Soluzioni prova scritta

Ingegneria Informatica   14/01/2025

Esercizio 1

Il primo quesito consiste in 1 **domanda a risposta aperta** da 4 punti. Per i quesiti 2 e 3 ci si deve esprimere sulla **correttezza o falsità di 6 affermazioni**. Si ottengono 0, 1 e 2 punti in base al numero di risposte corrette, errori o risposte in bianco, secondo lo schema:

$$\begin{aligned} 6 \text{ corrette} &\to 2 \text{ punti} \\ 5 \text{ corrette} + 1 \text{ errore} &\to 1 \text{ punto} \\ 5 \text{ corrette} + 1 \text{ bianca} &\to 1 \text{ punto} \\ 4 \text{ corrette} + 2 \text{ bianche} &\to 1 \text{ punto} \\ \text{Tutti gli altri casi} &\to 0 \text{ punti} \end{aligned}$$

1. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia A_n la matrice $n \times n$

$$A_n := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

ovvero che ha le entrate uguali a 2 sulla diagonale principale ed uguali a 1 nel resto.

Si scriva il codice Matlab/Octave di una funzione `risolvi` che prende in ingresso il numero intero n e costruisce, **senza utilizzare cicli for o while**, la matrice A_n ed un vettore colonna b di dimensione n con entrate uguali ad i numeri interi da 1 ad n ($b_i = i$). La funzione deve restituire il vettore x, che risolve il sistema lineare $A_n x = b$.

```
function x = risolvi(n)
    A = ones(n) + eye(n);
    b = [1:n]';
    x = A \ b;
end
```

- N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire **chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi 2, 3 e 4**.

2. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice a predominanza diagonale forte, allora:

V $\boxed{\text{F}}$ A è invertibile.

$\boxed{\text{V}}$ F A ha solo autovalori reali.

$\boxed{\text{V}}$ F A è irriducibile.

V $\boxed{\text{F}}$ I cerchi di Gershgorin di A non contengono lo 0.

V $\boxed{\text{F}}$ I cerchi di Gershgorin di A hanno centri sull'asse reale.

$\boxed{\text{V}}$ F La traccia di A è diversa da 0.

3. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si indichi con $J(f)$ la formula di Simpson per l'approssimazione di $\int_a^b f(x)dx$ per $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

$\boxed{\text{V}}$ F Il grado di precisione della formula di Simpson è 2.

V $\boxed{\text{F}}$ $J_n(f)$ è esatta per $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$.

$\boxed{\text{V}}$ F $J_n(f)$ è esatta per $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$.

V $\boxed{\text{F}}$ I nodi della formula di Simpson sono equispaziati.

$\boxed{\text{V}}$ F La formula di Simpson è una formula Gaussiana.

V $\boxed{\text{F}}$ La formula di Simpson è una formula di Newton-Cotes.

4. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si indichino con $\boxed{\text{V}}$ le quantità che sono calcolate (utilizzando l'algoritmo più efficiente possibile) con complessità asintotica $\mathcal{O}(n^2)$ e con $\boxed{\text{F}}$ quelle con costi **maggiori o minori**.

V $\boxed{\text{F}}$ $||x||_2$ con $x \in \mathbb{R}^{n^2}$.

V $\boxed{\text{F}}$ $A + B$ con $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

V $\boxed{\text{F}}$ $A \cdot x$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{V}}$ F Calcolo della fattorizzazione LU di A con $A \in \mathbb{R}^{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}$.

$\boxed{\text{V}}$ F Calcolo del determinante di A con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$\boxed{\text{V}}$ F Soluzione del sistema lineare $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ triangolare inferiore.

Esercizio 2

Data la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(i) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Si calcoli la matrice di iterazione H_{GS} del metodo di Gauss-Seidel associata ad A e si determini se il metodo risulta convergente.

(ii) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Si calcoli la matrice di iterazione H_J del metodo di Jacobi associata ad A e, sapendo che $\frac{4}{9}$ è un autovalore di H_J, si determini se il metodo risulta convergente.

(i) La matrice di iterazione di Gauss-Seidel è

$$H_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} \\ 0 & \frac{4}{9} & -\frac{10}{27} \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} \end{bmatrix},$$

ed il metodo è convergente.

(ii) La matrice di iterazione di Jacobi è

$$H_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix},$$

ed il metodo non è convergente (si vede calcolandone gli autovalori).

Esercizio 3

Sia data la tabella di valori

x	-1	0	1	2
$f(x)$	γ	$1-\gamma$	γ^2	$\gamma-\gamma^2$

dipendente dal parametro $\gamma \in \mathbb{R}$.

(i) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Si determini l'espressione della retta r_γ che approssima $f(x)$ nel senso dei minimi quadrati.

(ii) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Se esistono, determinare per quali valori di γ la retta r_γ interpola $f(x)$ nei punti dati.

(i) L'espressione della retta di miglior approssimazione nel senso dei minimi quadrati è

$$r_\gamma(x) = \frac{\gamma - 2\gamma^2 - 1}{10}x + \frac{\gamma^2 + 2\gamma + 3}{10}.$$

(ii) Non esistono valori di γ per cui r_γ interpola i punti dati.

Esercizio 4

(i) $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si determini (giustificando la risposta) il numero di soluzioni reali dell'equazione

$$x + \frac{\log(\log(x))}{2} - 2 = 0.$$

(ii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Per ognuna delle soluzioni trovate al punto (i) si determini se il metodo iterativo

$$x_{k+1} = 2 - \frac{\log(\log(x_k))}{2},$$

è localmente convergente e, nel caso sia convergente, quale è il suo ordine di convergenza.

(iii) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Si consideri il sistema di equazioni non lineari

$$\begin{cases} x^2 - \sin(y) - 25 = 0 \\ y - \cos(x) = 0 \end{cases}$$

e si determinino le espressioni esplicite

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_k, y_k) \\ g(x_k, y_k) \end{bmatrix}$$

delle iterazioni associate ai metodi di Jacobi-Newton e Newton-Raphson.

(i) C'è una sola radice in $(1, \infty)$ (dominio della funzione) dato che la funzione è strettamente crescente e tende a meno infinito quando $x \to 1^+$ e a più infinito quando $x \to \infty$.

(ii) Il metodo converge localmente con ordine 1 (convergenza lineare).

(iii) Per Jacobi-Newton si ha:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{x_k^2 - \sin(y_k) - 25}{2x_k} \\ y_{k+1} &= \cos(x_k) \end{aligned}$$

Per Newton-Raphson si ha:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k - \frac{x_k^2 - \sin(y_k) - 25 + \cos(y_k)(y_k - \cos(x_k))}{2x_k + \sin(x_k)\cos(y_k)} \\
y_{k+1} &= y_k - \frac{-\sin(x_k)(x_k^2 - \sin(y_k) - 25) + 2x_k(y_k - \cos(x_k))}{2x_k + \sin(x_k)\cos(y_k)}
\end{aligned}
$$