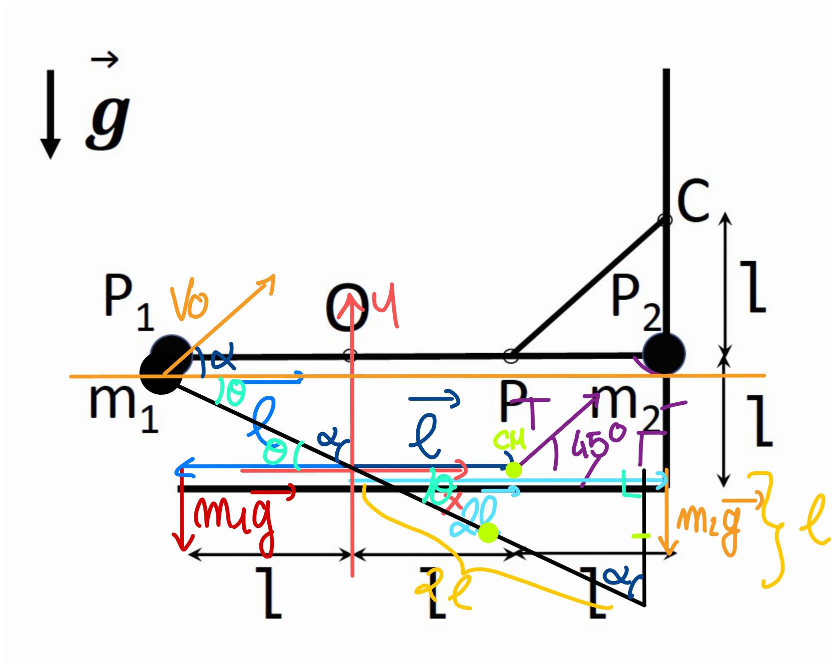
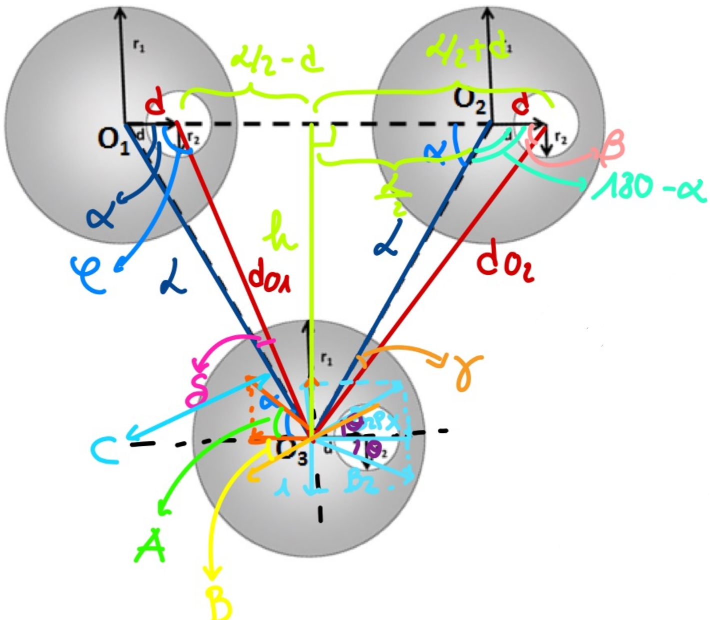




Fisica Generale I
Meccanica

Per supportarmi un po' ❤️
https://paypal.me/mgiannini01?locale.x=it_IT

Introduzione

→ La fisica è una SCIENZA SPERIMENTALE che fornisce una DESCRIZIONE QUANTITATIVA dei fenomeni che avvengono

└→ prevede OSSERVAZIONI SPERIMENTALI seguite da ANALISI MATEMATICA che permette l'elaborazione della teoria utile all'analisi del processo → EQUAZIONI

Danno gli STESSI RISULTATI in CONDIZIONI IDENTICHE e permettono di PREDIRE cosa accade in altre condizioni

Permesse dalle MISURE
- → Cosa → NON è una SPECULAZIONE INTELLETTUALE
  - Se sono presenti più teorie riguardanti uno stesso argomento è possibile stabilire quale è corretta con
- → Come
- → In che UNITÀ gli ESPERIMENTI → TEORIA ed ESPERIMENTO sono COMPLEMENTARI

Una teoria può essere valida anche solo entro certi LIMITI di misure → La DISCREPANZA permette di GENERALIZZARE

→ Il METODO SCIENTIFICO → Composto da: $\underbrace{\text{osservazioni, misurazioni}}_{\text{ricavo la LEGGE}}$, esperimenti, logica

esperimenti ↓ condizioni ≠

└→ VARIE FASI
- → Osservazione
- → Scelta Grandezze
- CAMBIO
- → Ipotesi ← NO
- → ESPERIMENTO per verificare la CORRETTEZZA delle ipotesi
  - ↓ riproducibile in OGNI TEMPO e OGNI LUOGO
  - SI → ipotesi diventa legge

+

METODO DEDUTTIVO → Parte da osservazioni ed esperimenti

→ Le LEGGI: relazioni tra GRANDEZZE FISICHE e OGGETTI → descrizione QUANTITATIVA attraverso
- → elaborazione teoria
- → matematica
- → Statistica

Le grandezze fisiche

→ Una grandezza fisica ha senso se è stata definita un' UNITÀ CAMPIONE con 3 caratteristiche
- → Facilmente disponibile
- → Precisa e stabile nel tempo
- → Riproducibile

↓

Insieme dei campioni = SISTEMA INTERNAZIONALE → unità di misura FONDAMENTALI: → Esistono anche DERIVATE
- Lunghezza: metro, m
- Massa: Chilogrammo, kg
- Tempo: Secondo, s
- Temperatura: Kelvin, K
- Intensità di corrente: Ampere, A

→ Gli ORDINI di GRANDEZZA: Moltiplicazione del moltiplicatore per una POTENZA di 10 → Per esprimere ordine si usa simbolo ~
- MULTIPLI
  - → 10^3: Kilo, k
  - → 10^6: Mega, M
  - → 10^9: Giga, G
- SOTTOMULTIPLI
  - → 10^{-3}: milli, m
  - → 10^{-6}: micro, μ
  - → 10^{-9}: nano, n

→ La MASSA: Campione = cilindro di Platino-Iridio a Parigi → massa di 1 l di H_2O a 4°C e p. atmosferica
- → POCO PRECISO: Adesso è c.te di Planck · v luce

→ La LUNGHEZZA: Campioni
- → 1799: 10^{-7} distanza tra polo Nord ed equatore
- → 1960: Distanza tra due tacche di sbarra di platino-iridio
- → 1983: 1650763.73 lunghezze d'onda luce rossa-arancione di lampada Krypton-86

→ Il TEMPO: Campioni
- → Inizialmente: 1/86400 del giorno solare medio
- → 1967: OROLOGIO ATOMICO: periodo delle vibrazioni di un atomo di Cesio

→ L'ANALISI DIMENSIONALE → Dimensione = natura fisica di una grandezza
- → [L] = lunghezza
- → [M] = massa
- → [T] = tempo

↓

Per verificare la CORRETTEZZA di un'espressione → Quantità possono essere sommate solo se hanno le STESSE DIMENSIONI

→ Espressione corretta se entrambi i lati hanno le STESSE DIMENSIONI

Esempio

$$x = \frac{1}{2} a t^2 \longrightarrow [L] = \frac{1}{2} \frac{[L]}{[T]^2} \cdot [T]^2 \; ✓$$

(x → posizione; t → tempo; a → accelerazione)

↓

Le grandezze possono essere CONVERTITE moltiplicando per il fattore di conversione

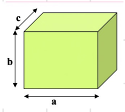
→ La PRECISIONE e le CIFRE SIGNIFICATIVE

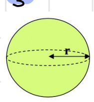
→ L'accuratezza dipende dalla precisione dello strumento e dal numero di cifre significative
- → ERRORE ASSOLUTO (E_a): Precisione della misura (indicato con ±)
- → ERRORE RELATIVO (E_r): Rapporto tra errore assoluto e misura
- → CIFRE SIGNIFICATIVE
  - → Comprendono anche la PRIMA CIFRA INCERTA
  - → Lo 0 è significativo se NON usato per mostrare la posizione della virgola

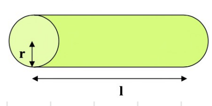
    Esempi

    187.3 → 4, 10.000 → 6, 0,00001 → 1
- → MOLTIPLICAZIONE (DIVISIONE): risultato ha il numero PIÙ PICCOLO di cifre significative
- → ADDIZIONE (SOTTRAZIONE): numero MINIMO di decimali di ciascun termine
- → ATT. alle AMBIGUITÀ: 1500 m è AMBIGUO → usare $1.5 \cdot 10^3$ m per 2 C.S, $1{,}50 \cdot 10^3$ m per 3 C.S e così via
- → ARROTONDAMENTO: ultima cifra conservata va aumentata di 1 se successiva è > 5, mentre va diminuita di 1 se è < 5. Se è 5 va arrotondata al numero PARI più vicino

→ Le MISURE di SUPERFICI e VOLUMI
- PARALLELEPIPEDO
  - → $S_{base} = a \cdot b$
  - → $S_{tot} = 2(ab + ac + ca)$
  - → $V = a \cdot b \cdot c$
- SFERA
  - → $S_{cerchio} = \pi r^2$
  - → $S_{sfera} = 4\pi r^2$
  - → $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- CILINDRO
  - → $S_{cerchio} = \pi r^2$
  - → $S = 2\pi r l + 2\pi r^2$
  - → $V = \pi r^2 l$

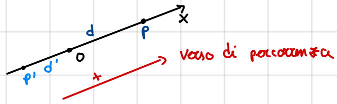






→ 3 SISTEMI di RIFERIMENTO

→ SISTEMI UNIDIMENSIONALI

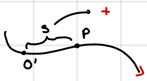


→ MOTO SU UNA RETTA: sufficiente fissare ORIGINE e VERSO di PERCORRENZA

$P \longrightarrow x = +d$

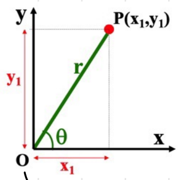
$P' \longrightarrow x = -d'$

→ EQUIVALENTE a LINEA CURVA:

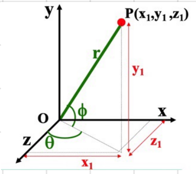


VERSO di percorrenza

→ Le COORDINATE CARTESIANE



← 2D



← 3D

2D: CARTESIANE: $P(x,y)$

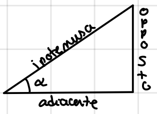
POLARI: $P(r,\theta)$

3D: CARTESIANE: $P(x,y,z)$

POLARI: $P(r,\theta,\phi)$

IMPORTANTE: TRIGONOMETRIA → angolo: misura dell'apertura tra due rette che si intersecano → rapporto tra arco sotteso e raggio dell'arco

$\alpha = \frac{\text{arco}}{\text{raggio}}$ → Se uguali: 1 → 1 radiante → Un angolo giro ha 2π radianti



→ FORMULE IMPORTANTI

- $\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{opposto}}{\text{ipotenusa}}$ → PERIODO e FREQUENZA: $y = A\,\text{sen}\,\omega t$ → ω PULSAZIONE → T = PERIODO: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ → ν = frequenza $= \frac{1}{T}$
- $\cos\alpha = \frac{\text{adiacente}}{\text{ipotenusa}}$
- $\tan\alpha = \frac{\text{opposto}}{\text{adiacente}}$

→ SISTEMI 2D

→ Nel piano cartesiano l'ASSE y è ruotato di 90° rispetto all'ASSE x e l'origine coincide con la loro INTERSEZIONE

→ Coordinate x, y → x: Proiezione di P su x; y: Proiezione di P su y

→ Coordinate POLARI r, θ → r: distanza di P da O; θ: angolo formato con asse x espresso in RADIANTI

- POSITIVO se asse x viene ruotato in senso ANTIORARIO
- NEGATIVO se ruotato in senso ORARIO

COME CAMBIARE le COORDINATE

→ DA cartesiane A polari

- $r^2 = x^2 + y^2$
- $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ se $x > 0$
- $\theta = \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ se $x < 0$

→ DA polari A cartesiane

- $x = r\cos\theta$
- $y = r\,\text{sen}\,\theta$

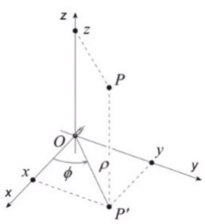
→ SISTEMI 3D: terna x, y, z, assi ORTOGONALI tra di loro → TERNA DESTRORSA con x su pollice, y su indice e z su medio

→ Per determinare proiezione → Congiungere O e P_{xy} → P_x = // ad asse y fino ad intersecare x

P_y = // ad asse x fino ad intersecare y

→ Per determinare P_z si usa segmento // a P_{xy}

→ COORDINATE CILINDRICHE: estensione 3D coordinate polari: (ρ, ϕ, z)



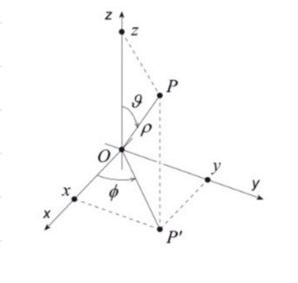
→ Da CARTESIANE a CILINDRICHE →

- $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$
- $\tan\phi = \frac{y}{x}$
- $z = z$

→ Da CILINDRICHE a CARTESIANE →

- $x = \rho\cos\phi$
- $y = \rho\,\text{sen}\,\phi$
- $z = z$

→ COORDINATE SFERICHE: terna (ρ, ϕ, θ)



→ Da CARTESIANE a SFERICHE →

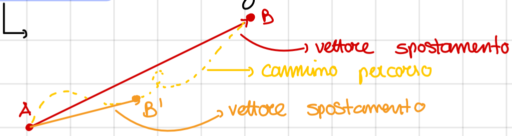
- $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- $\tan\phi = \frac{y}{x}$
- $\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

→ Da SFERICHE a CARTESIANE →

- $x = \rho\,\text{sen}\,\theta\cos\phi$
- $y = \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$
- $z = \rho\cos\theta$

→ Grandezze scalari e grandezze vettoriali

- → Scalari: Specificate da valore ed unità di misura (massa, volume)
- → Vettoriali: Specificate da
  - → Modulo (intensità) ⟶ Vettore SPOSTAMENTO: vettore che va da posizione di partenza a posizione di arrivo e NON è influenzato dal cammino percorso
  - → Direzione
  - → Verso

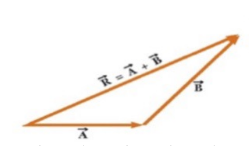


Simbologia utilizzata (vettore A)

- → Nome del vettore: $\vec{A}$, **A**, $\underline{A}$
- → Intensità: $|\vec{A}|$ o A ⟶ Unità di misura della grandezza rappresentata

→ Operazioni sui vettori

- → UGUAGLIANZA: stesso modulo e direzione orientata ⟶ sovrapponibili con traslazione
- → SOMMA tramite il metodo grafico (parallelogramma)

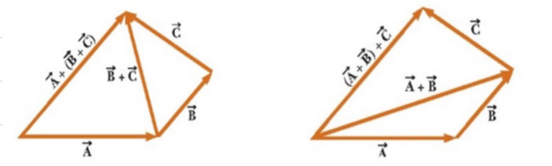


⟶ Vettore risultante va dalla coda di $\vec{A}$ alla testa di $\vec{B}$

PROPRIETÀ

- → COMMUTATIVA (dimostrazione attraverso il grafico)
- → ASSOCIATIVA: $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$

quando si hanno più di 2 vettori

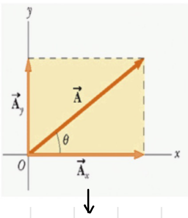


Vettore risultante va dalla coda del primo alla punta dell'ultimo

- → VETTORE OPPOSTO
  - L'opposto del vettore $\vec{A}$ è definito in modo tale che $\vec{A}+(-\vec{A}) = 0$ ⟶ Stesso modulo e verso opposto
- → DIFFERENZA
  - $\vec{A}-\vec{B}$ è definita come $\vec{A}+(-\vec{B})$ — vettore opposto di $\vec{B}$
- → MULTIPLO SCALARE
  - $m\vec{A}$ (m scalare) ha la stessa direzione di $\vec{A}$ e verso dipendente dal segno di m: >0 = stesso verso; <0 = verso opposto
  - il modulo $|m\vec{A}|$ è dato da $|m|A$

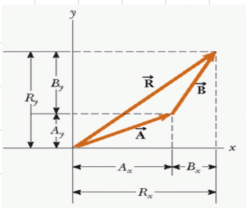
→ Vettori in COMPONENTI CARTESIANE

vettori possono essere scomposti nelle loro proiezioni sui 3 assi cartesiani



⟶ $\vec{A} = \underbrace{\vec{A}_x + \vec{A}_y}_{\text{vettori componenti}} = \underbrace{(A_x, A_y)}_{\text{componenti lungo x ed y}}$ ⟹ Si ha $A_x = A\cos\theta$, $A_y = A\sin\theta$ e $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$

La SOMMA in coordinate cartesiane ⟶

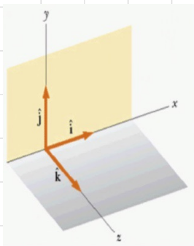


⟶ $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ ⟹ $\vec{R} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$

→ I VERSORI (vettori unitari): vettori adimensionali di modulo 1 ⟶ $\hat{A}\cdot\hat{A} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{A}}{|\vec{A}|\,|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{A}}{|\vec{A}|^2} = 1$

Servono per individuare una direzione ed un verso nello spazio

Presenti 3 versori ortogonali $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ che rappresentano gli assi x, y, z di segno +

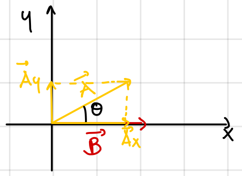


Possibile rappresentare un vettore attraverso l'utilizzo dei 3 versori

$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

Il PRODOTTO SCALARE

- DEFINIZIONE 1: $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \longrightarrow$ angolo compreso tra i due vettori
  - Proiezione di $\vec{B}$ su $\vec{A}$ $\longrightarrow$ Grazie alla proprietà associativa della moltiplicazione vale anche il vice-versa
- PROPRIETÀ
  - $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$: proprietà commutativa
  - $(a\vec{A})\cdot(b\vec{B}) = (ab)(\vec{B}\vec{A})$
  - $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$: proprietà distributiva
  - $\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$
- TRA i VERSORI
  - $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \longrightarrow \cos 0 = 1$ e $i = j = k = 1$
  - $\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0 \longrightarrow$ Dall'ortogonalità $(\cos \pi/2 = 0)$
- DEFINIZIONE 2: Se $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$, $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ $\Longrightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$
  - ↓ validità definizioni

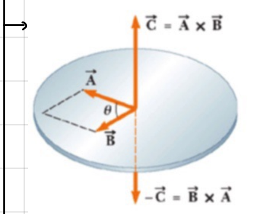


$\vec{A}\,(A_x, A_y)$

$\vec{B}\,(B_x, 0)$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x = A\cos\theta\, B$

Il PRODOTTO VETTORE



DEFINIZIONE: $\vec{C} = \vec{A}\wedge\vec{B}$ oppure $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$

- modulo: $AB\sin\theta \longrightarrow$ angolo compreso tra i 2 vettori $\longrightarrow$ il più piccolo
- direzione: perpendicolare ad entrambi i vettori
- verso: regola della mano destra

$\longrightarrow$ Dita puntate su $\vec{A}$ e poi ruotate verso $\vec{B}$

- Se ruota in verso antiorario verso sul pollice
- Se ruota in senso orario verso opposto

PROPRIETÀ

- $\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$
- $\vec{A}\times\vec{A} = 0$ $(\sin 0 = 0)$
- $|\vec{A}\times\vec{B}|$ = area del parallelogramma individuato da $\vec{A}$ e $\vec{B}$

TRA i VERSORI

- $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$
- $\hat{i}\cdot\hat{j} = -\hat{j}\cdot\hat{i} = \hat{k}$
- $\hat{j}\times\hat{k} = -\hat{k}\times\hat{j} = \hat{i}$
- $\hat{k}\cdot\hat{i} = -\hat{i}\times\hat{k} = \hat{j}$

$\vec{A}\wedge\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j})\wedge B\hat{i} = A_x\hat{i}\wedge B\hat{i} + A_y\hat{j}\wedge B\hat{i} = A_xB\underbrace{\hat{i}\wedge\hat{i}}_{0} + A_yB\,\hat{j}\wedge\hat{i} = A\sin\theta B(-\hat{k})$

In COORDINATE CARTESIANE: $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$, $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

$\longrightarrow (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\wedge(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) = \cancel{A_xB_x\,\hat{i}\wedge\hat{i}} + A_xB_y\,\hat{i}\wedge\hat{j} + A_xB_z\,\hat{i}\wedge\hat{k} +$
$+ A_yB_x\,\hat{j}\wedge\hat{i} + \cancel{A_yB_y\,\hat{j}\wedge\hat{j}} + A_yB_z\,\hat{j}\wedge\hat{k} + A_zB_x\,\hat{k}\wedge\hat{i} + A_zB_y\,\hat{k}\wedge\hat{j} +$
$+ \cancel{A_zB_z\,\hat{k}\wedge\hat{k}} = \hat{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_z)$

La regola del determinante

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{i}(A_yB_z - A_zB_y) - \hat{j}(A_xB_z - A_zB_x) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

Il teorema di Levi-Civita

$C_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se 1 o + indici sono uguali} \\ 1 & \text{se la classe di permutazione è PARI} \\ -1 & \text{se la classe di permutazione è DISPARI} \end{cases}$$

- 1 2 3 $\longrightarrow$ PARI: 0 permutazioni
- 1 3 2 $\longrightarrow$ DISPARI: 1 permutazione
- 3 1 2 $\longrightarrow$ PARI: 2 permutazioni

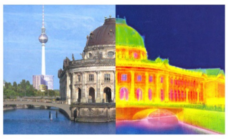
- $C_1 = \varepsilon_{123}A_2B_3 + \varepsilon_{132}A_3B_2 = A_2B_3 - A_3B_2$
- $C_2 = \varepsilon_{231}A_3B_1 + \varepsilon_{213}A_1B_3 = A_3B_1 - B_3A_1$
- $C_3 = \varepsilon_{321}A_2B_1 + \varepsilon_{312}A_1B_2 = A_2B_1 - A_1B_2$

Le leggi fisiche sono INDIPENDENTI dal SISTEMA di COORDINATE

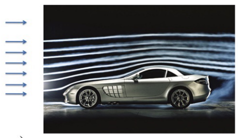
- Prodotto scalare invariante rispetto alle rotazioni del sistema
- Legge come relazione tra quantità vettoriali è covariante: $\vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow$ Variano allo STESSO MODO

→ 3) CAMPI

└→ Proprietà fisica dello spazio
- → Scalari : temperatura $T = T(x,y,z)$
- → vettoriali : velocità $V = V(x,y,z) = V_x(x,y,z) + V_y(x,y,z) + V_z(x,y,z)$



$T = T(x,y)$



$\vec{v}(x,y,z)$

Esempio

$\vec{A} = (0,1,-4)\ m$ $\qquad$ $\vec{A}+\vec{B} = (0,-2,-2)\ m$

$\vec{B} = (0,-3,2)\ m$ $\qquad$ $\vec{A}-\vec{B} = (0,4,-6)\ m = (0\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k})\ m$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0\cdot 0 + (-3)\cdot 1 + (-4)\cdot 2 = -3-8 = -11\ m^2$$

$$\cos \widehat{\vec{A}\vec{B}} = \frac{-11\ m^2}{\sqrt{17}\ m \sqrt{13}\ m}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = i(2-12) = -10\hat{i}$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB \operatorname{sen}\theta \longrightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{|\vec{A}\times\vec{B}|}{AB} = \frac{10\ m^2}{\sqrt{17}\ m \sqrt{13}\ m}$$

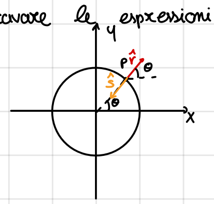
→ TROVARE VETTORI ORTOGONALI

└→ Dato $\vec{A} = (a,b)$, il vettore ad esso ortogonale è dato da $\vec{B} = (-b,a)$

Esercizi dalle slide

① Si consideri una circonferenza di raggio $r = 2\,m$ centrata nell'origine del sistema di assi

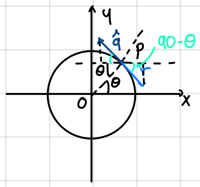
a. Ricavare le espressioni dei versori tangenti e perpendicolari alla circonferenza nel generico punto P sul piano xy



$\longrightarrow$ VERSORI NORMALI

• DETERMINO $\hat{r}$: $\hat{r} = \dfrac{\vec{OP}}{|OP|} \longrightarrow \dfrac{(r\cos\theta,\ r\,sen\theta)}{r} \Longrightarrow \hat{r} = (\cos\theta, sen\theta)$

• DETERMINO $\hat{s} \longrightarrow \hat{s} = -\hat{r}$, quindi $\hat{s} = (-\cos\theta, -sen\theta)$



$\longrightarrow$ VERSORI TANGENTI

$$\begin{cases} \vec{r}\cdot\vec{OP} = 0 & \text{per ORTOGONALITÀ} \quad ① \\ r_x^2 + r_y^2 = 1 & \text{per } |\hat{r}| = 1 \quad ② \end{cases}$$

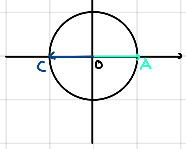
① $r_x\,\cancel{r}\cos\theta + r_y\,\cancel{r}\,sen\theta = 0 \longrightarrow r_x = -r_y\dfrac{sen\theta}{\cos\theta} \longrightarrow r_x = \mp\, sen\theta$

② $r_y^2\dfrac{sen^2\theta}{\cos^2\theta} + r_y^2 = 1 \longrightarrow r_y^2\left(\dfrac{\overbrace{sen^2\theta + \cos^2\theta}^{1}}{\cos^2\theta}\right) = 1 \longrightarrow \dfrac{r_y^2}{\cos^2\theta} = 1 \longrightarrow r_y = \pm\cos\theta$

$\hat{q} = (-sen\theta, \cos\theta)$

$\hat{r} = (sen\theta, -\cos\theta)$

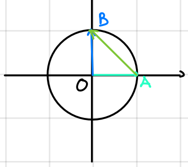
b. ① CALCOLARE $\vec{OC} - \vec{OA}$



$\vec{OC} = -r\hat{i} \longrightarrow \vec{OC} - \vec{OA} = -r\hat{i} - r\hat{i} = -2r\hat{i} = (-4, 0)\,m$

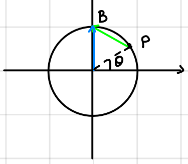
$\vec{OA} = r\hat{i}$

② CALCOLARE $\vec{AB}$



$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \longrightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = 2\hat{j} - 2\hat{i} = (-2, 2)\,m$

③ CALCOLARE $\vec{PB}$

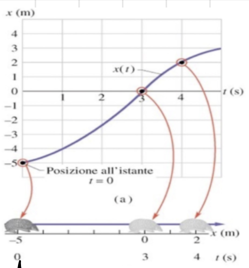


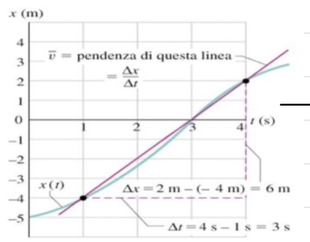
$\vec{OP} + \vec{PB} = \vec{OB} \longrightarrow \vec{PB} = \vec{OB} - \vec{OP} = r\hat{j} - (r\cos\theta, r\,sen\theta) = (-r\cos\theta,\ r - r\,sen\theta)\ m$

④ $\vec{PB}$ per $\theta = \dfrac{\pi}{6} \longrightarrow \left(-r\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ r - \dfrac{1r}{2}\right) = (-\sqrt{3}, 1)$

Il moto in una dimensione

- Il **PUNTO MATERIALE** → particella che possiede massa ma viene considerata di dimensione nulla
  - CARATTERISTICHE
    - Dimensione effettiva non ha importanza
    - Processi interni non influenzano il moto
- La **POSIZIONE**: posizione occupata dal punto materiale rispetto all'origine del sistema di riferimento in ogni istante
  - Lo **SPOSTAMENTO** Δx = variazione della posizione in un certo intervallo di tempo: $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ [m], $\Delta t = t_2 - t_1$ [s]
    - Può essere positivo o negativo
    - ≠ da distanza = lunghezza cammino percorso
- La **VELOCITÀ**
  - Velocità **MEDIA**: rapporto fra spostamento ed intervallo di tempo: $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ [m/s] → può essere + 0 −
  - Velocità **SCALARE MEDIA**: $V_{media} = \frac{d}{\Delta t}$ → distanza
  - Velocità **ISTANTANEA**: $V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ [m/s] oppure $\frac{dx}{dt}$ [m/s] → SCALARE: $|V|$
- La **LEGGE ORARIA** o **DIAGRAMMA ORARIO**
  - Rappresenta la coordinata x in funzione del tempo
    - t su asse x (ascisse)
    - posizione su asse y (ordinate)

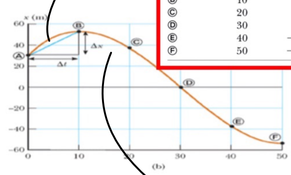




→ Velocità media = pendenza retta che congiunge punti di partenza ed arrivo
→ tangente dell'angolo formato dalla congiungente con l'asse x

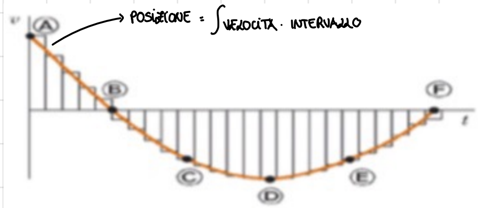
- Esempio: $\bar{V}$ tra 1 e 4 → $\frac{x(4s)\,m - x(1s)\,m}{4s - 1s} = \frac{2m - (-4m)}{3s} = \frac{6m}{3s} = 2$ m/s
- Dividendo ulteriormente l'asse delle ascisse è possibile rappresentare anche il grafico della velocità

tangente DECRESCE



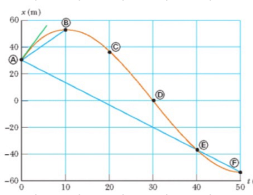
Posizione	t (s)	x (m)
Ⓐ	0	30
Ⓑ	10	52
Ⓒ	20	38
Ⓓ	30	0
Ⓔ	40	−37
Ⓕ	50	−53

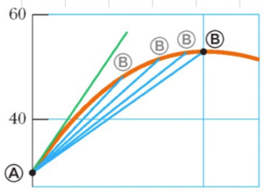
tangente DECRESCE ma modulo aumenta



→ POSIZIONE = $\int$ VELOCITÀ · INTERVALLO

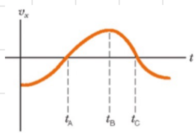
- La **VELOCITÀ ISTANTANEA**



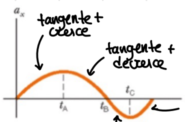


→ Mano a mano che gli intervalli si rimpiccioliscono, la tangente si riduce ad essere la tangente nel punto A
→ $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

- L'**ACCELERAZIONE**
  - Accelerazione media: $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ [m/s²]
  - Accelerazione istantanea: $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$
    - tangente alla curva della velocità nel punto scelto: $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ oppure $\ddot{x}(t)$ → nulla in massimo/minimo grafico della velocità

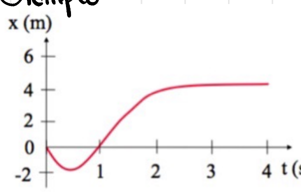


accelerazione →

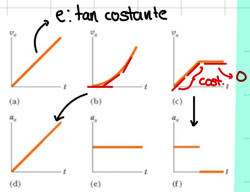


tangente + cresce
tangente + decresce
tangente − decresce
tangente − cresce

Esempio



→ $\bar{V}$ nei primi 4 secondi: $\frac{4m - 0m}{4s - 0m} = 1$ [m/s]
→ V a t = 4?: 0 m/s perché l'angolo è nullo

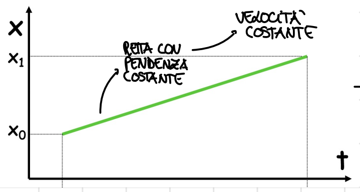


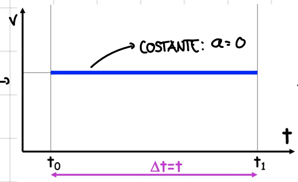
e: tan costante
cost. → 0

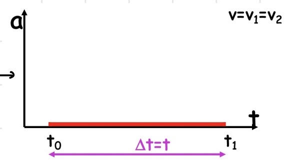
- **SINTESI**: Se è nota $x(t)$ è possibile determinare velocità ed accelerazione
  - $V = \frac{dx(t)}{dt}$
  - $a = \frac{dv(t)}{dt}$

Il moto RETTILINEO UNIFORME: velocità costante

- $x = x_0 + vt$
- $v = \text{Costante} = \frac{x - x_0}{t}$
- $a = 0$



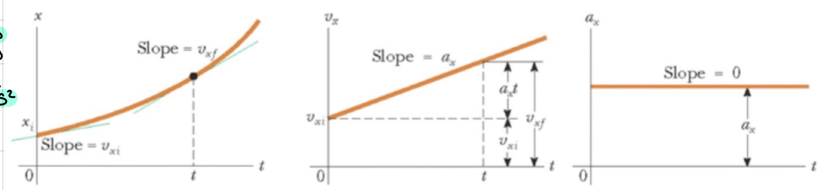




CON GLI INTEGRALI: $x = \int_{t_0}^{t_1} v\, dt$

Il moto UNIFORMEMENTE ACCELERATO: accelerazione costante

- $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$: $[L] = m$
- $v = v_0 + at$ $(v(t) - v_0 = at)$ $\longrightarrow [L/T] = m/s$
- $a = \text{costante} = \frac{v - v_0}{t} \longrightarrow [L/T^2] = m/s^2$



DIMOSTRAZIONE legge oraria

$$\underline{\int_{t_0}^{t} v(t)dt} = \int_{t_0} \frac{dx}{dt}\, dt = \int_{t_0} dx = x(t) - x(t_0) = \underline{\int_{t_0}^{t} (v_0 + at')\, dt'} = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \longrightarrow \text{QUINDI: } x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2$$

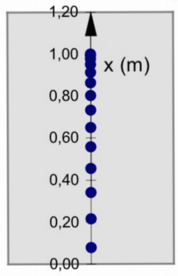
$\longrightarrow$ legge velocità

RELAZIONI UTILI

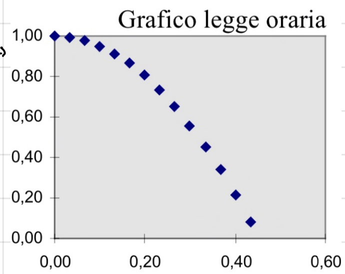
- Da $v = v_0 + at$ ricavo $t = \frac{v - v_0}{a}$
- Da $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ ricavo, sostituendo t: $x = x_0 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$, ovvero $x - x_0 = \left(v_0 + \frac{1}{2} \cancel{a}\, \frac{v - v_0}{\cancel{a}}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right) = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right) =$

  $= v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \longrightarrow$ ottenuta sostituendo in • $t = \frac{v - v_0}{a}$
- • $x = x_0 + \frac{1}{2}(v + v_0)t$, ottenuta sostituendo $a = \frac{v - v_0}{t}$ nella LEGGE ORARIA

La TRAIETTORIA: luogo dei punti descritto dal punto materiale



legge oraria $\longrightarrow$



$\longrightarrow$ Moto di un GRAVE con accelerazione di gravità: $9{,}81\ m/s^2$ diretta verso il basso

$x = 1.0 - \frac{1}{2} 9{,}8\, t^2$

Passare dall'accelerazione al diagramma orario

$a = \frac{dv}{dt}$, quindi $dv = a dt \longrightarrow \int_{t_0}^{t} dv = v(t) - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(t')dt' = a \int_{t_0}^{t} dt' = a(t - t_0) \longrightarrow v(t) = v_0 + a(t - t_0)$ (c.te)

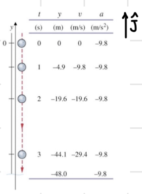
OPPURE: $dx = v dt \longrightarrow \int_{t_0}^{t} dx = x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t')dt' \longrightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + a(t' - t_0))dt \longrightarrow x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$

Su un sistema CURVILINEO

- Velocità scalare media:
  - $v_s^m(t_1, t_2) = \left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|$ (tra t e $t + \Delta t$)
  - $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$
  - $v_s^m(t, t + \Delta t) = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$ (tra t e $t + \Delta t$)
- Velocità scalare istantanea: $v_s(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$
- Accelerazione scalare media:
  - $a_s^m(t_1, t_2) = \frac{v_s(t_2) - v_s(t_1)}{t_2 - t_1}$ (tra t_1 e t_2)
  - $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$
  - $a_s^m(t, t + \Delta t) = \frac{v_s(t + \Delta t) - v_s(t)}{\Delta t}$ (tra t e $t + \Delta t$)
- Accelerazione scalare istantanea: $a_s(t) = \frac{dv_s}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_s(t + \Delta t) - v_s(t)}{\Delta t}$

L'ACCELERAZIONE di GRAVITÀ

- STESSA per ogni oggetto $\longrightarrow$ ogni oggetto lasciato libero di cadere è soggetto all'accelerazione di gravità
- La CADUTA LIBERA dei gravi



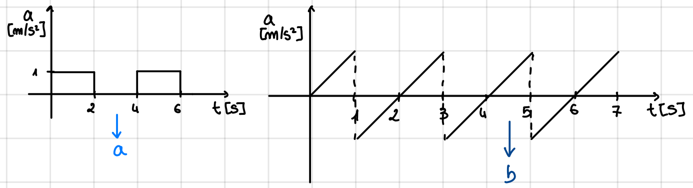
$\longrightarrow$ L'accelerazione è COSTANTE: il moto è UNIFORMEMENTE ACCELERATO $\longrightarrow$ RELAZIONI UTILI

$\hookrightarrow -g\hat{j}$, quindi $v(t) = -g(t)$

- $y = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + y_0$
- $v = v(t) = at + v_0$, dove $a = -g$
- $y = y_0 + \frac{1}{2}(v + v_0)t$
- $v^2 - v_0^2 = 2a(y - y_0)$

Esercizi dalle slide

① Discutere e disegnare la velocità in funzione del tempo e i diagrammi orari di 2 punti materiali che si muovono di moto rettilineo e con le accelerazioni mostrate nelle seguenti figure. In entrambi i casi $v(0)=0$, $s(0)=0$



a. La velocità è costante tra 2 e 4, mentre il moto è uniformemente accelerato negli altri intervalli. In quei tratti il grafico è una parabola

GRAFICO VELOCITÀ

- $t \in [0,2]$: $v(2) = v_0 + \int_0^2 a\,dt = v_0 + a(2-0) = v_0 + 2a = 2$ m/s
- $t \in [2,4]$: $v = 2$: RETTA ORIZZONTALE
- $t \in [4,6]$: $v(6) = 2 + \int_4^6 a\,dt = 2 + a(6-4) = 2 + 2a = 2 + 2 = 4$ m/s
- $t \in [6,8]$: $v = 4$: RETTA ORIZZONTALE

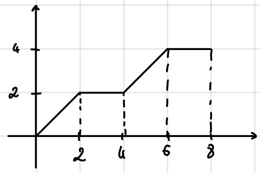


GRAFICO POSIZIONE

→ $s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = s_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 + at'\,dt' = s_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2$

APPLICO FORMULA DIMOSTRATA

$s(0) = 0$

$s(2) = 0 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 2\,m$ ⟶ PARABOLA TRA 0 e 2

$s(4) = 2 + 2 \cdot 2 = 6\,m$ ⟶ RETTA TRA 2 e 4

$s(6) = 6 + 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 6 + 4 + 2 = 12\,m$ ⟶ PARABOLA

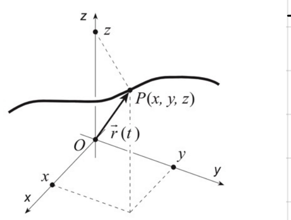
$s(8) = 12 + 4 \cdot 2 + 0 = 20\,m$ ⟶ RETTA

b. L'accelerazione in questo caso NON è costante, quindi conviene analizzare il moto nei vari istanti dove l'accelerazione è una retta

↳ intervalli $[0,1]$, $[1,3]$, $[3,5]$, $[5,7]$

⟶ Analisi intervallo $[0,1]$

Il moto in più dimensioni



→ Leggi orarie per ciascuna coordinata: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ → La curva descritta si chiama TRAIETTORIA

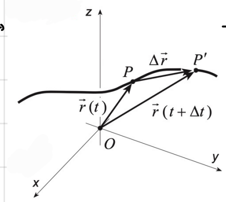
$OP(t) = r(t) = i\,x(t) + j\,y(t) + k\,z(t)$

↳ Grandezze fondamentali di posizione, velocità ed accelerazione sono individuate da vettori con modulo, direzione e verso

$\vec{s} = \vec{s}(t)$: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $\vec{v} = \vec{v}(t)$: $\begin{cases} v_x = v_x(t) \\ v_y = v_y(t) \\ v_z = v_z(t) \end{cases}$ $\vec{a} = \vec{a}(t)$: $\begin{cases} a_x = a_x(t) \\ a_y = a_y(t) \\ a_z = a_z(t) \end{cases}$

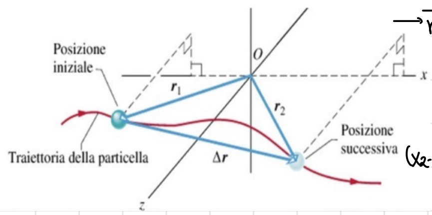
→ Il VETTORE POSIZIONE: parte dall'origine del sistema di riferimento ed arriva alla posizione del punto materiale

→ Il VETTORE SPOSTAMENTO: vettore differenza tra vettore posizione finale e vettore posizione iniziale



→ $\vec{PP'}(t) = \Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \hat{i}\,\Delta x(t) + \hat{j}\,\Delta y(t) + \hat{k}\,\Delta z(t)$

- Modulo MINORE della distanza effettivamente percorsa
- Punta segue la TRAIETTORIA PERCORSA dal punto

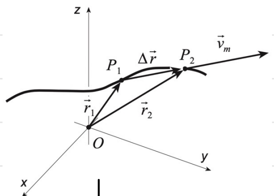


→ $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$

$\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$

$(x_2 - x_1)\,\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$

→ La VELOCITÀ MEDIA: sono necessari i VETTORI



→ $\vec{v}_{media} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1}$ → Essendo uno SCALARE, il tempo modifica solo l'INTENSITÀ

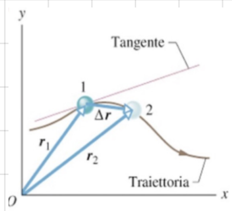
Il vettore è diretto lungo $\Delta\vec{r}$ ed è INDIPENDENTE dal percorso

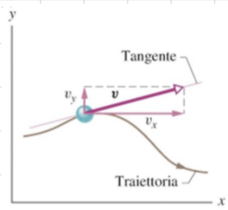
La VELOCITÀ ISTANTANEA

↳ Definita come la derivata del vettore posizione rispetto al tempo

Limite della velocità media con $\Delta t \to 0$ (derivata rispetto a t)

Tangente alla traiettoria nel punto dove è calcolata

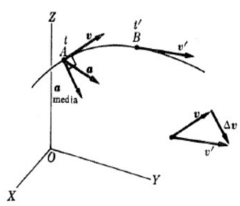




↳ $\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ → $\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k} = \dfrac{dx}{dt}\hat{i} + \dfrac{dy}{dt}\hat{j} + \dfrac{dz}{dt}\hat{k}$

→ L'ACCELERAZIONE MEDIA

↳ $\vec{a}_{media} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v_f} - \vec{v_i}}{t_f - t_i}$ → Vettore diretto lungo $\Delta\vec{v}$, la cui direzione è ricavata $-\vec{v_i}$ a $\vec{v_f}$



L'ACCELERAZIONE ISTANTANEA

↳ $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ → $\vec{a}(t) = a_x(t)\,\hat{i} + a_y(t)\,\hat{j} + a_z(t)\,\hat{k} = \dfrac{dv_x}{dt}\hat{i} + \dfrac{dv_y}{dt}\hat{j} + \dfrac{dv_z}{dt}\hat{k} =$

$= \dfrac{d^2x}{dt^2}\,\hat{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\,\hat{j} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\,\hat{k}$

→ Le LEGGI ORARIE: Un moto in 3 dimensioni può essere modellizzato come 3 moti indipendenti lungo gli assi x, y e z. Le azioni in una direzione NON influenzano le altre

sostituendo $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ nelle leggi del moto rettilineo

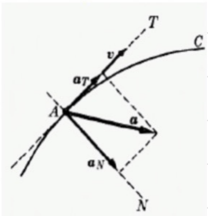
- $\vec{v_f} = \vec{v_i} + \vec{a}t$ → non è diretto né come $\vec{v}$ né come $\vec{a}$
- $\vec{r_f} = \vec{r_i} + \vec{v_i}t + \dfrac{1}{2}\vec{a}t^2$

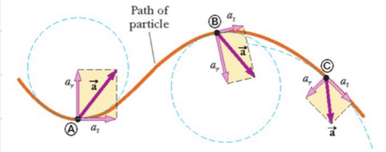
→ Il moto su un generico PERCORSO CURVILINEO

→ La velocità VARIA sia in direzione che in modulo → La velocità è tangente alla traiettoria, mentre l'accelerazione forma un angolo qualsiasi con essa → Diretta verso la CONCAVITÀ della traiettoria

L'accelerazione può essere scomposta in TANGENZIALE e RADIALE ⟶ utilizzati VERSORI $\hat{U}_T$ e $\hat{U}_N$ ⟶ normale
(tangente)

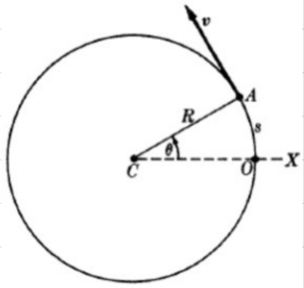
- La velocità è SOLO TANGENZIALE: $\vec{v} = v_T\hat{U}_T$
- Accelerazione: $\vec{a} = a_T\hat{U}_T + a_N\hat{U}_N = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_T}{dt}\hat{U}_T + v_T\frac{d\hat{U}_T}{dt}$ ⟶ U_T dipende dal tempo ma $\frac{d}{dt}(\underbrace{U_T\cdot U_T}_{1}) = \frac{d}{dt}1 = 0$ (Derivata del PRODOTTO)
  - $\frac{dv_T}{dt}$: VARIAZIONE del MODULO della VELOCITÀ
  - $v_T\frac{d\hat{U}_T}{dt}$ ⟶ $\propto \hat{U}_N$ ⟶ PROPORZIONALE: legata al variare della DIREZIONE
  - a_T fa variare il MODULO di $\vec{v}$
  - a_N fa variare la DIREZIONE di $\vec{v}$





⟶ raggio = raggio di CURVATURA della traiettoria

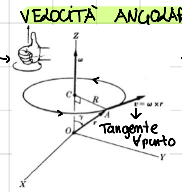
Il MOTO CIRCOLARE UNIFORME



⟶ Moto caratterizzato da $\vec{v} \perp \vec{R}$, con R costante.
Il MODULO della velocità è costante, mentre la sua direzione cambia ⟶ GENERA ACCELERAZIONE
↓
Il vettore ACCELERAZIONE è $\perp$ alla traiettoria ⟶ se NON lo fosse, si avrebbe un'accelerazione tangenziale che farebbe VARIARE la VELOCITÀ

Distanza percorsa lungo la circonferenza: $S = R\theta$ ⟶ $v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$
↓
Periodo = tempo impiegato per una rivoluzione COMPLETA (Spazza un giro intero) ⟶ $T = \frac{2\pi R}{v}$ (secondi), da cui si ha la frequenza: $f(o\ \nu) = \frac{1}{T}$ (giri al secondo)
$T: 2\pi = 1s: \nu$ ⟶ $\nu = \frac{1}{T}$

La grandezza $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ si definisce VELOCITÀ ANGOLARE ω e si misura in rad/s o s^{-1} ⟶ Si definisce anche $\omega = \frac{2\pi}{T}$
↓
La VELOCITÀ ANGOLARE ha modulo ω, direzione $\perp$ al piano e verso dato dalla regola della mano destra

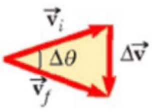


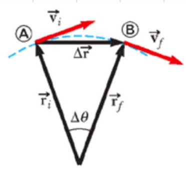
⟶ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, perché $\vec{r} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k}$
$v = \omega R$
$\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ ⟶ NON DÀ CONTRIBUTO: versori $\hat{k}$ sono //

$$\vec{\omega}\wedge\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} = \hat{i}(-\omega r_y) - \hat{j}(-\omega r_x) = -\omega r_y\hat{i} + \omega r_x\hat{j}$$ ⟶ Rimane $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$$\vec{v} = \vec{\omega}\wedge\vec{r} = -\omega r_y\hat{i} + \omega r_x\hat{j}$$
$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}\wedge\vec{r}| = \sqrt{\omega^2 r_y^2 + \omega^2 r_x^2} = \omega\sqrt{r_y^2 + r_x^2} = \omega R$$
(r_x: COORDINATA X PARTICELLA)
↓
Quindi si conclude che $\vec{v} = \vec{\omega}\wedge\vec{r} = \vec{\omega}\wedge\vec{R}$

L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA: deriva dalla VARIAZIONE di DIREZIONE della VELOCITÀ
- Diretta verso il CENTRO
- La punta del vettore descrive una circonferenza ⟶ Essendo che il modulo di $\vec{v}$ è costante si ha che $v\,\Delta\theta = v\,\omega\,\Delta t = \frac{v^2}{r}\Delta t$ ⟶ $a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ ($\frac{\Delta\theta}{dt}$)

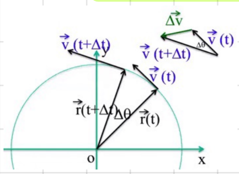




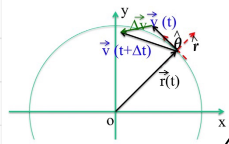
↓
Traiettoria circolare ⟶ In tempi uguali percorre lo STESSO arco di circonferenza ⟶ Angolo spazzato nell'unità di tempo è COSTANTE (ω)

Il MOTO CIRCOLARE VARIO: traiettoria circolare ma variano modulo e direzione velocità

Componente TANGENZIALE ACCELERAZIONE



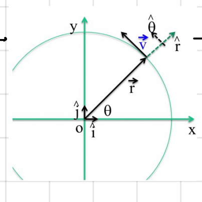
⟶ Ad ogni punto della traiettoria vengono introdotti i versori TANGENZIALI e NORMALI ⟶



$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{i} - \sin\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{j} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{r} = -\frac{v}{r}\hat{r}$
↓
$\vec{a} = \underbrace{-\frac{v^2}{r}r}_{a_N} + \underbrace{\frac{dv}{dt}\theta}_{a_T}$ (DEFINIZIONE)
$v\frac{d\hat{U}_T}{dt}$

La VELOCITÀ: $\vec{v} = v(t)\hat{\theta}$ (SEMPRE TANGENTE)

L'ACCELERAZIONE: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v(t)\hat{\theta}) = \frac{dv}{dt}\hat{\theta} + v\frac{d\hat{\theta}}{dt}$ ⟶



$\begin{cases} \hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j} \\ \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} \end{cases}$ ⟶ Ottenuto ruotando $\hat{r}$ di 90°

⟶ X: NEGATIVA

- $|\vec{a_T}| = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$ ⟹ $|\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$
- $|\vec{a_c}| = \frac{v^2}{r}$; $\vec{a} = \frac{dv_T}{dt}\hat{U}_T - \frac{v^2}{r}\hat{U}_N$

→ EQUAZIONE della CIRCONFERENZA

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t) \\ y(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t) \end{cases}$$

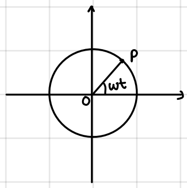
⚠ ATT: Gli argomenti del seno e del coseno sono ADIMENSIONALI

↓

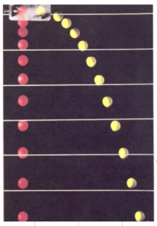
TRAIETTORIA: dividere per A e poi: $x(t)^2 + y(t)^2 = A^2(\cos^2\omega t + \mathrm{sen}^2\omega t) = A^2(1) = A^2$

↳ Il punto P descrive una circonferenza: $\vec{OP} = A\cos\omega t\,\hat{i} + A\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\hat{j}$

↳ Dopo T ritorna in posizione iniziale: $T = \frac{2\pi}{\omega}$



→ Il moto dei PROIETTILI



→ Agisce la forza di gravità su entrambe → ACCELERAZIONE di gravità costante

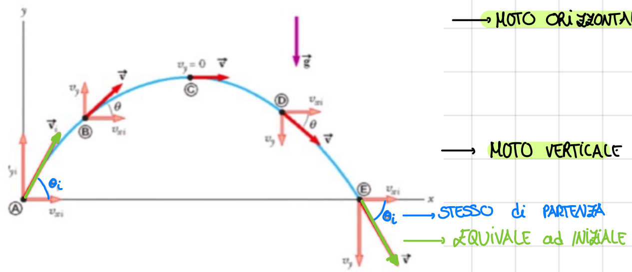
↳ STESSO MOTO VERTICALE

→ MOTO ORIZZONTALE DIVERSO: velocità COSTANTE → Indipendente dal moto sull'asse delle x

↳ Hanno velocità iniziale v_0 e sono soggetti SOLO a $\vec{g}$, COSTANTE

↓

I moti su x ed y possono essere analizzati SEPARATAMENTE



→ MOTO ORIZZONTALE
- $a_x = 0$
- $V_x = V_{0x}$ → COSTANTE
- $x = x_0 + V_{0x}t$

→ MOTO VERTICALE
- $a_y = -g$
- $V_y = V_{0y} - gt$
- $y = y_0 + V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

→ $V_{0x} = V_0\cos\theta$, $V_{0y} = V_0\,\mathrm{sen}\,\theta$, da cui la TRAIETTORIA

$x(t) = x_0 + V_0 t$, da cui $t = \frac{x - x_0}{V_{0x}}$

$+\ y(t) = y_0 + V_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ e quindi

$y - y_0 = \frac{V_{0y}}{V_{0x}}(x - x_0) - \frac{1}{2}g\frac{(x-x_0)^2}{V_0^2 x}$

e SOSTITUENDO V_{0x} e V_{0y} si ha, con $y_0 = x_0 = 0$

↳ $y = x\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_0^2\cos^2\theta}$

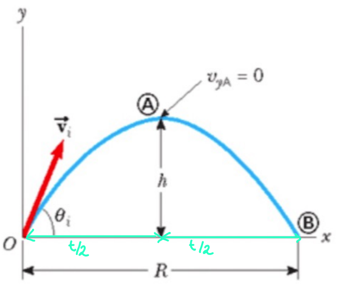
↓

PARABOLA con concavità verso il BASSO

↳ La VELOCITÀ RISULTANTE è TANGENTE alla CURVA in OGNI PUNTO

↓

La GITTATA



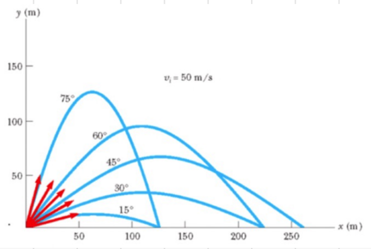
→ R = gittata = distanza massima lungo x percorsa dal proiettile

↳ $y = V_0 t\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{2}gt^2$ → $y = 0$: TOCCA TERRA, quindi si ha $t(V_0\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{2}gt) = 0$
- $t = 0$: NO, ORIGINE
- $t = \frac{2V_0\,\mathrm{sen}\,\theta}{g}$: TEMPO IMPIEGATO

V_{0y} ↓

Ricavare $x(t)$ → usare $x(t) = x_0 + V_0\cos\theta t$ ⟹ $x - x_0 = \frac{2V_0^2}{g}\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = \frac{V_0^2}{g}\mathrm{sen}(2\theta) = R$

↓ V_{0y}



→ La gittata VARIA con il variare dell'angolo θ, essendo V_0 e g FISSATI → Gittata MASSIMA a $\theta = 45°$

→ L'altezza massima: si ha quando $V_y = 0$, quindi $V_0\,\mathrm{sen}\,\theta - gt = 0$

e quindi si ricava che $t = \frac{V_0\,\mathrm{sen}\,\theta}{g}$

↓ sostituendo in $y(t)$

$$h = \frac{V_0^2}{2g}\mathrm{sen}^2\theta$$

Esercizi slide

① $\begin{cases} x(t) = A\cos \omega t \\ y(t) = A \,\text{sen}\, \omega t \end{cases}$ con ω costante

a. Determinare $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$

└ Utilizzo le DERIVATE

$\vec{v}(t) = \vec{v_x}(t) + \vec{v_y}(t)$

$\vec{a}(t) = \vec{a_x}(t) + \vec{a_y}(t)$

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{cases} = \begin{cases} \frac{d\, A\cos\omega t}{dt} = -\omega A \,\text{sen}\,\omega t = \vec{v_x}(t) \\ \frac{d\, A\,\text{sen}\,\omega t}{dt} = \omega A \cos \omega t = \vec{v_y}(t) \end{cases} \longrightarrow \vec{v}(t) = -\omega A \,\text{sen}\,\omega t\, \hat{i} + \omega A \cos\omega t\, \hat{j}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d\, -\omega A\,\text{sen}\,\omega t}{dt} = -\omega^2 A \cos\omega t \\ \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d\, \omega A\cos\omega t}{dt} = -\omega^2 A \,\text{sen}\,\omega t \end{cases} \longrightarrow \vec{a}(t) = -\omega^2 A\cos\omega t\, \hat{i} - \omega^2 A\,\text{sen}\,\omega t\, \hat{j}$$

b. Determinare il tipo di traiettoria ⟶ TOGLIERE la DIPENDENZA dal TEMPO

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\omega t \\ y(t) = A\,\text{sen}\,\omega t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{x(t)}{A} = \cos\omega t \\ \frac{y(t)}{A} = \text{sen}\,\omega t \end{cases} \longrightarrow \left(\frac{x(t)}{A}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{A^2}\right)^2 = 1 \longrightarrow x^2(t) + y^2(t) = A^2 \longrightarrow$$ CIRCONFERENZA di RAGGIO A e CENTRO O

c. Determinare il modulo della velocità

$v = \sqrt{\omega^2 A^2 \text{sen}^2\omega t + \omega^2 A^2 \cos^2 \omega t} = \omega \sqrt{A^2(\text{sen}^2\omega t + \cos^2\omega t)} = \omega A \longrightarrow$ COSTANTE

d. Determinare il modulo di $\vec{a}$

$a = \sqrt{\omega^4 A^2 \text{sen}^2\omega t + \omega^4 A^2 \cos^2\omega t} = \omega^2 A$

e. Dimostrare che $\vec{OP} \perp \vec{v} \longrightarrow \vec{OP} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{OP} = A\cos\omega t\,\hat{i} + A\,\text{sen}\,\omega t\,\hat{j}$

$\vec{v} = -\omega A\,\text{sen}\,\omega t\,\hat{i} + \omega A\cos\omega t\,\hat{j}$

$\vec{OP}\cdot\vec{v} = -\omega A^2 \cos\omega t\,\text{sen}\,\omega t\,\underbrace{(\hat{i}\cdot\hat{i})}_{1} + \omega A^2\,\text{sen}\,\omega t\cos\omega t\,\underbrace{(\hat{j}\cdot\hat{j})}_{1} = 0 : V$

f. Dimostrare che $\vec{a} \perp \vec{v} \longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{v} = 0$

$\vec{v} = -\omega A\,\text{sen}\,\omega t\,\hat{i} + \omega A\cos\omega t\,\hat{j}$

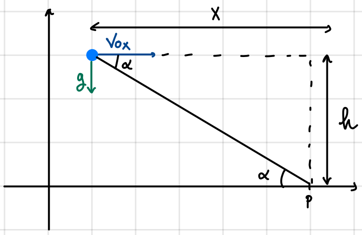
$\vec{a} = -\omega^2 A\cos\omega t\,\hat{i} - \omega^2 A\,\text{sen}\,\omega t\,\hat{j}$

$\vec{v}\cdot\vec{a} = \omega^3 A^2\,\text{sen}\,\omega t\cos\omega t\,\underbrace{\hat{i}\cdot\hat{i}}_{1} - \omega^3 A^2\,\text{sen}\,\omega t\cos\omega t\,\underbrace{\hat{j}\cdot\hat{j}}_{1} = 0 : V$

② $v = 600$ km/h

$d = 1$ km

Angolo rispetto a terra: ?



$V_{ox} = 600$ km/h $\longrightarrow \frac{600 \cdot 10^3}{60\cdot 60} = 167$ m/s

$h = 1$ km $= 1\cdot 10^3$ m

$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

$0 = 1\cdot 10^3 - \frac{1}{2}\, 9.81 \cdot t^2 \longrightarrow \frac{1}{2}\, 9.81\, t^2 = 1\cdot 10^3 \longrightarrow t = \sqrt{\frac{1\cdot 10^3 \cdot 2}{9.81}} = 14.3$ s

$x(t) = x_0 + V_{ox} t = 0 + 167 \cdot 14.3 = 2388.1$ m

Voglio trovare α

$\alpha = \tan^{-1}\frac{h}{x} = \tan^{-1}\frac{1\cdot 10^3}{2390} = 22.7°$

Voglio trovare la traiettoria

$$\begin{cases} x(t) = \cancel{x_0 +} V_{ox} t = V_{ox} t \longrightarrow \text{TROVO } t: \; t = \frac{x(t)}{V_{ox}} \\ y(t) = y_0 + \underset{0}{V_{oy}} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g \left(\frac{x(t)}{V_{ox}}\right)^2$

$y(t) - y_0 = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x(t)}{V_{ox}}\right)^2 \longrightarrow$ PARABOLA

④ $R = 50\,cm \longrightarrow 0.50\,m$

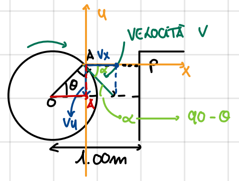
$w = 4\,rad/s\ (4.00)$

$\theta = 30°$

$d = 1m$ da O ($1.00\,m$)

t volo = ?

V urto = ?



CALCOLO IL TEMPO di VOLO

① RICAVO COMPONENTI VELOCITÀ

$\alpha = 90 - 30 = 60°$

$V_x = V\cos 60 = V \cdot \frac{1}{2} = \frac{wr}{2} = \frac{4 \cdot 0.5}{2} = 1\,m/s$ $\qquad \vec{V} = 1\hat{i}\,m/s - \sqrt{3}\hat{j}\,m/s$

$V_y = V\sin(-60) = -V\sin(60) = -\frac{4 \cdot 0.5 \cdot \sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}\,m/s$

② ANALIZZO IL MOTO

- uniformemente accelerato lungo y $\longrightarrow S(t) = S_0 + V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$
- rettilineo uniforme lungo x $\longrightarrow S(t) = S_0 + V_{0x}t$

③ $OA = r\cos 30 = \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{0.5\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,m$

④ DISTANZA da PERCORRERE: $1\,m - \frac{\sqrt{3}}{4}\,m$

⑤ $1\,m - \frac{\sqrt{3}}{4}\,m = 0 + 1t \longrightarrow t = 0.57\,s$

⑥ CALCOLO V_F

$V_F = \sqrt{V_{Fx}^2 + V_{Fy}^2}$

$V_{Fx} = 1\,m/s$ $\qquad \theta = \tan^{-1}\frac{-7.32}{1} = -82.2°$

$V_{Fy} = -\sqrt{3} - g(0.57) = -7.32\,m/s$

$V_F = 7.39\,m/s$

⑤ Calcolare velocità e accelerazione di un satellite geostazionario

$R = 42.000\,Km \longrightarrow 4.2 \cdot 10^4\,Km = 4.2 \cdot 10^7\,m$

$T = 1\,g \longrightarrow 24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400\,s = 8.64 \cdot 10^4\,s$

$T = \frac{2\pi}{w} \longrightarrow w = \frac{2\pi}{T} \longrightarrow w = \frac{2\pi}{8.64 \cdot 10^4} = 7.27 \cdot 10^{-5}\,\frac{rad}{s}$

$V = wR = 3.05 \cdot 10^3\,\frac{m}{s}$

$a = \frac{V^2}{R} = 0.22\,m/s^2$

⑥ Calcolare velocità e accelerazione della Terra nel suo moto di rivoluzione intorno al sole

$R = 149.5 \cdot 10^6\,Km = 1.495 \cdot 10^{11}\,m$

$T = 1$ anno $= 3.16 \cdot 10^7\,s$

Moto circolare uniforme intorno al sole

$T = \frac{2\pi}{w} \longrightarrow w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3.16 \cdot 10^7} = 1.99 \cdot 10^{-7}\,\frac{m}{s}$

$V = wr = 1.99 \cdot 10^{-7} \cdot 1.495 \cdot 10^{11} = 3 \cdot 10^4\,m/s = 30\,Km/s$

$a = \frac{V^2}{r} = 6.02 \cdot 10^{-3}\,m/s^2$

⑦ Un'automobile che si muove nel piano xy, parte a $t = t_0 = 0$ dal punto $A = (R,0)$ e percorre in verso antiorario la semicirconferenza di raggio $R = 1Km = 1 \cdot 10^3 m$ e centro O fino al punto $B = (-R,0)$. Poi prosegue in linea retta fino al punto C di coordinate $C = (-R, -3R)$ che raggiunge al tempo $t = t_f$; durante tutto il moto la velocità ha un modulo costante $V_0 = 20\,m/s$

a. Calcolare $\int_0^{t_f} |\vec{V}|\,dt$

$\longrightarrow$ Rappresenta l'area sottesa al grafico della velocità e perciò lo spostamento del corpo compiuto dal corpo a partire da O fino ad arrivare a t_f

$\downarrow$

È necessario dividere il moto in 2 parti

- Moto circolare uniforme $\longrightarrow$ Distanza percorsa = p circonferenza: πR
- Moto rettilineo uniforme $\longrightarrow$ Distanza percorsa = $3R$

$\longrightarrow \int_0^{t_f} |\vec{V}|\,dt = (\pi + 3)R$

$\downarrow$

$\int_0^{t_f} \frac{|d\vec{R}|}{dt}\,dt = \int_0^{t_f} |d\vec{R}|$

b. Calcolare $\int_0^{t_f} \vec{V}\,dt$

$\hookrightarrow \int_0^{t_f} \frac{d\vec{R}}{dt}\,dt = \int_0^{t_f} d\vec{R} = \vec{R}(t_f) - \vec{R}(0) = (-R, -3R) - (R, 0) = (-2R, -3R) = -R(2\hat{i}, 3\hat{j})$

c. Calcolare $\int_0^{t_f} \vec{a}\, dt = \int_0^{t_f} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot dt = \int_0^{t_f} d\vec{v} = \vec{V}(t_f) - \vec{V}(t_0)$

→ Trovo $\vec{V_f} = (0, -V_0 \hat{j})$

→ Trovo $\vec{V}(0)$: Essendo un moto circolare uniforme, la velocità è sempre tangente alla traiettoria circolare e per questo si ha $\vec{V}(0) = (0, V_0 \hat{j})$

$\vec{V}(t_f) - \vec{V}(0) = (0, -V_0\hat{j}) - (0, V_0\hat{j}) = (0, -2V_0\hat{j})$

d. Determinare il tempo $t_c(t_f)$ in cui l'auto raggiunge il punto C

→ Essendo che la velocità è sempre costante, posso calcolare il tempo impiegato come $\frac{\text{spazio percorso}}{\text{velocità di percorrenza}} \longrightarrow \frac{(\pi + 3)R}{20\, m/s} = \frac{(\pi+3)\cdot 1\cdot 10^3\, m}{20\, m/s} = 307\, s$

e. Determinare $x(t)$ e $y(t)$ per $0 < t < t_c$ e costruirne i grafici

→ Equazioni generali moto circolare uniforme $\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\,sen(\omega t) \end{cases} = \begin{cases} x(t) = R\cos\left(\frac{V_0 t}{R}\right) \\ y(t) = R\,sen\left(\frac{V_0 t}{R}\right) \end{cases}$

Calcolo tempo di percorrenza della semicirconferenza

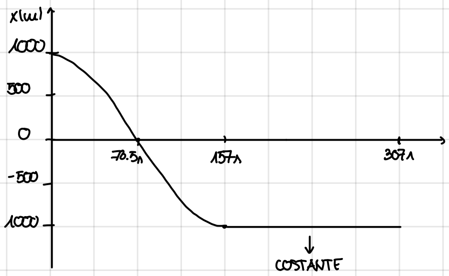
→ $T = \frac{2\pi}{\omega} \longrightarrow T = \frac{2\pi R}{V}$, ma questo è un giro completo

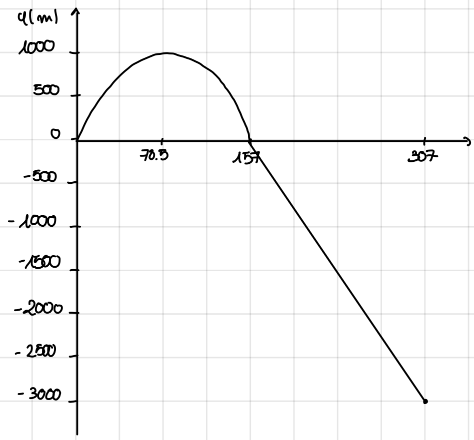
$V = \omega R \longrightarrow \omega = \frac{V}{R}$ quindi si ha $\frac{T}{2} = \frac{\pi R}{V} \longrightarrow V_0$

Equazioni orarie moto rettilineo uniforme

→ $x(t) = B$

→ $y(t) = y_0 + V_0(t - t_0)$





(8) Descrivere il moto di un punto materiale le cui leggi orarie in coordinate polari sono

$\begin{cases} r = r_0\, sen\, \omega t \\ \theta = \omega t \end{cases}$ $\quad r_0 = 5 \cdot 10^{-2} m \quad \omega = 2\pi \frac{rad}{s}$

↓

Trasformo in COORDINATE CARTESIANE

$X = r\cos\theta \longrightarrow X = r_0\, sen\omega t \cos\omega t = \frac{r_0}{2} sen\, 2\omega t$

$y = r\, sen\theta \longrightarrow y = r_0\, sen\omega t\, sen\omega t = r_0\, sen^2\omega t = r_0(1 - \cos^2\omega t) = \frac{r_0}{2}(2 - 2\cos^2\omega t) = \frac{r_0}{2}(1 + \underbrace{(1 - 2\cos^2\omega t)}_{-\cos 2\omega t}) = \frac{r_0}{2}(1 - \cos 2\omega t)$

$\begin{cases} X = \frac{r_0}{2} sen(2\omega t) \\ y = \frac{r_0}{2}(1 - \cos(2\omega t)) \end{cases} \xrightarrow{\text{trovo la traiettoria}} \begin{cases} X^2 = \frac{r_0^2}{4} sen^2 2\omega t \\ \left(y - \frac{r_0}{2}\right)^2 = \cos^2(2\omega t) \cdot \frac{r_0^2}{4} \end{cases}$

Utilizzo la relazione fondamentale della trigonometria $sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$X^2 + y^2 - r_0 y + \cancel{\frac{r_0^2}{4}} = \cancel{\frac{r_0^2}{4}} \longrightarrow X^2 + y^2 - r_0 y = 0$

→ Centro: $\left(0, \frac{r_0}{2}\right) = \left(0, 2.5 \cdot 10^{-2}\right) m$

raggio: $\frac{1}{2}\sqrt{0 + r_0^2 - 0} = \frac{r_0}{2} = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{2} = 2.5 \cdot 10^{-2} m$

È necessario adesso determinare le equazioni del moto

→ La velocità è SEMPRE tangente alla traiettoria → Nel sistema di coordinate polari presenta sia una componente radiale che una componente tangenziale

→ $\vec{V} = V_\perp \hat{U}_\perp + V_T \hat{U}_T$, adesso devo determinare $V_\perp$ e V_T $\longrightarrow V_\perp = \frac{dr}{dt}$

$V_T = r\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega \text{ istantanea}}$

A questo punto è necessario trovare il vettore che unisce il centro ad un qualsiasi punto sulla circonferenza, ossia il vettore spostamento $\overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{OP} = r\,\hat{u}_\perp \longrightarrow$ Si aveva che $\vec{v} = v_\perp \hat{u}_\perp + v_T \hat{u}_T$

$\downarrow$

$$\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{d\,r\hat{u}_\perp}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_\perp + r\frac{d\hat{u}_\perp}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_\perp + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_t$$

$v_\perp = \frac{d}{dt} r_0 \operatorname{sen}\omega t = \omega r_0 \cos\omega t$ $\qquad$ $v_t = r\frac{d\theta}{dt} = r_0 \operatorname{sen}\omega t\ \omega$

Modulo della velocità: $v = \sqrt{v_\perp^2 + v_t^2} = \sqrt{\omega^2 r_0^2 \cos^2\omega t + \omega^2 r_0^2 \operatorname{sen}^2\omega t} = \sqrt{\omega^2 r_0^2}$. $\omega r_0 = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 0.31\ m/s \longrightarrow$ Moto UNIFORME

Accelerazione CENTRIPETA: $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(0.31)^2}{5 \cdot 10^{-2}} = 1.97\ m/s^2$

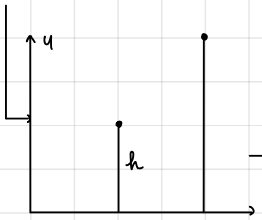
Periodo del moto: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\ s$

I sistemi di riferimento inerziali e non inerziali

→ Descrizione di corpi in movimento da un sistema in Movimento → relatività galileiana: sistemi di riferimento INERZIALI

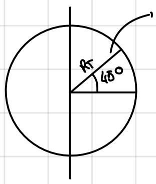
↓

Non c'è differenza tra il sistema stazionario e quello in moto rettilineo uniforme



→ È possibile definirlo STAZIONARIO? La terra ruota intorno al suo asse e intorno al Sole

↳ Effetti abitualmente ignorati ma in terra è ACCELERATO e MOTO COMPLESSO



$R_T = 6.4 \cdot 10^3$ km

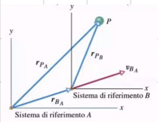
↳ $0.7 \cdot 6.4 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot 6.28 = \dfrac{3 \cdot 10^4 \text{ km}}{24 \text{ h}}$ → Velocità ALTA, che però può essere IGNORATA scegliendo tempi di caduta PICCOLI rispetto alle 24 h. In questo modo la velocità dell'oggetto NON riesce a cambiare → In questo caso è INERZIALE

Quindi, in sostanza, è presente un sistema inerziale di riferimento da poter utilizzare nel caso di un sistema accelerato in tempi ridotti

→ Come descrivere le leggi

↳ Sistemi A e B, il primo stabile ed il secondo in moto rettilineo uniforme con $\vec{V}_{BA}$

- $\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{PB}$
- $\vec{V}_{PA} = \vec{V}_{BA} + \vec{V}_{PB}$
- $\vec{a}_{PA} = \cancel{\vec{a}_{BA}} + \vec{a}_{PB}$ → B si muove di moto rettilineo uniforme → STESSE LEGGI della FISICA



→ Leggi di COMPOSIZIONE galileiane → Altra forma: $\vec{V}_a = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{trasc}$

↓

velocità con cui il sistema B si sposta da A

↓

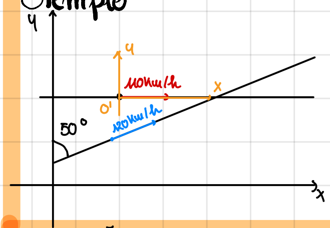
In qualsiasi sistema di riferimento inerziale le leggi della fisica sono le stesse

→ Esempio: la luce rimane c anche se la luce parte da un oggetto in movimento → È necessario ammettere che spazio e tempo si deformano

↳ In questo caso si contrae lo SPAZIO: Relatività SPECIALE

⚠ ATTENZIONE: formule importanti e sottovalutate

Esempio



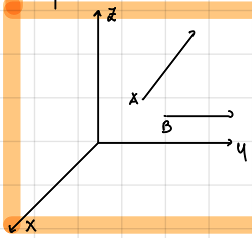
Voglio trovare la velocità apparente del treno

$\vec{V}_a = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{trasc}$ → $\vec{V}_{rel} = \vec{V}_a - \vec{V}_{tr}$

$\vec{V}_{TR}$ (110 km/h, 0 km/h)

$\vec{V}_a = (120 \cos 40°, 120 \operatorname{sen} 40°)$ km/h

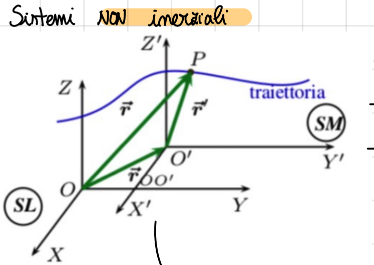
$\vec{V}_{rel} = (120 \cos 40° - 110, 120 \operatorname{sen} 40°)$ km/h $\quad V_{rel} = \sqrt{V_{relx}^2 + V_{rely}^2}$



A = (V_{xA}, V_{yA}, V_{zA}) → $\vec{V}_{rel} = \vec{V}_a - \vec{V}_{TR}$

B = (V_{xB}, V_{yB}, V_{zB})

→ Sistemi NON inerziali



→ $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{OO'}(t)$

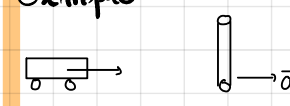
→ $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}_t$ con $\vec{V}_t = \dfrac{d\vec{r}_{OO'}}{dt}$

→ $\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_t$ con $\vec{a}_t = \dfrac{d\vec{V}_t}{dt}$ → NON legata a leggi fisiche

$\vec{r}_{OO'} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ $\xrightarrow{\text{derivando}}$ ① $\vec{V}_a = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{tr}$

② $\vec{a}_a = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr}$ → Nascono solo perché il riferimento è accelerato: FITTIZIE

Esempio



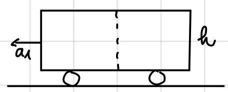
$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

→ $\vec{a}_a = 0$

→ $0 = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr}$ → "vedo" il palo accelerare: NESSUNA FORZA

Esempi

① $\vec{a}_a = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr}$



① $\vec{V}_{tr}$ = costante : la vite cade sul pavimento in quanto il sistema è inerziale

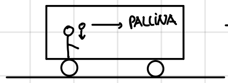
② Il treno decelera con decelerazione costante $\overrightarrow{a_1}$ ⟶ $\overrightarrow{-g}$

$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_a - \vec{a}_{tr}$ $\qquad$ $\vec{a}_{rel} = (a_1, -g)$

- $\vec{a}_a = (0, -g)\, m/s^2$
- $a_{TR} = (a_1, 0)\, m/s^2$

$\begin{cases} x(t) = x_0 + V_{0x}t + \frac{1}{2}at^2 \\ y(t) = y_0 + V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ ⟶ LEGGI ORARIE DEL MOTO

②



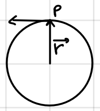
⟶ Come mai la pallina torna in mano? Fa un MOTO PARABOLICO

⟶ Dall'esterno

⟶ Lancio la pallina contro il vagone, come mi accorgo che accelera? Se NON cade nella mano

⟶ 3 SISTEMI ROTANTI

⟶ Se un sistema è rotante si ha che l'accelerazione di trascinamento e l'accelerazione centripeta



⟶ $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Se definisco $w \perp$ al piano e vede la velocità in senso antiorario si ha che $\vec{V} = \vec{w} \wedge \vec{r}$

↓

È possibile applicare lo STESSO METODO per trovare $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{w} \wedge \vec{r} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

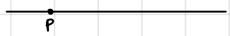
Vettore rotante $\qquad$ $w \cdot 0 - \vec{r}w^2 \Longrightarrow \vec{a} = -w^2\vec{r}$

⟶ Relazioni generali
- ⟶ $\vec{V}_T = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{r}$
- ⟶ $\vec{a}_T = \vec{w} \times \vec{V}_T = -w^2\vec{r}_\perp$: Proiezione di $\vec{r}$ sul piano di rotazione

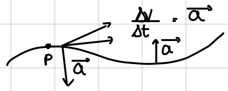
Diretta verso il centro

Esempi

① a.



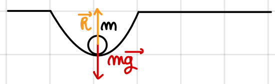
b.



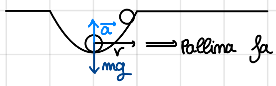
⟶ Accelerato in quanto non essendo rettilineo deve esserci un'accelerazione che fa cambiare direzione

↳ $\vec{a}$ è CENTRIPETA

②



> tensione sul filo?



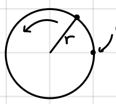
⟹ Pallina fa moto circolare con $\vec{a} = -mw^2r$

$\vec{R} + \vec{mg} = -mw^2R$ ⟶ $\vec{R} = -\vec{mg} - mw^2\vec{r}$

Relazioni che collegano sistemi inerziali a sistemi rotanti
- ⟶ $\vec{V}_a = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{TR}$, dove $\vec{V}_{TR} = \vec{w} \wedge \vec{r}$
- ⟶ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{rel}}{dt} + \vec{w} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{rel}}{dt} + \vec{w} \times \vec{v} = \frac{d\vec{v}_{rel}}{dt} + \vec{w} \times (\vec{v}_{rel} + \vec{w} \times \vec{r})$ da cui $\vec{a}_a = \vec{a}_{rel} \underbrace{- w^2\vec{r}_\perp}_{\text{ACC. CENTRIFUGA}} + \underbrace{2\vec{w} \times \vec{v}_{rel}}_{\text{Con - davanti: ACCELERAZIONE di CORIOLIS}}$, dove $\vec{a}_{TR} = -w^2\vec{r} + 2\vec{w} \times \vec{v}_{rel}$

Esempi

①

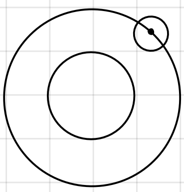


OGGETTO P FERMO

$\vec{a}_{rel} = 0$ ⟶ $0 = \vec{a}_a - \vec{a}_{tr}$, quindi $\vec{a}_a = \vec{a}_{tr}$

Se fosse tenuto da una molla: $-k\Delta l = -mw^2R$ ⟶ Corpo in equilibrio tra accelerazione centrifuga (fittizia) e forza esercitata dalla molla

②



400 Km/h

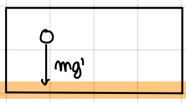
$\vec{a}_a = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{TR}$

$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_a - \vec{a}_{TR}$

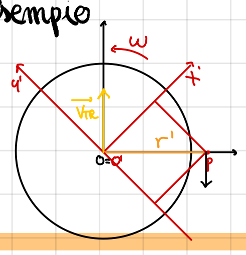
↓

$0 = mg' - mw^2r$ ⟶ $\cancel{m}g' = \cancel{m}w^2r$ ⟶ $g' = w^2r$: TUTTA l'accelerazione è usata per l'orbita circolare

↳ L'oggetto è visto FERMO perché in equilibrio tra a. centripeta (apparente) e gravità



Esempio



$\vec{V}_P = (0,0)$

$\vec{a}_P = (0,0)$

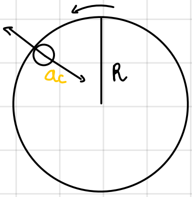
$\vec{x}_P = (x_P, 0)$

$\vec{V}_{rel} = \vec{V}_a - \vec{V}_{TR}$

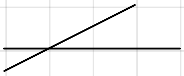
$\vec{V}_{TR} = \vec{w} \wedge \vec{r'}$

$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_a - \vec{a}_{TR} = \vec{a}_a + w^2 \vec{r'} - 2\vec{w} \wedge \vec{v'}$

→ L'accelerazione di Coriolis: $-2\vec{w} \wedge \vec{V}_{rel} = A_c$



$\vec{ac}$ data dalla reazione (spinta verso il centro) dei sedili



$\vec{F} = m\vec{a}$

$-m\frac{v^2}{R} = -mw^2 R$

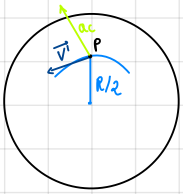
$\vec{a}_a = -mw^2 R$

$\vec{a}_{REL} = 0 = -w^2 R - a_{TR} = 0$ (Lo vedo fermo se sono sulla giostra

Non c'è accelerazione di Coriolis perché manca Vrel

Quindi $-\vec{a}_{TR} = +w^2 R \longrightarrow \vec{a}_{TR} = -w^2 \vec{R}$

Cosa accade se un ragazzo passeggia?



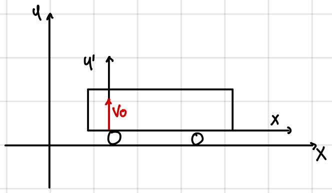
$a_c < a_c' = \frac{v'^2}{R}$

↓

Essendo maggiore, è spinto a muoversi verso raggi maggiori perché non è più sufficiente l'attrito

Esercizi slide

① Su un treno che si muove di moto rettilineo con accelerazione costante $a = 0.25 \frac{m}{s^2}$ (rispetto alla terra) un chiodo, che si trova sul pavimento, viene lanciato con velocità $V_0 = 6 \frac{m}{s}$ diretta verticalmente (rispetto al treno). Calcolare a quale distanza d dal punto di lancio ricadrà il corpo sul pavimento



$\vec{a_a} = \vec{a_{rel}} + \vec{a_{tr}}$

$\vec{a_a} = (a_{relx} + a_{trx}, a_{rely} + a_{try})\ m/s^2$

$\vec{V_a} = \vec{V_{rel}} + \vec{V_{tr}}$

$\vec{V_{rel}} = (0, 6)\ m/s$

Analizzo il moto della pallina: L'accelerazione di trascinamento della pallina è quella generata dal movimento del treno, mentre l'accelerazione assoluta è quella data dall'accelerazione di gravità. Per questo è necessario calcolare l'accelerazione relativa

Utilizzo la relazione $\vec{a_a} = \vec{a_{rel}} + \vec{a_{tr}} \longrightarrow \vec{a_{rel}} = \vec{a_a} - \vec{a_{tr}}$

$\vec{a_{rel}} = (0 - 0.25, -9.81 - 0) = (-0.25, -9.81)\ m/s^2$

Il moto quindi è un moto uniformemente accelerato sia sull'asse x che sull'asse y, che quindi conviene analizzare separatamente

→ Velocità lungo asse x: $\vec{V_a} = \vec{V_{rel}} + \vec{V_{tr}}$ → $\vec{V_{trx}} = \vec{a_{trx}}\, t \longrightarrow \vec{V_{ax}} = \vec{a}_{tr x}$; → $V_{relx} = 0$

→ Velocità lungo asse y: $\vec{V_{ay}} = \vec{V_{rely}} + \vec{V_{try}}$ → $\vec{V_{try}} = 0$; → $\vec{V_{rely}} = 6 - 9.81t$

A questo punto trovo il tempo di volo della pallina utilizzando le componenti relative di velocità ed accelerazione

$\underset{\downarrow}{0} = 0 + 6t - \frac{1}{2}gt^2 \longrightarrow 6t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \longrightarrow t\left(6 - \frac{1}{2}t\right) = 0$ → $t = 0$: NO, starting point ; → $-\frac{1}{2}gt = -6 \longrightarrow t = \frac{12}{g} = 1.22\ s$

posizione di partenza/arrivo (su x')

Adesso trovo la gittata (rispetto al pavimento)

$S_x(t) = S_0 + V_{0relx}t - \frac{1}{2}a_{relx}t^2$

$S_x(1.22) = 0 + 0 + \frac{0.25}{2}t^2 = 0.187\ m = 18.7\ cm$

Determinare la traiettoria del chiodo vista da terra

$$\begin{cases} x_a(t) = x_0 + V_{ax}t + \frac{1}{2}\overset{=0}{a_{ax}}t^2 = x_0 + V_{ax} \longrightarrow \text{Moto rettilineo uniforme} \\ y_a(t) = \underset{0}{y_0} + \underset{6}{V_{a0y}}t + \frac{1}{2}\underset{-\frac{1}{2}gt^2}{a_{ay}}t^2 = 6t - \frac{1}{2}gt^2 \longrightarrow \text{Moto di caduta libera} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Moto di un proiettile: la traiettoria è una parabola

Determinare la traiettoria come se il corpo fosse visto dal treno

$$\begin{cases} x_r(t) = \overset{=0}{x_0} + \overset{=0}{V_{r0x}}t + \frac{1}{2}a_{r0x}t^2 = -\frac{1}{2}\cdot 0.25\cdot t^2 : \text{Uniformemente accelerato} \\ y_r(t) = \underset{0}{y_0} + \underset{6}{V_{r0y}}t + \frac{1}{2}\underset{-9.81}{a_{r0y}}t^2 = 6t - \frac{1}{2}gt^2 : \text{Uniformemente accelerato} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ La parabola in questo caso NON è simmetrica rispetto all'asse y

Se il treno fosse in moto con velocità costante, qual è la traiettoria vista da un osservatore sul treno?

└ Il sistema in questo caso è inerziale, quindi le leggi della fisica NON cambiano e perciò il corpo lanciato verso l'alto atterra sulla posizione dove è stato lanciato, ma vediamo meglio

→ $\vec{a_a} = \vec{a_{rel}} + \overset{\to 0}{\vec{a_{tr}}} = \vec{a_a} = \vec{a_{rel}} = (0, -g)\ m/s^2$

→ $\vec{V_a} = \vec{V_{rel}} + \underset{c.te}{\vec{V_{tr}}} = (0 + c.te, V_0 - gt) = (c.te, V_0 - gt)\ m/s$

Leggi orarie RELATIVE

→ Asse x $\longrightarrow x(t) = x_0 + \overset{=0}{V_{0relx}}t + \overset{=0}{a_{0relx}}t = x_0$ $\Longrightarrow$ Cade nella stessa posizione

→ Asse y $\longrightarrow y(t) = x_0 + V_{0rely} + \frac{1}{2}a_{rely}t = x_0 + 6t - \frac{1}{2}gt^2 \longrightarrow$ MOTO di CADUTA LIBERA

Nelle medesime condizioni, calcolare la traiettoria rispetto a terra

└ Leggi orarie ASSOLUTE

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + V_{a0x}t + \frac{1}{2}\overset{=0}{a_{a0x}}t^2 = x_0 + c.te\, t \\ y(t) = y_0 + V_{a0y}t + \frac{1}{2}a_{a0y}t^2 = y_0 + V_0t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ PARABOLA

La dinamica

→ Forze: modo in cui un corpo interagisce con l'esterno o con altri corpi → Newton: NON è richiesto il contatto

- Legge di gravitazione universale: $F = -\frac{G M_1 M_2}{r^2} \cdot \hat{r}$ → NON è necessario il contatto
- Misura tramite DINAMOMETRI
- Divise in 2 GRUPPI
  - → Forze di CONTATTO: si esercitano attraverso il contatto fisico tra 2 oggetti
  - → Forze di CAMPO: NON richiedono il contatto fisico

Divisione NON NETTA: Anche le forze di contatto sono dovute alle forze elettriche (di campo)
↳ Forze fondamentali sono di campo: attrazione gravitazionale, forze elettromagnetiche, forze nucleari forti e deboli

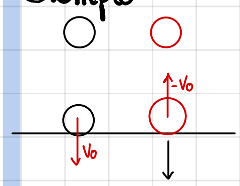
→ Prima legge di Newton (principio di inerzia): se non ci sono interazioni, è possibile identificare un sistema di riferimento inerziale dove l'accelerazione è nulla
↳ NON viene modificato lo stato di quiete o moto rettilineo uniforme
↳ Formulazione alternativa: In assenza di forze esterne e se osservato da un sistema di riferimento inerziale, un corpo in quiete rimane in quiete ed un corpo in moto continua nel suo movimento con la stessa velocità
↓
Quando su un corpo non agiscono forze, l'accelerazione è nulla → INERZIA: tendenza di un corpo a mantenere il suo stato di quiete o moto

→ La MASSA: proprietà di un corpo che misura la resistenza opposta ai cambiamenti di velocità → UNITÀ di MISURA del SI: chilogrammo (kg)
↳ supponendo di avere due corpi di masse m_1 e m_2 a cui sono applicate le accelerazioni a_1 e a_2 si ha: $m_1/m_2 = a_1/a_2$

→ Seconda legge di Newton: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ → $\vec{p}$: quantità di moto $= m\vec{v}$ → Se $\vec{F} = 0$ si ha la prima legge perché $d\vec{p} = 0 \Longrightarrow \vec{p} = cost \Longrightarrow \vec{v} = costante$
↓≠
$\vec{F} = m\vec{a}$, che deriva dalla precedente se la massa è COSTANTE: $\vec{p} = m\vec{v}$, quindi $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$ → $m\vec{a}$; $\frac{dm}{dt}$ → 0 se $m = cte$
→ L'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale alla forza risultante agente ed inversamente prop. alla massa

- $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ significa che $\vec{F}$ parallelo a $\vec{p}$ e se $\vec{F}$ in una direzione è nulla, $\vec{p}$ è costante in quella direzione
- Sistema libero (senza interazioni esterne): interazioni DEBOLI non importanti per il problema
- ALTRA FORMA: $\vec{F}dt = d\vec{p}$ — $d\vec{p}$ significativamente $\neq 0 \Longleftrightarrow \vec{F}dt$ significativamente $\neq 0$: IMPULSO della forza
  ↳ CASO in cui $\vec{p}$ può NON variare → Se $t \to 0$ (molto piccolo, infinitesimo), con $F \neq 0$ e $dt \to 0$ si ha $d\vec{p} \approx 0$
↓

Esempio



$V_0 = \sqrt{2gh}$

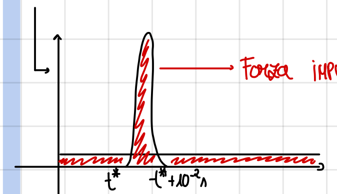
$\vec{p_i} = m\vec{V_0}$

$\vec{p_f} = -m\vec{V_0}$

$dt = 10^{-2}s$

$\vec{F}dt = \vec{p_f} - \vec{p_i} = -m\vec{V_0} - m\vec{V_0} = -2m\vec{V_0} = \Delta\vec{p}$: Presente forza che ha permesso la variazione (dt ↓ $10^{-2}s$)

Sottoposta a reazione vincolare, forza peso ed altre forze costanti → NON sono importanti per la quantità di moto perché non sono in grado di produrre variazioni significative di $\vec{p}$

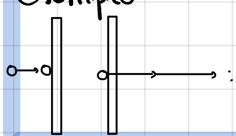


Forza IMPULSIVA: riesce a produrre variazione di quantità di moto in tempo piccolo

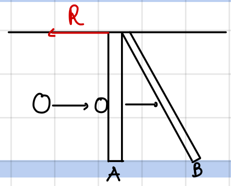
- ⚠ATT: La forza da considerare è la RISULTANTE $\Sigma\vec{F}$ → Equivale a $\Sigma F_x = ma_x$, $\Sigma F_y = ma_y$, $\Sigma F_z = ma_z$
- Unità di misura: N (Newton) → 1N = forza che, applicata ad un corpo di massa 1 kg, produce l'accelerazione di 1 m/s²
  ↳ $1N = 1\ kg \cdot m/s^2$

→ PRINCIPIO di CONSERVAZIONE della QUANTITÀ di MOTO
↳ $\vec{p} = m\vec{v}$ costante se $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, m = costante
- A: $\vec{F} = 0$: corpo libero → $\vec{p}$ è COSTANTE
- B: $\vec{F} \neq 0$: $\vec{p}$ NON è costante
  - → $d\vec{p}$ infinitesimo
    - $\vec{F}$ costanti o debolmente variabili → $\vec{p}$ è costante
    - → $\vec{F}$ impulsive, quindi ∞ → $\vec{p}$ NON costante
  - → Δt finito: sono presenti ACCELERAZIONI → $\vec{p}$ NON è costante

Esempio



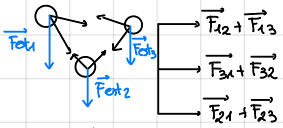
: Si sposta se non è tenuta ferma



$\vec{R}$ è IMPULSIVA perché NON permette al corpo di spostarsi

→ La FORZA GRAVITAZIONALE
↳ Tutti i corpi sono attratti dalla Terra dalla forza gravitazionale $\vec{F_g}$, diretta verso il centro della terra e la cui intensità si chiama PESO → Applicando la seconda legge di Newton ad un corpo in caduta libera si ha $\vec{F_g} = m\vec{g}$, dove m in questo caso identifica la massa gravitazionale, ovvero l'intensità dell'attrazione tra Terra e corpo → ANALOGA a massa inerziale

→ Terza legge di Newton: Se il corpo 1 esercita sul corpo 2 una forza $F_{1,2}$, il corpo 2 esercita sul corpo 1 una forza di modulo e direzione uguale (principio di azione-reazione) e verso opposto → Si chiamano forze INTERNE e svilupandosi a COPPIE, la loro somma è NULLA

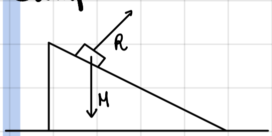


La DINAMICA è data solo dalle forze ESTERNE. $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\frac{d\vec{p}}{dt}$

↳ Per verificare $\vec{p}=cost$ si utilizzano solo le forze ESTERNE

- La forza applicata dal corpo 1 sul corpo 2 viene chiamata azione, mentre l'inversa si chiama reazione
- Le forze di azione e reazione agiscono su corpi DIVERSI ma sono dello STESSO TIPO

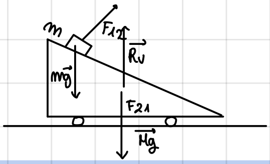
Esempio



Sistema: corpo di massa m

Interazioni: Terra e piano inclinato

$\vec{F}_{ext}=m\vec{g}+\vec{R}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{m\,d\vec{v}}{dt}=m\vec{a}$



Sistema: piano M + corpo m

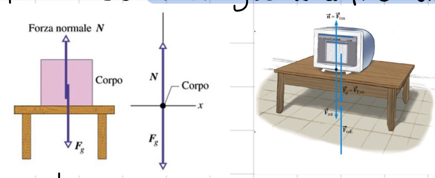
La quantità di moto è determinata solo dalle forze ESTERNE

Forze interne: F_{12}, F_{21}

Forze esterne: $m\vec{g}$, $M\vec{g}$, $\vec{R}_v$ → Somma: 0

→ La FORZA NORMALE

↳ Generata dal contatto fra 2 corpi e ORTOGONALE al piano se le superfici sono PRIVE di ATTRITO



→ $\vec{F}_g=\vec{F}_{mt}$, quindi la reazione è data da $\vec{F}_{tm}=-\vec{F}_{mt}$

↳ Il monitor NON è accelerato perché appoggiato sul tavolo che esercita la forza normale $\vec{n}=\vec{F}_{tm}$

↓

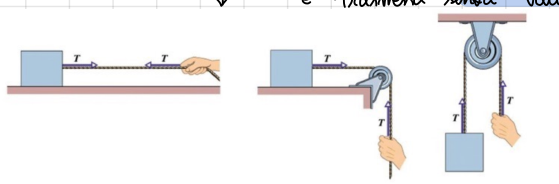
Dalla seconda legge di Newton si ha $\Sigma\vec{F}=\vec{n}+m\vec{g}=0$ e quindi $\vec{n}=m\vec{g}$

↓

Il primo diagramma, che rappresenta le forze agenti su UN SOLO CORPO si chiama diagramma di forza, mentre il secondo diagramma, che utilizza la rappresentazione di un punto materiale si chiama diagramma di corpo libero

→ La TENSIONE di un filo: è diretta nella direzione del filo ed è applicata nel punto dove la corda è fissata → È uguale e contraria alla sollecitazione

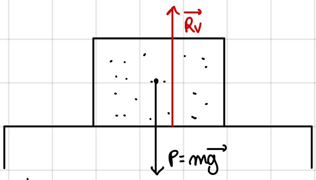
↓ ↳ è trasmessa senza variazioni al corpo attaccato alla corda



→ Per semplificare ha massa TRASCURABILE ed è INESTENSIBILE

↳ tutte le forze sono dovute a forze ELETTROMAGNETICHE

→ SCHEMA FORZE



$\vec{P}=\Sigma$ forze microscopiche date dalle singole molecole applicate nel CENTRO di MASSA

$\vec{R}=\Sigma$ reazioni vincolari infinitesime date dal piano

↓

Possono essere applicate tutte in un unico punto per semplificare

↓

Se un oggetto NON subisce accelerazioni, la forza totale è NULLA, mentre non lo è se è presente accelerazione

→ Equilibrio: quando l'accelerazione è NULLA → La somma delle forze su x, y e z è NULLA

└ $m\vec{a}=\Sigma\vec{F}=0$, ovvero $\Sigma F_x=\Sigma F_y=\Sigma F_z$

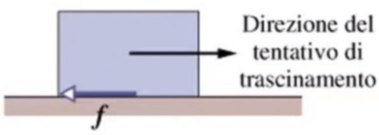
→ Metodo risolutivo problemi

- Analisi e diagramma problema
- Verificare se si tratta di un problema di equilibrio o riguarda la seconda legge
- Disegnare diagrammi di corpo libero per tutti gli oggetti
- Scegliere sistema di coordinate, verificare correttezza unità di misura, applicare equazioni e risolvere per incognite
- Verificare consistenza risultati con diagrammi e casi limite

→ La forza di attrito

└ Manifestazione macroscopica di forze elettromagnetiche

↓



Un corpo appoggiato sul piano è "trattenuto" da una forza quando viene spostato → Attrito STATICO

↳ Dipende dalle asperità presenti sulla superficie → Dato che le asperità sono piccole, la PRESSIONE $P=\frac{F}{S}=\frac{Mg}{S}$ è MOLTO ALTA

↓

└ Si hanno quindi delle microfusioni che devono essere rotte per avere movimento

Come nasce la forza di attrito?

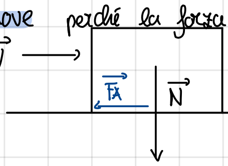
→ Cosa accade se il corpo è fermo? L'attrito è presente ma NON è presente la REAZIONE di ATTRITO perché se vi fosse, farebbe muovere il corpo

↳ Se la forza esterna PARALLELA alla superficie di contatto fosse applicata ad una superficie priva di attrito NON nascerebbe curiosamente la forza di attrito

↳ ⚠ ATT: La forza esterna deve avere ALMENO UNA COMPONENTE // alla superficie

ATTRITO STATICO: il corpo NON si muove perché la forza applicata NON è sufficiente

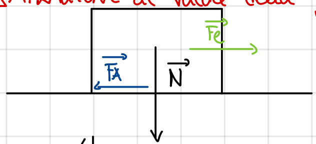
↳ $\vec{F_A} \leq \mu_s N$ e quindi $\vec{F_{A\,MAX}} = \mu_s N$ →



→ La forza di attrito statica massima è quella che si ha un attimo prima che il corpo si muova

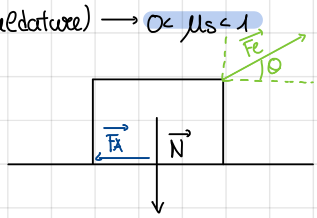
Coefficiente di ATTRITO STATICO: dipende dalla superficie (dalle microsaldature) → $0 < \mu_s < 1$

↳ ⚠ ATTENZIONE al valore della forza di attrito

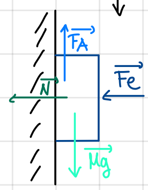


$\vec{F_A} = \vec{Fe}$! e NON $F_A = \mu_s N$.

Se $\vec{Fe} > \vec{F_A}$ il corpo si muove

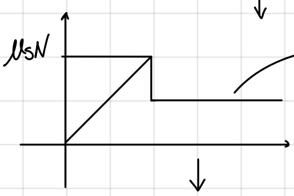


→ Conviene questa $\vec{Fe}$ perché la componente verticale fa diminuire $\vec{N}$ e di conseguenza $\vec{F_{A\,MAX}}$



$\mu_s N = mg$: si muove

$\mu_s N > mg$: sta fermo → Accade se premo

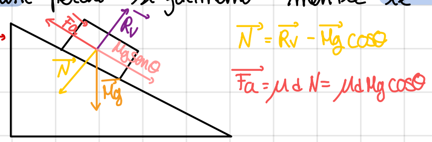


Costante : $\mu_d N$ (Dinamico)

Una volta iniziato lo scorrimento, è possibile applicare una forza minore, chiamata attrito dinamico

↳ Le microfusioni sono meno robuste perché si formano mentre il corpo si muove → $F_d = \mu_d N$: Vera uguaglianza

⚠ ATTENZIONE: Forza perpendicolare $\vec{N}$ →



$\vec{N} = \vec{R_V} - \vec{Mg}\cos\theta$

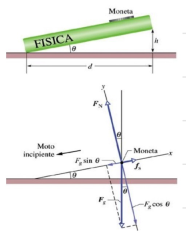
$\vec{Fa} = \mu_d N = \mu_d Mg\cos\theta$

su y: $R_V - Mg\cos\theta = 0$ → $y = 0$: costante

su x: $Mg\,sen\theta - \mu_d Mg\cos\theta = Ma$ → $a = g\,sen\theta - \mu_d g$: costante

↳ Vale la legge oraria $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

Calcolo del coefficiente di attrito statico

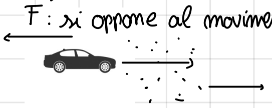


→ $mg\,sen\theta = F_S = \mu_s mg\cos\theta$ → L'oggetto inizia a muoversi

↳ $\mu_s = \tan\theta$

→ Il MOTO in un FLUIDO : Moto DECELERATO

↳ L'origine si individua nel fatto che ogni corpo è immerso in un fluido →



$\vec{F}$: si oppone al movimento

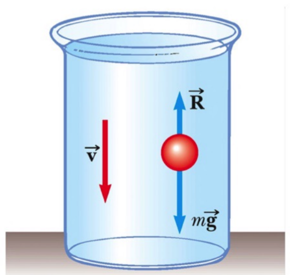
→ molecole

Costituito da MOLECOLE che creano attrito ed è PROPORZIONALE alla velocità : $\vec{F} = -\beta\vec{v}$ → Aumenta con il crescere della velocità

→ Aumenta se il corpo è PIÙ GRANDE perché sposta PIÙ MOLECOLE

↳ La resistenza dipende dal fluido : $\beta_{H_2O} > \beta_{Aria}$

Caduta di un grave all'interno di un fluido



$mg - \beta v = ma$

$a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{\beta}{m} v$: EQUAZIONE DIFFERENZIALE

→ a costante $\frac{d^2x}{dt} = a$ → $x(t)$ = quadratica nel tempo

↳ $x(t) = A + Bt + Ct^2$

→ dipendenza dal tempo → $\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda t^2$ → $x(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4$

$(a = \lambda t^2)$

↳ dipendenza dalla velocità → $a(v) = -\beta v$ → $\frac{d^2x}{dt^2} = -\beta v$ → $\frac{dv}{dt} = -\beta v$ → $\int \left|\frac{dv}{v}\right| = \int (-\beta) dt$

→ $\ln v = -\beta t + c$ e quindi $v = Ae^{-\beta t}$ → $v(0) = A$

↳ Esponenziale decrescente

È possibile quindi ricavare l'equazione oraria integrando di nuovo: $\int dx = \int V_0 e^{-\beta t} dt \longrightarrow x - x_0 = \frac{-V_0}{\beta} e^{-\beta t} \Big|_0^t = \frac{-V_0}{\beta} e^{-\beta t} + \frac{V_0}{\beta}$

da cui si conclude $x - x_0 = \frac{V_0}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$

↓

Le equazioni orarie in questo caso sono quindi

- $V(t) = V_0 e^{-\beta t}$
- $x(t) = \frac{V_0}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$

↓

La velocità limite

$\vec{F_a} = -\beta \vec{v}$

$m\vec{g}$

$m\vec{a} = m\frac{d^2 x}{dt} = m\vec{g} - \beta \vec{v}$

↓

Moto rettilineo uniforme se $\sum \vec{F} = 0 \longrightarrow mg = \beta V_{lim}$ e quindi $V_{lim} = \frac{mg}{\beta}$

Formalizzazione del moto

$$\begin{cases} m\frac{dv}{dt} + \beta v = mg \\ m\frac{dv}{dt} + \beta v = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Disomogenea: soluzione omogenea + soluzione particolare

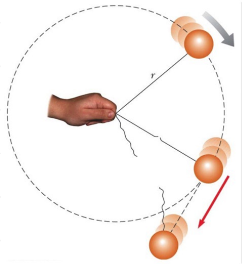
↓ $V(t) = V_0 e^{-\beta t}$

↓ $V(t) = m\frac{dv}{dt} + \beta v = mg$

$V(t) = cost = C \longrightarrow \beta C = mg \longrightarrow C = \frac{mg}{\beta}$

Si ha quindi che $V(t) = Ae^{-\beta t} + \frac{mg}{\beta}$, che per $t=0$ diventa $\frac{-mg}{\beta} = A$ e quindi si ha $V(t) = \frac{mg}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$

⟶ Le FORZE in un MOTO CIRCOLARE UNIFORME



⟶ È presente un'accelerazione (e quindi una forza) CENTRIPETA

└→ $\vec{F_c} = \frac{mv^2}{r}$ oppure $\vec{F_c} = m\omega^2 r$

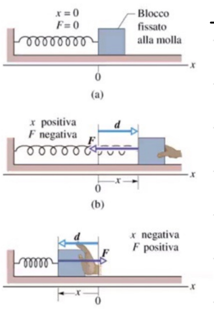
↓

La forza è diretta VERSO IL CENTRO del cerchio in direzione del raggio

└→ La forza è applicata dal filo che permette al corpo di proseguire il suo moto circolare

└→ Provoca una variazione del vettore velocità

⟶ La FORZA ELASTICA



⟶ Legge di Hooke: $F(x) = -kx$

- x = compressione / allungamento ⟶ Meglio $F = -k\Delta l$, $\Delta l = (l - l_0)$
  └→ Differenza tra $x_{attuale}$ e x_{riposo}
- k = costante elastica della molla

↓

È una forza di RICHIAMO: diretta verso la posizione di equilibrio e quindi opposta allo spostamento

└→ Se viene spostato dalla posizione di equilibrio e rilasciato si muove di moto accelerato perché soggetto ad una forza risultante: $a_x = -\frac{k}{m}x$ ⟶ Modulo proporzionale allo spostamento e verso opposto

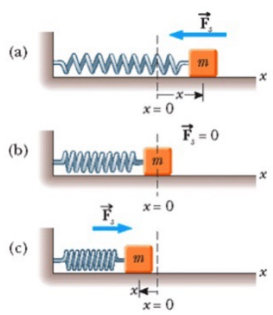
└→ Moto ARMONICO

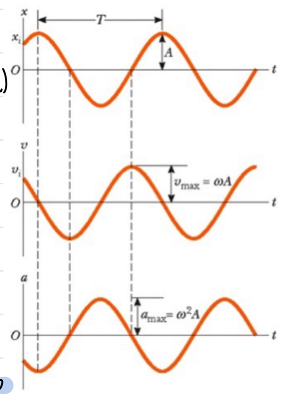
↓

Quando passa dal punto di equilibrio l'accelerazione è nulla, mentre è massima nel punto iniziale

└→ Velocità MASSIMA nel punto di equilibrio

⟶ Il MOTO ARMONICO





⟶ $a(x) = -kx$ e quindi $ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \longrightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{-k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t)$

⚠: per comodità si sceglie $\omega^2 = -\frac{k}{m}$

- $x(t) = A\cos\omega t$
- $v(t) = -\omega A \sin\omega t$
- $a(t) = -\omega^2 A\cos\omega t$

↓

Più nello specifico si ha che le equazioni del moto sono date da

- $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$
- $v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$
- $a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$

dove

- A: ampiezza = massimo valore della posizione
- ω = pulsazione (rad/s) = quanto velocemente avvengono le oscillazioni
  └→ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- ϕ = costante di fase: Se il corpo si trova ad A in $t=0$, allora $\phi = 0$
  └→ $\omega t + \phi$ = fase del moto

Periodo del moto armonico: tempo impiegato per compiere un ciclo completo $\longrightarrow t = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

↓

Frequenza: numero di oscillazioni per unità di tempo $\longrightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$

Velocità ed accelerazione massima
- $\rightarrow V_{max} = wA = \sqrt{\frac{K}{m}}\,A$
- $\rightarrow a_{max} = w^2 A = \frac{K}{m}\,A$

Differenze di fase tra x, v, a
- $\rightarrow$ v differisce in fase di x di $\phi = 90°$, ovvero dove x è massima, v è minima e vice-versa
- $\rightarrow$ a differisce in fase di x di $\phi = 180°$, ovvero entrambe hanno il massimo nello stesso punto ma con segno opposto

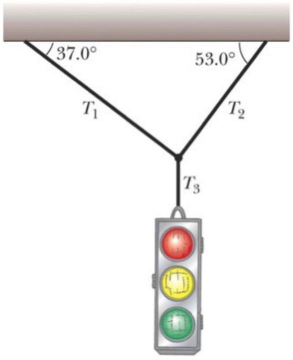
Modelli di Analisi

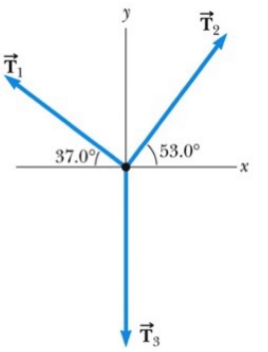
→ Modello 1: Sistema in EQUILIBRIO

Semaforo di peso 122N

Cavi si rompono se la forza eccede 100N

Si rompono?





Il sistema è in EQUILIBRIO, quindi la somma delle forze è NULLA: $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = 0$

Calcolo le forze agenti sui fili: Avendo un piano cartesiano, conviene scomporre le forze in componenti

└→ $\vec{T_3} = (0, -T_3)$

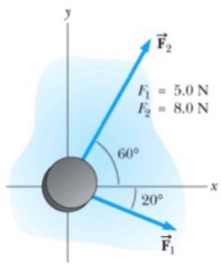
$\vec{T_2} = (T_2 \cos 53°, T_2 \sen 53)$

$\vec{T_1} = (T_1 \cos(180-37°), T_1 \sen(180-37°)) = (-T_1 \cos 37°, T_1 \sen 37°)$

Quindi si ha $\begin{cases} -T_1 \cos 37 + T_2 \cos 53 = 0 \\ T_1 \sen 37 + T_2 \sen 53 = T_3 \end{cases}$ $\begin{cases} T_1 = T_2 \frac{\cos 53}{\cos 37} \\ T_2 \frac{\cos 53}{\cos 37} \sen 37 + T_2 \sen 53 = T_3 \end{cases}$ $\begin{cases} T_1 = T_2 \frac{\cos 53}{\cos 37} \\ T_2 \left(\cos 53 \tan 37 + \sen 53\right) = T_3 \end{cases}$ $\begin{cases} T_1 = T_2 \frac{\cos 53}{\cos 37} \\ T_2 = \frac{T_3}{\cos 53 \tan 37 + \sen 53} \end{cases}$ $\begin{cases} T_1 = 73.4 N \\ T_2 = 97.4 N \end{cases}$ → Nessuno dei due fili si spezza

T_3 → Diretta nel VERSO OPPOSTO a $\vec{F_g}$

→ Modello 2: Forza totale NON NULLA



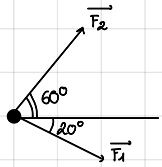
$m = 0.30 Kg$

$F_1 = 5.0 N$

$F_2 = 8.0 N$

$\theta = 60°$

$\alpha = 20°$



→ Diagramma di CORPO LIBERO

Calcolo dell'accelerazione utilizzando la seconda legge di Newton per m costante → $\vec{F} = m\vec{a}$

Essendo la forza un vettore, conviene scomporla nelle sue componenti x ed y

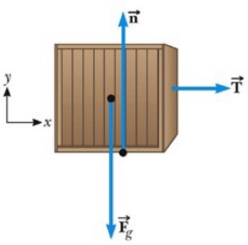
$F_1x = 5.0 \cos(-20°) = 4.70N$ $F_1y = 5.0 \sen(-20°) = -1.71 N$

$F_2x = 8.0 \cos(60°) = 4.0 N$ $F_2y = 8.0 \sen(60°) = 4.0\sqrt{3} N$

$F_x = 4.70 + 4.0 N = 8.70N$ $a_x = 8.70 / 0.30 = 29 m/s^2$ $a = \sqrt{29^2 + 17^2} = 34 m/s^2$

$F_y = -1.71 + 4\sqrt{3} N = 8.64N$ $a_y = 5.22/0.30 = 17 m/s^2$ $\theta = \arctan\left(\frac{17}{29}\right) = 30°$

→ Modello 3: Tensione corda (senza attrito)

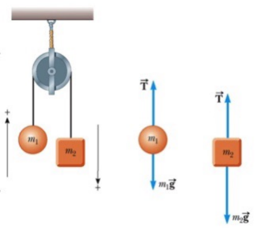


→ 3 forze agenti
- → Tensione $\vec{T}$ della corda
- → Forza gravitazionale $\vec{F_g}$
- → Forza normale $\vec{n}$ → Reazione del pavimento

Tipo di moto: Anche in questo caso conviene dividere l'analisi del moto in x ed in y → Poi applicare $\vec{F} = m\vec{a}$

- → $a_x = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{T}{m}$ → Moto uniformemente accelerato se T è c.te
- → $a_y = \frac{\Sigma F_y}{m} = \frac{F_g - n}{m} = \frac{F_g - F_g}{m} = 0$

→ Modello 4: Macchina di Atwood



→ Forze agenti
- → Tensione $\vec{T}$ comune ai due oggetti
- → Forza gravitazionale

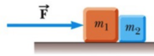
→ Oggetti hanno la STESSA ACCELERAZIONE

Calcolo delle forze agenti
- → Su m_1: $T - m_1 g$ $\xrightarrow[\text{Newton}]{\text{II legge}}$ $T - m_1 g = m_1 a_y$
- → Su m_2: $m_2 g - T$ $m_2 g - T = m_2 a_y$

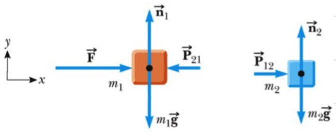
Ricavo l'accelerazione in quanto comune ad entrambi i corpi

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a_y \\ m_2 g - T = m_2 a_y \end{cases} \quad \begin{cases} m_2 g - m_2 a_y - m_1 g = m_1 a_y \\ T = m_2 g - m_2 a_y \end{cases} \quad \begin{cases} m_1 a_y + m_2 a_y = m_2 g - m_1 g \\ T = m_2 g - m_2 a_y \end{cases} \quad \begin{cases} a_y = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g \\ T = m_2 g - m_2 \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g = \frac{m_1 m_2 g + \cancel{m_2^2 g} - \cancel{m_2^2 g} + m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = \left(\frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g \end{cases}$$

→ Modello 5: Oggetti multipli



(a)



→ II legge di Newton sul sistema totale: $\Sigma F_x = m_{tot} a_x$ → L'unica forza esterna è quella su x

↳ $a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}$

→ Per quanto riguarda i singoli corpi si ha

- → Sul blocco arancione: $\vec{F} + \cancel{m_1 \vec{g} + \vec{n_1}} + \vec{P_{21}} = m_1 a_x$
- → Sul blocco azzurro: $\vec{P_{12}} + \cancel{m_2 \vec{g} + \vec{n_2}} = m_2 a_x$

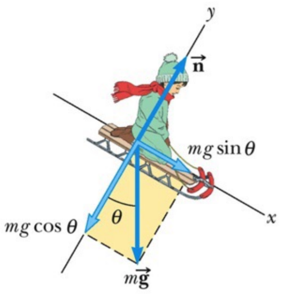
↓ Rimane da verificare che $P_{12} = P_{21}$

$P_{12} = m_2 \frac{F}{m_1 + m_2}$ $\quad F - P_{21} = m_1 \frac{F}{m_1 + m_2}$ → $F(m_1 + m_2) - P_{21}(m_1 + m_2) = m_1 F$

$P_{21}(m_1 + m_2) = \cancel{F m_1} + F m_2 - \cancel{m_1 F}$

$P_{21} = \frac{F m_2}{m_1 + m_2}$ → uguaglianza verificata

→ Modello 6: Piano inclinato



→ Analisi delle forze agenti
- → La forza NORMALE $\vec{n}$ ha direzione ORTOGONALE al piano
- → La forza gravitazionale è VERTICALE

↓

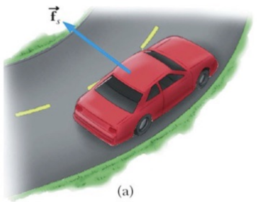
Scegliendo come x il piano inclinato, si ha che la forza di gravitazione ha 2 componenti x ed y, delle quali solo la prima genera accelerazione, in quanto la seconda è compensata dalla reazione vincolare

- → $F_{gx} = mg \operatorname{sen}\theta$ → Per la seconda legge di Newton si ha che $a_x = g \operatorname{sen}\theta$
- → Equilibrio su y: $n - mg\cos\theta = 0$ → $n = mg\cos\theta$

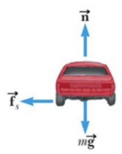
→ Modello 7: il MOTO di un' AUTOMOBILE

→ La forza che permette all'automobile di muoversi è l'attrito con il suolo, in quanto la forza generata dal motore viene applicata sulle ruote che, grazie all'attrito con il fondo stradale, generano il movimento dell'auto

→ Moto su una curva piana



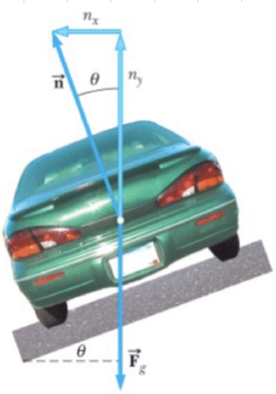
(a)



→ La forza centripeta è data da una forza di ATTRITO STATICO → La macchina si muove nella direzione puntata dalle ruote, mentre nell'altra è "ferma" e per questo, per non farla sbandare, si genera una forza di attrito statica che non le permette di muoversi in tale direzione

↳ La forza di attrito statica MASSIMA è data da: $\frac{mv^2}{r} = \mu_s mg$ e quindi la velocità limite è data da $v = \sqrt{\mu g r}$

→ Moto su una curva SOPRAELEVATA

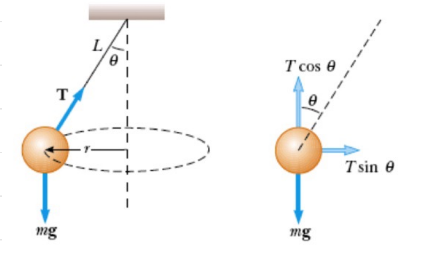


→ Voglio trovare il valore di θ per il quale i passeggeri NON risentono di forza laterale

↳ Avviene se la forza centripeta è data dalla componente n_x della reazione vincolare $\vec{n}$

- → $n_y = n\cos\theta = mg$ → $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$
- → $n_x = n \operatorname{sen}\theta = \frac{mv^2}{r}$

→ Modello 8: Il PENDOLO CONICO



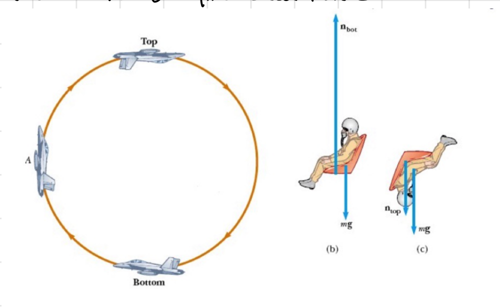
→ Forze agenti: Forza peso e tensione del filo

- → Essendo che fa un moto circolare, è necessaria una FORZA CENTRIPETA $m\omega^2 r$ ←
- → In y la sua posizione è costante: $\sum \vec{F} = 0$ ←

→ $T\cos\theta = mg$

→ $T\sin\theta = \frac{mv^2}{r}$ e quindi $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$, $v = \sqrt{rg\tan\theta} = \sqrt{Lg\sin\theta\tan\theta}$

→ Modello 9: Il giro della MORTE

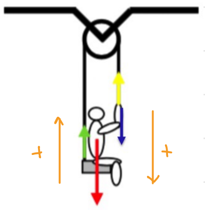


→ $n_{bot} - mg = \frac{mv^2}{r} \longrightarrow \frac{n_{bot}}{mg} = \frac{v^2}{gr} + 1$

→ $n_{top} + mg = \frac{mv^2}{r} \longrightarrow \frac{n_{top}}{mg} = \frac{v^2}{gr} - 1$

Esercizi slide

① Mostrare che un uomo, utilizzando una carrucola, può salire verticalmente applicando una forza inferiore al proprio peso. Calcolare la sua accelerazione in funzione della forza da lui esercitata



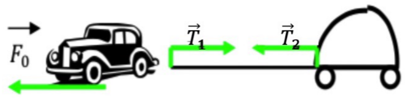
⟶ Forze agenti sull'uomo: $\vec{T_2}$ e $\vec{mg}$ $\qquad T_1 = T_2 = F$

⟶ Forza esercitata: $\vec{F}$ ⟶ genera tensione $\vec{T_1}$

La somma delle forze produce l'accelerazione del sistema, la quale massa è data da m (massa dell'uomo)
↳ $\Sigma F = ma \longrightarrow T - mg + T = ma \longrightarrow 2T - mg = ma$, quindi $a = \frac{2T}{a} - g$

Situazione di equilibrio: $-Mg + 2T = 0 \longrightarrow T = \frac{Mg}{2}$ ma $T = F$, quindi $F < Mg$

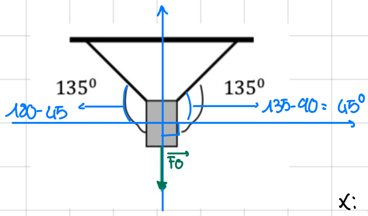
② Un'automobile (massa $M_1 = 1500$ kg) traina una roulotte (massa $M_2 = 500$ kg) su una strada orizzontale. La forza esercitata dalle ruote dell'automobile parallelamente alla strada ha modulo $F_0 = 1000N$. Si calcoli l'accelerazione dell'automobile e la forza sul gancio fra auto e roulotte



Le forze ⊥ al piano non si considerano in quanto non sono coinvolte nel moto
Si ha che $T_1 = T_2$ in quanto connesse allo stesso filo. ⟶ La forza $\vec{F_0}$ è quindi "trasmessa" senza perdite alla roulotte
Forze sulla macchina: $F_0 - T_1 = m_1 a$
Forze sulla roulotte: $T_2 = m_2 a$

Risolvendo il sistema con $T_2 = T_1$:
$$\begin{cases} F_0 - T = m_1 a \\ T = m_2 a \end{cases} \quad \begin{cases} F_0 - m_2 a = m_1 a \\ T = m_2 a \end{cases} \quad \begin{cases} (m_1 + m_2) a = F_0 \\ T = m_2 a \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{F_0}{m_1 + m_2} = 0.5 \ m/s^2 \\ T = \frac{m_2 F_0}{m_1 + m_2} = 250 \ N \end{cases}$$

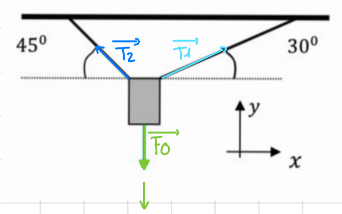
③ Su un punto materiale il peso esercita verso il basso una forza $\vec{F_0}$ di modulo 100N. Il corpo è fermo ed è attaccato con due fili al soffitto: ognuno dei due fili forma un angolo di 135° rispetto alla direzione verticale. Calcolare il modulo della forza che ciascun filo esercita sul corpo



$\vec{F_0} = (0, -100)$
$\vec{F_1} = (F_1 \cos 45, F_1 \operatorname{sen} 45)$
$\vec{F_2} = (-F_2 \cos 45, F_2 \operatorname{sen} 45)$

Si ha una situazione di equilibrio, quindi le forze su x ed y sono 0
$$\begin{matrix} x: \\ y: \end{matrix} \begin{cases} F_1 \operatorname{sen} 45 + F_2 \operatorname{sen} 45 - F_0 = 0 \\ F_1 \cos 45 - F_2 \cos 45 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - 100 = 0 \longrightarrow F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - 100 = 0 \longrightarrow F_1 = \frac{100}{\sqrt{2}} = 70.7N = F_2 \\ F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \longrightarrow F_1 = F_2 \end{cases}$$

④ Su un punto materiale il peso esercita verso il basso una forza $\vec{F_0}$ di modulo 100N. Il corpo è fermo ed è attaccato con due fili al soffitto. Il primo filo forma un angolo di 45° rispetto alla direzione orizzontale, il secondo di 30°. Calcolare il modulo della forza e la forza che ciascun filo esercita sul corpo



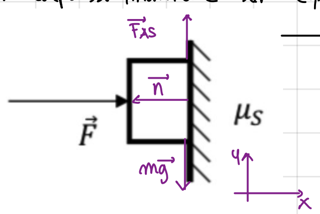
$\vec{F_0} \ (0\hat{i}, -F_0\hat{j})$

Il corpo è in equilibrio, quindi la somma delle forze sia su x che su y è pari a 0
$$\begin{matrix} x: \\ y: \end{matrix} \begin{cases} T_1 \cos 30 - T_2 \cos 45 = 0 \\ T_1 \operatorname{sen} 30 + T_2 \operatorname{sen} 45 - F_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T_1 \frac{\sqrt{3}}{2} - T_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \frac{T_1}{2} + T_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - 100 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T_1 = T_2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 73.2N \\ \frac{T_2}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + T_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - 100 = 0 \longrightarrow T_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 100 \end{cases}$$

$$T_2 = \frac{100}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = 89.6N$$

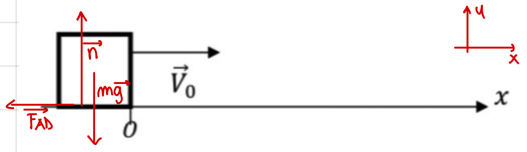
$T_1 \ (63.4N, 36.6N)$
$T_2 \ (-63.3N, 63.3N)$

⑤ Un blocco (massa $M = 10$ kg) è premuto contro una parete verticale con una forza orizzontale $\vec{F}$. Per quali valori del modulo di $\vec{F}$ il corpo si mantiene in equilibrio se il coefficiente di attrito statico fra parete e corpo è $\mu_s = 0.4$?



⟶ La forza di attrito statico è data da $\vec{F_{AS}} \leq \mu_s \vec{n}$, dove n in questo caso è data da $\vec{F}$, quindi si ha che $\vec{F_{AS}} \leq \mu_s \vec{F}$. Essendo che F_{AS} è opposta a $\vec{mg}$ e voglio l'equilibrio, si deve avere che $F_{AS} - mg = 0$ e quindi $F_{AS} = mg$. Dalla definizione di forza di attrito statico si ha $mg \leq \mu_s F$ e quindi $F \geq \frac{mg}{\mu_s}$

⑥ Al tempo $t=0$ un corpo viene lanciato su un piano orizzontale con velocità di modulo V_0. Calcolare l'istante t^* e la posizione $x(t^*)$ in cui si ferma, se il coefficiente di attrito dinamico fra corpo e piano è μ_D



→ Sul moto agiscono soltanto le forze sull'asse x, quindi solo la forza di attrito dinamico. Si ha quindi $\sum F = ma$ e quindi $-F_{AD} = ma$

Essendo $F_{AD} = \mu_D n$ si ha $F_{AD} = \mu_D mg$ e quindi $-\mu_D \cancel{m}g = \cancel{m}a \rightarrow a = -\mu_D g$: c.te

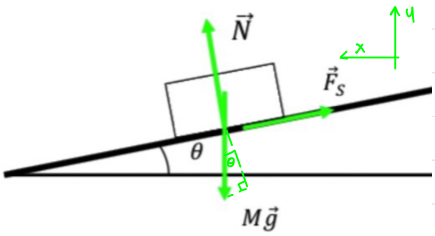
La velocità si ricava facendo $v(t) = V_0 + \int_{t_0}^{t} -\mu_D g\, dt' = V_0 - \mu_D g t$

Voglio trovare il tempo impiegato a fermarsi e quindi $0 = V_0 - \mu_D g t$ da cui $t = \frac{V_0}{\mu_D g}$

La legge oraria si ricava ponendo $x(t) = x_0 + \int_0^t V_0 - \mu_D g t'\, dt' = x_0 + V_0 t - \frac{1}{2}\mu_D g t^2$

Sostituendo t: $V_0 \cdot \frac{V_0}{\mu_D g} - \frac{1}{2}\cancel{\mu_D g}\frac{V_0^2}{\mu_D^2 g^2} = \frac{V_0^2}{\mu_D g \cdot 2}$

⑦ Un corpo assimilabile ad un punto materiale di massa M giace su un piano inclinato scabro. Calcolare il valore minimo di μ_s se il corpo inizia a muoversi quando $\theta = 30°$



Si ha che $F_{AS} \le \mu_s n$

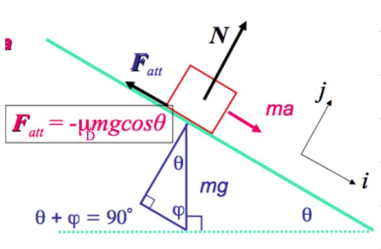
$n = mg\cos\theta$ e quindi $F_{AS} \le \mu_s mg\cos\theta$

Se il corpo inizia a muoversi con $\theta = 30$ si ha $F_{AS\,MAS} = \mu_s mg\cos 30 = \mu_s mg\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$x: \begin{cases} mg\,sen\theta - F_{AS} = 0 \\ N - mg\cos\theta = 0 \end{cases} \longrightarrow mg\,sen\theta = F_{AS} \longrightarrow \mu_s \cancel{mg}\cos\theta \ge \cancel{mg}\,sen\theta \longrightarrow \mu_s \ge \tan\theta$$
y:

$\downarrow$ $\mu_s \ge 0.577$: MIN

⑧ Un blocco di legno (massa $m=10Kg$) assimilabile a un punto materiale, inizialmente fermo su un piano inclinato di angolo $\theta=30°$ rispetto ad un piano orizzontale, viene lasciato libero di muoversi al tempo $t=0$. Fra il corpo ed il piano è presente attrito dinamico, caratterizzato da un coefficiente $\mu_D = 0.2$. Si esprima la velocità del blocco in funzione del tempo $v(t)$. Si determini l'accelerazione $\vec{a}$.



→ Per l'accelerazione sono importanti soltanto le forze parallele al piano. In questo modo si ha $\sum F_{//} = ma$

$\downarrow$

$P_{//} - F_{AD} = ma$

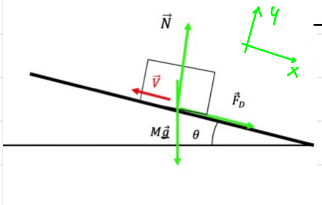
- $P_{//} = mg\,sen30°$
- $F_{AD} = mg\cos30°\mu_D$

$\Longrightarrow \cancel{m}g\,sen30° - \mu_D\cancel{m}g\cos30° = \cancel{m}a$

$\frac{g}{2} - \mu_D g\frac{\sqrt{3}}{2} = a \longrightarrow a = \frac{g}{2}(1-\mu_D\sqrt{3}) = 3.2\,m/s^2$

$v(t) = V_0 + \int_0^t \frac{g}{2}\left(1-\mu_D\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = V_0 + \frac{g}{2}\left(1-\mu_D\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t$

Se il corpo è lanciato in salita al tempo $t=0$ con $V=10\,m/s$, come cambia il risultato? Con quale velocità ripassa nel punto di partenza?



→ Anche in questo caso le forze che influenzano il moto sono quelle parallele al piano. Si ha quindi $\sum F_{//} = ma$

$\downarrow$

Si hanno $P_{//}$ e F_D, in questo caso concordi: $P_{//} + F_{AD} = ma \longrightarrow \cancel{m}g\,sen\theta + \mu_D\cancel{m}g\cos\theta = \cancel{m}a$

$\hookrightarrow a = \frac{g}{2}(1+\mu_D\sqrt{3})$

Si ottiene quindi che $v(t) = V_0 + \int_0^t \frac{g}{2}(1+\mu_D\sqrt{3}) = V_0 + \frac{g}{2}(1+\mu_D\sqrt{3})t$

Trovo il tempo t^* che impiega a fermarsi: $0 = -10 + \frac{g}{2}(1+\mu_D\sqrt{3})t^* \longrightarrow t^* = \frac{20}{g(1+\mu_D\sqrt{3})} = 1.51\,s$

Trovo lo spazio percorso: $x(t) = \int_0^t -10 + \frac{g}{2}(1+\mu_D\sqrt{3})t' = -10t + \frac{g}{4}(1+\mu_D\sqrt{3})t^2$

$\downarrow$

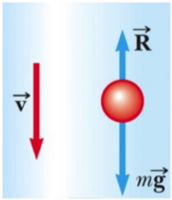
$x(t^*) = -10(1.51) + \frac{g}{4}(1+0.2\sqrt{3})(1.51^2) = -7.57\,m$: Posizione finale

L'accelerazione in discesa è $3.2\,m/s^2$ come nel caso precedente

$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x(t)} = \underset{\substack{\downarrow \\ -7.57}}{x_0} + \frac{1}{2}\cdot 3.2\cdot t^2 \longrightarrow t = \sqrt{\frac{7.57}{1.6}} = 2.18 \longrightarrow$ tempo impiegato a scendere

$v(2.18) = 0 + 3.2(2.18) = 6.96\,m/s$

⑨ Al tempo $t=0$ un corpo sferico di massa $M = 100g$ e $R = 10$ cm viene lanciato libero da fermo in aria. La forza fra corpo e aria è di tipo viscoso con una costante $\beta = 0.1$ kg/s



→ Forza di attrito viscoso $\vec{R} = -\beta v$

Per la seconda legge di Newton si ha: $\Sigma F = ma \longrightarrow mg - \beta v = ma$

Voglio ricavare la velocità in funzione del tempo, quindi posso scrivere $m\frac{dv}{dt} = mg - \beta v$

e quindi $\frac{dv}{dt} = g - \frac{\beta}{m} v$, che si può scrivere come $v'(t) = g - \frac{\beta}{m} v(t)$

È un'equazione differenziale risolvibile con il metodo del fattore integrante

└→ $b(t) = g$

└→ $a(t) = -\frac{\beta}{m} \longrightarrow A(t) = \int -\frac{\beta}{m} dt = -\frac{\beta}{m} t$

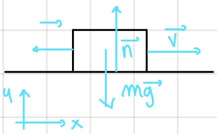
$\Longrightarrow e^{-\frac{\beta}{m}t} \int e^{\frac{\beta}{m}t} g\,dt = \frac{m}{\beta} \cancel{e^{\frac{\beta}{m}t - \frac{\beta}{m}t}} g + e^{-\frac{\beta}{m}t} c = \frac{m}{\beta} g + e^{-\frac{\beta}{m}t} c$

Calcolo c imponendo che $v(0) = 0 \longrightarrow 0 = \frac{m}{\beta} g + c \longrightarrow c = -\frac{m}{\beta} g$ e quindi $v(t) = \frac{m}{\beta} g \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right)$

Calcolo della velocità limite: In questo caso si muove di moto rettilineo uniforme

└→ Se $a=0$, allora $\Sigma F = 0$ e quindi $mg - \beta v = 0$ e $v_{lim} = \frac{mg}{\beta}$

⑩ Un'automobile di massa $M = 1000$ kg si muove con una velocità $V_0 = 20$ m/s su una strada orizzontale. Al tempo $t=0$ il motore si spegne e su di essa si esercita solo la forza di attrito viscoso dell'aria $-\beta V_x$. Si calcoli il coefficiente β se la velocità è $V_1 = 10$ m/s al tempo $t_1 = 10$s



→ Utilizzando la seconda legge di Newton si ha: $\Sigma F_x = ma$ e quindi $-R = ma$

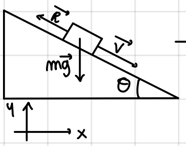
Da ciò si ha $-\beta v = ma$ e quindi $a = \frac{-\beta v}{m}$

Da questo ricavo la velocità: $v'(t) = -\frac{\beta}{m} v$ → $a(t) = -\frac{\beta}{m} \longrightarrow A(t) = -\frac{\beta}{m} t$; → $b(t) = 0$ $\qquad e^{-\frac{\beta}{m}t} \int e^{\frac{\beta}{m}t} \cdot 0 = c e^{-\frac{\beta}{m}t}$

Ricavo c ponendo $v(0) = 20$ m/s $\longrightarrow 20 = c e^0 \longrightarrow c = 20$ e quindi $v(t) = 20 e^{-\frac{\beta}{m}t}$

Si ha quindi $10 = 20 e^{-\frac{\beta}{1000} \cdot 10} \longrightarrow e^{-\frac{\beta}{100}} = \frac{1}{2} \longrightarrow -\frac{\beta}{100} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \longrightarrow \beta = 100 \ln(2) = 69.3$ kg/s

⑪ Un'automobile di massa $M = 1000$ kg si muove con una velocità $V_0 = 20$ m/s su una strada in discesa con una pendenza del 5%. Al tempo $t=0$ il motore dell'auto si spegne e su di essa si esercitano la forza di attrito viscoso dell'aria $F_x = -\beta V_x$, con $\beta = 70$ kg/s, e la componente della forza di gravità parallela alla strada.



→ Le forze che influenzano il movimento sono $\vec{R}$ e $\vec{P_{//}}$.

$\vec{R} = -\beta v$

$P_{//} = mg\,\text{sen}\theta$

$\theta = \arctan\left(\frac{5}{100}\right) = 2.86°$

Si ha quindi che $-\beta v + mg\,\text{sen}\theta = ma$, da cui $a = -\frac{\beta}{m} v + g\,\text{sen}\theta$

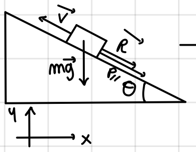
A questo punto ricavo la velocità: $v'(t) = -\frac{\beta}{m} v + g\,\text{sen}\theta$ → $a(t) = -\frac{\beta}{m} \longrightarrow A(t) = -\frac{\beta}{m} t$; → $b(t) = g\,\text{sen}\theta$ $\qquad e^{-\frac{\beta}{m}t} \int e^{\frac{\beta}{m}t} g\,\text{sen}\theta\, dt = \frac{m}{\beta} g\,\text{sen}\theta + c\, e^{-\frac{\beta}{m}t}$

Imponendo la condizione iniziale $v(0) = 20$m/s, c risulta: $V_0 = \frac{m}{\beta} g\,\text{sen}\theta + c \longrightarrow c = V_0 - \frac{m}{\beta} g\,\text{sen}\theta$

Quindi si ha: $\frac{m}{\beta} g\,\text{sen}\theta + \left(V_0 - \frac{m}{\beta} g\,\text{sen}\theta\right) e^{-\frac{\beta}{m}t} \longrightarrow v(t) = \frac{m}{\beta} g\,\text{sen}\theta\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) + V_0 e^{-\frac{\beta}{m}t}$

La velocità limite si ha quando non c'è accelerazione e quindi se $-\beta v + mg\,\text{sen}\theta = 0 \longrightarrow v = \frac{mg\,\text{sen}\theta}{\beta}$

Adesso ricavo la velocità nel caso in cui v_0 sia diretta in salita



$\longrightarrow \Sigma F_{//} = ma \longrightarrow R + P_{//} = ma \longrightarrow \beta v + mg\sin\theta = ma$ e quindi $a = \frac{\beta}{m} v + g\sin\theta$

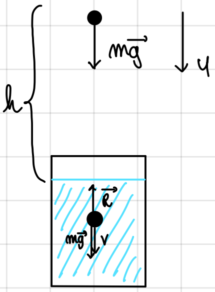
$v'(t) = \frac{\beta}{m} v + g\sin\theta \longrightarrow a(t) = \frac{\beta}{m} \longrightarrow A(t) = \frac{\beta}{m} t \Longrightarrow e^{\frac{\beta}{m}t}\int e^{-\frac{\beta}{m}t} g\sin\theta\, dt = -\frac{m}{\beta} g\sin\theta + e^{\frac{\beta}{m}t} c$

$\longrightarrow b(t) = g\sin\theta$

Condizione iniziale: $-v_0 = -\frac{m}{\beta} g\sin\theta + c \longrightarrow c = \frac{m}{\beta} g\sin\theta - v_0$ e quindi $v(t) = \frac{m}{\beta} g\sin\theta \left(e^{\frac{\beta}{m}t} - 1\right) - v_0 e^{\frac{\beta}{m}t}$

Velocità limite: $\beta v = -mg\sin\theta \longrightarrow v_{lim} = \frac{-mg\sin\theta}{\beta}$

(12) Una sferetta di massa $m = 1kg$ è lasciata cadere da ferma nel vuoto da un'altezza $h = 2m$ sulla superficie libera di una vasca piena d'acqua. All'interno della vasca la sferetta subisce una forza di attrito viscoso caratterizzabile con $\beta = 10$ kg/s e la profondità dell'acqua è tale che la sferetta raggiunge la velocità limite prima di toccare il fondo



(1) Velocità v_0 con cui tocca l'acqua

↳ Moto uniformemente accelerato (di caduta libera): $v(t) = gt \longrightarrow v(t^*) = gt^* = 6.26$ m/s

$S(t) = \frac{1}{2}gt^2 \longrightarrow 2 = \frac{1}{2}gt^2 \longrightarrow 4 = gt^2 \longrightarrow t^* = \sqrt{\frac{4}{g}} = 0.64s$

(2) Velocità limite: Moto rettilineo uniforme $(a=0)$

↳ $\Sigma F = 0 \longrightarrow m\vec g + \vec R = 0 \longrightarrow mg - \beta v = 0 \longrightarrow v = \frac{mg}{\beta} = 0.981$ m/s

$\vec R = -\beta \vec v$

(3) Equazione del moto nell'acqua + eq. velocità + grafico velocità

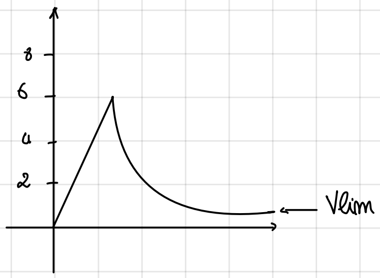
$\Sigma F = ma \longrightarrow mg - \beta v = ma \longrightarrow a = g - \frac{\beta}{m}v \longrightarrow v'(t) = g - \frac{\beta}{m}v(t) \longrightarrow a(t) = -\frac{\beta}{m} \longrightarrow A(t) = -\frac{\beta}{m}t \longrightarrow e^{-\frac{\beta}{m}t}\int e^{\frac{\beta}{m}t} g\, dt =$

$\longrightarrow b(t) = g$

$= \frac{m}{\beta}g + e^{-\frac{\beta}{m}t}c$

Condizione iniziale: $v(0) = 6.26$ m/s $\longrightarrow v_0 = \frac{m}{\beta}g + c \longrightarrow c = v_0 - \frac{m}{\beta}g$, quindi $v(t) = \frac{m}{\beta}g\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}(t-t_0)}\right) + v_0 e^{-\frac{\beta}{m}(t-t_0)}$

Il grafico è quindi una retta fino a t^* e poi un'esponenziale decrescente fino a v_{lim}

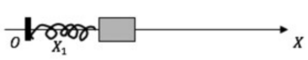


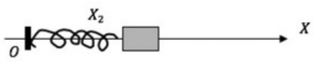
(13) Un vagone, di massa $3\cdot10^4$ kg connesso tramite un respingente elastico ad un locomotore frenato (e quindi fermo), compie 5 oscillazioni in 10 s. Valutare la costante elastica del respingente

Si ha che $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e quindi $k = m\omega^2$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ e T in questo caso si ottiene ponendo $\frac{10\,s}{5} = 2s$. Si ha quindi $k = 3\cdot10^4 \cdot \frac{4\pi^2}{4} = 3\cdot10^5$ N

(14) Due masse identiche m sono attaccate a due molle ideali (costante k, lunghezza a riposo l, massa nulla, indeformabili) su due guide parallele. La prima massa viene posta ferma a $t=0$ in $x=0$; la seconda viene posta ferma in $x=0$ nell'istante in cui per la prima è trascorso mezzo periodo, cioè al tempo $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$





$\longrightarrow$ Forza elastica: $F = -k\Delta l = -k(x_f - x_i) = -k(x_f - l) \longrightarrow$ II legge Newton: $-k(x_f - l) = ma$: UNICA FORZA

↪ eq. diff: $-k(x-l) = mx''$

$\longrightarrow -kx + kl = mx'' \longrightarrow mx'' + kx = kl\, e^{0x}\cos(0x) \longrightarrow$ Sol. generale: $m\lambda^2 + k = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\, i$

Soluzione generale: $A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+B\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

Soluzione particolare: $\alpha+i\beta=0+i0$: NO RISONANZA $\longrightarrow \alpha_1 = x_g(t)$, $x'_g(t)=x''_g(t)=0$

$k\alpha_1 = k\ell \longrightarrow \alpha_1=\ell$

$\alpha_1\cos(wt)+\alpha_2\,\text{sen}(wt)+\ell=0 \Longrightarrow \alpha_1\cos(wt)+\alpha_2\,\text{sen}(wt)=-\ell \xRightarrow[\text{AGGIUNTO}]{\text{ANGOLO}} \underbrace{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}_{A}\cos(wt+\phi)=-\ell \Longrightarrow A\cos(wt+\phi)=-\ell$

ϕ: arctan $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$

Condizioni iniziali: $x(0)=0 \Longrightarrow A\cos(\phi)+\ell=0 \Longrightarrow A\cos(\phi)=-\ell \Longrightarrow A\overbrace{\cos(0)}^{1}=-\ell \Longrightarrow A=-\ell$

$x'(0)=0\ \ [v(0)=0] \Longrightarrow -wA\,\text{sen}(\phi)=0 \Longrightarrow \phi=0$

$x(t)=-\ell\cos(wt)+\ell=\ell(1-\cos(wt))$

Legge seconda molla: resta in $x=0$ quando per la prima è trascorso $\frac{T}{2}$, quindi $t_1+\frac{T}{2}=t$, da cui $t_1=t-\frac{T}{2}$ e quindi, avendo che $T=\frac{2\pi}{w}$ si ricava $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{w}$ e quindi $t_1=t-\frac{\pi}{w}$

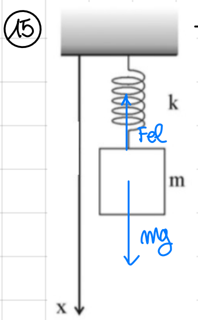
Sostituendo in $x(t_1)=\ell(1-\underbrace{\cos(wt-\pi)}))$

ARCO ASSOCIATO: $-\cos(wt)$ e quindi $x(t_1)=\ell(1+\cos(wt))$

$\Longrightarrow$ Punto di incontro: $\cancel{\ell}-\ell\cos(wt)=\cancel{\ell}+\ell\cos(wt) \Longrightarrow 2\ell\cos wt=0 \longrightarrow wt=\frac{\pi}{2}+k\pi$

Primo punto: $k=0$: $t=\frac{\pi}{2w}$

(15)



$M=100\,g=0.100\,kg$

$k=10\,N/m$

$\lambda=10\,cm \longrightarrow 0.010\,m$

$mg-F_{el}=ma \longrightarrow mg-k(x-\lambda)=mx''$

$mg-kx+k\lambda=mx'' \longrightarrow mx''+kx=mg+k\lambda$

Sol generale: $m\lambda^2+k=0 \longrightarrow \lambda=\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,i \longrightarrow$ SG: $A\cos(wt+\phi)$

Sol particolari:
- mg: $mg e^{0t}\cos(0t)$: $\alpha+i\beta \longrightarrow \alpha_1$, con derivate $=0$
- $k\lambda$: $k\lambda e^{0t}\cos(0t)$: $\alpha+i\beta \longrightarrow \beta_1$, con derivate $=0$

Trovo soluzione particolare 1: $k\alpha_1=mg \longrightarrow \alpha_1=\frac{mg}{k}$

Trovo soluzione particolare 2: $\cancel{k}\beta_1=\cancel{k}\lambda \longrightarrow \beta_1=\lambda$

Equazione oraria: $x(t)=A\cos(wt+\phi)+\frac{mg}{k}+\lambda$

$v(t)=-wA\,\text{sen}(wt+\phi)$

$x(0)=0 \longrightarrow A+\frac{mg}{k}+\lambda=0 \longrightarrow A=-\frac{mg}{k}-\lambda$

$x'(0)=0 \longrightarrow -\cancel{wA}\,\text{sen}(\phi)=0 \longrightarrow \phi=0$

$x(t)=\left(\frac{mg}{k}+\lambda\right)(1-\cos(wt))$

Ampiezza: $-\frac{mg}{k}-\lambda=\frac{-0.1\cdot 9.81}{10}-0.010=0.108\,m$

$T=\frac{2\pi}{w}$ e quindi determino w da $a(t)$, sapendo che in equilibrio $a(t)=0$ e di conseguenza $\Sigma F=0$

$a(t)=x''(t)$

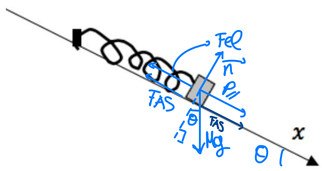
$\Sigma F=mg-\underbrace{k(x-\lambda)}$ $\hookrightarrow 0$: pos equilibrio. Si ottiene $\Sigma F=mg+k\lambda$

$x'(t)=\left(\frac{mg}{k}+\lambda\right)w\,\text{sen}(wt)$

$x''(t)=\left(\frac{mg}{k}+\lambda\right)w^2\cos(wt)$

$\left(\frac{mg}{k}+\lambda\right)w^2\underset{0}{\cos(wt)}=mg+k\lambda \longrightarrow \left(\frac{mg}{k}+\lambda\right)w^2=mg+k\lambda \longrightarrow \left(\frac{mg+\lambda k}{k}\right)w^2=g+\frac{\lambda k}{m} \longrightarrow w=\sqrt{\frac{k}{m}}$ e quindi $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

(16)



Massa M, angolo θ, μ_s, costante elastica K, lunghezza a riposo ℓ

Voglio che rimanga in equilibrio, quindi si deve avere $\Sigma F = 0$

Le forze che agiscono su M e condizionano il moto sono $P_{//}$, Fel, FAS

$P_{//} = Mg \operatorname{sen}\theta$ $\quad Mg\operatorname{sen}\theta - K(x-\ell) - F_{AS} = 0 \longrightarrow F_{AS} = Mg\operatorname{sen}\theta - K(x-\ell)$

$n = Mg \operatorname{sen}\theta$ $\quad$ DEF: $F_{AS} \leq \mu_s n = \mu_s |Mg\cos\theta|$ in MODULO $\longrightarrow$ Ha verso diverso a seconda se il corpo sale o scende

$F_{el} = -K(x-\ell)$

Caso 1: $P_{//} > F_{el}$

└ $Mg\operatorname{sen}\theta > K(x-\ell) \longrightarrow$ In questo caso si ha che $\underset{>0}{F_{AS}} = \underbrace{Mg\operatorname{sen}\theta - K(x-\ell)}_{>0}$. Si aveva che, in modulo: $|Mg\operatorname{sen}\theta - K(x-\ell)| \leq \mu_s |Mg\cos\theta|$

Avendo un moto di discesa, la forza di attrito punta verso il verso negativo del sistema di riferimento e quindi si ha

$Mg\operatorname{sen}\theta - K(x-\ell) \leq \mu_s Mg\cos\theta \longrightarrow -K(x-\ell) \leq \mu_s Mg\cos\theta - Mg\operatorname{sen}\theta \longrightarrow K(x-\ell) \geq Mg\operatorname{sen}\theta - \mu_s Mg\cos\theta \longrightarrow K(x-\ell) \geq Mg(\operatorname{sen}\theta - \mu_s\cos\theta)$

La condizione nell'allungamento, imponendo la condizione iniziale: $\frac{Mg\operatorname{sen}\theta}{K} > x-\ell \geq \frac{Mg}{K}(\operatorname{sen}\theta - \mu_s\cos\theta)$

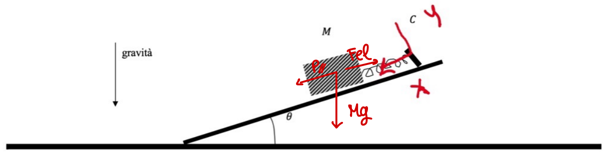
Caso 2: $F_{el} > P_{//}$

└ $K(x-\ell) > Mg\operatorname{sen}\theta \longrightarrow$ In questo caso si ha che $\underset{<0}{F_{AS}} = -Mg\operatorname{sen}\theta + K(x-\ell)$

$-Mg\operatorname{sen}\theta + K(x-\ell) \leq \mu_s Mg\cos\theta \longrightarrow K(x-\ell) \leq \mu_s Mg\cos\theta + Mg\operatorname{sen}\theta = Mg(\mu_s\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$

$$\frac{Mg\operatorname{sen}\theta}{K} < x-\ell \leq \frac{Mg}{K}(\mu_s\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$$

(17)



M = 100 kg $\quad$ Condizioni iniziali: $x(0) = 0$

$\theta = 30°$ $\quad$ $V(0) = x'(0) = 0$

$K = 200\ N/m$

$\ell = 2m$

$\Sigma F_{//} = m x'' \longrightarrow P_{//} - K(x-\ell) = m x'' \longrightarrow Mg\operatorname{sen}\theta - K(x-\ell) = mx'' \longrightarrow Mg\operatorname{sen}\theta - Kx + K\ell = mx'' \longrightarrow mx'' + Kx = Mg\operatorname{sen}\theta + K\ell$

$P_{//} \longrightarrow Mg\operatorname{sen}\theta$

Soluzione generale: $m\lambda^2 + K = 0 \longrightarrow A\cos(\omega t + \phi)$

Soluzioni particolari $\longrightarrow Mg\operatorname{sen}\theta \longrightarrow \alpha K = Mg\operatorname{sen}\theta \longrightarrow \alpha = \frac{Mg\operatorname{sen}\theta}{K}$

$\longrightarrow K\ell \longrightarrow \beta K = K\ell \longrightarrow \beta = \ell$

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + \frac{Mg\operatorname{sen}\theta}{K} + \ell \longrightarrow$ CONDIZIONI INIZIALI $\longrightarrow 0 = A\cos(\phi) + \frac{Mg\operatorname{sen}\theta}{K} + \ell \longrightarrow x(t) = \left(-\frac{Mg\operatorname{sen}\theta}{K} - \ell\right)(1-\cos(\omega t))$

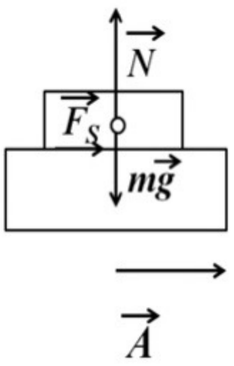
$\longrightarrow 0 = -\omega A\operatorname{sen}(\phi) \longrightarrow \phi = 0$

Ampiezza: $\left|-\frac{Mg\operatorname{sen}\theta}{K} - \ell\right| = 4.45m$

Periodo: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 4.44\ s$

(ω è definito come $\sqrt{\frac{K}{m}}$)

(18)



$\vec{A} = 2m/s^2$: ACCELERAZIONE di TRASCINAMENTO

(1) Calcolare il minimo coefficiente di attrito statico fra superficie del tetto e cartellina in modo che essa non voli via

└ La forza di attrito dipende dalla forza normale tra cartellina e tetto. Si considera la macchina come un sistema di riferimento NON INERZIALE

L'unica forza che influenza il "moto" della cartellina è quella apparente generata dall'accelerazione di trascinamento.

└ $\Sigma F_{APP} = m a_{tr}$

L'attrito statico è dato da $F_{AS} \leq \mu_s n = \mu_s mg$

Per avere l'equilibrio quindi si avrà che $F_S - m a_{tr} = 0$ e quindi $F_S = m a_{tr}$

Si può quindi concludere con $\cancel{m} a_{tr} \leq \mu_s \cancel{m} g \longrightarrow \mu_s \geq \frac{a_{tr}}{g}$ e quindi $\mu_{s\,min} = \frac{a_{tr}}{g} = 0.204$

(2) Moto nel caso in cui la cartellina sia in movimento e $\mu_D = 0.15$

└ La forza di attrito si OPPONE AL MOTO. In più in un sistema non inerziale vale la relazione $\Sigma \vec{F} = m(\vec{a_r} + \vec{a_{tr}})$

da cui si ottiene $\Sigma \vec{F} - \underbrace{m\vec{a_T}}_{F_{APP}} = m\vec{a_r}$

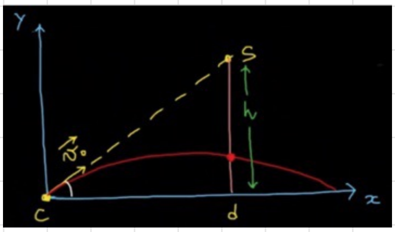
L'unica forza da considerare se viene preso come sistema di riferimento il terreno è l'attrito dinamico

$\llcorner \sum \vec{F} = ma \longrightarrow F_{AD} = ma \longrightarrow \mu_D \cancel{m} g = \cancel{m} a \longrightarrow a = \mu_D g = 1.47\ m/s^2$: ACCELERAZIONE RISPETTO A TERRA $\longrightarrow$ Moto rettilineo uniforme

Accelerazione rispetto al veicolo

$\llcorner m\vec{a_r} = \sum \vec{F} - m\vec{a_T} \longrightarrow a_r = \frac{F_{AD} - m a_T}{m} = \frac{\mu_D \cancel{m} g - \cancel{m} a_T}{\cancel{m}} = \mu_D g - a_T = 1.4715 - 2 = -0.53\ m/s^2 \longrightarrow$ Moto rettilineo uniforme

19



Cacciatore: $(0,0)$

Scimmia: (d, h)

SISTEMA INERZIALE

$\vdash$ moto del proiettile $\longrightarrow x(t) = x_0 + V_0 \cos\theta t = V_0 \cos\theta t$

$y(t) = y_0 + V_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 = V_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$

$\llcorner$ moto della scimmia $\longrightarrow y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$

$\longrightarrow x(t) = d$

$$\begin{cases} V_0 \sin\theta t - \cancel{\frac{1}{2}gt^2} = h - \cancel{\frac{1}{2}gt^2} \\ V_0 \cos\theta t = d \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{V_0} \sin\theta \frac{d}{\cancel{V_0}\cos\theta} = h \\ t^* = \frac{d}{V_0 \cos\theta} \end{cases} \longrightarrow \tan\theta\, d = h \longrightarrow \theta = \arctan \frac{h}{d}$$

SISTEMA NON INERZIALE: Scimmia che cade

$\llcorner m_p \vec{a_r} = \underbrace{\sum F}_{m_p g} - m_p a_T \longrightarrow m_p a_r = m_p \underbrace{(g-g)}_{0} = 0$ ∴ MOTO RETTILINEO UNIFORME

$x_s(t) = 0$ $\qquad y_s(t) = 0$ $\qquad \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(0-(-h))}{(0-(-d))} = \frac{h}{d} \longrightarrow \theta = \arctan \frac{h}{d}$

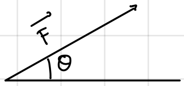
$x_p(t) = -d + V_0 \cos\theta t$ $\qquad y_p(t) = -h$

Lavoro ed energia

→ Sistema: entità separata da altri corpi dal suo CONTORNO → È possibile effettuare scambi tra il sistema e l'ambiente
- → Sistema ISOLATO: NON effettua scambi con l'ambiente esterno
- → Sistema NON ISOLATO: Avvengono scambi tra sistema ed ambiente tramite il contorno del sistema
  - → PRINCIPIO di CONSERVAZIONE dell'ENERGIA: Se l'energia di un sistema subisce una variazione, è necessario che una quantità di energia pari alla variazione abbia attraversato i confini del sistema
    - → L'energia di un sistema NON VARIA
      - → Se NON agiscono forze
      - → Se agiscono solo forze conservative
      - → Agiscono forze interne/esterne non conservative (Es: $d\vec{r}=0$ o $\theta=\frac{\pi}{2}$) che NON fanno lavoro

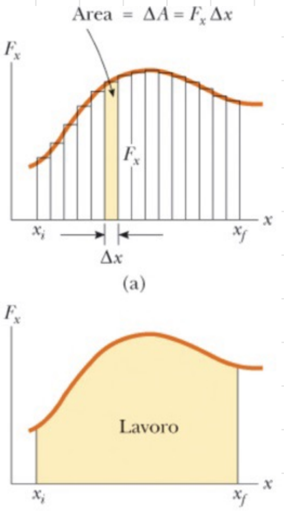
→ Il LAVORO ($\mathcal{L}$ o W): Il lavoro compiuto su un sistema da un agente che esercita su di esso una forza costante è uguale al prodotto tra il modulo F della forza, il modulo Δr dello spostamento del punto di applicazione della forza e $\cos\theta$, dove θ è l'angolo tra il vettore forza ed il vettore spostamento

$\vec{F}\cdot d\vec{r}=\mathcal{L}$: LAVORO ELEMENTARE → 3 casi di lavoro nullo
- → $\vec{F}=0$
- → $d\vec{r}=0$
- → $\vec{F}\cdot d\vec{r}=0$ se $\theta=\frac{\pi}{2}$



- → Può essere positivo o negativo a seconda che la proiezione di $\vec{F}$ su $\Delta\vec{r}$ abbia verso concorde o discorde allo spostamento
- → Unità di misura: newton · metro = Joule (J)
- → Essendo uno scambio di energia, se è positivo indica che l'energia è trasferita al sistema, mentre se è negativo l'energia è trasferita dal sistema

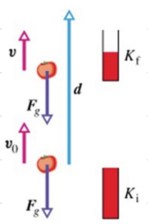
→ Il LAVORO di una FORZA VARIABILE



→ Se la forza non è costante, è necessario ridursi al caso di una forza costante riducendo i Δx in modo da approssimare la forza ad una costante in questi tratti. In questo modo è possibile poi sommare tutti i contributi dati da $W=F_x\Delta x$. Per trovare il lavoro totale quindi sarà necessario porre $W=\sum_{x_i}^{x_f} F_x\,\Delta x$ e quindi, per definizione, $\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$, avendo fatto tendere a 0 i singoli Δx
- → Se ci sono PIÙ FORZE: Il lavoro è dato dalla RISULTANTE

  Si ha $F=\sum_n F_n$ e quindi $\mathcal{L}=\int_i^f \left(\sum_n \vec{F_n}\right)\cdot d\vec{r}=\sum_n\int_i^f \vec{F_n}\cdot d\vec{r}=\sum_n \mathcal{L}_n$ → SOMMA dei singoli lavori
- → Se la forza è COSTANTE si ha che $\mathcal{L}=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$ → Vettore spostamento da posizione iniziale a finale
- → Formula PIÙ GENERALE: $\int_{x_i}^{x_f} F(r)\cdot d\vec{r}$

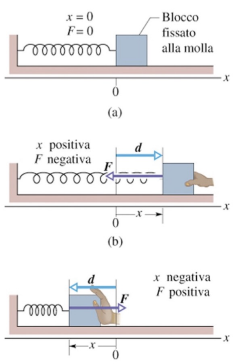
→ Il lavoro della FORZA PESO



→ Velocità iniziale v_i

→ Lavoro fatto sul corpo dalla forza peso ad altezza d: $\mathcal{L}=\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}=-mgd<0$, da cui $\mathcal{L}=K_f-K_i$ → $v_f<v_i$
- → dipende soltanto dalla differenza di quota fra punto iniziale e punto finale
  - → Varia solo la POTENZA in base allo spostamento

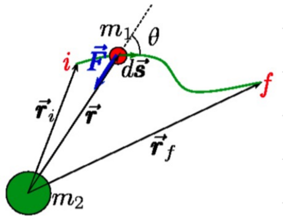
→ Il lavoro della FORZA ELASTICA



→ Forza elastica: $F_{el}=-Kx$ → Legge di Hooke
- → Forza di richiamo: opposta ad allungamento/compressione della molla
- → Lavoro compiuto dalla forza elastica: $\mathcal{L}=\int_{x_i}^{x_f}F(x)\,dx=\int_{x_i}^{x_f}(-Kx)\,dx=-K\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_i}^{x_f}=\frac{1}{2}K(x_i^2-x_f^2)$

  Se la posizione iniziale e la posizione finale coincidono, il lavoro è NULLO
- → Lavoro compiuto da una forza esterna: $\mathcal{L}_{est}=\int_{x_i}^{x_f}Kx\,dx=\frac{1}{2}Kx_f^2-\frac{1}{2}Kx_i^2$

→ Lavoro di una forza proporzionale a $\frac{1}{r^2}$



→ $\vec{F} = \frac{-K}{r^2}\hat{r}$ (Esempio: $-G\frac{m_1 m_2}{r^2}$)

↳ Lavoro: $\mathcal{L} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s} = -K\int_i^f \frac{\hat{r}\cdot d\vec{s}}{r^2} = -K\int_i^f \frac{dr}{r^2} = K\left[\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right]$

→ L'ENERGIA CINETICA

- Definizione: $K = \frac{1}{2}mv^2$ e misurata in Joule come per il lavoro
- TEOREMA dell'ENERGIA CINETICA: Quando si compie lavoro su un sistema e come effetto si ha solo una variazione del modulo della velocità, il lavoro complessivo compiuto sul sistema è uguale alla variazione della sua energia cinetica: $K_f - K_i = \mathcal{L}_{if}$
  - Se $\mathcal{L}_{if} < 0$: K diminuisce
  - Se $\mathcal{L}_{if} > 0$: K aumenta

DIMOSTRAZIONE: $K = \frac{1}{2}mv^2$, $dK = d\,\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}m\,d\vec{v}\cdot\vec{v} + \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot d\vec{v} = m\vec{v}\cdot d\vec{v}$

quindi $dK = m\vec{v}\cdot d\vec{v} = m\,d\vec{v}\cdot\vec{v} = m\,d\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \overbrace{\frac{m\,d\vec{v}}{dt}}^{F = \frac{dp}{dt}}\cdot \underbrace{d\vec{r}}_{\text{SPOSTATO: scalare}} = \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Si può quindi concludere integrando: $\int dK = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$, da cui $K_2 - K_1 = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \mathcal{L}$

- Se un sistema è costituito da più oggetti, l'energia cinetica sarà data dalla somma di tutte le energie cinetiche
- ⚠ ATT: L'energia cinetica varia solo se varia il MODULO della velocità → Esempio: Nel moto circolare uniforme NON varia perché varia solo la direzione e la forza centripeta NON fa lavoro perché ⊥ allo spostamento

→ La POTENZA

- Lavoro svolto in una determinata unità di tempo
  - Potenza MEDIA: $P = \frac{\Delta\mathcal{L}}{\Delta t}$
  - Potenza ISTANTANEA: $P = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$
- Unità di misura: WATT

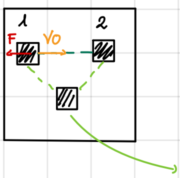
→ Forze CONSERVATIVE e NON CONSERVATIVE

└ Caratteristiche di una forza conservativa
  - Il lavoro compiuto NON dipende dal percorso
  - Il lavoro compiuto su un percorso chiuso è NULLO

↓ Le forze NON conservative NON le rispettano

Esempi

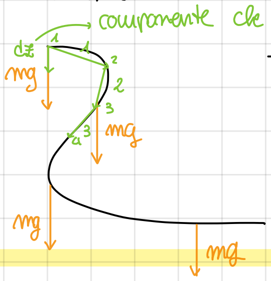
① Forza NON conservativa



$F_A = -\mu_D Mg$ → LAVORO: $-\mu_D mgd$ e quindi $\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu_D mgd$ → $\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mu_d mgd$

PERCORSO LUNGO: triangolo rettangolo di ipotenusa $\overline{12}$ → Si ha quindi $\overline{12} < \overline{13} + \overline{32}$, da cui si può concludere $\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mu_D mg(d_{13} + d_{32})$ → LAVORO MAGGIORE

② Forza CONSERVATIVA



→ componente che contribuisce al lavoro

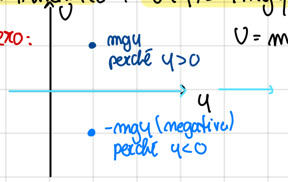
$\vec{P} = m\vec{g}$ ↳ Le componenti ⊥ NON contribuiscono al lavoro

$d\mathcal{L} = mg\,dz_1 + mg\,dz_2 + mg\,dz_3$

$\mathcal{L}_{TOT} = \int d\mathcal{L} = \sum d\mathcal{L} = mg\int dz_i = mg\Delta z = mgh$

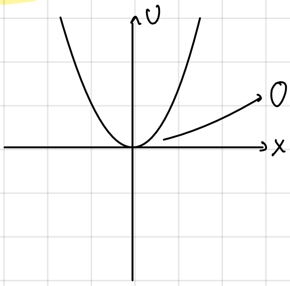
→ L'ENERGIA POTENZIALE

- funzione riguardante le FORZE CONSERVATIVE: lavoro di una forza conservativa $= -\Delta U \longrightarrow U_i - U_f = L_{if} \longrightarrow$ Varia con la CONFIGURAZIONE del SISTEMA
- energia potenziale GRAVITAZIONALE : $U(y) = mgy \longrightarrow$ Data dal trasferimento di energia impiegata per sollevare il corpo fino ad y
  - ⚠ATT: Scelta dello zero:



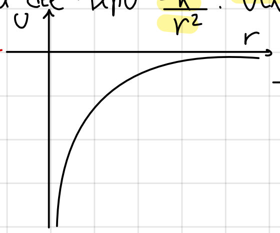
→ Scelto come zero del sistema

- energia potenziale ELASTICA: $U(x) = \frac{1}{2}Kx^2 \longrightarrow$ Viene misurata rispetto alla posizione di EQUILIBRIO
  - ⚠ATT: È sempre POSITIVA



→ 0 solo nella posizione di equilibrio

- energia potenziale di una forza del tipo $\frac{-K}{r^2}$: $U(x) = \frac{-K}{r}$
  - ⚠ATT: Sempre negativa



→ è 0 per $r \to +\infty$

per $r \to 0$, $U \to -\infty$

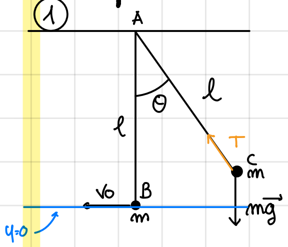
→ L'ENERGIA MECCANICA

→ costante del moto se agiscono forze conserv.

$E = K + U$: Energia meccanica in presenza di forze conservative: $dE = dK + dU = 0 \longrightarrow dK = -dU$

Esempi

(1)



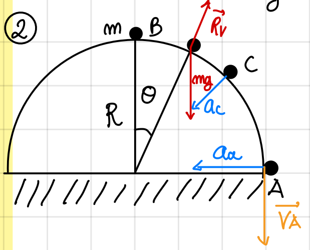
(1) $\vec{p}$ è costante?
- a) $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Longrightarrow$ NON è possibile utilizzare questa cosa: NON si conserva
- b) $\vec{v}$ = costante

(2) E = costante? → Forze → interne → Tutte le forze devono essere conservative
→ esterne
- Forza peso: conservativa
- T NON è conservativa ma NON fa lavoro: √ (è ⊥ allo spostamento)
  - $\vec{T} \cdot d\vec{s} = 0$

L'energia si conserva quindi abbiamo $E_{Mi} = E_{Mf}$
- $E_{Mi} = U + K = U = mgy \longrightarrow y(0) = l - AB = l - l\cos\theta = l(1-\cos\theta)$
  - $E_{Mi} = mgl(1-\cos\theta)$
- $E_{Mf} = \cancel{U} + K = \frac{1}{2}mv_0^2$

Si ha che $T = mg + \frac{mv^2}{l}$ e quindi da $\cancel{m}gl(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2$ si ha $V_0 = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$, che basta sostituire in T

(2)



Non può arrivare in A perché NON c'è accelerazione centripeta

$a_c > a_a$: Ha perso velocità

in B: $\underbrace{\vec{Rv}}_{} + m\vec{g} = -\frac{mv^2}{R}\vec{e_r}$

DIMINUISCE e quando diventa nulla si stacca $\longrightarrow \theta^*$: $0 = Rv = -\frac{mv^2}{R} + mg\cos\theta^*$: 1ª eq

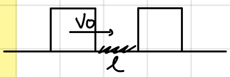
conserv. energia: 2ª eq
- $mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta^*$

Velocità $\vec{V} = (V_x, V_y)$ $|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$
- $\vec{V} \perp \vec{R}$: $R = (x_0, y_0)$ $R \cdot V = ax_0 + by_0 = 0$
  - $V = (a, b)$
  - $a = 1$ FISSATA $\longrightarrow$ Possibile trovare $b \longrightarrow b = \frac{-x_0}{y_0} \Longrightarrow$ Quindi è possibile porre il modulo uguale a quello desiderato

→ ENERGIA MECCANICA in presenza di forze NON CONSERVATIVE

↳ $\Delta(K+U) = \mathcal{L}_a$ → Lavoro della forza di attrito: SEMPRE NEGATIVO → L'energia si conserva sempre e quella "dispersa" si trasforma in energia termica

Esempio



$F_{AD} = -\mu_D mg$

$E_{mecc\,i} \neq E_{mecc\,f}$ → $E_{mecc\,f} - E_{mecc\,i} = \mathcal{L}_{f\ non\ cons}$

↳ $\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}v_i^2 = \mu_D mg\ell$

→ Relazione tra FORZE CONSERVATIVE ed ENERGIA POTENZIALE

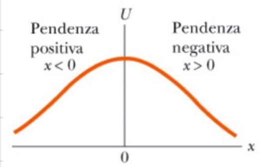
↳ Lavoro di una forza conservativa $(W_{int}) = -\Delta U$ → Da questo si ha che $\Delta U = U_f - U_i = \underbrace{-\int_{x_i}^{x_f} F_x dx}_{W_{int}}$, da cui si può ricavare $U_f = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$

↓

Se il punto di applicazione compie uno spostamento infinitesimo si ha che $dU = -F_x dx$, da cui $F(x) = -\frac{d}{dx}U(x)$, che è possibile generalizzare in tre dimensioni: $\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}U(x,y,z), \frac{\partial}{\partial y}U(x,y,z), \frac{\partial}{\partial z}U(x,y,z)\right) = -\nabla U(x,y,z)$: GRADIENTE

- → Energia potenziale elastica: $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ → $F = -\frac{dU}{dx} = -kx$
- ↳ Energia potenziale gravitazionale: $U(y) = mgy$ → $F = -\frac{dU}{dy} = -mg$

↓



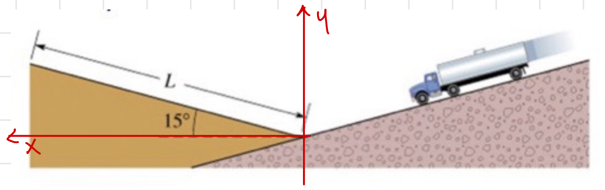
La forza è NULLA nei minimi e massimi → Nei minimi si ha equilibrio STABILE; → Nei massimi si ha equilibrio INSTABILE → Appena è fatto un piccolo spostamento, la forza che nasce sposta dalla pos. di equilibrio

↳ Punti di equilibrio

↳ La forza punta nella direzione in cui U diminuisce

Esercizi slide

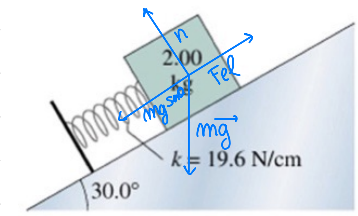
① Un camion che viaggia a $V = 130\ Km/h$ imbocca la corsia di emergenza, che consiste in un tratto lungo ℓ in salita di pendenza $15°$. In assenza di attrito, calcolare il minimo valore di ℓ affinché il camion si arresti



$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_f \rightarrow \begin{cases} K_i + \cancel{U_i} \longrightarrow \frac{1}{2} m V_0^2 \\ \cancel{K_f} + U_f \longrightarrow mgy \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}V_0^2 = \cancel{m}gy \quad (y = \ell \operatorname{sen} 15°)$$

risolvendo: $\frac{1}{2}\underbrace{\left(130 \cdot \frac{1000}{3600}\right)}_{36.1\ m/s}^2 = g\ell \cdot 0.26 \longrightarrow \ell = \frac{\frac{1}{2}(36.1)^2}{0.26\, g} = 255 m$

② Inizialmente la molla è compressa di 20 cm, poi è lasciata libera. Quanto lontano lungo il piano inclinato viene spinto il blocco?



$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_f$

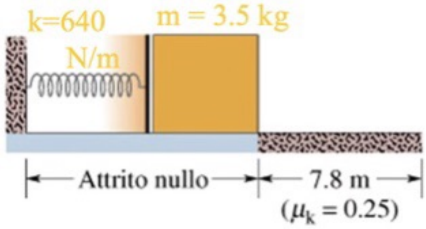
$\cancel{K_i} + U_i \longrightarrow U_i = U_{el} = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}(19.6)(0.2)^2$

$\cancel{K_f} + U_f \longrightarrow U_f = U_{grav} = mgh = mg\, d \operatorname{sen}\theta = 2gsen\theta$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}(19.6 \cdot 10^2)(0.2^2) = 2g\, d \operatorname{sen}\theta$

$d = \frac{(19.6 \cdot 10^2)(0.2^2)}{4g\operatorname{sen}\theta} = 4m$

③ Il blocco di massa $m = 3.5 Kg$ viene spinto via da una molla di costante $K = 640\ N/m$ inizialmente compressa, si distacca quando la molla ha raggiunto la posizione di riposo, si ferma dopo 7.8 m per attrito ($\mu_D = 0.25$). Di quanto era compressa la molla inizialmente?



$\longrightarrow$ lavoro della forza di attrito $= -F\ell$

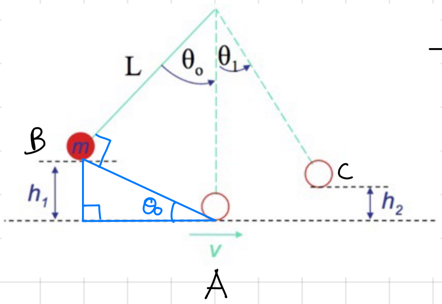
$\hookrightarrow \Delta\mathcal{E} = \mathcal{L}_{f_{NC}} \longrightarrow \mathcal{E}_i = \cancel{K_i} + U_i \longrightarrow \frac{1}{2}Kx^2$

$\mathcal{E}_f = \cancel{K_f} + \cancel{U_f} \longrightarrow 0$

$\Longrightarrow \cancel{-}\frac{1}{2}Kx^2 = \cancel{-}\mu_D mg\cos(0)(7.8)$

$x = \sqrt{\frac{2\mu_D mg(7.8)}{K}} = 0.66 m$

④ La pallina m è inizialmente ferma ad un'altezza h_1. Quanto vale e in quale punto è massima la sua velocità? A quale altezza h risale dall'altro lato? Se $\ell = 1m$ e $\theta = 15°$, calcolare la velocità di m nella posizione $\theta_1 = 10°$



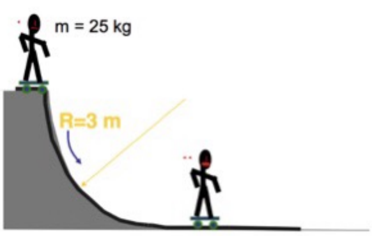
$\longrightarrow$ Il punto dove ha velocità massima è A $\longrightarrow \mathcal{E} = K + U \rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_{i_B} = \cancel{K_i} + U_i = mgh_1 \\ \mathcal{E}_{f_A} = K_f + \cancel{U_f} = \frac{1}{2}mv^2 \end{cases}$

$V = \sqrt{2gh_1} = 0.818 \quad h_1 = \ell - \ell\cos 15 = \ell(1-\cos 15°) = 1 - \cos(15) = 0.034$

$\mathcal{E}_C = U_C + K_C \longrightarrow mgh_2 + \frac{1}{2}mV_C^2 \longrightarrow V_C = \sqrt{V_A^2 - 2gh_2} = 0.61\ m/s$

$\mathcal{E}_A = U_A\ K_A \longrightarrow \frac{1}{2}mV_A^2$

⑤



$m = 25 kg$

$R = 3m \longrightarrow$ ALTEZZA

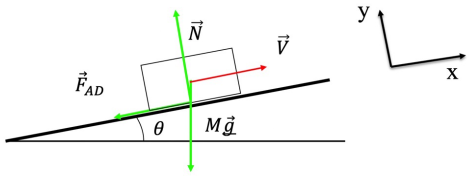
$\mathcal{E} = K + U \rightarrow \begin{cases} \cancel{K_i} + U_i = \cancel{m}gR \\ K_f + \cancel{U_f} = \frac{1}{2}\cancel{m}V^2 \end{cases} \longrightarrow V = \sqrt{2gR} = 7.67\ m/s$

Se $V_f = 7\ m/s$, quanto vale il lavoro fatto dalle forze di attrito?

$\mathcal{L} = \Delta K = \frac{1}{2}mV_f^2 - \frac{1}{2}mV_i^2 = \frac{1}{2}m(V_f^2 - V_i^2) = \frac{1}{2}m(58.8 - 49) = 123\ J$

Esercizi esercitazioni

1



$M = 10\ kg$
$V_0 = 10\ m/s$ a $t=0$
$\theta = \frac{\pi}{6}$
$\mu_D = 0.2$

① Massima altezza raggiunta

└ Per il teorema delle forze vive si ha $\Delta K = \mathcal{L}$ ⟶ Le forze che fanno lavoro in questo caso sono ┌ Forza peso └ Forza di attrito

ΔK ┌ $K_i = \frac{1}{2} m V_0^2$ └ $K_f = 0$: Si ferma ad $h\ max$

$\mathcal{L}_{AD} = \int \vec{F}_{AD} \cdot d\vec{\ell} = -\mu_D mg \cos\theta\, \ell$

$\mathcal{L}_{FP} = \int m\vec{g} \cdot d\vec{\ell} = -mg\, \text{sen}\theta\, \ell$

triangolo rettangolo di ipotenusa ℓ: hmax raggiunta ↳ $-mg\, h_{max}$

$-\frac{1}{2} m V_0^2 = -\mu_D mg\cos\theta\,\ell - Mg\,h_{max}$ ⟶ $\frac{1}{2}\cancel{m} V_0^2 = \mu_D \cancel{m} g\cos\theta\,\ell + \cancel{M} g\,h_{max}$

↓

Essendo il cateto adiacente si ha che per trovare l'opposto è necessario moltiplicare per tanθ. Quindi per ottenere cosθℓ è necessario moltiplicare ℓsenθ per $\frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}$, ovvero cotθ

↓

$$\frac{1}{2} V_0^2 = g\,h_{max}(\mu_D \cot\theta + 1) \longrightarrow h_{max} = \frac{V_0^2}{2g(\mu_D\cot\theta + 1)} = 3.78\,m$$

② Velocità con cui il corpo passa dalla posizione iniziale

└ $\mathcal{L} = \Delta K$ ┌ $K_i = 0$ └ $K_f = \frac{1}{2} m V_f^2$

├ $\mathcal{L}_{mg} = \int m\vec{g}\,\text{sen}\theta \cdot \vec{\ell} = mg\,\text{sen}\theta\,\ell$

└ $\mathcal{L}_{FAD} = \int \mu_D m\vec{g}\cos\theta \cdot \vec{\ell} = -\mu_D mg\cos\theta\,\ell$

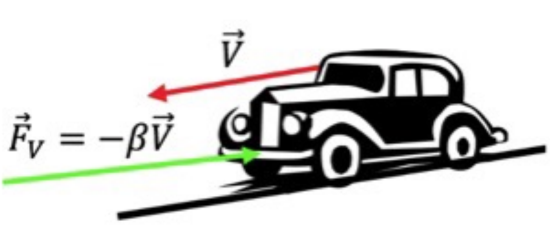
⟶ $\frac{1}{2}\cancel{m} V_f^2 = \cancel{m} g\,\text{sen}\theta\,\ell - \mu_D \cancel{m} g\cos\theta\,\ell$

↳ $\ell = \frac{h_{max}}{\text{sen}\theta} = 2h_{max}$

↓

$$V_f = \sqrt{2g\,h_{max}(1 - \mu_D\cot\theta)} = 6.96\,m/s$$

2



$M = 1000\ kg$
$V_0 = 72\ km/h \longrightarrow 20\ m/s$
$P_0 = 10\ kW$
$\vec{F}_{AV} = -\beta\vec{V}$

① Forze interne ed esterne al veicolo

├ Forze interne: L'unica forza interna è quella che genera la potenza del motore

└ Forze esterne: Le forze esterne sono: la forza peso, la reazione del piano, la forza di attrito dell'aria e la forza di attrito del terreno che permette all'auto di muoversi

└ STATICO e quindi NON fa lavoro

② Definizione di potenza: $P = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\int \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \vec{F}\cdot\vec{V}$

Potenza della forza peso = potenza della reazione vincolare = 0 ⟶ ORTOGONALI ALLO SPOSTAMENTO

Potenza della forza di attrito viscoso ⟶ Si ha che $\Delta K = 0$ in quanto V è costante e di conseguenza anche $P_{TOT} = 0$ perché $\mathcal{L} = 0$ ⟶ $P_{MOT} + P_{FAV} = 0$ ⟶ $P_{MOT} = -P_{FAV}$ e quindi $P_{FAV} = -10\,kW$

③ Calcolo della costante β

└ $P_{FAV} = -\beta V \cdot V$ ⟶ $\beta = \frac{P_{FAV}}{-V^2} = \frac{\cancel{-}10^4}{\cancel{-}400} = 25\ kg/s$

③ 1l di benzina produce un lavoro di 8 MJ. Quanti Km/litro si percorrono in pianura a 72Km/h? Ed a 144 Km/h?

① $V = c.te = 20\ m/s$

Utilizzo la potenza, in quanto fornisce una correlazione tra lavoro e velocità

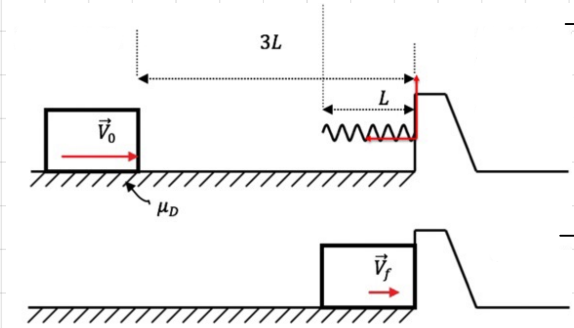
↳ $P = \frac{dL}{dt}$, dove $P = \beta V^2$, $\beta = 25 Kg/s$ ⟶ Essendo la velocità costante si può scrivere: $L = Pt$, dove $t = \frac{x}{V}$

A questo punto si ha $L = \beta V^{\cancel{2}} \frac{x}{\cancel{V}} \longrightarrow L = \beta V x$ e quindi $x = \frac{L}{\beta V} = 16 \cdot 10^3 m = 16\ Km$

② $V = 144 \frac{Km}{h} = 144 \cdot \frac{1000}{3600} = 40 m/s$

↳ $x = \frac{L}{\beta V} = 8\ Km$ (Dimezzata)

④



⟶ Stato iniziale: Molla con costante elastica K e lunghezza a riposo L. Carrello di massa M

⟶ Stato finale

① Indicare per quali valori della velocità iniziale il carrello comprime completamente la molla

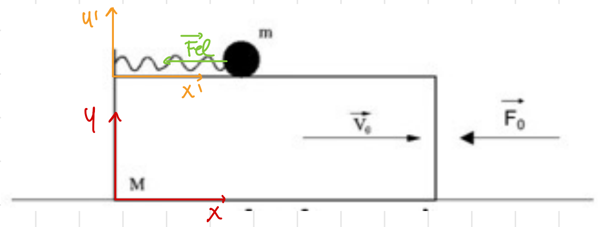
↳ $\Delta K = L_{TOT} \longrightarrow L_{FE} + L_{FP} + L_N + L_{AD} \longrightarrow -\frac{1}{2}K(x-L)^2 + 0 + 0 + \int_{3L}^{0} \mu_D Mg \cdot l \longrightarrow -\frac{1}{2}KL^2 - 3L\mu_D Mg$

0 per sistema di riferimento scelto

$\Delta K = \cancel{\frac{1}{2} M v_f^2} - \frac{1}{2} m V_i^2$

↳ $\cancel{-}\frac{1}{2} M V_i^2 = \cancel{-}\frac{1}{2}KL^2 \cancel{+} 3L\mu_D Mg \longrightarrow V_i \geq \sqrt{\frac{KL^2}{M} + 6L\mu_D g}$

⑤ ⚠ ATT: Esercizio di esame



Blocco di massa M, pallina di massa m, c.te elastica K, lunghezza a riposo l_0

Da $t=0$ agisce una forza F_0 NON costante fa frenare il corpo con accelerazione $a_0 = c.te$ ⟶ Si ferma per $t = T$

In $t = T$ la pallina ha velocità relativa NULLA rispetto al blocco e la molla ha lunghezza $2l_0$

① Velocità V_0, T, Modulo a_0 dovuta a F_0

Suggerimento: Per questa tipologia di esercizi è NECESSARIO scegliere il sistema di riferimento SOLIDALE al blocco che si muove

Per trovare l'accelerazione posso utilizzare la seconda legge di Newton per corpi di massa NON variabile

↳ $\Sigma F = ma$ ⟶ ⚠ ATTENZIONE! : questa è l'accelerazione RISPETTO a TERRA

$-K(x-l_0) + m a_0 = m\frac{d^2x}{dt^2} \longrightarrow -Kx(t) + Kl_0 + ma_0 = m x''(t) \longrightarrow m x''(t) + Kx(t) = Kl_0 + ma_0$

RISOLVENDO l'equazione generale si ha: $m\lambda^2 + K = 0 \longrightarrow \lambda = \overbrace{\sqrt{\frac{K}{m}}}^{\omega}\, i \xrightarrow[A_{gg}]{A_{mg}} A\cos(\omega t + \phi)$

SOLUZIONI PARTICOLARI ⟶ $Kl_0 \longrightarrow \alpha_1$: ha derivate $= 0 \longrightarrow \alpha_1 \cancel{K} = \cancel{K} l_0 \longrightarrow \alpha_1 = l_0$

⟶ $ma_0 \longrightarrow \beta_1$: ha derivate $= 0 \longrightarrow \beta_1 K = ma_0 \longrightarrow \beta_1 = \frac{ma_0}{K}$

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + l_0 + \frac{ma_0}{K} \longrightarrow$ Condizioni iniziali ⟶ $x(0) = l_0 \longrightarrow A\cos(\phi) + \cancel{l_0} + \frac{ma_0}{K} = \cancel{l_0} \longrightarrow A = -\frac{ma_0}{K}$

⟶ $x'(0) = 0 \longrightarrow -\omega A \sen(\phi) = 0 \longrightarrow \phi = 0$

$x(t) = \frac{ma_0}{K}\left(1 - \cos(\omega t)\right) + l_0 \longrightarrow x(T) = 2l_0 \longrightarrow 2l_0 = l_0 + \frac{ma_0}{K}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{\cancel{\omega}}\cancel{\omega}\right)\right) \longrightarrow l_0 = \frac{2ma_0}{K} \longrightarrow a_0 = \frac{Kl_0}{2m}$

$x'(T) = 0 \longrightarrow \frac{ma_0}{K}\omega \sen(\omega T) = 0 \longrightarrow \omega T = \pi \longrightarrow T = \frac{\pi}{\omega}$

TROVO VELOCITÀ v_0

↳ La pallina fa un moto uniformemente DECELERATO con $a(t) = \text{costante} = a_0$

$v(t) = v_0 + \int_0^t a_0 dt = v_0 + a_0 t$ ⟶ Si ha che $v(T) = 0$ e quindi si ha $0 = v_0 + a_0 T$ e si può concludere $v_0 = -a_0 T = \frac{k l_0}{2m} \cdot \frac{\pi}{w}$

Sostituendo i valori numerici si ha $T = 0.7s$, $a_0 = 4 \, m/s^2$ e $v_0 = 2.8 \, m/s$

② Calcolare il lavoro compiuto dalla FORZA FRENANTE

↳ Utilizzo il teorema delle FORZE VIVE: $\mathcal{L} = \Delta K$ ⟶ Il lavoro si divide in lavoro di forze conservative e non conservative

Passo quindi a distinguere le forze
- ⟶ CONSERVATIVE: Forza elastica ⟶ $\mathcal{L}_c = -\Delta U$
- ⟶ NON CONSERVATIVE: Forza frenante ⟶ $\mathcal{L}_{fren}$

$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2}(m+M) v_c^2 = U_i - U_f + \mathcal{L}_{fren}$

$0 : v_f = 0$

⟶ Data dalla MOLLA: si ha che $U_i = 0$ in quanto la molla è a riposo mentre $U_f = \frac{1}{2} k (2l_0 - l_0)^2 = \frac{1}{2} k l_0^2$

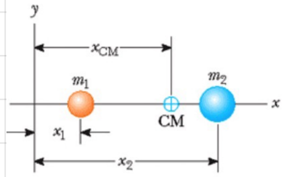
Dalla relazione precedente si ha $\mathcal{L}_{fren} = \frac{1}{2} k l_0^2 - \frac{1}{2}(m+M) v_c^2 = -18 \, J$

③ Lunghezza minima della molla per $t > T$

↳ La molla ha posizione di equilibrio in l_0 e l'oscillazione di ampiezza massima arriva in $2l_0$. Si ha quindi che la posizione minima è in $l_0 - l_0 = 0$ in quanto l'ampiezza A è pari a l_0

I sistemi di più particelle e gli urti

→ I sistemi sono costituiti da MOLTE PARTICELLE, ciascuna con propria posizione, velocità ed accelerazione
↳ Nei CORPI RIGIDI le particelle sono tutte legate tra loro → Essendo vincolate, le posizioni relative rimangono COSTANTI
↓
Il moto può essere ridotto a quello di un punto materiale
↳ CENTRO di MASSA: Il centro di massa di due particelle m_1 e m_2 alle posizioni x_1 e x_2 si trova in $x_{CM} = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$ → Spostato verso l'oggetto PIÙ PESANTE
↳ Al centro se $m_1 = m_2$



↓
Definizione generale: $\vec R_{CM} = \frac{m_1\vec r_1 + m_2 \vec r_2}{m_1+m_2}$ e da questa si può generalizzare a: $\frac{1}{M}\sum_{i=1}^N m_i \vec r_i = \vec R_{CM}$: PER N CORPI, $M = \sum_{1}^{N} m_i$

↳ Se $m_2 \gg m_1$: $R_{CM} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1+m_2}$ → $1 \gg \frac{m_1}{m_2}$ → TRASCURABILE: $\vec R_{CM} = \frac{\frac{m_1}{m_2}\vec r_1 + \frac{m_2}{m_2}\vec r_2}{\frac{m_1}{m_2}+\frac{m_2}{m_2}} = \frac{\cancel{\frac{m_1}{m_2}}\vec r_1 + \vec r_2}{\cancel{\frac{m_1}{m_2}}+1} = \vec r_2$ TRASCURABILE TRASCURABILE

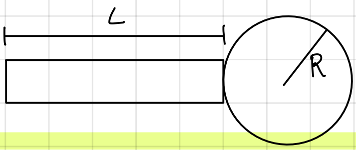
→ Oggetti ESTESI: L'oggetto viene diviso in molti cubetti, che vengono resi infinitesimi e dei quali viene fatta la somma: Si passa quindi da $\vec r_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i \Delta m_i \vec r_i$ a $\vec r_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec r\, dm$
↓
Conoscendo la densità è infine possibile utilizzare un integrale di volume → densità $\rho = \frac{dm}{dV}$
↳ $\vec R_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{m} m_i \vec r_i}{M}$ → $\frac{\int \vec r_i\, dm}{M}$ e infine $\vec R_{CM} = \frac{\int \vec r \rho(\vec r)\, dV}{M}$

Esempi

1) Densità lineare costante: $\lambda = \frac{M}{L}$ → $dm = \lambda dx$ da cui $X_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda dx = \frac{\lambda}{M}\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = \frac{1}{L}\frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$

2) Se la densità NON è costante: $\lambda = kx = \frac{dm}{dx}$ → $X_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^M x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x(\lambda dx) = \frac{1}{M}\int_0^L x k x\, dx = \frac{1}{M}k\int_0^L x^2 dx =$
$= \frac{K}{M}\frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \frac{K}{M}\frac{L^3}{3}$

3) Sistema di PIÙ CORPI



→ $\frac{M_A\, CM_{ASTA} + M_S\, CM_{SFERA}}{M_A+M_S}$

↓
→ OGGETTI COMPOSTI: Il centro di massa può essere calcolato come il centro di massa di TUTTI i centri di massa → Avendo già ridotto a punti materiali gli altri oggetti è possibile calcolarlo
↓
Indicando $\Sigma_i^{(N)}$ la somma sulla parte N-esima si ha: $\vec r^{\,(N)}_{CM} = \frac{\Sigma_i^{(N)} m_i \vec r_i}{\Sigma_i^{(N)} m_i} = \frac{\Sigma_i^{(N)} m_i\vec r_i}{M^{(N)}}$
↳ Da ciò si ricava: $\vec r_{CM} = \frac{\Sigma_N M^{(N)}\vec r_{CM}^{\,(N)}}{\Sigma_N M^{(N)}}$

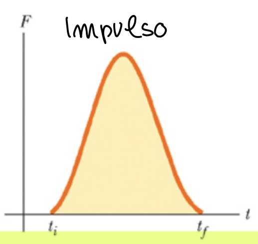
→ MOTO del CENTRO di MASSA
↳ Velocità del centro di massa: $\vec V_{CM} = \frac{d\vec r_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec r_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^N m_i \vec v_i$, che equivale a $M\vec V_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec v_i = \sum_{i=1}^N \vec p_i = \vec p_{tot}$
↓
Accelerazione ottenuta DERIVANDO: $\vec a_{CM} = \frac{d\vec V_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^N m_i\frac{d\vec v_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^N m_i \vec a_i \xrightarrow{\text{II legge di Newton}} M\vec a_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec a_i = \sum_{i=1}^N \vec F_i$
↳ $\vec F_i$ rappresenta sia le forze interne che quelle esterne, ma per la III di Newton si ha che $\sum_{i=1}^N \vec F_{i,int} = 0$ perché si sviluppano A COPPIE e si ANNULLANO → Si ottiene quindi che $M\vec a_{CM} = \sum_{i=1}^N \vec F_{i,ext}$
↓
Equivale ad un moto di un punto materiale su cui agiscono le stesse forze ESTERNE

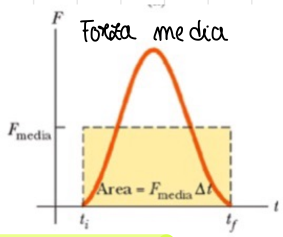
→ La QUANTITÀ di MOTO
↳ DEFINIZIONE: $\vec p = m\vec v$: quantità di moto di una particella o di un oggetto schematizzabile come una particella di massa m e velocità $\vec v$.
↓
Per un sistema di più particelle è la SOMMA VETTORIALE delle singole quantità di moto: $\vec P = \sum_{i=1}^N \vec p_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec v_i = M\vec V_{CM}$
→ In un SISTEMA ISOLATO (Non sono presenti forze esterne) si CONSERVA ed è COSTANTE
↳ particelle di massa m_1 ed m_2 e SOLO FORZE INTERNE: 3ª LEGGE NEWTON: $F_{12}+F_{21}=0$, da cui $m_1\vec a_1 + m_2 \vec a_2 = 0$, che per definizione è analoga a $m_1\frac{d\vec v_1}{dt} + m_2\frac{d\vec v_2}{dt} = 0$ ed essendo le masse costanti si ha $\frac{d m_1 \vec v_1}{dt} + \frac{d m_2\vec v_2}{dt} = 0$, da cui $\frac{d}{dt}(\vec p_1 + \vec p_2) = 0$ e quindi $\vec p_1 + \vec p_2$ costante.

→ In un sistema NON ISOLATO: sono presenti FORZE ESTERNE agenti sul sistema: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma\vec{F}dt$: II legge di Newton.

Integrando l'equazione precedente dall'istante ti a tf si ottiene $\Delta\vec{p} = \vec{p_f} - \vec{p_i} = \int_{t_i}^{t_f} \Sigma\vec{F}\,dt$.

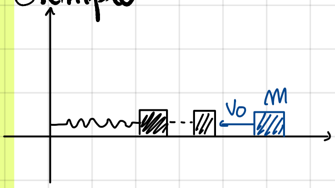
└ TEOREMA dell'IMPULSO: L'impulso si definisce come $\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \Sigma\vec{F}\,dt$ e la variazione della quantità di moto dipende da esso





Forza media $\langle\vec{F}\rangle = \frac{\vec{I}}{t_f - t_i}$: Forza costante che imprime al punto materiale lo stesso impulso della forza variabile

Esempio



$X = A\cos\omega t$

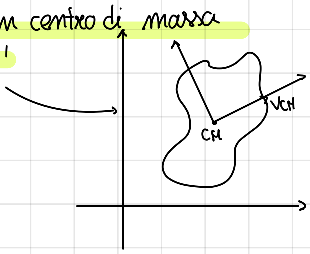
Urto ANELASTICO: 2m → QdM = costante?

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ $\quad d\vec{p} = \underbrace{\vec{F}dt}_{\text{IMPULSO}}$ → in questo caso è TRASCURABILE perché dt è INFINITESIMO

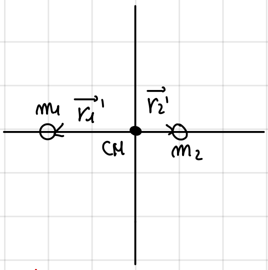
$m\vec{V_1} + m\vec{V_0} = 2m\vec{V_2}$: È come se i corpi fossero LIBERI

→ Quantità di moto relativa ad un centro di massa

└ $\sum_{i=1}^{m} m_i\vec{v_i}$ → $\vec{V_i} = \vec{V_{CM}} + \vec{V_i}'$



→ $\vec{QdM} = \sum_{i=1}^{m} m_i(\vec{V_{CM}} + \vec{V_i}') = \sum_{i=1}^{m} m_i\vec{V_{CM}} + \sum_{1}^{m} m_i\vec{V_i}' = \underbrace{M\vec{V_{CM}}}_{\text{QDM centro di massa}} + \underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{m} m_i\vec{V_i}'}}_{\text{Qdm rispetto al centro di massa}}$



Calcolo del centro di massa di un sistema NEL CENTRO di MASSA

└ $\frac{m_1\vec{r_1}' + m_2\vec{r_2}'}{m_1+m_2} = \vec{R_{CM}} = 0$ → $m_1\vec{r_1}' + m_2\vec{r_2}' = 0$, quindi $\frac{d}{dt}m_1\vec{r_1}' + \frac{d}{dt}m_2\vec{r_2}' = 0$ ed infine $m_1\vec{V_1}' + m_2\vec{V_2}' = 0$

└ NON c'è quantità di moto RELATIVA

⚠ATT: La quantità di moto è l'unica che sparisce sul CdM → L'energia cinetica RIMANE a causa del quadrato

→ I sistemi di MASSA VARIABILE → Un razzo varia la sua quantità di moto espellendo i suoi gas esausti. Il razzo riceve da essi quantità di moto e quindi ACCELERA, con il suo centro di massa che si muove di moto RETTILINEO UNIFORME

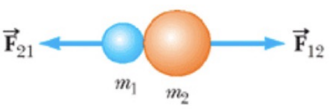
Il razzo di massa M espelle massa Δm di gas in tempo Δt con velocità u relativa al razzo.

└ Si ha quindi $p_f = p_i + F\Delta t$ → $p_i = (M + \Delta m)v$
→ $p_f = (M + \Delta m)V + \Delta m(v - u)$ → $M\Delta V - u\Delta m = F\Delta t$ e se $\Delta t \to 0$: $M\frac{dV}{dt} = F - u\frac{dM}{dt}$.

Considerando F trascurabile: $MdV = -u\,dM$ e risolvendo $\int_0^{V(t)} \frac{dV}{u} = -\int_{M_0}^{M(t)} \frac{dM}{M}$ si ottiene $V(t) = u\log\left(\frac{M_0}{M(t)}\right)$ avendo assunto
→ $V(0) = 0$
→ $M(0) = M_0$

→ Gli URTI: eventi in cui due oggetti entrano a contatto e comunicano tramite forze → PIÙ INTENSE di tutte le altre

└ Le forze di collisione sono INTERNE al sistema e quindi viene CONSERVATA la QUANTITÀ di MOTO



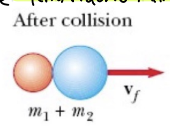
→ Due particelle di massa m_1 ed m_2 viaggiano con velocità V_{1i} e V_{2i}, con $V_{1i} > V_{2i}$ e si URTANO → Le velocità dopo la collisione sono date da V_{1f} e V_{2f}. Allora vale:

$m_1V_{1i} + m_2V_{2i} = m_1V_1$

→ Urti ANELASTICI: L'energia cinetica NON viene conservata ma si dissipa in altre energie

Urti PERFETTAMENTE ANELASTICI: Le particelle RIMANGONO ATTACCATE e proseguono con una massa $m_1 + m_2$ e velocità $V_f = V_{1f} = V_{2f}$

└ $m_1\vec{V_{1i}} + m_2\vec{V_{2i}} = (m_1 + m_2)\vec{V_f}$ e quindi $V_f = \frac{m_1\vec{V_{1i}} + m_1\vec{V_{2i}}}{m_1 + m_2}$



→ Energia con particella ferma inizialmente: $K_i = \frac{p^2}{2m_1}$ $\quad K_f = \frac{p^2}{2(m_1+m_2)}$ → $K_f < K_i$

└ Urti ELASTICI: Viene conservata l'ENERGIA CINETICA (in caso di CORPI LIBERI = NO FORZE IMPULSIVE)

→ $P_i = P_f$: $m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$

→ $K_i = K_f$: $\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$

→ Dalla seconda equazione si ha: $m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$ → $m_1(v_{1i}-v_{1f})(v_{1i}+v_{1f}) = m_2(v_{2f}-v_{2i})(v_{2f}+v_{2i})$

→ Dalla prima si ha: $m_1(v_{1i}-v_{1f}) = m_2(v_{2f}-v_{2i})$

↓

Dividendo la prima per la seconda si ha: $v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$ → $v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$

→ $v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1+m_2}\right)v_{2i}$ $\xrightarrow{\text{Se } v_{2i}=0}$ $v_{1f} = \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)v_{1i}$

→ $v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)v_{2i}$ $\qquad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_{1i}$

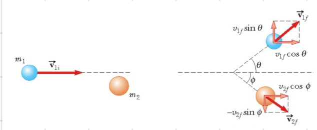
↓ Se $v_{2i} = 0$

Se la particella incidente è pesante
└ $m_1 \gg m_2$, quindi $v_{1f} \simeq v_{1i}$, $v_{2f} \simeq 2v_{1i}$ → Velocità oggetto leggero RADDOPPIATA
└ Velocità oggetto di massa ∞ inalterata

Se la particella incidente è leggera
└ $v_{1f} \simeq -v_{1i}$, $v_{2f} \simeq 0$ → L'oggetto di massa ∞ rimane fermo
└ RIMBALZA con velocità iniziale nel verso opposto

→ Collisioni in TRE DIMENSIONI

→ Va stabilito il PARAMETRO d'URTO: distanza tra la velocità e il centro del corpo urtato
↓
La traiettoria dopo l'urto dipende dalla sua geometria



La quantità di moto si CONSERVA su ciascun asse di movimento dei corpi
↳ Nel caso elastico si conserva ANCHE l'energia cinetica
↓
CASO PARTICOLARE: urto elastico con una particella ferma

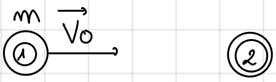
→ ① Conservazione della quantità di moto: $\vec{p}_{1i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$ ↓ elevando al quadrato $p_{1i}^2 = p_{1f}^2 + p_{2f}^2 + 2\vec{p}_{1f}\cdot\vec{p}_{2f}$

→ ② Conservazione dell'energia cinetica: $\frac{p_{1i}^2}{2m} = \frac{p_{1f}^2}{2m} + \frac{p_{2f}^2}{2m} \Longrightarrow p_{1i}^2 = p_{1f}^2 + p_{2f}^2$

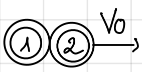
↓

Ne segue che $\vec{p}_{1f}\cdot\vec{p}_{2f} = 0$ e quindi $p_{1f} \perp p_{2f}$ $(v_{1f} \perp v_{2f})$

Caso 1: $b = 0$

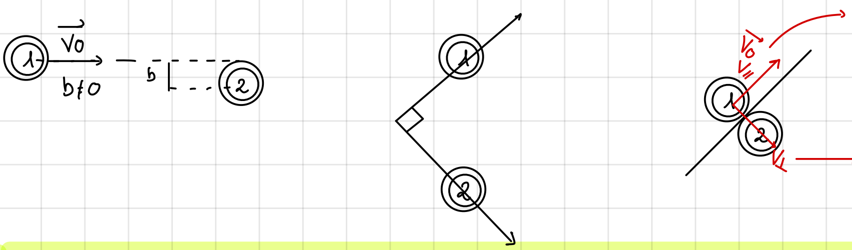


$\vec{V_i} = 0 \qquad b = 0$



→ Proseguono entrambi con V_0

Caso 2: $b \neq 0$



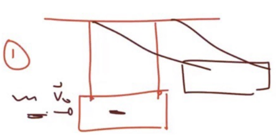
La pallina 1 prosegue con $V_{\parallel}$

La pallina 2 acquista $V_{\perp}$
↳ Si scambiano questa velocità

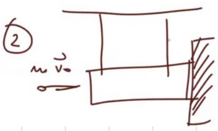
Esempio

Il pendolo balistico: urto COMPLETAMENTE ANELASTICO → utilizzato per calcolare la velocità di un proiettile

└ La quantità di moto si conserva → ⚠ NON in TUTTI i CASI

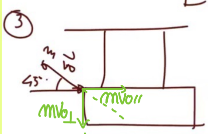


→ Nell'urto si conserva la quantità di moto: $mV_0 = (m+M)V_1$
→ Dopo l'urto si conserva l'energia: $\frac{1}{2}(m+M)V_1 = (m+M)gh$



→ Forza impulsiva: Reazione vincolare
└ Agisce nella stessa direzione dello scambio della q.d.m. → NON si conserva

③



Viene assorbita dal vincolo perché agisce una forza che tiene l'oggetto attaccato al soffitto ⟶ La qdm NON si conserva perché la forza del vincolo è IMPULSIVA

Nel caso che vogliamo analizzare però si CONSERVA

↳ Dalle equazioni ① $mv_0 = (m+M)V_1$

② $\frac{1}{2}\cancel{(m+M)}V_1^2 = \cancel{(m+M)}gh$

Otteniamo → $V_0 = \frac{(m+M)V_1}{m}$ ⟶ $V_0 = \frac{(m+M)\sqrt{2gh}}{m}$

→ $V_1 = \sqrt{2gh}$

→ L'energia potenziale di un CORPO ESTESO

↘ È come se tutta la massa fosse concentrata nel CENTRO di MASSA

↓

$$U = \sum_i m_i g h_i = g\left(\sum_i m_i h_i\right) = g\left(\sum_i m_i\right)h_{CM} = Mgh_{CM}, \text{ dove } h_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i h_i$$

→ TEOREMA di KÖENIG per l'energia cinetica

↳ $K = \frac{1}{2}M_{TOT}V_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i'^2$ ⟶ La posizione di ciascun punto materiale è data dalla somma del vettore che congiunge il sistema di laboratorio al sistema di riferimento "accentato" ed il vettore che va dall'origine del sistema accentato al punto ⟶ Il sistema accentato ha il CM nell'origine

Per un corpo discreto si ha $K = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \sum_i \frac{1}{2}m_i(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i')(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i') =$

$$= \sum_i \frac{1}{2}m_i V_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i'^2 + \sum_i m_i \vec{V}_{CM}\cdot\vec{v}_i' =$$

$$= \frac{1}{2}M_{TOT}V_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i'^2 + \vec{V}_{CM}\cdot\sum_i m_i\vec{v}_i'$$

⟶ 0: qdm rispetto al cdm

Esercizi esercitazione

(1) Due masse $m_1 = 1kg$, $m_2 = 0.6kg$, inizialmente in quiete, sono disposte su un piano (x,y) privo di attrito. Le coordinate di m_1 sono $(0,3m)$ e quelle di m_2 $(4m,0)$. Si applichino ad esse le forze $\vec{F_1} = 4N\hat{x}$, $\vec{F_2} = 3N\hat{y}$ → Trovare le equazioni del moto del centro di massa

→ Coordinate del centro di massa
- → $x_0 = \left(\frac{\cancel{m_1 x_1} + m_2 x_2}{m_1+m_2}\right) = 1.5m$
- → $y_0 = \left(\frac{m_1 y_1 + \cancel{m_2 y_2}}{m_1+m_2}\right) = 1.87m$

→ Accelerazione del centro di massa: $a_{CM} = \frac{\sum \vec{F_i}}{\sum m_i}$
- → $a_{xCM} = \frac{4N}{1.6\,kg} = 2.5 m/s^2$
- → $a_{yCM} = \frac{3N}{1.6\,kg} = 1.87\, m/s^2$

→ Velocità del centro di massa: $\vec{V_{CM}}$
- → $V_{xCM}(t) = \underbrace{V_{0x}}_{0} + \int_0^t a_{xCM}dt = 2.5t$
- → $V_{yCM}(t) = \underbrace{V_{0y}}_{0} + \int_0^t a_{yCM}dt = 1.87t$

→ Leggi orarie
- → $x_{CM}(t) = 1.5 + \frac{1}{2}\cdot 2.5 \cdot t^2 = 1.5 + 1.25t^2$
- → $y_{CM}(t) = 1.87 + \frac{1}{2}\cdot 1.87 \cdot t^2 = 1.87 + 0.93t^2$

(2) Un proiettile, lanciato verticalmente verso l'alto con velocità V_0, esplode in due frammenti di ugual massa. Dopo t_1 secondi dall'esplosione uno dei frammenti raggiunge la quota h_1. Determinare la quota dell'altro frammento allo stesso istante

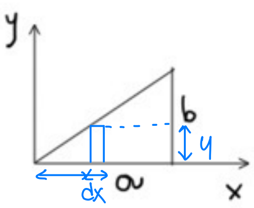
↳ il moto avviene tutto lungo y ed il centro di massa ha posizione $y_{CM} = \frac{\cancel{m}y_1 + \cancel{m}y_2}{2\cancel{m}} = \frac{y_1+y_2}{2}$

↳ $y_2 = 2y_{CM} - y_1$

→ Si muove di moto UNIFORMEMENTE ACCELERATO con $a = g$ → $y_{CM}(t) = V_0t - \frac{1}{2}gt^2$

Unendo le due equazioni per $t = t_1$ si ha: $y_2 = 2V_0t_1 - gt_1^2 - h_1$

(3) Determinare il centro di massa di un triangolo di densità uniforme $\delta = \rho_s$, massa M e lati a, b



→ Definizione di densità: $\frac{\text{Massa} \to M}{\text{Area} \to \frac{1}{2}a\cdot b}$ → $\rho_s = \frac{2M}{ab}$

→ Oggetto continuo: centro di massa va fatto con gli integrali

↳ $x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm$ $\quad y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm$, ma definiamo chi è dm

dm è la massa di un "pezzettino infinitesimo" → $dm = \underbrace{ds}_{\text{superficie infinitesima}} \cdot \rho_s$ (→ densità superficiale)

Risolviamo le singole equazioni: $x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,\underbrace{ds}\,\rho_s = \frac{1}{M}\int_0^a x y\,dx\,\rho_s$

↳ RETTANGOLINO INFINITESIMO celestino chiaro : $ds = dx\, y$

2 incognite? NO! → Considero il triangolo rettangolo di cateti x ed y. A questo punto vale la relazione $y = x\tan\theta$

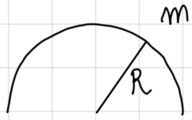
$x_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^a x^2 \tan\theta\, dx\, \rho_s = \frac{1}{\cancel{M}}\frac{a^{\cancel{3}}}{3}\cdot\frac{b}{\cancel{a}}\cdot\frac{2\cancel{M}}{\cancel{ab}} = \frac{2}{3}a$

↳ $\frac{\text{cat. opposto}}{\text{cat. adiacente}} = \frac{b}{a}$

$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,\underbrace{ds}\,\rho_s = \frac{1}{M}\int (a-x)y\rho_s dy = \frac{1}{M}\int\left(a - \frac{y}{\tan\theta}\right)y\,dy = \frac{b}{3}$

↳ VERTICALE : $ds = \underbrace{(a-x)}_{\text{SEMPRE PIÙ PICCOLO}}dy$

(4) Si calcoli la posizione del centro di massa di un semianello rigido omogeneo di massa m e raggio R



→ densità $= \frac{\text{massa} \to m}{\text{Area} \to \pi R}$ → $\rho_s = \frac{m}{\pi R}$

Essendo anche questo un corpo continuo, è possibile calcolare il centro di massa utilizzando gli integrali

$\hookrightarrow \vec{r} = \frac{1}{m}\int r_c \rho_e \, dl$ $\quad \vec{r} = R\cos\theta\,\hat{i} + R\sin\theta\,\hat{j}$

$dl = R\,d\theta \longrightarrow$ ⚠ MOTO CIRCOLARE UNIFORME: $\Delta l = r\Delta\theta$

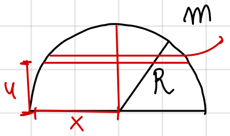
$\pi \longrightarrow$ ⚠ AREA

Forse è meglio dividerli 😴

$$\longrightarrow x_{CM} = \frac{1}{m}\int_0^{\pi} R\cos\theta\,\rho_e\,R\,d\theta = \frac{1}{m}\rho_e R^2 \sin\theta\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\longrightarrow y_{CM} = \frac{1}{m}\int_0^{\pi} R\sin\theta\,\rho_e\,R\,d\theta = \frac{1}{\cancel{m}}R^{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{m}}{\pi \cancel{R}}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} = \frac{R}{\pi}(1+1) = \frac{2R}{\pi}$$

(5) Si trovi il baricentro di una lamina omogenea piana di spessore trascurabile avente la forma di un semicerchio di massa m e raggio R



$\longrightarrow$ densità $= \frac{\text{massa} \longrightarrow m}{\text{area} \longrightarrow \frac{\pi R^2}{2}}$ $\qquad \rho_S = \frac{2m}{\pi R^2}$

La x_{CM} è 0 perché la lastra è omogenea e simmetrica

$y_{CM} = \frac{1}{M}\rho_S \int y\,\underbrace{dS}_{2x\,dy} = \frac{1}{m}\rho_S \int_0^R 2xy\,dy$

Equazione della circonferenza: $x^2 + y^2 = r^2 \longrightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ ($+$ perché SOLO PARTE SUPERIORE)

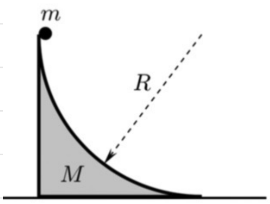
sostituendo

Trovo dy: $dy = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{r^2-x^2}}dx$ $\longrightarrow$ Per $y=0 \longrightarrow x=R$; Per $y=R \longrightarrow x=0$

$$\longrightarrow \frac{2}{m}\rho_S \int_R^0 \frac{-x^2}{\cancel{\sqrt{R^2-x^2}}}\cancel{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = -\frac{2}{m}\rho_S \int_0^R -x^2\,dx =$$

$$= \frac{2}{m}\rho_S \int_0^R x^2\,dx = \frac{2}{\cancel{m}}\cdot\frac{2\cancel{m}}{\pi \cancel{R^2}}\cdot\frac{R^{\cancel{3}}}{3} = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$$

(6) Un punto materiale di massa m è inizialmente fermo sulla cima di una guida liscia con profilo circolare di raggio R. La guida, di massa M, anch'essa inizialmente ferma, può scivolare su di un piano orizzontale privo di attrito. Al tempo $t=0$ il punto materiale viene lasciato libero



$\longrightarrow m = 2.00\,kg$
$M = 3.00\,kg$
$R = 0.5\,m$

(1) Calcolare la velocità finale del punto materiale $\vec{v}$ e della guida $\vec{V}$, quando il punto materiale arriva sul piano

$\hookrightarrow$ In questo caso sono assenti forze non conservative e l'unica forza esterna agente è la forza di gravità. L'energia quindi si conserva ⚠ ATT: La guida è un corpo esteso del quale bisogna considerare il centro di massa

$E_i = U_{mi} + U_{Mi} + \cancel{K_{mi}} + \cancel{K_{Mi}} \longrightarrow mgR + Mgh_{CM}$

$E_f = \cancel{U_{mf}} + U_{Mf} + K_{mf} + K_{Mf} \longrightarrow Mgh_{CM} + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV_{CM}^2$

$\longrightarrow mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$

Anche la quantità di moto si conserva in quanto l'unica forza agente (Forza di gravità) NON fa lavoro. Si ha quindi che $p_i = p_f$

Per il moto di un centro di massa è importante ricordare che $\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = 0$: Forze agenti NULLE su x

Dato che l'accelerazione è la derivata della velocità, si avrà che la velocità dovrà essere costante.

Si ha che $\vec{V}_{CM} = \vec{P}_{TOT} = $ COSTANTE

Dalla conservazione della quantità di moto applicata al centro di massa si ha: $\cancel{(m+M)V_{CM_i}} = (m+M)V_{CM_f}$ (con $(m+M)V_{CM_i} \to 0$)

da cui $(m+M)V_{CM_f} = 0$, da cui infine $V_{CM} = 0$

L'altra relazione utile può essere la seguente, sempre derivante dalla conservazione della quantità di moto su x

↳ $\underbrace{mv_x + mV_x}_{\text{SISTEMA SEPARATO}} = \underbrace{(m+M)V_{cm_x}}_{\text{SISTEMA UNITO}} \longrightarrow 0$ $\longrightarrow mv_x + MV_x = 0$, da cui $V_x = -\frac{m}{M} v_x$

SISTEMA UNITO ⟶ tempo finale

SISTEMA SEPARATO ↳ tempo iniziale

Sull'asse z NON c'è movimento, quindi NON c'è velocità

Asse y ⟶ Agisce la forza di gravità, che quindi è costante e conservativa

↳ Il punto materiale ha velocità lungo y

↳ Il centro di massa non ha velocità lungo y perché il corpo scivola lungo il piano $\rightarrow V_{y\,cm} = 0$

I vettori velocità sono quindi identificati da $\vec{v}(v_x, v_y, 0)$, $\vec{V}(V_x, 0, 0)$ ⟶ Nell'istante in cui tocca il terreno il vettore $\vec{v}$ è dato da $\vec{v} = (v_x, 0, 0)$

Dalla legge sulla conservazione dell'energia si ha quindi $mgR = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}MV_x^2$, a cui posso sostituire

V_x ricavata precedentemente $\longrightarrow mgR = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}M\cdot\frac{m^2}{M^2}v_x^2 \longrightarrow 2mgR = mv_x^2 + \frac{m^2}{M}v_x^2 = \frac{Mm+m^2}{M}v_x^2$

$\longrightarrow m\frac{(M+m)}{M}v_x^2 = mgR \longrightarrow v_x = \sqrt{\frac{\cancel{m}MgR}{\cancel{m}(M+m)}} = \sqrt{\frac{MgR}{M+m}}$

$V_x = -\frac{m}{M}\sqrt{\frac{MgR}{M+m}} = -m\sqrt{\frac{gR}{M(M+m)}}$

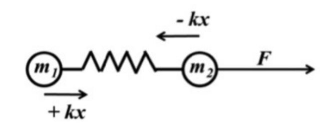
2) Calcolare la velocità finale del centro di massa del sistema punto materiale - guida, $\vec{V}_{cm}$, quando il punto materiale arriva sul piano

↳ Dalle considerazioni fatte precedentemente si ha che $V_{cm} = 0$

3) Come cambierebbero i risultati del punto 1 e 2 se invece di una guida con profilo circolare avessimo un piano inclinato di altezza R e angolo θ?

↳ Non cambierebbe nulla perché si avrebbero le stesse forze agenti e quindi varrebbero le stesse leggi di conservazione di energia e quantità di moto.

7) Due blocchi di massa m_1 ed m_2, collegati mediante una molla di costante elastica k e di massa trascurabile, poggiano su un piano orizzontale privo di attrito. Alla massa m_2 è applicata una forza orizzontale F costante. Determinare l'allungamento della molla supponendo che il sistema non oscilli



⟶ Utilizzo il centro di massa

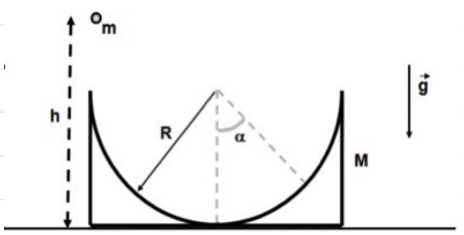
↳ La sua accelerazione dipende SOLO dalla forza $\vec{F}$ in quanto è l'unica forza esterna $\longrightarrow a_{CM} = \frac{F}{m_1+m_2}$, che è anche l'accelerazione di ciascun blocco non essendo presenti oscillazioni

Avendo quindi fornito delle regole per l'accelerazione dei singoli blocchi, ci interessa adesso analizzare il corpo m_2 ⟶ Seconda legge di Newton: $\sum\vec{F} = ma$ $\longrightarrow F - kx = \frac{m_2 F}{m_1+m_2} \longrightarrow x = \frac{F}{k}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)$

$\sum\vec{F} \to F - kx$, $a \to \frac{F}{m_1+m_2}$

x ⟶ Si considera lo 0 la posizione di equilibrio della molla

8) ⚠ ESERCIZIO di ESAME



R = 1m

M = 3Kg

m = 1.6Kg

h = 1.3m

Sistema soggetto a $\vec{g}$

① Spostamento orizzontale d della guida quando la massa m esce dall'altro lato rispetto a quello da cui è entrata nella guida

↳ Analizzando le forze notiamo che NON sono presenti forze dissipative in quanto agisce soltanto la forza peso che è conservativa. La quantità di moto della pallina NON si conserva, mentre invece si conserva la quantità di moto del centro di massa su X e Z

↓

La x del centro di massa è R in quanto il corpo è simmmetrico all'asse mediano. Si ha che la X_{CM} rimane COSTANTE lungo il moto

↳ Si ha che $X_{CM} = \frac{m\cdot 0 + MR}{m+M}$ ⟶ Centro di massa della guida ⟶ $X_{CM} = \frac{MR}{m+M}$

All'inizio la pallina è nell'ORIGINE

Il moto avviene lungo xy, quindi NON consideriamo z, dato che non vi è nessuna forza agente.

↳ Essendo che la pallina rotola sulla guida si ha che $Y_{CM} = 0 =$ COSTANTE

↓

Anche sull'asse y la guida rimane ferma, quindi è importante analizzare il moto sull'asse X.

Diciamo che la guida si sposterà di un tratto d. Se la pallina percorre una traiettoria circolare ed esce dalla guida si ha che la sua x_f sarà $2R + d$

↓ traiettoria circolare; d ⟶ guida

Abbiamo detto che, non agendo forze su X, la posizione del centro di massa DEL SISTEMA rimarrà COSTANTE

↳ Si avrà quindi: $X_i = \frac{RM}{m+M}$ come avevamo calcolato in precedenza ⟶ centro di massa della guida

$X_f = \frac{M(R+d) + m(2R+d)}{m+M}$ ⟶ centro di massa della pallina

Da ciò si ricava che $X_i = X_f$ e quindi $\frac{\cancel{RM}}{\cancel{m+M}} = \frac{M(R+d) + m(2R+d)}{\cancel{m+M}} \longrightarrow \cancel{MR} + Md + 2Rm + md$

$\longrightarrow 0 = (M+m)d + 2Rm \longrightarrow d = \frac{-2Rm}{M+m}$

② Modulo della velocità della guida quando m passa nel punto più basso

$V_m = (V_{mx}, V_{my})$

$V_M = (V_{Mx}, 0)$

$V_{CM} = (0, V_{CMy})$ ⟶ Rimane costante su X ma invece si muove su y essendo che la quantità di moto di m NON si conserva

↓

Si ha che $V_{CMy} = \frac{\sum p_i}{\sum M}$ ⟶ $p_{My} = MV_{My} = 0$ ⟶ $V_{CMy} = \frac{mV_{my}}{M+m}$

$p_{my} = mV_{my}$

La quantità di moto si conserva lungo x, quindi possiamo dire che

↳ $\underbrace{mV_{mx\,i}}_{0} + \underbrace{MV_{Mx\,i}}_{0} = mV_{mx} + MV_{Mx} \longrightarrow mV_{mx} = -MV_{Mx} \longrightarrow V_{mx} = \frac{-MV_{Mx}}{m} \longrightarrow V_M$ — V_m generico (solo x)

L'energia invece si conserva per tutto il sistema: Da notare in questo caso è che richiedendo la velocità della pallina nel punto più basso, in questo punto la pallina NON ha energia potenziale in quanto $h=0$ ⟶ Chiameremo B questo punto

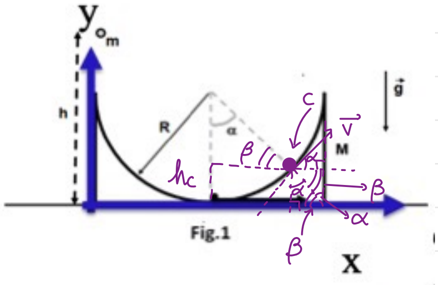
E_A $(E_i) = mgh$ ⟶ $mgh = \frac{1}{2}mV_m^2 + \frac{1}{2}MV_M^2 \longrightarrow mgh = \frac{1}{2}m\left(\frac{MV_M}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}MV_M^2$

$E_B = \frac{1}{2}m\underbrace{V_m^2}_{(V_{mx})} + \frac{1}{2}MV_M^2$

$$mgh = \frac{1}{2}\cancel{m}\frac{M^2V_M^2}{m^{\cancel{2}}} + \frac{1}{2}MV_M^2 \longrightarrow mgh = \frac{1}{2}MV_M^2\left(\frac{M}{m}+1\right) \longrightarrow mgh = \frac{1}{2}MV_M^2\left(\frac{M+m}{m}\right)$$

$$m^2gh = \frac{1}{2}MV_M^2(M+m) \longrightarrow V_M = \sqrt{\frac{2m^2gh}{M(M+m)}}$$

3 Quantità di moto quando la massa m si trova ad $\alpha = \pi/4$



Abbiamo già verificato che $P_{cm} = (0, P_{ycm}, 0)$
La velocità della pallina è TANGENTE al percorso, quindi si ha $\vec{V_m} = (\omega R\cos\alpha, \omega R\sin\alpha) \longrightarrow$ Questa è la velocità RELATIVA scegliendo il sistema di riferimento della guida

La velocità assoluta si ha scrivendo
$$\begin{cases} V_x = V_{xTR} + V_{xR} \\ V_y = \underbrace{V_{yTR}}_{\to 0} + V_{yR} \end{cases} \qquad \begin{cases} V_x = V_{xTR} + \omega R\cos\alpha \\ V_y = \omega R\sin\alpha \end{cases}$$

Anche l'energia si conserva, quindi si ha $E_A = E_C$

- $E_A = mgh$
- $E_C = \frac{1}{2}m\underbrace{(V_x^2+V_y^2)}_{\left((V_{xTR}+\omega R\cos\alpha)^2+\omega R\sin\alpha^2\right]} + \frac{1}{2}MV_{xTR}^2 + mg\underbrace{h_c}_{R-R\cos\alpha = R(1-\cos\alpha)}$

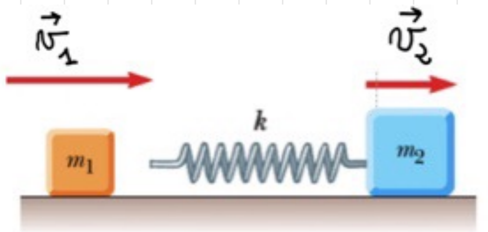
Lungo x la quantità di moto si conserva $\longrightarrow$ ⚠ La quantità di moto del SISTEMA

↳ Si ha che $\underbrace{P_i}_{0} = P_f \longrightarrow 0 = MV_{xTR} + m(V_{xTR} + \omega R\cos\alpha) \longrightarrow MV_{xTR} + mV_{xTR} + m\omega R\cos\alpha = 0$

e quindi $(M+m)V_{xTR} = -m\omega R\cos\alpha \longrightarrow V_{xTR} = \frac{-m\omega R\cos\alpha}{m+M}$

Sostituendo si ha
$$mg(h - R(1-\cos\alpha)) = \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mR\omega\cos\alpha}{m+M}\right)^2 + \frac{1}{2}m(2\omega R\cos\alpha)\frac{(-mR\omega\cos\alpha)}{m+M} + \frac{1}{2}m\omega^2R^2$$
$$\longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g[h-R(1-\cos\alpha)](m+M)}{R^2(m-m\cos^2\alpha+M)}}$$

9



Due corpi di massa m_1 e m_2, sono su un piano orizzontale privo di attrito, sul secondo c'è una molla né dilatata né compressa di costante K. I due corpi si muovono con velocità V_1 e V_2 note con $V_1 > V_2$. Determinare la massima compressione della molla

Conservazione: Energia? Sì perché non agiscono forze non conservative
Quantità di moto? Sì perché non ci sono forze impulsive

Conservazione dell'energia:

- $E_i = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2$
- $E_f = \frac{1}{2}m_1V_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2V_{2f}^2 + \frac{1}{2}K\Delta x^2 \overset{\text{th. di Koenig}}{=} \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{CM}^2 + \cancel{\frac{1}{2}m_1v_1'^2} + \cancel{\frac{1}{2}m_2v_2'^2} + \frac{1}{2}K\Delta x^2$

Conservazione della quantità di moto

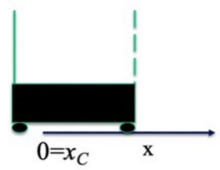
- $\vec{P_i} = m_1\vec{V_1} + m_2\vec{V_2} \Longrightarrow m_1V_1 + m_2V_2 = (m_1+m_2)V_{CM} \longrightarrow V_{CM} = \frac{m_1V_1+m_2V_2}{m_1+m_2}$
- $\vec{P_f} = (m_1+m_2)V_{CM}$

Quando la molla è nel punto di massima compressione le velocità dei due corpi rispetto al centro di massa sono NULLE

$\hookrightarrow$ Utilizzo adesso le relazioni $V_{1f} = V_{CM} + \cancel{V_{1f}^*}$ $\longrightarrow V_{1f} = V_{2f} = V_{cm}$
$V_{2f} = V_{CM} + \cancel{V_{2f}^*}$

Abbiamo quindi che $V_1 = V_2 = \dfrac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1+m_2} = V_{CM}$

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{CM}^2 + \frac{1}{2} K \Delta x^2 \longrightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{m_1V_1^2 + m_2V_2^2 - (m_1+m_2)V_{CM}^2}{K}}$$

(10) 

Un corpo di massa m si trova all'estremo di un carrello di massa M e lunghezza ℓ, in quiete, libero di muoversi su un binario orizzontale. Trascurando l'attrito dinamico e viscoso determinare di quanto si sposta il carrello se l'uomo si reca all'estremo opposto

Conservazione $\rightarrow$ Energia: Non necessaria (0=0)
$\rightarrow$ Quantità di moto del SISTEMA $\longrightarrow$ Si conserva lungo X

Quantità di moto calcolata rispetto al cdm $\longrightarrow P_i = 0$ e quindi anche $P_f = 0$

Essendo che si ha che $P_{CM} = (m+M)\dfrac{dx_{CM}}{dt} = 0$ si ha che x_{CM} rimane COSTANTE

Calcolo $x_{CM} = \dfrac{(m x_m + M x_M)}{m+M} = \dfrac{(m x_{mf} + M x_{Mf})}{m+M} \longrightarrow m x_m + M x_M = m x_{mf} + M x_{Mf}$

$\longrightarrow M\underbrace{(x_{Mf} - x_M)}_{\Delta x_M} = -m\underbrace{(x_{mf} - x_m)}_{\Delta x_m}$

Si ha inoltre che $x_M - x_m = \dfrac{\ell}{2}$ ed essendo la x_{CM} COSTANTE si ha $-x_{Mf} + x_{mf} = \dfrac{\ell}{2}$

$\longrightarrow \underbrace{x_M - x_{Mf}}_{-\Delta x_M} \underbrace{- x_m + x_{mf}}_{\Delta x_m} = \ell \longrightarrow -\Delta x_M + \Delta x_m = \ell \longrightarrow \Delta x_m = \ell + \Delta x_M$

Sostituendo nell'equazione precedente si ha: $M\Delta x_M = -m(\ell + \Delta x_M) \longrightarrow M\Delta x_M = -m\ell - m\Delta x_M$

$\longrightarrow \Delta x_M = -\left(\dfrac{m}{m+M}\right)\ell$

Spostamento uomo: Spostamento carrello + Spostamento uomo sul carrello

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$-\left(\frac{m}{m+M}\right)\ell \qquad\qquad \ell$$

$$\rightarrow \ell - \left(\frac{m}{m+M}\right)\ell = \left(1 - \frac{m}{m+M}\right)\ell = \left(\frac{M}{m+M}\right)\ell$$

(11) Una mozzarella di massa 0.1kg cade verticalmente e si appiccica a terra. Al momento dell'impatto la sua velocità ha modulo 10 m/s, ed il tempo dell'urto τ=0.1s. Calcolare la forza media che il pavimento esercita sulla mozzarella. Assumere che g = 10 m/s²

$\langle F \rangle = \dfrac{I}{t_f - t_i}$ $\qquad$ Teorema dell'impulso: $\Delta p = \int_0^\tau \vec{F}_{ext} dt = \int_0^\tau F_{est}$

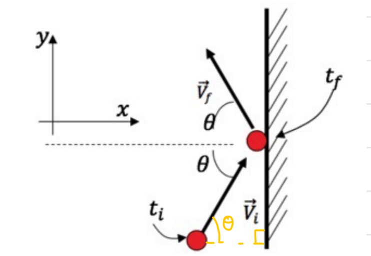
$t_f - t_i \longrightarrow \Delta t$ $\qquad\qquad \downarrow$

$p(\tau) - p(0) = 0 - (mV_0)\ kg\cdot m/s$

$\longrightarrow \int_0^\tau F_{est} dt = \int_0^\tau \vec{F}_{imp} + m\vec{g}\, dt' = \int_0^\tau \vec{F}_{imp} + m\vec{g}\tau = -mV_0$

Si ha quindi che $\langle \vec{F} \rangle + m\vec{g} = \dfrac{\vec{I}}{\tau} \longrightarrow \langle \vec{F} \rangle = \dfrac{\vec{I}}{\tau} - m\vec{g}$

(12) Urto elastico di massa M contro il muro. Esprimere l'impulso della parete in base ai dati in figura



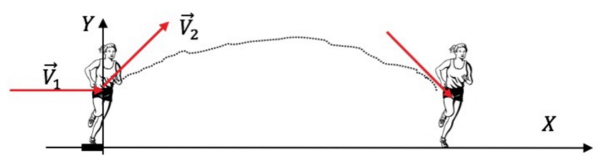
L'impulso si determina come la VARIAZIONE della quantità di moto. Calcoliamo quindi $\vec{P_i}$ e $\vec{P_f}$

$\vec{P_i} = M(V_0\cos\theta, V_0 \operatorname{sen}\theta) \longrightarrow \vec{I} = \vec{P_f} - \vec{P_i} = M(-2V_0\cos\theta, 0)$

$\vec{P_f} = M(-V_0\cos\theta, V_0\operatorname{sen}\theta)$

Valore forza media su x: $\frac{I_x}{\Delta t} = \frac{-2MV_0\cos\theta}{t_f - t_i}$

(13)



Un atleta, di massa M = 80kg, effettua un salto in lungo. Al momento della battuta la sua velocità è orizzontale ed ha modulo $|\vec{V_1}| = 10$ m/s ed il tempo di battuta è $\tau = 0.1$s. Subito dopo la battuta la velocità del centro di massa conserva lo stesso modulo, ma è ruotata di 45° verso l'alto. Calcolare il valore medio della forza che la pedana effettua sull'atleta durante la battuta.

In questo caso conviene dividere l'analisi del problema per gli assi x ed y

Sull'asse x NON agiscono altre forze esterne oltre a quella impulsiva

$\hookrightarrow \Delta p = \int_0^\tau \vec{F}_{imp\,x} \longrightarrow p(\tau) - p(0) = I$

$\hookrightarrow MV_1\cos45 - MV_1 = I \longrightarrow I = MV_1(\cos45 - 1) \longrightarrow \langle F_x \rangle = \frac{MV_1(\cos45-1)}{\tau}$

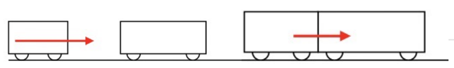
Sull'asse y invece agisce anche la forza di gravità

$\hookrightarrow \Delta p = \int_0^\tau F_{imp} - Mg\tau \longrightarrow$ Calcolo Δp: $p(\tau) - p(0) = MV_1\operatorname{sen}45 - 0 = I$ (NON ha comp. y)

$\downarrow$

$\langle F_y \rangle - Mg\tau = \frac{I}{\tau} \longrightarrow \langle F_y \rangle = \frac{MV_1\operatorname{sen}45}{\tau} + Mg\tau$

(14)



Su un binario privo di attrito un carrello A ($M_A = 50$kg) che si muove con una velocità $V_A = 4$ m/s, urta in un tempo $\tau = 0.3$s un secondo carrello B ($M_B = 150$kg), che è fermo sul binario. Nell'urto i due carrelli si fondono e procedono a velocità $\vec{V_2}$ sul binario. Nell'urto non ci sono forze esterne ai carrelli ad eccezione della gravità e della reazione normale del piano di appoggio

(1) Calcolare $\vec{V_2}$

Non avendo forze esterne nella direzione del movimento, la quantità di moto si conserva.

Posso quindi scrivere: $P_i = P_f \longrightarrow M_A V_1 + 0 = (M_A + M_B)V_2 \longrightarrow V_2 = \frac{M_A V_1}{M_A + M_B}$

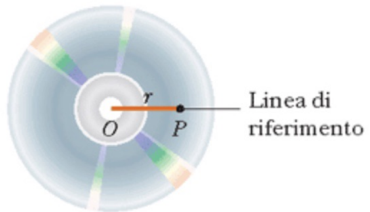
(2) Forza media dei carrelli durante l'urto

⚠ ATT: considerare UN SOLO CARRELLO perché la $\langle F \rangle$ agisce su ciascun carrello

$\Delta \vec{p} = \int_0^\tau F_{urto}\,dt \longrightarrow \frac{p(\tau) - p(0)}{\tau} = \langle F_{urto} \rangle \longrightarrow \langle F_{urto} \rangle = \frac{M_B V_2}{\tau}$

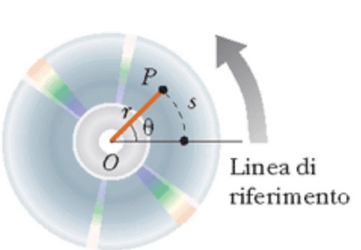
La dinamica rotazionale

→ La POSIZIONE ANGOLARE



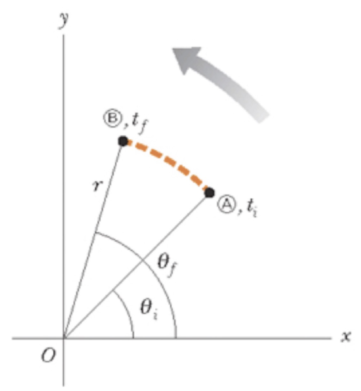
→ Viene scelta una linea di riferimento e la posizione di un generico punto P viene espressa mediante le coordinate POLARI : P(r, θ) → r = distanza dall'origine
→ θ = angolo misurato in senso ANTIORARIO
↓
Il punto P compie un moto ROTATORIO esattamente come le altre particelle del corpo in quanto stiamo trattando un CORPO RIGIDO
└ Possiamo definire la posizione angolare come l'angolo tra la retta di riferimento ed il raggio vettore dall'origine ad un qualsiasi punto del corpo

↓ Moto



→ La coordinata che varia è θ, mentre r rimane COSTANTE
↳ Il punto P percorre un arco s dato da $s = r\theta$, da cui si ha che $\theta = \frac{s}{r}$ → $d\theta$; $ds = r\,d\theta$; r
→ NUMERO PURO (adimensionale)

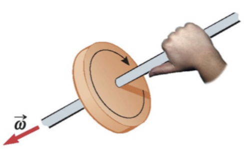
→ Lo SPOSTAMENTO, la VELOCITÀ e l'ACCELERAZIONE

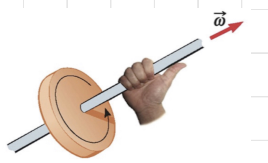


→ Analogamente al moto lineare, anche per il moto circolare è possibile definire le 3 grandezze fondamentali di spostamento, velocità ed accelerazione ANGOLARI
- → Spostamento angolare : Angolo di rotazione percorso in un tempo FINITO
  ↳ $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$ → Angolo spazzato
- → Velocità angolare : $\omega_{media} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ → Istantanea : $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$ [rad/s]
  ↓
  Positiva se gira in senso antiorario, negativa se gira in senso orario
- → Accelerazione angolare : $\alpha_{media} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ → Istantanea : $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$ [rad/s²]
  ↓
  Positiva se la velocità aumenta in senso antiorario o diminuisce in senso orario

↓
Velocità ed accelerazione angolare sono COMUNI per ogni punto del corpo rigido

→ DIREZIONE e VERSO della velocità e dell'accelerazione angolare
- → La DIREZIONE segue l'asse di rotazione
- → Il VERSO è → ENTRANTE se ruota in senso antiorario
  → USCENTE se ruota in senso orario
  ↓



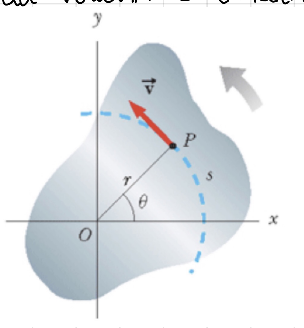


Regola della mano destra: ω segue il pollice, che è rivolto verso l'alto o verso il basso a seconda di come sono posizionate le dita piegate

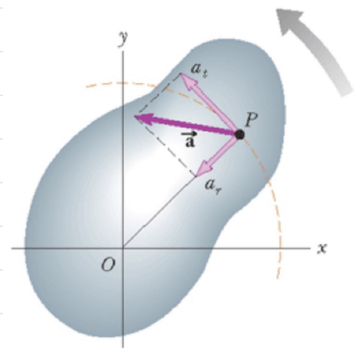
→ Le LEGGI ORARIE (la cinematica ROTAZIONALE)
- → $\alpha(t) = \alpha$
- → $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$
- → $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

→ Da queste si ottengono
- → $\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$
- → $\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$

→ La VELOCITÀ e l'ACCELERAZIONE LINEARI



→ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$: Velocità TANGENZIALE
↓
Il modulo è dato da $v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$
↳ Aumenta verso l'ESTERNO



→ L'accelerazione si divide in accelerazione RADIALE (a_r) e TANGENZIALE (a_T)

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$ → $a_T = \frac{dv}{dt} = r_\perp \alpha$; $a_c = \frac{v^2}{r} = r_\perp \omega^2$

$a = \sqrt{a_T^2 + a_c^2} = \sqrt{r_\perp^2 \alpha^2 + r_\perp^2 \omega^4} = r_\perp \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$

→ Energia cinetica ROTAZIONALE

$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$ → Energia cinetica IN OGNI singola particella

$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_{\perp i}^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$ → Momento di inerzia

⚠ ATTENZIONE: A differenza della quantità di moto, l'energia cinetica relativa al centro di massa può NON essere NULLA → Questo sarà però utile dopo

$\vec{v_i} = \vec{v}_{CM} + \vec{v'_i}$ → Velocità NEL sistema di riferimento del centro di massa; $\vec{v}_{CM}$ → Velocità del centro di massa

$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \underbrace{m_i \vec{v'_i} \cdot \vec{v}_{CM}}_{} \right)$ → $K = K_{CM} + K_R = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

$\sum_i m_i \vec{v'_i} = 0$ → Definizione centro di massa

→ Il MOMENTO di INERZIA

$I = m_i r_i^2$ con unità di misura $kg \cdot m^2$ → "Equivale" alla massa per un moto rettilineo", ovvero rappresenta la tendenza di un corpo ad opporsi alla variazione del suo moto rotatorio

Può essere calcolato suddividendo il corpo in piccoli intervalli di volume di massa Δm_i. Si ottiene quindi $I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i$, che per $\Delta m_i \to 0$ diventa: $I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm$

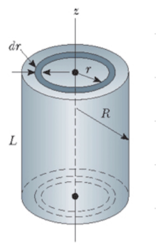
L'integrale precedente si può scrivere come $I = \int \rho r^2 dV$
- ρ = densità di VOLUME m/V
- σ = densità superficiale m/S
- λ = densità lineare ρA m/L

MOMENTI di INERZIA di CORPI SEMPLICI

1. Molecola biatomica omonucleare: due atomi di massa M a distanza d da un'asse centrale

$I = M\left(\frac{d}{2}\right)^2 + M\left(-\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} M d^2$

2. Cilindro omogeneo attorno al suo asse



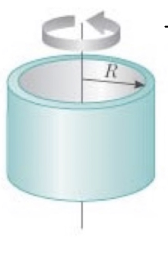
$\rho = \frac{M}{\pi R^2 L}$

$dm = \rho (2\pi r L) dr$

→ $I = \int_0^R r^2 \rho (2\pi r L) dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$

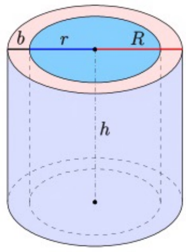
= DISCO CIRCOLARE

3. Guscio cilindrico sottile



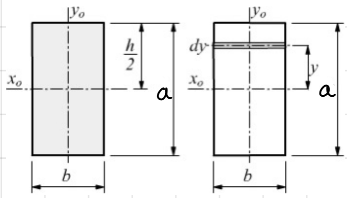
→ $I = MR^2$

4. Cilindro cavo



→ $I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$

⑤ Piastra rettangolare



$\longrightarrow I = \frac{1}{12}(a^2+b^2)$

⑥ Sbarretta lunga e sottile (asse di rotazione per il centro)

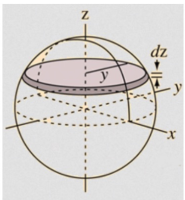
$\longrightarrow I = \frac{1}{12} ML^2$

⑦ Sbarretta lunga e sottile (asse di rotazione per un estremo)

$\longrightarrow I = \frac{1}{3} ML^2$

⑧ Sfera

①

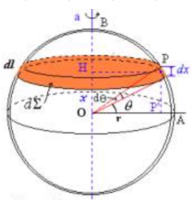


$$I = \int_{-R}^{R} \left(\frac{\rho\pi y^2}{2}\right) y^2 dz = \rho\pi \int_0^R y^4 dz$$

↳ utilizzo $y^2 + z^2 = R^2$ $\quad \rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$

$$I = \frac{3M}{4R^3}\int_0^R (R^4 - z^2)^2 dz = \frac{3M}{4R^3}\int_0^R (R^4 + z^4 - 2R^2z^2) dz = \frac{3M}{4R^3}\left[R^4 z + \frac{z^5}{5} - 2R^2\frac{z^3}{3}\right]_0^R = \frac{2}{5}MR^2$$

②



$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho\pi (R\cos\theta)^2}{2} \underbrace{(R\cos\theta)^2}_{HP} \underbrace{R\cos\theta d\theta}_{dx} \longrightarrow \rho R^5 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta d\theta = \frac{3}{4} MR^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\text{sen}^2\theta)^2 \cos\theta d\theta$$

→ Il TEOREMA degli ASSI PARALLELI

↳ $I = I_{CM} + Md^2 \longrightarrow I_{CM}$ è il momento di inerzia rispetto ad un asse parallelo a quello considerato, distante d da questo, e passante per il centro di massa del sistema considerato

Dimostrazione

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i [(\vec{r_i}' + \vec{d})_\perp]^2 = \underbrace{\sum_i m_i r_i'^2}_{I_{CM}} + \underbrace{\sum_i m_i d_\perp^2}_{Md^2} + 2\underbrace{\sum_i m_i \vec{r_i}'}_{0} \cdot \vec{d}_\perp$$

→ Il MOMENTO di una forza

↳ Per produrre la rotazione di un corpo è necessario un MOMENTO

↓

Definito come $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, dove $\vec{r}$ è il "raggio" che indica la distanza dal POLO (Arbitrario)

└→ Nullo se
- → $F = 0$
- → Il polo coincide con il punto di applicazione ($r=0$)
- → r ed F sono PARALLELI

↓

Indica la tendenza di una forza a far ruotare un corpo ⟶ SOLO la forza ⊥ produce momento angolare

↳ Modulo: $\tau = rF\text{sen}\phi = Fd$ ⟶ d si chiama BRACCIO: distanza fra asse di rotazione e retta di azione ⟶ retta che contiene il vettore applicato (vettore della forza)

↓

Aumenta al crescere del braccio e SOLO la forza ⊥ produce rotazioni

↳ Positivo se la rotazione prodotta è ANTIORARIA, negativo se la rotazione è ORARIA

↳ Unità di misura: $N \cdot m$

→ Il MOMENTO ANGOLARE

↳ Si consideri un punto materiale di massa m, a cui è associata la quantità di moto $\vec{p}$ e la cui posizione sia individuata dal vettore $\vec{r}$

↓

Legge traslazionale: $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \xrightarrow[\text{per } \vec{r}]{\text{moltiplicando}} \vec{r} \times \sum \vec{F} = \sum \vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \xrightarrow[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}]{\text{Aggiungendo}} \sum \vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$

→ Si ha che il secondo membro è la derivata di $\vec{r} \times \vec{p}$ e quindi $\Sigma\vec{\tau} = \frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt}$

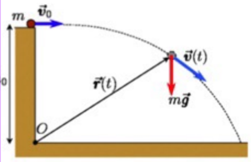
Il momento angolare $\vec{L_0}$ di un punto materiale rispetto ad un asse passante per l'origine O è, ad un certo istante, il prodotto vettoriale tra il vettore posizione $\vec{r}$ del punto materiale e la sua quantità di moto $\vec{p}$: $\vec{L_0} = \vec{r} \times \vec{p}$

Ha lo stesso ruolo che ha $\vec{p}$ nel moto traslatorio

La relazione $\Sigma\vec{\tau} = \frac{d\vec{L_0}}{dt}$ è valida SOLO SE sono misurati rispetto allo stesso asse

La direzione, il modulo ed anche il verso di $\vec{L_0}$ dipendono dalla scelta dell'asse → La direzione è $\perp$ al piano di $\vec{r}$ e $\vec{p}$ ed il verso è dato dalla regola della mano destra, mentre il modulo è dato da $L_0 = mvr\sin\phi$

Esempio



→ Equazioni del moto

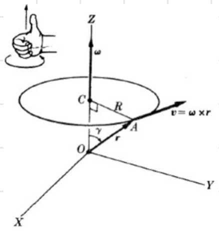
- Velocità
  - $V_x(t) = V_{0x}$
  - $V_y(t) = -gt$
- Posizione
  - $x(t) = V_0 t$
  - $y(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$

Momento angolare: $\vec{L_0} = \vec{r}\times\vec{p} = m\vec{r}\times\vec{v} = m(xv_y - yv_x)\hat{k} = -mv_0\left(h_0 + \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{k}$

Momento forza di gravità: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F_g} = m\vec{r}\times\vec{g} = -mgx\hat{k} = -m(v_0 g t)\hat{k}$

Derivando il momento angolare: $\frac{d\left(-mv_0\left(h + \frac{1}{2}gt^2\right)\right)\hat{k}}{dt}$ si ottiene $-m(v_0 g t)\hat{k}$

→ Momento angolare di un corpo rigido in ROTAZIONE



→ Tutti i punti del corpo rigido si muovono con velocità angolare ω

La forza centripeta ha momento nullo rispetto a C e quindi si ha che $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F_c} = 0$, da cui $\frac{d\vec{L_0}}{dt} = 0$

Il vettore $\vec{L_0}$ è COSTANTE, ha modulo $L_0 = m\omega R^2$ e direzione $\perp$ al piano → $\vec{L_0} = I\vec{\omega}$

Rispetto ad un punto generico sull'asse si ha $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ e quindi $\vec{L_0} = \vec{r} \times \vec{p} =$

$= \underset{A}{\vec{r}} \times (\underset{B}{m\vec{\omega}} \times \underset{C}{\vec{r}}) = \underbrace{m\omega r^2}_{L_0 \parallel} - \underbrace{m\vec{r}(\vec{\omega}\cdot\vec{r})}_{L_{0\perp}} \longrightarrow \frac{dL_{0\perp}}{dt} = \vec{\tau}$

Derivando si ha $\frac{d\vec{L_0}}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \longrightarrow \Sigma\tau_{ext} = I\alpha$

Valida anche se l'asse è in movimento e passa per il centro di massa di un oggetto simmetrico

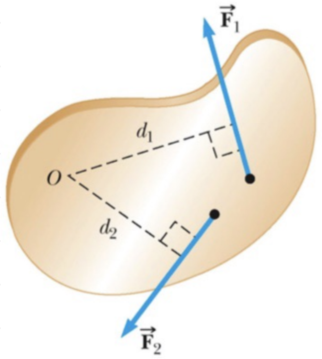
→ Momento angolare di un SISTEMA di PARTICELLE

$\vec{L}_{TOT} = \vec{L}_{01} + \vec{L}_{02} + \ldots + \vec{L}_{0n} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{0i} \longrightarrow \frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{L}_{0i}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{\tau}_i = \vec{\tau}(ext)$

Le forze interne NON danno momento perché si annullano per la 3ª legge di Newton

$\Delta\vec{L}_{TOT} = \int(\Sigma\tau_{ext})dt$ ⟶ Teorema momento angolare - impulso angolare

→ L'EQUILIBRIO ROTAZIONALE



→ ① La risultante delle FORZE ESTERNE deve essere NULLA

↳ $\sum \vec{F}_{ext} = 0$ → Equilibrio TRASLATORIO : $a_{CM} = 0$

→ ② La risultante dei momenti esterni calcolati rispetto a qualsiasi asse deve essere NULLA

↳ $\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$ → Equilibrio ROTATORIO : $\alpha = 0$

↓

Si ha equilibrio STATICO se anche $v_{CM} = 0$ e $\omega = 0$

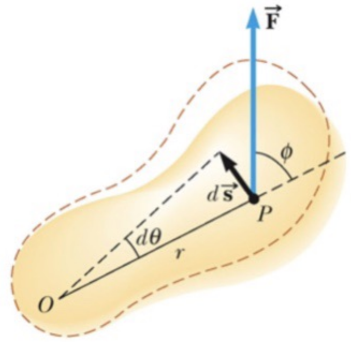
→ La CONSERVAZIONE del MOMENTO ANGOLARE

↳ Il momento angolare di un corpo è CONSERVATO se la risultante dei momenti esterni è NULLA → $\vec{L}_0 =$ costante → $\vec{L}_{0i} = \vec{L}_{0f}$

↓

Vero anche se la massa si redistribuisce ed il momento varia nel processo. In questo caso si ha che $L_0 = I_f\omega_f = I_i\omega_i$

→ ENERGIA in un moto ROTAZIONALE



→ $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \underbrace{(F \operatorname{sen}\phi) r}_{\tau} \, d\theta$ ← Componente TANGENZIALE di $\vec{F}$

τ , quindi $dW = \tau d\theta$

→ La potenza si ricava dividendo per dt → $P = \frac{dW}{dt} = \frac{\tau d\theta}{dt} = \tau\omega$

→ Teorema delle forze vive : $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega d\omega = \Delta K_R \rightarrow \frac{1}{2} I\omega^2$

→ Analogie tra moto traslatorio e moto rotatorio

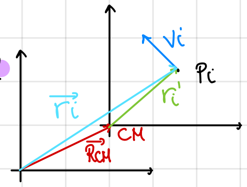
↓

Moto traslatorio	Moto rotatorio	
$M = \sum_i m_i$	$I = \sum_i m_i r_i^2$	
$\vec{V} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i$	$\vec{\omega}$	
$\vec{P} = M\vec{V}$	$L = I\omega$	
$K = \frac{1}{2}MV^2$	$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$	
$\sum \vec{F} = 0$	$\sum \vec{\tau} = 0$	→ Equilibrio
$\sum \vec{F} = M\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\sum \tau = I\alpha = \frac{d\vec{L}_0}{dt}$	→ II legge di Newton
$\vec{P} =$ costante	$\vec{L}_0 =$ costante	→ Conservazione
$P = \vec{F} \cdot \vec{V}$	$P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$	→ Potenza

→ TEOREMA di KOENIG per il MOMENTO ANGOLARE

↳ Il momento angolare di un corpo rigido rispetto ad un polo fisso O si può scrivere come

$\vec{L}_0 = M\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + I_{CM}\vec{\omega}$



↓

$\vec{L}_0 = \sum m_i (\vec{R}_i \times \vec{v}_i) = \sum m_i (\vec{R}_i' + \vec{R}_{CM}) \times (\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i') = (\sum m_i \vec{R}_i')\times\vec{V}_{CM} + M\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} +$ ← 0: posizione del CM in SCM

$+ \vec{R}_{CM} \times \sum m_i \vec{v}_i' + \sum m_i \vec{R}_i' \times \vec{v}_i' = M\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \sum m_i \vec{R}_i' \times \vec{v}_i'$

↳ 0: qdm del CM in SCM

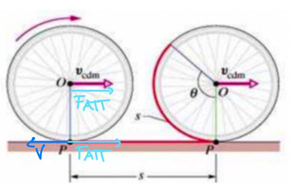
↓

$\vec{L}_0 = M\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \sum m_i \vec{R}_i' \times \vec{v}_i'$ corpo rigido $\vec{L}_0 = \sum m_i (\vec{R}_i \times \vec{v}_i) \Longrightarrow M\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + I^*_{CM}\vec{\omega}$

momento di inerzia rispetto ad un asse passante per CM parallelo a $\vec{\omega}$

→ Il moto di PURO ROTOLAMENTO

↳ Il corpo rotola senza strisciare, quindi la velocità del punto di contatto lungo il piano è NULLA → La forza di attrito nel punto P fa procedere tutto in avanti



→ Se nel punto P NON c'è attrito c'è una velocità ωR e quindi la ruota gira su se stessa

↳ Se FATT è adeguata, la ruota viene accelerata in avanti

↳ "TRASMESSA" al cdm

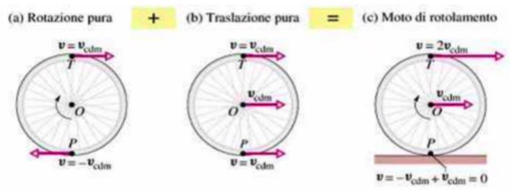
↓

CONDIZIONI

→ $S = R\theta$ → Nel tempo in cui la ruota compie un giro completo, il centro di massa percorre $2\pi R$

→ $V_{CM} = \frac{ds}{dt} = \frac{d\,R\theta}{dt} = R\omega$

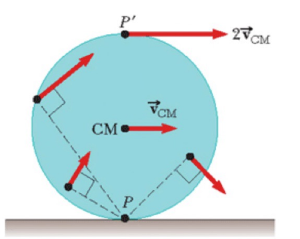
→ $a_{CM} = \frac{dV_{CM}}{dt} = \frac{d\,R\omega}{dt} = R\alpha$



Leggi orarie

→ $x(t) = R\,\mathrm{sen}(\omega t) + \omega RT$ ⟶

→ $y(t) = R\cos(\omega t) + RT$



Moto di rotazione intorno ad un asse istantaneo passante per il punto P, di velocità angolare ω

↳ $V_{CM} = \omega R$, $V_{P'} = 2\omega R$

↓

ENERGIA CINETICA: $K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}(MR^2 + I)\omega^2 =$

$= \frac{1}{2} I'\omega^2$ ⟶ $I' = MR^2 + I$

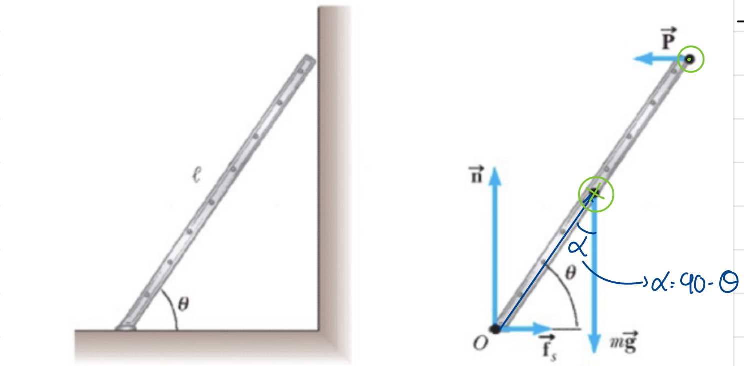
→ I' è la conseguenza del teorema degli assi paralleli. In questo caso l'energia coincide con quella di un moto di SOLA ROTAZIONE

Forze e lavoro → Nel moto di PURO ROTOLAMENTO l'attrito è STATICO, quindi NON FA LAVORO → $\begin{cases} V_x(t) = R\omega\cos(\omega t) + \omega R \\ V_y(t) = -R\omega\,\mathrm{sen}(\omega t) \end{cases} \xrightarrow{t = \pi/\omega} \begin{cases} V_x(\pi/\omega) = 0 \\ V_y(\pi/\omega) = 0 \end{cases}$

↓

Se c'è anche strisciamento allora c'è attrito dinamico e quindi l'energia viene dissipata

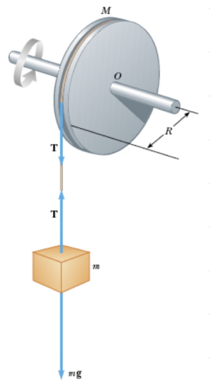
Esercizi di esempio

① 

→ θ_{min} per il quale la scala si muove

Equilibrio
- Traslazionale: $\sum \vec{F} = 0$ → $F_{AS} \le \mu_s \underbrace{n}_{mg}$ → $P \le \mu_s mg$
- Rotazionale: $\sum \vec{\tau} = 0$ → $\tau_P + \tau_{mg} = 0$ → $mg \frac{\cancel{\ell}}{2} \cos\theta = P \cancel{\ell} \operatorname{sen}\theta$

$P = \frac{mg}{2\tan\theta}$ → $\frac{\cancel{mg}}{2\tan\theta} \le \mu_s \cancel{mg}$ → $\tan\theta \geq \frac{1}{2\mu_s}$ → $\min\theta = \arctan\left(\frac{1}{2\mu_s}\right)$

② 

→ Accelerazione angolare della ruota, tensione della corda e accelerazione dell'oggetto

↓

Legge della dinamica sul corpo sospeso → $\sum \vec{F} = ma$

Si ha quindi $mg - T = ma$, da cui $a = \frac{mg - T}{m}$

↓

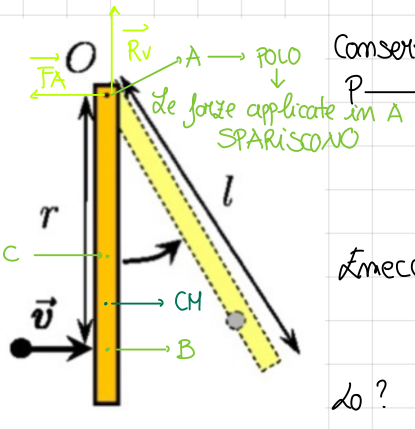
La ruota e il corpo hanno la stessa accelerazione $a = \alpha r$ per $r = R$

e quindi $\alpha = \frac{mg - T}{Rm}$, ma $\alpha = \frac{TR}{I}$ da $I\alpha = \tau$

↓

Da queste relazioni si ha che $\frac{mg - T}{Rm} = \frac{TR}{I}$ → $mgI - TI = TR^2m$

da cui $T = \frac{mg}{1 + (mR^2/I)}$

③ 

Conservazione?

P → Forze impulsive? Sì, è presente una forza impulsiva sul vincolo perché altrimenti il corpo si muoverebbe verso DESTRA

↓

La quantità di moto NON si conserva

E_{mecc}? Non si conserva perché la forza di deformazione NON è conservativa, mentre R_V ed F_A NON influenzano l'energia perché il corpo è FERMO e quindi NON fanno lavoro

L_o? Anche in questo caso contano solo quelle che hanno un MOMENTO IMPULSIVO

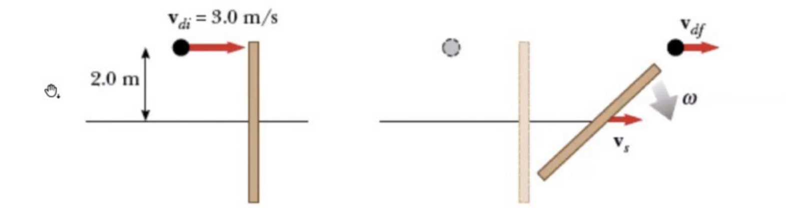
↳ SI CONSERVA: $\vec{L_{oi}} = \vec{L_{of}}$ → $L_{oi} = m v_0 r$ → $r \perp p$

$L_{of} = I\omega$ → $\omega = \frac{m v_0 r}{I}$

Impulso assorbito dal vincolo: $\int F_A \, dt = \underbrace{\vec{p_f}}_{(m+M)\,\omega R_{CM}} - \underbrace{\vec{p_i}}_{m v_0}$

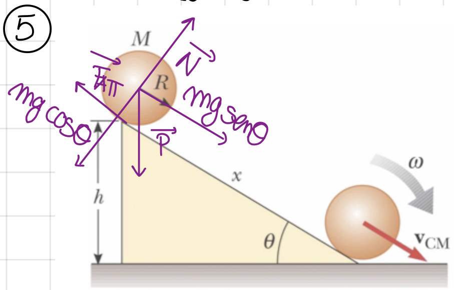
⚠ Nel caso di un corpo vincolato, scegliere il vincolo come polo

(4)



↳ NON ci sono vincoli, quindi si conserva la quantità di moto e l'energia PUÒ CONSERVARSI se l'urto è elastico → ⚠ ENERGIA CINETICA: centro di massa e intorno al cdm
↳ traslazionale ↳ rotazionale
↓
Si conserva anche il MOMENTO ANGOLARE → ⚠ Scegli il cdm dell'asse

(5)



→ Moto di PURO ROTOLAMENTO
↳ L'energia si conserva perché l'attrito NON FA LAVORO
↓

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{v^2}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)$$

$U = mgy$ dove ⚠ y è la quota del CENTRO di MASSA
↓

$$E_i = Mg(h+R) = \frac{v^2}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right) + MgR = E_f$$

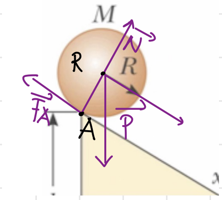
Dinamica → Lungo il piano: $Ma = Mg\,sen\theta - F_{att}$ (1)
→ Ortogonale al piano: $N = mg\cos\theta$ → N = reazione vincolare
↓
$F_a \le \mu_s N$, altrimenti il corpo scivola

Equazioni della dinamica
$$\begin{cases} \vec{F}_{est} = m\vec{a} \longrightarrow \text{Dinamica traslazionale: (1)} \\ \vec{r} \times \vec{F}_{est} = \frac{d\vec{L}_o}{dt} = I\alpha \longrightarrow \text{Dinamica rotazionale: (2)} \end{cases}$$

Da (2): $I\alpha = RF_A \longrightarrow F_a = \frac{Ia}{R^2}$
↓
Sostituendo in (1): $Ma = Mg\,sen\theta - \frac{Ia}{R^2} \longrightarrow \left(M + \frac{I}{R^2}\right)a = Mg\,sen\theta \longrightarrow a = \frac{Mg\,sen\theta}{M + I/R^2}$

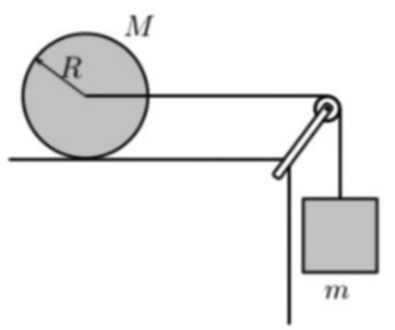
Quindi $F_a = \frac{IF}{MR^2 + I}$, dove $F = mg\,sen\theta$ è la forza che spinge il corpo
↳ $F_a \le \mu_s N = \mu_s Mg\cos\theta$ → Se NON è vera, il corpo STRISCIA e NON può fare rotolamento puro: θ = angolo massimo

Si può risolvere anche per un asse passante per il punto di contatto istantaneo
↳ $I'\alpha = \tau = RMg\,sen\theta$, dove $I' = I + MR^2$
(assi paralleli)



→ $\vec{r} \times \vec{F}_A = 0$
$\vec{r} \times (\vec{N} - m\vec{g}\cos\theta) = 0$
→ $\vec{R} \times m\vec{g}\,sen\theta = \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$
↳ solo questa forza ha braccio

(6)



→ Massima m per cui il moto è di puro rotolamento con μ_s e μ_d

filo inestensibile

$$\longrightarrow \begin{cases} ma = mg - T \\ MA = T - F_a \\ I\alpha = RF_a \end{cases} \longrightarrow a = R\alpha,\ A = a,\ F_a \le \mu_s Mg$$

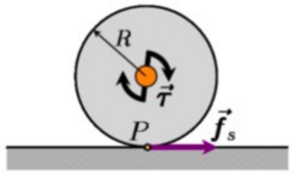
↳ 1+2: $(m+M)a = mg - F_a$
↳ 3: $\frac{M}{2}a = F_a \longrightarrow \frac{M}{2}a \le \mu_s Mg \longrightarrow \frac{m}{2m+3M} \le \mu_s$

Con strisciamento: STESSE EQUAZIONI ma $a \neq R\alpha$ $\to F_a$

$\to$ Da 1 + 2: $(m+M)a = mg - \mu_D Mg$ $\longrightarrow$ $a = \frac{mg - \mu_D Mg}{m+M}$

$\to$ Da 3: $\alpha = \frac{\mu_D Mg}{I}$

7



$\to$ Puro rotolamento: $\begin{cases} Ma = F_a & \text{: moto traslazionale} \\ I\alpha = \tau - RF_a \end{cases}$

$\downarrow$

$a = \alpha R \longrightarrow a = \frac{R\tau}{I + MR^2}$, $F_a = \frac{MR\tau}{I + MR^2} \longrightarrow$ Spinge in avanti

$\to F_a \leq \mu_S N$, dove $N = Mg$

① ⚠ATT: Esercizio di esame

Due masse puntiformi $m_1 = 4.0\,kg$ e $m_2 = 1.5\,kg$ urtano da versi opposti un'asta di lunghezza $L = 4.2\,m$ e massa $M = 1.7\,kg$. Le due masse si muovono con velocità di modulo $v_1 = 4.2\,m/s$ e $v_2 = 1.6\,m/s$. L'urto è perfettamente anelastico e avviene nello stesso istante per entrambe le masse

① Velocità del centro di massa subito dopo l'urto e la distanza del centro di massa dal punto O

(1.a) Conservazione: Energia: NO
Quantità di moto? Sì, NON ci sono forze esterne
↓
Si ha quindi $p_i = p_f$ → $p_i = m_1 v_1 - m_2 v_2 + 0M$ → $V_{CM} = \dfrac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2 + M}$
→ $p_f = (m_1 + m_2 + M) V_{CM}$

(1.b) Distanza del centro di massa da O
↳ Centro di massa del sistema = centro di massa dei centri di massa

$$y_{CM} = \frac{0 + m_2 L + M\frac{L}{2}}{m_1 + m_2 + M}$$

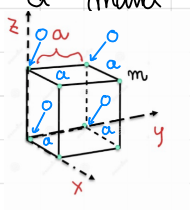
② Modulo della velocità angolare dopo l'urto
↳ ⚠SUGGERIMENTO: Quando non c'è il vincolo come in questo caso scegliere il centro di massa come polo
↓
La scelta del centro di massa del polo ci permette di utilizzare la conservazione del momento angolare in quanto non agiscono forze che hanno momento angolare

$L_{0zi} = L_{0zf}$ → $L_{0i} = m_1 v_1 d_{cm} + m_2 v_2 (l - d_{cm})$ → $\omega_s = \dfrac{m_1 v_1 d_{cm} + m_2 v_2 (l - d_{cm})}{I_z^{cm}}$
→ $L_{0f} = I_z^{cm}\,\omega_s$

Devo calcolare I_z^{cm} → Teorema degli assi paralleli
↳ $I_z^{cm} = I_{CMasta} + M(L/2 - d_{cm})^2 + m_1 d_{cm}^2 + m_2 (L - d_{cm})^2$

③ Energia dissipata E_{diss}
↳ $E_{diss} = E_i - E_f$ → $E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$
→ $E_f = \frac{1}{2} I_z^{cm} \omega_s^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + M) V_{CM}^2$ → ⚠ ATT: c'è sia energia ROTAZIONALE che TRASLAZIONALE

② Determinare il centro di massa di un corpo rigido formato da masse puntiformi di massa m poste ai vertici di un cubo di lato a, collegate tra loro con barre di massa trascurabile



→ Il cubo è SIMMETRICO, quindi si ha $x_{CM} = y_{CM} = z_{CM}$
↳ $x_{CM} = \dfrac{4ma}{8m} = \dfrac{a}{2} = y_{cm} = z_{cm}$

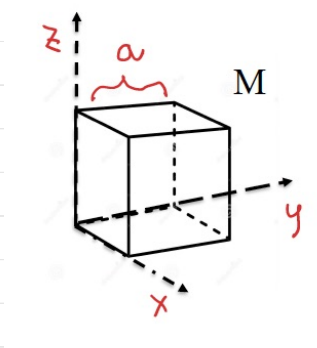
Determinare il momento di inerzia del corpo rigido formato da masse puntiformi di massa m poste ai vertici di un cubo di lato a, collegate tra loro con barre di massa trascurabile, rispetto ai tre assi in figura passanti per il centro di massa del sistema

$I^z_{CM} = \underbrace{\sum m_i}_{8m}\, \overbrace{(x^2 + y^2)}^{r_i}$ → Anche in questo caso vale la simmetria, quindi $I^x_{CM} = I^y_{CM} = I^z_{CM}$

$(x^2+y^2) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$

$I^z_{CM} = \cancel{8}^{4} m \cdot \dfrac{a^2}{\cancel{2}} = 4a^2$

③



Determinare il baricentro di un cubo omogeneo di lato a e massa M

$\longrightarrow x_{CM} = \frac{1}{M}\int dm\, x$

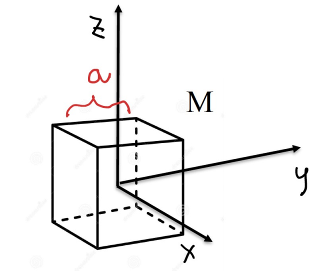
$\longrightarrow y_{CM} = \frac{1}{M}\int dm\, y \longrightarrow$ TROVO $dm \longrightarrow \rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{a^3} \longrightarrow dm = \rho\, dV$

$\longrightarrow z_{CM} = \frac{1}{M}\int dm\, z$

Essendo che il volume si distribuisce sulle 3 direzioni si ha
$\hookrightarrow x_{CM} = \frac{1}{M}\int \rho\, dV\, x = \frac{\rho}{M}\int dx\,dy\,dz\, x = \frac{\rho}{M}\int_0^a x\,dx \int_0^a dy \int_0^a dz = \frac{\rho}{M}\frac{x^2}{2}\cdot y \cdot z\Big|_0^a = \frac{\rho}{M}\frac{a^2}{2}\cdot a\cdot a =$

$= \frac{\cancel{M}}{\cancel{a^3}}\cdot\frac{1}{\cancel{M}}\cdot\frac{\cancel{a^4}}{2} = \frac{a}{2} \longrightarrow$ Essendo simmetrico, anche in questo caso $x_{CM} = y_{CM} = z_{CM}$

Determinare il momento di inerzia di lato a e massa M rispetto ai 3 assi indicati in figura passanti per il centro di massa

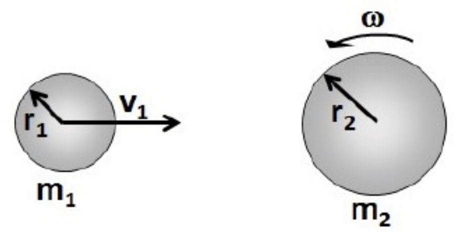


$\longrightarrow I^z_{CM} = \int dm\,(x^2+y^2)$

$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{a^3} \longrightarrow \rho = \frac{M}{a^3} \longrightarrow dm = \rho\, dV$

$\int (x^2+y^2)\rho\, dV = \rho\int (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$

④ ⚠ ESAME



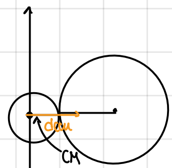
Sfere di massa m_1 ed m_2 e raggio r_1 ed r_2 si urtano e rimangono attaccate $\longrightarrow$ urto completamente anelastico

Sfera 1 ha velocità v_1
Sfera 2 ha velocità w_2

① Energia cinetica del sistema e distanza tra centro di massa del sistema (dopo l'urto) e il centro della prima sfera

$K_{m_1} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2$

$K_{m_2} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{5}m_2 r_2^2\omega^2 = \frac{m_2 r_2^2\omega^2}{5}$



$\longrightarrow$ Centro di massa del centro di massa
$\hookrightarrow x_{CM} = \frac{m_1\cdot 0 + m_2(r_1+r_2)}{m_1+m_2} = \frac{m_2(r_1+r_2)}{m_1+m_2}$

② Velocità angolare del sistema dopo l'urto e la massima velocità del centro della seconda sfera rispetto al laboratorio
$\hookrightarrow$ Conservazione $\longrightarrow$ Quantità di moto ①
$\longrightarrow$ Momento angolare: Scelto il CM come polo ⚠ Sistema NON vincolato ②

① $p_i = p_f$ $\longrightarrow p_i = m_1 v_1 \longrightarrow m_1 v_1 = (m_1+m_2)V_{CM} \longrightarrow V_{CM} = \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2}$
$\longrightarrow p_f = (m_1+m_2)V_{CM}$

(2) $\frac{d\mathcal{L}_O}{dt}=0 \longrightarrow \mathcal{L}_{Oi}=\mathcal{L}_{Of}$

$\mathcal{L}_{Oi} = \cancel{\vec{r}_1 \times m\vec{v}_1} + \cancel{I\omega_1} + \cancel{\vec{r}_2\times m\vec{v}_2} + I_2\omega_2 \longrightarrow \omega_{CM} = \frac{I_2\omega_2}{I}$

$\mathcal{L}_{Of} = \underbrace{\cancel{\vec{r}_{CM}\times(m_1+m_2)\vec{v}_{CM}}}_{r=0} + I\omega_{CM}$

$I = I_{CM\,sfera\,1} + m_1 d^2_{cm} + I_{CM\,sfera\,2} + m_2(r_1+r_2-d_{cm})^2$

Velocità massima ⚠ C'È ANCHE LA VELOCITÀ TANGENZIALE COSTANTE

↳ $v_{TANG} = (r_1+r_2-d_{cm})\omega$ $\qquad v_{MAX} = (r_1+r_2-d_{cm})\omega + v_{CM}$

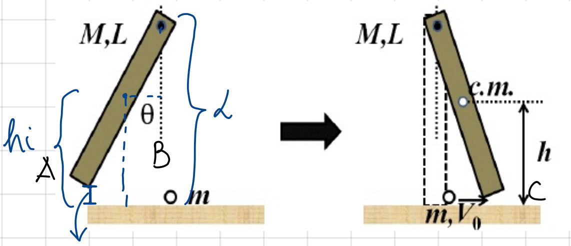
(3) Variazione di energia

↳ $\Delta E = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i$

$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{CM}^2$

$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{m_2 r_2^2 \omega^2}{5}$

(5) ⚠ ATT: Esercizio di esame (Non sul sito della Ciocci)



$h_p = \ell - \ell\cos\theta = \ell(1-\cos\theta)$

Sbarra di lunghezza ℓ e massa M vincolata a ruotare attorno ad asse passante per estremo. Angolo iniziale $\theta = 30°$, $v_0 = 0$. In posizione verticale colpisce massa m che si muove su piano con attrito μ_D ignoto. La sbarra continua a ruotare

(1) Si dimostri che una sola fra le seguenti quantità si conserva sicuramente durante l'urto: quantità di moto totale, momento angolare rispetto all'asse di rotazione, energia meccanica del sistema

→ Energia: NON è specificato se si ha un urto elastico, quindi NON è possibile dire con certezza se l'energia si conserva oppure no

→ Quantità di moto: Siamo sicuri che NON si conserva perché sul vincolo agiscono forze impulsive, che quindi la fanno variare

→ Momento rispetto all'asse: Si ha che $\frac{d\mathcal{L}_O}{dt} = \Sigma\tau_{ext}$ ⚠. Le forze relative all'urto non vanno quindi considerate, le forze dovute al vincolo non hanno braccio e quindi nemmeno momento e la forza di gravità è // al braccio, quindi ha momento nullo

(2) Velocità angolare della sbarra dopo l'urto e quota h a cui risale il suo centro di massa. V_0 max per cui la sbarra rimbalza all'indietro.

PRIMA dell'URTO: Conservazione dell'energia

$\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_B$

$\mathcal{E}_A = Mgh_i = Mg(\frac{\ell}{2} + h_p) = Mg(\frac{\ell}{2} + \ell(1-\cos\theta)) = Mg\frac{\ell}{2}(2-\cos\theta)$

$\mathcal{E}_B = \frac{1}{2}M \underbrace{v_{cm_B}^2}_{0:\ \text{NON TRASLA}} + \frac{1}{2}I\omega_B^2 + Mg\frac{\ell}{2}$

$\mathcal{E}_B = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}M\ell^2\cdot\omega_B^2 + Mg\frac{\ell}{2}$

$\cancel{M}g\frac{\cancel{\ell}}{\cancel{2}}(2-\cos\theta) = \frac{1}{\cancel{6}\,3}\cancel{M}\ell^{\cancel{2}}\omega_B^2 + \cancel{M}g\frac{\cancel{\ell}}{\cancel{2}} \longrightarrow 2g - g\cos\theta = \frac{1}{3}\omega_B^2\ell + g \longrightarrow$

$\longrightarrow g(1-\cos\theta) = \frac{1}{3}\ell\omega_B^2 \longrightarrow \omega_B = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{\ell}}$

DURANTE L'URTO: Conservazione del momento angolare

$\mathcal{L}_{OB} = \mathcal{L}_{OB'}$

$\mathcal{L}_{OB} = I\omega_B = \frac{1}{3}M\ell^2\omega_B$

$\mathcal{L}_{OB'} = \frac{1}{3}M\ell^2\omega_{B'} + m\ell v_{B'}$

B' = dopo l'urto

$\longrightarrow \frac{1}{3}M\ell^{\cancel{2}}\omega_B = \frac{1}{3}M\ell^{\cancel{2}}\omega_B' + m\cancel{\ell}v_B'$

↳ $\omega_B' = \omega_B - \frac{3mv_B'}{M\ell} = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{\ell}} - \frac{3mv_B'}{M\ell}$

DOPO L'URTO: L'energia ⚠ DELLA SBARRA ⚠ si conserva

↳ $\mathcal{E}_{B'} = \mathcal{E}_C$ → $\mathcal{E}_{B'} = \frac{1}{2} I \omega_{B'}^2 + Mg\frac{L}{2}$; $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} I \underbrace{\omega_C^2}_{0} + Mg h_C$ → $\frac{1}{2}\frac{1}{3}\cancel{M}L^2\omega_{B'}^2 + \cancel{M}g\frac{L}{2} = \cancel{M}g h_C$

$$h_C = \frac{1}{6g}L^2\omega_{B'}^2 + \frac{L}{2} = \frac{L}{2}\left(\frac{L\omega_{B'}^2}{3g} + 1\right)$$

Valore massimo di V_0 per cui la sbarra rimbalza all'indietro

↳ $\omega_{B'}$ deve essere NEGATIVA → $\omega_{B'} = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}} - \frac{3mV_{B'}}{ML} < 0$

$$\sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}} - \frac{3mV_{B'}}{ML} < 0 \longrightarrow -\frac{3mV_{B'}}{ML} < -\sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}} \longrightarrow \frac{3mV_{B'}}{ML} > \sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}}$$

$$\longrightarrow V_{B'} > \frac{ML}{3m}\sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}} \longrightarrow V_{B'min} = \frac{ML}{3m}\sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{L}}$$

③ Variazione di → Energia a. ; → Quantità di moto b. ; → Momento angolare c. — e casi in cui si conservano

a. Variazione di energia tra B e B' ($h_B = h_{B'}$ → Stessa U)

↳ $K_i = \frac{1}{2} I\omega_B^2 = \frac{ML^2}{6}\omega_B^2$ ←

↳ $K_f = \frac{1}{2} I\omega_{B'}^2 + \frac{1}{2} mV_{B'}^2 = \frac{ML^2}{6}\omega_{B'}^2 + \frac{1}{2}mV_{B'}^2 = \frac{ML^2}{6}\left(\omega_B^2 + \frac{9m^2V_0^2}{M^2L^2} - \frac{6\omega_B mV_{B'}}{ML}\right) + \frac{mV_{B'}^2}{2} =$

$$= K_i + \frac{3m^2V_{B'}^2}{2M} - \omega_B mV_{B'}L + \frac{m}{2}V_{B'}^2 = K_i + \frac{mV_{B'}^2}{2}\left(\frac{3m}{M} - \frac{2\omega_B L}{V_{B'}} + 1\right)$$

$$\longrightarrow \Delta K = K_f - K_i = \frac{mV_{B'}^2}{2}\underbrace{\left(\frac{3m}{M} - \frac{2\omega_B L}{V_{B'}} + 1\right)}_{\text{Pongo } = 0}$$ → Conservata se uno dei due fattori è uguale a 0

$$\longrightarrow \frac{3m}{M} - \frac{2\omega_B L}{V_{B'}} + 1 = 0 \longrightarrow 3mV_{B'} - 3M\omega_B L + V_B M = 0 \longrightarrow V_{B'} = \frac{3M\omega_B L}{(3m+M)}$$

b. Variazione quantità di moto tra B e B'

↳ $\Delta p = p_{B'} - p_B$ → $p_B = MV_{MB} = M\omega_B\frac{L}{2}$; → $p_{B'} = MV_{MB'} + mV_{B'} = M\omega_{B'}\frac{L}{2} + mV_{B'}$ → $\Delta p = \frac{ML}{2}(\omega_{B'} - \omega_B) + mV_{B'}$

$$\frac{ML}{2}(\omega_{B'} - \omega_B) + mV_{B'} = \frac{ML}{2}\left(\cancel{\omega_B} - \frac{3mV_{B'}}{ML} - \cancel{\omega_B}\right) + mV_{B'} = -\frac{3}{2}mV_{B'} + mV_{B'} = -\frac{1}{2}mV_{B'}$$

↓

NON può mai conservarsi a causa delle forze impulsive sul vincolo

c. Variazione del momento angolare: 0 → Si conserva, quindi è COSTANTE

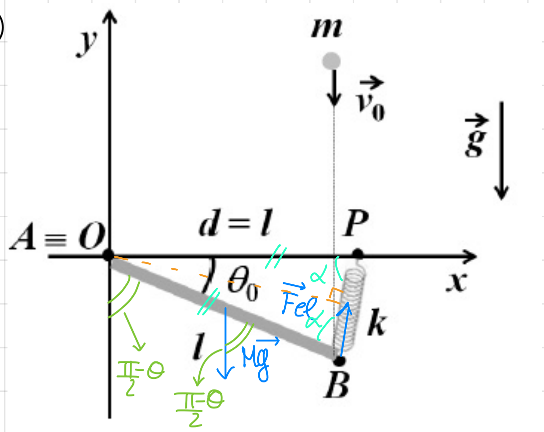
④ A distanza l_1 da B' ha V_1, mentre a distanza l_2 ha velocità V_2. Calcolare V_0 e μ_D

↳ Si ha che $\mathcal{L} = \Delta K$ → L'unica forza agente in questo caso è l'attrito, quindi possiamo scrivere le seguenti equazioni fissando lo O su B'.

↳ $\Delta K_{B' \to l_1} = \int_0^{l_1} -\mu_d mg\, dl \longrightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}V_{B'}^2 - \frac{1}{2}\cancel{m}V_{l_1}^2 = -\mu_d \cancel{m}g l_1 \longrightarrow V_{B'} = \sqrt{V_{l_1}^2 - 2\mu_D g l_1}$

↳ $\Delta K_{l_1 \to l_2} = \int_{l_1}^{l_2} -\mu_D mg\, dl \longrightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}V_{l_2}^2 - \frac{1}{2}\cancel{m}V_{l_1}^2 = -\mu_d \cancel{m}g(l_2 - l_1) \longrightarrow \mu_D = \frac{V_{l_1}^2 - V_{l_2}^2}{2g(l_2 - l_1)}$

⑥



Sbarra di lunghezza l e massa M incernierata con l'estremo A nel punto O (origine). Estremità B collegata a P ($\overline{OP} = l$) con una molla di costante K e lunghezza a riposo NULLA. L'asta è in equilibrio all'inizio

① Angolo θ_0 formato dall'asta IN EQUILIBRIO

↳ EQUILIBRIO → TRASLAZIONALE: $\sum \vec F = 0$
→ ROTAZIONALE: $\sum \vec \tau = 0$ ②

② $\sum \tau = \tau_{Fel} + \tau_{Mg}$

→ $\tau_{Fel} = \vec R \times \vec{Fel} = R\,F_{el} \sin\alpha$ → $2\alpha + \theta_0 = 180$ → $\alpha = 90 - \frac{\theta_0}{2}$

$= R\,F_{el} \sin\left(90 - \frac{\theta_0}{2}\right) = R\,F_{el}\cos\frac{\theta_0}{2} = l\,K\,2l\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}$

→ $\tau_{Mg} = \vec R \times M\vec g = \frac{l}{2} Mg \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{l}{2} Mg\cos\theta_0$

$$2Kl^2 \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_0}{2} - \frac{l}{2}Mg\cos\theta_0 = Kl^2\sin\theta_0 - \frac{l}{2}Mg\cos\theta_0 = Kl^2\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} - \frac{l}{2}Mg = 0$$

$$\rightarrow Kl^{\cancel{2}}\tan\theta_0 = \frac{\cancel{l}}{2}Mg \rightarrow \tan\theta_0 = \frac{Mg}{2Kl}$$

② Pallina di massa $\frac{M}{3}$ urta la sbarretta nel punto di congiunzione tra asta e molla con velocità V_0 verso le y negative. L'urto è completamente anelastico

Grandezze da discutere la conservazione → Quantità di moto a.
→ Momento angolare b.
→ Energia meccanica c.

c. L'energia NON si conserva perché l'urto è ANELASTICO

a. La quantità di moto NON si conserva perché sono presenti forze impulsive (Reazione Vincolare)

b. Il momento angolare si CONSERVA scegliendo il vincolo come polo in quanto NON ci sono forze esterne IMPULSIVE che lo fanno variare durante l'urto. Le uniche forze impulsive (reazione vincolare) NON hanno braccio e di conseguenza momento

③ Velocità angolare W_0 DOPO l'urto

↳ Conservazione momento angolare: $L_{0i} = L_{0f}$ → $L_{0i} = -m\,l\,V_0\cos\theta_0$
→ L_{0f} = La velocità V_0 "diventa" ω in quanto pallina ed asta si muovono insieme

↓

$L_{0f} = I\omega_0 + l \cdot m l \omega_0 = \frac{Ml^2}{3}\omega_0 + l^2 m \omega_0$

Conservazione: $-m l V_0\cos\theta_0 = \frac{Ml^2}{3}\omega_0 + l^2 m\omega_0$ → $\omega_0 = -\left(\frac{1\,\cancel{3m}}{\cancel{6}_2\,\cancel{m}}\right)\frac{V_0}{l}\cos\theta_0 = \frac{-1V_0}{2\,l}\cos\theta_0$

④ Impulso del perno durante l'urto

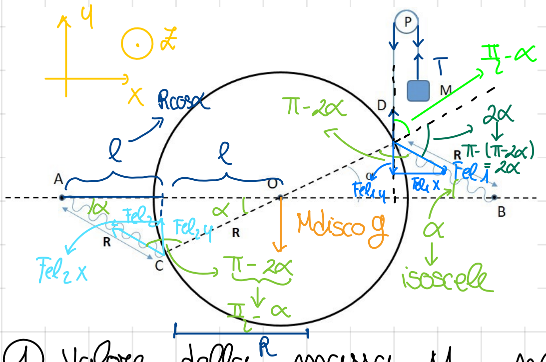
↳ $\vec I = \vec P_{fin} - \vec P_i$ → $\vec P_{fin} = M\vec\omega_0 \times \frac{\vec l}{2} + m\vec\omega_0 \times \vec l$
→ $\vec P_{in} = -mV_0\,\hat y$

$$\vec P_{fin} = 3m\vec\omega_0 \times \frac{\vec l}{2} + m\vec\omega_0 \times \vec l = \frac{5}{2}m(\vec\omega_0 \times \vec l) = -\frac{5}{2}\left(\frac{3m}{3m+M}\right)\frac{V_0}{l}\cos\theta_0\,(\hat z \times \vec l)$$

Calcolo di $\hat z \times \vec l = \hat z \times l(\hat x\cos\theta_0 - \hat y\sin\theta_0) = l(\hat y\cos\theta_0 + \hat x\sin\theta_0)$

$$\vec P_{fin} = -\frac{5}{2}m\left(\frac{3m}{3m+M}\right)\frac{V_0}{\cancel{l}}\cos\theta_0\,\cancel{l}(\hat y\cos\theta_0 + \hat x\sin\theta_0) \xrightarrow{\text{svolgendo i calcoli}} \vec I = -\left(\frac{5}{6}\hat x + \frac{1}{2}\hat y\right) N \times s$$

⑦ ⚠ ESAME del 29/06/18



densità ρ legno, raggio R e spessore d ruota intorno ad asse orizzontale passante per centro O
Molle con $l_0 = 0$ e $K_{BD} = K$, $K_{AC} = 2K$
Filo esercita forza verticale in D.
Sistema in equilibrio con $\alpha = \frac{\pi}{6}$ e lunghezza molle $= R$. Massa M appesa al filo e carrucola

① Valore della massa M nella configurazione di equilibrio

1ª equazione cardinale $\to \Sigma F_x = 0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \to \Sigma F_y = 0$

2ª equazione cardinale: $\Sigma \tau = 0$

Sul corpo M si ha che $\Sigma F = 0$ e quindi che $Mg - T = 0$, da cui $T = Mg$

Sul disco possiamo utilizzare $\Sigma \tau = 0$

Forze che hanno momento: T, Fel_1, Fel_2

$$\Sigma \tau = \underbrace{\vec{OD} \times \vec{T}}_{\text{uscente}: +} + \underbrace{\vec{OD} \times \vec{Fel_1}}_{\text{entrante}: -} + \underbrace{\vec{OC} \times \vec{Fel_2}}_{\text{entrante}: -} = R Mg \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}_{\cos\alpha} \hat{z} - R \overset{KR}{Fel_1} \operatorname{sen}(\pi - 2\alpha)\hat{z} - R \overset{2KR}{Fel_2} \operatorname{sen}(\pi - 2\alpha)\hat{z} = 0$$

$$= (\cancel{R} Mg \cos\alpha - R^{\cancel{2}} K \operatorname{sen} 2\alpha - 2KR^{\cancel{2}} \operatorname{sen} 2\alpha)\hat{z} = 0 \longrightarrow M = \frac{3KR \operatorname{sen} 2\alpha}{g\cos\alpha} = \frac{6KR \operatorname{sen}\alpha \cancel{\cos\alpha}}{g\cancel{\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{6KR \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{g} = \frac{3KR}{g}$$

② A t=0 il filo viene tagliato. Calcolare l'accelerazione angolare $\dot{\omega}$ e la reazione vincolare $\vec{R_0}$, subito dopo il taglio del filo

Per le due equazioni cardinali si ha

$\to \vec{R_0} + \vec{Fel_1} + \vec{Fel_2} + M_{disco}\vec{g} = M\underbrace{\vec{a}_{cm}}_{0:\ \text{sta fermo}} = 0 \qquad$ 1ª equazione cardinale

$\to \vec{\tau}_{Fel_1} + \vec{\tau}_{Fel_2} = \frac{dL_0}{dt} = I\vec{\dot{\omega}} \qquad$ 2ª equazione cardinale

Dalla 2ª equazione cardinale si ha

$\to \vec{OD} \times \vec{Fel_1} + \vec{OC} \times \vec{Fel_2} = I\vec{\dot{\omega}} \longrightarrow (-RKR\operatorname{sen}2\alpha - R2KR\operatorname{sen}(2\alpha))\hat{z} = I\dot{\omega}\hat{z}$

$$\longrightarrow \dot{\omega} = \frac{-3KR^2 \operatorname{sen}2\alpha}{I} = \frac{-6KR^2 \operatorname{sen}2\alpha}{M_{disco}R^2} = \frac{-6K\operatorname{sen}2\alpha}{\rho\pi R^2 d}$$

$M_{disco} = \rho \cdot \pi R^2 \cdot d$

Dalla 1ª equazione cardinale si ha

$\to$ Su x: $\vec{R_{0x}} + \vec{Fel_1}x + \vec{Fel_2}x = 0 \longrightarrow R_{0x} - 2KR\cos\alpha + KR\cos\alpha = 0 \qquad$ a.

$\to$ Su y: $\vec{R_{0y}} + \vec{Fel_1}y + \vec{Fel_2}y + M_{disco}\vec{g} = 0 \longrightarrow R_{0y} - KR\operatorname{sen}\alpha - 2KR\operatorname{sen}\alpha - M_{disco}\, g = 0 \qquad$ b.

a. $R_{0x} = KR\cos\alpha$

b. $R_{0y} = 3KR\operatorname{sen}\alpha + \rho\pi R^2 d g$

③ Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni T intorno alla posizione di equilibrio del sistema molle-disco, quando il filo è tagliato.

Intanto calcoliamo la posizione di equilibrio

1ª Equazione cardinale: $\vec{R_0} + \vec{Fel_1} + \vec{Fel_2} + M_{disco}\vec{g} = 0$

2ª Equazione cardinale: $\vec{\tau}_{Fel_1} + \vec{\tau}_{Fel_2} = 0$

Dalla 1ª equazione cardinale si ha

$\vdash x: R_{Ox} - F_1el + F_2el = 0 \longrightarrow R_{Ox} = F_1el - F_2el$

$\vdash y: R_{Oy} + \cancel{2KR \operatorname{sen}\alpha} - \cancel{KR\operatorname{sen}\alpha} - M_{disco}g = 0 \longrightarrow R_{Oy} = M_{disco}\, g$

↳ Nella posizione di equilibrio le molle sono ORIZZONTALI

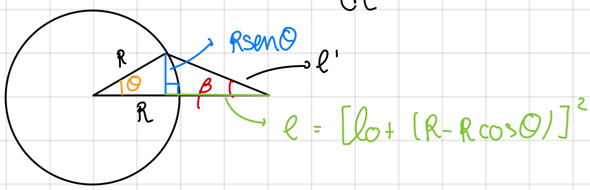
Posizione della molla in equilibrio: $l_{eq} = 2R\cos\alpha - R = R(2\cos\alpha - 1)$

$R_{Ox} = Kl_{eq} - 2Kl_{eq} = -Kl_{eq} = -KR(2\cos\alpha - 1)$

$R_{Oy} = M_{disco}\, g$

Nel caso di piccoli spostamenti l'energia si conserva

$\mathcal{E} = \text{COSTANTE} \longrightarrow \dfrac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$



$l'^2 = R^2 \underbrace{\operatorname{sen}^2\theta}_{\theta^2} + [l_{eq} + (R - R\underbrace{\cos\theta}_{\sim 1})]^2 = l_{eq}^2 + R^2\theta^2$ (con $(R - R\cos\theta) \to 0$)

$\mathcal{E} = K + U = \dfrac{1}{2} M\underbrace{V_{cm}^2}_{0} + \dfrac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + \dfrac{1}{2} K(l_{eq}^2 + R^2\theta^2) + \dfrac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}K(l_{eq}^2 + R^2\theta^2) = \dfrac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + \dfrac{3}{2}K(l_{eq}^2 + R^2\theta^2)$

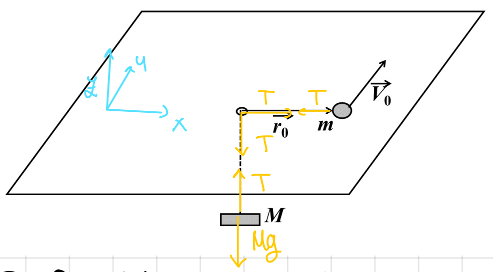
O: il sistema è vincolato nell'origine

Si ha che $\dfrac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 \longrightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + \dfrac{3}{2}K(l_{eq}^2 + R^2\theta^2)\right) = I\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} + 3R^2\theta\cancel{\dot{\theta}}K \longrightarrow -\dfrac{3KR^2\theta}{I} = \ddot{\theta}$

$\ddot{\theta}(t) + \dfrac{3K R^2\theta(t)}{I} = 0 \longrightarrow \lambda^2 + \dfrac{3KR^2}{I} = 0 \longrightarrow \lambda = \underbrace{R\sqrt{\dfrac{3K}{I}}}_{\omega}\, i \longrightarrow A\cos(\omega t + \phi)$

$\omega = \sqrt{\dfrac{3KR^2}{I}} = \sqrt{\dfrac{6KR^2}{M_{disco}R^2}} = \sqrt{\dfrac{6K}{M_{disco}}}$ $\qquad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M_{disco}}{6K}} = \pi\sqrt{\dfrac{2}{3}\dfrac{M_d}{K}}$

8



Disco di massa m attaccato con corda ideale a corpo di massa M.
A t=0 il disco si trova ad una distanza r_0 dal foro ed ha velocità V_0 a 90° con la tensione del filo.

① Quantità conservate

- ① Quantità di moto del disco: Si conserva SOLO SE avviene un moto circolare uniforme in quanto in quel caso V cambia solo di direzione
- ② Quantità di moto del corpo di massa M: Non si conserva perché il corpo potrebbe scendere
- ③ Energia del sistema: L'unica forza non conservativa è la tensione della corda che però, essendo inestensibile, non fa lavoro
- ④ Momento angolare rispetto al buco: Si conserva perché l'unica forza che ha momento è la tensione che quindi non ha momento perché è parallela alla congiungente foro-disco

② V_0 minima perché il disco faccia un moto circolare uniforme

Applichiamo la II legge di Newton al disco

↳ $-\vec{T} = m\vec{a}_c = -\dfrac{mV_0^2}{r_0}\hat{r}_0 \longrightarrow \vec{T} = \dfrac{mV_0^2}{r_0}\hat{r}_0$ $\quad$ a.

Applichiamo la II legge di Newton al corpo di massa M. Se il disco si muove di moto circolare uniforme, M è FERMO, quindi si ha $T - Mg = 0 \longrightarrow T = Mg$

Da a. si ha $Mg = \dfrac{mV_0^2}{r_0} \longrightarrow V_{0\,min} = \sqrt{\dfrac{Mg r_0}{m}}$

③ Distanza foro-disco $\neq$ costante $= r$. $\omega(r) =$ velocità angolare quando è a distanza r dal foro. Determinare la relazione tra ω ed r

↓

Il MOMENTO ANGOLARE è COSTANTE

$$\mathcal{L}(r) = \vec{r} \times m\vec{v}(r)$$

$$\hookrightarrow \vec{r} = r\hat{r} \longrightarrow v(r) = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \overbrace{\frac{dr}{dt}}^{\dot r}\cdot\hat{r} + \overbrace{r\underbrace{\frac{d\hat{r}}{dt}}_{\omega}}^{\vec\omega\times\vec r}$$

variazione di direzione di $\hat{r}$

↓

$$\mathcal{L}(r) = m\vec{r}\times(\dot{r}\hat{r} + \underbrace{\vec{\omega}\times\vec{r}}_{\text{ortogonale sia ad } \omega \text{ che ad } r}) = \overbrace{0}^{\hat r /\!/ \vec r} + mr\omega r\hat{\omega} = mr^2\vec{\omega} \longrightarrow \omega \text{ è diretta lungo } z$$

$$\mathcal{L}(0) = \vec{r_0}\times m\vec{v_0} = mr_0v_0\hat{z}$$

$$\mathcal{L}(0) = \mathcal{L}(r) \longrightarrow \cancel{m}r^2\vec{\omega} = \cancel{m}r_0v_0\hat{z} \Longrightarrow \vec{\omega} = \frac{r_0v_0}{r^2}\hat{z}$$

④ Distanza disco-foro compresa tra r_{min} ed r_{max}

Quantità conservata: Energia $\longrightarrow \mathcal{E} = K_m + K_M + U_M$

$K_m = \frac{1}{2}mV_m^2$

$K_M = \frac{1}{2}MV_M^2 \longrightarrow V_M = -\frac{d}{dt}\left((l-r)\hat{z}\right) = \dot{r}\hat{z}$

U_M: corda lunga $l \longrightarrow U_M = -Mg(l-r)$

$$V_m = \dot{r}\hat{r} + \vec{\omega}\times\vec{r} \longrightarrow V_m^2 = \dot{r}^2 + \omega^2r^2$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+\omega^2r^2) + \frac{1}{2}M(\dot{r})^2 - Mg(l-r) \longrightarrow \dot{r} = 0$$ nei minimi / massimi per il teorema di Fermat

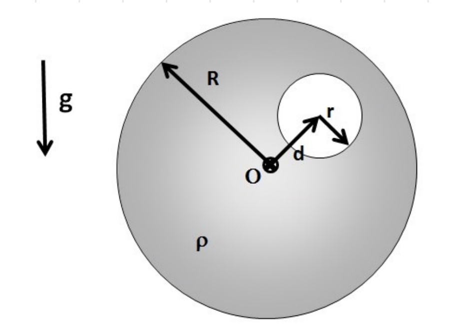
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\omega^2r^2 + Mgr^2 - Mgl = \frac{1}{2}m\frac{r_0^2v_0^2}{r^{\cancel{4}\,2}}\cdot\cancel{r^2} + Mgr^2 - Mgl$$

$\hookrightarrow$ Diverge a $+\infty$ se $r \longrightarrow 0$ oppure se $r \longrightarrow +\infty$

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_f \longrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - \cancel{Mgl} + Mgr_0 = \frac{1}{2}\frac{mr_0^2v_0^2}{r^2} + Mgr^2 - \cancel{Mgl}$$

$\hookrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - Mg(l-r_0)$

⑨



Cilindro di raggio R e spessore s con densità ρ

Foro di raggio r a distanza d dal centro

Immerso in campo gravitazionale e libero di ruotare intorno al proprio asse centrale.

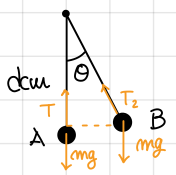
Quando il foro è in basso il cilindro ha velocità angolare ω.

① Frequenza delle piccole oscillazioni

$\hookrightarrow$ Il corpo è in equilibrio quando il disco è in alto (cdM in basso)

↓

Schematizzato come un pendolo:



L'energia si conserva, quindi si ha $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$

$$\mathcal{E} = K + U = K_{ROT} + U_{ROT} = \frac{1}{2}I_{sis}\omega^2 + \frac{1}{2}(m+M)\underbrace{V_{cm}^2}_{0} + Mg\,d_{cm}(1-\cos\theta)$$

Devo quindi determinare I_{sis} e d_{cm}

$\vdash d_{cm} \longrightarrow$ Massa Totale = Massa cilindro pieno + Massa rimossa (<0) $= \rho\pi S(R^2-r^2) = M_{TOT}$

$\hookrightarrow m_{pieno} = \rho\pi R^2 S$ $\quad \hookrightarrow m_{rim} = -\rho\pi r^2 S$

$$d_{cm} = \frac{0 + d\, m_{rim}}{M_{TOT}} = \frac{d\, m_{rim}}{M_{TOT}} = \frac{-d\cancel{\rho\pi} r^2 \cancel{S}}{\cancel{\rho\pi S}(R^2-r^2)} = \frac{\overset{\text{dal lato opposto}}{\ominus}\, d\, r^2}{(R^2-r^2)}$$

$\hookrightarrow I_{sis} = I_{pieno} + I_{vuoto} + m_{rim} d^2 = \frac{m_{pieno} R^2}{2} + \frac{m_{rim} r^2}{2} + m_{rim} d^2$

Si ha che $\frac{dE}{dt} = 0$, quindi $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I_{sis}\dot\theta^2 + M g\, d_{cm}(1-\cos\theta)\right) = 0$

$\downarrow$

$$I_{sis}\dot\theta\ddot\theta + Mg\, d_{cm} \underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{\theta \text{ per } \theta \text{ piccoli}} \dot\theta = I_{sis}\cancel{\dot\theta}\ddot\theta + Mg\, d_{cm}\theta\cancel{\dot\theta} = 0 \longrightarrow \ddot\theta = -\underbrace{\frac{Mg\, d_{cm}}{I_{sis}}}_{\omega^2}\theta_0$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{sis}}{Mg\, d_{cm}}}$$

② Velocità angolare del cilindro quando il foro è in alto

Anche in questo caso l'energia si conserva

$\vdash E_i = \frac{1}{2} I_{sis}\omega^2 + M_{TOT}\, g\, d_{cm}(1-\cos\theta_0)$, π : è dal lato opposto di d_{cm}

$\hookrightarrow E_f = \frac{1}{2} I_{sis}\omega'^2 + M_{TOT}\, g\, d_{cm}(1-\cos\theta_f)$, 0 : è SOPRA d_{cm}

$\theta_f \to 0$

$$\frac{1}{2} I_{sis}\omega'^2 = \frac{1}{2} I_{sis}\omega^2 + 2M_{TOT}\, g\, d_{cm} \longrightarrow \omega' = \sqrt{\left(\omega^2 + \frac{4M_{TOT}\, g\, d_{cm}}{I_{sis}}\right)}$$

③ Momento angolare minimo per far fare una rotazione completa a partire dall'equilibrio stabile

$\downarrow$

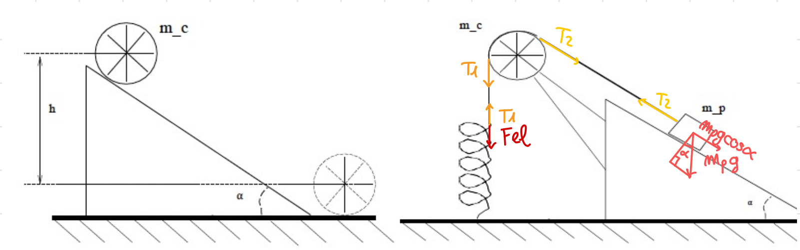
Deve superare la metà, ovvero $\theta = \pi$

$\vdash E_i = \frac{1}{2} I_{sis}\omega_i^2$

$\hookrightarrow E_f = Mg\, d_{cm}(1-\cos\theta_f)$, $\theta_f \to \pi$

$$\longrightarrow \omega_i > \sqrt{\frac{4M_{TOT}\, g\, d_{cm}}{I_0}} \longrightarrow L_{min} > I_{sis}\sqrt{\frac{4M_{TOT}\, g\, d_{cm}}{I_0}}$$

⑩



Ruota di raggio R e massa m_C raggiunge la velocità V scendendo di una quota h su un piano inclinato di α.

① Momento di inerzia della ruota rispetto all'asse passante per il suo centro

$\hookrightarrow$ L'energia si conserva in quanto si ha un moto di puro rotolamento

$E_i = E_f$ $\vdash E_i = m_C h g$

$\hookrightarrow E_f = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m_C V^2 = \frac{1}{2}\frac{IV^2}{R^2} + \frac{1}{2} m_C V^2$

$$\longrightarrow I = m_C R^2\left(\frac{2gh}{V^2} - 1\right)$$

② Lunghezza della molla quando il sistema è in equilibrio

In questo caso la ruota può ruotare senza attrito intorno al perno orizzontale fisso passante per il suo centro.

Filo collegato a massa m_P NON slitta sulla ruota ed è collegato anche ad una molla di costante k.

Se il sistema è in equilibrio, sulla ruota si ha

$\Sigma\tau = 0$, $\Sigma F = 0$

Sulla molla si ha che $\Sigma F = 0$

Sulla massa si ha che $\Sigma F = 0$

Iniziamo dal corpo di massa M

$\Sigma F = 0 \longrightarrow Mp\,sen - T_1 = 0 \longrightarrow T_1 = mp\,sen\,\alpha g$

Continuiamo con la ruota

$\Sigma \tau = 0 \longrightarrow \tau_{T1} + \tau_{T2} = RT_1 - RT_2 = 0 \longrightarrow \cancel{R}(T_1 - T_2) = 0 \longrightarrow mpg\,sen\alpha = T_2 \longrightarrow T_2 = -mpg\,sen\,\alpha$

Finiamo con la molla

$\Sigma F = 0 \longrightarrow +K\Delta\ell - mpg\,sen\alpha = 0 \longrightarrow \Delta\ell = +\dfrac{mpg\,sen\,\alpha}{K}$ $\quad -\dfrac{\dot{y}}{R}$

③ Periodo delle oscillazioni del sistema $\quad \omega$ NEGATIVA perché ruota in senso ORARIO

L'energia si CONSERVA: $\mathcal{E} = K_{sis} + U_{sis} = \dfrac{1}{2}mp\underbrace{v_p^2}_{\dot{y}} + \dfrac{1}{2}I\omega^2 + \dfrac{1}{2}K(y+\Delta\ell)^2 - mpgy\,sen\alpha$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mp\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\frac{\dot{y}^2}{R^2} + \frac{1}{2}K(y+\Delta\ell)^2 - mpgy\,sen\alpha\right) =$$

$\frac{1}{2}K(y+\Delta\ell)^2 \to \frac{1}{2}Ky^2 + Ky\Delta\ell + \frac{1}{2}K\Delta\ell$

$$= mp\dot{y}\ddot{y} + I\frac{\dot{y}\ddot{y}}{R^2} - mpg\dot{y}\,sen\alpha + Ky\dot{y} + K\dot{y}\Delta\ell = 0$$

Dall'equazione precedente si ha: $mp\cancel{\dot{y}}\ddot{y} + \dfrac{I}{R^2}\cancel{\dot{y}}\ddot{y} + K\cancel{\dot{y}}(y+\Delta\ell) - mpg\cancel{\dot{y}}\,sen\alpha = 0$

$$mp\ddot{y} + \frac{I}{R^2}\ddot{y} + K(y+\Delta\ell) - mpg\,sen\alpha = 0 \longrightarrow \left(mp + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{y} + K(y+\Delta\ell) - \underbrace{mpg\,sen\,\alpha}_{K\Delta\ell \text{ ad eq}} = 0$$

$$\left(mp + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{y} + Ky = 0 \longrightarrow \ddot{y} + \underbrace{\left(\frac{KR^2}{mpR^2 + I}\right)}_{\omega^2} y = 0$$

$\longrightarrow$ oscillatore armonico: ω^2

Periodo: $\sqrt{\dfrac{mpR^2 + I}{KR^2}} = 1.9\,s$

④ Valori massimi tensioni lato molla T_{molla} e lato peso T_{peso}

Dalla parte della molla si ha che $T_{molla} - F_{el} = 0 \longrightarrow$ la tensione è massima quando la molla si ferma

$F_{el} = K(y+\Delta\ell)$

$y(t) = A\cos(\omega t + \phi) \longrightarrow y(0) = 0$ posizione di equilibrio: $A = \Delta\ell$, $\phi = \pi/2$

$y(t) = \Delta\ell\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \dot{y}(t) = -\omega\Delta\ell\,sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \ddot{y}(t) = -\omega^2\Delta\ell\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

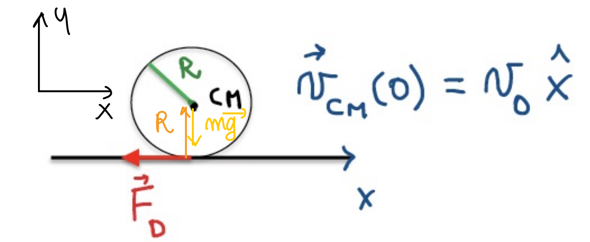
$T_{molla} = K(y+\Delta\ell) = K(y_{max} + \Delta\ell) = K\cdot 2\Delta\ell = 2\,mpg\,sen\,\alpha$

$y_{max} \to \Delta\ell$ perché sen max $= 1$

T peso: $\underbrace{mpg\,sen\alpha - T_{peso}}_{\Sigma F} = \underbrace{mp\ddot{y}}_{ma} \longrightarrow \underbrace{mpg\,sen\alpha}_{K\Delta\ell} - T_{peso} = -\omega^2\Delta\ell\,mp$

$T_{peso} = K\Delta\ell + mp\,\omega^2\Delta\ell$

⑪



$\longrightarrow$ Cilindro di massa M e raggio R appoggiato su un piano orizzontale scabro con μ_D. A $t = 0$ viene impressa v_0 lungo $\hat{x}$ al cdm, mentre ω è NULLA

① V_{cm} in funzione del tempo

Equazioni cardinali: Per V_{cm}: $\Sigma\vec{F} = M\vec{a}$ $\quad$ Su x: $-F_d = Ma_x$; Su y: $-Mg + R = 0$: FERMO $\longrightarrow R = mg$

Per ω: $\Sigma\tau = I\alpha = \dfrac{MR^2}{2}\alpha = \dfrac{MR^2}{2}\dot{\omega}$

Polo: CM

Unica forza che ha momento: F_D: $\vec{F_D} \times \vec{R} = \dfrac{MR^2}{2}\alpha \longrightarrow -F_D R = \dfrac{MR^2}{2}\vec{\alpha} \longrightarrow -\mu_D Mg R = \dfrac{MR^2}{2}\alpha$

$\hookrightarrow$ Momento su $\hat{z}$: $\cancel{+}\mu_D \cancel{M}g\cancel{R}\hat{z} = \dfrac{\cancel{M}R^{\cancel{2}}}{2}\alpha\,\hat{z} \longrightarrow \mu_D g = \dfrac{R}{2}\alpha \longrightarrow \alpha = \dfrac{2\mu_D g}{R}$

Legge velocità angolare: $\omega(t) = \underset{0}{\omega_0} + \frac{2\mu_D g}{R} t = \frac{2\mu_D g}{R} t$

Dalla prima equazione cardinale: $-F_D = M a_x \longrightarrow M a_x = -\mu_D M g \longrightarrow a_x = -\frac{\mu_D \cancel{M} g}{\cancel{M}} = -\mu_D g$

↓

Legge velocità: $v(t) = v_0 - \mu_D g t \longrightarrow$ Moto uniformemente decelerato

② Intervallo necessario per verificare condizione di puro rotolamento

↳ Condizione di puro rotolamento: $v = \omega R$

↓

Devo trovare un istante di tempo t^* nel quale $v(t^*) = \omega(t^*) R$

$\omega(t^*) R = +\frac{2\mu_D g t^*}{\cancel{R}} \cancel{R} \longrightarrow 2\mu_D g t^* = v_0 - \mu_D g t^* \longrightarrow 3\mu_D g t^* = v_0 \longrightarrow t^* = \frac{v_0}{3\mu_D g}$

$v(t^*) = v_0 - \mu_D g t^*$

③ Lavoro compiuto dalla forza di attrito dinamico tra $t=0$ e $t=t^*$

↳ UNICA FORZA che COMPIE LAVORO: $\mathcal{L} = \Delta K$

↓

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} M V_{cmf}^2 + \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} M V_{cmi}^2 = \frac{1}{2} M V_{cmf}^2 + \frac{1}{2} \frac{M\cancel{R^2}}{2} \frac{V_{cmf}^2}{\cancel{R^2}} - \frac{M V_{cmi}^2}{2}$$

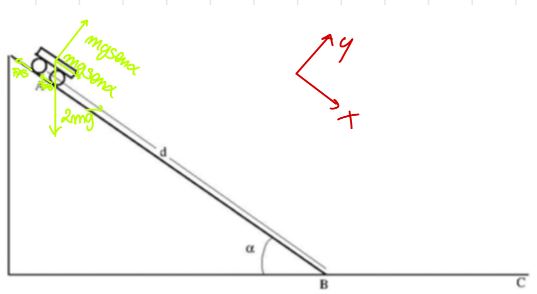
$\omega = \frac{V}{R}$

$$= \frac{3}{4} M V_{cmf}^2 - \frac{M V_{cmi}^2}{2}$$

Calcolo $V_{cm}(t^*) \longrightarrow V_{cm}(t^*) = V_{cmi} - \mu_D g t^* = V_{cmi} - \cancel{\mu_D g} \frac{V_{cmi}}{3\cancel{\mu_D g}} = V_{cmi} - \frac{V_{cmi}}{3} = \frac{2}{3} V_{cmi} = V_{cmf}$

↳ $\Delta K = \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} M \cdot \frac{\cancel{4}}{9_3} V_{cmi}^2 - \frac{M V_{cmi}^2}{2} = \frac{1}{3} M V_{cmi}^2 - \frac{M V_{cmi}^2}{2} = \frac{-1}{6} M V_{cmi}^2$

(12)



Carrello schematizzato con 4 ruote di raggio R e massa $m/4$ e pianale di massa m

Piano inclinato di angolo α e con attrito

① Velocità e accelerazione con cui arriva in fondo al piano v, a + accelerazione cm in assenza di attrito

Essendo un moto di puro rotolamento, per trovare la velocità posso sfruttare la conservazione dell'energia. Essendo che il termine dell'energia potenziale del carrello con $d \operatorname{sen}\alpha$ si ripete, lo ometto.

Avrò: $\cancel{4}\frac{m}{\cancel{4}} g\, d \operatorname{sen}\alpha + mgd \operatorname{sen}\alpha = \underbrace{4 \cdot \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \cancel{4} \frac{1}{2} \frac{m}{\cancel{4}} V^2}_{\text{Moto di puro rotolamento}} + \frac{1}{2} m v^2$

Calcolo $I_0 \longrightarrow$ Le ruote sono dischi, quindi $I_0 = \frac{mR^2}{8}$

↳ Sostituendo: $2mgd \operatorname{sen}\alpha = \frac{mR^2\omega^2}{2} + mV^2$ ↘ Moto di puro rotolamento: $\omega = \frac{V}{R}$

↓

$2mgd \operatorname{sen}\alpha = \frac{m\cancel{R^2}}{4} \frac{V^2}{\cancel{R^2}} + mV^2 \longrightarrow \cancel{2mgd \operatorname{sen}\alpha} = \frac{5}{4} mV^2 \longrightarrow V = \sqrt{\frac{8gd \operatorname{sen}\alpha}{5}} = 8.9\ m/s$

Accelerazione con cui arriva in fondo

1ª equazione cardinale: $\Sigma F_x = m a_x \longrightarrow$ È l'unica che ci interessa in quanto abbiamo che il corpo si muove proprio lungo x

↓

$2mg \operatorname{sen}\alpha - 4F_{as} = 2ma$

2ª equazione cardinale: $\Sigma \tau = I\alpha \longrightarrow$ Applico questa equazione a ciascuna ruota, ponendo il polo nel suo centro di massa

Essendo che siamo nel moto di puro rotolamento, potrò scrivere $\alpha = \frac{a}{R}$, ma in questo caso la ruota, ruotando in senso orario, avrà $\alpha < 0$ ed $a > 0$, quindi $\alpha = -\frac{a}{R}$

Avremo quindi $\cancel{-}RF_{AS} = \cancel{-}I_0 \frac{a}{R} \longrightarrow \cancel{R}F_{AS} = \frac{m}{4}\frac{R^{\cancel{2}}}{2}\frac{a}{\cancel{R}} \longrightarrow F_{AS} = \frac{ma}{8}$

$2\cancel{m}g\operatorname{sen}\alpha - \cancel{4}\cdot\frac{\cancel{m}a}{\cancel{8}2} = 2\cancel{m}a \longrightarrow 4g\operatorname{sen}\alpha - a = 4a \longrightarrow a = \frac{4}{5}g\operatorname{sen}\alpha = 4\,m/s^2$

Accelerazione senza attrito

$\Sigma F = 2ma$ perché le ruote non possono girare a causa dell'assenza di attrito

$\downarrow$

$\cancel{2m}g\operatorname{sen}\alpha = \cancel{2m}a \longrightarrow a = g\operatorname{sen}\alpha = 5\,m/s^2$

② Sul piano il carrello viene frenato con un momento frenante M_f nel tempo Δt. Determinare M_f supponendo che il moto sia di puro rotolamento.

In questo caso l'accelerazione α sarà positiva, quindi in senso antiorario. Possiamo quindi scrivere che $\alpha = -\frac{a}{R}$, in quanto invece a sarà positiva

Abbiamo: $\Sigma \tau = I\alpha = -I\frac{a}{R} \longrightarrow -RF_{AS} + \frac{M_{fren}}{4} = -I\frac{a}{R} \longrightarrow -4RF_{AS} + M_{fren} = -4I\frac{a}{R}$

Ho diviso per 4 in quanto questo momento si distribuisce sulle 4 ruote

Devo ricalcolare anche F_{AS} applicando la I cardinale al sistema

$\hookrightarrow \Sigma F_x = ma_x \longrightarrow$ Anche in questo caso l'unica accelerazione che ci interessa è quella su $\hat{x}$

$\downarrow$

$-\cancel{4}^{2} F_{as} = \cancel{2}ma \longrightarrow F_{AS} = -\frac{ma}{2}$

$-4RF_{AS} + M_{fren} = -4I\frac{a}{R} \longrightarrow -\cancel{4}^{2}R\left(-\frac{ma}{\cancel{2}}\right) + M_{fren} = -\frac{4Ia}{R} \longrightarrow 2maR + M_{fren} = -\frac{4Ia}{R}$

$I = \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{4}R^2 \longrightarrow 2maR + M_{fren} = -\cancel{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{\cancel{4}}R^{\cancel{2}}\cdot\frac{a}{\cancel{R}}$

$\downarrow$

$2maR + M_{fren} = -\frac{maR}{2} \longrightarrow 2maR + \frac{maR}{2} = -M_{fren} \longrightarrow \frac{5}{2}maR = -M_{fren}$

$\longrightarrow a = -\frac{2}{5}\frac{M_{fren}}{mR}$: COSTANTE : $a(t) = -\frac{2}{5}\frac{M_{fren}}{mR}$

$0 = V_0 - \frac{2}{5}\frac{M_{fren}}{mR}\Delta t \longrightarrow \frac{2}{5}\frac{M_{fren}}{mR}\Delta t = V_0 \longrightarrow M_{fren} = \frac{5}{2}\frac{V_0 mR}{\Delta t} = 6.7\,Nm$

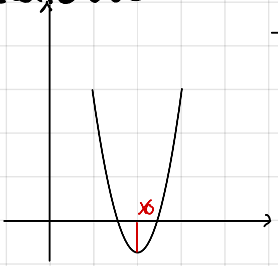
③ Lavoro forza frenante $\mathcal{L}_{fren}$

Essendo che solo la forza frenante fa lavoro, posso scrivere $\mathcal{L} = \Delta K = \overset{0}{K_f} - K_i = -\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}m\cdot V_0^2$

$\mathcal{L}_{fren} = -mV_0^2 = 792.1\,J$

Il moto oscillatorio

→ Equilibrio:



→ Intorno al punto di equilibrio vi sono forze che riportano il corpo in posizione di equilibrio
↳ EQUILIBRIO STABILE
↓
Legge di Hooke: $F_{el} = -Kx \Longrightarrow -Kx = ma_x \longrightarrow a_x = -\frac{K}{m}x$

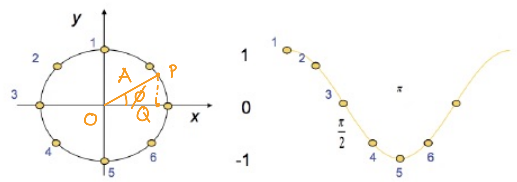
→ Moto PERIODICO: Il movimento si ripete ad intervalli regolari
├→ FREQUENZA: Oscillazioni compiute in un secondo (Hz)
└→ PERIODO: Tempo impiegato per compiere un'oscillazione completa
↓
Moto ARMONICO: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$ $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

→ $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ (fase del moto; costante di fase)
→ $v(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$
→ $a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$

→ Periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$
→ Frequenza $f = \frac{\omega}{2\pi}$
↓
Non dipendono da A e ϕ ma solo da m e K

↓
Ampiezza massima delle oscillazioni: $|x_{max}| = A$
Velocità massima: $|v_{max}| = \omega A$
Accelerazione massima: $|a_{max}| = \omega^2 A = \omega^2 |x_{max}|$
↳ L'ampiezza A e la fase ϕ dipendono dalle condizioni iniziale

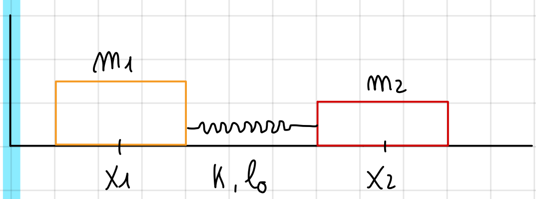
→ Moto CIRCOLARE
↳ La proiezione su di un asse del moto circolare uniforme su di una circonferenza di raggio A e velocità angolare ω descrive un MOTO ARMONICO



→ Circonferenza di raggio A: Al punto P sulla circonferenza (individuato dal vettore OP) corrisponde la proiezione Q su X. L'angolo ϕ è quello che c'è tra il raggio OP e X. → Posizione di riferimento su cerchio di riferimento
↓
$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ → Arcina di P e Q calcolata con $\widehat{OPQ}$
↓
Da ciò si ricava che Q si muove tra i limiti $x = -A$ ed $x = A$ e la velocità ω di P è uguale alla pulsazione ω di Q perché il tempo impiegato da P a percorrere il cerchio di riferimento è lo stesso impiegato da Q per percorrere il tratto da $x = -A$ a $x = A$. Inoltre ϕ corrisponde all'angolo iniziale formato da OP con X ed il raggio A corrisponde all'ampiezza del moto armonico di Q.
↓
Si ha che $v_P = A\omega$, la cui componente x è data da $-\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) = v_Q$. Lo stesso può essere applicato anche all'accelerazione

→ La MASSA RIDOTTA
↳ μ = Massa ridotta → "Trasforma" un sistema di 2 corpi che oscillano e si muovono in un corpo che fa un moto armonico con una molla attaccata al muro
↓
$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \xrightarrow{1 = \frac{m_1}{m_1} \gg \frac{m_2}{m_1}} \frac{m_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = m_2$$

Esempio



$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -K\underbrace{(x_1 - x_2 - \ell)}_{z} \longrightarrow \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{-K}{m_1}(x_1 - x_2 - \ell)$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = K\underbrace{(x_1 - x_2 - \ell)}_{z} \longrightarrow \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{K}{m_2}(x_1 - x_2 - \ell)$$

$z = x_1 - x_2 - \ell \longrightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\left(\frac{K}{m_1} + \frac{K}{m_2}\right) z = -\frac{K}{\mu} z = -\omega^2 z$

$\mu \longrightarrow$ massa ridotta sistema

→ Energia nel moto armonico

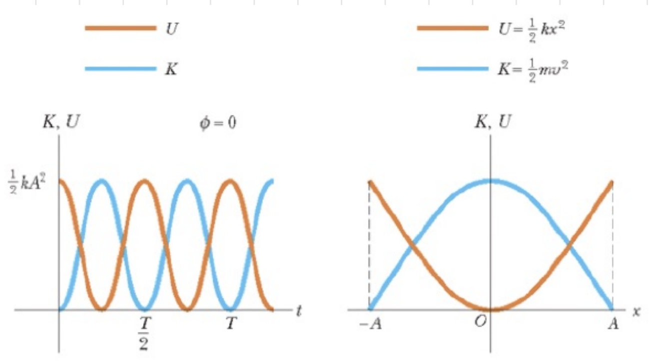
→ POTENZIALE: $U = \frac{1}{2} Kx^2 = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$

→ CINETICA: $K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi)$

↓

MECCANICA: $E = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi)$

$= \frac{1}{2} KA^2$, ricordando che $\omega^2 = \frac{K}{m}$



→ Moto approssimativamente armonico (Energia potenziale tra atomi di una molecola)

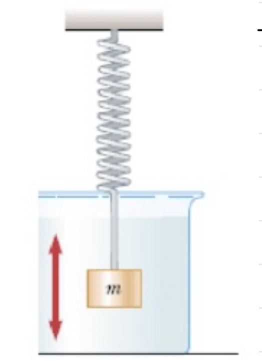
↳ Atomo alla posizione di equilibrio vale che $U(x) \simeq U(x_0) + (x - x_0)\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \left.\frac{d^2 U}{dx^2}\right|_{x_0} + \dots$

↓

in $x = x_0$ si ha che $\frac{dU}{dx} = 0$. Ponendo $x' = x - x_0$, $U' = U - U(x_0)$ si ha $U'(x') \simeq \frac{1}{2} K' x'^2$,

con $K' = \left.\frac{d^2 U}{dx^2}\right|_{x_0}$

→ Le OSCILLAZIONI SMORZATE



⟶ Si hanno oscillazioni smorzate se è presente una forza frenante del tipo $F = -bv$

↓

Da $\Sigma F = ma$ si ha $-bv - Ky = ma \longrightarrow m\frac{d^2 y}{dt^2} + Ky + b\frac{dy}{dt} = 0$

Soluzione nella forma $y(t) = e^{\lambda t}$, con λ complesso

↳ $y(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi)$

Si ha che $\omega = \sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ con $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

3 TIPOLOGIE di SMORZATURA

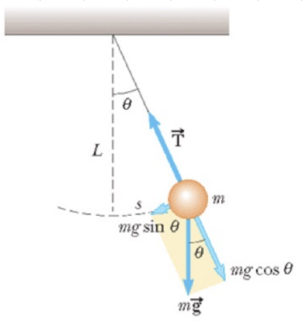
→ Se $b/2m < \omega_0$ si ha un' oscillazione smorzata

→ Se $b/2m = \omega_0$ si ha uno smorzamento critico

→ Se $b/2m > \omega_0$ si ha un'oscillazione sovrasmorzata

→ Esercizi di esempio

① Pendolo semplice



→ $F = ma = m\ell\alpha = -mg\,\text{sen}\theta$ → Forza TANGENZIALE (di RICHIAMO)

$\tau = I\alpha = -mg\ell\,\text{sen}\theta$

↓

Per θ molto piccoli si ha che $\text{sen}\theta = \theta$ → $\theta < 10°$

↳ $\alpha = -\dfrac{mg\ell}{I}\theta = -\omega^2\theta$ → $\omega = \sqrt{\dfrac{mg\ell}{I}} = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$

Si ha che $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$

Conservazione dell'energia: $E = K + U = \dfrac{1}{2}mv^2 + mg\ell(1-\cos\theta)$

U=0 nel punto più basso

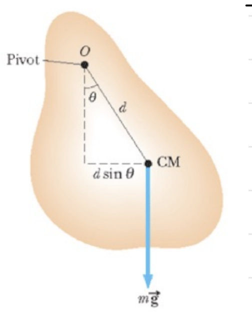
↓

$E = \dfrac{1}{2}m\left(\ell\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 + mg\ell(1-\cos\theta) \Longrightarrow \dfrac{dE}{dt} = 0$ (costante nel pendolo)

↳ $m\ell^2\dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + mg\ell\,\text{sen}\theta\dfrac{d\theta}{dt} = 0 \Longrightarrow \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + g\ell\,\text{sen}\theta = 0$

Essendo che $\alpha = d^2\theta/dt^2$ e che $\text{sen}\theta \simeq \theta$ si ottiene $\theta(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$

② pendolo fisico



→ Solido di massa M e forma arbitraria appeso e libero di ruotare in un punto diverso dal centro di massa

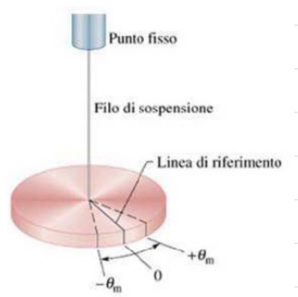
↳ L'asse di rotazione è fissato a distanza d dal centro di massa → La forza di gravità ha momento $mgd\,\text{sen}\theta$ in modulo

↓

Legge di Newton rotazionale: $\sum \tau_{est} = I\alpha = -Mgd\,\text{sen}\theta \overset{\text{sen}\theta\sim\theta}{=\!=} -Mgd\,\theta$

$-Mgd\theta = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}I$ → $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\dfrac{Mgd}{I}\right)\theta = -\omega^2\theta$ → $\omega = \sqrt{\dfrac{Mgd}{I}}$

③ pendolo di torsione



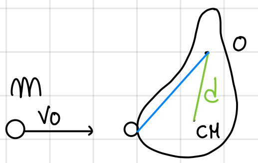
→ Disco con inerzia I fissato ad un supporto fisso con un filo
le rotazioni del disco inducono una rotazione del filo che, per piccoli angoli di torsione produce un momento torcente come reazione.

↳ $\tau = -K\theta$, dove K è detta costante di torsione del filo e dipende dal suo materiale

↓

Si ha $\sum\tau = I\alpha$ → $-K\theta = I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ → $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{K}{I}\theta$ → $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{I}}$

④ Urto con pendolo fisico



Massa M, inerzia I

① θmax
② T piccole oscillazioni

① Conservazione durante l'urto
- → $E_{mecc} \neq$ costante : urto anelastico
- → $\vec{P} \neq$ costante : Forze impulsive
- → $\vec{L_0}$ = costante → $L_{0i} = L_{0f}$
  - → $L_{0i} = \vec{r} \times m\vec{v_0}$
  - → $L_{0f} = I\omega$

Conservazione dopo l'urto
- → $\vec{P} \neq$ costante : il CM cambia velocità
- → $\vec{L_0} \neq$ costante : la forza peso è ESTERNA ed HA BRACCIO
- → E = costante → $E_i = E_f$: Non ci sono FNC che fanno lavoro

$E_i = \frac{1}{2} I' \omega^2$ (0 di U in CM) $E_f = mgh_{cm}$

② $T = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{Mgd}}$ perché è un pendolo FISICO

La forza gravitazionale

→ Legge di gravitazione universale: ogni punto materiale nell'universo attrae ogni altro punto materiale con una forza che è proporzionale al prodotto delle loro masse ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza reciproca

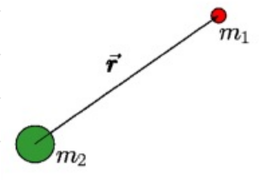
↳ $\vec{F} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}\,\hat{r}$ → Diretta lungo la congiungente e negativa perché va da m_2 a m_1 se $\hat{r}$ è diretto da m_1 ad m_2

↓

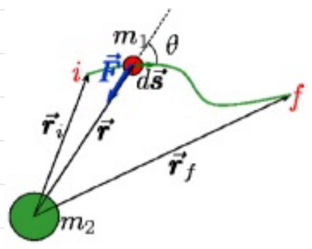
Per il terzo principio di Newton si ha che $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

↓

Per i corpi rigidi a simmetria sferica vale la legge precedente mentre per quelli non simmetrici si ha $\vec{F} = -\int \frac{Gm}{r^2}\,\hat{r}\,dM$



→ L'ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE



→ La forza gravitazionale è conservativa. Se il corpo 1 si sposta da i a f ed il corpo 2 sta fermo si avrà:

$$\mathcal{L} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s} = -Gm_1m_2\int_i^f \frac{\hat{r}\cdot d\vec{s}}{r^2} = -Gm_1m_2\int_{r_i}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -Gm_1m_2\left[\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_f}\right]$$

da cui $U(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r}$

↳ se uno dei due corpi è la terra si ha che $F_g = G\frac{M_T m}{R_T^2}$

↓

Da questa relazione si ha che $mg = G\frac{M_T m}{R_T^2}$ e quindi $g = G\frac{M_T}{R_T^2}$

↓

In generale, per un corpo a distanza h dalla superficie terrestre si ha che $r = R_T + h$ e $F_g = G\frac{M_T m}{r^2} = G\frac{M_T m}{(R_T+h)^2}$ → $\underset{(F_g)}{mg} = G\frac{M_T}{r^2}$

↓

L'energia potenziale per un corpo ad altezza h è data dalla seguente espressione

↳ $U(h) = -\frac{GM_T m}{R_T+h} = -\frac{GmM_T}{R_T\left(\frac{R_T}{R_T}+\frac{h}{R_T}\right)} \underset{h \ll R_T}{=} -\frac{GmM_T}{R_T}\left(1-\frac{h}{R_T}\right) = \underbrace{-\frac{GmM}{R_T}}_{U(0)} + \frac{GmM\,h}{R_T^2} = U(0) + mgh$, con $g = \frac{MG}{R_T^2}$

→ La VELOCITÀ di FUGA e l'ENERGIA

↳ Se $M \gg m$, con m massa di un corpo qualsiasi si ha che $\mathcal{E} = K+U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = cte$

↓

L'energia $\mathcal{E}$ può essere
- >0: Il corpo può allontanarsi indefinitamente
- <0: Essendo che $K \geq 0$ si ha $\mathcal{E} - U = K \geq 0$

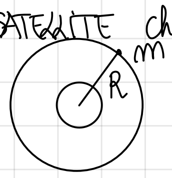
↓

$\mathcal{E} + \frac{GmM}{r} \geq 0 \Longrightarrow r \leq \frac{GmM}{|\mathcal{E}|}$ → r_{max} con $= GmM/|\mathcal{E}|$
↳ NON va OLTRE

↓

La velocità di fuga è la minima velocità che un corpo che parte da una distanza r dal centro di M deve avere per non risentire più della sua forza gravitazionale → Posto $K_i + U_i = K_f + U_f$, $U_f = 0$, $K_f \geq 0$ si ha $v_{fuga} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$

→ SATELLITE che percorre ORBITA CIRCOLARE



→ $\frac{\cancel{m}v^2}{\cancel{R}} = G\frac{\cancel{m}M}{R^{\cancel{2}}}$ → $v^2 = \frac{GM}{R}$: La forza centripeta mantiene il satellite in traiettoria

→ L'energia SI CONSERVA: $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R} = $ costante

↳ Dalle 2 relazioni si ha che $K = \frac{1}{2}U(r)$ e quindi $\mathcal{E} = \frac{1}{2}U(r) = -\frac{1}{2}mv^2$

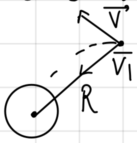
Si ha inoltre che $rv^2 = GM$ ed essendo $\omega = \frac{v}{r}$ e $T = \frac{2\pi}{\omega}$, da questo si ricava che $T^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$

Si ha che $\vec{\mathcal{L}}_0 = \vec{R} \times m\vec{v}$

Esempi

Se il satellite esplode ed $m/2$ ha velocità tangenziale, cade sulla terra?

Conservazione

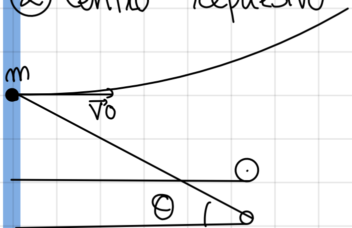


- $\to \vec{p} \neq$ costante
- $\to \mathcal{E} =$ costante: $\frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{GMm}{R_T} \longrightarrow$ NON è utile
- $\to \mathcal{L}_0$ = costante: $\vec{\mathcal{L}}_{0i} = \vec{R} \times m\vec{v}$; $\vec{\mathcal{L}}_{0f} = \vec{R}_T \times m\vec{v}_f \Longrightarrow R\cancel{m}v = R_T \cancel{m} v_f$
  - ↳ Basta combinare con la conservazione dell'energia

IN GENERALE: Per la conservazione di $\mathcal{L}_0$ si ha

↳ $RmV = r_{min}\, m V_{min}$
- $\to r_{min} < R_T$: URTA il suolo
- $\to r_{min} > R_T$: NON URTA il suolo

② Centro repulsivo



$F = \frac{K}{r^2}$ REPULSIVA $\longrightarrow U = \frac{K}{r}$

Si conservano momento angolare (forza radiale) ed energia (forza CENTRALE)

$\mathcal{E}$ = costante $\longrightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m V_m^2 + \frac{K}{r_{min}}$

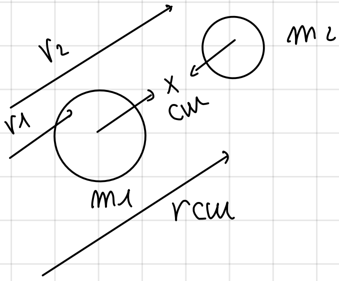
$\mathcal{L}_0$ = costante $\longrightarrow \vec{r}_\infty \times m\vec{v}_0 = r m v_0 b = r_{min} V_m$

↳ SOLO TANGENZIALE

→ PROBLEMA dei DUE CORPI

↳ corpi di massa m_1 ed m_2 che interagiscono con forze gravitazionali e sistema di riferimento con origine nel centro di massa $(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0)$

↳ prendendo $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$



$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \quad \text{e} \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

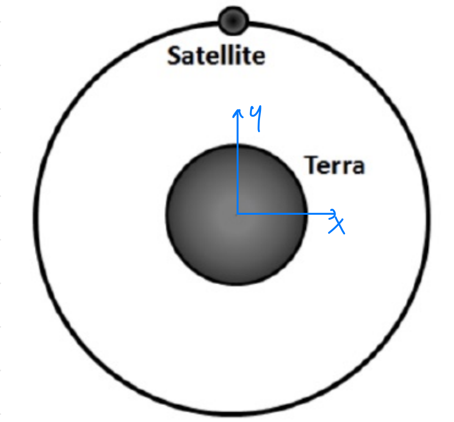
$$\vec{V}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{V} \quad \text{e} \quad \vec{V}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V}$$

$$K = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2 V^2}{(m_1+m_2)^2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} =$$

$$= \frac{1}{2}\mu v^2 \longrightarrow \mathcal{E} = K + U(r), \text{ quindi } \mathcal{E} = \frac{1}{2}\mu v^2 + U(r)$$

Momento angolare: $\mathcal{L}_0 = I_1\omega + I_2\omega = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\omega = \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{(m_1+m_2)^2} r^2\omega = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} r^2 \omega = \mu r^2 \omega$

① ⚠ ESERCIZIO di ESAME



$m_0 = 3t = 3 \cdot 10^3\ kg$
$m_1 = m_0/3 = 1000\ kg$
$m_2 = 2m_0/3 = 2000\ kg$
$V_{1s} = 200\ m/s$
$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$
$M_T = 5.97 \cdot 10^{24}\ kg$

① Velocità rispetto alla terra del frammento di maggiore massa V_{2t}
↳ Satellite geostazionario: si muove in modo SOLIDALE alla terra
Per le trasformazioni di Galileo abbiamo che $V_t = V_s + V_{trasc}$ ⟶ Velocità DEL SISTEMA di RIFERIMENTO
Essendo che la gravitazione è una FORZA CENTRALE si conservano sia l'energia che il MOMENTO ANGOLARE

Abbiamo che $V_{trasc} = W\, \underbrace{r_{sat}}$
INCOGNITA: dobbiamo determinare r_{sat} per un satellite geostazionario
Per determinare r_{sat} dobbiamo utilizzare il fatto che il satellite compie un MOTO CIRCOLARE intorno alla terra e quindi la forza di gravità deve fungere da accelerazione centripeta

$$+\frac{G\, m_0 M_T}{R_{sat}^2} = + m_0\, \underbrace{W^2}\, R_{sat}$$

⟶ È data dal periodo di rivoluzione del satellite intorno alla Terra
Essendo che il satellite è geostazionario, esso si muove contestualmente alla terra
↳ Abbiamo che $W = \frac{2\pi}{T}$ ⟶ $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ ⟶ $W = 7.27 \cdot 10^{-5}\ rad/s$
$T \rightarrow 24$ ore

$$G\, \cancel{m_0}\, M_T = \cancel{m_0}\, \frac{4\pi^2}{T^2} R_{sat}^3 \longrightarrow R_{sat} = \sqrt[3]{\frac{G M_T T^2}{4\pi^2}} = 4.2 \cdot 10^7\ m$$

Per calcolare la velocità utilizzo la conservazione dell'energia
↳ $\underbrace{\frac{1}{2} I_{sat} W^2}_{\text{Il satellite ruota e basta inizialmente}} = \frac{1}{2} m_1 V_{1t}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2t}^2$

Abbiamo che $V_{1t} = V_{1s} + \underbrace{V_{1trasc}}_{WR_{sat}}$ ⟶ VETTORIALMENTE: $\vec{V_{1t}} = (WR_{sat}, V_{1s}, 0)\ m/s$

$|\vec{V_{1t}}| = \sqrt{W^2 R_{sat}^2 + V_{1s}^2} = 3060\ m/s$
$I_{sat} = m_0 R_{sat}^2 = 5.3 \cdot 10^{18}\ kg\, m^2$
$\cancel{\frac{1}{2}} m_2 V_{2t}^2 = \cancel{\frac{1}{2}} I_{sat} W^2 - \cancel{\frac{1}{2}} m_1 V_{1t}^2$ ⟶ $V_{2t} = \sqrt{\frac{I_{sat} W^2 - m_1 V_{1t}^2}{m_2}} = \underbrace{3054\ m/s}_{\text{verso il BASSO}}$

② Energia minima sviluppata dell'esplosione
↳ L'energia sviluppata è quella calcolata rispetto al sistema solidale al satellite
↓
Tra un istante immediatamente prima dell'urto ad un istante immediatamente dopo l'energia potenziale NON VARIA, quindi considero solo l'energia CINETICA
$E_{sviluppata} = \frac{1}{2} m_1 V_{1s}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2s}^2$

Dobbiamo trovare V_{2s} → Abbiamo che $V_{2t} = \sqrt{V_{2s}^2 + V_{trasc}^2}$ → $V_{2t}^2 = V_{2s}^2 + \omega^2 R_{sat}^2$

→ $-V_{2s}^2 = -V_{2t}^2 + \omega^2 R_{sat}^2$ → $V_{2s}^2 = V_{2t}^2 - \omega^2 R_{sat}^2$

→ $V_{2s} = \sqrt{V_{2t}^2 - \omega^2 R_{sat}^2} = 60.5\ m/s$

$E_{sviluppata} = 3\cdot 10^7\ J$

(3) Distanza di MASSIMO AVVICINAMENTO

↳ la velocità in ogni PUNTO della traiettoria è TANGENTE ad essa

↓

Nel punto di MASSIMO AVVICINAMENTO è ORTOGONALE ad r ed è MASSIMA

Energia frammento 1
- → $E_{1i} = \frac{1}{2} m_1 V_{1t}^2 - \frac{G m_1 M_T}{R_{sat}}$
- → $E_{1f} = \frac{1}{2} m_1 V_{1ft}^2 - \frac{G m_1 M_T}{r_1}$

Energia frammento 2
- → $E_{2i} = \frac{1}{2} m_2 V_{2t}^2 - \frac{G m_2 M_T}{R_{sat}}$
- → $E_{2f} = \frac{1}{2} m_2 V_{2ft}^2 - \frac{G m_2 M_T}{r_2}$

Momento angolare corpo 1: $\vec{L}_{1i} = m_1 \vec{R}_{sat} \times (V_{1s}\hat{y} + V_{TRASC}\hat{x}) \longrightarrow |\vec{L}_{1i}| = R_{sat} V_{trasc} m_1$

$\vec{L}_{1f} = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{V}_{1ft} \Longrightarrow \underbrace{m_1 r_1 V_{1ft}}_{\text{velocità ORTOGONALE ad } r}$

↓

Avrò che $V_{1tf} = \frac{|\vec{L}_{1i}|}{m_1 r_1} = \frac{R_{sat} V_{trasc} \cancel{m_1}}{\cancel{m_1} r_1}$

$E_{1f} = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{R_{sat} V_{trasc}}{r_1}\right)^2 - \frac{G m_1 M_T}{r_1} = E_{1i}$ → NOTA: conservazione dell'energia

↓

$\underbrace{2 m_1 E_{1i}}_{a} r_1^2 + \underbrace{2 G m_1^2 M_T}_{b} r_1 - L_{1i}^2 = 0 \longrightarrow r_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4aL_{1i}^2}}{2a}$

↳ Equazione di II grado in 2 incognite

voglio questo, massimo avvicinamento → $r_{1\,min} = 39.6\cdot 10^6\ m$