Soluzione compito 26/6/2023

Tuesday, 20 June 2023 11:14

ex. 1. Dimostrare che un qualsiasi codice di Hamming ha $d_{min} = 3$ e che può correggere almeno 1 errore. (**2** punti)

La d_{min} di un codice si può calcolare come il peso di Hamming minimo delle parole di codice.

$$d_{min} = \min_{c \in \mathcal{C}} w(c)$$

Poiché un codice di Hamming è caratterizzato da un intero m tale che $\boxed{n = 2^m - 1}$ e $\boxed{K = n - m = 2^m - m - 1}$, si ha che la matrice di controllo di parità H ha $\boxed{n - K = m}$ righe e $\boxed{n = 2^m - 1}$ colonne.
Poiché vale che se $c \in \mathcal{C} \Rightarrow c H^T = \emptyset$ per trovare il peso minimo di Hamming sarà sufficiente trovare il minimo numero di colonne di H linearmente dipendenti.
Dal momento che le colonne di H sono tutte le possibili combinazioni di m bit escluso quella di tutti $\emptyset$, il numero minimo di colonne lin. dipendenti è 3 e $\boxed{d_{min} = 3}$
e di conseguenza il numero max di errori che il codice può correggere è $\boxed{\left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor = 1}$.

ex. 2. Si consideri il polinomio $g(D) = D^4 + D^2 + D + 1$,

1. Dimostrare che $g(D)$ può essere utilizzato come polinomio generatore per un codice ciclico con $n = 7$ e trovare il corrispondente valore di k;
2. Trovare la d_{min} del codice.
3. Data la parola ricevuta $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e} = [0,0,1,1,1,1,1]$, sfruttare le proprietà dei codici ciclici per trovare $\boldsymbol{e}$ e, successivamente, $\hat{\boldsymbol{x}}$. (**4** punti)

1. Perché $g(D)$ sia un polinomio generatore per $n = 7$ è necessario sia divisore di $D^7 + 1$

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
D^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & D^4 + D^2 + D + 1 \\
\hline
D^7 & 0 & D^5 & D^4 & D^3 & & & & D^3 + D + 1 \\
\hline
// & // & D^5 & D^4 & D^3 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & D^5 & 0 & D^3 & D^2 & D & & \\
\hline
 & & // & D^4 & 0 & D^2 & D & 1 & \\
 & & & D^4 & 0 & D^2 & D & 1 & \\
\hline
 & & & // & // & // & // & // &
\end{array}
$$

$\Rightarrow D^7 + 1 = (D^4 + D^2 + D + 1)(D^3 + D + 1) \Rightarrow g(D)$ è un polinomio generatore per un codice ciclico con $n = 7$ e $K = 7 - 4 = 3$

2. Poiché $K = 3 \Rightarrow$ il codice ha $\boxed{2^3 = 8}$ parole che possono essere ottenute attraverso shift ciclici della parola corrispondente a $g(D)$

$$
\left.
\begin{array}{ll}
g(D) \rightarrow & 1\,1\,1\,0\,1\,0\,0 \\
D g(D) \rightarrow & 0\,1\,1\,1\,0\,1\,0 \\
D^2 g(D) \rightarrow & 0\,0\,1\,1\,1\,0\,1 \\
D^3 g(D) \rightarrow & 1\,0\,0\,1\,1\,1\,0 \\
D^4 g(D) \rightarrow & 0\,1\,0\,0\,1\,1\,1 \\
D^5 g(D) \rightarrow & 1\,0\,1\,0\,0\,1\,1 \\
D^6 g(D) \rightarrow & 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1
\end{array}
\right\}
\text{7 parole ciascuna di peso 4}
$$

$0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \leftarrow 8^a$ parola.

La d_{min} è quindi 4 ed il codice può correggere fino ad un errore.

3. $y = 0011111 \Rightarrow y(D) = D^2 + D^3 + D^4 + D^5 + D^6 \Rightarrow s(D) = y(D) / g(D)$

$$
\Rightarrow
\begin{array}{ccccccc|l}
D^6 & D^5 & D^4 & D^3 & D^2 & 0 & 0 & D^4 + D^2 + D + 1 \\
\hline
D^6 & 0 & D^4 & D^3 & D^2 & & & D^2 + D \\
\hline
// & D^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & D^5 & 0 & D^3 & D^2 & D & 0 & \\
\hline
// & // & // & D^3 & D^2 & D & 0 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow s(D) = D^3 + D^2 + D \Rightarrow$ corrisponde a 3 errori NON va bene

$\Downarrow$

$s_1(D) = D\,s(D) - s_3\,g(D) = \cancel{D^4} + D^3 + \cancel{D^2} - \cancel{D^4} + \cancel{D^2} + D + 1 = D^3 + D + 1$ 3 errori

$\Downarrow$

$s_2(D) = D\,s_1(D) - s_{1,3}\,g(D) = \cancel{D^4} + \cancel{D^2} + \cancel{D} - \cancel{D^4} + \cancel{D^2} + \cancel{D} + 1 = 1$ OK 1 errore!

$\Rightarrow \hat{e}(D) = \mathrm{mod}\{D^5 s_2(D), D^6\} = D^5$

$\Rightarrow \hat{x} = y + \hat{e} = 0011111 + 0000010 = \boxed{0011101}$

ex. 3 Il codice a blocco sistematico $\mathcal{C}$ con $n = 6$ e $k = 3$ ha matrice generatrice $\boldsymbol{G}$:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Determinare la matrice di controllo di parità $\boldsymbol{H}$;
2. Trovare la d_{min} per il codice;
3. Decodificare la parola ricevuta $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e} = [1,1,1,1,1,0]$, utilizzando la decodifica a sindrome. (**2.5** punti)

1.

$$
G = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]}_{n = 6} \updownarrow K = 3 \quad
\begin{array}{c} I_3 \mid P \end{array}
\Rightarrow H = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} P^T \mid I_3 \end{array}
$$

2. Utilizzando lo stesso metodo dell'esercizio 1 si nota che tutte le colonne di H sono indipendenti e che il numero minimo di colonne lin. dipendenti è $3 \Rightarrow \boxed{d_{min} = 3}$

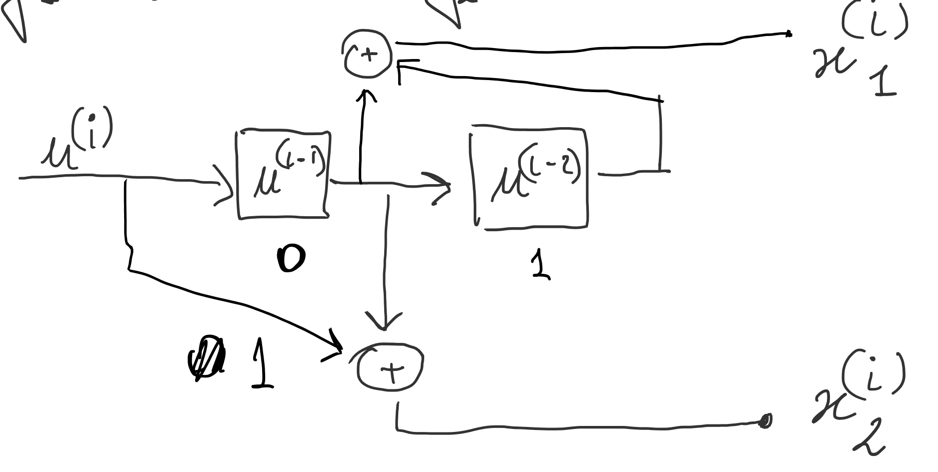
3. $y = [1\,1\,1\,1\,1\,0] \Rightarrow s = y H^T = [1\,1\,1\,1\,1\,0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1\,1\,0] \Rightarrow \hat{e} = [0\,0\,1\,0\,0\,0]$

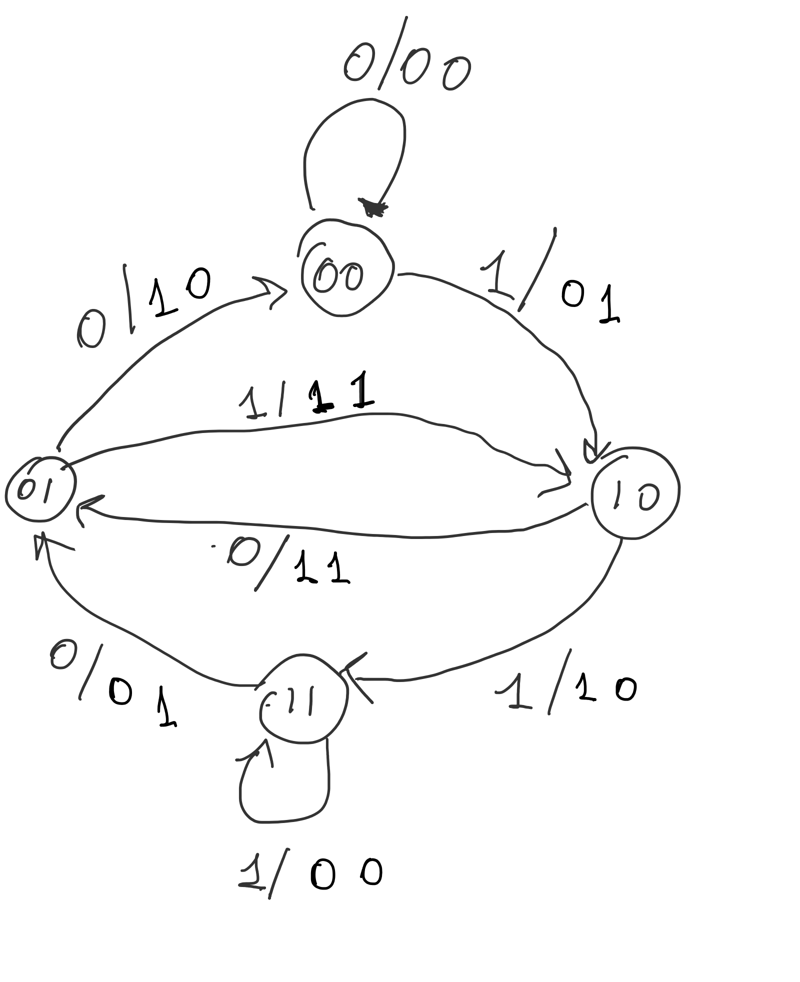
$\hat{x} = y + \hat{e} = \boxed{[1\,1\,0\,1\,1\,0]}$

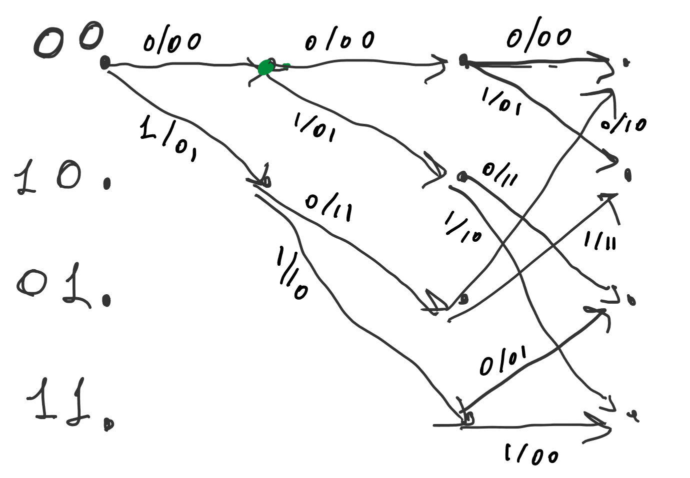
$\hat{x} = [1\,1\,0\,1\,1\,0] \Rightarrow \hat{x} H^T = [0\,0\,0]$ ok!

ex. 4. Dato il codice convoluzionale con polinomi generatori in notazione ottale $g_1 = 3$ e $g_2 = 6$, disegnare lo schema a blocchi, il diagramma di stato ed il diagramma a traliccio (fino alla completa espansione) del codificatore (**1.5** punti).

$g_1 = 3_8 = [0\,1\,1] \quad g_2 = 6_8 = [1\,1\,0] \Rightarrow L = 3$, ci sono $L - 1 = 2$ celle di memoria

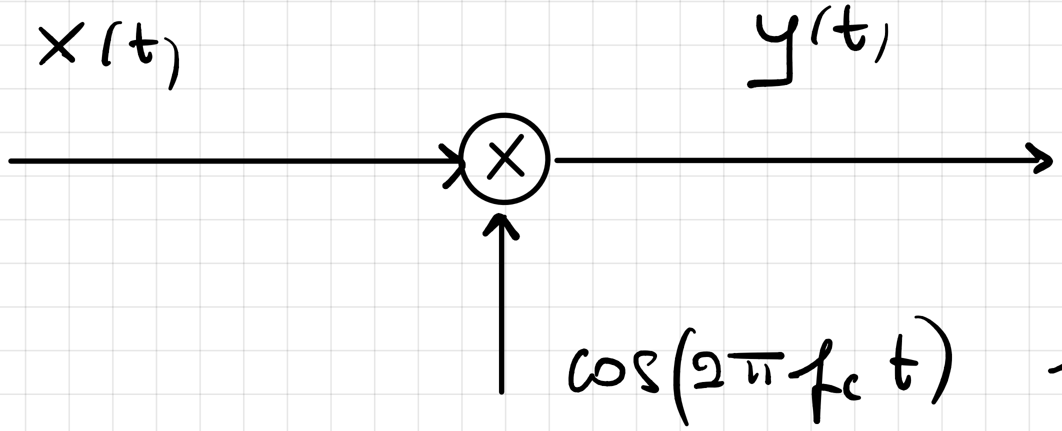




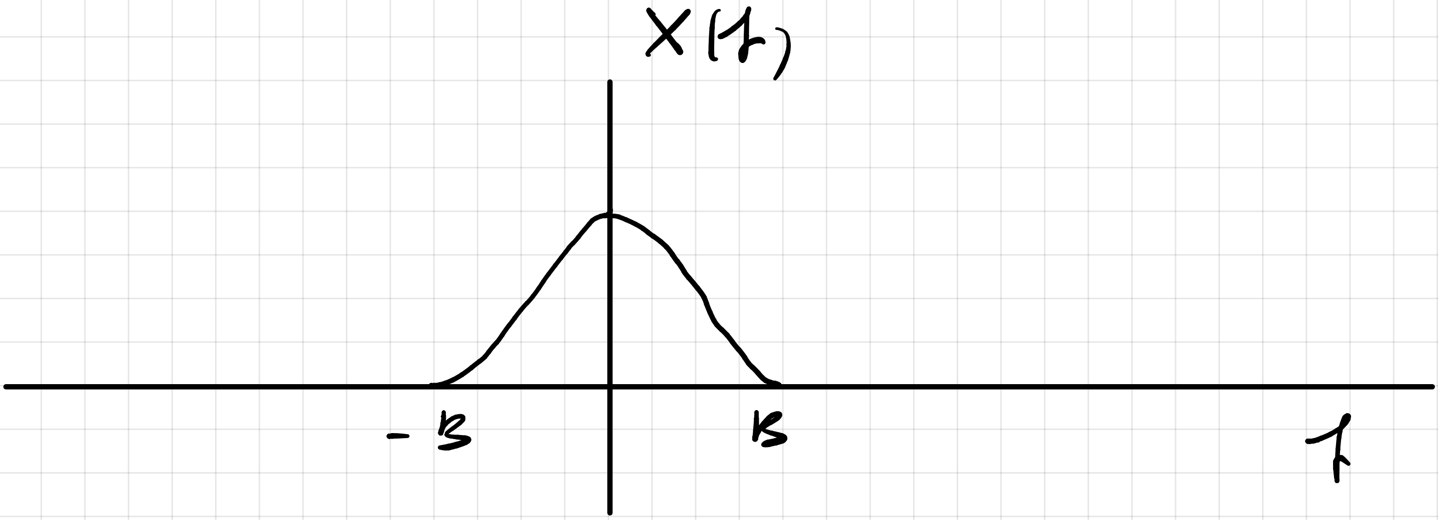


Ex. 5

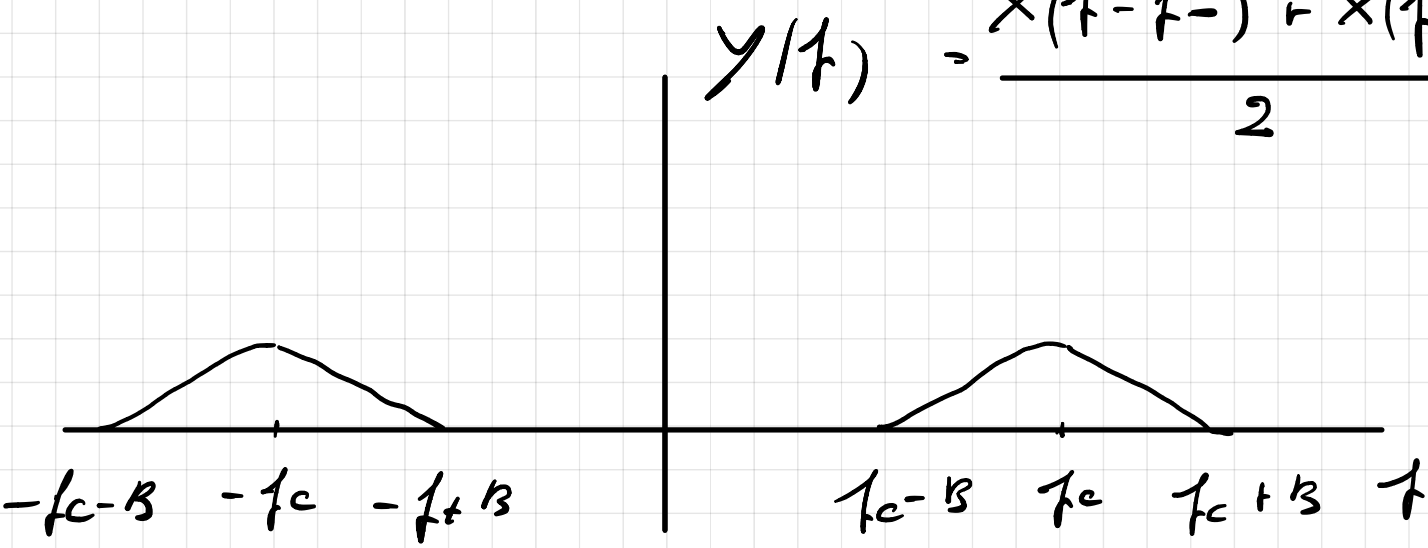
a) Modulazione del segnale $x(t)$:



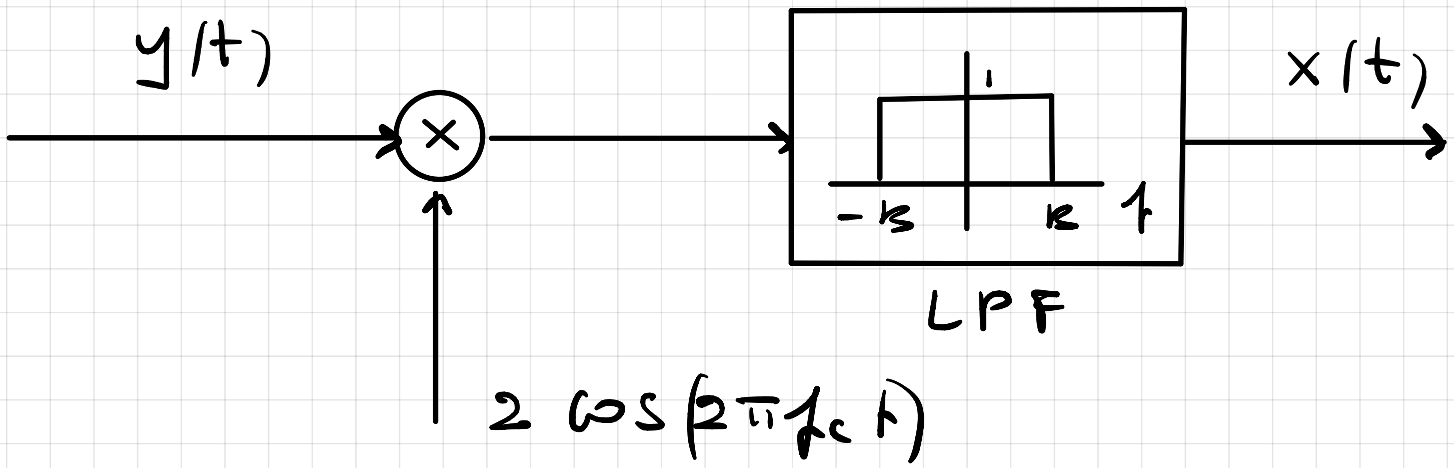
$f_c = 3\,\text{GHz}$



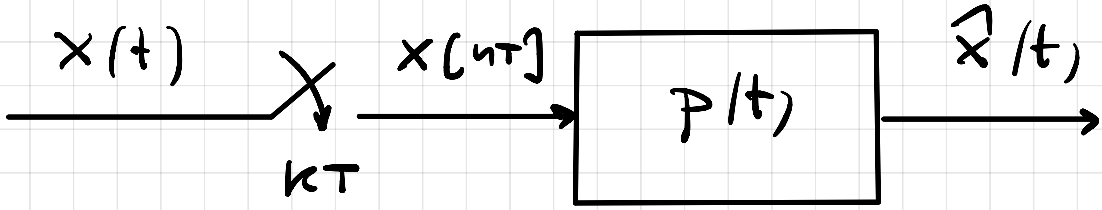
$$Y(f) = \frac{X(f-f_0) + X(f+f_0)}{2}$$



b) Demodulazione del segnale $x(t)$:



Ex. 6



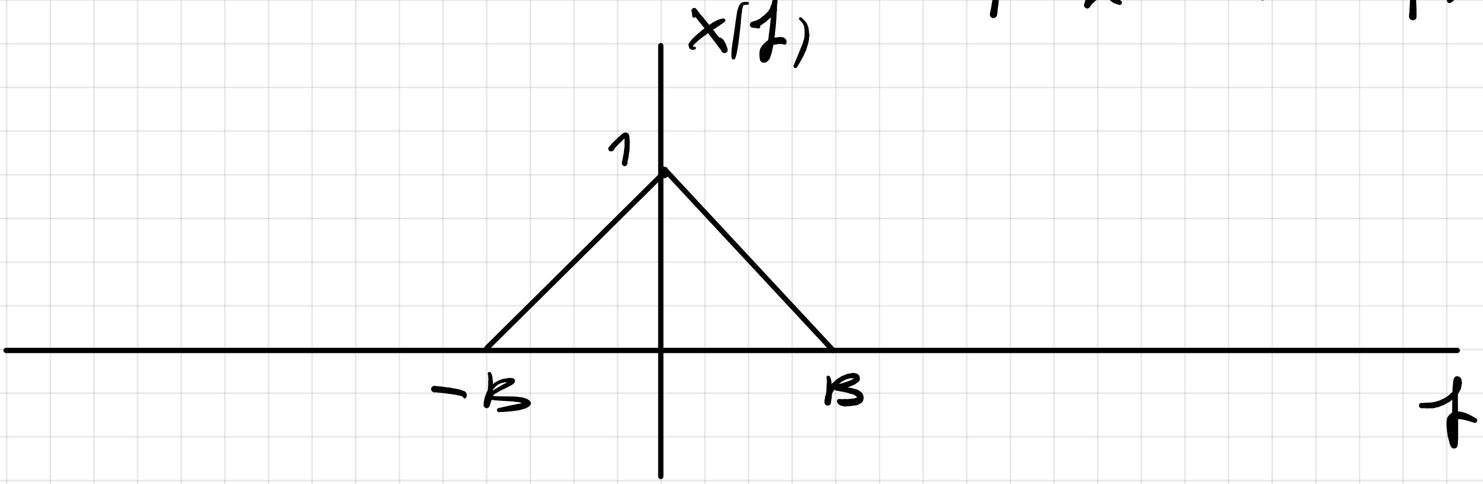
Dato un segnale $x(t)$ a banda limitata B, e campionato ad $\frac{1}{T} \geq 2B$, e' possibile ricostruire perfettamente $x(t)$ a partire dai suoi campioni utilizzando un interpolatore cardinale $p(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$

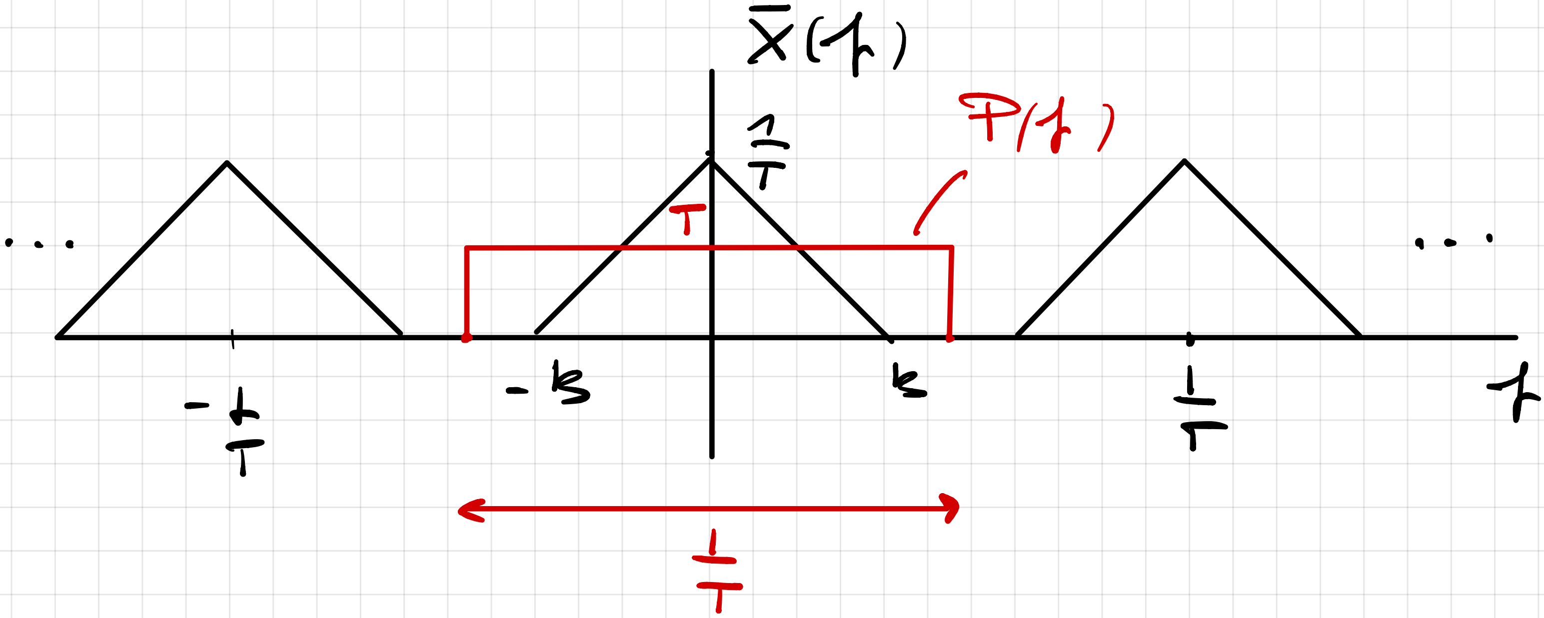
$$\hat{x}(t) = \sum_n x[nT] \, \text{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right) = x(t)$$

DIMOSTRAZIONE

Sappiamo che:

$$\bar{X}(f) = \sum_n x[nT]\, e^{-j2\pi f nT} = \frac{1}{T}\sum_k X\left(f-\frac{k}{T}\right)$$





Al fine di recuperare perfettamente $X(f)$ da $\bar{X}(f)$ e' necessario filtrare $\bar{X}(f)$ con un filtro:

$$P(f) = T\,\mathrm{rect}(fT) \rightleftharpoons p(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Ex. 7

$A = \{ \text{scelgo scatola } A \}$

$B = \{ \text{scelgo scatola } B \}$

$Pr(A) = Pr(B) = \frac{1}{2}$

$D = \{ \text{lampada difettosa} \}$

$$Pr(D) = Pr(D|A)\,Pr(A) + Pr(D|B)\,Pr(B)$$

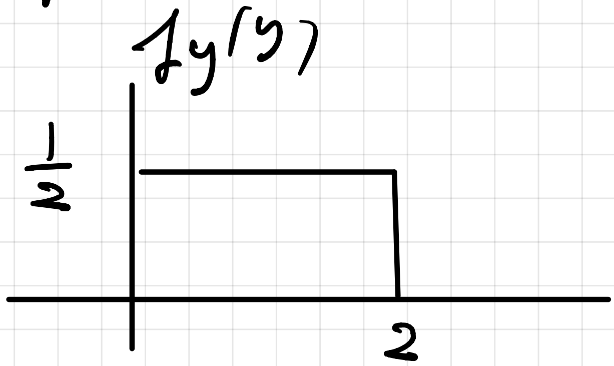
$$= 0.02 \cdot \frac{1}{2} + 0.05 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 0.035$$

Ex. 8

X e Y sono v.a. con pdf:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$$



Considériamo la v.a.:

$$Z = X + Y$$

a) $\mu_z = E\{Z\} = \mu_x + \mu_y$

$$\mu_y = \int y\, f_y(y)\, dy = \frac{1}{2}\int_0^2 y\, dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\, y^2 \Big|_0^2 = 1$$

$$\mu_x = \int x\, f_x(x)\, dx = \int_0^\infty \lambda x\, e^{-\lambda x}\, dx \overset{(*)}{=} \frac{1}{1+\lambda}$$

(*)

$$\int_0^\infty \lambda x\, e^{-\lambda x}\, dx \overset{y=\lambda x}{=} \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty y\, e^{-y}\, dy$$

Integrazione per parti $\quad \int u\, dv = uv - \int v\, du$

Definiamo $u = y$ e $dv = e^{-y}\, dy$

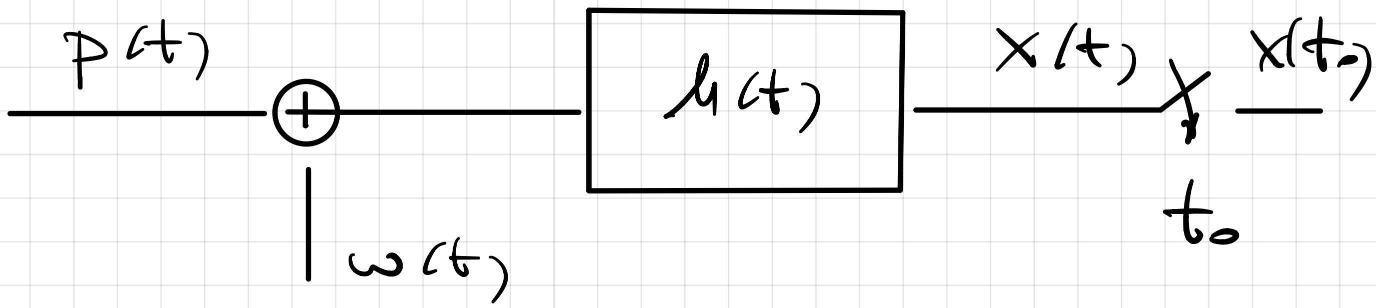
$$= \frac{1}{\lambda}\left[-y e^{-y}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-y}\, dy \right]$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[-y e^{-y}\Big|_0^\infty - e^{-y}\Big|_0^\infty \right] = \frac{1}{\lambda}.$$

b) $f_Z(z) = f_X(x) \otimes f_Y(y)$

c) $P_r(z \geq 2) = \int_{2}^{4} f_Z(z)\,dz$

Ex. 3



$$x(t) = s(t) + n(t)$$

$$SNR = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, p(t_0 - t)\, dt\right]^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\, dt}$$

$$\leq \frac{\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\, dt}\int_{-\infty}^{\infty} p^2(t_0 - t)\, dt}{\frac{N_0}{2}\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\, dt}}$$

L'uguaglianza vale per $\underline{h(t) = A\, p(t_0 - t)}$.

b) $g(t) \triangleq g_T(t) \otimes g_R(t)$

<u>Condizione di Nyquist:</u>

TEMPO: $$g(mT) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

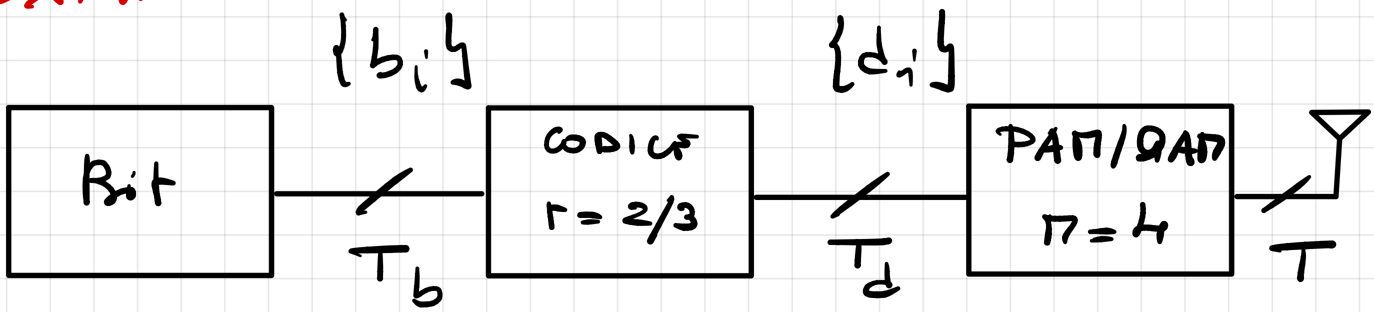
FREQUENZA: $$\bar{G}(f) = \frac{1}{T} \sum_k G\left(f - \frac{k}{T}\right) = 1$$

La condizione in frequenza ci dice che la banda B di $G(f)$ deve essere $B \geq \frac{1}{2T}$. Siccome:

$$G(f) = G_T(f)\, G_R(f)$$

la stessa condizione deve essere soddisfatta da $g_T(t)$ e $g_R(t)$.

Ex. 10



$$T = \log_2 M \, T_d = r \log_2 M \, T_b$$

$$\frac{1}{T} = \frac{R_b}{r \log_2 M} = \frac{3}{4} \cdot 10 \cdot 10^6 = 7.5 \text{ MHz}$$

a) <u>Segnale 4PAM:</u>

$$a_i \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$R_a(0) = E\{a_i^2\} = \frac{M^2-1}{3} = \frac{15}{3}$$

$$S_s(f) = \frac{1}{T} R_a(0) |G_T(f)|^2$$

$$= \frac{15}{3T} \cdot |G_T(f)|^2$$

Segnale 4QAM:

$$c_i = a_i + j b_i \qquad a_i, b_i \in \{-1, 1\}$$

$$R_C(0) = E\{|c_i|^2\} = E\{|a_i|^2\} + E\{|b_i|^2\}$$

$$= \frac{2}{3}(M-1) = 2$$

Il segnale 4QAM è modulato, per cui:

$$S_s(f) = \frac{S_{\tilde{s}}(f-f_0) + S_{\tilde{s}}(f+f_0)}{4}$$

$$S_{\tilde{s}}(f) = \frac{1}{T} R_C(0) |G_T(f)|^2 = \frac{2}{T} |G_T(f)|^2$$

b) Segnale 4PAM:

$$B_{PAM} = \frac{1+\alpha}{2T} = \frac{1+\alpha}{2} \frac{R_b}{\log_2 M} = 5.25 \text{ MHz}$$

$$\eta_{PAM} = \frac{R_b}{B} = \frac{2}{1+\alpha} \log_2 M \simeq 1.9$$

Segnale 4QAM: * Banda a radiofrequenza

$$B_{QAM} \stackrel{*}{=} 2 B_{PAM}$$

$$\eta_{QAM} = \frac{R_b}{B_{QAM}} = \frac{\eta_{PAM}}{2}$$

c) $$SEK_{PAM} = 2\frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2-1}\frac{E_d}{N_0}}\right)$$

$(M=4)$

$$= 2 Q\left(\sqrt{\frac{12}{15}\frac{E_d}{N_0}}\right)$$

$$SEK_{QAM} \simeq 4 \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M-1}\frac{E_d}{N_0}}\right)$$

$(M=4)$

$$= 2 Q\left(\sqrt{2\frac{E_d}{N_0}}\right)$$

Al fine di garantire la stessa probabilità di errore, impongo:

$$SER_{4QAM} = SER_{4PAM}$$

da cui segue

$$\cancel{2}\,\frac{E_d}{N_0}\bigg|_{4QAM} = \frac{\cancel{12}^{\,6}}{15}\,\frac{E_d}{N_0}\bigg|_{4PAM}$$

$$\frac{\left.\frac{E_d}{N_0}\right|_{4QAM}}{\left.\frac{E_d}{N_0}\right|_{4PAM}} = \frac{6}{15} = -3.97\ dB$$

RISPARMIO ENERGETICO

La 4QAM guadagna circa 4 dB rispetto alla 4PAM in termini di $\frac{E_d}{N_0}$.