FORMULARIO DI ALGEBRA

MATRICI E APPLICAZIONI LINEARI

1- MATRICE INVERSA

$M \times M^{-1} = Id$ C.N.S. ed A linearmente indipendenti

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \Rightarrow \text{RIDUCO A SCALA E APPLICO LE MOSSE GAUSSIANE} \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \\ 0 & 0 & a_{33} \end{array}\right| \quad |?|$$

2- DETERMINANTE

FUNZIONE DET $\Leftrightarrow$
- $\det(e_1 \dots e_n) = 1$
- $\det(A_1, A_2, A_3) = -\det(A_1, A_3, A_2)$
- $\det(A_1 + B_1, A_2 + B_2) = \det(A_1, A_2) + \det(B_1, B_2)$

E' MULTILINEARE

- $\det A^T = \det A$
- $\det AB = \det A \cdot \det B$ (TEOREMA DI BINET)
- SE DUE COLONNE O RIGHE SONO UGUALI ALLORA $\det A = 0$
- $A_1 \dots A_n$ dipendente $\Leftrightarrow \det(A_1 \dots A_n) = 0$

FORMULA DI CRAMER $\quad x = \dfrac{\det A(x)}{\det A}$ COLONNE DI x SOSTITUITE DAI TERMINI NOTI

- SE A DIAGONALE ALLORA $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_n$
- SE A TRIANGOLARE $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{nn}$

SVILUPPO DI LAPLACE

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot A_{ij} \cdot \boxed{\det A^{ij}}$$

MATRICE MINORE (TOLTE RIGA i e COLONNA j)

3- PRODOTTO TRA MATRICI

$A_{ij} \cdot B_{jk} = C_{ik} \qquad ij \cdot jk = ik$

4- MATRICE DI CAMBIO DI BASE

1- det MATRICE DELLA BASE DI PARTENZA

2- FORMULA DI CRAMER PER OGNI COLONNA DELLA BASE D'ARRIVO

$$\frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}} = a^*_{11}$$

$$\frac{\det(A)}{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} = a^*_{21} \Rightarrow \text{MATRICE DI CAMBIO DI BASE} \begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} \\ a^*_{21} & a^*_{22} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}{\det(A)} = a^*_{12} \qquad \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}{\det(A)} = a^*_{22}$$

5- NUCLEO, IMMAGINE E RANGO

Ker A è l'insieme dei vettori dati dalle soluzioni di $Ax=0$

es:

$$\mathbb{R}^3 \quad A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{cases} xa_{11}+ya_{12}+za_{13} \\ xa_{21}+ya_{22}+za_{23} \\ xa_{31}+ya_{32}+za_{33}\end{cases}$$

$\dim X = \dim \mathrm{Ker} + \dim \mathrm{Im}(x)$ $\qquad$ $\mathrm{Ker}\, A = \begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{Bmatrix}$

RANGO: NUMERO DI PIVOT NON NULLI IN UNA MATRICE RIDOTTA CON ~~GAUSS~~ GAUSS

Se $\mathrm{Ker}\, A = 0$ ALLORA L'APPLICAZIONE È INIETTIVA

$\underbrace{\text{Se } \mathrm{RK}\, A = m \quad \text{ALLORA } \dim \mathrm{Im}(A) = m}_{\text{CRITERIO NECESSARIO}}$ $\qquad A(x) = y$

6- MATRICE ASSOCIATA AD UN OPERATORE LINEARE

$$\langle A \rangle \xrightarrow[T]{A(u)} \langle B \rangle \qquad A(u) = T$$

① PRENDO LA BASE DELLO SPAZIO DI PARTENZA, APPLICO T

② ORA T(A) COME COMBINAZIONE LINEARE DELLA BASE DELLO SPAZIO DI ARRIVO

$T(A)_1 = a_{11}\cdot B_1 + a_{21}\cdot B_2 + \dots + a_{m1}\cdot B_m$

$\vdots$

$T(A)_m = a_{m1}\cdot B_1 + \dots \qquad \dots + a_{mm}\cdot B_m$

TEORIA SPETTRALE

7- DIAGONALIZZAZIONE

- CRITERI DI DIAGONALIZZAZIONE IN $\mathbb{R}$
  1. MATRICE QUADRATA (NECESSARIA)
  2. $\sum \mu_i = \dim X$
  3. $\mu_i = \dim A_{\lambda_i} \equiv \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_i \mathrm{Id})$

- CRITERIO DI DIAGONALIZZABILITÀ IN $\mathbb{C}$

  $\forall \lambda_i \in$ SPETTRO $\Rightarrow \mu_i = \dim A_{\lambda_i}$

+ SE LA SOMMA DELLE DIMENSIONI DI TUTTI GLI AUTOVALORI È $\dim X$ ALLORA È DIAGONALIZZABILE

8- FORMA QUADRATICA

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + exy + dyz + fxz$$

$$\begin{vmatrix} a & e/2 & f/2 \\ e/2 & b & d/2 \\ f/2 & d/2 & c \end{vmatrix}$$

STUDIO DEL SEGNO STUDIANDO LA MATRICE RIDOTTA CON GAUSS-JORDANE

- DEFINITA POSITIVA: $\forall \lambda_i > 0$
- SEMI DEFINITA POSITIVA: $\forall \lambda_i > 0$ e $\exists$ ALMENO UN $\lambda = 0$
- DEFINITA NEGATIVA: $\forall \lambda_i < 0$
- SEMIDEFINITA NEGATIVA: $\forall \lambda_i < 0$ ALMENO UN $\lambda = 0$
- INDEFINITA: ALMENO DUE λ_i DISCORDI

9- SPETTRO IN BASE SPETTRALE

$A(u) = \lambda u$, $u \neq 0$ $\quad \forall u \neq 0 : A(u) = \lambda u$ DIRÒ AUTOVETTORE RELATIVO A λ

AUTOSPAZIO: INSIEME DI TUTTI GLI AUTOVETTORI RELATIVI A λ

SPETTRO: $\sigma(A)$: INSIEME DI TUTTI GLI AUTOVALORI DI A

BASE SPETTRALE: C.N.S. AFFINCHÉ A SIA DIAGONALIZZABILE È CHE ESISTA UNA BASE DI X FORMATA DA AUTOVETTORI DI A, DETTA BASE SPETT

GEOMETRIA ANALITICA

10- PROIEZIONE SU UN SOTTOSPAZIO

$$\underbrace{(d,b,c)}_{v} \text{ su } \underbrace{\langle (U_1),(U_2) \rangle}_{U}$$

$\Rightarrow$ GRAM - SCHMIDT $\qquad w_1 = u_1 \qquad e_1 = \dfrac{w_1}{\|w_1\|}$

$$w_2 = u_2 - \frac{u_2 w_1}{w_1 w_1} w_1 \qquad e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$$

$$P_{V_U} = P_{Ve_1} + P_{Ve_2} \qquad w_3 = u_3 - \frac{u_3 w_1}{w_1 w_1} w_1 - \frac{u_3 w_2}{w_2 w_2} w_2$$

11- PROIEZIONE

$$P_{Vu} = \frac{V \cdot u}{\|u\|^2} \cdot u$$

+ CALCOLO DISTANZA FRA RETTE SCHEMBE

$$u \times v = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\det \begin{matrix}0&1\\2&3\end{matrix} = -2 \qquad -\det \begin{matrix}1&2\\2&3\end{matrix} = 1 \qquad \det \begin{matrix}1&2\\0&1\end{matrix} = 1$$

$x_0 + V_{DIR}\, t \qquad y_0 + V_{DIR}\, s$

$$d = \frac{|(x_0 - y_0) \cdot u \times v|}{\|u \times v\|}$$

+ RETTE COINCIDENTI

SE $\alpha = 1$ $u \parallel$ $\qquad V_{DIR}\, t = \alpha V_{DIR}\, s$

12- DISTANZE E RELAZIONI TRA RETTE

① $\gamma(t)$ e $\sigma(s)$: $\gamma(t) - \sigma(s)$ VETTORE DIFFERENZA

es: $\underbrace{(1,0,0)+t(1,1,2)}_{\text{VETTORE DIRETTORE}} \Rightarrow (1+t, t, 2t)-(s, 2s, 3s) = (1+t-s, t-2s, 2t-3s)$

② $\begin{cases} V_{\text{DIRETTORE DI } t} \cdot V_{\text{DIFFERENZA}} = 0 \\ V_{\text{DIRETTORE DI } s} \cdot V_{\text{DIFFERENZA}} = 0 \end{cases}$ RISOLVO IN s e t TROVO s^* e t^*

③ SOSTITUISCO s^* e t^* IN $\gamma(t)$ e $\sigma(s)$

$$\| V_{\text{DIR } t^*} - V_{\text{DIR } s^*} \|$$

+ RELAZONI TRA RETTE

PONGO $\gamma(t) = \sigma(s) \Rightarrow \begin{Bmatrix} '' & '' \\ '' & '' \end{Bmatrix}$

VETT IND	VETT. DIP	
SGHEMBE	''	INT VUOTA
COINCIDENTI	INCIDENTI	INT NON VUOTA

ⓐ SE IL SISTEMA NON HA ~~DEI SOLUZIONI~~ SOLUZIONE LE RETTE SONO SGHEMBE, SE I VETTORI DIRETTORI SONO INDIPENDENTI. SE SONO DIPENDENTI SONO PARALLELE

ⓑ SE IL SISTEMA HA SOLUZIONE SONO COINCIDENTI, SE I VETTORI DIRETTORI SONO INDIPENDENTI SONO INCIDENTI.

13- SOMMA DI SOTTOSPAZI E RELAZIONE TRA SOTTOSPAZI

$X+Y$ es: $X = (1,1,1), (0,1,1)$ $M_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ APPLICO GAUSS $\begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

① ESTRAGGO LE BASI DA X e Y

② TROVO LE DIMENSIONI DI X e Y

③ TROVO $B_{X+Y} = B_X \cup B_Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GAUSS}}$ TROVO IL RK = dim $X+Y$

④ SE dim $X+Y$ = dim X + dim Y ALLORA LA SOMMA E' ⊕

14- COMPLEMENTO ORTOGONALE

① PRENDO LO SPAZIO, SCRIVO I VETTORI COME VETTORI RIGA E LI MOLTIPLICO PER UN VETTORE x, y, z etc.

es: $(1,2,0,0), (1,0,-1,1)$

② $\begin{cases} x+2y=0 \\ x-z+w=0 \end{cases}$ RISOLVO IL SISTEMA ESCRIVO LA DIREZIONE $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} '' \\ '' \end{pmatrix}$

③ RACCOLGO QUANTI PARAMETRI LIBERI

$W < \begin{pmatrix} '' & '' \\ '' & '' \end{pmatrix}$

15- FORMULE GEOMETRICHE

+ BISETTRICE E ANGOLO

DUE VETTORI FORMANTI UN ANGOLO (u e v)

$\|u\|$ e $\|v\|$ $\qquad \frac{1}{\|u\|}(u) \qquad \frac{1}{\|v\|}(v)$ ← VERSORI

$\frac{u}{\|u\|}+\frac{v}{\|v\|}$ ← BISETTRICE $\qquad \tilde{u} = \frac{u}{\|u\|}$ ← VERSORE

$\cos\theta = \frac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|}$ $\qquad \boxed{\theta = \arccos(\tilde{u}\cdot\tilde{v})}$ ← ANGOLO

+ AREE

|PRODOTTO VETTORE|: $\quad |u \wedge v| = \sqrt{\underbrace{\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}}_{\det}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2} = \text{AREA}(u,v)$

$a\times(b\times c) = b(c\cdot d) - c(a\cdot b)$

3 VETTORI $\quad$ AREA: $|b(c\cdot d) - c(a\cdot b)|$

16- FORMULE EXTRA

$A(u) = Au$

$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

A è UNA 2×3 $\qquad A = \begin{cases} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{cases} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$A = \begin{cases} \quad '' \quad \end{cases} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

+ PRODOTTO AA^T È SEMPRE UNA MATRICE SIMMETRICA

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&4&4\\4&6&5\\4&5&6\end{pmatrix}$$

+ PRODOTTO RIGA COLONNA

$(1\,1\,1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 = 3$

$(1\,1\,1)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot2+1\cdot1+1\cdot1 = 4$

$(1\,1\,1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 1\cdot1+1\cdot1+1\cdot2 = 4$

+ RELAZIONE TRA SOTTOSPAZI

1 $X \subseteq \quad x_i \in Y \ \forall i \qquad y_1 \cdots y_m \mid x_1 \cdots x_m\}$

RIDUCO CON GAUSS E MI ACCERTO DI POTER SCEGLIERE SOLO NELLE COLONNE $y_1 \cdots y_m$

$X \cap Y = \{z \in X \text{ e } z \in Y\}$

$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

DEFINIZIONI BREVI PIÙ CHIESTE ALL'ORALE!

① INDIPENDENZA DI $V_1 \cdots V_m$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i V_i = a_1 V_1 + \cdots a_m V_m = 0$$ È VERIFICATA SOLO SE $a_1 \cdots a_m = 0$

② COSENO PER L'ANGOLO FRA DUE VETTORI NON NULLI

$$\cos \widehat{uv} = \frac{uv}{|u||v|}$$

③ APPLICAZIONE INIETTIVA E SURIETTIVA

INIETTIVA: $\forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

SURIETTIVA: SIA $f: X \to Y$ SE $\forall y \in Y,\ \exists x \in X : f(x) = y$

④ MATRICE ASSOCIATA A T E A SULLE DUE BASI

$$\mathcal{A}(e_i) = \sum_{1}^{m} A_{ji} e'_j \qquad \mathcal{A}(u) = A_{ji} u_i e'_j \qquad u_i e_i = u$$

⑤ AUTOVETTORE E AUTOSPAZIO (E AUTOVALORE)

SIA $T: V \to V$ SE V È UN VETTORE IN V E $V \neq 0$ E $\exists \lambda$ È UNO SCALARE TALE C

$$T(v) = \lambda v$$

ALLORA V È UN AUTOVETTORE E λ IL SUO AUTOVALORE

AUTOSPAZIO: SPAZIO VETTORIALE GENERATO DAGLI AUTOVETTORI RELATIVI A UN CERTO AUTOVALORE

$S = \langle V_1 \cdots V_k \rangle$ CON $V_1 \cdots V_k$ AUTOVETTORI RELATIVI A λ_1

⑥ MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA: DIMENSIONE AUTOSPAZIO

AUTOSPAZIO DI λ_1 È $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 Id)$

⑧ SPAN DI X

$$X = \langle u_1 \cdots u_m \rangle := \left\{ \sum_{1}^{m} \alpha_i u_i ;\ \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

⑨ COMPLEMENTO ORTOGONALE

$$W^{\perp} = \{ x \in X ;\ xw = 0,\ \forall w \in W \}$$

⑩ ELEMENTO ij DEL PRODOTTO TRA MATRICI

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ E $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$: $c_{ij} = A_{in} B_{nj}$

⑭ APPLICAZIONE LINEARE

$\mathcal{A}: X \to Y$ VERIFICANTE

① $\mathcal{A}(x + x') = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(x')\ \forall x, x' \in X$ ADDITIVITÀ

② $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x)$ OMOGENEITÀ

⑮ INIETTIVA E SURIETTIVA

$\forall x, y \in X,\ \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y) \to x = y$

$\forall y \in Y,\ \exists x \in X : \mathcal{A}(x) = y$

(16) PRODOTTO TRA DUE MATRICI

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow AB \in \mathbb{R}^{m \times p}$

$(AB)_{ij} = A_{ih} B_{hj} = \sum_{h=1}^{n} A_{ih} B_{hj}$

(17) A AUTOAGGIUNTA

AGGIUNTA

$A \in \mathbb{C}^{m \times n}, A^* \in \mathbb{C}^{n \times m} : (A^*)_{ij} = \bar{A}_{ji}$

SE $A = A^*$, LA MATRICE È DETTA AUTOAGGIUNTA

(18) COSENO DELL'ANGOLO FRA DUE VETTORI NON NULLI

$\cos \widehat{uv} = \frac{uv}{|u||v|}$

(19) DIMENSIONE

NUMERO DI GRADI DI LIBERTÀ DI UN PUNTO MATERIALE NELLO SPAZIO $\mathbb{R}^n$ ALLORA n SI DICE dim DI $\mathbb{R}$

(20) NORMA

$\forall u \in \mathbb{R}^n \; |u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots u_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$

(21) DISTANZA

$\forall u, v \in \mathbb{R}^n \; d(u,v) = |u-v|$

(22) MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA

DIMENSIONE AUTOSPAZIO

(23) ELEMENTO ij DEL PRODOTTO TRA MATRICI

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times p} : a_{ij} = A_{ih} B_{hj}$

(24) VERSORE

$\frac{u}{|u|}$

(25) AREA PARALLELOGRAMMA O TRIANGOLO

<u>AREA PARALLELOGRAMMA:</u> $(u,v) = \sqrt{|u|^2 |v|^2 - (uv)^2}$

<u>AREA TRIANGOLO:</u> $(u,v) = \frac{1}{2} \text{AREA}_P (u,v)$

DIMOSTRAZIONI x ORALE

① FORMULA DI CRAMER

SIANO $A_1 .. A_m$ INDIPENDENTI. ALLORA LA SOLUZIONE $(x_1 .. x_m)$ DEL SISTEMA LINEARE $\sum x_i A_i = B$ ESISTE, E' UNICA, E VERIFICA:

$$x_i = \frac{\det(A_1 \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1} \dots A_m)}{\det(A_1, \dots, A_m)}$$

DIMOSTRAZIONE

① POICHE' $A_1 .. A_m$ SONO INDIPENDENTI $\det(A_1 .. A_m) \neq 0$. INOLTRE $A_1 .. A_m$ SO[illegible] UNA BASE E DUNQUE $\sum x_i A_i = B$ HA SOLUZIONE UNICA $\forall B \in \mathbb{R}^m$

② PROVIAMO PER $i=1$. SI HA ALLORA CHE $B = \sum_{i=1}^{m} x_i A_i$,

$$\det(B, A_2, .. A_m) = \det\left(\sum_i^m x_i A_i, A_2, .. A_m\right) = \sum_i^m x_i \det(A_1 .. A_m) = x_i \det(A_1 .. A_m$$

PERCHE' $\det(A_1 .. A_m) = 0 \quad \forall i = 2 .. m$ AVENDO COLONNE UGUALI

DIVIDENDO PER $\det(A_1 .. A_m) \neq 0$ SEGUE LA TESI $\square$

③ CNS $A_1 \dots A_m$ DIP $\rightarrow \det(A_1 .. A_m) = 0$

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE POICHE' $A_1 .. A_m$ SIANO DIPENDENTI E' CHE $\det(A_1 .. A_m) = 0$

DIMOSTRAZIONE

① $A_1 .. A_m$ DIPENDENTI $\Rightarrow \det(A_1 .. A_m) = 0$

INFATTI UNO DEI A_i E' COMBINAZIONE DEGLI ALTRI

④ LEMMA DI SCAMBIO

SIA $B \in \langle A_1 \dots A_m \rangle$, $B \neq 0$, ALLORA PER QUALCHE i FRA 1 E m $\langle A_1 .. A_m \rangle = B \{A_i$

E CIOE' B PUO' SOSTITUIRE UNO DEGLI A_i SCELTO OPPORTUNAMENTE SENZA ALTERARE LO SPAZIO GENERATO

DIMOSTRAZIONE

① DALL'IPOTESI SEGUE $B = \sum^m \alpha_i A_i$, $B \neq 0$, $\exists j : \alpha_j \neq 0$.

② ALLORA $B = \alpha_j A_j + \sum_{i \neq j} \alpha_i A_i \Rightarrow A_j = \frac{1}{\alpha_j} B - \sum \frac{\alpha_i}{\alpha_j} A_i$

③ DAL LEMMA FONDAMENTALE ESSENDO $B = \sum \alpha_i A_i$ SEGUE CHE $\langle A_1 .. A_m \rangle = \langle A_1 ..$ ESSENDO $A_j \in \langle B, A_i : i \neq j \rangle$ SEGUE CHE:

④ $\langle A_1 .. A_m, B \rangle = \langle \{A_i : i \neq j\}, B \rangle$, POICHE' A_j E' DIPENDENTE DA B E DAGLI ALTRI PUO' ESSERE ELIMINATA SENZA ALTERARE LO SPAN.

⑤ LEMMA FONDAMENTALE

$\langle A_1 .. A_m \rangle = \langle A_2 .. A_m \rangle$ SE E SOLO SE A_1 E' COMBINATORIO LINEARE DI $A_2 \dots A$

DIMOSTRAZIONE

① $\langle A_2 \dots A_m \rangle \subseteq \langle A_1 .. A_m \rangle$ IN OGNI CASO, SE $\langle A_1, A_2 \dots A_m \rangle = \langle A_2 \dots A_m \rangle$ SI HA $A_1 \in \langle A_2 .. A_m \rangle$ E DUNQUE $A_1 = \sum_2^m \alpha_i A_i$ ALLORA ↯

② SE $B \in \langle A_1 .. A_m \rangle$ SI HA $B = \sum_1^m \beta_i A_i = \beta_1 A_1 + \sum_2^m \beta_j A_j = \beta_1 \sum_2^m \alpha_i A_i + \sum_2^m \beta_j A_j$ DUNQU[illegible]

$B \in \langle A_2 .. A_m \rangle$ $\square$

⑥ CNS SOMMA DIRETTA

CNS PERCHÉ $\sum_{i=1}^{m} X_i = \bigoplus_{i=1}^{m} X_i$ è CHE $\forall x_i \in X_i$ $\sum_{i=1}^{m} x_i = 0 \Rightarrow x_i = 0$ $\forall i = 1..m$

DIMOSTRAZIONE

① CNS SIANO $x_i \in X_i$ TALI CHE $\sum_i^m x_i = 0$ POICHÉ $0 \in X_i$ $\forall i$ e $\sum_i^m x_i = 0 = \sum_i^m 0$

DAL FATTO CHE LA SOMMA È DIRETTA SEGUE CHE $x_i = 0$ $\forall i = 1..m$

② CS SIANO $x_i, x_i' \in X_i$ TALI CHE $\sum_i^m x_i = \sum_i^m x_i'$ SEGUE CHE $\sum_i^m (x_i - x_i') = 0$ E DALL'IPOTESI

$x_i - x_i' = 0$ $i = 1..m$ □

⑦ TEOREMA DI UNICITÀ DELLA PROIEZIONE

SIA W UN SOTTOSPAZIO DI X. SIANO INOLTRE $v, w \in W$ TALI CHE $x - w \in W^\perp$ E $x - v \in W^\perp$ ALLORA $v = w$

DIMOSTRAZIONE

① SI ASSUME CHE ENTRAMBI I VETTORI v e w DEFINISCANO UNA PROIEZIONE DEL VETTORE x SULLO SPAZIO W, IN QUANTO $u - v$ e $v - w \in W^\perp$. POICHÉ $W^\perp$ È UN SOTTOSPAZIO SI HA CHE

② $w - v = (x - v) - (x - w) \in W^\perp$ e POICHÉ $w, v \in W$ MA ANCHE A $W^\perp$ DAL LEMMA SEGUE $w - v = 0$ □

⑩ DECOMPOSIZIONE ORTOGONALE

$\forall u, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, $(u - P_v u)$ e $P_v u$ SONO ORTOGONALI

DIMOSTRAZIONE

SI VERIFICA IMMEDIATAMENTE CHE $(u - P_v u) \cdot v = 0$, e LA TESI SEGUE RICORDANDO CHE $P_v u$ È MULTIPLO DI v.

⑨ TEOREMA DI EUCLIDE-VIETE (CARNOT)

DATI u e v IN $\mathbb{R}^n$, VALE L'IDENTITÀ ~~$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$~~

$$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \widehat{uv}$$

DIMOSTRAZIONE

BASTA RICORDARE L'ESPRESSIONE DEL COSENO DOPO AVER SVILUPPATO IL PRIMO MEMBRO.

⑪ MINIMA DISTANZA

SIA $v \neq 0$. ALLORA, $\forall u \in X$, SI HA: $|u - u_v| \leq |u - w|$ $\forall w \in \langle v \rangle$

E CIOÈ LA PROIEZIONE DI MINIMA DISTANZA DA u.

DIMOSTRAZIONE

SI HA $|u - w|^2 = |u - u_v + u_v - w|^2 = |u - u_v|^2 + |u_v - w|^2 \geq |u - u_v|^2$

⑫ TEOREMA DI PITAGORA

SIANO u e v ORTOGONALI IN $\mathbb{R}^n$. ALLORA $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2$

DIMOSTRAZIONE

SVILUPPANDO IL "QUADRATO DEL BINOMIO" AL PRIMO MEMBRO SI OTTIENE $|u|^2 + |v|$ E ESSENDO u e v ORTOGONALI VALE $uv = 0$

(15) IDENTITÀ DEL PARALLELOGRAMMA

DATI u e v IN $\mathbb{R}^n$ VALE L'IDENTITÀ $|u+v|^2+|u-v|^2 = 2(|u|^2+|v|^2)$

DIMOSTRAZIONE:

BASTA SVILUPPARE I QUADRATI AL PRIMO MEMBRO E SEMPLIFICARE. IL NOME DERIVA DAL FATTO CHE ESSO ASSERISCE CHE IN UN PARALLELOGRAMMA LA SOMMA DEI QUADRATI DELLE DIAGONALI È UGUALE ALLA SOMMA DEI QUADRATI DI TUTTI I...

(16) EQUIVALENZA DELLE DISUGUAGLIANZE

$\forall u,v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |u+v|^2 \leq (|u|+|v|)^2$

DIMOSTRAZIONE

$|u+v|^2 = (u+v)(u+v)$ $\qquad |u|^2+2uv+|v|^2 \leq |u|^2+2|uv|+|v|^2$

E CIOÈ $uv \leq |uv|$ SOSTITUISCO v CON $-v$ $\quad -uv \leq |uv|, \Rightarrow |uv| \leq |uv| \ \forall u,$

DIMOSTRO L'EQUIVALENZA TRA LE DUE DISUGUAGLIANZE □

(17) $|uv| \leq |u|$

$\forall u \in \mathbb{R}^n$ (e in $\mathbb{C}^n$), e $\forall v \neq 0$ SI HA $|uv| \leq |u|$

DIMOSTRAZIONE

BASTA OSSERVARE CHE

$|u|^2 = |uv + (u-uv)|^2 = |uv|^2 + |u-uv|^2 \geq |uv|^2$

(18) CNS MATRICI E INVERTIBILITÀ

A È INVERTIBILE $\Leftrightarrow$ $A_1 \dots A_n$ INDIPENDENTI (SONO UNA BASE DI $\mathbb{R}^n$)

DIMOSTRAZIONE

(1) IL PRODOTTO TRA MATRICI NON È COMMUTATIVO, LA RISOLUZIONE DI $Ax = I$ NON IMPLICA QUELLO DI $YA = I$

LEMMA (1)

SE A È DOTATA DI INVERSA DESTRA E SINISTRA, ALLORA ESSE COINCIDONO

DIMOSTRAZIONE

$x, y : YA = Ax = I \Rightarrow x = Ix = (YA)x = Y(Ax) = YI = y$

BISOGNA PROVARE CHE L'ESISTENZA DI UNA INVERSA IMPLICA L'ESISTENZA DELL'ALTRA, CONSEGUENZA IMMEDIATA DEL

LEMMA (2)

SIANO $a_1 \dots a_m \in X$ $\quad \dim X = n > 0$

IL SISTEMA $\begin{cases} a_1 x = 0 \\ a_2 x = 0 \\ \vdots \\ a_m x = 0 \end{cases}$ HA LA SOLUZIONE $x = 0$

$a_1 \dots a_m$ INDIPENDENTI

(19) TEOREMA DI CRAMER PER LE APPLICAZIONI LINEARI

SIA $A: X \to Y$ LINEARE, CON X e Y SPAZI VETTORIALI DI UGUALE DIMENSIONE FINITO. ALLORA A È INIETTIVA SE E SOLO SE È SURIETTIVA

DIMOSTRAZIONE

A INIETTIVA $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} A = 0$ $\Leftrightarrow$ $\dim A(x) = \dim X$ $\Leftrightarrow$ $\dim A(x) = \dim Y$ $\Leftrightarrow$

$A(x) = Y$ $\Leftrightarrow$ $A: X \to Y$ SURIETTIVA.

(21) TEOREMA DI GRASSMANN SUL NUCLEO E L'IMMAGINE DI UN'APPLICAZIONE LINEARE

SIA $A: X \to Y$ LINEARE, CON $\dim X < \infty$. ALLORA $\dim X = \dim \operatorname{Ker} A + \dim A(X)$

DIMOSTRAZIONE
- ① $\dim A(X) = 0$
- ② $\dim \operatorname{Ker} A = 0$
- ③ $\dim \operatorname{Ker} A > 0$ e $\dim A(X) > 0$

① I $\dim A(X) = 0 \iff A(X) = \{0\} \Rightarrow A(x) = 0 \ \forall x \in X$ e DUNQUE $\operatorname{Ker} A = X$

DA CUI SEGUE LA TESI

② I $\dim \operatorname{Ker} A = 0 \iff A$ è INIETTIVA

SIA $e_1 \dots e_m$ UNA BASE PER X CHE ESISTE PERCHÉ X È DI DIMENSIONE FINITA

II ALLORA $\forall x \in X \ \exists a_1 \dots a_m : x = \sum_1^m a_i e_i$ E DA CIÒ $A(x) = A\left(\sum_1^m a_i e_i\right) = \sum_1^m a_i A(e_i)$

$\Rightarrow A(X) = \langle A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_m) \rangle$ E DUNQUE $\dim A(X) \leq m$

III PONIAMO $A(X) = m$ E QUINDI L'INDIPENDENZA DI $A(X)$ $\sum a_i A(e_i) = 0 \Rightarrow A\left(\sum_1^m a_i e_i\right)$

E POICHÉ $\dim \operatorname{Ker} A = 0 \iff \operatorname{Ker} A = \{0\}$ NE SEGUE $\sum_1^m a_i e_i = 0$, DALL'INDIPENDENZA DI e_i SEGUE $a_i = 0$

IV DUNQUE $A(e_1) \dots A(e_m)$ È UN S. GENER. IND. DI $A(X)$ E DUNQUE UNA SUA BASE, DUNQUE $A(X) = m$ DA CUI LA TESI

③ I $\dim \operatorname{Ker} A > 0$ e $\dim A(X) > 0$

SIA $w_1 \dots w_k$ UNA BASE PER $\operatorname{Ker} A$. $\dim \operatorname{Ker} A = k > 0$

SIA $w_1 \dots w_k \ x_{k+1} \dots x_m$ UNA BASE DI X. $\forall x \in X$

$\exists \alpha_1 \dots \alpha_k, \beta_{k+1} \dots \beta_m$ TALI CHE:

II $x = \sum_1^k \alpha_i w_i + \sum_{k+1}^m \beta_j x_j$ DA CUI SEGUE $A(x) = A\left(\sum_1^k \alpha_i w_i\right) + A\left(\sum_{k+1}^m \beta_j x_j\right) = \sum_{k+1}^m \beta_j A(x_j)$

POICHÉ $w_i \in \operatorname{Ker} A$ E $\sum \alpha_i w_i \in \operatorname{Ker} A$ E IL PRIMO TERMINE SI ANNULLA, DUNQUE

III $A(X) = \langle A(x_{k+1}), A(x_{k+2}) \dots (A(x_m) \rangle$ PONIAMO L'INDIPENDENZA:

$\sum_{k+1}^m \lambda_j A(x_j) = 0$ PER LINEARITÀ $A\left(\sum_{k+1}^m \lambda_j x_j\right) = 0$ E DUNQUE

$\sum_{k+1}^m \lambda_j x_j \in \operatorname{Ker} A$ ESSENDO $w_1 \dots w_k$ UNA BASE PER $\operatorname{Ker} A$, $\exists \alpha_1 \dots \alpha_k$

TALI CHE $\sum_{k+1}^m \lambda_j x_j = \sum_{i=1}^k \alpha_i w_i$

IV POICHÉ $w_1 \dots w_k, x_{k+1} \dots x_m$ SONO UNA BASE DI X, E SONO QUINDI INDIPENDENTI NE SEGUE CHE

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_k = \lambda_{k+1} = \lambda_m = 0$$

DA CUI L'INDIPENDENZA DI $A(x_{k+1}) \dots A(x_m)$. NE SEGUE $\dim A(X) = m - k$

E POICHÉ $\dim \operatorname{Ker} A = k$ SEGUE LA TESI. $\square$

(22) TEOREMA DI GRASSMANN PER I SOTTOSPAZI

SIANO X e Y SOTTOSPAZI DI UNO SPAZIO VETTORIALE Z, DI DIMENSIONE FINITA ALLORA:

$$\dim X+Y + \dim X\cap Y = \dim X + \dim Y$$

DIMOSTRAZIONE

(1) $\dim X\cap Y = 0 \iff X\cap Y = \{\emptyset\}$

SE $X\cap Y = \{\emptyset\}$ LA SOMMA $X+Y$ È DIRETTA, E DUNQUE $\dim X+Y = \dim X + \dim Y$ CHE È LA TESI

(2) $\dim X\cap Y > 0$

TUTTI GLI SPAZI $X+Y$; X, Y; $X\cap Y$ SONO SOTTOSPAZI DI Z, DI DIMENSIONE FINITA, ED ESSENDO TUTTI DI DIMENSIONE NON NULLA IN QUANTO $X \supseteq X\cap Y$, $Y \supseteq X\cap Y$, SONO DOTATI DI BASI PER TH DI ESISTENZA DELLA BASE (25)

SIA $w_1 \dots w_k$ UNA BASE DI $X\cap Y$, DA CUI $\dim X\cap Y = k$.
SIANO $w_1 \dots w_k, x_{k+1} \dots x_n$ E $w_1 \dots w_k y_{k+1} \dots y_m$ DUE BASI OTTENUTE DA TEOREMA DEL COMPLETAMENTO (26). DALLE DEFINIZIONI DI $\dim$, $\dim X = n$, $\dim Y = m$ VERRÀ PROVATO CHE $w_1 \dots w_k x_{k+1} \dots x_n, y_{k+1} \dots y_m$ FORMANO UNA BASE PER $X+Y$ E QUINDI CHE $\dim X+Y = n+m-k$

(3) PONIAMO $X+Y = \langle w_1, \dots, w_k, x_{k+1}, \dots x_n, y_{k+1} \dots y_m \rangle$

SIA $z \in X+Y$ e $x \in X$ e $y \in Y$: $z = x+y$

POICHÉ $x = \langle w_1, \dots w_k, x_{k+1} \dots x_n \rangle$ SEGUE CHE ESISTONO α_i, β_j TALI CHE

$$\begin{cases} x = \sum_1^k \alpha_i w_i + \sum_{k+1}^n \beta_j x_j \\ y = \sum_1^k \alpha_i w_i + \sum_{h=k+1}^m \gamma_h y_h \end{cases}$$

(4) DUNQUE $z = \sum_1^k \alpha_i w_i + \sum_{k+1}^n \beta_j x_j + \sum_1^k \alpha_i w_i + \sum_{h=k+1}^m \gamma_h y_h$ E DUNQUE $z \in \langle w_1, \dots w_k, x_{k+1} \dots x_n, y_{h} \dots$

SUPPONIAMO $\underbrace{\sum_1^k \alpha_i w_i}_{w} + \underbrace{\sum_{k+1}^n \beta_j x_j}_{x} + \underbrace{\sum_{h=k+1}^m \gamma_h y_h}_{y} = 0$ (*)

(5) DIMOSTRIAMO $\alpha_i, \beta_j, \gamma_h = 0$

$w + x = -y \Rightarrow y \in X\cap Y$

$w + x + y = 0 \qquad (\underset{X\cap Y}{w+y}) + \underset{\in X}{x} = 0$

$\langle w_1 \dots w_k \rangle \langle x_{k+1} \dots x_n \rangle$

POICHÉ $w_1 \dots w_k, x_{k+1} \dots x_n$ FORMANO UNA BASE DI X PER UN LEMMA SEGUE CHE $X = \langle w_1 \dots w_k \rangle \oplus \langle x_{k+1} \dots x_n \rangle$ E DUNQUE DALLA DEFINIZIONE DI SOMMA DIRETTA SEGUE ANCORA: $w - y = 0$ $x = 0$. INFINE POICHÉ $0 = x = \sum_{k+1}^n \beta_j x_j = 0$ ESSENDO $x_{k+1} \dots x_n$ INDIPENDENTI SEGUE $\beta_j = 0$ $\forall j = k+1 \dots n$

SOSTITUENDO IN (*) SI HA $\sum_1^k \alpha_i w_i + \sum_{h=k+1}^m \gamma_h y_h = 0$

DALL'INDIPENDENZA DI $w_1 \dots w_k, y_{k+1} \dots y_m$ NE SEGUE INFINE $\alpha_i = 0$ e $\gamma_h = 0$ $\forall i, h$ CHE CON $\beta_j = 0$ DÀ LA TESI $\square$

(23) TEOREMA DEI GENERATORI

SIA X UNO SPAZIO DI DIMENSIONE FINITA. ALLORA, QUALUNQUE SISTEMA DI m VETTORI DI X, CHE SIANO INDIPENDENTI, È UNA BASE DI X. INOLTRE OGNI SISTEMA DI m GENERATORI DI X È UNA BASE.

DIMOSTRAZIONE

1. SIA $y_1 .. y_m$ UN QUALUNQUE SISTEMA INDIPENDENTE IN X. SE FOSSE $\langle y_1 .. y_m \rangle \subset$ ESISTEREBBE $b \in X$ TALE CHE $b \notin \langle y_1 .. y_m \rangle$ E, POICHÉ $y_1 .. y_m$ SONO INDIPENDENTI PER IPOTESI ANCHE $y_1 .. y_m$ LO SAREBBERO PER UN LEMMA

2. CIOÈ È ASSURDO PERCHÉ IN X, DI $\dim = m$, CI SAREBBERO $m+1$ VETTORI INDIPEN CONTRO IL TEOREMA SUL MINIMO NUMERO DI VETTORI INDIPENDENTI.

3. $\langle y_1 .. y_m \rangle = X$ e $y_1 .. y_m$ ESSENDO GENERATORI INDIPENDENTI SONO UNA BASE

(24) MASSIMO NUMERO DI VETTORI INDIPENDENTI

SIA X UNO SPAZIO DI DIMENSIONE FINITA E SIA $x_1 .. x_m$ UNA SUA BASE. ALLORA DATI $y_1 .. y_m \in X$, $m > m$ ESSI RISULTANO DIPENDENTI.

DIMOSTRAZIONE

1. SE QUALCUNO DEGLI y_i È NULLO IL SISTEMA È DIPENDENTE. SIANO DUNQUE $y_1 .. y_m$ VETTORI NON NULLI DI X.

2. SE $X = \langle x_1 .. x_m \rangle$ SEGUE CHE $y_1 \in \langle x_1 .. x_m \rangle$ $y_1 \neq 0$ DAL LEMMA DI SCAMBIO SEGUE CHE y_1 PUÒ ESSERE SCAMBIATO CON QUALCUNO DEGLI x_i AD ESEMPIO x_1 SENZA ALTERARE LO SPAN.

3. SI HA ALLORA $X = \langle y_1, x_2 .. x_m \rangle$. $y_2 \in X$ SI HA ALLORA $y_2 = \alpha y_1 + \sum_2^m \beta_i x_i$ SE ORA $\beta_i = 0$ $\forall i = 2..m$ ALLORA y_2 È UN MULTIPLO DI y_1, QUINDI $y_1 y_2 .. y_m$ È DIPENDE E LA TESI PROVATA

4. SE INVECE $\beta_i \neq 0$ ALLORA IL VETTORE x_i CORRISPONDENTE PUÒ ESSERE SCAMBIA CON y_2 SENZA ALTERARE LO SPAN.

5. SUPPONIAMO CHE SIA x_2 E DUNQUE $X = \langle y_1, y_2, x_3 .. x_m \rangle$ PROCEDIAMO A SCAMBIA y_i CHE SEGUONO, FERMANDOCI SE ESSI SONO COMBINAZIONE LINEARE DI SUOI y_i GIÀ SCAMBIATI. OPPURE SCAMBIANDO CON GLI x_i IN CASO CONTRARIO

6. NE SEGUE CHE, SE NON CI SIAMO GIÀ ARRESTATI PERCHÉ I PRIMI y_i SONO GIÀ DIPENDENTI, CHE DIANO m SCAMBI SI AVRÀ

   $X = \langle y_1 .. y_m \rangle$ E POICHÉ $m > m$ CIÒ IMPLICA CHE OGNI y_j, $j > m$ $\in \langle y_1 .. y_m \rangle$ E DUNQUE $y_1 .. y_m$ SONO DIPENDENTI.

(25) TEOREMA DELL'ESISTENZA DELLA BASE

SE $X \neq \{0\}$ e X È DI DIMENSIONE FINITA, ALLORA X HA UNA BASE

DIMOSTRAZIONE

1. X È DI DIMENSIONE FINITA $\rightarrow$ È GENERATO DA $x_1 .. x_m$ VETTORI $X \neq \{0\}$ ALMENO UN DI ESSI È NON NULLO.

2. SE $x_1 .. x_m$ SONO INDIPENDENTI COSTITUISCONO UNA BASE. SE NON LO SONO UNA È COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI E, PER LEMMA FONDAMENTALE, PUÒ ESSERE ELIMIN SENZA ALTERARE LO SPAN

3. SE SONO DIPENDENTI SI PUÒ CONTINUARE FINO A CHE SONO TUTTI INDIPENDENTI. SICCOME LO SPAN È FORMATO SOLO DA VETTORI INDIPENDENTI FINITI E ALMENO UNO NO NULLO ALLORA LO SPAN È UNA BASE $\square$

(26) TEOREMA DEL COMPLETAMENTO

SIA X DI DIMENSIONE n, E SIANO $y_1 \dots y_m \in X$ CON $m < n$ ALLORA $\exists\, v_{m+1} \dots v_n$ VETTORI TALI CHE $y_1 \dots y_m v_{m+1} \dots v_n$ SONO UNA BASE PER X.

DIMOSTRAZIONE

(1) POICHÉ $\dim(X) = n$ $\exists$ UNA BASE $v_1 \dots v_n$ DI X
SI PROCEDE COME AL TEOREMA SUL MASSIMO NUMERO DI VETTORI INDIPENDENTI, SCAMBIANDO UNO ALLA VOLTA I VETTORI $y_1 \dots y_m$ CON ALTRI TANTI $v_{j_1} \dots v_{j_m}$

(2) POICHÉ AD OGNI PASSO IL VETTORE y_i È INDIPENDENTE DAI PRECEDENTI $y_1 \dots y_{i-1}$ ME SE CHE NELL'UGUAGLIANZA

$$y_i = \sum_{1}^{i-1} \alpha_k y_k + \sum_{1}^{n} \beta_j v_j \qquad \beta_j \neq 0$$

, IL CHE CONSENTE DI SCAMBIARE y_i CON IL CORRISPONDENTE v_i

(3) ALLA FINE DEGLI SCAMBI, TUTTI GLI $y_1 \dots y_m$ SONO STATI SCAMBIATI CON ALTRETTANTI $v_{j_1}, v_{j_2} \dots v_{j_m}$, MANTENENDO LO STESSO SPAN

(4) NE SEGUE CHE $\{y_1 \dots y_m\} \cup \{v_j : j \neq j_1 \dots j_m\}$ SONO n GENERATORI DI X CHE È DI DIMENSIONE n; E DUNQUE PER IL TEOREMA DEI GENERATORI FORNANO LA BASE DI X RICHIESTA

(27) TEOREMA DELLA DIMENSIONE

SIA X DI DIMENSIONE FINITA. ALLORA TUTTE LE SUE BASI HANNO LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI, DETTA $\dim X$

DIMOSTRAZIONE

(1) POICHÉ X È DI DIMENSIONE FINITA, PER IL TEOREMA DELL'ESISTENZA DI BASI AMMETTE BASI.

(2) SIANO $x_1 \dots x_n$ E $y_1 \dots y_m$ DUE DI ESSE E SIA $n \geq m$. SE FOSSE $n > m$ PER IL TEOREMA DI MASSIMO NUMERO DI VETTORI INDIPENDENTI ESSENDO $x_1 \dots x_n$ UNA BASE, NE SEGUIREBBE CHE $y_1 \dots y_m$ SONO DIPENDENTI, CONTRO L'IPOTESI CHE SIANO UNA BASE E DUNQUE $n = m$ $\square$

(28) INVARIANZA DELLA DIMENSIONE

$A : X \to Y$ È LINEARE E INIETTIVA SE E SOLO SE $\dim X = \dim A(X)$

DIMOSTRAZIONE

(1) INFATTI A È INIETTIVA SE E SOLO SE $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ E DUNQUE SE E SOLO SE $\dim \operatorname{Ker} A = 0$

32 TH ESISTENZA DEGLI AUTOVETTORI / SOTTOSPAZI INVARIANTI

SIA X UNO SPAZIO DI DIMENSIONE FINITA, NON NULLO, E SIA A UN OPERATORE LINEARE DA X IN SÈ
ALLORA X CONTIENE AUTOVETTORI DI A E CIOÈ ESISTONO $\lambda \in \mathbb{C}$ E $u \in X$ NON NULLO TALI CHE $Au = \lambda u$

DIMOSTRAZIONE

1. SIA $x_1, x_2 \dots x_n$ UNA BASE DI X E SIA x_{ij} LA MATRICE CHE RAPPRESENTA A RISPETTO ALLA BASE $x_1, x_2 \dots x_n$.
VERIFICANTE DUNQUE $A(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} u_j x_i$ DATO $u \in X$ E POSTO $u = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$ DALL'INDIP. DEI VETTORI DELLA BASE SEGUE CHE u È NULLA SE E SOLO SE IL VETTORE DELLE SUE COMPONENTI (u_i) È IL VETTORE NULLO IN $\mathbb{C}^n$

2. DUNQUE A HA AUTOVETTORI IN X SE E SOLO SE $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ E UN VETTORE $(u_i) \in \mathbb{C}^n \neq 0$:
$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} u_j x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \quad \text{E DUNQUE} \quad \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} u_j - \lambda u_i \right] x_i = 0$$
ESSENDO x_i INDIPENDENTI, CIÒ ACCADE SE E SOLO SE $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} u_j - \lambda u_j = 0 \quad i = 1 \dots n$

3. IL SISTEMA LINEARE OMOGENEO PRECEDENTE HA SOLUZIONI u_j NON NULLE SE E SOLO SE IL det DELLA MATRICE DEI SUOI COEFFICIENTI È NULLO CIOÈ ESSENDO TALE det UN POLINOMIO IN λ DI GRADO MAGGIORE O UGUALE UNO PER IL TEOREMA DI GRASSMANN SI ANNULLA CERTAMENTE PER QUALCHE $\lambda \in \mathbb{C}$. DUNQUE TALI λ SARANNO AUTOVALORI PER OGNUNO DI ESSI E $\forall$ SOLUZIONE NON NULLA $(u_1, u_2 \dots u_n) \in \mathbb{C}$ DEL PRECEDENTE SISTEMA SI OTTERRÀ L'AUTOVETTORE
$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \text{ in } X. \quad \square$$

37 DETERMINANTI

DATA UNA MATRICE $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ DI COLONNE $A_1, A_2 \dots A_n \in \mathbb{R}^n$ SI DEFINISCE DETERMINANTE DI A DENOTATO CON $|A_1 A_2 \dots A_n|$ LA FUNZIONE $\det : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ VERIFICANTE LE TRE PROPRIETÀ:

1. $\det(e_1 e_2 \dots e_n) = 1$ CON $e_1 \dots e_n$ BASE CANONICA
2. $\det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n) = -\det(A_1 \dots A_j \dots A_i \dots A_n)$
3. $\det(A_1 + B_1, A_2 \dots A_n) = \det(A_1, A_2 \dots A_n) + \det(B_1, A_2 \dots A_n)$
$$\det(\lambda A_1, A_2 \dots A_n) = \lambda \det(A_1 \dots A_n)$$

LA PROPRIETÀ 2 SI ABBREVIA DICENDO CHE È ALTERNANTE: SCAMBIARE 2 COLONNE DELLA MATRICE FA CAMBIARE SEGNO AL DETERMINANTE.

LA PROPRIETÀ 3 SI ABBREVIA DICENDO CHE IL DETERMINANTE È MULTILINEARE: IN EFFETTI LA 3 DICE CHE TENENDO FERME TUTTE LE COLONNE DALLA SECONDA ALL'ULTIMA, IL DET È LINEARE RISPETTO ALLA PRIMA COLONNA

ATTENZIONE $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

1 TEOREMA

SIANO $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. ALLORA

1. $\det(A^T) = \det(A)$
2. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \quad \square$

2 TEOREMA

SE DUE COLONNE A RIGHE DI A SONO UGUALI ALLORA $\det A = 0$

DIMOSTRAZIONE

SE FOSSERO UGUALI LE PRIME DUE COLONNE SI POTREBBERO SCAMBIARE DI POSTO OTTENENDO LA STESSA MATRICE
POICHÉ LO SCAMBIO DI COLONNE CAMBIA IL SEGNO NEL DETERMINANTE NE SEGUE CHE IL DET. DEVE COINCIDERE IL SUO OPPOSTO. $\square$

③ TEOREMA

C.N.S. POICHÉ $A_1 \cdots A_m$ SIANO DIPENDENTI È CHE $\det(A_1 \cdots A_m) = 0$

DIMOSTRAZIONE

① $A_1 \cdots A_m$ dipendenti $\Rightarrow \det(A_1 \cdots A_m) = 0$

INFATTI UNO DEGLI A_i È COMBINAZIONE DEGLI ALTRI. SIA A_1 PER SEMPLICITÀ, È DUNQUE $A_1 = \sum_i^m \alpha_i A_i$ ALLORA

$$\det(A_1 \cdots A_m) = \det\left(\sum_i^m \alpha_i A_i, A_2 \cdots A_m\right) = \sum_i^m \alpha_i \det(A_i, A_2 \cdots A_m)$$

POICHÉ TUTTI I DETERMINANTI HANNO DUE COLONNE UGUALI SONO NULLI.

② $\det(A_1 \cdots A_m) = 0 \Rightarrow A_1 \cdots A_m$ dipendenti

SUPPONIAMO CHE $\det(A_1 \cdots A_m) = 0$ E CHE $A_1 \cdots A_m$ SIANO INDIPENDENTI E DEDUCIAMO UN ASSURDO.

SE $A_1 \cdots A_m$ SONO INDIPENDENTI, SONO UNA BASE DI $\mathbb{R}^m$ E DUNQUE $\forall h = 1 \cdots m$ ESISTONO COSTANTI $\alpha_{h i_h}$, $i_h = 1 \cdots m$ TALI CHE:

$$e_h = \sum_{i_h=1}^m \alpha_{h i_h} A_{i_h} = \alpha_{h i_h} A_{i_h}$$

DA CUI

$$1 = \det(e_1 \cdots e_m) = \det(\alpha_{1 i_1} A_{i_1} \cdots \alpha_{m i_m} A_{i_m}) = \alpha_{1 i_1} \det(A_{i_1} \cdots \alpha_{m i_m} A_{i_m}) = \alpha_{1 i_1} \alpha_{2 i_2} \cdots \alpha_{m i_m}$$

OVE SULLE SOMMATORIE SUGLI INDICI RIPETUTI $i_1, i_2 \cdots i_m$ ESSI ASSUMONO TUTTI I VA TRA 1 E m. TUTTI I DETERMINANTI A SECONDO MEMBRO SONO NULLI

POICHÉ $\det(A_1 \cdots A_m) = 0$ ANCHE $\det(A_{i_1} \cdots A_{i_m}) = (-1)^{m \text{ colonne scambio}}$ $\square$

④ TEOREMA SPETTRALE COMPLESSO

SIA $A: X \to X$ UN OPERATORE LINEARE AUTOAGGIUNTO SU X, SPAZIO VETTORIALE COMPLESSO DI DIMENSIONE FINITO. ALLORA ESISTE UNA BASE ORTONORMALE DI X COSTITUITA DA ATTRIBUTI DI A.

DIMOSTRAZIONE

① SI PROCEDE PER INDUZIONE SULLA DIMENSIONE DI X.
POICHÉ X È UNO SPAZIO INVARIANTE DI A, PER IL TEOREMA DEGLI AUTOVETTORI ESSO CONTIENE UN AUTOVETTORE $u \neq 0$ DI A. POICHÉ I MULTIPLI NON NULLI DI UN AUTOV SONO A LORO VOLTA AUTOVETTORI SI PUÒ SOSTITUIRE AD u SI PUÒ SOSTITUIRE IL SE VERSORE CHE INDICHERÀ CON u.

② SE $\dim(X) = 1$, LA BASE ORTONORMALE RICHIESTA È COSTITUITA DA u STESSA

PROVIAMO LA TESI PER X DI $\dim(X) = m \Rightarrow W = \{w \in X : w \perp u\}$

DAL LEMMA PRECEDENTE, SEGUE CHE A TRASFORMA W IN SÉ.

POICHÉ $u \in X$, MA $u \notin W$ NE SEGUE CHE $\dim W < \dim X$. PER L'IPOTESI INDUTTIVA ESISTERÀ UNA BASE DI W FORMATA DA AUTOVETTORI DI A, DI NORMA UNITARIA E A DUE DUE ORTOGONALI E SIANO $w_1 \cdots w_k$

③ PROVIAMO CHE $u, w_1 \cdots w_k$, TUTTI AUTOVETTORI, FORMANO ANCHE UNA BASE ORTONORMALE PER

④ $w_1 \cdots w_k \in W$ SONO TUTTI $\perp$ A u ED ESSENDO ANCHE ORTOGONALI FRA LORO È DI NOR UNITARIA PER L'IPOTESI INDUTTIVA, NE SEGUE CHE $u, w_1 \cdots w_k$ SONO VERSORI A DUE A DU ORTOGONALI, E QUINDI INDIPENDENTI.

⑤ RESTA DA VERIFICARE CHE GENERANO X. $\forall x \in X$ SI HA $x = P_u x + (x - P_u x)$

38 TEOREMA SPETTRALE REALE

SIA $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ VERIFICANTE $a_{ij} = a_{ji}$
ALLORA ESISTE UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^m$ COSTITUITA DA AUTOVETTORI DI $A(u) = Au$

DIMOSTRAZIONE

1. AMBIENTO IL PROBLEMA IN $\mathbb{C}$ PER USARE IL TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI AUTOVALORI E COSTRUIAMO LA BASE SPETTRALE PER INDUZIONE

2. $A(u) = Au$, $\forall u \in \mathbb{C}^m$ PER IL th SOTTINSIEMI INVARIANTI $A: \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ POSSIEDE $\lambda \in \mathbb{C}$ $u \in \mathbb{C}^m$. POICHÉ A È SIMMETRICA A È AUTOAGGIUNTA E QUINDI $\lambda \in \mathbb{R}$. L'AUTOSPAZIO RELATIVO A λ CONTIENE AUTOVETTORI REALI

   SALTO u_1 E $\frac{u_1}{|u_1|} = u_1$ VERSORE, ESSO È IL PRIMO ELEMENTO DELLA BASE SPETTRALE

3. SUPPONIAMO, PER INDUZIONE, DI AVER GIÀ INDIVIDUATO $K < m$ VERSORI REALI A DUE A DUE ORTOGONALI, AUTOVETTORI DI A, COSTRUIAMO IL $(K+1)$ESIMO COME SEGUE:

$$\Rightarrow W = \{w \in \mathbb{C}^m : w u_i = 0 \quad \forall i = 1..K\}$$

   FINO A CHE $K < m$, $W \neq \{0\}$ PERCHÉ, DECOMPONENDO IL GENERICO VETTORE $x \in \mathbb{C}^m$ RISPETTO A $u_1 u_2 .. u_K$ SI OTTIENE $x = \sum_{k=1}^{K} (x u_k) u_k + \tilde{x}$ OVE $\tilde{x}$ È ORTOGONALE A $u_1 .. u_K$ E DUNQUE È

   SE, PER ASSURDO SI RIDUCESSE AL SOLO 0 VORREBBE DIRE CHE TUTTO $\mathbb{C}^m$ SAREBBE GENERATO DA $u_1 .. u_K$ CON $K < m$ CONTRARIO AL FATTO CHE $\dim = m$.

4. $W \subseteq \mathbb{C}^m$ È DI $\dim \neq 0$ È INVARIANTE PER A, PERCHÉ $w \in W : w u_i = 0$ ESSENDO $u_1, u_2 .. u_K$ AUTOVETTORI DA $w u_i = 0$ SEGUE $(Aw) u_i = 0$ E DUNQUE $Aw \in W$.

5. PER IL TEOREMA DEI SOTTOSPAZI INVARIANTI PER OPERATORI AUTOAGGIUNTI, W CONTIENE UN AUTOVETTORE v DISTINTO o EVENTUALMENTE COINCIDENTE CON QUALCUNO DEGLI AUTOVAL PRECEDENTI, MA REALE, PERCHÉ L'OPERATORE È AUTOAGGIUNTO

6. $u_1 .. u_K \in \mathbb{R}$ E $v \perp$ A TUTTI LORO SEGUE CHE LE SUE PARTI REALI E IMMAGINARIE SONO ENTRAMBE $\perp$ A TUTTI I VERSORI DELLA BASE GIÀ COSTRUITA

   ORA BASTA PORRE $u_{K+1} = \frac{1}{|\tilde{v}|} \tilde{v}$ CHE RISULTA UN VERSORE REALE, $\perp$ A $u_1 u_2 .. u_K$

7. LA COSTRUZIONE SI AVVERTE SOLO QUANDO $K = m$ $u_1 .. u_m$ ESSENDO MUTUAMENTE ORTOGONALI. SONO INDIPENDENTI E DUNQUE FORMANO LA BASE SPETTRALE REALE

41 TEOREMA DI BINET

SIANO $A, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$. ALLORA $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

DIMOSTRAZIONE

1. SUPPONIAMO $\det A \neq 0$. DEFINIAMO UNA FUNZIONE DELLE COLONNE $B_1 - B_m$ DI B PONENDO

$$\phi(B_1 - B_m) = \frac{1}{\det(A)} \det(AB_1 .. AB_m)$$

2. VERIFICHIAMO ϕ ALTERNATA, LINEARE RISPETTO ALLA PRIMA COLONNA E VALE 1 SULLA BASE PER L'UNICITÀ DEL DETERMINANTE SEGUE SUBITO

$$\phi(B_1 .. B_m) = \det(B \cdot B_m) = \det B \qquad \det B = \frac{1}{\det A} \det(AB) \quad \text{CHE È LA TESI}$$

3. ① SCAMBIARE DUE COLONNE FRA GLI ARGOMENTI DI ϕ COMPORTA UNA IDENTICA SCAMBIO FRA QUELLI CORRISPONDENTI IN $\det(AB_1 .. AB_m)$ E DI CONSEGUENZA TALE SCAMBIO INTERPRETERÀ UN CAMBIO DI SEGNO

   ② $\phi(B_1 + B_1', B_2 .. B_m) = \frac{1}{\det A} \det(A(B_1 + B_1'), AB_2 .. AB_m) =$ (MULTILINEARITÀ DELL'ORDINE)

$$= \frac{1}{\det A} \left[\det(AB_1, AB_2 .. AB_m) + \det(AB_1', AB_2 .. AB_m)\right] = \phi(B_1, B_2 .. B_m) + \phi(B_1', B_2 .. B_m)$$

$$\phi(\lambda B_1, B_2 .. B_m) = \frac{1}{\det A} \det(A(\lambda B_1), AB_2 .. AB_m) = \lambda \frac{1}{\det A} \det(AB_1 .. AB_m) = \lambda \phi(B_1 .. B_m)$$

③ $\phi(e_1 \dots e_n) = \frac{1}{\det A} \det(Ae_1\ Ae_2 \dots Ae_n)$

e $Ae_i = A_i$ segue $\phi(e_i \dots e_n) = 1$ e la tesi è provata per $\det \neq 0$

⑤ $\det A = 0$, e cioè provare che $\det A = 0 \Rightarrow \det(AB) = 0$ detti $A^1 \dots A^n$ le righe di A, esse sono dipendenti poiché $\det A = 0$, dunque esistono $\lambda_1 \dots \lambda_n$ non tutti nulli, tali che $\sum_i^n \lambda_i A^i = 0$

ora le righe di AB sono $A^1B, \dots A^nB$ e dalla proprietà distributiva $\sum_i^n \lambda_i (A^iB) = (\sum_i^n \lambda_i A^i)B = 0B = 0$

poiché qualche λ_i è non nullo, ne segue che $A^1B \dots A^nB$ sono dipendenti e quindi $\det(AB) = 0$ □

(42) MINIMA DISTANZA SUI SOTTOSPAZI

sia W un sottospazio di X, $\dim X < \infty$ allora $\forall u \in W$ si ha $|x-u| \geq |x - x_w|$

DIMOSTRAZIONE

$|x-u|^2 = |x - x_w + x_w - u|^2 \Rightarrow |x-x_w|^2 + |x_w - u|^2 \geq |x - x_w|^2$ □

(43) TEOREMA DI DECOMPOSIZIONE ORTOGONALE SUI SOTTOSPAZI

sia W sottospazio di X, $\dim X < \infty$. Allora $X = W \oplus W^\perp$ e $x = x_w + x_{w^\perp}$

DIMOSTRAZIONE INTER.

poiché $W \cap W^\perp = \{0\}$ ne segue subito che la somma $W + W^\perp$ è diretta.

6 (43) TEOREMA DELLA PROIEZIONE DI VETTORI

per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ e per ogni multiplo λv di v si ha: $|u - P_v u| \leq |u$

DIMOSTRAZIONE

$|u - P_v u| \leq |u - \lambda v| \Rightarrow (|u - P_v u|)^2 \leq (|u - \lambda v|)^2 \Rightarrow |u - \lambda v|^2 = |u - P_v u + P_v u - \lambda v|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |u - \lambda v|^2 = |u - P_v u|^2 + |P_v u + x_v|^2$

l'ultimo dei quadrati è non negativo ed è vero solo se λv coincide con $P_v u$ da cui la tesi □

(44) TEOREMA DELLA PROIEZIONE DEI SOTTOSPAZI

nelle condizioni della definizione precedente, risulta:

$(u - u_{\langle e_1 \dots e_m \rangle}) e_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots m$

DIMOSTRAZIONE

si ha utilizzando la linearità del prodotto scalare $(u - u_{\langle e_1 \dots e_m \rangle}) e_j =$

$= (u - \sum_{i=1}^m \frac{u e_i}{|e_i|^2} e_i) e_j = u e_j - \sum_{i=1}^m \frac{u e_i}{|e_i|^2} e_i e_j =$ (poiché $e_i e_j = 0$ se $i \neq j$) $=$

$= u e_j - \frac{u e_j}{|e_j|^2} e_j e_j = 0$ □