$f(t) \qquad g(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(f(t)+g(t)\right) = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

$\vec{U}(t) \qquad \vec{V}(t)$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{U}(t)+\vec{V}(t)\right] = \frac{d\vec{U}}{dt}(t) + \frac{d\vec{V}}{dt}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)g(t)\right] = g(t)\frac{df(t)}{dt} + f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$

$f(t)$ SCALARE $\qquad \vec{v}(t)$ vettore

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)\vec{v}(t)\right] = \frac{df(t)}{dt}\vec{v}(t) + f(t)\frac{d\vec{v}}{dt}(t)$$

VETTORI: $\vec{U}(t) \qquad \vec{V}(t)$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{U}(t)\cdot\vec{v}(t)\right] = \frac{d\vec{U}}{dt}(t)\cdot\vec{v}(t) + \vec{U}(t)\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}(t)$$

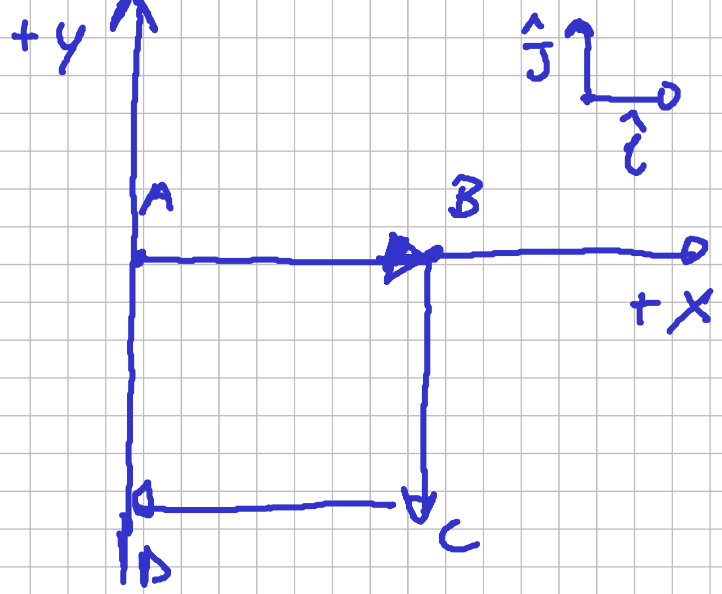
$\vec{U}(t) \qquad \vec{v}(t)$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{U}(t)\times\vec{v}(t)\right] = \frac{d\vec{U}}{dt}(t)\times\vec{v}(t) + \vec{U}(t)\times\frac{d\vec{v}}{dt}(t)$$

$\vec{v}$ vettore $\qquad |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

$$\frac{d}{dt}|\vec{v}| = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$



$\vec{\ell}_1 = 1\,Km\,\hat{i}$

$(1\,Km, 0)$

$\vec{\ell}_2 = -1\,Km\,\hat{j}$

$(0, -1\,Km)$

$\vec{\ell}_3 = -1\,Km\,\hat{i}$

$(-1\,Km, 0)$

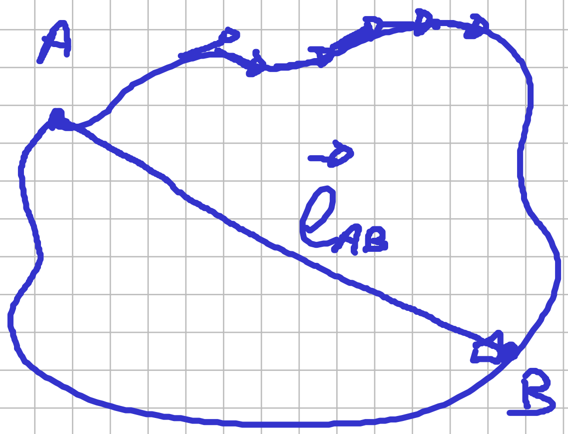
$$\vec{\ell}_{TOT} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 =$$

$$= -1\,Km\,\hat{j}$$

CAMMINO $= |\vec{\ell}_1| + |\vec{\ell}_2| + |\vec{\ell}_3| = 3\,Km$

$\vec{\ell}_4 = 1\,Km\,\hat{j}$ $\quad (0, 1\,Km)$

$$\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \vec{\ell}_4 = 0$$



$$\vec{\ell}_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\ell}_i = 0$$

$$\vec{\ell}_{A\to B} = \sum_{i=1}^{M} \vec{\ell}_i$$

$$\vec{\ell}_{A\to B} = \int_A^B d\vec{\ell}$$

LUNGHEZZA CAMMINO $= \int |d\vec{l}|$

Cinematica

Cinematica

Un corpo che si muove occupa differenti <u>posizioni</u> nello spazio in <u>tempi</u> differenti.

La scia di questo motoscafo ci permette di visualizzare la sua traiettoria, che unisce le posizioni.

Cinematica

Lo scopo della cinematica è descrivere, matematicamente, il movimento dei corpi determinandone la posizione e la velocità in ogni istante del tempo.

Corpo: in cinematica, un corpo è puntiforme e non ha caratteristiche intrinseche (come il volume o la massa).

Parole chiave :

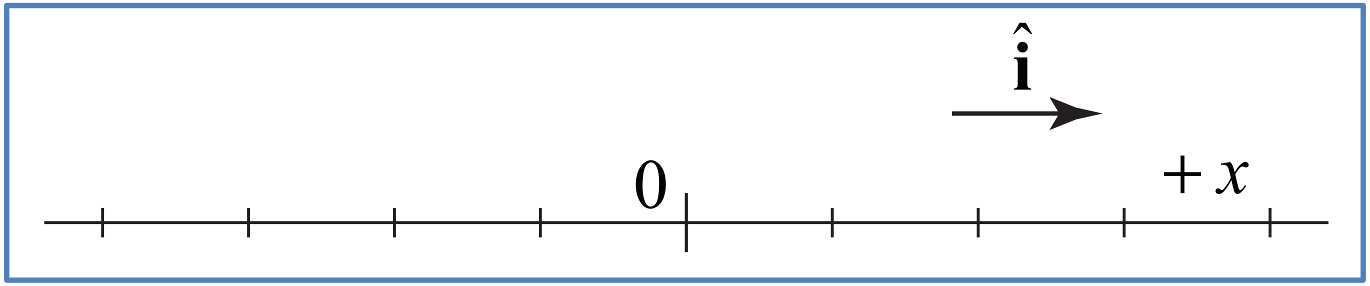
- Posizione
- Tempo
- Spostamento
- Velocità
- Accelerazione

La cinematica non analizza né specifica le cause del movimento.

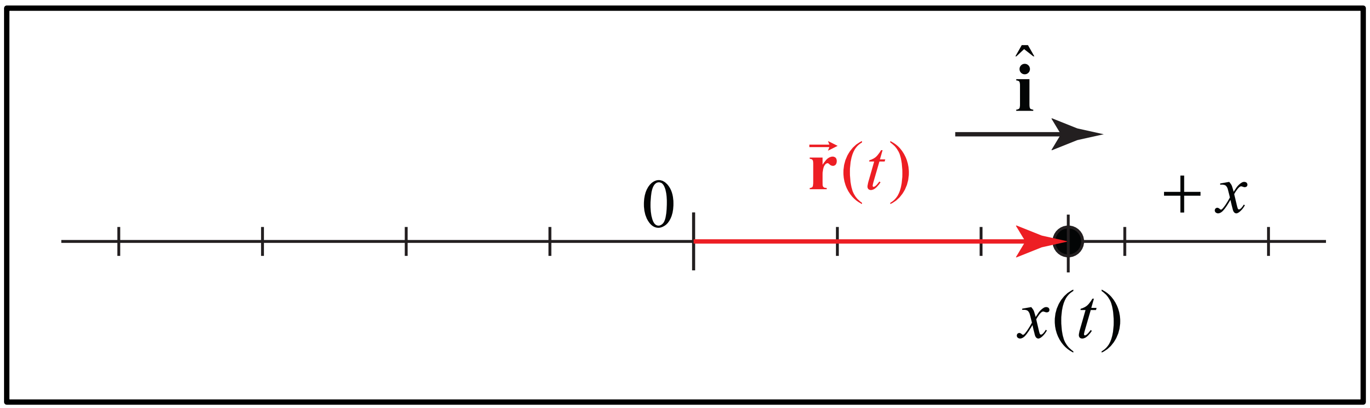
Moto rettilineo

Un'auto su una strada rettilinea. L'auto può avere velocità costante, accelerare, frenare, fare retromarcia o essere ferma.

Vettore posizione



Sistema di coordinate cartesiane 1D + tempo



La posizione è identificata dal **vettore di posizione**

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{i}}$$

x(t) è la «componente» della posizione o **coordinata**

L'unità di misura della posizione è il metro, simbolo m

Tempo

Può essere misurato con un orologio.

Tempo iniziale, t_1

Tempo finale, t_2

$\Delta t \ = \ 300 \ s$

in questo esempio

Intervallo di tempo:

$[t_1, t_2]$

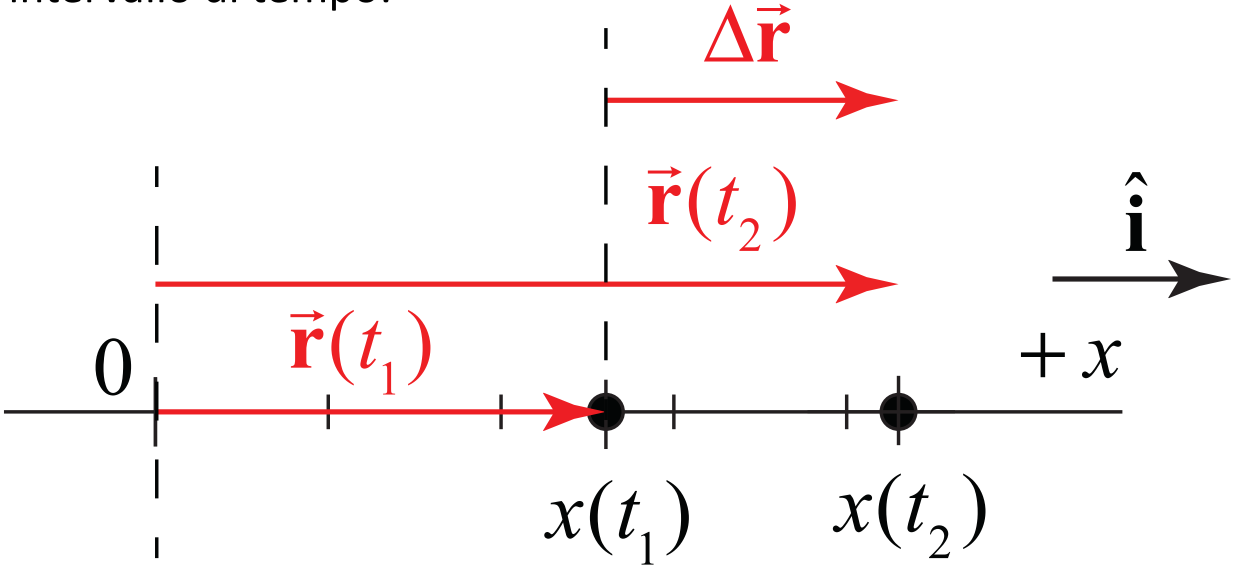
$\Delta t = t_2 - t_1$

L'unità di misura è il secondo [s]

Δt è sempre positivo

Vettore spostamento

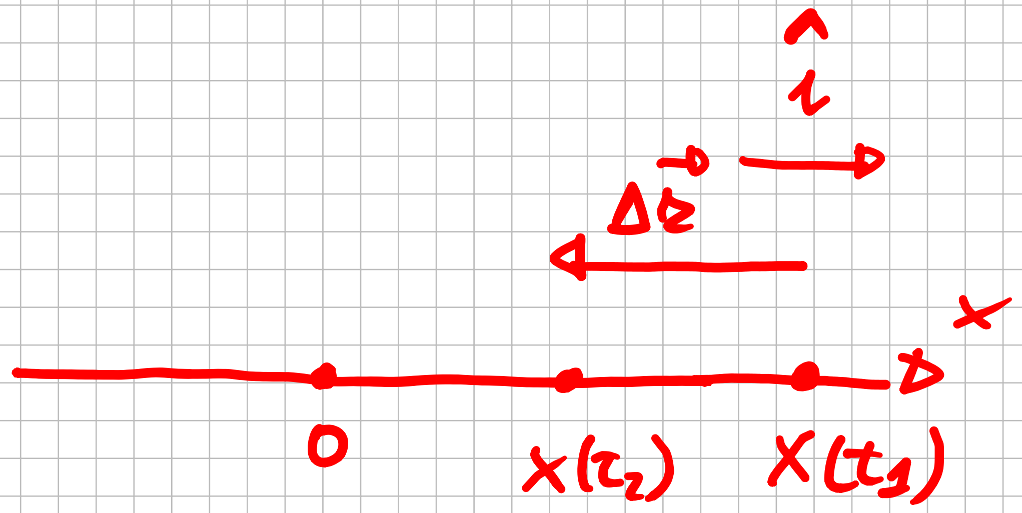
Lo spostamento è la variazione di posizione (posizione finale - posizione iniziale) che si verifica nell'intervallo di tempo:



$$\Delta\vec{\mathbf{r}} \equiv \vec{\mathbf{r}}(t_2) - \vec{\mathbf{r}}(t_1) = (x(t_2) - x(t_1))\,\hat{\mathbf{i}} \equiv \Delta x(t)\,\hat{\mathbf{i}}$$

Lo spostamento è un vettore

Componente dello spostamento

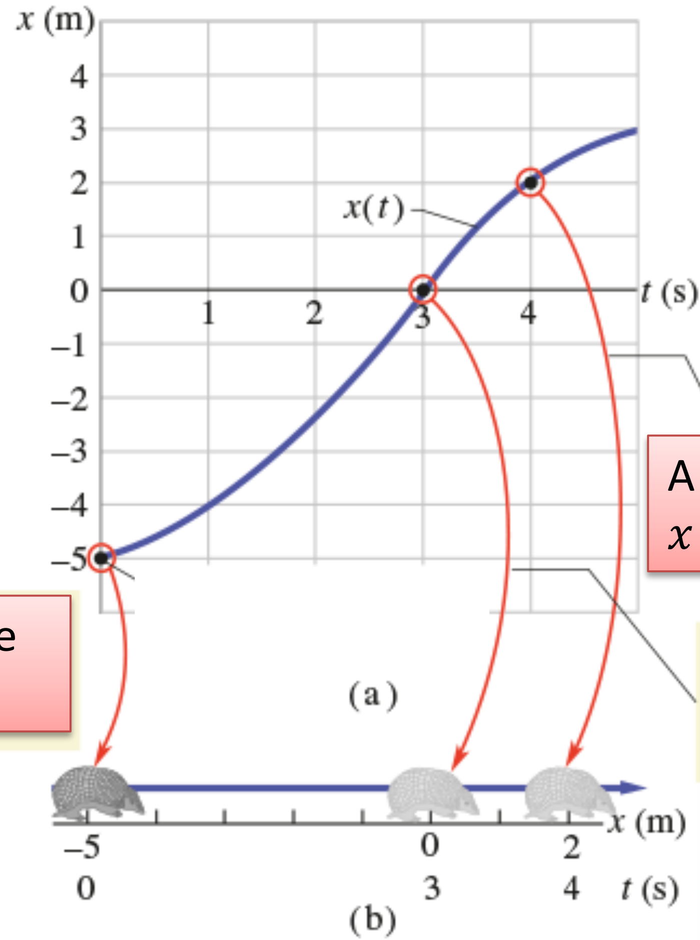


$\hat{i}$
$\Delta\vec{s}$
x
0
$x(t_2)$
$x(t_1)$

Il moto dell'armadillo

Grafico della coordinata della posizione, x

in funzione del tempo, t



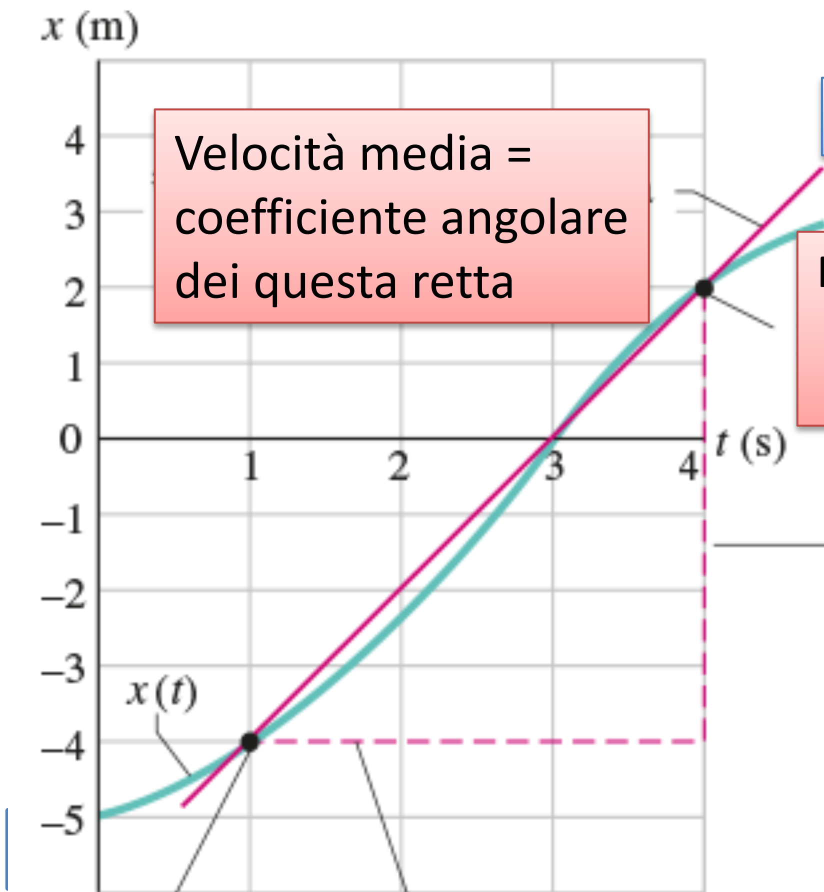
A $t = 0\ s$, la posizione è $x = -5\ m$

A $t = 4\ s$, la posizione è $x = 2\ m$

A $t = 3\ s$, la posizione è $x = 0$

l'armadillo è nell'origine del sistema di riferimento

Velocità media



Velocità media = coefficiente angolare dei questa retta

Linea che unisce $x(t_1)$ e $x(t_2)$

Posizione finale
$t_2 = 4\ s$
$x(t_2) = 2\ m$

Componente dello spostamento:

$$\Delta x = 6\ \mathrm{m}$$

Posizione iniziale:
$t_1 = 1\ s$
$x(t_1) = -4\ m$

Intervallo di tempo:

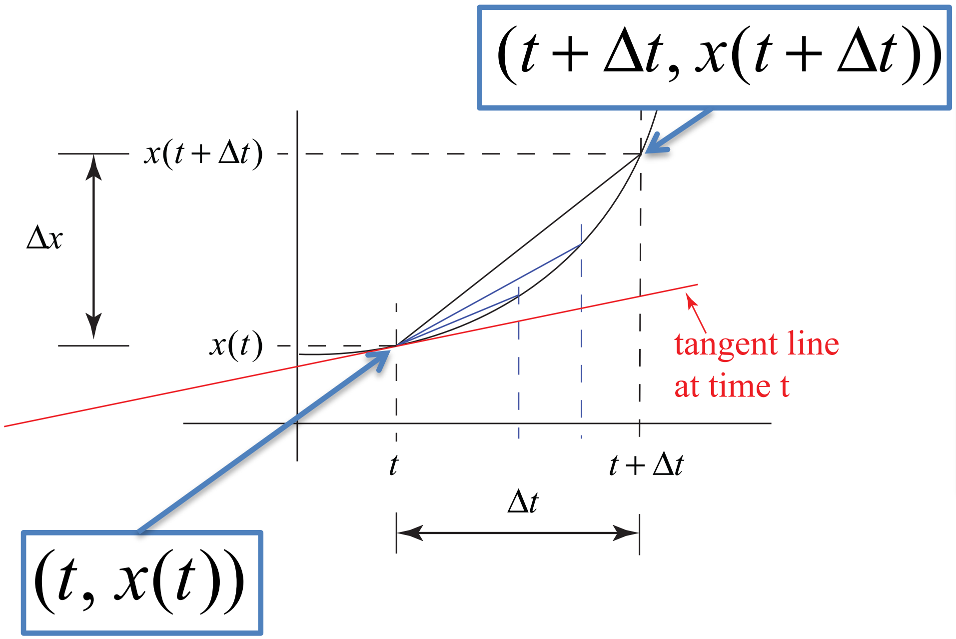
$$\Delta t = 3\ s$$

La componente della velocità media nell'intervallo Δt è:

$$v_{media,x} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Velocità istantanea

Consideriamo l'intervallo di tempo $[t, t+\Delta t]$:



La pendenza della retta che unisce i punti sul diagramma è la componente della velocità media:

$$v_{media,x} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Prendendo intervalli Δt sempre più piccoli, definiamo la <u>componente della velocità istantanea</u> al tempo t:

$$v_x(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dx(t)}{dt}$$

Rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto $(t, x(t))$.

La velocità è un vettore

$$\vec{v}_{media} = v_{media,\,x}\,\hat{\imath} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\,\hat{\imath}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{\imath} = \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{\imath}$$

Poiché l'intervallo di tempo è positivo, la velocità media ha lo stesso verso dello spostamento.

L'unità di misura è $[m \cdot s^{-1}]$

Moto a velocità costante (moto rettilineo uniforme)

Se il vettore velocità non cambia nel tempo, il moto è necessariamente rettilineo e la componente della velocità è costante

Poniamo l'intervallo di tempo: $\Delta t = t - t_0$

La coordinata al tempo t_0 sia x_0 e quella al tempo t sia $x(t)$

Poiché la velocità è costante possiamo scrivere, per la sua componente:

$$v = v_x = v_{media,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x_0}{t - t_0}$$

Esprimiamo lo spostamento in funzione della velocità e del tempo: $x(t) - x_0 = v \cdot (t - t_0)$

da cui ricaviamo:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v \cdot (t - t_0) \\ v = costante \end{cases}$$

Legge oraria

equazione per la velocità

Accelerazione media

$\vec{\mathbf{v}}(t) = v(t)\,\hat{\mathbf{i}}$ Velocità istantanea al tempo t

$\Delta\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}(t+\Delta t) - \vec{\mathbf{v}}(t)$ Variazione della velocità istantanea nell'intervallo di tempo Δt

Definiamo l'accelerazione media nell'intervallo di tempo Δt

$$\vec{a}_{media} = a_{media,\,x}\,\hat{\imath} \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\,\hat{\imath} = \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}\,\hat{\imath}$$

Vettore accelerazione media

Componente dell'accelerazione media

Unità di misura $[m \cdot s^{-2}]$

Accelerazione istantanea

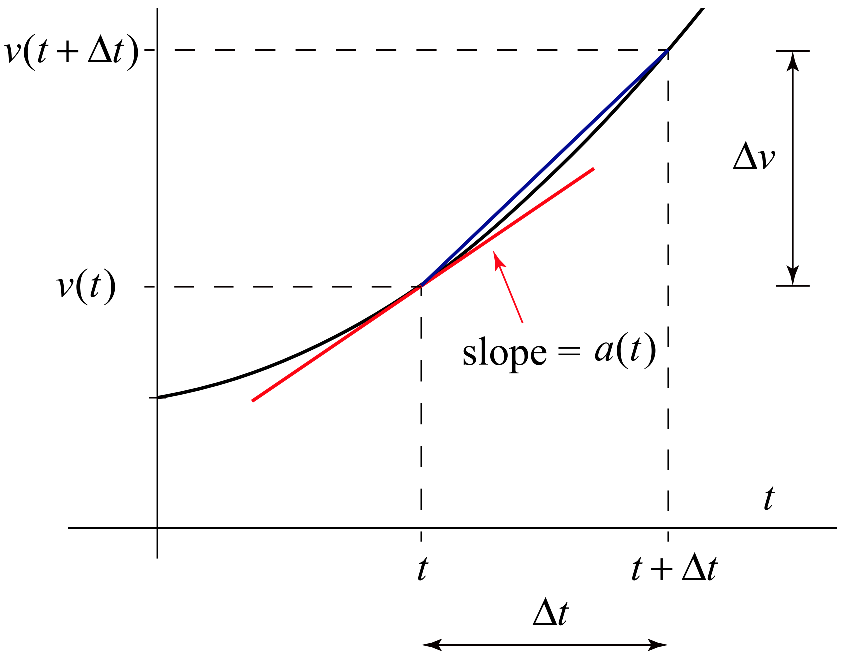
$$\vec{a} = a_x\,\hat{\imath}$$

$$a_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right) = \frac{d}{dt}v_x$$

Componente dell'accelerazione

Vettore accelerazione

$$a_x(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$



Rappresentiamo il moto rettilineo su un diagramma velocità-tempo. L' accelerazione media è la pendenza della retta che unisce i punti relativi all'intervallo di tempo Δt.

L'accelerazione istantanea rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto $(t, v(t))$.

Calcolo di velocità e posizione

Partendo da $a(t)$, ricaviamo $v(t)$ e $x(t)$.

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \qquad a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} \frac{dv(\tau)}{d\tau}\,d\tau = v(t) - v(t_0)$$

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau$$

$$\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} \frac{dx(\tau)}{d\tau}\,d\tau = x(t) - x(t_0)$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau$$

$a(t) = a$ (MOTO RETT. UNIF. ACC.)

① $\underline{v(t) = v(t_0) + a\,(t - t_0)}$ EQ. VELOCITÀ

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left[v(t_0) + a\,(\tau - t_0) \right] d\tau =$$

$$= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t_0)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} a\left[\tau - t_0\right] d\tau \Rightarrow$$

$$x(t)-x(t_0) = v(t_0)(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} a[\tau - t_0]\, d\tau =$$

$$= \boxed{v(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2} a (t-t_0)^2 = x(t) - x(t_0)}$$

$$\Rightarrow \quad (2) \quad x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2} a (t-t_0)^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right.$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

$$a = v\frac{dv}{dx} \qquad \int_{x_0}^{x} a\, dx = \int_{v_0}^{v} v\, dv$$

$$a\,(x-x_0) = \frac{1}{2}\left[v^2 - v_0^2\right]$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0)$$

MOTO RETT. UNIF.

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = 0 \qquad v(t) = v_0$$

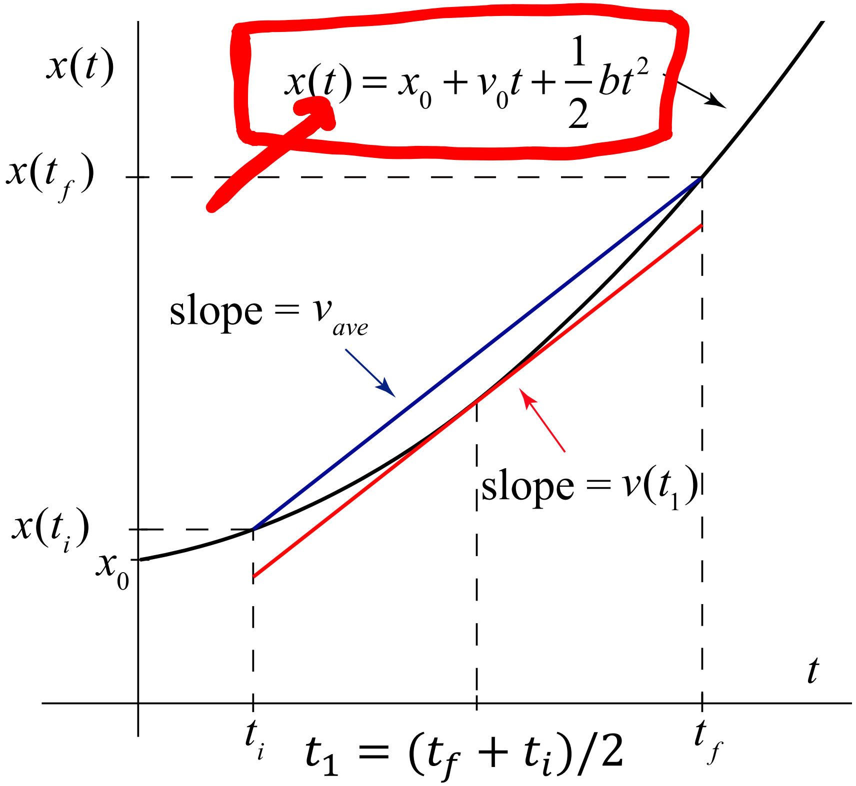
$$\frac{dx}{dt} = v_0 \qquad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_0\, d\tau =$$

$$= x(t_0) + v_0(t - t_0)$$

Calcolo alternativo

Teorema. (del valor medio, o di Lagrange) *Sia $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in (x_1, x_2). Allora esiste almeno un punto $x \in (x_1, x_2)$ tale che*

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + bt$$

$$[t_i, t_f]$$

$$x(t_f) - x(t_i) = v_0 t_f - v_0 t_i +$$

$$+ \frac{1}{2} b t_f^2 - \frac{1}{2} b t_i^2 =$$

$$= v_0 (t_f - t_i) + \frac{1}{2} b (t_f^2 - t_i^2)$$

$$= v_0 (t_f - t_i) + \frac{1}{2} b (t_f - t_i)(t_f + t_i) = x(t_f) - x(t_i)$$

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \Delta x = v_m \Delta t$$

$$x(t_f) - x(t_i) = v_m (t_f - t_i)$$

$$v_m (t_f - t_i) = v_0 (t_f - t_i) + \frac{1}{2} b (t_f - t_i)(t_f + t_i)$$

$$v_m = v_0 + \frac{1}{2} b (t_f + t_i)$$

$$t_i < t_1 < t_f \qquad \Delta x = v(t_1)(t_f - t_i)$$

$$v_m = v(t_1)$$

$$v(t_1) = v_0 + b\,t_1$$

$$\cancel{v_0} + b\,t_1 = \cancel{v_0} + \frac{1}{2}\,b\,(t_f + t_i)$$

$$t_1 = \frac{t_f + t_i}{2}$$

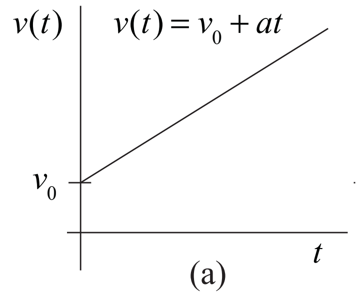
$$v_m = v(t_1) = v_0 + \frac{b}{2}\,t_f + \frac{b}{2}\,t_i =$$

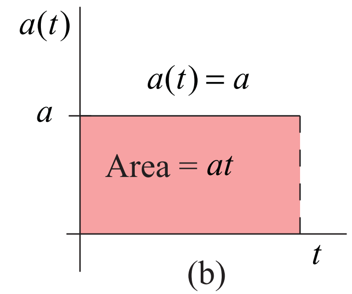
$$= \frac{v_0}{2} + \frac{b}{2}\,t_f + \frac{v_0}{2} + \frac{b}{2}\,t_i = \frac{1}{2}\,v_f + \frac{1}{2}\,v_i$$

$$= \frac{1}{2}\,(v_f + v_i)$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

calcolo della velocità





Poniamo l'intervallo di tempo: $\Delta t = t - t_o$

La posizione al tempo t_o sia x_0, la posizione al tempo t sia $x(t)$, la velocità al tempo t_o sia v_0 e quella al tempo t sia $v(t)$.
Poiché l'accelerazione è costante possiamo scrivere:

$$a = a_{media} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t) - v_0}{t - t_o}$$

Esprimiamo la velocità in funzione del tempo: $v(t) - v_0 = a \cdot (t - t_o)$

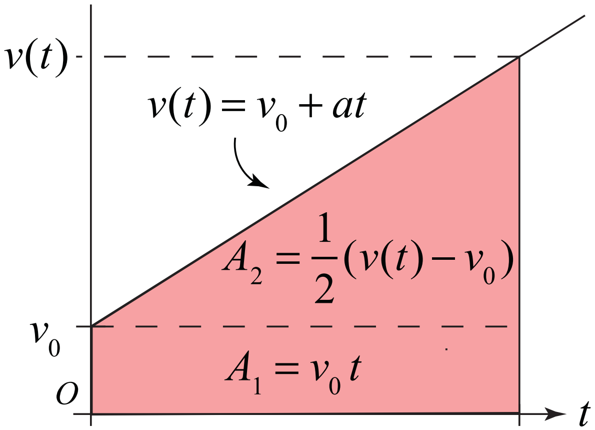
da cui ricaviamo: $v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_o)$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

calcolo della posizione

Per lo spostamento abbiamo: $v_{media} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x_0}{t - t_0}$

Possiamo scrivere: $x - x_0 = v_{media} \cdot (t - t_0)$



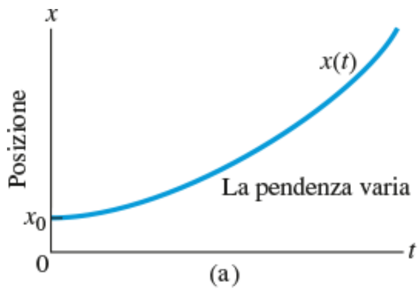
Per il moto con accelerazione costante la velocità media è uguale alla media aritmetica delle velocità iniziale e finale:

$$v_{media} = \frac{1}{2}(v(t) + v_0)$$

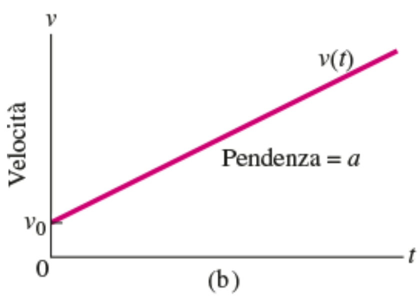
sostituendo $v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0)$ otteniamo:

$$x(t) - x_0 = v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2$$

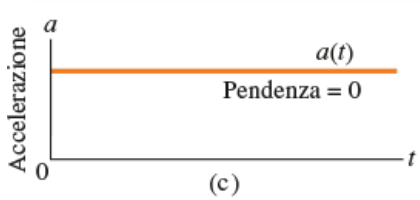
Moto rettilineo

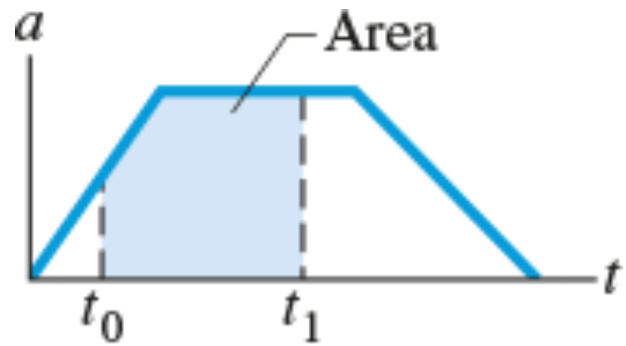


Riportiamo sul grafico della velocità
le pendenze del grafico della posizione



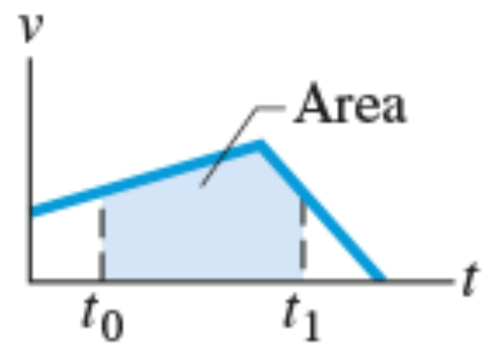
Riportiamo sul grafico dell'accelerazione
le pendenze del grafico della velocità





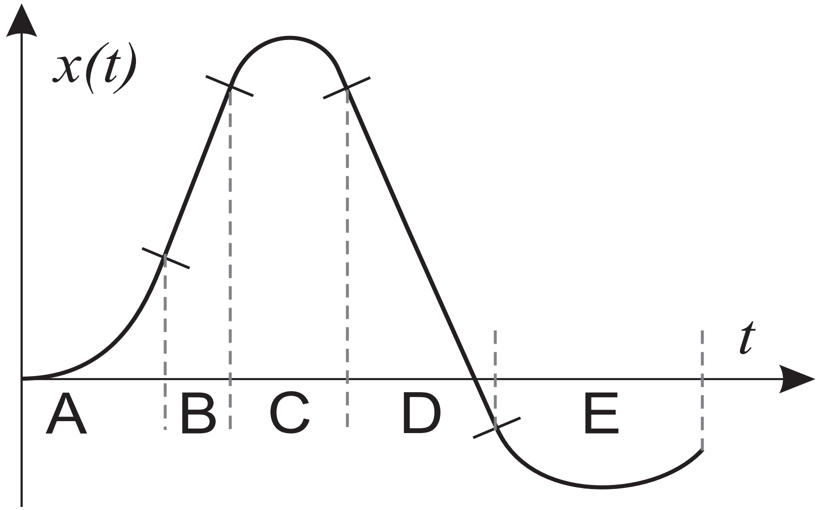
Quest'area
rappresenta
la variazione
di velocità

$$v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a(\tau)d\tau$$



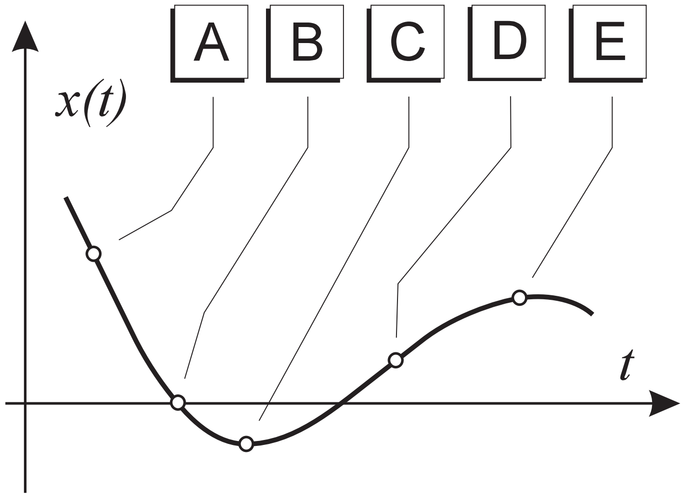
Quest'area
rappresenta
la variazione
di posizione

$$x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} v(\tau)d\tau$$



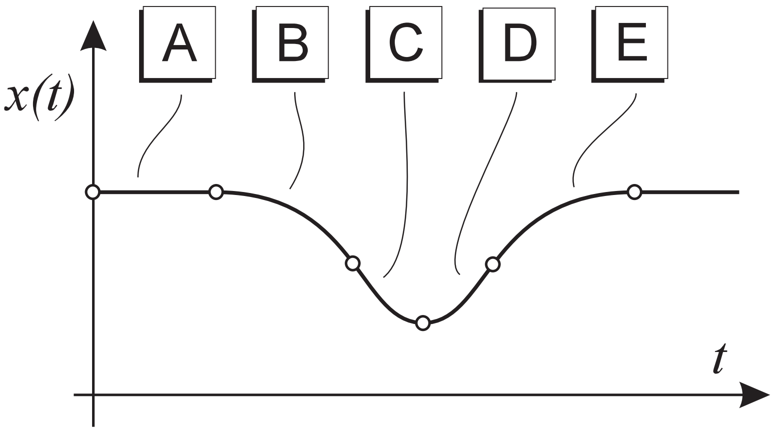
La figura rappresenta il grafico della posizione, in funzione del tempo, di un corpo in moto rettilineo.

- In quale intervallo di tempo il corpo ha accelerazione media negativa?



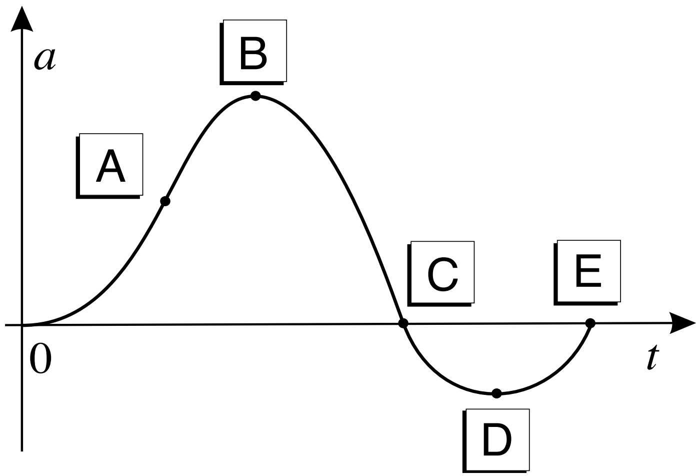
Legge oraria di un moto rettilineo.

- In quale punto, dei 5 indicati, l'accelerazione istantanea è negativa?



Legge oraria di un moto rettilineo.

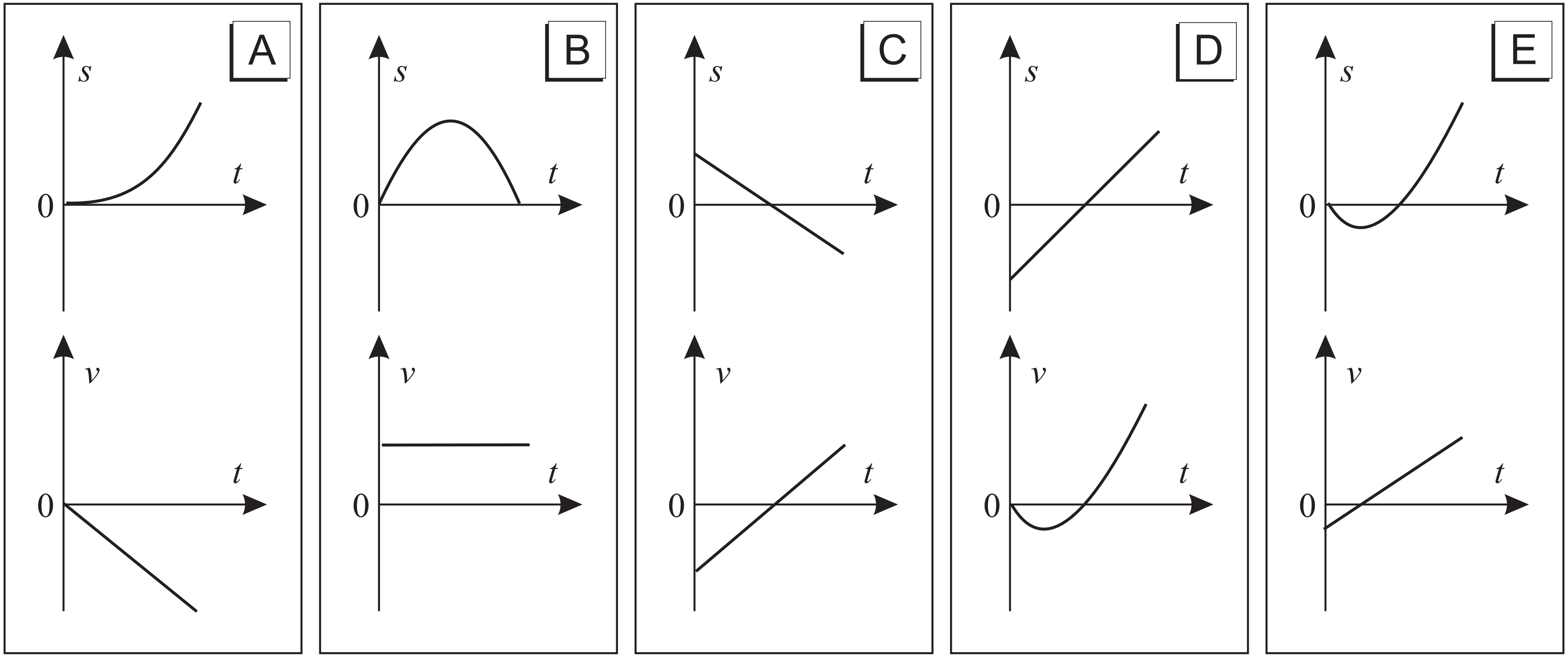
- In quale intervallo di tempo la velocità è positiva e l'accelerazione è negativa?



Una macchina viaggia lungo una strada rettilinea. Il grafico mostra come varia nel tempo la sua accelerazione.

- Quale punto del grafico si riferisce al momento in cui la macchina raggiunge la massima velocità?

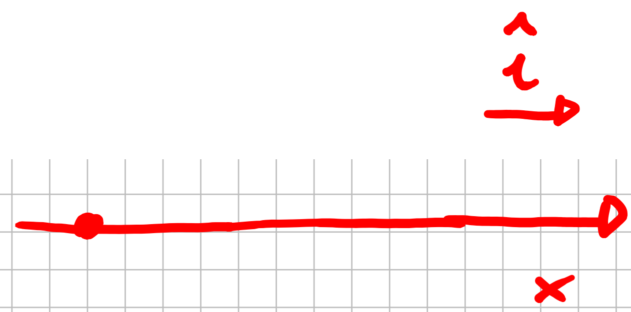
Quale coppia di grafici rappresenta lo stesso moto rettilineo?



Esempio: auto che accelera

Un'automobile passa da 0 a 30 m/s in 5 s. Calcolare :

- accelerazione
- spazio percorso



$t_0 = 0$

$x_0 = 0$

$v_0 = 0$

$\Delta t = 5\ s$

$\Delta v = v_1 = 30\ \frac{m}{s}$

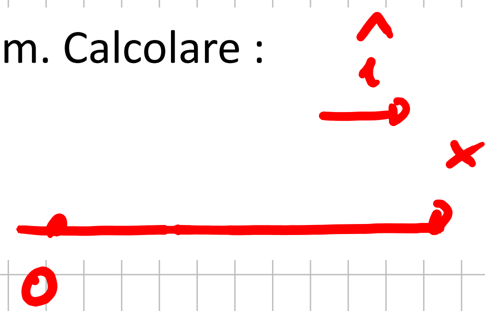
$$a = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{30\ \frac{m}{s}}{5\ s} = 6\ m\ s^{-2}$$

$$x(t_1) = \frac{1}{2} a t_1^2 = 3\ m\ s^{-2} \times 25\ s^2 = 75\ m$$

Esempio: auto che frena

Un'automobile passa da 30 m/s a 0 in 30 m. Calcolare :

- accelerazione,
- tempo di frenata



$x(t_0) = 0$

$v_0 = 30 \ m \ s^{-1}$

$x(t_1) = 30 \ m$

$v(t_1) = 0$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

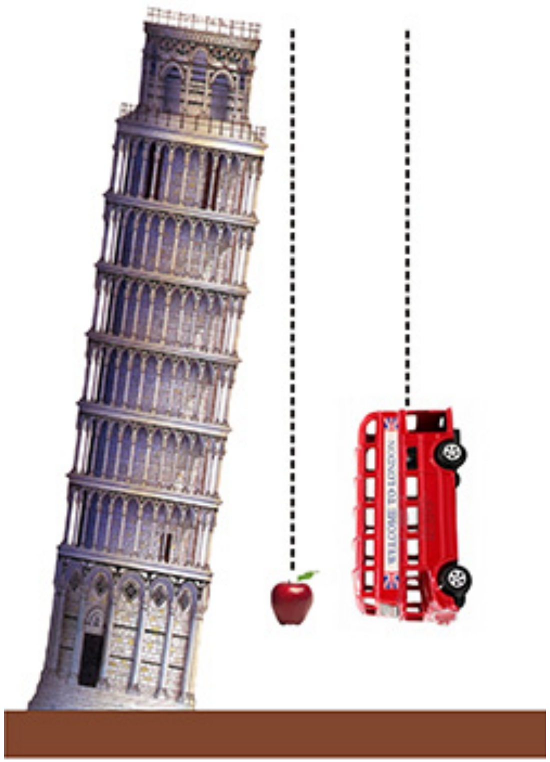
$$0 = v_0^2 + 2a\,x(t_1)$$

$$a = \frac{-v_0^2}{2x(t_1)} = -15 \ \frac{m}{s^2}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a}$$

Caduta libera



A causa dell'attrito dell'aria questi corpi non sono in caduta libera

Senza l'attrito dell'aria, i corpi sono in caduta libera

Caduta libera

Tutti i corpi in caduta libera hanno accelerazione $\vec{g}$ che ha:

- Modulo: $|\vec{g}\,| = g = 9.81\ m \cdot s^{-2}$
- Direzione: verticale
- Verso: verso il basso

Se scegliamo un asse cartesiano orientato verso il basso, la componente dell'accelerazione è:

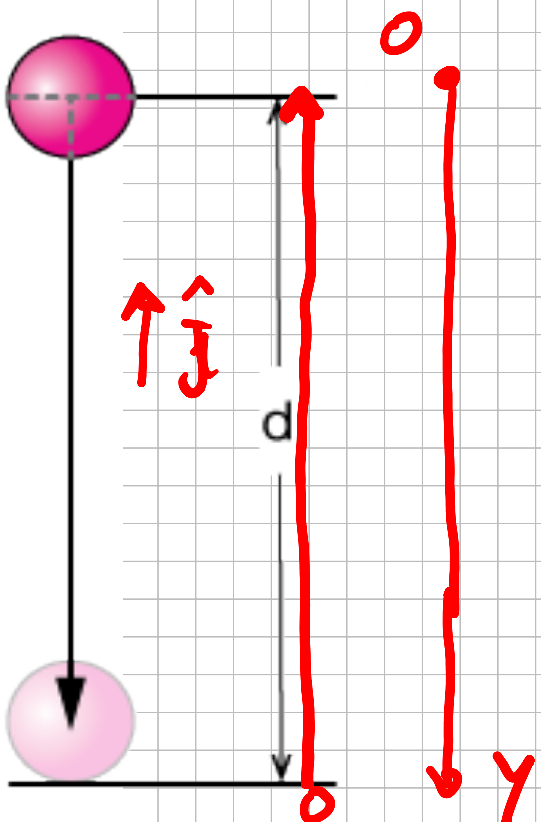
$$a = g = 9.81\ m \cdot s^{-2}$$

Se scegliamo un asse cartesiano orientato verso l'alto, la componente dell'accelerazione è:

$$a = -g = -9.81\ m \cdot s^{-2}$$

Esempio : corpo che cade da altezza d

Posizione iniziale



Posizione finale

Un corpo, partendo da fermo, cade da un’altezza d.
Calcolare:

- velocità finale
- tempo di volo

$t_0 = 0$

$y_0 = 0$

$v_0 = 0$

$\downarrow \vec{g}$ $\quad \vec{a} = g\hat{j}$

$a = g$

$\downarrow \hat{j}$

$$\begin{cases} y(t) = \frac{1}{2} g t^2 \\ v(t) = g t \end{cases}$$

$$v^2(\tau) = 2ad = 2gd$$

$$v^2(\tau) = 2gd$$

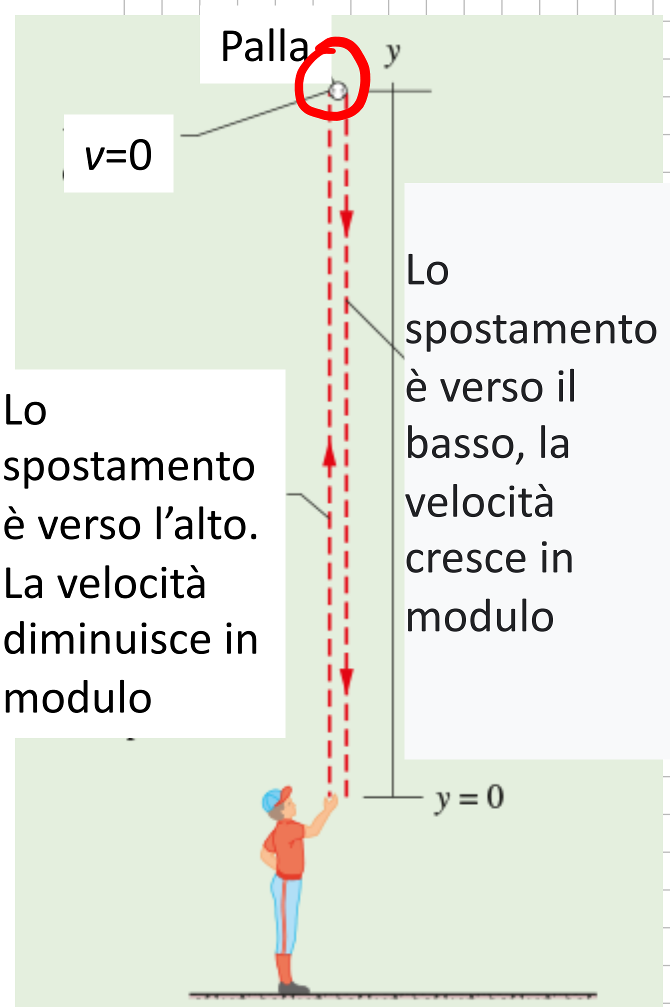
$$v(t) = gt$$

$$v(\tau) = \sqrt{2gd}$$

$$v(\tau) = g\tau$$

$$\tau = \frac{v(\tau)}{g} = \sqrt{\frac{2gd}{g^2}} = \sqrt{\frac{2d}{g}}$$

Esempio : un ragazzo lancia una palla verso l'alto



$\vec{v}_0$

$\vec{g}$

$v_0 = 10\, m\, s^{-1}$

PARTE DA FERMA

esercizio

Un'auto, partendo da ferma al tempo $t = 0$, accelera in linea retta per 100 m con un'accelerazione costante sconosciuta. Raggiunge una velocità di $20\,\mathrm{m/s}$ e poi prosegue a tale velocità per ulteriori $10\,\mathrm{s}$.

(a) Scrivere le equazioni per la posizione e la velocità dell'auto in funzione del tempo.

(b) Per quanto tempo l'auto ha accelerato?

(c) Qual è il valore assoluto dell'accelerazione?

(d) Tracciare i grafici della velocità in funzione del tempo, dell'accelerazione in funzione del tempo e della posizione in funzione del tempo per l'intero moto.

(e) Qual è stata la velocità media per l'intero tragitto?

esercizio

Nel momento in cui un semaforo diventa verde, un'auto parte da ferma con un'accelerazione costante di

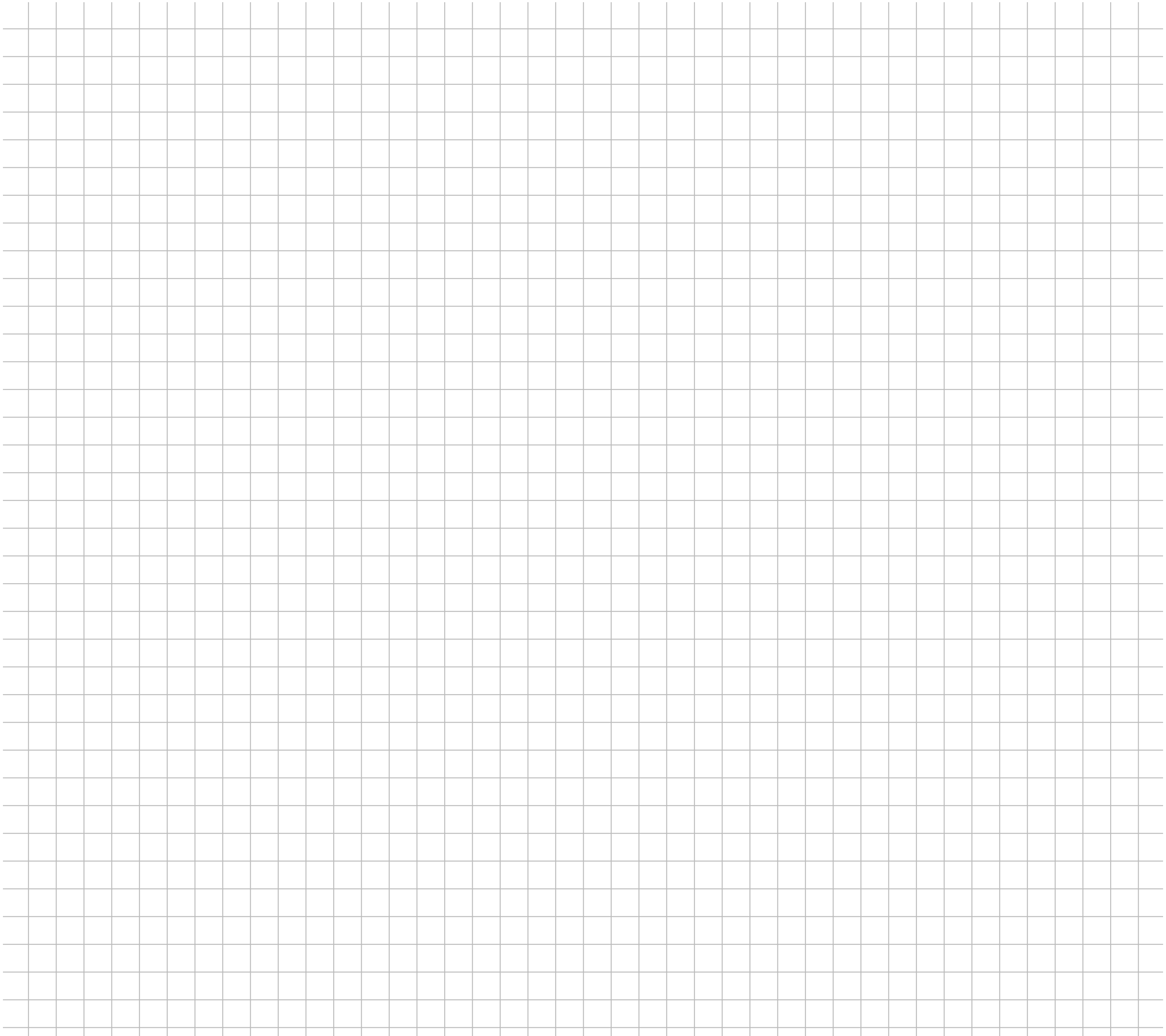
$$3.0\,\mathrm{m/s}^2.$$

Allo stesso istante, un autobus, che viaggia a velocità costante di

$$1.6 \times 10^1\ \mathrm{m/s},$$

supera l'auto. L'auto accelera e, dopo un certo intervallo di tempo, supera l'autobus.

Quanta strada ha percorso l'auto nel momento in cui sorpassa l'autobus?



esercizio

Un'auto attraversa un semaforo verde al tempo $t = 0$. La posizione iniziale è $x_0 = 0$, e la velocità iniziale

$$v_{c,0} = 12\,\mathrm{m/s}.$$

Al tempo $t_1 = 1\,\mathrm{s}$, l'auto inizia a frenare fino a fermarsi al tempo t_2. L'accelerazione dell'auto in funzione del tempo è data dalla funzione a tratti:

$$a_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < t_1 = 1\,\mathrm{s}, \\ b\,(t - t_1), & t_1 < t < t_2, \end{cases}$$

dove

$$b = -6\,\mathrm{m/s}^3.$$

(a) Trovare la componente della velocità e la posizione dell'auto in funzione del tempo.

(b) Un ciclista procede a velocità costante $v_{b,0}$ e, al tempo $t = 0$, si trova a $17\,\mathrm{m}$ dietro l'auto. Il ciclista raggiunge l'auto proprio quando questa si ferma. Trovare la velocità del ciclista.

esercizio

Sia dato il moto in linea retta $x(t) = L(1 - \exp(-t/\tau))$ con $L = 10\ \mathrm{m}$ e $\tau = 2\ \mathrm{s}$.

- Trovare velocità ed accelerazione.
- Dimostrare che l'accelerazione è proporzionale alla velocità e ricavare la costante di proporzionalità.