APPUNTI DI FISICA GENERALE 1

SALVATELLI

Questi appunti sono gratuiti: sia perché non sono bellissimi a vedersi, sia perché una volta comprati è un attimo condividerli a chiunque.

Se vi sono sembrati d'aiuto e voleste ringraziarmi, lascio qua sotto il mio account PayPal.

Peace.

https://www.paypal.me/salvatellilorenzo

Fisica Generale 1

appunti delle lezioni

n.b. due vettori si diranno uguali se sono esattamente sovrapponibili.

Proprietà del prodotto scalare $\equiv \vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos(\theta) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ ...

- commutatività $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$
- $(a\vec{A})\cdot(b\vec{B}) = (ab)\,\vec{A}\cdot\vec{B}$
- $\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$

Prodotto vettoriale

definito come $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \vec{A}\wedge\vec{B}$

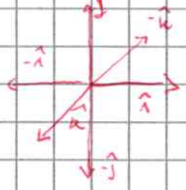
avendo un risultato vettoriale devo definire modulo dir. verso

modulo: $C = AB\sin(\theta)$

direzione: regola della mano destra

verso: regola del cavatappi

n.b.: il modulo di un prodotto vettoriale è in 2 dimensioni (una superficie)



$\vec{A} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})$

$\vec{B} = (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$

se li moltiplichiamo avremo che

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \cancel{A_xB_x\,0} + A_xB_y\hat{k} + A_xB_z\hat{j}$$
$$+ A_yB_x(-\hat{k}) + \cancel{A_yB_y\,0} + A_yB_z\hat{i}$$
$$+ A_zB_x(-\hat{j}) + A_zB_y(-\hat{i}) + \cancel{A_zB_z\,0}$$
$$= \hat{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{j}(A_xB_z - A_zB_x) +$$
$$+ \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

Cinematica: La cinematica studia il moto di un oggetto indipendentemente dalle sue cause

· Cinematica unidimensionale

Avremo quindi un vettore posizione che esprime la posizione di un oggetto in funzione del tempo, la velocità media data da $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ e graficamente la retta tangente agli istanti di fine e di inizio e la velocità istantanea: derivata in funzione del tempo del vettore posizione $\lim_{t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}$

Ricordiamo: • derivata della posizione nel tempo è la velocità, derivata della velocità è l'accelerazione

• $a = \frac{v_a - v_0}{t}$

$t = \frac{v - v_0}{a}$

• ed ovviamente $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

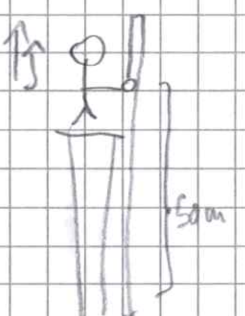
$v(t) = v_0 + at$

$a(t) = a \Rightarrow$ partiamo da qui per poi integrare comunque sarebbe $\frac{v}{t}$ o meglio $\frac{v - v_0}{t}$

$v_f^2 - v_i^2 = 2aS$

Es moto curvilineo 1D (era una minchiata)

Es caduta dei gravi



L'omino lancia la pallina a 20 m/s

1) quota max: dopo che la stacca di mano

$a = -g \quad V_0 = 20\,m/s$

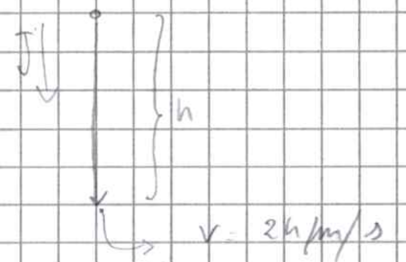
$0 - 20^2 = 2ax = -400 = -19{,}6x$

$\frac{400}{19{,}6} + 50 = \text{quota max} = 70{,}4$

$x(t) = x_0 + v_0(t) + \frac{1}{2} a t^2$

$20 + 20t - 4{,}9t^2 \rightarrow 0 = -20 + 20t + 5t^2$

Es caduta dei gravi



1) quanto tempo per arrivare a terra : $h = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$\sqrt{\frac{2h}{a}} = t$ ma non ho l'altezza :

mi conviene usare $v(t) = v_0 + at$

$\Rightarrow 24\ m/s = gt \Rightarrow t = \frac{24}{9,8} = 2,4$

2) $h = ?$ $\Rightarrow$ s'è detto che $h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow h = (2,4)^2 \cdot 4,9 = 29,9$

Moto di un punto materiale in 3 dimensioni

- cinematica in 3 dimensioni è uguale a quella monodimensionale solo che in questo caso tutte le grandezze sono espresse da vettori $\in \mathbb{R}^3$ sarà dunque fondamentale lavorare non coi vettori, ma con le loro componenti

n.b : come la direzione della velocità cambia (e la traiettoria diventa una curva) nasce una accelerazione normale (e tangenziale se cambia anche il modulo della v)

Moto circolare uniforme

- non è altro che un moto curvilineo particolare:

1) la velocità angolare è costante

↳ cos'è? sempre uno spazio percorso in unità di tempo ma essendo in una circonferenza misuro lo spazio usando l'angolo "θ" $\Rightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt}$

se poi voglio misurare la velocità tangenziale v mi basta moltiplicare ω per raggio
$\Rightarrow \omega \cdot r = r\frac{d\theta}{dt}$ e $r\theta$ = arco di circonf.

2) Affinché il moto sia circolare ~~v~~ UNIFORME, devo avere un accelerazione ~~MA~~ non tangenziale (è uniforme e $\vec{\omega}$ è costante) ma normale (Sì) affinché la direzione di v segua sempre una rotazione per fare la circonferenza

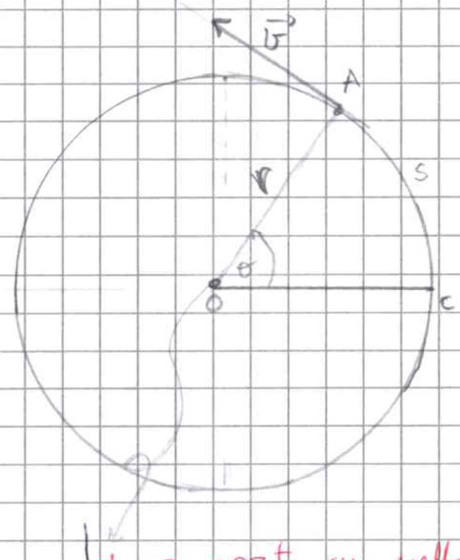
→ ma ehi, perché segmento circolare è = θr?

$\Rightarrow$ sono relazionabili i 2: più è grande l'angolo + lo è il segmento circolare! ed ~~ma~~ in particolare

$\theta : 360° = s :$ circonferenza (s = segmento circolare)

$\hookrightarrow \theta : 2\pi = s : 2\pi r$

$\hookrightarrow \frac{\theta}{2\pi} = \frac{s}{2\pi r} \Rightarrow s = r\theta$



3) la velocità tangenziale è sempre tangente (appunto alla circonferenza) questo perché $v = \vec{r} \wedge \vec{\omega}$ *
ma ω è o uscente o entrante
SEMPRE

* Perché $v = \vec{\omega} \times \vec{r}$?
beh $\vec{v} = \frac{ds}{dt}$ e $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}$
con $\hat{s} = \theta \times \vec{r} \Rightarrow \vec{v} = \frac{ds}{dt}$
$= \vec{v} = \frac{ds}{dt} = \vec{v} = \frac{d\theta}{dt} \times \vec{r} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

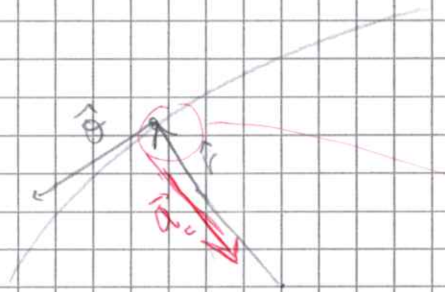
da o parte un vettore uscente dal foglio che è $\vec{\omega}$
Perché? $\Rightarrow \vec{\omega} =$

4) Periodo: $\frac{2\pi}{\omega}$ tempo necessario per fare un giro completo:

$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{d\theta}{dt}} = dt \frac{2\pi}{d\theta}$ dimensionalmente torna, se ci pensi un po' di più anche concettualmente

Moto circolare vario:

nulla di diverso dal moto circolare uniforme
solo che qui abbiamo una componente tangenziale
dell'accelerazione



$$\vec{a} = \left(-\frac{V^2}{r}\right)\hat{r} + \frac{dV}{dt}\hat{\theta}$$

perché è centripeta

⚠ Ricorda bene:

Se in un esercizio devo determinare la traiettoria
DEVO eliminare la dipendenza dal tempo nell'equazione (solo nel 2° membro)

n.b: dato che $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow a_t = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \alpha \times \vec{r}$ più avanti capisci perché

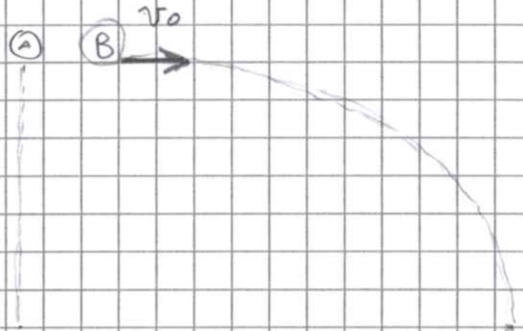
accelerazione tangenziale

Moto dei proiettili

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} t + x_0 & \text{moto uniforme } a = 0 \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 & \text{moto uniformemente accellerato} \end{cases}$$

ovviamente, $v_{0x} = v_0 \cos(\theta)$
$v_{0y} = v_0 \sin(\theta)$

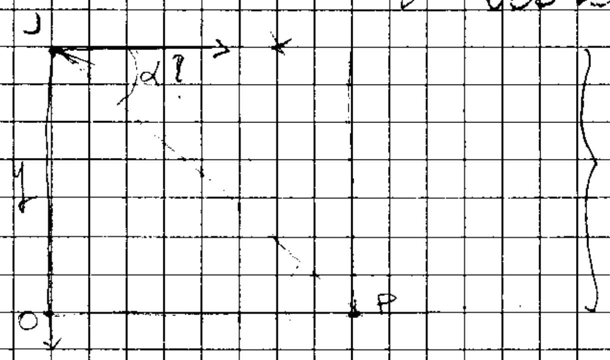
nota bene che



ammesso che A e B pesino uguale toccano al suolo nello stesso istante (hanno stesso moto verticale)

Esercizio

$v = 600$ km/h



devo trovare l'angolo α, per cui [illegible] $\overline{OP}$ all'istante che sgancia l'oggetto subisce

~~[illegible]~~ $g \downarrow$

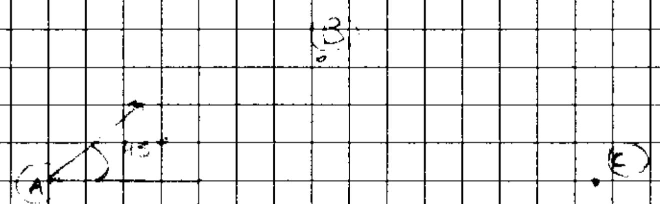
[illegible] (16,7 m/s)

$y(t) = y_0 - [illegible] \Rightarrow$ [illegible] $y = 0 \quad 0 = y_0 + \frac{1}{2} g t^2$

$x(t) = v_0 t \quad [illegible] \quad x(t^*) = 24$ km [illegible] $\quad t = \sqrt{\frac{2 y_0}{g}} = [illegible]$

[illegible]

$\boxed{\alpha = 23°}$

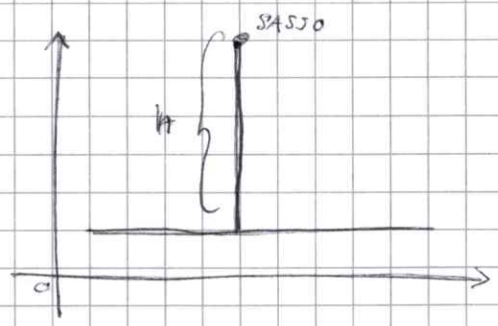


1° principio e sistemi inerziali

↳ sistemi in cui il 1° principio della dinamica è valido

⇒ Non c'è differenza di descrizione fra sist. di rif. stazionari ed in movimento

Es sasso che cade da altezza h, impiegando un tempo t



↓ Possiamo definire questo sistema di riferimento STAZIONARIO?

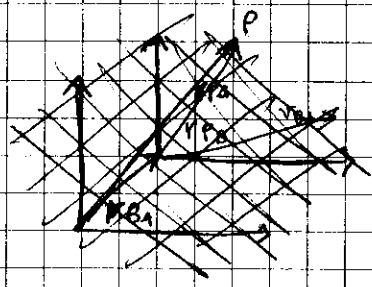
⇒ Possiamo ma non lo è: in realtà la rotazione terrestre lo rende un sistema di riferimento accelerato

⇒ Quindi il nostro SdR si sta muovendo e mica poco velocemente ($\simeq$ 1,250 km/h)

⇒ Ciò che ci permette di ignorare questi fattori è la TRASCURABILITÀ dei dati da noi misurati

↝ Già se faremmo cadere un sasso da 50 km non potremmo + trascurare l'illegittimità del nostro SdR

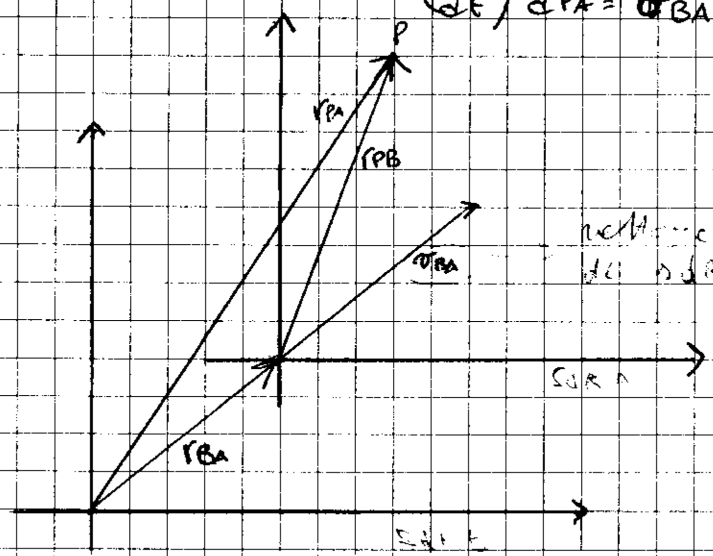
Prendiamo 2 SdR A e B
↳ in movimento



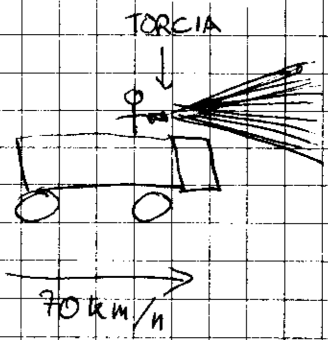
$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{PB}$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{d}{dt}\right) \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{PB}$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{d}{dt}\right) \vec{a}_{PA} = \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{PB}$$



Es



se lui a 70 km/h accende una torcia a che velocità va la luce?

RIS: sempre 300 000 Km/s
↓
NON c'è nulla che vada + veloce

e com'è possibile?
bisogna ammettere che in questo caso spazio e tempo siano deformabili !? lascia sta, non lo chiede all'esame

in definitiva: ~~$\vec{v}_a = \vec{v}_{rel}$~~

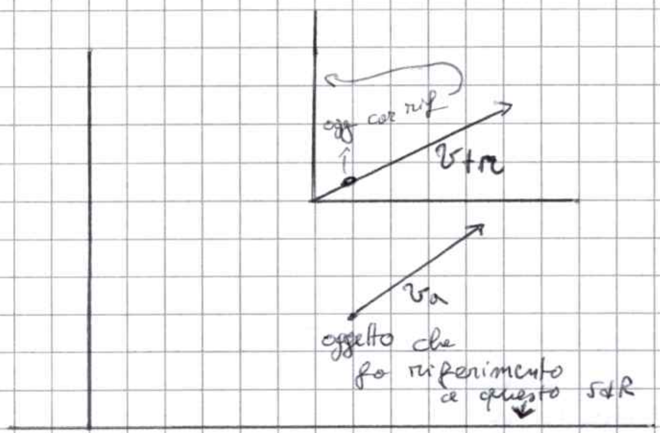
$$\vec{v}_a = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{tr}$$

$\vec{v}_a$ ↓ velocità assoluta

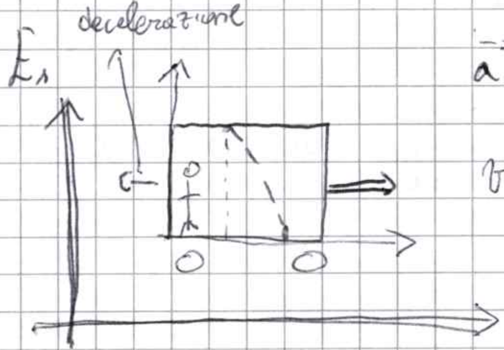
$\vec{v}_{rel}$ ↓ velocità relativa

$\vec{v}_{tr}$ ↓ velocità di trascinamento

n.b. che se v_{tr} è costante $\vec{a}_{ass} = \vec{a}_{rel}$



v_{rel} = velocità percepita** dall'ogg. che si muove con v_{tr}



$$\vec{a}_a = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr}$$

$$v_{tr} = \text{const}$$

Se quando la vite si stacca il treno comincia a frenare?

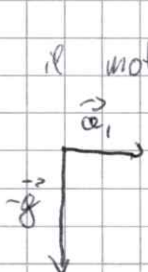
$$a_{rel} = a_a - a_{tr}$$

$\Rightarrow \vec{a}_a = (0, -g)$

$a_{TR} = (-a_1, 0)$

$a_{rel}\ (a_1, -g)$

dunque il moto relativo sarà



Se invece il sistema dell'osservatore è accelerato, NON SI PARLA PIÙ DI SISTEMI INERZIALI!
ci sono accelerazioni fittizie che in realtà non vengono mai affrontate

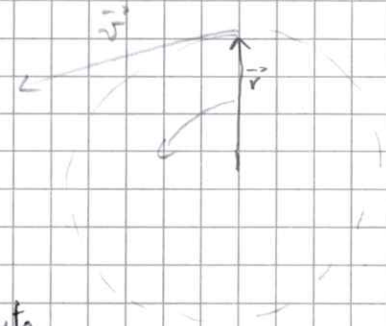
Allo stesso momento avremo che $\vec{a}_{ass} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr}$

Ricorda bene! a_{ass}: accelerazione vista da uno spettatore statico

a_{rel}: " " " " " in movimento

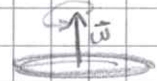
Sistemi di riferimento rotanti

Prendiamo un vettore rotante $\vec{r}$ che presuppone (o meglio comporta) un vettore anch'esso rotante $\vec{\omega}$



ed avremo dunque

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$ con $\vec{r}$ vettore rotante



per trovare $\vec{a}$ devo dunque derivare il vettore rotante infatti $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

triplo prodotto vettore che si risolve come $\underset{a}{\vec{\omega}} \wedge \underset{b}{\vec{\omega}} \wedge \underset{c}{\vec{r}}$

$= \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b})$

(ricordalo con l'inglese: bac: studenti non hanno i soldi per il taxi (cab)
bac - cab

n.b. se ci pensi bene: un sistema di riferimento rotante NON può mai essere inerziale

RAPPORTO FRA ACCELERAZIONI

Forza d'attrito

- Opposte al moto dell'oggetto
- $F_{att.} = \boxed{\mu_{s/d} F_P}$ μ_s : coeff. d'attr. statico
  μ_d : " " dinamico
  F_P : forza che preme l'oggetto su un altra sup.

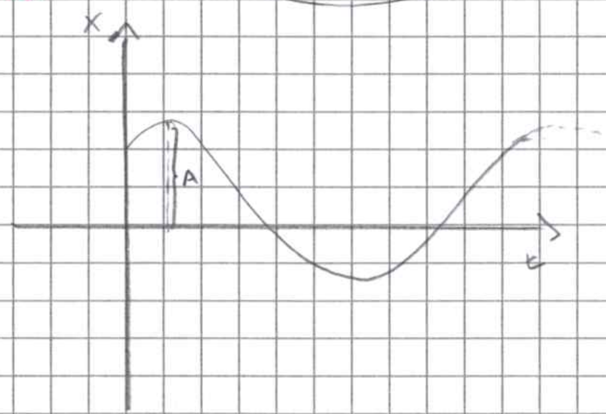
Forza elastica

- Forza che si oppone alla deformazione di un corpo
- $F(x) = \boxed{-kx}$ legge di Hooke k : è detta costante del corpo deformato

  x : spostamento

Introduciamo ω Frequenza angolare
originata dal moto armonico che un oggetto subisce dal comprimersi e dall'espandersi di una molla
e definita come $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $x k$? $F = ma = -kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$

Dinamica del moto armonico



$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ da cui

$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$

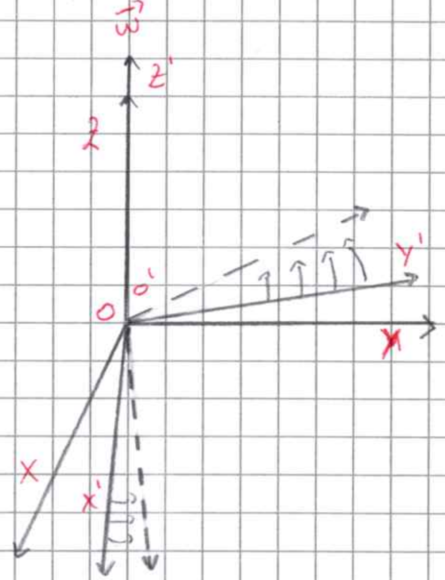
$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$

con $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e $f = \frac{\omega}{2\pi}$

A = ampiezza max
ωA = velocità max
$\omega^2 A$ = accelerazione max

Sistemi di riferimento non inerziali e rotanti

NON HO CAPITO:
- SISTEMI ROTAZIONALI
- FORZE APPARENTI



Sistema $zxyo$: SL
Sistema $z'x'y'o'$: SM

- SM sistema che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ CHE ASSUMIAMO COSTANTE
- Mentre la velocità di trascinam. $\vec{v}_t = \vec{\omega} \times \vec{r}$ e DIPENDE DALLA POSIZIONE
- Analizziamo l'accelerazione di trascinamento:
  1) $\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}_t}{dt}$ deriviamo dunque la velocità che è $\vec{\omega} \times \vec{r}$ ma $\vec{\omega}$ è costante nel tempo e non viene derivata *

  $\Rightarrow a_t = \vec{\omega} \times (\underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}}_{\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}}}) = -\omega^2 \vec{r}_{\perp}$ FIDATI

  proiezione del raggio sul piano di rotazione (tutte le componenti // a $\vec{\omega}$ sono ~~nulle per~~ ininfluenti quando fai il prodotto vettoriale

Mettiamo in relazione i due sistemi

- VELOCITÀ (easy) $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$
- ACCELERAZIONE (MAH) $\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \overset{*}{\vec{\omega}} \times \frac{d\vec{r}}{dt} =$

$$= \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v} =$$

$$= \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r})$$

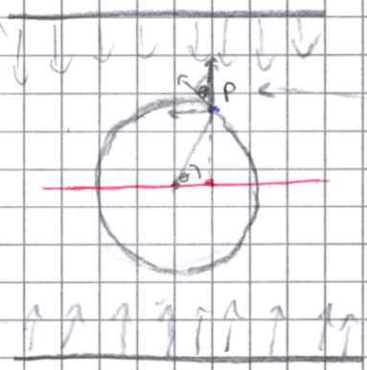
non ho capito come mai, ma $\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r + \vec{\omega} \times \vec{v}_r$ e se sostituiamo avremo

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r \underbrace{- \omega^2 \vec{r}_{\perp}}_{\text{acc. centrifuga}} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}_r}_{\text{acc. di coriolis}}$$

Moto armonico dato da una forza elastica
(già schematizzato in precedenza tramite il grafico)

Capiamolo

- Immaginati ~~[illegible]~~ di avere un corpo che percorre un moto circolare con ω costante ed ~~due~~ fonte di luce che illuminano il corpo e proiettano la sua ombra sul diametro del cerchio, così:



che moto avrà la pallina rossa?
un moto rettilineo con equazione:
della posizione $= r\cos(\theta)$ (derivata)
della velocità: $v_P \cos(90-\theta) = -v_P \sin(\theta)$
dell'accelerazione: $-a_P \cos(\theta)$ (derivata)

da mettere a confronto con ciò scritto in precedenza

Energia e Lavoro

Definiamo l'energia come capacità di compiere un lavoro

⚠ l'energia non scompare o scompare, l'energia di un corpo cambia SOLO SE avviene uno scambio fra esso e l'ambiente circostante

⇒ Definiamo da qui UN SISTEMA ISOLATO: un sistema in cui l'energia si conserva.

ENERGIA CINETICA $\frac{1}{2} m v^2$ $[kg\, m^2/s^2]$ misurata in Joule

- energia determinata dal moto della particella rispetto all'ambiente esterno

ma cosa può far variare l'energia cinetica?
⇒ IL LAVORO DI UNA FORZA

- se una forza agisce su di un corpo e riesce a variarne la quiete essa compie lavoro definito come

$$L_{ab} = \int_a^b \vec{F}\, ds$$

↳ ds = spostamento infinitesimale lungo la traiettoria del corpo

- come detto, il lavoro è responsabile della variazione di energia cinetica
  => avremo infatti che $K_b - K_a = L_{ab}$ ⇐ TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

PROVO A DIMOSTRARLO

$$L = \int_a^b F \, ds = \int_a^b m a \, ds = \int_a^b m \, a \, v$$

che per Torricelli è $= K_b - K_a$ ✓

⚠ nota che 1) il lavoro di una forza costante è costante nell'unità di spostam.

2) il lavoro di una forza è compiuto dalla/e sola/e componente/i parallele allo spostamento (prodotto scalare) ~~commento~~

~> paradosso del facchino che ~~alzando~~ valigie non compie lavoro

Potenza

[u.m.: J / s = Watt (W)]

media $\frac{\Delta L}{\Delta t}$ e dc, è il lavoro su intervallo di tempo

istantanea $\frac{dL}{dt}$ ~~tra~~ derivata del lavoro ed sarà ovviamente $= \vec{F} \cdot \vec{v}$

Forze conservative

def: diremo forza conservativa una forza che genera un lavoro INDIPENDENTE dal percorso seguito ma solo dal punto di inizio e di fine

Potremo definire $\vec{F_p}$ conservativa se $L_{ab} = L_{ak} + L_{kb}$ e dunque

$$\int_a^b \vec{F_p}\, ds = \int_a^k \vec{F_p}\, ds + \int_k^b \vec{F_p}$$

n.b.: il lavoro fatto su un percorso chiuso è nullo

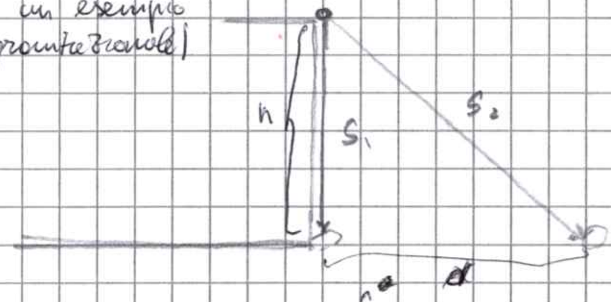
$$L_{aa} = \int_a^a \vec{F_p}\, ds = 0$$

Esempi di forze conservative:
- Forza gravitazionale
- Forza elastica
- Forza elettrostatica

in generale, tutte le forze centrali, ovvero dipendenti dalla distanza e dirette verso il centro

Esempi di forze non conservative
- Forze di attrito
- Forze di resistenza (vincoli)

Facciamo un esempio (forza gravitazionale)



Calcoliamo il lavoro $L_{s_1} = \int_a^a m\vec{g} \cdot -\vec{h}$

$$L_{s_2} = \int m\vec{g} \cdot \sqrt{h^2 + d^2} = \int m\vec{g}\, h\hat{y} + \boxed{m\vec{g}\, d\, \hat{x}}$$

NULLO
prodotto scalare fra due vettori perpendicolari

alla stessa maniera per le altre forze conservative

Poiché la forza gravitazionale è conservativa posso dire che

$$* \boxed{U_i - U_f = L_{if}}$$ con U energia potenziale

Introduciamo ora l'energia meccanica $E = K + U$

mettendola dentro il teorema delle forze vive e quello di prima abbiamo che

$$\boxed{E_i = E_f = U_i + K_i = U_f + K_f}$$

⚠ IN PRESENZA DI SOLE FORZE CONSERVATIVE ⚠

* fai attenzione $L_{if} = U_i - U_f = K_f - K_i$

Ricorda l'energia potenziale per le forze elastiche è $\frac{1}{2} kx^2$

n.b: avendo l'energia potenziale è possibile trovare la forza derivando rispetto alla distanza

CENTRO DI MASSA

Per poter studiare sistemi formati da più elementi conviene trovare un punto nel quale possiamo sintetizzare l'intero sistema definiamo questo punto come il centro di massa

Studiamone la posizione rispetto agli altri elementi

su una dim: $\boxed{x_{cm}} = \boxed{\frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}}$ con i iesimo elemento

su + dim: $\boxed{\vec{r}_{cm}} = \boxed{\frac{\sum r_i m_i}{\sum m_i}}$

Studiamone il moto

Il moto del centro di massa è dato unicamente dalla sommatoria delle forze esterne al sistema

Quantità di moto

Già lo sai $\vec{P} = m\vec{v}$ con il centro di massa avrai che ~~...~~ $\vec{P} = M V_{cm} \Rightarrow$ con $M = \sum_i^{i} m_i$ e $V_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i^{i} m_i \vec{v}_i$

sarà quindi: $\vec{P} = M V_{cm} = \sum_i^{i} m_i \vec{v}_i$ e se ci fai caso

* $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$ e COSA VUOL DIRE? CHE IN ASSENZA DI FORZE ESTERNE LA QUANTITÀ DI MOTO SI CONSERVA

Impulso

Definiamo l'impulso come l'integrale della forza per il tempo in cui essa agisce su un oggetto e ne modifica il moto

$$I = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt$$

$\boxed{\text{Nota bene}}$ se $I = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt \overset{*}{\Rightarrow} I = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{P}}{dt}\, dt = P(t_f) - P(t_i) = \Delta\vec{P}$

torricelli

$\Rightarrow$ L'impulso non è altro che la variazione di quantità di moto

Si definisce forza media $\vec{F}_m$ di un impulso $= \frac{I}{t_f - t_i}$

Urti o collisioni

Fenomeno che accade fra due o più oggetti nel quale essi collidono per l'appunto e interagiscono attraverso delle forze molto più grandi delle forze esterne che possono essere presenti facendole risultare trascurabili: motivo per cui si CONSERVA LA QUANTITÀ DI MOTO

Poi vabbè lo sai:
- URTO ELASTICO si conserva
  - quantità di moto
  - energia cinetica
- URTO ANELASTICO si conserva
  - quantità di moto

Dinamica rotazionale

come già sai, $\vec{\omega}$ velocità angolare è definita dall'angolo spazzato dal raggio sul tempo $\frac{d\theta}{dt}$ ed ha direzione coincidente con l'asse di rotazione del corpo

Ora se io volessi trovare la velocità di un ~~corpo~~ punto del corpo, è chiaro che esso deve dipendere dal raggio vediamo se ci torna. cos'è la velocità? $\frac{S}{t}$ ok, ma che spazio? l'arco di circonferenza fatto dal punto materiale del corpo GUARDA CASO $d\theta \times \vec{r}$ = segmento circolare e dunque $\vec{v} = \frac{\text{segm. circolare}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \times \vec{r}$ torna fin troppo bene $\Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

affrontiamo ora l'accelerazione di un punto del corpo

ovviamente sarà $\frac{d\vec{v}}{dt}$ ma $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

da cui $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \boxed{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}} + \boxed{\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}}$ (derivata di un prodotto)

nota che l'accelerazione ha due componenti: una $\boxed{\text{radiale}}$ ed una $\boxed{\text{tangenziale}}$

il che torna particolarmente bene: in un prodotto vettoriale il risultato è infatti direzionato ortogonalmente ai fattori dove si moltiplica per il raggio si trova la tangenziale, dove per la velocità trovo la radiale

e guarda che figo se il moto è circolare uniforme $\Rightarrow$ raggio costante

no non ne son sicuro

Se ~~...~~ α accelerazione angolare costante $\Rightarrow$ $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$

$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Energia cinetica rotazionale

Preso un corpo rotante, ogni sua particella avrà energia cinetica rotazionale $\frac{1}{2} m_i v_i^2$ con $v = \vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp i}$

ω senza pedice per tutti uguale

L'energia cinetica rotazionale sarà dunque la somma delle energie cinetiche delle particelle

$$K_{risultante} = \sum_i K_i = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum m_i r_{\perp i}^2 \right) \omega^2 = \boxed{\frac{1}{2} I \omega^2}$$

momento d'inerzia

Momento D'INERZIA

- momento che dipende dall'asse di rotazione
- calcolabile dividendo un corpo in tanti piccoli elementi ognuno di massa dm_i avremo dunque

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2 = \int r_\perp^2 dm \quad \text{minchia!}$$

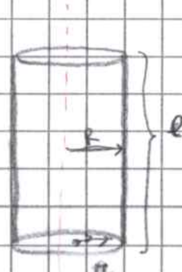
eh, minchia davvero, integrale bello complicato ma ~~per~~ semplice per:

1) corpi di densità costante: in questo caso $dm = \rho \, dV$
però lo meno lavori su integrali di volume

2) oggetti di rotazione ~~sem~~ di forma semplice con asse di rotaz. SIMMETRICO

Esempi di oggetti semplice

- momento di inerzia di un cilindro attorno al suo asse
PROVA 1º



$I = \sum r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$ facciamolo diventare un integrale rispetto al raggio: grazie alla forma abbastanza semplice posso affermare che $\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow \frac{M}{\pi R^2 \ell} \Rightarrow$ ~~$\frac{dm}{dr}$~~ ~~ρ~~ $M = \rho (\pi R^2 \ell)$

$\Rightarrow \frac{dm}{dr} = \rho (2\pi r \ell) \Rightarrow dm = \rho (2\pi r \ell) dr$

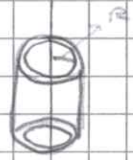
ne concludo che $\int r^2\, dm = \int_0^R r^2 \rho (2\pi \ell)\, dr = \rho(2\pi \ell) \int_0^R r^3\, dr$

NOTIAMO CHE: non dipendendo dall'altezza del cilindro, otteniamo che il mom. d'inerzia di un disco È LO STESSO

$$\frac{M}{\pi R^2 \ell}\, 2\pi \ell \int_0^R r^3\, dr = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Altri momenti di inerzia notevoli

- Guscio cilindrico sottile (dunque anche di un disco bucato e con margini sottili)

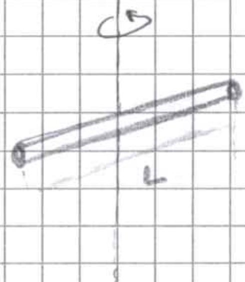


$\Rightarrow I = MR^2$

- Sfera

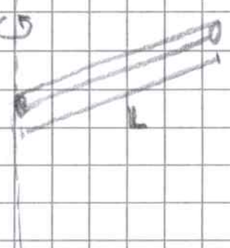
$\Rightarrow I = \frac{2}{5} MR^2$

- Sbarra sottile, asse passante per il centro



$\Rightarrow I = \frac{1}{12} ML^2$

- Sbarra sottile, asse passante per un estremo



$\Rightarrow I = \frac{1}{3} ML^2$

Teorema sul momento d'inerzia

(a suo dire sembra utile) [e lo è veramente!]

$I = I_{cm} + Md^2$

I ↓ momento d'inerzia di un corpo rotante

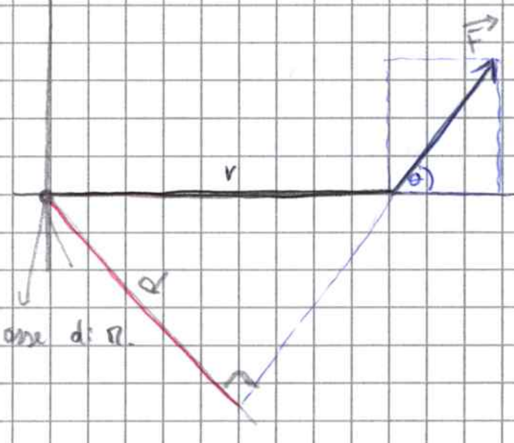
I_{cm} ↓ momento d'inerzia ~~del~~ rispetto al centro di massa dal quale passa un asse di rotazione parallelo a quello vero distante d da quello vero

Momento di una forza

Definiamo il momento di una forza come ciò che cambia la rotazione: come la forza cambia il moto di un oggetto, così la rotazione è variata dal momento di quella forza

chiamiamo il vettore del momento $\vec{\tau}$ esso sarà definito come

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ come enunciamo, il momento di una forza dipende da r ovvero ~~dal braccio della forza~~: DISTANZA DAL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA FORZA ALL'ORIGINE



n.b.: essendo un prodotto vettoriale il modulo è definito come $|r||\vec{F}|\sin(\theta)$ introduciamo allora la nozione di braccio della forza (ovvero d)

BRACCIO DI UNA FORZA: distanza che dal punto di applicazione cade perpendicolarmente sulla direzione della forza

Possiamo concludere che: il modulo del momento della forza è dato dal modulo della forza per il braccio

Direzione e verso?

1) direzione: essendo un prodotto vettoriale, esso sarà perpendicolare ai due vettori-fattori e passante per ~~il punto di applicazione~~ l'asse di rotazione

2) verso? regola della mano destra.

Momento angolare

Come il momento di una forza è l'analogo rotazionale della stessa il momento angolare sarà l'analogo rotazionale della QUANTITÀ DI MOTO

esso sarà dunque definito come

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

concettualmente è molto simile al momento di una forza e infatti strettamente collegato: proviamo a derivare il momento angolare

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{p}}}_{=0} + \vec{r} \times \vec{F} =$$

$$= \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

NE CONCLUDIAMO CHE $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}$ legge che possiamo definire l'analoga rotazionale della seconda legge di NEWTON

prodotto vettoriale nullo: vettori uguali e dunque paralleli

⚠ Questo è valido solo nei sistemi di riferimento inerziali ⚠

Studiamo cosa succede nel <u>moto circolare uniforme</u>

- notiamo innanzitutto che la forza centripeta $\vec{F}_c$ ha momento nullo (poiché parallela al raggio) ciò vuol dire che il momento angolare sarà costante nel tempo

  E questo è un bene, studiamone il modulo $|\vec{l}| = \vec{v}R = \vec{r}\vec{\omega}R^2$ direzione e verso easy: direzione perpendicolare al piano di rotazione, verso secondo la regola della mano destra

  i calcoli dopo non li ho capiti

n.b. se per la 3ª legge di Newton la somma delle forze interne è nulla stessa cosa varrà per i momenti della forza

$\Rightarrow$ la somma dei momenti delle forze ~~esterne~~ interne è nullo

- Studiamo cosa combina il momento angolare nei corpi rigidi

intuitivamente varrà $\vec{L}_a = \sum \vec{r}_i \times m_i v_i$ da cui avremo

$\sum r_i^2 \vec{\omega}_i m_i$ e dunque $I\vec{\omega} = \vec{L}_a$ con $\vec{L}_a$ = momento angolare lungo l'asse di rot.

se decidessimo di derivarlo come sappiamo otterremmo il momento della forza che permette la rotazione vediamo:

$$\frac{dL_a}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} \Rightarrow \text{derivando rispetto al tempo } I \text{ risulta una costante} \Rightarrow I\frac{d(\omega)}{dt} = \boxed{Ia}$$

[con a acc. angolare ovviamente]

il che torna particolarmente essendo Ia la definizione del ~~momento~~ momento risultante delle forze

si riconferma dunque $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$

analizziamo cosa sia $\vec{\tau}$ risultante: $\vec{\tau}_{ris} = \sum_i \tau_i = \sum \vec{F}_i \times \vec{r}_i$

ricorda: stiamo parlando di forze esterne altrimenti il sistema sarebbe fermo per il 3° principio di Newton

$\Rightarrow$ ma infatti, se $\sum F_{ext} = 0$ che succederà mai? sistema in equilibrio

⚠ Ricorda per gli esercizi: il momento angolare e di una forza sono lineari

- Sulle slide c'è scritto che le condizioni d'equilibrio sono

$\sum_i \vec{F}_i = 0$; $\sum_i \vec{\tau}_i = 0$

$\hookrightarrow$ ma secondo me basta questa ... boh

- Affrontiamo il comportamento dell'energia cinetica nel moto rotazionale intuitivamente sarà data dall'energia di ogni particella del corpo

$$K_R = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \underbrace{\omega^2}_{\text{uguale x tutti}} r_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2 = \boxed{\frac{\omega^2 I}{2}}$$

- E se un corpo girasse attorno ad un asse parallelo rispetto al centro di massa: sul libro ci sono un botto di calcoli grazie ai quali si arriva a

$$\boxed{I = I_{cm} + MD^2}$$

Conservazione del momento angolare

Come già sappiamo la quantità di moto si traduce, nel moto rotazionale, con il momento angolare, a sostegno di questa tesi avremo infatti che

Il momento angolare, IN ASSENZA DI FORZE ESTERNE, si conserva
(così come la quantità di moto)

cerchiamo di capire gli effetti di ciò:
prendiamo un pattinatore sul ghiaccio che fa le piroette, bravo!
in un primo momento le fa a braccia aperte, perpendicolari al corpo
come le chiude la sua velocità angolare aumenterà notevolmente
(trascuriamo tutti gli attriti)

$I_i\omega_i^2$ $\qquad$ $I_f\omega_f^2$

poiché siamo in assenza di forze esterne i due momenti angolari risulteranno $\boxed{\text{UGUALI}}$

Lavoro nel moto rotazionale

Solito procedimento: prendiamo il lavoro nei moti non rotazionale,

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F}\, d\theta\vec{r}$

calcolandolo nei moti rotazionali avremo $dW = \vec{F}\, d\theta\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{r}\, d\theta = |F| \cdot |r| \sin(\theta)\, d(\theta)$
$= \vec{\tau}\, d\theta$ *

$\boxed{\text{CAZZATA}}$ perché solo la componente tangenziale? perché la componente radiale ($\vec{F}\cos(\theta)$) è ortogonale allo spostamento DUNQUE NON COMPIE LAVORO

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA NEI MOTI ROTAZIONALI

$\Rightarrow \quad \Delta K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$ (se vuoi prova a dimostrarlo)

dim th en cin $\quad \Delta K_r = W \overset{*}{=} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I \alpha\, d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I \frac{d\omega}{dt}\, dt\, \omega$

$= \int_{\omega_i}^{\omega_f} I \omega\, d\omega = \frac{1}{2} I \omega_f - \frac{1}{2} I \omega_i = \Delta K_r$ ✓✓

⚠ Ricorda: in presenza di traslazioni e rotazioni:
$\Delta K + \Delta K_{R} = W$ ⚠

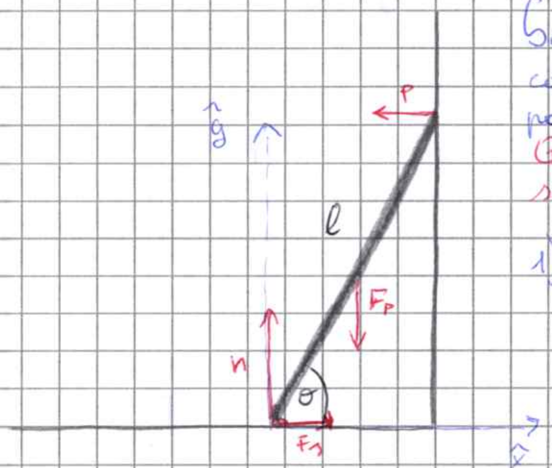
i Potenza nel moto rotazionale

Al solito: moto non rotazionale? $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

Moto rotazionale $\mathcal{W} = \tau \cdot \frac{d\theta}{dt} = \vec{\tau}\,\vec{\omega}$

tutto torna

Esercizio: equilibrio di un corpo rigido



Scala appoggiata su di un muro, lunga l, con θ angolo fra pavimento ed essa pavimento caratterizzato da $\mu_s = 0{,}4$
Qual'è θ_{min} per il quale la scala non scivola?

1) analizziamo le forze che caratterizzano il sistema

- $\vec{F_P}$ = forza peso, con cm come punto di applicazione
- $\vec{n}$ = forza normale del terreno sul punto O
- $\vec{F_s}$ = forza di attrito statico, punto di applicazione O
- $\vec{P}$ = forza normale che la parete imprime sulla scala al suo apice

Utilizziamo le 2 condizioni di equilibrio

4

1) Sulle forze con $\hat{x}$: $\vec{F_s} = \vec{P}$
 $\hat{y}$: $\vec{F_P} = \vec{n}$

ricorda che F_s è la massima forza d'attrito concessa, mi basta trovarla in funzione dell'angolo, quello è θ_{min}

2) Sui momenti con $\hat{x}$ rispetto a O [nota che ~~...~~ $\vec{F_s}$ e $\vec{n}$ hanno momento nullo, poiché sono attaccati a O e dunque $ds = \emptyset$]

$\Rightarrow$ momento di $\vec{F_P}$ = momento $\vec{P}$

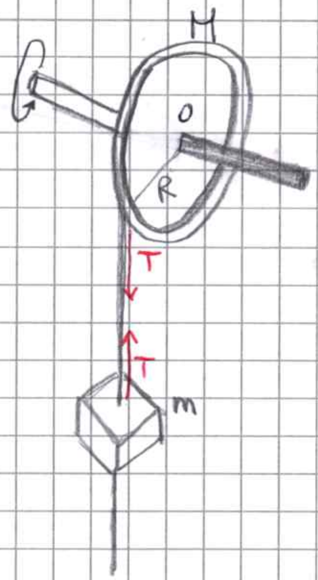
$\Rightarrow mg\,\frac{l}{2}\cos(\theta) = \vec{P}\, l \sin(\theta)$

va bene trovare P in funz di θ, tanto $\vec{P} = \vec{F_s}$

$\Rightarrow \vec{P} = \frac{\cancel{mg}}{2\tan(\theta)} = F_s = \cancel{mg}\,\mu_s$

$\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{1}{2\mu_s}$

se il sistema sta in eq per $F_s \overset{=}{\leq} \vec{P}$
$\Rightarrow (\theta) = \arctan\left(\frac{1}{2\mu_s}\right)$



Esercizio accelerazione angolare di una ruota

Ruota di raggio R, massa M che può ruotare sull'asse con una corda attaccata e alla quale è attaccato un oggetto con massa m

Calcolare l'accelerazione angolare della ruota, l'accelerazione lineare dell'oggetto e la tensione della corda

- Come lo farei io: cosa fa girare la ruota? diciamo la tensione T verso il basso
  Quanto è difficile che giri? I
  Ok innanzi tutto il momento di T è $\tau = I\alpha$
  ma anche $\tau = T \times ds$
  [particolarmente vasno $ds = R$ perpendicolare a T]

Quindi $\Rightarrow \tau = I\alpha = TR \Rightarrow \alpha = \frac{TR}{I}$ ✓

Per quanto riguarda l'oggetto?
abbastanza easy

$\vec{F} = m a \Rightarrow \frac{\vec{T}}{m} = a$

e T quanto sarà mai? $\boxed{T = mg}$

riscriviamo i risultati ora!

$\alpha_a = \frac{mgR}{I}$ $\quad \alpha_e = \frac{mg}{m} = g$ (ha senso)

non proprio non ho calcolato bene la risultante sull'oggetto

$\vec{F_R} = mg - T$ e dunque

$a_e = \frac{mg - T}{m}$

Poi sfrutto la relazione che lega α_a e α_e

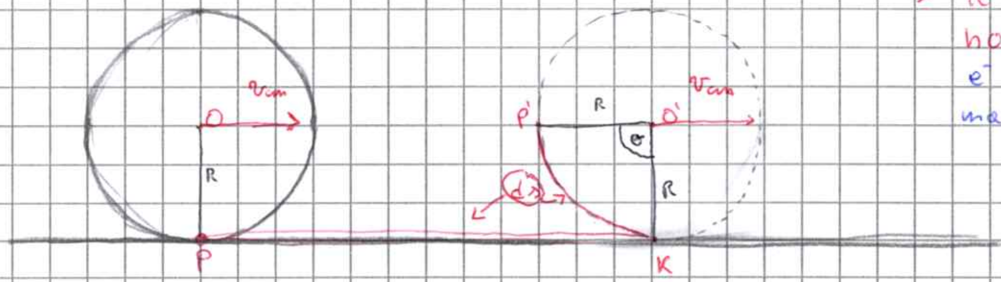
e posso dire che

$\alpha_e = \alpha_a R = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m} \Rightarrow T = \frac{mg}{1 + (mR^2/I)}$

Moto di puro rotolamento

- Moto che avviene quando un corpo rotola lungo un piano SENZA STRISCIARE, ciò vuol dire che se immaginassimo una ruota che rotola lungo un piano

↳ il punto P come K non hanno velocità!!! e' poco intuitivo, vero ma fidati



- Condizioni affinché si verifichi un moto di puro rotolamento

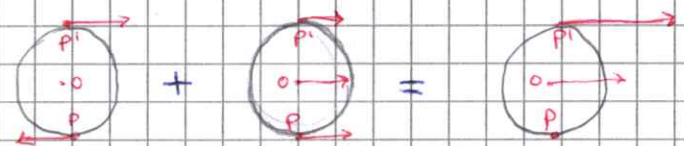
$$\boxed{s = R\theta} \quad e \quad v_{cm} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$a_{cm} = \frac{d v_{cm}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

eh sì perché se ci fai caso la distanza fra P e K è la stessa fra K e P' simpatico!

beh direi che torna abbastanza, daje!

- Se ci fai caso, il moto di puro rotolamento è uguale alla somma di un moto rotatorio attorno al centro O e un moto di trascinamento dell'intera ruota, guarda!

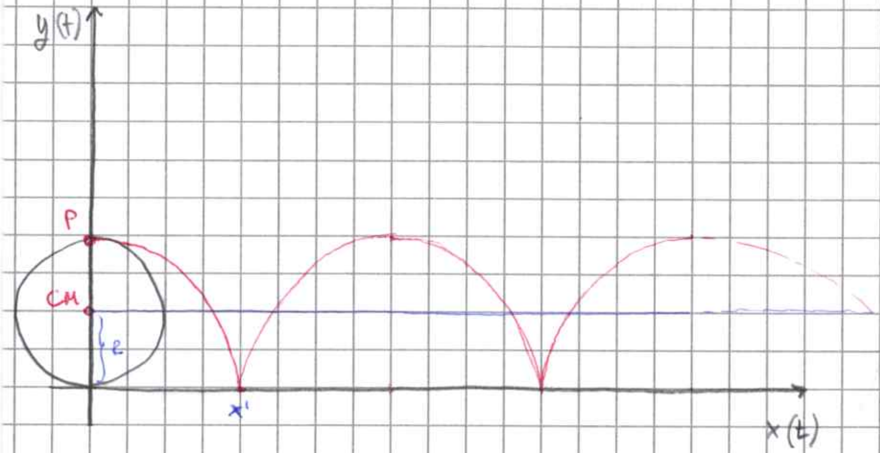


ROTAZIONE PURA	TRASLAZ. PURA	ROTOLAM. PURO
$V_{P'} = v$	$V_{P'} = v$	$V_{P'} = 2v$
$V_O = 0$	$V_O = v$	$V_O = v$
$V_P = -v$	$V_P = v$	$v_P = 0$

daje, carino

RICORDA BENE: $a = -\omega^2 r$

- Diamogli ora una legge oraria, diamogliene 2: · una per un punto sulla circonf.
  · una per il centro di massa



1) Per un punto sulla circonferenza: una legge $x(t)$ e una $y(t)$:

- imponiamo inizialmente che $P = (0, 2R)$

dunque $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 2R \end{cases}$

avremo poi che dopo un Θ di $180° = \pi$ ~~dove~~ $\begin{matrix} x = 2R \\ y = 0 \end{matrix}$ [momento x']

dopo di che la curva si ripete ~~de~~ ispecularmente, poi è ripetitiva con periodo $T = 2\pi$

ma ehi è proprio simile al seno e coseno, per $y(t)$ è proprio il coseno

$y(t) = |2R\cos(\Theta)| + y_0$ che possiamo riscrivere come $|2R\cos(\omega t)| + y_0$
così è in funzione di t che cazzo

Vabbè il ragionamento è quello giusto ma non ho tempo da perdere

Legge oraria: $\begin{cases} x(t) = R\sin(\omega t) + \omega R t \\ y(t) = R\cos(\omega t) + R \end{cases}$

2) Per il centro di massa invece easy è una funzione costante con legge oraria
$\begin{cases} x(t) = v_{cm}\, t + x_0 \\ \end{cases}$

- Proprio perché il rotolamento puro è scrivibile come somma di un rotolamento + una traslazione così possiamo definire l'energia cinetica

$$K_R = K_t + K_{ROT} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \underbrace{(MR^2 + I)}_{} \omega^2$$

considerabile come un nuovo momento d'inerzia, attorno ad un asse di rotazione istantanea ⤳

⤳ in che senso istantanea?

beh, in un moto di rotolamento se lo dividiamo in istanti sembra effettivamente che rotoli attorno un asse e quale sarà mai questo asse? l'unico punto a velocità 0 in ogni istante il punto a contatto col suolo

- Moto di puro rotolamento e attrito

Iniziamo con una considerazione: se non ci fosse attrito non ci sarebbe rotolamento ma solo rotazione

MA l'attrito non compie lavoro, il punto a contatto col suolo è fermo! non ha accelerazioni, lavoro = 0

CIÒ VUOL DIRE CHE NEL MOTO DI PURO ROTOLAMENTO SI CONSERVA IL MOMENTO DELLE FORZE E L'ENERGIA MECCANICA

Da qui decido di non saperne +, se nei compiti lo chiedessero me lo sfuggirebbero

Oscillazioni

Iniziamo con il definire cosa sia un oscillazione: esso è un moto che viene prodotto ogni volta che si perturba la posizione di equilibrio stabile di un corpo

La caratteristica più interessante del moto oscillatorio è quella di essere un moto PERIODICO
↳ che si ripete con regolarità ~~[illegible]~~ nel tempo (a meno di forze esterne che modifichino il moto)

- Il periodo di un moto armonico identifica in quanto ~~t~~ viene completata un oscillazione completa (per poi ripetersi)
- La frequenza indica invece quante oscillazioni vengono compiute in un secondo

Esempio: il moto armonico

Prendiamo una molla, comprimiamola e attacchiamoci una massa all'estremità, essa inizierà ad oscillare avanti ed indietro, vediamo secondo quali leggi

- Ad ogni istante $\vec{F} = m\vec{a}$ con $\vec{F} = -kx$
  avremo dunque $ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

  in funzione del tempo sarà $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}\,x(t)$

  denotiamo ora $-\frac{k}{m} = \omega^2$ e dunque $\omega = \sqrt{-\frac{k}{m}}$

  Chiamiamo ω frequenza angolare perché? che cazzo ne so

  Ho sentito nig: il moto armonico è sempre caratterizzato da un accelerazione che è uguale ad una costante per Δx

  anche qui $a = -\frac{k}{m}\Delta x$

Dinamica del moto armonico

Già affrontata in precedenza ma riaffrontiamolo

Eravamo rimasti a $\begin{cases} F = ma \\ F = -kx \end{cases}$ da cui $ma = -kx \Rightarrow a = -\frac{k}{m} x$

introducendo la frequenza angolare ci riduciamo a $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$

Leggi orarie:

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ per cui

$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \sin(\omega t + \phi)$ e

$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$ che guarda caso è uguale a $-\omega^2 x(t)$

come periodo dell'oscillazione avremo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e frequenza $f =$

Come ampiezza massima? dipende di cosa

$x_{max} = x(t')$ con t' tale che $x'(t) = 0$ [massimo o minimo della funz.]

$x'(t) = v(t) \Rightarrow v(t) = 0$ se $\sin(\omega t + \phi) = 0 \rightarrow \omega t = 0 \Rightarrow t = 0$

$x(0) = A\cos(0) = \boxed{A} = |x_{max}|$

con lo stesso ragionamento avremo $|v_{max}| = \omega A$

$|a_{max}| = \omega^2 A$

n.b. in tutto questo calcolo prendiamo $\phi = 0$ per semplicità

Ora si vede:

Moto armonico sotto forza costante

molle in realtà tronqui, basta usare come posizione iniziale quella della molla già un po' estesa a causa della forza che su di essa viene applicata, e lavorare partendo dalla condizione di equilibrio

$$F = ma = -kx - \text{Forza costante}$$

Il che torna abbastanza, è una molla che avrà una costante k o un po' + forte o + debole a seconda del verso della forza

Energia nel moto armonico

→ ENERGIA POTENZIALE : $\frac{1}{2} k x^2$

→ ENERGIA CINETICA : $\frac{1}{2} m v^2$

Guardo come cambia se $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$
e $v(t) = A\omega \sin(\omega t + \phi)$

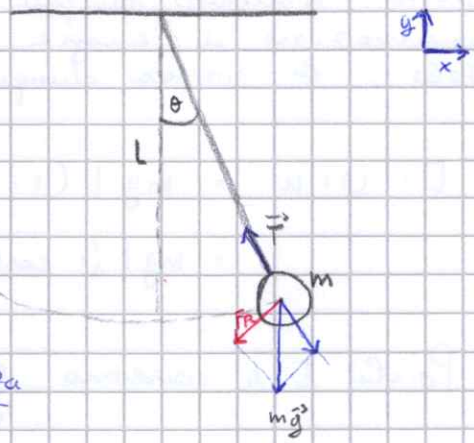
avremo che $U = \frac{1}{2} k (A^2 \cos^2(\omega t + \phi))$

$K = \frac{1}{2} m (A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi))$

dunque $E = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \Rightarrow \boxed{\text{con } k = m\omega^2}$

$$= \frac{1}{2} A^2 m \omega^2 \left(\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)\right) = \boxed{\frac{1}{2} k A^2}$$

Pendolo semplice



Studiamo il moto del pendolo semplice in quanto approssimativamente armonico

Innanzi tutto chiamiamo $\vec{F_R}$ l'unica forza che risulta variare il moto del sistema, che moto in particolare! un moto oscillatorio (da dimostrare) ma che segue un arco di circonferenza avremo dunque:

$$\begin{cases} \vec{F_R} = ma = m \overset{\text{RAGGIO}}{L}\overset{\text{ACCELERAZ ANG.}}{\alpha} \\ \vec{F_R} = -mg\sin(\theta) \end{cases} \quad \text{da cui } mL\alpha = -mg\sin(\theta) \Rightarrow L\alpha = -g\sin(\theta)$$

anche dallo studio dei momenti avremo la stessa legge

$$\begin{cases} \tau = I\alpha \\ \tau = F\Delta r = -mg\sin(\theta)L \end{cases} \quad \text{da cui } I\alpha = -mgL\sin(\theta) \quad \text{con } I = mL^2$$

$$\Rightarrow mL^{\cancel{2}}\alpha = -mg\cancel{L}\sin(\theta) \Rightarrow L\alpha = -g\sin(\theta)$$

Ora attenzione che è interessante

ti ricordi che da analisi $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$?

bene possiamo dunque dire che $\lim_{\theta\to 0} \sin(\theta) = (\theta)$

$\Rightarrow$ Ne concludiamo che per piccole oscillazioni $[\theta \to 0]$ la legge precedentemente studiata è riscrivibile come

$L\alpha = -g\theta$ da cui $\alpha = -\frac{g}{L}\theta$

ora, cosa s'era detto? un moto oscillatorio è caratterizzato dall'accelerazione definita come una costante per uno spostamento

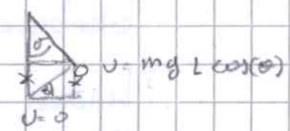
chiamiamo quindi $\omega^2 = \frac{g}{L}$ da cui

$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ e avremo la nostra legge oscillatoria

$$\boxed{\alpha = -\omega^2\theta}$$

Stesso risultato si può evincere dal calcolo della conservazione di energia meccanica, provo a farlo da solo, lo scriverò dunque in lapis

perché $L(1-\cos(\theta))$



$$\cdot\ E = U + K = mgL(1-\cos(\theta)) + \frac{1}{2} m v^2$$
$$= mgL(1-\cos(\theta)) + \frac{1}{2} m \left(L\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Poiché E si conserva $\frac{dE}{dt} = 0$ deriviamo dunque l'espressione di E

$\Rightarrow$ Qui c'è un po' di teoria sulla derivazione di funzioni ricordiamoci che stiamo derivando l'angolo in funzione del tempo

$$\Rightarrow mgL\sin(\theta)\frac{d\theta}{dt} + 2\cdot\frac{1}{2} m L^2 \frac{d^2\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0 = mgL\sin(\theta)\frac{d\theta}{dt} + mL^2\frac{d^2\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0$$

dividiamo i membri a questo punto $\Rightarrow -mgL\sin(\theta)\frac{d\theta}{dt} = mL^2\frac{d^2\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}$

eliminiamo l'eliminabile $= -g\sin(\theta) = L(\alpha)$
$\hookrightarrow$ ricordiamo che $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt}$

Rieccoci a $\alpha = -\frac{g}{L}\sin(\theta) \Rightarrow$ per tutto quello precedentemente detto

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = -\omega^2\theta}$$

Oscillazioni forzate e smorzate dacci un occhio se trovi esercizi nelle prove d'esame

Forza gravitazionale

Grazie alla legge di gravitazione universale di Newton sappiamo che due punti puntiformi si attraggono secondo una forza definita come

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

Ovviamente anche qui è possibile dimostrare che un corpo esteso su un punto materiale attrae un punto con massa come

$$-G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$$

La forza gravitazionale è una forza conservativa, la variazione del lavoro da lei compiuta dipende unicamente dalla posizione iniziale e da quella finale, NON DAL PERCORSO e sarà inoltre uguale alla differenza di energia potenziale

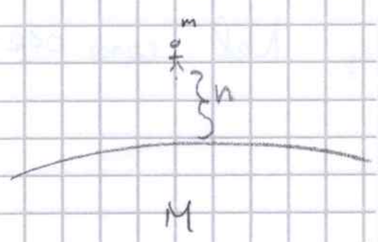
$\Delta U = L$ con $U = \frac{G m_1 m_2}{r}$ ⚠ fratto r^1 NON $\cancel{r^2}$

Alcune curiosità interessanti per come è definita la forza gravit.

rendiamoci conto che se $r \to +\infty$ $F_G \to 0$
mentre se $r \to 0$ $F_G \to \infty$

Per quanto riguarda la terra che ci attrae!?

Prendiamo un omino ad altezza h



$U = -\frac{G M m}{R_T + h}$ poi non capito ma se sviluppi in serie per $h \ll R_T$ viene

$g = \frac{GM}{R_T}$ e $U = mgh$

Un pò di formule interessanti:

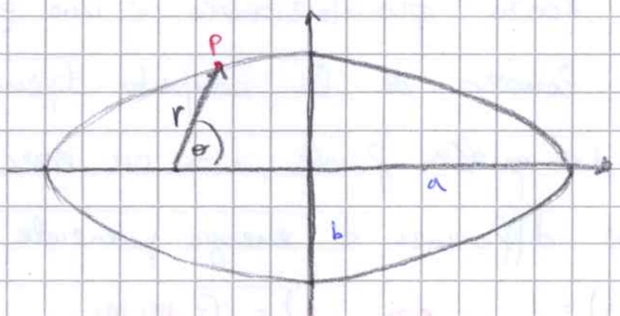
- Se $E < 0$ allora il corpo m è intrappolato nel campo gravitazionale di M e può allontanarsi al massimo di $r_{max} = \frac{GmM}{|E|}$
- se la $E > 0$ easy può allontanarsi quanto gli pare

- Chiameremo v_{fuga} la velocità minima che deve avere un corpo per poter uscire dal campo gravitazionale di un altro corpo

$$v_{fuga} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Orbite ellittiche

$$r(\theta) = \frac{c}{1 - e\cos(\theta)}$$



dove "e" è detta eccentricità e a seconda di quel parametri assume da vita a orbite differenti:

- $0 < e < 1$: ellisse
- $e = 0$: circonferenza
- $e = 1$ parabola
- $e > 1$ iperbole

Nel caso $0<e<1$ => semiasse maggiore $\boxed{\text{"}a\text{"} = \frac{c}{1-e^2}}$

semiasse minore $\boxed{\text{"}b\text{"} = \frac{c}{\sqrt{1-e^2}} = a\sqrt{1-e^2}}$

Se uno dei due fuochi è occupato dal corpo intorno al quale orbita il punto P

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{B^2}{K}} \; ; \; \boxed{e = \sqrt{1 + \frac{2AB^2}{K^2}}} \; ; \; \boxed{a = \frac{c}{1-e^2} = \frac{-K}{2A}}$$

Leggi di Keplero

1) I pianeti nel sistema solare si muovono secondo delle orbite ellittiche ed il sole è situato in uno dei due fuochi

2) Nel moto dei pianeti del sistema solare, aree uguali vengono spazzate in tempi uguali

3) Il quadrato del periodo di rivoluzione dei pianeti nel SS è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita ellittica

Dalla seconda legge introduciamo la velocità areolare $\dot{A}$: velocità che indica l'area spazzata nell'unità di tempo

$\dot{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}$ (prodotto vettoriale)

Dalla terza legge avremo (non so come) che
il tempo di rivoluzione $T \Rightarrow T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right) R^3$

ELETTROMAGNETISMO

La carica elettrica

- Proprietà della materia, in realtà è l'unica responsabile dell'aggregazione della materia, altrimenti sarebbero atomi sparsi

- Perchè se ogni oggetto è caricato elettricamente, non prendiamo fissi la scossa?

Per rispondere a questa domanda introduciamo il concetto di carica negativa e positiva

→ In natura, la materia, ovvero gli oggetti, ovvero gli agglomerati di atomi, hanno la tendenza a rimanere elettricamente neutri
⇒ è questo il motivo per il quale attirano a sé cariche neg. o pos. con il fine di compensare la propria carica. (o altrimenti le rilasciano)

Una volta neutri, bona, si fanno i cazzi loro e non attraggono più nulla

- Un corpo caratterizzato da una prevalenza di cariche neg. si dirà carico negativamente; se ~~carico~~ con prevalenza di cariche pos. carico positivamente

Quantizzazione della carica

- Tralasciamo la composizione dell'atomo, che ormai so a memoria; quello che è fondamentale dire invece, è che proprio a causa di tale composizione possiamo tranquillamente affermare che

la carica elettrica è quantizzata: la materia è costituita da un numero finito ed intero di elettroni e protoni, la carica elettrica di qualunque oggetto è un multiplo intero della carica del singolo elettrone

$\Rightarrow Q = \pm\, n e \quad$ con $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C

Intuitivamente accade che
DUE CARICHE UGUALI SI RESPINGONO
MENTRE CARICHE DIVERSE SI ATTRAGGONO

Conduttori e isolanti elettrici

In natura esistono materiali che per loro composizione trasmettono facilmente le cariche elettriche I CONDUTTORI ed altri che tendono a limitare il passaggio attraverso essi delle cariche elettriche I NON CONDUTTORI

Far comunicare un conduttore carico con la terra si dice **mettere a terra**

Ma cosa rende un buon conduttore tale? In questi materiali gli elettroni degli atomi sono debolmente legati al nucleo questo permette lo scambio di quest'ultimi con l'ambiente circostante ovvero il passaggio di corrente

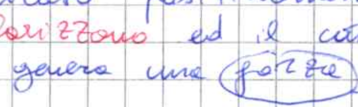
Vi è dunque una grossa classificazione dei materiali:

- ISOLANTI ELETTRICI: materiali che per strofinio si elettrizzano e mantengono per del tempo la carica elettrica

- CONDUTTORI ELETTRICI: materiali che non sono in grado di mantenere la carica se non in condizione di isolamento elettrico

→ curiosità: l'acqua distillata è un isolante ~~termico~~ elettrico

Preso un conduttore elettrico neutro, e avvicinatovi un corpo caricato positivamente le cariche del conduttore si polarizzano ed il conduttore si dice POLARIZZATO e tra i due si genera una forza attrattiva

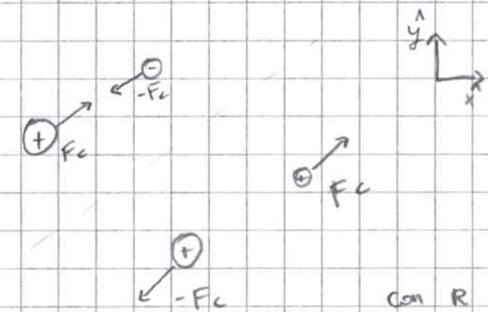


ora nota questo, ci si riduce quasi sempre alla dinamica, ma quello a cui c'è da stare attenti è l'origine di queste forze → SICURI CHE NON SIANO IMPULSIVE (ad esempio) n.b.: due corpi conduttori a contatto si comportano come un unico corpo rispetto al movimento delle cariche

Legge di Coulomb ⇝ Da cui [C] coulomb unità di misura delle cariche

Date due cariche q_1 e q_2 tra esse
si genera una forza attrattiva/repulsiva
che segue la legge di Coulomb per l'appunto -> simile di mente

$$F_c = K \frac{q_1 q_2}{R^2} \hat{r}$$



n.b. estremamente simile
all'attrazione gravitazionale
come dell'atomo in atomo
è estremamente simile
al SS (differiscono in realtà poiché le masse sono sempre positive, le cariche no) (ed ovviamente F_G è sempre attrattiva)

con R distanza delle q

Analizziamo un secondo K: possiamo definirla come la forza coulombiana fra due cariche di modulo unitario a distanza unitaria; ed è definita come

$$K = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0}$$

→ costante dielettrica nel vuoto

Piccola precisazione:
fra la forza gravitazionale e quella attrattiva elettrostatica
ci sono 33 ordini di grandezze
in favore di quest'ultima

Campo elettrico → def: una distribuzione di cariche genera un campo elettrico nello spazio circostante, ovvero modifica le proprietà dello spazio conferendo ad esso la possibilità di interagire con altre cariche nel momento in cui esse entrano nel suddetto campo

- La forza elettrica agisce su due cariche solo nel momento in cui esse "entrano in contatto"

aspetta ma in che senso in contatto? se sono a contatto a che minchia serve il raggio nella formula?

⇒ Probabilmente "entrare in contatto" ha un'accezione diversa rispetto a quella che ha nella dinamica ... infatti

Nell'elettromagnetismo due ~~forze~~ cariche entrano in contatto nel momento in cui il raggio fra esse è tale da rendere la forza elettrica fra esse non trascurabile

Possiamo infatti affermare che affinché questo accada:

$$\begin{cases} F_c > 0 \\ F_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{R^2}\hat{r} \end{cases} \quad \text{da cui} \Rightarrow R > \sqrt{K q_1 q_2}$$

[questa è una mia intuizione, ma almeno dimensionalm. torna]

Si può dunque calcolare la sfera (per un punto materiale) entro la quale la forza elettrica "dice la sua" Questa area, o meglio questa parte di spazio prende il nome di CAMPO ELETTRICO ed è caratterizzato dalla legge

→ ~~punto ϵ tutti~~ ~~q_j~~ dato il raggio di cui sopra, $B_R(q) \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\boxed{\vec{E} = K\frac{Q}{R^2}\hat{r}}$$

⇝ essa deriva da un semplice calcolo: devo calcolare l'espressione della forza che una carica q_0 sente su se stessa una volta entrata nel campo $\vec{E}$ di Q, non lo so ancora ma una qualsiasi forza nell'elettromagnetismo è data da $F = q_0 E$

[da notare che se nella dinamica $F = ma$, q_0 sarà il corrispettivo della massa mentre E dell'accelerazione]

da qui $F = q_0 E = k\frac{q_0 Q}{R^2}\hat{r} \Rightarrow E = k\frac{Q}{R^2}\hat{r}$

Da notare che: non dipendendo da una seconda carica sulla quale imprimere la forza, il campo elettrico esiste con o senza cariche da attrarre ed è sempre UGUALE solo che finché non vi è nessuna carica NESSUNA FORZA È GENERATA

nella stessa maniera possiamo determinare il CAMPO GRAVITAZIONALE:

$$\vec{a} = G\frac{M}{R^2}\hat{r}$$

Anche qui, nonostante presentino delle somiglianze il campo gravitazionale è sempre attrattivo, quello elettrico no

Ma infatti, quando uno va a calcolarsi la forza peso, cosa fa di differente se non moltiplicare la massa dell'oggetto per il campo elettrico attrattivo della terra (ovvero $\vec{g}$) (ricordiamo che la massa è l'analogo delle cariche nella gravitazione)

Inoltre se ci pensi bene La forza di Coulomb è la moltiplicazione di una carica per il campo elettrico dell'altra carica

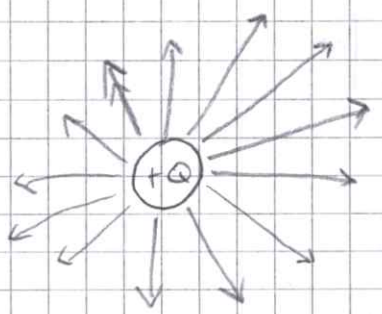
E ora, un po' di convenzioni

1) Il campo si denota graficamente con le linee di campo, dei vettori con direzione e verso (il modulo è il raggio di influenza del campo)

2) Il verso delle linee di campo è USCENTE se la carica è pos
ENTRANTE se la carica è neg

[solitamente si dice che carica positiva è fonte,
carica negativa è pozzo]

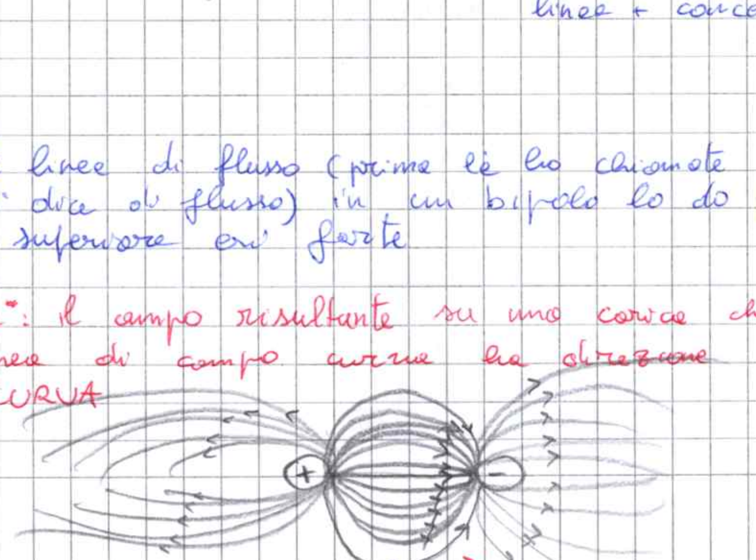
3) La densità di linee di campo determina ~~l'intensità di~~ l'influenza del campo (aiuta la comprensione con un disegnino)



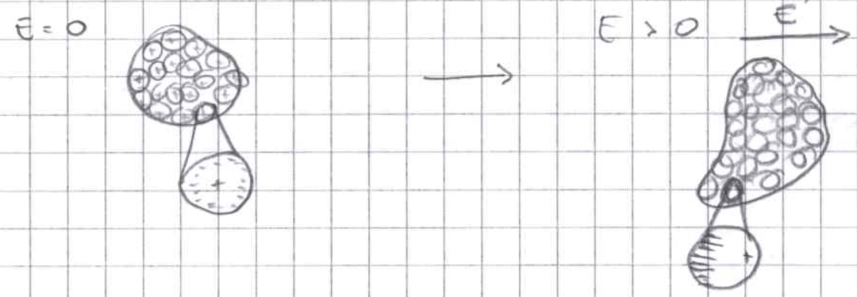
⇒ Lascia stare che è un disegno di merda, il campo vicino Q ha intensità maggiore che agli estremi, e infatti vicino alla Q ci sono ~~tut~~ le linee + concentrate.

Cosa succede alle linee di flusso (prima le ho chiamate di campo, ma si dice di flusso) in un dipolo lo do per conosciuto, alle superiori eri forte

Ricorda solo che: il campo risultante su una carica che sta su una linea di campo curva ha direzione TANGENTE ALLA CURVA

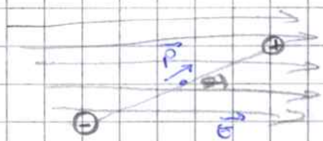


Se noi applicassimo un campo su di un materiale isolante neutro esso si polarizzerebbe, questo fenomeno ha una spiegazione atomica, basta infatti pensare che ogni atomo di cui è composto l'oggetto ha un nucleo positivo ed un "citoplasma negativo" sotto un campo costante succederà dunque ~~che questo~~



così per tutti gli atomi

Se noi avessimo un dipolo messo così rispetto ad un campo costante



il bipolo subirebbe un momento torcente che tenderebbe a spostare $-q$ più lontano ~~dalla~~ dal pozzo e $+q$ più ~~vicino~~ lontano dalla fonte

$$\vec{\tau} = \vec{F}\times\vec{d} = \vec{E}\times\vec{P} = \vec{E}q\times\vec{d}$$

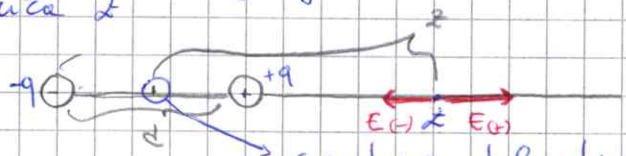
il che ci torna

e ciò vale per tutti i tipi di campo!, non per forza costante!

Ferma tutto prima di questo c'è da chiarire alcune cose vedo proprio a pagina nuova

CIAO BELLO ♡

Provo a calcolare il campo generato da un dipolo, ma non in tutti i suoi punti circostanti, che è un casino, solo sulla retta che congiunge le due cariche, lo calcolo rispetto alla carica z



centro del dipolo

Intuitivamente avrò due campi applicati a z: $E_{(-)}$; $E_{(+)}$
Il campo risultante non sarà altro che la somma di questi 2

$$\begin{cases} E_{(+)} = \dfrac{kq}{R^2}\hat{r} = +k\dfrac{q}{(z-d/2)^2} \\ E_{(-)} = -\dfrac{kq}{R^2}\hat{r} = -k\dfrac{q}{(z+d/2)^2} \end{cases}$$

da cui $E_R = k\dfrac{q}{(z-d/2)^2} - k\dfrac{q}{(z+d/2)^2} = kq\left(\dfrac{1}{(z-d/2)^2} - \dfrac{1}{(z+d/2)^2}\right) = \dfrac{kq}{z^2}\left(\dfrac{1}{(1-\frac{d}{2z})^2} - \dfrac{1}{(1+\frac{d}{2z})^2}\right)$

a questo punto mi conviene cambiare variabile: pongo $x = \dfrac{d}{2z}$

arriverò dunque ad avere $\dfrac{kq}{z^2}\left(\dfrac{1}{(1-x)^2} - \dfrac{1}{(1+x)^2}\right)$

Supponi che il punto z sia molto distante dalle due cariche e che $x \ll 1$ avremo dunque che $\dfrac{1}{(1-x)^2} - \dfrac{1}{(1+x)^2} \approx 4x$

ne concluderemo che $E_R =$

$= \dfrac{kq}{z^2} 4x$ dal cambio di variabile

avremo $= \dfrac{2kqd}{z^3}$

ora attenzione: fattori qd cosa sono! una massa per la distanza (nella ~~moto~~ dinamica) le sostituiremo con $\vec{P}$ chiamato

MOMENTO DEL DIPOLO ELETTRICO $= \vec{P} = qd$

da cui $\vec{E}(z) = 2k\dfrac{\vec{P}}{z^3}$ da cui evinciamo che $\vec{P}$ e $\vec{E}$ sono paralleli. ORA LA PARTE PRIMA HA SENSO

Distribuzione continue di cariche

Iniziamo ora a lavorare con corpi composti da infinite cariche fortunatamente analizzeremo casi nei quali la simmetria del corpo faciliterà estremamente le cose.
Riflettiamo inoltre sul fatto che è determinante come le cariche siano distribuite su questo corpo e dunque le DENSITÀ DI CARICA

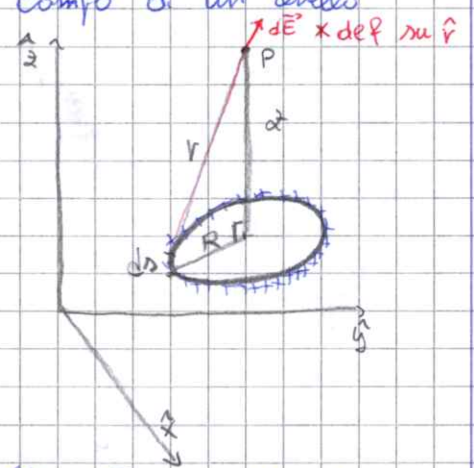
Prendiamo ad esempio un cubo di lato 1 cm, se volessimo esaminare un cubetto talmente ~~un~~ piccolo da risultare di carica unitaria
definiamone la densità di carica:

$\Rightarrow \rho(\vec{r}) = \frac{dq}{dV}$ da cui $dq = \rho(\vec{r})\,dV$ trovata la carica infinitesimale

è breve il passo $\Rightarrow q = \int dq = \int \rho(\vec{r})\,dV$

Poco cambia se dovessimo lavorare con oggetti bidimensionali
$\Rightarrow$ la densità non sarà volumetrica ma superficiale

Ora divertiamoci un po' calcoliamo il campo di un anello carico positivamente



consideriamo innanzi tutto l'anello con spessore infinitesimo e dunque analizzabile in una dimensione
eeeeeea sy

$\lambda(\vec{r}) = \frac{dq}{ds}$ da cui $dq = \lambda\,ds$

densità lineare

Ogni carica genererà un campo su P = ~~Eldq~~ $dE = k\frac{dq}{r^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow dE = \frac{k\lambda\,ds}{r^2} = \frac{k\lambda\,ds}{R^2 + z^2}$

Ora attenzione! entra in gioco la simmetria!
l'unica componente non nulla di $\vec{E}$ sarà ~~Ez~~ dE_z perché ogni altra componente verrà annullata dal campo dato dal corrispettivo ds simmetrico rispetto al centro

Quindi dopo, basta trovare un $d\vec{E}$ cosicché per calcolarci $\vec{E}_R$ che sarà dato da $dE\cos(\theta)$ fidati con due angoli alterni interni tornano

Legge di Gauss

Legge di primaria importanza nel mondo dell'elettrostatica che permette di analizzare, SFRUTTANDO LA SIMMETRIA DELLA DISTRIBUZIONE CONTINUA DI CARICA, ne permette l'analisi del campo magnetico

Per comprenderla introduciamo il concetto di FLUSSO:

Flusso della velocità

Immaginiamo di avere una finestra aperta, dalla quale passa una corrente d'aria per tutti i punti della finestra e a velocità costante. Ci mettiamo in testa di voler contare quante "cose" passano per la finestra nell'unità di tempo con A superficie della finestra e $\vec{v}$ velocità dell'aria

sarà $A \cdot v$ e se v non è perpendicolare alla finestra?

$A \cdot v \cdot \cos(\theta) = \vec{A} \cdot \vec{v}$ ecco a noi il flusso

ma cos'è $\vec{A}$?
$\vec{A}$ è il vettore perpendicolare al piano di modulo la superficie del piano

$\Phi_{\text{FINESTRA}} = \vec{A} \cdot \vec{v}$ PRODOTTO SCALARE!!!

$\rightsquigarrow$ si chiama vettore areale

Ok, questo è il flusso dell'aria in una finestra, ma noi stiamo studiando l'elettromagnetismo, la superficie posso comunque trattarla col vettore $\vec{A}$ ma la velocità dell'aria? USO IL CAMPO ELETTRICO

$\Rightarrow \quad \Phi = \vec{E} \cdot \vec{A}$

E se la superfice non fosse piana ma curva?
Poco male, posso calcolare il flusso dividendo la superfice in pezzetti talmente piccoli da risultare piani, calcolo il flusso rispetto al pezzettino e li sommo con i flussi dei restanti pezzettini

$\Rightarrow \Phi = \sum \vec{E} \cdot d\vec{A}$ in realtà per avere pezzettini veramente piccoli sarebbe più proprio dire

$$\Phi = \lim_{dA \to 0} \sum \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

e dunque $\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$

n.b. per poter calcolare il flusso in questa maniera devo conoscere il comportamento del campo elettrico in tutti i dA della superfice

Abbiamo analizzato come comportarci su superfici curve ma se la superfice fosse chiusa cosa possiamo dire, innanzi tutto è bene specificare che il vettore areale $d\vec{A}$ è per convenzione preso perpendicolare ed uscente dal segmento superficiale dA

Detto ciò se è chiusa, da una parte il campo entra $\Rightarrow \Phi < 0$ da una parte esce $\Rightarrow \Phi > 0 \Rightarrow$ PER SUPERFICI DI CAMPO NELLE QUALI TUTTE LE LINEE DI CAMPO CHE ENTRANO ESCONO IL CAMPO È NULLO

Attenzione, se entrano e non escono o viceversa vanno calcolati

Inoltre il flusso su una superfice chiusa si riconosce perchè l'integrale si scrive così $\Phi = \oint \vec{E} \cdot dA$

OK abbiamo tutto per introdurre la LEGGE DI GAUSS io direi a pagina nuova

Legge di Gauss: Il flusso totale di un campo elettrico attraverso una superficie chiusa è uguale alla carica elettrica contenuta nella superficie divisa per ε_0 (costante dielettrica nel vuoto)

$$\Rightarrow \Phi = \oint \vec{E}\, dA = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$$

Capiamo:

come abbiamo già detto, se una linea di campo entra e esce dalla superficie chiusa ~~caso~~ il flusso passante per la superficie è nullo ma se esce e non entra o viceversa no
$\Rightarrow$ il solo caso per il quale potrebbe entrare e non uscire è che ~~esso~~ esiste una carica all'interno della superficie o meglio dallo spazio delimitato dalla superficie

Tutto molto bello, ma questa legge serve veramente? direi proprio di sì A PATTO CHE SI ANALIZZINO SUPERFICI CON SIMMETRIE REGOLARI

Es: carica all'interno di una superficie sferica

$$\Phi = \oint \vec{E}\, dA = \quad \text{con } E \text{ costante su tutti i } dA$$

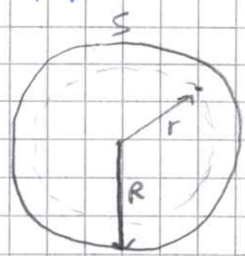
$$= \vec{E} \int dA = EA = E(4\pi R^2)$$

L'espressione della legge di GAUSS ci dice inoltre che $\Phi = \frac{q_0}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \Phi = E(4\pi r^2) = \frac{q_0}{\varepsilon_0} \quad \text{da cui} \quad E = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r^2} = k\frac{q}{r^2} \quad \text{LEGGE DI COULOMB}$$

Semplificazioni comuni:



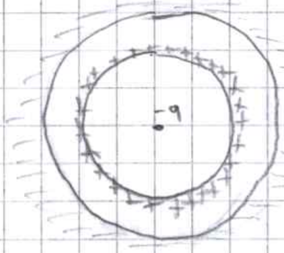
- una sfera uniformemente carica di carica complessiva q produce un campo al suo esterno EQUIVALENTE ad una carica q PUNTIFORME posta al centro della sfera
- sempre la stessa sfera stavolta isolante di cui vogliamo calcolare il campo INTERNO
$\Rightarrow$ il campo ~~è dato da~~ nel punto r è dato da una carica q' DIVERSA DALLA CARICA TOT DELLA SFERA (ma sempre posta al centro della sfera)
q' si calcola con la densità di carica in funz del raggio r (o distanza) OVVERO
$q' = q\frac{r^3}{R^3}$ con q carica tot

Gauss e materiali conduttori

Preso un materiale conduttore, carico è intuitivo che le cariche, potendo muoversi ~~x~~ tenderanno ad allontanarsi fra loro e dunque ad andare verso la superfice del materiale dunque non ci saranno cariche all'interno

Stessa cosa accade se il materiale ha una concavità al suo interno, dentro la concavità il campo sarà nullo

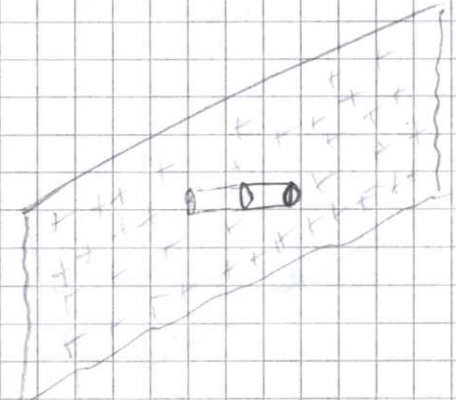
Stessa cosa avviene anche se all'interno della conduttività vi è una carica (per convincertene guarda il disegno)



→ Anche se q fosse decentrata, l'unica differenza sarebbe che le cariche positive non sarebbero distribuite uniformemente

E invece all'esterno del guscio sferico?
Rovremo lo stesso campo elettrico generato dalla carica q al centro del guscio ~~elet~~ sferico

Prendiamo una superfice uniformemente carica ed un cilindro che per una parte entra dentro la superfice e per metà no



Calcoliamo il flusso ~~tra~~ passante per il cilindretto

1) all'interno della superfice è nullo poiché materiale conduttore

2) lungo la superfice laterale del cilindro è nullo perché linee di fl. ⊥ a superfice

3) Unico componente lungo la base esterna alla superfice (di superfice A)

$d\Phi = \vec{E}\,d\vec{A} = \frac{dq_0}{\varepsilon_0}$ però con dq_0 me ne faccio una sega è una superfice infinita...

⇒ Però wait $dq = \sigma\, dA$ ⇒ $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$
(densità superficiale)

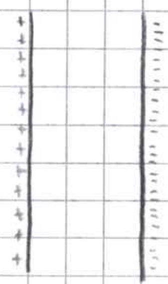
⇒ WOW! ⇒ ALL'ESTERNO DI UNA SUPERFICE CARICA IL CAMPO È DATO DA $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ CON σ DENSITÀ DI CARICA

[con l'unica assunzione che il campo sia perpendicolare alla superfice]

E questo vale per ognuna delle due facce della superfice

Introduciamo ora un elemento estremamente importante nell'elettronica di oggi: il CONDENSATORE

costituito da due lastre cariche e parallele, studiamone il campo



Supponiamo un uguale densità di carica delle lastre (σ)

1) Campo fra le due lastre: prendiamo il solito cilindretto ed analizziamone la metà all'interno delle lastre

Φ = E sulla base all'interno

⇒ $\Phi = \int E\,dA$ con E costante ⇒ $\Phi = \vec{E}\,dA$ ma $\vec{E}$ è in realtà dato dal campo della prima lastra + quello della seconda

⇒ $\Phi = \vec{E}\,dA = (\vec{E}_+ + \vec{E}_-)\,dA = \vec{E}\,dA = \frac{dq}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}\,dA = \frac{\sigma\,dA}{\varepsilon_0}$

⇒ $\vec{E}$ continua ad essere $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ per il principio di sovrapposizione

te dirai ma non è $\frac{2\sigma}{\varepsilon_0}$ no sono conduttori e funziona così

2) Campo all'esterno? ⇒ cilindretto all'esterno $\vec{E} = \vec{E}_+ - \vec{E}_-$

ALL'ESTERNO DI UN CONDENSATORE CON LASTRE DI UGUAL DENSITÀ DI CARICA IL CAMPO È NULLO

FIRMATO

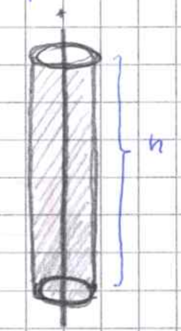
Adele Procasca

Abbiamo già studiato il campo elettrico generato da una piastra CONDUTTRICE

Facciamolo ora per una piastra ISOLANTE (nel quale le cariche non sono in grado di muoversi) A PARITÀ DI CARICA O MEGLIO DI DENSITÀ DI CARICA È LO STESSO solo che non potendosi muovere le cariche non potranno + distribuirsi lungo la superficie che ci interessa ma rimarranno anche sull'altra superficie ed il campo ne risulterà

$$\vec{E} = \boxed{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

~~Cilindro carico~~ Filo carico (il cilindro lo metto dopo)



Prendiamo dunque un filo carico con densità di carica costante (λ)
Iniziamo col notare che non importa se sia conduttore o isolante, le cariche lì sono e lì rimangono

Ipotizziamo che il filo sia bidimensionale e dunque con simmetria cilindrica, ovviamente il campo sarà non nullo solo sulla superficie esterna

calcoliamolo: $\Phi = \oint \vec{E}\, dA = E\, dA = E\, 2\pi r h$ con $\lambda = \frac{q}{h}$ ~~e h = λq~~ e $q = h\lambda$

$$\Phi = E\, 2\pi r h = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{h\lambda}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{h\lambda}{2\pi r\, h\, \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = 2k\frac{\lambda}{r}}$$

Ora attenzione, se noi volessimo calcolare il campo generato da un cilindro uniformemente carico possiamo ipotizzare sia lo stesso, come il campo di una sfera è lo stesso di quello di un punto E INFATTI LO È

Il campo generato da un cilindro isolante uniformemente carico è lo stesso di quello generato da un filo uniformemente carico, ovvero

$\vec{E} = 2k\frac{\lambda}{r}$ con λ densità di carica e r raggio rispetto al centro della circonferenza di base

Stesso ragionamento seguiremo nel calcolare il campo all'interno di un cilindro

$\vec{E}$ interno $= 2k \frac{\lambda'}{r}$ con λ' in funzione di r ovvero $\lambda'(r) = \frac{q(r)}{h} =$

$\Rightarrow \lambda'(r) = \rho \pi r^2$

Lavoro ed energia potenziale

Come la gravità, anche il campo elettrico è conservativo possiede dunque un energia potenziale ed ad una variazione di quest'ultima corrisponde una ~~variazione di~~ LAVORO

$\Rightarrow$ esso è sempre definito come forza per lo spostamento

$$L = \vec{F} \cdot \vec{S} = q\vec{E} \cdot \vec{d} \Rightarrow \vec{L} = q\vec{E} \cdot \vec{d}$$

Definiamo dunque la variazione di energia potenziale come

$$U_f - U_i = \boxed{\Delta U = -L} = -q\vec{E} \cdot \vec{d} \Rightarrow \Delta U = -q\vec{E} \cdot \vec{d}$$

Introduciamo ora un altra grandezza estremamente utile nell'elettromagnetismo IL POTENZIALE

Esso è definito come l'energia potenziale per la carica unitaria ~~sull'unità di carica~~ dunque, data q_0 la carica spostata avremo

$$V_f - V_i = \Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = -\frac{L}{q_0} \Rightarrow \Delta V = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

Cosa notiamo?

1) che il potenziale è indipendente dalla carica della quale si parla ma dipende unicamente dal campo elettrico che compie il lavoro

2) Come l'energia potenziale esso il potenziale si esprime unicamente come differenza di potenziale

Ora attenzione, è possibile che la particella che si sposta compia un moto alla cazzo ce ne frega? NO il potenziale (come l'energia potenziale) dipende solamente dal punto iniziale e quello finale !!!

Se il campo non fosse uniforme e costante? E: son cazzi, ti ~~tocca~~ devi fare l'integrale

Potenziale e campo elettrico

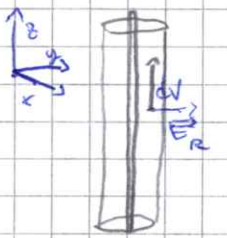
Prendiamo la relazione $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$ riflettiamo sul fatto che il potenziale sia dato da un rapporto scalare e che sia di conseguenza uno scalare

ma non solo, dalla relazione di prima ricaviamo che
$dV = -E_s\, ds$ con E_s componente di E parallela a $d\vec{s}$
$(\vec{E} \cdot d\vec{s} = |\vec{E}||d\vec{s}| \cos(\theta))$ e da $dV = -E_s\, ds$ a

$\vec{E_s} = -\frac{dV}{ds}$ il passo è brevissimo, ciò vuol dire che

La componente del campo elettrico in una direzione s è data dalla derivata del potenziale in un determinato punto rispetto allo spostamento in quella direzione (PER -1)
(di conseguenza il potenziale sarà dato dall'integrale del campo elettrico rispetto a quella direzione)

Prendiamo il filo carico uniformemente se volessimo calcolare il potenziale rispetto ad un versore parallelo al filo ci accorgeremmo che esso sarà costante il che torna, poiché il campo lungo quella direzione È NULLO



dV costante e $E_{\hat{z}} = 0$

chiameremo la superficie in cui il potenziale è costante
SUPERFICE EQUIPOTENZIALE

In generale, le superfici equipotenziali sono sempre PERPENDICOLARI alle linee di campo risultanti
$\Rightarrow$ Per campi costanti a simmetria radiale le superfici equip. sono sfere concentriche, per campi uniformi e unidirezionali ~~sono~~ le sup. equip. sono piani perpendicolari alle linee di campo.

Nota che date due cariche puntiformi q e q_0 (come in figura) il potenziale che una genera sull'altra è diverso e reciproco

V generato da $q = k \frac{q_0}{r}$ mentre V generato da $q_0 = k \frac{q}{r}$

mentre l'energia potenziale del sistema è la stessa

$$U = q_0 V_q = q V_{q_0} = k \frac{q_0 q}{r}$$

d'altronde per trovare uno dei due potenziali devo dividere per q o q_0

Prese due cariche puntiformi e concordi, l'energia potenziale è positiva e tende ad allontanarle ed il sistema si dirà non legato

Mentre, se le cariche sono discordi l'en. pot. tenderà a avvicin. ed il sistema si dirà legato

Potenziale dato da corpi carichi

- Potenziale ~~di~~ all'esterno di una sfera isolante uniformemente carica: Uguale al potenziale dato da una carica puntiforme e dunque

$$V(r) = \frac{kq}{r}$$

- Potenziale all'interno di una sfera isolante uniformemente carica. È un ~~tale~~ bel casino calcolarlo, sappi che è

$$V(r) = k \frac{q}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad \text{con } R \text{ raggio della sfera}$$

- Potenziale di un conduttore carico: qui metto una spiegazioncina: come già ~~sai~~ il campo $\boxed{\text{all'interno}}$ di un materiale conduttore è nullo => il ~~camp~~ $\boxed{\text{potenziale è costante}}$

Il potenziale all'interno di un conduttore è costante indipendentemente dal punto nel quale viene calcolato

Mentre all'esterno è uguale a quello di una carica puntiforme (all'esterno te ne fotti se è conduttore o meno)

- Potenziale di una piastra isolante uniformemente carica:

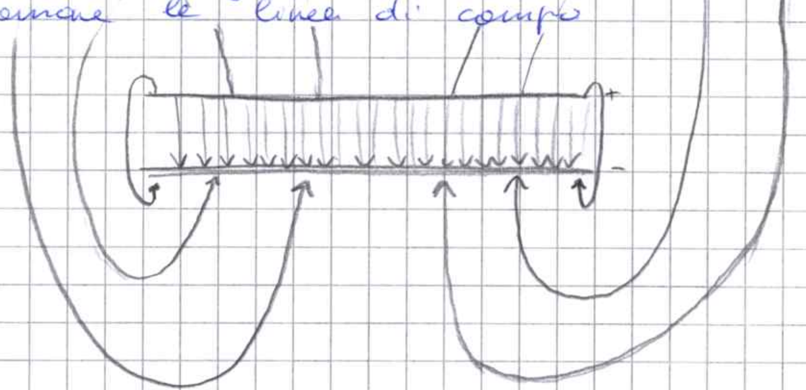
  - A destra $V(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(d - x)$
  - A sinistra: $V(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(d + x)$

se la piastra fosse conduttrice è uguale ma senza $2\varepsilon_0$ e con ε_0

Il condensatore

Elemento importantissimo nell'elettronica poiché consente di immagazzinare carica e rilasciarla, molto rapidamente!
esempio le batterie dei dispositivi portatili, il flash delle macchine fotografiche ecc...

conformazione: tipicamente è formato da due armature piane ma soprattutto conduttrici, una volta caricate da una batteria (un piatto positivo ed uno negativo) tra i piatti si genererà un campo e di conseguenza una differenza di potenziale
analizziamone le linee di campo



con $\Delta V = V_+ - V_-$

e dunque

$E = \nabla(V_+ - V_-)$

notiamo come sia particolarmente lineare all'interno di esso ed estremamente distorto all'esterno

Caratteristica fondamentale dei condensatori è la CAPACITÀ ovvero il rapporto fra differenza di potenziale e la carica dei due piatti

$$C = \frac{q}{\Delta V}$$

in realtà è il contrario

ovvero:
le quantità di carica necessaria dei due piatti per avere una ddp unitaria.

[unità di misura: FARAD (F) ma calcola che un Farad è uno sfango]

Presi due piatti piani di densità di carica costante q proviamo a calcolarci la capacità

partiamo dal ddp $\Delta v = V_+ - V_- = \int_+^- E \cdot ds = E \cdot d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$

e se $C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{\sigma d} \varepsilon_0$ e se $q = \sigma A \Rightarrow C = \frac{\sigma A}{\sigma d} \varepsilon_0 \Rightarrow C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$

Cosa possiamo notare? C cresce al crescere dell'area del piatto e diminuisce all'aumentare della distanza fra i piatti

=> la capacità è una caratteristica strutturale dell'oggetto essa dipende unicamente da come è costruito il condensatore

Ora studiamo cosa succede quando carichiamo un condensatore
=> innanzitutto, va connesso ad una batteria per immettere le giuste cariche nei giusti piatti; la batteria continuerà a caricare il condizionatore fino a che la ddp fra i due piatti non sarà uguale a quella dei poli della batteria

Condensatori in serie ed in parallelo

Sai già cosa sono vediamo come si comportano i condensatori

CONDENSATORI IN ~~SERIE~~ PARALLELO: Ognuno con stesso d.d.p e condensatore con capacità equivalente uguale alla somma delle tre capacità
stessa cosa vale per la carica equivalente sarà la somma delle 3 cariche

CONDENSATORI IN ~~PARALLELO~~ SERIE: Da ognuno di essi deve passare la stessa carica q e dunque la differenza di potenziale equivalente è data dalla somma delle 3 d.d.p.
di conseguenza la capacità equivalente sarà data dalla somma dei reciproci delle capacità dei condensatori di partenza

Energia del condensatore

La variazione di energia in un condensatore è uguale al lavoro che serve per spostare le cariche da un piatto all'altro

da cui $dU = dq\,\Delta V$ con $\Delta V = \frac{q}{C}$ e dunque $dU = dq\,\frac{q}{C}$

Attenzione dq è la carica unitaria spostata e q è la carica ~~su~~ dei piatti che dà il potenziale: SONO DIVERSI

Se cerchiamo la differenza di energia del condensatore spento al condensatore carico q la troveremmo integrando:

$$dU = \int_0^q dq'\,\Delta V = \int_0^q \frac{q'}{C}\,dq' = \frac{q^2}{2C} - 0 \Rightarrow dU = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C\,\Delta V^2$$

-> altro modo di riscriverlo

E QUESTO È VALIDO PER OGNI TIPO DI CONDENSATORE

Densità di ~~carica~~ energia

Introduciamo, tenendo conto di tutto ciò che sappiamo, questa nuova grandezza sarà ovviamente l'energia fratto il volume all'interno del condensatore

$$u = \frac{\Delta U}{Vol} = \frac{1}{2} C\,\Delta V^2 \frac{1}{dA} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d} (E\,d)^2 \frac{1}{dA} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

VALIDA PER QUALSIASI CAMPO ELETTRICO

La corrente elettrica

Definiamo la corrente elettrica come la quantità di carica che attraversa la sezione di un filo CONDUTTORE nell'unità di tempo, la denomineremo come i

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{da cui} \quad q = \int_0^t dq = \int_0^t i\,dt$$

Se assumiamo che il filo in questione abbia sempre la stessa densità di carica possiamo dedurre che essa si muoverà lungo le sezioni in maniera uguale (altrimenti avremo accumuli di carica in determinati punti del filo) e dunque
la corrente è la stessa in ogni punto del filo conduttore

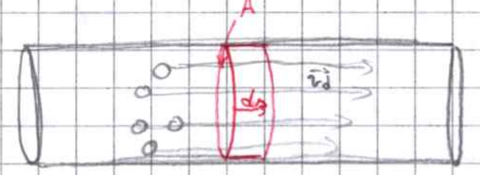
Come unità di misura avremo $\left[\frac{C}{s}\right]$ ovvero AMPERE $[A]$

NB • la corrente è una quantità scalare, essa può essere sommata con un'altra nel caso ci sia una confluenza di correnti (ad esempio in un nodo)

• Il verso convenzionale della corrente è quello dato ~~dalle~~ dal verso delle cariche positive

Corrente come flusso di carica

Prendiamo un filo conduttore ai quali capi applicheremo una d.d.p. come conseguenza le cariche inizieranno a spostarsi in moto con una velocità $\vec{v}_d$ detta velocità di trascinamento
indichiamo inoltre con n la densità di carica volumetrica ovvero $n = \frac{dq}{dV}$ calcoliamo la carica che attraversa la superficie A in dt



Lo spazio ds sarà dato da ~~ds~~ $\vec{v_d}\,dt \Rightarrow \vec{v_d} = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = \vec{v_d}\,dt$

dopo il tempo dt il volume rosso è stato riempito dalle cariche la quantità di carica che ha attraversato la sezione A sarà dunque

$dq = \boxed{n}\,e\,(A v_d\,dt)$ ovvero $\boxed{\text{densità}}$ $\cdot$ volume per la carica di un singolo elettr.

da cui $i = \frac{dq}{dt} = \frac{n e A v_d\, dt}{dt} = n e A v_d$; se v_d non fosse costante avremo

$$i = ne \int_A v_d\, d\vec{A} \quad \text{con } A \text{ vettore areolare}$$

Definiamo dunque la corrente come il flusso delle cariche elettriche attraverso il conduttore

Introduciamo ora il vettore di densità di corrente $\vec{J}$ definito come

$$\vec{J} = ne\vec{v}_d \quad \text{da cui} \quad i = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$ ORA SI CHE SEMBRA UN FLUSSO

Riflettiamo sul fatto che se il filo conduttore si stringesse, allora la corrente aumenterebbe di velocità ciò vuol dire che il vettore $\vec{J}$ aumenterebbe in modulo

La resistenza elettrica

Presi due materiali conduttori di uguale grandezza ed imposta la stessa differenza di potenziale ai loro capi l'intensità di corrente risulta differente

Ne deduciamo che ogni materiale ha una caratteristica che lo contraddistingue e che si oppone (+ o - forte) al passaggio di corrente caratteristica che chiameremo RESISTENZA ELETTRICA $[\Omega]$

Definiremo questa grandezza come il rapporto fra la differenza d. p. e la corrente che attraversa il conduttore

1ª LEGGE DI OHM $R = \frac{\Delta V}{I}$ (se ci fai caso, preso un materiale non conduttore $I \approx 0 \Rightarrow R = \frac{\Delta V}{0^+} \Rightarrow R = \infty$ TORNA)

Attenzione! NON TUTTI i materiali rispettano la legge di OHM

Un materiale si dice OHMICO se rispetta la legge di OHM ovvero se A TEMPERATURA COSTANTE LA RESISTENZA È UNA COSTANTE PROPRIA DEL CONDUTTORE

In realtà i materiali non ohmici sono molto utili a seconda del loro comportamento non costante

Facciamo un passo in avanti: sappiamo che $I = \vec{J}A$

e che ΔV = lavoro per singola carica $= E \cdot L$ con L = lunghezza del filo conduttore

Possiamo dunque riscrivere la 1ª legge di OHM come

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{E}{J}\frac{L}{A}$$

Introduciamo ora una costante data dal rapporto fra il campo elettrico che il filo genera e del vettore di densità di carica

$\frac{E}{J} = \rho$ (RHO) e la chiameremo resistività elettrica
e sarà una costante propria di ogni conduttore ~~a parità di sezione e lunghezza~~

da cui $R = \rho \frac{L}{A}$ 2ª LEGGE DI OHM

Legge di Joule

La quantità di calore per unità di tempo sviluppata dal passaggio di corrente attraverso un resistore è data dal quadrato della corrente per la resistenza del resistore

ovvero: $P_R = I^2 R$

Attenzione come evinciamo da quanto detto prima tutta l'energia cinetica che ~~hanno~~ ACQUISTANO le cariche "appena uscite" da un generatore di potenziale deve trasformarsi in altra energia, poiché quando vi ritornano la differenza deve essere ΔV quindi l'energia cinetica data dalle velocità di drift deve trasformarsi IN COSA?!

- SE C'È UN RESISTORE ⇒ CALORE (PHON)
- SE CONDENSATORE ⇒ VIENE IMMAGAZZINATA (BATTERIE PC)
- SE MOTORE ELETTRICO ⇒ ENERGIA MECCANICA (VIBRATORI) ☺

⇝ anche se in realtà qualsiasi circuito ha una resistenza interna e dunque c'è sempre un po' di calore

Leggi di Kirchoff (le sai, quindi evito di spiegare perché)

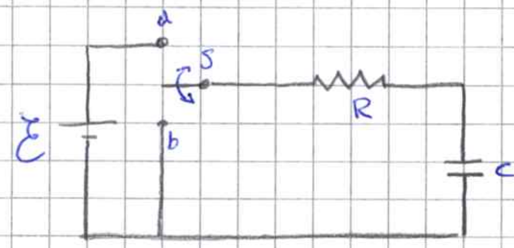
1) Preso un qualsiasi nodo di un circuito, correnti entranti = correnti uscenti

2) La somma delle cadute di potenziali lungo un circuito chiuso è uguale a $\emptyset$
(ricordiamo che le cadute di potenziale si calcolano sui nodi)

Circuiti RC

Non sempre avremo a che fare con circuiti le cui grandezze fondamentali sono COSTANTI nel tempo, è questo il caso dei circuiti RC: ovvero circuiti nei quali oltre ai resistori e/o induttori, compaiono dei condensatori

A causa dei condensatori, avremo delle grandezze variabili nel tempo (negli istanti di carica e scarica)



Prendiamo come esempio questo semplice circuito RC

notiamo che l'interruttore S può collegare O A O B

- FASE DI CARICA:

Colleghiamo S ad a, a causa della fem si genera una corrente che parte da $\mathcal{E}$ e finisce sul condensatore caricandolo

Grazie alla 2ª legge di Kirchoff possiamo scrivere $\mathcal{E} = i(t)R + \Delta V_c(t)$

la fase di carica continuerà finché $\mathcal{E}$ non sarà uguale a $\Delta V_c(t)$ e dunque $i(t) = 0$ ovvero non passa più corrente

Riscriviamo ora la 2ª l. k. in funzione di $q(t)$ =>

=> $\mathcal{E} = \dfrac{dq(t)}{d(t)} R + \dfrac{q(t)}{C}$ ⚠ Questa non è altro che un equazione differenziale del primo ordine

che risolta per $q(t)$ darà $q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

per comodità possiamo definire $RC = \tau$ ovvero la costante di tempo caratteristica

DA NOTARE: $t = 0 \Rightarrow q(t) = 0$ TORNA

$t \gg \tau \Rightarrow q(t) = C\mathcal{E}$ carica massima del condensatore

E se volessimo trovare una legge che descrive il passaggio di corrente nel circuito?

BASTA DERIVARE!

se $q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \Rightarrow i(t) = +\frac{\mathcal{E}C\, e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} =$

$= i(t) = \frac{\mathcal{E}\, e^{-\frac{t}{RC}}}{R}$

descriviamo brevemente la legge: a $t = 0$ $i = \frac{\mathcal{E}}{R}$ tutto nella norma

a $t \gg \tau$ $i = 0$
$\Rightarrow$ CONDENSATORE CARICO
NON PASSA PIÙ CORRENTE

Analizziamo ora il ΔV sui piatti del cond. se $\Delta V = \frac{q}{C}$

$\Rightarrow \Delta V(t) = \mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ come al solito. $t = 0 \Rightarrow \Delta V = 0$

$t = \tau \Rightarrow \Delta V = \mathcal{E} \cdot 0{,}63$

$t = 2\tau = \Delta V = \mathcal{E} \cdot 0{,}86$ etc...

quando $\mathcal{E} = \Delta V$ il condensatore è carico
ciò vuol dire che potremmo usare τ come ordine di grandezza del tempo di carica!

Parlando di energia è importante sapere che

l'energia erogata dalla batteria è uguale alla somma dell'energia accumulata nel condensatore e dell'energia dissipata dal resistore

- Fase di scarico

In questo caso switchiamo l'interruttore su b, sempre grazie alla 2° l. d. k. avremo che $iR + \Delta V_c = 0$ ed esprimendolo in funzione di $q(t)$ avremo

$\frac{dq(t)}{dt} R + \frac{q(t)}{C} = 0$ solita equazione differenziale da cui

$q(t) = q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ con q_0 = carica nel momento in cui inizia a scaricare

e dunque

- $i(t) = \frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{RC} q_0$

- $\Delta V(t) = \frac{q_0\, e^{-\frac{t}{RC}}}{C}$

Elettricità e magnetismo

Due fenomeni fortemente connessi basati entrambi sul concetto di carica elettrica, tanto da poterli fondere nell' ELETTROMAGNETISMO

Solo nei casi statici i rispettivi campi si manifestano separatamente mentre nei casi dinamici si presentano sempre accoppiati ed è in questo caso che si parla (e si studia) il CAMPO ELETTROMAGNETICO

Così come il campo elettrico esercita una forza su di una carica elettrica (forza di coulomb) il campo magnetico esercita una forza sulle cariche elettriche in moto (forza di Lorentz)

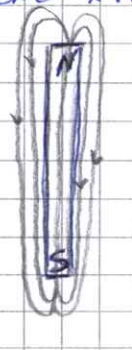
⇒ Il campo magnetico è infatti generato dal moto delle cariche elettriche (in un circuito per esempio)
ma quali cariche elettriche? ad esempio, in una calamita, che sappiamo creare un campo magnetico, quali cariche elettriche si muovono per generare questo campo magnetico? si ritorna al livello molecolare
• è infatti il moto degli elettroni intorno ai rispettivi atomi a creare il campo magnetico (se ti interessa bene come funziona cercatelo)

È per questo che, per esempio in un qualsiasi dipolo magnetico (ago) si crea un campo magnetico del tutto simile a quello elettrico che si crea in un dipolo elettrico, anzi, proprio uguale solo che il
MA "+" viene chiamato NORD ed il "−" SUD

⚠ Vi è in realtà un'importante differenza: mentre il CAMPO ELETTRICO è creato da DUE entità elettricamente cariche IL CAMPO MAGNETICO è creato da UNA SOLA entità: NON ESISTE UNA SOLA CARICA MAGNETICA (non esistono monopoli magnetici)

Ciò vuol dire che io non posso dividere nord e sud, se io ~~spezzo~~ divido un dipolo dividendone le estremità otterrò solamente due dipoli (sempre con nord e sud) ma solo più piccoli

Conseguenza interessante di questa nozione è che non essendoci campi determinati da monopoli TUTTE LE LINEE DI CAMPO DEVONO X FORZA SEGUIRE DEI PERCORSI CHIUSI, lascio un disegnino



Legge di Gauss per i campi magnetici

Il fatto che le linee di flusso seguono percorsi chiusi è notevole: la legge di gauss afferma infatti:
IL FLUSSO MAGNETICO PER QUALUNQUE SUPERFICIE CHIUSA È NULLO (tutte le linee che escono dalla superficie dovranno poi rientrare)

da cui $\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$

mentre $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

Forza di Lorentz

Presa una carica q IN MOVIMENTO con velocità v il campo magnetico esercita una forza F (forza di LORENTZ) tale che

$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ con prodotto vettore

definito da reg mano dx:
FORZA: POLLICE
VELOCITÀ: INDICE
CAMPO: MEDIO

verso: quello del pollice se $q > 0$
altrimenti contrario

questo vuol dire che se la carica si muove nella stessa direzione del campo => LA FORZA È NULLA

⚠ Attenzione come abbiamo appena detto, la forza data da un campo magnetico è sempre perpendicolare alla velocità della carica

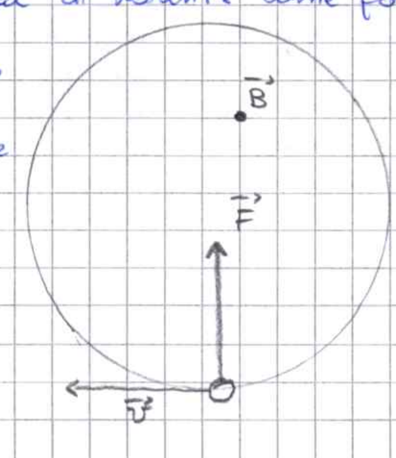
ciò vuol dire che la forza modificherà la direzione del moto della particella, ma MAI IL MODULO DELLA SUA VELOCITÀ (immagina il moto di un proiettile, la FORZA DI GRAVITÀ modifica la velocità orizzontale con la quale è sparato il proiettile? No)

e dunque se il modulo della velocità non cambia, rimarrà invariata anche l'energia cinetica nel campo magnetico

Prendiamo ora per esempio un campo magnetico perpendicolare a questo foglio ed uscente da esso ed una carica q con velocità perpendicolare al campo e dunque giacente sul foglio come sarà la forza di Lorentz? sicuramente perpendicolare ad entrambe e dunque sempre sul piano del foglio

=> abbiamo una velocità costante e parallela ad essa una forza (e dunque accelerazione) costante: ciò basta per definire un moto circolare uniforme (con forza di Lorentz come forza centripeta)

notare come basti invertire il senso del campo o la carica della "carica" per cambiare il senso della rotazione



E se stavolta noi sparassimo la carica con una $\overbrace{\text{componente della}}$ velocità parallela al campo?

Quella componente non produrrebbe nessuna forza di Lorentz che potrebbe intaccare la velocità perpendicolare al campo ($\parallel \Rightarrow \sin(\theta) = 0$) così come la componente $\perp$ al campo non intacca (con la forza di Lorentz da lui prodotta) la componente $\parallel$ al campo

Riavremo dunque un moto circolare sul piano del foglio che però verrà trascinato "dentro al foglio" dalla componente $\parallel$ al campo della velocità

$\Rightarrow$ ecco determinato un moto elicoidale: esso non è altro che un moto circolare ed un moto rettilineo uniforme $\perp$ al piano di rotazione del moto circolare

Immaginiamo ora di avere un filo percorso da corrente e condutt. immerso in un campo magnetico ~~la~~ il moto di elettroni unito al campo produrrà una forza magnetica che tenderà a mutare il moto degli elettroni, che sono però costretti nel filo. Quello che intuitivamente accadrà è che la forza non agirà tanto sul singolo elettrone ma sulla massa dell'intero filo, variandone la posizione (si inclinerà ~~ad~~ esempio)

notiamo ora che parlando di un filo percorso da corrente

$$q \cdot \vec{v}_d = i\,dt \cdot \frac{L}{dt} = i\,L \quad \text{con } l \text{ lunghezza del filo}$$

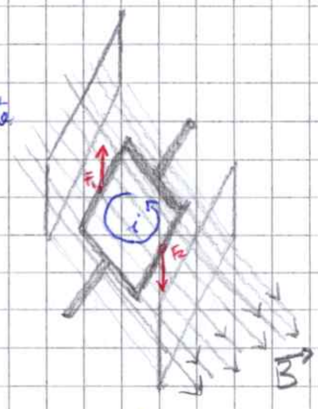
da cui $\vec{F} = i\,\vec{L} \times \vec{B}$ ma come? prodotto vettore con L che è uno scalare? no, L sarà un vettore con dir. e verso uguale a $\vec{v}_d$ e modulo la lunghezza del filo

$\rightarrow$ formulazione valida per un qualsiasi conduttore rettilineo, anche non $\perp$ al campo!

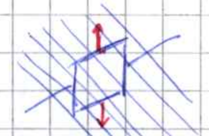
Supponendo ora di avere un filo non rettilineo come facciamo a calcolare la forza magnetica? easy, integriamo

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = i \int_0^L d\vec{L} \times \vec{B}}$$

Prendiamo come sistema ora una spira immersa in un campo costante all'interno della spira scorre una corrente costante i, la spira ha 2 lati // al campo e 2 ⊥ allo stesso



A causa del movimento degli elettroni si creerà una forza magnetica, ma solo lungo i lati con $\theta \neq 0$ rispetto al campo, come conseguenza la spira inizierà a girare attorno ai 2 perni finché non avremo questa situaz.:



Ma ehi, cosa sentono le mie orecchie? girare?? allora agirà un MOMENTO TORCENTE e infatti è così, definiamolo

$\vec{\tau} = i\vec{A} \times \vec{B}$

il modulo di $\vec{\tau}$ ci dice quanto è intensa la rotaz.

la direzione di $\vec{\tau}$ coincide con quella dell'asse di rot. della spira

il verso con reg. mano dx secondo la rot. della spira

facciamoci molte poche domande e limitiamoci a definire $\vec{A}$ come il vettore areolare della spira, esso è definito come:

- direzione: perpendicolare alla superficie delimitata dalla spira
- verso: quello secondo la reg. mano dx secondo il verso di circolazione della corrente
- modulo: area della superficie racchiusa dalla spira

Ponendo $\vec{\tau} = \emptyset$ è immediato trovare la posizione di equilibrio del sistema (in questo caso se $\vec{A} \parallel \vec{B}$) infatti $\vec{A} \times \vec{B} = \emptyset \Rightarrow \vec{\tau} = \emptyset$

E. ok, ma che utilità può avere una spira che gira di 180° al max e torna indietro? NESSUNO

MA se noi (come precedentemente detto) invertissimo il verso della corrente non appena $\vec{B} \parallel \vec{A}$ la rotazione continuerebbe nel giusto verso ⇒ ecco a voi un motore magnetico

E se invece di una spira avessimo una bobina? NON DISPERARE una bobina non è altro che una serie di spire messe una sopra l'altra dunque il momento torcente sarà semplicemente dato dalla somma dei mom. torc. di ogni spira $\Rightarrow \vec{\tau}_B = N i \vec{A} \times \vec{B}$ con N = numero di spire

La bobina si comporta essenzialmente come un momento di dipolo magnetico anch'esso infatti, immerso in un campo magnetico, ~~ruota~~ ruota per allinearsi alle linee di campo col polo nord che punta verso il sud del campo e viceversa

ma definiamo questo momento di dipolo magnetico (che da quanto ho capito dovrebbe essere il rispettivo del momento d'inerzia)

$\vec{\mu} = N i \vec{A}$ da cui il momento torcente della rotazione ~~dove~~ è

$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

questo dovrebbe infatti essere il reciproco dell'accelerazione (mi riferisco alla formula $\tau = I\alpha$

Lavoro di traslazione del campo magnetico

Notiamo subito che il campo magnetico NON PUÒ COMPIERE LAVORO SU UNA SINGOLA CARICA (sempre la forza sarà perpendicolare allo spostamento)

Anche se in realtà, ad esempio in un filo percorso da corrente, il filo subisce uno spostamento concorde in direzione con la forza

Ne concludiamo che il campo magnetico può compiere lavoro solo su materiali attraversati da corrente

Ed il più utile di questi lavori è quello compiuto su circuiti chiusi percorsi da corrente (spire, bobine etc...) in questo caso siamo anche in grado di definire un' ENERGIA POTENZIALE

Energia potenziale

Definiamo l'energia potenziale propria di un dipolo magnetico immerso in un campo magnetico come

$U(\theta)$ [energia potenziale in funzione dell'angolo fra mom. del dip. e campo magnetico]

dunque

$U(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos(\theta)$ ⚠ se usi il prodotto scalare è energia potenziale se prodotto vettore è momento torcente

⇝ da notare con $\theta = 0 \Rightarrow U = -\mu B$ [MIN]
con $\theta = \pi \Rightarrow U = \mu B$ [MAX]

Lavoro di un campo magnetico su un dipolo magnetico (per farlo ruotare)

Come sempre $\mathcal{L} = -\Delta U$ con $\Delta U = U_F - U_i$ da cui $+\Delta U = U_i - U_F$
e dunque $\mathcal{L} = -\mu B \cos(\theta_i) + \mu B \cos(\theta_F)$

concludendo $\mathcal{L} = \mu B \left(\cos(\theta_F) - \cos(\theta_i)\right)$

Legge di Biot - Savart

Legge sulla quale c'è poco da capire da capire, bisogna fidarsi

Prendiamo un filo percorso da corrente, di qualsiasi forma e lunghezza ed e dividiamolo in porzioni infinitesimali (ds) successivamente consideriamo un punto P giacente sullo stesso piano sul quale giace il filo

Chiediamoci ora che campo ($d\vec{B}$) quella porzione di filo crea nel punto P

beh... eccolo $d\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{i \, d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{i \, ds \sin(\theta)}{r^2}$

Se non possiamo capire perché, cerchiamo almeno di rendercela più familiare:

1) Innanzi tutto il ~~campo~~ campo sarà perpendicolare ~~a~~ al piano determinato da $d\vec{s}$ e $\vec{r}$ (sono in prodotto scalare)

2) Come il campo elettrico dipende da $\frac{1}{r^2}$ così fa il campo magnetico

3) μ_0 già la conosciamo, la costante di permeabilità magnetica nel vuoto

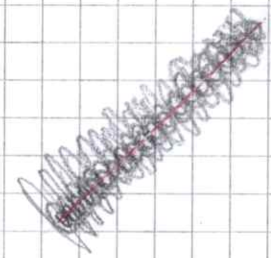
E se io volessi trovare il campo che un intero filo genera su di un punto? Integro su ds da cima a fondo del filo EASY

E se il filo fosse infinito! l'integrale sarà da $-\infty$ a $+\infty$ e viene una soluzione abbastanza carina:

B dato da un filo infinito $= \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$ ovviamente non serve che sia infinito, basta che la lunghezza del filo sia molto maggiore a R

Chiarisco che mentre r è la distanza da ds a P R è la distanza che da P cade perpendicolarmente al filo

Notiamo inoltre che preso un filo infinito il campo nei punti circostanti dipende esclusivamente dalla distanza a lui perpendicolare
=> ciò può solo voler dire che le linee di campo sono cerchi concentrici
Inoltre l'intensità di campo è inversamente proporzionale al raggio ciò vuol dire che allontanandosi dal filo le linee di campo diventano sempre più rade



il disegno fa caa ma capiscilo

Se invece il filo fosse curvo e volessimo calcolare il campo nel suo centro di curvatura? (possiamo provarci eh, ma non ho voglia) HINT: RICORDA CHE LA DISTANZA DA DS A P È COSTANTE: r

avremo $\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{i\, \Phi_{rad}}{r}$

che torna particolarmente se infatti i radianti (Φ_{rad}) sono 2π (e il filo forma una spira circolare) nel centro

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2r}}$$

Ricorda bene:
- FILI PERCORSI DA CORRENTI DISCORDI SI RESPINGONO
- FILI PERCORSI DA CORRENTI CONCORDI SI ATTRAGGONO

Legge di Ampère

Legge importantissima che trova la sua reciproca nella legge di GAUSS per l'elettrostatica, a parole la legge dice questo:

L'integrale di linea lungo un cammino CHIUSO del campo magnetico è uguale alla corrente complessiva che attraversa ~~il circuito chiuso~~ la superficie delimitata dal camminamento chiuso per la permeab. magnetica nel vuoto

ovvero ⇒ $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{int}$

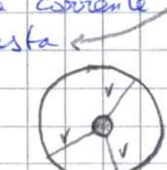
Come al solito: sì mi può aiutare a trovare il campo ma c'è un integrale nel mezzo che palle!
In realtà è super utile nel caso in cui
1) CAMPO COSTANTE

2) SIMMETRIA PARTICOLARMENTE EASY

(vedi legge di Gauss e sue applicazioni)

Facciamo due esempi:

1] campo all'esterno di un filo attraversato da corrente
Prima di tutto scegliamo la simmetria giusta (ovvero il camminamento chiuso giusto)



la circonferenza attorno al ~~cerchio~~ filo o meglio il cilindro è perfetta: stesso r su tutti i suoi punti ⇒ CAMPO COSTANTE in tutti i suoi punti

Se il campo è costante posso fregarmene e tirarlo fuori dall'integrale

$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{int} \Rightarrow \vec{B} \oint d\vec{s} = \mu_0 i_{int}$

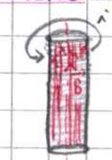
ma cos'è $\int ds$ se non la circonferenza proprio?

$\Rightarrow \vec{B}(2\pi r) = \mu_0 i_{int} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 i_{int}}{2\pi r}$

2] campo ma all'interno del filo: stesso procedimento! solo che stavolta chi mi dice come cambia la corrente che passa all'interno della circonferenza che scelgo? C'è ~~[illegible]~~ IL VETTORE DI DENSITÀ DI CORRENTE che moltiplicato all'area della superficie che scelgo me la dice

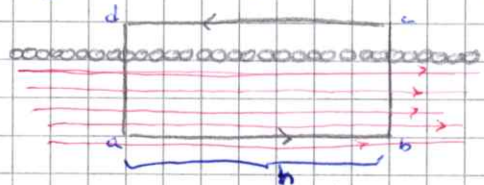
Introduciamo ora il SOLENOIDE, come prima cosa descriviamolo esso è costituito da un cilindro sul quale è attorcigliato un filo talmente lungo da essere molto maggiore del diametro del cilindro ovviamente più questa cosa è vera, più ci si avvicina al concetto di SOLENOIDE IDEALE

Descriviamo ora il campo all'interno del solenoide e quello all'esterno: all'interno del solenoide avremo un campo uniforme sull'asse dello stesso diretto verso una delle due facce circolari visione di lato



mentre all'esterno proprio come in un condensatore, il campo è nullo

Se io volessi calcolare il campo all'interno del solenoide? come per i come per i campi elettrici, basta scegliere una superficie chiusa intelligente e sfruttare la legge di Ampere infatti



se ora usassimo la legge di Ampere avremo che $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{int}$ con $\oint \vec{B} \, ds = \underbrace{\int_a^b \vec{B} \, ds}_{\neq 0} + \underbrace{\int_b^c \vec{B} \, ds}_{= 0} + \underbrace{\int_c^d \vec{B} \, ds}_{= 0} + \underbrace{\int_d^a \vec{B} \, ds}_{= 0}$ ora, ricordando che si parla di prodotto scalare

il campo all'esterno di un sol. è nullo

Ci siamo finalmente ridotti a $\int_a^b \vec{B} \, ds = \mu_0 i_{int}$ con $|ds|_a^b = h$ e B costante poiché parallelo all'asse ~~attorno~~ del solenoide dunque $\vec{B} = \frac{\mu_0 i_{int}}{h}$ con i_{int} = la somma delle correnti che passano nei fili inclusi nella nostra figura

Citiamo anche il toroide un solenoide ripiegato a ciambella (credo che sia una ~~cd~~ cosa molto simile ad un acceleratore di particelle)

anche qui il campo esterno al toroide sarà 0

Piccola annotazione: lungo l'asse $\hat{z}$ che passa al centro della ~~#~~ bobina il campo è dato da $\boxed{B(\hat{z}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3}}$ → momento di dipolo

Induzione magnetica

Prendiamo una spira collegata ad un amperometro ed un dipolo magnetico ora analizziamo 3 casi:

1) avviciniamo il dipolo alla spira => l'amperometro segna una corr. i
2) teniamo il dipolo fermo vicino alla spira => l'amp. segna 0
3) allontaniamo il dipolo dalla spira => l'amperometro segna $-i$

Ne concludiamo che vi è un induzione di corrente elettrica solo nel caso in cui i due oggetti siano in MOTO RELATIVO
Inoltre, un moto più veloce produrrà una maggiore corrente

Ricorda bene: se si genera corrente, si DEVE generare sempre anche una differenza di potenziale *

Ma cos'è che induce la corrente? il movimento del dipolo è ok, ma mica te lo muovi e per magia la corrente appare
Il vero responsabile dell'induzione elettrica è il campo magnetico dato dal dipolo O MEGLIO: LA VARIAZIONE DI (INTENSITÀ) CAMPO MAGNETICO
se non esistesse variazione avremmo corrente anche a dipolo fermo vicino alla spira

E come si quantificherà mai l'intensità del campo magnetico se non con il FLUSSO?

eccolo qui $\Phi_B = \int_A \vec{B}\, d\vec{A}$ flusso del campo magnetico attraverso la superficie A

* Come già detto, non c'è induzione di corrente senza induzione di FORZA ELETTROMOTRICE $\mathcal{E}$ e, se c'è, esiste grazie alla variazione nel tempo dell'intensità del campo magnetico e dunque della $\underbrace{\text{variazione nel tempo}}_{dt}$ $\underbrace{\text{della differenza di flusso}}_{d\Phi_B}$

Legge di Faraday:

mettiamo insieme quanto detto prima e... => $\mathcal{E} = (-)\dfrac{d\Phi_B}{dt}$

questo meno è dato dal fatto che il passaggio di corrente si oppone alle variazioni di flusso

Questo per una spira, ma se fosse una bobina?? ci sono problemi? NO

composta da N spire

$\Rightarrow \mathcal{E}_{bobina} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$

La cosa veramente figa è che ci sono un botto di modi per modificare il flusso di un campo magnetico

1) applicando un moto relativo fra i due oggetti (spira e dipolo)

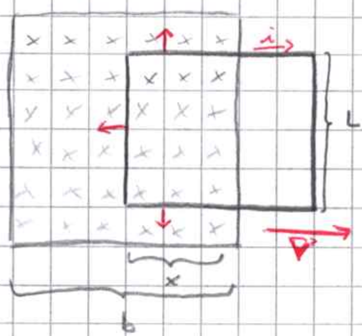
2) Variando l'area della spira se essa è deformabile
$\left[\Phi_B = \int_A \vec{B}\, dA \text{ con } A \text{ variabile} \right]$

3) Ruotando la spira e dunque modificando l'angolo fra $\vec{B}$ ed $\vec{A}$ ricordiamo che il flusso è dato un prodotto scalare!

Citiamo anche la legge di Lenz: come già detto, la corrente tende sempre a a minimizzare la differenza di flusso ed è per questo che Lenz afferma:
Il verso della corrente indotta è tale da creare a sua volta un campo magnetico che si opponga alla variazione che ha originato l'induzione

$\rightsquigarrow$ È come se la corrente venga creata per rimettere le cose apposto dopo che la variazione di campo magnetico ha fatto casino

Consideriamo una spira immersa totalmente in un campo magnetico. Iniziamo ora a tirarla da un lato fino a farla parzialmente uscire dal campo cosa succederà?
Il flusso passante per la spira VARIERÀ => INDUZIONE DI FEM => CORRENTE e se c'è corrente e campo...? FORZA DI LORENTZ
dunque siamo così:



Proviamo ad esprimere la variazione di flusso, conviene dare un nome alla parte della spira che rimane nel campo ed usarla come variabile chiamiamola x

$\Phi_B = \oint_A \vec{B} \cdot dA = \underbrace{\vec{B}}_{\text{costante}} (b-x)L$

e va bene solo che per trovare $\mathcal{E}$ noi dobbiamo derivare lungo il tempo, esprimiamo x in funzione del tempo

$x = \vec{v}t$ con $\vec{v}$ velocità di estrazione della spira

$\Rightarrow \Phi_B = \vec{B} L (b - vt)$ da cui $\mathcal{E} = + \vec{B} L v$ abbastanza carina

dalla quale è immediato $i = \frac{\vec{B} L \vec{v}}{R}$ *

Come abbiamo detto prima: se c'è campo e corrente $\Rightarrow$ FORZA L.

calcoliamo la forza lungo ogni filo della spira (ma) chi guarda la figura a modo: ad un lato non è immerso nel campo; i due orizzontali sono paralleli e attraversati dalla stessa corrente con verso opposto: le due forze si annullano resta solamente il lato di sinistra e la forza che agisce su di esso sarà

$\vec{F} = \underbrace{(-)}_{\text{orientata a sx}} i L B \hat{x}$

ma noi abbiamo già trovato la corrente che passa dalla spira

$\Rightarrow \vec{F} = - \frac{L^2 B^2 \vec{v}}{R}$ * bravi tutti!

Ora dimostriamo una cosa sblimpatika

La potenza dissipata ~~dalla~~ in energia termica (a causa della resistenza del filo) dalla corrente indotta è uguale alla potenza data dall'energia meccanica che si deve applicare per estrarre la spira dal campo

Dalla legge di Joule sappiamo che l'energia termica dissipata è

$P_d = i^2 R$ * $= \frac{L^2 B^2 v^2}{R^2} R = \boxed{\frac{L^2 B^2 v^2}{R}}$

calcoliamoci il lavoro compiuto dall'estrazione per poi derivare ed avere la potenza

$L = F \cdot ds$ e $P = \frac{dL}{dt} = F \frac{ds}{dt} = Fv$ * $= \boxed{\frac{L^2 B^2 v^2}{R}}$

Campo elettrico indotto

Ora si butta insieme tutto, quindi attenzione!
Un campo magnetico genera F.E.M ovvero differenza di pot. secondo la legge di Faraday ma ricordiamoci cosa sappiamo dell'elettrostatica! ~~la~~ La differenza di potenziale non è altro che il lavoro necessario per spostare da un punto all'altro una carica unitaria!

Dunque avremo

$$\begin{cases} \text{MAGNETISMO, legge di Faraday: } \mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt} \\ \text{ELETTROSTATICA, definizione di potenziale: } \mathcal{E} = \Delta V = \oint E \cdot ds \end{cases}$$

Da cui $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt} = \oint E \cdot ds$

Ciò vuol dire che un campo magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico INDOTTO

Il campo elettrico esiste sempre, anche senza corrente, basta ci sia un campo magnetico! e che esso non sia costante altrimenti derivata = 0 !!!

(M) ATTENZIONE CI SONO 2 DIFFERENZE FONDAMENTALI fra il campo elettrico coulombiano e quello indotto

1) In quello Coulombiano le linee di campo INIZIANO DA UNA FONTE E FINISCONO ~~SU~~ IN UN POZZO mentre in quello indotto SEGUONO UN PERCORSO CHIUSO

2) Il campo elettrico Coulombiano è CONSERVATIVO ciò vuol dire che esso in un percorso chiuso è NULLO
mentre in quello indotto NO NON È CONSERVATIVO
(altrimenti sarebbe sempre nullo per ciò detto prima)

Induttore

Esso è un dispositivo in grado di generare un campo magnetico di forma specifica
È caratterizzato dall'INDUTTANZA che concettualmente è il rapporto fra il campo magnetico dato da esso e la corrente necessaria perché esso si formi [molto simile alla capacità che è il rapporto fra la carica su un piatto e la ΔV affinché il condensatore la immagazzini]

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

Autoinduzione magnetica

Come abbiamo visto, un campo magnetico nel quale è immerso un qualsiasi tipo di circuito produce al suo interno f.e.m e di conseguenza corrente

Ma se il campo magnetico fosse a sua volta indotto da un dispositivo su di un circuito?
⇒ esso produrrà sul circuito che lo origina della f.e.m
esse verrà detta AUTOINDOTTA

Studiamola, per farlo abbiamo bisogno di studiare un induttore, il dispositivo usato per creare campi magnetici, come abbiamo già visto

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \quad \text{da cui} \quad iL = N\Phi_B$$

questo membro ci fa particolarmente comodo: se infatti deriviamo lungo il tempo avremo

$$\frac{di}{dt}L = N\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Ricordiamo che come C per i condensatori dipende esclusivamente da fattori costitutivi del cond, stessa cosa vale per L, non derivabile_

$$\text{da cui} \quad \boxed{\mathcal{E}} = -\frac{di}{dt}L = \boxed{-N\frac{d\Phi_B}{dt}}$$

LEGGE DI FARADAY

Abbiamo così una legge che determina la corrente autoindotta

$$\mathcal{E}_{autoind.} = -\frac{di}{dt}L$$

Notiamo che

- ha senso che la fem sia opposta al campo autoindotto
- Il campo autoindotto non dipende tanto dall'intensità della corrente quanto dalla sua variazione nel tempo

Circuiti RL

Circuiti contenenti al loro interno resistenze ed induttanze anch'essi come i circuiti RC sono a REGIME TRANSIENTE ovvero ΔV e i sono mutevoli nel tempo

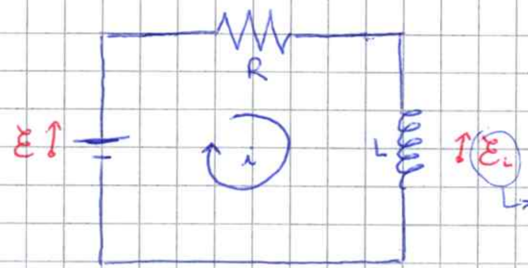
Capiamo come si comporti: appena il circuito si chiude inizia a scorrere una corrente che, senza l'induttore, raggiungerebbe subito il suo valore stazionario:

$\frac{\mathcal{E}}{R} = i$ ma essendoci l'induttore, come esso è attraversato da corrente, si crea un campo $B(t)$ che crea ai capi dell'induttore una f.e.m. autoindotta che a sua volta crea una corrente i DI SENSO OPPOSTO a quella generata da $\mathcal{E}$ e come conseguenza la corrente prodotta dalla batteria cresce esponenzialmente finché le due correnti non si equivalgono una volta raggiunto un regime stazionario di B e l'induttore si comporta come un normale filo di circuito

Vediamo perché: con $\vec{B}$ costante $\frac{d\Phi_B}{dt} = 0$ e $\frac{di}{dt} L = 0$

ma se $L \neq 0$ per forza $\Rightarrow$ i costante

Studiamo meglio cosa succede in questi istanti:



Come abbiamo detto, si creano 2 f.e.m. per la 2ª legge di Kirchhoff

$-Ri + \mathcal{E}_L + \mathcal{E} = 0$ da cui $Ri = \mathcal{E} + \mathcal{E}_L$ con $\mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt}$

dunque avremo: $\mathcal{E} - L\frac{di}{dt} = Ri$ eccoci ridotti ad un'equazione differenziale la cui soluzione sulla corrente ci darà la

FORMULA DELLA CORRENTE durante la fase di accensione:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{tR}{L}}\right)$$

da cui ΔV ai capi di R sarà: $i(t)R = \mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{tR}{L}}\right)$

" " ΔV ai capi di L sarà: $\frac{di}{dt} L = \mathcal{E}\left(e^{-\frac{tR}{L}}\right)$

Mentre nel momento in cui escludiamo la batteria la legge della carica nella fase di scarica è

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{tR}{L}}$$ mentre

$$\Delta V_R = \mathcal{E} e^{-\frac{tR}{L}}$$ e

$$\Delta V_L = -\mathcal{E} e^{-\frac{tR}{L}}$$

Esprimiamo ora la legge di conservazione dell'energia

$P_B = P_R + \boxed{P_L}$ ovvero Potenza data dalla batteria uguale a potenza dissipata dalla resistenza + potenza dissipata dall'induttore

ovvero: $\mathcal{E} i = R i^2 + \boxed{i L \frac{di}{dt}}$ → questa è particolarmente utile per calcolare l'energia potenz. immagazzinata dall'induttore

Ricordiamoci che: $P = \frac{dU}{dt} = L i \frac{di}{dt}$ da cui

$$U(t) = L \int_0^t i \, di = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

Citiamo solamente la densità di energia del campo magnetico

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Da ricordare per gli esercizi!!!

$$P = R i^2 = \frac{(f.e.m.)^2}{R}$$

Corrente alternata

Tipo di altissimo utilizzo odierno si basa sul concetto di cambiamento periodico di verso di percorrimento dell'elettricità nel circuito
Ha plurimi vantaggi, uno su tutti quello di poter essere trasmessa per lunghe distanze e se ci pensi il fatto che la corrente cambi sempre e velocemente verso fa cambiare verso anche al campo magnetico e per l'induzione è ORO

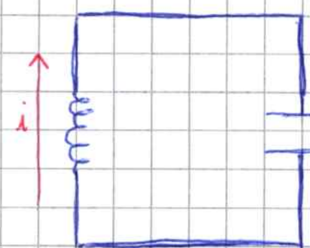
Circuiti LC

Circuiti costituiti da un induttore ed un condensatore ed ovviamente una RESISTENZA che è INDOMISSIBILE (che dissipa energia)
È una figata: in un circuito (IDEALE) il condensatore e l'induttore si scambiano cariche all'infinito (e già senti puzza di seno e cos)

Qual è l'idea che ci illumina? Come già sappiamo l'induttore crea un campo magnetico induttivo che a sua volta induce f.e.m e dunque nuova elettricità ma di verso opposto per compensare!

Eccoci qui: Prendiamo un condensatore totalmente carico ed un induttore completamente scarico e mettiamoli in contatto: Il condensatore inizierà a scaricarsi ed a caricare l'induttore il quale indurrà un campo magnetico ed una elettricità di segno opposto a quella che passa per il circuito
Nel momento in cui il condensatore sarà totalmente scarico la corrente calerà ~~bruscamente~~ e la sua derivata sarà ~~massima e~~ contraria a quella che era in precedenza
Nell'induttore cambia segno tutto, specialmente la corrente autoindotta che sarà orientata con verso concorde a quella uscente dal condensatore (ricorda che ora l'induttore è carico)
Ora toccherà dunque all'induttore caricare il condensatore MA con cariche opposte e così via

Calcoliamoci ora le equazioni di circuito



Come al solito, scriviamo la seconda eq di Kirchhoff:

$$\Delta V_L + \Delta V_C = 0 \Rightarrow L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

esprimiamo tutto secondo le cariche

$$\frac{q}{C} + \frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

eccoci con la nostra equazione differenziale la quale soluzione sarà

$$q(t) = Q\cos(\omega t + \phi)$$

con Q valore massimo della carica sui piatti

mentre ω è la frequenza caratteristica del circuito e
Φ è una fase arbitraria (con $\Phi = 0$ il condensatore è totalmente carico) (per convenzione)