

# ALGEBRA LINEARE

## PARTE 18 VETTORI E GEOMETRIA

### DEFINIZIONI

#### 1. $\mathbb{R}^m$

L'insieme  $\mathbb{R}^m$  è l'insieme delle  $m$ -uple formate da numeri reali.  
 $\mathbb{R}^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_i \in \mathbb{R} \forall i\}$

#### 2. VETTORE IN $\mathbb{R}^m$

$x$  è vettore in  $\mathbb{R}^m$  se le sue coordinate sono una  $m$ -uple di numeri reali.

$$x \in \mathbb{R}^m \Rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_m) = x, \text{ con } x_i \in \mathbb{R} \forall i$$

#### 3. VETTORE UGUALE o OPPOSTO

Due vettori sono uguali se le sono le loro coordinate.  
 $a, b \in \mathbb{R}^m$

$$a = b \Leftrightarrow a_i = b_i \quad \forall i$$

Due vettori sono invece opposti se lo sono le loro coordinate in modo che

$$a + (-a) = 0 \quad -a = (-a_1, -a_2, \dots, -a_m) \quad \forall i$$

#### 4. SOMMA DI VETTORI

La somma di due vettori è il vettore che ha per componente  $i$ -esima la somma delle componenti  $i$ -esime.

$$a+b = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_m+b_m)$$

$$a-b = a+(-b) \quad [\text{La differenza è la somma con l'opposto}]$$

#### 5. PRODOTTO SCALARICO VETTORE (MULTIPLICARE)

Il prodotto tra  $\lambda \in \mathbb{R}$  e un vettore è il vettore le cui componenti sono moltiplicate per  $\lambda$ .

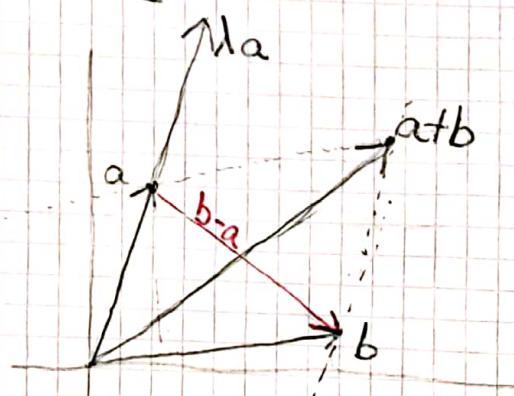
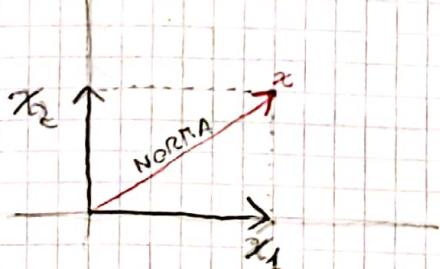
$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m)$$

#### 6. NORMA DI UN VETTORE

La "norma", o modulo, di un vettore è la somma delle componenti al quadrato sotto radice.

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{1/2}$$

#### 7. INTERPRETAZIONI GEOMETRICHE



## 8. PROPRIETÀ DELLA NORMA

$$|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

$$|x| = 0 \iff x = 0$$

$$|\lambda x| = |\lambda| |x|$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

[DISUG. TRIANGOLARE]

## 9. VERSORE

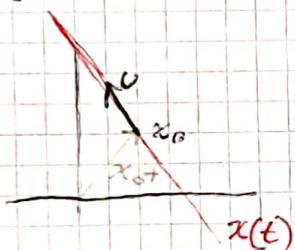
Sia  $v \in \mathbb{R}^m$ , è definito versore  $\tilde{v}$  il vettore con la stessa direzione di  $v$  ma di norma 1!

$$\tilde{v} = \frac{1}{\|v\|} \cdot v \quad \|\tilde{v}\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = \|v\| = 1 !$$

## 10. RETTE IN $\mathbb{R}^m$

Sia  $v \in \mathbb{R}^m$  e si voglia scrivere l'equazione della retta passante per  $v$ . Allora

$$x(t) = x_0 + t v \quad \text{identifica tutti i punti della retta al variare di } t.$$



In particolare, sia  $v \in \mathbb{R}^m$ , se  $u = \lambda v$ , allora i due vettori hanno LA STESSA DIREZIONE

## 11. POSIZIONI FRA RETTE

$\emptyset$	$R_1 \cap R_2 = \{\emptyset\}$	$R_1 \cap R_2 \neq \{\emptyset\}$
$u = \lambda v$	PARALLELE	COINCIDENTI
$u \neq \lambda v$	SGHEMBE	INCIDENTI

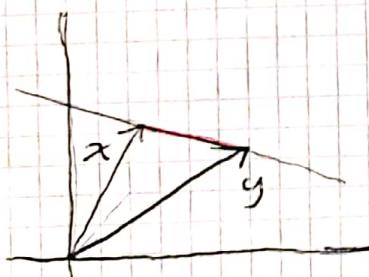
Nb, non cominciare a immaginare rette sgemmbe...

## 12. SEMIRETTA

Una semiretta è identificata dal tempo controllato "da un certo punto in poi".

$$\Rightarrow \text{Sf: } x_0 + t u, \text{ con } t > 0$$

## 13. SEGMENTO



Il segmento che unisce due vettori non è altro che una parte della retta del vettore differenza.

$$\Rightarrow \text{Seg: } x_0 + t(y-x) \quad t \in [0,1] \\ (\text{nell'esempio grafico } x_0 = \vec{x})$$

## 14. PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

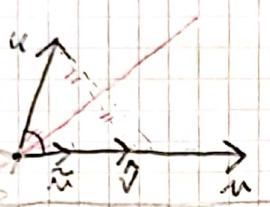
Se seg:  $x_0 + t(y-x)$ , con  $t \in [0,1]$ , allora il punto mediano è identificato da  $t = \frac{1}{2}$

$$\text{In effetti } \text{seg}\left(\frac{1}{2}\right) = x_0 + \frac{1}{2}(y-x) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x_0 = \boxed{\frac{x+y}{2}}$$

$$\text{E allora } P_M - x = y - P_m$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x+y) - x = y - \frac{1}{2}(x+y) \Rightarrow \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x \quad \checkmark$$

## 15. BISETTRICE DI UN TRIANGOLO



Ricordando che in un triangolo isoscele l'asse di simmetria e mediana coincidono, possiamo scrivere l'equazione della bisettrice come la retta passante per il punto medio di  $u$  e  $v$ , dove  $\tilde{v}$  è un vettore della stessa direzione di  $v$  ma con lunghezza  $|u|$ .

$$\text{Bis: } x(t) = x_0 + t\left(\frac{u+\tilde{v}}{2}\right)$$

$$\tilde{v} = \tilde{v}/|u| = \left(\frac{v}{|u|}\right)/|u|$$

→ Verso

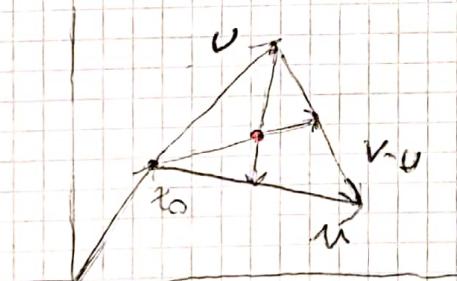
## 16. INTERSEZIONE / COLLUSIONE FRA RETTE

Studiare l'intersezione fra due rette equivalenti a trovare le soluzioni di

$$\begin{cases} A(t) = x_0 + t(u) \\ B(s) = y_0 + s(v) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_0 + t u = y_0 + s v \leftarrow \text{INTERSEZ} \\ o \quad x_0 + t u = y_0 + t v \leftarrow \text{COLLUSIONE} \end{array}$$

## 17. BARICENTRO DI UN TRIANGOLO

Ricordando che il baricentro di un triangolo è il punto di intersezione delle mediane, si ha che:



$$1^{\text{a}} \text{ MEDIANA} \rightarrow A(t) = x_0 + t\left(\frac{u+u}{2} - x_0\right)$$

$$2^{\text{a}} \text{ MEDIANA} \rightarrow B(s) = u + s\left(\frac{v+x_0}{2} - u\right)$$

$$A(t) = B(s) \text{ se}$$

$$x_0 + t\left(\frac{u+u}{2} - x_0\right) = u + s\left(\frac{v+x_0}{2} - u\right)$$

$$\Rightarrow x_0 + \frac{t}{2}(u+u) - t(x_0) - u - s(u) - \frac{s}{2}(v+x_0) = 0$$

$$\Rightarrow x_0 + \frac{t}{2}u + \frac{t}{2}u - t(x_0) - u - su - \frac{s}{2}u - \frac{s}{2}x_0$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{s}{2} - t\right)x_0 + \left(\frac{t}{2} - 1 - s\right)u + \left(\frac{t}{2} - \frac{s}{2}\right)v = 0$$

$$t = s \quad 1 - \frac{3}{2}t = 0 \quad t = \frac{2}{3}$$

Per  $t = s = \frac{2}{3}$ , le rette vanno in collisione

$$x_0 + u + \frac{2}{3}u - \frac{2}{3}x_0 - u - v + \frac{2}{3}v - \frac{2}{3}x_0$$

$$B = \boxed{\frac{x_0 + u + v}{3}}$$

## 18. PRODOTTO SCALARE

Siano  $u$  e  $v$  vettori in  $\mathbb{R}^m$ , definiamo prodotto scalare la somma dei prodotti di componenti a componente.

$$uv = \sum_i u_i v_i \quad [u, v \in \mathbb{R}^m]$$

## 19. PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE

$$xx \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

$$xx = 0 \iff x = 0$$

$$xg = gx$$

$$(x_1 + x_2)y = x_1y + x_2y$$

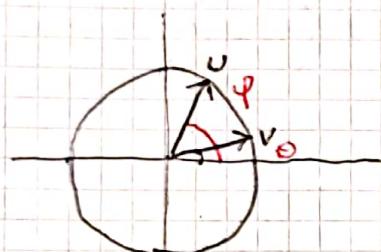
Siano  $x, x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^m$

$$xx = |x|^2$$

$$|x| = \sqrt{xx}$$

## 20. SIGNIFICATO GEOMETRICO DI PRODOTTO SCALARE

Siano  $u$  e  $v$  vettori in  $\mathbb{R}^2$



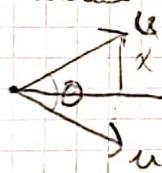
$$\text{allora } u = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$v = (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

$$\cos(\varphi - \theta) = \cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi \\ = uv$$

Dunque, almeno in  $\mathbb{R}^2$ , il prodotto scalare è il coseno dell'angolo  $\varphi - \theta$

Nello spazio  $\mathbb{R}^n$ , consideriamo ancora due vettori, tale che l'una sia mediana rispetto all'altra:



$$\text{Per il teorema di Pitagora } x = |u| \sin \frac{\theta}{2}$$

$$[u \text{ vettore}] = \sin \frac{\theta}{2} = \frac{|v-u|}{|u|} \quad (\text{Punto medio del vettore } u-v)$$

$$\cos\theta = \cos(2 \cdot \frac{\theta}{2}) = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - 2 \frac{|v-u|^2}{|u|^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2 - 2uv)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + uv = uv$$

Nel caso di vettori di lunghezza diversa da 1, si ha che  $\cos \overline{uv} = \frac{uv}{|u||v|} = \frac{uv}{\sqrt{u \cdot u} \sqrt{v \cdot v}} = \frac{uv}{\sqrt{u \cdot u} \sqrt{v \cdot v}}$

Concludiamo che il prodotto scalare di due vettori è il coseno dell'angolo che essi formano!

## 21. DEFINIZIONE DI RETTA

Come conseguenza di 20., due vettori sono ortogonali se e solo se  $uv = 0$ . A questo punto sia

$ax + by = 0$  l'equazione di una retta, essa è il

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Di conseguenza la retta è il luogo di vettori  $(x, y)$  perpendicolari a un vettore fisso  $(a, b)$ .

## 22. PROIEZIONE DI UN VETTORE SU UN ALTRO

Si definisce proiezione  $u_v$  il vettore multiplo di  $v$  tale che  $(u_v - u) \perp v$ !

A livello geometrico nella 2D, allora:  $|u_v| = |u| |\cos \theta|$ , ma per quanto detto

$$|u_v| = \text{cat.} \cdot \frac{u_v}{|u||v|} = \frac{u_v}{|v|} \quad |u_v| \in \mathbb{R}$$

A questo punto dobbiamo ricordarci che, giacendo la proiezione  $u_v$ , ha la stessa direzione e dunque:

$$u_v = \frac{u_v}{|v|} \cdot |v| = \frac{u_v}{|v|} \cdot \frac{|u|}{|u|} = \left( \frac{u \cdot v}{|u||v|} \right) \cdot v \quad \in \mathbb{R} \cdot \mathbb{R}^m$$

Viene da sé che proiettare un vettore su un suo multiplo non ha alcun significato.

$$(u_v)_v = \frac{u \cdot v}{|u||v|} \cdot v = \frac{|u||v|^2}{|u||v|} \cdot v = |v| (Resta, non niente)$$

### TEOREMI dimostrazioni non attendibili

#### 1. DISEGUAGLIANZA DI SCHWARZ

$$\text{TESI} \rightarrow |uv| \leq |u||v|$$

DIMOSTRAZIONE ↴

Partiamo da una diseguaglianza molto semplice

$$|u - \lambda v|^2 \geq 0 \quad \text{Sappiamo che questa è sempre vera!}$$

$$\Rightarrow |u|^2 + |\lambda v|^2 - 2|\lambda uv| \geq 0$$

$$\Rightarrow |u|^2 + |\lambda|^2 |v|^2 - 2|\lambda||uv| \geq 0$$

$$\Delta(u) = 4|\lambda|^2 |uv|^2 - 4|\lambda|^2 |v|^2 |u|^2 \quad \Delta \text{ deve essere} \leq 0!$$

$$\rightarrow 4|\lambda|^2 |uv|^2 \leq 4|\lambda|^2 |v|^2 |u|^2$$

$$|uv|^2 \leq |u|^2 |v|^2$$

$$\Rightarrow |uv| \leq |u||v|$$

Se  $u = \lambda v \Rightarrow |\lambda||uv| = |1||u||v|$ , dunque la diseguaglianza vale sempre!

[Se sono allineati  $|uv| = |u||v|$ ]

## 2: DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$\text{TESI} \rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$$

Ricordando che  $x^2 \leq y^2 \Rightarrow x \leq y$

$$|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$$

$$|xy|^2 + |yx|^2 + 2|xy| \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|$$

$$z(xy) \leq z(x)y$$

Ricordando  $|xy| \leq |x_0y| \leq |x||y|$ , segue la tesi.

Quando  $|x+y| = |x| + |y|$  ?

Se i vettori sono allineati e nello stesso verso  $y = \alpha x$

$$|x + \alpha x|^2 = (|x| + |\alpha x|)^2$$

$$|x|^2 + |\alpha x|^2 + 2\langle \alpha x, x \rangle = |x|^2 + |\alpha x|^2 + 2|x||\alpha x|$$

$$|x|^2 + \alpha^2 |x|^2 + 2|\alpha| |x|^2 = |x|^2 + \alpha^2 |x|^2 + 2|\alpha| |x|^2 \quad \text{V}$$

$|\alpha| = \alpha$  Perché  $\alpha > 0$

## 3. TEOREMA DI PITAGORA

$$\text{TESI} \rightarrow |u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 \quad (\text{Se } \cos\hat{u}v = 90^\circ)$$

DIN 13

$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + \langle \bar{z}uv \rangle \geq 0$$

## TEOREMA DELLE DIAGONALI

$$\text{TESI} \Rightarrow |u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

$$D\Gamma \rightarrow |u+\mu|^2 + |u-\mu|^2 =$$

$$= |u|^2 + |v|^2 + 2\operatorname{Re} w + |u|^2 + |v|^2 - 2\operatorname{Re} w$$

$$= 2(|u|^2 + |v|^2)$$

## 5. PRIMI RISULTATI SUCE PROIEZIONI

$$T \in S^1 \rightarrow \int (u - u_n) v = 0$$

La differenza tra vettore e proiez.  
e ortogonale a  $v$ .

$$|u - \pi_u v| \leq |u - xv|$$

La proiezione è la distanza minima tra  $u$  e  $v$

# DIMOSTR - J

$$(U - U_{\mu})V = \left(U - \frac{UV}{U+V}\right)V = UV - UV = 0 !$$

$$|u - u_n|^2 \leq |u - u_n + (u_n - \alpha u)|^2 \stackrel{\text{Pf.}}{=} |u - u_n|^2 + |u_n - \alpha u|^2$$

$$\text{Dunque } |u - i\alpha| \leq |u - \alpha u| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$|u - u_n| = |u - \alpha v| \iff \alpha v = u_n$$

## 6. DISUGUAGLIANZA GEOMETRICA DI SCHWARTZ

TESI  $\rightarrow |u| \geq |u_w|$

DIM:

$$|u|^2 \geq |u_w|^2 \Rightarrow |u|^2 \geq \left(\frac{uv}{|v|}\right)^2$$

$$\Rightarrow |u|^2 \geq |\underbrace{u - u_w}_{\lambda v} + u_w|^2 \stackrel{\text{PIT}}{=} |u - u_w|^2 + |u_w|^2 \geq |u_w|^2$$

$$\Rightarrow |u - u_w|^2 + |u_w|^2 \geq |u_w|^2$$

V [Allora  $|u||v| \geq |uv|$ ]  
spiegare come ci si arriva

## PARTE 2 SOTTO SPAZI

### DEFINIZIONI

#### 23. SPAZIO / SOTTO SPAZIO VETTORIALE

$K^n$  è uno spazio vettoriale, se per  $a, b \in K^n$ ,  $c \in K$ :  
 $(a+b) \in K^n$ ,  $ca/cb \in K^n$ . Inoltre valgono le 8 proprietà:

$$S_1: (a+v)+w = a+(v+w)$$

$$S_2: 0+a = a+0 = a$$

$$S_3: 1 \cdot a = a$$

$$S_4: \exists -a: a+(-a) = 0$$

$$S_5: a+a = a+a$$

$$S_6: a(v+w) = av + aw \quad (a \in K)$$

$$S_7: (ab)c = a(bc)$$

$$S_8: (a+b)v = av + bv \quad (a, b \in K)$$

$V$  è un sottospazio vettoriale di  $K$  se è sottinsieme di  $K$  e verifica le stesse proprietà!

#### 24. COMBINAZIONE LINEARE

Siano,  $x_1, x_2, \dots, x_m \in K^n$ , definiamo combinazione lineare la somma dei multipli scalari dei vettori  $x_i$ .

$$CL = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = \sum_1^m \alpha_i x_i \quad \text{con } \alpha_i \in K$$

#### 25. SPAN

È definito  $Span$  il sottospazio costituito dalle combinazioni lineari dei vettori generatori:

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle = \{ w: \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K \text{ - } w = \sum_1^m \alpha_i x_i \}$$

## 25. EQUAZIONE DEL PIANO

$$\varphi: x_0 + \langle u, v \rangle = x_0 + \alpha u + \beta v$$

## 26. COMBINAZIONE AFFINE

Una combinazione  $\sum_i \alpha_i x_i$  è detta affine se  $\sum_i \alpha_i = 1$

## 27. COMBINAZIONE CONVESSA

Una combinazione  $\sum_i \alpha_i x_i$  è detta convessa se  $\alpha_i \in [0, 1] \forall i$

## 28. COMPLEMENTO ORTOGONALE

È definito complemento ortogonale dello spazio  $X$  l'insieme dei vettori perpendicolari ai generatori di  $X$ .

$$\langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle^\perp = \{w \in \mathbb{R}^m : w u_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m\}$$

## 29. INTERSEZIONE FRA SPAZI

Siano  $X$  e  $Y$  due sottospazi, allora definiamo

$$X \cap Y = \{w : w \in X \text{ and } w \in Y\}$$

ES:

$$X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle \quad Y = \langle y_1, \dots, y_m \rangle$$

$$w \in X \Rightarrow w = \sum_1^m \alpha_i x_i \quad \left\{ \begin{array}{l} w \in X \cap Y \Rightarrow \sum_1^m \alpha_i x_i = \sum_1^m \beta_i x_i \\ w \in Y \Rightarrow w = \sum_1^m \beta_i x_i \end{array} \right.$$

## 30. VETTORI INDIPENDENTI

Due vettori sono detti indipendenti se e solo se la loro combinazione lineare è nulla se e solo se i coefficienti della combinazione sono tutti nulli.

$$x_1, \dots, x_m \text{ INDIPENDENTI} \iff \sum_1^m \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i$$

## 31. BASE DI UN SOTTO SPAZIO

L'insieme dei vettori  $x_1, x_2, \dots, x_m$  di  $X$  è detto BASE DI  $X$  se e soltanto se i  $x_i$  sono indipendenti.

$$i) \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle = X$$

ii)  $x_1, x_2, \dots, x_m$  sono vettori indipendenti.

## 32. BASE CANONICA

È definita base canonica  $e_1, e_2, \dots, e_n$  l'insieme dei vettori ortonomali nella forma  $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$

$$\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n$$

## 33. L'ASSIOMA D'ESISTENZA DI UNA BASE

Sia  $X$  un sottospazio di dimensione finita,  $X$  ha basi.

## 34. SPAZIO SOMMA

Siano  $X$  e  $Y$  spazi vettoriali, definiamo lo spazio somma  $X+Y$  come:

$$X+Y \{w : \exists x \in X \text{ e } y \in Y \text{ e } w = x+y\}$$

### 35. SOMMA DIRETTA

La somma  $X+Y$  è diretta e si dice  $X \oplus Y$  se e solo se

$$\begin{cases} X \oplus Y = X + Y \\ \forall x \in X \text{ e } y \in Y, \text{ se } x+y=0 \Rightarrow x=y=0 \end{cases}$$

### 36. LEMMA FONDAMENTALE

Siano  $x_1, \dots, x_m$  base di  $X$  e sia

$X = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$ , allora  $m \leq m$

### 37. LEMMA DI SCAMBIO

Sia  $X = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle$ , allora, se  $v \in X$ ,

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m : v = \sum \alpha_i x_i$  e, in particolare, si può sostituire uno dei generatori con  $v$ .

$$u_1 = \frac{1}{\alpha_1} (v - \sum_{i=2}^m \alpha_i x_i) \Rightarrow X = \langle v, x_2, \dots, x_m \rangle \quad [v \neq 0]$$

### 38. DIMENSIONE DI UNO SPAZIO

Chiamiamo dimensione di  $X$  il numero di vettori di una sua base.

## TEOREMI dimostrazioni non attendibili

### 7. UNICITÀ DELLE COORDINATE DI UN VETTORE

Sia  $X$  uno spazio vettoriale e sia  $x_1, x_2, \dots, x_m$  base di  $X$ . Allora  $\exists! \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  coordinate del vettore  $w \in X$ :  $w = \sum \alpha_i x_i$ .

DIM

Per assurdo sia  $\{w = \sum \alpha_i x_i \text{ con } \alpha_i \neq \beta_i \text{ per qualche } i\}$

$$\{w = \sum \beta_i x_i\}$$

$$\text{allora } \sum \alpha_i x_i = \sum \beta_i x_i \Rightarrow \sum (\alpha_i - \beta_i) x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad \forall i \text{ ASSUM}$$

### 8. SOVRAFFOLCAMENTO DECCA BASE

Sia  $x_1, x_2, \dots, x_m$  base di  $X$  e sia  $\langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle = X$  con  $m > m$

TESI  $\Rightarrow u_1, u_2, \dots, u_m$  è un sistema dipendente

DIM

Averlo  $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle$

Per il 37. possiamo scambiare  $m$  volte da uno spazio all'altro:

$$\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow u_1 = \sum_1^m \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \sum_2^m \alpha_i x_i$$

$$\langle u_1, x_2, \dots, x_m \rangle = \langle x_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$$

Dopo  $m$  scambi si avrà  $\langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle = \langle x_1, \dots, x_m, \dots, u_m \rangle$  e allora  $u_{m+1} = 0 + \sum_1^m \alpha_i u_i$ , dunque segue la tesi!

Finito  
la  $x_i$

9. TEOREMA DELLA DIMENSIONE

TESI  $\rightarrow$  i) Tutte le basi di  $X$  hanno lo stesso numero di elementi!  
 ii) Numero Elementi =  $\dim X$

DIM  $\rightarrow$

i) Per assurdo, sia  $x_1, x_2, \dots, x_m$  base di  $X$   
 $y_1, y_2, \dots, y_n$  base di  $X$

Per la 8., deve essere  $m \leq n$  e  $n \leq m \Rightarrow m = n$ !

ii) Per assurdo immaginiamo  $\dim X = m$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_m$  indip.  
 ma ipotizziamo  $\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle \subsetneq X$ .

Allora  $\exists y \in X \setminus \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$  e quindi  $y$  è  
 un vettore indipendente dagli altri e mi ha da

Se  $\sum_i \alpha_i x_i + \sum_j \beta_j y = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_j = 0 \forall i$

Ma  $y = -\sum_i \frac{\alpha_i}{\beta_j} x_i = \sum_i \gamma_i x_i$ , dunque  $y \in X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$

Alla stessa modo, se  $\dim X = m$  e  $X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$

allora  $x_1, \dots, x_m$  è base di  $X$ , altrimenti la base  
 avrebbe meno di  $m$  elementi, il che è impossibile.

## 10. TEOREMA DI COMPLETAMENTO ALLA BASE

Siano  $u_1, u_2, \dots, u_k$  vettori indipendenti in  $X$  e sia  
 $\dim X = m$ , con  $m > k$ .

TESI  $\rightarrow \exists x_{k+1}, \dots, x_m \in X : X = \langle u_1, \dots, u_k, x_{k+1}, \dots, x_m \rangle$

DIM  $\rightarrow$

Sia  $v_1, v_2, \dots, v_m$  una base di  $X$ , allora possiamo dire  
 $X = \langle u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ , ma il numero  
 di questi elementi è eccessivo ( $m+k > \dim X$ ).

Sapere che gli  $u_i$  sono indipendenti fra loro, e anche  
 gli  $v_i$ , ci dice che:

$\exists v_1 = \sum_i \alpha_i u_i$  e così via, fino a togliere  $k$  vettori  $v_i$ .

Segue  $X = \langle u_1, u_2, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_m \rangle$ , tesi!

## 11. CNS SOMMA DIRETTA (2 SPAZI)

TESI  $\rightarrow X+Y$  diretta  $\Leftrightarrow X \cap Y = \{0\}$

DIM  $\rightarrow$

$\Rightarrow$  Sia  $X+Y$  diretta e sia, per assurdo,  $w \in X \cap Y$ .  
 Allora possiamo dire che:

$$\begin{cases} w = w + 0 \\ \in X \quad \in Y \end{cases} \quad \text{Sottraggo} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} w + 0 &= 0 + w \\ w + (-w) &= 0 \Rightarrow \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Poiché la somma} \\ \text{è diretta} \end{array}$$

$$\begin{cases} w + 0 = 0 \\ 0 + w = 0 \end{cases} \Rightarrow w = 0$$



Se  $X \cap Y = \{0\}$ , la somma  $X+Y$  è diretta

Basti  $x \in X, y \in Y$

Allora  $x+y=0 \Rightarrow x=-y$ , dunque  $x \in X \cap Y$

ma  $y=-x$ , dunque  $y \in X \cap Y$

allora  $x=y=0$ , e segue la tesi!

## 12. RIPARTIZIONE DELLA BASE

TESI  $\rightarrow$  Sia  $x_1, x_2, \dots, x_m$  base di  $X$ . Allora

$$X = \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \oplus \langle x_{k+1}, \dots, x_m \rangle$$

DIM  $\rightarrow$

La tesi ci dice che ogni elemento  $x \in X$  è tale che

$$x = \sum_1^k \alpha_i x_i + \sum_{k+1}^m \beta_i x_i. \text{ Sia ora } x' \in \langle x_1, \dots, x_k \rangle$$

Allora  $x' + x'' = 0$  e  $x'' \in \langle x_{k+1}, \dots, x_m \rangle$

$$\Rightarrow \sum_1^k \alpha_i x_i + \sum_{k+1}^m \beta_i x_i = 0$$

(Visto che inizialmente avevamo una base, ogni singola sommatoria va a 0 se e solo se  $\alpha_i = 0 \forall i$ )

$$\alpha_i = 0 \forall i \Rightarrow x' = x'' = 0 \Rightarrow \text{Tesi!}$$

## 13. CNS SOMMA DIRETTA (PIÙ SPAZI)

$\rightarrow X+Y+Z$  è diretta  $\Leftrightarrow \dim(X+Y+Z) = \dim X + \dim Y + \dim Z$

DIM  $\rightarrow$

$\Rightarrow$  Siano  $x_1, x_2, \dots, x_m$  base di  $X$ ,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  base di  $Y$  e  $z_1, z_2, \dots, z_p$  base di  $Z$ .

Allora  $X+Y+Z = \langle x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_p \rangle$

Se sono le basi indipendenti, la tesi è dimostrata

Sia  $x \in X, y \in Y, z \in Z$ , allora se  $x+y+z=0$

$$\Rightarrow \sum_1^m \alpha_i x_i + \sum_1^n \beta_i y_i + \sum_1^p \gamma_i z_i = 0$$

Ma poiché la somma è diretta, e poiché le singole sommatorie sono distinte indipendentemente si ha che

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^m \alpha_i x_i = 0 \\ \sum_1^n \beta_i y_i = 0 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum_1^p \gamma_i z_i = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 0 \quad \forall i, \text{ da qui la tesi!}$$

??

$\Leftarrow$  Per la ripartizione della base, se

$$X+Y+Z = \langle x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_p \rangle, \text{ allora}$$

$$\langle x_1, \dots, x_m \rangle \oplus \langle y_1, \dots, y_n \rangle \oplus \langle z_1, \dots, z_p \rangle = X+Y+Z$$

## 14. TEOREMA DI GRASSMAN

$$\text{TESI} \rightarrow \dim(X+Y) + \dim(X \cap Y) = \dim X + \dim Y$$

DIM:

Se  $\dim(X \cap Y) = 0$  la somma è diretta e segue la tesi!

Proviamo quindi  $\dim(X \cap Y) = k > 0$ ,  $\dim X = m$ ,  $\dim Y = n$

Sia  $w_1, \dots, w_k$  base di  $X \cap Y$ , allora per il teorema 10.

$w_1, \dots, w_k, x_{k+1}, \dots, x_m$  è base di  $X$

$w_1, \dots, w_k, y_{k+1}, \dots, y_m$  è base di  $Y$

$$X+Y = \langle w_1, \dots, w_k, x_{k+1}, \dots, x_m, y_{k+1}, \dots, y_m \rangle$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i w_i + \sum_{i=k+1}^m \beta_i x_i + \sum_{i=k+1}^m \gamma_i y_i = 0 \quad (\#)$$

se tutti questi sono indipendenti,  $\dim(X+Y) = m+n-k$  [tesi]

$\epsilon X \cap Y \quad \epsilon X \quad \epsilon Y$

$$w+x+y = 0 \Rightarrow w+x = -y \Rightarrow w+x \in X \cap Y$$

$$\Rightarrow w+y = -x \Rightarrow w+y \in X \cap Y$$

Al questo punto, essendo  $X = \langle w_1, \dots, w_k \rangle \oplus \langle x_{k+1}, \dots, x_m \rangle$   
allora: che  $(w+y) + x = 0 \Rightarrow \{ w+y = 0 \}$

Allo stesso modo  $y \in \langle y_1, \dots, y_m \rangle$

$$\text{e dunque } (w+x) + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} w+x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

E dunque,  $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 0 \quad \forall i$  e segue la tesi!

## PARTE 38 MATRICI

### DEFINIZIONI

#### 39. MATRICE

Una matrice  $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$  è definita come l'oggetto  
dove  $i$  è l'indice di riga che varia da 1 a  $m$ ,  
 $j$  è l'indice di colonna che varia da 1 a  $m$ !

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

#### 40. VETTORE RIGA, VETTORE COLONNA

Un vettore riga è una matrice  $M \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

Un vettore colonna è una matrice  $M \in \mathbb{R}^{1 \times m}$

## 41. TIPI DI MATRICE

• QUADRATA,  $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$

- TRIANGOLARE SUPERIORE  $\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$
- TRIANGOLARE INFERIORE  $\rightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$
- DIAGONALE  $\rightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$
- IDENTICA  $\rightarrow a_{ij} = 1 \quad \forall i = j$

## 42. PROPRIETÀ

Se sono  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$

allora

$$\begin{cases} (A+B)_{ij} = (a+b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \\ \lambda A_{ij} = \lambda a_{ij} = \end{cases}$$

$\mathbb{R}^{m \times m}$

è dunque uno spazio vettoriale!

## 43. CONVENZIONE DI EINSTEIN - LANDAU

Quando alcuni prodotti dipendono da indici, viene sottintesa una sommatoria che li fa varare.

$$u_i v_i = \sum_i u_i v_i$$

## 44. PRODOTTO DI MATRICI

Il prodotto di matrici è possibile solo se la seconda ha per numero di righe il numero di colonne della prima.

$$A \in \mathbb{R}^{n \times m}, B \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad AB = (ab)_{ij} = a_{ih} b_{hj}$$

Si moltiplica scalarmente la prima riga con la prima colonna per avere, ad esempio, l'elemento  $(ab)_{11}$ !

## 45. PROPRIETÀ DEL PRODOTTO

$$1. \quad AB \neq BA$$

$$2. \quad (AB)C = A(BC)$$

$$3. \quad A(B+C) = AB+AC$$

$$4. \quad AI = IA = A$$

Assumendo che i prodotti siano possibili!

## 46. MATRICE IDENTICA

Se  $I$  la matrice identica tale che

$$(I_h)_i^j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Allora  $AI = IA = A$

$$(AI)_{ij} = A_{ih} I_{hj} = \begin{cases} 0 & h \neq j \\ A_{ij} & h=j \end{cases}$$

$$(IA)_{ij} = I_{ih} A_{hj} = \begin{cases} A_{ij} & h=i \\ 0 & h \neq i \end{cases}$$

## 47. MATRICE INVERSA

Sia  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , è definita matrice inversa sinistra  $X$  se accade:

$$AX = I$$

Si definisce matrice inversa destra  $Y$  se accade:

$$YA = I$$

## 48. EQUAZIONI MATRICIALI

$AX = B$  equivale a risolvere

$$\begin{cases} AX_1 = B_1 \\ AX_2 = B_2 \\ \vdots \\ AX_m = B_m \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|cc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & & \\ A_1 & A_2 & A_3 & B_1 & B_2 & B_3 \\ \uparrow & & & & & \\ \text{Colonne} & & & & & \text{Colonne di } X \end{array}$$

Nel caso dell'inversa:

$$\begin{array}{c|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ A_1 & A_2 & A_3 & | e_1 e_2 e_3 \end{array}$$

## 49. MATRICE TRASPOSTA

$$(A^*)_{ij} = A_{ji}$$

## 50. MATRICE SIMMETRICA E AUTOAGGIUNTA

Una matrice è simmetrica se  $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$

Nel caso in cui  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  si definisce

autoaggiunta se  $A = \bar{A}^*$  ( $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ )

## 51. DETERMINANTE (MATRICI QUADRATE)

Il determinante è una funzione:  $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfacenti alcune proprietà:

- $\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$

- $\det(A_1, A_2, \dots, A_m) = -\det(A_2, A_1, \dots, A_m)$  [Alternante]

- $\det(\lambda A_1, \mu A_2, \dots, A_m) = \lambda \mu \det(A_1, A_2, \dots, A_m)$  [MULTILINEARE]

- $\det(A_1, A_2, A_2, \dots, A_m) = 0$

[Perché  $\det(A_1, A_2, A_2, \dots, A_m) = -\det(A_1, A_2, A_2, \dots, A_m)$ ]

## 52. SVILUPPO DI LAPLACE

$$\det A = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+h} a_{ih} \cdot \det \tilde{A}$$

$\tilde{A}$  è la matrice ottenuta eliminando  $i$ -esima riga e  $k$ -esima colonna!

### 53. CONCETTO DI DETERMINANTE

$$\det A = \sum (-1)^{i+j} \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{m\sigma(m)}$$

dove  $\sigma$  è la funzione permutazioni che indica tutte le possibili combinazioni fra riga e colonna.

$|i|$  è il numero delle INVERSIONI, ovvero il numero delle volte in cui  $\sigma(x) > x$

### 54. PRODOTTO VETTORE (IN $\mathbb{R}^3$ )

Si definisce prodotto vettore  $a \times b$ , con  $a, b \in \mathbb{R}^3$ , il vettore tale che:

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a_2 b_2| \\ |a_3 b_3| \\ -|a_1 b_1| \\ |a_3 b_2| \\ |a_1 b_3| \\ |a_2 b_1| \end{pmatrix}$$

### 55. PROPRIETÀ PRODOTTO VETTORE

- $(u+v) \times w = u \times w + v \times w$  (DISTRIBUTIVO)
- $u \times w = -(w \times u)$  (ANTISIMMETRICO)  
[ $a \times a = 0$ ]
- $(\alpha u + \beta v) \times w = \alpha(u \times w) + \beta(v \times w)$  (BILINEARE)
- È perpendicolare ai fattori  $\Rightarrow \begin{cases} u \times w \perp u \\ u \times w \perp w \end{cases}$

### 56. DISTANZA PUNTO-PIANO IN $\mathbb{R}^3$

$$d = \frac{|x(u \times v)|}{|u \times v|}$$

### 57. DISTANZA RETTE SGHEMBE IN $\mathbb{R}^3$

$$d = \frac{|(u \times v)(x_0 - o_0)|}{|u \times v|}$$

### TEOREMI dimostrazioni non attendibili

### 15. RELAZIONE CARATTERISTICA DELLA TRASPOSTA

$$\text{TESI} \rightarrow (Ax) \cdot y = x(A^*y)$$

DIM  $\Rightarrow$

$$(Ax) \cdot y = A(x_1, x_2, x_3) \cdot y_1$$

$$x(A^*y) = x_h (A^*_{hk} y_k) = x_h A_{kh} y_k = A_{kh} x_h y_k$$

## 16. CNS DETERMINANTE NULLO

TESI  $\rightarrow \det A = 0 \iff A_1, A_2, \dots, A_m$  sono dipendenti

DIM

$\Leftarrow$  se le colonne di una matrice sono dipendenti si può scrivere almeno una in funzione delle altre

$$\text{Ad esempio } A_1 = \sum_{i=2}^m \alpha_i A_i$$

$$\text{E dunque } \det A = \det \left( \sum_{i=2}^m \alpha_i A_i; A_2, A_3, \dots, A_m \right)$$

$= \sum_{i=2}^m \alpha_i \det(A_2, A_3, \dots, A_m)$  e, ricordando i da  
in poi, se annullano tutti e segue la tesi

$\Rightarrow$  se  $\det A = 0$ , allora

$\det(A_1, A_2, A_3, \dots, A_m) = 0$  Ma essendo ogni vettore  $A_i$  esprimibile in funzione della base canonica...

$A_i = \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j$  e in particolare anche i vettori della base canonica sono esprimibili come

$$e_i = A_i k_i$$

e allora  $\det(e_1, e_2, \dots, e_m) = \det(A_1 k_1, A_2 k_2, \dots, A_m k_m)$

$$= \det(A_1 k_1, A_2 k_2, \dots, A_m k_m)$$

$$= (k_1 k_2 \dots k_m) \det(A_1, A_2, \dots, A_m)$$

Se per assurdo le colonne fossero indipendenti

$$\det(e_1, e_2, \dots, e_m) = (k_1 k_2 \dots k_m) \det(A_1, A_2, \dots, A_m)$$

$\stackrel{\text{I}}{=} 1$  (Assioma)  $= 0$  (Ipotesi) ASSURDO!

## 17. UGUAGLIANZA DI INVERSA DESTRA E SINISTRA

TESI  $\rightarrow$  Se le due inverse esistono, sono uguali!

Siano  $X$  e  $Y$  l'inversa sinistra e destra della matrice  $A$ .

Allora...

$$X = IX = (YA)X = YAX = Y(AX) = YI = Y$$

$$\text{Segue } X = Y$$

## 18. CNS INVERTIBILITÀ MATRICI (19.)

TESI  $\rightarrow$

DIM  $\rightarrow$



Dire che  $M = (A_1, A_2, \dots, A_m)$  è invertibile significa che esiste  $X : MX = I$ . Significa che le sue righe sono indipendenti.

Ovvero significa che il sistema

LONGO?  
?

$A_1, A_2, \dots, A_m | e_1, e_2, \dots, e_m$  ha soluzioni

Viene da sé il fatto che se le colonne fossero dipendenti il sistema non avrebbe soluzioni. (Avrebbe una riga di 0 uguale a qualcosa diversa da 0).

CONSEGUENZA  $\rightarrow M$  invertibile  $\Leftrightarrow \det M \neq 0$

## 19. RIGHE INDIPENDENTI SE LO SONO LE COLONNE

TESI  $\rightarrow$  Tetto  $\downarrow$

DIM  $\rightarrow$

Sia  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$  le colonne della matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$   
Siam  $A^1, A^2, A^3, \dots, A^m$  le sue righe.

Allora se le righe sono indipendenti deve essere

$$\sum A^i x_i = 0 \Rightarrow x_i = 0$$

$$\sum A^i x_i = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x + \dots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix} x, \text{ dove } x \in \mathbb{R}^m$$

Sviluppando i prodotti scalari:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_1 + \dots + a_{m1}x_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

e allora compiono i vettori colonna!

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 X = 0 \\ \vdots \\ A_m X = 0 \end{array} \right. \text{ Dunque } X \text{ deve essere il vettore nullo.}$$

Per dimostrarlo ricordiamo che, se le colonne sono indipendenti e

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_m \rangle = \mathbb{R}^m$$

Allora  $X = \sum \alpha_i A_i$  [È combinazione lineare delle colonne]

$$|X|^2 = X \cdot \sum \alpha_i A_i = \sum_1^m \alpha_i X A_i = 0 \text{ a tappeto!}$$

Ma  $|X|^2 = 0 \Rightarrow X = 0$  e, dunque, se  $X$  è il vettore nullo, segue tutto il resto!

## 20. TEOREMA DI CRAMER

Sia  $A$  una matrice  $\in \mathbb{R}^{n \times m}$  e si voglia risolvere  
 $Ax = B$ , se  $\det A \neq 0$   $x = (x_1, \dots, x_m)$   
 TESI  $\rightarrow \exists! x_i = \frac{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_m)}{\det A}$

DIM  $\rightarrow$

Se il  $\det A$  è  $\neq 0$ , allora le colonne  $A_1, \dots, A_m$  sono indipendenti e allora possiamo scrivere  
 $B = \sum x_i A_i$  e, grazie alle proprietà del determinante:  
 $\det A = \det(\sum x_i A_i, A_2, \dots, A_m)$   
 $= \sum x_i \det(A_i, A_2, \dots, A_m)$  [Tutti gli altri sono 0]  
 $\Rightarrow x_1 \det(A_1, A_2, \dots, A_m)$   
 $x_1 \det A = \det(B, A_2, \dots, A_m)$   
 $x_1 = \frac{\det(B, A_2, \dots, A_m)}{\det A}$  [Questo era un esempio con  $x_1$ ]

## PARTE 48 APPLICAZIONI LINEARI

### DEFINIZIONI

#### 58. APPLICAZIONE LINEARE

Siano  $X$  e  $Y$  due spazi vettoriali e sia  $\mathcal{A}$  una funzione  
 tale  $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$ . Allora  $\mathcal{A}$  si dice applicazione lineare se:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) & \text{ADDITIVITÀ} \\ \mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x) & \text{OMOGENEITÀ} \end{cases}$$

#### 59. IMMAGINE DI UN'APPLICAZIONE

L'immagine  $\mathcal{A}(x)$  è definita come:

$$\mathcal{A}(x) = \{ y \in Y : \exists x \in X \text{ e } \mathcal{A}(x) = y \}$$

#### 60. NUCLEO (o KERNEL)

$$\text{Ker } \mathcal{A} = \{ x \in X : \mathcal{A}(x) = 0 \}$$

#### 61. IMMAGINE DI UN'APPLICAZIONE

Un'applicazione è iniettiva se manda cose diverse in cose diverse, dunque:

$$\text{Se } \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y) \Rightarrow x = y$$

#### 62. APPLICAZIONE SURIETTIVA

Si dice suriettiva un'applicazione  $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$  se  
 $\mathcal{A}(x) = y \rightarrow \forall y \in Y \exists x \in X \text{ s.t. } \mathcal{A}(x) = y$

#### 63. APPLICAZIONE BIETTIVA

Si dice biettiva un'applicazione iniettiva e suriettiva!

## 64. MATRICE ASSOCIATA

Sia  $A: X \rightarrow Y$  e siano  $e_1, \dots, e_m$  base di  $X$   
 $f_1, \dots, f_n$  base di  $Y$   
allora  $\forall(x) = \forall A(\sum x_j e_j) = \sum x_j \forall(e_j)$   
 $= \sum x_j \sum_i \alpha_{ij} f_i = \sum x_j A_{ij} f_i$

In particolare  $\forall(e_j) = A_{ij} f_i$ . Chiamiamo  $A$  la matrice associata che determina le coordinate dell'immagine che sto cercando.

## 65. MATRICE CAMBIO BASE

Sia  $X = \langle e_1, e_2, \dots, e_m \rangle = \langle e'_1, e'_2, \dots, e'_m \rangle$   
La matrice soluzione del sistema  $e_1, e_2, \dots, e_m | e'_1, e'_2, \dots, e'_m$  è detta matrice cambio base

$M$  ed è tale che:

$$e'_j = M_{ij} e_i$$

A questo punto posso trasporre un'altra matrice tale che

$$e_h = N_{kh} e'_k = N_{kh} M_{qk} e_q$$

$e_h = (MN)_{qh} e_q$ , quindi, necessariamente:

$$(MN)_{qh} = \begin{cases} 1 & \text{se } h=q \\ 0 & \text{se } h \neq q \end{cases} \Rightarrow (MN)_{qh} = I \text{ e allora } M \text{ e } N$$

sono una  
l'inversa dell'  
altra!

## TEOREMI dimostrazioni non attendibili

### 21. CNS APPLICAZIONE INIETTIVA

TESI  $\Rightarrow \forall$  è iniettiva  $\Leftrightarrow \ker A = \{0\}$

DIM  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  Se  $\forall$  è iniettiva  $\forall(x) = \forall(y) \Rightarrow x = y$

e allora  $\forall(x-y) = 0$  identifico tutti gli elementi di  $\ker A$ , ma essendo  $x=y$ ,  $\forall(0) = 0$ !

$\Leftarrow$  Se  $\ker A = \{0\}$ , allora  $\forall(x-y) = 0$  implica che  $x=y$  ( $x-y=0$ ), che induce l'injectività!

### 22. IL $\ker(A)$ È UN SOTOSPAZIO

TESI  $\Rightarrow x_1 + x_2 \in \ker A$ ,  $\lambda x_1 \in \ker A \quad \forall x_1, x_2 \in \ker A$

DIM  $\Rightarrow$

Se  $x_1$  e  $x_2$  appartengono a  $\ker A$ , si ha che  $\forall(x_1) + \forall(x_2) = 0$  e, poiché l'applicazione è lineare deve essere  $\forall(x_1+x_2) = 0$ , dunque  $(x_1+x_2) \in \ker A$

Se  $\forall(x_1) = 0$ , allora  $\lambda \forall(x_1) = 0$  e, come prima,

allora  $\forall(\lambda x_1) = 0$ , dunque  $(\lambda x_1) \in \ker A$

Soglio la tesi!

## 23. TEOREMA GENERATORI DELL' IMMAGINE

Sei  $A: X \rightarrow Y$  e sia  $x_1, x_2, \dots, x_n$  base di  $X$   
 TESI  $\Rightarrow \langle A(x_1), \dots, A(x_n) \rangle \subseteq \text{Im } A$ :

DIT:

Sia  $a \in X$ , allora  $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ , e, allora:

$$A(a) = A\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A(x_i) \in \langle A(x_i) \rangle$$

Di conseguenza non esiste vettore  $x \in X$  che non sia appartenente a quello span, segue la tesi!

## 24. TEOREMA DI GRASSMAN (APPLICAZIONI LINEARI)

Sei  $A: X \rightarrow Y$  e sia  $\dim X < \infty$ , allora

$$\text{TESI} \Rightarrow \dim X = \dim \ker A + \dim A(X)$$

DIT:

1° CASO: Se  $\dim \ker A = 0$ , allora l'applicazione è iniettiva:

$$\dim X = \dim A(X) ?$$

Sia  $x_1, \dots, x_m$  base di  $X$ , allora  $A(x_1), \dots, A(x_m)$  è base?

$\sum_{i=1}^m \alpha_i A(x_i) = 0$  solo se  $A\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i\right) = 0$ , avendo solo

se  $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \in \ker A$ , avendo solo se  $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0$ , avendo solo se

$\alpha_i = 0 \forall i$  [perché  $x_1, \dots, x_m$  è base]. Segue la tesi!

2° CASO

Se  $\dim \ker A = k > 0$ , sia  $w_1, \dots, w_k$  base di  $\ker A$

allora  $w_1, \dots, w_k, x_{k+1}, \dots, x_n$  è base di  $X$

$$A(X) = \left\langle \underbrace{A(w_1)}, \dots, \underbrace{A(w_k)}, A(x_{k+1}), \dots, A(x_n) \right\rangle$$

$$= \left\langle A(x_{k+1}), \dots, A(x_n) \right\rangle \quad \begin{matrix} \text{Se sono indipendenti,} \\ \text{la tesi è dimostrata!} \end{matrix}$$

$$\sum_{i=k+1}^n \alpha_i A(x_i) = A\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i x_i\right) = 0 \quad \text{se e solo se}$$

$$\sum_{i=k+1}^n \alpha_i x_i \in \ker A. \quad \text{Se vi appartiene, } \sum_{i=k+1}^n \alpha_i x_i = \sum_{j=1}^k \beta_j w_j$$

$$\text{e allora } \sum_{i=k+1}^n \alpha_i x_i - \sum_{j=1}^k \beta_j w_j = 0$$

$$\text{E visto che } X = \langle w_1, \dots, w_k \rangle \oplus \langle x_{k+1}, \dots, x_n \rangle$$

Dove essere

$$\left\{ \sum_{i=k+1}^n \alpha_i x_i = 0 \right\} \Rightarrow \alpha_i = 0 \forall i \quad [\text{Tesi}]$$

$$\left\{ \sum_j \beta_j w_j = 0 \right\} \Rightarrow \beta_j = 0 \forall j$$

## 25. LEMMA D'UGUAGLIANZA DI DUE SOTTOSPAZI

Se  $W \subseteq Z$ , e  $\dim W = \dim Z$   
TESI  $\Rightarrow W = Z$

DIM  $\downarrow$

Sia  $w_1, \dots, w_m$  base di  $W$ , allora  $\langle w_1, \dots, w_m \rangle = Z$   
E dunque  $W = Z$ !

## 26. CONSEGUENZE DI CRAMER

Sia  $A: X \rightarrow Y$  E sia  $\mathcal{A}(x)$  l'insieme immagine.

- $A$  è INIETTIVA se  $\dim X = \dim \mathcal{A}(x)$  [ $\ker A = \{0\}$ ]
- $A$  è SURIETTIVA se  $\dim \mathcal{A}(x) = \dim Y$  [ $\mathcal{A}(x) = Y$ ]
- $A$  è BIETTIVA se  $\dim X = \dim \mathcal{A}(x) = \dim Y$

## 27. TEOREMA DI MATRICE ASSOCIATA

TESI  $\Rightarrow$  La matrice associata cambia in base alla base!

DIM  $\downarrow$

Se  $A: X \rightarrow Y$  e sono  $e_1, \dots, e_m$  base di  $X$   $f_1, \dots, f_m$ ,  
 $e'_1, \dots, e'_m$   $f'_1, \dots, f'_m$

$$\text{Allora } \mathcal{A}(e_j) = A_{ij} f_i, \quad \mathcal{A}(e'_q) = ? f'_r$$

$$e'_q = M_{rq} e_r \quad f'_s = N_{rs} f_t \quad f_s = N^{-1}_{rs} f'_t$$

$$\text{Allora } \mathcal{A}(e'_q) = \mathcal{A}(M_{rq} e_r) = M_{rq} \mathcal{A}(e_r)$$

$$= M_{rq} A_{ir} f_i = M_{rq} A_{ir} N^{-1}_{ri} f'_r$$

$$= (N^{-1} A M)_{rq} f'_r$$

Dunque la nuova matrice associata è esattamente  $N^{-1} A M$

## PARTE 58 TEORIA SPETTRALE

### DEFINIZIONI

#### 66. OPERATORE / ENDOMORFISMO

Definiamo operatore, o endomorfismo, un'applicazione  
che manda uno spazio  $X$  in sé:

$A: X \rightarrow X$  (D'ora in poi ci riferiremo sempre ad  $A$ )

#### 67. OPERATORE DIAGONALE

Si dice che  $A$  è diagonale rispetto a  $e_1, \dots, e_m$   
base di  $X$  se la matrice associata  $A'$  è  
diagonale!

#### 68. OPERATORE DIAGONALIZZABILE

Se esiste  $e_1, \dots, e_m$  base di  $X$  rispetto al quale  $A$  è  
diagonale, allora  $A$  è diagonalizzabile.

### 69. AUTOVACORE

Uno scalare  $\lambda \in \mathbb{C}$  è autovalore di  $A$  se esistono vettori  $u$  tali che:

$$A(u) = \lambda u \quad e \quad u \neq 0$$

### 70. AUTO VETTORE

Se  $\exists u \neq 0$   $A(u) = \lambda u$ , allora  $u$  è detto autovettore (rispetto ad  $A$ ) autovalore  $\lambda$

### 71. AUTOSPAZIO

Chiamiamo Autospazio relativo all'autovalore  $\lambda$  lo spazio delle autovettori relativi ad esso (Includendo anche lo 0!)

### 72. SPETTRO

Si definisce spettro di  $A$  l'insieme dei suoi autovalori.

$$S(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : A(u) = \lambda u, u \neq 0 \}$$

### 73. BASE SPECTRALE

Una base di  $X$  fatta da autovettori di  $A$  è detta base spettrale di  $A$ .

### 74. TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Se  $P(x)$  è un polinomio non costante,

$$\exists z^* \in \mathbb{C} : P(z^*) = 0$$

### 75. POLINOMIO CARATTERISTICO

Chiamiamo P. caratteristico il  $\det(A - \lambda I)$ , dove  $A$  è la matrice associata ad  $A$ .

### 76. OPERATORE AUTOAGGIUNTO

Un operatore si dice autoaggiunto se

$$A(u)v = u A(v) \quad \forall u, v \in X$$

### 77. PRODOTTO SCALARE IN $\mathbb{C}^m$

Siano  $u, w \in \mathbb{C}^m$

$$\text{allora } u \cdot w = \sum w_i \bar{v}_i;$$

### 78. PROPRIETÀ 7.7.

$$1) \forall v \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{C}^m$$

$$2) \forall v = 0 \iff v = 0$$

$$3) \forall \alpha \in \mathbb{C}, \text{ allora } (\alpha u) \cdot v = \sum_{i=1}^m \alpha v_i \bar{w}_i = \alpha(v \cdot u)$$

$$4) u \cdot u = \|u\|^2$$

### 79. SISTEMA ORTOGONALE

Sei  $e_1, \dots, e_n$  base di  $X$ , allora questa è una "base" ortogonale se

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \neq 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$

## TEOREMI dimostrazioni non attendibili

### 28. CNS DIAGONALIZZABILITÀ DI $A$

TESI  $\Rightarrow A$  diagonalizzabile  $\Leftrightarrow \exists e_1, \dots, e_m$  base spettrale di  $X$

DIM  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  Se  $A$  è diagonalizzabile  $\exists e_1, \dots, e_m$  tale che

$$A(x_i) = A_{ii}x_i \quad \text{e} \quad A_{ii} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

allora se  $A(e_i) = A_{ii}e_i$

$$A(e_i) = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

$$A(e_j) = \lambda_j e_j \quad \text{se } i=j$$

E allora gli  $e_j$  sono buoni candidati ad essere autovettori relativi a  $\lambda_j$  e in effetti lo sono perché  $e_j \neq 0 \forall j$ .

Se così non fosse  $e_1, \dots, e_m$  non sarebbe una base.

Dunque segue la tesi!

$\Leftarrow$  Se  $e_1, \dots, e_m$  è base spettrale di  $X$ , allora  $A(e_i) = \lambda_i e_i$ ,  $e_i \neq 0$  e allora, visto che  $A(e_i) = M_{ii}e_i$ ,  $M$  è diagonale! Segue la tesi.

### 29. INDEPENDENZA DI AUTOVETTORI

TESI  $\Rightarrow$  Gli autovettori relativi ad autovalori distinti sono indipendenti!

DIM

Sia  $u_1, \dots, u_m$  autovettori relativi a  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  con  $\lambda_i \neq \lambda_j$

Per assurdo ipotizziamo che uno di loro sia dipendente:

Allora  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m$  e  $u_i$  e, dunque

$$\begin{aligned} A(u_i) &= A\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j u_j\right) = \sum_{j=1}^m \alpha_j A(u_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j u_j \end{aligned}$$

$$A(u_i) = \lambda_1 u_i \quad \text{dunque} \quad \lambda_1 u_i = \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j u_j$$

$$\text{e ancora} \quad \lambda_1 u_i = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j$$

$$\text{E allora} \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j (\lambda_1 - \lambda_j) u_j = 0$$

E dunque  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$  per  $i = 1, \dots, m$

S. ha che  $\alpha_i = 0 \forall i$

Ma che è un assurdo e dimostra invece l'indipendenza!

### 30. CONSEQUENZA

Se  $\dim X = m$  e  $A$  ha  $m$  autovalori distinti,  $A$  è diagonalizzabile perché ha una base spettrale!

### 31. SOMMA DI AUTOSPAZI

TESI  $\rightarrow$  la somma di autospazi è diretta!

DIM: Siamo  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  autovetori distinti, allora diremo  $A^{\lambda_i}$  l'autospazio relativo a  $\lambda_i$ .

Bprendiamo ora gli autovettori relativi agli autospazi

$$u_1 \in A^{\lambda_1}, u_2 \in A^{\lambda_2}, \dots, u_m \in A^{\lambda_m}$$

Allora la loro somma  $u_1 + u_2 + \dots + u_m = 0$

Se qualcuno di essi fosse  $\neq 0$ , ad esempio

$$u_1 + u_2 = 0 \quad u_1, u_2 \neq 0$$

Sappiamo che non è possibile: essendo autovettori relativi ad autovetori distinti, questi sono indipendenti e dunque

$\sum u_i = 0 \Rightarrow u_i = 0 \quad \forall i$ , e la somma degli autospazi è diretta!

### 32. CNS DIAGONALIZZABILITÀ (2)

TS:  $A$  diagonalizzabile  $\iff \sum \dim A^{\lambda_i} = \dim X$

DIM  $\Rightarrow$

$\Leftarrow$  Siano  $u_1^1, \dots, u_{m_1}^1$  base relativa ad  $A^{\lambda_1}$

$u_1^k, \dots, u_{m_k}^k$  base relativa a  $A^{\lambda_k}$

Essendo  $\sum \dim A^{\lambda_i} = \dim X$ , se riusciamo a

comporre che i vettori  $\{u_i^j\}$  sono indipendenti, allora essi sono una base spettrale.

$$\sum \alpha_i^1 u_i^1 + \sum \alpha_i^2 u_i^2 + \dots + \sum \alpha_i^{m_k} u_i^{m_k} = 0$$

Se e solo se  $\sum \alpha_i^1 u_i^1 = 0$

INDIPENDENZA  $\sum \alpha_i^1 = 0 \quad \forall i$

$$\sum \alpha_i^m u_i^m = 0$$

Ne segue che  $\{u_i^j\}$  sono base spettrale

$\Rightarrow ?$

### 33. TEOREMA ESISTENZA AUTOVETTORI

Sia  $\forall: X \rightarrow X$ , con  $X \subseteq \mathbb{C}^n$ ,  $\dim X < \infty$

TESI  $\exists \lambda \in \mathbb{C}, u \neq 0 : \forall(u) = \lambda u$

DIM- $\rightarrow$

Sia  $e_1, \dots, e_m$  una base di  $X$  e sia  $A_{ij}$  la matrice associata.

Allora  $\forall = \sum_{i=1}^m u_i e_i$  e quindi

$$\forall(u) = \forall(u_i e_i) = u_i \forall(e_i) = u_i A_{i,j} e_i$$

$$\forall(u) = A_{i,j} u_i e_i = A_{i,j} u$$

Dunque Se  $A_{i,j} = \lambda_i$ , il teorema è dimostrato.

$$Ci\ serve\ A_{i,j} - \lambda_i = 0$$

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} - \lambda_1 & \dots & a_{1m} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{22} - \lambda_2 & \dots & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{mm} - \lambda_m & \dots & & & 0 \end{array}$$

Quando è che questo sistema ha soluzione non nulla?

Quando le colonne sono dipendenti e quindi quando

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Essendo il  $\det(A - \lambda I)$  il polinomio caratteristico, per il teorema fondamentale dell'algbera esiste sempre  $\lambda \in \mathbb{C}$  e quindi segue la tesi!

### 34. INVARIANZA DEL POLINOMIO CARATTERISTICO

TESI  $\rightarrow$  Il polinomio caratteristico non cambia cambiando base!

DIM- $\rightarrow$

Sia  $A$  la matrice associata e  $M$  la matrice cambio base.

$$\begin{aligned} \text{Allora } A' &= M^{-1} A M && \text{BINET} \\ \det(A - \lambda I) &= \det(A - M^{-1} \lambda I M) && \det(AB) = \det A \det B \\ &= \det(M^{-1} A M - M^{-1} \lambda I M) \\ &= \det(M^{-1}(A - \lambda I) M) && = \det(M^{-1} M) \cdot \det(A - \lambda I) \\ &= \det(A - \lambda I) !!! \end{aligned}$$

### 35. LA MOLTIPLICITÀ DI UN AUTOVALORE

TESI  $\rightarrow \sum \mu_i \geq \dim A^{\lambda_0}$

DIM- $\rightarrow$  Sia  $u_1, \dots, u_k$  base di  $A^{\lambda_0}$

e sia  $u_1, \dots, u_k, x_{k+1}, \dots, x_m$  base di  $X$  (complet.)

$$\forall(u_i) = \lambda_0 u_i \quad [1 \leq i \leq k]$$

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_0 \\ \hline & & \\ & & C \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} B \\ C \end{array} \right\}$$

Allora  $\det A = \lambda_0^k (\det C)$

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_0 - \lambda)^k (\det C - \lambda I)$$

e allora

$$\sum \mu_i \geq k = \dim A^{\lambda_0}$$

### 36. CNS DIAGONALIZZABILITÀ (3)

TESI  $\Rightarrow$   $\forall A$  diagonalizzabile  $\Leftrightarrow$  i)  $\sum \mu_i = \dim X$   
 D<sub>1</sub>  $\Rightarrow$  ii)  $\forall i, \mu_i = \dim A^{\lambda_i}$

$\Rightarrow$  Se  $A$  è diagonalizzabile,  $\sum \dim A^{\lambda_i} = \dim X$   
 allora  $\dim X = \sum \dim A^{\lambda_i} \leq \sum \mu_i \leq \dim X$   
 $\Rightarrow \sum \mu_i = \dim X$

$\Leftarrow$  Ma allora  $\sum \mu_i - \dim X \leq 0$

e dunque  $\sum (\mu_i - \dim A^{\lambda_i}) \leq 0$

Ma  $\sum \mu_i \geq \sum \dim A^{\lambda_i}$ , dunque  $\sum \mu_i = \sum \dim A^{\lambda_i}$  ...

$\Leftarrow$  Se  $\begin{cases} \sum \mu_i = \dim X \\ \forall i, \mu_i = \dim A^{\lambda_i} \end{cases} \Rightarrow \sum \mu_i = \dim X = \dim A^{\lambda_i}$  Segue la tesi per 32.

### 37. TEOREMA PROIEZIONE

Sia  $x \in X \subseteq \mathbb{C}^n$  e sia  $\bar{x} = \sum x_e_i \cdot e_i$  [Con  $e_1, \dots, e_n$  base di  $X$  ORTOGONALE di  $X$ ]

TESI  $\Rightarrow (x - \bar{x}) e_i = 0 \quad \forall i$

D<sub>1</sub>  $\Rightarrow$

$$\bar{x} = \sum x_e_i = \sum \frac{x_e_i}{\|e_i\|^2} \cdot e_i$$

$$(x - \bar{x}) e_i = (x - \sum \frac{x_e_i}{\|e_i\|^2} \cdot e_i) e_i = x e_j - \sum \frac{x_e_i}{\|e_i\|^2} e_i e_j$$

$$\text{Se } i = j, x e_j - x e_j = 0 \quad [\text{Tesi}]$$

$\therefore \bar{x} = x$

$\therefore \bar{x} = x$

### 38. UNICITÀ DELLA PROIEZIONE

Se la proiezione esiste, è unica!  $\leftarrow$  TESI

D<sub>1</sub>  $\Rightarrow$

Sia  $e_1, \dots, e_m$  base di  $W$  e siano  $v, v' \in W$  tali che

$$\{(x - v) e_i = 0 \quad \text{Allora } (x - v - \bar{x} + v') e_i = 0$$

$$\{(x - v') e_i = 0 \quad (v' - v) e_i = 0 \Leftrightarrow v' = v, \text{ così!}$$

In particolare, se  $e_i = v' - v$ , allora

$$|v'^2 - v|^2 = 0 \Leftrightarrow v' = v!$$

### 39. ASSIOMA PROIEZIONE

La proiezione esiste sempre su basi ortogonali!

## 40. ALGORITMO DI GRATT-SCHMIDT

Sia  $w_1, \dots, w_k$  base di  $W$

TESI  $\Rightarrow \exists e_1, \dots, e_k$  ortogonali di  $X$

DIM  $\rightarrow$

Se  $u_1 = e_1$ ,  $\langle e_1 \rangle = \langle u_1 \rangle$

Se  $e_2 = u_2 - \alpha_{2,1}e_1$ , allora per il teorema della proiezione

$$e_2 \perp \langle e_1 \rangle$$

$$\text{Allora } e_{k+1} = u_k - \sum_{i=1}^k \alpha_{k+1,i} e_i = u_k - u_k \langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle$$

Per il teorema della proiezione  $e_k \perp \langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle$

Se andassimo avanti?

Se  $u_{k+1} - u_k \langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle = 0$ , allora  $e_{k+1} \in \langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle$

E allora avremo trovato un vettore dipendente!

Per il lemma di Schauder  $\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ , tesi!

## 41. AUTOVALORI DEGLI OPERATORI AUTOAGGIUNTI

Se  $A$  è autoaggiunto e  $\lambda$  è autovalore di  $A$

TESI  $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

DIM: Se  $A$  è autoaggiunto  $A(u) \in \mathbb{R}A(u)$

$$\lambda u = u \lambda u$$

$$\lambda |u|^2 = \bar{\lambda} |u|^2 \quad [\text{Essendo } u \neq 0 \text{ perché è autovettore...}]$$

$$\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

## 42. DOMINIO E CODOMINIO DEGLI OP. AUTOAGGIUNTI

Sia  $A: X \rightarrow X$  autoaggiunto e siano  $u_1, \dots, u_n$  autoautori.

TS: Allora  $A: \langle u_1, \dots, u_n \rangle^\perp \rightarrow \langle u_1, \dots, u_n \rangle^\perp$

DIM  $\rightarrow$  Sia  $w \in \langle u_1, \dots, u_n \rangle^\perp$ , allora  $w u_i = 0$

Allora:  $A(w) \in \langle A(u_1), \dots, A(u_n) \rangle = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$

$$= \lambda w u_i = \lambda w u_i = 0$$

Di conseguenza  $A(w) \in \langle u_1, \dots, u_n \rangle^\perp$ , tesi.

$[w u = 0 \Rightarrow A(w) u = 0]$

## 43. ORTOGONALITÀ DEGLI AUTOVETTORI PER L'OP. AUTOAGG.

Sia  $u, v \in X$  autovettori di  $A$ , autoaggiunti.

TESI  $\Rightarrow u v = 0$

DIM  $\rightarrow$

$$u A(v) = A(u)v$$

$$u \lambda v = \varepsilon u v$$

$$\lambda u v = \varepsilon u v \Rightarrow (\lambda - \varepsilon) u v = 0 \Rightarrow u v = 0$$

#### 44. MATRICE ASSOCIASTA A UNA BASE ORTONORMALE

Se  $e_1, \dots, e_m$  è base ortonormale di  $X$

TESI  $\Rightarrow$  A autoaggiunta  $\Leftrightarrow$  A autoaggiunto

DIM

$\Rightarrow$  Se  $A_{ij} = \bar{A}_{ji}$ , Siano  $u, v \in X$   $u = \sum u_i e_i$   $v = \sum v_i e_i$

$$\text{allora } \langle A(u), v \rangle = A_{ij} u_j e_i \cdot v_h e_h = A_{ij} u_j \bar{v}_h e_i e_h$$

$$= [h=i] = A_{ii} u_i \bar{v}_i$$

$$u^T A(v) = u_i e_i \cdot A_{hk} v_k e_h = u_i \bar{A}_{hk} \bar{v}_k e_i e_h$$

$$= [h=i] = \bar{A}_{hk} u_i \bar{v}_k = \bar{A}_{kk} u_i \bar{v}_k = \langle A u, v \rangle \quad [\text{TESI}]$$

$\Leftarrow$  Se ~~passaggi sbagliati~~  $\langle A(u), v \rangle = u^T A(v)$

$$\text{allora } \langle A(e_i), e_h \rangle = e_i^T A(e_h)$$

$$\Rightarrow A_{ij} e_i^T e_h = e_i^T \bar{A}_{ji} e_h$$

$$\Rightarrow [i=j] A_{ij} = \bar{A}_{jj} e_i^T e_h$$

$$A_{ij} = \bar{A}_{ji}$$

#### 45. TEORIA SPETTRALE ( $\mathbb{C}^m$ )

Sia  $\mathcal{A}: X \rightarrow X$ , con  $X \subseteq \mathbb{C}^m$  &  $\dim X = m > 0$

TESI  $\Rightarrow$   $\exists$  base spettrale ortonormale

DIM

$\exists v_1: \mathcal{A}(v_1) = \lambda_1 v_1 \quad v_1 \neq 0$  (v<sub>1</sub> autovettore)

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad [\text{vettore normalizzato}]$$

Per induzione, immaginiamo  $u_1, \dots, u_k$  autovettori ortonormali.

Allora  $\langle u_1, \dots, u_k \rangle \subseteq X^\perp$

Sia  $x \in X \setminus \langle u_1, \dots, u_k \rangle$

allora  $x - x \langle u_1, \dots, u_k \rangle \neq 0$  e, allora  $\langle u_1, \dots, u_k \rangle^\perp \neq \{0\}$

Se  $\mathcal{A}: \langle u_1, \dots, u_k \rangle^\perp \rightarrow \langle u_1, \dots, u_k \rangle^\perp$

$\exists u_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$  tale che  $\mathcal{A}(v_{k+1}) = \lambda_{k+1} v_{k+1} \quad v_{k+1} \neq 0$

Ma  $v_{k+1}$  è ortogonale ai precedenti, dunque  $u_{k+1} \in X$ .

Ripetendo questo procedimento fino a  $m$ , ottieniamo la nostra base!

Andando avanti  $(x - x \langle u_1, \dots, u_m \rangle) = 0$

## 46. TEOREMA SPETTRALE ( $\mathbb{R}^m$ )

Sia  $\mathcal{N}: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  e sia  $\mathcal{N}(u) = Au$  con  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  simmetrica  
 TESI  $\Rightarrow \exists v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^m$  base spettrale ortonormale  
 DIMS

Sia  $u \in X \subseteq \mathbb{C}^m$ , allora  $u = v + iw$  [Sei  $v$  autovettore]

$$\text{e dunque } \mathcal{N}(v+iw) = \lambda(v+iw) = \lambda v + i\lambda w$$

$$\text{Ma } \mathcal{N}(v) + i\mathcal{N}(w) = Av + iAw = \lambda v + i\lambda w$$

Dunque  $\begin{cases} \mathcal{N}(v) = \lambda v \\ \mathcal{N}(w) = \lambda w \end{cases}$  Beh, allora  $v$  e  $w$  sono diversi!  
 da

Per induzione siano  $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m$  autovettori.

Come prima,  $\exists v_{k+1} \in \mathbb{C}^m$  in  $\langle u_1, \dots, u_k \rangle^\perp$

Poiché essere  $v_{k+1} \perp u_i$ ?

$$\text{Se si } (a+ib)u = 0 \Rightarrow \begin{cases} au = 0 \\ bu = 0 \end{cases}$$

A questo punto il nostro  $v_{k+1} \in \mathbb{R}^m$  è proprio a e b!