Questi appunti sono stati fatti durante la preparazione dello scritto di Calcolo Numerico del professor Ghelardoni. Nonostante li abbia ricontrollati più volte ci potrebbero essere errori, fate riferimento prima di tutto al materiale del professore!

Gli argomenti segnati con un "!" all'inizio del titolo potrebbero essere incompleti (ovvero ci potrebbero essere delle tipologie di esercizio su quell'argomento che non sono state spiegate).

Se trovate errori segnalateli a me o ai rappresentanti.

! Autovalori e autovettori

domenica 21 giugno 2020 13:13

- Una matrice e la sua Trasposta hanno gli stessi autovalori
- Gli autovalori dell'Inversa sono il reciproco degli autovalori della matrice originale
- Gli autovalori di una matrice Hermitiana sono tutti reali.
- Traslazione dello spettro: Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con autovalore λ e sia $\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow$ la matrice $B = A + \alpha I$ ha come autovalore $\mu = (\lambda + \alpha)$ con molteplicità algebrica e geometrica uguali a quelle di λ. A e B hanno gli stessi autovettori

Differenze divise (polinomio di interpolazione)

giovedì 25 giugno 2020 10:55

- Viene data una tabella con dei valori di x e i corrispondenti valori di $f(x)$. Ci possono anche essere delle variabili (α e β)

CALCOLARE LE DIFFERENZE DIVISE

① Riporto la tabelle in verticale

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
x_3	$f(x_3)$

② Calcolo le differenze divise facendo, per l'elemento che sto calcolando:

$$\frac{\text{"colonna a sx, stessa riga"} - \text{"colonna a sx, prima riga non vuota"}}{\text{"prima colonna, stessa riga"} - \text{"prima colonna, stessa riga di (prima riga non vuota)"}}$$

x	$f(x)$	DD1	DD2	DD3
x_0	$f(x_0)$	/	/	/
x_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_1)\ f(x_0)}{x_1 - x_0} = a$	/	/
x_2	$f(x_2)$	$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = b$	$\frac{b-a}{x_2 - x_1} = m$	/
x_3	$f(x_3)$	$\frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0} = c$	$\frac{c-a}{x_3 - x_1} = n$	$\frac{n-m}{x_3 - x_2} = K$

CALCOLO DEL POLINOMIO

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot a + (x - x_0)(x - x_1) \cdot m + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdot K$$

CASO CON UNA SOLA VARIABILE

- Fare la tabella delle differenze divise e cercare un valore della variabile che renda uguali tutte le differenze divise di un certo ordine

CASO CON DUE VARIABILI

x	3	5	α	8	13
$f(x)$	β	7	9	20	28

① Escludere dalla tabella tutte le coppie $x - f(x)$ in cui compaiono le variabili

x	5	8	13
$f(x)$	7	20	28

② Fare le differenze divise con questa nuova tabella e calcolare il polinomio di interpolazione $P(x)$

③ Imporre $P(\alpha) = 9$ e $P(3) = \beta$ e ricavare i valori

Errore assoluto

domenica 21 giugno 2020 11:55

OPERAZIONE	ERRORE ASSOLUTO
$x_1 + x_2$	$\delta x_1 + \delta x_2$
$x_1 - x_2$	$\delta x_1 - \delta x_2$
$x_1 \cdot x_2$	$x_2 \delta x_1 + x_1 \delta x_2$
x_1 / x_2	$\frac{1}{x_2} \delta x_1 - \frac{x_1}{x_2^2} \delta x_2$

- PROBLEMA DIRETTO (Vengono forniti $\delta a, \delta x, \delta y$ e devo calcolare δf)

① Se mi viene dato un punto (per esempio $(\sqrt{3}, \pi)$) devo costruire un intervallo a cui appartiene (per esempio $[1,2] \times [3,4]$), se mi viene dato l'intervallo uso quello.

② Se $|\delta a|$, $|\delta x|$ e $|\delta y|$ vengono dati esplicitamente uso quelli, sennò li devo dedurre:

- Troncato alla terza cifra decimale: $|\delta| < 10^{-3}$
- Arrotondato alla terza cifra decimale: $|\delta| < \frac{1}{2} 10^{-3}$

③ Calcolo le derivate parziali di $f(x,y)$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$

④ Usando gli estremi degli intervalli del punto ① calcolo A_x e A_y in modo da massimizzare il VALORE ASSOLUTO di $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.
(Prendo x appartenente al primo intervallo e y al secondo).

⑤ $|\delta f| \leq |\delta a| + A_x |\delta x| + A_y |\delta y|$

- PROBLEMA INVERSO (Viene richiesto un certo δf e vanno calcolati δa e δd)

Faccio come per il problema diretto, quando arrivo al punto ⑤ impongo $|\delta a| \leq \frac{1}{2} |\delta f|$, $A_x |\delta x| \leq \frac{1}{4} |\delta f|$, $A_y |\delta y| \leq \frac{1}{4} |\delta f|$

e ricavo $|\delta a|$, $|\delta x|$ e $|\delta y|$

Errore relativo

domenica 21 giugno 2020 12:25

OPERAZIONE	ERRORE RELATIVO
$x_1 + x_2$	$\boxed{\dfrac{x_1}{x_1+x_2}}\,\boxed{\varepsilon_{x_1}} + \boxed{\dfrac{x_2}{x_1+x_2}}\,\boxed{\varepsilon_{x_2}}$
$x_1 - x_2$	$\dfrac{x_1}{x_1-x_2}\varepsilon_{x_1} - \dfrac{x_2}{x_1-x_2}\varepsilon_{x_2}$
$x_1 \cdot x_2$	$\varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2}$
x_1 / x_2	$1 \cdot \varepsilon_{x_1} - 1\,\varepsilon_{x_2}$

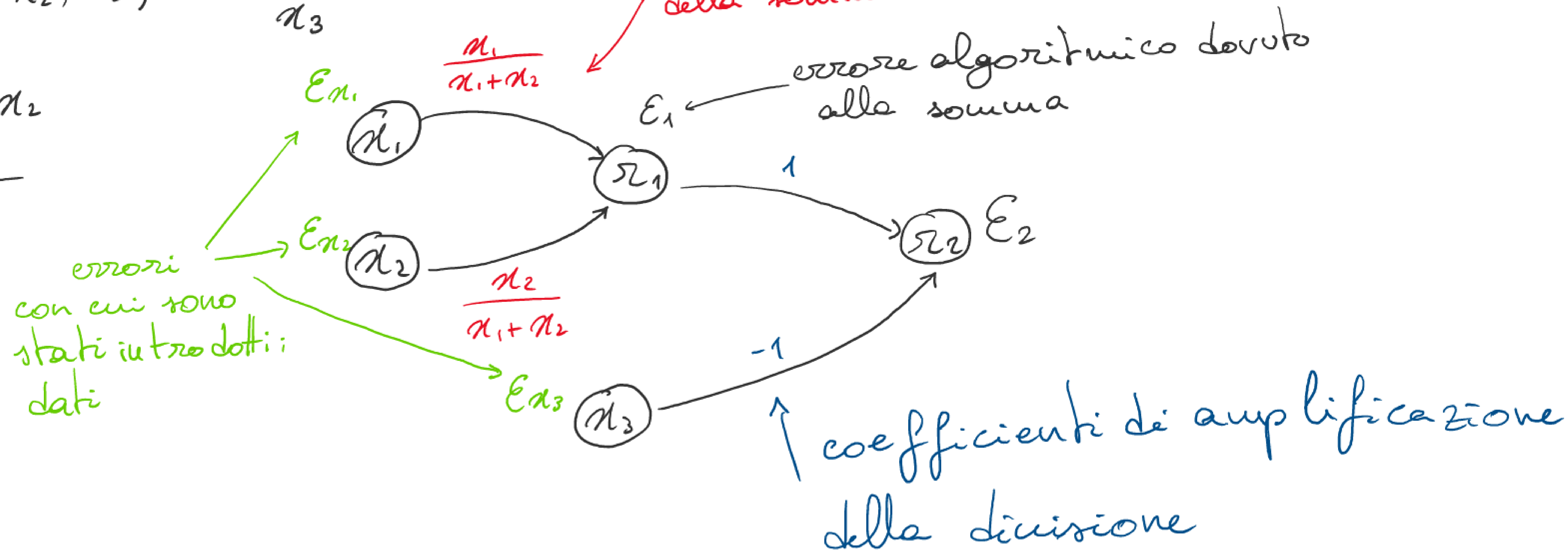
Esempio

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2}{x_3}$$

$$r_1 = x_1 + x_2$$

$$r_2 = \frac{r_1}{x_3}$$

coefficienti di amplificazione della somma



$$\varepsilon_f = \varepsilon_{r_2} = \varepsilon_2 + 1 \cdot \underbrace{\varepsilon_{r_1}}_{} - 1 \cdot \varepsilon_{x_3}$$

$$= \varepsilon_1 + \frac{x_1}{x_1+x_2}\varepsilon_{x_1} + \frac{x_2}{x_1+x_2}\varepsilon_{x_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon_f = \underbrace{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}_{= \varepsilon_a} + \underbrace{\frac{x_1}{x_1+x_2}\varepsilon_{x_1} + \frac{x_2}{x_1+x_2}\varepsilon_{x_2} - \varepsilon_{x_3}}_{= \varepsilon_d}$$

Fattorizzazione LR

martedì 23 giugno 2020 18:56

- La matrice L è una triangolare inferiore, R una triangolare superiore

① Riempio la parte di L che non cambia $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

② Inizio ad applicare il metodo di Gauss sulla matrice A (quella che viene data dall'esercizio) per ottenere R (triangolare superiore).

- Per fare Gauss devo SOTTRARRE alla riga dell'elemento che voglio eliminare un multiplo di un'altra riga in modo che l'elemento in questione diventi zero dopo l'operazione

③ Scrivo il multiplo nella matrice L nella posizione dell'elemento appena eliminato

④ Continuo fino a riempire tutta L

<u>Esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Elimino l'1 in posizione (2,1) facendo $II - 1 \cdot I$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

- Elimino il -2 in posizione (3,2) facendo $III - (-1) \cdot II$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

- Elimino il -3 in posizione (4,3) facendo $IV - (-1) \cdot III$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R$

Formula dei trapezi

martedì 23 giugno 2020 18:52

- Mi vengono dati un integrale $I = \int_a^b f(x)\,dx$ e un errore desiderato E, voglio trovare il numero minimo di intervalli (K) tali per cui la formula di trapezi abbia errore $\leq E$
- So che $|E| \leq \dfrac{(b-a)^3}{12K^2} \cdot |f''(\xi)|$

① Calcolo $f''(x)$ e trovo un valore M tale che $M \geq \sup_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$

② Risolvo la disequazione $\frac{1}{2} \cdot |E| \leq \dfrac{(b-a)^3 \cdot M}{12K^2}$ e trovo K minimo

Formula di quadratura

martedì 23 giugno 2020 18:53

- Devo calcolare i pesi a_i tali per cui la formula di quadratura fornita abbia grado di precisione (algebrico) massimo (m).
- Calcolo l'integrale per $f(x) = 1, x, x^2, x^3 \dots$ e impongo la formula uguale al valore dell'integrale, m è uguale al massimo esponente della x per cui la formula è soddisfatta
- Se viene chiesto di calcolare k e s basta sapere che:
  - $s = m+1$
  - $f^{(s)} = s!$
  - Se non viene specificato diversamente $E(f) = K \cdot f^{(s)}(\xi)$

Esempio

$$\int_1^2 x^4 f(x)\,dx \simeq a_0 \cdot f(1) + a_1 \cdot f(2)$$

① $f(x) = 1$: $\displaystyle\int_1^2 x^4 \cdot 1\,dx = \frac{x^5}{5}\Big|_1^2 = \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$

$\boxed{1a}$ Impongo $a_0 \cdot f(1) + a_1 \cdot f(2) = \frac{31}{5}$ con $f(x) = 1$:

$$a_0 \cdot \underbrace{1}_{=1|_1} + a_1 \cdot \underbrace{1}_{=1|_2} = \frac{31}{5}$$

② $f(x) = x$: $\displaystyle\int_1^2 x^4 \cdot x\,dx = \int_1^2 x^5 = \frac{x^6}{6}\Big|_1^2 = \frac{64}{6} - \frac{1}{6} = \frac{63}{6}$

$\boxed{2a}$ Impongo $a_0 \cdot f(1) + a_1 \cdot f(2) = \frac{63}{6}$ con $f(x) = x$:

$$a_0 \cdot \underbrace{1}_{=x|_1} + a_1 \cdot \underbrace{2}_{=x|_2} = \frac{63}{6}$$

$\boxed{2b}$ Provo a risolvere il sistema con le due equazioni che ho trovato:

$$\begin{cases} a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 = \frac{31}{5} \\ a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 2 = \frac{63}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{19}{10} \\ a_1 = \frac{43}{10} \end{cases}$$

③ $f(x) = x^2$: $\displaystyle\int_1^2 x^4 \cdot x^2\,dx = \int_1^2 x^6\,dx = \frac{x^7}{7}\Big|_1^2 = \frac{128}{7} - \frac{1}{7} = \frac{127}{7}$

$\boxed{3a}$ Guardo se $\frac{127}{7}$ soddisfa la formula con i valori di a trovati al passo $\boxed{2b}$:

$$\frac{19}{10} \cdot \underbrace{1}_{=x^2|_1} + \frac{43}{10} \cdot \underbrace{4}_{=x^2|_2} \neq \frac{127}{7} \Longrightarrow m = 1$$

Gauss Seidel

domenica 21 giugno 2020 17:45

- Se A é a predominanzia diagonale forte ⇒ Gauss Seidel converge
- Se A é a predominanza diagonale debole ed é irriducibile ⇒ Gauss Seidel converge

- Scompongo $A = D - E - F$

matrice triangolare superiore stretto estratta da A

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad -E = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & \ddots & & \emptyset \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & 0 \end{pmatrix} \qquad -F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ \emptyset & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale, sulla diagonale ci sono elementi di A

Matrice triangolare inferiore stretto estratta da A

elementi di -A

non posso dire cosa sono a priori

- $H_{GS} = (D-E)^{-1} \cdot F =$ 

- Per vedere se il metodo converge calcolo H_{GS} e guardo se é convergente

$$D-E = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (D-E)^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(D-E)^{-1} \cdot F$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

! Jacobi

martedì 23 giugno 2020 18:53

- Se A é a predominanzia diagonale forte $\Rightarrow$ Jacobi converge
- Se A é a predominanza diagonale debole ed é irriducibile $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Jacobi converge

MATRICE DI ITERAZIONE

$$H_J = D^{-1}(E+F)$$

Matrice convergente

domenica 21 giugno 2020 13:09

Data una matrice A:

- $\|A\| < 1 \implies A$ é convergente
- $\rho(A) < 1 \iff A$ é convergente
- A é convergente $\implies \det(A) < 1$

$\rho(A)$ é il raggio spettrale = il massimo modulo degli autovalori

Matrice invertibile

mercoledì 27 gennaio 2021 13:12

Si fa col quadro delle differenze divise, si calcola il polinomio caratteristico, se c'è un autovalore nullo allora non è invertibile

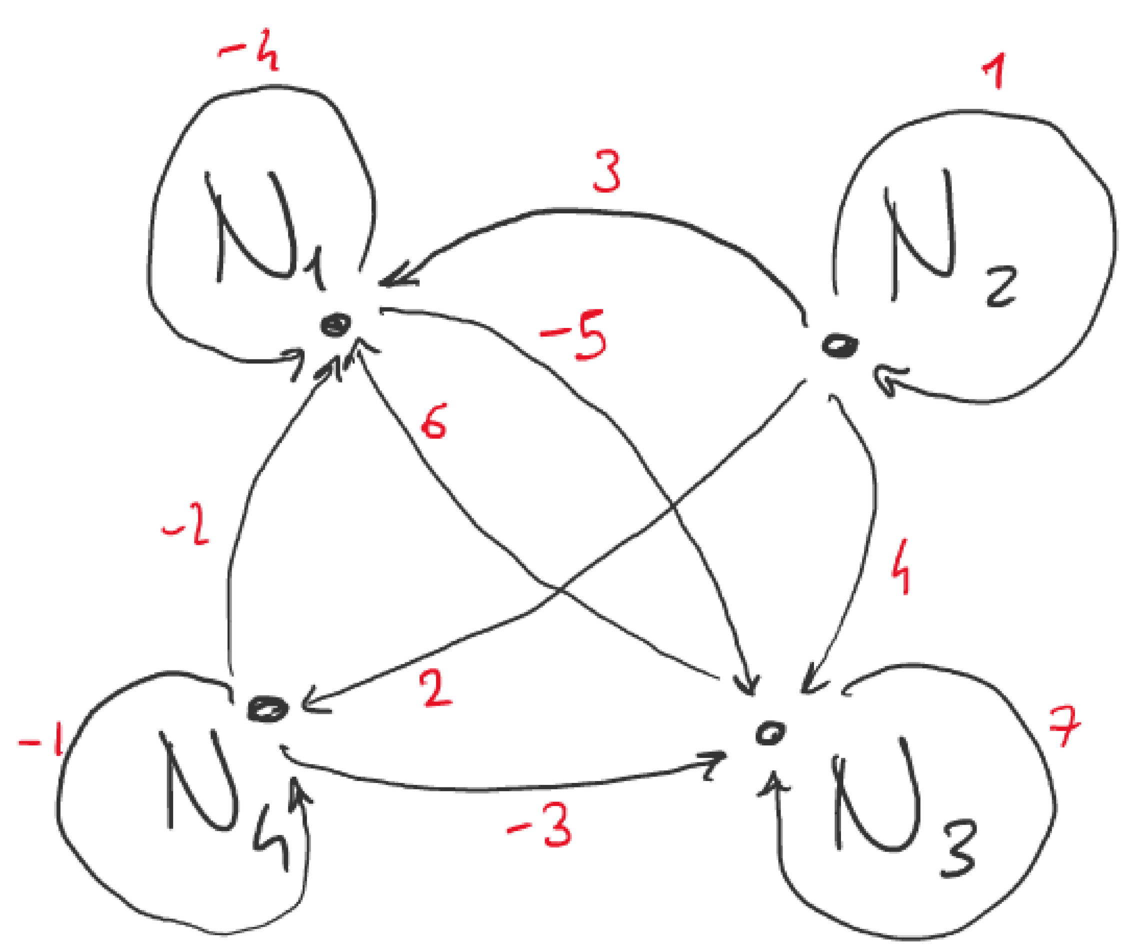
Matrice riducibile

domenica 21 giugno 2020 17:53

- Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ fisso n punti detti nodi. Connetto con un cammino orientato il nodo i col nodo j se l'elemento $a_{ij} \neq 0$
- Il grafo si dice fortemente connesso se da ogni nodo posso raggiungere tutti gli altri seguendo un cammino orientato.
- A è irriducibile $\iff$ Il grafo orientato è fortemente connesso.
- Se il grafo non è fortemente connesso posso trovare la matrice di permutazione che riduce A mettendo nell'ordine:
  1. Indice del nodo che non raggiunge tutti gli altri
  2. Indici dei nodi raggiunti
  3. Indici dei nodi non raggiunti

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$



N_i	Raggiunti	Non raggiunti
1	1, 3	2, 4
2	2, 4, 1, 3	
3	3, 1	2, 4
4	4, 3, 1	2

$$P_1 = (\underbrace{e^{(1)}}_{\text{Nodo che non raggiunge tutti gli altri}}, \underbrace{e^{(3)}}_{\text{Nodi raggiunti}}, \underbrace{e^{(2)}, e^{(4)}}_{\text{Nodi non raggiunti}})$$

Matrici particolari

domenica 21 giugno 2020 13:24

- Una matrice A si dice singolare (non singolare) se $\det(A)=0$ $(\det(A)\neq 0)$
- Matrice inversa: A^{-1} $\det(A)=\frac{1}{\det(A^{-1})}$
- Matrice hermitiana: $A^H=A$ A hermitiana $\Rightarrow$ A simmetrica
- Matrice antihermitiana: $A^H=-A$
- Matrice unitaria o ortogonale: $AA^H=A^HA=I$
- Matrice normale: $A^HA=AA^H$
- Matrice simmetrica: $A=A^T$
- Matrice antisimmetrica: $A=-A^T$
- Matrice di permutazione: P é una matrice di permutazione se $P^TP=PP^T=I$

  A·P presenta, rispetto ad A, la stessa permutazione di colonne che si é operata su I per ottenere P:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&3&1\\1&2&3\end{pmatrix}\quad P=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=(e^{(2)},e^{(3)},e^{(1)})\quad AP=\begin{pmatrix}-1&2&1\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}$$

- Matrici simili: Data una matrice A e una matrice S non singolare, si dice trasformata per similitudine della matrice A la matrice B tale che

$$B=S^{-1}AS$$
, A e B si dicono matrici simili

  - Due matrici simili hanno gli stessi autovalori e se x é autovettore di A, $(S^{-1}\cdot x)$ é autovettore di B

- Matrice diagonalizzabile: A si dice diagonalizzabile (per similitudine) se esiste una matrice X non singolare, tale che $X^{-1}AX=D$ dove D é diagonale
  - CNS affinché A sia diagonalizzabile é che:
    1. Il numero dei suoi autovalori, contati con le loro molteplicitá, sia pari all'ordine della matrice
    2. La molteplicitá geometrica di ciascun autovalore coincida con quella algebrica
  - Se A é simmetrica $(A=A^T)\Rightarrow$ A é diagonalizzabile
  - Se A é quadrata di ordine n e ammette n autovalori distinti $\Rightarrow$ A é diagonalizzabile (Gershgorin, cerchi disgiunti)

- Matrice a predominanza diagonale forte/debole:

  Una matrice quadrata A, di ordine n, si dice a predominanza diagonale forte se $|a_{ii}|>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$

  ovvero se ogni elemento della diagonale é maggiore, in valore assoluto, della somma di tutti gli altri elementi della stessa riga in valore assoluto.
  - Debole: sostituire $>$ con $\geq$, per almeno una riga deve valere il $>$ stretto
  - Una matrice a PDF é non singolare $(\det\neq 0)$

- Matrice di Frobenius o associata o compagna

Data l'equazione $x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\dots+a_1x+a_0=0$, $a_i\in\mathbb{C}$ $i=0,\dots,k-1$,

considero la matrice $F\in\mathbb{C}^{k\times k}$

$$F=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{k-2}&-a_{k-1}\end{pmatrix}$$

- L'equazione di partenza é l'equazione caratteristica di F
- Le soluzioni dell'equazione sono gli autovalori di F.
- Posso localizzare gli autovalori con il I Teorema di Gershgorin.

- Matrice riducibile: Una matrice $\in\mathbb{C}^{n\times n}$ si dice riducibile se $\exists P\in\mathbb{C}^{n\times n}$ (di permutazione), tale che $B=P^TAP=\begin{pmatrix}B_{11}&0\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$

  con B_{ii} blocchi quadrati $i=1,2$

! Metodo delle potenze

martedì 23 giugno 2020 19:03

il metodo converge se la matrice é diagonalizzabile e se ha
cn autovalore di modulo massimo

Metodo di bisezione

lunedì 22 giugno 2020 09:07

- La radice che cerco deve avere molteplicità dispari (ovvero la funzione cambia segno).
- Se la funzione non cambia segno posso usare il metodo di bisezione sulla derivata
- Perché si possa applicare il metodo di bisezione $f(a) \cdot f(b) < 0$

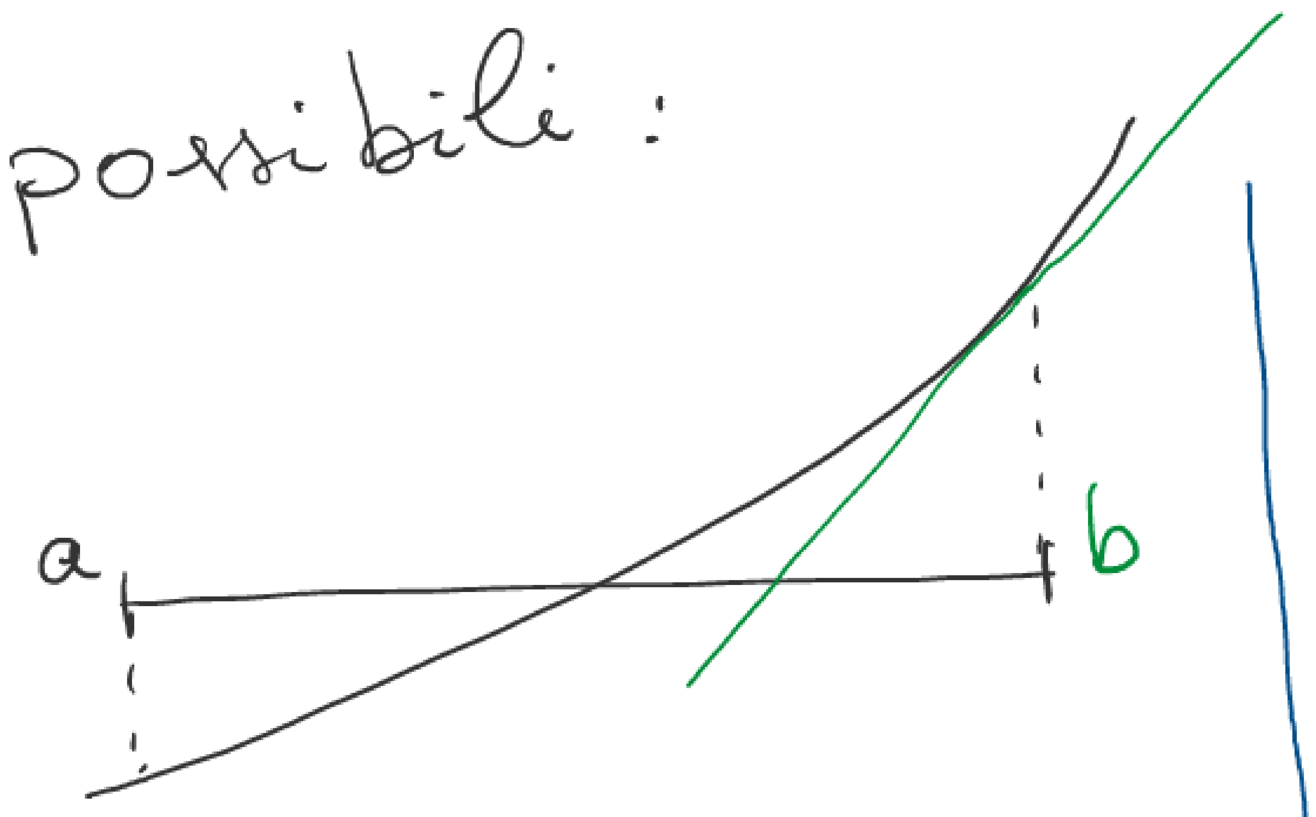
Metodo di Newton (delle tangenti)

lunedì 22 giugno 2020 09:11

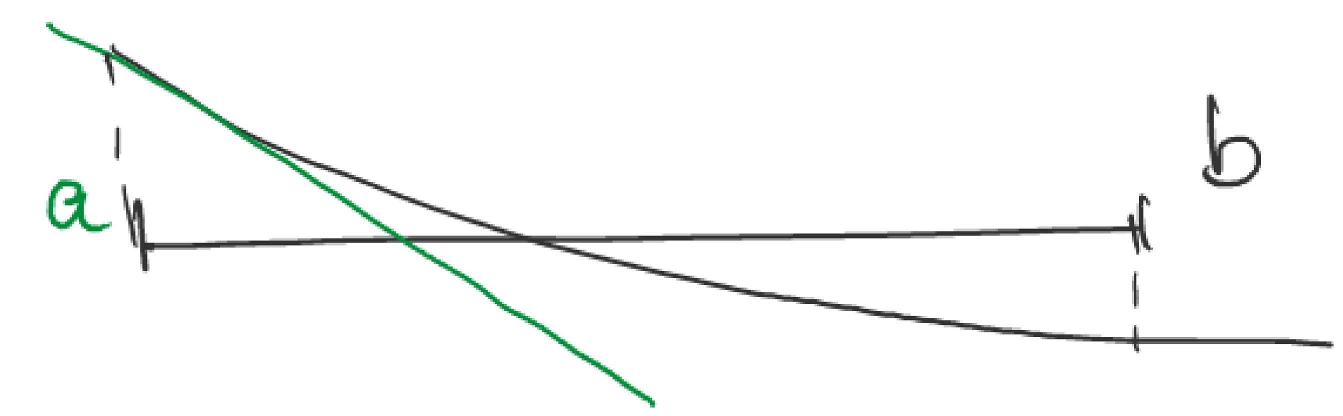
- Si può applicare per trovare una radice α di $f(x)$ se $f(x)$ è derivabile con continuità in un intorno di α.
- Ho 4 casi possibili:

- Quello segnato in verde è quello che prendo come valore iniziale

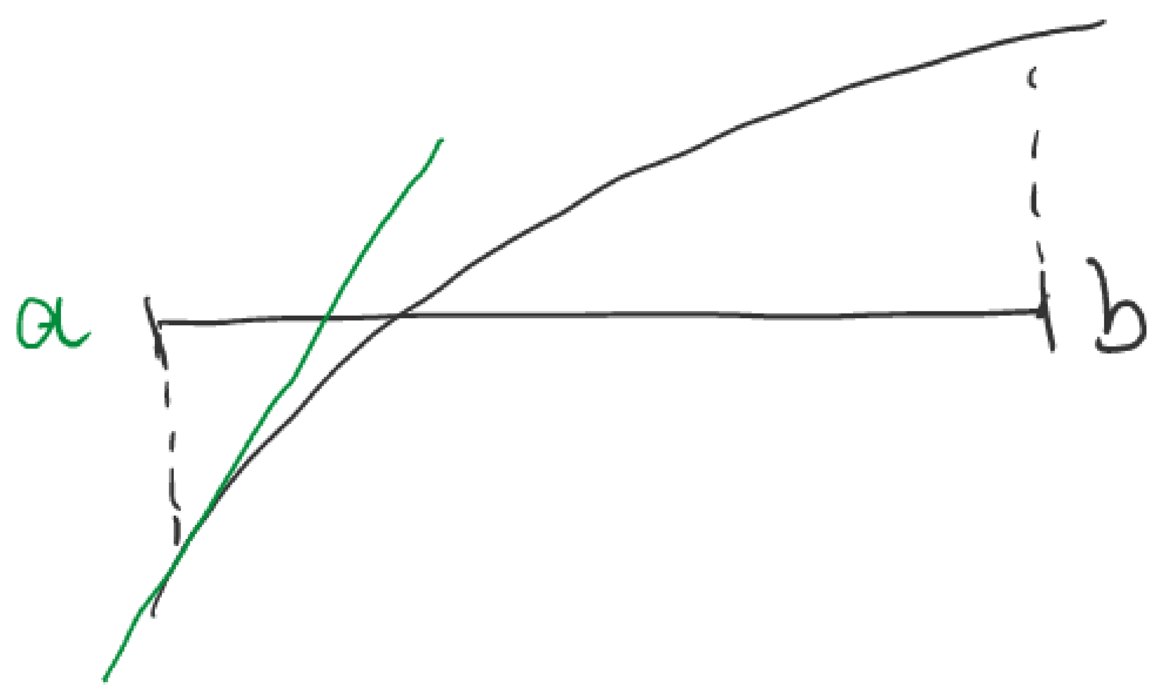
$f' > 0$
$f'' > 0$



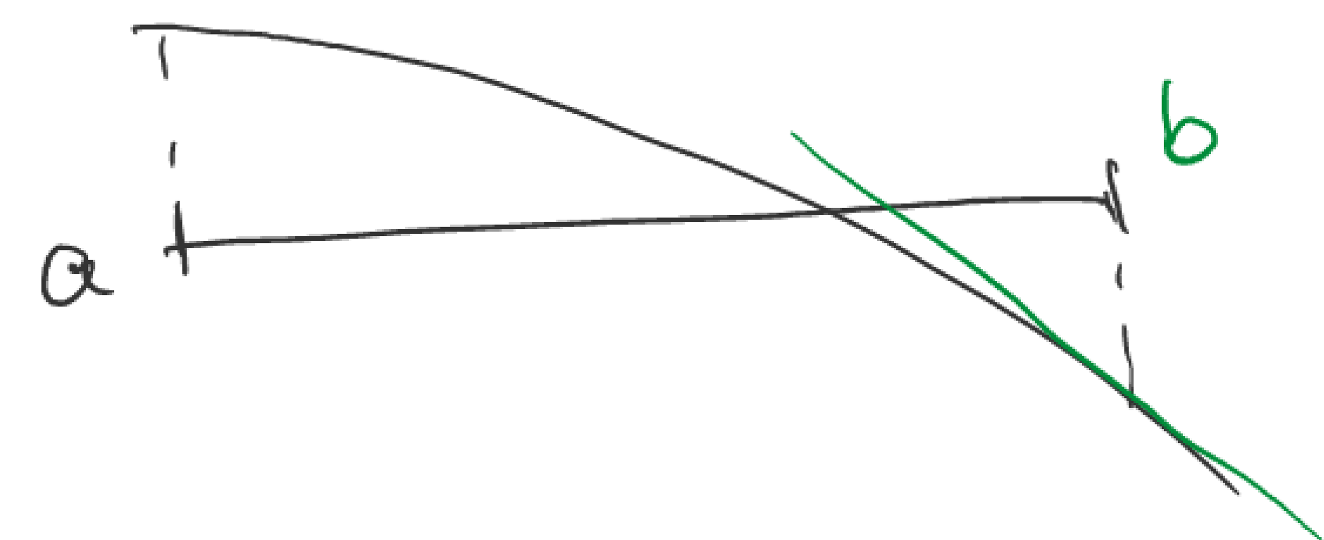
$f' < 0$
$f'' > 0$



$f' > 0$
$f'' < 0$



$f' < 0$
$f'' < 0$



ORDINE DI CONVERGENZA p

- Presa α una soluzione dell'equazione:
  - Se α ha molteplicità $= 2 \Rightarrow p = 1$
  - Se $f''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow p = 2$
  - Se $f''(\alpha) = 0 \Rightarrow p > 2$

Metodo iterativo

martedì 23 giugno 2020

Teorema 4.4.1 *Sia α un punto fisso di $\phi(x)$ interno ad un intervallo $\mathcal{I}$ sul quale $\phi(x)$ sia derivabile con continuità e si supponga che esistano due numeri positivi ρ e K con $K < 1$, tali che $\forall x \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho] \subset \mathcal{I}$ si verifichi la condizione*

$$| \phi'(x) | \leq K; \tag{4.12}$$

allora per il metodo (4.11) valgono le seguenti proposizioni:

1. *se $x_0 \in]\alpha - \rho, \alpha + \rho[$ allora è anche $x_n \in]\alpha - \rho, \alpha + \rho[$ per $n = 1, 2, \ldots$;*
2. *per la successione $\{x_n\}$, con $x_0 \in]\alpha - \rho, \alpha + \rho[$, si ha $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$;*
3. *α è l'unico punto fisso di $\phi(x)$ in $[\alpha - \rho, \alpha + \rho]$.*

Teorema 4.4.2 *Un metodo iterativo ad un punto, la cui funzione di iterazione $\phi(x)$ sia sufficientemente derivabile, ha ordine di convergenza uguale ad un numero intero positivo p. Precisamente se il metodo (4.11) converge ad α, la convergenza è di ordine p allora e solo che si abbia*

$$\phi(\alpha) = \alpha, \ \phi^{(i)}(\alpha) = 0 \ \ \text{per} \ \ 1 \leq i < p, \ \phi^{(p)}(\alpha) \neq 0. \tag{4.14}$$

Minimi quadrati

martedì 23 giugno 2020 18:51

- Mi vengono forniti i seguenti dati:
  - una funzione di cui devo determinare i parametri
  - una tabella contenente valori noti (misurati) della funzione

Esempio

$$f(x):\ y = a\,x + 1\,b \Rightarrow \varphi(x) = \overset{x}{\overset{\shortparallel}{\varphi_a(x)}} \cdot a + \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\varphi_b(x)}} \cdot b$$

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	5	10

① Costruisco la matrice A:

$$A = \begin{array}{cc} \varphi_a(x) & \varphi_b(x) \\ \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

② Costruisco la matrice b:

$$f(x)$$
$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

③ Devo risolvere $A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$

- Calcolo $A^T \cdot A = C$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = C$$

- Calcolo $A^T \cdot b = D$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 18 \end{pmatrix} = D$$

- Risolvo $C \cdot x = D$ con Gauss o qualsiasi altro metodo:

$$\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 42 \\ 18 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$a = 3$$
$$b = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3x + 0$$

Norme

domenica 21 giugno 2020 16:19

- NORME VETTORIALI

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \quad \text{(norma euclidea)}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

- NORME MATRICIALI

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \longleftarrow$$ somma dei valori assoluti degli elementi di colonna

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)}$$ → se A è simmetrica $\|A\|_2 = \rho(A)$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \longleftarrow$$ somma dei valori assoluti degli elementi di riga

! Numeri di macchina

martedì 23 giugno 2020 18:57

- CARDINALITÀ $(M) = F(\beta, m, U, L) = 2\left(\beta^{m} - \beta^{m-1}\right)(U - L + 1) + 1$

- Precisione di macchina: $u = \frac{1}{2}\beta^{1-m}$

Numero di condizionamento

martedì 23 giugno 2020 18:54

- Il numero di condizionamento di una matrice A é $\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$
- Il tipo di norma da utilizzare deve essere specificato

Punti fissi

domenica 21 giugno 2020 12:42

- Per calcolare i punti fissi di una funzione si pone la funzione $= x$ e si risolve

- METODO DI RUFFINI

(1) Devo trovare una radice del polinomio (la cerco tra i divisori del rapporto tra termine noto e coefficiente del termine di grado massimo)

$P(x) = x^3 + 2x - 3$, cerco tra i divisori di $\frac{-3}{1} = -3$

$\{-1, 1, -3, 3\}$

Sostituisco e trovo che $P(1) = 0$

(2)

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & \downarrow & 1\cdot 1=1 & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 0+1=1 & 3 & 0 \end{array}$$

← coefficienti in ordine

radice →

← deve venire 0

(3) $(x-1)(1x^2 + 1\cdot x + 3)$