Le equazioni differenziali

Introduzione al problema di Cauchy

$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^k$ e $|x|<R$: raggio di convergenza e in più $y'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$ → Voglio trovare $y(x) = y'(x)$

Come posso procedere?

- $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$
- $y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$

Uguaglio i termini dello stesso grado:

- $a_1 = a_0$
- $2a_2 = a_1 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{a_0}{2}$
- $3a_3 = a_2 \Rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a_0}{2} = \frac{a_0}{3!}$
- $4a_4 = a_3 \Rightarrow a_4 = \frac{a_3}{4} \Rightarrow a_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{a_0}{3!} = \frac{a_0}{4!}$

REGOLA GENERALE: $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_0 x^n}{n!} = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = a_0 e^x$

Che relazione c'è tra f e a_n? (e le sue derivate)

- $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$
  - POSTO $x=0$ → $y(0) = a_0$, quindi $a_0 = y(0)$
- $y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$
  - POSTO $x=0$ → $y'(0) = a_1$, quindi $a_1 = y'(0)$
- $y''(x) = 2a_2 + 6a_3 x$
  - POSTO $x=0$ → $y''(0) = 2a_2$, quindi $a_2 = \frac{y''(0)}{2!}$

REGOLA GENERALE: $a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$

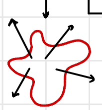
Il PROBLEMA di CAUCHY: $\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = a_0 \end{cases}$

Le EQUAZIONI DIFFERENZIALI: equazioni la cui incognita è una funzione e in cui compaiono le sue derivate

Equazioni differenziali di PRIMO GRADO

$y' = \lambda y(x)$

- Significato matematico: la derivata di y è uguale a y moltiplicato per $\lambda \in \mathbb{R}$
- Significato fisico: Equazione del decadimento radioattivo in cui la variazione (y') è proporzionale a y stesso



→ con $\lambda < 0$: $y'(x) = \lambda y(x)$ dove $x>0$ è il tempo

→ $y(x) = e^{\lambda x}$ perché $\frac{d}{dx} y(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda y(x)$

Quante soluzioni ci sono? → $y'(x) = \lambda y(x)$ $y(x) = e^{\lambda x}$

$y(x) = 2e^{\lambda x}$ $y'(x) = 2\lambda e^{\lambda x} = \lambda y(x)$

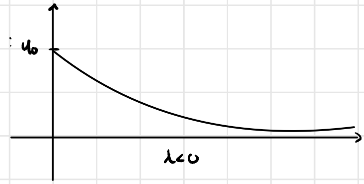
$y(x) = ce^{\lambda x}$ $y'(x) = c \cdot \lambda e^{\lambda x} = \lambda y(x)$ $\forall c \in \mathbb{R}$

$y'(t) = \lambda y(t)$ $t>0$ → $y(t) = ce^{\lambda t}$, $y(0) = ce^{\lambda 0} = c$

→ PROBLEMA di CAUCHY: $\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) & t>0 \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ → Soluzione: $y(x) = y_0 e^{\lambda t}$ se scelgo $y_0 = c$

$y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$ → MASSA al TEMPO INIZIALE

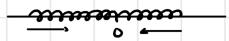
GRAFICAMENTE: y_0



$y(t) = y_0 e^{\lambda t}$

Equazioni differenziali di SECONDO GRADO

$y''(x) = -y(x)$ → Significato fisico: Molla con legge di Hooke



$a_0 = y(0)$ = posizione iniziale

$a_1 = y'(0)$ = velocità iniziale

$y(x)$ dove x è il tempo

Forza proporzionale allo spostamento → $F<0$ se $y>0$; $F>0$ se $y<0$

$y(x) \longrightarrow F = ma = my''(x)$
$= -ky(x)$ dove k è la costante della molla

Si ha quindi che: $y''(x) = \frac{-k}{m} y(x)$ e quindi $\frac{k}{m} = 1$

$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$

$y'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3$

$y''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)k a_k x^{k-2} = 2a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2$

→ $2a_2 = -a_0$ e quindi $a_2 = \frac{-a_0}{2}$

→ $6a_3 = -a_1$ e quindi $a_3 = \frac{-a_1}{3!}$

→ $12a_4 = -a_2$ e quindi $a_4 = \frac{-a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4!}$

→ $5 \cdot 4 a_5 = -a_3$ e quindi $a_5 = \frac{-a_3}{5 \cdot 4} = \frac{a_1}{5!}$

Rimangono da conoscere a_0 e a_1 per determinare coefficienti pari e dispari

Assegno a_1: $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ ($a_1 \neq 1$) $\Longrightarrow a_{2k} = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$

$a_3 = \frac{-1}{3!}$ $a_5 = \frac{1}{5!}$ $\Longrightarrow a_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \right) = a_1 \sum (-1)^{m+1} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \operatorname{sen} x$

$\frac{d^2}{dx^2} \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$ $\frac{d^2}{dx^2} (a_1 \operatorname{sen} x) = -a_1 \operatorname{sen} x$

assegno a_0: $a_0 = 1$ ($a_0 \neq 1$) e $a_1 = 0$ → $a_{2m+1} = 0$

$a_2 = \frac{-1}{2!}$ $a_4 = \frac{1}{4!}$ → $a_0 \sum (-1)^{m+1} \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} = \cos(x)$

PROBLEMA di CAUCHY:
$$\begin{cases} y''(x) = -y(x) \\ y(0) = a_0 \in \mathbb{R} \\ y'(0) = a_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$
→ Unica soluzione: $y(x) = a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen}(x)$

→ PROBLEMA di CAUCHY importante: → $\operatorname{sen}(x)$,
$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

→ DEFINIZIONE di EQUAZIONE DIFFERENZIALE: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ → GRADO = ORDINE della DERIVATA MASSIMA

→ necessarie n soluzioni iniziali per un'equazione di grado n

$$\begin{cases} F(x, y(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \quad \in \mathbb{R} \\ y'(x_0) = y_1 \quad \in \mathbb{R} \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1} \quad \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow \text{Problema di Cauchy} \longrightarrow \text{Soluzione: } y \in C^m(x_0-\delta, x_0+\delta)$$

→ EQUAZIONI RISOLVIBILI per QUADRATURA: riducibile mediante integrazione

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \quad \in C(\mathbb{R}) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \iff y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

Esempio

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 \\ y(1) = 2 \end{cases} \quad y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \longrightarrow \int_{x_0}^{x} x^2 = \frac{x^3}{3} + c$$

$$2 = \frac{1}{3} + c \longrightarrow c = \frac{5}{3}$$

→ EQUAZIONI NON RISOLVIBILI per QUADRATURA

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \qquad y: (x_0-\delta, x_0+\delta) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

→ Problema di Cauchy per una SINGOLA EQUAZIONE

→ SOLUZIONE dell'equazione: $y(x)$ è una soluzione se $y \in C^1(x_0-\delta, x_0+\delta)$
- → Regolarità: y e y' continue
- → Dominio non presenta buchi (è connesso)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\vec{z}(x) = \vec{F}(x, \vec{z}(x)) \\ \vec{z}(x_0) = \vec{z}_0 \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad \vec{z}: (x_0-\delta, x_0+\delta) \qquad \vec{F}: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

→ 1° grado: problema di cauchy per un sistema di m equazioni

Esempi

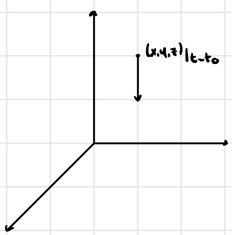
① $F = m \cdot a \qquad a = g$

$\vec{x}'(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$m\ddot{\vec{x}}(t) = -mg\,(0,0,1)$

$$\downarrow =$$

$$\begin{cases} x''(t) = 0 \\ y''(t) = 0 \\ mz''(t) = -mg \end{cases}$$



② Formula dell'oscillatore armonico

→ $y''(x) + w^2 y(x) = 0 \xrightarrow{ma = F} my''(x) = -mw^2 y(x) \longrightarrow \begin{cases} y''(x) + w^2 y(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \quad \text{(Posizione iniziale)} \\ y'(x_0) = y_1 \quad \text{(Velocità iniziale)} \end{cases}$

$z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T \qquad z_1(x) = y(x) \qquad z_2(x) = y'(x)$

$$\frac{d}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} z_1 \\ \frac{d}{dx} z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} y \\ \frac{d}{dx} y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{d}{dx}\vec{z}(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(x) \\ -w^2 y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{pmatrix}\vec{z}(x)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} z_1(x_0) = y_0 \\ z_2(x_0) = y_1 \end{cases}$$

→ Equazioni differenziali ORDINARIE (lineari)

└→ $y: (a,b) \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x)$ $a_n(x) \neq 0$ $a_n \in C(\mathbb{R})$

↓ $a_n(x) = 1$ PER CONVENZIONE

→ TEOREMA: a_n continue, f continua → esistono sempre soluzioni $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

└→ Equazione omogenea lineare: $y(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = 0$ ←

→ TEOREMA: PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE

└→ $y_1, y_2 \in C^n(\mathbb{R})$, y_1, y_2 soluzioni di $\square \Longrightarrow \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ → $y(x)$ è ancora soluzione di $\square$

Dimostrazione

Hp: $y_1^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y_1^{(k)}(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$y_2^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y_2^{(k)}(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$

Th: $y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = 0$

Dimostrazione

$$(\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x))^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \left[\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)\right]^{(k)} = (\alpha_1 y_1(x))^{(n)} + (\alpha_2 y_2(x))^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \left[(\alpha_1 y_1(x))^{(k)} + (\alpha_2 y_2(x))^{(k)}\right] =$$

$$= \alpha_1 y_1^{(n)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \left[\alpha_1 y_1^{(k)}(x) + \alpha_2 y_2^{(k)}(x)\right] = \alpha_1 y_1^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, \alpha_1 y_1^{(k)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, \alpha_2 y_2^{(k)}(x)$$

$$= \alpha_1 \underbrace{\left[y_1^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y_1^{(k)}(x)\right]}_{0} + \alpha_2 \underbrace{\left[y_2^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y_2^{(k)}(x)\right]}_{0} = 0 \longrightarrow \text{TESI}$$

Esempio

Possibile ERRORE → NON verificata la LINEARITÀ

$y_1(x) = \frac{1}{1-x}$ $y_2(x) = \frac{1}{2-x}$ $]-\infty, 1[$

$y'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = (y_1(x))^2$ $y_2'(x) = \frac{1}{(2-x)^2} = (y_2(x))^2 \longrightarrow y'(x) = (y(x))^2$

└→ $(\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x))' = \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 = \frac{\alpha_1}{(1-x)^2} + \frac{\alpha_2}{(2-x)^2} \neq y^2 = \left(\frac{\alpha_1}{1-x} + \frac{\alpha_2}{2-x}\right) = \left(\frac{\alpha_1}{1-x}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_2}{2-x}\right)^2 + DP$

→ RISOLUZIONE

└→ insieme delle soluzioni è uno SPAZIO VETTORIALE: $y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = 0$ → NECESSARIO TROVARE BASE

↓

Se equazione è a coefficienti costanti la soluzione può essere trovata ESPLICITAMENTE → COEFFICIENTI COSTANTI: $a_k(x) = a_k \quad \forall x$

↓

Equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti: $y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, y^{(k)}(x) = 0$ $a_k \in \mathbb{R}$

→ TEOREMA: Lo spazio delle soluzioni di $y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, y^{(k)}(x) = 0$ ha dimensione "n"

└→ Se posso trovare $y_1, \dots, y_n$ LINEARMENTE INDIPENDENTI → $V = \text{span}\{y_1, \dots, y_n\} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k$

↓

Definizione di INDIPENDENZA LINEARE: $v_1, \dots, v_n \in V$ linearmente indipendenti: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

└→ Essendo FUNZIONI: $C^n \ni y_1(x), \dots, y_n(x)$

$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \in \mathbb{R}$

$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \; f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

→ SOLUZIONI ESPONENZIALI di $y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}(x) = 0$

$y(x) = e^{\lambda x}, \; y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \; y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}, \dots, \; y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x} \longrightarrow \lambda^n e^{\lambda x} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k e^{\lambda x} = 0$

$\longrightarrow \left(\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k\right) e^{\lambda x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ed essendo $e^{\lambda x} \neq 0 \; \forall x \longrightarrow P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$: POLINOMIO CARATTERISTICO

$P(\lambda) = 0$: EQUAZIONE CARATTERISTICA

Esempio

$y'(x) + \alpha y(x) = 0$ con $y(x) = e^{\lambda x} \longrightarrow \lambda e^{\lambda x} + \alpha e^{\lambda x} = 0 \longrightarrow \underbrace{(\lambda + \alpha)}_{\lambda = -\alpha} e^{\lambda x} = 0$

→ EQUAZIONI DIFFERENZIALI di GRADO $m \in \mathbb{N}$ a COEFFICIENTI COSTANTI NON OMOGENEE

$y^{(m)}(x) + \sum_{n=0}^{m-1} a_n y^{(n)}(x) = f(x) \xrightarrow{\text{PIÙ PRECISAMENTE}} y^{(m)}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} a_k y^{(k)}(t) = f(t)$

TEOREMA: $y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1, \dots, \; y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1}$ (m DATI), $f \in C(\mathbb{R}) \implies \exists!\, y \in C^m(\mathbb{R})$ soluzione dell'equazione + condizioni iniziali

→ EQUAZIONE DIFFERENZIALE OMOGENEA è "CASO PARTICOLARE" in cui $f = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

Le V soluzioni sono uno SPAZIO VETTORIALE: $y(x) = e^{\lambda x}$ $\quad y^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} e^{(\lambda x)} = \lambda^k e^{\lambda x} \longrightarrow \lambda^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k \lambda^k = 0$

Esempio

$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0 \longrightarrow (\lambda^2 - 3\lambda + 2) e^{\lambda x} = 0 \iff \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, quindi $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$

→ Soluzioni: e^{2x}, e^x

Le soluzioni trovate sono indipendenti?

Esempio (Verifica precedenti soluzioni)

$\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

moltiplicando per e^{-x} entrambi i membri: $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 e^x = 0 \longrightarrow \alpha_2 e^x = -\alpha_1$

→ Se $\alpha_2 = 0$: $0 \cdot e^x = -\alpha_1 \implies \alpha_1 = 0$

→ Se $\alpha_2 \neq 0$: $e^{x} = \frac{-\alpha_1}{\alpha_2} \in \mathbb{R}$ ↓ funzione

Quindi le soluzioni sono linearmente indipendenti $\longrightarrow C^2(\mathbb{R}) \supseteq V = \text{span}\{e^x, e^{2x}\}$, $\dim V = 2$

$= \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Le soluzioni dell'equazione sono → $y(x) = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x}$ $\quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

→ $y'(x) = \alpha_1 e^x + 2\alpha_2 e^{2x}$

Le soluzioni devono adesso verificare le condizioni iniziali

Esempio (Verifica condizioni iniziali)

$$\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y(1) = \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 = 0 \\ y'(1) = \alpha_1 e^1 + 2\alpha_2 e^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_2 e^2 = 1 \\ \alpha_1 e = -\alpha_2 e^2 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_2 = e^{-2} \\ -e^2 \cdot e^{-2} = 1 \end{cases}$$

RISOLUZIONE di EQUAZIONI DIFFERENZIALI in base al Δ dell'EQUAZIONE CARATTERISTICA

- Se $\Delta>0$: $y''(x)+ay'(x)+by(x)=0 \longrightarrow \lambda^2+a\lambda+b=0$ equazione caratteristica con $\Delta>0$

  Essendo $\Delta>0$ si ha $\lambda_1\neq\lambda_2$ e quindi $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ INDIPENDENTI $\longrightarrow y(x)=\alpha_1 e^{\lambda_1 x}+\alpha_2 e^{\lambda_2 x}$ con $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$

  $= \text{Span}\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$

- Se $\Delta=0$: $y''(x)-2y'(x)+y(x)=0 \longrightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0$ equazione con $\Delta=0$

  Essendo $\Delta=0$ si ha $(\lambda-1)^2=0$ e quindi $\lambda_1=\lambda_2=1$ e quindi le soluzioni e^x ed e^x sono DIPENDENTI

  - APPROCCIO COMPLICATO: $y''(x)-(2+\varepsilon)y'(x)+y(x)=0 \longrightarrow$ Equazione caratteristica: $\lambda^2-(2+\varepsilon)\lambda+1=0$ e quindi $\Delta_\varepsilon>0$

    In questo caso si avrebbe $\lambda_{1\varepsilon}\neq\lambda_{2\varepsilon}$

  METODO RISOLUTIVO: $\lambda_1=\lambda_2\in\mathbb{R}$ $\quad y\in\text{span}\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\} \longrightarrow y(x)=\alpha_1 e^x+\alpha_2 xe^x$

- Se $\Delta<0$: IMPORTANTE RICORDARE CHE $y:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

  $y''(x)+y(x)=0 \longrightarrow \lambda^2+1=0$ Equazione caratteristica con $\Delta<0$

  Essendo che $\Delta<0$ si ha $\lambda=p\pm iq$ con $p,q\in\mathbb{R}$
  - IN QUESTO CASO: $\lambda=\pm i \longrightarrow$ Soluzioni: e^{ix}, e^{-ix}
  - CASO GENERALE: $\lambda=p\pm iq \longrightarrow$ Soluzioni: $e^{(p+iq)x}, e^{(p-iq)x}$

  $\longrightarrow$ Si ha $y(x)=z_1e^{ix}+z_2e^{-ix}$ con $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ $\xrightarrow{y \text{ REALE}} y(x)=\alpha_1\cos(x)+\alpha_2\,\text{sen}(x)$

  $\longrightarrow$ Si hanno: $e^{px}\cdot e^{iqx}$ ed $e^{px}e^{-iqx}$

  $e^{px}(\cos(qx)+\cancel{i\,\text{sen}(qx)})$ $\quad e^{px}(\underbrace{\cos(-qx)}_{=\cos(qx)}+\cancel{i\,\text{sen}(-qx)}) \longrightarrow y(x)=\alpha_1e^{px}\cos(qx)+\alpha_2e^{px}\text{sen}\,qx$

SEMPLIFICAZIONE CALCOLI: se
$$\begin{cases} y^{(m)}(x)+\sum_{k=0}^{m-1}a_k y^{(k)}(x) \\ y(x_0)=0 \\ y'(x_0)=0 \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(x_0)=0 \end{cases} \Longrightarrow y(x)\equiv 0 \text{ è l'unica soluzione}$$

Esempio

$$\begin{cases} y''(x)+3y(x)=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

$\lambda^2+3=0$

$\lambda=\pm i\sqrt{3}$

$y(x)=\alpha_1\cancel{e^{0x}}\cos(\sqrt{3}x)+\alpha_2\cancel{e^{0x}}\text{sen}(\sqrt{3}x)$ $\quad\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$

$y'(x)=-\alpha_1\,\text{sen}(\sqrt{3}x)\sqrt{3}+\alpha_2\cos(\sqrt{3}x)\sqrt{3}$

$y(0)=\alpha_1\cos(0)+\alpha_2\,\text{sen}(0)=0 \longrightarrow \alpha_1 1=0 \longrightarrow \alpha_1=0$

$y'(0)=-\alpha_1\,\text{sen}(0)\sqrt{3}+\alpha_2\cos(0)\sqrt{3} \longrightarrow 0+\sqrt{3}\alpha_2=0 \longrightarrow \alpha_2=0$

$\mathcal{L}$' OPERATORE LINEARE o DIFFERENZIALE

- Equazione lineare omogenea: $y^{(m)}(x)+\sum_{k=0}^{m-1}a_k y^{(k)}(x)=0 \longrightarrow Ax=0$ $\begin{cases} x\in\mathbb{R}^n \\ A\in\mathbb{R}^{m\times n}\end{cases}$

  $\mathcal{L}: y\longrightarrow y^{(m)}(x)+\sum_{k=0}^{m-1}a_k y^{(k)}(x)$ con $C^\infty\longrightarrow C$

  Ker $\mathcal{L}$ è uno spazio vettoriale di dimensione n

- Equazione lineare non omogenea: $y^{(m)}(x)+\sum_{k=0}^{m-1}a_k y^{(k)}(x)=f(x)$

  $\mathcal{L}[y]=f \longrightarrow Ax=f$ $\begin{cases} x,f\in\mathbb{R}^m \\ A\in\mathbb{R}^{m\times n}\end{cases}$
  - $Ax_f=f$
  - $x=x_f+x_0$ $\quad\forall x_0\in\text{Ker}\,A$

  Dove
  - y_f: Soluzione PARTICOLARE che risolve l'equazione NON omogenea
  - y_0: Soluzione del PROBLEMA OMOGENEO

$Y = y_f + y_0$ è ANCORA SOLUZIONE del PROBLEMA NON OMOGENEO

$\hookrightarrow Y^{(n)}(x) + \sum_{n=0}^{m-1} a_n Y^{(n)}(x) = y_f^{(m)} + y_0^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k y_f^{(k)} + a_k y_0^{(k)} = \underbrace{y_f^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k y_f^{(k)}}_{f} + \underbrace{y_0^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k y_0^{(k)}}_{0}$

Se y_f e z_f risolvono il problema non omogeneo si ha che $\mathcal{L}[y_f] = f$ e $\mathcal{L}[z_f] = f$ e quindi $\mathcal{L}[y_f - z_f] = 0$, concludendo che $y_f - z_f$ risolve il sistema omogeneo

→ TEOREMA di STRUTTURA: Tutte le soluzioni di $y^{(m)} + \sum_{n=0}^{m-1} a_n y^{(n)} = f$ sono nella forma $y_f + y_0$ con y_0 soluzione del PROBLEMA OMOGENEO

Esempio

$y''(x) + y(x) = 1 \longrightarrow$ equazione omogenea associata: $y''(x) + y(x) = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm i$, quindi $y(x) = \alpha_1 \cos(x) + \alpha_2 \sin(x)$

$y_f(x) = 1$

$y'_f(x) = 0$

$y''_f(x) = 0$

$y''_f + y_f = 0 + 1 = 1$ $\quad \begin{cases} y(x) = 1 + \alpha_1 \cos(x) + \alpha_2 \sin(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y(0) = 1 + \alpha_1 = 0 \\ y'(0) = \alpha_2 = 0 \end{cases}$

→ RISOLUZIONE di EQUAZIONI DIFFERENZIALI NON OMOGENEE

$\hookrightarrow y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) =$ → $P(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ dove p è un polinomio

→ $P(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Legata a numero complesso $\alpha + i\beta$

→ Se $\alpha \pm i\beta$ NON RISOLVE l'EQUAZIONE CARATTERISTICA associata al problema omogeneo → Caso SENZA RISONANZA

$\hookrightarrow y_f(x) = Q_1(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + Q_2(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ con $\deg Q_1 = \deg Q_2 = \deg P$

→ Se $\alpha \pm i\beta$ RISOLVE l'EQUAZIONE CARATTERISTICA → Caso CON RISONANZA

$\hookrightarrow y_f(x) = x^{\mu} (Q_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + Q_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x))$ con $\deg Q_1 = \deg Q_2 = \deg P$ e μ = molteplicità di $\alpha + i\beta$ come soluzione

Esempi

① $y''(x) + y(x) = x e^{2x} \cos(0x)$, quindi $\alpha = 2, \beta = 0 \longrightarrow 2 + i0$

$y_f(x) = (a_0 + a_1 x) e^{2x}$, $y'_f(x) = a_1 e^{2x} + 2(a_0 + a_1 x) e^{2x}$, $y''_f(x) = 2a_1 e^{2x} + 2a_1 2e^{2x} + (a_0 + a_1 x) 4 e^{2x}$

quindi: $2a_1 e^{2x} + 2a_1 2e^{2x} + (a_0 + a_1 x) 4e^{2x} + (a_0 + a_1 x) e^{2x} = x e^{2x} \longrightarrow \underbrace{(4a_1 + 5a_0)}_{0} e^{2x} + 5a_1 x e^{2x} = 1 x e^{2x}$

$\longrightarrow \begin{cases} 5a_1 = 1 \\ 4a_1 + 5a_0 = 0 \end{cases}$

② $y'(x) = x$ $\quad y'(x) = 0$ $\quad \lambda = 0 \longrightarrow$ equazione caratteristica

$P(x) = e^{0x} \cos(0x)$ $\quad y'(x) = 0$ $\quad \alpha_1 e^{0x} = \alpha_1$

$\hookrightarrow$ Risolve equazione caratteristica: $y'(x) = x e^{0x} \cancel{\cos(0x)}$ $\quad \lambda = 0, \mu = 1$

$y_f(x) = x^1 (a_0 + a_1 x) = a_0 x + a_1 x^2$

$a_0 + 2a_1 x = x \Longrightarrow a_0 = 0, \; a_1 = \frac{1}{2} \longrightarrow y_f(x) = \frac{x^2}{2} \longrightarrow y(x) = y_f + y_0 = \frac{x^2}{2} + \alpha_1$

→ Equazioni differenziali di grado SUPERIORE al secondo

$y^{(m)}(x) + \sum_{m=0}^{m-1} a_m y^{(k)}(x) = 0 \longrightarrow \lambda^m + \sum_{m=0}^{m-1} a_k \lambda^k = 0$ Equazione di grado m

Si ha: $\lambda_1 \; \mu_1 \; \vdots \; \lambda_m \; \mu_m$ $\longrightarrow \lambda^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k\lambda^k = (\lambda-\lambda_1)^{\mu_1}(\lambda-\lambda_2)^{\mu_2}\dots(\lambda-\lambda_m)^{\mu_m}$ con $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m = m$

↓

Lo spazio delle soluzioni ha dimensione m: $e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, x^2e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{\mu_1 - 1}e^{\lambda_1 x}$ con μ distinte

$\vdots$

$e^{\lambda_m x}, \dots\dots, x^{\mu_m-1}e^{\lambda_m x}$

Esempi

① $y^{(IV)}(x) - 2y''(x) + y(x)$

$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0 \longrightarrow$ chiamando $\lambda^2 = t$: $t^2 - 2t + 1 = 0$ e quindi $(t-1)^2 = 0 \longrightarrow t = 1$ doppia e $\lambda = \pm 1$ doppie

② $y^{(IV)}(x) + y''(x) = 0$ $\quad \lambda^4 + \lambda^2 = 0 \longrightarrow$ Grado 4 : $\lambda^2(\lambda^2+1) = 0$

→ $\lambda = 0$ con $\mu = 2$

→ $\lambda = i$ con $\mu = 1$ → 4 radici

→ $\lambda = -i$ con $\mu = 1$

Spazio soluzioni: $\{e^{0x}, xe^{0x}, e^{ix}, e^{-ix}\} \longrightarrow \{e^{0x}, xe^{0x}, \cos x, \operatorname{sen} x\}$

③ $y^{(IV)}(x) + y^{(II)}(x) = e^{2x}\cos(x) \longrightarrow \alpha + i\beta = 2 + i$

SOLUZIONE CARATTERISTICA: $y_f(x) = a_0 e^{2x}\cos(x) + b_0 e^{2x}\operatorname{sen}(x)$ $\longrightarrow y(x) = y_f + Y$

$Y(x) = C_0 + C_1(x) + C_2\cos(x) + C_3\operatorname{sen}(x)$

④ $y^{(IV)}(x) + y^{(II)}(x) = x\operatorname{sen}x \longrightarrow \alpha + i\beta = 0 + i$: RISONANZA: risolve l'equazione caratteristica con molteplicità 1

SOLUZIONE CARATTERISTICA: $y_f(x) = x\left((a_0 + a_1x)\operatorname{sen}x + (b_0 + b_1x)\cos x\right)$

→ Risoluzione delle equazioni differenziali con PIÙ FUNZIONI al SECONDO MEMBRO

Esempio

$y' - 3y = \underline{(x+1)e^x} + \underline{(x^2-1)e^{3x}}$

$f_1 + f_2$

$Ax = f = f_1 + f_2$

$Axf_1 = f_1$

$Axf_2 = f_2$

$A(xf_1 + xf_2) = Axf_1 + Axf_2 = f_1 + f_2$

Equazione omogenea associata: $y' - 3y = 0$

$\lambda - 3 = 0$

$y_0 = ce^{3x}$

→ $y'f_1 - 3yf_1 = (x+1)e^x$ $\quad \alpha + i\beta = 1 + 0i \longrightarrow$ NO risonanza

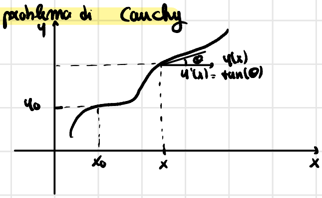
$yf_1 = (a_0 + a_1x)e^x$

→ $y'f_2 - 3yf_2 = (x^2-1)e^{3x}$

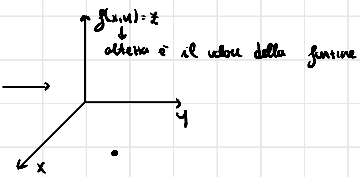
$yf_2 = x(b_0 + b_1 + b_2x^2 + b_3x^3)e^{3x}$

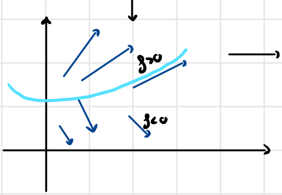
→ Interpretazione geometrica del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



→





$\longrightarrow$ ELEMENTI
- **frecce**: funzione $\longrightarrow$ ne indicano segno e valore
- **curva**: soluzione del problema $\longrightarrow$ tangente $\forall$ punto

$\longrightarrow$ Utilizzo problema di Cauchy: una volta assegnata una derivata nel punto x_0, è possibile calcolare le derivate di ordini superiori in x_0

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \forall x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$$

$\quad \longrightarrow$ Sostituendo x_0 nella prima riga: $y'(x_0) = f(y(x_0)) = f(y_0)$ $\longrightarrow$ automaticamente è stata assegnata anche la derivata prima

Derivando di nuovo: $\frac{d}{dx} y'(x) = (f(y(x)))' \longrightarrow y''(x) = f'(y(x)) \cdot y'(x) \overset{\text{Essendo } y \text{ soluzione}}{=} f'(y(x)) \cdot f(y(x))$

$\quad \xrightarrow{\text{in } x_0} y''(x_0) = f'(y(x_0)) f(y(x_0)) = f'(y_0) f(y_0) \longrightarrow$ Se si conosce il valore della funzione in x_0, si conosce anche la derivata II

$\longrightarrow$ La DIPENDENZA CONTINUA dai DATI: se i dati iniziali variano poco, la soluzione varia di poco

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = 1 + \varepsilon \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$y(t) = A\cos(t) + B\,\text{sen}(t)$, $y'(t) = -A\,\text{sen}(t) + B\cos(t)$

Condizioni
- $\varepsilon + 1 = y(0) = A \cdot 1 + 0 \longrightarrow A = 1 + \varepsilon \longrightarrow y(t) = \cos(t) + \text{sen}(t)$
- $1 = y'(0) = 0 + B \longrightarrow B = 1$

$\longrightarrow$ Aggiungendo ε: $y_\varepsilon(t) = (1+\varepsilon)\cos t + \text{sen}\, t \longrightarrow \begin{cases} y_\varepsilon''(t) + y_\varepsilon(t) = 0 \\ y_\varepsilon(0) = 1+\varepsilon \\ y_\varepsilon'(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow$ Dipendenza continua: ✓

$\longrightarrow$ Le equazioni differenziali NON LINEARI con UNA o PIÙ SOLUZIONI

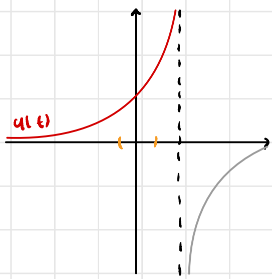
$$\begin{cases} y'(t) = (y(t))^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Scelta: $y(t) = \frac{1}{1-t} = (1-t)^{-1} \longrightarrow$ Non lineare

$y'(t) = -(1-t)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1-t)^2} = \left(\frac{1}{1-t}\right)^2 \qquad y(0) = \frac{1}{1-0} = 1$

$t \to 1^-$ se $y(t) \to +\infty$

Soluzione: $y \in C^1(t_0-\delta, t_0+\delta) \longrightarrow$ Dom $y =]-\infty, 1[\subsetneq \mathbb{R}$

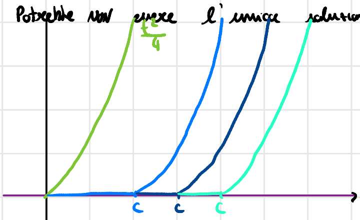


$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|} \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow y \text{ crescente e } y(0) = 0 \Longrightarrow y(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0$$

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow y(t) \equiv 0 \quad \text{RISOLVE il problema}$$

$y' \equiv 0$

Potrebbe NON essere l'unica soluzione del problema
- PROVA 1: $z(t) = t^2$, $z(0) = 0$; $z' = 2t$, $\sqrt{z} = t$ ✗ : $z'(t) \neq \sqrt{z}$
- PROVA 2: $z(t) = \frac{t^2}{4}$, $z(0) = 0$; $z'(t) = \frac{1}{2}t$, $\sqrt{z} = \frac{1}{2}t$: ✓



a piacere

FENOMENO di PEANO (buffo)

$w(t) = \begin{cases} 0 & t \le c \\ \frac{(t-c)^2}{4} & t \ge c \end{cases}$ $\quad w' = \begin{cases} 0 & t \le c \\ \frac{t-c}{2} & t > c \end{cases}$ $\quad \sqrt{w} = \begin{cases} 0 & t \le c \\ \frac{t-c}{2} & t > c \end{cases}$ ✓

COME vedere se la SOLUZIONE è UNICA

$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \longrightarrow$ CONDIZIONI

- f continua: esiste almeno una soluzione
- $\frac{\partial f}{\partial y}$ limitata: esiste solo una soluzione per t vicino a t_0
  - derivata rispetto a y

Esempi: problemi precedenti

① $y'(t) = f(y(t)) = (y(t))^2 \qquad f(t,y) = y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \longrightarrow 1$ soluzione

② $y'(t) = f(y(t)) = \sqrt{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \xrightarrow{y \to 0} +\infty$: NON LIMITATA $\longrightarrow$ più soluzioni

Le EQUAZIONI a VARIABILI SEPARABILI

$\frac{dy}{dt} = f(t)\, g(y(t)) \xrightarrow{\text{Risoluzione}} \frac{dt}{g(y(t))} \frac{dy}{dt} = f(t) \frac{g(y(t))}{g(y(t))} dt \xrightarrow{\text{Sep. Variabili}} \frac{dy}{g(y)} = f(t)\,dt \xrightarrow{\text{Integrazione}} \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)\,dt$

$\longrightarrow$ quindi $G' = \frac{1}{g}$, $F' = f \longrightarrow G(y) = F(t) + c$, $y = G^{-1}(F(t)+c)$

Esempi

① $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \sqrt{y} \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad f(t) = 1 \quad g(y) = \sqrt{y} \longrightarrow \frac{dy}{dt} = \sqrt{y} \longrightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = 1\,dt \longrightarrow \underbrace{\int \frac{dy}{\sqrt{y}}} = \underbrace{\int dt}$

$\longrightarrow \int y^{-1/2}\,dy = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} y^{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{y}$

$\longrightarrow \int 1\,dt = t + c$

$\Longrightarrow 2\sqrt{y} = t + c \longrightarrow \sqrt{y} = \frac{t+c}{2}$

trovo c: $1 = y(1) \longrightarrow \frac{(1+c)^2}{4} = 1 \longrightarrow 1 + c = 2 \longrightarrow c = 1$

② $\begin{cases} y'(t) = t^2(1+y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad f(t) = t^2 \quad g(y) = 1 + y^2 \longrightarrow \frac{dy}{dt} = t^2(1+y^2) \longrightarrow \frac{dy}{1+y^2} = t^2\,dt \longrightarrow \underbrace{\int \frac{dy}{1+y^2}} = \underbrace{\int t^2\,dt}$

$\longrightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y$

$\longrightarrow \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + c$

$\Longrightarrow \arctan y = \frac{t^3}{3} + c \longrightarrow y = \tan\left(\frac{t^3}{3} + c\right)$

$\longrightarrow 1 = \tan(0 + c) \longrightarrow c = \frac{\pi}{4}$