Coefficiente di correlazione

- Con riferimento alla terza proprietà elencata, si può dimostrare che se viceversa il coefficiente di correlazione è 1, le v.a. *sono linearmente dipendenti*

- Per $|\rho_{XY}|=1$ è possibile una previsione perfetta, ovvero se è noto X, ricavo esattamente $Y = aX+b$

- Il coefficiente di correlazione fornisce perciò una misura della dipendenza lineare tra due variabili aleatorie

Correlazione e covarianza di v.a. indipendenti

Nel caso di variabili aleatorie *indipendenti*:

$$r_{XY} = E\{XY\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,y\,f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,y\,f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy =$$

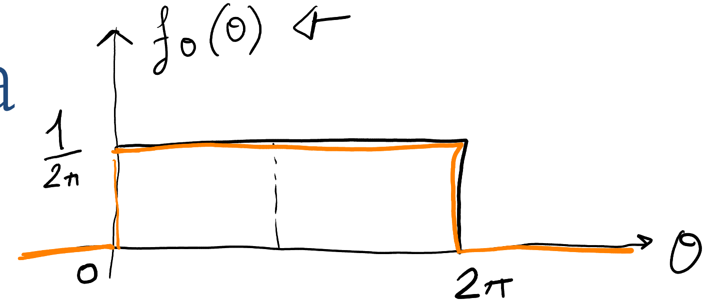
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_X(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y\,f_Y(y)\,dy = \eta_X\,\eta_Y \rightarrow r_{XY} = \eta_X \eta_Y$$

$$c_{XY} = r_{XY} - \eta_X\eta_Y = 0$$

$$\rho_{XY} = \frac{c_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = 0$$

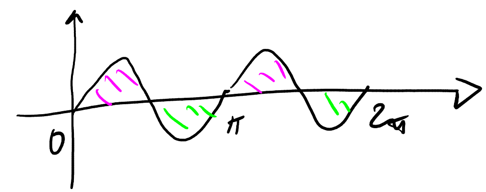
- Se X e Y sono ***indipendenti*** sono anche ***incorrelate*** (covarianza nulla); viceversa, se la covarianza è nulla (variabili aleatorie incorrelate), non è detto che X e Y siano indipendenti

Incorrelazione $\not\Rightarrow$ Indipendenza



- Lo verifichiamo con l'Esempio 8.8 – Libro LV
- Sia Θ una variabile aleatoria uniformemente distribuita sull'intervallo [0, 2π[
- A partire da Θ si definiscono due ulteriori variabili aleatorie: X = sin(Θ) e Y = cos(Θ) di cui vogliamo valutare la correlazione statistica
- $r_{XY} = \mathbb{E}\{XY\} = \mathbb{E}\{g(\Theta)\cdot h(\Theta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot f_\Theta(\theta)\, d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \frac{1}{2\pi}\, d\theta = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin 2\theta \, d\theta = 0$$



$$\eta_X = \mathbb{E}\{\cos\theta\} = \int_0^{2\pi} \cos\theta \cdot \frac{1}{2\pi}\, d\theta = 0$$

$$\eta_Y = \mathbb{E}\{\sin\theta\} = \int_0^{2\pi} \sin\theta \cdot \frac{1}{2\pi}\, d\theta = 0$$

$$c_{XY} = r_{XY} - \eta_X \eta_Y = 0 - 0\cdot 0 = 0$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$X^2 + Y^2 = 1 \rightarrow X^2 = 1 - Y^2$$

Viti e dadi

Esercizio su sistema di v.a. indipendenti $X \in \mathcal{N}(5; 0{,}01)$

- Una prima macchina produce viti il cui diametro X (in mm) può essere considerato una v.a. normale di parametri (5; 0.01)
- Una seconda macchina produce dadi il cui diametro Y (in mm) può considerarsi una v.a. normale di parametri (5.2; 0.04) $Y \in \mathcal{N}(5.2, 0.04)$
- Un dado si avvita correttamente su una vite se il suo diametro è maggiore di quello della vite di almeno 0.04 mm, ma non più di 0.36 mm
- Qual è la probabilità che una vite ed un dado scelti a caso si avvitino correttamente?

X, Y indipendenti

$$D = Y - X \rightarrow \mathcal{N}(\eta_D, \sigma_D^2)$$

$$\eta_D = \mathbb{E}\{Y - X\} = \mathbb{E}\{Y\} - \mathbb{E}\{X\} = 0{,}2$$

$$\sigma_D^2 = \mathbb{E}\{D^2\} - \mathbb{E}^2\{D\} = \mathbb{E}\{(Y-X)^2\} - \left[\mathbb{E}\{Y\} - \mathbb{E}\{X\}\right]^2$$

$$= \mathbb{E}\{Y^2\} - 2\,\mathbb{E}\{XY\} + \mathbb{E}\{X^2\} - \mathbb{E}^2\{Y\} + 2\,\mathbb{E}\{X\}\cdot\mathbb{E}\{Y\} - \mathbb{E}^2\{X\}$$

$$= \sigma_Y^2 + \sigma_X^2 - 2\Big[\underbrace{\mathbb{E}\{XY\} - \mathbb{E}\{X\}\cdot\mathbb{E}\{Y\}}_{C_{XY}}\Big]$$

$\sigma_D^2 = \sigma_Y^2 + \sigma_X^2 - 2C_{XY}$ VAR. IND. SONO INCORRELATE $\rightarrow$ $C_{XY} = 0$

$$\sigma_D^2 = 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}05$$

$$D \in \mathcal{N}(0{,}2\,;\,0{,}05)$$

$$D = \sigma_D \cdot Z + \eta_D \rightarrow \boxed{Z = \frac{D - \eta_D}{\sigma_D}}$$

$$\mathbb{P}\{0{,}04 \le D \le 0{,}36\} = \underbrace{F_D(0{,}36)}_{1 - Q\left(\frac{0{,}36 - \eta_D}{\sigma_D}\right)} - \underbrace{F_D(0{,}04)}_{1 - Q\left(\frac{0{,}04 - \eta_D}{\sigma_D}\right)}$$

$$\| $$

$$\cancel{1} - Q\left(\frac{0{,}36 - 0{,}2}{\sqrt{0{,}05}}\right) \cancel{-1} + Q\left(\frac{0{,}04 - 0{,}2}{\sqrt{0{,}05}}\right) = -Q\left(\frac{0{,}16}{\sqrt{0{,}05}}\right) + Q\left(\frac{-0{,}16}{\sqrt{0{,}05}}\right)$$

$Q(-x) = 1 - Q(x)$

$$= -Q\left(\frac{0{,}16}{\sqrt{0{,}05}}\right) + 1 - Q\left(\frac{+0{,}16}{\sqrt{0{,}05}}\right)$$

$$= 1 - 2 \cdot Q\left(\frac{0{,}16}{\sqrt{0{,}05}}\right)$$

$$= 1 - 2 \cdot \underbrace{Q(0{,}716)}_{0{,}237}$$

$$= \boxed{0{,}525}$$

Stanza con due lampade

Esercizio su sistema di v.a. indipendenti (MATLAB 8.6 – Libro LV)

- Una stanza priva di finestre è alimentata da un lampadario costituito da due lampade alimentate in parallelo
- I tempi di vita delle lampade sono descritti da due v.a. T1 e T2 indipendenti e caratterizzate da una ddp esponenziale monolatera con $\eta_1 = 2\eta$, $\eta_2 = \eta$ ed $\eta = 6000$ ore

$$f_{T_i}(t_i) = \frac{1}{\eta_i} e^{-\frac{t_i}{\eta_i}} u(t_i) \quad , i = 1,2$$

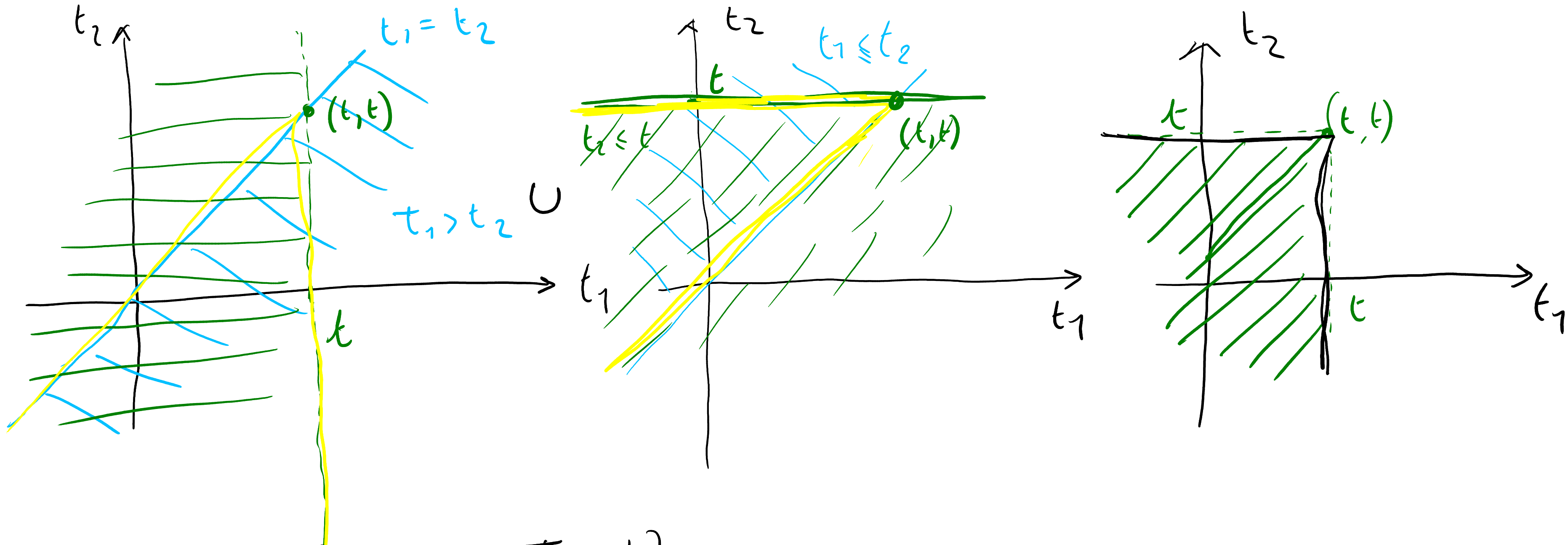
- Si calcoli il tempo medio di illuminazione della stanza → tempo di illuminazione della stanza T

$E\{T\} = ?$

$T = \max(T_1, T_2)$

$F_T(t) = P\{T \leq t\} = P\{\max(T_1, T_2) \leq t\}$

$= P\{(T_1 \leq t, T_1 > T_2) \cup (T_2 \leq t, T_1 \leq T_2)\}$



$$F_T(t) = \mathbb{P}\{T_1 \leq t,\ T_2 \leq t\} = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \int_0^t \int_0^t f_{T_1T_2}(t_1,t_2)\, dt_1\, dt_2, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$f_{T_1T_2}(t_1,t_2) = f_{T_1}(t_1) \cdot f_{T_2}(t_2) = \frac{1}{2\eta} \cdot e^{-\frac{t_1}{2\eta}} \cdot \frac{1}{\eta} e^{-\frac{t_2}{\eta}} u(t_1)\, u(t_2)$$

$$F_T(t) = \int_0^t \int_0^t \frac{1}{2\eta} e^{-\frac{t_1}{2\eta}} \cdot \frac{1}{\eta} e^{-\frac{t_2}{\eta}} \, dt_1 dt_2 \cdot u(t)$$

$$= \underbrace{\int_0^t \frac{1}{2\eta} e^{-\frac{t_1}{2\eta}} \, dt_1}_{} \cdot \underbrace{\int_0^t \frac{1}{\eta} e^{-\frac{t_2}{\eta}} \, dt_2}_{} \cdot u(t)$$

$$= \left[-e^{-\frac{t_1}{2\eta}} \right]_0^t \cdot \left[-e^{-\frac{t_2}{\eta}} \right]_0^t u(t) = \underbrace{\left(1 - e^{-\frac{t}{2\eta}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\eta}}\right) u(t)}_{}$$

$$\eta_T = \int_{-\infty}^{+\infty} t \, f_T(t) \, dt$$

$$f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = \left[\frac{1}{2\eta} e^{-\frac{t}{2\eta}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\eta}}\right) + \left(1 - e^{-\frac{t}{2\eta}}\right) \cdot \frac{1}{\eta} e^{-\frac{t}{\eta}} \right] u(t)$$

$$= \left[\frac{1}{2\eta} e^{-\frac{t}{2\eta}} \underbrace{- \frac{1}{2\eta} e^{-\frac{3}{2}\frac{t}{\eta}}}_{} + \frac{1}{\eta} e^{-\frac{t}{\eta}} \underbrace{- \frac{1}{\eta} e^{-\frac{3}{2}\frac{t}{\eta}}}_{} \right] u(t)$$

$$= \left[\frac{1}{\eta} e^{-\frac{t}{\eta}} + \frac{1}{2\eta} e^{-\frac{t}{2\eta}} - \frac{3}{2\eta} e^{-\frac{3}{2}\frac{t}{\eta}} \right] u(t)$$

$$\eta_T = \mathbb{E}\{T\} = \eta + 2\eta - \frac{2}{3}\eta = \frac{3+6-2}{3}\eta = \frac{7}{3}\eta = \frac{7}{3} \cdot 6000 = \underline{\underline{14000 \text{ ore}}}$$

Il teorema-limite centrale

Consideriamo la variabile aleatoria: $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Supponiamo che le n variabili aleatorie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ siano *indipendenti* e con la *stessa funzione densità di probabilità* con valor medio η e varianza σ^2, allora

$$E\{Y_n\} = \eta_n = n \cdot \eta, \qquad E\{(Y_n - \eta_n)^2\} = \sigma_n^2 = n \cdot \sigma^2$$

Se consideriamo un numero n di variabili man mano *crescente*, la densità di probabilità della variabile aleatoria *normalizzata*

$$S_n = \frac{Y_n - \eta_n}{\sigma_n} = \frac{Y_n - n \cdot \eta}{\sqrt{n} \cdot \sigma}$$

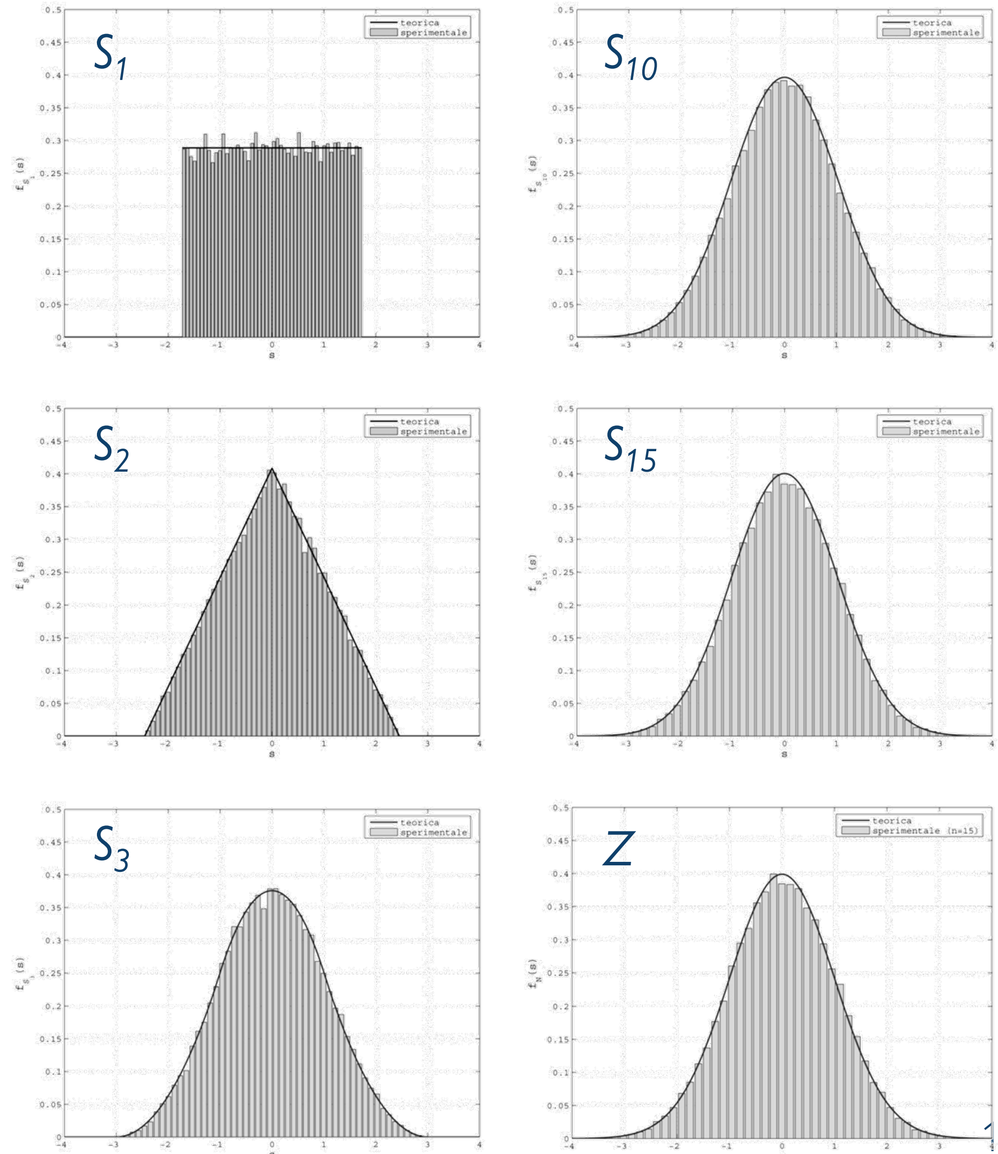
tende ad una densità normale standard, cioè con valor medio nullo e varianza unitaria

$$\lim_{n \to +\infty} f_{S_n}(s) = f_Z(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}}$$

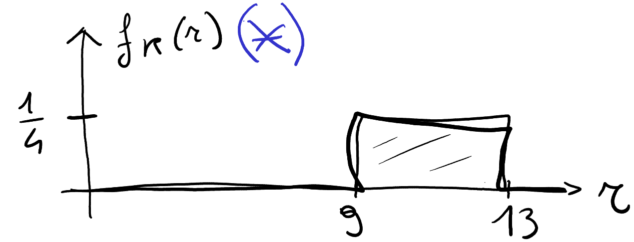
Il teorema-limite centrale

- **Esempio:** MATLAB 8.7 – Libro LV

Verifichiamo la tendenza della somma normalizzata S_n alla Gaussiana standard Z utilizzando $\mathrm{X_i} \in U(0,1)$



Il teorema-limite centrale



Esercizio: Si hanno a disposizione dei resistori la cui resistenza in Ω può essere descritta da una v.a. R avente distribuzione uniforme di parametri a=9 e b=13.

1. Se si collegano *in parallelo* 100 di tali resistori scelti a caso, qual è la probabilità che la resistenza complessiva superi 0,11 Ω?
2. Se si collegano *in serie* 100 di tali resistori scelti a caso, qual è la probabilità che la resistenza complessiva superi 1120 Ω?

$Y_n = \frac{1}{R_n} \rightarrow f_Y(y) = ?$

$y = g(r) = \frac{1}{r}$

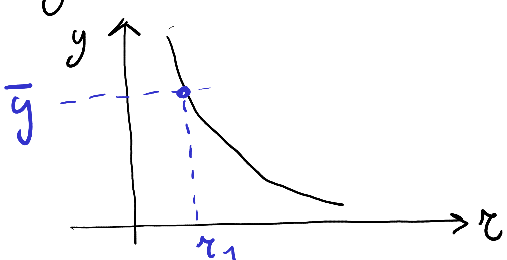
$g'(r) = -\frac{1}{r^2}$

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{K} \frac{f_R(r_i)}{|g'(r_i)|}\Bigg|_{r_i = g^{-1}(y)}$$

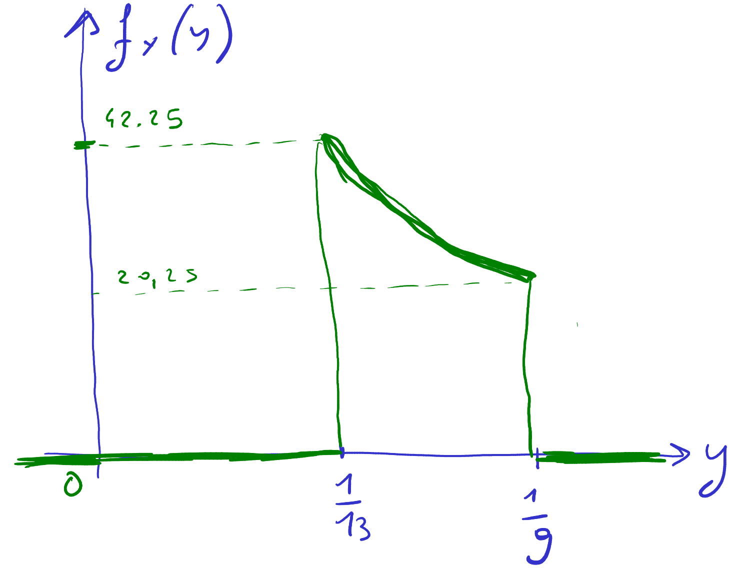
(*) $\neq 0$ se $9 \leq r_1 \leq 13$

$$\boxed{\frac{1}{9} \geq y \geq \frac{1}{13}}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{f_R(r_1)}{|g'(r_1)|}\Big|_{r_1 = g^{-1}(y)} \end{cases} = \frac{f_R(r_1)}{\frac{1}{r_1^2}}\Bigg|_{r_1 = \frac{1}{y}}$$



$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \dfrac{1/4}{y^2} = \dfrac{1}{4y^2}, & \dfrac{1}{13} \le y \le \dfrac{1}{9} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$\mathbb{E}\{Y\} = \mathbb{E}\{g(R)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} \cdot f_R(r)\, dr$$

$$= \int_9^{13} \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{4}\, dr = \frac{1}{4}\left(\ln r\right)\Big|_9^{13} = \frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{13}{9}\right) \cong \underline{0{,}0919 = \eta_Y}$$

$$\mathbb{E}\{Y^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f_Y(y)\, dy = \int_{1/13}^{1/9} \cancel{y^2} \cdot \frac{1}{4\cancel{y^2}}\, dy = \int_{1/13}^{1/9} \frac{1}{4}\, dy = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{9} - \frac{1}{13}\right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{\overset{4}{\overset{\shortparallel}{13-9}}}{13 \cdot 9}$$

$$= \frac{1}{13 \cdot 9}$$

$$\sigma_Y^2 = \mathbb{E}\{Y^2\} - \eta_Y^2 = \frac{1}{13 \cdot 9} - (0{,}0919)^2 \simeq \underline{9{,}55 \cdot 10^{-5}}$$

$$Y_{100} = \sum_{n=1}^{100} Y_n$$

$$\mathbb{E}\{Y_{100}\} = 100 \cdot \eta_y \simeq 9{,}19 = \eta_{100}$$

$$\mathbb{E}\left\{\left(Y_{100} - \eta_{100}\right)^2\right\} = \sigma^2_{100} = 100 \cdot \sigma^2_y \simeq 9{,}55 \cdot 10^{-3}$$

$$\boxed{R_{100} = \frac{1}{Y_{100}}}$$

TEO. LIM. CENTRALE

$$S_{100} = \frac{Y_{100} - \eta_{100}}{\sigma_{100}} \approx Z$$

$$Y_{100} \cong \sigma_{100} \cdot Z + \eta_{100}$$

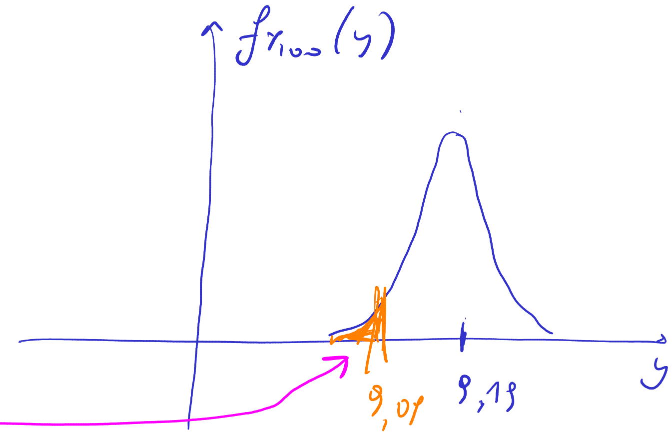
$$Y \,\tilde{\in}\, \mathcal{N}\left(\eta_{100}, \sigma^2_{100}\right)$$

$$\mathbb{P}\{R_{100} > 0{,}11\} = \mathbb{P}\left\{\frac{1}{Y_{100}} > 0{,}11\right\} = \mathbb{P}\left\{Y_{100} < \frac{1}{0{,}11}\right\} = \mathbb{P}\{Y_{100} < 9{,}09\} =$$

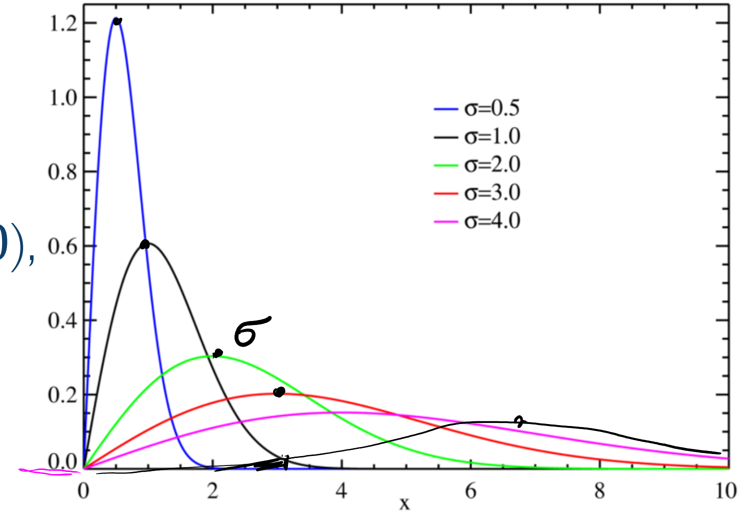
$$= 1 - \mathbb{P}\{Y_{100} > 9{,}09\} = 1 - Q\left(\frac{9.09 - \eta_{100}}{\sigma_{100}}\right)$$

$$= 1 - Q\left(\frac{9{,}09 - 9{,}19}{0{,}0978}\right) = 1 - Q(-1{,}045)$$

$$= Q(1{,}045) \simeq 0{,}148$$



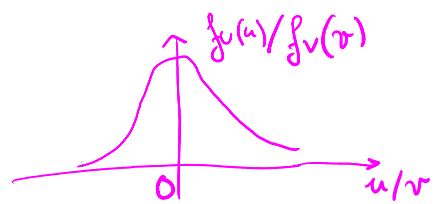
Esercizio: v. a. di Rayleigh

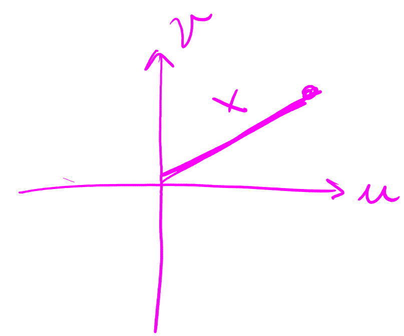


- Una v.a. X è detta **Rayleigh** di parametro $\boldsymbol{\sigma}$ $(\sigma > 0)$, e si indica con $X \in \mathcal{R}(\sigma^2)$, se la sua ddp è:

$$\boxed{f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \mathrm{u}(x)}$$

- Se $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{N}(0, \sigma^2) \rightarrow X = \sqrt{U^2 + V^2}$: X rappresenta la distanza dall'origine di un punto (U, V) nel piano euclideo le cui coordinate siano v. a. indipendenti aventi entrambe distribuzione normale
- Importante per modellare l'ampiezza di un segnale ricevuto quando vi sono numerosi cammini multipli tra trasmettitore e ricevitore





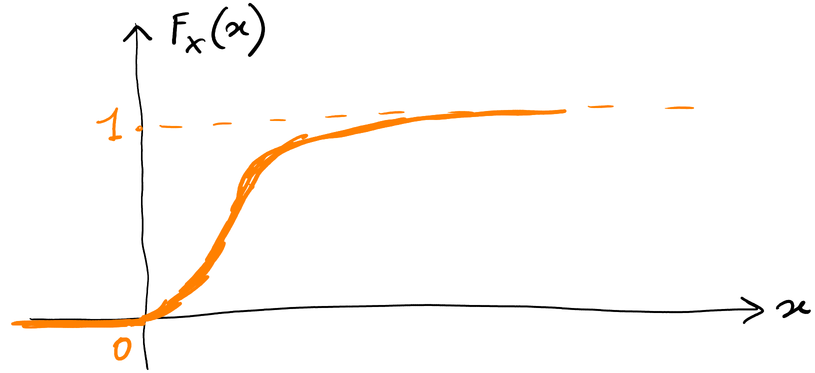
1) $F_X(x)$ = ?
2) Se $\sigma = 7$, $P(X \leq 3)$ = ?
3) Se $\sigma = 7$, $P(X \leq 3 \mid X \leq 10)$ = ?

1) $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha = \int_{0}^{x} \frac{\alpha}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}\, d\alpha \qquad x \geq 0$$

$$= \left[-e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}\right]_0^x = -e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + 1$$

$F_X(x) = 0, \; x < 0$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x \geq 0 \end{cases}$$

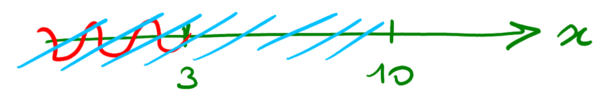


2) $$\mathbb{P}\{X \leq 3\} = F_X(3) = 1 - e^{-\frac{9}{2 \cdot 49}} = 1 - e^{-0,092} \simeq 0,0877$$

3) $$\mathbb{P}\{X \leq 3 \mid X \leq 10\} = \frac{\mathbb{P}\{X \leq 3, X \leq 10\}}{\mathbb{P}\{X \leq 10\}}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\{X \leq 3\}}{\mathbb{P}\{X \leq 10\}} = \frac{0,0877}{0,6396} = 0,137$$

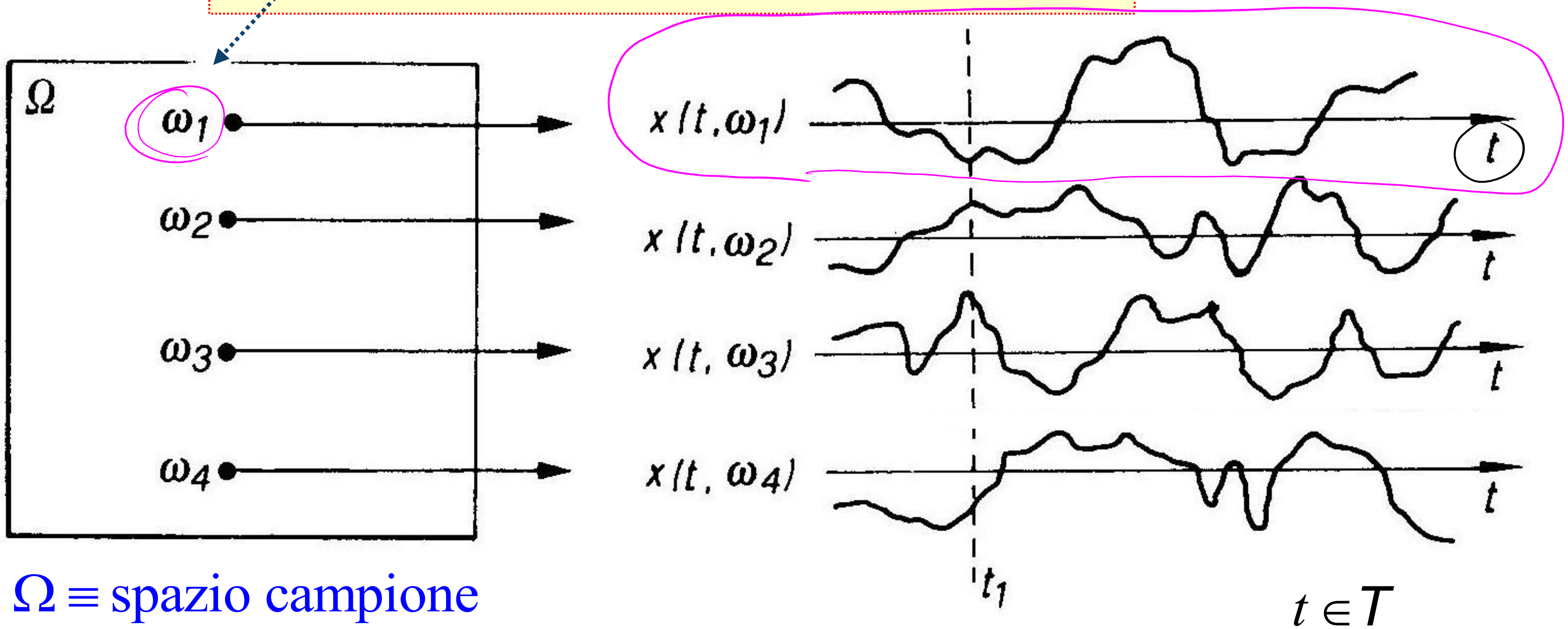
$\mathbb{P}\{X \leq 10\} \rightarrow F_X(10)$



Processi aleatori

Definizione di processo aleatorio

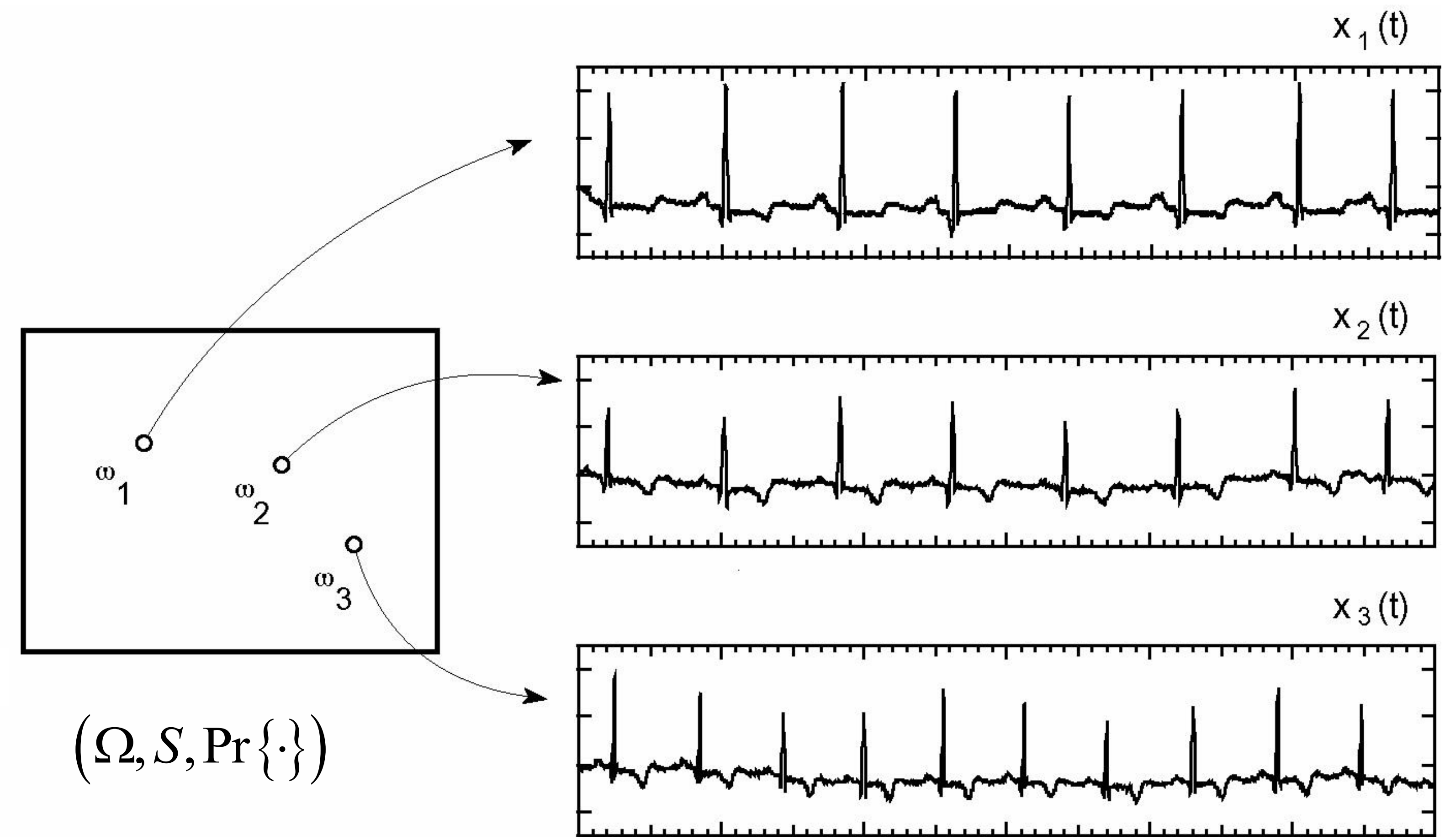
$$\textit{Spazio di probabilità} \equiv \left(\Omega, S, \Pr\{\cdot\}\right)$$



Dato un ***esperimento casuale*** di modello di probabilità assegnato, ad ogni suo risultato ω_i si associ una funzione reale $x(t,\omega)$ della variabile t → Risulta così definito un insieme di funzioni $X(t,\omega)$, detto ***processo aleatorio*** (o *casuale* o *stocastico*), che verrà indicato in breve con $X(t)$, omettendo così la dipendenza da ω

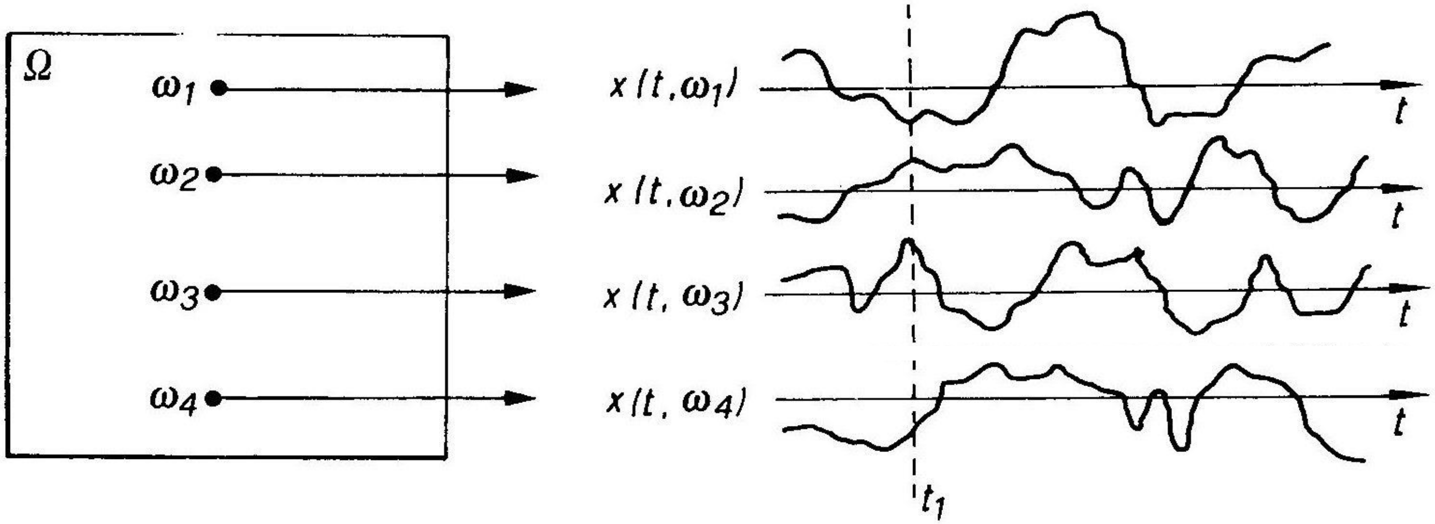
Rappresentazione grafica della definizione di p.a.

Esempi di elettrocardiogramma in pazienti affetti da aritmia



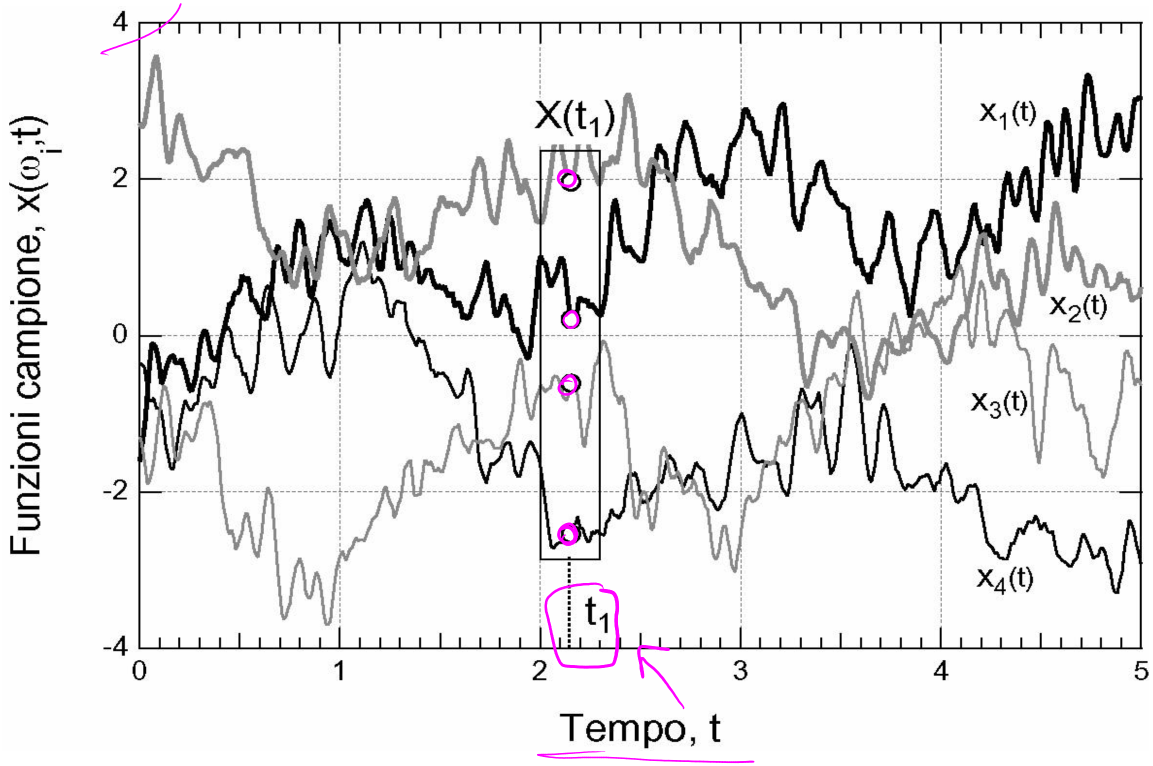
Segnali che portano informazione sono per loro natura aleatori

Definizione di processo aleatorio



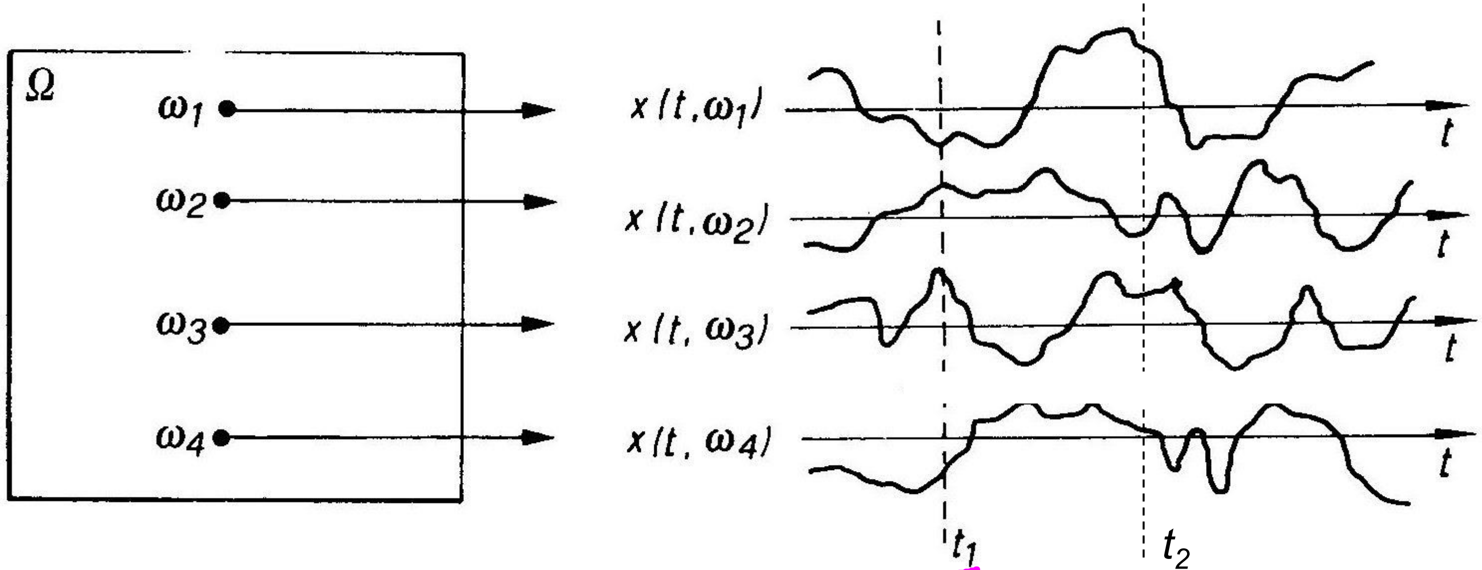
- Nella maggior parte delle applicazioni t rappresenta il *tempo*
- Le funzioni $x(t,\omega)$ sono funzioni deterministiche, la casualità risiede solo nella presentazione di un particolare risultato dell'esperimento
- Fissato il valore di ω, $X(t,\omega)$ è una funzione deterministica detta **funzione campione** del processo
- La particolare $x(t,\omega)$ che si osserva in una data prova dell'esperimento aleatorio prende il nome di **realizzazione** del processo

Variabile aleatoria estratta da un p.a.



- Qualora si fissi un determinato istante di tempo t_1, ad ogni risultato ω dell'esperimento viene associato il valore numerico $x(t_1,\omega)$ della corrispondente realizzazione in quell'istante
- Si ottiene così una quantità dipendente da ω, cioè una v.a. indicata con $X(t_1)$
  → In altre parole, fissato il valore t, il processo casuale $X(t)$ è una variabile aleatoria che indicheremo, per semplicità con $X(t)$

N v.a. estratte da un processo aleatorio



- Se si fissano due istanti distinti t_1 e t_2 si ottengono due distinte v.a. $X(t_1)$ e $X(t_2)$, che costituiscono un **sistema di due variabili aleatorie,** ovvero il **vettore aleatorio** $\mathbf{X}=[\ X(t_1)\ \ X(t_2)\ ]^T$
- Analogamente, fissando N istanti t_1 , t_2 , …, t_N , si ottiene un **vettore di** $\mathbf{N}$ **variabili aleatorie** $\mathbf{X}=[\ X(t_1)\ \ X(t_2)\ \ \ldots\ \ X(t_N)\ ]^T$
- La **descrizione statistica** del processo implica perciò la conoscenza della legge di distribuzione di **tutti** i possibili sistemi così formati

Definizione di processo aleatorio

Riassumendo $X(t,\omega)$, semplificato in $X(t)$, può rappresentare:

- un insieme di funzioni delle variabili t ed ω (**processo aleatorio**)
- una funzione deterministica della variabile t detta **funzione campione** del processo (ω fissato, t variabile)
- una **variabile casuale** indicata con $X(t)$ (t fissato, ω variabile)
- un **numero reale** (t e ω fissati)

- In molte applicazioni i risultati dell'esperimento sono già delle forme d'onda; in tal caso non vi è più distinzione tra risultato e funzione campione assegnatagli

- *Esempi*: misura della tensione di rumore, segnale musicale/video, segnale dati all'uscita di un PC, segnale raccolto da un idrofono

Descrizione statistica di un processo aleatorio

A. Specificazione diretta

Un processo $X(t)$ si dice **statisticamente determinato** se sono note le sue funzioni di distribuzione (CDF):

$$F_X(x_1, x_2, \cdots, x_N; t_1, t_2, \cdots, t_N) = \Pr\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \cdots, X(t_N) \le x_N\}$$

per ogni N e per ogni N-upla di istanti t_1 , t_2 , …, t_N

Nota la CDF di ordine N è possibile ricavare tutte le CDF di ordine inferiore mediante le regole marginali (non vale il viceversa).

Nota: la funzione di distribuzione di ordine N del processo è la funzione di distribuzione del vettore di v.a. $\mathbf{X}=[X(t_1)\ \ X(t_2)\ \ldots\ X(t_N)]^T$ ottenuto fissando N istanti t_1 , t_2 , …, t_N

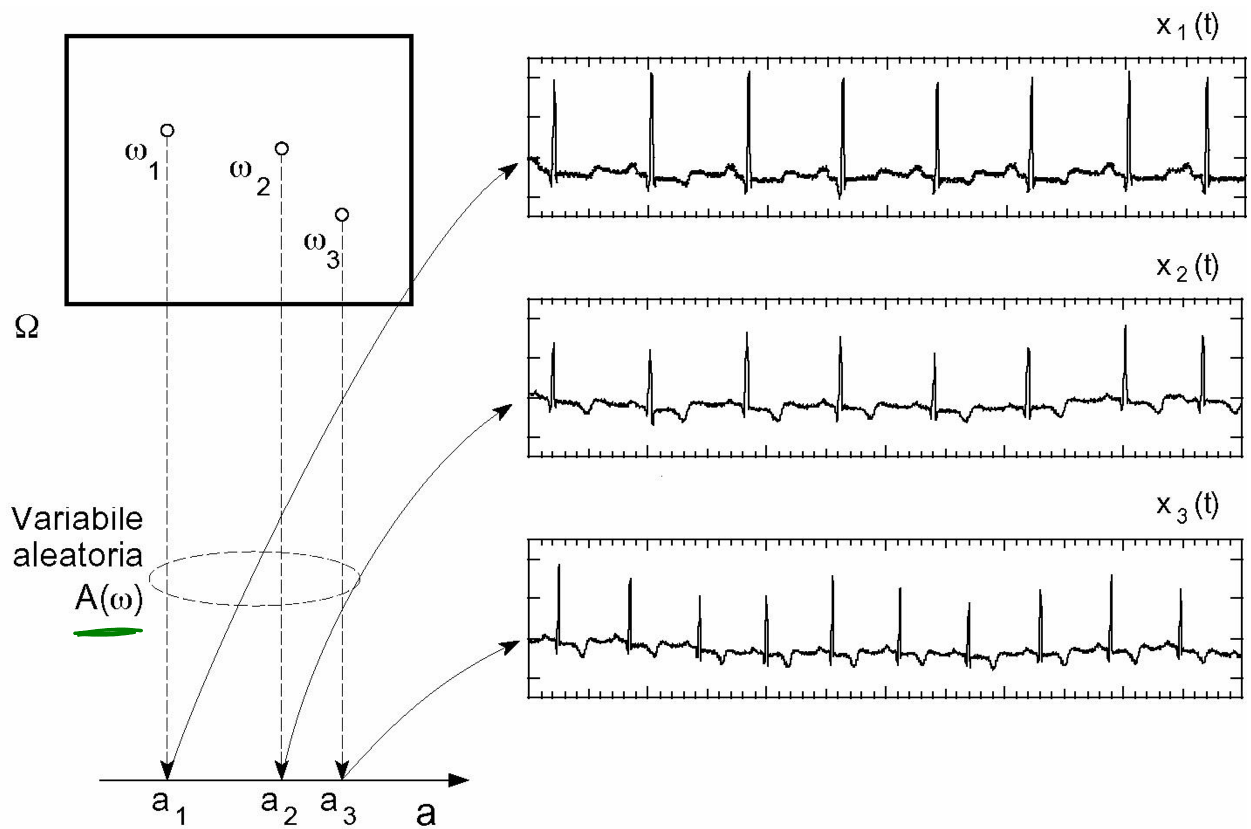
Nota: anche se il comportamento statistico di un processo stocastico è completamente determinato quando sono note le distribuzioni di tutti i possibili ordini, in alcune applicazioni è sufficiente conoscere alcune statistiche dei primi due ordini (***descrizione in potenza* del processo**)

Descrizione statistica di un processo aleatorio

B. Specificazione in forma parametrica

Un processo $X(t)$ si dice **parametrico** quando può essere specificato attraverso la forma delle sue funzioni campione, che dipende parametricamente da un certo numero di variabili aleatorie:

$$X(t) = s(t; \Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_K)$$



La caratterizzazione statistica completa del processo richiede la conoscenza della ddp congiunta dei parametri aleatori:

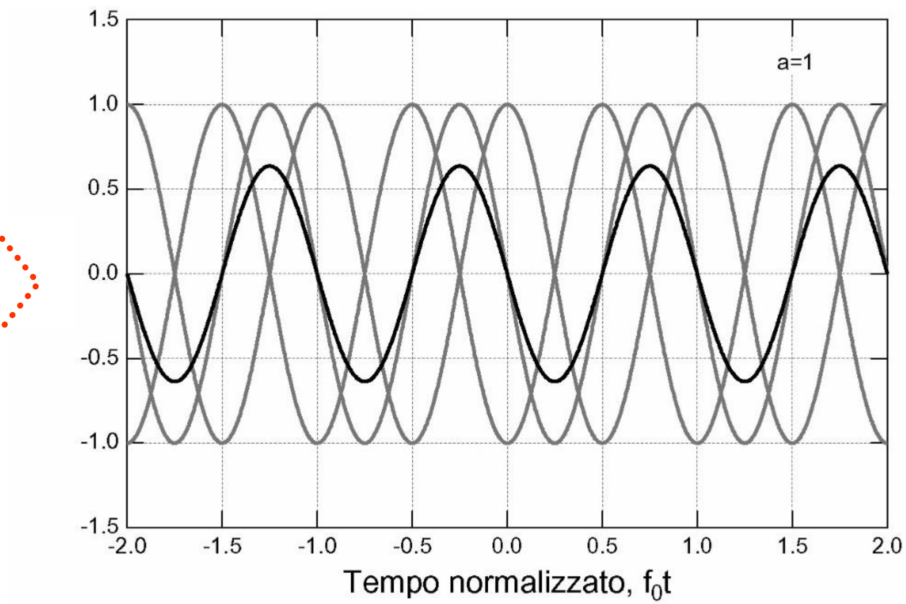
$$f_\Theta(\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_K)$$

Esempi di p.a. parametrici

- Oscillazione cosinusoidale con fase iniziale incognita

$$X(t) = a\cos\left(2\pi f_0 t + \Theta\right)$$

$$\text{con} \quad \Theta \in U(-\pi, \pi)$$



- Oscillazione cosinusoidale con ampiezza e fase iniziale aleatorie:

$$X(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \Theta\right)$$

$$\text{con} \quad A \in R(\sigma^2) \quad \text{e} \quad \Theta \in U(-\pi, \pi)$$