## Esercizi sui sistemi di comunicazione

1. Un sistema di comunicazione utilizza simboli indipendenti ed equiprobabili che assumono valori in $\{-2, 0, 2, 4\}$.

    (a) Calcolare il valor medio dei simboli.

    (b) Calcolare la funzione di autocorrelazione dei simboli.

(a) $m_a = E\{a\} = \sum_i a_i\, p(a_i) = \frac{1}{4} \sum a_i = \frac{1}{4}(-2+0+2+4) = 1$

(b) $R_a(i,k) = E\{a_i\, a_k^*\} = \dots$

$\Rightarrow$ se $i = k$ $\quad \dots = E\{|a_i|^2\} = \sum_i |a_i|^2 p(a_i) = \frac{1}{4}(|-2|^2 + |2|^2 + |4|^2) = 6$

$\Rightarrow$ se $i \neq k$ $\quad \dots = E\{a_i\} E\{a_k^*\} = m_a \cdot m_a = 1$

---

2. Un processo bianco Gaussiano $W(t)$ con densità spettrale di potenza pari a $N_0$ viene dato in ingresso ad un sistema lineare stazionario con risposta impulsiva $h(t) = \mathrm{rect}(t/T)$.

    (a) Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo in uscita $N(t)$.

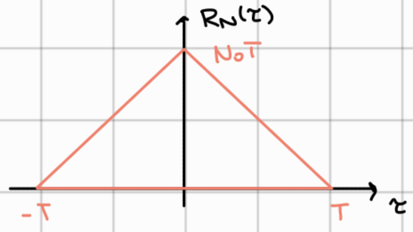
    (b) Dimostrare che i campioni $N(iT)$ and $N(kT)$ sono indipendenti per $i \neq k$.

(a) Dato che $W(t)$ bianco $\Rightarrow W(t)$ SSL $\Rightarrow N(t)$ SSL $\Rightarrow R_N(\tau) \rightleftarrows S_N(f)$

ed essendo $h(t) = \mathrm{rect}(\frac{t}{T}) \rightleftarrows T\,\mathrm{sinc}(fT) = H(f)$

allora $S_N(f) = S_W(f)\,|H(f)|^2 = N_0\,|T\,\mathrm{sinc}(fT)|^2 = N_0 T^2 \mathrm{sinc}^2(fT)$

dunque $R_N(\tau) = N_0 T\, \mathrm{triang}(\frac{t}{T})$




in alternativa, sotto le stesse hp, potevo dire che

$R_N(\tau) = R_W(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) = N_0\,\delta(t) \otimes \mathrm{rect}(\frac{t}{T}) \otimes \mathrm{rect}(\frac{t}{T}) = N_0\left(\mathrm{rect}(\frac{t}{T}) \otimes \mathrm{rect}(\frac{t}{T})\right)$

(b) Dato che $w(t)$ gaussiano $\Rightarrow N(t)$ Gaussiano

$$w(t) \text{ bianco} \Rightarrow m_w(t) = 0 \Rightarrow m_N(t) = m_w(t)\, H(0) = 0$$

ed essendo che, se due v.a. estratte da un processo gaussiano sono incorrelate allora sono anche indipendenti, allora, dato $m_N(t)=0$, è è sufficiente mostrare che queste siano ortogonali, e questo è vero perché $R_N(iT, kT) = R_N(kT - iT, 0) = R_N(T(k-i)) = 0$ se $i \neq k$

$m_N = 0 \Rightarrow C_{XY} = R_{XY}$

incorrelate = ortogonali

---

→ in banda base

3. Un sistema 2−PAM impiega come filtro di trasmissione $g_T(t) = \mathrm{sinc}(t/T)$. Il canale di comunicazione introduce rumore Gaussiano bianco a media nulla e varianza $N_0$.

$m_w = 0$ $\quad$ $\sigma_w = N_0$

   (a) Determinare la densità spettrale di potenza del segnale trasmesso;
   (b) Determinare il filtro adattato $g_R(t)$;
   (c) Calcolare il rapporto segnale rumore in uscita dal filtro;
   (d) Nell'ipotesi in cui $g_R(t) = \mathrm{sinc}(2t/T)$, calcolare la perdita del sistema rispetto a quello che impiega il filtro adattato.

(a) $$S_s(f) = \frac{1}{T} S_a(f)\,|G_T(f)|^2 = \frac{1}{T}\,\frac{M^2-1}{3}\,|T\,\mathrm{rect}(fT)|^2 = \frac{T^2}{T}\,\mathrm{rect}^2(fT) = T\,\mathrm{rect}(fT)$$

(b) Il filtro è adattato se $g_R(t) = g_T(-t)^* = \mathrm{sinc}\left(-\frac{t}{T}\right)^* = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$

(c) Il segnale in ingresso al decisore in un sistema PAM è in generale

$$x(k) = a_k\, g(0) + \cancel{\sum_{m \neq 0} a_{k-m}\, g(mT)} + n(k)$$

dove, in questo caso l'ISI è 0 perché è soddisfatta la condizione di Nyquist:

supponendo $c(t) = \delta(t) \Rightarrow g(t) = g_R(t) \otimes g_T(t)$

$$\Rightarrow G(f) = G_R(f)\, G_T(f) = T\,\mathrm{rect}(fT)\, T\,\mathrm{rect}(fT) = T^2\,\mathrm{rect}(fT)$$


dove $n(t) = w(t) \otimes g_R(t)$:

$$w(t) \text{ bianco} \Rightarrow w(t) \text{ SSL} \Rightarrow n(t) \text{ SSL} \Rightarrow m_n = m_w\, G_R(0) = 0$$


$$\Rightarrow \sigma_n^2 = P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(f)\, |G_R(f)|^2\, df = N_0 \int_{-1/2T}^{1/2T} |T\,\mathrm{rect}(fT)|^2\, df = N_0\left(\frac{2}{2T} \cdot T^2\right) = N_0 T$$

ed inoltre $$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\, df = \int_{-1/2T}^{1/2T} T^2\,\mathrm{rect}(fT)\, df = T^2\left(\frac{2}{2T} \cdot 1\right) = T$$

infine SNR = Valore quadratico medio segnale utile / Valore quadratico medio rumore

$$= \frac{E\{|a_k g(0)|^2\}}{E\{|m(k)|^2\}} = |g(0)|^2 \frac{E\{|a_k|^2\}}{\sigma_m^2} = T^2 \frac{\frac{M^2-1}{3}}{N_0 T} \overset{M=2}{=} \frac{T}{N_0}$$

(d) Se $g_R(t) = \text{sinc}\left(t \frac{2}{T}\right)$ allora $G(f) = G_R(f) G_T(f) = \frac{T}{2} \text{rect}\left(\frac{T}{2} f\right) T \text{rect}(Tf) = \frac{T^2}{2} \text{rect}(fT)$

dunque Nyquist è verificato e come prima otteniamo:


$$\sigma_m^2 = P_m = \int_{-\infty}^{+\infty} S_m(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(f) |G_R(f)|^2 df = N_0 \int_{-1/T}^{1/T} \left|\frac{T}{2} \text{rect}\left(f \frac{T}{2}\right)\right|^2 df = N_0 \left(\frac{2}{T} \cdot \frac{T^2}{4}\right) = N_0 \frac{T}{2}$$

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\,df = \int_{-1/2T}^{1/2T} \frac{T^2}{2} \text{rect}(fT)\,df = \frac{T^2}{2} \left(\frac{2}{2T} \cdot 1\right) = \frac{T}{2}$$

allora SNR $= \frac{E\{|a_k g(0)|^2\}}{E\{|m(k)|^2\}} = |g(0)|^2 \frac{E\{|a_k|^2\}}{\sigma_m^2} = \frac{T^2}{4} \frac{\frac{M^2-1}{3}}{\frac{N_0 T}{2}} \overset{M=2}{=} \frac{T^2}{4} \frac{2}{N_0 T} = \frac{1}{2} \frac{T}{N_0}$

il che ha senso perché viene più piccolo dell'SNR calcolato prima, che era l'SNR massimo perché il filtro era di tipo adattato

---

4. Dato un sistema di comunicazione PAM:

   (a) Dimensionare il filtro di trasmissione e ricezione al fine di massimizzare il rapporto segnale-rumore ed eliminare l'interferenza intersimbolica.

(a) In un generico sistema PAM il segnale in ingresso al decisore è

$$x(k) = a_k g(0) + \overbrace{\sum_{m \neq 0} a_{k-m} g(mT_s)}^{ISI} + m_k \quad \text{dove } m_k \in N(0, S_w E_{g_R})$$

di conseguenza l'interferenza intersimbolica è nulla se $g(mT_s) = 0$ per $m \neq 0$ (condizione di Nyquist), dove, supponendo $c(t) = \delta(t)$, $g(t) = g_R(t) \otimes g_T(t)$, allora, dato che:

$$\overline{G(f)} \overset{\text{Trasformata discreta}}{=} \sum_m g(mT_s) e^{-j2\pi f m T_s} \overset{\text{Th. trasformata discreta}}{=} \frac{1}{T_s} \sum_k G\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

la condizione di Nyquist in frequenza diventa:

$$\sum_0 g(0T_s) e^{-j2\pi f 0 T_s} = \frac{1}{T_s} \sum G\left(f - \frac{k}{T_s}\right) \Rightarrow \sum G\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = g(0) T_s \quad \text{dove } G(f) = G_R(f) G_T(f)$$

ossia le copie della trasformata continua di Fourier di $g(t)$ posizionate a multipli di $\frac{1}{T_s}$ e sommate danno un valore costante (uguale a $T_s\, g(0)$)

La seconda condizione da imporre sui filtri è quella che massimizza l'SNR:

$$SNR = \frac{\text{Potenza media segnale utile}}{\text{Potenza media rumore}} = \frac{E[|a_k\, g(0)|^2]}{E[|n_k|^2]} = \frac{|g(0)|^2}{S_w E_{g_R}} E[|a_k|^2]$$

$$= E[|a_k|^2] \frac{|g(0)|^2}{S_w \int_{-\infty}^{+\infty} |g_R(t)|^2 dt} = E[|a_k|^2] \frac{1}{S_w} \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} g_T(\alpha)\, g_R(-\alpha)\, d\alpha \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |g_R(t)|^2 dt}$$

Nel PAM i filtri sono reali

$$= E[a_k^2] \frac{1}{S_w} \frac{\left( \int_{-\infty}^{+\infty} g_T(\alpha)\, g_R(-\alpha)\, d\alpha \right)^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} g_R(t)^2\, dt} \underset{\text{Schwarz}}{\leq} E[a_k^2] \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} g_T(\alpha)^2 d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} g_R(-\alpha)^2 d\alpha}{\int_{-\infty}^{+\infty} g_R^2(t)\, dt} \frac{1}{S_w} = E[a_k^2] \frac{1}{S_w} E_{g_T}$$

Di conseguenza l'SNR massimo si ottiene quando $g_R(t) = g_T(-t)$

---

5. Dato il sistema di comunicazione numerico PAM illustrato in figura dove $g_T(t) = \text{rect}(t/T)$, $g_R(t) = \cos(\pi t/T)\text{rect}(t/T)$ e $w(t)$ è un processo aleatorio di rumore Gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$.

   (a) Calcolare il campione $x(k)$ ottenuto all'istante di campionamento $t = kT$.

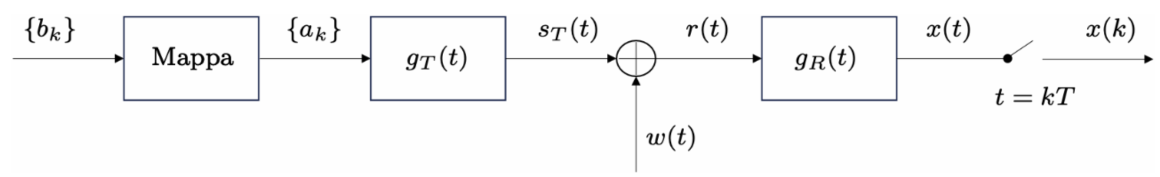



Figure 1: Sistema di comunicazione numerico PAM.

$$x(t) = r(t) \otimes g_R(t) = s_T(t) \otimes g_R(t) + \underbrace{w(t) \otimes g_R(t)}$$

$$= \sum_i a_i\, g_T(t - iT) \otimes g_R(t) + n(t) = \sum_i a_i\, g(t - iT) + n(t)$$

$$x(k) = \sum_i a_i\, g(kT - iT) + n(k) \overset{k-i=m}{=} \sum_m a_{k-m}\, g(mT) + n(k) = a_k\, g(0) + \underbrace{\sum_{m \neq 0} a_{k-m}\, g(mT)}_{ISI} + n(k)$$

dove:

$g(t) = g_R(t) \otimes g_T(t)$

$m_n = m_w G_R(0) = 0$

Parseval

$+\infty$ $+\infty$

$$\sigma_n^2 = P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(f)\,|G_R(f)|^2 df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty} |G_R(f)|^2 df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty} |g_R(t)|^2 dt$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2\!\left(t\frac{\pi}{T}\right) dt = \frac{N_0}{4}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1+\cos\!\left(t\frac{2\pi}{T}\right) dt = \frac{N_0}{4}\left[T + \frac{T}{2\pi}\sin\!\left(t\frac{2\pi}{T}\right)\Big|_{-T/2}^{T/2}\right] = \frac{N_0 T}{4}$$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$

In particolare l'ISI è nulla perchè è soddisfatta la condizione di Nyquist: $g(t)$ è la convoluzione di due segnali di durata $T$, quindi ha durata $2T$, e di conseguenza è sicuramente nullo per $g(mT)$ con $m \neq 0$, inoltre

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_T(t)\,g_R(-t)\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\!\left(t\frac{\pi}{T}\right) dt = \frac{T}{\pi}\sin\!\left(t\frac{\pi}{T}\right)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{2T}{\pi} \neq 0$$

Allora $x(k) = \frac{2T}{\pi} a_k + n(k)$ dove $n(k) \in \left(0, \frac{1}{4}N_0 T\right)$

---

6. Si consideri il sistema di comunicazione numerico PAM illustrato dell'Esercizio 5.
   (a) Derivare la strategia di decisione a massima verosimiglianza per il generico simbolo $a_k$;
   (b) Derivare la strategia di decisione a massima verosimiglianza per la sequenza $\{a_1, a_2, \ldots, a_K\}$;

(a) Per il generico simbolo $a_k$:

$$\hat{a}_k = \underset{\tilde{a}\in A}{\operatorname{argmax}}\left\{f(x(k) \mid a_k = \tilde{a})\right\} = \underset{\tilde{a}\in A}{\operatorname{argmin}}\left\{|x(k) - \tilde{a}|^2\right\}$$

densità di probabilità di $x(k)$

(b) Per la sequenza $\vec{a}_k = \{a_1, \ldots, a_K\}$:

$$\hat{\vec{a}}_k = \underset{\vec{\tilde{a}}\in A^K}{\operatorname{argmax}}\left\{f(\vec{x}_k \mid \vec{a}_k = \vec{\tilde{a}})\right\} = \underset{\vec{\tilde{a}}\in A^K}{\operatorname{argmin}}\left\{\|\vec{x}_k - \vec{\tilde{a}}\|^2\right\}$$

sequenza di K simboli ricevuta

Tuttavia, se le v.a. $x(i)$ condizionate agli eventi $a_i = \tilde{a}_i$ sono indipendenti allora le due strategie sono uguali, infatti:

$$\max_{\vec{\tilde{a}}\in A^K}\left\{f(\vec{x}_k \mid \vec{a}_k = \vec{\tilde{a}})\right\} = \max_{\vec{\tilde{a}}\in A^K}\left\{f(x(1), \ldots, x(k) \mid a_1 = \tilde{a}_1, \ldots, a_K = \tilde{a}_K)\right\} = \ldots$$

$$\ldots = \max_{\vec{\tilde{a}}\in A^K}\left\{\prod_{i=1}^{K} f(x(i) \mid a_i = \tilde{a}_i)\right\} = \prod_{i=1}^{K} \max_{\tilde{a}\in A}\left\{f(x(i) \mid a_i = \tilde{a})\right\}$$

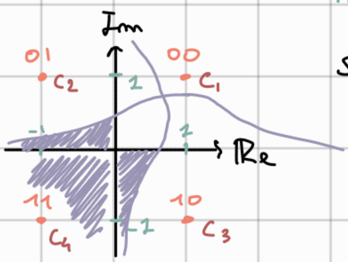
Dato che, per un sistema PAM generico (senza ISI), le v.a. $X(k) \mid a_k = \hat{a}_k$ sono delle Gaussiane con funzione di autocorrelazione nulla, allora queste sono anche indipendenti, per cui le due strategie sono equivalenti

si dimostra (vedi es 2)

---

$g(0) = 1$ e non c'è ISI $\Rightarrow$ assumo $g = g_{RCR}$

7. Calcolare (a partire dal campione $\tilde{x}(k) = c_k + \tilde{n}(k)$ in uscita dal filtro di ricezione) la probabilità di errore sul simbolo di un sistema di comunicazione numerico 4-QAM in funzione del rapporto $E_s/N_0$.




Probabilità totale — simboli equiprob.

$$SER = \sum_i p(c_i) P\{e \mid c_k = c^{(i)}\} = \frac{1}{4} \sum_i P\{e \mid c_k = c^{(i)}\} = P\{e \mid c_k = c^{(1)}\}$$

simmetria delle probabilità — uno qualsiasi

<u>Passando dalla probabilità di errore</u>

$$P\{e \mid c_k = c^{(1)}\} = P\{x_c(k) \le 0 \cup x_s(k) \le 0 \mid c_k = c^{(1)}\}$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= P\{x_c(k) \le 0 \mid a_k = a^{(1)}\} + P\{x_s(k) \le 0 \mid b_k = b^{(1)}\} - P\{x_c(k) \le 0 \cap x_s(k) \le 0 \mid c_k = c^{(1)}\}$$

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ perché i simboli sono indip.

$$= P\{x_c(k) \le 0 \mid a_k = a^{(1)}\} + P\{x_s(k) \le 0 \mid b_k = b^{(1)}\} - P\{x_c(k) \le 0 \mid a_k = a^{(1)}\} P\{x_s(k) \le 0 \mid b_k = b^{(1)}\}$$

$$= \left(1 - Q\left(-\tfrac{1}{\sqrt{N_0}}\right)\right) + \left(1 - Q\left(-\tfrac{1}{\sqrt{N_0}}\right)\right) - \left(1 - Q\left(-\tfrac{1}{\sqrt{N_0}}\right)\right)\left(1 - Q\left(-\tfrac{1}{\sqrt{N_0}}\right)\right)$$

$$= 2Q\left(\tfrac{1}{\sqrt{N_0}}\right) - Q\left(\tfrac{1}{\sqrt{N_0}}\right)^2 \approx 2Q\left(\tfrac{1}{\sqrt{N_0}}\right)$$

<u>Passando dalla probabilità di corretta ricezione</u>

$$P\{e \mid c_k = c^{(1)}\} = 1 - P\{c \mid c_k = c^{(1)}\} = 1 - P\{x_c(k) \ge 0 \cap x_s(k) \ge 0 \mid c_k = c^{(1)}\}$$

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ perché i simboli sono indip.

$$= 1 - P\{x_c(k) \ge 0 \mid a_k = a^{(1)}\} P\{x_s(k) \ge 0 \mid b_k = b^{(1)}\}$$

$$= 1 - Q\left(-\tfrac{1}{\sqrt{N_0}}\right) Q\left(-\tfrac{1}{\sqrt{N_0}}\right) = 1 - \left(1 - Q\left(\tfrac{1}{\sqrt{N_0}}\right)\right)^2$$

$$= 1 - \left(1 - 2Q\left(\tfrac{1}{\sqrt{N_0}}\right) + Q\left(\tfrac{1}{\sqrt{N_0}}\right)^2\right) = 2Q\left(\tfrac{1}{\sqrt{N_0}}\right) - Q\left(\tfrac{1}{\sqrt{N_0}}\right)^2 \approx 2Q\left(\tfrac{1}{\sqrt{N_0}}\right)$$

sapendo inoltre che per una QAM generica $E_s = \frac{M-1}{3}$, allora:

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{M-1}{3N_0} \Rightarrow N_0 = \frac{1}{\frac{E_s}{N_0}} \Rightarrow SER \approx 2Q\left(\tfrac{1}{\sqrt{N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\tfrac{E_s}{N_0}}\right)$$

---

8. Un sistema di comunicazione 4-QAM impiega un codice a blocco di Hamming $m = 3$ ed un impulso a radice di coseno rialzato con roll-off $\alpha = 0.35$.

(a) Determinare la banda del segnale trasmesso; $\rightsquigarrow$ in funzione del bit rate $R_b$ in ingresso al codificatore di canale

(b) Derivare la probabilità di errore sul bit in uscita dal decodificatore nell'ipotesi in cui il filtro di ricezione sia adattato a quello in trasmissione.

(a) $$B_T^{RF} = 2B_T = 2\,\frac{1+\alpha}{2T_s} = \frac{1+\alpha}{T_s} = \frac{1+\alpha}{\log_2 M\, T_c} = \frac{1+\alpha}{r\log_2 M}\,\frac{1}{T_b} = \frac{1+\alpha}{\frac{K}{m}\log_2 M}\,R_b = \frac{1+0{,}35}{\frac{2^m-1-m}{2^m-1}\log_2 4}\,R_b \approx 1{,}18\,R_b$$

(b) In una 4-QAM $SER \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{1}{N_0}}\right) \Rightarrow BER \approx \frac{SER}{\log_2 M} = \frac{SER}{2} \approx Q\left(\sqrt{\frac{1}{N_0}}\right)$

Prob. di errore sul bit

Dobbiamo inoltre assumere una codifica di Gray

Supponendo il canale binario, simmetrico e senza memoria (le probabilità di errore sono indipendenti per ogni bit), allora la probabilità di errore sulla parola di codice decodificata è esattamente:

$$P_w(e) = \sum_{i=t+1}^{m} \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i} \quad \text{dove } t = \left\lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \right\rfloor$$

La probabilità di errore sul bit decodificato invece non può essere calcolata esattamente perché, in presenza di un numero di errori non correggibile (dunque > di t), la decodifica stessa può introdurne ulteriori

Dato che la decodifica restituisce sempre una parola di codice, allora ogni volta che c'è un errore in decodifica i bit errati sono sempre almeno $d_{min}$, allora possiamo stimare la probabilità di errore sul bit decodificato come:

$$P_b(e) \approx \frac{d_{min}}{m} P_w(e) \approx \frac{d_{min}}{m} \binom{m}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{m-(t+1)}$$

stima ulteriore considerando solo il caso più probabile di $P_w(e)$

In questo caso dunque:

$$P_b(e) \approx \frac{3}{7} \binom{7}{2} Q\left(\sqrt{\frac{1}{N_0}}\right)^2 \left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{1}{N_0}}\right)\right)^5$$

in banda passante

9. Si consideri un sistema di comunicazione 4−QAM ed un sistema di comunicazione 4−PAM. Entrambi i sistemi sono utilizzati per trasmettere un flusso di bit con velocità $R_b = 10$ Mbit/s, impiegano un codificatore di canale con rate $r = 2/3$ ed un filtro a radice di coseno rialzato con fattore di roll-off $\alpha = 0.4$.

   (a) Determinare la densità spettrale di potenza del segnale trasmesso da ciascun sistema.

   (b) Determinare la banda e l'efficienza spettrale dei due sistemi.

   (c) Calcolare la perdita (o il guadagno) del sistema 4−QAM per garantire la stessa probabilità di errore sul simbolo del sistema 4−PAM.

(a) 4-PAM:

$$T_s = \log_2 M \, T_c = r \log_2 M \, T_b = r \log_2 M \frac{1}{R_b} = \frac{2}{3} \log_2 4 \frac{1}{10^7} = \frac{4}{3} 10^{-7} \text{ s}$$

$$S_s(f) = \frac{1}{T_s} R_a(0) |G_T(f)|^2 = \frac{1}{T_s} \frac{M^2-1}{3} |G_{RRCR}(f)|^2 = \frac{5}{T_s} G_{RCR}(f)$$

$$S_s^{RF}(f) = \frac{S_s(f-f_0) + S_s(f+f_0)}{4} = \frac{\frac{5}{T_s}\left[G_{RCR}(f-f_0) + G_{RCR}(f+f_0)\right]}{4} = \frac{5}{4}\frac{1}{T_s}\left[G_{RCR}(f-f_0) + G_{RCR}(f+f_0)\right]$$

4-QAM:

$T_s$ rimane uguale

$$S_s(f) = \frac{1}{T_s} R_c(0) |G_T(f)|^2 = \frac{1}{T_s} 2 \frac{M-1}{3} |G_{RRCR}(f)|^2 = \frac{2}{T_s} G_{RCR}(f)$$

$$S_s^{RF}(f) = \frac{S_s(f-f_0) + S_s(f+f_0)}{4} = \frac{\frac{2}{T_s}\left[G_{RCR}(f-f_0) + G_{RCR}(f+f_0)\right]}{4} = \frac{1}{2T_s}\left[G_{RCR}(f-f_0) + G_{RCR}(f+f_0)\right]$$

(b) I risultati sono uguali per entrambi i sistemi:

$$B_T^{RF} = 2B_T = 2\frac{1+\alpha}{2T_s} = \frac{1+\alpha}{T_s} = \frac{1+0.4}{\frac{4}{3}10^{-7}} = 1.4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 10 \cdot 10^6 = 10.5 \text{ MHz}$$

$$\eta_{sp} = \frac{R_b}{B_T^{RF}} = \frac{10^7}{1.05 \cdot 10^7} = \frac{1}{1.05} = 0.95 \frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}}$$

$\rightsquigarrow$ oppure $\eta_{sp} = \frac{R_b}{B_T^{RF}} = \frac{1}{T_b}\frac{1}{2B_T} = \frac{r \log_2 M}{T_s}\frac{1}{2}\frac{2T_s}{1+\alpha} = \frac{r \log_2 M}{1+\alpha}$

(c) Sapendo che:

$$SER^{4\text{-PAM}} \approx \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{1}{N_0}}\right) \quad \text{dove} \quad \frac{E_s}{N_0} = \frac{1}{N_0} T_s \frac{1}{2} P_s = \frac{1}{N_0} T_s \frac{1}{2}\frac{1}{T_s} R_a(0) E_{g_T} = \frac{1}{N_0} \cancel{T_s} \frac{1}{2}\frac{1}{\cancel{T_s}}\frac{M^2-1}{3} \overset{1}{\cancel{E_{g_T}}} = \frac{5}{2}\frac{1}{N_0}$$

$SER^{4-QAM} = 2Q\left(\sqrt{\frac{1}{N_0}}\right)$ dove $\frac{E_s}{N_0} = \frac{1}{N_0}T_s\frac{1}{2}P_s = \frac{1}{N_0}T_s\frac{1}{2}\frac{1}{T_s}R_c(0)E_{g_T} = \frac{1}{N_0}\cancel{T_s}\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{T_s}}\cancel{2}\frac{M-1}{3}\cancel{E_{g_T}} = \frac{1}{N_0}$

$\Rightarrow SER^{4-PAM} = SER^{4-QAM} \Rightarrow \cancel{\frac{3}{2}}Q\left(\sqrt{\frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}}\Big|_{PAM}\right) = \cancel{2}Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\Big|_{QAM}\right) \Rightarrow \frac{2}{5}\frac{E_s}{N_0}\Big|_{PAM} = \frac{E_s}{N_0}\Big|_{QAM} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0}\Big|_{PAM} = \frac{5}{2}\frac{E_s}{N_0}\Big|_{QAM}$

non è proprio lui ma quasi

$\Rightarrow$ Per garantire la stessa probabilità di errore la 4-PAM deve avere un SNR $\frac{5}{2}$ volte più alto della 4-QAM (che in questo caso è dunque migliore)

---

10. Un sistema di comunicazione 16-QAM impiega un codice a blocco con tasso $r = 5/6$ ed un impulso a radice di coseno rialzato con roll-off $\alpha = 0.35$.

    (a) Determinare l'efficienza spettrale del sistema.

    (b) Derivare la probabilità di errore sul bit in ingresso al codificatore nell'ipotesi in cui sia utilizzata una codifica di Gray.

    (c) Nell'ipotesi in cui la probabilità di errore sul bit in uscita dal codificatore sia pari a $10^{-5}$, calcolare la probabilità di errore sul bit che si ottiene impiegando un (ulteriore) codice a ripetizione di ordine 3.

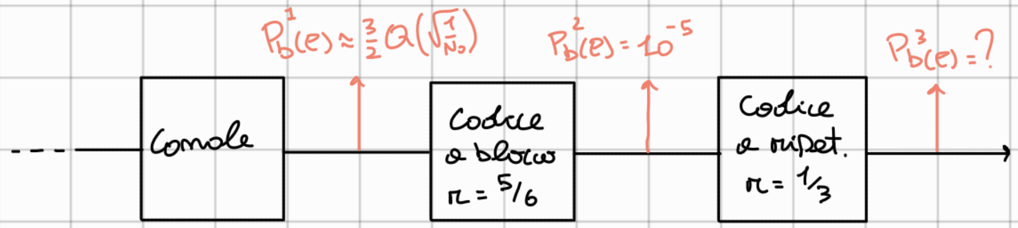
(a) $\eta_{SP} = \frac{R_b}{B_T^{RF}} = \frac{1}{T_b}\frac{1}{2B_T} = \frac{r\log_2 M}{T_s}\frac{1}{2}\frac{2T_s}{1+\alpha} = \frac{r\log_2 M}{1+\alpha} = \frac{5}{6}\frac{\log_2 16}{1{,}35} = \frac{5}{6}\frac{4}{1{,}35} \approx 2{,}47\ \frac{bit/s}{Hz}$

Non essendo un efficienza di tipo energetico può essere anche > 1

Ipotesi di codifica di Gray

(b) Sapendo che per una 16-QAM $SER \approx 3Q\left(\sqrt{\frac{1}{N_0}}\right) \Rightarrow P_b^1(e) \approx \frac{SER}{\log_2 M} = \frac{SER}{2} \approx \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{1}{N_0}}\right)$

(c)




Un codice a ripetizione di ordine 3 è un codice lineare a blocco con $d_{min} = 3$ e dunque è in grado di correggere fino a $t = \left\lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \right\rfloor = 1$ errori, allora la probabilità di errore sulla parola decodificata vale:

supponendo il canale binario, simmetrico e senza memoria

$$P_w^3(e) \approx \binom{m}{t+1} p^{t+1}(1-p)^{m-(t+1)} = \binom{3}{2} P_b^2(e)^2 \left(1 - P_b^2(e)\right)^{3-2} = 3\cdot10^{-10}(1-10^{-5}) \approx 3\cdot10^{-10}$$

In particolare in questo caso la probabilità di errore sul bit decodificato coincide con quello sulla parola decodificata, perché se questa è sbagliata allora tutti i bit sono sbagliati (il codice è appunto a ripetizione)

In modo alternativo si poteva ragionare come nell'esercizio 8:

$$P_b^3(e) \approx \frac{d_{min}}{n} P_w^3(e) \approx \frac{d_{min}}{n} \binom{n}{t+1} P_b^2(e)^{t+1} \left(1 - P_b^2(e)\right)^{n-(t+1)} = \frac{3}{3}\binom{3}{2} 10^{-10}(1-10^{-5}) \approx 3\,10^{-10}$$

---

11. Si consideri un sistema di comunicazione 4−QAM ed un sistema di comunicazione 16−QAM. Entrambi i sistemi sono utilizzati per trasmettere un flusso di bit con velocità $R_b = 10$ Mbit/s, impiegano un codificatore di canale con rate $r = 2/3$ ed un filtro a radice di coseno rialzato con fattore di roll-off $\alpha = 0.4$.

    (a) Determinare la banda e l'efficienza spettrale dei due sistemi.

    (b) Calcolare il valore di $E_d/N_0$ (dove $E_d$ rappresenta l'energia ricevuta per bit) del sistema 16−QAM per garantire la stessa probabilità di errore sul simbolo del sistema 4−QAM.

(a) $B_T^{RF} = 2B_T = 2\frac{1+\alpha}{2T_s} = \frac{1+\alpha}{T_c \log_2 M} = \frac{1+\alpha}{T_b r \log_2 M} = R_b \frac{1+\alpha}{r \log_2 M} = \frac{21}{\log_2 M}$ MHz

$\Rightarrow B_T^{4\text{-QAM}} = \frac{21}{\log_2 4}$ MHz $= 10.5$ MHz

$\Rightarrow B_T^{16\text{-QAM}} = \frac{21}{\log_2 16}$ MHz $= 5.25$ MHz

$\eta_{SP}^{4\text{-QAM}} = \frac{R_b}{B_T^{4\text{-QAM}}} = \frac{10^7}{10.5 \cdot 10^6} \approx 0.95 \ \frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}}$

$\eta_{SP}^{16\text{-QAM}} = \frac{R_b}{B_T^{16\text{-QAM}}} = \frac{10^7}{5.25 \cdot 10^6} \approx 1.9 \ \frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}}$

(b) Sapendo che:

$SER^{4\text{-QAM}} \approx 2\,Q\left(\sqrt{\frac{1}{N_0}}\right)$

$SER^{16\text{-QAM}} \approx 3\,Q\left(\sqrt{\frac{1}{N_0}}\right)$

dove $\frac{E_d}{N_0} = \frac{E_s}{\log_2 M\, N_0} = \frac{1}{\log_2 M\, N_0} T_s \frac{1}{2} P_s = \frac{1}{\log_2 M\, N_0} T_s \frac{1}{2}\frac{1}{T_s} R_c(0) E_{g_T} = \frac{M-1}{3\log_2 M\, N_0}$

$\frac{4-1}{3\log_2 4\, N_0} = \frac{1}{2N_0}$

$\frac{16-1}{3\log_2 16\, N_0} = \frac{5}{4N_0}$

$\Rightarrow SER^{4\text{-QAM}} = SER^{16\text{-QAM}} \Rightarrow \cancel{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E_d}{N_0}\Big|_{4\text{-QAM}}}\right) = \cancel{3}Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_d}{N_0}\Big|_{16\text{-QAM}}}\right) \Rightarrow 2\frac{E_d}{N_0}\Big|_{4\text{-QAM}} = \frac{4}{5}\frac{E_d}{N_0}\Big|_{16\text{-QAM}} \Rightarrow \frac{E_d}{N_0}\Big|_{16\text{-QAM}} = \frac{5}{2}\frac{E_d}{N_0}\Big|_{4\text{-QAM}}$

non è proprio lui ma quasi

$\Rightarrow$ Per garantire la stessa probabilità di errore la 16-QAM deve avere un SNR $\frac{5}{2}$ volte più alto della 4-QAM assumo che sia quella già modulata

12. Un sistema di comunicazione impiega una banda $B = 10$ MHz, una costellazione 16-QAM, un codice a blocco con tasso $r = 3/4$ ed un impulso a radice di coseno rialzato con roll-off $\alpha = 0.25$.

(a) Determinare l'efficienza spettrale del sistema.

(b) Determinare il tempo necessario a trasmettere 25 frame video di 1920 × 1080 pixels, nell'ipotesi in cui per trasmettere un pixel siano impiegati 24 bit.

(a) $B = 2B_T = 2\frac{1+\alpha}{2T_s} = \frac{1+\alpha}{\log_2 M T_c} = \frac{1+\alpha}{r \log_2 M T_b} = \frac{1+\alpha}{r\log_2 M} R_b \Rightarrow R_b = B\frac{r\log_2 M}{1+\alpha} = 24 \text{ Mbit/s}$

$$\eta_{SP} = \frac{R_b}{B} = \frac{24\cdot 10^6}{10^7} = 2{,}4 \; \frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}}$$

(b) bit da trasmettere $= 25 \cdot 1920 \cdot 1080 \cdot 24 \approx 1{,}24 \cdot 10^9$ bit

tempo necessario = bit da trasmettere $\cdot \frac{1}{R_b} = \frac{1.24\cdot 10^9}{24\cdot 10^6} = \frac{1{,}24}{24}\cdot 10^3 \approx 52$ s

13. Un sistema di comunicazione impiega una banda $B = 10$ MHz e una costellazione $M$-QAM con frequenza portante $f_0 = 3$ GHz. In uscita dal filtro di ricezione, i campioni sono pari a:

$$x(k) = A\sqrt{p}c_k + n(k) = s(k) + n(k)$$

dove $A$ è l'attenuazione introdotta dal canale, $p$ è la potenza per Hz usata per trasmettere il simbolo $c_k$ e $n(k)$ è una variabile aleatoria Gaussiana complessa con varianza $2N_0$, dove $N_0 = \kappa T_A$ con $\kappa = 1.38 \times 10^{-23} J/K$ (costante di Boltzmann) and $T_A = 290^o\,K$ (temperatura equivalente di antenna). Il rapporto segnale-rumore (SNR) è pari a :

$$\text{SNR} = \frac{\text{E}\{|s(k)|^2\}}{\text{E}\{|n(k)|^2\}}$$

(a) Nell'ipotesi in cui la propagazione avvenga in spazio libero, calcolare la potenza $pB$ necessario per garantire un SNR di 20 dB ad una distanza di 100 m con una 4−QAM ed una 16−QAM.

dato che $p\left[\frac{W}{Hz}\right]$ allora $p = \frac{pB}{B}\frac{[W]}{[Hz]}$

$$\text{SNR} = \frac{E\{|s(k)|^2\}}{E\{|n(k)|^2\}} = \frac{|A\sqrt{p}|^2 E\{|c(k)|^2\}}{P_n} = \frac{A^2 p\, 2\frac{M-1}{3}}{\sigma_n^2} = \frac{A^2 \frac{pB}{B} 2\frac{M-1}{3}}{2N_0}$$

$$= pB \frac{M-1}{3B\kappa T_A\left(\frac{4\pi d f_0}{c}\right)^2}$$

$$A^2 = \frac{1}{\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{4\pi d f_0}{c}\right)^2}$$

$\Rightarrow pB = \text{SNR}\,\frac{3B\kappa T_A\left(\frac{4\pi d f_0}{c}\right)^2}{\ldots} = 100\cdot 3\cdot 10^7 \cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 290\left(\frac{4\pi\cdot 100\cdot 3\cdot 10^9}{3\cdot 10^8}\right)^2 = 1{,}895\cdot 10^{-3}$ W

$M-1 \qquad M-1 \qquad M-1$

<u>4-QAM</u>: $pB = \frac{1{,}895 \cdot 10^{-3}}{3} = 0{,}632 \text{ mW}$

<u>16-QAM</u>: $pB = \frac{1{,}895 \cdot 10^{-3}}{15} = 0{,}126 \text{ mW}$