

# CAMPPI E FORME III

Titolo nota

14/05/2012

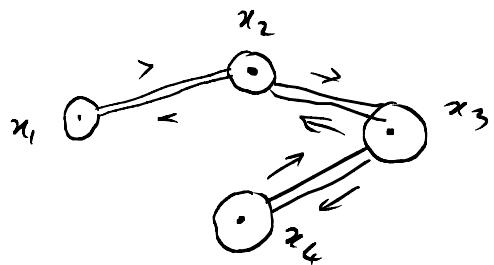
## CAMPPI DEFINITI IN $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Sarà essere nei dettagli è possibile utilizzare il teorema di invarianza omotopica anche se il dominio non è semplicemente连通的.

Se  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . In tal caso ogni curva chiusa può essere deformata in un punto se non crosta  $(0,0)$ , ed il campo avrà integrale nullo su tali curve per invarianza omotopica, oppure potrà essere deformata in una qualsiasi curva (sulla quale è comodo fare il calcolo) che crosta  $(0,0)$ , eventualmente percorsa più volte o a ritroso, se altrettanto faccio la curva iniziale. In ogni caso, se l'integrale sulle curve deformate vale 0, altrettanto verrà quello della curva iniziale (che verrà un multiplo o l'opposto di un multiplo di 0).

Ne segue che tutto può essere deciso calcolando un unico integrale esteso ad una curva che crosta la "singularità"  $(0,0)$ . Analogamente si può procedere se le singolarità sono un numero finito

giv curve chiusse potranno essere deformate in una costituita da singole curve chiusse attorno ad ogni



singolarità rechiuse delle curve, congiunte da tagli  
passati due volte, per l'andata e per il ritorno, che non  
contribuiscono dunque all'integrale. Dunque l'integrale  
esteso alle curve originali è uguale alla somma degli  
integrali estesi alle curve che comprendono ognuna delle singole  
nascite circondate dalle curve originali.

Vi segue un criterio generale: "Se l'integrale del campo  
(irrotazionale) esteso ad n curve chiuse ognuna delle quali  
circonde una (sola) singolarità  $x_i$ , è nullo per  
ogni singolarità, allora il campo è integrabile".

Non verranno date prove dimostrative rigorose: le considera-  
zioni precedenti possono offrire qualche spunto di riflessione.  
In ogni caso, il teorema di invenzione omologico, valido  
(solo) per i campi irrotazionali, offre qualche appoggio  
per attaccare il problema dell'integrabilità, anche quando  
il domino non sia affatto semplicemente connesso: in fondo,  
le curve costanti possono non essere le uniche sulle quali il  
calcolo dell'integrale riesca agevole!

# TUTTE LE SOLUZIONI DEL PROBLEMA DELLA PRIMITIVA

In Fisica, la questione non è così importante; di solito, si sceglie ad arbitrio il valore 0 del potenziale in un qualche punto significativo, e a partire da quell'0 si definisce in ogni altro punto utilizzando la differenza di potenziale. Magari il potenziale 0 è al livello del mare, oppure è quello di un covo d'rame collegato ad una barca confitta nel terreno secco.

In Matematica il problema è piuttosto noto; si pensa a tutte le soluzioni  $(x, y, z)$  di

$$ax + by + cz = d \quad (\text{punto cartesiano in } \mathbb{R}^3)$$

o quelle di

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = f(t) \quad (\text{oscillazione armonica forzata})$$

Le tecniche per studiare la totalità delle soluzioni sono le stesse, ed utilizza la linearità del primo membro; si considerano due soluzioni e se ne studia la differenza. Da  $ax + by + cz = d$  e  $ax' + by' + cz' = d$ , sottraendo membri a membri si ottiene  $a(x-x') + b(y-y') + c(z-z') = 0$ . Nel caso dell'oscillazione armonica da  $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = f$  e  $\ddot{y} + \frac{k}{m} y = f$  sottraendo si ottiene  $(x-y)'' + \frac{k}{m} (x-y) = 0$ .

Analogamente, sia A un campo vettoriale definito

su un insieme arbitrario  $\Omega$  e si sia  $f, g$  due potenziali di  $A$ , si fa così quindi

$$\nabla f \equiv A \text{ su } \Omega \quad e \quad \nabla g \equiv A \text{ su } \Omega$$

Sottraendo membro a membro e ricordando le regole di derivazione, si segue

$$\nabla(f-g) \equiv 0 \text{ su } \Omega$$

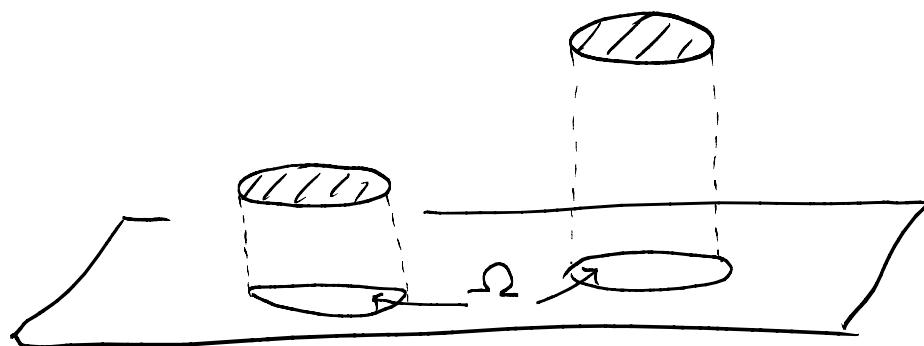
Dunque, una volta note due primitive  $g, g'$  di un'altra ( $f$ ) differibile da  $g$  per una funzione  $\varphi = f-g$  verificante

$$\nabla \varphi \equiv 0 \text{ su } \Omega$$

La tenteremo d' pensare che la  $\varphi$  siffatta sia costante in combattuta everywhere; infatti se  $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$  la funzione

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y > 0 \\ -1 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

verifica  $\nabla \varphi \equiv 0$  in  $\Omega$  ma NON è costante. Più banalmente, la funzione avente il grafico seguente



Non è costante  
ma ha  
gradienti  
identicamente  
nulli in  $\Omega$ .

In definitiva occorre studiare tutte le soluzioni del problema "omogeneo associato"  $\nabla \varphi = 0$  in  $\Omega$ .

Per chiarire a sufficienza il problema occorre la seguente

DEFINIZIONE : Un insieme  $\Omega$  si dice connesso se, per ogni  $x_1, x_2 \in \Omega$ , esiste  $\gamma : [0,1] \rightarrow \Omega$ , continua e tale che

$$\gamma(0) = x_1 \quad e \quad \gamma(1) = x_2$$

In sostanza, ogni punto di  $\Omega$  può essere raggiunto da ogni altro, senza mai uscire da  $\Omega$  ( $\gamma : [0,1] \rightarrow \underline{\Omega}$ )

Il concetto di insieme connesso permette di estendere a più variabili alcuni classici teoremi importanti che richiedono fra le ipotesi "non negoziabili" quelle che il dominio sia un intervallo.

Come primo risultato, proviamo il teorema degli zeri.

TEOREMA (degli zeri). Sia  $\Omega$  un insieme connesso e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , continua in  $\Omega$ , e tale che esistano  $x_1, x_2 \in \Omega$  per i quali

$$f(x_1) f(x_2) < 0$$

Allora esiste  $x^* \in \Omega$  tale che  $f(x^*) = 0$ .

DIM. Dalla connessione di  $\Omega$  segue che esiste  $\gamma : [0,1] \rightarrow \Omega$  continua tale che  $\gamma(0) = x_1$ ,  $\gamma(1) = x_2$ . Si consideri allora  $h(t) = f(\gamma(t))$ . Si ha:

- $h(0)h(1) = f(\gamma(0))f(\gamma(1)) = f(x_1)f(x_2) < 0$
- $h$  è continua, poiché composta di funzioni continue ( $\gamma$  ed  $f$ )
- $h$  è definita sull'intervallo  $[0,1]$ , perché  $\gamma[0,1] \subseteq \Omega$  e dunque  $f(\gamma(t))$  è definita per ogni  $t \in [0,1]$

Per il teorema degli zeri (di Weierstrass), esiste  $t^* \in [0,1]$  tale che  $h(t^*) = 0$  e dunque

$$h(t^*) = f(\gamma(t^*)) = 0$$

Lo si può allora ponendo  $x^* = \gamma(t^*) \in \Omega$ .

□

Un altro risultato valido solo per gli intervalli, conseguente dal teorema di Lagrange, è il teorema che riguarda le funzioni con derivate identicamente nulle.

Prima di risolvere il problema sotto ipotesi più generali, è utile stabilirlo per le sfere, come avviene nel seguente

LEMMA: Sia  $f : B_\varepsilon(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ , di classe C<sup>1</sup>,  
tal che  $\nabla f \equiv 0$  sulla  $B_\varepsilon(x_0)$ . Allora  $f$  è costante in  $B_\varepsilon(x_0)$  (e vale dapprima  $f(x_0)$ ).

DIM. Dalle formule di Taylor con resto di Lagrange d'ordine 1, segue da  $|w| < \varepsilon$  che

$$f(x_0 + w) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_0 + \xi w) w_i$$

ore  $\xi \in [0,1]$ . Poiché le derivate parziali nella somma sono identicamente nulle in  $B_\varepsilon(x_0)$  e  $|x_0 + \xi w - x_0| = |\xi w| \leq |w| < \varepsilon$ , ne segue che la somma è nulla e dunque

$$f(x_0 + w) = f(x_0) \quad \forall w: |w| < \varepsilon$$

□

Il prossimo risultato dicerà completamente le questioni, almeno nel caso degli insiemi aperti.

TEOREMA: Sia  $\Omega$  un aperto connesso.  
Sia  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal che  $\nabla \varphi \equiv 0$  sulla  $\Omega$ .  
Allora  $\varphi$  è costante in  $\Omega$ .

DIM. Sia  $x_0 \in \Omega$ , fissato ad arbitrio. Venrà provato che, per ogni  $x \in \Omega$ ,  $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ .

Sia  $\gamma(t)$  una curva parametrizzata continua,  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , tale che  $\gamma(0) = x_0$  e  $\gamma(1) = x$ , che esiste certamente perché  $\Omega$  è connesso.

Si pone allora  $\Delta = \{t \in [0, 1] : f(\gamma(t)) = f(x_0)\}$  e inoltre si ha

$$T = \sup \Delta$$

Poiché  $\gamma(0) = x_0$  ne segue  $f(\gamma(0)) = f(x_0)$ , e dunque  $0 \in \Delta$ .

E' altrettanto  $\Delta \subseteq [0, 1]$  e dunque  $T \leq 1$ .

Del fatto che  $\sup \Delta$  è finito, segue dalla proprietà di caratteristica il  $\sup$  (e' esso il minimo dei maggiori), che

$$\forall \varepsilon = \frac{1}{n} \quad \exists t_n \in \Delta : \quad T - \frac{1}{n} < t_n \leq T$$

da cui, per il teorema del confronto  $\lim t_n = T$

Poiché  $t \mapsto f(\gamma(t))$ , essendo composta di funzioni continue, è continua, ne segue che

$$f(\gamma(T)) = \lim f(\gamma(t_n))$$

e poiché  $t_n \in \Delta$  si ha che  $f(\gamma(t_n)) = f(x_0)$  e dunque

$$f(\gamma(T)) = f(x_0)$$

Se dunque  $T = 1$ , ne segue  $f(x) = f(\gamma(1)) = f(x_0)$ , che è lo tsrl.

Completiamo la dimostrazione prendendo che assumere  $T < 1$  conduce ad un assurdo.

Infatti, se fosse  $T < 1$ , ne seguirà che  $f(\gamma(t)) \neq f(x_0)$  per ogni  $t \in [T, 1]$ , e ciò è falso in un intorno destro di  $T$ .

Dal lemma precedente, applicato al punto  $\gamma(T)$ , che è interno ad  $\Omega$  perché  $\Omega$  è aperto, si ha che  $\gamma(T)$  è centro di una sfera sulla quale  $\nabla f \equiv 0$  e dunque  $f$  è costante ed uguale ad  $f(\gamma(T)) = f(x_0)$ . Sia  $B_\varepsilon(\gamma(T))$  tale sfera.

Dalla continuità di  $\gamma$  in  $T$ , ne segue che, fissato il numero  $\varepsilon$  (il raggio della sfera appena introdotta), esiste  $\delta > 0$  tale che, se  $|t - T| < \delta$  allora  $|\gamma(t) - \gamma(T)| < \varepsilon$ , da cui  $\gamma(t) \in B_\varepsilon(\gamma(T))$  se  $T - \delta < t < T + \delta$ .

Dunque, essendo  $f$  costante e uguale a  $f(x_0)$  in  $B_\varepsilon(\gamma(T))$ , ne segue  $f(\gamma(t)) = f(x_0)$  per ogni  $t \in [T - \delta, T + \delta]$  e ciò è assurdo per tutti:  $t \in [T, T + \delta]$ , che sono strettamente maggiori di  $T = \sup\{t : f(\gamma(t)) = f(x_0)\}$



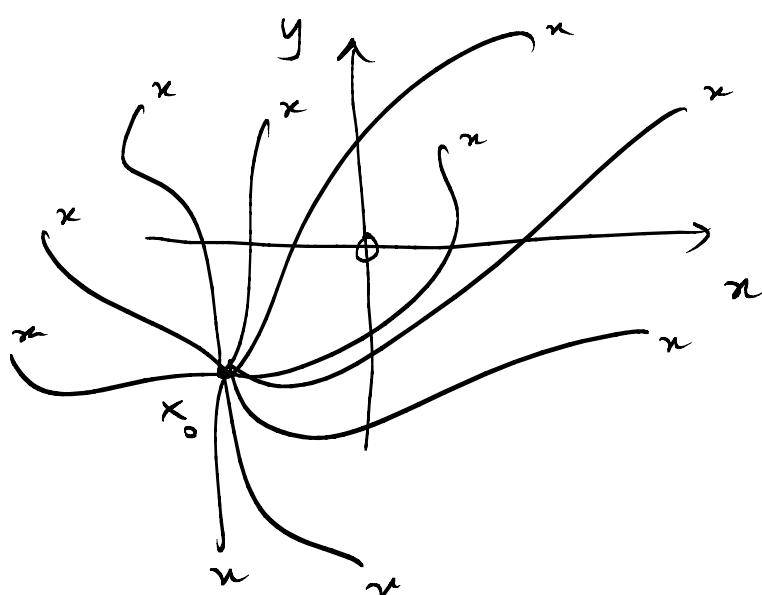
In conclusione, se  $\nabla \varphi \equiv 0$  su  $\Omega$ , e  $\Omega$  è aperto e connesso, allora  $\varphi$  è costante.

Un insieme non连通 si dirà sconnesso.  
 Se  $\Omega$  è sconnesso si può decomporlo in parti (o componenti) connesse: in sostanza, le componenti connesse contenute in un punto  $x_0$  è il sottinsieme dei punti di  $\Omega$  che possono essere raggiunti da  $x_0$ , senza uscire da  $\Omega$ .

In modo un po' più asettico: "Data  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $x_0 \in \Omega$ , si definisca componente连通 contenente  $x_0$  come

$$\Omega(x_0) = \left\{ x \in \Omega : \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega : \gamma(0) = x_0 \text{ e } \gamma(1) = x \right\}$$

Ad esempio, il dominio delle funze  $\frac{1}{x^2+y^2} = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$  che ha una sola componente连通



Per uno schizzo differente, ecco un altro esempio.

La funzione  $f(x,y) = \frac{1}{xy}$  è un potenziale del campo

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{xy}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{xy} \right) = \\ = \left( -\frac{y}{x^2 y^2}, -\frac{x}{x^2 y^2} \right) = -\left( \frac{1}{x^2 y}, \frac{1}{x y^2} \right)$$

Tutti gli altri potenziali si ottengono dalle formule

$$f(x,y) = \frac{1}{xy} + \varphi(x,y)$$

ove  $\varphi(x,y)$  ha gradiente identicamente nullo  
sul dominio del campo, ossia

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\} =$$

$$= \{x > 0, y > 0\} \cup \{x > 0, y < 0\} \cup \{x < 0, y < 0\} \cup \{x < 0, y > 0\}$$

Ognuno dei quattro quadranti è connesso e dunque

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} c_1 & \text{in } x > 0, y > 0 \\ c_2 & \text{in } x < 0, y > 0 \\ c_3 & \text{in } x < 0, y < 0 \\ c_4 & \text{in } x > 0, y < 0 \end{cases}$$

ma nulla obbliga le quattro costanti ad essere uguali!

Al reviare di  $c_1, c_2, c_3, c_4$  si ottengono tutte le possibili soluzioni di  $D\varphi \equiv 0$  dall'unione dei quattro quadranti, e dunque tutti i possibili potenziali di  $-\left(\frac{1}{x^2}y, \frac{1}{y^2}x\right)$ , che sono dunque

$$f(x,y) = \frac{1}{xy} + \begin{cases} c_1 \text{ nel I quadrante} & \text{6c ass} \\ c_2 \text{ nel II} & \text{non fanno} \\ c_3 \text{ nel III} & \text{parte di } \Omega \\ c_4 \text{ nel IV} & \text{e sconnettono} \\ & \text{i quadranti.} \end{cases}$$

Facendo  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = C$  si ottengono i potenziali

$$\frac{1}{xy} + C$$

che imperversano intollerante su alcuni libri!

Sicché se si occorre calcolare un integrale definito, basta UNA primitiva (una sola, qualsiasi!), mentre se il problema è trovare TUTTE, aggiungere pigramente e automaticamente un " $+ C$ " può non bastare: si pensi all'esempio (in una sola variabile)

$$\left(\lg|x| + \frac{c}{|x|}\right)' = \frac{1}{x} \quad (\text{prova per credere!})$$

In questo caso il dominio è sconnesso  $\{x > 0\} \cup \{x < 0\}$  e dunque per trovare TUTTE le primitive occorrono due costanti, indipendenti l'una dall'altra, una su  $\{x > 0\}$  e una su  $\{x < 0\}$ , da aggiungere a  $\lg|x|$ . Altro che  $\lg|x| + C$ !!!

## NOTE CONCLUSIVE

Forme e campi integrabili non sono gli unici interessanti nelle applicazioni. Fra gli esempi più illustri di campi o forme non integrabili c'è il campo magnetico e molte forme ricorrenti in termodinamica, ed è una vera fortuna che siano non integrabili, perché altrimenti un motore, elettrico o a combustione interna, non potrebbe compiere alcun lavoro utile all'esterno, fatto nella sua attività lo stato descrive curve chiuse.

Il campo gravitazionale è conservativo solo se si trascurano l'attrito, e anche una volta in mondo senza attrito ci contingerebbe agli stessi numeri da dover ai quali siamo costretti comunque nel ghiaccio. Dunque è la sfera che nei moti planetari, che sono ben approssimabili da noi in un campo univoco conservativo, a parte venti solari ed altri eventi di collisione imprevedibili, o altri effetti d' dissipazione di energia nei moti interni al pianeta (che non è un punto materiale!): le continue deformazioni delle lune per effetto dell'attrazione della terra - l'effetto simile a quello delle maree, nel mare come nelle croste - ha fatto sì che l'energia di rotazione delle lune nel suo arco venisse progressivamente dissipata sino a che, rinvigendo sempre la stessa facce verso la terra, le perdite formate ridotti a zero. Accadrebbe lo stesso alla terra, fra un

altro po' perché dà molte più energie di rotazione da  
soltanto: rallegrare la terra da un giro al giorno a  
(circa) un giro al mese sul suo asse! Chissà... forse qualche  
miliardo di anni dovranno bastare!

Un'altra notazione conferma

$$(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i}$$

è connessa ad un concetto comodo nello studio dei  
campi (soprattutto quelli non instaziali), detti anche  
rotazionali) in  $\mathbb{R}^3$ : il rotore di un campo.

Dato  $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ , si definisce

$$\text{rot } A = ((A_2)_{x_3} - (A_3)_{x_2}, -[(A_1)_{x_3} - (A_3)_{x_1}], (A_1)_{x_2} - (A_2)_{x_1})$$

Molto, e tra essi Richard Feynman, usano il simbolo

$$\nabla \wedge A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

(Per la verità, Feynman usa il simbolo  $\nabla \times A$  e non  $\nabla \wedge A$   
per indicare il prodotto vettore fra il "vettore"  $\nabla$  e  
l'altro,  $A$ ).

Le condizioni necessarie di integrabilità (differenti  
negli intervalli semplicemente connesi), diventano  
allora

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (*)$$

il che spiega il perché del nome "irrotazionale" per i campi che verificano (\*).

In Fisica, un campo integrale si dice anche potenziale o conservativo, come si è già detto prima.

Attentate, però, perché in Fisica non si usano solo i potenziali scalari ma anche il potenziale vettore: invece d'essere un oggetto il cui gradiente è fisso, è un oggetto il cui rotore è fisso.

Ciò ci consiglierebbe di tornare alla definizione esterna di forme differenziali, che esula dall'ambito di questa note. Per un'introduzione si può, ad esempio, consultare l'ultimo capitolo del corso d'Analisi Matematica (secondo volume) di G. Prodi, che è ora disponibile in tutta Italia per i tipi di Bonnighieri, già citato.

La Termodinamica è uno dei regni incontestati delle forme differenziali, e reperire forme riguardanti le grandezze d'interesse — la pressione, il volume, la temperatura, la massa in gas, per tacere di combinatori di forze o delle reazioni chimiche — che siano integrabi e diano luogo a potenziali termodinamici è stata un'ossessione per gli studiosi.

I loro sforzi hanno prodotto soluzioni diverse, ciascuna approssimata per il particolare problema studiato: un libro d'Termodinamica o di Chimica Generale sono riferimenti obbligati per gli approfondimenti.

Un'ultima nota si dice: molti campi in Fisica, per i quali non sia evidente la loro integrabilità, sono centrali - ossia la sorgente del campo è in un punto - e sono in  $\mathbb{R}^3$ . Di solito si ha questo accade in  $\mathbb{R}^2$ , l'insieme  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  è semplicemente connesso: qualche curva chiusa che include l'origine al suo interno può essere traslata "da un'altra parte" e poi fatta collidere in un punto. Una conseguenza da tenere nel debito conto è che nella stragrande maggioranza dei casi i campi delle Fisiche o sono rotazionali come il campo magnetico o il campo di velocità di un fluido viscoso, oppure ad essi si può applicare il teorema di conservazione omotopiale e dunque, oltre ad esse instanziali esse sono anche integrali. Ne segue (un altro mattone sulla tana di Babel) che in Fisica e in Ingegneria si usa il termine "esatta" per indicare una forma chiusa (referto solo la condizione del valore nullo). Occorre prestare attenzione, dunque: il termine "forma chiusa", di uso corrente nelle teorie dell'Analisi e della Coomologia, è di solito ignorato e sostituito con il termine "forma esatta" (il che non è in generale corretto), ma che lo è nel contesto nel quale questo "abuso matematico" viene di solito perpetrato.

# APPENDICE

## ALCUNI CAMPI NON INTEGRABILI INTERESSANTI

No, non è il campo magnetico! Il primo esempio può essere espresso in tre modi

$$x \, dy \quad -y \, dx \quad \frac{1}{2}(x \, dy - y \, dx)$$

Le formule di Gauss-Green-Ostogradskij,... permettono di dimostrare che il loro integrale esteso ad una curva chiusa è il vettore risultante delle curve, se viene percorso in senso antiorario e il suo opposto, se percorso in senso orario.

$$\text{Ad esempio } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi], \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{2}(x \, dy - y \, dx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos t \cos t - (\sin t)(-\sin t)] dt = \pi$$

Come si vede dall'esempio, non sempre è più vantaggioso adottare  $x \, dy$  oppure  $-y \, dx$ , rispetto a  $\frac{1}{2}(x \, dy - y \, dx)$ .

Le tre forme considerate NON sono chiuse

$$x \, dy = 0 \, dx + x \, dy \quad \frac{\partial}{\partial y}(0) \neq \frac{\partial}{\partial x}(x)$$

ma ciò non toglie che possono tornare utili!

Un altro esempio, che forse apparirà ossessivo, è quello già trattamento noto:

$$-\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

( $f_x, f_y$  ... è l'opposta delle forme già studiate), che sappiamo già essere chiuse, non globalmente esatta, ma esatta su ogni sottrazione semplicemente connesso del dominio  $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$  (come un quadrante ed un semipiano aperto, ad esempio).

Per calcolarne l'integrale su una curva generica si può seguire una via traversa: il metodo "per la bontà".  
"Esiste  $f$  tale che

$$\begin{cases} f_x = -\frac{y}{x^2+y^2} \\ f_y = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

La risposta è NO  
in  $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ , ma è  
Sì se si sottraggono  
semplicemente connesse

Il calcolo non è difficile

$$\int \frac{x}{x^2+y^2} dy = \frac{x}{x^2} \int \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} dy = \int \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} d\left(\frac{y}{x}\right) =$$

$x \neq 0$

$$= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

da cui

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c(x)$$

e, dividendo rispetto ad  $x$  e neggligendo alle altre componenti del gradiente, si ha

$$-\frac{y}{x^2+y^2} = f_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left( -\frac{y}{x^2} \right) + c'(x)$$

da cui anche

$$c'(x) = 0$$

e dunque  $c$  è costante su ciascuno dei semipiani  $x > 0$  e  $x < 0$ , potendo avere però costanti diverse sui due semipiani. Si sono dunque trovati i potenziali

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \begin{cases} c_1 & x > 0 \\ c_2 & x < 0 \end{cases} \quad (*)$$

Alcune osservazioni. Prima: nessuna violazione dell'ordine delle cose. I potenziali trovati NON sono definiti su  $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$  tutto intero, ma solo su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ .  
Seconda: la funzione  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ , sul semipiano  $x > 0$ , è l'angolo che il raggio vettore  $(x,y)$  forma col semiasse positivo dell' $x$ . Dunque, la differenza di potenziale sul semipiano  $x > 0$ , dond'è campo è integrabile, è la differenza fra gli angoli formati con il semiasse delle  $x$  positive da  $f(b) - f(a)$ .

Terza. Nel semipiano  $\{x < 0\}$ ,  $\arctg \frac{y}{x}$  NON rappresenta l'angolo formato da  $(xy)$  con l'origine degli assi (il senone positivo dell' $x$ ), ma quelli formati dal vettore  $(-x, -y)$ , ad esso opposti. Ne segue che l'angolo fra  $(x,y)$  e  $\overrightarrow{x^+}$  è

$$\arctg \frac{y}{x} + \pi$$

Poiché l'integrale su una curva  $\gamma$  tutta contenuta in  $x < 0$  è la differenza (di potenziale) fra i valori delle funzioni precedenti fra il punto iniziale finale, la costante additiva  $\pi$  si semplifica e dunque, anche nel semipiano  $x < 0$ , l'integrale risulta uguale alle differenze fra gli angoli formati da  $\gamma(b)$  e  $\gamma(a)$  con il senone positivo dell' $x$ .

Quarta. Cosa si può fare se la curva  $\gamma$  attraversa l'asse  $y$  ( $x = 0$ )? Dipende! Sappiamo già che la comprensione unitaria (che attraversa due valori di  $y$ ) NON consente di calcolare l'integrale per differenze di potenziali, perché è chiusa e dovrebbe avere differenze di potenziale 0, mentre l'integrale è  $2\pi$ . Si può comunque abbozzare la difficoltà imposta dalla condizione  $x \neq 0$  in due modi: si può integrare il sistema del gradiente a rovescio integrando prima la  $f_x$  in  $dx$  invece della  $f_y$  in  $dy$ , e così si dovrà mettere in evidenza al denominatore  $y^2$ , invece di  $x^2$  e la condizione d'entrata  $y \neq 0$  invece  $x \neq 0$ ; oppure si può osservare che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctg \frac{y}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctg \frac{y}{x} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } y > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

e dunque, scelta le costanti  $c_1$  nel potenziale (\*) uguale a 0 e  $c_2$  uguale a  $\pi$  si ottiene

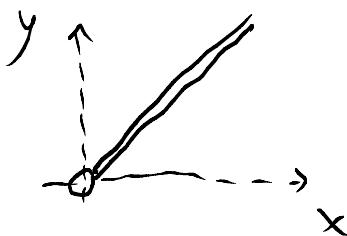
$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \pi & x < 0 \end{cases} \\ \frac{\pi}{2} \quad \text{se } x=0 \text{ e } y > 0 \end{cases}$$

che non è un potenziale su  $\{x=0, y < 0\}$  perché i limiti destro e sinistro differiscono in per  $2\pi$ . La funzione  $f$  così definita è però continua sul semiasse positivo delle  $y$ . Inoltre

$$\begin{aligned} f_x(0, \alpha) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{h} - \frac{\pi}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{h^2}} \cdot -\frac{\alpha}{h^2} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{\alpha}{h^2 + \alpha^2} = -\frac{1}{\alpha} = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)_{\substack{x=0 \\ y=\alpha}} \end{aligned}$$

Lo stesso accade per la  $f_y(0, \alpha) = 0$ . Dunque  $f$  non è soltanto costituita da una coppia di potenziali saldati per continuità lungo  $\vec{y}^+$ , ma è essa stessa un potenziale lungo  $\vec{y}^+$ , ossia il suo gradiente coincide col campo non solo per  $x \neq 0$ , ma anche per  $x=0$ , ma con  $y > 0$ . In ogni caso la coperta è (e deve essere) CORTA: "saldando" i potenziali lungo  $\vec{y}^+$  si crea un salto di  $2\pi$  lungo  $\vec{y}^-$ . Sottraendo  $\pi$  nella regione  $x < 0$  a  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ , invece, si salderebbero lungo  $\vec{y}^-$  ma il salto di  $2\pi$  si avrebbe lungo  $\vec{y}^+$ . NULLA DI MALE: un potenziale globale New

ESISTE! Ci possono farci costruire potenziali locali dentro ogni regione semplicemente connesse. Consideriamo il potenziale tagliato lungo una semiretta per l'origine.



Per ottenere un potenziale nel complementare di  $\{x > 0; x = y\}$  si può osservare che

$$f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & x > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \end{cases}$$

è un potenziale definito fuori di  $\{x > 0; y < 0\}$ , mentre

$$g(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & x > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & x < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

è un potenziale definito fuori di  $\{x = 0; y \geq 0\}$ .

Poiché si ha

$$f(\alpha, \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{per } \alpha > 0 \\ 1 + \pi & \text{per } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$g(\alpha, \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{per } \alpha > 0 \\ 1 - \pi & \text{per } \alpha < 0 \end{cases}$$

ne segue infine che, poiché

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{per } y > x \\ g(x,y) + 2\pi & \text{per } y < x \end{cases}$$

risulta come prima che  $F$  è un potenziale su  $\{x < 0; y = x\}$  mentre ha un salto di  $2\pi$  su  $\{x > 0; y = x\}$ .

C'è da segnalare quanto possa risultare intelligenzialmente  
grossolano aggiungere il "+ C" in fondo alle primitive.  
Si aggiunge ciò che ne aggiunto, con grande, a  
seconda del dominio in esame. Basta scrivere al posto di  
 $f$  e  $g$  le loro espressioni complete per comprendere quanto  
possa essere articolata l'aggiunta di costanti ai potenziali!

Un'altra nota (l'ULTIMA): costruire primitive globali  
a partire da quelle locali, in particolar modo per i  
problemi della radice e del logaritmo nel campo complesso,  
è stato il motore per la definizione dei concetti e lo  
sviluppo delle tecniche delle teorie moderne delle  
"varietà"; Riemann introdusse a tal scopo il concetto  
di "superficie di Riemann" che, in buon tempo, condusse  
i matematici a sviluppare la teoria delle Varietà  
d'Hermann Minkowski, informando tutto ciò che riguardava curve,  
superficie, piani tangenti, curvatura, distanza su una  
superficie ed ogni sorta di roba "curve".

In otto d' oggi a Bernhard Riemann, morto giovinissimo, enunciamo e dimostriamo un teorema di prolungamento dei potenziali.

TEOREMA Se  $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo e siano  $\Omega', \Omega'' \subseteq \Omega$ , con  $\Omega' \cap \Omega''$  aperto connesso.

Se  $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$  è un potenziale di  $A$  in  $\Omega'$  e  $g : \Omega'' \rightarrow \mathbb{R}$  è un potenziale di  $A$  in  $\Omega''$  allora  $A$  è integrabile in  $\Omega' \cup \Omega''$ .

Dim. Sia  $\Omega''' = \Omega' \cap \Omega''$ , che per ipotesi è aperto e connesso. Allora esiste  $k \in \mathbb{R}$  tale che  $f = g + k$  su  $\Omega'''$ , perché  $f$  e  $g$  sono due diversi potenziali su un aperto connesso. Definire

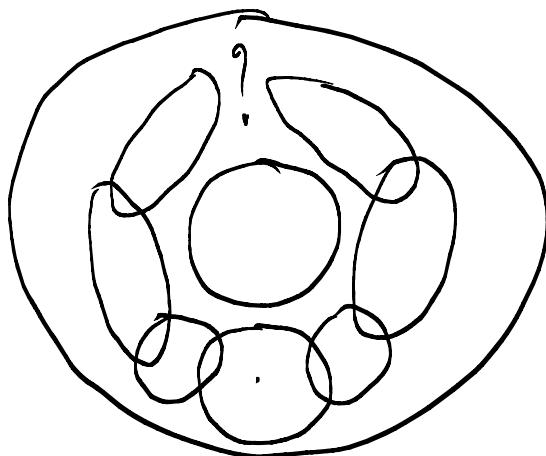
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{su } \Omega' \\ g(x) + k & \text{su } \Omega'' \end{cases}$$

si ha che  $h$  è una funzione definita su  $\Omega' \cup \Omega''$ , perché nelle parti comuni  $\Omega''' = \Omega' \cap \Omega''$   $f$  e  $g + k$  coincidono, e inoltre  $\nabla h = \nabla f = A$  su  $\Omega'$  e  $\nabla h = \nabla(g+k) = \nabla g = A$  su  $\Omega''$ .



Dunque i potenziali locali si possono "saldare" fra loro per "ampliarne" il dominio. E' però possibile che, prolungando il potenziale lungo due percorsi differenti si raggiunga lo stesso punto con valori diversi: è esattamente quello che accade con i campi non integrabili globalmente, ma integrali localmente (sulle sfere, ad esempio).

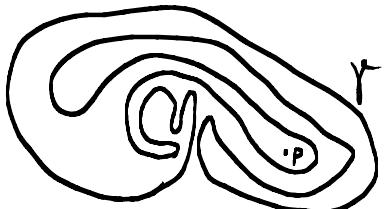
quando il prolungamento avviene in regioni non semplicemente connesse --- a connessione multipla!



Lungo le "catene" di regioni semplicemente connesse i potenziali locali possono essere "saldati" per il tessuto precedente per formarne uno globale. Non è però, in generale, possibile aggiungere un'altra regione in alto che abbia punti interni comuni ad entrambi: "lati" delle regioni fra quali è stato prolungato il potenziale, poiché nessuno garantisce, salvo che il campo non sia globalmente integrabile, che i valori trovati per il potenziale prolungato lungo i due cammini (NON ORTOPI) "a destra" e "a sinistra" del "buco" siano fra loro compatibili (il salto di  $2\pi$  nel "potenziale" del "differential angle" docet ...).

Dunque l'ipotesi che  $\Omega \cap \Omega'$  sia connesso nel tessuto di prolungamento NON è accessoria: è indispensabile!

Per concludere... un problema da "Settimana Enigmistica"!



Il punto P è dentro o fuori la regione delimitata da  $\gamma$ ?

Facile! Se  $P = (x_0, y_0)$ , allora  $\gamma$  non circonda

$$\text{P se } I = \int_{\gamma} \frac{y - y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} dx - \frac{x - x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

mentre, se  $\gamma$  circonda  $P$ , allora  $I = 2k\pi$ , con  $k$  intero relativo non nullo (pari al numero di giri che il punto lungo  $\gamma$  compie attorno a  $P$  al revero del parametro nel dominio delle curve). Perché?

Questo criterio si pone ad una superficie al computer, perché essendo discreto l'insieme dei valori che l'integrale può assumere, non occorre calcolarlo esattamente, ma basta approssimarselo con un errore come d'  $\pi$  per poter stabilire se faccia 0 o  $2\pi$  (o  $-2\pi$ , oppure!).

Un altro problemino! Come fanno  $\operatorname{arctg} \frac{x}{y}$  e  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  ad essere entrambi potenziali del solito stimatissimo campo? Le sta sta far annegare è ovviamente studiare la funzione di una variabile definita da

$$h(t) = \operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} \frac{1}{t}$$

Naturalmente... chi dice che è costante paga la cassa a tutti!