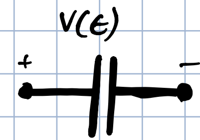
NOTE DI ELETTROTECNICA

-BY: Francesco Boldrini

IL CONDENSATORE



SE APPLICO UNA DIFFERENZA DI POTENZIALE AD UN CONDENSATORE, SI DISPONGONO CARICHE POSITIVE E NEGATIVE SULLE SUPERFICI DELLE ARMATURE, E LA CARICA E' PROPORZIONALE ALLA DIFFERENZA DI POTENZIALE:

$$\boxed{q(t) = C \cdot V(t)}$$

q: (COLOUMB) CARICA CONDENS.
C: CAPACITA' (FARAD)
V: (VOLT)

ELEMENTO LINEARE, CON MEMORIA E PASSIVO, TEMPO INVARIANTE

IN PARTICOLARE PER CALCOLARE LA POTENZA EROGATA OD ASSORBITA DA UN CONDENSATORE

$$\boxed{\underset{[\text{WATT}]}{\overset{\text{POTENZA}}{p(t)}}} = V_c(t) \cdot i_c(t) = V_c(t) \cdot C \cdot \frac{dV_c(t)}{dt} = C\,V_c(t) \cdot \frac{dV_c(t)}{dt} \gtrless 0$$

$$\boxed{\underset{[\text{JOULE}]}{\overset{\text{ENERGIA}}{W(t)}}} = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} C \cdot V_c(t) \cdot \frac{dV_c(t)}{\cancel{d\tau}}\,\cancel{d\tau} = C \int_{-\infty}^{t} V_c(\tau)\,dV_c(\tau) =$$

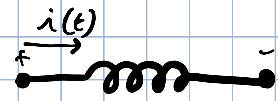
$$= C\left[\frac{1}{2} V_c^2(\tau)\right]_{-\infty}^{t} = \frac{1}{2} C \cdot V_c^2(t) - \underbrace{\frac{1}{2} C \cdot V_c^2(-\infty)}_{\to 0} \Rightarrow$$

$\to 0$, INIZIALMENTE NON HO MOTIVO DI PENSARE CHE IL CONDENSATORE SIA CARICO.

$$\boxed{\underset{[\text{JOULE}]}{W(t)} = \frac{1}{2} C\,V_c^2(t)} \quad (\geq 0)$$

NB: DA QUI VEDIAMO CHE IL CONDENSATORE IN CONTINUA E' COME UN CIRCUITO APERTO.

L'INDUTTORE



ELEMENTO CHE GENERA UN CAMPO MAGNETICO IN PRESENZA DI UNA VARIAZIONE DI CORRENTE AD ESSO APPLICATA:

$$\boxed{\phi(t) = L \cdot i(t)}$$

- $\phi(t)$: FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO [TESLA]
- L: INDUTTANZA [H] HENRY
- $i(t)$: INTENSITA' DI CORRENTE [AMPERE]

ELEMENTO LINEARE, CON MEMORIA E PASSIVO, TEMPO INVARIANTE.

{IN CONTINUA, E' UN CORTOCIRCUITO}

$$\boxed{v(t)} = \frac{d\,\phi(t)}{dt} = \left[L \frac{d(i(t))}{dt} \right]$$

$$\boxed{i(t)} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} v(\tau)\,d\tau = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} v(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau =$$

$$= \left[i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau \right]$$

$$\boxed{p(t)} = v_L(t) \cdot i_L(t) = \left[L \cdot i_L(t) \cdot \frac{d(i(t))}{dt} \gtrless 0 \right]$$

$$\boxed{w(t)} = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\,d\tau = L \int_{-\infty}^{t} i(\tau) \frac{d(i_L(\tau))}{\cancel{d\tau}} \cancel{d\tau} =$$

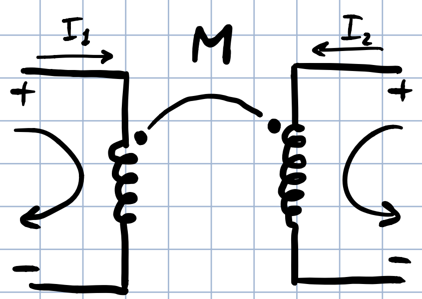
$$= \frac{1}{2} L\, i_L^2(\tau) \Big|_{-\infty}^{t} = \left[\frac{1}{2} L\, i_L^2(t) \geq 0 \right]$$

INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI

DETTO "M" IL COEFFICIENTE DI MUTUA INDUTTANZA, DATI DUE INDUTTORI CON INDUTTANZE L_1 ED L_2, IL LORO FLUSSO MAGNETICO (E QUINDI TENSIONE), VARIERÀ CON UNA COMPONENTE DOVUTA ALLA MUTUA INDUTTANZA:

$$\phi_{1,t} = L_1 i_1 \pm M \cdot i_2$$

$$\phi_{2,t} = L_2 i_2 \pm M \cdot i_1$$

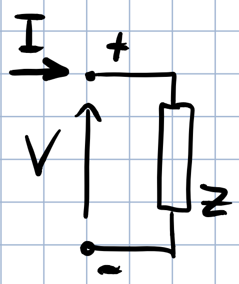


$$\begin{cases} V_1(t) = \pm L_1 \dfrac{d i_1(t)}{dt} \pm M \dfrac{d i_2(t)}{dt} \\ V_2(t) = \pm L_2 \dfrac{d i_2(t)}{dt} \pm M \dfrac{d i_1(t)}{dt} \end{cases}$$

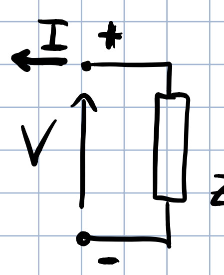
CADUTE DI TENSIONE DI AUTO INDUTTANZA

IL LORO SEGNO È STABILITO SULLA POSIZIONE DEL CONTRASSEGNO CON IL VERSO DELLA CORRENTE:

- SE LA CORRENTE VA DAL + AL - DEL CIRCUITO, LA CADUTA DI AUTO È POSITIVA, DA - A +, NEGATIVA.



$V_{EFF} = Z I_{EFF}$



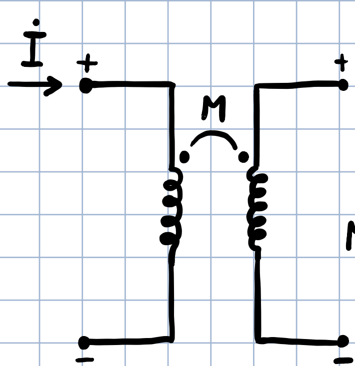
$V_{EFF} = - Z I_{EFF}$

(IN QUESTO CASO Z HA SOLO LA COMPONENTE INDUTTIVA)

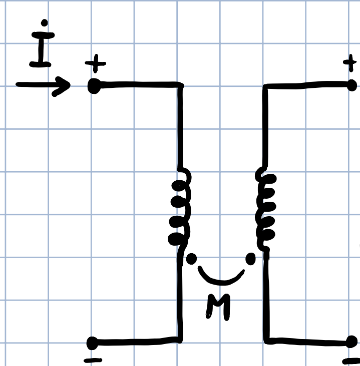
CADUTE DI TENSIONE DI MUTUA INDUTTANZA

IL LORO SEGNO DIPENDE DA DOVE E' POSIZIONATO IL CONTRASSEGNO RISPETTO ALLE CORRENTI: SE ENTRAMBE LE CORRENTI ENTRANO OD ESCONO DAL CONTRASSEGNO, LA CADUTA DI MUTUA AVRA' LO STESSO SEGNO DELLA RISPETTIVA CADUTA DI AUTO, SE INVECE UNA ENTRA ED UNA ESCE DAL CONTRASSEGNO, AVRANNO SEGNO OPPOSTO.

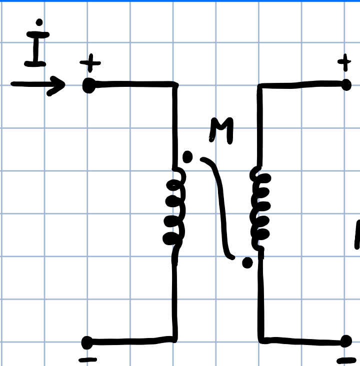
REGOLA DEI PUNTINI:



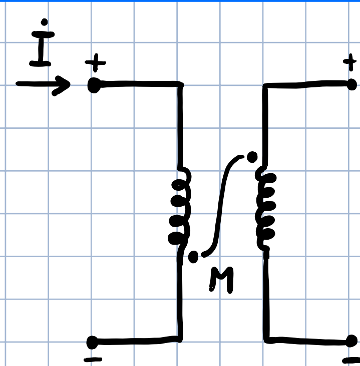
MUTUA $= +j\omega M\dot{I}$



MUTUA $= +j\omega M\dot{I}$



MUTUA $= +j\omega M\dot{I}$

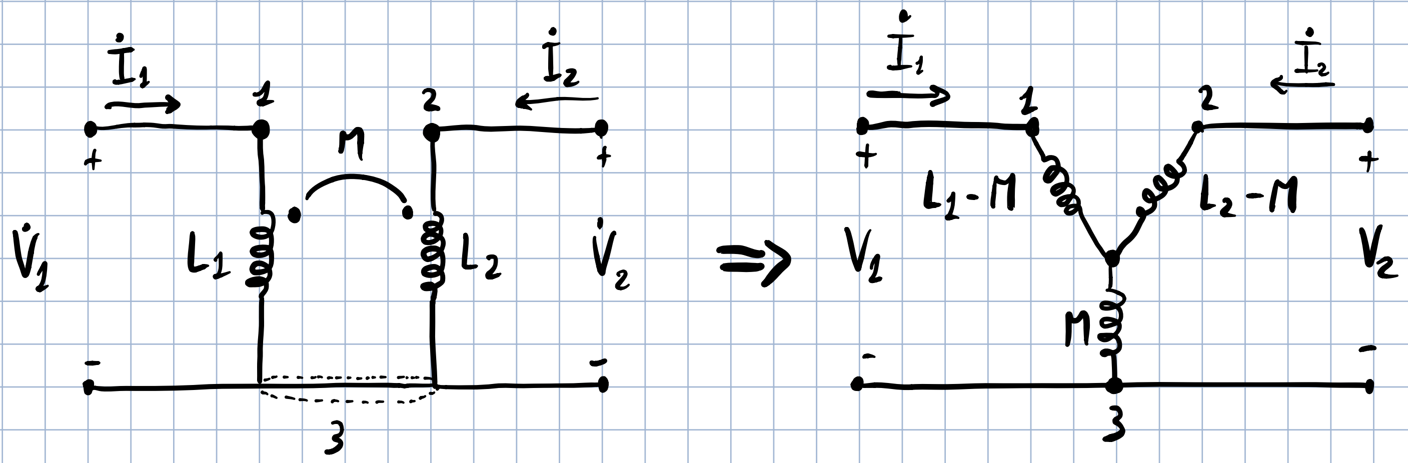


MUTUA $= +j\omega M\dot{I}$

DISACCOPPIARE INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI

[ARGOMENTO AVANZATO INSERITO QUI PER COMPLETEZZA]

⇒ CONDIZIONE INIZIALE NECESSARIA AFFINCHÈ IO POSSA DISACCOPPIARE INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI, È CHE ABBIANO UN NODO IN COMUNE.

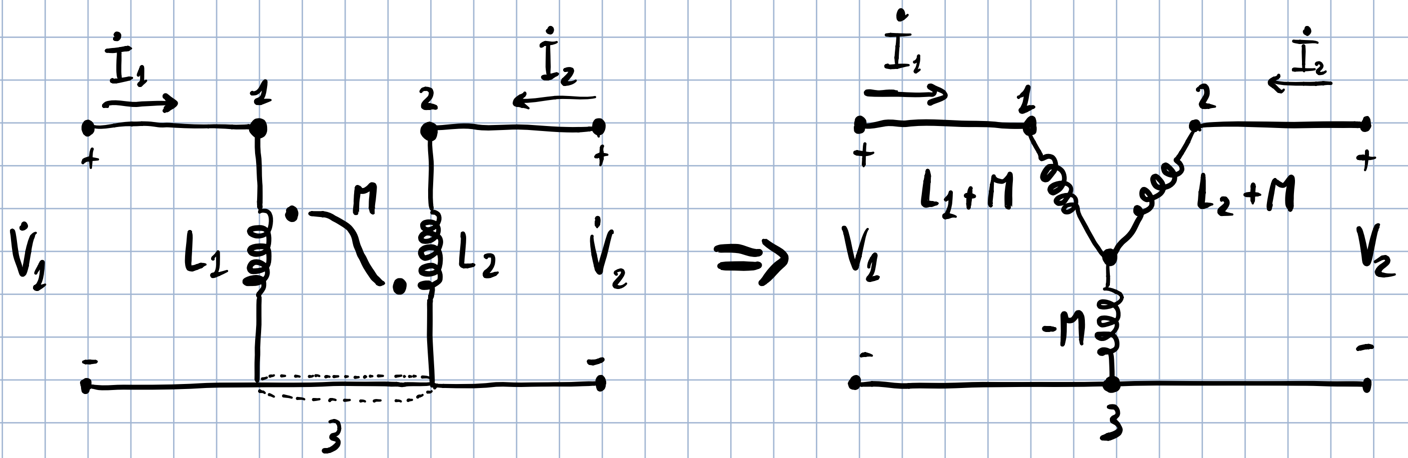


$$\dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{V}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1$$

(CASO ENTRAMBE CORRENTI ENTRANTI OD USCENTI DAL CONTRASSEGNO)

~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~



$$\dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{V}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1$$

(CASO CORRENTI DISCORDI IN ENTRATA/USCITA SUI CONTRASSEGNI)

PRATICAMENTE PERÒ QUANDO CONVIENE DISACCOPPIARE GLI INDUTTORI?

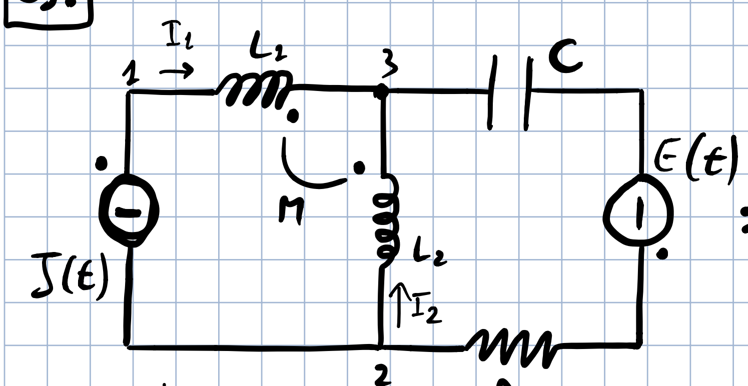
→ QUANDO VOGLIO USARE TENSIONI DI NODO

→ QUANDO $\boxed{L_1 \text{ OD } L_2 = M}$ E POTREI CANCELLARE UN INDUTTORE DA UN RAMO FACENDO IL DISACCOPPIAMENTO, (CORRENTI CONCORDI SUI CONTRASSEGNI)

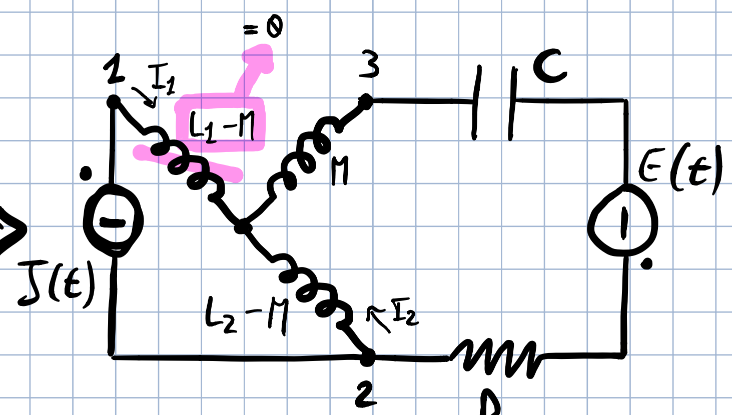
(OPPURE $\boxed{L_1 \text{ OD } L_2 = -M}$ SE LE CORRENTI SUI CONTRASSEGNI SONO DISCORDI)

→ QUANDO MI DA PARTICOLARMENTE NOIA IL MUTUO ACCOPPIAMENTO.

$\boxed{\text{ES:}}$



⇒



$\omega = 100$ rad/s

$e(t) = 20\sqrt{2}\sin(100t)\,[V] \Rightarrow \dot{E} = 20\,V$

$J(t) = 3\sqrt{2}\sin(100t)\,[A] \Rightarrow \dot{J} = 3A$

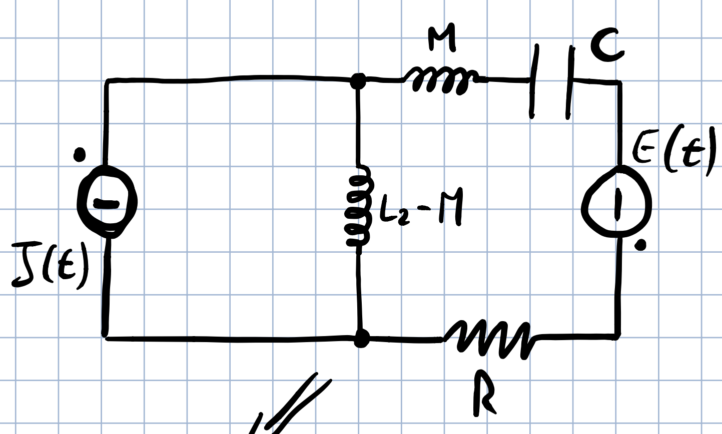
$R = 10\,\Omega$

$C = 10\,\mu F = 10^{-5} F$

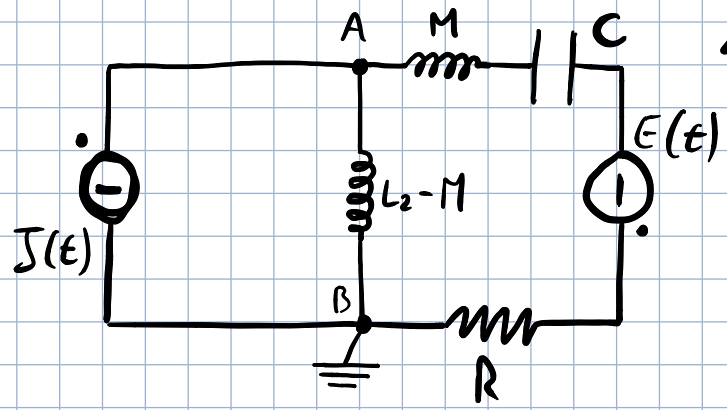
$L_1 = M = 10\,mH = 10^{-2} H$

$L_2 = 20\,mH = 2 \cdot 10^{-2} H$

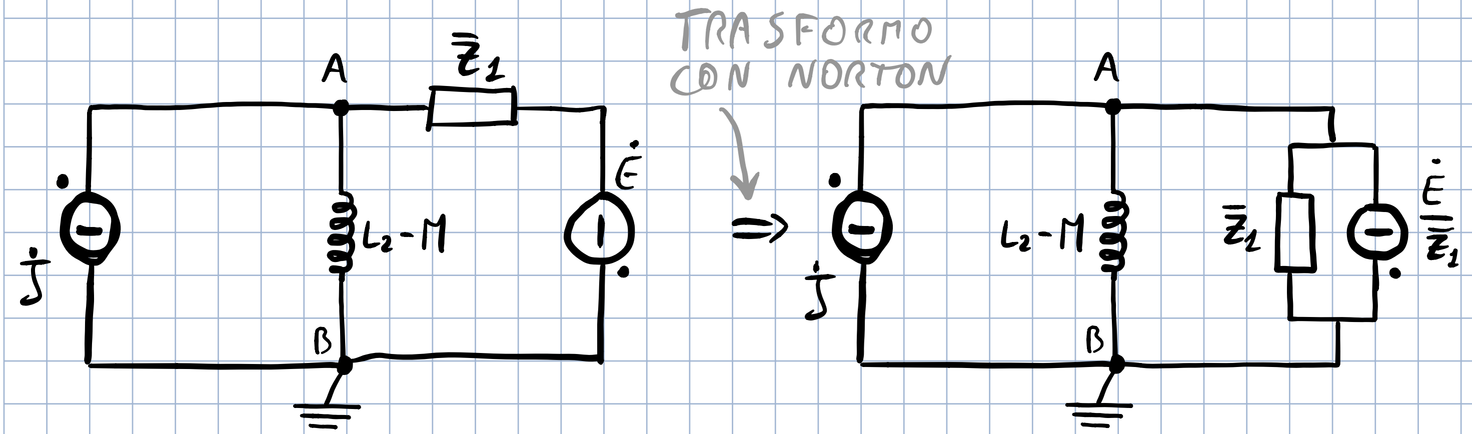
⇓



POSSO USARE TENSIONI DI NODO



$$\bar{Z}_1 = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 10 + j + \frac{1}{j\cdot 10^{-3}} = 10 - 999j$$



$$-\dot{J} + \frac{\dot{E}}{\bar{Z}_1} + \dot{V}_A\left(\frac{1}{j\omega(L-M)} + \frac{1}{\bar{Z}_1}\right) = 0 \qquad \dot{V}_A = \frac{\dot{J} - \frac{\dot{E}}{\bar{Z}_1}}{\left(\frac{1}{j\omega(L-M)} + \frac{1}{\bar{Z}_1}\right)} = 0.0200 + 3.00288j \ [V]$$

$$\dot{V}_A \simeq 3.0029\, e^{j\cdot 1.5641} \Rightarrow \underline{V_A(t) = 3.0029 \ \text{sen}\left(100t + 1.5641\right)}$$

↳ CIRCUITO RISOLTO

(I CALCOLI SOPRA SONO FATTI DA ME A CASA E POTREBBERO ESSERE IMPRECISI O SCORRETTI)

Circuiti a regime Periodico Sinusoidale

CORRENTE NEL TEMPO

$$i(t) = \underbrace{I_M}_{\text{MODULO CORRENTE MASSIMA}} \cdot \text{sen}(\underbrace{\omega}_{\text{PULSAZIONE}} t + \underbrace{\varphi_M}_{\text{FASE O SFASAMENTO}})$$

$\left\{ \frac{1}{T} = \text{FREQUENZA} \ (\text{Secondi}^{-1}) \right\}$

PULSAZIONE

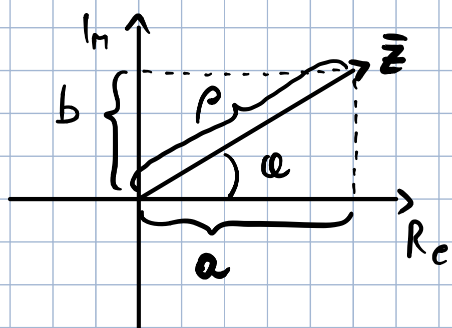
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

T → PERIODO

$$\boxed{i(t)} = I_M \cdot \cos(\omega t) = I_M \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Ripasso sui numeri Complessi

(1) $$\bar{Z} = a + \underbrace{j}_{\text{UNITA' IMMAGINARIA}} b$$



(2) $$\bar{Z} = \rho e^{j\alpha}$$

↳ DOVE: $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

NB: OCCHIO AI SEGNI DI 'a' E 'b' NELLA CONVERSIONE DA (1) A (2) E VICEVERSA, PERCHÈ L'ARCOTANGENTE NON NE TIENE CONTO E QUINDI SI RISCHIA DI FARE UNA CONVERSIONE SBAGLIATA CON LA SOLA CALCOLATRICE!

TRASFORMAZIONI E DOMINI

DOMINIO DEL TEMPO:

$$\left[i(t) = I_M \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) \right] \Leftrightarrow$$

LA PULSAZIONE E' SIMILE A QUELLA DI TUTTE LE ALTRE CORRENTI A REGIME SINUSOIDALE.

DOMINIO FASORIALE:

$$\left[I(t) = I_M \, e^{j(\omega t + \varphi_i)} \right]$$

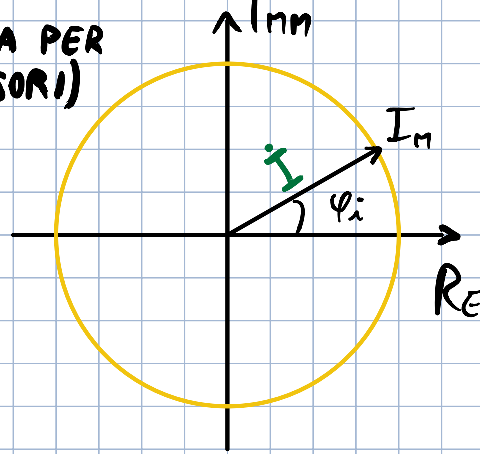
VETTORE ROTANTE:

"PERCHÉ SI CHIAMA VETTORE ROTANTE E PERCHÉ SI USA?"

→ SI CHIAMA VETTORE ROTANTE PERCHÉ PER CAMBIARE IL VALORE DI $I(t)$, DEVO SOLO CAMBIARE IL φ_i E NEL PIANO CARTESIANO

SEMBRA UN VETTORE DI MODULO COSTANTE CHE RUOTA ATTORNO ALL' ORIGINE DEGLI ASSI.

(SI USA PER I FASORI)



IL DOMINIO FASORIALE, CHE VERRÀ AMPIAMENTE USATO DA ADESSO IN AVANTI, PERCHÉ "MATEMATICAMENTE" CONVENIENTE, ALTRO NON È CHE QUELLO CHE MI FA CONSIDERARE LE CORRENTI NELLA LORO FORMA "FASORIALE": OVVERO COME I RISPETTIVI **VETTORI ROTANTI**, **VALUTATI A TEMPO 't' = 0.**

DA ORA IN AVANTI, SARANNO CHIAMATI SEMPLICEMENTE FASORI.

COME PASSO DAL DOMINIO DEL TEMPO AL DOMINIO DEI FASORI?

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x) \implies \dot{X} = X_m e^{j\varphi_x}$$

Es:

$$x(t) = 10 \operatorname{sen}\left(100t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\dot{X} = 10 e^{j\frac{\pi}{2}}$$

(IL VALORE DI ω O SI SA O NON SI PUÒ FARE)

{SI PERDE PERCHÉ IN UN FASORE SI ASSUME $t = 0$ (QUINDI ω SI PERDE)}

SOMMA E DIFFERENZA NEL DOMINIO FASORIALE

DATI:

$$x(t) = X_m \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_x)$$

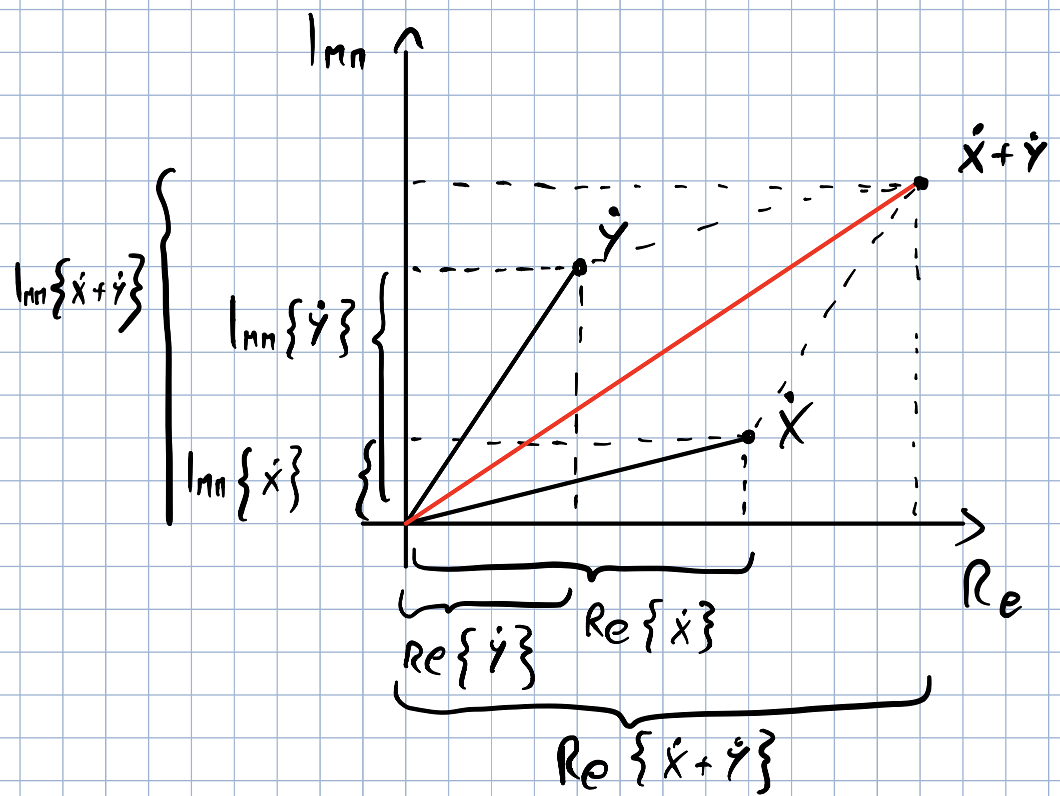
$$y(t) = Y_m \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_y)$$

- CONSIDERIAMO $[x(t) + y(t)]$, NEL DOMINIO DEL TEMPO NON POSSIAMO SEMPLIFICARE IL CALCOLO, MA NEL DOMINIO FASORIALE?

$$\dot{X} = X_M e^{j\varphi_x}$$
$$\dot{Y} = Y_M e^{j\varphi_y}$$

$$\dot{X} + \dot{Y} = X_M e^{j\varphi_x} + Y_M e^{j\varphi_y}$$
$$= X_M \cos(\varphi_x) + j X_M \sin(\varphi_x) + Y_M \cos(\varphi_y) + j Y_M \sin(\varphi_y)$$
$$= \underbrace{\left(X_M \cos(\varphi_x) + Y_M \cos(\varphi_y)\right)}_{Re} + j \underbrace{\left(X_M \sin(\varphi_x) + Y_M \sin(\varphi_y)\right)}_{Imm}$$

(QUA APPARENTEMENTE NON HO ALCUN VANTAGGIO, MA SE MI PORTO NEL PIANO DI GAUSS, VEDO IL PERCHÉ SI FACCIA QUESTA TRASFORMAZIONE)



QUINDI POSSO CALCOLARE LA SOMMA DEI FASORI COME UNA SEMPLICE SOMMA VETTORIALE (CON LA RELATIVA FORMULA):

$$\Rightarrow \dot{X} + \dot{Y} = \left(X_M \cos(\varphi_X) + Y_M \cos(\varphi_Y)\right) + j\left(X_M \sin(\varphi_X) + Y_M \sin(\varphi_Y)\right)$$

DERIVATA DI UN FASORE

DATO:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = X_M e^{j\varphi_X} \\ x(t) = X_M \cos(\omega t + \varphi_X) = \operatorname{Im}\{\dot{X} e^{j\varphi_X}\} \end{array} \right\}$$

ALLORA:

$x(t)$	$\dot{X}$
$\frac{\partial x(t)}{\partial t}$	$j\omega\dot{X}$

DERIVATA

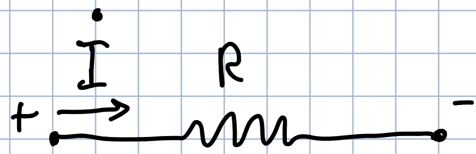
INTEGRALE DI UN FASORE

$x(t)$	$\dot{X}$
$\int x(t)\, dt$	$\frac{\dot{X}}{j\omega}$

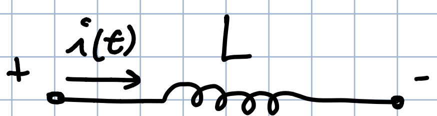
INTEGRALE

Applicazioni ai circuiti

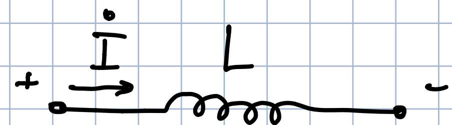
$$v(t) = R \cdot i(t)$$



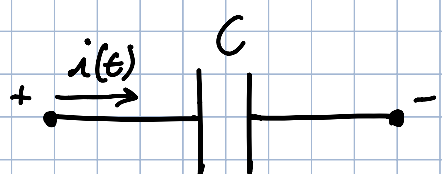
$$\dot{V} = R \cdot \dot{I}$$



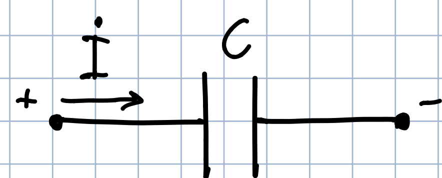
$$v(t) = L \frac{d\, i(t)}{dt}$$



$$\dot{V} = L\, j\omega\, \dot{I}$$

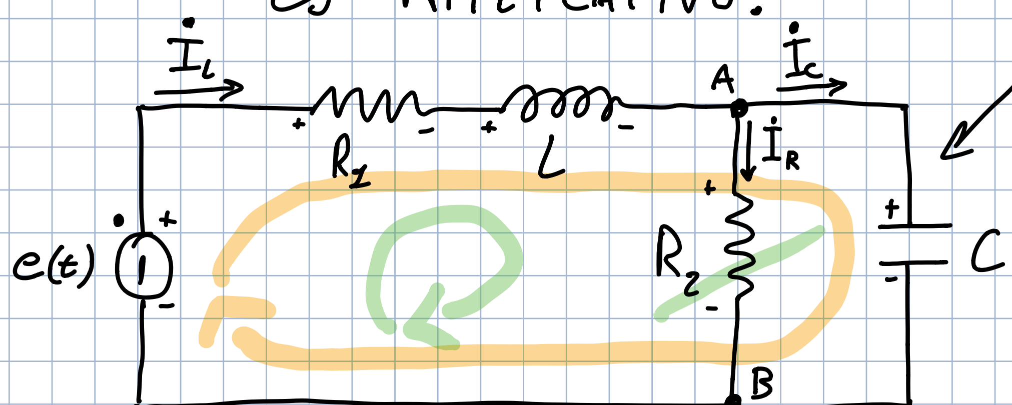


$$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t)\, dt$$



$$\dot{V} = \frac{1}{C} \frac{1}{j\omega} \dot{I}$$

Es applicativo:



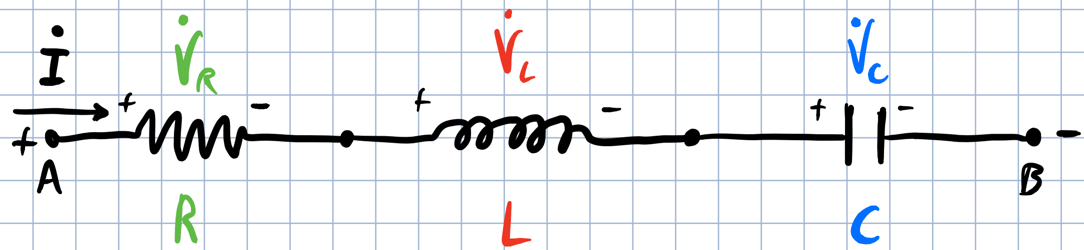
Scritte le correnti, vado a mettere i + ed i − nel circuito (con la regola che su una componente circuitale, la corrente scorre dal + verso il −), quindi finisco di scrivere le equaz per correnti di ramo.

PROVIAMO A RISOLVERE CON CORRENTI DI RAMO

$$\begin{cases} \dot{I}_L = \dot{I}_R + \dot{I}_C & \text{// NODO A} \\ -\dot{E} + R_1 \dot{I}_L + j\omega L \dot{I}_L + R_2 \dot{I}_R = 0 & \text{// MAGLIA VERDE} \\ -\dot{E} + R_1 \dot{I}_L + j\omega L \dot{I}_L + \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_C = 0 & \text{// MAGLIA ARANCIONE} \end{cases}$$

VEDIAMO QUINDI CHE NEL DOMINIO ORIGINALE (DEL TEMPO), SAREBBE STATO UN SISTEMA INTEGRO-DIFFERENZIALE, MENTRE NEL DOMINIO FASORIALE, È UN SEMPLICE SISTEMA LINEARE.

IMPEDENZA ($\bar{Z}$)



$$\dot{V}_{AB} = \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C = R \cdot \dot{I} + j\omega L \dot{I} + \frac{1}{j\omega C} \dot{I} =$$

$$= \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) \dot{I} = \left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right) \dot{I}$$

$$\Rightarrow \dot{V}_{AB} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] \cdot \dot{I}$$

$$\Rightarrow \dot{V}_{AB} = \bar{Z} \cdot \dot{I}$$

$$\boxed{\dot{V} = \bar{Z} \cdot \dot{I}}$$

IMPEDENZA

$\Rightarrow V_M e^{j\varphi_v} = Z e^{j\varphi_z} \cdot I_M e^{j\varphi_i}$

$\Rightarrow V_M e^{j\varphi_v} = Z \cdot I_M e^{j(\varphi_z + \varphi_i)}$

NOTA COME LA FASE E' LA SOMMA DELLE DUE FASI.

SOLAMENTE ALTRI MODI DI SCRIVERE $\dot{V} = \bar{Z} \cdot \dot{I}$

$$\boxed{\dot{V} = (R + jX) \cdot \dot{I}}$$ //FORMA PIU' GENERALE LEGGE DI OHM

RESISTENZA

REATTANZA

$\dot{V} = \bar{Z}\dot{I} \xrightarrow{\text{IMPLICA}}$

$$\begin{cases} V_M = Z I_M & \text{//MODULO DI } V_M = \text{MOD. } Z \cdot \text{MOD. } I_M \\ \varphi_V = \varphi_Z + \varphi_i & \text{//FASE DI } V_M = \text{FASE DI } Z + \text{FASE DI } I_M \end{cases}$$

A VOLTE INDICATA SOLO CON "φ"

$$\varphi = \varphi_V - \varphi_i \qquad (\varphi \equiv \varphi_z)$$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ → IMPEDENZA E' PURAMENTE CAPACITIVA

$\varphi = 0$ → IMPEDENZA E' PURAMENTE RESISTIVA

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ → IMPEDENZA E' PURAMENTE INDUTTIVA

OHMICO-CAPACITIVA | OHMICO-INDUTTIVA

CASI GENERALI

NB: QUESTO AGLI EFFETTI ESTERNI NON E' DETTO CHE $\varphi = 0$ SIANO SOLO RESISTENZE, POTREBBERO ANCHE ESSERE UN INSIEME DI INDUTTORI E CONDENSATORI, MESSI IN MODO PARTICOLARE.

$\bar{Z} = R + jX$

IMPEDENZA

RESISTENZA

REATTANZA

IN GENERALE, UN'IMPEDENZA GENERICA, SI DISEGNA COSÌ:

DOVE $\bar{Z} = R + jX$

E POTRÒ METTERE UNA GENERALE IMPEDENZA IN SERIE, PARALLELO, STELLA, TRIANGOLO, ECC., CON L'UNICA DIFFICOLTÀ DI CONTI PIÙ COMPLESSI.

NOTA: COME PER LE RESISTENZE IN PARALLELO SI PREFERIVA USARE LA CONDUTTANZA, IN CUI $G = \frac{1}{R}$, ANCHE PER $\bar{Z}$, SI USA PER I PARALLELI L'<u>AMMETTENZA</u>, IN CUI $\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}$, PER CUI <u>NEI PARALLELI</u> HO CHE:

$$\bar{Y} = \frac{1}{R+jX} = \frac{R-jX}{R^2+X^2} = \frac{R}{R^2+X^2} + j\left(-\frac{X}{R^2+X^2}\right)$$

ED $\bar{Y} = G + jB$

G → CONDUTTANZA

B → SUSCETTANZA

(PARTE IMMAGINARIA DELL'AMMETTENZA)
(HA SEGNO OPPOSTO ALLA REATTANZA (X))

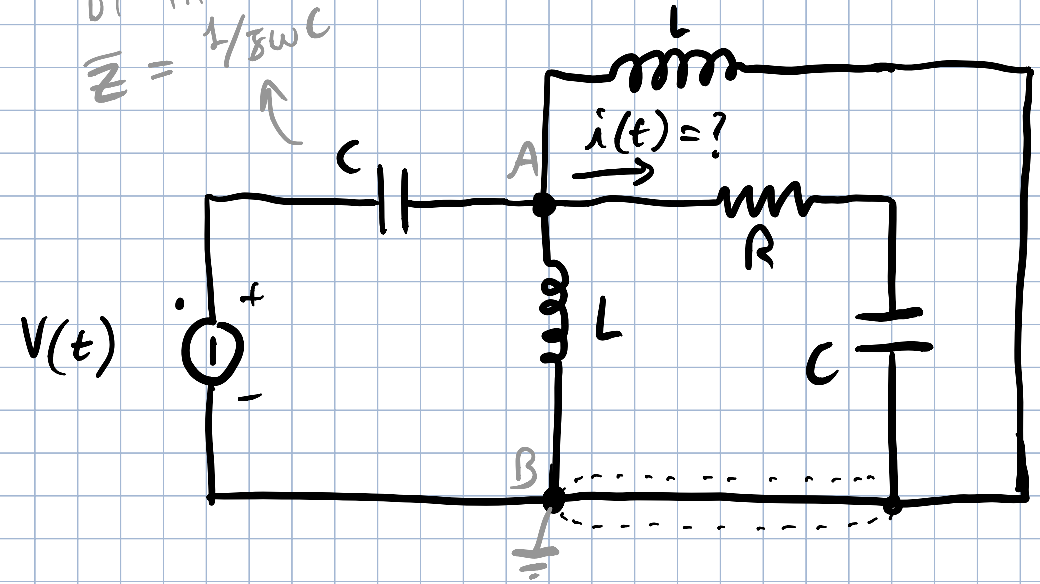
$$\bar{Y}_{EQ} = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \ldots + \bar{Y}_N,$$ ESATTAMENTE COME LE RESISTENZE.

(AMMETTENZA = SOMMA DELLE AMMETTENZE)

<u>**NB:**</u> L'AMMETTENZA GENERALIZZA LA CONDUTTANZA.

ESERCIZIO ESEMPIO:

DI IMPEDENZA $\bar{Z} = 1/j\omega C$

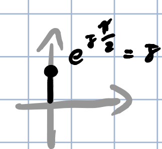


$v(t) = 50\sqrt{2} \; sen\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right)$

$\dot{V} = 50\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{2}}$

$= 50\sqrt{2} \cdot j$

($e^{j\frac{\pi}{2}}$ È IN FORMA POLARE ED UN ANGOLO DI $\pm\frac{\pi}{2}$ È IMMAGINARIO PURO)



$R = 10\,\Omega$

$L = 10\text{ mH} = 10^{-2}\text{ H}$

$C = 100\,\mu F = 10^{-4}\text{ F}$

USO IL METODO TENSIONI DI NODO

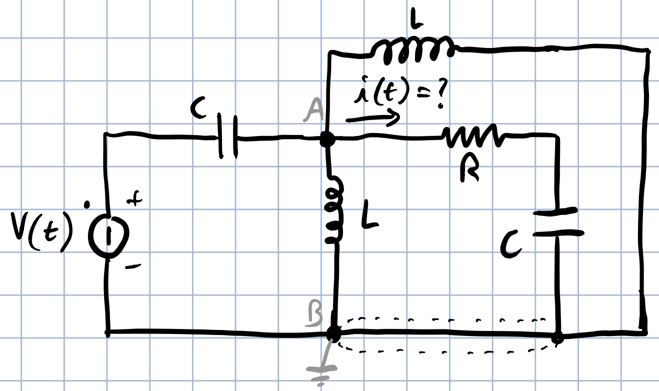
$V_B = 0$ (RIFERIMENTO)

$V_A = ?$ → NB: NON È COLLEGATO IN SERIE AD UN GENERATORE DI TENSIONE IDEALE PERCHÉ DAVANTI C'È UN CONDENSATORE.

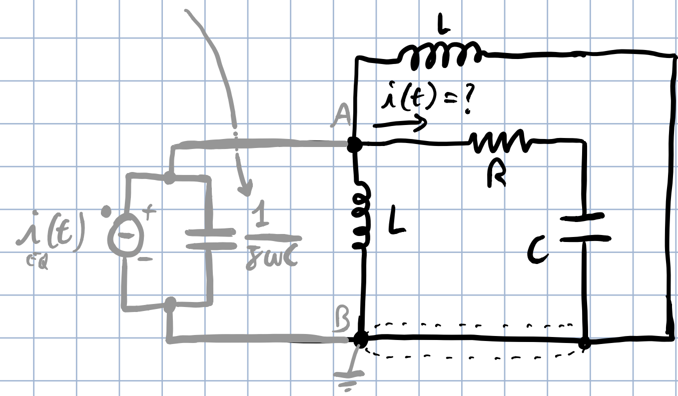
⇒ COME FACCIO QUINDI A CALCOLARE LA

TENSIONE SUL NODO A?

↳ TRASFORMO LA SERIE NEL SUO EQUIVALENTE NORTON! $\Rightarrow$ L'IMPEDENZA $\bar{Z}$ RIMANE UGUALE!



$\Rightarrow$



CONVERTO USANDO I RAPPORTI

$$\dot{V} = R\dot{I}$$

$$\dot{V} = j\omega L\dot{I}$$

$$\dot{V} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

TENSIONE = IMPEDENZA · CORRENTE

$\Rightarrow \dot{I} = j\omega C \cdot \dot{V}$

$\Rightarrow \bar{Z}$ RIMANE UGUALE

QUINDI SCRIVO L'EQUAZIONE DEL NODO A

A) $\dot{I}_{eq} = V_A \cdot$ [SOMMA DELLE AMMETTENZE CHE HANNO UN MORSETTO IN A] (AMMETTENZA $= \bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{\text{IMPEDENZA}}$)

$$j\omega C\dot{V} = V_A\left[j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}\right]$$

$$\dot{V}_A = \frac{j\omega C \dot{V}}{\left[j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)} \right]} = \text{CONTI}$$

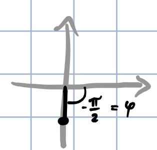
↳ (SONO TUTTI NUMERI)

QUANDO HO $\dot{V}_A$, HO RISOLTO IL CIRCUITO E SO CHE

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_A}{\bar{Z}} = \frac{\dot{V}_A}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)} = \text{FACENDO I CONTI} = -5\sqrt{2}\, j$$

QUINDI (CONVERTO PRIMA IN FORMA POLARE PER NON SBAGLIARE POI I CONTI)

$$\dot{I} = \underbrace{-5\sqrt{2}\, j}_{\substack{\text{VISTO CHE E' IMMAGINARIO PURO NEGATIVO,} \\ \text{LA SUA FORMA POLARE AVRÀ ESPONENTE } -\frac{\pi}{2} \\ \text{(ASSE IMMAGINARIO, VERSO IL BASSO)}}} = \underbrace{5\sqrt{2}\, e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)}}_{\text{FORMA POLARE}} \Rightarrow \boxed{i(t) = 5\sqrt{2} \sin\left(1000t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

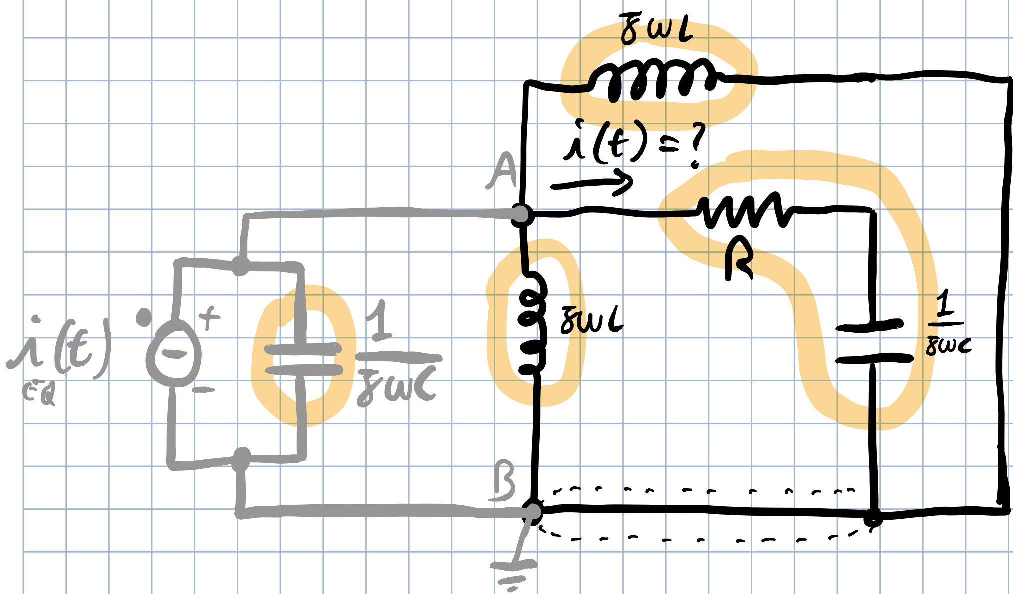


LA PULSAZIONE LA RIPRENDO DAL DATO INIZIALE O ALTRIMENTI LA METTO ARBITRARIA IO.

ALTRI MODI DI RISOLVERE L'ESERCIZIO PIÙ "FURBI"

$\Rightarrow$ DOPO AVER TRASFORMATO LA SERIE TRA GENERATORE DI TENSIONE E CONDENSATORE IN UN PARALLELO, EQUIVALENTE NORTON (DA THEVENIN IN PRATICA), POSSO NOTARE CHE C'È UN GENERATORE DI CORRENTE ADESSO, LA CUI CORRENTE SI DIVIDE TRA

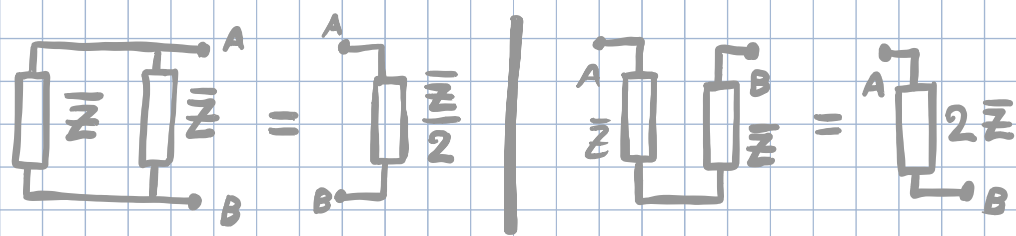
RAMI CHE SONO TUTTI IN PARALLELO, POSSO QUINDI SIA SEMPLIFICARE, SIA USARE LA REGOLA DEL PARTITORE DI CORRENTE PER SEMPLIFICARMI LA VITA:



= SONO IN PARALLELO TRA LORO!

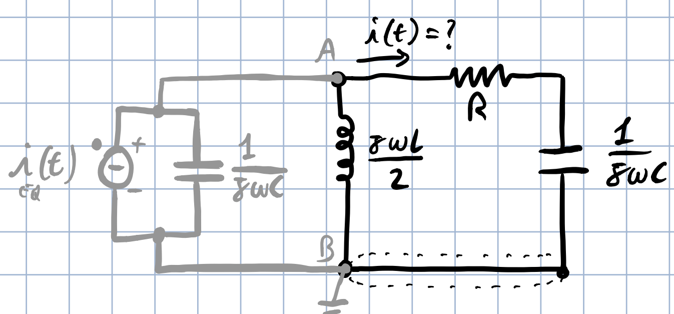
E' BENE SAPERE POI CHE PER LE IMPEDENZE, VALGONO LE STESSE REGOLE RAPIDE CHE VALEVANO PER LE RESISTENZE.

Es:



(STESSA COSA CON STELLE E TRIANGOLI)

QUINDI VIENE FUORI:



ED USANDO LA REGOLA DEL PARTITORE DI CORRENTE, TROVO CHE:

$$\dot{I} = \frac{j\omega C \cdot \dot{V} \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}}}{j\omega C + \frac{2}{j\omega L} + \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}}}$$ // PARTITORE DI CORRENTE

DA QUESTO POI ARRIVO, CON MENO PASSAGGI, ALLO STESSO RISULTATO OTTENUTO SOPRA.

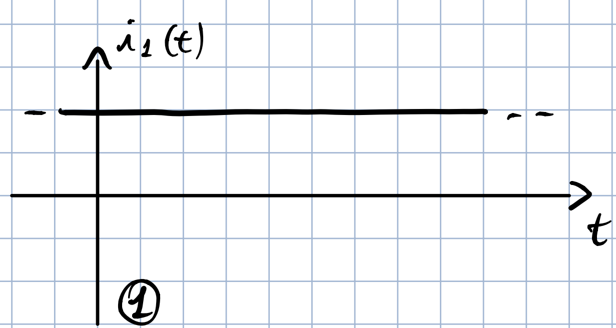
VALORE EFFICACE NEI FASORI

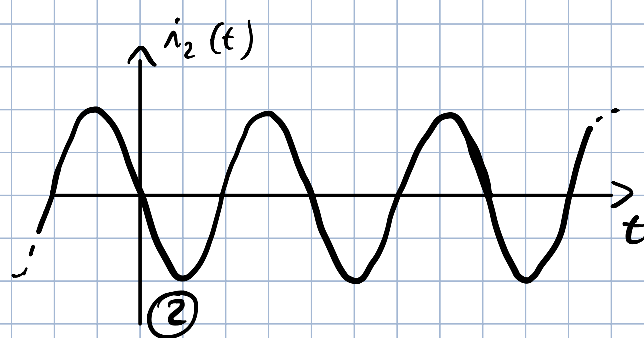
DEF: DATO $x(t)$ PERIODICO QUALUNQUE, ALLORA

$\boxed{X_{EFF} \overset{\Delta}{\underset{def}{=}} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt}}$ CHE COMODAMENTE DIVENTA

$\boxed{X_{EFF} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}}$ NEL CASO DI CORRENTE A REGIME PERIODICO SINUSOIDALE

IN GENERALE PERO', DOBBIAMO FARE I CONTI PER ARRIVARCI, POSSIAMO PARTIRE CONSIDERANDO DUE SEGNALI:





UNA CORRENTE IN CONTINUA ED UNA A REGIME

PERIODICO SINUSOIDALE, VOGLIAMO SAPERE QUANTA ENERGIA DISSIPINO UNA CORRENTE COME $i_1(t)$ COSTANTE ED UNA $i_2(t)$ A REGIME PERIODICO SINUSOIDALE, SU UNA STESSA RESISTENZA R, IN UN PERIODO T.

NB: $X_{EFF} \stackrel{\Delta}{=}_{def} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt} \Rightarrow X_{EFF}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt \Rightarrow \boxed{X_{EFF}^2 \cdot T = \int_0^T x^2(t)\,dt}$

① $i_1(t) = I \Rightarrow p(t) = v(t)\,i_1(t) = R\,i_1^2(t) = RI^2$

$$W = \int_0^T p(t)\,dt = \int_0^T RI^2\,dt = RI^2T = T \cdot RI^2$$

② $i_2(t) = I_M \,\text{sen}(\omega t) \Rightarrow p(t) = R\,i_2^2(t)$

$$W = \int_0^T p(t)\,dt = \int_0^T R\,i_2^2(t)\,dt = \boxed{R\int_0^T i_2^2(t)\,dt}$$

$$W = R \cdot T \cdot I_{EFF}^2 \Rightarrow \boxed{W = T \cdot R \cdot I_{EFF}^2}$$

QUINDI UNA CORRENTE SINUSOIDALE E' EFFICIENTE IN TERMINI DI ENERGIA DISSIPATA SU UN PERIODO COME LA CORRENTE COSTANTE DI VALORE I_{EFF}.

(QUESTO VALE PER QUALUNQUE CORRENTE (O SEGNALE) PERIODICO.)

NEL CASO **PARTICOLARE** DI REGIME PERIODICO SINUSOIDALE, VALE:

$$I_{EFF} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t)\,dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T}\int_0^T 1-\cos^2(\omega t)\,dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{I_M^2}{T}\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\,dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{I_M^2}{T}\left[\int_0^T \frac{1}{2}\,dt - \int_0^T \frac{\cos(2\omega t)}{2}\,dt\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{T}\left[\frac{1}{2}T - \frac{1}{2}\int_0^T \cos(2\omega t)\,dt\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{2T}\left[T - \underbrace{\int_0^T \cos(2\omega t)\,dt}\right]} =$$

QUA VA NOTATO CHE, ESSENDO T IL PERIODO DI UN SEGNALE CON FREQUENZA ω, L'INTEGRALE DI UN SEGNALE DI FREQUENZA DOPPIA (2ω) SULLO STESSO PERIODO, **L'INTEGRALE FARÀ** SEMPRE **0** COME PER IL SEGNALE DI FREQUENZA **ω.**

QUINDI:

$$\boxed{I_{EFF} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2\cancel{T}}\cdot\cancel{T}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

POTENZE A REGIME PERIODICO SINUSOIDALE

$P(t) = V(t)\, i(t)$ // CASO GENERICO

$P = V \cdot i$ // CASO CORR. CONTINUA

$P(t) = V(t) \cdot i(t)$ // CON: $i(t) = I_M \sin(\omega t)$; $V(t) = V_M \sin(\omega t + \varphi)$

$\Downarrow$

(VEDIAMO SE NE TIRIAMO FUORI QUALCOSA DI MEGLIO)

$\Downarrow$

$$p(t) = V_M \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \cdot I_M \operatorname{sen}(\omega t) =$$

$$= V_M I_M \left[\left(\operatorname{sen}(\omega t) \cos(\varphi) + \cos(\omega t) \sin(\varphi) \right) \sin(\omega t) \right] =$$

$$= V_M I_M \left[\sin^2(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin(\varphi) \right] =$$

$$= V_M I_M \left[1 - \cos^2(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin(\varphi) \right] =$$

$$= V_M I_M \left[\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \cos(\varphi) + \frac{\sin(2\omega t)}{2} \sin(\varphi) \right] =$$

$$= \frac{V_M I_M}{2} \left[\left(1 - \cos(2\omega t) \cos(\varphi) \right) + \sin(2\omega t) \sin(\varphi) \right] = \ldots$$

COME POSSO MIGLIORARE QUESTO CALCOLO? È OVVIAMENTE SCOMODO CALCOLARE L'ENERGIA DISSIPATA SU UNA RESISTENZA, QUANDO LA SUA POTENZA VARIA NEL

TEMPO.

INIZIAMO CONSIDERANDO DUE COMPONENTI:

$$P(t) = \frac{V_M I_M}{2}\left[\left(1-\cos(2\omega t)\right)\cos(\varphi) + \sin(2\omega t)\sin(\varphi)\right]$$

POTENZA ATTIVA ISTANTANEA

POTENZA REATTIVA ISTANTATEA

$$\bar{Z} = R + jX$$

LA POTENZA DISSIPATA DA UN' IMPEDENZA IN GENERALE HA QUINDI UNA COMPONENTE ATTIVA, LEGATA ALLE RESISTENZE ED UNA REATTIVA, LEGATA ALLA PARTE CAPACITIVA - INDUTTIVA DELL' IMPEDENZA.

LA PARTE LEGATA ALLA POTENZA ATTIVA ISTANTANEA SI INDICA CON LA LETTERA **P**, MENTRE LA POTENZA REATTIVA ISTANTANEA SI INDICA CON **Q** E LA POTENZA APPARENTE CON **S**.

$$\boxed{\underset{[WATT]}{P} \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt =}$$

DEFINIZIONE DI POTENZA ATTIVA

$$= \frac{1}{T}\frac{I_M V_M}{2}\left[\int_0^T \cos(\varphi)\,dt - \cancel{\int_0^T \cos(2\omega t)\cos(\varphi)\,dt} + \sin(\varphi)\cancel{\int_0^t \sin(2\omega t)\,dt}\right] =$$

STO INTEGRANDO FUNZIONI PERIODICHE TRA 0 ED UN MULTIPLO DEL PERIODO, QUINDI L'INTEGRALE VIENE = 0!!

$$= \frac{1}{T} \frac{I_m V_m}{2} \int_0^T \cos(\varphi)\, dt = \frac{1}{\cancel{T}} \frac{I_m V_m}{2} \cos(\varphi) \cdot \cancel{T} \Rightarrow$$

$$P = \frac{I_m V_m}{2} \cos(\varphi)$$

[Watt]

// TRA LE ALTRE COSE, LA DEFINIZIONE DI "P", CORRISPONDE ALLA DEFINIZIONE DI VALOR MEDIO.

NOTO INOLTRE: CHE UTILIZZANDO I VALORI EFFICACI DI CORRENTE E TENSIONE, TROVO

$$\left[P = I_{EFF} V_{EFF} \cos(\varphi)\right] \quad \left(V_{EFF} = \frac{V_m}{\sqrt{2}},\ I_{EFF} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{P = V_{EFF} \cdot I_{EFF} \cdot \cos(\varphi)}$$

[Watt]

// DETTA ATTIVA PERCHE' DIPENDE DAL $\cos(\varphi)$, E QUINDI E' = 0 SE HO SOLO INDUTTORI O SOLO CONDENSATORI.

$Q \triangleq$ MASSIMO DELLA POTENZA REATTIVA ISTANTANEA =

[VAR] → [VOLT · AMPERE REATTIVI]

$$\triangleq \max_t \left(\frac{V_m I_m}{2} \sin(\omega t) \sin(\varphi) \right) = \frac{V_m I_m}{2} \sin(\varphi) =$$

$$\boxed{Q = V I \sin(\varphi)}$$

[VAR] → [VOLT · AMPERE REATTIVI]

$(V = V_{EFF})$

$(I = I_{EFF})$

// SI DICE REATTIVA PERCHE' ADESSO INVECE DIPENDE DA $\sin(\varphi)$ ED E' QUINDI 0 NEI CIRCUITI PURAMENTE RESISTIVI.

POTENZA APPARENTE: S

$$\boxed{S \triangleq \frac{V_m I_m}{2} = VI}$$ [VA] VOLT · AMPERE

<u>NB</u>: TUTTE E TRE QUESTE POTENZE, HANNO FORMALMENTE UNITÀ DI MISURA DIVERSE, MA <u>DIMENSIONALMENTE</u> SONO TUTTE MISURATE IN WATT, IL FORMALISMO SERVE SOLO A DISTINGUERLE.

POTENZA COMPLESSA: $\bar{S}$ (DEFINITA CON I <u>FASORI</u>)

DA ADESSO IN AVANTI, USEREMO $\dot{V} = V_{eff}\, e^{j\varphi_v}$ ED $\dot{I} = I_{eff}\, e^{j\varphi_i}$ INVECE DELLE SOLITE V_m ED I_m, PERCHÉ TORNA PIÙ COMODO IN MOLTI AMBITI.

$$\boxed{\bar{S} \triangleq \dot{V}(\dot{I}^*) \quad [VA]} = Ve^{j\varphi_v}\, Ie^{-j\varphi_i} = VIe^{j(\varphi_v - \varphi_i)} =$$

$$= VIe^{j\varphi} = VI\cos(\varphi) + jVI\,\mathrm{sen}(\varphi) =$$

φ = DIFFERENZA DI FASE AI CAPI DELL'IMPEDENZA

$$= P + jQ$$

, OCCHIO PERÒ: NÉ Q NÉ P SONO POTENZE COMPLESSE, LO È SOLO $\bar{S}$.

$$\boxed{\bar{S} = P + jQ \quad [VA]}$$

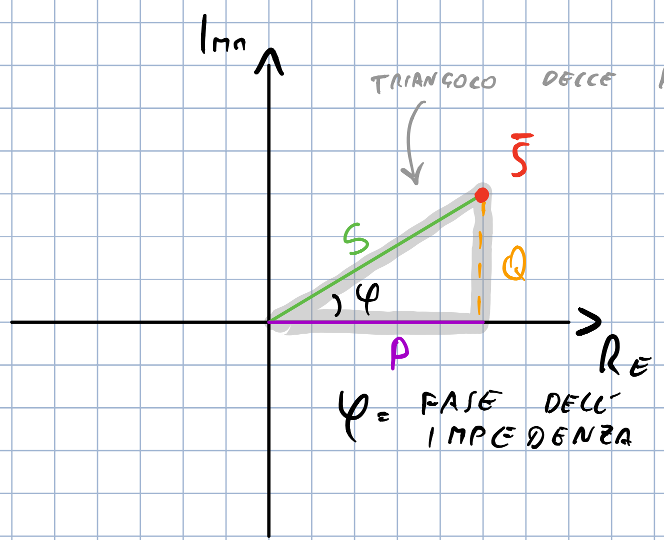
RIEPILOGO:

POTENZA ATTIVA $\rightarrow P = VI\cos(\varphi)$ [WATT]

POTENZA REATTIVA $\rightarrow Q = VI\sin(\varphi)$ [VAR]

POTENZA APPARENTE $\rightarrow S = VI$ [VA]

POTENZA COMPLESSA $\rightarrow \bar{S} = \dot{V}\dot{I}^* = P + jQ$ [VA]



φ = FASE DELL' IMPEDENZA

LUNGHEZZA DI $\bar{S}$ $= |\bar{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} =$

$$= \sqrt{V^2I^2\cos^2(\varphi) + V^2I^2\sin^2(\varphi)} =$$

$$= VI\sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = VI = S$$

RICORDANDO POI CHE: $\dot{V} = \bar{z}\dot{I} \rightarrow V_M = zI_M \rightarrow V = zI$

$$\rightarrow \bar{z} = ze^{j\varphi} = R + jX =$$

$$= z\cos(\varphi) + jz\sin(\varphi)$$

E INOLTRE: $\dot{I} = \bar{Y}\cdot\dot{V} \rightarrow I = YV$ //IN AMBITO REALE, NON COMPLESSO.

$\rightarrow \ldots$

$$\bar{Y} = G + jB = Ye^{-j\varphi} = Y\cos(-\varphi) + jY\sin(-\varphi)$$

$$= y\cos(\varphi) + j(-y\sin(\varphi))$$

POSSO QUINDI SCRIVERE:

POTENZA ATTIVA

$$P = \boxed{VI\cos(\varphi)} = \overbrace{zI^2\cos(\varphi)}^{=R} = \boxed{RI^2} = YV^2\cos\varphi = \boxed{GV^2}$$

POTENZA REATTIVA

$$Q = \boxed{VI\sin(\varphi)} = \overbrace{zI^2\sin(\varphi)}^{=X} = \boxed{XI^2} = yV^2\,\mathrm{sen}(\varphi) = \boxed{-BV^2}$$

POTENZA APPARENTE

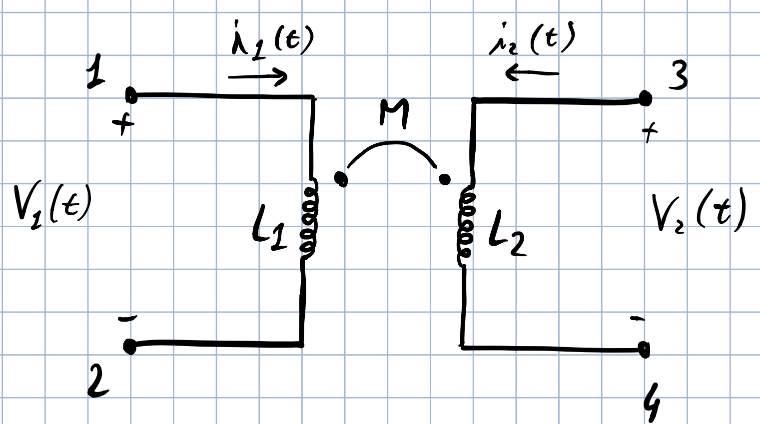
$$S = \boxed{VI} = \boxed{zI^2} = \boxed{yV^2}$$

//NB: 'z' ed 'y' **NON** sono complessi, '$\bar{z}$' ed '$\bar{y}$' sono complessi.

POTENZA COMPLESSA

$$\bar{S} = \boxed{\dot{V}\dot{I}^*} = \boxed{P + jQ}$$

Osservazioni particolari su induttori mutuamente accoppiati ed esercizi:



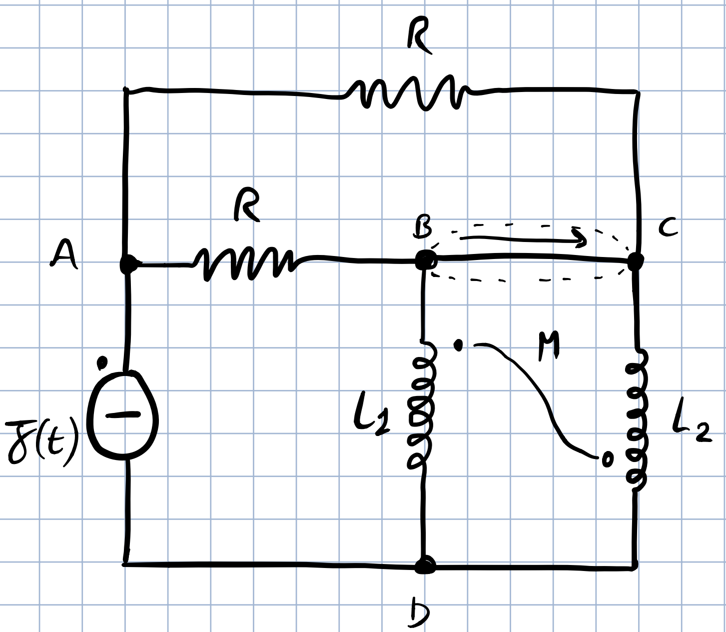
$$\begin{cases} V_1(t) = L_1 \dfrac{di_1(t)}{dt} \pm M \dfrac{di_2(t)}{dt} \\ V_2(t) = L_2 \dfrac{di_2(t)}{dt} \pm M \dfrac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = j\omega L \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = j\omega L \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$$

QUELLO CHE CI INTERESSA NOTARE E' CHE SE METTESSI IN CORTOCIRCUITO 3 e 4, ANCHE "ELIMINANDO" L'INDUTTANZA L_2, PERMARREBBERO GLI EFFETTI DI MUTUA INDUZIONE!

Es: 29/01/2020



$g(t) = \sqrt{2}\,\sin(1000t)$ A

$R = 10\ \Omega$

$L_1 = 10\ mH = 10^{-2}\ H$

$L_2 = 20\ mH = 2 \cdot 10^{-2}\ H$

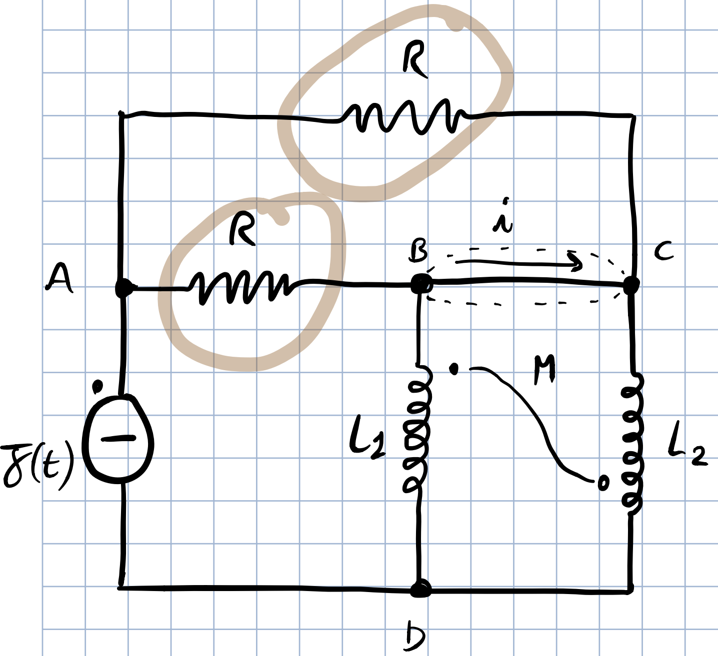
$M = 12\ mH \quad 1{,}2 \cdot 10^{-2}\ H$

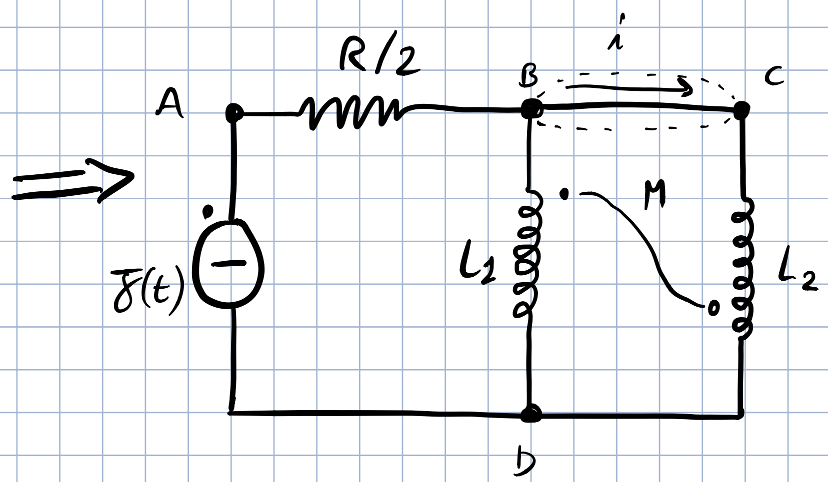
NB: NON POSSIAMO USARE TENSIONI DI NODO PER TROVARE LA CORRENTE TRA B E C PERCHE' ESSENDO GLI INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI, NON POSSIAMO SCRIVERE LA FORMULA GENERALE $\dot{V} = Z\dot{I}$ (PER COLPA DELLA CORRENTE DI MUTUA)

HO INFATTI $\dot{V} = \bar{z}_1 \dot{I}_1 + \bar{z}_2 \dot{I}_2$.

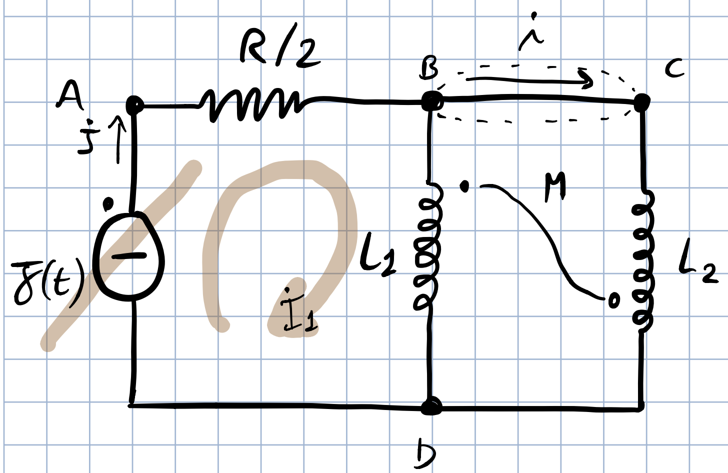
CORRENTI DI MAGLIA:

① SEMPLIFICO IL CIRCUITO (TRASFORMAZIONE TOPOLOGICA)

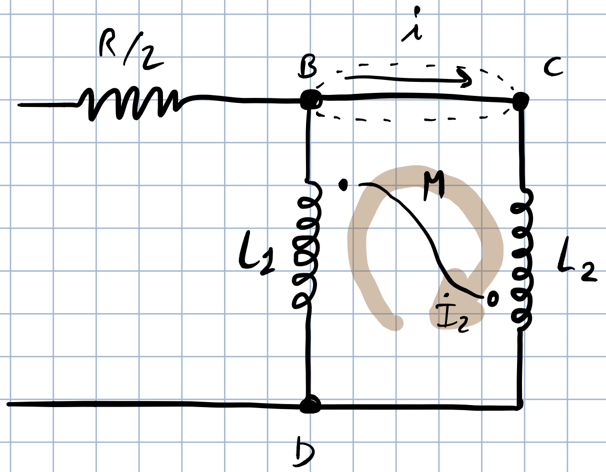




② A QUESTO PUNTO INIZIO CON CORRENTI DI MAGLIA E VEDO CHE LA PRIMA CORRENTE E' PER FORZA QUELLA PASSANTE SUL GENERATORE



$$\dot{I}_1 = \dot{J}$$



$$I_2)\quad j\omega L_1(\dot I_2-\dot I_1)+j\omega M(\dot I_2)+j\omega L_2(\dot I_2)+j\omega M(\dot I_2-\dot I_1)=0$$

$$j\omega L_1\dot I_2+j\omega M\dot I_2+j\omega L_2\dot I_2+j\omega M\dot I_2=j\omega L_1\dot I_1+j\omega M\dot I_1$$

$$\dot I_2=\frac{j\omega L_1\dot I_1+j\omega M\dot I_1}{j\omega L_1+j\omega M+j\omega L_2+j\omega M}$$

$$\dot I_2=\frac{\cancel{j\omega}(L_1\dot I_1+M\dot I_1)}{\cancel{j\omega}(L_1+2M+L_2)}\qquad \dot I_2=\frac{\dot I_1(L_1+M)}{(L_1+2M+L_2)}$$

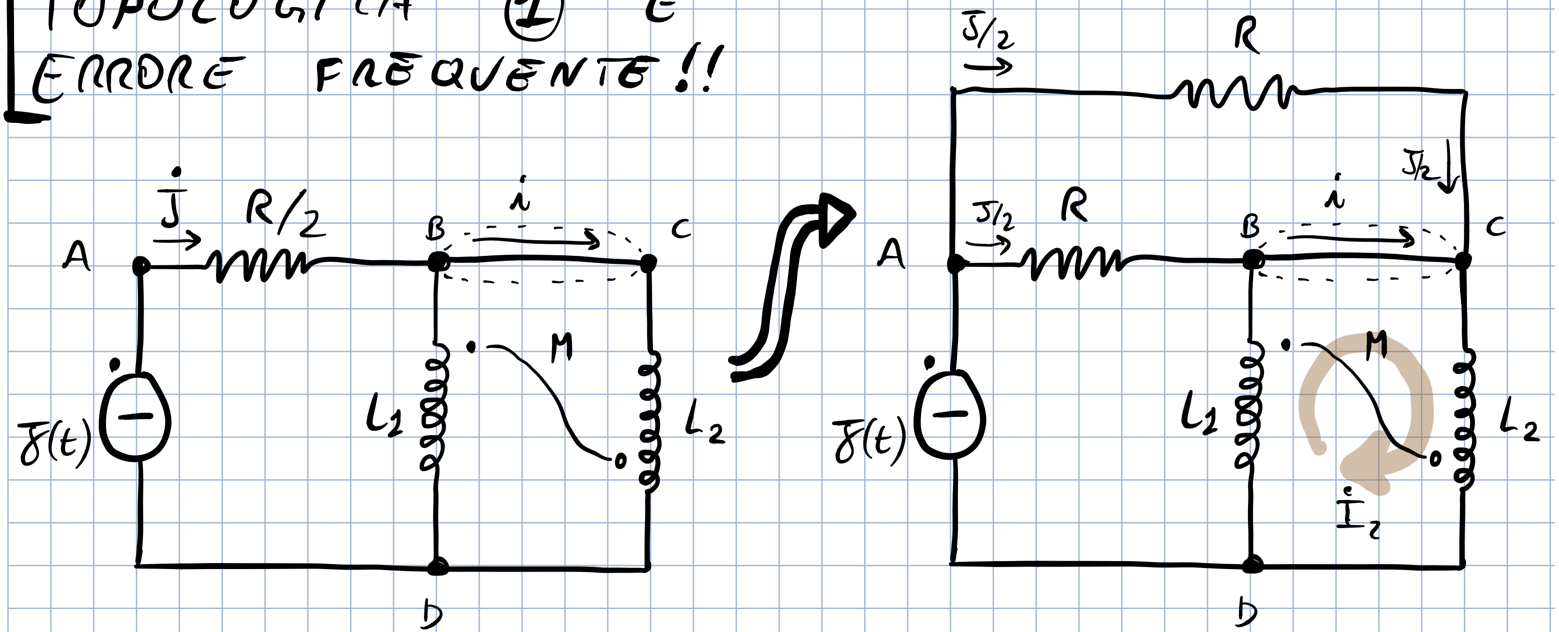
$$\dot I_2=\dot J\,\frac{(L_1+M)}{(L_1+2M+L_2)}\qquad \dot I_1=\dot J \quad \text{CON } \dot J=1\,A\ (\text{FASE}=0)$$

$$\dot I_2=0.4074\,A$$

PERO' NOTA BENE! LA CORRENTE $\dot I_2$ CHE HO TROVATO E' DIVERSA DALLA CORRENTE $i\rightarrow(\dot I)$ RICHIESTA! INFATTI, QUANDO HO SEMPLIFICATO IL CIRCUITO, HO FATTO PASSARE TUTTA LA CORRENTE $\dot J$ SULLA NUOVA RESISTENZA DI VALORE $R/2$, MENTRE PRIMA L'ALTRO RAMO FACEVA DA PARTITORE DI CORRENTE E SEPARAVA LA CORRENTE IN 2, DI VALORE $\frac{\dot J}{2}$ CIASCUNA, PERCIO' PER TROVARE QUELLA CHE EFFETTIVAMENTE MI VIENE RICHIESTA DI CORRENTI, DEVO FARE 3: IL CONTROLLO DI CONSISTENZA CON IL CIRCUITO ORIGINALE

E QUA ANCHE ④, OVVERO ESEGUIRE PASSAGGI ALL'INDIETRO PER TROVARE POI IL VALORE CORRETTO DI $\dot{I}$.

NON COMPENSARE LA TRASFORMAZIONE TOPOLOGICA ① È ERRORE FREQUENTE!!

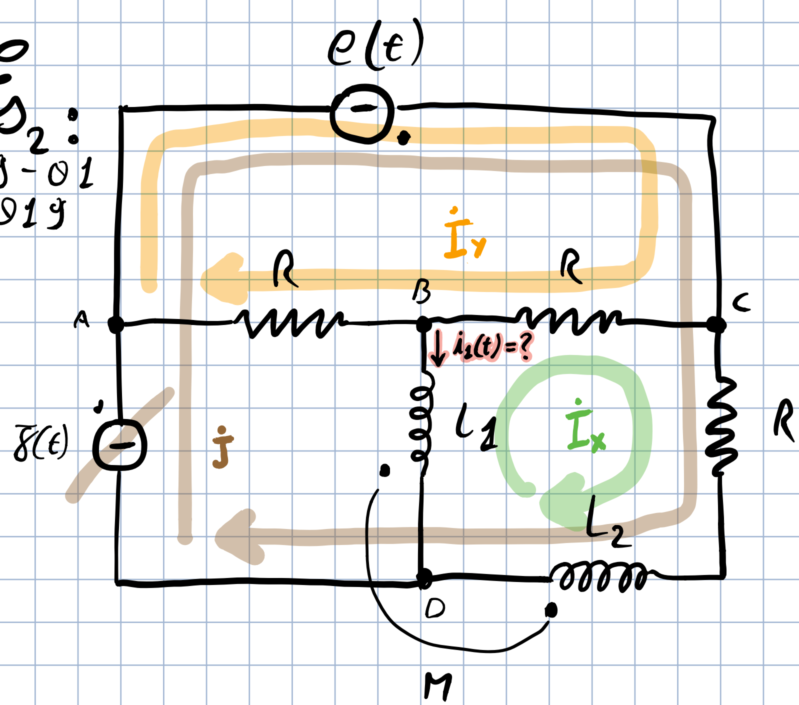


$$\dot{I} = \dot{I}_2 - \frac{\dot{J}}{2} = -0.0926\ A = \boxed{0.0926\ e^{j\pi}\ A}$$

NB: OCCHIO AL π!

QUINDI $\boxed{i(t) = -0.0926\sqrt{2}\ \sin(1000t + \pi)}$

$\mathcal{E}s_2$: 09-01-2019



$e(t) = 20\sqrt{2}\ \text{sen}(100t)\ V$

$\jmath(t) = \sqrt{2}\ \text{sen}(100t)\ A$

$R = 10\ \Omega$

$L_1 = 10\ mH = 10^{-2}\ H$

$L_2 = 20\ mH = 2\cdot 10^{-2}\ H$

$M = 10\ mH = 10^{-2}\ H$

$i_1(t) = ?$

① NON HO SEMPLIFICAZIONI DISPONIBILI (QUESTO ESCLUDE I PASSI ③ e ④)

② POSSO APPLICARE SOLO CORRENTI DI MAGLIA PERCHÉ ANCHE QUI HO INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI.

$$\begin{cases} 2R\dot{I}_y - R\dot{I}_x = \dot{E} \\ R(\dot{I}_x + \dot{J}) + R(\dot{I}_x - \dot{I}_y) + j\omega L_2(\dot{I}_x + \dot{J}) - j\omega M\dot{I}_x + j\omega L_1\dot{I}_x \\ -j\omega M(\dot{I}_x + \dot{J}) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{I}_y = \dfrac{\dot{E} + R\dot{I}_x}{2R} = \dfrac{\dot{E}}{2R} + \dfrac{\dot{I}_x}{2} \\ R(\dot{I}_x + \dot{J}) + R\left(\dot{I}_x - \dfrac{\dot{I}_x}{2} - \dfrac{\dot{E}}{2R}\right) + j\omega L_2(\dot{I}_x + \dot{J}) - j\omega M\dot{I}_x \\ + j\omega L_1\dot{I}_x - j\omega M(\dot{I}_x + \dot{J}) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{I}_y = \dfrac{\dot{E}}{2R} + \dfrac{\dot{I}_x}{2} \\ R\dot{I}_x + R\dfrac{\dot{I}_x}{2} + j\omega L_2\dot{I}_x - j\omega M\dot{I}_x + j\omega L_1\dot{I}_x - j\omega M\dot{I}_x \\ = -R\dot{J} + \dfrac{\dot{E}}{2} - j\omega L_2\dot{J} + j\omega M\dot{J} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{cases}
\dot{I}_y = \dfrac{\dot{E}}{2R} + \dfrac{\dot{I}_x}{2} \\[2ex]
\dfrac{3}{2} R \dot{I}_x + j\omega L_2 \dot{I}_x - 2 j\omega M \dot{I}_x + j\omega L_1 \dot{I}_x = \dfrac{\dot{E}}{2} - R\dot{J} - j\omega L_2 \dot{J} \\
+ j\omega M \dot{J}
\end{cases}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{cases}
\dot{I}_y = \dfrac{\dot{E}}{2R} + \dfrac{\dot{I}_x}{2} \\[2ex]
\dot{I}_x = \dfrac{\dfrac{\dot{E}}{2} - R\dot{J} - j\omega L_2 \dot{J} + j\omega M \dot{J}}{\dfrac{3}{2}R + j\omega L_2 - 2 j\omega M + j\omega L_1}
\end{cases}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{cases}
I_y = 0.9978 - 0.0332j \ [A] \\[2ex]
I_x = -0.0044 - 0.0664j \ [A]
\end{cases}
$$

PERCIO' RISULTA:

$$\dot{I} = -\dot{I}_x \Rightarrow \dot{I} = 0.0044 + 0.0664j \ [A]$$

$\sqrt{(0.0044)^2 + (0.0664)^2}$

$\uparrow$

$\text{ARCOTG}\left(\dfrac{0.0664}{0.0044}\right)$

// E I SEGNI TORNANO, SONO NEL QUADRANTE 1

$$\dot{I} = \underbrace{0.0665}_{I}\, e^{j\overbrace{1.5042}^{\varphi}}$$

$$i(t) = 0.0665\sqrt{2}\,\sin(100t + 1.5042) \quad [A]$$

A QUESTO PUNTO L'ESERCIZIO CHIEDE ANCHE LA POTENZA REATTIVA (Q) EROGATA DAL GENERATORE DI CORRENTE

NOI SAPPIAMO:

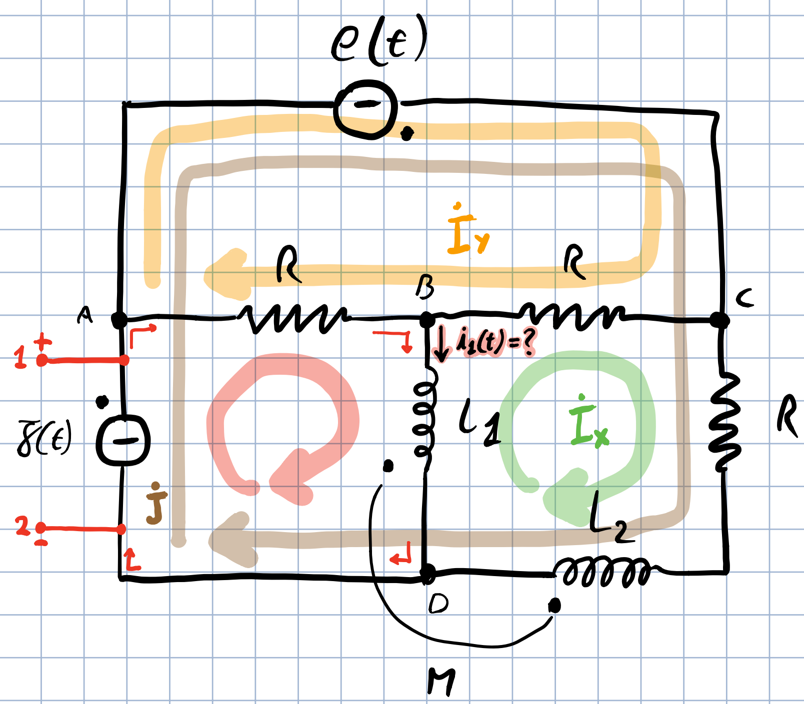
•) $\bar{S} = \dot{V}\dot{I}^{*} = P + j\boxed{Q}$

ED ESSENDO IL MODO PIÙ RAPIDO DI TROVARE Q, (LE ALTRE FORMULE NON USANO FASORI), LA UTILIZZO, QUINDI:

PER TROVARE Q A QUESTO PUNTO, POTENZA EROGATA, DEVO TROVARE V AI CAPI DEL GENERATORE E PER FARLO:

1) METTO I RIFERIMENTI + E − AI CAPI DEL GENERATORE, POICHÉ VOGLIO TROVARE POTENZA EROGATA, IL + VA DAL LATO DEL CONTRASSEGNO

② CHIUDO UN PERCORSO DAL + VERSO IL − E CALCOLO LA CADUTA DI POTENZIALE $\dot{V}$



$$\dot{V}_{12} = -R\dot{I}_y - j\omega L_1 \dot{I}_x + j\omega M\left(\dot{I}_x + \dot{J}\right) =$$

$$= -9.9779 + 1.3319\, j \ [V]$$

$\bar{S} = \dot{V}_{12}\, \dot{J}^*$, MA $\dot{J}^* = \dot{J} = 1$ (NESSUNA PARTE COMPLESSA)

QUINDI $\bar{S} = P + jQ$

$$\boxed{Q = 1.3319\ [VAR]}$$

TEOREMA DI TELLEGEN

"LA SOMMA DELLE **POTENZE ISTANTANEE** SU TUTTI I RAMI DI UNA RETE ELETTRICA E' UGUALE A 0"

$$\sum_{J,K=1}^{n} P_{JK}(t) = 0$$

// P_{JK} = RAMO DELLA RETE CHE VA DAL NODO J AL NODO K

DIMOSTRAZIONE:

$$\sum_{J,K=1}^{n} P_{JK}(t) = \sum_{J,K=1}^{n} V_{JK}(t) \cdot i_{JK}(t) = \sum_{J,K=1}^{n} \left(V_{J0}(t) - V_{K0}(t)\right) i_{JK}(t)$$

// CON 0 NODO DI RIFERIMENTO.

(IL POTER SCRIVERE V_{JK} COME $V_{J0} - V_{K0}$ E' UNA CONSEGUENZA DIRETTA DEL II° PRINCIPIO DI KIRCHOFF).

$\Downarrow$

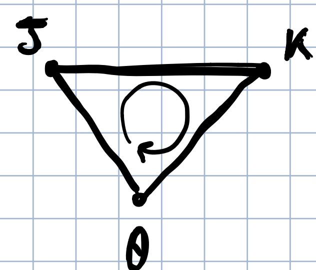
$$V_{JK}(t) + V_{K0}(t) + V_{0J}(t) = 0$$

$\Downarrow$

$$V_{JK}(t) = -V_{K0}(t) - V_{0J}(t)$$

$\Downarrow$

$$V_{JK}(t) = +V_{J0}(t) - V_{K0}(t)$$



EXCURSUS

$$= \sum_{J,K=1}^{n} V_{J0}(t) \cdot i_{JK}(t) - \sum_{J,K=1}^{n} V_{K0}(t) \cdot i_{JK}(t) =$$

$$= \left(\sum_{J=1}^{n} V_{J0}(t) \cdot \left[\cancel{\sum_{K=1}^{n} i_{JK}(t)} \right] \right) - \left(\sum_{K=1}^{n} V_{K0}(t) \cdot \left[\cancel{\sum_{J=1}^{n} i_{JK}(t)} \right] \right) = 0$$

0 0

- LA SOMMA DI TUTTE LE CORRENTI ENTRANTI E USCENTI DA UN NODO E' $=0$, I^a KIRCHOFF.

•) LA DIMOSTRAZIONE E' QUINDI FINITA:

$$\sum_{J,K=1}^{n} P_{JK}(t) = 0$$

TEOREMA DI BOUCHEROT

(SOTTOCASO DI TELLEGEN RIFERITO AL REGIME PERIODICO SINUSOIDALE)

"LA SOMMA DELLE POTENZE COMPLESSE SU TUTTI I RAMI DI UNA RETE (A REG. PER. SIN.) E' NULLA"

$\Updownarrow$

"LA SOMMA ALGEBRICA DELLE POTENZE ATTIVE E REATTIVE EROGATE DAI GENERATORI <u>INDIPENDENTI</u>, E' UGUALE ALLA SOMMA DELLE POTENZE ATTIVE E REATTIVE ASSORBITE DAI BIPOLI DEI SINGOLI RAMI"

$\Updownarrow$

"SOMMA DELLE POTENZE EROGATE = SOMMA DELLE POTENZE DISSIPATE, SIA ATTIVE CHE REATTIVE"

DIMOSTRAZIONE:

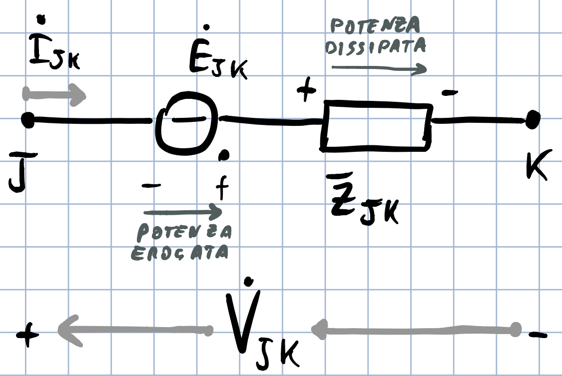
$$① \quad \sum_{J,K=1}^{n} \dot{V}_{JK}\, \dot{I}^{*}_{JK} = 0$$

→ LO DIAMO PER VERO, DISCENDE DAL Th DI TELLEGEN A REGIME PER. SIN.

→ SUPPONIAMO CHE LA SOMMATORIA SU TUTTI I RAMI DELLA RETE DELLE POTENZE COMPLESSE SIA UGUALE A 0.

② CONSIDERIAMO IL GENERICO RAMO CHE VA DAL NODO 'J' AL NODO 'K'.

(2)



CHE PUO' QUINDI AVERE IMPEDENZE, GENERATORI, ENTRAMBI O NESSUNO DEI DUE

QUINDI IN GENERALE: $\dot{V}_{JK} = -\dot{E}_{JK} + \bar{Z}_{JK}\,\dot{I}_{JK}$

CHE VUOL DIRE CHE POSSO RISCRIVERE ① COME:

$$\sum_{J,K=1}^{n} \left(-\dot{E}_{JK} + \bar{Z}_{JK}\,\dot{I}_{JK}\right) \dot{I}^{*}_{JK} = 0$$

$$\sum_{J,K=1}^{M}\left(-\dot{E}_{\jmath K}\,\dot{I}^{*}_{JK}+\bar{Z}_{JK}\,\dot{I}_{JK}\,\dot{I}^{*}_{JK}\right)=0$$

$$\sum_{J,K=1}^{M}\left(-\dot{E}_{\jmath K}\,\dot{I}^{*}_{JK}+\bar{Z}_{JK}\,I^{2}_{JK}\right)=0 \qquad // NB: \dot{I}\cdot\dot{I}^{*}=I^{2}$$

$$\sum_{J,K=1}^{M}\left(\bar{Z}_{\jmath K}\,I^{2}_{JK}\right)=\sum_{J,K=1}^{n}\left(\dot{E}_{JK}\,\dot{I}^{*}_{JK}\right)\rightarrow \boxed{\underbrace{\sum_{J,K=1}^{n}\bar{S}^{(G)}_{\jmath K}}_{\text{POTENZA COMPLESSA EROGATA DAI GENERATORI DELLA RETE}}=\sum_{J,K=1}^{n}\bar{S}^{(I)}_{JK}}$$

POTENZA COMPLESSA ASSORBITA DALLE IMPEDENZE.

PRIMO MODO DI ESPRIMERE IL Th DI BOUCHEROT

POTENZA COMPLESSA EROGATA DAI GENERATORI DELLA RETE

Come sono sicuro che sia potenza erogata?

→ Visto che nel caso generale che sto considerando, la corrente esce dal contrassegno del mio generatore di tensione, (vedi figura **(2)**). Quindi ho riferimenti **non** associati per i generatori indipendenti e quindi vedo la **potenza erogata.**

SECONDO MODO DI ESPRIMERE IL Th DI BOUCHEROT:

(CHE FA DISTINZIONE TRA POTENZA ATTIVA E REATTIVA)

$$\boxed{\underbrace{\sum_{J,K=1}^{n}P^{(G)}_{JK}+\jmath Q^{(G)}_{JK}}_{\text{MODO ALTERNATIVO DI SCRIVERE }\bar{S}^{(G)}_{JK}}=\underbrace{\sum_{J,K=1}^{n}\left(R_{JK}+\jmath X_{JK}\right)I^{2}_{JK}}_{\text{MODO ALTERNATIVO DI SCRIVERE }\bar{S}^{(I)}_{JK}}}$$

(È SEMPRE POTENZA EROGATA = POTENZA ASSORBITA)

ESSENDO PERÒ NUMERI COMPLESSI, L'UGUAGLIANZA È VERA SOLO SE I NUMERI REALI A SX DELL'UGUALE SONO UGUALI AI NUMERI REALI A DX DELL'UGUALE ED ANCHE I NUMERI COMPLESSI A SX ED A DX LO SONO:

$$\boxed{\begin{cases} \textcircled{1} \quad \sum_{J,K=1}^{n} P_{JK}^{(G)} = \sum_{J,K=1}^{n} R_{JK} I_{JK}^{2} \\ \textcircled{2} \quad \sum_{J,K=1}^{n} j Q_{JK}^{(G)} = \sum_{J,K=1}^{n} j X_{JK} I_{JK}^{2} \end{cases}}$$

→ ENTRAMBI I MEMBRI SONO SEMPRE ≥ 0

→ QUI PERÒ SONO ENTRAMBI ≥ 0 SOLO SE HO A CHE FARE CON INDUTTANZE PURE. UN CONDENSATORE PUÒ DARE AD X SEGNO NEGATIVO: $\bar{Z} = \frac{1}{j\omega C}$ IN UN CONDENSATORE PURO, QUINDI $j \cdot -\frac{1}{\omega C} \Rightarrow X = -\frac{1}{\omega C}$

Th DI BOUCHEROT

① LA SOMMA DELLE POTENZE ATTIVE EROGATE DAI GENERATORI, È UGUALE ALLA SOMMA DELLE POTENZE ATTIVE DISSIPATE DAI RESISTORI DELLA RETE. (O IN GENERALE DALLE IMPEDENZE)

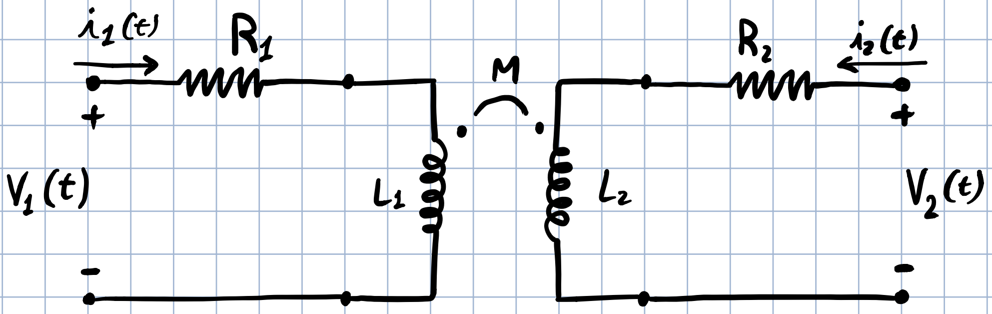
② LA SOMMA DELLE POTENZE REATTIVE EROGATE DAI GENERATORI, È UGUALE ALLA SOMMA DELLE POTENZE REATTIVE DISSIPATE SU TUTTI GLI ELEMENTI REATTIVI DELLA RETE.

QUESTO MI AIUTA PERCHÉ IN CASO DI CIRCUITI CON SOLO INDUTTORI + RESISTORI ∅ CONDENSATORI POSSO PENSARE DI DETERMINARE IL SEGNO DELLE POTENZE EROGATE DAI GENERATORI.

NB: I DA + A −, POTENZA DISSIPATA; I DA − A +, POTENZA EROGATA.

⇒ QUINDI <u>OCCHIO</u> AI CONTRASSEGNI ED AI + E − !!

POTENZA SU INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI



// PRENDIAMO IL CASO DI INDUTTORI REALI, NON IDEALI.

$$\dot{V}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{V}_2 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1$$

INIZIAMO CALCOLANDO SE LA PARTE REALE DI $\dot{V}_1$ E $\dot{V}_2$ E' 0, (APPARTE CHE PER LE RESISTENZE R_1 ED R_2).

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 = \dot{V}_1 \dot{I}_1^* + \dot{V}_2 \dot{I}_2^* =$$

$$= R_1 I_1^2 + j\omega L_1 I_1^2 + j\omega M \dot{I}_2 \dot{I}_1^* + R_2 I_2^2 + j\omega L_2 I_2^2 + j\omega M \dot{I}_1 \dot{I}_2^* =$$

ANCORA NON CAPIAMO SE DUE INDUTTANZE MUTUAM. ACCOPPIATE ABBIANO PARTE REALE DI $\bar{S} = 0$, PERCHE' IN PARTICOLARE NON CAPIAMO ANCORA COME SIA $j\omega M \dot{I}_2 \dot{I}_1^*$: SE SIA IMAGINARIO, REALE O COMPLESSO.

PROVIAMO A SCRIVERE $\dot{I}_1$ COME $= I_1 e^{j\varphi_1}$

$$\dot{I}_2 = I_2 e^{j\varphi_2}$$

↓

$$\bar{S} = R_1 I_1^2 + j\omega L_1 I_1^2 + j\omega M I_2 e^{j\varphi_2} I_1 e^{j(-\varphi_1)} +$$

$$+ R_2 I_2^2 + j\omega L_2 I_2^2 + j\omega M I_1 e^{j\varphi_1} I_2 e^{j(-\varphi_2)} =$$

$$= \ldots + j\omega M I_1 I_2 \left(e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} + e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) =$$

$$= \ldots + j\omega M I_1 I_2 \left(\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + j\,\mathrm{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) + \right.$$

$$\left. + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right) =$$

$$= \ldots + j\omega M I_1 I_2 \left(\cos(-\alpha) + j\,\mathrm{sen}(-\alpha) + \right.$$

$$\left. + \cos(\alpha) + j \sin(\alpha) \right) =$$

$$// \left(\cos(\alpha) = \cos(-\alpha),\quad \sin(\alpha) = -\sin(-\alpha) \right) //$$

$$= \ldots + j\omega M I_1 I_2 \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cancel{j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)} + \right.$$

$$\left. + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cancel{j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{S}} = R_1 I_1^2 + j\omega L_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + j\omega L_2 I_2^2 + j\omega M I_1 I_2\, 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

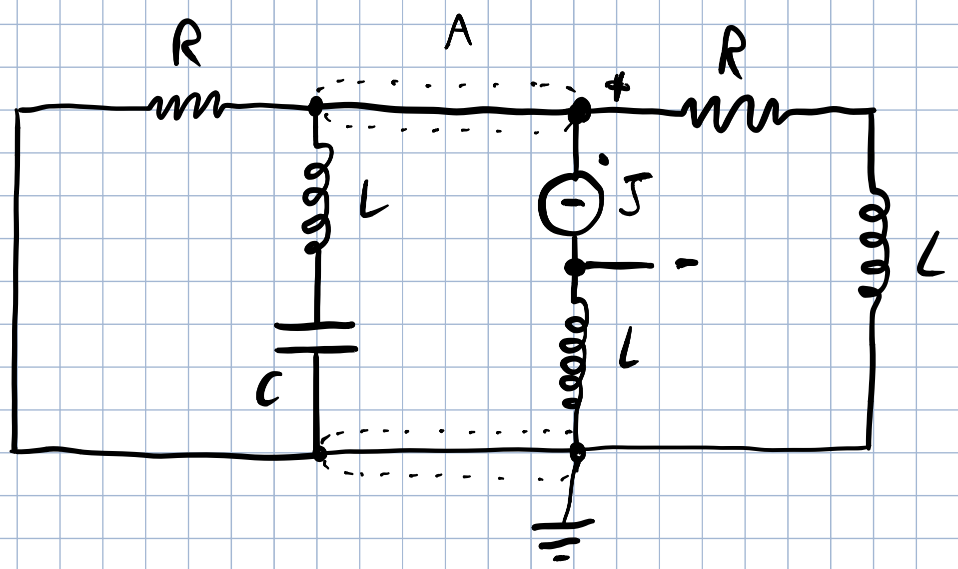
QUINDI RESISTENZE A PARTE, $\bar{S}$ E' IMMAGINARIO PURO

MA INDIVIDUALMENTE $\bar{S}_1$ ED $\bar{S}_2$ NON LO SONO, PERCHE' LA COMPONENTE DI MUTUA DI $\mp j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$

NON SI ANNULLA SE STO CALCOLANDO LA POTENZA DISSIPATA SU UNA SOLA DELLE DUE INDUTTANZE.

$\mathcal{E}_1$:

30-01-2019



$J(t) = 3\sqrt{2}\,\sin(1000t)$ A $\rightarrow \dot{J} = 3A$

$R = 20\,\Omega$

$L = 20\,mH = 2\cdot 10^{-2}\,H$

$C = 10\,\mu F = 10^{-5}\,F$

POTENZA EROGATA DA $J = ?$

$P_J = R_E\{\bar{S}\} = Re\{\dot{V}_J \dot{I}_J^*\}$

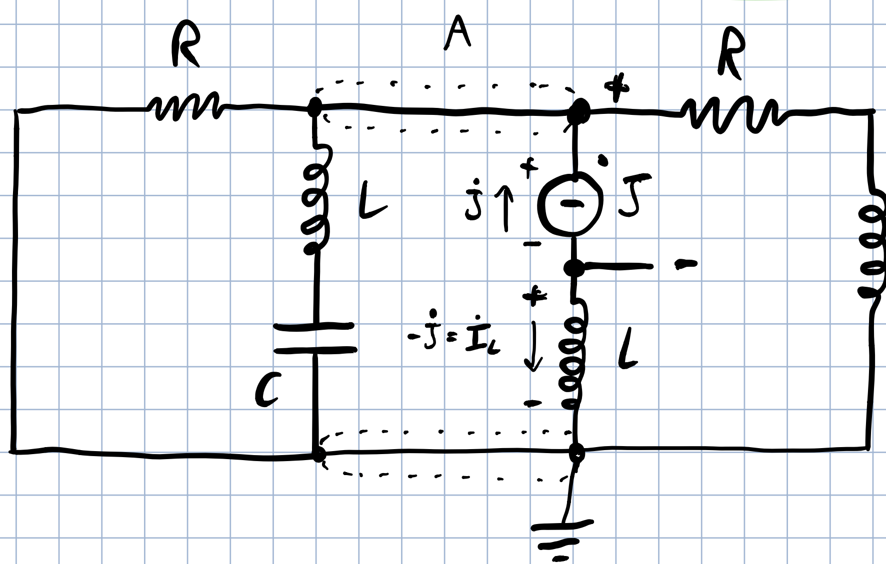
$\dot{J}^*$ (NOTO) $= \dot{J} = 3A$

PER RISOLVERE L'ESERCIZIO HO DUE MODI: CORRENTI DI MAGLIA E TENSIONI DI NODO, DEVO RICORDARMI IN PARTICOLARE CHE POSSO VEDERE OGNI COMPONENTE DEL CIRCUITO COME UNA

GENERICA IMPEDENZA E FARE PARALLELI E SERIE TRA IMPEDENZE GENERICHE PER SEMPLIFICARE IL CIRCUITO, A QUEL PUNTO ANDANDO POI A RISOLVERE UN CIRCUITO "BANALE" CON TENSIONI DI NODO O CORRENTI DI MAGLIA.

NEL NOSTRO CASO, FACCIAMO DIRETTAMENTE TENSIONI DI NODO (SEMPLIFICARE E RISOLVERE CON CORRENTI DI MAGLIA DA SOLI A CASA)

QUA RISOLVIAMO CON TENSIONI DI NODO:



$\to \dot{J} = 3A$

$R = 20\Omega$

$L = 20\,mH = 2\cdot10^{-2}\,H$

$C = 10\,\mu F = 10^{-5}\,F$

$$\dot{J} = \dot{V}_A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L + 1/j\omega C} + \frac{1}{R + j\omega L}\right) \to \dot{V}_A = 38.9189 + 6.4865j\,[V]$$

$$\dot{V}^+ = \dot{V}_A$$

$$\dot{V}^- = j\omega L\dot{I}_L = -j\omega L\dot{J} = -60j\,[V]$$

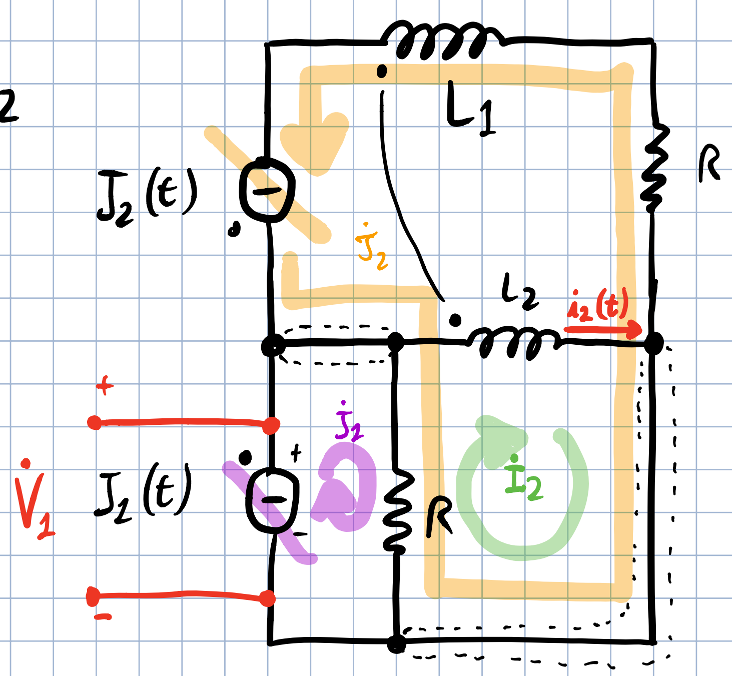
$$\dot{V}_J = \dot{V}^+ - \dot{V}^- = \dot{V}_A + j\omega L\dot{J} = 38.9189 + 66.4865j\,[V]$$

$P_J = 116.76\ W$

SPAZIO X RISOLUZIONE ALTERNATIVA A CASA

$\mathcal{E}_2$:

15-02
2019



$$J_1(t) = \sqrt{2}\,\sin(1000t)\ A \Rightarrow \dot{J}_1 = 1\ A$$

$$J_2(t) = 2\sqrt{2}\,\sin\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) A \Rightarrow \dot{J}_2 = 2\ A$$

$$R = 10\ \Omega$$

$$L_1 = 10\ mH = 10^{-2}\ H$$

$$L_2 = 20\ mH = 2 \cdot 10^{-2}\ H$$

$$M = 14\ mH = 1{,}4 \cdot 10^{-2}\ H$$

$i_2(t) = ?$

$\bar{S}_{J_1} = ?$ POTENZA EROGATA

1) NON POSSO USARE TENSIONI DI NODO, HO INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI, QUINDI USO

CORRENTI DI MAGLIA

2) HO BEN DUE GENERATORI DI CORRENTE INDIPENDENTI, QUINDI DEVO SCRIVERE SOLO UN'EQUAZIONE E POI HO RISOLTO IL CIRCUITO

$$R\left(\dot I_2 - \dot J_1 - \dot J_2\right) + j\omega L_2 \dot I_2 - j\omega M \dot J_2 = 0$$

$$\dot I_2 = 0,44 + 1,12j = 1,2033\, e^{j\,1.1965}\,[A]$$

$$\downarrow$$

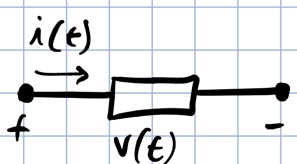
$$\boxed{i_2(t)} = 1,2033\sqrt{2}\,\sin(1000t + 1.1965)\,[A]$$

$$\bar S_{1 J_1} = \dot V_1 \dot J_1^*$$

$$\dot V_1 = \dot J_1 R$$

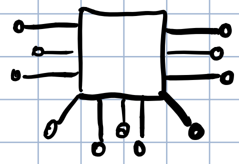
$$\bar S = \dot J_1 \dot J_1^* R = R J_1^2 = 10\ [VA]$$

CIRCUITI A DUE PORTE



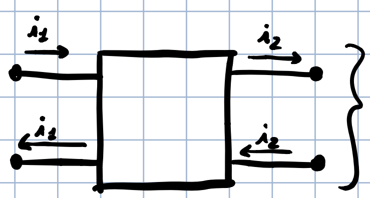
BIPOLO

$$v(t) = f(i(t))$$



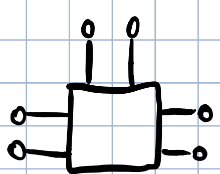
MULTIPOLO (I PRINCIPI DI KIRCHOFF CONTINUANO A VALERE PER I MULTIPOLI)

NOI IN PARTICOLARE, STUDIAMO IL CASO DEI CIRCUITI A DUE PORTE



PORTA: COPPIA DI FILI SU CUI ENTRA ED ESCE LA STESSA CORRENTE

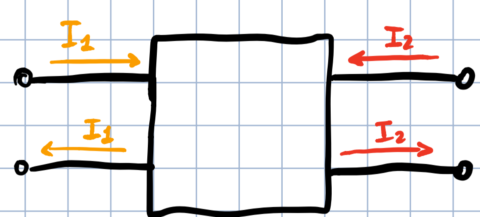
IN PARTICOLARE SE UN MULTIPOLO E' COMPOSTO SOLO DA PORTE PER ENTRATA/USCITA DI TENSIONI, QUESTO SI DICE



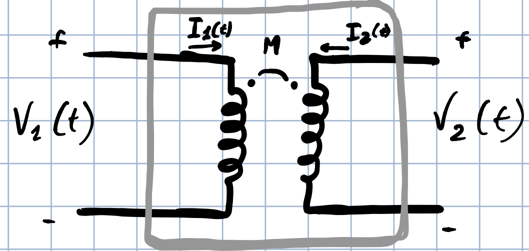
MULTIPORTA (CASO PARTICOLARE MULTIPOLO)

CIRCUITO A 3 PORTE (MULTIPORTA A 3 PORTE)

PARLIAMO QUINDI DEI CIRCUITI A 2 PORTE, ALTRESÌ DETTI **DOPPI BIPOLI.**



ESEMPIO TIPICO E PARTICOLARE DI CIRCUITO A DUE PORTE, SONO GLI INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI.



NB: PER <u>CONVENZIONE</u> $I_1^{(t)}$ ED $I_2^{(t)}$ SI SCELGONO <u>ENTRANTI</u> NEI DUE FILI <u>SUPERIORI</u> DELLE DUE PORTE.

DOPPI BIPOLI O CIRCUITI A DUE PORTE {GRANDEZZE TIPICHE DI RIFERIMENTO}

PARAMETRI Z

DA ADESSO E PER TUTTO IL RESTO DELL' ARGOMENTO, IPOTIZZEREMO DI TROVARCI A REGIME PERIODICO SINUSOIDALE, MA QUELLO CHE STIAMO PER DIRE, IN GENERALE VALE ANCHE PER ALTRI REGIMI A-PERIODICI.

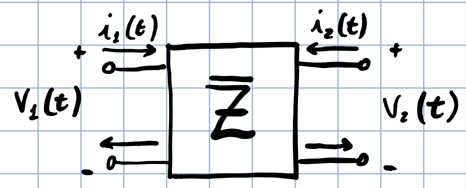
$\dot{V}_1$ $\dot{V}_2$ $\dot{I}_1$ $\dot{I}_2$ SONO LE NOSTRE GRANDEZZE DI INTERESSE PRINCIPALI.

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{Z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \bar{Z}_{21}\dot{I}_2 + \bar{Z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

QUESTO E' COME IN GENERALE LEGHIAMO TENSIONI E CORRENTI NEI CIRCUITI A DUE PORTE.

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$



$$\Downarrow$$

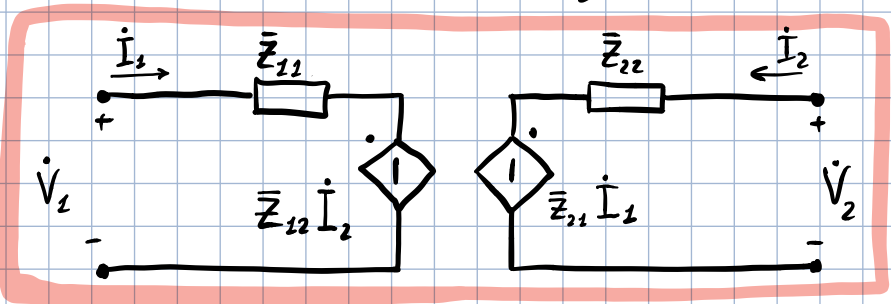
$$\boxed{\dot{V} = \bar{Z} \cdot \dot{I}}$$

DOVE $\bar{Z} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix}$, $\dot{V} = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}$ ed $\dot{I} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$

QUESTO MODO DI RELAZIONARE ENTRATE ED USCITE, VIENE DETTO "PARAMETRIZZAZIONE A PARAMETRI Z."

CIRCUITO EQUIVALENTE A PARAMETRI Z

DATO IN GENERALE UN CIRCUITO A 2 PORTE, E' POSSIBILE TROVARE UN CIRCUITO AD ESSO EQUIVALENTE COSÌ STRUTTURATO:



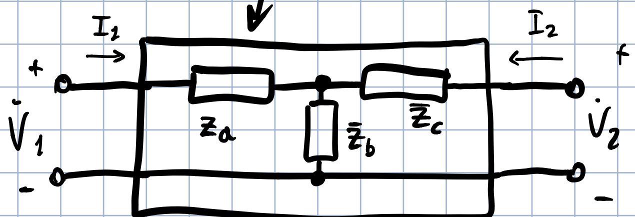
Che però risulta relativamente complesso, posso fare di meglio?

→ Proviamo a scrivere le equazioni

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{Z}_{11}\,\dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\,\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \bar{Z}_{21}\,\dot{I}_1 + \bar{Z}_{22}\,\dot{I}_2 \end{cases}$$

Possiamo dire (ma non dimostreremo) che ogni volta che nel circuito <u>**NON**</u> ci sono generatori **PILOTATI**, $\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21}$, il circuito è <u>reciproco</u> e posso trovare una rappresentazione più vantaggiosa:

Impedenze dette in formazione "a T"



$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{Z}_a\,\dot{I}_1 + \bar{Z}_b\,(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) \\ \dot{V}_2 = \bar{Z}_c\,\dot{I}_2 + \bar{Z}_b\,(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21} = \bar{Z}_b \\ \bar{Z}_{11} = \bar{Z}_a + \bar{Z}_b \\ \bar{Z}_{22} = \bar{Z}_b + \bar{Z}_c \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \bar{Z}_a = \bar{Z}_{11} - \bar{Z}_{21} \\ \bar{Z}_c = \bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{21} \end{cases} \quad \bar{Z}_b = \bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21} \right\}$$ in caso di circuito <u>reciproco</u>

[E QUESTO LO POSSO UTILIZZARE AD ESEMPIO, ANCHE PER SEMPLIFICARE INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI.]

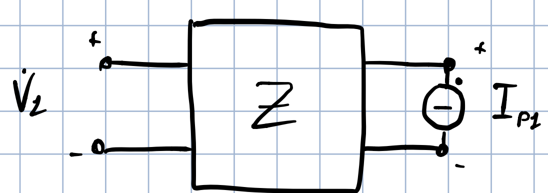
CALCOLO DEI PARAMETRI Z

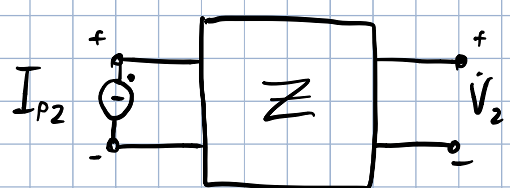
$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{Z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \bar{Z}_{21}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\bar{Z}_{11} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\Bigg|_{I_2=0} \qquad \bar{Z}_{12} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}\Bigg|_{I_1=0}$$

$$\bar{Z}_{21} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\Bigg|_{I_2=0} \qquad \bar{Z}_{22} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2}\Bigg|_{I_1=0}$$

PERCIÒ SE VOGLIO STIMARE I MIEI PARAMETRI Z, POSSO ATTACCARE PRIMA AD UNA PORTA, POI ALL'ALTRA, UN GENERATORE DI CORRENTE E NEL MENTRE MISURARE LA TENSIONE SULLE DUE PORTE, CHE NEL CASO PARTICOLARE DI $\dot{I} = 1\,A$, CORRISPONDERÀ PROPRIO AL VALORE DEI MIEI PARAMETRI Z.





Es: CALCOLARE I PARAMETRI Z

$L_1 = 20\ mH = 2 \cdot 10^{-2}\ H$

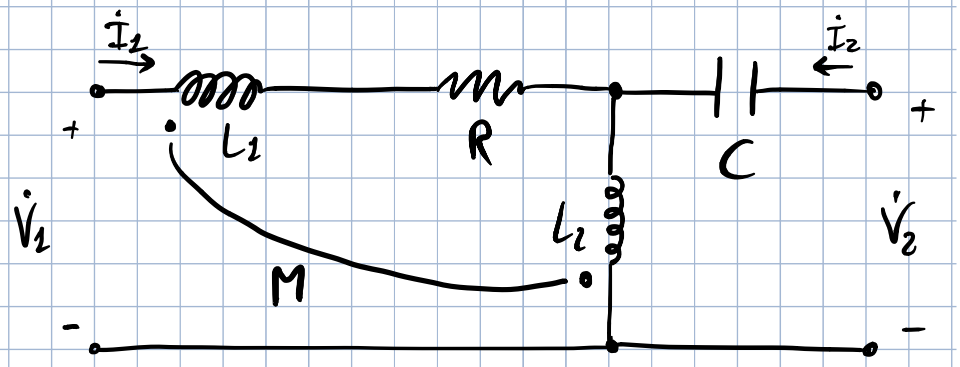
$L_2 = 20\ mH = 2 \cdot 10^{-2}\ H$

$M = 15\ mH = 1.5 \cdot 10^{-2}\ H$

$R = 20\ \Omega$

$\omega = 1000\ rad/s$

$C = 0.1\ mF = 10^{-4}\ F$



$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{Z}_{11}\ \dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\ \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \bar{Z}_{21}\ \dot{I}_1 + \bar{Z}_{22}\ \dot{I}_2 \end{cases}$$

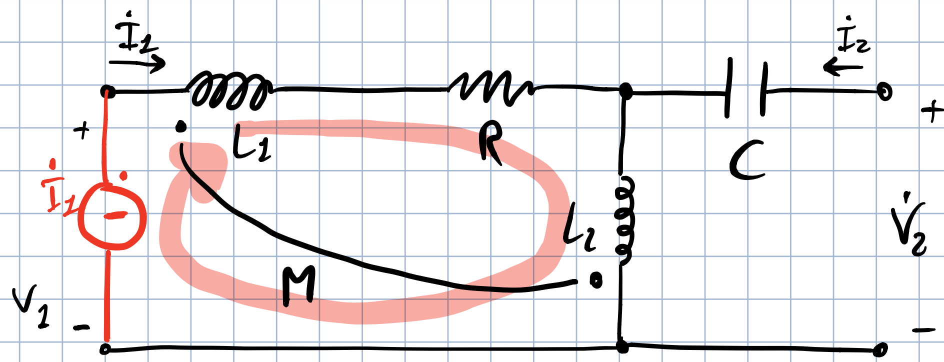
1) PONIAMO $\dot{I}_2 = 0$

2) METTIAMO UN GENERATORE DI PROVA SULLA PORTA 1, NON E' DETTO CHE SIA DI CORRENTE, DIPENDE DA COSA MI CONVIENE.

2.1} IN QUESTO CASO AVENDO INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI, DOVREMO RISOLVERE CON CORRENTI DI MAGLIA E QUINDI CONVIENE METTERE UN GENERATORE DI CORRENTE.

3) CALCOLO $\dot{V}_1$ E $\dot{V}_2$

4) RIPETO CON $\dot{I}_1 = 0$

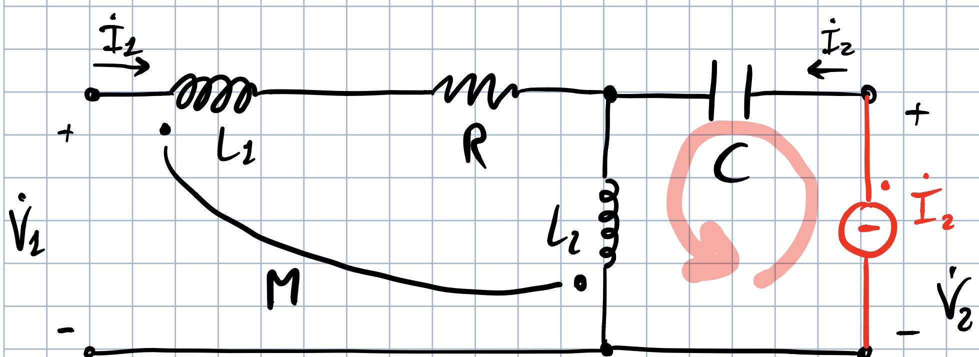


$$\dot V_1 = j\omega L_1 \dot I_1 - j\omega M \dot I_1 + R\dot I_1 + j\omega L_2 \dot I_2 - j\omega M \dot I_1 = (20 + 10j)\dot I_1$$

$$\frac{\dot V_1}{\dot I_1} = 20 + 10j = \bar Z_{11}$$

$$\dot V_2 = j\omega L_2 \dot I_1 - j\omega M \dot I_1 = 5j \dot I_1 \Rightarrow \bar Z_{21} = 5j$$

Faccio lo stesso con $\dot I_1 = 0$, $\dot I_2 = 1A$



$$\dot V_2 = \frac{1}{j\omega C}\dot I_2 + j\omega L_2 \dot I_2 = \dot I_2\left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L_2\right) = 10j\ [V]$$

$$\dot V_1 = j\omega L_2 \dot I_2 - j\omega M I_2 = \dot I_2 \left(j\omega L_2 - j\omega M\right) = 5j\ [V]$$

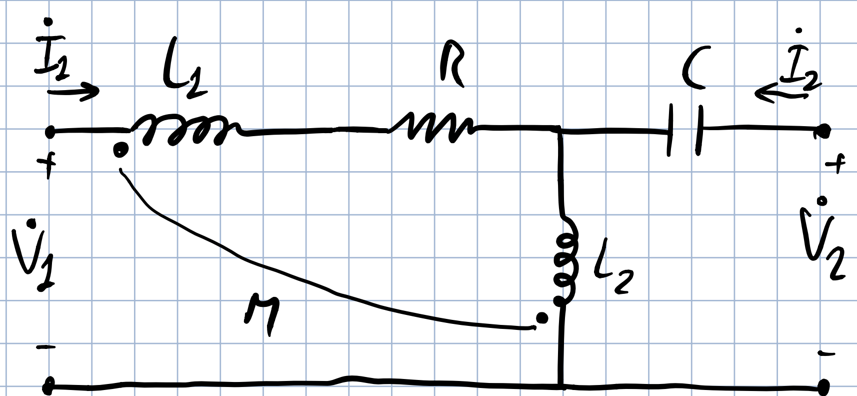
$\bar Z_{22} = 10j$ $\bar Z_{21} = 5j$

$$\begin{bmatrix} 20+10j & 5j \\ 5j & 10j \end{bmatrix} = \bar{Z}$$

$\begin{cases} \text{Rete reciproca} \\ \quad\Downarrow \\ \text{Matrice simmetrica} \end{cases}$

NB: Se anche $\bar{Z}_{11} = \bar{Z}_{22}$, anche la rete si dice simmetrica.

Parametri Z e Parametri Y



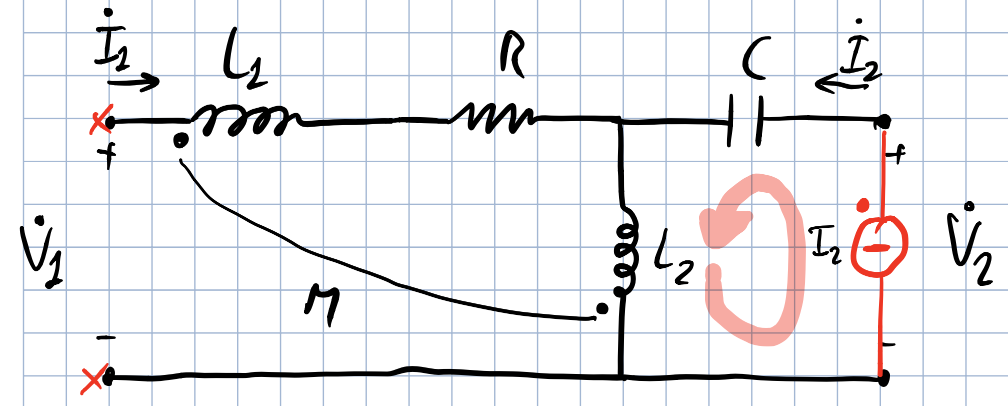
$\dot{V} = \bar{Z}\,\dot{I}$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{12} & \bar{Z}_{22} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$\Updownarrow$

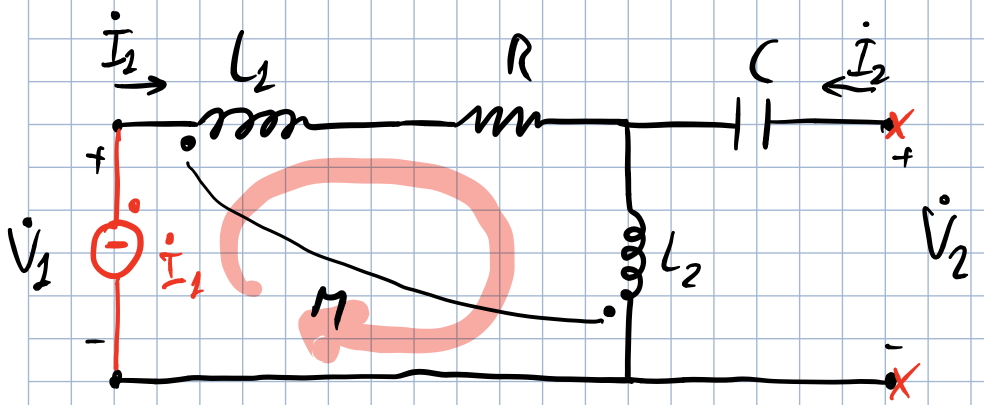
$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{Z}_{11}\,\dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\,\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \bar{Z}_{21}\,\dot{I}_1 + \bar{Z}_{22}\,\dot{I}_2 \end{cases}$$

Questi sono i classici parametri Z, per vedere come mai talvolta convenga usare i parametri Y, proviamo a risolvere il circuito.



$$\dot V_1 = j\omega L_2 \dot I_2 - j\omega M \dot I_2 \Rightarrow \boxed{\bar Z_{12} = \frac{\dot V_1}{\dot I_2} = j\omega L_2 - j\omega M}$$

$$\dot V_2 = j\omega L_2 \dot I_2 + \frac{1}{j\omega C} \dot I_2 \Rightarrow \boxed{\bar Z_{22} = \frac{\dot V_2}{\dot I_2} = j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}}$$



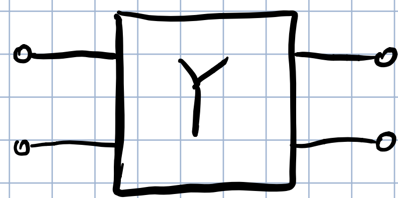
$$\dot V_1 = j\omega L_1 \dot I_1 - j\omega M \dot I_1 + R \dot I_2 + j\omega L_2 \dot I_1 - j\omega M \dot I_1 \Rightarrow \boxed{\bar Z_{11} = \frac{\dot V_1}{\dot I_1} =}$$

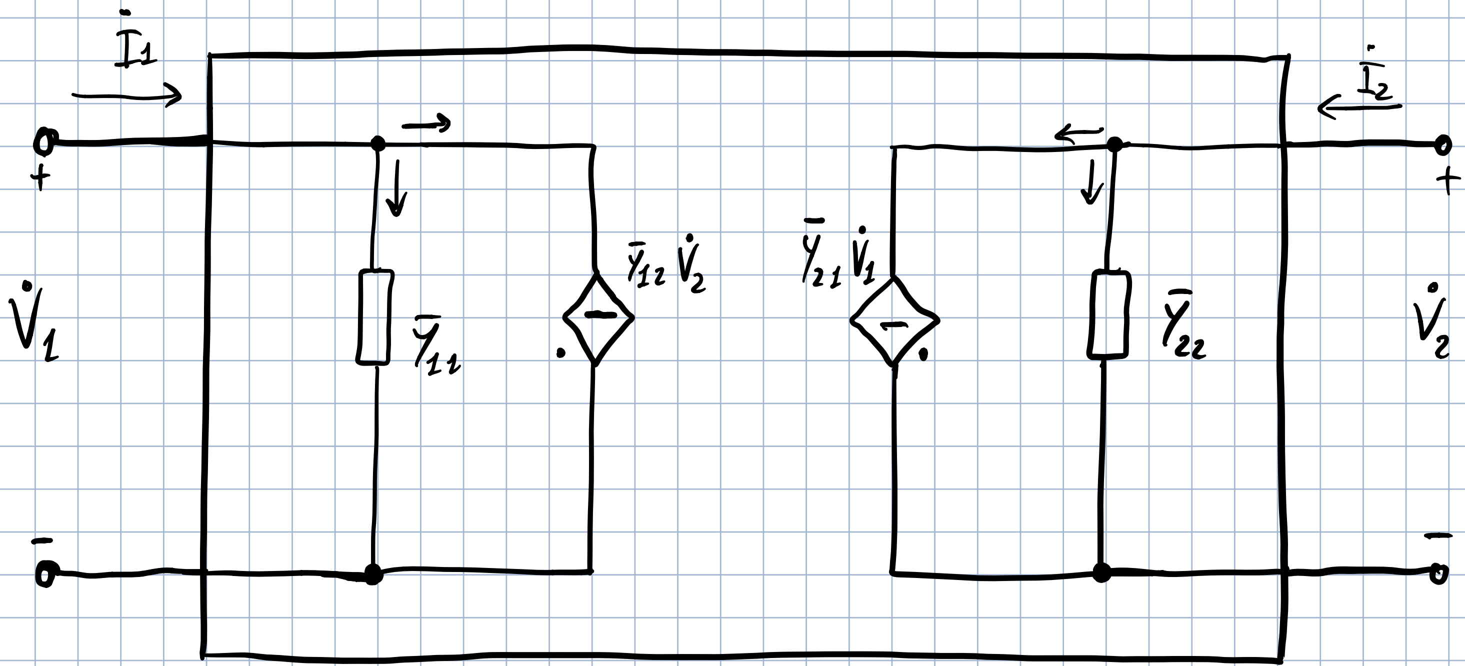
$$\boxed{= j\omega L_1 - 2j\omega M + R + j\omega L_2}$$

$$\dot V_2 = j\omega L_2 \dot I_1 - j\omega M \dot I_1 \Rightarrow \boxed{\bar Z_{21} = \frac{\dot V_2}{\dot I_1} = j\omega L_2 - j\omega M}$$

$\Rightarrow$ COME SAREBBE VENUTO L'ESERCIZIO CON I PARAMETRI Y?

PARAMETRI Y (SONO DELLE AMMETTENZE)



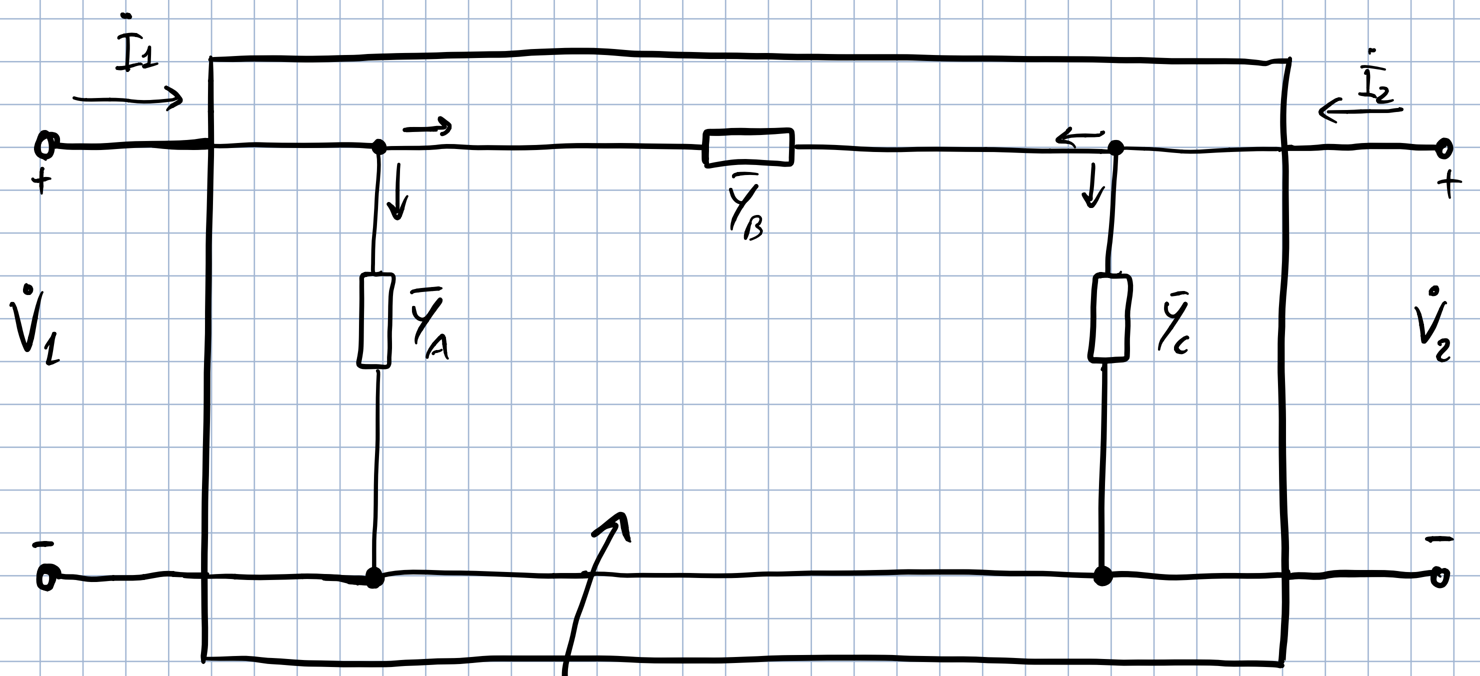


$$\dot{V} = \bar{Z}\dot{I} \Rightarrow \dot{I} = \bar{Z}^{-1} \cdot \dot{V} \underset{\text{(DATA } \bar{Z} \text{ INVERTIBILE)}}{\Longrightarrow} \dot{I} = \bar{Y} \cdot \dot{V}$$

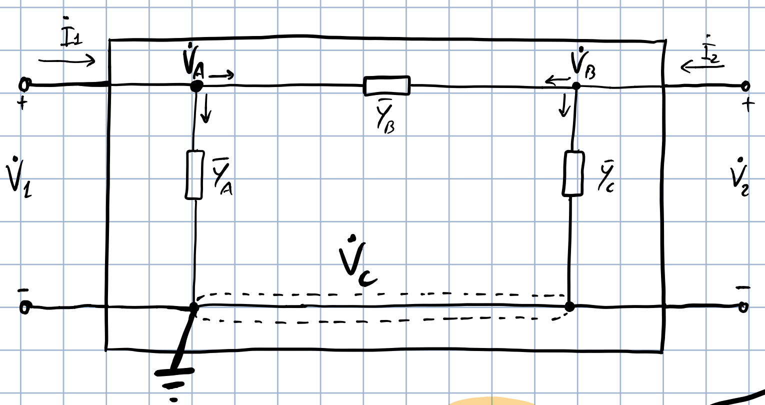
$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \bar{Y}_{11}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{Y}_{21}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

•) CHE NEL CASO LA RETE SIA **RECIPROCA**[1], HA UN CIRCUITO EQUIVALENTE PIÙ SEMPLICE:

(1) RECIPROCA = <u>NON HA GENERATORI PILOTATI</u>, ED $\bar{Y}_{12} = \bar{Y}_{21}$)



CIRCUITO DETTO "A Π"



$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \bar{Y}_{11}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{Y}_{21}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

(QUA $\bar{Y}_{12} = \bar{Y}_{21}$)

STO RISOLVENDO CON TENSIONI DI NODO E KIRCHHOFF

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{V}_1(\bar{Y}_a + \bar{Y}_b) - \dot{V}_2\bar{Y}_b \\ \dot{I}_2 = \dot{V}_2(\bar{Y}_c + \bar{Y}_b) - \dot{V}_2\bar{Y}_b \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \bar{Y}_B = -\bar{Y}_{21} = -\bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_A = \bar{Y}_{11} + \bar{Y}_{21} \ (= \bar{Y}_{12}) \\ \bar{Y}_C = \bar{Y}_{22} + \bar{Y}_{12} \end{cases}}$$

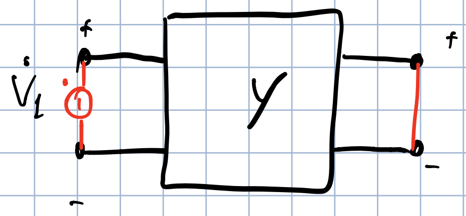
Come calcolo in generale i parametri Y?

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \bar{Y}_{11}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{Y}_{21}\dot{V}_1 + \bar{Y}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

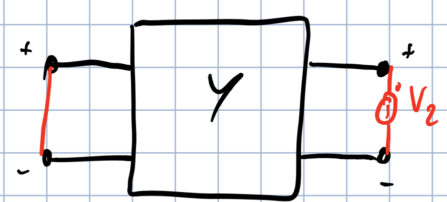
$$\bar{Y}_{11} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}\right|_{V_2=0} \qquad \bar{Y}_{12} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{V}_1=0}$$

$$\bar{Y}_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{V}_2=0} \qquad \bar{Y}_{22} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{V}_1=0}$$

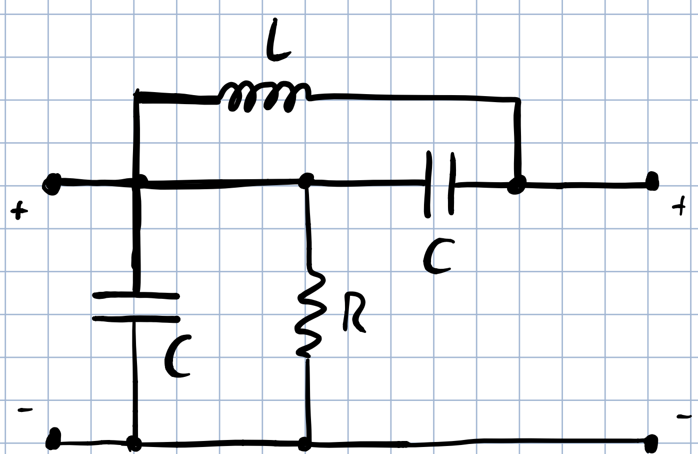
$\Downarrow$



$\Downarrow$



Es:

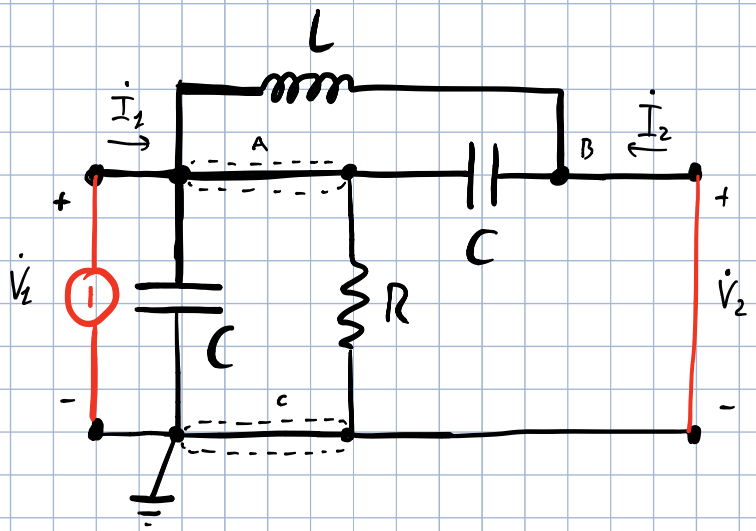


$R = 10\,\Omega$

$C = 10\,\mu F$

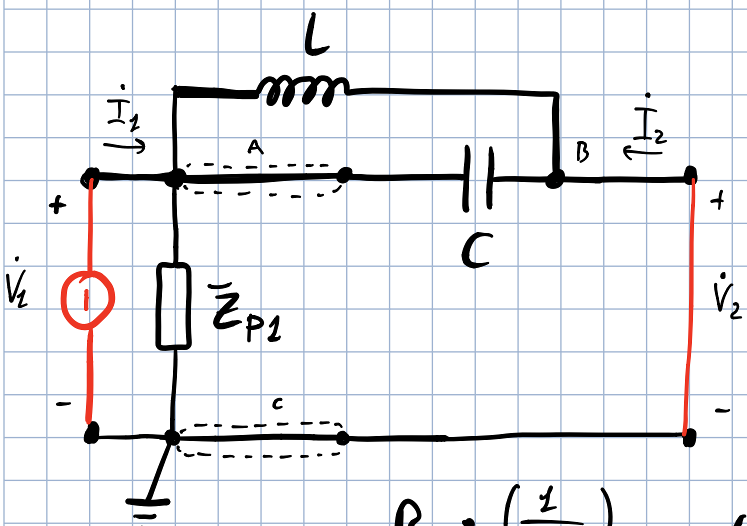
$L = 10\,mH$

$\omega = 1000\ rad/s$

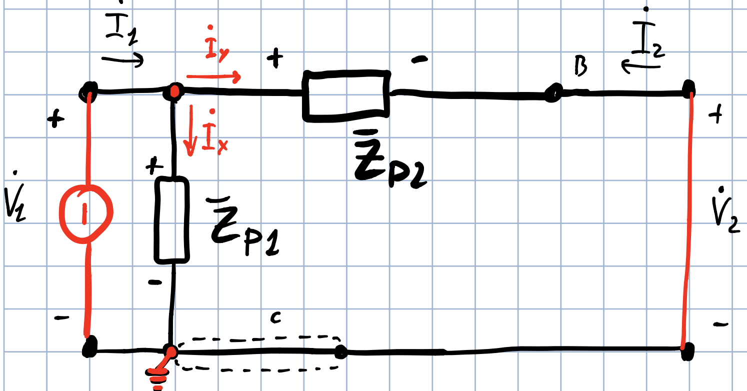


$$\begin{cases} \dot I_1 = \bar y_{11}\dot V_1 + \cancel{\bar y_{12}}\,\dot V_2 \\ \dot I_2 = \bar y_{21}\dot V_1 + \cancel{\bar y_{22}}\,\dot V_2 \end{cases}$$

1) SEMPLIFICAZIONI DEL CIRCUITO, FACCIO SERIE, STELLE, TRIANGOLI, PARALLELI VEDENDO TUTTO COME GENERICHE IMPEDENZE $\bar{Z} = R + j\underbrace{X}_{\text{REATTANZA}}\ [\Omega]$ $\left(j\omega L \text{ o } \frac{1}{j\omega C}\right)$



$$\bar Z_{P1} = \frac{R \cdot \left(\frac{1}{j\omega C}\right)}{R + \left(\frac{1}{j\omega C}\right)} = (9.901 + 0.9901\,j)[\Omega]$$



$$\bar{Z}_{P2} = \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = 11.118\ [\Omega]$$

$$\dot{I}_2 = - \frac{\dot{V}_1}{\bar{Z}_{P2}} \Rightarrow \boxed{\bar{Y}_{21}} = - \frac{1}{\bar{Z}_{P2}} = 0.09\,[S]$$ (SIEMENS)

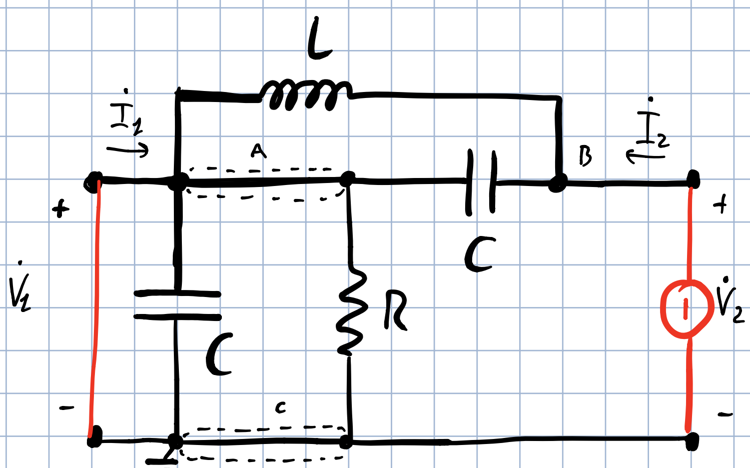
PERCORSO DAL "−" AL "+"

$$\dot{I}_1 = \underbrace{\frac{\dot{V}_1}{\bar{\bar{Z}}_{P1}}}_{\dot{I}_X} + \underbrace{\frac{\dot{V}_1}{\bar{\bar{Z}}_{P2}}}_{\dot{I}_Y}$$

// STO USANDO IL 1° PRINCIPIO DI KIRCHOFF SUL NODO.

$$\Downarrow$$

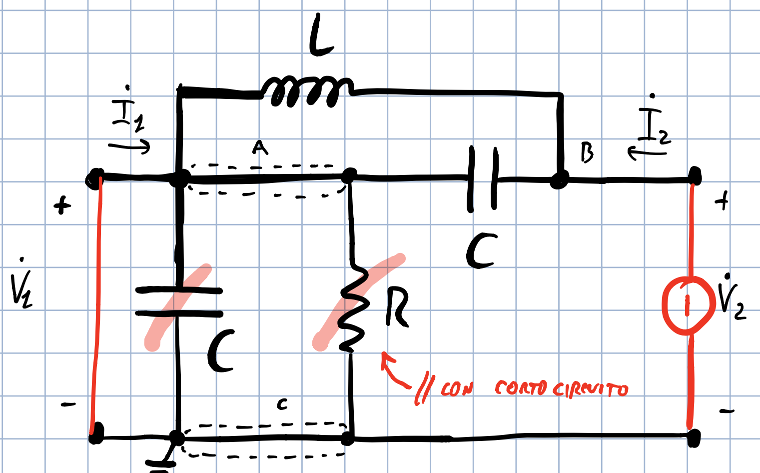
$$\boxed{\bar{Y}_{11}} = \frac{1}{\bar{\bar{Z}}_{P1}} + \frac{1}{\bar{\bar{Z}}_{P2}} = 0.1 - 0.088\ [S]$$

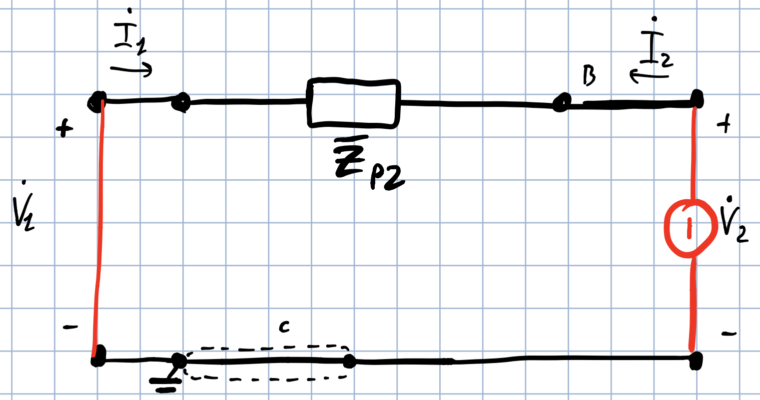


$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \cancel{\bar{Y}_{11} \dot{V}_1} + \bar{Y}_{12} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \cancel{\bar{Y}_{21} \dot{V}_1} + \bar{Y}_{22} \dot{V}_2 \end{cases}$$

$$\bar{Y}_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2} \Big|_{\dot{V}_1 = 0}$$

$$\bar{Y}_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2} \Big|_{\dot{V}_1 = 0}$$





$\bar{Z}_{P2}$ come prima $= 11.11j\,[\Omega]$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_2}{\bar{Z}_{P2}} \rightarrow \bar{Y}_{22} = \frac{1}{\bar{Z}_{P2}} = -0.09j\,[S]$$

$$\dot{I}_1 = -\frac{\dot{V}_2}{\bar{Z}_{P2}} = 0.09j\text{ A} \Rightarrow \bar{Y}_{12} = 0.09j\,[S]$$

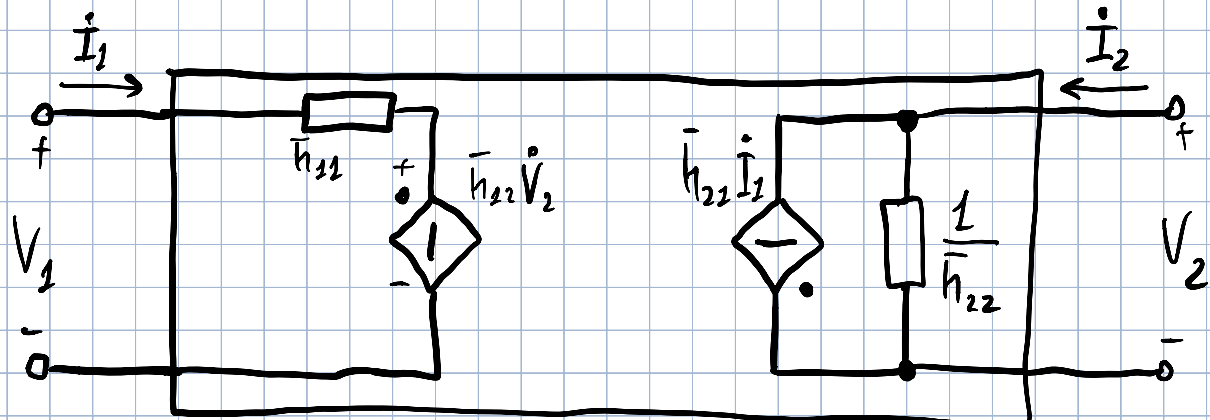
$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} 0.1-0.08j & 0.09j \\ 0.09j & -0.09j \end{bmatrix} [S]$$ siemens

---

Parametrizzazione a parametri h

(Hybrid)

Circuito equivalente:



$$\begin{cases} \dot V_1 = \bar h_{11} \dot I_1 + \bar h_{22} \dot V_2 \\ \dot I_2 = \bar h_{21} \dot I_1 + \bar h_{22} \dot V_2 \end{cases}$$

SE NON HO GENERATORI CONTROLLATI, LA MATRICE E' ANTI-SIMMETRICA.

$$\bar h_{11} = \frac{V_1}{\dot I_1}\bigg|_{\dot V_2 = 0}$$

$$\bar h_{21} = \frac{\dot I_2}{\dot I_1}\bigg|_{\dot V_2 = 0}$$

QUA CORTOCIRCUITO $\dot V_2$

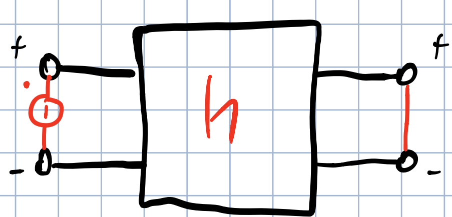
SEMBRANO I TEST DEI PARAMETRI Y

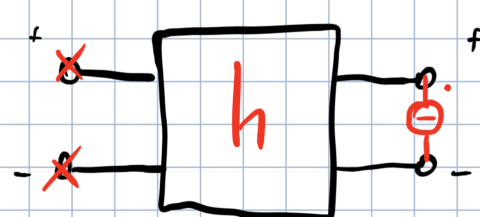
$$\bar h_{12} = \frac{\dot V_1}{\dot V_2}\bigg|_{\dot I_1 = 0}$$

$$\bar h_{22} = \frac{\dot I_2}{\dot V_2}\bigg|_{\dot I_1 = 0} \qquad \left\{ \frac{1}{\bar h_{22}} = \frac{\dot V_2}{\dot I_2}\bigg|_{\dot I_1 = 0} \right\}$$

QUA METTO A VUOTO $\dot I_1$

SEMBRANO I TEST DEI PARAMETRI Z





Es:

$\omega = 1000 \ rad/s$

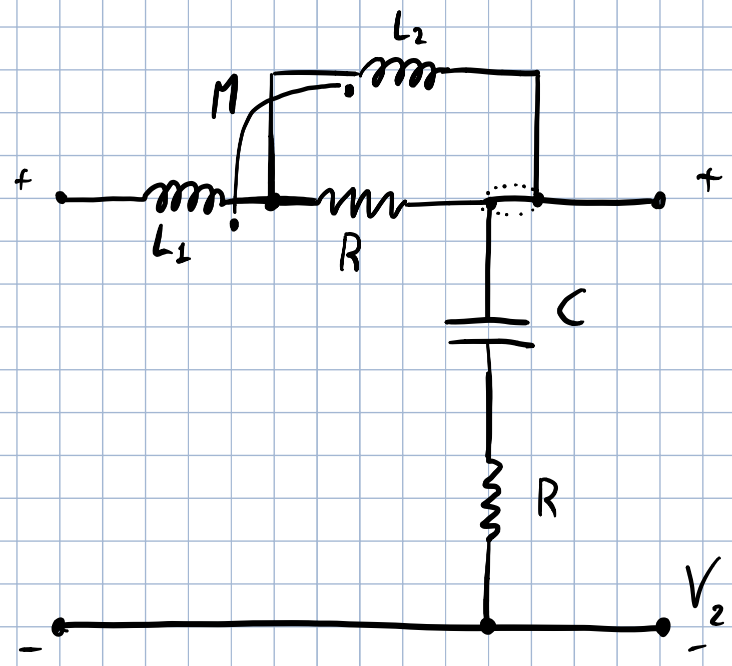
$R = 10 \ \Omega$

$C = 100 \ \mu F$

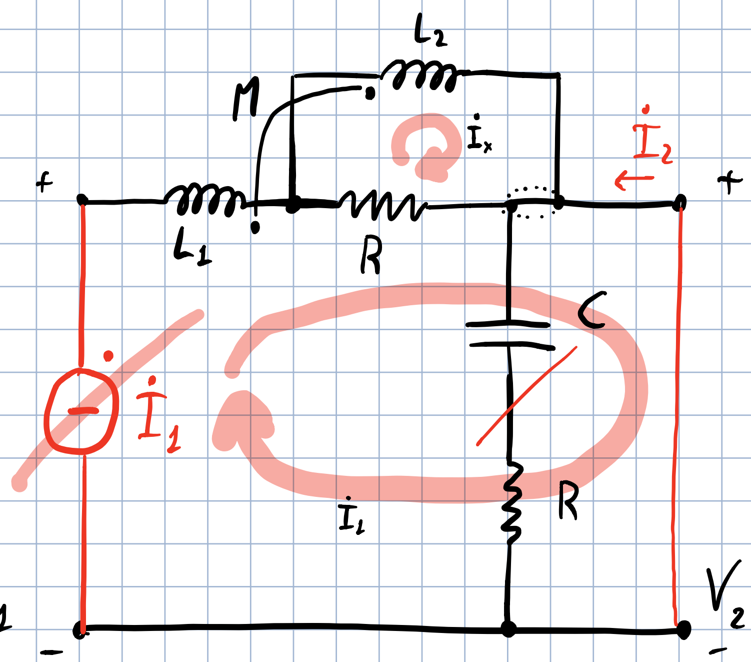
$L_1 = 10 \ mH = 10^{-2} \ H$

$L_2 = 20 \ mH = 2 \cdot 10^{-2} \ H$

$M = 10 \ mH = 10^{-2} \ H$



$\Downarrow$



$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{h}_{11} \dot{I}_1 + \bar{h}_{12} \cancel{\dot{V}_2} \\ \dot{I}_2 = \bar{h}_{21} \dot{I}_1 + \bar{h}_{22} \cancel{\dot{V}_2} \end{cases}$$

$$\bar{h}_{11} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}$$

$$\bar{h}_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$$

RISOLVIAMO IL CIRCUITO:

$$\dot{I}_x (j\omega L_2 + R) + \dot{I}_1 (-R - j\omega M) = 0$$

$$\dot I_x = \dot I_1 \frac{R+j\omega M}{R+j\omega L_2} = \bar\gamma \dot I_1 \quad , \quad \bar\gamma = 0.6 - 0.2j$$

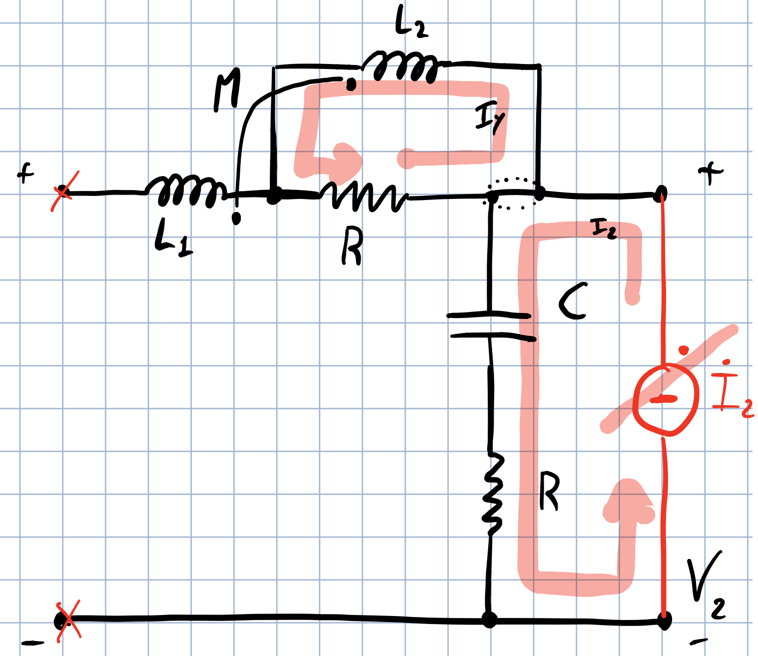
$$\dot V_1 = j\omega L_1 I_1 - j\omega M \bar\gamma \dot I_1 + R(\dot I_1 - \bar\gamma \dot I_1)$$

$$\bar h_{11} = 2+6j$$

$$\bar h_{21} = -\frac{\dot I_1}{\dot I_1} = -1$$

TROVIAMO ORA $\bar h_{12}$ E $\bar h_{22}$

$$\begin{cases} \dot V_1 = \bar h_{11} \cancel{\dot I_1} + \bar h_{12} \dot V_2 \\ \dot I_2 = \bar h_{21} \cancel{\dot I_1} + \bar h_{22} \dot V_2 \end{cases}$$



$$j\omega L_2 \dot I_y + R \dot I_y = 0 \Rightarrow \dot I_y = 0$$

$$\dot V_1 = \left(\frac{1}{j\omega C} + R\right)\dot I_2 \qquad \dot V_2 = \left(\frac{1}{j\omega C} + R\right)\dot I_2 \qquad \dot V_1 = \dot V_2$$

$$\bar{h}_{12} = 1$$

$$\bar{h}_{22} = \frac{1}{\left(\frac{1}{j\omega C} + R\right)} = 0.05 + 0.05j$$

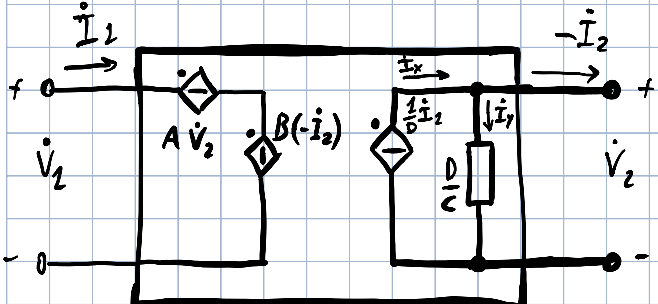
$$H = \begin{pmatrix} 2+6j & 1 \\ -1 & 0.05+0.05j \end{pmatrix}$$ (TORNA: E' ANTISIMMETRICA)

PARAMETRIZZAZIONE A PARAMETRI T
(O PARAMETRI ABCD)

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = A \cdot \dot{V}_2 + B(-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 = C \cdot \dot{V}_2 + D(-\dot{I}_2) \end{cases}$$

SI DICONO PARAMETRI DI TRASMISSIONE, VENGONO USATI TIPICAMENTE PER LE LINEE ELETTRICHE

RAPPRESENTIAMONE IL CIRCUITO EQUIVALENTE!



NB: LA CORRENTE $\dot{I}_2$, E' SEMPRE ENTRANTE NEL +, SOLO CHE QUI CONVIENE CONSIDERARE $-\dot{I}_2$.

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = A\dot{V}_2 + B(-\dot{I}_2) \end{cases}$$

$$\left\{ \dot{I}_1 = C\dot{V}_2 + D(-\dot{I}_2) \right.$$

$$D(-\dot{I}_2) = \dot{I}_1 - C\dot{V}_2$$

$$-\dot{I}_2 = \frac{1}{D}\dot{I}_1 - \frac{C}{D}\dot{V}_2$$

$$-\dot{I}_2 = \frac{1}{D}\dot{I}_1 - \dot{V}_2 \cdot \frac{C}{D}$$

LE COMPLICAZIONI DEI PARAMETRI T PERO' CONTINUANO:

$A = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}\right\|_{\dot{I}_2 = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{A} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_2}\right\|_{I_2 = 0}}$	$B = \left.\frac{\dot{V}_1}{(-\dot{I}_2)}\right\|_{\dot{V}_2 = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{B} = \left.\frac{(-\dot{I}_2)}{\dot{V}_1}\right\|_{\dot{V}_2 = 0}}$
$C = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}\right\|_{\dot{I}_2 = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\right\|_{\dot{I}_2 = 0}}$	$D = \left.\frac{\dot{I}_1}{(-\dot{I}_2)}\right\|_{\dot{V}_2 = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{D} = \left.\frac{(-\dot{I}_2)}{\dot{I}_1}\right\|_{\dot{V}_2 = 0}}$

INFATTI VOLENDO CALCOLARE A, NON POSSO IN CONTEMPORANEA AVERE $\dot{I}_2 = 0$ ED AVERE UN GENERATORE DI TENSIONE DI PROVA PER $\dot{V}_2$, IN QUANTO CI PASSEREBBE UNA CORRENTE.

$\Rightarrow$ QUINDI QUELLO CHE SI FA IN PRATICA, E' CALCOLARE L'INVERSO DEI PARAMETRI.

CONDIZIONE DI RECIPROCITÀ DEI PARAMETRI T:

$AD - BC = 1 \iff \boxed{\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}} = 1$, SI PUÒ RICAVARE DALLA CONDIZIONE DI RECIPROCITÀ DEI PARAMETRI Z.

Eg:

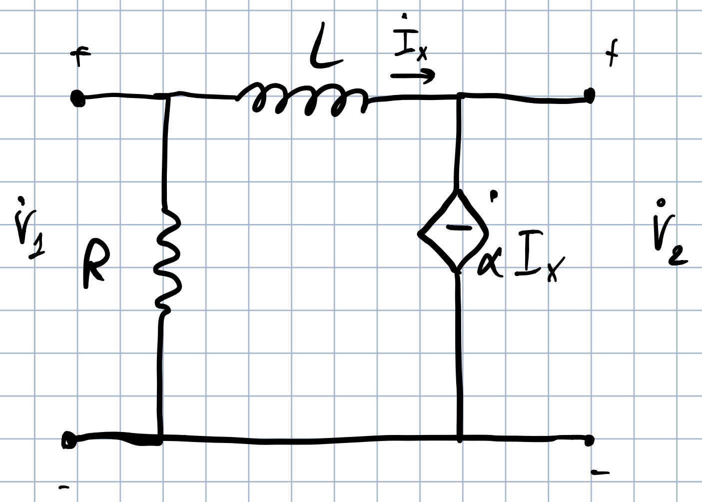
$R = 5\,\Omega$

$L = 10\ mH$

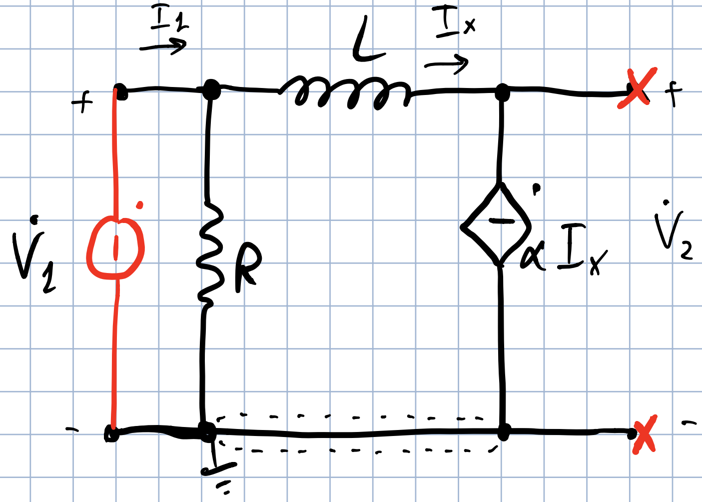
$\omega = 1000\ rad/s$

$\alpha = 2$

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = A \cdot \dot{V}_2 + B(-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 = C \cdot \dot{V}_2 + D(-\dot{I}_2) \end{cases}$$



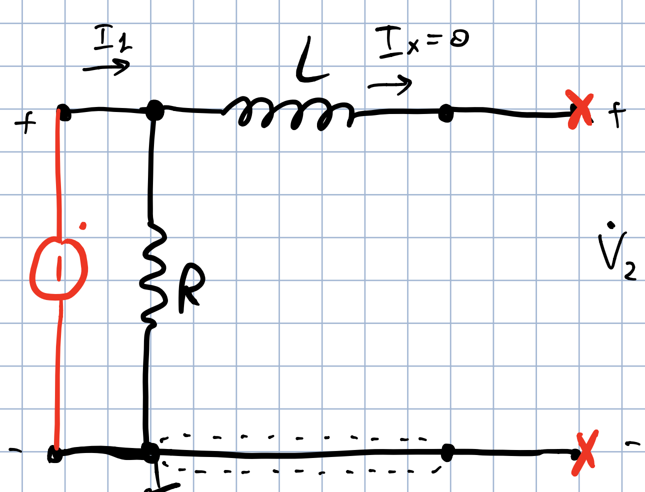
$\Downarrow$



IN QUESTO CASO RISOLVO CON TENSIONI DI NODO, COSÌ PER CAMBIARE, ED AGGIUNGO QUINDI UN GENERATORE DI TENSIONE, CHE COSÌ È IDEALE.

IL CIRCUITO POI RISULTA COMPLETAMENTE RISOLTO IN QUESTO MODO.

IN PARTICOLARE, ADESSO NOTIAMO CHE LA GRANDEZZA PILOTA $\dot{I}_x$, CHE VA CALCOLATA, RISULTA $= 0$, PERCHÉ $\mathring{I}_x = -\alpha \dot{I}_x$ (LA CORRENTE NON PUÒ ANDARE A DESTRA, IL CIRCUITO È STACCATO) ED $\dot{I}_x = 0$



$\mathring{I}_1 = \dot{V}_1 / R \qquad \dot{V}_2 = R \dot{I}_1 \Rightarrow \dot{V}_2 = \dot{V}_1$

$\hookrightarrow = \underbrace{1/R}_{} V_2$

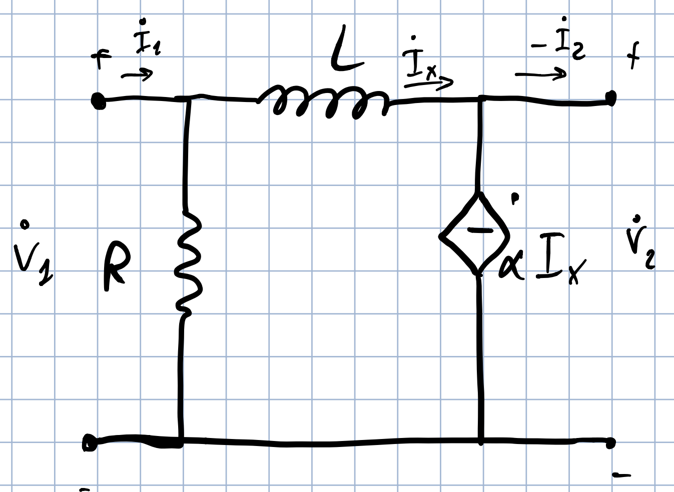
$A = 1$

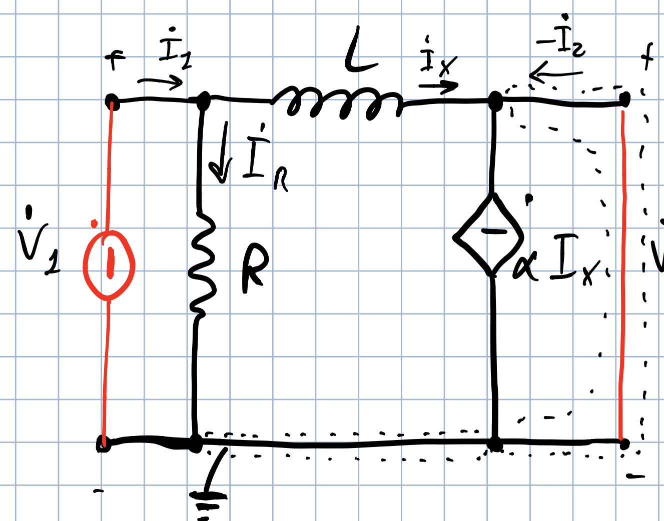
$C = 0.2$

$\hookrightarrow = C = 0.2$

RISOLVIAMO ADESSO L'ALTRO CIRCUITO PER TROVARE B E D.

$$\begin{cases} \dot V_1 = \cancel{A \cdot \dot V_2} + B(-\dot I_2) \\ \dot I_1 = \cancel{C \cdot \dot V_2} + D(-\dot I_2) \end{cases}$$





NOTIAMO CHE IN REALTÀ C'È SOLO UN NODO CON POTENZIALE $\neq 0$, QUINDI IL MIO GENERATORE LO METTO DI TENSIONE ED IL MIO NODO È A TENSIONE $\dot V_1$

TROVO QUINDI $\dot I_x$ $\qquad \dot I_x = \dfrac{\dot V_1}{j\omega L}$

D

$$\dot I_1 = \dot I_R + \dot I_x = \frac{\dot V_1}{R} + \frac{\dot V_1}{j\omega L} = \boxed{\left\{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}\right\} \cdot B} (-\dot I_2)$$

$$-\dot I_2 = \dot I_x + \alpha \dot I_x = \frac{\dot V_1}{j\omega L} + \frac{\alpha \dot V_1}{j\omega L}$$

$$j\omega L\,(-\dot{I}_2) = (\alpha+1)\,\dot{V}_1 \qquad \dot{V}_1 = \underbrace{\frac{j\omega L}{(\alpha+1)}}_{B}(-\dot{I}_2)$$

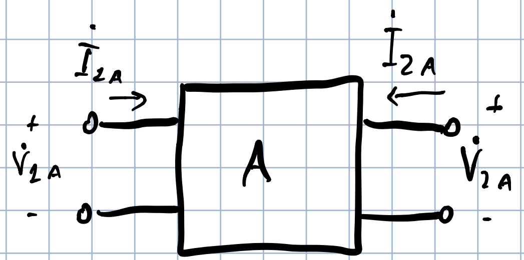
$A = 1$

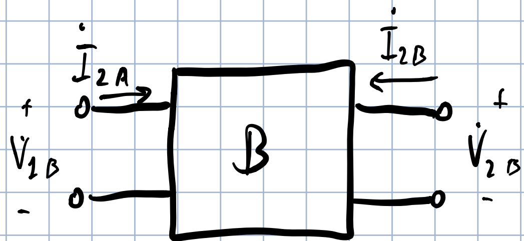
$B = \frac{10}{3}j$

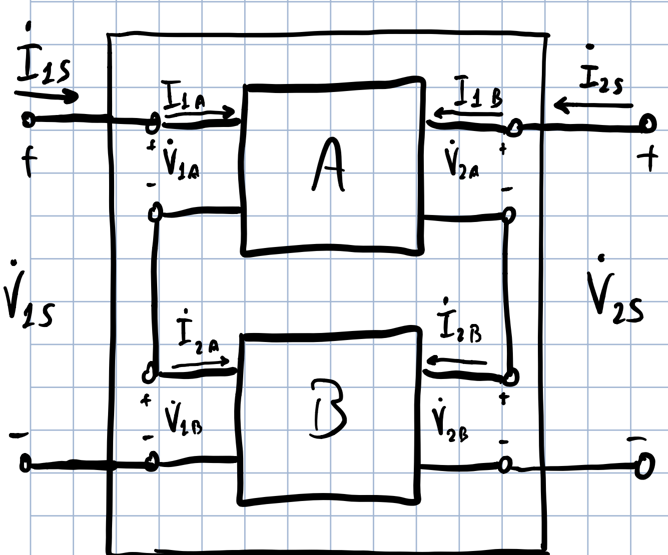
$C = 0.2$

$D = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}j$

Composizione di più circuiti a 2 porte







A e B sono in SERIE

$$\dot{I}_{1A} = \dot{I}_{1B} = \dot{I}_{1S}$$

$$\dot{I}_{2A} = \dot{I}_{2B} = \dot{I}_{2S}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{1S} \\ \dot{V}_{2S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{1A} \\ \dot{V}_{2A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{V}_{1B} \\ \dot{V}_{2B} \end{bmatrix} = \bar{Z}_A \begin{bmatrix} \dot{I}_{1A} \\ \dot{I}_{2A} \end{bmatrix} + \bar{Z}_B \begin{bmatrix} \dot{I}_{1B} \\ \dot{I}_{2B} \end{bmatrix} =$$

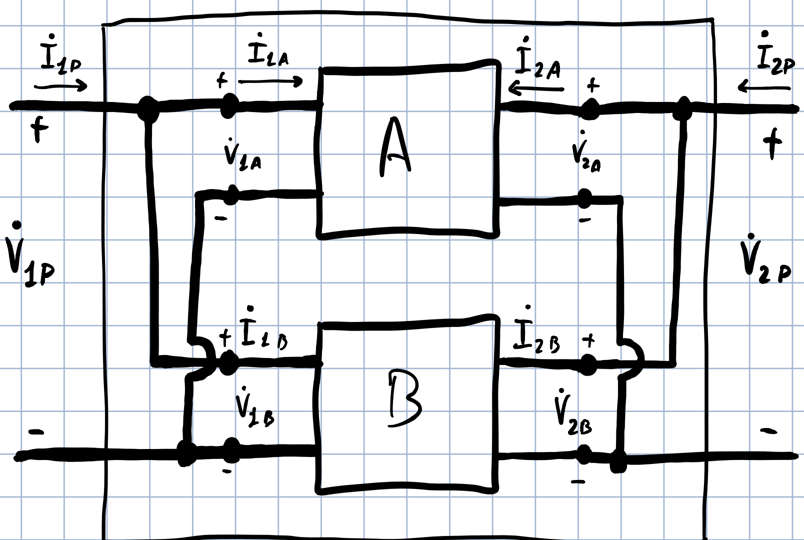
$$= \bar{Z}_A + \bar{Z}_B \begin{bmatrix} \dot{I}_{1S} \\ \dot{I}_{2S} \end{bmatrix} = \left(\bar{Z}_A + \bar{Z}_B\right) \dot{I}_S$$

CON I PARAMETRI Y INVECE, HO CHE:

$$\left(\bar{Y}_S\right)^{-1} = \left(\bar{Y}_A\right)^{-1} + \left(\bar{Y}_B\right)^{-1}$$

$$\bar{Y}_S = \left(\left(\bar{Y}_A\right)^{-1} + \left(\bar{Y}_B\right)^{-1}\right)^{-1}$$

CIRCUITI A 2-PORTE IN PARALLELO



$$\dot{V}_{1A} = \dot{V}_{1B} = \dot{V}_{1P}$$

$$\dot{V}_{2A} = \dot{V}_{2B} = \dot{V}_{2P}$$

SAPENDO CHE:

1) $\dot{I} = \bar{Y}\dot{V}$
2) $\dot{V} = \bar{Z}\dot{I}$

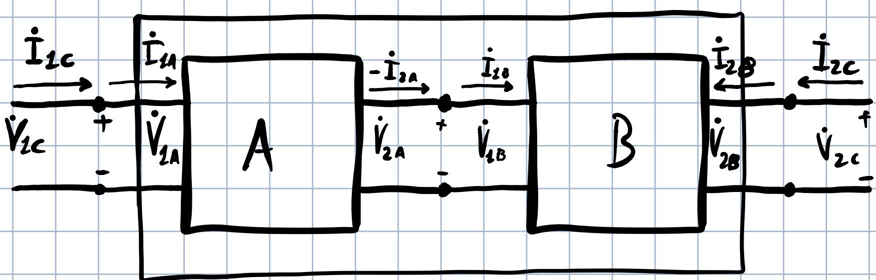
$$\begin{bmatrix}\dot I_{1P}\\ \dot I_{2P}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot I_{1A}\\ \dot I_{2A}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dot I_{1B}\\ \dot I_{2B}\end{bmatrix} = \bar Y_A \begin{bmatrix}\dot V_{1A}\\ \dot V_{2A}\end{bmatrix} + \bar Y_B \begin{bmatrix}\dot V_{1B}\\ \dot V_{2B}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(\bar Y_A + \bar Y_B\right)\begin{bmatrix}\dot V_{1P}\\ \dot V_{2P}\end{bmatrix} = \boxed{\bar Y_P \begin{bmatrix}\dot V_{1P}\\ \dot V_{2P}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot I_{1P}\\ \dot I_{2P}\end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix}\dot V_{1P}\\ \dot V_{2P}\end{bmatrix} = \left(Z_A^{-1} + Z_B^{-1}\right)^{-1} \cdot \dot I_P}$$

(ASSUMENDO CHE Y SIA INVERTIBILE)

COLLEGAMENTO IN CASCATA



QUI INVECE CONVIENE USARE LA PARAMETRIZZAZIONE **T**

$$\boxed{\begin{bmatrix}\dot V_{1C}\\ \dot I_{1C}\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}\dot V_{1A}\\ \dot I_{1A}\end{bmatrix} = T_A \begin{bmatrix}\dot V_{2A}\\ -\dot I_{2A}\end{bmatrix} = T_A \begin{bmatrix}\dot V_{1B}\\ \dot I_{1B}\end{bmatrix} = T_A T_B \begin{bmatrix}\dot V_{2B}\\ (-\dot I_{2B})\end{bmatrix} = \boxed{T_A T_B \begin{bmatrix}\dot V_{2C}\\ (-\dot I_{2C})\end{bmatrix}}$$

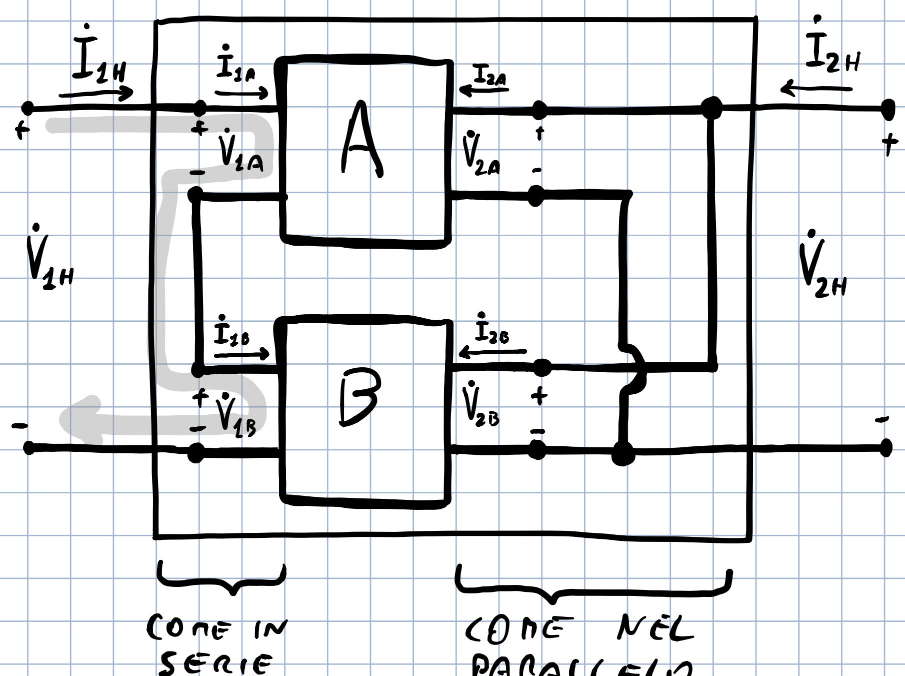
PERCIO' $\boxed{T_C = T_A \cdot T_B}$

NB: VISIVAMENTE È FACILE SPIEGARE CHE DUE BIPORTE SONO IN CASCATA, FORMALMENTE DEVO SCRIVERE:

"DUE ELEMENTI SONO IN CASCATA QUANDO: LA CORRENTE USCENTE DAL PRIMO È UGUALE ALLA CORRENTE ENTRANTE NEL SECONDO E LA TENSIONE ALL'USCITA DEL PRIMO È UGUALE ALLA TENSIONE ALL'ENTRATA DEL SECONDO."

CONNESSIONE IBRIDA (HYBRID)

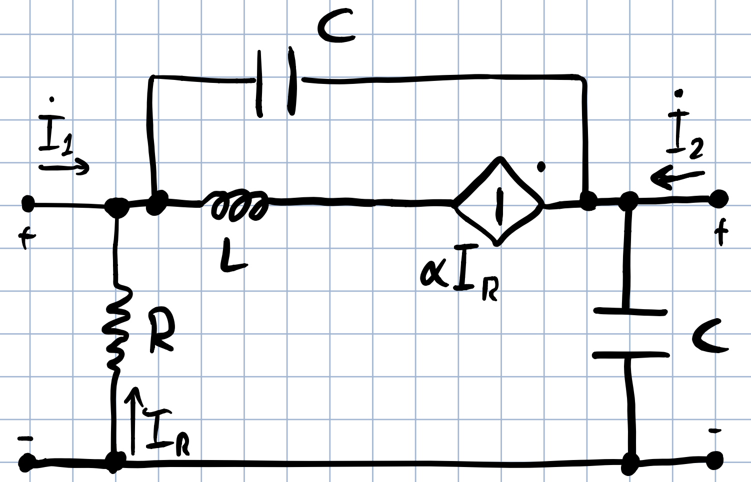
$$\begin{cases} \dot{V}_{11} = \bar{h}_{11}\dot{I}_1 + \bar{h}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{h}_{21}\dot{I}_1 + \bar{h}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$



$$\boxed{\begin{bmatrix}\dot{V}_{1H}\\ \dot{I}_{2H}\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}\dot{V}_{1A}\\ \dot{I}_{2A}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dot{V}_{1B}\\ \dot{I}_{2B}\end{bmatrix} = \bar{h}_A\begin{bmatrix}\dot{I}_{1A}\\ \dot{V}_{2A}\end{bmatrix} + \bar{h}_B\begin{bmatrix}\dot{I}_{1B}\\ \dot{V}_{2B}\end{bmatrix} = \boxed{\left(\bar{h}_A + \bar{h}_B\right)\begin{bmatrix}\dot{I}_{1H}\\ \dot{V}_{2H}\end{bmatrix}}$$

Esercitazione sui Circuiti a 2 Porte

Es:
09-01
2020



$R = 10\,\Omega$

$L = 10\,mH$

$C = 20\,\mu F$

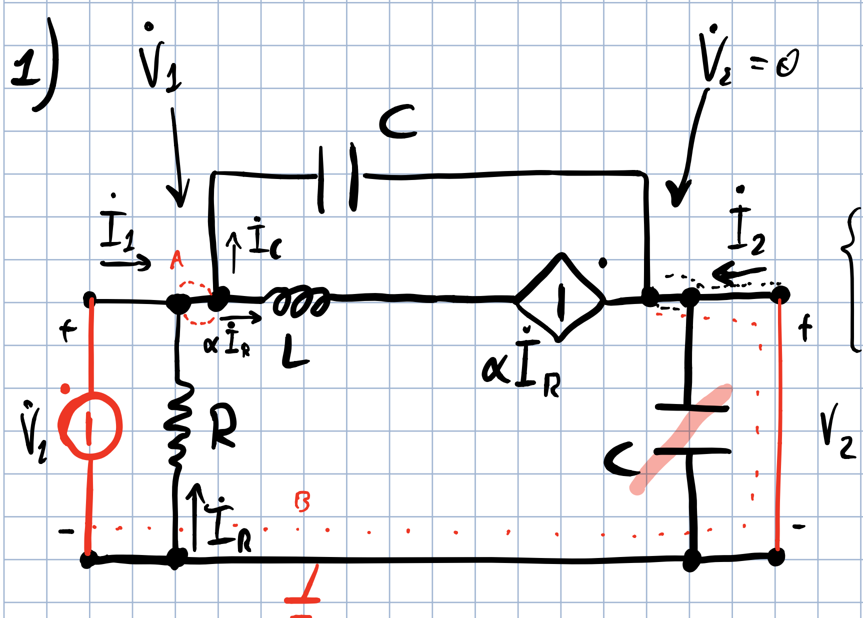
$\alpha = 0.5$

$\omega = 1000\ rad/s$

$\bar{h} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} = ?$

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{h}_{11}\dot{I}_1 + \bar{h}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{h}_{21}\dot{I}_1 + \bar{h}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

1)



$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{h}_{11}\dot{I}_1 + \cancel{\bar{h}_{12}\dot{V}_2} \\ \dot{I}_2 = \bar{h}_{21}\dot{I}_1 + \cancel{\bar{h}_{22}\dot{V}_2} \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione al nodo A:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_R = \dot{I}_C + \alpha \dot{I}_R$$

$$\dot I_1 = \dot V_1 \cdot j\omega C - \left(\frac{\dot V_0 - \dot V_1}{R}\right) + \alpha\left(\frac{\dot V_0 - \dot V_1}{R}\right) = \dot V_1 \cdot \left[\left(\frac{-\alpha+1}{R}\right) + j\omega C\right]$$

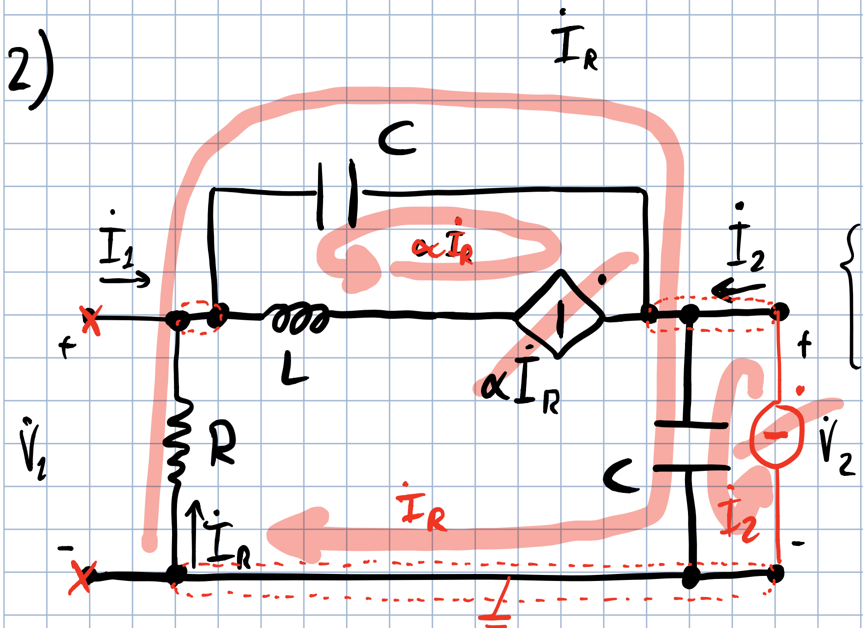
$$\boxed{\bar h_{11}} = \frac{\dot V_1}{\dot I_1} = \frac{1}{\left(\frac{1-\alpha}{R}\right) + j\omega C} = 17.2414 - 6.8966j \; [\Omega]$$

$$\dot I_1 + \dot I_R + \dot I_2 = 0 \qquad \dot I_2 = -\dot I_1 - \dot I_R$$

(SCRIVO L'EQUAZIONE AL NODO DI MESSA A TERRA)

$$I_2 = -\dot I_1 + \frac{\bar h_{11}\, I_1}{R} \Rightarrow -1 + \frac{\bar h_{11}}{R} = \boxed{\bar h_{21}} = 0.7241 - 0.6897j$$

2)



$$\begin{cases} \dot V_1 = \bar h_{11} \cancel{\dot I_1} + \bar h_{12} \dot V_2 \\ \dot I_2 = \bar h_{21} \cancel{\dot I_1} + \bar h_{22} \dot V_2 \end{cases}$$

$$R\dot I_R + \frac{1}{j\omega C}\left(\dot I_R - \alpha \dot I_R\right) + \frac{1}{j\omega C}\left(\dot I_R + \dot I_2\right) = 0$$

$$\dot I_R\left(R + \frac{2-\alpha}{j\omega C}\right) + \frac{\dot I_2}{j\omega C} = 0 \qquad \dot I_R = -\dot I_2 \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\underbrace{\left(R + \frac{2-\alpha}{j\omega C}\right)}_{\gamma}}$$

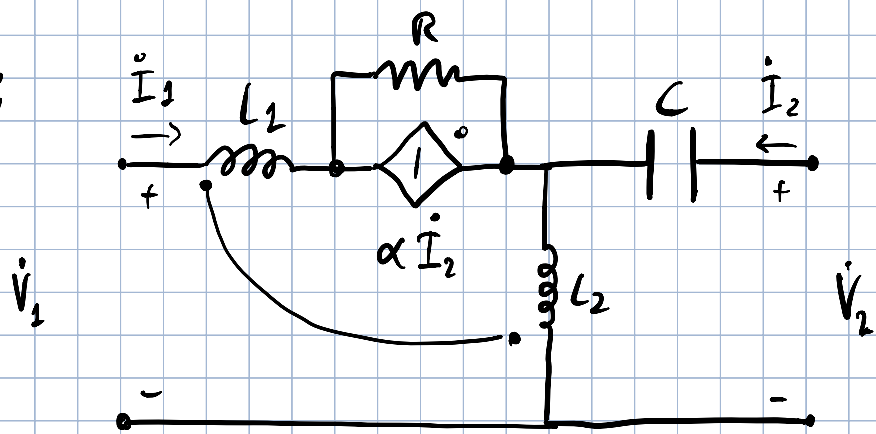
$$\Rightarrow \quad \dot I_R = \bar{j}\, \dot I_2$$

$$\dot V_1 = -R\bar{j}\,\dot I_2 = -\bar{j} R \bar h_{22} \dot V_2 \Rightarrow \boxed{\bar h_{12}} = 0.1379 + 0.3448 j$$

$$\dot V_2 = \frac{1}{j\omega C}\left(\dot I_2 + \bar{j}\,\dot I_2\right) \Rightarrow \boxed{\bar h_{22}} = \frac{\dot I_2}{\dot V_2} = \frac{\cancel{\dot I_2}}{\frac{\cancel{\dot I_2}}{j\omega C}(1+\bar{j})} = 0.0138 + 0.0545 j \ [S]$$

$$H = \begin{bmatrix} 17.2414 - 6.8966 j \ [\Omega] & 0.1379 + 0.3448 j \\ 0.7241 - 0.6897 j & 0.0138 + 0.0545 j \ [S] \end{bmatrix}$$

Es:



$R = 10\,\Omega$

$L_1 = 10\ mH = 10^{-2}\ H$

$M = 10\ mH = 10^{-2}\ H$

$L_2 = 20\ mH = 2 \cdot 10^{-2}\ H$

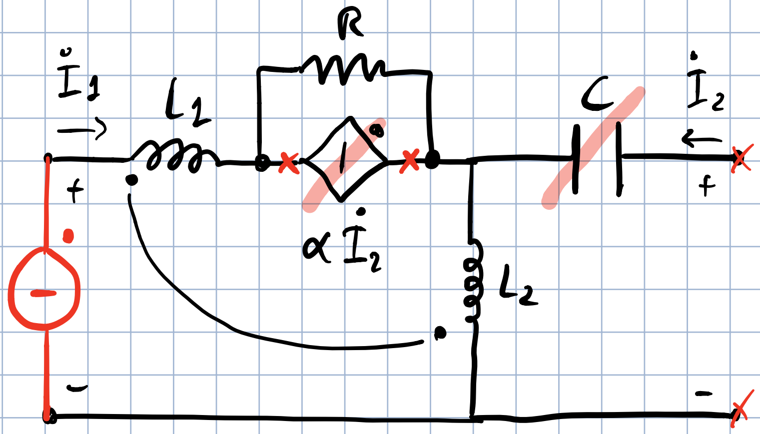
$C = 20\ \mu F = 2 \cdot 10^{-5}\ F$

$\omega = 1000\ rad/s$

$\alpha = 0.8$

PARAMETRI $T = ? = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dot V_1 = A \dot V_2 + B\cancel{(-\dot I_2)} \\ \dot I_1 = C \dot V_2 + D\cancel{(-\dot I_2)} \end{cases}$$



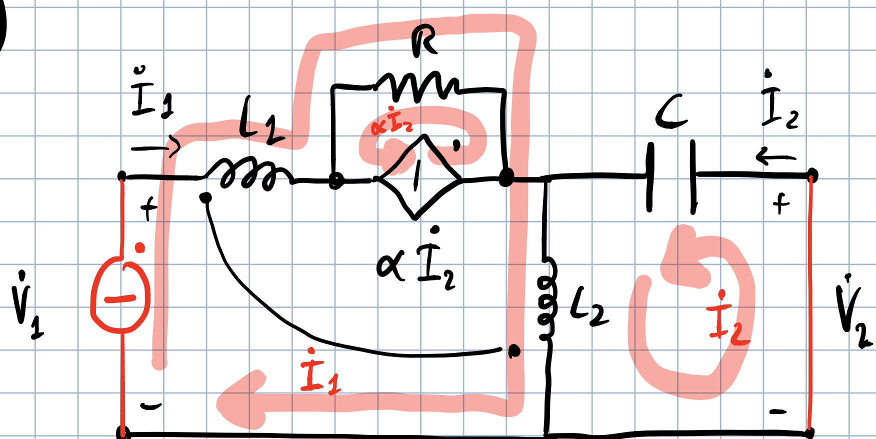
$$\dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - 2j\omega M \dot{I}_1 + R\dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_1$$

$$\dot{V}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_1$$

$$\frac{1}{A} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{(j\omega L_2 - j\omega M)\cancel{\dot{I}_1}}{(j\omega L_1 - 2j\omega M + R + j\omega L_2)\cancel{\dot{I}_1}} \Rightarrow \boxed{A = 1 - j}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1} = \frac{(j\omega L_2 - j\omega M)\cancel{\dot{I}_1}}{\cancel{\dot{I}_1}} \Rightarrow \boxed{C = -0.1j}$$

2)



$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \cancel{A\dot{V}_2} + B(-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 = \cancel{C\dot{V}_2} + D(-\dot{I}_2) \end{cases}$$

$R = 10\,\Omega$

$L_1 = 10\ mH = 10^{-2} H$

$M = 10\ mH = 10^{-2} H$

$L_2 = 20\ mH = 2\cdot 10^{-2} H$

$C = 20\ \mu F = 2\cdot 10^{-5} F$

$\omega = 1000$ rad/s

$\alpha = 0.8$

$$\frac{1}{j\omega C}\dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_1 = 0$$

$$\dot I_2 = \frac{+j\omega M \dot I_1 - j\omega L_2 \dot I_1}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L_2} = \dot I_1 \left(\frac{+j\omega M - j\omega L_2}{1/j\omega C + j\omega L_2}\right) = \frac{1}{3}\dot I_1 \Rightarrow D = \frac{\dot I_1}{(-\dot I_2)}$$

$$\boxed{D = -3}$$

$$\dot V_1 = j\omega L_1 \dot I_1 - j\omega M\left[\dot I_1 + \dot I_2\right] + R\dot I_1 - R\alpha \dot I_2 - \frac{1}{j\omega C}\dot I_2 =$$

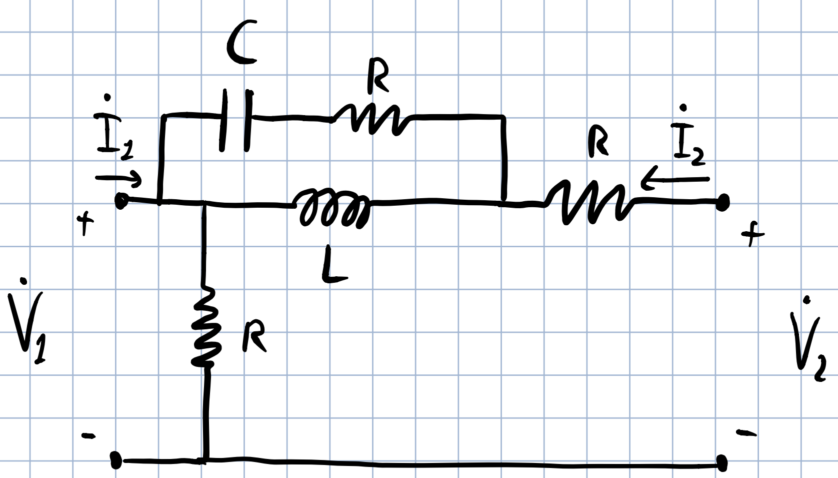
$$= \left(j\omega L_1 - j\omega M + R\right)\underbrace{D(-\dot I_2)}_{\left[\dot I_1 = D(-\dot I_2)\right]} + \left(j\omega M + \alpha R + \frac{1}{j\omega C}\right)(-\dot I_2) =$$

// DALLE EQUAZIONI DEI PARAMETRI T, QUANDO HO IMPOSTO $\dot V_2 = 0$.

$$\boxed{B} = \left(j\omega L_1 - j\omega M + R\right)\cdot D + \left(j\omega M + \alpha R + \frac{1}{j\omega C}\right) = -22 - 40j$$

$$T = \begin{bmatrix} 1-j & -22-40j \\ 0.1j & -3 \end{bmatrix}$$

Es:



$R = 10\,\Omega$

$L = 10\,mH$

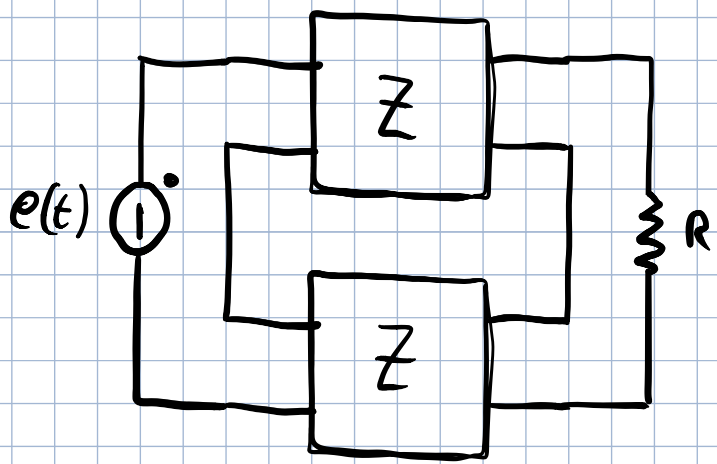
$C = 50\,\mu F$

$\omega = 1000t$

$e(t) = 10\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(1000t)\,[V]$

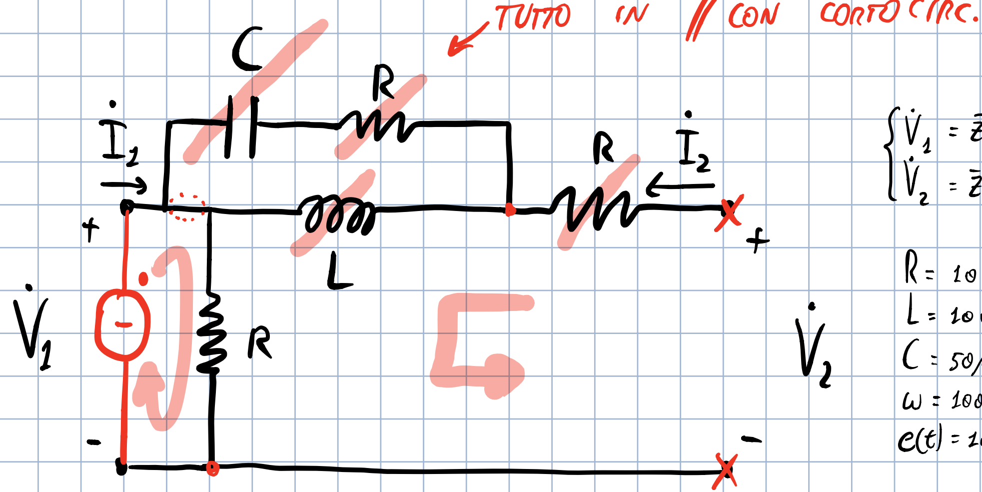
$$\begin{cases} \dot V_1 = \bar z_{11}\dot I_1 + \bar z_{12}\dot I_2 \\ \dot V_2 = \bar z_{21}\dot I_1 + \bar z_{22}\dot I_2 \end{cases}$$

1) TROVARE PARAMETRI Z



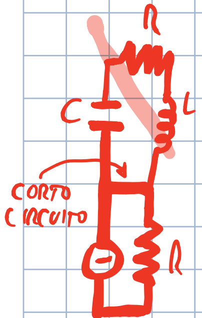
2) TROVARE LA POTENZA ATTIVA, EROGATA DAL GENERATORE DI TENSIONE (ASSUNTI Z DUE CIRCUITI IDENTICI A QUELLO SOPRA)

1)

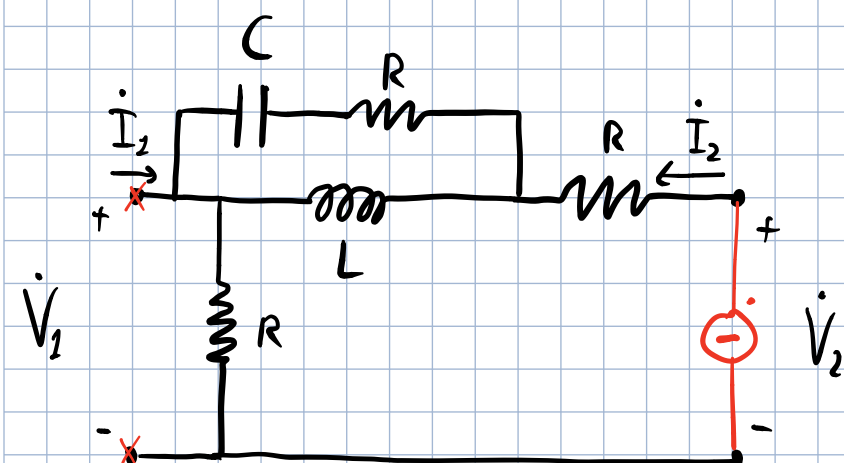


$$\begin{cases} \dot V_1 = \bar z_{11} \dot I_1 + \cancel{\bar z_{12} \dot I_2} \\ \dot V_2 = \bar z_{21} \dot I_1 + \cancel{\bar z_{22} \dot I_2} \end{cases}$$

$R = 10\ \Omega$
$L = 10\ mH$
$C = 50\ \mu F$
$\omega = 1000t$
$e(t) = 10\sqrt{2}\ \text{sen}(1000t)\ [V]$



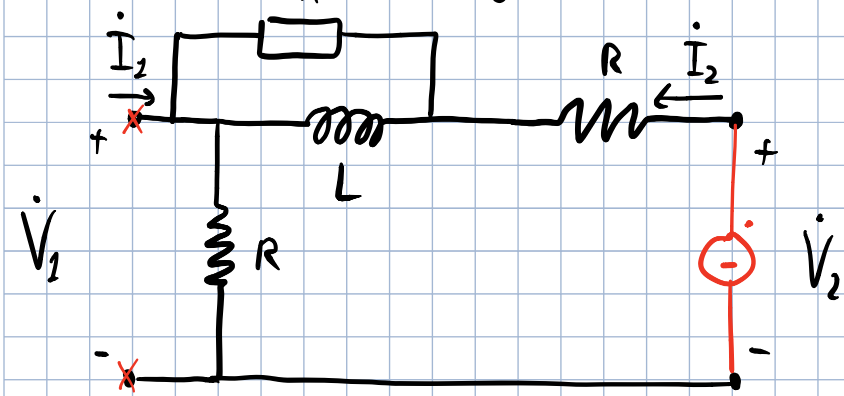
$$\left.\begin{aligned} \dot V_1 &= R \dot I_1 \\ \dot V_2 &= R \dot I_1 \end{aligned}\right\} \qquad \bar z_{12} = \bar z_{21} = \frac{\dot V_1}{\dot I_1} = 10\,[\Omega]$$



$$\begin{cases} \dot V_1 = \bar z_{11} \dot I_1 + \bar z_{12} \dot I_2 \\ \dot V_2 = \bar z_{21} \dot I_1 + \bar z_{22} \dot I_2 \end{cases}$$

$R = 10\ \Omega$
$L = 10\ mH$
$C = 50\ \mu F$
$\omega = 1000t$
$e(t) = 10\sqrt{2}\ \text{sen}(1000t)\ [V]$

$\bar{Z}_A = R + \frac{1}{j\omega C} = 10 - 20j\ [\Omega]$



$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \cancel{\bar{Z}_{11}\dot{I}_1} + \bar{Z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \cancel{\bar{Z}_{21}\dot{I}_1} + \bar{Z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

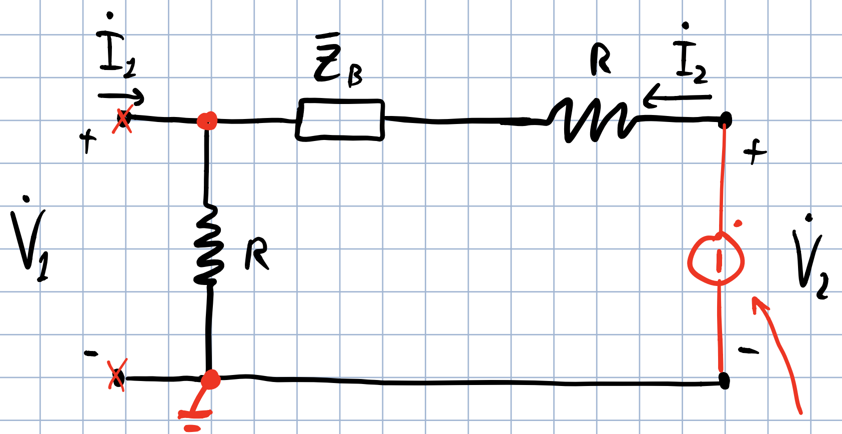
$R = 10\ \Omega$

$L = 10\ mH$

$C = 50\ \mu F$

$\omega = 1000t$

$e(t) = 10\sqrt{2}\ \text{sen}(1000t)\ [V]$



CONVIENE PERCHE' SE DI CORRENTE, NON SAREBBE IDEALE IL GENERATORE.

$$\bar{Z}_B = \frac{\bar{Z}_a \cdot j\omega L}{\bar{Z}_a + j\omega L}$$

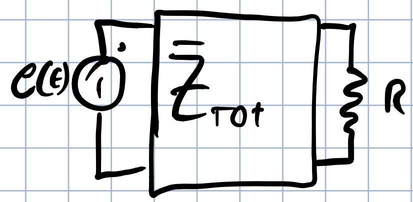
$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_2}{R + \bar{Z}_B + R} \Rightarrow \bar{Z}_{22} = 2R + \bar{Z}_B = 25 + 15j\ [\Omega]$$

$$\dot{V}_1 = \frac{\dot{V}_2}{R + \bar{Z}_B + R} R = \frac{R}{2R + \bar{Z}_B} \bar{Z}_{22} I_2 = 10\ [\Omega]$$

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 10 & 25+15j \end{bmatrix}$$

2) $\bar{Z}_{TOT} = 2\bar{Z} \rightarrow \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 50+308 \end{bmatrix}$ $R = 10\,\Omega$

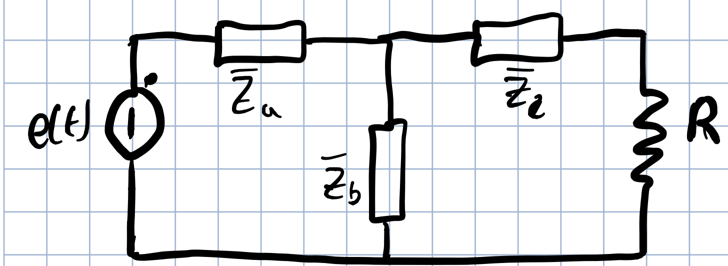
$\dot{E} = 10\,V = \dot{V}_1$



POTENZA ATTIVA EROGATA DAL GENERATORE?

ABBIAMO DUE POSSIBILI SOLUZIONI:

1) UTILIZZIAMO IL CIRCUITO EQUIVALENTE



(CONVENIENTE SE NON HO GENERATORI PILOTATI)

2) RISOLVO UN SISTEMA DI 4 EQUAZIONI IN 4 INCOGNITE:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = 20\,\dot{I}_1 + 20\,\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = 20\,\dot{I}_1 + (50+308)\,\dot{I}_2 \\ \dot{V}_1 = 10 \\ \dot{V}_2 = -R\,\dot{I}_2 = -10\,\dot{I}_2 \end{cases}$$

CHE PERO' SONO PIUTTOSTO FACILI DA RISOLVERE

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 10 = 20\dot{I}_1 + 20\dot{I}_2 \\ -10\dot{I}_2 = 20\dot{I}_1 + 50\dot{I}_2 + 30j\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} I_2 = -I_1 + \frac{1}{2} \\ \dot{I}_1 - \frac{1}{2} = 2\dot{I}_1 + (5+3j)\left(-\dot{I}_1 + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = 0.66 - 0.12j \\ \dot{I}_2 = -0.16 + 0.12j \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_e = \mathrm{Re}\left\{10 \cdot (0.66 + 0.12j)\right\} = \mathrm{Re}\left\{\dot{V}\dot{I}\right\}$$

$$\Rightarrow P_e = 6.6\,[W]$$