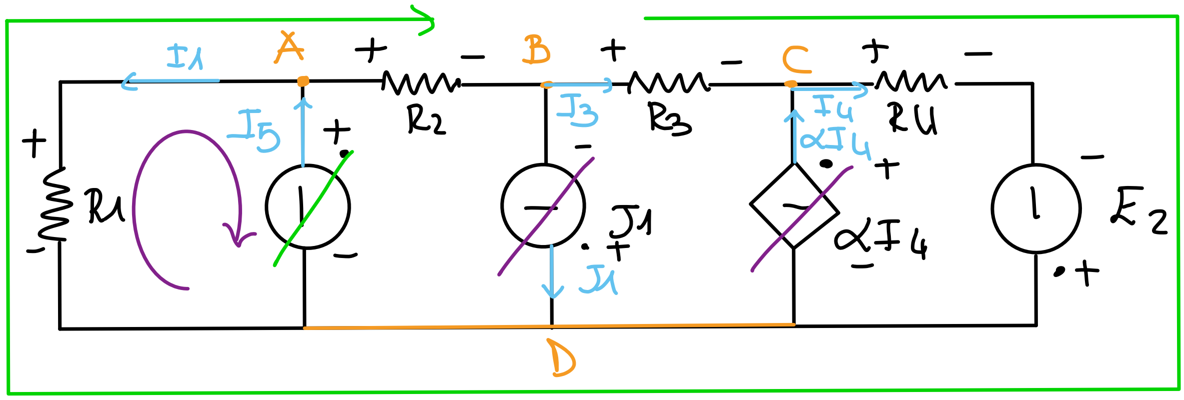
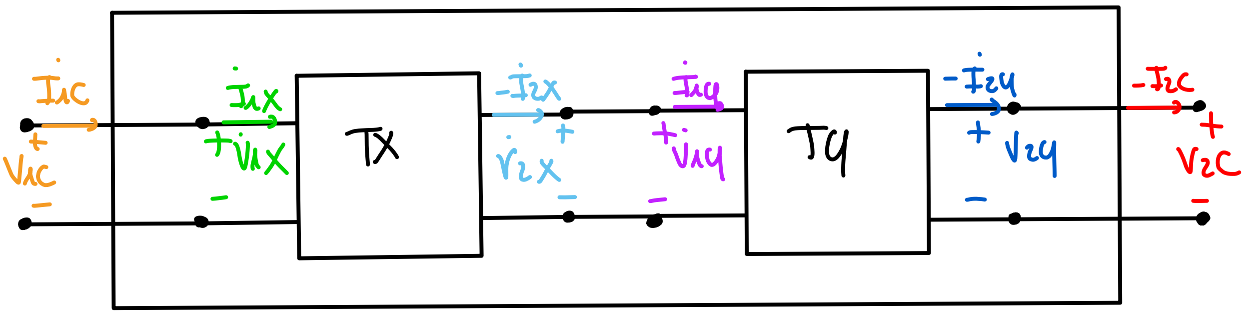
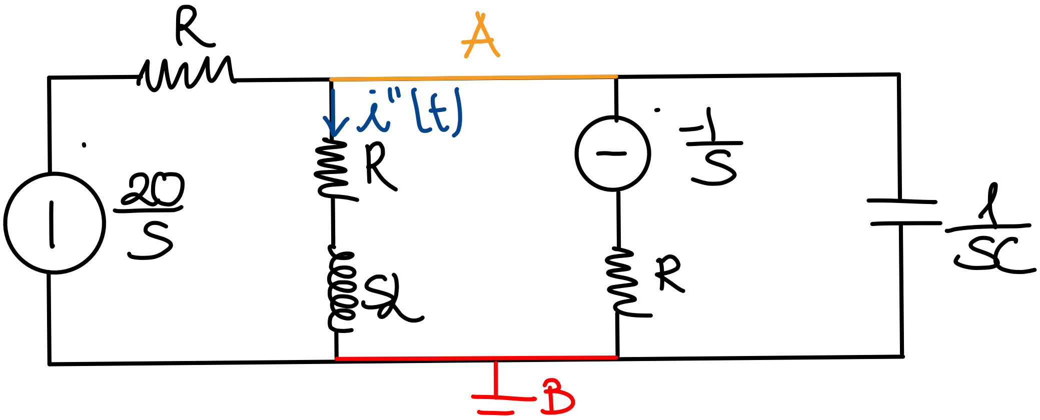
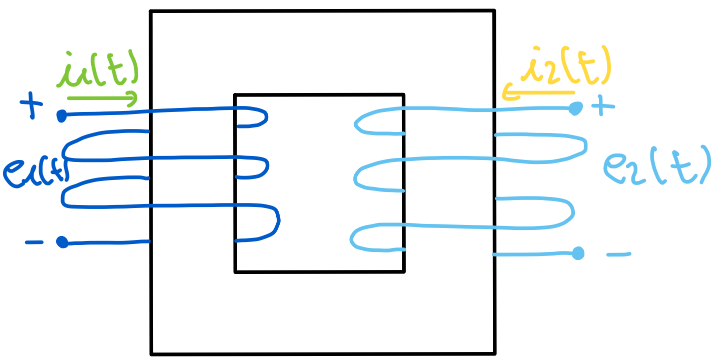
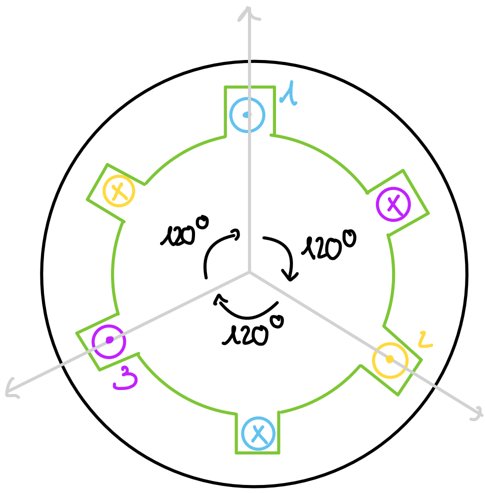










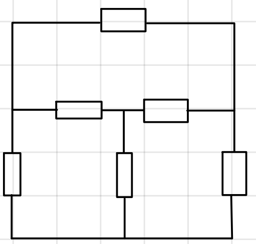
ELETTROTECNICA

Donazioni sempre ben accette ❤️

https://www.paypal.me/mgiannini01

Teoria dei circuiti

- **INTRODUZIONE.** Elettrotecnica = studio dei circuiti elettrici attraverso le leggi di Maxwell ⟶ Si semplificano



EQUAZIONE GENERALE ONDA:

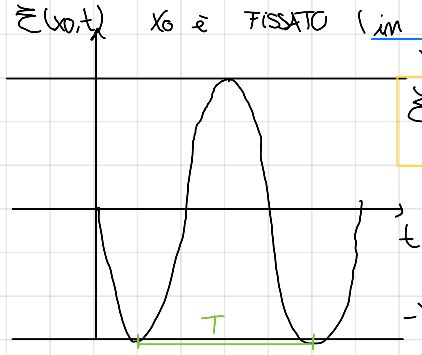
$$\boxed{\mathcal{E}(x,t) = Y \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right)}$$

FISSANDO x_0

$\mathcal{E}(x_0,t)$ x_0 è FISSATO (in particolare è 0)

Y ⟶ Valore massimo

$$\boxed{\mathcal{E}(x_0,t) = Y \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{T}t\right)}$$



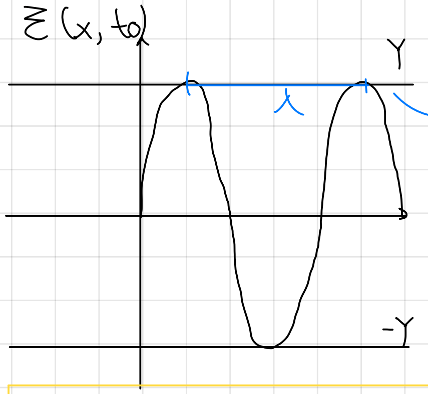
-Y ⟶ Valore minimo

↳ Periodo della funzione

FISSANDO t

$\mathcal{E}(x,t_0)$

$$\boxed{\mathcal{E}(x,t_0) = Y \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)}$$



λ si chiama LUNGHEZZA D'ONDA

↓

È possibile STIMARE λ ⟶ $\boxed{\lambda = \frac{c}{f}} = \frac{300 \cdot 10^6 \; m/\cancel{s}}{50 \; \cancel{s^{-1}} \; (Hz)} = 6 \cdot 10^6 m$

↓

Essendo λ molto grande ed i circuiti considerati molto più piccoli, la variazione NON può essere notata

↓

IPOTESI DI CIRCUITO A PARAMETRI CONCENTRATI: Si considera come CONCENTRATO in un punto

↳ esistono casi in cui queste ipotesi NON valgono come quando $d \cancel{\ll} \lambda$, come ad esempio nel caso delle linee di trasmissione, oppure nel caso in cui la frequenza sia molto elevata

- **GRANDEZZE IMPORTANTI**

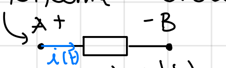
⟶ CORRENTE: $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{q(t_2) - q(t_1)}{t_2 - t_1}$ [A] ⟶ CONVENZIONE: Il segno + è quello del "movimento" delle cariche +

⟶ TENSIONE o DIFFERENZA DI POTENZIALE: $v_{AB}(t) = \frac{\mathcal{L}_{AB}}{q} = V_{A\phi}(t) - V_{B\phi}(t)$ [V] ⟶ Positivo se il lavoro per portare una carica da A a B coincide con il verso delle grandezze del campo elettrico, mentre è negativo se è necessario un lavoro di forze esterne

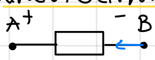
⟶ POTENZA ELETTRICA ISTANTANEA: $p(t) = v(t) \cdot i(t)$ [W]

↓

Potrebbe esserci indeterminatezza di segno



$v_{AB}(t) \cdot i(t)$



$v_{AB}(t) \cdot i(t)$ ma di SEGNO OPPOSTO ⟶ oppure anche scambiando A e B

RIFERIMENTI NON ASSOCIATI: La corrente va dal − al +

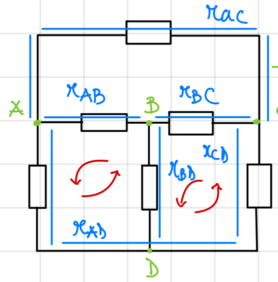
Analogo al caso in cui A, B e la corrente sono SCAMBIATI ⟶ **RIFERIMENTI ASSOCIATI**: La corrente va dal + al −

↳ se positiva: DISSIPATA

↳ se negativa: EROGATA

→ ENERGIA: $w(t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau$ [J]

○ ELEMENTI di un CIRCUITO



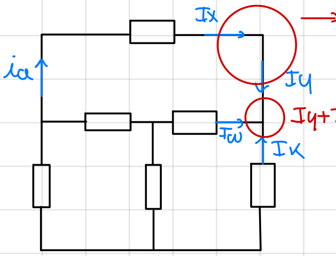
→ A, B, C, D sono NODI → presenti all'intersezione di almeno 3 RAMI

→ r sono RAMI

↓

MAGLIE: insieme di rami distinti che formano un percorso chiuso per cui partendo da un nodo si riesce a tornare allo stesso nodo percorrendo tutti i rami UNA ed UNA SOLA volta

○ Le LEGGI di KIRKHOFF

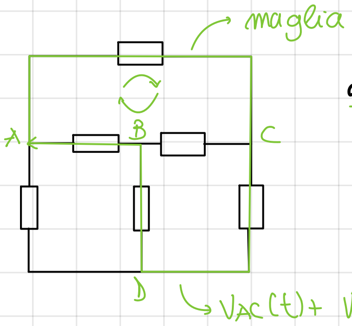


1° principio (I K): La somma algebrica delle correnti che scorrono sui rami di un circuito tagliati da una linea chiusa è uguale a 0

↓

La somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti

↳ i circuiti sono GRAFI che soddisfano i principi di K



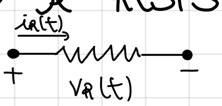
2° principio (II K): La somma algebrica delle cadute di potenziale lungo un percorso chiuso è uguale a 0

↳ $V_{AC}(t) + V_{CD}(t) + V_{DB}(t) + V_{BA}(t) = 0$

↓ se la percorro in verso opposto: $V_{AB}(t) = V_A(t) - V_B(t) = -(V_B(t) - V_A(t)) = -V_{BA}(t)$

$V_{AB}(t) + V_{BD}(t) + V_{DC}(t) + V_{CA}(t) = 0$

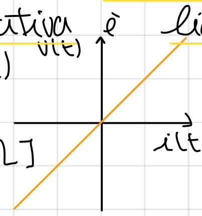
○ Il RESISTORE



PROPRIETÀ: ✓ 1. $\boxed{\text{Linearità}}$ → Un elemento si dice lineare se la sua equazione costitutiva è lineare

↓

1ª Legge di Ohm: $v(t) = R \cdot i(t)$ dove R è la RESISTENZA



$v(t) = R \cdot i(t)$

$i(t) = \frac{1}{R} v(t) = G\, v(t)$

↓

G = conduttanza $[\Omega^{-1}] = [S]$ ← Siemens

2ª Legge di Ohm: $R = \rho \frac{l}{S}$ $[\Omega]$

↓

RESISTIVITÀ: tiene conto della qualità del conduttore (più basso = più qualità)

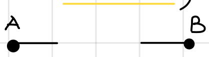
CASI PARTICOLARI

Se $R = 0$:

↓

$V_{AB}(t) = 0$: CORTOCIRCUITO

Se $R \to \infty$, $i_{AB}(t) = 0$



Circuito APERTO

✓ 2. $\boxed{\text{Tempo invarianza}}$ → Il valore di R non cambia nel tempo (di studio del circuito)

✗ 3. $\boxed{\text{Con memoria}}$ → Un elemento elettrico si dice con memoria se i valori della tensione e della corrente dipendono da valori di corrente e tensione precedenti

↓

NON VERIFICATA

✓ 4. $\boxed{\text{Passivo}}$ → Un elemento elettrico è passivo se, avendo scelto riferimenti associati, l'energia elettrica in qualunque istante di tempo t è maggiore di 0

↓

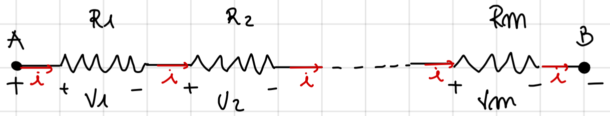
$P_R(t) = V_R(t) \cdot i_R(t) = R \cdot i_R(t) \cdot i_R(t) = R \cdot i_R^2(t)$

↳ possono solo DISSIPARE POTENZA (Effetto Joule)

$W_R(t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau \geq 0$: Area sottesa ad una curva sempre ≥ 0 → VERIFICATA

○ RESISTENZE in SERIE, in PARALLELO, a TRIANGOLO e a STELLA

SERIE: Due o più bipoli elettrici si dicono in serie se sono attraversati dalla STESSA CORRENTE



La RESISTENZA EQUIVALENTE agli effetti esterni: Agli effetti esterni NON vi sono differenze ad avere un'unica resistenza equivalente rispetto a più resistenze in serie

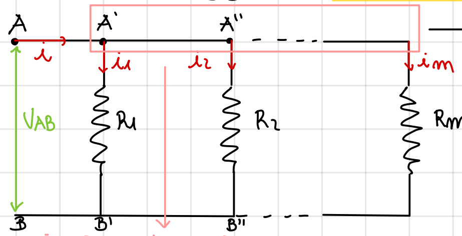
$V_{AB}(t) = V_1(t) + V_2(t) + \ldots + V_m(t) =$

$= R_1 \cdot i_1(t) + R_2 \cdot i_2(t) + \ldots + R_m \cdot i_m(t) =$

essendo i comune $= (R_1 + R_2 + \ldots + R_m)\, i = \boxed{\sum_{J=1}^{m} R_J \cdot i(t) = Req}$

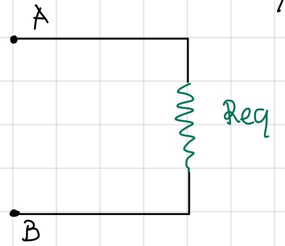
Da un punto di vista FORMALE: viene sostituito il valore di UNA resistenza in serie con Req e le restanti con un CORTOCIRCUITO
(topologico)

PARALLELO: Due o più bipoli elettrici si dicono in parallelo se si trovano alla STESSA TENSIONE



→ A, A', A'' si trovano allo STESSO POTENZIALE in quanto sono collegati da un CORTOCIRCUITO

↓ Resistenza equivalente



$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \ldots + i_m(t) =$

$= \frac{V_{AB}(t)}{R_1} + \frac{V_{AB}(t)}{R_2} + \ldots + \frac{V_{AB}(t)}{R_m} =$

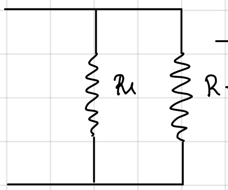
$= V_{AB}(t) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_m} \right) =$

$= V_{AB}(t)\, (G_1 + G_2 + \ldots + G_m) =$

$= G_{eq} \cdot V_{AB}(t)$

$V_{AB}(t) = \frac{1}{G_{eq}} \cdot i(t) = \frac{1}{G_1 + G_2 + \ldots + G_m} \cdot i(t) = \underbrace{\boxed{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_m}}}}_{Req} \cdot i(t) \longrightarrow \boxed{Req = \frac{1}{\sum_{J=1}^{m} \frac{1}{R_J}}}$

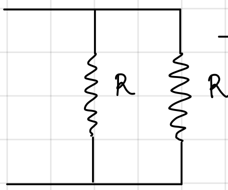
CASO PARTICOLARE: Solo due resistenze in parallelo



$\longrightarrow Req = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \boxed{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$ → Prodotto delle resistenze / → Somma delle resistenze

↓ se una delle due è 0, Req è pari a 0 e quindi si può cancellare

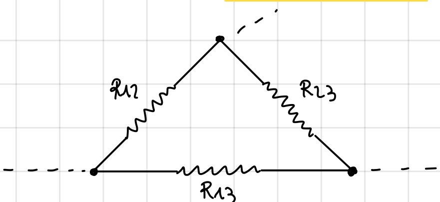
CASO PARTICOLARE: Le due resistenze in parallelo hanno lo STESSO VALORE



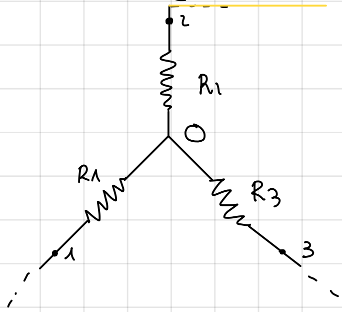
$\longrightarrow Req = \frac{R \cdot R}{R + R} = \boxed{\frac{R}{2}}$ → VALE anche per PIÙ RESISTENZE di ugual valore

Dal punto di vista TOPOLOGICO: In una resistenza si mette il valore della resistenza equivalente, mentre nelle altre si mette un CIRCUITO APERTO

TRIANGOLO: Tre resistenze si dicono a triangolo se a due a due hanno un morsetto in comune

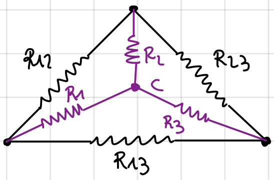


STELLA: Tre resistenze si dicono a stella se hanno tutte un morsetto in comune



TRASFORMARE △ in Y

Si disegna il circuito uguale senza i rami che componevano il triangolo, si aggiunge un nodo centrale e poi si collegano le resistenze



$$R_1 = \frac{R_{12} R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$$

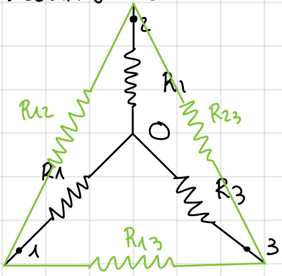
$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$$

$$R_3 = \frac{R_{13} \; R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$$

→ Caso particolare: se le 3 resistenze sono uguali $\boxed{R = \frac{R}{3}}$ in tutti e 3 i casi

TRASFORMARE Y in △

Si disegna il circuito e si uniscono gli estremi della stella tramite delle resistenze



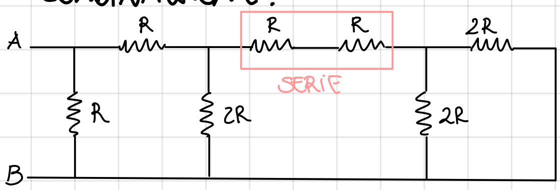
$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3}$$

$$R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_1}$$

$$R_{13} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_2}$$

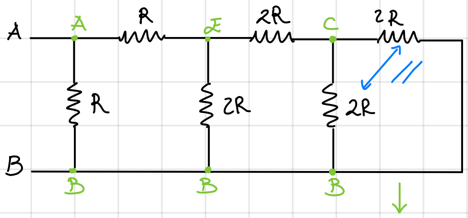
→ Caso particolare: se le 3 resistenze sono uguali avremo $\boxed{\frac{R^2+R^2+R^2}{R} = \frac{3R^2}{R} = 3R}$

COMBINAZIONE:



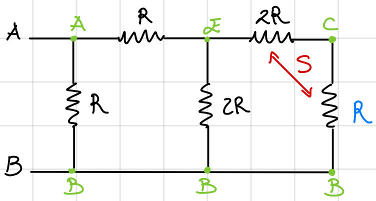
Passo 1: semplificare resistenze in serie
Passo 2: semplificare resistenze in parallelo
Passo 3: △ → Y
Y → △

Passo 1

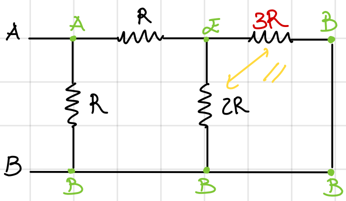


Le resistenze 2R sono IN PARALLELO perché stanno a V_{BC}

Passo 2

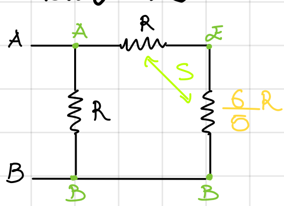


Passo 1

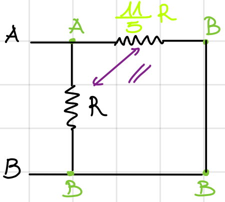


$$R_p = \frac{2R \, 3R}{2R+3R} = \frac{6}{5} R$$

Passo 2

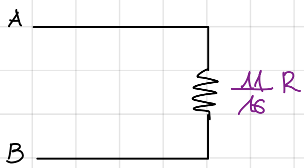


Passo 1

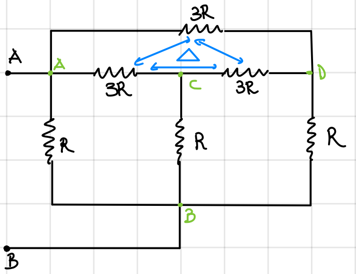


$$R_p = \frac{\frac{11}{5} R \cdot R}{\frac{11}{5} R + R} = \frac{11}{16} R$$

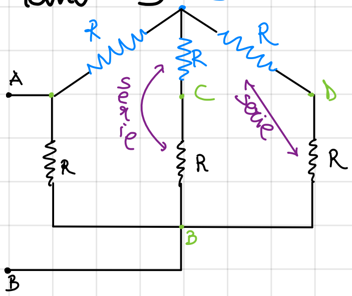
Passo 2



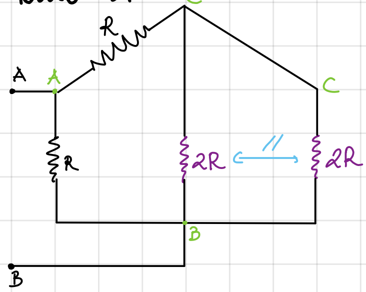
ESEMPIO 2:



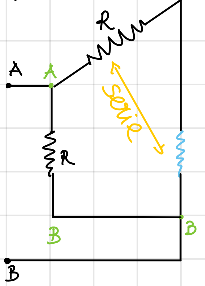
Passo 3



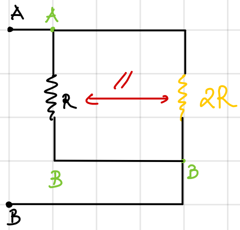
Passo 1



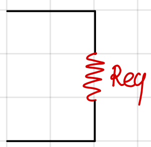
Passo 2



Passo 1



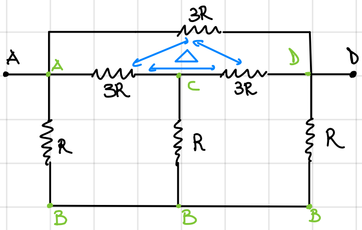
Passo 2



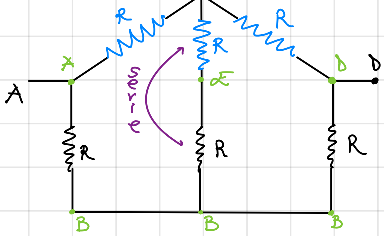
$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{1}{\frac{2+1}{2R}} = \frac{2R}{3}$$

Il risultato è una **RESISTENZA VISTA** da A e B → cambia a seconda del collegamento che viene effettuato

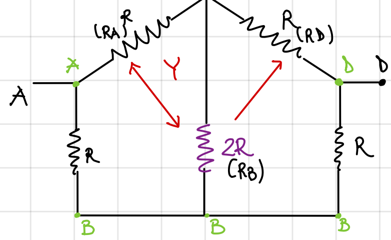
↓ CAMBIO il collegamento del circuito: la DDP è collegata tra A e D



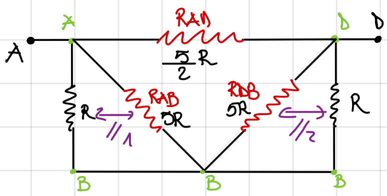
Passo 3



Passo 1



Passo 3

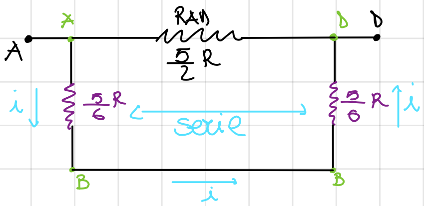


$$R_{AD} = \frac{R_A R_D + R_D R_B + R_A R_B}{R_B} = \frac{R^2 + 2R^2 + 2R^2}{2R} = \frac{5}{2}R$$

$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_B R_D + R_A R_D}{R_D} = \frac{2R^2 + 2R^2 + R^2}{R} = 5R$$

$$R_{DB} = \frac{R_D R_B + R_B R_A + R_D R_A}{R_A} = \frac{2R^2 + 2R^2 + R^2}{R} = 5R$$

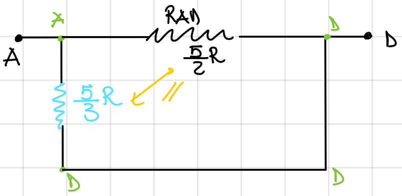
Passo 2



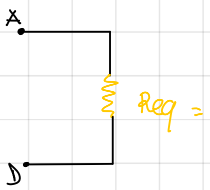
$$R_{eq\,1} = \frac{1}{\frac{1}{5R} + \frac{1}{R}} = \frac{1}{\frac{5+1}{5R}} = \frac{5}{6}R$$

$$R_{eq\,2} = \frac{1}{\frac{1}{5R} + \frac{1}{R}} = \frac{5}{6}R$$

Passo 1

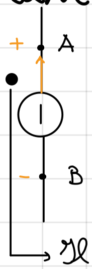


Passo 2



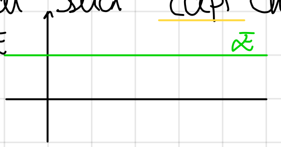
$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{2}{5R} + \frac{3}{5R}} = \frac{1}{\frac{\cancel{5}}{\cancel{5}R}} = R$$

GENERATORI INDIPENDENTI di TENSIONE

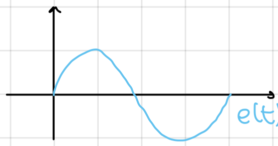


Rappresenta un dispositivo che è in grado di generare una differenza di potenziale ai suoi capi chiamata e(t)

e(t) = costante = E
↓
CONTINUA



e(t) = variabile
↓
ALTERNATA



↳ Il • indica il nodo a V superiore : $V_a(t) - V_b(t) = e(t)$ ⟶ Il + si mette dalla parte del contrassegno

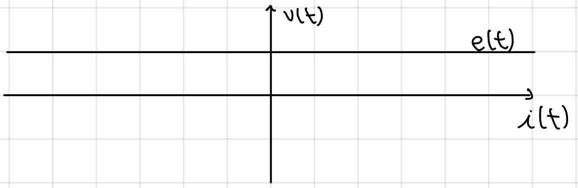
La curva tensione - corrente: La corrente sul ramo è INDETERMINATA

↳ Per effettuare il calcolo dobbiamo guardare il resto del circuito

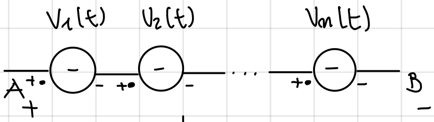
↳ La corrente si sceglie USCENTE dal contrassegno

↓

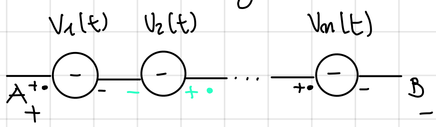
Si scelgono riferimenti NON ASSOCIATI in modo che la potenza tipicamente erogata dal generatore sia positiva



GENERATORI IN SERIE



↓ se fosse stato

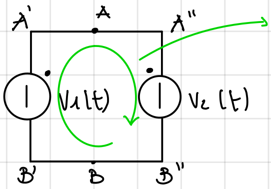


n generatori in serie sono equivalenti ad un generatore che genera una tensione pari alla somma algebrica delle tensioni generate dai singoli generatori

$V_{AB}(t) = V_1(t) + V_2(t) + \ldots + V_n(t)$

$V_{AB}(t) = V_1(t) - V_2(t) + \ldots + V_n(t)$

GENERATORI IN PARALLELO

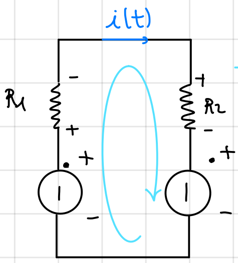


MAGLIA: $-V_1(t) + V_2(t) = 0$ ⟶ Possono essere messi in parallelo SOLO SE sono uguali, altrimenti il II principio di Kirchhoff NON è VERIFICATO

↓

Il generatore NON può essere rappresentato nel modo appena scritto

↓ Si passa a
GENERATORI REALI



⟶ $R_2\, i(t) + V_2(t) - V_1(t) + R_1\, i(t) = 0$

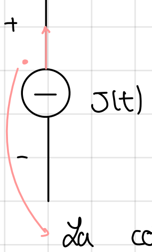
↓

Con il generatore reale il II principio di Kirchhoff è RISPETTATO

GENERATORI con TENSIONE PARI a 0

⟶ Corrisponde ad un cortocircuito e siamo nella situazione del generatore disattivato

GENERATORI INDIPENDENTI di CORRENTE

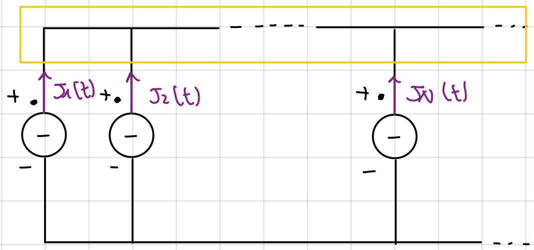


⟶ Se la corrente erogata è pari a 0 si ha un circuito aperto

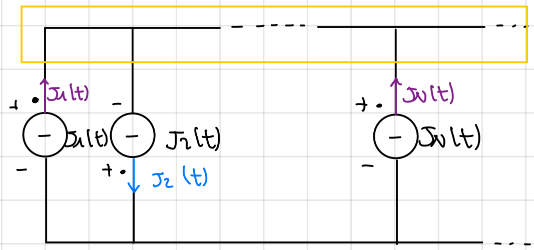
La corrente ESCE dal contrassegno ⟶ Si scelgono riferimenti NON ASSOCIATI

Cosa fa la tensione? ⟶ La tensione è INDETERMINATA

GENERATORI IN PARALLELO

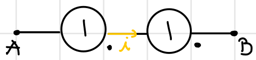


→ IK: $J(t) = J_1(t) + J_2(t) + \ldots + J_N(t)$
↓
N generatori di corrente collegati in parallelo sono equivalenti ad un unico generatore che genera una corrente pari alla somma algebrica delle correnti dei singoli generatori



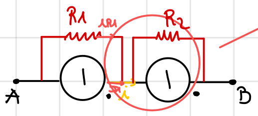
→ IK: $J_1(t) - J_2(t) + \ldots + J_N(t)$

GENERATORI in SERIE



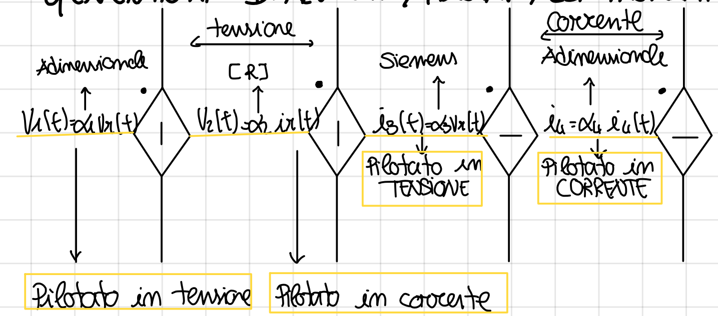
→ Non è possibile se non si tiene di conto delle resistenze interne in PARALLELO

GENERATORI IDEALI

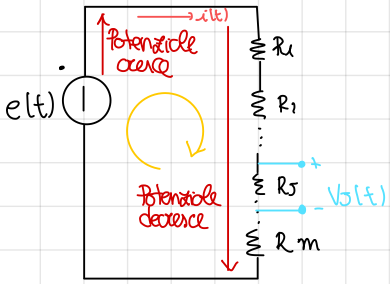


→ IK: $J_1 + I_{R_1} = J_2 + I_{R_2}$: le due resistenze permettono di bilanciare la corrente

- GENERATORI DIPENDENTI / PILOTATI / CONTROLLATI



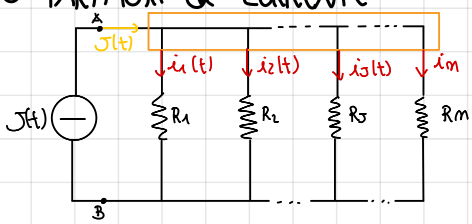
- PARTITORI di TENSIONE



$e(t) = V_1(t) + V_2(t) + \ldots + V_N(t) = (R_1 + R_2 + \ldots + R_N) \cdot i(t)$
↓
$i(t) = \dfrac{e(t)}{R_1 + R_2 + \ldots + R_N}$ → $\boxed{V_J(t) = R_J \cdot i(t) = \dfrac{R_J}{\sum_{i=1}^{m} R_i} \cdot e(t)}$

Resistenza presa in considerazione
Tensione totale
Somma resistenze

- PARTITORI di CORRENTE

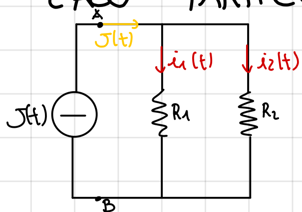


$i_J(t) = \dfrac{V_{AB}(t)}{R_J} = G_J V_{AB}(t)$

$J(t) = i_1 + i_2 + \ldots + i_m = G_1 V_{AB}(t) + G_2 V_{AB}(t) + \ldots + G_m V_{AB}(t) = V_{AB}(t) \sum^{m} G_i$
↓
$V_{AB}(t) = \dfrac{J(t)}{\sum_1^m G_i}$ → $\boxed{i_J(t) = \dfrac{G_J}{\sum_{i=1}^{m} G_i} \cdot J(t)}$ → Corrente totale

Conduttanza della parte considerata
Conduttanza totale

CASO PARTICOLARE: solo 2 resistenze



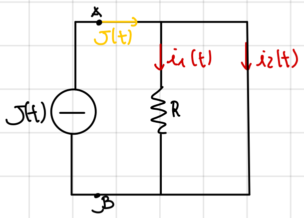
$i_1(t) = \dfrac{G_1}{G_1 + G_2} \cdot J(t) = \dfrac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2} \cdot J(t) = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot J(t)$

$i_2(t) = \dfrac{G_2}{G_1 + G_2} \cdot J(t) = \dfrac{1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} \cdot J(t) = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot J(t)$

Se le resistenze sono UGUALI: $i_1(t) = \frac{R}{R+R} \cdot J(t) = \frac{\cancel{R}}{2\cancel{R}} \cdot J(t) = \frac{J(t)}{2}$

IN GENERALE: La corrente sceglie il percorso con RESISTENZA MINORE in maniera PROPORZIONALE

Se una resistenza tende a 0:



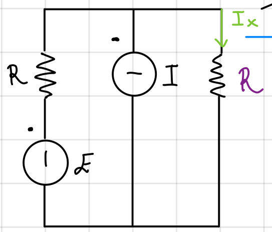
$i_1(t) = J(t) \cdot \frac{0}{R} = 0$

$i_2(t) = J(t) \cdot \frac{R}{R} = J(t)$

- **PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI**: se vi è un sistema lineare in cui vi sono rapporti causa - effetto, si possono calcolare gli effetti totali sommando i singoli effetti

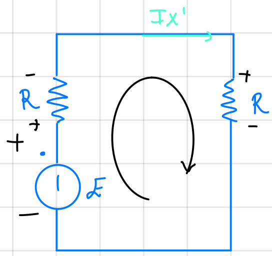
Se in un circuito vi sono più generatori indipendenti è possibile calcolare la tensione o la corrente ai capi del circuito facendo la somma algebrica delle tensioni o delle correnti dei singoli generatori come se agissero separatamente, singolarmente o per sottoinsiemi

ESERCIZIO



$I_x = I_x' + I_x''$

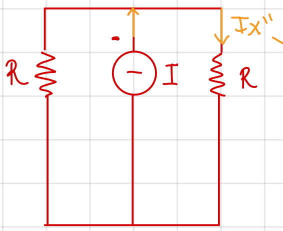
Eliminiamo il generatore di corrente:



$-\mathcal{E} + RI_x' + RI_x' = 0$

$I_x' = \frac{\mathcal{E}}{2R}$

Eliminiamo il generatore di tensione



Dato che le R sono in // si ha che $I_x'' = \frac{I}{2}$

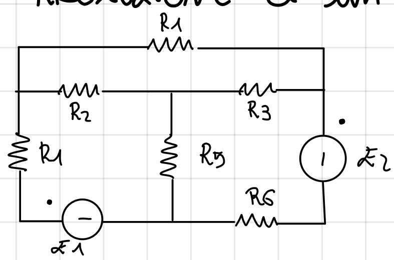
Abbiamo quindi che: $I_x = \frac{\mathcal{E}}{2R} + \frac{I}{2}$

Potenza dissipata su R: $P_R = P_R' + P_R'' = RI_x'^2 + RI_x''^2 = R\left[\left(\frac{\mathcal{E}}{2R}\right)^2 + \left(\frac{I}{2}\right)^2\right] \longrightarrow$ SBAGLIATA perché NON LINEARE

Ma AVREMMO POTUTO FARE

$P_R = RI_x^2 = R\left[\frac{\mathcal{E}}{2R} + \frac{I}{2}\right]^2 \longrightarrow$ GIUSTA: Non si può applicare la sovrapposizione degli effetti

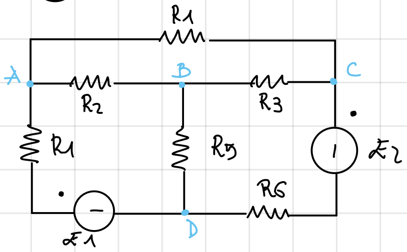
- **RISOLUZIONE di un CIRCUITO**: Calcolo di tutte le correnti e tensioni ai capi del circuito



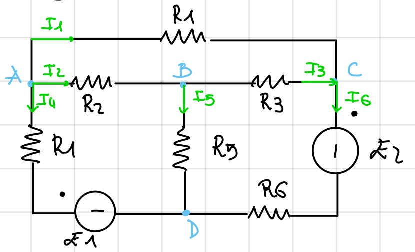
Se abbiamo r rami, le incognite saranno 2r, ma ciò è SOVRABBONDANTE $\longrightarrow$ le une possono essere ricavate dalle altre

Metodo delle CORRENTI di RAMO (incognite = r) o TABLEAU

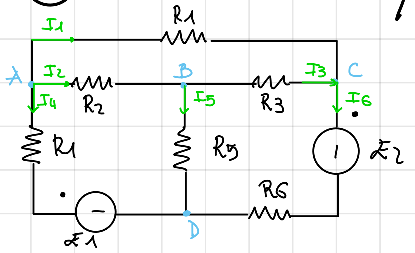
① Dare un nome ai nodi



② Dare un nome alle correnti di ramo



③ Scrivere n-1 equazioni utilizzando il IK su n-1 nodi



NOTA: entranti, uscenti

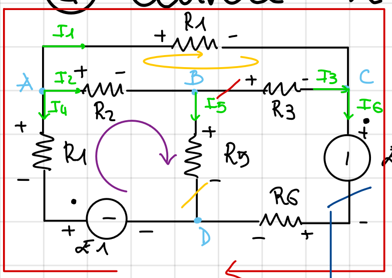
A: $0 = I_1 + I_2 + I_4$

B: $I_2 = I_3 + I_5$

D: $0 = I_4 + I_5 + I_6$

Per scrivere un'altra equazione deve essere linearmente indipendente → si può dimostrare che sarà sicuramente DIPENDENTE in quanto questi circuiti sono conservativi in termini di flussi e si possono scrivere AL MASSIMO n-1 equazioni

④ Scrivere r-(n-1) equazioni utilizzando il II K sulle maglie



→ La prima maglia può essere scelta A CASO

Maglia 1: $-\mathcal{E}_1 - R_4 I_4 + R_2 I_2 + R_5 I_5 = 0$

↓

Le altre maglie devono essere LINEARMENTE INDIPENDENTI dalla PRIMA: Si toglie un ramo della precedente e si considera il circuito restante

Non ci sono più percorsi CHIUSI

Maglia 2: $-R_2 I_2 + R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$

Maglia 3: $-R_4 I_4 + R_1 I_1 + E_2 + R_6 I_6 - \mathcal{E}_1 = 0$

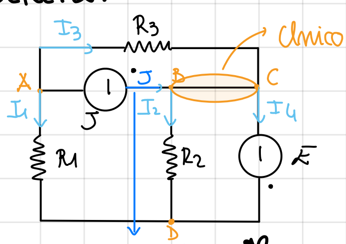
Risoluzione in forma matriciale $Ax = b$

↳ Vettore delle incognite: correnti di ramo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & R_2 & 0 & -R_4 & R_5 & 0 \\ R_1 & -R_2 & -R_3 & 0 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & -R_4 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 \\ 0 \\ \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \end{bmatrix} \longrightarrow Ax = b \Longrightarrow x = A^{-1} b$$

ESERCIZI

①



Unico MACRO NODO: B=C perché in CORTOCIRCUITO → Il numero di incognite diminuisce

↓

9 nodi DIVENTANO 3

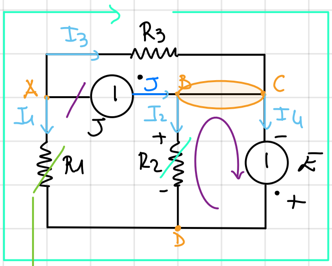
J è NOTA: Il numero REALE di incognite è r - Ngc (generatori di corrente)

IK

A: $I_1 + I_3 + J = 0$

BC: $J + I_3 = I_2 + I_4$

SCELTA delle MAGLIE: quando sono presenti generatori di corrente si eliminano i rami con i generatori

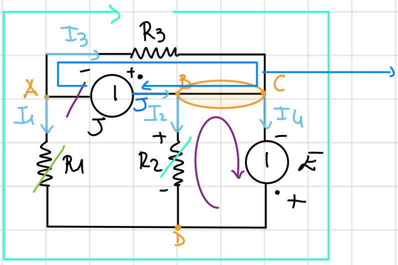


Maglia 1: $-R_2 I_2 - E = 0$

Maglia 2: $R_3 I_3 - E - R_1 I_1 = 0$

BASTA: non ci sono più percorsi chiusi

Per calcolare V_J



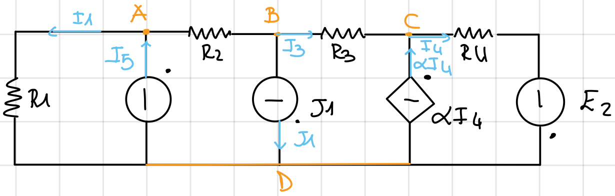
Percorso chiuso utilizzato per calcolare V_J DOPO aver RISOLTO il circuito

↳ $V_J: -R_3 I_3 = R_2 I_2 - R_1 I_1$

Risoluzione del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 \\ -R_1 & 0 & R_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J \\ J \\ -E \\ E \end{bmatrix}$$

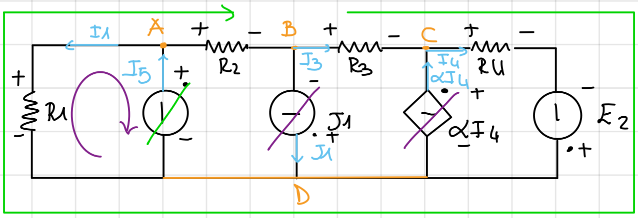
②



A: $I_5 = I_1 + I_2$

B: $I_2 = J_1 + I_3$

D: $I_1 + J_1 + I_4 = I_5 + \alpha I_4$



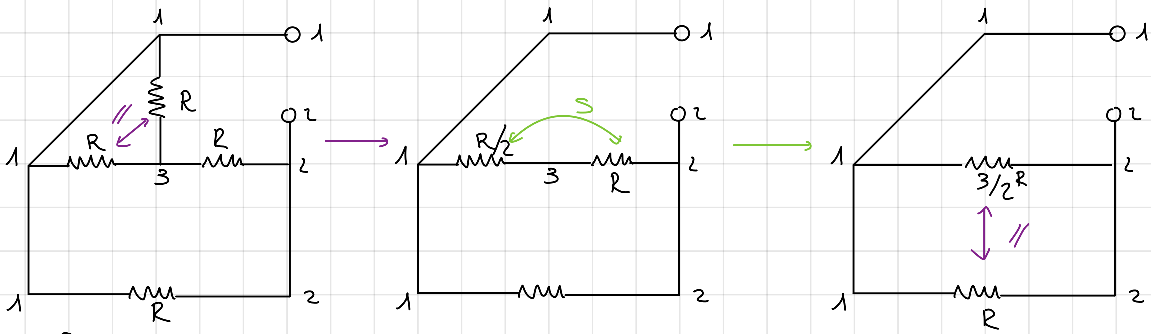
Maglia 1: $-R_1 I_1 + E_1 = 0$

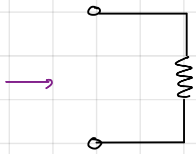
Maglia 2: $-R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 - E_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & (1-\alpha) & -1 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J_1 \\ -J_1 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

Gli unici generatori che entrano dentro il vettore dei termini noti sono quelli indipendenti

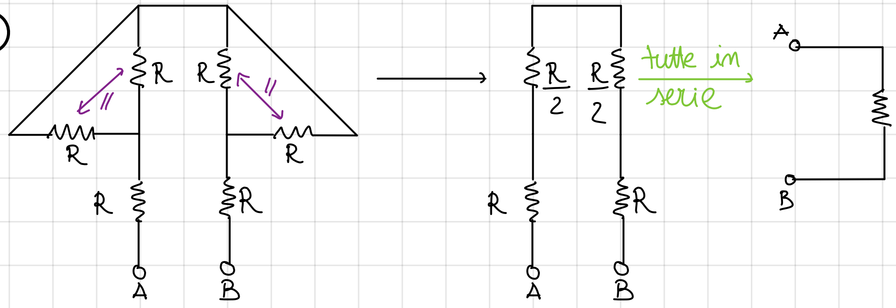
③





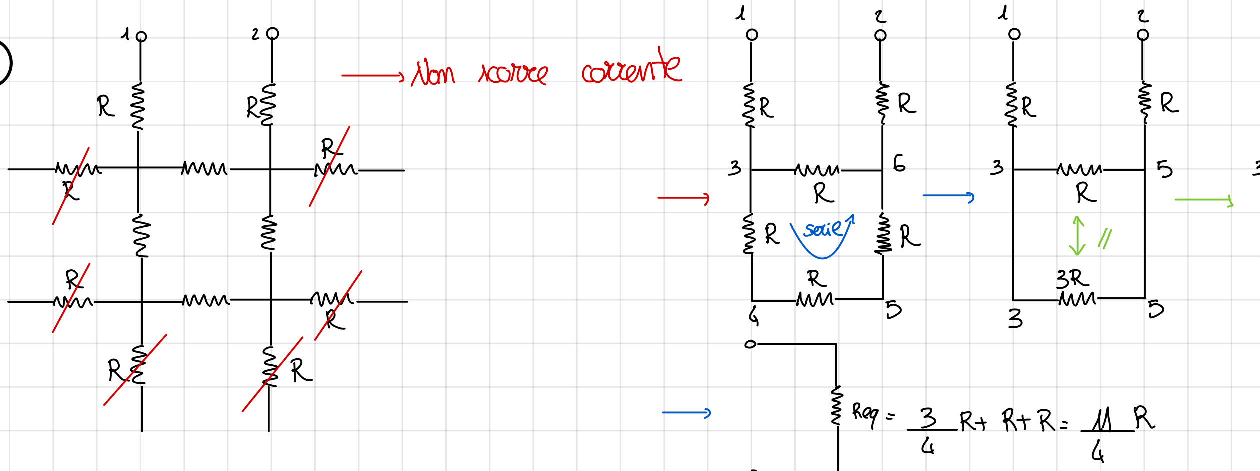
$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{2}{3R} + \frac{1}{R}} = \frac{3}{5} R$$

4



$\longrightarrow R_{eq} = 3R$

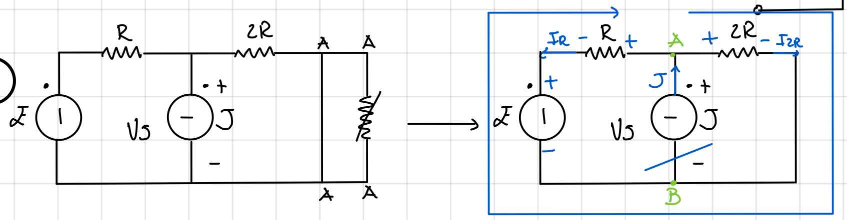
5



$$\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{3R}} = \frac{3}{4}R$$

$$R_{eq} = \frac{3}{4}R + R + R = \frac{11}{4}R$$

6



Utilizziamo il I K su un nodo

A: $J = I_R + I_{2R}$

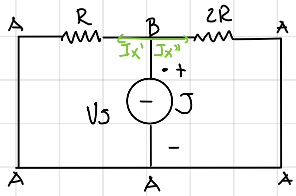
Utilizziamo il II K su $r-(n-1)$ rami $\longrightarrow 2-1=1$

Maglia: $-E - I_R R + I_{2R}2R = 0 \longrightarrow I_{2R}2R - I_R R = E$

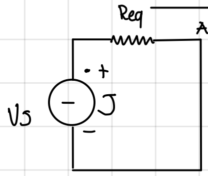
$$\begin{cases} I_R + I_{2R} = J \\ I_{2R}2R - I_R R = E \end{cases} \quad \begin{cases} I_R = J - I_{2R} \\ 2I_{2R}R - (J - I_{2R})R = E \end{cases} \quad \begin{cases} I_R = J - I_{2R} \\ 2I_{2R}R - JR + I_{2R}R = E \end{cases} \quad \begin{cases} I_R = J - \frac{J}{3} - \frac{E}{3R} = \frac{2}{3}J - \frac{E}{3R} \\ I_{2R} = \frac{J}{3} + \frac{E}{3R} \end{cases}$$

Sovrapposizione degli effetti

1: Eliminiamo il generatore di tensione



$\longrightarrow$ Le due resistenze sono in PARALLELO

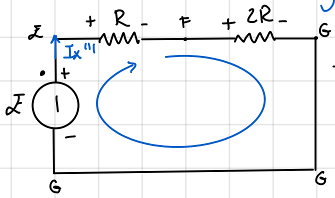


$$R_{eq} \longrightarrow \frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{2R}} = \frac{2}{3}R$$

Calcolando Ix' e Ix''

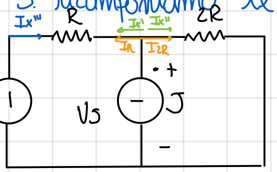
$$I_x' = \frac{1}{\cancel{R}} \cdot \frac{2\cancel{R}}{3} \cdot J = \frac{2}{3}J \qquad I_x'' = \frac{1}{\cancel{2R}} \cdot \frac{\cancel{2}\cancel{R}}{3} \cdot J = \frac{J}{3}$$

2. Eliminiamo il generatore di corrente



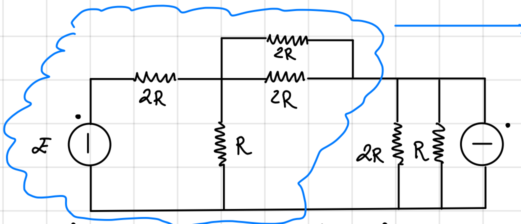
$$\longrightarrow -E + RI_x' + 2RI_x' = 0 \longrightarrow I_x' = \frac{E}{3R}$$

3. ricomponiamo il circuito



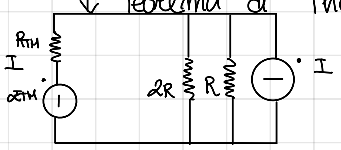
$$\longrightarrow I_R = I_x' - I_x''' = \frac{2}{3}J - \frac{E}{3R} \qquad I_{2R} = \frac{J}{3} + \frac{E}{3R}$$

○ TEOREMA di THEVENIN



→ Voglio semplificare agli effetti esterni la parte di circuito evidenziata

↓ Teorema di Thevenin: come semplificare

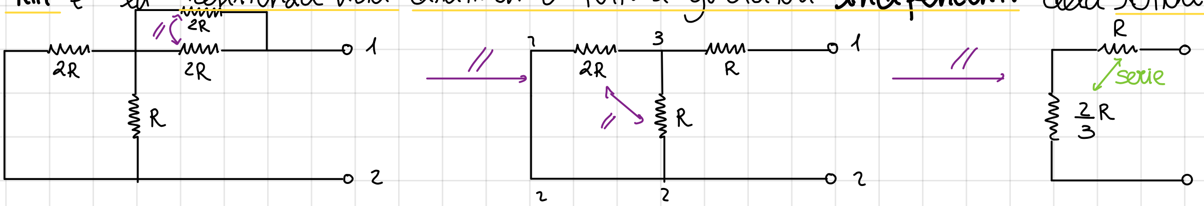


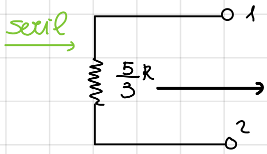
↓

Abbiamo un **generatore di tensione** ($\mathcal{E}_{TH}$) con una **resistenza in serie**

La resistenza di Thevenin

La R_{TH} è la resistenza vista disattivando TUTTI i generatori **indipendenti** della sottorete considerata

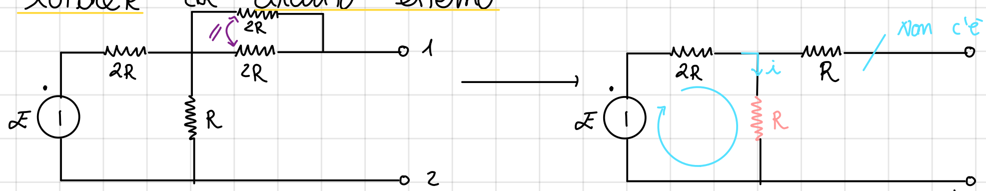




⟶ **Resistenza di Thevenin**

La tensione di Thevenin

La $\mathcal{E}_{TH}$ è pari alla tensione **a vuoto** tra i morsetti 1 e 2 ⟶ Si stacca la sottorete dal circuito esterno

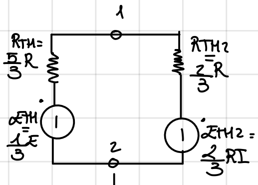


Non c'è corrente

$$V_{12} = \mathcal{E} \cdot \frac{R}{2R+R} = \frac{1}{3}\mathcal{E}$$

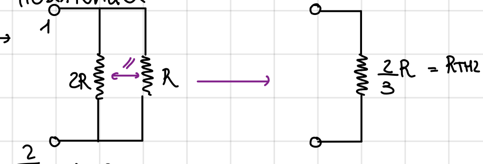
Quindi otteniamo: $R_{TH} = \frac{5}{3}R$, $\mathcal{E}_{TH} = \frac{1}{3}R$ nella sottorete di sinistra

Ripetiamo sulla sottorete di destra

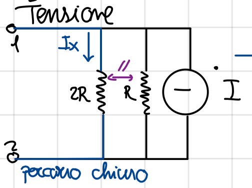


Il **contrassegno** deve essere messo verso l'1 perché $\mathcal{E}_{TH}$ era stata calcolata da 1 a 2

Resistenza



Tensione



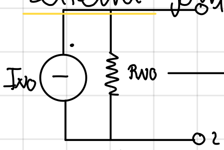
percorso chiuso

$$\to V_{12} = 2RI_x \longrightarrow I_x = I \cdot \frac{R}{2R+R} = \frac{I}{3}$$

$$V_{12} = 2RI_x = \frac{2}{3}RI$$

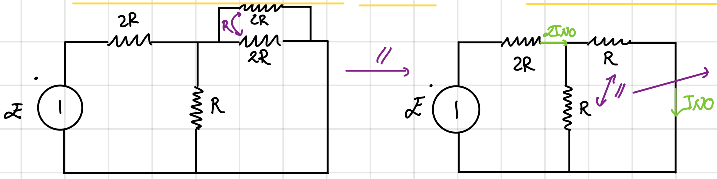
○ TEOREMA di NORTON

Una sottorete inerte e lineare può essere rappresentata con una sottorete equivalente agli effetti esterni formata da un generatore di corrente I_{NO} con in parallelo una resistenza R_{NO}



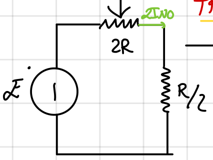
⟶ **Resistenza di Norton**: Equivalente alla resistenza di Thevenin

Corrente di Norton: corrente che scorre sui morsetti 1 e 2 dopo che sono connessi in cortocircuito

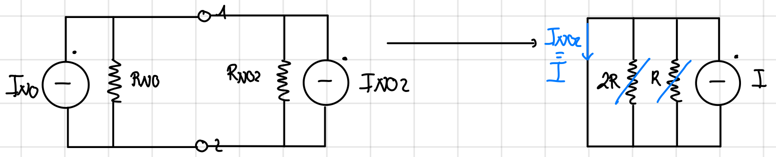


Non si può togliere altrimenti si perde la corrente di Norton

⚠ Si può calcolare in funzione delle altre correnti PRIMA di togliere il parallelo



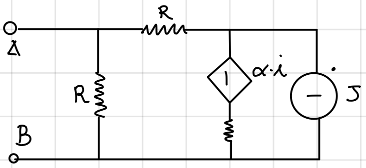
$$\longrightarrow \frac{\mathcal{E}}{R+R/2} = 2I_{NO} \longrightarrow \frac{\mathcal{E}/2}{5/2\,R} = 2I_{NO} \longrightarrow I_{NO} = \frac{\mathcal{E}}{5R}$$



↳ Il contrassegno si mette nello stesso verso scelto per il calcolo della corrente di Norton

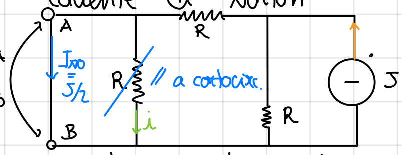
COROLLARIO ⟶ Ogni volta che si ha un generatore di tensione con in serie una resistenza si può passare all'equivalente Norton, ovvero un generatore di corrente con in parallelo una resistenza ⟶ $\begin{cases} I_{N0} = \dfrac{\mathcal{E}_{TH}}{R_{TH}} \\ R_{N0} = R_{TH} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \mathcal{E}_{TH} = R_{N0} \cdot I_{N0} \\ R_{TH} = R_{N0} \end{cases}$

Esercizio

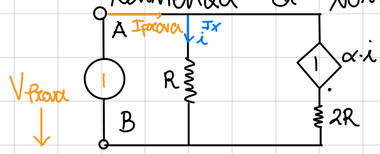


Calcolare l'equivalente Norton

Corrente di Norton



Resistenza di Norton



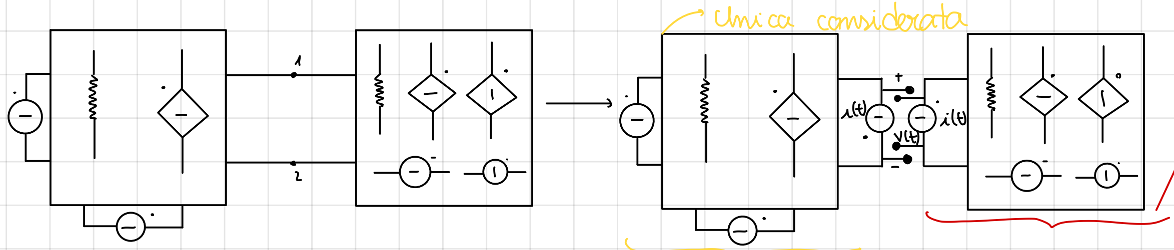
⚠ ATTENZIONE: quando c'è un generatore dipendente si mette un generatore di prova a scelta tra tensione e corrente

$$R_{AB} = \frac{V_{prova}}{I_{prova}} = \frac{V_{prova}}{I_x + i} \qquad i = \frac{V_p}{R}$$

$$I_x = \frac{V_C - V_B}{2R} = \frac{V_p + \alpha i}{2R} = \frac{V_p + \frac{\alpha V_p}{R}}{2R} = \frac{V_p}{R}$$

$$\longrightarrow R_{AB} = \frac{V_p}{\frac{V_p}{R} + \frac{V_p}{R}} = \frac{V_p}{V_p\left(\frac{2}{R}\right)} = \frac{R}{2}$$

DIMOSTRAZIONE del TEOREMA di THEVENIN

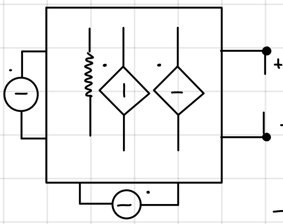


Unica considerata

Questa non viene più considerata

Calcoliamo $v(t) = v'(t) + v''(t)$ ⟶ Quando lasciamo solo il generatore $i(t)$ aggiunto
↳ Quando viene disattivato il generatore $i(t)$ che ho aggiunto

Calcoliamo $v'(t)$



disattivo $i(t)$

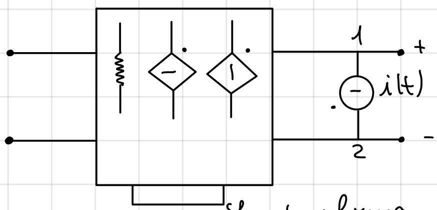
$v'(t) = V_0(t)$

quella iniziale

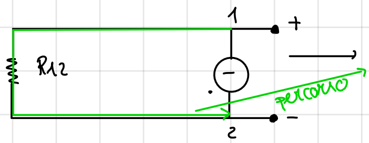
↓

tensione a vuoto

Calcoliamo $v''(t)$

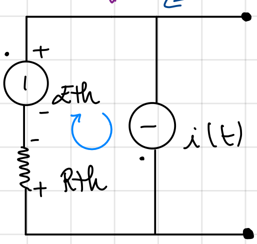


↓ Lo trasformo in resistenza vista perché mancano generatori indipendenti



percorso

⟶ $V''(t) = -R_{12} \cdot i(t)$



⟶ Ottenuto per Thevenin: $v(t)$ deve essere equivalente a quella iniziale

↓

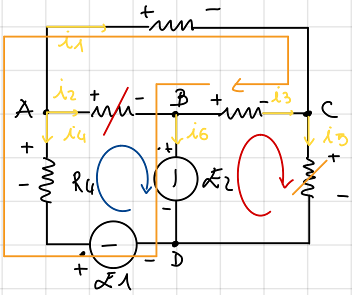
Sulla maglia: $v(t) = V_{th}(t) - R_{th} \cdot i(t)$

↳ Deve corrispondere a R_{12}

↓

Deve corrispondere a $V_0(t)$

○ METODO delle CORRENTI di MAGLIA



Correnti di **ramo**

A: $i_1 + i_2 + i_4 = 0$

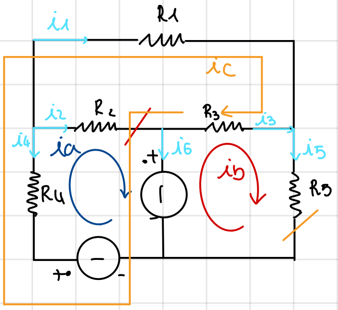
B: $i_2 = i_3 + i_6$

C: $i_1 + i_3 = i_5$

maglia: $-R_4 i_4 + R_2 i_2 + E_2 - \mathcal{E}_1 = 0$

maglia: $-\mathcal{E}_2 + R_3 i_3 + R_5 i_5 = 0$

maglia: $-R_4 i_4 + R_1 i_1 - R_3 i_3 + E_2 - E_1 = 0$



Correnti di **maglia**

La prima può essere scelta a caso e per quelle dopo dobbiamo sempre cancellare un ramo

maglia: $-\mathcal{E}_1 + R_4(i_a + i_c) + R_2 i_a + \mathcal{E}_2 = 0$

maglia: $-\mathcal{E}_2 + R_3(i_b - i_c) + R_5 i_b = 0$

maglia: $-\mathcal{E}_1 + R_4(i_c + i_a) + R_1 i_c + R_3(i_c - i_b) + \mathcal{E}_2 = 0$

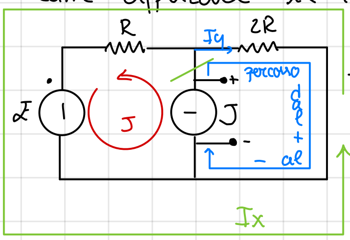
Per calcolare le correnti di ramo: $i_1 = i_c$ $\quad i_4 = -i_a - i_c$

$i_2 = i_a$ $\quad i_6 = i_c + i_a - i_b$

$i_3 = i_b - i_c$ $\quad i_5 = i_b$

Quando la corrente di ramo corrisponde alla corrente di maglia il ramo si chiama **corda**

Come applicare il metodo in presenza di **generatori di corrente**

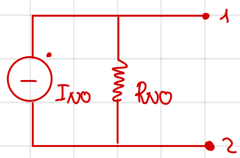


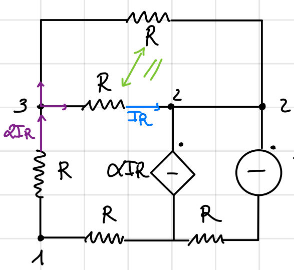
⟶ La **prima maglia** deve **includere** il generatore di corrente e va **percorsa** nel **verso della corrente generata**. La corrente di maglia corrisponde a quella del generatore. Una volta finita l'analisi della maglia si **taglia** il ramo con il generatore di corrente

$2RI_x + R(J + I_x) + \mathcal{E} = 0 \longrightarrow I_x = \dfrac{-\mathcal{E} + RJ}{3R}$ $\qquad P_J = J \cdot V_J = J \cdot 2R \cdot I_y = J \cdot 2R \cdot (-I_x) = J \cdot \dfrac{2R}{3R}(\mathcal{E} + RJ)$

ESERCIZIO

⚠ Esercizio di esame: 27-01-21 ⟶ Equivalente Norton ⟶

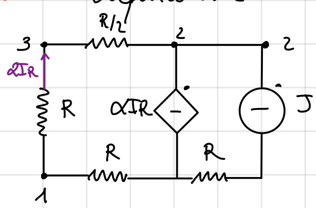




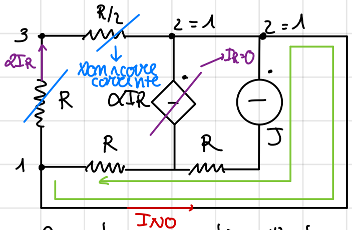
$J = 1A$

$R = 10\,\Omega$

$\alpha = 0.5$

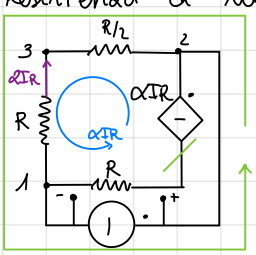


Calcolo della corrente di Norton



⟶ $\alpha I_R = 0$ e quindi $I_R = 0$ ⟶ $I_{NO} = -J$

Resistenza di Norton

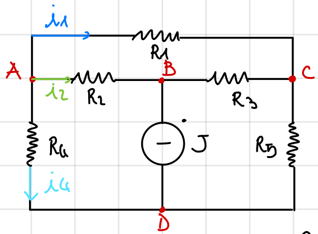


$R_{NO} = \dfrac{V_p}{I_p}$ $\qquad \alpha I_R = -\alpha I_R - I_p \longrightarrow (2 + \alpha) I_R = -I_p \longrightarrow I_R = \dfrac{-I_p}{2 + \alpha}$

⟶ Lo utilizziamo anche per il calcolo di V_p: $V_p = \dfrac{3}{2} R (I_p + \alpha I_R)$

$$R_{NO} = \frac{\frac{3}{2}R(I_P+\alpha I_R)}{I_P} = \frac{\frac{3}{2}R(I_P - \frac{\alpha}{2+\alpha} I_P)}{I_P} = \frac{15\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}\right)}{1} = \frac{4}{5}\cdot 15 = 12\,\Omega$$

○ METODO delle TENSIONI di NODO



a. Dare un nome ai nodi
b. Scegliere un nodo di riferimento a tensione $0 \to V_D = 0$
c. Scrivere le n-1 equazioni come scritte qua sotto

→ Correnti erogate dai generatori di corrente che hanno un nodo in A

NODO A: $0 = \underbrace{V_A\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right)}_{\text{Somma delle conduttanze dei rami che hanno un nodo in A}} - V_B\left(\frac{1}{R_2}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_1}\right) - \cancel{V_D\left(\frac{1}{R_4}\right)}$ ①

Somma delle conduttanze dei rami che hanno un nodo in A

NODO B: $J = V_B\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) - V_A\left(\frac{1}{R_2}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_3}\right)$

NODO C: $0 = V_C\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) - V_A\left(\frac{1}{R_1}\right) - V_B\left(\frac{1}{R_3}\right) - \cancel{V_D\left(\frac{1}{R_5}\right)}$

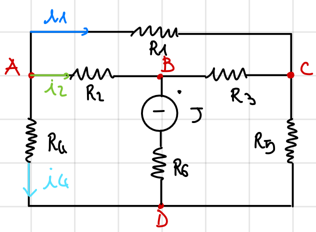
→ Legge di Ohm per calcolare i_1

Mettendo in evidenza le conduttanze in ①: $\frac{(V_A-V_C)}{R_1} + \underbrace{\frac{(V_A-V_B)}{R_2}}_{i_2} + \underbrace{\frac{(V_A-V_D)}{R}}_{i_4}$

↓

in pratica abbiamo applicato il LK al nodo A

VARIAZIONE 1:



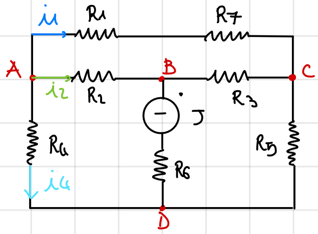
→ Non cambia niente nelle equazioni

↓

Eventuali **resistenze in serie a generatori di corrente** NON modificano le equazioni del metodo delle tensioni di nodo

⚠ ATT: NON vanno messe nelle equazioni

VARIAZIONE 2:

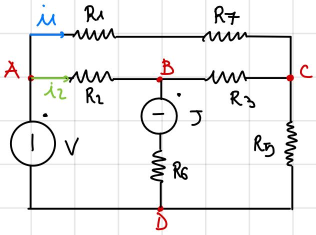


→ Sono le stesse equazioni di prima sostituendo però R1 con R1+R7 in quanto sono in SERIE

↓

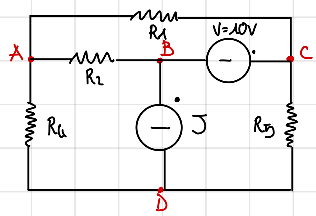
⚠ La CONDUTTANZA della SERIE ha al denominatore la RESISTENZA EQUIVALENTE

VARIAZIONE 3:



→ In presenza di generatori ideali di tensione la tensione sul nodo è NOTA e quindi l'equazione si CANCELLA: $V_A = V$

VARIAZIONE 4:



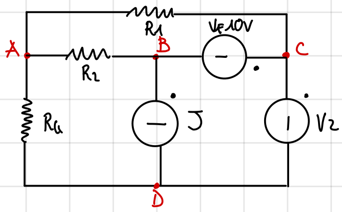
Dobbiamo CAMBIARE RIFERIMENTO

$V_B = 0$
$V_C = V$

A: $0 = V_A\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_1}\right) - V_D\left(\frac{1}{R_4}\right)$

D: $-J = V_D\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right) - V_A\left(\frac{1}{R_4}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_5}\right)$

VARIAZIONE 5:



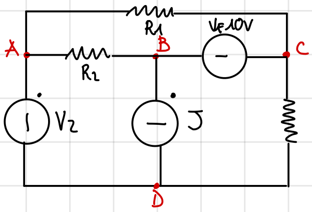
$V_B = 0$

$V_C = V$

A: $0 = V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_1}\right) - V_D\left(\frac{1}{R_4}\right)$

D: $V_D - V_B = -V_2 + V_1$

VARIAZIONE 6:

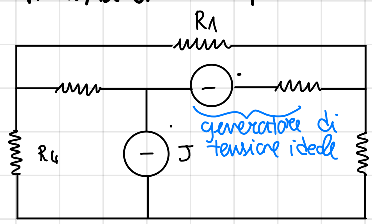


→ Si hanno più percorsi formati da generatori di tensioni ideali indipendenti tra di loro

↓

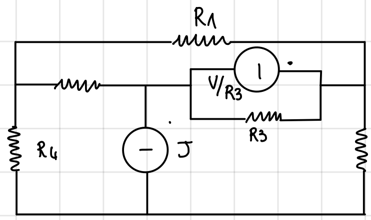
⚠ ATT: non è possibile applicarlo

VARIAZIONE 7:



→ Quando c'è un generatore di tensione reale va trasformato nel suo equivalente Norton

↓

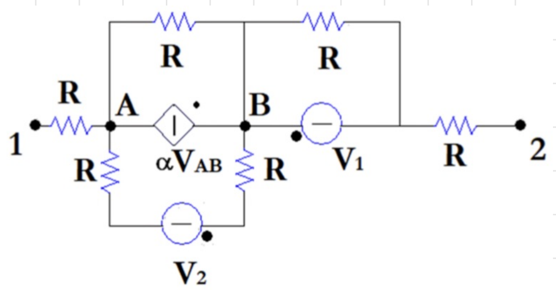


A: $V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) - V_B\left(\frac{1}{R_2}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_1}\right)$

B: $J - \frac{V}{R_3} = V_B\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - V_A \cdot \frac{1}{R_2} - V_C \cdot \frac{1}{R_3}$

C: $\frac{V}{R_3} = V_C\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) - V_A \cdot \frac{1}{R_1} - V_B \cdot \frac{1}{R_3}$

ESERCIZIO



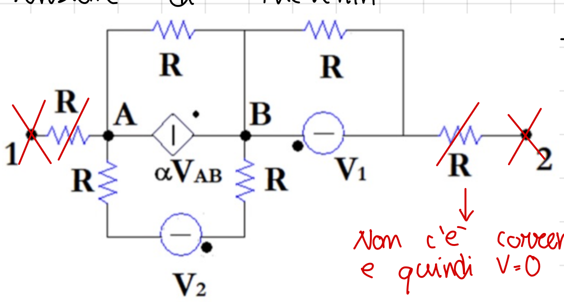
$V_1 = 10V$

$V_2 = 20V$

$R = 50\Omega$

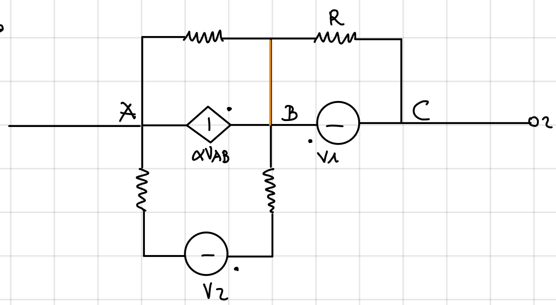
$\alpha = 0.2 A/V$

Tensione di Thevenin



↓ Non c'è corrente e quindi V=0

→



Tensioni di nodo: $V_C = 0$ $\quad V_{TH} = V_A - V_C = V_A$

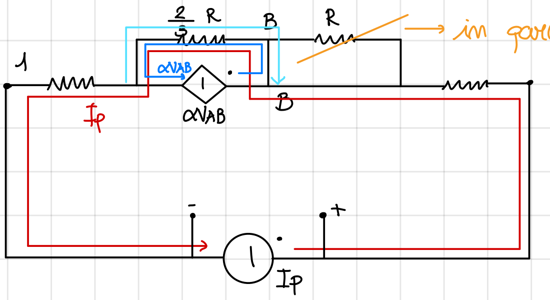
$V_B - V_1 = 10V$

A: $-\alpha V_{AB} - \frac{V_2}{2R} = V_A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right) - V_B\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right)$

$$-\alpha(V_A-10) - \frac{20}{2R} = V_A\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{2R}\right) - 10\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{2R}\right)$$

$$-2\alpha R(V_A-10) - 20 = 3V_A - 30 \longrightarrow -20V_A + 200 - 20 = 3V_A - 30 \longrightarrow V_A = \frac{210}{23}$$

Resistenza di Thevenin



→ in parallelo a cortocircuito

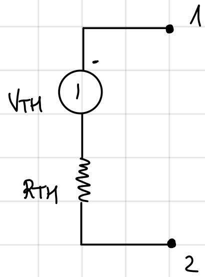
per calcolare V_{AB} utilizzo il percorso chiuso: $V_{AB} = \frac{2}{3}R(-I_p - \alpha V_{AB})$

$$\longrightarrow V_{AB} = -\frac{2}{3}RI_p - \frac{2\alpha R}{3}V_{AB} \longrightarrow (3+2\alpha R)V_{AB} = -2RI_p \longrightarrow V_{AB} = \frac{-2RI_p}{3+2\alpha R} = \frac{-100 I_p}{3+100\cdot 0.2} = \frac{-100 I_p}{23}$$

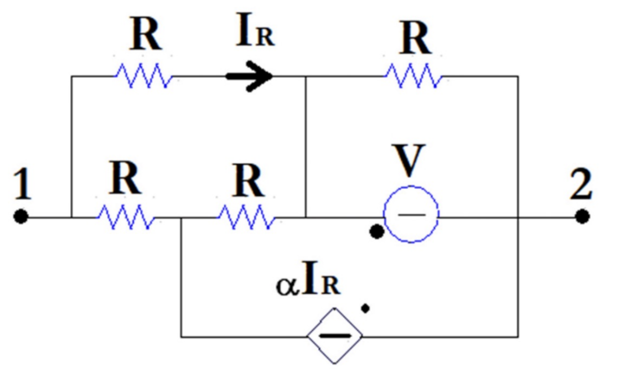
Per calcolare V_p facciamo il percorso chiuso: $V_p = RI_p - V_{AB} + RI_p = 2RI_p - V_{AB}$
$= 2RI_p + \frac{100}{23}I_p$

$$R_{TH} = \frac{V_p}{I_p} = 2R + \frac{100}{23} = 100 + \frac{100}{23} = 104.3478\ \Omega$$

circuito equivalente

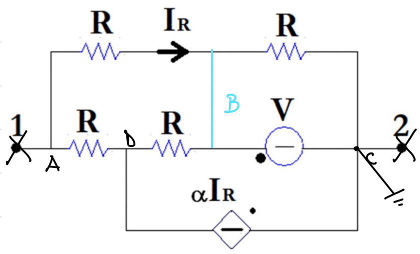


ESERCIZIO 09-01-20



V = 50V
R = 15Ω
α = 6 V/A

Tensione di Thevenin



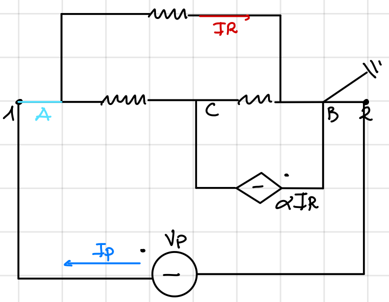
$V_C = 0$
$V_B = V = 50V$
$V_D = -\alpha I_R$
$V_{TH} = V_A - V_C = V_A$

$$V_{DA} = RI_R \longrightarrow V_{AD} = -RI_R = -R\left(\frac{V_D-V_B}{2R}\right) \longrightarrow V_A - V_D = -\cancel{R}\left(\frac{V_D-V_B}{2\cancel{R}}\right) \longrightarrow V_A = V_D - \left(\frac{V_D-V_B}{2}\right)$$

$$\longrightarrow V_A = \frac{V_B}{2} + \frac{V_D}{2} = 25 - \frac{\alpha}{2}\left(-\frac{50}{2R+\alpha}\right) = 29.167\,V$$

$$J_R = \frac{V_D - V_B}{2R} = \frac{-\alpha J_R - 50}{2R} \longrightarrow (2R+\alpha) J_R = -50 \longrightarrow J_R = \frac{-50}{2R+\alpha}$$

Resistenza di Thevenin



$V_B = 0$

$V_A = V_p$

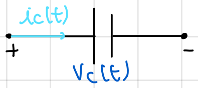
$V_C = -\alpha J_R = -\alpha \frac{V_p}{R}$

$J_R = \frac{V_p}{R}$

$$J_p = J_R + J_x = \frac{V_p}{R} + \frac{V_A - V_C}{R} = \frac{V_p}{R} + \frac{V_p}{R} + \frac{\alpha V_p}{R}$$

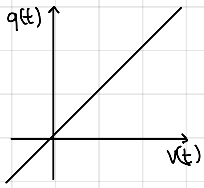
$$R_{TH} = \frac{V_p}{J_p} = \frac{V_p}{V_p\left(\frac{2}{R} + \frac{\alpha}{R^2}\right)} = \frac{1}{\frac{2}{R} + \frac{\alpha}{R^2}} = \frac{R^2}{2R+\alpha} = \frac{225}{36} =$$

- Il CONDENSATORE



PROPRIETÀ

✓ **Linearità** → $q(t) = C \cdot v(t)$
↓
Capacità [F]: Farad
↓
Dipende dal materiale e dalla geometria



Condensatori piani: $C = \varepsilon \cdot \frac{S}{d} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{S}{d}$ → Sottomultiplo del Farad

✓ **Tempo-invarianza** → C non dipende dal tempo dato che deriva dal materiale e dalla geometria

✓ **Con memoria** → Relazione tensione-corrente: $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$, quindi

$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$: Corrente in funzione della tensione

Se vogliamo esprimere la tensione in funzione della corrente: $\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i(t) \longrightarrow v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = \frac{1}{C}\left[\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau\right]$

$= v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau$ → Dipende da ogni ISTANTE PRECEDENTE

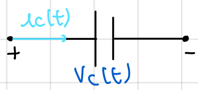
✓ **Passivo** → $p(t) = i(t) \cdot v(t) = v(t) \cdot C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$ → Non possiamo dire che è sempre non negativa (ad esempio la derivata diventa < 0 se $v(t)$ diminuisce). **indeterminata**

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} C \cdot v(\tau) \cdot \frac{dv(\tau)}{d\tau} d\tau = C \int_{-\infty}^{t} v(\tau) \cdot dv(\tau) =$$

$$= C\left[\frac{v^2(\tau)}{2}\right]_{-\infty}^{t} = \frac{1}{2} C v^2(t) - \cancel{\frac{1}{2} C v^2(-\infty)} > 0$$

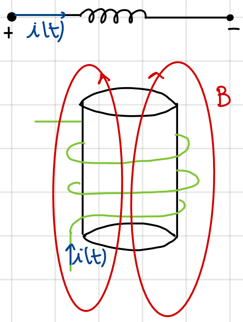
→ condiz. iniziale

Perché non abbiamo mai considerato i condensatori



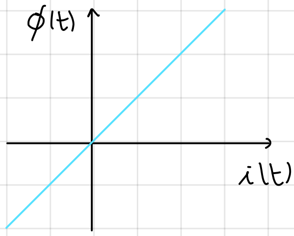
→ $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$ ed in **continua** abbiamo che $v(t) =$ costante e quindi $\frac{dv(t)}{dt} = 0$, da cui si ha la loro equivalenza con **circuiti aperti**

• L'INDUTTORE



PROPRIETÀ

✓ **Linearità**: $\phi(t) = L \cdot i(t)$



induttanza: $L = \mu \cdot \frac{S}{l} N^2 = \mu_0 \mu_r \cdot \frac{S}{l} N^2$

[H]: Henry

l mezzo

VUOTO: $4\pi \cdot 10^{-7}$

✓ **Tempo-invarianza**: L dipende solo dai parametri costruttivi e geometria, quindi NON cambia nel tempo

✓ **Con memoria**: Troviamo la relazione tensione-corrente tramite la legge di Faraday-Neumann-Lenz

$$v_L(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}$$

ricaviamo la corrente

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v(t) \longrightarrow v(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} v(\tau) d\tau = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t} v(\tau) d\tau$$

Dipende da istanti precedenti

✓ **Passivo**: $P_L(t) = V_L(t) \cdot i_L(t) = L \cdot i_L(t) \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$: indeterminata in segno

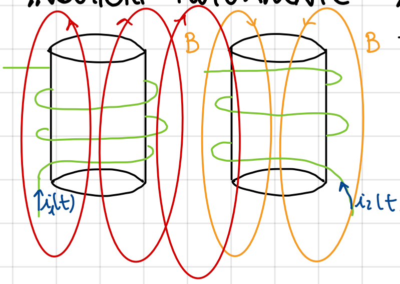
$$W_L(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau) d\tau = L \int_{-\infty}^{t} i_L(\tau) \cdot \frac{di_L(\tau)}{\cancel{d\tau}} \cdot \cancel{d\tau} = L \int_{-\infty}^{t} i_L(\tau) \cdot di_L(\tau) =$$

$$= L \cdot \frac{1}{2} [i_L^2(\tau)]_{-\infty}^{t} = \frac{1}{2} L \cdot i_L^2(t)$$: SEMPRE POSITIVA

si suppone $i(-\infty) = 0$

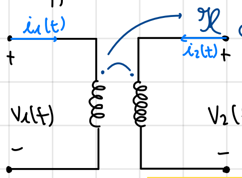
Cosa succede se analizziamo un circuito in continua?
Poiché abbiamo $v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ e $i(t)$ è costante, avremo $v(t) = 0$, quindi l'induttore si comporta come un cortocircuito

INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI



$$\left.\begin{aligned} \phi_1(t) &= \phi_{1,1}(t) \pm \phi_{1,2}(t) \\ \phi_2(t) &= \phi_{2,2}(t) \pm \phi_{2,1}(t) \end{aligned}\right\}$$ FLUSSI TOTALMENTE CONCATENATI

Rappresentazione circuitale



Il contrassegno con l'arco indica che il flusso si influenza vicendevolmente

Come calcoliamo i flussi?

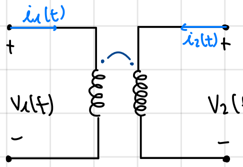
caduta di autoinduttanza — coefficiente di mutua induzione — Dipende dalla geometria

$$\boxed{\begin{aligned} V_1(t) &= L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \cdot \frac{di_2(t)}{dt} \\ V_2(t) &= L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \cdot \frac{di_1(t)}{dt} \end{aligned}}$$

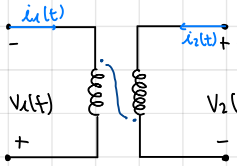
caduta di mutua induttanza

Come stabiliamo il segno? ⟶ Utilizziamo i contrassegni. Per la caduta di auto si utilizza il verso della corrente. Per la caduta di mutua il segno è uguale alla caduta di auto se entrambe le correnti entrano o escono dai contrassegni

ESEMPI

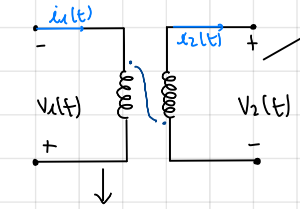


Auto: +
Mutua: +



Auto 1: –
Auto 2: +
Mutua 1: +
Mutua 2: –

} i_1 entra nel contrassegno, mentre i_2 esce dal contrassegno



Auto 1 : −
Auto 2 : −
Mutua 1 : −
Mutua 2 : −

Come posso calcolare la potenza?

$$p(t) = v_1(t)\cdot i_1(t) + v_2(t)\cdot i_2(t) = \underbrace{L_1 \cdot i_1(t)\,\frac{di_1(t)}{dt} + L_2\cdot i_2(t)\cdot\frac{di_2(t)}{dt}}_{\text{Senza considerare il mutuo accoppiamento}}$$

$$\underbrace{\pm M\cdot i_1(t)\cdot\frac{di_1(t)}{dt} \pm M\cdot i_2(t)\cdot\frac{di_2(t)}{dt}}_{\pm M\left(i_1(t)\cdot\frac{di_1(t)}{dt} + i_2(t)\cdot\frac{di_2(t)}{dt}\right)}$$

$$= L_1\cdot i_1(t)\,\frac{di_1(t)}{dt} + L_2\cdot i_2(t)\cdot\frac{di_2(t)}{dt} \pm M\cdot\frac{d(i_1(t)\cdot i_2(t))}{dt}$$

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} L_1\cdot i_1(\tau)\cdot\frac{di_1(\tau)}{d\tau}\cdot d\tau + \int_{-\infty}^{t} L_2\cdot i_2(\tau)\cdot\frac{di_2(\tau)}{d\tau}\cdot d\tau \pm$$

$$\pm\int_{-\infty}^{t} M\cdot\frac{d(i_1(\tau)\cdot i_2(\tau))}{d\tau}\,d\tau =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}L_1\, i_1^2(t)}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{2}L_2\cdot i_2^2(t)}_{\geq 0} \pm \underbrace{M\,(i_1(t)\cdot i_2(t))}_{\text{Da valutare}} = w(t)$$

Da valutare: per ragioni di fisica realizzabilità abbiamo che $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$

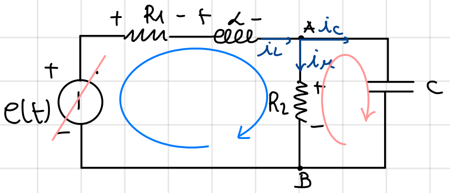
↓

Sotto questa condizione otteniamo $w(t) \geq 0$

Maggiorando

$$w(t) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{L_1}\cdot i_1(t) - \sqrt{L_2}\cdot i_2(t)\right)^2 \geq 0$$

risoluzione di un circuito



e(t) NON COSTANTE

A: $i_L(t) = i_R(t) + i_C(t)$

maglia: $-e(t) + R_1\cdot i_L(t) + L\,\frac{di_L(t)}{dt} = 0$

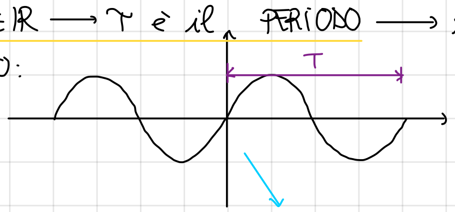
maglia: $-R\cdot i_R(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau = 0$

- CIRCUITI a REGIME PERIODICO SINUSOIDALE

$f(t) = f(t+T)$, $\forall t \in \mathbb{R} \longrightarrow T$ è il PERIODO $\longrightarrow$ sinusoidale: $x(t) = X_M\cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_x)$

↳ passando al coseno: $x(t) = X_M\cdot\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

graficamente otteniamo:



→ Dato che il seno ha come valore massimo 1, X_M rappresenta il valore massimo

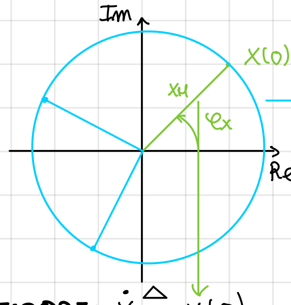
φ è la FASE: se il seno a 0 non è 0, va aggiunta la fase

ω è la PULSAZIONE: $\frac{2\pi}{T} \longrightarrow$ FREQUENZA: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \longrightarrow$ Nelle nostre abitazioni questa vale 50 Hz

↓

Tutte le funzioni hanno la stessa pulsazione

TEMPO: $x(t) = X_M \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_x) \Longrightarrow x(t) \triangleq X_M \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)}$



$\rightarrow X(t)$ = VETTORE ROTANTI

FASORE: $\dot{X} \triangleq X(0) = X_M e^{j\varphi_x}$

ESEMPIO

$V_{AB}(t) = 100 \operatorname{sen}(10t + \pi/7) \longrightarrow \dot{V}_{AB} = 100\, e^{j\pi/7}$

Dato che il periodo è uguale per tutte le funzioni non ho necessità di portarmi dietro questa informazione $\longrightarrow$ Basta ricordare valore massimo e fase, quindi il fasore è **indipendente** dal **tempo**

$x(t) = \operatorname{Im}\{\dot{X} e^{j\omega t}\}$ per passare all'espressione **dipendente** dal **tempo**

↓ Sviluppando

$\operatorname{Im}\{X_M \cdot e^{j\varphi_x} \cdot e^{j\omega t}\} = \operatorname{Im}\{X_M \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)}\} = \operatorname{Im}\{X_M \cdot \cos(\omega t + \varphi_x) + j \cdot X_M \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_x)\} =$

$= X_M \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_x) \longrightarrow$ Posso anche farlo ad occhio

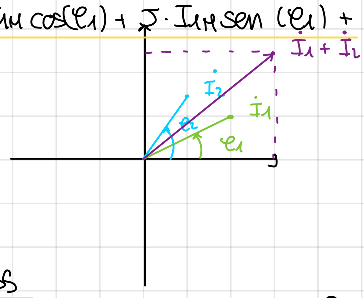
PROPRIETÀ dei FASORI: 1. **Somma e differenza**: $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = I_{1M} \cdot e^{j\varphi_1} + I_{2M} \cdot e^{j\varphi_2} = I_{1M} \cos(\varphi_1) + j \cdot I_{1M} \operatorname{sen}(\varphi_1) + I_{2M} \cos(\varphi_2) + j \cdot I_{2M} \cdot \operatorname{sen}(\varphi_2)$

↓

Si SOMMANO (sottraggono) le parti reali ed immaginarie

↓

SOMMA VETTORIALE nel PIANO di GAUSS



2. **Derivazione**: $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{d\,[\operatorname{Im}\{\dot{X} e^{j\omega t}\}]}{dt} = \operatorname{Im}\left\{\dfrac{d(\dot{X} e^{j\omega t})}{dt}\right\} =$

$= \operatorname{Im}\left\{\dot{X}\, e^{j\omega t} \cdot j\omega\right\} = \operatorname{Im}\{\underbrace{j\omega \dot{X}}_{\dot{Y}}\, e^{j\omega t}\} =$

$= \operatorname{Im}\{\dot{Y} e^{j\omega t}\} \longrightarrow$ Corrisponde al FASORE di $y(t)$

↓

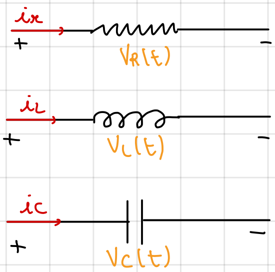
$\dot{Y} = j\omega \dot{X}$: diventa un'operazione ALGEBRICA perché basta moltiplicare per $j\omega$

3. **Integrazione**: $y(t) = \int x(t)\,dt = \int \operatorname{Im}\{\dot{X} e^{j\omega t}\}\,dt = \operatorname{Im}\{\int \dot{X} e^{j\omega t}\,dt\} =$

$= \operatorname{Im}\left\{\dot{X}\, \dfrac{e^{j\omega t}}{j\omega}\right\} = \operatorname{Im}\left\{\underbrace{\boxed{\dfrac{\dot{X}}{j\omega}}}_{\dot{Y}} \cdot e^{j\omega t}\right\} =$

$= \operatorname{Im}\{\dot{Y} \cdot e^{j\omega t}\}$, quindi $\boxed{\dot{Y} = \dfrac{\dot{X}}{j\omega}}$

TRASFORMAZIONI in DOMINIO FASORIALE



TEMPO	FASORE
$V_R(t) = R \cdot i_R(t)$	$\dot{V}_R = R \cdot \dot{I}_R = R I_M e^{j\varphi_i}$
$V_L(t) = L \cdot \dfrac{di_L(t)}{dt}$	$\dot{V}_L = L \cdot \dot{I}_L \cdot j\omega = j\omega L\, I_M e^{j\varphi_i} = e^{j\frac{\pi}{2}} \omega L I_M e^{j\varphi_i} =$
$V_C(t) = \dfrac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$	$\dot{V}_C = \dfrac{1}{C} \cdot \dfrac{\dot{I}_C}{j\omega}$

complesso in forma cartesiana

$= \omega L \cdot I_M \cdot e^{j(\varphi_i + \frac{\pi}{2})}$: Fase della corrente $+\pi/2$

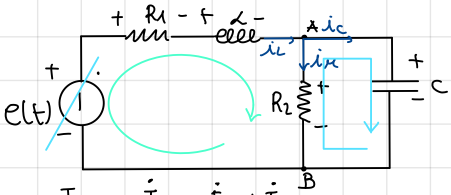
$\dot{V}_C = \dfrac{1}{\omega C} I_M e^{j\varphi_i} \cdot \boxed{\dfrac{1}{j}} = \rightarrow -j$

$= \dfrac{I_M}{\omega C} e^{j(\varphi_i - \frac{\pi}{2})} \qquad = e^{-j\frac{\pi}{2}}$

↓

Fase della corrente $-\dfrac{\pi}{2}$

risoluzione di un circuito



$e(t) = 10 \, sen\,(100t + \pi/4)$

$\omega = 100 \; rad/s$

$\dot{E} = 10 \, e^{j\frac{\pi}{4}}$

In: $\dot{I}_L = \dot{I}_R + \dot{I}_C$

maglia: $-\dot{E} + R_1 \dot{I}_L + j\omega L \dot{I}_L + R_2 \dot{I}_R = 0$

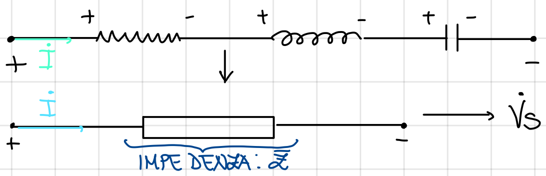
maglia: $-R_2 \dot{I}_R + \frac{1}{j\omega C} \cdot \dot{I}_C = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1+j\omega L & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_L \\ \dot{I}_R \\ \dot{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{E} \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

Posso scomporre il sistema in sistema della parte reale e della parte immaginaria

$$\boxed{\begin{aligned} \{Re\} \dot{I}_L &= \{Re\} \dot{I}_R + \{Re\} \dot{I}_C \\ \{Im\} \dot{I}_C &= \{Im\} \dot{I}_R + \{Im\} \dot{I}_C \end{aligned}}$$

BIPOLI ELETTRICI IN SERIE



$\dot{V}_S = \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C = R\dot{I} + j\omega L \dot{I} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \dot{I} = \dot{I} \underbrace{\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right)}_{\text{IMPEDENZA } \dot{Z}}$

$\longrightarrow \dot{V}_S = \dot{Z} \cdot \dot{I}$: generalizza la legge di Ohm

Se $\dot{Z}$ è un numero reale è una RESISTENZA, quindi $\dot{V} = R\dot{I}$

se $\dot{Z}$ è un immaginario puro
- >0: $\dot{V} = j\omega L \dot{I}$, quindi INDUTTORE
- <0: $\dot{V} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}$, quindi CONDENSATORE

Abbiamo anche altri casi di impedenza
- se $Im > 0$, $Re \neq 0$ si dice ohmico - induttivo
- se $Im < 0$ e $Re \neq 0$ si dice ohmico - capacitivo

↓ Abbiamo quindi ottenuto

$\dot{V} = \dot{Z} \dot{I}$ ove solo $\dot{V}$ ed $\dot{I}$ sono fasori, mentre $\dot{Z}$ non può essere riportato nel dominio del tempo $\longrightarrow \dot{V} = V_M e^{j\theta_V}$ e $\dot{I} = I_M e^{j\theta_i}$, mentre $\dot{Z} = Z e^{j\theta} \longrightarrow$ fase di Z

Z non ha senso parlare di Z massimo (non è una sinusoide)

$\boxed{V_M e^{j\theta_V} = Z e^{j\theta} \cdot I_M e^{j\theta_i}} \longrightarrow \begin{cases} V_M = Z I_M \\ \theta_V = \theta + \theta_i \end{cases} \longrightarrow \theta = \theta_V - \theta_i$

- $\theta = \frac{\pi}{2}$: INDUTTIVO
- $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$: OHMICO - INDUTTIVO
- $\theta = 0$: RESISTIVO
- $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$: OHMICO - CAPACITIVO
- $\theta = -\frac{\pi}{2}$: CAPACITIVO

$\boxed{\dot{Z} = R + jX}$

Reattanza: parte immaginaria impedenza

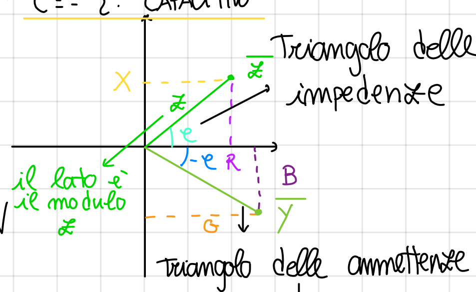
Resistenza: parte reale impedenza

↓ INVERSO

$\boxed{Y = \frac{1}{\dot{Z}}} \longrightarrow$ Ammettenza $= G + jB \longrightarrow$ Suscettanza

conduttanza

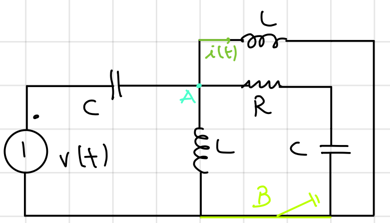
$\frac{1}{Z} e^{-j\theta} = \frac{1}{Z e^{j\theta}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2+X^2} - j\frac{X}{R^2+X^2} \longrightarrow I = YV$



$G = Y\cos(-\theta) = Y\cos\theta$

$B = Y sen(-\theta) = -Y sen\,\theta$

ESERCIZIO ⚠ ESAME 29-01-20



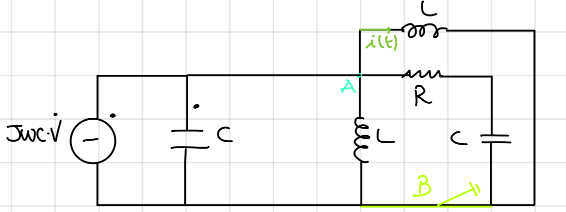
① $\dot{V} = 50\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{2}} = 50\sqrt{2}\, j$

② $\dot{I} = ?$

$v(t) = 50\sqrt{2}\, sen\,(1000t + \frac{\pi}{2})$

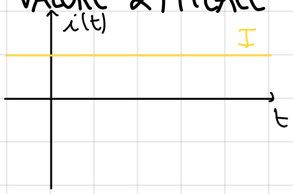
$R = 10\,\Omega$ $\quad C = 100\,\mu F$

$L = 100\; mH$



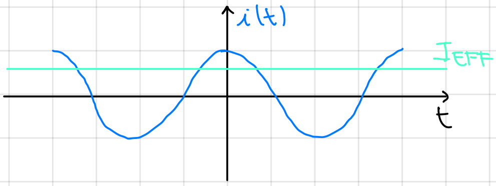
$$\dot{I} = J\omega C \, \dot{V} \cdot \frac{\frac{1}{J\omega L}}{\underbrace{J\omega C + \frac{1}{J\omega L} + \frac{1}{R+\frac{1}{J\omega C}} + \frac{1}{J\omega C}}_{\text{PARTITORE di CORRENTE}}} = -5\sqrt{2}\,J$$

VALORE EFFICACE



$$\longrightarrow p(t) = R \cdot i^2(t) = RI^2$$

$$W = \int_0^T RI^2 = RI^2 T$$



$$p(t) = R \cdot i(t)^2$$

Una corrente sinusoidale si dice efficace come una corrente costante se dissipa nello stesso periodo la stessa energia dissipata dalla corrente costante di valore corrente efficace

$$W = \int_0^T p(t)\,dt = \int_0^T R\,i^2(t)\,dt = RI_{eff}^2 T \longrightarrow \int_0^T i^2(t)\,dt = I_{eff}^2 T \longrightarrow \boxed{I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}}$$

Calcoliamo il valore efficace della funzione di nostro interesse

$$I_{EFF} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_M^2 \, sen^2(\omega t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_M^2 (1-\cos^2(\omega t))\,dt} = \sqrt{\frac{I_M^2}{T}\int_0^T \left[1 - \boxed{\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}}\right]dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{I_M^2}{T}\left[\int_0^T \frac{1}{2}\,dt - \underbrace{\int_0^T \frac{1}{2}\cos(2\omega t)\,dt}\right]} = \sqrt{\frac{I_M^2 \cdot \cancel{T}}{2\cancel{T}}} = \boxed{\frac{I_M}{\sqrt{2}}} \longrightarrow \text{Valore di } I_{EFF}$$

Ha periodo $T/2$ ⟶ fa 0 in quanto abbiamo integrato in un multiplo del periodo

POTENZE a REGIME PERIODICO SINUSOIDALE

a. potenza istantanea: $p(t) = v(t) \cdot i(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} i(t) = I_M \cdot sen(\omega t) \\ V(t) = V_M \cdot sen(\omega t + \varphi) \end{array}} \longrightarrow \varphi = \varphi_V - \varphi_I$

$$p(t) = V_M I_M \, sen(\omega t)\, sen(\omega t + \varphi) = V_M I_M \, sen(\omega t)[sen(\omega t)\cos(\varphi) + \cos(\omega t)\, sen(\varphi)] =$$

$$= V_M I_M [(1-\cos^2(\omega t))\cos\varphi + sen(\omega t)\cos(\omega t)\, sen\,\varphi] = V_M I_M \left[\left(1 - \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\right)\cos\varphi + \frac{sen(2\omega t)\, sen\,\varphi}{2}\right]$$

$$= V_M I_M \left[\frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos(2\omega t)\cos\varphi + \frac{1}{2} sen(2\omega t)\, sen\,\varphi\right] =$$

$$= \boxed{\frac{V_M I_M}{2}} \underbrace{[\cos\varphi - \cos(2\omega t)\cos\varphi}_{\text{Potenza attiva istantanea}} + \underbrace{sen(2\omega t)\, sen\,\varphi]}_{\text{Potenza reattiva istantanea}}$$

Potenza attiva istantanea ⟶ $\dot{Z} = R \longrightarrow \varphi = 0°$

Potenza reattiva istantanea ⟶ $\dot{Z} = Jx$, $\varphi = \pm 90°$

b. potenza attiva P: $P \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \int_0^T \frac{V_M I_M}{2}\cos\varphi\,dt - \cancel{\int_0^T \frac{V_M I_M}{2}\cos(2\omega t)\cos\varphi\,dt} +$

$+ \cancel{\int_0^T \frac{V_M I_M}{2} sen\,\varphi\, sen(2\omega t)\,dt}$ ⟶ ho integrato su 2 volte il periodo

$$= \frac{1}{\cancel{T}} \frac{V_M \cdot I_M}{2}\cos\varphi \cdot \cancel{T} = \frac{V_M \cdot I_M}{2}\cos\varphi \quad [W] \xrightarrow{\text{efficace}} VI\cos\varphi = \boxed{Z}I^2\cos\varphi \; R$$

$$\boxed{Y}V^2\cos\varphi \; G$$

c. potenza reattiva Q: $Q \triangleq$ massimo della potenza reattiva istantanea nel tempo

$$\boxed{Q \triangleq \frac{V_M I_M}{2} sen\,\varphi} \quad [VAR] \xrightarrow{\text{efficace}} VI\, sen\,\varphi = ZI^2 sen\,\varphi = XI^2$$

$$= YV^2 sen\,\varphi = -BV^2$$

d. potenza apparente S: $S \triangleq$ Massimo che possono avere la potenza attiva o reattiva

$$\boxed{S \triangleq \frac{V_M I_M}{2}} \quad [VA] \longrightarrow \begin{array}{ll} \text{Quando } \varphi = \frac{\pi}{2} & Q = M \text{ (condensatori)} \\ \text{Quando } \varphi = 0 & Q = P \text{ (resistori)} \end{array}$$

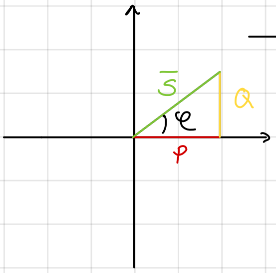
$$\xrightarrow{\text{efficace}} \boxed{VI = ZI^2 = YV^2}$$

passiamo al fasore: $v(t) = V_M \operatorname{sen}(\omega t + \theta_v) \longrightarrow \dot V = \frac{V_M}{\sqrt{2}} e^{j\theta_v}$ $\longrightarrow$ Ho scelto il valore efficace

⚠ ATT: se si sono scelti valori efficaci e si vuol passare al dominio del tempo dobbiamo moltiplicare per $\sqrt{2}$

e. potenza complessa $\bar S$: $\bar S \triangleq \dot V \dot I^* = Ve^{j\theta_v} \cdot Ie^{-j\theta_i} = VI e^{j\overbrace{(\theta_v - \theta_i)}^{\varphi}} = VI e^{j\varphi} =$

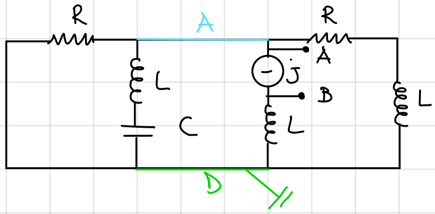
$= VI\cos\varphi + jVI \operatorname{sen}\varphi = P + jQ \longrightarrow$ Modulo: S



$\longrightarrow$ Rapporto di similitudine con il triangolo delle impedenze $= I^2$, mentre con il triangolo delle ammettenze è V^2

ESERCIZI:

1. 30-01-19



$J(t) = 3\sqrt{2} \operatorname{sen}(1000t)$ A

$R = 20\,\Omega$ $\quad L = 20\,mH$ $\quad C = 10\,\mu F$

$P_J = ?$

$P_J = \operatorname{Re}\{\dot V_{AB} \cdot \dot J^*\}$

$\dot V_{AB} = \dot V_{AD} - \dot V_{BD}$

$\dot V_{AB} = \dot V_A - (j\omega L)(-\dot J) = \dot V_A + j\omega L \dot J$

$\dot J = 3$ (usando i valori efficaci)

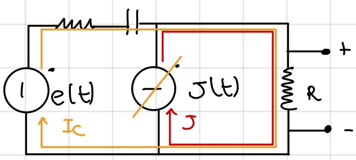
Nodo A: $J = V_A \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{R + j\omega L} \right) = \left(\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{R + j\omega L}} \right) =$

$= 30.9189 + 6.4865\,j$

$\bar S = \boxed{116.76} + 199.46\,j$

potenza erogata

2. 05-06-19



$Q_C = ?$

$e(t) = 50\sqrt{2} \operatorname{sen}(1000t)$ $\qquad \dot E = 50$

$J(t) = 2\sqrt{2} \cos(1000t) = 2\sqrt{2} \operatorname{sen}(1000t + \frac{\pi}{2})$ $\qquad \dot J = 2e^{j\frac{\pi}{2}} = 2j$

$R = 10\,\Omega$ $\quad C = 100\,\mu F$

$-\dot E + R\dot I_C + \frac{1}{j\omega C}\dot I_C + R(\dot I_C + \dot J) = 0 \longrightarrow \dot I_C = \frac{\dot E - R\dot J}{2R + \frac{1}{j\omega C}} = 2.4 + 0.2j$

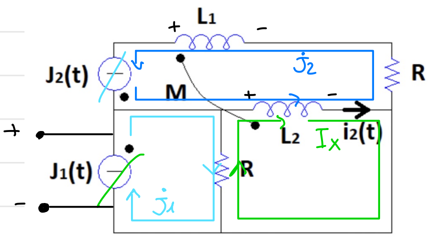
$\dot V = R(\dot I_C + \dot J) = 24 + 22j = 32.5576\, e^{j0.7419}$

$v(t) = 32.5576\sqrt{2} \operatorname{sen}(1000t + 0.7419)$

$Q_C = X_C I^2 = -\frac{1}{\omega C}\left(\sqrt{2.4^2 + 0.2^2}\right)^2 = -58$ VAR

$\dot Z = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$

3. 15-02-19



$J_1(t) = \sqrt{2}\,\text{sen}(1000t)$ A $\longrightarrow \dot{J}_1 = 1$

$J_2(t) = 2\sqrt{2}\,\text{sen}(1000t + \pi/2)$ A $\longrightarrow 2e^{j\frac{\pi}{2}} = 2i$

$R = 10\,\Omega$

$L_1 = 10$ mH

$L_2 = 20$ mH

$M = 14$ mH

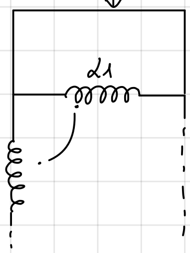
$i_2(t) = ?$

$\bar{S} = ?$

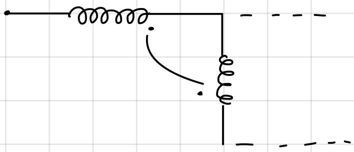
$\longrightarrow \bar{S} = P + iQ$

$\dot{V}_1 = i\omega L_1 \dot{I}_1 \pm i\omega M \dot{I}_2$

⚠ ATT: non posso scrivere $V = \bar{Z}\dot{I}$ ma posso scrivere $\dot{V}_1 = \bar{Z}_1 \dot{I}_1 \pm \bar{Z}_2 \dot{I}_2$



$\longrightarrow$ Non è possibile eliminare l'induttore in parallelo al corto circuito



$\longrightarrow$ Anche se non è attraversato da corrente non posso eliminarlo dal circuito

Inoltre, ⚠ ATT: non è possibile applicare il metodo delle tensioni di nodo

(1) Dominio fasoriale: $\dot{J}_1 = 1 \qquad \dot{J}_2 = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = 2j$

(2) correnti di maglia

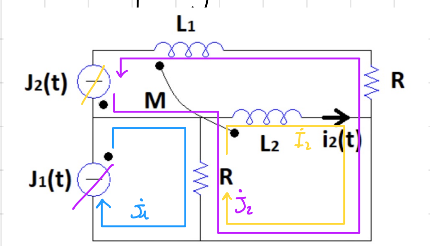
maglia: $R(\dot{I}_x - \dot{J}_1) + i\omega L_2(\dot{I}_x + \dot{J}_2) - i\omega M \dot{J}_2 = 0$

$$\dot{I}_x = \frac{R\dot{J}_1 - i\omega L_2 \dot{J}_2 + i\omega M \dot{J}_2}{R + i\omega L_2}$$

$\dot{I}_2 = \dot{I}_x + \dot{J}_2 = 1.2033\, e^{i\,1.1965}$

$i_2(t) = 1.2033\sqrt{2}\,\text{sen}(1000t + 1.1965)$ A

(2.5) Metodo più furbo di risoluzione $\longrightarrow$ è meglio evitare di avere molte correnti su induttori mutuamente accoppiati



maglia: $R(\dot{I}_2 - \dot{J}_1 - \dot{J}_2) + i\omega L_2 \dot{I}_2 - i\omega M \dot{J}_2 = 0$

$$\dot{I}_2 = \frac{R\dot{J}_1 + R\dot{J}_2 + i\omega M \dot{J}_2}{R + i\omega L_2} = 1.2033\, e^{i\,1.1965}$$

$\bar{S}_1 = \dot{V}_1 \underbrace{\dot{J}_1^*}_{1} = \dot{V}_1 = R(\dot{J}_1 + \dot{J}_2 - \dot{I}_2) = 5.6 + 8.8j$

- TEOREMA di TELLEGEN

$\boxed{\sum_{k=1}^{n} V_{jk}(t) \cdot i_{jk}(t) = \emptyset}$ ove jk sono generici nodi del circuito e n è il numero totale dei nodi del circuito

$\downarrow$

La somma delle potenze istantanee del circuito è pari a $\emptyset$.

DIMOSTRAZIONE

⚠ NOTA: per semplicità omettiamo t

$$\sum_{JK=1}^{n} \underbrace{(V_{J\emptyset} - V_{K\emptyset})}_{J\quad K} \cdot i_{JK} = 0 \;\longrightarrow\; \sum_{JK=1}^{n} V_{J\emptyset} \cdot i_{JK} - \sum_{JK=1}^{n} V_{K\emptyset} \cdot i_{JK} = 0 \;\longrightarrow\; \sum_{J=1}^{n} V_{J\emptyset}\Big(\underbrace{\sum_{K=1}^{n} i_{JK}}_{0}\Big) - \sum_{K=1}^{n} V_{K\emptyset}\Big(\underbrace{\sum_{J=1}^{n} i_{JK}}_{0}\Big) = 0$$

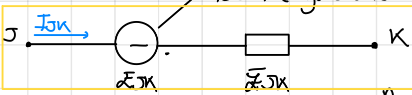
TESI

0: somma algebrica correnti uscenti

0: somma algebrica correnti entranti

- TEOREMA di BOUCHEROT

$$\boxed{\sum_{JK=1}^{n} \dot{V}_{JK} \dot{I}_{JK}^{*} = 0}$$ con J, K:



Per il generatore: ⚠ Riferimenti non associati

: $\dot{V}_{JK} = -\dot{\mathcal{E}}_{JK} + \bar{Z}_{JK} \cdot \dot{I}_{JK}$

caduta di potenziale

Sostituendo: $\displaystyle\sum_{JK=1}^{n} \big(-\dot{\mathcal{E}}_{JK} \dot{I}_{JK}^{*} + \bar{Z}_{JK} \cdot \underbrace{I_{JK}^{2}}_{\text{modulo}}\big) = 0 \longrightarrow \sum_{JK=1}^{n} \bar{S}_{JK}^{GEN} = \sum_{JK=1}^{n} (R_{JK} + i X_{JK}) I_{JK}^{2}$

$\boxed{\bar{S}}$ → Potenza complessa

$$\longrightarrow \boxed{\sum_{JK=1}^{m} P_{JK}^{GEN} + i Q_{JK}^{GEN} = \sum_{JK=1}^{n} (R_{JK} + i X_{JK}) I_{gen}^{2}}$$

$$\longrightarrow \sum_{JK=1}^{n} P_{JK}^{GEN} = \sum_{JK=1}^{n} R_{JK} I_{JK}^{2}$$: uguaglianza Re

$$\longrightarrow \sum_{JK=1}^{n} Q_{JK}^{GEN} = \sum_{JK=1}^{n} X_{JK} I_{JK}^{2}$$: uguaglianza Im

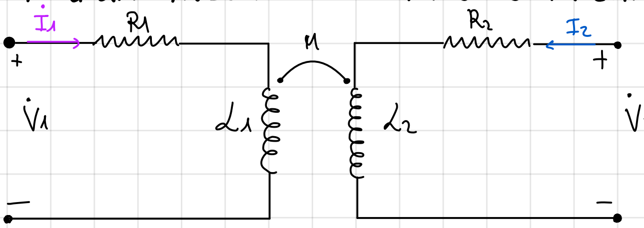
↓

La somma delle potenze attive erogate dai generatori è uguale alla somma delle potenze attive dissipate dai resistori. La somma delle potenze reattive erogate dai generatori è uguale alla somma delle potenze impegnate dagli elementi reattivi del circuito.

↓

I generatori quindi TIPICAMENTE EROGANO POTENZA ma potrebbero anche dissiparla in quanto la somma deve essere positiva. Per la seconda uguaglianza, il secondo membro non è definito in segno, quindi di conseguenza anche il primo non lo è.

- POTENZA INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI



$$\dot{V}_1 = R_1 \dot{I}_1 + i\omega L_1 \dot{I}_1 + i\omega M \dot{I}_2 \qquad \dot{I}_1 = I_1 e^{J\varphi_1}$$
$$\dot{V}_2 = R_2 \dot{I}_2 + i\omega L_2 \dot{I}_2 + i\omega M \dot{I}_1 \qquad \dot{I}_2 = I_2 e^{J\varphi_2}$$

$$\bar{S} = \dot{V}_1 \dot{I}_1^{*} + \dot{V}_2 \dot{I}_2^{*}$$

se li considero disaccoppiati: ATTIVA

↓

$$\bar{S} = R_1 I_1^2 + i\omega L_1 I_1^2 + i\omega M \dot{I}_2 \dot{I}_1^{*} + R_2 I_2^2 + i\omega L_2 I_2^2 + i\omega M \dot{I}_1 \dot{I}_2^{*}$$

Potenza attiva su R

Potenza reattiva su L_1 ed L_2

se la passiamo tra loro

$$= \ldots + i\omega M \big(I_2 e^{i\varphi_2} I_1 e^{-i\varphi_1} + I_1 e^{i\varphi_1} I_2 e^{-i\varphi_2}\big) = \ldots\; i\omega M I_1 I_2 \big(e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} + e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}\big) =$$
$$= \ldots + i\omega M I_1 I_2 \big(\cos(\varphi_2-\varphi_1) + i\cancel{\operatorname{sen}(\varphi_2-\varphi_1)} + \cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\cancel{\operatorname{sen}(\varphi_1-\varphi_2)}\big) =$$
$$= \ldots + i\omega M I_1 I_2 \big(2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\big)$$

↓

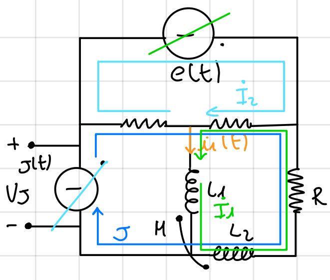
$$\boxed{\bar{S} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + i\omega L_1 I_1^2 + i\omega L_2 I_2^2 + 2 i\omega M I_1 I_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2)}$$

↓

Anche questa è puramente reattiva

ESERCIZI

1. 09-01-19



$\dot{\mathcal{E}} = 20$

$\dot{J} = 1$

$i_L(t) = ?$

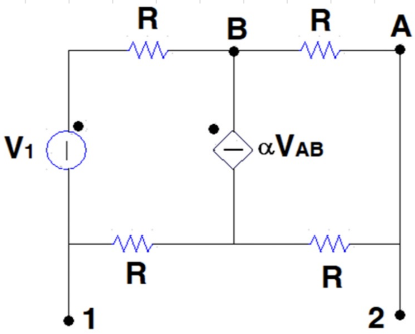
$Q_J = ?$

maglia: $R(\dot{I}_1 - \dot{J}) + R(\dot{I}_1 - \dot{J} + \dot{I}_2) + i\omega L_1 \dot{I}_1 - i\omega M(\dot{I}_1 - \dot{J}) + i\omega L_2(\dot{I}_1 - \dot{J}) - i\omega M \dot{I}_1 = 0$

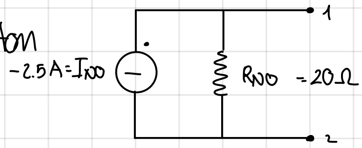
maglia: $-\dot{\mathcal{E}} + 2R\dot{I}_2 - 2R\dot{J} + R\dot{I}_1 = 0 \longrightarrow \dot{I}_2 = \dot{J} + \dfrac{\dot{\mathcal{E}}}{2R} - \dfrac{1}{2}\dot{I}_1$

$$\dot{J}_1 = \frac{R\dot{J} + R\dot{J} - R\dot{J} - \frac{\dot{Z}}{2} - i\omega M\dot{J} + i\omega L_2\dot{J}}{R + R - \frac{R}{2} + i\omega L_1 - i\omega M - i\omega L_2 - i\omega M} = 0.065\, e^{j1.5042}$$

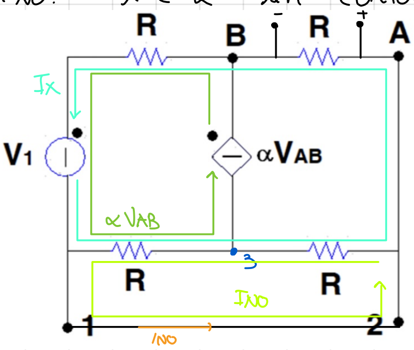
2. 16.09.19



$V_1 = 100V$
$R = 20\Omega$
$\alpha = 0.05\ A/V$
Equivalente Norton



I_{NO}: 1 e 2 in cortocircuito



maglia: $2RI_{NO} - 2RI_x - R\alpha V_{AB} = 0 \longrightarrow 2\cancel{R}I_{NO} - 2\cancel{R}I_x - \underbrace{R^2\alpha}_{1} I_x = 0 \longrightarrow 2I_{NO} = 3I_x \longrightarrow I_x = \frac{2}{3}I_{NO}$

maglia: $4RI_x + V_1 - 2RI_{NO} + 2R\alpha V_{AB} = 0 \longrightarrow 4RI_x + V_1 - 2RI_{NO} + 2R^2\alpha I_x = 0$

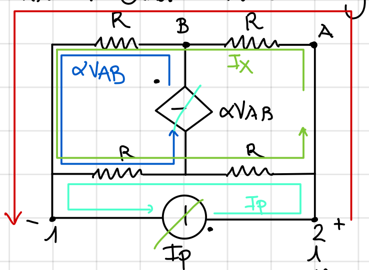
$V_{AB} = RI_x$

$4R\cdot\frac{2}{3}I_{NO} + V_1 - 2RI_{NO} + 2R\cdot\frac{2}{3}I_{NO} = 0$

$\frac{8}{3}RI_{NO} - 2RI_{NO} + \frac{4}{3}RI_{NO} = -V_1$

$2RI_{NO} = -V_1 \longrightarrow I_{NO} = \frac{-V_1}{2R} = -2.5A$

R_{NO}: disattivazione gen. indipendenti



$V_{AB} = RI_x$

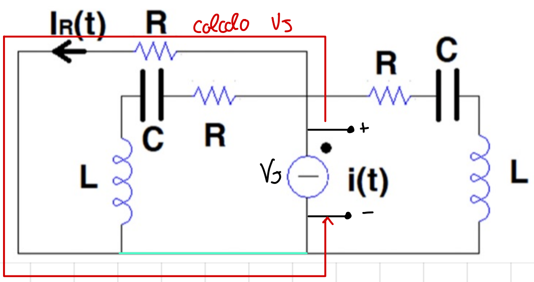
maglia: $RI_x + R(I_x + \underbrace{\alpha R}_{1} I_x) + R(I_x + \underbrace{\alpha R}_{1} I_x - I_p) + R(I_x - I_p) = 0$

$6\cancel{R}I_x = 2\cancel{R}I_p \longrightarrow I_x = \frac{1}{3}I_p$

$\boxed{V_{21}} = RI_x + R(I_x + \alpha RI_x) = 3RI_x = RI_p$

$R_{NO} = \frac{V_{21}}{I_p} = \frac{R\cancel{I_p}}{\cancel{I_p}} = 20\Omega$

3.



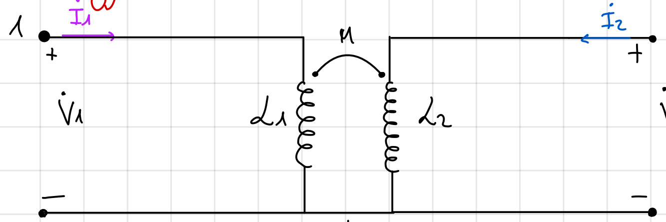
$J(t) = \sqrt{2}\cos(1000t)\ A \longrightarrow \dot{J} = 1$
$R = 10\ \Omega$
$C = 100\ \mu F$
$L = 10\ mH$

PARTITORE di CORRENTE

$$\dot{J}_R = \dot{J} \cdot \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{2}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}} = \frac{1}{3} \longrightarrow i_R(t) = \frac{\sqrt{2}}{3}\cos(1000t)\ A$$

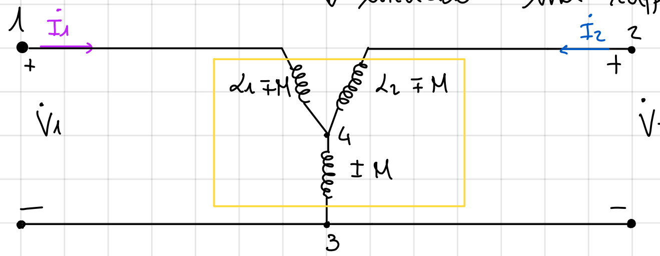
$$S = V_J \cdot \overset{=1}{J} = V_J = R \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}\ VA$$

⚠ Suggerimento: induttori mutuamente accoppiati



$$\dot{V}_1 = i\omega L_1 \dot{I}_1 + i\omega M \dot{I}_2$$
$$\dot{V}_2 = i\omega L_2 \dot{I}_2 + i\omega M \dot{I}_1$$

↓ utilizzo una rappresentazione alternativa

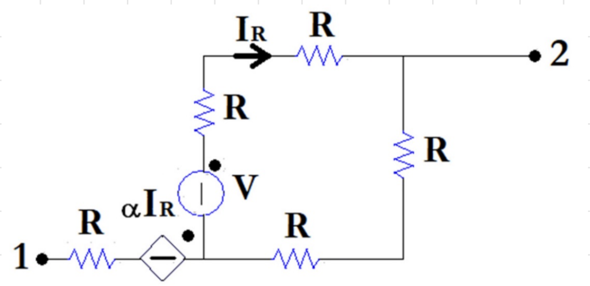


Se i contrassegni si trovano dalla stessa parte del nodo a comune si utilizzano i segni in alto, altrimenti si utilizzano i segni in basso.

$$\dot{V}_1 = i\omega(L_1 - M)\dot{I}_1 + i\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$
$$\dot{V}_2 = i\omega(L_2 - M)\dot{I}_2 + i\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

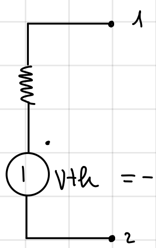
$\longrightarrow$ Vantaggi quando $L_1/L_2 = M$ e per la possibilità di utilizzare le tensioni di nodo

4. 19-02-20



$V = 12V$
$R = 10\Omega$
$\alpha = 10\ V/A$

Equivalente di Thevenin



E_{th}: tensione a vuoto tra 1 e 2 una volta staccati i morsetti tra 1 e 2

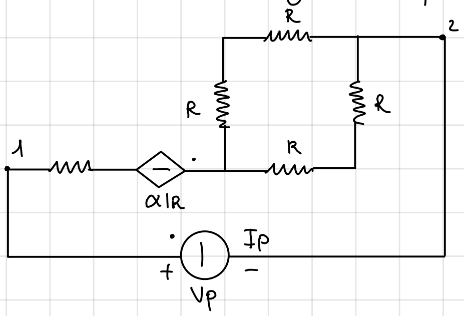
$V_{th} = -\alpha I_R - V + 2RI_R \longrightarrow V_{th} = -3 - 12 + 6 = -9V$

calcolo di I_R

↓

$$I_R = \frac{V}{4R} = 0.3A$$

R_{th}: disattivazione gen. indipendenti



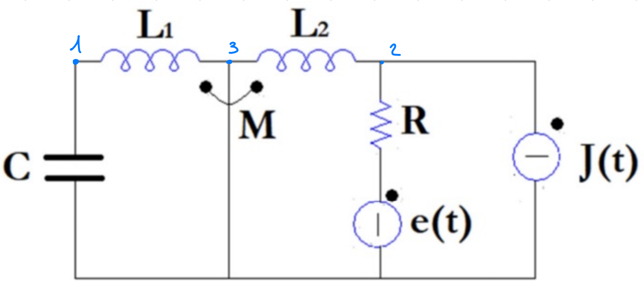
$R_{th} = V_p / I_p$

$V_p = RI_p - \alpha I_R + 2RI_R$ e $I_R = \frac{I_p}{2}$ in quanto abbiamo 2 rami in // con la stessa resistenza

↓

$$R_{th} = R - \frac{\alpha}{2} + R = 15\Omega$$

5. 19-01-20



$J(t) = \sqrt{2}\, sen(1000t)$ A $\longrightarrow \dot{J} = 1$

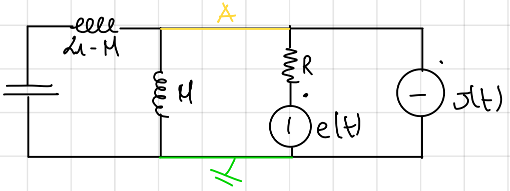
$e(t) = 20\sqrt{2}\cos(1000t)$ V $\longrightarrow \dot{\mathcal{E}} = 20 e^{i\pi/2} = 20i$

$R = 10\ \Omega$ $L_1 = 20mH$

$M = L_2 = 10mH$ $C = 200\mu F$

$P_R = ?$

$S_{L_1, L_2} = ?$



$$\dot{J} + \frac{\dot{\mathcal{E}}}{R} = \dot{V}_A \left(\frac{1}{i\omega(L_1 - M) + \frac{1}{i\omega C}} + \frac{1}{i\omega M} + \frac{1}{R} \right)$$

↓ equivalente norton gen. tensione reale

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{V}_A - \dot{\mathcal{E}}}{R} = -0.5 - 1.5i$$

$P = R I_R^2 = 25W$

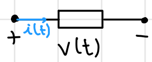
$\dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_A}{i\omega M} = 0.5 + 0.5i$

$\dot{Q} = Q_1 + Q_2 = \omega(L_1 - M)\dot{I}_1^2 + \omega M \dot{I}_2^2 = 25VAR$ (XI^2)

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_A}{i\omega(L_1 - M) + \frac{1}{i\omega C}} = 1 + i$$

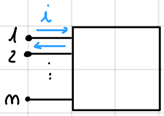
$\bar{S} = 25i$ VA

- CIRCUITI a DUE PORTE



Bipoli $\longrightarrow v(t) = f(i(t))$ e $i(t) = g(v(t))$ dove $g = f^{-1}$ dove essa esiste

↓ Generalizzazione



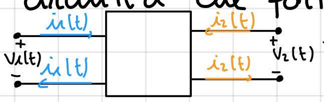
multipolo / n-polo.

Se la corrente entrante da 1 è uguale a quella che esce da 2 si dice che 1 e 2 formano una porta

↓

Un circuito multipolo si definisce multiporta se tutti i suoi poli a due a due formano una porta

circuiti a due porte o doppi bipoli

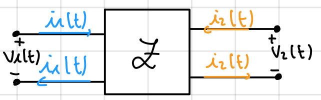


$\longrightarrow$ gli induttori mutuamente accoppiati sono un circuito a due porte (o doppio bipolo)

↓

$$\boxed{\dot{V} = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = f(\dot{I}) = f\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}}$$

Trattazione generale: le correnti nei poli in alto sono entranti e le tensioni sono poste con il + in alto



$$\dot{V} = \bar{Z}\dot{I} \longrightarrow \boxed{\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{Z}_{11}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \bar{Z}_{21}\dot{I}_1 + \bar{Z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}}$$

↓

Parametrizzazione a parametri $\bar{Z}$: tutti gli elementi della matrice sono dimensionalmente impedenze

Nel caso di induttori mutuamente accoppiati: $\bar{Z}_{11} = i\omega L_1$ $\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21} = i\omega M$

$\bar{Z}_{22} = i\omega L_2$

Calcolo dei parametri nella matrice: $\dot{Z}_{11} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0}$ $\dot{Z}_{12} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$

↓

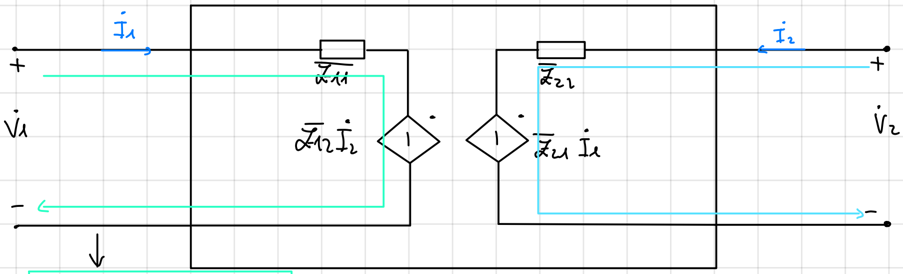
Lascio la porta 2 non alimentata e aperta, metto un generatore di prova a scelta alla porta 1 e vado a misurare la tensione alla porta 1. Fatto questo, stimo $\dot{Z}_{11}$

$\dot{Z}_{22} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$ $\dot{Z}_{21} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0}$

↓

Apro la porta 1, metto un generatore alla porta 2, misuro la tensione alle due porte dividendola per la corrente del generatore di prova utilizzato

Circuito equivalente

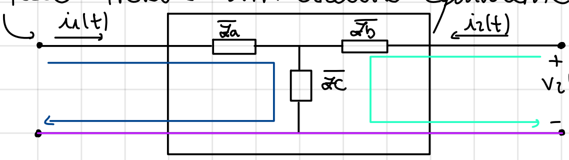


$\dot{V}_2 \longrightarrow \boxed{\dot{V}_2 = \dot{Z}_{22}\dot{I}_2 + \dot{Z}_{21}\dot{I}_1}$

↓

$\boxed{\dot{V}_1 = \dot{Z}_{11}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{12}\dot{I}_2}$

Posso trovare un circuito equivalente agli effetti esterni ancora più semplice



condizioni per poter utilizzare il circuito semplificato

1. È necessario che due morsetti della porta 1 e 2 siano in cortocircuito
2. Deve accadere che $\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21}$ ← Non devono esserci generatori pilotati

maglia: $\begin{cases} \dot{V}_1 = \dot{Z}_a \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_c \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_c \cdot \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \dot{Z}_b \cdot \dot{I}_2 + \dot{Z}_c \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_c \cdot \dot{I}_2 \end{cases}$ maglia $\longrightarrow \begin{cases} \dot{V}_1 = \boxed{(\dot{Z}_a + \dot{Z}_c)} \cdot \dot{I}_1 + \overset{\dot{Z}_{12}}{\boxed{\dot{Z}_c}} \cdot \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \underset{\dot{Z}_{21}}{\boxed{\dot{Z}_c}} \cdot \dot{I}_1 + \boxed{(\dot{Z}_b + \dot{Z}_c)} \dot{I}_2 \end{cases}$

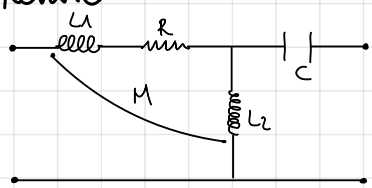
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{Z}_c &= \dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} \\ \dot{Z}_a &= \dot{Z}_{11} - \dot{Z}_{12} \\ \dot{Z}_b &= \dot{Z}_{22} - \dot{Z}_{12} \end{aligned}}$$

⟶ Il circuito a due porte è RECIPROCO. La matrice dei parametri è infatti SIMMETRICA: $\begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & \boxed{\dot{Z}_{12}} \\ \boxed{\dot{Z}_{21}} & \dot{Z}_{22} \end{bmatrix}$

↓

La rete è SIMMETRICA se anche $\dot{Z}_{11} = \dot{Z}_{22}$

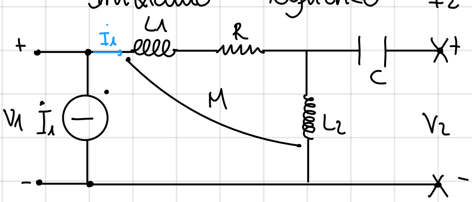
ESERCIZIO



$L_1 = 20\ mH$
$L_2 = 20\ mH$
$M = 15\ mH$
$R = 20\ \Omega$
$\omega = 1000\ rad/s$
$C = 0.1\ mF$

$\begin{cases} \dot{V}_1 = \dot{Z}_{11}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \dot{Z}_{21}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$

Iniziamo togliendo $\dot{I}_2$



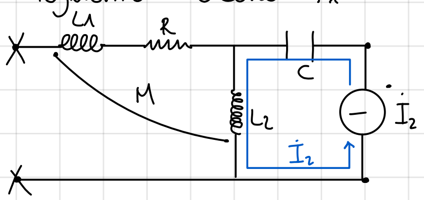
$\begin{cases} \dot{V}_1 = \dot{Z}_{11}\dot{I}_1 \\ \dot{V}_2 = \dot{Z}_{21}\dot{I}_1 \end{cases}$

$\dot{V}_1 = i\omega L_1 \dot{I}_1 - i\omega M \dot{I}_1 + R\dot{I}_1 + i\omega L_2 \dot{I}_1 - i\omega M \dot{I}_1 =$

$= \underbrace{(i\omega L_1 - 2i\omega M + i\omega L_2 + R)}_{\dot{Z}_{11} \,=\, 20 + 10i} \dot{I}_1$

$\dot V_2 = i\omega L_2 \dot I_1 - i\omega M \dot I_1 \longrightarrow \overline{Z}_{21} = i\omega L_2 - i\omega M = 5i$

Togliamo adesso $\dot I_1$



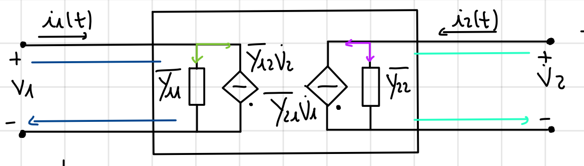
$$\dot V_2 = \frac{1}{i\omega C}\dot I_2 + i\omega L_2 \dot I_2 \longrightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{i\omega C} + i\omega L_2\right)}_{\overline{Z}_{22} = 10i} \dot I_2$$

$$\dot V_1 = -i\omega M \dot I_2 + i\omega L_2 \dot I_2 = \underbrace{(-i\omega M + i\omega L_2)}_{\overline{Z}_{12} = 5i} \dot I_2$$

$$\overline{Z} = \begin{bmatrix} 20+10i & 5i \\ 5i & 10i \end{bmatrix} \Omega$$

parametrizzazione a parametri Y

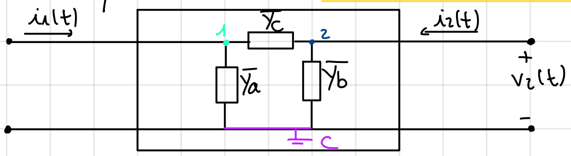
$\dot V = \overline{Z}\,\dot I \longrightarrow \boxed{\dot I = \overline{Z}^{-1} \cdot \dot V = \overline{Y}\,\dot V} \longrightarrow \boxed{\begin{cases} \dot I_1 = \overline{y}_{11}\dot V_1 + \overline{y}_{12}\cdot \dot V_2 \\ \dot I_2 = \overline{y}_{21}\cdot \dot V_1 + \overline{y}_{22}\cdot \dot V_2 \end{cases}}$ numerazione uguale ai parametri Z



$\longrightarrow$ $\boxed{\overline{Y}_{11} = \left.\frac{\dot I_1}{\dot V_1}\right|_{\dot V_2 = 0} \quad \overline{Y}_{21} = \left.\frac{\dot I_2}{\dot V_1}\right|_{\dot V_2 = 0}}$ $\boxed{\overline{Y}_{12} = \left.\frac{\dot I_1}{\dot V_2}\right|_{\dot V_1 = 0} \quad \overline{Y}_{22} = \left.\frac{\dot I_2}{\dot V_2}\right|_{\dot V_1 = 0}}$

chiudiamo in cortocircuito la porta 2/1, metto un generatore di prova alla porta 1/2, misuro la corrente $\dot I_1$ / $\dot I_2$ ed ottengo il valore di Y

se non ci sono gen. pilotati $\longrightarrow \overline{Y}_{12} = \overline{Y}_{21}$
e quindi la rete è RECIPROCA $\longrightarrow$ SEMPLIFICABILE



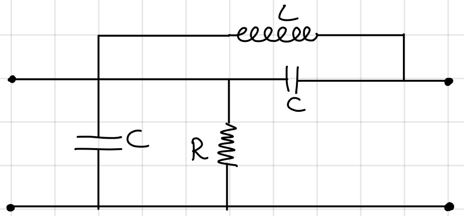
Nodo 1: $\dot I_1 = \dot V_1(\overline{Y}_a + \overline{Y}_c) - \dot V_2 \cdot \overline{Y}_c$

Nodo 2: $\dot I_2 = \dot V_2(\overline{Y}_b + \overline{Y}_c) - \dot V_1 \overline{Y}_c$

$$\longrightarrow \begin{cases} \overline{Y}_{11} = \overline{Y}_a + \overline{Y}_c \\ \overline{Y}_{12} = -\overline{Y}_c = \overline{Y}_{21} \\ \overline{Y}_{22} = \overline{Y}_b + \overline{Y}_c \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{cases} \overline{Y}_c = -\overline{Y}_{12} = -\overline{Y}_{21} \\ \overline{Y}_a = \overline{Y}_{11} + \overline{Y}_{12} \\ \overline{Y}_b = \overline{Y}_{22} + \overline{Y}_{12} \end{cases}}$$

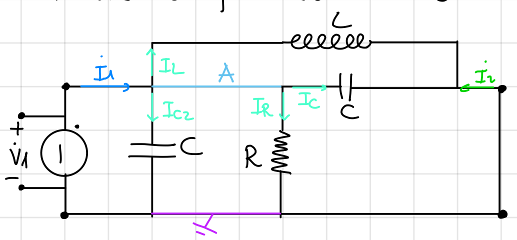
Risoluzione con tensioni di nodo

ESERCIZIO



$R = 10\,\Omega$
$C = 10\,\mu F$
$\omega = 1000$ rad/s
$L = 10$ mH

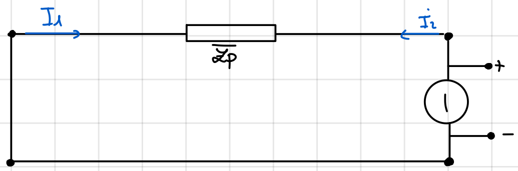
Iniziamo ponendo a 0 $\dot V_2$



$$\dot I_1 = \dot I_C + \dot I_R + \dot I_C + \dot I_{R2} = \dot V_1 \underbrace{\left(\frac{1}{i\omega L} + \frac{1}{R} + 2i\omega C\right)}_{\overline{Y}_{11} = 0{,}1 - 0{,}08i}$$

$$\dot I_2 = -\dot I_C - \dot I_L = -i\omega C \dot V_1 - \frac{1}{i\omega L}\dot V_1 = -\left(\frac{1}{i\omega L} + i\omega C\right)\dot V_1 \longrightarrow \overline{Y}_{21} = 0.09i$$

Eliminiamo $\dot V_1$



$$\overline{Z}_p = \frac{i\omega L \cdot \frac{1}{i\omega C}}{i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

$$\dot I_2 = \frac{\dot V_2}{\overline{Z}_p} \longrightarrow \overline{Y}_{22} = \frac{1}{\overline{Z}_p} = -0{,}09i$$

$$\dot I_1 = \frac{-\dot V_2}{\overline{Z}_p} \longrightarrow \overline{Y}_{12} = \frac{-1}{\overline{Z}_p} = 0{,}09i$$

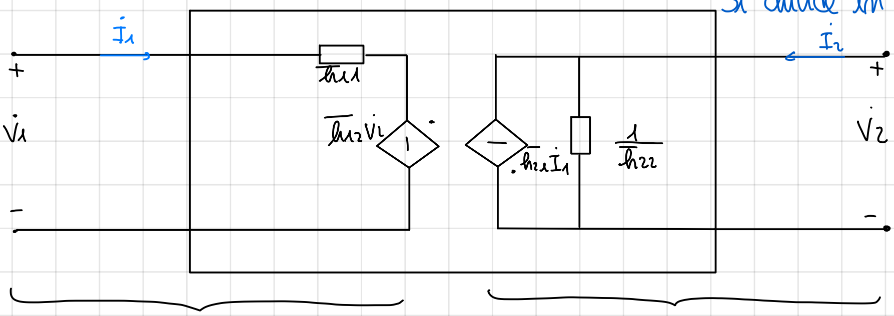
$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} 0{,}1-0{,}08i & 0{,}09i \\ 0{,}09i & -0{,}09i \end{bmatrix}$$

parametrizzazione a parametri ibridi

$$\boxed{\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{h}_{11}\,\dot{I}_1 + \bar{h}_{12}\,\dot{V}_2 & 1. \\ \dot{I}_2 = \bar{h}_{21}\,\dot{I}_1 + \bar{h}_{22}\,\dot{V}_2 & 2. \end{cases}} \longrightarrow [\bar{h}_{11}] = \Omega \qquad [\bar{h}_{12} = \bar{h}_{21}] = \text{nessuna} \qquad [\bar{h}_{22}] = \Omega^{-1}$$

Si chiude in cortocircuito la porta 2 e si mette $\dot{Z}_p/\dot{I}_p$ alla porta 1

$$\boxed{\bar{h}_{11} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{V}_2=0}} \qquad \boxed{\bar{h}_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{V}_2=0}}$$



Parametri $\dot{Z}$ Parametri $\dot{Y}$

$$\boxed{\bar{h}_{12} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}\bigg|_{\dot{I}_1=0}} \qquad \boxed{\bar{h}_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2}\bigg|_{\dot{I}_1=0}}$$

$\downarrow$

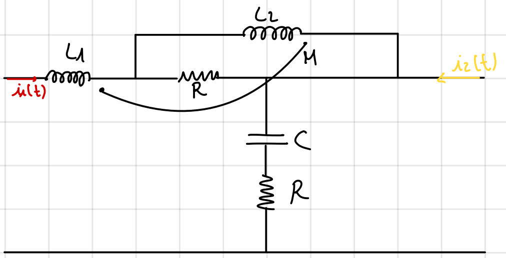
Si apre la porta 1 e si mette $\dot{Z}_p/\dot{I}_p$ alla porta 2 calcolando i parametri mancanti

h_{11} rappresenta l'impedenza di ingresso, h_{21} rappresenta l'amplificazione in corrente, h_{12} è l'inverso dell'amplificazione mentre h_{22} è l'ammettenza in uscita.
Se non ho generatori pilotati, cosa succede ai parametri h? Porto le equazioni da parametri h a parametri $\dot{Z}$.

$$2.\quad \dot{V}_2 = \underbrace{-\frac{\bar{h}_{21}}{\bar{h}_{22}}}_{\bar{Z}_{21}}\cdot \dot{I}_1 + \underbrace{\frac{1}{\bar{h}_{22}}}_{\bar{Z}_{22}}\cdot \dot{I}_2$$

$$1.\quad \dot{V}_1 = \bar{h}_{11}\cdot\dot{I}_1 - \frac{\bar{h}_{12}\bar{h}_{21}}{\bar{h}_{22}}\dot{I}_1 + \frac{\bar{h}_{12}}{\bar{h}_{22}}\dot{I}_2 = \underbrace{\frac{\bar{h}_{11}\bar{h}_{22} - \bar{h}_{12}\bar{h}_{21}}{\bar{h}_{22}}}_{\bar{Z}_{11}}\dot{I}_1 + \underbrace{\frac{\bar{h}_{12}}{\bar{h}_{22}}}_{\bar{Z}_{12}}\dot{I}_2$$

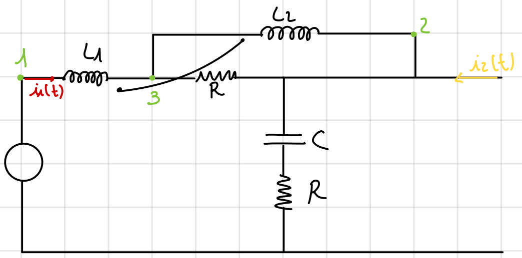
vogliamo avere $\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21} \longrightarrow -\frac{\bar{h}_{21}}{\cancel{\bar{h}_{22}}} = \frac{\bar{h}_{12}}{\cancel{\bar{h}_{22}}} \longrightarrow \boxed{-\bar{h}_{21} = \bar{h}_{12} \ :\ \text{Matrice ANTISIMMETRICA}}$

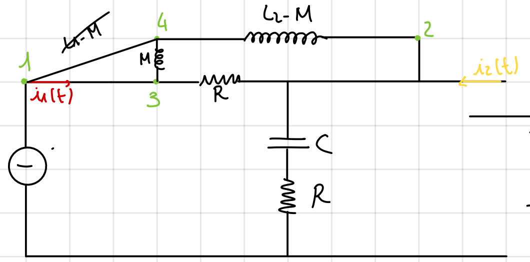


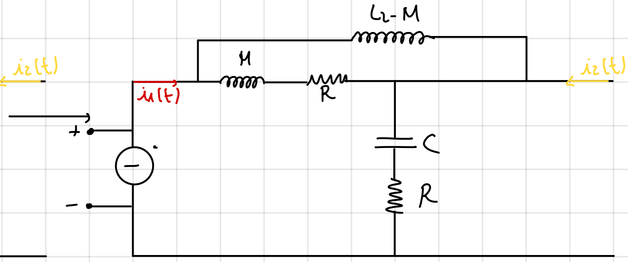
R = 10 Ω
C = 100 μF
L_1 = 10 mH
L_2 = 20 mH
M_1 = 10 mH
ω = 1000 rad/s

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{h}_{11}\dot{I}_1 + \bar{h}_{12}\cdot\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \bar{h}_{21}\dot{I}_1 + \bar{h}_{22}\cdot\dot{V}_2 \end{cases}$$

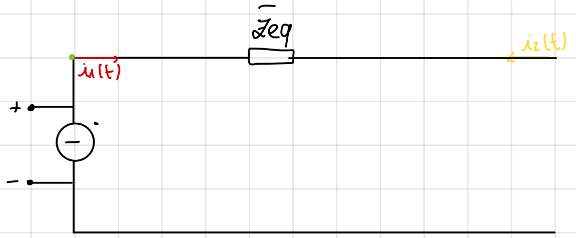
Azzeriamo $\dot{V}_2$





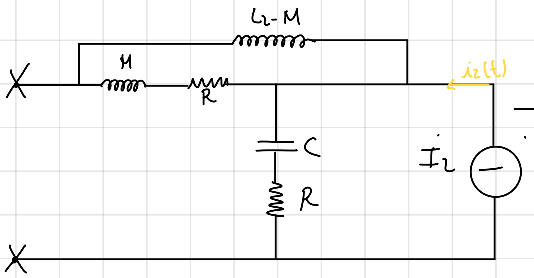


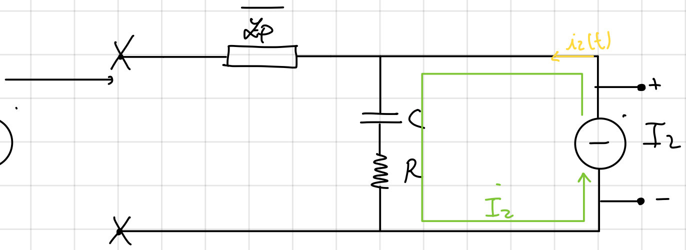
$$\bar{Z}_{eq} = \frac{i\omega(L_2-M)(R+i\omega M)}{i\omega(L_2-M)+R+i\omega M}$$



$$\dot V_1 = \bar Z_{eq} \cdot \dot I_1$$
$$\bar h_{11} = 2+6i$$

Azzeriamo $\dot I_1$





$$\dot V_2 = \left(R + \frac{1}{i\omega C}\right)\dot I_2 \longrightarrow \bar h_{22} = \left(R + \frac{1}{i\omega C}\right)^{-1} = 0.05+0.05i$$

$$\dot V_1 = \left(R + \frac{1}{i\omega C}\right)\dot I_2 = V_2$$

$$H = \begin{bmatrix} 2+6i & 1 \\ -1 & 0.05+0.05i \end{bmatrix}$$

⚠ Si nota che, avendo generatori pilotati, la matrice è antisimmetrica

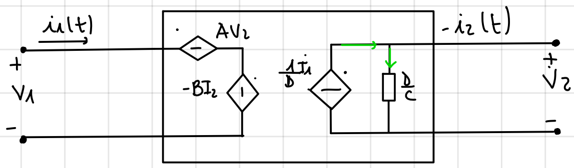
parametrizzazione a parametri T

utilizzata per la trasmissione dell'energia elettrica

$$\begin{bmatrix} \dot V_1 \\ \dot I_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \dot V_2 \\ -\dot I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot V_2 \\ -\dot I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot V_1 = A\dot V_2 + B(-\dot I_2) \\ \dot I_1 = C\dot V_2 + D(-\dot I_2) \longrightarrow -\dot I_2 = \frac{1}{D}\dot I_1 - \frac{C}{D}\dot V_2 \end{cases}$$

Circuito equivalente



$$A = \frac{\dot V_1}{\dot V_2}\bigg|_{\dot I_2 = 0} \qquad C = \frac{\dot I_1}{\dot V_2}\bigg|_{\dot I_2 = 0}$$

metto un aperto alla porta 2, metto un generatore di prova alla porta 2 e calcolo i parametri mancanti

$$B = \frac{\dot V_1}{-\dot I_2}\bigg|_{\dot V_2 = 0} \qquad D = \frac{\dot I_1}{-\dot I_2}\bigg|_{\dot V_2 = 0}$$

Chiudo in cortocircuito la porta 2 e metto un generatore di corrente alla porta 2

Non si possono fare

Calcoliamo i reciproci dei parametri $\longrightarrow$

$$\frac{1}{A} = \frac{\dot V_2}{\dot V_1}\bigg|_{\dot I_2 = 0} \qquad \frac{1}{C} = \frac{\dot V_2}{\dot I_1}\bigg|_{\dot I_2 = 0}$$

Aperto alla porta 2 e generatore di prova $\dot V_1 / \dot I_1$ alla 1

$$\frac{1}{B} = \frac{-\dot I_2}{\dot V_1}\bigg|_{\dot V_2 = 0} \qquad \frac{1}{D} = \frac{-\dot I_2}{\dot I_1}\bigg|_{\dot V_2 = 0}$$

Cortocircuito alla porta 2 e generatori di prova $\dot V_1 / \dot I_1$ alla porta 1

Riportiamo le equazioni nei parametri Z

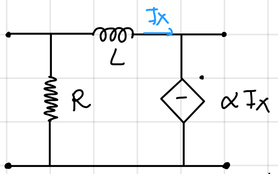
$$\begin{cases} \dot V_1 = A\dot V_2 + B(-\dot I_2) & 1. \\ \dot I_1 = C\dot V_2 + D(-\dot I_2) & 2. \end{cases}$$

$$2.\ \boxed{\dot V_2 = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{C}}}_{Z_{21}} \dot I_1 + \underbrace{\underbrace{\frac{D}{C}}}_{Z_{22}} \dot I_2}$$

$$1.\ \dot V_1 = \frac{A}{C}\dot I_1 + \frac{AD}{C}\dot I_2 + B(-\dot I_2) = \boxed{\underbrace{\frac{A}{C}}_{Z_{11}}\dot I_1 + \underbrace{\frac{AD-BC}{C}}_{Z_{12}}\dot I_2}$$

Uguagliamo Z_{12} a Z_{21}: $\frac{1}{\cancel{C}} = \frac{AD-BC}{\cancel{C}} \longrightarrow \underbrace{AD-BC=1}_{\det(T)=1}$: condizione di reciprocità

ESERCIZIO



$R = 5\,\Omega$

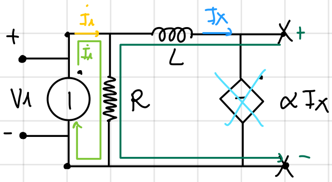
$L = 10\ mH$

$\alpha = 2$

$\omega = 1000\ rad/s$

$$\begin{cases} \dot V_1 = A\dot V_2 + B(-\dot I_2) \\ \dot I_1 = C\dot V_2 + D(-\dot I_2) \end{cases}$$

Mettiamo a 0 $\dot I_2$



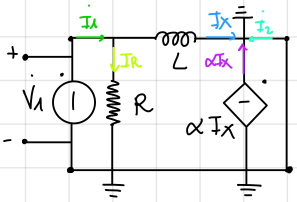
$\longrightarrow \dot I_x = -\alpha \dot I_x$ quindi $\boxed{\dot I_x = 0}$

$\dot V_1 = R\dot I_1 = \dot V_2 \longrightarrow \dot I_1 = \frac{\dot V_2}{5}$

$\dot A = 1$

$C = 0.2$

Mettiamo a 0 $\dot V_2$



$\dot I_1 = \dot I_R + \dot I_x = \frac{\dot V_1}{R} + \frac{\dot V_1}{i\omega L}$ 1.

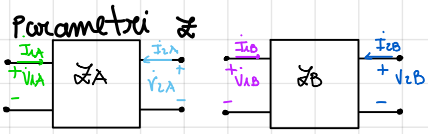
$\dot I_2 = -(\dot I_x + \alpha \dot I_x) = -3\dot I_x = \frac{-3}{i\omega L}\dot V_1$

$\longrightarrow B = \frac{\dot V_1}{-\dot I_2} = \frac{\cancel{\dot V_1}}{\frac{3}{i\omega L}\cancel{\dot V_1}} = \frac{i\omega L}{3} = \frac{10}{3} i$

$$1.\ \dot I_1 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L}\right)\dot V_1 = \underbrace{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L}\right)}_{D = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} i} B(-\dot I_2)$$

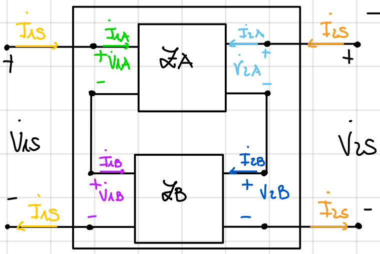
interconnessione tra circuiti a due porte

Parametri Z



in serie

Due circuiti a due porte si dicono in serie se $i_1 = i_2$

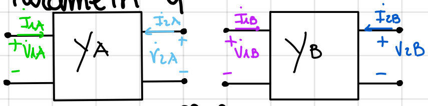


$\longrightarrow$ È ancora un circuito a due porte

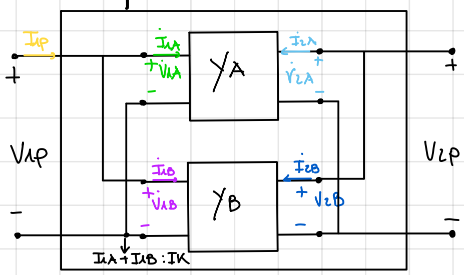
$$\begin{bmatrix} \dot V_{1S} \\ \dot V_{2S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot V_{1A} \\ \dot V_{2A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot V_{1B} \\ \dot V_{2B} \end{bmatrix} = Z_A \underbrace{\begin{bmatrix} \dot I_{1A} \\ \dot I_{2A} \end{bmatrix}}_{=} + Z_B \underbrace{\begin{bmatrix} \dot I_{1B} \\ \dot I_{2B} \end{bmatrix}}_{=}$$

$$= Z_A \begin{bmatrix} \dot I_{1S} \\ \dot I_{2S} \end{bmatrix} + Z_B \begin{bmatrix} \dot I_{1S} \\ \dot I_{2S} \end{bmatrix} = (Z_A + Z_B) \begin{bmatrix} \dot I_{1S} \\ \dot I_{2S} \end{bmatrix}$$

Parametri y

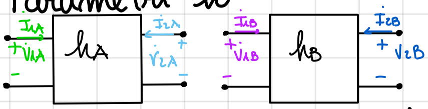


in parallelo

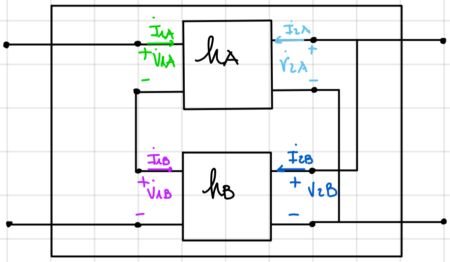


$$\begin{bmatrix} \dot I_{1p} \\ \dot I_{2p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot I_{1A} \\ \dot I_{2A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot I_{1B} \\ \dot I_{2B} \end{bmatrix} = Y_A \underbrace{\begin{bmatrix} \dot V_{1A} \\ \dot V_{2A} \end{bmatrix}}_{=} + Y_B \underbrace{\begin{bmatrix} \dot V_{1B} \\ \dot V_{2B} \end{bmatrix}}_{=} = (Y_A + Y_B) \begin{bmatrix} \dot V_{1p} \\ \dot V_{2p} \end{bmatrix}$$

Parametri h



interconnessione ibrida: in serie alla porta 1, in parallelo alla 2

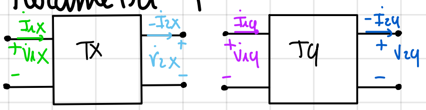


$$\begin{bmatrix} \dot V_{1h} \\ \dot I_{2h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot V_{1A} \\ \dot I_{2A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot V_{1B} \\ \dot I_{2B} \end{bmatrix} = h_A \begin{bmatrix} \dot I_{1A} \\ \dot V_{2A} \end{bmatrix} + h_B \begin{bmatrix} \dot I_{1B} \\ \dot V_{2B} \end{bmatrix} = (h_A + h_B) \begin{bmatrix} \dot I_{1h} \\ \dot V_{2h} \end{bmatrix}$$

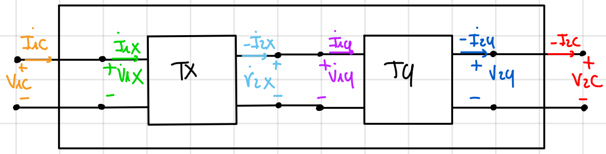
= per serie

= per parallelo

Parametri T



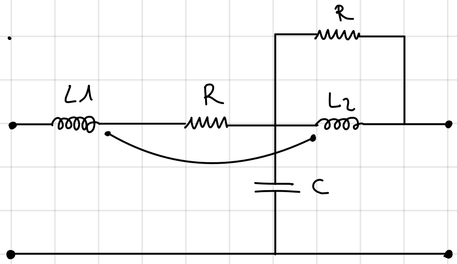
interconnessione in cascata



$$\begin{bmatrix} \dot V_{1C} \\ \dot I_{1C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot V_{1x} \\ \dot I_{1x} \end{bmatrix} = T_x \begin{bmatrix} \dot V_{2x} \\ -\dot I_{2x} \end{bmatrix} = T_x \begin{bmatrix} \dot V_{1y} \\ \dot I_{1y} \end{bmatrix} = T_x \cdot T_y \begin{bmatrix} \dot V_{2C} \\ -\dot I_{2C} \end{bmatrix}$$

ESERCIZI

1.



$R = 10\,\Omega$

$L_1 = 10\,mH$

$L_2 = 20\,mH$

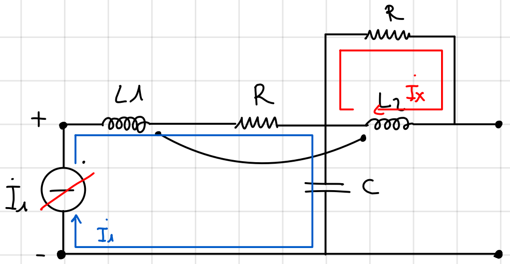
$M = 12\,mH$

$C = 100\,\mu F$

$\omega = 1000\,rad/s$

$$\dot V_1 = \bar Z_{11} \dot I_1 + \bar Z_{12} \dot I_2$$
$$\dot V_2 = \bar Z_{21} \dot I_1 + \bar Z_{22} \dot I_2$$

Azzeriamo $\dot I_2$



maglia: $(R + i\omega L_2)\dot I_x + i\omega M \dot I_1 = 0$

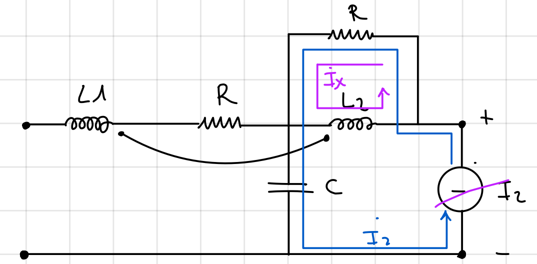
$$\dot I_x = \frac{-i\omega M \dot I_1}{R + i\omega L_2} = \bar\gamma\, \dot I_1 = (-0{,}48 - 0{,}24i)\dot I_1$$

percorso: $\dot V_1 = i\omega L_1 \dot I_1 + i\omega M \bar\gamma \dot I_1 + R\dot I_1 + \dfrac{1}{i\omega C}\dot I_1$

$$\dot I_1 = \frac{\dot V_1}{i\omega L_1 + i\omega M \bar\gamma + R + \frac{1}{i\omega C}} \longrightarrow \bar Z_{11} = 12.88 - 5.76i\ \Omega$$

$$\dot V_2 = i\omega L_2 \dot I_x + i\omega M \dot I_1 = i\omega L_2 \gamma \dot I_1 + i\omega M \dot I_1 = \underbrace{(i\omega L_2 \gamma + i\omega M)}_{\bar Z_{21}} \dot I_1$$

Azzeriamo $\dot I_1$

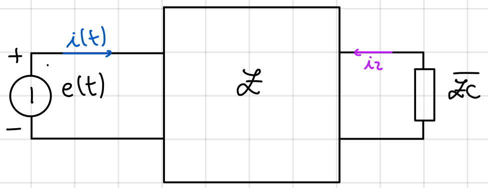


maglia: $(R + i\omega L_2)\dot I_x + R\dot I_2 = 0$

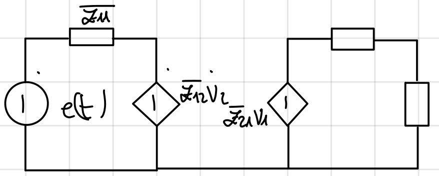
$$\dot I_x = \frac{-R}{R + i\omega L_2}\dot I_2 = -\bar\gamma \dot I_2$$

$$\dot V_2 = -i\omega L_2 \dot I_x + \frac{1}{i\omega C}\dot I_2 = i\omega L_2 \bar\gamma \dot I_2 + \frac{1}{i\omega C}\dot I_2 \longrightarrow \bar Z_{22} = 8 - 6i$$

$$\dot V_1 = -i\omega M \dot I_x + \frac{1}{i\omega C}\dot I_2 = i\omega M \bar\gamma \dot I_2 + \frac{1}{i\omega C}\dot I_2 = \underbrace{\left(i\omega M\bar\gamma + \frac{1}{i\omega C}\right)}_{\bar Z_{21} \,=\, 4{,}8 - 7{,}6i} \dot I_2$$



Utilizzando il circuito equivalente



$\longrightarrow$ Basta risolvere questo

Oppure $\longrightarrow \begin{cases} \dot V_1 = (12{,}88 - 5{,}76i)\dot I_1 + (4{,}8 - 7{,}6i)\dot I_2 \\ \dot V_2 = (4{,}8 - 7{,}6i)\dot I_1 + (8 - 6i)\dot I_2 \end{cases}$

$\downarrow$

$$\dot V_1 = 100\, e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \dot V_2 = -\bar Z_c \dot I_2$$

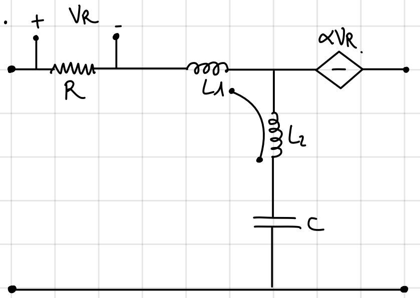
Risolvendo: $\begin{cases} 100\, e^{i\frac{\pi}{4}} = (12.88 - 5.76i)\dot I_1 + (4.8 - 7.6i)\dot I_2 \\ -\bar Z_c \dot I_2 = (4.8 - 7.6i)\dot I_1 + (8 - 6i)\dot I_2 \end{cases}$

$$\dot I_2 = \frac{4.8 - 7.6i}{6i - 8 - \bar Z_c}\dot I_1 = \bar\gamma \dot I_1 \qquad \dot I_1 = \frac{100\, e^{i\frac{\pi}{4}}}{(12.88 - 5.76i) + (4.78 - 7.6i)\bar\gamma} = 6.5628\, e^{i\,1.13} = \dot I$$

$i(t) = 6.5628\sqrt{2}\cos(1000t + 1.13)$ A

$P(\bar Z_c) = R_c I_2^2 = 30\, |\bar\gamma \dot I_1|^2 = 40.1548$ W

2.



$R = 10\,\Omega$

$L_1 = M = 10$ mH

$L_2 = 20$ mH

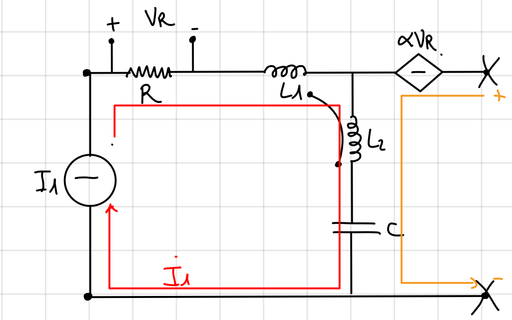
$C = 100\ \mu F$

$\alpha = 0.5$

$\omega = 1000$ rad/s

$$\dot V_1 = A\dot V_2 + B(-\dot I_2)$$
$$\dot I_1 = C\dot V_2 + D(-\dot I_2)$$

Azzeriamo $\dot I_2$



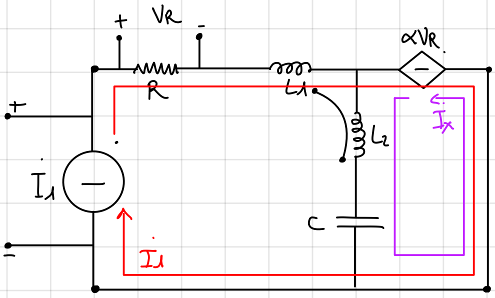
$$\dot V_1 = R\dot I_1 + (i\omega L_1 + i\omega M)\dot I_1 + (i\omega L_2 + i\omega M)\dot I_1 + \frac{1}{i\omega C}\dot I_1 = \overline{\gamma_1}\,\dot I_1 = \overline{\gamma_1}\cdot C\dot V_2$$

$$\dot V_2 = \alpha R\dot I_1 + (i\omega L_2 + i\omega M)\dot I_1 + \frac{1}{i\omega C}\dot I_1 = \overline{\gamma_2}\,\dot I_1$$

$$C = \frac{1}{\overline{\gamma_2}} = 0.118 - 0.0471\,i$$

$A = 2$

Azzeriamo $\dot V_2$



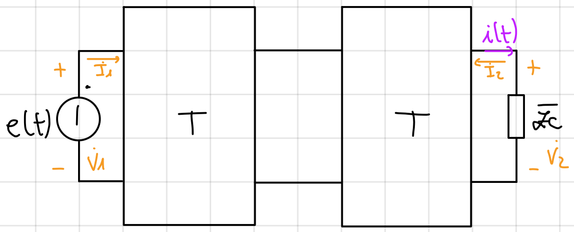
$$\dot I_2 = \dot I_x - \dot I_1$$

$$\alpha(R\cdot\dot I_1) + \left(i\omega L_2 + \frac{1}{i\omega C}\right)\dot I_x + i\omega M\dot I_1 = 0$$

$$\dot I_x = \frac{-\alpha R + i\omega M}{i\omega L_2 + \frac{1}{i\omega C}}\,\dot I_1 = \overline{\gamma}\,\dot I_1$$

$$\dot I_2 = (\overline{\gamma} - 1)\dot I_1 \longrightarrow \dot I_1 = -\underbrace{\frac{1}{\overline{\gamma} - 1}}_{D = 0.4706 + 0.1176 i}(-\dot I_2)$$

$$\dot V_1 = R\dot I_1 + i\omega L_1\dot I_1 + i\omega M\overline{\gamma}\dot I_1 - \alpha R\dot I_1 = \underbrace{(R + i\omega L_1 + i\omega M\overline{\gamma} - \alpha R)}_{B=0}\cdot D(-\dot I_2)$$



$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0.0118 - 0.0471i & 0.4706 + 0.1176i \end{bmatrix}$$

$$T\cdot T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0.0347 - 0.1150i & 0.2076 + 0.1107i \end{bmatrix}$$

$$\dot V_1 = 4\dot V_2$$

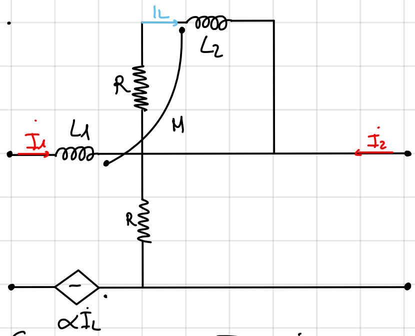
$$\dot I_1 = (0.0347 - 0.1150\,i)\dot V_2 + (0.2076 + 0.1107\,i)(-\dot I_2)$$

$$\dot V_1 = 100$$

$$\dot V_2 = -Z_C(\dot I_2) \longrightarrow \dot I = \frac{25}{Z_C} = 0.5\,e^{-i\,0.9273}\ \text{A}$$

$Q(Z_C) = 40 \cdot 0.25 = 10\,\text{VAR}$

3.



$R = 10\,\Omega$

$L_1 = 10\,\text{mH}$

$L_2 = 20\,\text{mH}$

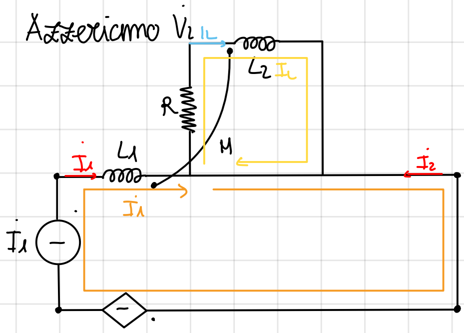
$M = 12\,\text{mH}$

$\alpha = 10\,\text{V/A}$

$\omega = 1000\,\text{rad/s}$

$$\begin{cases} \dot V_1 = \overline{h_{11}}\,\dot I_1 + \overline{h_{12}}\cdot\dot V_2 \\ \dot I_2 = \overline{h_{21}}\,\dot I_1 + \overline{h_{22}}\,\dot V_2 \end{cases}$$

Azzeriamo V_2

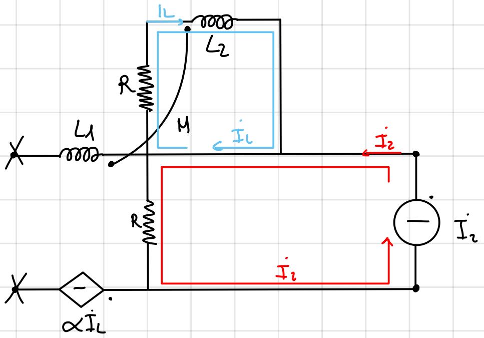


maglia: $(R+i\omega L_2)\dot{I}_L = i\omega M\dot{I}_1 \longrightarrow \dot{I}_L = \frac{i\omega M}{R+i\omega L_2}\dot{I}_1 = \bar{\gamma}\dot{I}_1$

$h_{21}=-1$

$\dot{V}_1 = i\omega L_1\dot{I}_1 - i\omega M\bar{\gamma}\dot{I}_1 + \alpha\bar{\gamma}\dot{I}_1 \longrightarrow \bar{h}_{11} = (i\omega L_1 - i\omega M\bar{\gamma} + \alpha\bar{\gamma}) =$
$= 7.68+6.64i$

Azzeriamo I_1



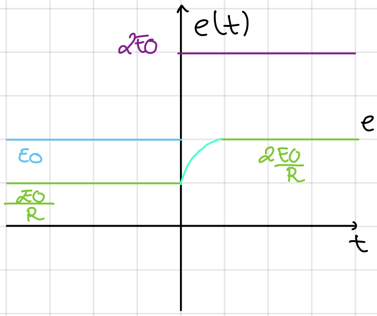
$(R+i\omega L_2)\dot{I}_L = 0 \longrightarrow \dot{I}_L = 0$

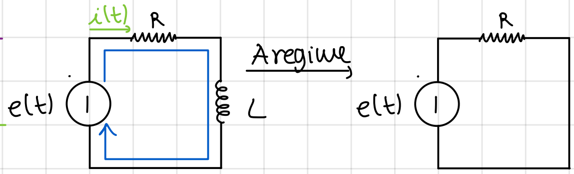
$\dot{V}_2 = R\dot{I}_2 \longrightarrow \dot{I}_2 = \frac{1}{\underset{\sim}{R}}\dot{V}_2$

$\bar{h}_{22} = 0.1$

$\dot{V}_1 = R\dot{I}_2 \longrightarrow \dot{V}_1 = \dot{V}_2 \longrightarrow \bar{h}_{12} = 1$

○ CIRCUITI TRANSITORI





Per $t \geq 0$: maglia $\longrightarrow -e(t) + R\cdot i(t) + L\frac{di(t)}{dt} = 0 \longrightarrow -2E_0 + Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = 0$

Equazione differenziale: $i(t) = i_0(t) + i_p(t)$

Soluzione omogenea $\longrightarrow R\cdot i_0(t) + L\frac{di_0(t)}{dt} = 0 \longrightarrow Ae^{\lambda t}$

$R\lambda^0 + L\lambda \longrightarrow \lambda = -R/L \Longrightarrow i_0(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$

Soluzione particolare $\longrightarrow i_p(t) = I_p \Longrightarrow -2E_0 + RI_p = 0 \longrightarrow I_p = \frac{2E_0}{R}$

soluzione: $i(t) = \frac{2E_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$

Condizioni iniziali: $i(0) = \frac{E_0}{R} = \frac{2E_0}{R} + A \longrightarrow A = -\frac{E_0}{R}$

$\boxed{i(t)} = \frac{2E_0}{R} - \frac{E_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \xrightarrow{t\to+\infty} 2E_0/R$

A fronte di una variazione istantanea della tensione, la corrente cambia in modo diverso

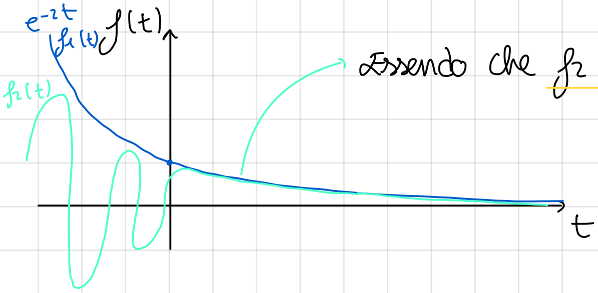
trasformata di Laplace

$F(s) = \boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} \triangleq \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt}$ ove $s = \delta + i\omega$: frequenza generalizzata

Prima delle variazioni

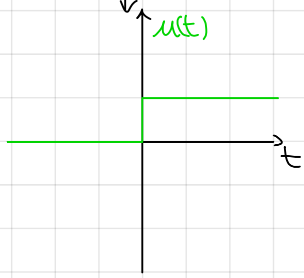
$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} e^{at}e^{-st}dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{(a-s)t}dt = \frac{e^{(a-s)t}}{a-t}\Big|_{0^-}^{+\infty} = 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$

$f(t)$	$F(s)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
e^{-2t}	$\frac{1}{s+2}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\delta(t)$	1



Essendo che $f_2 = f_1$ per $t>0$ la trasformata di Laplace è la stessa

$\boxed{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}}$ ⟶ Per non creare ambiguità, per tempi negativi l'anti-trasformata vale sempre zero



$u(t)$: $\boxed{\text{funzione gradino}} = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ ⟶ trasformata di Laplace $\boxed{u(t) = e^0 = \frac{1}{s}}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t} \cdot u(t)$

PROPRIETÀ

1. LINEARITÀ: $\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$ ⟶ verificata per la linearità degli integrali

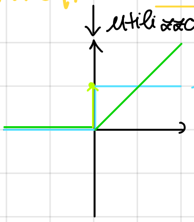
↓ Esempio

$$\mathcal{L}\left\{-7e^{-5t} + \frac{1}{4}e^{3t}\right\} = \frac{-7}{s+5} + \frac{1/4}{s-3}$$

2. DERIVATA: $\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - \boxed{f(0^-)}$ ⟶ tengono conto delle condizioni iniziali

3. INTEGRALE: $\mathcal{L}\{\int f(t)dt\} = \boxed{\frac{1}{s}F(s) + \boxed{\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} f(t)\,dt}}$

↓ utilizzo

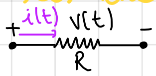


$\int u(t)dt = t \xrightarrow{\text{in Laplace}} \frac{1}{s^2}$ ⟶ RAMPA

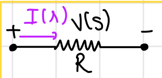
$\frac{du(t)}{dt} = 0$ per $t<0$ e $t>0$, $+\infty$ in $t=0$ = δt : delta di Dirac

BIPOLI nel DOMINIO di LAPLACE

resistore



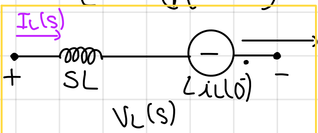
$V(t) = R \cdot i(t)$ ⟶ $\mathcal{L}\{V(t)\} = \mathcal{L}\{R \cdot i(t)\}$ ⟹ $\boxed{V(s) = R \cdot I(s)}$



induttore

$V_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$ ⟶ $\mathcal{L}\{V_L(t)\} = \mathcal{L}\left\{L\frac{di_L(t)}{dt}\right\}$ ⟹ $V_L(s) = L\left(sI_L(s) - i_L(0^-)\right)$

⟹ $\boxed{V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)}$



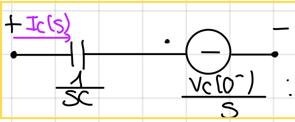
⟶ Generatore di condizioni iniziali con il contrassegno della stessa parte della corrente

condensatore

$V_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau$ ⟶ $\mathcal{L}\{V_C(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau\right\}$ ⟹

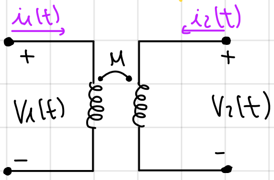
⟹ $V_C(s) = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{s}I_C(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} i_C(t)dt\right) = \frac{1}{sC}I_C(s) + \frac{1}{sC}q(0^-) =$

$= \boxed{\frac{1}{sC}I_C(s) + \frac{1}{s}V_C(0^-)}$



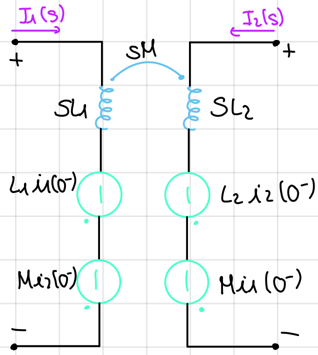
: Generatore di condizioni iniziali

induttori mutuamente accoppiati



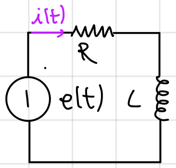
$$\begin{cases} V_1(t) = L_1\frac{di_1(t)}{dt} \pm M\frac{di_2(t)}{dt} \\ V_2(t) = L_2\frac{di_2(t)}{dt} \pm M\frac{di_1(t)}{dt} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V_1(s) = L_1 \cdot \mathcal{L}\left\{\frac{di_1(t)}{dt}\right\} \pm M \cdot \mathcal{L}\left\{\frac{di_2(t)}{dt}\right\} \\ V_2(s) = L_2 \cdot \mathcal{L}\left\{\frac{di_2(t)}{dt}\right\} \pm M \cdot \mathcal{L}\left\{\frac{di_1(t)}{dt}\right\} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} V_1(s) = \boxed{sL_1 I_1(s)} - \boxed{L_1 i_1(0^-)} \pm \boxed{s M I_2(s)} \mp \boxed{M i_2(0^-)} \\ V_2(s) = \boxed{sL_2 I_2(s)} - \boxed{L_2 i_2(0^-)} \pm \boxed{s M I_1(s)} \mp \boxed{M i_1(0^-)} \end{cases}$$



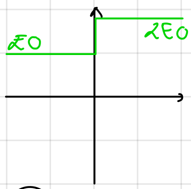
Generatori di condizioni iniziali

ESEMPIO



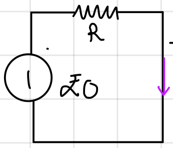
$i(t) = ?$

① Calcolo le condizioni iniziali a 0^- $V_C(0^-)$ e $V_L(0^-)$ risolvendo il circuito prima che avvenga un transitorio



$V(0) = \mathcal{E}_0$

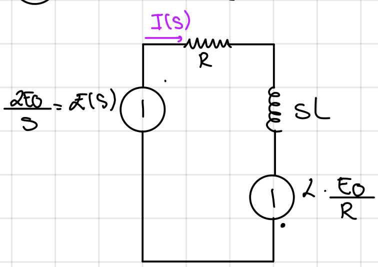
per $t<=0$:



$\longrightarrow$ L'induttore si toglie perché siamo in continua

$i(t) = \begin{cases} \frac{\mathcal{E}_0}{R} & \text{per } t<0 \end{cases} \longrightarrow i_L(0^-) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$

② Si risolve il circuito nel dominio di Laplace ⚠ per $t>0$



$$-\frac{2\mathcal{E}_0}{s} + RI(s) + sLI(s) - \frac{\mathcal{E}_0}{R}L = 0$$

$$I_s = \frac{\frac{2\mathcal{E}_0}{s} + \frac{\mathcal{E}_0}{R}\cdot L}{R+sL} = \frac{2\mathcal{E}_0 R + s\mathcal{E}_0 L}{sR(R+sL)}$$

③ $i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}$

Come possiamo trovare l'antitrasformata? $\longrightarrow$ **SVILUPPO in FRATTI SEMPLICI**

$I(s) = \frac{s^2+5}{3s^3+9s^2+6s}$, $i(t) = ?$

↓ vogliamo avere il coefficiente del termine di grado più alto del denominatore $=1$

$$I(s) = \frac{\frac{s^2}{3}+\frac{5}{3}}{s^3+3s^2+2s} = \frac{\frac{s^2}{3}+\frac{5}{3}}{s(s^2+3s+2)} = \frac{\frac{s^2}{3}+\frac{5}{3}}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+2}$$

$\longrightarrow$ poli: radici del denominatore

$$i(t) = (A_1 + A_2 e^{-t} + A_3 e^{-2t})\, u(t)$$

troviamo A_1, A_2, A_3: $\frac{\frac{s^2}{3}+\frac{5}{3}}{\cancel{s(s+1)(s+2)}} = \frac{A_1 s^2 + 3A_1 s + 2A_1 + A_2 s^2 + 2A_2 s + A_3 s^2 + A_3 s}{\cancel{s(s+1)(s+2)}}$

uguagliamo i coefficienti di termini di pari grado: $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} = A_1 + A_2 + A_3 \\ 3A_1 + 2A_2 + A_3 = 0 \end{array}\right\} - \longrightarrow \frac{1}{3} = -2A_1 - A_2$ (*)

(+)

$\frac{5}{3} = 2A_1 \longrightarrow A_1 = \frac{5}{6}$

(*) $-A_2 = \frac{1}{3} + \frac{10}{6} \longrightarrow A_2 = -2 \longrightarrow i(t) = \left(\frac{5}{6} - 2e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}\right) u(t)$

(+) $A_3 = -2A_2 - 3A_1 = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$

Altra metodologia: $I(s) = \frac{\frac{s^2}{3}+\frac{5}{3}}{s(s+1)(s+2)} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s-p_i}}$ ($A_i \longrightarrow$ **Residui**, $p_i \longrightarrow$ **Poli**)

teorema dei residui: $A_i = \lim_{s\to p_i} (s-p_i)\, I(s)$

↓ utilizzo

$$A_1 = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{\frac{s^2}{3}+\frac{5}{3}}{\cancel{s}(s+1)(s+2)} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

$$A_2 = \lim_{s\to -1} \cancel{(s+1)} \frac{\frac{s^2}{3}+\frac{5}{3}}{s\cancel{(s+1)}(s+2)} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$A_3 = \lim_{s\to -2} \cancel{(s+2)} \frac{\frac{s^2}{3}+\frac{5}{3}}{s(s+1)\cancel{(s+2)}} = \frac{3}{2}$$

formula matematica: $\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)\, e^{-st} ds}$

completamento dell'esercizio: $I(s) = \frac{2RE_0 + sL\mathcal{E}_0}{sR(R+sL)} = \frac{sL\mathcal{E}_0 + 2RE_0}{s^2RL + sR^2} =$

$$= \frac{\frac{s\mathcal{E}_0}{R} + \frac{2\mathcal{E}_0}{L}}{s^2 + s\frac{R}{L}} = \frac{\frac{sE_0}{R} + \frac{2\mathcal{E}_0}{L}}{s\left(s+\frac{R}{L}\right)}$$

Vogliamo riscriverlo come: $\frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{R}{L}}$ e vogliamo arrivare a $i(t) = (A + Be^{-\frac{R}{L}t})u(t)$

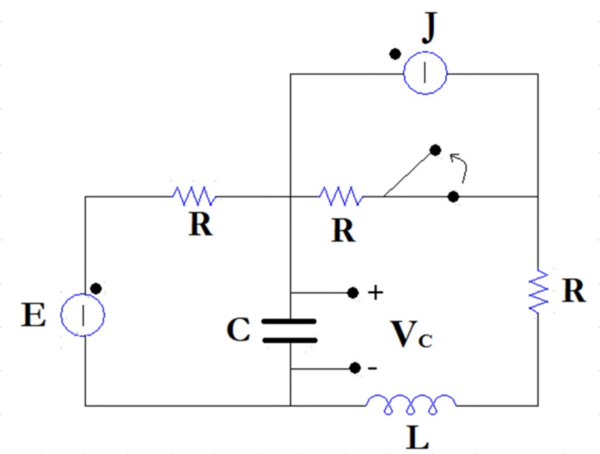
Utilizziamo il teorema dei residui: $A = \lim_{s\to 0} s \frac{\frac{s E_0}{R} + \frac{2E_0}{L}}{s(s+\frac{R}{L})} = \frac{2E_0}{R}$

$$B = \lim_{s\to -\frac{R}{L}} \cancel{\left(s+\frac{R}{L}\right)} \frac{\frac{sE_0}{R} + \frac{2E_0}{L}}{s\cancel{(s+\frac{R}{L})}} = \frac{-\frac{\mathcal{E}_0}{\cancel{L}} + \frac{2E_0}{\cancel{L}}}{-\frac{R}{\cancel{L}}} = \frac{-\mathcal{E}_0}{R}$$

$$i(t) = \left(\frac{2E_0}{R} - \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}\right) u(t)$$

ESERCIZI

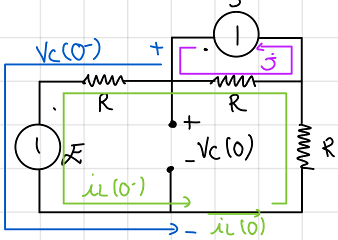
1. 27-01-21



$\mathcal{E} = 50V$
$J = 5A$
$R = 10\Omega$
$L = 10mH$
$C = 100\mu F$
$V_C(t) = ?$

① Risoluzione per $t<0$

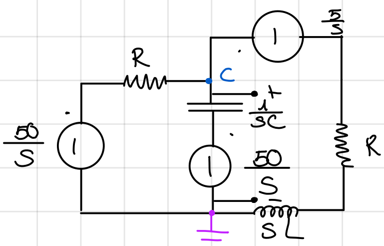
Dato che siamo in continua, i condensatori sono circuiti aperti mentre gli induttori sono cortocircuiti



maglia: $3R\, i_L(0^-) - RJ + \mathcal{E} = 0$

$$i_L(0^-) = \frac{RJ - \mathcal{E}}{3R} = \frac{50-50}{30} = 0$$

$V_C(0^-) = R i_L(0^-) + \mathcal{E} = 50V \longrightarrow V_C(t) = 50V$ per $t<0$



Nodo C: $\frac{5}{s} + \frac{50}{sR} + \frac{50}{\cancel{s}}\cancel{s}C = V_C\left(\frac{1}{R} + sC\right)$

$$\longrightarrow V_C(s) = \frac{\frac{10}{s} + 50C}{\frac{1}{R} + sC} = \frac{10R + 50RCs}{s + s^2RC}$$

Devo trovare adesso l'antitrasformata

$$V_C(s) = \frac{10R + 50RCs}{s + s^2 RC} = \frac{50s + \frac{10}{C}}{s(s + 1/RC)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{RC}} \qquad \frac{-1}{RC} = -1000$$

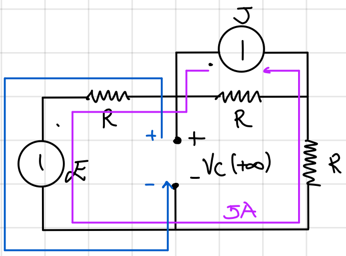
$$A = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{50s + \frac{10}{C}}{\cancel{s}(s + 1/RC)} = \frac{10/\cancel{C}}{1/R\cancel{C}} = 10R = 100$$

$$B = \lim_{s \to -\frac{1}{RC}} \cancel{(s + 1/RC)} \frac{50s + 10/C}{s\cancel{(s + 1/RC)}} = \frac{-\frac{50}{RC} + \frac{10}{C}}{-1/RC} = 50 - 10R = -50$$

$$V_C(t) = \begin{cases} 50\ V & t < 0 \\ 100 - 50e^{-1000t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

verifica correttezza

PROVA 1: $\lim_{t \to +\infty} V_C(t) = 100\ V \longrightarrow$ possiamo quindi risolvere il circuito per $t \to +\infty$ essendo esauriti i transitori



$V_C(+\infty) = 50 + 50 = 100V$

PROVA 2: $\lim_{t \to 0^-} V_C(t) = 50$ $\quad \lim_{t \to 0^+} V_C(t) = 50 \longrightarrow$ ⚠ ATT: le correnti sugli induttori e le tensioni ai capi dei condensatori possono variare solo in maniera **continua**

↓ (grandezze di stato)

Se variassero in maniera discontinua, la potenza sarebbe ∞ a causa della discontinuità, il che è impossibile per il teorema di Boucherot

ECCEZIONI

1. $I(s) = \frac{2s^2}{s^2 + 4s + 3} \longrightarrow$ Grado del denominatore $\geq$ al grado del numeratore

↓

$I(s) = \frac{2s^2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{2s^2}{(s+3)(s+1)} \neq \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1}$ Non si può fare

↓

se il grado è **uguale** dobbiamo fare la divisione, oppure **vedi sotto**

$$= \frac{2(s^2 + 4s + 3) - 8s - 6}{s^2 + 4s + 3} = 2 - \frac{8s + 6}{s^2 + 4s + 3} = 2 - \left(\frac{8s + 6}{(s+3)(s+1)}\right) = 2 - \left(\frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1}\right)$$

$$i(t) = 2\delta(t) - Ae^{-3t} - Be^{-t}$$

$$A = \lim_{s \to -3} \cancel{(s+3)} \left(\frac{8s + 6}{\cancel{(s+3)}(s+1)}\right) = \frac{-18}{-2} = 9 \longrightarrow i(t) = 2\delta(t) - 9e^{-3t} + e^{-t}$$

$$B = \lim_{s \to -1} \cancel{(s+1)} \left(\frac{8s + 6}{(s+3)\cancel{(s+1)}}\right) = \frac{-8+6}{-1+3} = -1$$

2. $I(s) = \frac{s+2}{s^2 + 9} = \frac{s+2}{(s+3i)(s-3i)} = \frac{A}{s+3i} + \frac{B}{s-3i}$

$$A = \lim_{s \to -3i} \cancel{(s+3i)} \frac{s+2}{\cancel{(s+3i)}(s-3i)} = \frac{2-3i}{-6i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$$

$$B = \lim_{s \to 3i} \cancel{(s-3i)} \frac{s+2}{(s+3i)\cancel{(s-3i)}} = \frac{2+3i}{6i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$$

$i(t) = \left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right)e^{-3it} + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i\right)e^{3it}\right] u(t) \longrightarrow$ in questo caso va bene

⚠ ATT: i residui devono risultare complessi coniugati

$i(t) = (M+iN)\,e^{-(\sigma+i\omega)t} + (M-iN)\,e^{-(\sigma-i\omega)t} = \longrightarrow$ $\sigma = Re\{Polo\}$

$= Me^{-\sigma t}(e^{-i\omega t}+e^{i\omega t}) + iNe^{-\sigma t}(e^{-i\omega t}-e^{i\omega t}) =$ $\omega = Im\{Polo\}$

$= Me^{-\sigma t}(\cos(+\omega t) - \cancel{i\,sen(+\omega t)} + \cos(\omega t) + \cancel{i\,sen(\omega t)})+$

$= + iNe^{-\sigma t}(\cancel{\cos(+\omega t)} - i\,sen(+\omega t) - \cancel{\cos(\omega t)} - i\,sen(\omega t)) =$

$= 2Me^{-\sigma t}\cos(\omega t) + 2Ne^{-\sigma t}\,sen(\omega t) \longrightarrow$ Ha valori reali in qualunque istante di tempo t

Per disegnare il grafico $\longrightarrow i(t) = Ke^{-\sigma t}\,sen(\omega t + \alpha) =$

$= Ke^{-\sigma t}\,sen(\omega t)\cos\alpha + Ke^{-\sigma t}\cos(\omega t)\,sen\alpha$

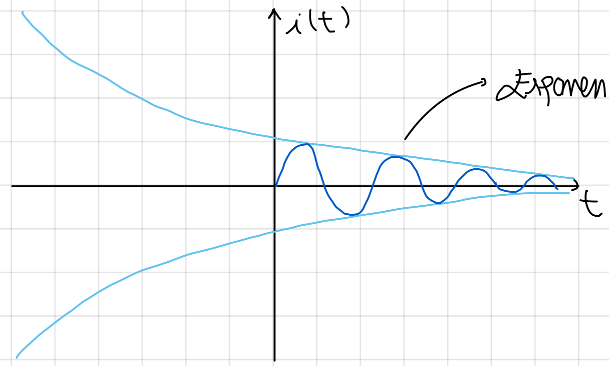
$$\begin{cases} K\cos\alpha = 2N \\ K\,sen\,\alpha = 2M \end{cases}$$

Risolvendo: $\tan\alpha = \left(\frac{2M}{2N}\right) \longrightarrow \alpha = \arctan(M/N)$

$K^2\cos^2\alpha + K^2 sen^2\alpha = 4N^2 + 4M^2 \longrightarrow K = \sqrt{4M^2+4N^2}$

$\downarrow$

$$i(t) = \sqrt{4N^2+4M^2}\;e^{-\sigma t}\,sen(\omega t + \arctan M/N)$$



Esponenziale oscillatorio $\longrightarrow$ Non smorzata se $\sigma = 0$ e amplificata divergente se $\sigma < 0$

Nel caso precedente avevamo $i(t) = \sqrt{\frac{13}{9}}\,sen\left(3t + \arctan\frac{3}{2}\right)$

Funzioni aggiunte alla tabella delle trasformate:

$f(t)$	$F(s)$
$sen(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

$\downarrow$

Nel caso precedente: $I(s) = \frac{s+2}{s^2+9} = \frac{s}{s^2+3^2} + \frac{2}{s^2+3^2}\cdot\frac{3}{3}$

$\downarrow$

$i(t) = \cos(3t) + \frac{2}{3}\,sen(3t) = K\,sen(3t+\alpha)$

$= sen\left(3t+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3}\,sen(3t) = \frac{2}{3} + J = \sqrt{\frac{13}{9}}\,sen\left(3t + \arctan\frac{3}{2}\right)$

3. POLI MULTIPLI

$V(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)^3}$

↳ nuovo ingresso nella tabella:

$f(t)$	$F(s)$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$

Con il teorema dei residui: $\boxed{A_i = \lim_{s\to p_i} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{\,n-i}}{\partial s^{\,n-i}} [(s-p_i)^n \cdot V(s)]}$

Nel caso precedente: $A_1 = \lim_{s\to -1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \cancel{(s+1)^3} \frac{s^2+2s+3}{\cancel{(s+1)^3}} = 1$

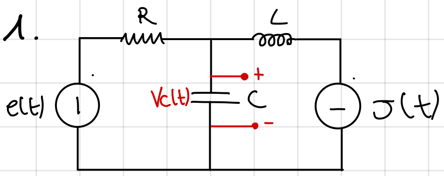
$A_2 = \lim_{s\to -1} \frac{1}{1} \frac{\partial}{\partial s} \cancel{(s+1)^3} \frac{s^2+2s+3}{\cancel{(s+1)^3}} = 0$

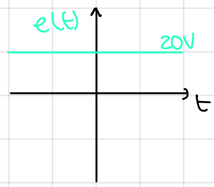
$A_3 = \lim_{s\to -1} \frac{1}{1} \cancel{(s+1)^3} \frac{s^2+2s+3}{\cancel{(s+1)^3}} = 1-2+3 = 2$

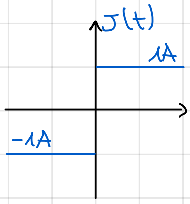
$V(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^3} \longrightarrow v(t) = \left(e^{-t} + \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} t^2 e^{-t}\right) u(t) = (e^{-t} + t^2 e^{-t}) u(t)$

ESERCIZI

1.

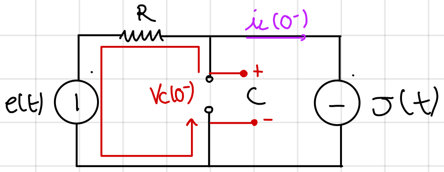






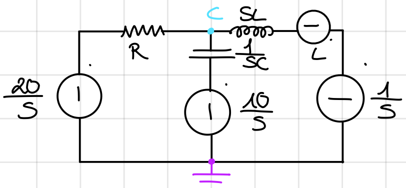
$R = 10\,\Omega$
$C = 10\,\mu F$
$L = 10\,mH$

$t < 0$



$i_L(0^-) = 1A$
$V_C(0^-) = -R i_L(0^-) + 20 = 10V$

$t \geq 0$



Nodo C: $\frac{20}{sR} + 10C + \frac{1}{s} = V_C(s)\left(\frac{1}{R} + sC\right)$

$V_C(s) = \dfrac{\frac{3}{s} + 10C}{\frac{1}{R} + sC} = \dfrac{10s + \frac{3}{C}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$

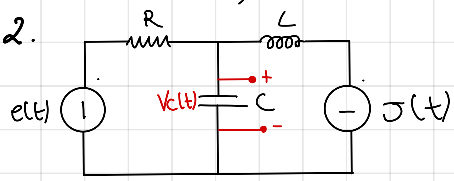
Calcoliamo l'antitrasformata: $V_C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{RC}} \longrightarrow V_C(t) = (A + B\, e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}) u(t)$

$A = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{10s + \frac{3}{C}}{s(s+\frac{1}{RC})} = 30$ $\qquad B = \lim_{s\to -\frac{1}{RC}} \left(s+\frac{1}{RC}\right) \frac{10s + \frac{3}{C}}{s(s+\frac{1}{RC})} = \dfrac{-\frac{10}{RC} + \frac{3}{C}}{-\frac{1}{RC}} = -20$

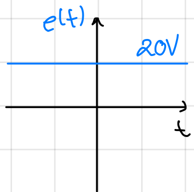
$V_C(t) = \begin{cases} 10, & t < 0 \\ 30 - 20\, e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}, & t \geq 0 \end{cases}$

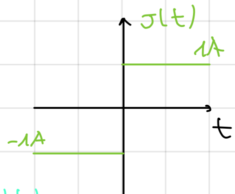
Per $t \to +\infty$, $V_C(t) = 30\,V \longrightarrow$ Verificato sostituendo

2.

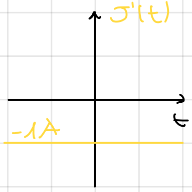


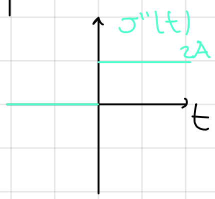
$R = 10\,\Omega$
$C = 10\,\mu F$
$L = 10\,mH$





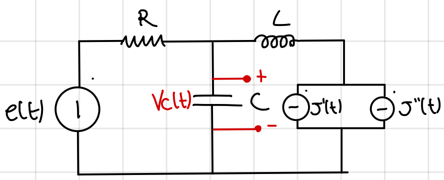
Utilizzo due generatori $J'(t)$ e $J''(t)$





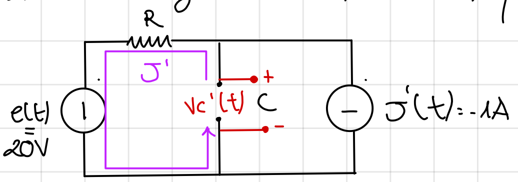
$\longrightarrow$ Non da luogo a condizioni iniziali

$\downarrow$



Principio di sovrapposizione degli effetti

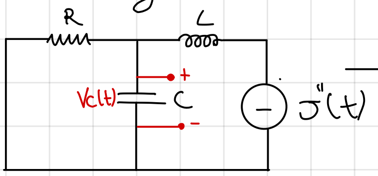
1. Faccio agire $e(t)$, $J'(t)$, quindi siamo in continua



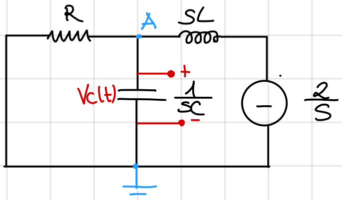
$V_C'(t) = J'(t)\cdot R + 20 = 10V$

⚠ATT: la soluzione vale per tutti i tempi in quanto avremo $V_C(t) = V_C'(t) + V_C''(t)$

2. Faccio agire $J''(t)$



$\longrightarrow$ Non vi sono condizioni iniziali

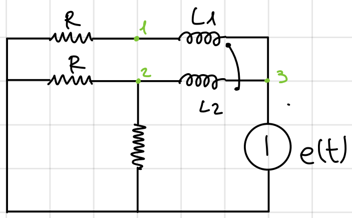


Nodo A: $\frac{2}{s} = V_A\left(\frac{1}{R} + sC\right) \longrightarrow V_A = \frac{\frac{2}{s}}{\frac{1}{R} + sC} = \frac{\frac{2}{C}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$

$V_C''(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{20}{s} - \frac{20}{s + 1/RC} \longrightarrow V_C''(t) = \left(20 - 20e^{-\frac{1}{RC}t}\right)u(t)$

$V_C(t) = 10 + \left(20 - 20e^{-\frac{1}{RC}t}\right)u(t)$

2. 11-06-21

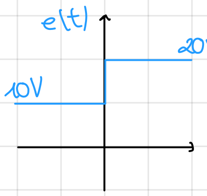


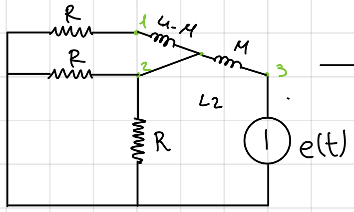
$R = 25\,\Omega$

$L_1 = 15\,mH$

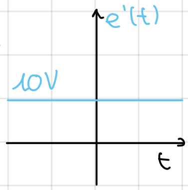
$L_2 = 10\,mH$

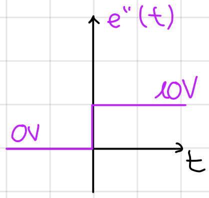
$M = 10\,mH$



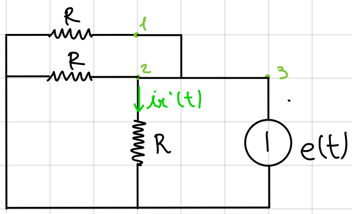


$\longrightarrow$ Scomponiamo in e' ed e'' $\longrightarrow$



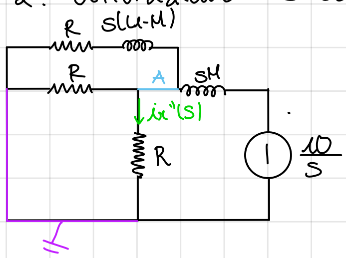


1. Utilizziamo solo $e'(t)$



$i_R'(t) = \frac{10}{25} = 0.4A$

2. Utilizziamo $e''(t)$



Nodo A: $\frac{10}{s^2M} = V_A(s)\left[\frac{1}{R + s(L_1 - M)} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{sM}\right]$

$V_A(s) = \frac{\frac{10}{s^2M}}{\frac{1}{R+s(L_1-M)} + \frac{2}{R} + \frac{1}{sM}} = \frac{10R\left[R + s(L_1-M)\right]}{RMs^2 + 2s^2M\left[R + s(L_1-M)\right] + Rs\left[R + s(L_1-M)\right]}$

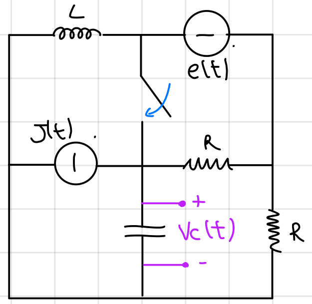
$i_R''(s) = \frac{10\left[R + s(L_1-M)\right]}{RMs^2 + 2s^2M\left[R+s(L_1-M)\right] + Rs\left[R + s(L_1-M)\right]} =$

$= \frac{10(L_1-M)\cdot s + 10R}{2M(L_1-M)\cdot s^3 + (3RM + R(L_1-M))s^2 + R^2 s}$

$i_R''(s) = \frac{0.05s + 250}{s(0.0001s^2 + 0.875s + 625)} = \frac{0.05s + 250}{0.0001\cdot s(s + 7965.4)(s + 784.6)}$

$i_R''(t) = \left(-0.0259\cdot e^{-7965.4t} - 0.374\cdot e^{-784.6t} + 0.4\right)u(t)$

3. 22-04-21



$e(t) = 10V$

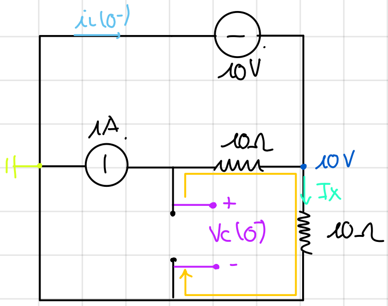
$J(t) = 1A$

$R = 10\Omega$

$L = 10\ mH$

$C = 10\ \mu F$

① $t < 0$

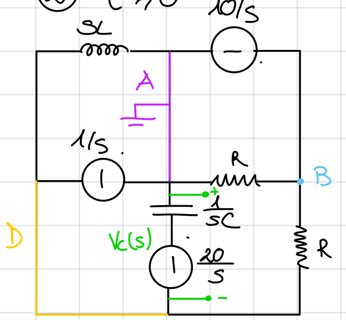


$J_x = \frac{10}{R} = 1A$

$i_L(0^-) = 0$

$V_C(0^-) = 20V$

② $t \geq 0$



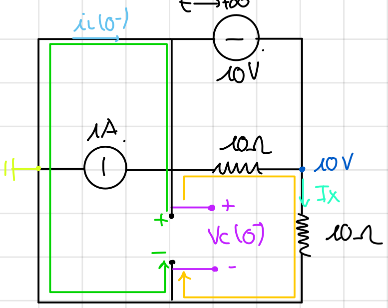
$V_B(s) = \frac{10}{s}$ $\qquad V_C(s) = -V_D(s)$

Nodo D: $-\frac{1}{s} - 20C = V_D(s)\left[\frac{1}{sL} + sC + \frac{1}{R}\right] - \frac{10}{sR}$

$$V_D(s) = \frac{-\frac{1}{s} - 20C + \frac{10}{sR}}{\frac{1}{sL} + sC + \frac{1}{R}} = \frac{-20LRCs}{R + s^2LRC + sL}$$

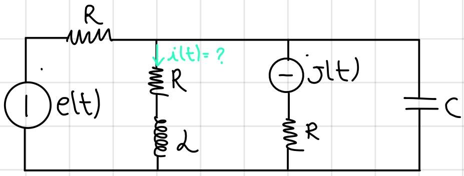
$$V_C(s) = -V_D(s) = \frac{2\cdot 10^{-5}s}{10^{-6}s^2 + 0.011 + 10} \longrightarrow V_C(t) = 22.91\,e^{-8873t} - 2.91\,e^{-1127t},\ t \geq 0$$

Prova: $\lim_{t\to+\infty} V_C(t) = 0$



cortocircuito: $V_C(t) = 0$:V

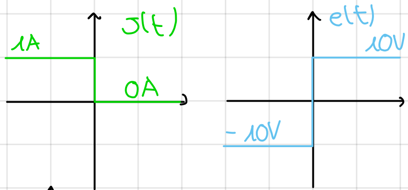
4. 11-01-21

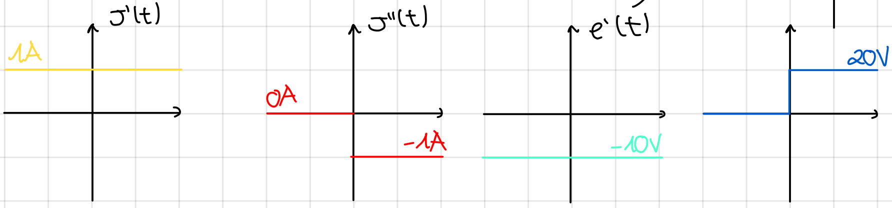


$R = 10\Omega$

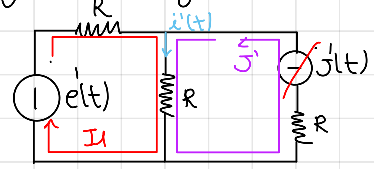
$L = 15mH$

$C = 15\mu F$





facciamo agire solo $J'(t)$ ed $e'(t)$



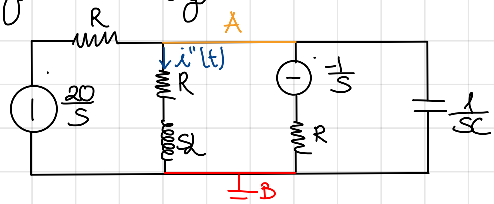
maglia: $RI_1 + R(I_1 + J') - e'(t) = 0$

$$\cancel{10}I_1 + \cancel{10}I_1 + \cancel{10} + \cancel{10} = 0$$

$$2I_1 = -2 \longrightarrow I_1 = -1A$$

$$i(t)' = I_1 + J' = 0\,A \;\checkmark$$

facciamo agire $J''(t)$ ed $e''(t)$: non abbiamo condizioni iniziali



Nodo A: $\dfrac{20}{RS} - \dfrac{1}{S} = V_A\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R+SL} + SC\right)$

$$\frac{20-R}{RS} = V_A\left(\frac{R+SL+R+R^2SC+RS^2LC}{R(R+SL)}\right)$$

$$V_A = \frac{20-R}{\cancel{R}S}\,\frac{\cancel{R}(R+SL)}{RLCS^2+S(L+R^2C)+2R} = \frac{20(R+SL)}{S(RLCS^2+S(L+R^2C)+2R)}$$

$$i''(S) = \frac{V_A}{R+SL} = \frac{20-R}{S(RLCS^2+S(L+R^2C)+2R)} = \frac{\frac{20-R}{RLC}}{S\left(S^2+\frac{(L+R^2C)S}{RLC}+\frac{2}{LC}\right)}$$

radici: $0, -1532.3, -5201$

$$\lim_{S\to 0} \cancel{S}\,\frac{\frac{20-R}{RLC}}{\cancel{S}(S+1532.3)(S+5201)} = 0.5$$

$$\lim_{S\to -1532.3} \cancel{(S+1532.3)}\,\frac{\frac{20-R}{RLC}}{S\cancel{(S+1532.3)}(S+5201)} = -0.6795$$

$$\lim_{S\to -5201} \cancel{(S+5201)}\,\frac{\frac{20-R}{RLC}}{S(S+1532.3)\cancel{(S+5201)}} = 0.1795$$

$$i(t) = i''(t) = \left(0.1795\,e^{-5201t} - 0.6795\,e^{-1532.3t} + 0.5\right)u(t)$$

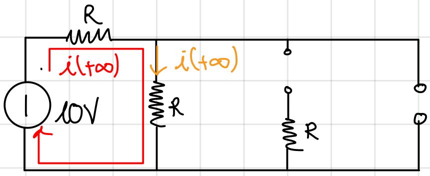
Grandezza di stato: corrente su un induttore

$\lim_{t\to 0^-} i(t) = 0\,A$ (solo i generatori J' ed e')

$$\lim_{t\to 0^+} i(t) = 0.1795 - 0.6795 + 0.5 = 0 \longrightarrow \checkmark$$

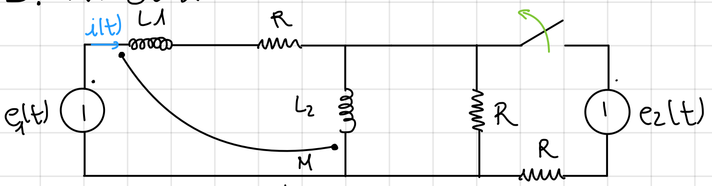
$$\lim_{t\to +\infty} i(t) = 0.5\,A$$

utilizzando il circuito iniziale in continua



maglia: $2R\,i(+\infty) - 10V = 0 \longrightarrow i(+\infty) = \dfrac{10}{20} = 0.5A$: $\checkmark$

5. 17-02-21

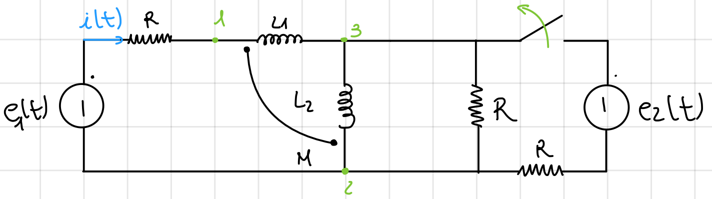


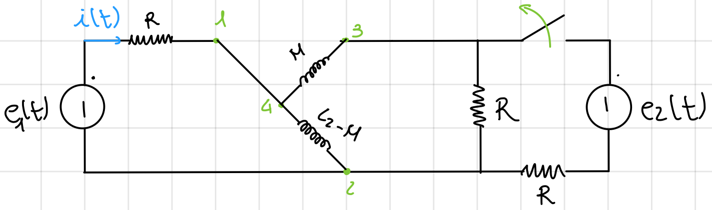
$e_1(t) = 10V$

$e_2(t) = 20V$

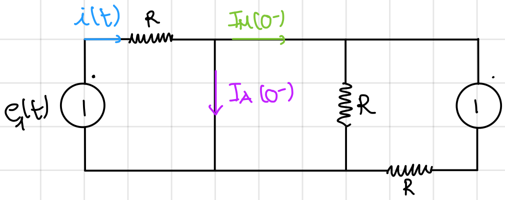
$R = 10\,\Omega \quad L_1 = 10mH \quad L_2 = 20mH, \quad M = 10mH$

↓ se scambiamo L_1 ed R abbiamo che L_1 ed L_2 hanno un nodo a comune





Per $t<0$



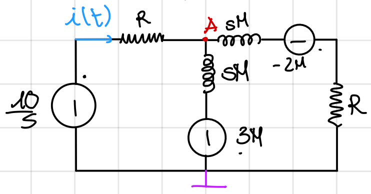
Con il principio di sovrapposizione degli effetti

$$I_A(0^-) = \frac{10}{R} + \frac{20}{R} = \frac{30}{R} = 3A$$

$$I_M(0^-) = -\frac{20}{R} = -2A$$

$$i(t) = 1A$$

Per $t \geq 0$



$$I(s) = \frac{\frac{10}{s} - V_A(s)}{R}$$

Nodo A: $\frac{10}{sR} - \frac{3M}{sM} + \frac{2M}{R+sM} = V_A(s)\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{sM} + \frac{1}{R+sM}\right]$

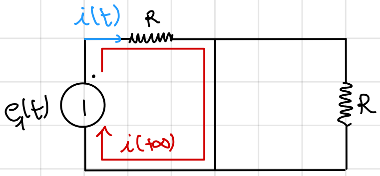
$$V_A(s) = \frac{-\frac{2}{s} + \frac{2M}{R+sM}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sM} + \frac{1}{R+sM}} = -\frac{2RM(R+sM) - 2RsM^2}{sM(R+sM) + R(R+sM) + RMs} = \frac{2RM}{s^2M^2 + 3RMs + R^2} =$$

$$I(s) = \underbrace{\frac{10}{sR}}_{1} + \underbrace{\frac{4M^2s + 2RM}{s^2M^2 + 3RMs + R^2}}_{\frac{2}{0.001s^2 + 3s + 100}} \longrightarrow i(t) = (1 - 0.8944\,e^{-2618t} + 0.8944\,e^{-382t})\,u(t)$$

$$i(t) = \begin{cases} 1A & t<0 \\ 1 - 0.8944\,e^{-2618t} + 0.8944\,e^{-382t}) & t>0 \end{cases}$$

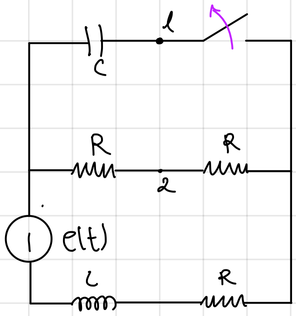
$$\lim_{t\to 0^-} i(t) = 1A = \lim_{t\to 0^+} i(t) = 1$$

$$\lim_{t\to +\infty} i(t) = 1$$



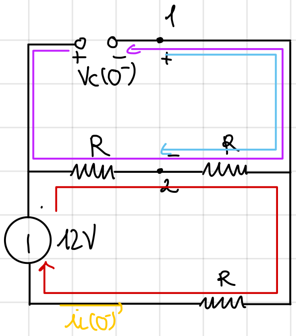
$i(+\infty) = 1\ A$

6. 02-07-21



$R = 10\,\Omega$
$C = 50\,\mu F$
$L = 10\,mH$
$e(t) = 12\,V$
$V_{12}(t), \quad -\infty < t < +\infty$

$t < 0$

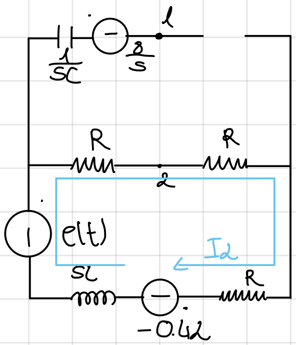


maglia: $I_X = \dfrac{12}{3R} = \dfrac{4}{R} = 0.4\ A$

$i_L(0^-) = -I_X = -0.4\,A$

$V_C(0^-) = 2R I_X = 8V$
$V_{12}(t) = -RI_X = -4V \quad$ per $\quad t < 0$

$t \geq 0$



$V_{12}(s) = ?$

maglia: $I_2(s) = \dfrac{\frac{12}{s} + 0.4L}{sL + 3R} = \dfrac{0.4Ls + 12}{s(sL + 3R)}$

$V_{12}(s) = -\dfrac{8}{s} + \boxed{\dfrac{0.4RLs + 12R}{s(sL + 3R)}}$

$\longrightarrow \dfrac{4s + 12R/L}{s(s + 3R/L)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s + 3R/L}$

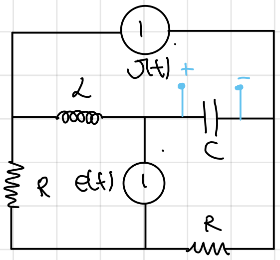
$A = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \dfrac{(4s + 12R/L)}{\cancel{s}(s + 3R/L)} = 4$

$B = \lim_{s \to -\frac{3R}{L}} \cancel{(s + 3R/L)} \dfrac{4s + 12R/L}{s\cancel{(s + 3R/L)}} = 0$

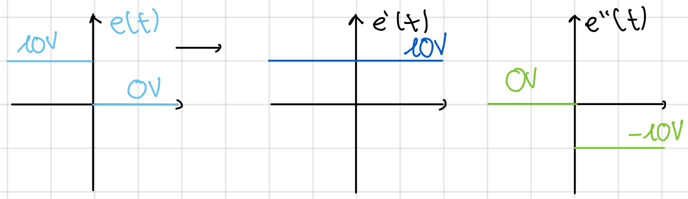
$V_{12}(t) = (-8 + 4)\, u(t) = -4\, u(t) \quad t > 0$

$V_{12}(t) = -4V \quad \forall t$

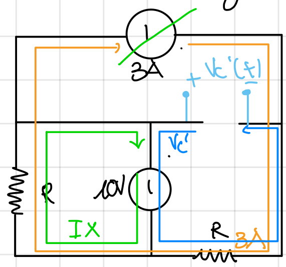
7. 09-01-20



$J(t) = 3A$
$R = 10\,\Omega$
$L = 15 \cdot 10^{-3}\ H$
$C = 15 \cdot 10^{-6}\ F$



Facciamo agire solo $e'(t)$ e $J(t)$

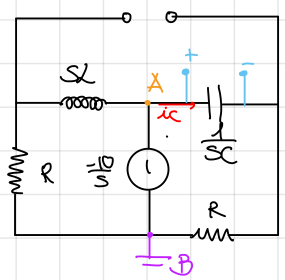


maglia: $10 + R(I_x + 3) = 0$

$10 + 10 I_x + 30 = 0 \longrightarrow I_x = -4A$

$V_c'(t)$: $10 - 30 = -20V$

Facciamo agire $e''(t)$



$V_A = -\frac{10}{s}$

$V_B = 0$

$$i_c = \frac{V_A - V_B}{\frac{1}{SC} + R} = \frac{-\frac{10}{s}}{\frac{1}{SC} + R} = \frac{-10}{\cancel{s}} \cdot \frac{1}{\frac{1+RSC}{\cancel{S}C}} = \frac{-10C}{1+RSC}$$

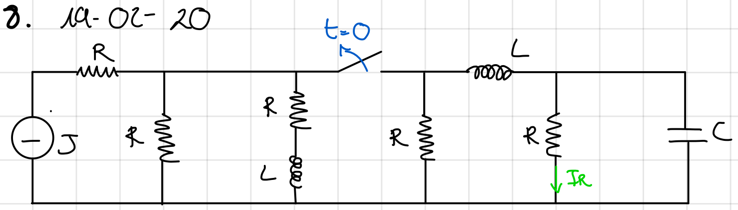
$$V_c''(t) = \frac{1}{S\cancel{C}} \cdot \frac{-10\cancel{C}}{1+RSC} = \frac{-10}{S(RSC+1)} = \frac{-\frac{10}{RC}}{S\left(S + \frac{1}{RC}\right)} \longrightarrow \text{radici: } 0, -6666.67$$

$$\lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{-\frac{10}{RC}}{\cancel{s}\left(S + \frac{1}{RC}\right)} = -10$$

$$\lim_{s \to -\frac{1}{RC}} \cancel{\left(S + \frac{1}{RC}\right)} \frac{-\frac{10}{RC}}{S\cancel{\left(S + \frac{1}{RC}\right)}} = 10$$

$$V_c(t) = -20 + \left(10 e^{-6666.67t} - 10\right) u(t) \ V$$

3. 19-02-20



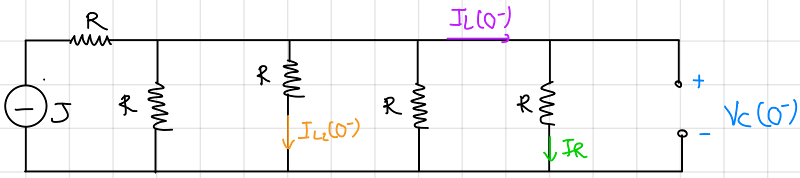
$J(t) = 2A$

$R = 10\ \Omega$

$L = 15\ mH$

$C = 25\ \mu F$

Condizioni iniziali: $t<0$



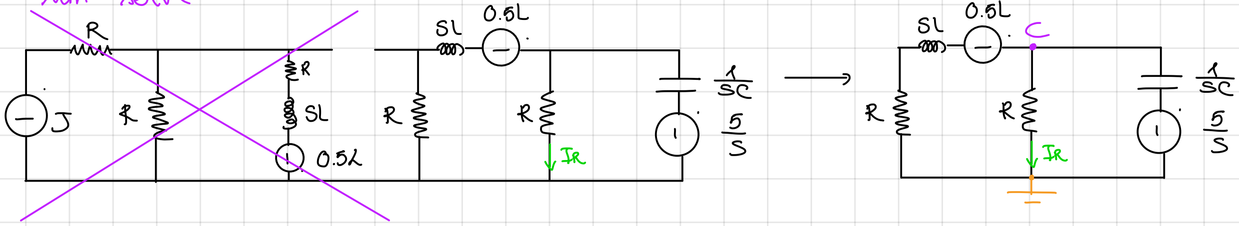
$I_{L_2}(0^-) = 0.5A \qquad I_R = 0.5A \qquad t<0$

$I_L(0^-) = I_R = 0.5A$

$V_c(0^-) = 5V$

Risoluzione nel dominio di Laplace

Non serve



Nodo A: $5C + \frac{0.5L}{R+SL} = V_c(S)\left[SC + \frac{1}{R} + \frac{1}{R+SL}\right]$

$$V_C(s) = \frac{5C + \frac{0.5L}{R+sL}}{sC + \frac{1}{R} + \frac{1}{R+sL}} = \frac{5RC(R+sL) + 0.5RL}{sRC(R+sL) + R + sL + R}$$

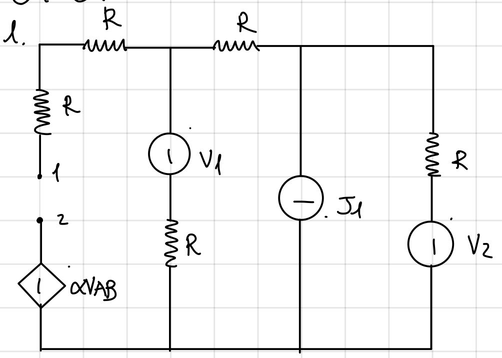
$$I_R(s) = \frac{V_C(s)}{R} = \frac{5LCs + 5RC + 0.5L}{RLCs^2 + (R^2C + L)s + 2R} = \frac{1.875 \cdot 10^{-6} s + 0.00875}{3.75 \cdot 10^{-6} s^2 + 0.0175 s + 20}$$

$$I_R(t) = -1.5e^{-2666.67t} + 2e^{-2000t}, \quad t \geq 0$$

○ ESERCIZI CONCLUSIVI

09-01-19

1.



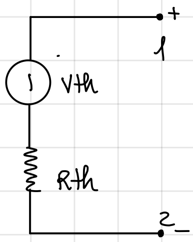
$V_1 = 10V$

$V_2 = 20V$

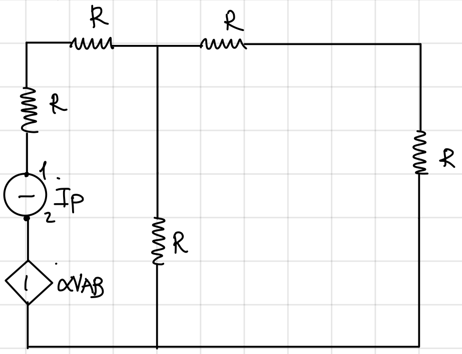
$J_1 = 1A$

$R = 10\Omega$

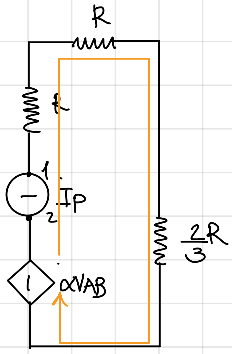
$\alpha = 0.8$



Rth



$R_{th} = \frac{V_p}{I_p} \longrightarrow$

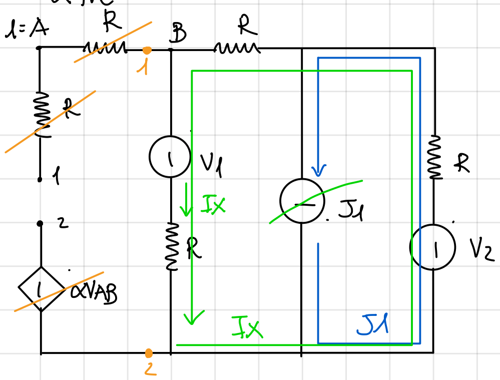


$V_{12} = 2RI_p + \frac{2}{3}RI_p - \alpha R I_p =$

$= \left(\frac{8}{3}R - \frac{4}{5}R\right)I_p$

$R_{th} = \frac{28}{15}R = \frac{56}{3} = 18{,}67\,\Omega$

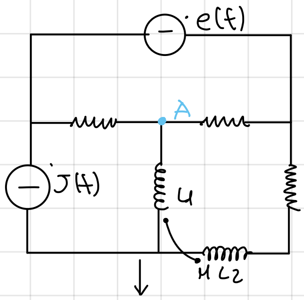
Eth



$V_{TH} = V_1 + RI_x$

maglia: $-V_2 + R(J + J_x) + RJ_x + V_1 + RJ_x = 0 \longrightarrow J_x = \frac{V_2 - RJ - V_1}{3R} = 0$

2.



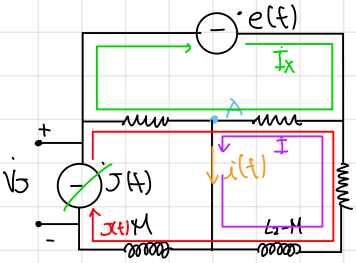
$e(t) = 20\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100t)\,V$

$i(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100t)\,A$

$R = 10\Omega$

$L_1 = M = 10mH$

$L_2 = 20\,mH$



maglia: $-\dot{E} + 2R\dot{I}_x + R(\dot{I} - \dot{J}) - R\dot{J} = 0$

maglia: $[2R + i\omega(L_2 - M)]\dot{I} - i\omega(L_2 - M)\dot{J} - 2R\dot{J} + R\dot{I}_x = 0$

$\dot{I}_x = \frac{2R\dot{J} + \dot{E}}{2R} - \frac{R\dot{I}}{2R}$

$\dot{I} = 0.0044 + 0.0664i = 0.0665\,e^{i1.5042}$

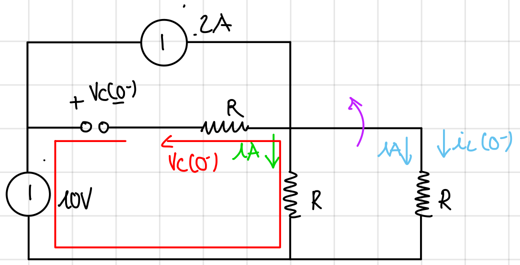
$i(t) = 0.0665\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100t + 1.5042)$

$Q = \mathrm{Im}\{\dot{V}_J \cdot \dot{J}^*\}$

$\dot{V}_J = R(\dot{J} - \dot{I}_x) + i\omega M\dot{J} = -9.9779 + 1.3319i$

$\bar{S} = \dot{V}_J \cdot 1 = -9.9779 + 1.3319i \longrightarrow Q = 1.3319\ \text{VAR}$

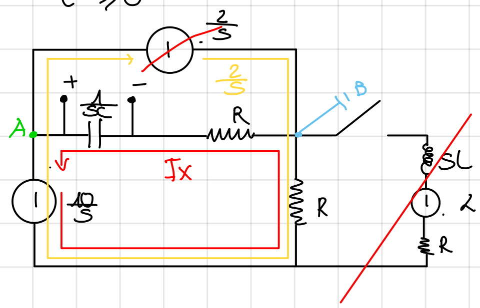
3. $t < 0$



$i_L(0^-) = 1A$

$V_C(0^-) = 10 - 10 = 0V$

$t \geq 0$



maglia: $\frac{10}{s} + R\left(I_x - \frac{2}{s}\right) + RI_x + \frac{1}{sC} I_x = 0$

$$\frac{10}{s} + RI_x - \frac{20}{s} + RI_x + \frac{1}{sC} I_x = 0$$

$$-\frac{10}{s} + 2RI_x + \frac{1}{sC} I_x = 0 \longrightarrow I_x = \frac{\frac{10}{s}}{2R + \frac{1}{sC}}$$

$$V_C(t) = -\frac{1}{sC} \cdot \frac{\frac{10}{s}}{2R + \frac{1}{sC}} = \frac{-\frac{10}{s}}{2RsC + 1} = \frac{-10}{s(2RsC+1)} = \frac{-\frac{10}{2RC}}{s\left(s + \frac{1}{2RC}\right)}$$

$S = 0, \quad S = -5000$

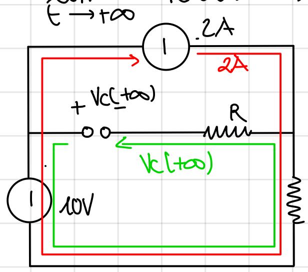
$$\lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{-\frac{10}{2RC}}{\cancel{s}\left(s + \frac{1}{2RC}\right)} = \frac{-\frac{10}{2RC}}{\frac{1}{2RC}} = -10 \longrightarrow V_C(t) = \left(-10 + 10e^{-5000t}\right) u(t) \quad t \geq 0$$

$$\lim_{s \to -\frac{1}{2RC}} \cancel{\left(s + \frac{1}{2RC}\right)} \frac{-\frac{10}{2RC}}{s\cancel{\left(s + \frac{1}{2RC}\right)}} = \frac{-\frac{10}{\cancel{2RC}}}{-\frac{1}{\cancel{2RC}}} = 10$$

$$V_C(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -10 + 10e^{-5000t} & t \geq 0 \end{cases}$$

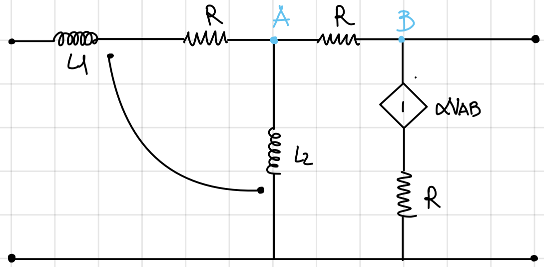
$\lim_{t \to 0^-} V_C(t) = 0 \qquad \lim_{t \to 0^+} V_C(t) = 0$

$\lim_{t \to +\infty} V_C(t) = -10 \text{ V}$



$V_C(+\infty) = 10 - 20 = -10 \text{ V}$ ✓

4.



$R = 10\,\Omega$

$L_1 = 10\,mH$

$L_2 = 20\,mH$

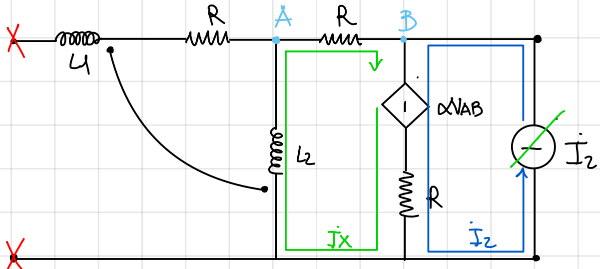
$M = 14\,mH$

$\alpha = 0.5$

$\omega = 1000 \text{ rad/s}$

$$\bar{Z} = \begin{cases} \dot{V}_1 = \bar{Z}_{11} \dot{I}_1 + \bar{Z}_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \bar{Z}_{21} \dot{I}_1 + \bar{Z}_{22} \dot{I}_2 \end{cases}$$

Azzeriamo I_1



$V_{AB} = RJ_x$

maglia: $i\omega L_2 J_x + RJ_x + \alpha V_{AB} + R(J_x + J_2) = 0$

$i\omega L_2 J_x + RJ_x + \alpha R J_x + RJ_x + RJ_2 = 0$

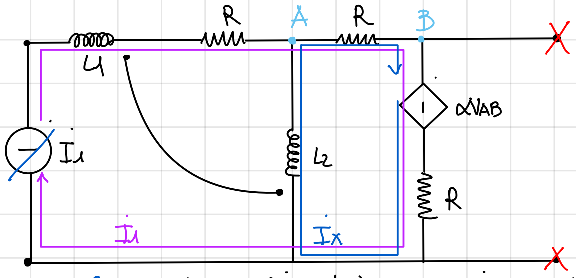
$20i\, J_x + 10J_x + 5J_x + 10J_x + 10J_2 = 0$

$20i\, J_x + 25J_x = -10J_2 \longrightarrow J_x = \frac{-10}{25+20i} J_2 = -0.2439 + 0.1951i\; J_2$

$$\overline{Z_{12}} = \frac{V_1}{I_2} = \frac{-i\omega M J_x - i\omega L_2 J_x}{J_2} = \frac{(-i\omega M - i\omega L_2)J_x}{J_2} = 6.6341 + 8.2927i \ \Omega$$

$$\overline{Z_{22}} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{\alpha V_{AB} + R(J_x + J_2)}{J_2} = \frac{15J_x + 10J_2}{J_2} = \frac{15\delta J_2 + 10J_2}{J_2} = 15\delta + 10 = 6.3415 + 2.9265i$$

Azzeriamo I_2



$V_{AB} = R(J_1 + J_x)$

maglia: $\alpha V_{AB} + R(J_1 + J_x) + i\omega L_2 J_x - i\omega M J_1 + R(J_1 + J_x) = 0$

$\alpha R(J_1 + J_x) + R(J_1 + J_x) + i\omega L_2 J_x - i\omega M J_1 + RJ_1 + RJ_x = 0$

$5J_1 + 5J_x + 10J_1 + 10J_x + 20i J_x - 16i J_1 + 10J_1 + 10J_x = 0$

$25J_1 + 25J_x + 20i J_x - 16i J_1 = 0$

$J_x = \frac{-25 + 16i}{25 + 20i} J_1 = \underbrace{(-0.3366 + 0.8293i)}_{\rho} J_1$

$$\overline{Z_{11}} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{i\omega L_1 J_1 - i\omega M J_x + RJ_1 - i\omega L_2 J_x + i\omega M J_1}{J_1} =$$

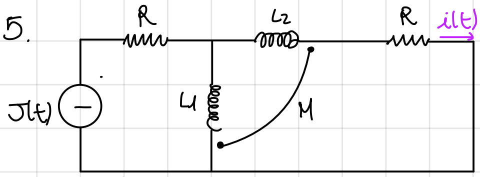
$$= \frac{(i\omega L_1 - i\omega M\rho + R - i\omega L_2\rho + i\omega M)\cancel{J_1}}{\cancel{J_1}} = 38.1962 + 35.4444i$$

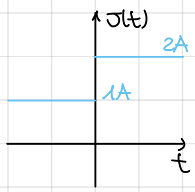
$$\overline{Z_{21}} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\alpha V_{AB} + R(J_1 + J_x)}{J_1} = \frac{\alpha R(J_1 + J_x) + R(J_1 + J_x)}{J_1} = \frac{15\cancel{J_1} + 15\delta\cancel{J_1}}{\cancel{J_1}} = 15(1+\delta) =$$

$= 9.951 + 12.4395i$

$$Z = \begin{bmatrix} 38.1962 + 35.4444i & 6.6341 + 8.2927i \\ 9.951 + 12.4395i & 6.3415 + 2.9265i \end{bmatrix} \Omega$$

5.



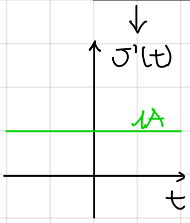


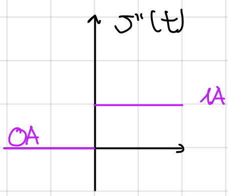
$R = 10\Omega$

$L_1 = 10mH$

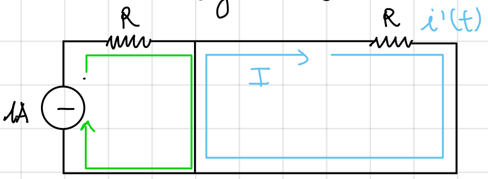
$L_2 = 20mH$

$M = 12mH$



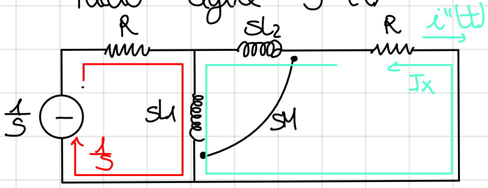


Faccio agire $J'(t)$



$i'(t) = 0$

Faccio agire $J''(t)$



maglia: $sL_1\left(\frac{1}{s}+J_x\right) - sMJ_x + sL_2J_x - sM\left(\frac{1}{s}+J_x\right) + RJ_x = 0$

$$\cancel{s}L_1 \cdot \frac{1}{\cancel{s}} + sL_1J_x - sMJ_x + sL_2J_x - \cancel{s}M\frac{1}{\cancel{s}} - sMJ_x + RJ_x = 0$$

$$L_1 + sL_1J_x - sMJ_x + sL_2J_x - M - sMJ_x + RJ_x = 0$$

$$J_x(sL_1 + sL_2 - 2sM + R) = M - L_1$$

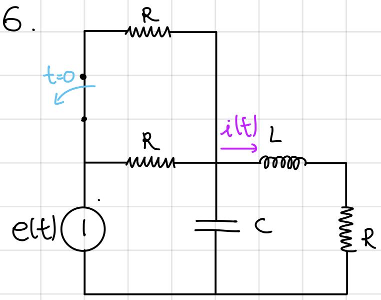
$$J_x = \frac{M - L_1}{sL_1 + sL_2 - 2sM + R}$$

$$J''(s) = -J_x(s) = \frac{L_1 - M}{s(L_1 + L_2 - 2M) + R} = \frac{\frac{L_1 - M}{L_1 + L_2 - 2M}}{\left(s + \frac{R}{L_1 + L_2 - 2M}\right)}$$

radici: $s = -\frac{R}{L_1 + L_2 - 2M} = -1.666.67$

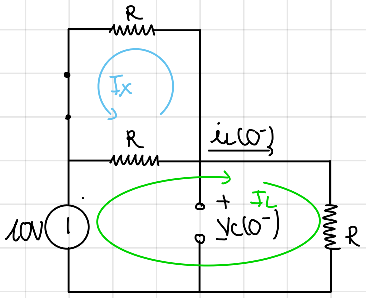
$i''(t) = (-0.33\, e^{-1666.67t})\, u(t) = i(t) \longrightarrow$ Grandezza di stato

6.



$e(t) = 10V$
$R = 10\Omega$
$L = 10mH$
$C = 10\mu F$

Trovo le condizioni iniziali: interruttore chiuso per $t<0 \longrightarrow$ circuito in continua



maglia: $\cancel{R}(J_x + J_L) + \cancel{R}J_x = 0$

$$J_x = -\frac{J_L}{2}$$

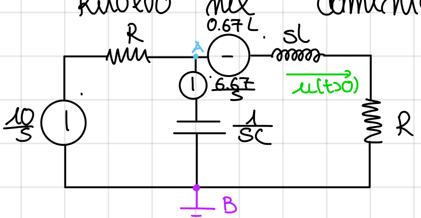
maglia: $-10 + R(J_x + J_L) + RJ_L = 0$

$$-10 + 5J_L + 10J_L = 0$$

$$15J_L = 10 \longrightarrow J_L = \frac{10}{15} = 0.67\ A$$

$$V_C(0^-) = RJ_L = 6.67\ V$$

Risolvo nel dominio di Laplace

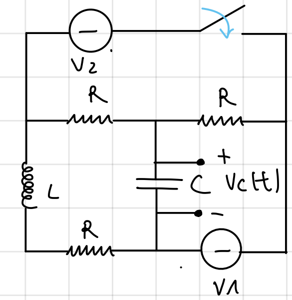


Nodo A: $\frac{10}{sR} + 6.67C - \frac{0.67L}{R+sL} = V_A\left(\frac{1}{R} + sC + \frac{1}{R+sL}\right)$

$$V_A = \frac{\frac{10}{sR} + 6.67C - \frac{0.67L}{R+sL}}{\frac{1}{R} + sC + \frac{1}{R+sL}} = \frac{\frac{10R + 10sL + 6.67CsR(R+sL) - 0.67sRL}{\cancel{sR(R+sL)}}}{\frac{R+sL + sCR(R+sL) + R}{\cancel{R(R+sL)}}}$$

$$i_L: \frac{V_A + 0.67L}{R+SL} = \frac{\frac{10R+10SL+6.67SCR(R+SL)-0.67SRL}{S(2R+SL+SCR(R+SL))}+0.67L}{R+SL} \longrightarrow i(t) = 0.5+0.2265e^{-2298.4t}-0.0598e^{-8701.6t}$$

7.



$V_1 = 10V$

$V_2 = 20V$

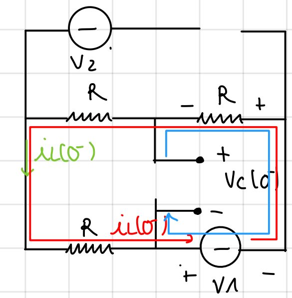
$R = 10\Omega$

$L = 10mH$

$C = 100\mu F$

$V_C(t) = ?$

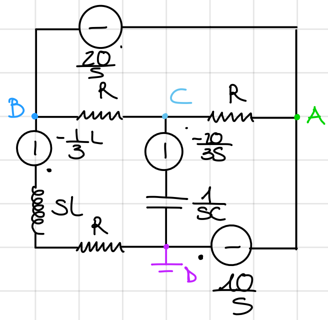
Ricavo condizioni iniziali: interruttore aperto



maglia: $V_1 + 3Ri_L(0^-) = 0 \longrightarrow i_L(0^-) = \frac{-V_1}{3R} = -\frac{1}{3}A$

$V_C(0^-) = -Ri_L(0^-) - V_1 = \frac{10}{3} - 10 = -\frac{20}{3}V$

Risolvo in dominio di Laplace



$V_D = 0\ V$

$V_A = -\frac{10}{s}\ V$

$V_1 = \frac{10}{s}$ $\quad V_2 = \frac{20}{s}$

$V_B = -\frac{20}{s} - \frac{10}{s} = -\frac{30}{s}\ V$

Nodo C: $-\frac{20}{3\cancel{s}}\cancel{s}C = V_C(s)\left(sC + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) + \frac{10}{sR} + \frac{30}{sR}$

$$-\frac{20C}{3} = V_C(s)\left(\frac{2}{R} + sC\right) + \frac{\cancel{40}^{\,4}}{s\cancel{R}} \longrightarrow V_C(s) = \frac{-\frac{20C}{3} - \frac{4}{s}}{\left(\frac{2}{R} + sC\right)}$$

$$= \frac{\frac{-20sC-12}{3sC}}{s+\frac{2}{RC}} = \frac{\frac{-20sC-12}{3C}}{s\left(s+\frac{2}{RC}\right)} \longrightarrow s=0,\ s=-2000$$

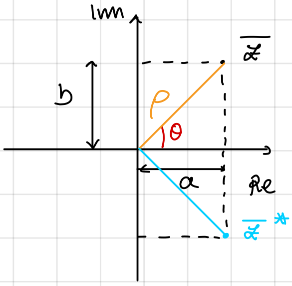
$$= \frac{\frac{-20sC-12}{3C}}{s(s+2000)}$$

$$\lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{\frac{-20sC-12}{3C}}{\cancel{s}(s+2000)} = -20 \longrightarrow V_C(t) = \left(-20 + \frac{40}{3}e^{-2000t}\right) t \geq 0$$

$$\lim_{s\to -2000} \cancel{(s+2000)}\frac{\frac{-20sC-12}{3C}}{s\cancel{(s+2000)}} = \frac{40}{3}$$

Addendum: Numeri complessi

$\overline{z} = a+ib = \rho e^{i\theta}$



per θ utilizziamo i radianti

Come passare da forma polare a cartesiana: $\begin{cases} b = \rho \operatorname{sen}\theta \\ a = \rho\cos\theta \end{cases}$

$\rho = |\overline{z}| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$

$\downarrow$

$\theta = \arctan \dfrac{b}{a}$

⚠ ATT: quando guardiamo l'angolo θ dobbiamo sempre vedere se siamo nel quadrante corretto

$\overline{z}^* = a - ib = \rho e^{-i\theta} \longrightarrow \overline{z}\cdot\overline{z}^* = \rho^2$

Macchine elettriche

- GRANDEZZE FONDAMENTALI

H: intensità magnetica [A/m]
B: induzione magnetica [Wb/m² oppure T] } legate da $B = \mu H$
densità del flusso magnetico

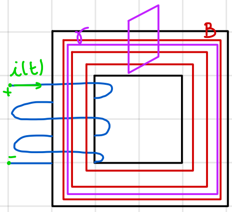
permeabilità: $\mu_0 \mu_r$ (vuoto, relativa)

↓

H è l'intensità del campo magnetico ed a parità di H alcuni materiali possono magnetizzarsi più di altri a seconda del materiale

ϕ: flusso magnetico [Wb] ⟶ $\phi = \int B\,ds$ se le grandezze sono uniformi $\phi = BS$ ove ϕ è la portata del vettore induzione magnetica

↓ circuiti magnetici



⟶ la gran parte delle linee del campo magnetico si richiudono nel nucleo del materiale ferromagnetico in quanto si magnetizza molto di più dell'aria.

Legge di Ampere: $\oint_\gamma H\,dl = \sum I$: somma delle correnti concatenate

$\oint_\gamma \frac{B}{\mu}\,dl = \sum I$ Hp: B costante $\oint_\gamma \frac{\phi}{\mu_0 \mu_r S} \cdot dl = \sum I$. Essendo che il percorso si scompone in 4 tratti rettilinei avremo la seguente

$\sum_{i=1}^{4} \frac{\phi_i}{\mu_0 \mu_i S_i} l_i = \sum I$

Per studiare i circuiti magnetici si suppone che il flusso del campo magnetico sia limitato all'interno dei tronchi costituenti il materiale ferromagnetico. Si studiano quindi in analogia con i circuiti elettrici ove il flusso del campo magnetico è analogo alla corrente elettrica che scorre nei cavi

↓

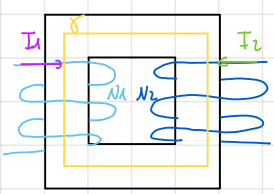
$\mathcal{R}$: Riluttanza $= \boxed{\frac{l_i}{\mu_0 \mu_r S_i}}$ ⟶ Resistenza al passaggio del flusso magnetico

↓

Nell'esempio precedente, $\sum_{i=0}^{4} \frac{\phi_i}{\mu_0 \mu_i S_i} l_i = \sum I = \boxed{N \cdot i}$: Tensione magnetica da origine al flusso del campo magnetico

Legge di Hopkinson: $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i \cdot \phi_i = \sum_{J=1}^{m} N_J I_J$ ove n sono il numero di tronchi che sono presenti nel percorso chiuso considerato, mentre m è il numero di correnti concatenate presenti all'interno del percorso

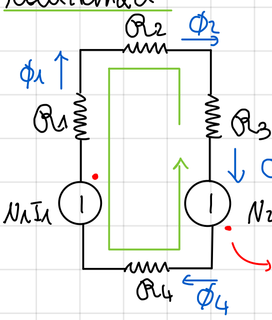
Esempio di studio di un circuito magnetico



⟶ $\sum_{i=1}^{4} \phi_i \cdot \mathcal{R}_i = N_1 I_1 + N_2 I_2 = \frac{\phi_1 l_1}{\mu_0 \mu_r S_1} + \frac{\phi_2 l_2}{\mu_0 \mu_2 S_2} + \frac{\phi_3 l_3}{\mu_0 \mu_3 S_3} + \frac{\phi_4 l_4}{\mu_0 \mu_4 S_4}$

↓

Possiamo studiarlo come un circuito elettrico in cui ciascun ramo ha la propria riluttanza

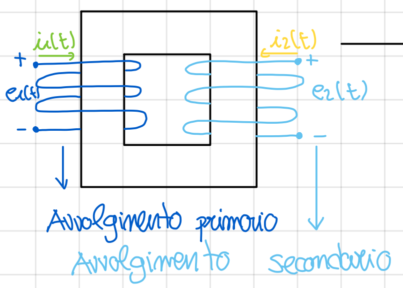


$\mathcal{R}_1\phi_1 + \mathcal{R}_2\phi_2 + \mathcal{R}_3\phi_3 + \mathcal{R}_4\phi_4 = N_1 I_1 + N_2 I_2$

↳ $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4$: il flusso NON viene disperso per le ipotesi che avevamo fatto

↳ Regola della mano destra

○ TRASFORMATORE IDEALE

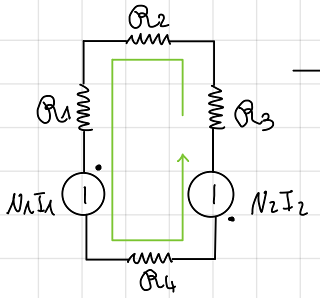


→ ideale perché: a. $R_{avv} = 0$

b. $\mu_{fe} \rightarrow +\infty$: tutte le linee del campo magnetico si richiudono all'interno dell'avvolgimento (e di conseguenza anche il flusso)

c. $\mu_{fe} \rightarrow$ costante

circuito equivalente:



$$\rightarrow (\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_2+\mathcal{R}_3+\mathcal{R}_4)\,\phi = N_1I_1+N_2I_2$$

$$\left(\frac{l_1}{\mu_0\mu_r S_1}+\frac{l_2}{\mu_0\mu_r S_2}+\frac{l_3}{\mu_0\mu_r S_3}+\frac{l_4}{\mu_0\mu_r S_3}\right)\phi = N_1I_1+N_2I_2$$

↓ essendo che $\mu_r \rightarrow +\infty$

$N_1I_1+N_2I_2 = 0 \rightarrow N_1I_1 = -N_2I_2$ e quindi

$$I_1 = -\frac{N_2}{N_1}I_2 = -\frac{1}{m}I_2$$

Definiamo quindi $m = \frac{N_1}{N_2}$, detto **rapporto spire**

Quanto valgono le **tensioni**?

$$\mathcal{E}_1 = i\omega L_1 I_1 N_1 = i\omega \phi_1 N_1 = i\omega\phi N_1$$
$$\mathcal{E}_2 = i\omega L_2 I_2 N_2 = i\omega \phi_2 N_2 = i\omega\phi N_2$$

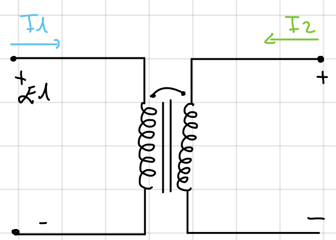
$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{\cancel{i\omega\phi}N_1}{\cancel{i\omega\phi}N_2} = m \longrightarrow \mathcal{E}_1 = m\mathcal{E}_2$$

Le relazioni valgono sia tra fasori che tra valori efficaci. Parliamo di fasori in quanto i trasformatori devono essere necessariamente in corrente alternata in modo da non far degenerare gli induttori in cortocircuiti.

potenza apparente: $S_1 = \mathcal{E}_1 I_1$

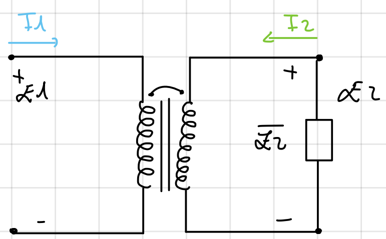
$S_2 = \mathcal{E}_2 I_2 = \frac{1}{m}\mathcal{E}_1(-mI_1) = -S_1$ } la potenza al primario ed al secondario è la stessa cambiata di segno in quanto una porta eroga corrente mentre l'altra la dissipa

Simbolo circuitale:



↓

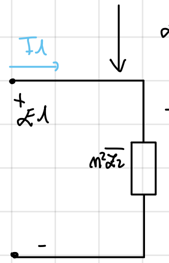
Come mai utilizziamo la potenza apparente per la caratterizzazione?



$S_1 = \mathcal{E}_1 I_1$

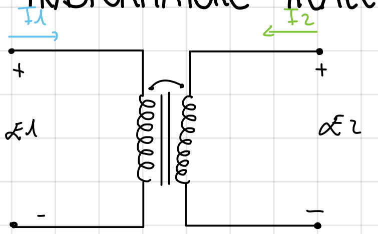
$\mathcal{E}_2 = -Z_2 I_2 \longrightarrow \frac{\mathcal{E}_1}{m} = -Z_2(-mI_1) \longrightarrow \frac{\mathcal{E}_1}{I_1} = m^2 Z_2$

↓ è come se

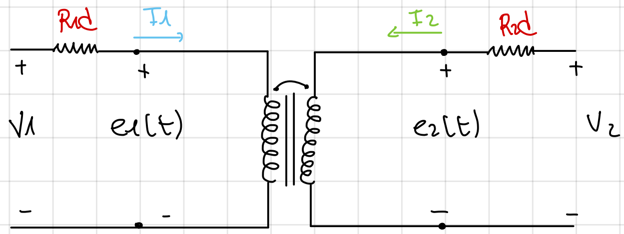


→ Non si utilizza la potenza attiva/reattiva in quanto il trasformatore non può sapere se erogherà/dissiperà potenza attiva/reattiva. Non si può sapere a priori perché il carico può essere cambiato dall'utilizzatore.

∘ TRASFORMATORE REALE



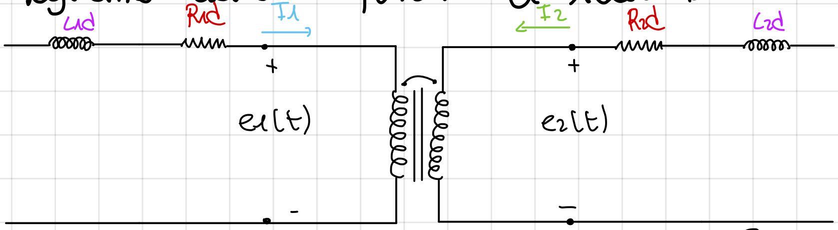
Togliamo l'ipotesi di idealità a. ⟶ $R_{avv} \neq 0$



R_{1d} = Resistenza di dispersione al primario
R_{2d} = Resistenza di dispersione al secondario

Se V_1 e V_2 sono rispettivamente la tensione di alimentazione e la tensione di uscita, allora, mentre le correnti i_1 e i_2 rimangono le stesse del caso ideale, le tensioni V_1 e V_2 sono diverse da e_1 ed e_2. Le tensioni al primario ed al secondario non sono quindi legate dal rapporto spire ed inoltre $V_1 \neq V_2$

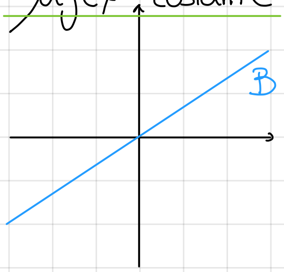
Togliamo adesso l'ipotesi di idealità b. ⟶ $\mu_{fe} < \infty$



L_{1d} = induttanza di dispersione primaria
L_{2d} = induttanza di dispersione secondaria
} Ci sono dei flussi che non sono concatenati tra gli induttori ma che si chiudono in aria, anche se rimangono la minoranza

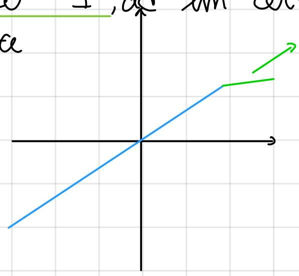
Togliamo infine l'ipotesi di idealità c. ⟶ $\mu_{fe} \neq$ costante

Avevamo detto precedentemente che $\boxed{B = \mu H}$ ⟶

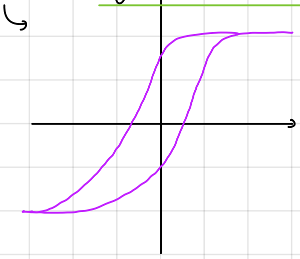


, inoltre $H \propto I$

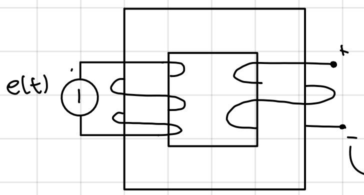
Avviene il fenomeno di **SATURAZIONE**: aumentando I, ad un certo punto B smette di aumentare, quindi il grafico precedente diventa



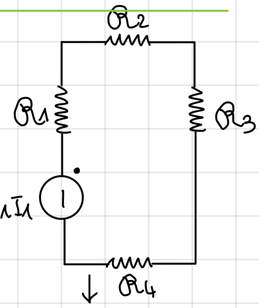
Se adesso diminuiamo I, H cambia di conseguenza ma B **non segue la curva di prima magnetizzazione** ⟶ rimane una magnetizzazione residua. Facendo cambiare di segno, H tramite la progressiva diminuzione di I avviene il fenomeno di **isteresi**.



⟶ Osservazioni Sperimentali

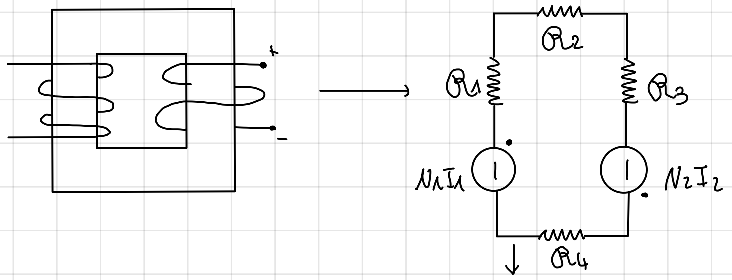


⟶



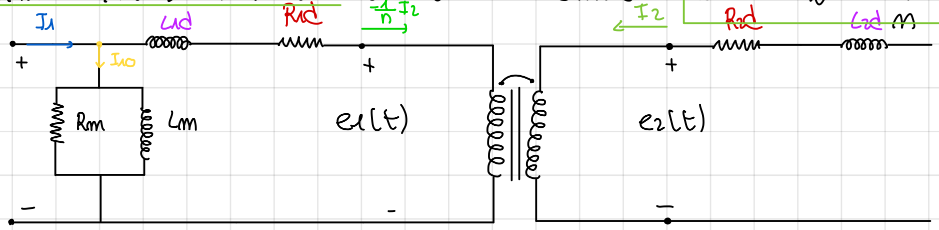
$N_1 I_{10} = f(R(\phi_0))$

Se il secondario non è aperto:



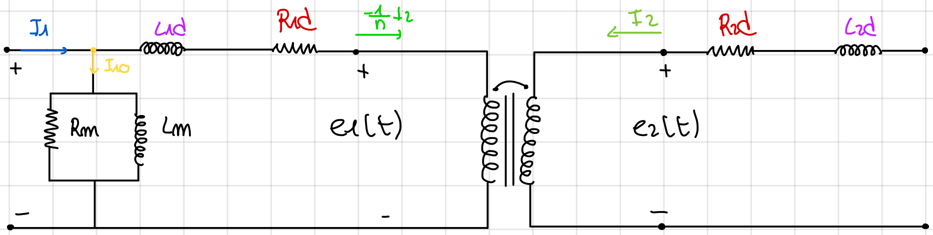
$N_1I_1 + N_2I_2 = f(R(\phi))$

Si osserva sperimentalmente che $\phi \simeq \phi_0$ (flusso a vuoto). Otterremo quindi che $N_1I_1 + N_2I_2 = N_1I_{10}$ da cui si ottiene $\boxed{I_1 = I_{10} - \frac{1}{n} I_2}$

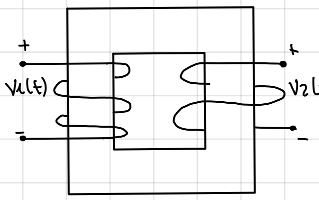


Si mette una resistenza in quanto c'è potenza dissipata dalle correnti che scorrono nel nucleo ferromagnetico dette correnti vorticose ed un'induttanza perché si misura sperimentalmente che la tensione e la corrente a vuoto non sono in fase.

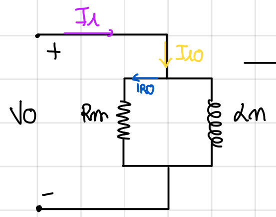
- **PROVE EFFETTUATE per RICAVARE i PARAMETRI del TRASFORMATORE**



PROVA 1: prova A VUOTO



circuito elettrico equivalente



$\rightarrow$ Si possono calcolare R_m e L_m

$\bar{Y}_m = G_m + i B_m$

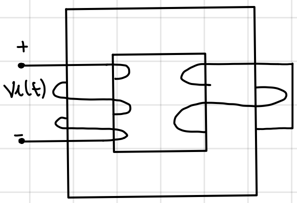
Per la valutazione dei parametri vengono misurati: P_0, I_0, V_0

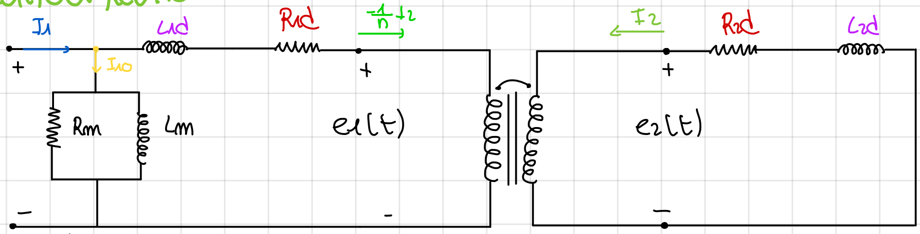
Per trovare l'ammettenza dovremmo fare $\bar{Y}_m = \frac{\bar{I}_0}{\bar{V}_0}$ che, essendo fasori, non sono facil- -mente misurabili. Misurando i valori efficaci otteniamo $Y_m = \frac{I_0}{V_0}$, quindi il modello, che non è sufficiente. È necessario quindi misurare P_0. Avremo che $P_0 = R_m I_{R0}^2 =$
$= R_m \left(\frac{V_0}{R_m} \right)^2 = \frac{V_0^2}{R_m} = G_m V_0^2 \longrightarrow G_m = \frac{P_0}{V_0^2}$ 1

Possiamo poi scrivere $|Y_m| = I_0 / V_0$

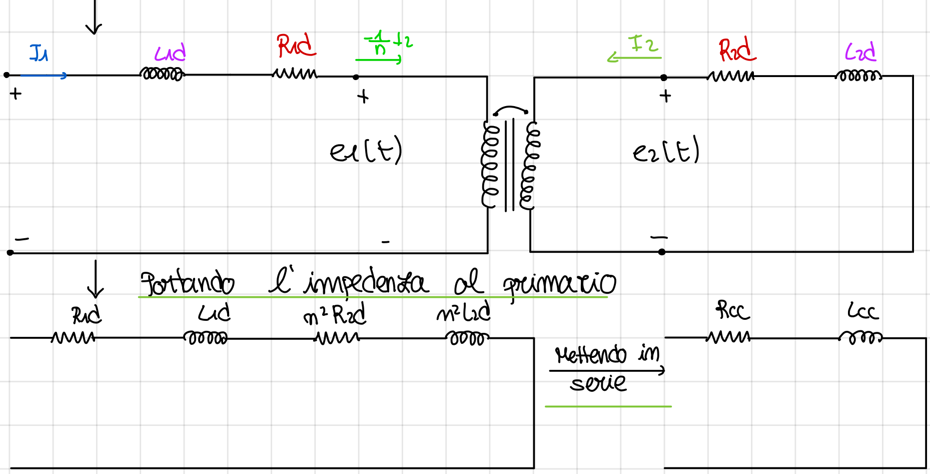
Abbiamo infine che ove $|Y_m| = \sqrt{G_m^2 + B_m^2}$ per cui $B_m = -\sqrt{Y_m^2 - G_m^2}$

PROVA 2: prova IN CORTOCIRCUITO





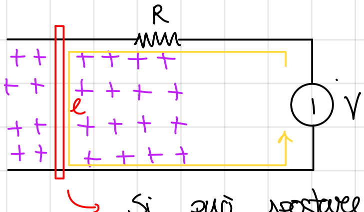
Si nota che la corrente $I_{10} << -\frac{1}{n} I_2 \longrightarrow$ Cancelliamo quindi R_m ed L_m



Avremo quindi $R_{cc} = R_{1d} + n^2 R_{2d}$ ed $L_{cc} = L_{1d} + n^2 L_{2d}$
Potendo calcolare i fasori avremmo $\bar{Z}_{cc} = \frac{\bar{V}_{cc}}{\bar{I}_{cc}} = R_{cc} + i\, X_{cc}$, ma non si possono misurare i fasori ma i loro moduli, di nuovo insufficienti. Misuriamo quindi di nuovo la potenza attiva che indichiamo con P_{cc}. Avremo $P_{cc} = R_{cc} I_{cc}^2$, da cui $R_{cc} = \frac{P_{cc}}{I_{cc}^2}$. Avremo poi $|\bar{Z}_{cc}| = V_{cc} / I_{cc} = Z_{cc}$ ed infine $X_{cc} = \sqrt{Z_{cc}^2 - R_{cc}^2}$

- **CONVERSIONE ELETTRO-MECCANICA DELL'ENERGIA**

trasduttore a bobina mobile



→ Si può spostare a destra ed a sinistra

→ È necessario un campo magnetico: lo vogliamo entrante al foglio con B costante

La conversione elettromagnetica è guidata dalla forza di Lorentz data da $F = q v \wedge B = q u \wedge B$ (u = velocità della carica)

La barretta sarà attraversata da una corrente definita come $\boxed{i = \frac{dq}{dt}}$. Moltiplicando per dl otteniamo $\boxed{dl \cdot i = \frac{dq}{dt} \cdot dl = dq \cdot u'}$, ove u' è la velocità della carica all'interno della barretta. Integrando e moltiplicando per B otteniamo $B \cdot l \cdot i = q \cdot u' \cdot B = F \longrightarrow \boxed{F = B l i}$ legge Bli

↓ Per determinare il verso utilizziamo la regola della mano destra. Nel caso precedente, essendo che la carica va dall'alto verso il basso, la sbarretta si muove verso destra

↳ Funzionamento **motore**: fa muovere la barretta inizialmente ferma

↓ Analizziamo il **contrario**

$F = q u B$, ove u è la velocità della barretta. Moltiplicando per l otteniamo $l \cdot F = q u B \cdot l$, da cui si ha $\boxed{\frac{l \cdot F}{q}} = u \cdot B \cdot l$

tensione e che si crea ai capi della barretta $\longrightarrow e = Blu$ (legge Blu)

Per capire dove sta il + utilizziamo la regola della mano destra. Nel caso precedente va in alto in quanto u va verso destra, B è entrante e quindi la forza spinge le cariche positive verso l'alto ⟶ Funzionamento da **generatore**

equazione elettrica: $-V + R \cdot i + e = 0 \longrightarrow \boxed{i = \frac{V - e}{R}}$

→ $i > 0$: funzionamento da **motore**
↓ Calcolando la potenza sul generatore, essa sarà positiva, quindi sarà **erogata**

→ $i < 0$: funzionamento da **generatore**

La potenza sarà assorbita

→ $i = 0$: la potenza sul generatore sarà 0, quindi la potenza elettrica sarà pari alla potenza meccanica

↓

Funziona con un rendimento del 100% in quanto tutta la potenza elettrica viene convertita in meccanica e vice-versa. Chiamiamo la velocità in questo stato ideale u_0.

↓ Calcoliamola utilizzando l'equilibrio elettrico e meccanico

$$-V + R\cdot i + e = 0$$

$$F - f_r = m\frac{du(t)}{dt} \longrightarrow Bli - f_r = 0$$: siamo a regime

$$i = \frac{V-e}{R} \xrightarrow[\text{in } 2]{\text{sostituendo}} B\cdot l\cdot\left(\frac{V-e}{R}\right) - f_r = 0 \longrightarrow Bl\left(\frac{Blu_0 - Blu}{R}\right) = f_r$$

e quindi $\frac{B^2l^2}{R}(u_0-u) = f_r \longrightarrow (u_0-u) = \frac{f_r R}{B^2l^2}$ ed infine la velocità della barretta sarà $u = \boxed{u_0} - f_r\frac{R}{B^2l^2}$ ⟶ Se non vi sono forze resistenti (quindi se il rendimento del 100%) la barretta viaggia alla velocità ottimale. Se invece sono presenti forze resistenti sarà $u > u_0$ o $u < u_0$ a seconda del segno della forza resistente

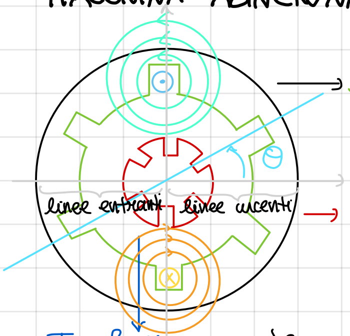
↓ velocità ottimale

↓

In generale utilizziamo i **movimenti rotazionali** e quindi avremo che la legge diventerà $\Omega = \Omega_0 - \frac{C_r R}{\phi^2}$

↓

○ MACCHINA ASINCRONA



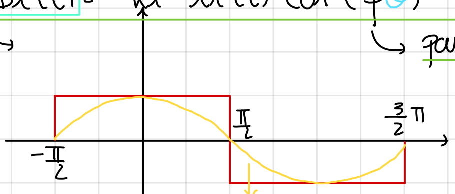
Statore: dobbiamo immaginare che per ogni dente diametralmente opposto vi è una spira che entra/esce. I denti vengono chiamati cave

Rotore: parte mobile della macchina ⟶ può avere alloggiamenti per i fili come lo statore

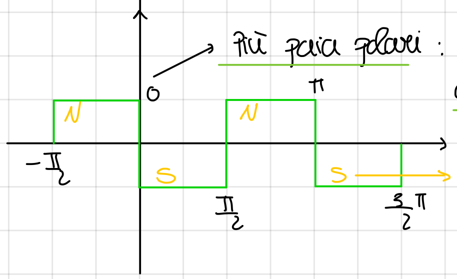
Traferro: parte di aria che permette al rotore di ruotare senza attrito con lo statore

$$i_i(t) = I_M\,\text{sen}(\omega t) \longrightarrow \boxed{B_i(t)} = k_i\cdot i_i(t)\cos(p\theta)$$

↳ paia o coppie polari

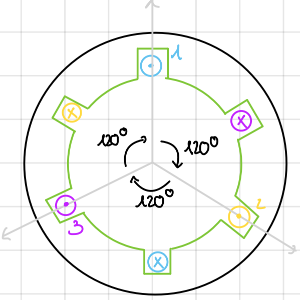


Andamento quasi cosinusoidale



Più paia polari: sulla superficie esterna ho più avvolgimenti di B

⟶ Nord e Sud magnetici



$i_1(t) = I_M \operatorname{sen}(\omega t)$
$i_2(t) = I_M \operatorname{sen}(\omega t + \frac{2\pi}{3})$
$i_3(t) = I_M \operatorname{sen}(\omega t + \frac{4\pi}{3})$

Terna di correnti sfasate di 120° elettrici e meccanici. Meccanici per la collocazione fisica degli avvolgimenti ed elettrici per lo sfasamento delle correnti

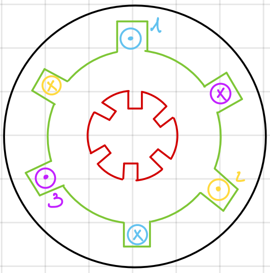
$B(t) = \underbrace{B_1(t) + B_2(t) + B_3(t)}_{\text{Originati dalle singole correnti}} = K \cdot I_M \cos(\omega t - p\theta)$

Per farlo ruotare basta fornire potenza elettrica

Rettificando il campo magnetico vediamo che ruota. I circuiti di rotore vedranno quindi un campo magnetico variabile, che varia a causa del cambiamento della sua proiezione. Per calcolare la velocità scriviamo $\boxed{\Omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}}$. Troviamo θ_1 e t_1 tali per cui $\omega t_1 - p\theta_1 = 0$ e quindi $\theta_1 = \omega t_1 / p$. Facciamo lo stesso per θ_2 e t_2.
Otteremo in questo modo $\boxed{\Omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{\omega t_2}{p} - \frac{\omega t_1}{p}}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{p}}$

Funzionamento:

1. Si alimentano gli avvolgimenti di statore con una terna di correnti sfasate di 120° elettrici e meccanici $\longrightarrow$ $\boxed{\Omega = \frac{\omega}{p}}$: **campo magnetico rotante**
2. Prima di fare il passo 2, analizziamo il rotore
   ↳ 2 possibilità: **a.** Può essere realizzato uguale allo statore, quindi un cilindro cavo ad esso con le spire nei denti. Queste però non sono alimentate e sono chiuse in cortocircuito.
   ↳ **ROTORE AVVOLTO**
   b. ROTORE a GABBIA di SCOIATTOLO: Abbiamo degli anelli dai quali partono delle barre conduttrici su tutta la superficie del rotore con fili collegati in cortocircuito



Legge di Lenz
$\boxed{e \propto \frac{d\phi}{dt}}$ $\longrightarrow$ si creano correnti indotte nei circuiti di rotore a causa della variazione del campo magnetico

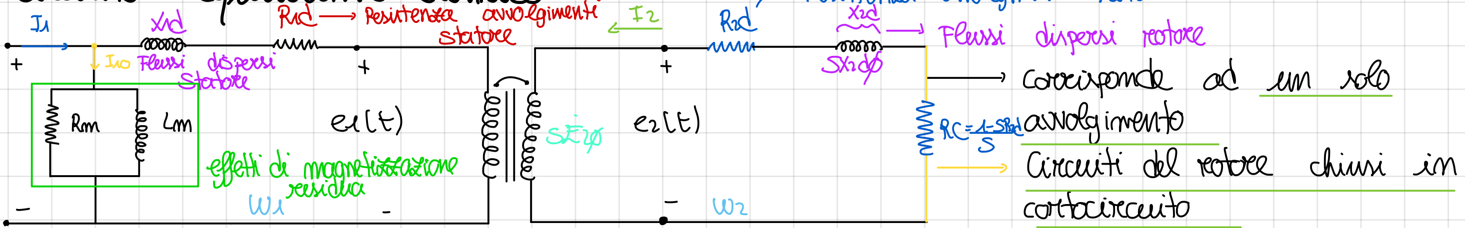
3. Si crea una coppia di forze per ogni spira ed il rotore inizia a girare
   ↓
   Se il rotore girasse alla stessa velocità del campo magnetico dello statore il campo magnetico sarebbe fermo per il rotore e non ci sarebbero più correnti indotte e quindi è come se i circuiti di rotore fossero aperti.

Grandezze:
ω_1 = pulsazione grandezze statore
Ω_s = velocità angolare campo magnetico statore
Ω_r = velocità angolare rotore
ω_2 = pulsazione grandezze rotore $\longrightarrow$ in linea di principio è un valore diverso da ω_1
↓
Avremo che $\boxed{\Omega_s = \frac{\omega_1}{p}}$. Se il rotore fosse fermo avremmo che $\Omega_s = \frac{\omega_1}{p}$. Se il rotore si muovesse avremmo invece $\Omega_{sr} = \boxed{\Omega_s - \Omega_r = \frac{\omega_2}{p}}$

s = scorrimento $\triangleq \boxed{\frac{\Omega_s - \Omega_r}{\Omega_s} = \frac{\Omega_{sr}}{\Omega_s}}$
- $\longrightarrow s = 0$ se $\Omega_s = \Omega_r$: **Rotore libero**
- $\longrightarrow s = 1$ se $\Omega_{sr} = \Omega_s$ e quindi $\Omega_r = 0$. In questo caso si dice **rotore bloccato**

↓
La velocità del rotore sarà data da $s = \frac{\Omega_s - \Omega_r}{\Omega_s} \longrightarrow \Omega_s \cdot s = \Omega_s - \Omega_r$ e quindi $\Omega_r = (1-s)\Omega_s$. La velocità massima si ha per $s = 0$.
Utilizzando le relazioni inoltre, $s = \frac{\Omega_s - \Omega_r}{\Omega_s} = \frac{\frac{\omega_2}{\cancel{p}}}{\frac{\omega_1}{\cancel{p}}} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$

Circuito equivalente elettrico



L_{1d} ed L_{2d} assumono valori molto più grandi del trasformatore in quanto i flussi devono attraversare il traferro, che deve quindi essere il più piccolo possibile.
Dalla relazione attraverso si evince inoltre che il circuito è improprio in quanto le due pulsazioni sono diverse e non si ha un regime periodico sinusoidale. Per farlo diventare a regime periodico sinusoidale cambiamo le grandezze del rotore

$X_{2d} = \omega_2 \cdot L_{2d}$ e $X_{2d\phi} = \omega_1 \cdot L_{2d}$: reattanza se si trovassero alla stessa pulsazione.
Avremo che $X_{2d\phi} = \omega_1 L_{2d} = X_{2d} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2}$ e quindi $X_{2d} = \frac{\omega_2}{\omega_1} X_{2d\phi} = \boxed{S X_{2d}}$
Sostituisce L_{2d}

Anche la tensione e la corrente si trovano ad ω_2 nel rotore. Abbiamo $\mathcal{E}_2 = i\omega_2 \phi N_2$ e chiamiamo nuovamente $\mathcal{E}_{2\phi} = i\omega_1 \phi N_2$. Sostituendo in $\mathcal{E}_2$ otteniamo $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{2\phi}\frac{\omega_2}{\omega_1} = \boxed{S\mathcal{E}_{2\phi}}$
Per calcolare $\bar{I}_2$ diremo che

$$\bar{I}_2 = \frac{-S\mathcal{E}_{2\phi}}{R_{2d}+iSX_{2d\phi}} = \frac{-\mathcal{E}_{2\phi}}{\boxed{\frac{R_{2d}}{S}}+iX_{2d\phi}} = \frac{-\mathcal{E}_{2\phi}}{R_{2d}+R_C+iX_{2d\phi}}$$

$$R_{2d}+R_C = \frac{R_{2d}}{S} \rightarrow R_C = \frac{R_{2d}}{S} - R_{2d} = \frac{1-S}{S}R_{2d}$$

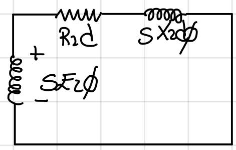
La resistenza R_C ha questo nome in quanto simula il carico meccanico collegato al rotore, quindi non ha un significato elettrico
↓ come possiamo capire il funzionamento?

Modalità	S	$\Omega_r = (1-S)\Omega_s$	$R_C = \frac{1-S}{S}R_{2d}$	$P_m = R_C I_2^2$	
generatore	$S<0$	$\Omega_r > \Omega_s$	$R_C < 0$	$P_m < 0$	→ Potenza erogata
rotore libero	$S=0$	$\Omega_r = \Omega_s$	$R_C \to +\infty$: Aperto nel circ. di rot.	$P_m \to 0$	→ Non stiamo fornendo potenza meccanica in uscita
motore	$0<S<1$	$\Omega_r < \Omega_s$	$R_C > 0$	$P_m > 0$	→ Potenza meccanica dissipata
rotore bloccato	$S=1$	$\Omega_r = 0$	$R_C = 0$	$P_m = 0$	→ Equivalente al circuito del trasformatore
freno	$S>1$	Ω_r e Ω_s hanno segno opposto	/	/	

Per calcolare i parametri facciamo le stesse prove del trasformatore
a. **Prova a vuoto** → Prova a rotore libero
b. **Prova in cortocircuito** → Prova a rotore bloccato

Calcolo della coppia

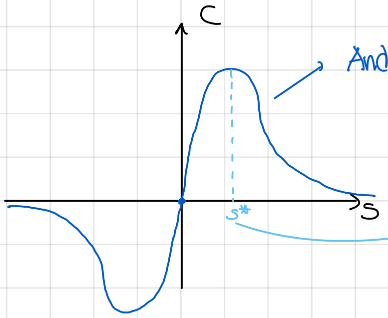
$$C = \frac{P_m}{\Omega_r} = \frac{R_C I_2^2}{(1-S)\Omega_s}$$



$$\bar{I}_2 = -\frac{S\mathcal{E}_{2\phi}}{R_{2d}+iSX_{2d\phi}}$$

$$I_2 = |\bar{I}_2| = \frac{S\mathcal{E}_{2\phi}}{\sqrt{R_{2d}^2+S^2X_{2d\phi}^2}}$$

$$C = \frac{R_C \cdot S^2\mathcal{E}_{2\phi}^2}{(1-S)\Omega_s \cdot (R_{2d}^2+S^2X_{2d\phi}^2)} = \frac{\frac{\cancel{1-S}}{S}R_{2d} \cdot S^2\mathcal{E}_{2\phi}^2}{\cancel{(1-S)}\frac{\omega_1}{p}\cdot(R_{2d}^2+S^2X_{2d\phi}^2)} = \frac{R_{2d}\cdot p\,\frac{\mathcal{E}_1^2}{m^2}}{\omega_1\left(\frac{R_{2d}^2}{S}+SX_{2d\phi}^2\right)}$$



$$\frac{\partial\left(\frac{R_{2d}^2}{S}+SX_{2d\phi}^2\right)}{\partial S} = 0 \rightarrow X_{2d\phi}^2 - \frac{R_{2d}^2}{S^2} = 0 \rightarrow X_{2d\phi}^2 = \frac{R_{2d}^2}{S^2} \rightarrow S^* = \frac{R_{2d}}{X_{2d\phi}}$$

aggiunte perchè se $R_{2d} + R_{add} = X_{2d\phi}$ la coppia massima è per $S=1$. Una volta raggiunta ene vengono eliminate.

Rendimento della macchina

$$\eta = \frac{P_{ut}}{P_{tot}} \% = \frac{R_c I_2^2}{R_c I_2^2 + R_{1d} I_1^2 + R_{2d} I_2^2 + \frac{V_1^2}{R_m} + P_{us}} \%$$

P_{us} → effetti fisici non rappresentati nel circuito