Soluzione compito

Thursday, 8 June 2023 11:25

Ex. 1. Il codice di Hamming sistematico $\mathcal{C}H(3)$ con $n = 7$ e $k = 4$ ha matrice di parità $\boldsymbol{P} = [1,1,1; 1,1,0; 1,0,1; 0,1,1]$. Data la parola $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e} = [1,1,0,1,1,0,1]$, determinare
1. Il numero di errori che il codice può correggere;
2. La syndrome di $\boldsymbol{y}$ e il vettore errore $\boldsymbol{e}$;
3. La parola di codice trasmessa $\hat{\boldsymbol{x}}$, secondo il principio della massima verosimiglianza. (2 punti)

1. Il codice di Hamming ha $d_{min} = 3 \Rightarrow t_{MAX} = 1$
2. Per calcolare la sindrome bisogna conoscere H^T

$$H = [P^T | I_{k-n}] \Rightarrow H^T = \begin{bmatrix} P \\ \hline I_{k,n} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow H^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow s = yH^T = [1\,1\,0\,1\,1\,0\,1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1\ 1\ 1]$$

Poiché la sindrome è $[1\,1\,1] \Rightarrow e = [1\,0\,0\,0\,0\,0\,0]$

3. $\hat{x} = y + \hat{e} = [0\,1\,0\,1\,1\,0\,1]$

Ex. 2. Si consideri il polinomio $g(D) = D^3 + D + 1$

1. Dimostrare che $g(D)$ può essere utilizzato come polinomio generatore per un codice ciclico con $n = 7$ e trovare il corrispondente valore di k;
2. Trovare la matrice generatrice sistematica per il codice generato da $g(D)$;
3. Data la parola ricevuta $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e} = [0,1,1,0,0,1,0]$, utilizzare $g(D)$ per trovare $\boldsymbol{e}$ e conseguentemente $\hat{\boldsymbol{x}}$. (3 punti)

1. Perché $g(D)$ sia un polinomio generatore per un codice con $n=7$, è necessario che $g(D)$ sia un divisore di D^7+1

$$\begin{array}{l|l} D^7\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1 & D^3+D+1 \\ \underline{D^7\,0\,D^5\,D^4} & \overline{D^4+D^2+D+1} \\ //\quad D^5\,D^4\,0\,0\,0\,1 & \\ \quad \underline{D^5\,0\,D^3\,D^2\,0\,0} & \\ \quad //\ D^4\,D^3\,D^2\,0\,1 & \\ \quad\ \ \underline{D^4\,0\,D^2\,D\,0} & \\ \quad\ \ //\ D^3\,0\,D\,1 & \end{array} \Rightarrow g(D) \text{ è un polinomio generatore}$$

e $K = n - 3 = 4$

2. $$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ma non è sistematica

$$\Rightarrow G_{SIST} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{shiftando di 1 pos la 4}^a \text{ riga} \\ \leftarrow \text{shiftando di 2 pos la 4}^a \text{ riga} \\ \leftarrow 4^a \text{ riga} + 3^a \text{ riga} \\ \leftarrow \text{OK} \end{array}$$

3. $y = 0\,1\,1\,0\,0\,1\,0 \Rightarrow y(D) = D^5 + D^2 + D$

$$\begin{array}{l|l} D^5\,0\,0\,D^2\,D\,0 & D^3+D+1 \\ \underline{D^5\,0\,D^3\,D^2} & \overline{D^2+1} \\ //\ //\ D^3\,0\,D\,0 & \\ \quad\ \ \underline{D^3\,0\,D\,1} & \\ \quad\ \ //\ //\ //\ 1 & \end{array} \Rightarrow y(D) = (D^2+1)\,g(D) + 1$$

$\Rightarrow \hat{e} = 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \Rightarrow \hat{x} = y + \hat{e} = [1\,1\,1\,0\,0\,1\,0]$

Ex. 3. Il codice a blocco sistematico $\mathcal{C}$ con $n = 4$ e $k = 2$ ha matrice generatrice $\boldsymbol{G}$:
$\boldsymbol{G} = [1,0,1,0; 0,1,1,0]$
1. Determinare la parola di codice $\boldsymbol{x}$ corrispondente al messaggio $\boldsymbol{u} = [1\,,1]$;
2. Trovare la $dmin$ per il codice;
3. Determinare i coset del codice;
4. Decodificare la parola ricevuta $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e} = [1,0,1,1]$, utilizzando il coset leader. (2 punti)

1. $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = uG = [1\,1\,0\,0]$

2. Le parole di codice sono $2^k = 4$:

0000
1010
0110
1100

$\Rightarrow$ La d_{min} la si può calcolare come il peso di Hamming minimo $d_{min} = 2$

3. I coset sono $2^{n-k} = 4$, ad esempio:

$C_0 = \{0000, 1010, 0110, 1100\}$

$C_1 = C_0 + 0001 = \{0001, 1011, 0111, 1101\}$ vettore ricevuto y

$C_2 = C_0 + 0010 = \{0010, 1000, 0100, 1110\}$

$C_3 = C_0 + 0011 = \{0011, 1001, 0101, 1111\}$

Anche questi li avrebbero potuto essere coset leader

4. $\hat{x} = y + 0001 = 1010$

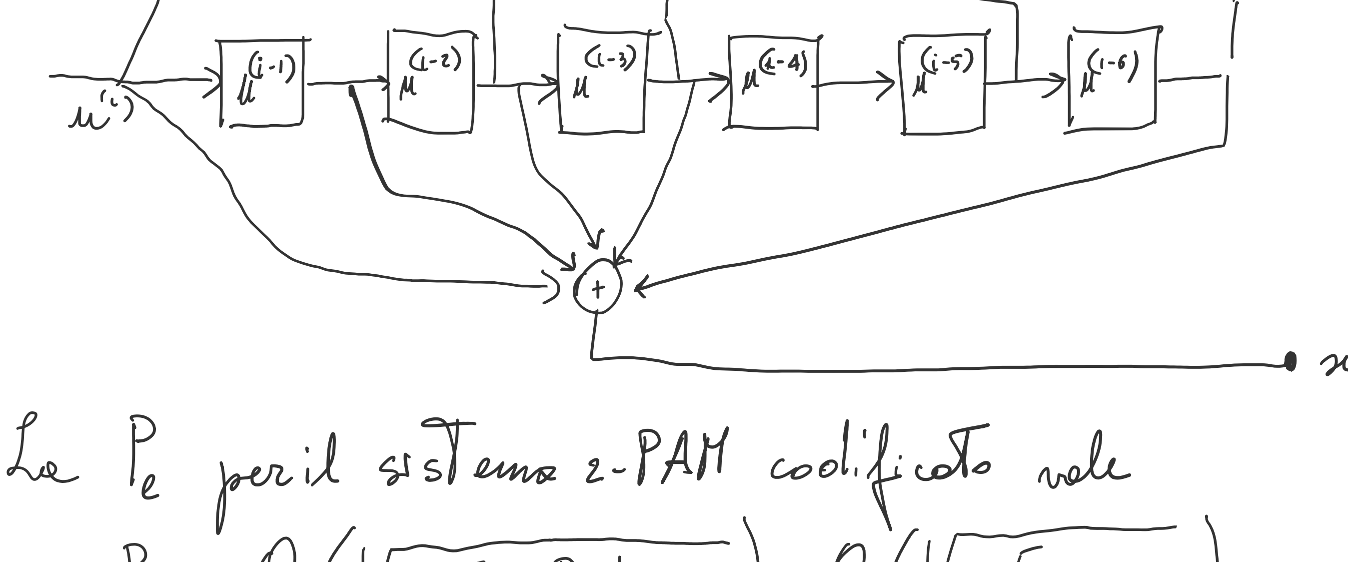
Ex. 4. Dato il codice convoluzionale con polinomi generatori in notazione ottale $g1 = [1, 3, 3]$ e $g2 = [1, 7, 1]$,
1. Determinare la constraint length L del codice;
2. Disegnare lo schema a bloccchi del codificatore;
3. Considerato che il codice ha $dfree = 10$, dare un'approssimazione della probabilità di errore per un sistema che usi il codice in combinazione con la modulazione 2-PAM. (2 punti)

1. Poiché in notazione ottale si ha: $1 \to 001$, $3 \to 011$, $7 \to 111$ i polinomi generatori si possono scrivere così

$$g_1 = [00\underbrace{1\ 011\ 011}_{7}] \quad g_2 = [00\underbrace{1\ 111\ 001}_{7}] \Rightarrow L = 7$$

La constraint length è $L = 7 \Rightarrow$ si avranno $6 = 7-1$ celle di memoria e $2^6 = 64$ stati

2.



3. La P_e per il sistema 2-PAM codificato vale

$$P_e = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}\frac{R\,d_{free}}{2}}\right) = Q\left(\sqrt{5\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

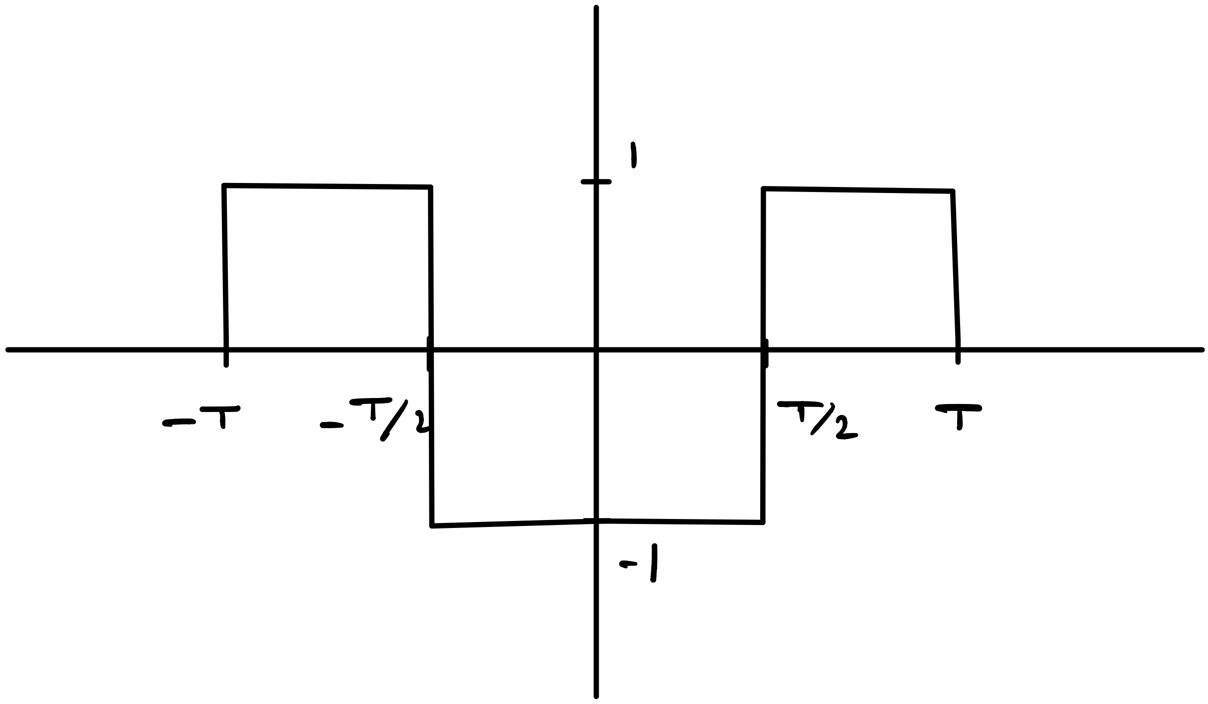
Ex. 5. Dato il codice ciclico $\mathcal{C} = \{[0,0,0,0],[1,0,1,0],[0,1,0,1],[1111]\}$, determinare il polinomio generatore, il rate del codice e la sua $dmin$. (1 punto)

$g(D)$ è la parola di codice di grado minimo

$\Rightarrow g(D) = 1 + D^2$; ci sono 4 parole di codice di lunghezza $n = 4 \Rightarrow K = 2 \Rightarrow R = K/n = 1/2$, $d_{min} = 2$.

Ex. 6

Definiamo $y(t) = \frac{d\,x(t)}{dt}$



Dal momento che $x(+\infty) = 0$ posso applicare il teorema integrazione incompleta.

$$X(f) = \frac{Y(f)}{j2\pi f}$$

$$Y(f) = \frac{T}{2}\,\mathrm{sinc}\left(f\frac{T}{2}\right)\left(e^{j2\pi f\frac{3}{2}T} + e^{-j2\pi f\frac{3}{2}T}\right)$$

$$- T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

Ex. 7

In un sistema lineare e stazionario:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

$$y(t) = T\left[x(\alpha) ; t \right]$$

$$= T\left[x(\alpha) \otimes \delta(\alpha) ; t \right]$$

$$= T\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, \delta(t-\alpha)\, d\alpha ; t \right]$$

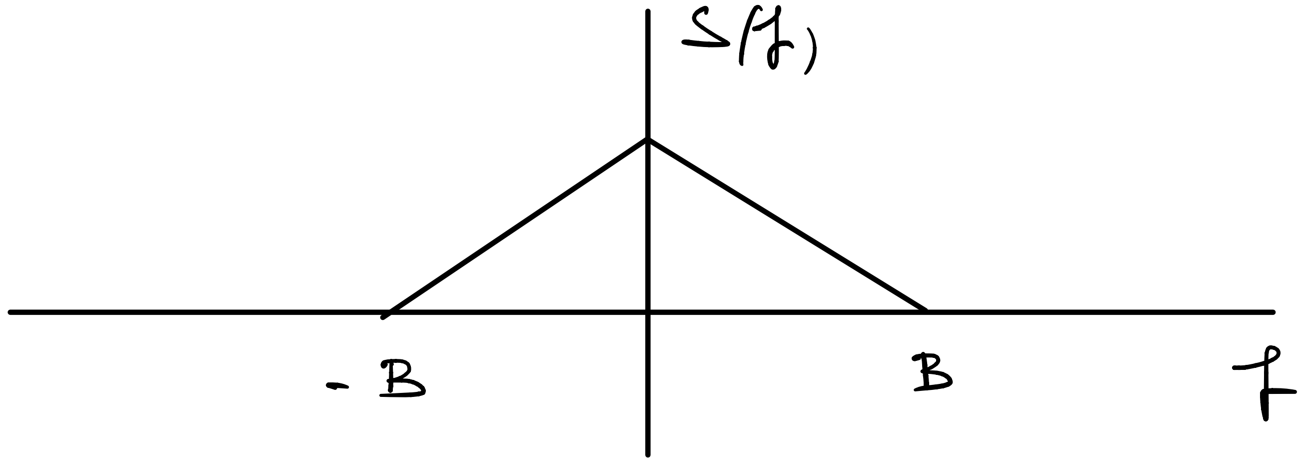
$$\overset{\text{linearità}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, T\left[\delta(t-\alpha) ; t \right] d\alpha$$

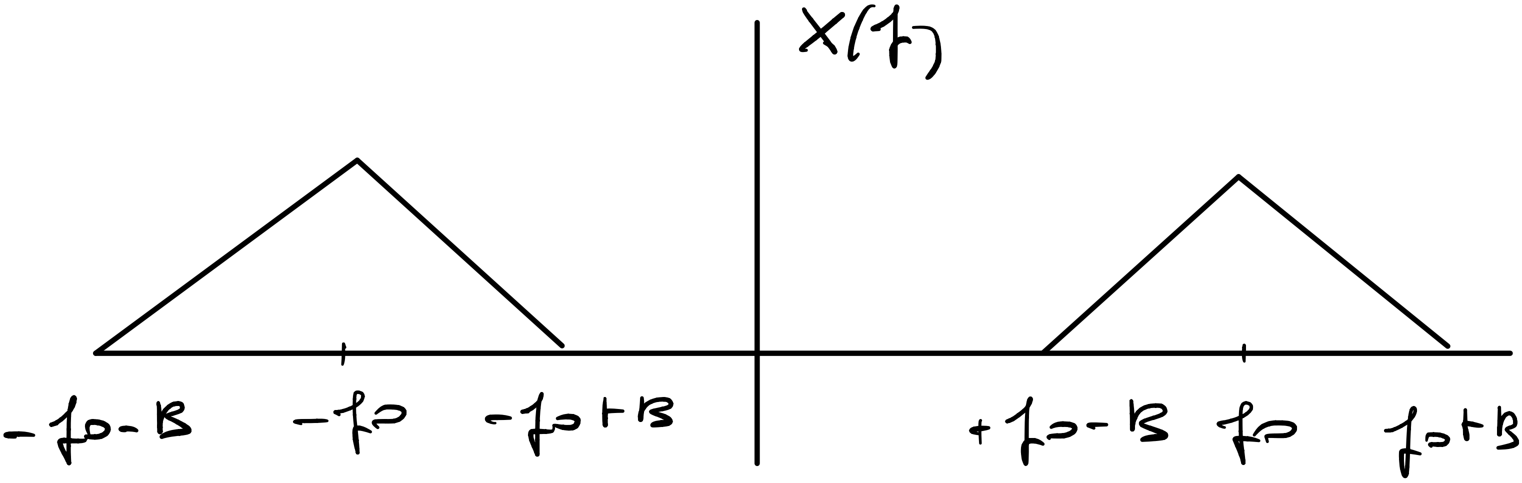
$$\overset{\text{stazionarietà}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha$$

Ex. 8

$$x(t) = s(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

Assumiamo per esempio:





La frequenza di campionamento minima è:

$$f_x = f_0 + B = f_{MAX}$$

$$y(t) = x^2(t) \rightleftharpoons Y(f) = X(f) \otimes X(f)$$

$$f_y = 2 f_x = 2(f_0 + B)$$

Ex. 3

Su 2 tiri indipendenti la probabilità di ottenere 2 facce uguali è $\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)^{6} = \frac{1}{6}$

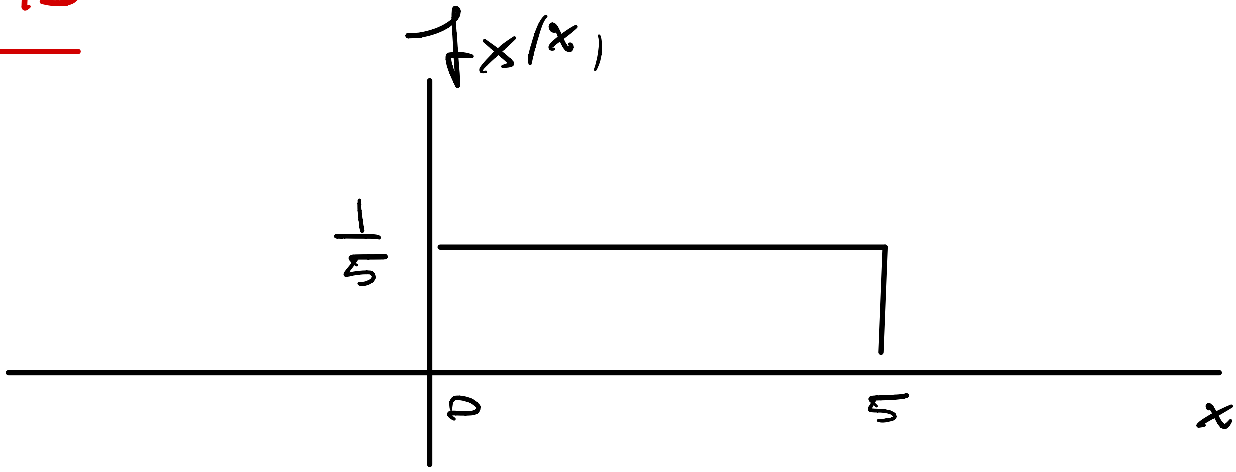
La somma delle 2 facce fa 5 quando:

$(1, 4)\ (4, 1)\ (2, 3)\ (3, 2)$

1° dado 2° dado

La probabilità è $\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)^{4} = \frac{1}{9}$

Ex. 10



$$E[X^2] = \int_0^5 x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^5 x^2 \frac{1}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^5 = \frac{25}{3}$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \eta_X^2$$

$$\eta_X = \int_0^5 x f_X(x)\,dx = \frac{5}{2}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{25}{3} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{12}$$

Ex. 11

$$x \sim N(0, \sigma_x^2) \qquad \sigma_x^2 = 2 \quad \mu_x = 0$$

$$y \sim N(0, \sigma_y^2) \qquad \sigma_y^2 = 4 \quad \mu_y = 0$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$z = 2x + y$$

$$\sigma_z^2 = 4\sigma_x^2 + \sigma_y^2 = 12$$

$$\mu_z = 2\mu_x + \mu_y = \emptyset$$

Ex. 12 PAM di ordine $M=4$.

Il segnale PAM e'

$$s(t) = \sum_i a_i \, g_T(t - iT)$$

Densita' spettrale di potenza:

$$S(f) = \frac{1}{T} S_a(f) \, |G_T(f)|^2$$

$$S_a(f) = \sum_m R_a(m) \, e^{-j2\pi f T}$$

Se i simboli sono indipendenti ed equiprobabili, $S_a(f) = R_a(0) = \frac{M^2-1}{3}$

$$SER = 2 \, \frac{M-1}{2} \, Q\left(\sqrt{\frac{6\,(E_s/N_0)}{M^2-1}}\right)$$

$$\frac{SER}{\log_2 M} \leq BER \leq SER$$

Ex. 13

$R_b = 10$ Mbit/s $\quad M = 16 \quad \alpha = 0.4$

$$\text{bit} = 1920 \cdot 1080 \cdot 8$$

$$\text{tempo} = \text{bit} \cdot T_b = \frac{\text{bit}}{R_b} \cong 1.65\ s$$

La banda del segnale è

$$B = 2\,\frac{1+\alpha}{2T} = \frac{1+\alpha}{T} = \frac{1+\alpha}{\log_2 M} R_b$$

$$= \frac{1.4}{4} R_b = 3.5\ \text{MHz}$$

Efficienza spettrale

$$\eta = \frac{R_b}{B} = \frac{4}{1.4} \simeq 2.85$$