_2 + M) V_{CM}^2 \rightarrow \text{ATT: c'è sia energia ROTAZIONALE che TRASLATORIALE}$$

② Determinare il centro di massa di un corpo rigido formato da masse puntiformi di massa m poste ai vertici di un cubo di lato a , collegate tra loro con barre di massa trascurabile



→ Il cubo è SIMMETRICO, quindi si ha $x_{CM} = y_{CM} = z_{CM}$

$$x_{CM} = \frac{4ma}{8m} = \frac{a}{2} = y_{CM} = z_{CM}$$

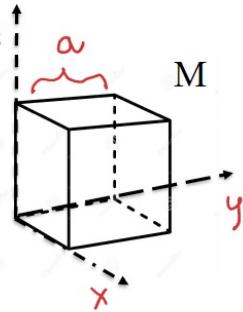
Determinare il momento di inerzia del corpo rigido formato da masse puntiformi di massa m poste ai vertici di un cubo di lato a , collegate tra loro con barre di massa trascurabile, rispetto ai tre assi cui in figura poniamo per il centro di massa del sistema i

$$I_{Z_{CM}}^{CM} = \sum_{i=1}^8 m_i (x_i^2 + y_i^2) \rightarrow \text{Anche in questo caso vale la simmetria, quindi } I_{x_{CM}}^{CM} = I_{y_{CM}}^{CM} = I_{z_{CM}}^{CM}$$

$$\sum_{i=1}^8 m_i = 8m \quad \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$I_{Z_{CM}}^{CM} = 8m \cdot \frac{a^2}{2} = 4a^2$$

(3)



Determinare il barycentro di un cubo omogeneo di lato a e massa M

$$\rightarrow x_{CM} = \frac{1}{M} \int dm x$$

$$\rightarrow y_{CM} = \frac{1}{M} \int dm y \quad \rightarrow \text{TROVO da} \rightarrow \rho \frac{dV}{dV} = M \quad \rightarrow dV = \rho dV$$

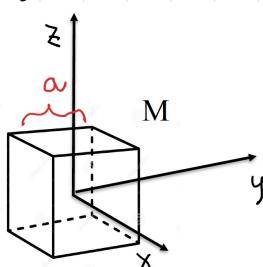
$$\rightarrow z_{CM} = \frac{1}{M} \int dm z$$

Essendo che il volume si distribuisce sulle 3 direzioni si ha

$$\hookrightarrow x_{CM} = \frac{1}{M} \int \rho dV x = \frac{\rho}{M} \int dx dy dz x = \frac{\rho}{M} \int_0^a x dx \int_0^a dy \int_0^a dz = \frac{\rho}{M} \frac{x^2}{2} \cdot y \cdot z \Big|_0^a = \frac{\rho}{M} \frac{a^2 \cdot a \cdot a}{2} =$$

$$= \frac{M}{a^3} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{a^4}{2} = \frac{a}{2} \quad \rightarrow \text{Essendo simmetrico, anche in questo caso } x_{CM} = y_{CM} = z_{CM}$$

Determinare il momento di inerzia di lato a e massa M rispetto ai 3 assi indicati in figura passanti per il centro di massa



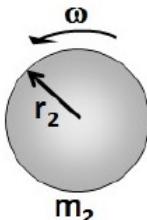
$$\rightarrow I_{CM}^z = \int dm (x^2 + y^2)$$

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{a^3} \quad \rightarrow \rho = \frac{M}{a^3} \quad \rightarrow dm = \rho dV$$

$$\int (x^2 + y^2) \rho dV = \rho \int (x^2 + y^2) dx dy dz$$

(4)

⚠
F
S
A
M



Sfere di massa m_1 ed m_2 e raggio r_1 ed r_2
si urtano e rimangono attaccate \rightarrow urto completamente
inelastico

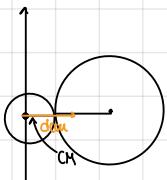
Sfera 1 ha velocità v_1

Sfera 2 ha velocità w_2

E ① Energia cinetica del sistema e distanza tra centro di massa del sistema (dopo l'urto) e il centro della prima sfera

$$K_{mu} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$K_{mu} = \frac{1}{2} I w^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m_2 r_2^2 w^2 = \frac{m_2 r_2^2 w^2}{5}$$



\rightarrow Centro di massa del centro di massa

$$\hookrightarrow x_{CM} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 (r_1 + r_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (r_1 + r_2)}{m_1 + m_2}$$

② Velocità angolare del sistema dopo l'urto e la massima velocità del centro della seconda sfera rispetto al laboratorio

\hookrightarrow Conservazione \rightarrow Quantità di moto ①

\rightarrow Momento angolare: Scelto il CM come polo ⚠ Sistema NON vincolato ②

$$\begin{aligned} ① \quad p_i &= p_f \quad \rightarrow p_i = m_1 v_1 \quad \rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_{CM} \quad \rightarrow v_{CM} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \\ &\quad \rightarrow p_f = (m_1 + m_2) v_{CM} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{d\omega}{dt} = 0 \longrightarrow \omega_0 = \omega_f \quad \boxed{\omega_0 = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{m}\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{m}\vec{v}_2}{I_{CM}}} + \frac{I_2 w_2}{I} \longrightarrow W_{CM} = I_2 w_2$$

$$I = I_{CM,1} + M_1 d^2 c_m + I_{CM,2} + M_2 (r_1 + r_2 - dc_m)^2$$

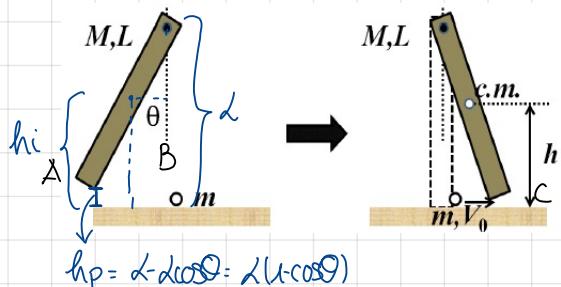
Velocità massima Δ C'È ANCHE LA VELOCITÀ TANGENZIALE COSTANTE

$$\hookrightarrow v_{TANQ} = (r_1 + r_2 - dc_m) w \quad V_{MAX} = (r_1 + r_2 - dc_m) w + V_{CM}$$

(3) Variazione di energia

$$\hookrightarrow \Delta E = E_f - E_i \quad \boxed{E_f = \frac{1}{2} I w^2 + \frac{1}{2} (M_1 + M_2) V_{CM}^2} \\ \boxed{E_i = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 r_2^2 w^2}$$

(5) Δ ATT: Esercizio di esame (Non sul nito della ciocca)



Sbarra di lunghezza L e massa M vincolata a ruotare attorno ad un asse passante per estremo. Angolo iniziale $\theta = 30^\circ$, $V_0 = 0$. In posizione verticale colpisce mano m che si muove su piano con attrito μ_0 ignoto. La sbarra continua a ruotare

(1) Si dimostri che una sbarra fa le seguenti quantità si conserva rispettivamente durante l'urto: quantità di moto totale, momento angolare rispetto all'asse di rotazione, energia meccanica del sistema

→ Energia: NON è specificato se si ha un urto elastico, quindi NON è possibile dire con certezza se l'energia si conserva oppure no

→ Quantità di moto: Siamo sicuri che NON si conserva perché sul vincolo agiscono forze impulsive, che quindi la fanno variare

→ Momento rispetto all'asse: Si ha che $\frac{d\omega}{dt} = \Sigma F_{ext}$ Δ delle forze relative all'urto non dà

vanno quindi considerate, le forze dovute al vincolo non hanno braccio e quindi nemmeno momento e la forza di gravità è // al braccio, quindi ha momento nullo

(2) Velocità angolare della sbarra dopo l'urto e quota h a cui risale il suo centro di massa. V_{max} per cui la sbarra riunghia all'indietro.

PRIMA dell'URTO: Conservazione dell'energia

$$\Delta A = \Delta B \quad \boxed{\Delta A = Mg h i = Mg(L + h p) = Mg(L + \frac{L}{2}(1-\cos\theta)) = Mg \frac{L}{2} (2 - \cos\theta)}$$

$$\boxed{\Delta B = \frac{1}{2} M V_{avg}^2 + \frac{1}{2} I w_B^2 + \frac{Mg^2 L^2}{2}}$$

↓ O: NON TRASLA

$$\boxed{\Delta B = \frac{1}{2} \frac{1}{3} M L^2 \cdot w_B^2 + Mg \frac{L}{2}}$$

$$\frac{Mg \cancel{L}}{\cancel{2}} (2 - \cos\theta) = \frac{1}{\cancel{3}} M L^2 w_B^2 + Mg \cancel{L} \longrightarrow 2g - g\cos\theta = \frac{1}{3} W_B^2 L + g \longrightarrow$$

$$\longrightarrow g(1 - \cos\theta) = \frac{1}{3} L W_B^2 \longrightarrow W_B = \sqrt{\frac{3g(1 - \cos\theta)}{L}}$$

DURANTE l'URTO: Conservazione del momento angolare

$$\omega_B = \omega_B' \quad \boxed{\omega_B = I w_B = \frac{1}{3} M L^2 w_B \longrightarrow \frac{1}{3} M L^2 w_B = \frac{1}{3} M L^2 w_B' + m \cancel{L} v_B'}$$

$$\downarrow \quad \boxed{\omega_B' = \frac{1}{3} M L^2 w_B^2 + m \cancel{L} v_B'}$$

B' : dopo l'urto

$$\hookrightarrow w_B' = W_B - \frac{3m v_B'}{M L} = \sqrt{\frac{3g(1 - \cos\theta)}{L}} - \frac{3m v_B'}{M L}$$

Dopo l'urto: l'energia Δ della sbarra Δ si conserva

$$\hookrightarrow E_B' = E_C \quad \boxed{E_B' = \frac{1}{2} I W_{B'}^2 + \frac{Mg}{2} \frac{L}{2}} \longrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{3} \cancel{\lambda^2} W_{B'}^2 + \cancel{Mg} \frac{L}{2} = \cancel{Mg} h_C$$

$$\hookrightarrow E_C = \frac{1}{2} I W_C^2 + Mg h_C \quad \downarrow_0$$

$$h_C = \frac{1}{6g} \cancel{\lambda^2} W_{B'}^2 + \frac{L}{2} = \frac{L}{2} \left(\cancel{\lambda} W_{B'}^2 + 1 \right)$$

Valore massimo di V_0 per cui la sbarra rimbalza all'indietro

$$\hookrightarrow W_{B'} \text{ deve essere NEGATIVA} \rightarrow W_{B'} = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{2}} - \frac{3mV_{B'}}{ML} < 0$$

$$\sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{2}} - \frac{3mV_{B'}}{ML} < 0 \longrightarrow -\frac{3mV_{B'}}{ML} < -\sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}} \longrightarrow \frac{3mV_{B'}}{ML} > \sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}}$$

$$\longrightarrow V_{B'} > \frac{ML}{3m} \sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}} \longrightarrow V_{B' \text{ min}} = \frac{ML}{3m} \sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}}$$

- (3) Variazione di
- \rightarrow Energia a.
 - \rightarrow Quantità di moto b.
 - \rightarrow Momento angolare c.

a. Variazione di energia tra B e B' ($h_B = h_{B'} \rightarrow$ Stessa U)

$$\hookrightarrow K_i = \frac{1}{2} I W_B^2 = \frac{ML^2}{6} W_B^2 \quad \cancel{\text{red}}$$

$$\hookrightarrow K_f = \frac{1}{2} I W_{B'}^2 + \frac{1}{2} m V_{B'}^2 = \frac{ML^2}{6} W_{B'}^2 + \frac{1}{2} m V_{B'}^2 = \frac{ML^2}{6} \left(W_B^2 + \frac{9m^2 V_0^2}{4} - \frac{6W_B m V_{B'}}{ML} \right) + \frac{m V_{B'}^2}{2}$$

$$= K_i + \frac{3m^2 V_{B'}^2}{2M} - (W_B m V_{B'}) L + \frac{m}{2} V_{B'}^2 = K_i + \frac{m V_{B'}^2}{2} \left(\frac{3m}{M} - \frac{2W_B L}{V_{B'}} + 1 \right)$$

$$\longrightarrow \Delta K = K_f - K_i = \frac{m V_{B'}^2}{2} \left(\frac{3m}{M} - \frac{2W_B L}{V_{B'}} + 1 \right) \longrightarrow \text{Conservata se uno dei due fattori è uguale a 0}$$

$$\longrightarrow \frac{3m}{M} - \frac{2W_B L}{V_{B'}} + 1 = 0 \longrightarrow 3mV_{B'} - 3MW_B L + VB'M = 0 \longrightarrow V_{B'} = \frac{3MW_B L}{(3m+M)}$$

b. Variazione quantità di moto tra B e B'

$$\hookrightarrow \Delta p = p_{B'} - p_B \quad \rightarrow p_B = MV_B = M W_B \frac{L}{2}$$

$$\longrightarrow \Delta p = \frac{ML}{2} (W_{B'} - W_B) + m V_{B'}$$

$$\frac{ML}{2} (W_{B'} - W_B) + m V_{B'} = \frac{ML}{2} \left(\frac{W_B - 3mV_{B'}}{ML} - W_B \right) + m V_{B'} = -\frac{3}{2} m V_{B'} + m V_{B'} = -\frac{1}{2} m V_{B'}$$

\downarrow

NON può mai conservarsi a causa delle forze impulsive sul vincolo

c. Variazione del momento angolare: 0 \rightarrow Si conserva, quindi è COSTANTE

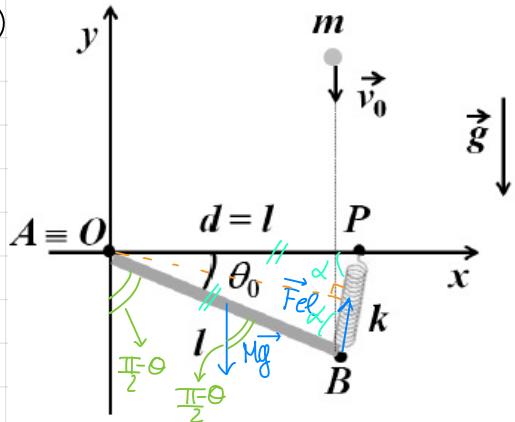
(4) A distanza l_1 da B' ha V_1 , mentre a distanza l_2 ha velocità V_2 . Chiedono V_0 e M_0

\hookrightarrow Si ha che $\Delta = \Delta K \rightarrow$ L'unica forza agente in questo caso è l'attrito, quindi possiamo scrivere le seguenti equazioni fissando lo 0 su B'.

$$\hookrightarrow \Delta K_{B' \rightarrow l_1} = S_0 - M_0 mg dl \longrightarrow \frac{1}{2} \gamma h V_{B'}^2 - \frac{1}{2} \gamma h V_{l_1}^2 = -M_0 mg l_1 \longrightarrow V_{B'} = \sqrt{V_{l_1}^2 - 2 \gamma g l_1}$$

$$\hookrightarrow \Delta K_{B' \rightarrow l_2} = S_0 - M_0 mg dl \longrightarrow \frac{1}{2} \gamma h V_{B'}^2 - \frac{1}{2} \gamma h V_{l_2}^2 = -M_0 mg (l_2 - l_1) \longrightarrow M_0 = \frac{V_{l_2}^2 - V_{l_1}^2}{2 \gamma g (l_2 - l_1)}$$

⑥



Stessa di lunghezza l e massa M incorniciata con l'estremo A nel punto O (origine).
Estremità B collegata a P ($\overline{OP} = l$) con una molla di costante k e lunghezza a riposo NULLA.
L'asta è in equilibrio all'inizio.

① Angolo θ_0 formato dell'asta IN EQUILIBRIO

→ EQUILIBRIO → $\sum \vec{F} = 0$

→ ROTAZIONALE : $\sum \vec{T} = 0$ ②

$$\begin{aligned} ② \sum T &= T_{\text{rel}} + T_{\text{Mg}} \rightarrow T_{\text{rel}} = \vec{R} \times \vec{F}_{\text{el}} = R_{\text{rel}} \sin \alpha \rightarrow \alpha + \theta_0 = 180 \rightarrow \alpha = 90 - \theta_0 \\ &= R_{\text{rel}} \sin \left(\theta_0 - \theta_0 \right) = R_{\text{rel}} \cos \theta_0 = \frac{l}{2} K \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_0}{2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow T_{\text{Mg}} = \vec{R} \times \vec{Mg} = \frac{l}{2} Mg \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) = \frac{l}{2} Mg \cos \theta_0$$

$$\begin{aligned} 2Kl^2 \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_0}{2} - \frac{l}{2} Mg \cos \theta_0 &= Kl^2 \sin \theta_0 - \frac{l}{2} Mg \cos \theta_0 = Kl^2 \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} - \frac{l}{2} Mg = 0 \\ \rightarrow Kl^2 \tan \theta_0 &= \frac{l}{2} Mg \rightarrow \tan \theta_0 = \frac{Mg}{2kl} \end{aligned}$$

② Pallina di manica m rotta la sbarretta nel punto di congiunzione tra asta e molla con velocità v_0 verso le y negative. L'urto è completamente elastico
Grandezze da discutere la conservazione → Quantità di moto a.
→ Momento angolare b.
→ Energia meccanica c.

c. L'energia NON si conserva perché l'urto è ANELASTICO

- a. La quantità di moto NON si conserva perché sono presenti forze impulsive (Reazione vincolare)
b. Il momento angolare SI CONSERVA negliendo il vincolo come polo in quanto NON ci sono forze esterne IMPULSIVE che lo fanno variare durante l'urto. Le uniche forze impulsive (reazione vincolare) NON hanno braccio e di conseguenza momento

③ Velocità angolare ω_0 dopo l'urto

→ Conservazione momento angolare: $\Delta \omega_i = \Delta \omega_f \rightarrow \Delta \omega_i = - Ml V_0 \cos \theta_0$

$\Delta \omega_f = \Delta \omega_i$ → La velocità v_0 "diventa" w in quanto pallina ed asta si muovono insieme

$$\Delta \omega_f = I w_0 + l M l w_0 = \frac{M l^2}{3} w_0 + l^2 M w_0$$

$$\text{Conservazione: } - Ml V_0 \cos \theta_0 = \frac{M l^2}{3} w_0 + l^2 M w_0 \rightarrow w_0 = - \left(\frac{3m}{8ml} \right) \frac{V_0 \cos \theta_0}{l} = - \frac{V_0 \cos \theta_0}{2l}$$

④ Impulso del perno durante l'urto

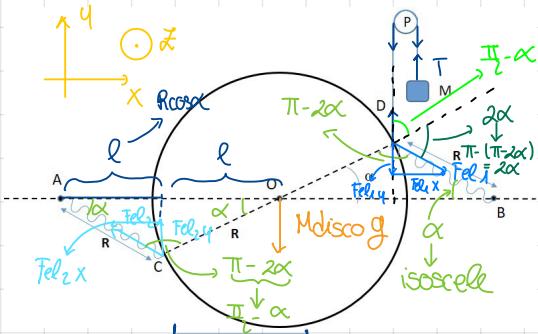
$$\begin{aligned} I &= \vec{p}_{\text{fin}} - \vec{p}_i \rightarrow \vec{p}_{\text{fin}} = M \vec{w}_0 \times \frac{\vec{l}}{2} + m \vec{w}_0 \times \vec{l} \\ &\rightarrow \vec{p}_i = - m v_0 \hat{y} \end{aligned}$$

$$\vec{p}_{\text{fin}} = 3m \vec{w}_0 \times \frac{\vec{l}}{2} + m \vec{w}_0 \times \vec{l} = \frac{5}{2} m (\vec{w}_0 \times \vec{l}) = - \frac{5}{2} \left(\frac{3m}{3m+M} \right) \frac{V_0}{l} \cos \theta_0 (\hat{x} \times \vec{l})$$

$$\text{Calcolo di } \hat{x} \times \vec{l} = \hat{x} \times l (\hat{x} \cos \theta_0 - \hat{y} \sin \theta_0) = l (\hat{y} \cos \theta_0 + \hat{x} \sin \theta_0)$$

$$\vec{p}_{\text{fin}} = - \frac{5}{2} m \left(\frac{3m}{3m+M} \right) \frac{V_0}{l} \cos \theta_0 (\hat{y} \cos \theta_0 + \hat{x} \sin \theta_0) \xrightarrow{\text{svolgendo i calcoli}} I = - \left(\frac{5}{6} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y} \right) M \times S$$

⑦ **!ESAME** del 29/06/18



densità ρ legno, raggio R e spessore d
 ruota intorno ad un asse orizzontale passante
 per centro O

Molle con $l_0 = 0$ e $K_{BD} = K$, $K_{AC} = 2K$
 Filo esercita forza verticale in D.

Sistema em equilíbrio com $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e largura
molas = R. Maria M apesa de θ filo e correu da
mola. Descreva o movimento.

- ① Valore della R mossa M nella configurazione di equilibrio
 1^a equazione coordinata $\sum F_x = 0$

d^a equazione coordinate: $\Sigma T = 0$

Sul corpo M si ha che $\sum F = 0$ e quindi che $Mg - T = 0$, da cui $T = Mg$
 Sul disco possiamo utilizzare $\sum T = 0$

Forze che hanno momento: T , F_{el1} , F_{el2}

$$\begin{aligned} \sum T &= \underbrace{\vec{OB} \times \vec{T}}_{\text{descente:} +} + \underbrace{\vec{OB} \times \vec{F_{el_1}}}_{\text{entrante:} -} + \underbrace{\vec{OC} \times \vec{F_{el_2}}}_{\text{entrante:} -} = R Mg \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \hat{x} - R F_{el_1} \operatorname{sen} (\pi - 2\alpha) \hat{x} - R F_{el_2} \operatorname{sen} (\pi - 2\alpha) \hat{x} = 0 \\ &= (R Mg \cos \alpha - R^2 K \operatorname{sen} 2\alpha - 2KR^2 \operatorname{sen} 2\alpha) \hat{x} = 0 \implies \mu = \frac{3K R \operatorname{sen} 2\alpha}{g \cos \alpha} = \frac{6KR \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g \cos \alpha} = \\ &= 6KR \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{3KR}{g} \end{aligned}$$

- ② A $t=0$ il filo viene tagliato. Calcolare l'accelerazione angolare $\dot{\omega}$ e la reazione vincolare R_0 , subito dopo il taglio del filo.

Per le due operazioni cardinali si ha

$$\begin{cases} \vec{F}_0 + \vec{F}_{\text{el1}} + \vec{F}_{\text{el2}} + M_{\text{disco}} \vec{g} = \vec{M}_{\text{cam}} = 0 & \text{1a equazione cardinale} \\ \vec{T}_{\text{Fel1}} + \vec{T}_{\text{Fel2}} = \frac{\vec{d}\omega}{dt} = \vec{I}\dot{\omega} & \text{2a equazione cardinale} \end{cases}$$

o: sta fermo

Dalla 2^a equazione cardinale si ha

$$\rightarrow W = \frac{-3KR^2 \sin 2\alpha}{I} = \frac{-6KR^2 \sin 2\alpha}{M_{disc} R^2} = \frac{-6K \sin 2\alpha}{P \pi R^2 d}$$

$$M_{\text{disco}} = \rho \cdot \pi R^2 \cdot d$$

Dalla 1^a equazione coordinale si ha

$$\rightarrow \text{Sum X: } \overrightarrow{Rox} + \overrightarrow{F_{el_1}x} + \overrightarrow{F_{el_2}x} = 0 \longrightarrow Rox - 2KR\cos\alpha + KR\cos\alpha = 0$$

$$\text{Sum} : \vec{R}\omega y + \vec{F}_{el,1}y + \vec{F}_{el,2}y + \vec{M}_{discog} = 0 \implies R\omega - K_{R\omega}x - 2\pi R \sin x - M_{discog} = 0 \text{ b.}$$

$$a. \quad R_{ox} = KR \cos \alpha$$

$$b. \text{ Roy} = 3\pi R^2 \sigma d g$$

- ③ Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni T intorno alla posizione di equilibrio del sistema molle - disco, quando il filo è tagliato.

Intanto calcoliamo la posizione di equilibrio

$$1^{\circ} \text{ Equazione cardinale: } \vec{F}_0 + \vec{F}_{el_1} + \vec{F}_{el_2} + \vec{M}_{disco} = 0$$

2^u at equilibrium condition: $T_{FEL_1} + T_{FEL_2} = 0$

Dalla 1^a equazione cardinale si ha

$$\rightarrow x: R\ddot{x} - F_{iel} + F_{rel} = 0 \longrightarrow R\ddot{x} = F_{iel} - F_{rel}$$

$$\rightarrow y: R\ddot{y} + 2KR\sin\alpha - Kx_{end} - M_{discog}g = 0 \longrightarrow R\ddot{y} = M_{discog}g$$

Nella posizione di equilibrio le molle sono ORIZZONTALI

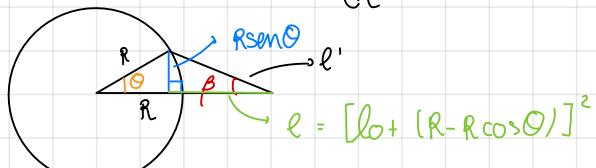
Posizione della molla in equilibrio: $\text{leg} = 2R\cos\alpha - R = R(2\cos\alpha - 1)$

$$R\ddot{x} = K\text{leg} - 2K\text{leg} = -K\text{leg} = -KR(2\cos\alpha - 1)$$

$$R\ddot{y} = M_{discog}g$$

Nel caso di piccoli spostamenti l'energia si conserva

$$\mathcal{E} = \text{COSTANTE} \longrightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$$



$$\dot{\mathcal{E}}^2 = \frac{R^2 \sin^2 \theta}{\theta^2} + [K\text{leg} + (R - R\cos\theta)]^2 = \underbrace{K\text{leg}^2}_{\sim 1} + R^2\theta^2$$

$$\mathcal{E} = K + U = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} K (K\text{leg}^2 + R^2\theta^2) + \frac{1}{2} M (K\text{leg}^2 + R^2\theta^2) = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{3}{2} K (K\text{leg}^2 + R^2\theta^2)$$

O: il sistema è vincolato nell'origine

$$\text{Si ha che } \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{3}{2} K (K\text{leg}^2 + R^2\theta^2) \right) = I\dot{\theta}\ddot{\theta} + 3R^2\theta\ddot{\theta}K \longrightarrow \underbrace{I\dot{\theta}\ddot{\theta}}_I + \underbrace{3R^2\theta\ddot{\theta}K}_I = 0$$

$$\underbrace{\ddot{\theta}(t) + \frac{3K R^2 \theta(t)}{I}}_I = 0 \longrightarrow \lambda^2 + \frac{3K R^2}{I} = 0 \longrightarrow \lambda = R\sqrt{\frac{3K}{I}} i \longrightarrow A \cos(\omega t + \phi)$$

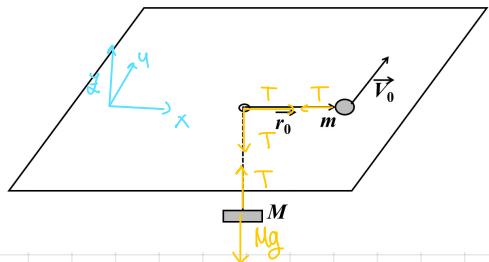
$$\omega = \sqrt{\frac{3KR^2}{I}} = \sqrt{\frac{6KR^2}{M_{discog}R^2}} = \sqrt{\frac{6K}{M_{discog}}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M_{discog}}{6K}} = \pi \sqrt{\frac{2M}{3K}}$$

Disco di massa m attaccato con corda ideale a corpo di massa M .

A $t=0$ il disco si trova ad una distanza r_0 dal foro ed ha velocità v_0 a 90° con la tensione del filo.

(8)



① Quantità conservative

- ① Quantità di moto del disco: Si conserva solo se avviene un moto circolare uniforme in quanto in quel caso V cambia solo di direzione
- ② Quantità di moto del corpo di massa M : Non si conserva perché il corpo potrebbe ricadere
- ③ Energia del sistema: L'unica forza non conservativa è la tensione della corda che però, essendo inestensibile, non fa lavoro
- ④ Momento angolare rispetto al buco: Si conserva perché l'unica forza che ha momento è la tensione che quindi non ha momento perché è parallela alla congiungente foro-disco

② V_0 minima perché il disco faccia un moto circolare uniforme

Applichiamo la II legge di Newton al disco

$$\hookrightarrow -\vec{T} = M a_c = -m \frac{V_0^2}{r_0} \hat{r}_0 \longrightarrow \vec{T} = \frac{m V_0^2}{r_0} \hat{r}_0 \quad a.$$

Applichiamo la II legge di Newton al corpo di massa M . Se il disco si muove di moto circolare uniforme, M è FERMO, quindi si ha $T - Mg = 0 \longrightarrow T = Mg$

$$\text{Da a. si ha } Mg = \frac{m V_0^2}{r_0} \longrightarrow V_{0\min} = \sqrt{\frac{Mg r_0}{m}}$$

③ Distanza foro-disco ≠ costante = r. $\omega(r) =$ velocità angolare quando è a distanza r dal foro. Determinare la relazione tra ω e r

Il MOMENTO ANGOLARE è COSTANTE

$$\alpha(r) = \vec{r} \times m\vec{v}(r)$$

$$\hookrightarrow \vec{r} = r\hat{r} \longrightarrow v(r) = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \frac{dr \cdot \hat{r}}{dt} + r \frac{d\hat{r}}{dt}$$

variazione di direzione di \hat{r}

$$\alpha(r) = mr\vec{r} \times (r\hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}) = 0 + mr\omega r\hat{u} = mr^2\vec{\omega} \longrightarrow \omega \text{ è diretta lungo } \hat{z}$$

ortogonale sia ad ω che ad r

$$\alpha(0) = \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0 = mro\vec{v}_0 \hat{z}$$

$$\alpha(0) = \alpha(r) \longrightarrow mfr^2\vec{\omega} = girovo \hat{z} \implies \vec{\omega} = \frac{v_0 v_0}{r^2} \hat{z}$$

④ Distanza disco-foro compresa tra r_{min} ed r_{max}

Quantità conservata: Energia $\rightarrow E = K_m + K_h + U_m$

$$\frac{1}{2}mV_m^2 \quad \downarrow \quad \text{corda lunga } l \longrightarrow U_m = -Mg(l-r)$$

$$\frac{1}{2}mV_h^2 \longrightarrow V_m = \frac{d}{dt}((l-r)\hat{z}) = \dot{r}\hat{z}$$

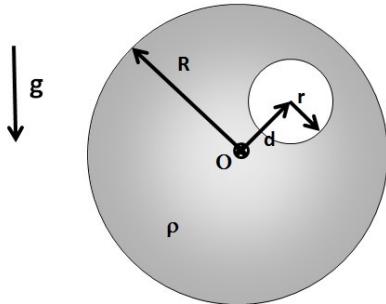
$$V_m = \dot{r}\hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} \longrightarrow V_m^2 = \dot{r}^2 + \omega^2 r^2$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2) + \frac{1}{2}M(\dot{r})^2 - Mg(l-r) \longrightarrow \dot{r} = 0 \text{ nei minimi / massimi per il teorema di Fermat}$$

$$E = \frac{1}{2}mw^2r^2 + Mgr^2 - Mgl = \frac{1}{2}m \frac{v_0^2}{r^2} \hat{z}^2 + Mgr^2 - Mgl$$

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_f - E_i \\ &\hookrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - Mgl + Mgr_0 = \frac{1}{2} \frac{mro^2v_0^2}{r^2} + Mgr^2 - Mgl \end{aligned}$$

⑨

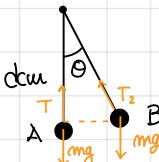


Cilindro di raggio R e spessore s con densità ρ
Foro di raggio r a distanza d dal centro
Immerso in un campo gravitazionale e libero di ruotare intorno al proprio asse centrale.
Quando il foro è in basso il cilindro ha velocità angolare ω .

① Frequenza delle piccole oscillazioni

Il corpo è in equilibrio quando il disco è in alto (cioè in basso)

Schematizzato come un pendolo:



L'energia si conserva, quindi si ha $\frac{dE}{dt} = 0$

$$E = K + U = K_{ROT} + U_{ROT} = \frac{1}{2}I_{SIS} \omega^2 + \frac{1}{2}(M+m)v_u^2 \hookrightarrow 0$$

Devo quindi determinare I_{sis} e d_{cau}

$$\rightarrow d_{\text{cau}} \rightarrow \text{Massa Totale} = \text{Massa cilindro pieno} + \text{Massa rimossa} (< 0) = \rho \pi S (R^2 - r^2) = M_{\text{TOT}}$$

$$\hookrightarrow m_{\text{pieno}} = \rho \pi R^2 S \quad \hookrightarrow m_{\text{rim}} = -\rho \pi r^2 S$$

$$d_{\text{cau}} = \frac{0 + d_{\text{mrim}}}{M_{\text{TOT}}} = \frac{d_{\text{mrim}}}{M_{\text{TOT}}} = \frac{-d \rho \pi r^2 S}{\rho \pi S (R^2 - r^2)} = \frac{\odot d r^2}{(R^2 - r^2)}$$

$$\rightarrow I_{\text{sis}} = I_{\text{pieno}} + I_{\text{vuoto}} + M_{\text{rim}} d^2 = \frac{M_{\text{pieno}} R^2}{2} + \frac{M_{\text{rim}} r^2}{2} + M_{\text{rim}} d^2$$

$$\text{Si ha che } \frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0, \text{ quindi } \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I_{\text{sis}} \dot{\theta}^2 + M g d_{\text{cau}} (1 - \cos \theta) \right) = 0$$

$$I_{\text{sis}} \ddot{\theta} + M g d_{\text{cau}} \underbrace{\sin \theta}_{\theta \text{ per } \theta \text{ piccoli}} \ddot{\theta} = I_{\text{sis}} \ddot{\theta} + M g d_{\text{cau}} \theta \ddot{\theta} = 0 \rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{M g d_{\text{cau}} \theta}{I_{\text{sis}}} \frac{1}{\omega^2}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{sis}}}{M g d_{\text{cau}}}}$$

② Velocità angolare del cilindro quando il foro è in alto

Anche in questo caso l'energia si conserva

$$\rightarrow \dot{x}_i = \frac{1}{2} I_{\text{sis}} \omega^2 + M_{\text{TOT}} g d_{\text{cau}} (1 - \cos \theta) \quad \text{π: è dal lato opposto di } d_{\text{cau}}$$

$$\rightarrow \dot{x}_f = \frac{1}{2} I_{\text{sis}} \omega^2 + M_{\text{TOT}} g d_{\text{cau}} (1 - \cos \theta) \quad \theta: \text{è SOPRA } d_{\text{cau}}$$

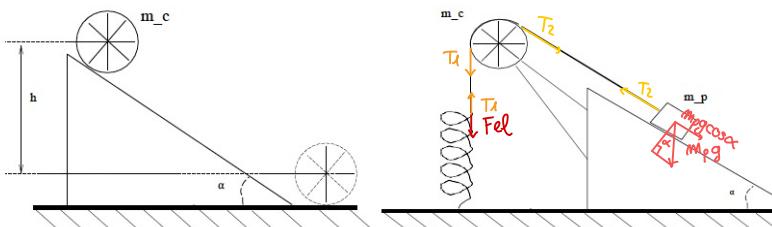
$$\frac{1}{2} I_{\text{sis}} \omega^2 = \frac{1}{2} I_{\text{sis}} \omega^2 + 2 M_{\text{TOT}} g d_{\text{cau}} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\omega^2 + 4 M_{\text{TOT}} g d_{\text{cau}}}{I_{\text{sis}}}}$$

③ Momento angolare minimo per fare fare una rotazione completa a partire dall'equilibrio stabile

Dove superare la metà, ovvero $\theta = \pi$

$$\rightarrow \dot{x}_i = \frac{1}{2} I_{\text{sis}} \omega_i^2 \rightarrow \omega_i > \sqrt{\frac{4 M_{\text{TOT}} g d_{\text{cau}}}{I_{\text{sis}}}} \rightarrow \omega_{\text{min}} > \frac{4 M_{\text{TOT}} g d_{\text{cau}}}{I_{\text{sis}}}$$

10)



Ruota di raggio R e massa m_c aggiunge la velocità v rendendo di una quota in un piano inclinato di α .

① Momento di inerzia della ruota rispetto all'asse passante per il suo centro

↪ l'energia si conserva in quanto si ha un moto di pure rotolamento

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \dot{x}_f \rightarrow \dot{x}_i = m_c h g \\ \dot{x}_f &= \frac{1}{2} I w^2 + \frac{1}{2} m c v^2 = \frac{1}{2} I v^2 + \frac{1}{2} m c v^2 \end{aligned} \rightarrow I = m_c R^2 \left(\frac{2gh}{v^2} - 1 \right)$$

② Lunghezza della molla quando il sistema è in equilibrio

In questo caso la ruota può ruotare senza attrito intorno al perno orizzontale fino passante per il suo centro.

Filo collegato a massa m_p NON slitta sulla ruota ed è collegato anche ad una molla di costante k .

Se il sistema è in equilibrio, nella ruota si ha $\sum T = 0, \sum F = 0$

Sulla molla si ha che $\sum F = 0$

Sulla massa si ha che $\sum F = 0$

Iniziamo dal corpo di massa M

$$\sum F = 0 \rightarrow M_p g \sin \alpha - T_1 = 0 \rightarrow T_1 = M_p g \sin \alpha$$

Continuiamo con la ruota

$$\sum T = 0 \rightarrow T_{T1} + T_{T2} = R \ddot{\theta} - R \ddot{\theta} = 0 \rightarrow \cancel{R(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2)} = 0 \rightarrow M_p g \sin \alpha = T_2 \rightarrow T_2 = -M_p g \sin \alpha$$

Finiamo con la molla

$$\sum F = 0 \rightarrow +K \Delta l - M_p g \sin \alpha = 0 \rightarrow \Delta l = +\frac{M_p g \sin \alpha}{K}$$

③ Periodo delle oscillazioni del sistema

$$\text{L'energia Si CONSERVA: } E = K_{\text{sis}} + U_{\text{sis}} = \frac{1}{2} M_p \dot{q}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} K (q + \Delta l)^2 - M_p g q \sin \alpha \quad \text{ORARIO}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = 0 \rightarrow & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M_p \dot{q}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} K (q + \Delta l)^2 - M_p g q \sin \alpha \right) = \\ & = \frac{1}{2} K \dot{q}^2 + K q \dot{\Delta l} + \frac{1}{2} K \Delta l \end{aligned}$$

$$\text{Dalla' equazione precedente si ha: } M_p \ddot{q} + \frac{I}{R^2} \ddot{\theta} + K(q + \Delta l) - M_p g \sin \alpha = 0$$

$$M_p \ddot{q} + \frac{I}{R^2} \ddot{\theta} + K(q + \Delta l) - M_p g \sin \alpha = 0 \rightarrow \left(M_p + \frac{I}{R^2} \right) \ddot{q} + K(q + \Delta l) - \cancel{M_p g \sin \alpha} = 0 \quad \cancel{K \Delta l} \text{ ad eq}$$

$$\left(M_p + \frac{I}{R^2} \right) \ddot{q} + K q = 0 \rightarrow \ddot{q} + \underbrace{\left(\frac{K R^2}{M_p R^2 + I} \right)}_{\text{Oscillatore armonico: } \omega^2} q = 0$$

Oscillatore armonico: ω^2

$$\text{Periodo: } \sqrt{\frac{M_p R^2 + I}{K R^2}} = 1.9 \text{ s}$$

④ Valori massimi tensioni lato molla T_{molla} e lato peso T_{peso}

Dalla' parte della' molla si ha che $T_{\text{molla}} - F_{\text{el}} = 0 \rightarrow$ La tensione è massima quando
 \downarrow
 la molla si forma

$$K(q + \Delta l)$$

$$q(t) = A \cos(\omega t + \phi) \rightarrow q(0) = 0 \text{ posizione di equilibrio: } A = \Delta l, \phi = \pi/2$$

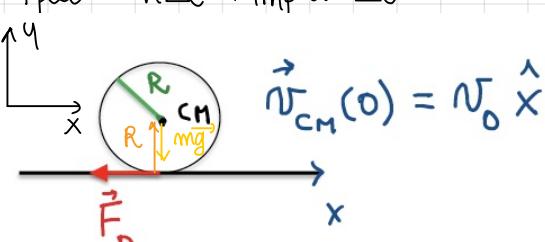
$$q(t) = \Delta l \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \dot{q}(t) = -\omega \Delta l \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \ddot{q}(t) = -\omega^2 \Delta l \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$T_{\text{molla}} = K(q + \Delta l) = K(q_{\text{max}} + \Delta l) = K \cdot 2\Delta l = 2 M_p g \sin \alpha$$

$\downarrow \Delta l$ perché $\sin \max = 1$

$$T_{\text{peso}} : \underbrace{M_p g \sin \alpha - T_{\text{peso}}}_{\text{EF}} = \underbrace{M_p \ddot{q}}_{\text{ma}} \rightarrow \frac{M_p g \sin \alpha - T_{\text{peso}}}{M_p \Delta l} = -\omega^2 \Delta l M_p$$

$$T_{\text{peso}} = K \Delta l \rightarrow M_p \omega^2 \Delta l$$



→ Cilindro di massa M e raggio R appoggiato su un piano orizzontale ricoperto con μ_0 . A $t=0$ viene impennato θ_0 lungo \hat{x} al cdru, mentre ω è nulla.

① Vettori in funzione del tempo

Equazioni cardinale: Per V_{cm} : $\sum \vec{F} = M \vec{a} \rightarrow$ Su x : $-F_D = M a_x$

$$\text{Per } \omega: \sum \vec{\tau} = I \vec{\alpha} = \frac{MR^2}{2} \vec{\alpha} = \frac{MR^2}{2} \vec{\omega} \rightarrow \downarrow \text{Polo: CM} \quad \vec{\omega} = \frac{R}{2} \vec{\alpha}$$

Unica forza che ha momento: $F_D: \vec{F_D} \times \vec{R} = \frac{MR^2}{2} \vec{\alpha} \rightarrow -F_D R = \frac{MR^2}{2} \vec{\alpha} \rightarrow -M_0 g R = \frac{MR^2}{2} \vec{\alpha}$

$$\hookrightarrow \text{Momento su } \hat{z}: f_{\text{dis}} \mu_0 g R \hat{z} = \frac{MR^2}{2} \vec{\alpha} \hat{z} \rightarrow \mu_0 g = \frac{\vec{\alpha} \cdot \hat{z}}{\frac{R}{2}} \rightarrow \alpha = \frac{2 \mu_0 g}{R}$$

$$\text{Legge velocità angolare: } \omega(t) = \omega_0 + \frac{2\mu g}{R} t = \frac{2\mu g}{R} t$$

Dalla prima equazione cartesiana: $-F_d = M \ddot{x} \rightarrow M \ddot{x} = -\mu D g \rightarrow \ddot{x} = -\frac{\mu D g}{M} = -\mu g$

Legge velocità: $v(t) = v_0 - \mu g t \rightarrow$ moto uniformemente decelerato

② Intervallo necessario per verificare condizione di puro rotolamento

Condizione di puro rotolamento: $V = \omega R$

Devo trovare un istante di tempo t^* nel quale $v(t^*) = \omega(t^*) R$

$$\left[\begin{array}{l} \omega(t^*) R = v(t^*) \\ \frac{2\mu g t^*}{R} R = v_0 - \mu g t^* \end{array} \right] \rightarrow 2\mu g t^* = v_0 - \mu g t^* \rightarrow 3\mu g t^* = v_0 \rightarrow t^* = \frac{v_0}{3\mu g} \quad \text{Riconosciuto} \quad \text{Riconosciuto}$$

$$v(t^*) = v_0 - \mu g t^*$$

③ Lavoro compiuto dalla forza di attrito dinamico tra $t=0$ e $t=t^*$

Unica forza che compie lavoro: $\mathcal{L} = \Delta K$

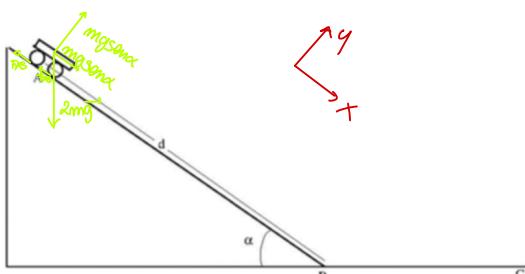
$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} M V_{cui}^2 + \frac{1}{2} I_{cg} \omega^2 - \frac{1}{2} M V_{cui}^2 = \frac{1}{2} M V_{cui}^2 + \frac{1}{2} \frac{M R^2}{2} \frac{V_{cui}^2}{R^2} - \frac{M V_{cui}^2}{2}$$

$$W = \frac{V}{R} \quad \Delta K = \frac{3}{4} M V_{cui}^2 - \frac{M V_{cui}^2}{2}$$

Calcolo $V_{cui}(t^*) \rightarrow V_{cui}(t^*) = V_{cui} - \mu g t^* = V_{cui} - \mu g \frac{V_{cui}}{3\mu g} = V_{cui} - \frac{V_{cui}}{3} = \frac{2}{3} V_{cui}$
 $= V_{cui}$

$$\Delta K = \frac{3}{4} M \cdot \frac{2}{3} V_{cui}^2 - \frac{M V_{cui}^2}{2} = \frac{1}{2} M V_{cui}^2 - \frac{M V_{cui}^2}{2} = -\frac{1}{6} M V_{cui}^2$$

Carrello schematicizzato con 4 ruote di raggio R e massa $m/4$ e piante di marcia su piano inclinato di angolo α e con attrito



① Velocità e accelerazione con cui arriva in fondo al piano v, a + accelerazione con cui arriva di attrito

Essendo un moto di puro rotolamento, per trovarci la velocità posso sfruttare la conservazione dell'energia. Essendo che il termine dell'energia potenziale del carrello con d si ripete, lo ometto.

$$\text{Avrò: } \frac{km}{4} g d \operatorname{sen} \alpha + mg d \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{4} V^2 + \frac{1}{2} m V^2$$

Moto di puro rotolamento

Calcolo $I_0 \rightarrow$ le ruote sono dritte, quindi $I_0 = mR^2$

Sostituendo: $2mgd \operatorname{sen} \alpha = \frac{mR^2}{8} \omega^2 + \frac{mV^2}{2}$

$$2mgd \operatorname{sen} \alpha = \frac{mR^2}{4} \frac{V^2}{R^2} + mV^2 \rightarrow 2mgd \operatorname{sen} \alpha = \frac{5mV^2}{4}$$

$$V = \sqrt{\frac{8gd \operatorname{sen} \alpha}{5}} = 8.9 \text{ m/s}$$

Accelerazione con cui arriva in fondo

1^a equazione cartesiana: $\Sigma F_x = m a_x \rightarrow$ è l'unica che ci interessa in quanto abbiamo che il

corpo si muove proprio lungo x

$$2mg \operatorname{sen} \alpha - \mu D g = 2ma$$

2^a equazione cartesiana: $\Sigma F_y = m a_y \rightarrow$ applico questa equazione a ciascuna ruota, ponendo il polo nel centro di marcia

Essendo che siamo nel moto di puro rotolamento, potrò ricevere $\alpha = \frac{a}{R}$, ma in questo caso la ruota, ruotando in senso orario, avrà $\alpha < 0$ ed $a > 0$, quindi $\alpha = -\frac{a}{R}$

$$\text{Avremo quindi } \sum F_{\text{fas}} = I \frac{a}{R} \rightarrow R F_{\text{fas}} = \frac{m}{4} \frac{\cancel{R}}{2} \frac{a}{R} \rightarrow F_{\text{fas}} = \frac{ma}{8}$$

$$2 \times g \sin \alpha - \frac{4}{5} g \sin \alpha = 2g \alpha \rightarrow 4g \sin \alpha - a = 4a \rightarrow a = \frac{4}{5} g \sin \alpha = 4m/s^2$$

Accelerazione senza attrito

$\sum F = 2ma$ perché le ruote non possono girare a causa dell'azione di attrito

$$2mg \sin \alpha = 2ma \rightarrow a = g \sin \alpha = 5 m/s^2$$

② Sul piano il cerchello viene frenato con un momento frenante M_f nel tempo Δt .

Determinare M_f supponendo che il moto sia di puro rotolamento.

In questo caso l'accelerazione α sarà positiva, quindi in senso antiorario. Possiamo quindi ricevere che $\alpha = -\frac{a}{R}$, in quanto invece a sarà positiva

$$\text{Abbiamo: } \sum T = I \alpha = I \frac{a}{R} \rightarrow -R F_{\text{fas}} + M_{\text{fren}} = I \frac{a}{R} \rightarrow -4 R F_{\text{fas}} + M_{\text{fren}} = -I \frac{a}{R}$$

Ho diviso per 4 in quanto quanto momento si distribuisce sulle 4 ruote

Devo ricalcolare anche FAS applicando la I coordinate al sistema

$\sum F_x = ma_x \rightarrow$ Anche in questo caso l'unica accelerazione che ci interessa è quella su \hat{x}

$$-F_{\text{fas}} = \frac{d}{dt} ma \rightarrow F_{\text{fas}} = -\frac{ma}{2}$$

$$-4 R F_{\text{fas}} + M_{\text{fren}} = -I \frac{a}{R} \rightarrow -4 R \left(-\frac{ma}{2} \right) + M_{\text{fren}} = -I \frac{a}{R} \rightarrow 2maR + M_{\text{fren}} = -I \frac{a}{R}$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{4} R^2 \rightarrow 2maR + M_{\text{fren}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{m}{R} R^2 \cdot \frac{a}{R}$$

$$2maR + M_{\text{fren}} = -maR \rightarrow 2maR + \frac{maR}{2} = -M_{\text{fren}} \rightarrow \frac{5}{2} maR = -M_{\text{fren}}$$

$$\rightarrow a = -\frac{2}{5} \frac{M_{\text{fren}}}{maR} \therefore \text{COSTANTE: } a(t) = -\frac{2}{5} \frac{M_{\text{fren}}}{maR}$$

$$0 = V_0 - \frac{2}{5} \frac{M_{\text{fren}}}{maR} \Delta t \rightarrow \frac{2}{5} \frac{M_{\text{fren}}}{maR} \Delta t = V_0 \rightarrow M_{\text{fren}} = \frac{5}{2} \frac{V_0 m R}{\Delta t} = 6.7 Nm$$

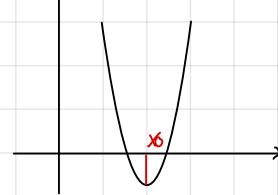
③ Lavoro forza frenante L_{fren}

Essendo che solo la forza frenante fa lavoro, posso ricevere $L = \Delta K = K_f - K_i = -\frac{1}{2} m \cdot V_0^2$

$$L_{\text{fren}} = -m V_0^2 = 792.15$$

Il moto oscillatorio

→ Equilibrio:



→ Intorno al punto di equilibrio vi sono forze che riportano il corpo in posizione di equilibrio
↳ EQUILIBRIO STABILE

$$\text{Legge di Hooke: } F_{el} = -kx \implies -kx = m\ddot{x} \implies \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

→ Moto PERIODICO: Il movimento si ripete ad intervalli regolari

↳ FREQUENZA: Oscillazioni compiute in un secondo (Hz)

↳ PERIODO: Tempo impiegato per compiere un'oscillazione completa

↓

$$\text{Moto ARMONICO: } \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

fase del moto

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

costante di fase

$$\text{Periodo } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

w

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{Frequenza } f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\text{Ampiezza massima delle oscillazioni: } |x_{max}| = A$$

$$\text{Velocità massima: } |v_{max}| = wA$$

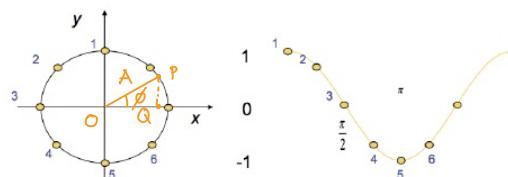
Non dipendono da A e ϕ ma solo da m e k

$$\text{Accelerazione massima: } |a_{max}| = \omega^2 A = \omega^2 |x_{max}|$$

↳ L'ampiezza A e la fase ϕ dipendono dalle condizioni iniziali

→ Moto CIRCOLARE

↳ La proiezione su di un asse del moto circolare uniforme su di una circonferenza di raggio A e velocità angolare w deriva un MOTO ARMONICO



→ Circonferenza di raggio A: Al punto P sulla circonferenza (individuato dal vettore OP) corrisponde la proiezione A su x. L'angolo ϕ è quello che c'è tra il raggio OP e x. → Posizione di riferimento su cerchio di riferimento

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \rightarrow \text{Azione di P e Q calcolata con OPA}$$

Da ciò si ricava che Q si muove tra i limiti $x = -A$ ed $x = A$ e la velocità w di P è uguale alla pulsazione w di Q perché il tempo impiegato da P a percorrere il cerchio di riferimento è lo stesso impiegato da Q per percorrere il tratto da $x = -A$ a $x = A$. Inoltre ϕ corrisponde all'angolo iniziale formato da OP con x ed il raggio A corrisponde all'ampiezza del moto armonico di Q.

↓

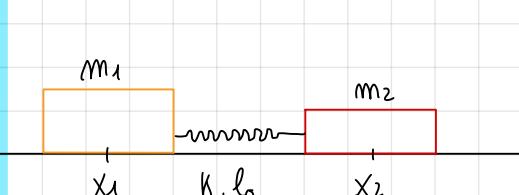
Si ha che $v_p = Aw$, la cui componente x è data da $-wA \sin(\omega t + \phi) = v_Q$. Lo stesso può essere applicato anche all'accelerazione

→ La MASSA RIDOTTA

↳ $\mu = \text{Massa ridotta} \rightarrow$ "Trasforma" un sistema di 2 corpi che oscillano e si muovono in un corpo che fa un moto armonico con una molla attaccata al muro

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \xrightarrow{1 = \frac{m_1}{m_1} > \frac{m_2}{m_1}} \frac{m_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = m_2$$

Esempio



$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -K \underbrace{(x_1 - x_2 - l)}_{\neq} \rightarrow \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{K}{m_1} (x_1 - x_2 - l)$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = K \underbrace{(x_1 - x_2 - l)}_{\neq} \rightarrow \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{K}{m_2} (x_1 - x_2 - l)$$

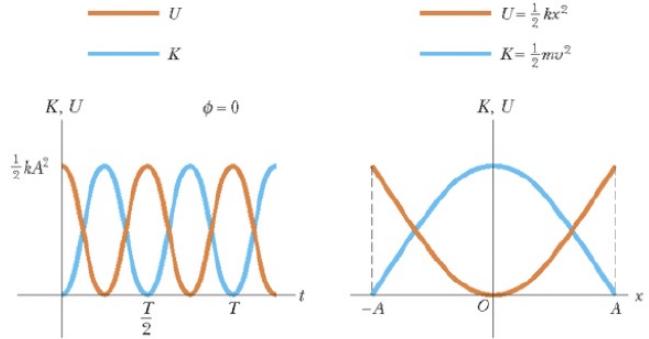
$$\ddot{z} = x_1 - x_2 - l \longrightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\left(\frac{K}{m_1} + \frac{K}{m_2}\right)z = -\frac{K}{M}z = -\omega^2 z$$

→ Energia nel moto armatico

→ POTENZIALE: $U = \frac{1}{2} Kx^2 = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$

→ CINETICA: $K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mw^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$

MECCANICA: $E = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} mw^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$
 $= \frac{1}{2} KA^2$, ricordando che $w^2 = \frac{K}{m}$



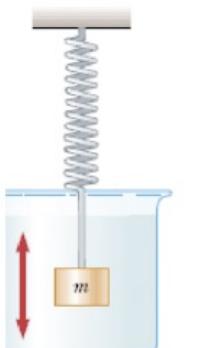
→ Noto approssimativamente comomico (l'energia potenziale tra atomi di una molecola)

→ Atomo alla posizione di equilibrio vale che $U(x) \approx U(x_0) + (x-x_0) \frac{dU}{dx} \Big|_{x_0} + \frac{1}{2} (x-x_0)^2 \frac{d^2 U}{dx^2} \Big|_{x_0} + \dots$

in $x=x_0$ si ha che $\frac{dU}{dx} = 0$. Ponendo $x' = x-x_0$, $U' = U-U(x_0)$ si ha $U'(x') \approx \frac{1}{2} K' x'^2$,

$$\text{con } K' = \frac{d^2 U}{dx^2} \Big|_{x_0}$$

→ Le oscillazioni SMORZATE



→ Si fanno oscillazioni smorzate se è presente una forza frenante del tipo $F = -bv$

$$\text{Da } \sum F = ma \text{ si ha } -bv - Ky = ma \longrightarrow m \frac{dy}{dt^2} + Ky + b \frac{dy}{dt} = 0$$

Soluzione nella forma $y(t) = e^{\lambda t}$, con λ complesso

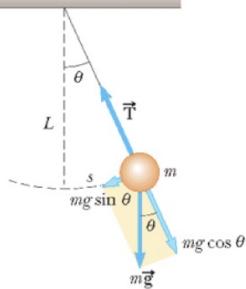
$$y(t) = A e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{Si ha che } \omega = \sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \text{ con } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

- 3 TIPOLOGIE di SMORZATURA
- Se $b/2m < \omega_0$ si ha un'oscillazione smorzata
 - Se $b/2m = \omega_0$ si ha uno smorzamento critico
 - Se $b/2m > \omega_0$ si ha un'oscillazione sovrasmorzata

→ Esercizi di esempio

① Pendolo semplice



$$\rightarrow F = ma = m\ddot{\alpha} = -mg \sin \theta \rightarrow \text{Forza TANGENZIALE (di ricambio)}$$

$$T = I\alpha = -mg \sin \theta$$

↓

$$\text{Per } \theta \text{ molto piccoli si ha che } \sin \theta = \theta \rightarrow \theta < 10^\circ$$

$$\hookrightarrow \alpha = -\frac{mg}{I} \theta = -\omega^2 \theta \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mg}{I}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\text{Si ha che } T = \frac{I\alpha}{m} = \frac{I\omega^2}{m} = \frac{L\omega^2}{m}$$

$$\text{Conservazione dell'energia: } E = K + U = \frac{1}{2} mv^2 + mgL(1 - \cos \theta)$$

$U=0$ nel punto

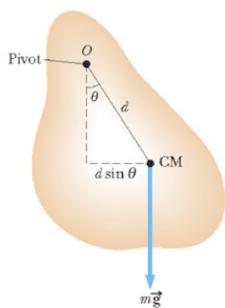
più basso

$$E = \frac{1}{2} m \left(\alpha \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgL(1 - \cos \theta) \rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \text{ (costante nel pendolo)}$$

$$\hookrightarrow m\alpha^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgL \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g \sin \theta}{L} = 0$$

Essendo che $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ e che $\sin \theta \approx \theta$ si ottiene $\theta(t) = A \cos(\omega t + \theta_0)$

② pendolo fisico

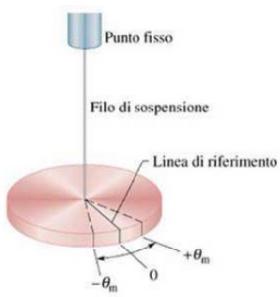


→ Solido di massa M e forma arbitraria appena è libero di ruotare in un punto diverso dal centro di massa

↪ L'asse di rotazione è finito a distanza d dal centro di massa → La forza di gravità ha momento $mgd \sin \theta$ in modulo

$$\begin{aligned} \text{Legge di Newton rotazionale: } \sum T_{est} = I\alpha &= -Mgd \sin \theta = -Mgd \frac{\sin \theta}{\theta} \theta \\ -Mgd\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2} I &\rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{Mgd}{I}\right)\theta = -\omega^2 \theta \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I}} \end{aligned}$$

③ pendolo di torsione

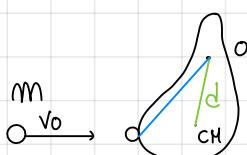


→ Dico con inerzia I finito ad un supporto fino con un filo di rotazioni del cilindro inducono una rotazione del filo che, per piccoli angoli di torsione produce un momento torcente come reazione.

↪ $T = -K\theta$, dove K è detta costante di torsione del filo e dipende dal suo materiale

$$\text{Si ha } \sum T = I\alpha \rightarrow -K\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{K\theta}{I} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

④ Litto con pendolo fisico



Massa M, inerzia I

① θ_{max}

② T piccole oscillazioni

① Conservazione durante l'urto

→ $\alpha_{mecc} \neq$ costante: urto elastico

→ $\vec{p} \neq$ costante: Forze impulsive

→ $\vec{\omega}_0 =$ costante $\rightarrow \vec{\omega}_f = \vec{\omega}_0 \rightarrow \vec{\omega}_f = \vec{r} \times \vec{m}\vec{v}_0$

$$\rightarrow \vec{\omega}_f = I\vec{w}$$

Conservazione dopo l'urto

→ $\vec{p} \neq$ costante: il CM cambia velocità

→ $\vec{\omega}_0 \neq$ costante: la forza peso è ESTERNA ed HA BRACCIO

→ $E =$ costante $\rightarrow E_C = E_f$: Non ci sono FNC che fanno lavoro

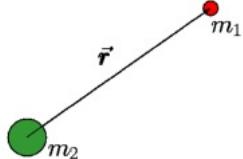
$$E_i = \frac{1}{2} I' w^2 \quad (0 \text{ di } 0 \text{ in cm}) \quad E_f = mgh \text{ cm}$$

(2) $T = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{mgd}}$ perché è un pendolo FISICO

La forza gravitazionale

→ legge di gravitazione universale: ogni punto materiale nell'universo attira ogni altro punto materiale con una forza che è proporzionale al prodotto delle loro masse ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza reciproca

$$\vec{F} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$



→ diretta lungo la congruente e negativa perché va da m_2 a m_1 se \hat{r} è diretto da m_1 ad m_2

↓
Per il terzo principio di Newton si ha che $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

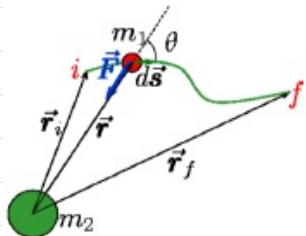
↓
Per i corpi rigidi a simmetria sferica vale la legge precedente mentre per quelli non simmetrici si ha $\vec{F} = -\int \frac{G m}{r^2} \hat{r} dM$

→ L'ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

→ La forza gravitazionale è conservativa. Se il corpo 1 si sposta da i a f ed il corpo 2 sta fermo si avrà:

$$\Delta U = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = -G m_1 m_2 \int_i^f \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{s} = -G m_1 m_2 \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} = -G m_1 m_2 \left[\frac{1}{r} \right]_{r_i}^{r_f}$$

da cui $U(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r}$



↓ Se uno dei due corpi è la terra si ha che $F_g = G \frac{M_T m}{R_T^2}$

↓ Da questa relazione si ha che $mg = G \frac{M_T M}{R_T^2}$ e quindi $g = G \frac{M_T}{R_T^2}$

In generale, per un corpo a distanza h dalla superficie terrestre si ha che $r = R_T + h$ e $F_g = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$ → $mg = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$

L'energia potenziale per un corpo ad altezza h è data dalla seguente espressione

$$U(h) = -\frac{G M_T m}{R_T + h} = -\frac{G m M_T}{R_T \left(\frac{R_T + h}{R_T} \right)} = -\frac{G m M_T}{R_T} \left(1 - \frac{h}{R_T} \right) = -\frac{G m M_T}{R_T} + \frac{G m h}{R_T^2} = U(0) + mgh$$

$U(0)$ $g = \frac{M_T}{R_T^2}$

→ La VELOCITÀ di FUGA e l'ENERGIA

↓ Se $M \gg m$, con m massa di un corpo qualunque si ha che $\mathcal{E} = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{costante}$

L'energia \mathcal{E} può essere

$\rightarrow > 0$: Il corpo può allontanarsi indefinitamente
 $\rightarrow < 0$: Essendo che $K > 0$ si ha $\mathcal{E} - U = K > 0$

$$\mathcal{E} + \frac{G m M}{r} > 0 \implies r \leq \frac{G m M}{|\mathcal{E}|} \implies r_{\max} \text{ con } r_{\max} = \frac{G m M}{|\mathcal{E}|}$$

↓ NON va OLTRE

La velocità di fuga è la minima velocità che un corpo che parte da una distanza r dal centro di M deve avere per non ritornare più della sua forza gravitazionale → Posto $K_i + U_i = K_f + U_f$, $U_f = 0$, $K_f > 0$ si ha $v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$

→ SATELLITE che percorre ORBITA CIRCOLARE



$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2} \implies v^2 = \frac{GM}{r}$$

$$\rightarrow L'energia SI CONSERVA: \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{costante}$$

$$\rightarrow Dalle 2 relazioni si ha che K = \frac{1}{2}U(r) e quindi \mathcal{E} = \frac{1}{2}U(r) = \frac{1}{2}mv^2$$

Si ha inoltre che $rv^2 = GM$ ed essendo $w = \frac{v}{r}$ e $T = \frac{2\pi}{w}$, da quanto si

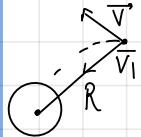
ricava che $T^2 = \left(\frac{2\pi}{w}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$

Si ha che $\vec{d}_0 = \vec{R} \times \vec{mv}$

Esempi

Se il satellite esplode ed $m/2$ ha velocità tangenziale, cade sulla terra?

Conservazione $\rightarrow \vec{p}$ è costante

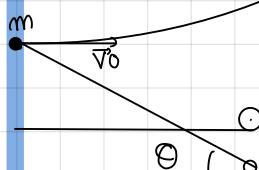


$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{d} &= \text{costante} : \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{GMm}{R} \rightarrow \text{NON è utile} \\ \rightarrow d_0 &= \text{costante} : \vec{d}_{0i} = \vec{R} \times \vec{mv} \implies Rmv = RT \cancel{mv} \\ &\quad \cancel{Basta} \text{ sommare con la} \\ &\quad \text{conservazione dell'energia} \end{aligned}$$

IN GENERALE: Per la conservazione di d_0 si ha

$$\begin{aligned} \rightarrow Rmv &= R_{\min} m v_{\min} \quad \rightarrow R_{\min} < RT : \text{VTRA il suolo} \\ &\quad \rightarrow R_{\max} > RT : \text{NON VTRA il suolo} \end{aligned}$$

② Centro repulsivo



$$F = \frac{K}{r^2} \text{ REPULSIVA} \rightarrow U = \frac{K}{r}$$

Si conservano momento angolare (forza radiale) ed energia (forza centrale)

$$E = \text{costante} \rightarrow \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mv_m^2 + \frac{K}{r_{\min}}$$

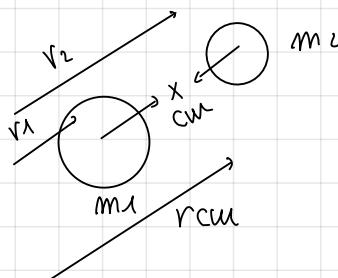
$$d_0 = \text{costante} \rightarrow \frac{\vec{R}_{00} \times \vec{mv}_0}{R_{00}} = r_{\min} v_{\min} \rightarrow r_{\min} v_m$$

\hookrightarrow SOLO TANGENZIALE

→ PROBLEMA dei DUE CORPI

→ corpi di massa m_1 ed m_2 che interagiscono con forze gravitazionali e sistema di riferimento con origine nel centro di massa ($m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$)

$$\hookrightarrow \text{prendendo } \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



$$\vec{r}_{cm} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2$$

$$\downarrow \quad \vec{r}_1 = - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

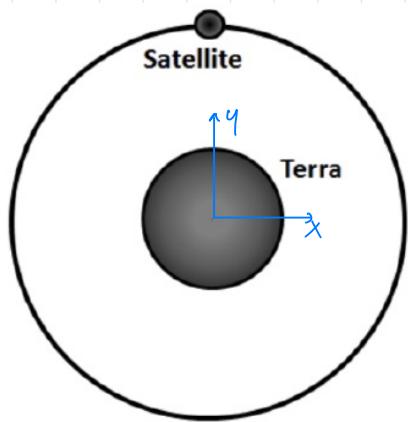
$$\vec{v}_1 = - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}$$

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \mu v^2 \quad \rightarrow E = K + U(r), \text{ quindi } \dot{E} = \frac{1}{2} \mu v^2 + U(r)$$

$$\text{Momento angolare: } \vec{d}_0 = I_{01} w + I_{02} w = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) w = \frac{m_1 m_2 r^2 w \cdot \mu r^2 w}{(m_1 + m_2)^2}$$

① Esercizio di ESAME



$$m_0 = 3t = 3 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

$$m_1 = m_0/3 = 1000 \text{ kg}$$

$$m_2 = 2m_0/3 = 2000 \text{ kg}$$

$$v_{1A} = 200 \text{ m/s}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

$$\mu_T = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

① Velocità rispetto alla Terra del frammento di maggiore massa v_{2t}

↪ Satellite geostazionario: si muove in modo SODDIZIALE alla Terra

Per le trasformazioni di Galileo abbiamo che $v_t = v_s + v_{\text{trasce}}$ → Velocità del sistema di riferimento
tenendo che la gravitazione è una FORZA CENTRALE si conservano sia l'energia che il MOMENTO ANGOLARE

Ahhiamo che $v_{\text{trasce}} = \omega r_{\text{sat}}$

INCognita: dobbiamo determinare r_{sat} per un satellite geostazionario
Per determinare r_{sat} dobbiamo utilizzare il fatto che il satellite compie un MOTO CIRCOLARE intorno alla Terra e quindi la forza di gravità deve fungere da accelerazione centripeta

$$+\frac{G m_0 \mu_T}{r_{\text{sat}}^2} = m_0 \omega^2 r_{\text{sat}}$$

→ È data dal periodo di rivoluzione del satellite intorno alla Terra

Tenendo che il satellite è geostazionario, esso si muove coniugualmente alla Terra

↪ Ahhiamo che $\omega = \frac{2\pi}{T}$ → $2\pi \cdot 60 \cdot 60 = 86400 \rightarrow \omega = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$
 $T \rightarrow 24 \text{ ore.}$

$$G m_0 \mu_T = m_0 \frac{4\pi^2}{T^2} r_{\text{sat}}^3 \rightarrow r_{\text{sat}} = \sqrt[3]{\frac{GM\pi^2}{GT^2}} = 6.2 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Per calcolare la velocità utilizziamo la conservazione dell'energia

$$\underbrace{\frac{1}{2} I_{\text{sat}} \omega^2}_{2} = \frac{1}{2} m_1 v_{1t}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2t}^2$$

Il satellite ruota e basta inizialmente

Ahhiamo che $v_{1t} = v_{1A} + v_{\text{trasce}}$ → VETTORIAMENTE: $\vec{v}_{1t} = (\omega r_{\text{sat}}, v_{1A}, 0) \text{ m/s}$

$$|\vec{v}_{1t}| = \sqrt{\omega^2 r_{\text{sat}}^2 + v_{1A}^2} = 3060 \text{ m/s}$$

$$I_{\text{sat}} = m_0 r_{\text{sat}}^2 = 5 \cdot 3 \cdot 10^{18} \text{ kg m}^2$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_{2t}^2 = \frac{1}{2} I_{\text{sat}} \omega^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1t}^2 \rightarrow v_{2t} = \sqrt{\frac{I_{\text{sat}} \omega^2 - m_1 v_{1t}^2}{m_2}} = \underbrace{3054 \text{ m/s}}_{\text{verso il BASSO}}$$

② Energia minima sviluppata dell'esplosione

↪ L'energia sviluppata è quella calcolata rispetto al sistema solido al satellite

Tra un istante immediatamente prima dell'urto ad un istante immediatamente dopo l'energia potenziale non varia, quindi considero solo l'energia CINETICA

$$\Delta \text{sviluppata} = \frac{1}{2} m_1 v_{1t}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2t}^2$$

Dobbiamo trovare V_{2S} —> Abbiamo che $V_{2t} = \sqrt{V_{2S}^2 + V_{trasce}^2}$ —> $V_{2t}^2 = V_{2S}^2 + W^2 R_{sat}^2$
 $\rightarrow -V_{2\lambda}^2 = -V_{2t}^2 + W^2 R_{sat}^2 \rightarrow V_{2\lambda}^2 = V_{2t}^2 - W^2 R_{sat}^2$
 $\rightarrow V_{2\lambda} = \sqrt{V_{2t}^2 - W^2 R_{sat}^2} = 60.5 \text{ m/s}$

$\Delta v_{lunare} = 3 \cdot 10^7 \text{ s}$

(3) Distanza di MASSIMO AVVICINAMENTO

↳ le velocità in ogni punto della traiettoria è TANGENTE ad essa
 \downarrow

Nel punto di MASSIMO AVVICINAMENTO è ORTOGONALE ad r ed è MASSIMA

Energia frammento 1 $\rightarrow \dot{\epsilon}_{1i} = \frac{1}{2} m_1 V_{1t}^2 - \frac{G m_1 M_T}{R_{sat}}$

$$\rightarrow \dot{\epsilon}_{1f} = \frac{1}{2} m_1 V_{1tf}^2 - \frac{G m_1 M_T}{R_1}$$

Energia frammento 2 $\rightarrow \dot{\epsilon}_{2i} = \frac{1}{2} m_2 V_{2t}^2 - \frac{G m_2 M_T}{R_{sat}}$

$$\rightarrow \dot{\epsilon}_{2f} = \frac{1}{2} m_2 V_{2tf}^2 - \frac{G m_2 M_T}{R_2}$$

Momento angolare corpo 1: $\vec{\ell}_{1i} = m_1 \vec{r}_{sat} \times (V_{1S} \hat{y} + V_{trasce} \hat{x}) \rightarrow |\ell_{1i}| = R_{sat} V_{trasce} m_1$
 $\vec{\ell}_{1f} = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{V}_{1tf} \Rightarrow \underline{m_1 r_1 V_{1tf}}$
 \downarrow
 Velocità ortogonale ad r

Anco che $V_{1tf} = \frac{|\ell_{1i}|}{m_1 r_1} = \frac{R_{sat} V_{trasce} m_1}{m_1 r_1}$

$$\dot{\epsilon}_{1f} = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{R_{sat} V_{trasce}}{r_1} \right)^2 - \frac{G m_1 M_T}{r_1} = \dot{\epsilon}_{1i} \rightarrow \text{NOTA: conservazione dell'energia}$$

$$\underbrace{2m_1 \dot{\epsilon}_{1i}}_a r_1^2 + \underbrace{2G m_1^2 M_T}_b r_1 - \dot{\epsilon}_{1i}^2 = 0 \rightarrow r_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ad^2 \dot{\epsilon}_{1i}^2}}{2a}$$

↳ equazione di II grado in 2 incognite

voglio questo, massimo avvicinamento $\rightarrow r_{1\min} = 39.6 \cdot 10^6 \text{ m}$