IL LUOGO DELLE RADICI: angoli di partenza dei poli

Regola per l'asse reale: i rami uscenti dai poli con molteplicità >1 dividono il piano in parti equiangole e simmetriche rispetto all'asse reale

Partiamo sempre dalla condizione di fase: $\angle n(s) - \angle d(s) = -\pi, \quad K > 0$

Consideriamo pero' il polinomio *d*(s)*: $$d^*(s) = \frac{d(s)}{s - p_1}$$

Polo complesso sotto analisi

Allora: $$\theta_{p_1} = \pi + \angle n(s) - \angle d^*(s)\Big|_{s=p_1}$$

IL LUOGO DELLE RADICI: angoli di partenza dei poli

$$\theta_{p_1} = \pi + \angle n(s) - \angle d^*(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$G(s) = \frac{(s+5)}{s \cdot (s^2 + 6s + 109)} = \frac{(s+5)}{s \cdot (s+3+10i)(s+3-10i)}$$

Andrea Munafo'

IL LUOGO DELLE RADICI: angoli di partenza dei poli

$$\theta_{p_1} = \pi + \angle n(s) - \angle d^*(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$G(s) = \frac{(s+5)}{s\cdot(s^2+6s+109)} = \frac{(s+5)}{s\cdot(s+3+10i)(s+3-10i)}$$

Centro asintoti $c = \frac{-3-10i-3+10i+5}{2} = -\frac{1}{2}$

Punti diramazione $\frac{1}{s} + \frac{1}{s+3+10i} + \frac{1}{s+3-10i} = \frac{1}{s+5}$

$$s^3+11s^2+139s+545+2s^3+16s^2+30s = s^3+6s^2+109s$$

$$\downarrow$$

Una sola radice reale in -10.57 $\leftarrow$ $2s^3+21s^2+50s+545=0$

Andrea Munafo'

IL LUOGO DELLE RADICI: angoli di partenza dei poli

$$\theta_{p_1} = \pi + \angle n(s) - \angle d^*(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$G(s) = \frac{(s+5)}{s \cdot (s^2+6s+109)} = \frac{(s+5)}{s \cdot (s+3+10i)(s+3-10i)}$$

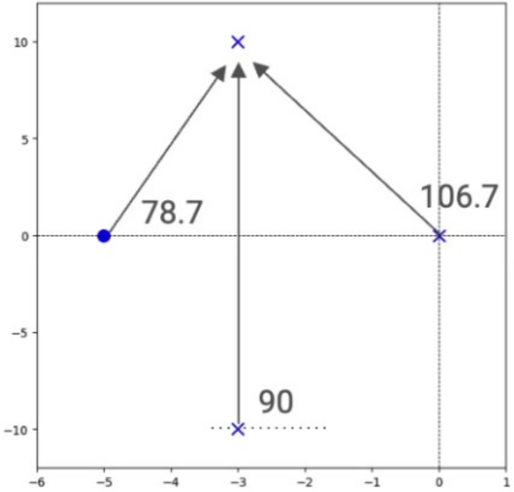
Angolo di partenza polo: $p_1 = -3 + 10i$

$$\theta_{p_1} = \pi + \underbrace{\angle(2+10i)}_{\angle(s+5)|_{s=p_1}} - \underbrace{\angle(-3+10i)}_{\angle(s)|_{s=p_1}} - \underbrace{\angle(20i)}_{\angle(s+3-10i)|_{s=p_1}} = 180^\circ + 78.7^\circ - 106.7^\circ - 90^\circ = 62^\circ$$

IL LUOGO DELLE RADICI: angoli di partenza dei poli

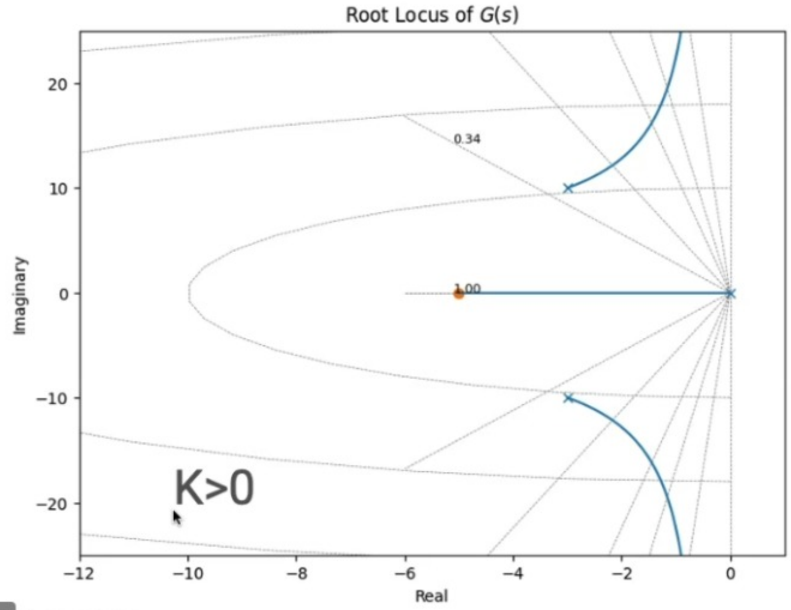
$$G(s) = \frac{(s+5)}{s \cdot (s^2 + 6s + 109)} = \frac{(s+5)}{s \cdot (s+3+10i)(s+3-10i)}$$

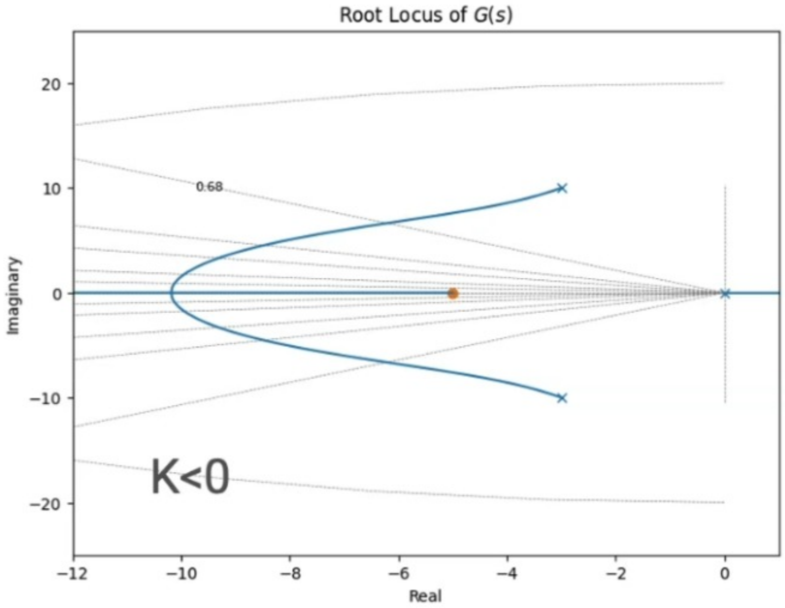
$$\theta_{p_1} = \pi + \angle(2+10i) - \angle(-3+10i) - \angle(20i) = 180^\circ + 78.7^\circ - 106.7^\circ - 90^\circ = 62^\circ$$



IL LUOGO DELLE RADICI: angoli di partenza dei poli

$$G(s) = \frac{(s+5)}{s\cdot(s^2+6s+109)} = \frac{(s+5)}{s\cdot(s+3+10i)(s+3-10i)}$$





IL LUOGO DELLE RADICI: angoli di arrivo sugli zeri

Regola per l'asse reale: i rami entranti sugli zerii con molteplicità >1 dividono il piano in parti equiangole e simmetriche rispetto all'asse reale

$k<0$

Partiamo sempre dalla condizione di fase: $\angle n(s) - \angle d(s) = -\pi, \quad K > 0$

Considieramo però il polinomio *n*(s)*: $n^*(s) = \dfrac{n(s)}{s - z_1}$

z_1 ← Zero complesso sotto analisi

$$\theta_{z_1} = -\pi + \angle d(s) - \angle n^*(s)\Big|_{s=z_1}$$

IL LUOGO DELLE RADICI: angoli di arrivo sugli zeri

$$\theta_{z_1} = -\pi + \angle d(s) - \angle n^*(s)\Big|_{s=z_1}$$

$$G(s) = \frac{s^2+20s+101}{s\cdot(s+5)^3} = \frac{(s+10+i)(s+10-i)}{s\cdot(s+5)^3}$$

$k<0$

Centro asintoti $c = \dfrac{-15+10-i+10+i}{2} = \dfrac{5}{2}$

IL LUOGO DELLE RADICI: angoli di arrivo sugli zeri

$$\theta_{z_1} = -\pi + \angle d(s) - \angle n^*(s)\Big|_{s=z_1}$$

$$G(s) = \frac{s^2 + 20s + 101}{s \cdot (s+5)^3} = \frac{(s+10+i)(s+10-i)}{s \cdot (s+5)^3}$$

$k<0$

Centro asintoti $\quad c = \dfrac{-15 + 10 - i + 10 + i}{2} = \dfrac{5}{2}$

Punti diramazione $\quad \dfrac{1}{s} + \dfrac{3}{s+5} = \dfrac{1}{s+10+i} + \dfrac{1}{s+10-i}$

$$(s+5)\cdot(s^2+20s+101) + 3s\cdot(s^2+20s+101) = s\cdot(s+5)\cdot(2s+20)$$

$$2s^3 + 55s^2 + 404s + 505 = 0 \longrightarrow$$

Radici reali in: -15.56, -10.37, -1.56

IL LUOGO DELLE RADICI: angoli di arrivo sugli zeri

$$\theta_{z_1} = -\pi + \angle d(s) - \angle n^*(s)\Big|_{s=z_1}$$

$$G(s) = \frac{s^2+20s+101}{s\cdot(s+5)^3} = \frac{(s+10+i)(s+10-i)}{s\cdot(s+5)^3}$$

k<0

Angolo arrivo in: *s=-10+i* $\quad \theta_{z_1} = -\pi + \angle(-10+i) + 3\cdot\angle(-10+i+5) - \angle(-10+i+10+i)$

Ho tre poli

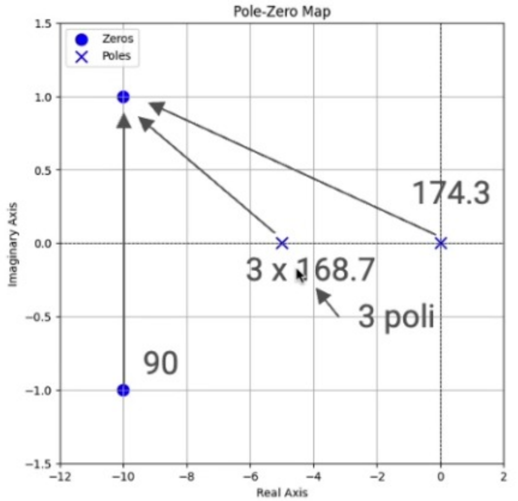
$$= -180^\circ + 174.3^\circ + 506.07^\circ - 90^\circ = 410.37^\circ \longrightarrow$$ 410.37 - 360=50.37

IL LUOGO DELLE RADICI: angoli di arrivo sugli zeri

$$G(s) = \frac{s^2 + 20s + 101}{s \cdot (s+5)^3} = \frac{(s+10+i)(s+10-i)}{s \cdot (s+5)^3}$$

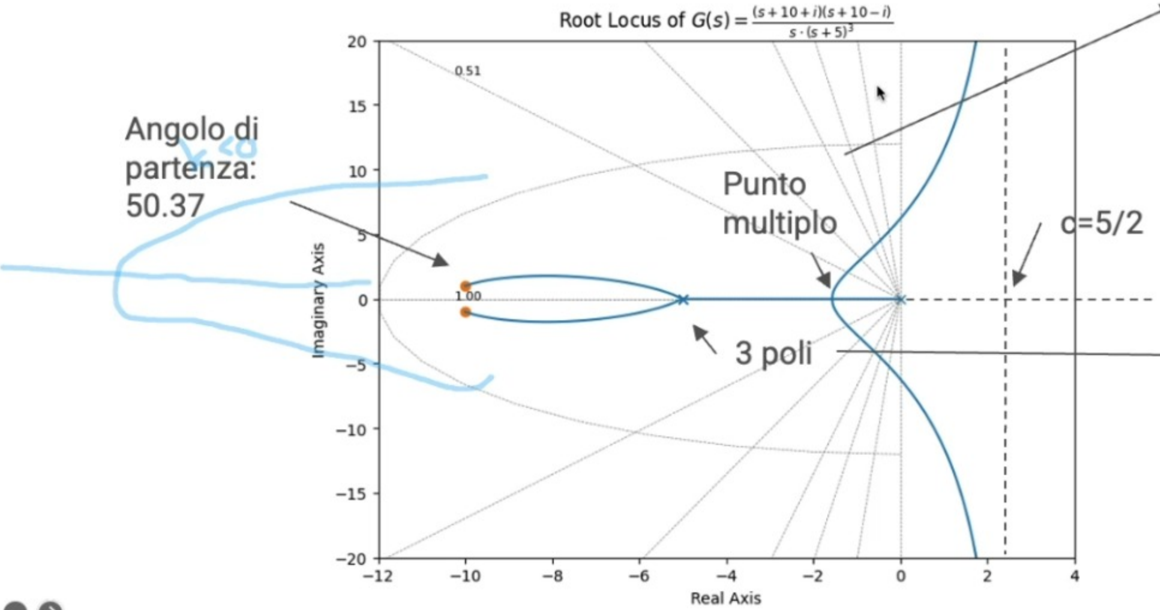
Angolo arrivo in: *s=-10+i* $\theta_{z_1} = -\pi + \angle(-10+i) + 3 \cdot \angle(-10+i+5) - \angle(-10+i+10+i)$

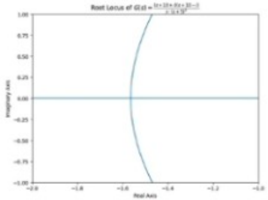
$$= -180^\circ + 174.3^\circ + 506.07^\circ - 90^\circ = 410.37^\circ \longrightarrow$$ 410.37 - 360=50.37

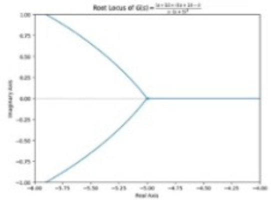


IL LUOGO DELLE RADICI: angoli di arrivo sugli zeri

$$G(s) = \frac{s^2 + 20s + 101}{s \cdot (s+5)^3} = \frac{(s+10+i)(s+10-i)}{s \cdot (s+5)^3}$$

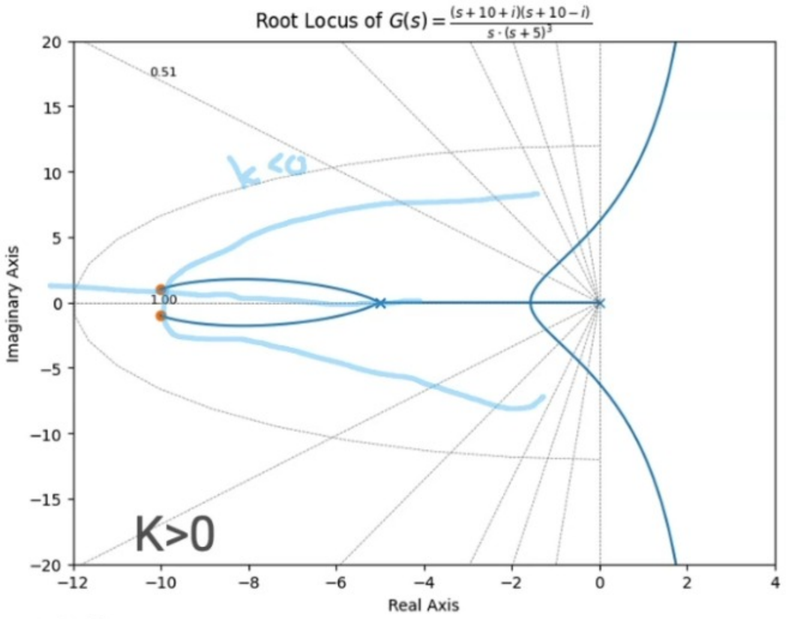


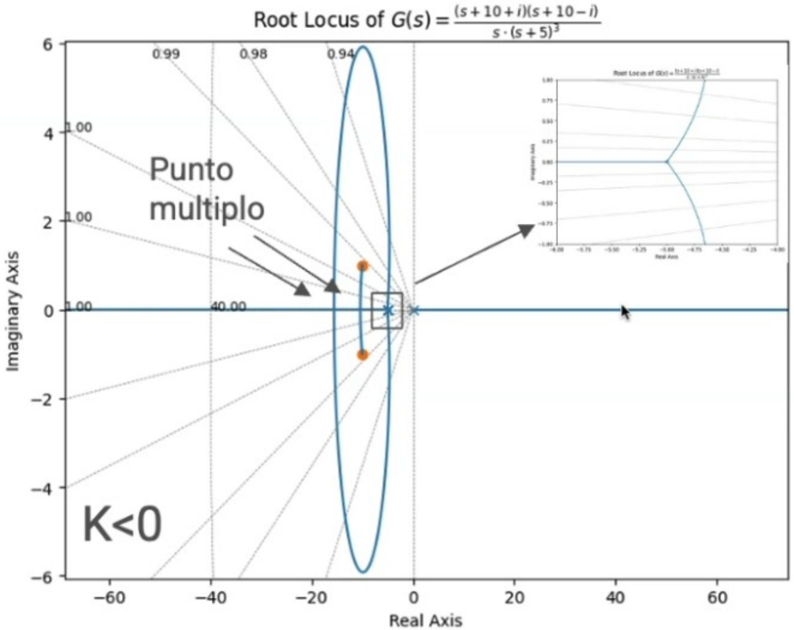




IL LUOGO DELLE RADICI: angoli di arrivo sugli zeri

$$G(s) = \frac{s^2 + 20s + 101}{s \cdot (s+5)^3} = \frac{(s+10+i)(s+10-i)}{s \cdot (s+5)^3}$$





IL LUOGO DELLE RADICI: Riassunto

Il **luogo delle radici** è una tecnica per determinare lo spostamento dei poli dal ciclo aperto al ciclo chiuso

Al variare del guadagno *K* i poli in ciclo chiuso cambiano posizione

Il luogo delle radici obbedisce a leggi analitiche precise

Permette, attraverso la scelta del guadagno *K*, di posizionare i poli in ciclo chiuso

Andrea Munafo'

IL LUOGO DELLE RADICI: Scelta di K

Permette, attraverso la scelta del guadagno *K*, di posizionare i poli in ciclo chiuso

Metodologia:

- Si fissano i poli/zeri del regolatore per quanto possibile sulla base delle specifiche (tipo 0. tipo 1, …)
- Si varia *k* per individuare il valore che fissa i *poli dominanti* del sistema in ciclo chiuso nella regione opportuna del semipiano sinistro del piano complesso

Alle posizioni dei poli dominanti corrispondono precise specifiche sulla risposta transitoria del sistema in ciclo chiuso

IL LUOGO DELLE RADICI: Esempio

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+9)}$$

$$c = \frac{-9-(-1)}{3-1} = -4$$

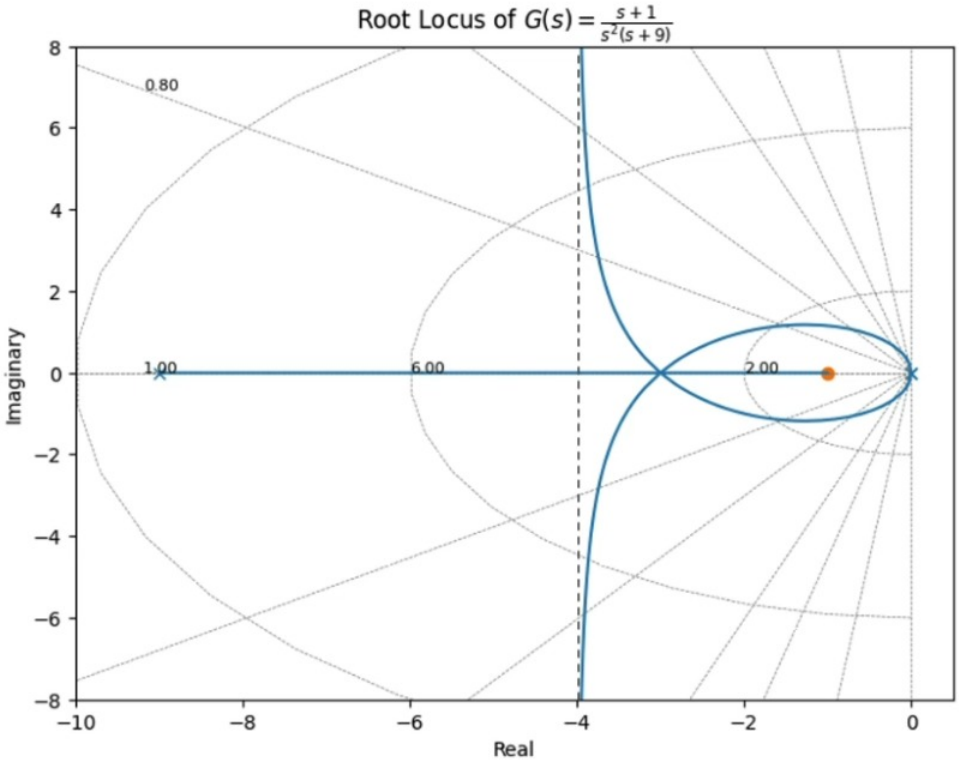
Punti multipli

$$\frac{2}{s} + \frac{1}{s+9} = \frac{1}{s+1}$$

IL LUOGO DELLE RADICI: Esempio

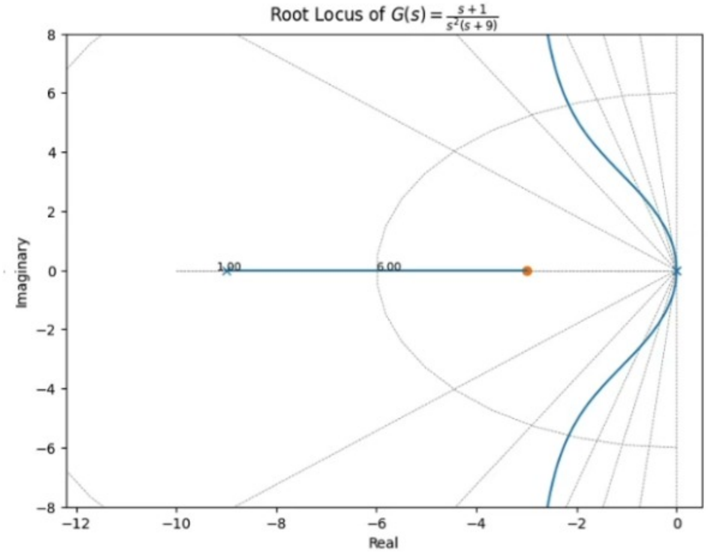
$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+9)}$$

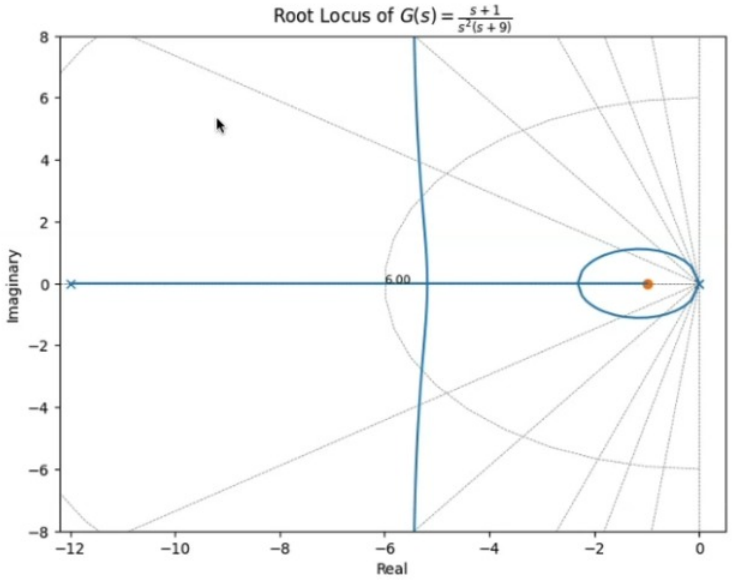
$$c = \frac{-9-(-1)}{3-1} = -4$$



Andrea Munafo'

IL LUOGO DELLE RADICI: Esempio





Andrea Munafo'

$$G(s) = \frac{100}{s(2+s)}$$

$$G(0) = \frac{100}{2} = 50$$

$$G(s) = 50\,\frac{1}{s\left(1+\frac{s}{2}\right)}$$

$$k = 50 \rightarrow |k|_{dB} = 20\log_{10}(50)$$

$$G(s) = \frac{100}{s(2+s)}$$

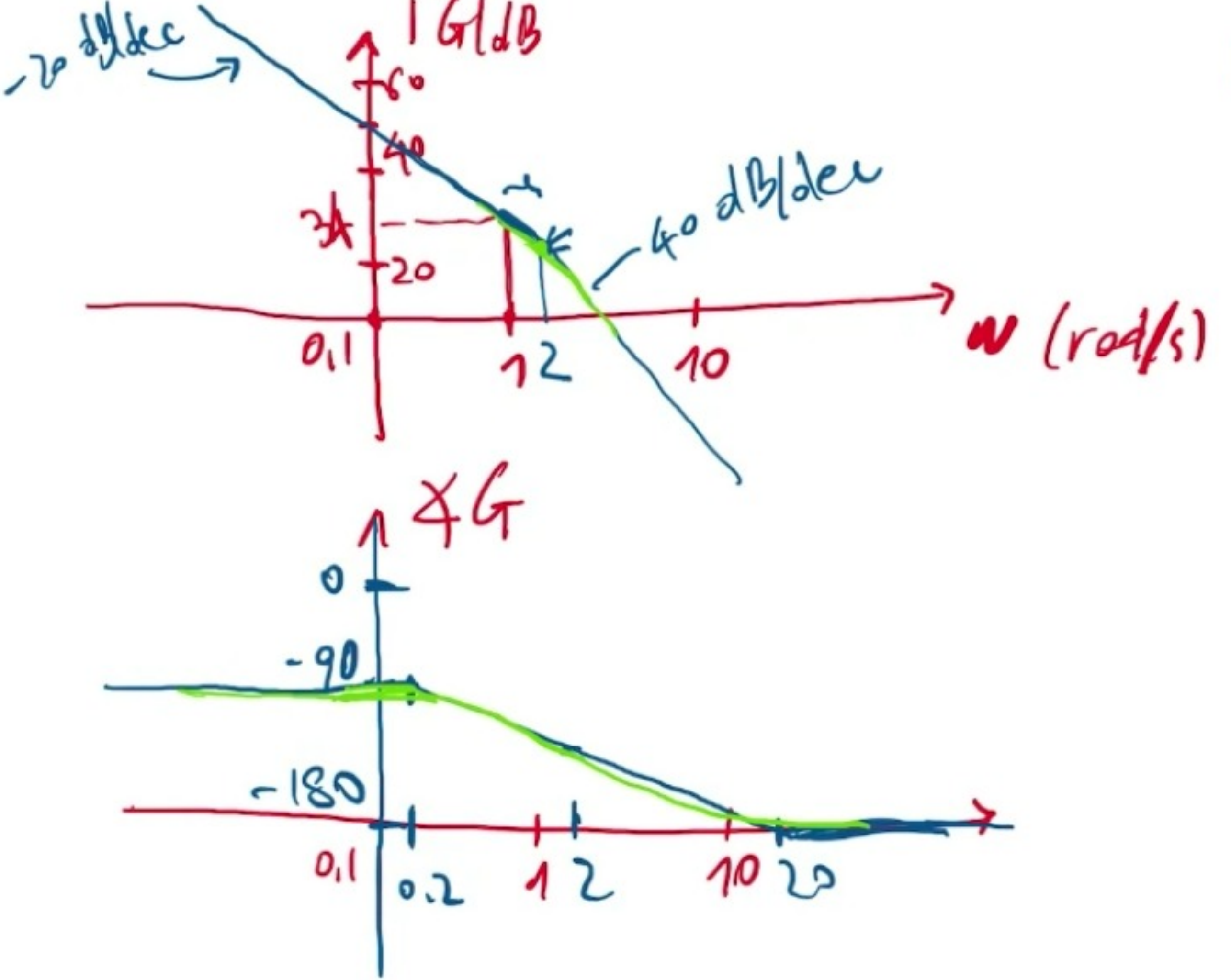
$$G(0) = \frac{100}{2} = 50$$

$$G(s) = 50 \frac{1}{s\left(1+\frac{s}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{s} \rightarrow \begin{cases} -20 \text{ dB/dec} \quad w = 1 \text{ rad/s} \quad 0\text{dB} \\ -\pi/2 \end{cases}$$

$$1+\frac{s}{2} \rightarrow \begin{cases} -20 \text{ dB/dec} \quad w = +2 \\ \measuredangle \; \begin{cases} 0 & w < 2 \\ -\pi/2 & w > 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$k = 50 \rightarrow |k|_{dB} = 20\log_{10}(50) = \overbrace{20\log(5)} + 20 \simeq 34 \text{ dB}$$



|G|dB
-20 dB/dec
60
40
34
20
-40 dB/dec
0,1
1
2
10
ω (rad/s)
∡G
0
-90
-180
0,1
0.2
1
2
10
20

K = 34 dB

$$G(s) = 25 \frac{s(s+100)}{(10+s)^2\left(s+\frac{1}{1200}\right)}$$

$$G(0) = \frac{25 \cdot 100}{100 \cdot \frac{1}{1200}} = 30000 = K_B \rightarrow |K_B|_{dB} = 20\log(30000) =$$

$$= 20\log(3) + 20\log(10000)$$

$$\cong 9 + 80$$

$$G(s) = K_B \cdot \frac{s\left(1+\frac{s}{100}\right)}{\left(1+\frac{s}{10}\right)^2 (1+1200s)}$$