2024/06/03

1. Nel gioco del Lotto ci sono 90 numeri da estrarre, si estrae sequenzialmente senza rimettere i numeri all'interno dell'urna una volta estratti.

(a) Calcolare la probabilità che esca 6 alla prima o alla seconda pescata.

$$P(\text{ALLA PRIMA}) = \frac{1}{90} \qquad P(\text{ALLA SECONDA}) = \frac{89}{90} \cdot \frac{1}{89} = \frac{1}{90}$$

$$P\left(\begin{matrix}\text{ALLA PRIMA o}\\ \text{ALLA SECONDA}\end{matrix}\right) = \frac{1}{90} + \frac{1}{90} = \frac{1}{45}$$

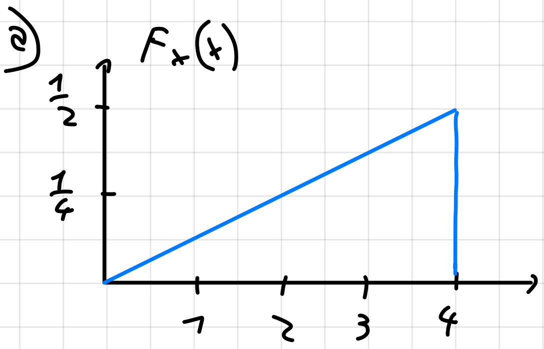
2. Data la funzione di densità di probabilità $f_X(X) = kx$, definita in $[0, 4]$:

(a) Calcolare k e disegnare $f_X(X)$.

(b) Calcolare e disegnare la funzione di distribuzione di X.

(c) Calcolare il valor medio e la varianza di X.

a)

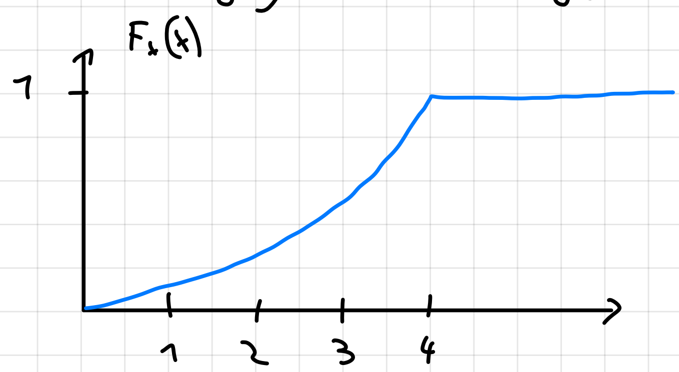


$$\int kx \, dx = 1 \qquad k \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = 1 \qquad k\, 8 = 1 \qquad k = \frac{1}{8}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

b)

$$F_x(x) = \int_0^x kx \, dx = \frac{1}{8}\int_0^x x \, dx = \frac{1}{8}\frac{x^2}{2} = \begin{cases} \frac{1}{16}x^2 & 0 \le x \le 4 \\ 0 & x < 0 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$



c)

$$\eta = E\{x\} = \frac{1}{8}\int_0^4 x^2 dx = \frac{1}{8} \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4 = \frac{1}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{64}^{\,8}}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\sigma^2 = E\{x^2\} - \eta^2 = \frac{1}{8}\int_0^4 x^3 dx - \frac{64}{9} = \frac{1}{8}\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^4 - \frac{64}{9} = \frac{1}{8}\frac{4^4}{4} - \frac{64}{9} = \frac{8}{9}$$

3. Sia $w(t) = \frac{N_0}{2}\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$ in ingresso a un sistema LTI con $h(t) = \delta(t) - \delta(t - T)$:

(a) Calcolare la potenza del segnale in uscita $x(t)$.

$$x(t) = w(t) \otimes h(t) \qquad P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

$$S_x(f) = S_w(f)\,|H(f)|^2 \qquad H(f) = 1 - e^{-j2\pi fT}$$

$$|H(f)|^2 = (1 - e^{-j2\pi fT})(1 - e^{+j2\pi fT}) = 1 - e^{-j2\pi fT} - e^{+j2\pi fT} + 1 = 2 - 2\cos(2\pi fT)$$

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2}\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$w(t)$ RUMORE TERMICO $S_w(f) = \frac{N_0}{2} \cdot$ (ALTRO)

$$S_x(f) = \frac{N_0}{\cancel{2}}\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)(\cancel{2} - \cancel{2}\cos(2\pi fT)) = N_0(1 - \cos(2\pi fT))\,\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} N_0(1 - \cos(2\pi fT))\,\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) df = N_0\int_{-B}^{B}(1 - \cos(2\pi fT)) df =$$

$$= N_0\int_{-B}^{B} 1\, df - N_0\int_{-B}^{B}\cos(2\pi fT) df = 2N_0B - N_0\left(-\sin(2\pi fT)\right|_{-B}^{B} = 2N_0B$$

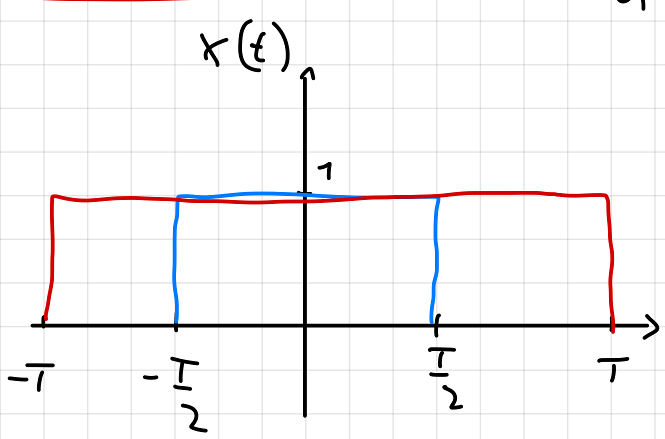
4. Utilizzare un esempio per dimostrare la veridicità dell'affermazione:

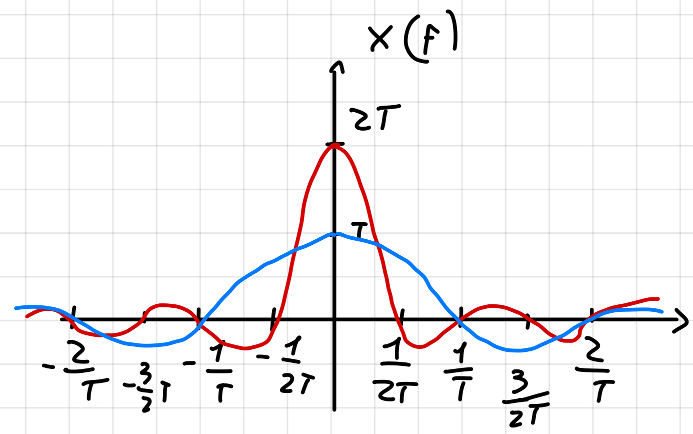
"Una dilatazione dell'asse dei tempi comporta compressione delle frequenze e viceversa".

$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ $\qquad X(f) = T\,\mathrm{sinc}(Tf)$

$\alpha = \frac{1}{2}$ DILATO IL TEMPO

$x(\alpha t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \iff \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right) = 2T\,\mathrm{sinc}(2Tf)$





5. Data la funzione $x(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{2t}{T}\right)$, con $T = 0.1$ micro secondi:

(a) Calcolare la frequenza minima di $y(t) = x^3(t)$ per essere campionato.

$F_{y\,min} = 2B_y \qquad X(f) = T\,\mathrm{rect}(2Tf) \qquad B_x = \frac{1}{T} \qquad B_y = 3B_x = \frac{3}{T} = 30\ MHz$

$F_{y\,min} = 60\ MHz$

6. Si consideri un codice di Hamming sistematico di ordine 3. Con la codifica a sindrome, calcolare x avendo ricevuto $y = x+e = [1, 0, 1, 1, 1, 0, 0]$.

$m = 3 \qquad k = 2^3 - 1 - 3 = 4 \qquad n = 7$

$$H = [P^T, I_{n-k}] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$s = yH^T = [1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1\ 1\ 0] \qquad e = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$$

$$y + e = [0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0]$$

7. Si consideri un codice a ripetizione di ordine 3. Utilizzando la codifica a sindrome:

$n = 3$

(a) Determinare quanti errori può correggere.

(b) Calcolare la probabilità di errore sul bit in funzione di p.

a) $\frac{d_{min} - 1}{2} = 1$ ERRORE

b) $P_b(e) = \frac{d_{min}}{n} P_w(e) = \frac{d_{min}}{n} \binom{n}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{n-(t+1)} = \frac{3!}{2!(3-2)!} p^2 (1-p) = 3p^2(1-p)$

8. Un sistema di comunicazione 4 QAM impiega un codice a blocco con rate r ed un impulso a radice di coseno rialzato con roll-off $\alpha = 0.4$. Il sistema è utilizzato per trasmettere un flusso di bit con velocità $R_b = 100$ Mbit/s.

(a) Determinare il rate del codice al fine di garantire una banda $B = 80$ MHz.

(b) Calcolare la probabilità di errore sul bit in ingresso al decodificatore del codice a blocco, nell'ipotesi in cui $\frac{E_b}{N_0} = 7$ dB (dove E_b rappresenta l'energia per bit non codificato).

a) $B = \frac{1+\alpha}{T_S} = \frac{1+\alpha}{r \log_2 M \, T_b} = \frac{1+\alpha}{r \log_2 M} R_b$

$\frac{r \log_2 M}{1+\alpha} = \frac{R_b}{B}$ $\quad r = \frac{R_b}{B} \frac{1+\alpha}{\log_2 M} = \frac{7}{8}$

b) $BER = \frac{SER}{\log_2 M} = \frac{1}{2} \frac{4(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1} \frac{E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$

$= Q\left(\sqrt{r \log_2 M \frac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{7}{8} \cdot 2 \cdot (5.011)}\right) = Q(2.96)$

2024/06/10

1. In un contenitore vi sono 8 palline bianche e 2 nere, che vengono estratte sequenzialmente: ogni pallina viene reimmessa nel contenitore prima di estrarre la successiva. (**3** punti)

(a) Calcolare la probabilità che in 3 estrazioni su 5 esca una pallina bianca.

(b) Calcolare il numero minimo di estrazioni affinché la probabilità di estrarre solo palline bianche sia < 0.1.

(c) Se il contenitore fosse stato riempito con 40 palline bianche e 10 nere, come sarebbero variati i risultati ai punti (a) e (b)? Giustificare la risposta.

a) $P(\text{BIANCA}) = \frac{8}{10}$ $\quad P\begin{pmatrix}5 \text{ ESTR} \\ 3 \text{ BIANCHE}\end{pmatrix} = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 = \frac{5!}{3!\,2!} p^3 (1-p)^2 = 0{,}2048$

b) $\binom{N}{N} p^N (1-p)^0 = \frac{N!}{N!} p^N < 0.1 \qquad 0.8^N < 0.1$

$N \ln(0.8) < \ln(0.1) \qquad N < \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.8)} \simeq 10.32 \qquad N = 11$

c) $P(\text{BIANCA}) = \frac{40}{50} = 0.8 \qquad P(\text{NERA}) = 0.2$ non CAMBIAVA NULLA

2. Si consideri la variabile aleatoria X che può assumere valori nell'intervallo $[-1, 1]$. La sua densità di probabilità è del tipo $f_X(x) = k(1 - |x|)$, con k costante reale. (**4** punti)

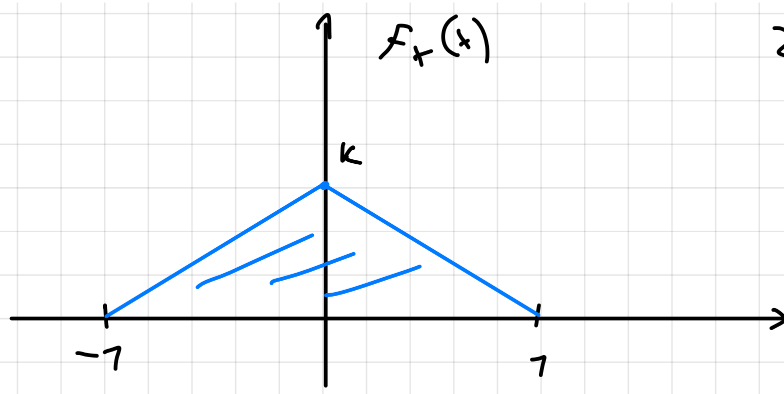
(a) Determinare il valore di k in modo tale che $f_X(x)$ sia effettivamente una funzione di densità di probabilità.

(b) Sia $Y = 3X + 2$. Calcolare la densità di probabilità $f_Y(y)$.

(c) Calcolare il valor medio di Y.

a) $\int f_X(x)\,dx = 1$

$k = 1$



$\frac{2k}{2} = 1 \qquad k = 1$

b) $Y = 3X + 2$

$g'(x) = 3 \qquad x = \frac{y-2}{3}$

$$f_Y(y) = \sum \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}\Bigg|_{x_i = g^{-1}(x)} = \frac{f_X\left(\frac{y-2}{3}\right)}{3} = \begin{cases} \frac{1 - \left|\frac{y-2}{3}\right|}{3} & -1 \leq \frac{y-2}{3} \leq 1 \\ 0 & \text{ALTRIM.} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \left(1 - \left|\frac{y-2}{3}\right|\right)\frac{1}{3} & -1 \leq y \leq 5 \\ 0 & \text{ALTRIM} \end{cases}$$

c) $\eta_Y = E\{Y\} = 3\underbrace{E\{X\}}_{=0} + 2 = 2$

3. Sia dato un processo stazionario bianco $N(t)$ con densità spettrale di potenza $S_N(f) = \frac{N_0}{2}$. Il processo $N(t)$ viene dato in ingresso ad un sistema LTI con la seguente risposta in frequenza: $H(f) = \frac{1}{1+j2\pi fT}$, con T costante reale positiva. (**3** punti)

(a) Calcolare la potenza del processo in uscita $X(t)$.

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df \qquad S_x(f) = S_N(f)\,|H(f)|^2$$

$$|H(f)|^2 = \left(\frac{1}{1+j2\pi fT}\right)^2 = \frac{1}{1+(2\pi fT)^2}$$

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2}\,\frac{1}{1+(2\pi fT)^2}\,df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+(2\pi fT)^2}\,df \qquad \alpha = 2\pi fT$$

$$d\alpha = 2\pi T\, df$$

$$= \frac{N_0}{2}\,\frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\alpha^2}\,d\alpha = \frac{N_0}{2}\,\frac{1}{2\pi T}\,\arctan(\alpha)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \qquad df = \frac{d\alpha}{2\pi T}$$

$$= \frac{N_0}{2}\,\frac{1}{2\pi T}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{N_0}{2}\,\frac{1}{2\pi T}\,\pi = \frac{N_0}{4T}$$

4. Dato un segnale audio di *durata limitata* nel tempo (**4** punti):

(a) Descrivere le operazioni necessarie per il campionamento e la riproduzione in *tempo reale* del segnale.

(b) Indicare (sulla base delle scelte fatte) il ritardo temporale nella riproduzione del segnale.

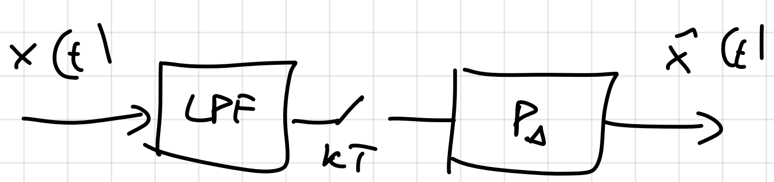
DURATA LIMITATA → BANDA ILLIM.

DEVO LIMITARE BANDA → USO LPF

$\frac{1}{T} \geq 2B$

TEMPO REALE → CI VUOLE UN INTERP. CAUSALE

NON VA BENE $\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$ → DEVO TRONCARLO E POI RITARDARLO DI Δ



$\frac{1}{T} \geq 2B$ $\qquad B = 20\ MHz$ (AUDIO)

$\frac{1}{T} \geq 40\ MHz$

$$P_\Delta = p(t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right) = \mathrm{sinc}(2Bt)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right)$$

$$\hat{x}(t) = \sum x[kT]\,P_\Delta\left(t - kT - \frac{\Delta}{2}\right)$$

5. Dato un sistema lineare e tempo invariante: (**3** punti)

(a) Indicare un metodo per la misura della risposta in frequenza che impieghi, come segnale di ingresso, un'oscillazione sinusoidale complessa $x(t) = e^{j2\pi ft}$.

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) \qquad x(t) = e^{j2\pi ft}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,e^{j2\pi f(t-\tau)}\,d\tau =$$

$$= e^{j2\pi ft}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau = x(t)\,H(f) \qquad H(f) = \frac{y(t)}{x(t)} \quad \forall f$$

6. Il codice a blocco sistematico con $n = 6$ e $k = 3$ ha la matrice generatrice $\mathbf{G}$: (**4** punti)

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(a) Trovare la $d_{\min}$ del codice.

(b) Decodificare la parola ricevuta $\mathbf{y} = [1, 0, 1, 0, 1, 0]$ utilizzando la decodifica a sindrome.

a)

m	$mG = c$
000	000000
001	001110
010	010011
011	011101
100	100101
101	101011
110	110110
111	111000

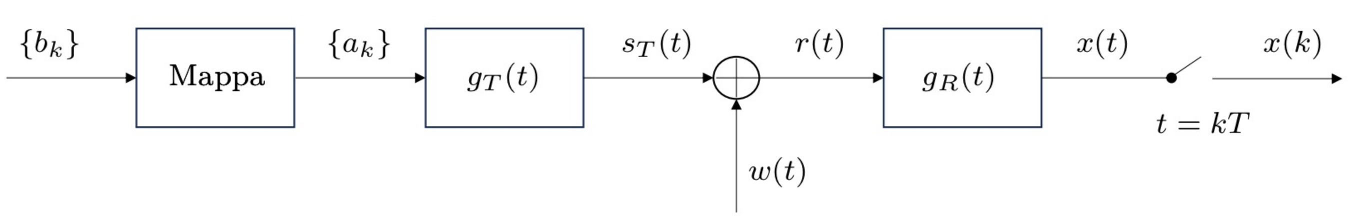
$d_{min} = 3$

b)

$$H = \begin{bmatrix} 1&0&1&1&0&0 \\ 0&1&1&0&1&0 \\ 1&1&0&0&0&1 \end{bmatrix} \qquad s = yH^T = \begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&1 \\ 0&1&1 \\ 1&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&1 \end{bmatrix}$$

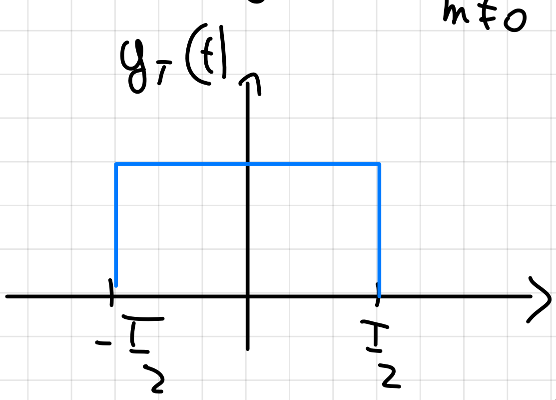
$$e = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \qquad x = y + e = \begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&1 \end{bmatrix}$$

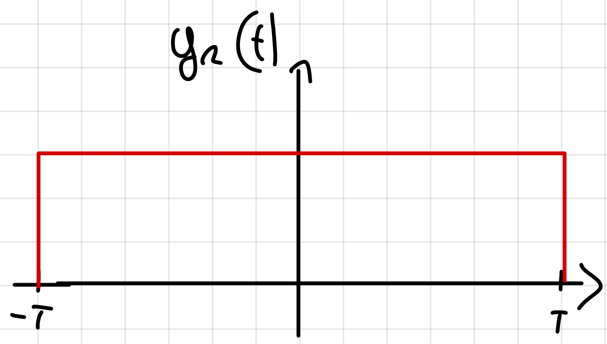
7. Dato il sistema PAM illustrato in figura dove $g_T(t) = \text{rect}(\frac{t}{T})$ e $w(t)$ è un processo aleatorio di rumore Gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$. (**4** punti)

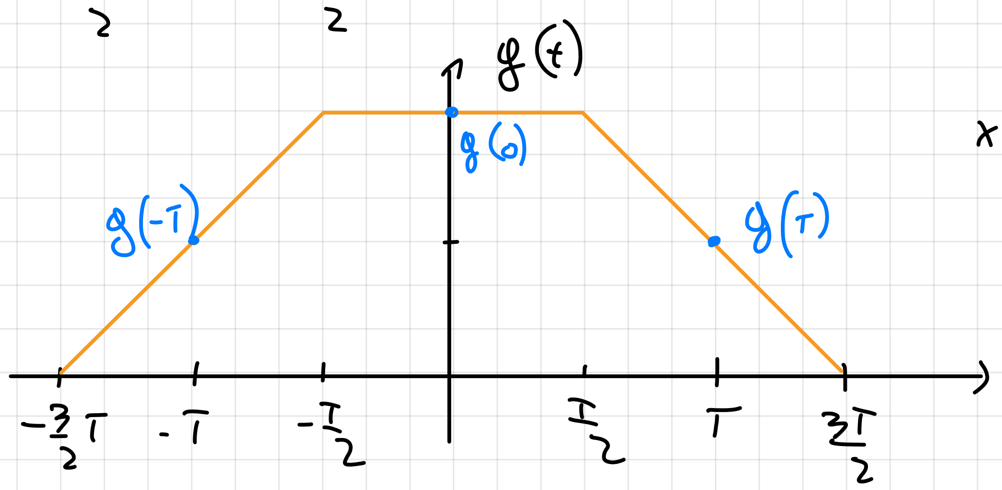


(a) Calcolare il campione $x(k)$ ottenuto all'istante di campionamento $t = kT$, nell'ipotesi in cui il filtro $g_R(t) = \text{rect}(\frac{t}{2T})$.

$$x(t) = a_k\, g(0) + \sum_{m \neq 0} a_{k-m}\, g(mT) + n(k) \qquad g(t) = g_T(t) \otimes g_R(t)$$





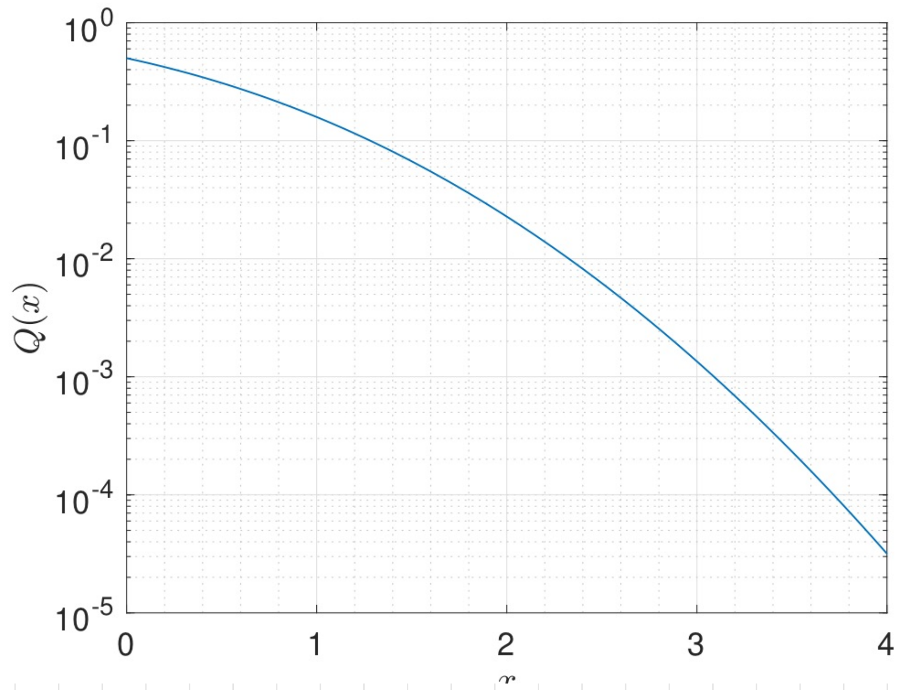


$$x(k) = a_k\, g(0) + a_{k-1}\, g(T) + a_{k+1}\, g(-T) + n(k)$$

8. Un sistema di comunicazione 4−QAM impiega il codice a blocco dell'esercizio 6 ed un impulso a radice di coseno rialzato con roll-off $\alpha = 0.5$. Il sistema è utilizzato per trasmettere un flusso di bit con velocità $R_b = 100$ Mbit/s. (**5** punti)

(a) Determinare l'efficienza spettrale e la banda del sistema.

(b) Calcolare il valore di E_b/N_0 in dB (dove E_b rappresenta l'energia per bit *non codificato*) per garantire una probabilità di errore sul *bit* in uscita al decodificatore del codice a blocco pari a 10^{-5}.



$n = 6 \quad k = 3 \quad r = 0.5$

a) $\eta_{SP} = \frac{R_b}{B_{RF}^T} = \frac{T_s}{1+\alpha} \frac{1}{T_b} = \frac{\cancel{T_b} r \log_2 M}{1+\alpha} \frac{1}{\cancel{T_b}} = \frac{2}{3} \quad \frac{bit/s}{Hz}$

$B_{RF}^T = \frac{R_b}{\eta_{SP}} = 150 \text{ MHz}$

b) $P_b(e) = \frac{d_{min}}{n} \binom{n}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{n-(t+1)} \qquad t = \frac{d_{min}-1}{2} = 1$

$P_b(e) = \frac{15}{2} p^2 = 10^{-5} \qquad p = \sqrt{10^{-5} \cdot \frac{2}{15}} = 10^{-3}$

$P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \qquad E_s = r \log_2 M E_b = E_b$

$P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = 10^{-3} \qquad \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} = 3 \qquad \frac{E_b}{N_0} = 9 \simeq 9.54 \text{ dB}$

2024/07/01

1. Il circuito elettrico rappresentato in Figura 1 è composto da alcuni resistori, ciascuno dei quali si può guastare in modo indipendente dagli altri creando un circuito aperto. La probabilità di guasto di ogni resistore è indicata in figura. (**3** punti)

(a) Qual è la probabilità che vi sia un flusso di corrente da A a B?

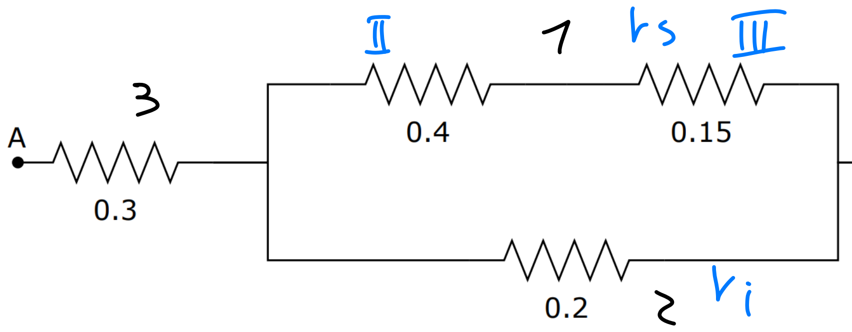


Figura 1: Circuito elettrico.

WDIP

$P_F^{AB} = P(I^F \cap //^F) = P_F^I \cdot P_F^{//}$

$= (1-P_G^I)(1-P_G^{//})$

$= 0.7 \cdot (1-P_G^{//})$

I-DIP

$P_G^{//} = P(rs^G \cap ri^G) = P_G^{rs} \cdot P_G^{ri}$

$P_G^{ri} = 0.2$

$P_F^{rs} = P_F^{II} \cdot P_F^{III}$

$= (1-0.4)(1-0.15)$

$P_G^{rs} = 1 - P_F^{rs}$

$P_{3G} = 0.3 \qquad P_{3F} = 0.7 \qquad P_{2G} = 0.2 \qquad P_{2F} = 0.8$

$P_{1G} = 1 - P_{1F} \qquad P_{1F} = (1-0.4)(1-0.15) = 0.51$

$P_{1G} = 0.49$

$P_{FAB} = P_{3F} \cdot P_{1//2F} \qquad P_{1//2G} = P_{1G} \cdot P_{2G} = 0.098$

$P_{1//2F} = 1 - P_{1//2G} = 0.902 \qquad P_{FAB} = 0.6314$

2. Si consideri la variabile aleatoria X con distribuzione esponenziale monolatera di parametro λ. Sia $P(X > 10 \text{ minuti}) = e^{-2}$. (**3** punti)

(a) Determinare il valore di λ, indicando la relativa unità di misura.

(b) Calcolare l'istante x_0 tale che $P(X \leq x_0) = 5\%$.

$F_X(x) = (1 - e^{-\frac{x}{\lambda}})u(x) \qquad F_X(x) = P\{X \leq x\}$

a) $P(X > 10\ min) = 1 - P(X \leq 10\ min) = 1 - (1 - e^{-\frac{10}{\lambda}}) = e^{-2}$

$e^{-\frac{10}{\lambda}} = e^{-2} \qquad \frac{10}{\lambda} = 2 \qquad \frac{\lambda}{10} = \frac{1}{2} \qquad \lambda = 5\ min$

b) $P(X \leq x_0) = (1 - e^{-\frac{x_0}{5}}) = 0.05 \qquad -e^{-\frac{x_0}{5}} = 0.05 - 1$

$e^{-\frac{x_0}{5}} = -0.05 + 1 = 0.95 \qquad -\frac{x_0}{5} = \ln(0.95) \qquad x_0 = -5\ln(0.95) = 0.26\ min$

3. Si consideri il processo aleatorio stazionario $X(t)$ con valor medio nullo, potenza pari a 100 e densità spettrale di potenza con forma triangolare tra $-50Hz$ e $+50Hz$. Il processo X(t) attraversa un filtro passabasso con guadagno A e frequenza di taglio $25Hz$. (**4** punti)

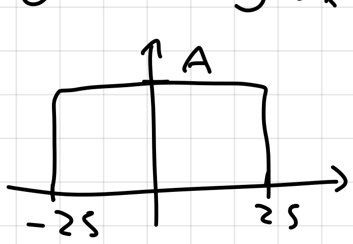
(a) Determinare $S_X(0)$ e rappresentare graficamente $S_X(f)$

(b) Calcolare l'autocorrelazione del processo X(t) e rappresentarla graficamente.

(c) Calcolare la potenza del processo in uscita Y(t).

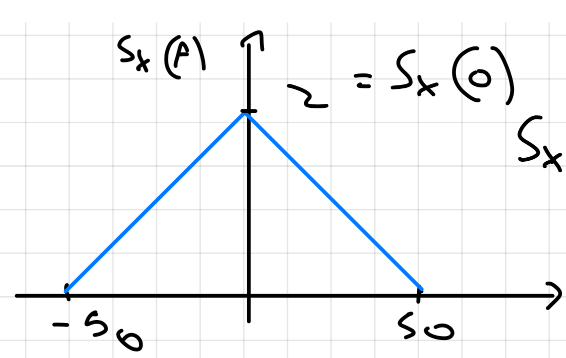
$P_X = 100 = \int S_X(f)\,df$

LPF



$H(f) = A\,rect\left(\frac{f}{50}\right)$

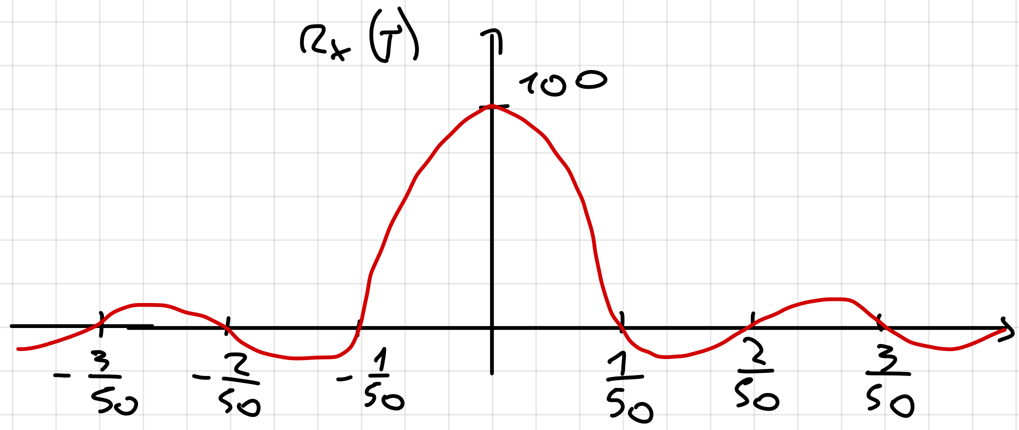
a)



$= S_X(0)$

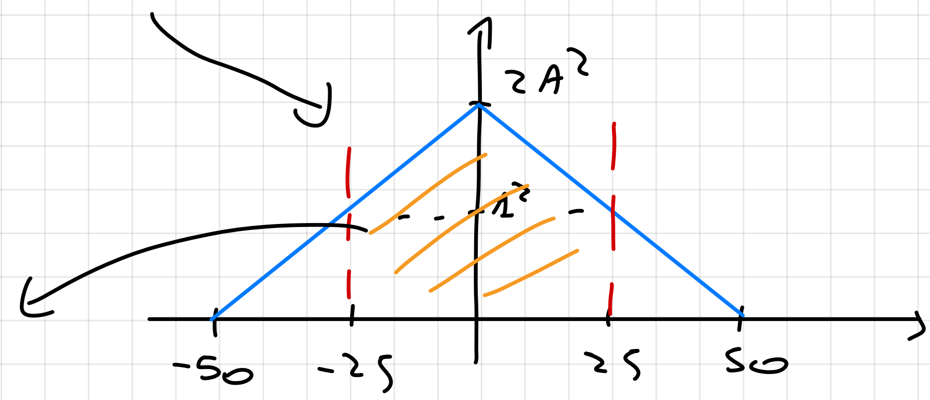
$S_X(f) = 2\,triang\left(\frac{f}{50}\right)$

b) $S_x(F) \Leftrightarrow R_x(\tau) = 100 \operatorname{sinc}^2(50\tau)$



c) $P_Y = \int S_Y(F)\, dF$

$$S_Y(F) = S_x(F)\,|H(F)|^2 = 2\operatorname{triang}\left(\frac{F}{50}\right) A^2 \operatorname{rect}^2\left(\frac{F}{50}\right) = 2A^2 \operatorname{triang}\left(\frac{F}{50}\right)\Big|_{-25}^{25}$$



$$P_Y = 50A^2 + \frac{50A^2}{2} = 75A^2$$

4. Dato il segnale $x(t) = \exp(-t/T)\, u(t)$ con $T = 1\,\text{ms}$ (**4** punti):

(a) Calcolare la trasformata di Fourier del segnale.

(b) Calcolare la banda a -3 dB del segnale.

$$x(t) = e^{-\frac{t}{T}} u(t)$$

a) $$X(F) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{T}} e^{-j2\pi F t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\left(j2\pi F + \frac{1}{T}\right)t}\, dt = -\frac{1}{j2\pi F + \frac{1}{T}} \left(e^{-\left(j2\pi F + \frac{1}{T}\right)t}\right)_0^{+\infty} =$$

$$= -\frac{1}{j2\pi F + \frac{1}{T}}\left[0 - 1\right] = \frac{1}{j2\pi F + \frac{1}{T}} = \frac{T}{1 + j2\pi F T}$$

b) $$|X(0)|^2 = T^2 \qquad |X(F)|^2 = \frac{T^2}{1 + (2\pi F T)^2}$$

$$\log_{10}\left(\frac{|X(F)|^2}{|X(0)|^2}\right) = \log_{10}\left(\frac{1}{1 + (2\pi F T)^2}\right) = -3\ \text{dB}$$

$$\frac{1}{1 + (2\pi F T)^2} = \frac{1}{2} \qquad 1 + (2\pi F T)^2 = 2 \qquad (2\pi F T)^2 = 1$$

$$4\pi^2 F^2 T^2 = 1 \qquad F = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2 T^2}} = \frac{1}{2\pi T} = 160\ \text{kHz}$$

5. Dato il segnale: $x(t) = \underbrace{\text{sinc}\left(\frac{t}{2T}\right)\cos(2\pi f_0 t)}_{x_1(t)} + \underbrace{\text{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right)\cos(4\pi f_0 t)}_{x_2(t)}$

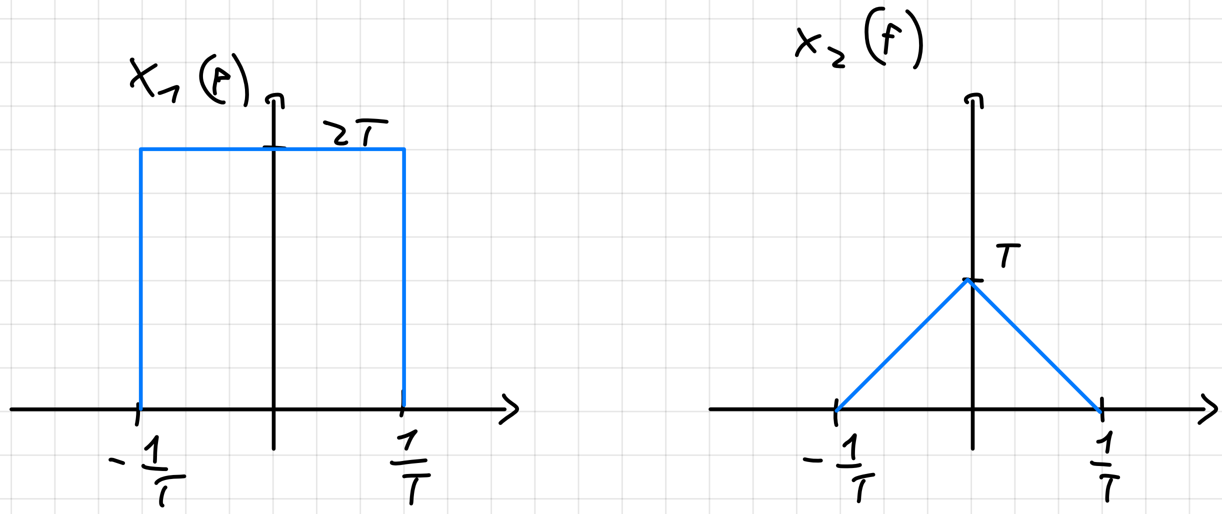
con $T = 0.2\mu$s e $f_0 = 2$ GHz. (**4** punti)

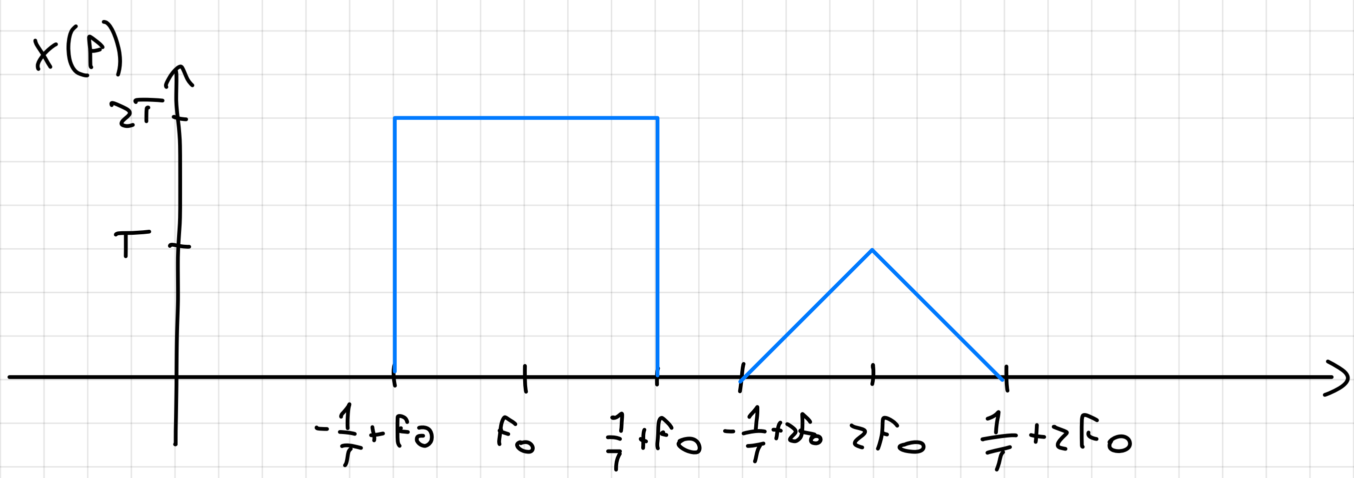
(a) Disegnare (indicando correttamente i valori in ascissa) lo spettro di ampiezza di $x(t)$.

(b) Disegnare (motivando la risposta) lo schema a blocchi di un sistema per il recupero di $x_2(t)$.

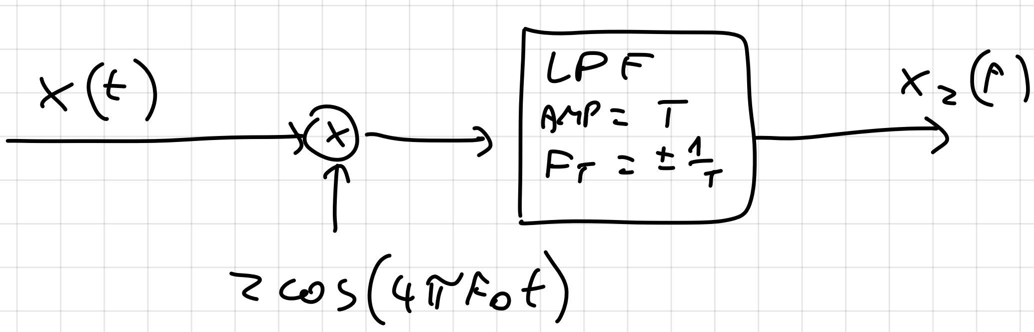
a) $X_1(f) = 2T\,\text{rect}(2Tf)$ $\qquad X_2(f) = T\,\text{triang}(Tf)$

$$X(f) = \frac{X_1(f+f_0) + X_1(f-f_0)}{2} + \frac{X_2(f+2f_0) + X_2(f-2f_0)}{2}$$





b)



6. Un codice a blocco sistematico ha matrice generatrice: (**3** punti)

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

(a) Decodificare la parola ricevuta $\mathbf{y} = [0, 1, 1, 1, 0, 0]$ utilizzando la decodifica a sindrome.

$$H = [P^T, I_{n-k}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$s = yH^T = [0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0\ 1\ 0] \qquad e = [0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]$$

$$x = y + e = [0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0]$$

7. Un sistema di comunicazione 4-PAM utilizza come costellazione i simboli $\{0, 2, 4, 6\}$ ed impiega un impulso a radice di coseno rialzato con roll-off $\alpha = 0.3$ in trasmissione e ricezione. (**5** punti)

(a) Calcolare la densità spettrale di potenza del segnale ricevuto.

(b) Determinare la probabilità di errore del sistema.

a) $S_s(f) = \frac{1}{T_s} S_a(f) \, |G_T(f)|^2 \qquad S_a(f) = \sum R_a(m) \, e^{-j2\pi f T_s}$

$$R_a(m) = \begin{cases} \sigma_a^2 + \eta_a^2 & m = 0 \\ \eta_a^2 & m \neq 0 \end{cases}$$

$\eta_a = E\{a_i\} = \frac{1}{4}(2+4+6) = 3$

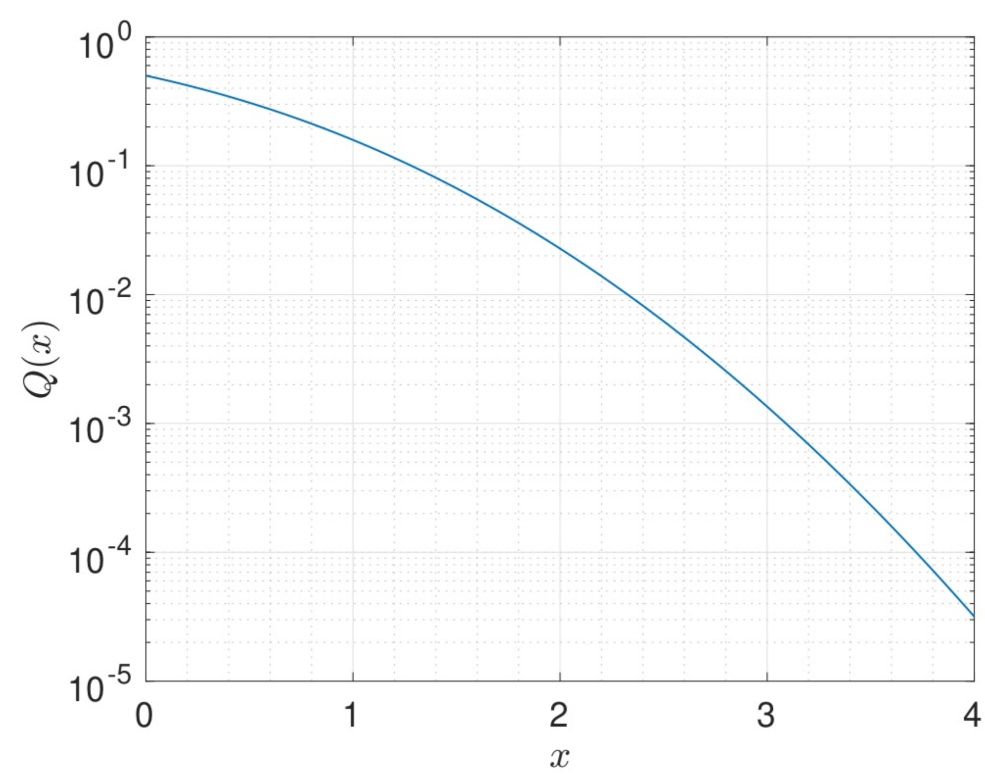
$\sigma_a^2 = E\{a_i^2\} - \eta_a^2 = 5$

b) $P(e) = \frac{1}{M} \sum P(e \mid a^{(m)}) = \frac{1}{\cancel{4}_{2}} \left(4^{2} Q\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) + 2 Q\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) \right) = \frac{3}{2} Q\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)$

8. Un sistema di comunicazione 4−QAM impiega un codice a blocco con rate 3/4, codifica di Gray ed un impulso a radice di coseno rialzato con fattore di roll-off $\alpha = 0.2$. Il sistema impiega una banda di $B = 4$ MHz. (**4** punti)

(a) Determinare l'efficienza spettrale del sistema e il tempo per trasmettere un file di 1 Mbit.

(b) Calcolare la probabilità di errore in *ingresso al decodificatore del codice a blocco*, nell'ipotesi in cui $E_b/N_0 = 6$ dB (dove E_b rappresenta l'energia per bit *non codificato*).



$r = \frac{3}{4} = 0.75$

a) $\eta_{sp} = \frac{R_b}{B_T^{RF}} = \frac{1}{2} \frac{2T_s}{1+\alpha} \frac{1}{T_b} = \frac{\cancel{T_s} \, r \log_2 M}{1+\alpha} \frac{1}{\cancel{T_s}} = \frac{r \log_2 M}{1+\alpha} = 1.25 \quad \frac{bit/s}{Hz}$

$R_b = \eta_{sp} B_T^{RF} = 5$ Mbit/s $\qquad T_{FILE} = \frac{10^6 \text{ bit}}{R_b} = 0.2$ s

b) $P_b(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \qquad E_s = r \log_2 M \, E_b = \frac{3}{2} E_b$

$P_b(e) = Q\left(\sqrt{\frac{3}{2}\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{3}{2} \cdot 3.98}\right) = Q(2.44) = 6 \cdot 10^{-3}$

2024/07/22

1. Una linea di produzione di rubinetti è difettosa: alcuni gocciolano o hanno la cromatura rovinata. Il controllo qualità ha stimato che: (**2** punti)

- la probabilità che un rubinetto non goccioli è del 90%;
- la probabilità che un rubinetto abbia la cromatura rovinata è del 7%;
- la probabilità che un rubinetto abbia la cromatura rovinata e goccioli è dell'1%.

(a) Qual è la probabilità che un rubinetto sia privo di difetti?

$P(\bar{G}) = 0.9 \qquad P(G) = 0.1$

$P(R) = 0.07 \qquad P(\bar{R}) = 0.93$

$P(R \cap G) = 0.01 \qquad P(\bar{R} \cap \bar{G})\ ?$

$P(\bar{R} \cap \bar{G}) = P(\overline{R \cup G}) = 1 - P(R \cup G)$

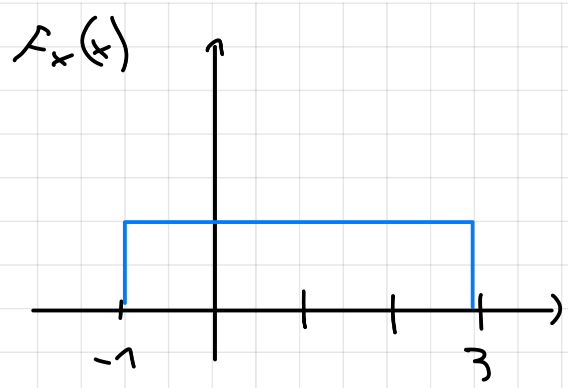
$P(R \cup G) = P(R) + P(G) - P(R \cap G) = 0.16$

$P(\bar{R} \cap \bar{G}) = 0.84$

2. Sia X una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo $[-1, 3]$. Da X si ottiene la variabile aleatoria $Y = g(X)$ con la seguente trasformazione: (**4** punti)

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Calcolare e disegnare la distribuzione di probabilità di Y.
(b) Calcolare e disegnare la densità di probabilità di Y.
(c) Calcolare il valor medio di Y.



$$F_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & -1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{ALTRIM} \end{cases}$$

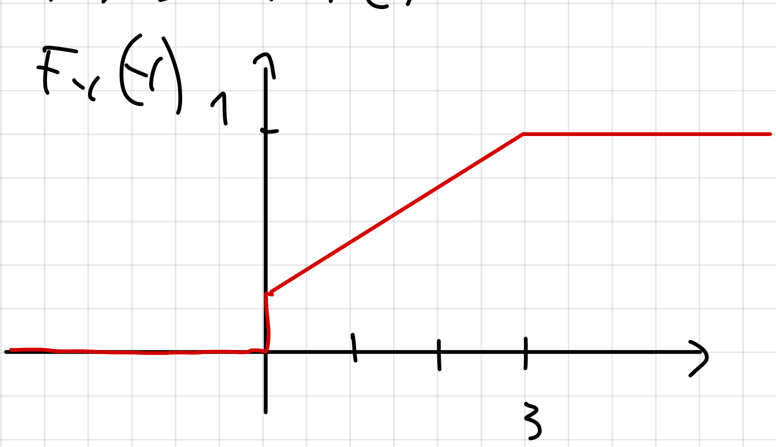
a)

$y < 0 \qquad F_Y(y) = 0$

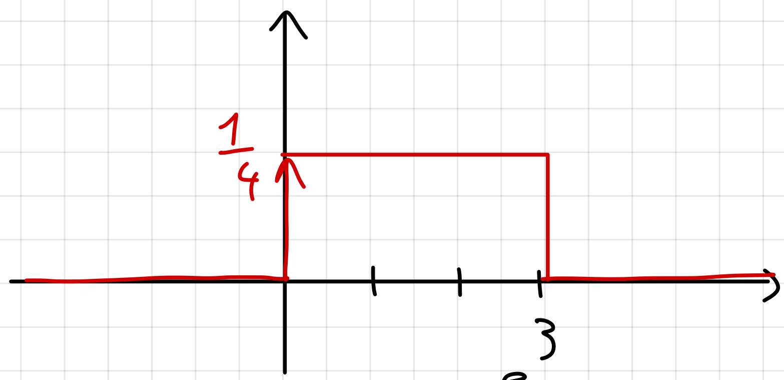
$y = 0 \qquad F_Y(0) = \int_{-\infty}^{0} F_x(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}$

$0 < y \leq 3 \qquad F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} F_x(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{y} dx = \frac{1}{4}\,x\Big|_{-1}^{y} = \frac{1}{4}(y+1)$

$y \geq 3 \qquad F_Y(y) = 1$



b) $F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$



$F_Y(y) = \frac{1}{4}\left[\delta(t) + \text{rect}\left(\frac{y-\frac{3}{2}}{3}\right)\right]$

c) $\eta_Y = E\{Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy = \frac{1}{4}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y\delta(t)}_{=0} + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} y\,\text{rect}\left(\frac{y-\frac{3}{2}}{3}\right)dy =$

$= \frac{1}{4}\int_0^3 y\,dy = \frac{1}{4}\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{8}$

3. Sia dato il processo aleatorio $X(t)$ con valor medio 2 e autocovarianza $C_X(t_1,t_2) = 2\text{rect}(\frac{t_1-t_2}{2})$. Il processo $X(t)$ viene posto in ingresso ad un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t) = \text{rect}(4t)$, ottenendo il processo $Y(t)$. (**4** punti)

(a) Discutere la stazionarietà di $X(t)$ e $Y(t)$.

(b) Calcolare e disegnare l'autocorrelazione di $X(t)$.

(c) Calcolare il valor medio di $Y(t)$.

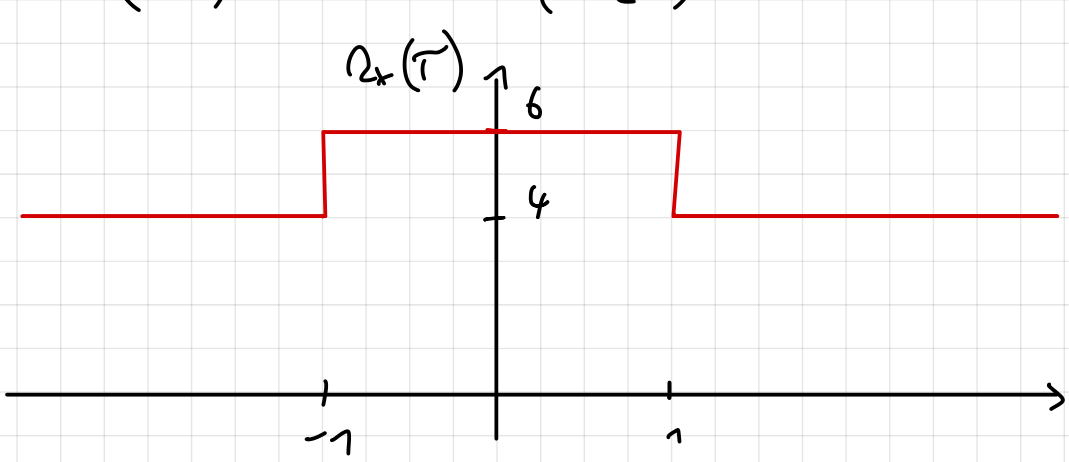
(d) Calcolare la densità spettrale di potenza di $Y(t)$.

a) $C_X(t_1,t_2) = 2\text{rect}\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right) = R_X(t_1,t_2) - \eta_X^2$

$R_X(t_1,t_2) = 2\text{rect}\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right) + 4$ → DIPENDE SOLO DA $\tau = t_1 - t_2$

$X(t)$ SSL → $h(t)$ LTI → $Y(t)$ SSL

b) $R_X(\tau) = 2\text{rect}\left(\frac{\tau}{2}\right) + 4$



c) $\eta_Y = \eta_X H(0)$ $\quad H(f) = \frac{1}{4}\text{sinc}\left(\frac{f}{4}\right)$ $\quad \eta_Y = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

d) $S_Y(f) = S_X(f)\,|H(f)|^2$

$R_X(\tau) \Leftrightarrow S_X(f) = 4\,\text{sinc}(2f) + 4\delta(f)$

$S_Y(f) = 4\left[\text{sinc}(2f)+\delta(f)\right]\frac{1}{16}\text{sinc}^2\left(\frac{f}{4}\right) = \frac{1}{4}\left[\text{sinc}(2f)+\delta(f)\right]\text{sinc}^2\left(\frac{f}{4}\right)$

4. Dato il segnale $x(t) = \mathrm{sinc}(2Bt)$ con $B = 1\,\mathrm{MHz}$ (**5** punti):

(a) Calcolare la banda B_{99} al 99% dell'energia del segnale $y(t) = h(t) * x(t)$, nell'ipotesi in cui

$$H(f) = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \mathrm{j}f/B}$$

Nota: $\int_{-a}^{a} \frac{1}{1+x^2}dx = 2\int_0^a \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{tg}^{-1}(a)$

$$E_Y = \int |y(t)|^2 dt = \int |Y(f)|^2 df \qquad Y(f) = H(f)X(f)$$

$$X(f) = \frac{1}{2B}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$E_Y = \int \frac{1}{4B^2}\mathrm{rect}^2\left(\frac{f}{2B}\right)\frac{1}{4}\frac{1}{1+\left(\frac{f}{B}\right)^2}df = \frac{1}{16B^2}\int_{-B}^{B}\frac{1}{1+\left(\frac{f}{B}\right)^2}df =$$

$$= \frac{1}{8B^2}\int_0^B \frac{1}{1+\left(\frac{f}{B}\right)^2}df \qquad \frac{f}{B} = \alpha$$

$$d\alpha = \frac{1}{B}df \qquad df = B\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{8B}\int_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2}d\alpha = \frac{1}{8B}\arctan(\alpha)\Big|_0^1 = \frac{1}{8B}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{32B}$$

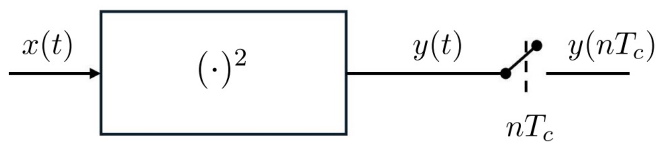
$$0.99\,E_Y = \int_{-B_{99}}^{B_{99}} |Y(f)|^2 df = 2\int_0^{B_{99}} |Y(f)|^2 df$$

$$2\,\frac{1}{8\,\cancel{16}B^2}\int_0^{B_{99}}\frac{1}{1+\left(\frac{f}{B}\right)^2}df \qquad \frac{f}{B} = \gamma \qquad df = B\,d\gamma$$

$$\frac{1}{8B}\int_0^{\frac{B_{99}}{B}}\frac{1}{1+\gamma^2}d\gamma = \frac{1}{\cancel{8B}}\arctan\left(\frac{B_{99}}{B}\right) = 0.99\cdot\frac{\pi}{\cancel{32B}\,4}$$

$$\arctan\left(\frac{B_{99}}{B}\right) = 0.99\,\frac{\pi}{4} \qquad B_{99} = \tan\left(0.99\,\frac{\pi}{4}\right)\cdot B = 0.983\,\mathrm{MHz}$$

5. Dato il segnale $x(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$ con $T = 1\,\mu$s. Nell'ipotesi in cui $1/T_c = 1$ MHz: (**3** punti)

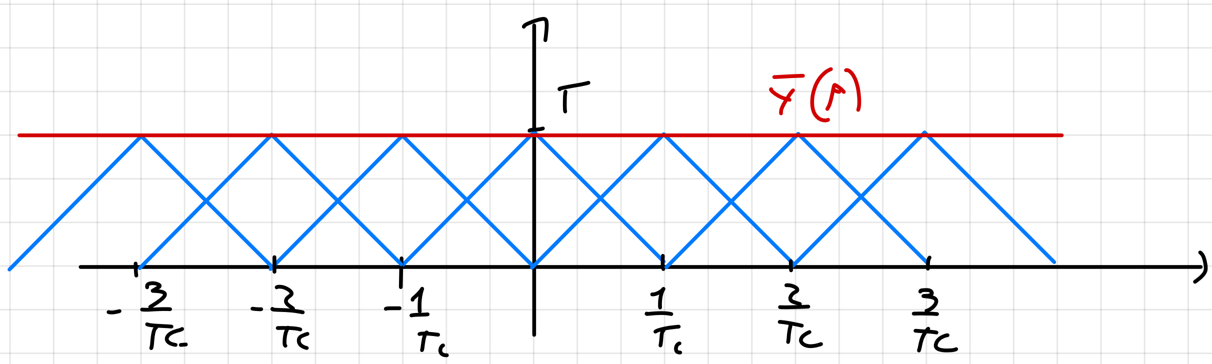


(a) Disegnare (motivando la risposta) la trasformata discreta di Fourier dei campioni $y(nT_c)$.

$$y(t) = \text{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\bar{Y}(f) = \sum y[nT_c]\, e^{-j2\pi f n T_c} = \frac{1}{T_c} \sum_k Y\left(f - \frac{k}{T_c}\right)$$

$$\frac{1}{T_c} = 1 \text{ MHz} = \frac{1}{T} \qquad Y(f) = T\,\text{triang}(Tf)$$



6. Un codice a blocco sistematico ha matrice generatrice: (**3** punti)

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad d_{min}=3$$

(a) Verificare se tutti gli errori di peso $\frac{d_{\min}-1}{2}$ possono essere corretti.

$$H = [P^T, I_{n-k}] = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0&0 \\ 1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&1&0&0&1 \end{bmatrix} \qquad \text{PESO} = 1 \qquad H^T = \begin{bmatrix} 1&1&0 \\ 1&0&1 \\ 0&1&1 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{ERRORI DI PESO 1}}{\overset{e}{\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}}} \qquad eH^T = \begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&1&1 \\ 1&0&1 \\ 1&1&0 \end{bmatrix} = S$$

PER OGNI ERRORE DI PESO 1 CORRISPONDE UNA SOLA SINDROME

$\Downarrow$

PUÒ CORREGGERLI TUTTI

7. Un sistema di comunicazione 2-PAM utilizza come costellazione i simboli $\{0, 2\}$ indipendenti ed equiprobabili ed impiega un impulso a radice di coseno rialzato con roll-off $\alpha = 0.2$ in trasmissione e ricezione. (**6** punti)

(a) Determinare la densità spettrale del segnale e calcolarne l'energia.*

(b) Calcolare la perdita (o il guadagno) del sistema per garantire la stessa probabilità di errore sul bit del sistema 2-PAM con simboli $\{-1, 1\}$.

Nota: $\sum_m e^{-j2\pi fmT} = \frac{1}{T}\sum_m \delta(f - \frac{m}{T})$.

a) $\eta_a = 1 \qquad \sigma_a^2 = E\{a_i^2\} - 1 = \frac{1}{2}(4) = 1$

$$S_s(f) = \frac{1}{T_s} S_a(f)\,|G_T(f)|^2 = \frac{1}{T_s} S_a(f)\, G_{RCR}(f)$$

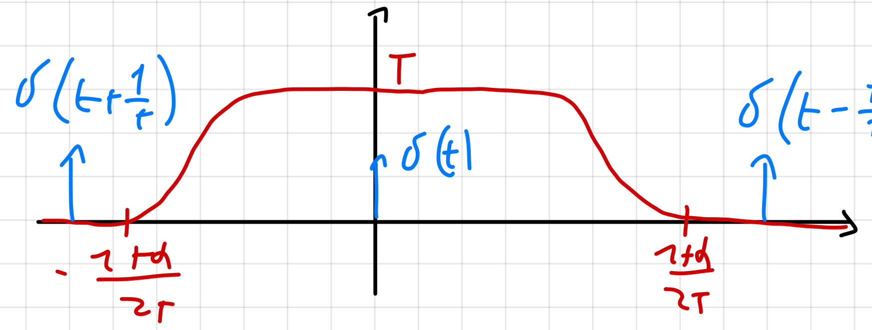
$$S_a(f) = \sum R_a(m)\, e^{-j2\pi f m T}$$

$$R_a(m) = \begin{cases} \sigma_a^2 + \eta_a^2 & m = 0 \\ \eta_a^2 & m \neq 0 \end{cases} = \sigma_a^2 \delta(m) + \eta_a^2$$

$$S_a(f) = \sum\left(\sigma_a^2 \delta(m) + \eta_a^2\right) e^{-j2\pi f m T} = \sigma_a^2 + \frac{\eta_a^2}{T}\sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$S_s(f) = \frac{1}{T}\left(\sigma_a^2 + \frac{\eta_a^2}{T}\sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)\right) G_{RCR}(f)$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{\eta_a^2}{T^2}\sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) G_{RCR}\left(\frac{k}{T}\right)$$



$$S_s(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} G_{RCR}(f) + \frac{\eta_a^2}{T^2} G_{RCR}(0)\,\delta(t) = \frac{\sigma_a^2}{T} G_{RCR}(f) + \frac{\eta_a^2}{T}\delta(t)$$

$$E_s = P_s T \qquad P_s = \int S_s(f) = \int \frac{\sigma_a^2}{T} G_{RCR}(f)\,df + \int \frac{\eta_a^2}{T}\delta(t)\,df = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{\eta_a^2}{T} = \frac{2}{T}$$

$$E_s = \frac{2}{T} T = 2$$

b) 2 PAM CONVENZIONALE

$$P(e) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}\frac{E_S}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_S}{N_0}}\right)$$

2 PAM SIMBOLI IDENTICAM. DISTRIBUITI

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2}}$$

$$P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right) \qquad \frac{E_S}{N_0} = \frac{2}{N_0}$$

$$P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{N_0}}\right)$$

8. Un sistema di comunicazione 16−QAM impiega un codice a blocco con rate 3/4, codifica di Gray ed un impulso a radice di coseno rialzato con fattore di roll-off $\alpha = 0.2$. (**3** punti)

(a) Determinare la banda necessaria per un trasmettere 10 Mbit in un 0.1 s e calcolare l'efficienza spettrale.

(b) Modificare il sistema al fine di dimezzare il tempo di trasmissione a *parità di banda*.

a)

$$r = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$R_b = \frac{10 \cdot 10^6 \text{ bit}}{10^{-1} \text{ s}} = 100 \text{ Mbit/s}$$

$$B = \frac{1+\alpha}{T_S} = \frac{1+\alpha}{r \log_2 M T_b} = \frac{1+\alpha}{r \log_2 M} R_b = 40 \text{ MHz}$$

$$\eta_{SP} = \frac{R_b}{B} = 1.25 \ \frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}}$$

b)

$$R_b = 200 \text{ Mbit/s}$$

$$B = \frac{1+\alpha}{r \log_2 M} R_b = 40 \text{ MHz}$$

$$\frac{r \log_2 M}{1+\alpha} = \frac{R_b}{B} \qquad \log_2 M = \frac{R_b}{B} \frac{1+\alpha}{r} = 8$$

$\log_2 M = 8$

$\hookrightarrow M = 256$

$\downarrow$

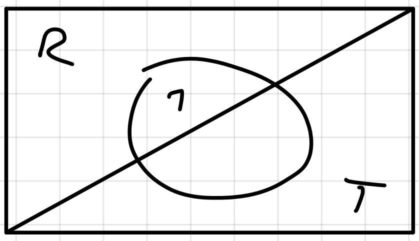
256 - QAM

2024/09/09

1. In un sacchetto vi sono due dadi apparentemente identici, uno regolare ed uno truccato. Le facce "1" e "2" del dado truccato si presentano con probabilità 1/4, mentre le rimanenti si presentano con probabilità 1/8. Estraggo un dado a caso dal sacchetto. (3 punti)

(a) Calcolare la probabilità che esca un "1".

(b) Calcolare la probabilità di aver estratto il dado regolare avendo osservato l'uscita di un "1".



a) $P(R) = P(T) = 0.5$

$$P(1) = P(1 | R)\,P(R) + P(1 | T)\,P(T) = \frac{1}{6}\cdot 0.5 + \frac{1}{4}\cdot 0.5 \simeq 0.208$$

b) $$P(R | 1) = \frac{P(1 | R)\,P(R)}{P(1)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{0.208} \simeq 0.4$$

2. Si consideri la variabile aleatoria continua X. Sull'intervallo $[1,2]$ la sua densità di probabilità è del tipo $f_X(x) = kx$, con k costante reale. Altrove la sua densità di probabilità è nulla. (4 punti)

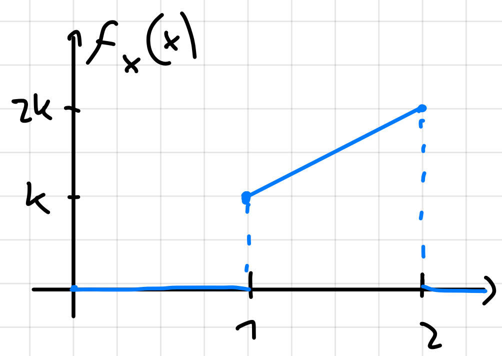
(a) Determinare il valore di k affinché $f_X(x)$ sia una funzione di densità di probabilità.

(b) Disegnare la funzione densità di probabilità di X.

(c) Calcolare e disegnare la funzione distribuzione di probabilità di X.

(d) Calcolare il valor medio di X.

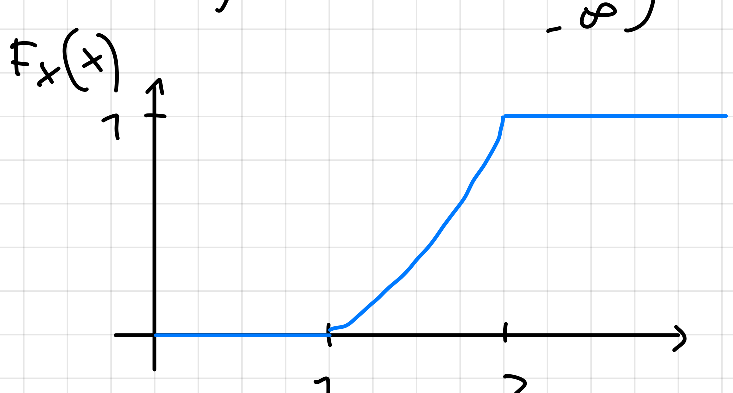
a)
b)



$$k\int_1^2 x\,dx = 1 \qquad k\,\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 1 \qquad k\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\frac{3}{2}k = 1 \qquad k = \frac{2}{3}$$

c) $$F_X(x) = \int f_X(x)\,dx = k\int_{-\infty}^{x} x\,dx = k\,\frac{x^2}{2}\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{+\infty}{2}\right)$$



d) $$\mu_x = E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_x(x)\,dx = \frac{2}{3}\int_1^2 x^2\,dx = \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{3} = \frac{14}{9}$$

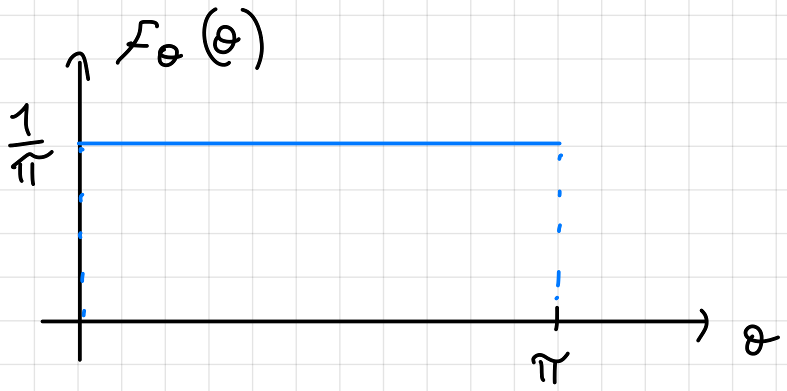
3. Sia dato il processo aleatorio parametrico $Y(t) = 1 + \cos(2\pi f_0 t + 2\Theta)$, dove f_0 è una costante reale positiva e Θ è una variabile aleatoria $\in \mathcal{U}[0, \pi]$. (**3 punti**)

(a) Calcolare il valor medio di $Y(t)$.

(b) Calcolare l'autocorrelazione di $Y(t)$.

(c) Determinare se $Y(t)$ è stazionario in senso lato.

N.B.: $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$.



a) $\eta_Y = E\{Y(t)\} = E\{1 + \cos(2\pi f_0 t + 2\theta)\} = E\{1\} + E\{\cos(2\pi f_0 t + 2\theta)\}$

$= 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t + 2\theta)\, f_\Theta(\theta)\, d\theta = 1 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(2\pi f_0 t + 2\theta)\, d\theta =$

$= 1 + \frac{1}{2\pi}\left[\sin(2\pi f_0 t + 2\theta)\right]_0^{\pi} = 1 + \frac{1}{2\pi}\left[\underbrace{\sin(2\pi f_0 t + 2\pi) - \sin(2\pi f_0 t)}_{=0}\right] = 1$

b) $R_Y(t_1, t_2) = E[Y(t_1)Y(t_2)] = E\{(1 + \cos(2\pi f t_1 + 2\theta))(1 + \cos(2\pi f t_2 + 2\theta))\}$

$= E\{1 + \cos(2\pi f t_1 + 2\theta) + \cos(2\pi f t_2 + 2\theta) + \cos(2\pi f t_1 + 2\theta)\cos(2\pi f t_2 + 2\theta)\} =$

$= 1 + \underbrace{E\{\cos(2\pi f t_1 + 2\theta)\}}_{=0} + \underbrace{E\{\cos(2\pi f t_2 + 2\theta)\}}_{=0} + E\{\cos(2\pi f t_1 + 2\theta)\cos(2\pi f t_2 + 2\theta)\}$

$= 1 + E\left\{\frac{1}{2}\left[\cos(2\pi f t_1 + 2\theta + 2\pi f t_2 + 2\theta) + \cos(2\pi f t_1 + 2\theta - 2\pi f t_2 - 2\theta)\right]\right\} =$

$= 1 + \frac{1}{2}\underbrace{E\{\cos(2\pi f(t_1 + t_2) + 4\theta\}}_{=0} + \frac{1}{2}E\{\cos(2\pi f(t_1 - t_2))\} =$

$= 1 + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(2\pi f(t_1 - t_2))\, f_\Theta(\theta)\, d\theta = 1 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(2\pi f(t_1 - t_2))\, d\theta$

$= 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi f(t_1 - t_2))\, \theta\Big|_0^{\pi} = 1 + \frac{\pi}{2}\cos(2\pi f(t_1 - t_2))$

c) Y η_Y COSTANTE, $R_x(t_1, t_2)$ DIPENDE SOLO DA $\tau = t_1 - t_2$

$\Rightarrow$ Y SSL

4. Dato il filtro $h(t) = T\delta(t) - \exp(-t/T)\,u(t)$ con $T = 10\,\text{ms}$ (4 punti):

(a) Calcolare la trasformata di Fourier del segnale.

(b) Calcolare la banda a -3 dB in Hz del filtro.

a) $$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[T\delta(t) - e^{-\frac{t}{T}} u(t)\right] e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$T\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t}\, dt - \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{T}} e^{-j2\pi f t}\, dt = T - \int_{0}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{T} + j2\pi f\right)t}\, dt$$

$$= T - \left(-\frac{1}{\frac{1}{T} + j2\pi f}\right) e^{-\left(\frac{1}{T} + j2\pi f\right)}\Big|_0^{+\infty} = T + \frac{1}{\frac{1}{T} + j2\pi f}\left[0 - 1\right] = T - \frac{1}{\frac{1}{T} + j2\pi f}$$

$$= T\left[1 - \frac{1}{1 + j2\pi f T}\right]$$

b) $$|H(f)|^2 = T^2 \left|1 - \frac{1}{1 + j2\pi f T}\right|^2 = T^2 \left|\frac{1 + j2\pi f T - 1}{1 + j2\pi f T}\right|^2 = T^2 \left|\frac{j2\pi f T}{1 + j2\pi f T}\right|^2$$

$$= T^2 \frac{\left(\frac{f}{f_T}\right)^2}{1 + \left(\frac{f}{f_T}\right)^2} \qquad f_T = \frac{1}{2\pi T} \qquad f_0 = +\infty \qquad \lim_{f_0 \to +\infty} |H(f_0)|^2 = T^2$$

$$10 \log_{10}\left(\frac{|H(f)|^2}{|H(f_0)|^2}\right) = -3\,\text{dB} \qquad \frac{\frac{f^2}{f_T^2}}{1 + \frac{f^2}{f_T^2}} = \frac{1}{2}$$

$$2\frac{f^2}{f_T^2} = 1 + \frac{f^2}{f_T^2} \qquad \frac{f^2}{f_T^2} = 1 \qquad f = f_T = \frac{1}{2\pi T} = 15{,}91\ \text{Hz}$$

5. Dato un sistema lineare e stazionario (4 punti):

(a) Derivare una condizione sufficiente per la stabilità in senso BIBO.

(b) Fornire un esempio (motivando la risposta) di sistema *instabile*.

a) $$y(t) = x(t) \otimes h(t) \qquad |x(t)| \leq k \rightarrow |y(t)| \leq M$$

$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|\,|h(t-\tau)|\, d\tau \leq k \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|\, d\tau$$

$$= k \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt \leq M \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt \neq \infty$$

b) $$h(t) = e^{t} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt = \infty$$

6. Fornire un esempio di codice a blocchi sistematico (4 punti):

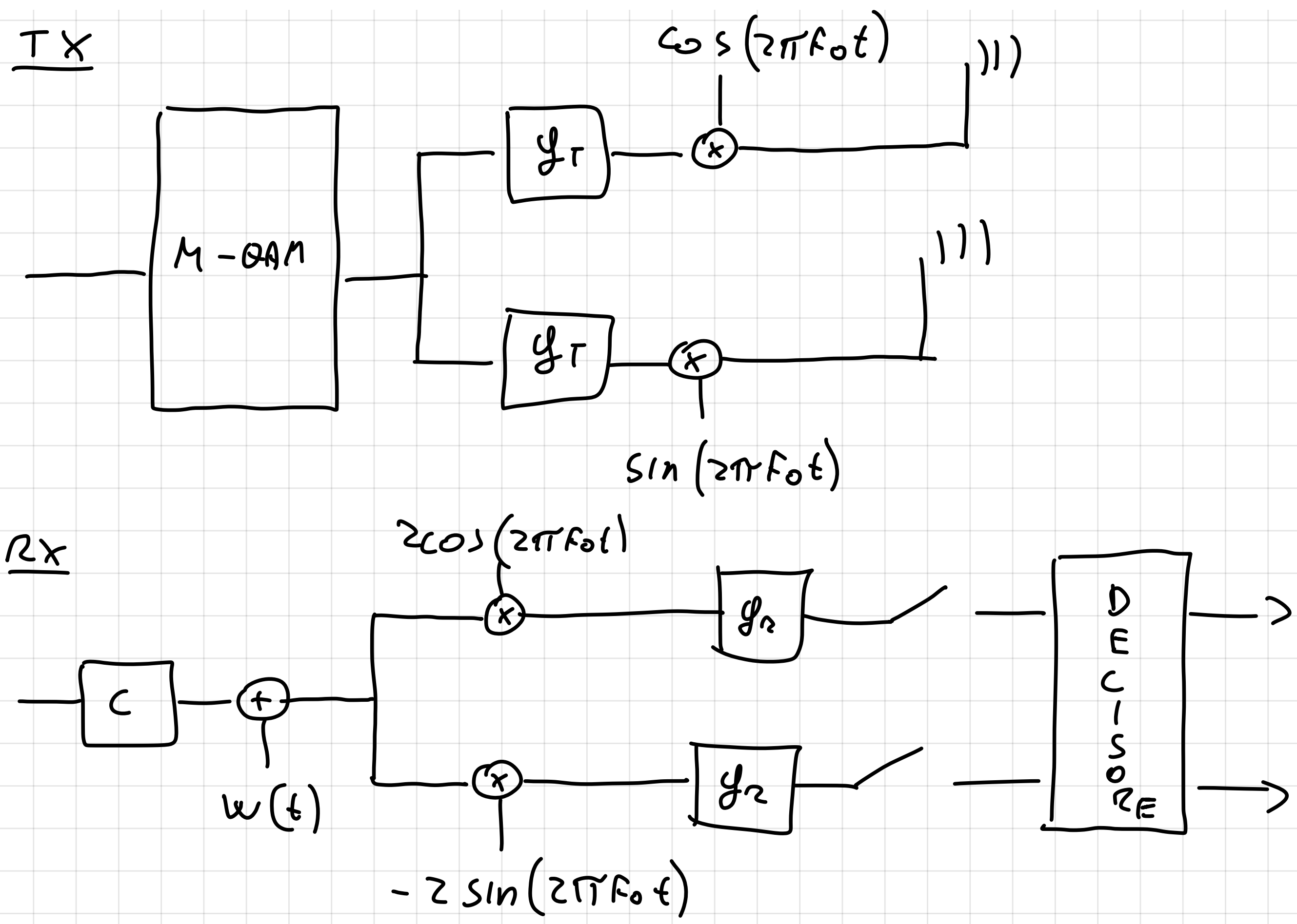
(a) In grado di correggere tutti gli errori di peso uno.

(b) Determinare il peso e numero degli errori identificabili.

a) $t = \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor = 1 \qquad d_{min} = 3 \qquad C(k, n) = C(4, 7)$

b) $n^\circ = d_{min} - 1 = 2 \qquad$ ERRORI DI PESO $< d_{min} = 1, 2$

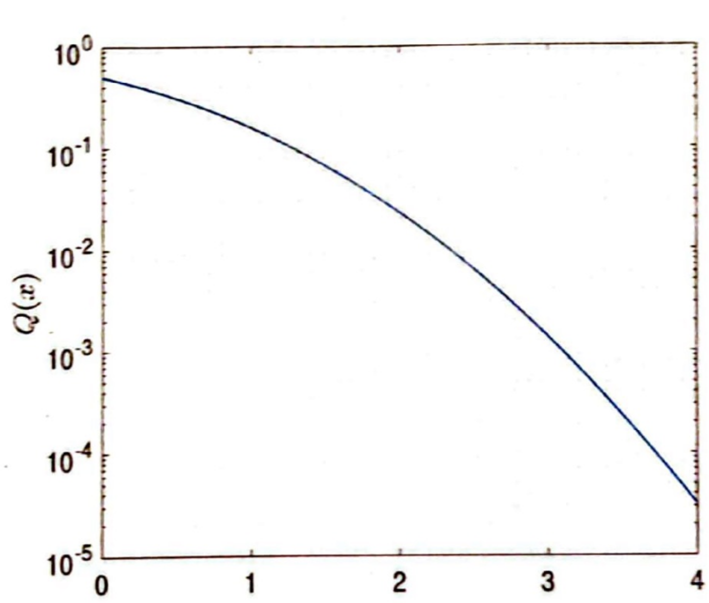
7. Disegnare lo schema a blocchi di un sistema di comunicazione M–QAM. (3 punti)



8. Un sistema di comunicazione 4–QAM impiega un impulso a radice di coseno rialzato con fattore di roll-off $\alpha = 0.2$ ed una banda di $B = 10$ MHz per trasmettere due segnali distinti, uno attraverso il canale in fase (I) e l'altro attraverso il canale in quadratura (Q) (5 punti).

(a) Determinare il tempo per trasmettere un file di 1 Mbit sul canale in fase (I).

(b) Calcolare la probabilità di errore sul canale in fase (I), nell'ipotesi in cui $E_b/N_0 = 8$ dB (dove E_b rappresenta l'energia per bit).



a) $T_{FILE} = \frac{10^6 \text{ bit}}{R_b}$

$R_b = \frac{r \log_2 M}{1+\alpha} B = 16 \ \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}$

$T_{FILE} = 0.0625$ s

b) CA TRATTO COME 2-PAM $\qquad SER = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1} \frac{E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2 \cdot \log_2 M \frac{E_b}{N_0}}\right)$

$= Q\left(\sqrt{2 \cdot 6.3}\right) = Q(3.54)$

2024/11/16

1. Un esperimento aleatorio consiste nell'estrazione di una carta da un mazzo regolare composto di 52 carte. Definiamo i seguenti eventi: (3 punti)

C = {Estrazione di una carta di cuori}
F = {Estrazione di una figura}
N = {Estrazione di una carta nera}

(a) Verificare se gli eventi C e F sono indipendenti.
(b) Verificare se gli eventi C e N sono indipendenti.
(c) Calcolare $\mathbb{P}(F|N)$.

$P(C) = \frac{1}{4} \qquad P(F) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13} \qquad P(N) = \frac{1}{2}$

a) $P(C)P(F) = P(C \cap F)$? $\quad \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13} = \frac{3}{52}$? UGUALI $\rightarrow$ INDIP.

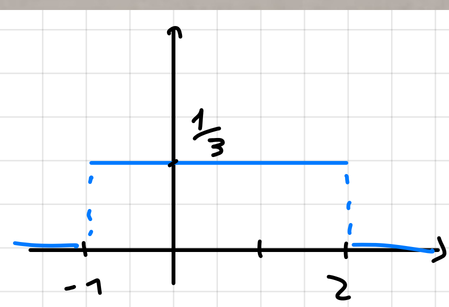
b) $P(C)P(N) = P(C \cap N)$? $\quad \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 0$ NO $\rightarrow$ NON INDIP.

c) $$P(F|N) = \frac{P(F \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{6}{52}}{\frac{1}{2}} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

2. Sia data la variabile aleatoria X uniformemente distribuita nell'intervallo $[-1, 2]$. Si consideri la trasformazione di v.a. $Y = X^2$. (4 punti)

(a) Descrivere l'andamento e disegnare $f_X(x)$.
(b) Calcolare il valor medio di Y.
(c) Calcolare e disegnare $f_Y(y)$.

a) $f_X(x) = \frac{1}{3}$

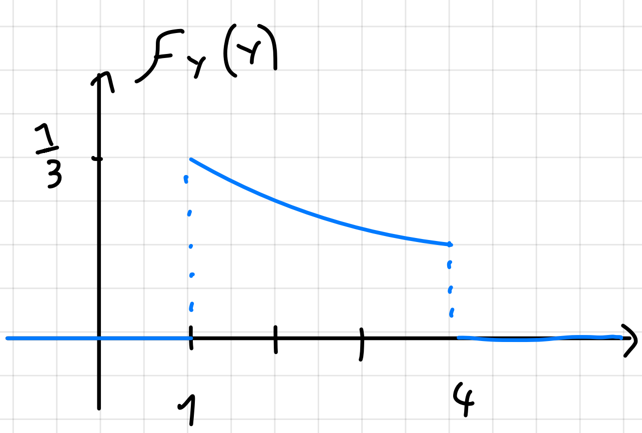


b) $Y = X^2$ $$E\{Y\} = E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{1}{3}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right) = 1$$

c) $x_{1,2} = \pm\sqrt{y}$ $$f_Y(y) = \sum \left.\frac{|f_X(x_i)|}{|g'(x_i)|}\right|_{x_i = g^{-1}(y)}$$

$g'(x) = 2x$

$$f_Y(y) = \frac{\frac{1}{3}}{|2\sqrt{y}|} + \frac{\frac{1}{3}}{|-2\sqrt{y}|} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{2\sqrt{y}} = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{y}} & 1 \le y \le 4 \\ 0 & \text{ALTRIM.} \end{cases}$$



3. Sia dato un processo stazionario bianco $N(t)$ con densità spettrale di potenza $S_N(f) = \frac{N_0}{2}$. $N(t)$ viene dato in ingresso ad un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t) = sinc(2Bt)$, con B costante reale positiva. Sia $Y(t)$ il processo in uscita dal sistema. (3 punti)

(a) Calcolare il valor medio di $Y(t)$.

(b) Calcolare l'autocovarianza di $Y(t)$.

a) $H(f) = \frac{1}{2B} rect\left(\frac{f}{2B}\right) \qquad \eta_Y = \eta_N H(0) = 0$

b) $C_Y(\tau) = R_Y(\tau) - \eta_Y^2 = R_Y(\tau)$

$R_Y(\tau) \Leftrightarrow S_Y(f) = S_N(f)|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \frac{1}{4B^2} rect^2\left(\frac{f}{2B}\right) = \frac{N_0}{8B^2} rect^2\left(\frac{f}{2B}\right)$

$R_Y(\tau) = \frac{N_0}{8B^2} 2B\, sinc(2Bt) = \frac{N_0}{4B} sinc(2Bt)$

4. Dato un sistema lineare e stazionario tale che $y(t) = T[x(t)]$ (4 punti).

(a) Verificare che, se $g(t)$ è la risposta al gradino unitario $u(t)$, la risposta impulsiva è:

$$h(t) = \frac{d}{dt} g(t)$$

(b) Nell'ipotesi in cui $g(t) = (1 - \exp(-t/T))u(t)$, calcolare $h(t)$.

a) $y(t) = T[x(t)] \qquad g(t) = T[u(t)]$

$h(t) = \frac{d}{dt} g(t)$? $\qquad h(t) = T[\delta(t)] = T\left[\frac{d}{dt} u(t)\right] = \frac{d}{dt} T[u(t)] = \frac{d}{dt} g(t)$

b) $g(t) = (1 - e^{-\frac{t}{T}}) u(t)$

$h(t) = \frac{d}{dt} g(t) = \frac{d}{dt}(1 - e^{-\frac{t}{T}}) u(t) + (1 - e^{-\frac{t}{T}})\delta(t) =$

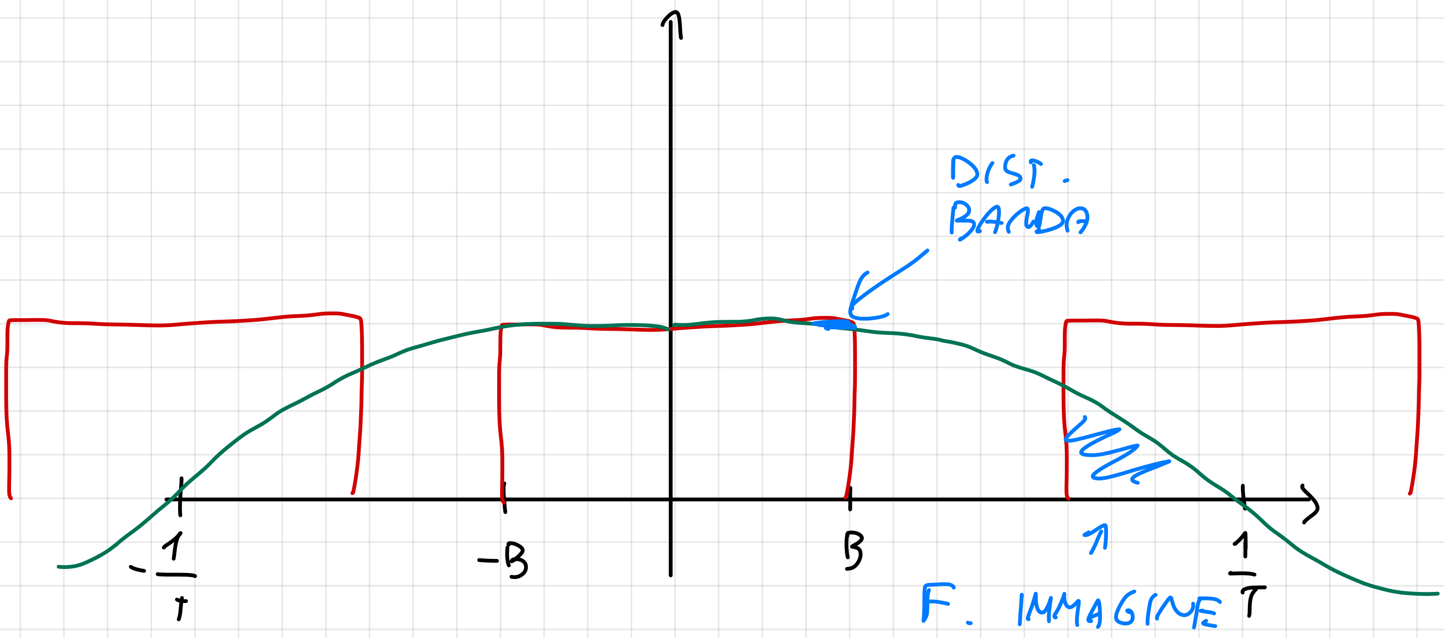
$= \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} u(t) + (1 - e^{-\frac{t}{T}})\delta(t)$

5. Il segnale $x(t) = 2B\text{sinc}(2Bt)$ con $B = 1$ MHz viene campionato a una frequenza di 5 MHz e ricostruito utilizzando un interpolatore a mantenimento (4 punti).

(a) Descrivere le distorsioni introdotte nel segnale ricostruito.

$p(t) = rect\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \qquad P(f) = T\, sinc(Tf)\, e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$

$x(t) = 2B\, sinc(2Bt) \qquad X(f) = rect\left(\frac{f}{2B}\right)$



6. Un sistema di comunicazione impiega un codice a blocco con matrice generatrice: (4 punti)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Nell'ipotesi in cui la probabilità di errore sul bit sia 10^{-3}, calcolare un approssimazione della *probabilità di errore sulle parole di codice.*

$p = 10^{-3}$ $\qquad P_w(e) = \binom{n}{t+1} p^{t+1}(1-p)^{n-(t+1)}$ $\qquad t = \frac{d_{min}-1}{2} = 1$

$k = 3 \quad n = 6$

m	mG
001	001011
010	010101
011	011110
100	100110
101	101101
110	110011
111	111000

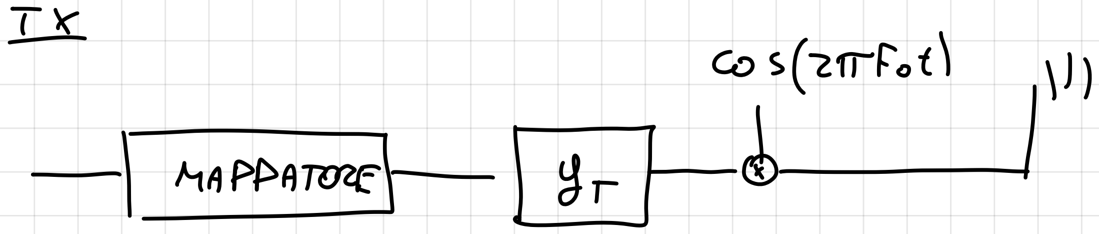
$d_{min} = 3$

$$P_w(e) = \binom{6}{2} p^2 (1-p)^4 = \frac{6!}{2!\,(4!)} p^2 (1-p)^4 =$$

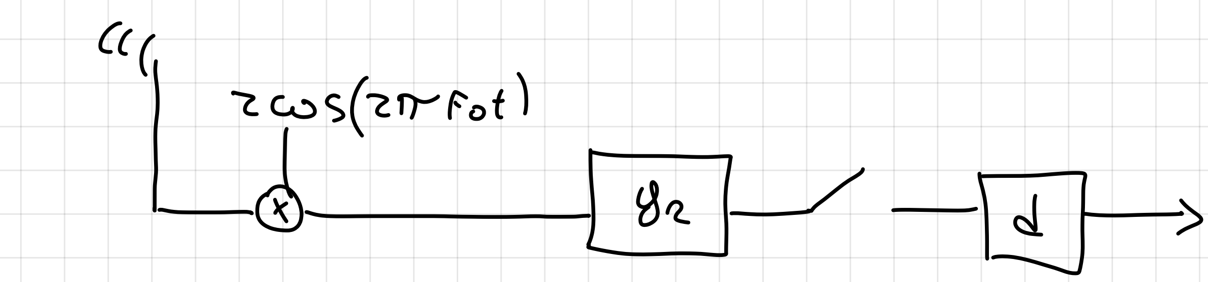
$$= \frac{6 \cdot 5}{2} p^2 (1-p)^4 = 1.5 \cdot 10^{-5}$$

7. Disegnare lo schema a blocchi di un sistema di comunicazione M−PAM in banda passante. (3 punti)

TX



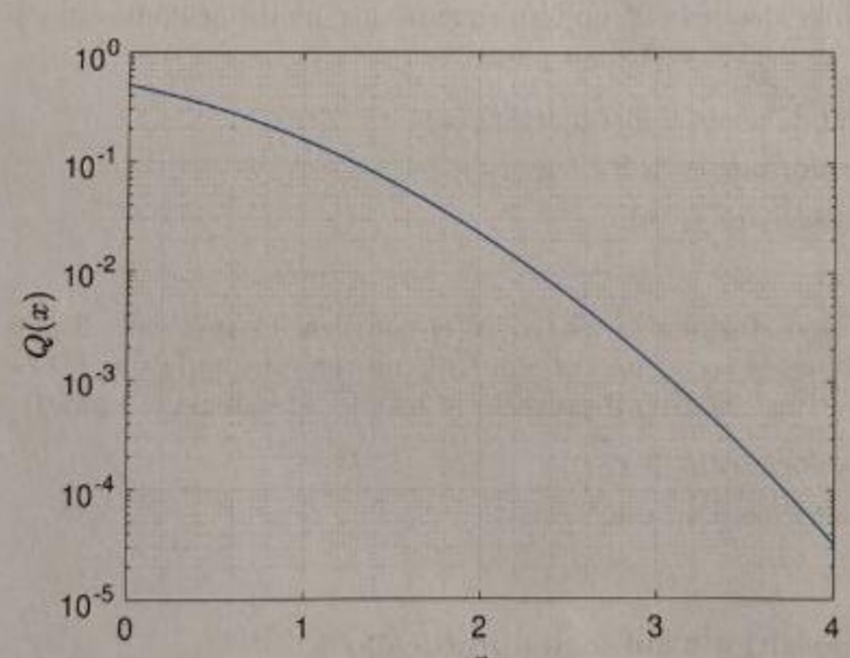
RX



8. Un sistema di comunicazione 4−QAM impiega il codice a blocco di cui sopra, un impulso a radice di coseno rialzato con fattore di roll-off $\alpha = 0.2$ ed una banda di $B = 20$ MHz (5 punti).

(a) Determinare il tempo per trasmettere un file di 10 Mbit.

(b) Calcolare *la probabilità di errore sul bit*, nell'ipotesi in cui $E_b/N_0 = 9.8$ dB (dove E_b rappresenta l'energia per bit non codificato).



$r = 0.5$

a) $T_{FILE} = \frac{SIZE}{R_b}$

$R_b = \frac{r \log_2 M \, B}{1+\alpha}$

$= 16.7$ Mbit/s

$T_{FILE} = \frac{10}{16.7} = 0.6$ s

b) $\frac{E_b}{N_0} = 9.8$ dB $\qquad P(e) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) \qquad \frac{E_b}{N_0} = \frac{E_s}{N_0 r \log_2 M} = \frac{E_s}{N_0}$

$$P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q(3.09) = 10^{-2.8}$$

2025/01/07

1. Un esperimento aleatorio consiste nel lanciare 5 volte una coppia di dadi non truccati, osservando ad ogni lancio la somma dei punteggi sui due dadi. (**3** punti)

(a) Calcolare la probabilità che il 7 si presenti al più una volta.

(b) Calcolare la probabilità che il 12 si presenti due volte.

a) $\{(1,6)(2,5)(3,4)(4,3)(5,2)(6,1)\}$

$P(7) = \frac{6}{36} = p \qquad P\left(\begin{matrix}7 \text{ AL PIÙ} \\ 1 \text{ VOLTA}\end{matrix}\right) = P\left(\begin{matrix}7 \\ 0 \text{ VOLTE}\end{matrix}\right) + P\left(\begin{matrix}7 \\ 1 \text{ VOLTA}\end{matrix}\right)$

$P\left(\begin{matrix}7 \text{ AL} \\ \text{PIÙ } 1 \text{ VOLTA}\end{matrix}\right) = \binom{5}{0} p^0 (1-p)^5 + \binom{5}{1} p (1-p)^4 = \cancel{\frac{5!}{0!(5-0)!}} (1-p)^5 + \frac{5!}{4!} p(1-p)^4 =$

$= (1-p)^5 + 5p(1-p)^4 = 0.8$

b) $\{(6,6)\} \quad P(12) = \frac{1}{36}$

$P\left(\begin{matrix}12 \\ 2 \text{ VOLTE}\end{matrix}\right) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = \frac{5!}{2!(3!)} p^2 (1-p)^3 = 7.09 \cdot 10^{-3} = 0{,}0071$

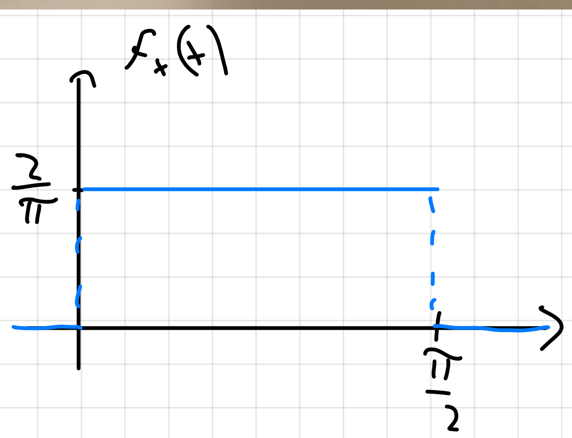
2. Sia data la variabile aleatoria X uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Si consideri la trasformazione di v.a. $Y = \tan(X)$. (**3** punti)

(a) Descrivere l'andamento e disegnare $f_X(x)$.

(b) Calcolare e disegnare $f_Y(y)$.

N.B.: $\frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + [\tan(x)]^2$.

a)



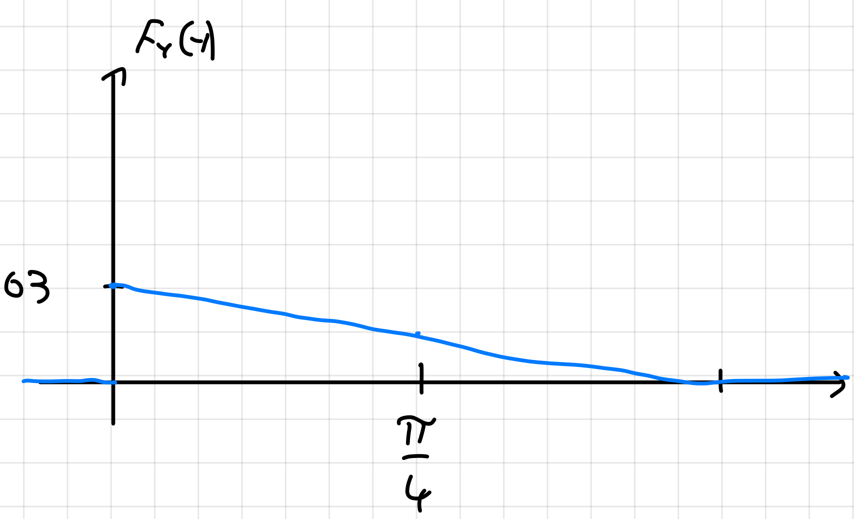
$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{ALTRIM.} \end{cases}$

b) $Y = \tan(X) \qquad X = \arctan(Y)$

$g'(x) = 1 + (\tan(x))^2 \qquad f_Y(y) = \left.\frac{|f_X(x_i)|}{|g'(x_i)|}\right|_{x_i = g^{-1}(y)}$

$f_Y(y) = \frac{\frac{2}{\pi}}{1 + (\tan(\arctan(y)))^2} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+y^2} & 0 \le \arctan(y) \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+y^2} & 0 \le y \le \infty \\ 0 & \text{ALTRIM.} \end{cases}$



3. Sia dato il processo aleatorio $X(t)$ stazionario almeno in senso lato con valor medio nullo e densità spettrale di potenza come in Fig. 1. $X(t)$ entra in un filtro passa-basso ideale con guadagno unitario e frequenza di taglio $f_0 = 2500Hz$. Sia $Y(t)$ il processo in uscita. (4 punti)

(a) Calcolare la varianza di $X(t)$.

(b) Determinare l'intervallo di campionamento T_c minimo affinché i campioni $X(nT_c)$, $n \in \mathbb{Z}$, ottenuti campionando $X(t)$ ad intervalli T_c, siano incorrelati.

(c) Calcolare la potenza di $Y(t)$.

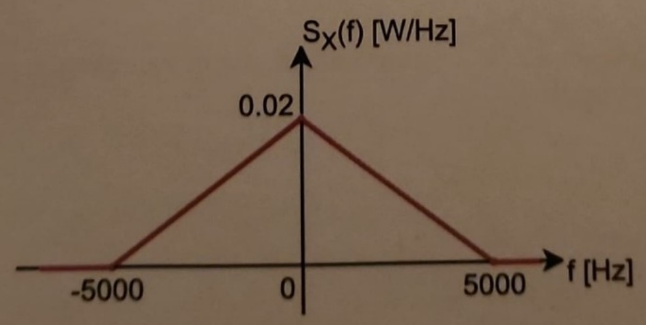


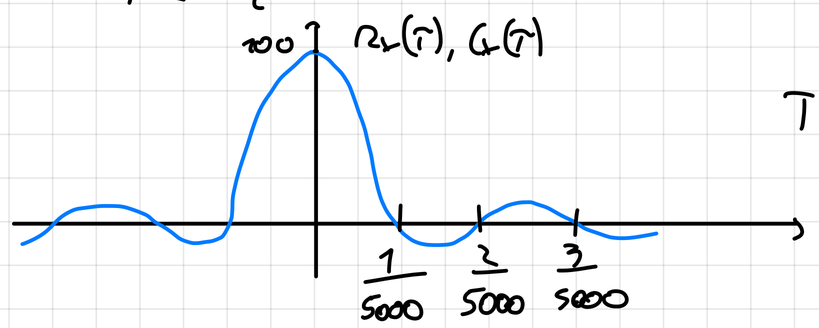
Figura 1: Densità spettrale di potenza di $X(t)$.

a) $\sigma_x = E\{x^2\} - \mu_x^2 = E\{x^2\} = P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\,df = \frac{10000 \cdot 0.02}{2} = 100$

b) $x(nT_c)$ INCORRELATI $\quad C_x(\tau) = 0 \quad \forall \tau = nT_c$

$C_x(\tau) = R_x(\tau) - \mu_x^2 = R_x(\tau)$

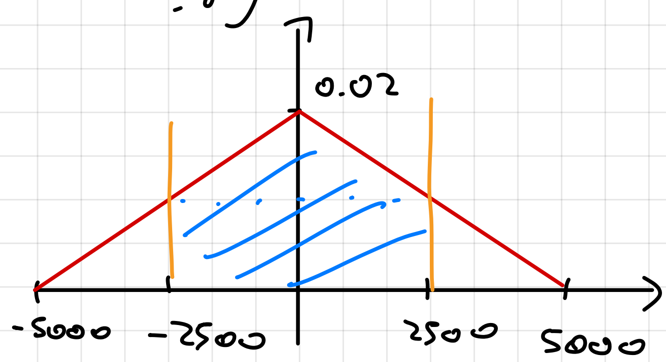
$S_x(f) \Leftrightarrow R_x(f) = 100\,\mathrm{sinc}^2(5000\tau)$



$T_c = \frac{1}{5000}$ s

c) $P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)\,df \qquad S_Y(f) = S_x(f)\,|H(f)|^2 \qquad H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)$

$P_Y = 5000 \cdot 0.01 + \frac{5000 \cdot 0.01}{2} = 75$



4. Dato il filtro $h(t) = \cos(2\pi f_0 t)\exp(-t/T)\,u(t)$ con $T = 1\mu s$ e $f_0 = 3$ GHz (4 punti):

(a) Calcolare la trasformata di Fourier del segnale.

(b) Calcolare la banda a -3 dB in Hz del filtro.

a) $e^{-\frac{t}{T}}u(t) \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{T}} e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{T}+j2\pi f\right)t}\,dt =$

$= -\frac{1}{\frac{1}{T}+j2\pi f}\, e^{-\left(\frac{1}{T}+j2\pi f\right)t}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{\frac{1}{T}+j2\pi f}\left[0-1\right] = \frac{1}{\frac{1}{T}+j2\pi f} = X(f)$

$H(f) = \frac{1}{2}\left[X(f+f_0) + X(f-f_0)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{1}{T}+j2\pi(f+f_0)} + \frac{1}{\frac{1}{T}+j2\pi(f-f_0)}\right]$

b) $B_H = 2B_X \qquad 10\log_{10}\left(\frac{|X(f)|^2}{|X(0)|^2}\right) \qquad |X(f)|^2 = \frac{1}{\frac{1}{T^2}+(2\pi f)^2}$

$|X(0)|^2 = T^2 \qquad 10\log_{10}\left(\frac{1}{1+(2\pi f T)^2}\right)\Big|_{dB} = -3\,\Big|_{dB}$

$$\frac{1}{1+(2\pi F T)^2} = \frac{1}{2} \qquad 1+(2\pi F T)^2 = 2$$

$$4\pi^2 F^2 T^2 = 1 \qquad F = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2 T^2}} = \frac{1}{2\pi T} \simeq 159 \text{ kHz} = B_{x-3dB}$$

$$B_{H-3dB} = 2 B_{x-3dB} = 318 \text{ kHz}$$

5. Un sistema lineare è descritto dalla seguente risposta impulsiva (**5 punti**):

$$h(t) = e^{\alpha t} u(t), \quad \alpha > 0$$

(a) Determinare se il sistema è stabile secondo il criterio BIBO.

(b) Dato il sistema con risposta impulsiva $h(t)g(t)$ con $g(t) = e^{-\beta t}u(t)$, determinare una condizione su β affinché il sistema sia stabile secondo il criterio BIBO.

a) BIBO SE $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt \neq \infty \qquad \int_{0}^{+\infty} e^{\alpha t}\,dt \qquad \alpha > 0$

$\hookrightarrow$ NO BIBO

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)g(t)\,dt \neq \infty \qquad \int_{0}^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-\beta t}\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{(\alpha-\beta)t}\,dt \qquad \alpha > 0$

$\alpha - \beta < 0 \qquad \alpha < \beta \rightarrow$ BIBO

6. Si consideri il codice sistematico con matrice di controllo di parità $\mathbf{H}$ (**3 punti**):

$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(a) Determinare la matrice generatrice $\mathbf{G}$;

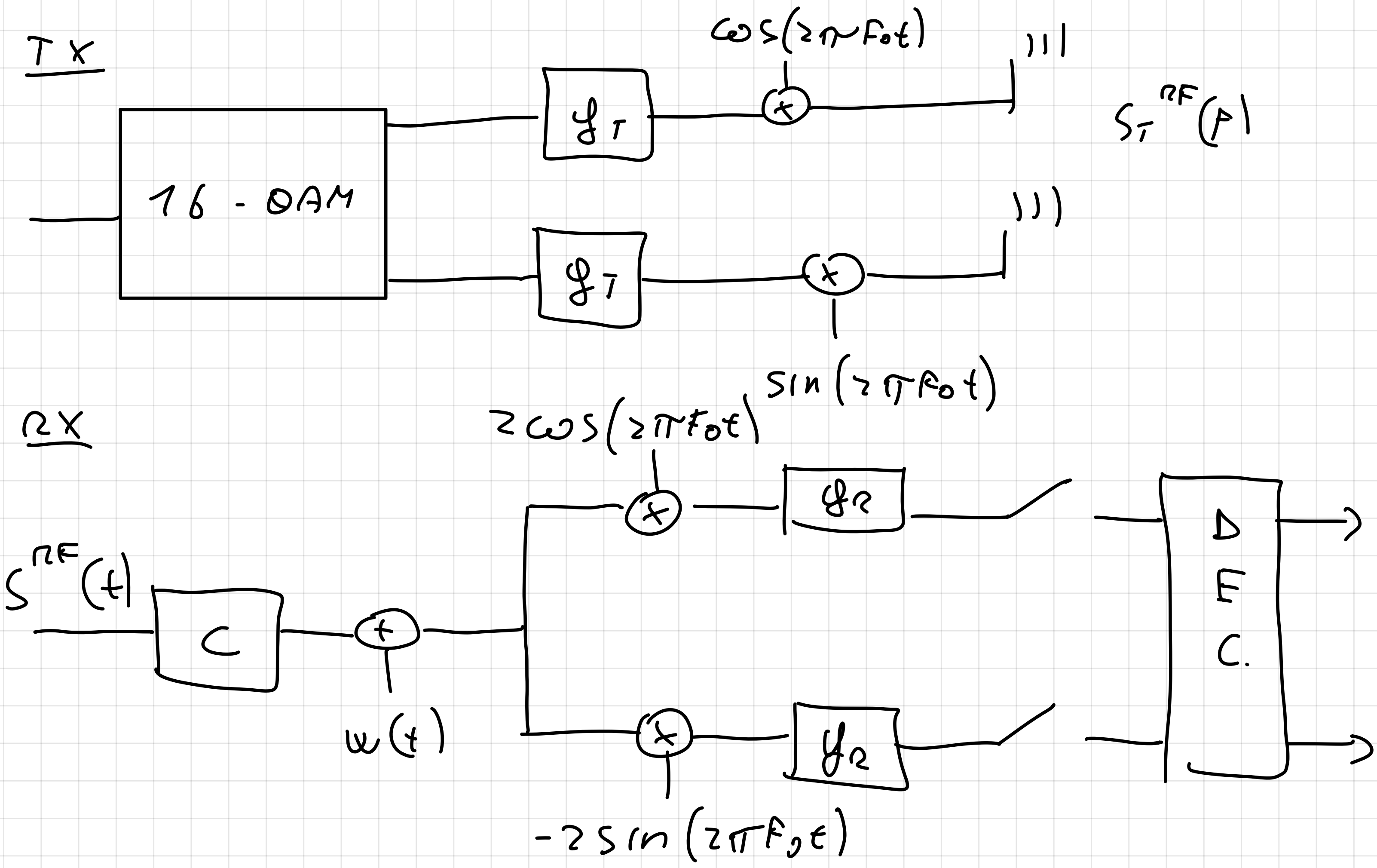
(b) Data la parola ricevuta $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e} = [0,0,1,1,0,1,0]$, impiegare la decodifica a sindrome per trovare la sequenza di bit informativi trasmessa.

a) $G = [I_k, P] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} n-k=3 \\ 7-4=3 \end{array}$

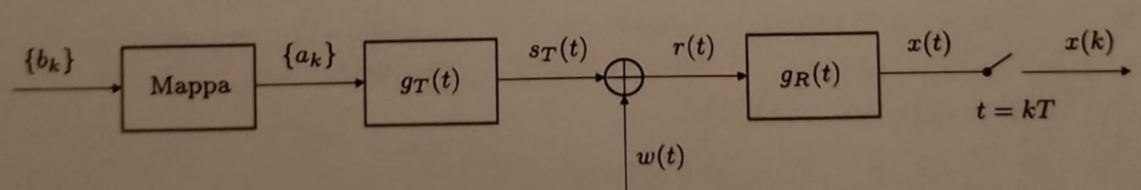
b) $s = yH^T = [0\,0\,1\,1\,0\,1\,0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0\,0\,1] \qquad e = [0\,0\,0\,0\,0\,0\,1]$

$x = y + e = [0\,0\,1\,1\,0\,1\,1]$

7. Disegnare lo schema a blocchi di un sistema di comunicazione 16−QAM. (**3** punti)

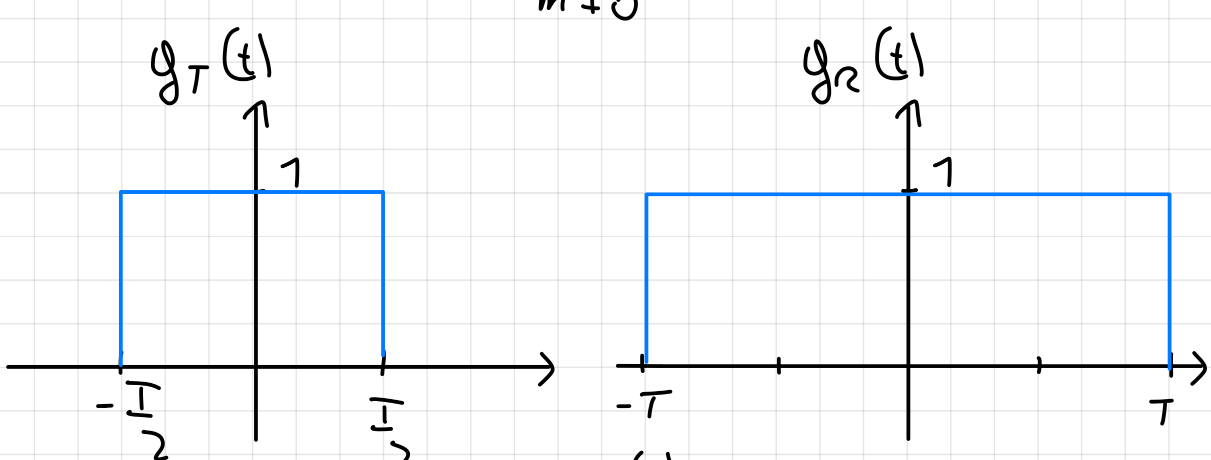


8. Dato il sistema PAM illustrato in figura dove $g_T(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ e $w(t)$ è un processo aleatorio di rumore Gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$. (**5** punti)



(a) Calcolare il campione $x(k)$ ottenuto all'istante di campionamento $t = kT$, nell'ipotesi in cui $g_R(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$.

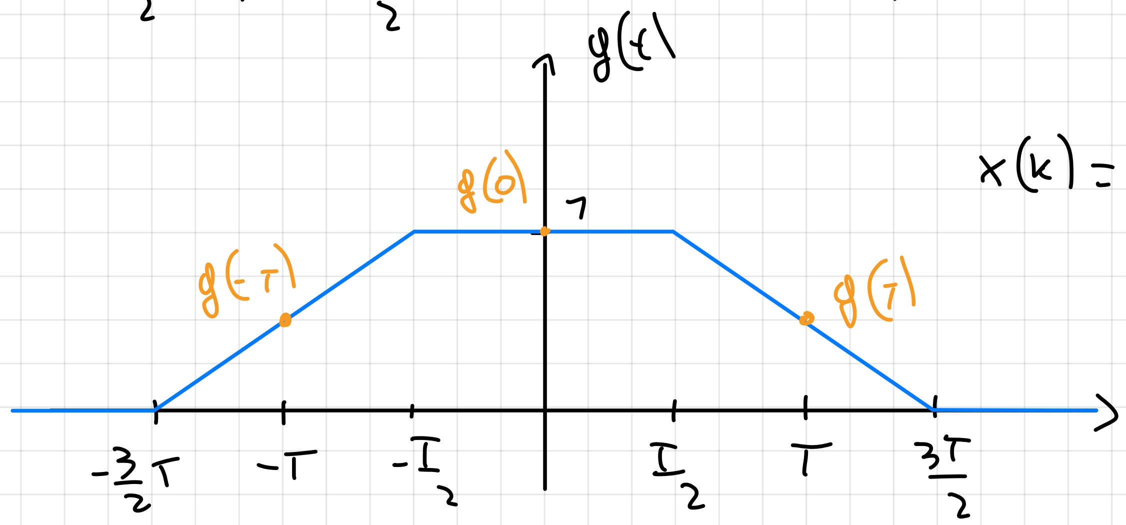
$$x(k) = a_k\, g(0) + \sum_{m \neq 0} a_{k-m}\, g(mT) + n(k)$$



$$g(t) = g_T(t) \circledast c(t) \circledast g_R(t)$$

$$c(t) = \delta(t)$$

$$g(t) = g_T(t) \circledast g_R(t)$$



$$x(k) = a_0\, g(0) + a_{k-1}\, g(T) + a_{k+1}\, g(-T) + n(k)$$

$$n(k) \in \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2} E_{g_R}\right)$$

$$E_{g_R} = \int_{-\infty}^{+\infty} |g_R(t)|^2\, dt = 2T$$

$$n(k) \in \mathcal{N}(0, N_0 T)$$

2025/01/23

1. Si consideri il circuito elettrico in Figura 1. Gli interruttori sono comandati in modo indipendente e hanno uguali probabilità di essere aperti o chiusi. (**3** punti)

(a) Calcolare la probabilità che esista un percorso chiuso tra A e B.

(b) Calcolare la probabilità che esista un percorso chiuso tra A e B sapendo che l'interruttore S_1 è bloccato nello stato aperto.

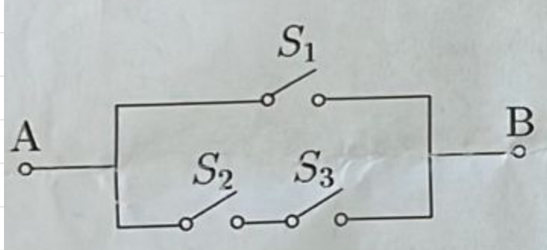


Figura 1: Circuito elettrico.

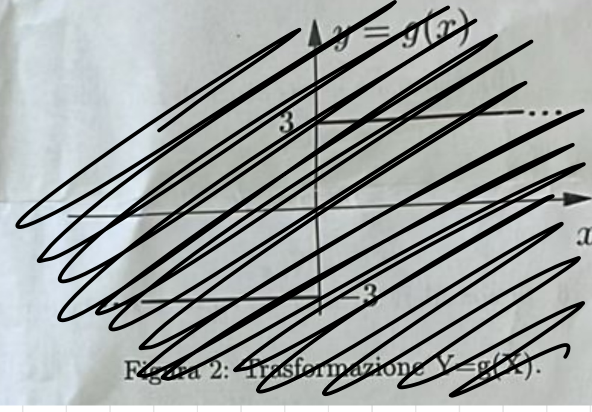


Figura 2: Trasformazione Y=g(X).

a) $P_{AB}(c) = P_{S_1}(c) \cup P_{S_2S_3}(c) = P_{S_1}(c) + P_{S_2S_3}(c) - \left[P_{S_1}(c) \cap P_{S_2S_3}(c)\right]$

$$P_{S_2S_3}(c) = P_{S_2}(c) \cap P_{S_3}(c) \overset{\text{INDIP}}{=} P_{S_2}(c) \cdot P_{S_3}(c) = \frac{1}{4}$$

$$P_{AB}(c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

b) $P_{AB}(c) = P_{S_2}(c) \cap P_{S_3}(c) = \frac{1}{4}$

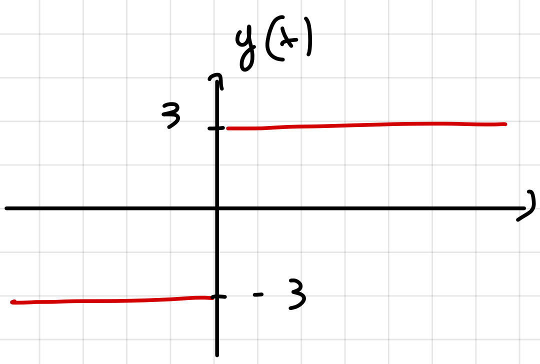
2. Sia data la variabile aleatoria X Gaussiana di media $\eta_X = 2$ e varianza $\sigma_X^2 = 4$. Si consideri la trasformazione di v.a. $Y = g(X)$ rappresentata in Figura 2. (**4** punti)

(a) Esprimere in forma analitica la d.d.p. $f_X(x)$ e disegnarla.

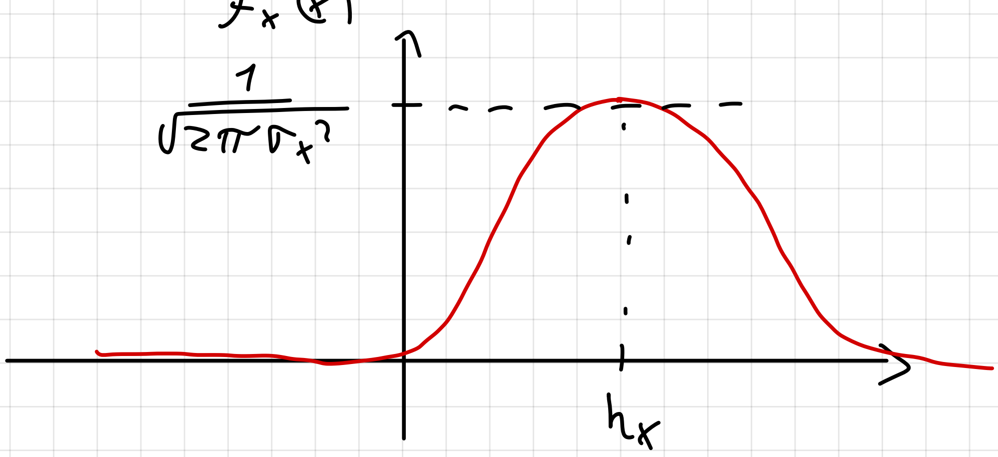
(b) Calcolare la d.d.p. $f_Y(y)$ e e disegnarla.

(c) Indicare se la v.a. Y è continua, discreta o mista, giustificando brevemente la risposta.

(d) Calcolare il valor medio di Y.



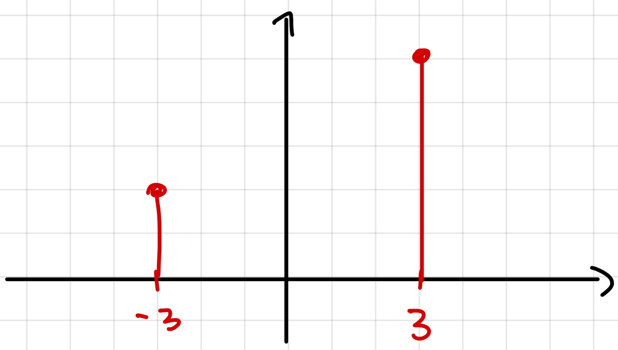
a) $x \in \mathcal{N}(2, 4)$ $\qquad f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}}$



b) $g(x) = \begin{cases} 3 & x \geq 0 \\ -3 & x < 0 \end{cases}$

$$P(Y=3) = P(X \geq 0) = 1 - P(X < 0) = 1 - \phi\left(\frac{0-2}{2}\right) = 1 - \phi(-1) = \phi(1)$$

$$P(Y=-3) = P(X < 0) = \phi(-1)$$



c) DISCRETA, ASSUME VALORI FINITI E DISTINTI

d) $E\{Y\} = \sum_i y_i \, P(Y = y_i) = (-3)\,\phi(-1) + 3\,\phi(1)$

3. Sia dato il processo aleatorio $X(t)$ stazionario in senso lato con funzione di autocorrelazione $R_X(\tau) = \delta(\tau) + 2$. $X(t)$ viene posto in ingresso ad un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t) = 10 \cdot \text{sinc}(10t)$. Sia $Y(t)$ il processo aleatorio in uscita. (3 punti)

(a) Calcolare la potenza di $X(t)$.

(b) Calcolare la densità spettrale di potenza di $Y(t)$ e disegnarla.

(c) Calcolare la potenza di $Y(t)$.

N.B.: $f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$

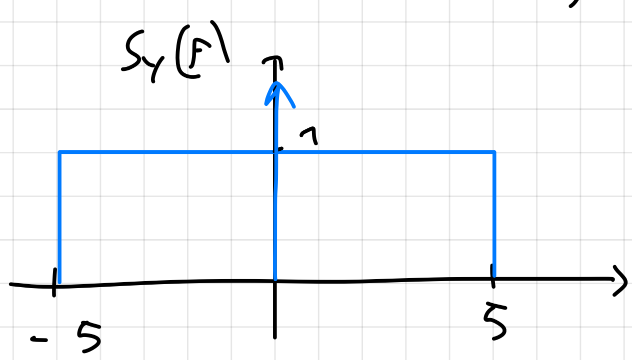
a) $P_X = \int S_X(f)\,df \qquad S_X(f) \Leftrightarrow R_X(\tau)$

$R_X(0) = \int S_X(f)\, e^{j2\pi 0}\, df = \int S_X(f)\, df = P_X$

$P_X = R_X(0) = 2 + \delta(0) = \infty$

b) $S_Y(f) = S_X(f)\,|H(f)|^2 \qquad |H(f)|^2 = \text{rect}^2\left(\frac{f}{10}\right) \qquad S_X(f) = 1 + 2\delta(f)$

$S_Y(f) = (1 + 2\delta(f))\,\text{rect}^2\left(\frac{f}{10}\right) = \text{rect}^2\left(\frac{f}{10}\right) + 2\delta(f)$



c) $P_Y = \int S_Y(f)\,df = \int \text{rect}^2\left(\frac{f}{10}\right) df + \int 2\delta(f)\,df = 10 + 2 = 12$

4. Dato un sistema descritto dalla seguente equazione di ingresso-uscita (6 punti):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,d\alpha$$

(a) Dimostrare che il sistema è lineare e tempo-invariante.

(b) Calcolare la risposta impulsiva del sistema.

a) $T[\beta x(t)] = \beta\, T[x(t)] \qquad T[x_1(t) + x_2(t)] = T[x_1(t)] + T[x_2(t)]$

$T[\beta x(t)] = \int_{-\infty}^{t} \beta\, x(\alpha)\, d\alpha = \beta \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha = \beta\, T[x(t)]$

$T[x_1(t) + x_2(t)] = \int_{-\infty}^{t} x_1(\alpha)\,d\alpha + x_2(\alpha)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{t} x_1(\alpha)\,d\alpha + \int_{-\infty}^{t} x_2(\alpha)\,d\alpha =$

$= T[x_1(t)] + T[x_2(t)]$

$$T\left[x(t-t_0)\right] = y(t-t_0)$$

$$T\left[x(t-t_0)\right] = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha - t_0)\, d\alpha = y(t-t_0)$$

b) $$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\alpha)\, d\alpha = u(t)$$

5. Si consideri il segnale

$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t+T}{2T}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{t-T}{2T}\right)$$

con $T = 0.1\mu s$. (**5 punti**)

(a) Calcolare la trasformata continua di Fourier di

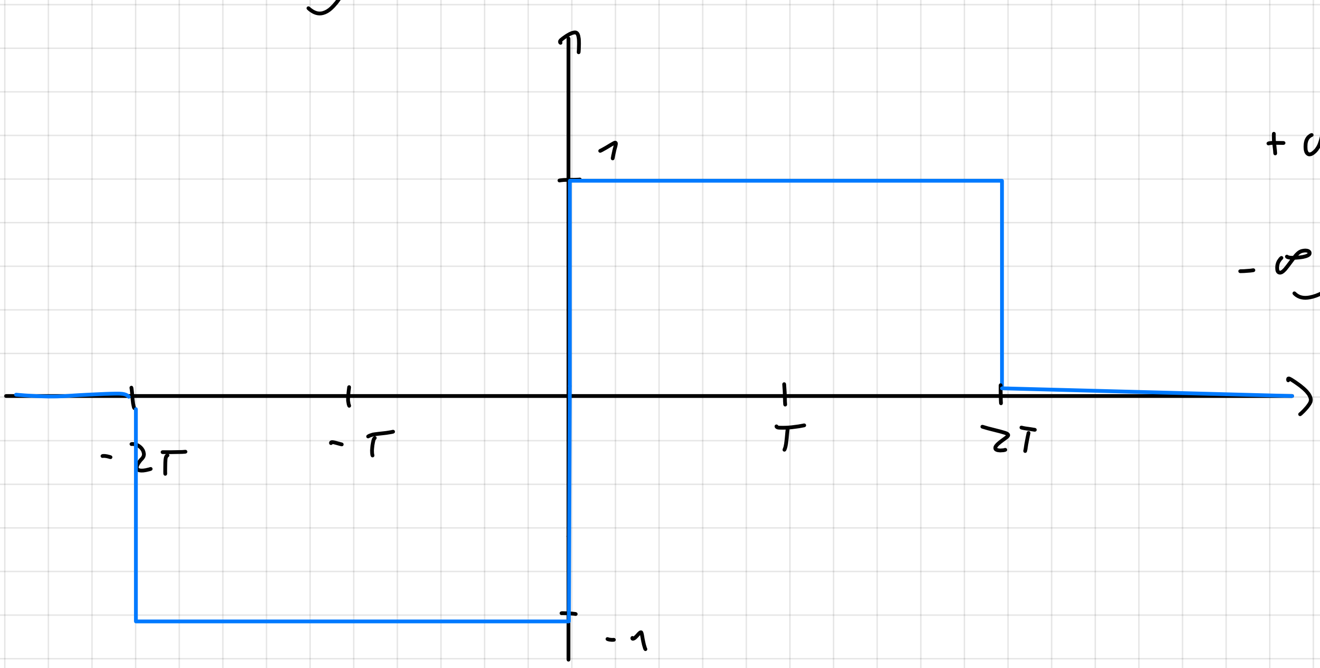
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha) d\alpha.$$

(b) Calcolare la frequenza di campionamento minima per

$$z(t) = y(t) \otimes \mathrm{sinc}(2Bt)$$

con $B = 20$ MHz.

a) $$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha \qquad Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = 0$$

$$X(f) = 2T\,\mathrm{sinc}(2Tf)\, e^{j2\pi fT} - 2T\,\mathrm{sinc}(2Tf)\, e^{-j2\pi fT} =$$

$$= 2T\,\mathrm{sinc}(2Tf)\left(e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT}\right) =$$

$$= 2T\,\mathrm{sinc}(2Tf)\, 2j\sin(2\pi fT) = 4jT\,\mathrm{sinc}(2Tf)\sin(2\pi fT)$$

$$Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} = \frac{2T}{\pi f}\,\mathrm{sinc}(2Tf)\sin(2\pi fT)$$

b) $$Z(f) = Y(f)\,\frac{1}{2B}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \qquad F_{min} = 2B_z = 40\ \mathrm{MHz}$$

6. Si consideri il codice sistematico con matrice generatrice: (4 punti)

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(a) Determinare la matrice di controllo di parità **H**.

(b) Decodificare la parola ricevuta $y = x + e = [0, 0, 1, 1, 1, 0]$ utilizzando la decodifica a sindrome.

a) $H = [P^T, I_{n-k}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $s = yH^T = [0\,0\,1\,1\,1\,0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0\,0\,0]$ $\quad e = [0\,0\,0\,0\,0\,0]$

$x = y + e = [0\,0\,1\,1\,1\,0]$

7. Un sistema di comunicazione impiega una banda $B = 30$ MHz, una costellazione 16-QAM, un codice convoluzionale con tasso $r = 5/6$ ed un impulso a radice di coseno rialzato con roll-off $\alpha = 0.25$. (5 punti)

(a) Determinare l'efficienza spettrale del sistema.

(b) Determinare il tempo necessario a trasmettere 50 immagini di 1920×1080 pixels, nell'ipotesi in cui per trasmettere un pixel siano impiegati 24 bit.

(c) Modificare il sistema al fine di dimezzare il tempo necessario al punto precedente, mantenendo invariata l'efficienza spettrale.

a) $h_{SP} = \dfrac{R_b}{B_T^{RF}} = \dfrac{r \log_2 M}{1+\alpha} = 2{,}67 \ \dfrac{\text{bit/s}}{\text{Hz}}$

b) $SIZE = 50 \cdot 1920 \cdot 1080 \cdot 24 = 2{,}48$ Gbit

$R_b = \dfrac{r \log_2 M}{1+\alpha} B = 80$ Mbit/s $\qquad T_{FILE} = \dfrac{SIZE}{R_b} = 31{,}1$ s

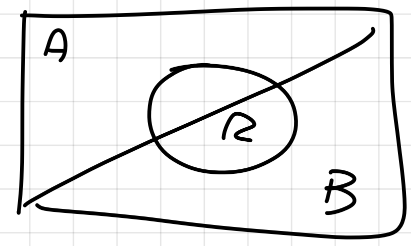
c) $2R_b = 160$ Mbit/s $\qquad h_{SP} = \dfrac{2R_b}{2B_T^{RF}} \qquad B = 60$ MHz

2025/02/10

1. Siano dati due dadi non truccati: il dado A ha 4 facce rosse e 2 facce nere, mentre il dado B ha 2 facce rosse e 4 facce nere. Si scelga in modo casuale un dado da lanciare. Si definiscano gli eventi: (3 punti)

R_1 = {Al primo lancio esce una faccia rossa}; R_2 = {Al secondo lancio esce una faccia rossa}

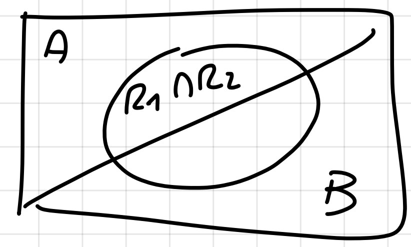
(a) Calcolare $\mathbb{P}(R_1)$ e $\mathbb{P}(R_2)$.
(b) Calcolare $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$.
(c) Verificare se gli eventi R_1 e R_2 sono indipendenti.



a) $P(R_1) = P(A)P(R|A) + P(B)P(R|B) =$

$= \frac{1}{2}\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(R_2) = P(R_1) = \frac{1}{2}$



b) $P(R_1 \cap R_2) = P(A)P(R_1 \cap R_2|A) + P(B)P(R_1 \cap R_2|B) =$

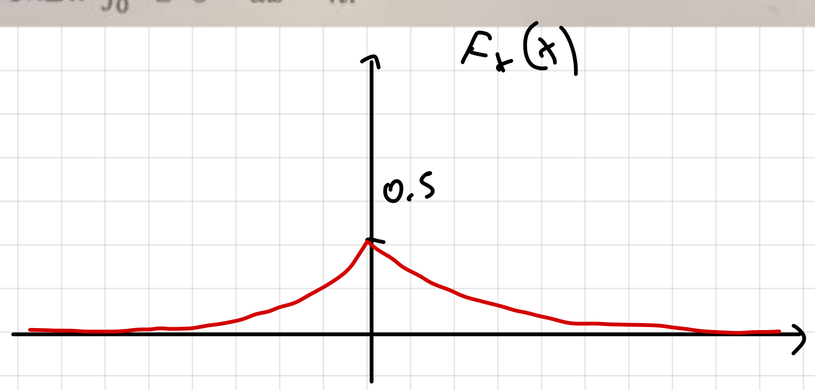
$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{4^2}{9} + \frac{1}{2}\frac{1}{9} = \frac{5}{18}$

c) $P(R_1)P(R_2) = P(R_1 \cap R_2)$? no, non sono INDIP.

2. Sia data la variabile aleatoria X con densità di probabilità $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Si consideri poi la variabile aleatoria Y ottenuta da X con la trasformazione $Y = \mathrm{rect}\left(\frac{X}{4}\right)$. (4 punti)

(a) Calcolare il valor medio e la varianza di X.
(b) Calcolare $F_Y(y)$ oppure $p_Y(y)$ oppure $f_Y(y)$ e disegnarla.
(c) Calcolare il valor medio e la varianza di Y.

N.B.: $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$



a) $\eta_X = 0$

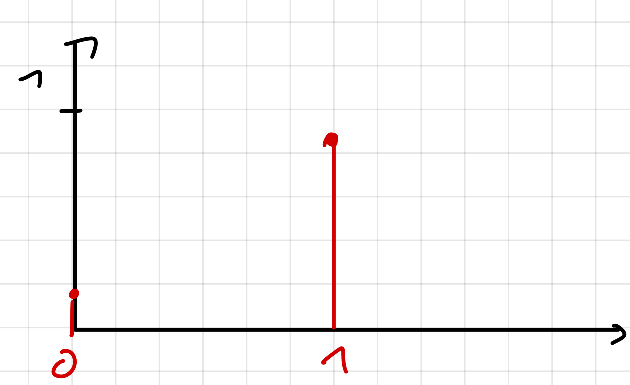
$\sigma_X^2 = E\{X^2\} - \eta_X^2 = E\{X^2\} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|}\,dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx = 2! = 2$

b) $Y = \begin{cases} 1 & -2 \le x \le 2 \\ 0 & \text{ALTRIM.} \end{cases}$

$P_Y(Y=1) = \int_{-2}^{2} f_X(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{-|x|}\,dx = \int_0^2 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^2$

$= -\left[e^{-2} - 1\right] = 1 - e^{-2}$

$P_Y(Y=0) = 1 - P(Y=1) = e^{-2}$



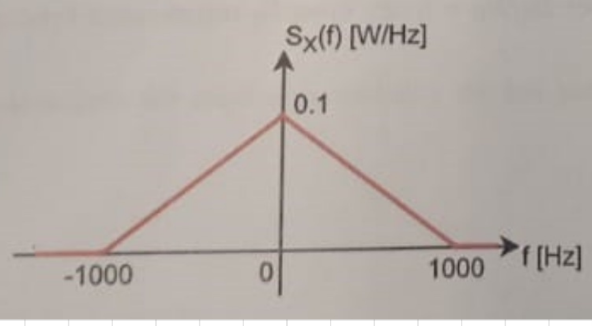
c) $h_Y = \sum_y y\, P(Y=y) = e^{-2} \cdot 0 + (1-e^{-2}) \cdot 1 = 1 - e^{-2}$

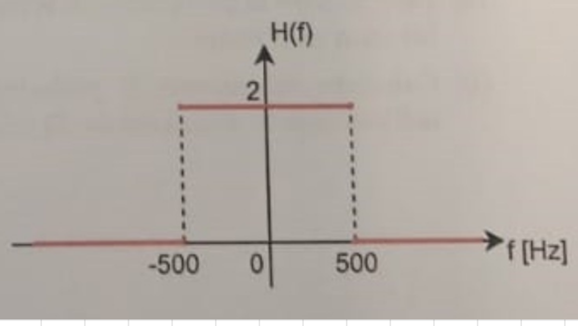
3. Sia dato il processo aleatorio $X(t)$ stazionario almeno in senso lato con valor medio nullo e densità spettrale di potenza riportata in Figura 1. $X(t)$ entra in un filtro con risposta in frequenza $H(f)$ riportata in Figura 2. Sia $Y(t)$ il processo in uscita. (3 punti)

(a) Calcolare l'autocorrelazione di $X(t)$.

(b) Determinare l'intervallo di campionamento minimo T_c affinché i campioni ottenuti $X(nT_c)$ ($n \in \mathbb{Z}$) siano incorrelati.

(c) Calcolare la potenza di $Y(t)$.





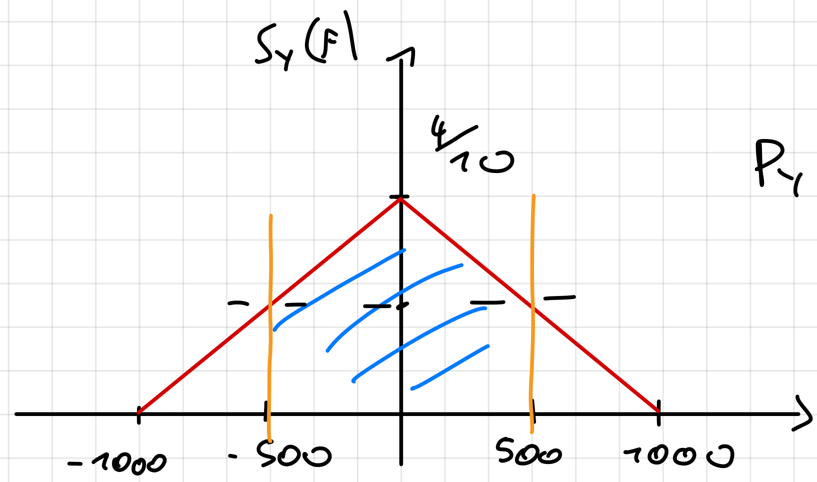
a) $S_X(F) = \frac{1}{10} \operatorname{triang}\left(\frac{F}{1000}\right) \iff R_X(\tau) = 100 \operatorname{sinc}^2(1000\,\tau)$

b) $R_X(t)$ SI ANNULLA PER LA PRIMA VOLTA IN $\frac{1}{1000}$

QUINDI $T_c = \frac{1}{1000}$ s

c) $H(F) = 2 \operatorname{rect}\left(\frac{F}{1000}\right)$

$S_Y(F) = \frac{1}{10} \operatorname{triang}\left(\frac{F}{1000}\right) 4 \operatorname{rect}^2\left(\frac{F}{1000}\right)$



$P_Y = 1000 \cdot \frac{4}{20} + \frac{1000 \cdot \frac{4}{20}}{2} = 300$

4. Dato un sistema descritto dalla seguente equazione di ingresso-uscita (4 punti):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha$$

(a) Nell'ipotesi in cui $x(t) = e^{-2t}u(t)$, calcolare la trasformata di Fourier di $y(t)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt \neq 0$

$$X(F) = \int_0^{+\infty} e^{-2t} e^{-j2\pi F t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(2+j2\pi F)t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{2(1+j\pi F)} e^{-(2+j2\pi F)t}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2(1+j\pi F)}[0-1]$$

$$= \frac{1}{2(1+j\pi F)}$$

$$Y(F) = \frac{X(F)}{j2\pi F} + \frac{X(0)}{2}\delta(F) = \frac{1}{2(1+j\pi F)} \frac{1}{j2\pi F} + \frac{1}{4}\delta(F)$$

5. Si consideri il segnale $x(t) = 2B\text{sinc}^2(2Bt)$ con $B = 1\,\text{MHz}$. (4 punti)

(a) Calcolare $y(t) = x(t) \otimes h(t)$ e la sua trasformata continua di Fourier, nell'ipotesi in cui

$$h(t) = h_1(t) \otimes h_2(t)$$

dove $h_1(t) = 4B\text{sinc}(4Bt)$ e $H_2(f) = e^{-j2\pi f t_o}$.

(b) Calcolare la frequenza di campionamento di $y(t)$.

a) $Y(F) = X(F)\,H(F) = X(F)\,H_1(F)\,H_2(F)$

$H_2(F) = e^{-j2\pi F t_o}$ $\quad H_1(F) = 4B \cdot \frac{1}{4B}\,\text{rect}\left(\frac{F}{4B}\right) = \text{rect}\left(\frac{F}{4B}\right)$

$X(F) = \text{triang}\left(\frac{F}{2B}\right)$

$Y(F) = \text{triang}\left(\frac{F}{2B}\right)\text{rect}\left(\frac{F}{4B}\right)e^{-j2\pi F t_o} = \text{triang}\left(\frac{F}{2B}\right)e^{-j2\pi F t_o}$

b) $F_{min} = 2B_Y \quad B_Y = 2B \quad F_{min} = 4B = 4\,MHz$

6. Si consideri il codice a blocco sistematico con bit di parità: (3 punti)

$$c_3 = m_1 + m_2$$
$$c_4 = m_1$$

dove $\mathbf{m} = [m_1, m_2]$ è una parola di 2 bit.

(a) Determinare la distanza minima del codice.

$m = [m_1, m_2]$

m	$c = mG$
00	0000
01	0110
10	1011
11	1101

c_1	c_2	c_3	c_4
m_1	m_2	m_1+m_2	m_1

$G = [I_k, P]$

$d_{min} = 2$

7. Dato il segnale $s_{RF}(t) = s(t)\cos(2\pi f_0 t)$ dove

$$s(t) = \sum_i a_i g_T(t - iT)$$

e i simboli $\{a_i\}$ appartengono ad una PAM a M livelli, con simboli indipendenti ed equiprobabili. (4 punti)

(a) Calcolare l'espressione della potenza del segnale.

$P_s^{RF} = \frac{P_s}{2} \quad P_s = \frac{M^2-1}{3T} E_{g_T} \quad E_{g_T} = \int_{-\infty}^{+\infty} |g_T(t)|^2 dt$

$P_s^{RF} = \frac{1}{2}\,\frac{M^2-1}{3T}\int_{-\infty}^{+\infty} |g_T(t)|^2 dt = \frac{1}{2T}\sigma_a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |g_T(t)|^2 dt$

8. Dato un sistema di comunicazione 4-QAM. (5 punti)

(a) Determinare la probabilità di errore sul bit per $E_b/N_0 = 6$ dB, dove E_b rappresenta l'energia per bit (non codificato).

(b) Calcolare nuovamente la probabilità di errore sul bit considerando l'uso del codice descritto nell'esercizio 6, mantenendo $E_b/N_0 = 6$ dB.

a) $$BER = \frac{SER}{\log_2 M} = \frac{1}{2} \frac{4(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}\frac{E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{r} \log_2 M \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$= Q\left(\sqrt{2 \cdot 3.98}\right) = Q(2.82)$$

b) $$BER = Q\left(\sqrt{r \log_2 M \frac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{0.5 \cdot 2 \cdot 3{,}98}\right) = Q(1{,}99)$$

2025/04/04

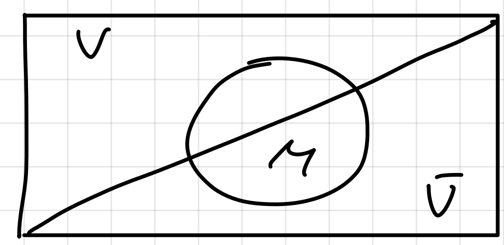
1. Il 30% di una popolazione effettua la vaccinazione anti-influenzale. Le statistiche mostrano che solo il 20% dei vaccinati contrae l'influenza nel corso dell'inverno, contro il 50% dei non vaccinati. (**3** punti)

(a) Qual è la probabilità che un individuo abbia contratto l'influenza?

(b) Se un individuo ha contratto l'influenza, qual è la probabilità che si fosse vaccinato?

(c) Se un individuo ha contratto l'influenza, qual è invece la probabilità che non si fosse vaccinato?

$P(V) = 0.3 \quad P(M \mid V) = 0.2 \quad P(M \mid \bar{V}) = 0.5$



a) $P(M)$?

$$P(M) = P(M \mid V)\,P(V) + P(M \mid \bar{V})\,P(\bar{V}) = 0.41$$

b) $$P(V \mid M) = \frac{P(M \mid V)\,P(V)}{P(M)} = 0.146$$

c) $$P(\bar{V} \mid M) = \frac{P(M \mid \bar{V})\,P(\bar{V})}{P(M)} = 0.85$$

2. Si consideri la variabile aleatoria continua X che può assumere valori nell'intervallo $[-k, k]$, con $k > 0$. La sua densità di probabilità è del tipo $f_X(x) = |\frac{x}{4}|$. (**4** punti)

(a) Determinare il valore di k in modo tale che $f_X(x)$ sia effettivamente una funzione di densità di probabilità.

(b) Disegnare la funzione densità di probabilità di X.

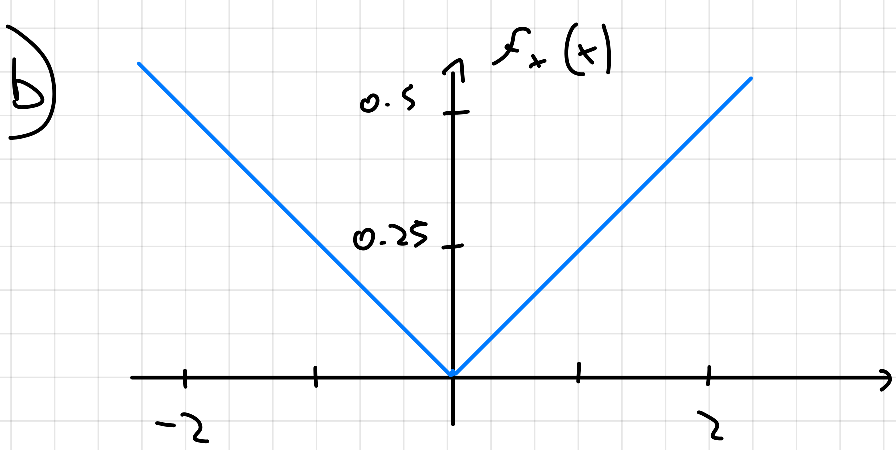
(c) Calcolare e disegnare la funzione distribuzione di probabilità di X.

(d) Calcolare il valore medio e la varianza di X.

a) $$\int_{-k}^{k} \left|\frac{x}{4}\right| dx = 2\int_0^k \frac{x}{4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^k x\,dx = \frac{1}{2}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^k = \frac{1}{2}\frac{k^2}{2} = \frac{1}{4}k^2 = 1$$

$k^2 = 4 \qquad k = 2 \qquad [-2, 2]$

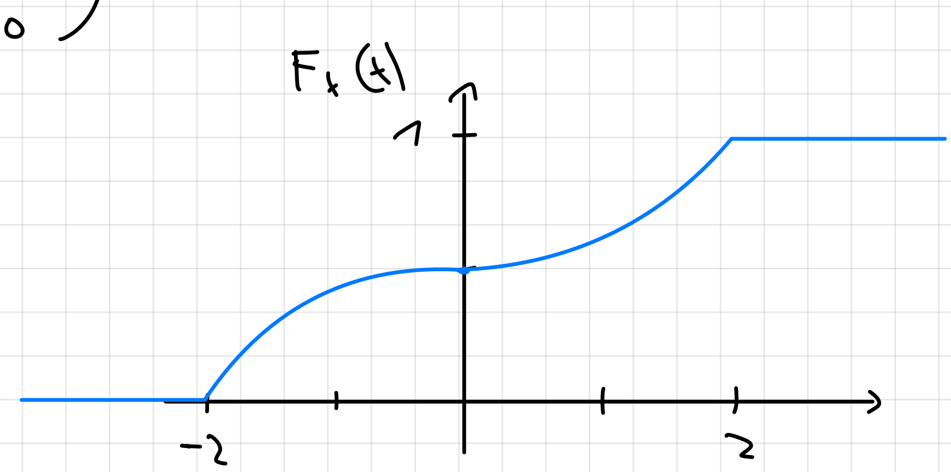
b)



c) $x < 0 \qquad F_X(x) = \int_{-2}^{x} -\frac{x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{x} = \frac{1}{4}\left[-\frac{x^2}{2} + 2\right] = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{8}$

$x \geq 0 \qquad F_X(x) = \int_{-2}^{0} -\frac{x}{4}\,dx + \int_0^x \frac{x}{4}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} & -2 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$



d) $h_x = E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx = \int_{-2}^{0} x \cdot \frac{-x}{4}\, dx + \int_{0}^{2} x \cdot \frac{x}{4}\, dx =$

$$= -\frac{1}{4}\int_{-2}^{0} x^2\, dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{2} x^2\, dx = -\frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[-\frac{8}{3}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{8}{3}\right] = 0$$

$$\sigma_x^2 = E\{x^2\} - h_x^2 = E\{x^2\} = 2\int_{0}^{2} \frac{1}{4}x^3\, dx = \frac{1}{2}\left.\frac{x^4}{4}\right|_{0}^{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{4}\right] = 2$$

3. Un processo stocastico $X(t)$ stazionario almeno in senso lato, con autocovarianza $C_X(\tau) = 10\, sinc^2(10\tau)$ e media nulla, viene posto in ingresso a un sistema lineare tempo invariante avente risposta impulsiva $h(t) = 4\, sinc(2t)\, cos(18\pi t)$. Sia $Y(t)$ il processo in uscita. (**3** punti)

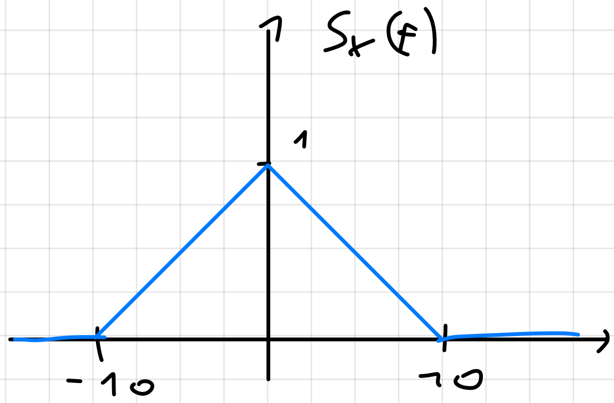
(a) Calcolare e disegnare la densità spettrale di potenza di $X(t)$.

(b) Calcolare il valor medio di $Y(t)$.

(c) Calcolare la potenza di $Y(t)$.

a) $h_x = 0 \qquad C_x(\tau) = R_x(\tau) - h_x^2 = R_x(\tau) = 10\, sinc^2(10\tau)$

$R_x(\tau) \Leftrightarrow S_x(f) = triang\left(\frac{f}{10}\right)$



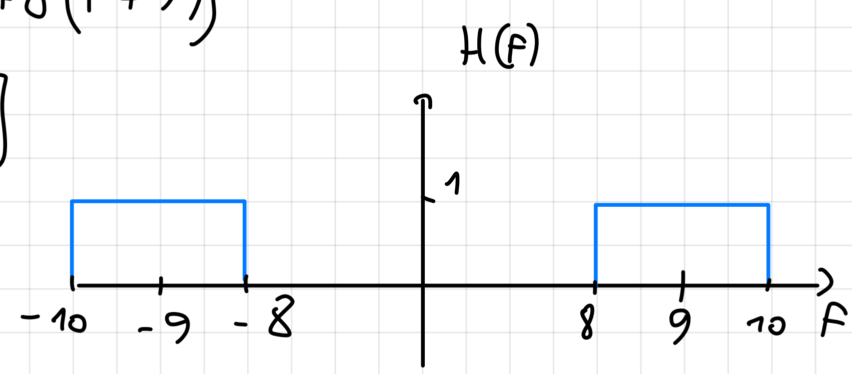
b) $h_Y = h_x\, H(0) = 0$

c) $h(t) = \underbrace{4\, sinc(2t)}_{g(t)}\ \underbrace{cos(2\pi 9 t)}_{k(t)}$

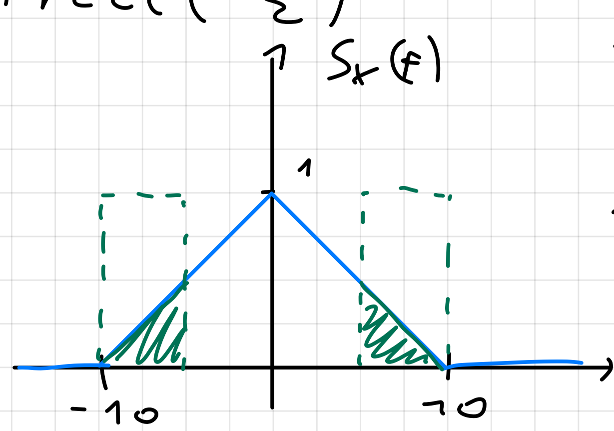
$G(f) = 2\, rect\left(\frac{f}{2}\right) \qquad K(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f-9) + \delta(f+9)\right]$

$H(f) = 2 rect\left(\frac{f}{2}\right) \otimes \frac{1}{2}\left[\delta(f-9) + \delta(f-9)\right]$

$= rect\left(\frac{f-9}{2}\right) + rect\left(\frac{f+9}{2}\right)$



$S_Y(f) = S_x(f)\,|H(f)|^2$



$P_Y = 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 0.2}{2}\right) = 0.4$

4. L'equazione differenziale che lega i segnali di ingresso e uscita di un circuito C-R è: (**4** punti)

$$\frac{d}{dt}v_i(t) - \frac{1}{RC}v_u(t) = \frac{d}{dt}v_u(t)$$

(a) Calcolare la risposta in frequenza del sistema.

(b) Calcolare la larghezza di banda a −10 dB del filtro.

a) $V_u(t) = V_i(t) - \frac{q(t)}{C}$

$\frac{d}{dt}V_u(t) = \frac{d}{dt}V_i(t) - \frac{d}{dt}q(t)\cdot\frac{1}{C} = \frac{d}{dt}V_i(t) - \frac{i(t)}{C} = \frac{d}{dt}V_i(t) - \frac{V_u(t)}{RC}$

TRASFORMO

$j2\pi f V_i(f) - \frac{V_u(f)}{RC} = j2\pi f V_u(f)$ $\quad H(f) = \frac{V_u(f)}{V_i(f)}$

$j2\pi f V_i(f) = \left(j2\pi f + \frac{1}{RC}\right)V_u(f)$ $\quad V_u(f) = \frac{j2\pi f}{j2\pi f + \frac{1}{RC}} V_i(f)$

$H(f) = \frac{j2\pi f}{j2\pi f + \frac{1}{RC}} = \frac{j2\pi f RC}{j2\pi f RC + 1}$ $\quad T = RC$

$H(f) = \frac{j2\pi f T}{j2\pi f T + 1}$ $\to f_0 = 0 \to 0$; $\to f_0 = \infty \to 1$ $\quad f_T = \frac{1}{2\pi T}$

$= \frac{j\frac{f}{f_T}}{1 + j\frac{f}{f_T}}$

b) $|H(f)|^2\Big|_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{|H(f)|^2}{|H(f_0)|^2}\right) = 10\log_{10}\frac{\left(\frac{f}{f_T}\right)^2}{1+\left(\frac{f}{f_T}\right)^2} = -10\,dB$

$\frac{\left(\frac{f}{f_T}\right)^2}{1+\left(\frac{f}{f_T}\right)^2} = 0.1$ $\quad \left(\frac{f}{f_T}\right)^2 = 0.1\left(1+\left(\frac{f}{f_T}\right)^2\right)$

$\left(\frac{f}{f_T}\right)^2 = 0.1 + 0.1\left(\frac{f}{f_T}\right)^2$ $\quad 0.9\left(\frac{f}{f_T}\right)^2 = 0.1$ $\quad \left(\frac{f}{f_T}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$\frac{f}{f_T} = \frac{1}{3}$

5. Dato un sistema lineare e stazionario: (**4** punti)

(a) Derivare una condizione necessaria e sufficiente per la causalità.

(b) Fornire un esempio (motivando la risposta) di sistema *non causale*.

a) $y(t) = T[x(\tau) \mid \tau \leq t]$ SE $h(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$

$$y(t) = T[x(t)] = T[x(t) \otimes \delta(t)]$$

$$y(t) = T\left[\int x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau\right] = \int x(\tau)\,T[\delta(t-\tau)]\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

DIPENDE SOLO DA ISTANTI FINO A t

b) $h(t) = 2t$

6. Si consideri il codice a blocco sistematico con bit di parità: (**3** punti)

$$c_4 = m_2 + m_3$$
$$c_5 = m_1 + m_3$$
$$c_6 = m_1 + m_2$$

dove $\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3]$ è una sequenza di 3 bit.

(a) Decodificare la parola ricevuta $y = x + e = [1, 0, 1, 1, 1, 0]$ utilizzando la decodifica a sindrome.

m	c = mG
000	000000
001	001110
010	010101
011	011011
100	100011
101	101101
110	110110
111	111000

$$G = [I_k, P] = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&1&1&1&0 \end{bmatrix}$$

$$H = [P^T, I_{n-k}] = \begin{bmatrix} 0&1&1&1&0&0 \\ 1&0&1&0&1&0 \\ 1&1&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$s = yH^T = [1\,0\,1\,1\,1\,0]\begin{bmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&1 \\ 1&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} = [0\;1\;1]$$

$$e = [1\,0\,0\,0\,0\,0]$$

$$x = y + e = [0\,0\,1\,1\,1\,0]$$

7. Dato il segnale $s_{RF}(t) = s(t)\cos(2\pi f_0 t)$ dove: (4 punti)

$$s(t) = \sum_i a_i g_T(t - iT)$$

e i simboli $\{a_i\}$ appartengono ad una PAM a 4 livelli, con simboli indipendenti ed equiprobabili.

(a) Calcolare la potenza del segnale nell'ipotesi in cui $g_T(t)$ sia a radice di coseno rialzato con $\alpha = 0.22$.

$$P_s^{RF} = \frac{P_s}{2} \qquad P_s = \frac{M^2-1}{3T} E_{g_T} \qquad E_{g_T} = \int |g_T(t)|^2 dt = \int |G_T(f)|^2 dt$$

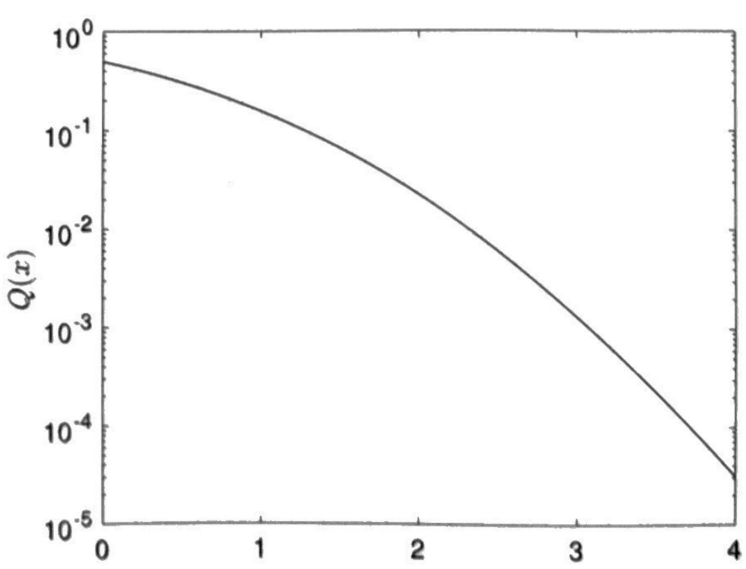
$$= \int G_{RCR}(f)\, df = 1$$

$$P_s^{RF} = \frac{1}{2} \frac{M^2-1}{3T}$$

8. Dato un sistema di comunicazione 4-QAM: (5 punti)

(a) Determinare il valore di E_b/N_0 in dB, dove E_b rappresenta l'energia per bit (non codificato), necessario per garantire una probabilità di errore pari a 10^{-5}.

(b) Calcolare nuovamente il valore di E_b/N_0 in dB usando il codice descritto nell'esercizio 6.



a)

$$BER = \frac{2Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}\frac{E_s}{N_0}}\right)}{2} = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

$r = 1$

$$E_s = r \log_2 M\, E_b = 2E_b$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-5} \approx Q(4)$$

$$2\frac{E_b}{N_0} = 16 \qquad \frac{E_b}{N_0} = 8 = 9 \text{ dB}$$

b) $r = 0.5$ $\qquad E_s = E_b$

$$\frac{E_b}{N_0} = 16 = 12 \text{ dB}$$