1) cono: ✗

Dato un (vettore, p.to) $x \in \mathbb{R}^n$ si dice che x è un cono (rispetto all'origine O) se $x \in X \Rightarrow tx \in X \quad \forall t > 0$

2) funzione α-omogenea ✗

Una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ ove X è un cono si dirà "α-omogenea" o anche "omogenea di grado α", $(\alpha \in \mathbb{R})$ se $f(tx) = t^{\alpha} f(x)$ $\forall x \in X \quad \forall t > 0$

3) Derivate in più variabili:

Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia $x_0 \in \Omega$. Si dice che f è derivabile nella direzione di v, con $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, se esiste ed è finito il limite $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[f(x_0 + hv) - f(x_0)]$

Esso verrà chiamato <u>Derivata</u> direzionale di f nella direzione di v nel p.to x_0 e viene denotato con $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$, $f_v(x_0)$

Le derivate nelle direzioni dei versori della base canonica $e_1, \dots, e_n$ vengono chiamate Derivate <u>parziali</u> e si denotano con i simboli: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$, $f_{x_i}(x_0)$ $\partial_{x_i} f(x_0)$

4) Gradiente: ✗ → è il vettore delle derivate parziali.

5) Funz. diff.: ✗ Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \Omega$

Allora f si dirà diff. in x_0 se esiste un'app. lineare $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, (ripeto lineare), tale che

$$\lim_{w \to 0} \frac{|f(x_0 + w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|} = 0$$

→ Se è vero questo, A verrà detto differenziale di f in x_0 e viene denotato con $df(x_0, w) = A(w)$

La funzione f verrà detta differenziabile in Ω se è diff. in ogni punto di Ω.

6) Formula di rappr. del differ. ok

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Se f è diff. in $x_0 \in \Omega$ allora

$$df(x_0, w) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) w_i$$

Se si definisce il vettore ~~gradiente~~, detto Gradiente di f in x_0 ponendo $\nabla f(x_0) = (f_{x_1}(x_0), f_{x_2}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$

Si può scrivere la formula in forma vettoriale $df(x_0, w) = \nabla f(x_0) w$ ove $f(x_0)$ e w è il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$.

7) Punti critici: x

I punti nei quali il gradiente si annulla, sono detti anche, stazionari o singolari.

8) funzione di classe $C^1(\Omega)$ x

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si dirà che $f \in C^1(\Omega)$ se tutte le derivate parziali esistono e sono continue in Ω.

9) Curva differenziabile:

$\gamma :]a, b[\to \mathbb{R}^n$, sarà detta differenz. in x_0 se esiste $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare: $\lim_{w \to 0} \frac{|\gamma(x_0 + w) - \gamma(x_0) - A(w)|}{|w|} = 0$

10) differenziabile da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ x

Si dirà che f ~~è diff.~~ $: \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è differenziabile in x_0 se esiste $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare tale che

$$\lim_{w \to 0} \frac{|f(x_0 + w) - f(x_0) - A(w)|_{\mathbb{R}^m}}{|w|_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

11) Matrice JACOBIANA. x

La matrice di f così definita.

$$\begin{pmatrix} f_1 x_1 & f_1 x_2 & \dots & f_1 x_n \\ f_2 x_1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ f_n x_1 & f_n x_2 & \dots & f_n x_n \end{pmatrix}$$

Sia $f : U \to \mathbb{R}^n$ una f. definita su insieme aperto U dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$. La matrice Jacobiana della funzione f in $x = (x_1, \dots, x_n)$ è la matrice delle derivate parziali prime della funz. calcolata in x_0.

12) Dati $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in [a, b]$ si definisce retta tangente al sostegno (ossia l'immagine) di γ nel suo p.to $\gamma(t_0)$ la retta parametrica $\sigma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0)$

il vettore $\gamma'(t_0)$ (oltre che la derivata) si dirà anche velocità di γ in $\gamma(t_0)$. Se $\gamma'(t_0)=0$, la retta tangente non viene così definita

13) Piano tangente $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Il piano tangente al grafico cartesiano $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=f(x,y)\}$ della funzione differenziabile in (x_0,y_0) nel p.to (x_0,y_0,z_0) è il piano di eq. implicita

$$z - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$$

La Direzione normale a tale piano è dunque quella del vettore $V = \begin{bmatrix} -f_x(x_0,y_0) \\ -f_y(x_0,y_0) \\ 1 \end{bmatrix}$ V punta in direzione delle z crescenti.

14) Piano tangente al grafico di $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Il piano tangente al grafico di $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $(x_0, f(x_0))$ è $z - f(x_0) - \nabla f(x_0)(x-x_0)$ $\quad z\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}^n$ $\quad \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$

e la relativa direz. normale è $V=(-\nabla f(x_0), 1)$

15) Curva regolare, superficie regolare:

Le condizioni $\gamma'(t_0)\neq 0$ per le curve e $\Phi_u \wedge \Phi_v (u_0,v_0) \neq 0$ per le superfici sono il requisito più importante per definirle "regolari", indipendentemente dalla regolarità e cioè dalla continuità delle derivate e dalle loro componenti scalari.

16) SPAZIO tangente:

Sia $f:\Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Fissato $x_0\in\Omega$ si definisce spazio tangente ad f in x_0 lo spazio T generato dalle colonne T_i di $f'(x_0)$ (la sua matrice Jacobiana in x_0). L'eq. parametrica dello spazio affine tangente è $g(\alpha_1 \dots \alpha_n) = f(x_0) + \sum_1^n \alpha_i T_i$

17) Punto SELLA: Un p.to critico $(\nabla f(x_0)=0)$ con Hessiana indefinita non è né di massimo né di minimo.

18) curva rettificabile $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ è rettificabile se

$$\Lambda(\gamma) = \sup_{\Pi} \Lambda(\Pi) < +\infty$$

Π = poligonali inscritte in γ

L_0 = partizione di $[a,b]$

19 Campo vettoriale: x

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce campo (di vettori) in Ω di classe C^K, una funzione $A: \Omega \to \mathbb{R}^n$, le cui componenti scalari $A = A_1 \dots A_n$ sono tutte funzioni di Ω in $\mathbb{R}$ continue con le loro derivate fino all'ordine K.

20 Forma differenziale Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Si def. forma differenziale lineare, una funzione $\alpha: \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\forall \bar{x} \in \Omega$ la funzione $t \to \alpha(\bar{x}, t)$ sia lineare in t.

21 Campo assoc. alla forma: (MANCA QUALCOSA)

IL campo di vettori $A(x)$ verrà detto campo associato alla forma α, e α verrà detto di classe C^K se e solo se A è di classe C^K. dato campo A definiamo la sua forma associata ad A ponendo $\alpha(x, \omega) = A(x)\omega$

22 Integ. esteso ad una curva:

Sia $A: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo di classe $C^0(\Omega)$. Per ogni curva parametrica $\gamma(t): [a, b] \to \Omega$, si definisce l'integ di A esteso a γ ponendo

$$\int_\gamma A = \int_a^b A(\gamma(t))\, \dot{\gamma}t\, dt.$$

23 Campo potenziale: $A: \Omega \to \mathbb{R}^n$ si dice Integrabile o ~~Potenziale~~ Campo Potenziale x

se esiste $f: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x) = A(x)$ $\forall x \in \Omega$

Ogni funzione f verificante l'identità precedente si dirà Primitiva.

24 forma esatta: $\alpha: \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Integrabile (ESATTA). x

se $\exists f: \Omega \to \mathbb{R}$: $df \equiv \alpha$ su $\boxed{\Omega \times \mathbb{R}^n}$

Ogni funzione f verificante si dirà primitiva della forma ~~assoc.~~ α in Ω.

OSS. I campi potenziali sono anche detti conservativi.

25 Curva chiusa: $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$

26 Campo irrotazionale: A di classe C^1 è detto irrotazionale se $(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i}$ $\forall i \neq j$

27 Forma diff. chiusa:

Forma diff. $\alpha(x,\omega) = A(x)\omega$ è detta chiusa, se il suo campo associato A è irrotazionale

28 Congiunzione 2 curve: Date $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ $\gamma_2 : [b,c] \to \Omega$

si definisce congi. $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ delle due curve come unica ponendo

$$\gamma_1(t) \oplus \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & se\ t \in [a,b] \\ \gamma_2(t) & se\ t \in [b,c] \end{cases}$$

$$\gamma_1(t) \oplus \gamma_2(t) : [a,c] \to \Omega$$

29 Curva opposta a $\gamma : [a,b] \to \Omega$ la curva $-\gamma : [a,b] \to \Omega$ definita ponendo $-\gamma(t) = \gamma(b - t + a)$

30 Curve deformabili od (omotope).

due curve $\gamma : [0,1] \to \Omega$ e $\sigma : [0,1] \to \Omega$ si dicano deformabili (od omotope) in Ω se $\exists$ $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ continua: $h(0,t) = \gamma(t)$ e $h(1,t) = \sigma(t)$

31 Insieme semplic. connesso

Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dirà semplicemente connesso se ogni curva chiusa $\gamma : [0,1] \to \Omega$ è omotopa in Ω ad una curva costante $\sigma(t) = x_0$ $\forall t \in [0,1]$

32 Definire l'omotopa di una curva ad una costante

basta porre: $h(\lambda, t) = x_0 + (1-\lambda)[\gamma(t) - x_0]$

33 Insieme Stella $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è stella se $\exists$ $x_0 \in \Omega$: il segmento $\overline{x_0 x} \subseteq \Omega$ $\forall x \in \Omega$.

34 insieme Connesso: $\Omega \in \mathbb{R}^n$ si dice connesso se $\forall x \in \Omega$ esiste $\gamma : [0,1] \to \Omega$ continua e tale che $\gamma(0) = x_1$ e $\gamma(1) = x_2$

In sostanza ogni p.to di Ω può essere raggiunto da ogni altro senza mai uscire da Ω ($\gamma : [0,1] \to \Omega$

35) Componente connessa: Modo Asettico: "Dato $\Omega \in \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \Omega$ si definisce componente connessa contenente x_0 come

$$\Omega(x_0) = \{x \in \Omega : \exists \gamma : [0,1] \to \Omega : \gamma(0) = x_0 \text{ e } \gamma(1) = x\}$$

36 Rotore: Dato $A: \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, si definisce

$$\mathrm{rot} A = \left((A_2)_{x_3} - (A_3)_{x_2}, -\left[(A_1)_{x_3} - (A_3)_{x_1}\right], (A_1)_{x_2} - (A_2)_{x_1} \right)$$

$$\hookrightarrow \nabla \wedge A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_3 \end{pmatrix}$$

$a_1 \cdot b_1$ $a_1 \cdot b_1$

I degeneri (misura nulla)

ESEMPI: rettangoli coi lati paralleli agli assi o i parallelepipedi agli spigoli paralleli agli assi.

37 definizione di intervallo: Un I in $\mathbb{R}^n$ è definito come il prodotto cartesiano di intervalli in $\mathbb{R}$

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] = \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [a_i, b_i]\}$$

$\hookrightarrow$ Misura degli intervalli: $|I| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

38 PLURINTERVALLO: se P è un plurintervallo, vuol dire che è un insieme tale che $\exists$ un numero finito di intervalli $I_1 \dots I_n$ privi di punti interni comuni verificanti $P = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ $i = 1 \dots n$.

39 $\hookrightarrow$ MISURA PLURI. (unione di Intervalli)

DATO P (PLURINTERVALLO) unione di $I_1 \dots I_n$, si pone $|P| = \sum_{i=1}^{n} |I_i|$

40 MISURA di Insiemi APERTI: $\forall \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto si pone

$$|\Omega| = \sup_{\substack{P \subseteq \Omega \\ P \text{ plurintervallo}}} |P|$$

Si pone $|\emptyset| = 0$.

41 Misura insieme ~~aper~~ COMPATTI: SIA $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto si definisce

$$|K| = \inf_{\substack{P \supseteq K \\ P \text{ plurintervallo}}} |P|$$

ogni compatto è contenuto in I $\Rightarrow |K| < +\infty$
tutti i compatti sono di dim. finita.

42 MISURA SECONDO LEBESGUE: SIA $E \subseteq \mathbb{R}^n$, limitato.

Si pone allora $m_*(E) = \sup_{K \subseteq E \text{ compatto}} |K|$ (misura Interna) $\qquad m^*(E) = \inf_{\Omega \supseteq E \text{ aperto}} |\Omega|$ (Esterna)

Se poi $m_*(E) = m^*(E) \to$ Misurabile secondo Lebesgue.

$\hookrightarrow$ Misura di Lebesgue di E, e si denota con $|E|$ o $m(E)$

Esistono Insiemi non misurabile secondo Lebesgue.

43 Misurab. di insiemi non limitati

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ arbitrario. Allora E si dirà misurabile se lo sono tutti gli insiemi $E_K = E \cap [-K, K]^n$, e si porrà $|E| = \sup_{\mathbb{N}} |E_K|$

44 Integrabile secondo Lebesgue

Si dice che f è integrabile secondo Lebesgue $\iff$ gli integrali superiore e inferiore su E coincidono. Il loro comune valore è detto integrale di Lebesgue di f su E.

45 Funzioni scalari: $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ funzione scalare

46 Funzioni vettoriali $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ funz. vettoriale

47 Stima della norma con i moduli delle componenti

$\forall x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1 ... x_n) \qquad |x| = \sqrt{(x_1)^2 + ... (x_n)^2}$

$|x_i| = \sqrt{(x_i)^2} \leq \sqrt{(x_1)^2 + ... + (x_n)^2} \leq \sqrt{n \cdot \max (x_i)^2} =$

$\sqrt{n} \cdot \sqrt{\max (x_i)^2} = \sqrt{n} \cdot \max \sqrt{(x_i)^2} = \sqrt{n} \cdot \max |x_i|$

$\Rightarrow |x_i| \leq |x| \leq \sqrt{n} \max |x_i| \quad , i = 1, ... n$

48 Successioni Una successione $X_n \in \mathbb{R}^n$ è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}^n$

$X_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$

49 Successi. CONVERGENTE: $X_n \in \mathbb{R}^n$ è una success. convergente se $\lim_{n \to +\infty} X_n = X \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \ |x_n - x| < \varepsilon$ si può anche dire $\lim_{n \to +\infty} |x_n - x| = \emptyset \quad |x_n - x| = a_n \quad \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$

50 Success. oscillante: $X_n \in \mathbb{R}^n$ è oscillante se non converge né diverge $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} X_n = N.E.$

51 Succ. divergente: se $\lim_{n \to +\infty} x_n + \infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \ |x_n| > \varepsilon$

ossia scelta una sfera qualunque esiste un $\bar{n}$ per cui la success. sta tutta fuori dalla sfera equivale a $\lim_{n \to +\infty} |x_n| = +\infty$

52 divergenza della norma: $X_n \in \mathbr{R}^n$

$\lim_{n \to +\infty} |x_n| = +\infty \Rightarrow$ almeno una delle sue componenti diverge

dim

$|x_n| = \sqrt{x_1^2 + ... x_n^2} \to$ essendo somma finita di termini positivi, se uno diverge, diverge tutta la somma.

53 funzione continua $\forall \bar{x} \in \Omega, \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:

Data $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ f è continua in x_0 se

$\forall \varepsilon > 0$ e $\forall \delta > 0$ $\forall x \in \Omega$ $|x - x_0| < \delta$ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

54 SFERA Aperta o intorno Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia $r > 0$ si chiama intorno di x_0 e di raggio r o (palla aperta) l'insieme $B(x_0, r) = \{ v \in \mathbb{R}^n : d(x_0, v) < r \}$

55 Punti interni: DATO $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e un insieme $\Omega \in \mathbb{R}^n$ si dice che x_0 è interno ad Ω se esiste $\rho > 0$: $B(x_0, \rho) \subseteq \Omega$.

56 Punto esterno Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, x_0 è esterno ad Ω se

- $\nexists \delta > 0$: $B_\delta(x_0) \cap \Omega \neq \emptyset$ ne interno
- $B_\delta(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ (è interno al complementare di Ω

57 Frontiera $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, x_0 è frontiera di Ω se non è interno ad Ω ne al suo complementare. nota posso prendere un raggio grande -

$\forall \rho > 0$ $\Omega \cap B_\rho(x_0) \neq \emptyset$ $\wedge$ $\Omega^c \cap B_\rho(x_0) \neq \emptyset$ importante

↳ ne interno ↓ ne esterno

$\partial \Omega$ = insieme p.ti di frontiera.

58 P.ti di Accumulazione: dato un insieme Ω ed $x_0 \in \mathbb{R}^n$ x_0 è di Accumu. per Ω se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in \Omega$; $x \neq x_0$. $x \in B(x_0, \varepsilon)$

59 Sfera chiusa: $\bar{B}(x_0, \delta) = \{ v \in \mathbb{R}^n : d(x_0, v) \leq \delta \}$

cioè contiene la sua frontiera.

60) Insieme Aperto: se tutti i suoi punti sono interni oppure se è vuoto

Ω si dice aperto se non contiene p.ti di frontiera.

61) Insieme chiuso: Se contiene tutti i suoi punti di accumulazione e di frontiera

- Il suo complementare $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ è aperto
- Se contiene tutti i suoi p.ti di Acc. $\partial \Omega \subseteq \Omega$
- se contiene tutta la frontiera $\partial \Omega \subseteq \Omega$

62 CHIUSURA di UN insieme: $\bar{\Omega}$

DATO $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si definisce chiusura dell'insieme Ω l'insieme $\bar{\Omega}$ formato da Ω e dall'insieme dei suoi p.ti di accumu. $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial \Omega$

63 Insieme limitato: se $\exists$ una palla che lo contiene | se $\exists r > 0$: $A \subseteq B_r(0)$

$x \in A \Rightarrow \|x\| < r$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $r > 0$

64 Continuità di funzioni fra spazi euclidei:
Data la funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ f è continua in x_0 se
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega \; |x - x_0| < \delta \;,\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

65 Insieme Convesso: dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce insieme convesso
se $\forall x_1, x_2 \in \Omega \;,\; \forall \lambda \in [0,1] \quad (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in \Omega$
cioè scelti 2 punti qualsiasi $\in \Omega$ il segmento $\overline{x_1 x_2}$ che li unisce appartiene tutto ad Ω.

66 Insieme compatto Ω si dice compatto se ogni successione di Ω ammette una sottosucc. convergente in p.ti di Ω quindi se è chiuso e limitato. (T. 2° / 2) Teorema Fisica

67 Continuità e convergenza di funzioni vettoriali:
Una f. vettoriale $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
- è continua se tutte le sue componenti scalari lo sono
- è converg. se tutte le sue " " convergono.

68 Sostegno di una curva: si dice sostegno della curva γ l'immagine della curva stessa e cioè la traiettoria percorsa dal punto.

69 Curva Una curva nel piano è una qualunque funzione
$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, nello spazio $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^3$

70 Linea di livello: Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dato $\lambda \in \mathbb{R}$ la linea di livello corrispondente è $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \lambda\}$

71 Curva di Livello $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
$\gamma: [a,b] \to \Omega$ si dice curva di livello K di f su Ω se
$f(\gamma(t)) = K$ costante, $t \in [a,b]$. Le curve sono sempre perpendicolari al gradiente. se $f(\gamma(t)) = K$ costante allora
$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0 \Rightarrow \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 \quad \forall t \in (a, b)$

72 direzione massima pendenza: ascendente crescente
$\frac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0)|}$

73 Direzione discendente $-\frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$

74 Vettore normale: vettore perpendicolare al piano tangente $\begin{bmatrix} -\nabla f(x_0) \\ 1 \end{bmatrix}$

75 Sp. parametrica Dato $A \subset \mathbb{R}^2$, date 3 funzioni $x(u,v)$, $y(u,v)$ e $z(u,v)$ in A
$S = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : (u,v) \in A\}$

76 Superficie implicita: $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è il luogo degli zeri di una funzione di 3 variabili $\Phi(x,y,z)$ $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \Phi(x,y,z) = 0\}$

77 Sp. Cartesiana: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ $f: A \to \mathbb{R}$ si definisce la sp è il grafico
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y) ; (x,y) \in A\}$$

78 Curva Semplice: Una curva risulta semplice se non ritorna mai su se stessa tranne al più il fatto che $\gamma(a) = \gamma(b)$.

79 Velocità: Il vettore $\dot{\gamma}(t) = (x'(t), y'(t))$.

80 Speed, Velocità Scalare: è il numero dato dalla norma della velocità =
$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

81 Vettore tangente: Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) si dice vettore tangente il vettore $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$.

82 Curva Regolare: data $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$
Si dirà regolare su I se $\gamma \in C'(t)$ (le componenti sono deriv. con continuità) e se le derivate delle componenti non sono strett. nulle in alcun punto t dell'intervallo, vale a dire se
$\forall t \in I$ $[x'(t)^2 + y'(t)^2] \neq 0$, ciò garantisce l'esistenza del vettore tangente al supporto della curva in ciascun pto.

83 Lunghezza di una curva: Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\Pi_{a,b}$ partizione di $[a,b]$ $\Lambda(\gamma) = \sup_{\Pi} (\Lambda \Pi)$ se $\Lambda(\gamma) < +\infty$ rettificabile

$\Lambda(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$.

se $\gamma \in C'([a,b] \to \mathbb{R}^n)$
$\Downarrow$
$\Lambda(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$.

84 Superf. Regolare: Sia $\Psi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, una sp. in forma parametrica. $\Psi(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$

- È Regolare se soddisfa 3 condizioni:

1) f, g, h devono essere derivabili con continuità su D, dunque $f, g, h \in C^1(D)$.
2) Ψ deve essere Iniettiva.
3) deve esistere il piano Tangente in ogni suo pto.

OSS. basta che la somma dei quadrati dei minori di ordine 2 della matrice Jacobiana di Ψ sia non negativa.

$J\psi = \begin{bmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{bmatrix}$ → la condizione è dunque

$[f_u g_v - g_u f_v]^2 + [f_u h_v - h_v f_u]^2 + [g_u h_v - h_u g_v]^2$

85 Coordinate polari piane:

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ $\quad \gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos(\theta(t)) \\ y(t) = \rho(t) \cdot \sin(\theta(t)) \end{cases}$ $\quad t \in [a,b]$ $\quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

86 Derivate successive Sia $\Omega \to \mathbb{R}$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ f ha derivata prima $\frac{df}{dx_j}$ derivabile rispetto a x_j allora chiamiamo derivata seconda.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} = \frac{d}{dx_i}\left(\frac{d}{dx_j}\right)$$ e così via derivata terza $\frac{d^3}{dx_j dx_i x_k}$

- 87 Matrice Hessiana

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce la matrice Hessiana di f avente tutte le derivate parziali 2°.

$$H_{(x)} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

88 Funzione di classe $C^2 \Omega$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$f \in C^2\Omega$ se
- derivate parziali seconde continue in Ω
- derivate parziali prime continue in Ω
- f continua in Ω

89 Polinomio di Tylor:

$w_i = (x_i - x_0)$
$w_j = (x_j - x_0)$

$$f(x_0+w) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_0) w_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j$$

$$P_2 = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\right]$$

90 Curva regolare semplificato:
Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e' regolare se $|\gamma'(t)| \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$

91 Curva equivalente: 2 curve parametriche sono equivalenti se dette esse $\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ $\sigma(t) : [c,d] \to \mathbb{R}^n$
$\exists f : [c,d] \to [a,b]$
- derivabile con continuità su $[c,d]$
- strettamente monotona su $[c,d]$: risulta $\sigma(t) = \gamma(f(t))$

92 Campo irrotazionale: Un campo vettoriale e' irrotazionale se il suo rotore è nullo.

93 Integrale curvilineo: $\gamma : [a,b] \to \Omega$ $\gamma \in C^1([a,b])$ $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt$$

94 Distanza. Dati $u,v \in \mathbb{R}^n$ si definisce la loro distanza $d(u,v) = |u-v|$ come la norma del ~~loro~~ vettore differenza tra u e v. Cioè la radice quadrata della somma dei quadrati delle differenze delle loro componenti corrispondenti $d(u,v) = |u-v| = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + \dots + (u_n-v_n)^2}$

Proprietà: 1 $\forall u,v \in \mathbb{R}^n$ $d(u,v) \geq 0$ 2 $d(u,v) = 0 \iff u = v$

Positività
3 $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^n$ $d(u,v) = d(v,u)$
4 $\forall u,v,z \in \mathbb{R}^n$ $d(u,v) \leq d(u,z) + d(v,z)$

$d(u,v) = |u-v|$ $\sqrt{\sum (u_i - v_i)^2}$

$(x-3)^2$ $x=4 \to 1$ $x=5 \to 4$

$x^2 + 9 - 6x$ 16

$\gamma : [a,b] \to \Omega$ $\gamma \in C$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$

$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|$

LIMITE = L: Se $L \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$ $f : X \to \mathbb{R}^m$ allora $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$
$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : x \in X, \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|f(x) - L\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$

LIMITE = ∞: Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $f : X \to \mathbb{R}^m$ allora $\lim f(x) = \infty$
$\iff \forall K > 0$ esiste $\delta(K) > 0$: $x \in X, \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(K) \Rightarrow \|f(x)\|_{\mathbb{R}^m} > K$