

# ANALISI II

Matteo Giannini

AA 2020/2021

Per supportarmi un po' ❤️

[https://paypal.me/mgiannini01?locale.x=it\\_IT](https://paypal.me/mgiannini01?locale.x=it_IT)

# La topologia

- La DISTANZA in  $\mathbb{R}^n$  (le stesse considerazioni valgono anche per  $\mathbb{C}^n$ )

→ DEFINIZIONE:  $d(x,y) = |x-y|$  con  $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se si ha  $d$  su  $\mathbb{R}^n$

↪  $d$  è la distanza (o metrica) e  $\mathbb{R}^n$  è lo SPAZIO METRICO

## PROPRIETÀ

→  $d(x,y) > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \rightarrow d(x,y) = |x-y| > 0$  per l'assioma della norma ( $|x| > 0 \quad \forall x$ )

→  $d(x,y) = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \iff x = y \rightarrow d(x,y) = |x-y| = 0 \xleftarrow[\text{proprietà norma}]{\text{metrica}} x-y = 0 \xrightarrow{\text{spazio vettoriale}} x=y$

→  $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \rightarrow d(x,y) = |x-y| = |(-1)(y-x)| = (-1)|y-x| = d(y,x)$

→  $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \rightarrow d(x,y) = |x-z| = |x-z-z+y| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z)$

## da SPERA (e da PALLA)

→ Sfera di centro  $x_0$  e raggio  $r > 0$

→ DEFINIZIONE:  $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = r\}$  → SOLO la SUPERFICIE

→ Palla di centro  $x_0$  e raggio  $r > 0$

→ PALLA APERTA:  $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < r\}$  → Insieme dei punti di  $\mathbb{R}^n$  che distano da  $x_0$  meno di  $r$

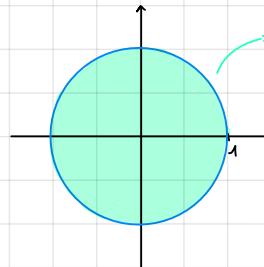
→ PALLA CHIUSA:  $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) \leq r\}$  → Include anche la sfera

## Esempi

### SPERA in $\mathbb{R}^2$

CON LA NORMA EUCLIDEA

$$B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow d(x,y) = |x-y|$$



→ Centro di raggio  $r$  esclusa la CIRCONFERENZA  
 $S(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |(x,y) - (0,0)| = 1\}$   
 $\sqrt{x^2+y^2} = 1$

CON ALTRA NORMA:  $\|(x,y)\| = \max\{|x|, |y|\}$

$$B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow d(x,y) = \|(x,y)\|$$



### Le SUCCESSIONI a VALORI in $\mathbb{R}^N$ → $N \in \mathbb{N}$ : dimensione del codominio

→  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^N$  → codominio, si indica con  $a_m$ , dove  $a(m) = a_m$

↪ dominio

## Esempi

$$\textcircled{1} \quad a_m = \left( m, \frac{m+1}{m} \right) \rightarrow \text{successione in } \mathbb{R}^2 \text{ con } m = \{1, 2, \dots\}$$

$$\textcircled{2} \quad a_m = \left( \frac{m}{m-1}, \frac{1}{m}, \frac{1}{m^2+1} \right) \rightarrow \text{successione in } \mathbb{R}^3$$

$$\textcircled{3} \quad a_m = (l_m^1, l_m^{m+1}) \rightarrow \text{successione in } \mathbb{R}^2$$

→ DEFINIZIONE:  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $b_m, c_m \in \mathbb{R} \rightarrow a_m = (b_m, c_m)$

↪  $m \rightarrow \begin{pmatrix} (a_m)_1 \\ (a_m)_2 \\ \vdots \\ (a_m)_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N \rightarrow$  al variare di  $m$  è una successione in  $\mathbb{R}^N$

### SUCCESSIONI CONVERGENTI

↪  $a_m$  successione in  $\mathbb{R}^N$  si dirà CONVERGENTE ad  $a \in \mathbb{R}^N$  se e solo se  $\forall \epsilon > 0 \exists r: \forall m > r, \|a_m - a\| \leq \epsilon$

↪ Definizione GEOMETRICA

$$\forall \epsilon > 0 \exists r: \forall m > r, a_m \in B(a, \epsilon)$$

↪ NORMA

↪ È equivalente a scrivere  $\lim a_m = a$

↪ Norma in  $\mathbb{R}^N$

↪ Norma

Successione CALORE:  $\forall \epsilon > 0 \exists r: \forall m > r, \|a_m - a\| \leq \epsilon$

↪ modulo in  $\mathbb{R}$



## La CONTINUITÀ

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  DEFINIZIONE  $f$  è continua in  $x_0 \in \Omega$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom } f \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Norma in  $\mathbb{R}^M$  (dominio) Norma in  $\mathbb{R}^M$  (codominio)

## TEOREMA: La COMPOSIZIONE di funzioni continue è continua

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{E}$   $g: \mathbb{E} \rightarrow (\mathbb{H})$ , dove  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $f$  continua in  $x_0 \in \Omega \implies$  Posto  $h(x) = g(f(x))$  si ha che  $h$  è continua in  $x_0$

### Dimostrazione

CONTINUITÀ di  $f$ :  $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 : \forall x \in \Omega \quad |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  } ipotesi  
CONTINUITÀ di  $g$ :  $\forall \varepsilon > 0 \exists p > 0 : \forall y \in \mathbb{E} \quad |y - f(x_0)| < p \implies |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$

TESI:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega \quad |x - x_0| < \delta \implies |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$

↓  
|  $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$  per l'ipotesi 2 e' vera se  $f(x) \in \mathbb{E}$ , e  $|f(x) - f(x_0)| < p$   
vera per ip

DEVO VERIFICARE:  $|f(x) - f(x_0)| < p \implies$  vera per ipotesi 1 ponendo  $\delta' = p$ ,  $\forall x \in \Omega$  verificante  $|x - x_0| < \eta$

Ne segue, ponendo  $\delta = \eta$ , la TESI  $\square$

TEOREMA degli ZERI:  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua in  $A$ ,  $f(a)f(b) < 0 \implies \exists \bar{x} : f(\bar{x}) = 0$  → VERO SOLO SE  $A$  È UN INTERVALLO (in  $\mathbb{R}^1$ )

CURVA in  $\Omega$

Definizione di INSIEME CONNESSO:  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  sarà detto CONNESSO se  $\forall x_1, x_2 \in \Omega \exists \gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$ , continua in ogni punto di  $[0, 1]$  tale

↓ Graficamente

che  $\gamma(0) = x_1$   $\gamma(1) = x_2$

cobordino:  $\gamma([0, 1], \text{im } \gamma) \rightarrow$  Obbligatorio unire i punti del dominio come valori di  $\gamma$

→ posso "aggiungere" i 2 punti  $x_1$  e  $x_2$  con un segmento che NON ESCA mai dall'insieme

### Esempio

In  $\mathbb{R}^1$ :  $\Omega = \{x \neq 0\}$  (dominio di  $\frac{1}{x}$  e  $\frac{x}{|x|}$ )

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

$x < 0$

$x_1$

$x_2$

$x > 0$

### La FRONTIERA

→ Dato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  arbitrario,  $x_0$  (Non necessariamente appartenente ad  $\Omega$ ) si dirà di frontiera se  $\forall p > 0 \exists x \in \Omega, y \notin \Omega : x, y \in B_p(x_0)$

$|x - x_0| < p$   
 $|y - x_0| < p$

Ogni sfera centrata in  $x_0$  deve intersecare  $\Omega$  e  $\bar{\Omega}$

### Esempio

$\Omega = [0, 1]$  → 0 ed 1 sono di FRONTIERA,  $0 \notin [0, 1]$  e  $1 \in [0, 1]$

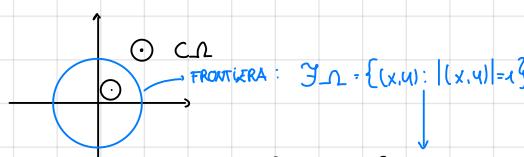
Se scelto  $\Omega = [0, 1] \setminus \{0, 1\}$  → RIHAVE la STESSA

### Insiemi CHIUSI

→  $\Omega$  si dice chiuso se contiene TUTTI i suoi punti di frontiera

### Esempio

$B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$



$B_1(0) = \{x : |x| < 1\}$  NON è CHIUSO in  $\mathbb{R}^2$  perché NON contiene nessun punto di frontiera

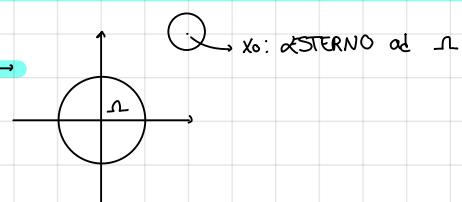
$B_1(0) = \overline{\{x : |x| \leq 1\}}$  è CHIUSO perché ogni punto di frontiera  $S_1(0) = \{x : |x| = 1\}$  è contenuto in  $\overline{B_1(0)}$

### Punti d'ESTERNO

→  $x_0$  si dice L'ESTERNO se  $\exists p > 0 : B_p(x_0) \cap \Omega = \emptyset$



$x_0$  è L'ESTERNO ad  $\Omega$  se è INTERNO a  $\bar{\Omega}$



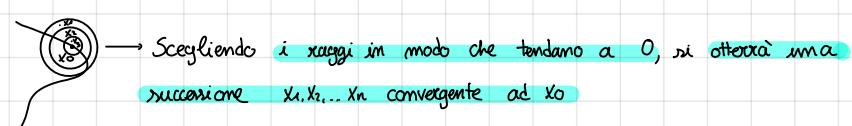
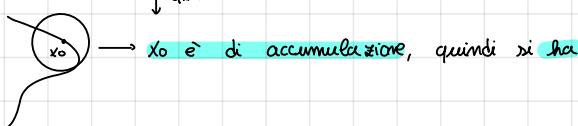
### Complementare di un INSIEME

$\complement \Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : x \notin \Omega\}$

### Punto di ACCUMULAZIONE

→  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $x_0$  è un punto di accumulazione per  $\Omega$  se  $\forall p > 0 \exists x \in \Omega : |x - x_0| < p$ ,  $x \neq x_0$

GRAFICAMENTE



### Esempio

$\Omega = [0, 1]$  →  $x_0 = 0 \rightarrow x_n = \frac{1}{n} \in \Omega$ , quindi  $x_n \rightarrow 0 = x_0$

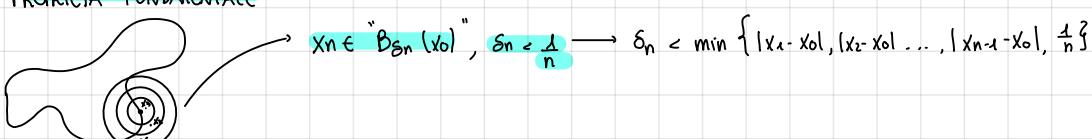
### Esempio

$[0, 1] \cup \{2\}$

2 è di frontiera per  $\Omega$  perché ogni sfera centrata in 2 contiene 2, che appartiene ad  $\Omega$ , ma contiene anche i punti del complementare  $\{x : |x - 2| < 1\}$

2 NON è di accumulazione per  $\Omega$  perché ogni sfera di raggio  $< 1$  NON contiene punti di  $\Omega$  diversi da 2

→ PROPRIETÀ FONDAMENTALE



### Punti isolati

→  $x_0$  si dice punto isolato di  $\Omega$  se  $x_0 \in \Omega$

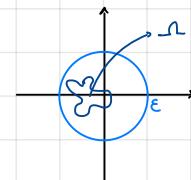
$\exists \varepsilon > 0 : \Omega \cap B_\varepsilon(x_0) = \{x_0\}$

### Esempio

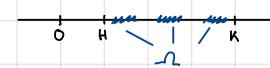
$\Omega = [0, 1] \cup \{2\}$  → UNICO PUNTO DI  $\Omega$

### Insiemi LIMITATI

→  $\Omega$  si dice LIMITATO se  $\exists \varepsilon > 0 : |w| < \varepsilon \quad \forall w \in \Omega$  Geometricamente



Estremo superiore delle norme dei punti  
 $|w| \leq \max \{ |H|, |K| \}$

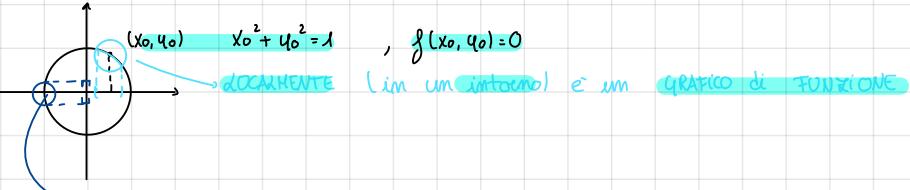




$y = \sqrt{1-x^2}$  si ottiene facendo  $f(x,y) = 0$  e quindi  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ,  $y^2 = 1 - x^2$  ed estraeendone la radice per  $|x| < 1$

→ c'è una "formula risolutiva" dell'equazione  $x^2 + y^2 = 1$  rispetto a  $y$  → Verifica  $x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 = 1 \quad \forall x \in [-1, 1]$

$y = \sqrt{1-x^2}$  risolve  $x^2 + y^2 = 1$  per  $y > 0$



→ CAMBIO delle VARIABILI INDEPENDENTI:  $x = -\sqrt{1-y^2}, \Psi: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

### ENUNCIATO del TEOREMA

→ Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  verificante le seguenti ipotesi

- ①  $f(x_0, y_0) = 0$
- ②  $f$  è continua in  $\Omega$
- ③  $(x_0, y_0)$  è interno ad  $\Omega$
- ④  $y \rightarrow f(x, y)$  è strettamente crescente  $\forall x: (x, y) \in \Omega$

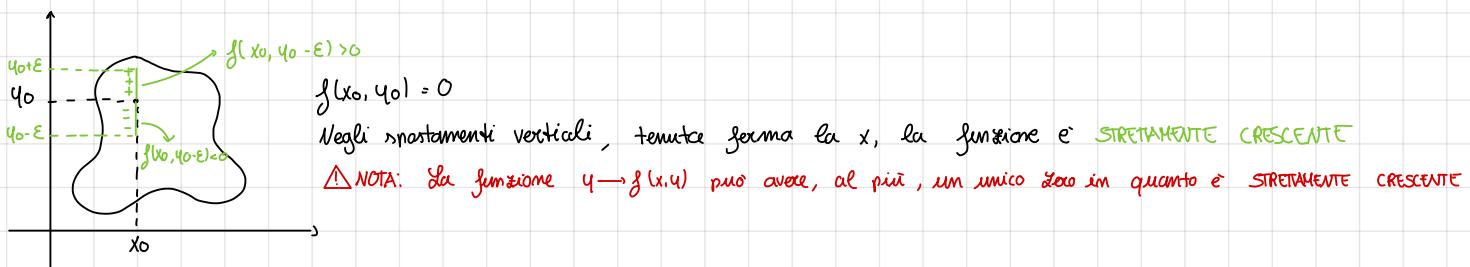
→ Allora  $\exists \delta > 0, \exists \varphi: [x_0-\delta, x_0+\delta] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- ②  $\varphi(x_0) = y_0$
- ③  $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$
- ④  $\varphi$  è continua in  $[x_0-\delta, x_0+\delta]$

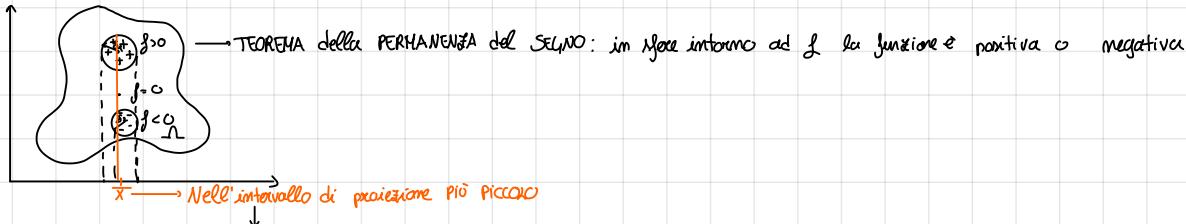
Graficamente:



### PRINCIPIO di DIMOSTRAZIONE:



### COSTRUZIONE della funzione $\varphi$



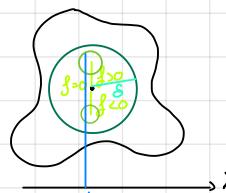
Per applicare il teorema degli zeri è necessario che il dominio sia un intervallo: ipotesi di punto interno e convessità

### Dimostrazione

Poiché  $(x_0, y_0) \in \Omega \quad \exists B_\delta(x_0, y_0) \subseteq \Omega \rightarrow$

→ ipotesi 3

Per l'ipotesi 4, scelto  $\epsilon = \frac{\delta}{2}$  dobbiamo che  $f(x_0, y_0 + \epsilon) > 0$   
 $f(x_0, y_0 - \epsilon) < 0$



Per il teorema della permanenza del segno e per l'ipotesi 2  $\exists s_1: |x - x_0| < s_1 : f(x, y_0 + \epsilon) > 0 \quad \Delta ATT: |(x, y_0 + \epsilon) - (x_0, y_0 + \epsilon)|_{\mathbb{R}^2}$   
 $\exists s_2: |x - x_0| < s_2 : f(x, y_0 - \epsilon) < 0 \quad - |x - x_0|_{\mathbb{R}}$

Adesso consideriamo  
 $y = f(x, y)$  è definita su  $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$  poiché, essendo  $B_\delta(x_0, y_0)$  convessa, contiene il segmento verticale di estremi  $(x, y_0 + \epsilon)$  e  $(x, y_0 - \epsilon)$

→  $y$  continua perché  $f$  lo è

→ Assume valori discordi su  $y_0 - \epsilon$  ed  $y_0 + \epsilon$

→ Per il teorema degli zeri in  $\mathbb{R}$  ha almeno uno zero  $\bar{y}$

Per la stretta monotonia tale zero è unico

Si pone allora  $\psi(x) = \bar{y}$  e la costruzione può essere ripetuta purché  $|x-x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ,  $\delta_1$  e  $\delta_2$  forniti dal teorema della permanenza del segno.

→ Dimostrati:  $\exists \delta, \psi \rightarrow$  Prima parte della tesi

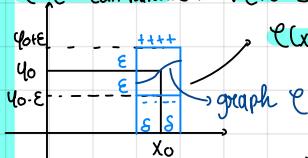
Osserviamo che  $\psi(\bar{x})$  è l'ordinata dell'unico punto sulla retta verticale  $x=\bar{x}$  tale che  $f(x, \psi(x))=0 \Rightarrow$  Terza parte della tesi

utilizzando l'ipotesi 1 si ha  $f(x_0, \psi_0)=0 \Rightarrow \psi(x_0)$  che verifica  $f(x, \psi(x_0))=0 \Rightarrow$  Seconda parte della tesi

$\psi$  è continua:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: |x-x_0| < \delta, |\psi(x) - \psi(x_0)| < \varepsilon$

$\psi(x) \in ]\psi_0 - \varepsilon, \psi_0 + \varepsilon[$  per il teorema degli zeri (Intervallo APERTO)

$\psi(x) - \psi_0 < \varepsilon$  purché  $|x-x_0| < \delta$ , dove  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  → Quarta parte della tesi



Questo accade se dovrà rimpicciolire ε

Per l'unicità, se  $\bar{x}$  appartiene ad entrambi i domini delle "due"  $\psi$  ( $\varepsilon$  grande e piccolo), il valore che esse associano è sempre l'unico  $\bar{y}$  per cui  $f(\bar{x}, \bar{y})=0 \rightarrow$  grazie a questo, la funzione è CONTINUA

### Esempio

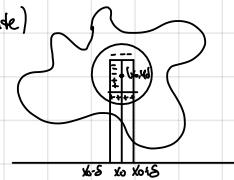
$$f(x, u) = 0$$

$u \rightarrow f(x, u)$ : stretta monotona (strettamente decrescente)

$$f(x, u) = \underbrace{x^2 + u^2}_1$$

quadrato della distanza di  $(x, u)$  dall'origine

↓ Deriva da ipotesi 4



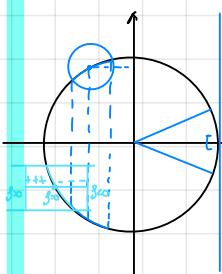
$f$  è continua su  $\mathbb{R}^2$

$(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$  perché  $\mathbb{R}^2$  è aperto in quanto ogni punto è interno

$$f(x_0, u_0) = 0$$

$$u \rightarrow x^2 + u^2 - 1, \text{ fissa } x, u \rightarrow f(\bar{x}, u)$$

↓  
strettam. crescente per  $u > 0$   
strettam. decrescente per  $u < 0$



$u \rightarrow f(u, u)$  ha minimo in  $u=0$

$u \rightarrow f(u, u)$  non è strettamente monotona intorno a 0

Ipotesi 4: Se  $x \rightarrow f(x, u)$  è strettamente monotona allora la tesi sarebbe analoga  $x = \psi(u)$

• Teorema di Weierstrass: Una funzione continua su un insieme chiuso e limitato ha massimo e minimo

• Il COMPATTO: insieme chiuso e limitato

• I LIMITI (richiamo generale delle definizioni)

→  $\lim_{A \rightarrow} f(x) = B$  significa che  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: \forall x \in \text{dom } f, |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$

$\text{dom } f \subseteq$	$A$	$A'$
$\mathbb{R}^m$	$x \rightarrow x_0$	$x \neq x_0 \quad  x-x_0  < \delta$
$m, 1$	$x \rightarrow \infty$	$ x  > \delta$
$\mathbb{R}^n$	$x \rightarrow x_0^+$	$x_0 < x < x_0 + \delta$
$\mathbb{R}$	$x \rightarrow x_0^-$	$x_0 - \delta < x < x_0$
	$x \rightarrow +\infty$	$x > \delta$
	$x \rightarrow -\infty$	$x < -\delta$

Codominio	$B$	$B'$
$\mathbb{R}^p$ $p \geq 1$	$a \in \mathbb{R}^p$	$ f(x) - a  < \varepsilon$
	$\infty$	$ f(x)  > \varepsilon$

Codominio	$B$	$B'$
$\mathbb{R}$	$+ \infty$	$f(x) > \varepsilon$
	$- \infty$	$f(x) < -\varepsilon$

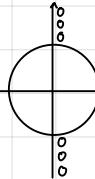
↓

Volgono anche per i limiti di successioni ponendo  $a_m = f(m)$ ,  $N = \text{dom } f \subseteq \mathbb{N}$  e considerando  $\lim_{m \rightarrow \infty} f(m)$

### Alcuni risultati importanti

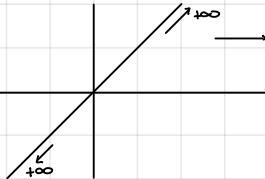
$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} x^2 =$$

$$f(x,y) = x^2 \rightarrow$$



Ora che perché NON c'è un unico comportamento al di fuori di una qualunque sfera

$$\lim_{\infty} xy = \infty$$



$$\lim_{\infty} x^2 + y^2$$

$$f(x,y), f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ such that } |(x,y)| > \delta \implies |x^2 + y^2| > \varepsilon$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} > \varepsilon \iff x^2 + y^2 > \varepsilon^2 \iff \sqrt{x^2 + y^2} > \varepsilon^{\frac{1}{2}} \implies \delta = \sqrt{\varepsilon}$$

$p(z)$  polinomio a coefficienti  $\in \mathbb{C}$  NON COSTANTE

$$p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \deg p > 0 \implies \lim_{\infty} p(z) = \infty$$

$$p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

$$|p(z)| = \left| z^n \left( \alpha_n + \frac{\alpha_{n-1}}{z} + \frac{\alpha_{n-2}}{z^2} + \dots + \frac{\alpha_1}{z^{n-1}} + \frac{\alpha_0}{z^n} \right) \right| = |z|^n \left| \alpha_n + \frac{\alpha_{n-1}}{z} + \dots + \frac{\alpha_0}{z^n} \right|$$

Proviamo che  $\lim_{\infty} \frac{\alpha_n}{z^n} = 0 \implies \left| \frac{\alpha_n}{z^n} \right| < \varepsilon \iff |z|^n > \frac{|\alpha_n|}{\varepsilon} \iff |z| > \left( \frac{|\alpha_n|}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}} = \delta$ , quindi si ha che  $|z|$  tende a  $\infty$

$$\text{quindi si ha che } \left| \alpha_n + \frac{\alpha_{n-1}}{z} + \dots + \frac{\alpha_0}{z^n} \right| \rightarrow |\alpha_n| > 0 \rightarrow \text{Scelto } \varepsilon = \frac{|\alpha_n|}{2} \text{ se } |z| > \delta \implies \left| \alpha_n + \dots + \frac{\alpha_0}{z^n} \right| > |\alpha_n| - \frac{|\alpha_n|}{2} = \frac{|\alpha_n|}{2}$$

$$\text{da cui } |p(z)| > \frac{|\alpha_n|}{2} |z|^n \rightarrow |z|^n \rightarrow \infty \text{ in quanto } |z|^n > \varepsilon \text{ se } |z| > \varepsilon^{\frac{1}{n}} = \delta$$

Quindi, per il teorema del confronto si ha che  $|p(z)| \rightarrow \infty$

Teorema:  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $\lim_{\infty} f(x) = \infty$ ,  $f$  continua  $\implies |f(x)|$  ha minimo

Dimostrazione

$x_0$  è di minimo per  $|f(x)| \geq |f(x_0)| \forall x \in \text{dom } f$

Scetto  $x_0 \in \text{dom } f$  ad arbitrio, si pone  $\varepsilon = |f(x_0)|$ . Se  $|f(x_0)| = 0$  allora  $x_0$  è il minimo assoluto, e la prova è conclusa.

Se  $x_0$ , per l'ipotesi sulla divergenza ( $\lim_{\infty} f(x) = \infty$ )  $\exists \delta: |x| > \delta, |f(x)| > \varepsilon = |f(x_0)|$ . Definiamo allora  $B = B_{\delta}(0) = \{x \in \mathbb{R}^N: |x| \leq \delta\}$

Allora si ha  $x_0 \notin B$  perché se fosse  $x_0 \in B$  si avrebbe  $|x_0| > \delta$  e quindi  $|f(x_0)| > \varepsilon = |f(x_0)|$ , ASSURDO

Allora, per il teorema di Weierstrass, essendo  $f$  continua su  $B$ , chiusa e limitata, avrà minimo  $x^*$ .

Si ha quindi che  $\boxed{\text{Dentro } B: |f(x^*)| = |f(x_0)| \forall x \in B}$ , cioè se  $|x| \leq \delta \implies \text{Quindi } |f(x^*)| \leq |f(x_0)| \forall x \in \mathbb{R}^N$

$\rightarrow$  Fuori da  $B: |f(x^*)| \leq |f(x_0)| < |f(x)| \forall x: |x| > \delta$

Lemma di Hermite:  $p$  polinomio complesso non costante,  $p(z_0) \neq 0 \implies \exists z: |p(z)| < |p(z_0)|$

Dimostrazione

Si definisce  $q(w) = \frac{1}{p(z_0)} p(z_0 + w)$ , quindi facendo il cambio di variabile  $w = z - z_0$

Osserviamo che  $q(0) = \frac{p(z_0)}{p(z_0)} = 1$ . La tesi diventa " $\exists w: |q(w)| < 1$ "

$$\frac{|p(z_0+w)|}{|p(z_0)|} = \frac{|p(z_0+w)|}{|p(z_0)|} < 1 \implies |p(z_0+w)| < |p(z_0)|$$

$\deg p = \deg q$ , e quindi NON COSTANTE  $\implies q(w) = 1 + \alpha_k w^k + w^{k+1} \tilde{q}(w)$ , dove  $k$  è il minimo intero  $> 0$  tale che  $\alpha_k \neq 0$   $\rightarrow$  Potremo esprimere i termini di grado  $k$  con i monomi

$$|q(w)| \leq |1 + \alpha_k w^k| + |w|^{k+1} |\tilde{q}(w)|$$

Raggruppiamo i termini di GRADO ALTO

Si considera  $w$  tale che  $\alpha_k w^k$  sia reale e negativo

transcurabile: va a 0 velocemente

Analizziamo il termine che rimane  $\rightarrow$  Se  $|aw^k|$  è reale e possibile dire che l'argomento è minore/maggiore di 1

$\downarrow$  in simboli

$\rightarrow$  Inoltre, dato che si richiede il modulo  $< 1$  ed è già presente 1 si deve avere  $|aw^k| < 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} aw^k \text{ sia reale e negativo} \Rightarrow |1+aw^k| = 1-|aw^k| \\ |aw^k| < 1 \end{array} \right.$$

$\rightarrow$  Per avere modulo della differenza = differenza dei moduli

① Si ottiene  $\arg(aw^k) = \pi$  e quindi  $\arg a + \arg w = \pi$  e rendendo rispetto ad  $\arg w$ :  $\arg w = \frac{\pi - \arg a}{k}$

② Si ha  $|aw^k| < 1$  e quindi  $|w| < \frac{1}{|aw|^1/k}$

$$\text{Da } ① \text{ segue: } |q(w)| \leq 1 - |aw||w|^k + |w|^k |q'(w)| = 1 - |w|^k [|aw| - |w||\tilde{q}(w)|]$$

$\begin{aligned} &\text{Se } w \rightarrow 0 \\ &\quad \overset{>0}{\text{costante}} \quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\quad 0 \quad \tilde{q}(0) : \text{ funzione continua} \\ &\quad \text{Tende ad } |aw| > 0 \quad \rightarrow \text{Per il teorema della permanenza del segno} \\ &\quad [\ ] > 0 \quad \forall w: |w| < \delta \end{aligned}$

Si può quindi concludere che  $|q(w)| \leq 1 - |w|^k [\ ]$

$$\begin{aligned} &\overset{>0}{\text{wto}} \quad > 0 \quad \text{perché } |w| < \delta \text{ e } |w| < \frac{1}{|aw|^{1/k}} \end{aligned}$$

Avendo quindi  $|q(w)| < 1$  ed avendo  $q(w) = \frac{p(z_0+w)}{p(z_0)}$  si ha  $|\frac{p(z_0+w)}{p(z_0)}| < 1$  e quindi  $|p(z_0+w)| < |p(z_0)|$

### • Teorema di Gauss (fondamentale dell'algebra)

$\hookrightarrow$  Se  $p(z)$  è un polinomio in  $\mathbb{C}$  non costante, allora  $\exists z^* : p(z^*) = 0$

#### Dimostrazione

Si consideri  $f(z) = |p(z)|$ , quindi  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = +\infty$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall |z| > \delta \Rightarrow |p(z)| > \varepsilon$$

Per il teorema del minimo si ha che  $f$ , continua su  $\mathbb{C}$  (composta di  $p$  e  $|p|$ , funzioni continue), divergente a  $+\infty$ , ha minimo, in  $z^* \rightarrow$  Punto di minimo di  $|p(z)|$  su  $\mathbb{C}$

Se  $|p(z^*)| = 0$ ,  $z^*$  è lo zero richiesto e la tesi è provata

$\hookrightarrow$  Può essere  $p(z^*) \neq 0$ ? No, perché se fosse  $p(z^*) \neq 0$ , per il lemma di Hermite  $\exists \bar{z} \in \mathbb{C} : |p(\bar{z})| < |p(z^*)|$  e quindi  $\bar{z}$  NON avrebbe più il minimo assoluto  $\rightarrow$  ASSURDO

$\Rightarrow$  Il teorema NON VALE nei reali  $\rightarrow$  Esempio:  $p(x) = 1+x^2$   $p(0) = 1+0$  e  $x=0$  è il MINIMO (probabile)

### • TEOREMA (cambio di variabile)

$\hookrightarrow$  ipotesi: ①  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$   $\iff$  CNS perché  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = M$  e che sia verificata ALMENO UNA delle condizioni: ②  $\lim_{y \rightarrow L} g(y) = M$  ③  $x_0$  è un punto di accumulazione per il dominio  $g \circ f$

- ④ richiedere che  $g$  sia continua in  $L$  ( $\Rightarrow g(L) = M$ )
- ⑤ richiedere che  $g$  non sia definita in  $L$  ( $\Rightarrow g(L)$  NON ESISTE)
- ⑥  $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \text{dom } f, |x-x_0| = \sigma, x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \neq L$

#### Dimostrazione

Condizione sufficiente

Bisogna provare che  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom } f, g \circ f \quad |x-x_0| < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow |g(f(x)) - M| < \varepsilon$  (TESI)

Finora dunque  $\varepsilon > 0$

$\rightarrow$  @ Poiché  $g$  è continua in  $L$  ( $M = g(L)$ ),  $\exists \eta > 0 : \forall y \in \text{dom } g \quad |y-L| < \eta \Rightarrow |g(y) - M| < \varepsilon$  (\*\*)

Dall'ipotesi ① si ha inoltre che, scelto  $\eta$ ,  $\exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom } f, g \circ f \subset \text{dom } g, |x-x_0| < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow |f(x)-L| < \eta$

Sostituendo in \*\*  $y = f(x)$  si ottiene la TESI (X)

$\rightarrow$  ⑤ Per lo stesso  $\varepsilon$ ,  $\exists \eta > 0 : \forall y \in \text{dom } g \quad |y-L| < \eta, y \neq L \Rightarrow |g(y) - M| < \varepsilon$

Per poter fare  $y = f(x)$  occorre verificare le 3 condizioni

Dall'ipotesi ①, fissato  $\eta$ ,  $\exists \delta > 0 : x \neq x_0, |x-x_0| < \delta$  e  $x \in \text{dom } f \subset \text{dom } g \Rightarrow |f(x)-L| < \eta$

Per ogni  $x$ :  $f(x) = \lambda$  non si può definire  $g(f(x)) = g(\lambda)$ , che NON è definita per l'ipotesi (b)

Ne segue che  $\forall x \in \text{dom } f \circ g \Rightarrow f(x) \neq \lambda$  e, analogamente a quanto visto prima, per l'ipotesi (1) si ha che

$\exists \delta > 0: \forall x \in \text{dom } f \circ g \quad |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - \lambda| < \eta$ . Si può quindi concludere che **segue**

(c)  $\exists \delta > 0: \forall x \in \text{dom } f \circ g \quad |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \neq \lambda$

$y = f(x)$  rispetta la condizione  $y \neq \lambda$  perché  $|x - x_0| < \delta$ ,  $x \neq x_0$  e si può concludere come nel caso precedente se scelta  $x \in \text{dom } f \circ g \quad |x - x_0| < \min\{\delta, \sigma\}$ ,  $x \neq x_0$

Condizione necessaria

Per assurdo: Supponiamo che  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = M$  e che nessuna delle tre condizioni (a), (b), (c) sia vera.

Si ha quindi che, poiché (b) è falsa,  $g(\lambda)$  è definita. Si ha inoltre che, poiché (a) è falsa,  $g$  è discontinua e dunque  $g(\lambda) \neq M$ . Infine, poiché (c) è falsa,  $\forall \delta > 0 \quad \exists x \in \text{dom } f \circ g : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0$  e  $f(x) = \lambda$ .

A questo punto si sceglie  $\sigma = \frac{1}{n}$  per quanto  $\exists x_n \in \text{dom } f \circ g : |x_n - x_0| < \frac{1}{n} : f(x_n) = \lambda$  e quindi  $x_n \rightarrow x_0$

segue

$$g(f(x_n)) = g(\lambda) \quad \forall x \Rightarrow \lim_m g(f(x_n)) = g(\lambda) : \text{ASSURDO poiché } g(\lambda) \neq M$$

## Esempi

1) Controesempio:  $g(u) = \begin{cases} 3 & u \neq 0 \\ 0 & u = 0 \end{cases} \quad f(x) = x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  poiché  $\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$  limitata in  $x \neq 0$  e  $x$  infinitesima

$$\lim_{u \rightarrow 0} g(u) = 3 = M$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) = 0 \\ 3 & \text{se } f(x) \neq 0 \end{cases} \quad f(x) = 0 \text{ se e solo se } \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} = 0 \\ \text{ovvero } \frac{1}{x} = k\pi \text{ e quindi } x = \frac{1}{k\pi} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) =$$

La funzione composta  $g(f(x))$  assume sempre il valore 3 se lo che nei punti  $x_k = \frac{1}{k\pi}$ , cui quindi vale 0

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{altrove } g=3 \\ g(f(x_n))=0 \end{array} \right.$$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \underset{u=x^2}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1 \quad x_0 = 0 \quad d = 0 \quad M = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left( x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \right)}{x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}} = 1$$

3) Controesempio

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 & x_0 &= 0 & \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 1 = d \\ g(u) &= \begin{cases} 3 & u \neq 1 \\ 2 & u = 1 \end{cases} & \lim_{u \rightarrow 1} g(u) &= 3 = M \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) \neq \lim_{u \rightarrow 1} g(u) = M \quad \left[ \begin{array}{l} g(f(x)) = g(1) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 2 \\ \lim_{u \rightarrow 1} g(u) = 3 \end{array} \right]$$

RISULTATO:  $a_n \rightarrow d$  in  $\mathbb{R}^N \iff (a_n)_i \rightarrow d_i \quad \forall i = 1 \dots n$

## Esempio

$$\left( \frac{m+1}{m}, \left( \frac{m+1}{m} \right)^m, \frac{m-1}{m} \right) \rightarrow (1, e, 1)$$

Modello in  $\mathbb{R}^3$  costante dipendente soltanto dalla dimensione:  $\mathbb{R}^N$

Osservazione:  $\forall a \in \mathbb{R}^N : |a| \leq |a| \leq \sqrt{N} \max_{1 \dots N} |a_i|$

Norma in  $\mathbb{R}^N$

## Dimostrazione (convergenza a 0)

Vero:  $|a_{n-1}| \geq |(a_n)_i| = |(a_n)_i - l_i| > 0 \xrightarrow{\text{th. confr.}} |(a_n)_i - l_i| \rightarrow 0$

Vero:  $\left| (a_n)_i - l_i \right| \rightarrow 0 \quad \forall i \Rightarrow \max_{1 \dots N} |(a_n)_i - l_i|$

## Effetti

$a_{n-1} \leq |a_{n-1}| \rightarrow 0$

Vero:  $|a_{n-1}| \rightarrow 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists r: \forall n > r |a_{n-1}| < \varepsilon$ : Definizione limite

Poiché  $|a| \geq |a_i| \forall i=1 \dots N$  segue, per gli stessi  $\varepsilon$  e  $r$   $|(a_n)_i| < |a_{n-1}| < \varepsilon$

Se ne conclude:  $\lim |(a_n)_i| = 0$  da cui  $\lim a_n = l_i \forall i=1 \dots N$

Vero:  $\left| a_n - l_i \right| \rightarrow 0 \quad \forall i=1 \dots N \quad \varepsilon > 0 \quad \exists r_i: \forall n > r_i |(a_n)_i - l_i| < \varepsilon$

Scelto  $r = \max_{i=1 \dots N} r_i \Rightarrow \max_{i=1 \dots N} |(a_n)_i - l_i| < \varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon \forall n$

## Dimostrazione (Disegualanza)

$\forall i=1 \dots N \quad |a|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_N^2 > a_i^2 \rightarrow$  da  $|a|^2 > a_i^2$ , ponendo alla radice si ha  $|a| > |a_i|$ . PRIMA STIMA

$|a|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_N^2$  con  $\max_{i=1 \dots N} |a_i| = |a_1| > |a_i| \forall i=1 \dots N \Rightarrow a_1^2 > a_i^2 \forall i=1 \dots N$

$\rightarrow |a|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_N^2 \leq N a_1^2$  e, ponendo alla radice:  $|a| \leq \sqrt{N} |a_1|$

- Definizione:  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  è continua se e solo se lo sono le sue componenti scalari  $f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

componenti  $f_i: f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_N(x) \end{pmatrix}$

- CONVERGENZA:  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è convergente ad  $l$  in  $x_0$  o all' $\infty$  se e solo se  $f_i(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l_i$   
IN SIMEOLI:  $f(x) \rightarrow l \iff f_i(x) \rightarrow l_i \quad \forall i=1 \dots N$

## Esempio

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  è continua perché le componenti sono continue

- La DIVERGENZA:  $\lim_n a_n = \infty \iff \lim |a_n| = +\infty$   $\rightarrow \sqrt{(a_{n1})^2 + (a_{n2})^2 + \dots + (a_{nN})^2} \rightarrow$  Condizione SUFFICIENTE

## Esempi

$$\textcircled{1} \quad \left( \underset{\downarrow \infty}{m}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow \left( \underset{\downarrow 0}{n}, \frac{1}{n} \right) = \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow +\infty$$

$$\textcircled{2} \quad (0, 1), (2, 0), (0, 3), (4, 0), \dots, (n, 0), (0, n+1) \dots \rightarrow |a_n| = n \Rightarrow \lim_{a_n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$$

## Esempi (calcolo di limiti)

$$\textcircled{1} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y} \quad \text{dove } \frac{x-y}{x+y} = \{ y \neq -x \} \rightarrow \text{Utilizzando le rette uscenti dall'origine: } y = \alpha x, x \neq 0$$

$f(x,y)$

Se la retta  $(\alpha)$  cambia, il numero cambia  
 $\rightarrow$  il limite in  $(0,0)$  NON ESISTE perché  
in ogni intorno di  $(0,0)$  trovo valori  
diversi

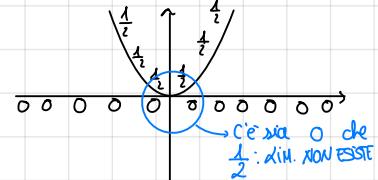
$$\textcircled{2} \quad f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \text{è definita fuori di } (0,0)$$

$$x^4 + y^2 = 0 \iff x=0 \quad y=0$$

$$f \text{ ristretta alla retta } y = \alpha x: f(x, \alpha x) = \frac{x^2 (\alpha x)}{x^4 + \alpha^2 x^2} = \frac{\alpha x^3}{x^2 (x^2 + \alpha^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x}{x^2 + \alpha^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \alpha^2} \stackrel{\alpha \neq 0}{=} \begin{cases} 0 & \alpha \neq 0 \implies 0 \quad \text{è vero che } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = 0? \quad \text{NO} \\ 0 & \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\text{Consideriamo la restrizione ad una parabola } y = \alpha x^2: f(x, \alpha x^2) = \frac{x^2 (\alpha x^2)}{x^4 + \alpha^2 x^4} = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$$



$$\textcircled{3} \frac{(x^2+y^2) - \sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} \underset{x \rightarrow x^2+y^2}{=} \frac{t-\sin t}{t^3} = \frac{\frac{t^3}{6} + O(t^3)}{t^3} \rightarrow \frac{1}{6}, \text{ quindi } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2+y^2) - \sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{1}{6}$$

fattoriale sent =  $t - \frac{t^3}{6} + O(t^3)$

funzione più esterna  $\frac{t-\sin t}{t^3}$   
non è definita intorno a 0

- CONO:  $x \in \mathbb{R}^n$  sarà detto CONO:  $\forall x \in X, \forall t > 0 \rightarrow tx \in X$ :  $X$  è cono se contiene tutta la semirettica uscente dall'origine e passante per ogni suo punto, origine esclusa

- FUNZIONI GEOMETRICHE su un CONO:  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X$  cono è  $\alpha$ -omogenea (positivamente omogenea di grado  $\alpha$ ) se  $f(tx) = t^\alpha f(x)$

Esempi

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy, \text{ voglio provare che è } 2\text{-omogenea: } f(tx,ty) = f(tx,ty) = t^2 x^2 + t^2 y^2 + t^2 xy = t^2 f(x,y)$$

$$f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \text{ è definita su } x^2+y^2 \neq 0 \text{ e quindi } (x,y) \neq (0,0)$$

$$g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \longrightarrow g(tx,ty) = \frac{t^2 x^2 - t^2 y^2}{t^2 x^2 + t^2 y^2} = t^0 g(x,y) \quad \text{ATT: grado 0}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{y^2+x^4} \longrightarrow f(tx,ty) = \frac{t^3 x^2 y}{t^4 y^2 + t^4 x^4} = t^{+1} \frac{tx^2 y}{y^2 + t^2 x^4} ? f(x,y) \longrightarrow \text{NON OMogenea}$$

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2+y^2) \longrightarrow f(tx,ty) = \operatorname{sen}(t^2(x^2+y^2)) \longrightarrow \text{NON OMogenea}$$

Se  $f$  e  $g$  sono  $\alpha$ -omogenee e  $\beta$ -omogenee rispettivamente, allora  $f \cdot g$  è  $\alpha+\beta$  omogenea

Dimostrazione

$$f(tx)g(tx) = t^\alpha f(x) + t^\beta g(x) = t^{\alpha+\beta} f(x)g(x)$$

Se  $f$  e  $g$  sono  $\alpha$ -omogenee e  $\beta$ -omogenee rispettivamente, allora  $f/g$  è  $\alpha-\beta$  omogenea

Dimostrazione

$$\frac{f(tx)}{g(tx)} = \frac{t^\alpha f(x)}{t^\beta g(x)} = t^{\alpha-\beta} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Se  $f$  è  $\alpha$ -omogenea e si ha  $f^\beta(x)$ , allora  $f^\beta(x)$  è  $\alpha\beta$  omogenea

Dimostrazione

$$f^\beta(x) = f^\beta(tx) = [f(tx)]^\beta = [t^\alpha f(x)]^\beta = t^{\alpha\beta} f^\beta(x)$$

Esempi

$$\sqrt[2]{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{-omogenea e quindi 1-omogenea}$$

$$\sqrt[3]{x^2+xy+y^2} = (x^2+xy+y^2)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \text{-omogenea}$$

$$x \frac{x^2-y^2}{x+y} \longrightarrow \text{grado 1: rapporto di omogeneità di grado 2} \implies 1+1=2: \text{grado 1}$$

- Lemma:  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha$ -omogenea  $\alpha > 0$ ,  $f$  limitata su  $X \cap B_1(0)$ . Allora  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Dimostrazione

$$f(x) = f(|x| \frac{x}{|x|}) = |x|^\alpha f\left(\frac{x}{|x|}\right) \longrightarrow 0 \leq |f(x)| = |x|^\alpha \left|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \leq k|x|^\alpha \longrightarrow \text{TENDE A 0}$$

$\downarrow$  norma di  $x$  verso il vettore di  $x \in \gamma_{B_1(0)}$

$\hookrightarrow$  perché  $f$  è limitata su  $B_1(0)$

Esempi

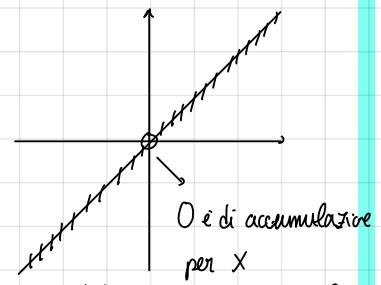
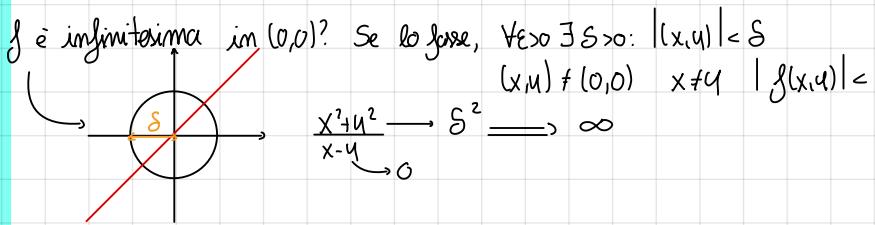
$$\frac{x^3 \cdot x^2 y}{x^2 + 2y^2} \longrightarrow \begin{cases} 3\text{-omogenea} \\ 1\text{-omogenea} \end{cases} \longrightarrow \text{Definita su } x^2 + 2y^2 \neq 0 \text{ e quindi } (x,y) \neq (0,0)$$

RAPPORTO di funzioni continue  $x^3 \cdot x^2 y$  e  $x^2 + 2y^2$ , il cui denominatore non si annulla mai su  $\{(x,y) | x^2 + 2y^2 = 1\}$  ed è quindi continuo su un compatto  $\{x^2 + 2y^2 = 1\}$

Teorema di Weierstrass:  $f$  è limitata

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x-y} \longrightarrow \begin{cases} 2\text{-omogenea} \\ 1\text{-omogenea} \end{cases} \longrightarrow \text{2-1-1-omogenea}$$

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: y \neq x\}$$



Restringendo la funzione al secondo quadrante ( $x < 0, y > 0$ ):  $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} f(x,y) = 0$   $f$  è limitata sul  $x \cap \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x^3}{1 - \cos \sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\sin t^3}{1 - \cos t} \cdot t^3$$

$$\frac{1}{1 - \cos \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2+y^2}{1 - \cos \sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\xrightarrow{x \neq 0} \frac{\sin x^3}{1 - \cos \sqrt{x^2+y^2}} \stackrel{x \neq 0}{=} \frac{\sin x^3}{x^3} \cdot \frac{x^3}{1 - \cos \sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

1-omogenea sul cono  $\{(x,y) : (0,0)\}^3$

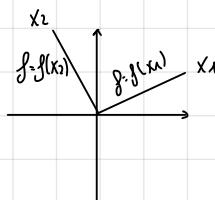
essendo anche continua e ovunque definita su  $\{x^2+y^2=1\} = \text{dom } \frac{x^3}{x^2+y^2} \cap \{x^2+y^2=1\}$

- Lemma: Una funzione 0-omogenea NON COSTANTE OSCILLA

Dimostrazione: Se  $f$  è NON COSTANTE, allora  $\exists x_1, x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$

$$f(tx_1) = t^0 f(x_1) = f(x_1)$$

$$f(tx_2) = t^0 f(x_1) = f(x_2)$$



$f$  non è costante sui raggi tracce  $tx_1$  e  $tx_2$  con valori diversi  $\rightarrow$  NON CONVERGE, comunque nel cerchio intorno dell'origine

### Esempio

$$\frac{1 - \cos \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+2y^2} = \frac{1 - \cos \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2+2y^2} \xrightarrow{\substack{\text{1-omogenea sul cono } \{(x,y) : (0,0)\}^3 \\ \text{costante sui raggi escenti dall'origine}}}$$

$\xrightarrow{1 \text{ su } y=0}$

$\xrightarrow{\frac{1}{2} \text{ su } x=0}$

Consideriamo adesso  $f(x,0) = \frac{1 - \cos |x|}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \Rightarrow$  NON c'è convergenza

Adesso consideriamo  $f(0,y) = \frac{1 - \cos |y|}{2y^2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} \frac{1}{4}$

- Funzioni  $\alpha$ -omogenee con  $\alpha < 0$

### Esempio

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow{} f(tx,ty) = \frac{1}{\sqrt{t^2(x^2+y^2)}} = |t|^{-1} f(x,y) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 = t^0 f(x,y)$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\infty \rightarrow$  da verificare:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in \text{dom } f, |(x,y)| < \delta, (x,y) \neq (0,0) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} > \varepsilon$

$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} > \varepsilon \rightarrow$  essendo entrambi i membri  $> 0 \iff \sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{\varepsilon}$ , equivalenti perché  $t \rightarrow 0$  è strettamente decrescente

$$\delta = \frac{1}{\varepsilon}$$

- Lemma: Se  $f$  è  $\alpha$ -omogenea,  $\alpha < 0$ , su un cono  $X$  allora  $\lim f = \infty$  se e solo se  $\exists K > 0 : |f(x)| > K$  su  $X \cap \text{Bolo}$

### Dimostrazione

$x$  fissato in  $\text{dom } f$   $f(tx) = t^\alpha f(x)$  e per  $t \rightarrow 0^+ \rightarrow t^\alpha \rightarrow +\infty$

Per provare che  $f(x)$  sia divergente:  $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n, f$   $\alpha$ -omogenea  $\rightarrow |f(x)| = |f(|x| \frac{x}{|x|})| = |x|^{\alpha} |f(\frac{x}{|x|})|$

Supponiamo che  $\exists K : |f(\frac{x}{|x|})| > K \quad \forall x \in X$   $\rightarrow$  Otteniamo  $|x|^\alpha |f(\frac{x}{|x|})| > K|x|^\alpha$   $\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$  perché  $\alpha < 0$

Se fosse  $\inf |f(\frac{x}{|x|})| = 0$  si avrebbe  $\forall \alpha < 0 \exists x_m : |f(\frac{x_m}{|x_m|})| < \frac{1}{m} \rightarrow \lim f(x) \neq \infty$  perché se lo fosse, allora

$$\inf |f(\frac{x}{|x|})| = 0$$

Vediamo  $\exists \delta > 0$ :  $x \in \text{dom } f$ ,  $|x| < \delta$ ,  $x \neq 0 \implies |f(x)| > \varepsilon$  —> Se viene scelto  $\varepsilon = 1$  si ha  $|f(x)| > 1$  per  $\frac{\delta}{2}$

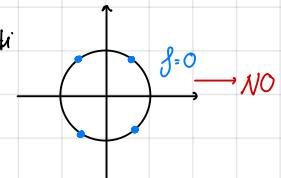
Dalla scelta precedente si ottiene  $|f(x)| = |x|^2 \left| f\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \implies \left| f\left(\frac{\delta}{2} \frac{x_n}{|x_n|}\right) \right| = \left(\frac{\delta}{2}\right) \left| f\left(\frac{x_n}{|x_n|}\right) \right| \xrightarrow[+ \infty]{\text{form}} 0$  su  $B_{\delta}(0)$

**Falsa**

### Esempi

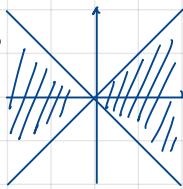
$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4} = \infty$ ? **NO**  $\frac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4}$  è (-2)-omogenea sul cono  $(x,y) \neq (0,0)$

Comportamento su  $\partial B_1(0)$ ? Rapporto di funzioni continue che si annulla sui 4 punti



$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \mathbb{N}}} \frac{x \log y}{x \log y} \quad \text{dom } f = \{y > 0\}$   $\xrightarrow[+ \infty]{\text{form}} 0$   $\rightarrow (0,0)$  è di accumulazione per  $\text{dom } f$

Caso 1:  $\mathcal{L} = \{(x,y) : |y| > |x|\} \implies (0,0)$  è di accumulazione anche per  $\mathcal{L}$



$$0 \leq |x \log y| = |x| |\log y| \underset{\mathcal{L}}{\leq} |y| |\log y| = |y \log y| \xrightarrow[0]{\text{Teorema del confronto}}$$

Caso 2:  $\mathcal{L} = \{y > 0\} \implies \text{dom } f$  massimale

$$\begin{aligned} x &\rightarrow 0 \\ y &= e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$f(x, e^{-\frac{1}{x^2}}) = x \log(e^{-\frac{1}{x^2}}) = x \left(-\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[0]{\text{il modello diverge}} \frac{1}{x} \text{ oscilla se } x \rightarrow 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 2y^2 - 2xy} \quad \frac{1}{f} \text{ ove } f \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0$

FORMA QUADRATICA: PROP. FONDAMENTALE:  $\lambda |x|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \leq \Lambda |x|^2$

$$x^2 - 2xy + 2y^2 = (x-y)^2 + y^2 > 0 \text{ e si annulla se e solo se } x-y=0 \text{ e } y=0$$

Definita positiva:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 2y^2 - 2xy} = +\infty$

### Limiti di FORME QUADRATICHE

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \implies \lambda |x|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \leq \Lambda |x|^2$$

Definita positiva:  $\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$  diverge a  $+\infty$

Definita negativa:  $\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$  diverge a  $-\infty$

In tutti gli altri casi OSCILLA

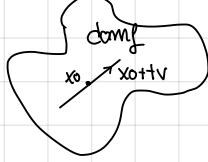
Semicodicità positiva ( $\lambda=0$ ): sull'autospazio di  $\lambda$  H è costantemente NULLA, altrrove diverge a  $+\infty$

Semicodicità negativa: sull'autospazio di  $\lambda$  H è costantemente NULLA, altrrove diverge a  $-\infty$

Indefinita: Sul minimo autovalore va a  $+\infty$ , sul massimo va a  $-\infty$

# Il calcolo differenziale

## • La DERIVATA DIREZIONALE



$h(t) = f(x_0 + tv)$  →  $v$  deve essere DIVERSO da 0

Si definisce la derivata direzionale (nella direzione di  $v$ ):  $f'_v(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$  se il limite ESISTE FINITO

SIMBOLI ALTERNATIVI

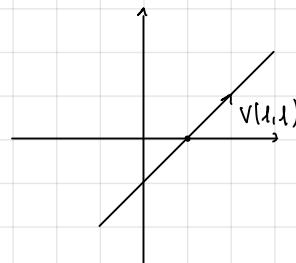
$$\begin{array}{l} \rightarrow f'_v(x_0) \\ \rightarrow \partial_v f(x_0) \\ \rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \end{array}$$

OSSERVAZIONE:  $f'_v(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t) - h(0)}{t} = h'(0)$

## Esempi

①  $\frac{\partial(x^2y)}{\partial v} \Big|_{x_0}$

$V = (1, 1)$



$$f(x, y) = x^2y \rightarrow (1, 0) + t(1, 1) = (1+t, t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((1, 0) + t(1, 1)) - f(1, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t, t) - f(1, 0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^2 t - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^2 = 1$$

ALTRÒ MODO:  $h(t) = f((1, 0), t(1, 1)) = f(1+t, t) = (1+t)^2 t$

$$f'_{(1,1)}(1, 0) = h'(0) \rightarrow h'(0) = (1+t)^2 + 2(1+t)t \Big|_{t=0} = 1$$

②  $f(x, y) = \begin{cases} 1 & (0, 0) \\ \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$

$$f'_{(2,1)}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \frac{\sin((2+t)^2 + 1^2)}{(2+t)^2 + 1^2} - 1 \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(5t^2) - 5t^2}{5t^3} =$$

$$\text{NUMERATORE: } \sin w - w \sim 0(w^3) \rightarrow \frac{\sin(5t^2) - 5t^2}{125t^6} \cdot \frac{125t^6}{5t^3} \rightarrow 0$$

$$\rightarrow -\frac{1}{6}$$

③  $f(x, y) = |xy| \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \rightarrow (0, 0) + t(1, 0) = (t, 0)$

$$h(t) = f(t, 0) = 0 \rightarrow h'(0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \rightarrow h(t) = f(t, t) = |t^2| = t^2 \rightarrow h'(0) = 2t \Big|_{t=0} = 0$$

④  $f(x, y) = |xy|^{1/2}$

$$g_{(1,1)}(0, 0) \rightarrow h(t) = g(t, t) = \sqrt{|t^2|} = |t| \text{ NON derivabile in } t=0$$

• DEFINIZIONE:  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ : DERIVATA PARZIALE di  $f$  rispetto a  $x_i \rightarrow$  SIMBOLI ALTERNATIVI

$$\begin{array}{l} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{array}$$

CALCOLO:  $f(x, y)$  nel punto  $(x_0, y_0)$ ,  $V = (1, 0) \rightarrow tv = (t, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

→ La derivata è quindi la derivata della funzione ottenuta da  $f$  bloccando tutte le variabili salvo  $x$

IN SOSTANZA:  $f(x_1, \dots, x_n)$

$$g(t) = f(x_1 + t, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{ALLORA } \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = g'(0)$$

## Esempio

①  $\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) = 2xy$

↓ finita

$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y) = x^2$

↓ finita

②  $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2) = 2x$

↓ finito in  $x$

$\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2) = 2z$

↓ finito in  $z$

### TEOREMA di FERMAT

$\hookrightarrow f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\rightarrow x_0 \in \overset{\circ}{\Omega}$  ( $x_0$  è interno ad  $\Omega$ )  $\implies f_v(x_0) = 0$

- $\rightarrow x_0$  sia di massimo o minimo locale
- $\rightarrow$  in  $x_0$  abbia una derivata direzionale  $f_v(x_0)$

### Controesempio

①  $f(x) = x$  su  $[0, 1]$   $\rightarrow$

$$f'(0) = f'(1) = 1$$

②  $f(x) = |x|$  minimo globale  $\implies$  locale ma  $f'(0)$  NON ESISTE

### Dimostrazione

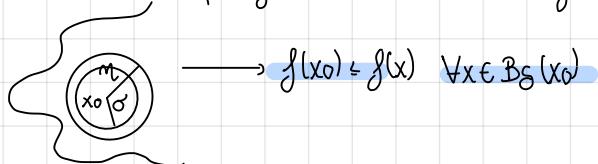
$x_0$  è di minimo locale per  $f$  se  $\exists \delta > 0$ :  $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in \text{dom } f \cap B_\delta(x_0)$

$x_0$  è di massimo locale per  $f$  se  $\exists \delta > 0$ :  $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in \text{dom } f \cap B_\delta(x_0)$

Poiché  $x_0 \in \overset{\circ}{\Omega}$ ,  $\exists m > 0$ :  $B_m(x_0) \subseteq \Omega$

Poiché  $x_0$  è di minimo locale per  $f$   $\exists \sigma > 0$ :  $\forall x \in \text{dom } f \cap B_\sigma(x_0)$ ,  $f(x_0) \leq f(x)$

Scelto  $\delta = \min\{m, \sigma\}$



Per l'ipotesi 3,  $\exists f_v(x_0)$   $\rightarrow$  osserviamo che  $|x_0 + tv - x_0| = |t||v|$  e quindi  $x_0 + tv \in B_\delta(x_0)$   
 $\rightarrow |t||v| < \delta \iff |t| < \frac{\delta}{|v|} = \left[ -\frac{\delta}{|v|}, \frac{\delta}{|v|} \right]$

Si definisce  $h(t) = f(x_0 + tv)$  ( $\rightarrow h(0) = f(x_0)$ )

- $\rightarrow h$  è definita su  $\left[ -\frac{\delta}{|v|}, \frac{\delta}{|v|} \right]$
- $\rightarrow 0$  è interno a  $\left[ -\frac{\delta}{|v|}, \frac{\delta}{|v|} \right]$
- $\rightarrow h$  ha un minimo locale in  $0$  perché  $h(0) = f(x_0) \leq f(x_0 + tv) = h(t)$

Concludendo, per il teorema di Fermat,  $h'(0) = 0$

### Esempio

$f(x,y) = |xy|^{1/2}$  ha solo le derivate parziali:  $\begin{cases} f_x(0,0) \\ f_y(0,0) \end{cases} \rightarrow$  in ogni altra direzione non è derivabile

$(0,0)$  è di MINIMO GLOBALE

$\Delta$  ATT: NON è vero che la derivabilità implica la continuità

### Esempio

$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (0,0) \\ \left(\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right)^2 & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

$\rightarrow f$  ha tutte le derivate direzionali in  $(0,0)$  (e sono 0) ma è discontinua in  $(0,0)$

① Derivate direzionali:  $v = (\alpha, \beta) \rightarrow f_v(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ \left( \frac{\alpha^2 t^2 \beta t}{\alpha^4 t^4 + \beta^2 t^2} \right)^2 - 0 \right] = \frac{1}{t} \frac{\alpha^4 \beta^2 t^6}{t^4 (\alpha^4 t^2 + \beta^2 t^2)} =$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } \beta \neq 0 \\ \infty & \text{se } \beta = 0 \end{cases}$$

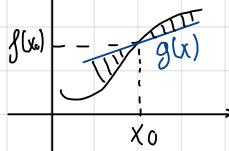
② Non continuità

$\hookrightarrow y = kx^2 \rightarrow f(x, kx^2) \underset{x \neq 0}{=} \left( \frac{x^2 k x^2}{x^4 + k^2 x^4} \right)^2 = \left( \frac{x^4 k}{x^4 (1+k^2)} \right)^2 = \frac{k^2}{(1+k^2)^2}$ : COSTANTE e quindi  $f$  oscilla vicino a 0

- $\rightarrow$  per  $k=0 \rightarrow$  asse  $x$  e  $f=0$
- $\rightarrow$  per  $k=1 \rightarrow y=x^2$  e  $f=\frac{1}{4}$

## Funzioni differenziali

Retta tangente ad un grafico per  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$$y = f(x_0) + \alpha(x - x_0) = g(x)$$

$g(x_0) = f(x_0) \rightarrow$  coincidono nel punto

Cosa ha di particolare la retta tangente?  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} [f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)] =$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \alpha \quad \begin{array}{l} \text{se } f \text{ è} \\ \text{derivabile} \\ \text{in } x_0 \end{array} \quad f'(x_0) - \alpha \quad \boxed{\exists \neq 0 \text{ se } \alpha \neq f'(x_0)} \\ \boxed{0 \text{ se } \alpha = f'(x_0)}$$

caso 1:  $f'(x_0) + \alpha \rightarrow f(x) - g(x) \in O(x - x_0)$

caso 2:  $f'(x_0) = \alpha \rightarrow f(x) - g(x) \in o(x - x_0)$

In più variabili:  $\alpha = f(x, u)$ , piano tangente in  $(x_0, u_0) \rightarrow (x_0, u_0, z_0) = (x_0, u_0, f(x_0, u_0))$  è graph f (piano tangente)  $g(x, u) = f(x_0, u_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(u - u_0) \rightarrow$  Per porre il piano tangente è necessario scegliere  $\alpha$  e  $\beta$  giunti

Applicazione lineare da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$

Definizione:  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in \Omega$ .  $f$  si dice differenziale in  $x_0$  se  $\exists A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lineare tale che  $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|} = 0$ , dove  $w = x - x_0$ ,  $A(w) = \alpha w = \alpha(x - x_0)$

Numeratore infinitesimo di ORDINE SUPERIORE del denominatore

NOTA: Se  $f$  è differenziale  $\rightarrow \lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|} = 0$

TEOREMA: Il differenziale, se esiste, è unico

### Dimostrazione

$A, B$  lineari su  $\mathbb{R}^n$  a valori in  $\mathbb{R}$

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|} = 0$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - B(w)|}{|w|} = 0$$

Sottraendo si ottiene:  $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{|w|} [B(w) - A(w)] = 0 \rightarrow$  Essendo  $B$  ed  $A$  lineari, sono 1-omogenei.

Dall'1-omogeneità segue che  $B - A$  è 1-omogenea e ne segue ancora che  $\frac{B(w) - A(w)}{|w|} \rightarrow 0$ -omogenea

Essendo un rapporto di funzioni 1-omogenee, è 0-omogenea

Avendo che  $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{B(w) - A(w)}{|w|} = 0$  e la funzione è 0-omogenea,  $\frac{B(w) - A(w)}{|w|}$  è COSTANTE

essendo costante, converge al suo valore e quindi  $\frac{B(w) - A(w)}{|w|} = 0 \rightarrow$  Si conclude  $B(w) - A(w) = 0$

TEOREMA: Se  $f$  è differenziale in  $x_0$ , è continua in  $x_0$

### Dimostrazione

La tesi è provata se  $\lim_{w \rightarrow 0} [f(x_0+w) - f(x_0)] = 0$

$$f(x_0+w) - f(x_0) = f(x_0+w) - f(x_0) - A(w) + A(w) = |w| \frac{f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)}{|w|} + A(w) \rightarrow 0$$

Facendo tendere  $w$  a 0  $\downarrow$   $\underbrace{\alpha w, \alpha \in \mathbb{R}^n [\sum_i^n \alpha_i w_i]}_{\rightarrow 0 \text{ per differenzialità}}$   $\rightarrow w_i \rightarrow 0 \forall i$  e quindi  $\sum_i^n \alpha_i w_i \rightarrow 0$

TEOREMA: Se  $f$  è differenziale in  $x_0$ , allora  $f$  ha tutte le derivate direzionali ed inoltre  $f_V(x_0) = A(w)$

## Dimostrazione

Per provare la tesi occorre verificare che  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} = A(v)$

Il precedente limite equivale a  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0) - A(tv)}{t} = 0 \rightarrow$  Dovendo fare  $w = tv$

Poiché  $A$  è lineare, ciò equivale a  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0) - A(tv)}{t} = 0$

E' necessario porre il VALORE ASSOLUTO:  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+tv) - f(x_0) - A(tv)|}{|t|} = 0$

Per fare il cambio di variabile bisogna moltiplicare e dividere per  $|v|$ :  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+tv) - f(x_0) - A(tv)|}{|t||v|}$

Tale limite è corretto perché  $\frac{|f(x_0+tv) - f(x_0) - A(tv)|}{|tv|}$  è funzione composta di  $w = tv$  ( $t \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \Rightarrow w \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ )

e  $\frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|} \rightarrow$  NON è definita in  $w=0$

$\rightarrow 0$  perché  $f$  è differenziale

- GRADIENTE (DERIVATA di  $f$  ( $f'(x_0)$ ))

$$\nabla f(x_0) = (f_{x_1}(x_0), f_{x_2}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$$

SIMBOLO: Nabla

- COROLLARIO:  $f$  differenziale in un punto  $x_0$  ed  $A$  il suo differenziale. Allora  $f_v(x_0) = A(v)$

RISULTATO:  $A(v) = A\left(\sum_i^n v_i e_i\right) = \sum_i^n v_i A(e_i) \rightarrow A(e_i) = f_{e_i}(x_0) =$  derivata parziale di  $f$  nella direzione di  $x_i$

$$f_{e_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = d_{x_i} f(x_0)$$

$$A(v) = \sum_i^n v_i f_{x_i}(x_0) \rightarrow \text{Utilizzando la definizione di gradiente si ha: } A(v) = \underbrace{\nabla f(x_0)}_{\substack{\in \mathbb{R}^n \\ \text{PRODOTTO SCUARE}}} \quad \downarrow$$

Si denoterà com  $A(w) = df(x_0, w)$   $\rightarrow$  simbolo di differenziale  $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|} = 0 \rightarrow df: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$\rightarrow \text{dom } f \subseteq \mathbb{R}^n$

$\rightarrow$  lineare rispetto a  $w$ , fissato  $x_0$

## Esempio

$$f(x,y) = |xy| \text{ in } (0,0)$$

Verifica della presenza delle derivate parziali  $f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \rightarrow$  lo stesso per  $f_y(0,0)$

Ne segue che  $\nabla f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (0,0)$

Il candidato differenziale è  $\nabla f(0,0) \cdot v = 0v_1 + 0v_2 = 0$

$f$  sarà differenziale in  $(0,0)$  se e solo se  $w = (h,k) : \lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(0+h,0+k) - f(0,0) - 0 \cdot h + 0 \cdot k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ ?

Verifica:  $f(0+h,0+k) = |hk|$

$$|f(0,0)| = |0 \cdot 0| = 0$$

$$|df|(0,0, h, k) = 0 \cdot h + 0 \cdot k = 0$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} \rightarrow \begin{cases} 2\text{-omogenea} & \rightarrow 1\text{-omogenea, continua e limitata su } \sqrt{x^2+y^2} = 1 \rightarrow 0 \\ & \rightarrow 1\text{-omogenea} \end{cases}$$

- Funzioni LINEARI:  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  e  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

$\rightarrow$  differenziale:  $df(x_0, w) = f(w) \rightarrow \lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - f(w)|}{|w|} = ? = 0$

$\rightarrow$  Sì, il numeratore è nullo per la linearità di  $f$

### • FORMULA per il calcolo del DIFFERENZIALE

$$\hookrightarrow df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \text{ che equivale a } df(x_0, w) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) dx_i(w)$$

Introduciamo l'applicazione lineare  $T_{f_i}(w) = w_i \rightarrow$  Essendo lineare:  $dT_{f_i}(x_0, w) = w_i$ .

Utilizziamo adesso la formula iniziale:  $df(x_0, w) = \nabla f(x_0)w = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)w_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) dT_{f_i}(w) \rightarrow f'(x) = x_i$

FORMA FINALE:  $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

### • PROVARE la DIFFERENZIABILITÀ

①  $f$  è CONTINUA? Se NON lo è, NON è differenziabile

②  $f$  ha TUTTE le DERIVATE PARZIALI in  $x_0$ ? Se NON le ha, NON è differenziabile

③ Se  $f$  ha TUTTE le derivate parziali, è vero che  $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - \nabla f(x_0)w|}{|w|} = 0$ ? Se SÌ, è

differenziabile, altrimenti NON è differenziabile

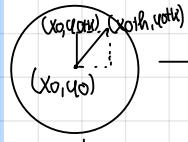
### • TEOREMA del DIFFERENZIALE

$\hookrightarrow$  Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $x_0 \in \Omega$ . Esistono e sono continue  $f_{x_i}$  in  $\Omega$

$$f \in C^1(\Omega)$$

Allora  $f$  è differenziabile in  $x_0$

Dimostrazione (in 2 variabili)



$\rightarrow$  Scegli INTERNA ad  $\Omega$  esistente per l'ipotesi 1

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)$$

$\hookrightarrow$  ANALIZZANDO i primi 2 termini:  $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) =$  → Teorema di Lagrange applicato a  $t \rightarrow f(t, y_0+k)$   
 $= \underbrace{[f(x_0+h) - f(x_0)]}_{h} f_x(\xi, y_0+k)$  Derivata:  $f_x(t, y_0+k)$

$\hookrightarrow$  ANALIZZANDO gli ultimi 2 termini:  $f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{[f(y_0+k) - y_0]}_{k} f_y(x_0, n)$

QUINDI  $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, y_0+k)h + f_y(x_0, n)k$

$\hookrightarrow$  STUDIAMO il limite  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f_x(\xi, y_0+k)h + f_y(x_0, n)k - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k =$   
 $= \lim_{(0,0)} \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} [f_x(\xi, y_0+k) - f_x(x_0, y_0)] + \lim_{(0,0)} \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} [f_y(x_0, n) - f_y(x_0, y_0)]$

⚠  $\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$  e  $\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$  sono 0-omogenei e limitati  $\leq 1$

⚠  $(h, k) \rightarrow (0,0)$  e  $x_0 < \xi < x_0 + h$  e  $y_0 < n < y_0 + k$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

ALLORA dato che  $\xi \rightarrow x_0 \implies (x_0, n) \rightarrow (x_0, y_0)$   
 $n \rightarrow y_0 \implies (\xi, y_0+k) \rightarrow (x_0, y_0)$

Ne segue che i termini tra [] sono INFINITESIMI per la continuità di  $f_x$  ed  $f_y$  e sono moltiplicati per i termini limitati  $\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$  e  $\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ , di cui il limite è NULLO

Come è fatto il differenziale?

$$\rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, f \in C^1(\mathbb{R}) \rightarrow df(x_0, w) = \nabla f(x_0)w \quad \begin{matrix} \text{IRN} \\ \text{EIR} \end{matrix}$$

$$\rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - Aw|}{|w|} = 0 \text{ e } A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, A(w) = aw \quad \begin{matrix} \text{EIR} \end{matrix}$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - Aw|}{|w|} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - Aw|}{w} \iff \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(x_0+w) - f(x_0) - Aw}{w} = 0$$

$$= \frac{f(x_0+w) - f(x_0)}{w} - a \implies a = f'(x_0) \implies df(x_0, w) = f'(x_0)w$$

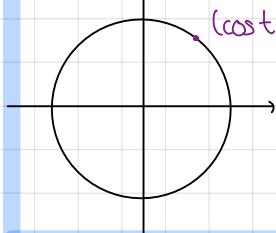
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N \rightarrow$  La dimostrazione varia con  $\downarrow$  Abiamo al numeratore in  $\mathbb{R}^N$

$$a \in \mathbb{R}^N \quad (w \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(x_0+w) - f(x_0) - Aw}{w} = 0 \iff \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(x_0+w) - f(x_0)}{w} - \frac{Aw}{w} = 0$$

Si ha la tendenza a 0 se e solo se  $f_i$  è derivabile in  $x_0$  e inoltre  $a_i = f'_i(x_0) \implies df(x_0, w) = \begin{pmatrix} f'_1(x_0) \\ \vdots \\ f'_N(x_0) \end{pmatrix} \cdot w$ , dove  $f'(x_0) = (f'_1(x_0), f'_2(x_0), \dots, f'_N(x_0))$

Esempio



$$\rightarrow t \in [0, 2\pi]$$

$$f(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$f'(t) = (\cos' t, \sin' t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M \text{ differenziabile, } \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M \rightarrow f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x))$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - Aw|}{|w|} = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^M, \forall a \in \mathbb{R}^{M \times N}$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} \left| \frac{1}{|w|} \left[ f(x_0+w) - f(x_0) - Aw \right] \right|_{\mathbb{R}^M} = 0 \iff \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{|w|} \left[ f(x_0+w) - f(x_0) - \frac{Aw}{|w|} \right] = 0 \quad \forall i = 1 \dots M$$

e quindi  $a_i = (f_i)_x_1, (f_i)_x_2, \dots, (f_i)_x_N \rightarrow$  gradiente della componente  $i$ -esima di  $f$

$$a = \begin{pmatrix} (f_1)_x_1 & (f_1)_x_2 & \dots & (f_1)_x_N \\ (f_2)_x_1 & (f_2)_x_2 & \dots & (f_2)_x_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_M)_x_1 & (f_M)_x_2 & \dots & (f_M)_x_N \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{Matrice Jacobiana (J. Jacobbi)}: f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix}_x_1, \dots, \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix}_x_N$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} f'(x) \\ \vdots \\ f'(x) \end{pmatrix}_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \quad \forall i = 1 \dots M \quad \forall j = 1 \dots N$$

Schema riassuntivo:  $df(x_0, w) = f'(x_0)w, f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$

$N = M = 1 \rightarrow f'(x_0)$  è la derivata dell'unica componente scalare rispetto all'unica variabile

$N = 1, M > 1 \rightarrow f'(x_0)$  è il vettore delle  $M$  derivate delle componenti di  $f$  rispetto all'unica variabile

$N > 1, M = 1 \rightarrow f'(x_0)$  è il vettore delle  $N$  derivate parziali rispetto alle variabili indipendenti

$N > 1, M > 1 \rightarrow f'(x_0)$  è la matrice la cui riga  $i$ -esima ( $i = 1 \dots M$ ) contiene le  $N$  derivate parziali rispetto alle variabili ( $j = 1 \dots N$ )

- TEOREMA:  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{S}$  e  $g: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^p$  ed esistono  $df(x_0, w)$  e  $Dg(f(x_0), v)$   
Allora, posto  $h(x) = g(f(x))$  si ha  $dh(x_0, w) = Dg(f(x_0), df(x_0, w))$
- TEOREMA:  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{S}$ ,  $g: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^p$  differenziali.  $f$  in  $x_0$  e  $g$  in  $f(x_0)$ . Allora, posto  $h(x) = g(f(x))$  si ha  $h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$  — Prodotto opportuno

Esempio

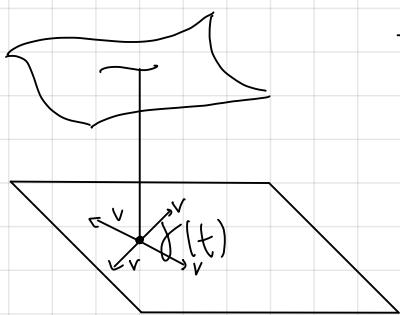
$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N \quad N \geq 1$  (curva parametrica) differenziale ( $= \exists \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_N \end{pmatrix}$ )

$f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  differenziale

$$h(t) = f(\gamma(t)) \quad h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h'(t) = \underbrace{f'(\gamma(t))}_{\in \mathbb{R}^N} \underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{\in \mathbb{R}^N} \rightarrow \text{Prodotto scalare} = \nabla f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)$$

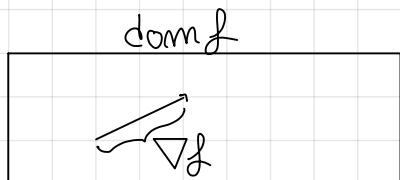
- Applicazione gradiente: Massima/minima pendenza  
 $h(t) = f(\gamma(t)) \quad h'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)$



→ Se  $f$  è differenziale allora  $\nabla f(x_0) = \nabla f(x_0)v$   
 $|\nabla f(x_0)v| \leq |\nabla f(x_0)|v|$

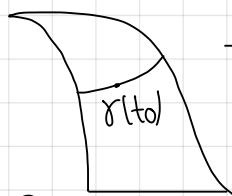
Massima pendenza:  $v$  è parallelo a  $\nabla f(x_0)$   
 $\nabla f(x_0)v$  è max se  $v = \lambda \nabla f(x_0)$ ,  $\lambda > 0$

Il gradiente indica la direzione nella quale salgo / scendo più rapidamente



→  $\nabla f$  è la direzione di massima pendenza ascendente

- Applicazione gradiente: Velocità di una curva



→ Equazione curva di livello:  $f(\gamma(t)) = \text{costante} \rightarrow \nabla f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) = 0$   
La velocità della curva  $\gamma$  è PERPENDIColare al gradiente nel punto

## RETTE e PIANI TANGENTI

→ CASO 1:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad y = g(x) \quad \{(x, y) : x \text{ ed } y = f(x)\} \equiv \text{graph } f$$

$f(x)$  → funzione di cui dobbiamo trovare la tangente

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ è la retta per } (x_0, f(x_0)) \text{ con coeff. angolare } f'(x_0)$$

$$g(x) - f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\downarrow \quad df(x_0, x - x_0)$$

Avevamo  $w = x - x_0$  e quindi  $x = x_0 + w$

Se  $f$  è differenziale in  $x_0$ , il secondo membro è  $O(|x - x_0|)$

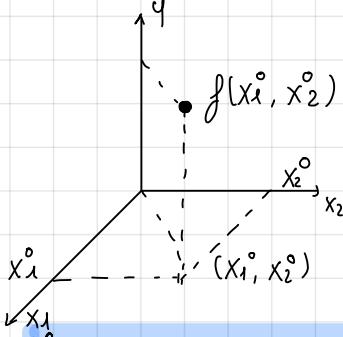
Esempio

$f(x) = \sin x$  tangente nel punto  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \text{Retta tangente}$$

$$f'(x) = \cos x \rightarrow f'(x_0) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

→ CASO 2:  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x,y) \in \mathbb{R}^2$ , graph  $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}: y = f(x)\} \triangleleft \mathbb{R}^2$



→  $f(x_1, x_2)$  di cui dobbiamo trovare il piano tangente

$$\text{Piano tangente: } f(x_1, x_2) + df((x_1^o, x_2^o), (x_1 - x_1^o, x_2 - x_2^o)) = g(x_1, x_2)$$

$$g(x_1, x_2) = f(x_1^o, x_2^o) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^o, x_2^o)(x_i - x_i^o) \rightarrow \nabla f(x^o)(x - x^o)$$

### Esempio

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$$

$$x_1^o = 1$$

$$x_2^o = 2$$

$$y = f(x_1^o, x_2^o) = 2$$

Piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(1, 2, 2)$

$$\begin{aligned} f_{x_1}(x_1, x_2) &= 2x_1 x_2 \Big|_{\substack{x_1=1 \\ x_2=2}} = 4 & y = \underbrace{f(1, 2)}_2 + \underbrace{4(x_1 - 1)}_{x_1^o} + \underbrace{1(x_2 - 2)}_{x_2^o} = 2 + 4(x_1 - 1) + (x_2 - 2) \\ f_{x_2}(x_1, x_2) &= x_1^2 \Big|_{\substack{x_1=1 \\ x_2=2}} = 1 \end{aligned}$$

→ CASO 3:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ , curva PARAMETRICA →  $\gamma(t) = \begin{cases} a + bt \\ c + dt \end{cases} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

→ sostegno di  $f$ -curva di  $f$ - "curva vera"

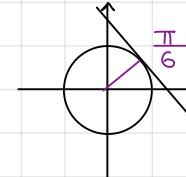
$\dot{\gamma}(t)$  è la funzione di cui dobbiamo trovare la tangente

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0), \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N \rightarrow \gamma(t) - \gamma(t_0) = \gamma(t) - \gamma(t_0) - \gamma'(t_0)(t - t_0) = o(|t - t_0|) \rightarrow \text{Se } f \text{ è differenziabile}$$

### Esempio

retta tangente a  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  in  $\gamma(\frac{\pi}{6}) = (\sqrt{3}/2, 1/2)$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \Big|_{t=\frac{\pi}{6}} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$



$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}(t - \pi/6) \xrightarrow{S=t-\frac{\pi}{6}} \sigma(S) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + S \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S=\frac{S}{2}} \sigma(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

→ La velocità  $\dot{\gamma}(t_0)$  è la direzione della tangente a  $\gamma$  in  $\gamma(t_0)$

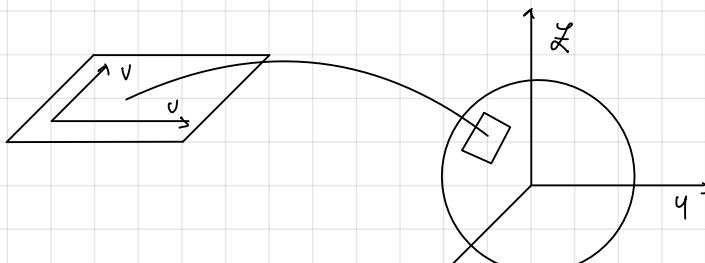
STRATEGIA: occorre disporre di  $t_0 \rightarrow$  tangente alla circonferenza unitaria in  $(1, 0) = \gamma(t_0)$

$$\downarrow \quad \gamma(t_0) = \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \cos t_0 = 1 \rightarrow t_0 = 0 + k\pi \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin 0 \\ \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma(0)$$

direzione tangente  $\begin{pmatrix} \sin t_0 \\ \cos t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\dot{\gamma}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \dot{\gamma}(0)$$

→ CASO 4:  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (superficie parametrica)



→ Il sostegno (l'immagine) è l'oggetto geometrico più vicino ad una superficie della geometria euclidea

$$\begin{aligned} g(\alpha, \beta) &= f(u_0, v_0) + df((u_0, v_0), (\alpha - u_0, \beta - v_0)) = f(u_0, v_0) + f'(u_0, v_0)(\alpha - u_0) = \\ &= f(u_0, v_0) + (\alpha - u_0) f_u(u_0, v_0) + (\beta - v_0) f_v(u_0, v_0) \end{aligned}$$

Prima componente incognita:

Prima colonna della Jacobiana

punto di tangenza

Secondo comp. incognita  $\beta - v_0$

↓

↓

Seconda colonna della Jacobiana

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = f(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$$

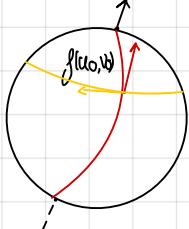
→ punto di tangenza

$$A = f_u(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$$

$$B = f_v(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$$

$$g(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + (\alpha - u_0) A + (\beta - v_0) B$$

Ma cosa sono  $f_u(u_0, v_0)$  e  $f_v(u_0, v_0)$ ?



$f_u(u_0, v_0)$  richiede di tenere bloccata  $v_0$  e derivare rispetto ad  $u$

$f_v(u_0, v_0)$  richiede di tenere bloccata  $u_0$  e derivare rispetto a  $v$

Il sostegno del piano tangente è

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \langle f_u(u_0, v_0) + f_v(u_0, v_0), \cdot \rangle$$

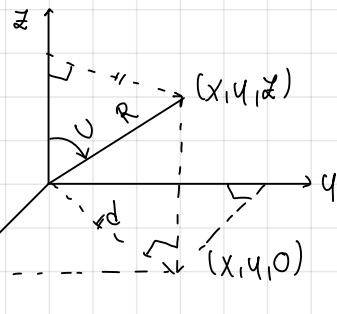
$f(u_0, v_0)$

### Esempio

$$x(u, v) = \sin u \cos v$$

$$y(u, v) = \sin u \sin v$$

$$z(u, v) = \cos u$$



$$u \in [0, \pi]$$

$$z = R \cos u$$

$$d = R \sin u$$

$$x = d \cos v = R \sin u \cos v$$

$$y = d \sin v = R \sin u \sin v$$

→ coordinate POLARI

$$\phi(u, v) = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}$$

$$\phi_u(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \cos u_0 \cos v_0 \\ \cos u_0 \sin v_0 \\ -\sin u_0 \end{pmatrix}$$

$$\phi_v(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} -\sin u_0 \sin v_0 \\ \sin u_0 \cos v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ due spostamenti sul piano tangente

$$\Psi(x, \beta) = \phi(u_0, v_0) + \alpha \phi_u(u_0, v_0) + \beta \phi_v(u_0, v_0) \quad \rightarrow \text{Piano affine}$$

punto di tangenza

$$\text{Vettore NORMALE: } v(\phi(u_0, v_0)) = \phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \cos u_0 \cos v_0 \\ \cos u_0 \sin v_0 \\ -\sin u_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin u_0 \sin v_0 \\ \sin u_0 \cos v_0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin^2 u_0 \cos v_0 \\ -(-\sin u_0)^2 \sin v_0 \\ \sin u_0 \cos u_0 \cos^2 v_0 + \sin u_0 \cos u_0 \sin v_0^2 \end{pmatrix} = \frac{\sin u_0}{\cos u_0} \begin{pmatrix} \sin u_0 \cos v_0 \\ \sin u_0 \sin v_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi(u_0, v_0)$$

$$\text{In generale: } \phi(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

→ il piano normale al vettore normale  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ , cioè il piano tangente per  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  è

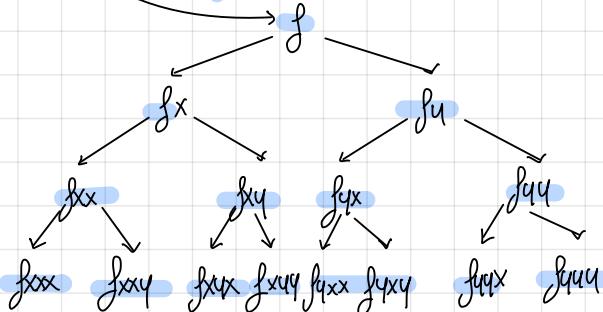
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

## Le DERIVATE SECONDE

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$   $\rightarrow f_{x_1 x_2} = (f_{x_1})_{x_2} \rightarrow$  prima la derivata più vicina al simbolo di  $f$   
 $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f \rightarrow$  anche in questo caso si esegue prima la derivata più vicina al simbolo di  $f$

### Esempio

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} (x^2 y^2) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} x^2 y^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x^2 y) = 4xy$$



1 funzione  
m° derivate prime  
n° derivate seconde  
m³ derivate terze

- DEFINIZIONE:  $f \in C^k(\Omega)$  se  $f$  è dotata di tutte le derivate di ordine  $k$ , e sono continue in  $\Omega$   
 $\rightarrow f \in C^2(\Omega) \iff f, f_{x_1}, \dots, f_{x_m}, f_{x_1 x_1}, f_{x_1 x_2}, \dots, f_{x_1 x_m}, \dots, f_{x_m x_m} \in C^0(\Omega)$

- TEOREMA di CLAIRAUT-SCHWARTZ: Se  $f \in C^2(\Omega)$ , allora  $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$

$\rightarrow$  Ogni derivata seconda NON dipende dall'ordine con cui viene derivata

### Esempio

$$f(x,y) = x^3 y^2 \in C^0(\mathbb{R}^2)$$

$$f_x = 3x^2 y^2 \in C^0(\mathbb{R}^2)$$

$$f_y = 2x^3 y \in C^0(\mathbb{R}^2)$$

$$f_{xy} = 6x^2 y \implies \text{Uguali per il TEOREMA}$$

$$f_{yx} = 6x^2 y$$

- La MATRICE HESSIANA  $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \rightarrow$  Matrice Hessiana SIMMETRICA in  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Hessiana SIMMETRICA in } \mathbb{R}^3$$

### La FORMULA di TAYLOR

$\rightarrow f \in C^N(\Omega), \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $\Omega$  aperto,  $x \in \Omega \rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + R_N(x-x_0)$

$\rightarrow$  RESTI  $\rightarrow$  Il resto di Peano:  $R_N(x-x_0) = o(|x-x_0|^N)$

$\rightarrow$  Il resto di Lagrange:  $R_N(x-x_0) = \frac{1}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi)(x-x_0)^{N+1}$ , dove  $\xi \in [x_0, x]$

⚠ NOTE in più variabili

$\rightarrow K$  è un multiindice:  $K = (k_1, k_2, \dots, k_m)$

$$K! = k_1! k_2! \dots k_m!$$

$$|K| = k_1 + k_2 + \dots + k_m$$

$$f^{(K)} = \frac{\partial^{|K|}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} f$$

$$w = x - x_0 \rightarrow w^k = w_1^{k_1} w_2^{k_2} \dots w_m^{k_m}$$

$\rightarrow$  Se  $k_i = 0$ :  $w_i^0 = 1$

$$0! = 1$$

La formula di Taylor (Gregory) vale in più variabili interpretando  $K$  come multiindice  $\rightarrow f(x_0 + w) = \sum_{|K|=0}^N \frac{1}{K!} f^{(K)}(x_0) w^K + R_N(w) =$

$$= \sum_{\substack{m_1, \dots, m_n > 0 \\ \sum_i m_i \leq N}} \frac{1}{m_1! m_2! \dots m_n!} \frac{\partial^{\sum_i m_i}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}} f(x_0) w_1^{m_1} w_2^{m_2} \dots w_n^{m_n} + R_N(w)$$

Altra forma:  $\sum_{M=0}^N \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \dots + k_n = M}} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!} f_{x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}}(x_0) w_1^{k_1} w_2^{k_2} \dots w_n^{k_n} + R_N(w)$

$\downarrow$   
 $m, M$  fissati  $\rightarrow M = 3, m = 3$        $k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_3 = 3 - k_1 - k_2$   
 $0 \quad 0 \quad 3$   
 $0 \quad 1 \quad 2$        $\rightarrow$  "Numeri" crescenti  
 $0 \quad 2 \quad 1$   
 $0 \quad 3 \quad 0$   
 $1 \quad 0 \quad 2$   
 $1 \quad 1 \quad 1$   
 $1 \quad 2 \quad 0$   
 $2 \quad 0 \quad 1$   
 $2 \quad 1 \quad 0$   
 $3 \quad 0 \quad 0$

### Esempio

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

$$x_0 = (0, 0)$$

$$w = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) = (0, 0) + \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$f(x_0) = f(0, 0) = 0$$

$$f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)(x - x_0) + f_y(0, 0)(y - y_0) + \boxed{\frac{1}{0! 2!} f_{xy}(0, 0)(y - y_0)^2 + \frac{1}{1! 1!} f_{xy}(0, 0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2! 0!} f_x(0, 0)(x - x_0)^2}$$

$\boxed{\text{Kx Ky}}$

$\boxed{\text{M}} : M = Kx + Ky = 2 \rightarrow \begin{matrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix} \rightarrow +$

⚠  $f(x, y) = \sin(xy)$

$$\rightarrow f_x = \cos(xy)y$$

$$\rightarrow f_y = \cos(xy)x$$

$$\rightarrow f_{xx} = y(-\sin(xy)) = -y^2 \sin(xy) \rightarrow f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = 0$$

$$\rightarrow f_{xy} = -\sin(xy)xy + \cos(xy)$$

$$\rightarrow f_{yy} = -\sin(xy)x^2$$

$$\rightarrow f_{xy}(0, 0) = 1$$

Quindi  $\sin(xy) = 0 + 0 + 1xy + R_2(x, y) \rightarrow \sin(xy) = xy + R_2(xy)$ , dove  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{R_2(x, y)}{|(x, y)|^2} = 0$

CNS per massimi e minimi

$\hookrightarrow f \in C^2[a, b]$ ,  $x_0 \in ]a, b[$ ,  $f'(x_0) = 0$  (Fermat)  $\rightarrow f(x_0 + w) = f(x_0) + f'(x_0)w + \frac{1}{2!} f''(x_0)w^2 + O(w^2)$

$$\rightarrow f(x_0 + w) - f(x_0) = w^2 \left[ \frac{f''(x_0)}{2!} + \frac{O(w^2)}{w^2} \right] \rightarrow w^2 > 0 \rightarrow \boxed{w \rightarrow 0} \frac{f''(x_0)}{2!} \text{ perché } \frac{O(w^2)}{w^2} \xrightarrow{w \rightarrow 0} 0$$

Per il teorema della perpendicolarità del segno,  $\boxed{}$  ha lo stesso segno di  $f''(x_0)$   $\rightarrow$  Se  $f''(x_0) < 0$  si ha un massimo, mentre si ha un minimo se  $f''(x_0) > 0$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \text{ con } f^{(k)}(x_0) \neq 0$$

$$\rightarrow f(x_0 + w) = f(x_0) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)w^k + O(w^k) \rightarrow f(x_0 + w) - f(x_0) = w^k \left[ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \frac{O(w^k)}{w^k} \right]$$

$\rightarrow \boxed{}$  ha lo stesso segno della derivata  $k$ -esima

- Se è PARI
  - $> 0$ : punto di minimo
  - $< 0$ : punto di massimo
- Se è DISPARI  $\rightarrow$  flesso

$\exists m$  più variabili:  $f \in C^2$ ,  $f'(x_0) = \nabla f(x_0) = 0$

$$f(x_0 + w) - f(x_0) = \cancel{f'(x_0)w} + \underbrace{\frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^m f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j}_{\text{forma quadratica hessiana}} + o(|w|^2)$$

$$f'(x_0) = \nabla f(x_0) = 0 \quad w \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

$$\rightarrow f(x_0 + w) - f(x_0) = |w|^2 \left[ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j + \frac{o(|w|^2)}{|w|^2} \right] \quad (*)$$

Forma simmetrica per il teorema di Schwartz, O-omogenea, quindi assume valori costanti sui raggi ma NON converge

con  $w$  piccolo il termine  $\lambda$  ha il segno del primo addendo

Essendo che  $|w|^2 > 0$  si ha che il segno dipende solo da quello della forma quadratica

$$\lambda |w|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j < \lambda |w|^2 \rightarrow \lambda \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j \leq \lambda$$

forma quadratica Hessiana

✓ minimo autovalore della matrice Hessiana Maximo autovalore

Dalla scorsa precedente si ha

Se  $\lambda > 0$ , l'hessiana è definita positiva e quindi

da (\*) segue  $> 0$

$$f(x_0 + w) - f(x_0) > |w|^2 \left[ \frac{1}{2} \lambda + o(|w|^2) \right] \xrightarrow[w \rightarrow 0]{} \frac{1}{2} \lambda > 0$$

$x_0$  è di MINIMO RELATIVO per  $|x| < \delta$  (permanenza del segno)

Se  $\lambda < 0$ , l'hessiana è definita negativa e da (\*)

$$f(x_0 + w) - f(x_0) = |w|^2 \left[ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j + o(|w|^2) \right] \leq |w|^2 \left[ \frac{\Delta}{2} + o(|w|^2) \right] \rightarrow \Delta < 0$$

$x_0$  è di MASSIMO RELATIVO per  $|x| < \delta$

→ Caso INDEFINITO → Se  $\lambda < 0$  e  $\lambda > 0$ , uguali autovettori di  $\lambda$  la forma è negativa

Altrettanto mentre uguali autovettori di  $\Delta$  la forma è positiva altrettanto

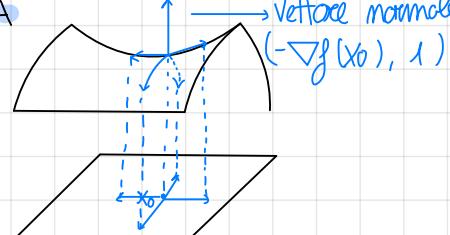
$$f(x_0 + w) - f(x_0) = |w|^2 \left[ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j + o(|w|^2) \right]$$

$$= \exists \delta: |w| < \delta \rightarrow o(|w|^2) \text{ con } \frac{\lambda}{2}, \frac{\Delta}{2}$$

✓  $\lambda$  sul suo spazio  $\Lambda$  sul suo spazio

$[ ] < 0$  sullo spazio di  $\lambda$ ,  $> 0$  sull' spazio di  $\Lambda$

$x_0$  non è né di massimo né di minimo perché il primo membro cambia segno, avendo segni discordi sugli spazi di  $\lambda$  e  $\Lambda$  → Punto di Sella  
NON DEGENERE



## CASI SEMIDEFINITI

$\lambda=0 \text{ o } \Lambda=0 \rightarrow$  hessianca semidefinita positiva / negativa  $\rightarrow$  hessianca DEGENEREA  
 $\rightarrow$  punto critico DEGENEREA

### Esempio

$$f(x,y) = x^4 + y^4 \quad f_x = 2x \quad f_y = 4y^3 \\ f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = f_{yx} = 0 \quad f_{yy} = 12y^2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ è già diagonale ed ha autovalori } 2, 0$$

PUNTO CRITICO:  $\nabla f = 0$  solo in  $(0,0)$

↓

Dall'esame diretto di  $f$  risulta che  $(0,0)$  è UN MINIMO GLOBALE

$$f(x,y) = x^2 - y^4 \quad \begin{array}{l} \text{Sull'asse } x (f(x,0)) f > 0 \\ \text{Sull'asse } y (f(0,y)) f \leq 0 \end{array}$$

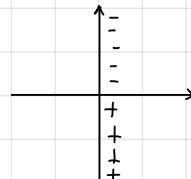


$$f_x = 2x \quad f_y = -4y^3 \quad f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = f_{yx} = 0 \quad f_{yy} = -12y^2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Uguale alla precedente}$$

$\nabla f = 0$  in  $(0,0)$

$$f(x,y) = x^2 - y^3$$



L'hessianca in  $(0,0)$  rimane la stessa:  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Può tendere a 0 da sopra o sotto  $\rightarrow$  NON c'è modo di studiare il segno di 0-piccolo

→ TROVARE gli ESTREMI ASSOLUTI  $\rightarrow f: [a,b] \cup [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$

- ① Si cercano gli estremi interni risolvendo  $f'(x) = 0$
- ② Si calcolano  $f(a), f(b), f(c), f(d)$

IN PIÙ VARIABILI: In questo caso NON si hanno punti interni

→ STRATEGIA 1: L'insieme si può decomporre nell'unione di un numero finito di grafici di funzione

$$f(x, g(x)) \quad g(y, y)$$

graph f

↓

Si studiano le funzioni di una sola variabile così ottenute sul loro dominio  
 → La  $f$  su  $\Omega$  si può studiare esaminando su  $[1,1]$  le funzioni  $f(x\sqrt{1-x^2}), f(x, -\sqrt{1-x^2})$  su  $\Omega = \{x^2+y^2 \leq 1\}$

### Esempio

$$f(x,y) = xy \quad \text{estremi globali su } \{x^2+y^2 \leq 1\} \rightarrow \text{dom } f = B_1(0,0)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = 0 \text{ se e solo se } x=0, y=0$$

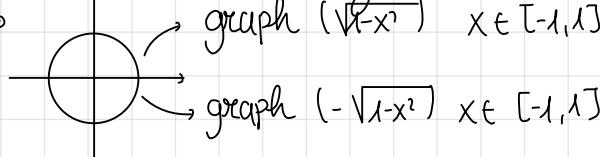
$(0,0)$  è un punto critico interno al dominio

$$f_x = y \quad f_y = x \quad f_{xx} = 0 \quad f_{xy} = f_{yx} = 1 \quad f_{yy} = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Forma simmetrica}$$

$$\text{AUTOVALORI: } 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \quad \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{array} \rightarrow \text{La forma è INDEFINITA}$$

Sulla NON DEGENEREA

Per studiare la restrizione di  $f$  sul bordo  $x^2+y^2 = 1$  (circonferenza)

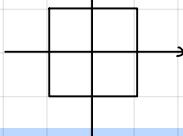


→ Dovranno studiarsi  $x \rightarrow f(x, \sqrt{1-x^2})$  su  $[-1, 1]$   
 e graph  $\sqrt{1-x^2}$

Lo stesso per  $f(x, -\sqrt{1-x^2})$   
 funzioni di UNA VARIABILE

→ Le funzioni diventano  $h(x) = x\sqrt{1-x^2}$  o  
 $h(x) = -x\sqrt{1-x^2}$

Se il dominio fosse stato un quadrato unitario:  $\Omega = \{(x,y) : x \in [-1,1]^2\} \cup \{(x,1) : x \in [-1,1]\} \cup \{(-1,y) : y \in [-1,1]\} \cup \{(x,-1) : x \in [-1,1]\}$



→ STRATEGIA 2: Equazioni parametriche:  $\Omega = \text{Im } \gamma$ ,  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$

### Esempio

$x^2 + y^2 = 1$  è il rotolo della curva parametrica  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$

Si studia allora  $t \rightarrow f(\gamma(t))$  su  $[0, 2\pi]$

Si studia  $f(x,y)$  per  $x = \cos t$  →  $h(t) = \frac{\cos t}{\sin t}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$   
 $y = \sin t$        $\frac{1}{2} \sin 2t$

$h(t)$  è massima se  $2t = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$  oppure se  $t = \frac{\pi}{4} + \pi$

$h(t)$  è minima se  $2t = \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$  oppure se  $t = \frac{3\pi}{4} + \pi$

$t = \frac{3}{4}\pi$  oppure se  $t = \frac{3}{4}\pi + \pi$

→ STRATEGIA 3: Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Si possono trovare massimi e minimi fra le soluzioni del seguente sistema di equazioni.  $\begin{cases} \nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$  → Sistema di  $m+1$  equazioni in  $m+1$  incognite

### Esempio

$$f(x,y) = xy \quad \{(x,y) : g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\} \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

curva di livello 0 di  $g(x,y)$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \nabla f + \lambda \nabla g = \begin{pmatrix} y + 2\lambda x \\ x + 2\lambda y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2\lambda x \\ x = -2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \quad \rightarrow y^2 - x^2 = 0 \quad \begin{cases} y - x = 0 : \text{Bisettrici} \\ y + x = 0 \end{cases}$$

(3)

Sostituendo in (3),  $y = x$  e  $y = -x$  si trovano le quattro soluzioni  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

→ CASO PIÙ GENERALE

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Omega = \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^m : g_i(x) = 0\}$$

equazioni implicite di superficie che, intersecate, danno l'insieme  $\Omega$

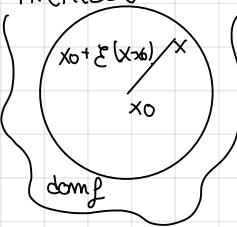
Moltiplicatori di Lagrange: gli estremi di  $f$  su  $\Omega$  vanno ricercati fra le soluzioni di

$$\nabla f + \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(x) = 0, \quad g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \dots, g_n(x) = 0$$

$m+k$  equazioni nelle  $m+k$  incognite  $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k$

## TEOREMA del DINI per funzioni vettoriali

PREMESSE



Sia una sfera contenuta nel dominio della funzione,  $x_0$  centro e  $x \in$  sfera, allora

$$\exists \varepsilon \in ]0, 1[ : f(x) - f(x_0) = \nabla f(x_0 + \varepsilon(x-x_0))(x-x_0)$$

$$h(t) = f(x_0 + t(x-x_0))$$

segmento da  $x_0$  a  $x$

$f \in C^1 \Rightarrow f$  è differentiabile  $\Rightarrow$  derivabilità della funzione composta  $h(t)$

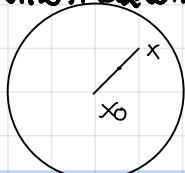
$$h'(t) = \nabla f(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0) \rightarrow \sigma(t) = x_0 + t(x-x_0) \quad \sigma'(t) = (x-x_0)$$

Per il teorema di Lagrange applicato ad  $h$  su  $[0, 1]$ , segue che  $\exists \sigma \in ]0, 1[ : h(1) - h(0) = h'(\sigma)(1-0)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x)} = \nabla f(x_0 + \sigma(x-x_0))(x-x_0)$$

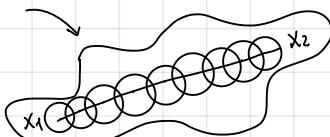
→ TEOREMA di LAGRANGE:  $\nabla f \equiv 0$  su  $B_\delta(x_0) \Rightarrow f$  è costante su  $B_\delta(x_0)$

Dimostrazione



$$\exists \varepsilon \in ]0, 1[ : f(x) - f(x_0) = \nabla f(x_0 + \varepsilon(x-x_0))(x-x_0) = 0 \rightarrow f(x) = f(x_0)$$

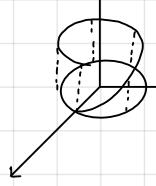
→ TEOREMA 2: Sia  $\Omega$  aperto e connesso,  $\nabla f = 0$  su  $\Omega$ , allora  $f$  è COSTANTE



Il teorema di Lagrange "classico" NON si estende alle curve ( $C^1$ )

CONTROESEMPIO:  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \text{cost} \\ \text{sen } t \\ t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$

$$\gamma(2\pi) - \gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2\pi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi \end{pmatrix}$$



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\text{sen } t \\ \text{cos } t \\ -t \end{pmatrix} \rightarrow \text{sen } t \text{ e cost non sono mai simultaneamente 0 perché } \text{sen}^2 t + \text{cos}^2 t = 1$$

$$\gamma(2\pi) - \gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -\text{sen } 0 \\ \text{cos } 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Generalizzando: } \gamma_i(b) - \gamma_i(a) = \gamma_i(\xi)(b-a)$$

può variare al variare di i  $\rightarrow \xi = \xi_i$

i-esima componente scalare di  $\gamma$

ENUNCIATO: ①  $f(x_0, y_0) = 0$

②  $(x_0, y_0)$  è interno ad  $\Omega$

③  $f \in C^1(\Omega)$

④  $f_y(x_0, y_0) > 0$

①  $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$

②  $\gamma(x_0) = y_0$

③  $f(x, \gamma(x)) \equiv 0$  su  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

④  $\gamma$  è derivabile e  $\gamma'(x) = -\frac{f_x(x, \gamma(x))}{f_y(x, \gamma(x))}$

△ 2+4 è un problema di Cauchy per le curve di livello

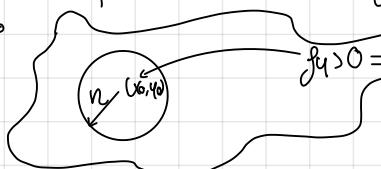
di livello

Dimostrazione

Per la permanenza del segno ( $f_y \in C^1$  per ip3)

$\exists \eta: f_y(x, y) > 0 \Rightarrow |(x, y) - (x_0, y_0)| < \eta$

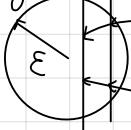
e  $(x, y) \in \text{dom } f_y$



$y \rightarrow f(x, y)$  è strettamente crescente sui segmenti verticali  $x = \text{costante}$ ,  $(x, y) \in B_\eta(x_0, y_0)$

Poiché  $(x_0, y_0)$  è interno a  $\text{dom } f$ ,  $\exists \delta: B_\delta(x_0, y_0) \subseteq \Omega$

$\hookrightarrow$  ponendo  $\varepsilon = \min\{\delta, \sigma\}$   $\rightarrow$



$f_y > 0$  in ogni punto

"intervalli" → a  $y = f(x, u)$  si può applicare lagrange

per il teorema del confronto con  $f$  continua e strettamente monotona in una direzione,  $\exists \delta, \varepsilon$  verificanti le tesi 1, 2 e 3

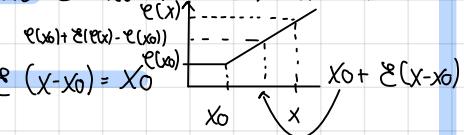
Per verificare la tesi 4, consideriamo  $(x_0, y_0) \in (x, \varphi(x)) \cap (x_0, y_0 + \varepsilon(x-x_0), \varphi(x)-\varphi(x_0))$

$(x, \varphi(x)) \quad x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow$  da tesi 3  $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$   
 $(x_0, y_0)$  su cui  $f=0$  per ipotesi 1 (verificata)

$f(x, \varphi(x)) - f(x_0, \varphi(x_0)) = f_x(x_0 + \varepsilon(x-x_0), \varphi(x_0) + \varepsilon(\varphi(x)-\varphi(x_0)))(x-x_0) + f_y(x_0 + \varepsilon(x-x_0), \varphi(x_0) + \varepsilon(\varphi(x)-\varphi(x_0))) (\varphi(x)-\varphi(x_0))$   
 $0 \quad 0 \downarrow$  lagrange in più variabili  
 $y_0$  per la 2

Supposto che  $x+x_0$  è notando che  $(x_0 + \varepsilon(x-x_0), \varphi(x_0) + \varepsilon(\varphi(x)-\varphi(x_0)))$  è un punto del segmento di estremi  $(x_0, y_0)$  e  $(x, \varphi(x))$  che appartengono alla linea di raggio  $\varepsilon$  in cui  $f_y > 0$ , dividendo per  $(x-x_0)$  e per  $f_y(x_0 + \varepsilon(x-x_0), \varphi(x_0) + \varepsilon(\varphi(x)-\varphi(x_0)))$  ne segue

$\downarrow \varphi(x) - \varphi(x_0) = - \frac{f_x(x_0 + \varepsilon(x-x_0), \varphi(x_0) + \varepsilon(\varphi(x)-\varphi(x_0)))}{f_y(x_0 + \varepsilon(x-x_0), \varphi(x_0) + \varepsilon(\varphi(x)-\varphi(x_0)))}$ , per  $x \rightarrow x_0$  e  $x_0 + \varepsilon(x-x_0) < x$



si ha che, per il teorema del confronto,  $\lim_{x \rightarrow x_0} x_0 + \varepsilon(x-x_0) = x_0$

$\downarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) + \underbrace{\varepsilon(\varphi(x) - \varphi(x_0))}_{0} = \varphi(x_0)$

perché  $\varphi$  è continua per il teorema nel caso continuo  $\rightarrow \lim \varphi(x) = \varphi(x_0)$

Ne segue che il II membro tende a  $- \frac{f_x(x_0, \varphi(x_0))}{f_y(x_0, \varphi(x_0))} = - \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$

$\Rightarrow \varphi'(x_0) = - \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$  → Per provare la formula negli altri punti si sposta il punto iniziale  $(x_0, y_0)$  nel punto voluto  $(x, \varphi(x))$

→ ESTENSIONE del teorema: In ogni punto di un insieme di livello su cui  $\nabla f \neq 0$  ( $\equiv$  almeno una derivata parziale non si annulla, se  $f \in C^1$ ) quella variabile può essere esplicitata rispetto all'altra, cioè si può risolvere l'equazione  $f(x_1 \dots x_n) = k$  rispetto a quella variabile

→ TEOREMA NEL CASO di SISTEMI LINEARI

$\hookrightarrow f(x, y) = 0$ ,  $f: \Omega \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^K$ , con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^K$

$\downarrow x \in \Omega, y \in \Sigma$

$K$  equazioni in  $mK$  incognite  $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_K$

①  $x_0 \in \Omega, y_0 \in \Sigma: f(x_0, y_0) = 0 \in \mathbb{R}^K$

②  $(x_0, y_0)$  interno a  $\Omega \times \Sigma$

③  $f$  è di classe  $C^1(\Omega \times \Sigma)$

④  $\det(f_y(x_0, y_0)) \neq 0$

$$\downarrow$$

$$\det(f_y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_K} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_K}{\partial y_1} & \frac{\partial f_K}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_K}{\partial y_K} \end{pmatrix}$$

TESI

- ①  $\exists \delta, \varepsilon: B_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^K$   $\rightarrow$  PIVOT  $y_i = \varphi_i(x_1 \dots x_n)$
- ②  $\varphi(x_0) = y_0$ , con  $x_0 \in \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}^K$
- ③  $f(x, \varphi(x)) = 0$  su  $B_\delta(x_0)$
- ④  $\varphi(x) = - \left[ \frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial f_y(x, \varphi(x))} \right]^{-1} f_x(x, \varphi(x))$

matrice  $K \times n$   $K \times K$

F:  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Dato  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\exists x \in \mathbb{R}^n : F(x) = y \rightarrow \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = y_n \end{cases}$

Se ha una sola soluzione, quella è l'inversa.

### TEOREMA DELL'INVERTIBILITÀ LOCALE

F:  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F \in C^1$ ,  $F(x_0) = y_0$  con  $x_0 \in \Omega$  e  $y_0$  è intorno a  $F(\Omega)$ .

Avviamo all'enunciato con il teorema del Dini

$$\hookrightarrow G_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = F_i(x_1, \dots, x_n) - y_i$$

$$\hookrightarrow \det \left( \frac{\partial G_i}{\partial x_j} \right)(x_0, y_0) \neq 0 \text{ per } i=1 \dots n \rightarrow \frac{\partial G_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}, \text{ quindi } \det F(x_0, y_0) \neq 0$$

Allora, dalle considerazioni precedenti,  $\exists B_\delta(y_0)$ ,  $\Psi: B_\delta(y_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che

$$(1) \Psi(y_0) = x_0$$

$$(2) G(\Psi(y), y) = 0 \quad \forall y \in B_\delta(y_0) \rightarrow F_i(\Psi_1(y), \Psi_2(y), \dots, \Psi_n(y)) - y_i = 0 \rightarrow x_i = \Psi_i(y) \text{ è l'inversa}$$

$$\begin{matrix} \Psi_1 \\ \uparrow \\ \Psi \\ \downarrow \\ \Psi_n \end{matrix}$$

$$\checkmark F_i(x_1, \dots, x_n) = y_i, \quad i = 1 \dots n$$

ENUNCIATO COMPLETO:

$$F(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$F \in C^1(\Omega)$$

$x_0$  interno ad  $\Omega$ ,  $y_0$  interno a  $F(\Omega)$

$$\det F(x_0) \neq 0$$

$\Rightarrow \exists B_\delta(y_0)$ ,  $\Psi: B_\delta(y_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che

$$\rightarrow F(x_0) = y_0$$

$$\rightarrow F(\Psi(y)) = y \quad \forall y \in B_\delta(y_0)$$

$\hookrightarrow F \circ \Psi$  sono una l'inversa dell'altra

$$\rightarrow \Psi \in C^1(B_\delta(y_0))$$

### Esempio

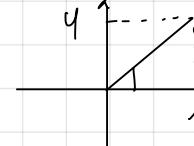
$$x = p \cos \theta$$

$$y = p \sin \theta$$

$$F(p, \theta) = (x, y) \quad F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$G(p, \theta; x, y) = F(p, \theta) - (x, y)$$

$$G = 0$$



$$\begin{cases} p \cos \theta - x = 0 \\ p \sin \theta - y = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial (p, \theta)} = \frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial (p, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -p \sin \theta \\ \sin \theta & p \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \text{il determinante jacobiano vale } \det \frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial (p, \theta)} = p \cos^2 \theta + p \sin^2 \theta = p$$

Se  $p \neq 0$  si può applicare il teorema di invertibilità locale

$\hookrightarrow F(p, \theta) \rightarrow (x, y)$  è invertibile vicino ad ogni punto  $(p_0, \theta_0) \rightarrow (x_0, y_0)$

### APPLICAZIONE DEL TEOREMA DEL DINI

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_j = y_i \rightarrow G(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_j - y_i$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial (G_1, \dots, G_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \det(a_{ij}) \neq 0$  per il teorema di Gramm  
Jacobiiano di  $G$  rispetto ad  $x$

### Esempio

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

$$f \in C^\infty$$

$\downarrow$

Per esplicitare  $y$  in funzione di  $x$  occorre che  $f_y \neq 0$

$$\hookrightarrow f_x(x, y) = 2x \rightarrow \nabla f = 0 \text{ se e solo se } (x, y) = (0, 0)$$

$$\hookrightarrow f_y(x, y) = 3y^2$$

$$\{(x, y) : f(x, y) = 1\}$$

$\hookrightarrow$  è il grafico di una funzione che esplicita una variabile in funzione dell'altra nell'intorno di ogni suo punto?

$\rightarrow$  Fuori dall'origine, qualche variabile può essere esplicitata in funzione dell'altra

Sull'asse  $y$  ( $x=0$ )  $f_x$  si annulla:  $f_x(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$   
 ↳ Sull'asse  $y$  non è detto che si possa esplicitare  $x$  in funzione di  $y$

Fuori dagli assi entrambe le derivate parziali sono  $\neq 0$  (e quindi possono essere esplicata le relative variabili)

$$\hookrightarrow x^2 + y^3 = 1, \text{ quindi } y^3 = 1 - x^2, \text{ da cui } y = \sqrt[3]{1 - x^2} \quad (\text{gamma})$$

Punti dell'insieme di livello  $\mathcal{C}$

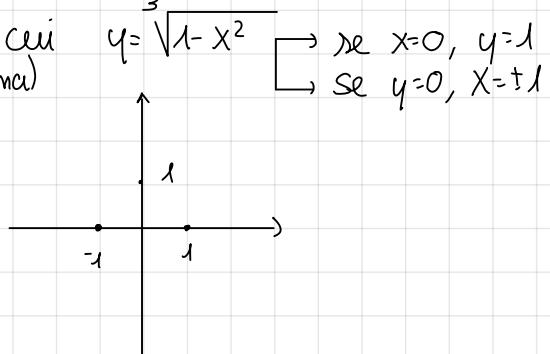
$\mathcal{C}$  è NON vuoto perché contiene  $(0,1), (-1,0), (1,0)$

In più, il punto critico  $(0,0) \in \mathcal{C}$  perché  $0^2 + 0^3 \neq 1$

$$\textcircled{2} \quad f(x,y) = x^2 - y^2 = 0$$

$$\begin{aligned} f_x &= 2x \\ f_y &= -2y \end{aligned}$$

$$\nabla f = 0 \text{ solo se } (x,y) = (0,0) \in \{f=0\} \rightarrow 0^2 - 0^2 = 0$$



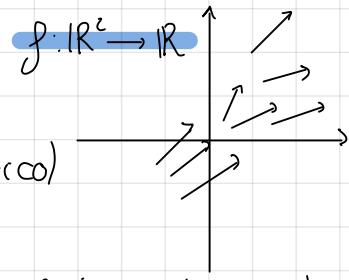
Non si può usare il teorema del Dini per esplicitare una qualunque variabile in funzione dell'altra

# La teoria dei campi

- Campi di vettori:  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  è definito in  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $A \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  è un CAMPO (di vettori)

Modello dei campi di forze (gravitazionale, elettrico, magnetico) e anche dei campi di velocità nei fluidi



$A$  è detto di classe  $C^0$  ( $C^1, \dots, C^\infty$ ) se le sue componenti scalari ( $A_1, A_2, \dots, A_n$ ) sono funzioni  $C^0$  ( $C^1, \dots, C^\infty$ ) dei loro argomenti  $x_1, \dots, x_n$ . Esempio:  $(\rho, \theta) \rightarrow (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$

- Forme differenziali lineari

$df: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \implies \alpha: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  si chiamerà forma differenziale lineare se la funzione  $w \rightarrow (x, w)$  è lineare per ogni  $x \in \Omega$

$\hookrightarrow B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\exists b \in \mathbb{R}^n: B(v) = bv$

CAMPO  $A$  associato alla forma  $\alpha$  come il campo per cui  $\alpha(x, w) = A(x)w = A_1(x_1, \dots, x_n)dx_1 + \dots + A_n(x_1, \dots, x_n)dx_n$

Esempi

$$A(x) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{campo di vettori}$$

TIPICO

$$\begin{aligned} A_1(x, y) &= xy \\ A_2(x, y) &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

punto incremento  $w$

$$xdx + ydy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \left( \frac{dx}{du} \right) - \alpha \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \left( \frac{dx}{du} \right) \right)$$

forma differenziale  $\hookrightarrow$  campo associato ad  $\alpha$ :  $A(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

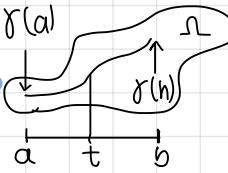
TIPICA

- L'integrale di campi e di forme

$\rightarrow$  CAMPI:  $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $A$  è almeno  $\in C^0$

$\gamma \in C^1[a, b]$ ,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ , quindi il sostegno di  $A$  è tutto contenuto in  $\gamma$

$$\text{Definiremo } \int_A = \int_a^b A(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_\gamma A dy$$



Applicazione alla fisica

$\hookrightarrow$  Lavoro nel campo gravitazionale

$\gamma(t)$  → Se  $F$  ed  $S$  sono affini,  $\mathcal{L} = FS$ , mentre se non lo sono

conta solo la forza proiettata sullo spostamento:  $\mathcal{L} = F_S \cdot S$ , quindi

$$|\gamma| = \|F\| \|S\| \cos \theta = F \cdot S$$

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \text{davolo}$$

velocità di spostamento

$\rightarrow$  FORME:  $\alpha(x, w) = A(x)w \implies \int \alpha = \int A$ . forma e campo associato hanno per definizione lo stesso integrale sulle curve  $C^1$  (a tratti)

$$\alpha(x, w) = \sum_{i=1}^n A_i(x) w_i = \sum_{i=1}^n A_i(x) dx_i$$

$\hookrightarrow$  differenziale della proiezione sull'asse  $x$

Esempio

$$A(x, u) = \left( \frac{-u}{x^2+u^2}, \frac{x}{x^2+u^2} \right)$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \text{cost} \\ \text{sent} \end{pmatrix}$$

$t \in [0, 2\pi]$ : curva CHIUSA

$$\begin{cases} x(t) = \text{cost} \\ y(t) = \text{sent} \end{cases}$$

$\downarrow$   
Il punto di inizio coincide con quello di fine

$$\int_{\gamma} A = \int_a^b [A_1(x, u) \dot{x}(t) + A_2(x, u) \dot{u}(t)] dt =$$

$$A(x, u) = \begin{pmatrix} A_1(x, u) \\ A_2(x, u) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} = \dot{\gamma}(t)$$

**Esempio (continua)**

$$A_1(x, u) = \frac{-u}{x^2 + u^2} \stackrel{\text{im}}{=} -\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}$$

$$A_2(x, u) = \frac{x}{x^2 + u^2} = \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}$$

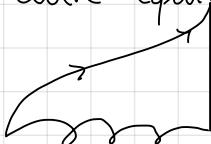
$$\int_{\gamma} A = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t \right] dt = \int_0^{2\pi} [\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_1] dt = t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

**GENERALIZZANDO**:  $\alpha(x, dx) = \sum_{i=1}^n A_i(x_1, \dots, x_n) dx_i \rightarrow x_1 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \gamma(t), \quad t \in [a, b]$

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_a^b \sum_{i=1}^n A_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) x_i(t) dt$$

componenti del campo associato

- Curve equivalenti e inverse ed antiversione



$\gamma: [a, b] \rightarrow \text{dom } A$ : prima parametrizzazione,  $p(c) = a, p(d) = b$   
 $p: [c, d] \rightarrow [a, b]$  strettamente crescente, invertibile,  $C^1$

$$\sigma'(s) = \gamma(p(s)), \text{ se } [c, d]: \text{Seconda parametrizzazione}$$

$$\sigma'(s) = \dot{\gamma}(p(s)) \dot{p}(s)$$

Parametrizzazioni diverse, stesso sostegno

$$\int_{\gamma} A = \int_a^b A(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

$$\int_{\sigma} A = \int_c^d A(\sigma'(s)) \dot{\sigma}'(s) ds = \int_c^d A(\dot{\gamma}(p(s))) \dot{\gamma}(p(s)) \dot{p}(s) ds \stackrel{\begin{matrix} t=p(s) \\ p(d)=b \\ p(c)=a \end{matrix}}{=} \int_a^b A(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_{\gamma} A$$

→ In queste ipotesi  $\gamma$  e  $\sigma'$  si dicono equivalenti e inverse →

→ Se  $p$  è strettamente decrescente,  $p(c) = b$  →  $\int_{\gamma} A$  cambia di segno  
 $\downarrow$   
 $p(d) = a$

In questo caso  $p$  e  $\sigma'$  saranno equivalenti antiversione:  $\int_{\sigma} A = - \int_{\gamma} A$

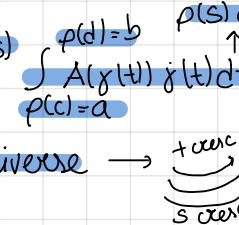
- Curve  $C^1$  a tratti

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b \rightarrow \int_{\gamma} A = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

$$\gamma \in C^0[a, b]$$

$$\gamma \in C^1[t_i, t_{i+1}] \quad t_0 = a \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5 \quad t_6 \quad t_7 = b$$

$$\gamma \in C^1[t_i, t_{i+1}]$$



- Forme integrali

Un campo  $A: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice integrabile (sinonimi: costituzionale, conservativo, non dissipativo) se esiste  $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , detta primitiva (oppure potenziale) tale che  $\nabla f(x) = A(x) \forall x \in \mathcal{N}$

- Forme integrali

Una forma  $\alpha: \mathcal{N} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice integrabile (o esatta), se esiste  $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$  detta primitiva (o potenziale) tale che  $df = \alpha$  su  $\mathcal{N} \times \mathbb{R}^N$  ( $df(x, w) = \alpha(x, w) \quad \forall x \in \mathcal{N}, \forall w \in \mathbb{R}^N$ )

**Esempio**

$$A(x, u) = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

definita su  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, u) = \frac{1}{2} (x^2 + u^2)$$

$$\begin{cases} f_x = x \\ f_u = u \end{cases}$$

$$\nabla f = A \text{ su } \mathbb{R}^2$$

## La primitiva

$\rightarrow f$  è una primitiva su  $[a,b]$  se  $f' = g$  su  $[a,b]$

$$\downarrow$$

$$\alpha(x,w) = A(x)w$$

$\exists f: \nabla f = A, A \in C^0$

$d\alpha = \alpha$

## TEOREMA 1

CN perché  $A \in C^0(\Omega)$  sia integrabile in  $\Omega$  e che  $\int_\gamma A$  dipende solo dagli estremi della curva (e dal loro ordine)

## Dimostrazione

$A \in C^0 +$  integrabile  $\rightarrow \int_\gamma A$  dipende solo dagli estremi

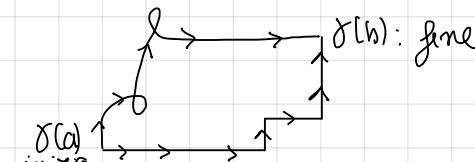
Poiché  $A$  è integrabile,  $\exists f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \nabla f = A$  su  $\Omega$

Sia  $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$  curva di classe  $C^1[a,b]$

$$\int_\gamma A = \int_a^b A(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

hp integrabilità

E' vero che  $\nabla f(\gamma(t)) \gamma'(t) = \frac{d}{dt} [f(\gamma(t))] \in C^0$  — la funzione ha tutte le derivate continue perché  $\nabla f = A \in C^0$ , quindi è differentiabile



$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Tornare a  $\gamma$

E'  $C^0$  perché il prodotto scalare di funzioni continue è continuo

## CORDATAPIO

CN perché  $A \in C^0(\Omega)$  sia integrabile su  $\Omega$  è che  $\int_\gamma A = 0$  per ogni curva chiusa  $\gamma \in C^1[a,b]$  (che verifica  $\gamma(a) = \gamma(b)$ )

## Dimostrazione

$\gamma \in C^1[a,b], \gamma(a) = \gamma(b), c \in [a,b]$

$$\int_\gamma A = \int_a^b A(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \underbrace{\int_a^c A(\gamma(t)) \gamma'(t) dt}_{= f(\gamma(c)) - f(\gamma(a))} + \underbrace{\int_c^b A(\gamma(t)) \gamma'(t) dt}_{= f(\gamma(b)) - f(\gamma(c))}$$

O perché  $\gamma(a) = \gamma(b)$

## Ottenere curve antivece

$\gamma(t), \gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$  va da  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$

↪ ottieniamo una curva antivece  $\sigma(s) = \gamma(b+s(a-b))$   
 se  $[0,1] \hookrightarrow$

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= \gamma(b+0(a-b)) = \gamma(b) \\ \sigma(1) &= \gamma(b+a-b) = \gamma(a) \end{aligned}$$

$$\dot{\sigma}(s) = a-b < 0$$

## TEOREMA

CN perché  $A \in C^0(\Omega)$  sia integrabile su  $\Omega$  è che  $\int_\gamma A = 0$  per ogni curva chiusa  $\gamma$  in  $\Omega$

## TEOREMA:

CN perché  $A \in C^1(\Omega)$  sia integrabile su  $\Omega$  è che  $(A_i)_j = (A_j)_i \quad \forall i,j = 1..n$

↪ condizione del rotore: rot  $A = \nabla \times A \rightarrow \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right) \times \left( \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right) \rightarrow \text{rot } A = 0$

## Dimostrazione

$\exists f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \nabla f = A$ . Si avrà  $A \in C^1$  (cioè  $\nabla f \in C^1 \Rightarrow f \in C^2$ )

$$(A_i)_j = (f_{x_i})_{x_j} = (f_{x_j})_{x_i} = (A_j)_i$$

Schwartz: le derivate sono continue, quindi è utilizzabile

## Esempio

$$A(x,u) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xu \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_1(x,u) &= x^2 \\ A_2(x,u) &= xu \end{aligned}$$

$$A \in C^\infty_{(\mathbb{R}^2)} \Rightarrow C^1(\mathbb{R}^2)$$

$$(A_1)_u = (A_2)_x \quad \square$$

$(A_1)_u = (x^2)_u = 0 \rightarrow$  diverse

CN non verificata

$$\left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

verifica la condizione del rotore? Verifica  
 $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$A \in C^\infty(\Omega)$   $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$

$\int A = 0 \rightarrow$  NON può essere integrabile

Verifica  $\downarrow$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2+y^2} \right) = -\frac{(x^2+y^2) - (-y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{1(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

→ La condizione del rotore NON è sufficiente

- DEFINIZIONE: Il campo è IRRATZIONALE (cioè verifica  $(A_i)x_j = (A_j)x_i \forall i, j = 1 \dots n$ ) ma NON  
 ↓ è INTEGRABILE. La condizione del rotore quindi è SOLO NECESSARIA (in generale)

DEFINIZIONE: Una forma associata ad un campo irrotazionale si dice CHIUSA

- Come ricavare tutte le primitive di un campo integrabile  $A$

$$\nabla f = A \text{ su } \Omega \quad f, g \text{ primitive di } A \text{ su } \Omega$$

$$\nabla g = A \text{ su } \Omega$$

→ Sottraendo membro a membro si ottiene  $\nabla(f-g) = 0$  su  $\Omega \rightarrow f-g$  è COSTANTE se  $\Omega$  è aperto e connesso → Ne segue che  $\exists K: g(x) = f(x) + K$

### Esempio

$$\frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x} \quad x \neq 0 \rightarrow \text{Il dominio NON è connesso: } \{x > 0\} \cup \{x < 0\}$$

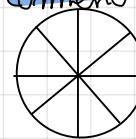
$$(\log|x| + c)' = \frac{1}{x}$$

$$\left( \log|x| + \begin{cases} c_1 & x > 0 \\ c_2 & x < 0 \end{cases} \right)' = \frac{1}{x} \quad f' = 0 \rightarrow f \text{ costante solo negli intervalli}$$

(che sono i connessi in  $\mathbb{R}$ )

Data una primitiva qualunque di un campo, tutte le altre si trovano aggiungendovi una funzione costante su ogni sottoinsieme connesso del suo dominio

$\begin{cases} c_1: \text{primo "pezzo"} \text{ connesso del dominio} \\ c_2: \text{secondo "pezzo"} \text{ connesso del dominio} \\ \vdots \\ c_n: \text{n-esimo "pezzo" connesso del dominio} \end{cases}$



→ 8 costanti: una per ogni "fetta" della torta

- TEOREMA della differenza di potenziale

↪ CN:  $A$  campo  $C^1$  ( $\Omega$ ),  $\Omega$  aperto, integrabile,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ ,  $\gamma \in C^1$  a tratti,  
 (e cs) allora  $\int_A = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \rightarrow$  Se  $\gamma$  è chiusa ( $\gamma(b) = \gamma(a)$ ), allora  $\int_A = 0$

Conseguenza: Se  $A \in C^0$  integrabile  $\Rightarrow \int_A = 0 \quad \forall \gamma$  chiusa in  $\Omega$

parametri fissati:  $\gamma(t)$ ,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$

→ Definiamo altre due curve

$\sigma: [0, 1] \rightarrow \Omega$  equivalente e inversa  
 (uguale partenza e arrivo)

$\tilde{\sigma}: [0, 1] \rightarrow \Omega$  equivalente antiversa  
 (partenza e arrivo di  $\gamma$  scambiati)

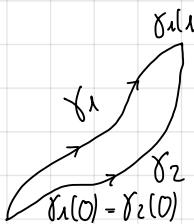
$$\sigma(s) = \gamma(a + s(b-a)), \quad s \in [0, 1] \rightarrow p(s) = a + s(b-a) \Rightarrow \sigma \text{ e } \gamma \text{ sono equivalenti e inverse}$$

$$\tilde{\sigma}(s) = \gamma(b + s(a-b)), \quad s \in [0, 1] \rightarrow \tilde{p}(s) = b + s(a-b) \Rightarrow \gamma \text{ e } \tilde{\sigma} \text{ sono equivalenti e inverse}$$

$$\tilde{p}(s) = a - b - s \Rightarrow \tilde{p}(s) = a - b - s \Rightarrow \tilde{\sigma} \text{ e } \tilde{p} \text{ sono equivalenti antiversa}$$

$$\sigma'(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [0, 1] \\ \gamma_2(2-t) & t \in [1, 2] \end{cases} \rightarrow \text{per } t=1: \gamma_1(1) = \gamma_2(1): \text{espressioni coerenti}$$

$$\rightarrow \text{per } 1 < t < 2: 2-t \text{ decresce e } 2-t \in [0, 1]: \text{ANTIVERSA}$$



$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) \quad \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$$

$$\int_0^2 A = \int_0^2 A(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^1 A(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt + \int_1^2 A(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \underbrace{\int_0^1 A(\gamma_1(t)) \dot{\gamma}_1(t) dt}_{\int_{\gamma_1} A} + \underbrace{\int_1^2 A(\gamma_2(t)) \dot{\gamma}_2(t) dt}_{\int_{\gamma_2} A} = \int_{\gamma} A$$

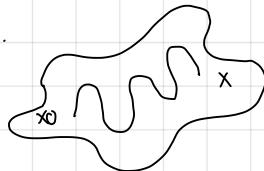
### TEOREMA

CS perché  $A \in C^0$  sia integrabile è che  $\int_{\gamma} A$  dipenda solo dagli estremi le del lato (ordine) e non dal cammino  $\gamma([a, b])$

### Dimostrazione

Essiamo  $x_0 \in \Omega$ ,  $f(x) = \int_{\gamma} A$ .  $\gamma$  curva qualunque che "parte" da  $x_0$  e "arriva" a  $x$

$\Omega$  compatto.



$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ ,  $\gamma(a) = x_0$  e  $\gamma(b) = x \rightarrow$  connessione

$f$  è ben definita perché  $\int_{\gamma} A$  NON dipende dall'immagine di  $\gamma$  ma solo da  $\gamma(a) = x_0$  e  $\gamma(b) = x$

Poniamo che  $\nabla f = A$  su  $\Omega \hookrightarrow f_{xi} = A_i \forall i = 1 \dots m$ : PRIMITIVA

Calcolo derivate parziali:  $\frac{f(x+h\epsilon_i) - f(x)}{h} =$

$$= \frac{1}{h} [\int_{\gamma} A - \int_{\gamma} A] =$$

$$= \frac{1}{h} [\int_{\gamma} A + \int_{\gamma} A - \int_{\gamma} A] =$$

$$= \frac{1}{h} \int_{\gamma} A = \frac{1}{h} \int_0^h \underbrace{A(x+t\epsilon_i)}_{A(\gamma(t))} dt = \frac{1}{h} \int_0^h A_i(x+t\epsilon_i) dt \rightarrow \text{Media integrale}$$

$$= A_i(x + \epsilon_i), \quad \epsilon \text{ è compreso fra } 0 \text{ e } h$$

se  $h \rightarrow 0$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$  per il teorema dei corollari

Teorema della media integrale  $\rightarrow$  le componenti del campo sono CONTINUE

Applicando il rapporto incrementale:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x+h\epsilon_i) - f(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} A_i(x + \epsilon_i) = A_i(x) \forall i = 1 \dots m$

### Esempio

$$A = qdx + xdy$$

$$A = (q, x)$$

campo

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x_0 = (0, 0)$$

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} q \\ x \end{pmatrix}$$

$$(q, x)$$

$$\gamma(t) = t \begin{pmatrix} x^0 \\ q^0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

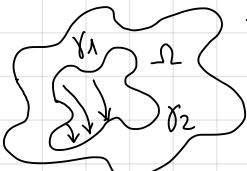
$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(1) = \begin{pmatrix} x^0 \\ q^0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x^0 \\ q^0 \end{pmatrix}$$

Al variare di  $(x^0, q^0)$  si ottiene

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy \\ f_x(x, y) &= y \Rightarrow \nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = A \\ f_y(x, y) &= x \end{aligned}$$

Tutte le primitive avranno la forma  $xy + C$  perché il dominio è compatto (una sola costante)

### OMOTOPIA (o DEFORMAZIONE)



$\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \Omega$  continue ( $C^0$ )

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) \text{ e } \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$$

Si diremo OMOTOPENE in  $\Omega$  se esiste  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  detta omotopia, tale che

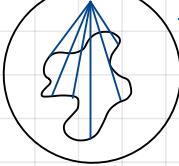
- ①  $h$  è continua su  $[0, 1] \times [0, 1]$
- ②  $h(0, t) = \gamma_1(t)$   $h(1, t) = \gamma_2(t) \quad \forall t \in [0, 1]$
- ③  $h(\lambda, 0) = \gamma_1(\lambda)$
- $h(\lambda, 1) = \gamma_2(\lambda)$

Analogamente  $\gamma: [0,1] \rightarrow \Omega$  chiuso  $\rightarrow$  si diranno omotope in  $\Omega$  se  $\exists h: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \Omega$ , continua tale che  $h(0,t) = \gamma_1(t)$  e  $h(1,t) = \gamma_2(t) \forall t \in [0,1]$

- TEOREMA di INVARIANZA CHIOTICA dell'integrale dei CAMPI IRROTATORI

Sia  $A \in C^1(\Omega)$  irrotazionale, cioè  $(A_i)_j = -A_j)_i \forall i,j = 1..n$ . Siamo  $\gamma, \sigma$  due curve omotope (chiuse o con estremi comuni) in  $\Omega$ . Allora  $\int_{\gamma} A = \int_{\sigma} A$  (L'integrale è invariante per omotopia)

- DEFINIZIONE:  $\Omega$  si dice semplicemente connesso se ogni curva chiusa in  $\Omega$  è OMOTOPA ad una curva costante



$\rightarrow$  "aspiro" la curva nei raggi

- DEFINIZIONE:  $\Omega$  si dirà STELLA se  $\exists x_0: \Omega \subseteq \Omega \quad \forall x \in \Omega$  (una luce posta in  $x_0$  è visibile da qualsiasi punto di  $\Omega$ )  $\rightarrow$  convesso rispetto al punto  $x_0$ , detto polo

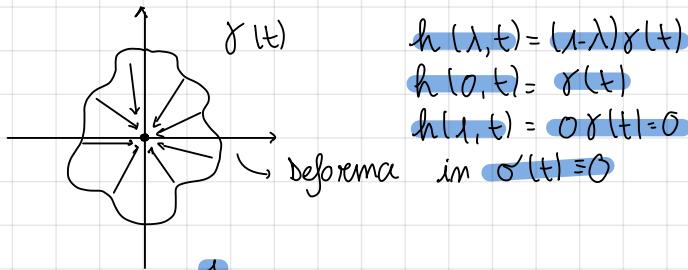
IN PRATICA: gli insiemini non semplicemente connessi sono quelli "con buchi"  
 $\hookrightarrow$  NEL PIANO



- TEOREMA: Tutti gli insiemini stella sono semplicemente connessi

### Dimostrazione

- Supponiamo  $x_0 = 0$



$$\int_{\gamma} A = \int_{\sigma} A = \int_0^1 A(\sigma(t)) \dot{\sigma}(t) dt = \int_0^1 A(0) \cdot 0 dt = 0 \rightarrow \text{In un insieme stella rispetto all'origine } \int_{\gamma} A, \text{ e chiusa, vale } 0$$

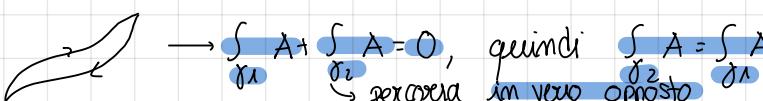
- Caso generale

In stella con polo  $x_0$  architettico:  $h(\lambda, t) = x_0 + (\lambda-1)(\gamma(t) - x_0)$ : continua su  $[0,1] \times [0,1]$   
 $\rightarrow h(0, t) = x_0 + 1(\gamma(t) - x_0) = \gamma(t)$   
 $\rightarrow h(1, t) = x_0$

Il segmento  $h(\lambda, t) = x_0 + (\lambda-1)(\gamma(t) - x_0)$  è interno ad  $\Omega$  perché è un punto del segmento di estremi  $x_0$  e  $\gamma(t)$

- CS per integrabilità

$$\int_{\gamma} A = 0 \quad \forall \gamma \text{ chiusa}$$



- TEOREMA: Un campo irrotazionale ( $C^1$ ) su un insieme semplicemente connesso è integrabile (CNS)

$x_1$

$x_3 \rightarrow A$  irrotazionale nel complemento dei 3 punti  $x_1, x_2, x_3$

$x_1$

### Riassunto invarianza

- $\int_{\gamma} A$  non varia se si sostituisce a  $\gamma$  una curva equivalente equivalente

EQUIVALENZA:  $\gamma$  e  $\sigma$  sono equivalenti se  $\exists p$  strettamente monotona tale che  $\sigma(t) = p(\gamma(t))$

- $A \in C^1$  è integrabile ( $\exists f: \nabla f = A$ ), allora  $\int_{\gamma} A$  non varia al variare di  $\gamma$ , purché gli estremi restino uguali, nello stesso ordine

- $A \in C^1$  irrotazionale ( $(A_i)_j = -A_j)_i \forall i,j$ )  $\int_{\gamma} A$  se a  $\gamma$  si sostituisce una curva ad essa omotopa

### Esempi

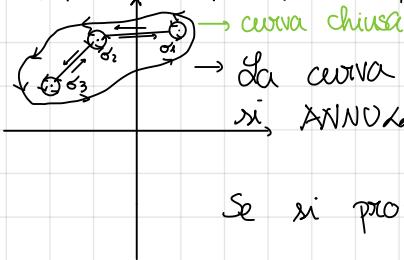
①  $f(x,y) = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2)$  è definita su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$fx = \frac{x}{x^2+y^2} \quad fy = \frac{y}{x^2+y^2} \rightarrow A = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

$\gamma = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\gamma} A = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\cos t)}{1} + \frac{\sin(\sin t)}{1} dt = 0 \rightarrow \text{integrale}$$

② Dominio di  $A: \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$



La curva costruita sui tagli è chiusa e rompendo tutti i tagli  
si ANNUCCIANO  $\rightarrow \int_{\gamma} A = \int_{\sigma_1} A + \int_{\sigma_2} A + \int_{\sigma_3} A$

Se si prova che  $\int_{\sigma_i} A = 0 \quad \forall i=1\dots m$   
si

③  $A(x,y) = (y, x)$  ha primitive? quali sono?

$A_1 A_2$

$$\frac{\partial}{\partial y} A_1 = 1 \quad \frac{\partial}{\partial x} A_2 = 1 \rightarrow \text{sono uguali, quindi } A \text{ è irrotazionale}$$

Il dominio è  $\mathbb{R}^2$ , quindi convesso, che implica che sia stella e semplicemente connesso  
 $\hookrightarrow A$  è integrabile su  $\mathbb{R}^2$

TROVIAMO la PRIMITIVA:  $fx = y$  integrando la prima equazione rispetto a  $x$ :  $f = xy + c(y)$   
 $fy = x$  che, derivata rispetto a  $y$  fornisce  $fy = 1 + c'(y)$

Adesso dovo ugualare le  $fy \rightarrow x = 1 + c'(y)$ , da cui  $c'(y) = 0: c(y) = \text{costante}$

$\hookrightarrow$  da questo, sostituendo in  $f$  si ha  $f(x,y) = xy + \text{costante}$

④  $A(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$   $\frac{\partial}{\partial y} A_1 = 1$  DIVERSI: ROTAZIONARE  $\frac{\partial}{\partial x} A_2 = -1$

$$fx = y \quad f = xy + c(y)$$

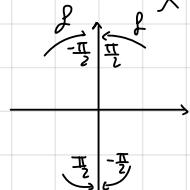
$$fy = -x \quad f = -xy + c(y) \rightarrow -x = x + c'(y) \rightarrow c'(y) = -2x, \text{ quindi } c(y) = -2xy + C$$

$$f(x,y) = xy - 2xy + C = -xy + C \quad \boxed{\begin{array}{l} fx = -y \\ fy = -x \end{array}} \rightarrow \text{NON VA BENE}$$

⚠ Il metodo NON VA BENE per campi ROTAZIONALI

⚠ Occorre verificare che il dominio del potenziale trovato coincida con quello del campo

$A \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \rightarrow$  arctan  $\frac{y}{x}$  è una primitiva di  $A$  su  $\{x > 0\}$



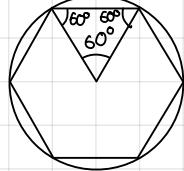
$$g(x,y) = \arctan \frac{y}{x} \quad x > 0$$

$$\arctan \frac{y}{x} + \pi \quad x < 0$$

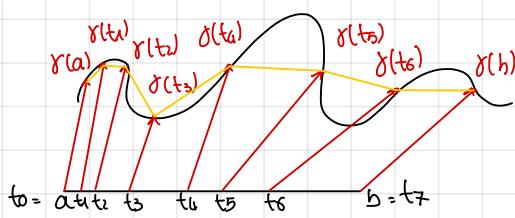
$$\arctan \frac{y}{x} + \frac{\pi}{2} \quad x = 0, y > 0$$

# Le curve rettificabili

- Introduzione



Circonferenza  $> 6\pi \rightarrow$  Per ottenere una migliore approssimazione si costruiscono più lati



$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)| + |\gamma(t_2) - \gamma(t_1)| + \dots + |\gamma(t_7) - \gamma(t_6)|$$

- DEFINIZIONE: Lunghezza

$\hookrightarrow \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  curva parametrica

Dato  $[a, b]$ , chiameremo partizione di  $[a, b]$  una sequenza  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$  ove  $t_0 = a$  e  $t_n = b$   $\downarrow$   $a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$   $\rightarrow$  Partizione  $\Pi$

Si definisce lunghezza della poligonale associata (inscritta) alla partizione  $\lambda(\Pi)$  il numero  $\lambda(\Pi) = \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$   $\downarrow$  Segmenti

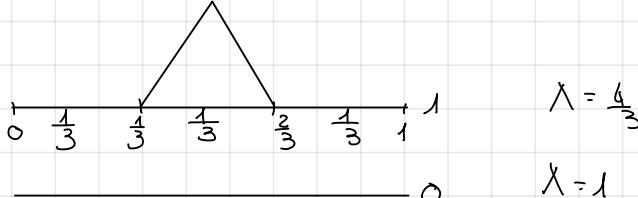


$\lambda(\gamma) = \sup_{\Pi} \lambda(\Pi) \rightarrow$  La lunghezza di  $\gamma$  è l'estremo superiore delle lunghezze di tutte le poligonalì inscritte

- Curva di von Koch o curva fiocco di neve



$\lambda = \frac{16}{9}$   $\rightarrow$   $n$  pezzi:  $\lambda = \frac{4^n}{3^n}$



- DEFINIZIONE: curva rettificabile

$\hookrightarrow$  Se  $\lambda(\gamma) < \infty$  allora  $\gamma$  si dirà RETTIFICABILE e  $\lambda(\gamma)$  sarà la sua lunghezza, altrimenti ( $\text{e } \lambda(\gamma) = +\infty$ ) la  $\gamma$  sarà detta NON RETTIFICABILE

$\downarrow$   $\int \gamma(t) dt = \left( \int \gamma_1(t) dt \atop \int \gamma_2(t) dt \atop \int \gamma_n(t) dt \right) \rightarrow$  LEMMA:  $a < b \rightarrow \left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt$

$\downarrow$   $\int_a^b |\gamma(t)| dt$  è l'integrale di una funzione scalare

$\rightarrow$  "Diseguaglianza triangolare":  $\int \approx \sum \rightarrow$  Norma somma  $\leq$  Somma norme

"Pseudo-dimostrazione":  $\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| \approx \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma(t_i)(t_{i+1} - t_i)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i)(t_{i+1} - t_i)| \approx \int_a^b |\gamma(t)| dt$

- TEOREMA di RETTIFICABILITÀ delle curve  $C^1[a, b]$

$\hookrightarrow \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1[a, b]$ . Allora  $\gamma$  è rettificabile e inoltre

$$\lambda(\gamma) = \int_a^b |\gamma(t)| dt$$

## Dimostrazione

Scelta  $\Pi: a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  si osserva che  $|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| dt$ : Torricelli

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma(t) dt \right| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma(t)| dt \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma(t)| dt$$

dunque sopra

$\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$  perché è la somma di integrali di funzioni scalari  
 → Spaziose la partizione: può essere scelta arbitrariamente in quanto INDEPENDETE  
 Maggiorente  $\lambda(\pi) \forall \pi$

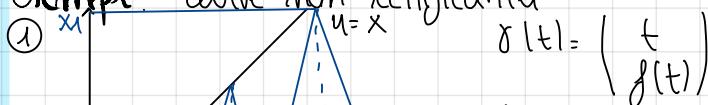
Segue che  $\lambda(\gamma) \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt \rightarrow$  un maggiorante  $\lambda(\pi) \forall \pi$   
 ↓ minimo dei maggioranti  
 $\lambda(\pi) \forall \pi$

Ne segue che  $\lambda(\gamma) \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$

- TEOREMA:  $\lambda(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$
- Cosa intendiamo per  $\int |\dot{\gamma}(t)| dt$ ?

→ Tachimetro della macchina: la velocità rappresenta  $|\dot{\gamma}(t)|$ , mentre il chilometraggio è dato da tutto l'integrale: 1h a 100 km/h = 100 km =  $\int_0^1 100 \text{ km/h}$

Esempi: curve non rettificabili



da somma dei due lati del primo triangolo è  $> 2 \cdot \frac{1}{2}$   
 (2 volte l'altezza per  $x=1$  che è maggiore di quella effettiva  
 ↓)

da somma di successivi dei lati è  $> 2x_2 > 2 \cdot \frac{1}{3}$

La lunghezza totale della spezzata  $> n$  triangoli + tratto finale piatto  $> 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} + \dots + 2 \cdot \frac{1}{n} =$

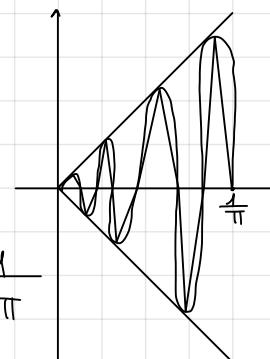
$$= 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} > \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty$$

②  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t=0 \\ t \sin \frac{1}{t} & t \in [0, \frac{1}{\pi}] \end{cases}$$

continua ↓

$$\sin \frac{1}{t} = 0 \Rightarrow \frac{1}{t} = k\pi, \text{ ovvero } t = \frac{1}{k\pi}$$



$$\sin \frac{1}{t} = 1 \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow f(t) = f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$\sin \frac{1}{t} = -1 \Rightarrow \frac{1}{t} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

La lunghezza della poligona è  $> \sum \left( \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \right) + \sum \left( \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \right)$

- TEOREMA: Se  $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\sigma': [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sono equivalenti allora  $\lambda(\gamma) = \lambda(\sigma')$

Dimostrazione

Equivalentia:  $\exists p: [c,d] \rightarrow [a,b]$  strettamente monotona:  $\sigma'(s) = \gamma(p(s))$   
 $\sigma'(s) = \dot{\gamma}(p(s)) \dot{p}(s)$

$$\lambda(\sigma') = \int_c^d |\dot{\sigma}'(s)| ds = \int_c^d |\dot{\gamma}(p(s))| |\dot{p}(s)| ds$$

2 casi → Se  $\gamma$  e  $\sigma'$  sono equivalenti  $\dot{p}(s) > 0$  e dunque l'ultimo integrale vale

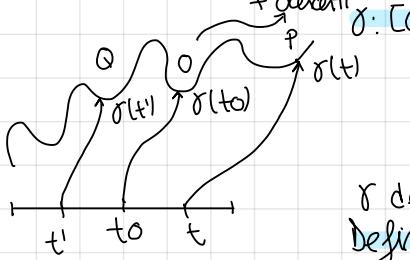
$$\int_c^d |\dot{\gamma}(p(s))| |\dot{p}(s)| ds = \int_{p(c)}^{p(d)} |\dot{\gamma}(t)| dt = \lambda(\gamma)$$

Se  $\gamma$  e  $\sigma'$  sono antiverte,  $\dot{p}(s) < 0$  e l'integrale avrà

$$\int_c^d |\dot{\gamma}(p(s))| |\dot{p}(s)| ds = - \int_c^d |\dot{\gamma}(p(s))| |\dot{p}(s)| ds = - \int_{p(d)}^{p(c)} |\dot{\gamma}(t)| dt = \lambda(\gamma)$$

perché  $p: [c,d] \rightarrow [a,b]$  è strettamente decrescente, quindi  $p(d) = b$  e  $p(c) = a$

### Arcisse curvilinee + concetti



$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

- definita REGOLARE se  $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$  e  $\dot{\gamma} \in C^1[a, b]$
- definita SEMPLICE se  $\gamma$  è iniettiva su  $[a, b]$  (valore che può accadere che  $\gamma(a) = \gamma(b)$ )
- definita CHIUSA se  $\gamma(a) = \gamma(b)$

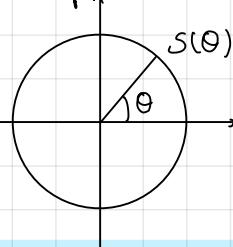
$\gamma$  deve essere SEMPLICE  
Definiremo  $s(P) = \int_{t_0}^t |\dot{\gamma}(s)| ds$   
 $s(\gamma(t))$

$P$  segue  $Q$  e quindi l'arcina è positiva

$Q$  precede  $P$  e quindi l'arcina è negativa:  $S(Q) = \int_{t_0}^{t'} |\dot{\gamma}(s)| ds = - \int_{t'}^{t_0} |\dot{\gamma}(s)| ds$

Essendo che  $|\dot{\gamma}(t)| \in C^0[a, b]$ ,  $\frac{ds}{dt} = |\dot{\gamma}(t)| > 0 \rightarrow$  regolare

### Esempio



$$\begin{aligned}\gamma & (\cos \theta) & [0, 2\pi] \\ & (\sin \theta) \\ \dot{\gamma} & (-\sin \theta) \\ & (\cos \theta)\end{aligned}$$

$$S(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d\theta = \int_0^\theta d\theta = \theta$$

### Lunghezza di curve in coordinate polari

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad t \in [a, b] \quad \lambda(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} dt$$

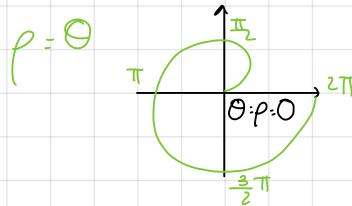
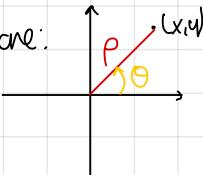
coordinate polari piane:

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta$$

$$x = p \cos \theta$$

$$y = p \sin \theta$$



Curva parametrica in coordinate polari:  $p(t), \theta(t)$

trasformazione in coordinate cartesiane

$$x(t) = p(t) \cos \theta(t)$$

$$y(t) = p(t) \sin \theta(t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{p} \cos \theta - p \sin \theta$$

$$\dot{y}(t) = \dot{p} \sin \theta + p \cos \theta$$

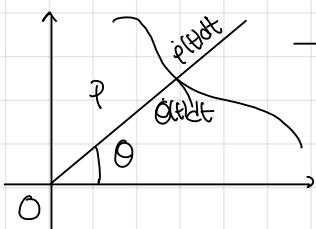
In coordinate cartesiane la curva diventa

$$\begin{cases} x = \theta \cos \theta & \theta \in [0, 2\pi] \\ y = \theta \sin \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = \cos \theta - \theta \sin \theta \\ \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta + \theta \cos \theta \end{cases}$$

$$\text{Formula distanza: } x^2 + y^2 = \underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_{1} + \theta^2 \sin^2 \theta + \theta^2 \cos^2 \theta - 2\theta \sin \theta \cos \theta + 2\theta \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 + \theta^2 \rightarrow \lambda(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta \rightarrow \theta = \operatorname{sen} \theta u$$

$$d\theta = \operatorname{cosec} \theta du$$



→ Nel caso in cui  $p$  e  $\theta$  siano funzioni di  $t$  si avrà  $p(t)$  e  $\theta(t)$

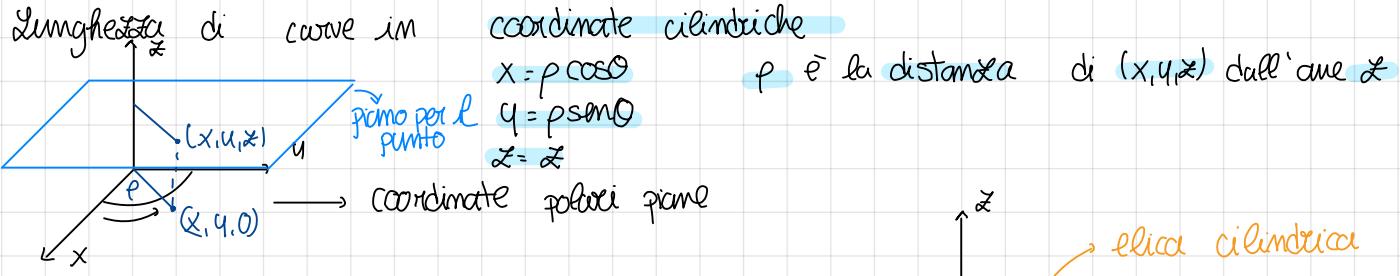
$$t \in [a, b] \rightarrow \lambda(\gamma) = \int_a^b \sqrt{p^2(t) + p^2(t) \theta^2(t)} dt$$

$$\begin{cases} x(t) = p(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = p(t) \sin \theta(t) \end{cases}$$

→ Facendo  $\sqrt{x^2 + y^2}$  si ottiene la FORMULA

→ Spostamento del punto lungo la circonferenza per un incremento di tempo  $dt$  **AL QUADRATO**

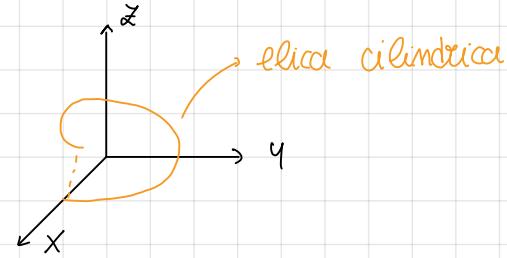
→ Spostamento in direzione RADIALE



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \cos t \\ p \sin t \\ c \end{pmatrix}$$

$$\gamma(0) = (1, 0, 0)$$

$$\gamma(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$$



Nel caso generale si avrà:  $p(t), \theta(t), z(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= p(t) \cos \theta(t) \\ y(t) &= p(t) \sin \theta(t) \\ z(t) &= z(t) \end{aligned}$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\dot{p}^2 \cos^2 \theta + \dot{p}^2 \sin^2 \theta + \dot{z}^2} = \sqrt{\dot{p}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\dot{x}(t) = \dot{p}(t) \cos \theta(t) - p(t) \sin \theta(t) \dot{\theta}(t)$$

$$\dot{y}(t) = \dot{p}(t) \sin \theta(t) + p(t) \cos \theta(t) \dot{\theta}(t)$$

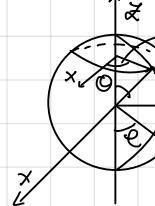
$$\dot{z}(t) = \dot{z}(t)$$

Applicandola al caso di prima si ha  $x(t) = \text{cost}$ ,  $y(t) = \text{sent}$ ,  $z(t) = t$ . Da questo, derivando si ottiene  $\dot{x} = -\text{sent}$ ,  $\dot{y} = \text{cost}$ ,  $\dot{z} = 1$

$$\hookrightarrow \text{Troviamo la lunghezza: } \int_0^{2\pi} \sqrt{1^2 + (-\text{sent})^2 + (\text{cost})^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} dt = \sqrt{2} 2\pi$$

Lunghezza di curve in coordinate sferiche

$$\begin{aligned} x(t) &= p(t) \sin \theta(t) \cos \varphi(t) \\ y(t) &= p(t) \sin \theta(t) \sin \varphi(t) \\ z(t) &= p(t) \cos \theta(t) \end{aligned}$$



$\theta$ : colatitudine

$p$ : distanza da  $(0,0,0)$

COMPLEMENTARE

$\varphi$ : coordinata angolare piano della proiezione  
 $(x, y, 0)$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\dot{p}^2 + p^2 \dot{\theta}^2 + p^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2}$$

$\downarrow$  Spost. Nord-Sud       $\downarrow$  Spostamento

$$\frac{d\theta}{dt}, \frac{dp}{dt}$$

Spostamento radiale  $\downarrow$   $\dot{z}$ -Ovest

$\dot{\theta}$  è l'incremento della colatitudine

La formula della lunghezza per le curve in coordinate sferiche è data da

$$\int_0^b \sqrt{\dot{p}^2 + p^2 \dot{\theta}^2 + p^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2} dt$$

Curve regolari (e non)

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1, 1] \quad \gamma \in C^\infty [-1, 1]$$

$x = t^3$   $\downarrow$  eliminiamo  $t$  dalla 1<sup>a</sup> equazione

$$y = t^2 \quad \downarrow t = x^{1/3} \quad \text{Sostituendo nella 2<sup>a</sup> equazione si ottiene } y = x^{\frac{2}{3}}$$

$\exists$  intre  $y'(0)$ ?  $\rightarrow y'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$   $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(h) - y(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\frac{2}{3}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\frac{1}{3}}$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \rightarrow \gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Non ha senso per  $x = 0$

NON esiste, né finito, né infinito (cancello)

$\gamma(t_0) \neq 0 \rightarrow$  una delle componenti scalari di  $\gamma$  è  $\neq 0$

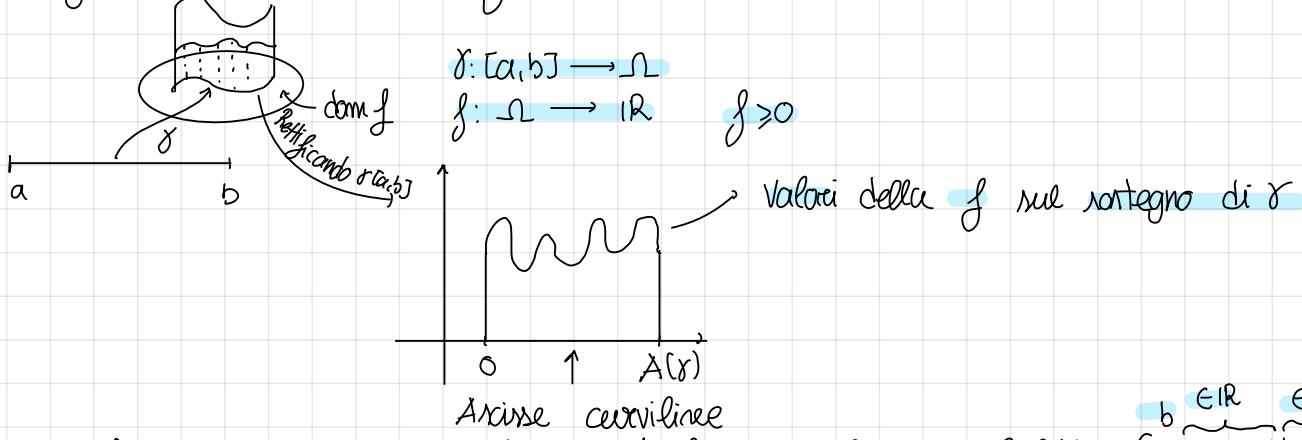
$\hookrightarrow \gamma \in C^1 \rightarrow \gamma \in C^0 \Rightarrow$  Retta diversa da zero in un intervallo di controllo

$[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  su cui la componente scalare, per esempio la prima  $\gamma_1$  è  $\neq 0$ , per esempio  $> 0$ .

$\gamma_1$  è strettamente decrescente su  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  e quindi è INVERTIBILE.  $x_1 = \gamma_1(t) \Rightarrow t = \gamma_1^{-1}(x_1)$

$\gamma_1(t) = \gamma_1(\gamma_1^{-1}(t))$  è  $C^1$

## • Integrale curvilineo di una funzione



Si definisce INTEGRALE CURVILINEO di  $f$  su  $\gamma$  il numero  $\int_{\gamma} f d\ell = \int_a^b f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt$   
 oppure  $d\ell$  oppure  $ds$   
 $\lambda(\gamma) = \int_{\gamma} 1 d\ell$

### Esempio

$$\int_{\gamma} xz$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi] \quad f(x, y, z) = xyz$$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} xz &= \int_0^{2\pi} \cos t \cdot t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} t \cos t dt = \sqrt{2} \left[ t \sin t \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t dt \right] = \\ &= \sqrt{2} \left[ 0 + \cos t \Big|_0^{2\pi} \right] = 0 \end{aligned}$$

### Invarianza dell'integrale

↪ Siamo  $\gamma(t)$  e  $\sigma(s)$  parametrizzazioni equivalenti equivalenti di una curva

$\gamma: [a, b] \rightarrow L$ ,  $\sigma: [c, d] \rightarrow L$ ,  $\exists \rho: [c, d] \rightarrow [a, b]$  invertibile, strettamente crescente

$$\sigma(s) = \gamma(\rho(s)), \quad f: L \rightarrow \mathbb{R} \quad \rho \in C^1, \quad \rho' > 0$$

$$\int_{\gamma} f = \int_c^d f(\sigma(s)) |\dot{\sigma}(s)| ds = \int_c^d f(\gamma(\rho(s))) |\dot{\gamma}(\rho(s)) \rho'(s)| ds = \int_c^d f(\gamma(\rho(s))) |\dot{\gamma}(\rho(s))| \rho'(s) ds$$

$$t = \rho(s) \quad \rho(d) = b$$

$$= \int_{\rho(c)}^{\rho(d)} f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt \rightarrow \text{Integrale INVARIATO} : = \int_{\gamma} f$$

Se le curve sono contrarie

$$\int_{\gamma} f = \int_c^d f(\sigma(s)) |\dot{\sigma}(s)| ds = \int_c^d f(\sigma(s)) |\dot{\sigma}(p(s)) \rho'(s)| ds = - \int_c^d f(\sigma(s)) |\dot{\sigma}(p(s))| \rho'(s) ds$$

$$t = \rho(s) \quad \rho(c) = b \quad \rho(d) = a \quad \int_a^b f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_{\rho(c)}^{\rho(d)} f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_{\gamma} f \rightarrow \text{Integrale INVARIATO}$$

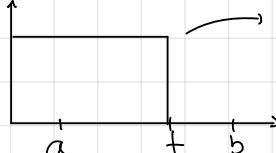
↪ TEOREMA:  $\int_{\gamma} f$  è invariante per parametrizzazioni equivalenti

### La parametrizzazione INTRINSECA

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  regolare ( $C^1$  e  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  su tutto  $[a, b]$ )

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau \quad s(t)$$

strettamente crescente, o  
meglio



$$s'(t) = |\dot{\gamma}(t)| > 0 \quad \forall t \in [a, b] \rightarrow s \text{ è invertibile da } [a, b] \rightarrow [0, \lambda(\gamma)]$$

Denotando con  $t(s)$  la funzione inversa da  $[0, \lambda(\gamma)] \rightarrow [a, b]$  si può definire  $\sigma(s) = \gamma(t(s))$   
 con  $s \in [0, \lambda(\gamma)] \rightarrow t(s)$  è il tempo necessario a percorrere la distanza  $s$

$$\sigma(s) = \gamma(t(s)) \quad t(s), \quad s \in [0, \lambda(\gamma)]$$

$t(s)$  è l'inversa di  $s(t)$ , quindi  $t'(s) = \frac{1}{s'(t(s))}$

$$\sigma'(s) = \gamma(t(s)) \cdot \frac{1}{s'(t(s))} \rightarrow |\gamma(t(s))|$$

$$\sigma'(s) = \frac{\gamma(t(s))}{|\gamma(t(s))|} : VERSORE \\ |\sigma'(s)| \equiv 1 \quad \forall s \in [0, \lambda(\gamma)]$$

Da quanto abbiamo appena enunciato abbiamo  
 $|\sigma'(s)| \equiv 1 \rightarrow \frac{d}{ds} |\sigma'(s)| \equiv 0$  su  $[0, \lambda(\gamma)]$

$$\frac{d}{ds} \sqrt{\sigma'(s) \cdot \sigma'(s)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma'(s) \cdot \sigma'(s)}} [\cancel{\sigma'(s) \cdot \sigma''(s)}] = \frac{\sigma''(s) \sigma'(s)}{|\sigma'(s)|}$$

quindi  $\sigma'$  (vetore tangente standard) è ORTOGONALE a  $\sigma''(s)$ , che verrà detto vettore NORMALE standard  $\rightarrow \sigma''(s) = |\sigma''(s)| \sigma''(s)$  → vettore normale alla curva

curvatura di  $\sigma$  in  $\sigma'(s)$

Esempio: caso particolare importante

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix}$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = R \int_0^t dt = Rt$$

$$s: [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2R\pi]$$

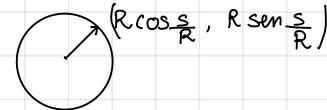
$$t(s) = \frac{s}{R}$$

$$\sigma: [0, 2R\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ con } \sigma(s) = \gamma(t(s)) = \gamma\left(\frac{s}{R}\right) = \sigma(s) = \left(R \cos\left(\frac{s}{R}\right), R \sin\left(\frac{s}{R}\right)\right)$$

$$s \in [0, 2R\pi]$$

$$\sigma'(s) = \left( -R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \cdot \frac{1}{R}, R \cos\left(\frac{s}{R}\right) \cdot \frac{1}{R} \right) = \left( -\sin\left(\frac{s}{R}\right), \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right)$$

$$\sigma''(s) = \left( -\cos\left(\frac{s}{R}\right) \cdot \frac{1}{R}, -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \cdot \frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R} \left( \cos\left(\frac{s}{R}\right), \sin\left(\frac{s}{R}\right) \right)$$



curvatura → Raggio di curvatura

- Lunghezza di un grafico  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \quad \text{Imm } \gamma = \text{graph } f \quad x|t|=t \quad t \in [a, b]$$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \quad |\dot{\gamma}| = \sqrt{1 + f'(t)^2} \quad \lambda(\text{graph } f) = \int_{\text{dom } f=[a, b]} \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

Esempio

Lunghezza di un arco di parabola  $y = x^2$  relativo a  $x \in [0, 1]$

$$\lambda = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx$$

① Sostituzione  $y = 2x$

② Sostituzione  $u = \sinh y$

• Lunghezza di una curva

$K = |\sigma''(s)|$   $\sigma'(s)$  era la parametrizzazione naturale  
 $\gamma(t) \rightarrow \sigma(t(s))$  ove  $t(s)$  era l'integrale di  $s(t) = \int_a^s |\dot{\gamma}(t)| dt$

$$\text{Per Torricelli: } s'(t) = |\dot{\gamma}(t)| \rightarrow \sigma'(s) = [\gamma(t(s))]'(s) = \gamma'(t(s))t'(s) = \gamma'(t(s)) \frac{1}{|\dot{\gamma}(t(s))|}$$

vettore tangente standard

$$f(x) = |x| \text{ su } \mathbb{R}^n \quad \nabla f(x) = \nabla \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right) = \left( \dots, \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}, \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = \frac{x}{|x|}$$

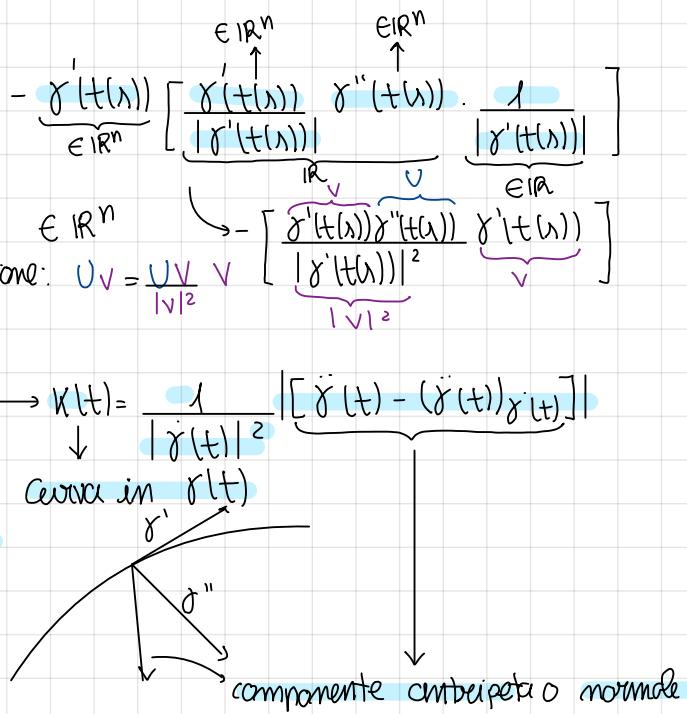
→ Da questo si ha  $\sigma'(t(\lambda)) = \frac{\gamma'(t(\lambda))}{|\gamma'(t(\lambda))|}$

$$\sigma''(t(\lambda)) = \frac{1}{|\gamma'(t(\lambda))|^2} [|\gamma'(t(\lambda))| \gamma''(t(\lambda)) \underbrace{\frac{1}{|\gamma'(t(\lambda))|}}_{\in \mathbb{R}^n} - \underbrace{\gamma'(t(\lambda))}_{\in \mathbb{R}^n} \left[ \underbrace{\frac{\gamma'(t(\lambda))}{|\gamma'(t(\lambda))|}}_{\text{proiezione: } \mathbf{U}_V} \gamma''(t(\lambda)) \cdot \underbrace{\frac{1}{|\gamma'(t(\lambda))|}}_{\in \mathbb{R}^n} \right]]$$

$$= \frac{1}{|\gamma'|^2} \left[ \gamma'' - \underbrace{\frac{\gamma'' \gamma'}{|\gamma'|^2} \gamma'}_{\gamma'' \gamma'} \right] \rightarrow \text{proiezione: } \mathbf{U}_V = \frac{\mathbf{U} \mathbf{V}}{|\mathbf{V}|^2} \mathbf{V}$$

$$K = |\sigma''(\lambda)| = \frac{1}{|\gamma'(t(\lambda))|^2} \left| \gamma''(t(\lambda)) - \frac{\gamma'' \gamma'}{|\gamma'|^2} \gamma' \right|_{t(\lambda)} \rightarrow K(t) = \frac{1}{|\gamma'(t)|^2} \left| [\gamma'(t) - (\gamma'(t)) \gamma'(t)] \right|$$

$\gamma'' \gamma'$  è la componente tangenziale dell'accelerazione



La matrice del termine tra parentesi quadre è  $|\gamma'' - \gamma' \gamma'| = \sqrt{|\gamma''|^2 - |\gamma'|^2}$   
e quindi  $K(t) = \frac{\sqrt{|\gamma''(t)|^2 - |\gamma'(t)|^2}}{|\gamma'(t)|^2}$

# gli integrali di Lebesgue

- Introduzione: La misura di un sottoinsieme  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
- $\hookrightarrow$  lunghezza in  $\mathbb{R}^1$ , area in  $\mathbb{R}^2$ , volume in  $\mathbb{R}^3$ ,  $n > 3$
- Stima di  $\pi$  di Archimede:  $3 + \frac{10}{\pi} < \pi < 3 + \frac{10}{7}$
- $\hookrightarrow$  Area di una figura:  $f > 0$

$$|\Omega| = \int_a^b f(t) dt$$

## Intervalli e plurintervalli

INTERVALLI:  $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [a_i, b_i], i=1, \dots, n\}$

In  $\mathbb{R}^3$  è un parallelepipedo con le facce parallele ai piani  $x_1=x_1^*, x_2=x_2^*, x_3=x_3^*$   $\rightarrow$  Piani impliciti

Misura dell'intervallo:  $|I| = |b_1 - a_1| \times |b_2 - a_2| \times \dots \times |b_n - a_n| = \prod_{i=1}^n |b_i - a_i|$

## PLURIINTERVALLI

$P = \bigcup_{i=1}^n I_i$  ove  $I_i$  è un intervallo verificanti  $I_i \cap I_j = \emptyset$  non contiene punti interni di  $I_i$  e  $I_j$



: solo punti di frontiera

$$|P| = \sum_{i=1}^n |I_i| \rightarrow \text{Area di un plurintervallo}$$

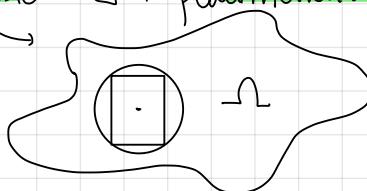
Se  $\Omega \subset \Omega'$  allora  $|\Omega| \leq |\Omega'| \rightarrow$  occorre garantire per la misura

$\hookrightarrow$  monotonia della misura

P è contenuto in  $\Omega$  se  $P \subset \Omega \rightarrow |P|$  è un'approssimazione per difetto delle  $|\Omega|$  ancora incompiuta

## DEFINIZIONE di MISURA di un APERTO

$\hookrightarrow$  se  $\Omega$  è aperto  $\exists P$  plurintervalli  $P \subset \Omega$  e si pone  $|\Omega| = \sup_{P \subset \Omega} |P|$



$\rightarrow$  Per ogni punto è presente una sferetta tutta contenuta in  $\Omega$ , all'interno della quale si può inserire un plurintervallo

## DEFINIZIONE di MISURA di un COMPATTO

$\hookrightarrow$  se  $K$  è compatto (chiuso e limitato), poiché  $K$  è limitato, è contenuto in una sfera e quindi in un intervallo (e quindi plurintervallo)  $\rightarrow |K| = \inf_{\Omega \ni K} |P| \geq K$

## MISURE INTERNE, ESTERNE ed INSIEMI MISURABILI

$\hookrightarrow E \subset \mathbb{R}^n$  sia un insieme limitato, arbitrario.

$\hookrightarrow$  MISURA ESTERNA di  $E$ :  $|E|^* = \inf_{\substack{\Omega \ni E \\ \text{aperto}}} |\Omega| \rightarrow$  approssimazione dall'esterno

$\hookrightarrow$  MISURA INTERNA di  $E$ :  $|E|_* = \sup_{\substack{K \subset E \\ K \text{ compatto}}} |K| \rightarrow$  approssimazione dall'interno

$E$  sarà detto MISURABILE (secondo Lebesgue) se e solo se  $|E|^* = |E|_*$  ed il valore comune sarà  $|E|$

- Misura di un insieme non limitato:  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$  misurabili, allora  $|\mathcal{E}| \leq |\mathcal{E}'|$   
 ↳  $\mathcal{E}$  NON LIMITATO,  $\mathcal{E}$  si dirà misurabile se  $\forall n \in \mathbb{N}$  è misurabile  $\mathcal{E} \cap B_n(0)$  ed inoltre  $|\mathcal{E}| = \sup |\mathcal{E} \cap B_n(0)|$   
 Osservazione:  $n \rightarrow |\mathcal{E} \cap B_n(0)|$  è crescente, perché  $B_n(0) \subseteq B_{n+1}(0)$  e per la monotonia della misura si ha la tesi

### Proprietà della misura

- MONOTONIA:  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$ ,  $\mathcal{E}$  ed  $\mathcal{E}'$  misurabili  $\Rightarrow |\mathcal{E}| \leq |\mathcal{E}'|$
- SUBADDITIVITÀ NON RABBIATIVA:  $\mathcal{E}_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  insiemi misurabili  $\Rightarrow |\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mathcal{E}_i|$
- ADDITIVITÀ NOTERABILE:  $\mathcal{E}_i$  misurabili  $|\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j| = 0 \Rightarrow |\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |\mathcal{E}_i|$
- $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}' \Rightarrow |\mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}| = |\mathcal{E}'| - |\mathcal{E}|$
- CONTINUITÀ VERSO L'ALTO:  $\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{E}_i$  misurabili,  $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{E}_{i+1} \Rightarrow |\mathcal{E}| = \sup_{i=1, \dots, \infty} |\mathcal{E}_i|$
- CONTINUITÀ VERSO IL BASSO:  $\mathcal{E} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{E}_i \supseteq \mathcal{E}_{i+1}$ ,  $|\mathcal{E}_i| < \infty \Rightarrow |\mathcal{E}| = \inf_{i=1, \dots, \infty} |\mathcal{E}_i|$

### Esempi

- $\mathcal{E}_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$   $\bigcap_{i=1}^{\infty} = \emptyset$   
 $\vdots$   
 $\mathcal{E}_n = \{x \in \mathbb{R} : x > n^3\}$   $\bigcap_{i=1}^{\infty} = |\mathcal{E}_1| = |\mathcal{E}_2| = \dots = |\mathcal{E}_n|$   
 $|\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i| = |\emptyset| \quad \emptyset \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow |\emptyset| \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \rightarrow |\emptyset| = 0$

### 2) Procedimento diagonale di Cantore

- $a_1 \frac{1}{1} \xrightarrow{a_2} \frac{1}{2} \xrightarrow{a_3} \frac{1}{3} \xrightarrow{a_4} \frac{1}{4} \xrightarrow{a_5} \frac{1}{5} \dots$  ... contiene tutte le frazioni a termini positivi  
 $a_2 \frac{2}{1} \xrightarrow{a_3} \frac{2}{2} \xrightarrow{a_4} \frac{2}{3} \xrightarrow{a_5} \frac{2}{4} \xrightarrow{a_6} \frac{2}{5} \dots$  Le frazioni  $\frac{m}{n}$  per cui  $m+n=k$  fanno  
 $a_3 \frac{3}{1} \xrightarrow{a_4} \frac{3}{2} \xrightarrow{a_5} \frac{3}{3} \xrightarrow{a_6} \frac{3}{4} \xrightarrow{a_7} \frac{3}{5} \dots$  uno numero finito  
 $a_4 \frac{4}{1} \xrightarrow{a_5} \frac{4}{2} \xrightarrow{a_6} \frac{4}{3} \xrightarrow{a_7} \frac{4}{4} \xrightarrow{a_8} \frac{4}{5} \dots$   
 $a_5 \frac{5}{1} \xrightarrow{a_6} \frac{5}{2} \xrightarrow{a_7} \frac{5}{3} \xrightarrow{a_8} \frac{5}{4} \xrightarrow{a_9} \frac{5}{5} \dots$   
 $\dots \dots \dots \dots \dots$

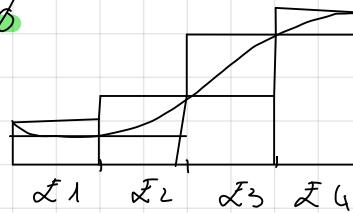
→ Esiste una successione  $a_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  suriettiva

### INTEGRABILITÀ

- $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ , limitata,  $\mathcal{E}$  misurabile,  $m(\mathcal{E}) < +\infty$ ,  $\Pi = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_N\}$  partizione che ha le seguenti proprietà in quanto tale

$$\begin{array}{l} \text{misurabili} \\ \mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{E} \\ \mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j = \emptyset \end{array}$$

SUMMA INFERIORE:  $\sum^*(f) = \sum_{i=1}^N m(\mathcal{E}_i) \inf_{\mathcal{E}_i} f$



SUMMA SUPERIORE:  $\sum^*(f) = \sum_{i=1}^N m(\mathcal{E}_i) \sup_{\mathcal{E}_i} f$

$\int^* f = \sup_{\Pi} \sum^*$  → INTEGRALE INFERIORE

$\int^* f = \inf_{\Pi} \sum^*$  → INTEGRALE SUPERIORE

↓

$f$  si direbbe integrabile (secondo Lebesgue) su  $\mathcal{E}$  se  $\int^* f = \int^* f$  ed il valore comune si denoterebbe con  $\int_{\mathcal{E}} f(x) dx \rightarrow$  INTEGRALE di LEBOESQUE

- $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f > 0$  (anche se non limitata),  $|\mathcal{E}| < +\infty$

$$f_K(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leq K \\ K & \text{se } f(x) > K \end{cases}$$



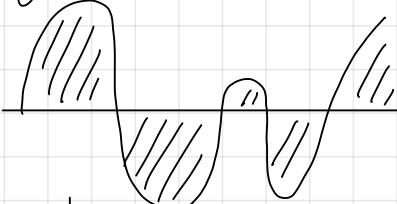
$$\int_{\mathcal{E}} f(x) dx = \sup_{K \in \mathbb{N}} \int_{\mathcal{E}} f_K(x) dx$$

integrale di una funzione limitata

PROPRIETÀ  $\int f < \int g$  se  $f < g$   
 $\int h > 0$  se  $h > 0$ : AREA

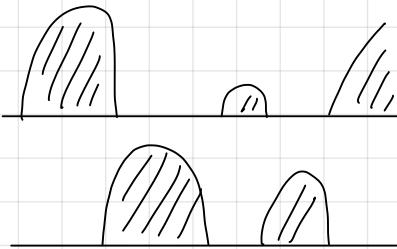
$f > 0$  se  $|\mathcal{E}| = +\infty \rightarrow \int_{\mathcal{E}} f(x) dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathcal{E}_n} f(x) dx$

$f$  di segno variabile



$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & f(x) > 0 \\ -f(x) & f(x) \leq 0 \end{cases}$$

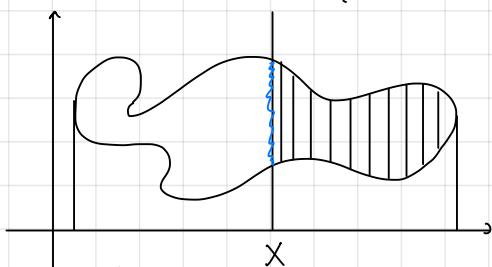
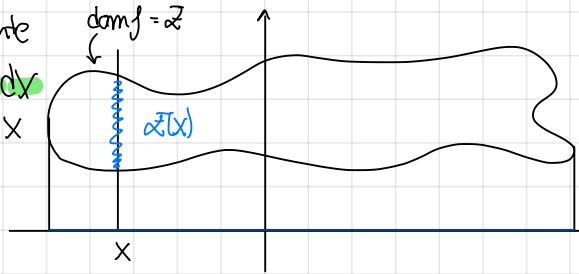


$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$  com  $f^+$  ed  $f^-$  sono entrambe NON NEGATIVE  
 Inoltre,  $|f| = f^+ + f^-$

DEFINIZIONE:  $\int_{\mathcal{E}} f = \int_{\mathcal{E}} f^+ - \int_{\mathcal{E}} f^-$   $\rightarrow f$  sarà detta integrabile su  $\mathcal{E}$  se  $\int_{\mathcal{E}} f^+$  è FINITO,  $\int_{\mathcal{E}} f^-$  è FINITO e  $\int_{\mathcal{E}} f = \int_{\mathcal{E}} f^+ - \int_{\mathcal{E}} f^-$

### TEOREMA di FUBINI / TONELLI

$\int_{\mathcal{E}} f(x,y) dx dy = \int_{\mathcal{E}} dx \int_{\mathcal{E}(x)} f(x,y) dy = \int_{\mathcal{E}} (\int_{\mathcal{E}(x)} f(x,y) dy) dx$   
 Proiezione di  $\mathcal{E}$  su  $x$   $\rightarrow x$  costante  
 Analogamente  $\int_{\mathcal{E}} f(x,y) dx dy = \int_{\mathcal{E}(y)} dy \int_{\mathcal{E}(y)} f(x,y) dx$



$$|\mathcal{E}| = \int_{\mathcal{E}} 1 dx dy$$

$$\int_{\mathcal{E}(x)} 1 dx = |\mathcal{E}(x)|$$

$$\int_{\mathcal{E}(x)} 1 dy$$

condizioni per l'integrazione (Teorema di Fubini - Tonelli)

Si può calcolare  $\int_{\mathcal{E}} f$  con integrali iterati se

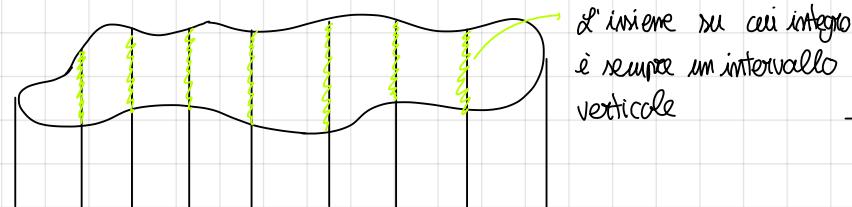
FUBINI:  $f$  è integrabile su  $\mathcal{E}$  ( $\int_{\mathcal{E}} |f| < +\infty$ )

TONELLI:  $f \geq 0$

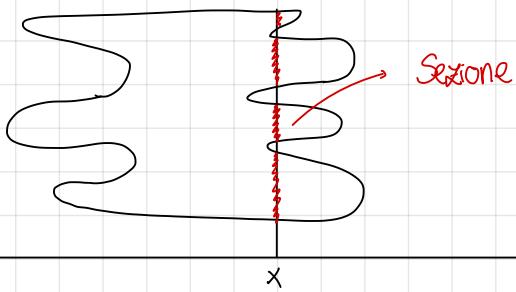
Adesso è necessario  
 Calcolo di  $\mathcal{E}(\bar{x}) = \{(x,y) \in \mathcal{E} : x = \bar{x}\} = \mathcal{E} \cap \{x = \bar{x}\}$

$\mathcal{E}$  sarà detto dominio normale se  $\mathcal{E}(x)$  è sempre un intervallo

rispetto ad  $x$   
 $\forall x \in T_x(\mathcal{E})$



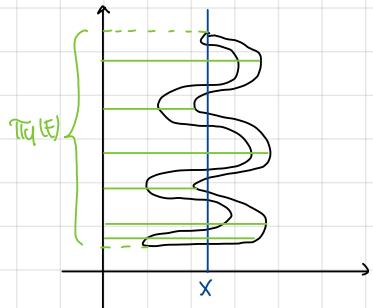
d'insieme su cui integrare è sempre un intervallo verticale



Dato  $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $T_x(\mathcal{E}) = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \quad (x,y) \in \mathcal{E}\} \rightarrow$  proiezione di  $\mathcal{E}$  su x

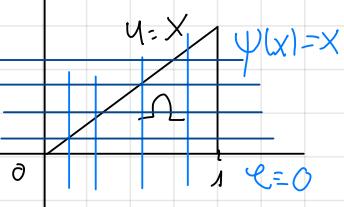
$\mathcal{E}(x) = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in \mathcal{E}\} \rightarrow$  Sezione di  $\mathcal{E}$

$\mathcal{E}$  è detto normale (rispetto a x) se  $\mathcal{E}(x)$  è sempre ( $\forall x \in T_x(\mathcal{E})$ ) un intervallo ( $\psi(x), \psi(x)$ )



Dunque  $\mathcal{E}$  normale ha l'intervallo  $x \in [a, b]$ ,  $\psi(x) \leq y \leq \varphi(x)$   
 Non è normale rispetto ad  $x$  in quanto, tracciando  
 una retta verticale, essa è un po' dentro ed un po' fuori  
 dell'insieme  
 Normale rispetto ad  $y$

### Esempio



$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}} x y \, dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{x} x y \, dy = \int_0^1 dx x \int_0^x y \, dy = \\ &= \int_0^1 dx x \left( \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^x \right) = \int_0^1 x \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 dx = \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Normale a  $x$

Normale a  $y$ :  $\mathcal{L} = \{y \in [0, 1]; y \leq x \leq 1\}$

↓

$\int_0^1 dy \int_0^y x y \, dx$  → Alternativamente al primo esempio

- Formula del cambio di variabile

$g: \Sigma \rightarrow \mathcal{L}$   $\Sigma, \mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $g \in C^1$  invertibile con inversa  $C^1$  [ $\Sigma = g^{-1}(\mathcal{L})$ ]

↓

$$\int_{\Sigma} f(g) \, dy = \int_{\mathcal{L}} f(g(x)) |\det g'(x)| \, dx$$

### Esempio

$$\int_{\mathcal{E}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx dy$$

$\downarrow$  cambio variabile

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \phi \frac{1}{\rho} \, d\rho \quad \det g' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 d\rho = \frac{\pi}{2}$$

$f(g(\rho, \theta))$

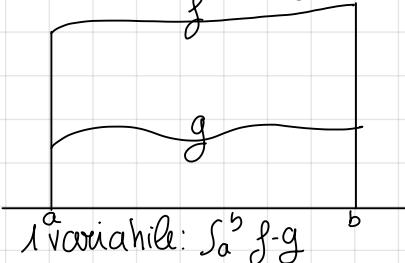
$$\mathcal{E} = \begin{array}{c} \text{triangle} \\ \text{area} \end{array}$$

$$x = \rho \cos \theta$$

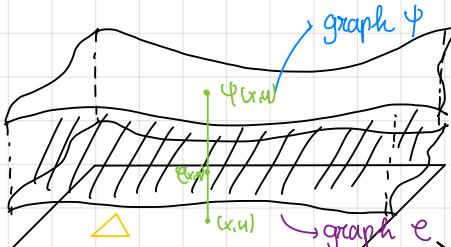
$$y = \rho \sin \theta$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{\rho^2} = \rho$$

- Area e volume di funzioni



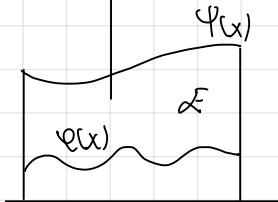
1 variabile:  $\int_a^b f - g$



$$\mathcal{E} = \{(x, y); x \in [a, b], y \in [\varphi(x), \psi(x)]\}$$

più variabili:  $\int_{\mathcal{E}} 1 = \int_{\mathcal{L}} 1$  →  $\frac{\text{dominio}}{\text{normale}} \rightarrow$   
 $(1 \text{ variabile})$

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z); (x, y) \in \Delta : z \in [\varphi(x, y), \psi(x, y)]\}$$

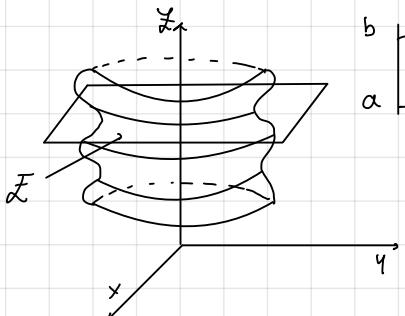


Integrazione per fili →

$$\int_{\mathcal{E}} 1 = \int_{\mathcal{L}} dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz = \int_{\Delta} \psi(x, y) - \varphi(x, y) dx dy$$

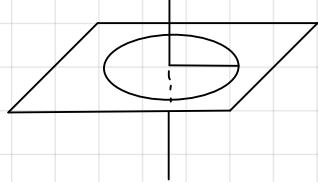
- Volume compreso fra grafici

Volume di un solido di rotazione



$$y = f(z)$$

$z > 0$  proiettando  $\mathcal{E}$  su  $\mathcal{Z}$  si ottiene  $\Pi_{\mathcal{Z}} \mathcal{E} = [a, b]$



$$\mathcal{E}(\bar{z}) = \{(x, y, \bar{z}); x^2 + y^2 \leq f^2(\bar{z})\}$$

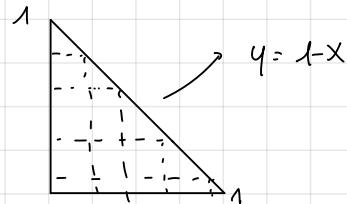
f raggio

$$|\mathcal{E}| = \int_a^b dz \int_{\mathcal{E}(z)}^b 1 dx dy = \int_a^b \pi f^2(z) dz \quad \rightarrow \text{Volume del solido di rotazione}$$

per primo si fa l'integrale sulla fetta / integrazione per STRATI

Esempio

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{xy} dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 e^{xy} dy = \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} e^{xy} dy = \\ &= \int_0^1 x^2 dx \left[ \frac{1}{x} e^{xy} \right]_0^{1-x} = \int_0^1 x^2 \frac{1}{x} (e^{x(1-x)} - 0) dx = \\ &= \int_0^1 x e^{x-x^2} - x dx \end{aligned}$$



- Elementi utili per l'integrazione

$f(x,y) = g(x)h(y)$  funzioni "ideali" per l'integrazione:  $\int_{\mathcal{E}} f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d dy g(x) h(y) =$

$$= \int_a^b dx g(x) \int_c^d dy h(y)$$

$$\mathcal{E} = [a,b] \times [c,d]$$

- Combihi di variabili

→ coordinate polari piane  
(simmetria circolare)

$$\begin{aligned} x &= p \cos \theta & |\det| &= p \\ y &= p \sin \theta \end{aligned}$$

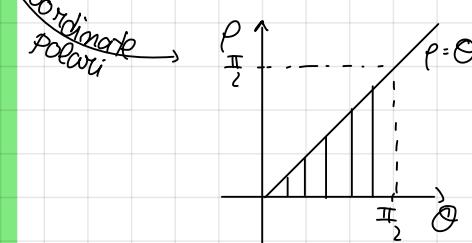
Esempio

$\rho = \theta \quad \theta \in [0, 2\pi] \rightarrow$  porzione di spirale di Archimede relativa a  $\theta \in [0, \pi/2]$

Scacchile  $x(\theta) = \theta \cos \theta, y(\theta) = \theta \sin \theta$

$$|\mathcal{E}| = \int_{\mathcal{E}} 1 dx dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\theta} \rho d\rho = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \theta^2 d\theta = \frac{1}{8} \theta^3 \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{8} \pi^3$$

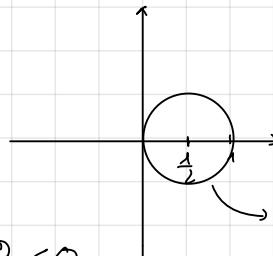
|Scacchiano| della trasformazione  $(\rho, \theta) \rightarrow (x, y)$



$$(2) \int_{\mathcal{E}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

$$\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

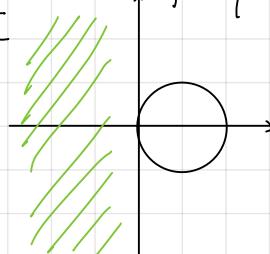
$$\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta - \rho \cos \theta < 0$$



$$x = \rho \cos \theta \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\rho}$$

$$x^2 + y^2 - x = 0 \quad \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

$\rho^2 < \rho \cos \theta$  e dividendo per  $\rho > 0 \rightarrow \rho < \cos \theta \Rightarrow \cos \theta > 0$  perché  $\cos \theta > \rho > 0$



$$0 < \rho < \cos \theta$$

Il dominio in coordinate polari è normale rispetto a  $\theta$  di disequazioni  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\rho \in [0, \cos \theta]$

$$\int_{\mathcal{E}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} \frac{1}{\rho} d\rho \rightarrow$$

Scacchiano raffigurazione di variabili =  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta (\cos \theta - 0) = 2$

funtione integranda

③  $\int_1^{\sqrt{2}} \int_{\frac{x^2+y^2=1}{\sqrt{x^2+y^2}}} dx dy$

$\mathcal{E} = \{(x,y) : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$

Coordinate polari  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$

$\begin{cases} \rho \cos \theta > 0 \rightarrow \cos \theta > 0 \\ \rho \sin \theta > 0 \rightarrow \sin \theta > 0 \\ \rho \cos \theta + \rho \sin \theta < 1 \rightarrow \rho(\cos \theta + \sin \theta) < 1 \end{cases}$

Somma di > 0 MAI simultaneamente nulli  $\rightarrow \rho < \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$

$\Theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \rho \in ]0, \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}[$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} \rho \frac{1}{\rho^2} d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} d\Theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{\sqrt{t^2+1}}{2} + \frac{1-t^2}{2}} \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\frac{1+t^2}{2} - \frac{2}{1+t^2}} dt = \int_0^1 \frac{2}{2t^2+1-t^2} dt = - \int_0^1 \frac{2}{t^2-2t-1} dt =$$

$$= - \int_0^1 \frac{2}{(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})} dt = \int_0^1 \frac{A}{x-1-\sqrt{2}} + \frac{B}{x-1+\sqrt{2}} dt = - \int_0^1 \frac{A(x-1+\sqrt{2}) + B(x-1-\sqrt{2})}{(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})} dt =$$

$$= - \int \frac{Ax - A\sqrt{2}A + Bx - B\sqrt{2}B}{(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})} dt = \int_0^1 \frac{A-B}{x-1-\sqrt{2}} dt = \int_0^1 \frac{A}{x-1-\sqrt{2}} dt = \int_0^1 \frac{A}{x-1-\sqrt{2}} dt =$$

$$= - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \frac{1}{x-1-\sqrt{2}} dt + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \frac{1}{x-1+\sqrt{2}} dt = - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(x-1-\sqrt{2}) \Big|_0^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(x-1+\sqrt{2}) \Big|_0^1 =$$

$$= - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \right) = 1.25$$

④  $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \left( \frac{-1}{2} \right) (-2\rho) d\rho = -\pi \int_0^{-\infty} e^{-t} dt =$

$$dt = -2\rho d\rho$$

$$= \pi \int_{-\infty}^0 e^{-t} dt = \pi \left[ -e^{-t} \right]_{-\infty}^0 = -\pi$$

△ NOTA:  $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = -\pi$   $e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2} e^{-y^2}$   $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy$$

$$\kappa^2 = \pi \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

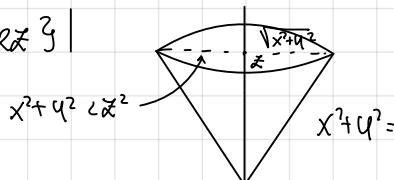
→ Coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\text{Jacobian}| &= \rho^2 \sin \theta \\ \theta &\in [0, \pi] \\ \varphi &\in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Esempi

$$\left| \begin{array}{l} \{x^2+y^2 < z^2\} \cap \{x^2+y^2+z^2 < 2z\} \\ \wedge \{z > 0\} \end{array} \right|$$



$$x^2+y^2+(z-1)^2-1 < 0$$

$$\downarrow$$

$$x^2+y^2+(z-1)^2 < 1 \quad \begin{aligned} &\text{quadrato del} \\ &\text{quadrato della distanza} \\ &\text{da } (0,0,1) \end{aligned}$$

$$\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi < \rho^2 \cos^2 \theta \rightarrow \sin^2 \theta < \cos^2 \theta \text{ e quindi } |\sin \theta| < |\cos \theta|$$

$$\varphi \in [0, \pi], \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$$

$$\rho \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi < \rho^2 \cos^2 \theta \rightarrow \rho < \cos \theta \text{ e quindi } \theta \in [0, \pi]$$

$$x^2+y^2+z^2 < 2z \rightarrow \rho^2 < 2\rho \cos \theta \xrightarrow{\rho > 0} \rho < 2\cos \theta \rightarrow \cos \theta > 0, \text{ quindi } \theta \in [0, \pi]$$

Intevoando le condizioni retta  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$  perché coordinate sferiche  
 $\phi \in [0, \frac{\pi}{4}]$   $\psi \in [0, 2\pi]$   $0 < \rho < \alpha \cos \theta \rightarrow$  tetto

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\alpha \cos \theta} p^2 \sin \theta d\rho = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \sin \theta \int_0^{\alpha \cos \theta} p^2 dp = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \sin \theta = -2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \sin \theta \frac{1}{3} \alpha^3 =$$

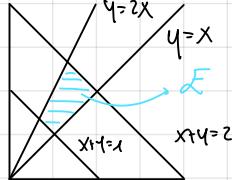
$$\cos^2(\theta) = t$$

$$\alpha \cos \theta \sin \theta d\theta = dt$$

$$\cos^2(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{8\pi}{3} \int_{1/2}^1 t dt = \frac{2\pi}{3} \int_{1/2}^1 t dt = \frac{2\pi}{3} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{1/2}^1 = \frac{4\pi}{3} \left[ \frac{1-1}{4} \right] = \frac{\pi}{3}$$

②  $\int_E \frac{dx dy}{xy}$



$$x+y < 2 \rightarrow 1 < \frac{x+y}{2} < 2 \text{ e } 2 > \frac{y}{x} > 1$$

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x = u - v \\ y = vx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{1+v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{v}{1+v} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u}{(1+v)^2} \end{cases}$$

$$u-x = vx \rightarrow (1+v)x = u \rightarrow x = \frac{u}{1+v} \quad y = \frac{uv}{1+v} \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{1+v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{v}{1+v} \end{cases}$$

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & \frac{-1}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^3} + \frac{uv}{(1+v)^3} = \frac{u(1+v)}{(1+v)^3} = \frac{u}{(1+v)^2}$$

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{\frac{1+uv}{(1+v)^2}} \cdot \frac{u}{(1+v)^2} = \int_1^2 du \int_1^2 \frac{1}{uv} = \int_1^2 du \frac{1}{u} \int_1^2 \frac{1}{v} = \ln 2 \cdot \ln 2 = (\ln 2)^2$$

• Integrazione per punti

→ Formula di Green-Gauss:  $\int_E f_x dx dy = \int_{\partial E} f dy$  ed anche  $\int_E f_y dx dy = -\int_{\partial E} f dx$

Esempi

$$|z| = \int_E 1 dx dy = \underbrace{\int_E x dy}_{1 = \frac{\partial}{\partial x} x}$$

integrale di forma differenziale

Altimenti

$$g = y \rightarrow |z| = - \int_{\partial E} y dx$$

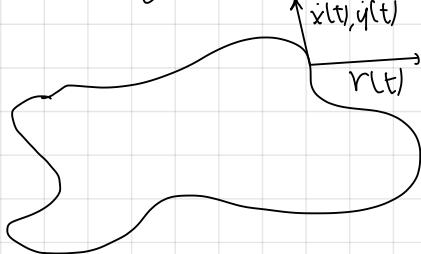
Oppure

$$|z| = \frac{1}{2} \int_{\partial E} x dx - y dx$$

②

$$f = (\cos t, \sin t) \quad \int_E 1 = \int_E x dy = \int_0^{2\pi} \cos t \cos t dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt$$

Formula generale:  $\int_E f_i x_i dx = \int_{\partial E} f_i r_i dr$  dove  $r$  è il vettore normale esterno



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \rightarrow \text{vettore tangente}$$

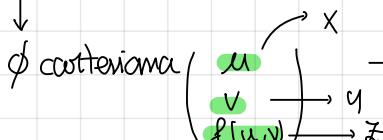
Vettore normale: scambio  
componenti e scambio, il segno di una

segno di una

• Area di una superficie parametrica

$$\phi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Area } \phi = \int_{\Delta} |\phi_u \times \phi_v| du dv$$

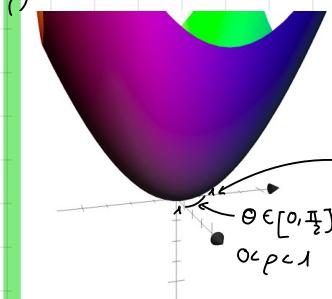
vettore normale standard



$$\text{Area superficie curvenica} = \int_{\Delta} \sqrt{1+f_u^2+f_v^2}$$

Exempio

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



$$fx = 2x$$

$$fy = 2y$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\int \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 &= \rho^2 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2} \rho$$