Dispensa Finale di Comunicazioni Numeriche

AA 2022-2023

Tommaso Caifano

Premessa alla Dispensa

Questa "dispensa" è stata creata con lo scopo di riordinare il più possibile gli argomenti trattati da Sanguinetti nel corso di Comunicazioni Numeriche. Specifico che quanto scritto in questo file non corrisponde a tutti gli argomenti trattati nel corso, ma vuole essere una sintesi dei concetti e ragionamenti chiave. Lo scopo è quindi quello di riordinare i concetti essenziali espressi nel corso.
Consiglio di leggere questi appunti alla fine di ogni parte di programma fatto da Sanguinetti.
Sottolineo che manca la trattazione di alcuni argomenti fondamentali come il TH della modulazione in ampiezza, i filtri ...

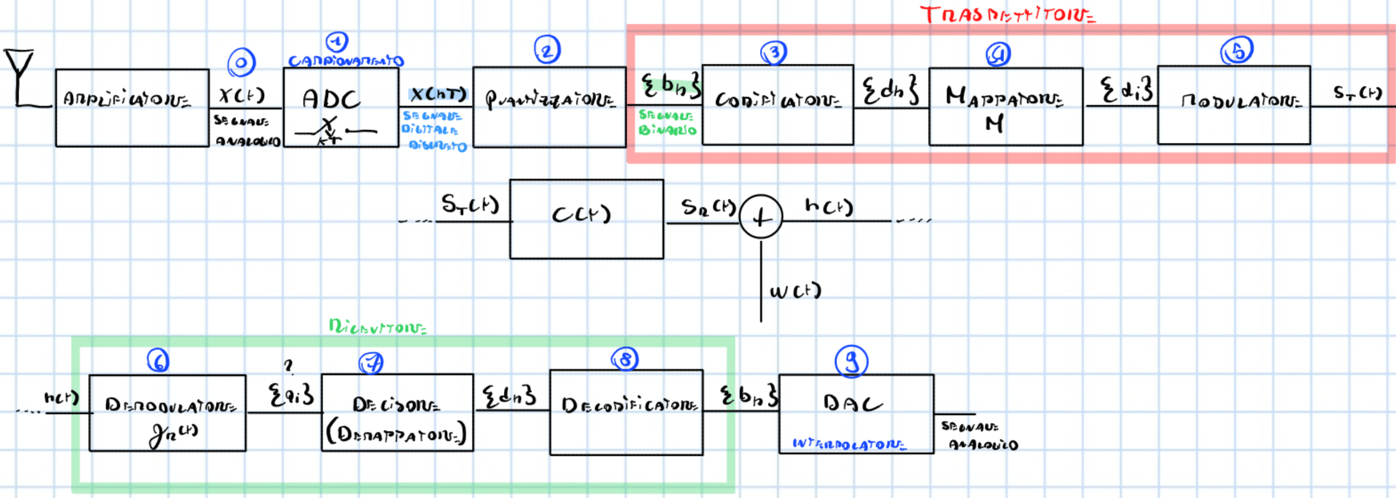
Nel caso la dispensa ti sia stata utile e vuoi offrirmi un caffè puoi farlo da qui:

https://www.paypal.me/supportTC

Nel caso ti ringrazio per il supporto ♡

Buona Fortuna a tutti per l'esame!

Sistema di Comunicazione Generico [comunicazione digitale]



0) Premessa: Come studiare e osservare i segnali analogici

Sfruttiamo le Trasformate di Fourier per ricondurre ogni segnale analogico ad una somma (potenzialmente infinita) di segnali periodici. Perché lo facciamo? In questo modo ci è possibile trattarli sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti, ponendoci (anche se non è vero) in un sistema lineare. Possiamo esprimere:

- Un segnale analogico periodico attraverso la Trasformata di Serie di Fourier (TSF):
  - Eq. di sintesi: Dati i coefficienti della serie $(X_k \in \mathbb{C})$ e la frequenza fondamentale f_0 posso ricostruire il segnale analogico. $x(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi f_0 k t}$.
  - Eq. di analisi: dato il segnale analogico e f_0 posso calcolare gli X_k. $X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t}$
    Si dimostra partendo dalla tesi e usando l'eq. di sintesi => osservazione della sinc.

  N.B. T_0 periodo, $f_0 = \frac{1}{T_0}$. Inoltre X_k e kf_0 sono le armoniche della TF

- Un segnale analogico aperiodico attraverso la Trasformata Continua di Fourier (TCF)
  - Eq. di sintesi: $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(f) e^{j2\pi f t} df$ Nota come in questo caso il "coefficiente" è una funzione nel dominio della frequenza. In particolare $g(f) \in \mathbb{C}$ infatti $g(f) = |g(f)| e^{j\angle g(f)}$ ed è proprio per questo motivo che posso avere lo spettro bilatero.
  - Eq. di analisi: stavolta ci restituisce la funzione in frequenza, che è il nostro "coefficiente": $g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt$

Nota come avendo, con i segnali aperiodici, come coefficiente una funzione al posto di un numero, ci debba interessare. Attraverso le TF possiamo studiare i segnali. Ricordarsi i vari teoremi che ne determinano le proprietà.
Si nota da quello appena scritto che non ci è possibile esprimere in frequenza i segnali periodici.
Possiamo ovviare a questo problema grazie alla Delta di Dirac $\delta(t)$. Infatti attraverso quest'ultima possiamo esprimere la TCF di una funzione esponenziale. Per fare ciò:

0.1) Si trova la TCF di $\delta(t)$ risolvendo l'eq. di analisi della TCF e sfruttando la proprietà campionatrice di $\delta(t)$, essendo la $\delta(t)$ centrata in 0 al suo integrale (per definizione) si dà 1:
$$\delta(t) \rightleftharpoons 1 \quad \text{infatti} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = 1$$

0.2) Quindi per la linearità della TCF e per il TH del ritardo otteniamo che
$$\delta(t-t_0) \rightleftharpoons 1 \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

0.3) Infine per il TH della Dualità della TCF $(x(t) \rightleftharpoons x(f) \Rightarrow x(t) \rightleftharpoons x(-f))$
$$e^{-j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons \delta(f+f_0)$$

Proprietà $\delta(t)$

Campionatrice: Moltiplicare un segnale $x(t)$ per δ centrata in t_0 ci restituisce $x(t_0)$

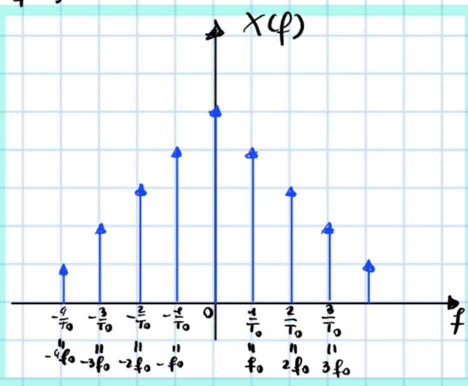
Invariante Convoluzione: $x(t) \circledast \delta(t) = x(t)$

Funzione pari

Con questo possiamo esprimere tutti i segnali periodici anche con la TCF.

Ad esempio: $\cos(2\pi f_0 t) \overset{\text{formula di Eulero}}{=} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \rightleftharpoons \frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}$

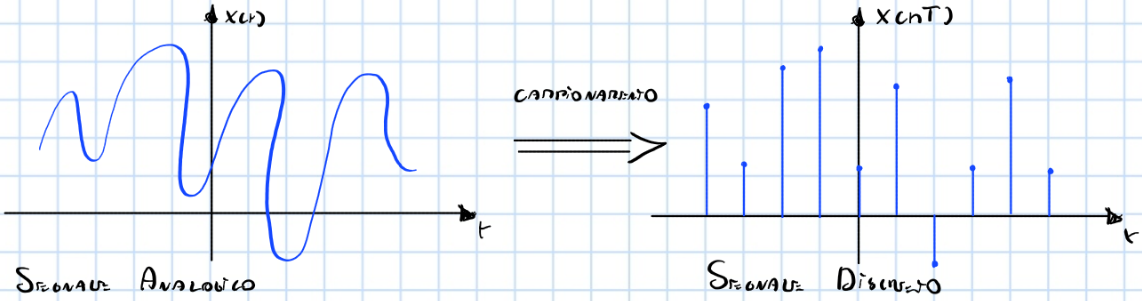
In generale per un qualsiasi segnale periodico posso scrivere:
$$x(t) = x(t_0 + T_0) \overset{TSF}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons x(f) \overset{TCF}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$



Nota come ciò corrisponde ad una serie di δ "ampliate" dalle X_k!

① Campionamento

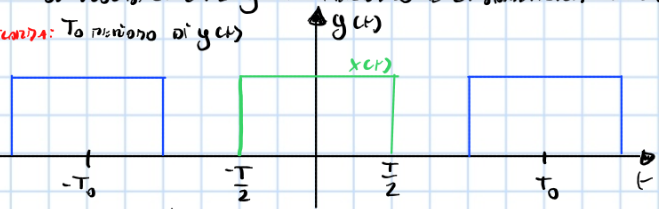
In questa fase vogliamo passare dal segnale analogico ad uno discreto:



Per farlo dobbiamo quindi fare una serie di osservazioni. Partiamo con il considerare un segnale periodico $y(t)$, per semplicità poniamo sia un treno di rect (poniamo $x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$). Quindi noi sappiamo che

- $y(t) = y(t+T_0) = \sum_n \overbrace{x(t-nT_0)}^{\text{segnale aperiodico}}$ => essenzialmente $y(t+T_0)$ vuol dire che y è "periodico" (visto come) periodo e la sommatoria indica che è composto da una serie di rect

Ricorda: T_0 periodo di $y(t)$



- $y(t) = \sum_k y_k e^{j2\pi k f_0 t}$ per la TSF
- $x(t) \rightleftharpoons X(f)$ per la TCF

Vogliamo trovare una correlazione tra gli y_k e $X(f)$, dato che entrambi passano dal dominio del tempo. Dopo una serie di passaggi otteniamo che

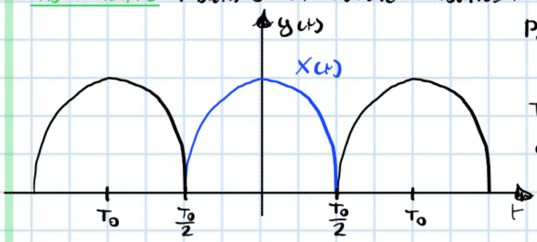
$$y_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)\, e^{-j2\pi f_0 t}\, dt = \dots = \frac{1}{T_0} X(kf_0)$$

Quindi ci è possibile campionare in frequenza $X(f)$ per ottenere i coefficienti di $y(t)$!
Da questo troviamo la **Prima Formula di Poisson** sostituendo il risultato ottenuto nella TSF di $y(t)$.

$$y(t) \overset{TSF}{=} \sum_k y_k e^{j2\pi k f_0 t} = \boxed{\frac{1}{T_0}\sum_k X(kf_0)\, e^{j2\pi k f_0 t}}$$

Cosa significa questa formula? Che posso calcolare ~~calcolare~~ $y(t)$ attraverso i campioni in frequenza di $X(f)$, ma significa anche che se campiono un segnale in frequenza e utilizzo i campioni per ricostruire il segnale nel tempo ottengo il segnale originale periodicizzato!

Ad esempio Poniamo di voler trovare i coefficienti di Fourier del segnale $y(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|$



Per risolvere l'esercizio normalmente dovrei usare l'eq. di analisi della TCF:

$$y_k = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4} y(t)\, e^{-j2\pi f_0 t}$$

Nota Il periodo è $\frac{T_0}{2}$! Dato T_0 periodo del cos e $f_0 = \frac{1}{T_0}$

Tuttavia si fa prima a sfruttare la formula di Poisson considerando il segnale $y(t)$ come il segnale periodico ottenuto da $x(t)$:

$$y(t) = \sum_n x\left(t - n\frac{T_0}{2}\right)$$

Sapendo che posso esprimere $x(t)$ come il cos filtrato da una rect di durata $T_0/2$, $x(t) = rect\left(\frac{2t}{T_0}\right)\cos(2\pi f_0 t)$, posso passare al dominio della frequenza con la TCF

$$x(t) \rightleftharpoons X(f) = \frac{T_0}{2}\,\mathrm{sinc}\left(f\frac{T_0}{2}\right) \otimes \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}$$

Si ottiene con il th della dualità, del prodotto della TCF

A questo punto non mi resta che campionare a $f_s = k\frac{2}{T_0}$ per ottenere gli y_k per $y(t)$.

Il risultato ottenuto è interessante ma lo è ben di più il suo inverso, dato che nel ADC noi campioniamo nel tempo. Tale relazione inversa ci è garantita dalla Trasformata Discreta di Fourier (TDF), la quale ci assicura come dai campioni del segnale analogico nel tempo possiamo ricostruire il segnale periodicizzato in frequenza! Quindi dato un segnale $x(t)$ aperiodico, se io lo campiono posso ricostruire un segnale $\bar{X}(f)$ in frequenza rappresentante la TCF del segnale $x(t)$ periodicizzato.

Nota: $\bar{X}(f) \neq X(f) \rightleftharpoons x(t)$

$$\bar{X}(f) = \sum_n x(nT)\, e^{-j2\pi f nT}$$

Il segnale risultante avrà periodo $T = \frac{1}{f}$

Nell'esempio del treno di rect se campionassi $x(t)$ e ricostruissi il segnale otterrei $y(f)$, ovvero la TCF del treno di rect. Adesso osserviamo che dato $x(t)$ segnale aperiodico e $\bar{x}(t)$ la periodicizzazione di $x(t)$:

$$\underset{TCF}{x(t) \rightleftharpoons X(f)} \qquad \underset{\text{campionamento}}{x(t) \rightarrow x(nT)} \qquad \underset{\text{periodicizzo}}{x(t) \rightarrow \bar{x}(t)} \qquad \underset{TCF}{\bar{x}(t) \rightarrow \bar{X}(f)} \qquad \underset{TDF}{x(nT) \rightarrow \bar{X}(t)}$$

[TH campionamento, da qui in poi]

Adesso ci viene un'illuminazione: se ottengo da un segnale aperiodico uno periodico ed entrambi sono segnali continui vi deve essere una correlazione tra i due e la TCF, di aspetto intuitivamente che la TDF si ottiene periodicizzando la TCF di $x(t)$, pensandoci avrebbe senso. È possibile dimostrare la correlazione tra TDF dei campioni e la TCF di $x(t)$ partendo dalla definizione di TDF:

Nota n è sostituita da k attraverso la formula di Poisson

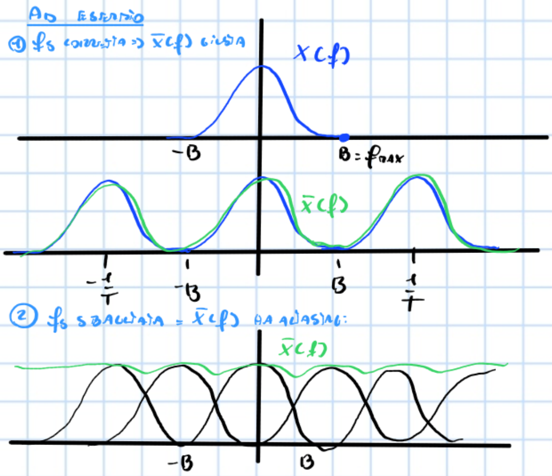
$$\bar{X}(f) = \sum_n x(nT)e^{-j2\pi f nT} = \dots = \boxed{\frac{1}{T}\sum_k X\left(f - \frac{k}{T}\right)}$$

Il risultato ci conferma quanto detto, possiamo ottenere la TDF di un segnale periodicizzando direttamente la TCF del segnale analogico, senza passare dal campionamento! Quindi riassumendo avremo che dato un segnale analogico $x(t)$:

- Campionato in frequenza $\Rightarrow X(kf) \xrightarrow[\text{formula Poisson}]{\text{ricostruisco per}} \bar{x}(t)$
- Campionato nel tempo $\Rightarrow x(nT) \xrightarrow[\text{TDF}]{\text{ricostruisco per}} \bar{X}(f)$

per TCF

Adesso si comprende il perché si utilizzi un filtro passa basso dopo il campionamento, serve a togliere la periodicizzazione data dal campionamento!
Con questo ci manca da definire l'unico parametro presente: la frequenza di campionamento: $f_s = \frac{1}{T}$. Tale frequenza ci determina quanto le repliche (quindi il segnale periodizzato) siano distanti le une dalle altre. Dall'ultima formula si nota che repliche siano ritardate, o anticipate (a seconda del segno di k), di $k\frac{1}{T} = kf_s$ o, nella PDF, rispettivamente.



Si deduce che nel caso io prenda f_s in modo tale da avere il periodo T più piccolo della durata del segnale otterrei aliasing, dato che il ritardo causato da f_s non sarebbe sufficiente a superare la durata del segnale, questo non ci permetterebbe di ricostruire il segnale originale in quanto, nella sommatoria le repliche si sommerebbero parzialmente fra loro. Questa intuizione è supportata dalla **Condizione di Nyquist** che ci assicura l'assenza di aliasing:

$$\boxed{\text{Frequenza di campionamento } f_s \geq 2f_{max} \text{ del segnale considerato}}$$

La frequenza massima di un segnale nel dominio della frequenza è l'ultimo punto a dx in cui si ha un contributo $\neq 0$. Si può osservare facilmente che in banda base la condizione si semplifica con:

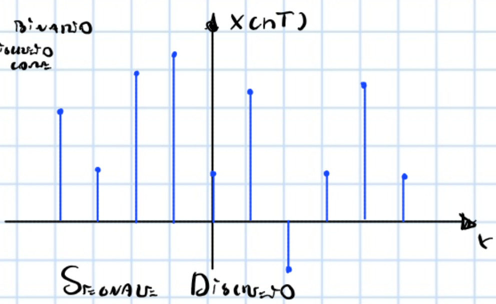
$$\boxed{f_s = \frac{1}{T} \geq 2B}$$

Si ricordi che naturalmente le condizioni sono valide soltanto se il segnale ha banda limitata (altrimenti non potremmo definire f_{max}). Nella realtà tutti i segnali che noi usiamo hanno una banda massima $(20\,Hz - 20\,kHz)$ in quanto al di fuori di quest'ultima non li sentiamo.

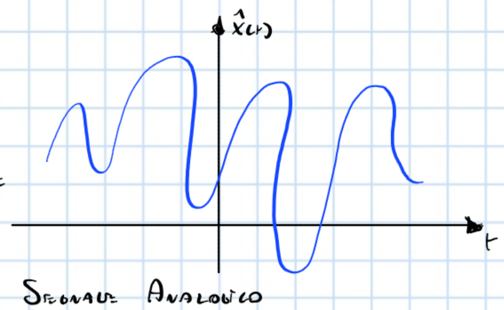
DAC: Osservazioni necessarie per la ricostruzione del segnale

Il DAC è un interpolatore, ovvero utilizza una funzione interpolante e i campioni per riottenere il segnale originale, essenzialmente dato un segnale binario o (in generale) discreto otteniamo il segnale analogico:

N.B. Un segnale binario è un segnale discreto avente soltanto come valori 0 e 1

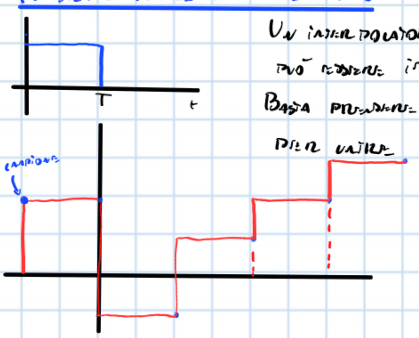


interpolazione ⟹



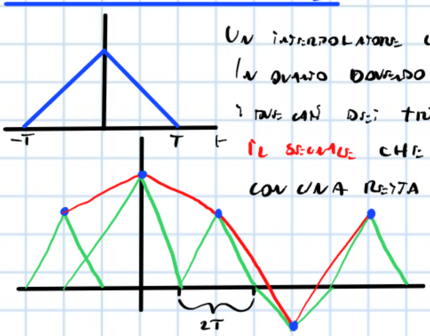
Poniamo $\hat{x}(t)$ il segnale risultante dalla conversione DAC: $\hat{x}(t) = \sum_n x(nT)p(t-nT)$ con p interpolatore.
Osserviamo le differenze tra due interpolatori:

Interpolatore a mantenimento



Un interpolatore a mantenimento può essere rappresentato da una rect. Basta prendere la rect ritardarla per unire i punti e poi sommarle fra loro per ottenere il segnale.

Interpolatore lineare



Un interpolatore lineare è il segnale a triangolo. In quanto dovendo sommare i vari intervalli si sommano i due lati dei triangoli sovrapposti, e da questo si crea il segnale che unisce i vari campionamenti (i punti) con una retta

Osserviamo che caratteristiche dovrebbe avere, riscrivendo la relazione precedente

$$\hat{x}(f) = \sum_n x(nT)\, p(t-nT) \underset{\text{x TH del ritardo}}{=} \sum_n x(nT)\, \underbrace{P(f)}_{\text{posso portarlo fuori visto no dipendenza da } n} e^{-j2\pi f nT} = P(f) \boxed{\sum_n x(nT) e^{-j2\pi f nT}} \underset{\text{x definizione}}{=} P(f)\,\tilde{x}(f)$$

Ne segue che noi vogliamo che il segnale stimato sia uguale a quello iniziale:

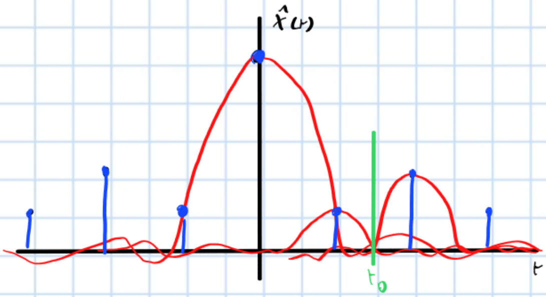
evidenzia te voglio eliminare le repliche!

$$\hat{x}(f) = P(f)\,\tilde{x}(f) \stackrel{!}{=} x(f) \Longrightarrow P(f)\frac{1}{T}\sum_k x\left(f-\frac{k}{T}\right) \stackrel{!}{=} x(f)$$

Affinché tale relazione sia vera $P(f)$ deve essere un filtro-passa-basso, questo perché dobbiamo eliminare le repliche ottenute dalla periodicizzazione per isolare il segnale originale! La durata del filtro solitamente è $\frac{1}{T}$ in quanto si pone un po' di margine dal segnale e per comodità si pone uguale alla frequenza di campionamento: $f_s = \frac{1}{T}$. Tanto per Nyquist so che in banda base non ho aliasing campionando $f_s \geq 2B$.

Ad esempio prendiamo come $p(f)$ una rect e poniamo la sua durata $\Delta f = \frac{1}{T}$, ipotizzando un campionamento $f_s = 2B$.

$$P(f) = \text{rect}(fT) \xrightarrow[\text{con } f_s = 2B]{\text{nel dominio del tempo}} p(t) = \text{sinc}(2Bt) \overset{\frac{1}{T}=2B}{\stackrel{?}{=}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$



Quindi nel dominio del tempo posso ricostruire il segnale come:

$$\hat{x}(t) = \sum_n x(nT)\, \overbrace{\text{sinc}(2B(t-nT))}^{p(t-nT)}$$

Tuttavia vi è un problema $p(t)$ è un filtro non causale, ne segue che per ricostruire in modo esatto il segnale necessito di tutti i campioni del segnale. Ad esempio se mi trovassi nell'istante t_0 non potrei ricostruire il segnale per $t<t_0$ in quanto, avendo la sinc una "banda" illimitata nel tempo, i campioni per $t>t_0$ presentano un contributo da sommare anche per la parte di segnale $t<t_0$. Alternativamente è espresso dal fatto che devo sommare tutte le sinc per ricostruire il segnale esatto. Oltre a questo si pensi al numero esorbitante di campioni necessari affinché sia possibile ricostruire la sinc, essendo una funzione illimitata, per poter eseguire a sua volta somme illimitate tra sinc. Si ricorda che lavoriamo sempre con TDF, ogni segnale ha origine dal campionamento nell'elaborazione. Al problema della causalità (ove dovremmo conoscere il futuro) e al problema computazionale del numero di campioni vi è un'unica soluzione: tronchiamo la sinc. Eliminando i contributi trascurabili, in questo modo necessito solo dei campioni atti a descrivere la sinc troncata (minor numero) e posso eseguire le somme soltanto all'interno delle sovrapposizioni tra le sinc troncate (causale). Il problema è che facendo ciò la sinc troncata in frequenza diventa una rect convoluta ad una sinc, ne segue che $P(f)$ ha banda illimitata e per questo mi fa passare in minima parte le repliche del segnale.

Tutto questo si riassume nel **Teorema del Campionamento:**

Se ho un segnale a banda limitata e campiono con $\frac{1}{T} \geq 2B$ posso, a partire dai campioni, ricostruire il segnale originale.

Di cui riassumiamo le **Criticità:**

1) Il segnale in ingresso non è a banda limitata $\xrightarrow{\text{sol.}}$ Utilizzo un filtro passa-basso per limitarla
2) L'interpolatore non è causale $\xrightarrow{\text{sol.}}$ Tronco la sinc nel tempo e la shifto dove mi serve
3) Ho bisogno di un gran numero di campioni $\xrightarrow{\text{sol.}}$ Risolto la soluzione del punto 2

EXTRA — Probabilità e considerazioni

I segnali nella realtà non sono deterministici, ma aleatori. È per questo che necessitiamo della Th della probabilità. Consiglio: per quanto riguarda la prima parte (fino a prima dei processi stocastici) è meglio studiarla sulle dispense di Stea del corso della magistrale di Performance Evaluation of Computers System and Networks (PECSN). Qui si vogliono trattare soltanto gli esercizi svolti da Sanguinetti. Iniziamo dando per scontato i concetti della prima parte di probabilità.

Osserviamo per prima cosa la correlazione tra distribuzione Gaussiana e Gaussiana standard. Per le proprietà del valore medio e della varianza data $x \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, possiamo dire che una generica variabile aleatoria $y = \alpha x + \beta$ è a sua volta Gaussiana con $y \sim N(\alpha \mu_x + \beta, \alpha^2 \sigma_x^2)$. Da questo deduciamo che possiamo riscrivere qualsiasi distribuzione Gaussiana in funzione della standard. Data $x \sim N(0,1)$ e $y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ posso scrivere $y = \sigma_y x + \mu_y$. Questo ci torna molto utile in quanto non potendo risolvere l'integrale della $f(x)$ di una distribuzione Gaussiana in forma chiusa siamo costretti a riscrivere la distribuzione in funzione di quella standard in modo da poter ricavare l'argomento alla funzione $Q(x)$ per ottenere il risultato.

Ad esempio

Supponiamo adesso di voler trasmettere un simbolo s, e consideriamo la variabile aleatoria $y = \sqrt{p}\, s + n$, indicante l'energia del segnale alla ricezione e dettagliamo:

- p potenza del segnale
- $s \in (-1, 1)$ essenzialmente abbiamo due simboli da inviare, tali avranno già una loro energia che verrà scalata alla potenza p volta
- $n \sim N(0, \sigma_n^2)$, n è il rumore avente una densità distribuzione Gaussiana con $\mu = 0$ (valore medio $E[\,]$) e varianza $= \sigma_n^2$.

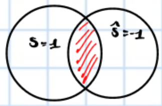
$$f_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_n^2}} \cdot e^{-\frac{n}{2\sigma_n^2}}$$

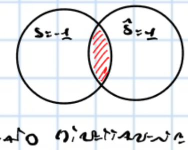
Dato $P(s=1) = \frac{1}{3}$

Vogliamo calcolare la probabilità di errore di trasmissione, ponendo $\hat{s}$ il simbolo ottenuto in ricezione:

$$P_e = P(\hat{s}=1 \mid s=-1) \cdot P(s=-1) + P(\hat{s}=-1 \mid s=1)\, P(s=1)$$

Vediamo perché è così, noi commettiamo un errore quando riceviamo un simbolo diverso da quello inviato. Ponendo come eventi l'invio e la ricezione dei simboli si possono costruire i due diagrammi da cui ricaviamo facilmente gli eventi di sbagliata trasmissione (nel dettaglio): $s=1 \cap \hat{s}=-1$ e $s=-1 \cap \hat{s}=1$. Essendo questi due eventi indipendenti, in quanto si escludono a vicenda fra loro, possiamo sommarli per trovare l'evento di ricezione errata:





$$E_{RE} = s=1 \cap \hat{s}=-1 + s=-1 \cap \hat{s}=1 \Longrightarrow P_e = P(s=1 \cap \hat{s}=-1) + P(s=-1 \cap \hat{s}=1)$$

Applicando la formula della probabilità condizionata troviamo facilmente il risultato precedente:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B)$$

Il risultato ottenuto poteva essere ricavato direttamente dal Th della probabilità totale.

Adesso osserviamo che avendo n distribuzione Gaussiana, y è la somma fra un numero $(\sqrt{p} \cdot s)$ e la distribuzione Gaussiana ne segue che, per le proprietà precedentemente dette anche y è Gaussiana $\Rightarrow y \sim N(s\sqrt{p}, \sigma_n^2)$. Perché abbiamo come valore medio $s\sqrt{p}$? Per le proprietà del valore medio $E[\text{"un numero"}] = \text{"un numero"}$, quindi ponendo $k \in \mathbb{R}$ $E[k \cdot y] = k \cdot E[y]$ per la linearità! Appurato questo come facciamo a correlare l'energia del segnale alla probabilità di errore trovata in precedenza? Attraverso il **Teorema di Parseval**:

Data l'energia di un segnale

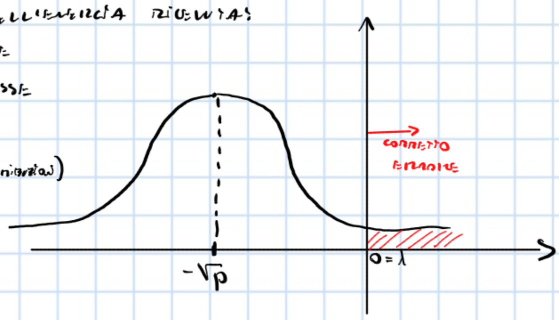
$$E_x = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \overset{\text{Potenza istantanea}}{|x(t)|^2}\, dt}_{\text{def. classica energia}} = \overset{\text{Tesi teorema}}{\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df}}$$

Si definisce $S_X(f) = |X(f)|^2$ densità spettrale di potenza, e graficamente esprime la distribuzione dell'energia del segnale lungo lo spettro. È proprio quello che ci serve! Utilizziamo l'energia del segnale per stabilire se il simbolo ricevuto è corretto o no, sfruttando la correlazione tra energia e segnale di $S_X(f)$.

Quindi per calcolare P_e dobbiamo analizzare i due casi, partiamo dal caso in cui $s=-1$ e calcoliamo $P(\hat{s}=1 \mid s=-1)$: $y|_{s=-1} = -\sqrt{p} + \sigma_n^2 \sim N(-\sqrt{p}, \sigma_n^2)$. Per stabilire quando commettiamo errore dobbiamo prima impostare una soglia λ per stabilire che valore avrà $\hat{s}$ a seconda dell'energia ricevuta:

$$\hat{s} = \begin{cases} -1 & \text{se } y \le \lambda \\ 1 & \text{se } y > \lambda \end{cases}$$

Nel nostro caso, graficando la distribuzione y risulta ovvio scegliere $\lambda = 0$, ovvero l'asse y! Da questa scelta si nota che l'errore è dato dalla parte sottesa al grafico a destra dell'asse y. (Nota: lavoriamo con distribuzioni)



Quindi possiamo riscrivere la probabilità condizionata come:

$$P(\hat{s}=1 \mid s=-1) = P(y \ge \lambda \mid s=-1) = P(-\sqrt{p} + n > \lambda) = P(n > \lambda + \sqrt{p})$$

Come anticipato riscriviamo la distribuzione gaussiana h in funzione di una distribuzione gaussiana standard X:

$$h = \sigma_h X + m_h = \sigma_h X + 0 = \sigma_h X \quad \text{con} \quad X \sim \mathcal{N}(0,1).$$

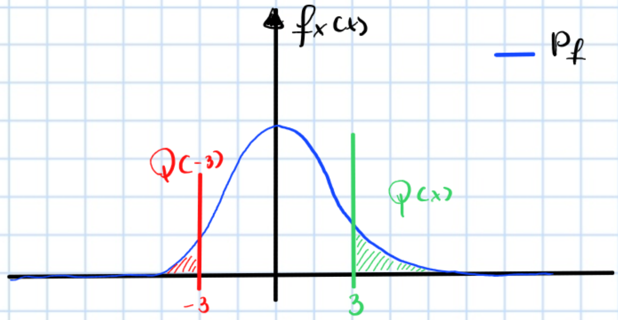
A questo punto sostituiamo nella precedente espressione e ricaviamo X:

$$P(\sigma_h X > \lambda + \sqrt{p}) = P\left(X > \frac{\lambda + \sqrt{p}}{\sigma_h}\right)$$

Ora sapendo che $Q(x) = P(X \geq x)$ e che tale rappresenta l'area sottesa alla distribuzione standard possiamo scrivere che

$$P\left(X > \frac{\lambda + \sqrt{p}}{\sigma_h}\right) = Q\left(\frac{\lambda + \sqrt{p}}{\sigma_h}\right)$$

In questo modo possiamo risolvere l'integrale attraverso la funzione Q. Nel caso non avessimo avuto il "$>$" potevamo sfruttare la seguente proprietà, non dimostrata ma appurata per via grafica, della funzione $Q(x)$:



$$Q(x) = 1 - Q(-x)$$

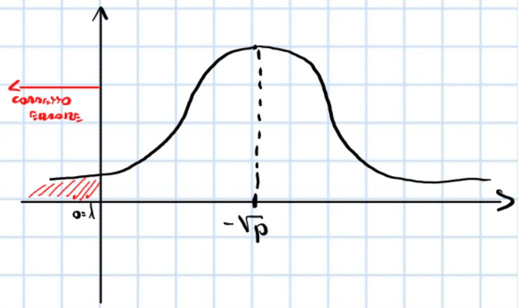
Ciò è verificabile dal grafico sopra, ad esempio $Q(3) = P(X \geq 3)$, e osserviamo $Q(-3) = P(X \geq -3)$, quindi $1 - Q(-3)$ rappresenta l'area sottesa in rosso. Per la simmetria della distribuzione gaussiana standard tale area è uguale a quella evidenziata (in verde) di $Q(3)$.

Consideriamo la seconda parte di P_e, ovvero quando $s = 1$. Il procedimento per il calcolo è analogo al precedente; noi vogliamo calcolare $P(\hat{s} = -1 \mid s = 1)$: $y\big|_{s=1} = \sqrt{p} + h \sim \mathcal{N}(\sqrt{p}, \sigma_h^2)$. Attenzione, abbiamo già scelto il decisore, ovvero la soglia λ, nel precedente passaggio e tale rimane. Si noti inoltre che con decisore si fa riferimento a un componente presente nel sistema di comunicazione (non è dato sapere dove...). Comunque in questo caso ci interessa l'area a sx dell'asse y (ovvero λ); ripetendo il procedimento otteniamo:

$$P(\hat{s} = -1 \mid s = 1) = P(y < \lambda \mid s = 1) = P(\sqrt{p} + h < \lambda) = P(h < \lambda - \sqrt{p})$$

Dato $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ e $h = 0 + \sigma_h X = \sigma_h X$

$$P(\sigma_h X < \lambda - \sqrt{p}) = P\left(X < \frac{\lambda - \sqrt{p}}{\sigma_h}\right)$$



Usiamo quindi la proprietà della simmetria di y per ottenere il "$>$" nella disequazione ed usare così la funzione $Q(x)$:

$$P\left(X < \frac{\lambda - \sqrt{p}}{\sigma_h}\right) = 1 - P\left(X \geq \frac{\lambda - \sqrt{p}}{\sigma_h}\right) = 1 - Q\left(\frac{\lambda - \sqrt{p}}{\sigma_h}\right)$$

A questo punto non ci rimane che calcolare la P_e, dati $P(s=1)$ e $P(s=-1) = 1 - P(s=-1)$

$$P_e = P(\hat{s} = 1 \mid s = -1) \cdot P(s = -1) + P(\hat{s} = -1 \mid s = 1)\, P(s = 1)$$

$$= Q\left(\frac{\lambda + \sqrt{p}}{\sigma_h}\right) \cdot \left[1 - P(s = 1)\right] + \left[1 - Q\left(\frac{\lambda - \sqrt{p}}{\sigma_h}\right)\right] \cdot P(s = 1)$$

In questo esempio avevamo posto $\lambda = 0$, abbiamo continuato i calcoli con il parametro per poter notare alla fine: fissato $P(s=1)$ e la potenza del segnale p l'unico modo che ho per controllare la P_e è attraverso λ. Come faccio a trovare la soglia ottima del sistema? Avendo l'espressione $g(\lambda)$ in funzione di λ devo trovare il minimo attraverso lo studio della sua derivata: $\frac{d g(\lambda)}{d\lambda} = \emptyset$.

Se poniamo come ipotesi $\lambda = 0$ (soglia ottima, dato che togliendo λ la derivata per λ è sempre $= 0$ in questa espressione) e simboli equiprobabili, ovvero $P(s=1) = P(s=-1) = \frac{1}{2}$ allora troviamo che P_e sarà:

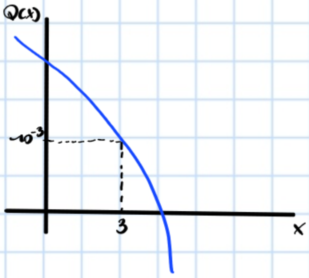
$Q(x) = 1 - Q(-x)$

$$P_e = \frac{1}{2} Q\left(\frac{\sqrt{p}}{\sigma_h}\right) + \frac{1}{2}\left[1 - Q\left(\frac{-\sqrt{p}}{\sigma_h}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[1 + Q\left(\frac{\sqrt{p}}{\sigma_h}\right) - Q\left(-\frac{\sqrt{p}}{\sigma_h}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[1 + Q\left(\frac{\sqrt{p}}{\sigma_h}\right) - \left[1 - Q\left(\frac{\sqrt{p}}{\sigma_h}\right)\right]\right] = \frac{1}{2}\left[\cancel{1} + Q\left(\frac{\sqrt{p}}{\sigma_h}\right) - \cancel{1} + Q\left(\frac{\sqrt{p}}{\sigma_h}\right)\right] = Q\left(\frac{\sqrt{p}}{\sigma_h}\right)$$

Ne segue che $P_e = Q\left(\frac{\sqrt{p}}{\sigma_h}\right)$, a questo punto possiamo definire $SNR = \frac{p}{\sigma_h^2}$, ovvero il rapporto tra la potenza del segnale e il rumore, e scrivere:

$$P_e = Q(\sqrt{SNR})$$

Quindi in questo caso la probabilità di errore è determinata soltanto da questo rapporto. Quindi possiamo adesso facilmente calcolare i requisiti del sistema data la probabilità di errore voluta, ad esempio se volessi $P_e = 10^{-3}$ so che



$$Q(\sqrt{SNR}) = 10^{-3} \Rightarrow \sqrt{SNR} = 3 \Rightarrow SNR = 9 \Rightarrow SNR|_{dB} = 9.5\ dB$$

Da tutto questo si noti come in generale avendo $y = \sqrt{p} \cdot s + h = \alpha s + h$ posso riscrivere y come $z = y/\alpha = s + h/\alpha$ semplicemente dividendo per α. In tal caso ottengo che $z \sim N\left(s, \frac{\sigma_h^2}{\alpha^2}\right)$, quindi sto diminuendo di un fattore α^2 il rumore (se la varianza diminuisce anche il rumore lo fa). Rifacendo i passaggi precedenti troverei $P_e = Q\left(\frac{1}{\sigma_h}\right)$ rimuovendo, di fatto, la dipendenza da p del sistema!

Ad esempio (pt 2)

Adesso consideriamo la stessa situazione solo ponendo h come variabile aleatoria complessa. Quindi avremo:

$y = s\sqrt{p} + h \sim N_{\underset{\text{indica che} \in \mathbb{C}}{C}}(0, \sigma_h^2)$ ove h è scomponibile come $h = h_R + jh_I$ con $h_R, h_I \sim N\left(0, \frac{\sigma_h^2}{2}\right)$, nota come la varianza di ogni componente sia $\sigma_h/2$ in quanto h_R e h_I sono indipendenti e quindi $VAR[h] = VAR[h_R] + VAR[h_I]$.

Per questo motivo anche y sarà complesso e possiamo comunque scomporlo come $y = y_R + j y_I$. Non è difficile dedurre che

$y_R = Re\{y\} = s\sqrt{p} + h_R$

$y_I = Im\{y\} = h_I$

la parte immaginaria di y è composta soltanto dal rumore, ne segue che y_I non trasporta informazione e per questo risulta sensato scegliere la soglia λ del decisore in funzione soltanto della parte reale di y:

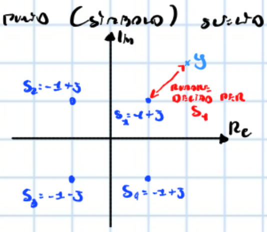
$$\hat{s} = \begin{cases} 1 & \text{se } Re\{y\} > \lambda \\ -1 & \text{se } Re\{y\} \leq \lambda \end{cases}$$

Quindi possiamo calcolare P_e ignorando la parte immaginaria, che ricordiamo essere in realtà un canale di comunicazione. Per trovare P_e è possibile sfruttare il risultato precedente.

In breve troveremo dato $P_e = Q\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)$ passiamo a $z_R = \frac{y_R}{\sqrt{p}} = s + \frac{h_R}{\sqrt{p}} \sim N\left(0, \frac{\sigma_h^2}{2p}\right)$ e poniamo $\sigma = \frac{\sigma_h^2}{2p}$ in modo da ottenere $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2p}{\sigma_h^2}}\right) = Q(\sqrt{2SNR})$. Otteniamo un SNR più basso di prima a parità di probabilità di errore! Quindi questo sistema è migliore.
$P_e = 10^{-3} \Rightarrow SNR_{dB} = 6{,}8\,dB$.

Ad esempio (pt 3)

L'ultimo caso possibile, e anche il più complesso è quando sia h che s sono complessi. In questo caso non ci troviamo più nel caso precedentemente descritto ove $s = \pm 1$, ma in questo caso potrebbe essere ad esempio $s = \pm 1 \pm j$. Il procedimento logico da fare è lo stesso, si ha come unica differenza che il decisore sarà dato da due soglie (due assi), una immaginaria e una reale. Quindi avremo 4 quadranti invece che due, come nel caso precedente, che riassumeranno i punti del quadrante in un unico punto (simbolo) scelto. Si riassume di seguito la soluzione dell'esercizio ove si suppongono come soglie gli assi:



$y = s\sqrt{p} + h \sim N_c(0, \sigma_h^2)$ scomponibile in $y_R = s_R\sqrt{p} + h_R$

$y_I = s_I\sqrt{p} + h_I$

La P_e da trovare sarà la somma di tutte le P_e dei quadranti, che sono ovviamente uguali fra loro e quindi posso calcolarne una e raccoglierla dalla somma

$$P_e = \sum_{k=1}^{4} P(\hat{s}_k \neq s_k | s_k) P(s_k) = P(\hat{s}_1 = s_1 | s_1) \boxed{\sum_{k=1}^{4} P(s_k)} = P(\hat{s}_1 \neq s_1 | s_1)$$

→ La somma delle P a priori = 1

Quindi tutto si riduce ad un unico caso:

$$y = s_1\sqrt{p} + h \Rightarrow \begin{cases} y_R = \sqrt{p} + h_R \\ y_I = \sqrt{p} + h_I \end{cases}$$

Osserviamo che:

$$P_e = P(\hat{s}_1 \neq s_1 | s_1) = 1 - \underbrace{P(\hat{s}_1 = s_1 | s_1)}_{\text{probabilità di corretta ricezione}} = 1 - \underbrace{P(y_R, y_I \in I^\circ)}_{\text{probabilità che } y_R \text{ e } y_I \text{ cadano nel } I^\circ \text{ quadrante}} \overset{!}{=} 1 - P(y_R \geq 0) P(y_I > 0)$$

→ Per l'indipendenza tra y_I e y_R!

Ci siamo ricondotti al caso precedente, dove sappiamo la $P(y \geq 0)$ ignorando una componente (immaginaria nel caso precedente, ma è analogo nel reale). Quindi in conclusione

Ci serve la P di ricezione, noi avevamo la P_e!

$$1 - P(y_R \geq 0) P(y_I > 0) = 1 - [1 - Q(\sqrt{2SNR})][1 - Q(\sqrt{2SNR})] = 1 - [1 - Q(\sqrt{2SNR})]^2 =$$

$$= 1 - [1 - 2Q(\sqrt{2SNR}) + Q^2(\sqrt{2SNR})] = \underbrace{Q^2(\sqrt{2SNR})}_{\text{valore trascurabile essendo molto piccolo}} - 2Q(\sqrt{2SNR}) \approx 2Q(\sqrt{2SNR})$$

Saltiamo in avanti, dando per appurati i concetti di processi stocastici (insieme di variabili aleatorie dipendenti dal tempo ⇒ ad ogni istante di tempo t ho una variabile diversa), la funzione di autocorrelazione (misura la correlazione tra le variabili del processo stocastico)... Analizziamo il comportamento di un processo stocastico e di un processo stocastico stazionario in senso lato (PSSL) attraverso un sistema lineare stazionario (SLS). Iniziamo dal processo stocastico $x(t)$.

$x(t) \rightarrow$ SLS $\rightarrow y(t)$

Ricordiamo che $y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) h(t-\alpha) d\alpha$ quando il segnale $x(t)$ è normale, nel nostro caso avendo $x(t)$ processo stocastico anche l'uscita $y(t)$ lo sarà! Quindi per descriverlo necessitiamo di calcolare $E[y(t)]$ e $R_y(\tau)$.

Calcoliamo il valore medio dell'uscita:

LINEARITÀ ESPETTAZIONE (VALORE MEDIO) — Non è un processo aleatorio $E[h(t-\alpha)] = h(t-\alpha)$

$$E[y(t)] = E[x(t) \otimes g(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) h(t-\alpha) d\alpha\right] \stackrel{\uparrow}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} E[x(\alpha)] h(t-\alpha) d\alpha = \mu_x \otimes h(t)$$

Per risparmiarci la fatica, di seguito si riportano i risultati ottenuti

$$R_y(\tau) = E[y(t_1) \cdot y(t_2)] = \dots = R_x(t_1, t_2) \otimes h(t_1) \otimes h(t_2)$$

Adesso poniamo che $x(t)$ sia PSSL e calcoliamoci sempre μ_y e $R_y(\tau)$:

$$E[y(t)] = \dots = \mu_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta) d\beta = \mu_x H(0) \qquad R_y(t_1, t_2) = \dots = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

Quindi abbiamo appurato che $y(t)$ è un PSSL, ponendo le seguenti ipotesi:

HP
1. $S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$ ⟹ lo sappiamo per definizione
2. $P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$ ⟹ // // // //
3. $P_x = E[x^2(t)] = R_x(0)$ ⟹ È stato osservato nel corso
4. $R_x(\tau) \rightleftharpoons S_x(f)$ ⟹ Proprietà della funzione di autocorrelazione
5. $R_y(t_1, t_2) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$ ⟹ Calcolata al passo precedente nel nostro caso

Calcolandoci la densità spettrale di potenza di y, per farlo utilizziamo l'eq di sintesi (essenzialmente l'inverso della ①) per trovarla:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Usando il risultato ottenuto calcolato in "0" ($R_x(0)$) e la ③ per trovarla: (stesso risultato usando ③ e ②)

$$P_x = E[x^2(t)] = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

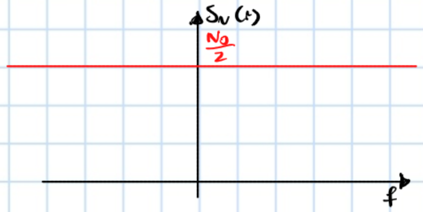
A questo punto sfruttiamo la ④ sul risultato della ⑤ per ottenere: (dato x stazionario)

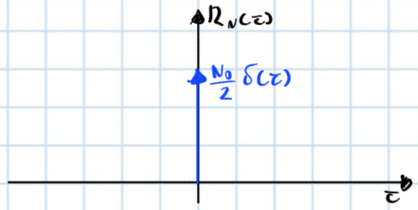
$$S_y(f) = S_x(f) \cdot H(f) \cdot \underbrace{H(-f)}_{H^*(f)} = S_x(f) \, |H(f)|^2$$

Quindi troviamo che $S_y(f) = S_x(f) |H(f)|^2$. È doveroso sottolineare che è possibile calcolare $S_y(f)$ soltanto per segnali (o processi) stazionari in quanto nel farlo necessitiamo che $R_x(\tau)$ sia dipendente soltanto dalla differenza fra t_1 e t_2, come è definito dalla stazionarietà. Se avessimo $R_x(t_1, t_2)$ con $x(t)$ non stazionario non potremmo ottenere $S_x(f)$ dalla relazione $R_x(\tau) \rightleftharpoons S_x(f)$

① Campionamento 2.0 (nella ricezione)

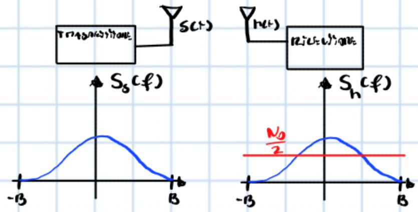
Con le conoscenze acquisite iniziamo a definire il rumore, che in natura è ovunque attorno e per questo viene modellato come rumore bianco. Essenzialmente un processo gaussiano avente la densità spettrale costante $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$ e funzione di autocorrelazione pari a una $\delta(\tau)$, evidenziando la sua caratteristica che ogni variabile è incorrelata dalle altre! Quindi dato un valore a t_0 non posso prevedere assolutamente niente sul valore successivo.





Tipicamente il rumore bianco ha media nulla, e data la forma di $R_n(\tau)$ possiamo dire che sia stazionario in senso lato!

Detto questo vediamo come tolgiere il rumore bianco al ricevitore. Poniamo di avere $y = s + n \sim N(0, \sigma^2)$



Per eliminare il rumore dobbiamo usare un filtro passa-basso di banda B:

$x(t) = s(t) + n(t) \otimes h(t)$ poniamo il rumore filtrato (che è $\neq 0$) come $w(t) = n(t) \otimes h(t)$

Quindi dal risultato ottenuto in precedenza sappiamo che la densità spettrale di $w(t)$ è pari a $S_w(f) = S_n(f)|H(f)|^2$. Sapendo che $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$ per la definizione di rumore bianco e che il filtro passa basso (ideale) è una rect, posso scriverlo:

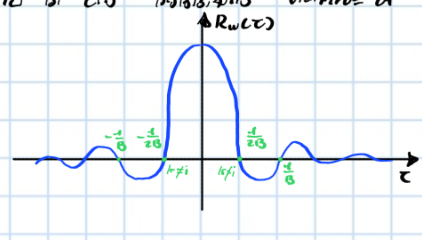
$$S_w(f) = S_n(f) |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Mettiamo da parte il risultato e osserviamo che per ottenere l'informazione al ricevitore dobbiamo campionare il segnale:

$$x[k] = x[t = kT] = s[k] + w[k]$$

Per ottenere il segnale $s[k]$ senza il rumore e distorsioni dobbiamo assicurarci che i campioni del rumore $w[k]$ siano incorrelati tra loro: altrimenti avremmo qualcosa in grado di apportare altro. Per assicurarci di ciò dobbiamo vedere la funzione di autocorrelazione, calcoliamola sfruttando $S_w(f) \rightleftharpoons R_w(\tau)$:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \rightleftharpoons \frac{N_0}{2} 2B \operatorname{sinc}(2B\tau) = R_w(\tau)$$



Sappiamo che le variabili sono incorrelate quando $R_w(\tau) = 0$ notiamo che $R_w(\tau)$ assume tali valori multipli di $T = \frac{1}{2B}$: $R_w(kT)\big|_{T=\frac{1}{2B}} = E[w(iT) w(iT - kT)] = 0$

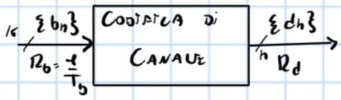
Campionando quindi con tale periodo otteniamo $w[k]$ con valore medio $= 0$ e varianza $\sigma_w^2 = N_0 B \Rightarrow w[k] \sim N(0, N_0 B)$

Possiamo quindi descrivere il rumore campionato come gaussiano con varianza σ_w^2 e di conseguenza bidimensionale.

Esempi di Sistemi di Comunicazione Numerici

Introduzione

Guardiamo al volo i vari componenti. Abbiamo i nostri bit b_n usciti dal quantizzatore (2), subito dopo abbiamo il codificatore (3) dove avviene la codifica di canale (tutta la teoria di Morelli è relativa a questo dispositivo). Per farla breve i nostri bit b_n che arrivavano a una velocità R_b per poi uscire con una ridondanza maggiore (eseguiamo la codifica) a una velocità di emissione R_d: le due velocità devono essere uguali per avere un sistema ottimizzato:

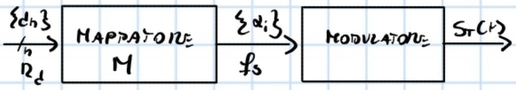


h, k numero bit

$$k T_b = h T_d \Rightarrow \frac{R_b}{R_d} = \frac{k}{h} = \text{rate} \quad \text{con} \quad 0 \le \text{rate} \le 1$$

Ricorda che sia b_n che d_n sono bit e che vale $h > k$ in quanto introduciamo ridondanza e per questo abbiamo il rate $\in [0,1]$.

Successivamente troviamo il mappatore (4) di un generico ordine M. Lo scopo di questo componente è mappare un insieme di bit d_n in un simbolo d_i di un qualsiasi alfabeto (anche binario). Questa operazione in genere comprime l'informazione in quanto racchiudo più bit in un unico numero. Intuitivamente risulta comodo poter dire "+1" invece che "0001"



tuttavia se la compressione è eccessiva la P_e aumenta in quanto da +1 a +2 ho un solo simbolo di differenza, ma ho due bit di differenza! Il mappatore condensa Q bit in $M = 2^Q$ simboli che poi passa al modulatore, il quale trasformerà i simboli nel segnale analogico che poi verrà inviato al canale. In generale vi è una relazione tra la durata del segnale T e il tempo di arrivo di un bit T_d dato da:

$$T = \frac{1}{f_s} = Q T_d$$

Intuitivamente la durata del segnale descrivente il simbolo è pari alla somma dei singoli tempi di arrivo dei bit che condensa.

Ad esempio

d_i	d_i
00	-3
01	-1
10	+1
11	+3

Con la mappa di ordine $M = 4$ a sx ($Q = 2$) potremo di avere un rate $r = \frac{1}{2}$ e osserviamo i due passaggi descritti:

$$\underset{\{b_n\}}{01\ 01\ 01} \xrightarrow{r=\frac{1}{2}} \underset{\{d_n\}}{10|11|01|00|01|10} \xrightarrow{\text{mappa}} +1\ +3\ -1\ -3\ -1\ +1$$

Notiamo come a prescindere da come viaggino i simboli tra mappatore e modulatore (in banda base o in banda passante) arrivavano in un tempo T, ne segue che la banda del segnale uscente $S(t)$ sarà $B_T \simeq \frac{1}{T}$, possiamo quindi trovare la relazione tra T e il mappatore:

$$B_T \simeq \frac{1}{T} = \frac{1}{Q T_d} \underset{Q = \log_2 M}{=} \frac{1}{\log_2 M\, T_d} = \frac{1}{T_d} \cdot \frac{1}{\log_2 M} = R_d \cdot \frac{1}{\log_2 M} = \frac{R_b}{\text{rate}} \cdot \frac{1}{\log_2 M} = \frac{R_b}{\text{rate} \cdot \log_2 M}$$

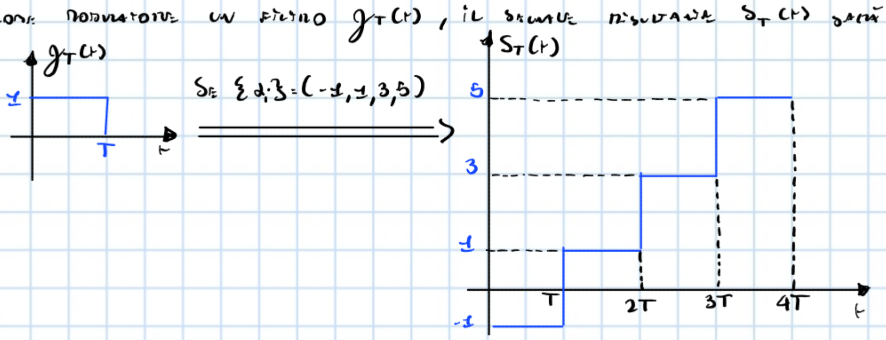
Da questa formula osserviamo come il mappatore ci consenta all'aumentare di M di ridurre la banda occupata dal segnale. Vi sono però due problemi:

- La banda diminuisce all'aumento esponenziale di M, dato che è attutito dal $\log_2$. Quindi per avere una riduzione di banda significativa dobbiamo aumentare enormemente M aumentando il costo del mappatore. Abbiamo un limite dato dal rapporto costo-beneficio indicante fino a quanto possiamo incrementare M. ($M = 256$)
- Alla diminuzione della banda corrisponde un aumento della P_e per l'intuizione precedentemente esposta.

Da notare che aumentando il rate aumenta anche la banda!

PAM (Pulse Amplitude Modulation)

Iniziamo con il più semplice sistema di comunicazione: la PAM. In questo sistema l'informazione è trasmessa attraverso l'ampiezza del segnale (alla magistrale vedremo la modulazione FM, dove usiamo la fase). In questo sistema utilizziamo come modulatore un filtro $g_T(t)$, il segnale risultante $S_T(t)$ sarà dato da:



$$S_T(t) = \sum_i d_i\, g_T(t - iT)$$

Il segnale $g_T(t)$ scelto deve avere durata T fissa, altrimenti le repliche (i vari simboli traslati) si sovrapporrebbero tra loro. Nell'esempio a sx, otteniamo nel dominio della frequenza una serie di sinc ritardate, dato che il ritardo modifica solo la fase del segnale (passa a sen e cos) siano in banda base!

Adesso calcoliamo la banda del segnale $s_T(t)$ trasmesso dalla PAM. Non abbiamo metodi per trattare interamente dei segnali aleatori (N.B. gli a_i sono aleatori!), quindi trattiamolo inizialmente come segnale deterministico attraverso la TCF:

$G_T(f)$ non dipende da i, lo posso portare fuori

$$s_T(t) \rightleftharpoons S_T(f) = \sum_i a_i\, G_T(f)\, e^{-j2\pi f iT} = G_T(f) \sum_i a_i\, e^{-j2\pi f iT}$$

Adesso trattiamo la parte aleatoria (gli a_i) utilizzando la densità spettrale di potenza, per calcolarla ci ricordiamo che dato un processo stocastico in senso lato (X) in ingresso a un sistema lineare stazionario otteniamo che l'uscita y avrà $S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2$. Dato che tutti i filtri sono SLS e che gli a_i sono DSSL, possiamo utilizzare il risultato ottenuto per calcolare $S_s(f)$. Tuttavia nel corso tale calcolo non viene eseguito quindi ci prendiamo l'intuizione appena fatta e scriviamo il risultato:

$$\boxed{\bar{X}(f) = \sum_n x(n)\, e^{-j2\pi f nT}}$$

Definendo $\mu_a = E[a_i]$, $R_a(m) = E[a_i \cdot a_{i-m}]$ abbiamo

$$S_s(f) = \frac{1}{T} S_a(f)\, |G_T(f)|^2$$
$$S_a(f) = \sum_m R_a(m)\, e^{-j2\pi f mT}$$

$\Rightarrow$ N.B. È la TDF di $R_a(m)$!

Dall'intuizione fatta si presenta un'unica differenza, ovvero la presenza di un fattore $1/T$, tale è presente in quanto $s_T(t)$ in realtà non è un segnale stazionario, ma ciclo-stazionario. Ciò significa che presenta tale proprietà periodicamente e non sempre. Se non risulta comprensibile, ciò non è rilevante ai fini del corso di Comunicazioni Numeriche.

Data quindi $S_s(f)$ supponiamo che gli a_i siano indipendenti e calcoliamola. Dobbiamo trovare $R_a(m)$, con cui ricavare $S_a(f)$ per poi ottenere $S_s(f)$. Iniziamo con $R_a(m)$, grazie all'ipotesi dell'indipendenza, possiamo scrivere:

$$R_a(m) = E[a_i \cdot a_{i+m}] = \begin{cases} E[a_i^2] = A & m = 0 \\ E[a_i]E[a_{i+m}] = (E[a_i])^2 & m \neq 0 \end{cases} \quad \text{con } A \in \mathbb{R} \text{ costante}$$

Interpretando la funzione di correlazione scritta abbiamo che essendo i simboli indipendenti sono anche incorrelati tra di loro (N.B. l'indipendenza è una condizione più forte dell'incorrelazione), tuttavia c'è un unico caso in cui due simboli sono correlati ovvero quando sono uguali! Ogni simbolo è sempre correlato con se stesso. Se poniamo come seconda ipotesi che $E[a_i] = 0$, otteniamo: [il ragionamento è quello di Moretti]:

$$R_a(m) = E[a_i \cdot a_{i+m}] = \begin{cases} A & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

E qual è l'unica funzione che è $\neq 0$ in 0 e $= 0$ dalle altre parti? La delta di Dirac (δ), quindi possiamo scrivere che:

$$R_a(m) = A\,\delta(m)$$

Quindi posso trovare $S_a(f)$ attraverso TCF, non uso la TDF perché con il ragionamento fatto non abbiamo più una serie di simboli ma una funzione continua (la $\delta(t)$) scalata da una costante:

$$R_a(m) = A\,\delta(m) \rightleftharpoons S_a(f) = A$$

Ricorda $\delta(t) \rightleftharpoons 1$

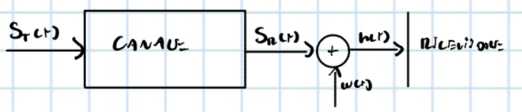
Avendo $S_a(f)$ possiamo calcolare $S_s(f)$ con la formula esposta in precedenza

$$S_s(f) = \frac{1}{T} S_a(f)\, |G_T(f)|^2 = \frac{A}{T} |G_T(f)|^2$$

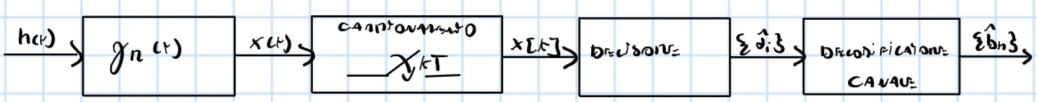
Quindi il segnale in uscita al trasmettitore PAM sarà $S_s(f) = \frac{A}{T}|G_T(f)|^2$ presupponendo simboli indipendenti e a media nulla (quest'ultima ipotesi si fa sempre perché nella pratica fa risparmiare energia). Tuttavia non siamo in grado di calcolare la banda del segnale in quanto quest'ultima dipende dal filtro $G_T(f)$. Per poter dimensionare adeguatamente il filtro dobbiamo prima fare una serie di riflessioni sul ricevitore PAM.

Per semplificarci la vita assumiamo che il canale sia un $\delta(t)$, quindi $c(t) = \delta(t)$. Essenzialmente diciamo che il canale non introduce alcuna forma di disturbo o rumore, infatti modellando il canale come un filtro lineare stazionario avremo: (assumiamo $w(t)$ come rumore termico gaussiano bianco)

$$r(t) = s_T(t) \otimes c(t) + w(t) = s_T(t) \otimes \delta(t) + w(t) = s_T(t) + w(t)$$



Per la proprietà della $\delta(t)$. Spostiamoci quindi sul ricevitore:



La prima cosa che incontriamo è il filtro lineare stazionario:

$$x(t) = r(t) \otimes g_R(t) = s_T(t) \otimes g_R(t) + w(t) \otimes g_R(t)$$

Ci ricordiamo che $s_R(t)$ deriva dalla trasmissione di $s_T(t)$, il quale era stato creato attraverso l'modulazione PAM:

$$s_T(t) = \sum_i a_i\, g_T(t-iT) \implies x(t) = \sum_i a_i\, g_T(t-iT)\otimes g_R(t) + w(t)\otimes g_R(t)$$

Definiamo $g_{TR}(t) = g_T(t)\otimes g_R(t)$ e $n(t) = w(t) + g_R(t)$, riscriviamo

$$x(t) = \sum_i a_i\, g_{TR}(t-iT) + n(t)$$

A questo punto campioniamo il segnale:

$$x[k] = x(t=kT) = \sum_i a_i\, g_{TR}(\underbrace{kT}_{t=kT}-iT) + n[k] = \sum_i a_i\, g_{TR}((k-i)T) + n[k]$$

A questo punto eseguo un cambio di variabile ponendo $m = k-i$, quindi avrò $i = k-m$ e $k = m+i$

$$= \sum_{k-m} a_{k-m}\, g_{TR}(mT) + n[k]$$

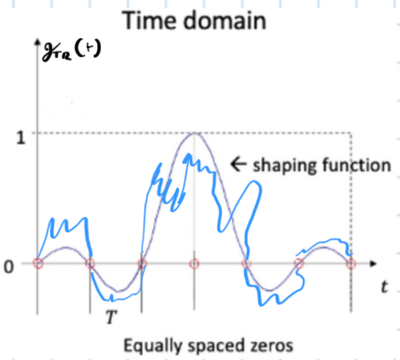
Ricordiamoci che noi campioniamo all'istante k vogliamo ottenere il simbolo corrispondente ovvero a_k, tale si ricaverà quando $m=0$ e quindi corrispondente al primo termine della sommatoria, isoliamolo:

$$= \underbrace{a_k\, g_{TR}(0)}_{\text{simbolo voluto}} + \overbrace{\sum_{\substack{k-m \\ m\neq 0}} a_{k-m}\, g_{TR}(mT)}^{\text{ISI}} + n[k]$$

La sommatoria rimanente è denominata come **Interferenza Intersimbolica (ISI)**, e tale rappresenta un disturbo al segnale causato dall'interferenza degli altri simboli. Solitamente l'ISI è molto maggiore del rumore $n[k]$, e per questo risulta problematica. Notiamo però che l'ISI dipende anche dai due filtri usati nella trasmissione e nella ricezione. Per eliminare l'ISI dobbiamo far in modo che $g_{TR}(mT) = 0$ quando $m \neq 0$! Quindi abbiamo come condizione sui filtri:

$$g_{TR}(mT) = \begin{cases} g_{TR}(0) = 1 & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

Con un filtro che rispetta queste condizioni avremo $x[k] = a_k\, g(0) + n[k] = a_k + n[k]$ che è quello che vogliamo. Vediamo nel dettaglio che aspetto dovrà avere un filtro che rispetti tale condizione:



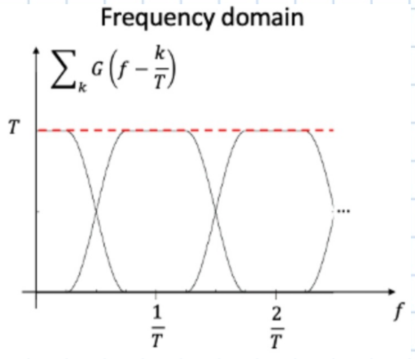
Essenzialmente necessitiamo di una funzione che sia $\emptyset$ per multipli di T e che abbia un valore diverso da zero in $t=0$. Nell'esempio a destra presentato una sinc, ma potrebbe essere qualsiasi cosa: presento una funzione di questo tipo. La condizione può essere rispettata anche per il dominio della frequenza attraverso la TDF:

$$g(m) \rightleftharpoons \frac{1}{T}\sum_k G\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

Tuttavia se $g(m)$ rispetta la condizione sull'ISI possiamo dire che $g(m) = \delta(m)$ in quanto presentano come unici valori (attraverso la proprietà campionatrice di δ) quello in 0, ignorando gli altri. E dato che sappiamo che $\delta(t) \rightleftharpoons 1$ possiamo trasformare la parte a sx dell'eq per avere un'equivalenza:

$$g(m) \rightleftharpoons \frac{1}{T}\sum_k G\left(f-\frac{k}{T}\right) \xRightarrow{g(m)=\delta(m)} \delta(m) \rightleftharpoons \frac{1}{T}\sum_k G\left(f-\frac{k}{T}\right) \xRightarrow{\delta(m)\rightleftharpoons 1} 1 = \frac{1}{T}\sum_k G\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

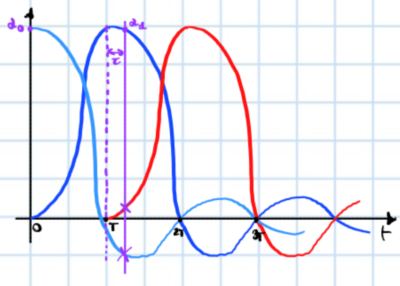
$$\implies \sum_k G\left(f-\frac{k}{T}\right) = T$$



La condizione in frequenza ci dice che il filtro rispetta la condizione se la somma delle TDF in frequenza è pari a una costante (ovvero T)!

Questa condizione (che sia nel dominio del tempo o in quello della frequenza) è detta **condizione di Nyquist**.

Notiamo tuttavia che abbiamo fatto un assunzione implicita nei nostri calcoli: abbiamo supposto che trasmettitore e ricevitore siano sincronizzati. Nella realtà avremo un campionamento al ricevitore a $t = kT + \tau$ ove τ è lo scarto dato dalla mancanza di sincronizzazione, nell'esempio a sx vediamo come a_1 sia campionato più a dx ed abbia, oltre al suo valore dato dalla curva **blu** manifesti l'ISI attraverso i due valori aggiuntivi dati dalle altre due curve (segnati dalla "×"). Si osservi anche che l'utilizzo della sinc non è adatto come filtro, in quanto decadendo lentamente risulta essere più sensibile all'ISI. Se decadesse più velocemente sarebbe meno probabile avere ISI significativi.



Quindi abbiamo trovato la prima condizione per il corretto dimensionamento dei filtri, adesso analizziamo anche come il filtro si deve comportare rispetto al rumore. Prima di eseguire i passaggi formali chiariamoci le idee con la seguente intuizione:

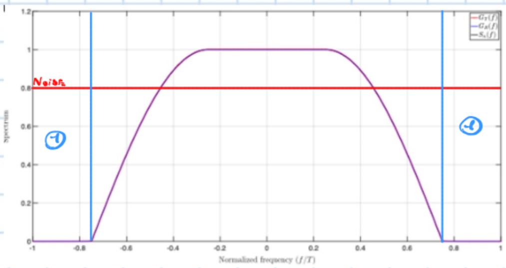


Figura 1

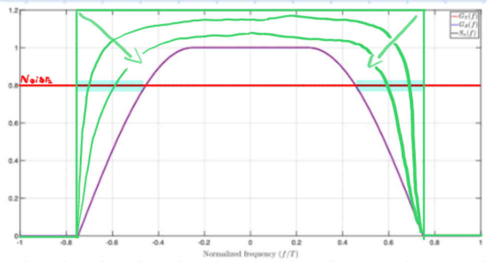


Figura 2

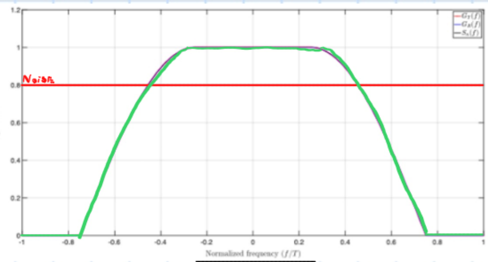


Figura 3

Abbiamo come obbiettivo quello di avere un filtro che minimizzi il rumore del segnale. Poniamo di avere un segnale come in figura 1 e il rumore gaussiano bianco (in rosso). Notiamo subito che nella zona 1 abbiamo solo il rumore, quindi possiamo attenuare al massimo il segnale ponendo il filtro (in verde) a zero. Se ci accontentiamo di questo il filtro può essere una rect, tuttavia facciamo passare il rumore (evidenziato), onde da evitare il suo passaggio possiamo "smussare la rect" in modo da farla adattare al nostro segnale. Il caso ottimo è quindi quando il filtro è uguale al segnale (in figura 3) in tal caso facciamo passare soltanto il rumore che è strettamente incorporato nel segnale. Formalizziamo un po' il concetto: qual è il parametro che ci dà una relazione tra il mio segnale e il rumore? Il SNR! Ovvero il rapporto tra la potenza del segnale e l'energia del segnale:

$$SNR = \frac{P_s}{E_n}$$

Nota: Dato n come il rumore e P_T la potenza del segnale se $E_n << P_s$ (che è quello che vogliamo) allora SNR ha valore più grande.

Il nostro obbiettivo si riduce ad avere quindi il valore più alto di SNR possibile, in quanto il suo valore massimo corrisponde alla situazione presente in figura 3. Quindi intuitivamente come dovremmo tarare $g_R(t)$ (il filtro del ricevitore) ponendo che $g_R(t) = g_T(t)$ in quanto nella PAM alla trasmissione io creo il segnale applicando il filtro $g_T(t)$ quindi sono sicuro che $g_T(t)$ sia esattamente congruente al segnale stesso dato che lo crea. Per questo la seconda condizione è $g_T(t) = g_R(t)$.
Formalizziamo quanto detto calcolando SNR, determiniamo la potenza del segnale tramite la definizione di potenza istantanea, e calcoliamo l'energia del rumore facendo semplicemente l'integrale della sua densità spettrale di potenza. Quest'ultima sarà filtrata dal filtro di ricezione:

$$E_n = E\{n^2(t_0)\} = R_n(0) \overset{\text{corollario Xth di Parseval}}{=} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)}_{\text{svolto in frequenza}} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(f)|H(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2}|H(f)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2}|G_R(f)|^2 \overset{?}{\rightleftharpoons} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2}(g_R(t))^2$$

La potenza del segnale sarà data da $P_s = S^2(t)$ ove $S(t) = S_T(t) \otimes g_R(t)$ ricordando che noi stiamo considerando il segnale $x(t)$ il quale è composto da due parti: $x(t) = \overbrace{S_T(t) \otimes g_R(t)}^{S(t)} + \overbrace{W(t) \otimes g_R(t)}^{n(t)} = S(t) + n(t)$:

$$P_s = S^2(t) = [S_T(t) \otimes g_R(t)]^2 \overset{\text{def di convoluzione}}{=} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g_R(\tau) S_T(t_0-\tau) d\tau\right]^2$$

Quindi allora l'SNR sarà a

$$SNR = \frac{P_T}{E_w} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g_R(\tau) S_T(t_0-\tau) d\tau\right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} (g_R(t))^2 dt}$$

A questo punto provo di massimizzare l'SNR attraverso la disuguaglianza di Schwarz $[|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| + \|y\|]$

$$= \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g_R(\tau) S_T(t_0-\tau) d\tau\right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} g_R^2(t)\, dt} \leq \frac{\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} g_R^2(\tau) d\tau} \int_{-\infty}^{\infty} S_T^2(t_0-\tau) d\tau}{\frac{N_0}{2} \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} g_R^2(t)\, dt}} = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} S_T^2(t_0-\tau) d\tau = \frac{2}{N_0} E_s$$

Troviamo quindi che il rapporto massimo di SNR è dato da $SNR_{max} = \frac{2}{N_0} E_T$ ove E_T è l'energia del segnale trasmesso (non filtrato).
Nell'ultimo passaggio, per usare la disuguaglianza di Schwarz necessitiamo che gli elementi dello spazio vettoriale giacciano sulla stessa retta; in altre parole devono essere multipli fra loro, ovvero:

$$g_R(t) = K S_T(t_0-t)$$

Questa condizione è proprio quello che abbiamo esposto nella intuizione di prima (ponendo $K = 1$), quindi possiamo passare al dominio della frequenza:

Nota è vero per il th del ritardo fatto sul coniugato del segnale, che è $S(-t) = S^*(t)$!

$$g_R(t) = S_T(t_0-t) \rightleftharpoons S_T^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$$
$$G_R(f) = S_T^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

Si osservi inoltre che per qualsiasi numero complesso x si ha $|x| = |x^*|$, quindi $|S_T^*(f)| = |S_T(f)|$, ne segue che passando il modulo alla precedente relazione e sostituendo si ha:

$$|G_R(f)| = |S_T^*(f)| = |S_T(f)|$$

Per concludere sapendo che $S(t) = g_R(t) \otimes S_T(t)$ (segnale filtrato) possiamo passare al dominio della frequenza e sostituire i risultati ottenuti:

$$S(t) = g_R(t) \otimes S_T(t) \rightleftharpoons S(f) = G_R(f) \cdot S_T(f)$$

$G_R(f) = S_T^*(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$

$$S(f) = S_T^*(f) e^{-j2\pi f t_0} \cdot S_T(f)$$

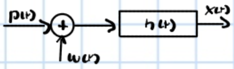
$S_T^*(f) \cdot S_T(f) = |S_T(f)|^2$ come per ogni numero complesso

$$S(f) = |S_T(f)|^2 e^{-j2\pi f t_0}$$

$|S_T(f)| = |G_R(f)|$

$$\Rightarrow S(f) = |G_R(f)|^2 e^{-j2\pi f t_0}$$

Abbiamo finalmente ottenuto come deve essere il filtro $g_R(t)$ per avere SNR_{max}, la condizione è data dall'ipotesi di Schwarz e in generale si definisce **FILTRO ADATTATO** un filtro $h(t)$ avente in ingresso un segnale $p(t)$ sommato ad del rumore bianco $w(t)$, che soddisfa la seguente condizione:



$$\boxed{h(t) = k\, p(t_0 - t)}$$

Perché "adattato"? Perché come abbiamo visto in precedenza nell'intuizione tale filtro prende la forma del segnale avente l'informazione da trasmettere, si adatta ad essa.

Con questo abbiamo finalmente le due condizioni necessarie a dimensionare i filtri:

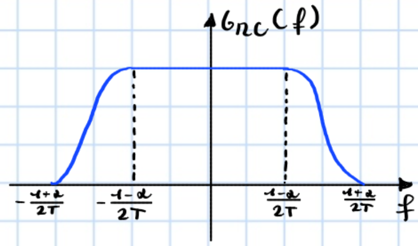
1 La **Condizione di Nyquist** per annullare l'Interferenza Intersimbolica (ISI)

2 La necessità di avere un **filtro adattato** per minimizzare il rumore (ovvero massimizzare l'SNR)

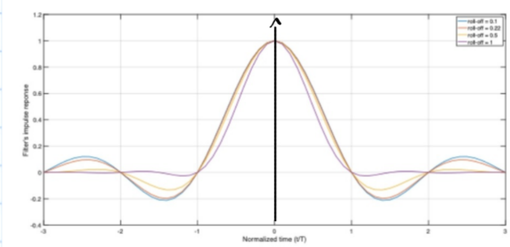
Andiamo per ordine e troviamo un filtro che rispetti entrambe le condizioni, ovviamente notando che Trasmettitore e Ricevitore siano sincronizzati:

1 Soddisfare Nyquist

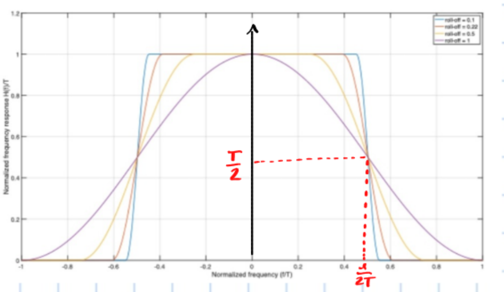
Il filtro più utilizzato che soddisfa la condizione di Nyquist è l'**impulso a coseno rialzato**:



Dominio del Tempo



Dominio della Frequenza



La funzione approssima una rect e presenta un parametro α, detto **ROLL-OFF** che determina l'inclinazione della funzione nelle zone laterali, conseguentemente attraverso α si controlla anche la banda della funzione:

- Con $\alpha = 1$ si ottiene una rect, avendo la minima banda possibile $B = \frac{1}{2T}$
- Con $\alpha = 0$ si ottiene un triangolo, avendo la massima banda possibile $B = \frac{1}{T}$

Perché non usiamo sempre $\alpha = 1$, essendo anche facilmente implementabile (la rect non lo è)? Perché in tal caso avrei banda massima, e dato che quest'ultima costa molto, la vogliamo limitare il più possibile. I valori normalmente usati sono $\alpha = 0{,}3$ o $\alpha = 0{,}4$.

Il roll-off è utile anche per cercare di adattare il filtro al segnale da ricevere/trasmettere, e quindi a soddisfare la $\boxed{2}$.

Si riporta per pura curiosità l'espressione analitica nel tempo, non serve impararsela per l'esame, non si usa praticamente mai neanche nella pratica:

$$g_{RC}(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \overbrace{\frac{\cos\left(\alpha\pi \cdot \frac{t}{T}\right)}{1 - \left(2\alpha \cdot \frac{t}{T}\right)^2}}^{\text{FATTORE CHE DETERMINA LE PARTI LATERALI}}$$

Imponiamo quindi che nel nostro sistema PAM il filtro risultante $G_{TR}(f) = G_T(f) \cdot G_R(f)$ alla fine della ricezione sia pari a un coseno rialzato:

$$G_{RC}(f) = G_T(f) \cdot G_R(f)$$

In questo modo non abbiamo ISI! Per determinare G_T e G_R singolarmente utilizziamo la seconda condizione.

2 Massimizzare l'SNR (Minimizzare il rumore)

Abbiamo scelto come filtro il coseno rialzato tuttavia adesso dobbiamo fare in modo di massimizzare l'SNR, per farlo imponiamo semplicemente la condizione vista in precedenza:

Nota: non c'è la sommatoria tra S_T e G_T in quanto consideriamo la trasmissione di un solo simbolo.

$$G_R(f) = k\, S_T^*(f) = \alpha_i\, G_T^*(f)$$

Si ricordi che $S_T(t)$ è formato dall'interpolazione del filtro g_T, dato che la condizione è soddisfatta per qualsiasi multiplo di $g_T(t)$ scegliamo per semplicità di trattare il caso con $k=1$ e $\alpha_i = 1$. Ma in realtà tale scelta non influirebbe sul risultato, quindi

$$G_R(f) = G_T^*(f)$$

A questo punto ci basta risolvere il sistema a due equazioni per trovare il filtro che soddisfi entrambe le condizioni:

$$\begin{cases} G_{RC}(f) = G_T(f) \cdot G_R(f) \\ G_R(f) = G_T^*(f) \end{cases} \Longrightarrow \begin{aligned} G_{RC}(f) &= G_T(f) \cdot G_T^*(f) \\ G_{RC}(f) &= |G_T(f)|^2 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{cases} G_T(f) = \sqrt{G_{RC}(f)} \\ G_R(f) = \sqrt{G_{RC}(f)} \end{cases}$$

In conclusione il filtro da noi voluto è la **Radice di Coseno Rialzato**: $G_{RCR}(f) = \sqrt{G_{RC}(f)}$

Torniamo finalmente al nostro problema iniziale (so che non te lo ricordi più): calcolare la banda della PAM! Abbiamo dimensionato i filtri e quindi adesso riprendiamo il risultato ottenuto in precedenza (pagina 10):

$$S_s(f) = \frac{A}{T} |G_T(f)|^2$$

Facciamo adesso una riflessione calcolando la potenza del segnale $P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} S_s(f)$:

$$P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{T} |G_T(f)|^2 = \frac{A}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_T(f)|^2 = \frac{E[a_i^2]}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_T(f)|^2$$

Avendo dimensionato il sistema sappiamo che $|G_T(f)|^2 = G_{RC}(f)$ e che tale filtro fa passare soltanto l'energia del segnale, per la condizione di Nyquist sappiamo che $g_T(0) = 1$ (dominio del tempo) che in frequenza era $\frac{1}{T} \sum_k G(f - \frac{k}{T}) = 1$ che per $k = 0$ è pari all'integrale! Segue che l'integrale è uguale a 1. Quindi:

$$P_s = \frac{A}{T}$$

La riflessione annunciata è la seguente: essendo la potenza, in generale, l'energia diviso il tempo in cui si manifesta possiamo dire più che tranquillamente (sotto le ipotesi fatte) che

$$B \simeq \frac{1}{T}$$

Il "circa" è messo in quanto, rumori o filtraggi non previsti potrebbero alterare il risultato!

Da quest'ultimo risultato possiamo inoltre ricavare:

- Energia media del simbolo: $P_s T = A$
- Energia media per bit: $P_s T_d$ con T_d che era l'intervallo di trasmissione per bit.

Criterio del decisore PAM

Adesso che abbiamo trattato il sistema vediamo qual è il criterio di decisione adottato al "demappatore" PAM. Essenzialmente, dovendo di trasmettere un simbolo d_i e di ricevere un campione $x[k]$ (tralasciamo i passaggi di trasmissione e ricezione già visti), il mio criterio deve saperlo identificare con un'alta probabilità d_i da $x[k]$; o meglio la probabilità di identificare correttamente il simbolo d_i deve essere strettamente maggiore della probabilità di associarci un qualsiasi altro simbolo d_e (probabilità di sbagliare). Quanto appena detto è esprimibile con la probabilità condizionata, ponendo come simbolo identificato dal criterio d_k:

$$P(d_k = d_i \mid x[k]) > P(d_k = d_e \mid x[k])$$

La disequazione appena scritta è chiamata MAP (Maximum A posteriori Probability), vediamo come tarare il decisore affinché la rispetti. Iniziamo con il calcolare le due probabilità attraverso la formula di Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

Quindi otteniamo

$$P(d_k = d_i \mid x[k]) = \frac{P(x[k] \mid d_k = d_i)\,P(d_k = d_i)}{P(x[k])} \qquad P(d_k = d_e \mid x[k]) = \frac{P(x[k] \mid d_k = d_e)\,P(d_k = d_e)}{P(x[k])}$$

Ricordandoci che x è un processo stocastico, avente quindi una densità di probabilità e che $x[k]$ non sia altro che una variabile aleatoria posso scrivere

$$P(d_k = d_i \mid x[k]) = \frac{f_x(x[k] \mid d_k = d_i)\,P(d_k = d_i)}{f_x(x[k])} \qquad P(d_k = d_e \mid x[k]) = \frac{f_x(x[k] \mid d_k = d_e)\,P(d_k = d_e)}{f_x(x[k])}$$

Si tenga conto che tale espressione risulta indipendente dal simbolo trasmesso (mandare 1 o 2 è irrilevante ai fini del calcolo), cosa intuitiva considerando che nella comunicazione non vi sono simboli più importanti di altri. In aggiunta ciò è giustificato dal fatto che $f_x(x[k])$ non dipende dal simbolo trasmesso. Si noti che le due probabilità differiscono soltanto per il numeratore; per questo motivo possiamo riscrivere la disuguaglianza come:

$$f_x(x[k] \mid d_k = d_i)\,P(d_k = d_i) > f_x(x[k] \mid d_k = d_e)\,P(d_k = d_e)$$

Adesso ricordiamo tutte le assunzioni fatte sul sistema fino ad ora:

- Il canale non disturba il segnale: $c(t) = \delta(t)$. **Nota:** se $c(t) = A\,\delta(t-\tau)$ non avrei comunque distorto il segnale a patto di campionare a $kT+\tau$, in quanto il canale, in questo caso, si ritarda soltanto il segnale (di τ) e lo amplifica (di A) non distorcendolo.
  Abbiamo quindi che $g(t) = g_R(t) \otimes g_{R}(t) \longrightarrow x[k] = d_k\,g[0] + n[k] = d_k + n[k]$ con $n[k] \sim N(0, \sigma_n^2)$.
- Sistema dimensionato correttamente: usiamo come filtro la radice di coseno rialzato in modo da avere SNR massimo e non avere ISI.
- Ricevitore e Trasmettitore sincronizzati.

Detto questo, osserviamo che $x[k]$ è una variabile aleatoria Gaussiana essendo somma di una costante (il simbolo d_i) e di una variabile Gaussiana (il rumore $n[k]$). Per quanto detto in precedenza possiamo dire che

$$x[k] \sim N(d_i, \sigma_n^2) \quad \text{con} \quad \sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)\,df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |G_{RCR}(f)|^2 \overset{!}{=} \frac{N_0}{2}$$

grazie al coseno rialzato.

Possiamo quindi scrivere la distribuzione Gaussiana:

$$f_x = \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x[k]-d_i)^2}{2\sigma_n^2}}$$

Non avendo le probabilità a priori $P(d_k = d_i)$ e $P(d_k = d_e)$ siamo costretti a fare un'ipotesi sui simboli. Per semplicità supponiamo i simboli equiprobabili.

$$P(d_k = d_i) = P(d_k = d_e) = \frac{1}{M}$$

Nota Si ricordi che M indica il numero di simboli in un sistema PAM

Da cui

$$f_x(x[k] \mid d_k = d_i)\,P(d_k = d_i) = \frac{1}{M} f_x(x[k] \mid d_k = d_i)$$

A questo punto massimizzare la probabilità di successo (questa scritta sopra) si riduce a massimizzare soltanto f_x in quanto, grazie all'ipotesi sui simboli, abbiamo ridotto l'altra probabilità ad una costante. In sintesi dobbiamo massimizzare la disequazione

$$\cancel{\frac{1}{M}} f_x(x[k] \mid d_k = d_i) > \cancel{\frac{1}{M}} f_x(x[k] \mid d_k = d_e)$$

$$f_x(x[k] \mid d_k = d_i) > f_x(x[k] \mid d_k = d_e)$$

Osserviamo che per definizione le distribuzioni di probabilità sono monotone crescenti per questo posso usare il logaritmo naturale per semplificare la disequazione:

Sostituisco con l'espressione della distribuzione Gaussiana

$$f_X(x[k] \mid d_k = d_i) > f_X(x[k] \mid d_k = d_\ell)$$

$$\cancel{\frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}}}\, e^{-\frac{(x[k]-d_i)^2}{2\sigma_n^2}} > \cancel{\frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}}}\, e^{-\frac{(x[k]-d_\ell)^2}{2\sigma_n^2}}$$

$$e^{-\frac{(x[k]-d_i)^2}{2\sigma_n^2}} > e^{-\frac{(x[k]-d_\ell)^2}{2\sigma_n^2}}$$

Applico il logaritmo

$$-\frac{(x[k]-d_i)^2}{\cancel{2\sigma_n^2}} > -\frac{(x[k]-d_\ell)^2}{\cancel{2\sigma_n^2}}$$

Moltiplico per -1

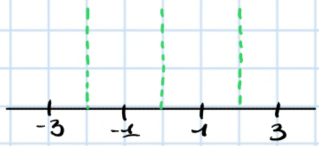
$$\cancel{-}(x[k]-d_i)^2 > \cancel{-}(x[k]-d_\ell)^2$$

$$(x[k]-d_i)^2 < (x[k]-d_\ell)^2$$

Otteniamo come risultato finale il criterio a massima verosimiglianza, ovvero si sceglie come simbolo quello avente minore distanza euclidea:

$$(x[k]-d_i)^2 < (x[k]-d_\ell)^2$$

Ne segue che le soglie di decisione saranno individuate da tale criterio.

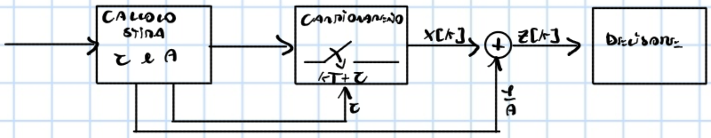


Probabilità di Errore PAM

Calcoliamo adesso la P_e di una PAM generica, avente quindi M simboli (M PAM). Rispetto al precedente calcolo rilassiamo rilassando la prima delle ipotesi fatte ponendo quindi che il canale introduca un ritardo τ e un'attenuazione A al segnale

$$c(t) = A\,\delta(t-\tau)$$

Il nostro sistema dovrà quindi stimare ora anche τ e A in modo da applicare i dovuti aggiustamenti, il nostro sistema avrà questa forma



Come già osservato per sopperire al ritardo campioniamo a $t = kT + \tau$, invece sfruttiamo A per scalare il rumore invece che il segnale. Infatti si noti che per le osservazioni fatte in precedenza che il segnale $x[k]$ è riscrivibile come:

$$x[k] = A\,d_k + n[k]$$

$$z[k] = \frac{x[k]}{A} = d_k + \frac{n[k]}{A} \sim N\left(0, \frac{\sigma_n^2}{A^2}\right)$$

In modo da sfruttare il fattore A per attenuare il rumore! Per osservazioni già fatte (vedi Esempio sezione Probabilità e Considerazioni):

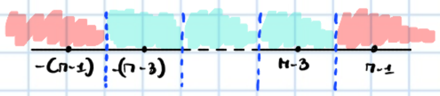
$$P_e = \sum_{i=1}^{M} P(d_k \neq d_i \mid d_k = d_i)\, P(d_k = d_i)$$

Nota TH della probabilità totale o P condizionata!

Ipotizziamo di avere i simboli equiprobabili $P(d_k = d_i) = \frac{1}{M}$:

$$P_e = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} P(d_k \neq d_i \mid d_k = d_i)$$

Adesso dovremmo calcolare tutte le M probabilità, ma se osserviamo le zone di decisione in basso a sx



notiamo intuitivamente che le probabilità sono tutte uguali a parte quelle agli estremi (hanno un "area" più grande). Il problema inoltre è anche simmetrico, in quanto i due estremi saranno uguali fra loro. Tutto questo è dato dall'ipotesi di equiprobabilità dei simboli, dato che il criterio in questo caso era dato dalla distanza euclidea, la quale determina zone di decisione uguali fra loro. Quindi possiamo scrivere la P_e di errore degli estremi che è uguale a due volte quella di un estremo:

$$P_{e_{\text{estremi}}} = 2 \cdot \left[\frac{1}{M} P(d_k \neq d_M \mid d_k = d_M)\right] = \frac{2}{M} P(d_k \neq d_M \mid d_k = d_M)$$

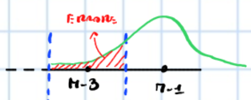
E la probabilità delle $M-2$ zone centrali che è uguale a $M-2$ volte la probabilità di uno degli $M-2$ simboli; prendiamo $d_i = 1$ perché ci piace:

$$P_{e_{\text{centro}}} = M-2 \left[\frac{1}{M} P(d_k \neq 1 \mid d_k = 1)\right] = \frac{M-2}{M} P(d_k \neq 1 \mid d_k = 1)$$

Sommando otteniamo la P_e:

$$P_e = \frac{2}{M} P(d_k \neq d_M \mid d_k = d_M) + \frac{M-2}{M} P(d_k \neq 1 \mid d_k = 1)$$

Calcoliamo il primo termine, ovvero la probabilità agli estremi:



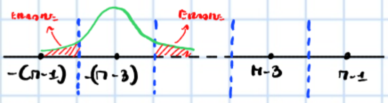
Si ricorda che $z[k] \sim N\left(0, \frac{\sigma_n^2}{A^2}\right)$, e osserviamo approssimativamente il suo andamento a sx, si ha un errore soltanto se si è nella parte sinistra della soglia. L'esercizio in questione è stato già trattato nella sezione Probabilità e Considerazioni con gli stessi parametri (nell'esercizio $A = \sqrt{p}$), quindi sappiamo

$$P_e = Q\left(\frac{\lambda + A}{\sigma_n}\right)$$

Ponendo $\lambda = 0$ (rendere a semplicemente più facile):

$$P(a_k \neq a_m \mid a_k = a_m) = Q\left(\frac{A}{\sigma_n}\right)$$

Allo stesso modo troviamo la P_e di un simbolo centrale, la quale sarà uguale alla somma degli errori commessi a destra e a sinistra:



$$P_{e_{centro}} = \underbrace{Q\left(\frac{\lambda_z + \sqrt{A}}{\sigma_n}\right)}_{\text{errore a SX}} + \underbrace{Q\left(\frac{\lambda_z + A}{\sigma_n}\right)}_{\text{errore a DX}}$$

$$= 2\,Q\left(\frac{\lambda + A}{\sigma_n}\right)$$

Tuttavia tali errori sono uguali grazie alla simmetria del problema e della distribuzione quindi posso riscriverli come due volte il calcolo di una parte sola.

In questo caso poniamo $\lambda = 0$ in quanto abbiamo considerato il simbolo $a_k = 1$ che avrà come soglia sinistra proprio l'asse y:

$$P(a_k \neq 1 \mid a_k = 1) = 2\,Q\left(\frac{\sqrt{A}}{\sigma_z}\right)$$

Troviamo quindi che la P_e totale sarà la somma delle probabilità trovate:

$$P_e = \frac{2}{M} P(a_k \neq a_m \mid a_k = a_m) + \frac{M-2}{M} P(a_k \neq 1 \mid a_k = 1)$$

$$P_e = \frac{2}{M} Q\left(\frac{A}{\sigma_n}\right) + \frac{M-2}{M} \cdot 2\,Q\left(\frac{A}{\sigma_n}\right) = \frac{2 + 2M - 4}{M} Q\left(\frac{A}{\sigma_n}\right) = \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{A}{\sigma_n}\right)$$

$$\Rightarrow P_e = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\frac{A}{\sigma_n}\right)$$

Calcoliamo infine σ_n sapendo che il rumore è gaussiano bianco:

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \sigma_n = \sqrt{\frac{N_0}{2}} \Longrightarrow P_e = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\frac{A\sqrt{2}}{\sqrt{N_0}}\right) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2A^2}{N_0}}\right)$$

Adesso vediamo di riscrivere questa probabilità in funzione del segnale ricevuto. Essenzialmente fino ad ora ci siamo concentrati soltanto sul decisore, adesso riconsideriamo il sistema nella sua totalità:

$$r(t) = S_R(t) + w(t) = S_T(t) \otimes c(t) + w(t)$$

Ricordiamo che $S_T(t) = \sum_i a_i g_T(t - iT)$ e che abbiamo ipotizzato $c(t) = A\,\delta(t - \tau)$:

$$S_R(t) = \sum_i A a_i g_T(t - iT)$$

$$\Rightarrow r(t) = \sum_i A a_i g_T(t - iT) + w(t)$$

N.B. $\delta(t-\tau)$ sparisce per le proprietà di δ e sopprimiamo τ in quanto campioniamo a $t = kT + \tau$

Calcoliamo quindi l'energia del segnale $S_R(t)$ utilizzando la densità spettrale di potenza:

$$S_R(f) = \underbrace{A^2}_{\text{energia data dal canale}} \cdot \underbrace{\frac{1}{T} S_a(f) \lvert G_T(f)\rvert^2}_{S(f)\text{ della PAM}}$$

N.B. ha ignorato i valori correlativi a $S_R(f)$

Supponendo i simboli indipendenti ed equiprobabili è dimostrato nella PAM che $S_a(f) = \frac{M^2-1}{3}$ (nel corso non è stato dimostrato), quindi:

$$S_R(f) = \frac{A^2}{T} \cdot \frac{M^2-1}{3} \cdot \lvert G_T(f)\rvert^2$$

Integriamo quindi $S_R(f)$ per determinare la potenza del segnale

$$P_{S_R} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{T} \cdot \frac{M^2-1}{3} \lvert G_T(f)\rvert^2 = \frac{A^2}{T} \cdot \frac{M^2-1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert G_T(f)\rvert^2$$

Essendo $\lvert G_T(f)\rvert^2 = G_{RC}(f)$ per le proprietà viste lascia passare esattamente il segnale, quindi non altera in nessun modo l'energia trasmessa da quest'ultimo. Possiamo quindi dire che l'integrale sia uguale a 1, ne segue:

$$P_{S_R} = \frac{A^2}{T} \cdot \frac{M^2-1}{3}$$

Per poter confrontare il risultato ora ottenuto e P_e troviamo quindi l'energia media per simbolo:

$$E_s = E_{simbolo} = P_{S_R} \cdot T = A^2 \cdot \frac{M^2-1}{3}$$

A questo punto ricaviamo A:

$$A = \sqrt{\frac{3 E_s}{M^2-1}}$$

E sostituiamo il valore trovato nella P_e per avere l'espressione in funzione dell'energia del simbolo

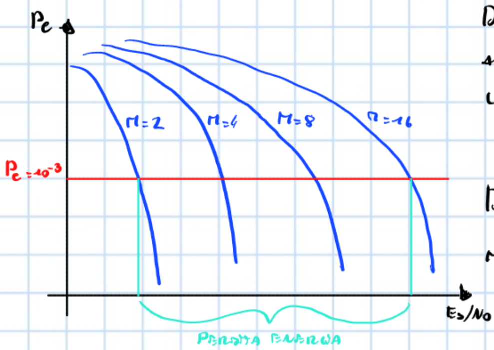
$$P_e = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2A^2}{N_0}}\right) \qquad A^2 = \frac{3E_s}{M^2-1}$$

$$P_e = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}\cdot\frac{3E_s}{M^2-1}}\right) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}\cdot\frac{6}{M^2-1}}\right)$$

$$\boxed{P_e = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}\cdot\frac{6}{M^2-1}}\right)}$$

Abbiamo trovato la P_e della PAM! Solitamente consideriamo che in pratica E_s/N_0 è un valore noto: ad esempio $E_s/N_0 = 10\,dB$.

Facciamo il grafico in funzione di E_s/N_0 al variare di M della P_e trovata:



Dal grafico risulta evidente la correlazione tra M e P_e, avevamo anticipato come all'aumento di M aumentasse anche P_e. Noi volevamo aumentare M per diminuire la banda:

Banda con coseno rialzato

$$B_T = \frac{1+\alpha}{2}\cdot\frac{1}{T_s}\cdot\frac{1}{\log_2 M}$$

Dal grafico si evince bene anche la perdita di energia che sia a ad M diversi per mantenere una certa P_e.

Calcoliamo formalmente la perdita energetica tra la 2-PAM e una M-PAM:

$$M=2: \quad P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

Quindi eguagliamo le espressioni

$$Q\left(\sqrt{2\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_2}\right) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_M\cdot\frac{6}{M^2-1}}\right)$$

Approssimiamo il calcolo togliendo i coefficienti moltiplicativi della Q a dx, e togliamo la Q osservando che è una funzione iniettiva, pertanto posso calcolare Q^{-1}:

$$\sqrt{2\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_2} = \sqrt{\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_M\cdot\frac{6}{M^2-1}} \implies 2\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_2 = \left(\frac{E_s}{N_0}\right)_M\cdot\frac{6}{M^2-1} \implies \left(\frac{E_s}{N_0}\right)_M = \frac{M^2-1}{3}\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_2$$

Essendo E_s/N_0 in dB, mettiamo la perdita in dB per rendere i valori paragonabili:

$$Loss_{dB} = 10\log\frac{M^2-1}{3}$$