Vettore accelerazione angolare

Se il moto avviene su un piano, attorno all'asse z, definiamo il vettore accelerazione angolare:

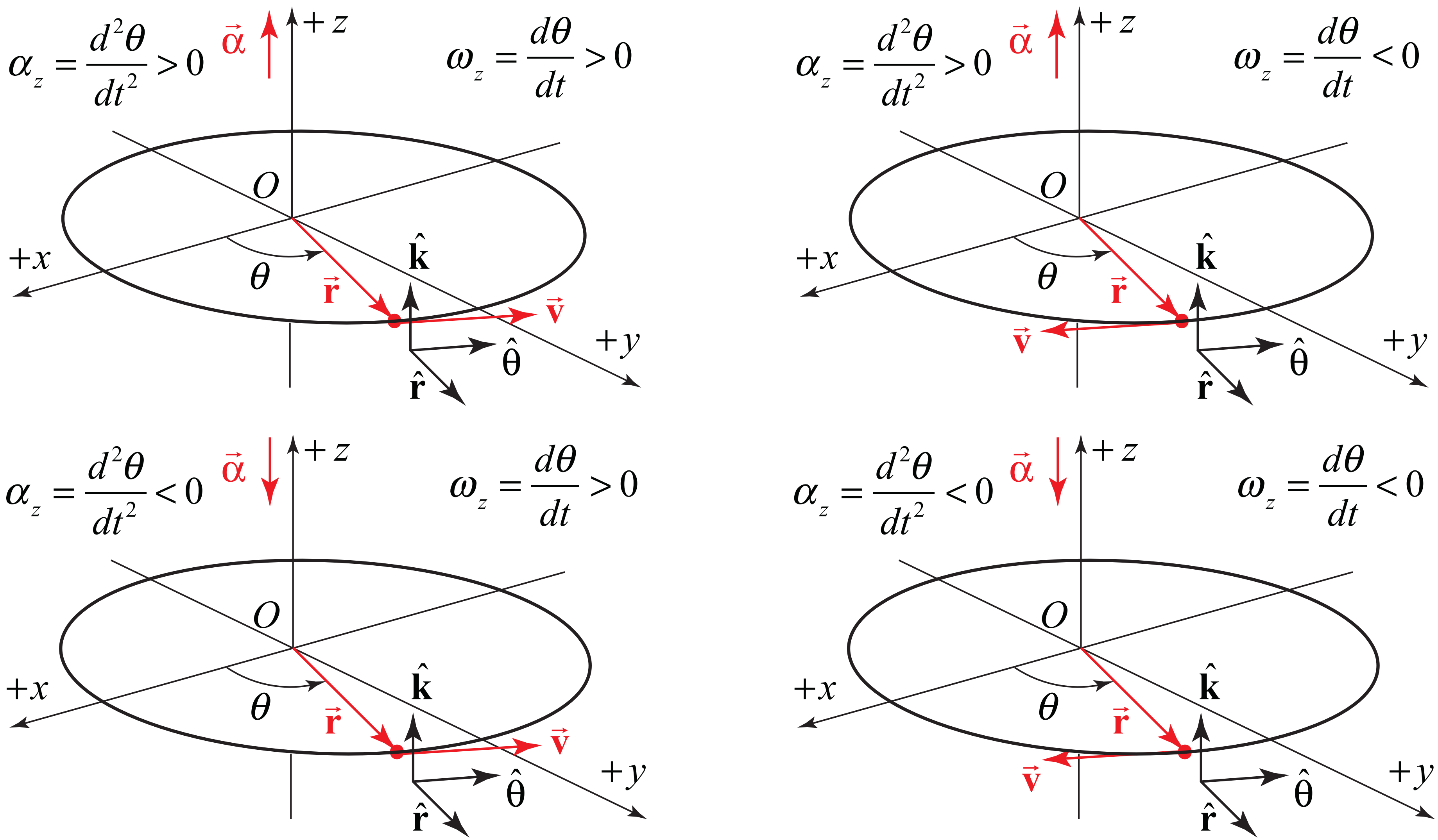
$$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt}\hat{\mathbf{k}} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\mathbf{k}} = \alpha_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$[\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-2}]$$

Modulo dell' accelerazione angolare:

$$\alpha \equiv \left|\vec{\boldsymbol{\alpha}}\right| = \left|\frac{d^2\theta}{dt^2}\right|$$

Verso del vettore



esercizio

Un oggetto puntiforme è vincolato a muoversi lungo una circonferenza. La componente lungo l'asse z dell'accelerazione angolare dell'oggetto, per l'intervallo di tempo $[0, t_1]$, è data dalla funzione:

$$\alpha_z(t) = \begin{cases} b\left(1 - \dfrac{t}{t_1}\right); \quad 0 \le t \le t_1 \\ 0; \; t > t_1 \end{cases},$$

dove b è una costante positiva con unità di misura $[\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-2}]$.

a) Determinare un'espressione per la velocità angolare dell'oggetto al tempo $t = t_1$.
b) Di che angolo è ruotato l'oggetto al tempo $t = t_1$?

$$\alpha_z(t) = \begin{cases} b\left(1 - \dfrac{t}{t_1}\right) & 0 \le t \le t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$$

$$\alpha_z = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega_z}{dt}$$

$$\omega_z(t) - \omega_z(t=0) = \int_0^t \alpha_z(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \left[b - \frac{b\tau}{t_1}\right] d\tau = \int_0^t b\,d\tau - \int_0^t \frac{b\tau}{t_1}\,d\tau$$

$$= bt - \frac{1}{2}\frac{b}{t_1}t^2$$

COMPONENTE DELLA VELOCITÀ ANGOLARE

$$\omega_z(t_1) = \omega_z(0) + bt_1 - \frac{1}{2}\frac{b}{t_1}t_1^2 = \omega_z(0) + \frac{1}{2}bt_1$$

$$\omega_z(0) = 0$$

$$\omega_z(t) = bt - \frac{1}{2}\frac{b}{t_1}t^2$$

$$\theta(t) - \theta(t=0) = \int_0^t b\tau - \frac{1}{2}\frac{b}{t_1}\int_0^t \tau^2 d\tau$$

$$\theta(t) = \theta(0) + \frac{1}{2} b t^2 - \frac{1}{6} \frac{b}{t_1} t^3$$

$$\theta(t_1) = \theta(0) + \frac{1}{2} b t_1^2 - \frac{1}{6} \frac{b}{t_1} t_1^3 = \theta(0) + \frac{1}{3} b t_1^2$$

esercizio

Un'automobile compie un giro completo su una pista circolare di raggio $R = 150\ m$ in un tempo totale di $60\ s$. La macchina parte da ferma e lungo la traiettoria è soggetta a una accelerazione tangenziale costante. Calcolare:

- La velocità scalare media sul giro.
- La velocità scalare istantanea in funzione del tempo $v(t)$.
- Il modulo dell'accelerazione vettoriale in funzione del tempo $a(t)$.
- La componente della velocità angolare in funzione del tempo $\omega_z(t)$.
- La componente dell'accelerazione angolare in funzione del tempo $\alpha_z(t)$.

$R = 150\ m \qquad T = 60\ s$

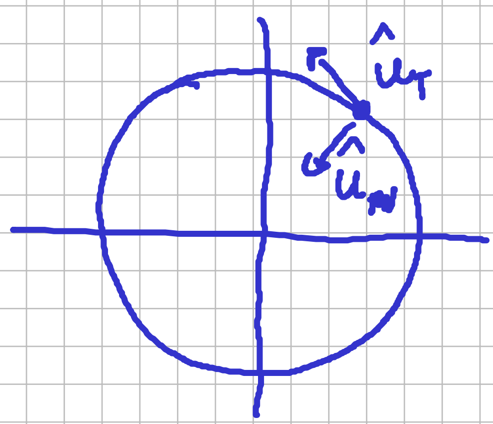
$$v_{MEDIA} = \frac{S(T)}{T} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{300\pi\ m}{60\ s} = 5\pi\ \frac{m}{s}$$

VELOCITÀ SCALARE MEDIA

$$S(t) = \frac{1}{2} a t^2 \qquad v(t) = a t$$

$$\frac{1}{2} a T^2 = 2\pi R \qquad a = \frac{4\pi R}{T^2} = \frac{\pi}{6}\ m s^{-2}$$

$$v(t) = \frac{\pi}{6}\ m s^{-2} \cdot t = \frac{\pi}{6} t \quad (m s^{-1})$$



$$a_t = a = \frac{\pi}{6}\ m s^{-2}$$

$$a_N = \frac{[v(t)]^2}{R} = \frac{\pi^2 t^2}{5400\ m}$$

$$a(t) = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$\omega(t) = \frac{v(t)}{R} \qquad v(t) = \frac{\pi}{6} t$$

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{\pi}{6} \frac{1}{R}$$

Moto non circolare

Nel caso generale, in coordinate polari:

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{\mathbf{r}}(t)$$

Di conseguenza, il vettore velocità avrà, oltre alla componente tangenziale, una componente radiale:

$$\vec{v} = v_r\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$$

Similmente, il vettore accelerazione è scritto come:

$$\vec{a} = a_r\hat{\mathbf{r}} + a_\theta\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$$

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\,\hat{\theta}$$
$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\,\hat{r}$$

$$\vec{r} = r\,\hat{r}$$

$$\vec{v} = v_r\,\hat{r} + v_\theta\,\hat{\theta}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\hat{r}} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\dot{\theta} = \omega$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\,\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\,\hat{\theta} + r\dot{\theta}\,\dot{\hat{\theta}} =$$

$$= \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\,\hat{\theta} - r\dot{\theta}\dot{\theta}\,\hat{r} =$$

$$= \left[\ddot{r} - r\left[\dot{\theta}\right]^2\right]\hat{r} + \left[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right]\hat{\theta}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\left[\dot{\theta}\right]^2$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

esercizio

Una particella si muove verso l'esterno lungo una spirale, partendo dall'origine al tempo $t = 0$. La sua traiettoria è data da

$$r = b\,\theta,$$

dove b è una costante positiva con unità $[\mathrm{m} \cdot \mathrm{rad}^{-1}]$. L'angolo θ aumenta nel tempo secondo la legge

$$\theta = c\,t^2,$$

dove $c > 0$ è una costante positiva (con unità $[\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-2}]$).

a) Determinare l'accelerazione in funzione del tempo.

b) Determinare il tempo al quale l'accelerazione radiale è nulla.

c) Qual è l'angolo quando l'accelerazione radiale è nulla?

d) Determinare il tempo al quale le accelerazioni radiale e tangenziale hanno lo stesso modulo.

$r = b\theta \qquad b > 0$

$\theta = ct^2 \qquad c > 0$

$r = bct^2$

$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta}$

$$\boxed{\begin{aligned} a_r &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ a_\theta &= 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}}$$

$\frac{dr}{dt} = 2bct \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} = 2bc$

$\frac{d\theta}{dt} = 2ct \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 2c$

$$\vec{a} = \left(2bc - 4bc^3t^4\right)\hat{r} + \left(10b^2c^2t^2\right)\hat{\theta}$$

Dinamica

Dinamica

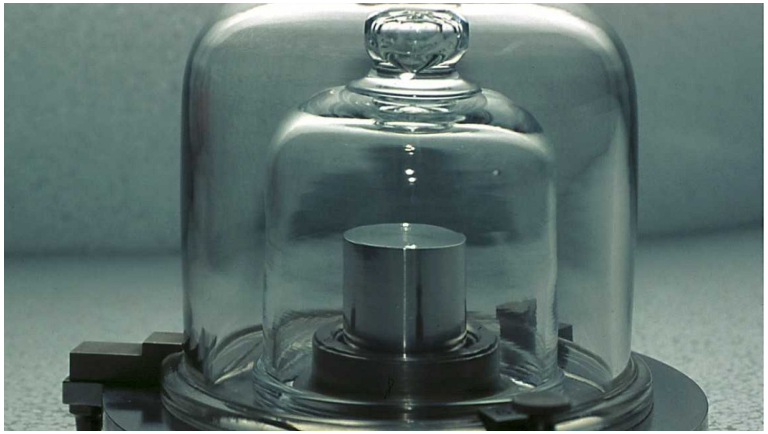
Lo scopo della dinamica è descrivere le interazioni tra i corpi attraverso le forze

Corpo: un corpo è una particella puntiforme dotata di massa (punto materiale).

Parole chiave:

- Massa
- Forza
- Forza risultante
- Accelerazione

Massa

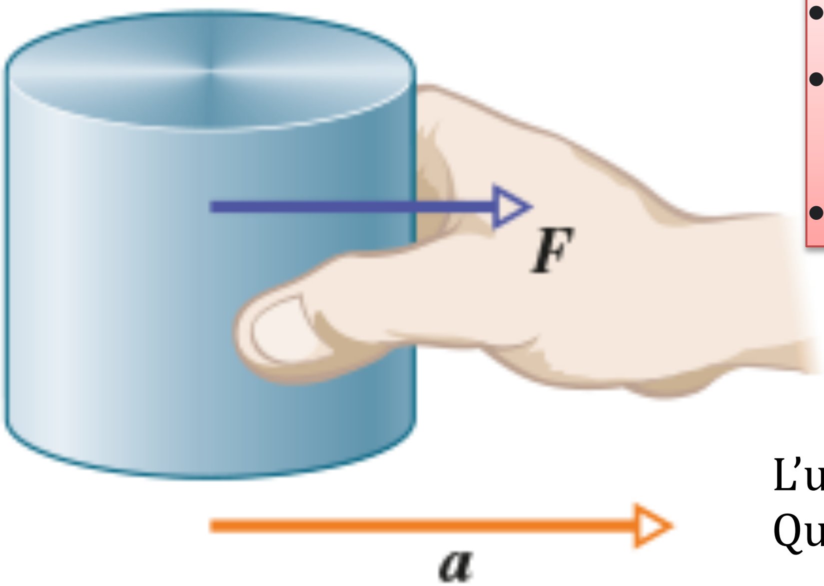


- La massa di un oggetto è una proprietà intrinseca dell'oggetto,
- La massa è una grandezza scalare, positiva, il simbolo è *m* e l'unità di misura è il chilogrammo (*kg*).
- In meccanica, ogni corpo ha massa.
- La massa è considerata una proprietà immutabile.

Non confondere la massa con il peso!

Forza

Se un corpo interagisce con un altro corpo, questa **interazione** provoca un'accelerazione. L'interazione, a contatto o a distanza, è descritta matematicamente dalla **forza**.



- La mano tira il cilindro.
- La mano esercita una forza $\boldsymbol{F}$ sul cilindro.
- Il cilindro accelera.

L'unità di misura della forza è $kg\ m\ s^{-2}$.
Questa unità si chiama Newton, simbolo N

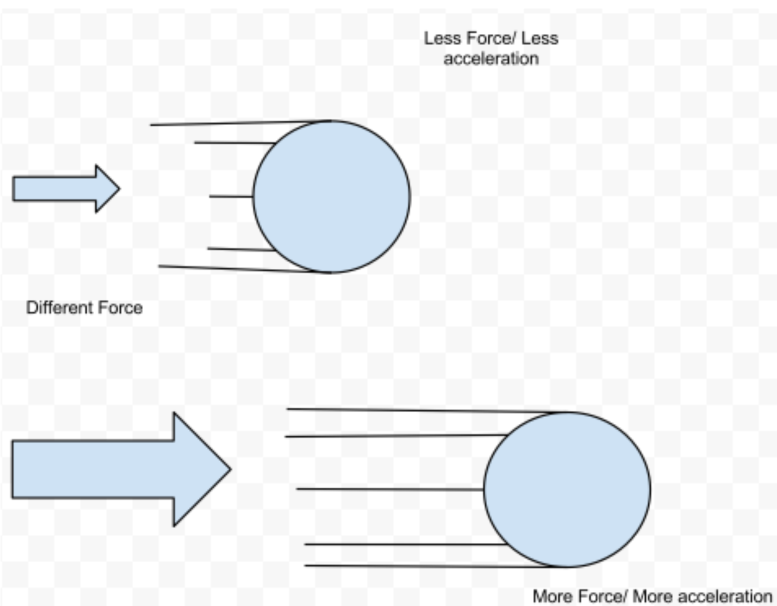
$$1\ N = 1\ kg\ m\ s^{-2}$$

Forza, massa and accelerazione

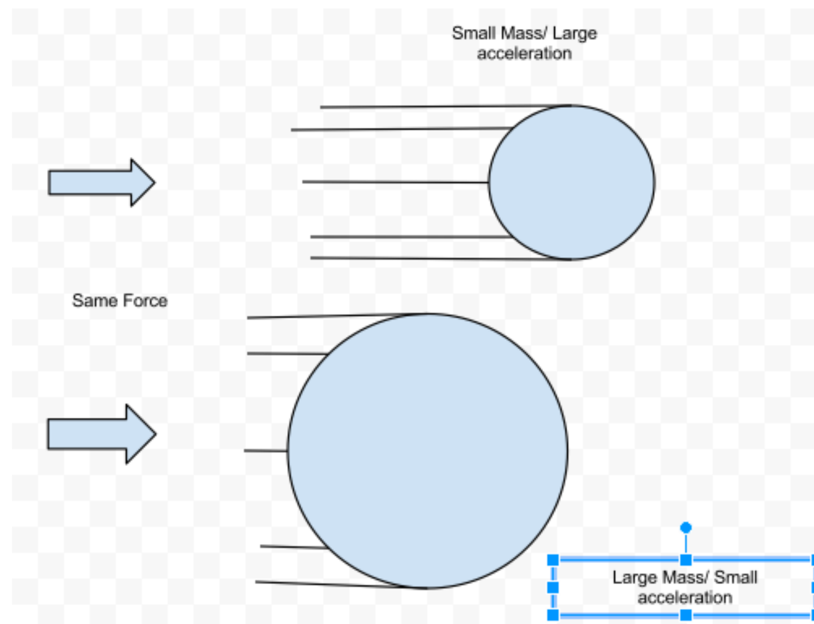
Consideriamo un corpo sul quale agisce una forza $\vec{\boldsymbol{F}}$. Il corpo accelera e:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}}$$

con m la massa del corpo.
Forza e accelerazione sono vettori paralleli.



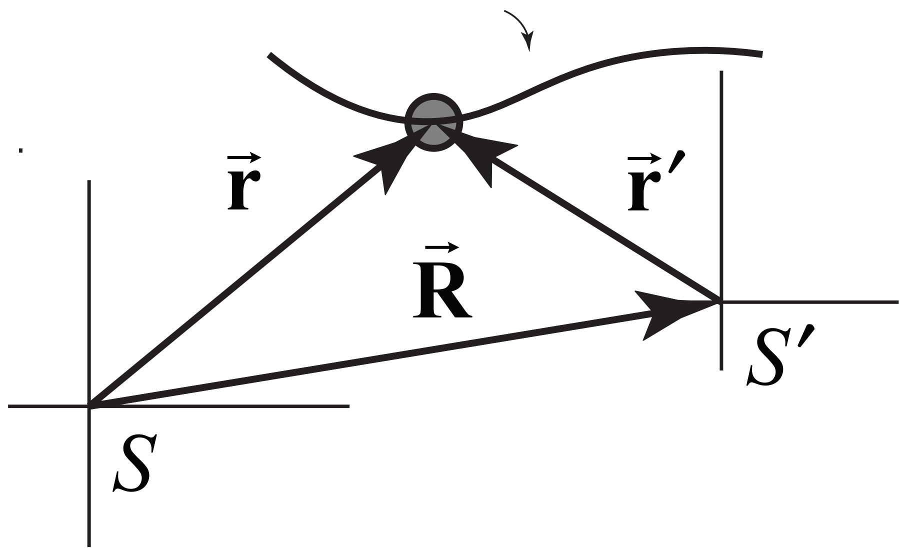
Forze diverse, stessa massa



Stessa forza, masse diverse

Relatività galileiana

Traiettoria di un corpo nel sistema di riferimento S



Vettore posizione nel sistema di riferimento S'

$$\vec{\mathbf{r}}' = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}$$

Vettore velocità nel sistema di riferimento S'

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}'}{dt'} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} - \frac{d\vec{\mathbf{R}}}{dt},$$

$$\vec{\mathbf{v}}' = \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{V}}.$$

Se il sistema S' si muove rispetto a S con velocità costante $\vec{\mathbf{V}}$, i due sistemi si dicono mutuamente inerziali.

Sistemi di riferimento: traslazione

Consideriamo due sistemi di riferimento cartesiani, S e S'. Le relazioni tra le grandezze (coordinate, velocità e accelerazione) nei due sistemi dipendono dal moto relativo fra essi. Analizziamo sia le trasformazioni dirette (da S' a S) sia le trasformazioni inverse (da S a S'). Sia $\boldsymbol{R}(t)$ il vettore che individua l'origine di S' rispetto a S.

1 Trasformazioni Dirette (da S' a S)

- **Coordinate:**

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{r}'$$

Derivando rispetto al tempo:

- **Velocità:**

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{R}}(t) + \boldsymbol{v}' \quad \text{con } \boldsymbol{v}' = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}.$$

- **Accelerazione:**

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{R}}(t) + \boldsymbol{a}' \quad \text{con } \boldsymbol{a}' = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}.$$

2 Trasformazioni Inverse (da S a S')

- **Coordinate:**

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}(t).$$

Derivando rispetto al tempo:

- **Velocità:**

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{R}}(t)$$

- **Accelerazione:**

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \ddot{\boldsymbol{R}}(t)$$

Principio di inerzia (I principio)

Si consideri un corpo su cui non agisce alcuna forza. Se il corpo è a riposo, rimarrà a riposo. Se il corpo si muove a velocità costante, continuerà a farlo.

- Il primo principio è conosciuto anche come *principio di inerzia*.

- Chiamiamo *sistemi di riferimento inerziali* (o *sistemi inerziali*) i sistemi di riferimento in cui un corpo non interagente obbedisce alla legge di inerzia.

- I sistemi di riferimento inerziali hanno una proprietà di **transitività:**
  - se S è un sistema inerziale e S' è in moto rettilineo uniforme rispetto a S, anche S' è inerziale;
  - se poi un terzo sistema S'' è in moto rettilineo uniforme rispetto a S', lo è anche rispetto a S, per cui anche S'' è inerziale.

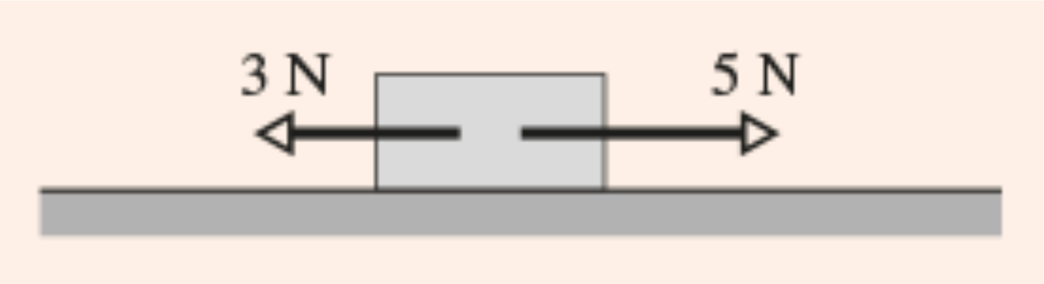
- In altre parole i sistemi di riferimento inerziali formano una classe di sistemi, caratterizzati dal fatto di essere in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro.

Risultante delle forze

Se un corpo interagisce con più corpi, ognuna di queste interazioni sarà descritta da una forza. Le forze si sommano con la regola della somma vettoriale e la **forza risultante** agente su un corpo è la somma vettoriale delle singole forze esercitate sul corpo dai diversi corpi che interagiscono con esso.

Sia $\{\vec{\mathbf{F}}_i\}$ l'insieme delle forze che agiscono su un corpo di massa *m*. Allora la forza risultante è:

$$\vec{\mathbf{F}}_{ris} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \cdots = \sum \vec{\mathbf{F}}_i$$



Su questo corpo agisce una forza risultante di modulo *2N,* orizzontale e verso destra

Il principio

L'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale alla <u>forza risultante</u> agente su esso e inversamente proporzionale alla sua massa.

Il principio:

$$\vec{\mathbf{F}}_{ris} = m\vec{\mathbf{a}}$$

dove $\vec{\mathbf{F}}_{ris}$ è la forza risultante.
Se la forza risultante è nulla, $\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ e il corpo si muove di moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema di riferimento inerziale. In questo caso si dice che il corpo è in equilibrio traslazionale.

Affinché il corpo sia in equilibrio deve essere:

$$\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$$

ovvero:

$$\vec{\mathbf{F}}_{ris} = 0$$

Componenti delle forze

Consideriamo un corpo di massa *m* sul quale agiscono due forze, $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{1}}$ e$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}}$.

La forza risultante è:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\boldsymbol{ris}} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{1}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}}$$

L'accelerazione è data da:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_{\boldsymbol{ris}}}{m} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{1}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{2}}}{m}$$

Equazione vettoriale

Introducendo un sistema di assi cartesiani, le relazioni tra le componenti del vettore accelerazione e le componenti dei vettori forza saranno:

Sistema di equazioni scalari

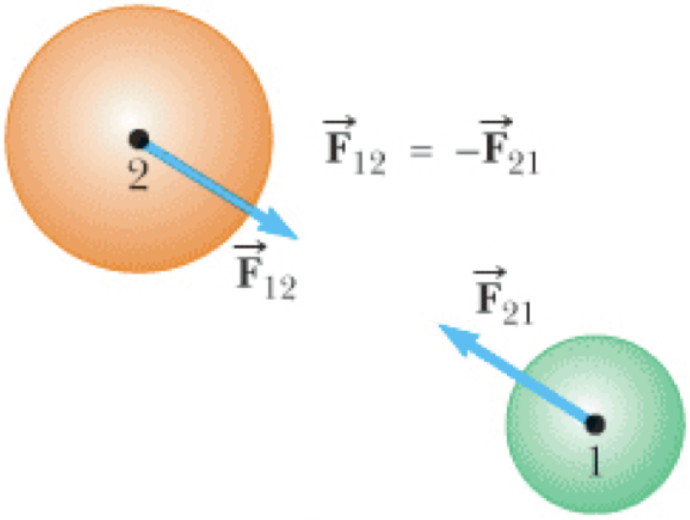
$$\begin{cases} \mathrm{a}_x = \dfrac{\mathrm{F}_x}{m} = \dfrac{\mathrm{F}_{1x} + \mathrm{F}_{2x}}{m} \\ \mathrm{a}_y = \dfrac{\mathrm{F}_y}{m} = \dfrac{\mathrm{F}_{1y} + \mathrm{F}_{2y}}{m} \\ \mathrm{a}_z = \dfrac{\mathrm{F}_z}{m} = \dfrac{\mathrm{F}_{1z} + \mathrm{F}_{2z}}{m} \end{cases}$$

Questo metodo può essere generalizzato al caso di un numero arbitrario di forze agenti.

III principio

Consideriamo due corpi che interagiscono.

1 esercita su 2 la forza $\vec{F}_{12}$. 2 esercita su 1 la forza $\vec{F}_{21}$. Chiamiamo una di queste *azione* e l'altra *reazione*.



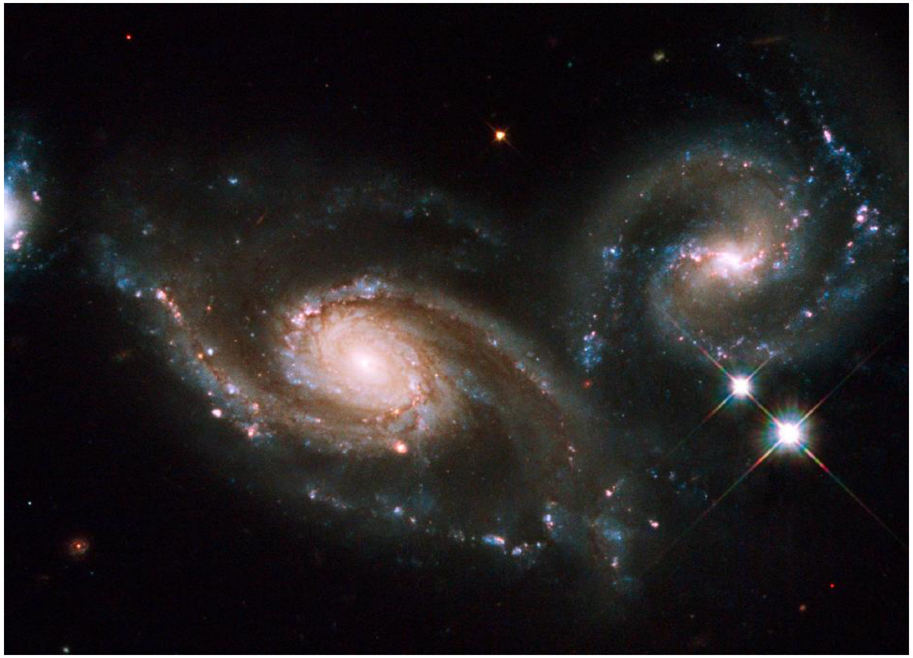
Queste forze hanno stesso modulo, stessa direzione e verso opposto:

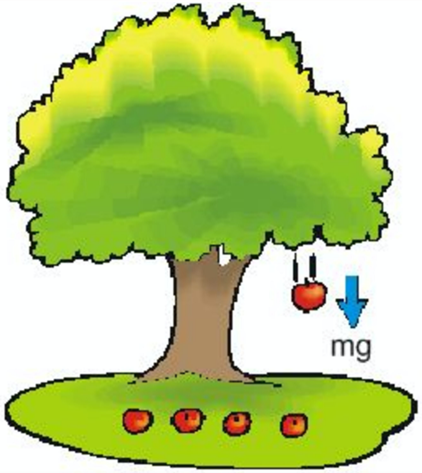
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

- Le forze sono dovute ad interazioni fra i corpi;
- Le forze sono sempre presenti a coppie;
- Una forza singola isolata non può esistere.

- Attenzione: le coppie di forze azione-reazione agiscono sempre su corpi diversi!

Esempi





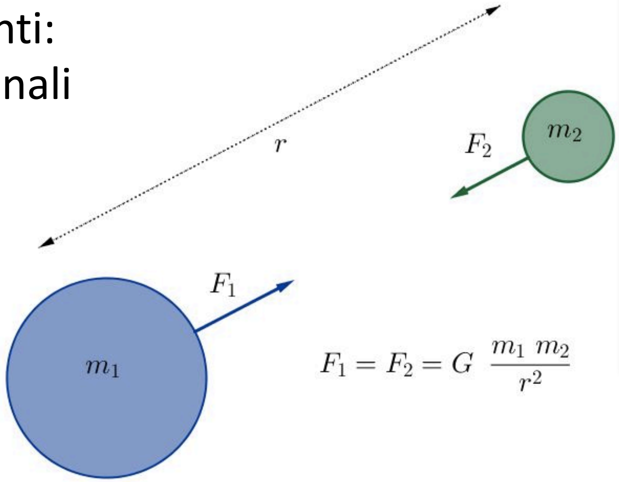
La terra esercita sulla mela il peso.
La mela esercita sulla terra una forza opposta. La mela accelera verso la terra. Il modulo è:

$$a_{mela} = \frac{P_{mela}}{m_{mela}} = \frac{m_{mela}}{m_{mela}} \cdot g = g$$

La terra accelera verso la mela. Il modulo è:

$$a_{terra} = \frac{P_{mela}}{m_{terra}} = \frac{m_{mela}}{m_{terra}} \cdot g \approx 10^{-25} g$$

Galassie interagenti: le forze gravitazionali hanno stesso modulo, stessa direzione e verso opposto



Forze

- Forze Fondamentali

- sono dovute a “campi di forze”

si suddividono in:

gravitazionali

elettromagnetiche

deboli

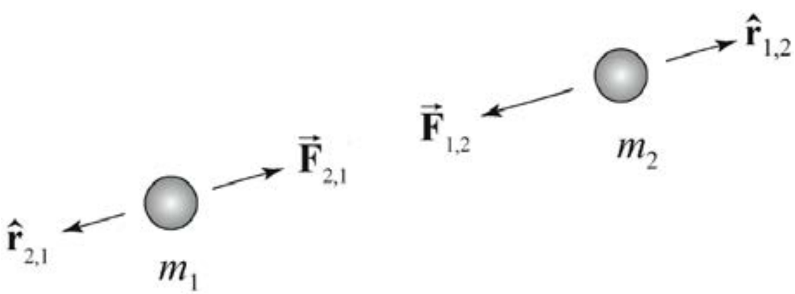
forti

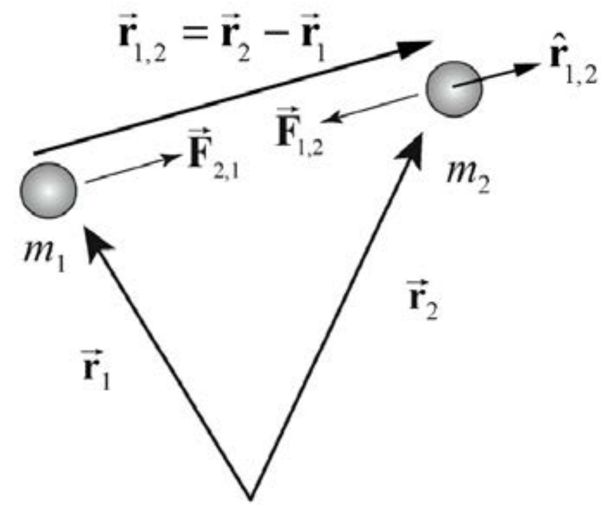
- Forze per contatto

- manifestazioni macroscopiche delle interazioni elettromagnetiche

- implicano il contatto macroscopico tra due corpi

Forza di gravità





Il corpo 1 attrae il corpo 2:

$$\vec{F}_{1,2} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^2}\hat{r}_{1,2}$$

Il corpo 2 attrae il corpo 1:

$$\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$$

dove m_1 e m_2 sono le masse $\quad G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$

ATTENZIONE: la forza è attrattiva, quindi ha verso opposto rispetto al vettore posizione; la componente della forza lungo un asse orientato come il vettore posizione è negativa!

Peso

Se un corpo di massa *m* è vicino alla superficie terrestre, e interagisce solo con la terra, il corpo subisce una forza verso il basso di modulo:

$$F = G\frac{m\, m_{terra}}{r_{terra}^2}$$

Il modulo dell'accelerazione del corpo è (accelerazione di caduta libera):

$$a = g = G\frac{m_{terra}}{r_{terra}^2} = 9.81\, m\, s^{-2}$$

La direzione è verso il basso (in realtà verso il centro della terra). Poiché:

$$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$$

abbiamo:

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\boldsymbol{P}} = m\vec{\mathbf{g}}$$

Questo è il peso del corpo.

m_{terra}
$= massa\ della\ terra$
$= 5.972 \cdot 10^{24}\ kg$

r_{terra}
$= raggio\ della\ terra$
$= 6.371 \cdot 10^{6}\ m$

Se
$h =$ distanza dalla superficie terrestre
$h \ll r_{terra}$

Peso: caratteristiche

Questo corpo è in caduta libera.

- Il peso è una forza diretta verticalmente verso il basso.
- L'unità di misura del peso è N.
- Se su un corpo agisce <u>solo</u> il peso, il corpo accelera verticalmente verso il basso con accelerazione $\vec{\mathbf{g}}$.
- L'accelerazione $\vec{\mathbf{g}}$ non dipende dalla massa del corpo.
- La massa è una proprietà intrinseca di un corpo, il peso descrive l'interazione gravitazionale di questo corpo con la terra.

Forza normale

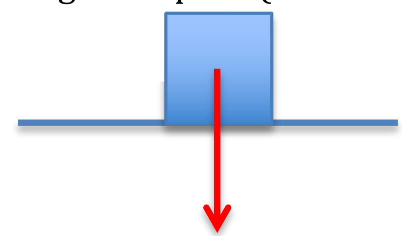
Su questa vaso agisce il peso.

Il vaso ha accelerazione zero e quindi la forza netta (risultante) è zero.

Poiché il vaso è sul tavolo, c'è una forza, di contatto, esercitata dal tavolo che bilancia il peso.

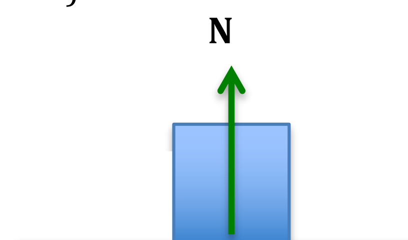
Consideriamo un corpo di massa m a riposo su un piano orizzontale:

Identifichiamo le forze che agiscono sul corpo. Anzitutto il corpo interagisce con la terra per cui sul corpo agisce il peso (freccia rossa):



$$\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{g}}$$

Il corpo è a contatto con il piano orizzontale che esercita su di esso una forza normale (freccia verde):



Sul corpo non agiscono altre forze.

Diagramma di corpo libero

Disegniamo il diagramma delle forze che agiscono sul corpo, rappresentando ogni forza che agisce sul corpo con un vettore.

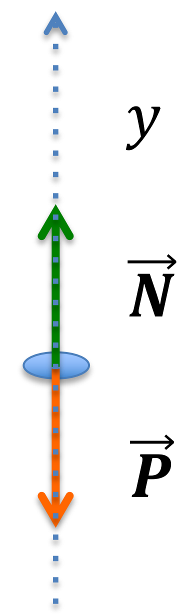
Introduciamo un sistema di assi rispetto ai quali specificare le componenti dei vettori.

Scriviamo la seconda legge di Newton in forma vettoriale. Nel nostro caso:

$$\vec{\mathbf{F}}_{ris} = \vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$$

Ovvero:

$$(\mathrm{N}_x + \mathrm{P}_x)\hat{\mathbf{i}} + (\mathrm{N}_y + \mathrm{P}_y)\hat{\mathbf{j}} = ma_x\hat{\mathbf{i}} + ma_y\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0}$$



Le corrispondenti equazioni scalari per le componenti sono:

$$\mathrm{N}_x + \mathrm{P}_x = ma_x = 0 \quad ; \quad \mathrm{N}_y + \mathrm{P}_y = ma_y = 0$$

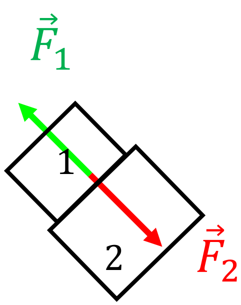
Poiché $\mathrm{N}_x = 0$, $\mathrm{P}_x = 0$, $\mathrm{N}_y = \mathrm{N}$ e $\mathrm{P}_y = -\mathrm{P}$, abbiamo:

$$\mathrm{N} = \mathrm{P}$$

Quindi le due forze hanno stesso modulo.

Forze normali ($\vec{N}$) fra superfici

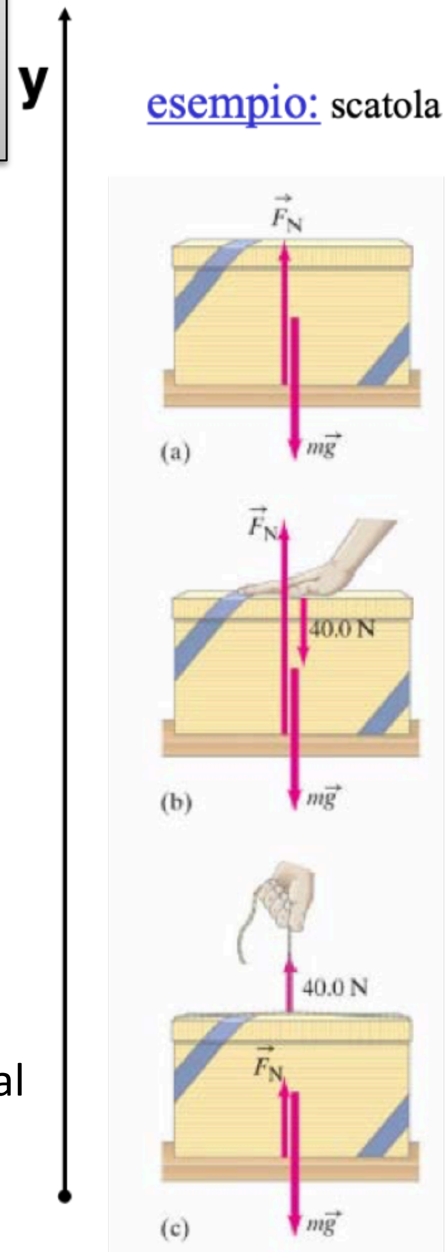
- Sono forze di contatto, dirette **perpendicolarmente alle superfici** (e solo in compressione)



E' una forza vincolare poiché impedisce al corpo di penetrare la superficie.

$\vec{N}$ non sempre bilancia $m\vec{g}$

esempio: scatola a riposo su tavolo: $\sum F_y = 0$



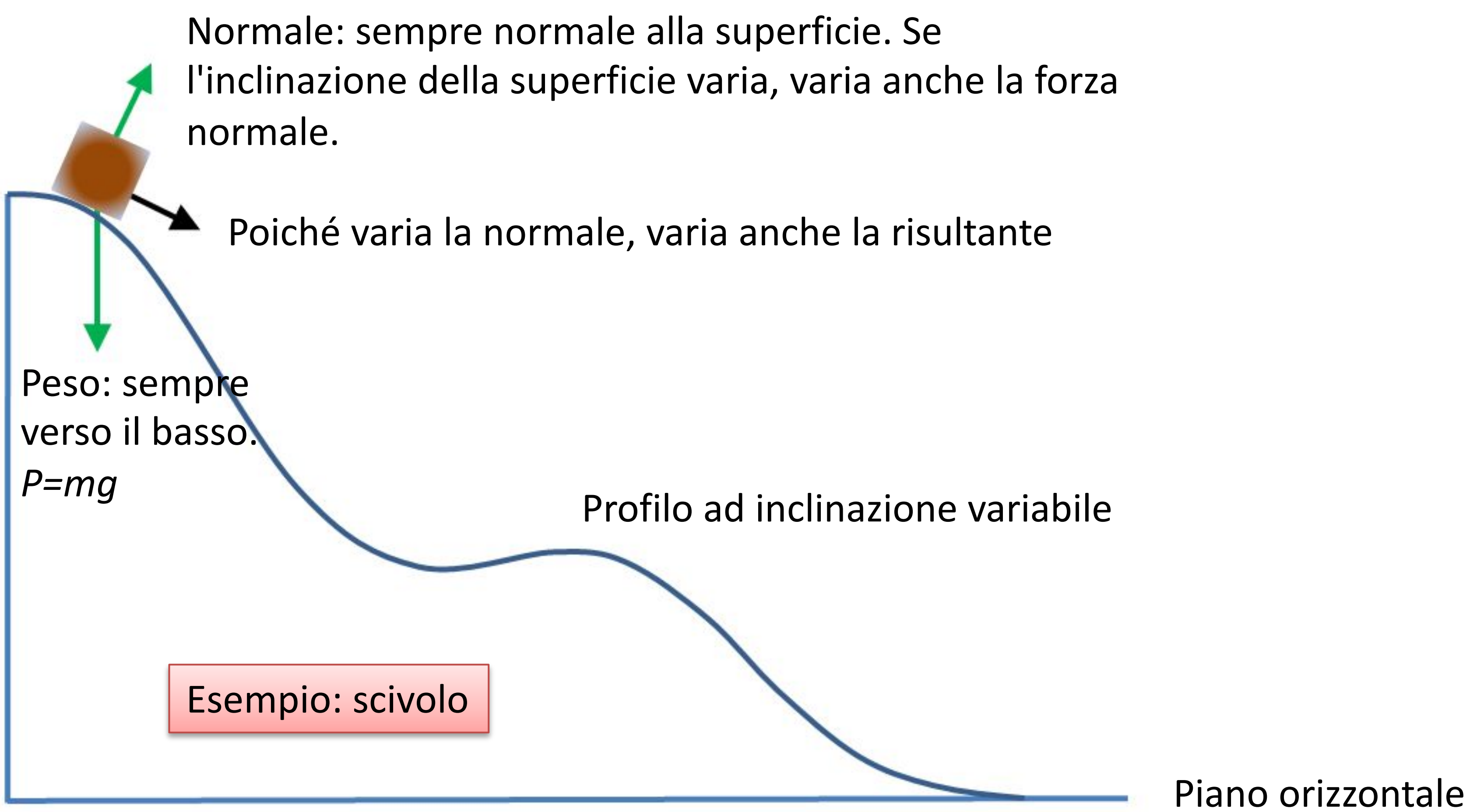
$$\sum F_y = N - mg = 0$$
$$N = mg$$

$$\sum F_y = N - mg - 40N = 0$$
$$N = mg + 40N$$

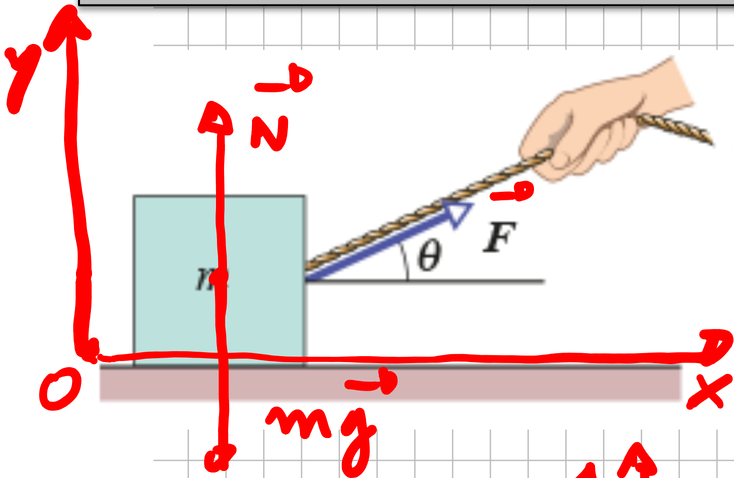
$$\sum F_y = N - mg + 40N = 0$$
$$N = mg - 40N$$

Forza normale: caratteristiche

Quando un corpo interagisce con una superficie, subisce una forza perpendicolare (normale) alla superficie.



esercizio



- Identificare le forze agenti sul blocco
- Introdurre un sistema di coordinate e scrivere le componenti delle forze
- Calcolare il modulo della normale
- Calcolare l'accelerazione del blocco

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}$$

$$F_x = F\cos\theta \qquad F_y = F\sin\theta$$

$$\vec{N} = (0, N)$$

$$m\vec{g} : (0, -mg)$$

$$\vec{F} : (F\cos\theta, F\sin\theta)$$

$$m\ddot{x} = F\cos\theta$$

$$\ddot{x} = \frac{F\cos\theta}{m}$$

$$m\ddot{y} = F\sin\theta + N - mg$$

1° caso $\quad \ddot{y} = 0$

$$F\sin\theta + N - mg = 0$$

$$N = mg - F\sin\theta \qquad N \geq 0$$

$$F\sin\theta \leq mg$$

$$F \sin\theta > mg$$

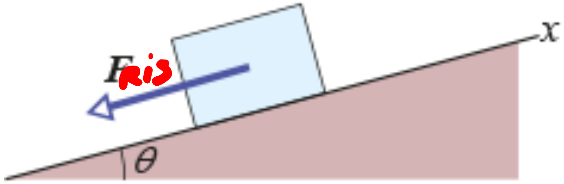
$$\Rightarrow \quad N = 0$$

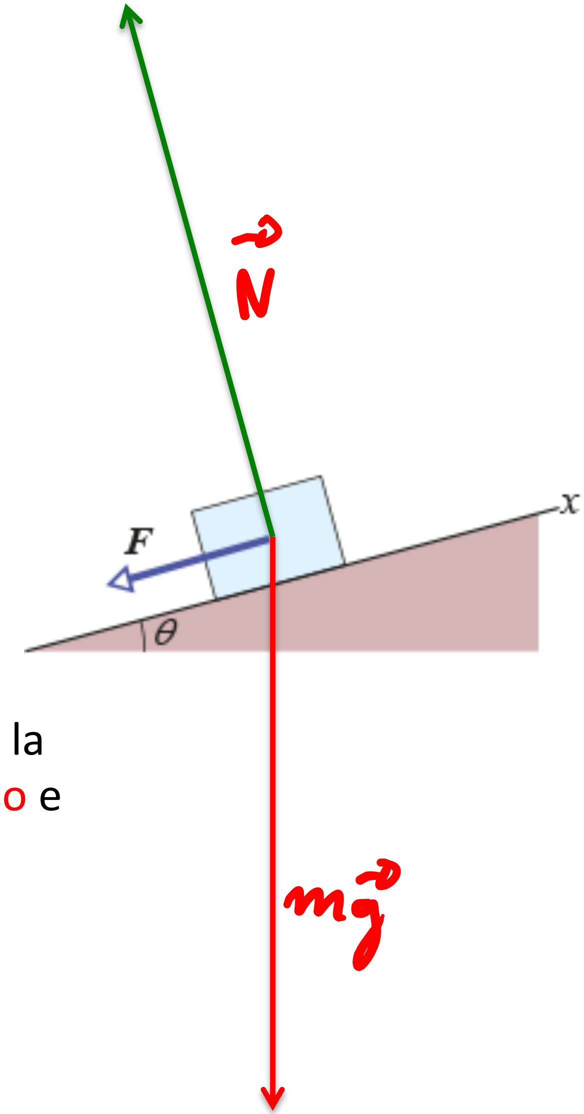
$$m\ddot{y} = F \sin\theta - mg$$

$$\ddot{y} = \frac{F \sin\theta - mg}{m} > 0$$

Piano inclinato

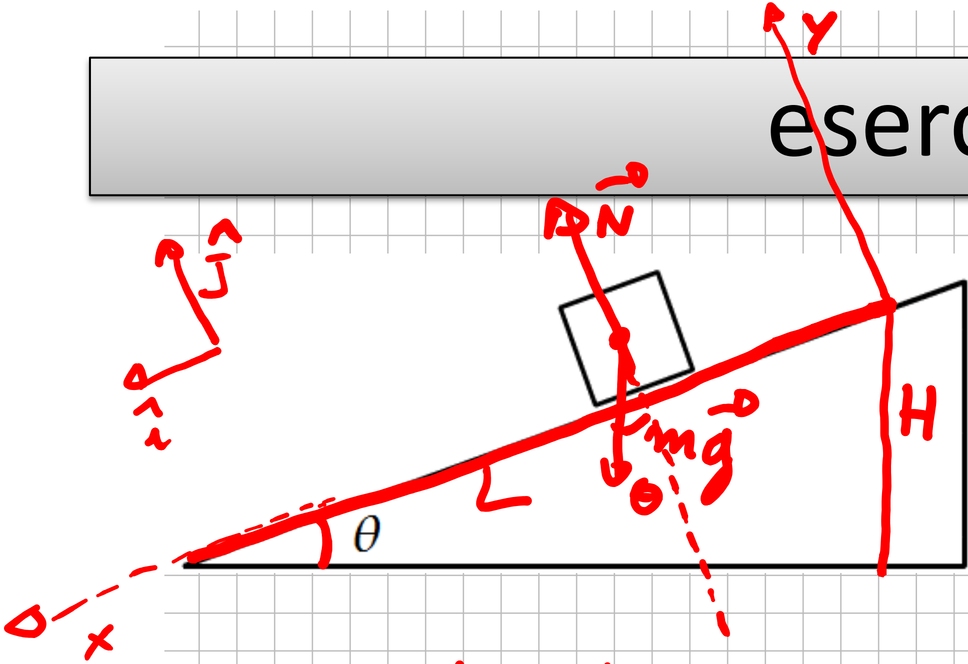
Il corpo accelera lungo il piano inclinato: la risultante delle forze è lungo il piano inclinato





La risultante delle forze è la somma vettoriale del peso e della normale.

esercizio



Un blocco, partendo da fermo, scivola su un piano inclinato fisso di lunghezza L e angolo θ.
L' attrito tra blocco e piano è trascurabile, calcolare:

- Modulo della normale
- Accelerazione del blocco
- Velocità finale del blocco

$$H = L \sin\theta$$

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$x_0 = 0 \qquad v_0 = 0$$

$$\vec{r}_b = x_b\,\hat{\imath} + y_b\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt}\vec{r} = \frac{d^2}{dt^2}x\,\hat{\imath} = a_x$$

$$N - mg\cos\theta = 0 \qquad N = mg\cos\theta$$

$$mg\sin\theta = ma_x \qquad a_x = g\sin\theta$$

$$v_x(t) = g\sin\theta\, t$$

$$x(t) = \frac{1}{2} g\sin\theta\, t^2$$

t_1 :

$$L = \frac{1}{2} g\sin\theta\, t_1^2$$

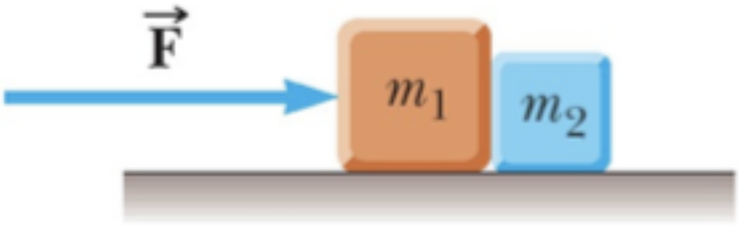
$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g\sin\theta}}$$

$$v_F = v(t_1) = \sqrt{2Lg\sin\theta} =$$

$$= \sqrt{2gH}$$

Sistema con due corpi

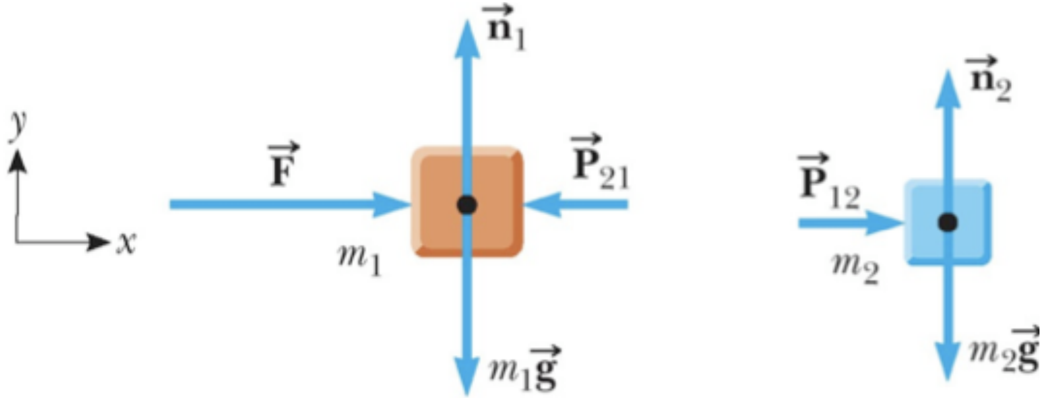
- Consideriamo il sistema nel suo insieme:



(a)

$$\sum F_x = m_{tot} a_x$$

- Il diagramma delle forze agenti sui singoli corpi è:



- Risolviamo le incognite

- Verifica: $\vec{P}_{21} = -\vec{P}_{21}$ (è una coppia azione-reazione)

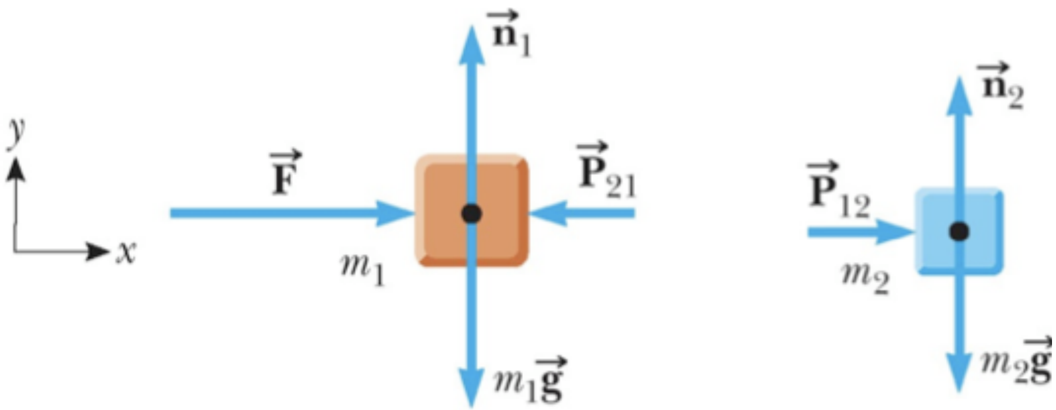
Per il sistema nel suo insieme:

$$a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

(come per un blocco unico di massa $m_1 + m_2$)

Per il blocco 2: $P_{12} = m_2 a_x$,
da cui

$$P_{12} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) F$$



Per il blocco 1:

$$F - P_{21} = m_1 a_x \qquad \Rightarrow P_{21} = F - m_1 a_x \qquad = F - m_1 \frac{F}{m_1 + m_2}$$

da cui $P_{21} = P_{12}$