

Una praticante di salto con l'elastico si trova su un ponte alto **45.0 m** sul livello del fiume. La ragazza ha una massa di **61.0 kg**. Allo stato di riposo la corda elastica ha una lunghezza di **25.0 m**. Supponiamo che la corda segua la legge di Hooke, con costante elastica $k = 160 \text{ N/m}$. Se la saltatrice si arresta prima di avere raggiunto l'acqua, a quale quota h si trova al di sopra

Idea chiave:

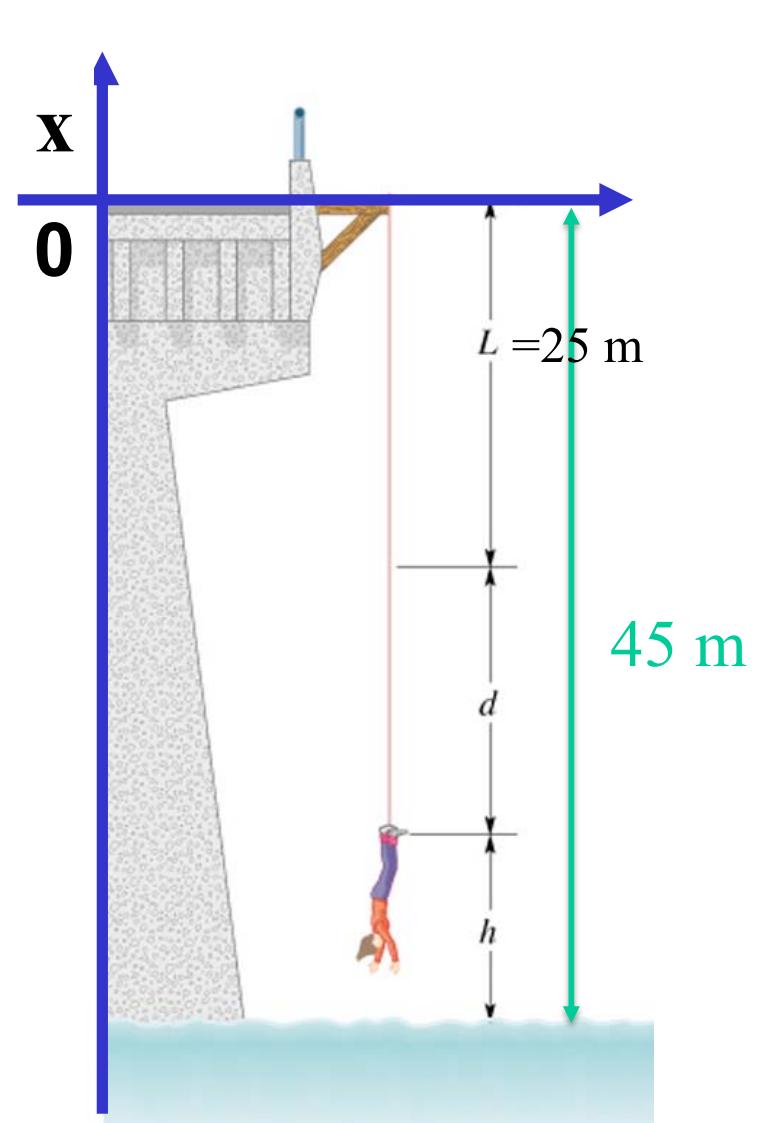
- applico il principio di conservazione dell'energia meccanica, valido per sistema isolato e forze conservative
- sistema : donna – elastico-Terra
forza: **forza gravitazionale** e **forza elastica**
 (entrambe conservative)

$$\text{Non ci sono forze dissipative} \quad \Delta E_{mecc,i} = 0$$

$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta U_e = 0$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = 0 \quad v_f = v_i = 0$$

$$\Delta U_g = mg\Delta y = -mg(L + d)$$



$$\Delta U_e = \frac{1}{2}kd^2 \quad d = \text{allungamento molla}$$

$$\Delta E_{mecc,i} = 0$$

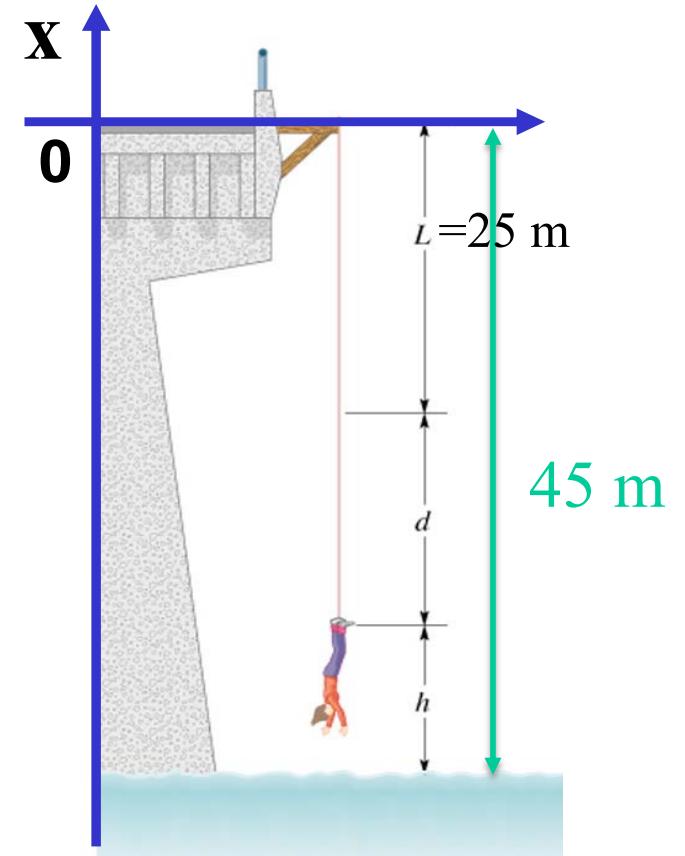
$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta U_e = 0$$

$$0 + \frac{1}{2}kd^2 - mg(L+d) = 0$$

$$\frac{1}{2}kd^2 - mgd - mgL = 0 \quad \text{equazione di secondo grado nella variabile } d$$

$$d = \frac{mg \pm \sqrt{(-mg)^2 + 4(\frac{1}{2}k)mgL}}{2(\frac{1}{2}k)} = \frac{597 \pm \sqrt{(597)^2 + 4.810^6}}{160} m = \frac{597 \pm 2271}{160} m = \begin{cases} 17.9 m \\ -10.5 m \end{cases}$$

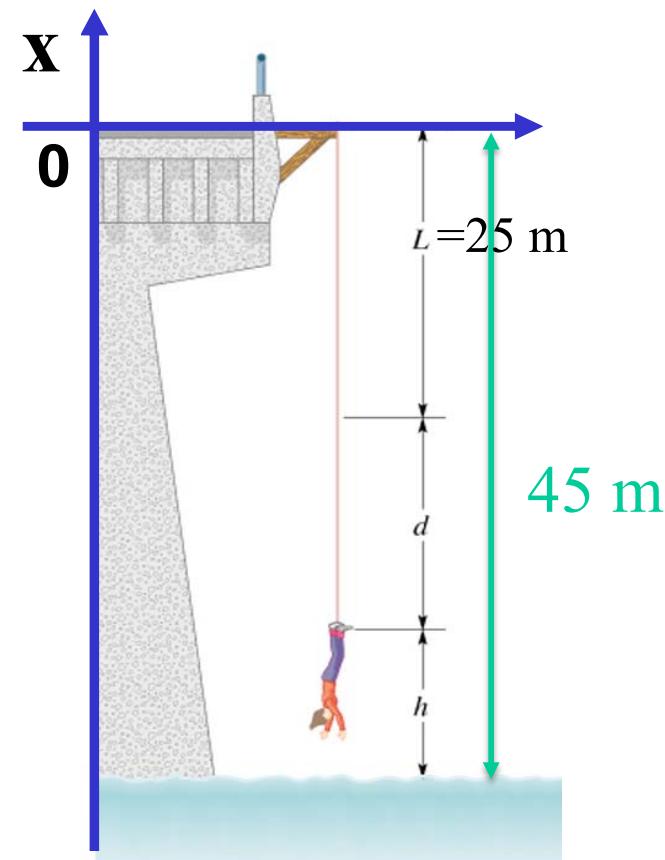
$$h = 45.0 m - (L + d) = 45.0 m - 25.0 m - 17.9 m = 2.1 m$$



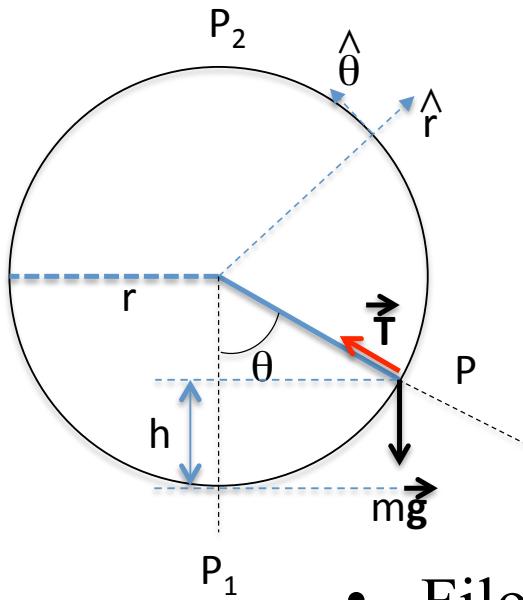
in alternativa: $\Delta K = L_g + L_e$ **teorema forze vive**

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = 0 = -mg \int_0^{-(L+d)} dx + \int_0^d (-k_e x) dx = mg(L+d) - \frac{1}{2}k_e d^2$$

Stessa equazione di
secondo grado



Pendolo su piano verticale in assenza di attrito



Noti r e m , qual'è la velocità minima che deve avere il punto materiale in P_1 per arrivare in P_2 ?

- Filo sempre esteso implica $T = mg \cos \theta + m v^2/r \geq 0$

\Rightarrow Condizione sulla velocità scalare nella traiettoria

$$mg \cos \theta + m v^2/r \geq 0 \quad \Rightarrow v^2/r \geq -g \cos \theta$$

Il punto materiale per arrivare sulla verticale, $\theta = \pi$, deve avere almeno

$$v(P_2)_{min} = \sqrt[2]{gr}$$

$$v(P_2)_{min} = \sqrt[2]{gr} = v(P_2)$$

velocità con cui deve arrivare in P₂ per avere il filo teso

- Non ci sono forze dissipative
 - possiamo applicare la conservazione dell'energia per determinare $v(P_1)_{min}$

$$E(P) = cost = E(P_1) = E(P_2) \Rightarrow \Delta K = -\Delta$$

- Origine dell'energia potenziale nel punto di equilibrio stabile del pendolo

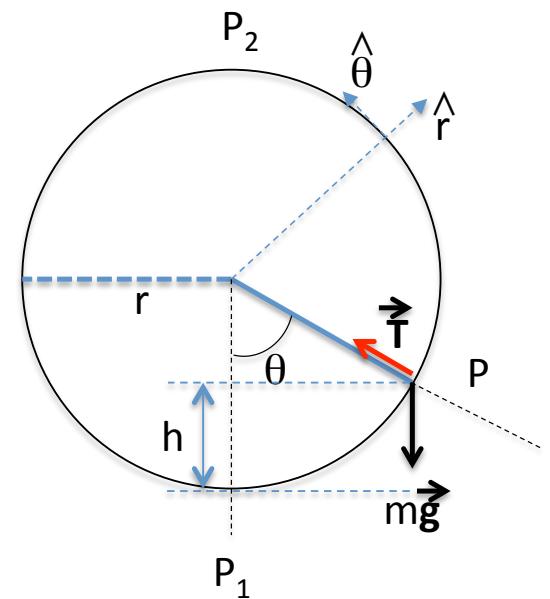
\Rightarrow A una posizione corrispondente ad un angolo θ

$$U(P) = mgr(1 - \cos\theta)$$

- $\Delta K = -\Delta U$

$$\frac{1}{2} m v_{P2}^2 - \frac{1}{2} m v_{P1}^2 = \frac{1}{2} mgr - \frac{1}{2} m v_{P1}^2 = -2mgr$$

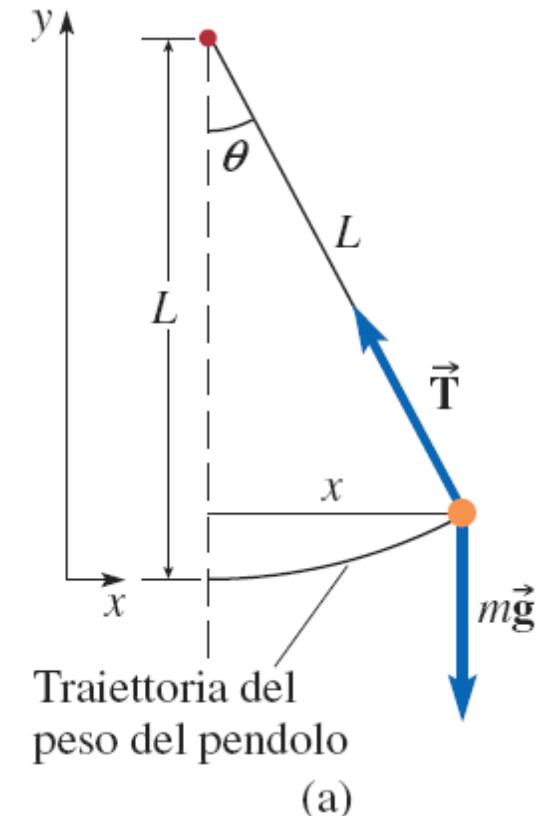
$$\Rightarrow v(P_1) = \sqrt[2]{5gr}$$



Pendolo in assenza di attrito

Dato un pendolo costituito da un filo inestensibile di lunghezza L e da una massa m attaccato ad esso, determinare la velocità della massa m per $\theta=0$ se il pendolo è lasciato libero di oscillare da $\theta=\theta_0$

- Le forze che agiscono sul pendolo sono la tensione del filo T e la forza peso P
- Lo spostamento è tangente alla traiettoria circolare che compie la massa m durante la sua oscillazione
 - La tensione del filo quindi non compie lavoro in quanto istante per istante è perpendicolare allo spostamento.
- Poichè l'unica forza che compie lavoro è una forza conservativa l'energia meccanica si conserva



Determinare la velocità della massa m per $\theta=0$ se il pendolo è lasciato libero di oscillare da $\theta=\theta_0$

- Prendiamo l'origine dell'energia potenziale nella posizione di equilibrio stabile del pendolo ($\theta=0$)

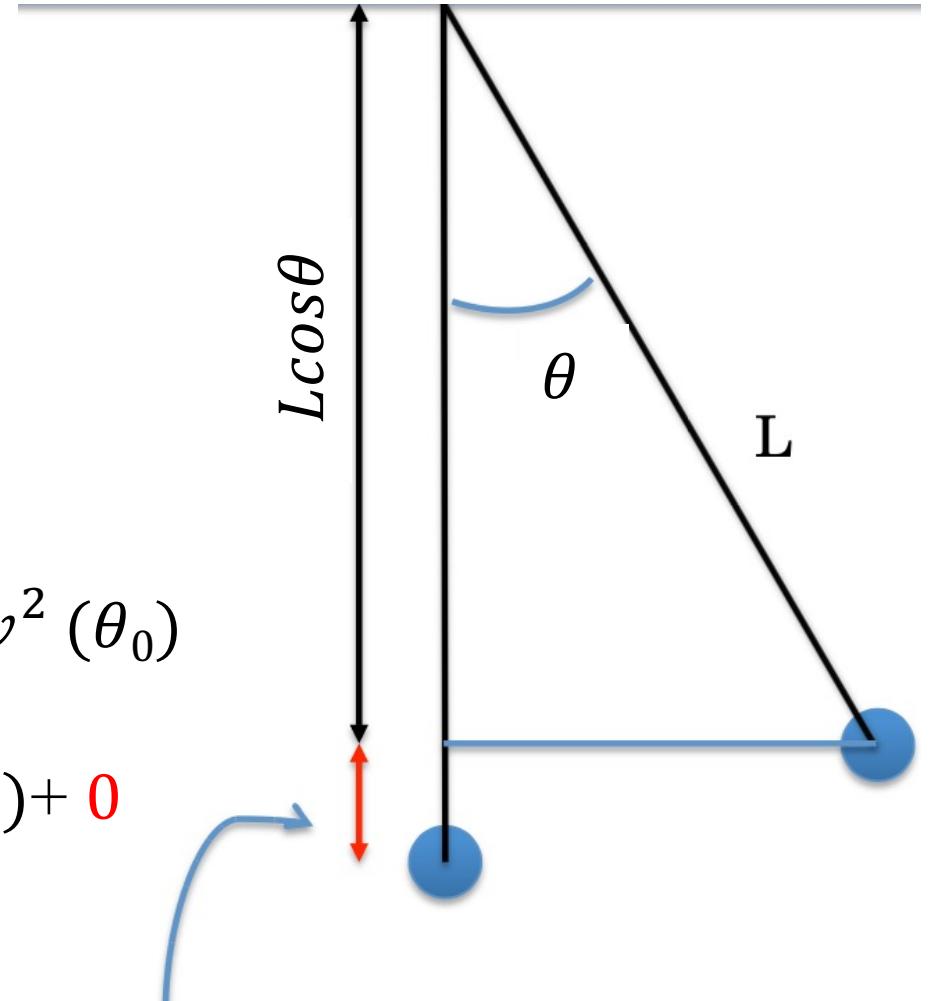
$$U(\theta) = mgL(1 - \cos\theta)$$

- Dalla conservazione dell'energia

$$U(0) + \frac{1}{2}mv^2 (\theta=0) = U(\theta_0) + \frac{1}{2}mv^2 (\theta_0)$$

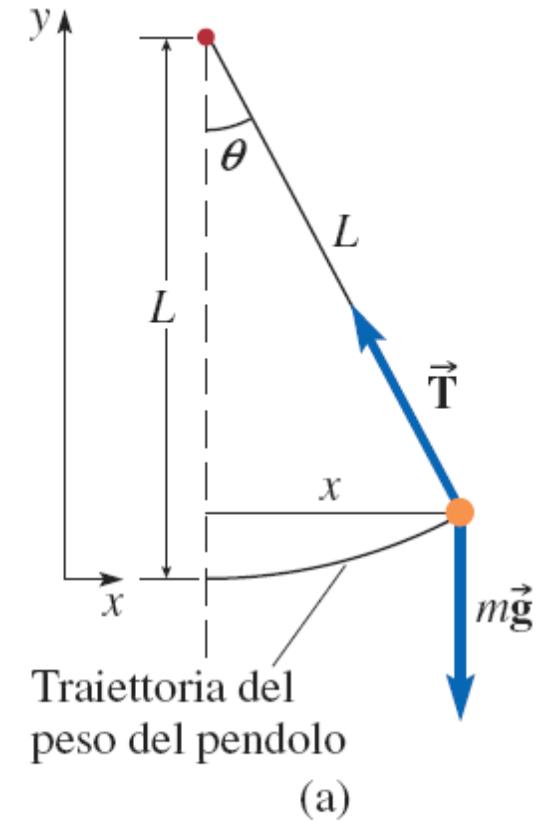
$$0 + \frac{1}{2}mv^2 (\theta=0) = mgL(1 - \cos\theta_0) + 0$$

$$\Rightarrow v(\theta=0) = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta_0)} \quad L - L\cos\theta$$



Pendolo ed oscillazioni

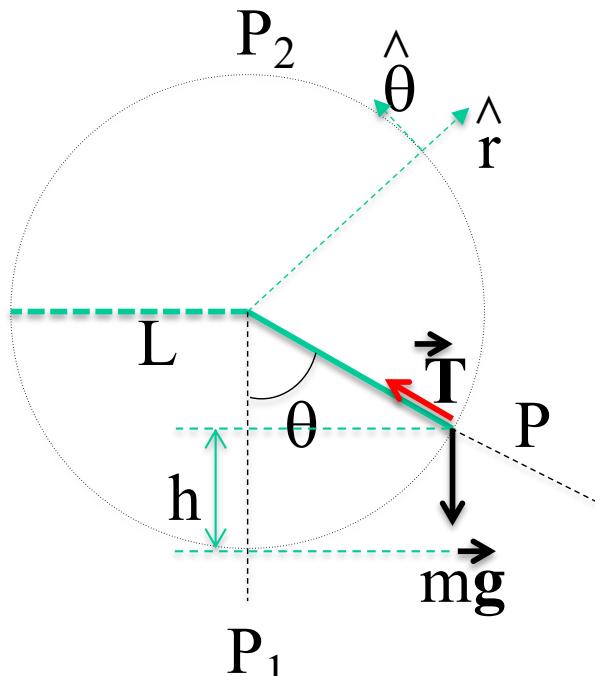
- Punto materiale di massa inerziale m legata alla estremità di una corda tesa, inestensibile e di massa trascurabile di lunghezza L .
- Il moto avviene su un piano verticale ed ovviamente la traiettoria è rappresentata da un arco di circonferenza
- Abbiamo già visto questo sistema e concluso che in presenza della forza peso mg e della tensione del filo T si conserva l'energia meccanica totale



Pendolo su piano verticale

$$E(P) = K(P) + U(P) = \text{cost} = K(P_1) + U(P_1)$$

- Supponiamo di conoscere lo stato di moto del punto materiale in una posizione particolare (P), possiamo quindi prevedere quale sarà lo stato di moto in un generico punto P_1 .



$$K(P_1) - K(P) = - (U(P_1) - U(P))$$

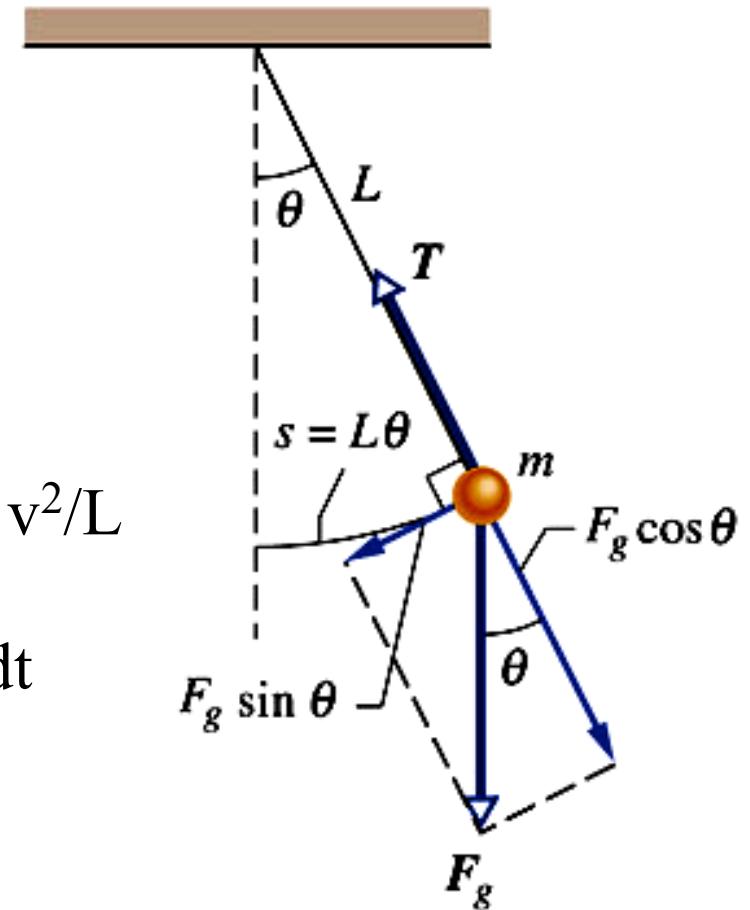
$$\frac{1}{2} m v_{P1}^2 - \frac{1}{2} m v_P^2 = mgh = mgL (1 - \cos \theta)$$

Pendolo su piano verticale (2)

- Il moto del punto materiale è un moto circolare vario
 - accelerazione tangenziale oltre all'accelerazione centripeta

Lungo l'asse r : $-T + mg \cos \theta = m a_r = -m v^2/L$

Lungo l'asse θ : $-mg \sin \theta = m a_\theta = m dv/dt$



$$F_g = mg$$

Pendolo su piano verticale(3)

- Esiste un ovvio legame tra arco, che rappresenta la traiettoria, ed angolo

$$s = L \theta$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d(L\theta)}{dt} = L \frac{d\theta}{dt} = L\omega(t)$$

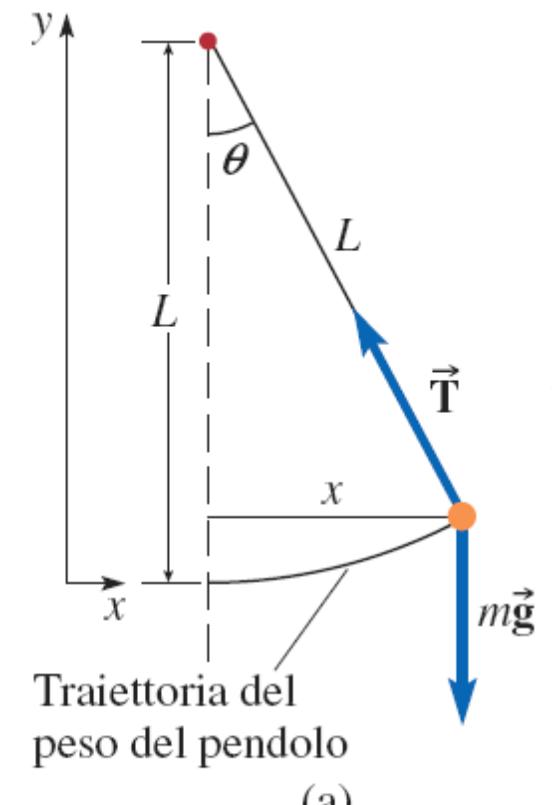
$$a_\theta(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d(L\omega)}{dt} = L \frac{d\omega}{dt} = L \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

componente radiale:

$$-T + mg \cos \theta = -m \frac{v^2}{L}$$

componente tangenziale:

$$-mg \sin \theta = mL \frac{d^2\theta}{dt^2}$$



Pendolo su piano verticale (4)

$$ma_\theta(t) = -mgsin\theta = mL \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Per la componente tangenziale, posso scrivere:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

per piccoli angoli per cui vale l'espansione in serie di Taylor $\sin \theta \cong \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots$
arrestata al primo termine

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2 \theta = 0$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

- Questa rappresenta l'equazione differenziale del secondo ordine , omogenea che descrive il moto della massa inerziale m
 - Stessa equazione della molla: il nostro sistema si muoverà eseguendo delle oscillazioni periodiche intorno alla posizione di equilibrio stabile corrispondente all'angolo $\theta = 0$
 - Valida per il pendolo SOLO per piccoli angoli: $\sin \theta \sim \theta$ ($\theta_{\max} \sim 5^\circ$)

Pendolo su piano verticale (5)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2\theta = 0 \quad \Omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Soluzione dell'equazione differenziale:

La soluzione per le piccole oscillazioni (cioè quando $\sin \theta \approx \theta$) sarà del tipo sinusoidale:

$$\theta(t) = A \cos(\Omega t + \phi) \quad \text{con pulsazione } \Omega \text{ e periodo } T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

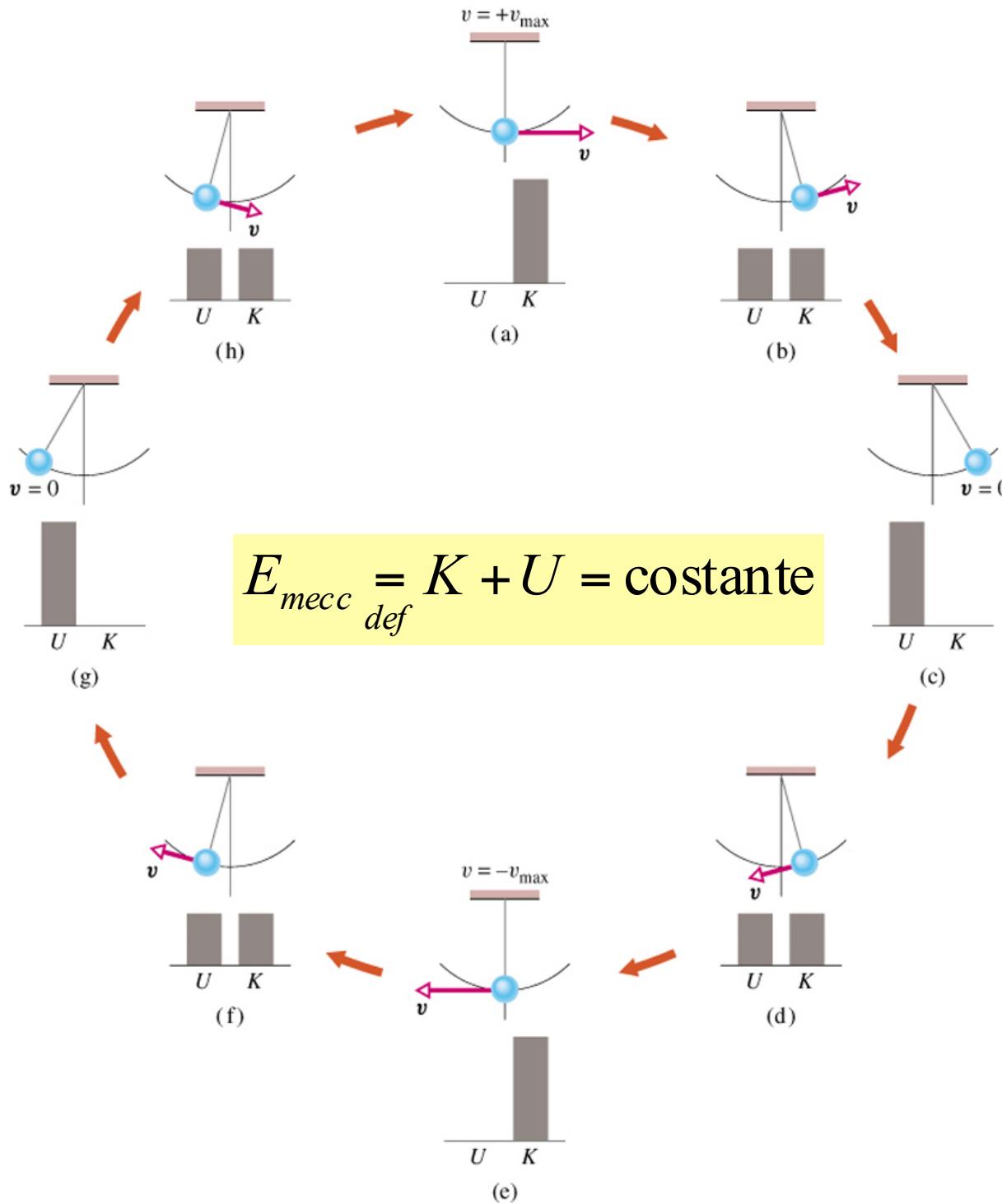
(NON dipendente dalla massa m ma solo dalla lunghezza del pendolo).

La velocità angolare istante per istante vale: $\frac{d\theta}{dt} = \omega(t) = -\Omega A \sin(\Omega t + \phi)$

$$\theta(0) = A \cos(\phi)$$

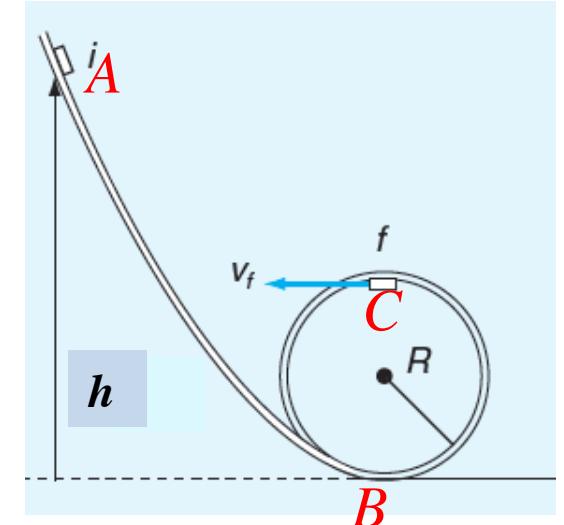
Le costanti arbitrarie si determinano dalle condizioni iniziali:

$$\frac{d\theta(0)}{dt} = \omega(0) = -\Omega A \sin(\phi)$$



Ottovolante senza attrito

Ottovolante: un corpo di massa m parte da fermo dall'estremità di una rampa alla fine della quale c'è un anello circolare di raggio R . Da che altezza deve partire per poter percorrere l'anello senza staccarsi?



- Le forze o sono conservative (forza peso) o non compiono lavoro (reazione normale e forza centripeta ortogonali entrambe allo spostamento)
 - Quindi l'energia si conserva

$$\Delta E = \Delta(U + K) = 0 \Rightarrow U_i + K_i = U_f + K_f = \text{costante}$$

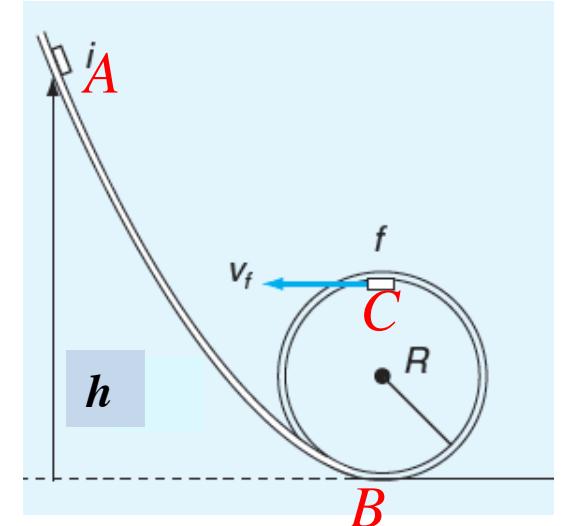
- Prendiamo l'origine dell'energia potenziale a terra
Dalla conservazione dell'energia

$$E(P) = \text{cost} = E(A) = E(B) = E(C)$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg(2R)$$

$$E(P) = \text{cost} = E(A) = E(B) = E(C)$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg(2R)$$



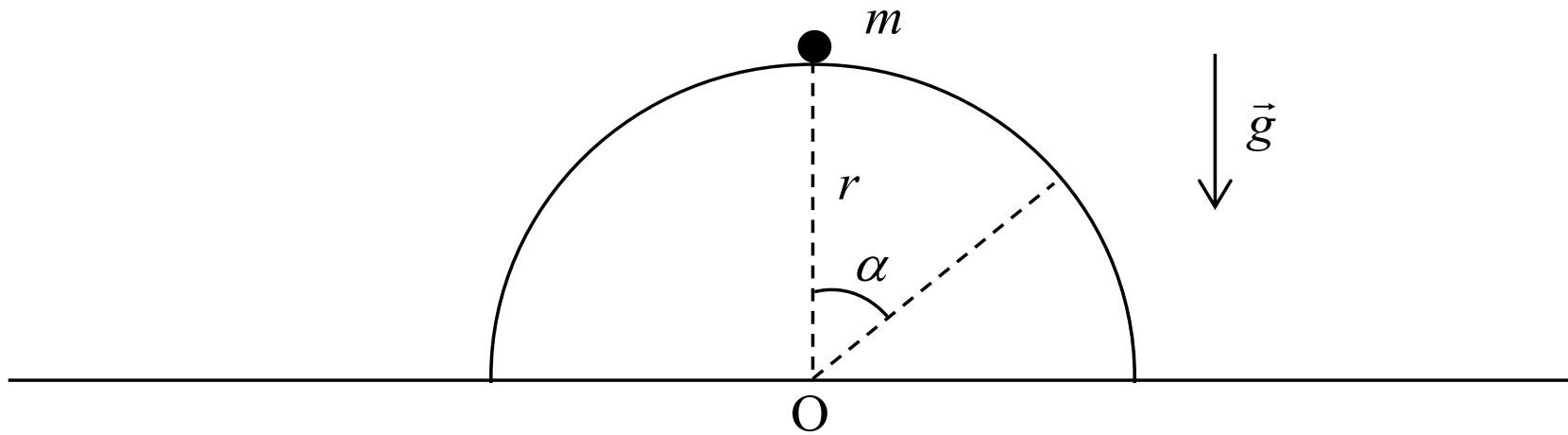
Perché non si stacchi deve valere la relazione del moto circolare uniforme

$$ma_R = -m\frac{v_C^2}{R} = -N - mg \Rightarrow \frac{v_C^2}{R} = \frac{N}{m} + g$$

La v_C minima per non cadere è quando $N=0$ $v_C^2 = Rg$
Sostituendo nella conservazione dell'energia:

$$mgh_{\min} = 2mgR + \frac{1}{2}mv_C^2 = 2mgR + \frac{1}{2}mRg = \frac{5}{2}mgR \Rightarrow h_{\min} = \frac{5}{2}R$$

Un punto materiale di massa m , appoggiato sulla sommità di una guida circolare ed inizialmente in quiete, inizia a scivolare senza attrito lungo la guida .
A quale angolo α^* avviene il distacco del punto dalla guida?



Soluzione

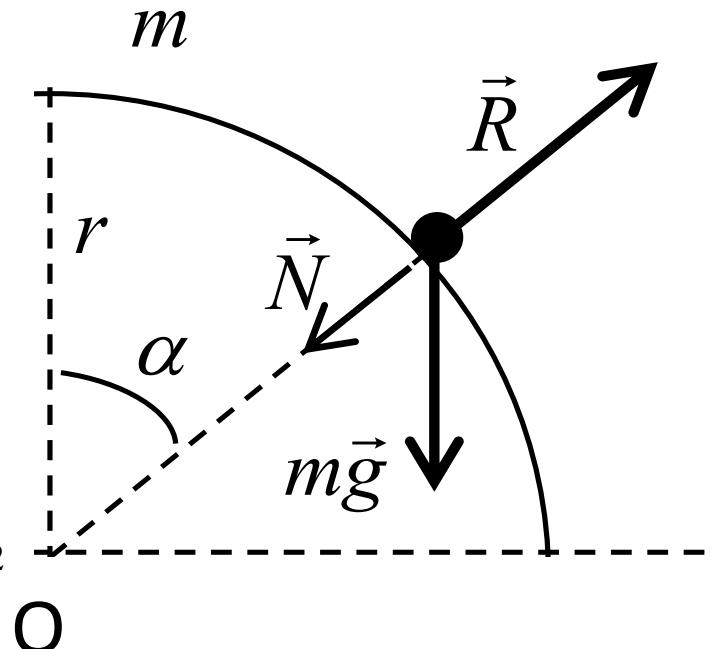
A quale angolo α^* avviene il distacco del punto materiale?

Durante il moto della pallina a contatto con la guida si ha (componente normale dell'equazione di Newton):

$$-R + mg \cos \alpha = m \frac{v^2}{r}$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica segue:

$$mgr = mgr \cos \alpha + \frac{1}{2} m v^2$$



Il distacco della pallina dalla guida avviene nell'istante in cui $R=0$ cioè per $\alpha = \alpha^*$ tale che $g \cos \alpha^* = \frac{v^2}{r}$. Inserendo tale vincolo nel bilancio energetico si ottiene:

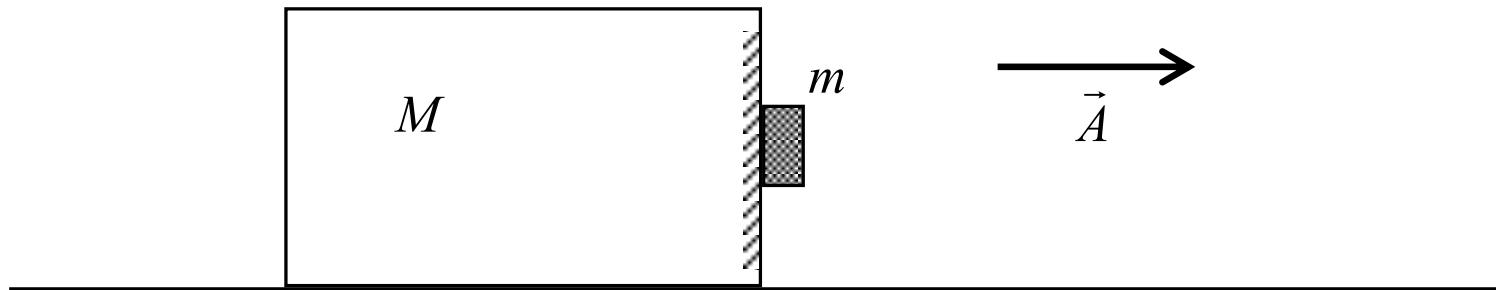
$$mgr = mgr \cos \alpha^* + \frac{1}{2} mgr \cos \alpha^* \rightarrow 1 = \cos \alpha^* + \frac{1}{2} \cos \alpha^*$$

$$\rightarrow 3 \cos \alpha^* = 2 \rightarrow \alpha^* = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$$

Esercizio 45

Un corpo di massa m può scorrere con attrito lungo un blocco di massa M . Sia μ_s il coefficiente di attrito statico. Il blocco è mantenuto in movimento con accelerazione costante \vec{A} .

Calcolare il minimo valore di $|\vec{A}|$ affinché m rimanga a contatto con M senza cadere.



Calcolare il minimo valore di $|\vec{A}|$ affinché m rimanga a contatto con M senza cadere.

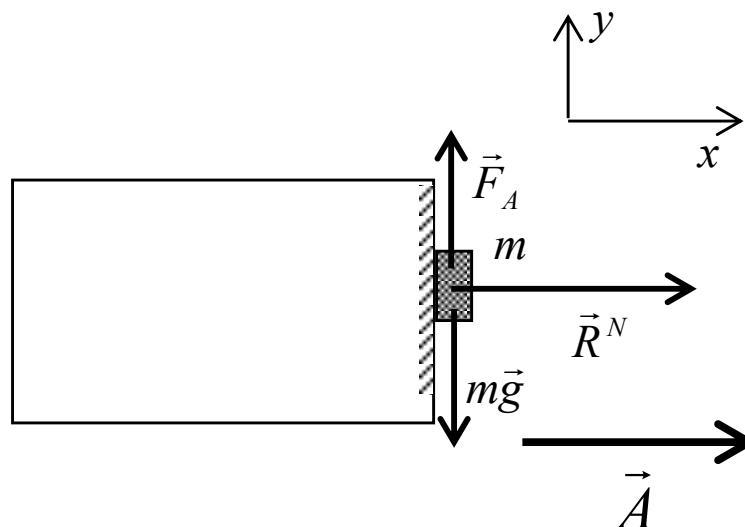
Soluzione

Scriviamo l'equazione di Newton per il corpo di massa m :

$$\vec{F}_A + \vec{R}^N + m\vec{g} = m\vec{A} \quad (\text{il corpo, in quiete rispetto al blocco, possiede accelerazione } \vec{A})$$

Utilizzando il sistema di assi di figura si ha:

$$\begin{cases} R^N = mA \\ F_A - mg = 0 \end{cases}$$



Affinché il corpo rimanga in quiete rispetto al blocco deve essere soddisfatta la seguente disequazione:

$$F_A = mg \leq \mu_s R^N = \mu_s mA \quad \text{da cui otteniamo} \quad A \geq \frac{g}{\mu_s}$$

- 4.** La cabina di un ascensore di massa $m = 500 \text{ kg}$ sta scendendo alla velocità $v_i = 4.0 \text{ m/s}$, quando il sistema di argani che ne controlla la discesa comincia a slittare, lasciandolo cadere con accelerazione cotante $a = g/5$.
- determinare il lavoro L_g svolto dalla forza peso durante la caduta di un tratto $d = 12 \text{ m}$;
 - determinare, lungo il medesimo tratto, il lavoro L_T svolto dalla forza di trazione T .
 - determinare il lavoro totale sviluppato sulla cabina durante la caduta di 12 m.
 - calcolare la variazione di energia cinetica della cabina alla fine della caduta di 12 m.

Idea chiave:

- tratto la cabina come corpo puntiforme

- a)** Il lavoro svolto dalla forza peso durante la caduta è pari a:

$$\begin{aligned} L_g &= \vec{F}_g \cdot \vec{d} = mg d \cos 0^\circ = mgd \\ &= (500 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(12 \text{ m}) \\ &= 5.88 \times 10^4 \text{ J} \approx 59 \text{ kJ} \end{aligned}$$

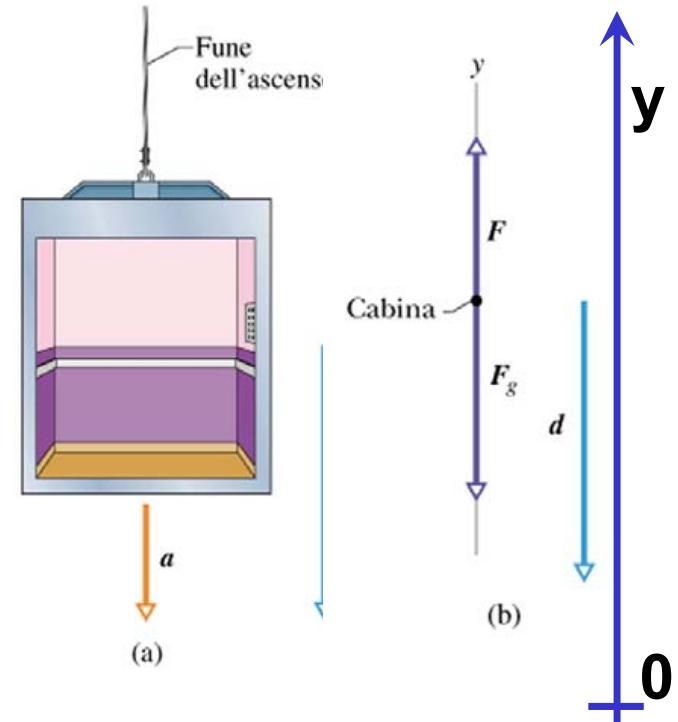
- b)** Per calcolare il lavoro svolto dalla tensione T della fune devo ricavare una espressione per T . Utilizzo la seconda legge di Newton:

proietto tale equazione su y:

$$-mg + T = ma \Rightarrow T = ma + mg = m(a + g)$$

da cui ricavo il lavoro della tensione:

$$L_T = \vec{T} \cdot \vec{d} = Td \cos(180^\circ)$$



b) Per calcolare il lavoro svolto dalla tensione T della fune devo ricavare una espressione per T. Utilizzo la seconda legge di Newton:

proietto tale equazione su y:

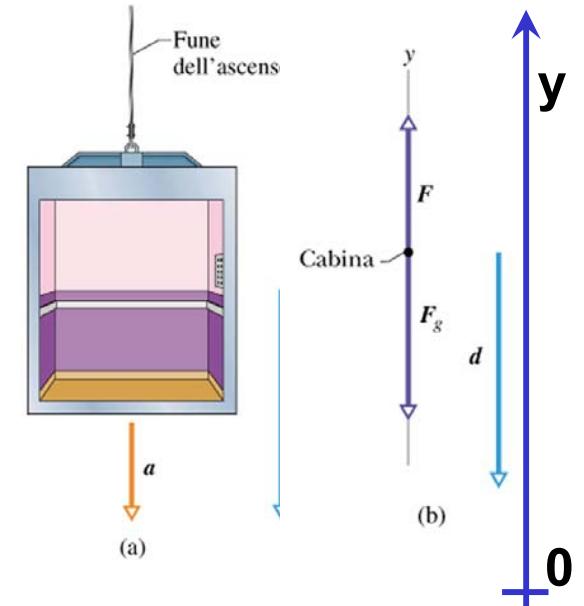
$$-mg + T = ma \Rightarrow T = ma + mg = m(a + g)$$

da cui ricavo il lavoro della tensione:

$$L_T = \vec{T} \cdot \vec{d} = Td \cos(180^\circ)$$

$$= -m(a + g)d \quad \text{sapendo che } a = -g/5 \text{ (verso il basso)}$$

$$= -m(-g/5 + g)d = -4/5mgd = -4/5(500\text{kg})(9.8\text{m/s}^2)(12\text{m}) = 47\text{kJ}$$



c) Il lavoro è una quantità scalare, quindi additiva:

$$L = L_g + L_T = 59\text{kJ} - 47\text{kJ} = 12\text{kJ}$$

d) Applico il teorema dell'energia cinetica:

la variazione di K è pari al lavoro svolto sulla cabina

$$L = \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 = L + \frac{1}{2}mv_i^2 = 12\text{kJ} + 1/2(500\text{kg})(4.0\text{m/s})^2 \approx 16\text{kJ}$$

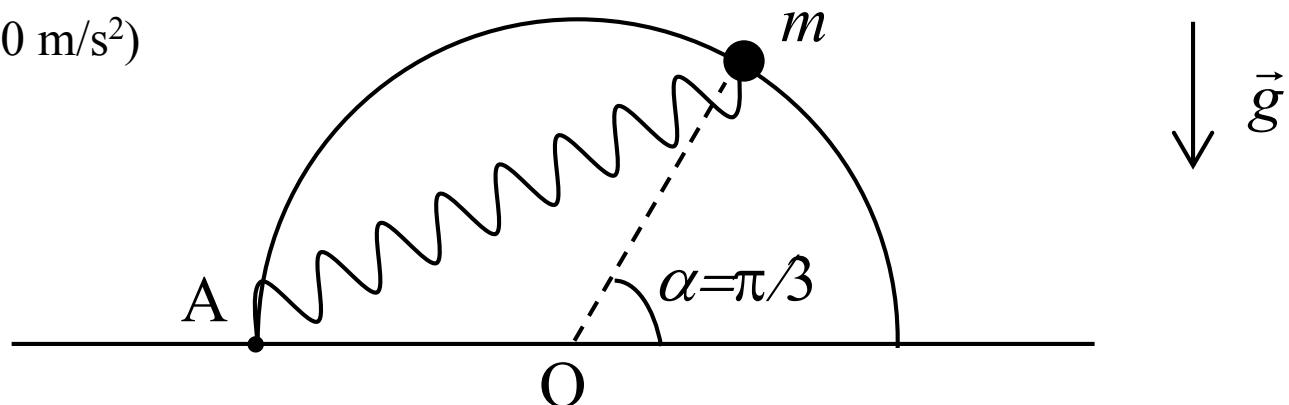
Un punto materiale di massa m è vincolato a scorrere lungo una guida liscia. La guida ha la forma di una semicirconferenza di centro O e di raggio r .

Il punto materiale è collegato al punto A mediante una molla ideale di costante elastica k e lunghezza di riposo trascurabile (vedi figura).

Sono noti: $r = 60$ cm, $k = 2$ N/m.

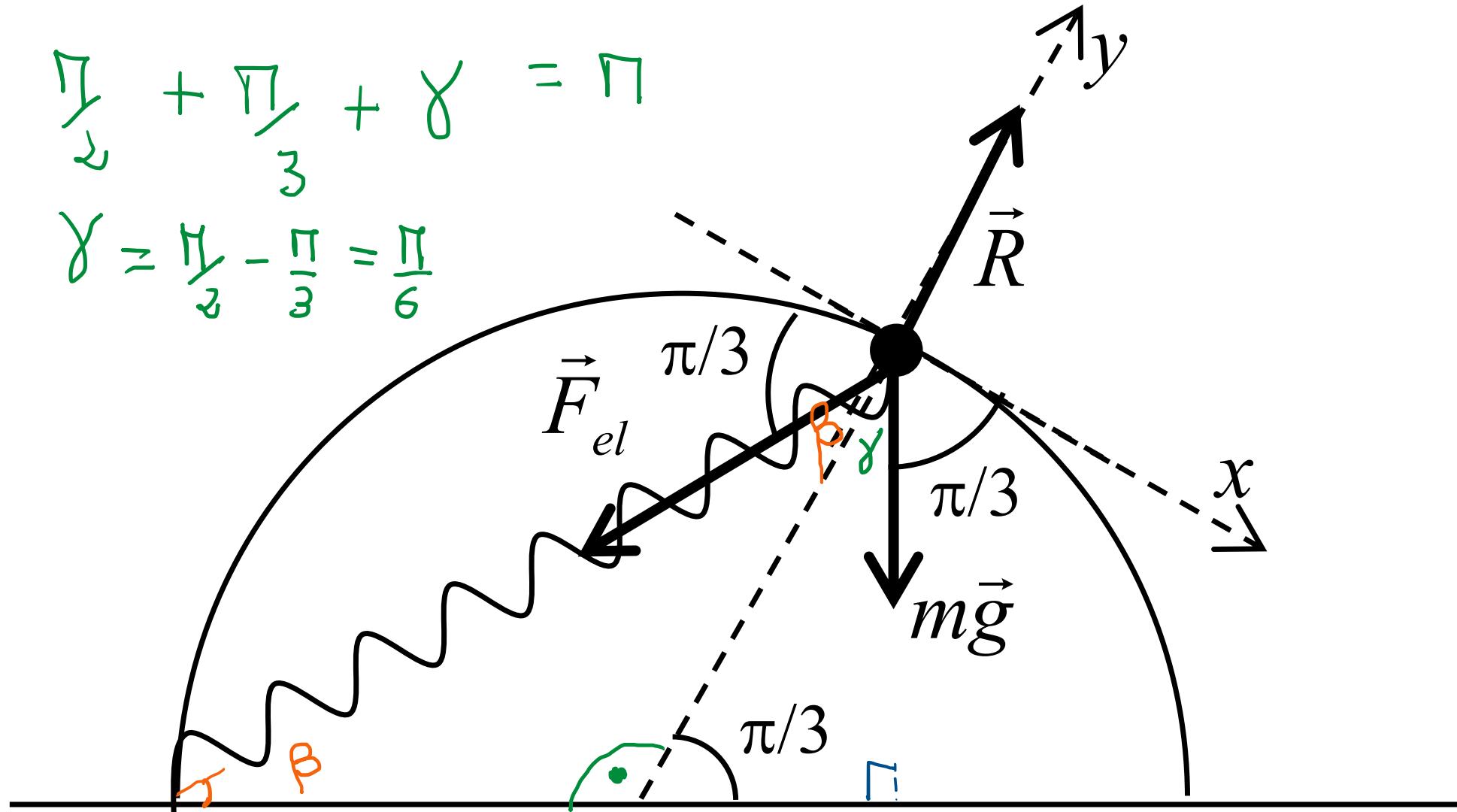
- 1) Calcolare la massa m affinché il punto sia in equilibrio nella configurazione di figura con $\alpha = \pi/3$.
- 2) Per tale valore di m calcolare la reazione esercitata dalla guida su m nella posizione di equilibrio.
- 3) Se la massa fosse doppia di quella calcolata precedentemente quale sarebbe l'accelerazione iniziale del punto materiale se venisse abbandonato nella posizione di figura con velocità nulla?

(assumiamo $g = 10$ m/s²)



$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \gamma = \pi$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$



$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

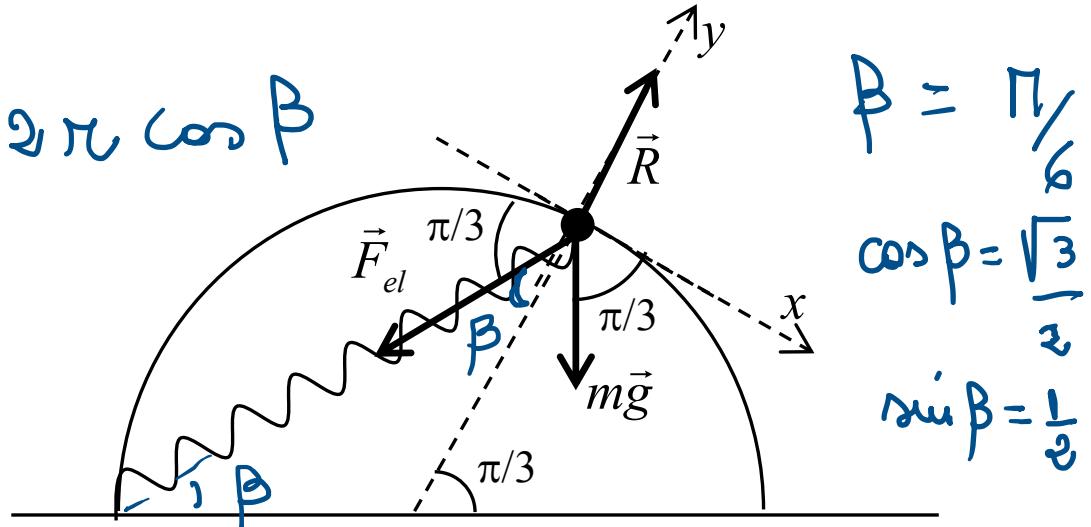
$$2\beta + \frac{2}{3}\pi = \pi \Rightarrow 2\beta = \frac{\pi}{3} \quad \beta = \frac{\pi}{6}$$

- 1) Calcolare la massa m affinché il punto sia in equilibrio nella configurazione di figura con $\alpha = \pi/3$.

Osserviamo che, nella configurazione di figura la lunghezza della molla è $\ell = \sqrt{3}r$.

Nella posizione di equilibrio l'equazione di Newton ha la forma: $\vec{F}_{el} + \vec{R} + m\vec{g} = 0$.

$$\ell = 2r \cos \beta$$



Scegliendo un sistema di assi come in figura e passando alle componenti si ha:

$$x) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}mg - \frac{\sqrt{3}}{2}kr = 0 \\ R - \frac{3}{2}kr - \frac{\sqrt{3}}{2}mg = 0 \end{array} \right. \rightarrow mg = \sqrt{3}kr \rightarrow m \approx 0,2kg$$

- 2) Per tale valore di m calcolare la reazione esercitata dalla guida su m nella posizione di equilibrio.

2) Dalla componente y otteniamo $R = 3kr \approx 3,6N$

3) Se la massa fosse doppia di quella calcolata precedentemente quale sarebbe l'accelerazione iniziale del punto materiale se venisse abbandonato nella posizione di figura con velocità nulla?

Nota nel moto successivo varierà anche θ e quindi l'accelerazione. Qui chiede di calcolare l'accelerazione un'istante dopo che il pm viene abbandonato

3) Indichiamo con $m^* = 2m = \frac{2\sqrt{3}}{g} kr$ la nuova massa del punto.

L'equazione di Newton in questo caso ha la forma $\vec{F}_{el} + \vec{R} + m^* \vec{g} = m^* \vec{a}$ e cioè, in componenti,

$$x) \begin{cases} \frac{1}{2} m^* g - \frac{\sqrt{3}}{2} kr = m^* a_x \\ y) R - \frac{3}{2} kr - \frac{\sqrt{3}}{2} m^* g = 0 \end{cases}$$

Si osservi che al tempo iniziale l'accelerazione del punto, che ha velocità nulla, è solo tangenziale, e cioè ha solo componente x.

Dalla componente x dell'equazione di Newton si ricava $a_x = \frac{g}{4} = 2,5 \text{ m/s}^2$