

L'ALGORITMO D'ELIMINAZIONE
DI GAUSS PER LA RISOLUZIONE
DEI SISTEMI D'EQUAZIONI LINEARI.

PLACIDO LONGO

27/6/2010

SOMMARIO

INTRODUZIONE (pag. 2)

1.- TRASFORMAZIONI ELEMENTARI (pag. 4)

2.- SISTEMI ELEMENTARMENTE RISOLUBILI (pag. 9)

3.- L'ALGORITMO DI ELIMINAZIONE. (pag. 26)

4.- APPLICATIONI ALGEBRICHE E GEOMETRICHE (pag. 35)

APPENDICE: IL SEGNO DEGLI AUTONVALORI (pag. 50)

INTRODUZIONE

La grande familiarità che lo studioso ha con le equazioni più semplici (primo e secondo grado) sin dai primi anni delle Scuole Medie lo porta invariabilmente a sorvolare e sottovalutare i fondamenti del processo di risoluzione di un'equazione.

In breve, nell'algebra elementare esistono delle identità — come la proprietà distributiva $(a+b)c = ac + bc$, e cioè mettere in evidenza il fattore comune c , o quelle commutative e associative, che permettono di eseguire somme e prodotti nel modo più conveniente — e dei procedimenti — come moltiplicare ambo i membri per un'espressione non nulla per eliminarla da un denominatore, o ancora sommare ad ambo i membri l'opposto di un termine per spostarlo da un membro all'altro — che trasformano l'equazione di partenza in un'altra ad esse equivalenti, e cioè dotate delle stesse soluzioni.

Nelle note che seguono, prima di presentare i dettagli dell'algoritmo d'eliminazione, esamineremo i tre tipi di

trasformazioni di un sistema lineare in un altro equivalente, in esso imprese; poi individueremo e studieremo una classe di sistemi lineari "elementari" risolvibili.

Per le equazioni di secondo grado (ad esempio) la risoluzione consiste nella sua trasformazione mediante le identità algebriche elementari nelle equazioni di tipo speciale

$$x = \frac{1}{2a} \left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac} \right) \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{2a} \left[-b + \sqrt{b^2 - 4ac} \right]$$

che conveniva di considerare "risolte". Esse rappresentano la (o le) soluzioni, e tali formule si ottengono considerando elementarmente risolvibili l'equazione $x^2 = k \geq 0$ (anche se ciò costituisce uno dei problemi teorici più lunghi e difficili di tutte le storie della matematica: delle prove, note ai Greci, delle incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato, il teorema degli zeri di Weierstrass, di fine '800), anche per i sistemi lineari viene introdotto una classe intermedia fra quella generale, e quella dei sistemi "risolti" ossia di tipo

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2 \dots, \quad x_n = a_n,$$

che è quella dei sistemi "a scale", oggetto principale della seconda sezione.

Nella terza sezione viene presentato l'algoritmo di Gauss, in forma conveniente al celebre manuale.

Nell'ultima sezione vengono presentate alcune applicazioni dell'algoritmo d'eliminazione a questioni d'Algebra e di Geometria.

Mentre conclude si è reperibile un'indicazione bibliografica per gli sviluppi pratici del metodo.

1.- TRASFORMAZIONI ELEMENTARI

Un sistema di equazioni lineari, o sistema lineare, è il problema di stabilire se esistono numeri reali (o complessi) x_1, x_2, \dots, x_n che verificano simultaneamente tutte le equazioni (di primo grado, nelle incognite x_1, \dots, x_n)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Il numero reale (o complesso) a_{ij} rappresenta il coefficiente dell'incognita x_j nell'equazione i -esima. Anche se i sistemi quadrati, cioè con $m=n$, hanno un ruolo particolare, non viene introdotto alcuna ipotesi su m ed n . Se $m > n$, e cioè se ci sono più equazioni che incognite, il sistema viene spesso detto sorredeterminato.

Per poter utilizzare una notazione più compatta, il sistema precedente viene scritto nella forma

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{matrix}$$

Si potrebbe eliminare dal tutto le incognite, inserite nel secondo indice dei coefficienti, ma ridurranno sensibilmente troppo degli scambi di colonne, e per individuare le colonne dei termini noti b_1, \dots, b_m .

L'algoritmo di Gauss, nelle forme seguenti, utilizza tre tipi di trasformazioni elementari:

- SCAMBI DI RIGHE
- SCAMBI DI COLONNE
- SOSTITUZIONE DI UNA RIGA CON LA SUA SOMMA CON UN MULTIPLO DI UN'ALTRA.
- SCAMBI DI RIGHE

Scambiare due righe nel quodico dei coefficienti equivale a cambiare di posto due equazioni nel sistema. Una qualsiasi soluzione di uno qualsiasi dei due sistemi è tale se verifica tutte le sue equazioni, indipendentemente dall'ordine con il quale sono elencate, e sarà dunque soluzione anche dell'altro sistema con le righe scambiate.

- SCAMBI DI COLONNE

Scambiare due colonne equivale a scambiare i valori delle corrispondenti incognite. Perché ci si ricordi di non far fatti nulli cambia. Ad esempio (stupido!)

$$\begin{cases} x = b \\ y = a \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} 1 \cdot x + 0 \cdot y = b \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y = a \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{array}{cc|c} x & y \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{array}$$

è "equividente" a $\begin{array}{cc} y & x \end{array}$

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & a \end{array}$$

ove le prime due colonne sono state scambiate, e fatto di non dimenticare che, per ottenere dalla soluzione di questo ultimo $x=a$ $y=b$ quelle del sistema dato, occorre scambiare la x con la y e cioè esse è $y=a$ $x=b$.

Due sistemi con le colonne scambiate **NON** sono equivalenti (stesse soluzioni), e rigor di termine, ma è facilissimo ricavare la soluzione dell'uno da quella dell'altro riordinando i valori, utilizzando le tecniche degli scambi accuratamente conservate allo scopo.

- "ADDITIONE E SOTTRAZIONE"

Questo tipo di trasformazione è il cuore del metodo che, nei vecchi libri di algebra, è chiamato anche "di addizione e sottrazione".

Sapponiamo che $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ sia una soluzione del sistema dato. Se moltiplichiamo un'equazione (per semplicità, la prima) per $\alpha \neq 0$, $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ sarà ancora soluzione; se poi la sommiamo a membro ad un'altra (per semplicità, l'ultima) si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + \alpha(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) = b_m + \alpha b_1 \end{array} \right.$$

e $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ sarà ancora soluzione. L'operazione può essere invertita: moltiplicando la prima equazione per $-\alpha$ e sommandole all'ultima si torna al sistema di partenza. Dunque le soluzioni sono le stesse.

Osserviamo che, raccogliendo i fattori x_i comuni nell'ultima equazione si ottiene per l'ultima riga

$$a_{m1} + \alpha a_{11} \quad a_{m2} + \alpha a_{12} \quad \dots \quad a_{mn} + \alpha a_{1n} \quad b_m + \alpha b_1,$$

ossia la somma dell'ultima riga al multiplo arbitrario α della prima. L'utilità di scegliersi non nulli sarà assai più evidente in seguito, ma osserviamo subito che se $\alpha = 0$ allora il sistema resta identico al precedente.

RIASSUMENDO:

UN SISTEMA LINEARE SI TRASFORMA IN UNO EQUIVALENTE (STESSE SOLUZIONI) SE:

- SI SCAMBIANO DUE RIGHE QUALUNQUE
- SI SOSTITUISCE AD UNA SUA QUALUNQUE RIGA LA SUA SOMMA CON UN MULTIPLO ARBITRARIO DI UN'ALTRA.

INOLTRE:

SE IN UN SISTEMA LINEARE SI SCAMBIANO DUE COLONNE SI OTTIENE UN SISTEMA LE (EVENTUALI) SOLUZIONI DEL QUALE DIFFERISCONO DA QUELLE DEL SISTEMA DATO SOLO PER LO SCAMBIO DELLE INCOGNITE CORRISPONDENTI ALLE COLONNE SCAMBIATE

Possiamo già pereggiare una strategia per l'algoritmo d'eliminazione: utilizzare i tre tipi di trasformazioni precedenti per trasformare il generico sistema lineare dato in uno "elementermente risolubile" (come $x^2 = k$).

Tali sistemi sono l'oggetto delle prossime setime.

2.- SISTEMI "ELEMENTARMENTE" RISOLUBILI

Abbiamo già osservato, al volo, che le forme di un sistema lineare "risolto" è

$$\begin{cases} x_1 = k_1 \\ x_2 = k_2 \\ \vdots \\ x_n = k_n \end{cases} \quad \text{e cioè}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & & x_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & k_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & k_n \end{matrix}$$

Un sistema è risolto quando in ogni equazione appena una sola incognita con coefficiente 1. Ciò è d'anzio troppo lontano dalle applicazioni pratiche.

- SISTEMI DIAGONALI

Il prossimo caso, di poco più generale, del quale c'occorperemo è quello dei sistemi "diagonali", detti anche "disaccoppiati", del tipo

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 = k_1 \\ \lambda_2 x_2 = k_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n x_n = k_n \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & k_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_{n-1} & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & & 0 & \lambda_n & k_n \end{matrix}$$

Una semplice occhiata ai quattro coefficienti giustifica

le scritte di chiamerò diagonali, mentre un'occhiata al sistema spiega quelle di chiamerò disaccoppiate: infatti, ogni equazione contiene solo un'incognita e non esprime legami di tele incognite con le altre.

Non è evidente che un sistema diagonale sia risolvibile. Infatti, le equazioni di primo grado in una sola incognita delle quali i coefficienti hanno soluzione reale se e solo se tutti i coefficienti sulla diagonale λ_i siano NON NULLI.

Se qualcuno d'essi è nullo allora il sistema è impossibile, (non ha soluzione) se il corrispondente termine noto è diverso da zero. Se, invece, è zero l'equazione diventa $0 \cdot x_i = k_i = 0$, sempre risolta. Eliminate tutte le equazioni redundanti resta un sistema diagonale nelle incognite rimaste che ha soluzione reale se i termini diagonali sono tutti non nulli e non ha soluzioni se qualche termine diagonale si annulla.

In definitiva:

UN SISTEMA DISACCOPPIATO, ELIMINATE LE EQUAZIONI DI PRIMO GRADO INDETERMINATE CHE LO COMPONGONO, HA SOLUZIONE SE E SOLO SE I TERMINI DIAGONALI SONO NON NULLI, UNICA NELLE INCOGNITE RIMASTE. LE SOLUZIONI DEL SISTEMA ORIGINALE SI OTTENGONO DA QUESTA AGGIUNGENDO AI VALORI ARBITRARI PER LE INCOGNITE RELATIVE ALLE EQUAZIONI ELIMINATE.

- SISTEMI TRIANGOLARI

Un ultimo passo verso il caso generale è costituito dai sistemi "triangolari" del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

$$a_{ii} \neq 0$$

$$M = M$$

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$$

ovvero

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ a_{11} & a_{12} & & a_{1n-1} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & & a_{2n-1} & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} & b_n \end{matrix}$$

Osserviamo esplicitamente che il numero di equazioni è uguale al numero delle incognite. L'importante proprietà dei sistemi triangolari è che una delle loro equazioni (l'ultima, nel quadro precedente) dipende solo da un'unica incognita (x_n , nel caso precedente), che ha una e una sola soluzione se

e solo se il coefficiente (a_{nn} , nel nostro caso) è non nullo.
 Ancora una volta incontriamo la condizione sui termini diagonali.
 L'operazione sarebbe impossibile indeterminata nei casi già incontrati
 nel paragrafo precedente. Poiché $a_{nn} \neq 0$ si può dividere l'ultima
 equazione, e determinare la corrispondente incognita (x_n),
 tale valore può essere sostituito in tutte le altre equazioni,
 eliminando di fatto da esse l'incognita già calcolata.
 Eliminate queste e incognite, resterà un sistema ancora
 triangolare, ma con $n-1$ incognite ed equazioni. In n passi,
 in tutto, si risolve il sistema.

In pratica:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

- L'ultima equazione, $2x_3 = 1$, fornisce
 la soluzione uice $x_3 = \frac{1}{2}$.
- Sostituendo nelle equazioni precedenti
 ed eliminando l'ultima equazione
 il sistema diventa

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{array}$$

- L'ultima equazione dà subito
 $x_2 = \frac{3}{2}$
- Sostituendo nella prima ed
 eliminando l'ultima equazione,
 segue

$$x_1 = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$$

il che fornisce il valore dell'ultima
 incognita; la soluzione (uice) è

$$\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Così come per i sistemi diagonali, per quelli triangolari le possibilità di risolvere non le ha le equazioni di primo grado in una sola incognita che si riuscira a generare è legata al fatto che i termini diagonali x_{ii} sono non nulli. In tal caso, ogni equazione ha una ed una sola soluzione e il sistema ammette soluzione unica. Se invece qualcuno dei termini diagonali si annulla la questione è differente e verrà discutere nelle prossime sezioni.

Il procedimento di risoluzione presentato è detto anche di "SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO" (Backward substitution) nei libri in inglese.

Prima di passare al prossimo tipo di sistemi "elementari" (l'ultimo!) anticipiamo in un caso pratico una parte dell'algoritmo di Gauss. Consideriamo il sistema

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

Visto così non ha l'aria di essere triangolare, ma salta all'antica dritta

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{array} \right.$$

ed è evidente come si possa risolvere la seconda equazione per determinare x_2 , sostituire nella terza, ricavare x_3 , rimasta sola, e infine sostituire x_2 e x_3 già determinate nelle prime equazioni,

per determinare x_1 e completare lo studio. Il nostro metodo "abbarbicato" è dunque da buttare via? NO! Da

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ \text{P} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{scombinando le due ultime} \\ \text{righe si ottiene il sistema} \\ \text{equivalente} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{scombinando infine le} \\ \text{seconda e la terza colonna} \\ \text{si ottiene} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{che è ora triangolare ed è} \\ \text{"questo" equivalente a quelli d'} \\ \text{"pertanto": basterà scombinare i} \\ \text{valori delle seconda e delle} \\ \text{terza incognite nella soluzione} \\ \text{ottenuta per questo sistema.} \end{array}$$

Messuno persone dotate di un minimo di discernimento complicherebbe così significativamente la risoluzione di un sistema che si vede "ad occhio" essere risolvibile per sostituzione all'indietro, ma i computer, ad esempio, non hanno "occhio" e possono invece contare gli zeri di una colonna, anche se i termini sono decimali di migliaia. Ciò rappresenta un vantaggio ogni qual volta ci si debba occupare di problemi complessi.

Eseminiamo ancora un caso particolare (elementare). Il sistema

x	y	
1	2	1
2	3	2

non è trasversale, triangolare, e non lo dicono permettendo le tutte i modi possibili nelle e/o colonne,

per la semplice ragione che non ha zero fra i coefficienti. A ciò si può pone rimedio. Sottraiamo alle seconde equazioni il doppio delle prime (... cioè, sommiamo alle seconde il multiplo delle prime ottenuto moltiplicandole per -2). Si ottiene

x	y	
1	2	1
0	-1	0

che è sì un sistema triangolare che, risolti per sostituzione all'indietro, dà le soluzioni

$$x=1 \quad y=0$$

Sembra che ogni ulteriore analisi sia invincibile: purtroppo non è così. Eseminiamo

x	y	
1	2	1
2	4	-1

Col procedimento di forma si ottiene

x	y	
1	2	1
0	0	-3

che si vede subito essere impossibile, perché tali è l'ultima equazione $0x+0y=-3$. Di sicuro, $a_{22}=0$ e NON è triangolare!

Non si può dunque garantire che ogni sistema possa essere trasformato in uno triangolare. E' necessario un ultimo sforzo!

SISTEMI "A SCALA"

L'"incidente" occorso nell'esempio finale delle settimane precedenti ha dimostrato come non sia sempre possibile trasformare un sistema in uno triangolare, nemmeno se è quadrato. Ciò è comunque "quasi" impossibile per i sistemi rettangolari con $m < n$. Questa settimana introduciamo una classe di sistemi lineari "ottimi" nel senso che, da un lato, è sempre possibile trasformare un sistema in uno sostanzialmente equivalente di tali tipi e, dall'altro, questi sistemi sono facili da studiare completamente. Per prime cose, i sistemi "a scale" vengono introdotti, e ne viene studiata la risolvibilità. Poi vedremo brevemente come adoperare i tre tipi di trasformazioni per convertire un qualunque sistema in uno equivalente (o quasi, a meno dell'ordine delle incognite) "a scale".

DEFINIZIONE (BOZZA INCOMPLETA):

Un sistema lineare viene detto "**A SCALA**" se, posto

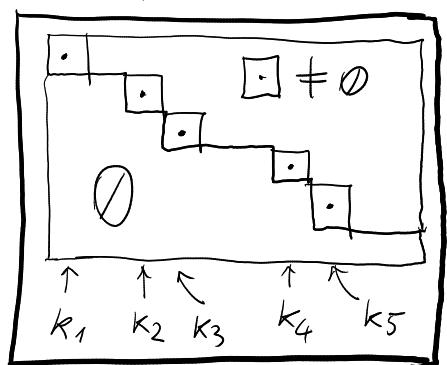
$$A_i = \{j \in \{1, \dots, n\} : a_{ij} \neq 0\}$$

e

$$k_i = \min A_i \quad \forall i : A_i \neq \emptyset$$

risulta

$$k_1 < k_2 < \dots < k_h \quad \forall h : A_h \neq \emptyset$$



NOTA BENE: le colonne dei termini noti non devono essere considerate nella determinazione dei valori k_i , ma solo i coefficienti delle incognite.

In sostanza, un sistema è detto "a scale" se, man mano che l'indice di riga cresce, il primo coefficiente non nullo delle righe si sposta verso destra rispetto a quello della riga precedente.

- $x \quad y$
 $\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}$ Non è "a scale" perché $k_1 = 1 \quad k_2 = 1$
 e dunque $k_1 < k_2$ è falso!
- $x \quad y \quad z$
 $\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}$ È "a scale", perché $k_1 = 1 \quad k_2 = 2$ e k_3 non è definito, perché le righe sono nulle, salvo il termine noto.
- $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$
 $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$ È "a scale" perché
 $k_1 = 1 < k_2 = 2 < k_3 = 5$
 e k_4 non è definito perché solo il termine noto è non nullo.

Ovviamente, si potrebbero fornire le colonne delle x_2 e quelle delle x_3 trasformando il sistema (con vantaggio, che esamineremo più avanti) in

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & x_5 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

DEFINIZIONE

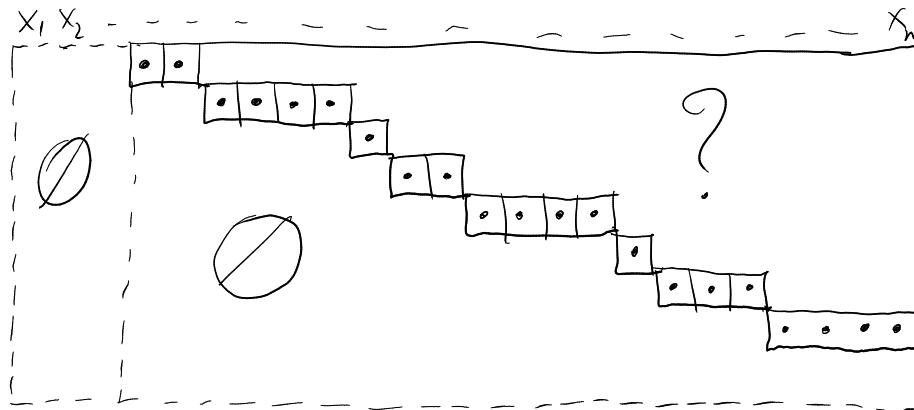
Dato un sistema "a scala", gli elementi $a_{ik_i} \neq 0$, definiti su ogni riga a coefficiente delle incognite non tutti nulli, verranno detti PIVOT. Le incognite corrispondenti verranno dette anche PIVOT.

In sostanza, il pivot di una riga a coefficienti non tutti nulli è il primo coefficiente non nullo.

La possibilità di permutare le colonne (quasi) senza alterare l'insieme delle (eventuali) soluzioni, consente di aggiungere ancora un elemento alla definizione di sistema "a scala", utile soprattutto nei calcoli manuali. Infatti, la definizione introdotta ci assicura che

$$a_{ik_i} \neq 0$$

per ogni riga con qualche coefficiente di incognite non nullo, ma non ci dice nulla sui coefficienti $a_{ij}, j > k_i$, che potrebbero essere anche tutti nulli (sistemi diagonali). Prendendo spunto dall'ultimo esempio trattato, immaginiamo di permutare le colonne, se è necessario, in modo da spostare ai primi posti tutte le colonne con solo il primo elemento non nullo, poi solo quelle con il secondo non nullo e nessun altro dopo il secondo, poi solo quelle col terzo elemento non nullo e nessun altro dopo il terzo e così via, fino ad essere le colonne. Le colonne di soli zero prendono tutte le altre:



I termini contrassegnati col simbolo sono non nulli.

I termini "sotto" di essi sono tutti nulli,

mentre su quelli "sopra" non si hanno informazioni. I pivot sono i primi elementi non nulli di ogni riga, ma nulla vieta di permettere le colonne all'interno di ogni "gradino", e comunque pivot scegliendone un altro fra essi (tutti garantiti non nulli).

DEFINIZIONE (COMPLETA) (Vedi disegno precedente)

Un sistema lineare verrà detto "A SCALA" se, posto

$$A_i = \{j \in \{1, \dots, n\} : a_{ij} \neq 0\}$$

e

$$k_i = \min A_i \quad \forall i : A_i \neq \emptyset$$

risulta

$$k_1 < k_2 < \dots < k_h \quad \forall h : A_h \neq \emptyset$$

e inoltre, posto

$$B_j = \{i \in \{1, \dots, m\} : a_{ij} \neq 0\}$$

e

$$h_j = \max B_j$$

risulta

$$h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_k \quad \forall k : B_k \neq \emptyset$$

Non è del tutto evidente il legame con quanto detto sopra, ma diventa tutto più chiaro se si riflette che, per ogni colonna j non tutta nulla, h_j è l'indice di riga massima per il quale $a_{hj} \neq 0$. Le operazioni di permutazione di colonne per raggruppare ai primi posti le colonne con "code" di zeri più lunghe garantiscono proprio

che k_j sia crescente al crescere delle colonne. Si noti la casella differente rispetto a quanto visto prima per le righe. La sequenza dei valori k_j è CRESLENTE, si, ma **NON STRETTAMENTE CRESLENTE**, come invece è quella relativa agli indici d'colonna dei pivot. In definitiva:

un sistema a m righe ed n colonne si dirà "a scale" se esistono interi $k_1, k_2, \dots, k_h, k_{h+1}$ tali che

$$k_1 < k_2 < \dots < k_h \leq n \quad k_{h+1} = n+1$$

e inoltre

$$\forall i=1..h, \forall j: k_i \leq j < k_{i+1}$$

$a_{ij} \neq 0$ + -----
 (sulla "scalinata")
 termini $\neq 0$

$$\forall i=1..h, \forall j: k_i \leq j < k_{i+1}, \forall l > i \quad a_{lj} = 0$$

(sotto la "scalinata")
 \emptyset

$$\forall i=1..h, \forall j: \quad j < k_i$$

$a_{ij} = 0$ | (A sinistra del)
 PIVOT \emptyset

Questa è una buona definizione alternativa comunque più presto ocura! Si raccomanda di confrontarla coll'ultima illustrazione.

RISOLUBILITÀ E RISOLUZIONE

DI SISTEMI LINEARI "A SCALA"

La risoluzione di un sistema "a scale" non è sostanzialmente differente da quella di un sistema triangolare, alle quale viene presto ricorso. Infatti, da un punto di vista tecnologico hanno una e una sola soluzione per ogni salto del termine noto, in quanto i termini diagonali sono tutti non nulli, e dall'altro, la definizione stessa di sistema "a scale" implica

dove appunto termini non nulli (*i* PIVOT).

LA RISOLUZIONE DI UN SISTEMA "A SCALA"

CONSISTE NEL:

- PORTARE A SECONDO MEMBRO TUTTE LE COLONNE NON CONTENENTI PIVOT
- RISOLVERE IL SISTEMA TRIANGOLARE COSÌ OTTENUTO, CHE AVRA' UNA E UNA SOLA SOLUZIONE PER OGNI SCELTA (ARBITRARIA) DI VALORI PER LE INCOGNITE A SECONDO MEMBRO, CHE DIVENTANO PARAMETRI LIBERI.

Per chiarire ogni equivoco, si considera

$$x + 2y = 1 \quad \text{o} \quad \begin{array}{cc|c} x & y \\ 1 & 2 & 1 \end{array}$$

Salta come pivot il coefficiente di x si ottiene

$$x = 1 - 2y$$

che ha una e una sola soluzione per ogni scelta (arbitraria) di y .

In sostanza, tutte le incognite "NON PIVOT" possono essere assegnate a piacere; ciò fatto, il sistema nelle sole incognite PIVOT viene risolto, e i valori di tali incognite sono funzioni delle altre (misura delle componenti PIVOT più quelle delle NON PIVOT).

Eserciamoci in un caso pratico il procedimento.

Dal sistema

$$\begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \boxed{1} & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array} \quad \left(\text{E' "a scelta"} \right)$$

Si ottiene il sistema triangolare (x_2, x_4 e x_5 parametri liberi)

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_3 & x_6 & x_7 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 3 & 1 - 2x_2 - 3x_4 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}$$

Termini diagonali $\neq 0$

Ora x_2, x_4 e x_5 possono essere scelti a piacere e, in conseguenza a ciascuna di tali scelte si determina la soluzione unica di

$$\begin{cases} x_1 + 3x_7 = 1 - 2x_2 - 3x_4 \\ 2x_3 + 2x_6 + 5x_7 = 2 - x_4 - x_5 \\ x_6 + 2x_7 = 1 \\ x_7 = 3 \end{cases}$$

che è un sistema triangolare equivalente. Risolvendo per esempio:

Dall'ultima equazione segue $x_7 = 3$ e dalla precedente

$$x_6 + 6 = 1$$

da cui $x_6 = -5$. Sostituendo nelle precedenti

$$x_1 = -8 - 2x_2 - 3x_4 \quad \text{e} \quad 2x_3 = -3 - x_4 - x_5$$

de cui:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -8 - 2x_2 - 3x_4 \\ x_2 = \text{arbitraria} \\ x_3 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_4 = \text{arbitraria} \\ x_5 = \text{arbitraria} \\ x_6 = -5 \\ x_7 = 3 \end{array} \right.$$

Utilizzando le notazioni vettoriale, si può anche scrivere

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

DOVE SONO FINITI I SISTEMI IMPOSSIBILI?

Non bisogna dimenticare dei termini noti!

(ossia dicono il seguente sistema :

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \quad (\text{E' a scale}).$$

Cosa accade alla terza equazione? Scritte per esteso, vale

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 3$$

che non ha soluzioni! Ecco dove sono fatti i sistemi impossibili! Ogni sistema che contiene una riga con coefficienti delle incognite d'soli zeri e al termine noto non nullo è impossibile, esattamente come per le equazioni d'primo grado. Se invece ha termini non nulli, allora ha soluzioni, e anche soluzione unica per ogni fissato secondo membro, che può però contenere parametri arbitrari (e formare infinite soluzioni), o meno.

E le equazioni indeterminate? Esse sono verificate da ogni insieme d'valori verificanti le altre: $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$, sempre vere.

Dunque le equazioni indeterminate (tutti i coefficienti delle incognite ed anche il termine noto nulli) possono essere eliminate dal sistema ottenendone uno con le stesse soluzioni. Cosa rappresenta una colonna tutta nulla? Un'incognita non esplicitamente presente nell'equazione, ma presente nella soluzione!

Esse può essere ignorata nella risoluzione, ma va reinserita nelle soluzioni con un valore arbitrario: $x=0$ rappresenta l'origine in \mathbb{R}^1 , l'asse y in \mathbb{R}^2 (e cioè $\{(0,y) : y \text{ arbitrario}\}$), il piano yz in \mathbb{R}^3 (e cioè $\{(0,y,z) : y, z \text{ arbitrari}\}$). L'equazione $x^2+y^2=1$ rappresenta in \mathbb{R}^3 il cilindro $\{(\cos\theta, \sin\theta, z) : \theta \in [0, 2\pi] \text{ e } z \text{ arbitrario}\}$ ove $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ rappresentano le soluzioni di $x^2+y^2=1$ (ignorando z). Riassumendo...

UN SISTEMA "A SCALA":

- E' IMPOSSIBILE SE E SOLO SE CONTIENE ALMENO UN'EQUAZIONE IMPOSSIBILE, CIOE' CON TUTTI I COEFFICIENTI DELLE INCognITE NULLI ED IL TERMINE NOTO NON NULLO.
- AMMETTE SOLUZIONI SE E SOLO SE NON ESISTONO IN ESSO EQUAZIONI IMPOSSIBILI.
PER DETERMINARNE TUTTE LE SOLUZIONI SI PORTANO A SECONDO MEMBRO TUTTI I TERMINI NON CONTENENTI PIVOT, E SI RI SOLVE IL SISTEMA TRIANGOLARE così OTTENUTO PER SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO.
LE INCognITE A SECONDO MEMBRO POSSONO ASSUMERE VALORI ARBITRARI, AD OGNI SCELTA DEI QUALI CORRISPONDE UN'UNICA SCELTA DELLE INCognITE PIVOT NELLA SOLUZIONE.
- LE RIGHE CON COEFFICIENTI E TERMINI NOTI NULLI SI POSSONO ELIMINARE SENZA ALTERARE L'INSIEME DELLE SOLUZIONI.
- LE COLONNE COSTITUITE SOLO DA ZERI SI POSSONO ELIMINARE, REINSERENDO POI NELLE EVENTUALI SOLUZIONI TROVATE VALORI ARBITRARI PER L'INCognITA CORRISPONDENTE.

3. L'ALGORITMO DI ELIMINAZIONE

Ora siamo in possesso di tutti gli strumenti necessari. In sintesi, l'algoritmo di Gauss consiste nello scegliere un pivot nella prima riga disponibile e sommare a tutti le righe seguenti il suo multiplo appropriato per annullare i termini delle stesse colonne con indici di riga maggiori. Finite tel' operazioni si ricomincia con la riga seguente, trascurando le colonne trattate, già a posto. Alla fine, dopo eventuali permutazioni di colonne e righe, si ottiene un sistema "a scale" equivalente (a meno di permutazioni), che si risolve come qui sotto. Il tutto è meglio visto per esempio.

1. $\begin{matrix} x & y & z \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{matrix}$

Applicato brutalmente (senza permutazioni di righe o colonne), lo algoritmo opera così:

- Si parte dalla prima riga.
- Si sceglie il pivot : per i conti manuali, i coefficienti uguali ad 1 o a -1 sono ideali. I computer hanno un parere diverso: preferiscono l'elemento di massimo modulo (vedi :

PRESS - VETTERLING - FLANNERY e
TEUCHOLSKI(j: "Numerical Recipes in C"
CAMBRIDGE UNIV. PRESS)

$$\text{PINOT} = \alpha_{11} = 1$$

- Si sottrae dalla seconda il doppio della prima equazione.
(Prima e terza restano inalterate).

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

- Idem, si sottrae alla terza il triplo della prima
(Prima e seconda inalterate)

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 \end{array}$$

FINITO CON LA PRIMA
COLONNA E LA PRIMA RIGA.

- Si parla alla seconda riga.
Si sceglie un pivot ($\alpha_{22} \neq 0$ va bene!)
- Si sottrae dalla terza il doppio della seconda e ...

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

TUTTO FINITO: IL SISTEMA
E' TRIANGOLARE; NIENTE
EQUAZIONI IMPOSSIBILI. SI
PUO' PROCEDERE CON LA
RSOLUZIONE.

- Dalla terza equazione $3t=0$ si ricava $t=0$.
- Sostituendo nelle due equazioni precedenti segue

$$\begin{array}{ccc} x & y \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}$$

da cui

$$-3y=0 \Leftrightarrow y=0$$

e

$$x+2y=1 \Leftrightarrow x=1$$

IL SISTEMA HA SOLUZIONE UNICA

$$x=1, y=0, t=0$$

Q. Consideriamo ora il sistema (non permettiamo colonne e omittiamo di indicare le incognite, salvo che per l'ordine iniziale. Indichiamo le righe con le cifre romane.

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 1 & \text{II}-3\text{I} & \boxed{1} & 2 & 2 & 1 & \text{III}-2\text{I} & \boxed{1} & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \rightarrow & 0 & -4 & -5 & -1 & \rightarrow & 0 & -4 & -5 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & & 2 & 0 & -1 & 0 & & 0 & -4 & -5 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 2 & 1 & \leftarrow \text{III}-\text{II} \\ 0 & \boxed{-4} & -5 & - & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

L'ultima equazione è indeterminata e può essere eliminata.
Il sistema residuo è "a scale". Scelti i pivot a_{11} e a_{22} , e

portando all' altro membro i termini delle terze colonne si ottiene

$$\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 1 & 2 & 1 - 2z \\ 0 & -4 & -1 + 5z \end{array}$$

da cui (II)

$$-4y = -1 + 5z \quad \text{cioè} \quad y = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}z$$

e, sostituendo nella prima equazione

$$x + 2y = 1 - 2z \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - 2y - 2z$$

cioè

$$x = 1 - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}z - 2z = \frac{1}{2} - \frac{9}{2}z$$

e, in definitiva, le (infinte) soluzioni sono:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{9}{2}z \\ \frac{1}{4} - \frac{5}{4}z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \quad z \in \mathbb{R}$$

arbitrario

3. Un altro esempio.

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \xrightarrow{\text{II}-2\text{I}} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \xrightarrow{\text{III}-\text{I}} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}$$

$\xleftarrow{\text{III}-\text{II}}$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{coeff. tutti nulli}}$

$\text{III impossibile} \Rightarrow \text{sistema impossibile}$

Fino ad ora l'algoritmo è stato applicato senza permutazioni di colonne, né di righe. Perché e quando utilizzarle? In sostanza, il senso dell'algoritmo di Gauss è di "recogliere" i termini nulli nell'angolo in basso a sinistra. Se ne esistono già, può essere vantaggioso portarceli senza fare calcoli, muovendo opportunamente righe e/o colonne.

4. Si consideri

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

Quale colonna ha più zeri e può cambiare a diventare la prima? La seconda colonna è il candidato ideale (due zeri e pivot=1).

Permutando prima e
seconda colonna,

si ottiene

$$\begin{array}{cccc} y & x & z \\ \hline 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}$$

Permutando prima
e seconda riga
si ottiene

$$\begin{array}{cccc} y & x & z \\ \hline 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}$$

le prime colonne
è già a posto
senza colpo ferire!

Sottraendo dalla terza equazione la seconda si ottiene

$$\begin{array}{cccc} y & x & z \\ \hline 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}$$

e il sistema è triangolare e può essere risolto per sostituzione all'indietro.

E' tempo di tenere le conclusioni!

UNA VERSIONE DI ALGORITMO per il calcolo "a mano"

- Eliminare le righe interamente costituite da zeri
INCLUSO IL TERMINE NOTO
- Se ci sono colonne di coefficienti tutti nulli, si puo' eliminare l'incognita e le colonne, reinserendole alla fine con valori arbitrari nelle eventuali soluzioni trovate.
- Se ci sono righe con i coefficienti tutti nulli ed il termine noto **NON** nullo, allora il sistema è **IMPOSSIBILE**

ALTRIMENTI : INIZIA IL PASSO

- Scegliere le colonne con maggior numero d'zeri nulli.
- Permutare righe e/o colonne per portare la colonna al primo posto ed un suo termine non nullo sulla prima riga (PIVOT)
Potendo, portare al primo posto un termine uguale ad 1 o a -1: il PIVOT ideale!
- Per ogni riga delle seconde in poi, sommare il multiplo della prima per annullarne il termine della prima colonna. L'operazione è necessaria solo se l'elemento della prima colonna è non nullo.
- Alla fine delle operazioni sulle righe le prime colonne ha solo il primo termine non nullo e gli altri tutti nulli.

- Se ci sono altre colonne con tutti i termini nulli salvo il primo spostarle permettendo, per riunire tutte in un unico gruppo d' colonne contiguous ai primi posti.

FINE DEL PASSO: LA PRIMA RIGA E
TUTTE LE COLONNE DEL PRIMO GRUPPO NON
VERRANNO PIU' MODIFICATE.

- Ripetere l'intera operazione col sistema ottenuto ignorando le prime righe e il primo gruppo di colonne:

- le permutazioni di colonne non coinvolgono più il primo gruppo
- le permutazioni di righe non modificano le colonne del primo gruppo (tutte formate da zeri, dalla seconda riga in poi)
- le somme ad una riga di un multiplo di un'altra non modificano gli zeri iniziali.

Dunque, si ripeti la selezione delle colonne con primi zeri, il suo spostamento (eventuale) alle prime colonne disponibile, lo spostamento di una riga non nulla al primo posto (PIVOT), la trasformazione a 0 dei termini sotto il PIVOT, e infine il raggruppamento delle colonne con ugual numero di elementi nulli in un insieme di indici contiguous, il tutto preceduto dalle verifiche che non ci siano eventuali impossibili, nel qual caso il sistema è impossibile, e non occorre proseguire.

- Si ripete sino ad esaurire le colonne.

NOTA: le operazioni di permutazione di righe e colonne, oltre a giovare per minimizzare i calcoli richiesti, possono risultare indispensabili se il sistema dato, ad esempio, ha il termine $a_{11} = 0$, che dunque NON può essere scelto come pivot. Di un diverso modo d'affrontare il problema si dirà nell'Appendice.

ALCUNE OSSERVAZIONI

Una prima osservazione immediata riguarda i sistemi omogenei, nei quali i termini noti sono tutti nulli. In tal caso qualunque manipolazione sulle righe lascerebbe inalterati i termini noti. Si può dunque evitare di scivolti.

Una seconda osservazione riguarda la risolvibilità di tali sistemi: un sistema omogeneo non può essere impossibile perché ogni effetto è possibile ha termini noti NON nulli. Dunque i sistemi omogenei sono sempre risolvibili: non c'è una gran novità, visto che hanno sempre e comunque la soluzione $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Possano avere altre.

Una terza osservazione riguarda la possibilità di utilizzare l'algoritmo di Gauß per risolvere contemporaneamente il sistema lineare con due o più diversi termini noti. Infatti, tutta il lavoro di riduzione a scale del quadro dei coefficienti è identico nei due (o più) casi. Vediamo un esempio:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x+4y=1 \\ x+2y=2 \\ 3x+4y=1 \end{cases}$$

diventa

x	y				
1	2	1	2	$\xrightarrow{\text{II}-3\text{I}}$	1
3	4	1	1		-2

A questo punto si può o risolvere per ognuna delle colonne di termini noti usando le sostituzioni all'indietro, o applicare una variante dell'algoritmo di Gauss, detto di Gauss-Jordan (pronuncia: giordon). Per procedere così, basta continuare ad applicare il metodo d'eliminazione anche ai termini sopra le diagonale, DOPÒ AVER COMPLETATO QUELLI SOTTO.

$$\begin{array}{cc|ccc} x & y \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 & \\ 0 & -2 & -2 & -5 & \end{array} \xrightarrow{I+II} \begin{array}{cc|ccc} x & y & & & \\ \hline 1 & 0 & -1 & -3 & \\ 0 & -2 & -2 & -5 & \end{array} \quad (\text{Notare che il primo elemento resta inalterato per via dello zero}).$$

e, dividendo ambo i membri delle seconde equazioni per -2, si ha

$$\begin{array}{cc|ccc} x & y \\ \hline 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{2} \end{array} \quad \text{e cioè} \quad \begin{aligned} 1 \cdot x + 0 \cdot y &= -1 & -3 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y &= 1 & \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Il sistema così ottenuto, equivalente a quello originale (niente permutazioni di colonne) è più che degenero: è risolto! La soluzione relativa alle prime colonne dei termini noti $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre quelle relative a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

Nelle reti d'applicazione altre colonne di termini noti, ad un costo computazionale per sé solo alle operazioni da eseguire sulle nuove colonne aggiunte: le operazioni non sufficienti delle iniziate vengono eseguite così una sola volta, con gran vantaggio!

L'algoritmo di eliminazione ha immediati applicazioni: ne scelte limitate è reperibile nella prossima sezione.

QUALCHE APPLICAZIONE

Le applicazioni di qualunque algoritmo effettuate d'insoluzione di sistemi lineari sono innumerevoli. Se ne le benedette minime pretese di completezza se ne elencano qui di seguito alcune, sia di carattere teorico che pratico, all'Algebra e alla Geometria. Ognuna di esse presuppone familiarità con le tecniche utilizzate, sulla quale non ci si soffermerà.

1. SPAN, INDEPENDENZA, BASE.

L'algoritmo di Gauss permette di risolvere (quasi) qualsiasi problema di dipendenze o indipendenza negli spazi euclidei \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n . Molto diverso, purtroppo, è la situazione negli spazi di dimensione infinita. Esamineremo alcuni.

a) Dati $A_1, A_2, \dots, A_n, B \in \mathbb{R}^m$, $B \in \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$?

La condizione $B \in \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$ equivale a dire che

$$\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \text{ tali che } B = \sum_{j=1}^n x_j A_j$$

Posto $A_j = (a_{ij})$ e $B = (b_i)$, l'ultima espressione vettoriale equivale al sistema lineare

x_1	x_2	...	x_n	
a_{11}	a_{12}		a_{1n}	b_1
:	:		:	
a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	b_m

(*)

e dunque

$B \in \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$ se e solo se il sistema (*) ha soluzione.

Se $B \notin \langle A_1, \dots, A_n \rangle$ il sistema corrispondente risulterà quindi impossibile.

b) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^m$ sono indipendenti?

In tal caso l'equazione vettoriale da considerare è $\sum x_j A_j = 0$ e le dipendenze lineari equivalgono all'esistenza di una colonna $x_1 \dots x_n$ a termini NON tutti nulli. Il sistema lineare da studiare sarà stavolta quello omogeneo.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array} \quad (*)$$

Allora

A_1, A_2, \dots, A_n sono indipendenti se e solo se il sistema (*) ha solo la soluzione $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Dunque se il sistema ha altre soluzioni (non nulle) i vettori sono dipendenti.

c) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^n$ formano una base?

Basta provare che A_1, A_2, \dots, A_n sono indipendenti, come nel punto precedente.

d) Calcolare la dimensione di $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$.

Occorre e basta calcolare il numero dei vettori indipendenti fra A_1, A_2, \dots, A_n . Si consideri il sistema lineare omogeneo associato

$$x_1 x_2 \dots x_n$$

$$a_{11} a_{12} \dots a_{1n}$$

:

$$a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn}$$

(i termini noti sono nulli e
vengono omessi)

Dopo riduzione a scale, il sistema diventa

$$\begin{array}{ccc} x_{i_1} & x_{i_2} & x_{i_m} \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{1n} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & a'_{mn} \end{array}$$

ove i_1, \dots, i_m è una
permutazione di $1, \dots, n$
e i coefficienti non a'_{ij}
sono quelli di un sistema
a scale.

Siano ora $A'_{j_1}, A'_{j_2}, \dots, A'_{j_k}$ le colonne contenuti in Pivot ,
relative alle incognite (permute) $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$. Proviamo
che, sagliendo fra i vettori originali i vettori relativi a tali
incognite

$$A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$$

si ottiene una base per $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$, che ha dunque
dimensione K .

Per concludere ciò occorre provare che A_{i_1}, \dots, A_{i_m} generano
 $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$ e sono indipendenti.

La seconda questione è immediata: operando sul sistema

onofenes $\sum_1^k \alpha_h A_{ij_h} = 0$ le stesse trasformazioni operate sul sistema originale, il sistema delle colonne PIVOT diventa triangolare ed ha quindi una ed una sola soluzione. Poiché ha comunque la soluzione nulla, essa è l'unica soluzione, da cui l'indipendenza delle colonne.

Per provare che genera $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$, per il lemma fondamentale basta provare che genera A_j , per ogni $j \neq i_1, i_2, \dots, i_k$.

Portiamo allora al secondo membro tutte le colonne NON PIVOT e ricordiamo che il sistema triangolare che rimane (quelle delle sole colonne pivot) è sempre risolvibile per ogni scelta delle incognite (ozi parametri) NON PIVOT. Dunque

$$\sum_1^k x_h A_{ij_h} = - \sum_{j \neq i_1, \dots, i_k} \alpha_j A_j$$

ha sempre soluzione e da ciò, fatti $\bar{j} \neq i_1, i_2, \dots, i_k$, avrà soluzioni anche quando si suggerisce

$$\alpha_{\bar{j}} = -1 \quad \alpha_j = 0 \quad \forall j \neq i_1, i_2, \dots, i_k, \bar{j}$$

Il sistema che si ottiene

$$\sum_1^k x_h A_{ij_h} = A_{\bar{j}}$$

ha una soluzione. Dunque, $A_{\bar{j}} \in \langle A_{i_1}, \dots, A_{i_k} \rangle$ e di conseguenza tutti i vettori A_j NON PIVOT possono essere eliminati dal sistema $A_1 \dots A_n$ senza alterarne lo spazio. In definitiva

La dimensione di $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$ è il numero dei pivot, dopo riduzione a scale, del sistema di colonne A_1, \dots, A_n

e) Completare $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n$, $m < n$, ad una base.

Sono e_1, \dots, e_n i vettori della base canonica di \mathbb{R}^n e si assume che di sicuro $\langle A_1, A_2, \dots, A_m, e_1, e_2, \dots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n$. Si considera il sistema omogeneo

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_m & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}$$

Dopo riduzione a scale:

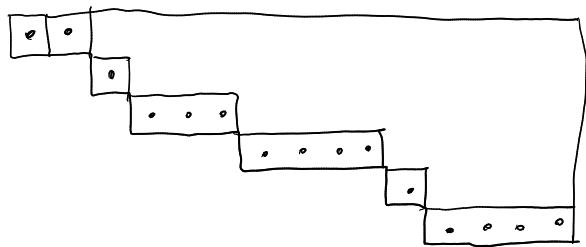
- se non c'è un pivot per ognuna delle prime m colonne allora il sistema $A_1 \dots A_m$ è dipendente e non può essere completato ad una base: ogni colonna non può essere nella span di quelle pivot, come provato nel punto precedente.
- se le prime m colonne sono tutti pivot, i vettori dati sono indipendenti e, per completarli ad una base, basta aggiungere i vettori della base canonica corrispondenti alle incognite pivot fra $y_1, y_2 \dots y_n$. Dal teorema del completamento segue che saranno necessari altri $n-m$ vettori.

Dunque:

Per completare a base un sistema $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n$, $m < n$, basta ridurre a scale il sistema avente per colonne $A_1, \dots, A_m, e_1, \dots, e_n$, assicurarsi che tutte le prime colonne siano PIVOT, ed aggiungere ad A_1, \dots, A_m $n-m$ vettori della base canonica relativi ad altre incognite PIVOT.

I procedimenti preceduti fornisce risposte interessanti anche quando $A_1 \dots A_m$ risultino dipendenti.

Ricordiamo che, in un sistema "a scale", ognuna delle



colonne di un determinato "quadrino" può essere permuto con quelle PIVOT dello stesso quadrino e sostituibile, perché

il termine sul quadrino \square è diverso da zero. Il sistema risolto a scale offre una panoplia di PIVOT possibili (ad esempio, di sicuro si possono scegliere come PIVOT i soli vettori della base canonica, ma a noi interessa di più usare per questo possibile i vettori dati). Vediamo un esempio: completare a base $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{\substack{\text{II}-2\text{I} \\ \text{III}-\text{I}}} \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \square & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \square & -1 & 0 \end{array} \xrightarrow{\substack{\text{permesso} \\ \text{III} \leftarrow \text{IV} \text{ col}}} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \square & 1 \end{array} \xrightarrow{\substack{\text{SCALA!}}} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \quad A$$

L'ultimo sistema è "a scale" con tre incognite pivot: una è obbligatoriamente x_1 , relativa a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, un'altra può essere scelta fra x_2 , relativa a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e y_2 , relativa a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e l'ultima va scelta fra y_1 e y_3 .

E' allora possibile completare ad una base il sistema $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, perché le incognite ad essi relative possono essere entrambe scelte come PIVOT. La terza è scelta fra y_1 e y_3 , corrispondenti a e_1 o e_3 , a precedere, ma non y_2 ! Dunque $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono basi di \mathbb{R}^3

mentre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

NON E' UNA BASE!

In fatti, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e dunque dipende da essi.

f) Calcolare l'inverso di una matrice.

Il problema del calcolo dell'inverso di una matrice è facilmente ricducibile alla risoluzione di sistemi lineari. Infatti, data $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ con le colonne $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^n$, si vuole determinare $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ tali che

$$AX = I \equiv (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

Ricordando che $AX = A(X_1, \dots, X_n) = (AX_1, AX_2, \dots, AX_n)$, ciò equivale a risolvere (se possibili) gli n sistemi lineari

$$AX_j = e_j$$

ovvero, ponendo $X_j = (x_{ij})$ e $A_j = (a_{ij})$, $i=1..n$, i sistemi

$$\sum_1^n x_{ij} A_{ji} = e_j, \quad i=1..n$$

In fine, ricordando anche la possibilità di ridurre lo stesso sistema lineare contenuti noti multipli, occorre risolvere

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}$$

Utilizzando la riduzione a scalo e l'algoritmo di Gauss-Jordan, se le prime n colonne sono tutte PIVOT, il sistema dato sarà equivalenti ad uno in forma "risolta"

$$\begin{matrix} 1 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ & \ddots & & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ 0 & \dots & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{matrix}$$

La matrice dei termini noti è la matrice inversa cercata: infatti la j -esima colonna è la soluzione del sistema

$$A X_j = e_j$$

L'esistenza dell'inversa è legata al fatto che le prime n colonne siano tutte pivot. Ciò fornisce le loro indipendenze, ed essendo n di numero, anche il fatto che esse formano una base di \mathbb{R}^n (oltre che $\det A \neq 0$).

g) Calcolare $\text{Ker } A$, $A(x) = Ax \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n$

Occhio determinare tutti i vettori x tali che $A(x) = 0$ e cioè tali che

$$Ax = 0$$

Questo è un sistema lineare omogeneo, l'inversa delle soluzioni del quale forma $\text{Ker } A$.

DETERMINARE TUTTE LE SOLUZIONI DI $Ax=0$

h) Determinare $\dim \text{Ker } A$, $A(x) = Ax$ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$

Mae volta ridotto a scala il sistema $Ax=0$, se non esistono variabili NON PIVOT il sistema ha solo la soluzione unica $x=0$ e dunque $\text{Ker } A = \{0\}$ e $\dim \text{Ker } A = 0$
Le invece esistono variabili NON PIVOT, allora il sistema diventa

$$\sum_{i \text{ pivot}} x_i A_i = - \sum_{\substack{j \text{ NON} \\ j \text{ pivot}}} x_j A_j$$

e avrà una o più soluzioni nelle variabili PIVOT per ogni scelta arbitraria di quelle NON PIVOT. Supponiamo, per semplicità di aver cominciato i nomi alle incognite in modo che le prime k incognite siano tutte quelle PIVOT. Il sistema diventa

$$\sum_1^k x_i A_i = - \sum_{k+1}^n x_j A_j \quad (*)$$

Indichiamo ora con $x' = x'(x_{k+1}, \dots, x_n) \equiv$
 $\equiv (x_1(x_{k+1}, \dots, x_n), x_2(x_{k+1}, \dots, x_n), \dots, x_k(x_{k+1}, \dots, x_n))$
 le soluzioni (unice) nelle variabili PIVOT associate alle scelte dei valori $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ per quelle NON PIVOT,
 e consideriamo le $n-k$ soluzioni del sistema (*)

$$y_1 (x'(1, 0, \dots, 0), 1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$y_2 (x'(0, 1, \dots, 0), 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$y_{n-k} (x'(0, 0, \dots, 0, 1), 0, 0, \dots, 0, 1)$$

D'Henno attribuendo ai parametri a turno il valore 1, mentre agli altri viene attribuito il valore 0, e risolvendo il sistema per determinare di conseguenza le incognite PIVOT per tale scelta.

Esse sono indipendenti, perché

$$\sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i y_i = \left(\begin{array}{l} \text{complessa delle} \\ \text{incognite PIVOT} \end{array} \right), \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-k} \right)$$

e tali combinazioni si annulla se

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-k} = 0$$

Esse generano anche $\text{Ker } A$ perché, per ogni $\bar{x} \in \text{Ker } A$, cioè $A\bar{x}=0$,

$$\bar{x} = \underbrace{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k}_{\text{PIVOT}}, \underbrace{\bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_n}_{\text{NON PIVOT}}, \text{ posto } w = \sum_{j=1}^{n-k} \bar{x}_{k+j} y_j, \text{ si ha } w \in \text{Ker } A,$$

perché è combinazione di suoi elementi, e molte le sue componenti non PIVOT valgono esattamente $\bar{x}_{k+1}, \bar{x}_{k+2}, \dots, \bar{x}_n$ come quelle di \bar{x} : infatti le componenti $k+1$ di w vale $\sum \bar{x}_{k+j} (y_j)_{k+1}$

$(y_j)_{k+1} = 0$ per $j > 1$, mentre $(y_1)_{k+1} = 1$. Così si procede $\forall j = 1 \dots n-k$.

Dall'unicità della soluzione per ogni scelta dei parametri segue

$$\bar{x} = w \text{ e dunque } w = \sum_{j=1}^{n-k} \bar{x}_{k+j} y_j \text{ e } \bar{x} \in \langle y_1, \dots, y_{n-k} \rangle$$

Allora y_1, y_2, \dots, y_{n-k} sono generatori indipendenti, e quindi una base per $\text{Ker } A$.

Per trovare una base del nucleo di $A(x) = Ax$ basta ridurre a scale il sistema $Ax=0$, attribuire ai parametri (NON PIVOT) i valori $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ e risolvere il sistema triangolare per le incognite PIVOT rimanenti. Se i PIVOT sono k , $\dim \text{Ker } A = n - k$, ovvero n è la dimensione del dominio di A .

i) Calcolare $\dim A(\mathbb{R}^n)$ $A(x) = Ax$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Poiché $A(\mathbb{R}^n) = \langle A(e_1), \dots, A(e_n) \rangle = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$

Per calcolare la dimensione dell'immagine di un'applicazione lineare fra spazi euclidei basta calcolare la dimensione dello span delle colonne della matrice associate all'applicazione rispetto alla base canonica e cioè il numero di PIVOT dopo aver ridotta a scale la matrice A .

Inoltre $\dim X = \dim \text{Ker } A + \dim A(X)$ (Grassmann).

ED ORA ... UN Po' DI GEOMETRIA

l) Determinare il complemento ortogonale di un insieme di vettori $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^n$

Occorre determinare tutti i vettori $x \in \mathbb{R}^n$ tali che il loro prodotto scalare con tutti i vettori dati sia nullo, cioè

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 x = 0 \\ A_2 x = 0 \\ \vdots \\ A_k x = 0 \end{array} \right.$$

L'insieme delle soluzioni di questo sistema assorso, eventualmente ridotto al solo 0, è il complemento cercato.

m) Intersezione di rette cartesiane e parametriche.

L'intersezione è per definizione l'insieme degli elementi comuni, così come il sistema di più equazioni è l'insieme delle soluzioni comuni a tutte le proprie equazioni.

E siamo di fronte al problema dell'intersezione geometrica in alcuni casi importanti di geometria dello spazio.

- Intersezione di rette parametriche.

Consideriamo le due rette parametriche

$$\gamma(t) = \alpha + tb$$

$$\gamma'(t') = \alpha' + t'b'$$

Le due rette, percorse al variare dei "tempi" t ed t' dai due "punti in moto" $\gamma(t)$ e $\gamma'(t')$, hanno punti comuni se esistono due "istanti", anche diversi, \bar{t} e \bar{t}' tali che i due punti in moto percorrono per le stesse posizioni in quegli istanti omic.

$$\exists \bar{t}, \bar{t}' : \gamma(\bar{t}) = \gamma'(\bar{t}') \quad (\#)$$

Poiché $\gamma, \gamma' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, suivendo le componenti scalari di γ e γ' risulta

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + tb_1 \\ \alpha_2 + tb_2 \\ \alpha_3 + tb_3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}; \quad \gamma'(s) = \begin{pmatrix} \alpha'_1 + t'b'_1 \\ \alpha'_2 + t'b'_2 \\ \alpha'_3 + t'b'_3 \end{pmatrix}, t' \in \mathbb{R}$$

e le condizioni di intersezione (*) diventano

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + tb_1 = a'_1 + \tau b'_1 \\ a_2 + tb_2 = a'_2 + \tau b'_2 \\ a_3 + tb_3 = a'_3 + \tau b'_3 \end{array} \right.$$

e cioè

$\left\{ \begin{array}{l} tb_1 - \tau b'_1 = a'_1 - a_1 \\ tb_2 - \tau b'_2 = a'_2 - a_2 \\ tb_3 - \tau b'_3 = a'_3 - a_3 \end{array} \right.$	il vettore del punto d' intersezione si ottiene da $\gamma(\bar{t}) - \gamma'(\bar{t})$, ove $(\bar{t}, \bar{\tau})$ è una soluzione
--	--

che è un sistema sovradeterminato (tre equazioni nelle due incognite t ed τ), che può avere infinite soluzioni (rette coincidenti), soluzione unica (rette incidenti), o nessuna soluzione (rette parallele, se b e b' sono un multiplo dell'altro, o sghembe, in tutti gli altri casi).

In pratica non occorre calcolare t e τ , ma ne basta uno solo: sostituito nell'equazione della retta corrispondente determinare la posizione dell'intersezione.

Un altro problema, più cinetico che geometrico, è di cercare non le intersezioni ma le collisioni. In tal caso, non si richiede solo che i due punti in movimento passino per le stesse posizioni in istanti diversi, ma si richiede che ciò avvenga nello stesso istante. La condizione d'collisione è:

$$\exists t : \gamma(t) = \gamma'(t)$$

e il sistema costituito è di tre equazioni (una per ogni componente del vettore, in una sola incognita t). La risoluzione non richiede neanche l'algoritmo di Gauss: basta risolvere una delle equazioni e verificare che il vettore di t così determinato verifichi anche le altre. Se non lo verifica non ci sono collisioni.

- **Equazione cartesiana della retta in \mathbb{R}^3 .**

Le rette in \mathbb{R}^3 si possono rappresentare come un'intersezione di piani

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

Nelle migliori delle ipotesi una delle incognite è NON PIVOT. C'è un solo PIVOT (due NON PIVOT), se i piani sono paralleli o coincidenti.

- **Intersezione di rette cartesiane in \mathbb{R}^3 .**

I vettori (a, b, c) e (a', b', c') sono normali ai due piani. I due piani individuano effettivamente una retta se e solo se i vettori non sono paralleli (nel qual caso i piani sono paralleli o coincidenti). Date due rette cartesiane, laughi di soluzioni comuni ad una coppia di equazioni lineari esiste, la loro intersezione è, per definizione, l'insieme delle soluzioni comuni a tutte e quattro le equazioni

$$R = \{(x, y, z) : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}\}$$

$$S = \{(x, y, z) : \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ \alpha'x + \beta'y + \gamma'z = \delta' \end{cases}\}$$

$$R \cap S = \left\{ (x, y, z) : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ \alpha'x + \beta'y + \gamma'z = \delta' \end{cases} \right\}$$

Il sistema da studiare è di quattro equazioni in tre incognite (soprattutto noto) e può, come prima, avere infinite, una sola, o nessuna soluzione.

CONCLUSIONI

La grande diffusione dei metodi di calcolo elettronico di grande potente ha rivotato i metodi di risoluzione dei sistemi lineari. Gran parte dei metodi numerici applicati alle teorie dell'elasticità, della fluidodinamica, delle meteorologie, in ultime analisi trasformano il problema originale in quello della risoluzione di un (enorme) sistema lineare. I metodi numerici di risoluzione dei sistemi lineari di diffusione alquanto de quelli esaminati più avanti. Per un'esposizione chiara e "pratica" si raccomanda ancora il libro

PRESS - VETTERLING - FLANNERY - TEUCHOLSKIJ

Numerical Recipes in C
Cambridge University Press

(Esistono anche versioni in FORTRAN e C++).

APPENDICE : L'ALGORITMO DI ELIMINAZIONE E IL SEGNO DEGLI AUTOVALORI

Questa appendice riguarda un'utilissima applicazione dell'algoritmo d'eliminazione. In alcuni casi importanti, come lo studio dei punti critici di una forma, non ha molto importanza conoscere né gli autovettori, né il valore esatto degli autovalori, ma solo il loro segno. Il problema diventa, anteriormente "collo di bottiglia" della questione, è la risoluzione dell'equazione caratteristica $\det(\lambda I - A) = 0$: il primo membro è un polinomio, ma di grado pari alla dimensione dello spazio (e della matrice A); se $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, il polinomio caratteristico sarà di quarto grado e la determinazione degli zeri (formula di Ludovico Ferrari) è di difficile pratica.

D'altronde, se non si conoscono gli autovalori λ non si può risolvere il sistema lineare $\lambda u = Au$ per determinare gli autospazi. Studiare il carattere dei punti critici (massimi, minimi, selle) di una forma quadratica, dunque, in "molte" vicinanze, è però ridotto a stabilire il segno (e non il valore) degli autovettori delle matrici simmetriche associate e concluderne che:

- se sono tutti $\geq 0 \Rightarrow$ minimo
- se sono tutti $\leq 0 \Rightarrow$ massimo
- se due sono (non nulli) e discordi \Rightarrow selle

Attenzione: se si sostituisce ad una forma quadratica una funzione C^2 e alle matrice associata alle forme la matrice hessiana delle funzioni, le condizioni precedente serviscono per l'effetto di termini d'ordine superiore al secondo nello sviluppo di Taylor della funzione.

Un metodo classico per studiare il SELNO degl'autovolti senza calcolarli è di adoperare le regole (general rules) dei segni di Cotesio: si calcola il polinomio caratteristico e ci si ricorda che

CNS perché gli autovolti sono strettamente negativi e che i coefficienti sono non nulli e concordi.

e che

CNS perché i coefficienti sono strettamente positivi e che i coefficienti sono non nulli e a segni alterni.

Il criterio può essere raffinato per includere la trattazione delle forme con autovolti nulli (vedi dispense n° 3), e contiene il numero di autovolti positivi negativi (Cfr. M. ABATE: Algebra lineare McGRAW-HILL).

Il problema tecnico di calcolare obt($\lambda I - A$), resta però assai delicato anche per sistemi relativamente "piccoli" ($\approx 10 \times 10$). Il teorema di Sylvester rappresenta la migliore a tutt'oggi soluzione. E' la base del seguente algoritmo, presentato qui al seguito (questo) senza dimostrazione.

IL SEGNO DEGLI AUTOVALORI DI UNA MATRICE SIMMETRICA

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, SIMMETRICA (e dunque l'ha sempre una funzione di base C^2 ve benissimo!).

L'algoritmo consiste nel compiere le medesime operazioni delle riduzione a scale, ma avendo l'accortezza di eseguire subito sulle colonne le stesse operazioni eseguite sulle righe. Ad esempio:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \xrightarrow{\text{II}-3\text{I}} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 0 & -7 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \text{idem} \\ \text{sulle} \\ \text{colonne} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & -5 \\ 2 & -5 & 1 \end{array}$$

Si noti che la matrice è ancora simmetrica, e non è un caso, in quanto essere simmetrica vuol dire sostanzialmente che le righe uguali alle colonne, e uguali operazioni producono dunque uguali risultati. Rispettando all'algoritmo di Gauss-Jordan ridrebbe metà lavoro: "sistematà" le seconde righe, e ne risulterà uguali alle seconde colonne. Continuando:

$$\xrightarrow{\text{III}-2\text{I}} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & -5 & -3 \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{c} \text{idem} \\ \text{per le} \\ \text{colonne} \end{array}} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & -5 & -3 \end{array} \xrightarrow{\text{III} - \frac{5}{7}\text{II}} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{array}$$

e operando ugualmente (terze colonne moltiplicata per $\frac{5}{7}$ della seconda) si ottiene infine

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{array}$$

Sarebbe davvero bello se gli autovalori fossero $1, -7 \text{ e } \frac{4}{7}$, MA
NON E' COSÌ (in generale). Perché, può, sommare ad una
 riga un multiplo d'un'altra, e ad una colonna un ugual
 multiplo delle forme corrispondenti, equivale a moltiplicare le
 metri a destra e a sinistra per un'opportuna matrice e le
 sue trasposte, per il teorema di SYLVESTER (appunto!),
 gli autovalori cambieranno pure, ma resterà eguale il
 numero di autovalori strettamente positivi e strettamente
 negativi (detti indici d'invertibilità, o di positività e negatività)
 oltre alle moltiplicità dell'eventuale autovalore nullo (il
 cosiddetto indice di nullità), e dunque la nostra matrice
 inviolabile avrà due autovalori positivi, uno negativo e
 nessuno nullo. L'attuale frontale condurrebbe a calcolare

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 3 & 2 \\ 2 & (1-\lambda) & 1 \\ 2 & 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix}$$

e ad applicare le formule di Cardano all'equazione d'alto
 grado in λ che ne segue.

Così "segi d'Cartis" si impone la risoluzione dell'equazione,
 ma non il calcolo del determinante, sempre meno agevole
 (complemento d'calcoli fattibili!) al crescere dell'ordine delle
 metri.

UN ASPECTO PATHOLOGICO

Poche parole su di un fenomeno sgradevole e il suo antidoto.

base fare sulle matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

?

In condizioni "normali", per ridurre a scala basterebbe permutare le prime e le seconde riga, ed ottenere un pivot uguali ad 1 (ottimo per i calcoli manuali!), MA NON QUI! Eseguite le stesse operazioni sulle colonne si ottiene

$$\xrightarrow{\text{III} \leftrightarrow \text{I}} \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow[\text{sulle colonne}]{\text{idem}} \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}$$

E SIAMO AL PUNTO DI PREMA!

La soluzione, che può essere imposta anche nelle ordinarie riduzioni a scala al posto degli swap di righe, è di **SOMMARE** alla prima riga con colonna terza (prossimo PIVOT) non nulla — nel nostro caso la seconda — e ripetere poi come prima la medesima operazione sulle colonne, cioè

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{I} + \text{II} \rightarrow \text{I}} \begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow[\text{sulle colonne}]{\text{idem}} \begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{matrix}$$

ed ecco il miracolo! Ora c'è un ottimo pivot (non nulla): 2.

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{II} - \frac{1}{2}\text{I}} \begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 3 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{colonne}} \begin{matrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & 0 \end{matrix} \xrightarrow[\text{sulle colonne}]{\text{III} - \frac{3}{2}\text{I}}$$

$$\xrightarrow{\text{idem}} \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix} \xrightarrow[\text{colonne}]{\text{II} - \text{I}} \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{matrix}$$

l'indice di pivotato
è 1, d'ingresso
2, d'uscita 0

Un'esposizione chiara delle teoreme che conduce al teorema di Sylvester è reperibile (ad esempio) su S. LANG : "Algebra Lineare" ed. BORGHIERI e, da diverse parti d'inte, su I. N. HERSTEIN ; "Algèbre" Ed. Riemann.

A futura memoria, ne ricorderemo l'enunciato :

TEOREMA (SYLVESTER). Per ogni $A, M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, M invertibile, le due matr \bar{z} A ed $M^{-1}AM$ (M^{-1} è la tespote di M), hanno gli stessi indici d'incise e d>nullità (ove lo stesso numero d'autovetori positivi e negativi, e lo stesso moltiplicità dell'eventuale autovettore 0).

E' bene diffidare degli enunciati semplici e compatti: questi non fa eccezione! Non è vero, però, di difficoltà proibitive, ma volte potrete nel giusto contesto: i prodotti "scalar" non definiti positivi.

L'autore ringrazia gli amici Mario Palestri e Maurizio Campa che, in periodi diversi e da diversi punti d'inte, gli hanno permesso attraverso varie conversazioni di riunire il valore e l'intensità di questi concetti.