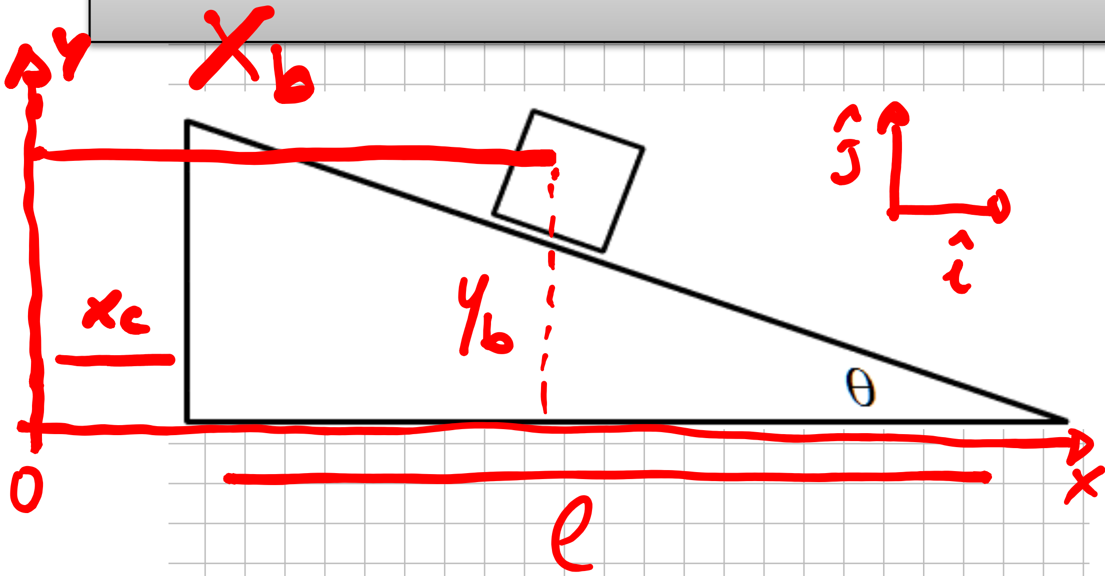
Esercizio



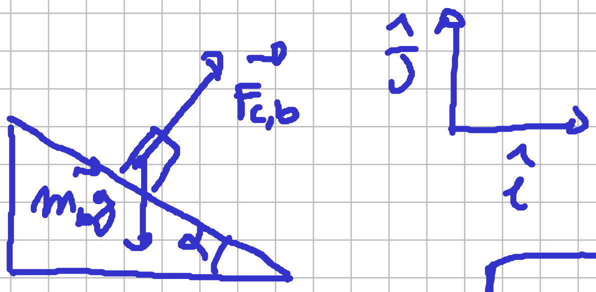
Un cuneo di massa m_c e angolo θ è appoggiato su un piano orizzontale. Sul cuneo è posto un blocco di massa m_b.

Il sistema è lasciato libero di muoversi. Trascurando tutti gli attriti, calcolare:

- L'accelerazione del blocco e quella del cuneo.

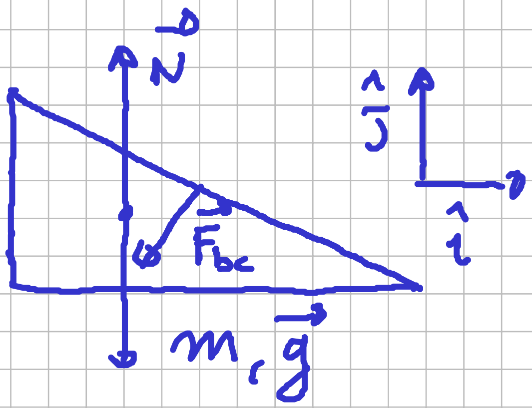
$$\frac{y_b}{\ell-(x_b-x_c)} = \tan\phi$$

$$a_{by} = \left[-a_{bx} + a_{cx}\right]\tan\phi$$



$$\boxed{F_{cb}\sin\phi = m_b\, a_{bx}}$$

$$-m_b g + F_{cb}\cos\phi = m_b\, a_{by}$$



$$-F_{bc}\cos\phi - m_c g + N = 0$$

$$\boxed{-F_{bc}\sin\phi = m_c\, a_x}$$

$$F_{bc} = F_{cb}$$

$$m_c\, a_{cx} = -m_b\, a_{bx}$$

$$F_{cb} = \frac{a_{bx}\, m_b}{\sin\phi}$$

esercizio

Il rapporto tra il tempo impiegato da un corpo, che parte da fermo, per scendere un piano inclinato ruvido e il tempo impiegato dallo stesso corpo per scendere un identico piano inclinato ma liscio è $4/3$. Determinare il coefficiente di attrito come funzione dell'angolo.

Esercizio risolto E6.pdf

Esercizio 6

1 Enunciato del Problema

Il rapporto tra il tempo impiegato da un corpo, che parte da fermo, per scendere un piano inclinato ruvido e il tempo impiegato dallo stesso corpo per scendere un identico piano inclinato ma liscio è 4/3.
Determinare il coefficiente di attrito come funzione dell'angolo.

2 Soluzione

Si consideri un corpo che scende da fermo lungo un piano inclinato di lunghezza L e inclinazione θ. Due casi vengono confrontati:

- **Piano liscio (senza attrito):** l'accelerazione lungo il piano è

$$a_{\text{liscio}} = g \sin \theta,$$

e il tempo impiegato per percorrere la distanza L è

$$t_{\text{liscio}} = \sqrt{\frac{2L}{g \sin \theta}}.$$

- **Piano ruvido (con attrito):** il corpo subisce una forza di attrito (di coefficiente μ). Quindi l'accelerazione è

$$a_{\text{ruvido}} = g \sin \theta - \mu \, g \cos \theta = g\Big(\sin \theta - \mu \cos \theta\Big),$$

e il tempo impiegato è

$$t_{\text{ruvido}} = \sqrt{\frac{2L}{g(\sin \theta - \mu \cos \theta)}}.$$

Si suppone che il rapporto tra il tempo di discesa sul piano ruvido e quello sul piano liscio sia:

$$\frac{t_{\text{ruvido}}}{t_{\text{liscio}}} = \frac{4}{3}.$$

Esprimiamo il rapporto dei tempi:

$$\frac{t_{\text{ruvido}}}{t_{\text{liscio}}} = \sqrt{\frac{2L}{g(\sin \theta - \mu \cos \theta)} \Big/ \frac{2L}{g \sin \theta}} = \sqrt{\frac{\sin \theta}{\sin \theta - \mu \cos \theta}}.$$

Dunque, imponendo il rapporto dato:

$$\sqrt{\frac{\sin \theta}{\sin \theta - \mu \cos \theta}} = \frac{4}{3}.$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta - \mu \cos \theta} = \frac{16}{9}.$$

Da cui:

$$9 \sin \theta = 16\Big(\sin \theta - \mu \cos \theta\Big).$$

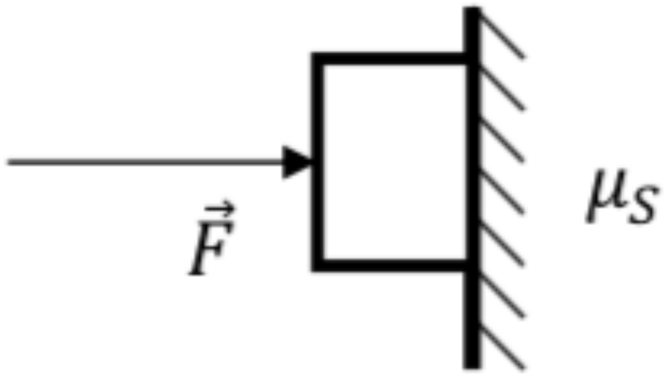
Espandendo e isolando il termine contenente μ:

$$9 \sin \theta = 16 \sin \theta - 16\mu \cos \theta \quad \Longrightarrow \quad 16\mu \cos \theta = 16 \sin \theta - 9 \sin \theta = 7 \sin \theta.$$

Pertanto:

$$\mu = \frac{7 \sin \theta}{16 \cos \theta} = \frac{7}{16} \tan \theta.$$

esercizio



Un blocco di massa M è premuto contro una parete verticale da una forza orizzontale.
Se il coefficiente di attrito statico tra blocco e parete è μ_s, determinare il valore minimo di F_{min} perché il blocco rimanga in equilibrio.

Valori numerici: $\mu_s = 0.4$; $M = 10\ kg$

Equilibrio verticale (direzione y)

Per impedire che il blocco scivoli verso il basso, la forza di attrito statico f_s deve bilanciare il peso $P = Mg$ del blocco. Quindi, in modulo:

$$f_s = Mg.$$

Essendo il blocco in contatto con la parete verticale, la forza di attrito agisce verticalmente (verso l'alto, se il blocco tende a scivolare verso il basso).

Forza di attrito statico e reazione normale

La forza di attrito statico ha valore massimo pari a:

$$f_{s,\max} = \mu_s N,$$

dove N è la reazione normale della parete sul blocco. In questo caso, la reazione normale è esattamente uguale (in modulo) alla forza orizzontale F esercitata sul blocco (perché non vi sono altre forze orizzontali).

Affinché il blocco rimanga fermo, il valore necessario di f_s (pari a Mg) non deve superare il valore massimo disponibile:

$$f_s \le f_{s,\max} \quad \Longrightarrow \quad Mg \le \mu_s F.$$

Valore minimo di F

Dunque, il valore minimo di F che garantisce l'equilibrio è:

$$F_{\min} = \frac{M\,g}{\mu_s}.$$

esercizio

Due blocchi di lato L e di masse m_1 ed m_2 sono sovrapposti come mostrato in Figura. Sul corpo 1 agisce la forza costante F. Inoltre, è presente attrito tra i due corpi con coefficienti di attrito statico μ_s ed attrito dinamico μ_d, mentre non c'è attrito tra il corpo 2 e il piano.

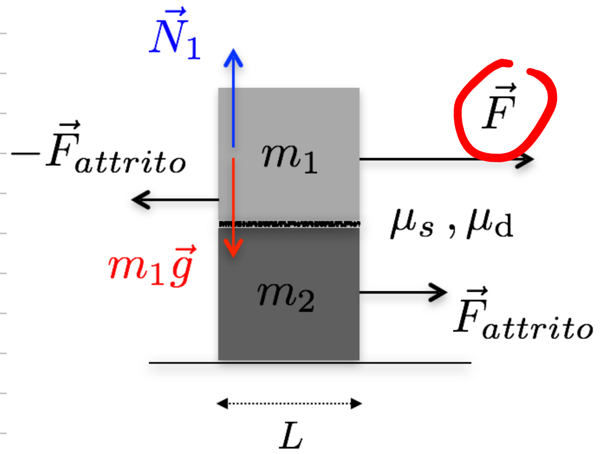
Determinare:

a) il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_s^{min} tale che i due corpi si muovano in maniera solidale;

Se $\mu_s < \mu_s^{\text{min}}$, determinare:

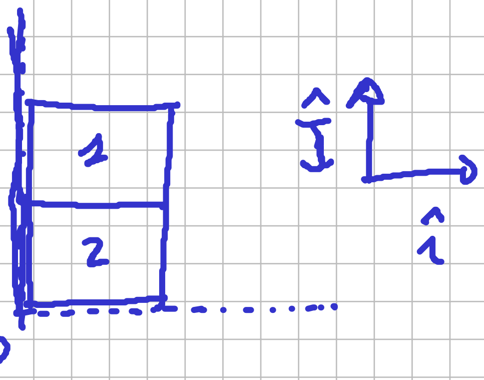
b) le accelerazioni dei due blocchi;

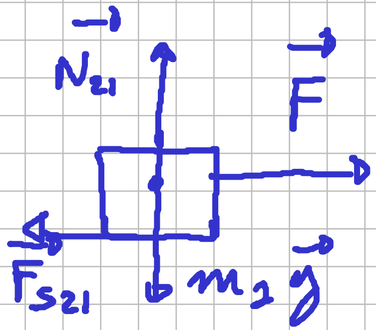
c) il tempo necessario perché il blocco di massa m_1 inizi a cadere dal blocco di massa m_2.



MOTO SOLIDALE

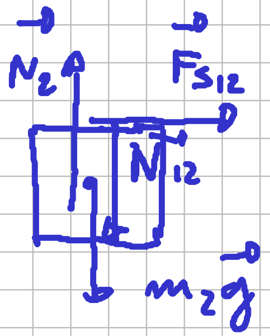
$$a_1 = a_2 = \underline{\underline{a}}$$ (ACCELERAZIONE COMUNE)





$$N_{21} - m_1 g = 0 \qquad N_{21} = m_1 g$$

$$① \quad \underline{F - F_{s_{21}} = m_1 a}$$



$$② \quad F_{s_{12}} = m_2 a$$

$$\vec{F}_{s12} = -\vec{F}_{s21}$$

$$\Rightarrow F_{s12} = F_{s21} \quad \text{(MODULI)}$$

$$F - m_2 a = m_1 a$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

$$F_{s21} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F$$

$$F_{s21} \leq F_{s max} = \mu_s N_{21}$$

$$= \mu_s m_1 g$$

$$\mu_s \geq \mu_{s,min} = \frac{F_{s_{21}}}{m_1 g} = \frac{m_2}{m_1} \frac{F}{(m_1 + m_2) g}$$

$$a_1 \neq a_2$$

$$\vec{F}_{d12} = -\vec{F}_{d21}$$

$$\Rightarrow F_{d12} = F_{d21} \quad (\text{MODULI})$$

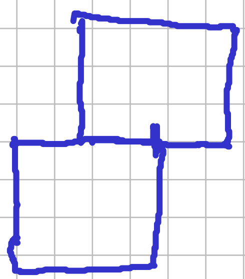
$$F_{d21} = \mu_d N_{21}$$

$$= \mu_d m_1 g$$

$$F - F_{d21} = m_1 a_1$$

$$F_{d12} = m_2 a_2$$

$$a_1 = \frac{F - \mu_d m_1 g}{m_1}$$



$$a_2 = \mu_d \frac{m_1}{m_2} g$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2$$

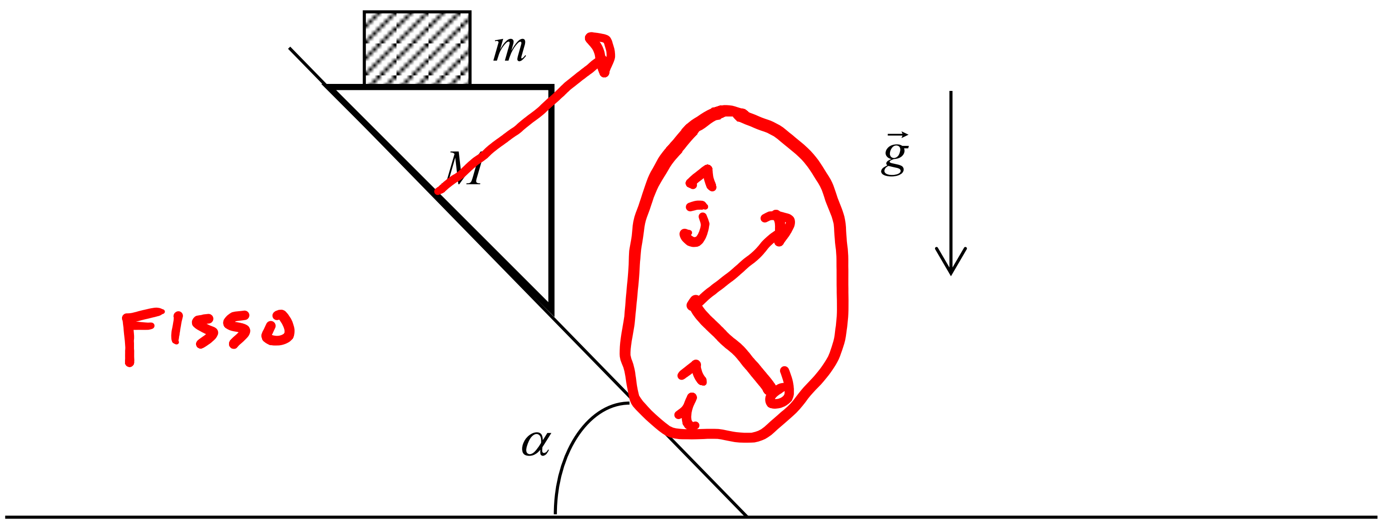
$$x_2(t) = \frac{1}{2} a_2 t^2$$

$$x_1(t_{CADUTA}) - x_2(t_{CADUTA}) = \frac{L}{2}$$

$$\frac{1}{2} a_1 t_{CAD}^2 - \frac{1}{2} a_2 t_{CAD}^2 = \frac{L}{2}$$

$$t_{CAD} = \sqrt{\frac{L}{a_1 - a_2}}$$

esercizio



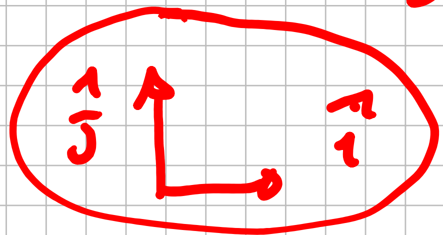
$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$M = 5\,kg$$

$$m = 2kg$$

Consideriamo il sistema in figura. Il cuneo di massa M scivola sul piano inclinato privo di attrito e fisso. Il blocco si massa m, a causa dell'attrito, si muove solidalmente con il cuneo. Calcolare la forza di attrito tra blocco e cuneo.

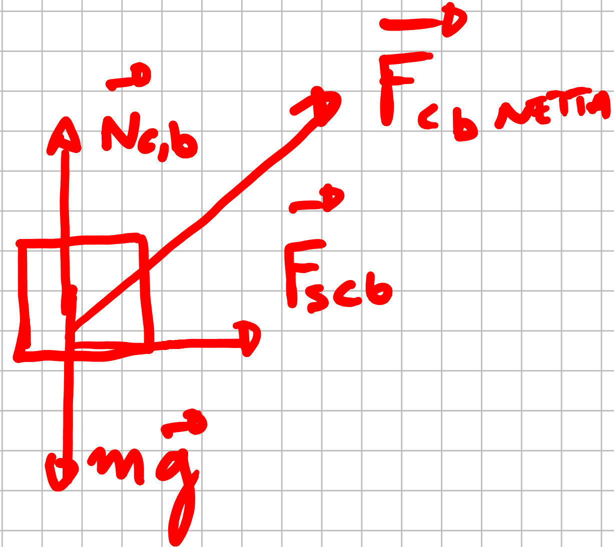
$$a_{sist} = g \sin\alpha \qquad \vec{a}_{sist} = g\sin\alpha\,\hat{i}$$



$$a_x = a\cos\alpha = g\sin\alpha\cos\alpha$$

$$a_y = -a\sin\alpha = -g\sin^2\alpha$$

m



$$N - mg = -mg\sin^2\alpha$$

$$F_s = m\,g\sin\alpha\cos\alpha$$

$$N = mg\left[1 - \sin^2\alpha\right] = mg\cos^2\alpha$$

$$F_s = mg\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\vec{N} + \vec{F}_s = \vec{F}_{cb,NETTA}$$

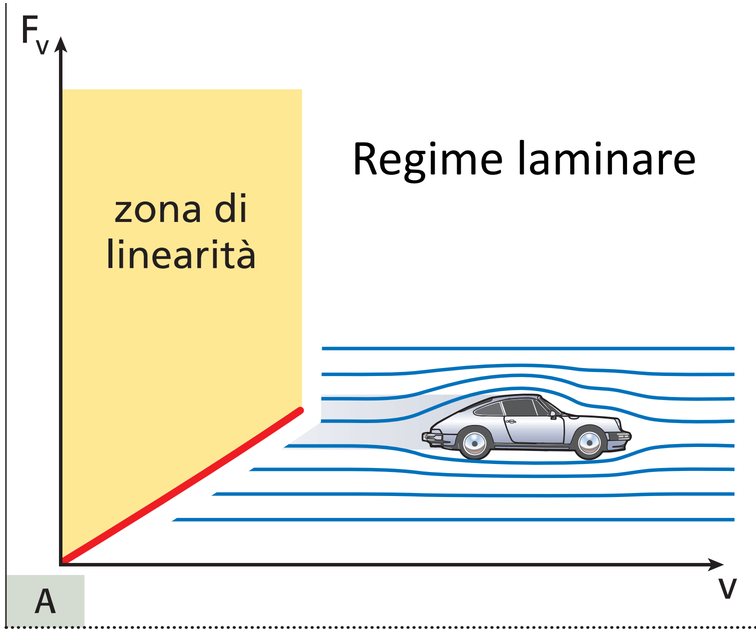
Attrito viscoso

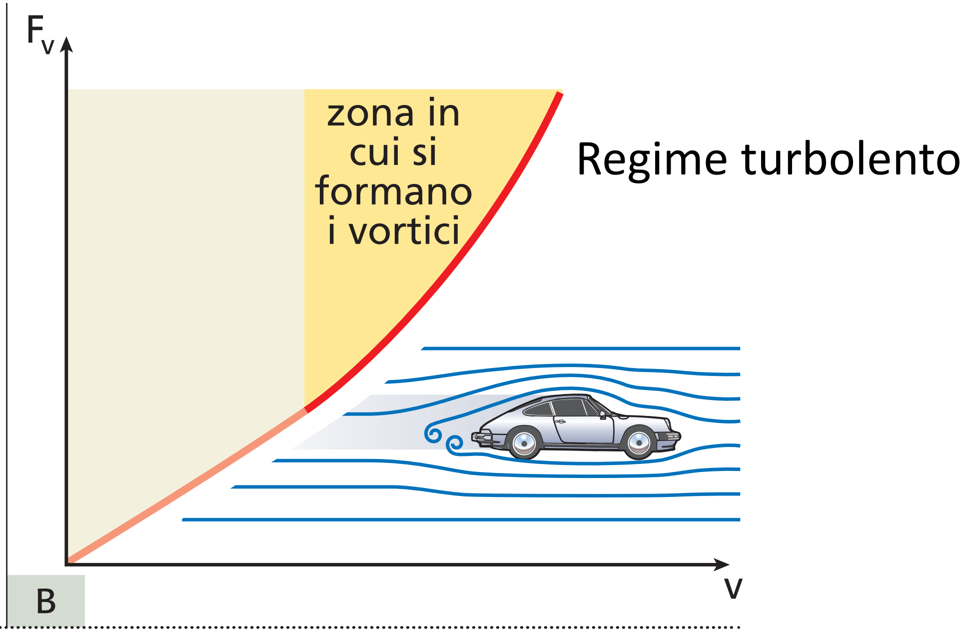
Consideriamo un corpo che si muove all'interno di un fluido. Esso subisce una forza di attrito, l'attrito viscoso, che dipende:

- dalla forma del corpo
- dalle dimensioni del corpo
- dalle caratteristiche del fluido (viscosità, densità)
- dalla velocità del corpo

Semplificando, possiamo identificare due diversi regimi:

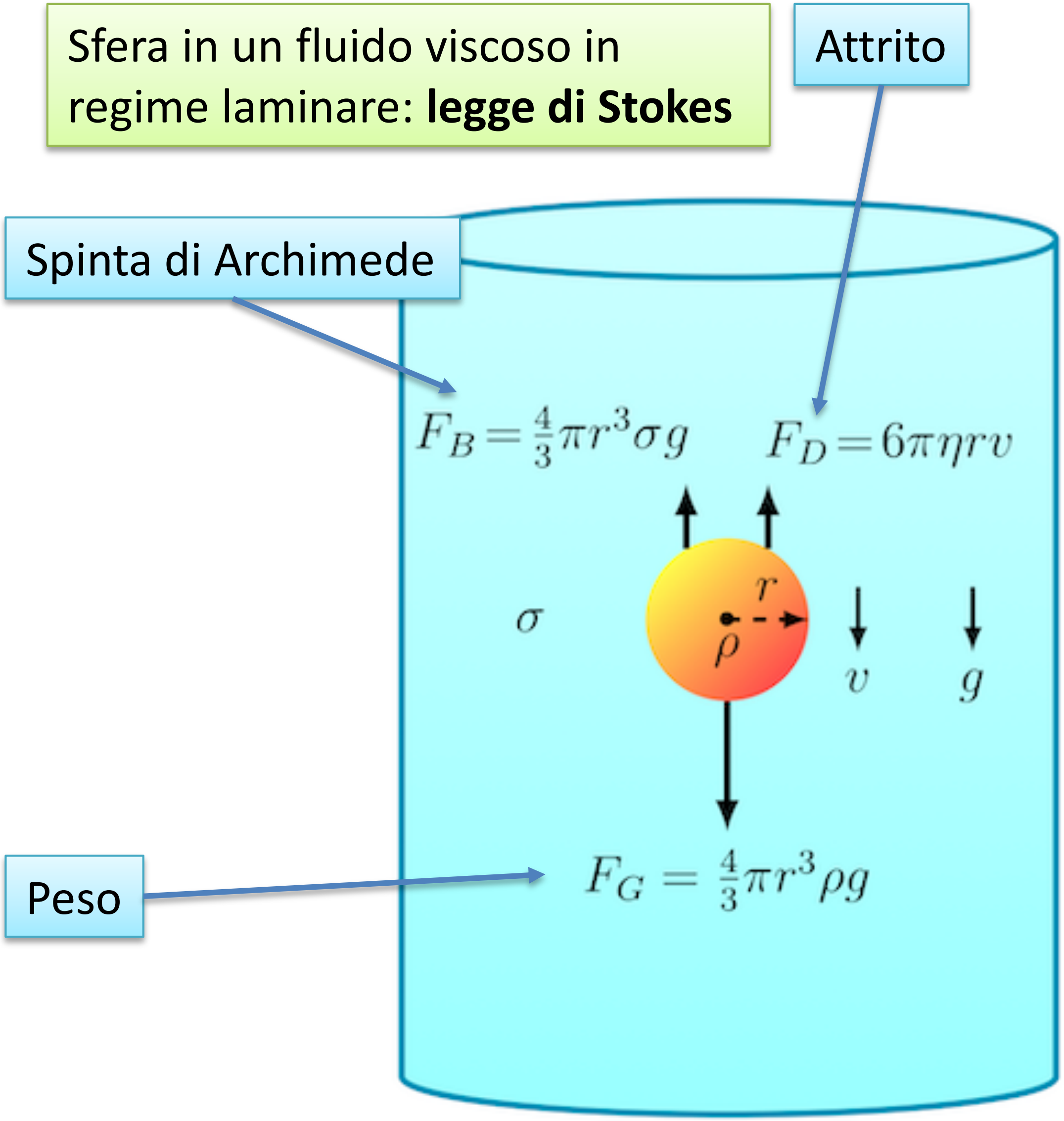
- dipendenza lineare (regime laminare) in cui $F_{att} \propto v$
- dipendenza quadratica (regime turbolento) in cui $F_{att} \propto v^2$





Regime laminare: sfera in un fluido

Sfera in un fluido viscoso in regime laminare: **legge di Stokes**



Scegliamo l'asse y orientato verso il basso. Per la componente dell'accelerazione abbiamo:

$$ma_y = F_G - F_B - F_D$$

Dove F_G e F_B sono costanti e F_D dipende linearmente dalla velocità. Abbiamo perciò, per l'accelerazione un' equazione del tipo:

$$a = -bv + c$$

Con b e c costanti positive.

σ = densità del fluido; ρ = densità della sfera; η = viscosità del fluido .

Regime laminare: velocità limite

Imponiamo la condizione di equilibrio:

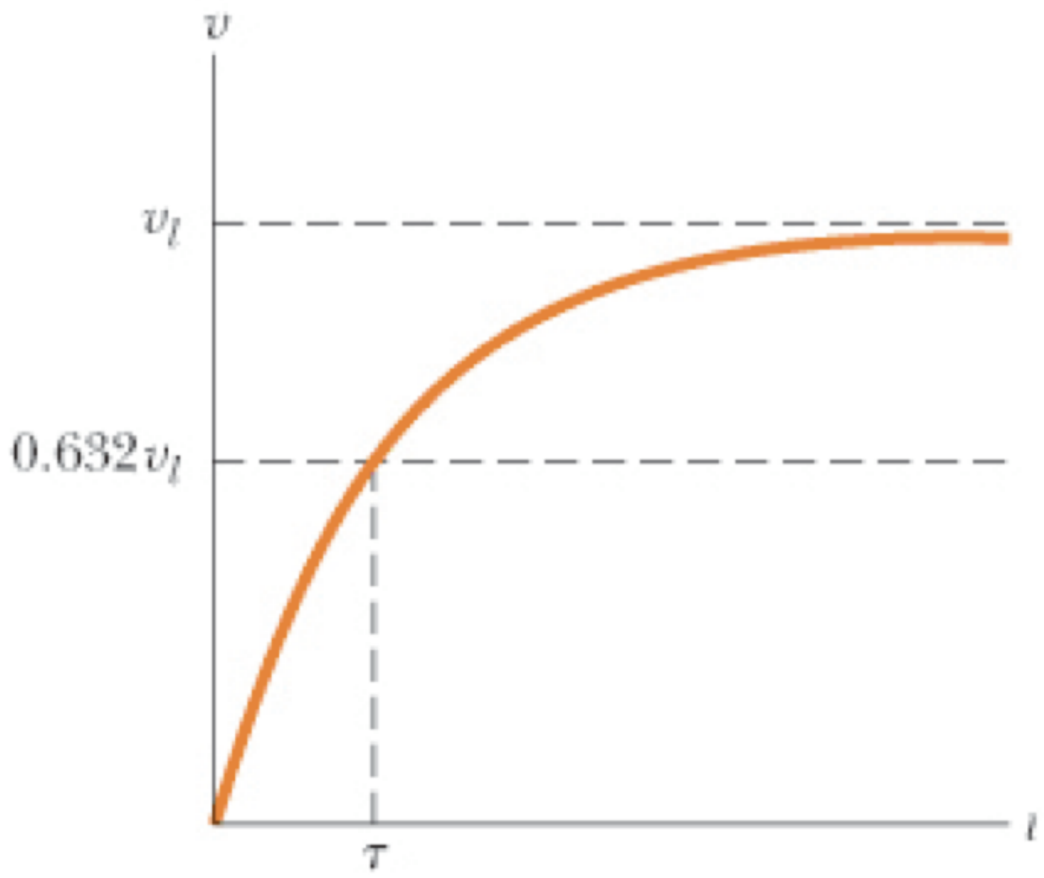
$$\vec{F}_{risultante} = 0$$

Che equivale alla condizione:

$$F_B + F_D - F_G = 0$$

Ricaviamo la **velocità limite:**

$$v_l = \frac{2r^2(\rho - \sigma)}{9\eta} g$$



esercizio

Si consideri un moto in cui l'accelerazione è data da

$$a = -b\,v + c,$$

dove v è la velocità, b è una costante positiva e c è una costante (non si assume un segno particolare per c). Determinare la soluzione generale per la velocità $v(t)$ e per la posizione $x(t)$ in funzione del tempo, senza imporre condizioni iniziali specifiche.

L'equazione differenziale per $v(t)$ è

$$\frac{dv}{dt} = -b\,v + c.$$

La scriviamo in forma standard:

$$\frac{dv}{dt} + b\,v = c.$$

1. Soluzione dell'Equazione Omogenea

Consideriamo l'equazione omogenea associata:

$$\frac{dv}{dt} + b\,v = 0.$$

Separiamo le variabili:

$$\frac{dv}{v} = -b\,dt,$$

integrando entrambi i lati:

$$\ln|v| = -b\,t + C_1,$$

da cui

$$v_h(t) = A\,e^{-b\,t}, \quad \text{con } A = e^{C_1} \text{ costante arbitraria.}$$

2. Soluzione Particolare

Cerchiamo una soluzione particolare costante v_p. Se v_p è costante, allora $dv_p/dt = 0$ e l'equazione diventa:

$$0 + b\,v_p = c \quad \Longrightarrow \quad v_p = \frac{c}{b}.$$

3. Soluzione Globale

La soluzione generale è data dalla somma della soluzione omogenea e della soluzione particolare:

$$v(t) = v_h(t) + v_p = A\,e^{-b\,t} + \frac{c}{b}.$$

Questa è la soluzione generale, in cui A è una costante arbitraria. Se si volesse esprimere in funzione della velocità iniziale $v(0) = v_0$, si ottiene:

$$v(0) = A + \frac{c}{b} = v_0 \quad \Longrightarrow \quad A = v_0 - \frac{c}{b},$$

e dunque:

$$v(t) = \frac{c}{b} + \left(v_0 - \frac{c}{b}\right)e^{-b\,t}.$$

4. Determinazione della Posizione $x(t)$

La posizione si ottiene integrando la velocità:

$$x(t) = \int v(t)\, dt = \int \left[A\, e^{-b\, t} + \frac{c}{b} \right] dt.$$

Calcoliamo i due integrali separatamente:

$$\int A\, e^{-b\, t}\, dt = -\frac{A}{b}\, e^{-b\, t} + C_2,$$

$$\int \frac{c}{b}\, dt = \frac{c}{b}\, t.$$

Pertanto, la soluzione generale per la posizione è:

$$x(t) = -\frac{A}{b}\, e^{-b\, t} + \frac{c}{b}\, t + K,$$

dove K è una costante d'integrazione. In forma alternativa, se $x(0) = x_0$ e $A = v_0 - \frac{c}{b}$, allora ponendo $t = 0$ si ha:

$$x(0) = -\frac{A}{b} + K = x_0 \quad \Longrightarrow \quad K = x_0 + \frac{A}{b}.$$

Quindi la soluzione espressa in funzione delle condizioni iniziali diventa:

$$x(t) = x_0 + \frac{c}{b}\, t + \frac{v_0 - \frac{c}{b}}{b} \left(1 - e^{-b\, t} \right).$$

Soluzione con cambio di variabile

CAMBIO DI VARIABILE

$$y = v - \frac{c}{b}$$

$$\frac{dv}{dt} = -bv + c$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -by$$

$$y = A e^{-bt}$$

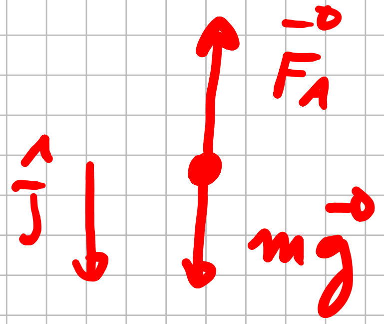
$$v - \frac{c}{b} = A e^{-bt}$$

$$v = A e^{-bt} + \frac{c}{b}$$

esercizio

Al tempo $t = 0$ una sfera di massa $m = 100\ \mathrm{g}$ e viene lasciata libera da ferma in aria. La forza fra corpo ed aria è di tipo viscoso con una costante $\beta = 0.1\ \mathrm{kg/s}$. Si consideri il peso della sfera e si trascuri la spinta di Archimede.

- Esprimere la velocità del corpo in funzione del tempo
- Calcolare il valore della velocità limite raggiunta.



$$F_A = \beta v$$

$$-\beta v + mg = ma$$

$$a = -\frac{\beta}{m} v + g$$

$$b = \frac{\beta}{m}$$

$$c = g$$

$$v(t) = \frac{mg}{\beta}\left[1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right]$$

esercizio

Un' automobile di massa $M = 1000\ \mathrm{kg}$ si muove con una velocità $v_0 = 20\ \mathrm{m}/s$ su una strada orizzontale. Al tempo $t = 0$ il motore dell'auto si spegne e su di essa si esercita solo la forza di attrito viscoso dell'aria $-\beta v_x$. Si calcoli il coefficiente β se la velocità è $v = 10\ \mathrm{m}/s$ al tempo $t_1 = 10s$.

esercizio

Un'automobile di massa $M = 1000\,\mathrm{kg}$ si muove con una velocità $v_0 = 20\,\mathrm{m}/s$ su una strada in discesa con una pendenza del 5%. Al tempo $t = 0$ il motore dell'auto si spegne e su di essa si esercitano la forza di attrito viscoso dell'aria $F = -\beta v$, con $\beta = 70\ \mathrm{kg}/s$, e la componente della forza di gravità parallela alla strada.

- Calcolare la velocità limite che viene raggiunta.
- Esprimere la velocità dell'automobile ad un tempo arbitrario t
- Cosa cambia se la velocità iniziale dell'automobile ha sempre modulo $v_0 = 20\ \mathrm{m}/s$, ma è diretta in salita?

esercizio

Una sferetta di massa $m = 1 \text{ kg}$ è lasciata cadere da ferma nel vuoto da un'altezza $h = 2 \text{ m}$ sulla superficie libera di una vasca piena d'acqua. All'interno della vasca la sferetta subisce una forza di attrito viscoso caratterizzabile con un coefficiente $\beta = 10 \text{ kg}/s$ e la profondità dell'acqua è tale che la sferetta raggiunge la velocità limite prima di toccare il fondo.

- Calcolare la velocità v_0 con cui la sferetta giunge a contatto con l'acqua.
- Calcolare la velocità limite v_l della sferetta nell'acqua.
- Scrivere l'equazione del moto della sferetta nell'acqua e determinare l'andamento nel tempo della sua velocità. Rappresentarlo graficamente a partire dall'istante in cui la sferetta viene lasciata cadere.

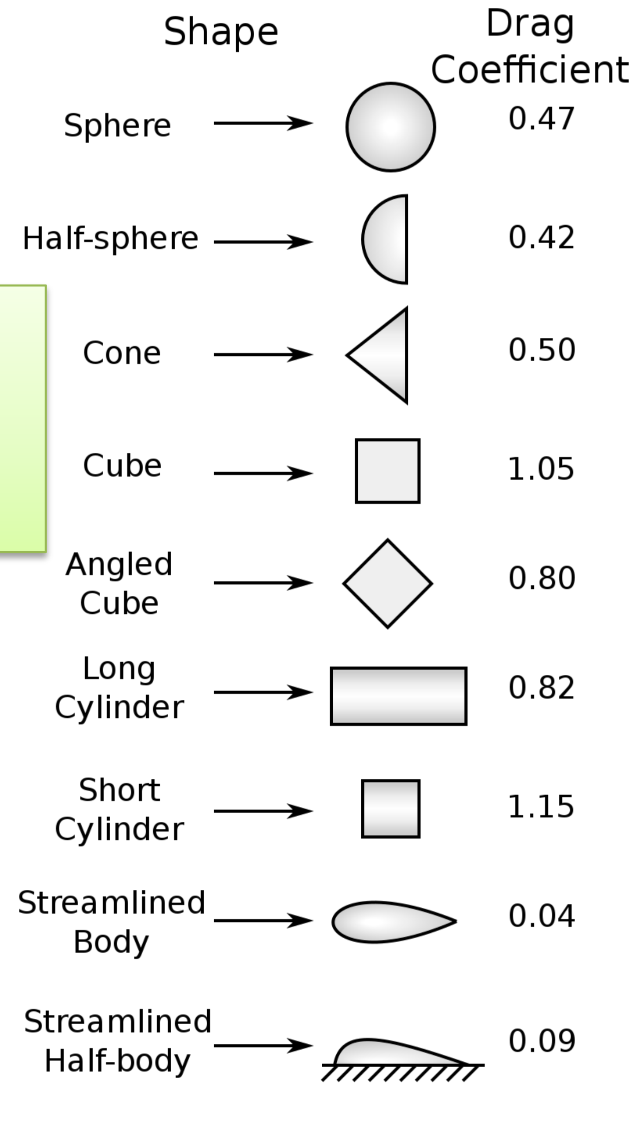
Regime turbolento: attrito

$$F_D = \frac{1}{2}\rho v^2 C_D A$$

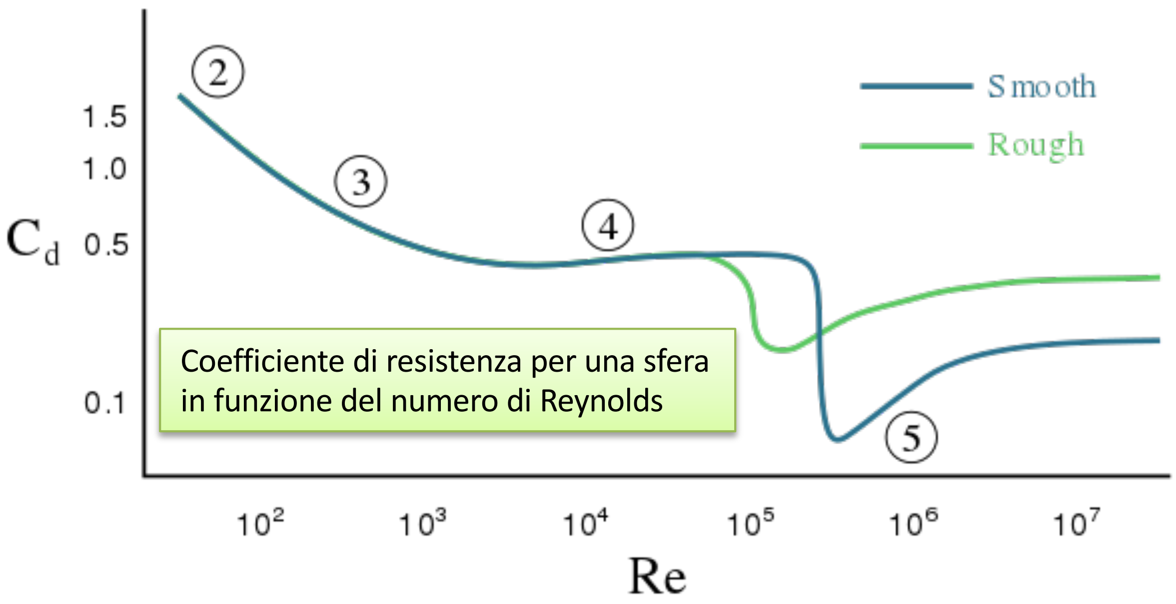
ρ= densità del fluido
v= velocità dell'oggetto
A= area della sezione trasversale
C_D= coefficiente di resistenza

Il coefficiente di resistenza dipende dalla forma e dal numero di Reynolds

Coefficienti di resistenza per varie forme e $Re{\sim}10^4$



Measured Drag Coefficients



Coefficiente di resistenza per una sfera in funzione del numero di Reynolds

Regime turbolento: velocità limite

Per un corpo che cade, in aria, l'equazione per l'accelerazione è:

$$ma = mg - \frac{1}{2} C_D \rho A v^2$$

Con ρ= densità dell'aria. La velocità limite si calcola imponendo l'accelerazione nulla:

$$mg - \frac{1}{2} C_D \rho A v_l^2 = 0$$

Da cui ricaviamo:

$$v_l = \sqrt{\frac{2mg}{C_D \rho A}}$$

Calcolo della velocità limite delle gocce di pioggia

Supponiamo che:

- Le gocce siano sferiche di raggio r.
- La forza di attrito viscoso (drag) sia proporzionale al quadrato della velocità, data da
$$F_d = \frac{1}{2}\, C_d\, \rho_a\, A\, v^2,$$
dove:
  - C_d è il coefficiente di resistenza,
  - ρ_a è la densità dell'aria,
  - $A = \pi r^2$ è la sezione trasversale della goccia.
- La spinta di Archimede è trascurata.

La massa della goccia è data da:

$$m = \frac{4}{3}\, \pi\, r^3\, \rho_w,$$

dove ρ_w è la densità dell'acqua.
Alla velocità limite v_{lim} il peso della goccia, mg, è bilanciato dalla forza di resistenza:

$$m\, g = \frac{1}{2}\, C_d\, \rho_a\, A\, v_{\text{lim}}^2.$$

Sostituendo le espressioni per m e A:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_w\, g = \frac{1}{2}\, C_d\, \rho_a\, (\pi r^2)\, v_{\text{lim}}^2.$$

Semplifichiamo eliminando π e dividendo entrambi i membri per r^2:

$$\frac{4}{3}\, r\, \rho_w\, g = \frac{1}{2}\, C_d\, \rho_a\, v_{\text{lim}}^2.$$

Da cui si ricava:

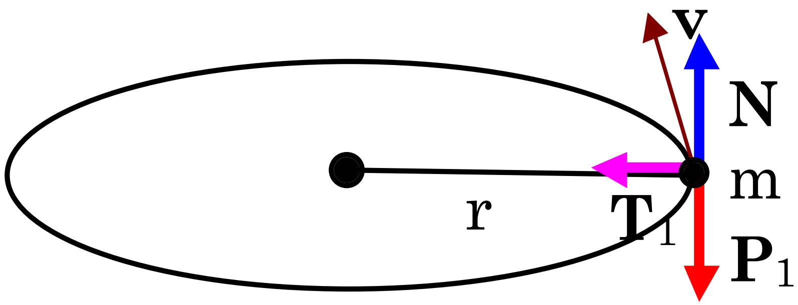
$$v_{\text{lim}}^2 = \frac{8\, \rho_w\, g\, r}{3\, C_d\, \rho_a}.$$

Pertanto, la velocità limite in funzione del raggio r è:

$$\boxed{v_{\text{lim}}(r) = \sqrt{\frac{8\, \rho_w\, g\, r}{3\, C_d\, \rho_a}}\,.}$$

Dinamica del moto circolare

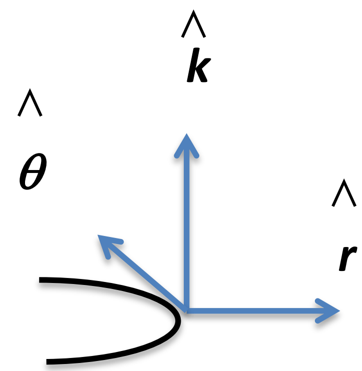
Consideriamo un punto materiale di massa m, su un piano orizzontale liscio che segue una traiettoria circolare di raggio r con velocita v costante in modulo. Il punto è collegato con un filo al centro del cerchio.



L'equazione vettoriale è:

$$\vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{N} = m\vec{a}$$

Consideriamo le componenti in un sistema di coordinate cilindriche (r, θ, z)

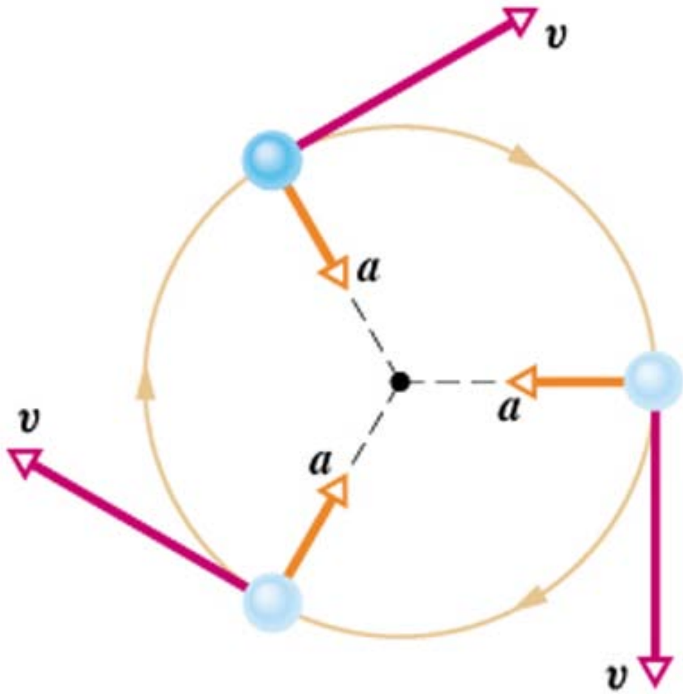


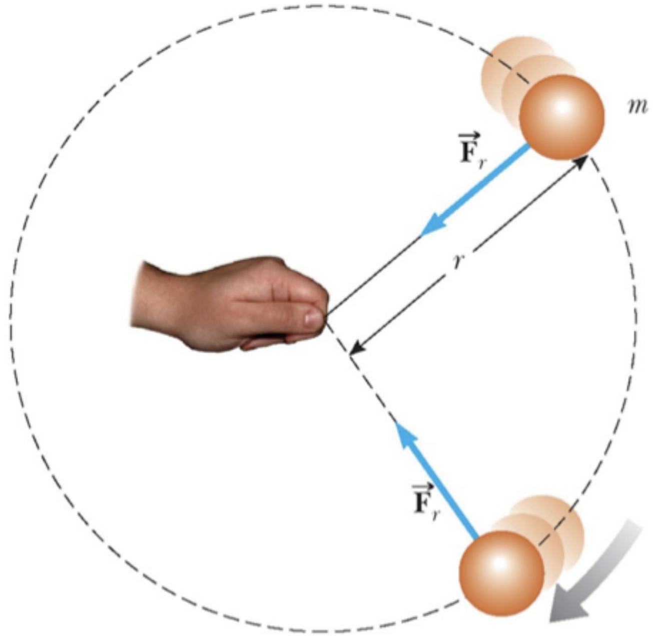
Lungo r : $-T_1 = ma_r = -m\dfrac{v^2}{r}$

Lungo z : $N - P_1 = N - mg = ma_z = 0$

La tensione del filo è: $T_1 = m\dfrac{v^2}{r}$

Forza centripeta





Accelerazione centripeta.

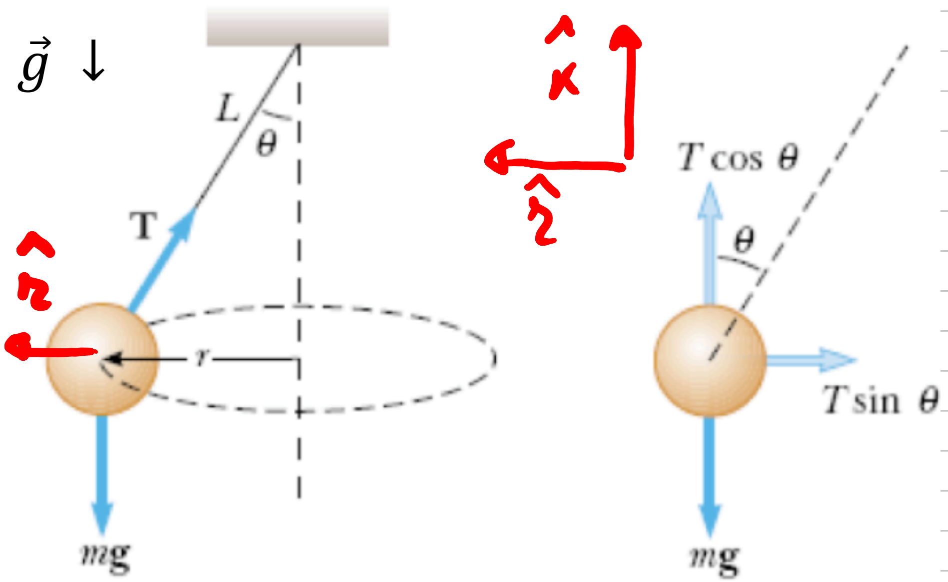
Il corpo in moto circolare accelera verso il centro.

Forza centripeta.

L’accelerazione è causata da una forza diretta verso il centro.

Pendolo conico

Un pendolo conico è un sistema in cui una massa è appesa a un filo inestensibile. La massa si muove descrivendo una circonferenza orizzontale. Durante il moto, il filo forma un angolo costante con la verticale, generando così una superficie conica (da cui il nome "conico").



Consideriamo il pendolo conico in figura. Supponiamo noti θ, g, m e L. Determinare:

- la velocità angolare ω;
- la tensione T del filo.

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$m a_z = T\cos\theta - mg = 0$$

$$r = L\sin\theta$$

$$m a_r = -T\sin\theta = -m\omega^2 r$$