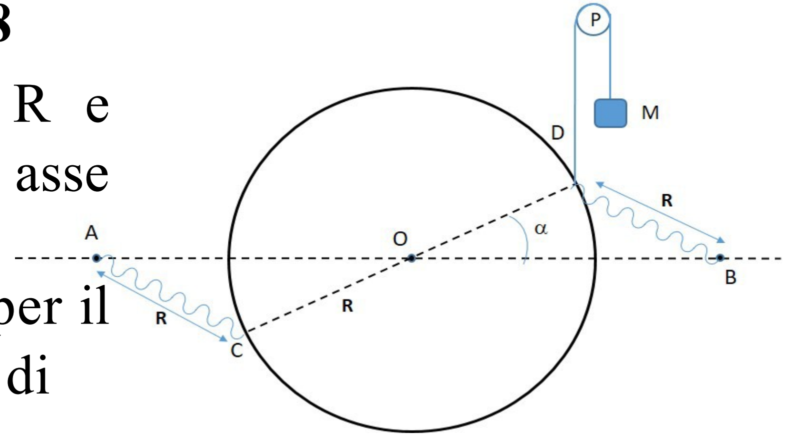
Es. del 29/4/ Ciocci

Esercizi di esame da
https://www.pi.infn.it/~ciocci/

Esame di Fisica Generale del 29/06/2018



Un disco di legno (densità ρ_{legno}, raggio R e spessore d) può ruotare intorno a un asse orizzontale passante per il suo centro O.

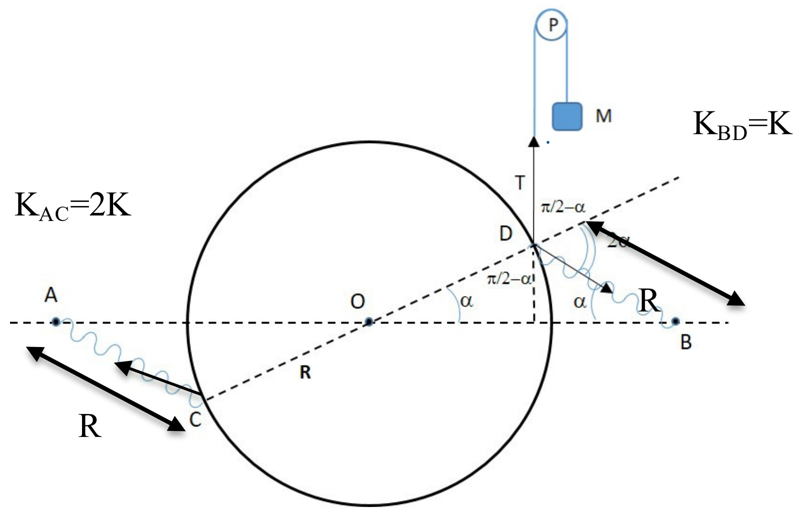
Nei punti A e B, posti lungo la retta passante per il diametro orizzontale, sono disposte due molle di lunghezza a riposo nulla e costanti elastiche $k_{BD} = k$ e $k_{AC} = 2k$, i cui altri estremi sono connessi al bordo del disco, nei rispettivi punti C e D.

Un filo ideale esercita una forza verticale nel punto D ed il sistema risulta in equilibrio nella configurazione in figura, per la quale l'angolo $\alpha = \pi/6$ e la lunghezza di ciascuna molla è pari a R.

A tale filo è appesa una massa M attraverso una carrucola fissa (P) avente massa nulla, su cui il filo può scorrere senza strisciare.

1. Calcolare il valore della massa M nella configurazione di equilibrio. M = ...
2. All'istante t=0 il filo viene tagliato. Calcolare l'accelerazione angolare, $\dot{\omega}$, e la reazione vincolare in O, $\vec{R}_o$, subito dopo il taglio del filo. $\dot{\omega}$= ...., $\vec{R}_o$=.........
3. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni T intorno alla posizione di equilibrio del sistema molle- disco, quando il filo è tagliato. T = ...

[assumere l'accelerazione di gravità $g = 10\ m/s^2$, $\rho_{legno} = 0.4\ g/cm^3$, $R = 1\ m$, $d = 1\ cm$, $k = 10\ N/m$]



Situazione iniziale: equilibrio.

$\alpha = \pi/6$

Disco: raggio R, spessore d densità ρ

Molle: $K_{AC} = 2K$, $K_{BD} = K$, $l_0^1 = l_0^2 = \emptyset$

all'equilibrio $l_1 = l_2 = R$, $\alpha = \pi/6$

Carrucola di Massa nulla

Il disco può ruotare attorno ad un asse ortogonale passante per O.

Calcolare il valore della massa M nella configurazione di equilibrio. M = ...

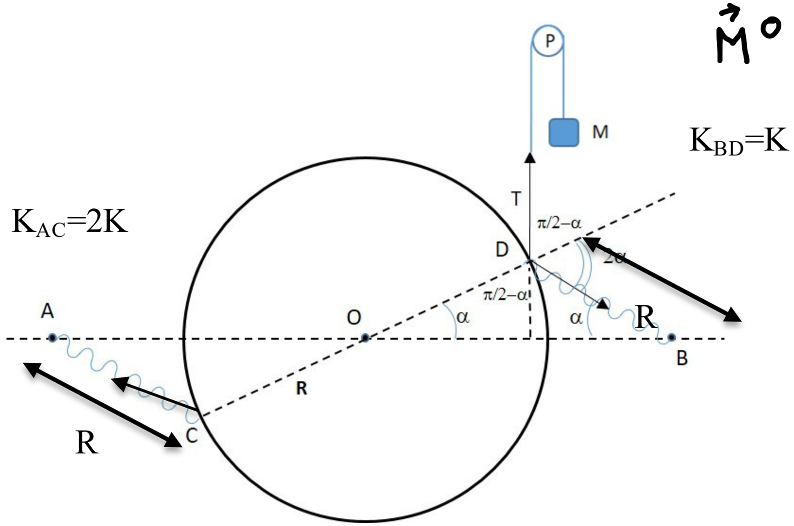
All'equilibrio: $\begin{cases} \sum_x F_x = 0 \\ \sum_y F_y = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Il CM del disco è fermo. $\begin{cases} \text{2 equazioni in} \\ \text{3 incognite} \\ R_{ox}, R_{oy}, T \end{cases}$

I^a eq. cardinale

II^a eq cardinale $\vec{M}(E) = 0 = \sum_i \vec{\tau}_i(E) \Rightarrow$ Il disco non ruota

Scegliamo come polo il CM del disco O: Il momento delle forze che può solo essere diretto lungo z e è nullo. NOTA questa scelta rende nullo $\vec{\tau}^{\,o}(\vec{R}_0)$

$$\vec{M}^o = \vec{OD} \wedge \vec{T}_{filo} + \vec{OD} \wedge \vec{F}_{el\,DB} + \vec{OC} \wedge \vec{F}_{el\,AC} = \emptyset$$



$$\vec{M}^O = \vec{OD} \wedge \vec{T}_{filo} + \vec{OD} \wedge \vec{F}_{el\,DB} + \vec{OC} \wedge \vec{F}_{el\,AC} = \emptyset$$

$$R\, T_{filo} \cdot \sin \widehat{R T_{filo}}\, \hat{z} - R\, F_{el\,DB} \cdot \sin \widehat{R F_{el\,DB}}\, \hat{z} - R\, F_{el\,CA} \sin \widehat{R F_{el\,CA}}\, \hat{z} = \emptyset$$

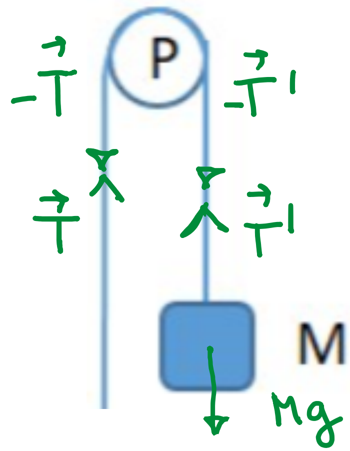
T_{filo}?

La carrucola ha massa nulla:

$$I_c \dot{\omega} = -RT' + RT_{filo}$$

$$\Rightarrow I_c = \emptyset \Leftrightarrow |T'| = |T_{filo}|$$

La carrucola è ferma

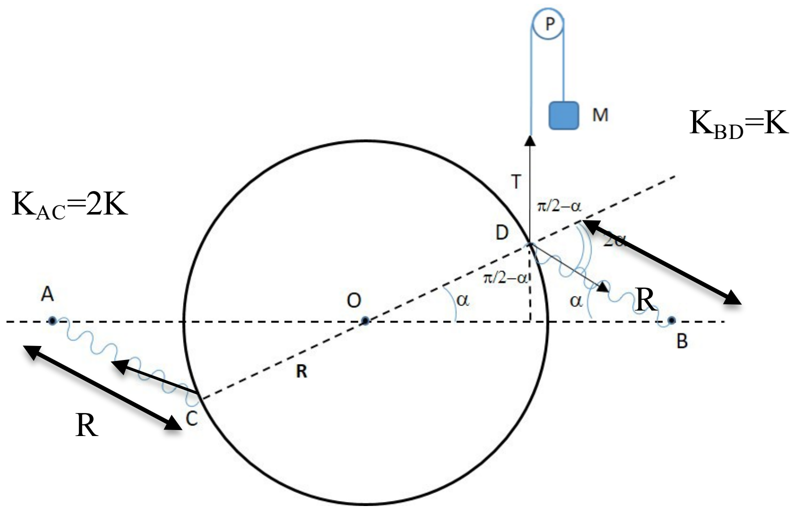


all'equilibrio $\sum_y F_y = 0 \Rightarrow -Mg + T' = 0 \Leftrightarrow Mg = T' = T$

$$R\, T_{filo} \cdot \sin \widehat{R T_{filo}}\, \hat{z} - R\, F_{el\,DB} \cdot \sin \widehat{R F_{el\,DB}}\, \hat{z} - R\, F_{el\,CA} \sin \widehat{R F_{el\,CA}}\, \hat{z} = \emptyset$$

$$R\, Mg \sin(\pi/2 - \alpha) - R\, KR \sin 2\alpha - R\, 2KR \sin 2\alpha = \emptyset$$

$$R\,Mg\,\sin(\pi/2-\alpha) - R\,KR\sin 2\alpha - R\,2KR\sin 2\alpha = \emptyset$$



$$\Rightarrow Mg\cos\alpha = 3KR\sin 2\alpha$$

$$\text{per } \alpha = \pi/6 = 30^\circ \begin{cases} \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 \\ \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 \end{cases}$$

Calcolare il valore della massa M nella configurazione di equilibrio. M = ...

$$M = \frac{3KR}{g} = 3\,kg$$

2. All'istante t=0 il filo viene tagliato. Calcolare l'accelerazione angolare, $\dot{\omega}$, e la reazione vincolare in O, $\vec{R}_o$, subito dopo il taglio del filo. $\dot{\omega}$= ...., $\vec{R}_o$=.........

Quando il filo si spezza possiamo scrivere le 2 equazioni

$$\begin{aligned} &\text{I}^a \text{ cardinale} \\ &\text{II}^a \text{ Cardinale} \end{aligned} \begin{cases} ① \ \vec{R}_o + \vec{F}_{el\,AC} + \vec{F}_{el\,DB} + M_{Disco} \cdot \vec{g} = 0 = M \vec{a}_{cm\,Disco} = 0 \\ ② \ \vec{OD} \wedge \vec{F}_{el\,DB} + \vec{OC} \wedge \vec{F}_{el\,AC} = I \vec{\dot{\omega}} \end{cases}$$

Infatti se $\vec{a}_{CM} = 0$ il disco può solo ruotare attorno ad O e non trasla

La massa del disco? $M_{Disco} = \rho \pi R^2 \cdot d = 12.6\ kg$

L'equazione ② ha gli stessi valori della domanda 1 a primo membro con $T_{filo} = \varnothing$!

$$R\,Mg \sin(\pi/_2 - \alpha) - R\,KR\sin 2\alpha - R\,2KR\sin 2\alpha = \varnothing \Rightarrow$$

$$-R\,KR\sin 2\alpha - R\,2KR\sin 2\alpha = I\,\dot{\omega}_z$$

$$-R\,KR\sin 2\alpha - R\,2KR\sin 2\alpha = I\dot{\omega}_z \Rightarrow \dot{\omega}_z = -\frac{3KR^2\sin 2\alpha}{I}$$

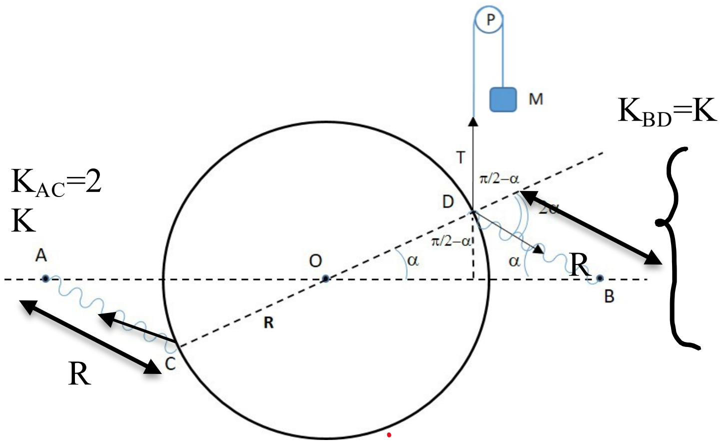
$$I = \frac{M_{Disco}R^2}{2} \Rightarrow \dot{\omega}_z = -4.1\ \mathrm{rad/s^2}$$

2. All'istante t=0 il filo viene tagliato. Calcolare l'accelerazione angolare,$\dot{\omega}$, e la reazione vincolare in O, $\vec{R}_o$, subito dopo il taglio del filo. $\dot{\omega}$= ...., $\vec{R}_o$=.........

I^a cardinale

II^a Cardinale

$$\begin{cases} ① \ \vec{R}_o + \vec{F}_{el\,AC} + \vec{F}_{el\,DB} + M_{Disco}\cdot\vec{g} = 0 = M\vec{a}_{cm} = 0 \\ ② \ \vec{OD}\wedge\vec{F}_{el\,DB} + \vec{OC}\wedge\vec{F}_{el\,AC} = I\dot{\vec{\omega}} \end{cases}$$



I^a cardinale

$$\begin{cases} R_{oy} + 2KR\sin\alpha - KR\sin\alpha - M_{Disco}\,g = 0 \\ R_{ox} - 2KR\cos\alpha + KR\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

I^a cardinale

$$\begin{cases} R_{oy} + 2KR\sin\alpha - KR\sin\alpha - M_{Disco}\,g = 0 \\ R_{ox} - 2KR\cos\alpha + KR\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 1/2 \\ \cos 30^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{oy} = M_{Disco}\,g - KR\sin\alpha = -\frac{KR}{2} + M_{Disco}\cdot g = -120.6\,N \\ R_{ox} = KR\cos\alpha = KR\sqrt{\frac{3}{2}} = 8.7\,N \end{cases}$$

$$\vec{R}_o = (8.7,\ -120.6)\,N$$

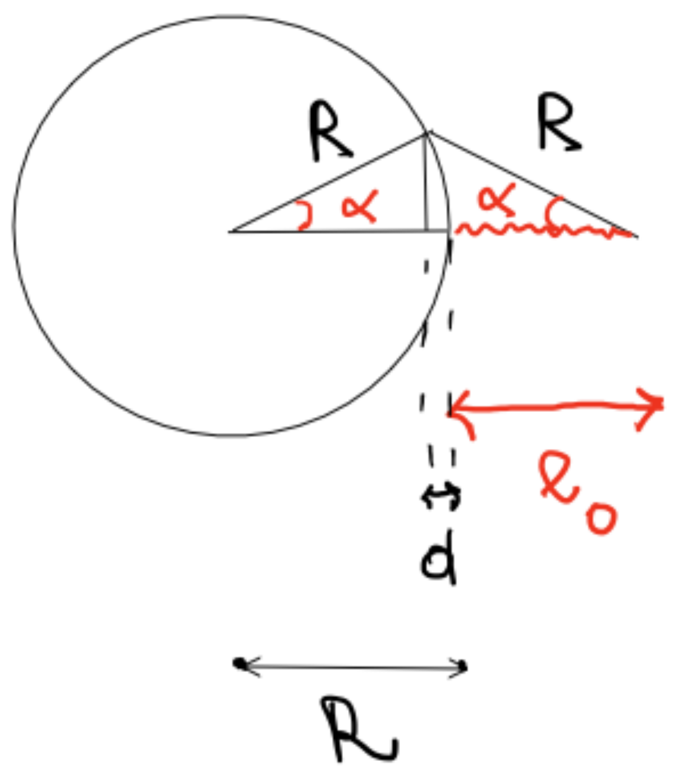
3. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni T intorno alla posizione di equilibrio del sistema molle- disco, quando il filo è tagliato. T = ...

Quando il filo è tagliato la posizione di equilibrio è quella in cui il momento delle forze $\vec{M}^O = \emptyset$, e $\vec{R} + M_{disco}\vec{g} + \vec{F}_{el\,AB} + \vec{F}_{el\,DC} = \emptyset$

$\Rightarrow$ la posizione di equilibrio è quella in cui le molle sono orizzontali e

$$\begin{cases} R_x - F_{1el} + F_{2el} = 0 \Rightarrow R_{0x} = F_{1el} - F_{2el} \\ R_{0y} = M_{disco} g \end{cases}$$

la lunghezza all'equilibrio delle molle corrisponde a



$$l_0 = \underbrace{R\cos\alpha}_{l_0 + d} - \underbrace{R(1-\cos\alpha)}_{d} = 2R\cos\alpha - R$$

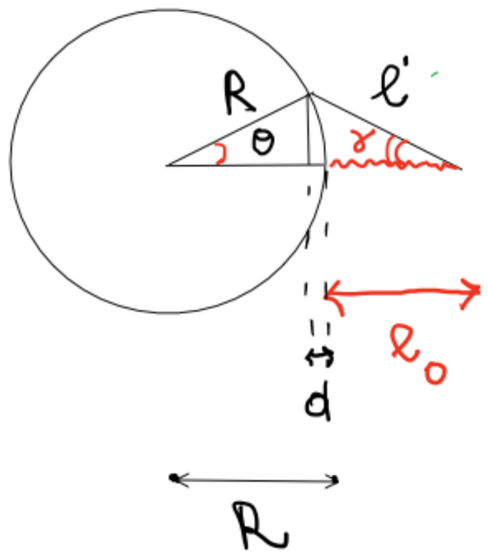
$$l_0 = R(2\cos\alpha - 1) = R(\sqrt{3} - 1)$$

Per trovare il periodo delle piccole oscillazioni ci sono 2 modi

① determinare l'equazione del momento delle forze quando il sistema viene ruotato di un piccolo ($\ll 10°$) angolo θ rispetto alla posizione di equilibrio

② Sfruttare, ove possibile, la conservazione dell'energia

② il sistema viene ruotato di un piccolo ($\ll 10°$) angolo θ rispetto alla posizione di equilibrio



$$\ell'^2 = \left[\ell_0 + (R - R\cos\theta)\right]^2 + (R\sin\theta)^2$$

per $\theta \ll 10°$

$$\ell'^2 = \ell_0^2 + (R\theta)^2 \Rightarrow \ell' = \sqrt{\ell_0^2 + R^2\theta^2} \Rightarrow$$

Non ci sono forze esterne non conservative $\Rightarrow E = \text{cost}$

Nota la lunghezza a riposo della molla è nulla.

$$E = \underbrace{\tfrac{1}{2}K(\ell_0^2 + R^2\theta^2)}_{\text{molla DC}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot 2K(\ell_0^2 + R^2\theta^2)}_{\text{molla AB}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}MV_{CM}^2}_{\text{Disco } //\, 0} + \tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \qquad \text{con } \omega = \dot{\theta}$$

$$E = \frac{1}{2}K(\ell_0^2 + R^2\theta^2) + \frac{1}{2}\cdot 2K(\ell_0^2+R^2\theta^2) + \frac{1}{2}MV^2_{\text{Disco CM}} + \frac{1}{2}I\dot\theta^2 \qquad \text{con } \omega = \dot\theta$$

molla DC   molla AB $\parallel 0$

$$E = \text{cost} = \frac{3}{2}K(\ell_0^2 + R^2\theta^2) + \frac{1}{2}I\dot\theta^2$$

da $\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{3}{2}K\,2R^2\theta\dot\theta + \frac{1}{2}\cdot 2\,I\dot\theta\ddot\theta = 0 \qquad \Rightarrow -3KR^2\theta = I\ddot\theta$$

$$\ddot\theta + \frac{3KR^2}{I}\theta = 0$$

$\Rightarrow$ soluzione eq. dell' oscillatore armonico

$A\cos(\omega t + \phi)$ con $\omega^2 = \frac{3KR^2}{I}$

$$\omega = \sqrt{\frac{3KR^2\,2}{M_{\text{Disco}}R^2}} = \sqrt{\frac{6K}{M_{\text{Disco}}}} = 2.2 \text{ rad/s} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2.9\text{ s}$$

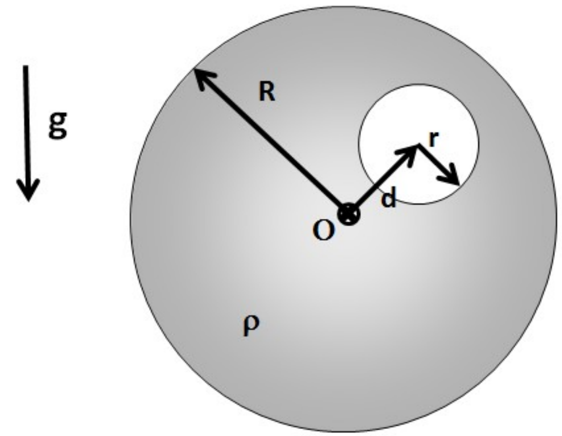
Esame di Fisica Generale del 09/09/2015

Un cilindro di raggio R = 0.9 m e spessore s = 0.15 m è costituito da un materiale di densità ρ = 8000 kg/m^3. Il cilindro presenta, a distanza d = 0.45m dal centro, un foro sempre cilindrico di raggio r=0.2 m. Il cilindro è immerso in un campo gravitazionale di intensità g = 9.8 m/s^2, è vincolato al centro (nel punto O) e può ruotare intorno al proprio asse centrale (come in figura). La velocità angolare del cilindro, quando il foro è in basso, è ω = 5rad/s.

Si calcoli:

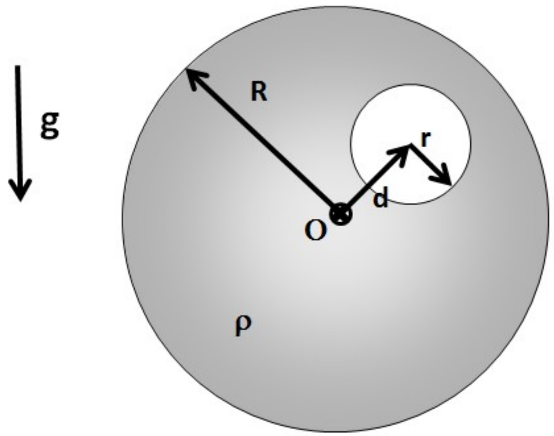
a)la frequenza delle piccole oscillazioni. ν = ...

b)la velocità angolare del cilindro quando il foro è in alto.
ω_{alt} = ...



Se il cilindro è fermo nel suo punto di equilibrio stabile, si calcoli:

c)il momento angolare minimo che dovrebbe essere trasferito al disco per obbligarlo a fare una rotazione completa. L = ...



Cilindro: raggio R, spessore S, densità ρ

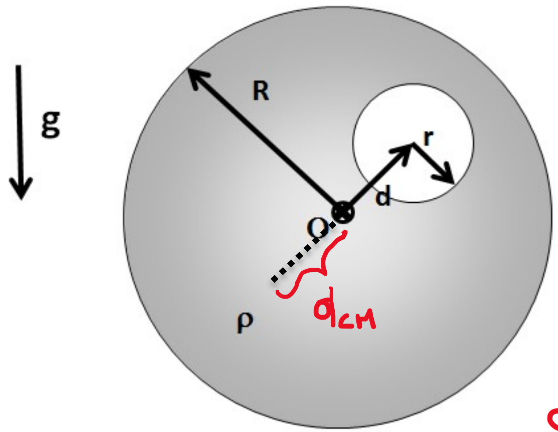
Foro cilindrico: raggio r

distanza tra il centro del foro e il centro del cilindro d

Il sistema è sotto l'azione di $\vec{g}$ e può ruotare attorno ad un'asse verticale passante per O.

ω è la velocità di rotazione quando il foro è in basso

a) Si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni. ν = ...



1) non ci sono forze dissipative $\Rightarrow E = \text{cost.}$

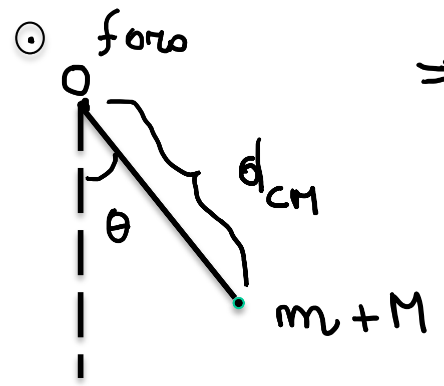
2) Il sistema è vincolato a ruotare attorno ad O.

Il cilindro può essere scomposto in un cilindro pieno + 1 vuoto di massa negativa.

Cilindro pieno) $M = \rho \pi R^2 S$ Cilindro vuoto) $m = -\rho \pi r^2 \cdot S \Rightarrow M + m = M_{TOT}$

Indicando con d_{CM} la posizione del C.M. rispetto a O $d_{CM} = \dfrac{m d}{m + M} < 0!$

Il sistema è schematizzabile con un pendolo fisico



$\Rightarrow$ Il sistema è composto da un corpo rigido di massa $m+M$

$\Rightarrow$ Il sistema ruota attorno ad O e possiede un momento di inerzia I_O:

$$I_O = I_{CM}^{pieno} + I_{CM}^{vuoto} + m d^2 = \frac{MR^2}{2} + \frac{mr^2}{2} + m d^2$$

Quindi possiamo scrivere la conservazione dell' Energia in funzione di θ

$$\left\{ E = E_{ROT} + E_P = \frac{1}{2} I_O \omega^2 + M_{TOT}\, g\, d_{cm} (1-\cos\theta) \right.$$

dove abbiamo preso lo $\emptyset$ dell'energia potenziale a $\theta = \emptyset$

$$E = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 + M_{TOT}\, g\, d_{cm} (1-\cos\theta) \qquad \text{con } \omega = \dot{\theta}$$

dalla conservazione dell'energia $E = \text{cost} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$

$$0 = \frac{1}{2} 2 I_O \dot{\theta}\ddot{\theta} + M_{TOT}\, g\, d_{cm} \sin\theta \cdot \dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{M_{TOT}\, g\, d_{CM}}{I_O} \sin\theta = 0$$

per $\theta \ll 10^\circ$ l'equazione diviene

$$\ddot{\theta} + \frac{M_{TOT}\, g\, d_{CM}}{I_O} \theta = 0$$

$\Rightarrow$ Equazione dell' oscillatore armonico soluzione $A\cos(\Omega t + \phi)$, $\Omega = \sqrt{\frac{M_{TOT}\, g\, d_{cm}}{I_O}}$

Equazione dell'oscillatore armonico soluzione

$A\cos(\Omega t+\phi)$, $\Omega=\sqrt{\frac{M_{tot}\, g\, d_{cm}}{I_0}}$ dalla quale $2\pi\nu=\omega$

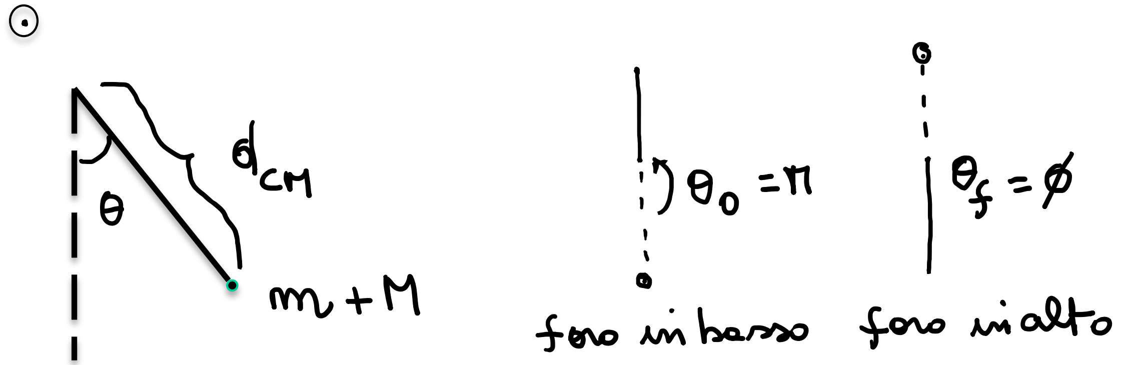
$$\Rightarrow \nu=\frac{\omega}{2\pi}=0.12\ s^{-1}=0.12\ Hz$$

b)Si calcoli la velocità angolare del cilindro quando il foro è in alto. $\omega_{alt}=$ ....

Sappiamo che quando il foro è in basso $\omega=5\ rad/s$

$\Rightarrow$ vale la conservazione dell'energia

$$E_i=\frac{1}{2}I_0\omega^2+M_{TOT}\, g\, d_{cm}(1-\cos\theta_0)=\frac{1}{2}I_0\omega_{alt}^2+$$
$$+M_{tot}\, g\, d_{cm}(1-\cos\theta_f)=E_f$$

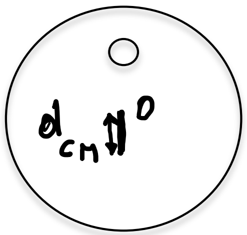


$$E_i=\frac{1}{2}I_0\omega^2+M_{TOT}\, g\, d_{cm}\, 2=\frac{1}{2}I_0\omega_{alt}^2\Rightarrow\omega_{alt}^2=\omega^2+2M_{TOT}\, g\, d_{cm}\cdot\frac{2}{I_0}$$

$$\omega_{alt}=\sqrt{(I_0\omega^2+4M_{TOT}\, g\, d_{cm})/I_0}=5.22\ rad/s$$

c) Se il cilindro è fermo nel suo punto di equilibrio stabile, si calcoli il momento angolare minimo che dovrebbe essere trasferito al disco per obbligarlo a fare una rotazione completa. L = ...

La posizione di equilibrio stabile è quella in cui l'energia potenziale è minima che corrisponde a $\theta = 0$ $\Rightarrow E_p = M_{TOT}\, g\, d_{CM} (1 - \cos\theta)$



per $\theta = 0$ $\quad \vec{M}^O = 0 \quad \vec{F}_{CM} = 0$

Per fare almeno un giro completo:

$$\frac{1}{2} I_O\, \omega_{ini}^2 + \cancel{0} = M_{TOT}\, g\, d_{cm} \underbrace{(1 - \cos\theta^*)}_{2} \qquad \text{con } \theta^* = 180^\circ$$

$$\omega_{ini} = \sqrt{\frac{4 M_{TOT}\, g\, d_{cm}}{I_O}} \Rightarrow L = I_O\, \omega_{ini} = 1788 \text{ J.s}$$