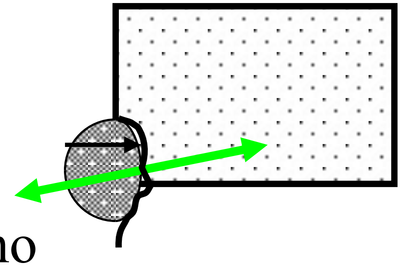
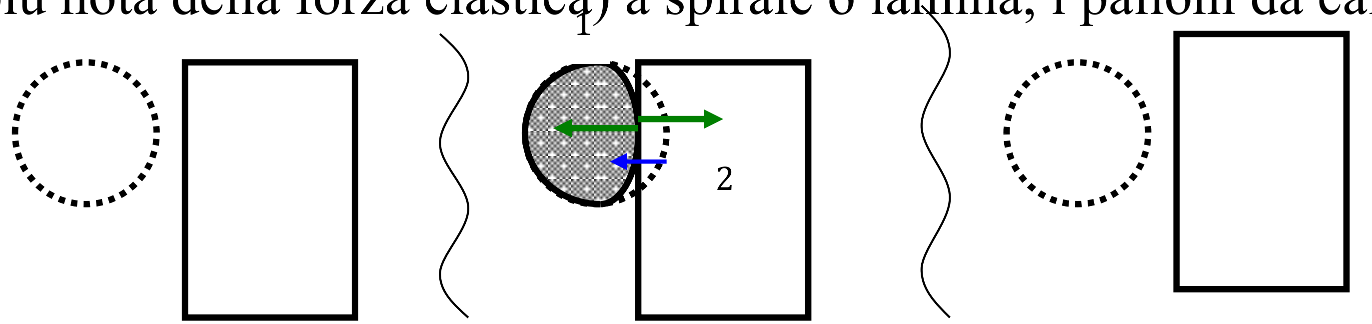
# Forze di contatto:fra due corpi (o forza su un corpo) deformabili(e) elasticamente o non

- Forze dovute all'interazione fra due corpi deformabili in modo anelastico, spesso addirittura permanente.
  - In questo caso non ci sono formule generali e si può solo usare il terzo principio
  - Sono esempi le forze muscolari, le forze che si sviluppano negli incidenti stradali ...



- Forze fra due corpi deformabili elasticamente o forza su un corpo deformabile elasticamente
  - Sono esempi gli elastici, le molle (il cui simbolo è la schematizzazione grafica più nota della forza elastica) a spirale o lamina, i palloni da calcio, ...




← Deformazione del corpo 1

→ Forza esercitata dal corpo 1 sul corpo 2

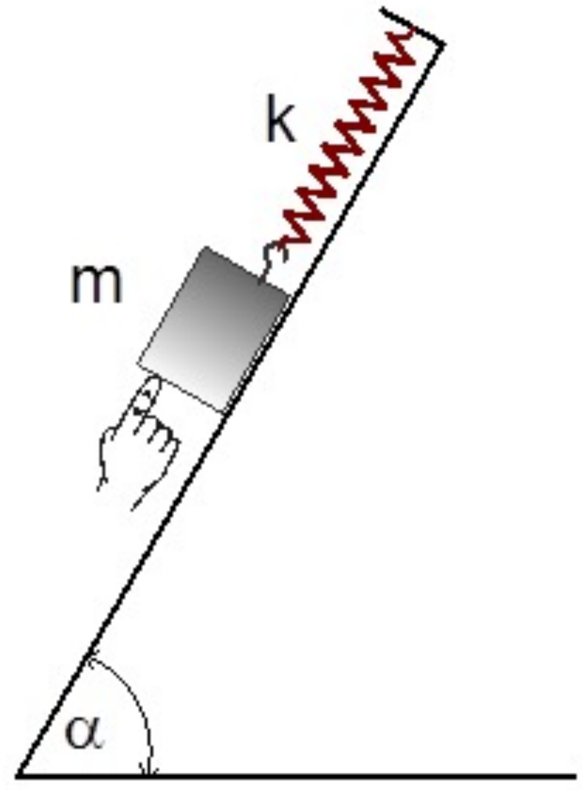
← Forza esercitata dal corpo 2 sul corpo 1

# Forza elastica

- La forza che un corpo deformato esercita su un altro è opposta e direttamente proporzionale alla deformazione del corpo:

$$\vec{F}_{el} = -k\Delta\vec{R}$$

nota come **legge di Hooke)**

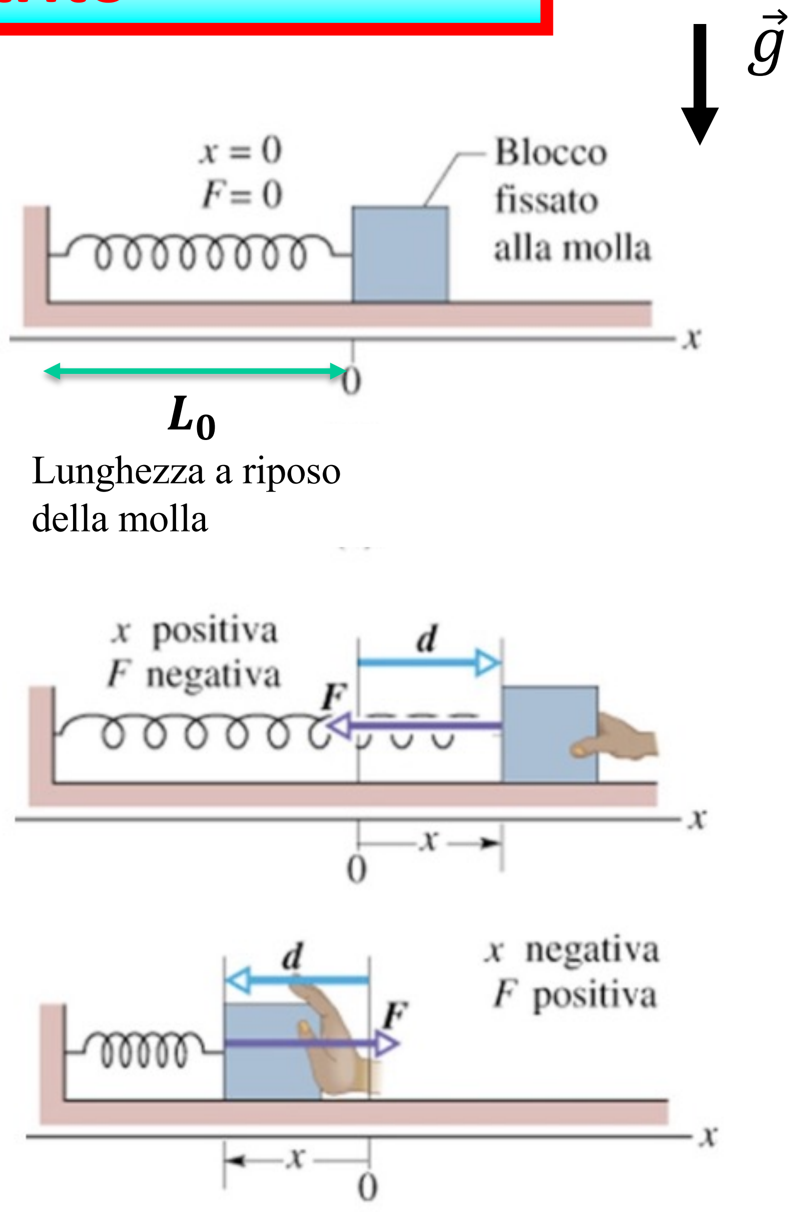


# Forza elastica: massa attaccata a molla su piano privo di attrito

- Forza che origina dalla deformazione dei corpi. Molti corpi si comportano in modo *elastico* per piccole deformazioni rispetto all'equilibrio.

- E' una forza variabile, il cui modulo è proporzionale allo spostamento rispetto alla posizione a riposo

- Legge di Hooke: $\boxed{F(x) = -kx}$
  $x$ è l'allungamento o compressione della molla rispetto alla lunghezza di equilibrio, $k$ è detta costante della molla e si misura in N/m.



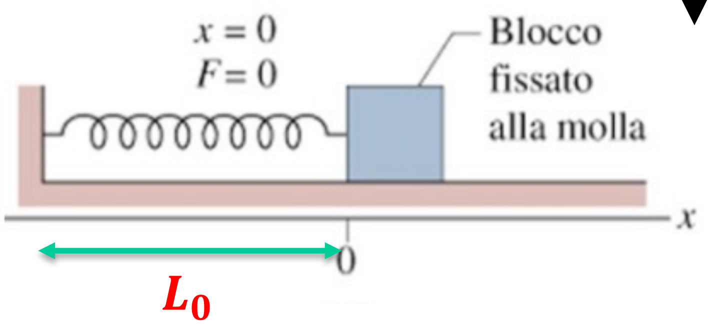
# Molle ideali

- Le molle che considereremo nei problemi sono molle ideali
  - Prive di massa
  - Indeformabili ⇒k costante
  - con lunghezza a riposo (quando non connesse a pesi e /o sollecitate da forze)

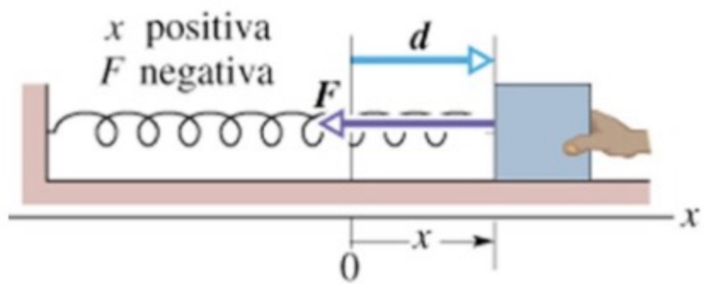
  $L_0$ può essere anche nulla

$\vec{g}$

$$F = -kx$$

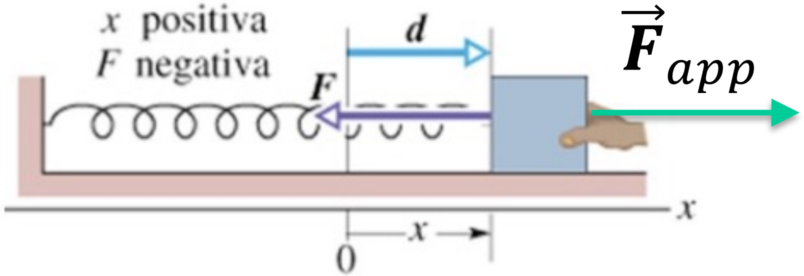


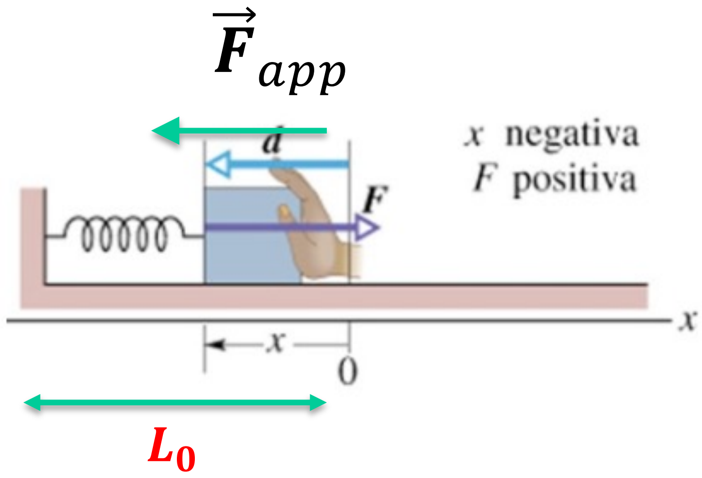

Lunghezza a riposo della molla




(b)

# Esempio




- Con misure sul piano orizzontale ci accorgiamo che la forza elastica F si oppone agli effetti della forza applicata $F_{app}$
  - F tende a riportare il corpo verso la posizione che corrisponde alla lunghezza a riposo $L_0$

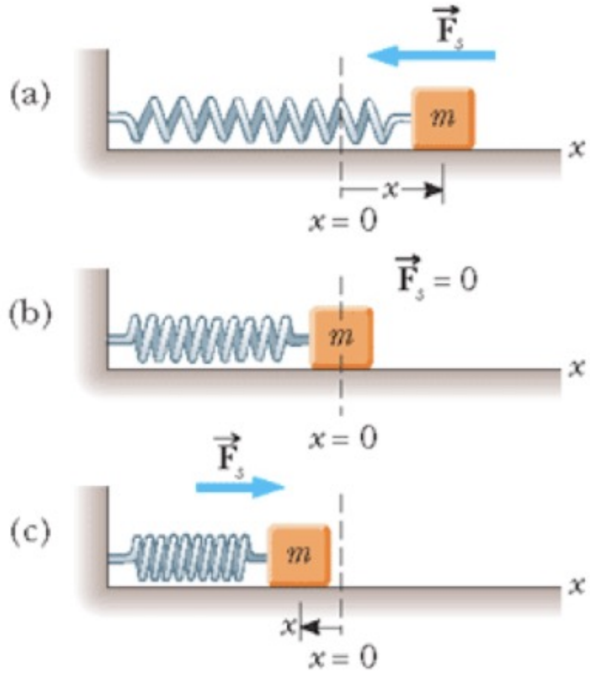
$$\vec{F} = \vec{\mathbf{F}}_{el} = -kx\,\hat{\mathbf{i}} = m\vec{\mathbf{a}}$$

- Per il principio di azione e reazione

$$\vec{F} = -\vec{F}_{app}$$

# Moto armonico

Moto di una massa sottoposta ad una forza elastica su un piano orizzontale privo di attrito.




Se tendiamo o comprimiamo una molla con una massa a un estremo e poi la lasciamo andare, la massa oscillerà avanti e indietro (trascuriamo gli attriti). Questa oscillazione è chiamata *moto armonico (semplice)*.

Ad ogni istante, lungo $x$: $F = ma$ ma $F = -kx$ da cui

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

ovvero

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

Equazione di moto armonico

# Moto armonico

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

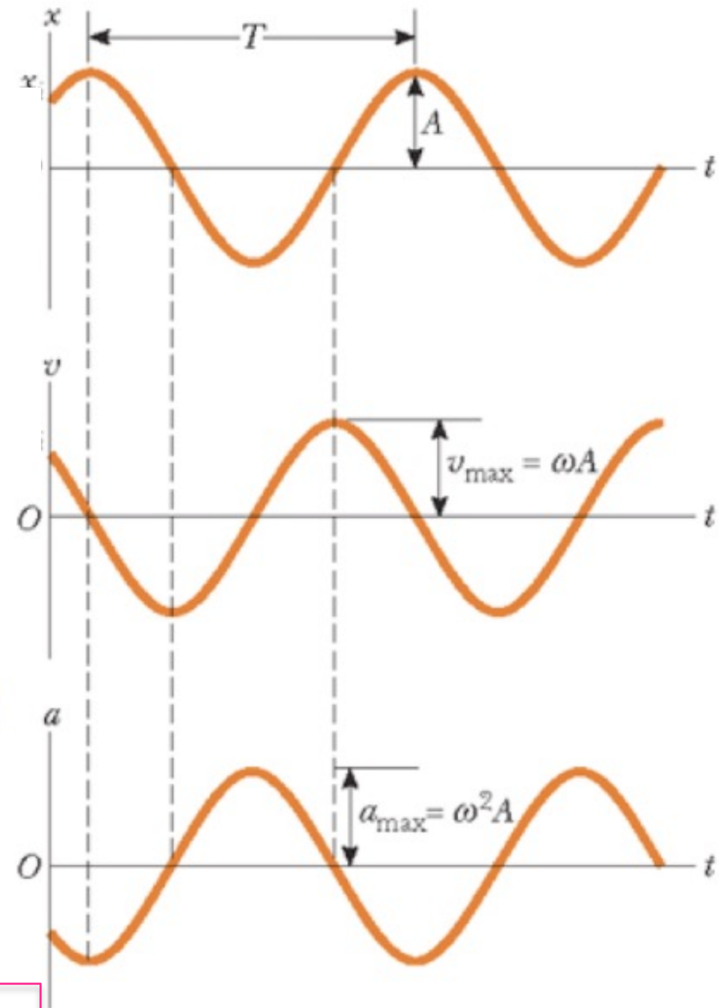
dove si è introdotto $\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$, ovvero $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- ***ω*** prende il nome di pulsazione e si misura in $s^{-1}$
  - non ha nulla a che vedere con la velocità angolare!

# Moto armonico

La soluzione generale dell'equazione del moto armonico, $\boxed{\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t),}$ è

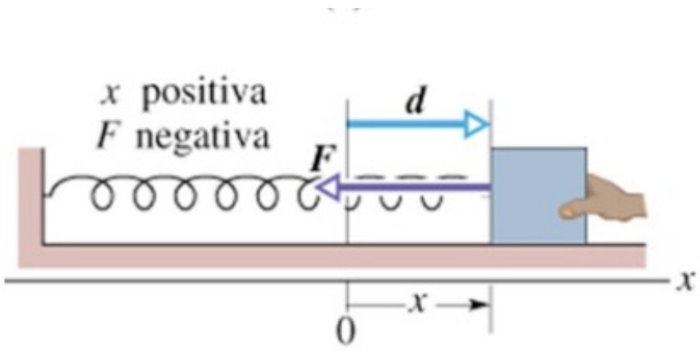
$$x(t) \quad = \quad A\cos(\omega t + \phi) \quad \text{da cui}$$




$$v(t) \quad = \quad \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi),$$

$$a(t) \quad = \quad \boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)}$$

# Ampiezza, fase , pulsazione, periodo frequenza




Periodo $T$ della ripetizione:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) =$$

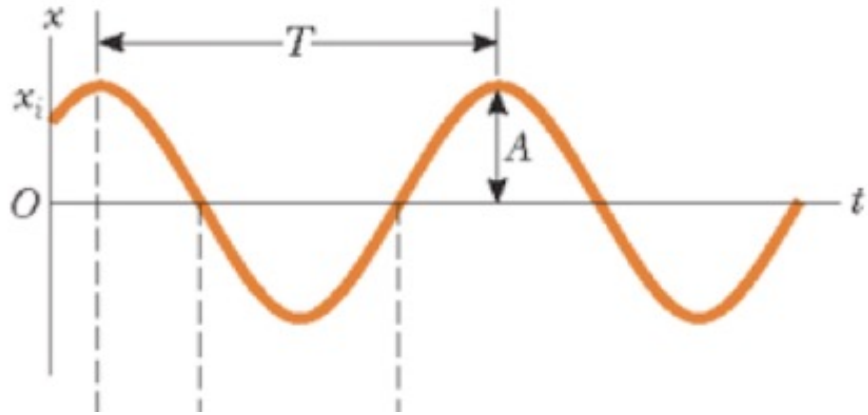
$$= x_m \cos[\omega(t+T)+\phi] =$$

$$= x_m \cos[\omega t + \omega T + \phi]$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad [T] = s$$

$$\nu = \frac{1}{T} \quad [\nu] = s^{-1} = Hz \quad \text{(hertz)}$$




$A = x_m$

$$\overbrace{x(t)}^{\text{Spostamento all'istante } t} = \underbrace{x_m}_{\text{Ampiezza}} \cos\overbrace{(\omega t + \phi)}^{\text{Fase}}$$

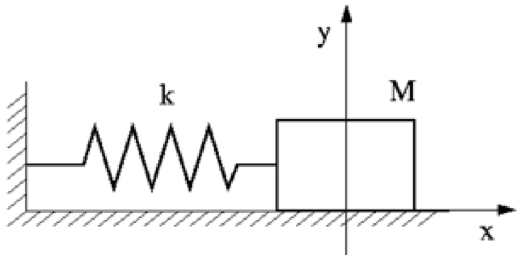
Tempo

Pulsazione o frequenza angolare

Angolo di fase o costante di fase

# Oscillatore armonico

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad dove\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$




$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$$

- Le costanti indeterminate ($c_1$ e $c_2$) sono definite dalle **condizioni iniziali**:

$$x(t=0) = c_1 \cos\omega 0 + c_2 \sin\omega 0 = c_1$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = c_1(-\omega\sin\omega t) + c_2(\omega\cos\omega t) \qquad \Rightarrow per\ t = 0 \quad v(0) = c_2\,\omega$$

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{v(0)}{\omega}\sin\omega t$$

# Oscillatore armonico

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{v(0)}{\omega}\sin\omega t$$

$$x(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t = A\cos(\omega t + \varphi)$$

- Le costanti indeterminate ($A$ e $\phi$) sono definite dalla **condizioni iniziali**:

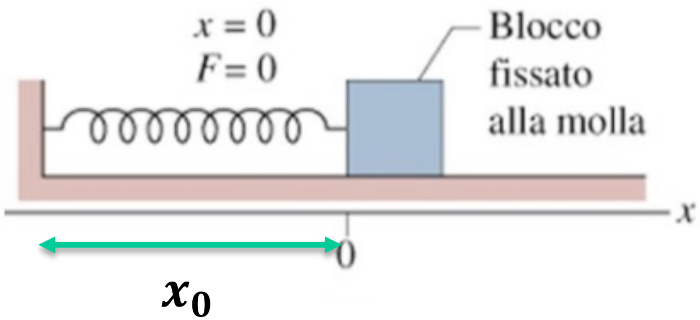
$$x(0) = A\cos(\varphi) \qquad \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \;\; per\; t = 0 \;\; v(0) = -\omega A\sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tg}(\varphi) = -\frac{v(0)}{\omega x(0)} \qquad A = \sqrt{x(0)^2 + \frac{v(0)^2}{\omega^2}}$$

$$x(t) = \sqrt[2]{x(0)^2 + \frac{v(0)^2}{\omega^2}}\cos\left(\omega t + \operatorname{atan}\left(\frac{-v(0)}{\omega\, x(0)}\right)\right)$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \qquad \tan(\phi) = -\frac{c_2}{c_1}$$

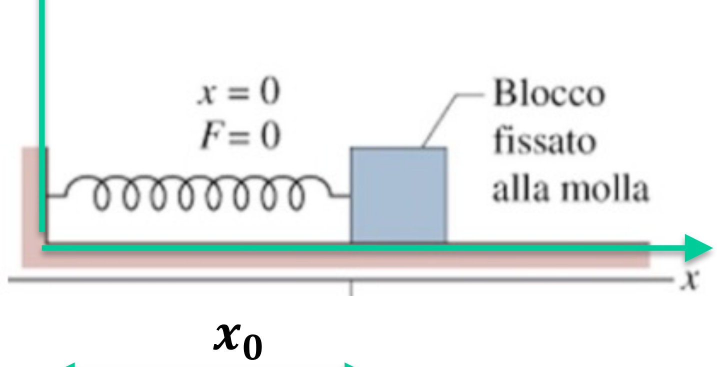
# Scelta dell’origine



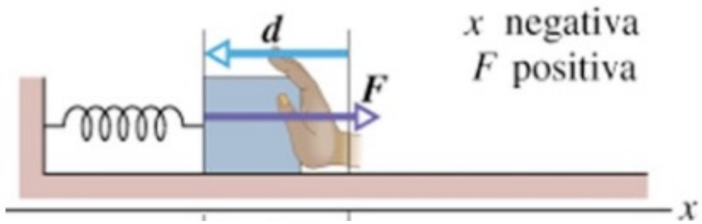

Lunghezza a riposo della molla

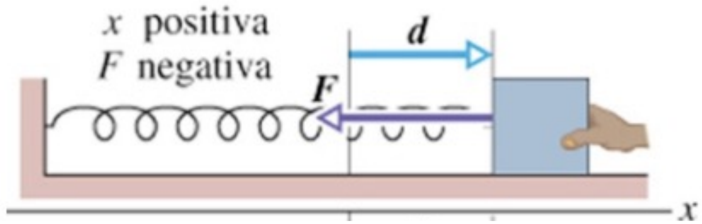
$$F = F_x = -k(x - x_0)$$

Avremmo anche potuto prendere l’origine nel punto di attacco della molla




Lunghezza a riposo della molla



## Esercizio

Un vagone, di massa 30 tonnellate ($m = 3\times10^4$ kg) connesso tramite un respingente elastico ad un locomotore frenato (e quindi fermo), compie 5 oscillazioni in 10 s. Valutare la costante elastica del respingente.

**Soluzione**.

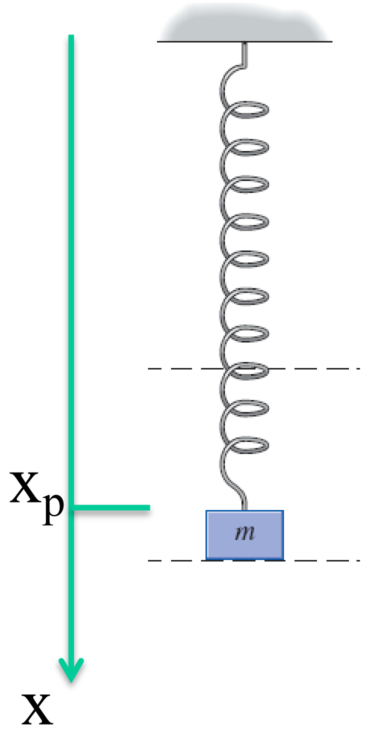
Il periodo è $T = \frac{1}{f} = \frac{10}{5} s = 2s$

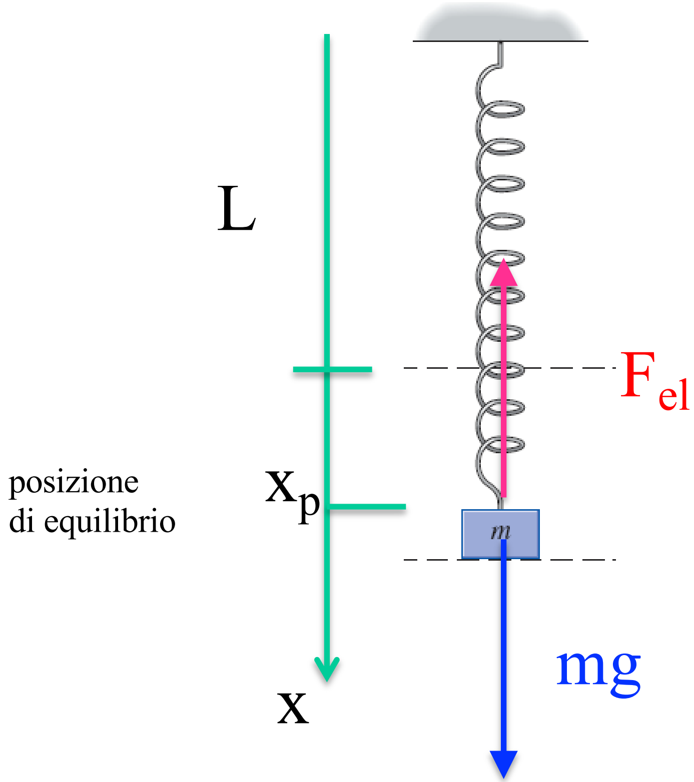
per cui: $k = m\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} m = \frac{4\times\pi^2\times3\times10^4}{2^2} N/m \approx 3\times10^5\ N/m$

# Esercizio

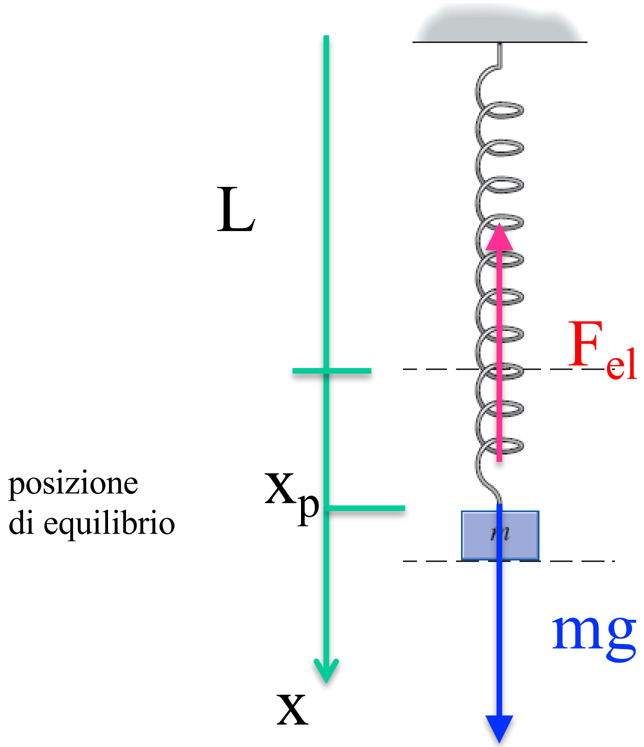
Una massa $M = 100$ g è appesa al soffitto con una molla di costante elastica $k = 10$ N/m e lunghezza a riposo $L = 10$ cm.
Determinare la posizione di equilibrio. Trovare la posizione di equilibrio.

Si utilizzi un asse $X$ verticale, diretto verso il basso con l'origine nel soffitto



# Posizione di equilibrio?




all'equilibrio su massa m:

$$F = 0 = mg - k(x - L)$$

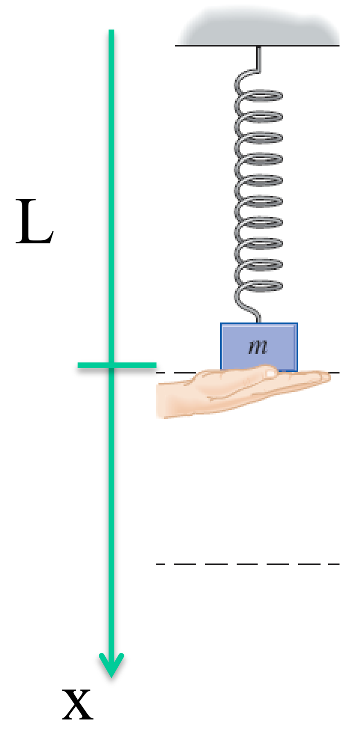
$$kx_p = mg + Lk$$

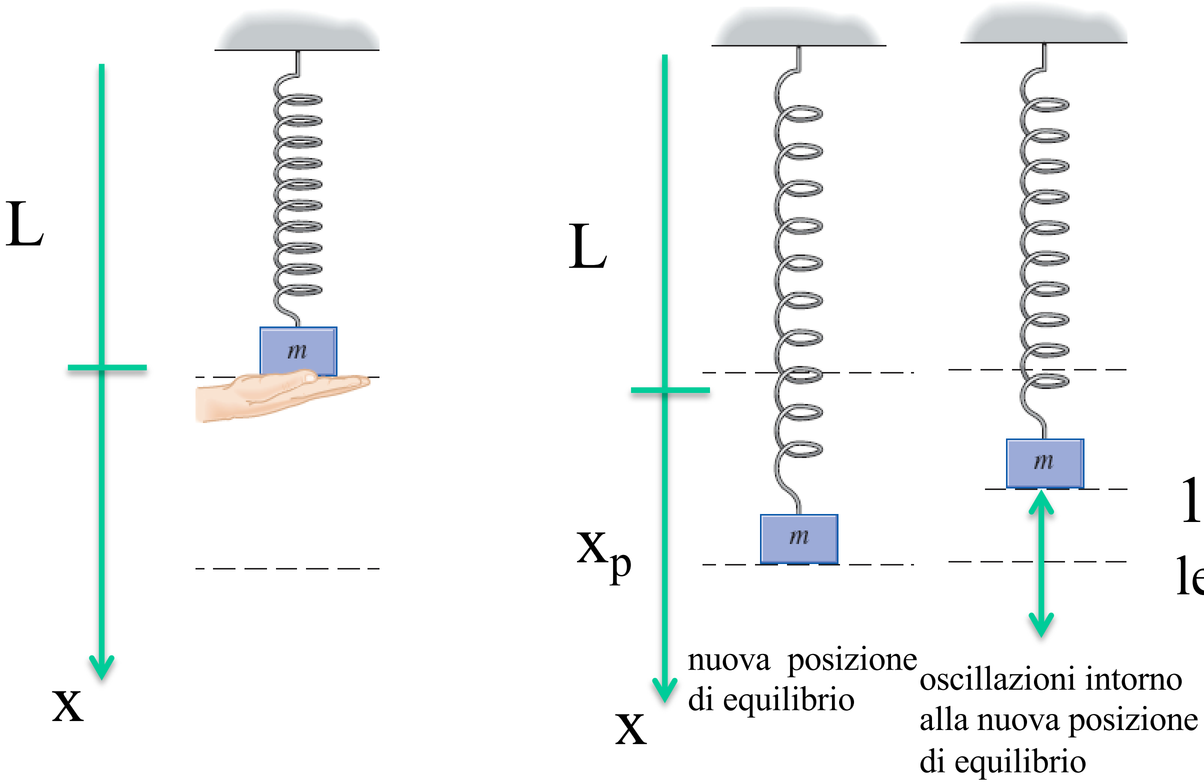
$$x_p = \frac{mg}{k} + L$$

Nuova lunghezza a riposo del sistema (massa +molla)

**Esercizio .** Una massa $M = 100$ g è appesa al soffitto con una molla di costante elastica $k = 10$ N/m . e lunghezza a riposo $L = 10$ cm. La massa viene lasciata libera da ferma al tempo $t = 0$ in prossimità del soffitto a distanza L dal soffitto. Si utilizzi un asse $X$ verticale, diretto verso il basso con l'origine nel soffitto, in modo che la condizione iniziale sia $X(0) = L$.

Determinare l'espressione algebrica della legge oraria della massa e calcolare numericamente il periodo e l'ampiezza delle oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.






$M = 100$ g
$k = 10$ N/m
lunghezza a riposo $L = 10$ cm
$X(0) = L$
$\dot{X}(0) = 0$

1)Espressione algebrica della legge oraria della massa x(t)?

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -k(\mathrm{x}-\mathrm{L}) + \mathrm{mg} = -k\left(\mathrm{x}-\mathrm{L}-\frac{mg}{k}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\,\frac{k}{m}\left(\mathrm{x}-\mathrm{L}-\frac{mg}{k}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega^2\left(\mathrm{x}-\left(\mathrm{L}+\frac{mg}{k}\right)\right) \;\; dove \;\; \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

nuova posizione di equilibrio

$$\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega^2\left(\mathrm{x} - (\mathrm{L} + \frac{mg}{k})\right) \qquad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$M = 100$ g
$k = 10$ N/m
$L = 10$ cm
$X(0) = L$
$\dot{X}(0) = 0$

D.1 x(t)?

- Cambio di variabile: $y = \mathrm{x} - (\mathrm{L} + \frac{mg}{k})$

$$\dot{y} = \dot{x} \qquad \ddot{y} = \ddot{x}$$

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -\,\omega^2 y \qquad \rightarrow \mathrm{y(t)} = \mathrm{A}\cos(\omega t + \phi)$$

$$\Longrightarrow\ x(t) = y(t) + L + \frac{Mg}{k} \quad = A\cos(\omega t + \phi) + L + \frac{Mg}{k}$$

- Condizioni iniziali:

$$\dot{x}(0) = 0 \qquad \Rightarrow -\,\omega A\sin(\phi) = 0 \qquad \Rightarrow \phi = 0$$

$$x(0) = L \qquad = A\cos\,(\phi = 0) + L + \frac{Mg}{k} \qquad \Rightarrow \mathrm{A} = -\frac{Mg}{k}$$

$$R.1 \Longrightarrow\ x(t) = -\frac{Mg}{k}\cos(\omega t) + L + \frac{Mg}{k} = \frac{Mg}{k}(1 - \cos(\omega t)) + \mathrm{L}$$

nota: la massa oscilla attorno $L + \frac{Mg}{k}$ e l'ampiezza dell'oscillazione è $\frac{Mg}{k}$

D.2 Calcolare numericamente il periodo attorno alla posizione di equilibrio stabile.

$$\ddot{x} = -\frac{k}{M}(x - L) + g = \frac{d^2}{dt^2}\left\{\left(\frac{Mg}{k}\right)(1 - \cos(\omega t)) + L\right\}$$

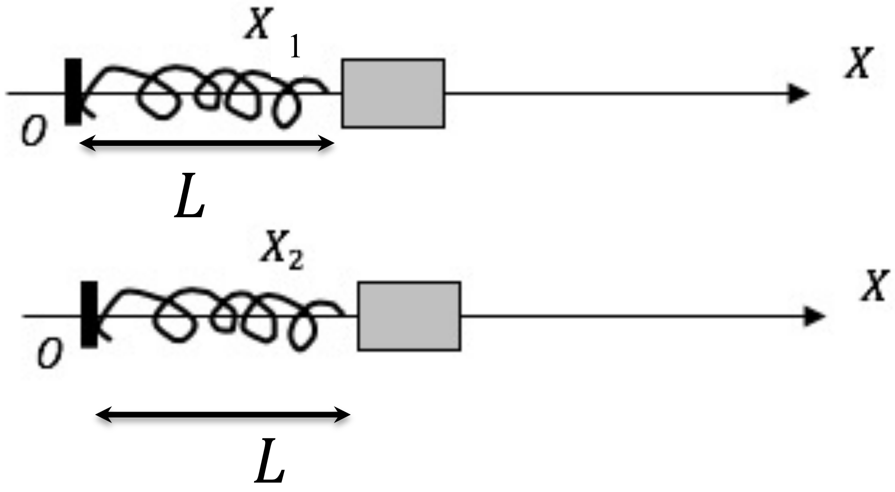
$$-\frac{k}{M}\left(x - (L + \frac{Mg}{k})\right) = \omega^2 \left(\frac{Mg}{k}\right) \cos(\omega t)$$

- Usando le condizioni iniziali $(X(0) = L)$ $a\ t = 0$

$$\frac{k}{M}\left(\left(L + \frac{Mg}{k}\right) - L\right) = \omega^2 \left(\frac{Mg}{k}\right)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{M} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

**Esercizio**. Due masse identiche $m$ sono attaccate a due molle identiche ideali (costante $k$, lunghezza a riposo $L$, massa nulla indeformabili) su due guide parallele.




La prima massa (coordinata $X_1(t)$) viene posta ferma a $t = 0$ in $X = 0$; la seconda (coordinata $X_2(t)$) viene posta ferma in $X = 0$ nell'istante in cui per la prima è trascorso mezzo periodo cioè al tempo $t = T/2 = \pi/\omega$.

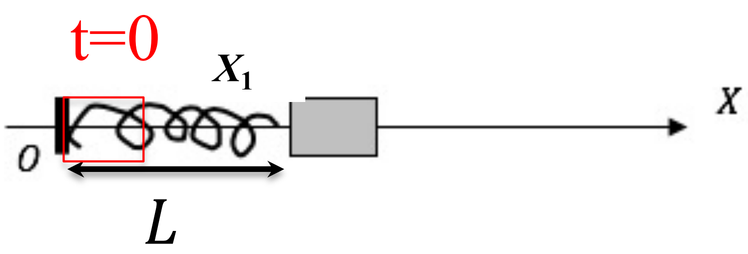
(1)Trovare le leggi orarie delle due masse
(2) riportare le leggi orarie in forma grafica
(3)Determinare gli istanti di tempo in cui le masse occupano la stessa posizione

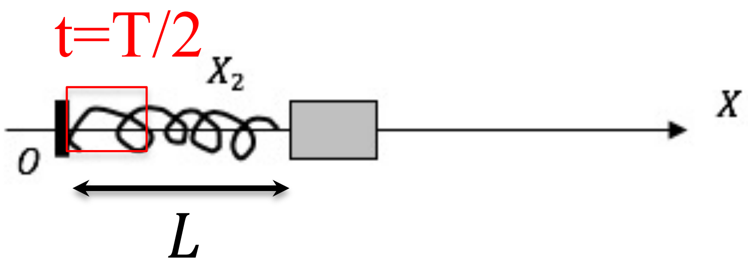
La prima massa (coordinata $X_1(t)$) viene posta ferma a $t = 0$ in $X = 0$

La prima molla a t=0 è completamente compressa

la seconda (coordinata $X_2(t)$) viene posta ferma in $X = 0$ nell'istante in cui per la prima è trascorso <u>mezzo periodo</u> cioè al tempo $t = T/2 = \pi/\omega$.

La seconda viene compressa a t=T/2



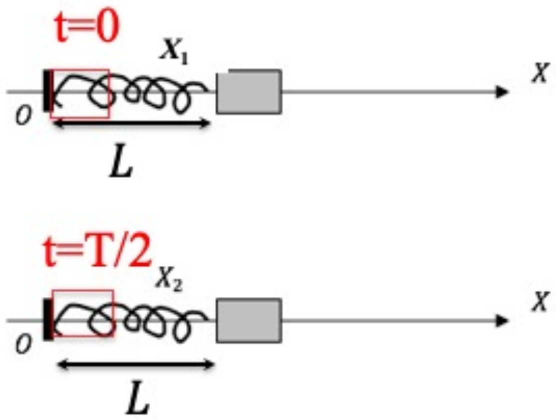




- Se sono compresse di L e L=lunghezza a riposo della molla

  - mi aspetto che oscilleranno attorno alla posizione di equilibrio (L) di $\pm$ L

- quindi le due molle avranno
  - lunghezza max 2L
  - lunghezza min 0

## Soluzione




Per la prima molla

$-k(x-L) = m\ddot{x}$

cambio di variabile $x-L=y$ $\quad \dot{y}=\dot{x},\ \ddot{y}=\ddot{x}$

$-ky = m\ddot{y}$ $\quad$ sol generale $y(t)=A(\cos(\omega t+\phi))$

Condizioni iniziali $\begin{cases} x_1(0)=0 \\ \dot{x}_1(0)=0 \end{cases}$ $\quad \left.\begin{matrix} y_1(0)=(x_1(0)-L)=-L \\ \dot{y}_1(0)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ per $t=0$ $\begin{cases} A\cos\phi=-L \\ -\omega A\sin\phi=0 \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} -\omega A\sin\phi=0 \Rightarrow \phi=0 \\ A\cos(0)=-L \quad A=-L \end{matrix}\right\}$ per cui $y_1(t)=x_1(t)-L=-L\cos\omega t$

$\Rightarrow x_1(t)=L(1-\cos\omega t)$

La seconda viene posta ferma in $X=0$ nell'istante in cui per la prima è trascorso <u>mezzo periodo</u> cioè al tempo $t=T/2=\pi/\omega$.

La seconda molla soddisfa la stessa equazione

ma $t'=t-T/2=t-\pi/\omega$ $\qquad$ per cui per $t>\pi/\omega$

$x_2(t)=L(1-\cos(\omega t-\pi))=L(1+\cos\omega t)$

In base alle condizioni iniziali si ha:

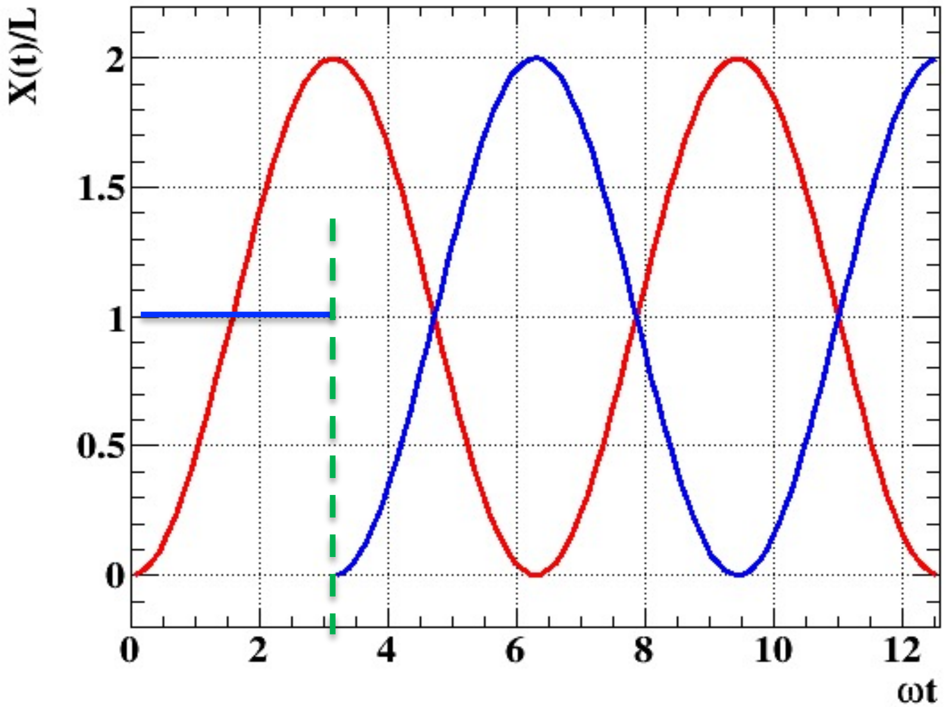
$$\begin{cases} X_1(t>0) = L(1-\cos(\omega t)) \\ X_2(t) = L\left(1-\cos\left(\omega(t-\pi/\omega)\right)\right) = L(1+\cos(\omega t)) per\ t > \pi/\omega \\ X_2(t) = L \quad per\ 0 < t < \pi/\omega \end{cases}$$

Gli incroci si verificano dall'inizio dell'oscillazione della seconda, quando:

$$L - L\cos(\omega t) = L + L\cos(\omega t)$$

$$\Longrightarrow 2\cos(\omega t) = 0$$

$$\Longrightarrow \omega t = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

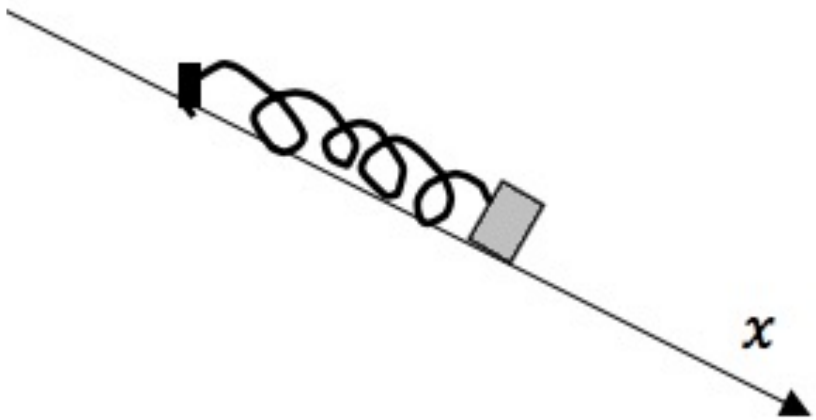



$$t' = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2} \quad \Rightarrow \omega t' = \pi$$

Quindi il primo punto di incontro, dato che il moto della seconda moll[a] inizia a $t' = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$, si ha per $t^* = \frac{3}{2\omega}$ cioè per $\omega\, t^* = \frac{3\pi}{2}$

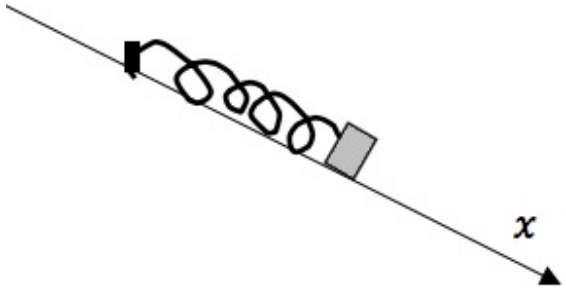
in fatti per $t^* = \frac{\pi}{2\omega} < \frac{\pi}{\omega}$

**Esercizio.** Una massa $M$ è appoggiata su un piano inclinato di un angolo $\theta$, con coefficiente di attrito statico $\mu_s$ ed è connessa tramite una molla (costante elastica $k$ e lunghezza a riposo $L$) ad un perno. Determinare le condizioni sull'allungamento della molla che consentono alla massa di restare in equilibrio.



Indicando con $F_s$ la componente $x$ della forza di attrito statico e con $\vec{N}$ la reazione normale al piano l'equazione del moto in condizioni di equilibrio risulta:

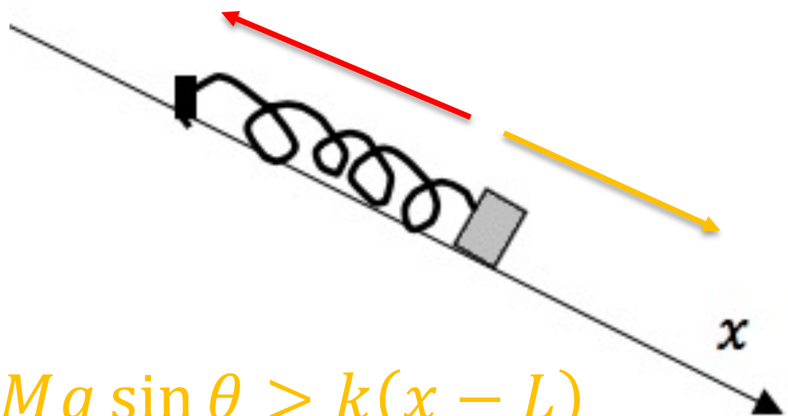
$$-k(x-L)+F_s+Mg\sin\theta=0$$



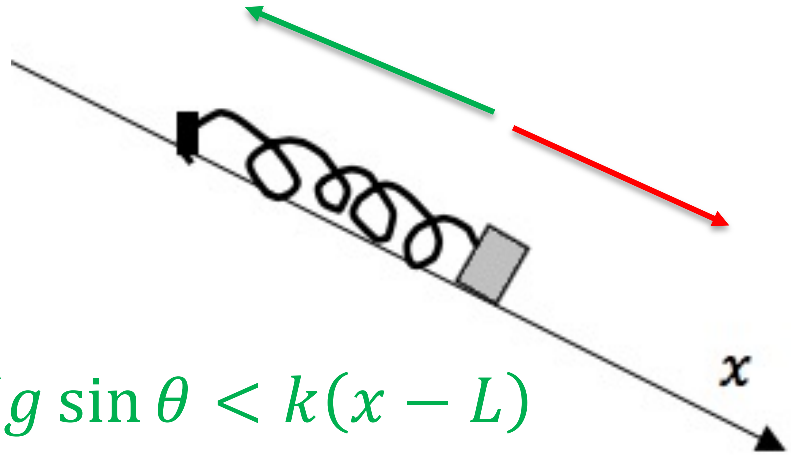

da cui

$$|k(x-L)-Mg\sin\theta|=\left|\vec{F_s}\right|\leq\mu_s|N|=\mu_s Mg\cos\theta$$

Il modulo è necessario, perché se $Mg\sin\theta>k(x-L)$ la forza $F_s$ è verso l'alto (ostacola la discesa), mentre se $Mg\sin\theta<k(x-L)$ la forza $F_s$ è verso il basso (ostacola la risalita).

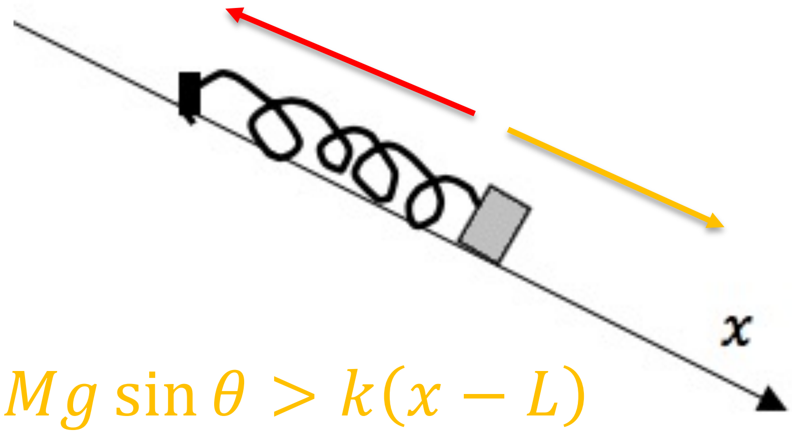



$Mg\sin\theta>k(x-L)$




$Mg\sin\theta<k(x-L)$

Determinare le condizioni sull'allungamento della molla che consentono alla massa di restare in equilibrio.




$Mg\sin\theta > k(x-L)$

Si hanno quindi due casi:

Caso *i*) $k(x-L) < Mg\sin\theta$

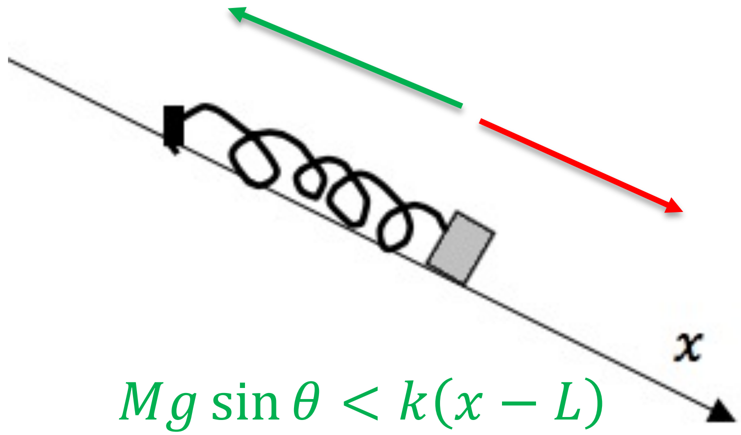
$$\Longrightarrow |k(x-L) - Mg\sin\theta| = Mg\sin\theta - k(x-L) = |F_s| \leq \mu_s Mg\cos\theta \Longrightarrow k(x-L) \geq Mg(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)$$

L'allungamento corrispondente possibile è quindi:

$$\Longrightarrow \frac{Mg\sin\theta}{k} > (x-L) \geq \frac{Mg}{k}(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)$$

Caso *i*)

$$\frac{Mg\sin\theta}{k} > (x-L) \geq \frac{Mg}{k}(\sin\theta - \mu_s cos\theta)$$




Caso *ii*) $k(x-L) > Mg\sin\theta$

$$\Longrightarrow |k(x-L) - Mg\sin\theta| = k(x-L) - Mg\sin\theta$$
$$= |F_s| \leq \mu_s Mg\cos\theta$$

$$Mg\sin\theta < k(x-L)$$

$$\Longrightarrow k(x-L) \leq Mg(\mu_s\cos\theta + \sin\theta)$$

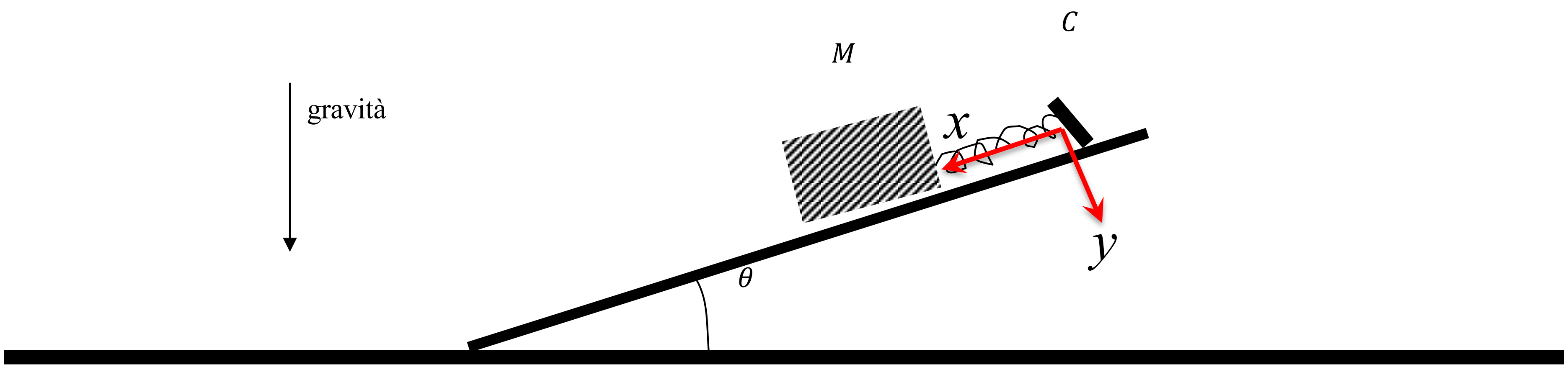
L'allungamento corrispondente è quindi:

$$\frac{Mg\sin\theta}{k} < (x-L) \leq \frac{Mg}{k}(\mu_s\cos\theta + \sin\theta)$$

Imponendo entrambe le condizioni si ottiene:

$$\frac{Mg}{k}(\sin\theta - \mu_s\cos\theta) \leq (x-L) \leq \frac{Mg}{k}(\sin\theta)$$

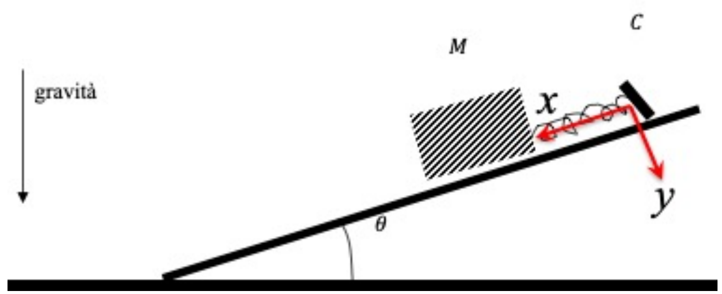
**Esercizio.**
Un blocco di massa $M = 100$ kg può muoversi senza attrito su un piano inclinato di un angolo $\theta = 30^{\text{o}}$ rispetto al piano orizzontale ed è connesso ad un chiodo $C$ tramite una molla di costante elastica $k = 200\,\text{N/m}$ e lunghezza a riposo $L = 2$ m (vedi figura). Si utilizzi un sistema di coordinate in cui l'asse $x$ abbia origine in $C$ e sia diretto in discesa lungo il piano inclinato. Per $t = 0$ la massa è ferma in $x = 0$.




Si calcoli, per $t > 0$, la legge oraria della massa ed il valore numerico del periodo delle sue oscillazioni.

L'equazione del moto lungo la direzione del piano è:

$$M\ddot{x} = -k|(x-L)| + Mg\sin\theta$$
$$= -kx + kL + Mg\sin\theta$$




dalla quale: $\ddot{x} = -\frac{k}{M}\left(x - L - \frac{M}{k}g\sin\theta\right)$

ponendo $y = x - L - \frac{M}{k}g\sin\theta$ $\quad \ddot{y} = \ddot{x} \quad \dot{y} = \dot{x} \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{k}{M}\,y$

La cui soluzione è del tipo:

$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ con $\omega = \sqrt{k/M}$

Dalle condizioni iniziali per t=0 $\Rightarrow$ x(0)=0 e $\dot{x}(0)$=0 per cui:

$\dot{y}(0) = \dot{x}(0) = 0 = -A\omega\sin(\varphi) \Longrightarrow \varphi = 0$

$y(0) = A\cos(\varphi) = x(0) - L - \frac{M}{k}g\sin\theta = -L - \frac{M}{k}g\sin\theta$

che per $\varphi$=0 fornisce $\Rightarrow A = -L - \frac{M}{k}g\sin\theta$

e quindi l'equazione del moto è

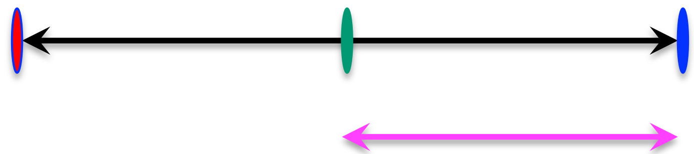
$$x(t) = y(t) + L + \frac{M}{k}g\sin\theta = -\left(L + \frac{M}{k}g\sin\theta\right)\cos(\omega t) + L + \frac{M}{k}g\sin\theta$$

La molla oscilla attorno alla posizione di equilibrio $L + \frac{M}{k}g\sin\theta$

$$x(t) = -\left(L + \frac{M}{k} g sin\theta\right)\cos(\omega t) + L + \frac{M}{k} g \sin\theta = \left(L + \frac{M}{k} g \sin\theta\right)(1 - cos\,\omega t)$$

La massa oscilla attorno alla posizione di equilibrio del sistema $\quad L + \frac{M}{k} g \sin\theta$

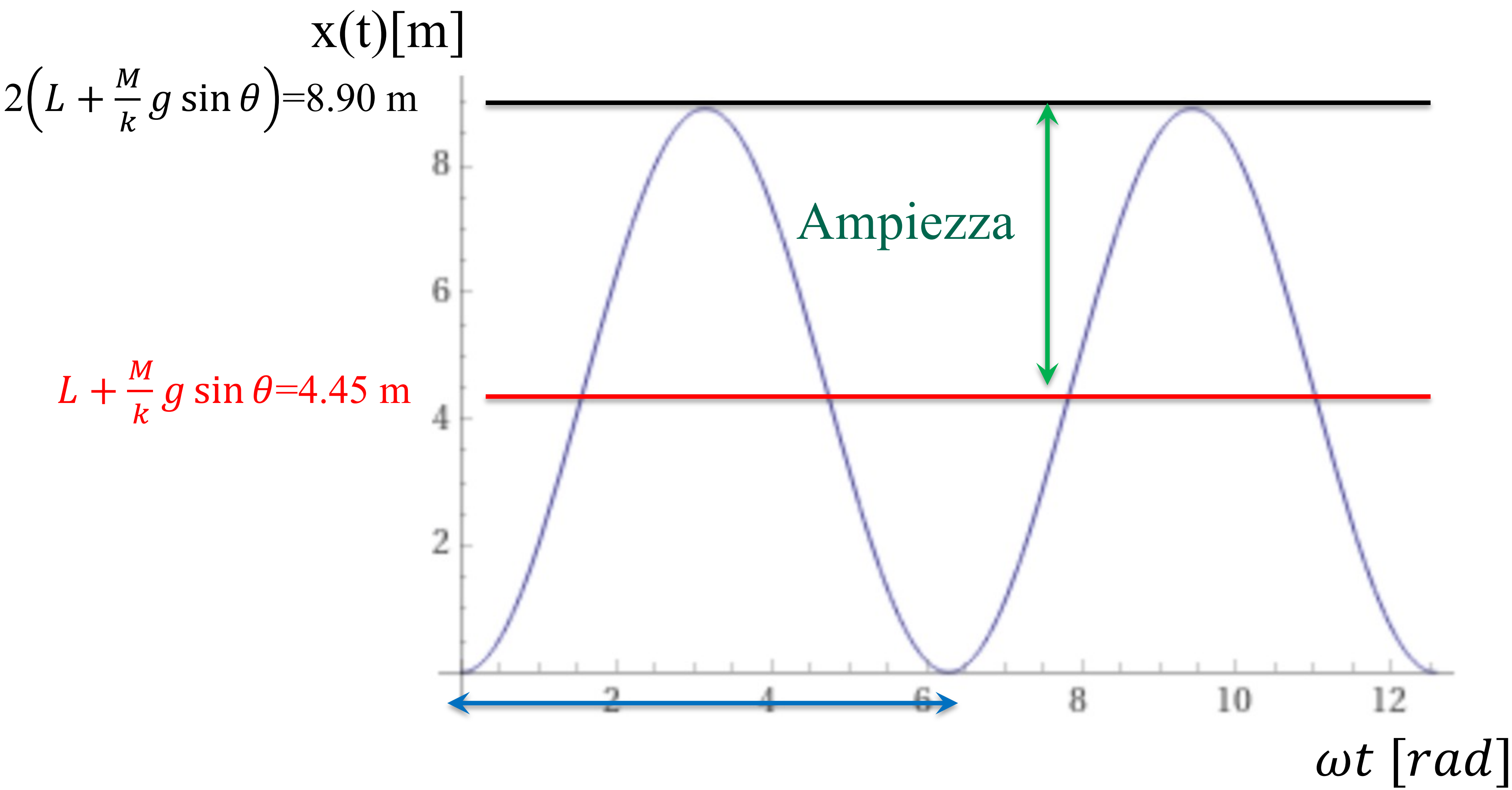
$0 \qquad L + \frac{M}{k} g \sin\theta \qquad 2\left(L + \frac{M}{k} g \sin\theta\right)$



$L + \frac{M}{k} g \sin\theta$ Ampiezza dell'oscillazione

Il periodo è chiaramente: $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$

# grafico



x(t)[m]
$2\left(L+\frac{M}{k}g\sin\theta\right)$=8.90 m
Ampiezza
$L+\frac{M}{k}g\sin\theta$=4.45 m
8
6
4
2
2
4
6
8
10
12
$\omega t\ [rad]$

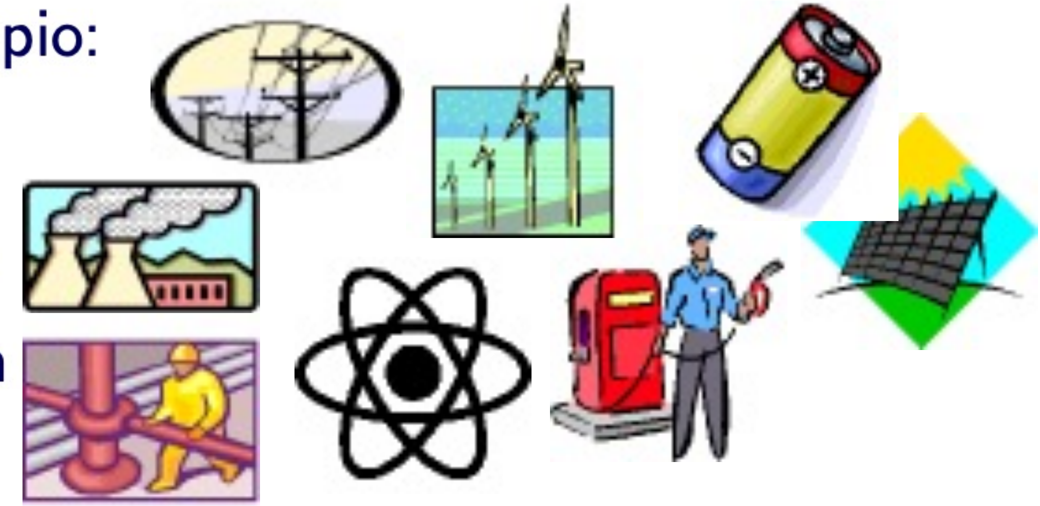
# Energia e Lavoro

- Finora abbiamo descritto il moto dei corpi (puntiformi) usando le leggi di Newton, tramite le *forze*; abbiamo scritto l'equazione del moto, determinato spostamento e velocità *in funzione del tempo*.
- E' possibile trattare i problemi dinamici in modo differente, spesso più semplice e in ogni caso più potente, tramite il concetto di *Energia*.
- L'Energia è un concetto della massima importanza in Fisica. Appare sotto varie forme, come ad esempio:

  *Energia Cinetica* $\leftrightarrow$ velocità

  *Energia Potenziale* $\leftrightarrow$ posizione

  *Energia Termica* $\leftrightarrow$ temperatura



- Possiamo definire l'Energia come *capacità di compiere un lavoro*

# Energia Cinetica

- Definizione : $\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2}$ (per un punto materiale di massa $m$).
- L'energia cinetica (e non solo) si misura in *Joule*: $1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{kg{\cdot}m^2/s^2}$

- Se ci sono più particelle nel sistema, l'energia cinetica complessiva del sistema è la somma delle energie cinetiche di tutte le particelle.

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

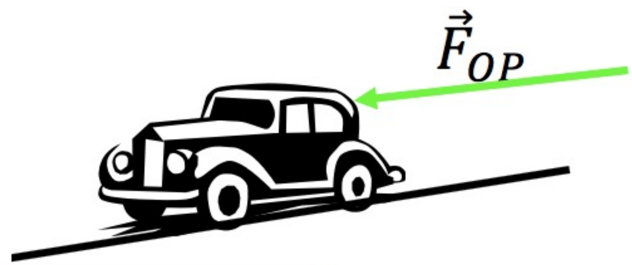
- L'energia cinetica è l'energia dovuta al moto delle particelle ed è presente *anche a livello microscopico*: l'energia "termica" o "interna" della Termodinamica in un gas è energia cinetica di atomi o molecole!

Notare che $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v} \cdot \vec{v})$.

# Esempi

Cosa è necessario per portare un'automobilina (giocattolo) ad una velocità $\vec{V}$ partendo da ferma?

1) Possiamo spingerla con una forza esterna $\vec{F}_{OP}$ ad es. costante per un tempo , il cui impulso fornisce la quantità di moto ( $M\vec{V}$) richiesta: $\vec{P}_{finale} = \vec{P}_{iniziale} + \vec{F}_{OP}\Delta t = M\vec{V}$




2) Se la macchinina ha un motore, le forze del motore possono far muovere la macchinina, purché fra le ruote ed il pavimento ci sia attrito.
Infatti **le forze del motore sono interne, per cui la forza totale del motore è nulla:** $\vec{F}_{motore} = \vec{0}$ e quindi non possono cambiare la quantità di moto.

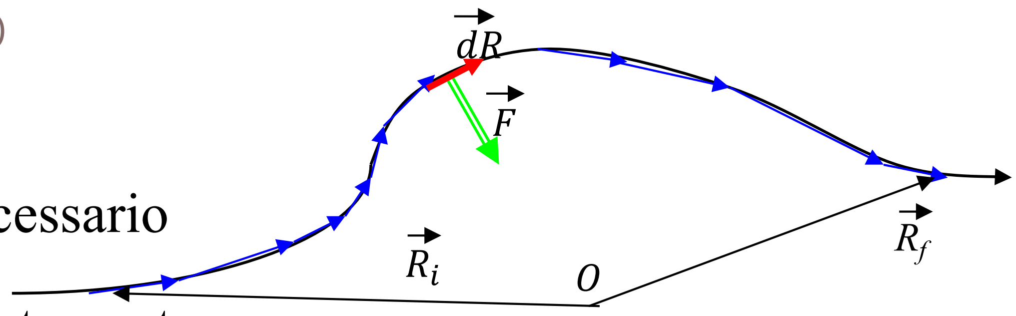

# Energia Cinetica e Lavoro

- Abbiamo capito che sono le forze a far variare l'energia cinetica

qual'è la relazione che lega la variazione di energia cinetica tra due punti nello spazio di un sistema ( ad es. un punto materiale di massa m?)

- Definiamo per prima cosa il lavoro $L$ compiuto dalla forza $\vec{F}$ *agente sul* punto materiale quando esso si **sposta lungo la curva γ *dalla posizione* $\vec{R}_{\mathrm{i}}$ e la posizione $\vec{R}_{\mathrm{f}}$**

$$L_{\vec{R}_{\mathrm{i}} \to \vec{R}_{\mathrm{f}}} \equiv \int_{\vec{R}_{\mathrm{i}}\ (\text{linea } \gamma)}^{\vec{R}_{\mathrm{f}}} \vec{F} \cdot d\vec{\mathrm{R}}$$




- per ogni punto della linea $\gamma$ è necessario
  - esprimere il vettore dello spostamento infinitesimo $d\vec{R}$
  - conoscere il vettore della forza $\vec{F}$ lungo la curva
  - calcolare il prodotto scalare $dL = \vec{F} \cdot d\vec{R}$

# Teorema dell'energia cinetica

- **Un importante teorema detto teorema delle forze vive o dell'energia cinetica**
  - afferma che il lavoro effettuato *dalla risultante delle forze $\vec{F}$ agenti su un punto materiale di massa inerziale m* (o per un *sistema) tra $\vec{R}_{\mathrm{i}}$ (indicato con i) e $\vec{R}_{\mathrm{f}}$ (indicato con f ) è uguale alla variazione dell'energia cinetica del punto materiale o del sistema) tra $\vec{R}_{\mathrm{i}}$ e $\vec{R}_{\mathrm{f}}$ (i e f)

$$K_f - K_i = \quad L_{if} \equiv \int_{i\ (\text{linea}\ \gamma)}^{f} \vec{F} \cdot d\vec{R}$$

- Se il lavoro è
  - positivo, si ha aumento dell'energia cinetica
  - negativo, si ha diminuzione dell'energia cinetica

Nel seguito il lavoro sarà indicato semplicemente con L in tutti i casi non ambigui

- $L$ è una grandezza fisica scalare
- $[L] = \mathrm{Nm} = \mathrm{J}$ **(Joule)**

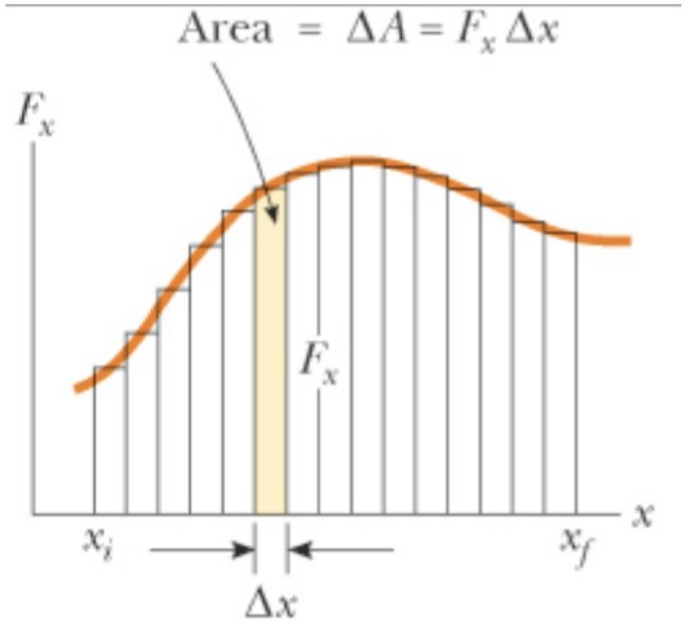
*lo vedremo più avanti

# Lavoro, in generale

$$L_{\vec{R}_i \to \vec{R}_f} \equiv \int_{\vec{R}_i \text{ (linea } \gamma)}^{\vec{R}_f} \vec{F} \cdot d\vec{R}$$

- In generale il lavoro dipende dalla traiettoria seguita dal punto

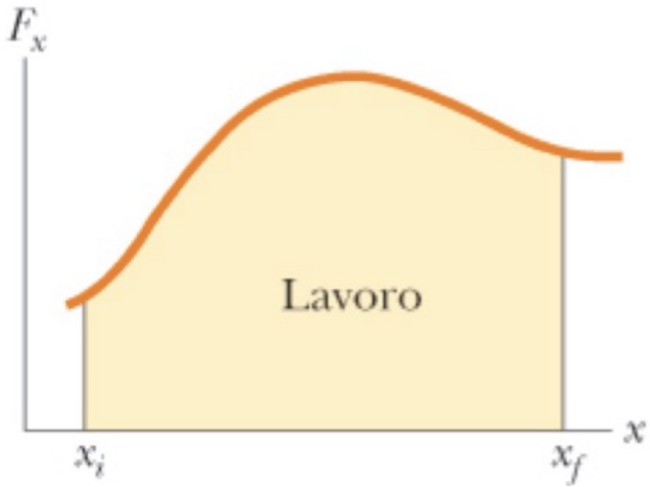
- Matematicamente il lavoro è un integrale di linea, ovvero il limite per $d\vec{R}$ tendente a 0 della somma di tanti contributi $dL = \vec{F} \cdot d\vec{R}$ piccoli, calcolati lungo la traiettoria.




Nell'esempio accanto, il calcolo e l'interpretazione geometrica del lavoro in coordinate cartesiane per

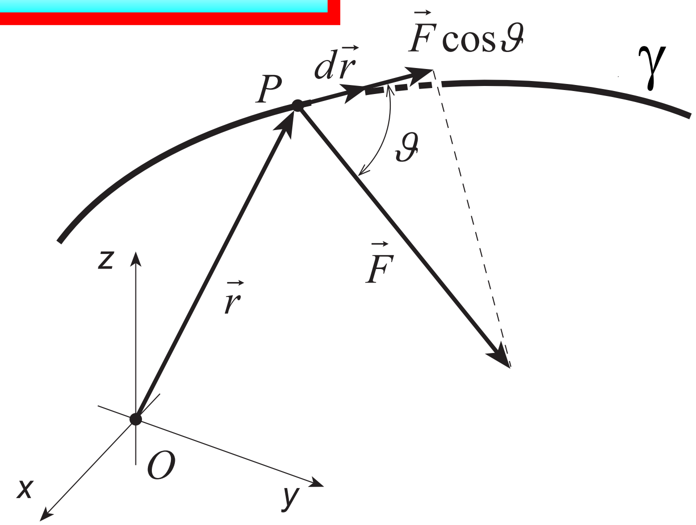
$$\vec{F} = F_x(x)\hat{\imath} \qquad \overrightarrow{dR} = dx\hat{\imath}$$

$$L_{if} \equiv \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)dx$$



# Lavoro elementare

- Definiamo il lavoro elementare di una forza




$$dL \equiv \vec{F}\cdot d\vec{r} = F dr \cos\vartheta$$

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(\vec{F}_t + \vec{F}_n\right)\cdot d\vec{r} = \left(\vec{F}_t + \vec{F}_n\right)\cdot\left(\hat{t}\, ds\right)$$

$$dL = F_t\, ds$$

I lavoro della forza si può scrivere in termini di tale componente:

$$L_{if} \equiv \int_{s_i}^{s_f} F_t(s)ds$$

- Ovviamente il ***prodotto scalare*** può essere calcolato anche in termini delle coordinate cartesiane

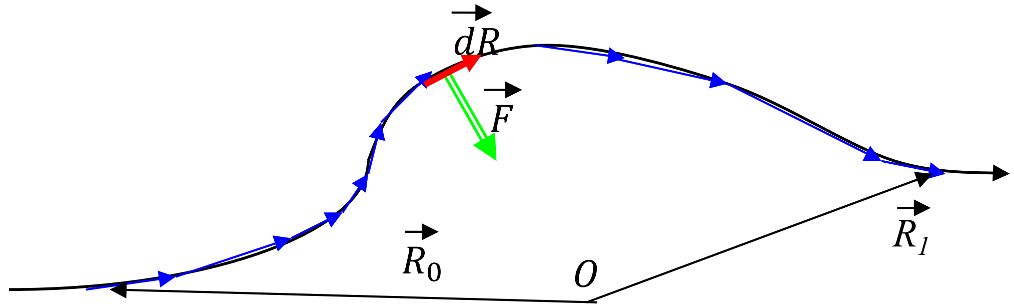
$$dL = (F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}) \cdot (\mathrm{dx}\,\hat{\imath} + \mathrm{dy}\hat{\jmath} + \mathrm{dz}\hat{k}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

dove $\quad (dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}) = (v_x(t)\hat{\imath} + v_y(t)\hat{\jmath} + v_z(t)\hat{k}\,)\, dt$

se conosciamo le leggi orarie !

# Teorema dell'energia cinetica e sua dimostrazione

Il lavoro effettuato *dalla risultante delle forze $\vec{F}$ agenti su un punto materiale di massa inerziale M* (o per un *sistema di punti materiali) quando esso si sposta da $\vec{R}_0$ a $\vec{R}_1$ è uguale alla variazione dell'energia cinetica del punto materiale (o del sistema) tra $\vec{R}_0$ e $\vec{R}_1$




- Dimostrazione eseguita solo per il punto materiale
  - il teorema vale anche per i sistemi di punti materiali

$$\sum \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} \vec{F}_i \cdot d\vec{R} = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} \left( \sum \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{R} = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} M\vec{a} \cdot d\vec{R} = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} M \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{R} =$$

$$= \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} M \frac{d\vec{R}}{dt} \cdot d\vec{V} = \int_{V_0}^{V_1} MV dV = \left[ M \frac{V^2}{2} \right]_{V_0}^{V_1} = \frac{M}{2} \left( V_1^2 - V_0^2 \right)$$

# Teorema dell’energia cinetica e sua dimostrazione

- Dimostrazione alternativa:

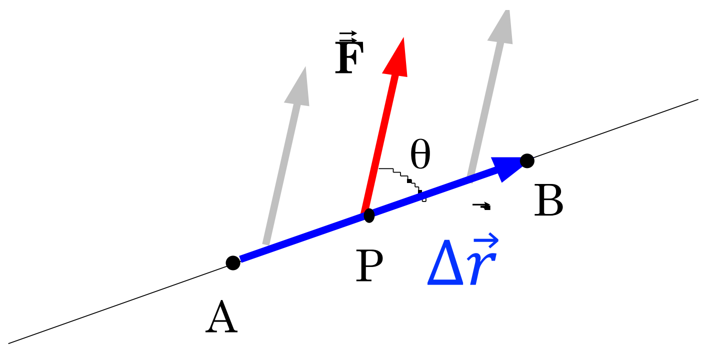
$$\sum \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} \vec{F}_i \cdot d\vec{R} = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} \left( \sum \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{R} = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} M\vec{a} \cdot d\vec{R} = \int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_1} M \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{R} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} M \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} dt = \int_{t_0}^{t_1} M \frac{d}{dt} \left( \frac{V^2}{2} \right) dt = \left[ M \frac{V^2}{2} \right]_{t_0}^{t_1} = \frac{M}{2} \left( V^2(t_1) - V^2(t_0) \right)$$

# Lavoro svolto da una forza costante

- Sia **F** una forza ***costante*** in direzione e modulo, e supponiamo che il punto materiale P a cui è applicata, si muova dalla posizione A alla posizione B percorrendo il segmento AB. Indichiamo con $\Delta\vec{r}$ il segmento orientato AB.

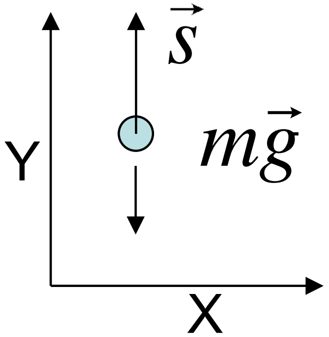
- Si definisce lavoro (**grandezza fisica scalare**) **eseguito dalla forza F** sul punto materiale P che percorre lo spostamento $\Delta\vec{r}$ , il prodotto scalare tra la forza e lo spostamento:




$$L_{AB} = F\Delta r \cos\theta$$

$$da\ L_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

# Caso forze costanti: Lavoro della gravità nelle vicinanze della superficie terrestre




$$L = L_{if} = m\vec{g}\cdot\vec{s} = -mg(y_f - h_i) = \begin{cases} < 0; & y_f > y_i \\ > 0; & y_f < y_i \\ = 0; & y_f = y_i \end{cases}$$


pallina di massa m che viene lanciata in aria verticalmente con una velocità iniziale $v_0$

× **lavoro** fatto dalla forza peso [ in salita ]:

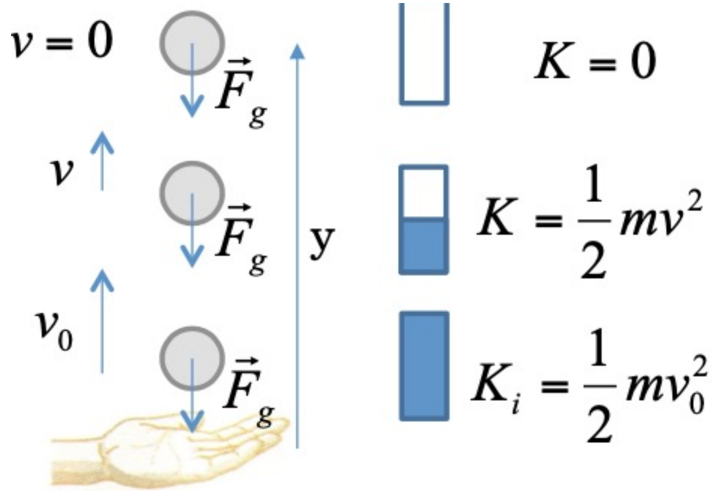
$$L_g = \vec{F}_g \cdot \vec{s} = mg\, s\cos(180^0) = -mg\, s$$

diminuzione dell'energia cinetica

dopo avere raggiunto la **massima elevazione** il corpo cade:

× **lavoro** fatto dalla forza peso [ in discesa ]:

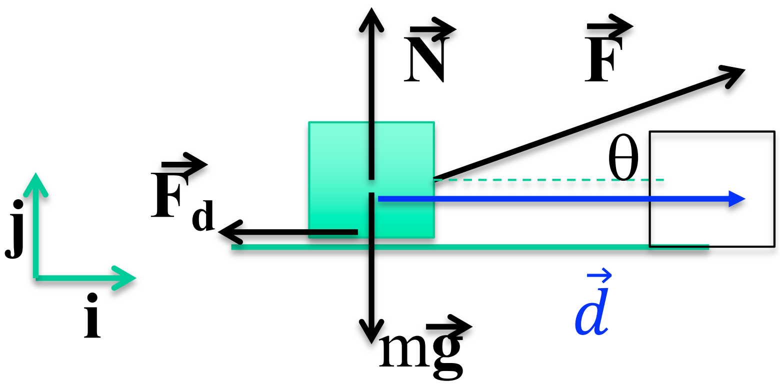
$$L_g = \vec{F}_g \cdot \vec{s} = mg\, s\cos(0^0) = +mg\, s$$




Il segno positivo sta ad indicare che la forza gravitazionale trasferisce energia +mgs alla particella sotto forma di energia cinetica

# Caso forze costanti: Esempio

- Blocco trainato sul piano orizzontale scabro a **velocita costante** per un tratto $\vec{\mathbf{d}} = \mathrm{d}\,\boldsymbol{i}$




Lavoro di F: $L_F = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}} = F\, d \cos\theta \quad (>0)$

Lavoro di N: $L_N = \vec{\mathbf{N}} \cdot \vec{\mathbf{d}} = 0$

Lavoro di mg: $L_{mg} = m\vec{\mathbf{g}} \cdot \vec{\mathbf{d}} = 0$

Lavoro di $F_d$: $L_d = \vec{\mathbf{F}}_d \cdot \vec{\mathbf{d}} = -F_d\, d = -\mu_d\, N\, d \quad (<0)$

***Ma il moto è a v costante*** $\Rightarrow$ $\boldsymbol{a_x = 0!}$

$$-F_d + F\cos\theta = -N\mu_d + F\cos\theta = ma_x = 0$$

Questo implica per il lavoro che $(-N\mu_d + F\cos\theta)\, d = 0 = L_F + L_d$

# Note sul lavoro

**Lavoro:**

- della **gravità alla superficie terrestre**

$$L_{M\vec{g}} = -Mg\Delta h$$

- delle **forze vincolari (normali o con vincolo fisso)**

$L_{\vec{N}} = 0 \ (\vec{F} \perp d\vec{r})$

sempre

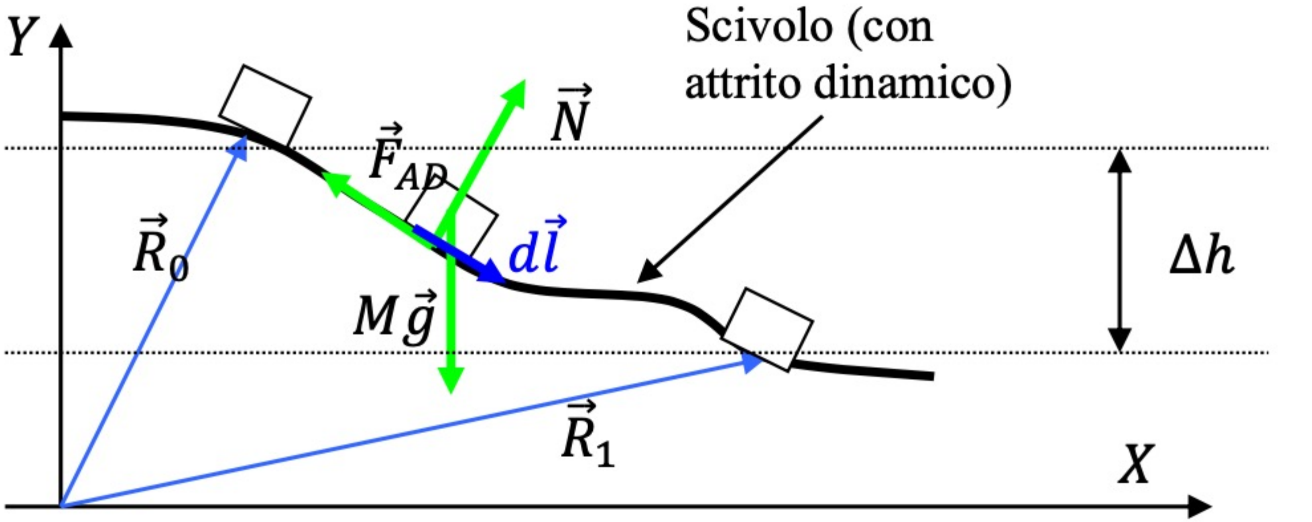
- **dell'attrito dinamico**

$$L_{\vec{F}_{AD}} = \int -\mu_D \left|\vec{N}\right| |d\vec{r}| < 0$$

sempre

- **dell'attrito statico** $L_{\vec{F}_{AS}} = 0$ sempre

(infatti se l'attrito è statico la velocità del punto di applicazione della forza è nulla)




- $L_{\vec{N}} = 0$: le forze vincolari compiono lavoro nullo

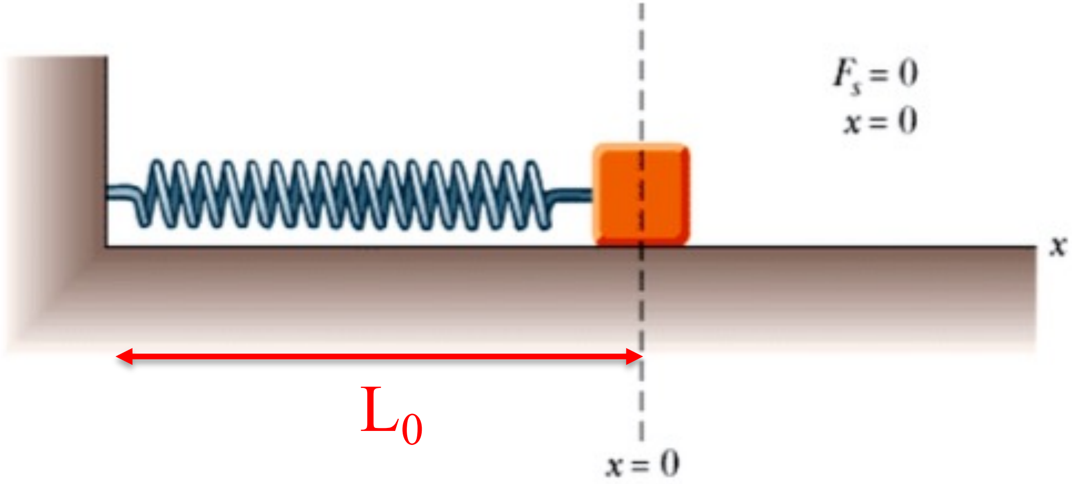
- $L_{\vec{F}_{AD}} = \int_\gamma \; -\mu_D |\vec{N}||d\vec{\ell}| \leq 0$
  sempre (infatti $\vec{F}_{AD}$ è diretta come $-\hat{V} \Longrightarrow \vec{F}_{AD} \cdot d\vec{\ell} = \vec{F}_{AD} \cdot \vec{V}dt = -|\vec{F}_{AD}||\vec{V}|dt$), ma il risultato varia da caso a caso
- $L_{M\vec{g}} = \int_{\vec{R}_0 (linea\ \gamma)}^{\vec{R}_1} M\vec{g} \cdot d\vec{\ell} = M\vec{g} \cdot (\vec{R}_1 - \vec{R}_0) = -Mg(Y_1 - Y_0) \Longrightarrow$

$$L_{M\vec{g}} = -Mg\Delta h$$

# Lavoro svolto da una molla

indichiamo $L_0$ la lunghezza a riposo della molla

poniamo l'origine del SDR x=0, a distanza $L_0$ dalla parete




Forza elastica

$$\vec{F} = -kx\hat{\imath} \qquad F_x = -\mathrm{kx}$$

il segno negativo significa che la forza è sempre rivolta in senso contrario a quello dello spostamento dalla posizione di equilibrio x=0

La forza tende quindi sempre a riportare la molla alla posizione di equilibrio e per questo viene chiamata Forza di Richiamo

*x>0* la forza è negativa,

*x<0* la forza è positiva,

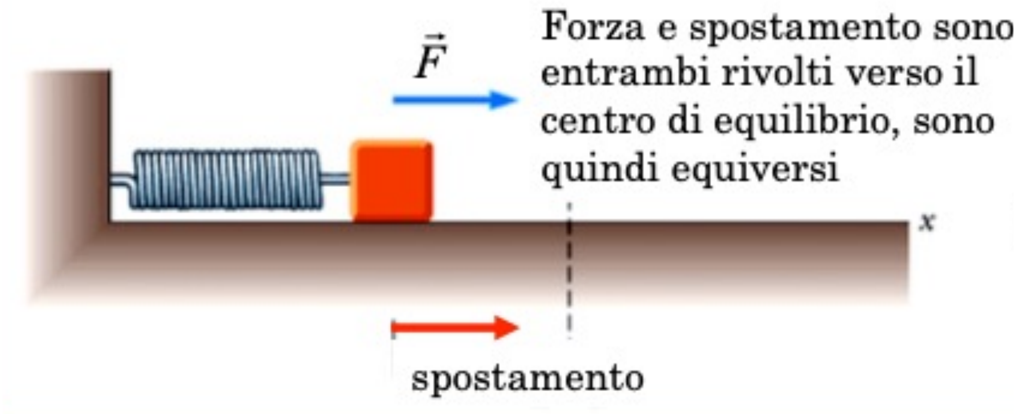
*x=0* la molla non è deformata e la forza è nulla

# Lavoro svolto da una molla(2)

colleghiamo un corpo poggiato su un piano orizzontale alla molla
spostiamolo di una distanza $x_{max}$
*lasciamolo libero*
esso comincerà ad oscillare tra $+x_{max}$ e $-x_{max}$ passando per $x=0$

Una volta lasciato libero
consideriamo due posizioni $x_i$ e $x_f \in [-x_{max}, x_{max}]$

Il lavoro compiuto dalla molla tra le due posizioni
è dato da

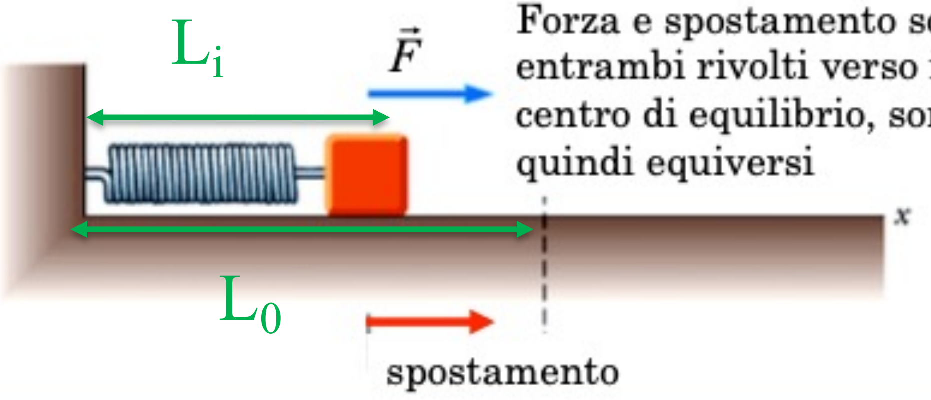



$$L_{x_i x_f} \equiv \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{x_i}^{x_f} kx dx = -\frac{k}{2}({x_f}^2 - {x_i}^2)$$

# Lavoro svolto da una molla(2)

$$L_{x_i x_f} = \frac{k}{2}{x_\mathrm{i}}^2 - \frac{k}{2}{x_\mathrm{f}}^2$$

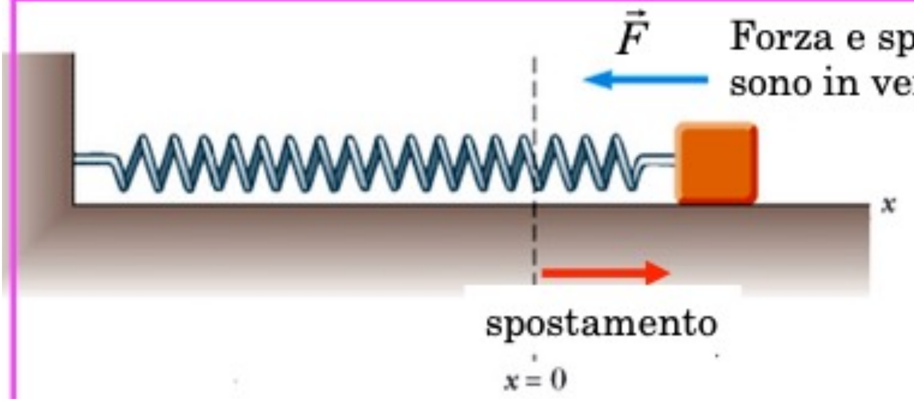
Nota: $x_\mathrm{i}$, $x_\mathrm{f}$ sono gli allungamenti della molla iniziali e finali
$x_\mathrm{i} = L_\mathrm{i} - L_0$ e $x_\mathrm{f} = L_\mathrm{f} - L_0$




Forza e spostamento sono entrambi rivolti verso il centro di equilibrio, sono quindi equiversi

Se $x_i = -x_{max}$ ed $x_f = 0$

$$L_{-x_{\max}0} = -\int_{-x_{\max}}^{0} kx\,dx = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 > 0$$




Forza e spostamento sono in verso opposto

Se $x_i = 0$ ed $x_f = x_{max}$

$$L_{0x_{\max}} = -\int_{0}^{x_{\max}} kx\,dx = -\frac{1}{2}kx_{\max}^2 < 0$$

**Il lavoro compiuto dalla molla per andare da $-x_{max}$ a $+x_{max}$ è quindi nullo!**

$$L = -\int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} kx\,dx = -\frac{1}{2}kx_{\max}^2 + \frac{1}{2}kx_{\max}^2 = 0$$

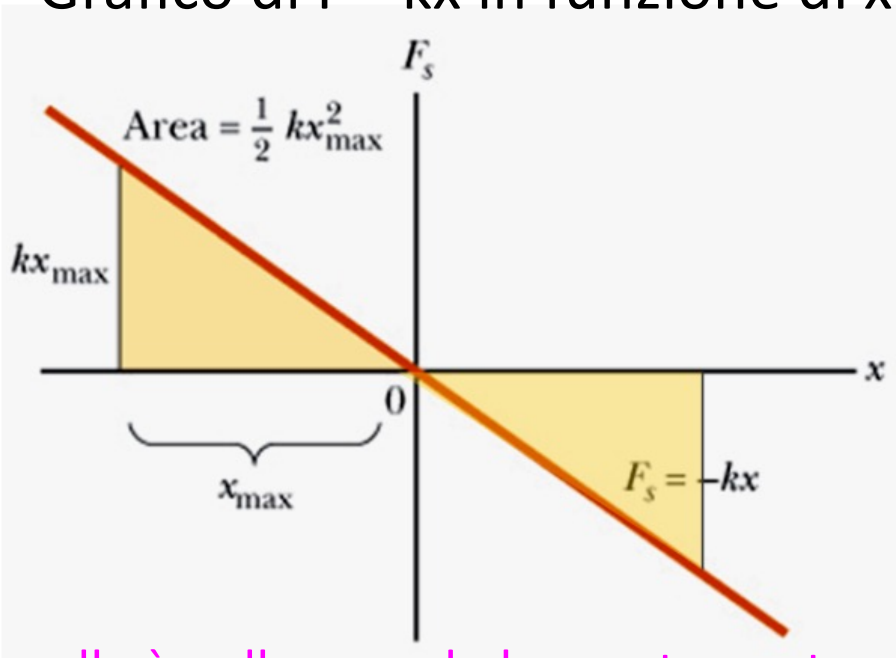
# Lavoro svolto da una molla(3)

**Il lavoro compiuto dalla molla per andare da $-x_{max}$ a $+x_{max}$ è quindi nullo!**

$$L = -\int_{-x_{max}}^{x_{max}} kx\,dx = -\frac{1}{2}kx_{max}^2 + \frac{1}{2}kx_{max}^2 = 0$$

L'area in giallino è il lavoro della forza di richiamo F della molla durante lo spostamento da $-x_{max}$ a $+x_{max}$
le due aree triangolari
( quella corrispondente al lavoro da $-x_{max}$ a 0 e quella da 0 a $+x_{max}$ ) si annullano a vicenda
il lavoro è proprio la somma di queste due aree (e tenendo conto dei segni )
il lavoro è nullo

Grafico di F=-kx in funzione di x




Il lavoro svolto dalla forza d richiamo della molla è nullo quando lo spostamento iniziale rispetto all'equilibrio e quello finale coincidano

# Esempio Forza peso: L= $-mg(y_f - h_i)$

- ***Problema(1):*** il corpo cade sotto l'azione della forza peso iniziando il moto a velocità nulla ( $v_i$=0) alla quota $y_f$ avrà una velocita pari a

Se parte da fermo

$$\frac{1}{2} m\, v_f^2 - \frac{1}{2} m\, v_i^2 = \frac{1}{2} m\, v_f^2 = -mg\left(y_f - y_i\right) = mgh$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{2gh}$$

- ***Problema(2):*** Se il corpo viene lanciato lungo la verticale con velocità iniziale $v_0$ raggiungerà una quota massima $y_f$ pari a:

$$\frac{1}{2} m\, v_f^2 - \frac{1}{2} m\, v_i^2 = -\frac{1}{2} m\, v_i^2 = -mg\left(y_f - y_i\right) = -mgh$$

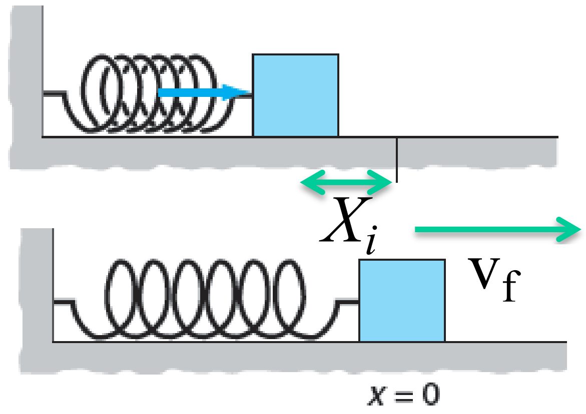
$$\Rightarrow h = \frac{v_i^2}{2g}$$

## Esempi forza elastica $L_{x_i x_f} = \frac{k}{2}{x_\mathrm{i}}^2 - \frac{k}{2}{x_\mathrm{f}}^2$

- ***Problema(1):*** Un corpo di massa inerziale *m* giace in quiete su un piano orizzontale liscio ed è poggiato ad una molla compressa di $x_i$, che all'istante t=0 viene lasciata libera di espandersi. Calcolare la velocità del corpo quando è in x=0.

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$L_{molla} = \frac{1}{2}k\left(X_i^2\right) ; \qquad v_f = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x_0$$

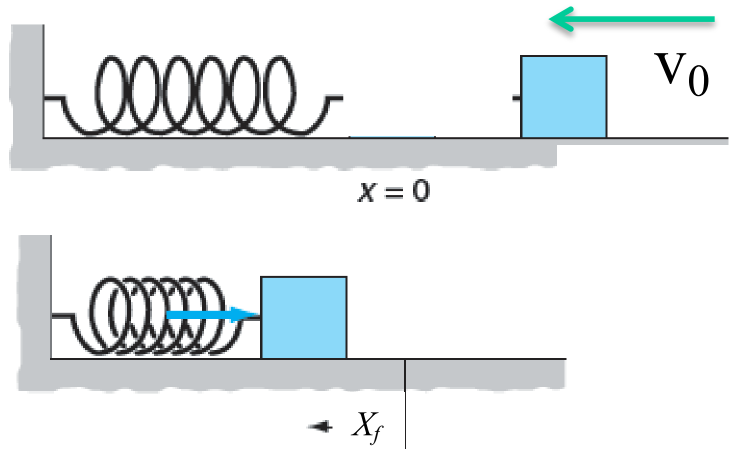



- ***Problema(2):*** Un corpo di massa inerziale *m* si muove con velocità iniziale $v_0$ su un piano orizzontale liscio contro una molla di costante elastica k. Determinare $x_f$ la coordinata di arresto del corpo

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

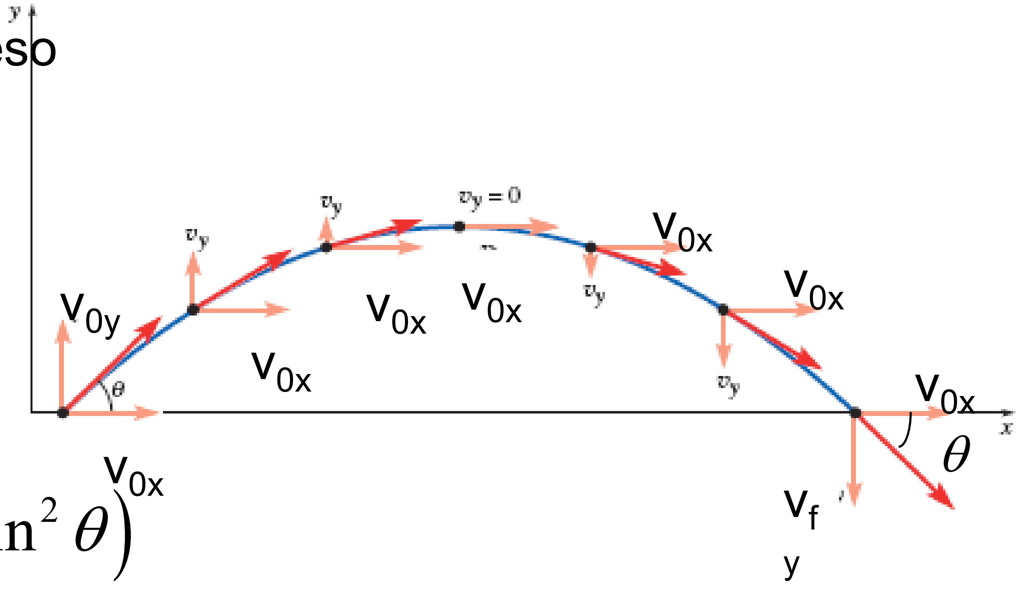
$$L_{molla} = -\frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right) = -\frac{1}{2}k\left(x_f^2\right)$$

$$x_f = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0$$



## Esempi

Moto parabolico sotto l'azione della F peso




$$L_{peso} = -mg(y_f - y_i) = -mgy$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m\left(v_y^2 - v_0^2 \sin^2\theta\right)$$

La componente "x" della velocita e`
costante e nella differenza si annulla

Il teorema delle Forze vive dice che :

$$-2gy = v_y^2 - (v_0 \sin\theta)^2 \Rightarrow v_y^2 = (v_0 \sin\theta)^2 - 2gy$$

Formula ricavata con la cinematica

$$2\, a_y\,(y(t)-y_0) = v_y(t)^2 - v_{0y}^2$$