

Soluzioni prova scritta

Ingegneria Informatica 04/06/2025



Esercizio 1

Il primo quesito consiste in 2 **domande a risposta aperta** da 1 punto ciascuna. Per i quesiti 2, 3 e 4 ci si deve esprimere sulla **correttezza o falsità di 6 affermazioni**. Si ottengono 0, 1 e 2 punti in base al numero di risposte corrette, errori o risposte in bianco, secondo lo schema:

6 corrette \rightarrow 2 punti
5 corrette + 1 errore \rightarrow 1 punto
5 corrette + 1 bianca \rightarrow 1 punto
4 corrette + 2 bianche \rightarrow 1 punto
Tutti gli altri casi \rightarrow 0 punti

1. 2 Punti Sia $I \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ la matrice identità e $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ una matrice con autovalori

$$\lambda_1 = -1 + \mathbf{i}, \quad \lambda_2 = -1 + \frac{1}{2}\mathbf{i}, \quad \lambda_3 = 3.$$

La **traccia** della matrice $A^2 + I$ è $\frac{51}{4} - 3\mathbf{i}$

Il **raggio spettrale** della matrice $(I + A)^{-1}$ è 2

2. 2 Punti Siano $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{C}^n$, $y \in \mathbb{C}^m$, **con** $m > n$, allora:

- V F Il calcolo di Ax in floating point è affetto da errore algoritmico.
- V F Il calcolo di Ax in floating point è affetto da errore analitico.
- V F Calcolare Ax costa $\mathcal{O}(n^2)$.
- V F Calcolare $y^H Ax$ (nel modo più efficiente possibile) costa $\mathcal{O}(mn)$.
- V F Calcolare Axy^H (nel modo più efficiente possibile) costa $\mathcal{O}(mn)$.
- V F Calcolare $xy^H A$ (nel modo più efficiente possibile) costa $\mathcal{O}(mn)$.

- N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire **chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi 2, 3 e 4.**

3. 2 Punti Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

☐ ☒ F A è riducibile.

☒ ☐ F Il grafo di A è fortemente connesso.

☒ ☐ F A è a predominanza diagonale debole.

☐ ☒ F A è a predominanza diagonale forte.

☒ ☐ F Per ogni vettore $b \in \mathbb{C}^4$, il metodo di Gauss Seidel sul sistema $Ax = b$ è convergente.

☒ ☐ F Per ogni vettore $b \in \mathbb{C}^4$, il metodo di Jacobi sul sistema $Ax = b$ è convergente.

4. 2 Punti Si consideri una generica formula di quadratura del tipo

$$a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) \approx \int_a^b f(x) \rho(x) dx,$$

e indichiamo con $m \in \mathbb{N}$ il suo grado di precisione.

☒ ☐ F Se $m = 2$ allora la formula di quadratura è interpolatoria.

☒ ☐ F Se $m = 3$ allora la formula di quadratura è interpolatoria.

☐ ☒ F Se i pesi a_j sono dati, trovare i nodi x_j per cui m è massimo richiede di risolvere un sistema lineare.

☐ ☒ F Se i nodi x_j sono dati, trovare i pesi a_j per cui m è massimo richiede di risolvere un sistema non lineare.

☒ ☐ F Se $m \geq 1$ e $\rho(x) \neq 1$ allora $\int_a^b x \rho(x) dx = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$.

☐ ☒ F Se $m = 2$ e $\rho(x) = 1$ allora $\int_a^b x^{\frac{3}{2}} dx = a_0 x_0^{\frac{3}{2}} + a_1 x_1^{\frac{3}{2}} + a_2 x_2^{\frac{3}{2}}$.

Esercizio 2

Dati $k + 1$ punti di interpolazione $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$, con $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, il polinomio interpolante nella base Lagrange si scrive come

$$L_k(x) = \sum_{j=0}^k y_j \cdot \ell_j(x),$$

dove

$$\ell_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

- (i) 5 Punti Si implementi, **utilizzando al massimo un ciclo for o while**, una funzione Matlab `valuta_lj` che prende in ingresso

- il vettore x di lunghezza $k + 1$ contenente i nodi dell'interpolazione,
- un intero $j \in \{0, \dots, k\}$,
- un vettore v di lunghezza arbitraria,

e restituisce un vettore w , di lunghezza uguale a quella di v , contenente le valutazioni del polinomio $\ell_j(x)$, sui punti contenuti in v .

- (ii) 3 Punti Supponendo di avere a disposizione la funzione `valuta_lj`, si implementi una funzione `valuta_lagrange` che prende in ingresso

- il vettore x di lunghezza $k + 1$ contenente i nodi dell'interpolazione,
- una function handle f che rappresenta la valutazione di una funzione da $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- un vettore v di lunghezza arbitraria,

e restituisce un vettore w , di lunghezza uguale a quella di v , contenente le valutazioni del polinomio interpolante $L_k(x)$ rispetto ai nodi $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_k, f(x_k))$, nei punti contenuti in v .

- (i) `function w = valuta_lj(x, j, v)`
 `n = length(v);`
 `w = zeros(n, 1);`

```

        z = x([1:j, j+2:n]);
        for i = 1:n
            w(i) = prod((v(i) - z) ./ (x(j+1) - z));
        end
    end
end

```

```

(ii) function w = valuta_lagrange(x, f, v)
    n = length(x);
    w = zeros(size(v));
    for j = 1:n
        w = w + f(x(j)) * valuta_lj(x, j-1, v);
    end
end

```

Esercizio 3

Sia data la tabella di valori

x	0	$\frac{\pi}{4}$	π
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.8

e si consideri il problema di determinare la funzione di miglior approssimazione di $f(x)$, nel senso dei minimi quadrati, ottenuta come combinazione lineare delle funzioni modello

$$\varphi_0(x) = \sin(x), \quad \varphi_1(x) = \cos\left(x + \alpha \frac{\pi}{2}\right),$$

al variare del parametro $\alpha \in [0, 3]$.

- (i) 2 Punti Si determini per quali valori di α la soluzione esiste ed è unica e per quali valori di α la soluzione esiste ma non è unica.
- (ii) 6 Punti Per i valori di α per cui **la soluzione esiste ma non è unica**, si determini la soluzione di minima norma, ovvero la funzione della forma $c_0 \sin(x) + c_1 \cos(x + \alpha \frac{\pi}{2})$ che risolve il problema ai minimi quadrati e per cui il vettore $[c_0, c_1]$ ha la norma 2 minima.

Si ricorda che:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}, & \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}, & \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}, & \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

- (i) La soluzione esiste ed è unica quando $\alpha \neq 1, 3$ ed esiste ma non è unica quando $\alpha \in \{1, 3\}$.
- (ii) Per $\alpha = 3$, la soluzione di minima norma è

$$\frac{1}{2} \sin(x) + \frac{1}{2} \cos\left(x + \alpha \frac{\pi}{2}\right),$$

per $\alpha = 1$ la soluzione di minima norma è

$$\frac{1}{2} \sin(x) - \frac{1}{2} \cos\left(x + \alpha \frac{\pi}{2}\right).$$