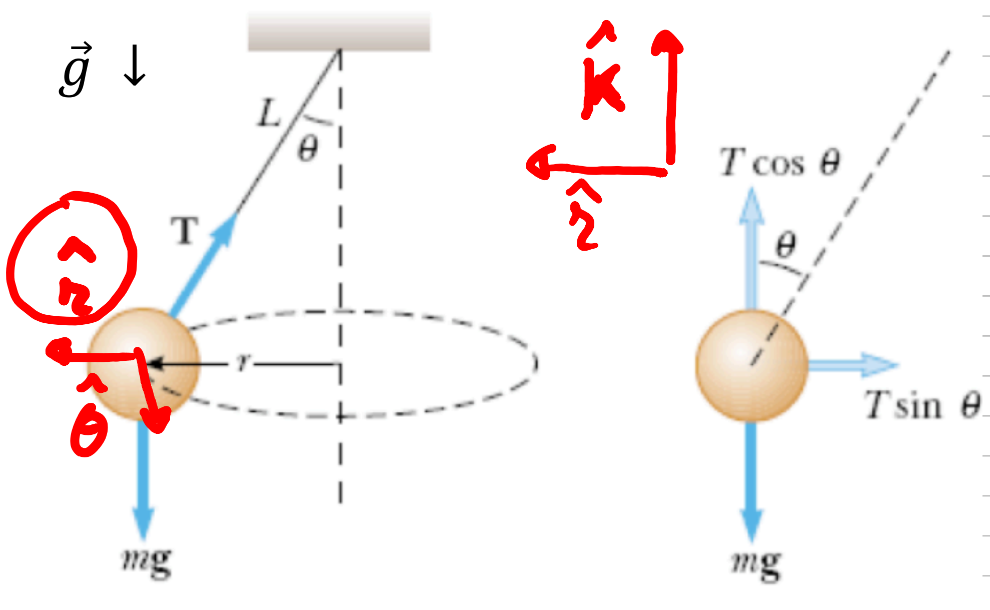
Pendolo conico

Un pendolo conico è un sistema in cui una massa è appesa a un filo inestensibile. La massa si muove descrivendo una circonferenza orizzontale. Durante il moto, il filo forma un angolo costante con la verticale, generando così una superficie conica (da cui il nome "conico").



Consideriamo il pendolo conico in figura. Supponiamo noti θ, g, m e L. Determinare:

- la velocità angolare ω;
- la tensione T del filo.

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$r = L\sin\theta$$

$$m a_z = T\cos\theta - mg = 0$$

$$m a_r = -T\sin\theta = -m\omega^2 r$$

$$T \sin\theta = m\omega^2 r = m\omega^2 L \sin\theta$$

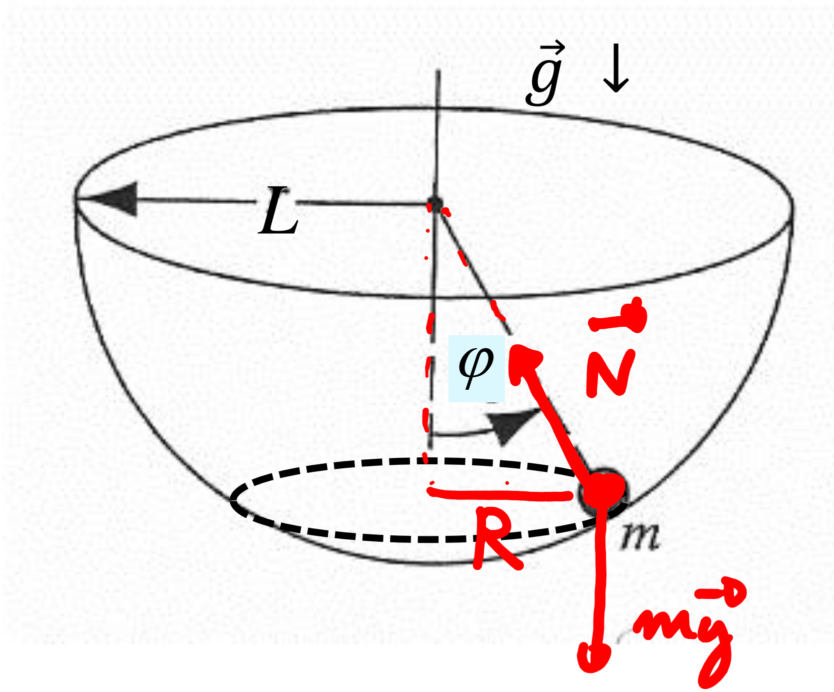
$$T = m\omega^2 L$$

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$m\omega^2 L = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos\theta}}$$

Conca sferica



Un punto materiale di massa m esegue una traiettoria circolare di raggio R all'interno di una conca sferica di raggio L. Noti g, m, R e L, determinare:

- la velocità angolare ω;
- la reazione N della superficie della conca.

$$R = L \sin \varphi$$

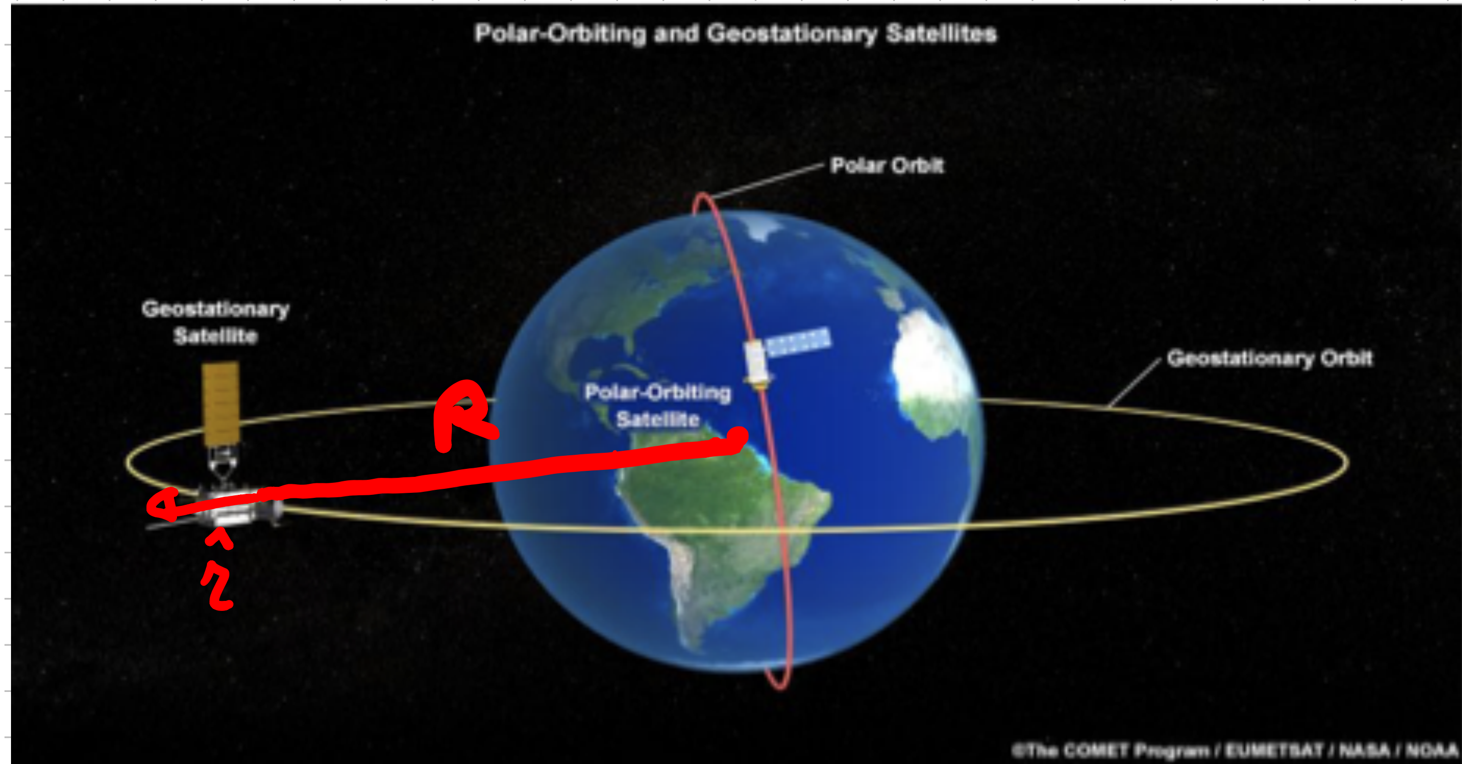
$$m a_z = N \cos\varphi - mg$$

$$m a_r = -m\omega^2 R = -N \sin\varphi$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos\varphi}}$$

esercizio

L'orbita geostazionaria è quella nella quale il satellite compie un moto circolare uniforme sopra l'equatore con lo stesso periodo di rotazione della Terra. In tal modo il satellite rimane sempre sopra lo stesso punto della superficie terrestre.



- Calcolare il raggio dell'orbita

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{R^2}\hat{r}$$

$$m a_r = -G\frac{mM}{R^2}$$

$$a_z = -R\omega^2$$

$$-\cancel{m} R\omega^2 = -\frac{GM\cancel{m}}{R^2}$$

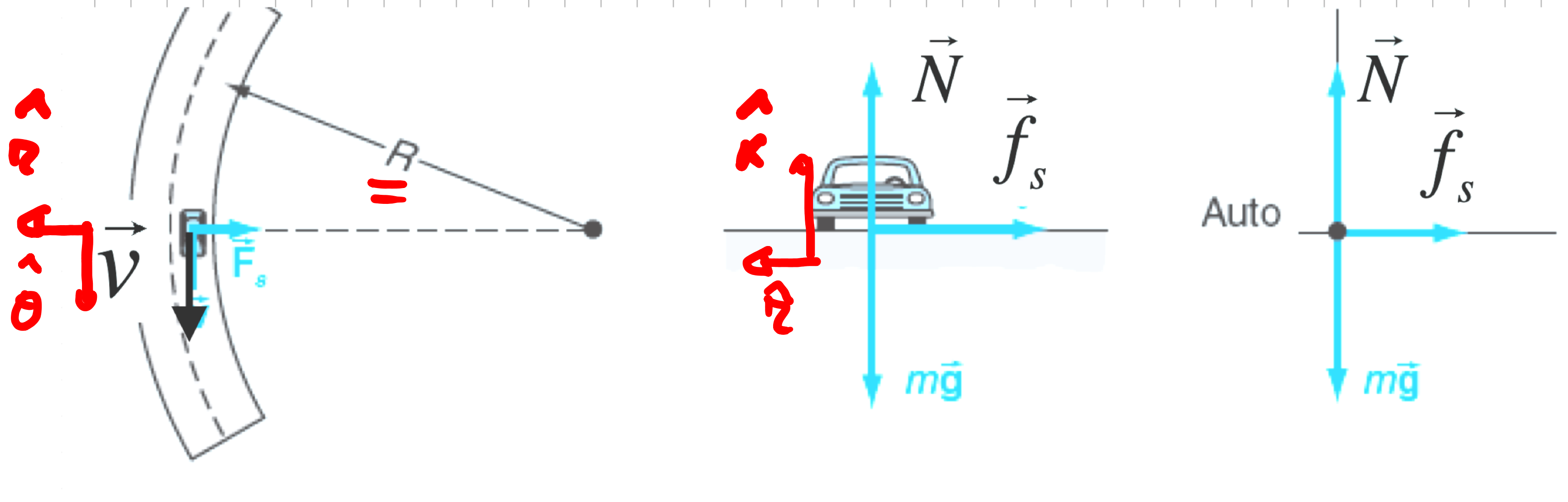
$$R\omega^2 = \frac{GM}{R^2}$$

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3} \qquad R^3 = \frac{GM}{\omega^2}$$

$$\omega = \omega_T = \underline{\underline{\frac{2\pi}{T_T}}} \qquad T_T = 86\,164\ s$$

Automobile su curva piana

In questo caso l'auto è mantenuta nella sua traiettoria dall'attrito statico tra pneumatici e asfalto. Calcolare v.



(a) (b) (c)

$$N - mg = m a_z = 0 \qquad N = mg$$

$$-F_s = m a_r = -m\omega^2 R = -\frac{v^2}{R} m$$

$$F_s = m\frac{v^2}{R}$$

$$F_s \le \mu_s N = \mu_s m g$$

$$\mu_s m g \ge m\frac{v^2}{R}$$

$$\mu_s \ge \frac{v^2}{gR}$$

DATA v

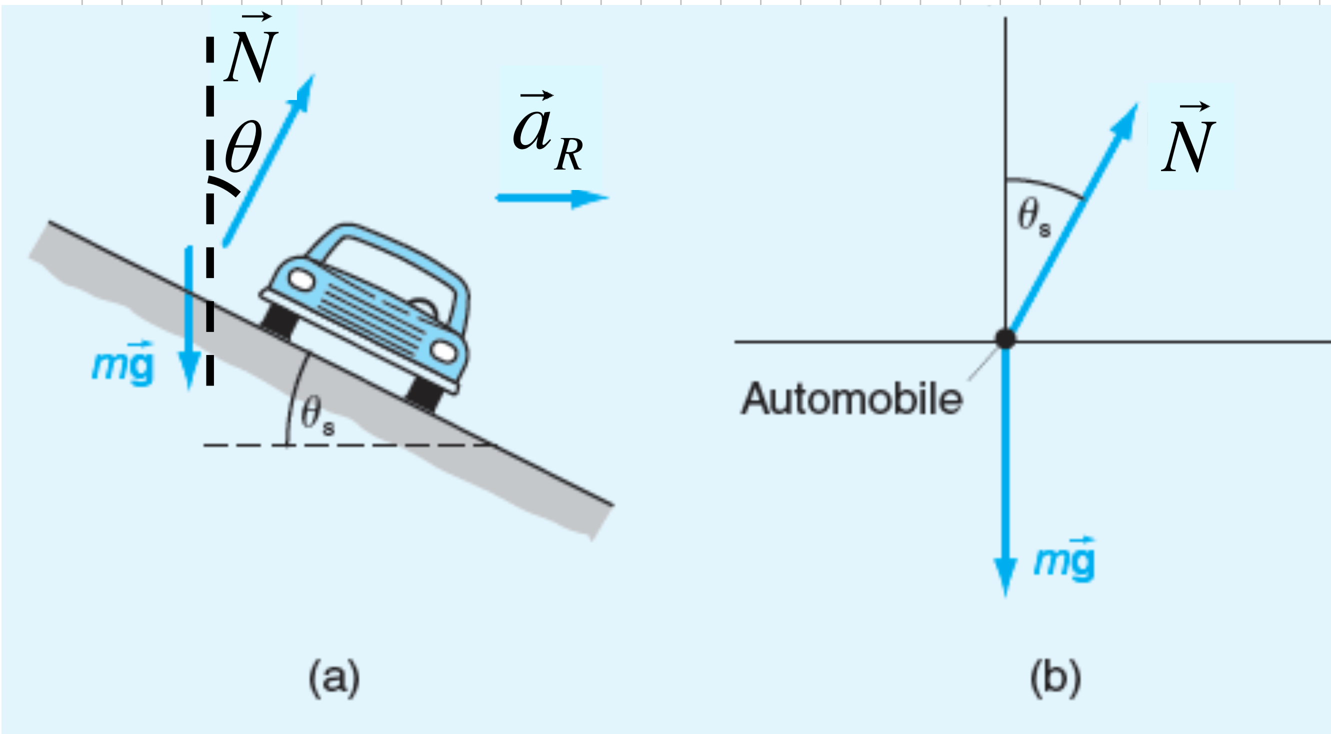
CALCOLO $\mu_{s\,min}$

$$v^2 \le \mu_s g R$$

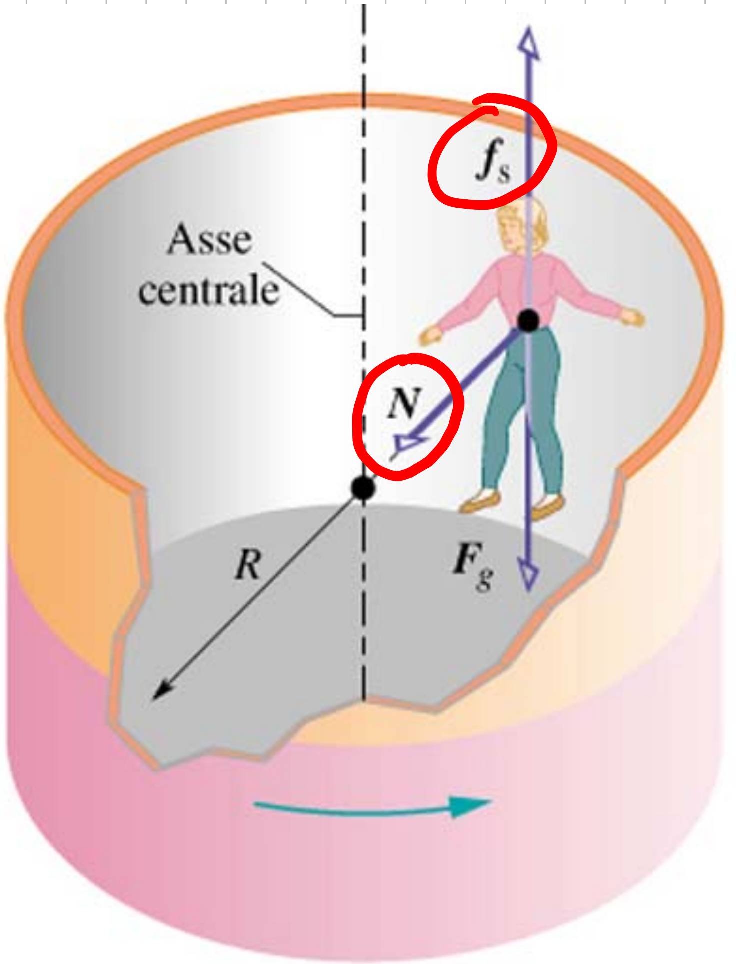
$$v \le \sqrt{\mu_s g R}$$

Curva soprelevata

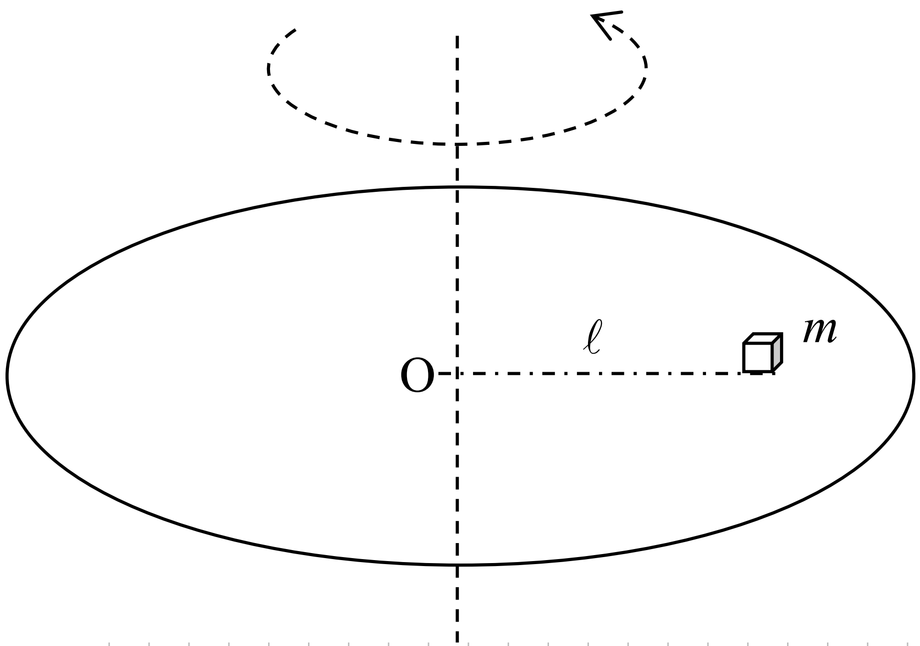
In questo caso l'auto è mantenuta nella sua traiettoria dalla componente radiale della forza normale.



Rotore luna park

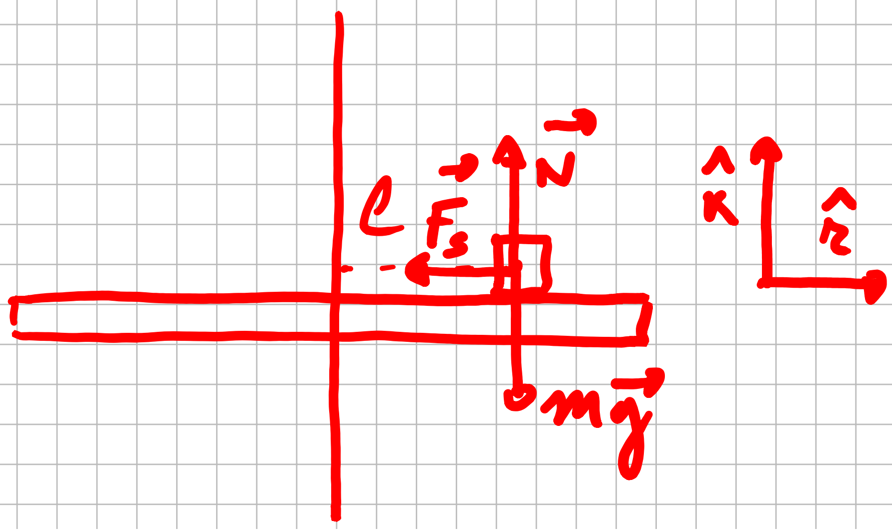


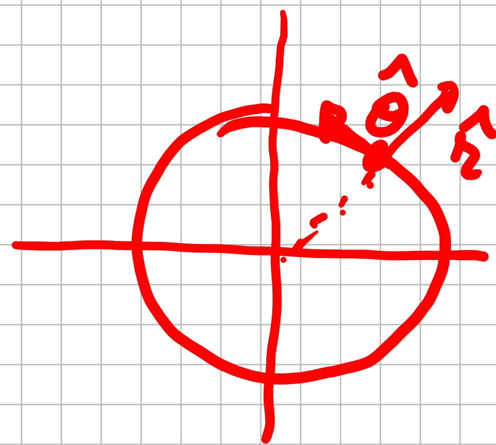
esercizio



Un blocco di massa m è appoggiato su un disco orizzontale a distanza ℓ dal centro. Tra blocco e disco c'è attrito statico con coefficiente μ_s. Il disco viene messo in rotazione con velocità angolare $\omega = kt$ intorno al suo centro. k è una costante positiva.

- Dopo quanto tempo il blocco comincia a strisciare rispetto al disco?





$$\omega = \kappa t \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} = \kappa t$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \kappa$$

$$a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad a_r = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$a_\theta = \ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ell\kappa \qquad a_r = -\ell\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\ell\kappa^2t^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\ell^2\kappa^2 + \ell^2\kappa^4t^4} \qquad |\vec{F}_s| = m|\vec{a}|$$

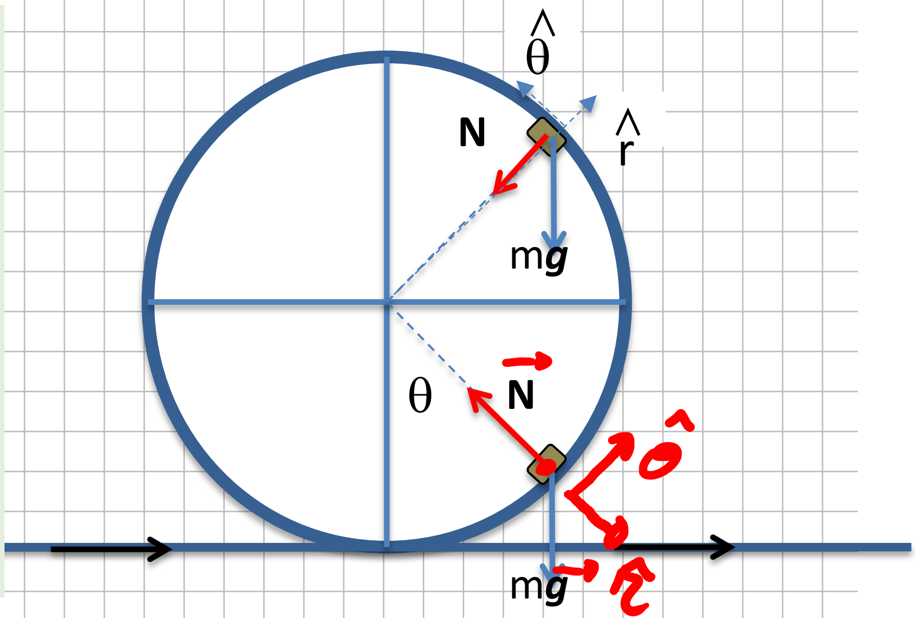
$$|\vec{F}_s| \leq |\vec{F}_{smax}| = \mu_s N = \mu_s mg$$

$$\cancel{m} \ell k \sqrt{1+k^2t^4} \leq \mu_s \cancel{m} g$$

$$\ell k \sqrt{1+k^2t^4} \leq \mu_s g$$

Moto circolare verticale

Il giro della morte è un moto circolare vario in cui la componente tangenziale dell'accelerazione è diversa da zero: la velocità nell'arco di risalita (θ che va da 0 a π) diminuisce.



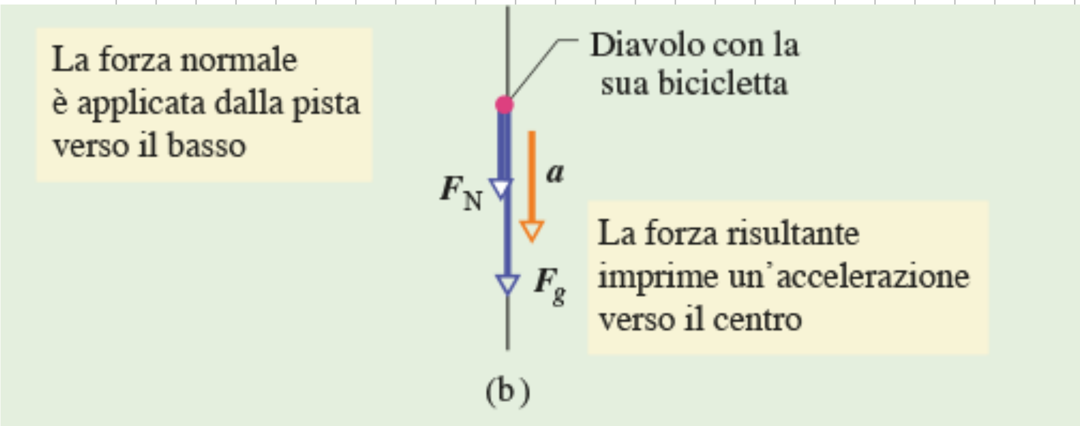
Nell'arco di risalita abbiamo:

lungo l'asse r : $-N + mg\cos\theta = ma_r = -m\,v^2/R$

lungo l'asse θ: $-m\,g\sin\theta = ma_\theta = m\dfrac{dv}{dt}$

VELOCITÀ SCEMARE

Giro della morte



Alla sommità abbiamo questa situazione.

Nel punto più alto, lungo l'asse r:

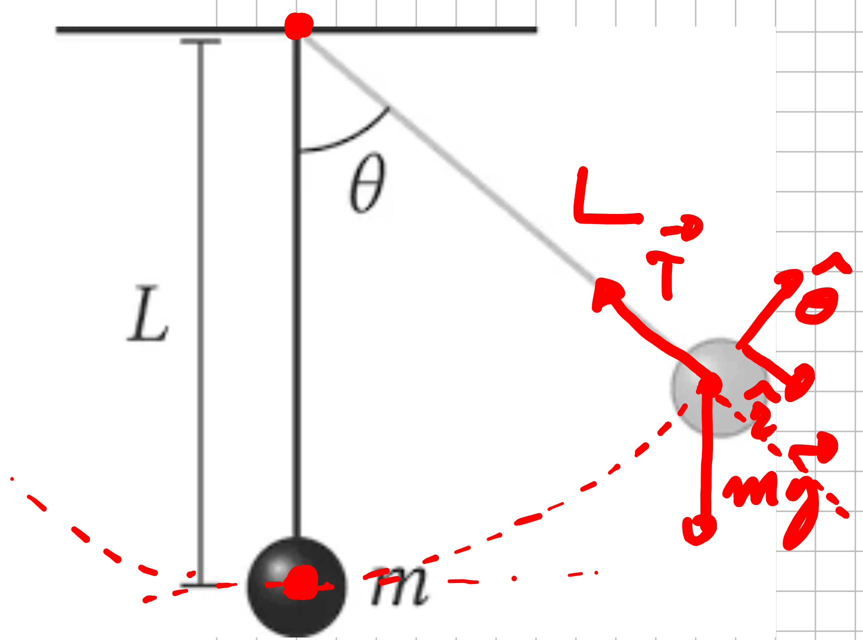
$$ma_r = -N - mg = -\frac{m\,v_{somm}^2}{R}$$

$$\Longrightarrow N = \frac{m\,v_{somm}^2}{R} - mg$$

Se vogliamo che il corpo sia in contatto con il profilo, deve essere $N \geq 0$, cioé:

$$\frac{m\,v_{somm}^2}{R} \geq mg \Longrightarrow v_{somm} \geq \sqrt{gR}$$

Esempio: pendolo semplice



Un **pendolo semplice** è un modello ideale di pendolo costituito da una massa puntiforme sospesa a un filo inestensibile e di massa trascurabile. La massa compie un moto circolare di tipo oscillatorio. Supponiamo che il pendolo abbia lunghezza L e che la massa sia m.

- Deriviamo l'equazione dal moto a partire dall'analisi delle forze.

$$P_z = mg\cos\theta$$

$$P_\theta = -mg\sin\theta$$

$$F_z = mg\cos\theta - T$$

$$F_z = m\,a_z$$

$$a_z = -L\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$mg\cos\theta - T = m\left(-L\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2\right)$$

$$T = mg\cos\theta + mL\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$T_{BASSO} = mg + mL\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$F_\theta = -mg\sin\theta$$

$$a_\theta = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$m\,a_\theta = -mg\sin\theta$$

$$\cancel{m}L\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\cancel{m}g\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

$$\sin\theta \simeq \theta$$

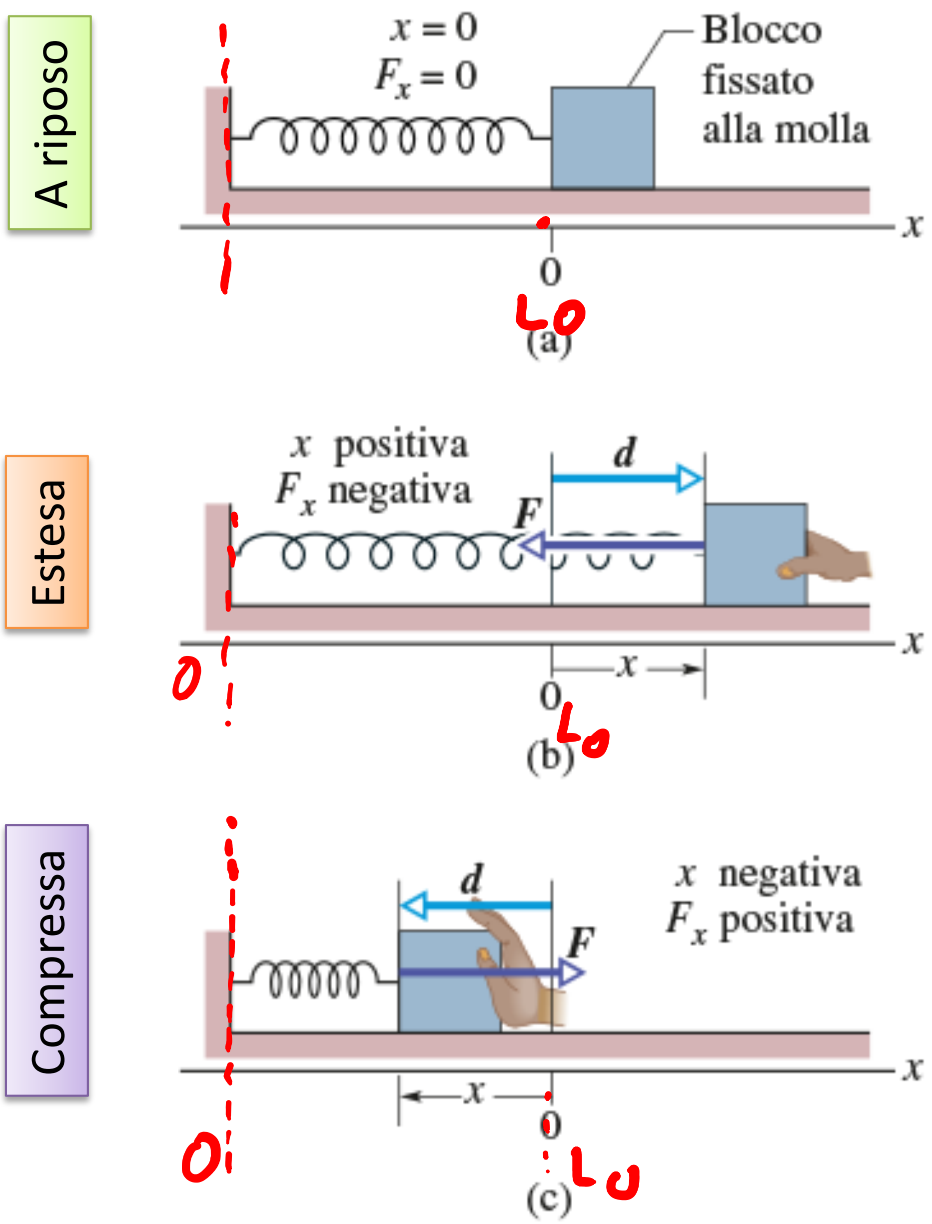
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

$\frac{g}{L}$ COSTANTE POSITIVA

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, t + \phi\right)$$

Forza elastica

$F = -k(x - L_0)$



La forza esercitata dalla molla è proporzionale allo **spostamento dalla posizione di riposo**. Il verso della forza è opposto allo spostamento:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -k\vec{\boldsymbol{d}} = -k(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

(Legge di Hooke)

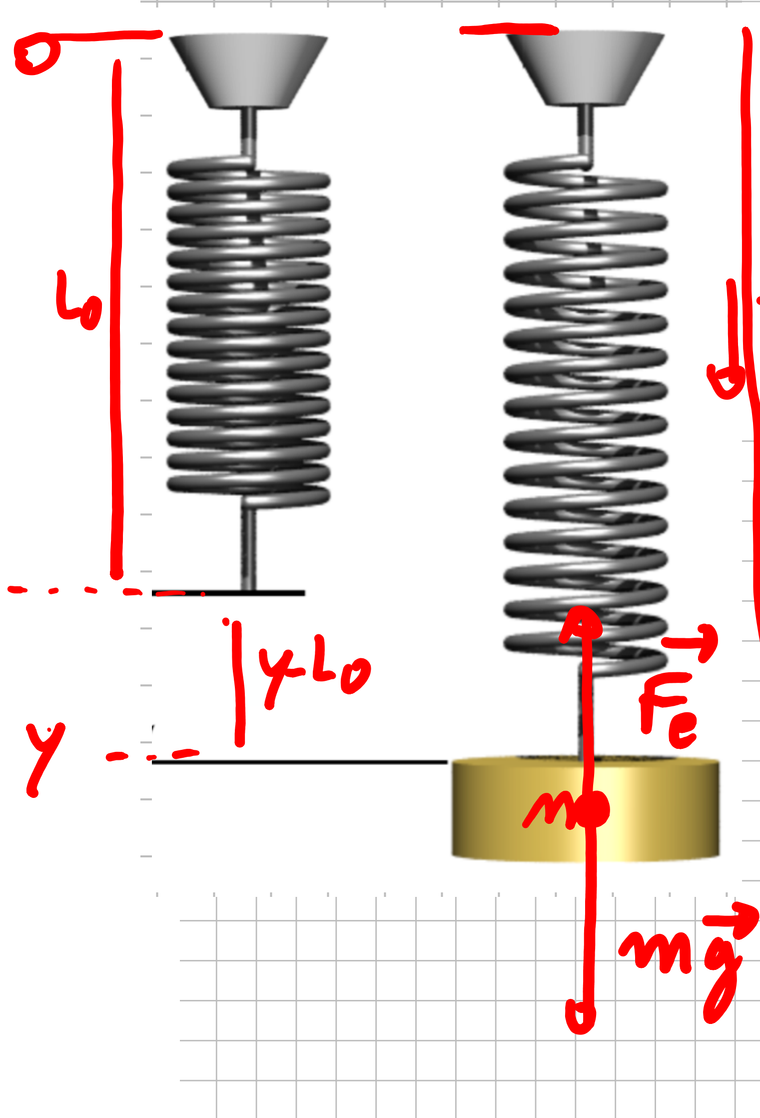
k = costante elastica (misura la rigidità della molla), si esprime in Nm^{-1}

Introducendo un asse x con l'origine all'estremità libera della molla quando è a riposo, la componente della forza è:

$$\boxed{F_x = -kx}$$

dove x è la coordinata dell'oggetto.

esercizio



Un corpo di massa m viene sospeso a una molla verticale di costante k e lunghezza a riposo L_0.

- Trovare la posizione di equilibrio

$$m = 0.2\,kg \;\; ; \; k = 28\,Nm^{-1} \,; L_0 = 0.1\,m$$

$$\vec{F}_e + m\vec{g} = 0$$

$y - L_0$ = SPOSTAMENTO DALLA POSIZIONE DI RIPOSO

$$-k(y-L_0)+mg=0$$

$$-k(y-L_0)=-mg$$

$$y-L_0=\frac{mg}{k}$$

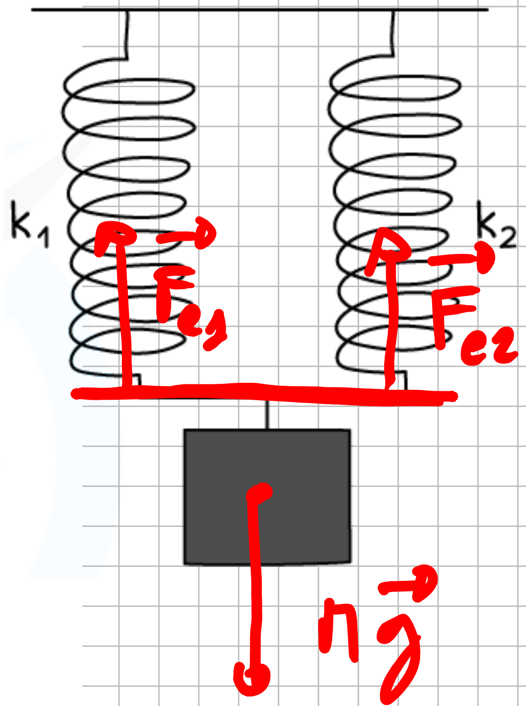
$$y_{EQ}=L_0+\frac{mg}{k}$$

DEFORMAZIONE

$$x=y-L_0$$

$$x_{EQ}=\frac{mg}{k}$$

Molle in parallelo



Due molle, di massa trascurabile e con costanti elastiche k_1 e k_2 sono collegate in parallelo e vengono utilizzate per sospendere una massa M.

- Di quanto si allungheranno le molle?

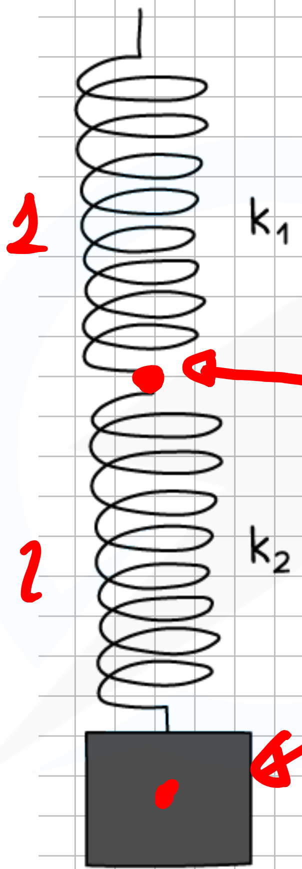
$$F_{e1} = x_1 k_1 \qquad F_{e2} = x_2 k_2$$

$$x_1 = x_2 = x$$

$$x k_1 + x k_2 = Mg$$

$$x = \frac{mg}{k_1 + k_2} = \frac{mg}{k}$$

Molle in serie



Due molle, di massa trascurabile e con costanti elastiche k_1 = 200 N/m e k_2 = 300 N/m sono collegate in serie e vengono utilizzate per sospendere una massa di 4 kg.

- Di quanto si allungheranno le molle?

$$k_1 x_1 = mg$$

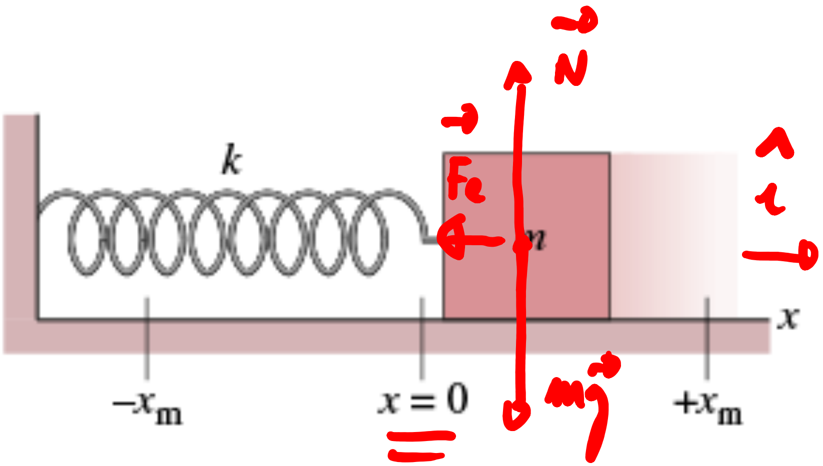
$$k_2 x_2 = mg$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$x_1 = \frac{mg}{k_1} \qquad x_2 = \frac{mg}{k_2}$$

$$x = x_1 + x_2 = mg\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = \frac{mg}{k}$$

Moto armonico



Consideriamo il moto di un corpo sottoposto alla forza elastica:

$$m a_x(t) = -k x(t)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m} x(t)$$

Le costanti k e m sono entrambe positive, introduciamo la **pulsazione**:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Equazione del moto armonico:

$$\boxed{\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)}$$

Questa è un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti.

Soluzione dell'equazione differenziale

Per la coordinata abbiamo:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

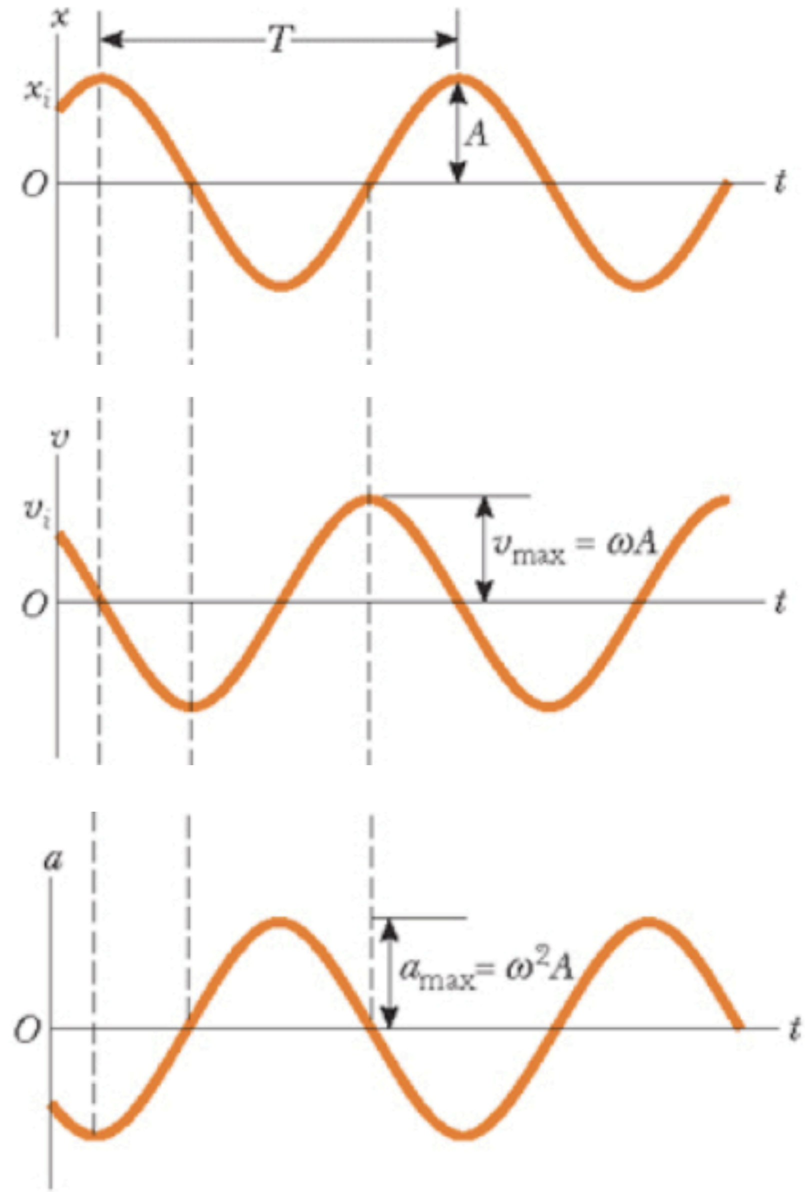
A è l'ampiezza e ϕ la fase. Sono costanti determinate dalle condizioni iniziali.

Per la componente della velocità abbiamo:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$

Per la componente dell'accelerazione abbiamo:

$$a_x(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$$



Periodo e frequenza

Il periodo T è l'intervallo di tempo minimo dopo il quale il corpo occupa la stessa posizione:

$$\underline{x(t+T)} = \underline{A\cos(\omega[t+T]+\phi)} = A\cos(\omega t+\phi) = x(t)$$

Deve essere:

$$\cos(\omega t+\omega T+\phi) = \cos(\omega t+\phi)$$

Ovvero:

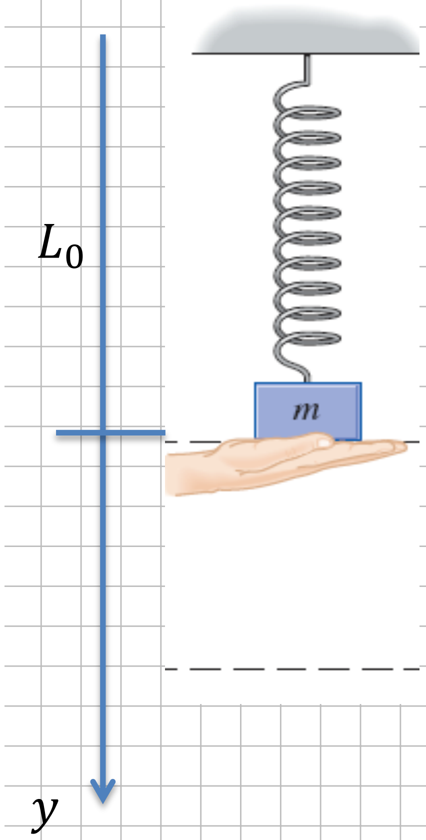
$$\underline{\omega T} = \underline{2\pi} \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Definiamo anche la frequenza:

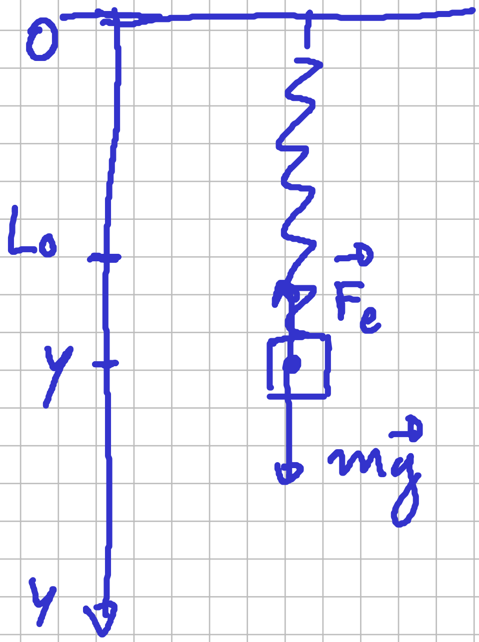
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Che relazione c'è con in moto circolare uniforme?

esercizio



Una massa M è appesa al soffitto con una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo L_0. La massa viene lasciata libera da ferma al tempo $t = 0$ a distanza L_0 dal soffitto. Determinare la legge oraria della massa e calcolare il periodo e l'ampiezza delle oscillazioni.



$\downarrow \hat{j}$

$$\vec{F_e} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$-K(y-L_0) + mg = ma$$

$$a = -\frac{K}{m}y + \frac{K}{m}L_0 + g \Rightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{K}{m}y + \frac{K}{m}\left[L_0 + \frac{mg}{K}\right]$$

$$x = y - L_0 - \frac{mg}{K} = y - \underbrace{\left[L_0 + \frac{mg}{K}\right]}_{\text{NUOVA POS. EQ.}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x - \frac{K}{m}L_0 - \frac{K}{m}\left(\frac{mg}{K}\right) + \frac{K}{m}L_0 + \frac{K}{m}\left(\frac{mg}{K}\right) =$$

$$= -\frac{K}{m}x$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

COND. INIZIALI

$$y(0) = L_0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = -\frac{mg}{K}$$

$$\frac{dy}{dt}(0) = v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$x(0) = A\cos\phi = -\frac{mg}{K}$$

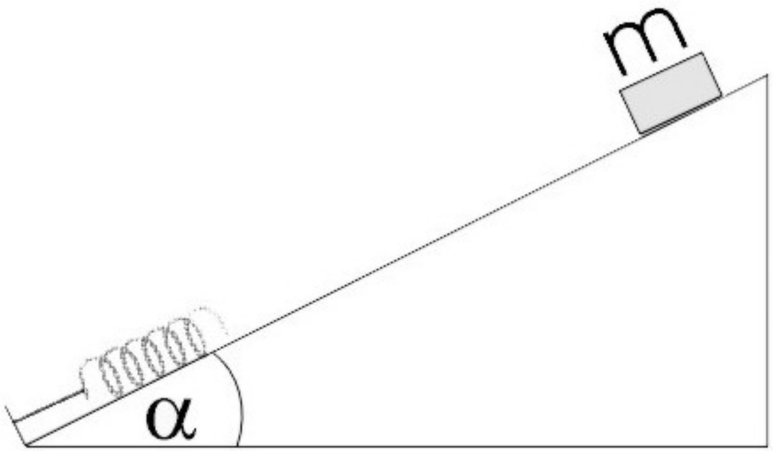
$$\frac{dx}{dt}(0) = -A\omega\sin\phi = 0 \qquad \phi = 0$$

$$A = -\frac{mg}{K}$$

$$x(t) = -\frac{mg}{K}\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t\right)$$

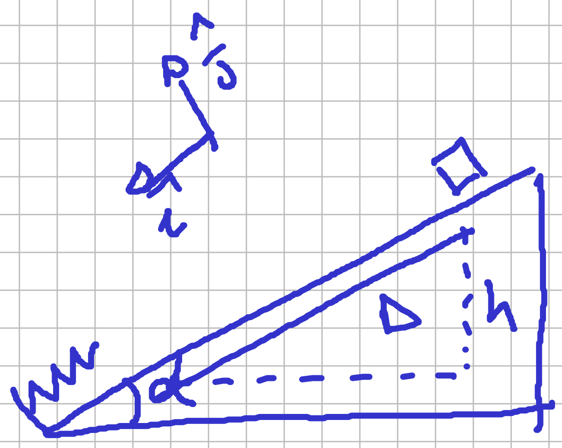
$$y(t) = -\frac{mg}{K}\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t\right) + L_0 + \frac{mg}{K}$$

esercizio



Una massa m, partendo da ferma, scivola su un piano inclinato liscio. Dopo aver percorso un tratto di lunghezza D, impatta contro l'estremità libera di una molla ideale di costante elastica k e inizialmente a riposo. Determinare:

- la massima compressione della molla;
- il tempo che trascorre tra l'impatto e la massima compressione.



FASE 1

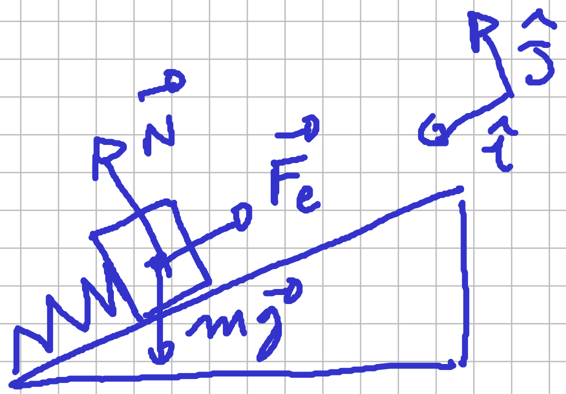
$$a = g \sin\alpha$$

$$v_f = \sqrt{2aD} = \sqrt{2g\sin\alpha\, D}$$

$$= \sqrt{2gh}$$

FASE 2

$$v_0 = \sqrt{2g\sin\alpha\, D}$$



$$\vec{N} + \vec{F_e} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$mg\sin\alpha - kx = ma$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x + g\sin\alpha$$

EQUILIBRIO: $-\frac{K}{m}x + g\sin\alpha = 0$

POS. EQUILIBRIO $x_E = \frac{mg\sin\alpha}{K}$

CAMBIO VARIABILE:

$$y = x - x_E$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$y = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gh}}$$

$$y_0 = -x_E = A\cos\phi$$

$$v_0 = \frac{dy}{dt}(0) = \frac{dx(0)}{dt} = -A\omega\sin\phi = v_0$$

$$\cos\phi = -\frac{x_E}{A}$$

$$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$$

$$\sin\phi = -\frac{v_0}{A\omega}$$

$$\frac{x_E^2}{A^2} + \frac{v_0^2}{A^2\omega^2} = 1 \qquad A = \sqrt{x_E^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$\tan\phi = \frac{\dfrac{-v_0}{A\omega}}{-\dfrac{x_E}{A}} = \frac{v_0}{\omega x_E}$$

$$\phi = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{\omega x_E}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$-A\omega \sin(\omega t_{max} + \phi) = 0$$

$$\omega t_{max} + \phi = 0 \qquad t_{max} = \frac{-\phi}{\omega}$$

Moto Circolare Uniforme e Moto Armonico

Consideriamo una particella che si muove lungo una circonferenza di raggio R con velocità angolare costante ω. Introducendo un sistema di coordinate cartesiane con origine al centro della circonferenza, le coordinate della particella in funzione del tempo sono date dalle equazioni:

$$x(t) = R\cos(\omega t + \phi),$$

$$y(t) = R\sin(\omega t + \phi),$$

dove ϕ rappresenta la fase cioè l'angolo iniziale. Si ha pertanto:

$$x_0 = R\cos(\phi),$$

$$y_0 = R\sin(\phi),$$

Derivazione del Moto Armonico

Partendo dalla coordinata lungo l'asse x:

$$x(t) = R\cos(\omega t + \phi).$$

Calcoliamo la derivata seconda rispetto al tempo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\omega^2\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t).$$

Questa equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

è l'equazione del moto armonico semplice (MAS), la cui soluzione generale è

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi),$$

con $A = R$. Analogamente, la proiezione lungo l'asse y risulta:

$$y(t) = R\sin(\omega t + \phi)$$

e soddisfa l'equazione:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y(t),$$

che descrive anch'essa un moto armonico semplice con ampiezza R.

Le proiezioni del moto circolare uniforme lungo gli assi x e y sono moti armonici semplici con pulsazione ω, uguale alla velocità angolare e ampiezza R che è il raggio della circonferenza. In altre parole, il moto circolare uniforme, se visto attraverso le sue componenti cartesiane, si descrive come un moto armonico semplice lungo ciascun asse.

Ricostruzione del Moto Circolare a Partire da un Moto Armonico

Supponiamo di avere due moti armonici semplici lungo gli assi x e y dati da:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi), \quad y(t) = A\sin(\omega t + \phi),$$

dove A è l'ampiezza, ω la pulsazione, e ϕ una fase comune. Calcoliamo la somma dei quadrati delle coordinate:

$$x^2(t) + y^2(t) = A^2\cos^2(\omega t + \phi) + A^2\sin^2(\omega t + \phi).$$

Utilizzando l'identità trigonometrica

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$$

otteniamo:

$$x^2(t) + y^2(t) = A^2\Big[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)\Big] = A^2.$$

Questa equazione descrive una circonferenza di raggio A con centro nell'origine.