Tensione

Consideriamo ora un sistema composto da un blocco connesso a un filo. Il filo viene tirato all'estremità. Supponiamo inoltre che il filo abbia massa trascurabile e sia inestensibile. Il sistema è in equilibrio (fermo o si muove con velocità costante)

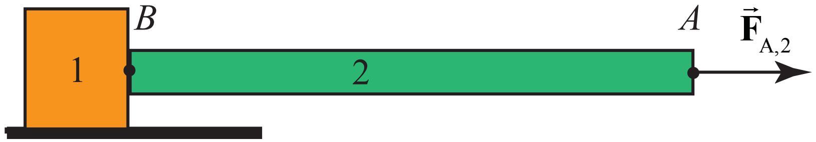


Diagramma delle forze per il sistema. La forza $\vec{f}$ è necessaria perché il sistema sia in equilibrio:

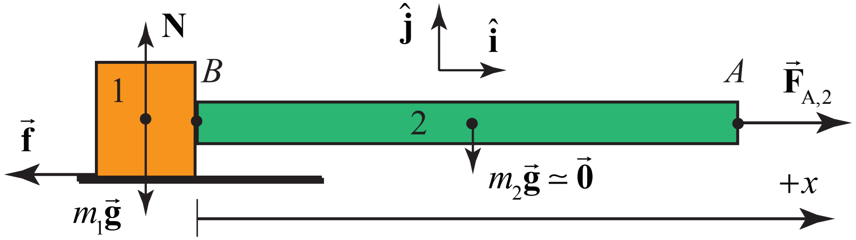
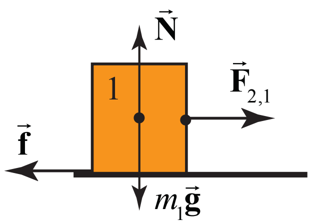
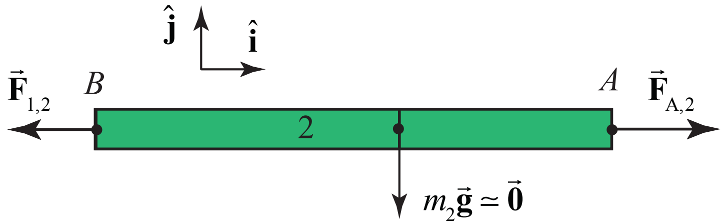


Diagramma delle forze per i singoli costituenti del sistema:





$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{A,2} = 0$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{A2}$$

EQ. FILO

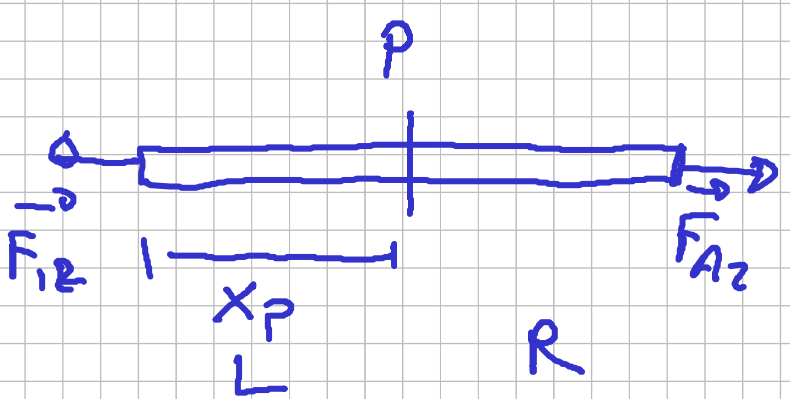
$$\vec{F}_{21} + \vec{P} = 0 \qquad \vec{F}_{21} = -\vec{P}$$

EQ. BLOCCO

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

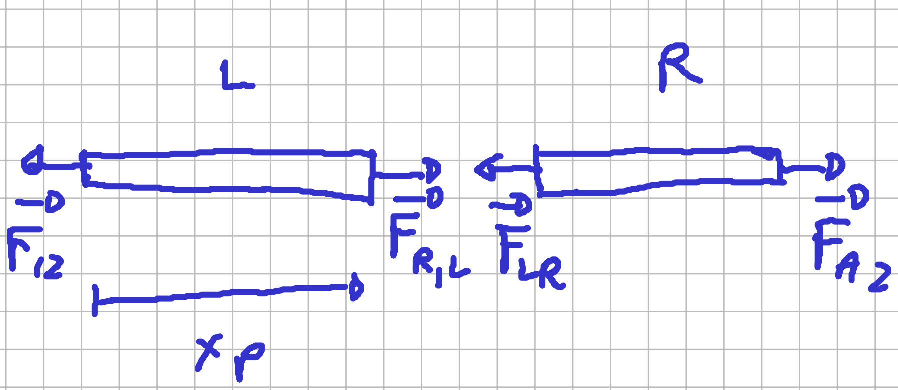
$$\vec{P} = -\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{A2}$$

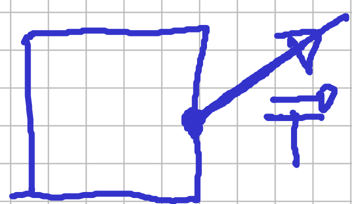
LA FORZA È TRASMESSA TRAMITE IL FILO

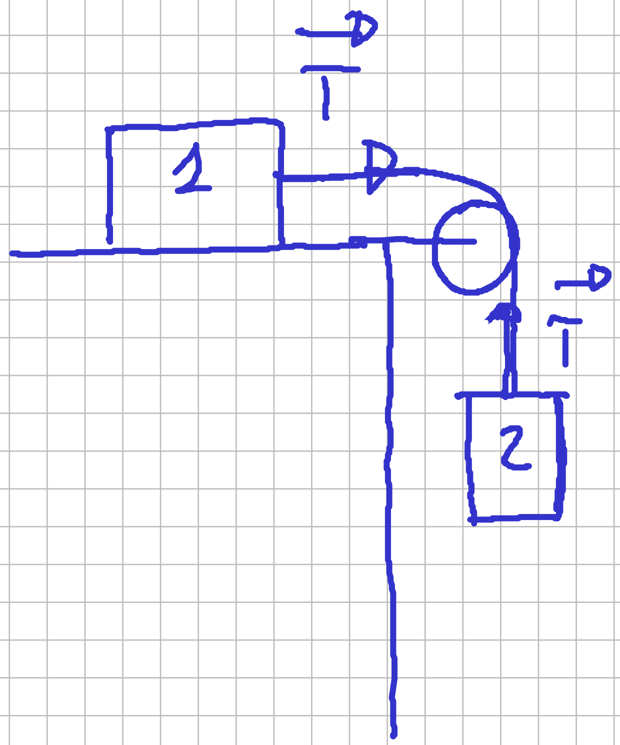


TENSIONE IN P:

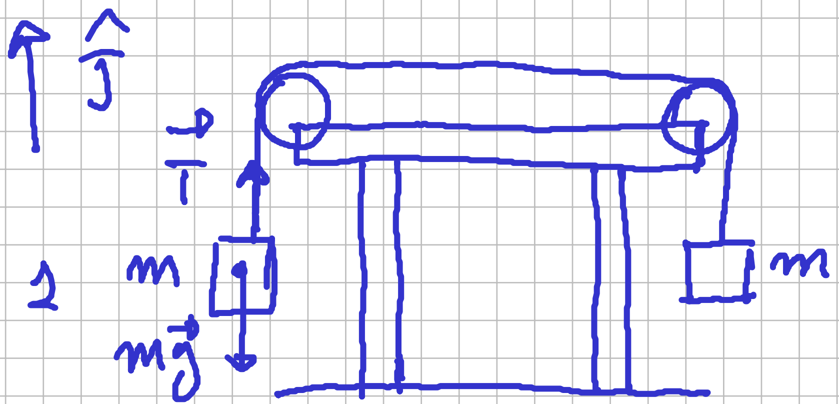
$$T(x_P) = |\vec{F}_{RL}(x_P)| = |\vec{F}_{LR}(x_P)|$$







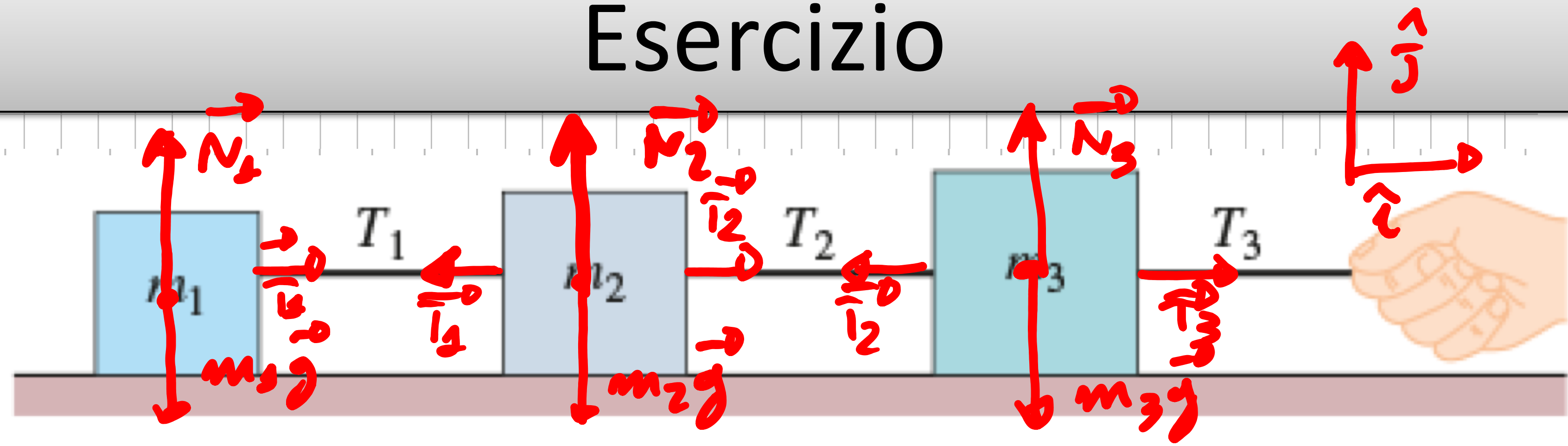
mg



$$\vec{T} + m\vec{g} = 0$$

$$T = mg$$

Esercizio



Il sistema in figura è tirato con un filo sul quale è applicata la tensione T_3. I blocchi sono uniti con fili e tutti i fili sono inestensibili e di massa trascurabile.

Calcolare:

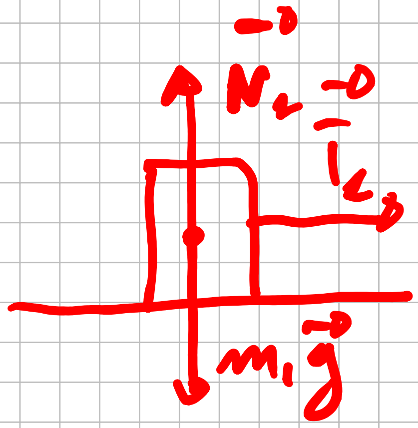
- L'accelerazione del sistema
- Le tensioni T_1 e T_2

$$m_{sist} = m_1 + m_2 + m_3$$

$$\vec{T}_3 = m_s \, \vec{a}_s \qquad T_3 = m_{tot} \, a$$

$$a = \frac{T_3}{m_{tot}} = \frac{T_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

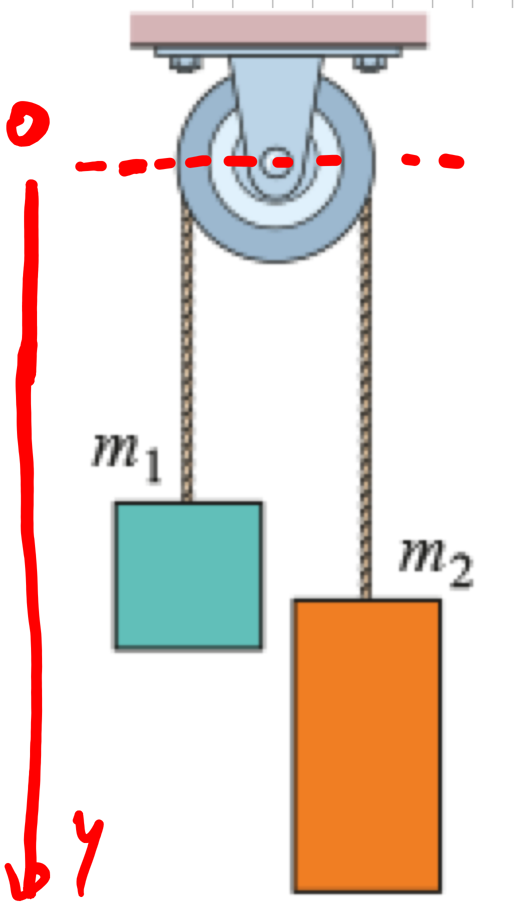
Blocco 1



$$T_1 = m_1 a_1 = m_1 a$$

$$T_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2+m_3} \, T_3$$

Esercizio: Macchina di Atwood



Carrucola priva di attrito e di massa. Filo inenstensibile privo di massa.

- Calcolare l'accelerazione dei blocchi.

$\hat{j}$

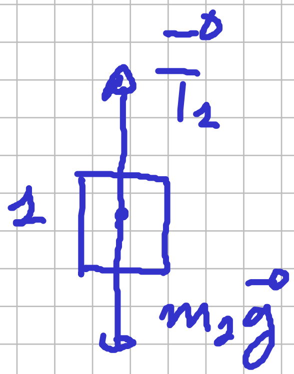
L = LUNGHEZZA DEL FILO

R = RAGGIO CARRUCOLA

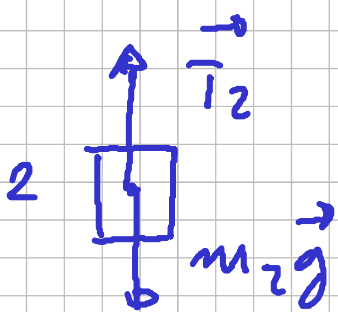
$$y_1 + y_2 + \pi R = L$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{d^2 y_2}{dt^2} = 0 \qquad a_1 = -a_2$$

$$a_1 = a \qquad a_2 = -a$$



$$m_1 g - T_1 = m_1 a$$



$$m_2 g - T_2 = -m_2 a$$

$$T_1 = T_2 = T$$

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a & (1) \\ m_2 g - T = -m_2 a & (2) \end{cases}$$

(1) − (2)

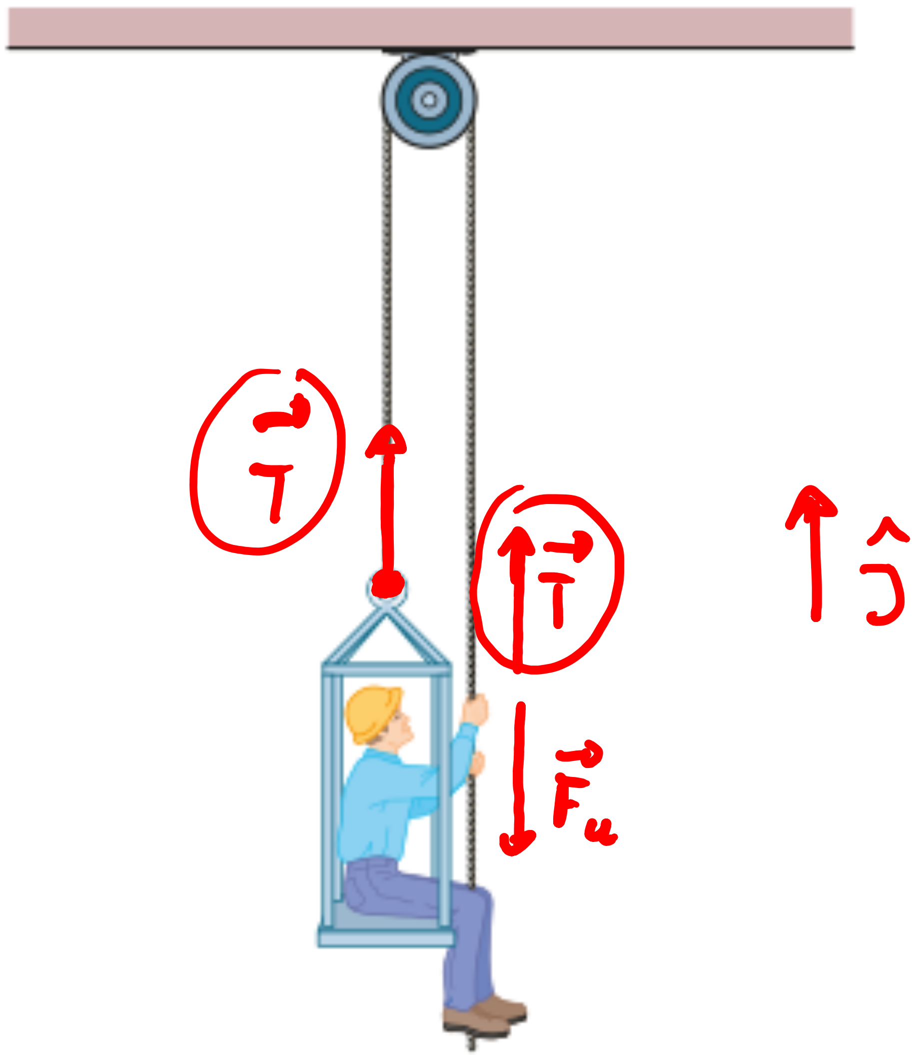
$\Rightarrow$ $$(m_1 - m_2) g = (m_1 + m_2) a$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2}$$

$m_1 > m_2$ $\quad a > 0 \quad a_1 > 0 \quad a_2 < 0$

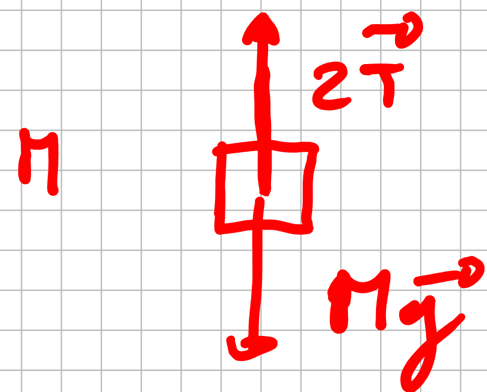
$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Esercizio



- Mostrare che un uomo seduto su un seggiolino, utilizzando una carrucola, può salire verticalmente applicando una forza inferiore al suo peso più quello del seggiolino.

- Calcolare l'accelerazione in funzione della forza esercitata.

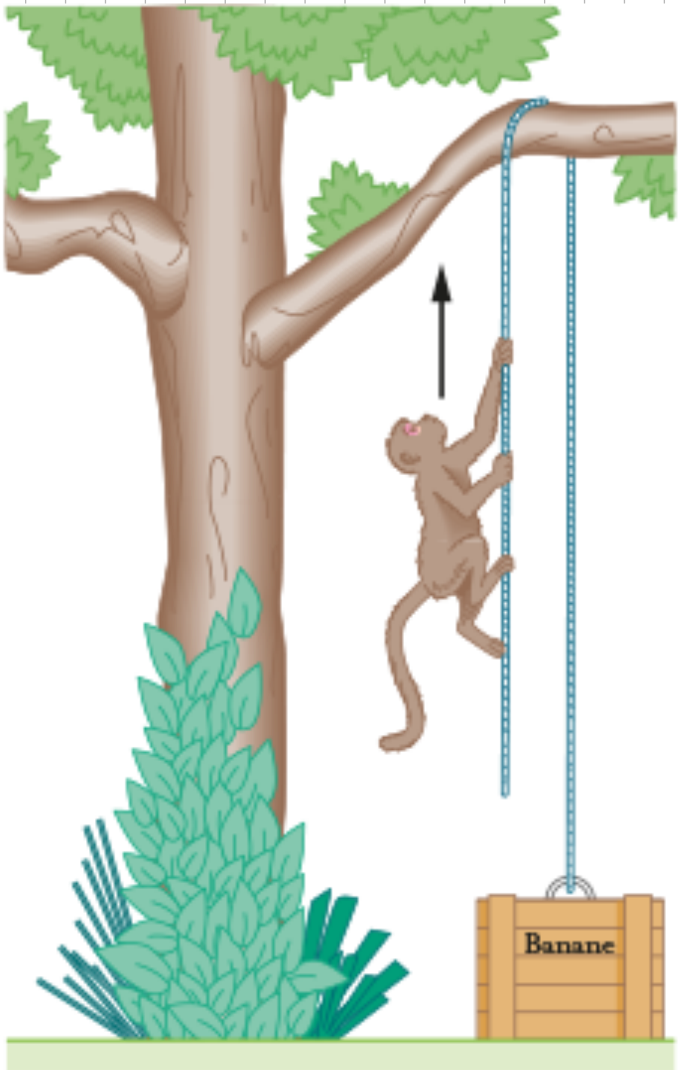


EQ. VET: $2\vec{T} + M\vec{g} = 0$

$T = \frac{Mg}{2}$

EQ. SCAL. $2T - Mg = 0$

Esercizio



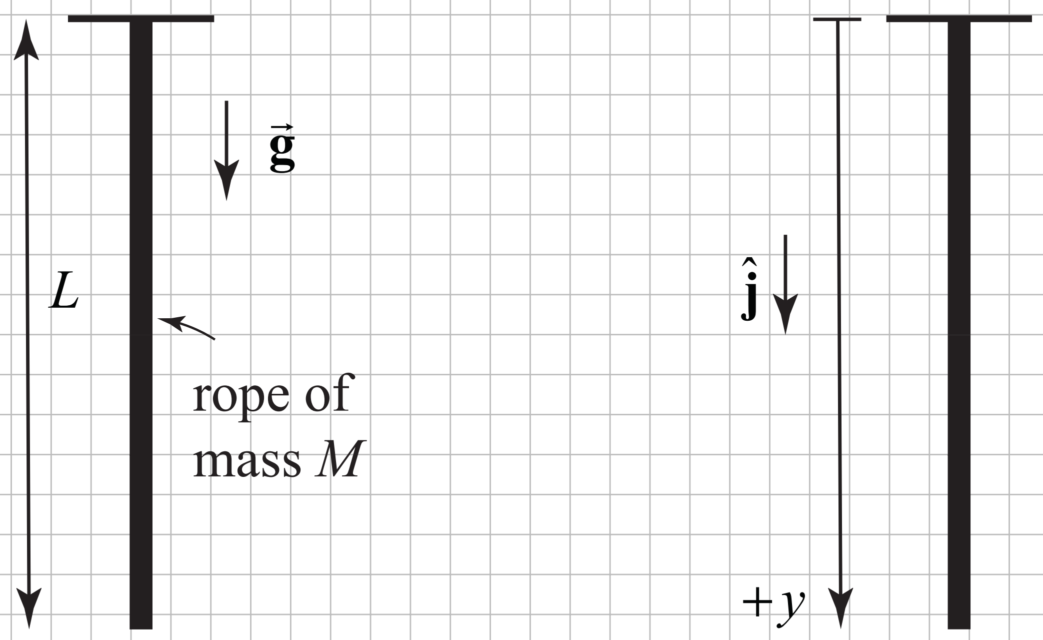
Calcolare la massima accelerazione che può avere la scimmietta (di massa m_s) senza che la cassa (di massa M_c) si sollevi dal suolo.

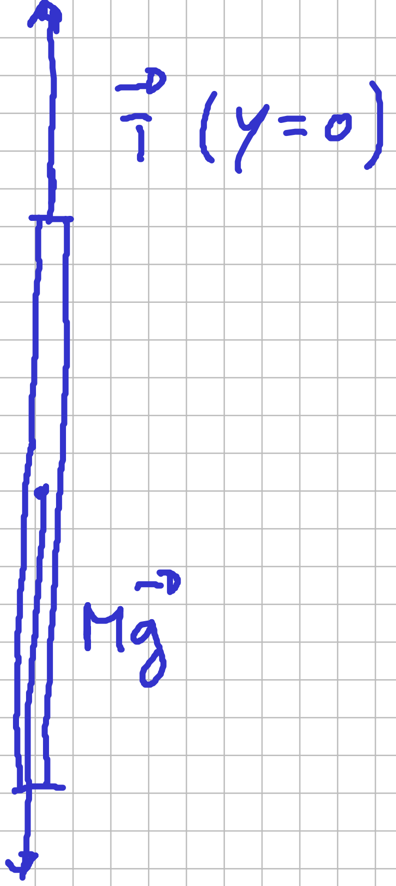
Esercizio

Una corda uniforme di massa M e lunghezza L è sospesa al soffitto. Il modulo dell'accelerazione di gravità è g.

(a) Trovare la tensione nella corda nell'estremità superiore, dove la corda è fissata al soffitto.

(b) Trovare la tensione nella corda come funzione della distanza dal soffitto.

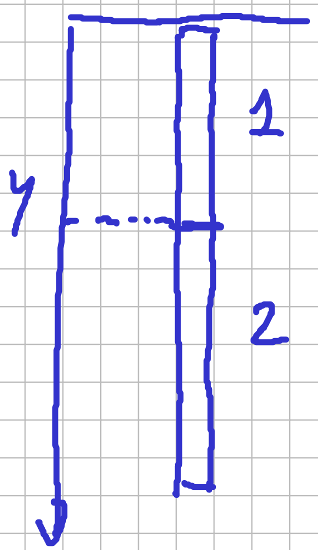


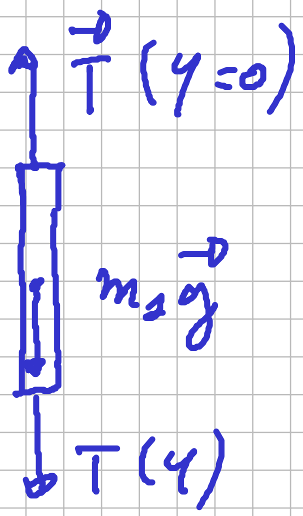


EQUILIBRIO

$$Mg - T(y=0) = 0$$

$$T\,(y=0) = Mg$$





$$m_1 g - T(y=0) + T(y) = 0$$

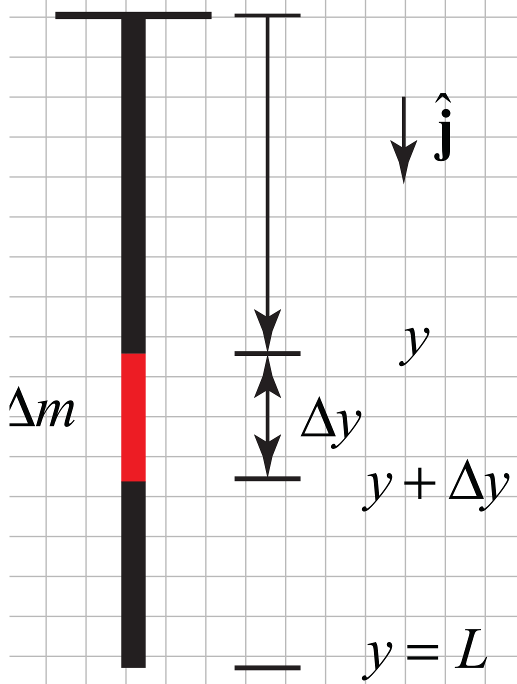
$$m_1 = \frac{M}{L}\, y$$

$$\frac{M}{L}\, y\, g - Mg + T(y) = 0$$

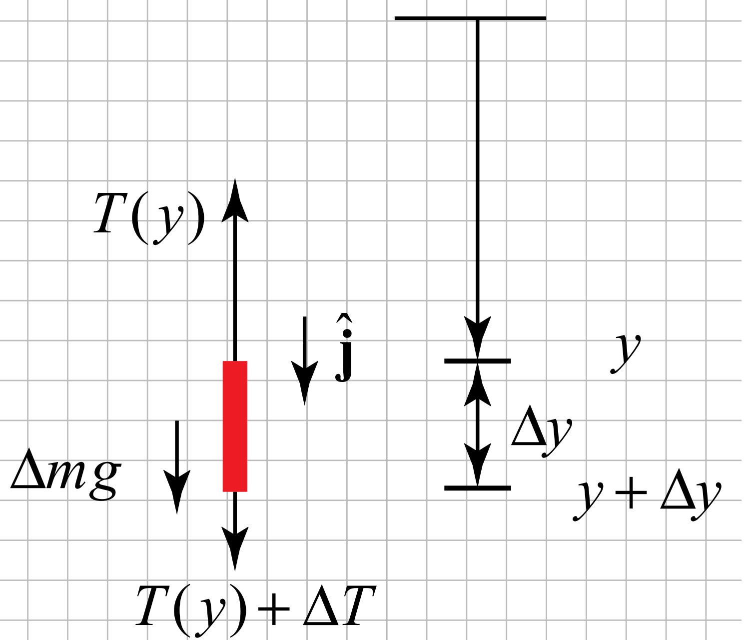
$$T\,(y) = Mg - \frac{Mg}{L}\, y = Mg\left[1 - \frac{y}{L}\right]$$

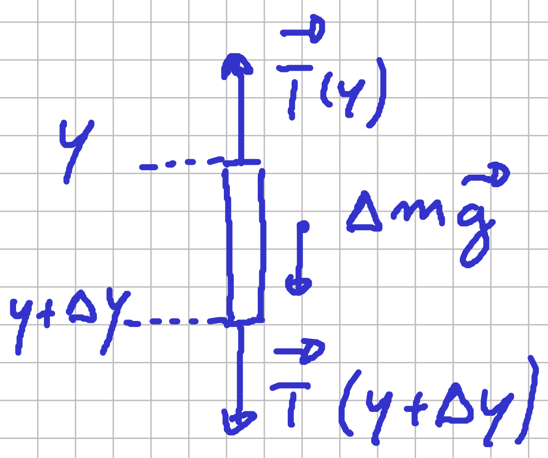
Corda sospesa, approccio alternativo

Consideriamo un pezzo di corda:



Questo è il diagramma delle forze che agiscono sul pezzo di corda:





Δy = LUNGH. ELEMENTO DI CORDA

Δm = MASSA EL. CORDA

$$T(y+\Delta y) = T(y) + \Delta T$$

$$\Delta m = \Delta y \frac{M}{L}$$

$$+\Delta m\, g - T(y) + (T(y) + \Delta T) = 0$$

$$\frac{M}{L} g \Delta y + \Delta T = 0$$

$$\Delta T = -\frac{M}{L} g \Delta y$$

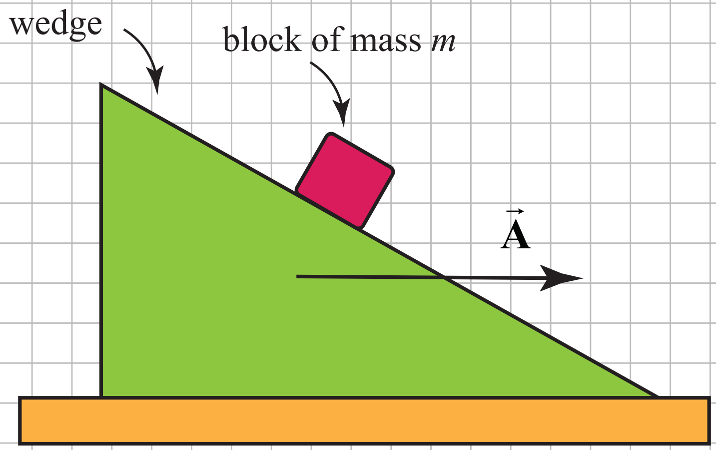
$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta y} = -\frac{M}{L} g = \frac{dT}{dy}$$

$$dT = -\frac{M}{L} g\, dy$$

$$T(y) = Mg\left[1 - \frac{y}{L}\right]$$

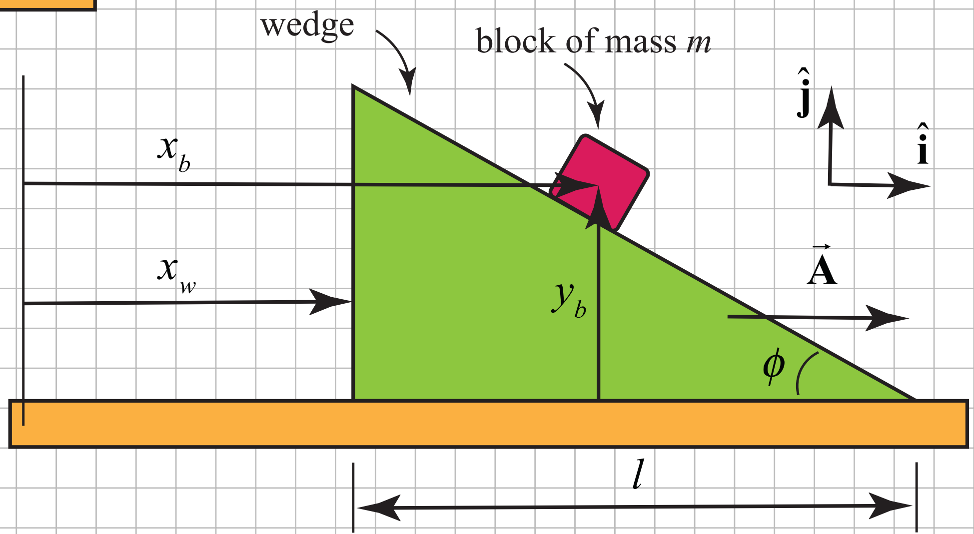
Esercizio

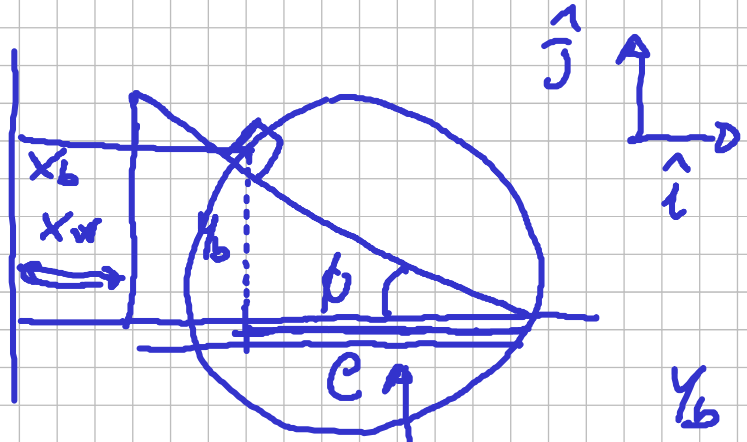
Un cuneo di 45° viene spinto lungo un tavolo con accelerazione costante A, secondo un osservatore a riposo rispetto al tavolo. Un blocco di massa m scivola senza attrito lungo il cuneo. Esprimere l'accelerazione del blocco rispetto a un osservatore a riposo rispetto al tavolo.



Notiamo che il cuneo è vincolato a muoversi sul piano orizzontale con accelerazione costante. Anche il blocco è vincolato a scivolare lungo il cuneo

Introduciamo il seguente sistema di coordinate:





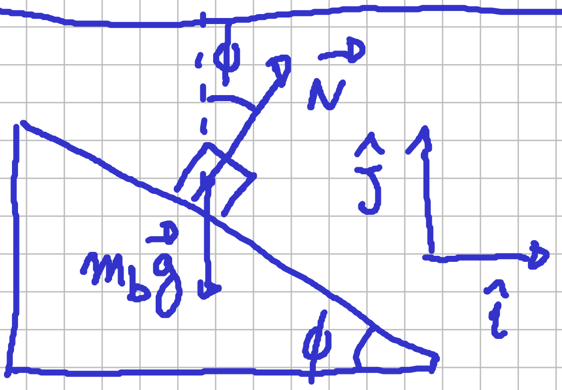
$$\frac{y_b}{\ell-(x_b-x_w)} = \tan\phi$$

$\ell-(x_b-x_w)$

$$y_b = [\ell-(x_b-x_w)]\tan\phi$$

$$\frac{d^2y_b}{dt^2} = -\left[\frac{d^2x_b}{dt^2}-\frac{d^2x_w}{dt^2}\right]\tan\phi$$

$$a_{b,y} = \left(-a_{b,x}+A_{w,x}\right)\tan\phi$$



$$\vec{N} = \vec{F}_{w,b}$$

$$\vec{N}+m_b\vec{g} = m_b\vec{a}_b$$

$$\begin{cases} N\sin\phi = m_b a_{b,x} \\ N\cos\phi - m_b g = m_b a_{b,y} \end{cases}$$

$$N = \frac{m_b a_{b,x}}{\sin\phi}$$

$$\frac{\cancel{m}_b a_{b,x}}{\sin\phi}\cos\phi - \cancel{m}_b g = \cancel{m}_b a_{b,y}$$

$$a_{b,x}\,\mathrm{coTg}\,\phi - g = -a_{bx}\tan\phi + A_{w,x}\tan\phi$$

$$a_{bx}\left[\mathrm{coTan}\,\phi + \mathrm{Tan}\,\phi\right] = g + A_{w,x}\,\mathrm{Tan}\,\phi$$

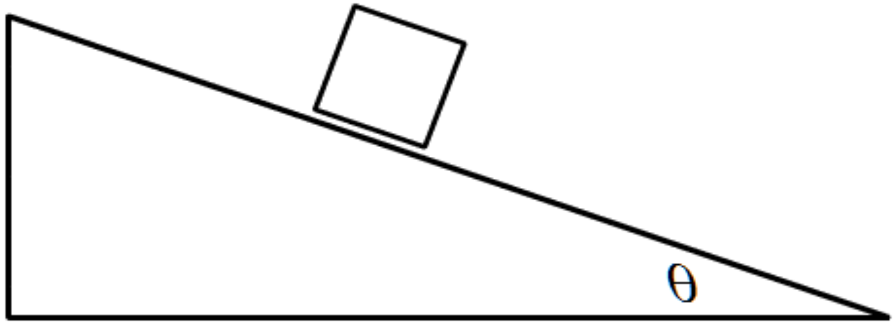
$$a_{bx} = \frac{g + A_{w,x}\,\mathrm{Tan}\,\phi}{\mathrm{cotan}\,\phi + \mathrm{Tan}\,\phi}$$

$$a_{by} = -\left[\frac{g + A_{wx}\,\mathrm{Tan}\,\phi}{\mathrm{coTan}\,\phi + \mathrm{Tan}\,\phi}\right]\mathrm{Tan}\,\phi + A_{w,x}\,\mathrm{Tan}\,\phi$$

$\phi = 45^\circ$ $\quad$ $\mathrm{coTan}\,\phi = 1$ $\quad$ $\tan\phi = 1$

$$a_{bx} = \frac{g + A_{wx}}{2} \qquad a_{by} = \frac{A_{wx} - g}{2}$$

Esercizio

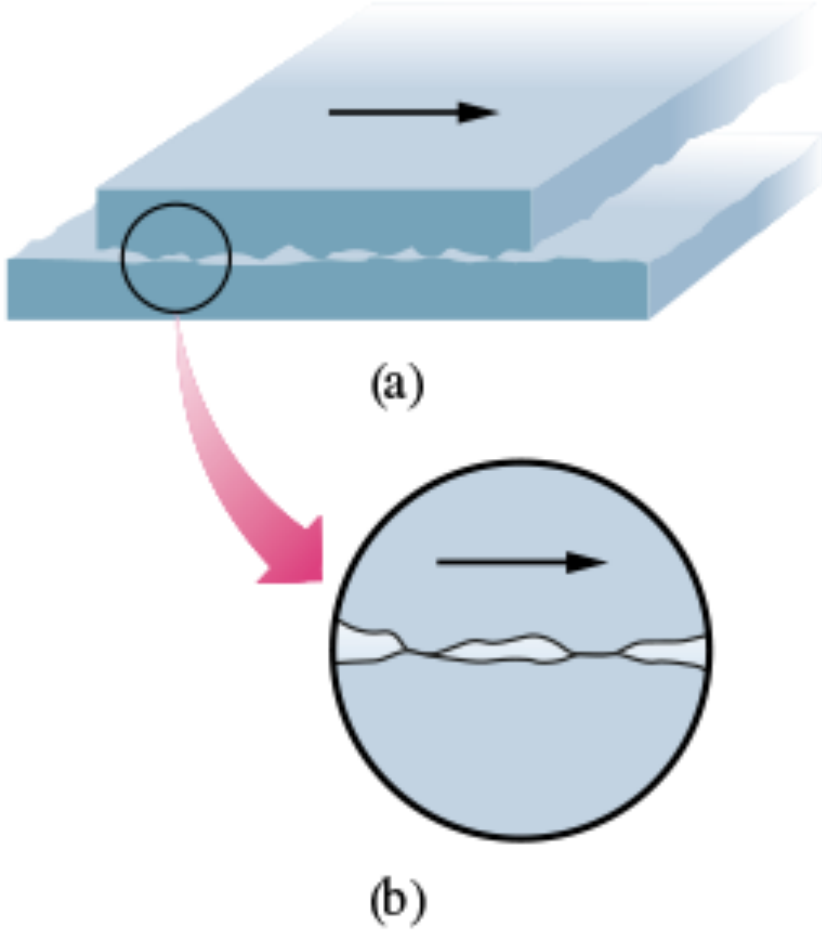


Un cuneo di massa m_c e angolo θ è appoggiato su un piano orizzontale. Sul cuneo è posto un blocco di massa m_b.
Il sistema è lasciato libero di muoversi. Trascurando tutti gli attriti, calcolare:

- L'accelerazione del blocco e quella del cuneo.

Attrito tra superfici

L'attrito è una forza esercitata da una superficie su un'altra. Ha verso opposto rispetto allo spostamento o al verso dello spostamento che avverrebbe in assenza di attrito.

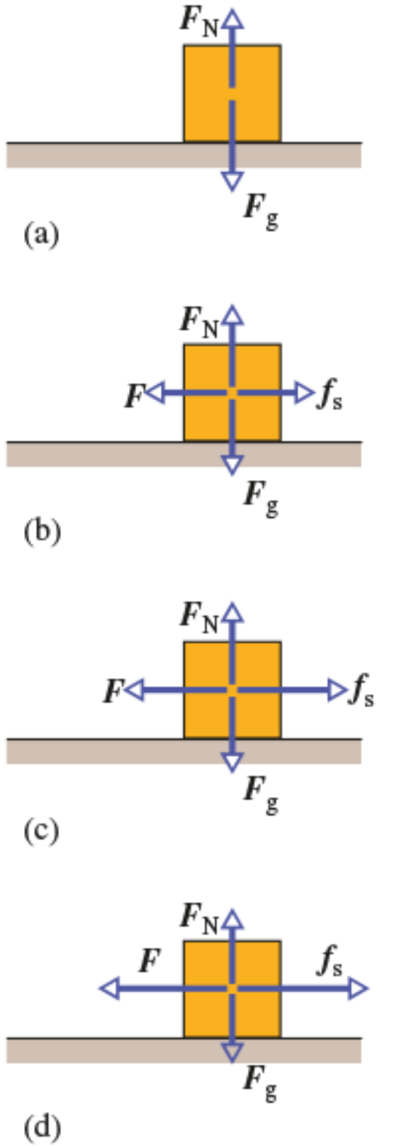


L'attrito è la manifestazione macroscopica di interazioni microscopiche (come legami deboli, forze di Van der Waals e asperità) presenti a livello molecolare sulle superfici.

Attrito statico

Corpo su un piano orizzontale tirato con una forza esterna, in equilibrio statico

←Forza esterna crescente $\boldsymbol{F}$



←Attrito statico crescente $\boldsymbol{f_s}$

Condizione di equilibrio:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F_N}} + \overrightarrow{\boldsymbol{F_g}} + \vec{\boldsymbol{F}} + \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{0}$$

Questo implica:

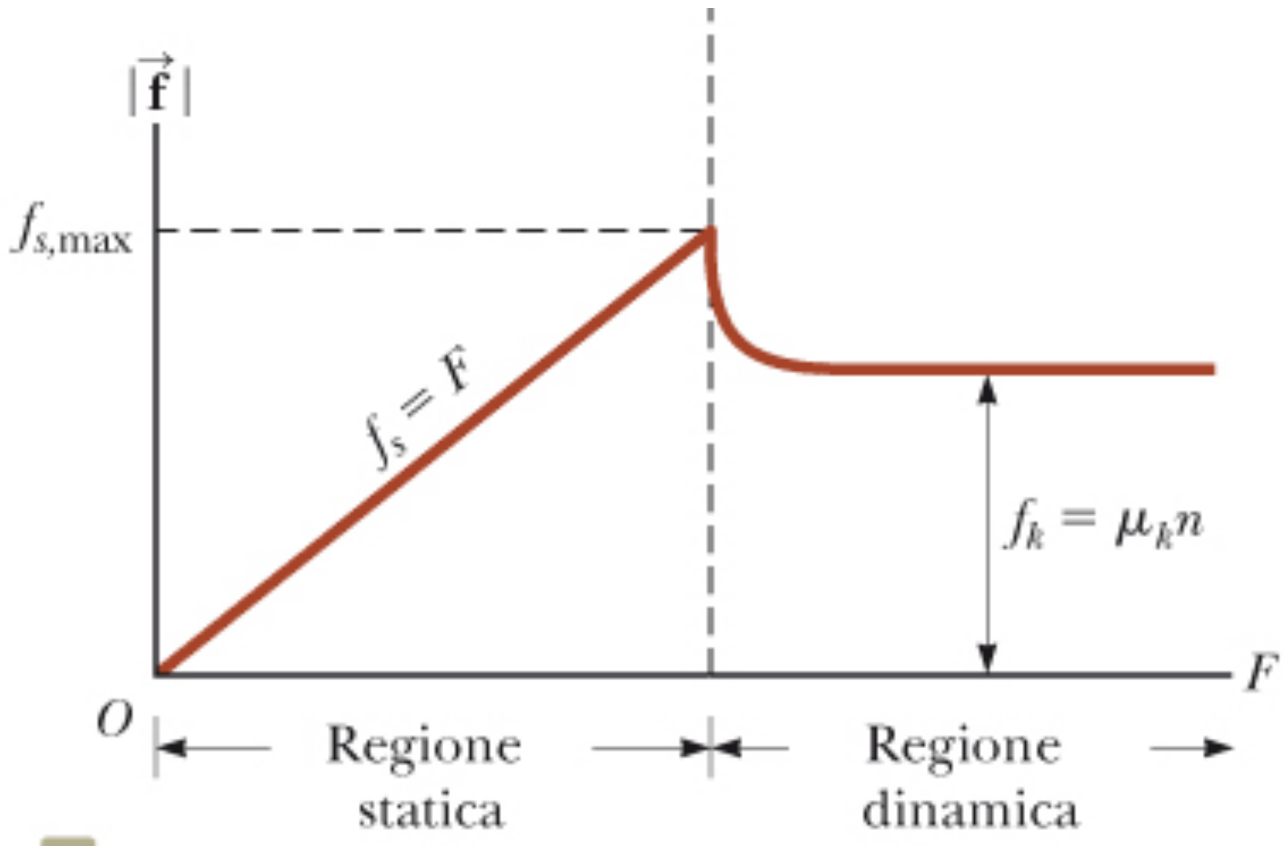
$$F_N = F_g \;\; ; \;\; f_s = F$$

Esiste un valore massimo possibile per l'attrito statico:

$$f_{s,MAX} = \mu_s F_N$$

μ_s = Coefficiente di attrito statico

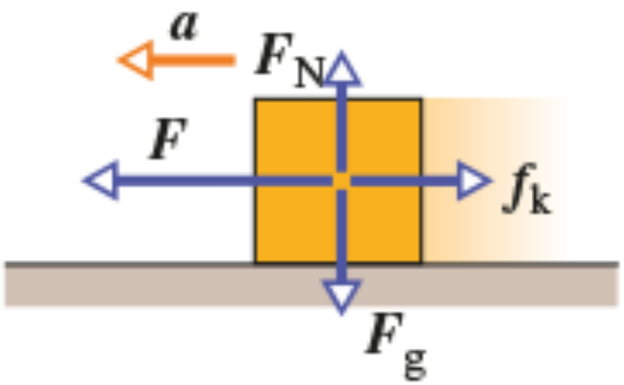
- Se $F \leq f_{s,MAX}$ il corpo rimane fermo
- Se $F > f_{s,MAX}$ non c'è più equilibrio e il corpo accelera



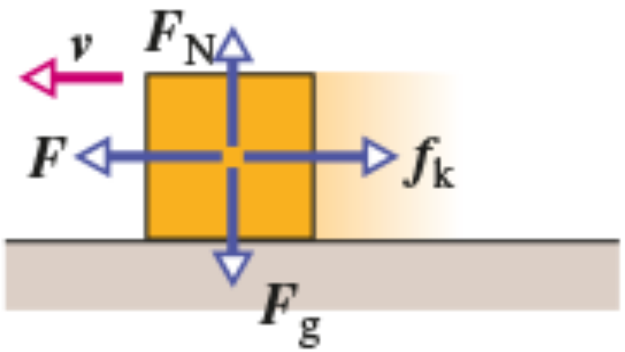
$|\vec{\mathbf{f}}|$
$f_{s,\max}$
$f_s = F$
$f_k = \mu_k n$
O
F
Regione statica
Regione dinamica

Attritto dinamico

Il corpo scivola lungo la superficie. Sul corpo agisce una forza di attrito, opposta al suo spostamento. Questa forza non dipende dal valore della forza esterna $\vec{\boldsymbol{F}}$.



(e)



(f)

Il modulo della forza di attrito dinamico è:

$$f_k = \mu_k F_N$$

μ_k = coefficiente di attrito dinamico

- Se $F > f_k$ il corpo accelera nello stesso verso di $\vec{\boldsymbol{F}}$
- Se $F = f_k$ il corpo si muove a velocità costante
- Se $F < f_k$ il corpo accelera nel verso di $\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{k}}$ fino a fermarsi

Coefficienti di attrito per diversi materiali

Materials	μ_s	μ_k
Steel on steel	0.74	0.57
Aluminum on steel	0.61	0.47
Copper on steel	0.53	0.36
Rubber on concrete (dry)	1.0	0.8
Rubber on concrete (wet)	0.3	0.25
Wood on wood	0.25-0.5	0.2
Glass on glass	0.94	0.4
Teflon on Teflon	0.04	0.04
Teflon on steel	0.04	0.04
Waxed wood on wet snow	0.14	0.1
Waxed wood on dry snow	0.10	0.04
Metal on metal (lubricated)	0.15	0.06
Ice on ice	0.1	0.03
Synovial joints in humans	0.01	0.003
Very rough surfaces		1.5

Attrito statico:

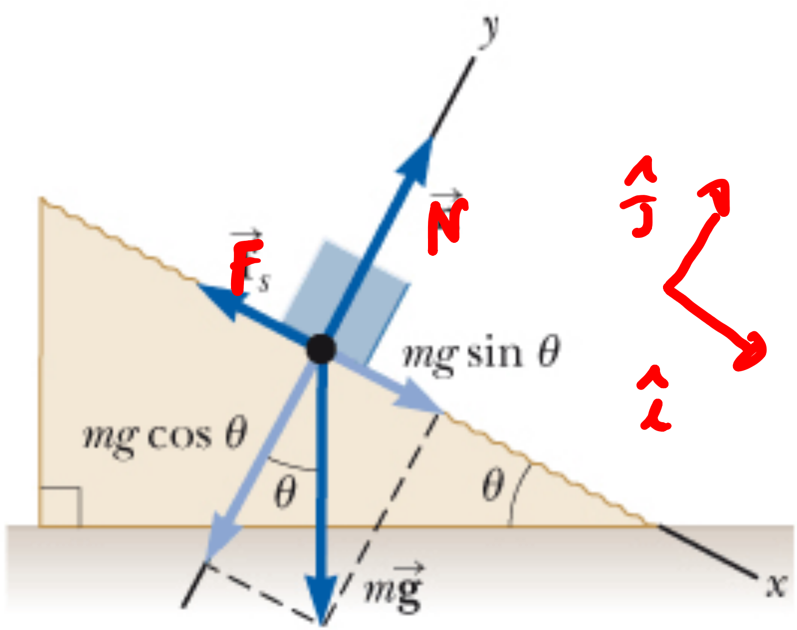
$$f_s \leq \mu_s F_N$$

Attrito dinamico:

$$f_k = \mu_k F_N$$

- μ_s e μ_k sono adimensionali
- μ_s e μ_k dipendono dai materiali
- μ_s e μ_k non dipendono dall'area di contatto

esempio



Un blocco con una massa m è posto su un piano inclinato con angolo θ. Quale deve essere il coefficiente di attrito statico minimo tra blocco e piano affinché il blocco rimanga fermo?

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_s = 0$$

$$\begin{cases} N - mg\cos\theta = 0 \\ mg\sin\theta - F_s = 0 \end{cases}$$

$$N = mg\cos\theta$$

$$F_{s\,MAX} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta$$

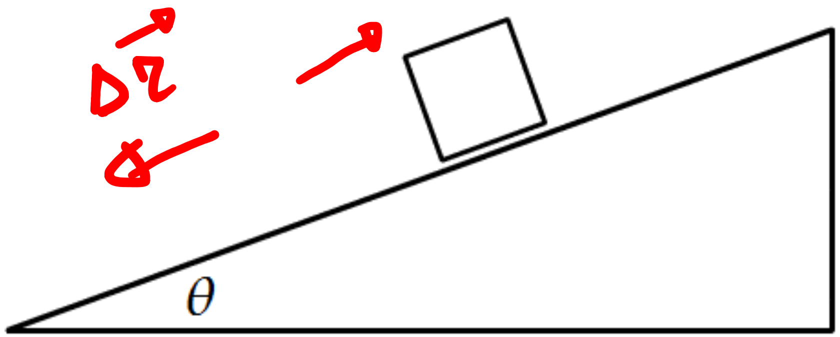
$$F_s = mg\sin\theta$$

$$F_s \leq F_{s\,max}$$

$$mg\sin\theta \leq \mu_s\, mg\cos\theta$$

$$\mu_s \geq \frac{mg\sin\theta}{mg\cos\theta} = \mathrm{tg}\,\theta$$

esercizio



Il blocco scivola lungo il piano inclinato, a velocità costante.
Esprimere il coefficiente di attrito dinamico blocco-piano in funzione dell'angolo θ.

$$mg \sin\theta - F_D = 0$$

$$F_D = mg \sin\theta$$

$$F_D = \mu_D N = \mu_D mg \cos\theta$$

$$\mu_D = \frac{mg \sin\theta}{mg \cos\theta} = tg\,\theta$$