1 | Programmazione Lineare (PL)

· Geometria della PL

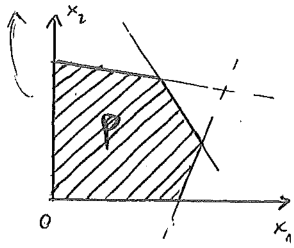
Poliedro P

[Def]

1) Intersezione di un numero finito di semispazi chiusi

2) Insieme di tutte le soluzioni del sistema lineare che rappresenta i vincoli $\rightarrow Ax \leq b$

$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$



NB: Un poliedro è un insieme convesso perché i semispazi chiusi sono insiemi convessi e l'intersez. di insiemi convessi è un insieme convesso

[Th di Weyl]

Dato P allora:

$\exists\, V = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq P$ e
$\exists\, E = \{e_1, \dots, e_h\} \subseteq \mathbb{R}^n$

tali che:

$P = conv(V) + cone(E)$

[Direzioni di recessione]

Per un poliedro è un vettore d tale che $x + \lambda d \in P$

I poliedri possono essere:
- Limitati $\Rightarrow$ Se $E = \{(0,0)\}$
- Illimitati

[Vertici]

Un vertice è un punto che non si può esprimere come combinazione convessa propria ($\lambda_i = 1$) di 2 punti (altri punti) del poliedro.

[Insieme convesso, combinazione convessa]

$\rightarrow$ Un insieme K è convesso se $\forall x_1, x_2 \in K$ vale:

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in K, \ \forall \lambda \in [0,1]$$

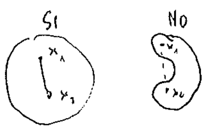
$\rightarrow$ Dati $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$, un punto y si dice combinazione convessa dei pt se $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, con $\lambda_i \in [0,1] : \sum \lambda_i = 1$

(*)

[Cono convesso] $\rightarrow$ Involucro Convesso

conv $\{x_1, \dots, x_k\}$ è l'insieme di tutte le possibili combinazioni convesse.

- È il più piccolo insieme convesso che contiene i pt dati



[Insieme conico, combinazione conica]

$\rightarrow$ Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice cono se $\forall x \in K$ e $\forall \lambda \geq 0$ si ha $\lambda x \in K$

(Se K contiene un pt $x \neq 0$, allora contiene anche tutta la semiretta uscente da O e passante per x)

$\rightarrow$ Un pt $y \in \mathbb{R}^n$ si dice combinazione conica di $x_1, \dots, x_m$ se $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_m$:

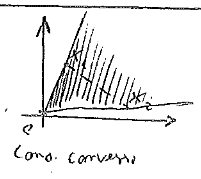
$y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$, con $\lambda_i \geq 0\ \forall i$

(Si dice "propria" se $\lambda_i > 0$)

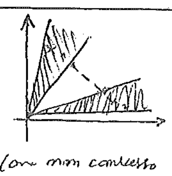
[Involucro conico]

cone $\{K\}$ è l'insieme di tutte le possibili combinazioni coniche dell'insieme K

- È il più piccolo cono convesso che contiene K



Cono convesso



Cono non convesso

Condizioni di ottimalità

Ogni problema di PL si può trasformare in uno di PL in forma standard; basta:
- $\min c^T x \iff -\max -c^T x$
- vincoli di uguaglianza si scompongono in vincoli $\leq$ e $\geq$

[Problema Primale in forma Standard]

$$(P)\begin{cases}\max c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}\end{cases}$$

$v(P)$ = val. Ottimo del Problema

[Th caratterizzazione ottimalità]

1) Se $c \neq 0$ allora ogni soluzione ottima non è interna a P (Altrimenti, essendo $c = \nabla f(x)$, dovrebbe annullarsi nel pt)

2) Se $\exists$ 2 soluzioni ottime x_1 e x_2 allora il problema ha ∞ soluzioni ottime, e sono almeno quelle $\in$ al segmento $\overline{x_1 x_2}$

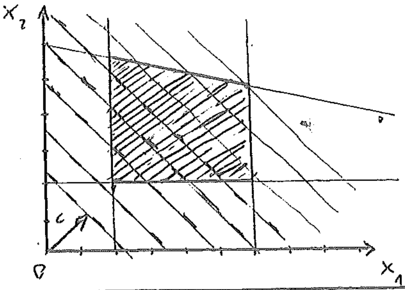
3) Le soluzioni ottime locali di P sono anche ottime globali

[Risoluzione Grafica]

$$\begin{cases}\max c^T x \\ Ax \leq b\end{cases}$$

Il problema si può risolvere geometricamente disegnando il poliedro ammissibile e le linee di isoguadagno (isocosto se è un problema di min) $\rightarrow$ Le rette su cui la f.o assume un valore costante

Prendendo il vettore c^T, le linee di isoguadagno sono descritte da $c^T x = K$



[Th fondamentale della PL]

Dato un problema (P) di PL del tipo

$$\begin{cases}\max c^T x \\ Ax \leq b\end{cases}$$

si supponga anche di avere $V = \{v_1, \dots, v_k\}$, $E = \{e_1, \dots, e_h\}$ tali che $P = \text{conv } V + \text{cone } E$, dove P è il poliedro rappresentato da $Ax \leq b$, allora possiamo trovarci in uno dei seguenti casi:

1) $P = \emptyset$

2) $P = +\infty$, ovvero il caso in cui $\max_P c^T x = +\infty$ se e solo se $\exists\, \zeta : ce_\zeta > 0$

3) (Valore ottimo finito) $\boxed{\exists\, \zeta : \max_{P} c^T x = c v_\zeta}$ $1 \leq \zeta \leq$

e v_ζ corrisponde alla sol. ottima

Dimostrazione

(P) risulta essere equivalente al problema di PL

$$\begin{cases}\max \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T v_i + \sum_{\zeta=1}^{h} \mu_\zeta c^T e_\zeta \\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \\ \lambda \geq 0 \\ \mu \geq 0\end{cases}$$

(2) Poiché P ha ottimo finito si ha $c^T e_\zeta \leq 0$. Se fosse $c^T e_\zeta > 0$ $\therefore \mu_\zeta$ tende a $+\infty$ e quindi la f.o tenderebbe a $+\infty$.

(3) Indichiamo con v_m l'elemento in cui la f.o assume val. massimo e allora $\forall x \in P$:

$$c^T x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T v_i + \sum_{\zeta=1}^{h} \mu_\zeta c^T e_\zeta \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T v_i \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \max_{1 \leq i \leq k} c^T v_i =$$

$$= \left(\max_{1 \leq i \leq k} c^T v_i\right) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \max_{1 \leq i \leq m} c^T v_i = c^T v_m$$

Quindi $\max_{x \in P} c^T x \leq c^T v_m$. Poiché $v_m \in P$, allora

$c^T v_m \leq \max_{x \in P} c^T x$, quindi $\therefore$ v_m è una sol. ottima

Dualità

Poiché ogni problema di PL si può trasformare in un primale standard allora ogni problema ha il suo duale

Ogni primale si può trasformare in un duale

Th: Il duale del duale è il primale

[Rapporto problema primale/duale]

$$(P)\begin{cases} \max c^T x \\ x \in P = \{Ax \leq b,\ x \in \mathbb{R}^n\} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$(D)\begin{cases} \min yb \\ y \in D = \{y^T A = c^T,\ y \in \mathbb{R}^n,\ y \geq 0\} \end{cases}$$

[Problema duale standard]

$$\begin{cases} \min yb \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$

[Costruzione del duale]

1) Se P è un problema di max (min), allora D è un problema di min (max)
2) Ad ogni vincolo primale $A_i x \leq b_i$ è associata una variabile duale $y_i \geq 0$ (cambia di $\geq\ \leq$)

[Lemma di dualità debole]

Se i poliedri P e D sono non vuoti, allora

$c^T x = (yA)x = y(Ax) \leq yb$,

$\boxed{\forall x \in P,\ y \in D}$

[Th degli scarti complementari]

Supponiamo $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soluzioni ammissibili per i problemi P e D. Allora si ha:

$\bar{x}, \bar{y}$ ottime $\iff \bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$

(Si dice che $\bar{x}, \bar{y}$ sono in scarti complementari)

- Nota: Dire che (D) ha soluzione y, equivale a dire che il vettore $c \in$ al cono generato dalle righe $A_1, \dots, A_m$, con $1, \dots, m \in B$, quindi che $c \in$ cono$(A_1, \dots, A_m)$

$\Downarrow$

poiché $c^T = y^T A = \sum_{i=1}^{m} y_i A_i$, con $y_i \geq 0$ affinché sia ammissibile.

[Lemma di dualità forte]

Dati P, D complementari, allora ci troviamo in uno dei seguenti casi mutualmente esclusivi:

1) $P = \emptyset,\ D = -\infty$
2) $P = +\infty,\ D = \emptyset$
3) $P = D = \emptyset$
4) $v(P) = v(D)$ // I due valori ottimi coincidono, cioè $\max_{x \in P} cx = \min_{y \in D} yb$

Inoltre, data una matrice di base allora è possibile definire $\bar{x}$ e $\bar{y}$:

$$A_B \to \begin{cases} \bar{x} = A_B^{-1} b_B \\ \bar{y} = (cA_B^{-1}, 0) \end{cases}$$

Per cui abbiamo la riprova del lemma di dualità forte

$\boxed{c\bar{x}} = c(A_B^{-1} b_B) = (cA_B^{-1}) b_B = \bar{y}_B b_B = \bar{y}_B b_B + \bar{y}_N \overset{0}{b_N} = \boxed{\bar{y} b}$

// Lemma di dualità debole

NB: Ovviamente serve un criterio di ammissibilità per le soluzioni che si trovano

Algebra della PL

Nota: Se rank(A) < n, il sistema $Ax \le 0$ ammette ∞ soluzioni, quindi il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$ non conterebbe vertici

Se rank(A) = n, allora A contiene una sottomatrice quadrata $n \times n$ invertibile (e quindi non singolare)

[Base]

Base → Insieme B di n indici di riga, $B \subseteq \{1, \dots, m\}$ tale che la sottomatrice A_B, ottenuta da A con le righe A_i con $i \in B$ sia invertibile (dunque non singolare).

(Per determinare l'insieme V)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m \ge n$

(Partizioni)

$b = \begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_B \\ y_N \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix}$

[Soluzioni di base]

- Primale ⇒ $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ (Unicità garantita dalla non singolarità di A_B)
- Duale ⇒ $\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_B \\ \bar{y}_N \end{pmatrix}$, con: $\begin{cases} \bar{y}_B = c A_B^{-1} \\ \bar{y}_N = 0 \end{cases}$

[Specchietto]

	$\bar{x}$	$\bar{y}$
Amm	$\forall i \in N$ si ha $A_i \bar{x} \le b_i$	$\forall i \in B$ si ha $\bar{y}_i \ge 0$
Non Amm	$\exists i \in N : A_i \bar{x} > b$	$\exists i \in B : \bar{y}_i < 0$
Deg	$\exists i \in N : A_i \bar{x} = b$	$\exists i \in B : \bar{y}_i = 0$
Non Deg	$\nexists i \in N : A_i \bar{x} = b$	$\nexists i \in B : \bar{y}_i = 0$

[Spiegazione su ammissibilità e degenerezza]

Poiché un sistema lineare definito come $Ax \le b$ altro non è che il sistema che trova le intersezioni fra n vincoli, è necessario studiare dei criteri per determinare quali siano i vertici del poliedro (sol. ammissibile) e quali fra questi sia l'ottimo.

Inoltre ∃ vertici generati da più di una base (un vertice generato da 2 basi, per esempio), detti "degeneri"

[Per $\bar{x}$]

Il test di ammissibilità è dato dalle "variabile di scarto" $S_N \ge 0$ con $S_N = b_N - A_N \bar{x}$

Per il degenere S_N ha almeno uno zero in quanto soddisfa un altro vincolo con l'uguale

[Per $\bar{y}$]

Quali sono i vertici per D?

Si considerano $\bar{y}$ e A a blocchi, cioè:

$(y_B, y_N) \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix} = c$

↳ $y_B A_B + y_N A_N = c$

Parametrizzando $y_N = 0$, ottengo

$y_B A_B = c \rightarrow \bar{y}_B = c A_B^{-1}$

[Th (3):]

α) Un pt $\bar{x}$ è un vertice del poliedro P se e solo se esso è una soluzione di base ammissibile

β) Un pt $\bar{y}$ è un vertice del poliedro D se e solo se è una soluzione duale di base ammissibile

[Test di ottimalità]

Un punto $\bar{x}$ è soluzione ottima se, data la sua base B, risulta essere ammissibile sia $\bar{x}$ sia il suo duale $\bar{y}$. !!!

[Casistiche per stessa base]

$\bar{x}$	$\bar{y}$	
Amm	Amm	Sol. Ottima
Amm	Non Amm	Vertice primale, va cambiata base per trovare l'ottimo
Non Amm	Amm	Vertice duale, " " " " " "
Non Amm	Non Amm	Nessuno dei 2 è vertice, necessario cambio base

Simplesso Primale

[Simplesso]

Worst-case è esponenziale, mediamente è polinomiale. Si applica ai problemi della forma $\begin{cases} \max cx \\ Ax \leq b \end{cases}$

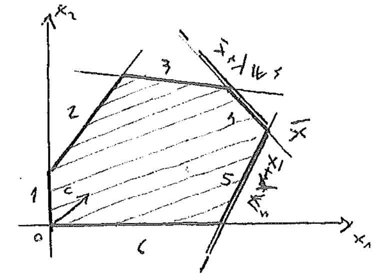
[S]

Supponiamo di avere un vertice $\bar{x}$ di P, generato da una base B che dà luogo a $\bar{y}_B$ non ammissibile. $\bar{x}$ non è ottimo, quindi è necessario spostarsi su un'altro vertice.

[Spiegazione]

1) Definiamo una funzione in λ $\boxed{x(\lambda) = \bar{x} + \lambda W^i}$ con $\lambda \geq 0$ e $W^i = (-A_B^{-1})^i$, cioè la i-esima colonna della antinversa di A

$x(\lambda)$ rappresenta una semiretta puntata in $\bar{x}$ nella direzione di W^i.



2) Considerazioni sulla f.o calcolata in $x(\lambda)$, cioè $cx(\lambda) = c\bar{x} + \lambda(cW^i)$

Notiamo che cW^i è uno scalare, e che $cA_B^{-1} = \bar{y}_B \rightarrow cW = c(-A_B^{-1}) = -\bar{y}_B$

$\rightarrow$ Poiché voglio $\boxed{\text{massimizzare la f. o}}$ è necessario scegliere $\boxed{cW^i > 0}$ ovvero consideriamo le $\bar{y}_B < 0$ (cioè la f.o cresce spostandosi da x nella direz W^h)

3) Definiamo l'indice uscente $h = \min\{i \in B : \bar{y}_B < 0\}$

$\boxed{x(\lambda) = \bar{x} + \lambda W^h}$

4) Vediamo per quali λ la semiretta è dentro P, cioè se sono soddisfatti tutti i vincoli per cui $\boxed{A_i x(\lambda)} = A_i\bar{x} + \lambda A_i W^h \boxed{\leq b_i} \quad \forall i \in N$

(Il caso $i \in B$ non si considera perché, essendo $A_i W^h = 0$ o -1, essa è verificata $\forall \lambda$, dunque sono superflui)

$\rightarrow$ Poiché $A_i\bar{x}$ è uno scalare, ed essendo $\bar{x}$ vertice del poliedro per forza è dentro P, allora analizziamo il termine $A_i W^h$:

- $A_i W^h \leq 0 \rightarrow$ La semiretta è tutta dentro P, $(P) = +\infty$ e $(D) = \emptyset$ in quanto $\forall \lambda \geq 0$, $A_i x(\lambda) \leq b_i$ è sempre soddisfatto
- $A_i W^h > 0 \rightarrow \lambda \leq \underbrace{\frac{b_i - A_i\bar{x}}{A_i W^h}} = \frac{S_i}{A_i W^h} = r_i \quad \forall i \in N$

5) Poiché vogliamo λ più piccolo di ogni r_i, scegliamo $\lambda = \min r_i$ e definiamo come indice entrante $K = \min\{i \in N : r_i = \lambda\}$

(NB: se $r_i = 0$ allora siamo su un vertice degenere)

6) Aggiorniamo la base $B = B / \{h\} \cup \{K\}$, e se siamo ancora nel caso [S] reiteriamo il simplesso $\rightarrow$ pg 65

NB: per un vertice degenere, avremo $\lambda = \min r_i = 0$!!!

[Complementi]

Il simplesso performa un cambio di base, e solo per questo tendenzialmente cambia vertice

In alcuni casi (quando $\bar{x}$ è degenere) nonostante i cambi base il vertice rimane rimane lo stesso.

Per scongiurare il rischio di loop, il Th di Bland ci assicura che il simplesso termina in un num finito di passi

[Th dell'anticiclo di Bland]

La scelta di $h = \min\{i \in B : \bar{y}_B < 0\}$ e $K = \min\{i \in N : r_i$ è il più piccolo dei resti$\}$ ci garantisce l'anticiclo nel simplesso

NB: Se il vertice $i \in N$ è associato ad un $r_i = 0$ (cioè il vincolo i-esimo) è degenere, ed è UNICO, allora i è indice entrante

Tutta la semiretta $x(\lambda)$ è contenuta nel poliedro dunque $cx(\lambda) = +\infty$ al crescere di λ

Simplesso Duale

[Simplesso]

È analogo al primale, con la differenza che in questo si controlla l'ammissibilità della sol. primale (mantenimento ammissibile quella duale)

Si applica a problemi duali standard del tipo
$$\begin{cases} \min y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Il Th di Bland ci garantisce l'anticiclo nel simplesso

Qui il cambio di base è definito in modo che se la nuova sol. di base duale è ≠ da quella vecchia, il valore della f. o diminuisce (il problema è di minimo), mentre se la nuova soluzione coincide con la vecchia, si evita di ciclare sulle stesse basi.

[Spiegazione]

1) Poiché $\bar{y}$ è ammissibile, allora le sue componenti sono tutte positive, e ciò che non è verificato è la primale ammissibilità: $A_N \bar{x} \leq b_N$

2) Scegliamo in accordo con la regola anticiclo di Bland il primo indice tale che viola il vincolo primale, esso sarà l'indice entrante K:
$$K = \min\{i \in N : b_i - A_i \bar{x} < 0\}$$
Con tale indice la funzione decresce (è un problema di min)

3) Definiamo $W^i = (-A_B^{-1})^i$, e facciamo dei controlli su $\boxed{A_K W^i}$

- $A_K W^i \geq 0 \ \forall i \in B \rightarrow (D) = -\infty$ in quanto la semiretta in $\bar{y}$ è tutta contenuta nel poliedro e $y(\lambda) b$ tende a $-\infty$ all'aumentare di λ
- $A_K W^i < 0 \ \forall i \in B \rightarrow$ Da qui si calcolano i rapporti definiti come:
$$r_i = -\frac{\bar{y}_i}{A_K W^i} \geq 0 \quad i \in B$$

$y(\lambda)$ è ammissibile se
$$0 \leq \lambda \leq \min\left\{\frac{y_i}{A_K W^i} : i \in B,\ A_K W^i \leq 0\right\}$$

4) L'indice uscente h sarà l'indice del rapporto r_i minimo
$$h = \min\{i \in B : r_i = \min \text{ rapporto}\}$$

5) Aggiorno la base $B = B / \{h\} \cup \{k\}$ e reitero.

pg 77

Semiretta
$$y_i(\lambda) = \begin{cases} \bar{y}_i + \lambda A_K W^i & \text{se } i \in B \\ \lambda & \text{se } i = K \\ 0 & \text{se } i \in N \setminus \{K\} \end{cases} \qquad \lambda \geq 0$$

$$y(\lambda) b = \sum_{i \in B} \bar{y}_i b_i + \lambda A_K W^i b_i + \lambda b_i = \bar{y} b + \lambda (b_K - A_K \bar{x}) < \bar{y} b$$
$\rightarrow$ La f.o diminuisce lungo la semiretta $y(\lambda)$

- Soluzioni Primali e Duali nei problemi di PL

Dato un problema P del tipo (P), definiamo il suo duale come (D). Data una base B : det $A_B \neq 0$, definiamo:

$$(P) = \begin{cases} \max cx \\ Ax \leq b \end{cases} , \qquad (D) = \begin{cases} \min yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

	Soluzione Primale	Soluzione Duale
Formula	$\bar{x} = A_B^{-1} b_B$	$\bar{y} = (cA_B^{-1}, 0) = (\bar{y}_B, 0)$
Ammissibilità	$b_N - A_N \bar{x} \geq 0 \rightarrow S_N \geq 0$	$\forall i \in B \ \bar{y}_i \geq 0$
Degenere	$\exists s \in N : S_{N_s} = 0$	$\exists s \in N : \bar{y}_{B_s} = 0$

Inoltre se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono entrambe ammissibili, allora $\bar{x}$ è la soluzione ottima (e pure $\bar{y}$!)

- Algoritmo del simplesso primale

Data una base B:

① Calcola $\bar{x}$ e $\bar{y}$. Se $\bar{y}_B \geq 0 \rightarrow$ STOP (Trovato l'ottimo); Altrimenti:

② Calcola l'indice uscente h, con:

$$h = \min \{ i \in B : \bar{y}_i < 0 \}$$

Poi si pone $W = -A_B^{-1}$ e si suddivide in colonne (cioè $W = W^i, W^s : i, s \in B$) e si indica con W^h la h-esima colonna di W.

③ Se $A_\ell W^h \leq 0 \ \forall \ \ell \in N$ allora STOP (P ha valore ottimo $+\infty$ e D è vuoto); Altrimenti

④ Calcoliamo i rapporti r:

$$r_\ell = \frac{b_\ell - A_\ell \bar{x}}{A_\ell W^h} : \ell \in N, A_\ell W^h > 0$$, e consideriamo $\varphi = \min \{ r_s \}$ (cioè il minore dei rapporti)

⑤ Calcoliamo l'indice entrante k, con

$$k = \min \{ \ell \in N : r_\ell = \varphi \}$$

⑥ Aggiorniamo la base $B = B / \{h\} \cup \{k\}$ e torna al 1° passo

NB: Formula per le matrici inverse delle 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$NB = \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{\frac{1}{\frac{b}{c}}} = a \cdot \frac{c}{b} \ !!! \ldots$$

:: Algoritmo del Simplesso Duale

① Data una base B, e un problema in forma duale, calcoliamo $\bar{x}$ e $\bar{y}$. Se $\bar{x}$ è ammissibile $\rightarrow$ STOP ($\bar{x}$ è ottimo); Altrimenti:

② Calcola l'indice entrante $K = \min\{i \in N : b_i - A_i \bar{x} < 0\}$, pongo $W = -A_B^{-1}$ e indico con W^k la k-esima colonna di W (con $i \in B$)

Se $A_K W^i \geq 0 \ \forall i \in B$, allora STOP ($D$ ha valore ottimo $-\infty$ e P è vuoto). Altrimenti:

③ Calcola i rapporti $r_i = \dfrac{\bar{y}_i}{-A_K W^i} : i \in B, A_K W^i < 0$. Inoltre poni $\varphi = \min\{r_i\}$

④ Calcola l'indice uscente h

$$h = \min\left\{i \in B : A_K W^i < 0, \ \frac{\bar{y}_i}{-A_K W^i} = \varphi\right\}$$

⑤ Aggiorna la base $B = B / \{h\} \cup \{k\}$ e torna al 1° passo

• Tips

per x $\rightarrow$ $Ax = b$

per y $\rightarrow$ $A^T y = c$

Porta tutto nella forma

$A = (: \ :)$, $b = (:)$, $c = (:)$

Calcolatrice: (casio fx-570 es PLUS)

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}}_{\substack{A \text{ se è } x \\ A^T \text{ se è } y}} \underbrace{\begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix}}_{\substack{b \text{ se è } x \\ c \text{ se è } y}}$$

[Problema Ausiliario Primale]

Per applicare il simplesso primale a (P), è necessaria una base ammissibile di partenza. Quando non si conosce, si costruisce il problema ausiliario primale.

[Come si costruisce?]

Partiamo da una base B scelta a caso. Se è amm, si procede col simplesso; altrimenti calcoliamo la sol. di base $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ e dividiamo i vincoli N non di base in 2 sottoinsiemi:

$U = \{i \in N : A_i \bar{x} \le b_i\}$ // Vincoli non di base soddisfatti da $\bar{x}$

$V = \{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\}$ // Vincoli non di base non sodd. da $\bar{x}$

Allora il (P_{aux}) è:

$$\begin{cases} \max -\sum_{i \in V} \varepsilon_i \\ A_i x \le b_i & \text{per } i \in B \cup U \\ A_i x - \varepsilon_i \le b_i & \text{per } i \in V \\ -\varepsilon_i \le 0 & \text{per } i \in V \end{cases}$$

Da (P_{aux}) segue che il vettore (x, ε), con

$\bar{\varepsilon} = A_V \bar{x} - b_V \geq 0$

è sol di base ammissibile per (P_{aux}) relativa alla base $B \cup V$, con matrice di base pari a $\begin{pmatrix} A_B & 0 \\ A_V & -I \end{pmatrix}$

Da tale base possiamo applicare il simplesso primale per risolvere il problema ausiliario

Il val. ottimo del problema ausiliario, che sarà compreso fra $-\sum_{i \in V} \bar{\varepsilon}_i$ e 0, stabilisce se $\exists$ una base amm. per (P)

[Th]

1) Se il val. ottimo di (P_{aux}) è < 0 allora (P) non ha sol. ammissibili
2) Se il val. ottimo di (P_{aux}) è $= 0$ allora (P) ammette una base ammissibile, che si costruisce a partire dalla base ottima di (P_{aux})

[Come si trova tale base?]

Si applica il simplesso primale su (P_{aux}) fino a trovarne la sol. ottima (cioè $\bar{x}$ amm. e $\bar{\varepsilon} = 0$). ~~Si eliminano le righe e colonne relative~~ Si applica lo ~~Si calcola~~ ~~Dato~~ sviluppo di Laplace per il calcolo del determinante 1 volta sola, ottenendo A_B e dunque B.

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & -I_2 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}}_{A_B}$$

matrice di base per $(\bar{x}, \bar{\varepsilon})$

Si calcola di qui det

[Problema Ausiliario Duale]

Consideriamo il problema duale (D); possiamo supporre che $c \geq 0$ (cambiando di segno alle colonne di A relative alle componenti negative di c), e che non ci siano eq. ridondanti

[Cos'è ???]

Per trovare una base ammissibile di (D) al passo 1 del simplesso, si costruisce (D_{aux}) come:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \\ y^T A + \varepsilon^T = c \\ y \geq 0 \\ \varepsilon \geq 0 \end{cases}$$

La base formata dagli indici relativi alle var. ausiliarie $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ con la matrice identità come matrice di base, è una base ammissibile per il problema ausiliario, con soluzione di base $\bar{y} = 0$, $\bar{\varepsilon} = c \geq 0$

A partire da tale base, applichiamo il simplesso duale per risolvere il problema ausiliario

Il valore ottimo del problema ausiliario, che è compreso fra $\boxed{0 \text{ e } \sum_{i=1}^{m} c_i}$ stabilisce se $\exists$ base amm. per il problema (D)

[Th]

1) Se il val. ottimo di (D_{aux}) è > 0 allora (D) non ha soluzioni ammissibili

2) Se il val. ottimo di (D_{aux}) è $= 0$, allora c'è una base ammissibile per (D) che si costruisce a partire da una base ottima per (D_{aux})

[Come si trova la base?]

Supponiamo che B sia base ottima di (D_{aux}). Se B è formata solo da indici relativi alle variabili y, allora B è amm. anche per (D). Altrimenti:

Indichiamo con M l'inversa della matrice di base. Allora

$$\boxed{A \cdot M} = \boxed{\begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix} (M^y \; M^\varepsilon)} = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ * & H \end{array}\right)$$

H non può essere nulla, altrimenti una colonna di A sarebbe comb. lin. delle altre, dunque ridondante.

Dunque $\exists$ una colonna $K \in A$: $A_K \cdot M^h$, con M^h colonna di M^ε, risulti essere nulla. → Sostituendo nella base B l'indice h con l'indice K troviamo una base amm per (D_{aux}) relativa alla sol ottima di valore 0.

Iterando si arriva ad una base costituita solo da indici relativi alle variabili y, cioè base amm per (D)

· Esercizi sulla PL

$$\begin{cases} \max\ -7x_1 + x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 3x_2 \leq -6 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ x_1 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 \leq 16 \end{cases}$$

		Base	Ammissibile	Degenere	Ottimo
$\bar{x}$	$(6,2)$	4,5	SI	NO	NO
$\bar{y}$	$(0,-\frac{1}{3},0,0,-\frac{22}{3},0)$	2,5	NO	NO	NO

$$A_{B_x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{B_x}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{B_y} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{B_y}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c = (-7, 1) \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \\ 22 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & +2 \\ -1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{y} = c A_{B_y}^{-1} = (-7,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{21+1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{22}{3}\right)$$ Non Amm, No Degenere
No Ottimo!

$$\bar{x} = A_{B_x}^{-1} b_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 22 \\ 6 \end{pmatrix} = (6, 11-9) = (6,2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

· Controllo ammissibilità $\bar{x}$

$$b_N = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -3 & +2 \\ -1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18+4 \\ -6-6 \\ 2 \\ 12-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -12 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$b_N - A_N\bar{x} = \begin{pmatrix} 4+14 \\ -6+12 \\ 5-2 \\ 16-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$ Ammissibile!
Non degenere
Non Ottimo per $\bar{y}$

Algoritmo del Simplesso primale per il problema 1

	1°	2°
Base	{2,5}	{4,5}
x	6,0	6,2
funzione Obiettivo	-42	-40
y	$0,-\frac{1}{3},0,0,-\frac{22}{3},0$	$0,0,0,\frac{1}{2},-\frac{17}{2},0$
h	2	5
rapporti	33, 15, 6	3, 2
K	4	3

f.o = ~~max~~ $-7x_1 + x_2$
nel pt $\bar{x}$

1°

$$A_B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} = (6,0)$$

$$\bar{y} = (-7,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{22}{3}\right)$$

f.o = $-42 + 0 = -42$

$h = \min\{ i \in \{2,5\} : y_B < 0 \} = 2$

$$W = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} W_2 & W_5 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

Rapporti:

$$r_i = \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i W^h}, \quad i \in N, \ A_i W^h > 0$$

$$r_1 = \frac{4 - (-3,+2)\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{\frac{2}{3}} = \frac{4+18}{\frac{2}{3}} = 22 \cdot \frac{3}{8} = 33$$

$$r_3 = \frac{5 - (0,1)\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{\frac{1}{3}} = \frac{5}{\frac{1}{3}} = 15$$

$$r_4 = \frac{22 - (3,+2)\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{\frac{2}{3}} = \cancel{4}^{2} \cdot \frac{3}{8} = 6$$

$A_1 W^2 = (-3,+2)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}$ ✓

$A_3 W^2 = (0,1)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$ ✓

$A_4 W^2 = (3,2)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}$ ✓

$A_6 W^2 = (2,-1)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}$ ✗

$K = \min\{ i \in N : r_i = \varphi \}$, con $\varphi = \min\{ r_i \}$

$K = 4$

2°

$B = \{2,5\} / \{2,4\} = \{4,5\}$

$$A_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 22 \\ 6 \end{pmatrix} = (6,2)$$

$$f.o = -7 \cdot 6 + 2 = -40$$

$$\bar{y} = (-7,+1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}, -\frac{14+3}{2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{17}{2}\right)$$

$h = 5$

$$W = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} W_4 & W_5 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

$A_1 W^5 = (-3,+2)\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = 3+3 = 6$ ✓

$A_2 W^5 = (-1,-3)\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = 1 - \frac{9}{2}$ ✗

$A_3 W^5 = (0,1)\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2}$ ✓

$A_6 W^5 = (2,-1)\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = -2-\frac{3}{2}$ ✗

$$r_1 = \frac{4 - (-3,2)\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}}{6} = \frac{\cancel{4} - (-18 + \cancel{4})}{6} = \frac{\cancel{18}}{\cancel{6}} = 3$$

$$r_3 = \frac{5 - (0,1)\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}}{\frac{3}{2}} = \frac{5-2}{\frac{3}{2}} = \cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} = 2$$

3]
$$\begin{cases} \min\ 3y_1 - 7y_2 + 5y_3 + 22y_4 + 14y_5 + 15y_6 \\ -y_1 - y_2 + 3y_4 + 2y_5 + 2y_6 = 2 \\ y_1 - 4y_2 + y_3 + 2y_4 + y_5 - 2y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

		Base	Ammissibile	Degenere	Ottimo
$\bar{x}$	(4,5)	3,5	SI	NO	SI
$\bar{y}$	(0,0,0,0,1,0)	1,5	SI	SI	SI

$A_{B_y} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A_{B_y}^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\bar{y} = (2,1)\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (0,1)$ Ammissibile e Degenere

$A_{B_x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $A_{B_x}^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\bar{x} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 22 \end{pmatrix} = \left(-\frac{10}{3} + \frac{22}{3}, 5\right) = \left(\frac{12}{3}, 5\right) = (4,5)$

Controllo ammissibilità $\bar{x}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -4 \\ 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -7+16 \\ 14-13 \\ 15+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Ammissibile e Non Degenere → Entrambe ottime

3] Simplesso Duale sull'esercizio 3]

Base	1° {4,6}	2° {5,6}
y	$0,0,0,\frac{3}{5},0,\frac{1}{10}$	
funzione Obb.	$\frac{147}{10}$	
x	$\frac{37}{5}, -\frac{1}{10}$	
k	5	
rapporti	1, 1	
h	4	

1° $A_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $A_B^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$

$\bar{y} = (2,1)\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{10}\right)$

$f.o. = 3\cdot 0 + 7\cdot 0 + 5\cdot 0 + 22\cdot\frac{3}{5} + 14\cdot 0 + 15\cdot\frac{1}{10} = \frac{147}{10}$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 22 \\ 15 \end{pmatrix} = \left(\frac{22}{5} + \frac{15}{5}, \frac{22}{5} - \frac{45}{10}\right) = \left(\frac{37}{5}, -\frac{1}{10}\right)$

$b_N = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$ $A_N\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{37}{5} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{37}{5} - \frac{1}{10} \\ -\frac{37}{5} + \frac{4}{10} \\ -\frac{1}{10} \\ \frac{74}{5} - \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

$$b_N - A_N\bar{x} = \begin{matrix} 3 + \left(+\frac{75}{10}\right) = \frac{6+25}{2} \\ -7+7 = 0 \\ 5 + \frac{1}{10} = \frac{51}{10} \\ 14 - \frac{147}{10} = -\frac{7}{10} \end{matrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{2} \\ 0 \\ \frac{51}{10} \\ -\frac{7}{10} \end{pmatrix} \begin{matrix} \times \\ \times \\ \times \\ \checkmark \end{matrix}$$

$$W = -\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} = \overset{W_4}{\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}} \overset{W_6}{\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}}$$

$r_i = \frac{\bar{y}_i}{-A^k W^i}$ $r_4 = \frac{\frac{3}{5}}{-(2,1)\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}} = \frac{\frac{3}{5}}{+\frac{3}{5}} = 1$

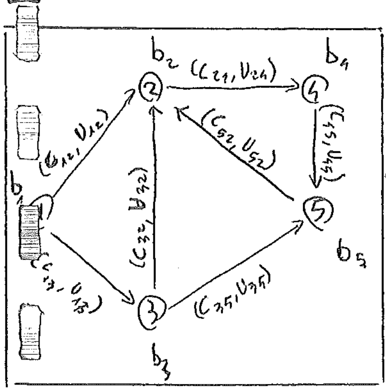
$r_6 = \frac{\frac{1}{10}}{-(3,1)\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}} = \frac{\frac{1}{10}}{+\frac{1}{10}} = 1$ $h = \min\{i : r_i\} = 4$

2°

$B = \{5,6\} / \{5,6\} = \{5,6\}$

Programmazione Lineari su reti

Def.



[Grafo]

Un grafo $G = (N, A)$ è definito da un insieme N di nodi e un insieme $A \subseteq N \times N$ di archi

[Costi, bilanci, capacità di flusso]

- c_{ij} = Costo per unità di flusso
- l_{ij} e u_{ij} = Capacità inferiore e superiore del flusso.
- b_i = bilanci sui nodi
  ($b_i > 0$ → il nodo i è pozzo "destinazione")
  ($b_i < 0$ → il nodo i è sorgente "partenza").

[Problemi di PL su reti]

Classe di problemi di PL modellizzati dal concetto di grafo

[Tipi di problemi]

1) Flusso di costo min
2) Trasporto
3) Cammini minimi
4) Flusso massimo
5) Assegnamento di costo min

[Reti bilanciate, albero di copertura]

- Una rete è bilanciata se $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$
- Albero di copertura è un sottoinsieme di archi $T \subseteq A$ tale che il sottografo (N, T) sia connesso e non contenga cicli.

[Grafo Connesso]

- Un grafo è connesso se e solo se contiene almeno un albero di copertura.
  In un grafo connesso con n nodi, ogni albero di copertura contiene esattamente $n-1$ archi e almeno 2 foglie
- Un grafo è connesso se $\forall$ coppia di nodi del grafo $\exists$ un cammino, non per forza orientato, che li connetta

[Cammino]

Un cammino dal nodo n_1 al nodo n_{k+1} è un insieme di archi $a_1, \dots, a_k$ tale che $\forall i = 1, \dots, k$ si ha che $a_i = (n_i, n_{i+1})$ oppure $a_i = (n_{i+1}, n_i)$.

→ Se tutti gli archi coinvolti vanno dal nodo n_i al nodo n_{i+1} il cammino si dice orientato

→ Un cammino da n_1 a n_{k+1} è un ciclo se $n_1 = n_{k+1}$, se cioè il nodo di partenza è = al nodo di arrivo

Flusso di costo minimo (I)

[Flusso di costo min]

Dato un grafo bilanciato, dove su ogni arco è presente un costo c_{ij} per unità di flusso, una capacità inferiore l_{ij} e una superiore u_{ij}, questo problema consiste nel determinare il flusso di costo minimo che rispetti le condizioni

[Modello]

$$\begin{cases} \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{(p,i)\in A} x_{pi} - \sum_{(i,q)\in A} x_{iq} = b_i \; \forall i\in N \quad \text{// vincolo di bilanciamento} \\ l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} \quad \forall (i,j)\in A \quad \text{// vincolo di capacità} \end{cases}$$

[Forma compatta]

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ex = b \\ l \le x \le u \end{cases}$$

[Considerazioni]

1) Possiamo supporre che $l_{ij} = 0 \; \forall (i,j)$, e che il grafo sia bilanciato.

2) Se non fosse bilanciato ($\sum_{i\in N} b_i \neq 0$) si può aggiungere un nodo fittizio $n+1$ con bilancio $b_{n+1} = -\sum_{i\in N} b_i$

3) Se $b_{n+1} > 0$ si aggiungono degli archi di costo nullo e capacità $+\infty$ che vanno dalle sorgenti al nodo fittizio

Se $b_{n+1} < 0$ si aggiungono degli archi di costo nullo e capacità $+\infty$ che vanno dal nodo fittizio ad ogni pozzo

[Matrice di Incidenza E]

E' la matrice del sistema $Ex = b$, e "descrive il comportamento del grafo". Di dimensione $|N| \times |A|$, è costruita così ⇒ Dato il nodo p, allora:

$$E = \begin{cases} +1 & \text{se l'arco } (i,j) \text{ è entrante per } p \\ -1 & \text{se l'arco } (i,j) \text{ è uscente per } p \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

→ Proprietà di E

1) Il rango di E è $\le$ a $n-1$, e il sistema $Ex = b$ è sovradeterminato
(Quindi nel sistema $Ex = b$ si può cancellare una eq. senza cambiare l'insieme delle sol. del sistema)

2) Se T è un albero di copertura, allora la sottomatrice quadrata E_T, di dim $(n-1)$ ottenuta scegliendo le colonne relative agli archi di T, è invertibile e TUM ($\det E_T^{\circ} = \pm 1$)

3) Il rango di E è $=$ a $n-1$

[Matrice E_T dell'albero di copertura]

Per scrivere in forma triangolare E_T è necessaria una visita dell'albero di copertura T per foglie ("tecnica di ispezione diretta").

Partiamo scegliendo una foglia $z \neq$ dal nodo 1 e consideriamo l'unico arco a che incide su z.

Costruiamo E_T mettendo il nodo z come prima riga e l'arco a come prima colonna, e cancelliamo dal grafo (N,T) il nodo z e l'arco a.

Nel grafo rimasto scegliamo ancora una foglia w ($\neq$ dal nodo 1) e consideriamo l'unico arco a' che incide sul nodo w. Poniamo w come seconda riga di E_T e a' come seconda colonna.

Iterando questo procedimento si ottiene la matrice E_T in forma triangolare inferiore

NB: Se E_T è una sottomatrice invertibile di E di dim $(n-1)$, allora T è un albero di copertura

[Flusso di costo min non capacitato]

È il caso particolare in cui le capacità superiori sugli archi sono illimitate, cioè $u_{is} = +\infty$. Allora il problema si semplifica:

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ex = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Per il rapporto fra T e E_T, ci risulta che per questi problemi le basi coincidono con gli alberi di copertura del grafo
(B è base $\iff$ B è un albero di copertura)

[Th dell'interezza]

Se il vettore b è a componenti intere, allora i flussi di base sono a componenti intere

Da ciò il problema si trasforma in un semplice problema di PL, perdendo il vincolo $x \in \mathbb{Z}^m$

[Flusso di base $\bar{x}$]

Per trovare una base è sufficiente fare una partizione degli archi in 2 sottoinsiemi (T, L), dove T è un albero di copertura.
Allora $\bar{x}$ è dato da:

$$\bar{x} : \begin{cases} \bar{x}_T = E_T^{-1} b \\ \bar{x}_L = 0 \end{cases}$$

- È ammissibile se $\bar{x}_T \geq 0$,
- È degenere se $\exists\, (i,s) \in T : \bar{x}_T = 0$

[Th degli scarti complementari]

- Un flusso amm. $\bar{x}$ è ottimo se e solo se $\exists$ un potenziale π:

$$\begin{cases} c_{is}^{\pi} \geq 0 & \text{se } x_{is} = 0 \\ c_{is}^{\pi} = 0 & \text{se } x_{is} > 0 \end{cases}$$

- Un potenziale amm. π è ottimo se e solo se $\exists$ un flusso x:

$$\begin{cases} Ex = b \\ x_{is} \geq 0 & \text{se } c_{is}^{\pi} = 0 \\ x_{is} = 0 & \text{se } c_{is}^{\pi} > 0 \end{cases}$$

[Problema del potenziale ai nodi]

È il duale del problema del flusso di costo minimo.

$$\begin{cases} \max \pi^T b \\ \pi^T E \leq c^T \end{cases}$$

Il potenziale di base relativo alla base T è la soluzione del sistema $\pi^T E_T = c_T^T$, che è di facile risoluzione poiché E_T è triangolare inferiore.

Inoltre poiché tale sistema è sottodeterminato ($n-1$ equazioni in n incognite) si pone $\pi_1 = 0$.

[Potenziale $\bar{\pi}$]

Da ciò sopra citato, il potenziale di base è:
$\bar{\pi} = c_T^T E_T^{-1}$

- È ammissibile se e solo se risulta $\pi E_L \leq c_L$
- È degenere se $\pi E_L = c_L$

[Th di Bellman]

Supponiamo che una partizione (T, L) degli archi generi un flusso di base $\bar{x}$ ammissibile.
Se il potenziale di base $\bar{\pi}$ è tale che $c_{is}^{\pi} \geq 0$ $\forall (i,s) \in L$ (Condizioni di Bellman)
allora $\bar{x}$ è ottimo

Poiché tali condizioni rappresentano l'ammissibilità duale, risulta chiaro che l'unica cosa importante è la differenza tra i valori delle componenti di π (differenze di potenziale) $\rightarrow$ Ciò spiega perché il duale del problema dei flussi si chiama "probl. del potenziale"

[Costi ridotti c_{is}^{π}]

Se definiamo il costo ridotto dell'arco (i,s) relativo al potenziale π come:

$$\boxed{c_{is}^{\pi} = c_{is} + \pi_i - \pi_s}$$

allora:

- Il potenziale è ammissibile se i costi ridotti degli archi di L non sono negativi, e degenere se esiste un arco $\in L$: $c_{is}^{\pi} = 0$

[Simplesso per flussi]

Supponiamo di avere un albero di copertura della rete che dà luogo a un flusso $\bar{x}$ ammissibile e ad un potenziale non ammissibile. Allora dobbiamo applicare il simplesso duale.

[Cambio di base]

Se π non è ammissibile, allora $\exists (i,s) \in L : c^{\pi}_{is} < 0$, ciò vuol dire che spedire flusso lungo quell'arco fa diminuire il costo della f.o

In altre parole, si dirotta il flusso verso l'arco entrante, e il primo arco dell'albero che si svuota è l'uscente

[Osservazioni]

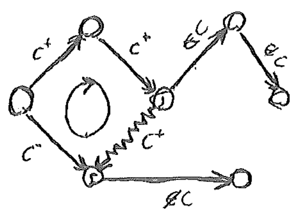
1) Se $C^- = \emptyset$, allora θ non ha vincoli, e la f.o viene minimizzata da $\theta = +\infty$. Per la scelta di $x(\theta)$ il valore della f.o decresce mandando ∞ flusso nel ciclo, quindi un arco nel ciclo deve avere costo negativo $\rightarrow$ non ci sono limiti sul flusso che può essere spedito lungo il ciclo
2) θ può essere anche nullo (flussi degeneri). Per un passo cambia la base (l'albero di copertura) ma non il flusso, e non si può dire nulla sul potenziale, solo che non sarà ammissibile

[Arco Entrante]

Data la motivazione relativa a "cambio di base", prendiamo il primo arco che rende $c^{\pi}_{is} < 0$ vera, in accordo con la regola anticiclo di Bland. Tale arco sarà l'arco entrante.

Aggiungendolo, non avremo più un albero di copertura, poiché si crea un ciclo. Se considero l'insieme degli archi costituenti tale ciclo, e lo chiamiamo C, lo spezziamo in C^+ (archi con verso concorde all'arco entrante), e C^- (archi con verso discorde con l'arco entrante):

$C = C^+ \cup C^-$



[Arco Uscente]

È da cercarsi in C, con la "tecnica di rottura del ciclo".
Parametrizziamo il flusso, con $\theta \geq 0$

$$\bar{x}_{is}(\theta) = \begin{cases} \bar{x}_{is} + \theta & \text{se } (i,s) \in C^+ \\ \bar{x}_{is} - \theta & \text{se } (i,s) \in C^- \\ \bar{x}_{is} & \text{se } (i,s) \notin C \end{cases} \rightarrow \text{si può dimostrare che } \boxed{c\,x(\theta) = c\bar{x} + \theta\, c^{\pi}_{is}}$$

↳ Dirottare il flusso

Per come abbiamo scelto c^{π}_{is}, $\forall \theta > 0$ il valore della f.o si abbassa

È necessario tuttavia vincolare il parametro θ per evitare che si esca dal poliedro dei flussi ammissibili.

Per far sì che al variare di θ il flusso sia ammissibile, dobbiamo verificare che tutti i bilanci ai nodi siano soddisfatti, ma notiamo che se $(i,s) \notin C \rightarrow \bar{x}_{is}(\theta) = \bar{x}_{is}$. Quindi basta verificare solo per i nodi in cui uno dei 2 estremi degli archi $\in C$ incidono..
4 casi possibili $\rightarrow$

1) ←○→
2) →○←
3) →○→
4) ←○←

Fissato un verso arbitrario, ci risulta che la somma dei θ con i suoi segni è nulla.
(Es: Se il verso fissato dall'arco uscente è verso DX, nel caso (1) l'arco che è a SX del nodo uscente è discorde (C^-), dunque $\bar{x}_{sx} - \theta$, mentre l'arco a DX del nodo è concorde, quindi $\bar{x}_{dx} + \theta$. $\rightarrow$ Questo nodo eroga unità di flusso, da una parte $-\theta$, dall'altra $+\theta$, ma la somma è nulla; ha solo "dirottato" il flusso.)

Dovendo essere il flusso positivo, l'unico vincolo è allora $\forall (i,s) \in C^-$, $\bar{x}_{is} - \theta \geq 0$, dunque $\theta \leq \min_{(i,s) \in C^-} \{\bar{x}_{is}\}$; $\rightarrow$ Si sceglie esattamente l'uguale per massimizzare la decrescenza

L'arco uscente è allora l'arco di C^- sul quale passa flusso minimo

[Flusso di costo min su reti capacitate]

Nel caso delle reti capacitate riscriviamo il sistema con l'ausilio delle variabili di scarto W, ottenendo il sistema (P), o in forma matriciale

$$(P)\begin{cases}\min c^T x + \cancel{0 \cdot w} \\ Ex=b \\ x+w=u \\ x,w\geq 0\end{cases} \rightarrow (Q) \begin{cases}\min (x,w)^T \binom{c}{0} \\ (x,w)^T \begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} = \binom{b}{u} \\ x,w\geq 0\end{cases}$$

[Matrice A]

$A=\begin{pmatrix} E & I \\ 0 & I\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2m)\times(m+n-1)}$, $(x,w)\in\mathbb{R}^{2m}$, e ha rango $m-1+m$ perché E ha rango $n-1$, quindi il blocco diagonale I ha rango m

[Sol. di base]

$$\bar{x}=\begin{cases} x_T = E_T^{-1}(b-E_U u_U) \\ x_L=0 \\ x_U=u_U\end{cases} \qquad W=\begin{cases} W_T=(u_T-x_T) \\ W_L=u_L \\ W_U=0\end{cases}$$

$w_L = u_L - x_L$

Perché sta divisione? $b=Ex=(E_T,E_U,E_L)\begin{pmatrix}x_T\\x_U\\x_L\end{pmatrix}=$
$=E_T x_T+E_U x_U+\cancel{E_L x_L}^{\,0}=E_T x_T+E_U u_U)$

- Il flusso di base $\bar{x}$ risulta essere ammissibile se e solo se il flusso sugli archi di T rispetta i vincoli di capacità, cioè se $0\leq \bar{x}_{is}\leq u_{is}\ \forall (i,s)\in T$
- Il flusso di base è degenere quando $x_{is}=0$ o $x_{is}=u_{is}\ \forall(i,s)\in T$

[Matrice di base]

Per ottenere una matrice di base devo estrarre $n-1+m$ righe linearmente indipendenti dalla matrice A. Come?

Consideriamo una tripartizione disgiunta (T,L,U) dell'insieme degli archi, dove T rappresenta l'albero di copertura, L gli archi vuoti e U gli archi saturi, e indichiamo con T',L',U' le righe di A corrispondenti alle variabili di scarto W

Eccettuato T che deve essere albero di copertura, di dim $(n-1)$, i restanti m archi possono essere divisi arbitrariamente fra L e U.

Per comodità suddividiamo A come (*):

$$(*)\ \begin{pmatrix} E_T & I_T & 0 & 0 \\ E_L & 0 & I_L & 0 \\ E_U & 0 & 0 & I_U \\ 0 & I_{T'} & & \\ 0 & & I_{L'} & \\ 0 & & & I_{U'}\end{pmatrix}=A$$

Allora vale il seguente th:

[Th sulla base per il flusso]

$\forall$ tripartizione ottengo una sol. di base. Considerando $\boxed{B=T\cup U\cup T'\cup L'}$ esso è una base, ovvero la matrice A_B è di base, ha rango $m+n-1$, è invertibile e TUM

Dim: Va dimostrato che la sottomatrice a blocchi

$$A_B=\begin{pmatrix} E_T & I_T & 0 & 0 \\ E_U & 0 & 0 & I_U \\ 0 & I_{T'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{L'} & 0\end{pmatrix}$$

è invertibile. Calcoliamone il det, considerando che $I\cdot B=B\ \forall$ matrice

$$\det(A_B)=I_{L'}\cdot\det\begin{pmatrix} E_T & I_T & 0 \\ E_U & 0 & I_U \\ 0 & I_{T'} & 0\end{pmatrix}=I_{T'}\cdot\det\begin{pmatrix}E_T & 0 \\ E_U & I_U\end{pmatrix}$$
$$=I_U\cdot\det E_T=\det E_T=\pm 1$$

[Problema del potenziale ai nodi]

É il problema duale del flusso di costo minimo, ed é dato da:

$$\begin{cases} \max (b,u)^T \begin{pmatrix}\pi \\ \mu\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\pi \\ \mu\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \max \pi^T b + \mu^T u \\ \pi^T E + \mu^T \leq c^T \\ \mu \leq 0 \end{cases}$$

[Th di Bellman]

Supponiamo che una tripartizione (T,L,U) degli archi ~~generanti~~ un flusso di base $\bar{x}$ amm. Se il potenziale di base π é tale che (*), allora $\bar{x}$ é ottimo

$$(*) \begin{cases} c_{is}^{\pi} \leq 0 & \forall (i,s) \in U \\ c_{is}^{\pi} \geq 0 & \forall (i,s) \in L \end{cases}$$ // Cond. di Bellman

Dim: Abbiamo già visto che le condizioni sui costi ridotti relativi a π sono equivalenti all'ammissibilità della sol. di base complementare (π, μ).

Nota: Se $\bar{x}$ é non degenere, le condizioni di Bellman diventano necessarie per l'ottimalità

[Th Scarti Complementari]

1) Un flusso ammissibile $\bar{x}$ é ottimo se e solo se $\exists$ potenz. π:

$$\begin{cases} c_{is}^{\pi} \geq 0 & \text{se } \bar{x}_{is} = 0 \\ c_{is}^{\pi} = 0 & \text{se } 0 \leq \bar{x}_{is} < u_{is} \\ c_{is}^{\pi} \leq 0 & \text{se } \bar{x}_{is} = u_{is} \end{cases}$$

2) Un potenziale π é ottimo se e solo se $\exists$ flusso $\bar{x}$:

$$\begin{cases} Ex = b \\ x_{is} = u_{is} & \text{se } c_{is}^{\pi} < 0 \\ x_{is} = 0 & \text{se } c_{is}^{\pi} > 0 \\ 0 \leq x_{is} \leq u_{is} & \text{se } c_{is}^{\pi} = 0 \end{cases}$$

[Potenziale di base]

É la soluzione di base del problema del potenziale ai nodi associata alla base $B = T \cup U \cup T' \cup L'$. I vincoli di base sono:

$$\begin{cases} \pi^T E_T + \mu_T^T = c_T^T \\ \pi^T E_U + \mu_U^T = c_U^T \\ \mu_T = 0 \\ \mu_L = 0 \end{cases}$$

La sol. di base dunque é la seguente (π, μ):

$$\begin{cases} \pi^T = c_T E_T^{-1} \\ \mu_T = 0 \\ \mu_L = 0 \\ \mu_U = c_U - \pi E_U \end{cases}$$ // si ricava dalla 1ª eq con π_1 posto $= 0$

Tale sol. é ammissibile se e solo se sono soddisfatti i vincoli non di base, cioé

$$\begin{cases} \pi E_L + \mu_L = \pi E_L \leq c_L \\ \mu_U = c_U - \pi E_U \leq 0 \end{cases} \text{cioé} \begin{cases} c_{is}^{\pi} \geq 0 & \forall (i,s) \in L \\ c_{is}^{\pi} \leq 0 & \forall (i,s) \in U \end{cases}$$

Quindi il potenziale di base π é ammissibile se e solo se i costi ridotti degli archi in L sono non negativi e i costi ridotti degli archi in U sono non positivi.

Inoltre i costi ridotti degli archi in T sono $= 0$

Il potenziale di base π é degenere se e solo se un vincolo non di base é aderente a (π, μ) cioé quando un arco di L oppure di U ha costo ridotto nullo.

[Simplesso per flussi capacitati]

L'idea è la stessa del non capacitato, ma in aggiunta la valutazione degli archi saturi per l'arco entrante, che cambia la struttura dell'algoritmo. Supponiamo di disporre di una tripartizione (T,L,U) che generi un flusso di base $\bar{x}$ amm e un potenziale π non ammissibile. Allora ci ritroviamo nella seguente situazione (*), dove il primo arco in ordine lessicografico che viola le condizioni di Bellman sarà il nostro arco entrante

$$(*)\ \pi \text{ non amm.} \rightarrow \begin{cases} \exists (i,j)\in L : c^{\pi}_{ij} < 0 & (1) \\ \quad \vee \\ \exists (i,j)\in U : c^{\pi}_{ij} > 0 & (2) \end{cases}$$

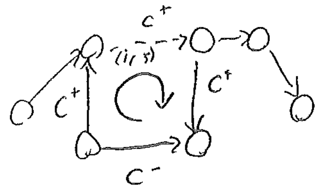
Studiamoli in 2 casi: (1) e (2)

[I caso - Arco entrante $\in L$] (i,j)

Questo arco è vuoto, e ha costo ridotto negativo, dunque significa che non conviene lasciare il flusso nullo.

Aggiungendo (i,j) a T, dato che T è albero di copertura, deve necessariamente generarsi un ciclo, e gli archi che gli appartengono formano l'insieme C.

Come verso di C prendiamo la direzione dell'arco entrante, e dividiamo C in 2 sottoinsiemi C^+ (archi con verso concorde a (i,j)) e C^- (archi discordi), tali che $C = C^+ \cup C^-$



Imponiamo ora un cambio di flusso secondo la parametrizzazione, dove si può dimostrare che

$$x_{ij}(\theta) = \begin{cases} \bar{x}_{ij} + \theta & \text{se } (i,j)\in C^+ \\ \bar{x}_{ij} - \theta & \text{se } (i,j)\in C^- \\ \bar{x}_{ij} & \text{se } (i,j)\notin C \end{cases}$$

$\boxed{c\, x(\theta) = c\bar{x} + \theta c^{\pi}_{ij}}$

Dunque che questa parametrizzazione non viola le eq. di bilancio ai nodi

Per quali θ il flusso è amm?

1) Se un dato arco non appartiene al ciclo il flusso $x_{ij}(\theta)$ rimane invariato, quindi amm.

2) Tutte le componenti del flusso devono essere positive, dunque $\bar{x}_{ij} - \theta^- \geq 0 \rightarrow \boxed{\theta^- \leq \min_{(i,j)\in C^-} \{\bar{x}_{ij}\}}$

3) Dobbiamo anche assicurarci che siano rispettati i vincoli di portata degli archi, quindi $\bar{x}_{ij} + \theta^+ \leq u_{ij} \rightarrow \boxed{\theta^+ \leq \min_{(i,j)\in C^+} \{u_{ij} - \bar{x}_{ij}\}}$

Poiché dobbiamo minimizzare la funz. obiettivo, scegliamo esattamente:

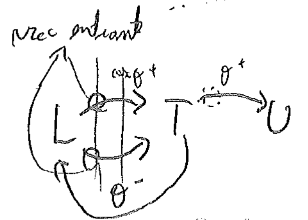
$$\theta^- = \min_{(i,j)\in C^-} \{\bar{x}_{ij}\} \qquad \theta^+ = \min_{(i,j)\in C^+} \{u_{ij} - \bar{x}_{ij}\} \rightarrow \theta = \min\{\theta^+, \theta^-\}$$

e l'arco a cui si riferisce θ è l'arco uscente (r,s)

Come aggiorniamo la tripartizione T,L,U?

Sapendo che $\theta = \min\{\theta^+, \theta^-\}$, scegliamo θ^+ se troviamo un arco di C^+ che si satura, dunque si sposta l'arco entrante da L in T (questo per forza) e si sposta l'arco interessato da $\theta = \theta^+$ (NB, che può essere anche lo stesso arco entrante appena entrato in T!) da T in U

Se scegliamo $\theta = \theta^-$, vuol dire che l'arco interessato si svuota, dunque (i,j) arco entrante $\in L$ entra in T, e l'arco che si svuota (che sarà per forza $\neq$ da (i,j)) ~~esterno~~ da T in L



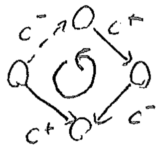
PERCHÉ SI PRENDE QUESTO θ?

[II caso - Arco Entrante $\in U$]

L'arco in questione ha un costo ridotto positivo, dunque non conviene far passare tanto flusso, va ridotto.
Non si può usare lo stesso algoritmo del I° caso, poiché non possiamo far passare altro flusso da un arco già saturo. → Dobbiamo togliere del flusso

Al fine di usare lo stesso algoritmo di prima, cambiamo il verso di percorrenza del ciclo:

C^+ = Gli archi di verso discorde con quello entrante



C^- = Archi concordi con quello entrante

In questo modo $x_{is}(\theta)$ non viola i bilanci ai nodi, e l'algoritmo di scelta di θ resta invariato.

Cosa accade alla tripartizione?
Cambia in funzione di θ. Un arco si sposta da U a T, poi:

Se $\theta = \theta^+$ allora l'arco interessato da θ si sposta da T ad U. Non può essere l'entrante poiché non $\in C^+$

Se $\theta = \theta^-$ un arco si svuota, andando da T a L. Può anche essere lo stesso arco entrante.

→ Note sul Simplesso

① Se non ci sono archi concordi o discordi (cioè se C^+ o C^- sono vuoti), allora si pone θ^+ o $\theta^- = +\infty$, per indicare che non deve essere considerato.

② Aggiornamento del potenziale [(p,q) → Arco entrante; (r,s) → Arco uscente]

Se $(p,q) = (r,s)$ → il potenziale non cambia

Altrimenti, la rimozione di (r,s) da T genera una partizione dell'insieme N dei nodi in 2 sottoinsiemi sconnessi N_p e N_q che contengono, rispettivamente, i nodi p e q

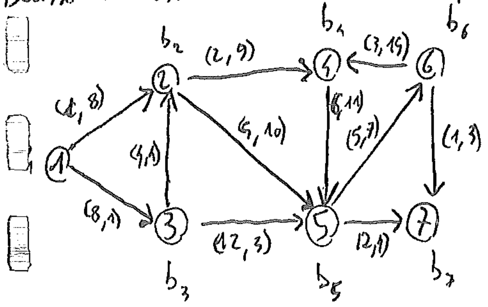
Possiamo supporre che i potenziali di N_p restino invariati.

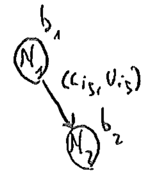
Poiché l'arco (p,q) entra in T, il suo costo ridotto, calcolato con i nuovi potenziali deve essere nullo; → il nuovo potenziale dei nodi $\in N_q$ è ottenuto dal vecchio potenziale sommando il costo ridotto dell'arco entrante (p,q)

Inoltre cambiano anche i costi ridotti:

$$\overline{\pi}_{i\,\text{nuovi}} = \begin{cases} \pi_{i\,\text{vecchi}} & \text{se } i \in N_p \\ \pi_{i\,\text{vecchi}} + c^{\pi}_{pq} & \text{se } i \in N_q \end{cases} \xrightarrow{\text{poi}} \boxed{c^{\pi}_{is\,\text{nuovo}} = \begin{cases} c^{\pi}_{is\,\text{vecchi}} & \text{se } (i,s) \in N_p \ \| \ (i,s) \in N_q \\ c^{\pi}_{is\,\text{vecchi}} + c^{\pi}_{pq} & \text{se } i \in N_p \text{ e } s \in N_q \\ c^{\pi}_{is\,\text{vecchi}} - c^{\pi}_{pq} & \text{se } s \in N_p \text{ e } i \in N_q \end{cases}}$$

· Flusso di costo min su reti capacitate





Consideriamo un grafo capacitato composto da m archi, n nodi, tali che:

c_{ij} = Costo per unità di flusso

U_{ij} = Portata max

b_i = Bilancio i-esimo (tale che $\sum_i^n b_i = 0$)

Allora abbiamo che:

$b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^m$, $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$, dove E è la matrice di Incidenza. Per crearla:

1) Poniamo in ordine lessicografico gli archi
2) Poi creiamo una matrice E tale che

$$\begin{array}{c|c} & \text{archi} \\ \hline \text{nodi} & \end{array} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se l'arco non è incidente} \\ 1 & \text{se è entrante} \\ -1 & \text{se è uscente} \end{cases}$$

NB: Il problema si denota come

$$\begin{cases} \min cx \\ Ex = b \\ 0 \le x_{ij} \le U_{ij} \quad \forall i,j \end{cases}$$

Calcolo del flusso minimo e dei potenziali di base

Per calcolare il flusso minimo, è necessario considerare la matrice E_T. Si considera un arco di copertura T. Allora E_T è una matrice quadrata di dimensione $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ ottenuta dalle colonne relative agli archi appartenenti a T e alle righe date dai nodi escludendo il primo (o un altro)

Es: $(1,2)(1,3)(2,4)(2,5)(5,6)(5,7) = T$

$$E_T = \begin{pmatrix} \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partendo dalla relazione $Ex = b$, effettuiamo una tripartizione disgiunta T, U, L, e la esprimiamo come:

$$b = Ex = (E_T \; E_L \; E_U)\begin{pmatrix} x_T \\ x_L \\ x_U \end{pmatrix} = E_T x_T + E_U x_U .$$

Da qui abbiamo che $\underline{\bar{x}_T = E_T^{-1}(\tilde{b} - E_U u_U)}$, dove $\tilde{b}$ è il vettore b privato della coordinata relativa alla riga rimossa da E_T

Dunque $\boxed{\bar{x}_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in L \\ U_i & \text{se } i \in U \\ x_{T_i} & \text{se } i \in T \end{cases}} \longrightarrow$ [Flusso di base

Per determinare $\bar{w}$ la situazione è diversa ⊛, infatti

$$\bar{w}_T = U_T - E_T^{-1}(\tilde{b} - E_U u_U)$$

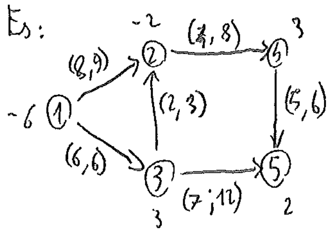
Dunque $\bar{w}_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in U \\ U_i & \text{se } i \in L \\ \bar{w}_{T_i} & \text{se } i \in T \end{cases}$

⊛ NB: Negli esercizi d'esame la sezione $\bar{w}$ della soluzione di base $(\bar{x}, \bar{w})$ spesso non c'è! Ci basta $\bar{x}$!!!

(Per il potenziale, Pagina successiva)

Per il potenziale invece conviene effettuare una visita anticipata della radice, ponendo a 0 la differenza di potenziale della radice.

Es:



La radice è ①, dunque $\pi_1 = 0$. Per gli altri:

$$\begin{cases} -\pi_1 + \pi_2 = 8 \\ -\pi_1 + \pi_3 = 6 \\ -\pi_2 + \pi_4 = 4 \\ -\pi_3 + \pi_5 = 7 \end{cases} \rightarrow \text{da cui } \bar{\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Altrimenti, si può usare la formula $\bar{\pi} = c_T E_T^{-1}$.

Inoltre per il calcolo di $\bar{\mu}$ (*) abbiamo che

$\bar{\mu}_U = c_U - \bar{\pi} E_U$

quindi $\bar{\mu}_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in T \parallel i \in L \\ \bar{\mu}_{U_i} & \text{altrimenti} \end{cases}$

(*) NB: La soluzione sarebbe $(\bar{\pi}, \bar{\mu})$, ma ci basta anche solo $\bar{\pi}$!

· Ammissibilità del flusso di base e del potenziale (condizioni di Bellman)

Il th di Bellman afferma che se flusso di base e potenziali sono ammissibili, allora $\bar{x}$ è ottimo.

Piccola premessa: definiamo il costo ridotto come $c_{ij}^{\pi} = c_{ij} + \pi_i - \pi_j$. Detto ciò, seguiamo la seguente tabella:

	Flusso di base	Potenziale
Ammissibile	$\forall (i,j) \in T \quad 0 \leq \bar{x}_{ij} \leq u_{ij}$	$\forall (i,j) \in L \quad c_{ij}^{\pi} \geq 0 \parallel \forall (i,j) \in U \quad c_{ij}^{\pi} \leq 0$
Degenere	$\exists (i,j) \in T : \bar{x}_{ij} = 0 \parallel \bar{x}_{ij} = u_{ij}$	$\exists (i,j) \in L : c_{ij}^{\pi} = 0 \parallel \exists (i,j) \in U : c_{ij}^{\pi} = 0$

: NOTA BENE :

Per trovare $\bar{x}$, basta considerare ogni nodo e costruire il sistema; se l'arco (i,j) è entrante allora x_{ij} è positivo nella eq., altrimenti è negativo, e si pone = al bilancio b del nodo

(Vedere esempi)

Algoritmo del simplesso per flussi

1) Trova una tripartizione degli archi (T,L,U), con T albero di copertura, che generi un flusso di base ammissibile

2) Calcola il flusso di base $\bar{x}$ $(\bar{x}_T = E_T^{-1}(b - E_U u_U)$, $\bar{x}_L = 0$, $\bar{x}_U = u_U)$ e il potenziale di base $(\pi = c_T E_T^{-1})$
e il costo ridotto di ogni arco $(c^{\pi}_{is} = c_{is} + \pi_i - \pi_s)$ $\forall$ arco (i,s)

Se sono soddisfatte le condizioni di Bellman:
$c^{\pi}_{is} \geq 0 \ \forall (i,s) \in L$ $\Rightarrow$ STOP ($\bar{x}$ è flusso di costo min e $\bar{\pi}$ è potenziale ottimo)
$c^{\pi}_{is} \leq 0 \ \forall (i,s) \in U$

· Altrimenti calcola l'arco entrante $\rightarrow (p,q) = \min\left(\{(i,s)\in L : c^{\pi}_{is} < 0\} \cup \{(i,s) \in U : c^{\pi}_{is} > 0\}\right)$ {Min in ordine lessicografico}

3) L'arco (p,q) crea un ciclo $\mathcal{C}$ con gli archi di T. $\rightarrow$ Si considera in $\mathcal{C}$ anche (p,q)!!!
Fissa su $\mathcal{C}$ un verso concorde con (p,q) se $(p,q) \in L$, oppure discorde se $(p,q) \in U$
Indica con $\mathcal{C}^+$ gli archi del ciclo concordi col verso fissato e con $\mathcal{C}^-$ quelli discordi

4) Calcola:

$\theta^+ = \min\{u_{is} - \bar{x}_{is} : (i,s) \in \mathcal{C}^+\}$

$\theta^- = \min\{\bar{x}_{is} : (i,s) \in \mathcal{C}^-\}$

$\theta = \min\{\theta^+, \theta^-\}$

se $\mathcal{C}$ vuoto $\theta = +\infty$

Se $\theta = +\infty$ allora STOP
Il flusso di costo min ha valore $-\infty$ e il potenziale è nullo

Se $\mathcal{C}^+$ o $\mathcal{C}^-$ è vuoto, allora ci va $+\infty$

· Altrimenti calcola l'arco uscente $\rightarrow (r,s) = \min\left(\{(i,s)\in\mathcal{C}^+ : u_{is} - \bar{x}_{is} = \theta\} \cup \{(i,s)\in\mathcal{C}^- : \bar{x}_{is} = \theta\}\right)$ {Min lessicografico}

5) Aggiorna la tripartizione:

- Se $(p,q) \in L$, $(r,s) \in \mathcal{C}^+$ e $(p,q) = (r,s)$, allora $L = L \setminus \{(p,q)\}$, $U = U \cup \{(p,q)\}$
- Se $(p,q) \in L$, $(r,s) \in \mathcal{C}^+$ e $(p,q) \neq (r,s)$, allora $T = T \setminus \{(r,s) \cup (p,q)\}$, $L = L \setminus \{(p,q)\}$, $U = U \cup \{(p,q)\}$
- Se $(p,q) \in L$, $(r,s) \in \mathcal{C}^-$ allora $T = T / \{(r,s) \cup (p,q)\}$, $L = L / \{(p,q) \cup (r,s)\}$
- Se $(p,q) \in U$, $(r,s) \in \mathcal{C}^-$ e $(p,q) = (r,s)$ allora $L = L \cup \{(p,q)\}$, $U = U \setminus \{(p,q)\}$
- Se $(p,q) \in U$, $(r,s) \in \mathcal{C}^-$ e $(p,q) \neq (r,s)$ allora $T = T \setminus \{(r,s) \cup (p,q)\}$, $L = L \cup \{(r,s)\}$, $U = U \setminus \{(p,q)\}$
- Se $(p,q) \in U$, $(r,s) \in \mathcal{C}^+$ allora $T = T / \{(r,s) \cup (p,q)\}$, $U = U / \{(p,q) \cup (r,s)\}$

Torna al passo 2

[NB: Se $\theta = 0$ $\rightarrow$ il flusso al passo successivo resta invariato.
Cioè non va ricalcolato!]

· Flusso di costo min su reti non capacitate

Caso particolare di flusso di costo min, dove la portata max sugli archi è illimitata ($u = +\infty$), quindi omette. Il problema diventa più semplice:

$$\begin{cases} \min \, cx \\ Ex = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Qui basta fare una bipartizione degli archi (T, L), con T albero di copertura. Allora:

Th di Bellman: Se $\bar{x}$ è un flusso di base ammissibile e $\bar{\pi}$ è ammissibile, allora $\bar{x}$ è ottimo

	Flusso di base	Potenziali
Formule	$\bar{x}_T = E_T^{-1} b \;, \bar{x}_L = 0$	$\bar{\pi} = c_T E_T^{-1}$
Ammissibilità	$\forall (i,j) \in T \quad \bar{x}_{ij} \geq 0$	$\forall (i,j) \in L \quad c_{ij}^{\pi} \geq 0$
Degenere	$\exists (i,j) \in T : \bar{x}_{ij} = 0$	$\exists (i,j) \in L : c_{ij}^{\pi} = 0$

$$c_{ij}^{\pi} = c_{ij} + \bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j$$

· Algoritmo del simplesso per flussi non capacitato

① Trova una partizione degli archi (T, L) che generi un flusso ammissibile

② Calcola il flusso di base $\bar{x}$ e il potenziale $\bar{\pi}$. Se sono soddisfatte le condizioni di Bellman, allora STOP ($\bar{x}$ è ottimo). Altrimenti:

③ Calcola l'arco entrante come
$(p,q) = \min \{(i,j) \in L : c_{ij}^{\pi} < 0\}$, con min in ordine ~~crescente~~ lessicografico.
L'arco (p,q) forma un ciclo φ con gli archi di T. Fissiamo il verso di φ concorde a (p,q) e indichiamo con φ^- l'insieme di archi del ciclo discordi col verso fissato

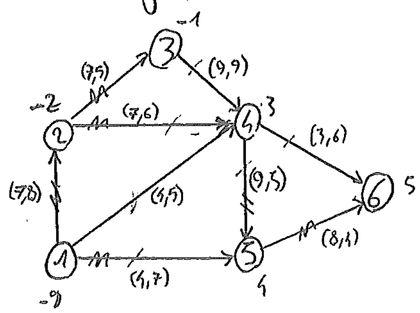
④ Se $\varphi^- = \{\emptyset\}$ allora STOP (il flusso di costo min ha valore $-\infty$ e il potenziale è vuoto).
Altrimenti:

⑤ Calcola $\theta = \min \{\bar{x}_{ij} : (i,j) \in \varphi^-\}$ e trova l'arco uscente $(r,s) = \min \{(i,j) \in \varphi^- : \bar{x}_{ij} = \theta\}$, con min in ordine lessicografico.

⑥ Aggiorna la partizione $T = T / \{(r,s) \cup (p,q)\}$, $L = L / \{(p,q) \cup (r,s)\}$ e ritorna al passo ②

6

Esercizi sui grafi



			Archi di T_x	Archi U	Amm	Deg	Ottimo
1°	x	(0, 5, 4, 0, 2, 1, 0, 5, 0)	(1,5) (2,4) (3,4) (4,5) (4,6)	(1,4)	SI	SI	SI
2°	π	(0, 7, 14, 14, 4, 12)	(1,2) (1,5) (2,3) (2,4) (5,6) *	(4,5)	NO	NO	NO

Facciamo il sistema

$$x = (x_{12}, \cancel{x_{13}}, x_{14}, x_{15}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{45}, x_{46}, x_{56})$$
$$\quad 0 \quad 5 \quad 4 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 5 \quad 0$$

$$\begin{cases} -x_{12} - x_{15} - x_{14} = -9 \\ x_{12} - x_{24} - x_{23} = -2 \\ -x_{34} + x_{23} = -1 \\ x_{34} + x_{24} + x_{14} - x_{45} - x_{46} = 3 \\ x_{15} + x_{45} - x_{56} = 4 \\ x_{46} + x_{56} = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cancel{0} + x_{15} \cancel{x_{14}} = \cancel{-9} + 5 + 4 \\ +x_{24} = +2 \\ +x_{34} = +1 \\ \\ \cancel{4} + x_{45} = \cancel{4}\,0 \\ x_{46} = 5 \end{cases}$$

2°

$$\begin{cases} -\pi_1 + \pi_2 = 7 \\ -\pi_2 + \pi_4 = 7 \\ -\pi_2 + \pi_3 = 7 \\ \cancel{\qquad = 9} \\ -\pi_5 + \pi_6 = 8 \\ -\pi_1 + \pi_5 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \pi_2 = 7 \\ \pi_4 = 14 \\ \pi_3 = 14 \\ \pi_5 = \cancel{10}\ 4 \\ \pi_6 = \cancel{21}\ 12 \end{array}$$

Vediamo se è ammissibile con i costi ridotti: $c^{\pi}_{is} = c_{is} + \pi_i + \pi_s$

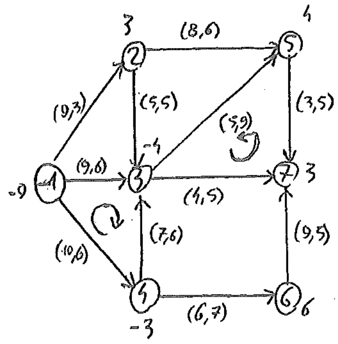
$\in L$ (Amm ≥ 0)
$$\begin{cases} c^{\pi}_{14} = 4 + 0 - 14 = -10 \quad \text{Non ammissibile} \\ c^{\pi}_{34} = 9 + 14 - 14 = 9 \\ c^{\pi}_{46} = 3 + 14 - 12 = 5 \end{cases}$$

Non Degenere

$\in U$ (Amm ≤ 0) $\{ c^{\pi}_{45} = 9 + 14 - 4 = 19$ Non Ammissibile

Applichiamo il Simplesso sulla seguente rete

	1° iterazione	2° iterazione
Archi di T	(1,2) (1,3) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7)	(1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7)
Archi di U	(1,4)	∅
x	3, 9, 6, 0, 0, 7, 0, 3, 6, 3, 0	3, 3, 3, 0, 0, 7, 0, 0, 6, 3, 0
costo di x	188	164
π	0, 9, 9, 2, 14, 8, 17	0, 9, 9, 10, 14, 16, 17
K (arco entrante)	(1,4)	(3,7)
θ^+ (Archi concordi)	6	5
θ^- (Archi discordi)	3	3
h (Arco uscente)	(4,3)	(5,7)



$$x = \begin{pmatrix} x_{12}, x_{13}, x_{14} \\ x_{23}, x_{25} \\ x_{35}, x_{37} \\ x_{43}, x_{46} \\ x_{57} \\ x_{67} \end{pmatrix}$$

- Calcolo di x

$$\cancel{\begin{cases} -x_{12} - x_{13} - x_{14} = -9 \\ x_{12} + x_{23} - x_{25} = 3 \\ x_{13} + x_{23} + x_{43} - x_{34} - x_{35} = -4 \\ x_{14} - x_{43} - x_{46} = -3 \\ x_{25} + x_{35} - x_{57} = 4 \\ x_{46} - x_{67} = 6 \end{cases}} = \cancel{\begin{cases} -x_{57} = -3 \\ x_{35} = 1 \\ x_{13} + x_{43} - 6 = 0 \\ x_{12} = 3 \\ x_{43} = -3 \\ x_{46} = 6 \end{cases}} = \cancel{\begin{cases} x_{12} = 3 \\ x_{13} = 0 \\ x_{35} = 1 \\ x_{43} = -6 \\ x_{46} = 6 \\ x_{57} = -3 \end{cases}}$$

$\boxed{\text{Occhio ai segni!}}$!

$$\begin{cases} -x_{12} - x_{13} - x_{14} = -9 \\ -x_{23} + x_{12} - x_{25} = 3 \\ +x_{14} - x_{43} - x_{46} = -3 \\ x_{13} + x_{23} + x_{43} - x_{35} - x_{37} = -4 \\ x_{25} - x_{57} + x_{35} = 4 \\ x_{46} - x_{67} = 6 \\ x_{37} + x_{67} + x_{57} = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} -x_{12} - x_{13} = -9 + 6 \\ x_{12} = 3 \\ \cancel{x} - x_{43} - x_{46} = -3 - 6 \\ x_{13} + x_{43} - x_{35} = -4 \\ -x_{57} + x_{35} = 4 \\ x_{46} = 6 \\ x_{57} = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{12} = 3 \\ x_{13} = 0 \\ \\ x_{43} = 3 \\ x_{35} = 7 \\ x_{46} = 6 \\ x_{57} = 3 \end{cases}$$

- Costo di x

E' uguale alla $\sum_{i,s} c_{is} \cdot x_{is}$, nel nostro caso

$$c_x = 9 \cdot 3 + 10 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 7 \cdot 3 + 6 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 188$$

- Potenziale

$$\begin{cases} -\pi_1 + \pi_2 = 9 \\ -\pi_1 + \pi_3 = 9 \\ -\pi_3 + \pi_5 = 5 \\ -\pi_4 + \pi_3 = 7 \\ -\pi_4 + \pi_6 = 6 \\ -\pi_5 + \pi_7 = 3 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{array}{l} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = 9 \\ \pi_3 = 9 \\ \pi_4 = 2 \\ \pi_6 = 8 \\ \pi_5 = 14 \\ \pi_7 = 17 \end{array}$$

U

$c_{14}^{\pi} = 10 + 0 - 2 = 8 > 0$ Non amm

$c_{23}^{\pi} = 5 + 9 - 9 = 5 > 0$ ×

$c_{25}^{\pi} = 8 + 9 - 14 = 2 > 0$ ×

$c_{37}^{\pi} = 4 + 9 - 17 = -2 < 0$ Non amm

$c_{67}^{\pi} = 9 + 8 - 17 = 0$ Degenere

- K (arco entrante)

$K = \min\{(1,4), (3,7)\} = (1,4)$ Il verso di $\mathcal{C}$ sarà discorde perché $(1,4) \in U$

- $\mathcal{C}^+$, $\mathcal{C}^-$

$\mathcal{C}^+ = (1,3)$, $\mathcal{C}^- = (1,4), (3,3)$

- θ^+, θ^- e θ

$\theta^+ = \min\{u_{is} - \bar{x}_{is} : (i,s) \in C^+\} = \min\{6-0\} = 6$

$\theta^- = \min\{\bar{x}_{is} : (i,s) \in C^-\} = \min\{6, 3\} = 3$

$\theta = \min\{\theta^+, \theta^-\} = 3$

- Arco uscente h

$h = \min(\{(i,s) \in C^+ : u_{is} - \bar{x}_{is} = \theta\} \cup \{(i,s) \in C^- : \bar{x}_{is} = \theta\}) = (4,3)$

- Aggiorniamo T, U, L

$T = T / \{k \cup h\} \qquad L = L \cup \{h\} \qquad , U = U \setminus \{k\}$

$T = (1,2)(1,3)(3,5)\cancel{(4,5)}(4,6)(5,7) / (1,4)\cancel{(4,5)} = (1,2)(1,3)(1,4)(3,5)(4,6)(5,7)$

$U = \cancel{(1,4)} / \cancel{(1,4)} = \emptyset$

2° passo:

- Calcolo di x e costo di x

$$\begin{cases} x_{12} + x_{13} + x_{14} = +9 \\ x_{12} = 3 \\ x_{13} - x_{35} = -4 \\ x_{14} - x_{46} = -3 \\ x_{35} - x_{57} = 4 \\ x_{46} = 6 \\ x_{57} = 3 \end{cases} = \begin{cases} x_{12} = 3 \\ x_{13} = 3 \\ x_{14} = 3 \\ x_{35} = 7 \\ x_{57} = 3 \\ x_{46} = 6 \end{cases}$$

$c_x = 9 \cdot 3 + 9 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 7 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 3 \cdot 3 =$
$= 164$

- Potenziale π, costi ridotti e arco entrante

$\pi = (0, 9, 9, 10, 14, 16, 17)$

$\pi_1 + \pi_2 = 9$
$-\pi_1 + \pi_3 = 9$
$\pi_1 + \pi_4 = 10$
$-\pi_3 + \pi_5 = 5$
$\pi_4 + \pi_6 = 6$
$-\pi_5 + \pi_7 = 3$

$c_{23}^{\pi} = 5 + 9 - 9 = 5 > 0$
$c_{25}^{\pi} = 8 + 9 - 14 = 3 > 0$
$c_{37}^{\pi} = 4 + 9 - 17 = -4 < 0 \rightarrow K = (3,7)$
$c_{43}^{\pi} = 7 + 10 - 9 = 8 > 0$
$c_{67}^{\pi} = 9 + 16 - 17 = 8 > 0$

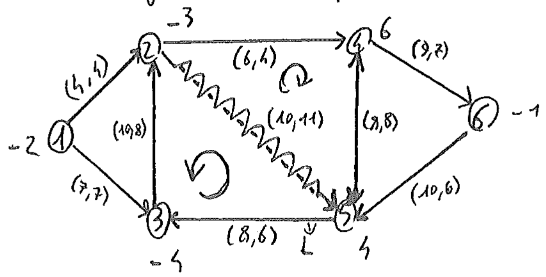
- θ^+, θ^- e θ

$\theta^+ = \min\{5-0\} = 5$

$\theta^- = \min\{7, 3\} = 3$

$\theta = \min\{5, 3\} = 3$ $\rightarrow$ $h = (3, 7)$

2] Data la seguente rete, applica il simplesso.



$T = (1,2)(3,2)(5,3)(5,4)(6,5)$

$U = (2,5)$

Calcolo $\bar{x}$ e π

$$\begin{cases} -x_{12} = -2 \\ x_{12} + x_{32} - \cancel{11} = -3 + 11 - 2 \\ -x_{32} + x_{53} = -4 \\ + x_{53} + 11 + \cancel{x_{54}} + \cancel{x_{65}} = 4 + 6 - 1 - 11 = +2 \\ x_{54} = 6 \\ -x_{65} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} & L & L & U & & & L & & & \\ & x_{12} & x_{13} & x_{24} & x_{25} & x_{32} & \cancel{x_{35}} & x_{46} & x_{53} & x_{54} & x_{65} \end{array}$$

$x = (2 \quad 0 \quad 0 \quad 11 \quad 6 \quad 6 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \quad 1)$

$\pi = (0, 4, -6, -6, -14, -24)$

$-\pi_1 + \pi_2 = 4$

$-\pi_3 + \pi_2 = 10$

$-\pi_5 + \pi_3 = 8$

$-\pi_5 + \pi_4 = 8$

$-\pi_6 + \pi_5 = 10$

$$\in L \begin{cases} c_{13}^{\pi} = 4 + 6 > 0 \\ c_{24}^{\pi} = \cancel{6} + 4 + \cancel{6} > 0 \\ c_{46}^{\pi} = 9 + \cancel{6} + 24 > 0 \end{cases}$$

$\in U \; \{ c_{25}^{\pi} = 10 + 4 + 14 > 0 \quad V$

Arco entrante: $(2,5)$ → Poiché $\in U$, il ciclo sarà discorde

$\varphi^+ = \{\emptyset\}$

$\varphi^- = \{(3,2), (5,3), (2,5)\}$

θ^+ = Siccome φ^+ è vuoto, allora $= +\infty$ → $\theta = \min\{2, +\infty\} = 2$

$\theta^- = \min\{6, 11, 2\} = 2$

Arco uscente: $(5,3)$

Aggiorno la tripartizione: $T = (1,2)(3,2)(2,5)(5,4)(6,5)$

$U = \emptyset$

2° iter

$\cancel{x_{12}} + \cancel{x_{32}} + x_{25} = +3 + 4 + 2$

$-x_{32} = -4$

$x_{25} - x_{54} + x_{65} = 4$

$-x_{65} = +1$

$x_{54} = 6$

$-\pi_2 + \pi_5 = 10$

$-\pi_5 + \pi_4 = 8$

$-\pi_6 + \pi_5 = 10$

$$\begin{array}{cccccccccc} & x_{12} & x_{13} & x_{24} & x_{25} & x_{32} & x_{46} & x_{53} & x_{54} & x_{65} \\ \bar{x} = & 2 & 0 & 0 & 9 & 4 & 0 & 0 & 6 & 1 \end{array}$$

$\pi = (0, \cancel{4}, \cancel{-6}, \cancel{28}, \cancel{14}, 4)$

Arco entrante: $(2,4)$

$\varphi^+ = (2,4)$

$\varphi^- = (2,5)(5,4)$

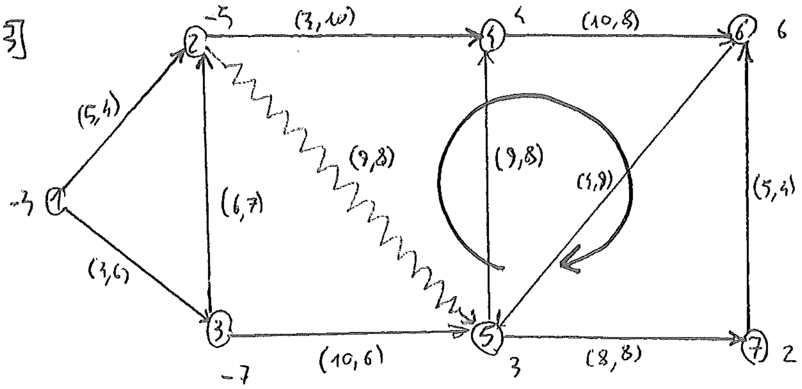
$\theta^+ = 4 - 0 = 4$

$\theta^- = \{\min\{9, 6\} = 6$

$\theta = 4$

Arco uscente: $(2,4)$

3]



$T = (1,2)(2,4)(3,2)(4,6)(5,7)(7,6)$

$U = (2,5)$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & L & & U & & L & & L & & L & \\ x_{12} & x_{13} & x_{24} & x_{25} & x_{32} & x_{35} & x_{46} & x_{54} & x_{57} & x_{65} & x_{76} \\ 3 & 0 & 7 & 8 & 7 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 3 \end{array}$$

$$\begin{cases} -x_{12} = -3 \\ x_{12} - 8 - x_{24} + x_{32} = -5 \\ -x_{32} = -7 \\ x_{24} - x_{46} = 4 \\ x_{46} + x_{76} = 6 \\ x_{57} - x_{76} = 2 \\ 8 - x_{57} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{3} - \cancel{8} + \cancel{7} + x_{24} = -\cancel{8} - \cancel{3} + \cancel{8} + 7 \\ \cancel{7} - x_{46} = 4 - 7 \Rightarrow x_{46} = 3 \\ x_{76} = 6 - 3 \end{cases}$$

$\pi = (0, 5, -1, 8, 5, 18, 13)$

$+\pi_2 = 5$

$-\pi_3 + 5 = 6$

$-5 + \pi_4 = 3$

$-8 + \pi_6 = 10$

$-\pi_7 + 18 = 5$

$-\pi_5 + 13 = 8$

$\in U \, \{ c^{\pi}_{25} = 9 + 5 - 5$ 0

$$\in L \begin{cases} c^{\pi}_{13} = 3 + 1 \quad ✓ \\ c^{\pi}_{35} = 10 + 1 + 5 \quad ✓ \\ c^{\pi}_{54} = 9 + 5 - 8 \quad ✓ \\ c^{\pi}_{65} = 4 + 18 - 5 \quad ✓ \end{cases}$$

Arco entrante: $(2,5) \rightarrow \in U$, ciclo discorde!

Occhio, devo ciclare solo con l'albero di copertura T!

$\varphi^+ = (2,4)\ (4,6)$

$\varphi^- = (2,5)\ (5,7)\ (7,6)$

$\theta^+ = \min \begin{Bmatrix} 10 - 7 \\ 8 - 3 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (2,4) \\ (4,6) \end{matrix} = 3$

$\theta^- = \min \{8, 5, 3\} = 3 \ (\in (7,6))$

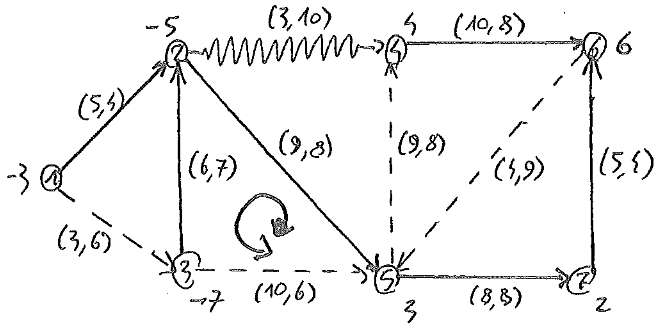
→ Arco uscente: min $(2,4)(7,6)$ (in ord. lessicografico)

→ arco uscente = $(2,4)$

2° iter:

$T = (1,2)(2,5)(3,2)(4,6)(5,7)(7,6)$

$U = (2,4)$



$$\begin{array}{ccccccccccc} & L & U & & & L & & L & & L & \\ x_{12} & x_{13} & x_{24} & x_{25} & x_{32} & x_{35} & x_{46} & x_{54} & x_{57} & x_{65} & x_{76} \\ 3 & 0 & 10 & 5 & 7 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} -x_{12} = -3 \\ x_{12} - 10 - x_{25} + x_{32} = -5 \\ -x_{32} = -7 \\ 10 - x_{46} = 4 \\ x_{25} - x_{57} = 3 \\ x_{\cancel{57}} - x_{76} = 2 \\ x_{46} + x_{76} = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} +x_{25} = -5 + \cancel{10} \cancel{-3} \cancel{-7} \\ -x_{57} = 3 - 5 \\ \end{cases}$$

$\pi = (0, 5, -1, 17, 14, 27, 22)$

$-\pi_3 + \cancel{\pi_5} = 6$

$-5 + \pi_5 = 9 + 5$

$-14 + \pi_7 = 8$

$-22 + \pi_6 = 5$

$-\pi_4 + \pi_7 = 10$

$\in U \left\{ c_{24}^{\pi} = 3 + 5 - 17 \ \checkmark \right.$

$$\in L \begin{cases} c_{13}^{\pi} = 3 + 0 + 1 \ \checkmark \\ c_{35}^{\pi} = 10 - 1 - 14 \\ c_{54}^{\pi} = 9 + 14 - 17 \ \checkmark \\ c_{65}^{\pi} = 4 + 27 - 14 \ \checkmark \end{cases}$$

Arco entrante: $(3,5)$, $\in L$

$\varphi^+ = (3,5)$ $\qquad \theta^+ = 6$

$\varphi^- = (3,2)(2,5)$ $\qquad \theta^- = \min\{7, 5\} = 5$ $\rightarrow \theta = 5 \rightarrow$ Arco uscente $= (2,5)$

[Cammini Minimi]

Il problema dei cammini minimi di radice r consiste nel trovare, se ∃, un cammino orientato di costo min dal nodo r a qualsiasi altro nodo del grafo

cammini min e Dijkstra

[Cammino]

Un cammino dal nodo n_1 al nodo n_{p+1} è un insieme di archi $a_1, \dots, a_p$ tale che $i = 1, \dots, p$ si ha che $a_i = (n_i, n_{i+1})$ oppure $a_i = (n_{i+1}, n_i)$ e inoltre che gli archi siano tutti ≠ tra loro.

Se tutti gli archi coinvolti vanno dal nodo n_i al modo n_{i+1} il cammino si dice orientato

Se $n_1 = n_{p+1}$ allora il cammino si dice ciclo

[Algoritmo di Dijkstra]

Valido con costi non negativi, è l'algoritmo per eccellenza per trovare i cammini min.

Definiamo 2 vettori, $\pi \in \mathbb{R}^n$ (che rappresenta i costi min dal nodo radice al nodo i) e il vettore $p \in \mathbb{R}^n$ (dei predecessori), inizializzati con:

$$\pi = \begin{cases} 0 & i = r \\ +\infty & i \neq r \end{cases}, \quad p = \begin{cases} 0 & i = r \\ -1 & i \neq r \end{cases}$$

Si pone al 1° passo l'insieme S=N, dove S è lo insieme dei nodi le cui stelle uscenti contengono gli archi che potenzialmente possono violare le condizioni di Bellman. Ad ogni iterazione:

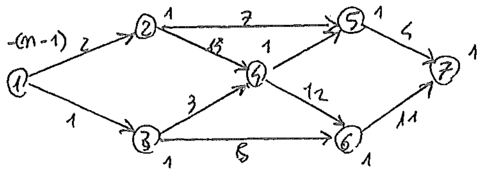
1) Si estrae da $i \in S$ il nodo di etichetta π min
2) Si determina la stella uscente $ES(i)$, con $ES(i) = \{$ Insieme dei nodi raggiungibili da $i \}$
3) Se $\pi_j > \pi_i + c_{ij}$ al variare di $j \in ES(i)$

Vero: $\pi_j = \pi_i + c_{ij}$, $p_j = i$, togli i da S

Falso: π, p rimangono

[Risoluzione come flusso di costo minimo]

Il problema dei cammini può essere visto come un caso particolare di flusso di costo min, dove la radice ha bilancio $-(n-1)$ e tutti gli altri nodi bilancio 1.



Formalmente si può rappresentare col seguente sistema:

$$\begin{cases} \min cx \\ Ex = b \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ con } b_i = \begin{cases} -(n-1) & \text{se } i = r \\ 1 & \text{se } i \neq r \end{cases}$$

[Note sul simplesso per cammini]

In questo caso il simplesso fa delle operazioni di troppo, perché il flusso di base $\bar{x}$ è sempre non degenere ∀ albero di copertura orientato (ciò rende non necessarie le regole anticiclo di Bland!). Inoltre:

1) Non ci sono capacità superiori: $u = +\infty$
2) Le basi ammissibili corrispondono agli alberi orientati di radice r
3) Se (p,q) è l'arco entrante in base, allora l'arco uscente è l'unico arco che entra nel nodo q, lo chiamavamo (i,q), e siamo sicuri che sia l'unico poiché T_r è un albero, perché tra gli archi discordi al verso del ciclo formato, (i,q) è quello di flusso min e quindi non è necessario calcolare il flusso di base per determinare l'arco uscente

?! ≠ dall'arc. entrante

[Simplesso per cammini min]

Risulta essere semplificato:

1° step: Trovare un albero di copertura orientato T_r

2° step: Calcolare il potenziale π e i costi ridotti c^{π}_{ij}

3° step: Si sceglie il più negativo dei costi ridotti (non c'è rischio di ciclare), e l'arco che lo genera è l'arco entrante (i,j)

4° step: l'arco uscente è l'arco $(k,j) \in T_r$ (Se T_r è albero di copertura allora l'arco uscente è unico)

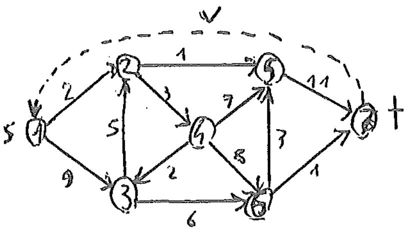
4) L'uscita di un arco dalla base sconnette l'insieme N dei nodi generando una partizione dei nodi N_1, N_2 con $r \in N_1$, dove N_1 e N_2 sono le 2 componenti connesse. I potenziali si aggiornano solo sui nodi $\in N_2$, i costi ridotti si aggiornano solo sugli archi che hanno un estremo in N_1 e l'altro in N_2

[Flusso Massimo]

Si tratta di spedire da un nodo origine s ad un nodo destinazione t il massimo flusso possibile compatibile con le capacità superiori definite sugli archi

Se non ci fosse alcun cammino orientato da s a t l'unico flusso ammissibile sarebbe quello nullo.

[Modellizzazione del problema]



Per modellizzare il problema ricorriamo ad un artificio: aggiungiamo un arco fittizio (t,s) e consideriamo v unità di flusso transitanti su quest'arco. Il flusso massimo allora sarà espresso da $\boxed{\max v}$

In questo modo i bilanci ai nodi risultano essere:

$$b_i = \begin{cases} -v & \text{se } i=s \\ 0 & \text{se } i\neq s,t \\ v & \text{se } i=t \end{cases}$$

Fatte tali considerazioni, il modello del flusso massimo è:

$$\begin{cases} \max v \\ Ex=b \\ 0\leq x\leq u \end{cases}$$

Per def. possiamo scrivere v come

$$v = \sum_{(s,j)\in A} x_{sj} = \sum_{(i,t)\in A} x_{it}$$

[Osservazione!]

La risoluzione di un problema di flusso massimo può essere usata per determinare un flusso ammissibile in un problema di costo min!

[Come???]

Aggiungiamo un nodo $\bar{s}$ collegato con i nodi sorgenti s (cioè $b_s<0$) con archi $(\bar{s},s)$ di capacità $-b_s$ e un nodo $\bar{t}$ collegato con i pozzi i (cioè $b_i>0$) con archi $(i,\bar{t})$ di capacità b_i, e risolviamo il problema di flusso max da $\bar{s}$ a $\bar{t}$

Se il flusso massimo satura (coincide con le capacità superiori) tutti gli archi aggiunti, allora tale flusso è ammissibile per il problema di flusso di costo min, altrimenti $\nexists$ flussi amm. per il problema del flusso di costo min.

[Simplesso per flusso massimo]

Il problema del flusso massimo può essere risolto mediante l'algoritmo del simplesso per flussi, trasformandolo in un problema di flusso di costo minimo.

Tale trasformazione si fa aggiungendo un arco fittizio (t,s) di costo -1 e capacità $+\infty$, assegnando costo nullo a tutti gli altri archi e ponendo bilanci nulli a tutti i nodi

$$\begin{cases} \min -v \\ \left(E \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{matrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = 0 \\ 0\leq x\leq u \\ v\geq 0 \end{cases}$$

arco fittizio (t,s)

[Taglio]

Un taglio (N_s, N_t) è una partizione dell'insieme N dei nodi in 2 sottoinsiemi tali che: $N = N_s \cup N_t$ e $N_s \cap N_t = \emptyset$

Si dice "ammissibile" se N_s contiene almeno l'origine s e N_T almeno la destinazione t

[Archi diretti e inversi del taglio]

$A^+ = \{(i,j) \in A : i \in N_s,\ j \in N_T\}$ archi diretti

$A^- = \{(i,j) \in A : i \in N_T,\ j \in N_s\}$ archi inversi

[Capacità del taglio]

La capacità del taglio (N_s, N_T) è definita come la somma delle capacità degli archi diretti del taglio

$$u(N_s, N_T) = \sum_{(i,j) \in A^+} u_{ij}$$

[Teorema sul rapporto fra flusso e taglio]

Se x è un flusso ammissibile e (N_s, N_T) è un taglio ammissibile, allora

$$\forall v = x(N_s, N_T) \le u(N_s, N_T)$$

→ Bottle Neck

[Flusso sul taglio]

Dato un flusso $\bar{x}$, definiamo il valore del flusso sul taglio (N_s, N_T) come la differenza tra la somma dei flussi sugli archi diretti e la somma dei flussi sugli archi inversi

$$x(N_s, N_T) = \sum_{(i,j) \in A^+} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in A^-} x_{ij}$$

[Th Max flow - Min Cut]

Se esistono $\bar{x}$ flusso ammissibile e un taglio ammissibile (N_s, N_T) tali che

$$\bar{x}(N_s, N_T) = u(N_s, N_T)$$

allora $\bar{x}$ è un flusso di valore massimo e (N_s, N_T) è un taglio di capacità minima

↓

Il flusso massimo su una rete eguaglia il taglio di portata minima

[Portata (Bottle Neck?)]

~~La portata del taglio (N_s, N_T) è definita come la somma dei ... degli archi diretti del taglio~~

~~$u(N_s, N_T) = \sum_{(i,j) \in A^+} u_{ij}$~~

[Dimostrazione]

Si basa su ciò che abbiamo dimostrato precedentemente, cioè che il ~~flusso~~ problema del massimo flusso su reti e il min taglio della rete sono duali

Algoritmo di Ford-Fulkerson (Segue)

[Algoritmo di FFEK]

L'algoritmo cerca ad ogni iterazione un C.A rispetto al flusso corrente. Se ∃ un C.A, allora il flusso viene aggiornato spedendo su tale cammino il massimo flusso possibile pari alla min capacità residua degli archi che formano il cammino.

Se ∄ cammini aumentanti, allora il flusso corrente è di val. massimo e l'algoritmo trova anche un taglio di capacità minima.

Cerca di aggiornare il vettore flusso in modo che continui a essere ammissibile ma di valore →

[Passi dell'algoritmo]

Inizializzazione: $x = 0$ (che è un flusso ammissibile)

1) Cerca un CA G_a, se ∄ termina

2) Aggiornamento flusso secondo la regola:

$$x_{ij}^{(1)} = \begin{cases} x_{ij} + \delta & \text{se } (i,j) \in G_a \\ x_{ij} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

[Grafo residuo]

Dato $\bar{x}$ flusso ammissibile, il grafo residuo (relativo a $\bar{x}$) è un grafo $\boxed{G(x) = (N, A(x))}$, con gli stessi nodi del grafo G, mentre gli archi e le loro capacità r_{ij} (capacità residue) sono così definite:

$$(i,j) \in A,\ x_{ij} < u_{ij} \longrightarrow (i,j) \in A(x),\ r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$$

$$(i,j) \in A,\ x_{ij} > 0 \longrightarrow (j,i) \in A(x),\ r_{ij} = x_{ij}$$

NB: Se un arco è saturo non appare nel grafo residuo

[Cammino Aumentante]

Dato $\bar{x}$ flusso ammissibile, un CA rispetto a $\bar{x}$ è un cammino orientato da s verso t nel grafo residuo $G(x)$, aventi capacità residue strettamente positive

[Portata del C.A]

Dato un CA, (G_a), si dice portata δ:

$$\delta = \min_{(i,j) \in G_a} r_{ij}$$

$$V = \sum \delta$$

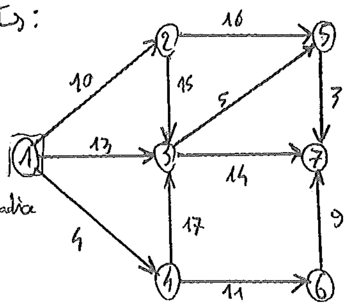
[Procedura di EK]

Per la ricerca di un CA, funziona con la regola FIFO

- Albero dei cammini minimi: Algoritmo di Dijkstra

Ad ogni passo visitiamo un nodo (al primo passo sarà la radice) e creiamo un insieme Q che contenga le stelle uscente del nodo visitato.
Per visitare un nodo, scegliamo quello di costo minore e lo estraiamo da Q, e aggiorniamo Q aggiungendo gli altri nodi raggiungibili da quello scelto.
Si itera il processo fino allo svuotamento di Q. Considerati n nodi, l'algoritmo termina al più in n passi.
Sulla colonna p inseriamo i predecessori, su π il costo (minimo). Se i nodi non sono raggiungibili, allora $\pi = +\infty$ e $p = -1$

Es:



	Iter 1		Iter 2		Iter 3		Iter 4		Iter 5		Iter 6		Iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
Nodo Visitato	1		4		2		3		6		5		7	
Nodo 2	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1
Nodo 3	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1	13	1
Nodo 4	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
Nodo 5	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	26	2	18	3	18	3	18	3	18	3
Nodo 6	$+\infty$	-1	15	4	15	4	15	4	15	4	15	4	15	4
Nodo 7	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	$+\infty$	-1	27	3	24	6	21	5	21	5
Insieme Q	2,3,4		2,3,6		3,5,6		5,6,7		5,7		7		$\emptyset$	

• Flusso massimo: Algoritmo di Ford Fulkerson con procedura di Edmonds-Karp per il CA

Dato un grafo $G=(N,A)$ per trovare il flusso massimo si procede così:

① Inizializza il flusso $x_{ij}=0 \ \forall (i,j)\in A$

② Costruisci il grafo residuo $G(x)$, dove $G(x)=(N,A(x))$, grafo con gli stessi nodi di G, ma con archi e relative capacità r_{ij} (capacità residue) definiti come segue:

- $(i,j)\in A,\ x_{ij}<u_{ij} \longrightarrow (i,j)\in A(x),\ r_{ij}=u_{ij}-x_{ij}$
- $(i,j)\in A,\ x_{ij}>0 \longrightarrow (j,i)\in A(x),\ r_{ij}=x_{ij}$

③ Si cerca se esiste un cammino aumentante (usando la procedura di Edmonds-Karp):

a) Si considera $A(x)$. Inizializziamo l'insieme $Q=\boxed{s}$, dove s è il nodo sorgente, e il vettore dei predecessori $p=(p_1,\dots,p_n)$: $p_i=\begin{cases}0 \text{ se } i=s\\ -1 \text{ altrimenti}\end{cases}$

b) Se $Q=\emptyset$ allora STOP (p fornisce un taglio di capacità minima)
Altrimenti estrai il primo elemento i di Q

c) Se $(i,t)\in A(x)$, con t il nodo da raggiungere, allora $p_t=i$, e STOP (p fornisce un CA)

d) Nell'arco residuo analizza in ordine lessicografico gli archi uscenti dal nodo i.
$\forall$ arco $(i,j)\in A(x)$: $p_j=-1$, poni $p_j=i$ e aggiungi il nodo j in fondo a Q. Ritorna al passo b)

④ Se esiste un cammino aumentante C, allora calcola $\delta=\min\{r_{ij}:(i,j)\in C\}$, e spedisci δ unità di flusso lungo il cammino C, cioè $\forall$ arco $(i,j)\in A$ poni

$$\bar{x}_{ij}=\begin{cases}x_{ij}+\delta & \text{se } (i,j)\in C\\ x_{ij}-\delta & \text{se } (j,i)\in C\\ x_{ij} & \text{altrimenti}\end{cases}$$

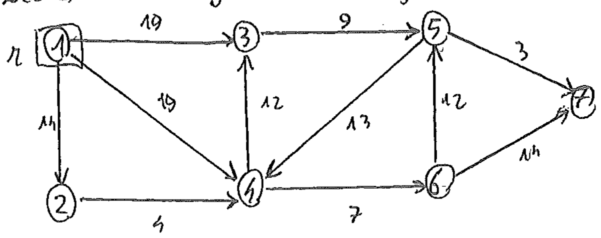
, e ritorna al passo ②

Altrimenti STOP, poiché $\bar{x}$ è un flusso massimo e $(N_S;N_T)$ è un taglio di capacità minima, dove:

$N_S=\{i\in N: \exists$ cammino ~~aumentante~~ orientato da s a i in $G(x)\}$

$N_T=\{N/N_S\}$

- Esercizi sull' Algoritmo di Dijkstra



π = distanza (+∞ se non è raggiunto)

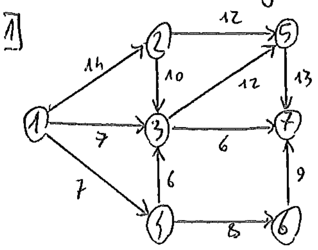
p = predecessore (0 se non è raggiunto)

Q = Stella Uscente del nodo visitato

	Iter 1		Iter 2		Iter 3		Iter 4		Iter 5		Iter 6		Iter 7	
	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p	π	p
Nodo Vis	1		2		4		3		6		5		7	
2	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1	14	1
3	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1	19	1
4	19	1	18	2	18	2	18	2	18	2	18	2	18	2
5	+∞	0	+∞	0	+∞	0	28	3	28	3	28	3	28	3
6	+∞	0	+∞	0	25	4	25	4	25	4	25	4	25	4
7	+∞	0	+∞	0	+∞	0	+∞	0	39	6	31	5	31	5
Q	2, 3, 4		3, 4		3, 6		6, 5		5, 7		7		∅	

- Esercizi sull'algoritmo di Ford-Fulkerson (con procedura Edmonds Karp)

1



Cammino Aumentante	δ	x	v
1 − 3 − 7	6	0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0	6
1 − 2 − 5 − 7	12	12, 6, 0, 0, 12, 0, 6, 0, 0, 12, 0	18
1 − 3 − 5 − 7	1	12, 7, 0, 0, 12, 1, 6, 0, 0, 13, 0	19
1 − 4 − 6 − 7	7	12, 7, 7, 0, 12, 1, 6, 0, 7, 13, 7	26

Taglio di capacità minima $N_s = \{1,2,3,5\}$ $N_T = \{4,6,7\}$

NB: x è il vettore composto dai δ oppure se δ non tocca gli archi, si mette 0

$v = \sum \delta$

$x = (x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{25}, x_{35}, x_{37}, x_{43}, x_{46}, x_{57}, x_{67})$

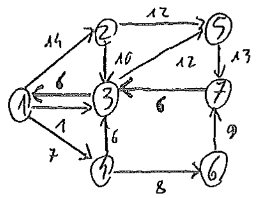
1° iter

$Q = 1$ $p = (0,-1,-1,-1,-1,-1,-1)$

$Q = 2,3,4$ $p = (0,1,1,1,-1,-1,-1)$

$Q = 3,4,5$ $p = (0,1,1,1,2,-1,-1)$

$Q = 4,5,7$ $p = (0,1,1,1,2,-1,3)$



Ci fermiamo perché abbiamo raggiunto il 7

CA = 1 − 3 − 7 $v = 6$

Per il CA si procede a ritroso dal nodo 7 al nodo 1, dunque: $\delta = \min\{7,6\} = 6$

2° iter

CA = 1 − 2 − 5 − 7 $\delta = \min\{14,12,13\} = 12$ $v = 6+12 = 18$

$Q = 1$ $p = (0,-1,-1,-1,-1,-1,-1)$

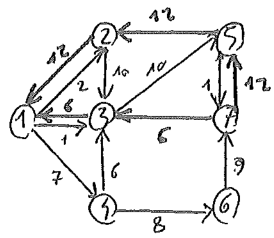
$Q = 2,3,4$ $p = (0,1,1,1,-1,-1,-1)$

$Q = 3,4,5$ $p = (0,1,1,1,2,-1,-1)$

$Q = 4,5$ $p = (0,1,1,1,2,-1,-1)$

$Q = 5,6$ $p = (0,1,1,1,2,4,-1)$

$Q = 6,7$ $p = (0,1,1,1,2,4,5)$



3° iter

CA = 1 − 3 − 5 − 7 $\delta = \min\{1,10,1\} = 1$ $v = 6+12+1 = 19$

$Q = 1$ $p = (0,-1,-1,-1,-1,-1,-1)$

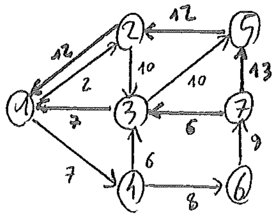
$Q = 2,3,4$ $p = (0,1,1,1,-1,-1,-1)$

$Q = 3,4$ $p = (0,1,1,1,-1,-1,-1)$

$Q = 4,5$ $p = (0,1,1,1,3,-1,-1)$

$Q = 5,6$ $p = (0,1,1,1,3,4,-1)$

$Q = 6,7$ $p = (0,1,1,1,3,4,5)$



5° iter

$Q = 1 \quad p = (0, -1, -1, -1, -1, -1, -1)$

$Q = 2, 4 \quad p = (0, 1, -1, 1, -1, -1, -1)$

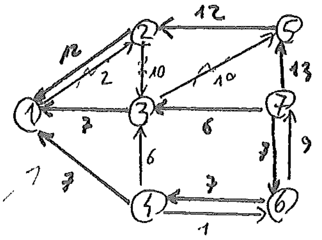
$Q = 4, 3 \quad p = (0, 1, 2, 1, -1, -1, -1)$

$Q = 3, 6 \quad p = (0, 1, 2, 1, -1, 4, -1)$

$Q = 6, 5 \quad p = (0, 1, 2, 1, 3, 4, -1)$

$Q = 5, 7 \quad p = (0, 1, 2, 1, 3, 4, 6)$

$CA = 1 - 4 - 6 - 7 \qquad \delta = \min\{7, 8, 9\} = 7 \qquad V = 19 + 7 = 26$



iter // Questo ci darà il taglio N_S

$Q = 1 \quad p = (0, -1, -1, -1, -1, -1)$

$Q = 2 \quad p = (0, 1, -1, -1, -1, -1)$

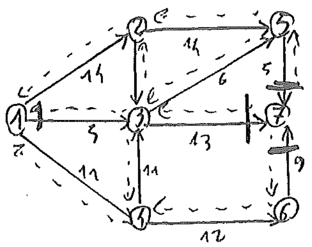
$Q = 3 \quad p = (0, 1, 2, -1, -1, -1)$

$Q = 5 \quad p = (0, 1, 2, -1, 3, -1)$

$N_S = \{1, 2, 3, 5\}$

$N_T = N / N_S = \{4, 6, 7\}$

2) FFEK



$N_S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

C.A	δ	x											v
		0	5	0	0	0	0	5	0	0	0	0	5
1-3-7	5	8	5		8			13					13
1-2-3-7	8	13	5			5					5		18
1-2-5-7	5	13	5	9	8	5	0	13	0	9	5	9	27
1-4-6-7	9												

$N_T = \{7\}$ // → Occhio al taglio strano!

PLI

[PLI]

Dato un problema di Programmazione lineare, definiamo del tipo "intero", meglio noto come PLI, quando nel modello matematico è espresso un vincolo di interezza relativo alla soluzione x.

Dati $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$ distinguiamo:

1) Problema di PL
$$\begin{cases} \max cx \\ Ax \leq b \end{cases}$$

2) Problema di PLI
$$\left.\begin{cases} \max cx \\ Ax \leq b \\ * \text{vincolo di interezza} \end{cases}\right\} \Omega$$

* Tale vincolo può essere:

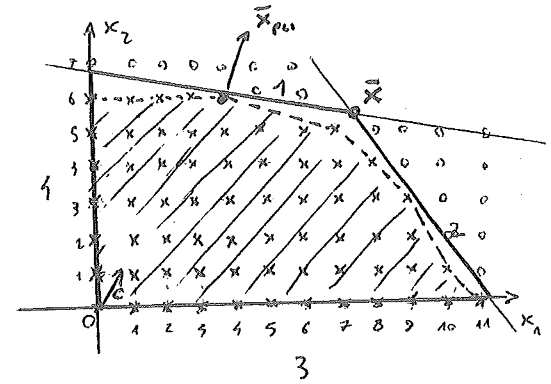
1) $x \in \mathbb{Z}^n$
2) $x_i \in \{0,1\}$ // Ottimizzaz. Combinatoria

[Composizione e proprietà della regione amm. Ω]

Per i problemi di PLI la regione ammissibile Ω è data dall'intersez. del poliedro P e dell'insieme degli interi $\mathbb{Z}^n$

$\Omega = P \cap \mathbb{Z}^n$ // Ciò crea una "reg. amm. a punti"!

L'insieme Ω risulta essere limitato se P è limitato, in caso contrario non possiamo dire nulla su Ω



Consideriamo ora l'involucro convesso di Ω (tratteggiato in azzurro in figura e delimitato dagli assi), cioè l'involucro convesso delle sol. ammissibili

$$\text{conv}\,\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists x_1, \dots, x_p \in \Omega,\ \lambda_1, \dots, \lambda_p \geq 0 : x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i,\ \sum \lambda_i = 1\}$$

Poiché per def. l'involucro convesso è il più piccolo insieme convesso contenente i pt dati (quindi $\Omega \subseteq \text{conv}\,\Omega$ e per la precisione $\Omega = \text{conv}\,\Omega$), e $\text{conv}\,\Omega \subseteq P$, allora vale la seguente catena di disuguaglianze:

$$\max_{x \in \Omega} cx \leq \max_{x \in \text{conv}\,\Omega} cx \leq \max_{x \in P} cx$$

Questo perché la regione si restringe e il valore della f. o tende a decrescere

Per le considerazioni fatte su Ω e $\text{conv}\,\Omega$, risulta

$$\max_{x \in \Omega} cx = \max_{x \in \text{conv}\,\Omega} cx \leq \max_{x \in P} cx$$

Per risolvere il problema va calcolato $\text{conv}\,\Omega$ e possiamo applicare i metodi standard (simplesso)

(Metodi calcolo $\text{conv}\,\Omega$ a pg successiva)

[Relazione fra PL e PLI]

Dato un problema di PLI a variabili razionali, del tipo (PLI), definiamo come suo rilassamento continuo il problema di PL ad esso associato, cioè con la stessa funzione obiettivo e lo stesso poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, ma senza il vincolo di interezza

$$\begin{cases} \max cx \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

$$(P) \begin{cases} \max cx \\ Ax \leq b \end{cases}$$

[Considerazione sui val. ottimi di PL e PLI]

Al rilassamento del problema troviamo una sol. $\bar{x}$, che risulta non essere amm. per Ω. Se la arrotondiamo per eccesso (per i problemi di min) o per difetto per i problemi di massimo otteniamo non la sol. ottima di Ω, ma una valutaz. inferiore. La sol. del rilassamento invece ci dà una val. superiore, dunque

$V_i(PLI)$ — $V(PLI)$ (ottimo) — $V_s(PLI)$ $= V(P)$ per il max

→ per il min e la val. inf $V_i(P)$ → per il problema di min, e la valutaz. superiore per il problema di massimo

Piani di Taglio

[Caratterizzazione di Ω]

Per capire come è fatto Ω, usiamo la tecnica delle DV (disuguaglianze valide) dove si arriva ad una caratterizzazione di Ω tramite approssimazioni successive con poliedri contenuti uno nell'altro a partire da P.
Una sottoclasse fondamentale di DV è quella dei piani di taglio

[Piani di Taglio]

La tecnica dei "piani di taglio" ci permette di ridurre il gap fra $V_i(PLI)$ e $V_S(PLI)$, abbassando ~~quest~~.
Come? Si individuano dei semipiani che riducono P ad avvicinarsi a conv Ω, e successivamente con i metodi della PL si ricalcola una nuova $V_S(PLI)$, che sarà più "intelligente"

[Cos'è un piano di taglio?]

È definito mediante 2 parametri: γ e γ_0. Un semipiano del tipo: $\boxed{\gamma x \leq \gamma_0}$ si dice "piano di taglio" se verifica

$$\begin{cases} \gamma x \leq \gamma_0 \ \forall x \in \Omega \\ \gamma \bar{x} > \gamma_0 \end{cases}$$

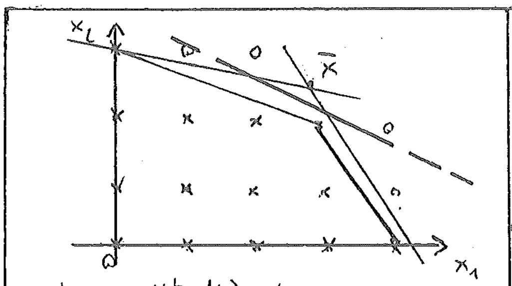
Questa si dice "disequazione valida" con $\bar{x}$ sol. ottima del rilassamento continuo del problema (PLI)

Dunque è un semipiano tale da contenere tutti i punti di Ω e non contenere $\bar{x}$

Se aggiungiamo la diseq. del piano di taglio al poliedro,

$$\begin{cases} \max cx \\ Ax \leq b \\ \gamma x \leq \gamma_0 \end{cases}$$

allora la regione ammissibile si riduce, continuando a contenere conv Ω. Dunque si riduce il gap fra $V(PLI)$ e $V_S(P)$, poiché la f. o tende a decrescere (dato che è un problema di max)



(Es di piano di taglio) → Linea nera

[Modo di calcolo generico]

Un modo per calcolare un piano di taglio è il seguente:
Dato un vincolo, es $5x_1 + 10x_2 \leq 33$, esso è equivalente a $x_1 + 2x_2 \leq \frac{33}{5} \simeq 6.6$. Poiché le variabili sono intere, la loro somma sarà al più 6. Dunque è lecito sostituire il vincolo con $x_1 + 2x_2 \leq 6$ → Piano di taglio

[Piani di Taglio di Gomory]

Un insieme classico di piani di taglio è quello dei piani di taglio di Gomory. Supponiamo di avere un problema del tipo

$$\begin{cases} \max cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

con: $\bar{x}$ sol. ottima del rilassamento continuo
B base ottima del rilassamento

Poniamo:

$A = (A_B, A_N)$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = A_B^{-1} \cdot A_N$, e $\tilde{b} = \bar{x}_B$

Allora il piano di taglio è dato da:

$$\boxed{\sum_{s \in N} \{\tilde{a}_{rs}\} x_s \geq \{\tilde{b}_r\}}$$

, dove r corrisponde all'indice di una delle componenti frazionarie di $\bar{x}$. Se ce n'è più di una, allora sarà possibile effettuare più tagli

[Parte Intera e Frazionaria]

Parte intera: $\lfloor a \rfloor$ è il più grande intero minore o uguale al num. dato

Es: $a = \frac{5}{4}$ $\lfloor a \rfloor = \frac{4}{4} = 1$

$a = -\frac{1}{10}$ $\lfloor a \rfloor = -1$

Parte frazionaria: $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$

Es: $a = \frac{5}{4}$ $\{a\} = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$

$a = -\frac{1}{19}$ $\{a\} = -\frac{1}{19} - (-1) = \frac{18}{19}$

$\gamma x \leq \gamma_0$ è una disuguaglianza valida
Se lo è per Ω, → lo è anche per conv(Ω)
È una DV se $\gamma x \leq \gamma_0 \ \forall x \in \Omega$

[Branch & Bound]

Branch & Bound

B&B è una tecnica per la risoluzione dei problemi di ottimizzazione combinatoria (problemi con spazio soluzione finito), e si basa sulla scomposizione del problema originale in sottoproblemi più semplici da risolvere, riducendo il gap fra $V_S(P)$ e $V_i(P)$

È un algoritmo di "enumerazione implicita" perché de facto "prova" tutte le soluzioni possibili fino a trovare quella corretta, o ottima, scartandone alcune dimostrando a priori la loro non ottimalità (anche perché scorrere tutto l'albero di enumerazione totale senza tali accorgimenti dal punto di vista computazionale ha una complessità esponenziale)

Per una buona riuscita di tale algoritmo è necessaria una stima iniziale buona di v_i e V_S

[Regole di potatura] MAX

1) $\boxed{V_S(P_{is}) \le V_i(P)}$ → Si può effettuare una visita implicita del sottoalbero P_{is} (potarlo a priori)

Dim:

Se la stima superiore del valore del sottoproblema $V_S(P_{is})$ è inferiore alla stima inferiore $V_i(P)$, allora:

$$v(P_{is}) \le V_S(P_{is}) \le V_i(P) \le V(P) \le V_S(P)$$

Da ciò risulta che $v(P_{is})$ è una soluzione peggiore di quella che avremmo scegliendo $V_i(P)$ come approssimazione della sol. del problema. Possiamo tagliare il sottoalbero poiché scendendo non facciamo altro che ridurre la regione ammissibile, facendo decrescere la f.o, quindi non troveremo la sol ottima

2) Se $\boxed{V_S(P_{is}) > V_i(P)}$ (quindi $V_S(P_{is})$ genera una sol. ammissibile) aggiorniamo $V_i(P)$ con $V_S(P_{is})$ ($V_i(P)=V_S(P_{is})$) poiché rappresenta una nuova stima più accurata. Inoltre tagliamo il sottoalbero poiché ~~rappresenta~~ ~~...~~ si verifica la 1° regola → max → KnapSack

3) Regola di taglio di vuotezza (∅)

Se un nodo P_{is} ci risulta non ammissibile allora possiamo tagliarne tutto il sottoalbero

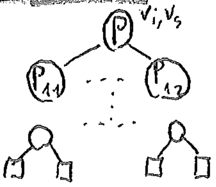
[Albero di enum. totale]

Dato il problema (P) e Ω la sua regione ammissibile, suddividiamo (P) in K sottoproblemi $(P_1) \dots (P_K)$ e Ω in $\Omega_1, \dots, \Omega_K$, con Ω_i regione amm. di (P_i)

Iterando tale processo $\forall (P_i)$ si generano gli altri rami (sottoalberi) del cosiddetto albero di enumerazione totale, dove (P) è la radice e le foglie corrispondono a quei sottoproblemi aventi la regione ammissibile vuota o costituita da un solo elemento (la soluzione)

Note: Per problemi come il TSP e lo zaino, poiché si "istanzia" una variabile (o una soluzione) con valore "0" o "1", l'albero avrà 2^n foglie con n dimensione di x ($x \in \mathbb{Z}^n$), cioè 2^n soluzioni.

(Ogni ramo si può indicare con P_{is}, dove i rappresenta il livello, e $s \in \{1, \dots, 2^i\}$ rappresenta a quale dei nodi figli è connesso il padre



→ NO

Ad ognuno dei rami possiamo applicare il metodo di stima della V_S ($V_S(P_{is})$). Sicuramente $V_S(P) \le V_S(P_{is})$ in quanto su ogni P_{is} il dominio si è ristretto e quindi la f.o tende a scendere

MIN

Note sulle regole di potatura:

1) Quelle elencate sono valide se si deve massimizzare (max cx), se si deve minimizzare:
   - Si taglia se $V_i(P_{is}) \ge V_S(P)$, se la sol non è ammissibile (taglio ∅)
   - ? NO Se si trova una nuova approssimazione della sol. ottima, cioè se $V_i(P_{is})$ genera una sol ammissibile, si sostituisce a $V_S(P)$ e si taglia il sottoalbero

Se $V_i(P_{is})$

↓

min → TSP

• Metodo del Branch & Bound

Consideriamo un problema di PLI

$$\begin{cases} \max\ cx \\ Ax \le b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$ in cui la regione Ω (regione ammissibile) sia limitata

Allora ne costruiamo l'albero di enumerazione totale:

[Metodo Naif]
Si calcola la funzione obiettivo in tutte le soluzioni ammissibili e si trova l'ottimo confrontando i valori ottenuti

Ha per radice il problema P

a) Facendo una partizione di Ω in 2 o più sottoinsiemi $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ si ottengono i nodi al primo livello, che corrispondono ai sottoproblemi di P aventi come regioni ammissibili gli insiemi $\Omega_1, \dots, \Omega_n$

b) Il resto dell'albero viene generato allo stesso modo, fino ad arrivare alle foglie che corrispondono a sottoproblemi aventi la regione ammissibile vuota o costituita da un solo elemento

Poiché la tecnica dell'albero di enumerazione totale è troppo complessa, si usa quella del Branch & Bound

Poniamo:

$V(P)$ = Val. ottimo di P

$V_i(P)$ = Stima inferiore del valore ottimo di P : $V_i(P) \le V(P)$

$V_s(P)$ = Stima superiore del valore ottimo di P : $V_s \ge V(P)$

$V_i(P) \le V(P) \le V_s(P)$

$P_{i,s}$ = s-esimo problema a livello i dell'albero di enumerazione totale

Per poter applicare il B&B, vanno applicate all'albero le "regole di potatura": Sia $\tilde{x}$ una soluzione ammissibile e $V_i(P) = c\tilde{x}$. Allora

① Se la regione ammissibile di $P_{i,s}$ è vuota, allora in $P_{i,s}$ $\nexists$ soluzioni ammissibili migliori di $\tilde{x}$ e quindi si pota il nodo $P_{i,s}$ e il suo sottoalbero

② Se $V_s(P_{i,s}) \le V_i(P)$ allora si pota il nodo $P_{i,s}$

③ Se $V_s(P_{i,s}) > V_i(P)$ e l'ottimo $\bar{x}$ del rilassamento di $P_{i,s}$ è ammissibile per P allora si chiude il nodo $P_{i,s}$ dopo aver aggiornato la soluzione ammissibile con $\bar{x}$

In quale ordine si esaminano i nodi dell'albero?

a) In Ampiezza

b) In profondità

c) In qualità

α) In Ampiezza

Prima i nodi del livello più alto, poi quelli di livello successivo...

β) In Profondità

Se un nodo è aperto, il nodo successivo è il primo dei suoi figli; Se un nodo è chiuso, si ritorna indietro verso il nodo radice fino a quando si trova un nodo che ha un figlio non ancora esaminato. Con questa scelta si cerca di rendere minimo il numero dei nodi aperti ancora da esaminare

γ) In Qualità

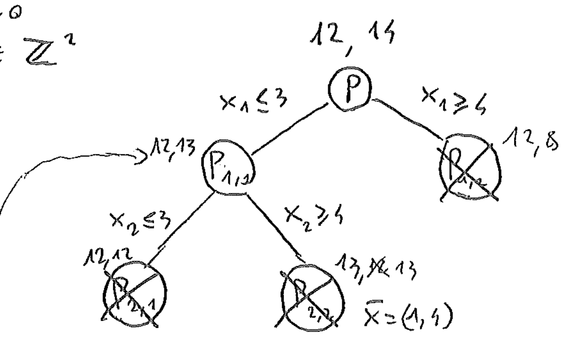
Tra i nodi aperti, viene scelto il più promettente, quello col massimo valore di $V_S(P_{i,s})$

Esempio:

$$\begin{cases} \max \ x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ 8x_1 + 2x_2 \leq 35 \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases} \qquad \bar{x} = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) \qquad V_S(P) = \frac{7}{2} + 3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14$$

$$\tilde{x} = (3,3) \qquad V_i(P) = 3 + 3 \cdot 3 = 12$$

NB: $V_S(P)$ prendiamo la parte intera!!!



· Esploriamo l'albero istanziando la variabile x_1 perché ha un valore frazionario nella soluzione ottima del rilassamento continuo. Distinguiamo 2 casi: $x_1 \leq 3$ e $x_1 \geq 4$

· Ad ogni nodo $P_{i,s}$ indichiamo i valori $V_i(P)$ e $V_S(P)$

Consideriamo $P_{1,1}$: Sostituiamo a x_1 il valore 3 e calcoliamo x_2 nel problema rilassato; poi prendiamo l'ottimo fra i 2 trovati e otteniamo il nuovo $\bar{x}$

$\bar{x} = (3, 18/5) \qquad V = 13,8$

$\hookrightarrow V_S(P_{1,1}) = \lfloor 13,8 \rfloor = 13$

$P_{1,2}$: Facciamo lo stesso di $P_{1,1}$, che avrà $\bar{x} = (4, \frac{3}{2})$ e $V_S(P_{1,2}) = 8 < 12$, quindi lo chiudiamo

· Ora istanziamo la variabile x_2 della nuova soluzione $\bar{x} = (3, \frac{18}{5})$, e poiché $3 < \frac{18}{5} < 4$, allora consideriamo $x_2 \leq 3$ e $x_2 \geq 4$

Ripetiamo il procedimento precedente con $P_{2,1}$ e $P_{2,2}$

$P_{2,1}$: $\bar{x} = (3,3) \qquad V_S(P_{2,1}) = 12 = V_i(P)$, quindi lo scartiamo

$P_{2,2}$: $\bar{x} = (1,4) \qquad V_S(P_{2,2}) = 13 > 12 = V_i(P)$,

Inoltre $\bar{x}$ è ammissibile, dunque il nuovo ottimo è $\bar{x} = (1,4)$, e chiudiamo $P_{2,2}$ ponendo però $V_i(P) = 13$

Tutti i nodi dell'albero sono chiusi, quindi la soluzione ottima è $\bar{x} = (1,4)$

- Esempi sulla PLI (Piani di taglio di Gomory)

1. Dato il problema (P), determinarne un piano di taglio di Gomory

$$(P)\begin{cases} \min 7x_1+x_2 \\ x_1-3x_2 \geq -1 \\ 3x_1+2x_2 \geq 4 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

R: • Si risolve il suo rilassamento continuo ~~relativo all'unica base possibile, $B=\{1,2\}$~~

$$\begin{cases} \min 7x_1+x_2 \\ x_1-3x_2=-1 \\ 3x_1+2x_2=4 \\ x\geq 0 \end{cases} \qquad \bar{x}=A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -2+12 \\ 7 \end{pmatrix} = \left(\frac{10}{11}, \frac{7}{11}\right)$$

• Ora si aggiungono le variabili di scarto x_3 e x_4 se è un problema di massimo, $-x_3$ e $-x_4$ se è di minimo

$$\begin{cases} \min 7x_1+x_2 \\ x_1-3x_2-x_3=-1 \\ 3x_1+2x_2-x_4=4 \\ x\geq 0 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

• Ora poniamo $\tilde{b}=\bar{x}$ e $\tilde{A}=A_B^{-1}A_N$, con $A=(A_B, A_N)$

$\tilde{b}=\left(\frac{10}{11}, \frac{7}{11}\right)$

$$A=(A_B,A_N)=\left(\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \qquad \tilde{A}=-\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

• Poiché $\tilde{b}$ ha entrambe le componenti non intere, $\exists$ 2 piani di taglio

$i=1$

$$\left\{-\frac{2}{11}\right\}x_3 + \left\{-\frac{3}{11}\right\}x_4 \geq \left\{\frac{10}{11}\right\} \to \left(-\frac{2}{11}-\left\lfloor-\frac{2}{11}\right\rfloor\right)x_3 + \left(-\frac{3}{11}-\left\lfloor-\frac{3}{11}\right\rfloor\right)x_4 \geq \frac{10}{11}$$

$$\left(-\frac{2}{11}+\frac{11}{11}\right)x_3 + \left(-\frac{3}{11}+\frac{11}{11}\right)x_4 \geq \frac{10}{11} \to \left(\frac{9}{11}x_3+\frac{8}{11}x_4\right)\geq\frac{10}{11} \cdot 11$$

$$9x_3+8x_4 \geq 10 \Rightarrow \begin{matrix} x_3=+1+x_1-3x_2 \\ x_4=-4+3x_1+2x_2 \end{matrix} \Rightarrow 9(x_1-3x_2+1)+8(3x_1+2x_2-4)\geq 10$$

$$\Rightarrow 9x_1-27x_2+9+24x_1+16x_2-32\geq 10 \to \frac{33}{11}x_1-\frac{11}{11}x_2\geq\frac{33}{11}$$

$$\boxed{3x_1-x_2\geq 3}$$

$i=2$

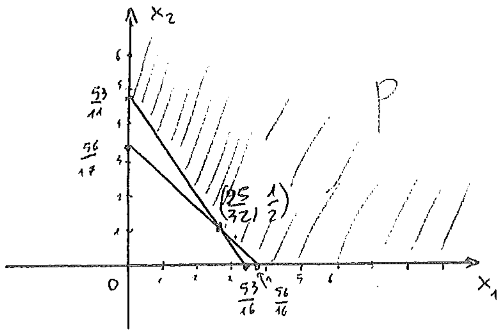
$$\left\{\frac{3}{11}\right\}x_3+\left\{-\frac{1}{11}\right\}x_4 \geq \frac{7}{11} \to 3x_3+10x_4\geq 7 \to \text{ecc...}$$

2]

$$\begin{cases} \min\ 13x_1 + 9x_2 \\ 16x_1 + 11x_2 \geq 53 \\ 16x_1 + 17x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

Disegnamo il poliedro!

Poiché $\bar{x}$ è l'intersezione fra i 2 ~~vincoli~~, $B=\{1,2\}$ $N=\{3,4\}$



$\begin{cases} x_1 = 0 & x_2 = \frac{53}{11} \\ x_2 = 0 & x_1 = \frac{53}{16} \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 0 & x_2 = \frac{56}{17} \\ x_2 = 0 & x_1 = \frac{56}{16} \end{cases}$

$\begin{cases} 16x_1 + 11x_2 = 53 \\ 16x_1 = 56 - 17x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} 56 - 17x_2 + 11x_2 = 53 \\ 16x_1 = 56 - 17x_2 \end{cases}$

$\begin{cases} +\cancel{6}x_2 = \frac{+3}{\cancel{6}} = \frac{1}{2} \\ \cancel{16}x_1 = 56 - \frac{17}{2} = \frac{112-17}{32} = \frac{95}{32} \end{cases}$

a) Calcolare la sol. ottima del rilassamento e la val. inferiore del val. ottimo

$\bar{x} = \left(\frac{95}{32}, \frac{1}{2}\right) \simeq (2{,}96; 0{,}5)$ $\qquad V_I(P) = 43$

b)

$\tilde{x} = (3,1)$ $\qquad V_S(P) = 48$

(Gli altri non sono ammissibili!)

$x = \cancel{(2,0)}$ $\quad x = \cancel{(2,1)}$

$x = \cancel{(3,0)}$ $\quad x = (3,1)$

c) Calcolare un taglio di Gomory

$$\begin{cases} \min\ 13x_1 + 9x_2 \\ 16x_1 + 11x_2 - x_3 = 53 \\ 16x_1 + 17x_2 - x_4 = 56 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 16 & 11 & -1 & 0 \\ 16 & 17 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 53 \\ 56 \end{pmatrix}$ $\quad \bar{b} = \left(\frac{95}{32}, \frac{1}{2}\right)$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 16 & 17 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{96} \begin{pmatrix} 17 & -11 \\ -16 & 16 \end{pmatrix} \cdot (+1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{96} & \frac{11}{96} \\ \frac{16}{96} & -\frac{16}{96} \end{pmatrix} =$

$= -\frac{1}{96} \begin{pmatrix} 17 & -11 \\ -16 & 16 \end{pmatrix}$

Piano di taglio:

$\left\{-\frac{17}{96}\right\} x_3 + \left\{\frac{11}{96}\right\} x_4 \geq \left\{\frac{95}{32}\right\} \rightarrow \frac{79}{\cancel{96}} x_3 + \frac{11}{\cancel{96}} x_4 \geq \frac{\cancel{285}}{\cancel{96}} 93$

$\begin{cases} x_3 = 16x_1 + 11x_2 - 53 \\ x_4 = 16x_1 + 17x_2 - 56 \end{cases}$

$79(16x_1 + 11x_2 - 53) + 11(16x_1 + 17x_2 - 56) - 93 \geq 0$

$1264x_1 + 176x_1 + 869x_2 + 187x_2 - 4187 - 93 - 616 \geq 0$

$\frac{1}{2}($ $1440x_1 + 1056x_2 \geq 4896$

$\frac{1}{2}($ $720x_1 + 528x_2 \geq 2448$

$\frac{1}{2}($ $360x_1 + 264x_2 \geq 1224$

$\frac{1}{2}($ $180x_1 + 132x_2 \geq 612$

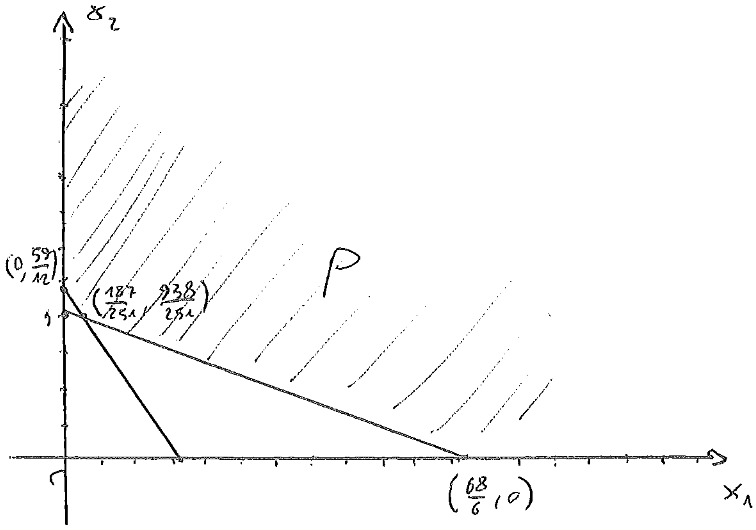
$\frac{1}{2}($ $90x_1 + 66x_2 \geq 306$

$\frac{1}{3}($ $45x_1 + 33x_2 \geq 153$

$\boxed{15x_1 + 11x_2 \geq 51}$ Torna

3) Caso particolare!

$$\begin{cases} \min\ 14x_1+5x_2 \\ 19x_1+12x_2 \geq 59 \\ 6x_1+17x_2 \geq 68 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$x_1=0 \quad x_2 = \frac{59}{12} \simeq 4.91$

$x_2=0 \quad x_1 = \frac{59}{19} \simeq 3.1$

$x_1=0 \quad x_2 = \frac{68}{17}$

$x_2=0 \quad x_1 = \frac{68}{6}$

$$A = \begin{pmatrix} 19 & 12 \\ 6 & 17 \end{pmatrix} \to A^{-1}b = \frac{1}{251}\begin{pmatrix} 17 & -12 \\ -6 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 59 \\ 68 \end{pmatrix} = x = \left(\frac{187}{251}, \frac{938}{251}\right)$$

Sostituendo nella f.o, il vertice ottimo è $\bar{x} = (0, \frac{59}{12})$ $\quad V_i(P) = 24.5 = 25$ (E' un problema di minimo, quindi si arrotonda per eccesso!)

· $V_S(P)$ e x ammissibile

$x_{amm} = (0, 5) \qquad V_S(P) = 25$

· Calcolare un taglio di Gomory!

~~[illegible]~~

Scriviamo il poliedro con le variabili di scarto x_3 e x_4, e sostituisco $\bar{x}$ nel poliedro. Da qui poi troveremo la soluzione di tale poliedro con 4 incognite, (x_1,x_2,x_3,x_4). Da qui cerchiamo la base ottima

$$\begin{cases} 19x_1 + 12x_2 - x_3 = 59 \\ 6x_1 + 17x_2 \qquad - x_4 = 68 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 59 - x_3 = 59 \\ 17 \cdot \frac{59}{12} - x_4 = 68 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{187}{12} \end{cases} \longrightarrow x = \left(0, \frac{59}{12}, 0, \frac{187}{12}\right)$$ La base ottima è $B=\{2,4\}$

Ora calcoliamo $\tilde{A}$

~~[illegible]~~

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 19 & 12 & -1 & 0 \\ 6 & 17 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A_B = A_{\{2,4\}} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 17 & -1 \end{pmatrix} \to A_B^{-1} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -17 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ \frac{17}{12} & -1 \end{pmatrix} \qquad A_N = \begin{pmatrix} 19 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

(Segue)

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ \frac{17}{12} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{251}{12} & -\frac{17}{12} \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 59 - 19x_1 - 12x_2$$

Studio su $\tilde{A}$ $\quad (0, \frac{59}{12})$

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \left(\begin{matrix} \frac{19}{12} \\ \\ \frac{251}{12} \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} -\frac{1}{12} \\ \\ -\frac{17}{12} \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \to \pi_2 \\ \\ \to \pi_1 \end{matrix} \end{array}$$

π_2:

$$\left\{\frac{19}{12}\right\} \cdot x_1 + \left\{-\frac{1}{12}\right\} x_3 \geq \left\{\frac{59}{12}\right\}$$

$$\frac{7}{12} x_1 + \frac{11}{12} x_3 \geq \frac{11}{12}$$

$$7x_1 + 11(-59 + 19x_1 + 12x_2) \geq 11$$

$$7x_1 - 649 + 209x_1 + 132x_2 - 11 \geq 0$$

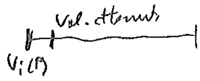
$$216x_1 + 132x_2 \geq 660$$

$$108x_1 + 66x_2 \geq 330$$

$$54x_1 + 33x_2 \geq 165$$

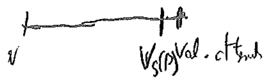
$$\boxed{18x_1 + 11x_2 \geq 55}$$

Note: Problema di min $\to V_i(P) =$ Val. arrotondato per eccesso!



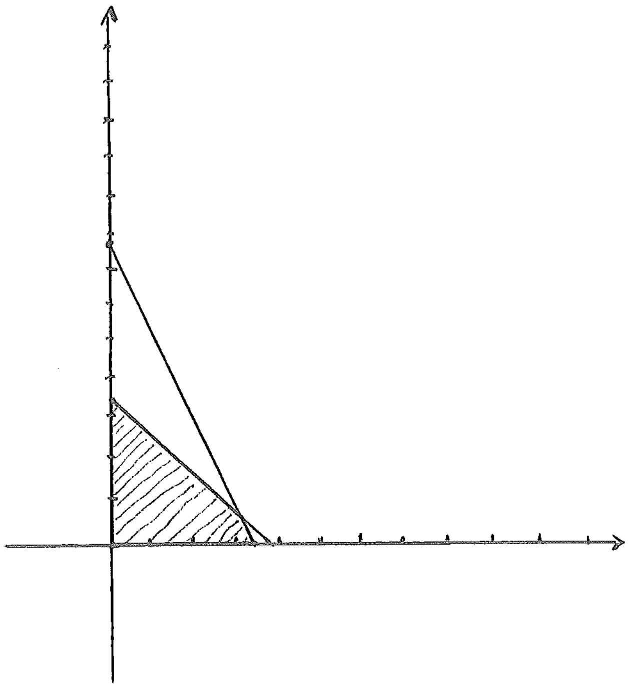
Es: $25.01 \to V_i(P) = 26$

Problema di max $\to V_s(P) =$ Val. arrotondato per difetto!



Es: $66.8 \to V_s(P) = 66$

6



$$\begin{cases} \max\ 8x_1+13x_2 \\ 14x_1+6x_2 \le 47 \\ 12x_1+14x_2 \le 47 \\ x_{1,2} \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

$x_1=0 \quad x_2=\frac{47}{6} \simeq 7.8$

$x_2=0 \quad x_1=\frac{47}{14} \simeq 3.35$

$x_1=0 \quad x_2=\frac{47}{14}$

$x_2=0 \quad x_1=\frac{47}{12} \simeq 3.9$

$\bar{x}=\left(\frac{94}{31}, \frac{47}{62}\right)$

- $V_S(P)$ e $\bar{x}$

$V_S(P)=43 \qquad \bar{x}=\left(0, \frac{47}{14}\right)$

- $V_I(P)$ e $\tilde{x}$

$V_I(P)=39 \qquad \tilde{x}=(0,3)$

- Gomory

$$\begin{cases} 14x_1+6x_2+x_3=47 \\ 12x_1+14x_2+x_4=47 \end{cases} \rightarrow \left(0, \frac{47}{14}\right) \rightarrow \quad x_3=\frac{188}{7} \quad x_4=0 \qquad \bar{x}=\left(0, \frac{47}{14}, \frac{188}{7}, 0\right) \quad B=\{2,3\}$$

$$A=\begin{pmatrix} 14 & 6 & 1 & 0 \\ 12 & 14 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_B=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 14 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_N=\begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}=A_B^{-1}\cdot A_N = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -14 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -12 & -1 \\ -124 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & \quad x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{1}{14} \\ \frac{62}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \rightarrow r_2 \\ \rightarrow r_3 \end{matrix}$$

r_2

$\left\{\frac{6}{7}\right\}x_1+\left\{\frac{1}{14}\right\}x_4 \geq \left\{\frac{47}{14}\right\}$

$\frac{12}{14}x_1+\frac{1}{14}x_4 \geq \frac{5}{14}$

$12x_1+x_4 \geq 5$

$\cancel{12x_1}+47-\cancel{12x_1}-14x_2 \geq 5$

$-14x_2 \geq -42$

$x_2 \leq 3$

Caricamento

[Knapsack Problem]

Dato un contenitore di volume P e n oggetti aventi ciascuno valore v_i e peso p_i, dobbiamo scegliere quali oggetti inserire nel contenitore in modo da massimizzare il valore totale degli oggetti caricati

Il suo modello è il seguente:

$$\begin{cases} \max vx \\ px \leq P \\ \text{cond.} (*) \end{cases}$$

(1) $x \in \mathbb{Z}^n$ // Caricamento

(2) $x_i \in \{0,1\}$ // binario

(In entrambi i casi i beni sono indivisibili, altrimenti risulterebbe essere un banale problema di PL)

Definiamo il rendimento r_i come il rapporto tra valore v_i e peso p_i → $\boxed{r_i = \frac{v_i}{p_i}}$

[Caricamento binario]

Il suo modello è (*), e il vincolo $x_i \in \{0,1\}$ sta ad indicare che nel nostro zaino possiamo inserire lo stesso bene una sola volta.

$$\begin{cases} \max vx \\ px \leq P \\ x_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

[Calcolo V_S per caricamento binario]

1) Ordiniamo i beni per rendimento decrescente, prendiamo integralmente ($x_i = 1$) i beni finché hanno peso inferiore alla (residua) portata residua.

2) Quando il peso è maggiore della portata P residua, ne prendiamo la massima quantità

$$\boxed{x_k = \frac{P_{res}}{p_k}} \qquad V_S(P) = \left\lfloor \frac{P_{res}}{p_k} \right\rfloor \cdot v_k + \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

È possibile fare ciò perché consideriamo il rilassamento continuo del problema, cambiando il vincolo $x_i \in \{0,1\}$ con $0 \leq x_i \leq 1 \in \mathbb{R}^n$ rendendolo un problema di PL.

[Caricamento di tipo non binario]

Il suo modello è (*), e il vincolo $x \in \mathbb{Z}^n$ sta ad indicare che nel nostro zaino possiamo inserire più volte lo stesso bene.

$$(*)\begin{cases} \max vx \\ px \leq P \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

[Calcolo V_S per il caricamento (1)]

1) Si considera il rilassamento del problema, cambiando il vincolo $x \in \mathbb{Z}^n$ con $x \in \mathbb{R}^n$.

2) Calcoliamo i rendimenti e prendiamo r_k, il massimo fra essi

3) Infine carichiamo il massimo possibile del bene di massimo rendimento k

$$x = \left(0, \dots, \frac{P}{p_k}, \dots, 0\right)$$

$$\boxed{V_S = \left\lfloor \frac{P}{p_k} \right\rfloor \cdot v_k}$$

Se V_S è ammissibile per (*) allora è l'OTTIMO

[Calcolo V_I per il caricamento (1)]

1) Consideriamo il problema (*), applicando un algoritmo greedy:

2) Calcoliamo i rendimenti di ogni bene, scegliamo quello di massimo rendimento e lo carichiamo il più possibile in quantità intera.

3) Se rimane spazio carichiamo il secondo bene di max rendimento, ripetendo il passo 2 finché possibile

$$\boxed{V_I = \sum_{l=1}^{n} x_l \cdot v_l}$$

[Calcolo V_I per caricamento binario]

1) Utilizziamo un algoritmo greedy sul problema non rilassato. Ordiniamo i beni per rendimenti decrescenti

2) Carichiamo quello di max rendimento integralmente finché lo spazio residuo è sufficiente a contenerli.

3) Se ~~lo~~ spazio residuo non è sufficiente, si controlla il bene successivo, finché non esauriscono i beni.

[Note sul rilassamento per il car. non binario] V_S

Se consideriamo il rilassamento del problema, notiamo:

$$\begin{cases} \max Vx \\ px \leq P \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

E' un semplice problema di PL, per il quale non conviene usare il simplesso.

Se proviamo a calcolarne il duale otteniamo il seguente modello

$$\begin{cases} \min yP \\ Y \begin{pmatrix} P \\ -I \end{pmatrix} = V \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

→ E' una matrice a blocchi, composti dal vettore dei pesi $p \in \mathbb{R}^n$ e da $-I$, $\in \mathbb{R}^{n \times m}$. Ciò si ottiene dal poliedro del primale

$$\begin{cases} px \leq P \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Da ciò otteniamo

$$\begin{cases} \min y_1 \cdot P \\ P_1 Y_1 - Y_2 = V_1 \\ P_2 Y_1 - Y_3 = V_2 \quad , K \in \{1, .., n+1\} \\ \\ P_K V_1 - Y_{K+1} = V_K \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

Tali variabili poiché ~~non compaiono nella f.o possiamo conside-~~ rarle di scarto, ottenendo

$$\begin{cases} \min Y_1 \cdot P \\ P_1 Y_1 \geq V_1 \\ P_2 Y_1 \geq V_2 \\ \vdots \\ P_K Y_1 \geq V_K \\ Y_1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \min y_1 P \\ Y_1 \geq \frac{V_1}{P_1} \\ \vdots \\ Y_1 \geq \frac{V_K}{P_K} \\ Y_1 \geq 0 \end{cases}$$

~~La risoluzione di~~ Questo problema ci fornisce il massimo rendimento

$Y = \left[\frac{V_a}{P_a}\right]$ E' soluz. del duale

Dunque dal primale otteniamo $x = (0, \dots \frac{P}{P_a}, \dots 0)$ che senz'altro è la sol. ottima poiché dal th di dualità forte risulta essere ammissibile sia nel primale che nel duale (ottima per il rilassamento!)

La V_S è costituita dalla risoluzione del duale ~~[illegible]~~ e m per il ~~[illegible]~~ peso P preso in parte intera.

$$V_S = \lfloor P \cdot Y \rfloor = \left[P \cdot \frac{V_K}{P_K}\right]$$

[Note sul rilassamento caricamento binario]

Per questo tipo di problema il rilassamento è il seguente:

$$\begin{cases} \max Vx \\ px \leq P \\ 0 \leq x_j \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \max Vx \\ \begin{pmatrix} P \\ -I \\ I \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

La matrice tecnologica è di dim $(2n+1) \times n$

Definiamo poi il vettore $R = \left(\frac{V_1}{P_1}, \dots, \frac{V_K}{P_K}, \dots\right)$ dei rendimenti ordinati in modo decrescente, e

1) $\frac{P}{P_K} = 1$ Il peso del bene è uguale alla portata del mezzo, quindi prendendo la max quantità del bene il mezzo si satura (ottimo)

2) $\frac{P}{P_K} < 1$ Il peso del bene è > del peso P, quindi prendiamo il bene in quota $\left(\frac{P}{P_K}\right)$ poiché si lavora fra $0 \leq x_i \leq 1$

3) $\frac{P}{P_K} > 1$ Il peso del bene è < del peso P, quindi carichiamo il max possibile del bene K (che per questo problema è 1) e cerchiamo di riempire lo spazio restante seguendo i successivi beni di massimo rendimento in ordine decrescente

NB: Se V_S è ammissibile, allora è ottima l'amm. per il problema a var. intere!

- Problemi di caricamento (Knapsack problems)

È un problema di PLI del seguente tipo:

$$\begin{cases} \max vx \\ px \leq C \\ \text{cond.} \end{cases}, \text{ dove cond.} = \begin{cases} ① \ x \in \mathbb{Z}^n \\ ② \ x_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

Risolvere tale tipologia di problemi vuol dire supporre di riempire un mezzo di trasporto di capacità massima C con dei beni, ognuno dei quali ha un valore v_i e un peso p_i.
Esistono 2 tipi di Knapsack problems

1) Caricamento a variabili intere

Consideriamo n tipi di oggetti, ognuno di valore v_s e peso p_s, e un contenitore di capacità C. Si tratta di scegliere la quantità di oggetti ∀ tipo in modo da massimizzare il valore totale (quindi $x \in \mathbb{Z}^n$)

Per risolverlo va trovata:

1) La soluzione ottima $\bar{x}$ e la stima superiore del valore ottimo v, cioè $V_S(P)$

- $\bar{x}$ = Consideriamone il rilassamento continuo, cioè eliminiamo i vincoli $x \in \mathbb{Z}^n$ e li sostituiamo con $x \geq 0$

  La soluzione $\bar{x}$ allora data da $\bar{x}_i = \begin{cases} \frac{C}{p_K} & \text{se } i = k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, dove:

  $K = \max\{i \in N : r_i \geq r_s \ \forall s \neq i\}$

  $r_i = \frac{v_i}{p_i}$ (rendimenti)

- $V_S(P) = C \cdot r_K = C \cdot \frac{v_K}{p_K}$

2) La soluzione ammissibile $\tilde{x}$ e la stima inferiore $V_i(P)$

- $\tilde{X}$ = ~~[illegible]~~ dalla dalle occorrenze di $V_i(P)$

- $V_i(P)$ = Usiamo un algoritmo greedy, diviso in 4 punti:
  ① Disporre gli oggetti in ordine decrescente di rendimento ($r_s = \frac{v_s}{p_s}$, $r \in \mathbb{R}^n$)
  ② Caricare il mezzo di capacità C con il max numero di rendimento ~~possibile~~ massimo
  ③ Se possibile caricare altri prodotti, scegliere quello di massimo rendimento
  ④ Ripeti il passo ③

  $V_i(P) = \sum_{s=1}^{n} v_s \cdot l_s$, con l_s = quante volte si è preso il bene di valore v_s

Allora v, il valore ottimo, sarà compreso fra $V_i(P) \leq v \leq V_S(P)$

2) Caricamento a variabili binarie

Dati n oggetti di valore v_s e peso p_s e un contenitore di capacità C, si tratta di scegliere quali oggetti inserire nel contenitore per massimizzare il valore totale.

Come precedentemente, va calcolato:

1) La soluzione ottima $\bar{x}$ e $V_S(P)$

- $\bar{x}$ = Poniamo le variabili in ordine decrescente di rendimento $\left(r_s = \frac{v_s}{p_s}\right)$ e si considera l'indice h tale che

$$\sum_{s=1}^{h} p_s \leq C \quad e \quad \sum_{s=1}^{h+1} p_s > C. \quad \text{Allora} \quad \bar{x}_i = \begin{cases} 1 & se\ i \leq h \\ \dfrac{C - \sum_{s=1}^{h} p_s}{p_{h+1}} & se\ i = h+1 \\ 0 & se\ i > h+1 \end{cases}$$

- $$V_S(P) = \sum_{i=1}^{h} v_i + (v_{h+1}) \left(\frac{C - \sum_{s=1}^{h} p_s}{p_{h+1}} \right)$$ (Si prende la parte intera)

2) La soluzione ammissibile $\tilde{x}$ e $V_I(P)$

- $\hat{x} = \bar{x}$ privata dell'elemento $i = h+1$

- $V_I(P)$ = Si effettua tramite l'applicazione del seguente algoritmo greedy
  ① Prendi il bene di max rendimento con quantità 1;
  ② Se rimane spazio disponibile prendi il successivo bene di massimo rendimento, se non è possibile caricarlo ripeti il passo ②
  ③ Se sono finiti i beni o non è più possibile caricarlo (spazio C pieno) interrompi l'algoritmo

$V_I(P) = \sum v_i$ presi con l'algoritmo greedy

• Esercizi Caricamento binario

1] Peso tot: 587

oggetti →	1	2	3	4	5	6	7
valore →	16	17	10	23	5	9	20
peso →	97	3	317	418	91	393	320
rendimento	0.165	5.6	0.03	0.055	0.054	0.02	0.06

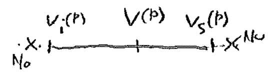
Ordine decrescente:

2 1 7 4 5 3 6

• Calcolo della sol. ottima del rilassamento e la $V_S(P)$

$\bar{X} = (1, 1, 0, \frac{167}{418}, 0, 0, 1)$ $\quad 587 - 3 - 97 - 320 = 167$

$V_S(P) = 17 + 16 + 20 + 23 \cdot \frac{167}{418} = 53 + 9.8 = 62$ (E' una $V_S(P)$!)



$V_i, V_s \in \mathbb{Z}$!

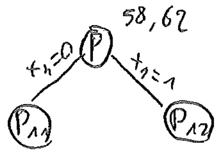
• Calcolo della sol. ammissibile e $V_i(P)$

Consideriamo la var. frazionaria: Posso prenderla intera? No! Quindi guardo nell'ordine decrescente quello che è a ~~[illegible]~~ rendimento max dopo la var. frazionaria e che allo stesso tempo stia per intero in x!!!

$x_{amm} = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$ $\quad 167 - 91 = 76$

$V_i(P) = 17 + 16 + 20 + 5 = 58$

• Usare il B&B istanziando a turno le var. frazionarie



2) Caricamento binario

$P = 274$

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Pesi	128	144	93	92	270	130	204
Valori	8	13	9	10	5	23	15

• Calcolo del valore ottimo del rilassamento e $V_i(P)$

Calcoliamo i rendimenti $r = (0{,}062 \;\; 0{,}09 \;\; 0{,}096 \;\; 0{,}1 \;\; 0{,}018 \;\; 0{,}17 \;\; 0{,}07)$

$\bar{x} = (0, 0, \frac{52}{93}, 1, 0, 1, 0)$ $\qquad P = 274 - 130 - 92 = 52$

$V_S(P) = 38$

• $V_i(P)$ e x_{amm}

$x_{amm} = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$

$V_i(P) = 33$

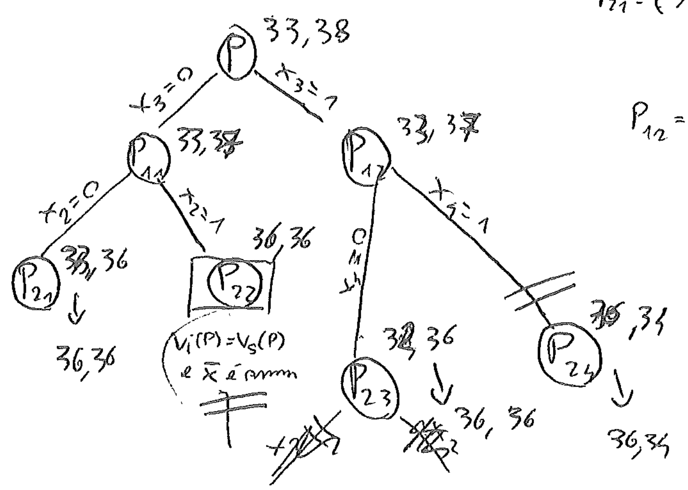
$(0, \frac{52}{144}, 0, 1, 0, 1, 0)$

$P_{12} = 51$

$\frac{52}{204}$

$\frac{52}{144}$

• B&B istanziando la var. frazionaria



$P_{22} = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$

$P_{21} = (0, 0, 0, 1, 0, 1, \frac{13}{51})$

$P_{12} = (0, 0, 1, \frac{91}{92}, 0, 1, 0)$

$P_{24} = (0, 0, 1, 1, 0, \frac{89}{130}, 0)$

$P_{23} = (0, \frac{12}{48}, 1, 0, 0, 1, 0)$

Poiché in P_{22} $V_i(P) = V_S(P)$, per la regola di taglio si aggiorna ???

Quindi aggiorna tutto il piano relativo automaticamente!

③

$P = 234$

Beni	1	2	3	4	5	6	7
Valori	13	9	10	5	23	15	11
Volumi	123	80	79	230	111	175	157

$r = 0{,}1 \quad 0{,}11 \quad 0{,}12 \quad 0{,}02 \quad 0{,}2 \quad 0{,}08 \quad 0{,}09$

$\quad\; 4° \quad 3° \quad 2° \quad 7° \quad 1° \quad 6° \quad 5°$

- $V_s(P)$ e $\bar{x}$

$\bar{x} = (0, \frac{44}{80}, 1, 0, 1, 0, 0) \qquad V_s(P) = 37$

$234 - 111 - 79 = 44$

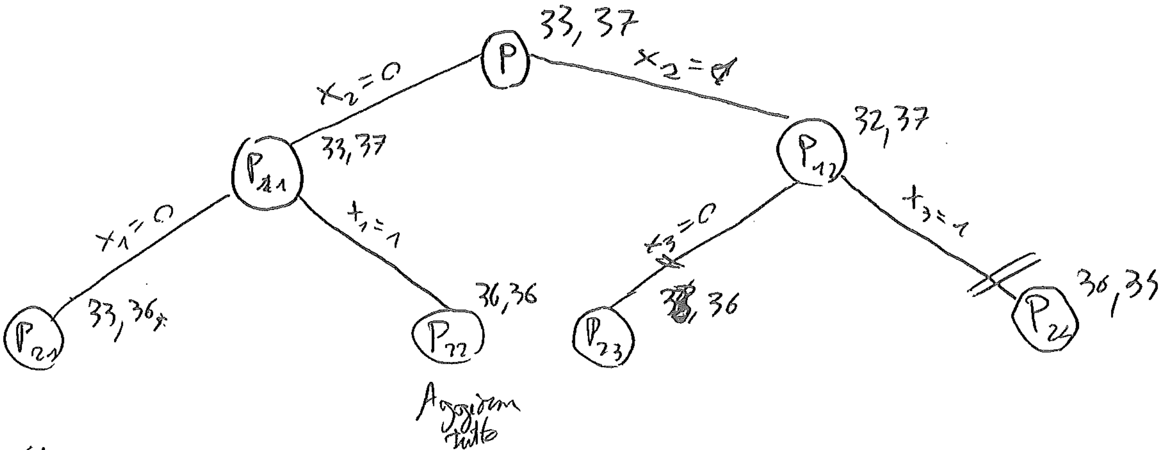
- $V_i(P)$ e x_{amm}

$x_{amm} = (0,0,1,0,1,0,0) \qquad V_i(P) = 33$

$P_{11} = (\frac{44}{123}, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$

$P_{12} = (0, 1, \frac{43}{79}, 0, 1, 0, 0)$

- B&B



$\bar{x}_{ott} = (1,0,0,0,1,0,0)$

$V_{ott} = 36$

$P_{21} = (0,0,1,0,1,0,\frac{44}{157})$

$P_{22} = (1,0,0,0,1,0,0)$

$P_{23} = (\frac{43}{123}, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$

$P_{24} = (0, 1, 1, 0, \frac{75}{111}, 0, 0)$

TSP

[TSP]

Si tratta di trovare il ciclo hamiltoniano di costo min

$$TSP \begin{cases} \text{Asimmetrico se } c_{ij} \neq c_{ji} \; \forall (i,j) \in A \\ \text{Simmetrico se } c_{ij} = c_{ji} \; \forall (i,j) \in A \end{cases}$$

[Ciclo Hamiltoniano]

Dato un grafo $G=(N,A)$ in cui sia definito un costo c_{ij} $\forall$ arco, definiamo come ciclo hamiltoniano un ciclo orientato che passa per tutti i nodi del grafo una ed una sola volta. Il costo del ciclo è dato dalla $\sum$ dei costi degli archi che lo compongono.

- Il modello di tale ciclo (G) è composto da n^2 variabili

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in G \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Nota: Ogni ciclo hamiltoniano corrisponde ad un assegnamento, ma non vale il contrario!

[TSP Asimmetrico]

Se il problema è asimmetrico, ciò equivale a dire che gli archi sono orientati, per cui l'ammissibilità di un dato x deve basarsi su tale osservazione:
"Ogni nodo deve avere un solo arco entrante e un solo arco uscente". Il suo modello completo è:

$$\begin{cases} \min cx \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall \; j=1,\dots,n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall \; i=1,\dots,n \\ \sum_{\substack{i \in S \\ j \notin S}} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S, \text{ con } \emptyset \neq S \subseteq N \quad \text{// Vincolo di connessione} \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases}$$

[Calcolo V_i del TSP-a]

Dalle considerazioni fatte precedentemente, otteniamo un rilassamento del modello precedente, che di fatto corrisponde ad un problema di assegnamento.

$$\begin{cases} \min cx \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \; \forall j=1,\dots,n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \; \forall i=1,\dots,n \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases}$$

Poiché tale assegnamento ha una regione più estesa rispetto al TSP, la soluzione di tale problema ci fornisce una valutazione inferiore (V_i)

I 2 vincoli asseriscono che il ciclo deve avere un solo arco entrante in ogni nodo $j \in N$ e che abbia un solo arco uscente da ogni nodo $i \in N$

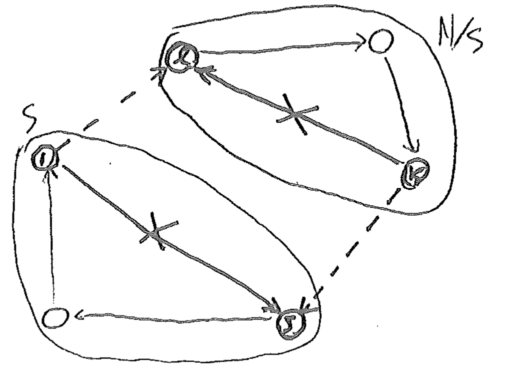
Perché nel modello c'è un terzo vincolo? L'assegnamento della V_i può generare cicli disgiunti, e per rimuovere tale pericolo è stato introdotto il "vincolo di connessione".
Per farlo prendiamo $S \subseteq N$ partizione non vuota di nodi e $\sum_{\substack{i \in S \\ j \notin S}} x_{ij} \geq 1 \; \forall S$ // Sono 2^n vincoli, e ci dicono che fissato S deve esistere almeno un arco che connette S a N/S

[Calcolo V_s del TSP-a]

Per calcolare la V_s, utilizziamo l'algoritmo delle toppe:

1) Risolviamo il problema dell'assegnamento e:
   - Se non genera cicli disgiunti allora la V_i è ammissibile, quindi è anche una V_s, e coincidendo si arriverebbe all'ottimo → Fine algoritmo
   - Se genera S e N/S cicli disgiunti allora passo 2 (Vanno identificati S e N/S che separino i cicli)
2) Selezioniamo una coppia di archi $(i,j) \in S$ e $(k,l) \notin S$, li eliminiamo, e al loro posto aggiungiamo (i,l) e (k,j)

Ciò ci assicura che otterremo un ciclo hamiltoniano, ma sicuramente avrà un costo maggiore in quanto prima di effettuare la modifica era l'ottimo. (Tutte le coppie possibili di scelta degli archi è $\left(\frac{n}{2}\right)^2$, quindi conviene calcolarle tutte per scegliere la migliore, che ci darà una V_s più accurata)



[TSP Simmetrico]

Potrebbe essere trattato come l'asimmetrico, ma è preferibile formularlo in una maniera più efficiente. Essendo simmetrica la matrice dei costi, possiamo supporre che gli archi non siano orientati.

[Modello del TSP-s]

$$\begin{cases} \min cx \\ \sum_{h<i} x_{hi} + \sum_{i<k} x_{ik} = 2 \quad \forall i \in N \\ \sum_{i\in S, j\notin S} x_{ij} + \sum_{i\notin S, j\in S} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subset N,\ 1<|S|<\lfloor \frac{|N|}{2} \rfloor \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases}$$

Il primo vincolo stabilisce che il grado di ogni nodo sia uguale a 2, cioè che $\exists$ esattamente 2 archi incidenti su ciascun nodo.

Il 2° vincolo è quello di connessione, imponendo che $\forall S$ sottoinsieme di nodi $\exists$ almeno un arco avente un estremo in S e un altro fuori da S. Poiché il vincolo relativo ad S equivale al vincolo relativo al suo complementare N/S, possiamo considerare solo i sottoinsiemi di cardinalità $\leq \frac{N}{2}$

[Calcolo della V_i]

Uno dei rari casi in cui si usa un algoritmo greedy in un problema di min per il calcolo di una V_i. Ciò accade perché, applicando il B&B, il calcolo della V_i deve essere effettuato ad ogni passo, dunque serve semplice da calcolare.

Per estendere la regione ammissibile eliminiamo tutti i vincoli di grado, escluso uno, relativo ad un nodo arbitrario r, ottenendo così un problema rilassato (problema dell'r-albero di costo min):

$$\begin{cases} \min cx \\ \sum_{h<r} x_{hr} + \sum_{r<k} x_{rk} = 2 \quad r \in N \\ \sum_{i\in S, j\notin S} x_{ij} + \sum_{i\notin S, j\in S} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subset N \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases}$$

Per risolvere tale problema, è sufficiente scegliere 2 archi di costo min incidenti su r, e un albero di copertura T di costo min nel sottografo $N/\{r\}$, e infine li uniamo ottenendo l'r-albero di costo min.

Poiché variano al variare di r, nella realtà si calcolano tutti gli r-alberi e si sceglie quello di costo min

[Algoritmo di Kruskal per il calcolo di T]

È un algoritmo greedy: si esaminano gli archi in ordine crescente di costo, ed ogni arco viene inserito nell'albero T se non forma cicli con gli ~~altri~~ archi già presenti in T.

[Calcolo della V_s]

La otteniamo con un algoritmo greedy (è un problema di min), usando l'algoritmo del nodo + vicino:

1) Si parte da un certo nodo, si cerca il nodo più vicino fra i rimanenti, si aggiunge al risultato, si cancella dai rimanenti e si aggiorna il nodo
2) Si ripete il 1° passo fino a finire tutti i nodi
3) Si chiude la sequenza connettendo l'ultimo nodo con il primo.

$V_s = \sum$ costi

[Note sull'r-albero]

È un sottoinsieme di n archi di cui:

- $n-2$ archi formano un albero di copertura sul sottografo formato dai nodi $N/\{r\}$
- 2 archi sono incidenti sul nodo r

Gli r-alberi possono essere cicli hamiltoniani mentre i cicli hamiltoniani sono r-alberi $\forall r = 1, \dots, n$

Travelling Salesman Problem - TSP

Consideriamo un grafo orientato $G = (N, A)$ in cui sia definito un costo c_{ij}^{π} $\forall$ arco $(i,j) \in A$. Questa tipologia di problemi permettono di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo.

Il ciclo hamiltoniano C è un ciclo orientato che passa per tutti i nodi del grafo una ed una sola volta. Il suo costo è dato dalla somma dei costi degli archi da cui è formato.

Lo definiamo mediante le variabili binarie x_{ij}, dove $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in C \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

I problemi di TSP si dividono in simmetrico (se la matrice dei costi è simmetrica, cioè se $c_{ij} = c_{ji}$) e asimmetrico

TSP Simmetrico

Risolviamo il TSP con il metodo del Branch and Bound, ma per poterlo effettuare è necessaria una valutazione superiore del problema ($V_S(P)$) e una inferiore ($V_i(P)$):

1) $V_S(P)$ = Usiamo l'algoritmo del nodo più vicino. Parte da un nodo S_1 e lo collega al più vicino S_2, secondo le distanze c_{ij};
poi collega quest'ultimo al nodo più vicino S_3 escludendo quelli già raggiunti, e così via fino a collegare tutti i nodi, ottenendo un ciclo hamiltoniano C^{sup}.
Allora $V_S(P) = \sum c_{ij} \; : \; c_{ij} \in C^{sup}$ (contando anche l'arco che chiude il ciclo)
Il ciclo C^{sup} è dato dai nodi in ordine rispetto alla visita

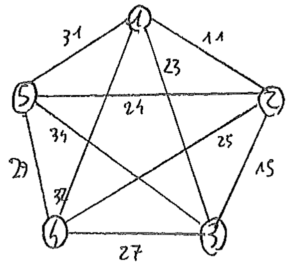
2) $V_i(P)$ = Va risolto il problema dell'r-albero di costo minimo:
(r-albero è un insieme di n archi di cui: ☒ n-2 archi formano un albero di copertura sul sottografo formato dai nodi $N/\{r\}$; ☒ 2 archi sono incidenti sul nodo r.)

Per risolvere il problema dell'r-albero di costo min, bisogna:
- Scegliere 2 archi di costo minimo incidenti sul nodo r
- Scegliere un albero di copertura di costo min sul sottografo formato da $N/\{r\}$
(Per l'albero di copertura T usiamo l'algoritmo di Kruskal:
Si esaminano gli archi in ordine crescente di costo ed ogni arco viene inserito nell'albero di copertura T se non forma un ciclo con gli altri archi già presenti in T)

Poi si sommano per trovare l'r-albero

$V_i(P) = \sum c_{ij} \; : \; c_{ij} \in$ r-albero

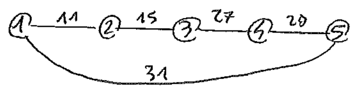
Esempio: Risolvere il problema di TSP seguente



a) Trovare un ciclo hamiltoniano ammissibile e $V_S(P)$

Ciclo Ammissibile:

Parto dal 1° nodo con l'algoritmo del nodo più vicino, quindi prendiamo il 2°, il 3°, il 4° e infine il 5°, cioè:



Allora

$V_S(P) = 11 + 15 + 27 + 29 + 31 = 113$

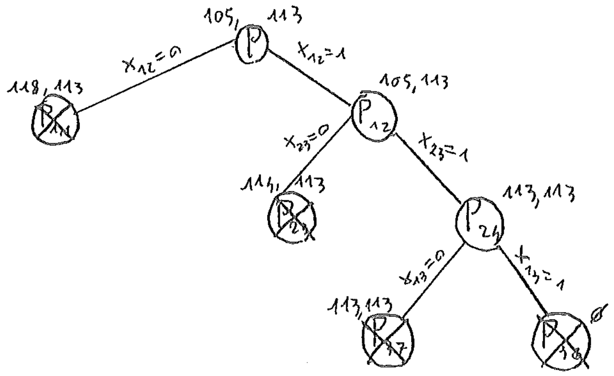
b) Calcoliamo il $V_i(P)$ partendo dal 2-albero (da specifica)

Kruskal = (1,3) (3,4) (4,5) + (1,2) (2,5)

$V_i(P) = 11 + 23 + 15 + 27 + 29 = 105$

(1,3)	~~(1,4)~~	~~(1,5)~~	(3,4)	~~(3,5)~~	(4,5)
23	32	31	27	34	29

3) Ora applichiamo il Branch e Bound



Esercizi TSP

(1)

Città	2	3	4	5
1	39	16	42	26
2		41	46	14
3			48	18
4				10

a) Trova una $V_i(P)$ calcolando il 3-albero

b) Trova una $V_s(P)$ con l'algoritmo del nodo + vicino dal 2

c) Applica il B&B dal 3-albero istanziando x_{45} e x_{42}

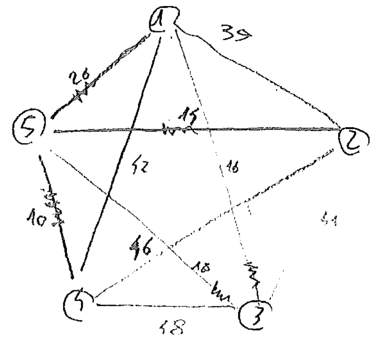
a) 3-albero

(5,4)(5,2)(5,1)(1,3)(3,5)

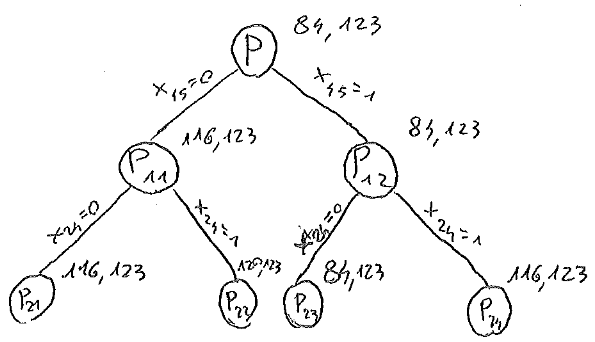
$V_i(P) = 10+14+26+16+18 = 84$

2 − 5 − 4 − 1 − 3

$V_s(P) = 14+10+42+16+41 = 123$



c)



$P_{11} \rightarrow (1,3)(3,5)(5,2)(5,1)(1,4)$

$V_i(P_{11}) = 84 + 32 = 116$

$P_{22} \rightarrow (1,3)(3,5)(5,2)(5,1)(2,4)$

$V_i(P) = 84 + 36 = 120$

$P_{24} \rightarrow (1,3)(3,5)(5,5)(1,5)(4,2)$

$V_i(P) = 84 + 32 = 116$

(2)

Città	2	3	4	5
1	22	40	10	23
2		37	22	41
3			36	14
4				11

a) Trova una $V_i(P)$ calcolando il 2-albero

b) Trova una $V_s(P)$ calcolando con l'algoritmo del nodo + vicino dal 1

c) Applica il B&B dal 2-albero istanziando x_{14}, x_{45}, x_{35}

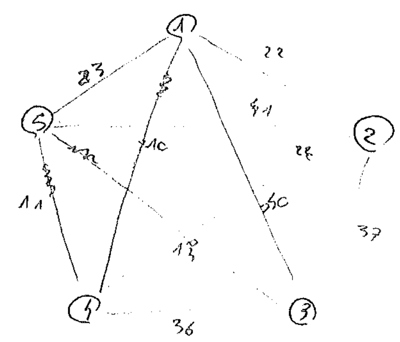
a) 2-albero

(1,4)(4,5)(5,3)(1,2)(2,4)

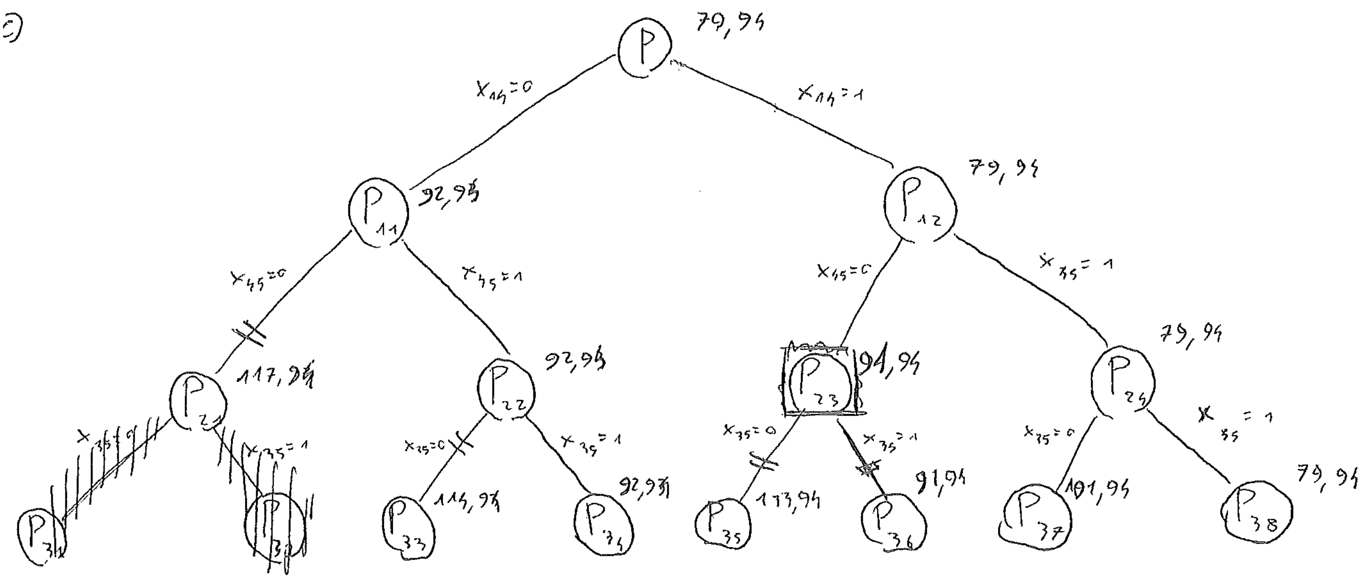
$V_i(P) = 22+22+10+14+11 = 79$

1 − 4 − 5 − 3 − 2

$V_s(P) = 22+10+14+11+37 = 94$



2)



$P_{11} \to (4,5)(5,3)(1,2)(2,4)(1,5)$

$V_S(P_{11}) = 79+13 = 92$

$P_{21} \to (1,5)(5,3)(1,2)(2,4)(4,3)$

$V_S(P_{21}) = 92+25 = 117$

$P_{33} \to (1,5)(4,5)(1,2)(2,4)(4,3)$

$V_S(P_{33}) = 92+22 = 114$

Per non sbagliare, scriversi gli archi in ordine crescente!

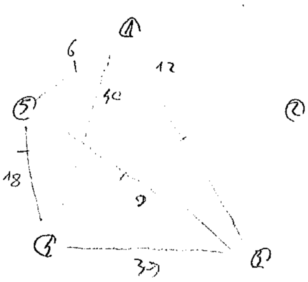
3

archi	2	3	4	5
1	49	12	40	6
2		37	44	9
3			39	9
4				18

a) $V_i(P)$ calcolando il 2-albero

b) $V_S(P)$ con il nodo più vicino del 5

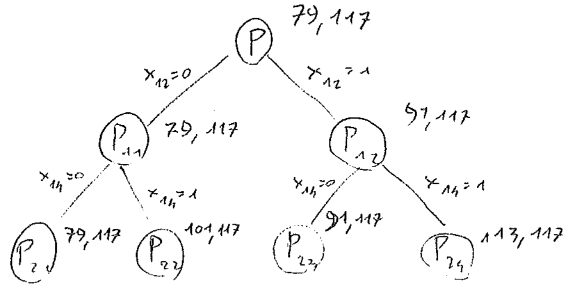
c) B&B istanziando x_{12} e x_{14}



a) $(1,5)(5,3)(5,4)(2,5)(2,3)$ $\quad V_i(P) = 6+9+18+9+37 = 79$

b) $5-1-3-2-4$ $\quad V_S(P) = 6+12+37+44+18 = 117$

c)



$P_{12} \to (1,5)(5,3)(5,4)(2,5)(2,1)$

$V_i(P) = 79+(49-37) = 91$

$P_{22} \to (1,5)(5,3)(1,4)(2,5)(2,3)$

$V_i(P) = 79+(40-18) = 101$

$P_{24} \to (1,5)(5,3)(1,4)(2,5)(2,1)$

$V_i(P) = 91+22 = 113$

Programmazione Non Lineare (PNL)

Nelle PNL ciò che ci proponiamo di studiare è:

$$\begin{cases} \min/\max f(x) \\ x \in \Omega \end{cases}$$

, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, esprimibile con un insieme opportuno di curve di livello
$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0,\ h(x) = 0\}$

con:

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$h(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$g_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

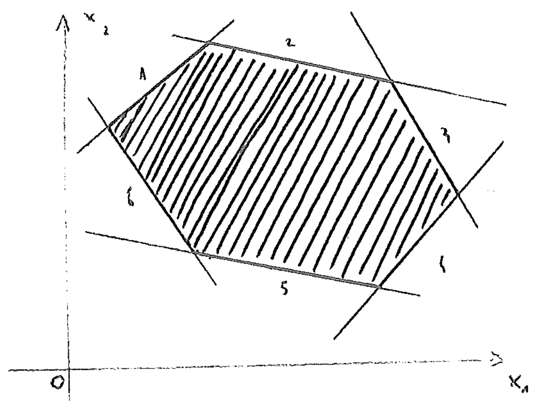
Quindi possiamo esprimere il modello come:

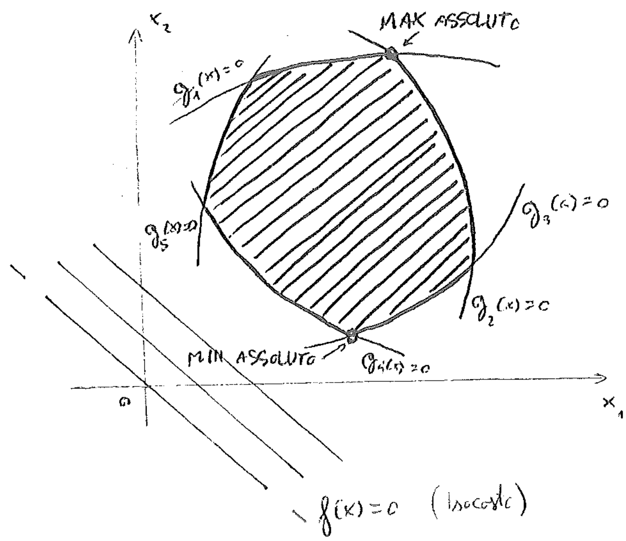
$$\begin{cases} \min/\max f(x) \\ g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \min/\max f(x) \\ \left.\begin{array}{l} g_1(x) \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(x) \leq 0 \end{array}\right] \text{Disequazioni} \\ \left.\begin{array}{l} h_1(x) = 0 \\ \vdots \\ h_p(x) = 0 \end{array}\right] \text{Equazioni} \end{cases}$$

Nota: La PL è un caso particolare delle PNL, in cui sono stati elaborati metodi più semplici per la loro risoluzione

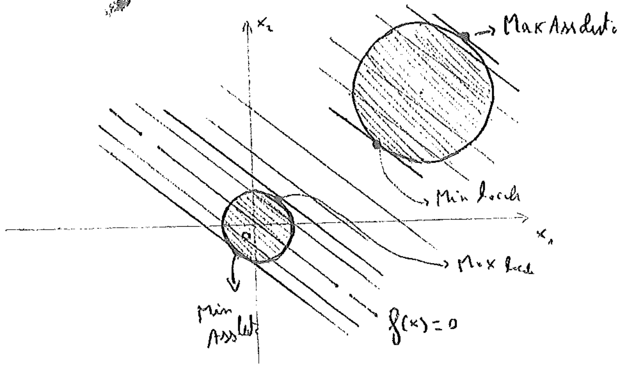
Nelle PL $g(x) = Ax - b$

Es: $\begin{cases} \max 2x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} f(x) = 2x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 = g_1(x) \\ -x_1 = g_2(x) \\ -x_2 = g_3(x) \end{array}$





Spesso si tratterà di trovare max e min vincolati



· Proprietà di Ω

1) Ω è chiuso? → La soluzione ottima spesso si trova sulla frontiera. Poiché $g(x)$ e $h(x)$ appaiono entrambe con l'uguale, la frontiera $\in$ ad Ω

→ È una generalizzazione senza perdita (è improbabile trovare problemi in cui è possibile scegliere valori arbitrariamente vicini ad un val. prefissato ma non è possibile scegliere il val prefissato stesso)

2) Ω è limitato? Th di Weierstrass sull'esistenza del massimo e minimo globali

→ Th di Weierstrass in $\mathbb{R}$ (Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, allora f assume massimo e minimo assoluti in $[a,b]$)

→ Th di Weierstrass in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme chiuso e limitato. Allora f assume ~~massimo e minimo~~ assoluti in Ω. f deve essere differenziabile!

3) Ω convesso? Può essere utile nell'applicazione di alcuni Th

· Considerazioni su f

$f(x) = cx (+b)$, con $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c \in \Omega$, $b \in \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$\min(f(x)+b) = \min(f(x)) + b$

Se $b \neq 0$ → Si parla di funzione affine (funzione lineare traslata)

· Proprietà di f:

1) Se f è almeno di classe C^1 ($f \in C^1$), allora possiamo applicare il Th di Fermat

↳ Se $f \in C^1$ → Th di Fermat

Se $\bar{x}$ è un pt interno ad Ω ed esso è tale che $\nabla f(\bar{x}) = 0$ allora $\bar{x}$ è un punto stazionario, che può essere:

- max/min locale
- max/min assoluto
- sella

→ È un sistema di n equazioni in n incognite

↓

$\nabla f(x) = 0$ dà come risultato n pt stazionari

2) f è convessa:

→ Def. formale: $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1)+(1-\lambda) f(x_2)$ $\forall x_1, x_2$, $\forall \lambda \in [0,1]$

(Impossibile da utilizzare in pratica)

Per casi particolari:

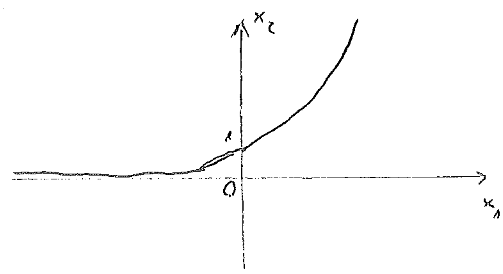
1) Se $f \in C^1$ e $f(x) \ge$ piano tg allora f è convessa (cioè se $f(y) \ge \underbrace{f(x)+\nabla f(x)(y-x)}_{\text{Eq piano tg in } x}$, $\forall x, y$)

2) Se $f \in C^2$ e $f''(x) \ge 0$ (se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$) allora f è convessa

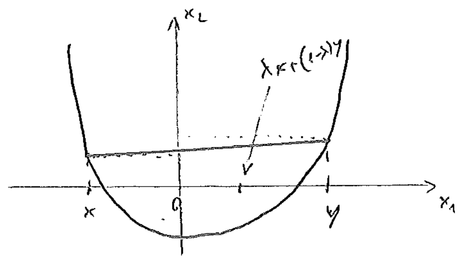
3) Se $Hf(x)$ è (semi)definita positiva $\forall x$ allora f è convessa → Cioè se i suoi autovalori sono strettamente positivi

Perché è utile sapere che f è convessa? Perché, considerata f convessa e un x^* pt stazionario (tale che $\nabla f(x^*)=0$) allora x^* è SEMPRE min assoluto. Una funzione convessa non può avere né selle né pt di massimo, solo di minimo, ma solo se f ammette l'esistenza di pt stazionari

Per esempio, la funzione esponenziale è convessa, ma non ammette pt stazionari!



→ Esempio di funzione convessa in 1 variabile



3) f è coerciva

→ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ è coerciva se $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x)=+\infty$ // Mediamente sono irrisolvibili

Es:

$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ è coerciva

$f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2$ non è coerciva

Per dimostrare che una funzione è coerciva, si maggiora $f(x)$ con una $g(x)$ coerciva

→ f anticoerciva se $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x)=-\infty$
($-f$ coerciva)

Perché sono importanti?

Supponiamo f continua ($\in C^0$) e coerciva (anticoerciva). Allora ha min (max) assoluto sempre.

· Altre considerazioni (Quadratiche e Hessiana)

~~Possiamo trascrivere f(x) come $\frac{1}{2}x^TAx + cx + b$~~

$[\min f(x) = -\max(-f(x))]$

→ Per catalogare i pt stazionari seguiamo questo iter:

1) Ricerca dei pt stazionari tramite ~~lo studio della matrice Hessiana~~: risoluzione del sistema $\nabla f(x) = 0$, che ci darà m risultati $x^*_1, \dots x^*_m$

2) Per la catalogazione effettiva studiamo la matrice hessiana $Hf(x)$ nei pt trovati (pt candidati), e ne calcolo gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ che risulteranno reali data la simmetria di $Hf(x)$

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Dagli autovalori risulta che:

1) Dato $\lambda_i > 0 \ \forall i = 1, \dots, n$, allora il pt $\bar{x}_j$ è di min locale
2) " $\lambda_i < 0 \ \forall i = 1, \dots, n$, " " " $\bar{x}_j$ è di max locale
3) Se $\lambda_i > 0$ e $\lambda_j < 0$ per qualche $i, j \in \{1, \dots, n\}$ allora $\bar{x}$ è di sella
4) Se $\lambda_i = 0$ per qualche $i \in \{1, \dots, n\}$ allora non ho informazioni sufficienti per catalogare

→ Funzioni quadratiche

Per le funzioni f di 2° grado (le quadratiche), poiché il sistema $\nabla f(x) = 0$ dà per forza soluzioni, allora l'Hessiana è sempre costante, e viceversa

f(x) se quadratica può essere espressa come: $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + cx + b$, da cui:

· $\nabla f(x) = Ax + b$
· $Hf(x) = A$

→ oppure $\begin{cases} f(x) = x^T A x + cx + b \\ \nabla f(x) = 2Ax + c \\ H(f) = 2A \end{cases}$

Fatta quest'ultima considerazione, si risolve il dubbio anche sulla forma di A. Tecnicamente ∞ matrici descriverebbero f(x), ma poiché A risulta de facto essere l'Hessiana di f(x), allora A è unica e simmetrica!

NB: Hessiana = Gradiente del gradiente

Es: $f = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 4x_1 - 6x_2 + 2x_2^2 - 1$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 6x_1 + 5x_2 + 4 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6 \end{pmatrix}$

$H(f(x)) = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

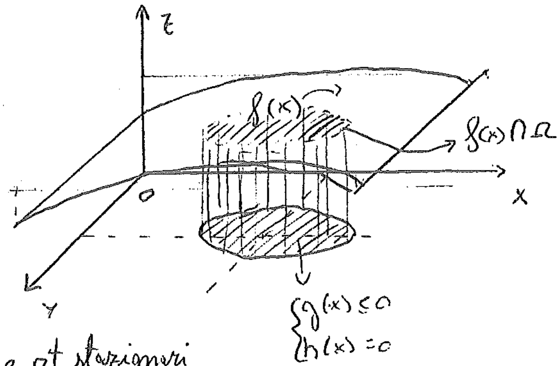
$f = \frac{1}{2} \cdot (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} (x_1, x_2) + (-1)$

$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad c = (4; -6) \quad b = -1$

• Caso Vincolato ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$)

Si tratta di massimizzare/minimizzare f rispetto all'insieme dei vincoli $\begin{cases} g(x) \le 0 \\ h(x) = 0 \end{cases} \to \Omega$

$$\begin{cases} \max/\min f(x) \\ g(x) \le 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$



Proprietà su Ω

I) Ω è limitato?

SÌ: Vale il Th di Weierstrass, secondo cui in f $\exists$ almeno 2 pt stazionari

NO: Ω è non limitato, dunque per il concetto di coercività $\exists$ almeno min assoluto.

II) Ω è regolare? → È regolare se in ogni suo pt è regolare, cioè

Ω è regolare ~~se è regolare~~ $\forall \bar{x} \in \Omega$ (poiché si parla di dominio Ω regolare in un punto $\bar{x} \in \Omega$)

CS per la regolarità:

1) Tutti i vincoli lineari → Dominio regolare $\forall \bar{x} \in \Omega$

2) h lineari, g convesse, e se $\exists \bar{x}: g(\bar{x}) < 0, h(\bar{x}) = 0$ (condizione di Slater) → Dom regolare $\forall \bar{x} \in \Omega$

NB: Imporre tali condizioni equivale ad imporre che Ω sia convesso, e la condizione di Slater richiede che esista almeno un pt interno a Ω

3) $\nabla g_i(\bar{x})$ e $\nabla h_i(\bar{x})$ sono linearmente indipendenti $\forall i \in I(\bar{x})$ → Dominio regolare in $\bar{x}$

NB: $I(x)$ è l'insieme degli indici attivi del pt x, cioè gli indici dei vincoli soddisfatti con il segno di uguaglianza

(Es: una intersez. ha almeno 2 indici attivi)

// In ogni pt i gradienti dei vincoli attivi siano linearmente indipendenti

Note:

α) Tutti i pt interni x hanno $I(x) = \emptyset$ per cui i gradienti sono indipendenti, per la condizione n°2 ~~[illegible]~~ Ω risulta essere regolare per quei punti

β) I punti $x: |I(x)| = 1$ (che soddisfano con l'uguale un solo vincolo) hanno sempre un solo vettore come soluzione, dunque il vettore è sempre linearmente indipendente con sé stesso, escluso il vettore nullo

γ) I punti critici sono i pt di intersezione fra i 2 vincoli in esame

- Teorema di Lagrange - Karush - Kuhn - Tucker (LKKT)

1) Sia Ω regolare e $\bar{x} \in \Omega$ minimo locale $\rightarrow \exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^m$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$ tali che soddisfino:

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{s=1}^{p} \bar{\mu}_s \nabla h_s(\bar{x}) = 0 \\ \bar{\lambda}_i \, g_i(\bar{x}) = 0 \ \forall i \\ h_s(\bar{x}) = 0 \ \forall s \end{cases}$$

ricordando che: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

2) Sia Ω regolare e $\bar{x} \in \Omega$ massimo locale $\rightarrow \exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R}_-^m$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$ tali che soddisfino il sistema del th 1)

NOTE: 1) Nel th le incognite $\bar{\lambda}_i$, $\bar{\mu}_i$ e $\bar{x}$ che sono $m+p+n$. Inoltre il sistema è formato da $n+m+p$ equazioni. Dunque è un sistema quadrato $(m+p+n) \times (m+p)$

2) I termini $\bar{\mu}_s$ sono i "moltiplicatori di Lagrange"

- Teoremi atti al semplificare il riconoscimento dei pt:

1) Sia Ω convesso, f convessa e sia $\bar{x}$ una sol. del sistema LKKT, con $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^m$. Allora $\bar{x}$ è il min assoluto

(Questo th ci assicura che per problemi convessi non esistono min relativi)

2) Sia Ω convesso, f concava e sia $\bar{x}$ una sol. del LKKT con $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_-^m$. Allora $\bar{x}$ è il massimo assoluto

Nota: Definiamo $\underbrace{L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})}_{\text{Funzione Lagrangiana}} = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) + \sum_{s=1}^{p} \bar{\mu}_s h_s(\bar{x})$

Nel sistema usiamo $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{s=1}^{p} \bar{\mu}_s \nabla h_s(\bar{x})$

il gradiente della Lagrangiana in x

Caso non vincolato ($\Omega = \mathbb{R}^n$) Metodo del gradiente libero

Quando $\Omega = \mathbb{R}^n$ siamo in presenza del caso non vincolato, si deve determinare solo $\min(f(x))$

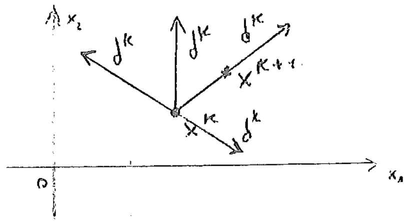
- Per trovare un pt stazionario in $\mathbb{R}^n$ dobbiamo risolvere il sistema $\nabla f(x) = 0$, e per risolverlo si possono usare 2 tipi di metodi:

1) Metodi diretti
I metodi dell'algebra lineare che danno la sol esatta. ~~Questo~~ Il metodo più noto è il cosiddetto "metodo del gradiente" → Si risolve il sistema $\nabla f(x) = 0$ e tra i pt stazionari si scelgono i pt di min assoluto

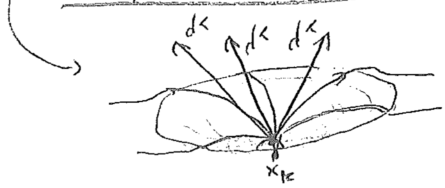
2) Metodi indiretti
I metodi del calcolo numerico che danno ~~sol~~ approssimate.

- Successioni minimizzante $\{x^k\}$
E' definita come segue: $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$, dove:

1) d^k è una direzione di ascesa o di discesa



Si sceglie d^k tale che f abbia valore minore
Se in tutte le direzioni d^k abbiamo una maggiorazione di x^k, allora x^k è min locale (Fossa)



Scelto d^k, ci spostiamo in tale direzione di un certo step t_k

d^k, essendo la direzione di discesa (per minimi) o ascesa (per massimi) è il gradiente calcolato in quel pt:

$$d^k = \begin{cases} \nabla f(x^k) & \text{per max} \\ -\nabla f(x^k) & \text{per min} \end{cases}$$

(dimostrazione poi)
*

2) t_k è lo step-size
Anche lo step-size si determina con un metodo esatto e un metodo inesatto.
Definiamo la funzione $\varphi(t)$, essa risulta essere lineare in t da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\varphi(t) = f(x^k + t d^k)$, $\varphi(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$t \xrightarrow{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n} x^k + t d^k \xrightarrow{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}} f(x^k + t d^k)$$
$\varphi(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\varphi(t)$ è continua e derivabile perché composizione di 2 funzioni differenziabili di classe C^1 quindi $\varphi(t)$ è differenziabile, e il differenziale (?) si calcola con la formula del differenziale delle funzioni composte

(Dim $*$) La scelta di $d^k = \pm \nabla f(x)$ è dovuta dalla costruzione di $\varphi(t)$.

In che direzione $\varphi(t)$ si sposta? Deriviamo $\varphi(t)$:

$\varphi'(t) = \nabla f(x^k - t d^k) \cdot d^k$ → Poiché vogliamo la direzione quando usciamo dal pt x^k, calcoliamo $\varphi'(t)$ in $t=0$

$\varphi'(0) = \nabla f(x^k) \cdot \underset{\text{È un vettore!}}{d^k}$

Supponiamo di voler massimizzare, dunque di voler andare verso l'alto. Allora dobbiamo cercare tutte le direzioni per cui $\varphi'(t) > 0$

Quindi è necessario assumere un d^k concorde con la direzione di $\nabla f(x^k)$. Qual'è il vettore che rende massimo in modulo il prodotto scalare?

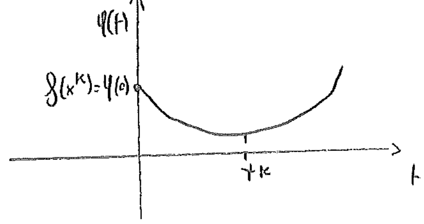
Dall'algebra lineare sappiamo che $u \cdot v$, con $u, v \in \mathbb{R}^n$, è max in modulo se e solo se $u = v$. Allora $d^k = \nabla f(x^k)$

Se avessimo voluto minimizzare, avremmo cercato tutte le direzioni: $\varphi(t) < 0$, dunque $d^k = -\nabla f(x^k)$

- Determinazione di t^k

α) Metodo del passo esatto

Poiché $\varphi(t)$ è in una sola variabile, possiamo calcolare t_k come $\boxed{t_k = \arg\min_{t \geq 0} \varphi(t)}$



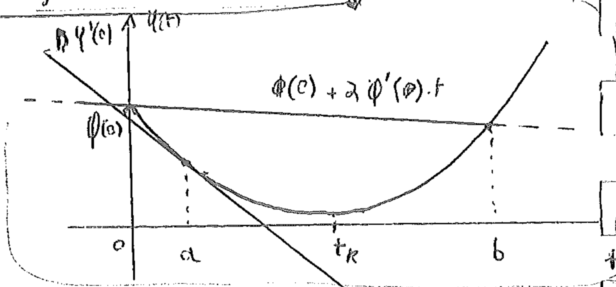
β) Metodo del passo inesatto (Condizioni di Armijo - Goldstein - Wolfe)

Se la determinazione esatta del parametro t^k è complessa si possono usare metodi approssimati. Quelle che noi studiamo sono le condizioni di Armijo - Goldstein - Wolfe:

~~prendiamo tutte le t tali che soddisfano il seguente sistema~~

$$\boxed{\begin{cases} \varphi(t) \leq \varphi(0) + \alpha \varphi'(0) \cdot t & (1) \\ \varphi'(t) \geq \beta \varphi'(0) & (2) \end{cases}}$$ con $0 < \alpha < \beta < 1$

$t_k \in [a, b]$
(vedi pg dopo)



Rappr. geometrica

(1) = Garantisce che x non sia troppo grande

(2) = Garantisce che ~~x~~ non sia troppo piccolo

(*) 3 pg avanti

La condizione (1) ci restituisce un intervallo per t che va da $[a,b]$, la (2) invece per $[a,+\infty)$. Poiché entrambe le condizioni devono essere soddisfatte, allora si fa l'intersezione degli intervalli, dunque:

$$t_k \in [a,b]$$

In generale non è così semplice, ma per le funzioni convesse gli intervalli sono sempre del tipo $[a,b]$ e $[a,+\infty)$, dunque l'intersezione è $[a,b]$

→ In pratica:

Si risolve il sistema

$$\begin{cases} \varphi(t) \leq \varphi(0) - \alpha\varphi'(0)t \\ \varphi'(t) \geq \beta\varphi'(0) \end{cases}$$

e:

1) Se è verificato il sistema ~~allora $t^k = t$~~ per un certo $\bar{t}$, allora $t_k = \bar{t}$

2) Se verifica solo la prima delle 2 condizioni, allora $\bar{t}$ è a destra di t_k ammissibile, per cui si dimezza e si ripete l'algoritmo fino a ricadere nel 1° caso

3) Se verifica solo la seconda si usa il metodo di bisezione (si prende il pt medio del passo precedente) e si itera fino a cadere nel 1° caso

Nota: Per i problemi di massimo si considera tutto in $-\varphi(t)$:

$$\begin{cases} -\varphi(t) \leq -\varphi(0) + \alpha\varphi'(0)t \\ -\varphi'(t) \geq -\beta\varphi'(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(t) \geq \varphi(0) \mp \alpha\varphi'(0)t \\ \varphi'(t) \leq \beta\varphi'(0) \end{cases}$$

— — —

→ Th sullo step t_k

Data $f \in C^1$ coerciva, e data $\{x_k\}$ successione costruita col metodo del gradiente t.c.

$x_{k+1} = x_k + t^k d^k$, con $d^k = -\nabla f(x^k)$ perché problema di minimo ($\nabla f(x^k)$ se di massimo)

↳ $x_{k+1} = x_k - t^k \nabla f(x^k)$. Allora $\{x_k\} \to \bar{x}$, con $\bar{x} : \nabla f(\bar{x}) = 0$

Poiché nella PNL la convergenza non è garantita, allora è necessario introdurre dei criteri di stop: i più comuni sono:

1) Numero dei passi
2) Tempo
3) $\| \nabla f(x^k) \| < \varepsilon$
4) $| f(x^{k+1}) - f(x^k) | < \varepsilon$
5) $\| x^{k+1} - x^k \| < \varepsilon$

2] Sia $f \in C^1$ coerciva, e $\{x^k\}$ definita con il metodo del gradiente ($x_{k+1} = x_k - t\nabla f(x_k)$) scegliendo un t che soddisfi le condizioni di Armijo - Goldstein - Wolfe, allora $\{x_k\} \to \bar{x}$, con $\bar{x} : \nabla f(\bar{x}) = 0$

- Es: Calcolare x^{k+1} con $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1 - 2x_2$ e $x^k = (1,0)$

R:

Determiniamo prima se f è coerciva e/o convessa; dunque calcoliamo ∇f e Hf:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad b = 0$$

$$\nabla f = 2Ax + c = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2 \end{pmatrix}$$

$$Hf = 2A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ora vediamo se Hf è semidef. positiva: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$

$$(2-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0$$

$$4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \to \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

OK, è convessa

Ora calcoliamo $\nabla f(x^k) = \nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Adesso determiniamo t_k col metodo del passo esatto (metodo del gradiente)

$$t_k = \arg\min_{t \geq 0} \varphi(t), \quad \text{con} \quad \varphi(t) = f(\underbrace{x^k - t_k \nabla f(x^k)}_{= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}})$$

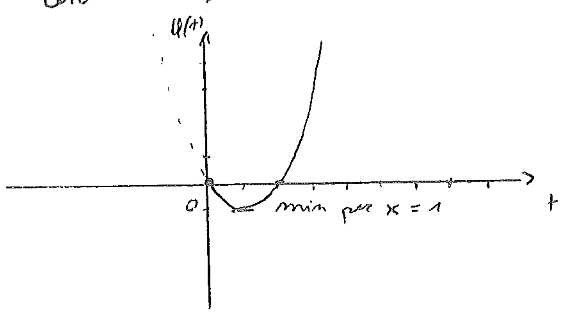
$$\varphi(t) = f\begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} = (1-t)^2 + t^2 + (1-t)t - (1-t) - 2t$$

$$= t^2 - 2t + \cancel{1} + \cancel{t^2} - \cancel{t^2} + t - \cancel{1} + \cancel{t} - 2t$$

$$= t^2 + 2t$$ → Per vedere se è min, calcoliamo $\varphi'(t) = 0$

$2t - 2 = 0 \to t = 1$

Cerchiamo il min:



Allora $x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k)$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_{k+1} = (0,1)$

- Specchietto monografo geometria

Una eq di 2° grado in 2 variabili $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, se $B=0$, si può ridurre ad una somma di quadrati, e ricondurre alle eq. generali di iperbole, circonferenza, ellisse, parabola...

- Circonferenza

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

Centro: $C=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=(\alpha,\beta)$

Raggio: $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-c}$

- Ellisse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \longrightarrow \frac{(x+num)^2}{a^2}+\frac{(y+num)^2}{b^2}=1$$

- Vertici: $(-a,0)$ $(a,0)$ $(0,b)$ $(0,-b)$
- Fuochi: $(c,0)$ $(-c,0)$, con $c=\sqrt{b^2-a^2}$
- Centro: pt medio fra i fuochi

- Parabola

$y=ax^2+bx+c$ (verticale) (orizzontale) $x=ay^2+by+c$

- Iperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Vertici: $(-a,0)$ $(a,0)$ se è così

$(0,b)$ $(0,-b)$ se il termine noto è negativo (-1)

(*) Metodo backtracking

Si parte con un valore $x = \bar{x} > 0$, e finché la 1° condizione di Armijo-Goldstein-Wolfe non è soddisfatta si moltiplica x per un fattore $\gamma \in (0,1)$.
Ciò garantisce che il p.to trovato soddisfi la condizione di discesa per f, ma assicura anche che il passo non sia troppo piccolo.

$$f(\gamma^m \bar{x}) \leq f(0) + \alpha f'(0) \gamma^m \cdot \bar{x}$$

Va trovato il più piccolo m tale che sia valida.
poi poni $x = \gamma^m \bar{x}$

- Guida definitiva LKKT

① Calcolo ∇f, ∇g, e pongo $\nabla_x(L) = \nabla f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \nabla g_i$. Calcolo anche $\nabla_{xx}(L)$.

② Da $\nabla_x(L)$, mi ricavo l'espressione analitica dei λ_i (es: $\lambda_1 = \dots$, $\lambda_2 = \dots$)

③ $\forall$ pt dato calcolo i moltiplicatori λ_i, e ne studiamo il segno:

- Se $\lambda_i \geq 0 \ \forall i$ il pt x a cui sono associati Non E' di MAX } (*)
- " $\lambda_i \leq 0 \ \forall i$ " " " " " " " Non E' di MIN }
- Se $\text{sign}(\lambda_i) \neq \text{sign}(\lambda_j) \to$ SELLA

④ Per tali pt (*) ne studio $\nabla_{xx}(L)$ è:

- Se $\lambda_i \geq 0$ e $\nabla_{xx}(L) \leq 0 \to$ Sella
- Se $\lambda_i \geq 0$ e $\nabla_{xx}(L) > 0 \to$ Min
- Se $\lambda_i \leq 0$ e $\nabla_{xx}(L) \geq 0 \to$ Sella
- Se $\lambda_i \leq 0$ e $\nabla_{xx}(L) < 0 \to$ Max
- Se $\lambda_i \geq 0$ e $\nabla_{xx}(L) = 0$ || $\lambda_i \leq 0$ e $\nabla_{xx}(L) = 0 \to$ Studio grafico

Esercizi LKKT

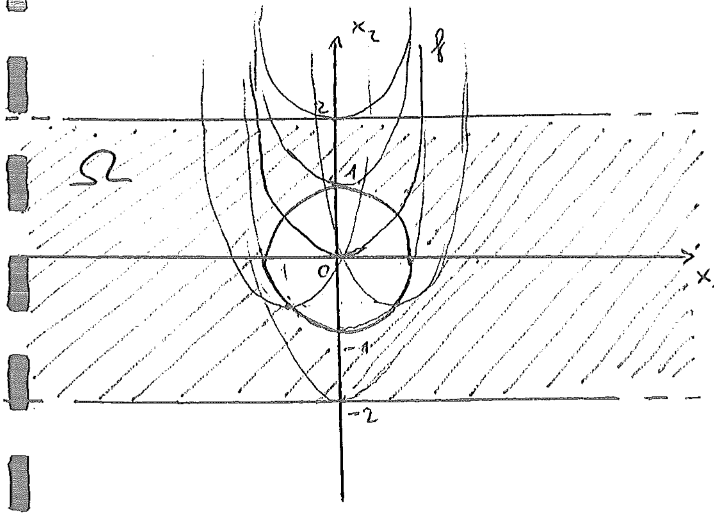
1) trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1,x_2) = -x_1^2 + x_2$ sull'insieme $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 - x_1^2 - x_2^2 \leq 0 \ , \ -4 + x_2^2 \leq 0\}$

I punti li dà il professore!

R: Questo è un problema vincolato del tipo:

$$\begin{cases} \max/\min f(x) \\ g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) \leq 0 \end{cases} \ , \text{con} \quad g_1(x) = 1 - x_2^2 - x_1^2 \leq 0 \qquad g_2(x) = -4 + x_2^2 \leq 0$$

- Per prima cosa va disegnato il dominio, quindi consideriamo $g_1(x) = 0$ e $g_2(x) = 0$ per determinarne "i confini", poi se ne risolvono le diseq // → Tutt'uno, presta attenzione!



[$g_2(x) \leq 0 \ \rightarrow \ x_2^2 \leq 4$ // Non c'è x_1, quindi su x_1 sarà non limitata, mentre x_2 risulta compreso fra -2 e 2

$-2 \leq x_2 \leq 2$

$(-\infty \leq x_1 \leq +\infty)$

[$g_1(x) \leq 0 \ \rightarrow \ 1 - x_2^2 - x_1^2 \leq 0$

$-x_1^2 - x_2^2 \leq -1$

$x_1^2 + x_2^2 \geq 1$ // È una circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1, ma occhio al $\geq$! Vogliamo l'area fuori dalla circonferenza!

~~$x_1^2 \geq 1$~~

$x_1 \leq -1 \cup x_1 \geq 1$

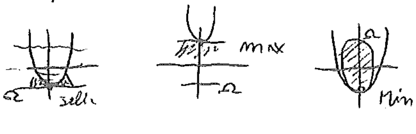
$x_2 \leq -1 \cup x_1 \geq 1$

- Successivamente va catalogata $f(x)$ che funzione è e se f gode di qualche "proprietà" (coercività, ecc...) in Ω!

(Attenzione! Come in questo caso f non è coerciva/anticoerciva su $\mathbb{R}^2$, ma è anticoerciva su Ω, perché limita una componente (x_2)!!!)

$$f(x_1,x_2) = -x_1^2 + x_2$$
$$\downarrow$$
$x_1^2 - x_2 = 0 \ \rightarrow$ È una parabola (con centro nell'origine) → Ciò ci fornisce le linee di isocosto che muoveremo sui punti!

(Importante!: Posta la parabola su un punto (x_0,y_0) ~~$\in \Omega$~~, se la regione di Ω è dentro e fuori la parabola allora è sella;
Se è tutta fuori (x_0,y_0) è massimo
Se è tutta dentro (x_0,y_0) è minimo)



Com'è f? Non sarebbe nulla, se non fosse che x_2 è limitato in Ω fra -2 e 2; abbiamo questo caso:

$$-x_1^2 + x_2, \ \begin{cases} -2 \leq x_2 \leq 2 \\ -\infty \leq x_1 \leq +\infty \end{cases} \ \simeq \ \underset{\|x\| \to +\infty}{-x_1^2}$$

È anticoerciva in Ω! Quindi ha sempre max assoluto

· Adesso dai pt del professore va visto se sono ammissibili per Ω, quindi si prendono i singoli pt e si vede dal disegno se sono $\subseteq \Omega$, oppure se valgono le relazioni $g(x) \leq 0$

	x	$\lambda_1 \lambda_2$	μ (Sdx Jh(x)=0)	min loc	min Abs	Max loc	Max Abs	Sella
OK	$(0,2)$		–	No	No	SI	SI	No
	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$(-1,0)$	–	No	No	No	No	SI
	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$(-1,0)$	–	No	No	No	No	SI
OK	$(0,-1)$		–	No	No	No	No	SI
[illegible]	$(0,1)$		–	No	No	No	No	SI
[illegible]	$(0,-2)$		–	No	No	No	No	SI

· Ora va preparato e risolto l'LKKT, quindi calcoliamo ∇f, ∇g_1 e ∇g_2

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_1 = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

LKKT

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_1 (1 - x_2^2 - x_1^2) = 0 \\ \lambda_2 (-4 + x_2^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + \lambda_1 2x_1 = 0 \\ 1 + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 x_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_1 x_2^2 - \lambda_1 x_1^2 = 0 \\ \lambda_2 x_2^2 - 4\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Ora qui ci sostituiamo i nostri pt per trovare i moltiplicatori, e i moltiplicatori per trovare i pt

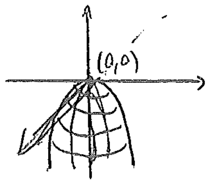
· Troviamo le 2x del moltiplicatore $(-1,0)$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_1 = 0 \\ 1 + 2x_2 = 0 \\ -1 + x_2^2 + x_1^2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} \\ -1 + \frac{1}{4} + x_1^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

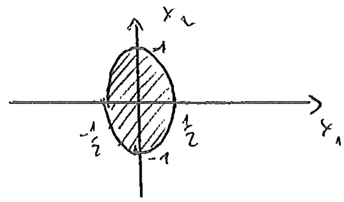
② Trovare massimi e minimi di $f(x_1,x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ su Ω, con $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 4x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0\}$

R: Si risolve graficamente, disegnando in $\mathbb{R}^3$

Poniamo $z = -x_1^2 - x_2^2$, è un paraboloide [anticoercivo (avrà per forza max assoluto)], con concavità verso il basso, e vertice in $(0,0)$



• Poi disegniamo il dominio su $\mathbb{R}^2$, e infine lo riportiamo in $\mathbb{R}^3$



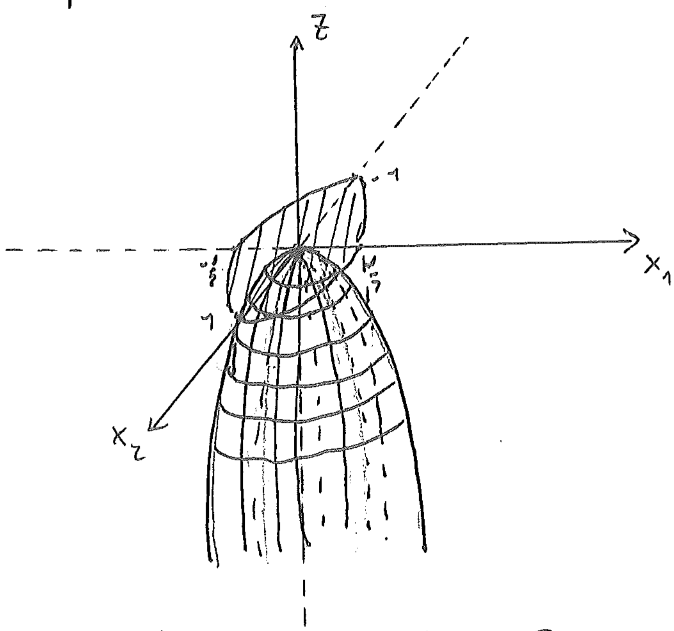
$\frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{y^2}{1} \leq 1$

È un ellisse, con vertici

$(-\frac{1}{2}, 0)$ $(\frac{1}{2}, 0)$

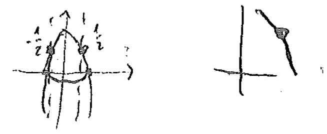
$(0,1)$ $(0,-1)$

Disegno in $\mathbb{R}^3$

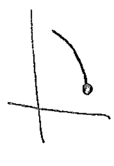


• Dal disegno, è evidente che $(0,0)$ è pt di massimo locale (e confermeremo anche globale)

• Se consideriamo i pt $(-\frac{1}{2},0)$ e $(\frac{1}{2},0)$ si comportano come un pt "sul lato di una montagna", risultando non cambiare concavità. Dunque ~~sono~~ sella delle selle



• Infine, i pt $(0,1)$ e $(0,-1)$ sono quelli che hanno una sola concavità da un lato, e dall'altro è a 0. Sono minimi locali, e poiché hanno lo stesso valore, sono anche assoluti

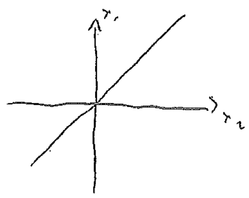


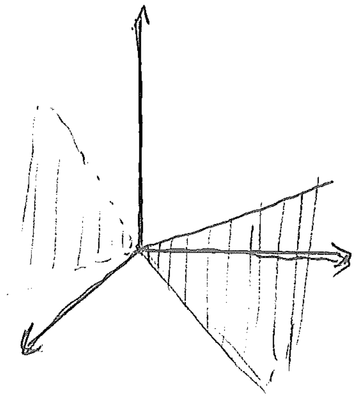
Dati i punti, si mettono nell' LKKT per i moltiplicatori.

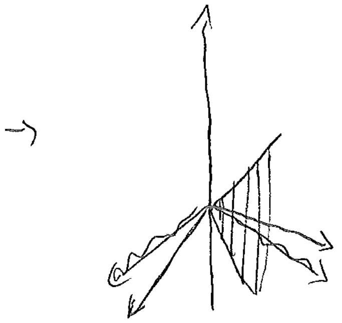
③ Trovare max e min di $f(x_1,x_2) = x_1 - x_2$ su Ω, con
$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 - 4 \le 0, \quad -1 - x_1 \le 0\}$

R:

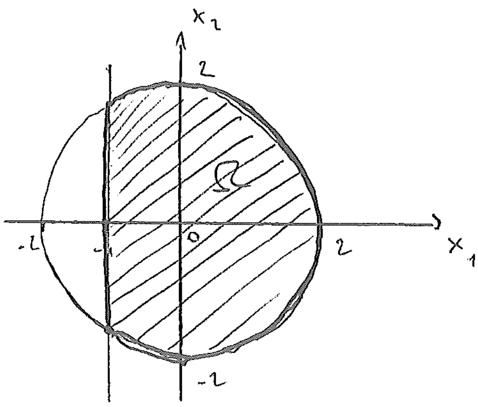
$z = x_1 - x_2$



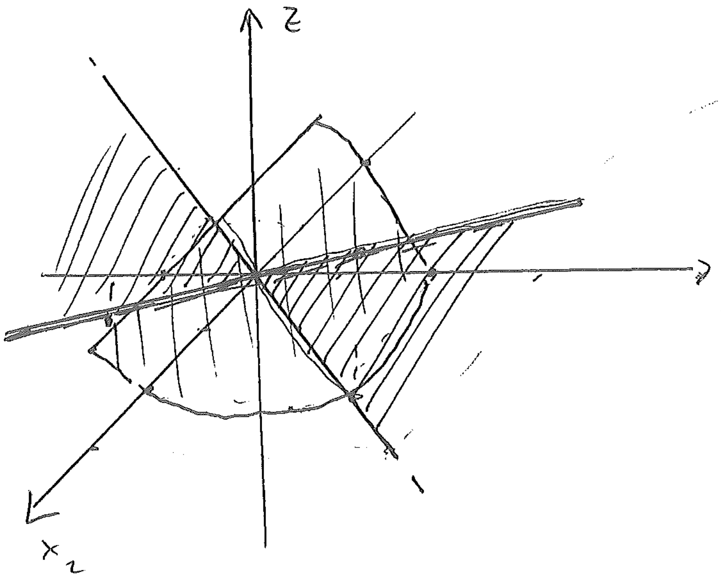




$\Omega =$

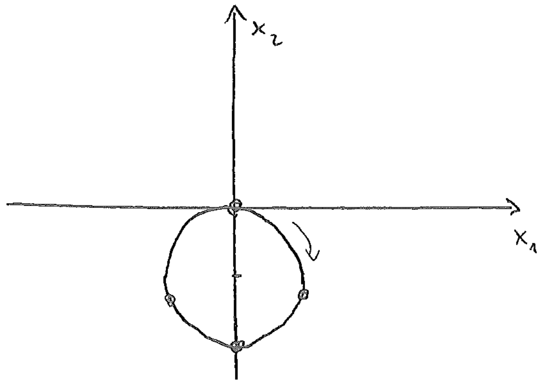


$x_1^2 + x_2^2 \le 4$ È una circonferenza centrata in $(0,0)$ di raggio 2



④ Trovare massimi e minimi di $f(x_1,x_2)=x_2-x_1^2$ su $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^2:\ x_1^2+x_2^2+2x_2=0\}$

R: Questo è un vincolo del tipo $h(x)=0$



Quindi si considera solo la circonferenza!

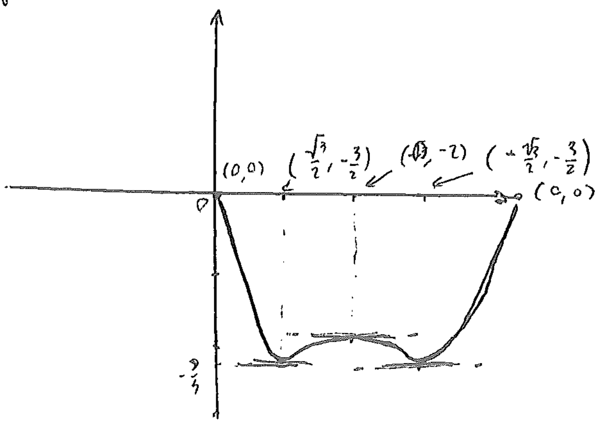
Per questo si studia il comportamento di f su una curva, rendendola de facto lineare.

I pt sono $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \rightarrow$ } pt di min ass
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \rightarrow$

$(0,-2) \rightarrow$ pt di max loc

$(0,0) \rightarrow$ pt di max ass

"f sulla"



$f(\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}},\cancel{-\frac{3}{2}})=0$

$f\left(+\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}$

$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}$

$f(0,-2)=-2$

Calcolo dei moltiplicatori

$\nabla f=\begin{pmatrix}-2x_1\\ 1\end{pmatrix}$ $\nabla h=\begin{pmatrix}2x_1\\ 2x_2+2\end{pmatrix}$ $\nabla_x L=\begin{pmatrix}-2x_1+2\mu_1 x_1\\ 1+2\mu_1(x_2+1)\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}-2x_1+2\mu_1x_1=0\\ 1+2\mu_1x_2+2\mu_1=0\end{cases}$$

$(0,0) \rightarrow \mu=-\frac{1}{2}$

$(0,-2) \rightarrow \mu=\frac{1}{2}$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right) \rightarrow \mu=1$

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right) \rightarrow \mu=1$

Il μ non indica max e min

(5) Dati i λ dell'LKKT, possiamo escludere facendo lo studio dell'hessiana della lagrangiana.

Es:

$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$

$g(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$

⑤ $f(x_1,x_2) = -x_1^2 - x_2^2$

$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 4x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0\}$

R:

$\nabla f = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$ $\qquad \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 8x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

$\nabla_x L = \begin{pmatrix} -2x_1 + \lambda 8 x_1 \\ -2x_2 + \lambda 2 x_2 \end{pmatrix} \rightarrow H(\nabla_x L) = \begin{pmatrix} -2+8\lambda & 0 \\ 0 & -2+2\lambda \end{pmatrix}$

Pt	λ	ml	mA	Ml	MA	S
$(0,1)$	1	SI	SI	NO	NO	NO
$(0,-1)$	1	SI	SI	NO	NO	NO
$(\frac{1}{2},0)$	$1/4$	NO	NO	NO	NO	SI
$(-\frac{1}{2},0)$	$1/4$	NO	NO	NO	NO	SI
$(0,0)$	0	~~No~~	NO	SI	SI	NO

$\lambda = 1 \rightarrow H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow H - I\sigma = \begin{pmatrix} 6-\sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix} \rightarrow \sigma = 6,\ \sigma = 0$

Non E' MAX

$\lambda = \frac{1}{4} \rightarrow H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightarrow H - I\sigma = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}-\sigma \end{pmatrix} \rightarrow \sigma = -\frac{3}{2},\ \sigma = 0$

Non E' MIN

- $(0,0)$ → Poiché f è anticoncava, $(0,0)$ è pt di max abs

$\lambda = 0 \rightarrow H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow H - I\sigma = \begin{pmatrix} -2-\sigma & 0 \\ 0 & -2-\sigma \end{pmatrix} \rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = 2$

MAX

- Poiché però per i pt $(\frac{1}{2},0)$ e $(-\frac{1}{2},0)$ i λ sono > 0, allora Non è MAX → E' Sella!

- Dal disegno, si vede che $(0,1)$ e $(0,-1)$ sono pt di min abs

⑥ Trovare massimi e minimi di $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : 4x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \quad , \quad 1 - 4x_2^2 \leq 0\}$$

R:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 8x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -8x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_x(L) = \begin{pmatrix} 1 + 8\lambda_1 x_1 \\ 1 + 2\lambda_1 x_2 - 8\lambda_2 x_2 \end{pmatrix} \qquad \nabla_{xx}(L) = \begin{pmatrix} 8\lambda_1 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 - 8\lambda_2 \end{pmatrix}$$

• Troviamo i moltiplicatori $\forall$ pt

$$\nabla_x(pt_1) =$$