

Leonardo Lanari Giuseppe Oriolo

**CONTROLLI AUTOMATICI  
ESERCIZI DI SINTESI**

## Capitolo 1

# ANALISI DEI SISTEMI A RETROAZIONE

Gli esercizi di questo capitolo prendono in esame diversi aspetti dei sistemi di controllo a retroazione, e principalmente: stabilità, fedeltà di risposta, stabilità robusta.

### 1.1 Esercizi svolti

#### Esercizio 1.1

Mediante l'uso del criterio di Nyquist, si studi la stabilità del sistema a retroazione negativa unitaria avente come funzione di trasferimento ad anello aperto

$$F(s) = K \frac{(s+1)^2}{s(s-1)(s+2)(s+3)}$$

al variare del parametro  $K > 0$ .

---

Si noti innanzitutto che la  $F(s)$  è di per sé instabile a causa della presenza di un polo a parte reale positiva. Allo scopo di ottenere il suo diagramma di Nyquist, si procede al tracciamento dei diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$  per  $K = 1$ , riportati in Fig. 1.1. Il corrispondente diagramma di Nyquist qualitativo e un particolare ottenuto con l'ausilio del calcolatore sono rispettivamente mostrati in Fig. 1.2 e Fig. 1.3. Poiché il diagramma di

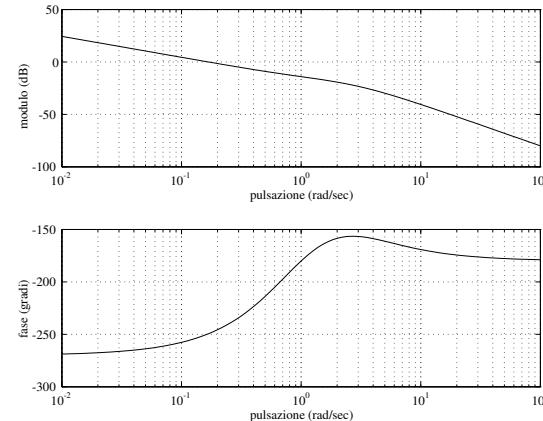
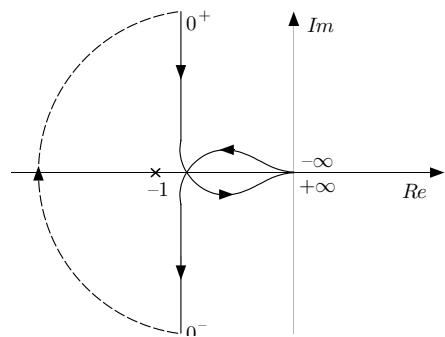
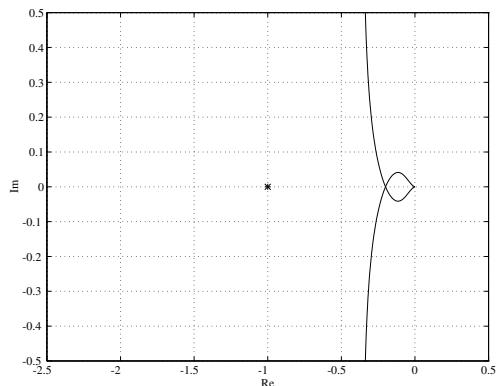


Figura 1.1: Diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$  per  $K = 1$

Nyquist effettua un giro in senso *orario* intorno al punto  $(-1, 0)$  del piano complesso, il criterio di stabilità di Nyquist è violato e, in corrispondenza al valore  $K = 1$ , il sistema a retroazione è instabile.

Per analizzare cosa succede al variare di  $K$ , si noti che tale variazione modifica il diagramma di Bode del modulo di  $F(j\omega)$ , che viene traslato verso l'alto o al basso di una quantità costante e pari a  $20 \log_{10} |K|$ . È immediato constatare che ciò si traduce in una *scalatura* uniforme del corrispondente diagramma di Nyquist. In particolare, si ha un ingrandimento del diagramma se  $|K| > 1$ , una riduzione se  $|K| < 1$ . Per valori negativi di  $K$ , si introduce anche uno sfasamento costante e pari a  $-180^\circ$  nel diagramma di Bode della fase di  $F(j\omega)$ ; di conseguenza, il diagramma di Nyquist viene anche ruotato di  $-180^\circ$ .

In questo caso, l'osservazione del diagramma indica che l'instabilità permane per valori di  $K$  positivi ma inferiori a 1. Invece, è facile rendersi conto che per valori sufficientemente elevati di  $K$  il diagramma assume l'aspetto

Figura 1.2: Diagramma di Nyquist qualitativo di  $F(j\omega)$  per  $K = 1$ Figura 1.3: Particolare del diagramma di Nyquist di  $F(j\omega)$  per  $K = 1$ 

mostrato in Fig. 1.4. Il computo dei giri questa volta indica che il sistema a retroazione è asintoticamente stabile, poiché il diagramma effettua un giro in senso *antiorario* intorno al punto  $(-1, 0)$ . Ad esempio, ciò accade per  $K = 10$ , come conferma il particolare in Fig. 1.5.

Per calcolare con esattezza il valore di  $K$  cui corrisponde il passaggio dalla instabilità alla stabilità asintotica si può applicare il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso

$$d(s) = s^4 + 4s^3 + (K+1)s^2 + 2(K-3)s + K.$$

La relativa tabella è

1	$K+1$	$K$
4	$2(K-3)$	
$2.5 + 0.5K$	$K$	
$K^2 - 2K - 15$		
$K$		

Si noti che nel ricavare la tabella si è tenuto conto del fatto che  $K$  è positivo per ipotesi. I termini della prima colonna sono tutti positivi per  $K > 5$ . Di conseguenza, per  $K > 5$  il sistema a retroazione è asintoticamente stabile, mentre per  $K < 5$  esso è instabile. Per  $K = 5$ , il sistema potrebbe essere semplicemente stabile oppure instabile.

Per analizzare in dettaglio quest'ultimo caso, si noti che in corrispondenza al valore  $K = 5$  si annulla la penultima riga della tabella di Routh. Com'è noto, ciò indica che il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso si fattorizza nel prodotto di due polinomi  $d_1(s)$  e  $d_2(s)$ . Indicazioni sulla parte reale delle radici di  $d_1(s)$  si ottengono dai segni degli elementi in prima colonna sovrastanti la riga nulla. Il polinomio  $d_2(s)$  ha solo potenze pari e ha come coefficienti gli elementi della riga che precede la riga nulla. In questo caso, si ha

$$d_2(s) = 5s^2 + 5 = 5(s^2 + 1),$$

mentre  $d_1(s)$  ha due radici con parte reale negativa (nessuna variazione di segno in prima colonna nelle prime tre righe della tabella). In particolare, è facile verificare che  $d(s)$  ammette la seguente fattorizzazione

$$d(s) = (s^2 + 4s + 5)(s^2 + 1).$$

Di conseguenza, per  $K = 5$  vi sono due radici reali in  $-1$  e  $-4$ , e due radici immaginarie in  $\pm j$ ; dunque, il sistema a retroazione è semplicemente stabile.

Poiché il sistema considerato è asintoticamente stabile per valori elevati e instabile per valori bassi del guadagno, si è di fronte a un tipico esempio di stabilità *paradossole*. Tuttavia, tale comportamento è raramente riscontrabile nei sistemi fisici, a causa della presenza di poli ‘lontani’ — cui corrispondono costanti di tempo molto piccole — che vengono normalmente trascurati nel modellare il sistema. Nel caso in esame, l’inclusione di un polo lontano in  $F(s)$

$$\tilde{F}(s) = F(s) \frac{1}{s + p}, \quad p \gg 1,$$

ha come effetto quello di portare asintoticamente la fase di  $\tilde{F}(j\omega)$  a  $-270^\circ$  per valori elevati di  $\omega$ , come si deduce immediatamente dai diagrammi di Bode. Ne consegue che il diagramma di Nyquist di  $\tilde{F}(j\omega)$  viene alterato rispetto a quello di  $F(j\omega)$  nell’intorno dell’origine, come mostrato qualitativamente in Fig. 1.6; si noti che il diagramma modificato attraversa più volte il semiasse reale negativo. Si comprende facilmente che, per valori sufficientemente elevati di  $K$ , il punto  $(-1, 0)$  viene ad essere circondato una volta in senso *orario*, e il sistema a retroazione diviene nuovamente instabile (stabilità *condizionata*). Come esempio, viene riportato in Fig. 1.7 un particolare del diagramma di Nyquist di  $\tilde{F}(j\omega)$  per  $p = 50$  e  $K = 7000$ .

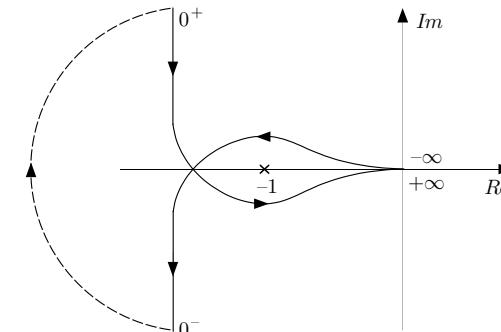


Figura 1.4: Diagramma di Nyquist qualitativo di  $F(j\omega)$  per valori elevati di  $K$

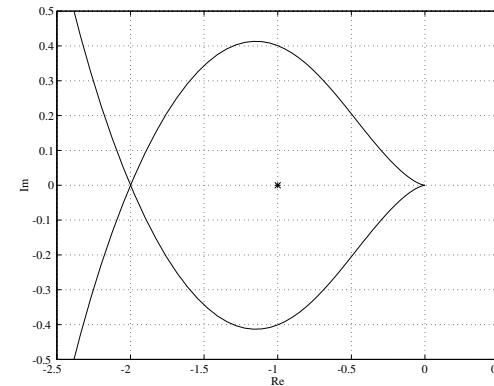


Figura 1.5: Particolare del diagramma di Nyquist di  $F(j\omega)$  per  $K = 10$

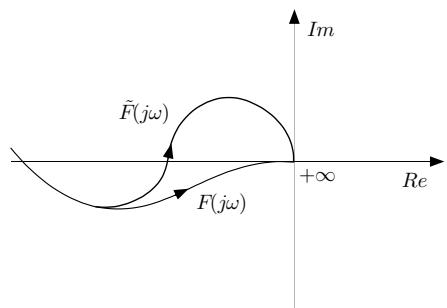


Figura 1.6: Alterazione del diagramma di Nyquist a seguito della introduzione in  $F(s)$  di un polo lontano

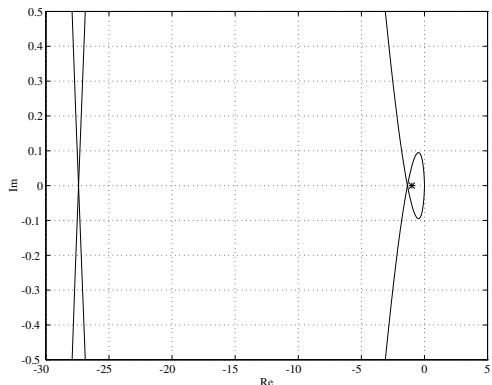


Figura 1.7: Diagramma di Nyquist di  $\tilde{F}(j\omega)$  per  $p = 50$  e  $K = 7000$

### Esercizio 1.2

Mediante il criterio di Nyquist, si studi la stabilità del sistema a retroazione negativa unitaria avente come funzione di trasferimento ad anello aperto

$$F(s) = K \frac{s + 1}{(2s - 1)(3s - 1)}$$

al variare del parametro  $K > 0$ .

Si noti che il sistema ad anello aperto ha due poli a parte reale positiva. Come primo passo si tracciano i diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$  per  $K = 1$ . Il risultato è riportato in Fig. 1.8. L'andamento qualitativo del diagramma di Nyquist per  $K$  generico è illustrato in Fig. 1.9, mentre in Fig. 1.10 è mostrato il diagramma per  $K = 1$  ottenuto con l'ausilio del calcolatore.

L'esame del diagramma mostra che la stabilità del sistema retroazionato dipende dal valore di  $K$ . Si avrà stabilità asintotica per quei valori di  $K$  in corrispondenza ai quali il punto  $(-1, 0)$  cade all'interno del segmento indicato con  $a$  in Fig. 1.9. Ciò accade per valori di  $K$  sufficientemente elevati: in questo caso, il diagramma compie due giri in senso antiorario intorno al punto  $(-1, 0)$ , e quindi è verificato il criterio di Nyquist.

Per individuare il valore di  $K$  corrispondente al passaggio dalla stabilità asintotica all'instabilità, si può utilizzare il criterio di Routh come nell'esercizio precedente. In alternativa, si osservi che tale situazione limite si verifica quando il diagramma polare di  $F(j\omega)$  passa per il punto  $(-1, 0)$ . Ciò suggerisce due ulteriori procedimenti per il calcolo del valore cercato.

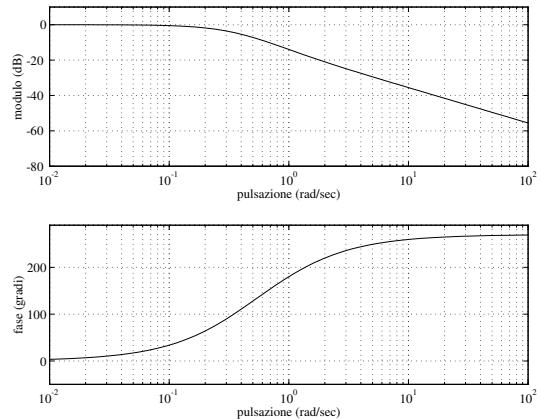
Il primo è di carattere grafico e si basa sull'esame dei diagrammi in Fig. 1.11. La fase di  $F(j\omega)$  vale  $180^\circ$  per  $\omega = 1$  rad/sec, dove il modulo di  $F(j\omega)$  è circa pari a  $-14$  dB. Per conseguire la situazione limite suddetta è necessario allora innalzare i moduli di 14 dB, il che equivale a porre  $K \approx 5$ .

Il secondo procedimento è più preciso e comporta il calcolo simbolico di parte reale e parte immaginaria di  $F(j\omega)$ . In particolare si ha

$$F(j\omega) = K \frac{(1 + j\omega)}{(1 - 2j\omega)(1 - 3j\omega)},$$

scomponibile in parte reale e parte immaginaria come segue

$$F(j\omega) = \frac{K(1 - 11\omega^2)}{(1 + 4\omega^2)(1 + 9\omega^2)} + j \frac{6K\omega(1 - \omega^2)}{(1 + 4\omega^2)(1 + 9\omega^2)}.$$

Figura 1.8: Diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$  per  $K = 1$ 

La parte immaginaria di  $F(j\omega)$  si annulla in corrispondenza a  $\omega = 0$ ,  $\omega = \pm 1$  e  $\omega = \pm\infty$ . Il diagramma qualitativo di Fig. 1.9 mostra che  $\omega = 0$  e  $\omega = \pm\infty$  non corrispondono al passaggio per il punto  $(-1, 0)$ . Tale passaggio può avvenire — per opportuni valori di  $K$  — solo per  $\omega = \pm 1$ . In corrispondenza a tali pulsazioni la parte reale di  $F(j\omega)$  vale

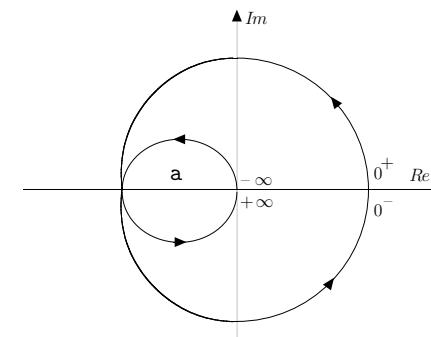
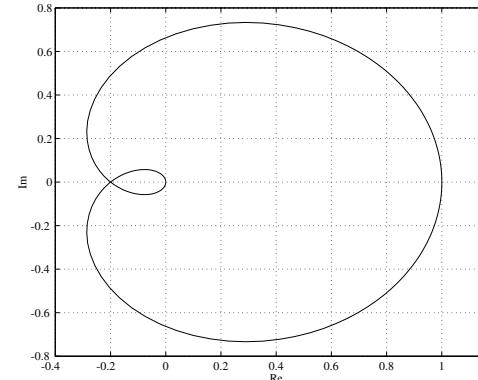
$$\operatorname{Re}[F(\pm j)] = -\frac{K}{5}.$$

Pertanto, se  $K = 5$  il diagramma passa esattamente per il punto  $(-1, 0)$ . In questo caso, per discriminare tra stabilità semplice e instabilità è sufficiente notare che il denominatore della funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso è pari a

$$d(s) = 6s^2 + 6,$$

e quindi il sistema retroazionato è semplicemente stabile.

In conclusione, per  $0 < K < 5$  il sistema a retroazione è instabile, per  $K = 5$  è semplicemente stabile, e per  $K > 5$  è asintoticamente stabile.

Figura 1.9: Diagramma di Nyquist qualitativo di  $F(j\omega)$ Figura 1.10: Diagramma di Nyquist di  $F(j\omega)$  per  $K = 1$

**Esercizio 1.3**

Mediante l'uso del criterio di Nyquist, si studi la stabilità del sistema a retroazione negativa unitaria avente come funzione di trasferimento ad anello aperto

$$F(s) = K \frac{(s+5)^2}{s(s+1)(s+0.1)(s+75)^2}$$

al variare del parametro  $K > 0$ .

Il tracciamento del diagramma di Nyquist può essere effettuato a partire dai diagrammi di Bode per  $K = 1$ , riportati in Fig. 1.11. Si noti il particolare andamento del diagramma delle fasi, che presenta più attraversamenti della retta a  $-180^\circ$ .

Una situazione di tale tipo può essere legata alla struttura intrinseca del processo da controllare, oppure verificarsi a seguito della introduzione di una pronunciata azione anticipatrice durante la sintesi del sistema di controllo (si veda ad esempio l'esercizio 2.6). L'andamento qualitativo del diagramma di Nyquist è illustrato in Fig. 1.12.

Dal diagramma si deduce facilmente che la stabilità del sistema retroazionato dipende dal valore di  $K$ . Infatti, poiché  $F(s)$  non ha poli a parte reale positiva, si ha stabilità asintotica solo nel caso in cui il diagramma di  $F(j\omega)$  non effettui alcun giro intorno al punto  $(-1, 0)$ . Un rapido esame della Fig. 1.12 mostra che ciò accade quando il punto  $(-1, 0)$  si trova sulla semiretta indicata con  $d$  (con l'esclusione del punto di origine della stessa) oppure si trova all'interno del segmento indicato con  $b$ ; in tutti gli altri casi si ha semplice stabilità o instabilità.

Per individuare i valori di  $K$  che garantiscono la stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso, si può applicare il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$s^5 + 151.1s^4 + 5790.1s^3 + (6202.5 + K)s^2 + (562.5 + 10K)s + 25K.$$

Costruendo la relativa tabella, è possibile verificare che gli intervalli di  $K$  per i quali si ha stabilità asintotica sono

$$0 < K < K_1 \quad \text{e} \quad K_2 < K < K_3,$$

con

$$K_1 \approx 42.37, \quad K_2 \approx 11063, \quad K_3 \approx 644973.$$

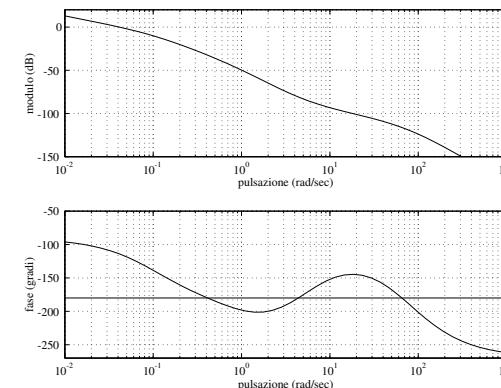


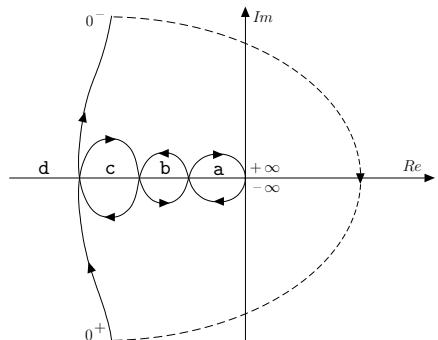
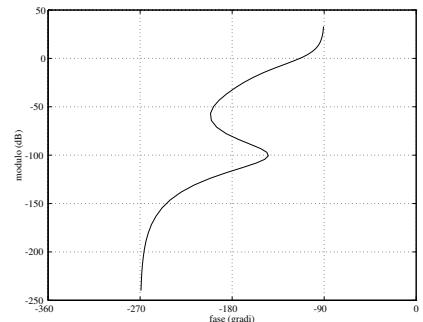
Figura 1.11: Diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$  per  $K = 1$

In particolare, è facile rendersi conto che il punto  $(-1, 0)$ :

- è interno alla semiretta  $d$  per  $0 < K < K_1$ ;
- è interno al segmento  $c$  per  $K_1 < K < K_2$ ;
- è interno al segmento  $b$  per  $K_2 < K < K_3$ ;
- è interno al segmento  $a$  per  $K > K_3$ ;
- appartiene al diagramma di Nyquist per  $K = K_1, K_2$  o  $K_3$ .

Per  $K = K_1, K_2$  o  $K_3$  il sistema è semplicemente stabile, poiché si può verificare che in tutti e tre i casi vi sono due radici distinte a parte reale nulla (immaginarie).

In conclusione, si riporta in Fig. 1.13 il diagramma di Nichols di  $F(j\omega)$  per  $K = 1$ ; si noti il caratteristico andamento dovuto agli attraversamenti multipli della retta a  $-180^\circ$  da parte del diagramma della fase di  $F(j\omega)$ .

Figura 1.12: Diagramma di Nyquist qualitativo di  $F(j\omega)$ Figura 1.13: Diagramma di Nichols di  $F(j\omega)$  per  $K = 1$ **Esercizio 1.4**

Mediante l'uso del criterio di Nyquist, si studi la stabilità del sistema a retroazione negativa unitaria avente come funzione di trasferimento ad anello aperto

$$F(s) = K \frac{(s+1)^2}{s(s+4)(s^2+9)}$$

al variare del parametro  $K > 0$ .

Si noti innanzitutto che nella  $F(s)$  è presente una coppia di poli immaginari in  $\pm 3j$ . Tale coppia, corrispondente a un termine trinomio con smorzamento nullo e pulsazione naturale pari a  $\omega_n = 3$  rad/sec, può modellare un fenomeno fisico di risonanza (ad esempio, meccanica o elettrica) oppure essere stata introdotta appositamente in fase di sintesi dal progettista, allo scopo di rendere il sistema ad anello chiuso insensibile a un disturbo sinusoidale di pulsazione  $\omega_n$  sull'uscita. Infatti, per il sistema di Fig. 1.14, la funzione di trasferimento del disturbo  $d$  sull'uscita  $y$  è

$$W_d(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{1 + F(s)}.$$

Il modulo di  $W_d(j\omega)$  vale zero in corrispondenza ai poli di  $F(s)$ . Di conseguenza, la risposta a regime permanente al disturbo  $d(t) = A \sin \omega_n t$  è nulla. Com'è noto, tuttavia, affinché il regime permanente esista il sistema a retroazione deve essere asintoticamente stabile.

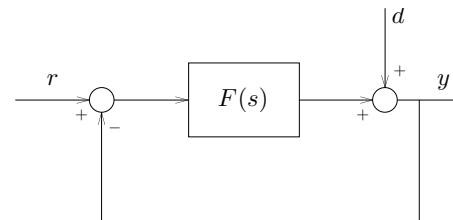
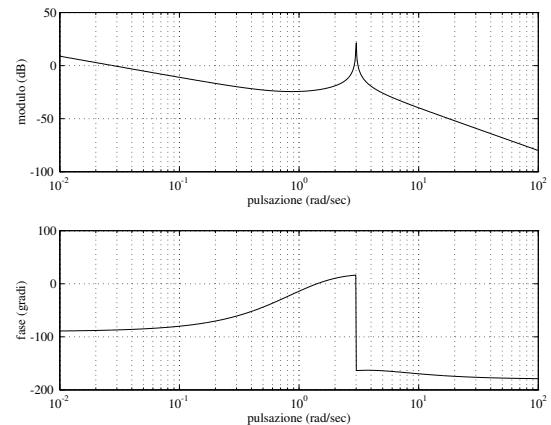
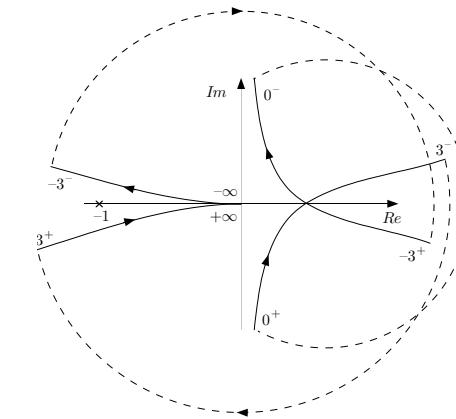
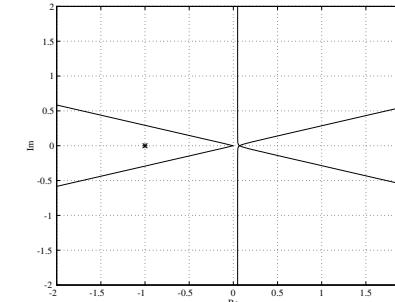


Figura 1.14: Sistema a retroazione unitaria con disturbo sull'uscita

Figura 1.15: Diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$  per  $K = 1$ 

Allo scopo di applicare il criterio di Nyquist, si procede al tracciamento dei diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$  per  $K = 1$ , riportati in Fig. 1.15. Il corrispondente diagramma di Nyquist qualitativo è mostrato in Fig. 1.16. Si noti che, a causa della presenza di tre poli a parte reale nulla in  $F(s)$ , si sono rese necessarie altrettante chiusure all'infinito.

Nonostante la relativa complessità del diagramma, un rapido esame mostra chiaramente che esso non effettua alcun giro intorno al punto  $(-1, 0)$  del piano complesso. Poiché la funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto è priva di poli con parte reale positiva, il criterio di stabilità di Nyquist è soddisfatto e il sistema a retroazione per  $K = 1$  è asintoticamente stabile. Esaminando la Fig. 1.16, si comprende inoltre che il sistema rimane asintoticamente stabile per qualsiasi valore di  $K > 0$ . In Fig. 1.17 è mostrato il diagramma di Nyquist per  $K = 1$  ottenuto con l'ausilio del calcolatore.

Figura 1.16: Diagramma di Nyquist qualitativo di  $F(j\omega)$ Figura 1.17: Particolare del diagramma di Nyquist di  $F(j\omega)$  per  $K = 1$

**Esercizio 1.5**

Si consideri il problema dell'asservimento di posizione per un motore elettrico a corrente continua controllato sulla tensione di eccitazione con corrente di armatura costante. Si possono adottare due schemi di controllo: nel primo, riportato in Fig. 1.18, si usa unicamente una retroazione dalla posizione angolare  $\vartheta$  dell'asse del motore (Schema 1). Una possibile alternativa, illustrata in Fig. 1.19, consiste nell'includere anche una retroazione dalla velocità angolare  $\omega$ , realizzata ad esempio con una dinamo tachimetrica (Schema 2).

In entrambi gli schemi, si è indicato con  $C_d$  un disturbo di coppia sull'asse del motore, con  $F_e(s)$  la funzione di trasferimento tensione/coppia del circuito di eccitazione e con  $F_m(s)$  la funzione di trasferimento cop-

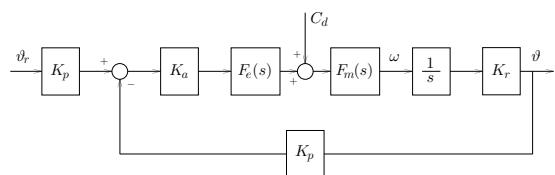


Figura 1.18: Asservimento di posizione: Schema 1

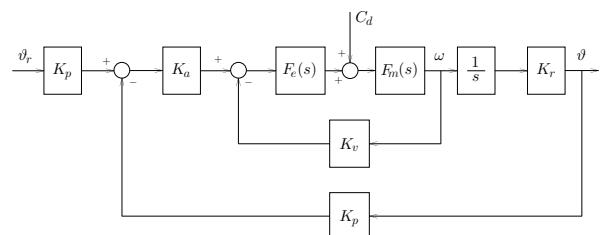


Figura 1.19: Asservimento di posizione: Schema 2

pia/velocità angolare del carico meccanico:

$$F_e(s) = \frac{K_c}{R_e + sL_e}, \quad F_m(s) = \frac{1}{F + sJ}.$$

$K_c$ ,  $R_e$  e  $L_e$  indicano rispettivamente il coefficiente di coppia, la resistenza e l'induttanza del circuito di eccitazione, mentre  $F$  e  $J$  sono il coefficiente di attrito viscoso e il momento d'inerzia del carico. Inoltre,  $K_p, K_a, K_r, K_v > 0$  sono rispettivamente la costante di trasduzione posizione angolare/tensione, il guadagno di amplificazione, il rapporto di riduzione e la costante di trasduzione velocità angolare/tensione.

Si confronti il comportamento a regime permanente dei due schemi di controllo in risposta a

- a) un ingresso di riferimento  $\vartheta_r$  a rampa unitaria;
- b) un disturbo  $C_d$  a gradino unitario.

Si consideri inoltre il seguente insieme di parametri:

$$\begin{aligned} K_c &= 9.7 \cdot 10^4 \text{ g} \cdot \text{rad} \cdot \text{cm}^2 / \text{Amp} \cdot \text{sec}^2, \quad R_e = 1500 \text{ Ohm}, \quad L_e = 45 \text{ Henry}, \\ F &= 1000 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 / \text{sec}, \quad J = 200 \text{ g} \cdot \text{cm}^2, \\ K_p &= 4 \text{ Volt/rad}, \quad K_r = \frac{1}{70}, \quad K_v = 35 \text{ Volt} \cdot \text{sec}/\text{rad}. \end{aligned}$$

Mediante il tracciamento del luogo delle radici al variare di  $K_a$ , si dia una valutazione qualitativa del comportamento transitorio dei due schemi di controllo.

In primo luogo, si semplifica lo Schema 1 riconducendolo allo schema a retroazione negativa unitaria riportato in Fig. 1.20.

Per procedere al calcolo della risposta a regime permanente, si calcola la corrispondente funzione di trasferimento ad anello chiuso  $W_1(s)$

$$W_1(s) = \frac{K_p K_a K_c K_r}{s(R_e + sL_e)(F + sJ) + K_p K_a K_c K_r}.$$

Com'è noto, il regime permanente esiste se e solo se tutti i poli della funzione di trasferimento hanno parte reale negativa. Per verificare questo fatto, si può ricorrere al criterio di Routh.

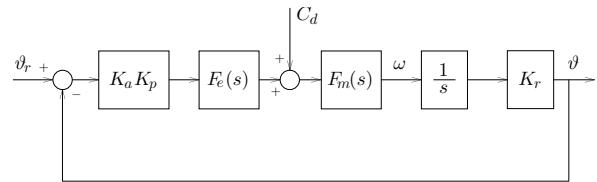


Figura 1.20: Schema 1: diagramma a blocchi equivalente

Costruendo la relativa tabella si ottiene

$$\begin{array}{ll} JL_e & R_e F \\ L_e F + R_e J & K' \\ (L_e F + R_e J)R_e F - JL_e K' & \\ K' \end{array}$$

dove si è posto  $K' = K_p K_a K_c K_r$ . Si ha quindi stabilità asintotica per

$$0 < K' < \frac{(L_e F + R_e J)R_e F}{JL_e}.$$

Ciò implica un limite superiore per il coefficiente  $K_a$  dell'amplificatore

$$K_a < \frac{(L_e F + R_e J)R_e F}{JL_e K_p K_r K_c} = K_{a1}.$$

Per ottenere il valore dell'errore  $\tilde{\epsilon}_1$  a regime permanente, è utile ricavare la funzione di trasferimento di errore

$$W_{e1}(s) = 1 - W_1(s) = \frac{s(R_e + sL_e)(F + sJ)}{s(R_e + sL_e)(F + sJ) + K_p K_a K_c K_r}.$$

Applicando il teorema del valore finale si ha

$$\tilde{\epsilon}_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} (\vartheta(t) - \vartheta_r(t)) = \lim_{s \rightarrow 0} sW_{e1}(s)\vartheta_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sW_{e1}(s) \frac{1}{s^2} = \frac{R_e F}{K_p K_a K_c K_r}.$$

Per il calcolo della funzione di trasferimento di errore dello Schema 2, quest'ultimo può essere semplificato con la seguente procedura:

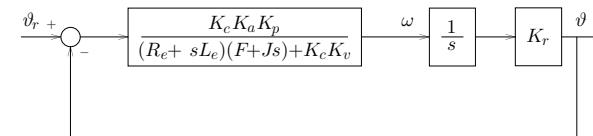


Figura 1.21: Schema 2: diagramma a blocchi equivalente per il calcolo della risposta all'ingresso

- si assorbe l'anello interno di retroazione;
- si riconduce lo schema così ottenuto al caso di retroazione unitaria.

Lo schema risultante è riportato in Fig. 1.21. La funzione di trasferimento ad anello chiuso  $W_2(s)$  è pari a

$$W_2(s) = \frac{K_p K_a K_c K_r}{s[(R_e + sL_e)(F + sJ) + K_c K_v] + K_p K_a K_c K_r}.$$

Affinché esista la risposta a regime, i poli della funzione di trasferimento  $W_2(s)$  devono avere tutti parte reale negativa. Applicando il criterio di Routh, si trova facilmente che  $K_a$  deve soddisfare la seguente diseguaglianza

$$0 < K_a < \frac{(L_e F + R_e J)(K_c K_v + R_e F)}{JL_e K_p K_r K_c} = K_{a2},$$

dalla quale si nota che il limite superiore per  $K_a$  è maggiore rispetto a quello ottenuto per lo Schema 1. La funzione di trasferimento di errore  $W_{e2}(s)$  è

$$W_{e2}(s) = 1 - W_2(s) = \frac{s[(R_e + sL_e)(F + sJ) + K_c K_v]}{s[(R_e + sL_e)(F + sJ) + K_c K_v] + K_p K_a K_c K_r}.$$

Applicando il teorema del valore finale si ha

$$\tilde{\epsilon}_2 = \lim_{s \rightarrow 0} sW_{e2}(s)\vartheta_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sW_{e2}(s) \frac{1}{s^2} = \frac{R_e F + K_c K_v}{K_p K_a K_c K_r}.$$

Si noti che nello Schema 2, a parità di  $K_a$ , l'errore a regime permanente è sempre maggiore che nello Schema 1, e tale errore cresce all'aumentare della costante di trasduzione  $K_v$ .

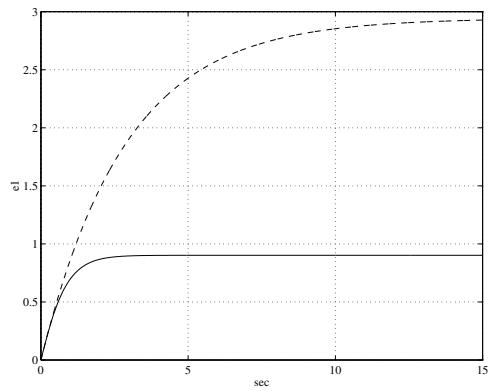


Figura 1.22: Errore per un ingresso a rampa unitaria: Schema 1 (—), Schema 2 (---)

Questo risultato può essere verificato tramite simulazione. Ad esempio, con i valori indicati nella traccia dell'esercizio, e  $K_a = 300$ , si ottiene per i due schemi l'andamento dell'errore riportato in Fig. 1.22.

In realtà, se si tiene conto che con l'introduzione della reazione di velocità si è aumentato il valore massimo ammissibile  $K_{a2}$  di  $K_a$ , l'errore a regime non risulta necessariamente aumentato usando lo Schema 2. Infatti, sostituendo  $K_{a1}$  in  $\tilde{\epsilon}_1$  si ha

$$\tilde{\epsilon}_1 > \frac{JL_e}{L_e F + R_e J},$$

mentre per lo Schema 2 si ha

$$\tilde{\epsilon}_2 > \frac{JL_e}{L_e F + R_e J}.$$

Di conseguenza, il minimo valore dell'errore a regime è indipendente da  $K_v$  ed è uguale per entrambi gli schemi. Si noti tuttavia che tale valore

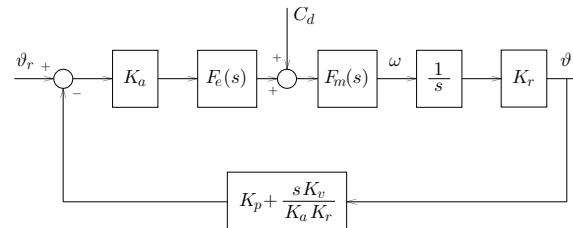


Figura 1.23: Schema 2: diagramma a blocchi equivalente per il calcolo della risposta al disturbo

minimo non è mai effettivamente assunto dall'errore poiché, per garantire la stabilità asintotica e quindi l'esistenza del regime permanente, il guadagno  $K_a$  dell'amplificatore deve essere *strettamente* minore di  $K_{a1}$  o  $K_{a2}$ .

Venendo al punto b), la funzione di trasferimento del disturbo per lo Schema 1 di Fig. 1.20 è

$$W_{d1}(s) = \frac{K_r(R_e + sL_e)}{s(R_e + sL_e)(F + Js) + K_pK_cK_aK_r}.$$

La risposta a regime permanente a un disturbo a gradino unitario può essere calcolata applicando il teorema del valore finale

$$\tilde{\vartheta}_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \vartheta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sW_{d1}(s) \frac{1}{s} = \frac{R_e}{K_pK_aK_c}.$$

Per quanto riguarda lo Schema 2, è necessario ritornare al diagramma a blocchi originario di Fig. 1.19, che può essere trasformato modificando l'anello interno di retroazione in modo che si trovi in parallelo all'anello esterno, e riducendo il parallelo a un unico anello. Si ottiene così lo schema di Fig. 1.23.

La funzione di trasferimento del disturbo è

$$W_{d2}(s) = \frac{K_r(R_e + sL_e)}{s[(R_e + sL_e)(F + sJ) + K_cK_v] + K_pK_aK_cK_r},$$

e quindi

$$\tilde{\vartheta}_2 = \lim_{s \rightarrow 0} sW_{d2}(s) \frac{1}{s} = \frac{R_e}{K_pK_aK_c} = \tilde{\vartheta}_1.$$

Si può quindi concludere che l'introduzione di una retroazione di velocità non modifica la risposta a regime permanente a un disturbo costante.

Il tracciamento del luogo delle radici al variare del guadagno  $K_a$  dell'amplificatore fornisce indicazioni sul comportamento transitorio del sistema perché consente di analizzare la collocazione dei poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso nei due casi. In Fig. 1.24 è riportato il luogo delle radici per lo Schema 1, con i valori dei parametri assegnati. L'esame del luogo mostra come il sistema di controllo presenta una coppia di poli *dominanti* in bassa frequenza e un polo in alta frequenza. In particolare, un discreto compromesso si ottiene scegliendo  $K_a \approx 313$ , cui corrisponde una coppia di poli reali coincidenti in  $-2.42$  (vedi Fig. 1.24) e un terzo polo in  $-33.5$ . Per valori di  $K_a$  inferiori a 313, uno dei due poli si avvicina all'origine, riducendo sensibilmente la banda passante del sistema — e quindi la sua velocità di risposta. D'altra parte, incrementando il valore di  $K_a$  oltre 313 i due poli dominanti diventano complessi coniugati, con una conseguente diminuzione dello smorzamento.

Il luogo delle radici per lo Schema 2 è riportato in Fig. 1.25. Esaminando il grafico, appare chiaro che in questo caso è possibile migliorare notevolmente il comportamento transitorio del sistema. Ad esempio, in figura sono indicati i poli corrispondenti a  $K_a = 4520$ , collocati in

$$p_{1,2} = -12.7 \pm 7.35j, \quad p_3 = -12.9.$$

Si noti che per questo schema non è possibile ottenere tutti poli reali ad anello chiuso.

A titolo di verifica, sono riportate in Figg. 1.26–1.27 le risposte indiciali (cioè per un riferimento  $\vartheta_r$  a gradino unitario) di entrambi gli schemi in corrispondenza a  $K_a = 313$  e  $K_a = 4520$ . Come previsto, aumentando il valore di  $K_a$ , il comportamento transitorio dello Schema 1 peggiora sensibilmente, mentre quello dello Schema 2 mostra un netto miglioramento. Si noti che, pur in presenza di una coppia di poli complessi coniugati, la risposta indiciale del secondo schema è praticamente priva di sovraelongazione.

Una situazione diversa si otterrebbe scegliendo, per lo Schema 2, un guadagno di amplificazione  $K_a$  sensibilmente maggiore di 4520. In tal caso, la coppia di poli complessi coniugati diverrebbe dominante, dando luogo a una risposta indiciale analoga a quella di un sistema del secondo ordine. Inoltre, dalla Fig. 1.25 si vede che il relativo coefficiente di smorzamento diminuirebbe. Di conseguenza, la relativa risposta presenterà verosimilmente un maggiore tempo di salita e una marcata sovraelongazione.

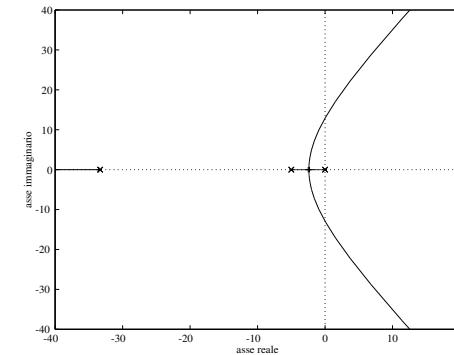


Figura 1.24: Schema 1: luogo delle radici al variare di  $K_a$

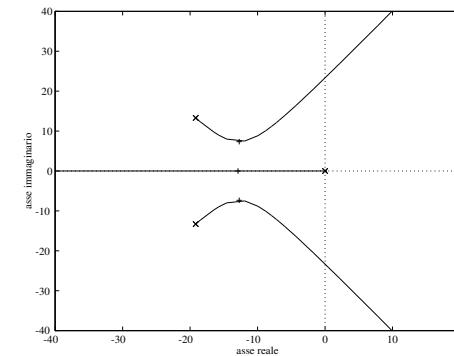


Figura 1.25: Schema 2: luogo delle radici al variare di  $K_a$

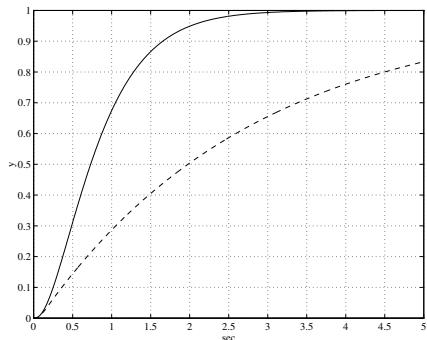


Figura 1.26: Risposta indiciale per  $K_a = 313$ : Schema 1 (—), Schema 2 (---)

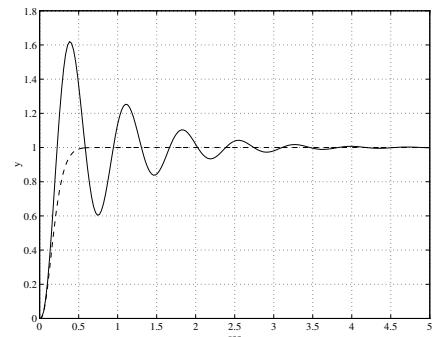


Figura 1.27: Risposta indiciale per  $K_a = 4520$ : Schema 1 (—), Schema 2 (---)

### Esercizio 1.6

Si consideri un carrello di massa  $M$  collegato a un muro da una molla elastica come illustrato in Fig. 1.28. La molla è caratterizzata da un coefficiente di elasticità  $K$ . Inoltre, è presente un attrito viscoso con coefficiente  $F$ . Sul carrello agiscono una forza di disturbo  $f_d$  e una forza di trazione  $f$ .

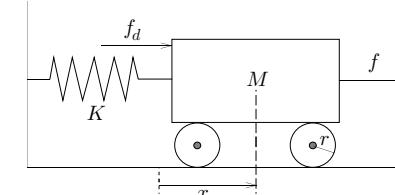


Figura 1.28: Il sistema meccanico considerato

Si definisca come grandezza di uscita la posizione  $x$  del carrello misurata rispetto alla posizione di equilibrio in assenza di forze. Il valore di  $x$  può essere dedotto dalla misura della posizione angolare delle ruote, che hanno raggio  $r$ . Si vuole controllare la posizione del carrello mediante uno schema a retroazione, nel quale l'azione di controllo è espletata da un amplificatore con costante di amplificazione  $K_a > 0$ .

- a) Costruito lo schema a blocchi del sistema risultante, si calcoli l'errore a regime permanente corrispondente a un ingresso di riferimento  $x_r$  a gradino unitario.
- b) Si ricavi l'espressione della risposta a regime del sistema in presenza di un disturbo sinusoidale  $f_d(t) = \sin \omega_d t$ , al variare di  $K_a$ .
- c) Si studi la collocazione dei poli della funzione di trasferimento del disturbo al variare di  $K_a$ .
- d) Si valuti l'influenza di  $K_a$  sull'attenuazione di un disturbo di pulsazione  $\omega_d = 10 \text{ rad/sec}$ , per i seguenti valori dei parametri:

- $M = 0.01 \text{ kg}$ ,  $F = 1 \text{ N}\cdot\text{sec}/\text{m}$ ,  $K = 1 \text{ N/m}$  (I);

- $M = 1 \text{ kg}$ ,  $F = 0.5 \text{ N}\cdot\text{sec}/m$ ,  $K = 1 \text{ N}/m$  (II).

Cosa succede nei due casi all'aumentare di  $\omega_d$ ?

---

Dal bilanciamento delle forze che agiscono sul carrello si ha

$$M\ddot{x} = -F\dot{x} - Kx + f + f_d.$$

Si definisce la grandezza ausiliaria di ingresso

$$u = f + f_d.$$

Le funzione di trasferimento tra  $u$  e la posizione  $x$  del carrello è

$$P(s) = \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Fs + K}.$$

Lo schema a blocchi del sistema di controllo è riportato in Fig. 1.29.  
Esso è equivalente ad uno schema a retroazione unitaria nel quale:

1. il blocco di amplificazione ha guadagno  $K_p = K_a/r$ ;
2. il segnale di riferimento  $x_r$  entra direttamente nel sommatore.

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso è

$$W(s) = \frac{x(s)}{x_r(s)} = \frac{K_p}{Ms^2 + Fs + K + K_p},$$

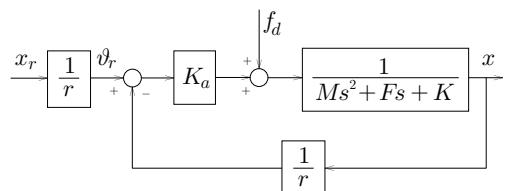


Figura 1.29: Il sistema di controllo risultante

cui corrisponde una funzione di trasferimento di errore

$$W_e(s) = \frac{e(s)}{x_r(s)} = 1 - W(s) = \frac{Ms^2 + Fs + K}{Ms^2 + Fs + K + K_p}.$$

Essendo il denominatore di  $W(s)$  un polinomio di secondo grado a coefficienti positivi, il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente. Ciò assicura la possibilità di definire un comportamento a regime.

Si noti innanzitutto che il sistema di controllo è di tipo 0 a causa dell'assenza di poli nell'origine nel ramo diretto. Di conseguenza, l'errore a regime permanente per un ingresso a gradino unitario è finito e diverso da zero. In particolare, esso vale

$$\tilde{e} = \lim_{s \rightarrow 0} sW_e(s) \frac{1}{s} = \frac{K}{K + K_p},$$

e quindi all'aumentare di  $K_p$  l'errore tende a diminuire.

Per studiare l'effetto del disturbo sulla posizione  $x$  del carrello, si calcola la funzione di trasferimento del disturbo

$$W_d(s) = \frac{x(s)}{f_d(s)} = \frac{P(s)}{1 + K_p P(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Fs + K + K_p}.$$

Essendo il disturbo sinusoidale con pulsazione  $\omega_d$ , la risposta a regime permanente  $\tilde{y}_d(t)$  a tale disturbo sarà anch'essa una funzione sinusoidale con la stessa pulsazione ma ampiezza e fase diverse:

$$\tilde{y}_d(t) = |W_d(j\omega_d)| \sin(\omega_d t + \angle W_d(j\omega_d)).$$

Se ne deduce che l'attenuazione del disturbo è tanto migliore quanto minore è la quantità

$$\left| \frac{1}{-M\omega_d^2 + jF\omega_d + K + K_p} \right|,$$

che, per un dato insieme di parametri, è funzione del guadagno  $K_p$  nonché della pulsazione del disturbo  $\omega_d$ .

Venendo al punto c), si osservi che i poli della  $W_d(s)$  (che naturalmente coincidono con i poli della  $W(s)$ ) sono dati da

$$p_{1,2} = \frac{-F \pm \sqrt{F^2 - 4M(K + K_p)}}{2M},$$

e quindi si avranno poli reali o complessi coniugati a seconda del segno di  $F^2 - 4M(K + K_p)$ . In particolare, definendo

$$\bar{K}_p = \frac{F^2}{4M} - K,$$

si hanno due poli reali per  $K_p \leq \bar{K}_p$  e una coppia di poli complessi coniugati per  $K_p > \bar{K}_p$ . Questi ultimi sono caratterizzati da una pulsazione naturale  $\omega_n$  e uno smorzamento  $\zeta$  pari a

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K + K_p}{M}}, \quad \zeta = \frac{F}{2\sqrt{M(K + K_p)}}.$$

Per quanto riguarda il punto **d**), in corrispondenza all'insieme (I) di parametri si ha  $\bar{K}_p = 24$ . Il tracciamento del luogo positivo delle radici al variare di  $K_p$  è riportato in Fig. 1.30.

L'ampiezza della risposta permanente per  $\omega_d = 10$  rad/sec è pari a

$$\left| \frac{1}{K_p + 10j} \right| = \frac{1}{\sqrt{K_p^2 + 100}}.$$

Pertanto, l'attenuazione del disturbo può essere migliorata aumentando  $K_p$ . Tale comportamento è confermato dal grafico di Fig. 1.31, nel quale è graficato il modulo del denominatore di  $W_d(j10)$  in funzione di  $K_p$ .

Un modo semplice per valutare l'andamento del modulo di  $W_d(j\omega_d)$  al variare della pulsazione del disturbo è quello di tracciare i diagrammi di Bode in corrispondenza a diversi valori di  $K_p$ , come mostrato in Fig. 1.32. L'esame del diagramma dei moduli conferma che, in corrispondenza a  $\omega_d = 10$  rad/sec, all'aumentare di  $K_p$  si ha una diminuzione del modulo.

Tuttavia, questa situazione non si verifica per qualunque valore di  $\omega_d$ . Il motivo per cui ciò può accadere è illustrato in Fig. 1.33, in cui i diagrammi asintotici 1, 2 e 3 corrispondono a valori crescenti di  $K_p$ . All'aumentare di  $K_p$  i due poli reali si avvicinano (si veda anche la Fig. 1.30), e il diagramma di Bode asintotico di  $|W_d(j\omega)|$  si modifica come mostrato dal diagramma 2. Di conseguenza, in una ristretta banda di frequenza si ha un lieve peggioramento della risposta al disturbo all'aumentare di  $K_p$ . Al di sopra di un certo valore, un ulteriore aumento di  $K_p$  si traduce in una diminuzione del modulo (diagramma 3). Ad esempio, in Fig. 1.34 è mostrato

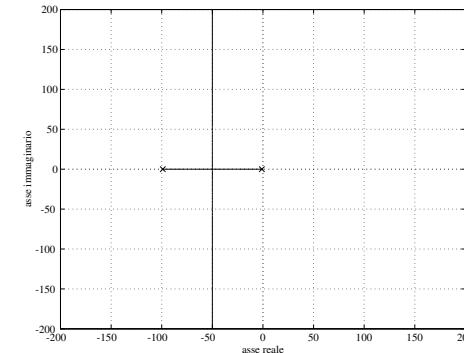


Figura 1.30: Caso (I): Poli di  $W_d(s)$  al variare di  $K_p$

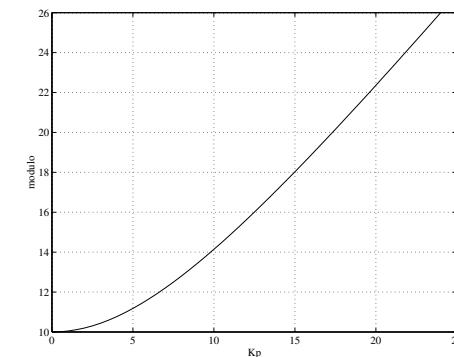


Figura 1.31: Caso (I): Modulo del denominatore di  $W_d(j10)$  al variare di  $K_p$

l'andamento del modulo del denominatore di  $W_d(j\omega_d)$  al variare di  $K_p$ , per  $\omega_d = 40$  rad/sec.

Tale comportamento diviene ancora più evidente quando  $K_p \gg \bar{K}_p$ . In tal caso, infatti, i poli di  $W_d(s)$  sono complessi coniugati e hanno uno smorzamento  $\zeta$  basso. Di conseguenza, il diagramma di Bode di  $|W_d(j\omega_d)|$  presenta una *risonanza* nell'intorno di  $\omega_n$  (si ricordi l'andamento del modulo di un fattore trinomio al variare dello smorzamento). In Fig. 1.32 ciò accade per  $K_p = 100$  e  $\omega \approx 80$  rad/sec.

In conclusione, in corrispondenza all'insieme (I) di valori dei parametri, se la pulsazione del segnale di disturbo è sufficientemente bassa ( $\omega_d < 20$  rad/sec) all'aumentare di  $K_p$  si ha una effettiva diminuzione dell'ampiezza della risposta a regime. Di contro, per pulsazioni più elevate l'aumento di  $K_p$  non introduce apprezzabili miglioramenti dell'attenuazione, che comunque è molto forte. Per valori molto elevati di  $K_p$  si ha una risonanza in  $W_d(j\omega)$ , localizzata comunque a frequenze molto alte.

In corrispondenza al secondo insieme (II) di valori dei parametri si ha  $\bar{K}_p < 0$ . Il luogo positivo delle radici al variare di  $K_p$  è riportato in Fig. 1.35, e conferma che in questo caso si hanno sempre due poli complessi coniugati. In particolare, all'aumentare di  $K_p$  si ha un aumento della pulsazione naturale  $\omega_n$  e una diminuzione dello smorzamento  $\zeta$ . Si noti che, per il caso limite  $K_p = 0$ , si ha  $\omega_n = 1$  rad/sec e  $\zeta = 0.25$ .

L'ampiezza della risposta permanente per  $\omega_d = 10$  rad/sec è pari a

$$\left| \frac{1}{K_p - 99 + 5j} \right| = \frac{1}{\sqrt{(K_p - 99)^2 + 25}},$$

il cui denominatore ha l'andamento riportato in Fig. 1.36 al variare di  $K_p$ . In questo caso l'attenuazione per  $\omega_d = 10$  rad/sec ha un minimo per  $K_p = 99$ .

I diagrammi di Bode di  $|W_d(j\omega)|$  in corrispondenza a diversi valori di  $K_p$ , mostrati in Fig. 1.37, confermano tale analisi. Si noti infatti che passando da  $K_p = 1$  a  $K_p = 100$  il modulo in  $\omega_d = 10$  rad/sec aumenta. In effetti, per  $K_p = 100$  si ha  $\omega_n \approx 10$  rad/sec e  $\zeta \approx 0.025$ . Continuando ad aumentare  $K_p$ , la pulsazione naturale si sposta a destra di  $\omega_d$ , e il modulo in corrispondenza di  $\omega_d$  diminuisce.

Riassumendo, in corrispondenza all'insieme (II) di valori dei parametri, si ha sempre un fenomeno di risonanza ( $\zeta < 0.25$ ) per un'opportuna banda di frequenze, che si sposta verso destra all'aumentare di  $K_p$ .

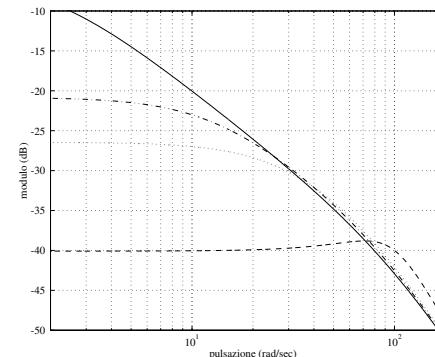


Figura 1.32: Caso (I): Diagrammi di Bode di  $|W_d(j\omega)|$  al variare di  $K_p$ :  $K_p = 1$  (—),  $K_p = 10$  (-·),  $K_p = 20$  (···),  $K_p = 100$  (—·—).

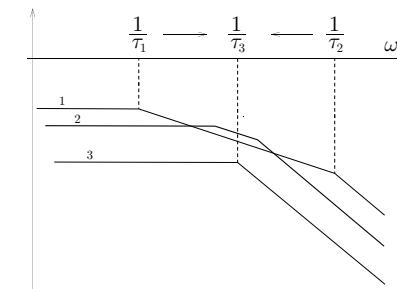


Figura 1.33: Caso (I): Andamento qualitativo di  $|W_d(j\omega)|$  in dB al crescere di  $K_p$

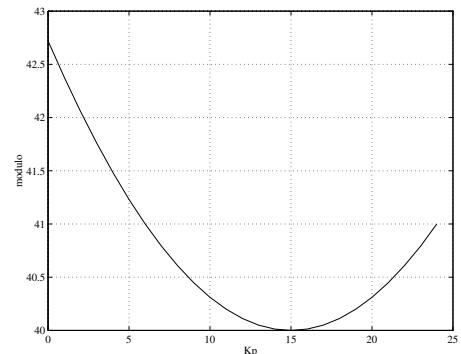


Figura 1.34: Caso (I): Modulo del denominatore di  $W_d(j40)$  al variare di  $K_p$

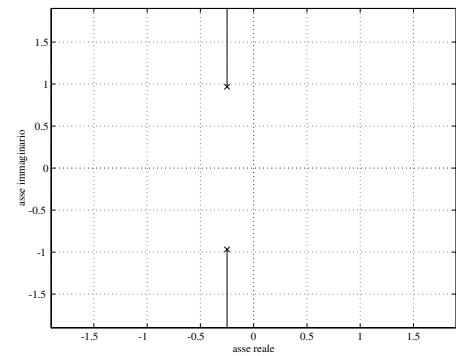


Figura 1.35: Caso (II): Poli di  $W_d(s)$  al variare di  $K_p$

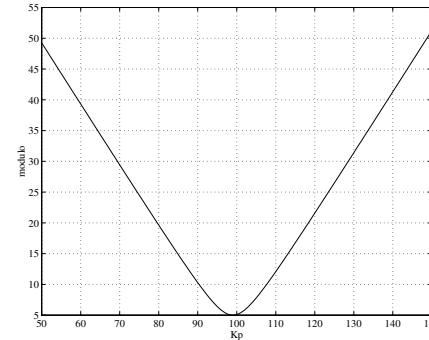


Figura 1.36: Caso (II): Modulo del denominatore di  $W_d(j10)$  al variare di  $K_p$

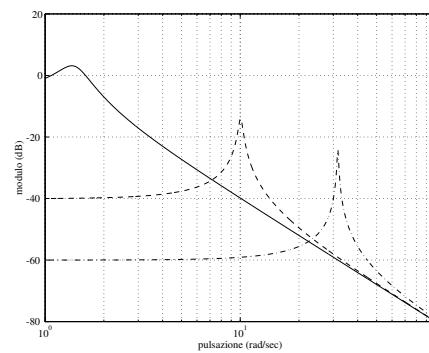


Figura 1.37: Caso (II): Diagrammi di Bode di  $|W_d(j\omega)|$  al variare di  $K_p$ :  $K_p = 1$  (—),  $K_p = 100$  (---),  $K_p = 1000$  (-·)

**Esercizio 1.7**

Sia dato un processo la cui funzione di trasferimento nominale è

$$P_0(s) = \frac{5}{s+5}.$$

La funzione di trasferimento reale del processo, che tiene conto della presenza di comportamenti dinamici in alta frequenza, è

$$P(s) = P_0(s) \frac{100(s-10)^2}{s^2 + 20s + 10000}.$$

Per agevolare l'analisi, si intende utilizzare in luogo di  $P(s)$  il seguente processo perturbato in modo moltiplicativo rispetto al processo nominale

$$\tilde{P}(s) = P_0(s)(1 + \Delta \cdot W_2(s)).$$

dove  $\Delta$  è un numero complesso tale che  $|\Delta| \leq 1$ .

- a) Si ricavi una possibile espressione per la funzione peso  $W_2(s)$  e se ne traccino i diagrammi di Bode.
- b) Si mostri che il sistema ottenuto chiudendo in retroazione negativa unitaria il processo nominale è stabile asintoticamente, mentre quello ottenuto usando il processo perturbato è instabile per opportuni valori di  $\Delta$ .
- c) Si verifichi che la condizione di stabilità robusta è violata per il processo perturbato.
- d) Si progetti una funzione compensatrice  $G(s)$  in modo che la condizione di stabilità robusta sia soddisfatta.

Per ottenere un'espressione della funzione peso  $W_2$ , conviene far sì che la classe di processi perturbati fornisca la funzione di trasferimento reale  $P(s)$  per  $\Delta = 1$ . Si ha

$$W_2(s) = \frac{100(s-10)^2}{s^2 + 20s + 10000} - 1 = \frac{s(99s - 2020)}{s^2 + 20s + 10000}$$

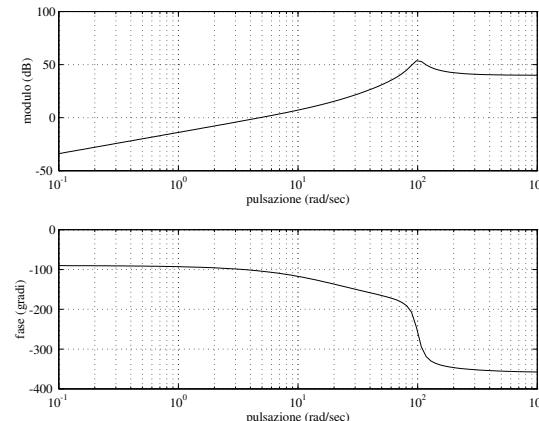


Figura 1.38: Diagrammi di Bode di  $W_2(j\omega)$

e i relativi diagrammi di Bode sono riportati in Fig. 1.38. Si noti il tipico andamento crescente del diagramma dei moduli, legato all'aumentare dell'incertezza in corrispondenza a frequenze elevate.

Per quanto riguarda il punto b), un semplice calcolo mostra che il sistema ottenuto chiudendo in retroazione negativa unitaria il processo nominale ha un unico polo in  $s = -10$ . Per quanto riguarda il sistema ottenuto usando il processo perturbato, si trova facilmente che il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso assume l'espressione

$$s^3 + (30 + 495\Delta)s^2 + (10200 - 10100\Delta)s + 100000.$$

Si tenga presente che, al fine di rappresentare incertezze tanto sul modulo quanto sulla fase della funzione di trasferimento, il parametro  $\Delta$  assume valori complessi. Se limitiamo l'analisi a valori *reali* di  $\Delta$ , si può studiare il segno delle radici del polinomio suddetto per mezzo del criterio di Routh. Costruendo la relativa tabella si ottiene

$$\begin{array}{r} 1 \\ 30 + 495\Delta \\ -9999\Delta^2 + 9492\Delta + 412 \\ \hline 100000 \end{array}$$

L'esame della prima colonna mostra che il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per valori di  $\Delta$  compresi tra  $-0.04$  e  $0.99$  circa (che sono le radici del primo elemento della terza riga). In particolare, si ha stabilità asintotica per  $\Delta = 0$ , cioè per il processo nominale, come si era già trovato. Tuttavia, esistono valori reali di  $\Delta$  nel suo intervallo di variabilità ( $|\Delta| \leq 1$ ) in corrispondenza ai quali il sistema retroazionato è instabile. Ad esempio, ciò accade per  $\Delta = 1$ , e cioè per il processo reale  $P(s)$ . In effetti, è possibile verificare che i poli del processo reale retroazionato si trovano in

$$p_1 = -525.17, \quad p_{2,3} = 0.09 \pm 13.80j.$$

Venendo al quesito c), si osservi innanzitutto che:

1. il sistema nominale ad anello chiuso è asintoticamente stabile;
2. il numero di poli con parte reale positiva o nulla del processo nominale coincide con quello del processo perturbato (infatti quest'ultimo presenta gli stessi poli del processo nominale con l'aggiunta dei poli di  $W_2(s)$ , che hanno entrambi parte reale negativa).

Com'è noto, condizione necessaria e sufficiente per la stabilità robusta in questa situazione è che

$$|W_0(j\omega)W_2(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega,$$

dove  $W_0 = P_0/(1+P_0)$  è la funzione di trasferimento nominale ad anello chiuso. In altri termini, il sistema perturbato ad anello chiuso è asintoticamente stabile per qualsiasi valore di  $\Delta$  tale che  $|\Delta| \leq 1$  se e solo se la suddetta condizione è soddisfatta. Nel caso in esame si ha

$$W_0(s)W_2(s) = \frac{P_0(s)}{1+P_0(s)} \cdot \frac{s(99s-2020)}{s^2+20s+10000} = \frac{5s(99s-2020)}{(s+10)(s^2+20s+10000)}.$$

Il diagramma di Bode dei moduli di  $W_0(j\omega)W_2(j\omega)$ , che si ricava facilmente a partire dal corrispondente diagramma di  $W_2(j\omega)$ , è mostrato in Fig. 1.39.

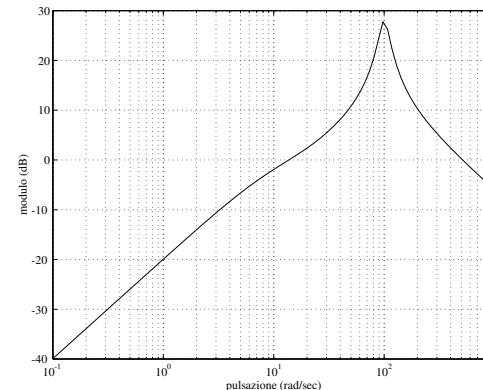


Figura 1.39: Diagramma di Bode dei moduli di  $W_0(j\omega)W_2(j\omega)$

L'esame del diagramma mostra immediatamente che alle frequenze elevate la condizione di stabilità robusta è violata, come era lecito attendersi per quanto visto al punto b).

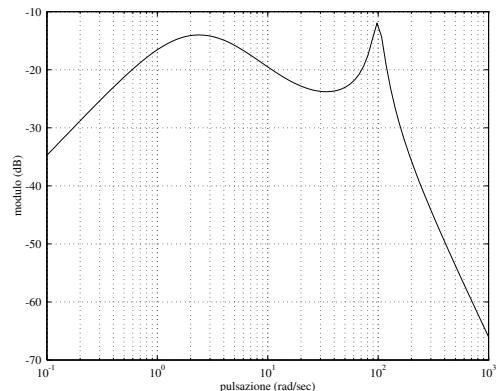
Per concludere l'esercizio, è necessario individuare una funzione compensatrice  $G(s)$  che renda soddisfatta la condizione di stabilità robusta

$$|W'_0(j\omega)W_2(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega,$$

dove  $W'_0 = GP_0/(1+GP_0)$  è la funzione di trasferimento nominale ad anello chiuso dopo l'aggiunta del compensatore. Essendo

$$W'_0(j\omega)W_2(j\omega) = \frac{GP_0}{1+GP_0} W_2(j\omega),$$

appare chiaro che per conseguire tale obiettivo è necessario scegliere  $G(s)$  in modo che il modulo del primo fattore sia sufficientemente ridotto alle frequenze elevate. In particolare, essendo  $|1+G(j\omega)P_0(j\omega)| \approx 1$  per  $\omega \gg 1$  (comportamento passa-basso), si dovrà scegliere  $G(s)$  in modo da ridurre opportunamente il modulo della funzione di trasferimento nominale ad

Figura 1.40: Diagramma di Bode dei moduli di  $W'_0(j\omega)W_2(j\omega)$ 

anello aperto  $G(s)P_0(s)$  alle frequenze elevate. In generale, ciò richiede l'esecuzione di tentativi. In questo caso la soluzione è assai semplice; basta porre ad esempio

$$G(s) = \frac{1}{s + 0.1}$$

per soddisfare la condizione di stabilità robusta, come appare dall'esame del diagramma di Bode dei moduli di  $W'_0(j\omega)W_2(j\omega)$ , riportato in Fig. 1.40.

Si noti che un risultato analogo si sarebbe potuto conseguire scegliendo la funzione compensatrice  $G$  come un semplice guadagno  $K_G < -28$  dB circa. Tuttavia, questa strategia è sconsigliabile in quanto comporta una notevole diminuzione del guadagno del sistema ad anello aperto, con i noti effetti negativi sulla fedeltà di risposta e sull'attenuazione dei disturbi.

**Esercizio 1.8**

Si consideri il pendolo inverso mostrato nella Fig. 1.41. La massa  $M$  del pendolo è concentrata all'estremità di un'asta di lunghezza  $\ell$ . Mediante un motore, è possibile esercitare una coppia  $u$  alla base dell'asta.

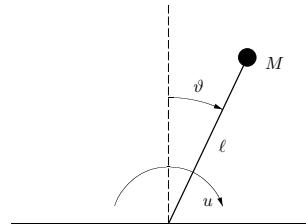


Figura 1.41: Pendolo inverso

a) Si ricavi la funzione di trasferimento  $P(s)$  tra la coppia  $u$  e la posizione angolare  $\vartheta$ , nell'ipotesi di piccoli scostamenti rispetto alla verticale e in assenza di attrito.

b) Posto  $M = 1$  kg e  $\ell = 1$  m, si progettii uno schema di controllo a retroazione in grado di stabilizzare il pendolo intorno alla posizione di equilibrio  $\vartheta_0 = 0$ . In particolare, si utilizzi un controllore della forma

$$G(s) = K_G \frac{s + z}{s + p}.$$

c) Si consideri ora il caso in cui la massa del pendolo  $M$  non sia nota, ma assuma un valore nell'intervallo

$$M_1 \leq M \leq M_2, \quad \text{con } M_1 = 0.8 \text{ kg}, M_2 = 1.2 \text{ kg},$$

mentre il valore  $\ell = 1$  m è noto con certezza. In considerazione di ciò, si vuole inquadrare la  $P(s)$  in una classe di processi perturbati in modo moltiplicativo rispetto a un processo nominale

$$\tilde{P}(s) = P_0(s)(1 + \Delta \cdot W_2(s)).$$

dove  $\Delta$  è un numero complesso tale che  $|\Delta| \leq 1$ . Fornire un'espressione per il processo nominale  $P_0(s)$  e per la funzione peso  $W_2(s)$ .

- d) Si verifichi se il controllore  $G(s)$  individuato in precedenza stabilizza anche il processo perturbato. In caso contrario, modificare  $G(s)$  in modo da conseguire tale obiettivo.

Nell'ipotesi di piccoli scostamenti rispetto alla verticale ( $\sin \vartheta \approx \vartheta$ ), l'equazione del moto del semplice sistema meccanico in esame è la seguente

$$M\ell^2\ddot{\vartheta} = Mg\ell\dot{\vartheta} + u.$$

Si noti che questo procedimento diretto equivale a effettuare la linearizzazione del sistema non lineare originario intorno al punto di equilibrio  $(\vartheta_0, \dot{\vartheta}_0) = (0, 0)$ . Trasformando secondo Laplace per condizioni iniziali nulle si ottiene

$$M\ell^2 s^2 \vartheta(s) = Mg\ell\dot{\vartheta}(s) + u(s),$$

da cui è possibile ricavare la funzione di trasferimento richiesta

$$P(s) = \frac{\dot{\vartheta}(s)}{u(s)} = \frac{K_P}{(s+a)(s-a)}, \quad \text{con } K_P = \frac{1}{M\ell^2}, \quad a = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

La presenza di un polo a parte reale positiva indica che il sistema linearizzato è instabile. Com'è noto, ciò indica che il punto di equilibrio considerato è instabile per il sistema originario. Per stabilizzarlo *localmente*, è possibile usare lo schema a retroazione mostrato in Fig. 1.42.

Essendo  $M = 1$  kg e  $\ell = 1$  m, la funzione di trasferimento del processo assume l'espressione

$$P(s) = \frac{1}{s^2 - g},$$

con  $g = 9.8$  m/sec<sup>2</sup>. Per scegliere i parametri  $K_G$ ,  $z$  e  $p$  del controllore  $G(s)$  si può utilizzare ad esempio il criterio di Routh. Il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso vale

$$(s+p)(s^2 - g) + K_G(s+z) = s^3 + ps^2 + (K_G - g)s + (K_G z - pg).$$

Condizione necessaria per la stabilità asintotica ad anello chiuso è quindi che si abbia

$$p > 0, \quad K_G > g, \quad K_G > g \frac{p}{z}.$$

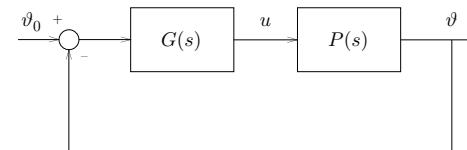


Figura 1.42: Schema a retroazione per la stabilizzazione di  $P(s)$

Costruendo la relativa tabella si ottiene

$$\begin{array}{ll} 1 & K_G - g \\ p & K_G z - pg \\ K_G(p-z) & \\ K_G z - pg & \end{array}$$

Alle condizioni precedenti va dunque aggiunta la seguente

$$K_G(p-z) > 0.$$

Ad esempio, ponendo  $z = 2$  e  $p = 4$  si ha stabilità asintotica per  $K_G > 2g$ . Una scelta di  $G(s)$  che soddisfa il requisito è

$$G_1(s) = 20 \frac{s+2}{s+4}.$$

Venendo al punto c), una scelta ragionevole è quella di porre la funzione di trasferimento del processo nominale pari a

$$P_0(s) = \frac{K_{P0}}{s^2 - g}, \quad \text{con } K_{P0} = \frac{1}{M_0} = 1,$$

dove  $M_0 = (M_1 + M_2)/2 = 1$  kg è il valore nominale della massa del pendolo. La funzione di trasferimento del processo reale sarà invece

$$P(s) = \frac{K_P}{s^2 - g}, \quad \text{con } K_P = \frac{1}{M}.$$

Si noti che il processo nominale e quello reale differiscono unicamente per il valore del guadagno. Per definizione, la funzione peso  $W_2$  che caratterizza il processo perturbato deve essere scelta in modo che si abbia

$$\left| \frac{P(j\omega)}{P_0(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_2(j\omega)|, \quad \forall \omega.$$

Essendo

$$\frac{P(s)}{P_0(s)} - 1 = \frac{K_P}{K_{P0}} - 1 = \frac{M_1 + M_2}{2M} - 1 \leq \frac{M_1 + M_2}{2M_1} - 1,$$

è sufficiente porre

$$W_2 = \frac{M_2 - M_1}{2M_1} = 0.25.$$

Al punto d) si chiede di determinare se il controllore  $G_1$  individuato in precedenza, che stabilizza il processo nominale  $P_0(s)$ , stabilizza anche il processo perturbato  $\tilde{P}(s)$ . Poiché i poli di  $P_0(s)$  coincidono con quelli di  $\tilde{P}(s)$ , si può applicare la condizione necessaria e sufficiente per la stabilità robusta, ovvero

$$|W_{0,1}(j\omega)W_2(j\omega)| < 1, \quad \forall\omega,$$

dove  $W_{0,1} = G_1 P_0 / (1 + G_1 P_0)$  è la funzione di trasferimento nominale ad anello chiuso. Nel caso in esame si trova

$$W_{0,1}(s)W_2 = \frac{5(s+2)}{s^3 + 4s^2 + 10.2s + 0.8}.$$

Il diagramma di Bode dei moduli di  $W_{0,1}(j\omega)W_2$  è mostrato in Fig. 1.43. L'esame del diagramma mostra che la condizione di stabilità robusta è violata alle basse frequenze.

Si rende quindi necessario modificare la funzione compensatrice  $G(s)$  in modo da rendere soddisfatta la condizione di stabilità robusta. In questo caso, per ridurre il modulo di  $W_{0,1}(j\omega)W_2$  alle basse frequenze è sufficiente aumentare il guadagno di  $G(s)$ ; infatti, in questo modo si riduce il modulo di  $W_{0,1}(j\omega)$  nella banda di interesse. Ciò accade perché il modulo di  $W_{0,1}(j\omega)$  alle basse frequenze è maggiore di uno, mentre l'altra parte all'aumentare del guadagno tale modulo deve tendere a uno.

Ad esempio si può provare a scegliere

$$G_2(s) = 30 \frac{s+2}{s+4}.$$

Il diagramma dei moduli di  $W_{0,2}(j\omega)W_2(j\omega)$ , dove  $W_{0,2} = G_2 P_0 / (1 + G_2 P_0)$ , è riportato in Fig. 1.44, e mostra che la condizione di stabilità robusta è soddisfatta.

Si noti tuttavia che, continuando ad aumentare  $K_G$ , la condizione di stabilità robusta può essere violata in alta frequenza, come mostrato in Fig. 1.45 dove  $W_{0,3} = G_3 P_0 / (1 + G_3 P_0)$  e

$$G_3(s) = 300 \frac{s+2}{s+4}.$$

In conclusione, si vuole sottolineare che, sostituendo al processo reale  $P(s)$  la classe di processi  $\tilde{P}(s)$  perturbata in modo moltiplicativo, si sono avute semplificazioni sia per quanto riguarda l'analisi della stabilità robusta che la sintesi di un controllore robusto. L'entità delle semplificazioni ottenute è limitata in questo caso, che ha un valore puramente illustrativo, ma può essere notevole in casi pratici. Insieme a questi vantaggi, l'approccio utilizzato presenta però un inconveniente: la *conservatività* delle conclusioni raggiunte, tanto in sede di analisi quanto in sede di sintesi.

Quanto detto può essere facilmente dimostrato nel caso in esame. Si consideri nuovamente la funzione di trasferimento reale del processo

$$P(s) = \frac{K_P}{s^2 - g}, \quad \text{con } K_P = \frac{1}{M},$$

con  $M$  che assume valori all'interno dell'intervallo  $[M_1, M_2]$ . Scegliendo un controllore con la struttura

$$G(s) = K_G \frac{s+2}{s+4}.$$

il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso assume l'espressione

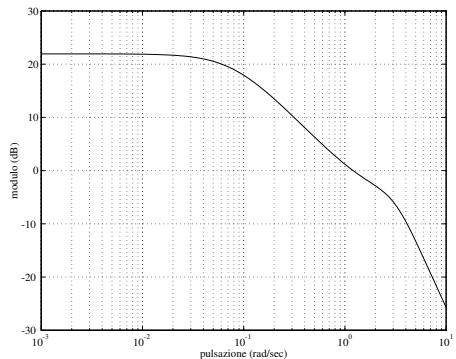
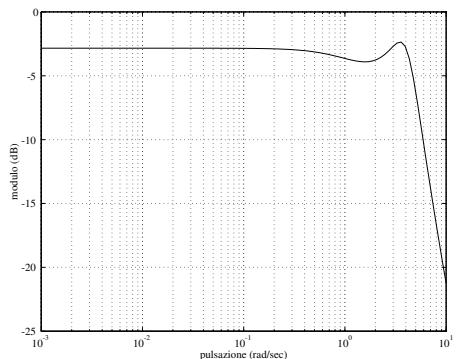
$$s^3 + 4s^2 + \left(\frac{K_G}{M} - g\right)s + 2\left(\frac{K_G}{M} - 2g\right).$$

Condizione necessaria per la stabilità asintotica ad anello chiuso è quindi che si abbia

$$K_G > 2gM.$$

Costruendo la relativa tabella si ottiene

1	$K_G/M - g$
4	$2(K_G/M - 2g)$
$2K_G/M$	
	$2(K_G/M - 2g)$

Figura 1.43: Diagramma di Bode dei moduli di  $W_0(j\omega)W_2$ Figura 1.44: Diagramma di Bode dei moduli di  $W_{0,2}(j\omega)W_2$ 

Di conseguenza,  $K_G > 2gM$  assicura la stabilità asintotica ad anello chiuso. In particolare, ponendo

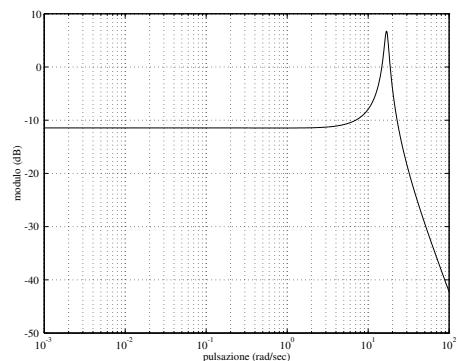
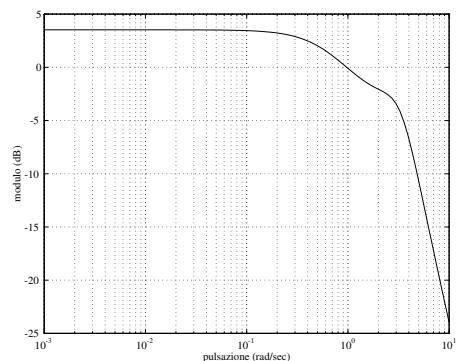
$$K_G > 2gM_2 = 23.52$$

si garantisce la stabilità del sistema retroazionato per qualsiasi valore della massa  $M$  nell'intervallo di variabilità  $[M_1, M_2]$ . D'altra parte, usando il controllore

$$G_4(s) = 23.6 \frac{s+2}{s+4},$$

che soddisfa la precedente diseguaglianza, la condizione di stabilità robusta non è soddisfatta, come si deduce dal diagramma di Bode dei moduli di  $W_{0,4}(j\omega)W_2(j\omega)$ , dove  $W_{0,4} = G_4P_0/(1 + G_4P_0)$ , riportato in Fig. 1.46. Ciò è dovuto al fatto che la classe di processi perturbati  $\tilde{P}$  è più ampia di quella descritta dal processo reale al variare di  $M$ , e quindi richiede una sintesi più conservativa.

Il sistema meccanico qui considerato viene ripreso nell'esercizio proposto 1.15 nonché nell'esercizio svolto 4.4.

Figura 1.45: Diagramma di Bode dei moduli di  $W_{0,3}(j\omega)W_2$ Figura 1.46: Diagramma di Bode dei moduli di  $W_{0,4}(j\omega)W_2$ **1.2 Esercizi proposti****Esercizio 1.9**

Mediante l'uso del criterio di Nyquist, si studi la stabilità del sistema retroazionato mostrato in Fig. 1.47 e avente come funzione di trasferimento ad anello aperto

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s-2)}$$

al variare del parametro  $K$ .

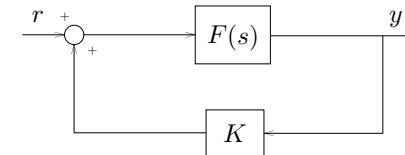


Figura 1.47: Sistema in retroazione positiva

**Esercizio 1.10**

Mediante l'uso del criterio di Nyquist, si studi la stabilità del sistema a retroazione negativa unitaria avente come funzione di trasferimento ad anello aperto

$$F(s) = K \frac{s^2 + 11s + 10}{(1-s)(s^2 + 1)}$$

al variare del parametro  $K$ .

**Esercizio 1.11**

Mediante l'uso del criterio di Nyquist, si studi la stabilità del sistema a retroazione negativa unitaria avente come funzione di trasferimento ad anello

*aperto*

$$F(s) = K \frac{s+1}{s^2}$$

*al variare del parametro K.*

---

### Esercizio 1.12

*Sia dato il sistema di Fig. 1.48*

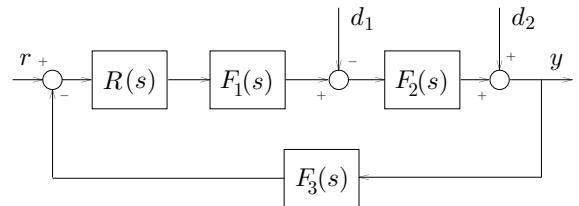


Figura 1.48: Sistema di controllo

*in cui*

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{1+s}{1+2s} & F_1(s) &= \frac{1}{1+s} \\ F_2(s) &= \frac{0.5}{s} & F_3(s) &= \frac{1}{1+3s}. \end{aligned}$$

*Si determini la risposta a regime permanente ai disturbi:*

- a)  $d_1(t) = 3 \delta_{-1}(t);$
  - b)  $d_2(t) = 2 + 5 \sin 10t.$
- 

### Esercizio 1.13

*Sia dato il sistema di Fig. 1.49, in cui*

$$F_1(s) = 2 \quad F_2(s) = \frac{10}{s(1+2s)}.$$

*Si determini la risposta a regime permanente ai disturbi:*

- a)  $d_1(t) = 2 \delta_{-1}(t);$
- b)  $d_2(t) = 4 \delta_{-1}(t);$
- c)  $d_3(t) = 0.5 \delta_{-1}(t).$

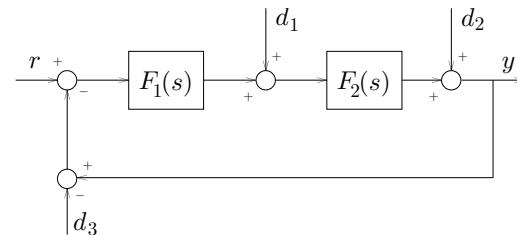


Figura 1.49: Sistema di controllo

---

### Esercizio 1.14

*Si consideri il sistema a retroazione negativa unitaria avente come funzione di trasferimento ad anello aperto*

$$F(s) = 1000 \frac{s^2 + 0.7s + 1600}{s(s+100)(s+160)}.$$

- a) *Si traccino i diagrammi di Bode di  $F(s)$ .*

- b) Si tracci il diagramma di Nyquist di  $F(s)$ . In particolare, si valuti a quali pulsazioni il diagramma interseca la circonferenza di raggio unitario, e i corrispondenti valori della fase.
- c) Quale dei margini di fase ‘candidati’ individuati al punto precedente caratterizza la stabilità del sistema rispetto a variazioni della fase causate da ritardi di tempo nel ramo diretto? Per rispondere a questa domanda, si ricordi che la funzione di trasferimento di un ritardo temporale pari a  $T$  è  $F_r(s) = e^{-Ts}$ . In particolare, qual è il massimo ritardo  $T_{max}$  che il sistema retroazionato può tollerare senza divenire instabile?
- 

**Esercizio 1.15**

Si consideri nuovamente il pendolo inverso dell’esercizio 1.8. Si assuma che il valore della massa  $M$  sia noto con certezza e pari a 1 kg, mentre la lunghezza  $\ell$  del pendolo assume un valore nell’intervallo

$$\ell_1 \leq \ell \leq \ell_2, \quad \text{con } \ell_1 = 0.8 \text{ m}, \ell_2 = 1.2 \text{ m}.$$

La funzione di trasferimento  $P(s)$  tra la coppia  $u$  e la posizione angolare  $\vartheta$  può essere inquadrata in una classe  $\tilde{P}(s)$  di processi perturbati in modo moltiplicativo rispetto a un processo nominale

$$\tilde{P}(s) = P_0(s)(1 + \Delta \cdot W_2(s)).$$

dove  $\Delta$  è un numero complesso tale che  $|\Delta| \leq 1$ .

- a) Si fornisca un’espressione per il processo nominale  $P_0(s)$  e per la funzione peso  $W_2(s)$ .
- b) Si individui uno schema di controllo a retroazione in grado di garantire stabilità asintotica per l’intera classe  $\tilde{P}(s)$ .
-

## Capitolo 2

# SINTESI NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

In questo capitolo vengono proposti e svolti vari problemi di sintesi di sistemi di controllo mediante l'impiego della risposta in frequenza. In particolare, le specifiche assegnate vengono soddisfatte attraverso l'uso di opportune funzioni compensatrici, la cui determinazione può richiedere in generale l'esecuzione di ripetuti tentativi.

### 2.1 Esercizi svolti

#### Esercizio 2.1

*Sia dato il sistema di controllo a retroazione di Fig. 2.1, in cui il processo ha funzione di trasferimento*

$$P(s) = \frac{10}{(1 + 0.1s)(1 + 0.01s)}.$$

*Si determini la funzione compensatrice  $G(s)$  in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche:*

- a) *l'errore a regime in risposta a un ingresso  $r$  a gradino sia nullo;*
- b) *l'errore a regime in risposta a un ingresso  $r$  a rampa unitaria sia minore o uguale a 0.01 in valore assoluto;*
- c) *la risposta a regime a un disturbo  $d$  a gradino sia nulla;*

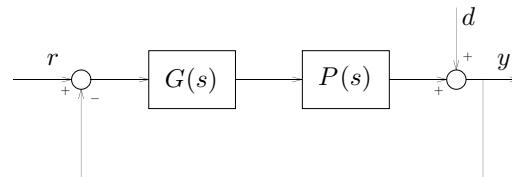


Figura 2.1: Il sistema di controllo assegnato

- d) *la risposta armonica ad anello chiuso  $W(j\omega)$  abbia banda passante pari a 50 rad/sec e modulo alla risonanza non superiore a 9 dB.*

*Come si può effettuare la sintesi se la specifica d) viene modificata richiedendo:*

- d') *banda passante pari a 10 rad/sec e modulo alla risonanza non superiore a 4 dB?*
- d'') *banda passante pari a 50 rad/sec e modulo alla risonanza non superiore a 2 dB?*

---

La funzione compensatrice va ricercata in generale nella forma

$$G(s) = \frac{K_G}{s^h} R(s).$$

I parametri  $K_G$  e  $h$  vanno scelti in modo tale da soddisfare le specifiche sul regime permanente, mentre con  $R(s)$  si impongono le specifiche sulla risposta armonica.  $R(s)$  viene normalmente presa a guadagno unitario in modo tale che il guadagno di  $G(s)$  coincida con  $K_G$ .

In primo luogo, si osservi che il processo  $P(s)$  non ha poli nell'origine. Pertanto, per ottenere un errore a regime nullo in corrispondenza a un ingresso a gradino, si deve introdurre un polo nell'origine ( $h = 1$ ) nella funzione di trasferimento ad anello aperto, in modo tale da rendere il sistema ad anello chiuso di tipo 1.

L'errore a regime  $\tilde{e}_1$  per un ingresso a rampa sarà costante e diverso da zero. In particolare, dalla formula generale si ricava

$$|\tilde{e}_1| = \frac{K_d^2}{|K_P K_G|} = \frac{1}{10|K_G|} \leq 0.01 \implies K_G \geq 10,$$

essendo lo schema di controllo a retroazione unitaria ( $K_d = 1$ ). La scelta  $K_G \leq -10$  avrebbe condotto certamente a un sistema ad anello chiuso instabile (ciò può essere verificato tracciando il corrispondente diagramma di Nyquist per  $K_G$  negativo). Si ponga  $K_G = 10$ .

Per quanto riguarda la risposta permanente a un disturbo costante, l'introduzione del polo nell'origine tramite la funzione compensatrice rende il sistema astatico, e quindi la specifica è automaticamente soddisfatta.

Venendo alla specifica **d)**, il passo preliminare consiste nel tradurre le specifiche sulla risposta armonica ad anello chiuso  $W(j\omega)$  in specifiche sulla risposta armonica ad anello aperto

$$F(j\omega) = P(j\omega)G(j\omega) = \frac{K_G}{j\omega^h} P(j\omega)R(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R(j\omega),$$

ove con  $\hat{F}(j\omega)$  si è indicata la risposta armonica del *processo modificato* per soddisfare le specifiche sul regime permanente (cioè **a**, **b**, **c**):

$$\hat{F}(s) = \frac{10}{s} \frac{10}{(1+0.1s)(1+0.01s)}.$$

Com'è noto, tale operazione si può effettuare con l'ausilio della carta di Nichols.

Per quanto riguarda la banda passante ad anello chiuso  $B_3$ , l'esame della carta di Nichols fornisce la seguente regola *euristica* per sistemi con margine di fase minore di  $90^\circ$ :

$$\omega_t \leq B_3 \leq 2\omega_t,$$

dove con  $\omega_t$  si è indicata la pulsazione di attraversamento della risposta armonica ad anello aperto  $F(j\omega)$  del *processo compensato*. In particolare, una scelta spesso soddisfacente si ottiene scegliendo una pulsazione di attraversamento desiderata  $\omega_t^*$  tale che

$$B_3 \approx 1.5 \div 1.7 \omega_t^*.$$

Nel nostro caso, la specifica su  $B_3$  comporta che la pulsazione di attraversamento deve soddisfare la relazione  $\omega_t \leq 50 \leq 2\omega_t$ . Ad esempio, un tentativo ragionevole si ottiene ponendo  $\omega_t^* \approx 30 \text{ rad/sec}$ .

Venendo alla specifica sul modulo alla risonanza  $M_r$ , è noto che essa dà luogo a un limite inferiore per il margine di fase. Nel caso in esame, attraverso la carta di Nichols si deduce la condizione  $m_\varphi^* \geq 20^\circ$ . Si noti che, in presenza di un unico attraversamento dell'asse a 0 dB da parte del diagramma dei moduli, un margine di fase positivo garantisce la stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso, dato che la funzione di trasferimento ad anello aperto non ha poli con parte reale positiva (infatti, la funzione compensatrice  $G(s)$  introduce al più poli con parte reale nulla). È inoltre opportuno sottolineare che, sebbene la specifica sulla stabilità ad anello chiuso non sia esplicita nell'enunciato del problema, essa costituisce un requisito irrinunciabile nella sintesi dei sistemi di controllo. D'altra parte, la stabilità asintotica è implicitamente richiesta dalle prime tre specifiche, in quanto essa è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del regime permanente.

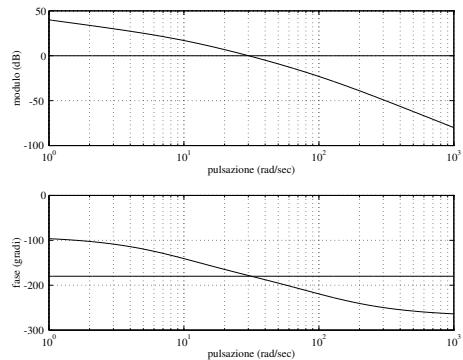
Dall'esame dei diagrammi di Bode riportati in Fig. 2.2 si deducono la pulsazione di attraversamento  $\hat{\omega}_t$  e il margine di fase  $\hat{m}_\varphi$  di  $\hat{F}(j\omega)$

$$\hat{\omega}_t \approx 30 \text{ rad/sec} \quad \text{e} \quad \hat{m}_\varphi \approx 1.6^\circ.$$

Si noti che, in assenza di un'ulteriore azione correttrice espletata da  $R(s)$ , il sistema ad anello chiuso si troverebbe molto vicino al limite di stabilità. Per soddisfare le specifiche del problema è necessario determinare  $R(s)$  in modo tale da aumentare il margine di fase di almeno  $m_\varphi^* - \hat{m}_\varphi = 18.4^\circ$ , mantenendo pressoché inalterata la pulsazione di attraversamento. A tale scopo si può usare una funzione o rete *anticipatrice*

$$R_a(s) = \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a} s}, \quad \tau_a > 0, m_a > 1,$$

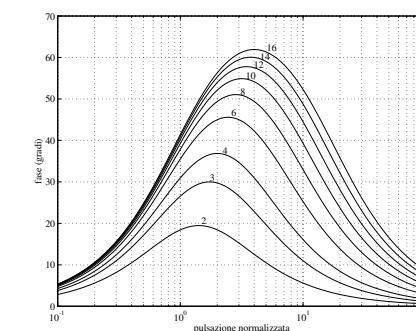
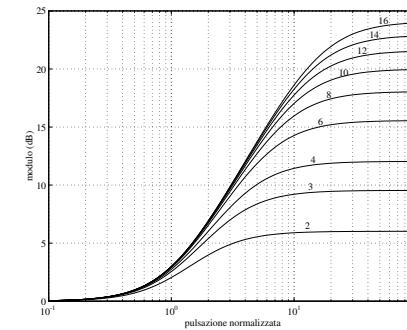
i cui diagrammi di Bode sono mostrati in Fig. 2.3 in corrispondenza a diversi valori di  $m_a$ . In tali diagrammi, detti *universal*, viene riportata in ascissa la pulsazione normalizzata  $\omega\tau_a$ . Si osservi che il fattore binomio corrispondente allo zero di  $R_a(s)$  ha pulsazione di rottura  $1/\tau_a$ , mentre quello corrispondente al polo ha pulsazione di rottura  $m_a/\tau_a$ . Di conseguenza, nei diagrammi di Fig. 2.3 alla pulsazione normalizzata  $10^0 = 1$  corrisponde proprio la pulsazione di rottura dello zero.

Figura 2.2: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$ 

La scelta dei parametri  $m_a$  e  $\tau_a$  è guidata in questo caso dalle seguenti considerazioni. L'azione anticipatrice deve essere tale da aumentare la fase di  $18.4^\circ$  in corrispondenza alla pulsazione  $\omega_t^* = \omega_t = 30$  rad/sec. I diagrammi universali di Fig. 2.3 mostrano che questo anticipo può essere ottenuto per varie coppie  $(m_a, \omega\tau_a)$ , cui però corrispondono amplificazioni di modulo assai diverse. Poiché si vuole lasciare inalterata la pulsazione di attraversamento, tale amplificazione va limitata il più possibile. Ciò equivale a scegliere la più piccola pulsazione normalizzata  $\omega\tau_a$  che garantisce — per un opportuno valore di  $m_a$  — l'anticipo richiesto. Nel caso in esame, è facile vedere che questa strategia conduce a scegliere  $\omega\tau_a = 0.4$  e  $m_a = 10$ . In corrispondenza a  $\omega\tau_a = 0.4$ , la curva dei moduli per  $m_a = 10$  indica un'amplificazione assai limitata della  $F(j\omega)$ . È quindi prevedibile che il conseguente aumento della pulsazione di attraversamento  $\omega_t$  sia molto contenuto.

L'ultimo passo consiste nel collocare l'anticipo di fase proprio in corrispondenza a  $\omega_t^*$ , cioè

$$\omega_t^* \tau_a = 30 \tau_a = 0.4 \quad \implies \quad \tau_a = \frac{0.4}{30} = \frac{1}{75}.$$

Figura 2.3: Diagrammi di Bode universali per una rete anticipatrice. Ogni diagramma corrisponde al valore indicato di  $m_a$ . Gli stessi diagrammi sono validi per una rete attenuatrice, purché si attribuisca segno negativo alle ordinate.

La funzione anticipatrice risultante è quindi

$$R_a(s) = \frac{1 + \frac{1}{75}s}{1 + \frac{1}{750}s},$$

mentre la funzione compensatrice complessiva è

$$G(s) = \frac{K_G}{s} R_a(s) = \frac{10}{s} \frac{1 + \frac{1}{75}s}{1 + \frac{1}{750}s}.$$

I diagrammi di Bode della risposta armonica ad anello aperto  $F(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R_a(\omega)$  sono riportati in Fig. 2.4 e, per uno spettro di frequenze più ampio, in Fig. 2.5. Si noti che, come previsto, l'introduzione della funzione anticipatrice ha lievemente spostato la pulsazione di attraversamento da 30 rad/sec a circa 31 rad/sec, mentre il margine di fase è aumentato da  $0^\circ$  a oltre  $20^\circ$ .

Per verificare il soddisfacimento delle specifiche originarie **d**), che riguardavano la funzione di trasferimento ad anello chiuso, è opportuno esaminare il diagramma di Nichols di  $F(j\omega)$  e il modulo della risposta armonica ad anello chiuso

$$W(j\omega) = \frac{R_a(j\omega)\hat{F}(j\omega)}{1 + R_a(j\omega)\hat{F}(j\omega)},$$

riportati rispettivamente in Fig. 2.6 e in Fig. 2.7. Il modulo alla risonanza  $M_r$  è inferiore a 9 dB, mentre la banda passante  $B_3$  è all'incirca 50 rad/sec, come richiesto. Per completezza, in Fig. 2.8 è mostrato il modulo della risposta armonica della funzione di sensibilità

$$S(s) = \frac{1}{1 + F(s)},$$

che esprime l'influenza di variazioni della funzione di trasferimento ad anello aperto  $F(s)$  sulla funzione di trasferimento ad anello chiuso  $W(s)$ . Si noti il tipico andamento crescente all'aumentare di  $\omega$ , che è d'altra parte consistente con l'interpretazione di  $S(s)$  come funzione di trasferimento  $W_d(s)$  di un disturbo sul ramo di uscita. Come previsto, la presenza di un polo nell'origine nel ramo diretto si riflette nella presenza di uno zero nell'origine per la  $W_d(s)$ .

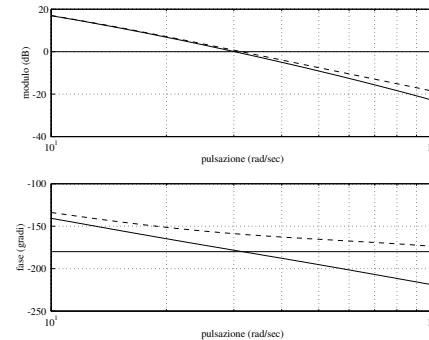


Figura 2.4: Diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$  (—) e di  $\hat{F}(j\omega)$  (—)

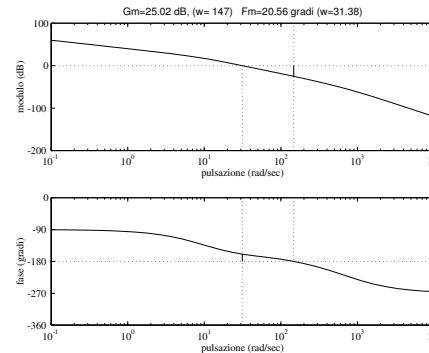
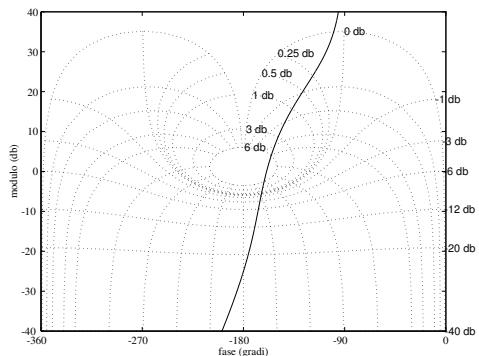
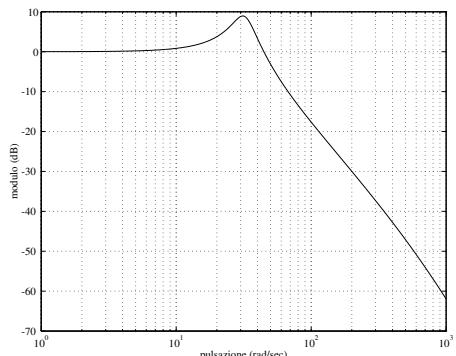
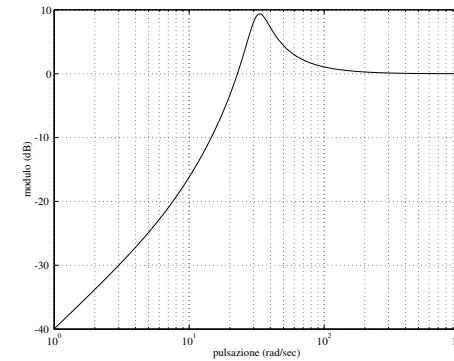


Figura 2.5: Diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$ . Si noti nella parte superiore della figura l'indicazione del valore del margine di guadagno ( $G_m$ ) e del margine di fase ( $F_m$ ), con le rispettive pulsazioni.

Figura 2.6: Diagramma di Nichols di  $F(j\omega)$ Figura 2.7: Diagramma dei moduli di  $W(j\omega)$ Figura 2.8: Diagramma dei moduli di  $S(j\omega)$ 

Al punto d') si richiede un valore più basso sia per la banda passante che per il modulo alla risonanza. La specifica su  $B_3$  implica una pulsazione di attraversamento desiderata per  $F(j\omega)$  tale che  $\omega_t^* \leq B_3 \leq 2\omega_t^*$ , ovvero  $5 \leq \omega_t^* \leq 10$ . Ad esempio, si scelga  $\omega_t^* = 7$  rad/sec. Per quanto riguarda la specifica sul modulo alla risonanza, si trova facilmente che il margine di fase desiderato  $m_\phi^*$  deve essere maggiore o uguale a  $40^\circ$ .

Confrontando i valori desiderati con quelli del processo modificato  $\hat{F}(j\omega)$ , si deduce che la rete correttrice deve aumentare sensibilmente il margine di fase e ridurre la pulsazione di attraversamento. Un esame dei diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$  (vedi Fig. 2.2) mostra che

$$|\hat{F}(j\omega_t^*)| = 21 \text{ dB}, \quad \angle \hat{F}(j\omega_t^*) = -128^\circ.$$

Si noti che la fase in  $\omega_t^*$  è già sufficiente. Pertanto, è necessario 'abbassare' il diagramma del modulo, così da spostare la pulsazione di attraversamento in  $\omega_t^*$ , modificando il meno possibile il diagramma delle fasi nella zona di interesse. Naturalmente, per ottenere tale effetto non si può ricorrere a un semplice guadagno minore di uno (e quindi minore di zero in dB), poiché

cioè comporterebbe la violazione delle specifiche sul regime permanente (in particolare, la b)).

È invece possibile utilizzare una rete *attenuatrice*

$$R_i(s) = \frac{1 + \frac{\tau_i}{m_i} s}{1 + \tau_i s}, \quad \tau_i > 0, m_i > 1,$$

i cui diagrammi di Bode, in corrispondenza a diversi valori di  $m_i$ , sono ottenibili da quelli della Fig. 2.3, in cui le ascisse rappresentino la pulsazione normalizzata  $\omega\tau_i$  e si attribuisca segno negativo ai valori riportati sulle ordinate. Si osservi che il fattore binomio corrispondente al polo di  $R_i(s)$  ha pulsazione di rottura  $1/\tau_i$ , mentre quello corrispondente allo zero ha pulsazione di rottura  $m_i/\tau_i$ . Di conseguenza, nei diagrammi di Fig. 2.3 alla pulsazione normalizzata  $10^0 = 1$  corrisponde proprio la pulsazione di rottura del polo.

La scelta dei parametri  $m_i$  e  $\tau_i$  può essere effettuata sulla scorta delle seguenti considerazioni. L'azione attenuatrice deve essere tale da ridurre il modulo di 21 dB in corrispondenza alla pulsazione  $\omega_t^* = 7$  rad/sec. I diagrammi universali di Fig. 2.3 mostrano che questa attenuazione può essere ottenuta per varie coppie  $(m_i, \omega\tau_i)$ , cui corrispondono ritardi di fase diversi. Per limitare tale ritardo e preservare il margine di fase richiesto in  $\omega_t^*$ , è opportuno scegliere la pulsazione normalizzata  $\omega\tau_i$  sufficientemente a destra nel diagramma. Ad esempio, valori di  $\omega\tau_i$  prossimi a  $10^2$  sono ragionevoli. Una volta scelta la pulsazione normalizzata, è facile dedurre dai diagrammi universali il valore di  $m_i$  che assicura l'attenuazione richiesta in corrispondenza a  $\omega\tau_i$ .

Si deve tuttavia sottolineare che non è consigliabile scegliere valori di  $\omega\tau_i$  troppo elevati. Infatti, ciò corrisponde a collocare la rete attenuatrice in bassa frequenza, e di conseguenza ad attenuare il valore del modulo di  $F(j\omega)$  in tale banda, con i noti effetti negativi sulla sensibilità e sulla reiezione dei disturbi. Per lo stesso motivo, nel caso in cui sia ammissibile l'introduzione di un lieve ritardo di fase, è opportuno scegliere un valore di  $\omega\tau_i$  inferiore a  $10^2$ , compatibilmente con la realizzazione dell'attenuazione richiesta.

Nel caso in esame si verifica proprio quest'ultima situazione, essendo  $\angle \hat{F}(j\omega_t^*) = -128^\circ$  sensibilmente maggiore di  $m_\varphi^* - 180^\circ = -140^\circ$ . La Fig. 2.3 mostra che per ottenere un'attenuazione di 21 dB si può scegliere  $m_i = 12$ . Inoltre, essendo ammissibile un ritardo di fase di  $12^\circ$ , si sceglie la

pulsazione normalizzata  $\omega\tau_i$  pari a 60. Infine, si colloca l'attenuazione di modulo proprio in corrispondenza a  $\omega_t^*$ , cioè

$$7\tau_i = 60 \implies \tau_i = \frac{60}{7}.$$

La funzione attenuatrice risultante è quindi

$$R_i(s) = \frac{1 + \frac{5}{7}s}{1 + \frac{60}{7}s},$$

mentre la funzione compensatrice complessiva è

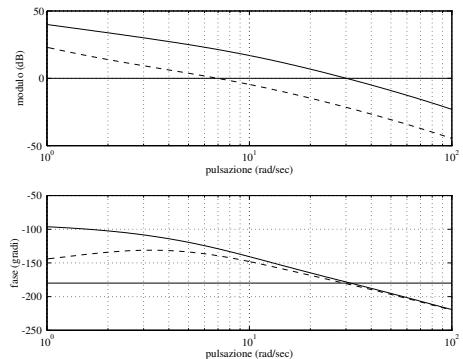
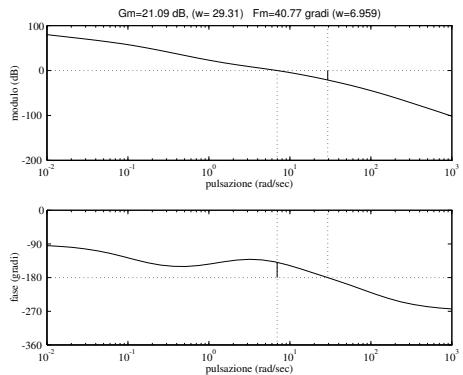
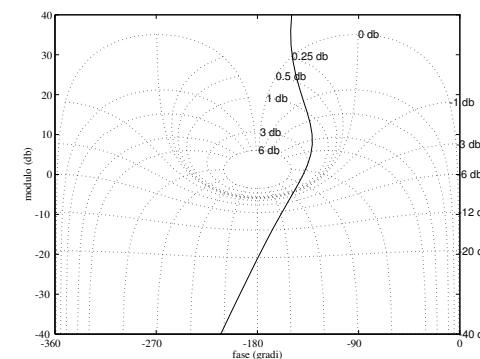
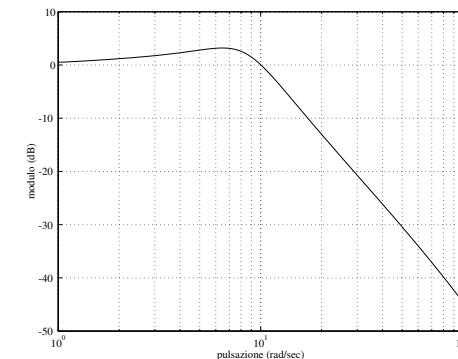
$$G'(s) = \frac{K_G}{s} R_i(s) = \frac{10}{s} \frac{1 + \frac{5}{7}s}{1 + \frac{60}{7}s}.$$

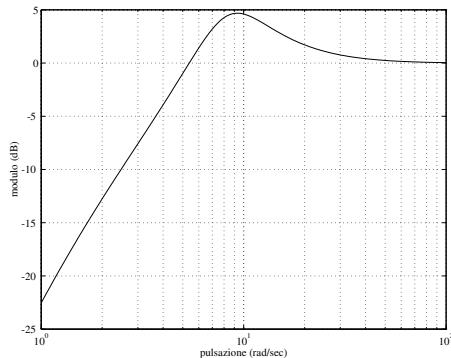
L'effetto della procedura di sintesi adottata può essere analizzato sui diagrammi di Bode della risposta armonica ad anello aperto

$$F'(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R_i(j\omega),$$

riportati in Fig. 2.9 e, per uno spettro di frequenze più ampio, in Fig. 2.10. In particolare, si vede che l'introduzione della funzione attenuatrice ha prodotto un margine di fase effettivo  $m_\varphi > 40^\circ$  e una pulsazione di attraversamento  $\omega_t$  praticamente uguale a 7 rad/sec, così come richiesto.

Il soddisfacimento delle specifiche originarie può essere verificato tracciando il diagramma di Nichols del processo compensato e il diagramma del modulo della risposta armonica ad anello chiuso  $W'(j\omega)$ , riportati rispettivamente in Fig. 2.11 e in Fig. 2.12. Il modulo alla risonanza  $M_r$  è inferiore a 4 dB, mentre la banda passante  $B_3$  è di circa 11 rad/sec. In Fig. 2.13 è mostrato il modulo della risposta armonica della funzione di sensibilità  $S'(s)$ . Il confronto con la Fig. 2.8 mostra che, a seguito dell'introduzione di una rete attenuatrice, la sensibilità del sistema di controllo alle basse frequenze è peggiorata.

Figura 2.9: Diagrammi di Bode di  $F'(j\omega)$  (--) e di  $\hat{F}(j\omega)$  (—)Figura 2.10: Diagrammi di Bode di  $F'(j\omega)$ Figura 2.11: Diagramma di Nichols di  $F'(j\omega)$ Figura 2.12: Diagramma dei moduli di  $W'(j\omega)$

Figura 2.13: Diagramma dei moduli di  $S'(j\omega)$ 

Venendo al punto d''), si osservi che la specifica sulla banda passante è la stessa del caso d); di conseguenza, si porrà nuovamente  $\omega_t^* = \hat{\omega}_t = 30$  rad/sec. Per quanto riguarda la specifica sul modulo alla risonanza, attraverso la carta di Nichols essa viene convertita nella richiesta di un margine di fase  $m_\varphi^* = 55^\circ$ . È quindi necessario conseguire un anticipo di fase pari a circa  $53,4^\circ$  in corrispondenza a  $\hat{\omega}_t$ . Dai diagrammi universali di Fig. 2.3 si comprende facilmente che qualsiasi funzione anticipatrice in grado di introdurre un tale anticipo di fase comporta anche una notevole amplificazione nell'intorno della pulsazione di interesse. Per completare la sintesi, si dovrà dunque individuare una funzione attenuatrice che riporti la pulsazione di attraversamento del processo compensato in  $\omega_t^*$ .

Dalla Fig. 2.3 si deduce che una rete anticipatrice con  $m_a = 11$  assicura un anticipo di fase superiore a  $56^\circ$  in corrispondenza alla pulsazione normalizzata  $\omega\tau_a = 3$ . Dovendo collocare l'anticipo di fase in  $\omega_t^* = 30$  rad/sec, si porrà  $\tau_a = 3/30$  e quindi

$$R_a''(s) = \frac{1 + \frac{1}{10}s}{1 + \frac{1}{110}s}.$$

L'effetto dell'introduzione dell'azione anticipatrice è illustrato in Fig. 2.14. Si noti che in corrispondenza a  $\omega_t^*$  la funzione  $\hat{F}(j\omega)R_a''(j\omega)$  ha approssimativamente modulo pari a 9 dB e fase pari a  $58^\circ$ . Si noti che la scelta della funzione anticipatrice è stata effettuata in modo da assicurare un anticipo di fase alquanto maggiore del necessario, in modo da compensare il ritardo di fase che verrà successivamente introdotto dalla rete attenuatrice.

Il secondo passo consiste nell'ottenere un'attenuazione di 9 dB in  $\omega_t^*$ . Di conseguenza, si sceglie una rete attenuatrice con  $m_i = 3$  e  $\omega\tau_i = 60$ , da cui risulta  $\tau_i = 60/30$ . Si ha perciò

$$R_i''(s) = \frac{1 + \frac{2}{3}s}{1 + 2s}.$$

La funzione compensatrice complessiva è quindi pari a

$$G''(s) = \frac{10}{s} \frac{1 + \frac{1}{10}s}{1 + \frac{1}{110}s} \frac{1 + \frac{2}{3}s}{1 + 2s}.$$

I diagrammi finali di Bode del processo compensato

$$F''(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R_a''(j\omega)R_i''(j\omega)$$

sono riportati in Fig. 2.14 e, per uno spettro di frequenze più ampio, in Fig. 2.15. In effetti, si è ottenuto un margine di fase superiore a  $55^\circ$  e una pulsazione di attraversamento di poco inferiore a 31 rad/sec.

Il diagramma di Nichols di  $F''(j\omega)$  e il diagramma di Bode del modulo della risposta armonica ad anello chiuso  $W''(j\omega)$  sono rispettivamente mostrati in Fig. 2.16 e Fig. 2.17. Come richiesto, il modulo alla risonanza è minore di 2 dB, mentre la banda passante è di poco superiore a 50 rad/sec.

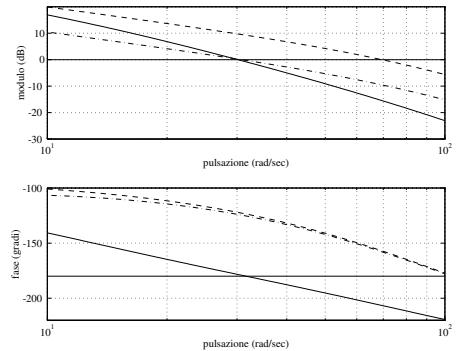


Figura 2.14: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$  (—), di  $\hat{F}(j\omega)R_a''(j\omega)$  (---) e di  $F''(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R_a''(j\omega)R_i''(j\omega)$  (-·-)

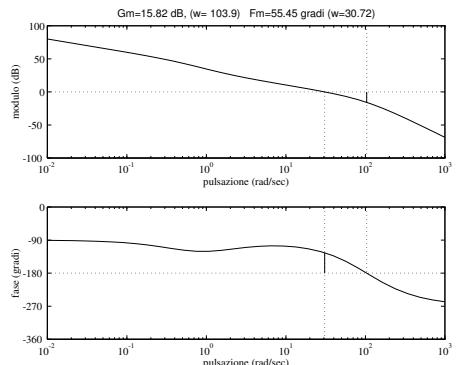


Figura 2.15: Diagrammi di Bode di  $F''(j\omega)$

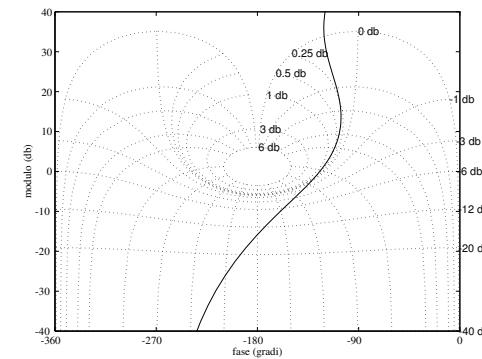


Figura 2.16: Diagramma di Nichols di  $F''(j\omega)$

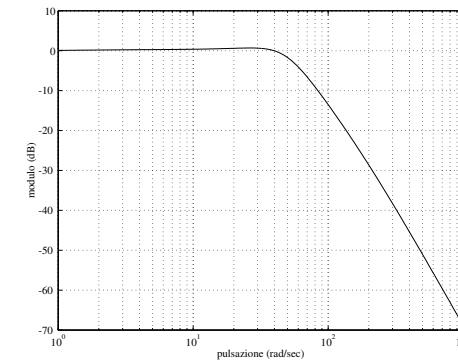


Figura 2.17: Diagramma dei moduli di  $W''(j\omega)$

**Esercizio 2.2**

Sia dato il sistema di controllo a retroazione in Fig. 2.18

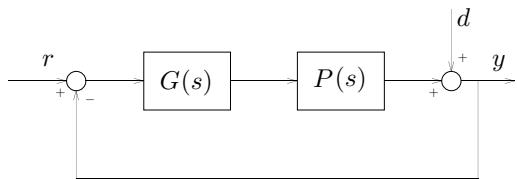


Figura 2.18: Sistema di controllo

in cui il processo ha funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{2}{(1+0.2s)(1+0.05s)}.$$

Si determini la funzione compensatrice  $G(s)$  in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche:

- a) l'errore a regime per un ingresso  $r$  a rampa unitaria sia minore o uguale a 0.1;
- b) la risposta a regime a un disturbo  $d$  a gradino sia nulla;
- c) il margine di fase sia maggiore di  $40^\circ$  e la banda passante sia pari a  $18 \text{ rad/sec}$ .

La funzione compensatrice va ricercata nella forma

$$G(s) = \frac{K_G}{s^h} R(s),$$

con  $R(s)$  a guadagno unitario in modo tale che il guadagno di  $G(s)$  sia proprio  $K_G$ . Il processo ha guadagno  $K_P = 2$ .

Poiché  $P(s)$  non ha poli nell'origine, per ottenere un errore a regime  $\tilde{e}_1$  finito e non nullo in corrispondenza a un ingresso a rampa (sistema di

tipo 1) si deve introdurre un polo nell'origine nel ramo diretto ( $h = 1$ ). Si ha

$$|\tilde{e}_1| = \frac{K_d^2}{|K_P K_G|} = \frac{1}{2|K_G|} \leq 0.1 \implies K_G \geq 5,$$

essendo lo schema di controllo a retroazione unitaria ( $K_d = 1$ ). In questo caso, conviene porre  $K_G = K'_G K''_G$ , e scegliere  $K'_G = 5$ . In questo modo, nel resto della sintesi è possibile far uso di un ulteriore guadagno  $K''_G \geq 1$  se necessario. Infatti si ha  $K_G \geq K'_G$ , e di conseguenza le specifiche sul regime permanente rimangono soddisfatte. Si noti che, sebbene non esplicitamente richiesto nell'enunciato, la specifica sull'errore a regime permanente va intesa ovviamente in valore assoluto.

La specifica a) avrebbe potuto essere soddisfatta per qualsiasi valore di  $K_G$  introducendo due (o più) poli nell'origine nel ramo diretto. Tuttavia, tale soluzione è sconsigliabile perché:

- introduce un ulteriore ritardo di fase di  $90^\circ$  nella risposta armonica ad anello aperto. Tale ritardo ha un'azione *destabilizzante* (si pensi all'effetto sul diagramma di Nyquist) e rende in ogni caso più difficile la sintesi di un'opportuna rete correttrice  $R(s)$ ;
- aumenta la dimensione della rete compensatrice  $G(s)$  (che coincide con il grado del suo denominatore).

Per quanto riguarda l'errore a regime per un disturbo costante in uscita, l'introduzione del polo nell'origine nel ramo diretto rende il sistema di controllo astatico, garantendo quindi il soddisfacimento della specifica b).

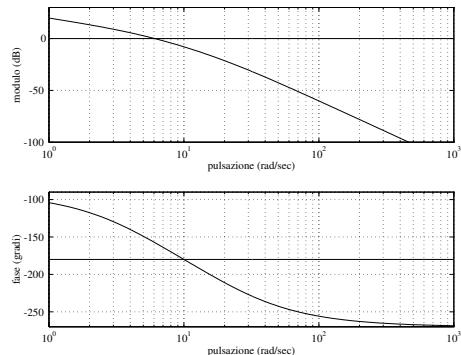
Dalla specifica c) si ha un limite inferiore per il margine di fase pari a  $m_\varphi^* = 40^\circ$ . Per quanto riguarda la banda passante ad anello chiuso  $B_3$ , attraverso la carta di Nichols è possibile dedurre una specifica approssimata sulla pulsazione di attraversamento desiderata  $\omega_t^*$  per la  $F(j\omega) = P(j\omega)G(j\omega)$ . In particolare, poiché

$$\omega_t \leq B_3 \leq 2\omega_t \iff 9 \leq \omega_t \leq 18,$$

si sceglie ad esempio  $\omega_t^* = 12 \text{ rad/sec}$ .

I diagrammi di Bode del processo modificato

$$\hat{F}(s) = \frac{5}{s} \frac{2}{(1+0.2s)(1+0.05s)}$$

Figura 2.19: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$ 

sono riportati in Fig. 2.19. Da un esame di questi diagrammi si trova

$$\dot{\omega}_t \approx 6 \text{ rad/sec} \quad \text{e} \quad \hat{m}_\varphi \approx 23^\circ.$$

Per risolvere il problema di sintesi è necessario scegliere  $R(s)$  in modo tale da aumentare sia la pulsazione di attraversamento che il margine di fase.

In generale, in questa situazione è opportuno innanzitutto valutare il valore della fase di  $\hat{F}(j\omega)$  in corrispondenza di  $\omega_t^*$ . Se tale fase è maggiore di  $\hat{m}_\varphi - 180^\circ$ , sarà sufficiente introdurre un ulteriore guadagno  $K_G'' \geq 1$  per spostare la pulsazione di attraversamento in  $\omega_t^*$ . In caso contrario, a  $K_G''$  si dovrà aggiungere una rete anticipatrice  $R_a(s)$  per aumentare il margine di fase in  $\omega_t^*$ . Conviene dapprima sintetizzare  $R_a(s)$  in modo da ottenere il margine di fase desiderato in  $\omega_t^*$ , e successivamente determinare  $K_G''$ .

Applichiamo tale procedura al caso in esame. Dai diagrammi di Bode della  $\hat{F}(j\omega)$ , riportati in Fig. 2.19, si può notare che

$$|\hat{F}(j\omega_t^*)| = -11 \text{ dB}, \quad \angle \hat{F}(j\omega_t^*) = -188^\circ.$$

Pertanto, per ottenere il margine di fase richiesto è necessario introdurre un anticipo di circa  $50^\circ$  nell'intorno di  $\omega_t^*$  tramite una funzione anticipatrice

$R_a(s)$ . Si noti che, dovendo comunque spostare verso destra la pulsazione di attraversamento, l'amplificazione introdotta dalla funzione anticipatrice è in questo caso benefica. Dai diagrammi universali di Fig. 2.3 si vede che per  $m_a = 12$  si ha l'anticipo richiesto in corrispondenza alla pulsazione normalizzata  $\omega\tau_a = 1.5$ . Centrando l'anticipo di fase in  $\omega_t^*$  si ottiene  $\tau_a = 1.5/12$  e quindi

$$R_a(s) = \frac{1 + \frac{1}{8}s}{1 + \frac{1}{96}s}.$$

Il risultato di tale azione anticipatrice è mostrato in Fig. 2.20.

A questo punto, si deve spostare la pulsazione di attraversamento in  $\omega_t^*$  con un guadagno  $K_G''$ . Dalla Fig. 2.20 si ha  $|\hat{F}(j\omega_t^*)R_a(j\omega_t^*)| = -6 \text{ dB}$ . L'azione del guadagno dovrà quindi compensare tale quantità, e perciò

$$K_G'' \approx 6 \text{ dB} \quad \Rightarrow \quad K_G'' = 2.$$

Il risultato finale della sintesi è riportato in Fig. 2.20 e, per uno spettro di frequenze più ampio, in Fig. 2.21. Le specifiche del problema sono state soddisfatte, essendosi ottenuta una pulsazione di attraversamento di  $12 \text{ rad/sec}$  e un margine di fase di oltre  $40^\circ$  per la risposta armonica del processo compensato  $F(j\omega) = K_G''\hat{F}(j\omega)R_a(j\omega)$ . La funzione compensatrice complessiva è pari a

$$G(s) = \frac{10}{s} \frac{1 + \frac{1}{8}s}{1 + \frac{1}{96}s}.$$

Una possibile alternativa alla soluzione proposta consiste nel cercare di sfruttare al meglio le caratteristiche di amplificazione della funzione anticipatrice, risolvendo il problema esclusivamente tramite una funzione anticipatrice  $R'_a(s)$  e ponendo  $K_G'' = 1$ . Dai valori del modulo e della fase di  $\hat{F}(j\omega_t^*)$  si vede che è necessario aumentare simultaneamente il modulo di  $11 \text{ dB}$  e la fase di  $48^\circ$  in  $\omega_t^*$ . Una possibile scelta è  $m_a = 8$  e  $\omega\tau_a = 4$ , cui corrisponde la

$$R'_a(s) = \frac{1 + \frac{1}{3}s}{1 + \frac{1}{24}s}.$$

I diagrammi di Bode di Fig. 2.22 e Fig. 2.23 mostrano l'effetto di tale rete anticipatrice sulla risposta armonica del nuovo processo compensato  $F'(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R'_a(j\omega)$ . La funzione compensatrice complessiva è data da

$$G'(s) = \frac{5}{s} \frac{1 + \frac{1}{3}s}{1 + \frac{1}{24}s}.$$

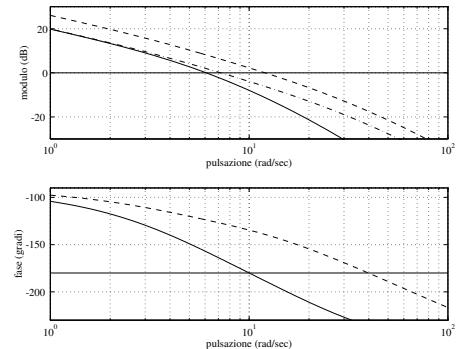


Figura 2.20: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$  (—), di  $\hat{F}(j\omega)R_a(j\omega)$  (---) e di  $F(j\omega) = K_G''\hat{F}(j\omega)R_a(j\omega)$  (— · —)

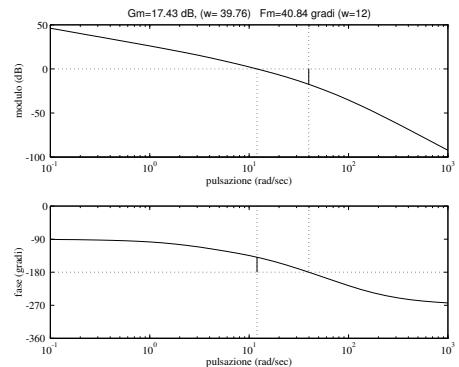


Figura 2.21: Diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$

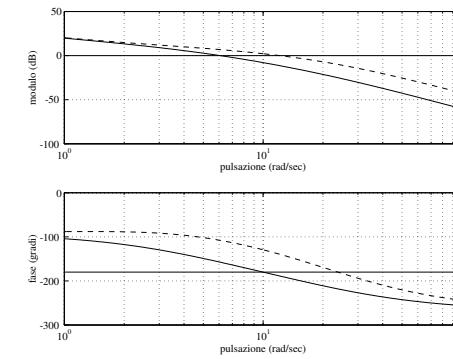


Figura 2.22: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$  (—) e di  $F'(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R'_a(j\omega)$  (— · —)

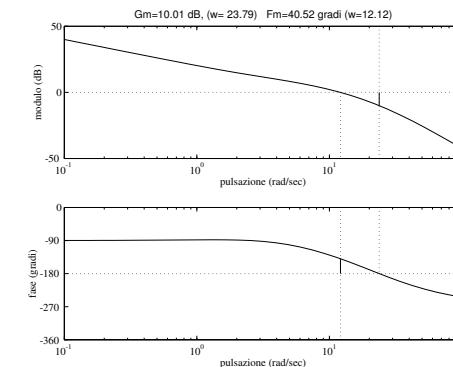


Figura 2.23: Diagrammi di Bode di  $F'(j\omega)$

A titolo di confronto, per entrambe le compensazioni viene riportato in Fig. 2.24 il diagramma di Nichols e in Fig. 2.25 il diagramma dei moduli della risposta armonica ad anello chiuso

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}, \quad W'(s) = \frac{F'(s)}{1 + F'(s)}.$$

La banda passante  $B_3$  è in effetti di poco superiore a 20 rad/sec in entrambi i casi. Se questo leggero scostamento dal valore richiesto nell'enunciato del problema non fosse ammissibile, sarebbe necessario cercare di imporre una pulsazione di attraversamento  $\omega_t^*$  minore, ad esempio 10 rad/sec.

Infine, la Fig. 2.26 mostra l'andamento del modulo delle due funzioni di sensibilità

$$S(s) = \frac{1}{1 + F(s)}, \quad S'(s) = \frac{1}{1 + F'(s)}.$$

Si noti come nel primo caso la sensibilità sia minore alle basse frequenze. Ciò è dovuto all'uso del guadagno  $K_G'' = 6$  dB, che causa un'amplificazione uniforme a tutte le pulsazioni. In contrasto, nella seconda sintesi si è introdotta un'amplificazione solo a partire da una certa pulsazione (corrispondente allo zero della funzione anticipatrice  $R_a'(s)$ ).

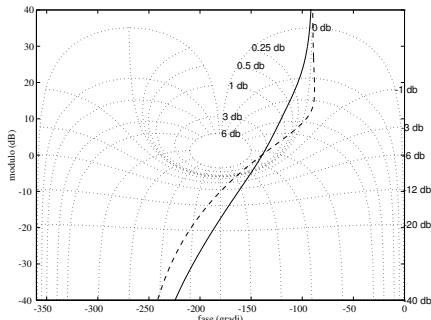


Figura 2.24: Diagrammi di Nichols di  $F(j\omega)$  (—) e di  $F'(j\omega)$  (---)

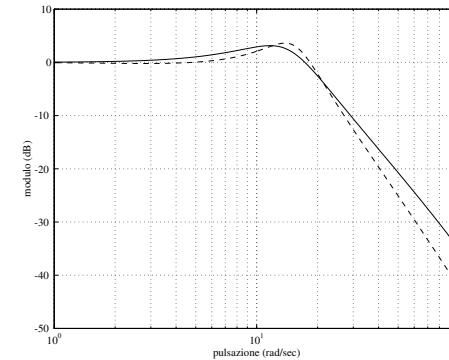


Figura 2.25: Diagramma dei moduli di  $W(j\omega)$  (—) e di  $W'(j\omega)$  (---)

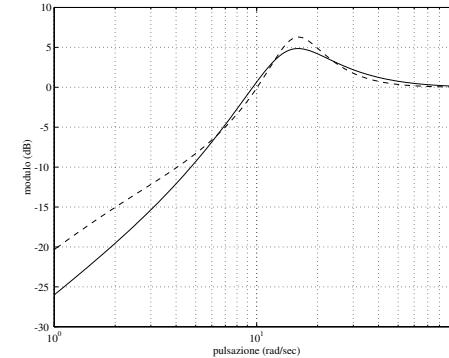


Figura 2.26: Diagramma dei moduli di  $S(j\omega)$  (—) e di  $S'(j\omega)$  (---)

**Esercizio 2.3**

Per il processo descritto dalla funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{100(s+1)}{(s+5)(s^2 + 12s + 20)},$$

determinare uno schema di controllo con retroazione unitaria dall'uscita in modo che:

- a) l'errore a regime in risposta a una rampa unitaria in ingresso sia non superiore a 0.04;
- b) la banda passante ad anello chiuso sia maggiore di 6 rad/sec;
- c) il margine di fase sia maggiore o uguale a  $50^\circ$ .

Al termine, verificare il soddisfacimento della specifica b) mediante la carta di Nichols.

Il processo ha tre poli e uno zero reali, tutti a parte reale negativa

$$P(s) = \frac{100(s+1)}{(s+5)(s^2 + 12s + 20)} = \frac{100(s+1)}{(s+5)(s+2)(s+10)},$$

con guadagno  $K_P = 1$ . La funzione compensatrice va ricercata nella forma

$$G(s) = \frac{K_G}{s^h} R(s),$$

in cui  $R(s)$  ha guadagno unitario.

La specifica a) richiede che il sistema risultante sia almeno di tipo 1, e di conseguenza si pone  $h = 1$ . Inoltre, per l'errore a regime permanente si ha

$$|\tilde{e}_1| = \frac{K_d^2}{|K_P K_G|} = \frac{1}{|K_G|} \leq 0.04 \quad \Rightarrow \quad K_G \geq 25,$$

dove si è tenuto conto del fatto che la retroazione è unitaria ( $K_d = 1$ ). Si sceglie  $K_G = 25$ .

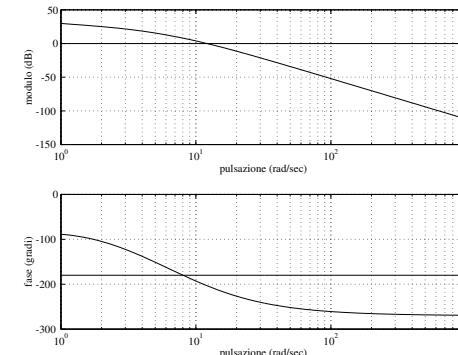


Figura 2.27: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$

In Fig. 2.27 sono riportati i diagrammi di Bode della risposta armonica del processo modificato

$$\hat{F}(s) = P(s) \frac{K_G}{s^h} = \frac{25}{s} \frac{100(s+1)}{(s+2)(s+5)(s+10)}.$$

La specifica b) si può tradurre in una specifica approssimata sulla pulsazione di attraversamento desiderata  $\omega_t^*$  ad anello aperto:

$$\omega_t^* \leq B_3 \leq 2\omega_t^* \quad \Leftrightarrow \quad 3 \leq \omega_t^* \leq 6.$$

Una scelta ragionevole è porre  $\omega_t^* = 4$  rad/sec. A tale pulsazione si richiede un margine di fase di almeno  $m_\varphi^* = 50^\circ$ .

Dai diagrammi di Bode della  $\hat{F}(j\omega)$  si ha

$$\hat{\omega}_t \approx 12 \text{ rad/sec} \quad \text{e} \quad \hat{m}_\varphi \approx -23^\circ,$$

mentre alla pulsazione di attraversamento desiderata  $\omega_t^* = 4$  rad/sec si ha

$$|\hat{F}(j\omega_t^*)| \approx 18 \text{ dB}, \quad \angle \hat{F}(j\omega_t^*) = -138^\circ.$$

La presenza di un margine di fase negativo indica che la scelta  $R(s) = 1$  condurrebbe a un sistema instabile ad anello chiuso (si ricordi che i poli della  $\hat{F}(s)$  hanno tutti parte reale minore o uguale a zero).

Per individuare il tipo di azione compensatrice necessario, si osservi innanzitutto che si deve ridurre la pulsazione di attraversamento con l'uso di una funzione attenuatrice  $R_i(s)$ . Poiché inoltre si ha  $\angle \hat{F}(j\omega_t^*) = -138^\circ$ , sarà altresì necessario aumentare il valore della fase intorno a  $\omega_t^* = 4$  rad/sec con l'uso di una funzione anticipatrice  $R_a(s)$ . Per comodità, è consigliabile procedere dapprima alla sintesi di  $R_a(s)$  e successivamente a quella di  $R_i(s)$ .

L'antico del fasi deve consentire di guadagnare  $8^\circ$  in corrispondenza a  $\omega_t^* = 4$  rad/sec. Tuttavia, allo scopo di compensare il ritardo di fase che verrà in seguito introdotto dalla funzione attenuatrice — ritardo compreso tra  $1^\circ$  e  $10^\circ$  se la pulsazione normalizzata per  $R_i(s)$  è scelta sufficientemente elevata — è opportuno richiedere un anticipo di fase pari a  $10 + 8 = 18^\circ$ . L'esame dei diagrammi universali (vedi Fig. 2.3) mostra che una scelta possibile è  $\omega_a = 1$  e  $m_a = 2$ . Per collocare l'azione anticipatrice in  $\omega_t^*$ , si pone  $\omega_t^* \tau_a = 1$  e quindi  $\tau_a = 1/4$ . La funzione anticipatrice risultante è

$$R_a(s) = \frac{1 + \frac{1}{4}s}{1 + \frac{1}{8}s}.$$

I diagrammi di Bode della risposta armonica ad anello aperto dopo l'aggiunta di  $R_a(s)$  sono riportati in Fig. 2.28.

Per completare la sintesi, basta scegliere una funzione attenuatrice  $R_i(s)$  in modo tale che la pulsazione di attraversamento si riduca a  $\omega_t^* = 4$  rad/sec. Essendo

$$|\hat{F}(j\omega_t^*) R_a(j\omega_t^*)| \approx 20 \text{ dB},$$

si sceglie  $m_i = 10$ . Per minimizzare il ritardo di fase introdotto da  $R_i(s)$  in  $\omega_t^*$ , conviene scegliere la pulsazione normalizzata  $\omega \tau_i = 100$ , da cui  $\tau_i = 25$ . Si noti che in questo modo la pulsazione di rottura dello zero della funzione attenuatrice ( $m_i \tau_i$ ) viene a essere collocata una decade prima di  $\omega_t^*$ . La funzione attenuatrice risultante è

$$R_i(s) = \frac{1 + \frac{5}{2}s}{1 + 25s}.$$

I diagrammi di Bode di  $F(j\omega) = \hat{F}(j\omega) R_a(j\omega) R_i(j\omega)$ , riportati in Fig. 2.28 e in Fig. 2.29, mostrano che l'obiettivo della sintesi è stato raggiunto con una discreta precisione. In particolare, la pulsazione di attraversamento vale 4.2 rad/sec e il margine di fase è pari a  $53^\circ$  circa.

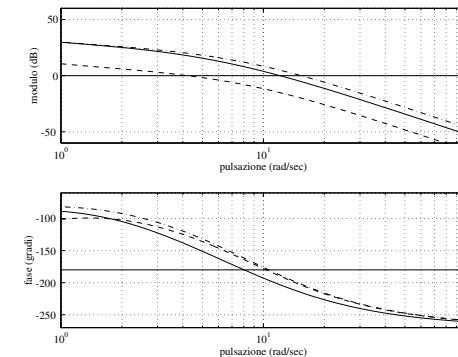


Figura 2.28: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$  (—), di  $\hat{F}(j\omega)R_a(j\omega)$  (---) e di  $F(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R_a(j\omega)R_i(j\omega)$  (- - -)

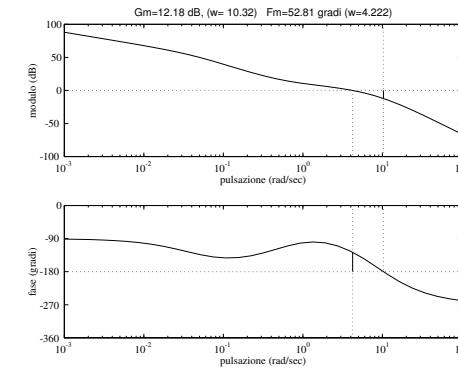
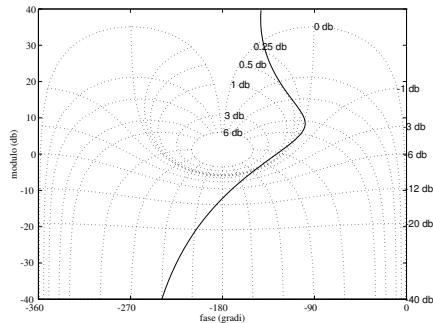


Figura 2.29: Diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$

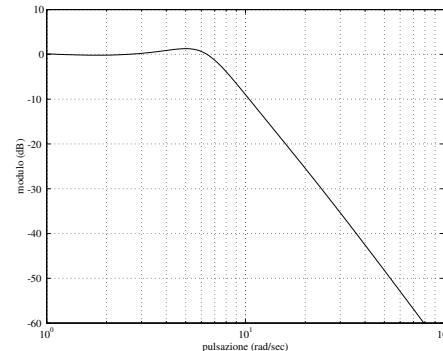
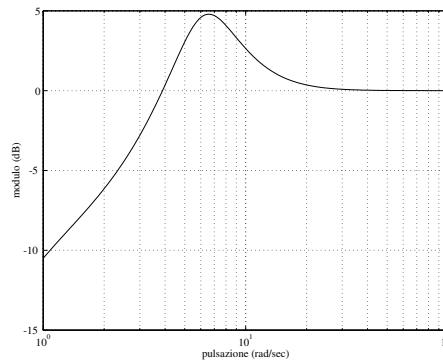
Figura 2.30: Diagramma di Nichols di  $F(j\omega)$ 

La funzione compensatrice complessiva è data da

$$G(s) = \frac{25}{s} \frac{1 + \frac{1}{4}s}{1 + \frac{1}{8}s} \frac{1 + \frac{5}{2}s}{1 + 25s}.$$

A titolo di verifica, si consideri il diagramma di Nichols della  $F(j\omega)$ , riportato in Fig. 2.30. Anche se tale diagramma non è graduato, esso può essere usato per determinare il valore della banda passante ad anello chiuso tramite il seguente procedimento grafico. Si individui innanzitutto il punto di intersezione del diagramma della  $F(j\omega)$  con il luogo a modulo costante pari a  $-3$  dB. Leggendo (con una certa precisione) le coordinate di tale punto nel sistema di riferimento della carta di Nichols, si ottiene il valore di  $|F(jB_3)| \approx -7.5$  dB. A questo punto, si può usare il diagramma dei moduli della  $F(j\omega)$  (vedi Fig. 2.28) per determinare il valore della pulsazione in corrispondenza alla quale il modulo vale  $-7.5$  dB; tale pulsazione è appunto  $B_3$ . Questo procedimento, applicato al caso in esame, mostra che si è ottenuto  $B_3 \approx 7.5$  rad/sec, come richiesto dalla specifica b).

Per completezza, nelle Figg. 2.31–2.32 si riportano i diagrammi di Bode dei moduli della funzione di trasferimento ad anello chiuso  $W(s)$  e della funzione di sensibilità  $S(s)$ , rispettivamente.

Figura 2.31: Diagramma dei moduli di  $W(j\omega)$ Figura 2.32: Diagramma dei moduli di  $S(j\omega)$

**Esercizio 2.4**

Sia dato il sistema di controllo a retroazione in Fig. 2.33

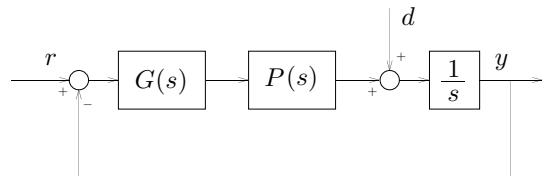


Figura 2.33: Sistema di controllo

in cui il processo ha funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{2+s}{64s^2 + 10s + 1}.$$

Si determini la funzione compensatrice  $G(s)$  in modo tale da ottenere:

- a) risposta a regime permanente a un disturbo  $d$  a gradino unitario non superiore a 0.05;
- b) banda passante ad anello chiuso non inferiore a 14 rad/sec;
- c) margine di fase non inferiore a  $45^\circ$ .

In conclusione, si individui per quali valori della pulsazione la risposta a regime permanente a un disturbo  $d$  sinusoidale risulta attenuata almeno di un fattore 0.1.

La generica funzione compensatrice  $G(s)$  è della forma

$$G(s) = \frac{K_G}{s^h} R(s),$$

con  $R(s)$  a guadagno unitario. Il processo ha guadagno  $K_P = 2$  ed è caratterizzato da una coppia di poli complessi e coniugati con pulsazione naturale  $\omega_n = 0.125$  rad/sec e smorzamento  $\zeta = 0.625$ .

Si noti che il polo nell'origine presente nel ramo diretto è collocato a valle del punto di accesso del disturbo, e pertanto non rende astatico rispetto a  $d$  il sistema ad anello chiuso. D'altra parte, poiché l'astatismo non è richiesto, non è necessario introdurre poli nell'origine nella funzione compensatrice ( $h = 0$ ).

Per determinare il valore del guadagno  $K_G$  in modo tale da soddisfare la specifica a), è necessario ricavare la funzione di trasferimento del disturbo

$$W_d(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}G(s)P(s)}.$$

La risposta a regime permanente per un disturbo a gradino unitario è data da

$$\tilde{y}_d = \lim_{s \rightarrow 0} s W_d(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{K_G K_P} = \frac{1}{2K_G}.$$

Si deve quindi imporre

$$\frac{1}{2|K_G|} \leq 0.05 \implies K_G \geq 10.$$

Per comodità, conviene porre  $K_G = K'_G K''_G$ , e scegliere  $K'_G = 10$ . In questo modo, nel resto della sintesi è possibile far uso di un ulteriore guadagno  $K''_G \geq 1$  se necessario.

Si ha

$$\hat{F}(s) = K'_G P(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \frac{s+2}{64s^2 + 10s + 1},$$

i cui diagrammi di Bode sono riportati in Fig. 2.34. La pulsazione di attraversamento e il margine di fase sono rispettivamente pari a

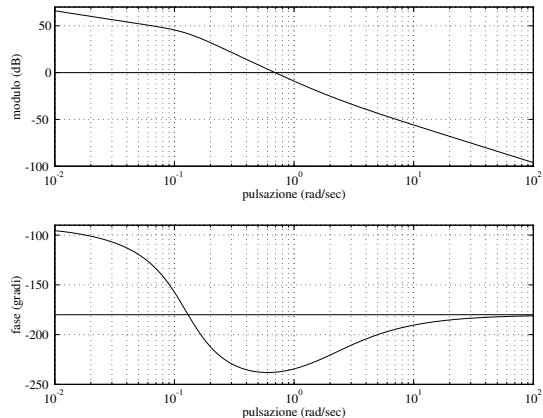
$$\hat{\omega}_t \approx 0.7 \text{ rad/sec}, \quad \hat{m}_\varphi \approx -58^\circ.$$

Con l'ausilio della carta di Nichols si può tradurre in modo approssimato la b) in una specifica sulla pulsazione di attraversamento desiderata  $\omega_t^*$

$$\omega_t^* \leq B_3 \leq 2\omega_t^* \iff 7 \leq \omega_t^* \leq 14,$$

in cui  $B_3 = 14$  rad/sec è il minimo valore ammissibile per la banda passante ad anello chiuso. Ad esempio, si scelga  $\omega_t^* = 10$  rad/sec. In  $\omega_t^*$  la  $F(j\omega)$  ha modulo e fase pari a

$$|\hat{F}(j\omega_t^*)| \approx -56 \text{ dB}, \quad \angle \hat{F}(j\omega_t^*) \approx -190^\circ.$$

Figura 2.34: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$ 

Di conseguenza, per ottenere l'obiettivo della sintesi, si userà innanzitutto una rete anticipatrice in modo tale da aumentare la fase in corrispondenza a  $\omega_t^*$ . Se necessario, si introdurrà poi un'azione proporzionale (cioè un guadagno  $K'_G$  maggiore di uno) al fine di spostare la pulsazione di attraversamento fino a raggiungere quella desiderata.

Per ottenere un margine di fase non inferiore a  $m_\varphi^* = 45^\circ$  è necessario conseguire in  $\omega_t^*$  un anticipo di fase di almeno

$$m_\varphi^* - (180^\circ + \hat{F}(j\omega_t^*)) = 55^\circ.$$

Ciò suggerisce di usare  $m_a = 11$  in corrispondenza alla pulsazione normalizzata  $\omega_{\tau_a} = 3$ . Volendo collocare il massimo anticipo in  $\omega_t^* = 10$  rad/sec, si ha

$$10 \tau_a = 3 \implies \tau_a = 0.3.$$

La funzione anticipatrice risultante è

$$R_a(s) = \frac{1 + 0.3s}{1 + \frac{0.3}{11}s}.$$

I grafici di  $\hat{F}(j\omega)R_a(j\omega)$  sono riportati in Fig. 2.35. Il valore del modulo di  $\hat{F}(j\omega)R_a(j\omega)$  in  $\omega_t^*$  è

$$|\hat{F}(j\omega_t^*)R_a(j\omega_t^*)| = -46.26 \text{ dB}.$$

Di conseguenza, per spostare la pulsazione di attraversamento in  $\omega_t^* = 10$  rad/sec è sufficiente porre

$$K''_G = 46.26 \text{ dB} \implies K''_G = 205.7.$$

Si noti che di conseguenza il valore dell'errore a regime permanente al gradino sarà notevolmente minore di quello massimo ammissibile.

La funzione compensatrice complessiva è

$$G(s) = 2057 \frac{1 + 0.3s}{1 + \frac{0.3}{11}s}.$$

L'alterazione della risposta armonica ad anello aperto

$$F(j\omega) = G(j\omega)P(j\omega) \frac{1}{j\omega}$$

a seguito dell'introduzione di  $G(s)$  è mostrata in Fig. 2.35 e, per uno spettro di frequenze più ampio, in Fig. 2.36. Si è ottenuta una pulsazione di attraversamento di 10 rad/sec e un margine di fase di circa  $46^\circ$ .

Dal diagramma di Nichols (Fig. 2.37) di  $F(j\omega)$  e dal modulo della risposta armonica ad anello chiuso  $W(j\omega)$  (Fig. 2.38) è possibile vedere che la banda passante ad anello chiuso è circa pari a 17 rad/sec, un valore compatibile con la specifica b).

Si noti che, come appare dalla Fig. 2.36, la fase di  $F(j\omega)$  attraversa più volte la retta a  $-180^\circ$ . Ciò implica che il diagramma di Nyquist di  $F(j\omega)$  avrà l'andamento qualitativo mostrato in Fig. 2.39. In particolare, è facile vedere che la posizione del punto  $(-1, 0)$  è quella indicata, poiché in corrispondenza alla pulsazione di attraversamento si ha un margine di fase positivo.

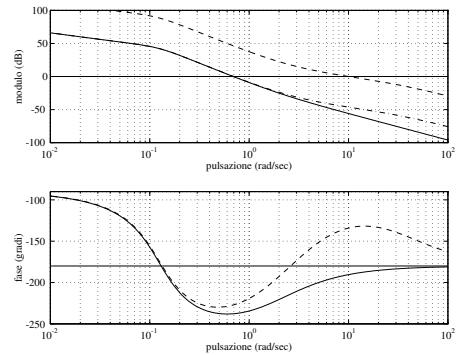


Figura 2.35: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$  (—), di  $\hat{F}(j\omega)R_a(j\omega)$  (---) e di  $F(j\omega) = K'_G \hat{F}(j\omega)R_a(j\omega)$  (-·-)

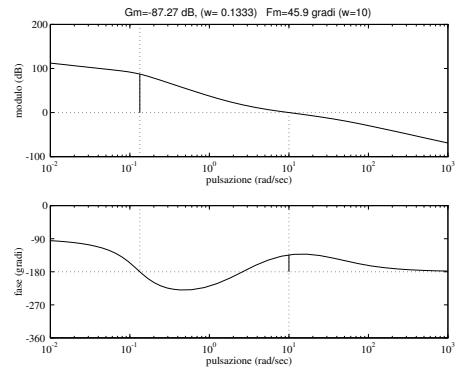


Figura 2.36: Diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$

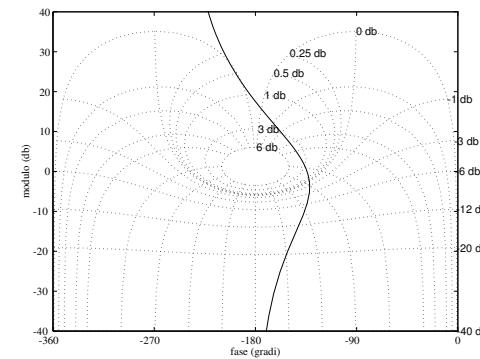


Figura 2.37: Diagramma di Nichols di  $F(j\omega)$

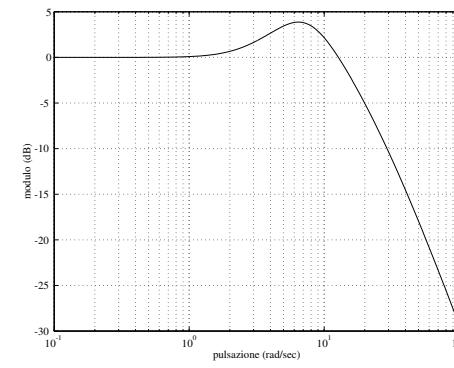
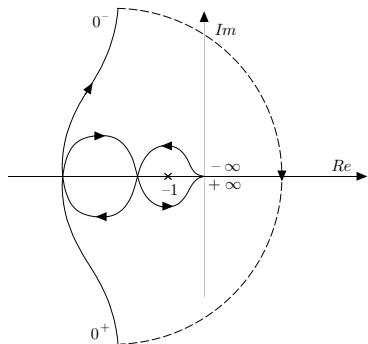


Figura 2.38: Diagramma dei moduli di  $W(j\omega)$

Figura 2.39: Diagramma di Nyquist qualitativo di  $F(j\omega)$ 

L'esame del diagramma di Nyquist conferma che il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente (infatti, il numero netto di giri che il diagramma polare compie intorno a  $(-1, 0)$  è nullo). Tuttavia, si è in una situazione di *stabilità condizionata*: una diminuzione del guadagno di  $F(j\omega)$  porterebbe dapprima all'instabilità e successivamente — per valori ancora minori del guadagno — di nuovo alla stabilità. Tra l'altro, ciò implica che il margine di guadagno del sistema non è univocamente definito.

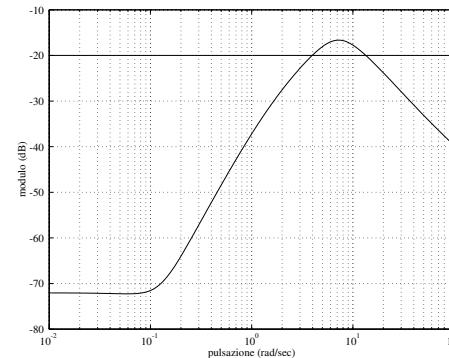
Venendo all'ultimo quesito, si osservi che l'attenuazione richiesta si ha per quei valori di  $\omega$  tali che

$$|W_d(j\omega)| \leq 0.1,$$

essendo

$$W_d(s) = \frac{\left(1 + \frac{0.3}{11}s\right)(1 + 10s + 64s^2)}{s\left(1 + \frac{0.3}{11}s\right)(1 + 10s + 64s^2) + 2000(1 + 0.3s)(2 + s)}.$$

Dall'esame del modulo della risposta armonica al disturbo  $W_d(j\omega)$ , riportato in Fig. 2.40, si conclude che la suddetta condizione è verificata sia per

Figura 2.40: Diagramma dei moduli di  $W_d(j\omega)$ 

$\omega \leq 4$  rad/sec che per  $\omega \geq 13$  rad/sec. In particolare, si ha

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |W_d(j\omega)| = \frac{1}{4000} = -72 \text{ dB} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |W_d(j\omega)| = 0.$$

La prima di queste relazioni conferma che il sistema ad anello chiuso non è astatico rispetto al disturbo, mentre la seconda è legata alla presenza nel ramo diretto di un polo nell'origine a valle del punto di accesso del disturbo. Per pulsazioni comprese nella banda [4, 13] rad/sec, l'attenuazione introdotta da  $W_d(j\omega)$  è minore di 0.1.

Si deve tuttavia osservare che il tracciamento del diagramma di Bode di  $W_d(j\omega)$  senza l'ausilio del calcolatore richiederebbe la disponibilità della funzione di trasferimento nella forma poli-zeri. È quindi lecito ricercare una soluzione all'ultimo quesito che — seppure approssimata — si basi unicamente sull'esame dei diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$ .

La condizione di attenuazione è

$$|W_d(j\omega)| = \frac{\left|\frac{1}{j\omega}\right|}{|1 + F(j\omega)|} \leq 0.1,$$

e quindi

$$|1 + F(j\omega)| \geq \left| \frac{10}{j\omega} \right|.$$

Allo scopo di ottenere una condizione su  $|F(j\omega)|$  (direttamente verificabile sui diagrammi di Bode), è utile la relazione

$$|1 + F(j\omega)| \geq |1 - |F(j\omega)|| = \begin{cases} |F(j\omega)| - 1 & \text{se } |F(j\omega)| \geq 1 \\ 1 - |F(j\omega)| & \text{se } |F(j\omega)| < 1. \end{cases}$$

Si consideri dapprima il caso  $|F(j\omega)| \geq 1$ . Essendo  $\omega_t = 10$  rad/sec, ciò corrisponde a pulsazioni minori di 10 rad/sec. Si ha

$$|1 + F(j\omega)| \geq |F(j\omega)| - 1 \geq \left| \frac{10}{j\omega} \right|,$$

da cui

$$|F(j\omega)| \geq 1 + \left| \frac{10}{j\omega} \right| = 1 + \frac{10}{\omega} = A(\omega).$$

Si osservi che il grafico di  $A(\omega)$  in dB non corrisponde ad alcuno dei diagrammi di Bode elementari. Tuttavia, essendo

$$A(\omega) = \alpha(\omega) \frac{10}{\omega}, \quad \alpha(\omega) = 1 + \frac{\omega}{10},$$

si può scrivere

$$A(\omega)|_{\text{dB}} = \alpha(\omega)|_{\text{dB}} + \frac{10}{\omega}|_{\text{dB}}.$$

Pertanto, il grafico di  $A(\omega)$  in dB può essere costruito per punti traslando verso l'alto di  $\alpha(\omega)|_{\text{dB}}$  la retta passante per  $\omega = 10$  rad/sec e avente pendenza  $-20$  dB/decade. Si osservi che l'entità della traslazione verso l'alto dipende dal valore di  $\omega$ . Il risultato di tale procedura è mostrato in Fig. 2.41. Il confronto tra il diagramma di  $|F(j\omega)|$  e quello di  $A(\omega)$  mostra che la condizione di attenuazione è certamente verificata per  $\omega \leq 4$  rad/sec, che si trova all'interno del campo di validità dell'approssimazione usata.

Procedendo analogamente per il caso  $|F(j\omega)| < 1$ , che corrisponde a pulsazioni maggiori di 10 rad/sec, si trova facilmente la condizione

$$|F(j\omega)| \leq B(\omega), \quad B(\omega) = \beta(\omega) \frac{10}{\omega}, \quad \beta(\omega) = \frac{\omega}{10} - 1.$$

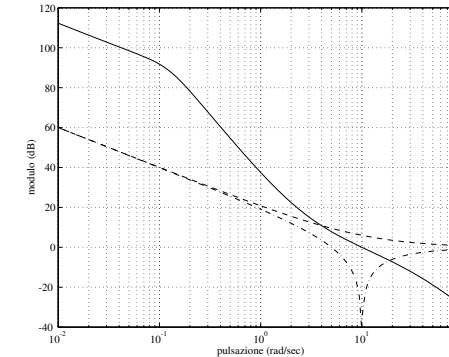


Figura 2.41: Diagramma di  $|F(j\omega)|$  (—), di  $A(\omega)$  (--) e di  $B(\omega)$  (-·)

Il grafico di  $B(\omega)$  in dB, ricavabile per punti in modo analogo a quanto detto per  $A(\omega)$ , è riportato anch'esso in Fig. 2.41. Il confronto tra  $|F(j\omega)|$  e  $B(\omega)$  mostra che la condizione di attenuazione è ancora verificata per  $\omega \geq 18$  rad/sec, anche in questo caso all'interno del campo di validità dell'approssimazione usata. I valori ricavati con questa procedura approssimata sono ragionevolmente vicini a quelli effettivi determinati in precedenza.

**Esercizio 2.5**

Si consideri il sistema di controllo a retroazione in Fig. 2.42

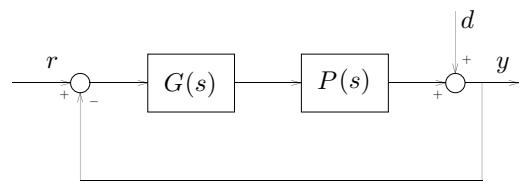


Figura 2.42: Sistema di controllo

in cui

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Si determini la funzione compensatrice  $G(s)$  in modo che:

- a) l'errore a regime per un ingresso  $r$  a gradino unitario sia non superiore a 0.25 in valore assoluto;
- b) la risposta armonica disturbo-uscita abbia modulo non superiore a 0.5 nella banda  $\omega \in [0, 0.5]$  rad/sec;
- c) la banda passante ad anello chiuso sia la più elevata possibile, compatibilmente con i vincoli:
  - c1) il margine di fase sia non inferiore a  $40^\circ$ ;
  - c2) il modulo di  $G(j\omega)$  sia non superiore a 30 dB per ogni valore di  $\omega$ .

---

Il processo ha due poli immaginari puri e guadagno  $K_P = 1$ . La funzione compensatrice va ricercata nella forma

$$G(s) = \frac{K_G}{s^h} R(s),$$

in cui  $R(s)$  ha guadagno unitario.

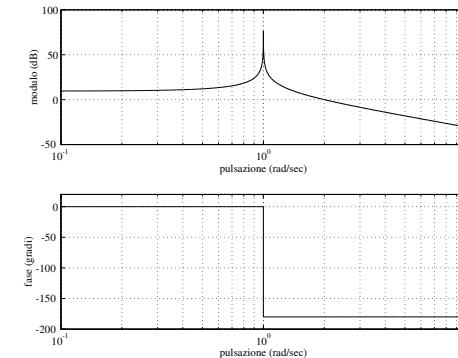


Figura 2.43: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$

Per quanto riguarda la specifica sull'errore a regime permanente, non è necessario introdurre poli nell'origine ( $h = 0$ ). Inoltre, essendo la retroazione unitaria ( $K_d = 1$ ), si ha per l'errore a regime permanente

$$|\tilde{e}_0| = \frac{K_d^2}{|K_d + K_P K_G|} = \frac{1}{|1 + K_G|} \leq 0.25 \implies K_G \geq 3,$$

dove si è tenuto conto del fatto che in questo caso il guadagno della funzione compensatrice deve essere positivo per non compromettere la stabilità ad anello chiuso. Per comodità, conviene porre  $K_G = K'_G K''_G$ , e scegliere  $K'_G = 3$ . In questo modo, la scelta di  $K''_G \geq 1$  resta libera per soddisfare le altre specifiche.

I diagrammi di Bode della risposta armonica del processo modificato

$$\hat{F}(s) = K'_G P(s) = \frac{3}{s^2 + 1},$$

assumono l'aspetto riportato in Fig. 2.43. Si noti che il sistema retroazionato sarebbe al limite di stabilità se si ponesse  $R(s) = 1$ .

La specifica **b)** equivale a imporre la seguente condizione

$$\frac{1}{|1 + F(j\omega)|} = \frac{1}{|1 + P(j\omega)G(j\omega)|} \leq 0.5 \quad \text{per } \omega \in [0, 0.5] \text{ rad/sec},$$

cioè

$$|1 + P(j\omega)G(j\omega)| \geq 2 \quad \text{per } \omega \in [0, 0.5] \text{ rad/sec.}$$

Essendo

$$|1 + P(j\omega)G(j\omega)| \geq |P(j\omega)G(j\omega)| - 1,$$

la precedente diseguaglianza è certamente verificata se

$$|P(j\omega)G(j\omega)| \geq 3 \quad \text{per } \omega \in [0, 0.5] \text{ rad/sec.}$$

Essendo  $K_P = 1$  e  $K_G \geq 3$ , condizione sufficiente affinché quest'ultima condizione sia soddisfatta è che  $R(j\omega)$  abbia modulo non inferiore a 1 (cioè non negativo in dB) nella banda di frequenze di interesse. Ciò significa che non sarà possibile utilizzare funzioni attenuatrici durante la sintesi.

Venendo alla specifica **c)**, va innanzitutto osservato che i metodi di sintesi nel dominio della frequenza non consentono una soluzione rigorosa. Un possibile approccio nello spirito della sintesi per tentativi consiste nel cercare di ottenere una pulsazione di attraversamento ad anello aperto più elevata possibile (si ricordi che  $\omega_t < B_3$  per sistemi con margine di fase inferiore a  $90^\circ$ ). È facile rendersi conto che il vincolo **c2)** sul modulo di  $G(j\omega)$  comporta l'esistenza di un estremo superiore per la pulsazione di attraversamento. Infatti, avendo posto  $K'_G = 3 \approx 9.5$  dB, e supponendo momentaneamente di poter trascurare il vincolo **c1)** sul margine di fase, il massimo valore ammissibile per  $K''_G$  è  $30 - 9.5 = 20.5$  dB. Con tale scelta, il valore della pulsazione di attraversamento ad anello aperto diverrebbe circa  $\omega_t^* = 5.5$  rad/sec, come si deduce da un attento esame della Fig. 2.43. Tuttavia, a causa del vincolo sul margine di fase, è necessario introdurre in  $G(j\omega)$  un'azione anticipatrice (il cui modulo sarà maggiore di zero in dB); di conseguenza, il valore effettivamente ottenibile per la pulsazione di attraversamento si riduce rispetto a  $\omega_t^*$ .

Un tentativo ragionevole consiste nel cercare di ottenere una pulsazione di attraversamento il più possibile prossima al valore  $\omega_t^*$ , con un anticipo di fase di almeno  $40^\circ$  per pulsazioni prossime ma inferiori a  $\omega_t^*$ . Ciò può essere ottenuto con una funzione anticipatrice, i cui parametri vengono scelti sulla base del seguente ragionamento.

Dall'esame dei diagrammi universali delle funzioni anticipatrici si deduce che il massimo valore di  $m_a$  compatibile con il vincolo

$$|K''_G R_a(j\omega)| \leq 20.5 \text{ dB}, \quad \forall \omega,$$

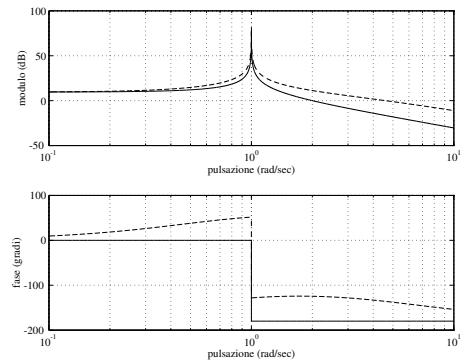
è 10.5 (per  $K'_G = 0$  dB). Scegliendo  $m_a = 10.5$ , è necessario collocare il polo della funzione anticipatrice il più possibile ‘a sinistra’ sull'asse delle frequenze, in modo da sfruttare al meglio l'amplificazione disponibile per aumentare la pulsazione di attraversamento. Per  $m_a = 10.5$ , la funzione anticipatrice garantisce un anticipo di almeno  $40^\circ$  in corrispondenza a un intervallo di pulsazioni normalizzate il cui limite superiore è pari a 10.3 rad/sec. Per ottenere un anticipo di fase esattamente di  $40^\circ$  in corrispondenza a  $\omega_t^*$ , si sceglie  $\tau_a = 10.3/5.5$ . Essendo la fase di  $\hat{F}(j\omega)$  costante nella zona di interesse, per pulsazioni prossime ma inferiori a  $\omega_t^*$  si otterrà un anticipo di fase maggiore. La funzione anticipatrice risultante è

$$R_a(s) = \frac{1 + \frac{10.3}{5.5}s}{1 + \frac{10.3}{57.75}s}.$$

Infine, è necessario porre  $K''_G = 1$ , perché tutto il modulo ‘disponibile’ è stato usato per  $R_a(j\omega)$ . La funzione compensatrice è perciò

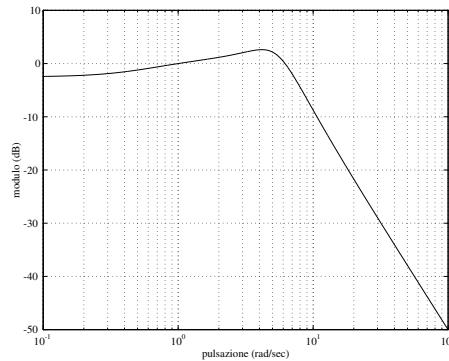
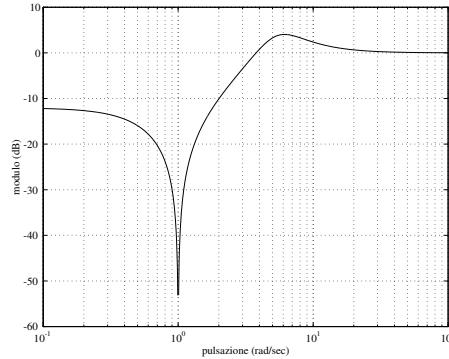
$$G(s) = 3 \frac{1 + \frac{10.3}{5.5}s}{1 + \frac{10.3}{57.75}s}.$$

I diagrammi di Bode della risposta armonica ad anello aperto  $F(j\omega) = P(j\omega)G(j\omega)$ , riportati in Fig. 2.44, mostrano che si è ottenuta una pulsazione di attraversamento ad anello aperto pari a 4.59 rad/sec con un margine di fase di  $44^\circ$ . Tale risultato — in particolare, il margine di fase superiore a quello minimo richiesto — suggerisce la possibilità di conseguire un ulteriore miglioramento variando leggermente i parametri della funzione anticipatrice. Un ragionamento che porta a una soluzione alternativa è il seguente: in corrispondenza alla pulsazione normalizzata  $\omega\tau_a = 10.3$ , la rete anticipatrice introduce un'amplificazione dei moduli di circa 17.37 dB per  $m_a = 10.5$ . Di conseguenza, per ottenere un margine di fase uguale a quello minimo basta individuare la pulsazione  $\bar{\omega}$  tale che  $|\hat{F}(j\bar{\omega})| = -17.37$  dB, e collocare l'anticipo di  $40^\circ$  in  $\bar{\omega}$ . Essendo  $\bar{\omega} = 4.81$  rad/sec, si pone  $\tau_a = 10.3/4.81$ . Come previsto, si ottiene una pulsazione di attraversamento di 4.81 rad/sec con un margine di fase di  $40^\circ$ .

Figura 2.44: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$  (—) e di  $F(j\omega)$  (---)

Per completezza, in Fig. 2.45 è dato il diagramma dei moduli della risposta armonica ad anello chiuso  $W(j\omega)$  relativa alla prima funzione compensatrice. La banda passante  $B_3$  è di circa 8.5 rad/sec. Si osservi che  $|W(j0)| \neq 1$  in conseguenza dell'assenza di poli nell'origine nel ramo diretto (sistema di tipo 0).

In Fig. 2.46 viene riportato il diagramma dei moduli della risposta armonica al disturbo  $W_d(j\omega)$ , che è uguale alla funzione di sensibilità  $S(j\omega)$  della risposta permanente a ingressi sinusoidali rispetto a variazioni della funzione di trasferimento ad anello aperto  $F(s)$ . Si noti il caratteristico andamento *antirisonante* legato alla presenza in  $W_d(s)$  di due zeri immaginari puri, a loro volta corrispondenti a due poli immaginari puri in  $F(s)$ . Il sistema ad anello chiuso, pur non essendo astatico rispetto a  $d$ , è completamente insensibile a un disturbo sinusoidale di pulsazione pari a 1 rad/sec.

Figura 2.45: Diagramma dei moduli di  $W(j\omega)$ Figura 2.46: Diagramma dei moduli di  $S(j\omega)$

**Esercizio 2.6**

Sia dato il sistema di controllo a retroazione in Fig. 2.47

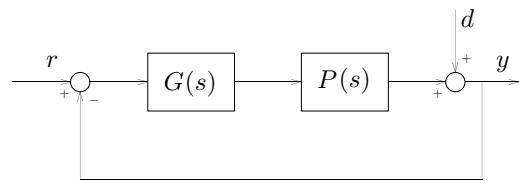


Figura 2.47: Sistema di controllo

in cui il processo ha funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{1}{s^3},$$

mentre la funzione compensatrice  $G(s)$  ha la seguente struttura

$$G(s) = K \left( \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} \right)^2.$$

Si determinino i parametri  $K$ ,  $\tau_1$  e  $\tau_2$  di  $G(s)$  in modo tale che:

- a) in corrispondenza a un disturbo  $d(t) = \sin \omega t$ , l'uscita risulti non superiore a 0.11 per tutti i valori di  $\omega$  minori o uguali a 0.1 rad/sec;
- b) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con margine di fase il più elevato possibile;
- c)  $|G(j\omega)| \leq 0$  dB, per qualsiasi valore di  $\omega$ .

La struttura assegnata per  $G(s)$  è costituita da un guadagno e due funzioni compensatrici elementari coincidenti. In questo caso, è immediato osservare che la risposta armonica  $P(j\omega)$  del processo ha fase costante e pari a  $-270^\circ$ ; pertanto, per ottenere un sistema ad anello chiuso stabile asintoticamente,

è necessario introdurre una decisa azione anticipatrice in modo tale da ottenere un margine di fase positivo.

Tale conclusione è confermata dall'esame del diagramma di Nyquist di  $P(j\omega)$ , riportato in Fig. 2.48. Esso effettua due giri in senso orario intorno al punto  $(-1, 0)$ , indicando che senza un'adeguata compensazione il sistema ad anello chiuso sarebbe instabile. La Fig. 2.49 mostra come il diagramma di Nyquist si modifichi a seguito dell'introduzione di una pronunciata azione anticipatrice e di un opportuno coefficiente di guadagno. Il relativo conteggio dei giri dà risultato nullo, e di conseguenza il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile. Si noti che, a causa della struttura di  $G(s)$ , l'eccesso poli-zeri della funzione di trasferimento del ramo diretto  $F(s) = G(s)P(s)$  è pari a quello di  $P(s)$ , cioè 3; quindi, la fase di  $F(j\omega)$  al crescere della pulsazione tende comunque a  $-270^\circ$ . Ciò implica (si veda la Fig. 2.49) che la suddetta stabilità è condizionata, poiché per guadagni molto elevati il sistema diviene nuovamente instabile.

Sulla base di quanto detto finora, la funzione compensatrice  $G(s)$  avrà la forma

$$G(s) = K \left( \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} \right)^2 = K \left( \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a} s} \right)^2 = KR(s), \quad \tau_a > 0, m_a > 1.$$

Il metodo della sintesi per tentativi non si presta a fornire una soluzione rigorosa del problema in esame, segnatamente a causa della richiesta di un margine di fase il più elevato possibile. Tuttavia, è possibile ottenere una soluzione ragionevolmente vicina all'ottimo scegliendo i parametri  $K$ ,  $\tau_a$  e  $m_a$  a partire da semplici considerazioni.

Venendo alla specifica a), per garantire l'attenuazione richiesta del disturbo sinusoidale è necessario imporre che

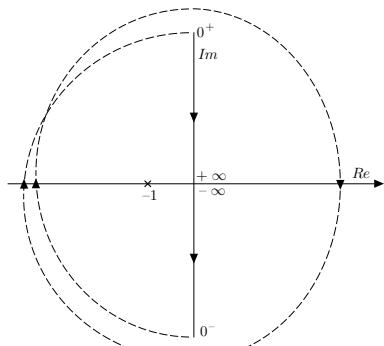
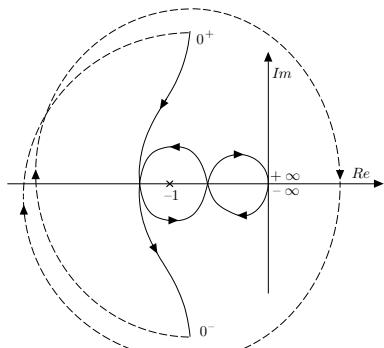
$$|W_d(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + G(j\omega)P(j\omega)} \right| \leq 0.11, \quad \text{per } \omega \in [0, 0.1] \text{ rad/sec},$$

e cioè che

$$|1 + G(j\omega)P(j\omega)| \geq \frac{1}{0.11}, \quad \text{per } \omega \in [0, 0.1] \text{ rad/sec}.$$

Per convertire tale diseguaglianza in una condizione sul sistema ad anello aperto, si tenga presente la seguente maggiorazione:

$$|1 + G(j\omega)P(j\omega)| \geq |G(j\omega)P(j\omega)| - 1.$$

Figura 2.48: Diagramma di Nyquist di  $P(j\omega)$ Figura 2.49: Diagramma di Nyquist di  $F(j\omega)$  a seguito dell'introduzione di un'azione anticipatrice

Quindi, una condizione sufficiente affinché la specifica **a**) sia soddisfatta è che

$$|G(j\omega)P(j\omega)| \geq 1 + \frac{1}{0.11} \approx 10 = 20 \text{ dB} \quad \text{per } \omega \in [0, 0.1] \text{ rad/sec.}$$

Ciò equivale a richiedere che il diagramma di Bode del modulo di  $F(j\omega) = G(j\omega)P(j\omega)$  non attraversi la zona indicata in grigio nella Fig. 2.50.

La suddetta condizione sul modulo di  $F(j\omega) = G(j\omega)P(j\omega)$  implica un limite superiore per l'anticipo di fase ottenibile, come indicato dal seguente ragionamento. In primo luogo, si consideri che una rete anticipatrice introduce un'amplificazione dei moduli tanto maggiore quanto maggiore è il massimo anticipo di fase che essa è in grado di fornire. Per soddisfare la specifica **c**), il guadagno  $K$  dovrà allora essere scelto sufficientemente minore di 1 da contrastare tale amplificazione. Tuttavia, dovendo essere  $|F(j\omega)| \geq 20$  dB per  $\omega \in [0, 0.1]$  rad/sec, il valore di  $K$  non può essere arbitrariamente piccolo.

L'esame del diagramma di Bode di  $F(j\omega)$ , riportato in Fig. 2.50, porta a concludere che la scelta  $K \geq -40$  dB è ammessa. Infatti, essendo  $|P(j0.1)| = 60$  dB, ciò garantisce che si avrà comunque  $|F(j0.1)| \geq 20$  dB. In particolare, si scelga  $K = -40$  dB.

Per quanto riguarda i parametri  $m_a$  e  $\tau_a$ , la scelta di  $K$  implica che la singola rete anticipatrice potrà introdurre un'amplificazione massima di 20 dB. Dai diagrammi universali riportati in Fig. 2.3, si vede che il corrispondente valore di  $m_a$  è 10. Per ottenere il margine di fase più elevato possibile, si sceglierà la pulsazione normalizzata  $\omega\tau_a = 3.2$ , cui è associato un anticipo di fase massimo e pari a circa 54°. Poiché la corrispondente amplificazione di modulo per la singola rete è di circa 10 dB, basta collocare l'anticipo di fase nella pulsazione  $\bar{\omega}$  per cui  $|KP(j\bar{\omega})| = -20$  dB per ottenere un margine di fase di circa  $-90 + 54 \cdot 2 = 18^\circ$ . Da un esame del diagramma del modulo di  $KP(j\omega)$ , riportato anch'esso in Fig. 2.50, si ha  $\bar{\omega} = 0.5$  rad/sec e quindi  $\tau_a = 3.2/0.5$ . La funzione compensatrice risultante è quindi

$$G(s) = 0.01 \left( \frac{1 + \frac{3.2}{0.5}s}{1 + \frac{3.2}{5}s} \right)^2.$$

Il risultato della sintesi è riportato nelle Figg. 2.50 e 2.51. Si è ottenuta una pulsazione di attraversamento di circa 0.43 rad/sec e un margine di fase di oltre 19°. Si noti che, come richiesto, il diagramma di Bode del modulo di  $F(j\omega)$  non attraversa la zona 'proibita' derivante dalla specifica **a**).

Tuttavia, a causa della lieve amplificazione introdotta da  $R(s)$  in corrispondenza alla pulsazione  $\omega = 0.1$  rad/sec, non si realizza quella condizione di tangenza che è verosimilmente associata alla scelta ottimale di  $G(s)$ .

In effetti, ulteriori tentativi possono portare a un certo miglioramento del margine di fase. Ad esempio, scegliendo la funzione compensatrice

$$G'(s) = 0.0059 \left( \frac{1 + \frac{4.2}{0.5}s}{1 + \frac{4.2}{0.5}s} \right)^2,$$

si ottiene una pulsazione di attraversamento di circa 0.42 rad/sec e un margine di fase di quasi  $28^\circ$ , come mostrato nelle Figg. 2.52 e 2.53. A questa sintesi alternativa si arriva scegliendo un valore di  $m_a$  pari a 13 e una pulsazione normalizzata  $\omega\tau = 4.2$ , e collocando ancora l'anticipo di fase in  $\bar{\omega} = 0.5$  rad/sec. Il valore di  $K$  viene poi calcolato in modo da realizzare la suddetta condizione di tangenza, e controllando che la specifica **c**) sia soddisfatta.

A titolo di verifica, nelle Figg. 2.54 e 2.55 viene riportato il modulo della risposta armonica del disturbo, rispettivamente per la prima e la seconda sintesi. In tali diagrammi è evidenziata in grigio la zona ‘proibita’ dalla specifica **a**). In particolare, l’andamento di  $|W_d'(j\omega)|$  conferma che, nonostante l’uso di una maggiorazione, la scelta di  $G'(s)$  non è risultata conservativa.

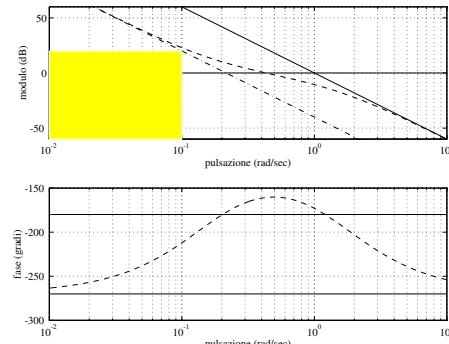


Figura 2.50: Diagrammi di Bode di  $P(j\omega)$  (—), di  $KP(j\omega)$  (---) e di  $F(j\omega) = G(j\omega)P(j\omega)$  (— · —).

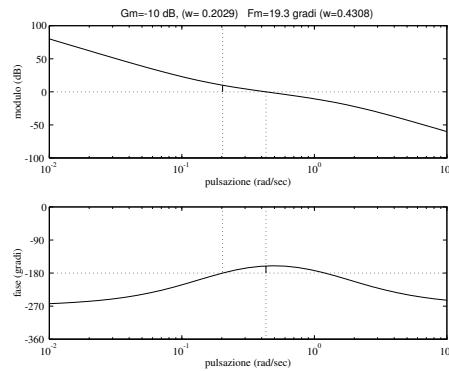


Figura 2.51: Diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$

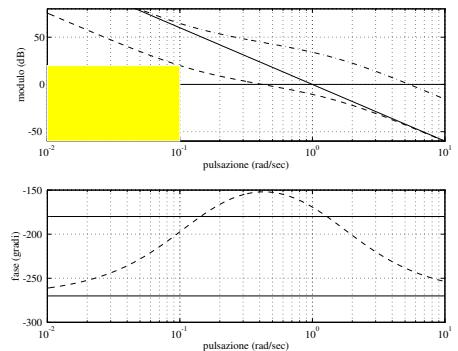


Figura 2.52: Diagrammi di Bode di  $P(j\omega)$  (—), di  $R'(j\omega)P(j\omega)$  (-·-) e di  $F'(j\omega)P(j\omega)$  (—)

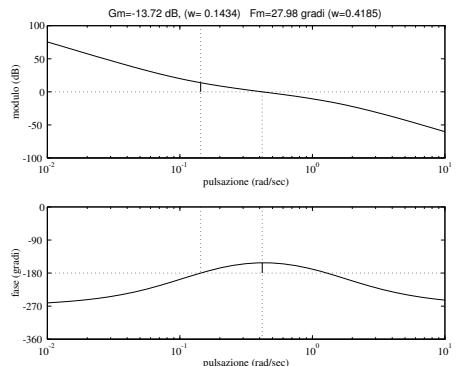


Figura 2.53: Diagrammi di Bode di  $F'(j\omega)$

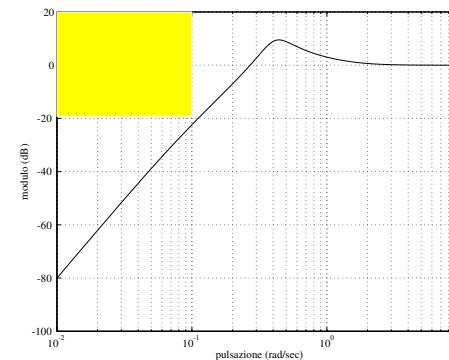


Figura 2.54: Diagramma di Bode di  $|W_d(j\omega)|$

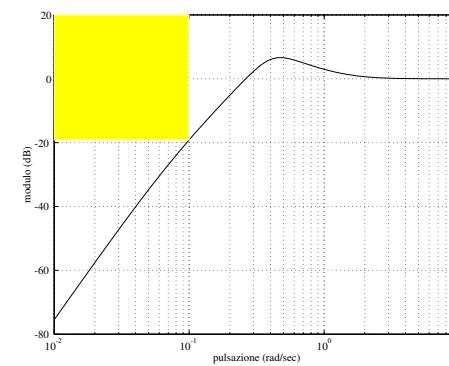


Figura 2.55: Diagramma di Bode di  $|W'_d(j\omega)|$

**Esercizio 2.7**

La Fig. 2.56 mostra lo schema a blocchi di un asservimento di posizione angolare.

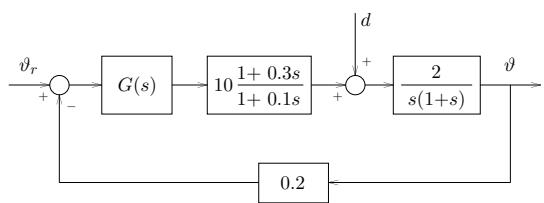


Figura 2.56: Asservimento di posizione angolare

Sintetizzare una funzione compensatrice  $G(s)$  in modo tale che:

- per una velocità angolare desiderata in uscita  $\dot{\vartheta}_d = 2 \text{ rad/sec}$ , l'errore di posizione a regime permanente sia non superiore a  $0.04 \text{ rad}$ ;
- la risposta a regime permanente a un disturbo costante unitario sia non superiore a  $0.02 \text{ rad}$ ;
- il modulo alla risonanza sia non superiore a  $2 \text{ dB}$ .

Per lo schema a blocchi considerato, la funzione di trasferimento del processo è data da

$$P(s) = 20 \frac{1 + 0.3s}{s(1 + 0.1s)(1 + s)},$$

cui corrisponde un guadagno

$$K_P = \lim_{s \rightarrow 0} sP(s) = 20.$$

Si noti che la retroazione non è unitaria. In particolare, indicando come di consueto con  $1/K_d$  la funzione di trasferimento del ramo di reazione, si ha  $K_d = 5$ .

La specifica a) sull'errore a regime si riferisce al caso in cui la velocità angolare in uscita è costante, il che corrisponde alla presenza in ingresso allo schema di un riferimento a rampa per la posizione. In formule:

$$\dot{\vartheta}_d(t) = 2 \implies \dot{\vartheta}_d(t) = 2t \implies \vartheta_r(t) = \frac{2}{K_d} t = 0.4t,$$

dove si è tenuto conto del fatto che la retroazione non è unitaria. Per avere errore a regime permanente finito e non nullo in corrispondenza a un ingresso di riferimento a rampa, è necessario che il sistema di controllo sia di tipo 1. Ciò è già garantito dalla presenza di un polo nell'origine nella funzione di trasferimento del processo. Di conseguenza, la funzione compensatrice va ricerchata nella forma

$$G(s) = K_G R(s),$$

in cui  $R(s)$  ha guadagno unitario. Per rispettare la limitazione sull'errore, si deve imporre la seguente condizione

$$|\tilde{e}_1| = 0.4 \frac{K_d^2}{|K_P K_G|} \leq 0.04 \implies |K_G| \geq 12.5.$$

Venendo alla specifica b), si osservi innanzitutto che non è richiesto l'astratismo rispetto al disturbo. La funzione di trasferimento disturbo/uscita è facilmente ricavabile come

$$W_d(s) = \frac{2(1 + 0.1s)}{s(1 + s)(1 + 0.1s) + 4G(s)(1 + 0.3s)}.$$

Il valore della risposta a regime rispetto a un disturbo costante unitario è perciò dato da

$$W_d(s)|_{s=0} = \frac{1}{2K_G}.$$

Di conseguenza, per rispettare la limitazione su tale risposta basta imporre che sia verificata la seguente diseguaglianza

$$\frac{1}{|2K_G|} \leq 0.02 \implies |K_G| \geq 25.$$

Combinando questa condizione con quella trovata in precedenza, si sceglie  $K_G = 25$ .

Il resto del procedimento di sintesi consiste nella scelta di  $R(s)$  al fine di assicurare il modulo alla risonanza richiesto. A questo scopo, è conveniente riferirsi allo schema equivalente riportato in Fig. 2.57, che consente di limitarsi all'esame dell'anello a retroazione unitaria trascurando la presenza di un blocco istantaneo tra  $\vartheta_r$  e  $\vartheta_d$ . È infatti immediato osservare che il modulo alla risonanza del sistema complessivo non è alterato dalla presenza di tale blocco (si ricordi che il modulo alla risonanza viene definito rispetto al valore del modulo per  $\omega = 0$ ). Un'analogia considerazione vale per la banda passante del sistema complessivo, che tuttavia in questo caso non è oggetto di specifiche.

Sulla base di quanto detto, è possibile convertire la specifica sul modulo alla risonanza del sistema ad anello chiuso in una limitazione sul margine di fase relativo alla *funzione di trasferimento di anello*

$$F(s) = \frac{1}{K_d} G(s)P(s) = \frac{1}{K_d} K_G R(s)P(s) = 100 R(s) \frac{1 + 0.3s}{s(1 + 0.1s)(1 + s)}.$$

In particolare, attraverso l'esame della carta di Nichols, si deduce che affinché il modulo alla risonanza sia non superiore a 2 dB è necessario conseguire un margine di fase per  $F(s)$  non inferiore a  $50^\circ$ .

La scelta di  $R(s)$  può essere effettuata a partire dai diagrammi di Bode del processo modificato  $\hat{F}(s) = K_G P(s)/K_d$ , mostrati in Fig. 2.58. Essendo

$$\hat{\omega}_t \approx 16 \text{ rad/sec}, \quad \hat{m}_\varphi \approx 23^\circ,$$

è necessario aumentare il margine di fase. Poiché non è assegnata una specifica sulla pulsazione di attraversamento, tale obiettivo può essere conseguito sia con un'attenuazione dei moduli, sia con un anticipo delle fasi.

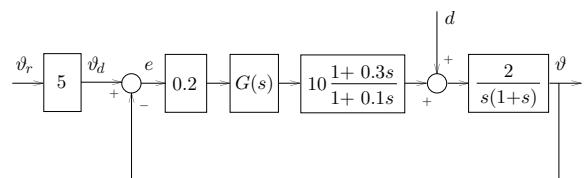


Figura 2.57: Schema a blocchi equivalente a retroazione unitaria

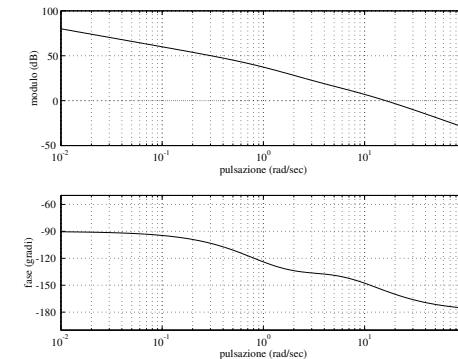


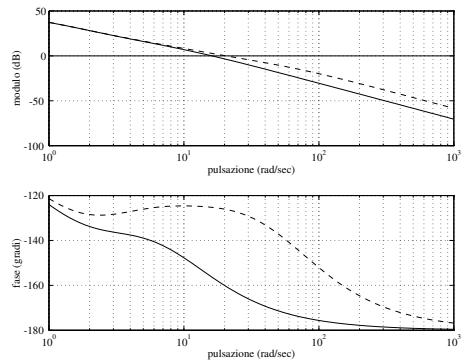
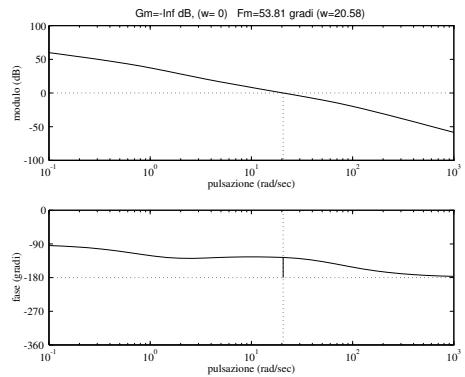
Figura 2.58: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$

Tuttavia, a causa della scarsa pendenza del diagramma delle fasi, sarebbe necessaria un'attenuazione di notevole entità, che richiederebbe l'uso di più funzioni attenuatrici. Per tale motivo, si sceglie di usare una funzione anticipatrice.

L'esame dei diagrammi universali di Fig. 2.3 mostra che per  $m_a = 4$  è possibile ottenere un anticipo di fase di circa  $31^\circ$  in corrispondenza alla pulsazione normalizzata  $\omega\tau_a = 1$ . Di conseguenza, collocando tale anticipo di fase in corrispondenza all'attuale pulsazione di attraversamento, si conseguirà un valore della fase prossimo a  $-157 + 31 = -126^\circ$ , che garantisce il margine di fase richiesto. Si pone perciò  $16\tau_a = 1$ , ottenendo  $\tau_a = 1/16$ . Il controllore assume dunque la forma definitiva

$$G(s) = 25 \frac{1 + \frac{1}{16}s}{1 + \frac{64}{64}s}.$$

I diagrammi di Bode della risposta armonica ad anello aperto  $F(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R(j\omega)$ , riportati in Fig. 2.59 e per uno spettro di frequenze più ampio in Fig. 2.60, mostrano che si è ottenuta una pulsazione di attraversamento di circa 20 rad/sec e un margine di fase prossimo a  $54^\circ$ . Si noti che, a

Figura 2.59: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$  (—) e di  $F(j\omega)$  (---)Figura 2.60: Diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$ 

seguito della lieve amplificazione introdotta dalla funzione anticipatrice in corrispondenza a  $\hat{\omega}_t$ , la pulsazione di attraversamento effettiva è leggermente spostata verso destra rispetto a quella del processo modificato. Tuttavia, questo non implica una diminuzione del margine di fase rispetto a quello previsto, poiché l'aumento della pulsazione di attraversamento è compensato dal maggiore anticipo di fase garantito dalla funzione anticipatrice scelta per pulsazioni normalizzate superiori a 1.

Il lettore può verificare che una soluzione alternativa è quella ottenuta scegliendo la rete correttrice come segue

$$R'(s) = R_1(s)R_2(s) = \frac{1 + \frac{100}{7}s}{1 + \frac{100}{0.7}s} \frac{1 + \frac{100}{7}s}{1 + \frac{100}{0.7}s},$$

cioè come una cascata di due funzioni attenuatrici identiche, caratterizzate da  $m_i = 10$  e  $\tau_i = 100/0.7$ . Come mostrato nelle Figg. 2.61–2.62, in questo modo la funzione di trasferimento ad anello aperto  $F'(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R'(j\omega)$  viene a essere caratterizzata da una pulsazione di attraversamento di 0.8 rad/sec e un margine di fase di oltre 51°.

Nelle Figg. 2.63–2.64 sono riportati i diagrammi di Bode dei moduli delle risposte armoniche ad anello chiuso

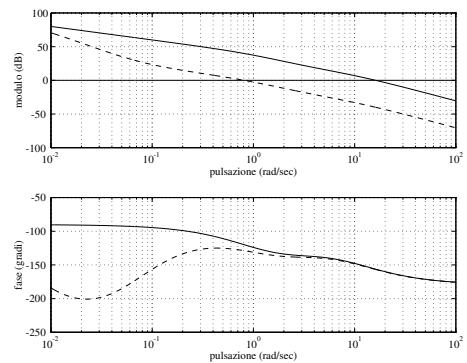
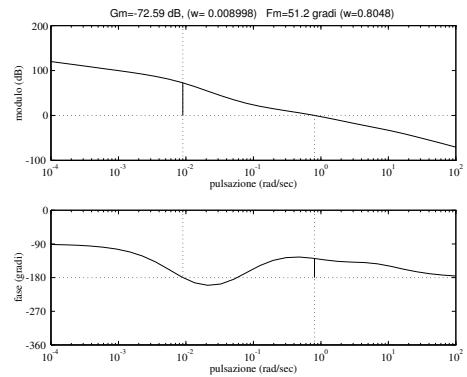
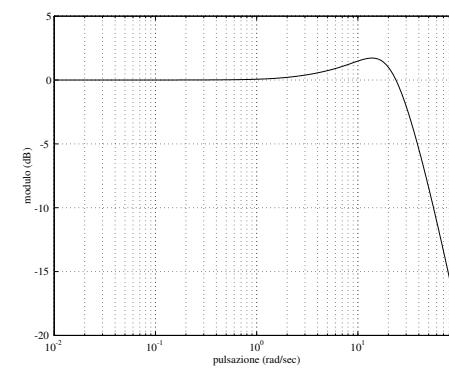
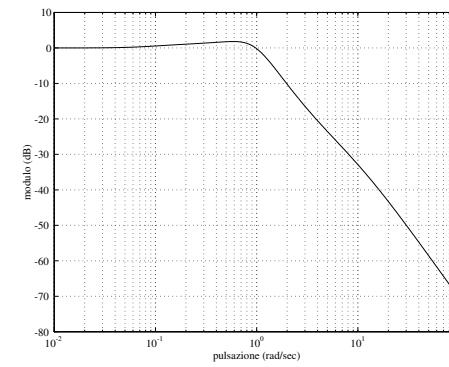
$$W(j\omega) = \frac{\vartheta(j\omega)}{\vartheta_d(j\omega)} = \frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)}, \quad W'(j\omega) = \frac{\vartheta(j\omega)}{\vartheta_d(j\omega)} = \frac{F'(j\omega)}{1 + F'(j\omega)},$$

ottenute in corrispondenza alle due funzioni compensatrici usate. Per entrambe, il modulo alla risonanza è inferiore a 2 dB, così come richiesto dalla specifica c). Si osservi che in tutti e due i casi il calcolo della funzione di trasferimento *totale* del sistema di controllo deve tenere conto della presenza del blocco istantaneo tra  $\vartheta_r$  e  $\vartheta_d$ . Ad esempio, nel primo caso essa è pari a

$$W_{\text{tot}} = K_d W(s) = 5 \frac{F(s)}{1 + F(s)}.$$

In particolare si ha  $W_{\text{tot}}(0) = 5 = K_d$ , il che è consistente con il fatto che il sistema di controllo è di tipo 1.

Sebbene entrambe le funzioni compensatrici ricavate rispondano alle specifiche assegnate, le prestazioni dei corrispondenti sistemi di controllo sono essenzialmente diverse. Ciò è sostanzialmente dovuto alla notevole differenza nella banda passante dei due sistemi (circa 33 rad/sec nel primo caso e 1.3 rad/sec nel secondo). È dunque lecito attendersi che la prontezza

Figura 2.61: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$  (—) e di  $F'(j\omega)$  (---)Figura 2.62: Diagrammi di Bode di  $F'(j\omega)$ Figura 2.63: Diagramma dei moduli di  $W(j\omega)$ Figura 2.64: Diagramma dei moduli di  $W'(j\omega)$

di risposta del primo sistema sia assai superiore a quella del secondo. D'altra parte, l'uso di due funzioni attenuatrici nel secondo caso risulterà in uno sforzo di controllo — l'uscita del blocco  $G(s)$  — di intensità minore rispetto al primo caso, consentendo di dimensionare gli attuatori del processo  $P(s)$  in maniera più conservativa.

Per verificare questa previsione qualitativa, si è effettuata una simulazione del comportamento dei due sistemi in corrispondenza al segnale di riferimento per l'uscita considerato nell'enunciato del problema, cioè  $\theta_d(t) = 2t$ , e in assenza di disturbo. I risultati ottenuti sono mostrati nelle Figg. 2.65–2.68 in termini di errore di inseguimento e di ingresso di controllo al processo. Come previsto, il primo sistema raggiunge la condizione di regime molto più rapidamente del secondo, al prezzo di uno sforzo di controllo più elevato. Si noti che in entrambi i casi è presente un modesto errore a regime permanente, la cui entità è di 0.02 rad, in conformità alle specifiche.

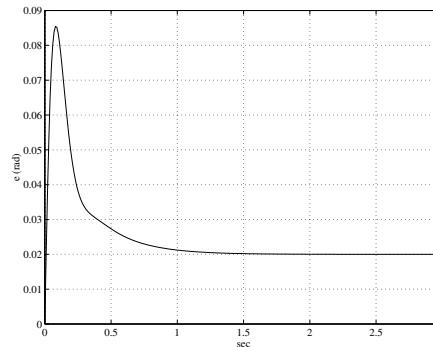


Figura 2.65: Schema con  $G(s)$ : Errore per un riferimento in uscita  $\vartheta_d(t) = 2t$

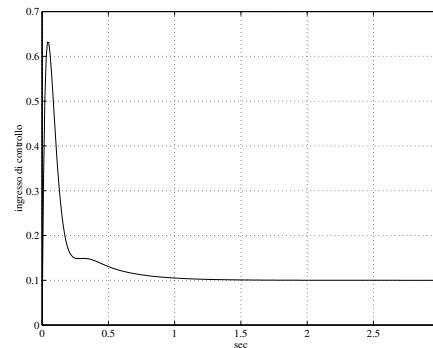


Figura 2.66: Schema con  $G(s)$ : Ingresso di controllo per un riferimento in uscita  $\vartheta_d(t) = 2t$

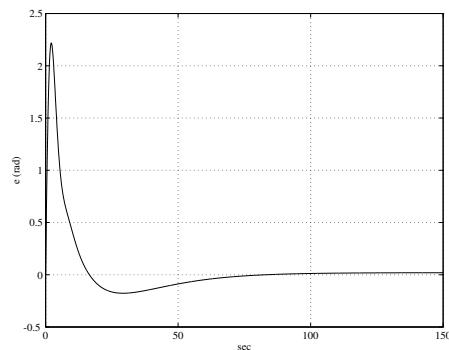


Figura 2.67: Schema con  $G'(s)$ : Errore per un riferimento in uscita  $\vartheta_d(t) = 2t$

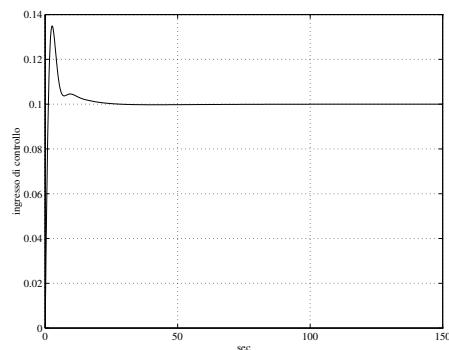


Figura 2.68: Schema con  $G'(s)$ : Ingresso di controllo per un riferimento in uscita  $\vartheta_d(t) = 2t$

### Esercizio 2.8

Si consideri il processo mostrato in Fig. 2.69.

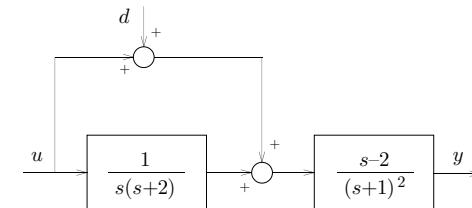


Figura 2.69: Schema a blocchi del processo considerato

Sintetizzare uno schema di controllo in modo tale che:

- il sistema ad anello chiuso sia asintoticamente stabile;
- il sistema sia astatico rispetto al disturbo  $d$ ;
- l'errore a regime permanente sia non superiore a 0.1 per un ingresso a rampa unitaria;
- la pulsazione di attraversamento sia non inferiore a 0.5 rad/sec e il margine di fase sia non inferiore a  $45^\circ$ .

Al termine, per verificare il soddisfacimento della prima specifica, si tracci il luogo delle radici ad anello chiuso al variare del guadagno del controllore sintetizzato.

Conviene innanzitutto ricavare la funzione di trasferimento  $P(s)$  tra l'ingresso  $u$  e l'uscita  $y$  del processo. Si ottiene facilmente

$$P(s) = \left(1 + \frac{1}{s(s+2)}\right) \frac{s-2}{(s+1)^2} = \frac{(s^2+2s+1)(s-2)}{s(s+2)(s+1)^2} = \frac{s-2}{s(s+2)},$$

che risulta a fase non minima a causa della presenza di uno zero a parte reale positiva. La cancellazione del polo doppio in  $-1$  non pregiudica la stabilità interna.

Per soddisfare le specifiche del problema si ricorre a uno schema a retroazione unitaria dall'uscita. In un sistema siffatto, il disturbo  $d$  agisce a valle dell'integratore nel ramo diretto e dunque l'astatismo rispetto ad esso è già assicurato. Inoltre, la presenza di un polo nell'origine nella funzione di trasferimento del processo garantisce già che il sistema ad anello chiuso è di tipo 1, così come implicitamente richiesto dalla specifica **c)**. La funzione compensatrice può essere pertanto ricercata nella forma

$$G(s) = K_G R(s),$$

in cui la rete correttiva  $R(s)$  ha guadagno unitario.

La funzione di trasferimento del processo ha guadagno

$$K_P = \lim_{s \rightarrow 0} sP(s) = -1.$$

Di conseguenza, imponendo la limitazione sull'errore a regime permanente si ha

$$|\hat{e}_1| = \frac{1}{|K_P K_G|} \leq 0.1 \implies |K_G| \geq 10.$$

Per garantire la stabilità del sistema ad anello chiuso, è necessario che il guadagno della funzione di trasferimento ad anello aperto sia positivo (ciò può essere ad esempio verificato tracciando il diagramma di Nyquist di  $P(s)$ ). Si sceglie pertanto come guadagno del controllore  $K_G = -10$ .

I diagrammi di Bode del processo modificato

$$\hat{F}(s) = P(s)K_G = -10P(s)$$

sono riportati in Fig. 2.70. Si noti che i diagrammi dei moduli e delle fasi sono particolarmente semplici perché lo zero e uno dei due poli hanno la medesima pulsazione di rottura  $\omega = 2$  rad/sec. Di conseguenza, i contributi relativi al diagramma dei moduli si elidono, mentre quelli relativi al diagramma delle fasi sono identici (si ricordi che lo zero ha parte reale positiva). Si vede facilmente che

$$\hat{\omega}_t = 10 \text{ rad/sec}, \quad m_\varphi \approx -67^\circ.$$

La presenza di un margine di fase negativo indica che la scelta  $R(s) = 1$  condurrebbe a un sistema instabile ad anello chiuso — infatti, i poli della funzione di trasferimento  $\hat{F}(s)$  hanno tutti parte reale minore o uguale a zero.

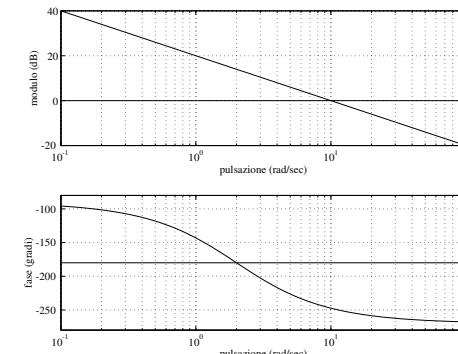


Figura 2.70: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$

In particolare, in corrispondenza al valore minimo ammissibile per la pulsazione di attraversamento  $\omega_t^* = 0.5$  rad/sec si ha

$$|\hat{F}(j0.5)| \approx 26 \text{ dB}, \quad \angle \hat{F}(j0.5) = -118^\circ.$$

Poiché il valore della fase è ampiamente sufficiente, è possibile ridurre la pulsazione di attraversamento allo scopo di recuperare il margine di fase desiderato. Tale obiettivo può essere conseguito mediante una rete attenuatrice.

L'esame dei diagrammi universali mostra che per  $m_i = 16$  si ha un'attenuazione massima di 24 dB alla pulsazione normalizzata  $\omega\tau_i = 100$ . Per localizzare tale attenuazione proprio in corrispondenza a  $\omega_t^*$ , basta impostare che sia  $\omega_t^*\tau_i = 100$ , ovvero  $\tau_i = 200$ . Si osservi che, essendo  $|\hat{F}(j0.5)| \approx 26$  dB, a seguito dell'azione attenuatrice scelta la pulsazione di attraversamento si verrà a collocare lievemente a destra di  $\omega_t^*$ . Il relativo valore della fase dovrebbe comunque essere sufficiente a garantire il margine di fase desiderato, anche in considerazione del fatto che il ritardo di fase introdotto dalla rete attenuatrice alla nuova pulsazione di attraversamento sarà ancora minore degli  $8^\circ$  corrispondenti a  $\omega\tau_i = 100$ .

I diagrammi di Bode della risposta armonica  $F(j\omega) = \hat{F}(j\omega)R(j\omega)$  ad anello aperto sono riportati in Fig. 2.71 e, per uno spettro di frequenze più ampio, in Fig. 2.72. Essi mostrano che si è ottenuta una pulsazione di attraversamento  $\omega_t \approx 0.63$  rad/sec con un margine di fase  $m_\phi \approx 48^\circ$ , entrambi ampiamente nelle specifiche. Il controllore assume dunque la forma definitiva

$$G(s) = -10 \frac{1 + \frac{200}{16}s}{1 + 200s}$$

mentre il sistema di controllo risultante è illustrato in Fig. 2.73.

Per completezza, nella Fig. 2.74 è mostrato il diagramma di Bode del modulo della risposta armonica ad anello chiuso

$$W(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)}.$$

In questo caso è anche interessante notare l'andamento della risposta indicale ad anello chiuso, riportato in Fig. 2.75. In particolare, si osservi nella fase iniziale il tipico comportamento dei sistemi a fase non minima.

L'enunciato del problema richiede in conclusione di verificare la stabilità asintotica del sistema ottenuto attraverso il tracciamento del luogo delle radici. Va tuttavia osservato che tale proprietà è già garantita dalla presenza di un margine di fase positivo e univocamente definito in assenza di poli a parte reale positiva in  $F(s)$ . In Fig. 2.76 viene riportato il luogo negativo delle radici per la funzione di trasferimento ad anello aperto

$$F(s) = G(s)P(s) = K \frac{s + \frac{16}{200}}{s + \frac{1}{200}} \frac{s - 2}{s(s + 2)},$$

al variare di  $K$  (si noti che il procedimento di sintesi sopra adottato ha portato a scegliere  $K = K_G/16 = -10/16$ ). Esso è stato ottenuto con l'ausilio del calcolatore e, a causa dei valori scelti per il polo e per lo zero di  $G(s)$  (rispettivamente,  $p = 1/200$  e  $z = 16/200$ ), il suo andamento in prossimità dell'origine non è facilmente decifrabile. Per maggior chiarezza, in Fig. 2.77 è riportato un luogo delle radici qualitativo per una funzione di trasferimento ad anello aperto della forma

$$K \frac{s + z}{s + p} \frac{s - 2}{s(s + 2)}, \quad \text{con } z > p > 0,$$

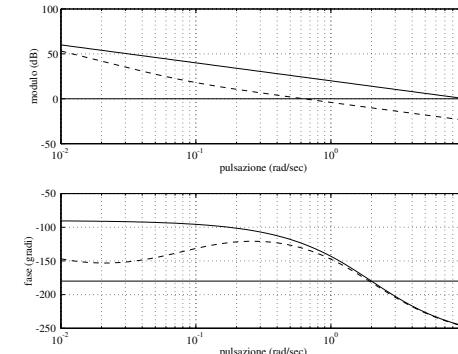


Figura 2.71: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$  (—) e di  $F(j\omega)$  (--)

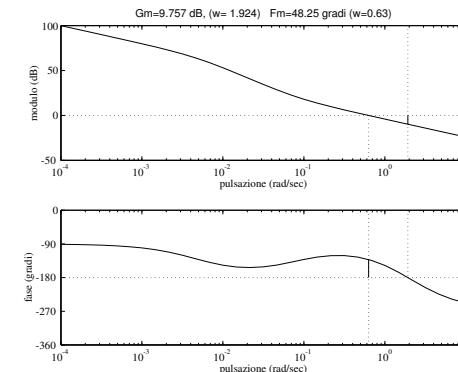


Figura 2.72: Diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$

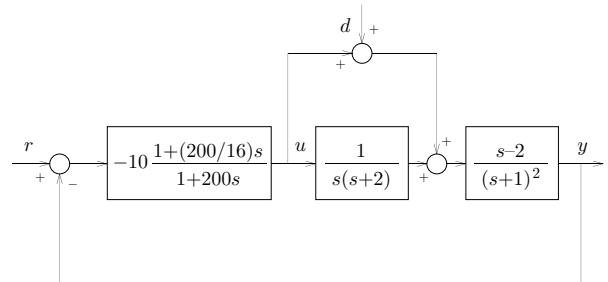


Figura 2.73: Schema a blocchi del sistema di controllo

e per valori negativi di  $K$ . È evidente da tale figura che la stabilità asintotica può ottenersi solo per valori negativi di  $K$  sufficientemente vicini a zero.

Per calcolare il valore di  $K$  per cui il luogo interseca l'asse delle ordinate, si può applicare il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso:

$$\begin{aligned} d_W(s) &= s(s+2)(s+1/200) + K(s-2)(s+16/200) \\ &= s^3 + (K+2.005)s^2 + (0.01 - 1.92K)s - 0.16K. \end{aligned}$$

Costruendo la relativa tabella, è facile constatare che si ha stabilità asintotica ad anello chiuso se e solo se  $-1.97 < K < 0$ . Come previsto, il valore  $K = -10/16$  corrispondente alla sintesi effettuata è all'interno di tale intervallo di ammissibilità.

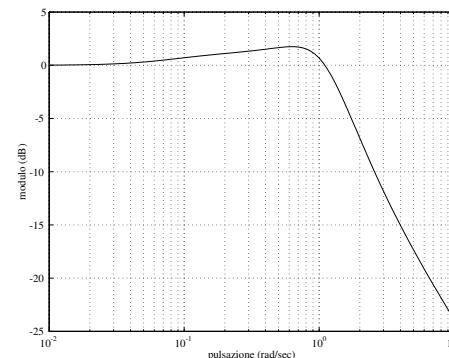
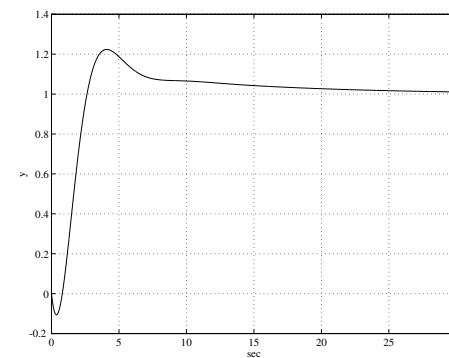
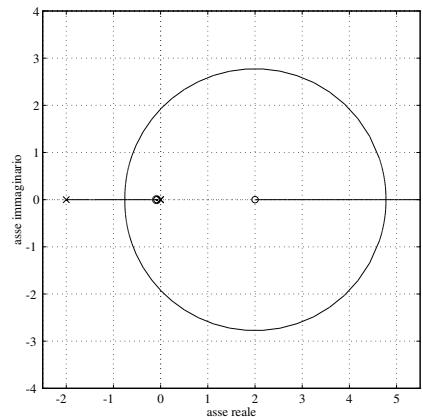
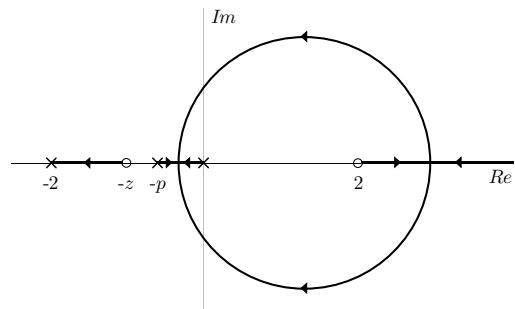
Figura 2.74: Diagramma dei moduli di  $W(j\omega)$ 

Figura 2.75: La risposta indiciale del sistema ad anello chiuso

Figura 2.76: Luogo delle radici esatto, per  $K$  negativoFigura 2.77: Luogo delle radici qualitativo, per  $K$  negativo**Esercizio 2.9**

Sia dato il processo caratterizzato dallo schema a blocchi di Fig. 2.78, in cui  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  hanno le seguenti rappresentazioni con lo spazio di stato:

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = -10x_1 - 8u \\ m = x_1 + u \end{cases} \quad \mathcal{P}_2 : \dot{x}_2 = -x_2 + n.$$

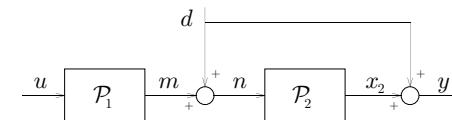


Figura 2.78: Schema a blocchi del processo considerato

Nell'ipotesi che l'uscita  $y$  e il disturbo  $d$  siano misurabili, si progetti una struttura di controllo tale che il sistema complessivo soddisfi le seguenti specifiche:

- a) stabilità asintotica;
- b) risposta nulla a regime in corrispondenza a un disturbo  $d$  a gradino;
- c) errore nullo a regime in corrispondenza a un riferimento  $r$  a gradino;
- d) banda passante per la risposta armonica riferimento/uscita compresa tra 10 e 15 rad/sec;
- e) risposta a regime in valore assoluto non superiore a 0.01 in corrispondenza a un disturbo  $d(t) = \sin \omega t$ , per ogni valore di  $\omega$  nell'intervallo  $[0, 10]$  rad/sec.

---

Si ricavano innanzitutto le funzioni di trasferimento dei due blocchi  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$ . Per il primo, si osservi che esiste un legame diretto tra l'ingresso  $u$  e l'uscita  $m$  del blocco. Si trova allora

$$P_1(s) = \frac{m(s)}{u(s)} = \frac{-8}{s+10} + 1 = \frac{s+2}{s+10}.$$

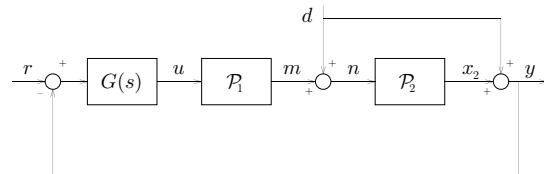


Figura 2.79: Schema di controllo con semplice retroazione dall'uscita

Per quanto riguarda  $P_2$ , si ha

$$P_2(s) = \frac{x_2(s)}{n(s)} = \frac{1}{s+1}.$$

Nell'enunciato del problema si fa esplicitamente riferimento alla possibilità di misurare il disturbo  $d$ , suggerendo così una struttura di controllo in cui — oltre alla consueta retroazione dall'uscita — sia presente un'azione di compensazione diretta del disturbo. Tuttavia, conviene dapprima accettare se l'esercizio non sia risolubile mediante lo schema più semplice mostrato in Fig. 2.79.

Con tale struttura, è sufficiente introdurre un polo nell'origine nella funzione di trasferimento  $G(s)$  del controllore per soddisfare simultaneamente le specifiche **b**) e **c**). Per ottenere una banda passante ad anello chiuso appartenente all'intervallo richiesto dalla specifica **d**), si potrà cercare di imporre una pulsazione di attraversamento ad anello aperto compresa ad esempio tra 7 e 10 rad/sec, mentre la stabilità asintotica sarà assicurata a condizione che si consegua un margine di fase positivo (si osservi che non vi sono poli a parte reale positiva nel processo). Resta da soddisfare la specifica **e**), per la quale è necessario il calcolo della funzione di trasferimento del disturbo sull'uscita.

Dalla Fig. 2.79 si ottiene

$$W_d(s) = \frac{y(s)}{d(s)} = \frac{1}{1+F(s)} + \frac{P_2(s)}{1+F(s)} = \frac{1+P_2(s)}{1+F(s)},$$

dove si è posto  $F(s) = G(s)P_1(s)P_2(s)$  e si è usato il principio di sovrapposizione.

posizione degli effetti. La condizione di attenuazione richiesta è quindi

$$|W_d(j\omega)| = \left| \frac{1+P_2(j\omega)}{1+F(j\omega)} \right| \leq 0.01, \quad \text{per } \omega \in [0, 10] \text{ rad/sec},$$

ovvero

$$|1+F(j\omega)| \geq 100 |1+P_2(j\omega)|, \quad \text{per } \omega \in [0, 10] \text{ rad/sec}.$$

Essendo

$$1+|F(j\omega)| \geq |1+F(j\omega)|$$

e avendosi d'altra parte, com'è facile verificare,

$$|1+P_2(j\omega)| = \left| \frac{j\omega+2}{j\omega+1} \right| \geq 1,$$

condizione necessaria perché la suddetta condizione di attenuazione possa essere soddisfatta è che si abbia

$$|F(j\omega)| \geq 99 \approx 40 \text{ dB}, \quad \text{per } \omega \in [0, 10] \text{ rad/sec}.$$

Tale condizione è ovviamente incompatibile con il conseguimento di una pulsazione di attraversamento compresa tra 7 e 10 rad/sec. Pertanto, si conclude che con lo schema di controllo di Fig. 2.79 non è possibile soddisfare simultaneamente le specifiche **d**) ed **e**).

Come già accennato, il fatto che il disturbo  $d$  sia misurabile rende possibile l'adozione di una struttura di controllo più complessa, illustrata in Fig. 2.80. Com'è noto, tale struttura (detta anche *a due gradi di libertà*) consente di assegnare in modo indipendente il comportamento riferimento/uscita e quello disturbo/uscita mediante le tecniche proprie della *sintesi diretta*. Nel seguito si presenta una soluzione che utilizza appunto tale approccio.

Le specifiche **a**), **c**) e **d**) sono tutte soddisfatte imponendo una funzione di trasferimento riferimento/uscita ad anello chiuso pari a

$$W^*(s) = \frac{1}{1+\tau s},$$

con  $1/\tau \in [10, 15]$  rad/sec. Infatti, il sistema di controllo così ottenuto è di tipo 1 e ha banda passante a  $-3$  dB pari proprio a  $1/\tau$ . Inoltre, la sua stabilità asintotica è garantita poiché:

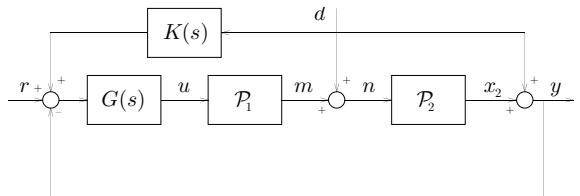


Figura 2.80: Schema di controllo con retroazione dall'uscita e compensazione diretta del disturbo

- l'unico polo di  $W^*(s)$  ha parte reale negativa;
- gli altri (tre) autovalori del sistema ad anello chiuso sono collocati in corrispondenza ai poli e agli zeri di  $P_1(s)$  e  $P_2(s)$  (si ricordi infatti che, nella sintesi diretta, il ruolo del controllore è proprio quello di cancellare la dinamica del processo per sostituirla con un'opportuna funzione di trasferimento ad anello aperto). Poiché questi hanno tutti parte reale negativa, i corrispondenti autovalori non pregiudicano la stabilità interna.

Infine, il controllore  $G(s)$  che impone la  $W^*(s)$  sarà certamente realizzabile, essendo verificata la nota condizione che l'eccesso poli/zeri di quest'ultima sia almeno pari a quello di  $P_1(s)P_2(s)$ .

In particolare, essendo

$$W(s) = \frac{G(s)P_1(s)P_2(s)}{1 + G(s)P_1(s)P_2(s)},$$

si ottiene

$$G(s) = \frac{1}{P_1(s)P_2(s)} \frac{W(s)}{1 - W(s)}.$$

Quindi, per assegnare la funzione di trasferimento riferimento/uscita desiderata basta porre

$$G(s) = \frac{1}{P_1(s)P_2(s)} \frac{W^*(s)}{1 - W^*(s)} = \frac{(s+1)(s+10)}{\tau s(s+2)},$$

che, come previsto, è propria e presenta un polo nell'origine. Si noti che con questa scelta la funzione di trasferimento del ramo diretto diviene

$$F(s) = G(s)P_1(s)P_2(s) = \frac{1}{\tau s},$$

nella quale si sono verificate le tre cancellazioni polo/zero attese.

Venendo alle specifiche **b**) ed **e**), si osservi innanzitutto che — a differenza di quanto accadeva per lo schema di Fig. 2.79 — il polo nell'origine in  $G(s)$  non implica l'astatismo rispetto a  $d$ , giacché nello schema di Fig. 2.80 vi è un punto di accesso del disturbo a monte di  $G(s)$ . D'altra parte, con tale struttura di controllo è possibile imporre un arbitrario comportamento disturbo/uscita scegliendo opportunamente la funzione di trasferimento  $K(s)$  del ramo di compensazione diretta — purché naturalmente quest'ultima risulti realizzabile.

Una funzione di trasferimento disturbo/uscita  $W_d^*(s)$  che garantisce il soddisfacimento delle specifiche **b**) ed **e**), e che dà luogo a una  $K(s)$  realizzabile, è la seguente

$$W_d^*(s) = \frac{s}{s+1000}.$$

Infatti, tale funzione ha le seguenti caratteristiche:

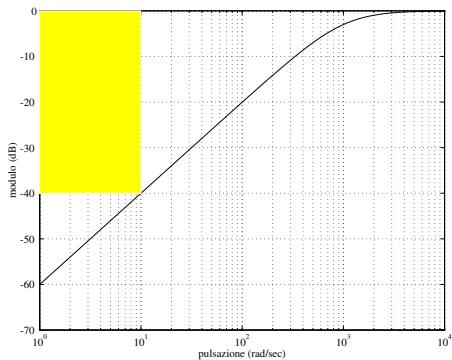
- la presenza di uno zero nell'origine garantisce la reiezione di un disturbo  $d$  costante;
- il modulo di  $W_d^*(j\omega)$  è minore di 0.01 (cioè  $-40$  dB) nell'intervallo di pulsazioni tra 0 e 10 rad/sec, come confermato dal diagramma di Bode di Fig. 2.81;
- è verificata la ben nota condizione

$$\lim_{s \rightarrow \infty} W_d^*(s) = 1,$$

che garantisce la realizzabilità di  $K(s)$  nel caso in cui la funzione di trasferimento  $F(s)$  del ramo diretto abbia eccesso poli/zeri unitario.

Per la struttura di controllo di Fig. 2.80, la funzione di trasferimento disturbo/uscita assume l'espressione

$$W_d(s) = \frac{1 + P_2(s) + K(s)F(s)}{1 + F(s)}.$$

Figura 2.81: Diagramma di Bode dei moduli di  $W_d^*(j\omega)$ 

Di conseguenza, per assegnare il comportamento disturbo/uscita caratterizzato da  $W_d^*(s)$  è sufficiente porre

$$K(s) = \frac{W_d^*(s)(1 + F(s)) - 1 - P_2(s)}{F(s)}.$$

Sostituendo in tale equazione le espressioni di  $W_d^*(s)$ ,  $F(s)$  e  $P_2(s)$  si trova facilmente

$$K(s) = \frac{s((1 + \tau - 1002\tau)s + 1 - 2000\tau)}{(s + 1)(s + 1000)},$$

che è propria e quindi realizzabile. Come si poteva prevedere dall'espressione generale, i poli di  $K(s)$  comprendono il polo di  $W_d^*(s)$  e quello di  $P_2(s)$ . Si noti inoltre la presenza di uno zero nell'origine, necessario a garantire che, in corrispondenza a un disturbo  $d$  costante, l'uscita del blocco  $K(s)$  sia nulla a regime.

L'ultima verifica da effettuare riguarda l'esistenza del regime permanente rispetto al disturbo  $d$  per il sistema di controllo ottenuto. Sulla base del principio di sovrapposizione degli effetti, basta prendere in considerazione il segnale di disturbo riportato (attraverso  $K(s)$ ) sul sommatore d'ingresso,

la cui funzione di trasferimento sull'uscita  $y$  vale  $K(s)W^*(s)$ . Poiché sia  $K(s)$  che  $W^*(s)$  hanno poli a parte reale negativa, è garantito l'instaurarsi di una condizione di regime in corrispondenza a disturbi  $d$  canonici (in particolare, a gradino) e sinusoidali.

A scopo illustrativo, si sono eseguite due simulazioni del sistema di controllo progettato, nel quale si è posto  $1/\tau = 10$  rad/sec. Con tale scelta, le funzioni di trasferimento  $G(s)$  e  $K(s)$  assumono la forma

$$G(s) = \frac{(s + 1)(s + 10)}{0.1s(s + 2)} = 10 + \frac{9s + 10}{0.1s(s + 2)}$$

$$\text{e} \quad K(s) = \frac{s(-99.1s - 199)}{(s + 1)(s + 1000)} = -99.1 + \frac{99000.1s + 99100}{(s + 1)(s + 1000)},$$

in cui si è messo in evidenza il legame diretto ingresso/uscita presente in ciascuno dei blocchi corrispondenti. I diagrammi di Bode di  $|G(j\omega)|$  e  $|K(j\omega)|$  sono riportati rispettivamente in Fig. 2.82 e in Fig. 2.83.

Nella prima simulazione si è posto

$$r(t) = \delta_{-1}(t) \quad d(t) = \delta_{-1}(t - 1).$$

La Fig. 2.84 mostra la risposta indiciale ottenuta. Si noti il picco istantaneo del segnale di uscita per  $t = 1$  sec, in corrispondenza alla comparsa del disturbo, nonché la reiezione completa a regime del disturbo stesso. La presenza del picco si spiega facilmente osservando che la funzione di trasferimento del disturbo sull'uscita

$$W_d^*(s) = \frac{s}{s + 1000} = 1 - \frac{1000}{s + 1000}$$

implica per  $t = 1$  sec un legame istantaneo unitario tra i due segnali. In Fig. 2.85 viene riportato l'andamento dell'ingresso di controllo  $u$  durante la simulazione. Anche tale segnale presenta un picco in corrispondenza alla comparsa del disturbo. L'entità notevole del picco, meglio evidenziata dalla Fig. 2.86, è sostanzialmente legata alla presenza di due legami diretti in cascata tra il segnale di disturbo che entra nel blocco  $K(s)$  e l'ingresso di controllo  $u$ , come indicato dal valore massimo di  $u$  (circa  $990 \approx -99.1 \cdot 10$ ).

È necessario sottolineare che, in un sistema di controllo reale, un profilo dell'ingresso di controllo come quello di Fig. 2.86 sarebbe difficilmente realizzabile, per esempio a causa dell'inevitabile insorgere di fenomeni di

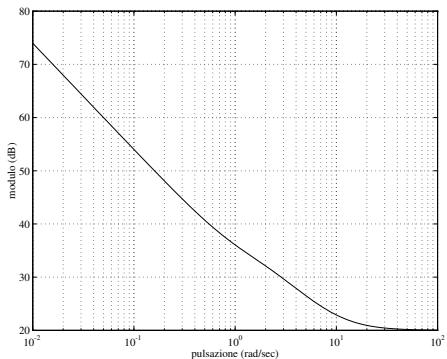
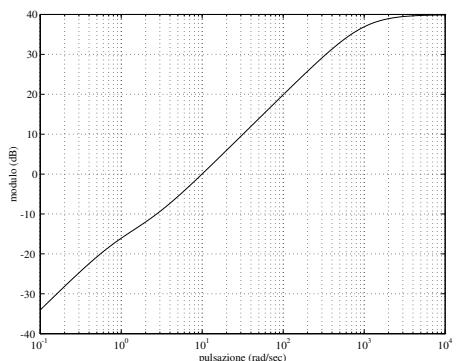
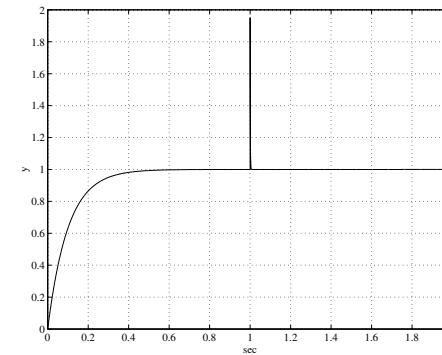
Figura 2.82: Diagramma di Bode dei moduli di  $G(j\omega)$ Figura 2.83: Diagramma di Bode dei moduli di  $K(j\omega)$ 

Figura 2.84: Prima simulazione: risposta indiciale in presenza di un disturbo a gradino

saturazione negli attuatori del processo. Valutazioni di questo tipo, sempre opportune nel progetto di un sistema di controllo, divengono essenziali quando si adottano le tecniche della sintesi diretta; infatti, il tentativo di cancellare la dinamica propria del processo per imporre un ben determinato comportamento riferimento/uscita (o disturbo/uscita) può condurre alla scelta di dispositivi di controllo di difficile implementazione o comunque incompatibili con i limiti fisici inerenti al processo da controllare.

Nella seconda simulazione, il segnale di riferimento e quello di disturbo sono stati scelti come

$$r(t) = \delta_{-1}(t) \quad d(t) = \sin 10t.$$

La risposta indiciale del sistema, illustrata in Fig. 2.87, mostra a regime una lieve oscillazione persistente sovrapposta al valore nominale dell'uscita. Si noti che l'ampiezza di questa oscillazione vale 0.01, così come richiesto del resto dalla specifica e). Come appare dalla Fig. 2.88, tale attenuazione del disturbo è ottenuta al prezzo di un'azione di controllo piuttosto energica.

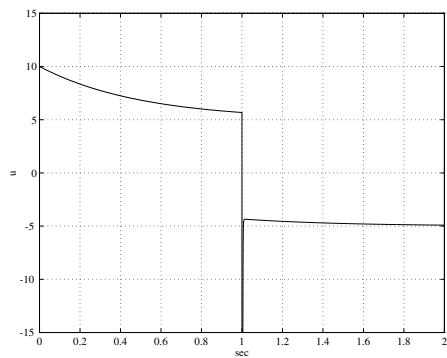
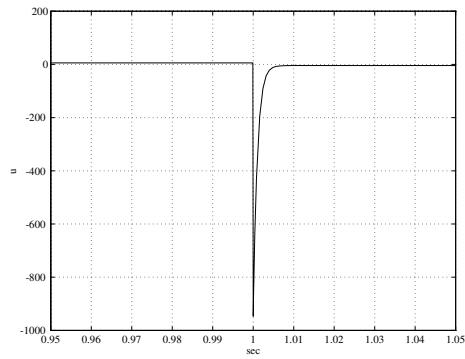
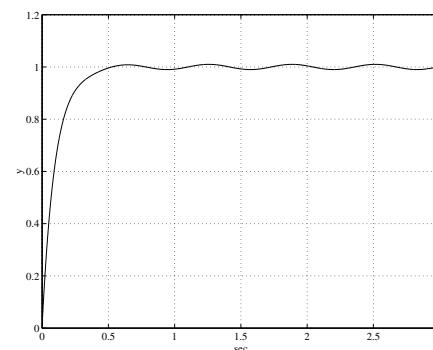
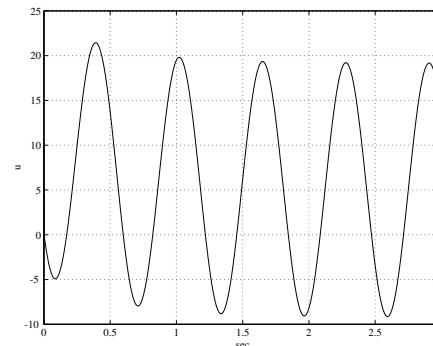
Figura 2.85: Prima simulazione: andamento dell'ingresso di controllo  $u$ Figura 2.86: Prima simulazione: particolare dell'andamento dell'ingresso di controllo  $u$ 

Figura 2.87: Seconda simulazione: risposta indicale in presenza di un disturbo sinusoidale

Figura 2.88: Seconda simulazione: andamento dell'ingresso di controllo  $u$

**Esercizio 2.10**

Si consideri il miscelatore automatico schematizzato in Fig. 2.89. Nella valvola confluiscono i due liquidi A (solvente) e B (soluto), che devono essere miscelati in proporzione appropriata. Denotando con  $\vartheta$  l'angolo di apertura della valvola e con  $q_v$  il rapporto tra le portate dei due liquidi in uscita dalla stessa, il legame  $\vartheta$  e  $q_v$  è istantaneo e rappresentato da un fattore costante  $K = 10 \text{ rad}^{-1}$ . La relazione tra  $q_v$  e la concentrazione  $\varrho_v$  della soluzione in uscita dalla valvola è invece di tipo dinamico, e può essere ben approssimata mediante una funzione di trasferimento avente guadagno unitario e un polo con costante di tempo  $\tau = 0.1 \text{ sec}$ . A valle della valvola, il fluido miscelato scorre a una velocità costante  $v$ . A una distanza  $\ell$  dalla valvola è posto un dispositivo di misura della concentrazione.

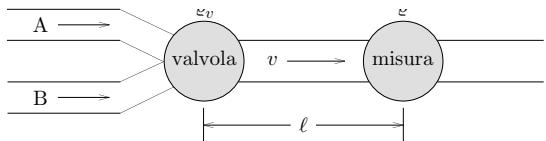


Figura 2.89: Schema di un miscelatore automatico

- Si individui la funzione di trasferimento tra l'angolo di apertura  $\vartheta$  della valvola e la concentrazione  $\varrho$  rilevata dal dispositivo di misura.
- Posto  $\ell = 0.1\pi \text{ m}$  e  $v = 4 \text{ m/sec}$ , si determini uno schema di controllo a retroazione che regoli l'apertura della valvola in modo tale che a regime permanente la concentrazione  $\varrho$  sia uguale a un valore costante di riferimento  $\varrho_r$ .
- Di quanto può essere allontanato il dispositivo di misura senza pregiudicare la stabilità del sistema di controllo individuato al punto b)?
- Di quanto può essere variata la costante  $K$  senza pregiudicare la stabilità del sistema di controllo individuato al punto b)?

Infine, si modifichi lo schema di controllo in modo tale da soddisfare le seguenti specifiche:

- errore a regime permanente non superiore a 0.01 per un riferimento a rampa unitaria;
- margine di fase non inferiore a  $30^\circ$ .

Essendo

$$q_v = K\vartheta$$

e

$$\frac{\varrho_v(s)}{q_v(s)} = \frac{1}{1 + \tau s},$$

la funzione di trasferimento tra l'angolo di apertura della valvola e la concentrazione in uscita dalla valvola è semplicemente

$$\frac{\varrho_v(s)}{\vartheta(s)} = P_1(s) = \frac{K}{1 + \tau s}.$$

Poiché il dispositivo di misura è posto a una distanza  $\ell$  dalla valvola, esso fornisce una misura della concentrazione della soluzione in tale punto. La misura  $\varrho(t)$  non corrisponde quindi istantaneamente al valore  $\varrho_v(t)$  della concentrazione in uscita dalla valvola, a causa del ritardo legato al tempo di trasporto del liquido dalla valvola al misuratore. Nell'ipotesi di velocità costante, tale ritardo è esso stesso costante e vale

$$T = \frac{\ell}{v} = 0.025 \pi \text{ sec.}$$

Si ha quindi il seguente legame temporale tra la concentrazione in uscita dalla valvola  $\varrho_v(t)$  e il valore misurato  $\varrho(t)$ :

$$\varrho(t) = \varrho_v(t - T).$$

Per individuare la funzione di trasferimento tra  $\varrho_v(s)$  e  $\varrho(s)$ , si ricordi la proprietà della trasformata di Laplace nota sotto il nome di teorema della traslazione nel tempo:

$$\mathcal{L}[f(t - T)] = e^{-Ts} F(s), \quad \text{con } F(s) = \mathcal{L}[f(t)].$$

Si ha pertanto

$$\mathcal{L}[\varrho(t)] = \mathcal{L}[\varrho_v(t - T)] = e^{-Ts} \varrho_v(s),$$

e il legame tra  $\vartheta(s)$  e  $\varrho(s)$  è dato da

$$\varrho(s) = e^{-Ts} \varrho_v(s) = e^{-Ts} P_1(s) \vartheta(s) = e^{-Ts} \frac{K}{1 + \tau s} \vartheta(s).$$

La funzione di trasferimento del processo in esame assume quindi l'espressione

$$P(s) = \frac{\varrho(s)}{\vartheta(s)} = e^{-Ts} P_1(s) = \frac{K e^{-Ts}}{1 + \tau s},$$

caratterizzata dalla presenza di una funzione trascendente al numeratore.

Venendo al punto b), lo schema di controllo a retroazione avrà la consueta struttura riportata in Fig. 2.90. Per ottenere errore a regime nullo in corrispondenza a un riferimento costante, è sufficiente inserire nel compensatore  $G(s)$  un polo nell'origine, giacché la presenza di un'azione integratrice sul ramo diretto garantisce che il sistema a retroazione sia di tipo 1 anche in presenza di un ritardo finito. Infatti, essendo

$$W(s) = \frac{\varrho(s)}{\varrho_r(s)} = \frac{G(s) P_1(s) e^{-Ts}}{1 + G(s) P_1(s) e^{-Ts}},$$

la presenza di un polo nell'origine in  $G(s)$  implica che

$$W(0) = 1,$$

poiché il termine  $e^{-Ts}$  non introduce né zeri né poli nell'origine. D'altra parte, questo risultato appare ovvio se si considera che la presenza di un ritardo finito non altera il valore dell'uscita a regime — purché naturalmente tale ritardo non pregiudichi la stabilità asintotica ad anello chiuso.

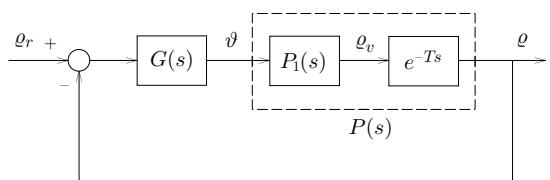


Figura 2.90: Struttura del sistema di controllo

Sulla base delle precedenti considerazioni, la funzione di trasferimento del compensatore  $G(s)$  va ricercata nella forma

$$G(s) = K_G \frac{R(s)}{s},$$

dove la funzione correttrice  $R(s)$  ha guadagno unitario. In particolare, conviene dapprima indagare se si può garantire la stabilità ad anello chiuso con un semplice guadagno, cioè ponendo  $R(s) = 1$ . Questo può essere accertato mediante il criterio di Nyquist, che si applica anche a sistemi che comprendono ritardi finiti.

Come passo preliminare è necessario procedere al tracciamento dei diagrammi di Bode della funzione di trasferimento del processo modificato

$$\hat{F}(s) = \frac{P(s)}{s} = \frac{10 e^{-Ts}}{s(1 + \tau s)}.$$

A tale scopo, si osservi che il fattore  $e^{-j\omega T}$  ha modulo sempre unitario, mentre la fase  $-\omega T$  decresce linearmente con la pulsazione, così come mostrato dalla curva a tratto pieno in Fig. 2.91. Si noti l'andamento esponenziale del diagramma, dovuto all'adozione di una scala logaritmica per le ascisse.

In molte situazioni — ad esempio, nella determinazione della risposta indiciale — è utile poter disporre di un'approssimazione razionale della funzione trascendente  $e^{-Ts}$ . Il metodo più diffuso consiste nel ricorrere alle *approssimanti di Padé*. Ad esempio, le funzioni razionali

$$\begin{aligned} A_1(s) &= \frac{1 - T/2 s}{1 + T/2 s} \\ A_2(s) &= \frac{1 - T/2 s + T^2/12 s^2}{1 + T/2 s + T^2/12 s^2} \end{aligned}$$

costituiscono rispettivamente l'approssimante del primo e del secondo ordine di  $e^{-Ts}$ .

Per verificare l'accuratezza delle approssimanti di Padé, in Fig. 2.91 sono anche riportati i diagrammi delle fasi di  $A_1(j\omega)$  e  $A_2(j\omega)$ . Si noti che entrambe le funzioni approssimanti hanno poli a parte reale negativa e zeri a parte reale positiva disposti simmetricamente rispetto all'asse immaginario. Tale particolare configurazione dà luogo a un valore del modulo costantemente pari a uno, nonché a un andamento della fase che approssima in modo abbastanza soddisfacente l'andamento reale (fino a 10 rad/sec per  $A_1(j\omega)$  e fino a 30 rad/sec per  $A_2(j\omega)$ ).

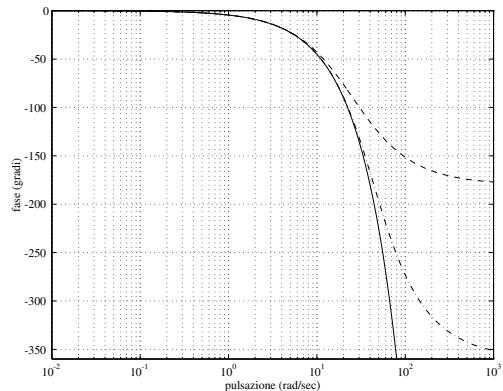


Figura 2.91: Diagramma delle fasi del termine di ritardo  $e^{-j\omega T}$  (—) e delle approssimanti di Padé  $A_1(j\omega)$  (--) e  $A_2(j\omega)$  (-·)

Tornando al tracciamento dei diagrammi di Bode di  $\hat{F}(s)$ . Per mettere in evidenza l'influenza del ritardo finito sulla risposta armonica ad anello aperto, vengono riportati anche i diagrammi di Bode di  $P_1(s)/s$ . La pulsazione di attraversamento vale  $\omega_t = 7.86$  rad/sec mentre il margine di fase è all'incirca di  $17^\circ$ . Poiché il sistema ad anello aperto non ha poli a parte reale positiva, la presenza di un margine di fase positivo garantisce che il sistema ad anello chiuso sia stabile asintoticamente. Ciò è confermato dal diagramma di Nyquist qualitativo (Fig. 2.93) e da quello tracciato al calcolatore (Fig. 2.94).

Si può dunque concludere che un compensatore in grado di soddisfare la specifica **b**) è costituito semplicemente da

$$G(s) = \frac{1}{s}.$$

Infatti, la stabilità asintotica garantisce l'esistenza del regime permanente, e d'altra parte il polo nell'origine di  $G(s)$  assicura la riproduzione asintotica

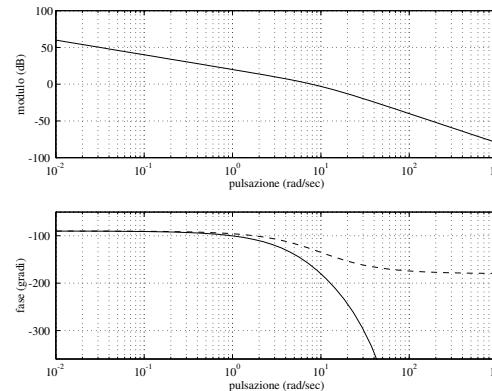


Figura 2.92: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(s)$  (—) e di  $P_1(s)/s$  (--)

di un riferimento costante.

Per quanto riguarda il quesito **c**), si osservi innanzitutto che spostare il dispositivo di misura equivale a modificare  $\ell$ , e dunque a variare il ritardo  $T$  introdotto. Per quanto detto in precedenza a proposito della stabilità, la massima distanza  $\ell_{\max}$  ammessa si può dedurre a partire dal valore di  $T = T_{\max}$  per cui il sistema ha margine di fase nullo. Essendo

$$\angle \hat{F}(j\omega_t) = \angle G(j\omega_t) + \angle P_1(j\omega_t) + \angle e^{-j\omega T},$$

il margine di fase sarà nullo quando

$$-90^\circ + \angle P_1(j\omega_t) - \frac{\omega_t \cdot 180}{\pi} T_{\max} = -180^\circ.$$

Si noti che si è reso necessario convertire la pulsazione di attraversamento  $\omega_t$  in gradi/sec. Poiché si ha  $\omega_t = 7.86$  rad/sec indipendentemente dal valore del ritardo, si ottiene

$$T_{\max} = \frac{90^\circ - \angle(1 + j0.786)}{7.86} \frac{\pi}{180} = 0.11 \text{ sec},$$

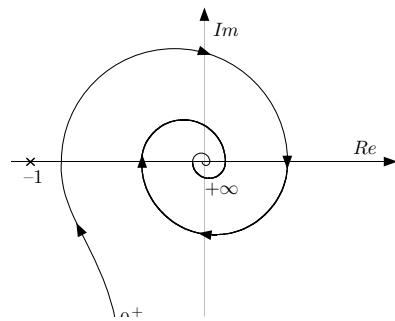


Figura 2.93: Andamento qualitativo del diagramma di Nyquist di  $\hat{F}(s)$  per pulsazioni positive

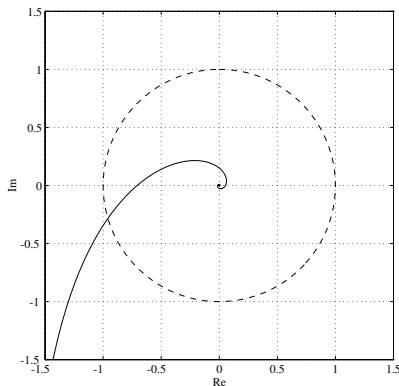


Figura 2.94: Diagramma di Nyquist di  $\hat{F}(s)$  per pulsazioni positive

da cui

$$\ell_{\max} = v T_{\max} = 0.44 \text{ m.}$$

Pertanto, se il dispositivo di misura della concentrazione viene posto a una distanza maggiore di 0.44 m dalla valvola, il sistema di controllo di Fig. 2.90, in cui  $G(s) = 1/s$ , diviene instabile. Se  $\ell = \ell_{\max}$ , il sistema è semplicemente stabile.

Il massimo ritardo ammesso  $T_{\max}$  può anche essere espresso come

$$T_{\max} = \frac{\angle G(j\omega_t)P_1(j\omega_t) + 180^\circ}{\omega_t} \frac{\pi}{180} = \frac{\bar{m}_\varphi}{\omega_t} \frac{\pi}{180},$$

avendo indicato con  $\bar{m}_\varphi$  il valore del margine di fase relativo alla funzione di trasferimento  $G(s)P_1(s)$ . Tale espressione consente di comprendere come il massimo ritardo ammesso aumenti al crescere del margine di fase del sistema ‘senza ritardo’, e diminuisca all'aumentare della pulsazione di attraversamento  $\omega_t$ .

Al punto d) viene richiesto in sostanza di determinare il massimo valore di  $K$  compatibile con la stabilità del sistema di controllo progettato. Infatti, l'esame del diagramma di Nyquist delle Figg. 2.93-2.94 mostra immediatamente che solo l'aumento di  $K$  oltre un certo valore critico  $K_c$  può condurre il sistema all'instabilità. Per individuare il valore di  $K_c$  conviene procedere come segue.

Data la risposta armonica ad anello aperto

$$F(j\omega) = \hat{F}(j\omega) = G(j\omega)P(j\omega) = \frac{Ke^{-j\omega T}}{j\omega(1+j\omega\tau)},$$

il relativo diagramma di Nyquist di Fig. 2.94 attraversa l'asse reale in corrispondenza ai valori di  $\omega$  per cui si annulla la parte immaginaria di  $F(j\omega)$ . Usando la ben nota formula di Eulero

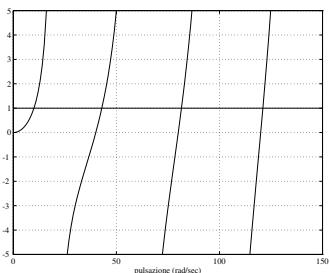
$$e^{-j\omega T} = \cos \omega T - j \sin \omega T,$$

si ottiene facilmente

$$\operatorname{Im}(F(j\omega)) = \frac{-K(\cos \omega T - \omega \tau \sin \omega T)}{\omega(1 + \omega^2 \tau^2)},$$

la quale si annulla se

$$\omega \tau \tan \omega T = 1.$$

Figura 2.95: Andamento della funzione  $\beta(\omega) = \omega\tau \tan(\omega T)$ 

Sostituendo in questa equazione i valori  $\tau = 0.1$  sec e  $T = 0.025\pi$  sec, è immediato constatare che  $\bar{\omega} = 10$  rad/sec ne costituisce una soluzione. Inoltre, l'andamento della funzione  $\beta(\omega) = \omega\tau \tan(\omega T)$ , riportato in Fig. 2.95, mostra che  $\bar{\omega} = 10$  rad/sec è in effetti la più piccola pulsazione per cui il diagramma di Nyquist attraversa l'asse reale.

Poiché

$$\operatorname{Re}(F(j\bar{\omega})) = -K \frac{\sqrt{2}}{20},$$

si può concludere che per  $K < 20/\sqrt{2}$  l'attraversamento del semiasse reale negativo da parte del diagramma di Nyquist avviene a destra del punto  $(-1, 0)$ , e di conseguenza il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente. Il valore critico di  $K$  per il quale il sistema è al limite di stabilità è perciò  $K_c = 20/\sqrt{2}$ .

Venendo all'ultima parte dell'esercizio, la nuova funzione compensatrice avrà la forma

$$G'(s) = K'_G \frac{R'(s)}{s},$$

in cui — a differenza di quanto visto per il primo sistema di controllo — il valore del guadagno  $K'_G$  dovrà essere tale da garantire il soddisfacimento della specifica **e**). Si ha

$$|\tilde{e}_1| = \frac{1}{|KK'_G|} \leq 0.01 \quad \Rightarrow \quad K'_G \geq 10.$$

Si scelga ad esempio  $K'_G = 10$ .

Essendo il guadagno complessivo in catena diretta pari a

$$K \cdot K'_G = 100 > K_c,$$

l'analisi effettuata con riferimento al punto **d**) indica che in assenza di un'adeguata azione correttrice il sistema ad anello chiuso risulterebbe instabile. Ciò è confermato dai diagrammi di Bode del processo modificato

$$\hat{F}'(s) = \frac{K'_G}{s} P(s) = \frac{10}{s} \frac{10 e^{-Ts}}{1 + 0.1s}$$

riportati in Fig. 2.96. In particolare, in corrispondenza all'attuale pulsazione di attraversamento  $\omega'_t = 30$  rad/sec la fase vale all'incirca  $-300^\circ$ .

Dato che non è assegnata alcuna specifica sulla banda passante del sistema, per conseguire il margine di fase richiesto conviene senz'altro spostare la pulsazione di attraversamento decisamente verso sinistra, intervenendo poi con un'adeguata rete anticipatrice. Infatti, per ottenere un margine di fase positivo in corrispondenza a  $\omega'_t$  si dovrebbe utilizzare un numero elevato di reti anticipatrici, con una considerevole complicazione della procedura di sintesi. Un ulteriore elemento di difficoltà è la notevole pendenza del diagramma delle fasi nella zona prossima a  $\omega'_t$ , poiché in tale situazione una piccola variazione della pulsazione di attraversamento può provocare una notevole variazione del margine di fase.

Ad esempio, si può procedere come segue. Essendo

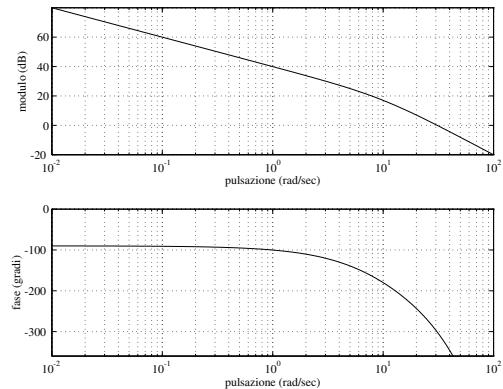
$$|\hat{F}'(j10)| \approx 17 \text{ dB} \quad \angle \hat{F}'(j10) \approx -180^\circ,$$

si cerca di imporre una pulsazione di attraversamento  $\omega_t^* = 10$  rad/sec. A tale scopo, si usa innanzitutto una rete attenuatrice con  $m_i = 10$ , che fornisce un'attenuazione di circa 20 dB in corrispondenza alla pulsazione normalizzata  $\omega_i = 90$ . La rete che assicura tale attenuazione in  $\omega_t^*$  è

$$R_i(s) = \frac{1 + 0.9s}{1 + 9s}.$$

Dopo l'aggiunta di  $R_i(s)$  si ha

$$|R_i(j10)\hat{F}'(j10)| \approx -3 \text{ dB} \quad \angle R_i(j10)\hat{F}'(j10) \approx -186^\circ.$$

Figura 2.96: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}(j\omega)$ 

A questo punto, si sceglie una rete anticipatrice con  $m_a = 12$  e pulsazione normalizzata  $\omega\tau = 1$ . Si ottiene

$$R_a(s) = \frac{1 + 0.1 s}{1 + \frac{0.1}{12} s}.$$

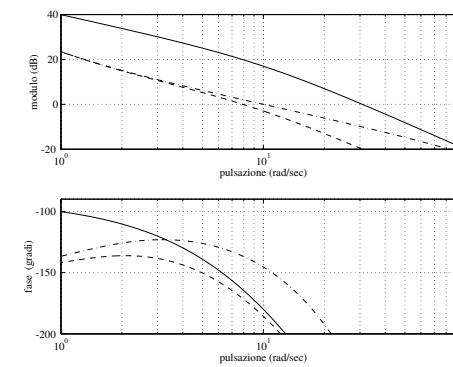
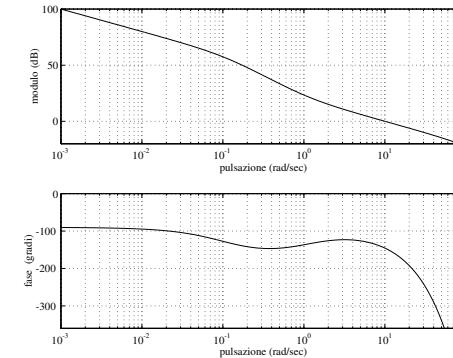
Il compensatore risultante dalla procedura di sintesi è quindi pari a

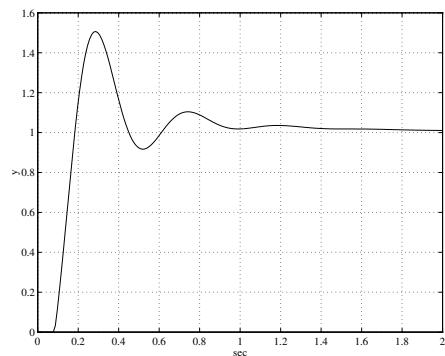
$$G'(s) = \frac{10}{s} \frac{1 + 0.9 s}{1 + 9 s} \frac{1 + 0.1 s}{1 + \frac{0.1}{12} s},$$

mentre la funzione di trasferimento compensata ad anello aperto diviene

$$F'(s) = G'(s)P(s) = R_i(s)R_a(s)\hat{F}'(s).$$

I diagrammi di Bode relativi alle varie fasi della sintesi sono mostrati in Fig. 2.97, mentre la Fig. 2.98 illustra la risposta armonica ad anello aperto  $F'(j\omega)$  in un campo di frequenze più ampio. La pulsazione di attraversamento ottenuta è proprio  $\omega_c^* = 10$  rad/sec e il margine di fase corrispondente è superiore ai  $30^\circ$ .

Figura 2.97: Diagrammi di Bode di  $\hat{F}'(j\omega)$  (—), di  $\hat{F}'(j\omega)R_i(j\omega)$  (--) e di  $\hat{F}'(j\omega)R_i(j\omega)R_a(j\omega)$  (-·)Figura 2.98: Diagrammi di Bode di  $F'(j\omega)$

Figura 2.99: Risposta indiciale con  $G(s) = G'(s)$ 

In conclusione, si riporta in Fig. 2.99 la risposta indiciale del sistema di controllo di Fig. 2.90 con  $G(s) = G'(s)$ . Si noti il ritardo (pari ovviamente a  $T$ ) con cui il sistema risponde all'applicazione del riferimento a gradino.

## 2.2 Esercizi proposti

### Esercizio 2.11

Sia dato il sistema di controllo a retroazione il cui schema è indicato in Fig. 2.100.

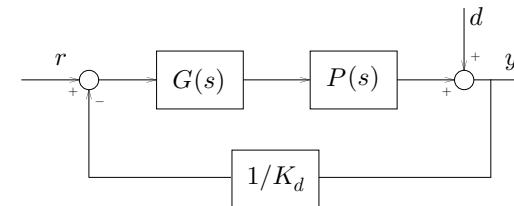


Figura 2.100: Sistema di controllo

La funzione di trasferimento del processo è

$$P(s) = \frac{1}{s^3 + 0.5s^2 + s},$$

e inoltre  $K_d = 0.1$ . Si progetti la funzione di trasferimento  $G(s)$  del compensatore in modo tale da soddisfare le seguenti specifiche:

- a) errore nullo a regime permanente per ingressi costanti;
- b) errore a regime permanente non superiore a 0.05 per un ingresso a rampa unitaria;
- c) banda passante compresa nell'intervallo  $[0.5, 1]$  rad/sec;
- d) modulo alla risonanza non superiore a 3.5 dB;
- e) risposta a disturbi sinusoidali di ampiezza unitaria non superiore a 0.1 per valori di pulsazione compresi nella banda  $[0, 0.1]$  rad/sec.

**Esercizio 2.12**

Sia dato il sistema di controllo a retroazione il cui schema è riportato in Fig. 2.101.

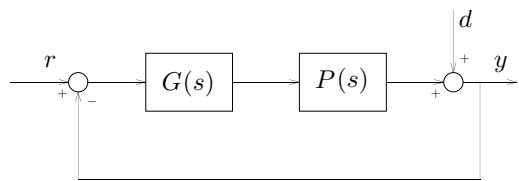


Figura 2.101: Sistema di controllo

Il processo ha funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{10 + s}{s^2 + 21s + 20}.$$

Si progetti la funzione di trasferimento  $G(s)$  del compensatore in modo tale da soddisfare le seguenti specifiche:

- a) errore nullo a regime permanente per ingressi costanti;
- b) errore a regime permanente non superiore a 0.05 per un ingresso a rampa unitaria;
- c) banda passante compresa nell'intervallo  $[4, 8]$  rad/sec;
- d) modulo alla risonanza non superiore a 3 dB;
- e) risposta a disturbi sinusoidali di ampiezza unitaria non superiore a  $1/30$  per valori di pulsazione compresi nella banda  $[0, 0.5]$  rad/sec.

**Esercizio 2.13**

Si consideri il sistema di controllo a retroazione di Fig. 2.102, nel quale si ha

$$P_1(s) = \frac{1}{s + 2}, \quad P_2(s) = \frac{s - 1}{s}.$$

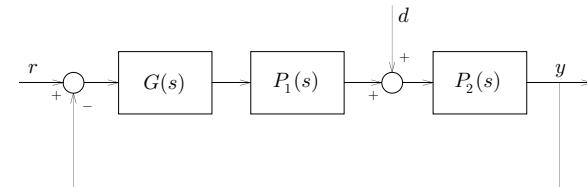


Figura 2.102: Sistema di controllo

Si determini la funzione di trasferimento  $G(s)$  del compensatore in modo tale da soddisfare le seguenti specifiche:

- a) errore a regime permanente non superiore a 0.01 per un ingresso a rampa unitaria;
- b) stabilità asintotica per il sistema ad anello chiuso.

Per il sistema così ottenuto, si calcoli la banda di pulsazioni  $\omega$  per cui la risposta a disturbi sinusoidali  $d(t) = \sin \omega t$  risulta attenuata di un fattore almeno pari a 0.1.

**Esercizio 2.14**

Si consideri nuovamente il sistema di controllo di Fig. 2.102, nel quale si ha

$$P_1(s) = \frac{1 - 0.3s}{s + 1.5}, \quad P_2(s) = \frac{1}{s}.$$

Si determini la funzione compensatrice  $G(s)$  in modo tale da soddisfare le seguenti specifiche:

- a) errore a regime permanente non superiore a 0.05 per un ingresso a rampa unitaria;
  - b) risposta a regime permanente non superiore a 0.01 per un disturbo costante unitario;
  - c) banda passante compresa nell'intervallo [3, 6] rad/sec;
  - d) modulo alla risonanza non superiore a 4 dB;
  - e) risposta a regime permanente a disturbi sinusoidali attenuata di un fattore pari almeno a 0.1 per valori della pulsazione compresi nella banda [0, 0.1] rad/sec.
- 

**Esercizio 2.15**

Si consideri nuovamente il sistema di controllo a retroazione il cui schema è mostrato in Fig. 2.102. In particolare, si ha

$$P_1(s) = \frac{s+10}{s^2 + 2s + 5}, \quad P_2(s) = \frac{1}{s}.$$

Si determini la funzione compensatrice  $G(s)$  in modo tale da soddisfare le seguenti specifiche:

- a) errore a regime permanente non superiore a 0.05 per un ingresso a rampa unitaria;
  - b) risposta nulla a regime permanente per un disturbo costante unitario;
  - c) banda passante compresa tra 0.5 e 1 rad/sec;
  - d) modulo alla risonanza non superiore a 4 dB;
  - e) risposta a regime permanente a disturbi sinusoidali di ampiezza unitaria non superiore a 0.2 per valori della pulsazione compresi nella banda [0, 0.1] rad/sec.
- 

**Esercizio 2.16**

Si consideri un processo descritto dalla funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{s+10}{s^3 + 3s^2 + 2s},$$

per il quale si intende adottare lo schema di controllo di Fig. 2.101. Si progettati la funzione di trasferimento  $G(s)$  del controllore in modo tale che la risposta ingresso/uscita sia caratterizzata dalle seguenti proprietà:

- a) errore nullo a regime permanente per ingressi costanti;
- b) risposta nulla a regime permanente a disturbi costanti;
- c) banda passante circa pari a 10 rad/sec;
- d) sovraelongazione del 20% nella risposta indiciale.

A sintesi completata, si valuti di quanto risultano attenuati i disturbi sinusoidali di pulsazione compresa tra 0 e 10 rad/sec. Inoltre, si verifichi la stabilità asintotica del sistema di controllo ottenuto attraverso il criterio di Nyquist.

---

**Esercizio 2.17**

Si consideri un sistema a retroazione del tipo indicato in Fig. 2.101, in cui il processo sia descritto dalla funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}.$$

Si determini una funzione compensatrice  $G(s)$  in modo tale che siano soddisfatte le seguenti specifiche:

- a) margine di fase di almeno  $40^\circ$ ;
  - b)  $|G(j\omega)| \leq 30$  dB, per qualsiasi valore di  $\omega$ ;
  - c) massima banda passante compatibile con le precedenti specifiche.
-

**Esercizio 2.18**

Si consideri nuovamente il sistema di controllo a retroazione il cui schema è riportato in Fig. 2.102. Le funzioni di trasferimento  $P_1(s)$  e  $P_2(s)$  sono pari a

$$P_1(s) = \frac{s+1}{s^3 + s^2 + 0.4s}, \quad P_2(s) = \frac{1}{1+10s}.$$

Si progettati la funzione compensatrice  $G(s)$  in modo tale che risultino soddisfatte le seguenti specifiche:

- a) banda passante compresa tra 1.5 e 2 rad/sec;
  - b) margine di fase di almeno  $30^\circ$ ;
  - c) risposta a regime permanente a disturbi sinusoidali attenuata di un fattore pari ad almeno 0.1 per valori della pulsazione compresi nella banda  $[0, 1]$  rad/sec.
- 

**Esercizio 2.19**

Si consideri nuovamente il sistema di controllo a retroazione indicato in Fig. 2.101. Il processo ha funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{0.5 - s}{s^2 + 12s + 20}.$$

Si progettati la funzione di trasferimento  $G(s)$  in modo tale da soddisfare le seguenti specifiche:

- a) risposta a regime permanente non superiore a 0.04 per un disturbo a gradino unitario;
- b) margine di fase non inferiore a  $40^\circ$ ;
- c) banda passante non inferiore a 10 rad/sec.

Si verifichi il conseguimento del risultato utilizzando la carta di Nichols.

---

**Esercizio 2.20**

Sia assegnato lo schema di controllo a retroazione di Fig. 2.103.

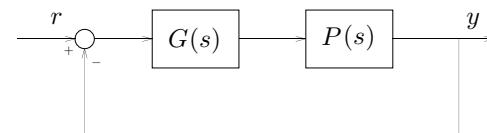


Figura 2.103: Sistema di controllo

La funzione di trasferimento del processo è pari a

$$P(s) = \frac{1}{s(s-1)}.$$

Si progettati la funzione di trasferimento  $G(s)$  del compensatore in modo tale da soddisfare le seguenti specifiche:

- a) margine di fase non inferiore a  $25^\circ$ ;
- b)  $|G(j\omega)| < 20$  dB, per qualsiasi valore di  $\omega$ .
- c) massima banda passante compatibile con le specifiche precedenti.

In conclusione, si calcoli la banda passante effettiva del sistema ottenuto.

---

## Capitolo 3

# SINTESI CON IL LUOGO DELLE RADICI

L'obiettivo di questo capitolo è illustrare l'uso del luogo delle radici nell'analisi e nella sintesi dei sistemi di controllo. A questo scopo, vengono proposti e risolti sia esercizi di semplice tracciamento del luogo che esercizi più complessi in cui esso fornisce indicazioni utili per la compensazione.

### 3.1 Esercizi svolti

#### Esercizio 3.1

*Si tracci il luogo delle radici ad anello chiuso al variare di K per le seguenti funzioni di trasferimento ad anello aperto:*

- a)  $F_1(s) = K \frac{s+3}{(s+1)(s+2)(s^2+2s+2.25)}$
- b)  $F_2(s) = K \frac{1}{s(s+1)(s+3)(s+4)}$
- c)  $F_3(s) = K \frac{s-1}{s(1+2s)(1+5s)(1+s)}$
- d)  $F_4(s) = K \frac{s(s^2+2s+2)}{(s+1)^2(s+2)^2}$ .

*In particolare, si determini l'intervallo di valori di K per i quali si ha stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso.*

---

a) Si osservi innanzitutto che la  $F_1(s)$  può porsi nella seguente forma poli/zeri:

$$F_1(s) = K \frac{s+3}{(s+1)(s+2)(s+1+j1.118)(s+1-j1.118)},$$

caratterizzata da  $n = 4$  poli e  $m = 1$  zeri. La differenza tra il numero di poli e il numero di zeri è  $n-m = 3$ , e il luogo possiede al più  $n+m-1 = 4$  punti singolari.

Il primo passo per il tracciamento del luogo consiste nel determinare quali porzioni dell'asse reale appartengono al luogo positivo e quali a quello negativo. In particolare, appartengono al luogo positivo il segmento  $[-2, -1]$  e la semiretta  $(-\infty, -3]$ ; i restanti punti dell'asse reale appartengono al luogo negativo (si vedano le Figg. 3.1-3.2). L'assegnazione dei versi di spostamento delle radici al crescere di  $K$  dà una prima indicazione sulla eventuale presenza di punti singolari. In questo caso, i versi 'discordi' nelle due porzioni di luogo positivo mettono immediatamente in evidenza l'esistenza di due punti singolari.

Il centro degli asintoti si ricava con la nota formula

$$s_0 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m},$$

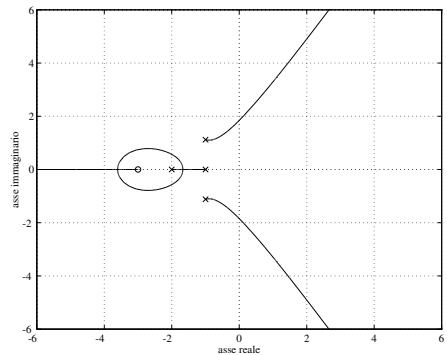
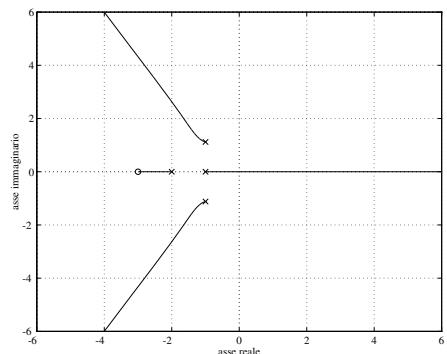
in cui  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , sono rispettivamente i poli e gli zeri della funzione di trasferimento. Per il caso in esame si ottiene

$$s_0 = \frac{-1 - 2 - 1 - j1.118 - 1 + j1.118 + 3}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Essendo  $n-m = 3$ , gli asintoti del luogo sono sei semirette (tre per il luogo positivo e tre per il luogo negativo) che diramano dal punto  $(s_0, 0)$  secondo la ben nota configurazione.

Sulla base degli elementi fin qui ricavati, è già possibile ipotizzare un tracciato qualitativamente plausibile per il luogo delle radici. Esso è del tipo riportato in Fig. 3.1 per il luogo positivo e in Fig. 3.2 per quello negativo. In effetti, questi ultimi grafici sono stati ricavati con l'ausilio del calcolatore e costituiscono dunque una soluzione esatta.

A conferma del tracciamento effettuato, è opportuno — quando ciò sia possibile — cercare di individuare con precisione i punti singolari. Essi corrispondono alle coppie di valori  $(s, K)$  che soddisfano entrambe le

Figura 3.1: Luogo positivo delle radici per  $F_1(s)$ Figura 3.2: Luogo negativo delle radici per  $F_1(s)$ 

equazioni

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0$$

$$\frac{d}{ds} \prod_{i=1}^n (s - p_i) + K \frac{d}{ds} \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0.$$

Eliminando la costante  $K$  tra queste due si ottiene un'equazione nella sola incognita  $s$  che, divisa per la quantità

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) \prod_{j=1}^m (s - z_j),$$

fornisce la seguente condizione più semplice

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{s - z_j} = 0.$$

Le radici di questa equazione che, sostituite nell'equazione del luogo, conducono a valori *reali* di  $K$  sono effettivamente punti singolari del luogo. Ad essi vanno aggiunti eventuali punti singolari corrispondenti a poli o zeri multipli della  $F(s)$ ; infatti, questi non sono previsti dalla suddetta equazione a causa del procedimento con cui essa è stata ricavata.

Per la funzione di trasferimento assegnata, la precedente equazione assume la forma

$$3s^4 + 22s^3 + 55.25s^2 + 61.5s + 27.75 = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$s_1 \approx -3.60, \quad s_2 \approx -1.67, \quad s_{3,4} \approx -1.02 \pm j 0.69.$$

Le prime due corrispondono certamente a punti singolari, poiché sono radici reali e come tali fanno certamente parte del luogo (si ricordi che l'intero asse reale appartiene al luogo). Per quanto riguarda le altre due, sostituendo il valore di  $s_3$  e  $s_4$  nell'equazione del luogo è facile vedere che quest'ultima è soddisfatta in corrispondenza a valori complessi di  $K$ . Di conseguenza, solo  $s_1$  e  $s_2$  sono punti singolari, entrambi appartenenti al luogo positivo. Si noti che la loro collocazione è consistente con le considerazioni qualitative

svolte in precedenza a partire dall'osservazione dei versi di percorrenza del luogo.

In conclusione, è necessario determinare i valori di  $K$  per i quali si ha stabilità asintotica ad anello chiuso. L'esame del luogo mostra che esiste un intervallo  $(K_1, K_2)$  di valori per  $K$  all'interno del quale il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile, con  $K_1 < 0$  e  $K_2 > 0$ . Per  $K = K_1$ , si ha ad anello chiuso un polo nell'origine, mentre per  $K = K_2$  si hanno due poli immaginari puri. Per determinare con esattezza il valore di  $K_1$  e  $K_2$ , si può applicare il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$s^4 + 5s^3 + 10.25s^2 + (K + 10.75)s + 3K + 4.5.$$

La relativa tabella è

1	10.25	$3K + 4.5$			
5	$K + 10.75$				
$40.5 - K$	$5(3K + 4.5)$				
$-K^2 - 45.25K + 322.875$					
$40.5 - K$					
$3K + 4.5$					

Allo scopo di rappresentare in modo compatto le variazioni di segno degli elementi in prima colonna della tabella di Routh, è opportuno ripartire l'intero campo di variazione di  $K$  in intervalli contigui, in ciascuno dei quali ogni elemento della prima colonna ha segno costante. Poiché nel caso in esame i primi elementi della prima e della seconda riga sono sempre positivi, è sufficiente limitarsi allo studio del segno dei termini

$$a = 40.5 - K, \quad b = \frac{-K^2 - 45.25K + 322.875}{40.5 - K}, \quad c = 3K + 4.5.$$

A tale scopo, si osservi che le radici del polinomio a numeratore di  $b$  sono  $6.2673$  e  $-51.5173$ . La Tabella 3.1 riassume la situazione.

È immediato constatare che il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente se e solo se  $K$  è interno all'intervallo di estremi  $K_1 = -1.5$  e  $K_2 = 6.2673$ . Per  $K < K_1$ , si ha una variazione di segno e dunque una radice a parte reale positiva, mentre per  $K > K_2$  si hanno due variazioni di segno e dunque due radici a parte reale positiva. In entrambi i casi, il sistema è instabile. Per  $K = K_1$ , si annulla  $c$ , che coincide con il termine

	$-51.5173$	$-1.5$	$6.2673$	$40.5$	$K$
$a$	+	+	+	+	-
$b$	-	+	+	-	+
$c$	-	-	+	+	+

Tabella 3.1: Segni degli elementi in prima colonna al variare di  $K$

noto del denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso. Di conseguenza, per tale valore di  $K$  si ha un polo ad anello chiuso nell'origine (ciò era già stato previsto osservando il luogo negativo di Fig. 3.2) e il sistema è semplicemente stabile. Infine, per  $K = K_2$  si annulla  $b$ , che costituisce la penultima riga della tabella di Routh. Com'è noto, ciò implica che il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso si fattorizza nel prodotto di due polinomi; il primo ha due radici a parte reale negativa (la parte soprastante della tabella presenta due permanenze di segno) mentre il secondo è

$$(40.5 - K_2)s^2 + 5(3K_2 + 4.5)$$

e ammette perciò due radici immaginarie pure — così come del resto era stato dedotto dall'andamento del luogo positivo di Fig. 3.1. Pertanto, anche per  $K = K_2$  si ha semplice stabilità.

b) La funzione di trasferimento  $F_2(s)$  è già data nella forma poli/zeri. La differenza tra il numero di poli e il numero di zeri è  $n - m = 4$ , e il luogo possiede al più  $n + m - 1 = 3$  punti singolari.

Fanno parte del luogo positivo i segmenti dell'asse reale  $[-1, 0]$  e  $[-4, -3]$ ; i restanti punti dell'asse reale appartengono al luogo negativo (si vedano le Figg. 3.3-3.4). L'assegnazione dei versi di spostamento delle radici al crescere di  $K$  indica la presenza di un punto singolare sull'asse reale in ogni segmento del luogo positivo, nonché di un ulteriore punto singolare per il luogo negativo all'interno del segmento  $[-3, -1]$ . Per quanto detto in precedenza, il luogo non ammette altri punti singolari.

Il centro degli asintoti si trova in

$$s_0 = \frac{-1 - 3 - 4}{4} = -2.$$

Essendo  $n - m = 4$ , gli asintoti del luogo sono otto semirette (quattro per il luogo positivo e quattro per il luogo negativo) che diramano dal punto  $(s_0, 0)$  secondo una stella regolare.

L'andamento del luogo positivo e negativo delle radici riportato nelle Figg. 3.3-3.4 è consistente con le indicazioni fin qui ricavate. In particolare, si osservi che due rami del luogo negativo coincidono *esattamente* con due asintoti. Questa situazione è conseguenza del fatto che il centro degli asintoti è un punto singolare del luogo negativo. Infatti, l'equazione che fornisce i punti singolari è

$$2s^3 + 12s^2 + 19s + 6 = 0,$$

che ha come soluzioni

$$s_1 = -0.4189, \quad s_2 = -2, \quad s_3 = -3.5811.$$

La collocazione di  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  è conforme a quanto previsto.

Venendo all'esame della stabilità, l'esame del luogo mostra che esiste un intervallo  $(0, K_2)$  di valori di  $K$  all'interno del quale il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile, con  $K_2 > 0$ . Per determinare con esattezza il valore di  $K_2$ , si può applicare il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$s^4 + 8s^3 + 19s^2 + 12s + K.$$

La relativa tabella è

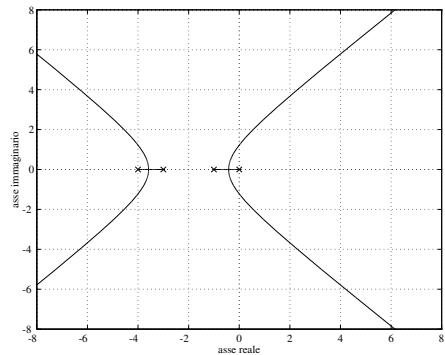
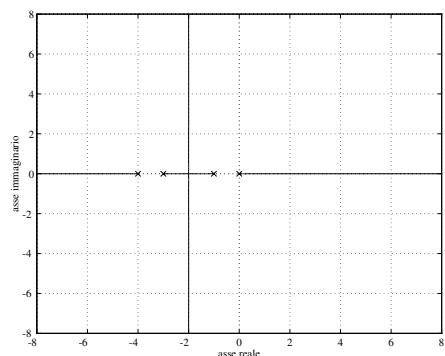
1	19	$K$
2	3	
35	2K	
	105 - 4K	
	2K	

da cui si ottiene facilmente  $K_2 = 26.25$ . Per  $K = 0$  la funzione di trasferimento ad anello chiuso ha un polo nell'origine, mentre per  $K = K_2$  si hanno due poli immaginari puri. In particolare, ponendo  $K = K_2$  nell'equazione del luogo si trovano i poli

$$p_{1,2} = -4 \pm j\sqrt{52.5/35}, \quad p_{3,4} = \pm j\sqrt{52.5/35}.$$

Si noti che i poli immaginari potevano essere ricavati più facilmente risolvendo l'equazione ausiliaria relativa all'annullarsi della riga di ordine uno nella tabella di Routh, e cioè

$$35s^2 + 2K_2 = 0.$$

Figura 3.3: Luogo positivo delle radici per  $F_2(s)$ Figura 3.4: Luogo negativo delle radici per  $F_2(s)$ 

c) Si osservi innanzitutto che la  $F_3(s)$  può porsi nella seguente forma poli/zeri:

$$F_3(s) = K \frac{0.1(s-1)}{s(s+0.5)(s+0.2)(s+1)} = K' \frac{(s-1)}{s(s+0.5)(s+0.2)(s+1)},$$

avendo posto  $K' = 0.1K$ . La differenza tra il numero di poli e il numero di zeri è  $n - m = 3$ , e il luogo possiede al più  $n + m - 1 = 4$  punti singolari.

Appartengono al luogo positivo i segmenti  $[0, 1]$  e  $[-0.5, -0.2]$  dell'asse reale, nonché la semiretta  $(-\infty, -1]$ ; i restanti punti dell'asse reale appartengono al luogo negativo (si vedano le Figg. 3.5–3.6). L'assegnazione dei versi di spostamento delle radici al crescere di  $K$  indica la presenza sull'asse reale di un punto singolare per il luogo positivo e di tre punti singolari per il luogo negativo. Il luogo non ammette altri punti singolari.

Il centro degli asintoti si trova in

$$s_0 = \frac{-1 - 0.5 - 0.2 - 1}{3} = -0.9.$$

Essendo  $n - m = 3$ , gli asintoti del luogo sono sei semirette (tre per il luogo positivo e tre per il luogo negativo) che diramano dal punto  $(s_0, 0)$ .

Il luogo positivo e negativo delle radici sono riportati rispettivamente nelle Figg. 3.5–3.6. È facile verificare che non esistono altri andamenti compatibili con le precedenti considerazioni.

Per un tracciamento più accurato del luogo è possibile procedere alla determinazione dei punti singolari. L'equazione che fornisce questi ultimi è in questo caso

$$3s^4 - 0.6s^3 - 4.3s^2 - 1.6s - 0.1 = 0,$$

e ha come soluzioni

$$s_1 \approx -0.08, \quad s_2 \approx -0.36, \quad s_3 \approx -0.82, \quad s_4 \approx 1.45.$$

L'esame del luogo mostra che esiste un intervallo  $(K'_1, 0)$  di valori di  $K'$  all'interno del quale il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile, con  $K'_1 < 0$ . Inoltre, per  $K' = K'_1$  la funzione di trasferimento ad anello chiuso possiede due poli immaginari, mentre per  $K' = 0$  essa ha un polo nell'origine. Per determinare con esattezza il valore di  $K'_1$ , si applica il

criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$s^4 + 1.7s^3 + 0.8s^2 + (K' + 0.1)s - K'.$$

La relativa tabella è

1	0.8	$-K'$
1.7	$K' + 0.1$	
$1.26 - K'$	$-1.7K'$	
$-K'^2 + 4.05K' + 0.126$		
$\hline$	$1.26 - K'$	
$-1.7K'$		

Una semplice analisi del tipo di quella effettuata al punto a) porta a concludere che  $K'_1 = -0.0309$ . Equivalentemente, si può dire che il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente per valori di  $K$  contenuti nell'intervallo  $(-0.309, 0)$ .

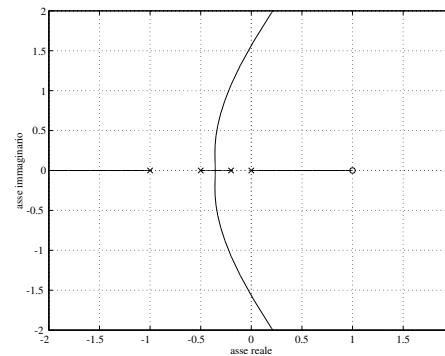


Figura 3.5: Luogo positivo delle radici per  $F_3(s)$

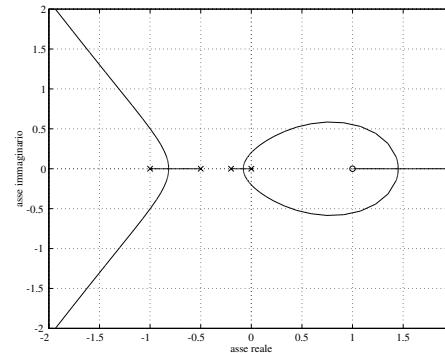


Figura 3.6: Luogo negativo delle radici per  $F_3(s)$

d) La  $F_4(s)$  può porsi nella seguente forma poli/zeri:

$$F_4(s) = K \frac{s(s+1+j)(s+1-j)}{(s+1)^2(s+2)^2}.$$

La differenza tra il numero di poli e il numero di zeri è  $n-m=1$ , e il luogo possiede al più  $n+m-1=6$  punti singolari.

Appartiene al luogo positivo la semiretta dell'asse reale  $(-\infty, 0]$ ; i restanti punti dell'asse reale appartengono al luogo negativo. L'assegnazione dei versi di spostamento delle radici al crescere di  $K$  indica la presenza sull'asse reale di un punto singolare all'interno del segmento  $(-2, -1)$  nonché di un ulteriore punto singolare per il luogo negativo appartenente alla semiretta  $(0, +\infty)$ . Altri due punti singolari sono collocati ovviamente in corrispondenza ai due poli doppi in  $-1$  e  $-2$ .

Vi sono tre andamenti del luogo plausibili sulla base le indicazioni fin qui ricavate. Il primo è mostrato nelle Figg. 3.7–3.8, il secondo nelle Figg. 3.9–3.10 e il terzo nelle Figg. 3.11–3.12.

Il secondo di questi possibili luoghi (Figg. 3.9–3.10) è caratterizzato dalla presenza di due punti singolari complessi coniugati. Tale circostanza è ammissibile in quanto, come si è detto in precedenza, il luogo può avere fino a 6 punti singolari, 4 dei quali sono già stati individuati. Di conseguenza, al fine di poter distinguere tra i diversi luoghi possibili — e in particolare tra il secondo luogo e gli altri due — si procede al calcolo dei punti singolari. Essi vanno ricercati tra le soluzioni dell'equazione

$$\gamma(s) = s^4 + s^3 - 2s - 4 = 0,$$

che sono

$$s_{1,2} = \pm\sqrt{2}, \quad s_{3,4} = -0.5 \pm j1.32.$$

Le prime due radici corrispondono ai punti singolari la cui collocazione era già stata prevista (in particolare,  $s_1$  appartiene alla semiretta  $(0, +\infty)$ , mentre  $s_2$  cade all'interno del segmento  $(-2, -1)$ ). Per quanto riguarda le altre due radici, sostituendo  $s_3$  o  $s_4$  nell'equazione del luogo si ottiene per  $K$  il valore reale  $K_{3,4} = -4$ . Pertanto, anche  $s_3$  e  $s_4$  sono punti singolari del luogo negativo, e l'andamento effettivo del luogo è del tipo ipotizzato nelle Figg. 3.9–3.10.

Va osservato come in questo caso la capacità di risolvere l'equazione  $\gamma(s) = 0$  che caratterizza i punti singolari sia cruciale per la determinazione

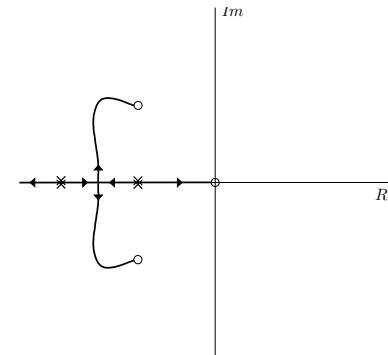


Figura 3.7: Primo possibile andamento del luogo positivo delle radici per  $F_4(s)$

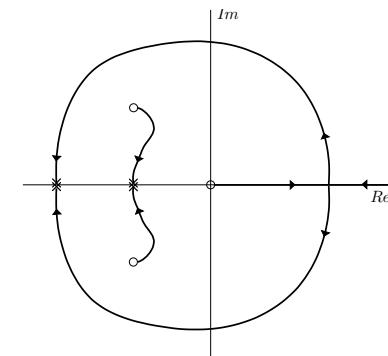


Figura 3.8: Primo possibile andamento del luogo negativo delle radici per  $F_4(s)$

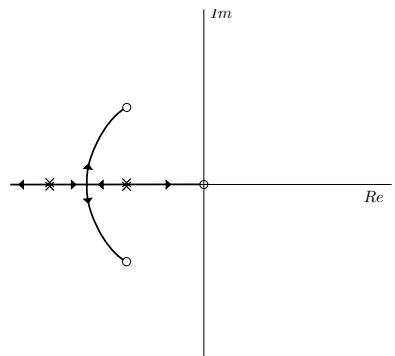


Figura 3.9: Secondo possibile andamento del luogo positivo delle radici per  $F_4(s)$

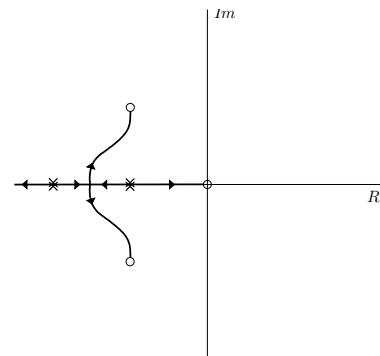


Figura 3.11: Terzo possibile andamento del luogo positivo delle radici per  $F_4(s)$

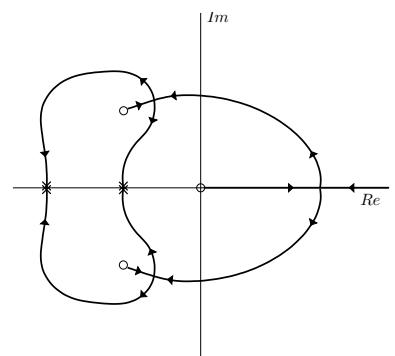


Figura 3.10: Secondo possibile andamento del luogo negativo delle radici per  $F_4(s)$

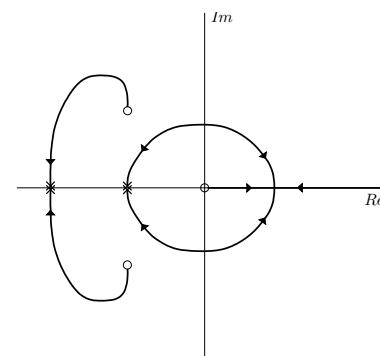


Figura 3.12: Terzo possibile andamento del luogo negativo delle radici per  $F_4(s)$

del luogo corretto. D'altra parte, tale equazione è di quarto grado e quindi la sua soluzione richiederebbe in linea di principio l'uso di un calcolatore. È tuttavia interessante notare che, nel particolare caso in esame, indicazioni sulle radici dell'equazione dei punti singolari si potevano ricavare a partire dalla tabella di Routh associata a  $\gamma(s)$ . In effetti, è facile verificare che la riga di ordine 1 di tale tabella è identicamente nulla. Ciò implica che  $\gamma(s)$  può essere fattorizzato nel prodotto di due polinomi, il secondo dei quali è pari a

$$\gamma_2(s) = s^2 - 2,$$

come si ricava immediatamente dalla riga di ordine 2. A questo punto risulta semplice fattorizzare il polinomio  $\gamma(s)$  come

$$\gamma(s) = \gamma_1(s)\gamma_2(s) = (s^2 - 2)(s^2 + s + 2),$$

le cui radici sono appunto quelle ricavate in precedenza.

Il tracciamento del luogo ottenuto mediante il calcolatore è riportato nelle Figg. 3.13-3.14. Si noti come il programma usato per il tracciamento incontri delle difficoltà di tipo numerico nell'intorno dei punti singolari complessi.

L'esame del luogo mostra che esiste un intervallo  $(K_1, +\infty)$  di valori per  $K$  all'interno del quale il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile, con  $K_1 < 0$ . Per determinare il valore di  $K_1$ , si può applicare il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso

$$s^4 + (6 + K)s^3 + (13 + 2K)s^2 + 2(6 + K)s + 4.$$

Costruendo la relativa tabella, si ottiene

$$\begin{array}{rcc} 1 & 13 + 2K & 4 \\ 6 + K & 2(6 + K) & \\ 11 + 2K & 4 & \\ \hline 18 + 4K & & \\ 11 + 2K & & \\ 4 & & \end{array}$$

Si noti che nella costruzione della riga di ordine 2 si è implicitamente assunto che  $K$  sia diverso da  $-6$ . In effetti, per  $K = -6$  si annulla la riga

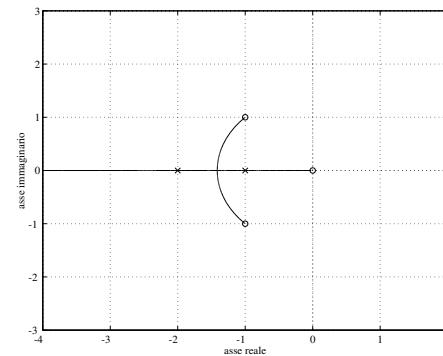


Figura 3.13: Luogo positivo delle radici per  $F_4(s)$

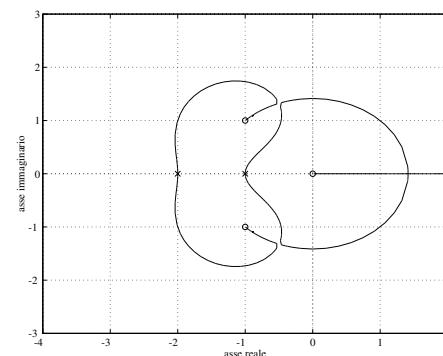


Figura 3.14: Luogo negativo delle radici per  $F_4(s)$

di ordine 3, e pertanto il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso diventa

$$s^4 + s^2 + 4.$$

Tale polinomio ha quattro radici complesse coniugate caratterizzate dalla ben nota simmetria quadrantale, che non corrispondono quindi ad attraversamenti dell'asse immaginario. Invece, per  $K = -4.5$  si annulla la riga di ordine 1 della tabella di Routh; procedendo come di consueto, si trovano in corrispondenza due radici pari a

$$p_{1,2} = \pm j\sqrt{2},$$

mentre le altre due radici hanno parte reale negativa. In conclusione, il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile per valori di  $K$  maggiori di  $K_1 = -4.5$ .

Infine, è interessante verificare che il luogo delle radici per la funzione di trasferimento ad anello aperto

$$F'_4(s) = K \frac{s(s+1+j)(s+1-j)}{(s+1)^2(s+2+a)^2},$$

che coincide con la  $F_4(s)$  per  $a = 0$ , è del tipo riportato nelle Figg. 3.7–3.8 per  $a > 0$ , mentre assume l'andamento di Figg. 3.11–3.12 per  $a < 0$ . Va tuttavia sottolineato che i due andamenti suddetti sono difficilmente distinguibili con le regole usualmente impiegate per il tracciamento del luogo delle radici.

### Esercizio 3.2

*Si studi il luogo delle radici ad anello chiuso associato alla funzione di trasferimento ad anello aperto*

$$F(s) = \frac{s^2 - 3s + 2}{(s+2)(s+10)(s^2 + 2s + 5)}.$$

*In particolare, si determinino le porzioni di luogo che si trovano a sinistra e a destra dell'asse immaginario, con i corrispondenti intervalli di guadagno.*

Si osservi innanzitutto che la  $F(s)$  può porsi nella seguente forma poli/zeri:

$$F(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(s+2)(s+10)(s+1+j2)(s+1-j2)}.$$

La differenza tra il numero di poli e il numero di zeri è  $n-m=2$ , e il luogo possiede al più  $n+m-1=5$  punti singolari.

Appartengono al luogo positivo i segmenti  $[1, 2]$  e  $[-10, -2]$  dell'asse reale; i restanti punti dell'asse reale appartengono al luogo negativo (si vedano le Figg. 3.15–3.16). L'assegnazione dei versi di spostamento delle radici al crescere di  $K$  indica la presenza sull'asse reale di due punti singolari per il luogo positivo e di un punto singolare per il luogo negativo. Il centro degli asintoti si trova in

$$s_0 = \frac{-10 - 2 - 1 - 2}{2} = -8.5.$$

Essendo  $n-m=2$ , gli asintoti del luogo sono quattro semirette (due per il luogo positivo e due per il luogo negativo) che diramano dal punto  $(s_0, 0)$ .

L'equazione che fornisce i potenziali punti singolari assume la forma

$$2s^5 + 5s^4 - 76s^3 - 163s^2 - 4s + 500 = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$s_1 \approx -6.55, \quad s_2 \approx 1.40, \quad s_3 \approx 5.97, \quad s_{4,5} \approx -1.66 \pm j1.35.$$

Le prime tre corrispondono ai punti singolari già individuati; in particolare,  $s_1$  e  $s_2$  appartengono al luogo positivo, mentre  $s_3$  appartiene al luogo negativo. Per quanto riguarda le altre due radici, è necessario verificare se esse

appartengono effettivamente al luogo, e cioè se sono radici dell'equazione

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K \prod_{j=1}^m (s - z_j) = (s+2)(s+10)(s^2 + 2s + 5) + K(s^2 - 3s + 2) = 0$$

in corrispondenza a valori reali di  $K$ . Sostituendo il valore di  $s_4$  e  $s_5$  in quest'ultima equazione, è facile vedere che essa è soddisfatta solo per valori complessi di  $K$ . Di conseguenza,  $s_4$  e  $s_5$  non appartengono al luogo.

Due possibili luoghi delle radici compatibili con le informazioni fin qui ottenute sono mostrati rispettivamente nelle Figg. 3.15–3.16 e nelle Figg. 3.17–3.18. Per decidere quale dei due luoghi è quello corretto, si può ad esempio calcolare il numero di intersezioni del luogo con la retta verticale  $\text{Re}[s] = -2$ . A questo scopo, è possibile seguire due procedure:

1. porre  $s = -2 + j\beta$ , con  $\beta \in \mathbb{R}$ , nell'equazione del luogo e calcolare i valori di  $\beta$  per cui tale equazione si annulla in corrispondenza a valori reali di  $K$ ;
2. applicare il criterio di Routh al polinomio in  $z$  ottenuto dal denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso sostituendo alla variabile  $s$  la variabile  $(z - 2)$ . Calcolando eventuali valori reali di  $K$  in corrispondenza ai quali si annullano tutti gli elementi di una riga della tabella di Routh, e sostituendo tali valori nella riga soprastante, si costruiscono altrettanti polinomi in cui sono presenti solo potenze pari di  $z$ . Le eventuali radici immaginarie di tali polinomi corrispondono a punti di attraversamento della retta verticale  $\text{Re}[s] = -2$  da parte del luogo.

A scopo illustrativo, vengono presentati nel seguito entrambi i metodi.

Ponendo  $s = -2 + j\beta$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , nell'equazione del luogo si ottiene l'equazione

$$40j\beta + 11\beta^2 - 6j\beta^3 + \beta^4 + (12 - 7j\beta - \beta^2)K = 0,$$

che risolta per  $K$  fornisce

$$K = -\beta \frac{\beta^3 + 11\beta + j(40 - 6\beta^2)}{12 - \beta^2 - 7j\beta} = -\beta \frac{\gamma - j(13\beta^4 - 35\beta^2 + 480)}{\delta},$$

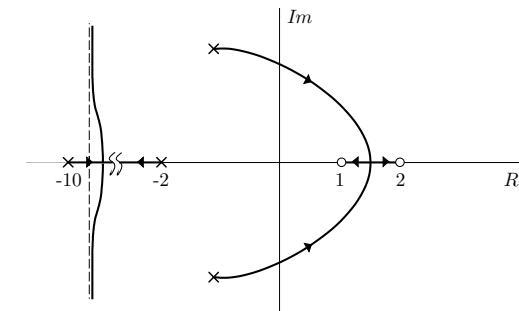


Figura 3.15: Primo possibile andamento del luogo positivo delle radici per  $F(s)$

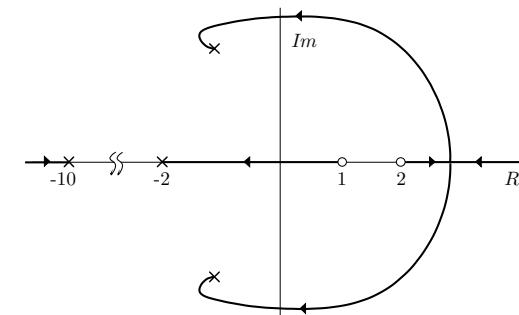


Figura 3.16: Primo possibile andamento del luogo negativo delle radici per  $F(s)$

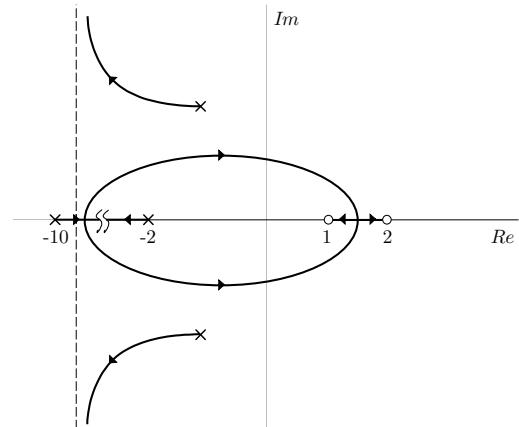


Figura 3.17: Secondo possibile andamento del luogo positivo delle radici per  $F(s)$

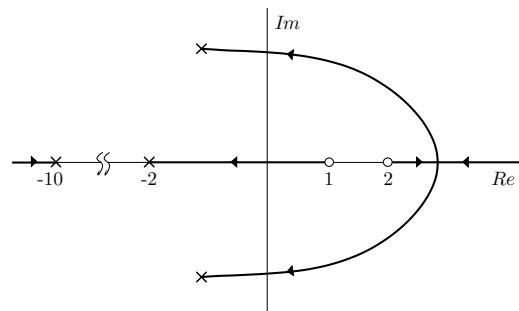


Figura 3.18: Secondo possibile andamento del luogo negativo delle radici per  $F(s)$

dove  $\gamma$  e  $\delta$  sono numeri reali espressi come funzioni di  $\beta$ . Poiché si è interessati solo a radici reali in  $K$ , deve essere verificata una delle due condizioni

$$\beta = 0 \quad \text{oppure} \quad 13\beta^4 - 35\beta^2 + 480 = 0.$$

Si può facilmente verificare che l'equazione biquadratica sopra riportata non ha radici reali. Di conseguenza, l'unico attraversamento della retta  $Re[s] = -2$  da parte del luogo avviene in corrispondenza a  $\beta = 0$ , e cioè sull'asse reale. Si noti che  $\beta = 0$  implica  $K = 0$ , e infatti il punto di intersezione  $(-2, 0)$  è un polo del sistema ad anello aperto.

Per quanto riguarda il secondo metodo, ponendo  $s = z - 2$  nel denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso si ottiene

$$z^4 + 6z^3 + (K - 11)z^2 + (40 - 7K)z + 12K.$$

La tabella di Routh è

1	$K - 11$	$12K$
6	$40 - 7K$	
$13K - 106$	$72K$	
$-91K^2 + 830K - 4240$		
$13K - 106$		
$72K$		

L'unico valore reale di  $K$  in corrispondenza al quale si annulla un'intera riga della tabella è  $K = 0$ , che corrisponde al caso di un polo in  $z = 0$ , ovvero  $s = -2$ . Infatti, la penultima riga della tabella si annulla solo in corrispondenza a valori complessi di  $K$ .

Si può dunque concludere che l'andamento corretto del luogo è quello delle Figg. 3.15–3.16. Il luogo positivo e negativo delle radici ottenuti con l'ausilio del calcolatore sono riportati rispettivamente nelle Figg. 3.19–3.20. Si noti che le tangenti ai due rami del luogo nei poli complessi sono orientate diversamente da quanto ipotizzato nel tracciamento di Figg. 3.15–3.16. Una maggiore accuratezza avrebbe potuto essere raggiunta utilizzando la regola che fornisce l'orientamento della tangente in un punto regolare del luogo.

L'esame del luogo mostra che esiste un intervallo  $(K_1, K_2)$  di valori per  $K$  all'interno del quale il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile, con  $K_1 < 0$  e  $K_2 > 0$ . Per determinare con esattezza il valore di  $K_1$  e  $K_2$ , si può applicare il criterio di Routh al denominatore della funzione di

trasferimento ad anello chiuso

$$s^4 + 14s^3 + (K + 49)s^2 + (100 - 3K)s + 100 + 2K.$$

Costruendo la relativa tabella, si ottiene

$$\begin{array}{rcc} 1 & 49 + K & 100 + 2K \\ 14 & 100 - 3K & \\ 17K + 586 & 14(100 + 2K) \\ \hline -51K^2 - 450K + 39000 & \\ \hline 17K + 586 & \\ 14(100 + 2K) & \end{array}$$

Poiché i primi elementi della prima e della seconda riga sono sempre positivi, è sufficiente limitarsi allo studio del segno dei termini

$$a = 17K + 586, \quad b = \frac{-51K^2 - 450K + 39000}{17K + 586}, \quad c = 14(100 + 2K).$$

A tale scopo, si osservi che le radici del polinomio a numeratore di  $b$  sono  $-32.41$  e  $23.59$ . La Tabella 3.2 riassume la situazione.

	$-50$	$-34.47$	$-32.41$	$23.59$	$K$
$a$	-	-	+	+	+
$b$	+	+	-	+	-
$c$	-	+	+	+	+

Tabella 3.2: Segni degli elementi in prima colonna al variare di  $K$

Il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente se e solo se  $K$  è interno all'intervallo di estremi  $K_1 = -32.41$  e  $K_2 = 23.59$ . Per  $K < -50$  si hanno tre variazioni di segno e altrettante radici a parte reale positiva; per  $K = -50$  si ha una radice nell'origine (sul ramo del luogo negativo coincidente con il segmento  $[-2, 1]$ ) e due radici a parte reale positiva; per  $-50 < K < -32.41$  si hanno due radici a parte reale positiva. Per  $K = -32.41$  e  $K = 23.59$  si hanno due radici immaginarie (stabilità semplice). Infine, per  $K > 23.59$  vi sono nuovamente due radici a parte reale positiva.

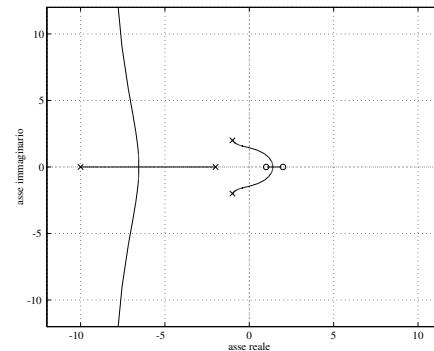


Figura 3.19: Luogo positivo delle radici per  $F(s)$

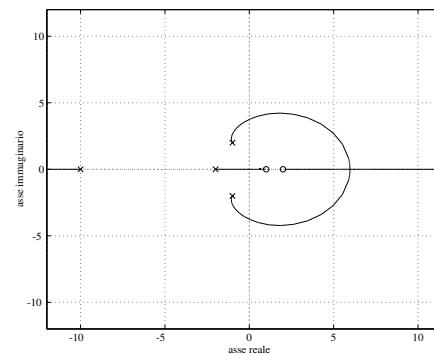


Figura 3.20: Luogo negativo delle radici per  $F(s)$

**Esercizio 3.3**

Si consideri il processo avente lo schema a blocchi di Fig. 3.21.

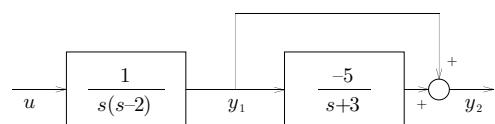


Figura 3.21: Schema a blocchi del processo considerato

Le grandezze  $y_1$  e  $y_2$  sono accessibili per misure. Sintetizzare un controllore a retroazione, di dimensione non superiore a 2, che elabori i segnali  $y_1$  e  $y_2$  e un ingresso di riferimento  $r$  in modo tale che:

- il sistema ad anello chiuso sia asintoticamente stabile;
- l'errore  $r - y_2$  sia nullo a regime permanente per un riferimento  $r$  costante.

Indicata con  $P_1(s)$  la funzione di trasferimento tra  $u$  e  $y_1$ , e con  $P_2(s)$  quella tra  $y_1$  e  $y_2$ , si ha

$$P_1(s) = \frac{1}{s(s-2)}, \quad P_2(s) = 1 + \frac{-5}{s+3} = \frac{s-2}{s+3}.$$

Il processo è costituito dalla connessione in cascata di  $P_1(s)$  e  $P_2(s)$ , nella quale si verrebbe a cancellare il polo in  $s = 2$ . Tale polo, che ha parte reale positiva, non comparirebbe nella funzione di trasferimento del ramo diretto, ma resterebbe un autovalore del sistema ad anello chiuso indipendentemente dal controllore usato, con conseguente perdita di stabilità interna. In particolare, il modo naturale associato a tale autovalore risulterebbe inosservabile dall'uscita  $y_2$ .

Per evitare la suddetta cancellazione è necessario chiudere un primo anello interno di retroazione dal segnale  $y_1$  verso  $u$ , in modo da modificare la posizione del polo in  $s = 2$ . Di conseguenza, il sistema di controllo assumerà la struttura in Fig. 3.22. Si noti che tale soluzione è implicitamente

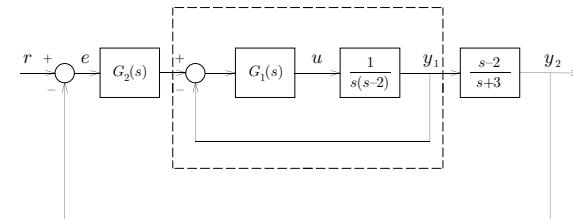


Figura 3.22: Struttura del sistema di controllo

suggerita dall'enunciato del problema, che attesta la possibilità di misurare tanto  $y_1$  che  $y_2$ .

Dovendo in ogni caso modificare la posizione del polo in  $s = 2$ , conviene scegliere la funzione di trasferimento del controllore ‘interno’  $G_1(s)$  in modo da avere stabilità asintotica per  $F_1(s)$ . A questo scopo, si consideri il luogo delle radici ad anello chiuso associato a  $K_{G1}P_1(s)$ , mostrato nelle Figg. 3.23–3.24. Esso mostra che non è sufficiente scegliere  $G_1(s)$  come un semplice guadagno  $K_{G1}$  per rendere asintoticamente stabile l’anello interno di retroazione. Si deve quindi ricorrere a una coppia polo/zero per spostare il centro degli asintoti nel semipiano sinistro. Si noti che in questo modo l’ordine di  $G_1(s)$  diviene pari a uno, e perciò la funzione  $G_2(s)$  potrà anch’essa includere al più un polo. Se a causa di tale limitazione si rivelasse impossibile stabilizzare il sistema complessivo, si renderebbe necessario rinunciare a stabilizzare l’anello interno di retroazione, limitandosi a evitare la cancellazione polo/zero.

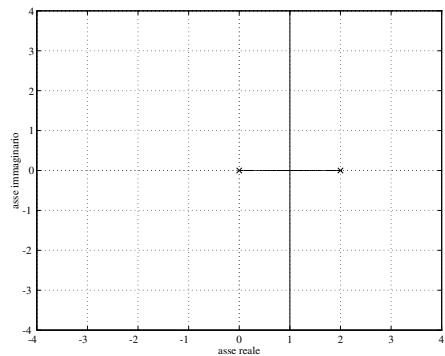
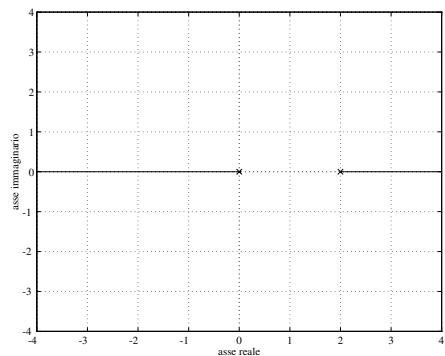
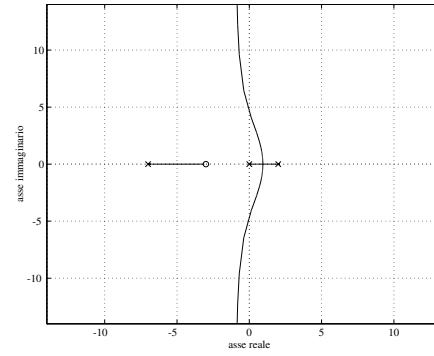
Ad esempio, si può scegliere

$$G_1(s) = K_{G1} \frac{s+3}{s+7}.$$

Il centro degli asintoti viene a collocarsi in

$$s_0 = \frac{2-7+3}{2} = -1,$$

e il luogo positivo delle radici ad anello chiuso associato a  $K_{G1}G_1(s)P_1(s)$  al variare di  $K_{G1}$  è riportato in Fig. 3.25. Un rapido esame mostra che esiste un valore  $K_1 > 0$  tale che  $F_1(s)$  è asintoticamente stabile per  $K_{G1} > K_1$ .

Figura 3.23: Luogo positivo delle radici per  $K_{G1}P_1(s)$ Figura 3.24: Luogo negativo delle radici per  $K_{G1}P_1(s)$ Figura 3.25: Luogo positivo delle radici per  $P_1(s)G_1(s)$ 

Per determinare il valore di  $K_1$ , si può applicare il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento dell'anello interno:

$$s^3 + 5s^2 + (K_{G1} - 14)s + 3K_{G1}.$$

Costruendo la relativa tabella, è facile verificare che si ha  $K_1 = 35$ . Si ponga  $K_{G1} = 72$ , a cui corrispondono poli di  $F_1(s)$  in  $-4$  e  $-0.5 \pm j7.33$ . In effetti, tale scelta è stata derivata imponendo l'identità tra il suddetto denominatore della funzione di trasferimento dell'anello interno e il polinomio

$$(s+4)(s+\alpha+j\beta)(s+\alpha-j\beta),$$

e ricavando i valori di  $K_{G1}$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  per cui essa è soddisfatta. Ciò è conveniente anche in vista della necessità di disporre della forma poli/zeri di  $F_1(s)$  per il tracciamento del luogo nel resto della sintesi.

La forma della prima funzione compensatrice  $G_1(s)$  è dunque

$$G_1(s) = 72 \frac{s+3}{s+7}.$$

Con questa scelta, la funzione di trasferimento dell'anello interno di retroazione è

$$\begin{aligned} F_1(s) = \frac{G_1(s)P_1(s)}{1 + G_1(s)P_1(s)} &= 72 \frac{s+3}{s^3 + 5s^2 + 58s + 216} \\ &= 72 \frac{s+3}{(s+4)(s+0.5+j7.33)(s+0.5-j7.33)}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la scelta di  $G_2(s)$ , si osservi innanzitutto che è necessario includere nel controllore un polo nell'origine per soddisfare la specifica **b**) sul regime permanente (sistema di tipo 1). Infatti, il polo nell'origine inizialmente presente nel ramo diretto in  $P_1(s)$  è stato spostato a seguito dell'introduzione dell'anello interno di retroazione. Per soddisfare la specifica sulla dimensione del controllore è necessario porre

$$G_2(s) = \frac{K_{G2}}{s},$$

garantendo al contempo la stabilità asintotica. D'altra parte ciò è certamente possibile, poiché la funzione di trasferimento del ramo diretto

$$F(s) = G_2(s)F_1(s)P_2(s) = K_{G2} \frac{72(s-2)}{s(s+4)(s+0.5+j7.33)(s+0.5-j7.33)},$$

ha un polo nell'origine, tutti gli altri poli con parte reale negativa e uno zero con parte reale positiva. Di conseguenza, scegliendo  $K_{G2}$  negativo e sufficientemente prossimo a zero, il sistema ad anello chiuso sarà asintoticamente stabile. Tale previsione può essere confermata dal tracciamento del luogo negativo delle radici relativo a  $F(s)$ . Si noti tra l'altro che lo zero della prima funzione compensatrice  $G_1(s)$  — che diviene uno zero di  $F_1(s)$  — è stato scelto in modo tale da cancellarsi con il polo di  $P_2(s)$ , che ha parte reale negativa. Ciò comporta una notevole semplificazione dei calcoli successivi.

Il centro degli asintoti è collocato in

$$s_0 = \frac{-4 - 0.5 - 0.5 - 2}{3} = -\frac{7}{3}.$$

Il luogo negativo delle radici ottenuto con l'ausilio del calcolatore è riportato in Fig. 3.26. In effetti, è facile verificare che esiste un altro andamento del luogo consistente con le regole di tracciamento; tuttavia, esso porterebbe

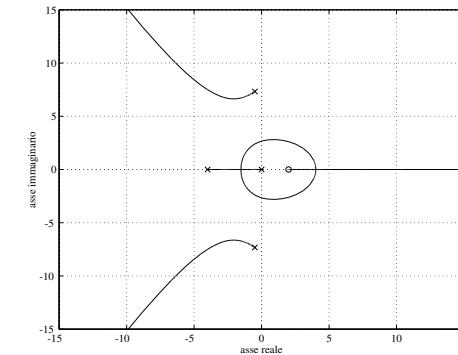


Figura 3.26: Luogo negativo delle radici per  $F(s)$

alle medesime conclusioni per quanto riguarda la stabilità asintotica, che va comunque imposta utilizzando il criterio di Routh.

L'esame del luogo mostra che esiste un intervallo  $(K_2, 0)$  di valori di  $K'_{G2} = 72K_2$  all'interno del quale il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile, con  $K_2 < 0$ . Per determinare il valore di  $K_2$ , si può applicare il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$s^4 + 5s^3 + 58s^2 + (216 + K'_{G2})s - 2K'_{G2}.$$

Costruendo la relativa tabella, si ricava  $K_2 = -180.54$ . Di conseguenza, si dovrà avere

$$-180.54/72 < K_{G2} < 0.$$

Ad esempio, la sintesi è completata scegliendo

$$G_2(s) = -\frac{1}{s}.$$

Il controllore risultante ha complessivamente dimensione  $1 + 1 = 2$ , così come richiesto nell'enunciato del problema.

**Esercizio 3.4**

Si consideri il sistema di controllo a retroazione di Fig. 3.27, in cui

$$P(s) = \frac{s+1}{s^2(s-1)}.$$

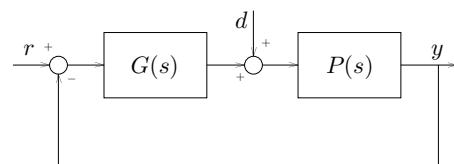


Figura 3.27: Sistema di controllo

Si progetti la funzione di trasferimento del controllore  $G(s)$  in modo che:

- a) il sistema ad anello chiuso sia asintoticamente stabile;
- b) si abbia risposta nulla a regime permanente per un disturbo  $d$  costante.

Si verifichi la stabilità tracciando il luogo delle radici finale.

La funzione di trasferimento del controllore avrà in generale la forma

$$G(s) = \frac{K_G}{s^h} R(s).$$

Allo scopo di soddisfare la seconda specifica, è sufficiente introdurre un polo nell'origine in  $G(s)$  ( $h = 1$ ). Per verificare se è possibile garantire la stabilità asintotica per opportuni valori di  $K_G$  ponendo semplicemente  $R(s) = 1$ , si traccia il luogo delle radici ad anello chiuso relativo alla funzione di trasferimento ad anello aperto

$$\hat{F}(s) = \frac{K_G}{s} P(s) = K_G \frac{s+1}{s^3(s-1)}.$$

La differenza tra il numero di poli e di zeri è  $n - m = 3$ . Il luogo possiede al più  $n + m - 1 = 4$  punti singolari, la cui posizione può essere approssimativamente determinata notando che:

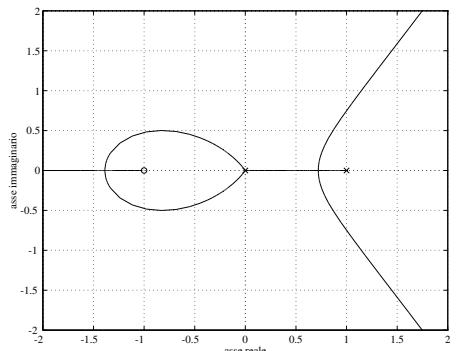
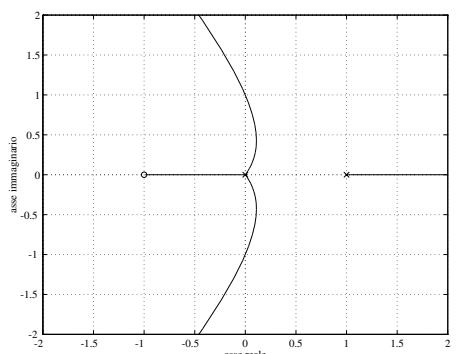
- il polo in  $s = 0$  ha molteplicità  $\mu = 3$  e di conseguenza l'origine è un punto singolare del luogo (di molteplicità  $\mu - 1 = \nu = 2$  come soluzione dell'equazione dei punti singolari) nel quale si intersecano  $2\mu = 6$  rami del luogo;
- la posizione degli altri due punti singolari, entrambi appartenenti al luogo positivo, è facilmente deducibile dall'osservazione dei versi di percorrenza delle radici lungo l'asse reale.

Il centro degli asintoti si trova in

$$s_0 = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Il luogo risultante è riportato nelle Figg. 3.28–3.29. Si noti che tre dei sei rami del luogo che confluiscono nell'origine appartengono al luogo positivo, e gli altri tre al luogo negativo. Dall'esame del luogo appare altresì evidente che non esiste alcun valore di  $K_G$  per cui si abbia stabilità asintotica ad anello chiuso. Si rende dunque necessario effettuare una compensazione scegliendo opportunamente la funzione  $R(s)$ . Per effettuare tale scelta, si può seguire in generale la seguente procedura:

1. si inserisce in  $R(s)$  un numero di zeri a parte reale negativa sufficiente a ricondurre la differenza poli-zeri della funzione di trasferimento ad anello aperto a 2;
2. si aggiunge in  $R(s)$  una coppia polo/zero (entrambi a parte reale negativa) in maniera da spostare il centro degli asintoti a sinistra dell'asse immaginario;
3. utilizzando il criterio di Routh, si determina un valore di  $K_G$  tale da garantire stabilità asintotica ad anello chiuso;
4. se necessario, si completa la sintesi di  $R(s)$  aggiungendo poli a parte reale negativa in numero sufficiente a garantire la realizzabilità del controllore, cioè a rendere la funzione di trasferimento  $G(s)$  almeno propria. I poli devono essere scelti abbastanza ‘lontani’ da mantenere la stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso in corrispondenza al valore di  $K_G$  determinato al passo precedente.

Figura 3.28: Luogo positivo delle radici per  $\hat{F}(s)$ Figura 3.29: Luogo negativo delle radici per  $\hat{F}(s)$ 

La procedura appena esposta consente sempre di risolvere il problema di sintesi se la funzione di trasferimento del processo è *a fase minima*, cioè se i suoi zeri hanno tutta parte reale negativa. Infatti, per valori elevati di  $K_G$ ,  $m$  rami del luogo positivo convergono sugli zeri della  $F(s)$ , mentre gli altri  $n-m=2$  rami convergono sugli asintoti (che si trovano nel semipiano sinistro). Di conseguenza, scegliendo  $K_G$  positivo e sufficientemente elevato si ottiene la stabilità asintotica per il sistema ad anello chiuso.

Applichiamo il metodo proposto al caso in esame. Porremo dunque

$$R(s) = (s + \alpha) \frac{(s + \beta)}{s + \gamma}.$$

Il ruolo dello zero in  $-\alpha$  è quello di ricondurre la differenza poli-zeri della funzione di trasferimento ad anello aperto a 2. Si ponga ad esempio  $\alpha = 1$ . La nuova posizione del centro degli asintoti è

$$s'_0 = \frac{1+1+1-\gamma+\beta}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Volendo ottenere, ad esempio,  $s'_0 = -1$ , si può porre  $\beta = 2$  e  $\gamma = 7$ .

Per la funzione di trasferimento ad anello aperto

$$F(s) = G(s)P(s) = K_G \frac{(s+1)^2(s+2)}{s^3(s-1)(s+7)},$$

si ha  $m = 3$  e  $n = 5$ , e di conseguenza il numero massimo di punti singolari è  $n+m-1 = 7$ . L'equazione dei punti singolari

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s-p_i} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{s-z_j} = 0$$

è in questo caso di quarto grado e ha soluzioni

$$s_1 \approx -1.48, \quad s_2 \approx 0.67, \quad s_{3,4} \approx -3.59 \pm j2.87.$$

Le prime due corrispondono effettivamente a punti del luogo (in particolare,  $s_1$  appartiene al luogo negativo e  $s_2$  a quello positivo), mentre sostituendo  $s_3$  e  $s_4$  nell'equazione del luogo si ottengono valori di  $K_G$  complessi. Come già osservato nell'esercizio 3.1, l'equazione suddetta non prevede i punti singolari  $s = 0$  (polo triplo e punto singolare doppio) e  $s = -1$  (zero

doppio e punto singolare semplice). Il luogo delle radici corrispondente a  $F(s) = P(s)G(s)$  è mostrato nelle Figg. 3.30–3.31.

L'esame del luogo conferma che esiste un intervallo  $(K_1, +\infty)$  di valori di  $K_G$  all'interno del quale il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile, con  $K_1 > 0$ . Per determinare con esattezza il valore di  $K_1$ , si può applicare il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$s^5 + 6s^4 + (K_G - 7)s^3 + 4K_G s^2 + 5K_G s + 2K_G.$$

Costruendo la relativa tabella, si ottiene  $K_1 = 42.39$ . Di conseguenza, la sintesi è completata ponendo ad esempio

$$G(s) = 50 \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+7)}.$$

Si osservi che in questo caso non è necessario aggiungere poli lontani per garantire la realizzabilità del controllore. Infatti, il polo nell'origine inserito preliminarmente in  $G(s)$  per garantire l'astatismo al disturbo rende la funzione di trasferimento  $G(s)$  propria. Un caso in cui è necessario aggiungere un polo lontano è presentato nell'esercizio 3.8.

Si noti che la stabilità del sistema risultante è di tipo *paradossale*: il sistema ad anello chiuso è instabile per valori bassi del guadagno del ramo diretto e diviene stabile asintoticamente per valori elevati di tale parametro. Ciò è legato alla presenza di un polo instabile nella funzione di trasferimento ad anello aperto.

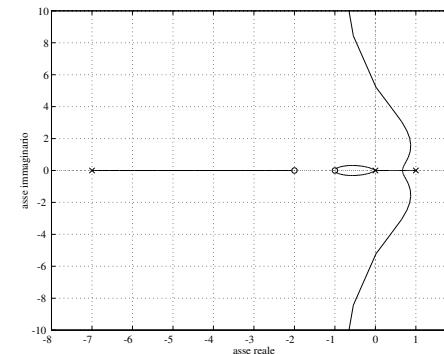


Figura 3.30: Luogo positivo delle radici per  $F(s)$

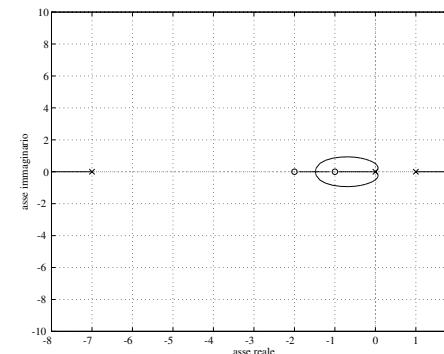


Figura 3.31: Luogo negativo delle radici per  $F(s)$

**Esercizio 3.5**

Si consideri il sistema di controllo a retroazione di Fig. 3.32, dove  $\mathcal{P}$  è un sistema la cui rappresentazione nello spazio di stato è

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ w &= Cx,\end{aligned}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$$

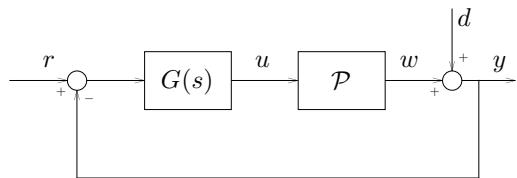


Figura 3.32: Sistema di controllo

Si determini un controllore  $G(s)$  di dimensione minima tale che il sistema ad anello chiuso soddisfi le seguenti specifiche:

- a) risposta nulla a regime per un disturbo  $d$  costante;
- b) risposta nulla a regime per un disturbo sinusoidale  $d(t) = \sin t$ ;
- c) tutti gli autovalori con parte reale minore o uguale a  $-0.3$ .

La funzione di trasferimento ingresso-uscita associata a  $\mathcal{P}$  è

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+2)},$$

dove si è effettuata la cancellazione del polo in  $s = -1$  con lo zero analogo. In questo modo la successiva retroazione dall'uscita non modificherà l'autovalore  $\lambda = -1$ , che tuttavia non viola la specifica c) sulla collocazione

degli autovalori ad anello chiuso; la cancellazione è dunque lecita. In particolare, è facile verificare che il modo naturale corrispondente a  $\lambda = -1$  è inosservabile dall'uscita.

Per garantire risposta nulla a regime permanente in corrispondenza a un disturbo  $d$  costante, è necessario introdurre un polo nell'origine in  $G(s)$ . Per quanto riguarda la specifica b), si osservi che essa equivale a richiedere che il modulo della risposta armonica disturbo-uscita sia nullo in corrispondenza alla pulsazione  $\omega = 1$ , cioè

$$|W_d(j\omega)|_{\omega=1} = \left| \frac{1}{1 + F(j1)} \right| = 0,$$

essendo  $F(j\omega) = P(j\omega)G(j\omega)$  la risposta armonica ad anello aperto. Poiché

$$P(j1) = 1/(j+2),$$

la risposta armonica del processo ha modulo finito in corrispondenza alla pulsazione  $\omega = 1$ . Se ne deduce allora che la  $G(s)$  deve possedere due poli immaginari in  $s = \pm j$ ; infatti, ciò garantisce che il modulo di  $G(j\omega)$  (e quindi di  $F(j\omega)$ ) diverga all'infinito per  $\omega = 1$ .

La funzione di trasferimento del controllore avrà dunque la struttura

$$G(s) = \frac{K_G}{s(s^2 + 1)} R(s),$$

in cui  $K_G$  e  $R(s)$  vanno scelti in modo da soddisfare la terza specifica, con il vincolo che  $R(s)$  abbia la minima dimensione possibile.

Per verificare se il problema può essere risolto attraverso la scelta di un semplice guadagno (cioè ponendo  $R(s) = 1$ ), si procede al tracciamento del luogo delle radici ad anello chiuso per la funzione di trasferimento

$$\hat{F}(s) = \frac{K_G}{s(s^2 + 1)} P(s) = \frac{K_G}{s(s+2)(s^2 + 1)}.$$

La differenza tra il numero di poli e il numero di zeri è  $n - m = 4$ , e il luogo possiede al più  $n + m - 1 = 3$  punti singolari. Il centro degli asintoti si trova in

$$s_0 = \frac{-2}{4} = -0.5.$$

L'equazione che fornisce i potenziali punti singolari assume la forma

$$4s^3 + 6s^2 + 2s + 2 = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$s_1 \approx -1.4, \quad s_{2,3} \approx -0.05 \pm j0.59.$$

La prima corrisponde a un punto singolare del luogo positivo. Per quanto riguarda le altre due, è necessario verificare se esse appartengono al luogo, cioè se sono radici dell'equazione

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K_G \prod_{j=1}^m (s - z_j) = s(s+2)(s^2+1) + K_G$$

in corrispondenza a valori reali di  $K_G$ . Sostituendo il valore di  $s_2$  e  $s_3$  in quest'ultima equazione, è facile vedere che essa è soddisfatta in corrispondenza a valori complessi di  $K_G$ . Di conseguenza,  $s_2$  e  $s_3$  non appartengono al luogo. Il luogo positivo e quello negativo delle radici sono riportati nelle Figg. 3.33 - 3.34.

L'esame del luogo mostra che non esistono valori di  $K_G$  per cui il sistema ad anello chiuso sia asintoticamente stabile. Tuttavia, il centro degli asintoti si trova già nel semipiano sinistro del piano complesso, e in particolare a sinistra del punto  $(-0.3, 0)$ . Ciò suggerisce di cercare di ridurre la differenza poli-zeri a 2 senza spostarlo. Essendo il sistema a fase minima, questa procedura consentirà di ottenere un sistema ad anello chiuso che rispetta la specifica c) sulla collocazione degli autovectori per valori positivi e sufficientemente elevati di  $K_G$ .

Poiché nella prima parte della sintesi sono stati inseriti tre poli nella  $G(s)$  per soddisfare le specifiche sul regime permanente, è possibile porre

$$R(s) = (s - z)^2,$$

mantenendo il requisito della realizzabilità fisica del dispositivo di controllo. Scegliendo  $z = -0.5$ , è facile verificare che il centro degli asintoti non si sposta. Il nuovo luogo delle radici possiede al più  $n + m - 1 = 5$  punti singolari, uno dei quali si trova certamente in  $s = -0.5$ , e cioè in corrispondenza dello zero doppio. Altri eventuali punti singolari vanno ricercati tra le radici dell'equazione

$$2s^4 + 4s^3 + 3s^2 - s + 1 = 0.$$

È possibile verificare che le radici sono tutte e quattro complesse, e che tali sono anche i corrispondenti valori di  $K_G$  che rendono soddisfatta l'equazione

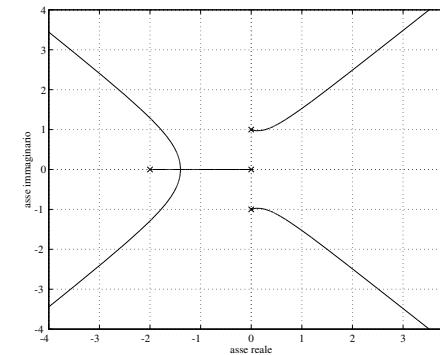


Figura 3.33: Luogo positivo delle radici per  $\hat{F}(s)$

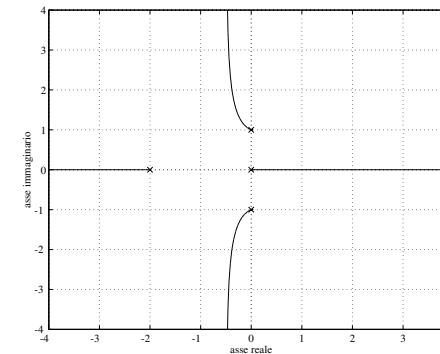


Figura 3.34: Luogo negativo delle radici per  $\hat{F}(s)$

del luogo

$$s^4 + 2s^3 + (K_G + 1)s^2 + (K_G + 2)s + 0.25K_G = 0.$$

Di conseguenza,  $s = -0.5$  è l'unico punto singolare del luogo.

Nelle Figg. 3.35–3.36 è mostrato il luogo delle radici corrispondente alla funzione di trasferimento ad anello aperto  $F(s) = G(s)P(s)$ . Qualsiasi valore positivo di  $K_G$  rende il sistema asintoticamente stabile ad anello chiuso. Per soddisfare la specifica sulla collocazione degli autovalori, è tuttavia necessario scegliere  $K_G$  superiore a un dato valore  $K_1$ . Allo scopo di determinare  $K_1$ , si applica il criterio di Routh al polinomio in  $z$  ottenuto dal denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso sostituendo alla variabile  $s$  la variabile  $(z - 0.3)$ , cioè

$$z^4 + 0.8z^3 + (K_G - 0.26)z^2 + (0.4K_G + 1.832)z + (0.04K_G - 0.5559).$$

Costruendo la relativa tabella, si ottiene  $K_1 = 13.90$ . Di conseguenza, la sintesi è completata con successo ponendo ad esempio

$$G(s) = 15 \frac{(s + 0.5)^2}{s(s^2 + 1)}.$$

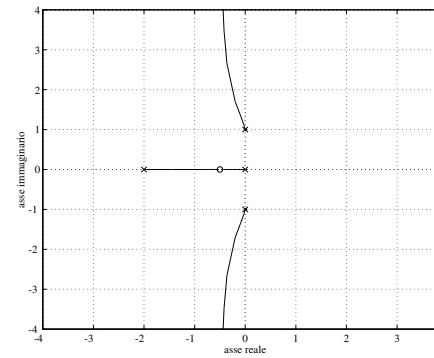


Figura 3.35: Luogo positivo delle radici per  $F(s)$

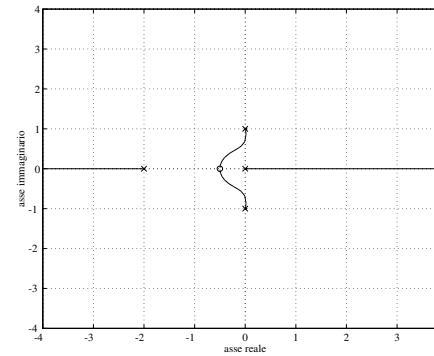


Figura 3.36: Luogo negativo delle radici per  $F(s)$

**Esercizio 3.6**

Si consideri nuovamente il sistema di controllo preso in esame nell'esercizio 2.4. Si determini, utilizzando il luogo delle radici, una funzione compensatrice  $G(s)$  tale che i poli del sistema ad anello chiuso abbiano tutti parte reale minore o uguale di  $-0.5$ .

Con riferimento alla Fig. 2.33, si ponga

$$\begin{aligned} P'(s) &= P(s) \frac{1}{s} = \frac{s+2}{s(64s^2 + 10s + 1)} \\ &= \frac{1}{64} \frac{s+2}{s(s+0.08+j0.1)(s+0.08-j0.1)}. \end{aligned}$$

La funzione compensatrice va ricercata nella forma

$$G(s) = K_G R(s).$$

Per verificare se il problema può essere risolto attraverso la scelta di un semplice guadagno (cioè ponendo  $R(s) = 1$ ), si procede al tracciamento del luogo delle radici ad anello chiuso per la funzione di trasferimento del ramo diretto

$$\hat{F}(s) = K'_G \frac{s+2}{s(s+0.08+j0.1)(s+0.08-j0.1)}$$

dove  $K'_G = K_G/64$ . La differenza tra il numero di poli e il numero di zeri è  $n - m = 2$ , e il luogo possiede al più  $n + m - 1 = 3$  punti singolari. L'esame dei versi di spostamento delle radici al crescere di  $K'_G$  indica la presenza di un punto singolare appartenente al luogo negativo. Il centro degli asintoti si trova in

$$s_0 = \frac{-0.16 + 2}{2} = 0.92.$$

Il luogo positivo e quello negativo delle radici sono riportati rispettivamente nelle Figg. 3.37-3.38. L'equazione che fornisce i potenziali punti singolari assume la forma

$$128s^3 + 394.24s^2 + 40.48s + 2 = 0.$$

Risolvendo quest'ultima, e sostituendo le radici nell'equazione del luogo, si constata che esiste un solo punto singolare in  $s = -2.97$ , appartenente come previsto al luogo negativo.

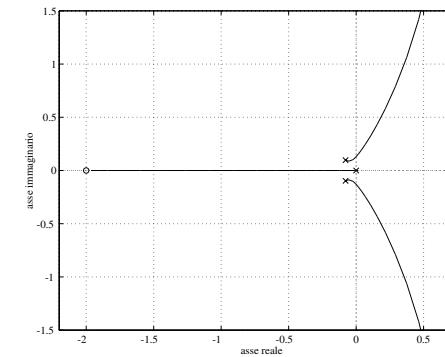


Figura 3.37: Luogo positivo delle radici per  $\hat{F}(s)$

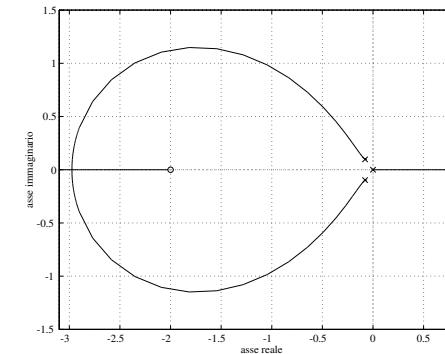


Figura 3.38: Luogo negativo delle radici per  $\hat{F}(s)$

Per raggiungere l'obiettivo della sintesi, è sufficiente ricorrere ad una coppia polo/zero che sposti il centro degli asintoti a sinistra del punto  $s = -0.5$ , e scegliere poi un valore sufficientemente elevato di  $K'_G$ . Ad esempio, ponendo

$$R(s) = \frac{s+3}{s+6.84},$$

il centro degli asintoti si colloca in  $s_0' = -1$ . Si noti che anche lo zero di  $R(s)$ , a cui convergerà un ramo del luogo positivo, è stato collocato a sinistra del punto  $s = -0.5$ , in vista della specifica sui poli ad anello chiuso.

Il luogo positivo delle radici ad anello chiuso associato alla funzione di trasferimento ad anello aperto  $F(s) = P'(s)G(s)$  è riportato in Fig. 3.39. Per evidenziare l'andamento del luogo nei pressi dell'origine, ne viene riportata una vista parziale ingrandita in Fig. 3.40. Si noti che non tutti i valori positivi di  $K'_G$  (e quindi di  $K_G$ ) rendono asintoticamente stabile il sistema ad anello chiuso. Ciò può essere facilmente verificato applicando il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$s(64s^2 + 10s + 1)(s + 6.84) + 64K'_G(s + 2)(s + 3).$$

In ogni caso, per soddisfare la specifica sulla collocazione dei poli, è necessario scegliere  $K'_G > K'_1 > 0$ , avendo indicato con  $K'_1$  il più grande valore del guadagno  $K'_G$  in corrispondenza al quale il luogo positivo intersecca la retta  $s = -0.5$ . Allo scopo di determinare  $K'_1$ , si applica il criterio di Routh al polinomio in  $z$  ottenuto dal precedente denominatore sostituendo alla variabile  $s$  la variabile  $(z - 0.5)$

$$z^4 + 4.99z^3 + (K'_G - 7.91)z^2 + (3.77 + 4K'_G)z + 3.75K'_G - 0.59.$$

Costruendo la relativa tabella, si ottiene  $K'_1 \approx 4260/64$ . Il controllore  $G(s)$  assicura dunque la collocazione desiderata dei poli purché  $K_G$  sia superiore o uguale a  $K_1 = 4260$ . In particolare, ponendo

$$G(s) = 4260 \frac{s+3}{s+6.84},$$

i poli ad anello chiuso si trovano in

$$p_1 = -1.72, \quad p_2 = -4.28, \quad p_{3,4} = -0.5 \pm j7.35.$$

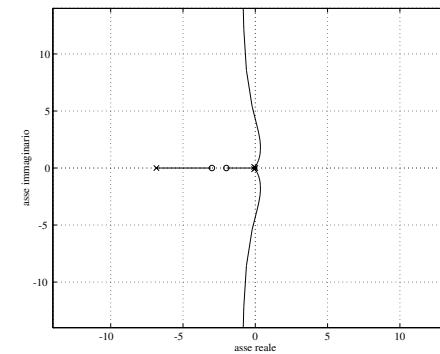


Figura 3.39: Luogo positivo delle radici per  $F(s)$

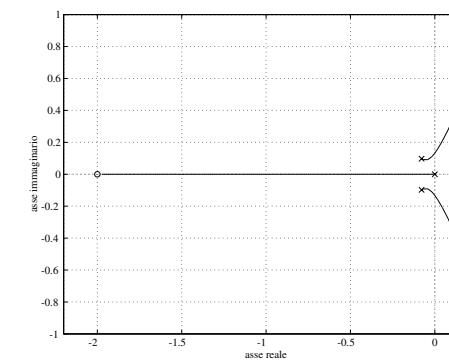


Figura 3.40: Luogo positivo delle radici per  $F(s)$ : particolare

Allo scopo di mettere in evidenza le differenze tra la sintesi basata sul luogo delle radici e quella nel dominio della frequenza, si possono confrontare le proprietà del sistema di controllo qui ottenuto, caratterizzato da una funzione di trasferimento ad anello aperto pari a

$$F(s) = 4260 \frac{s+3}{s+6.84} \frac{s+2}{s(64s^2 + 10s + 1)},$$

con quelle del sistema ricavato nell'esercizio 2.4, per il quale la medesima funzione valeva

$$\begin{aligned} F_{2.4}(s) &= 2057 \frac{1+0.3s}{1+\frac{0.3}{17}s} \frac{s+2}{s(64s^2 + 10s + 1)} \\ &= 22627 \frac{s+3.33}{s+36.66} \frac{s+2}{s(64s^2 + 10s + 1)}. \end{aligned}$$

Nella Fig. 3.41 sono riportati i diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$ , mentre la Fig. 3.42 mostra il modulo della corrispondente risposta armonica ad anello chiuso  $W(j\omega)$ . Tali diagrammi mostrano che si sono ottenuti un margine di fase di circa  $7^\circ$  e una pulsazione di attraversamento di oltre 7 rad/sec ad anello aperto, mentre ad anello chiuso la banda passante è superiore a 12 rad/sec e il modulo alla risonanza vale circa 19 dB.

Il confronto con le corrispondenti Figg. 2.36–2.38 evidenzia come, pur essendosi conseguiti due valori simili di banda passante, il modulo alla risonanza di  $W(j\omega)$  è notevolmente più elevato di quello di  $W_{2.4}(j\omega)$  e — corrispondentemente — il margine di fase di  $F(j\omega)$  è assai ridotto rispetto a quello di  $F_{2.4}(j\omega)$ . Ciò è legato al fatto che i due poli complessi di  $W(s)$  sono caratterizzati da un coefficiente di smorzamento molto basso (circa 0.07), come è evidente dalla Fig. 3.39. È facile verificare che la situazione non muta in modo apprezzabile neanche aumentando notevolmente il guadagno del controllore in  $F(s)$ , a causa del fatto che il centro degli asintoti del luogo delle radici si trova in  $s'_0 = -1$ .

Per aumentare in modo significativo il coefficiente di smorzamento dei poli complessi sarebbe necessario spostare ulteriormente a sinistra il centro degli asintoti. A questo scopo, il polo di  $G(s)$  dovrebbe essere scelto sensibilmente più grande (in valore assoluto). È interessante notare che la sintesi effettuata nell'esercizio 2.4 corrisponde proprio a questa logica, com'è confermato dal luogo delle radici ad anello chiuso per  $F_{2.4}(s)$ , riportato in Fig. 3.43 (si osservi in particolare la posizione dei poli ad anello

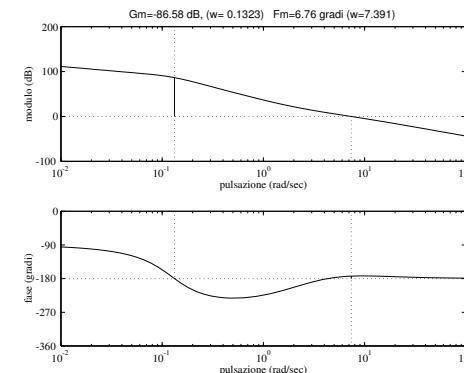


Figura 3.41: Diagrammi di Bode di  $F(j\omega)$

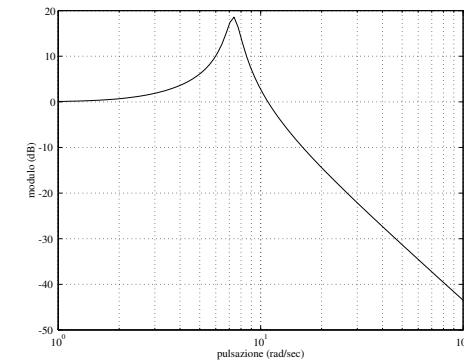


Figura 3.42: Diagrammi dei moduli di  $W(j\omega)$

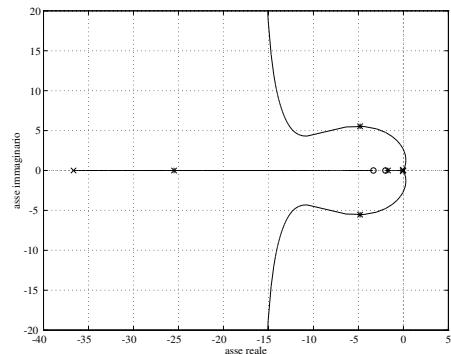


Figura 3.43: Luogo delle radici per  $F_{2,4}(s)$ . I poli ad anello chiuso in corrispondenza al valore scelto per il guadagno della funzione compensatrice sono contrassegnati da asterischi.

chiuso per il guadagno scelto per  $G(s)$ ). In effetti, spostare verso sinistra il polo di  $G(s)$  lasciandone inalterato lo zero corrisponde a introdurre una più marcata azione anticipatrice. Ciò implica un aumento del margine di fase ad anello aperto e una diminuzione del modulo alla risonanza ad anello chiuso.

### Esercizio 3.7

Si consideri il sistema di controllo a retroazione in Fig. 3.44, in cui si abbia

$$P(s) = \frac{1}{(s^2 + a^2)(s + 9)}, \quad G(s) = K.$$

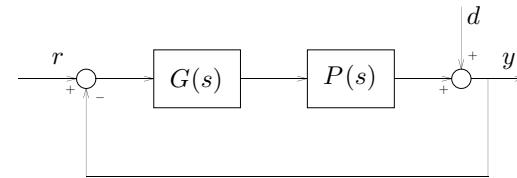


Figura 3.44: Sistema di controllo

Si determini per quali valori del parametro  $a$  è possibile, scegliendo opportunamente il valore di  $K$ , ottenere che tutti i poli del sistema ad anello chiuso siano reali e negativi. Scelti un valore di  $a$  e di  $K$  che soddisfano tale condizione, si calcoli la risposta in regime permanente ai disturbi

1.  $d(t) = A \sin at$ ;
2.  $d(t) = C\delta_{-1}(t)$ , con  $C$  costante.

---

Il tracciamento del luogo delle radici ad anello chiuso corrispondente alla funzione di trasferimento  $F(s) = P(s)G(s)$  ad anello aperto fornisce utili indicazioni sulla risoluzione del problema. La differenza tra il numero di poli e il numero di zeri è  $n - m = 3$ , e il luogo possiede al più  $n + m - 1 = 2$  punti singolari. Il centro degli asintoti si trova in

$$s_0 = \frac{-9}{3} = -3.$$

L'equazione che individua i punti singolari in questo caso assume la forma

$$3s^2 + 18s + a^2 = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$s_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 3a^2}}{3}.$$

Esse sono reali (e quindi corrispondono certamente a punti singolari) se e solo se è verificata la condizione

$$9^2 - 3a^2 \geq 0, \quad \text{cioè} \quad a^2 \leq 27.$$

In particolare, per  $a^2$  che assume valori all'interno dell'intervallo  $[0, 27]$ , la posizione del primo punto singolare  $s_1$  varia tra 0 (per  $a = 0$ ) e  $-3$  (per  $a^2 = 27$ ), mentre il secondo punto singolare  $s_2$  si sposta tra  $-6$  (per  $a = 0$ ) e  $-3$  (per  $a^2 = 27$ ). In ogni caso, questi due punti appartengono al luogo negativo.

Se invece le radici sono complesse coniugate, il che avviene per  $a^2 > 27$ , esse non corrispondono a punti singolari del luogo, come può essere facilmente verificato sostituendo tali radici nell'equazione dello stesso.

Di conseguenza, il luogo positivo delle radici ha l'andamento qualitativo riportato nelle Figg. 3.45–3.46 se  $a^2 > 27$ , mentre per il caso  $a^2 < 27$  esso ha l'aspetto illustrato in Figg. 3.47–3.48. Nel secondo caso, esistono valori negativi di  $K$  per cui il sistema ad anello chiuso ha tre poli reali negativi, mentre nel primo si hanno sempre un polo reale e due complessi coniugati. Va osservato come la presenza di due punti singolari appartenenti al luogo negativo non poteva essere prevista semplicemente a partire dall'osservazione dei versi di percorrenza delle radici sull'asse reale.

A scopo esemplificativo, si ponga  $a^2 = 24$ , cui corrispondono  $s_1 = -2$  e  $s_2 = -4$ . La funzione di trasferimento ad anello aperto è

$$F(s) = K \frac{1}{(s+9)(s^2+24)}$$

e il luogo relativo ottenuto con il calcolatore è riportato nelle Figg. 3.49–3.50. Per individuare l'intervallo di valori negativi di  $K$  che soddisfano la specifica del problema, è sufficiente calcolare i valori assunti da  $K$  in corrispondenza all'origine del piano complesso e ai punti  $s_1$  e  $s_2$ . Infatti, indicando tali valori rispettivamente con  $K_0$ ,  $K_1$  e  $K_2$ , l'esame della Fig. 3.48 porta a concludere che i tre poli ad anello chiuso sono reali e negativi per

$$\max(K_2, K_0) \leq K \leq K_1.$$

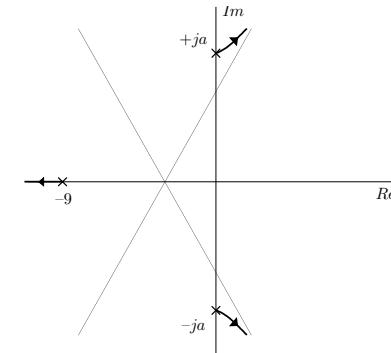


Figura 3.45: Andamento del luogo positivo per  $F(s)$  nel caso  $a^2 > 27$

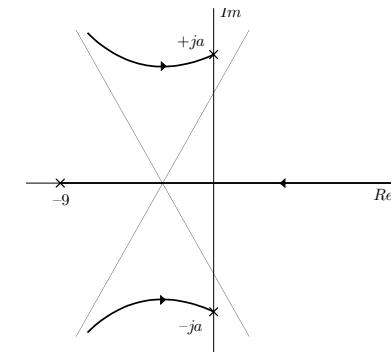
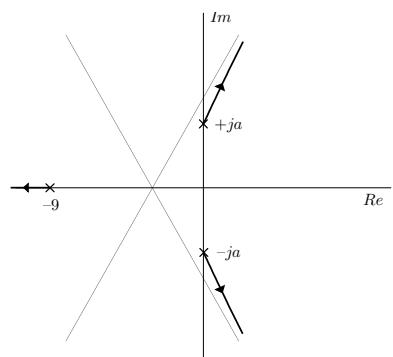
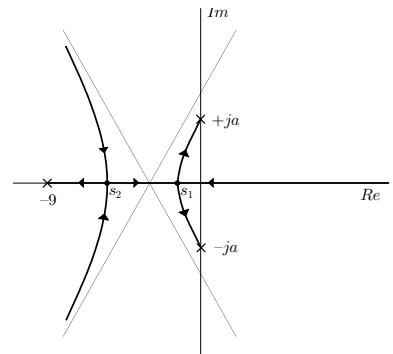
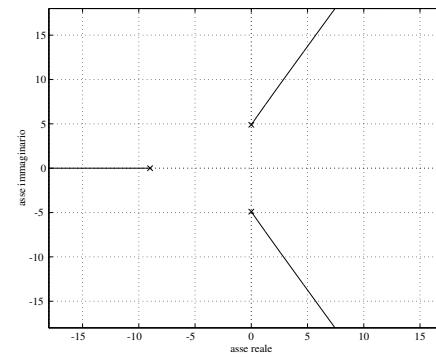
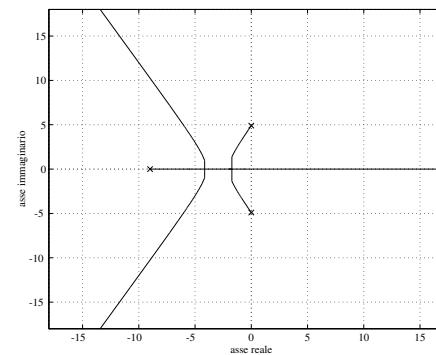
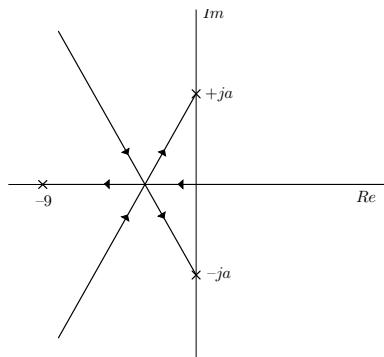


Figura 3.46: Andamento del luogo negativo per  $F(s)$  nel caso  $a^2 > 27$

Figura 3.47: Andamento del luogo positivo per  $F(s)$  nel caso  $a^2 < 27$ Figura 3.48: Andamento del luogo negativo per  $F(s)$  nel caso  $a^2 < 27$ Figura 3.49: Luogo positivo delle radici per  $F(s)$  nel caso  $a^2 = 24$ Figura 3.50: Luogo negativo delle radici per  $F(s)$  nel caso  $a^2 = 24$

Figura 3.51: Luogo negativo delle radici per  $F(s)$  nel caso  $a^2 = 27$ 

Per determinare  $K_0$ ,  $K_1$  e  $K_2$ , basta sostituire nell'equazione del luogo

$$(s^2 + 24)(s + 9) + K = 0$$

i corrispondenti valori di  $s$ . Si trova facilmente

$$K_0 = -216, \quad K_1 = -196, \quad K_2 = -200.$$

Per il caso  $a^2 = 24$ , l'intervallo ammissibile di valori per  $K$  è dunque  $[-200, -196]$ .

Si noti che, se  $a^2 = 27$ , i due punti singolari coincidono in  $s_{1,2} = -3$ . Di conseguenza, quest'ultima è una radice tripla dell'equazione del luogo. Nel punto  $(-3, 0)$  vengono quindi a confluire sei rami del luogo negativo, alternativamente convergenti e divergenti, così come mostrato in Fig. 3.51. L'unico valore di  $K$  che soddisfa le specifiche è  $K = -216$ , e infatti in corrispondenza l'equazione del luogo assume la forma

$$(s + 3)^3 = 0.$$

Venendo alla seconda parte dell'esercizio, la risposta a regime permanente per un disturbo  $d(t) = A \sin at$  è pari a

$$\tilde{y}_d(t) = |W_d(ja)|A \sin(at + \angle W_d(ja)),$$

avendo indicato con  $W_d(s)$  la funzione di trasferimento disturbo-uscita. Essendo

$$W_d(j\omega) = \frac{1}{1 + F(j\omega)} = \frac{(s + 9)(s^2 + a^2)}{(s + 9)(s^2 + a^2) + K},$$

la  $W_d(j\omega)$  ha due zeri in  $s = \pm ja$ , e quindi la risposta suddetta è nulla.

Infine, la risposta a regime per un disturbo costante  $d(t) = C\delta_{-1}(t)$  vale

$$CW_d(s)|_{s=0} = \frac{C}{1 + KP(0)} = \frac{9a^2C}{9a^2 + K}.$$

**Esercizio 3.8**

Si consideri il sistema di controllo di Fig. 3.52, in cui il processo ha funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{s+2}{s^2+1}.$$

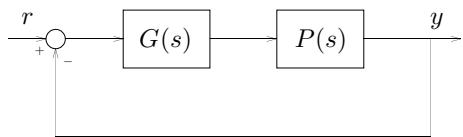


Figura 3.52: Sistema di controllo

Si progetti un controllore  $G(s)$  tale da soddisfare le seguenti specifiche:

- a) errore  $r - y$  nullo a regime permanente per ingressi  $r$  a gradino;
- b) stabilità asintotica ad anello chiuso;
- c)  $G(s)$  di ordine minimo.

Inoltre, si verifichi se con la medesima struttura di  $G(s)$  è possibile ottenere che tutti i poli ad anello chiuso abbiano la stessa parte reale  $-\alpha < 0$ , e si determini il valore di  $\alpha$ .

Infine, si risolve il precedente problema di sintesi per il caso in cui la specifica c) sia sostituita con la

- c')  $G(s)$  strettamente propria.

Per garantire errore nullo in corrispondenza a ingressi a gradino è necessario inserire nella funzione di trasferimento del controllore  $G(s)$  un polo nell'origine. Si ottiene quindi il processo modificato

$$\hat{F}(s) = \frac{s+2}{s(s^2+1)}.$$

La funzione compensatrice va ricercata nella forma

$$G(s) = \frac{K_G}{s} R(s).$$

In considerazione della richiesta di un controllore a dimensione minima, è opportuno verificare se il problema può essere risolto attraverso la scelta di un semplice guadagno (cioè ponendo  $R(s) = 1$ ). Si procede dunque al tracciamento del luogo delle radici ad anello chiuso per la funzione di trasferimento  $K_G \hat{F}(s)$ .

La differenza tra il numero di poli e il numero di zeri è  $n - m = 2$ , e il luogo possiede al più  $n + m - 1 = 3$  punti singolari. L'esame dei versi di spostamento delle radici al crescere di  $K_G$  indica la presenza di un punto singolare appartenente al luogo negativo. Il centro degli asintoti si trova in  $s_0 = 1$ . Il luogo delle radici, riportato nelle Figg. 3.53-3.54, mostra che non è possibile ottenere stabilità asintotica con un semplice guadagno.

Tuttavia, per mantenere minima la dimensione del controllore, è opportuno esplorare la possibilità di stabilizzare il sistema aggiungendo uno zero a parte reale negativa in  $G(s)$

$$G(s) = K_G \frac{s+z}{s}, \quad K_G > 0, z > 0.$$

La differenza tra il numero di poli e il numero di zeri diviene pari a 1. Di conseguenza, essendo il sistema a fase minima, si avrà stabilità asintotica ad anello chiuso per  $K_G$  positivo e sufficientemente elevato.

Il luogo positivo delle radici si modifica come in Fig. 3.55, dove si è posto  $z = 5$  a scopo esemplificativo. Il particolare andamento mostrato si deduce dall'applicazione del criterio di Routh. Il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso è

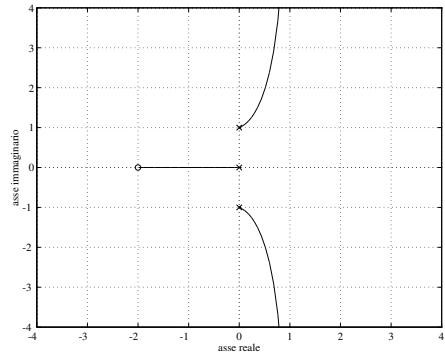
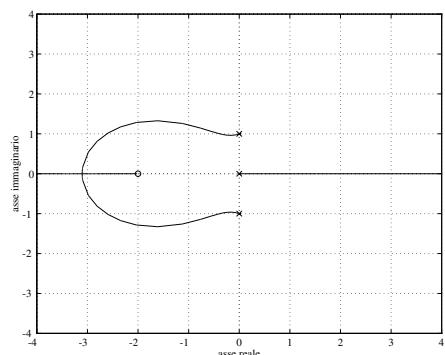
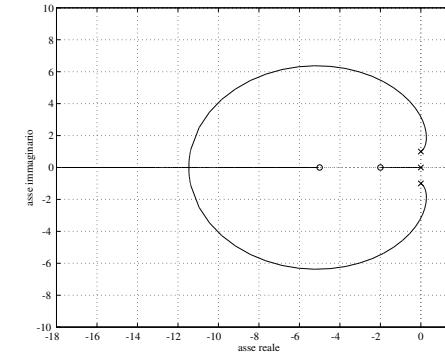
$$s^3 + K_G s^2 + (K_G(z+2) + 1)s + 2K_G z.$$

La corrispondente tabella è

$1$	$K_G(z+2) + 1$
$K_G$	$2K_G z$
$K_G(z+2) + 1 - 2z$	
$2K_G z$	

Di conseguenza, si ha stabilità asintotica per  $K_G > 0, z > 0$  e

$$K_G > \frac{2z-1}{z+2}.$$

Figura 3.53: Luogo positivo delle radici per  $\hat{F}(s)$ Figura 3.54: Luogo negativo delle radici per  $\hat{F}(s)$ Figura 3.55: Luogo delle radici per  $G(s)P(s)$ , con  $z = 5$ 

Ad esempio, per  $z = 5$  deve essere  $K_G > 9/7$ . Una scelta possibile è perciò

$$G_1(s) = 2 \frac{s + 5}{s}.$$

Un'attenta analisi del luogo di Fig. 3.55 mostra che con la stessa struttura del controllore — e in particolare per qualsiasi  $z > 0$  — è possibile ottenere tre poli stabili a parte reale uguale in corrispondenza a un particolare valore di  $K_G$ . Ciò può essere provato analiticamente come segue.

Per ottenere tre poli a parte reale pari a  $-\alpha$ , il suddetto denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso deve coincidere con

$$(s + \alpha)(s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta) = s^3 + 3\alpha s^2 + (3\alpha^2 + \beta^2)s + \alpha\beta^2 + \alpha^3 = 0,$$

per opportuni valori reali di  $K_G$ , di  $\alpha$  e di  $\beta$ . Dal principio di identità dei polinomi si ottiene il seguente sistema

$$\begin{aligned} K_G &= 3\alpha \\ K_G(z + 2) + 1 &= 3\alpha^2 + \beta^2 \\ 2K_G z &= \alpha\beta^2 + \alpha^3. \end{aligned}$$

Sostituendo la prima equazione nella terza si ottiene

$$\beta^2 = 6z - \alpha^2,$$

che nella seconda dà

$$2\alpha^2 - 3(z+2)\alpha + 6z - 1 = 0.$$

Le radici di questa equazione sono

$$\alpha_{1,2} = \frac{3(z+2) \pm \sqrt{9z^2 - 12z + 44}}{4}.$$

Si noti che, essendo  $9z^2 - 12z + 44 > 0$  per qualsiasi  $z$  reale positivo, tali radici sono sempre reali. Inoltre,  $\alpha_1$  può essere negativa o positiva, mentre  $\alpha_2$  è sempre positiva.

Se entrambe le radici sono positive, si deve scegliere quella tale che  $6z - \alpha^2 > 0$ , cioè  $\alpha_1$ , altrimenti si deve scegliere  $\alpha_2$ . A scopo illustrativo, si consideri il primo caso. La sintesi è completata scegliendo  $K_G = 3\alpha_1$ , cioè

$$G_2(s) = 3\alpha_1 \frac{s+z}{s}.$$

In corrispondenza, la parte immaginaria dei due poli complessi coniugati sarà pari a  $\beta = \sqrt{6z - \alpha_1^2}$ .

Ad esempio, per  $z = 5$  si ha  $\alpha_1 = 1.63$  e  $K_G = 4.90$ , cui corrispondono i tre poli ad anello chiuso

$$p_1 = -1.63, \quad p_{2,3} = -1.63 \pm j5.22.$$

Venendo all'ultimo quesito, il modo più diretto di ottenere una soluzione consiste nell'aggiungere alla funzione compensatrice  $G_1(s)$  individuata in precedenza, che garantisce la stabilità, un polo sufficientemente lontano a parte reale negativa:

$$G'_1(s) = G_1(s) \frac{1}{1+\tau s} = 2 \frac{s+5}{s(1+\tau s)}, \quad 0 < \tau \ll 1.$$

Com'è noto, infatti, dato un sistema a retroazione asintoticamente stabile, il sistema da questo ottenuto aggiungendo in catena diretta un fattore  $1/(1+\tau s)$  è anch'esso asintoticamente stabile per  $\tau$  positivo e sufficientemente

piccolo. Si osservi tra l'altro che un fattore di tale genere non altera il coefficiente di guadagno del ramo diretto.

La determinazione di un opportuno valore di  $\tau$  si può effettuare con il criterio di Routh. La funzione di trasferimento del ramo diretto è

$$F'(s) = G'_1(s)P(s) = 2 \frac{(s+2)(s+5)}{s(s^2+1)(1+\tau s)},$$

e perciò il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso diviene

$$s(s^2+1)(1+\tau s) + 2(s+2)(s+5) = \tau s^4 + s^3 + (\tau+2)s^2 + 15s + 20.$$

La tabella di Routh è

$\tau$	$\tau+2$	20
1	15	
$1 - 7\tau$	10	
$1 - 21\tau$		
$1 - 7\tau$		
	10	

Di conseguenza, il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile per  $\tau < 1/21$ . Ad esempio, si può scegliere  $\tau = 1/25$ , ottenendo il controllore

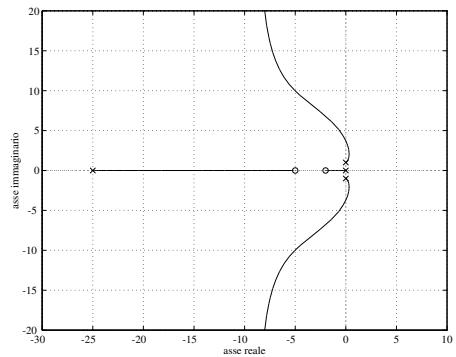
$$G'_1(s) = 2 \frac{s+5}{s(1+0.04s)} = 50 \frac{s+5}{s(s+25)}.$$

Informazioni sulla nuova collocazione dei poli ad anello chiuso si possono ricavare dalla Fig. 3.56, che mostra il luogo delle radici associato alla funzione di trasferimento ad anello aperto

$$F''(s) = K F'(s) = K G'_1(s) P(s)$$

al variare di  $K$ . A seguito della modifica operata nel controllore, l'eccesso poli/zeri è diventato pari a 2, con centro degli asintoti in  $-9$ . Applicando il criterio di Routh, è facile verificare che si ha stabilità asintotica purché  $K$  sia maggiore di  $58/63$ . Come previsto, il valore  $K = 1$  è all'interno dell'intervallo di stabilità; i corrispondenti poli ad anello chiuso si trovano in

$$p'_1 = -23.47, \quad p'_2 = -1.43, \quad p'_{3,4} = -0.05 \pm j3.86.$$

Figura 3.56: Luogo delle radici per  $KG'_1(s)P(s)$ 

Si osservi che i due poli complessi coniugati hanno un coefficiente di smorzamento molto basso. In questo caso, per porre rimedio a questa situazione è sufficiente incrementare il valore di  $K$ . Ad esempio, ponendo

$$G''_1(s) = 10G'_1(s) = 500 \frac{s+5}{s(s+25)}.$$

i poli ad anello chiuso si spostano in

$$p''_1 = -7.90, \quad p''_2 = -1.87, \quad p''_{3,4} = -7.60 \pm j16.71.$$

Va tuttavia sottolineato che non sempre aumentando  $K$  è possibile aumentare il coefficiente di smorzamento. Ad esempio, se a seguito dell'introduzione del polo lontano l'eccesso poli/zeri fosse stato pari a 3, si sarebbe ottenuta stabilità per un intervallo limitato di valori di  $K$ , e in ogni caso il sistema ad anello chiuso sarebbe diventato instabile per valori arbitrariamente grandi di  $K$  (si pensi alla configurazione degli asintoti per il caso  $n - m = 3$ ).

**Esercizio 3.9**

Si consideri il sistema di controllo a retroazione in Fig. 3.57, in cui si abbia

$$P(s) = \frac{s-1}{s(s-2)}.$$

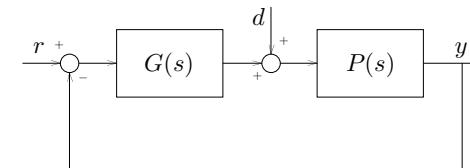


Figura 3.57: Sistema di controllo

Si progetti la funzione di trasferimento del controllore  $G(s)$  in modo tale che:

- a) il sistema ad anello chiuso sia asintoticamente stabile;
- b) si abbia risposta nulla a regime permanente per un disturbo  $d$  costante;
- c) il controllore abbia dimensione minima.

Al termine, si verifichi il soddisfacimento della prima specifica tracciando il luogo delle radici.

La funzione di trasferimento del controllore avrà in generale la forma

$$G(s) = \frac{K_G}{s^h} R(s).$$

Allo scopo di soddisfare la seconda specifica, è sufficiente introdurre un polo nell'origine in  $G(s)$  ( $h = 1$ ).

Per verificare se è possibile ottenere la stabilità asintotica per opportuni valori di  $K_G$  ponendo semplicemente  $R(s) = 1$ , si traccia il luogo delle radici ad anello chiuso relativo alla funzione di trasferimento ad anello aperto

$$\hat{F}(s) = \frac{K_G}{s} P(s) = K_G \frac{s-1}{s^2(s-2)}.$$

Il tracciamento è in questo caso assai semplice e dà come risultato il luogo positivo di Fig. 3.58 e quello negativo di Fig. 3.59. L'esame del luogo mostra che non è possibile stabilizzare il sistema con un semplice guadagno.

È facile vedere che anche l'aggiunta di uno zero non modifica la situazione. Infatti, ponendo

$$G(s) = K_G \frac{s+z}{s}$$

il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso diviene

$$s^2(s-2) + K_G(s+z)(s-1) = s^3 + (K_G - 2)s^2 + K_G(z-1)s - K_Gz.$$

Si constata immediatamente che non esistono valori di  $K_G$  e  $z$  tali da rendere tutti positivi i coefficienti di tale polinomio. Di conseguenza, la precedente struttura della funzione compensatrice non è in grado di stabilizzare il sistema ad anello chiuso, e si rende necessaria l'introduzione di ulteriori poli in  $G(s)$ .

A causa della presenza di uno zero a parte positiva, un polo a parte reale positiva e un polo doppio nell'origine, non è immediato dedurre dall'esame del luogo la struttura di una efficace azione compensatrice. In situazioni di tale genere, può essere conveniente ricorrere ad una tecnica diversa, di natura sostanzialmente analitica. Esso consiste nel cercare di imporre alla funzione di trasferimento ad anello chiuso un denominatore assegnato che garantisca la stabilità asintotica, secondo un approccio in larga misura riducibile a una *sintesi diretta*. Nel seguito, viene illustrato l'uso di questo metodo per risolvere il problema in esame.

In considerazione della richiesta di una funzione compensatrice a dimensione minima, conviene esplorare la possibilità di risolvere il problema con una funzione compensatrice  $G(s)$  complessivamente di ordine 2. A tale scopo, si ponga

$$K_G R(s) = C(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s + d},$$

dove  $a, b, c$  e  $d$  sono costanti da determinare. Con tale scelta, la funzione compensatrice ha la struttura

$$G(s) = \frac{C(s)}{s} = \frac{as^2 + bs + c}{s(s+d)},$$

che è propria e quindi realizzabile. Il denominatore  $d_W(s)$  della funzione di trasferimento ad anello chiuso  $W(s)$  diviene

$$d_W(s) = s^2(s+d)(s-2) + (as^2 + bs + c)(s-1)$$

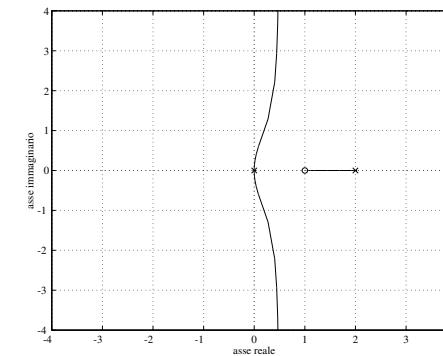


Figura 3.58: Luogo positivo delle radici per  $\hat{F}(s)$

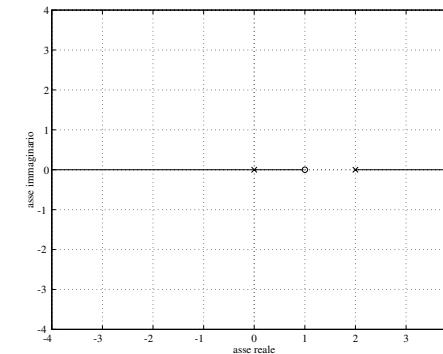


Figura 3.59: Luogo negativo delle radici per  $\hat{F}(s)$

$$= s^4 + (a+d-2)s^3 + (b-a-2d)s^2 + (c-b)s - c = 0.$$

Se  $a, b, c$  e  $d$  vengono scelte in modo tale che  $d_W(s)$  sia un *polinomio di Hurwitz* (e cioè, tale da avere solo radici con parte reale negativa), e se non avvengono cancellazioni di zeri e/o poli con parte reale positiva tra  $G(s)$  e  $P(s)$ , si ottiene un sistema ad anello chiuso asintoticamente stabile. Si noti che con questo approccio si hanno a disposizione quattro gradi di libertà per impostare la collocazione delle quattro radici o, il che è lo stesso, il valore dei quattro coefficienti del polinomio  $d_W(s)$  (che è monico).

Ad esempio, si assuma di voler impostare il seguente denominatore alla funzione di trasferimento  $W(s)$ :

$$d_W^1(s) = (s+1)^4 = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1,$$

in modo che tutti i poli ad anello chiuso si trovino in  $-1$ . Dal principio di identità dei polinomi, si ottiene il sistema lineare di equazioni

$$\begin{aligned} a+d-2 &= 4 \\ b-a-2d &= 6 \\ c-b &= 4 \\ -c &= 1. \end{aligned}$$

Con semplici passaggi si ricava

$$a = 23, \quad b = -5, \quad c = -1, \quad d = -17.$$

Il corrispondente compensatore ha funzione di trasferimento

$$G_1(s) = \frac{C_1(s)}{s} = \frac{23s^2 - 5s - 1}{s(s-17)} = \frac{23(s+0.1264)(s-0.3438)}{s(s-17)}.$$

Si noti che  $G_1(s)$  è di per sé instabile e a fase non minima. Tuttavia, non essendoci alcuna cancellazione tra poli e zeri di  $G(s)$  e  $P(s)$ , la stabilità ad anello chiuso è assicurata.

Un tracciamento qualitativo del luogo positivo delle radici ad anello chiuso al variare di  $K_G$  per

$$F_1(s) = KC_1(s)\hat{F}(s) = K \frac{23(s+0.1264)(s-0.3438)}{(s-17)} \frac{s-1}{s^2(s-2)}$$

è riportato in Fig. 3.60. Come è naturale, tale luogo ha un punto singolare triplo (una radice quadruplicata dell'equazione del luogo) in  $s = -1$ , ottenuto in corrispondenza a  $K = 1$  ( $K_G = 23$ ).

Va tuttavia osservato che, in generale, la sensibilità delle soluzioni dell'equazione del luogo rispetto a variazioni dei parametri — e segnatamente rispetto a variazioni del guadagno del ramo diretto — è assai elevata in corrispondenza a punti singolari multipli. In effetti, si può verificare che, se nella sintesi del controllore si perturba quasi impercettibilmente il valore nominale di  $K = 1$  ponendo

$$K = 1.001,$$

si ottengono i seguenti poli ad anello chiuso

$$p_1 = -1.6580, \quad p_2 = -0.6313, \quad p_{3,4} = -0.8668 \pm j 0.4526,$$

sensibilmente diversi rispetto a quelli desiderati. Per questo motivo, è spesso preferibile in pratica richiedere valori *distinti* per i poli ad anello chiuso. Altre considerazioni sulla scelta della dinamica ad anello chiuso sono contenute negli esercizi del capitolo 4, e in particolare nell'esercizio 4.1.

Sulla base della precedente osservazione, si può ad esempio modificare la sintesi fin qui effettuata in modo tale da impostare alla funzione di trasferimento  $W(s)$  il denominatore

$$d_W^2(s) = (s+1)(s+2+j)(s+2-j)(s+10) = s^4 + 15s^3 + 59s^2 + 95s + 50.$$

Procedendo in modo analogo a quanto visto prima, si ricava la soluzione

$$a = 238, \quad b = -145, \quad c = -50, \quad d = -221.$$

Si ha allora

$$C_2(s) = \frac{238s^2 - 145s - 50}{s - 221},$$

e il corrispondente compensatore ha funzione di trasferimento

$$G_2(s) = \frac{C_2(s)}{s} = \frac{238s^2 - 145s - 50}{s(s-221)} = \frac{238(s+0.2457)(s-0.8550)}{s(s-221)}.$$

Anche questo compensatore, pur essendo di per sé instabile e a fase non minima, garantisce la stabilità del sistema ad anello chiuso.

In Fig. 3.61 è mostrato un tracciamento qualitativo del luogo positivo delle radici ad anello chiuso al variare di  $K_G$  per

$$F_2(s) = KC_2(s)\hat{F}(s) = K \frac{238(s + 0.2457)(s - 0.8550)}{(s - 221)} \frac{s - 1}{s^2(s - 2)}.$$

Diversamente dal caso di  $F_1(s)$ , tale luogo ha esclusivamente punti singolari semplici.

Per verificare la minore sensibilità dei poli ad anello chiuso rispetto ai parametri di tale controllore, si è perturbato anche in questo caso il valore nominale di  $K_G$  ponendo

$$K = 1.001.$$

I poli ad anello chiuso divengono

$$p_1 = -10.4592, \quad p_2 = -0.9670, \quad p_{3,4} = -1.9059 \pm j 1.1471,$$

tutti e quattro ragionevolmente prossimi ai valori desiderati.

In sostanza, il problema posto è risolubile con un compensatore di dimensione pari a 2. Va tuttavia sottolineato che la tecnica qui utilizzata non garantisce l'esistenza di una soluzione nel caso sia necessario introdurre nel compensatore  $G(s)$  poli fissi nell'origine. In altri termini, in tale situazione la risolubilità del sistema lineare di equazioni va accertata di volta in volta. In effetti, il caso presente — in cui il compensatore include un *unico* polo fisso nell'origine — costituisce un'eccezione, poiché il sistema suddetto è sempre risolubile. Com'è noto, una tecnica più generale consiste nell'assegnare alla funzione  $C(s)$  la seguente struttura:

$$C(s) = \frac{\alpha_r s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}{s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0},$$

dove  $n$  è l'ordine del processo da stabilizzare. Si può infatti dimostrare che in questo modo è sempre possibile imporre un arbitrario denominatore alla funzione di trasferimento ad anello chiuso. Nel caso in esame, essendo l'ordine di  $\hat{F}(s)$  pari a 3, tale metodo condurrebbe a una funzione  $C(s)$  di ordine 2, e quindi a un compensatore  $G(s) = C(s)/s$  di ordine 3.

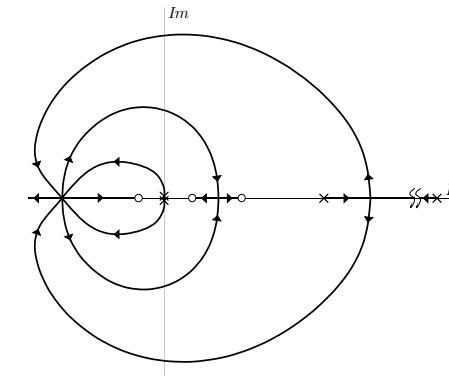


Figura 3.60: Andamento del luogo positivo delle radici per  $F_1(s)$

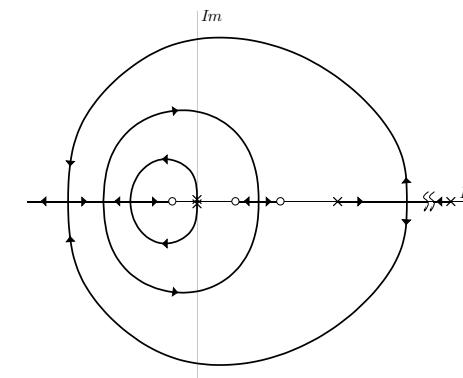


Figura 3.61: Andamento del luogo positivo delle radici per  $F_2(s)$

### 3.2 Esercizi proposti

#### Esercizio 3.10

Si consideri la funzione di trasferimento ad anello aperto

$$F(s) = K \frac{s-1}{s(s^2+s+1)}.$$

Si tracci il luogo delle radici ad anello chiuso al variare di  $K$ , determinando in particolare per quali valori di  $K$  i rami attraversano l'asse immaginario e la configurazione dei poli in corrispondenza al valore  $K = -1$ .

---

#### Esercizio 3.11

Si disegni il luogo delle radici, positivo e negativo, associato alla funzione di trasferimento ad anello aperto

$$F(s) = K \frac{s^2 + 2}{s(s+2)^2(s+5)},$$

determinando i valori di  $K$  in corrispondenza a cui tutti i poli ad anello chiuso sono contenuti nel semipiano sinistro del piano complesso.

---

#### Esercizio 3.12

Si consideri un sistema di controllo a retroazione, caratterizzato dalla funzione di trasferimento ad anello aperto

$$F(s) = K \frac{s+1}{s(s-2)(s+p)}.$$

Si mostri che, al variare del parametro  $p$  nell'intervallo  $[1, \infty]$ , il corrispondente luogo delle radici ad anello chiuso al variare di  $K$  può possedere uno oppure tre punti singolari. In particolare, si determini il valore di  $p$  in corrispondenza al quale si ha il passaggio dall'una all'altra configurazione.

---

#### Esercizio 3.13

Sia dato il sistema di controllo a retroazione il cui schema è indicato in Fig. 3.62.

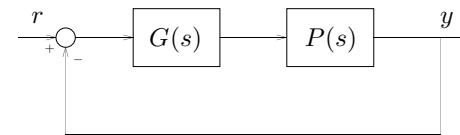


Figura 3.62: Sistema di controllo

Sintetizzare la funzione di trasferimento  $G(s)$  del controllore in modo tale che il sistema ad anello chiuso risulti stabile asintoticamente, nei seguenti casi:

$$P(s) = \frac{1-s}{s(s^2+s+1)};$$

$$P(s) = \frac{s+2}{s^2(s-1)};$$

$$P(s) = \frac{s+2}{(s^2+1)(s+2)};$$

$$P(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2-s+1)};$$

$$P(s) = \frac{0.1-s}{(s-0.2)(s^2+s+1)};$$

$$P(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s+2)};$$

$$P(s) = \frac{s^2+s+1}{s(s-1)(s+0.5)};$$

**Esercizio 3.14**

Si consideri nuovamente il sistema di controllo a retroazione il cui schema è indicato in Fig. 3.62. Si sintetizzi la funzione di trasferimento  $G(s)$  del controllore in modo tale da imporre che i poli ad anello chiuso abbiano parte reale non superiore a  $-1$ , nei seguenti casi:

$$P(s) = \frac{4-s}{s(s+8)};$$

$$P(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(1-s)(s+2)(s+5)};$$

$$P(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{s(s+3)(s+10)};$$

$$P(s) = \frac{s^2 + 9s + 10}{(s+1)(s+4)(s+8)};$$

$$P(s) = \frac{(1-s)(s+2)}{(s+1)(s+5)(s+20)};$$

$$P(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s-5)(s+20)};$$

**Esercizio 3.15**

Sia dato il processo avente la seguente funzione di trasferimento

$$P(s) = 3 \frac{s + 5/3}{(s-1)(s+2)^2},$$

inserito nello schema di controllo a retroazione di Fig. 3.62. Assumendo  $G(s) = K$ , si determinino i valori di  $K$  in corrispondenza ai quali tutti i poli ad anello chiuso risultano a parte reale negativa.

**Esercizio 3.16**

Si consideri ancora il sistema di controllo a retroazione di Fig. 3.62, in cui

$$G(s) = \frac{1 - \tau s}{s + 1.8}, \quad P(s) = \frac{1}{s}.$$

Si determini per quali valori del parametro  $\tau > 0$  i poli ad anello chiuso sono contenuti nella regione del piano complesso caratterizzata da uno smorzamento superiore a  $\zeta = 1/\sqrt{2}$ .

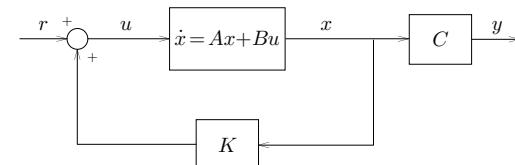


Figura 4.1: Un sistema controllato mediante reazione dallo stato

## Capitolo 4

# SINTESI NEL DOMINIO DEL TEMPO

### 4.1 Esercizi svolti

Questo capitolo raccoglie alcuni esercizi di sintesi nel dominio del tempo, basati sull'uso di rappresentazioni nello spazio di stato. In particolare, vengono proposti e svolti problemi di assegnazione degli autovalori sia mediante reazione dallo stato che — con l'ausilio di osservatori asintotici — dall'uscita. Inoltre, vengono evidenziati gli aspetti specifici di questo tipo di sintesi rispetto ai metodi usati nei capitoli precedenti.

#### Esercizio 4.1

*Si consideri il sistema di controllo a retroazione di Fig. 4.1, in cui si abbia*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Mediante opportune matrici  $K_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) di retroazione dallo stato, si assegnino le seguenti terne di autovalori al sistema ad anello chiuso:

1.  $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = -0.5 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$
2.  $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = -2 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.  $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = -4 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

4.  $\lambda_1 = -0.9420, \lambda_{2,3} = -0.7455 \pm j0.7112$

- b) Si tracci il diagramma di Bode del modulo della risposta armonica ad anello chiuso per ognuno dei quattro casi suddetti, e si determini in quale caso si ottiene la banda passante più elevata.
- c) Come si può completare lo schema di controllo a retroazione in modo tale da ottenere errore a regime nullo in corrispondenza a un riferimento  $r$  a gradino?
- d) Tenendo conto della modifica del punto precedente, quali previsioni qualitative si possono fare sulla rapidità di risposta e sullo sforzo di controllo richiesto per ognuno dei quattro casi?

---

E' necessario innanzitutto verificare la raggiungibilità del sistema assegnato, che ha dimensione 3. A questo scopo, ricaviamo la matrice di raggiungibilità

$$P = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

che ha rango pieno, come è facile verificare.

In generale, per calcolare la matrice  $K$  tale che  $A+BK$  abbia il polinomio caratteristico assegnato  $p^*(\lambda)$ , si può usare la *formula di Ackermann*:

$$K = -\mu p^*(A),$$

dove  $\mu$  è l'ultima riga della matrice  $P^{-1}$  e  $p^*(A)$  è la matrice ottenuta sostituendo in  $p^*(\cdot)$  la matrice  $A$  allo scalare  $\lambda$ . Essendo in questo caso

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il calcolo di  $p^*(A)$  va effettuato a partire dalla particolare terna di autovalori che si desidera assegnare. Un esame dei casi 1., 2. e 3. mostra che è conveniente impostare il problema in modo parametrico, ovvero cercare di imporre la terna

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2,3} = -\alpha \pm j \frac{\sqrt{3}}{2},$$

con  $\alpha > 0$ . Si ha quindi

$$p_\alpha^*(A) = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I) = (A + I) \left( (A + \alpha I)^2 + \frac{3}{4} I \right),$$

dove  $I$  indica la matrice identità  $3 \times 3$ . Si trova facilmente

$$p_\alpha^*(A) = \begin{pmatrix} -4\alpha & 2\alpha^2 + 4\alpha - 1/2 & \alpha^2 + 2\alpha - 1/4 \\ -\alpha^2 - 2\alpha + 1/4 & 2\alpha^2 - 1/2 & \alpha^2 - 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui

$$K = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} p_\alpha^*(A) = -\begin{pmatrix} \alpha^2 - 2\alpha - 1/4 & 4\alpha & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

In particolare, per  $\alpha = 0.5$  si ha

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

per  $\alpha = 2$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1/4 & -8 & -4 \end{pmatrix},$$

e infine per  $\alpha = 4$

$$K_3 = \begin{pmatrix} -31/4 & -16 & -8 \end{pmatrix}.$$

Per quanto riguarda la quarta terna di autovalori, si ottiene

$$p_4^*(A) = \begin{pmatrix} -2.8991 & 2.9322 & 0.0331 \\ -1.4661 & 0.0331 & -0.0331 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$K_4 = \begin{pmatrix} 1.4330 & -2.8991 & -1.4330 \end{pmatrix}.$$

Venendo al punto b), è necessario ricavare le funzioni di trasferimento ad anello chiuso nei quattro casi. Osservando la Fig. 4.1, si ottengono immediatamente le equazioni del sistema controllato

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu = (A + BK)x + Br \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

Pertanto, la formula generale per il calcolo della funzione di trasferimento ad anello chiuso è

$$W_i(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = C(sI - (A + BK_i))^{-1} B, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Nel caso in esame, tuttavia, l'uso della formula suddetta può essere evitato con il seguente ragionamento. Il numeratore di  $W_i(s)$  si ricava facilmente a partire dalla funzione di trasferimento ad anello aperto

$$F(s) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{1}{s^3 + s^2 + s + 1},$$

tenendo conto che in una retroazione dallo stato il numeratore della funzione di trasferimento ad anello chiuso coincide con quello della funzione di trasferimento ad anello aperto (a meno che non si introducano delle cancellazioni con il nuovo denominatore ad anello chiuso). Per quanto riguarda il denominatore di  $W_i(s)$ , basta ricordare che ogni matrice  $K_i$  è stata individuata proprio in modo da assegnare un certo polinomio caratteristico. Di

conseguenza, il denominatore della funzione di trasferimento coincide con tale polinomio (si noti infatti che non vi sono cancellazioni tra numeratore e denominatore). Si avrà pertanto

$$W_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+0.5+j\frac{\sqrt{3}}{2})(s+0.5-j\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)},$$

e analogamente

$$\begin{aligned} W_2(s) &= \frac{1}{(s+1)(s^2+4s+4.75)} \\ W_3(s) &= \frac{1}{(s+1)(s^2+8s+16.75)} \\ W_4(s) &= \frac{1}{(s+0.9420)(s^2+1.491s+1.0616)}. \end{aligned}$$

I guadagni in bassa frequenza di tali funzioni di trasferimento sono

$$k_1^W = 1, \quad k_2^W = 1/4.75, \quad k_3^W = 1/16.75, \quad k_4^W = 1,$$

Il tracciamento del diagramma di Bode delle corrispondenti risposte armoniche dà come risultato i grafici mostrati in Fig. 4.2 (per consentire un confronto più agevole, i moduli di  $W_2(j\omega)$  e  $W_3(j\omega)$  sono scalati per i relativi guadagni  $k_2^W$  e  $k_3^W$ ). Un rapido esame mostra che il valore più grande di banda passante (circa 1 rad/sec) si ottiene per  $W_1(s)$ , cioè in corrispondenza al primo insieme di autovalori. In particolare, poiché  $W_1(j\omega)$  presenta un termine binomio con pulsazione di rottura in 1 rad/sec e un termine trinomio con pulsazione naturale di 1 rad/sec e smorzamento pari a 0.5, è facile verificare che si ha esattamente  $B_3 = 1$  rad/sec. In effetti, la terna

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2,3} = -0.5 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

realizza la cosiddetta *configurazione di Butterworth*.

Per quanto riguarda il punto **c**), si ricordi che — se il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile — il valore della risposta a regime per un riferimento  $r$  a gradino è ottenuto come

$$\tilde{y}_i = W_i(0) = k_i^W a,$$

essendo  $a$  l'ampiezza del gradino. Le funzioni di trasferimento  $W_1$  e  $W_4$  garantiscono già la condizione di regime richiesta. Nel secondo e nel terzo

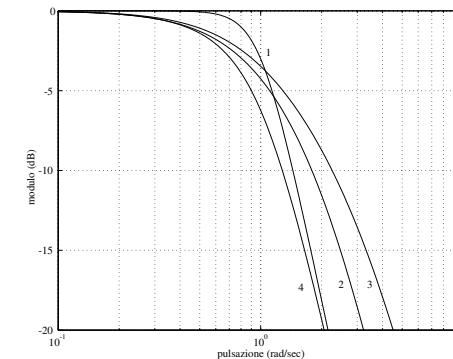


Figura 4.2: Diagrammi di Bode dei moduli delle risposte armoniche  $W_1(j\omega)/k_1^W$ ,  $W_2(j\omega)/k_2^W$ ,  $W_3(j\omega)/k_3^W$  e  $W_4(j\omega)$ . Ogni diagramma è contraddistinto dal corrispondente pedice.

caso, per assicurare errore nullo a regime è sufficiente anteporre allo schema a retroazione un blocco avente funzione di trasferimento costante e pari a

$$H_i = \frac{1}{k_i^W}, \quad i = 2, 3,$$

come mostrato in Fig. 4.3. In particolare, si pone

$$H_2 = 4.75, \quad H_3 = 16.75.$$

E' opportuno a questo punto fare due osservazioni.

- In condizioni nominali, lo schema di controllo della Fig. 4.3 presenta errore a regime nullo in corrispondenza a un riferimento a gradino. Tuttavia, tale caratteristica non viene mantenuta in presenza di variazioni parametriche nel sistema (cioè delle matrici  $A$ ,  $B$  e  $C$ ) o della matrice di retroazione  $K$ . Infatti, in tale situazione verrebbe invariabilmente a modificarsi il guadagno  $k_i^W$  della  $W_i(s)$ , e di conseguenza la

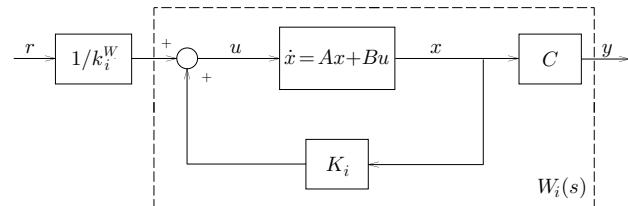


Figura 4.3: Modifica dello schema di controllo a retroazione dallo stato in modo da ottenere errore a regime nullo per un riferimento a gradino

funzione di trasferimento tra  $r$  e  $y$  non avrebbe più guadagno unitario. Una soluzione preferibile consiste nell'aggiungere un'azione integrale nella catena diretta; si veda a questo proposito l'esercizio 4.6.

- Nell'eventualità in cui si debba affrontare il problema più generale di garantire errore a regime nullo in corrispondenza a riferimenti e/o disturbi di tipo canonico, è necessario ricorrere alla teoria della regolazione dell'uscita.

Venendo infine al punto d), è prevedibile che nel primo e nel quarto caso si abbiano caratteristiche simili, sia dal punto di vista della rapidità di risposta che da quello dello sforzo di controllo. Ciò è suggerito sia dalla collocazione simile dei rispettivi autovalori sul piano complesso, sia dal fatto che in entrambi i casi non è necessario apportare modifiche allo schema per ottenere la riproduzione asintotica di un riferimento a gradino. La conferma di queste considerazioni qualitative va ricercata nella simulazione del comportamento dei sistemi.

La Fig. 4.4 mostra le risposte dei due schemi di controllo in corrispondenza ad un riferimento a gradino unitario. Il tempo di salita è minore nel primo caso, ma il valore della sovraelongazione (e dunque anche del tempo di assestamento) è notevolmente maggiore. Al contrario, la funzione di trasferimento  $W_4(s)$  presenta una sovraelongazione praticamente nulla. In effetti, essa realizza una *funzione di trasferimento di Bessel* del

terzo ordine, essendo il suo denominatore pari al polinomio di Bessel  $B^3(s)$ . La sostanziale assenza di sovraelongazione è una caratteristica notevole di tutte le funzioni di trasferimento di Bessel.

Per quanto riguarda il secondo e il terzo caso, lo spostamento verso sinistra degli autovalori complessi coniugati (che hanno parte reale pari a  $-2$  nel secondo e a  $-4$  nel terzo) implica che i corrispondenti modi naturali convergono più rapidamente. Tuttavia, questo non dovrebbe tradursi in una velocità di risposta molto maggiore, a causa della presenza di un autovalore *dominante* che è fisso in  $-1$ . La risposta indiciale in questi due casi è riportata in Fig. 4.5. Si noti che, mentre il tempo di salita è dello stesso ordine di grandezza di quello ottenuto nella prima risposta indiciale (configurazione di Butterworth), la sovraelongazione è molto ridotta a causa della riduzione del coefficiente di smorzamento dei due autovalori complessi.

Nel valutare lo sforzo di controllo  $u$ , si deve considerare che nello schema di Fig. 4.3 si ha

$$u = \frac{1}{k_i^W} r + K_i x.$$

Tale espressione mostra che lo sforzo di controllo deriva in effetti da due componenti. Di queste, la prima è costante e serve per la riproduzione del riferimento a gradino, mentre la seconda è necessaria per assegnare al sistema ad anello chiuso gli autovalori desiderati. Assumendo un riferimento a gradino unitario, nel primo e nel quarto caso la prima componente è uguale e vale 1, mentre nel secondo e nel terzo caso vale rispettivamente 4.75 e 16.75.

Per quanto riguarda la seconda componente, la sua grandezza è sostanzialmente legata all'entità del conseguente spostamento degli autovalori sul piano complesso (questa affermazione si può giustificare intuitivamente ricordando le regole per il tracciamento del luogo delle radici, e in particolare il fatto che i poli ad anello chiuso si allontanano dai poli ad anello aperto al crescere del guadagno di retroazione). Osservando allora che gli autovalori del sistema non reazionato si trovano in

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2,3} = \pm j,$$

si può prevedere che la seconda componente dello sforzo di controllo sarà comparabile nel primo e nel quarto caso, mentre sarà molto maggiore nel secondo e nel terzo caso. Questa previsione è confermata dall'andamento di  $K_i x$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) durante la risposta indiciale, riportato in Fig. 4.6.

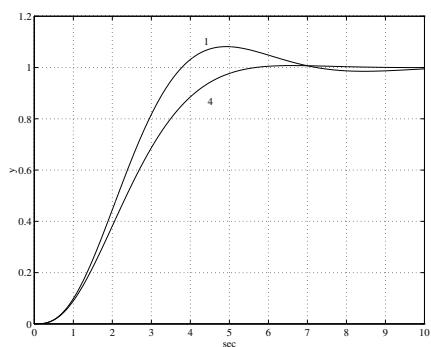


Figura 4.4: Risposta indiciale per le funzioni di trasferimento  $W_1(s)$  e  $W_4(s)$ . Ogni diagramma è contraddistinto dal corrispondente pedice.

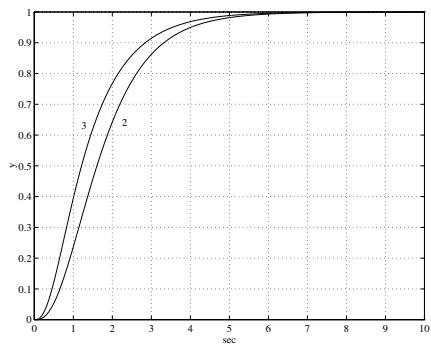


Figura 4.5: Risposta indiciale per le funzioni di trasferimento  $H_2W_2(s)$  e  $H_3W_3(s)$ . Ogni diagramma è contraddistinto dal corrispondente pedice.

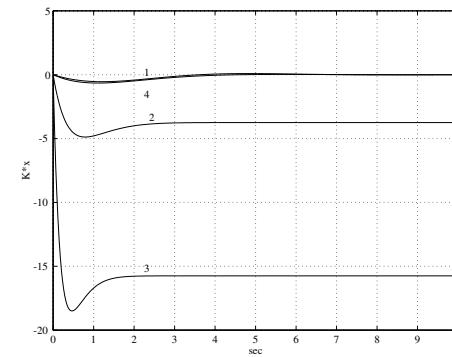


Figura 4.6: Andamento della seconda componente  $K_{ix}$  dello sforzo di controllo, per  $i = 1, 2, 3, 4$ . Ogni diagramma è contraddistinto dal corrispondente pedice.

Sulla base delle precedenti considerazioni, si può concludere che in generale lo sforzo di controllo complessivo sarà di entità simile nel primo e nel quarto caso, sensibilmente maggiore nel secondo e ancora maggiore nel terzo caso.

**Esercizio 4.2**

*Si consideri il processo lineare descritto dalle equazioni*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

*in cui*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad \alpha),$$

*con  $\alpha$  e  $\beta$  numeri reali. Utilizzando il principio di separazione, si determini per quali valori di  $\alpha$  e  $\beta$  è possibile costruire un controllore a retroazione dall'uscita tale che:*

- a) *gli autovalori del processo controllato si trovino in  $-2$ ;*
- b) *ogni componente dell'errore di osservazione converga a zero con velocità almeno pari a quella di  $e^{-2t}$ .*

Conviene innanzitutto analizzare le proprietà strutturali (raggiungibilità e osservabilità) del processo al variare di  $\alpha$  e  $\beta$ . Infatti, il principio di separazione stabilisce che se il processo è completamente raggiungibile e osservabile, è possibile individuare un controllore a retroazione dall'uscita che assegna arbitrariamente gli autovalori del sistema ad anello chiuso, i quali si partizionano in autovalori del processo controllato e autovalori della dinamica di osservazione. Di conseguenza, la sintesi di un controllore che risolva il problema assegnato può essere affrontata in due fasi.

1. Dapprima si risolve il problema di assegnare gli autovalori del processo attraverso una retroazione dallo stato  $u = Kx$ . Nel caso in esame, ciò implica il calcolo di una matrice  $K$  tale che tutti gli autovalori di  $A + BK$  siano in  $-2$ .
2. Successivamente, si costruisce un osservatore che fornisca una stima  $\xi$  dello stato  $x$ , in modo che l'errore di osservazione converga a zero con la velocità desiderata. Questo richiede la determinazione di una matrice  $G$  tale che tutti gli autovalori di  $A - GC$  abbiano parte reale non superiore a  $-2$ .

La sintesi del controllore sarà completata ponendo  $u = K\xi$ .

La matrice di raggiungibilità è

$$P = (B \ AB) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \beta & 1-2\beta \end{pmatrix},$$

il cui determinante è pari a

$$\det(P) = 1 - \beta.$$

Pertanto, se  $\beta \neq 1$  il processo è completamente raggiungibile ed è possibile modificarne arbitrariamente gli autovalori mediante una retroazione dallo stato.

Se invece  $\beta = 1$ , la matrice  $P$  ha rango 1, il che implica che gli stati raggiungibili costituiscono un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^2$  di dimensione pari a 1. In tal caso, com'è noto, è possibile effettuare una scomposizione del sistema che mette in evidenza due sottosistemi di dimensione unitaria, uno dei quali è raggiungibile e l'altro non raggiungibile. Se l'autovalore associato a quest'ultimo (che non è modificabile mediante retroazione) soddisfa già la specifica a), il problema posto è ancora risolubile.

Data la struttura triangolare della matrice  $A$ , i suoi autovalori si individuano per ispezione e sono pari a  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = -2$ . Per determinare quale di questi sia associato al sottosistema non raggiungibile, si può usare la condizione PBH (Popov–Belevitch–Hautus). Essendo

$$\text{rango} \left[ (A - \lambda_1 I) \ B \right] = \text{rango} \left[ \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix} \right] = 2$$

e

$$\text{rango} \left[ (A - \lambda_2 I) \ B \right] = \text{rango} \left[ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right] = 1,$$

si deduce che la dinamica del sottosistema non raggiungibile è caratterizzata dall'autovalore  $\lambda_2 = -2$ . Di conseguenza, per qualsiasi valore di  $\beta$  è possibile soddisfare la specifica a) mediante una retroazione dallo stato.

Un metodo alternativo per giungere alla medesima conclusione consiste nell'effettuare la scomposizione canonica rispetto alla raggiungibilità nel caso  $\beta = 1$ . Essendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

il sottospazio  $\mathcal{P}$  degli stati raggiungibili è ottenuto come

$$\mathcal{P} = \text{Im}(P) = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

dove con  $\text{Im}(\cdot)$  si è indicato il sottospazio *immagine* di una matrice e con  $\text{Gen}(\cdot)$  lo spazio generato come combinazione lineare di un insieme di vettori. Posto

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

ed effettuata la trasformazione di coordinate  $\tilde{x} = Tx$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \tilde{B} &= TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{C} = CT^{-1} = (1 + \alpha \quad 1). \end{aligned}$$

La rappresentazione del processo nelle nuove coordinate

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= -\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + u \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -2\tilde{x}_2 \\ y &= (1 + \alpha)\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \end{aligned}$$

evidenzia la dinamica del sottosistema raggiungibile, caratterizzata dall'autovalore  $\lambda_1 = -1$ , e quella del sottosistema non raggiungibile, caratterizzata da  $\lambda_2 = -2$ .

Poiché nell'enunciato dell'esercizio si richiede un controllore a retroazione dall'uscita, è necessario indagare la possibilità di ricostruire lo stato del processo. La matrice di osservabilità è

$$Q = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha - 1 & -2\alpha \end{pmatrix},$$

il cui determinante

$$\det(Q) = -\alpha(1 + \alpha)$$

si annulla per  $\alpha = 0$  e  $\alpha = -1$ . Pertanto, se  $\alpha \neq 0$  e  $\alpha \neq -1$  il processo è completamente osservabile ed è possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori che caratterizzano la dinamica dell'errore di osservazione.

Se invece  $\alpha = 0$  oppure  $\alpha = -1$ , esiste un sottospazio vettoriale di stati inosservabili di dimensione pari a 1. Anche in questo caso è possibile effettuare una scomposizione del processo che mette in evidenza due sottosistemi di dimensione unitaria, uno dei quali è osservabile e l'altro inosservabile. Com'è noto, l'autovalore associato a quest'ultimo compare inalterato nella dinamica dell'errore di osservazione. Tuttavia, se tale autovalore ha parte reale non superiore a  $-2$ , la specifica **b**) può essere comunque soddisfatta.

Essendo

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix},$$

la condizione PBH per l'osservabilità implica che la dinamica del sottosistema inosservabile è caratterizzata dall'autovalore  $\lambda_1 = -1$  se  $\alpha = -1$ , ovvero dall'autovalore  $\lambda_2 = -2$  se  $\alpha = 0$ . Nel primo caso non si può risolvere il problema assegnato, mentre nel secondo ciò è possibile.

Analogamente a quanto visto in precedenza, si può giungere alle medesime conclusioni effettuando la scomposizione canonica del processo rispetto all'osservabilità, nei due casi  $\alpha = -1$  e  $\alpha = 0$ . Per  $\alpha = -1$ , si ha

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

e quindi il sottospazio  $\mathcal{Q}$  degli stati inosservabili è

$$\mathcal{Q} = \text{Ker}(Q) = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

dove  $\text{Ker}(\cdot)$  indica il nucleo di una matrice. Con il cambiamento di coordinate  $\tilde{x} = Tx$  definito da

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x},\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \tilde{B} &= TB = \begin{pmatrix} 1-\beta \\ \beta \end{pmatrix} \quad \tilde{C} = CT^{-1} = (1 \ 0).\end{aligned}$$

La rappresentazione del processo nelle nuove coordinate

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= -2\tilde{x}_1 + (1-\beta)u \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + \beta u \\ y &= \tilde{x}_1\end{aligned}$$

mostra che la dinamica del sottosistema osservabile è caratterizzata dall'autovalore  $\lambda_2 = -2$ , mentre quella del sottosistema inosservabile è caratterizzata da  $\lambda_1 = -1$ . Ciò conferma che se  $\alpha = -1$ , pur essendo il sistema rilevabile, non è possibile costruire un osservatore asintotico abbastanza 'rapido' da soddisfare la specifica b).

Nel caso  $\alpha = 0$ , tale procedura è ancora più diretta. Infatti, è immediato constatare che in questo caso le equazioni del processo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + \beta u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

mostrano già separate la dinamica del sottosistema osservabile, caratterizzata dall'autovalore  $\lambda_1 = -1$ , e quella del sottosistema inosservabile, caratterizzata da  $\lambda_2 = -2$ .

Riassumendo, il problema è sempre risolubile purché si abbia  $\alpha \neq -1$ . Nel seguito, si assume senz'altro che questa ipotesi sia soddisfatta, e si procede alla costruzione di un controllore a retroazione dall'uscita secondo la procedura delineata all'inizio.

Poiché la rappresentazione del processo ha dimensione 2, per calcolare la matrice  $K$  di retroazione dallo stato è conveniente procedere nel modo seguente. Posto

$$K = (k_1 \ k_2),$$

si ha

$$A + BK = \begin{pmatrix} k_1 - 1 & k_2 \\ 1 + \beta k_1 & -2 + \beta k_2 \end{pmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è

$$p_{A+BK}(\lambda) = \lambda^2 + (3 - k_1 - \beta k_2)\lambda + 2 - 2k_1 - (1 + \beta)k_2.$$

Imponendo l'identità con il polinomio caratteristico desiderato

$$p_1^*(\lambda) = (\lambda + 2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

si deriva il sistema lineare

$$\begin{aligned}3 - k_1 - \beta k_2 &= 4 \\ 2 - 2k_1 - (1 + \beta)k_2 &= 4.\end{aligned}$$

Si ottiene facilmente

$$\begin{aligned}k_1 &= -(1 + \beta k_2) \\ k_2(\beta - 1) &= 0.\end{aligned}$$

Di conseguenza, la scelta

$$k_1 = -1 \quad k_2 = 0$$

costituisce una soluzione del problema per qualsiasi valore di  $\beta$ . In particolare, tale soluzione è unica se  $\beta \neq 1$ , mentre se  $\beta = 1$  esistono infinite soluzioni della forma

$$k_1 = -(1 + k_2) \quad k_2 \text{ arbitrario.}$$

Si noti che tale risultato è consistente con quanto osservato in sede di analisi a proposito della raggiungibilità del processo al variare di  $\beta$ .

In generale, è comunque possibile utilizzare la formula di Ackermann. Per  $\beta \neq 1$  l'inversa della matrice di raggiungibilità è

$$P^{-1} = \frac{1}{1-\beta} \begin{pmatrix} 1-2\beta & 1 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix},$$

la cui ultima riga è

$$\mu = \frac{1}{1-\beta} (-\beta \ 1).$$

Valutando il polinomio caratteristico desiderato per  $A + BK$  in corrispondenza alla matrice  $A$  si ottiene

$$p_1^*(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$K = -\mu p_1^*(A) = (-1 \ 0).$$

Si noti che tale matrice è indipendente da  $\beta$ ; ciò conferma che essa può essere usata anche nel caso  $\beta = 1$ . In effetti, è facile verificare che con questa scelta il polinomio caratteristico di  $A + BK$  è indipendente da  $\beta$  e coincide con  $p_1^*(\lambda)$ .

Venendo alla costruzione dell'osservatore, si può procedere in modo diretto, analogamente a quanto visto per il calcolo della matrice  $K$ . Posto

$$G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},$$

si ha

$$A - GC = \begin{pmatrix} -g_1 - 1 & -\alpha g_1 \\ 1 - g_2 & -2 - \alpha g_2 \end{pmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è

$$p_{A-GC}(\lambda) = \lambda^2 + (3 + g_1 + \alpha g_2)\lambda + 2 + 2g_1 + \alpha(g_1 + g_2).$$

Ad esempio, imponendo un polinomio caratteristico desiderato per la dinamica di osservazione pari a

$$p_2^*(\lambda) = (\lambda + 3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9,$$

si deriva il sistema lineare

$$\begin{aligned} 3 + g_1 + \alpha g_2 &= 6 \\ 2 + 2g_1 + \alpha(g_1 + g_2) &= 9. \end{aligned}$$

Si ottiene facilmente l'unica soluzione

$$g_1 = \frac{4}{1 + \alpha} \quad g_2 = \frac{3\alpha - 1}{\alpha(1 + \alpha)},$$

che è valida per  $\alpha \neq 0$  (il caso  $\alpha = -1$  è stato già escluso).

Anche per il calcolo di  $G$  si poteva utilizzare la procedura generale. L'inversa della matrice di osservabilità è

$$Q^{-1} = \frac{-1}{\alpha(1 + \alpha)} \begin{pmatrix} -2\alpha & -\alpha \\ 1 - \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

la cui ultima colonna è

$$\eta = \frac{-1}{\alpha(1 + \alpha)} \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Valutando il polinomio caratteristico desiderato per  $A - GC$  in corrispondenza alla matrice  $A$  si ottiene

$$p_2^*(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha dunque

$$G = p_2^*(A)\eta = \frac{1}{\alpha(1 + \alpha)} \begin{pmatrix} 4\alpha \\ 3\alpha - 1 \end{pmatrix},$$

che ovviamente coincide con la soluzione precedente.

Nel caso  $\alpha = 0$ , la dinamica dell'errore di osservazione ha un autovettore fisso in  $\lambda_2 = -2$ , mentre l'altro può essere assegnato arbitrariamente. Scegliendo ad esempio il polinomio caratteristico

$$p_3^*(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 5\lambda + 6,$$

e imponendone la coincidenza con  $p_{A-GC}(\lambda)$  calcolato per  $\alpha = 0$ , si deriva facilmente la soluzione

$$g_1 = 2 \quad g_2 \text{ arbitrario.}$$

Al medesimo risultato si perviene più rapidamente osservando che, come già notato in precedenza, per  $\alpha = 0$  il sistema è già scomposto in un sottosistema osservabile, con variabile di stato  $x_1$ , e uno inosservabile, con variabile di stato  $x_2$ . L'errore di osservazione relativo alla variabile  $x_1$  obbedisce all'equazione

$$\dot{\xi}_1 = \dot{x}_1 - \dot{\xi}_1 = -(1 + g_1)e_1,$$

dove  $\xi_1$  è la prima componente del vettore di stato osservato  $\xi$ . Di conseguenza, ponendo  $g_1 = 2$  si ottiene la dinamica desiderata, indipendentemente dal valore di  $g_2$ , che può essere scelto nullo per semplicità.

In conclusione, il sistema di controllo risultante ha la struttura ben nota

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu = Ax + BK\xi \\ \dot{\xi} &= A\xi + Bu + G(y - C\xi) = (A + BK - GC)\xi + GCx \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

dove le matrici  $K$  e  $G$  sono date da

$$\begin{aligned}K &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{e} \\ G &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha(1+\alpha)} \begin{pmatrix} 4\alpha \\ 3\alpha - 1 \end{pmatrix} & \text{se } \alpha \neq 0, \alpha \neq -1 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{se } \alpha = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Si ricordi che, nel caso in cui la dinamica dell'errore di osservazione non sia assegnabile in modo arbitrario ( $\alpha = 0$ ), il dispositivo di osservazione viene anche detto *ricostruttore asintotico dello stato*.

### Esercizio 4.3

*Sia dato il sistema lineare*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

*caratterizzato dalla terna di matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Si determini un controllore a retroazione dall'uscita in grado di stabilizzare il sistema.*

Nel caso in cui esista una soluzione al problema di stabilizzazione, questa può essere ricercata nella forma suggerita dal principio di separazione, e cioè secondo il paradigma osservazione dello stato/retroazione dallo stato osservato. Per verificare la risolubilità del problema è necessario analizzare le proprietà strutturali del sistema. Un approccio sistematico a tale studio è rappresentato dalla scomposizione canonica di Kalman.

La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$P = (B \ AB \ A^2B \ A^3B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Per valutarne il rango, si osservi che la prima e la terza colonna sono linearmente dipendenti tra di loro, così come la seconda e la quarta. Pertanto, il rango di  $P$  è pari a 2 e il sottospazio  $\mathcal{P}$  degli stati raggiungibili ha dimensione 2. In particolare, esso è generato dalle colonne linearmente indipendenti di  $P$

$$\mathcal{P} = \text{Im}(P) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si noti che conviene esprimere la base di  $\mathcal{P}$  — così come degli altri sottospazi di interesse — nella maniera più semplice possibile.

La matrice di osservabilità è

$$Q = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & -2 & 4 \\ -4 & 4 & 8 & -4 \\ 28 & -28 & -20 & 28 \end{pmatrix}.$$

La prima, la seconda e la quarta colonna sono uguali a meno del segno, mentre la terza è linearmente indipendente dalle altre. Di conseguenza, il rango di  $Q$  è pari a 2, e la dimensione del sottospazio  $\mathcal{Q}$  degli stati inosservabili è

$$\dim \mathcal{Q} = \dim \text{Ker}(Q) = n - \text{rango}(Q) = 2,$$

dove  $n = 4$  indica la dimensione dello spazio di stato. In particolare, si ha

$$\mathcal{Q} = \text{Ker}(Q) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

com'è facile verificare.

La scomposizione di Kalman richiede l'individuazione di quattro sottospazi  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$  e  $\mathcal{X}_4$  che soddisfino le relazioni

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} &= \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 &= \mathcal{P} \\ \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 &= \mathcal{Q} \\ \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 &= \mathbb{R}^4, \end{aligned}$$

dove il simbolo  $\oplus$  indica l'operazione di somma diretta tra sottospazi. Per il sistema considerato si ottiene immediatamente

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} & \mathcal{X}_2 &= \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathcal{X}_3 &= \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} & \mathcal{X}_4 &= \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

La matrice di trasformazione di coordinate  $T$ , necessaria per la scomposizione, si ricava invertendo la matrice  $T^{-1}$  avente come colonne i vettori di base di  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$  e  $\mathcal{X}_4$ , nell'ordine. Si ha

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il sistema nelle coordinate  $\tilde{x} = Tx$  è rappresentato dalla terna

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ \tilde{B} &= TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{C} = CT^{-1} = (0 \ 1 \ 0 \ 1), \end{aligned}$$

o in forma estesa

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= -2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_4 + u \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_4 + u \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= -\tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_4 &= -3\tilde{x}_4 \\ y &= \tilde{x}_2 + \tilde{x}_4. \end{aligned}$$

In questa forma è evidente la scomposizione del sistema in quattro sottosistemi:

- $S_1$ , raggiungibile e inosservabile, con variabile di stato  $\tilde{x}_1$  e autovalore  $\lambda_1 = -2$ ;
- $S_2$ , raggiungibile e osservabile, con variabile di stato  $\tilde{x}_2$  e autovalore  $\lambda_2 = 2$ ;
- $S_3$ , non raggiungibile e inosservabile, con variabile di stato  $\tilde{x}_3$  e autovalore  $\lambda_3 = -1$ ;

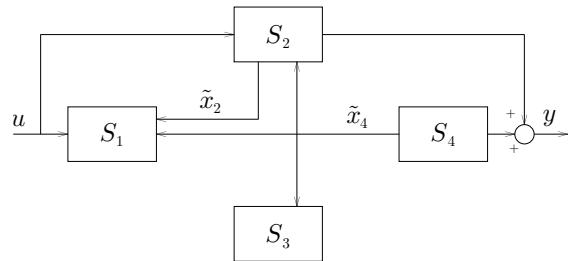


Figura 4.7: Struttura del sistema in esame secondo la scomposizione strutturale di Kalman

- $S_4$ , non raggiungibile e osservabile, con variabile di stato  $\tilde{x}_4$  e autovalore  $\lambda_4 = -3$ .

L'interconnessione tra tali sottosistemi è mostrata in Fig. 4.7. Si noti che in questo caso particolare lo stato di  $S_3$  non interviene nella dinamica di  $S_1$ .

Poiché l'unica dinamica instabile è quella del sottosistema raggiungibile e osservabile  $S_2$ , il sistema è sia stabilizzabile che rilevabile. In particolare, la dinamica del sistema controllato includerà gli autovalori relativi alla parte non raggiungibile ( $\lambda_3 = -1$  e  $\lambda_4 = -3$ ), mentre la dinamica dell'errore di osservazione dello stato includerà gli autovalori relativi alla parte non osservabile ( $\lambda_1 = -2$  e  $\lambda_3 = -1$ ).

Sulla base della considerazione precedente, la matrice  $\tilde{K}$  di retroazione dallo stato trasformato  $\tilde{x}$  può essere convenientemente ricercata nella forma

$$\tilde{K} = (\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2 \quad 0 \quad 0) = \left( \begin{array}{c|cc} \tilde{K}_r & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Infatti, riscritte le matrici  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  nella forma

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{cc|c} \tilde{A}_r & * & \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{nr} \\ 0 & 0 & \end{array} \right) \quad \tilde{B} = \left( \begin{array}{c} \tilde{B}_r \\ 0 \\ 0 \end{array} \right),$$

con

$$\tilde{A}_r = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \tilde{B}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si ha

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} = \left( \begin{array}{cc|c} \tilde{A}_r + \tilde{B}_r\tilde{K}_r & * & \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{nr} \\ 0 & 0 & \end{array} \right).$$

Questa equazione conferma che la particolare scelta fatta di  $\tilde{K}$  non comporta alcuna perdita di generalità.

Per determinare  $\tilde{K}_r$ , si può procedere direttamente per ispezione oppure utilizzare la formula di Ackermann. Scegliendo la seconda strada, si rende necessario il calcolo della matrice di raggiungibilità  $\tilde{P}_r$  relativa alla coppia  $(\tilde{A}_r, \tilde{B}_r)$ . Si ha

$$\tilde{P}_r = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\tilde{P}_r^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

la cui ultima riga è

$$\mu = \frac{1}{3}(-1 \quad 1).$$

Volendo assegnare a  $\tilde{A}_r + \tilde{B}_r\tilde{K}_r$  il polinomio caratteristico

$$p_1^*(\lambda) = (\lambda + 2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4,$$

si ottiene

$$\tilde{K}_r = -\mu p_1^*(\tilde{A}_r) = (0 \quad -4).$$

Si ha perciò

$$\tilde{K} = (0 \quad -4 \quad 0 \quad 0).$$

La matrice di retroazione dallo stato  $K$  nelle coordinate originarie si ottiene semplicemente come

$$K = \tilde{K}T = (-4 \quad 4 \quad 0 \quad -4).$$

Infatti, con questa scelta si ha

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} = TAT^{-1} + TBKT^{-1} = T(A + BK)T^{-1},$$

e quindi la matrice  $A + BK$  ha gli stessi autovalori di  $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ .

Per la determinazione di un ricostruttore asintotico dello stato si procede in modo analogo. In particolare, è facile vedere che la matrice di forzamento  $\tilde{G}$  dell'osservatore può ricercarsi nella forma

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{g}_2 \\ 0 \\ \tilde{g}_4 \end{pmatrix}.$$

Posto

$$\tilde{G}_o = \begin{pmatrix} \tilde{g}_2 \\ \tilde{g}_4 \end{pmatrix},$$

si individuano le sottomatrici di  $\tilde{A}$  e  $\tilde{C}$  relative alla parte osservabile:

$$\tilde{A}_o = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \tilde{C}_o = (1 \quad 1).$$

La matrice di osservabilità associata alla coppia  $(\tilde{A}_o, \tilde{C}_o)$  è

$$\tilde{Q}_o = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

la cui inversa

$$\tilde{Q}_o^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ha come ultima colonna

$$\eta = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per assegnare a  $\tilde{A}_o - \tilde{C}_o \tilde{C}_o$  il polinomio caratteristico

$$p_2^*(\lambda) = (\lambda + 3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9,$$

si deve prendere

$$\tilde{G}_o = p_2^*(\tilde{A}_o)\eta = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha perciò

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $G$  nelle coordinate originarie si ottiene semplicemente come

$$G = T^{-1}\tilde{G} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti, analogamente a quanto visto prima, si ha

$$\tilde{A} - \tilde{G}\tilde{C} = TAT^{-1} - TGCT^{-1} = T(A - GC)T^{-1},$$

e quindi la matrice  $A - GC$  ha gli stessi autovalori di  $\tilde{A} - \tilde{G}\tilde{C}$ .

Il controllore sintetizzato sulla base del principio di separazione ha quindi la seguente struttura

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + Bu + G(y - C\xi) = (A + BK - GC)\xi + Gy \\ u &= K\xi, \end{aligned}$$

dove  $\xi$  indica la stima dello stato  $x$  fornita dal ricostruttore.

È interessante ricavare la funzione di trasferimento del corrispondente compensatore dinamico

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{u(s)}{-y(s)} = -K(sI - A - BK + GC)^{-1}G \\ &= \frac{20(s+1)(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+7)} = \frac{20}{s+7}. \end{aligned}$$

Si rileva quindi una triplice cancellazione polo/zero (ammisibile) nella  $G(s)$ . Ciò non è sorprendente, se si tiene conto del fatto che una cancellazione analoga avveniva nella funzione di trasferimento del sistema assegnato

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s-2)} = \frac{1}{s-2},$$

consistentemente con il risultato della scomposizione strutturale, che indicava una dinamica raggiungibile e osservabile di dimensione unitaria.

L'espressione sopra riportata di  $P(s)$  implica che il sistema è stabilizzabile con una semplice retroazione istantanea dall'uscita  $u = -ky$ , così come illustrato in Fig. 4.8. Infatti, la funzione di trasferimento ad anello chiuso è

$$W(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{1}{s-2+k},$$

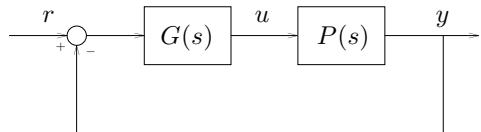


Figura 4.8: Stabilizzazione con retroazione istantanea dall'uscita

e quindi basta porre  $k = 2 - p^*$  per assegnare a  $W(s)$  un polo arbitrario  $p^*$ . Ad esempio, per  $p^* = -2$  (corrispondentemente alla scelta di  $p_1^*(\lambda)$ ) si ottiene  $k = 4$ . Il sistema ad anello chiuso possiede naturalmente altri tre autovalori, pari a  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_3 = -1$  e  $\lambda_4 = -3$ .

A questo risultato si poteva arrivare anche ragionando come segue. La retroazione dallo stato individuata nella prima parte dell'esercizio può riscriversi come

$$u = Kx = \tilde{K}\tilde{x}.$$

Si osservi che al posto della matrice  $\tilde{K}$  è possibile usare la

$$\tilde{K}' = (0 \ -4 \ 0 \ -4),$$

poiché la scelta degli ultimi due elementi non influenza gli autovalori di  $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}'$ , come già sottolineato in precedenza. Si ottiene così la legge di controllo

$$u = \tilde{K}'\tilde{x} = -4(\tilde{x}_2 + \tilde{x}_4) = -4y,$$

che non richiede la costruzione di un osservatore dello stato.

In conclusione, si richiama l'attenzione sulla generalità delle considerazioni appena svolte. Infatti, dato un sistema lineare stabilizzabile e rilevabile per il quale il sottosistema  $S_2$  raggiungibile e osservabile abbia dimensione  $\nu$ , la dimensione minima di un compensatore dall'uscita in grado di assegnare *arbitrariamente* gli autovalori a  $S_2$  è pari a  $\nu - 1$ . Si noti l'equivalenza tra questa affermazione e il noto risultato richiamato al termine dell'esercizio 3.9.

**Esercizio 4.4**

*Si consideri nuovamente il pendolo inverso preso in esame nell'esercizio 1.8 e mostrato in Fig. 4.9.*

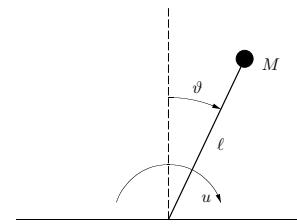


Figura 4.9: Pendolo inverso

- a) *Si ricavi una rappresentazione del sistema nello spazio di stato, nell'ipotesi di piccoli scostamenti rispetto alla verticale.*
- b) *Posto  $M = M_0 = 1 \text{ kg}$  e  $\ell = 1 \text{ m}$ , e usando l'approssimazione  $g = 10 \text{ m/sec}^2$ , si progetti un controllore a retroazione dall'uscita  $\vartheta$  in grado di stabilizzare il pendolo intorno alla posizione di equilibrio inverso  $\vartheta_0 = 0$ . In particolare, gli autovalori ad anello chiuso devono essere collocati in  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = -5$ ,  $\lambda_3 = -7$  e  $\lambda_4 = -10$ .*
- c) *Si studi la robustezza del controllore ottenuto rispetto a variazioni della massa  $M$  nell'intervallo*

$$M_1 \leq M \leq M_2, \quad \text{con } M_1 = 0.8 \text{ kg}, M_2 = 1.2 \text{ kg}.$$

*A questo scopo, si analizzi l'influenza di variazioni di  $M$  sugli autovalori ad anello chiuso. Qual è la massima variazione percentuale di  $M$  (rispetto al valore nominale  $M_0$ ) che preserva la stabilità?*

---

Come già osservato nella soluzione dell'esercizio 1.8, l'equazione che governa il moto del pendolo nel caso di piccoli scostamenti rispetto alla verticale

$(\sin \vartheta \approx \vartheta)$  si scrive

$$M\ell^2\ddot{\vartheta} = Mg\ell\vartheta + u.$$

Introdotto il vettore di stato

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix},$$

si ottiene facilmente la rappresentazione cercata

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{\ell}x_1 + \frac{1}{M\ell^2}u \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Venendo al punto **b)**, il controllore richiesto va ricercato sulla base del principio di separazione. Si procede quindi all'analisi delle proprietà strutturali del sistema in esame. Essendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & 0 \end{pmatrix} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_0\ell^2} \end{pmatrix} \quad C = (1 \ 0),$$

le matrici di raggiungibilità e osservabilità sono rispettivamente

$$P = (B_0 \ AB_0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{M_0\ell^2} \\ \frac{1}{M_0\ell^2} & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$Q = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché entrambe hanno rango pieno, il sistema è completamente raggiungibile e osservabile.

Una scelta ragionevole consiste nell'assegnare la coppia di autovalori  $(\lambda_1, \lambda_2)$  al sistema controllato e la coppia  $(\lambda_3, \lambda_4)$  alla dinamica dell'errore di osservazione. Per quanto riguarda la prima assegnazione, essendo

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & M_0\ell^2 \\ M_0\ell^2 & 0 \end{pmatrix},$$

la matrice  $K$  di retroazione dallo stato ha l'espressione

$$K = -\mu p_1^*(A) = -\begin{pmatrix} M\ell^2 & 0 \end{pmatrix}(A + \lambda_1 I)(A + \lambda_2 I).$$

Sostituendo i valori numerici dati si trova

$$K = \begin{pmatrix} -25 & -8 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, la matrice di forzamento dell'osservatore è data da

$$G = p_2^*(A)\eta = (A + \lambda_3 I)(A + \lambda_4 I) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

da cui

$$G = \begin{pmatrix} 17 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni del controllore dinamico dall'uscita sono pertanto

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (A + B_0 K - G C)\xi + G y \\ u &= K\xi, \end{aligned}$$

avendo indicato con  $\xi$  lo stato dell'osservatore. Alternativamente, il controllore può essere caratterizzato attraverso la sua funzione di trasferimento

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{u(s)}{y(s)} = K(sI - A - B_0 K + G C)^{-1} G \\ &= \frac{-1065(s+3.15)}{s^2 + 25s + 231} = \frac{-1065(s+3.15)}{(s+12.5+j8.65)(s+12.5-j8.65)}. \end{aligned}$$

Infine, le equazioni del sistema ad anello chiuso sono

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_0 K \xi \\ \dot{\xi} &= G C x + (A + B_0 K - G C)\xi. \end{aligned}$$

Per studiare l'effetto della variazione della massa  $M$  sulla stabilità del sistema ad anello chiuso è conveniente procedere come segue. Si ponga

$$M = \frac{1}{1+\sigma} M_0, \quad \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2],$$

dove i due estremi di variazione del parametro  $\sigma$  sono facilmente ricavabili come

$$\sigma_1 = \frac{M_0 - M_2}{M_2} = -0.16 \quad \sigma_2 = \frac{M_0 - M_1}{M_1} = 0.25.$$

In particolare, per  $\sigma = \sigma_1$  si ha  $M = M_2$ , per  $\sigma = 0$  si ha  $M = M_0$  e per  $\sigma = \sigma_2$  si ha  $M = M_1$ .

A seguito della variazione di  $M$ , nella rappresentazione del sistema viene a modificarsi solo la matrice  $B$  degli ingressi:

$$B = (1 + \sigma)B_0.$$

Poiché il controllore è stato sintetizzato sulla base del valore nominale  $B_0$ , le equazioni del sistema ad anello chiuso divengono

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + BK\xi \\ \dot{\xi} &= GCx + (A + B_0K - GC)\xi,\end{aligned}$$

mentre la dinamica dell'errore di osservazione  $e = x - \xi$  è

$$\dot{e} = (A - GC - \sigma B_0 K)e + \sigma B_0 Kx.$$

Nelle coordinate  $(x, e)$  si ha

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + BK)x - BKe \\ \dot{e} &= \sigma B_0 Kx + (A - GC - \sigma B_0 K)e,\end{aligned}$$

e quindi gli autovalori del sistema ad anello chiuso sono quelli della matrice

$$\begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ \sigma B_0 Kx & A - GC - \sigma B_0 K \end{pmatrix}.$$

Per  $\sigma = 0$ , si ritrova il principio di separazione. Tuttavia, per  $\sigma \neq 0$ , la determinazione degli autovalori non è più immediata, e si rende necessario un diverso approccio.

In effetti, in questo caso conviene lavorare sulle funzioni di trasferimento. La funzione di trasferimento del compensatore è la stessa  $G(s)$  data in precedenza, mentre quella del sistema linearizzato diviene

$$\begin{aligned}P(s) &= C(sI - A)^{-1}B = (1 + \sigma)C(sI - A)^{-1}B_0 \\ &= (1 + \sigma) \frac{1}{s^2 - 10} = (1 + \sigma) \frac{1}{(s + 3.16)(s - 3.16)}.\end{aligned}$$

Lo schema a blocchi risultante è riportato in Fig. 4.10. La funzione di trasferimento ad anello aperto è dunque

$$\begin{aligned}F(s) &= G(s)P(s) \\ &= -(1 + \sigma) \frac{1065(s + 3.15)}{(s - 3.16)(s + 3.16)(s + 12.5 + j8.65)(s + 12.5 - j8.65)}.\end{aligned}$$

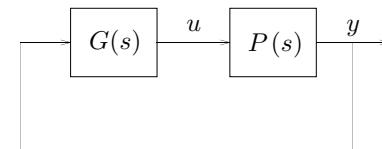


Figura 4.10: Schema a blocchi risultante

Lo studio della stabilità del sistema di controllo al variare della massa  $M$  può quindi essere ricondotto all'analisi dei poli ad anello chiuso al variare del parametro  $\sigma$ . A tale scopo, è possibile adottare il metodo del luogo delle radici, con  $1 + \sigma$  che agisce come un coefficiente di guadagno  $\kappa$  variabile sul ramo diretto. Il luogo risultante è mostrato in Fig. 4.11; per semplicità, si è trascurata la presenza del polo e dello zero praticamente coincidenti in  $F(s)$ , che corrisponde in pratica a una cancellazione (lecita).

Un esame del luogo rivela che il sistema rimane asintoticamente stabile per  $\kappa \in (\kappa_1, \kappa_2)$ , con  $\kappa_1, \kappa_2$  positivi. Ponendo prima  $\sigma = \sigma_1$  (cioè  $M = M_2$ ) e poi  $\sigma = \sigma_2$  (cioè  $M = M_1$ ) nella  $F(s)$ , e applicando il criterio di Routh ai denominatori delle funzioni di trasferimento ad anello chiuso così ottenute, è possibile dimostrare che in corrispondenza a entrambi gli estremi dell'intervallo di variazione di  $\sigma$  tutti i poli si trovano nel semipiano sinistro; in particolare, essi assumono le due configurazioni mostrate in Fig. 4.11. Pertanto, si può concludere che il controllore garantisce la stabilità del sistema per qualsiasi valore di  $M$  all'interno del campo di variazione assegnato.

La risposta all'ultimo quesito si può ricavare applicando il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$(s^2 - 10)(s^2 + 25s + 231) + 1065(1 + \sigma)(s + 3.15),$$

con  $\sigma$  come parametro. Costruendo la relativa tabella, si trova che il sistema linearizzato è stabile asintoticamente per  $\sigma \in (-0.31, 2.81)$ , a cui corrisponde l'intervallo  $(0.26, 1.45)$  per la massa del pendolo. Di conseguenza, la massima variazione percentuale (positiva o negativa) ammissibile per il controllore determinato in precedenza è del 45%.

A scopo illustrativo, si è effettuata una simulazione del comportamento del pendolo per vari valori della massa  $M$ , assumendo come posizione iniziale  $\vartheta(0) = 0.5$  rad e velocità iniziale nulla. La Fig. 4.12 mostra tre

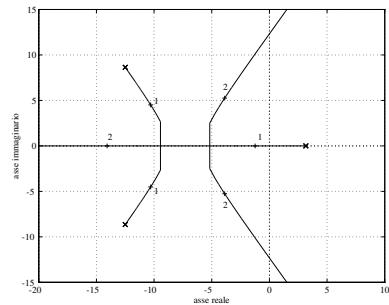


Figura 4.11: Luogo delle radici per  $F(s)$  al variare di  $\kappa = 1 + \sigma$ . Le due configurazioni dei poli ad anello chiuso per  $\sigma = \sigma_1$  e  $\sigma = \sigma_2$  sono contraddistinte dal relativo pedice.

risposte ottenute sotto l'azione del controllore in corrispondenza ad altrettanti valori di  $M$  appartenenti all'intervallo di ammissibilità, e cioè 1 kg (cioè  $M_0$ ), 0,4 kg e 1,3 kg. In tutti e tre i casi, il pendolo recupera la posizione di equilibrio inverso; si noti in particolare come nel secondo si abbia una risposta con carattere marcatamente oscillatorio. Questo può spiegarsi intuitivamente con il fatto che il controllore (sintetizzato a partire dal valore nominale  $M_0$ ) dispone di un valore di  $M$  notevolmente sovrastimato, e quindi tende a esercitare un'azione di controllo troppo 'energica'. D'altra parte, la presenza di oscillazioni poco smorzate è consistente con il luogo di Fig. 4.11, che mostra la presenza di due poli con smorzamento basso per valori elevati di  $\sigma$  o, il che è lo stesso, per valori bassi di  $M$ .

La risposta ottenuta per un pendolo di massa 0,1 kg, riportata in Fig. 4.13, conferma l'instabilità del sistema controllato per valori di  $M$  esterni al campo di ammissibilità.

In conclusione, si ricorda che il controllore determinato attraverso l'approssimazione lineare è in grado di stabilizzare il pendolo solo *localmente*. Ciò significa che, per condizioni iniziali più lontane dall'equilibrio inverso, la convergenza del pendolo a tale stato di equilibrio non è garantita, neanche in condizioni nominali ( $M = M_0$ ).

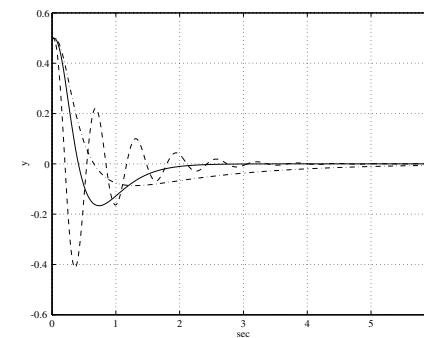


Figura 4.12: Andamento della posizione angolare del pendolo per valori di  $M$  pari a 1 kg (—), 0,4 kg (---) e 1,3 kg (- - -)

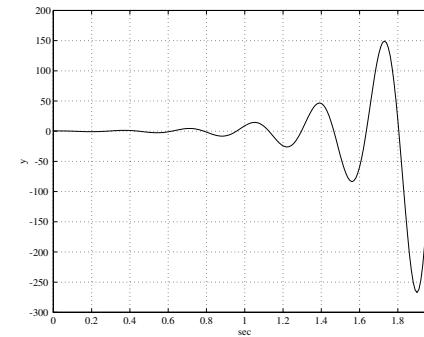


Figura 4.13: Andamento della posizione angolare del pendolo per un valore di  $M$  pari a 0,1 kg

**Esercizio 4.5**

Si consideri nuovamente il sistema di controllo preso in esame nell'esercizio 3.4. Dopo l'aggiunta di un polo nell'origine in catena diretta per garantire la reiezione del disturbo costante  $d$ , lo schema di controllo diviene quello mostrato in Fig. 4.14, in cui si è posto

$$\hat{P}(s) = \frac{1}{s} P(s) = \frac{s+1}{s^3(s-1)}.$$

Si noti che, rispetto allo schema di Fig. 3.27 è stato aggiunto un ulteriore disturbo  $d'$  sul ramo di reazione.

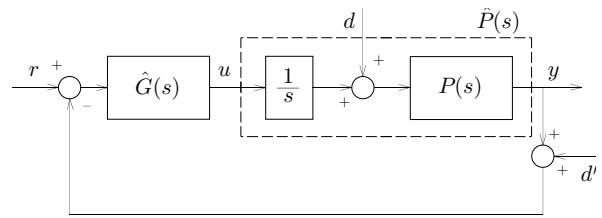


Figura 4.14: Schema equivalente di controllo per il sistema considerato nell'esercizio 3.4

Si individui una realizzazione di  $\hat{P}(s)$  nello spazio di stato. Utilizzando il principio di separazione, si determini un compensatore dinamico  $\hat{G}_1(s)$  di dimensione 4 in modo tale che ad anello chiuso:

- a) gli autovalori di  $\hat{P}(s)$  vengano spostati tutti in  $-1$ ;
- b) gli autovalori che caratterizzano la dinamica dell'errore di osservazione siano collocati tutti in  $-2$ .

Inoltre, si costruisca un compensatore dinamico alternativo  $\hat{G}_2(s)$  di dimensione 3 che garantisca le medesime caratteristiche ad anello chiuso, e si traccino i diagrammi di Bode dei moduli di  $\hat{G}_1(j\omega)$  e  $\hat{G}_2(j\omega)$ .

Infine, nell'ipotesi che il disturbo  $d'$  sul ramo di reazione sia sinusoidale e di frequenza elevata, si confronti il comportamento dei due sistemi di

controllo ottenuti dal punto di vista dell'influenza di  $d'$  su: (i) il controllo  $u$  (ii) l'uscita  $y$ .

Il primo passo della soluzione consiste nel ricavare una realizzazione di  $\hat{P}(s)$  nello spazio di stato, ovvero una rappresentazione

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

tale che  $\hat{P}(s) = C(sI - A)^{-1}B$ . È conveniente che tale realizzazione sia *minima* — e cioè di dimensione pari all'ordine della funzione di trasferimento — perché ciò garantisce che la rappresentazione ottenuta sia completamente raggiungibile e osservabile.

Com'è noto, data una generica funzione di trasferimento strettamente propria

$$H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0},$$

in cui  $n(s)$  e  $d(s)$  sono coprimi, possibili realizzazioni minime con lo spazio di stato sono la *forma canonica di controllo*, descritta dalle matrici

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_c = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{pmatrix},$$

e la *forma canonica di osservazione*, individuata dalla terna

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$B_o = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad C_o = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se ad esempio si adotta la forma canonica di controllo, si ottiene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Come già detto, tale rappresentazione è certamente raggiungibile e osservabile.

La sintesi di un compensatore dinamico che risolva il problema assegnato può essere affrontata in due fasi.

1. Dapprima si risolve il problema di spostare i poli del processo nel modo desiderato attraverso una retroazione dallo stato  $u = Kx$ . Nel caso in esame, ciò implica il calcolo di una matrice  $K$  tale che tutti gli autovalori di  $A + BK$  siano in  $-1$ .
2. Successivamente, si individua un dispositivo in grado di ricostruire, a partire dall'uscita  $y$  del processo, una stima  $\xi$  che converga allo stato  $x$  con la dinamica assegnata. Questo richiede la determinazione di una matrice  $G$  tale che tutti gli autovalori di  $A - GC$  siano in  $-2$ .

Sulla base del principio di separazione, la retroazione  $u = K\xi$  garantisce che il sistema ad anello chiuso soddisfa le specifiche del problema. Inoltre, si noti che le specifiche richieste nell'enunciato si riferiscono esclusivamente

all'evoluzione libera del sistema. Di conseguenza, nel resto dell'esercizio si porrà senz'altro  $r = 0$ . Tuttavia, nello scrivere la funzione di trasferimento del compensatore  $G(s)$  si dovrà tener conto dell'esistenza del sommatore, in cui l'uscita  $y$  viene cambiata di segno.

La matrice di raggiungibilità è

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'inversa di  $P$  è ottenuta come

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la cui ultima riga è

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$p_1^*(\lambda) = (\lambda + 1)^4.$$

Di conseguenza si ha

$$p_1^*(A) = (A + I)^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix},$$

avendo indicato con  $I$  la matrice identità  $4 \times 4$ . La matrice di retroazione statica è perciò

$$K = -\mu p_1^*(A) = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare molto più rapidamente osservando che con la forma canonica di controllo si ha

$$A_c + B_c K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ k_0 - a_0 & k_1 - a_1 & k_2 - a_2 & k_3 - a_3 & \dots & k_{n-1} - a_{n-1} \end{pmatrix},$$

avendo posto  $K = (k_0 \ k_1 \ \dots \ k_{n-1})$ . Poiché  $A_c + B_c K$  è ancora in forma compagna, essa ha il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^n + (a_{n-1} - k_{n-1})\lambda^{n-1} + \dots + (a_0 - k_0).$$

Di conseguenza, basta scegliere

$$\begin{aligned} k_0 &= a_0 - a_0^* \\ &\vdots \\ k_{n-1} &= a_{n-1} - a_{n-1}^* \end{aligned}$$

per imporre il polinomio caratteristico

$$p^*(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}^* \lambda^{n-1} + \dots + a_0^*.$$

Venendo alla costruzione dell'osservatore, la matrice di osservabilità è

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

la cui inversa è

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -0.5 \\ 0 & 1 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

L'ultima colonna di  $Q^{-1}$  è

$$\eta = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico desiderato per l'osservatore è

$$p_2^*(\lambda) = (\lambda + 2)^4.$$

Di conseguenza si ha

$$p_2^*(A) = (A + 2I)^4 = \begin{pmatrix} 16 & 32 & 24 & 9 \\ 0 & 16 & 32 & 33 \\ 0 & 0 & 16 & 65 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix},$$

da cui si deriva

$$G = p_2^*(A)\eta = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 8.5 \\ 24.5 \\ 40.5 \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione dell'osservatore nello spazio di stato è la seguente

$$\dot{\xi} = (A - GC)\xi + Bu + Gy,$$

e la retroazione dall'uscita si ottiene ponendo  $u = K\xi$  (si ricordi che si sta considerando  $r = 0$ ). Di conseguenza, la rappresentazione del sistema ad anello chiuso è

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BK\xi \\ \dot{\xi} &= (A - GC + BK)\xi + GCx. \end{aligned}$$

Il compensatore dinamico così ottenuto ha funzione di trasferimento

$$\begin{aligned} \hat{G}_1(s) &= \frac{u(s)}{-y(s)} = -K(sI - A + BK - GC)^{-1}G \\ &= \frac{384(s + 0.26)(s + 0.09 + j0.39)(s + 0.09 - j0.39)}{(s + 1)(s + 6.90)(s + 2.55 + j4.62)(s + 2.55 - j4.62)} \end{aligned}$$

e ha la medesima dimensione della realizzazione di  $\hat{P}(s)$ , cioè 4. Ciò è dovuto all'inclusione nel sistema di controllo di un sistema dinamico ausiliario — l'osservatore dello stato — che consiste sostanzialmente in una copia del sistema, opportunamente forzata.

A riprova dell'efficacia del metodo di sintesi seguito, si è eseguita una simulazione del comportamento del sistema ad anello chiuso in evoluzione

libera, a partire dallo stato iniziale  $x_0 = (-1 \ 2 \ 1.5 \ 0)$ . Lo stato iniziale dell'osservatore è stato assunto nullo. La traiettoria delle variabili di stato è riportata in Fig. 4.15, mentre la Fig. 4.16 mostra il corrispondente sforzo di controllo  $u = K\xi$ . L'andamento dell'errore di osservazione  $e = x - \xi$  è illustrato in Fig. 4.17.

Allo scopo di consentire un confronto, si è effettuata anche una simulazione del comportamento del sistema sotto retroazione dallo stato  $u = Kx$ , nell'ipotesi che quest'ultimo sia accessibile. L'evoluzione libera delle variabili di stato — a partire dalle medesime condizioni iniziali della precedente simulazione — è riportata in Fig. 4.18, mentre la Fig. 4.19 mostra il corrispondente andamento di  $u$ . Si noti come l'uso della retroazione dall'uscita risulti in uno sforzo di controllo maggiore rispetto al caso in cui si possa far ricorso alla retroazione dallo stato, a causa della notevole incertezza iniziale sul valore dello stato  $x$ . Va tuttavia sottolineato come tale considerazione non abbia validità generale; in effetti, per altre condizioni iniziali potrebbe verificarsi una situazione diversa.

Per mettere in evidenza l'influenza della velocità di osservazione sulle prestazioni ad anello chiuso, si è modificato il precedente compensatore in modo tale da assegnare tutti gli autovalori della dinamica di  $e$  in  $-6$ . Procedendo in modo analogo a quanto visto prima si ottiene

$$\hat{G}'_1(s) = \frac{6484(s + 0.42)(s + 0.31 + j0.62)(s + 0.31 - j0.62)}{(s + 1)(s + 15.28)(s + 6.36 + j9.17)(s + 6.36 - j9.17)}.$$

La Fig. 4.20 mostra l'evoluzione libera del nuovo sistema ad anello chiuso, mentre l'andamento del controllo  $u$  è riportato in Fig. 4.21. Si noti come, pur in presenza di una convergenza più rapida di quella di Fig. 4.15, e in effetti simile a quella ottenuta con la retroazione dallo stato (Fig. 4.18), l'escursione iniziale delle variabili di stato è molto più pronunciata. Di conseguenza, anche lo sforzo di controllo di Fig. 4.21 è sensibilmente aumentato.

Di norma, gli autovalori della dinamica di osservazione vengono scelti da 2 a 6 volte più 'veloci' di quelli del processo controllato. Ciò garantisce che le caratteristiche dinamiche di quest'ultimo siano dominanti per la risposta del sistema ad anello chiuso, e, al tempo stesso, assicura valori ragionevoli dell'ingresso di controllo  $u$ .

Per quanto riguarda la possibilità di sintetizzare un compensatore dinamico di ordine 3, essa è legata all'uso di un osservatore ridotto per stimare lo stato  $x$  del processo. Com'è noto, la semplice condizione di osservabilità

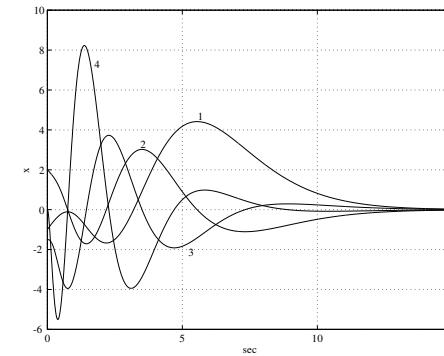


Figura 4.15: Evoluzione libera dello stato  $x$  con il compensatore  $\hat{G}_1(s)$ . Ogni componente è contraddistinta dal corrispondente pedice.

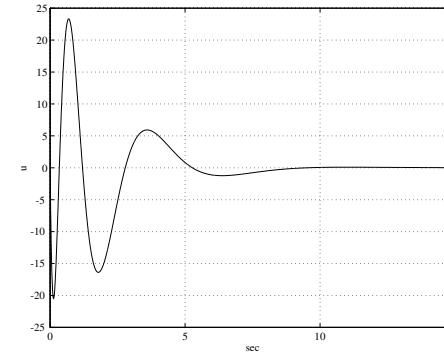


Figura 4.16: Sforzo di controllo  $u = K\xi$  con il compensatore  $\hat{G}_1(s)$

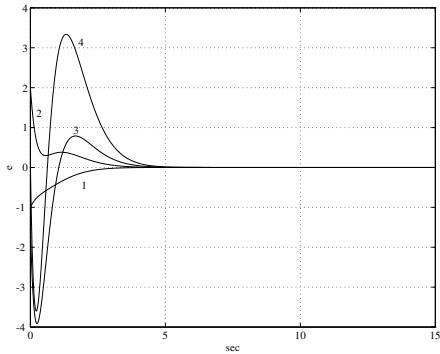


Figura 4.17: Errore di osservazione  $e = x - \xi$  con il compensatore  $\hat{G}_1(s)$ .  
Ogni componente è contraddistinta dal corrispondente pedice.

della coppia  $(A, C)$  garantisce che è possibile costruire un tale dispositivo. In pratica, è necessario innanzitutto individuare un cambiamento di coordinate  $z = Tx$  in modo tale che si abbia  $y = z_1$ , ovvero

$$\tilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ad esempio, basta porre in questo caso

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

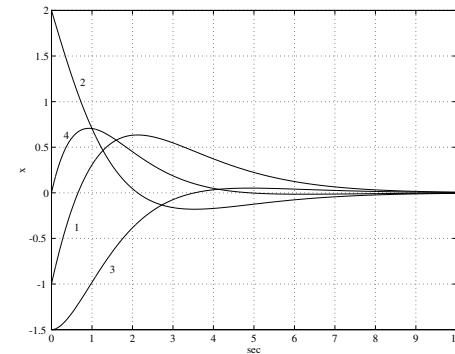


Figura 4.18: Evoluzione libera dello stato  $x$  con retroazione dallo stato.  
Ogni componente è contraddistinta dal corrispondente pedice.

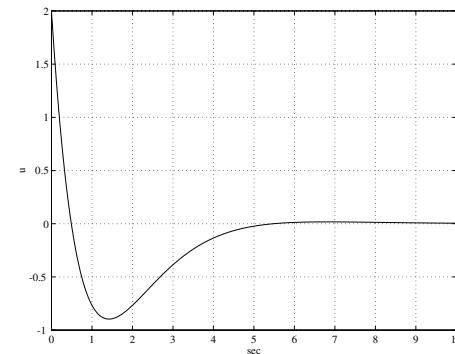


Figura 4.19: Sforzo di controllo  $u = Kx$  con retroazione dallo stato

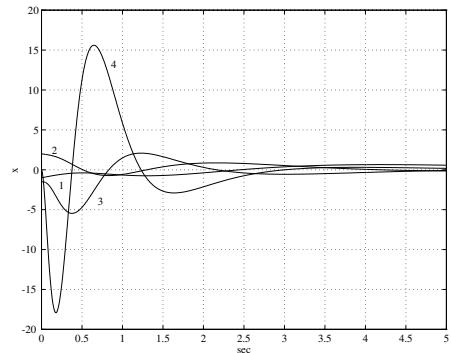


Figura 4.20: Evoluzione libera dello stato  $x$  con il compensatore  $\hat{G}'_1(s)$ .  
Ogni componente è contraddistinta dal corrispondente pedice.

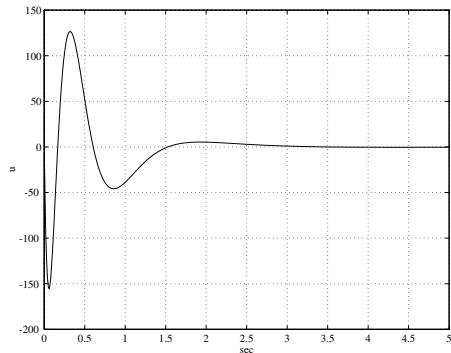


Figura 4.21: Sforzo di controllo  $u = K\xi$  con il compensatore  $\hat{G}'_1(s)$

Nelle coordinate trasformate si ha

$$\begin{aligned}\dot{z} &= TAT^{-1}z + TBu = \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ y &= CT^{-1}z = \tilde{C}z.\end{aligned}$$

Le matrici  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  e  $\tilde{C}$  si partizionano come segue

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \left( \begin{array}{cc} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \tilde{B} = \left( \begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right), \\ \tilde{C} &= \left( \begin{array}{cc} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).\end{aligned}$$

Analogamente, lo stato trasformato si partitiona in

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z_1}{z_2} \\ \frac{z_2}{z_3} \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}.$$

A questo punto, per costruire l'osservatore ridotto è sufficiente individuare una matrice  $N$  tale che gli autovalori di  $\tilde{A}_{22} - N\tilde{A}_{12}$  siano tutti in  $-2$ . Procedendo in modo analogo a quanto visto per l'osservatore completo (in particolare, costruendo una matrice di osservabilità ausiliaria relativa alla coppia  $(\tilde{A}_{22}, \tilde{A}_{12})$ ), si ricava

$$N = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 5.5 \\ 13.5 \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione dell'osservatore ridotto nello spazio di stato è

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= (\tilde{A}_{22} - N\tilde{A}_{12})\vartheta + My + Lu \\ \zeta &= \vartheta + Ny,\end{aligned}$$

dove

$$M = \tilde{A}_{21} - N\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{22}N - N\tilde{A}_{12}N \quad L = \tilde{B}_2 - N\tilde{B}_1.$$

Il vettore  $\zeta$ , che ha tre componenti, rappresenta una stima di  $z_b$ , cioè delle ultime tre componenti dello stato trasformato  $z$ . Di conseguenza, una stima  $\xi$  del vettore di stato originario  $x$  può essere ottenuta come

$$\xi = T^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ \zeta \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} y \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - \zeta_2 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{pmatrix}.$$

Si noti che, a differenza di quanto accade per la prima componente  $z_1$  dello stato trasformato, che coincide con l'uscita  $y$ , la prima componente  $x_1$  dello stato originario non è nota con esattezza.

Il controllo a retroazione dall'uscita ha l'espressione

$$u = K\xi = KT^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ \zeta \end{pmatrix} = \tilde{K}_1 y + \tilde{K}_2 \zeta,$$

avendo posto

$$KT^{-1} = \tilde{K} = \begin{pmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione del sistema ad anello chiuso è quindi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(\tilde{K}_1 y + \tilde{K}_2 \zeta) = (A + B(\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 N)C)x + B\tilde{K}_2 \vartheta \\ \dot{\vartheta} &= (\tilde{A}_{22} - N\tilde{A}_{12})\vartheta + My + L(\tilde{K}_1 y + \tilde{K}_2 \zeta) \\ &= (M + L(\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 N))Cx + (\tilde{A}_{22} - N\tilde{A}_{12} + L\tilde{K}_2)\vartheta \end{aligned}$$

con le uscite

$$\begin{aligned} y &= Cx \\ \xi &= T^{-1} \begin{pmatrix} Cx \\ NCx + \vartheta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In questa rappresentazione, le uscite del sistema ad anello chiuso sono l'uscita vera e propria del processo  $y$  e la stima  $\xi$  del vettore di stato  $x$ .

Per valutare la funzione di trasferimento del compensatore dinamico ridotto così ottenuto, è conveniente fare riferimento allo schema di Fig. 4.22. Si ha

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= (\tilde{A}_{22} - N\tilde{A}_{12})\vartheta + My + L(\tilde{K}_1 y + \tilde{K}_2 \zeta) \\ &= (\tilde{A}_{22} - N\tilde{A}_{12} + L\tilde{K}_2)\vartheta + (L(\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 N) + M)y \\ u &= \tilde{K}_1 y + \tilde{K}_2 \zeta = (\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 N)y + \tilde{K}_2 \vartheta, \end{aligned}$$

e perciò si ottiene

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(s) &= \frac{u(s)}{-y(s)} \\ &= -\tilde{K}_2(sI - \tilde{A}_{22} + N\tilde{A}_{12} - L\tilde{K}_2)^{-1}(L(\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 N) + M) - (\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 N) \\ &= \frac{106(s + 0.31)(s + 0.16 + j0.47)(s + 0.16 - j0.47)}{(s + 1)(s + 5 + j4.24)(s + 5 - j4.24)}. \end{aligned}$$

Tale funzione di trasferimento è propria a causa del legame diretto tra  $y$  e  $u$  (si veda la Fig. 4.22).

Per effettuare un confronto tra il compensatore basato sull'osservatore completo e quello basato sull'osservatore ridotto, si è ripetuta la precedente simulazione per quest'ultimo caso. Mentre lo stato iniziale del sistema è ancora  $x_0 = (-1 \ 2 \ 1.5 \ 0)$ , il valore iniziale dello stato  $\vartheta$  dell'osservatore è stato assunto pari a

$$\vartheta_0 = -Ny_0 = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -5.5 \\ -13.5 \end{pmatrix},$$

dove  $y_0 = Cx_0$  indica il valore iniziale dell'uscita  $y$ . Si noti che, con tale scelta, la stima  $\zeta$  di  $z_b$  vale inizialmente

$$\zeta_0 = \vartheta_0 + Ny_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

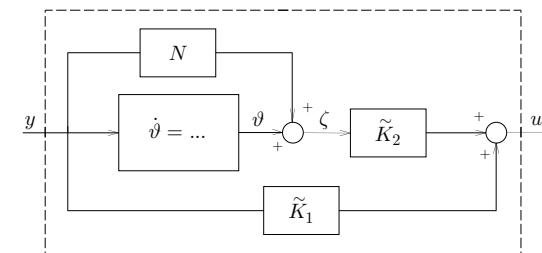


Figura 4.22: Struttura del compensatore

La traiettoria delle variabili di stato è mostrata in Fig. 4.23, mentre la Fig. 4.24 riporta il corrispondente sforzo di controllo  $u = K\xi = \hat{K}_1 y + \hat{K}_2 \zeta$ . Infine, l'andamento dell'errore di osservazione dello stato  $e = x - \xi$  originario è illustrato in Fig. 4.25. Come previsto, l'errore transitorio è diverso da zero per tutte e quattro le variabili osservate.

Nelle Figg. 4.26–4.27 si riportano i diagrammi di Bode dei moduli di  $\hat{G}_1(j\omega)$  e  $\hat{G}_2(j\omega)$ , rispettivamente. Si noti il tipico andamento passa-alto di  $\hat{G}_2(j\omega)$ .

Venendo all'ultima parte dell'esercizio, si osservi innanzitutto che l'influenza di  $d'$  (che rappresenta un disturbo che agisce sul dispositivo di misura di  $y$ ) su  $u$  e su  $y$  può essere prevista analizzando rispettivamente le funzioni di trasferimento del disturbo

$$W_{d',u}(s) = \frac{u(s)}{d'(s)} = -\frac{\hat{G}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{P}(s)},$$

e

$$W_{d',y}(s) = \frac{y(s)}{d'(s)} = -W(s) = -\frac{\hat{G}(s)\hat{P}(s)}{1 + \hat{G}(s)\hat{P}(s)},$$

dove  $W(s)$  indica la funzione di trasferimento riferimento/uscita ad anello chiuso.

Per quanto riguarda l'influenza di  $d'$  su  $u$ , si trova facilmente

$$\begin{aligned} W_{d',u}^1(s) &= -\frac{\hat{G}_1(s)}{1 + \hat{G}_1(s)\hat{P}(s)} \\ &= \frac{-384s^3(s-1)(s+0.26)(s+0.09+j0.39)(s+0.09-j0.39)}{(s+1)^4(s+2)^4} \\ W_{d',u}^2(s) &= -\frac{\hat{G}_2(s)}{1 + \hat{G}_2(s)\hat{P}(s)} \\ &= \frac{-106s^3(s-1)(s+0.31)(s+0.16+j0.47)(s+0.16-j0.47)}{(s+1)^4(s+2)^3}, \end{aligned}$$

i cui diagrammi di Bode dei moduli sono mostrati in Fig. 4.28 e Fig. 4.29, rispettivamente. Si noti che gli zeri di entrambe le funzioni di trasferimento includono — oltre agli zeri del compensatore — i poli di  $\hat{P}(s)$ , e in particolare la radice tripla nell'origine. Di conseguenza, per entrambi i compensatori un eventuale disturbo  $d'$  costante, a rampa o a parabola non

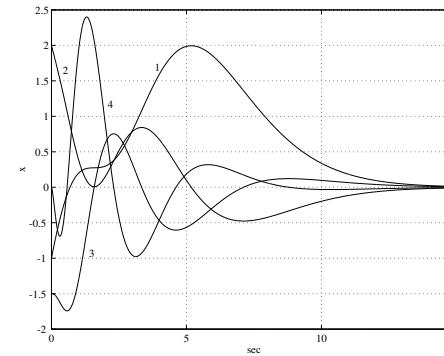


Figura 4.23: Evoluzione libera dello stato  $x$  con il compensatore ridotto  $\hat{G}_2(s)$ . Ogni componente è contraddistinta dal corrispondente pedice.

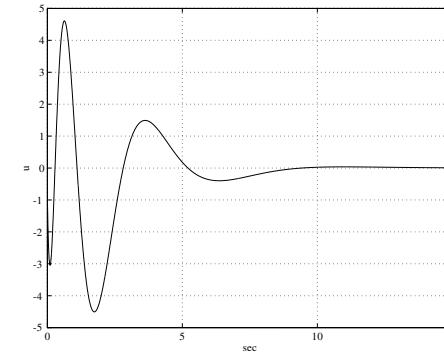


Figura 4.24: Sforzo di controllo  $u = K\xi$  con il compensatore ridotto  $\hat{G}_2(s)$

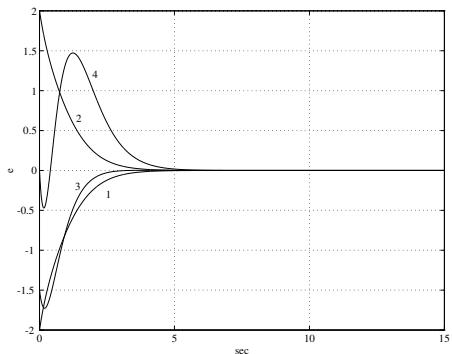


Figura 4.25: Errore di osservazione  $e = x - \xi$  con il compensatore ridotto  $\hat{G}_2(s)$ . Ogni componente è contraddistinta dal corrispondente pedice.

influenza il valore di regime  $u$  del controllo. Inoltre, i poli coincidono con i poli del sistema ad anello chiuso.

Il comportamento dei due compensatori è invece differente nei confronti di disturbi  $d'$  a frequenza elevata. Infatti, la  $W_{d',u}^2(s)$  associata all'uso di un osservatore ridotto è propria, a causa del fatto che è tale la  $\hat{G}_2(s)$ . Di conseguenza, un disturbo sinusoidale  $d'$  di pulsazione superiore ai 400 rad/sec si trasferisce amplificato sul controllo  $u$ , mentre ciò non accade utilizzando un osservatore completo.

Per quanto riguarda la funzione di trasferimento ad anello chiuso, si ha

$$W_1(s) = \frac{\hat{G}_1(s)\hat{P}(s)}{1+\hat{G}_1(s)\hat{P}(s)} = \frac{384(s+0.26)(s+0.09+j0.39)(s+0.09-j0.39)}{(s+1)^3(s+2)^4}$$

e

$$W_2(s) = \frac{\hat{G}_2(s)\hat{P}(s)}{1+\hat{G}_2(s)\hat{P}(s)} = \frac{106(s+0.31)(s+0.16+j0.47)(s+0.16-j0.47)}{(s+1)^3(s+2)^3}.$$

In entrambi i casi, gli zeri ad anello chiuso sono l'unione degli zeri del compensatore e di quelli del processo  $\hat{P}(s)$ , mentre i poli sono quelli del

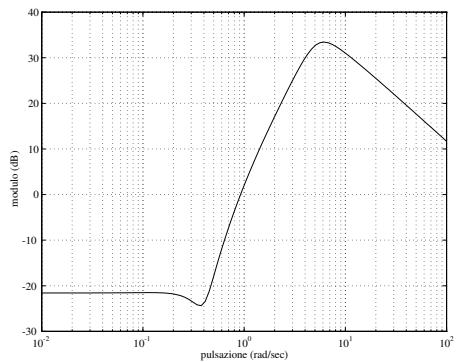
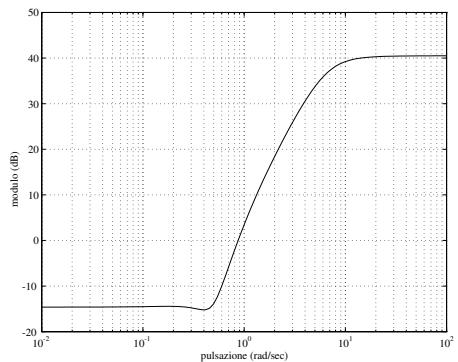
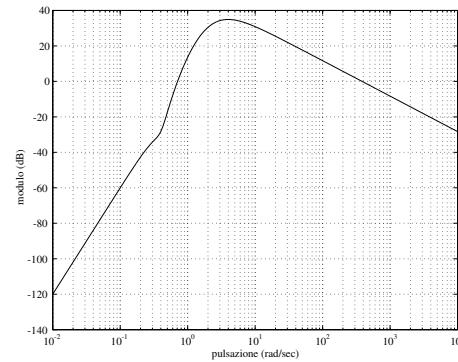
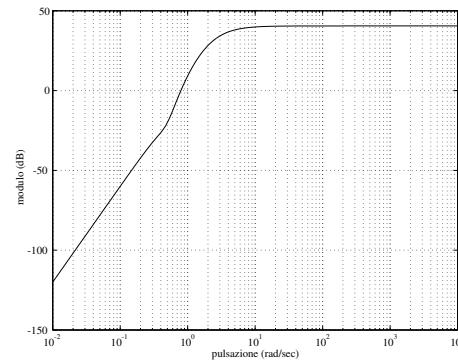
processo controllato e quelli dell'osservatore; si noti la cancellazione dello zero in  $-1$  con un polo analogo.

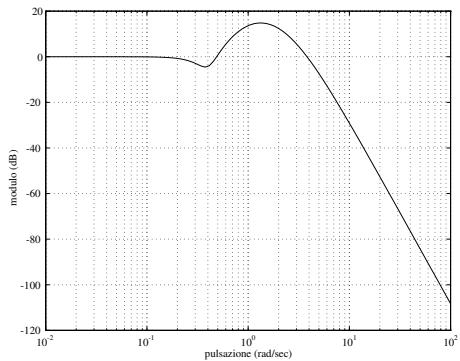
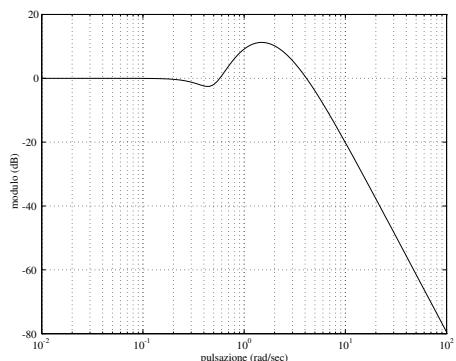
Le Figg. 4.30–4.31 mostrano rispettivamente i diagrammi di Bode dei moduli delle risposte armoniche ad anello chiuso  $W_1(j\omega)$  e  $W_2(j\omega)$ , che per quanto visto prima caratterizzano anche l'effetto di  $d'$  su  $y$ . L'esame dei diagrammi mostra che le due sintesi portano a comportamenti ingresso/uscita ( $r/y$ ) molto simili dal punto di vista armonico; di conseguenza, lo stesso vale per il legame disturbo/uscita ( $d'/y$ ). In particolare, si osserva che:

- essendo  $W_1(0) = W_2(0) = 1$ , un disturbo  $d'$  costante si trasferisce inalterato (ma cambiato di segno) sull'uscita a regime;
- la risposta armonica ingresso/uscita in alta frequenza è sostanzialmente equivalente nei due casi, nonostante la presenza nel compensatore  $\hat{G}_2(s)$  di un legame diretto disturbo/uscita.

Va tuttavia sottolineato che, quando si include il riferimento  $r$  nello schema di controllo, il compensatore dinamico progettato sulla base del principio di separazione può essere collocato tanto sul ramo diretto (così come previsto dall'enunciato di questo esercizio, e in particolare dalla Fig. 4.14) quanto sul ramo di reazione. Gli schemi risultanti danno luogo caratteristiche riferimento/uscita differenti; si veda in proposito l'esercizio 4.6.

In conclusione, è istruttivo confrontare il sistema di controllo ottenuto in questo caso con quello già determinato nell'esercizio 3.4. In particolare, in quest'ultimo si aveva un controllore  $G(s)$  di dimensione pari a 2, mentre nella sintesi qui presentata  $G(s)$  ha dimensione 5 o 4 a seconda che si adotti o meno un osservatore ridotto (si ricordi che nel controllore va in ogni caso inserito il polo nell'origine, che per comodità si è inglobato in  $\hat{P}(s)$ ). L'aumento della dimensione del controllore ha come contropartita la possibilità di assegnare arbitrariamente i poli del sistema ad anello chiuso, mentre nell'esercizio 3.4 si era ottenuta una semplice stabilizzazione.

Figura 4.26: Diagramma di Bode dei moduli di  $\hat{G}_1(j\omega)$ Figura 4.27: Diagramma di Bode dei moduli di  $\hat{G}_2(j\omega)$ Figura 4.28: Diagramma di Bode dei moduli di  $W_{d',u}^1(j\omega)$ Figura 4.29: Diagramma di Bode dei moduli di  $W_{d',u}^2(j\omega)$

Figura 4.30: Diagramma di Bode dei moduli di  $W_1(j\omega)$ Figura 4.31: Diagramma di Bode dei moduli di  $W_2(j\omega)$ **Esercizio 4.6**

Sia dato il sistema lineare  $\mathcal{P}$  descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

e caratterizzato dalla terna di matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0).$$

Assumendo che sia lo stato  $x$  che l'uscita  $y$  siano misurabili, si determini uno schema di controllo tale che:

- a) l'uscita sia in grado di riprodurre asintoticamente un segnale di riferimento  $r$  a gradino;
- b) il sistema ad anello chiuso abbia tutti gli autovalori in  $-2$ .

Rimuovendo l'ipotesi che lo stato sia misurabile, si modifichi lo schema precedente con l'inclusione di un osservatore asintotico dello stato. Infine, si discuta qualitativamente l'influenza di variazioni parametriche sul soddisfacimento della specifica a).

---

È facile verificare che il sistema  $\mathcal{P}$  è raggiungibile e osservabile. Nell'ipotesi che lo stato sia accessibile, un primo possibile approccio alla soluzione del problema assegnato è quello già presentato nell'esercizio 4.1. Tale approccio fa riferimento allo schema di Fig. 4.32. In sostanza, si determina la matrice  $K$  in modo tale da assegnare alla matrice  $A + BK$  gli autovalori richiesti, mentre un'opportuna scelta di  $\gamma \in \mathbb{R}$  garantisce che la funzione di trasferimento tra  $r$  e  $y$  ad anello chiuso abbia guadagno unitario.

Il calcolo di  $K$  è in questo caso estremamente semplice. Si trova

$$K = (-5 \quad -4).$$

La corrispondente funzione di trasferimento ad anello chiuso è

$$W(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \gamma C(sI - A - BK)^{-1}B = \frac{\gamma}{(s + 2)^2},$$

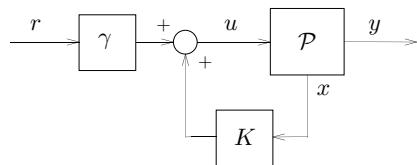


Figura 4.32: Schema di controllo a retroazione dallo stato

il cui guadagno vale

$$W(0) = -\gamma C(A + BK)^{-1}B = \frac{\gamma}{4}.$$

Pertanto, scegliendo  $\gamma = 4$  si garantisce  $W(0) = 1$  e quindi il soddisfacimento della specifica a). Si osservi che, com'è del resto noto, la retroazione dallo stato non introduce zeri nella funzione di trasferimento ad anello chiuso.

Per ottenere il medesimo risultato nel caso in cui solo l'uscita  $y$  sia misurabile, si può fare riferimento a uno schema analogo al precedente che però includa un osservatore dello stato, così come mostrato in Fig. 4.33. L'equazione di stato dell'osservatore è

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + G(y - C\xi),$$

avendo indicato con  $\xi$  lo stato ricostruito. La matrice  $G$  deve essere tale da assegnare ad  $A - GC$  autovalori opportuni. Ad esempio, visto che gli autovalori relativi al processo  $\mathcal{P}$  devono essere spostati in  $-2$ , si può richiedere che la dinamica di osservazione abbia autovalori in  $-4$ . Si trova facilmente

$$G = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni ad anello chiuso sono

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu = Ax + BK\xi + B\gamma r \\ \dot{\xi} &= A\xi + Bu + G(y - C\xi) = (A + BK - GC)\xi + GCx + B\gamma r. \end{aligned}$$

Si noti che la dinamica dell'errore di ricostruzione  $e = x - \xi$  è data da

$$\dot{e} = (A - GC)e,$$

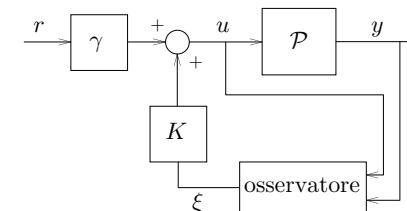


Figura 4.33: Schema di controllo a retroazione dall'uscita con compensazione sul ramo di reazione

la cui evoluzione non è influenzata dal segnale di riferimento  $r$ . Pertanto, anche in presenza di un riferimento  $r$  diverso da zero, l'errore di ricostruzione tende asintoticamente a zero.

Per scegliere  $\gamma$  in modo tale da ottenere un sistema di tipo 1, è necessario calcolare la funzione di trasferimento tra  $r$  e  $y$  per lo schema di Fig. 4.33. Un possibile metodo consiste nello scrivere le equazioni ad anello chiuso scegliendo come coordinate lo stato  $x$  e l'errore di ricostruzione  $e$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x - BKe + B\gamma r \\ \dot{e} &= (A - GC)e \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento tra  $r$  e  $y$  ad anello chiuso vale perciò

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{y(s)}{r(s)} = (C \quad 0) \left( sI - \begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - GC \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} B\gamma \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \gamma C(sI - A - BK)^{-1}B = \frac{\gamma}{(s + 2)^2}, \end{aligned}$$

dove si è sfruttata la struttura a blocchi della matrice interna per il calcolo della sua inversa. A questo punto, è opportuno fare alcune osservazioni.

- La funzione di trasferimento è esattamente la stessa del caso in cui si effettui la retroazione dello stato. In particolare, i poli ad anello chiuso comprendono esclusivamente gli autovalori assegnati alla matrice

$A + BK$ , mentre gli autovalori propri della dinamica di osservazione non compaiono nel legame riferimento/uscita. Ciò indica che, con lo schema di controllo in questione, questi ultimi vengono cancellati dagli zeri del compensatore risultante.

- Così come per il sistema di Fig. 4.32, anche in questo caso lo schema di controllo non introduce zeri addizionali nella funzione di trasferimento riferimento/uscita oltre a quelli propri del processo (che in questo caso sono assenti). Ciò è consistente con quanto messo in evidenza al punto precedente.
- Per quanto riguarda la riproduzione di un riferimento  $r$  costante, si ottiene ovviamente

$$W(0) = -\gamma C(A + BK)^{-1}B = \frac{\gamma}{4}.$$

Di conseguenza, per ottenere un sistema di tipo 1 è sufficiente porre nuovamente  $\gamma = 4$ .

Tuttavia, come già accennato nell'esercizio 4.1, la precedente soluzione — sia nella versione con retroazione dallo stato che in quella con retroazione dall'uscita — non può in generale considerarsi pienamente soddisfacente, data la scarsa robustezza dello schema risultante rispetto a variazioni parametriche. Infatti, una generica perturbazione delle matrici  $A$ ,  $B$  e  $C$  del processo  $\mathcal{P}$  o della matrice  $K$  comporterebbe  $W(0) \neq 1$ , e quindi un errore a regime permanente non nullo.

Ad esempio, se la matrice  $K$  viene perturbata rispetto al valore nominale come segue

$$\tilde{K} = 0.9K,$$

si ottengono per la matrice  $A + B\tilde{K}$  gli autovalori  $-1.80 \pm j0.51$ . La funzione di trasferimento perturbata riferimento/uscita diviene

$$\tilde{W}(s) = \gamma C(sI - A - B\tilde{K})^{-1}B = \frac{4}{s^2 + 3.6s + 3.5},$$

che è caratterizzata dal guadagno  $\tilde{W}(0) = 4/3.5 = 1.14$ . Non essendo il guadagno unitario, il sistema presenta un errore a regime permanente, come confermato dalla risposta indiciale mostrata in Fig. 4.34.

In effetti, una soluzione di gran lunga preferibile consiste nell'introdurre nel ramo diretto un'azione integratrice. Com'è noto, infatti, uno schema a

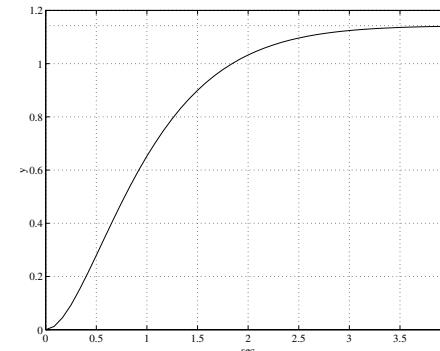


Figura 4.34: Risposta indiciale in presenza di una perturbazione su  $K$  per gli schemi di Fig. 4.32 e di Fig. 4.33

retroazione statica (cioè istantanea) dall'uscita che include nel ramo diretto un tale elemento garantisce la riproduzione esatta a regime di riferimenti costanti (tipo 1); inoltre, tale caratteristica viene mantenuta anche in presenza di variazioni dei parametri del processo o del controllore — purché naturalmente venga preservata la stabilità asintotica del sistema.

Sulla base delle considerazioni appena esposte, si può pensare di adottare lo schema di Fig. 4.35. Si definisca il sistema esteso  $\mathcal{P}_e$

$$\begin{aligned}\dot{u} &= m \\ \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

in cui è stata esplicitamente inclusa l'equazione dinamica dell'integratore guidato dal segnale ausiliario di controllo  $m$ . La rappresentazione di tale

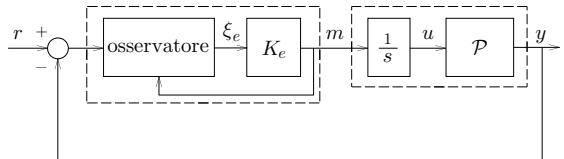


Figura 4.35: Schema di controllo a retroazione dall'uscita con compensazione sul ramo diretto

sistema è data dalla terna di matrici

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_e = (0 \ 1 \ 0),$$

che risulta ovviamente raggiungibile e osservabile. Pertanto, si può utilizzare il principio di separazione al fine di progettare un compensatore dinamico dall'uscita per il sistema esteso. Si noti che, a differenza dello schema di Fig. 4.32, in cui il compensatore è di fatto collocato sul ramo di reazione, nella struttura mostrata in Fig. 4.35 l'azione compensatrice si svolge sul ramo diretto.

Per individuare il compensatore si devono dunque determinare due matrici  $K_e$  e  $G_e$  tali da assegnare opportunamente gli autovalori di  $A_e + B_e K_e$  e  $A_e - G_e C_e$ , rispettivamente. L'inversa della matrice di raggiungibilità del sistema esteso è

$$P_e^{-1} = (B_e \ A_e B_e \ A_e^2 B_e)^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

mentre il polinomio caratteristico desiderato valutato in  $A_e$  dà

$$p_1^*(A_e) = (A_e + 2I)^3 = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 6 & 14 & 13 \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Pertanto si ha

$$K_e = -(0 \ 1 \ 0) p_1^*(A_e) = (-6 \ -14 \ -13).$$

Per la determinazione di  $G_e$ , si procede al calcolo dell'inversa della matrice di osservabilità del sistema esteso

$$Q_e^{-1} = \begin{pmatrix} C_e \\ C_e A_e \\ C_e A_e^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & 1 \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix}.$$

Scgliendo nuovamente autovalori coincidenti in  $-4$  per la dinamica di osservazione, si ottiene

$$p_2^*(A_e) = (A_e + 4I)^3 = \begin{pmatrix} 64 & * & * \\ 12 & * & * \\ 49 & * & * \end{pmatrix},$$

da cui infine

$$G_e = p_2^*(A_e) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 12 \\ 49 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni del sistema ad anello chiuso sono

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= A_e x_e + B_e m = A_e x_e + B_e K_e \xi_e \\ \dot{\xi}_e &= A_e \xi_e + B_e m + G_e (y - r - C_e \xi_e) \\ &= (A_e + B_e K_e - G_e C_e) \xi_e + G_e C_e x - G_e r, \end{aligned}$$

dove  $x_e$  e  $\xi_e$  indicano rispettivamente lo stato del sistema esteso  $\mathcal{P}_e$  e del relativo osservatore. Si noti che il segnale di ingresso per il compensatore è pari a  $r - y$ , cioè l'errore di uscita. Tale segnale è stato convenientemente cambiato di segno nell'equazione dell'osservatore in modo da preservare la forma 'canonica' della dinamica dell'errore di ricostruzione  $e_e = x_e - \xi_e$ , che diviene

$$\dot{e}_e = (A_e - G_e C_e) e_e + G_e r.$$

A differenza di quanto accade con la compensazione sul ramo di reazione, tale dinamica include il segnale di riferimento  $r$ . Di conseguenza, in presenza di un segnale di riferimento  $r$  costante, l'errore di ricostruzione tende in generale a un valore costante e diverso da zero. Ciò nonostante, poiché lo schema di Fig. 4.35 ha la ben nota struttura di un sistema a retroazione unitaria, la presenza dell'integratore in catena diretta garantisce un sistema ad anello chiuso di tipo 1.

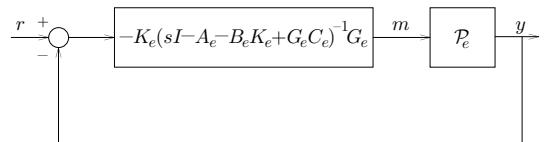


Figura 4.36: Schema equivalente di compensazione sul ramo diretto

La funzione di trasferimento del compensatore ottenuto (si veda la Fig. 4.36) è pari a

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{m(s)}{r(s) - y(s)} = -K_e(sI - A_e - B_e K_e + G_e C_e)^{-1} G_e \\ &= \frac{1189(s + 0.96)(s + 0.45)}{(s + 9.89)(s + 4.06 + j6.03)(s + 4.06 - j6.03)}. \end{aligned}$$

Si noti che, diversamente da quanto avveniva con lo schema di Fig. 4.33, con la presente struttura di controllo il compensatore introduce due zeri nella funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$W(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{1189(s + 0.96)(s + 0.45)}{(s + 2)^3(s + 4)^3}.$$

In particolare, si ha come previsto  $W(0) = 1$ .

La risposta indiciale del sistema risultante è mostrata in Fig. 4.37, mentre il diagramma di Bode del modulo della risposta armonica  $W(j\omega)$  è riportato in Fig. 4.38. La notevole sovraelongazione della risposta indiciale è dovuta all'elevato modulo alla risonanza del diagramma di Bode, a sua volta legato alla presenza dei due zeri addizionali introdotti dal compensatore.

Per sottolineare la robustezza della proprietà di tipo 1 basata sull'inserimento di un'azione integratrice, si è effettuata anche in questo caso una simulazione con la matrice  $K_e$  perturbata rispetto al valore nominale:

$$\tilde{K}_e = 0.9K_e.$$

Si ottengono per la matrice  $A_e + B_e \tilde{K}_e$  gli autovalori  $-1.44$  e  $-1.98 \pm j1.04$ . La risposta indiciale ottenuta è mostrata in Fig. 4.39.

In effetti, è possibile anche concepire uno schema di controllo a retroazione dall'uscita lievemente diverso da quelli visti finora. Nel caso in cui

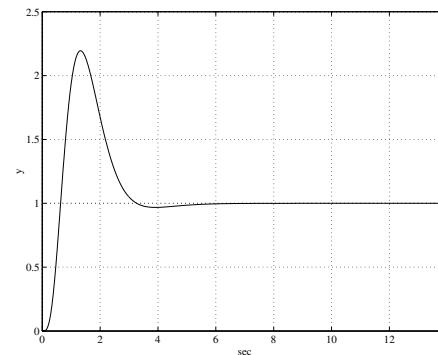
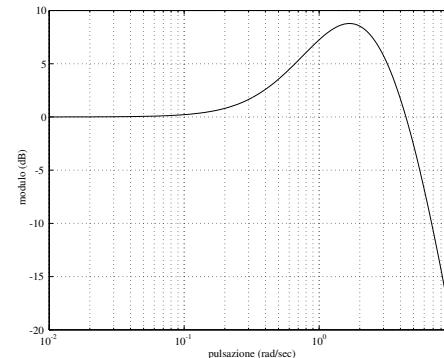


Figura 4.37: Risposta indiciale per lo schema di Fig. 4.35

Figura 4.38: Diagramma di Bode del modulo di  $W(j\omega)$  per lo schema di Fig. 4.35

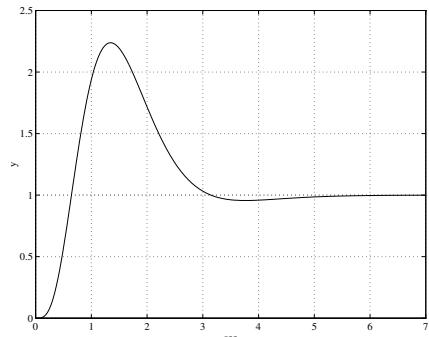


Figura 4.39: Risposta indiciale in presenza di una perturbazione su  $K_e$  per lo schema di Fig. 4.35

lo stato del sistema sia accessibile, esso assume la struttura di Fig. 4.40. La presenza di un polo nell'origine in catena diretta garantisce il soddisfacimento della prima specifica, mentre — come verrà mostrato nel seguito — è sempre possibile scegliere lo scalare  $k_0$  e la matrice  $K$  in modo da assegnare arbitrariamente gli autovalori ad anello chiuso.

La rappresentazione nello spazio di stato del nuovo sistema di controllo è data da

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{w} &= -Cx + r \\ u &= Kx + k_0 w,\end{aligned}$$

o in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BK & Bk_0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r.$$

La matrice dinamica del sistema ad anello chiuso può essere riscritta nella

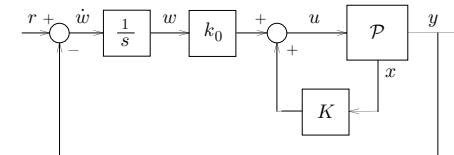


Figura 4.40: Schema alternativo con retroazione dallo stato e dall'uscita

forma

$$\begin{pmatrix} A + BK & Bk_0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} (K \quad k_0) = A_n + B_n K_n$$

È facile dimostrare che se la coppia di matrici  $(A, B)$  è raggiungibile, allora lo è anche la coppia  $(A_n, B_n)$ . Pertanto, è sempre possibile scegliere la matrice  $K_n$  in modo tale da assegnare alla matrice dinamica del sistema ad anello chiuso  $A_n + B_n K_n$  un arbitrario polinomio caratteristico.

Sulla base della specifica b), si sceglie nuovamente come polinomio caratteristico desiderato

$$p_1^*(\lambda) = (\lambda + 2)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8.$$

L'inversa della matrice di raggiungibilità relativa alla coppia  $(A_n, B_n)$  è data da

$$P_n^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e pertanto l'ultima riga di  $P_n^{-1}$  è

$$\mu_n = (0 \quad 0 \quad -1).$$

Valutando il polinomio caratteristico desiderato in corrispondenza alla matrice  $A$  si ottiene

$$p_1^*(A_n) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -13 & -6 & 8 \end{pmatrix},$$

da cui

$$K_n = (K \quad k_0) = -\mu_n p_1^*(A_n) = (-13 \quad -6 \quad 8).$$

Per valutare la funzione di trasferimento riferimento/uscita corrispondente allo schema di Fig. 4.40, è conveniente osservare che in quest'ultimo l'anello interno ha la medesima struttura dello schema di Fig. 4.32. Pertanto, la funzione di trasferimento tra  $w$  e  $y$  vale

$$F(s) = k_0 C(sI - A - BK)^{-1}B,$$

e non possiede zeri, come già notato in precedenza. La funzione di trasferimento ad anello chiuso è allora

$$W(s) = \frac{8}{(s+2)^3}.$$

È interessante analizzare l'effetto della scelta di  $K$  sul sistema  $\mathcal{P}$ . Lo spettro di  $A + BK$  è pari a

$$\sigma(A + BK) = \sigma\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}\right) = -3 \pm j\sqrt{3}.$$

Quindi, gli autovalori che la matrice  $K$  assegna a  $A + BK$  sono differenti da quelli desiderati per il sistema ad anello chiuso. In effetti, l'anello esterno di retroazione dall'uscita modificherà tali autovalori in modo da farli coincidere con quelli desiderati (si veda la Fig. 4.41).

Per quanto riguarda l'effetto del guadagno  $k_0$  sulla collocazione dei poli, si può tracciare il luogo delle radici del sistema ad anello chiuso al variare di tale parametro. Come indicato dallo schema di Fig. 4.41, il sistema ad anello aperto ha come poli quello nell'origine e la coppia di poli assegnati al sistema  $\mathcal{P}$  tramite la reazione dallo stato, e cioè i poli di  $C(sI - A - BK)^{-1}B$ , pari a  $-3 \pm j\sqrt{3}$ . La differenza tra il numero di poli e il numero degli zeri è

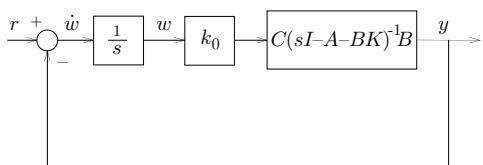


Figura 4.41: Schema equivalente per il sistema di Fig. 4.40

pari a 3. L'andamento del luogo delle radici corrispondente a valori positivi di  $k_0$  è riportato in Fig. 4.42. Si noti come la presenza di un punto singolare triplo, ovviamente corrispondente al valore  $k_0 = 8$ , non fosse facilmente prevedibile unicamente sulla base delle regole di tracciamento.

Per verificare la capacità di questo schema di controllo di riprodurre asintoticamente l'ingresso di riferimento anche in presenza di variazioni parametriche, si è perturbata anche in questo caso la matrice  $K_n$  come segue

$$\tilde{K}_n = 0.9K_n.$$

La matrice  $A_n + B_n\tilde{K}_n$  ha autovalori  $-1.44$  e  $-1.98 \pm j1.04$ . La risposta indiciale ottenuta è illustrata in Fig. 4.43; si osservi il soddisfacimento della specifica sul regime permanente e l'assenza di sovraelongazione.

Se lo stato del sistema non è accessibile, lo schema di Fig. 4.40 si può modificare così come mostrato in Fig. 4.44. Definendo l'errore di osservazione dello stato  $e = x - \xi$ , il sistema ad anello chiuso ammette la seguente rappresentazione

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BK(x - e) + Bk_0w \\ \dot{w} &= -Cx + r \\ \dot{e} &= (A - GC)e. \end{aligned}$$

Si noti che la dinamica dell'errore di osservazione non è influenzata dall'ingresso di riferimento  $r$ .

La struttura a blocchi della matrice dinamica

$$\left( \begin{array}{cc|c} A + BK & Bk_0 & -BK \\ -C & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & A - GC \end{array} \right)$$

mostra che il principio di separazione rimane verificato anche con questo schema di controllo. Infatti, gli autovalori del sistema ad anello chiuso si partizionano in quelli della matrice

$$\left( \begin{array}{cc} A + BK & Bk_0 \\ -C & 0 \end{array} \right)$$

e quelli di  $A - GC$ . Di conseguenza, la scelta di  $K$  e  $k_0$  risulta essere coincidente con quella precedente, e cioè

$$(K \ k_0) = (-13 \ -6 \ 8),$$

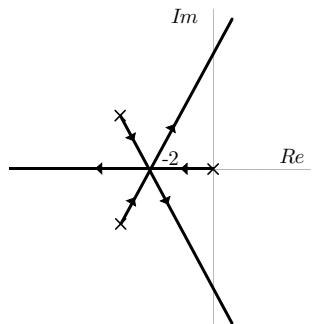


Figura 4.42: Luogo dei poli ad anello chiuso per il sistema di Fig. 4.41 al variare di  $k_0$

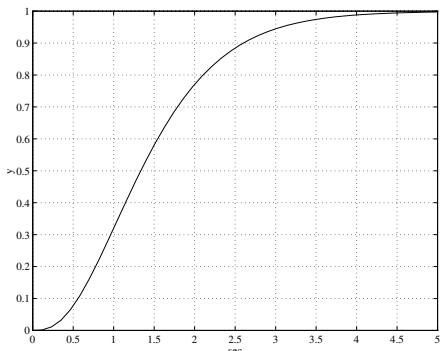


Figura 4.43: Risposta indiciale in presenza di una perturbazione su  $K_n$  per lo schema di Fig. 4.40

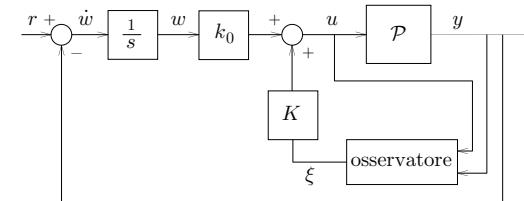


Figura 4.44: Schema alternativo con retroazione dall'uscita

mentre, poiché il sistema  $\mathcal{P}$  è osservabile, la matrice  $G$  si calcola nel modo usuale. In particolare, volendo assegnare alla dinamica di  $e$  autovalori coincidenti in  $-4$  si trova facilmente

$$G = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Per valutare la funzione di trasferimento riferimento/uscita corrispondente allo schema di Fig. 4.44, si osservi che in quest'ultimo l'anello interno ha la medesima struttura dello schema di Fig. 4.33. Pertanto, anche in questo caso la funzione di trasferimento tra  $w$  e  $y$  vale

$$F(s) = k_0 C(sI - A - BK)^{-1}B,$$

e la funzione di trasferimento ad anello chiuso è nuovamente

$$W(s) = \frac{8}{(s+2)^3}.$$

La completa equivalenza tra lo schema di Fig. 4.44 e quello di Fig. 4.40 dal punto di vista del comportamento riferimento/uscita si spiega notando che la compensazione tramite l'osservatore è collocata sul ramo (interno) di reazione, e perciò si ha una cancellazione tra gli zeri del compensatore e gli autovalori imposti alla dinamica dell'errore di osservazione. L'assenza di zeri in  $W(s)$  dà luogo a una risposta indiciale priva di sovraelongazione, come illustrato in Fig. 4.45, mentre il diagramma di Bode della risposta armonica ad anello chiuso è riportato in Fig. 4.46.

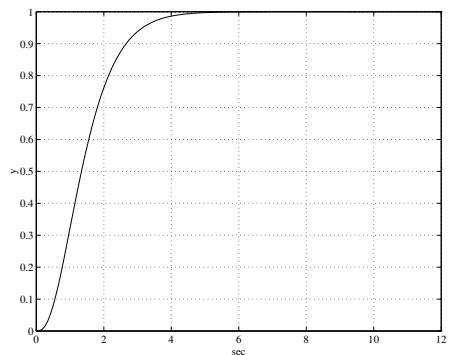
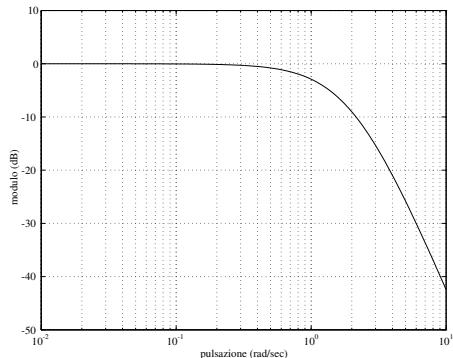


Figura 4.45: Risposta indiciale per lo schema di Fig. 4.44

Figura 4.46: Diagramma di Bode del modulo di  $W(j\omega)$  per lo schema di Fig. 4.44

## 4.2 Esercizi proposti

### Esercizio 4.7

Sia dato il sistema di controllo di Fig. 4.47, in cui il sistema lineare  $\mathcal{P}$  è descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

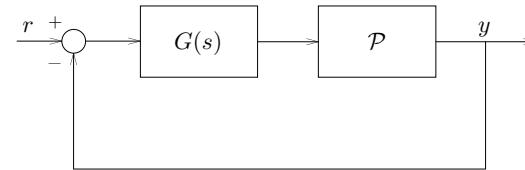


Figura 4.47: Sistema di controllo

Mediante il principio di separazione, si determini un compensatore dinamico  $G(s)$  tale da imporre la coincidenza dei poli del sistema ad anello chiuso con le radici del polinomio

$$p^*(s) = (s+5)(s+1)^3.$$

---

**Esercizio 4.8**

Si consideri il seguente sistema lineare a un ingresso e una uscita

$$\dot{x}_1 = 3x_1 + 6x_2 - 3x_3$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + x_3 + u$$

$$\dot{x}_3 = -x_3$$

$$y = x_1.$$

- a) Si individui la scomposizione canonica di Kalman per tale sistema.
  - b) Si costruisca un osservatore asintotico dello stato, procedendo fin dove possibile in modo parametrico.
  - c) Si costruisca un osservatore asintotico dello stato di ordine ridotto.
  - d) Si determini un compensatore dinamico di ordine due in grado di stabilizzare il sistema a partire dalla misura dell'uscita.
- 

**Esercizio 4.9**

Sia dato il processo descritto dall'equazione differenziale

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 4y(t) = 2u(t) - 2\dot{u}(t).$$

- a) Si determini una realizzazione del processo in forma canonica di controllo.
  - b) Si costruisca un compensatore dinamico di ordine due che, elaborando opportunamente il segnale di uscita, assegna al sistema ad anello chiuso il polinomio caratteristico
- $$p_1^*(\lambda) = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)(\lambda^2 + 10\lambda + 26).$$
- c) Si costruisca un compensatore dinamico di ordine uno che, processando opportunamente il segnale di uscita, assegna al sistema ad anello chiuso il polinomio caratteristico
- $$p_2^*(\lambda) = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)(\lambda + 10).$$
- 

**Esercizio 4.10**

Sia dato il processo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx,$$

descritto dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si individuino le uscite rispetto alle quali è possibile, mediante una reazione statica dallo stato, risolvere il problema del disaccoppiamento ingresso/uscita e, contemporaneamente, assegnare tutti gli autovекторi. Rispetto a tali uscite, risolvere il problema assegnando autovectori a parte reale inferiore a  $-1$ .

---

**Esercizio 4.11**

Si consideri un processo fisico in cui tutte le grandezze di interesse sono direttamente misurabili e il cui comportamento ingresso/uscita è descritto dalla funzione di trasferimento

$$P(s) = \frac{s-a}{s(s+b)(s-c)},$$

con  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  e  $a \neq c$ . Si progetti un controllore a retroazione in modo tale che:

- a) il sistema ad anello chiuso sia asintoticamente stabile;
- b) l'errore a regime sia nullo in corrispondenza a una traiettoria di riferimento del tipo

$$y_r(t) = e^{dt}.$$

Si studi la risolubilità del problema al variare di  $d$  nel suo campo di ammissibilità, e si fornisca l'espressione del controllore in forma parametrica rispetto ad  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ .

---

