Capitolo 4

Lezioni di PNL

4.1 Prerequisiti Analisi II

Necessario introdurre una serie di strumenti per la PNL (*Programmazione Non Lineare*).

4.1.1 Funzioni

Le funzioni che tratteremo nella PNL sono del tipo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Notazioni possibili:

$$\begin{aligned} f(x) &\qquad\qquad \text{Dove } x \in \mathbb{R}^n \\ f(x_1, \ldots, x_n) & \\ f & \end{aligned}$$

Esempio di funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 x_1$$

dove, ad esempio, $x = (1, 1) \longrightarrow f(x) = 0$

Solito obiettivo In queste funzioni vogliamo trovare, come sempre, massimi e minimi. Ricordiamo che se sappiamo trovare il minimo sappiamo trovare il massimo (e viceversa)! Ribadiamo quanto già detto precedentemente

$$\begin{cases} \min\limits_{x \in A} f(x) = -\max\limits_{x \in A}[-f(x)] \\ \overline{x} \in \text{argmin} f(x) \Longleftrightarrow \overline{x} \in \text{argmax}[-f(x)] \end{cases}$$

Ricordandosi che argmin è l'insieme dei punti di minimo, mentre argmax è l'insieme dei punti di massimo. La considerazione fondamentale è che il punto di minimo di f è il punto di massimo di $-f$!

Attenzione Fino ad ora abbiamo considerato solo il caso particolare in cui le funzioni f sono lineari (Esempio: $3x_1 + 5x_2$), adesso generalizziamo introducendo nuove questioni.

4.1.2 Derivate

Per affrontare la PNL ci servono *derivate parziali* e le *derivate direzionali* per funzioni in $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ci servono anche i relativi concetti di *gradiente* e *matrice Hessiana.*

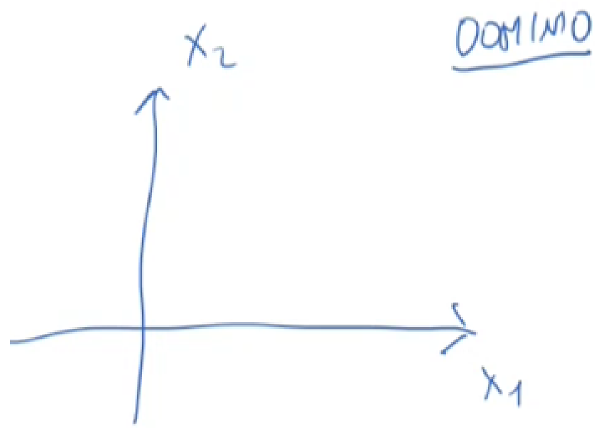
E i limiti? La cosa non ci interesserà moltissimo, visto che la stragrande maggioranza dei limiti in Analisi II non sono risolvibili.

4.1.2.1 Derivate parziali

Banalmente

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^2 + 5x_1x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 2x_1 + 5x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 5x_1 \end{aligned}$$

Cos'è la derivata parziale rispetto a x_1, graficamente parlando?



La funzione che si ottiene da f restringendomi all'asse x_1, ipotizzando che x_2 sia un valore costante. Diventa una funzione a singola variabile, e questa per noi è un'ottima notizia!

4.1.2.2 Gradiente

Il gradiente è una notazione con cui raccogliamo tutte le derivate parziali possibili relative alla funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

ovviamente $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$. Riprendendo l'esempio precedente

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_1x_2 \longrightarrow \nabla f(x) = (2x_1 + 5x_2, 5x_1)$$

4.1.2.3 Matrice hessiana

La matrice Hessiana $Hf(x)$ consiste in una matrice avente per componenti tutte le derivate seconde. Presenta n^2 componenti, dove n consiste nella dimensione del dominio. Abbiamo $Hf(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Vediamo il seguente esempio con $n = 2$

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) \end{pmatrix}$$

4.1.3 Usare gradiente ed hessiana per trovare max/min

Fino ad ora non abbiamo mai fatto distinzione tra min/max locali e globali: questo perchè nelle funzioni lineari non esiste il concetto di min/max locale! Adesso, nella PNL, dobbiamo considerare pure i max/min locali. Introduciamo una serie di teoremi necessari per l'individuazione dei punti di minimo e massimo locale.

Teorema di AN2 sulla simmetria delle matrici hessiane.

Dato $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2$, $f \in C^\infty$, la matrice hessiana $Hf(x)$ è simmetrica!

Teorema di AL su matrici simmetriche e autovalori.

Le matrici simmetriche hanno autovalori reali

Definizione di *Punto stazionario*.

Data una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisco *punto stazionario* il valore $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $\nabla f(x) = 0$

Definizione di *Vettori linearmente indipendenti*.

Dati n vettori $x_1, \dots, x_n$ definiamo questi linearmente indipendenti se e solo se

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

con $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Qualunque combinazioni di vettori può essere posta uguale a zero ponendo $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, ma in presenza di linearità indipendente è l'unico modo per farlo (se i vettori sono linearmente dipendenti allora posso ottenere una somma nulla con alcuni coefficienti non nulli).

Definizione di *Matrice definita e semidefinita positiva e negativa*.

Definiamo quanto segue.

- Con **matrice definita positiva** si intende una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che il seguente prodotto scalare risulta positivo $< A \cdot x, x > > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$
- Con **matrice semidefinita positiva** si intende una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che il seguente prodotto scalare risulta positivo o nullo $< A \cdot x, x > \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$
- Con **matrice definita negativa** si intende una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che il seguente prodotto scalare risulta negativo $< A \cdot x, x > < 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$
- Con **matrice semidefinita negativa** si intende una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che il seguente prodotto scalare risulta negativo o nullo $< A \cdot x, x > \leq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$

Per definire la matrice troviamo gli autovalori calcolando i valori λ nel determinante $\det(A - \lambda I) = 0$. Prendiamo ad esempio la matrice seguente, poniamo la matrice $A - \lambda I$ e calcoliamo quanto detto

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \Longrightarrow (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \\ \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1 \end{matrix}$$

4.1.3.1 Teoremi per l'individuazione del minimo locale

***Teorema di Fermat per l'Analisi II*.**
Dato $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2,\ f \in C^\infty$, se $\overline{x}$ è minimo locale di f allora $\overline{x}$ è un p.to stazionario. Attenzione: è CN, ma non CS:

- se ho un p.to di minimo $\overline{x}$ è automatico che questo sia p.to stazionario;
- se ho un p.to stazionario $\overline{x}$ non è automatico che questo sia p.to di minimo.

***Teorema 2*.**
Dato $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2,\ f \in C^\infty$, se $\overline{x}$ è minimo locale di f e $\overline{x}$ p.to stazionario allora

$$Hf(\overline{x}) \geq 0$$

la Hessiana è *semidefinita positiva*. Attenzione: è CN, ma non CS:

- se ho p.to di minimo $\overline{x}$ è automatico che $Hf(\overline{x}) \geq 0$;
- se $Hf(\overline{x}) \geq 0$ non è automatico che $\overline{x}$ sia p.to di minimo.

***Teorema 3*.**
Dato $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2$, se $\nabla f(\overline{x}) = 0$ e $Hf(\overline{x}) > 0$ (hessiana nel p.to *definita positiva*) allora $\overline{x}$ è minimo locale! Questa è CS!

4.1.3.2 Teoremi per l'individuazione del massimo locale

***Teorema di Fermat per l'Analisi II*.**
Dato $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2,\ f \in C^\infty$, se $\overline{x}$ è massimo locale di f allora $\overline{x}$ è un p.to stazionario. Attenzione: è CN, ma non CS:

- se ho un p.to di massimo $\overline{x}$ è automatico che questo sia p.to stazionario;
- se ho un p.to stazionario $\overline{x}$ non è automatico che questo sia p.to di massimo.

***Teorema 2*.**
Dato $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2,\ f \in C^\infty$, se $\overline{x}$ è massimo locale di f e $\nabla f(\overline{x}) = 0$ allora

$$Hf(\overline{x}) \leq 0$$

la Hessiana è *semidefinita negativa*. Attenzione: è CN, ma non CS:

- se ho p.to di massimo $\overline{x}$ è automatico che $Hf(\overline{x}) \leq 0$;
- se $Hf(\overline{x}) \leq 0$ non è automatico che $\overline{x}$ sia p.to di massimo.

Teorema 3.

Dato $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2$, se $\nabla f(\overline{x}) = 0$ e $Hf(\overline{x}) < 0$ (hessiana nel punto *definita negativa*) allora $\overline{x}$ è massimo locale! Questa è CS!

4.1.4 Teoremi per l'individuazione di massimi e minimi globali

Per quanto riguarda l'individuazione di massimi e minimi globali

- i primi due teoremi sono validi (se un min/max è globale è anche locale)
- non abbiamo il terzo teorema.

Le cose si fanno più complicate perchè chiaramente siamo interessati al massimo o al minimo globale.

4.1.5 Restrizioni

Recuperiamo il concetto di *restrizione*, che ci risulterà utile parlando di funzioni coercive e di selle.

Definizione di *Restrizione della funzione*.

Data una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiamo *restrizione della funzione* una funzione $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ottenuta restringendo il dominio della funzione. Nel nostro caso ciò che ci interessa è la *restrizione a una semiretta*, dove scriviamo l'equazione della semiretta in formato parametrico e successivamente sostituiamo nella funzione f. Consideriamo il seguente esempio

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$
$$\begin{cases} x_1 = 0 + t \\ x_2 = 3 + t \end{cases} \implies \gamma(t) = t^2 - (3+t)^2 = -9 - 6t$$

Le restrizioni delle funzioni avvengono rispetto a delle curve che dobbiamo *parametrizzare*. Facciamo degli esempi di parametrizzazione!

- **Semiretta avente origine in un punto $\overline{x}$ e direzione $\overline{d}$.**

  Normalmente rappresentiamo una semiretta con la formula

  $$\overline{x} + t\overline{d}$$

  Supponiamo che $\overline{x} = (3, 2)$ e $\overline{d} = (2, 5)$. Otteniamo la seguente parametrizzazione

  $$\begin{cases} x_1 = 3 + 2t \\ x_2 = 2 + 5t \end{cases}$$

  dove $t \geq 0$

- **Semiretta lungo l'ordinata.**

  Consideriamo semirette dirette lungo l'ordinata e aventi origine nell'origine del piano cartesiano. Osserviamo subito che $x_1 = 0$, poichè siamo lungo l'ordinata. Segue

  $$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \end{cases}$$

  dove $t \ldots$? Dipende da dove è diretta la semiretta!

– Se è diretta verso l'alto abbiamo $t \geq 0$.
– Se è diretta verso il basso abbiamo $t \leq 0$.

Si osservi che è possibile porre anche la seguente parametrizzazione

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -t \end{cases}$$

dove

– $t \geq 0$ se la semiretta è diretta verso il basso;
– $t \leq 0$ se la semiretta è diretta verso l'alto.

- **Circonferenza unitaria**.

  Consideriamo una circonferenza avente raggio 1, con centro nell'origine del piano cartesiano.

  $$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

  In questo caso abbiamo due parametrizzazioni possibili:

  – con sin e cos

  $$\begin{cases} x_1 = \cos t \\ x_2 = \sin t \end{cases}$$

  e $t \in [0, 2\pi]$. Possiamo verificare sostituendo

  $$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

  che sappiamo essere valida.

  – senza sin cos.

  Pongo $x_1 = t$ e sostituisco ottenendo x_2

  $$t^2 + x_2^2 = 1 \longrightarrow x_2^2 = 1 - t^2 \longrightarrow x_2 = \sqrt{1 - t^2}$$

  quindi

  $$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$$

  dove $t \in [-1, 1]$ (si studi il dominio della funzione x_2 per avere conferma). Si osservi che è equivalente parametrizzare ponendo $x_2 = t$, in quel caso otterremo

  $$\begin{cases} x_1 = \sqrt{1 - t^2} \\ x_2 = t \end{cases}$$

- **Parabola**.

  Prendiamo una semplice parabola avente vertice nell'origine e rivolta verso l'alto

  $$x_2 = x_1^2$$

  poniamo $x_1 = t$, ottenendo $x_2 = t^2$

  $$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t^2 \end{cases}$$

  Contrariamente alla circonferenza non è equivalente parametrizzare ponendo $x_2 = t$, cioè

  $$\begin{cases} x_1 = \sqrt{t} \\ x_2 = t \end{cases}$$

  dove $t \in [0, +\infty]$: stiamo parametrizzando un arco di parabola e non la parabola nel suo complesso!

4.2 Funzione *quadprog*

Questa funzione di Matlab è utilizzata per risolvere problemi di funzioni quadratiche.

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2}xHx + c \cdot x \\ A \cdot x \leq b \\ A_{eq} \cdot x = b_{eq} \\ LB \leq x \leq UB \end{cases}$$

Il comando è il seguente:

```
>> quadprog(H, c, A, b, Aeq, beq, LB, UB);
```

H invece è la matrice Hessiana. Consideriamo il seguente esempio

$$4x_1^2 - x_1x_2 + 5x_2$$

Metteremo

$$H = 2A = 2\begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix}$$

4.3 Funzione *fmincon*

Questo formato è il formato utilizzato in Matlab per risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} \min f(x) \\ A \cdot x \leq b \\ A_{eq} \cdot x = b_{eq} \\ LB \leq x \leq Ub \end{cases}$$

Il comando è il seguente

```
>> fmincon(fun, x0, A, b, Aeq, beq, LB, UB);
```

$x0$ è il punto iniziale (obv $x0 \in P$). f è la funzione, che deve essere scritta con sintassi compatibile con Matlab (Cercate online cit. - tanto non serve per lo scritto.).

INTRODUZIONE ALLA PROGRAMMAZIONE NON LINEARE

TIPOLOGIE DI PROBLEMI

ABBIAMO DUE TIPOLOGIE DI PROBLEMI:

- $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, PNL NON VINCOLATA
- $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, PNL VINCOLATA (D INSIEME CHIUSO) CONTIENE LA SUA FRONTIERA

AFFRONTEREMO PRIMA I PROBLEMI NON VINCOLATI, E SUCCESSIVAMENTE QUELLI VINCOLATI.

PROBLEMA: PUNTI DI MIN/MAX LOCALI E GLOBALI

COME SEMPRE É NOSTRO INTERESSE MINIMIZZARE / MASSIMIZZARE FUNZIONI OBIETTIVO. ABBIAMO RECUPERATO ALCUNI CONCETTI DI ANALISI II, IN PRIMIS QUELLO DI PUNTO STAZIONARIO. UN PUNTO STAZIONARIO PUÓ ESSERE:

- MINIMO LOCALE
- MINIMO GLOBALE
- MASSIMO LOCALE
- MASSIMO GLOBALE
- SELLA (IL FLESSO IN AN1)

CIÓ CHE EFFETTIVAMENTE CI INTERESSA

PER POTER APPLICARE GLI ALGORITMI DI PNL É NECESSARIO SAPER CLASSIFICARE I PUNTI STAZIONARI. A TAL PROPOSITO VIENE IN NOSTRO SOCCORSO LA HESSIANA E IL CALCOLO DEGLI AUTOVALORI

Teorema 3.

Dato $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2$, se $\nabla f(\overline{x}) = 0$ e $Hf(\overline{x}) > 0$ (hessiana nel p.to *definita positiva*) allora $\overline{x}$ è minimo locale! Questa è CS!

Teorema 3.

Dato $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2$, se $\nabla f(\overline{x}) = 0$ e $Hf(\overline{x}) < 0$ (hessiana nel punto *definita negativa*) allora $\overline{x}$ è massimo locale! Questa è CS!

TUTTAVIA LA DISTINZIONE TRA PUNTI LOCALI E GLOBALI COMPLICA LE COSE. AVREMO ULTERIORI COMPLICAZIONI IN PRESENZA DI VINCOLI: IL Th. DI FERMAT NON BASTA PIÚ.

PROBLEMA: NUMERO DI SOLUZIONI DA CONSIDERARE

PRENDIAMO LA CN DEI PUNTI STAZIONARI $\nabla f(x) = 0$

$\nabla f(x) = 0$ PUÓ ESSERE VISTO COME UN SISTEMA DI EQUAZIONI A DUE INCOGNITE IN $\mathbb{R}^2$

ES. $f(x) = 4x_1^3 - 5x_2 x_1 + 4x_2^2$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 5x_2 \\ -5x_1 + 8x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 12x_1^2 - 5x_2 = 0 \\ -5x_1 + 8x_2 = 0 \end{cases}$$

IL NUM. DI SOLUZIONI NON É IMMEDIATO SE IL SISTEMA NON É LINEARE. NOI LAVORIAMO IN $\mathbb{R}^2$, MA NELLA REALTÁ SI LAVORA CON MOLTE PIÚ COMPONENTI

ALGORITMO DI ENUMERAZIONE TOTALE (INEFFICIENTE)

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE ALGORITMO DI ENUMERAZIONE TOTALE:

1) CALCOLO IL GRADIENTE
2) PRENDO IL SISTEMA $\nabla f(x) = 0$ E TROVO TUTTE LE SOLUZIONI
3) TESTO L'HESSIANA SU TUTTE LE SOLUZIONI (COSA NON PROPRIO A COSTO ZERO)
4) PRENDO TRA I RISULTATI MINIMI (O MASSIMI) LOCALI QUELLO DA CUI SI OTTIENE VALORE MINIMO (O MASSIMO) DELLA FUNZIONE OBIETTIVO

CALCOLO DEGLI AUTOVALORI

PROMEMORIA: SIAMO NELLA PNL NON VINCOLATA!

CLASSIFICAZIONE DELLE FUNZIONI

SI INDIVIDUANO ALCUNE TIPOLOGIE DI FUNZIONI DOVE I PROBLEMI PRECEDENTI RISULTANO "SEMPLIFICATI". ABBIAMO:
- FUNZIONI QUADRATICHE;
- FUNZIONI COERCIVE;
- FUNZIONI CONVESSE.

FUNZIONI QUADRATICHE

UNA FUNZIONE $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ É DETTA QUADRATICA SE É UN POLINOMIO DI SECONDO GRADO CHE PRESENTA LA SEGUENTE STRUTTURA

$$\underbrace{\langle x, Ax \rangle}_{\text{PARTE DI SECONDO GRADO}} + \underbrace{\langle c, x \rangle}_{\text{PARTE LINEARE}}$$

$n = 2 \quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(CI INTERESSANO POLINOMI DI 2° GRADO IN x_1, x_2)

ES. GIUSTO: $3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 5x_1 - 6x_2$

ES. SBAGLIATO 1: $4x_1^3 - 5x_1x_2$ PRIMO TERMINE GRADO 3

ES. SBAGLIATO 2: $x_1^2x_2 - 3x_2^2$ TERMINE MISTO GRADO 3

ES: $Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$

$$x^T(Ax) = (x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 = \\ = x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2$$

OSSERVAZIONI NON CASUALI

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad x^T(Ax) = 1x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2$$

$$5 = 2+3$$

I NUMERI IN BLU SONO GLI STESSI, IL 5 SI OTTIENE SOMMANDO GLI ELEMENTI EVIDENZIATI IN ROSSO.

ES2: PARTIAMO DALLA FUNZIONE QUADRATICA $f(x) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 - 5x_2$

QUAL È LA MATRICE A?

- LA DIAGONALE È IMMEDIATA
- LA CONTRODIAGONALE NON È UNIVOCA, L'IMPORTANTE È CHE LA SOMMA DEI TERMINI SIA UGUALE AL COEFFICIENTE VICINO A x_1x_2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \ldots \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \ldots \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{E COSÍ VIA!!}$$

PRENDEREMO COME RIFERIMENTO LA PRIMA, QUELLA SIMMETRICA, VISTO LA SIMMETRIA DELL'HESSIANA

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 8x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 - 10x_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow Hf = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = 2A$$

ALTRO ESEMPIO: $Q(x) = 5x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$

CALCOLIAMO LA HESSIANA

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow HQ = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 2A$$

NUM. DI SOLUZIONI DEL SISTEMA $\nabla f(x) = 0$ E AUTOVALORI.

NEL CASO DI FUNZIONI QUADRATICHE IL SECONDO PROBLEMA DETTO SI SEMPLIFICA PESANTEMENTE: NEL GRADIENTE TROVIAMO FUNZIONI DI PRIMO GRADO E QUINDI

$$\nabla f(x) = 0 \quad \text{È UN SISTEMA LINEARE!!!}$$

SEGUE LA HESSIANA COSTANTE E UN POLINOMIO DI SECONDO GRADO PER IL CALCOLO DEGLI AUTOVALORI!

FUNZIONI COERCIVE

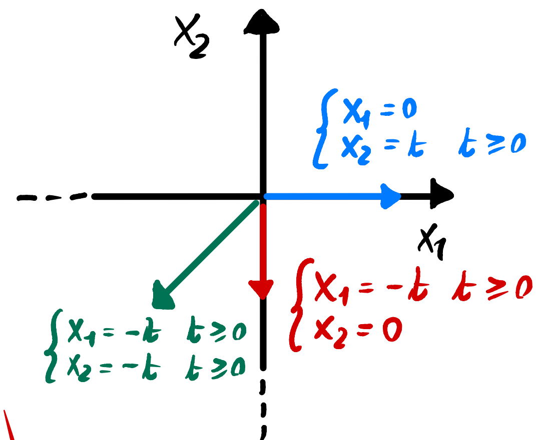
UNA FUNZIONE SI DICE COERCIVA SE $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$ ‖x‖ MODULO DI UN VETTORE

LA COSA CI PIACE POICHÉ
1) f COERCIVA $\Rightarrow \exists$ MIN. ASSOLUTO (f CONTINUA)
2) $-f$ COERCIVA $\Rightarrow \exists$ MAX. ASSOLUTO (f ANTI-COERCIVA)

COME VEDO SE UNA FUNZIONE È COERCIVA? DEVE ANDARE ALL'INFINITO IN TUTTE LE DIREZIONI POSSIBILI

PRENDIAMO LA SEGUENTE FUNZIONE: $f(x) = x_1^3 + 5x_1x_2 + x_2^2$

NELLA FIGURA ABBIAMO RAPPRESENTATO DEGLI ESEMPI DI DIREZIONE.



PRENDIAMO I VALORI E SOSTITUIAMOLI IN $f(x)$:

$f(x) = t^2$ $\quad \lim_{t \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) = -t^3$ X

POSSIAMO FERMARCI, FUNZIONE NON COERCIVA (SI VA A $-\infty$)

NEL CASO DELLE FUNZIONI QUADRATICHE SI HA UNA FUNZIONE COERCIVA SE LA MATRICE A È DEFINITA POSITIVA.

ES: $f(x) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_2^2 - x_1 + 5x_2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(4-\lambda) - \frac{9}{4} = 0$$

$$8 - 2\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - \frac{9}{4} = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + \frac{23}{4} = 0$$

$$\Delta = 36 - 4(1)\left(\frac{23}{4}\right) = 13$$

$$\lambda_1 = \frac{6 + \sqrt{13}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{6 - \sqrt{13}}{2}$$

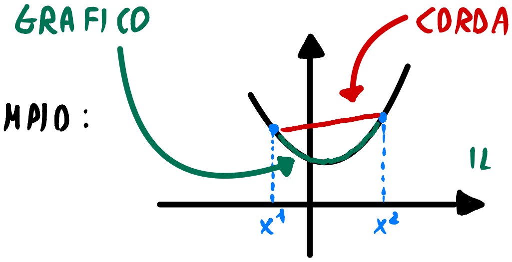
ENTRAMBI POSITIVI!

FUNZIONI CONVESSE

UNA FUNZIONE SI DICE CONVESSA SE

$$\underbrace{f\left(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2\right)}_{\text{GRAFICO}} \leq \underbrace{\lambda f(x^1)+(1-\lambda)f(x^2)}_{\text{CORDA}} \quad \forall \lambda \in [0,1],\ \forall x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$$

ESEMPIO:



IL GRAFICO STA SEMPRE SOTTO LA CORDA

COME VERIFICO SE $f(x)$ É CONVESSA?

FUNZIONE CONVESSA SE E SOLO SE HESSIANA SEMIDEFINITA POSITIVA $Hf(x) \geq 0 \ \forall x$

DEVO CALCOLARMI TUTTE LE HESSIANE!!! MI SALVO CON LE FUNZIONI QUADRATICHE (HESSIANA COSTANTE)

PERCHÉ CI PIACCIONO LE FUNZIONI CONVESSE? PER QUESTO TEOREMA:

TEOREMA SUI P.TI STAZIONARI IN FUNZIONI CONVESSE. I P.TI STAZIONARI DI FUNZIONI CONVESSE, SE ESISTONO, SONO MINIMI ASSOLUTI.

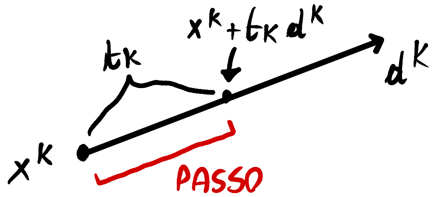
ALGORITMI ITERATIVI PER LA RISOLUZIONE

L'ALGORITMO DI ENUMERAZIONE GIÀ VISTO È BUONO IN $\mathbb{R}^2$ E CON FUNZIONI QUADRATICHE. IN ALTRI CASI CONVIENE RIVOLGERSI AD ALGORITMI ITERATIVI.

DATO UN PUNTO INIZIALE x^0 SI COSTRUISCE ITERATIVAMENTE LA SEGUENTE SUCCESSIONE:

$$x^{k+1} = x^k + t_k d^k$$

OGNI VOLTA PRENDO IL P.TO PRECEDENTE E LO PONGO COME ORIGINE DI UNA SEMIRETTA AVENTE COME DIREZIONE IL VERSORE d^k



NEI VARI ALGORITMI DISCUTEREMO:
- LA DIREZIONE d^k, E
- QUANTO SPOSTARCI LUNGO QUELLA DIREZIONE (t_k, "STEPSIZE" – DIMENSIONE DEL PASSO)

ABBIAMO INTRODOTTO IL CONCETTO DI RESTRIZIONE: $\varphi(t) \triangleq f(x^k + t d^k)$
(DEF. NELLE PREMESSE ALLA PNL) $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

IL 90% DEGLI ALGORITMI CHE VEDREMO SONO DETTI "METODI DI DISCESA", DOVE LE MIGLIORI DIREZIONI d^k SONO QUELLE TALI CHE

$$f(x^{k+1}) < f(x^k)$$

MATEMATICAMENTE PARLANDO POSSIAMO VEDERE SE φ SCENDE A PARTIRE DALLA DERIVATA $\varphi'(0)$, IMPONENDO $\varphi'(0)<0$

CALCOLO LA DERIVATA DI UNA COMPOSIZIONE: $\underbrace{\varphi'(t) = \nabla f(x^k + t d^k)\, d^k}_{\text{DIFF. DELLA FUNZIONE COMPOSTA (DA ANALISI II)}}$

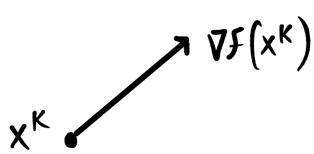
QUINDI:

$$\varphi'(0) = \nabla f(x^k) \cdot d^k < 0$$

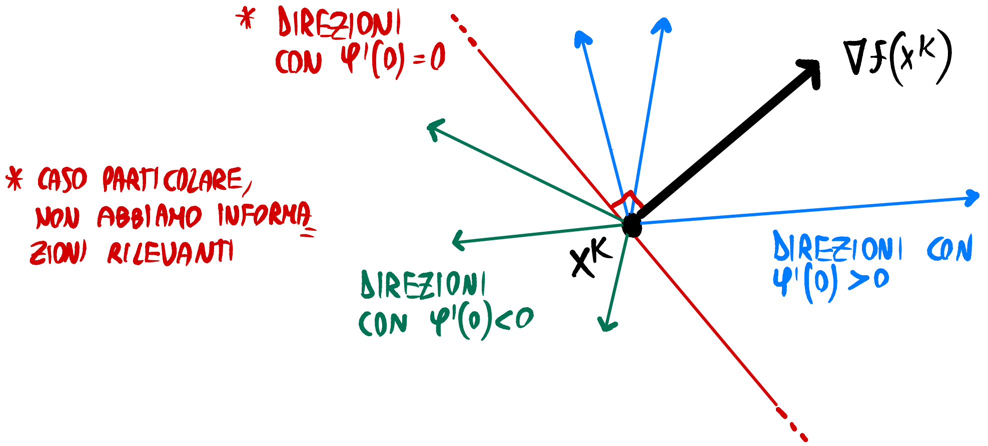
SCELGO DIREZIONE TALE DA AVERE PRODOTTO SCALARE COL GRADIENTE NEGATIVO

INTERPRETIAMO GRAFICAMENTE:

SUPPONIAMO DI AVERE x^k E DI CALCOLARE IL GRADIENTE $\nabla f(x^k)$: OTTENIAMO UNA DIREZIONE.



SAPPIAMO CHE IL PRODOTTO SCALARE È $\varphi'(0) = \|\nabla f(x^k)\| \cdot \|d^k\| \cos\theta^k$
QUINDI IL SEGNO DI $\varphi'(0)$ DIPENDE DA $\cos\theta^k$ E DALL'ANGOLO θ^k



IMMAGINARSI LA DIREZIONE $\nabla f(x^k)$ COME L'ASSE X DI UN PIANO CARTESIANO, QUINDI I QUATTRO QUADRANTI:

- NEL I° E NEL IV° SIAMO IN SALITA
- NEL II° E NEL III° SIAMO IN DISCESA

ESEMPIO: $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2^2 \qquad x^k = (1,1) \qquad d^k = (1,2)$

LA FUNZIONE SCENDE O SALE?

$$\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -x_1 + 6x_2) \Longrightarrow \nabla f(1,1) = (1,5)$$

$$\Longrightarrow \varphi'(0) = (1,5) \cdot (1,2) = 11 > 0 \quad \text{LA FUNZIONE CRESCE}$$

NON VOGLIO STARE A PROVARE PRODOTTI SCALARI: VOGLIO UN d^k CHE SONO CERTO A PRIORI MI DIA PRODOTTO SCALARE NEGATIVO

$$\nabla f(x^k) \cdot (-\nabla f(x^k)) = -\|\nabla f(x^k)\|^2$$

RIPRENDIAMO L'ESEMPIO

$$\nabla f(1,1) = (1,5) \Longrightarrow (1,5) \cdot (-1,-5) = -26 \ \checkmark$$

RISULTATO SEMPRE NEGATIVO SALVO GRADIENTE NULLO (A QUEL PUNTO SIAMO IN PRESENZA DI UN PUNTO STAZIONARIO, CHE PONIAMO DA PARTE).

CONFRONTO CON GLI ARGOMENTI PASSATI E GLI ALGORITMI DELLA PNL

- A COSA CONVERGONO I METODI? (CORRETTEZZA)

  PRIMA: MINIMO GLOBALE

  ORA: PUNTI STAZIONARI (MIN. LOCALE, MIN. GLOBALE, SELLA)

- QUANTI PASSI SONO NECESSARI? (TERMINAZIONE)

  PRIMA: NUMERO FINITO DI STEP

  ORA: NUMERO INFINITO DI STEP (!!!)

REGOLE DI STOP

CI SERVONO DELLE REGOLE PER GESTIRE IL NUMERO INFINITO DI STEP.

1) DETERMINO UN NUM. DI STEP MASSIMO (ES: MI FERMO DOPO 10^5 PASSI)
2) IMPOSTO UN TEMPO MASSIMO
3) $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \Delta$ (ES: $\Delta = 10^{-4}$, SE DOPO TOT PASSI LA DIFF. É $< 10^{-4}$ ALLORA MI FERMO)
4) $|\nabla f(x^k)| < \Delta$ (ES: $\Delta = 10^{-4}$, COME PRIMA... SE PER TOT PASSI NON MI AVVICINO ALLO ZERO MI FERMO)

METODO DEL GRADIENTE (CON RICERCA ESATTA DEL PASSO)

SPIEGAZIONE

METODO CLASSICO PER OTTIMIZZARE UNA FUNZIONE NON LINEARE, DI n VARIABILI E ALMENO CLASSE C^1.

É UN ESEMPIO DI METODO ITERATIVO, DETTO ANCHE "METODO DELLA DISCESA PIÚ RIPIDA"

$x^{k+1} = x^k + t\, d^k$ DOVE $d^k = -\nabla f(x^k)$

PASSO $\rightarrow$ $t_k = \underset{t \geq 0}{\operatorname{argmin}}\, \varphi(t)$] MINIMO DELLA φ, SCENDO IL PIÚ POSSIBILE LUNGO LA DIREZIONE

$\varphi(t)$ É UNA FUNZIONE A UNA VARIABILE! NOI SAPPIAMO LAVORARE AGILE CON QUESTE FUNZIONI!

FUNZIONE QUADRATICA $\longrightarrow$ $\varphi(t)$ É UNA PARABOLA

FUNZIONE CONVESSA $\longrightarrow$ P.TO STAZIONARIO SICURAMENTE MINIMO ASSOLUTO (CERTEZZA DELLA SUA ESISTENZA SE f COERCIVA)

TEOREMA DI CONVERGENZA (MET. DEL GRADIENTE)

SIA f FUNZIONE COERCIVA, LA SUCCESSIONE DEL GRADIENTE CON RICERCA ESATTA $\{x^k\}$

- TERMINA CON UN NUM. FINITO DI PASSI IN UN P.TO STAZIONARIO, O
- I SUOI PUNTI DI ACCUMULAZIONE SONO P.TI STAZIONARI.

IN REALTÁ CI SERVE POCO IL TEOREMA: APPLICO EURISTICAMENTE I CRITERI DI STOP.

ESEMPIO DI PASSO DEL METODO (1)

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1 x_2 + 3x_2^2 + x_1$$

RICERCA DEL MINIMO

CONSIDERO COME PUNTO INIZIALE $x^K = (1,0)$

1) CALCOLO IL GRADIENTE

$$\nabla f(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2 + 1, -2x_1 + 6x_2) \qquad \nabla f(1,0) = (4-0+1, -2+0) = (5,-2)$$

2) TROVO d^K

$$d^K = -\nabla f(1,0) = (-5,2)$$

3) CALCOLO $\varphi(t)$ RICORDANDO CHE $\varphi(t) \triangleq f(x^K + t d^K)$

$$\varphi(t) = f\big((1,0) + t(-5,2)\big) = f(1-5t, 2t) =$$
$$= 2(1-5t)^2 - 2(2t)(1-5t) + 12t^2 + 1 - 5t =$$
$$= 2(1+25t^2 - 10t) - 4t + 20t^2 + 12t + 1 - 5t =$$
$$= 82t^2 - 29t + 3$$

4) TROVO $\underset{t>0}{\operatorname{argmin}}\, \varphi(t)$ $\qquad$ $\varphi(t)$ É UNA PARABOLA RIVOLTA VERSO L'ALTO CON VERTICE $-\frac{b}{2a} = \frac{29}{164}$

QUESTO É argmin

5) TROVO x^{K+1}

$$x^{K+1} = (1,0) + \frac{29}{164}(-5,2) = \left(1 - \frac{145}{164}, \frac{68}{164}\right) = \left(\frac{19}{164}, \frac{58}{164}\right)$$

ESEMPIO DI PASSO DEL METODO (2)

$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2$

RICERCA DEL MASSIMO

CONSIDERO COME PUNTO INIZIALE $x^K = (1,0)$

1) CALCOLO IL GRADIENTE

$\nabla f(x_1, x_2) = (-2x_1 + x_2 \, , \, x_1 - 2x_2)$ $\qquad \nabla f(1,0) = (-2, 1)$

2) TROVO d^K

$d^K = -\nabla f(1,0) = (1,-2)$

3) CALCOLO $\varphi(t)$ RICORDANDO CHE $\varphi(t) \triangleq f(x^K + t d^K)$

$$\varphi(t) = f((1,0) + t(-2,1)) = f(1-2t, t) =$$
$$= -(1-2t)^2 + t(1-2t) - t^2$$
$$= -1 + 4t - 4t^2 + t - 2t^2 - t^2 =$$
$$= -7t^2 + 5t - 1$$

4) TROVO $\underset{t>0}{\operatorname{argmax}} \, \varphi(t)$ $\qquad \varphi(t)$ È UNA PARABOLA RIVOLTA VERSO IL BASSO CON VERTICE $-\frac{b}{2a} = \frac{5}{14}$

QUESTO È argmax

5) TROVO x^{K+1}

$x^{K+1} = (1,0) + \frac{5}{14}(-2,1) = \left(\frac{4}{14}, \frac{5}{14}\right)$

DOMINI DELLA PNL (O REGIONE AMMISSIBILE)

DEFINIZIONE DI DOMINIO

INIZIAMO A INTRODURRE VINCOLI TRATTANDO UN DOMINIO $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

DOVE f È LA FUNZIONE OBIETTIVO. DEFINIAMO MATEMATICAMENTE D

$$D = \{ x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) \leq 0, \dots, g_m(x) \leq 0, h_1(x) = 0, \dots, h_p(x) = 0 \}$$

DOVE m È IL NUMERO DI DISUGUAGLIANZE, p IL NUMERO DI UGUAGLIANZE.

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad g = (g_1, \dots, g_m)$$

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \qquad h = (h_1, \dots, h_p)$$

NELLA DEFINIZIONE RIENTRANO ANCHE LE REGIONI AMMISSIBILI VISTE NEGLI ARGOMENTI PRECEDENTI.

ES: $\begin{cases} \max \ 3x_1 + 5x_2 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 7 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 = 9 \\ x_1 \leq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \end{cases}$ ← FUNZIONE NON LINEARE !!!

$$\left.\begin{aligned} g_1(x_1, x_2) &= 4x_1 + 6x_2 - 7 \\ g_2(x_1, x_2) &= x_1 \\ g_3(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 - 5 \end{aligned}\right] m = 3$$

$$\left.\begin{aligned} h_1(x_1, x_2) &= 3x_1 - 2x_2 - 8 \\ h_2(x_1, x_2) &= 4x_1 + 2x_2 - 9 \end{aligned}\right] p = 2$$

ES2: $\begin{cases} \min \ x_1^2 - x_2^2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 8 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \end{cases}$ ← FUNZIONE NON LINEARE !!!

$$\left.\begin{aligned} g_1(x_1, x_2) &= 5x_1 + 6x_2 - 8 \\ g_2(x_1, x_2) &= 4x_1 + 3x_2 - 9 \\ g_3(x_1, x_2) &= 3x_1 + 2x_2 - 10 \end{aligned}\right] \begin{aligned} m &= 3 \\ p &= 0 \end{aligned}$$

CONFRONTO CON LE FUNZIONI NON VINCOLATE

FINO ALLA PAGINA PRECEDENTE ABBIAMO DISCUSSO SUL COME OTTIMIZZARE FUNZIONI NON LINEARI PRIVE DI VINCOLI.

DELLE PRECEDENTI DISCUSSIONI RECUPERIAMO:
- LA CLASSIFICAZIONE DELLE FUNZIONI (COERCIVE, CONVESSE, QUADRATICHE)
- LE C.N. E LE C.S. (I "TRE TEOREMI", TARGET E TEST)

C.N. C.S.

SUI TEOREMI OSSERVIAMO CHE:
- NELLA REGIONE INTERNA SONO SEMPRE VALIDI
- LUNGO LA FRONTIERA NO (IN PRESENZA DI VINCOLI NON È DETTO $\nabla f(x) = 0$)

CI SERVONO DEGLI ACCORGIMENTI PER LAVORARE SULLA FRONTIERA.

PROPRIETÀ DEL DOMINIO CHE CI INTERESSANO

INSIEME CHIUSO O APERTO?

$\downarrow$

SE CHIUSO E LIMITATO VALE WEIERSTRASS

$\uparrow$

INSIEME LIMITATO O NO?

NON CONSIDERARE LA FRONTIERA (INSIEME APERTO) COMPLICA LE COSE. FORTUNATAMENTE LAVOREREMO SEMPRE CON DOMINI CHIUSI.

RICORDARSI LA DEF. DI FRONTIERA DA AN I

AL 99% DEI CASI LA REGIONE È LIMITATA. NON CI SERVE SAPERE SE **f È COERCIVA** IN QUESTI CASI (SOLO IN PRESENZA DI REGIONI ILLIMITATE).

> COME VEDO SE UN P.TO È INTERNO O SULLA FRONTIERA?
>
> SOSTITUISCO NEI VINCOLI, E VERIFICO CHE SIA RISPETTATO IL MINORE STRETTO. SE QUALCHE VINCOLO È RISPETTATO CON L'UGUALE SIAMO SULLA FRONTIERA.

INSIEME CONVESSO O NO?

VARIE CONDIZIONI DA CUI ATTINGERE. A NOI INTERESSANO LE SEGUENTI:

1) g_i CONVESSA $\forall i$
2) h_j LINEARE $\forall j$

$\underset{(c.s.)}{\Rightarrow}$ INSIEME CONVESSO

INSIEME REGOLARE O NO?

VARIE CLASSI DI INSIEMI REGOLARI. CI INTERESSANO LE SEGUENTI:

1) POLIEDRI (g, h LINEARI)

2) $\overbrace{g \text{ CONVESSO}, h \text{ LINEARE}}^{\text{INSIEME CONVESSO}}$, $\underbrace{\exists \bar{x} : g(\bar{x}) < 0}_{\text{ESISTE ALMENO UN PUNTO INTERNO}}$ (CONDIZIONE DI SLATER)

3) $\nabla g_i(\bar{x}), \nabla h_j(\bar{x})$ $\forall i$ $\forall j$ ATTIVI IN $\bar{x}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI $\forall \bar{x}$ AMMISSIBILE

VINCOLI SODDISFATTI CON L'UGUALE

(CONDIZIONE DI MANGASARIAN)

STEP DA SEGUIRE:

a) PRENDO UN PUNTO
b) VEDO QUALI SONO I VINCOLI ATTIVI
c) VERIFICO IN QUESTI PUNTI SE I GRADIENTI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

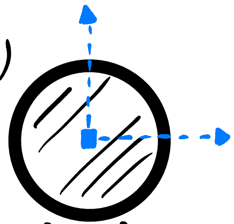
$\downarrow$

TROVARE UNA SOTTOMATRICE $m \times m$ INVERTIBILE ($\det \neq 0$) (RANGO m)

ESEMPI INTRODUTTIVI SULLE PROPRIETÁ DEI DOMINI

CONSIDERIAMO I SEGUENTI DOMINI: COSA POSSIAMO DIRE?

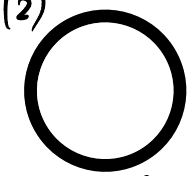
(1)



$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$

ENTRAMBI CHIUSI E LIMITATI

(2)



$x_1^2 + x_2^2 = 1$

(1) $g_1 = x_1^2 + x_2^2 - 1 \quad g_1 \leq 0$

$H_g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow (2-\lambda)(2-\lambda) = 0$

$4 - 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$\Delta = 16 - 4(1)(4) = 0$

$\frac{4}{2} \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = +2$

g CONVESSO $\Downarrow$

g CONVESSO, h NON C'É — DOMINIO CONVESSO

VALE LA CONDIZIONE DI SLATER: P.TO INTERNO (0,0) — DOMINIO REGOLARE PER SLATER

(2) $h_1 = x_1^2 + x_2^2 - 1 \quad h_1 = 0$

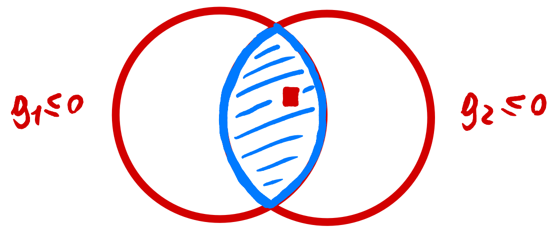
h NON LINEARE — DOMINIO NON CONVESSO

- SICURAMENTE NON É POLIEDRO
- SE NON É CONVESSO NON POSSO APPLICARE SLATER
- MANGASARIAN?
  - a) PRENDO UN PUNTO DELLA CIRCONFERENZA
  - b) UNICO VINCOLO SEMPRE ATTIVO
  - c) $\nabla h(x) = (2x_1, 2x_2)$ SEMPRE LINEARMENTE INDIPENDENTE DA SE STESSO

((0,0) NON É PARTE DELLA CIRCONFERENZA)

— DOMINIO REGOLARE PER MANGASARIAN

ULTERIORE ESEMPIO CON DUE VINCOLI g_1, g_2



NELLA REGIONE IN AZZURRO VALGONO ENTRAMBI I VINCOLI.

- È CONVESSA? GRAFICAMENTE È CHIARO. IN ASSENZA DI GRAFICO CALCOLO LE HESSIANE. ENTRAMBE RISULTERANNO SEMIDEFINITE POSITIVE, QUINDI IL DOMINIO È CONVESSO.
- È REGOLARE?
  1) SICURAMENTE NON ABBIAMO UN POLIEDRO (g_1, g_2 NON LINEARI)
  2) IL DOMINIO È CONVESSO, E SI INDIVIDUA AGILE UN PUNTO INTERNO. DOMINIO REGOLARE! (POSSIAMO FERMARCI QUA)
  3) PRENDIAMO IL P.TO INTERNO: ABBIAMO $g_1 < 0$, $g_2 < 0$

     QUINDI NESSUN VINCOLO ATTIVO $\Longrightarrow$ MANGASARIAN AUTOMATICAMENTE SODDISFATTO

CONDIZIONE DI OTTIMALITÁ PER PROBLEMI VINCOLATI

ABBIAMO DETTO CHE IN PROBLEMI DI PNL VINCOLATI È IMPROPRIO AFFERMARE CHE IN PRESENZA DI MIN/MAX $\bar{x}$ SI HA $\nabla f(\bar{x}) = 0$ (TH. DI FERMAT)

CI SERVE UNA C.N. ALTERNATIVA PER POTER GESTIRE I PUNTI DI MIN/MAX CHE SI TROVANO LUNGO LA FRONTIERA.

SI CONSIDERI A TAL PROPOSITO IL SEGUENTE TEOREMA

TEOREMA (LAGRANGE - KARUSH - KUHN - TUCKER, LKKT)

ENUNCIATO. SIA (P) IL SEGUENTE PROBLEMA

$$(P) = \begin{cases} \min/\max f(x) \\ g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(x) \leq 0 \\ h_1(x) = 0 \\ \vdots \\ h_p(x) = 0 \end{cases}$$

$f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

TUTTE DI CLASSE C^2

$D = \{ x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, \ h(x) = 0 \}$

$\hookrightarrow$ INSIEME REGOLARE

CONDIZIONI NECESSARIE DI OTTIMALITÁ

i) SIA $\bar{x}$ MINIMO LOCALE PER (P). ALLORA $\exists \bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m) \in \mathbb{R}^m_+$
$\exists \bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_p)$, TALI CHE

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0 \\ \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle = 0 \\ h(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

[SISTEMA LKKT]

[$g(x) \leq 0$ NON SERVE POICHÉ $\bar{x}$ AMMISSIBILE]

ii) SIA $\bar{x}$ MASSIMO LOCALE PER (P). ALLORA $\exists \bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m) \in \mathbb{R}^m_-$
$\exists \bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_p)$, TALI CHE

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0 \\ \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle = 0 \\ h(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

[SISTEMA LKKT]

[$g(x) \leq 0$ NON SERVE POICHÉ $\bar{x}$ AMMISSIBILE]

DOVE $\nabla_x L = \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \nabla h_j(\bar{x})$ É IL GRADIENTE, COMPONENTE RISPETTO AD X, DELLA FUNZIONE LAGRANGIANA

$$L(\underset{\mathbb{R}^n}{x}, \underset{\mathbb{R}^m}{\lambda}, \underset{\mathbb{R}^p}{\mu}) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_m g_m(x) + \mu_1 h_1(x) + \dots + \mu_p h_p(x)$$

PARALLELISMO	
$\nabla f = 0$	FERMAT
$\nabla_x L = 0$	LAGRANGIANA, LKKT

SPIEGAZIONE

I MINIMI/MASSIMI LOCALI SONO SOLUZIONI DEL SISTEMA LKKT (C.N.)
LE VARIABILI IN CUI SI RISOLVE IL PROBLEMA SONO $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$: PRENDO TUTTE LE SOLUZIONI POSSIBILI, TRA QUESTE TROVEREMO IL MINIMO/MASSIMO IN $\bar{x}$ (OVVIAMENTE SE ESISTE IL MINIMO/MASSIMO).

- DETTAGLIO: IL SISTEMA NON É DETTO SIA LINEARE.

  POSSIBILE AVERE UN SISTEMA PURAMENTE LINEARE SOLO CON UN PROBLEMA DI PL. PREFERITA COMBO $\underbrace{\text{QUADRATICA + POLIEDRO}}_{\text{quadprog}}$.

- QUANTE EQUAZIONI STIAMO CONSIDERANDO?

  1) PER QUANTO RIGUARDA $h(\bar{x}) = 0$ ABBIAMO p EQUAZIONI.

  2) PER QUANTO RIGUARDA $\langle \lambda, g(\bar{x}) \rangle = 0$

     - I λ SONO TUTTI POSITIVI
     - I $g_k(\bar{x})$ SONO TUTTI ≤ 0

     $\Longrightarrow$ TUTTI GLI ADDENDI SONO NEGATIVI

     SE LA SOMMA É NULLA ALLORA TUTTI GLI ADDENDI SONO NULLI.

     $\Downarrow$

     $$\begin{cases} \bar{\lambda}_1 g_1(\bar{x}) = 0 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_m g_m(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$ ABBIAMO m EQUAZIONI

  3) PER QUANTO RIGUARDA $\underset{\mathbb{R}^n}{\nabla f(\bar{x})} + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \underset{\mathbb{R}^n}{\nabla g_i(\bar{x})} + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \underset{\mathbb{R}^n}{\nabla h_j(\bar{x})} = 0$

     ABBIAMO n EQUAZIONI

ABBIAMO, IN CONCLUSIONE, UN SISTEMA DI $m + n + p$ EQUAZIONI IN $m + n + p$ INCOGNITE (UN SISTEMONE, CIT.).

- IL SISTEMA È LETTERALMENTE UN PANIERE: IN BASE AL SEGNO DEI MOLTIPLICATORI λ PRENDO I MINIMI O I MASSIMI. PRENDIAMO COME ESEMPIO UN PROBLEMA CON $n=2$, 2 DISUGUAGLIANZE E 1 UGUAGLIANZA.

PROPOSTE DI SOLUZIONI $(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1)$

$(2, 0, \underbrace{3, 1}_{\text{MINIMO LOCALE?}}, -5)$ $\quad$ $(3, 1, \underbrace{5, -2}_{\text{SEGNI DISCORDI, SCARTO}}, 4)$ $\quad$ $(4, 0, \underbrace{-3, -2}_{\text{MASSIMO LOCALE?}}, 0)$

INCUBO: E SE AVESSI UNA SELLA? SU MIN E MAX POTREBBERO ESSERCI DUBBI (RICORDARSI CHE È UNA C.N., NON UNA C.N.S.)

SUPPONIAMO CHE LA REGIONE AMMISSIBILE SIA LIMITATA: A QUEL PUNTO SIAMO A POSTO, WEIERSTRASS CI DÀ CERTEZZE SULL'ESISTENZA DI MAX/MIN GLOBALI. LE SOLUZIONI INDICATE SONO EFFETTIVAMENTE MIN/MAX LOCALI. (SENZA RIMANIAMO NEL DUBBIO)

$\downarrow$ ADDIRITTURA GLOBALI

TEOREMA COMPLEMENTARE A LKKT (C.S.)

SIA f CONVESSA E D CONVESSO, DOVE $D = \{x : g(x) \leq 0,\ h(x) = 0\}$ È REGOLARE, INOLTRE $f, g, h \in C^2$. SIA $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA LKKT.
ALLORA, SE $\bar{\lambda} \geq 0$ POSSIAMO DIRE CHE $\bar{x}$ È MINIMO GLOBALE.

$\uparrow$ MOLTIPLICATORI TUTTI POSITIVI

SIA f CONCAVA E D CONVESSO (IBIDEM SULLE CARATTERISTICHE DI D), SIA $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA LKKT.
ALLORA, SE $\lambda \leq 0$ POSSIAMO DIRE CHE $\bar{x}$ È MASSIMO GLOBALE.

$\uparrow$ MOLTIPLICATORI TUTTI NEGATIVI

> NELLO SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI SI UTILIZZI LO SCHEMA IN FONDO AL CAPITOLO DELLA DISPENSA

PRIMO ESEMPIO DI STUDIO

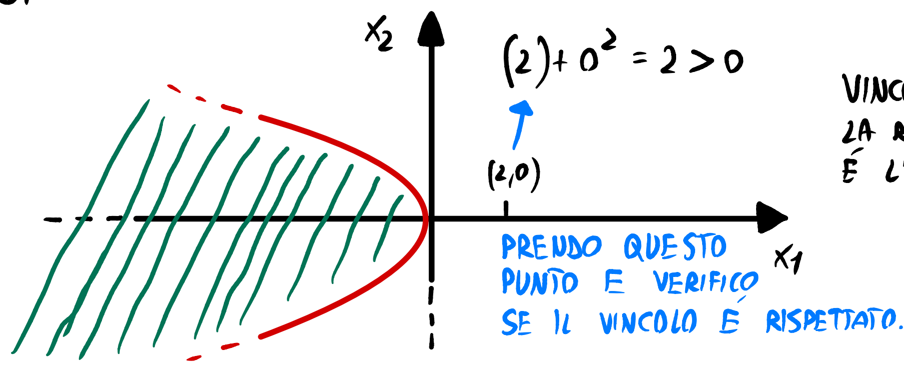
CONSIDERIAMO IL SEGUENTE PROBLEMA

$$\begin{cases} f = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2x_2 \\ g_1 = x_1 + x_2^2 \\ g_2 = x_1^2 - 4 \end{cases}$$

IL DOMINIO D É REGOLARE? RISOLVIAMO GRAFICAMENTE

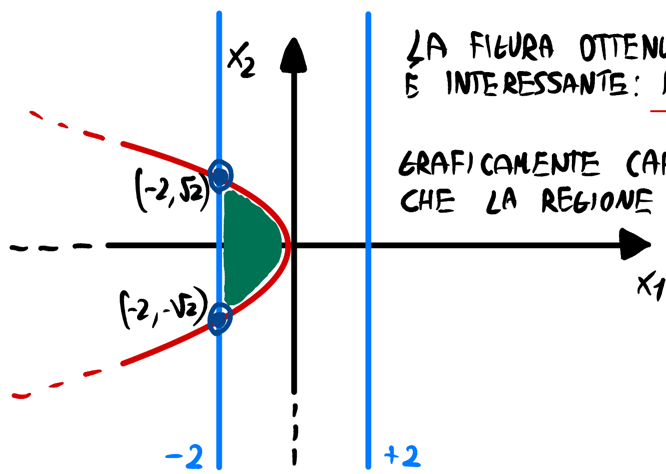
DISEGNO I VINCOLI DI DISUGUAGLIANZA K-ESIMO PONENDO $g_k(x) = 0$ (SI DISEGNA LA FRONTIERA), SUCCESSIVAMENTE INDIVIDUO IL SEMIPIANO DA CONSIDERARE VERIFICANDO SE CON ALCUNI PUNTI IL VINCOLO É RISPETTATO.

g_1 É UNA PARABOLA "ROVESCIATA": $x_1 + x_2^2 = 0 \longrightarrow x_1 = -x_2^2$



VINCOLO NON RISPETTATO, LA REGIONE DA CONSIDERARE É L'ALTRO SEMIPIANO.

g_2 : $x^2 - 4 \leq 0 \longrightarrow x^2 \leq 4 \longrightarrow -2 \leq x \leq 2$



LA FIGURA OTTENUTA É INTERESSANTE: REGIONE LIMITATA! $\exists$ MIN. ASSOLUTO $\exists$ MAX. ASSOLUTO

GRAFICAMENTE CAPIAMO ANCHE CHE LA REGIONE É CONVESSA.

PROVIAMO A RIBADIRE QUANTO VISTO SENZA GRAFICI

1) POLIEDRI (g, h LINEARI)

g, h NON SONO LINEARI $\Longrightarrow$ NON HO UN POLIEDRO

INSIEME CONVESSO

2) g CONVESSO, h LINEARE, $\exists \bar{x}: g(\bar{x})<0$ (CONDIZIONE DI SLATER)

ESISTE ALMENO UN PUNTO INTERNO

MEGLIO SAPER DISEGNARE

h NON PRESENTE $\longrightarrow$ NON È UN PROBLEMA!

PARTE INTERNA DI UNA PARABOLA PALESEMENTE CONVESSA PRESENTE P.TO INTERNO: SLATER SODDISFATTO!

3) $\nabla g_i(\bar{x}), \nabla h_j(\bar{x})$ $\forall i$ $\forall j$ ATTIVI IN $\bar{x}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI $\forall \bar{x}$ AMMISSIBILE

VINCOLI SODDISFATTI CON L'UGUALE

(CONDIZIONE DI MANGASARIAN)

IL DOMINIO È SENZ'ALTRO REGOLARE, MA SUPPONIAMO DI NON ACCORGERCI CHE LA FIGURA È CONVESSA, ANDANDO DIRETTI A MANGASARIAN

LA CONDIZIONE RICHIEDE DI CONSIDERARE OGNI P.TO AMMISSIBILE $\bar{x}$, DOBBIAMO ASSICURARCI CHE NON CI SIANO PUNTI PER CUI I GRADIENTI SONO LINEARMENTE DIPENDENTI

- I P.TI INTERNI NON CI INTERESSANO: NON CI SONO P.TI ATTIVI
- ANDIAMO SULLA FRONTIERA:

UN VINCOLO DA SOLO È LIN. INDIP. SOLO CON P.TO $\neq (0,0)$

- LUNGO LA FRONTIERA PARABOLICA HO $g_1 = 0$. CALCOLO IL GRADIENTE: $\nabla g_1 = (1, 2x_2) \neq 0$ SEMPRE
- LUNGO LA "BASE" HO $\nabla g_2 = (2x_1, 0)$ HO $(0,0)$ CON $x_1 = 0$ MA IN QUEL P.TO g_2 NON È VINCOLO ATTIVO.
- RIMANGONO I PUNTI DOVE g_1 E g_2 SONO ENTRAMBI ATTIVI. RISOLVO IL SISTEMA

$$\begin{cases} g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2^2 = 0 \\ x_1^2 - 4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} P_1 = (-2, \sqrt{2}) \\ P_2 = (-2, \sqrt{2}) \end{matrix}$$

SOSTITUISCO P_1 IN $\nabla g(\bar{x})$ E VERIFICO LINEARITÀ INDIPENDENTE

$$\nabla g(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det \neq 0 \qquad \text{OK!}$$

LE JACOBIANE

SOSTITUISCO P_2 IN $\nabla g(\bar{x})$ E VERIFICO LINEARITÀ INDIPENDENTE

$$\nabla g(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{2} \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det \neq 0 \qquad \text{OK!}$$

SE IL DOMINIO D È REGOLARE ALLORA SIAMO CERTI CHE LKKT CONTERRÀ QUANTO STIAMO CERCANDO

SCRIVIAMO IL SISTEMA ∠KKT

$$\begin{cases} (2\bar{x}_1+2, 2\bar{x}_2+2)+\bar{\lambda}_1(1, 2\bar{x}_2)+\bar{\lambda}_2(2\bar{x}_1, 0)=0 \\ \bar{\lambda}_1(x_1+x_2^2)=0 \\ \bar{\lambda}_2(x_1^2-4)=0 \end{cases}$$

CALCOLO DEI GRADIENTI

$\nabla f = (2x_1+2, 2x_2+2)$

$\nabla g_1 = (1, 2x_2)$

$\nabla g_2 = (2x_1, 0)$

CIOÉ

$$\begin{cases} 2x_1+2+\lambda_1+2\lambda_2 x_1=0 \\ 2x_2+2+\lambda_1 2x_2=0 \\ \lambda_1(x_1+x_2^2)=0 \\ \lambda_2(x_1^2-4)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x})+\sum_{i=1}^{m}\bar{\lambda}_i\nabla g_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{p}\bar{\mu}_j\nabla h_j(\bar{x})=0 \\ <\bar{\lambda}, g(\bar{x})>=0 \\ h(\bar{x})=0 \end{cases}$$

COSA DOBBIAMO FARE NELLO SCRITTO?

A SEGUITO DI CONTROVERSIE SULLE PROVE PASSATE IL PROF HA DECISO DI INTRODURRE UNA SEMPLIFICAZIONE: FORNIRE PARZIALMENTE LE SOLUZIONI. SI VEDA IL SEGUENTE ESEMPIO (DATI FORNITI IN ROSSO)

X	λ
$(-1,-1)$	$(0,0)$
$(-2,-1)$	$(0,-\frac{1}{2})$
$(-2,-\sqrt{2})$	$(-,-)$
$(-2,\sqrt{2})$	$(-,-)$

$$\begin{cases} 2x_1+2=0 \\ 2x_2+2=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1+2-x_1=0 \\ 2x_2+2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4+2+\lambda_1-4\lambda_2=0 \\ -2\sqrt{2}+2+\lambda_1(-2\sqrt{2})=0 \\ \lambda_1(0)=0 \\ \lambda_2(0)=0 \end{cases} \quad X$$

$$\begin{cases} \lambda_1-4\lambda_2=2 \\ -2\sqrt{2}\lambda_1=2\sqrt{2}-2 \end{cases}$$

$$\lambda_1=\frac{2\sqrt{2}-2}{-2\sqrt{2}}$$

$$4\lambda_2=\lambda_1-2 \Rightarrow \lambda_2=\frac{\lambda_1-2}{4}$$

$$\begin{cases} 2x_1+2+\lambda_1+2\lambda_2 x_1=0 \\ 2x_2+2+\lambda_1(2x_2)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4+2+\lambda_1+2\lambda_2(-2)=0 \\ 2\sqrt{2}+2+\lambda_1(2\sqrt{2})=0 \end{cases}$$

$$\lambda_1=-\frac{2+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \qquad \lambda_2=\frac{\lambda_1-2}{4}$$

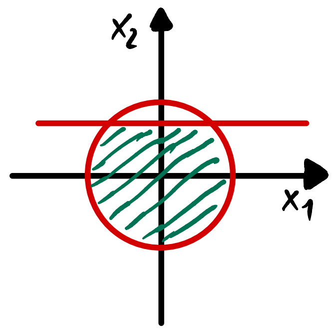
SECONDO ESEMPIO DI STUDIO

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE PROBLEMA

$$\begin{cases} f = x_2 - x_1^2 \\ g_1 = x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0 \\ g_2 = x_2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

IL DOMINIO D É REGOLARE?

GRAFICAMENTE ABBIAMO UNA CIRCONFERENZA "TAGLIATA"



1) NON É UN POLIEDRO

2) h NON PRESENTE
g SICURAMENTE CONVESSO
$\exists$ UN P.TO INTERNO (ESEMPIO (0,0))
$\Rightarrow$ D REGOLARE

3) E SE L'ESERCIZIO RICHIEDESSE MANGASARIAN?

$$\nabla g_1 = (2x_1, 2x_2) \qquad \nabla g_2 = (0, 1)$$

JACOBIANA $\longrightarrow$ $\nabla g = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D É SICURAMENTE LIMITATO

$\exists$ MIN ASSOLUTO
$\exists$ MAX ASSOLUTO

- P.TI INTERNI: NESSUN VINCOLO ATTIVO
- LUNGO LA FRONTIERA, UN SOLO VINCOLO ATTIVO:

VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI DA SOLI

$\nabla g_1 = (0,0)$ CON P.TO $(0,0)$
NESSUN PROBLEMA, g_1 NON ATTIVO

$\nabla g_2 \neq (0,0)$ SEMPRE

- LUNGO LA FRONTIERA, VINCOLI ENTRAMBI ATTIVI

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \\ x_2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} P_1 &= (\sqrt{3}, 1) \\ P_2 &= (-\sqrt{3}, 1) \end{aligned}$$

SOSTITUIAMO P_1 E P_2 IN $\nabla g(\bar{x})$

VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI INSIEME

$$\nabla \bar{g}(P_1) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det \neq 0$$

$$\nabla \bar{g}(P_2) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det \neq 0$$

SE IL DOMINIO D É REGOLARE ALLORA SIAMO CERTI CHE LKKT CONTERRÁ QUANTO STIAMO CERCANDO.

SCRIVIAMO IL SISTEMA LKKT

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0 \\ \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle = 0 \\ h(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-2\bar{x}_1, 1) + \bar{\lambda}_1 (2\bar{x}_1, 2x_2) + \bar{\lambda}_2 (0,1) = 0 \\ \bar{\lambda}_1 (x_1^2 + x_2^2 - 4) = 0 \\ \bar{\lambda}_2 (x_2 - 1) = 0 \end{cases}$$

CALCOLO DEI GRADIENTI

$\nabla f = (-2x_1, 1)$

$\nabla g_1 = (2x_1, 2x_2)$

$\nabla g_2 = (0, 1)$

CIOÉ

$$\begin{cases} -2\bar{x}_1 + \bar{\lambda}_1 2\bar{x}_1 = 0 \\ 1 + \bar{\lambda}_1 2\bar{x}_2 + \bar{\lambda}_2 = 0 \\ \bar{\lambda}_1 (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 4) = 0 \\ \bar{\lambda}_2 (\bar{x}_2 - 1) = 0 \end{cases}$$

COMPILIAMO LA SEGUENTE TABELLA

f.o.	x	λ	mL	mG	ML	MG	S	
$-\frac{17}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$(1,0)$	SÍ	SÍ	NO	NO	NO	(1)
$-\frac{17}{4}$	$\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$(1,0)$	SÍ	SÍ	NO	NO	NO	(1)
-2	$(0, -2)$	$(1/4, 0)$	(*)	NO	NO	NO	(*)	(3)
-2	$(\sqrt{3}, 1)$	$(1, -3)$	NO	NO	NO	NO	SÍ	(2)
-2	$(-\sqrt{3}, 1)$	$(1, -3)$	NO	NO	NO	NO	SÍ	(2)
1	$(0, 1)$	$(0, -1)$	NO	NO	SÍ	SÍ	NO	(1)

SOSTITUENDO $\bar{x}$ NEL SISTEMA LKKT OTTENIAMO

1) IL DOMINIO É CHIUSO E LIMITATO $\Longrightarrow$ $\exists$ MIN ASSOLUTO, $\exists$ MAX ASSOLUTO

DAI VALORI DI F.O. DEDUCO CHE $(0,1)$ É P.TO DI MAX GLOBALE !!!

" " " " " " $\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ E $\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ SONO P.TI DI MINIMO GLOBALE !!!

SE SONO GLOBALI SONO ANCHE LOCALI.

2) I MOLTIPLICATORI CON SEGNI DISCORDI SEGNALANO P.TI DI SELLA

3) SICURAMENTE $(0,-2)$ NON É P.TO DI MIN O MAX GLOBALE. SICURAMENTE NON É MAX LOCALE VISTO IL SEGNO DEI MOLTIPLICATORI. CI RIMANGONO I (*)

MI INTERESSA SAPERE SE f É COERCIVA? NO, DOMINIO D LIMITATO.

f É CONVESSA? CALCOLIAMO LA HESSIANA, RICORDANDO CHE $\nabla f = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Hf = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ SEMIDEFINITA NEGATIVA $\Longrightarrow$ f CONCAVA

g_1 É CONVESSA? CIRCONFERENZA, SÍ!

g_2 É CONVESSA? RETTA, SIA CONVESSA CHE CONCAVA.
HESSIANA SEMIDEFINITA POSITIVA, MA ANCHE
SEMIDEFINITA NEGATIVA

METODO DELLE RESTRIZIONI (DISTINZIONE TRA SELLE E MAX/MIN)

OSSERVAZIONE INTRODUTTIVA

SE $\bar{x}$ É MINIMO LOCALE DI f SU $\mathbb{R}^n \supset D = \{g(x) \leq 0,\ h(x) = 0\}$

ALLORA $\bar{t}$ É MINIMO LOCALE DI φ SULLA RESTRIZIONE

ESERCIZIO PRECEDENTE

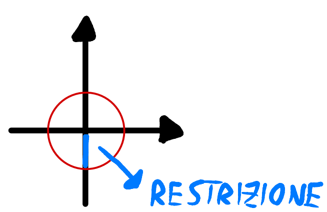
RIPRENDIAMO L'ULTIMO ESERCIZIO NELLA PARTE LASCIATA IN SOSPESO

$f = x_2 - x_1^2$		-2	$(0, -2)$	$(1/4, 0)$	$(*)$	NO	NO	NO	$(*)$	(3)

L'IDEA É DI APPLICARE DELLE RESTRIZIONI ALLA FUNZIONE

1) SCELGO LA RESTRIZIONE

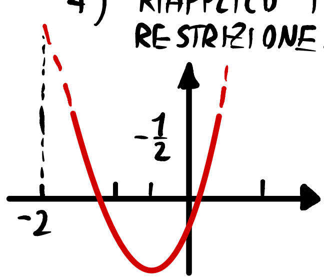
$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \end{cases} \qquad t \in [-2, 0]$$



2) TROVO $\bar{t}$ $\Longrightarrow$ $\bar{t} = -2$ (PONGO $\bar{t}$ IN MODO DA AVERE $(0,2)$)

3) CALCOLO $\varphi(\bar{t})$ $\Longrightarrow$ $\varphi(\bar{t}) = t - 0^2 = t$ $\longleftarrow$ MINIMO -2

4) RIAPPLICO I PUNTI PRECEDENTI CON UNA NUOVA RESTRIZIONE. PRENDIAMO $x_1^2 + x_2^2 = 4$
$\longrightarrow x_1^2 = 4 - x_2^2$



SOSTITUISCO IN $f = x_2 - (4 - x_2^2) = x_2^2 + x_2 - 4 = t^2 + t - 4$

MA IN QUESTO CASO CON $\bar{t} = -2$ ABBIAMO IL MASSIMO!!! $\Longrightarrow$ SELLA

METODO DI FRANK-WOLFE (PER MINIMO GLOBALE SU POLIEDRI LIMITATI)

GLI ALGORITMI DI RISOLUZIONE NELLA PNL SI BASANO SU QUANTO GIÀ DETTO NELLA PNL NON VINCOLATA: ABBIAMO UNA SUCCESSIONE ITERATIVA

$$x^{k+1} = x^k + t_k d^k$$

a) SCELTA DI DIREZIONE E PASSO UN CERTO NUM. DI VOLTE

b) TEOREMA DI CONVERGENZA.

TEOREMA IDEALE:

LA SUCCESSIONE $\{x^k\}$ (CON t_k E d^k SCELTI) CONVERGE IN UN NUMERO FINITO DI PASSI AL MINIMO GLOBALE.

POSSIBILE? → PUNTI DI ACCUMULAZIONE

"AREA" IN CUI SI ACCUMULANO INFINITI PUNTI DI UNA SUCCESSIONE.

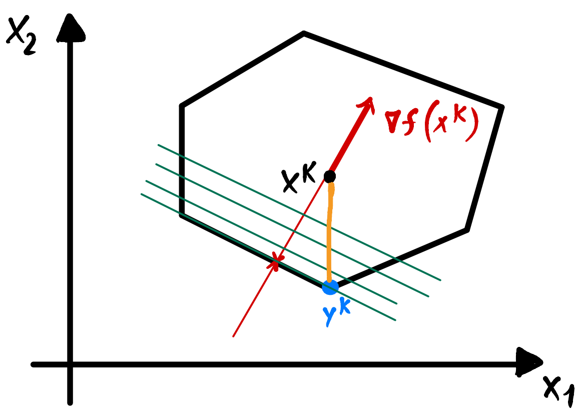
POSSIBILE? → "AL LIMITE"

$$\lim_{k \to +\infty} x^k = x^*$$

POSSIBILE? → METODO ITERATIVO PER SOLUZIONI SISTEMA LKKT (PROBLEMI DIFFICILI, NON QUELLI VISTI DA NOI)

RICORDARE I CRITERI DI STOP

L'ALGORITMO FRANK-WOLF SI UTILIZZA PER TROVARE IL MINIMO GLOBALE DI FUNZIONI NON LINEARI AVENTI COME DOMINIO UN POLIEDRO LIMITATO.



1) CONSIDERIAMO UN PUNTO DI PARTENZA x^k

2) PRENDIAMO IL GRADIENTE $\nabla f(x^k)$ E MUOVIAMOCI IN DIREZIONE OPPOSTA (METODO DI MASSIMA DISCESA)

PROBLEMA: NELLA PNL VINCOLATA POTREI USCIRE DAL POLIEDRO

FACCIAMO QUINDI "DIVERSAMENTE": INTRODUCIAMO IL "PROBLEMA LINEARIZZATO DI x^k"

$$PL(x^k) = \begin{cases} \min \nabla f(x^k) x \\ Ax \leq b \end{cases}$$ ← MINIMO, ANDIAMO COMUNQUE IN DIR. OPPOSTA

LA SOLUZIONE OTTIMA DEL PROBLEMA, CHE CHIAMIAMO y^k, È UN VERTICE DEL POLIEDRO (SI VEDA FIGURA, LA COSA È IMMEDIATA SE SI TRACCIANO LE LINEE DI ISOCOSTO).

CONSIDERO IL SEGMENTO $[x^k, y^k]$ CHE È INTERNO AL POLIEDRO

NOI CI MUOVIAMO LUNGO QUEL SEGMENTO, E NON È DETTO CHE CI FERMEREMO AL VERTICE y^K.

SEGUE $\boxed{t_K \in \underset{t \in [0,1]}{\mathrm{argmin}}\ \underbrace{f(x^K + t(y^K - x^K))}_{\varphi(t)}}$ $\varphi(t)$ RESTRIZIONE

DA UNA PARTE CI AIUTA MOLTISSIMO IL SIMPLESSO, DALL'ALTRA PARTE LA DECRESCITA È MINORE, RISPETTO ALL'ALGORITMO NON VINCOLATO.

VARIANTE: PROBLEMA DI MASSIMO

NEL CASO VOLESSI RISOLVERE UN PROBLEMA DI MASSIMO, PONIAMO IL PASSO COME SEGUE

$\boxed{t_K \in \underset{t \in [0,1]}{\mathrm{argmax}}\ \underbrace{f(x^K + t(y^K - x^K))}_{\varphi(t)}}$ argmax E NON argmin!

TEOREMA DI CONVERGENZA

LA SUCCESSIONE $\{x^K\}$ COSTRUITA DALL'ALGORITMO DI FRANK-WOLFE "CONVERGE" AD UN P.TO STAZIONARIO.

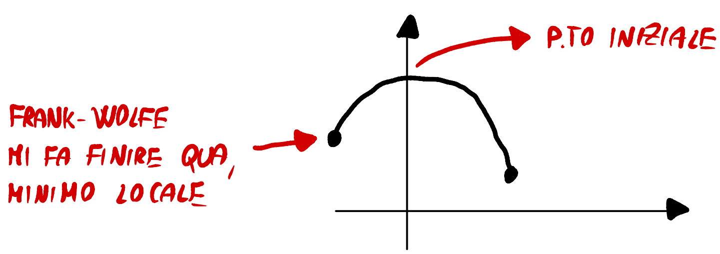
$\downarrow$ $\exists \lim_{k \to +\infty} x^K = x^*$

$\downarrow$ (SOLUZIONE LKKT)

MEMO: METODO DI FRANK-WOLFE È METODO DI DISCESA

COSA SUCCEDE CON f CONVESSA? CONVERGENZA A MINIMO GLOBALE (NIENTE MINIMI LOCALI, NIENTE SELLE $\rightarrow$ CON D (CHIUSO E LIMITATO) SICURAMENTE.

E CON f CONCAVA? IL METODO DI DISCESA PUÒ FARMI CONVERGERE A MINIMI LOCALI



E SE CERCASSI IL MASSIMO? FRANK-WOLFE AIUTA CON f CONCAVO.

COME TROVO IL P.TO INIZIALE? IN PRIMIS DEVE ESSERE AMMISSIBILE ...

DUALE AUSILIARIO!

CRITERI DI STOP

1) $y^k = x^k$? $\longrightarrow$ x^k P.TO STAZIONARIO

2) $t^k = 0$? $\longrightarrow$ x^k P.TO STAZIONARIO

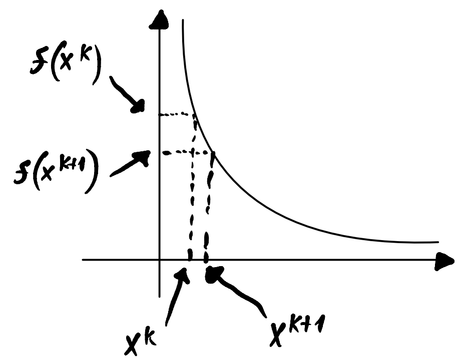
E QUELLI GENERALI...

- NUMERO DI PASSI
- TEMPO
- DISTANZE

$\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$

$|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon$

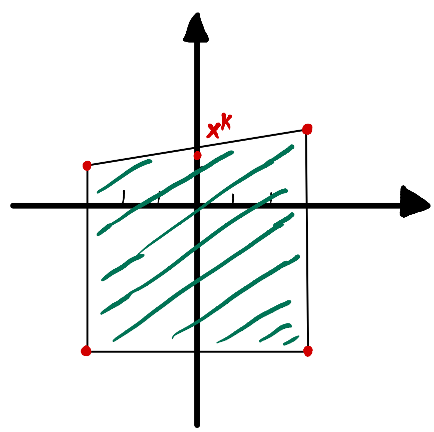
NON HO UNA DISTANZA MIGLIORE



ESEMPIO 1

SI CONSIDERI IL SEGUENTE PROBLEMA

$$\begin{cases} f = 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 6x_1 + 5x_2 \\ V = \{(-3,-4), (-3,1), (3,-4), (3,2)\} \\ \text{MAX} \\ x^k = (0, \frac{3}{2}) \end{cases}$$



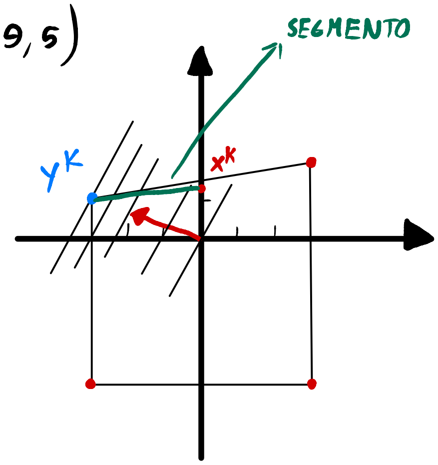
1) CALCOLIAMO IL GRADIENTE NEL P.TO $(0, \frac{3}{2})$

$\nabla f(x) = (4x_1 - 2x_2 - 6, -2x_1 + 5)$ $\qquad \nabla f(0, \frac{3}{2}) = (-9, 5)$

2) SCRIVIAMO IL PROBLEMA LINEARIZZATO

$$PL(x^k) = \begin{cases} \max & -9x_1 + 5x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

TROVIAMO COSÍ $y^k = (-3,1)$ E IL SEGMENTO $[y^k, x^k]$



3) RESTRINGIAMO LA FUNZIONE AL SEGMENTO

$$\varphi(t) = f\left((0, \tfrac{3}{2}) + t\left((-3,1) - (0, \tfrac{3}{2})\right)\right)$$
$$= f\left((0,\tfrac{3}{2}) + (-3t, -\tfrac{t}{2})\right) = f\left(-3t, \tfrac{3}{2} - \tfrac{t}{2}\right)$$
$$= 2(-3t)^2 - 2(-3t)\left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{t}{2}\right) - 6(-3t) + 5\left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{t}{2}\right) = 15t^2 + \tfrac{49}{2}t$$

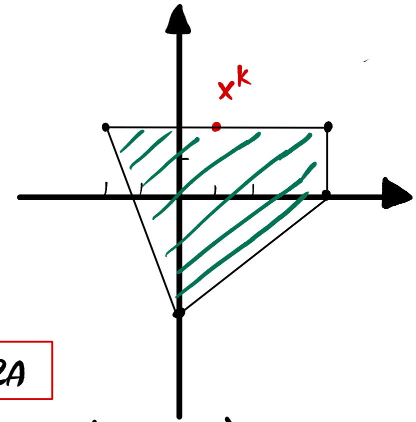
POICHÉ IL MAX NON É IL VERTICE OTTENIAMO $t_k = 1$ (P.TO DI MASSIMO IN $[0,1]$)

$$\Longrightarrow x^{k+1} = \left(0, +\tfrac{3}{2}\right) + t\left((-3,1) - (0+\tfrac{3}{2})\right) = (-3, 1)$$

ESEMPIO 2

SI CONSIDERI IL SEGUENTE PROBLEMA

$$\begin{cases} f = -2x_1^2 - 6x_1x_2 - 10x_1 - 3x_2 \\ V = \{(-2,2),(4,2),(4,0),(0,-3)\} \\ \text{MIN} \\ x^K = (1,2) \end{cases}$$



$\boxed{\text{RICORDARSI CHE } Hf = 2A}$

FUNZIONE CONVESSA?

CALCOLIAMO LA HESSIANA $Hf = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

$(-4-\lambda)(-\lambda) - 36 = 0$

$\lambda^2 + 4\lambda - 36 = 0 \longrightarrow \lambda = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+4\cdot 4}}{2}$ NÉ CONCAVA NÉ CONVESSA

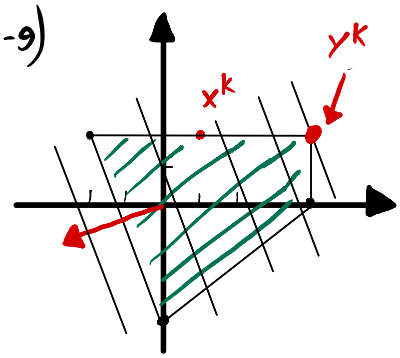
1) CALCOLIAMO IL GRADIENTE NEL P.TO $(1,2)$

$\nabla f(x) = (-4x_1 - 6x_2 - 10, -6x_1 - 3) \quad \nabla f(1,2) = (-26,-9)$

2) SCRIVIAMO IL PROBLEMA LINEARIZZATO

$PL(x^k) = \begin{cases} \min\ -26x_1 - 9x_2 \\ x \in P \end{cases}$

TROVIAMO COSÌ $y^k = (4,2)$ E IL SEGMENTO $[y^k, x^k]$



3) RESTRINGIAMO LA FUNZIONE AL SEGMENTO

$\varphi(t) = f((1,2) + t((4,2)-(1,2)))$

$= f(1+3t, 2) = -2(1+3t)^2 - 6(1+3t)(2) - 10(1+3t) - 3\cdot 2 =$

$= -2(1+9t^2-6t) - 12(1+3t) - 10(1+3t) - 6 =$

$= -2(1+9t^2-6t) - 22(1+3t) - 6 =$

$= -18t^2 - 78t + K \rightarrow$ LA COSTANTE NON CI INTERESSA

IL MINIMO DELLA FUNZIONE TROVATA STA IN $t_K = 1$

$\Longrightarrow x^{K+1} = (1,2) + t((4,2)-(1,2)) = (4,2)$

METODO DEL GRADIENTE PROIETTATO

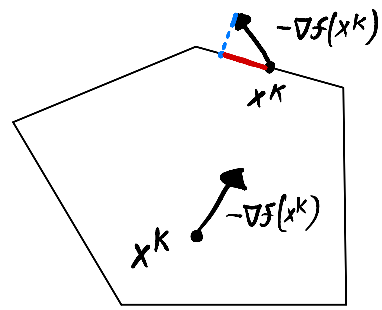
SPIEGAZIONE

CONSIDERIAMO IL PROBLEMA DI MIN $\begin{cases} \min f(x) \\ Ax \leq b \end{cases}$

CONSIDERIAMO x^K E SEGUIAMO LA DIREZIONE $-\nabla f(x^k)$.

- SE x^k É P.TO INTERNO AL POLIEDRO NON CI SONO PROBLEMI
- SE x^k É SULLA FRONTIERA SONO DOLORI: LA DIREZIONE $-\nabla f(x^k)$ POTREBBE PORTARMI FUORI DAL POLIEDRO.

RISOLVIAMO ATTRAVERSO LA PROIEZIONE ORTOGONALE DEL GRADIENTE. MI CHIEDO IN PRIMIS SE É UNA DIREZIONE DI DISCESA.



RICORDARSI IL CALCOLO, GIÁ VISTO

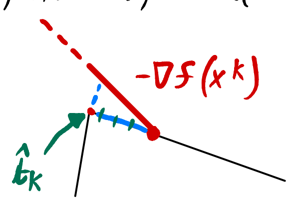
$$f(x^K + t d^K) \triangleq \varphi(t)$$

$$\varphi'(t) = \nabla f(x^K + t d^K) d^K$$

$$\varphi'(0) = \nabla f(x^K) d^K \longrightarrow \boxed{\begin{array}{ll} > 0 & \text{DIREZIONE DI SALITA} \\ = 0 & \text{NON ABBIAMO INFORMAZIONI} \\ < 0 & \text{DIREZIONE DI DISCESA} \end{array}}$$

CON $d^K = -\nabla f(x^K)$ PER ESSERE CERTI DI AVERE UNA DIREZIONE DI DISCESA.

MA, ADESSO, DI QUANTO POSSO MUOVERMI LUNGO LA PROIEZIONE?



$$t_K \in \underset{t \in [0, \hat{t}_K]}{\operatorname{argmin}} \overbrace{f(x^K + t d^K)}^{\varphi(t)}$$

$\hat{t}_K$ MASSIMO SPOSTAMENTO POSSIBILE

1) CONSIDERO UN PUNTO INIZIALE x^0, CIOÉ HO INIZIALMENTE $K=0$

2) INDIVIDUO I VINCOLI ATTIVI $(i : A_i x^K = b_i)$ E COSTRUISCO CON ESSI LA MATRICE M ($M_i = A_i$, $\forall i$ VINCOLO ATTIVO)

3) COSTRUISCO LA MATRICE DI PROIEZIONE $H = \begin{cases} I & \text{NON HO V.A.} \\ I - M^T (MM^T)^{-1} M & \text{HO V.A.} \end{cases}$ E LA DIREZIONE $d^K = -H \nabla f(x^K)$

4) SE $d^K \neq 0$ RISOLVO IL PROBLEMA $\begin{cases} \max t \\ A(x^K + t d^K) \leq b \end{cases}$ OTTENENDO $\hat{t}_K$

TROVO $t_K \in \underset{t \in [0, \hat{t}_K]}{\operatorname{argmin}} f(x^K + t d^K)$ E CALCOLO $x^{K+1} = x^K + t_K d^K$

PONGO $K = K+1$ E TORNO AL PASSO (2)

5) SE $d^K = 0$ ALLORA VA GESTITO IL CASO PARTICOLARE.

CALCOLO $\lambda = -(MM^T)^{-1} M \nabla f(x^K)$

SE

$\lambda \geq 0$ ABBIAMO FINITO (x^K SODDISFA LKKT)

ALTRIMENTI

$\lambda_J = \min\{\lambda_i : i \text{ VINCOLO ATTIVO}\}$

TOLGO DALLA MATRICE M LA RIGA A_J

TORNO AL PASSO (3)

VARIANTE: PROBLEMA DI MASSIMO

NEL CASO VOLESSI RISOLVERE UN PROBLEMA DI MASSIMO, PONIAMO

$$d^K = H \nabla f(x^K)$$

TOLTO IL SEGNO NEGATIVO

$$t_K \in \underset{t \in [0,1]}{\arg\max} \underbrace{f(x^K + t d^K)}_{\varphi(t)}$$

argmax E NON argmin!

RIMANE UGUALE $\hat{t}_K \longrightarrow \begin{cases} \max t \\ A(x^K + t d^K) \leq b \end{cases}$

TEOREMA DI CONVERGENZA

LA SUCCESSIONE $\{x^K\}$ COSTRUITA DALL'ALGORITMO DEL GRADIENTE PROIETTATO "CONVERGE" AD UN P.TO STAZIONARIO.

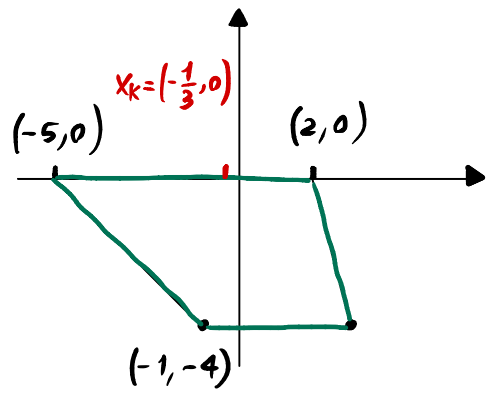
$\exists \lim_{K \to +\infty} x^K = x^*$ (SOLUZIONE LKKT)

COSA SUCCEDE CON f CONVESSA? CONVERGENZA A MINIMO GLOBALE (NIENTE MINIMI LOCALI, NIENTE SELLE $\longrightarrow$ CON D CHIUSO E LIMITATO) SICURAMENTE.

CON f QUADRATICA E CONVESSA $x^K \to x^*$ IN UN NUM. FINITO DI PASSI.

ESEMPIO 1

$$\begin{cases} f = 2x_1^2+8x_1x_2-4x_2^2+5x_1-6x_2 \\ V=\{(3,-4),\ (-5,0),\ (-1,-4),\ (2,0)\} \\ MIN \\ x^K=\left(-\frac{1}{3},0\right)\end{cases}$$



1) INDIVIDUO I VINCOLI ATTIVI IN x^K E COSTRUISCO LA MATRICE M

IN QUESTO CASO L'UNICO VINCOLO ATTIVO È $x_2 \le 0 \implies M = (0,1)$

2) CALCOLIAMO LA MATRICE DI PROIEZIONE H

$$H = I - M^T(MM^T)^{-1}M = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ \ 1) = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad M^T = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad (0\ \ 1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1$$

3) CALCOLIAMO IL VETTORE DIREZIONE $d^K = -H\nabla f(x^K)$

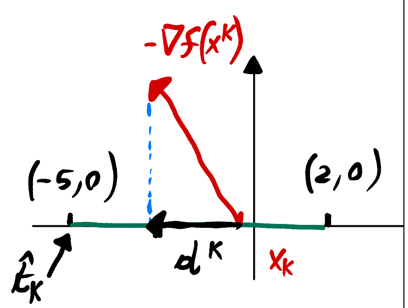
$$\nabla f(x) = (4x_1+8x_2+5,\ 8x_1-8x_2-6)$$

$$\nabla f(x^K) = \nabla f\left(-\frac{1}{3},0\right) = \left(-\frac{4}{3}+5,\ -\frac{8}{3}-6\right) = \left(\frac{11}{3},\ -\frac{26}{3}\right)$$

$$d^K = -\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\left(\frac{11}{3},\ -\frac{26}{3}\right) = \begin{pmatrix}-\frac{11}{3}\\0\end{pmatrix}$$

4) CALCOLIAMO $\hat{t}_K$

$$-\frac{1}{3}+\hat{t}_K\left(-\frac{11}{3}\right) = -5 \qquad 1+11\hat{t}_K = 15 \qquad \hat{t}_K = \frac{14}{11}$$



5) CALCOLIAMO IL PASSO t_K CON RESTRIZIONE AL SEGMENTO $[0,\hat{t}_K]$

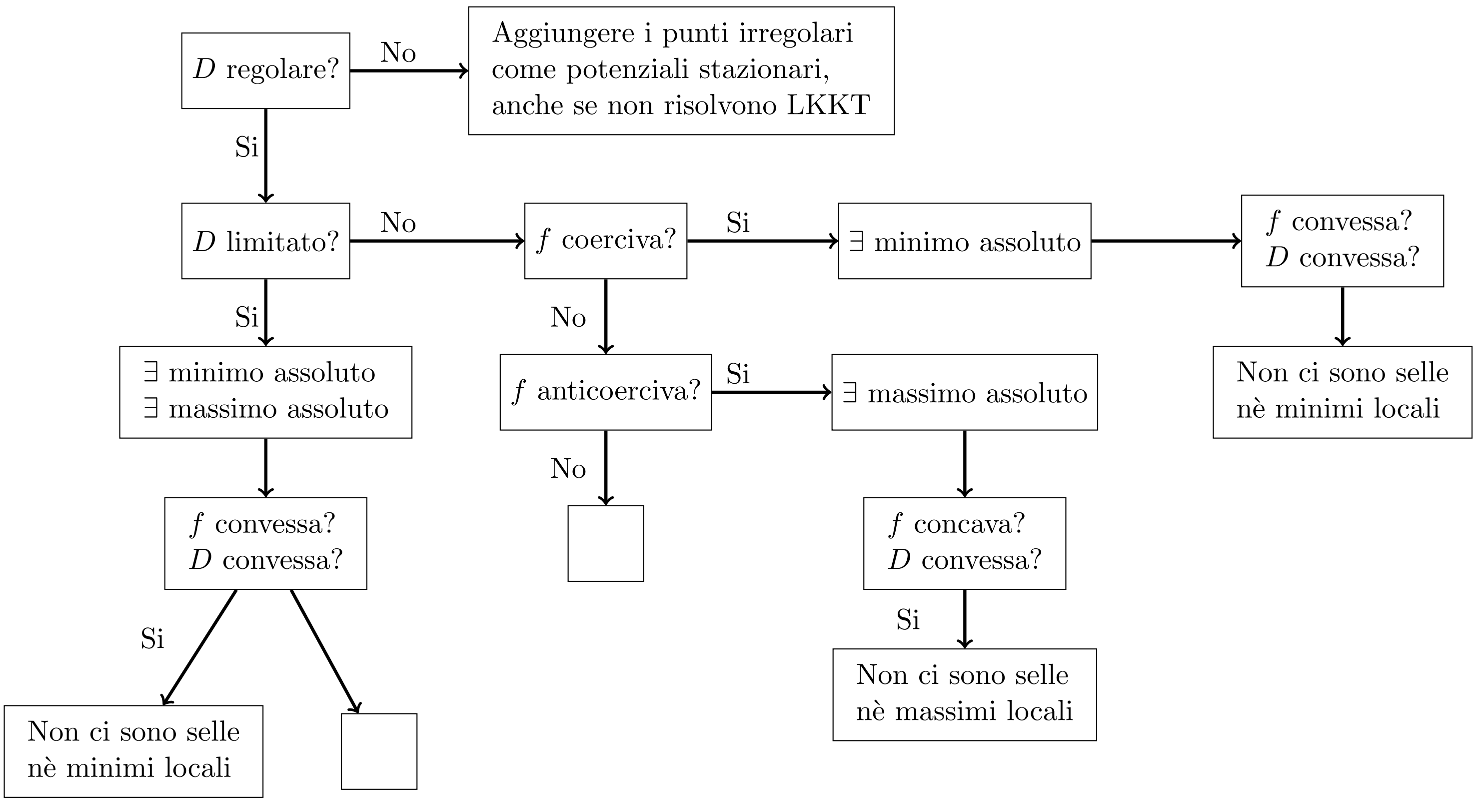
$$\varphi(t) = f\left(\left(-\frac{1}{3},0\right)+t\left(-\frac{11}{3},0\right)\right) = f\left(-\frac{1}{3}-\frac{11}{3}t,\ 0\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{9}+\frac{121}{9}t^2+\frac{22}{9}t\right)+5\left(-\frac{1}{3}-\frac{11}{3}t\right)$$

$$= \frac{242}{9}t^2-\frac{121}{9}t+K \qquad \varphi'(t_K) = \frac{484}{9}t_K-\frac{121}{9} = 0 \implies t_K = \frac{\frac{121}{9}}{\frac{484}{9}} = \frac{1}{4}$$

6) TROVO $x^{K+1} = \left(-\frac{1}{3}-\frac{11}{3}\cdot\frac{1}{4},\ 0\right) = \left(-\frac{5}{4},\ 0\right)$

4.13 Schema concettuale per la classificazione



Ricordarsi che min/max globale è anche min/max locale.

- **Funzione f convessa?**
  Calcolo la Hessiana per ogni punto x: se ogni hessiana è semidefinita positiva allora abbiamo una funzione convessa. Nel caso di funzioni quadratiche la Hessiana da vedere è una sola, poichè costante.
- **Funzione f concava?**
  Calcolo la Hessiana per ogni punto x: se ogni hessiana è semidefinita negativa allora abbiamo una funzione concava. Nel caso di funzioni quadratiche la Hessiana da vedere è una sola, poichè costante.
- **Dominio D convesso?**
  Un dominio è convesso se g_i è convessa $\forall i$, ed h_j lineare $\forall j$. Se uno ha il disegno verifica ad occhio.
- **Dominio D poliedro?**
  Verifico che g_i sia lineare $\forall i$, e che h_j sia lineare $\forall j$.
- **Dominio D regolare?**
  Sfruttiamo i seguenti criteri (ci fermiamo al primo soddisfatto):
  1. il dominio è un poliedro;
  2. soddisfatta la *condizione di Slater* (il dominio è convesso e si ha un punto interno, $\exists \overline{x} : g(\overline{x}) < 0$)
  3. soddisfatta la *condizione di Mangasarian* (verifico che nei punti in cui si hanno vincoli attivi i gradienti sono linearmente indipendenti)
     - Considero i punti in cui ho vincoli attivi. Se non esistono punti del genere posso fermarmi e dichiarare la regolarità del dominio.
     - Nel caso di punti con un unico vincolo attivo verifico l'indipendenza lineare assicurandomi di non poter ottenere il punto $(0, 0)$ per mezzo di questi punti.
     - Nel caso di punti con più vincoli attivi componiamo la matrice Jacobiana (l'unione dei gradienti), sostituiamo con i punti che stiamo analizzando e calcoliamo il determinante. Se il determinante è diverso da zero ho sicuramente linearità indipendente.

- **Funzione f limitata?**
  Si vede ad occhio. Se lo è siamo certi che esiste un minimo assoluto e un massimo assoluto in virtù del teorema di Weierstrass.
- **Funzione f coerciva? Funzione f anti-coerciva?**
  Ci serve verificare questo solo se siamo in presenza di un dominio non limitato. Verifichiamo la coercività effettuando una serie di restrizioni della funzione: se si va sempre a $+\infty$ allora abbiamo una funzione coerciva. Verifico l'anti-coercività controllando se la funzione f cambiata di segno sia coerciva.
  - Se la funzione f è coerciva siamo certi dell'esistenza del minimo assoluto, in un contesto di dominio non limitato.
  - Se la funzione f è anti-coerciva siamo certi dell'esistenza del massimo assoluto, in un contesto di dominio non limitato.
- **Condizioni che rendono valido l'uso di LKKT**.
  Si osservi che:
  - la regolarità del dominio D è necessaria ai fini del teorema LKKT (C.N)
    1. dato un punto di minimo $\overline{x}$ esistono i relativi moltiplicatori $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$ e i coefficienti μ che ris. LKKT
    2. dato un punto di massimo $\overline{x}$ esistono i relativi moltiplicatori $\lambda \in \mathbb{R}^n_-$ e i coefficienti μ che ris. LKKT
  - f convessa e D convessa sono necessarie ai fini del teorema LKKT (C.S.): in presenza di coefficienti $\lambda \geq 0$ possiamo dire che il relativo $\overline{x}$ è minimo globale
  - f concava e D convessa sono necessarie ai fini del teorema LKKT (C.S.): in presenza di coefficienti $\lambda \leq 0$ possiamo dire che il relativo $\overline{x}$ è massimo globale

  Si tenga a mente che f convessa e D convessa, nella PNL non vincolata (D non limitato), mi danno certezza della non esistenza di massimi locali e massimi globali.
- **Compilazione del sistema LKKT**.
  - La regolarità di D ci garantisce l'usabilità del sistema LKKT.
  - Scrivo una tabella con punti $\overline{x}$, relativi moltiplicatori λ e valori della funzione obiettivo.
  - Se il dominio D è limitato sono certa dell'esistenza di un minimo assoluto e di un massimo assoluto. Consideriamo i valori massimi e minimi delle funzioni obiettivo:
    * se ho il valore minimo posso segnalare la soluzione $\overline{x}$ come minimo globale e minimo locale
    * se ho il valore massimo posso segnalare la soluzione $\overline{x}$ come massimo globale e massimo locale
  - Successivamente passo alle soluzioni $\overline{x}$ che mi offrono valori intermedi.
    * posso già escludere a priori che le soluzioni rimanenti siano minimi globali e massimi globali;
    * le soluzioni $\overline{x}$ con moltiplicatori discordi sono selle;
    * un punto con moltiplicatori tutti positivi non è sicuramente un massimo locale;
    * un punto con moltiplicatori tutti negativi non è sicuramente un minimo locale.
  - Rimangono casi con moltiplicatori concordi: se f convessa e D convesso possiamo applicare il teorema LKKT (C.S.), altrimenti emerge il dubbio a proposito delle selle.
    * Se ho f convessa e D convessa, e un punto ha moltiplicatori tutti positivi, allora parlo sicuramente di un minimo locale.
    * Se ho f convessa e D convessa, e un punto ha moltiplicatori tutti negativi, allora parlo sicuramente di un massimo locale.
    * Se non posso dire che f è convessa e D convessa, e un punto ha moltiplicatori tutti positivi, quel punto può essere minimo locale o sella.
    * Se non posso dire che f è convessa e D convessa, e un punto ha moltiplicatori tutti negativi, quel punto può essere massimo locale o sella.

  In caso di dubbio sulle selle si applica il metodo delle restrizioni: supponiamo di avere il dubbio tra minimo e massimo, l'idea è che se applico una restrizione il relativo parametro t sarà minimo nella restrizione. Se applicando più restrizioni ho casi in cui il parametro t è massimo allora ho una sella.

Capitolo 5

Tipologie di problemi

5.1 Problemi di produzione

5.1.1 Variante: massimizzazione del guadagno

Supponiamo che si debbano produrre n oggetti, ciascuno dei quali composto da m diverse materie prime. Vogliamo massimizzare il guadagno derivante dalla vendita di tali oggetti.

$$\begin{cases} \max \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \ge 0 & \forall j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Consideriamo i vari elementi prendendo come esempio la produzione di varie tipologie di vestiti. Supponiamo che per ogni tipologia di vestito si indichi una quantità di lana e una di cotone necessaria per la produzione del singolo vestito.

1. **Variabili di decisione**.

   Le variabili x_j rappresentano le quantità prodotte dell'oggetto $j-$esimo.

Indico con le variabili di decisione il numero di vestiti di ciascun tipo da produrre

2. **Funzione obiettivo**.

   c_j indica il guadagno ottenuto dalla vendita di una unità dell'oggetto j-esimo.

Pongo in c il prezzo di vendita delle tipologie di vestiti prodotte

3. **Vincoli**.

   - **Vincoli di produzione**.

     Nella produzione dobbiamo assicurarci che vengano rispettate le disponibilità delle varie materie prime (necessarie per la produzione). Con b_i rappresentiamo le disponibilità relative alla materia prima i-esima, con a_{ij} la quantità della materia prima i-esima necessaria per produrre l'oggetto j-esimo.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

Nella sommatoria relativa alla materia prima i-esima considero tutte le n tipologie di prodotti e mi assicuro che, complessivamente, si utilizzino quantità effettivamente disponibili (non si deve sforare la disponibilità b_i)

- **Variabili positive**.
  Gli oggetti devono essere prodotti in quantità positive

  $$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

- **Vincoli di interezza (se necessari).**
  In alcuni casi potrebbe essere introdotto un vincolo di interezza, cioè $x_j \in \mathbb{Z}$, $\forall j$. In quel caso abbiamo un problema di PLI: la cosa è necessaria se gli oggetti devono essere per forza venduti nella loro interezza.

  Nel caso dei vestiti il vincolo di interezza è necessario.

Con disequazioni andiamo ad indicare le limitazioni che abbiamo nella produzione.

Con a_{ij} indichiamo le quantità di materie prime (in questo caso lana e cotone) necessarie per produrre un particolare tipo di vestito. Con b_i indico le quantità di materie prime a disposizione (complessivamente) per la produzione dei vestiti.

5.1.2 Variante: minimizzazione dei costi

Variante posta dall'autore della dispensa per maggior chiarezza (equivalente della dieta).

Supponiamo di produrre n tipologie di prodotti a partire da m materie prime. Sappiamo che in un prodotto di un certo tipo sono presenti delle quantità di ciascuna materia prima: indichiamo con a_{ij} la quantità della materia prima i-esima presente nel tipo di prodotto j-esimo. Sappiamo che il costo unitario del prodotto j-esimo è c_j. Ci viene richiesto di sfruttare ogni giorno una quantità b_i della materia prima i-esima. Vogliamo scrivere un modello matematico che minimizzi i costi di produzione.

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i & \forall i = 1, \ldots, m \\ x_j \geq 0 & \forall j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

1. **Variabili di decisione**.

   Le variabili x_j rappresentano le quantità prodotte del prodotto j-esimo.

2. **Funzione obiettivo**.

   c_j indica il costo necessario per produrre una unità dell'oggetto j-esimo.

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

3. **Vincoli**.

   - **Vincoli di produzione**.
     Il problema richiede che della materia prima i-esima venga utilizzata una quantità minima b_i ogni giorno. Sapendo che a_{ij} è la quantità della materia prima i-esima necessaria per produrre l'oggetto j-esimo poniamo, per ogni materia prima i-esima:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

     Nella sommatoria considero tutte le tipologie di prodotti e mi assicuro, messo tutto insieme, di utilizzare minimo la quantità b_i richiesta.
   - **Variabili positive**.
     Gli oggetti devono essere prodotti in quantità positive

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

   - **Vincoli di interezza (se necessari).**
     In alcuni casi potrebbe essere introdotto un vincolo di interezza, cioè $x_j \in \mathbb{Z}$, $\forall j$. In quel caso abbiamo un problema di PLI: la cosa è necessaria se gli oggetti devono essere per forza prodotti nella loro interezza.

Esempio: produzione di acciaio

L'azienda è un acciaieria che ha sei quintali di acciaio grezzo da utilizzare. La manodopera giornaliera a disposizione è di 28 ore (si consideri la presenza di più dipendenti e di più macchinari).Vogliamo ottenere due quintali di acciaio lavorato, precisamente un quintale di acciaio di tipo A e un quintale di acciaio di tipo B. Si tenga conto che

- un quintale di acciaio di tipo A si ottiene a partire da due quintali di acciaio grezzo e richiede 7 ore di lavorazione, mentre
- un quinta di acciaio di tipo B si ottiene a partire da un quintale di acciaio grezzo e richiede 8 ore di lavorazione.

Un quintale di acciaio di tipo A viene venduto a 120 euro. Un quintale di acciaio di tipo B viene venduto a 80 euro. Quanto acciaio di tipo A e acciaio di tipo B devo produrre affinchè il guadagno sia massimizzato?

1. **Variabili decisionali**.

   Dobbiamo prendere due decisioni:

   - x_1, quantità di acciaio di tipo A prodotto;
   - x_2, quantità di acciaio di tipo B prodotto.

   Quanto possiamo produrre al giorno? Potrei produrre $x_1 = x_2 = 1$, ma non è sicuramente una soluzione ottima. Potrei produrre $x_1 = x_2 = 5$? No perchè non abbiamo abbastanza acciaio grezzo.

2. **Funzione obiettivo**.

   Vogliamo massimizzare il guadagno: ricordando il prezzo per quintale di entrambi i tipi possiamo introdurre la seguente funzione

   $$\max 120 \cdot x_1 + 80 \cdot x_2$$

3. **Vincoli**.

   - Sappiamo che il numero di quintali di acciaio grezzo a disposizione è 6. Per produrre un quintale di acciaio di tipo A mi servono due quintali di acciaio grezzo, mentre me ne basta uno solo per produrre un quintale di acciaio di tipo B. Segue

     $$2 \cdot x_1 + x_2 \leq 6$$

   - Sappiamo che il numero di ore giornaliere a disposizione è 28. Per produrre un quintale di acciaio di tipo A servono 7 ore lavorative, mentre per ottenere un quintale di acciaio dell'altro tipo ne servono 8. Segue

     $$7 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \leq 28$$

Risultato

$$\begin{cases} \max 120 \cdot x_1 + 80 \cdot x_2 \\ \boxed{2 \cdot x_1 + x_2 \leq 6} \\ \boxed{7 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \leq 28} \end{cases}$$

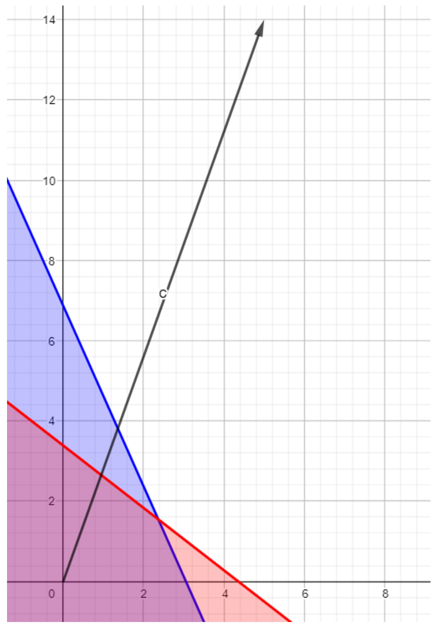
Abbiamo posto tutti i vincoli necessari? Non proprio, se andiamo a svolgere i calcoli potrebbero emergere valori di x_1 e x_2 negativi! La cosa non ha senso poichè i quintali prodotti possono essere al minimo uguali a zero. Segue

$$\begin{cases} \max 120 \cdot x_1 + 80 \cdot x_2 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 \leq 6 \\ 7 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \leq 28 \\ \boxed{x_1, x_2 \geq 0} \end{cases}$$

5.1.3 Valutazione superiore e valutazione inferiore

1. **Massimizzazione del guadagno**.

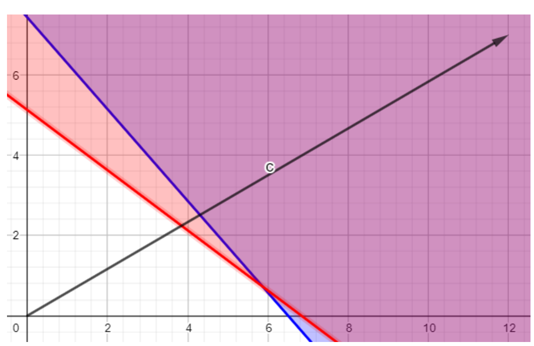
    - **Valutazione superiore**. Problema di massimo, si calcola il rilassamento continuo del problema di PLI.
    - **Valutazione inferiore**. Si osservi che i coefficienti della funzione obiettivo e dei vincoli sono tutti positivi, inoltre i vincoli sono disuguaglianze col $\leq$.

    Prendiamo la soluzione $\overline{x}$ della valutazione superiore e arrotondiamo per difetto: otterremo una soluzione contenuta nella regione ammissibile.

2. **Minimizzazione dei costi**.

    - **Valutazione inferiore**. Problema di minimo, si calcola il rilassamento continuo del problema di PLI.
    - **Valutazione superiore**. Si osservi che i coefficienti della funzione obiettivo e dei vincoli sono tutti positivi, inoltre i vincoli sono disuguaglianze col $\geq$.

    Prendiamo la soluzione $\overline{x}$ della valutazione inferiore e arrotondiamo per eccesso: otterremo una soluzione contenuta nella regione ammissibile.

5.2 Problema di assegnamento (o distribuzione)

Supponiamo di avere n persone ed n lavori. Vogliamo assegnare i lavori alle persone:

- ogni lavoro deve essere fatto da una persona;
- ogni persona deve vedersi assegnato un lavoro.

Il costo per svolgere un lavoro può cambiare da persona a persona. Quello che vogliamo trovare è l'*assegnamento di costo minimo* (assegnamento dei lavori in modo da spendere il minimo possibile).

$$\begin{cases} \min c \cdot x \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

1. **Variabili di decisione**.

   Definiamo
   $$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{Il lavoro } j \text{ non è assegnato al lavoratore } i \\ 1 & \text{Il lavoro } j \text{ è assegnato al lavoratore } i \end{cases}$$

   In sostanza abbiamo $n \times n$ variabili di decisione.

2. **Funzione obiettivo**.

   Il vettore c, quindi gli elementi c_{ij}, indicano il costo del lavoro j svolto dal lavoratore i.

3. **Vincoli**.

   - Vogliamo assicurarci che ogni lavoratore si veda assegnato un lavoro
   $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$$
   - Vogliamo assicurarci che ogni lavoro sia assegnato ad uno dei lavoratori
   $$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

4. **Versioni del problema**.

   Attenzione! Noi abbiamo visto solo una delle versioni del problema. Si distinguono:

   - *problema di assegnamento non cooperativo* (visto), dove ogni lavoro è assegnato e svolto univocamente da un lavoratore
   $$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

- *problema di assegnamento cooperativo* (non visto), dove ogni lavoro è assegnato **ma può essere svolto in parte da più lavoratori**

$$x_{ij} \in [0, 1]$$

Il primo problema è di PL, l'ultimo di PLI! Apparentemente la cosa potrebbe risultarci antipatica, ma in realtà abbiamo un teorema molto interessante che riguarda la versione non cooperativa dei problemi di assegnamento.

Teorema su poliedro del trasporto e del vertice.
Siano o_i e d_i numeri interi (richieste e disponibilità). Il poliedro del trasporto e il poliedro dell'assegnamento hanno vertici a componenti intere.

Il discorso è: esiste almeno una soluzione a componenti intere. In presenza di questo teorema possiamo risolvere il trasporto di problemi indivisibili e di assegnamento cooperativo con *linprog*.

5.2.1 Variante: persone che non fanno specifici lavori

Potrebbe succedere che la persona i-esima si rifiuti di fare il lavoro j-esimo. Il modello matematico è lo stesso, ma prevede un ulteriore vincolo: supponiamo che il lavoratore sia $i = 3$ e il lavoro $j = 1$, porremo

$$x_{31} = 0$$

Un'alternativa può essere imporre un costo altissimo al lavoro, in modo tale che non venga scelto: $c_{31} = 10^7$.

Esempio: assegnamento di lavori a Ingegneri

Supponiamo di avere tre progetti da realizzare e tre ingegneri.

- Devono assegnare uno e un solo progetto a ciascun ingegnere (vincolo *one to one*).
- Ogni progetto richiede un mese per essere realizzato. Ogni ingegnere richiede almeno un mese a disposizione. I tre ingegneri lavorano simultaneamente.

Dalla seguente tabella di verità deduciamo che il problema, in insiemi come $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ è semplice...

$$\begin{array}{c|ccc|l} & 1 & 2 & 3 & \leftarrow \text{progetti} \\ \hline 1 & 2 & 28 & 24 & \\ 2 & 31 & 32 & 27 & \leftarrow \text{costi} \\ 3 & 35 & 38 & 22 & \\ \hline \uparrow & & & & \\ \text{ing.} & & & & \end{array}$$

Ma in $\mathbb{R}^{20}, \mathbb{R}^{30}$? I lavori possibili sono $n!$: il fattoriale con $n = 20$ o $n = 30$ è un numero spaventoso! Come distribuisco i progetti in modo tale da spendere il meno possibile?

1. **Variabili di decisione**.

   Definiamo le seguenti variabili

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{Il lavoro } j \text{ non è assegnato all'ingegnere } i \\ 1 & \text{Il lavoro } j \text{ è assegnato all'ingegnere } i \end{cases}$$

   Dal vincolo *one to one* deduciamo che il problema è non cooperativo.

2. **Funzione obiettivo**.

   Il vettore c, quindi le componenti c_{ij} indicano il costo dei lavori j se svolti dagli ingegneri j. Otteniamo:

$$\begin{aligned} \min c \cdot x = 26 \cdot x_{11} + 28 \cdot x_{12} + 24 \cdot x_{13} + \\ + 31 \cdot x_{21} + 32 \cdot x_{22} + 27 \cdot x_{23} + \\ + 35 \cdot x_{31} + 38 \cdot x_{32} + 22 \cdot x_{33} \end{aligned}$$

3. **Vincoli**.

   - Ogni ingegnere i deve vedersi assegnato un lavoro j

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \qquad x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \qquad x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

   - Ogni lavoro j deve essere assegnato a un ingegnere i

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \qquad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \qquad x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

   - Problema non cooperativo, come già detto le variabili assumono come valore 0 o 1

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

Risultato

$$\begin{cases} \min c \cdot x \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

5.2.2 Variante: problema dell'assegnamento nella PL su Reti

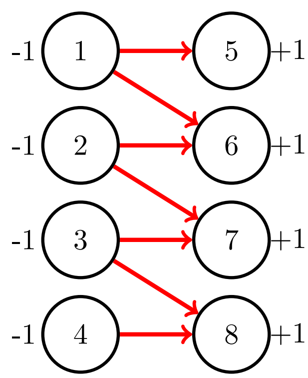
Consideriamo il seguente problema di assegnamento

	1	2	3	4
1	8	6	4	5
2	7	9	2	3
3	3	6	5	1
4	4	7	7	5

Il problema può essere visto come un problema su reti:

- il bilancio di un nodo relativo a un lavoratore è -1, mentre
- il bilancio di un nodo relativo a un lavoro da assegnare è 1.

Otteniamo



Attenzione, due differenze:

- le basi non sono di dimensione 8×8, ma 7×7 (l'equazione sovrabbondante linearmente dipendente - nel disegno abbiamo posto tutti i nodi per comodità);
- non abbiamo una numerazione $1, \ldots, n, 1, \ldots, n$, ma una numerazione $1, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n$ (dove la prima metà riguarda i lavoratori e la seconda i lavori, che non vengono più conteggiati partendo da 1 ma da $n+1$).

Nella risoluzione del problema andiamo a porre le possibili basi scegliendo gli archi (ciascuno avente un costo). La cosa che osserviamo è che le basi possibili (considerando anche le non ammissibili) non sono poche: $\big(12//3\big) = 220$. E questo per un problema 4×4: immaginatevi problemi di dimensione maggiore!

5.3 Problema del trasporto

Supponiamo di avere m luoghi di produzione collegati con n luoghi di raccolta. Pensiamo alla distribuzione giornaliera su un territorio di un prodotto. Conosciamo:

- le capacità produttive dei luoghi di produzione;
- la domanda dei luoghi di raccolta;
- il costo di trasporto da ogni luogo di produzione ad ogni luogo di destinazione.

Vogliamo determinare un piano di trasporto che minimizzi il costo totale, tenendo conto della produzione e della domanda.

$$\begin{cases} \min\ c \cdot x \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j \quad \forall j = 1, \ldots, n \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq o_i \quad \forall i = 1, \ldots, m \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

1. **Beni divisibili e indivisibili**.

   Attenzione, i beni trasportati possono essere divisibili o indivisibili:

   - se il bene è *divisibile* si ha un problema di PL;
   - se il bene è *indivisibile* si ha un problema di PLI (ulteriore vincolo).

2. **Variabili di decisione**.

   Indichiamo con x_{ij} la quantità di merce da trasportare dal luogo di produzione i al luogo di raccolta j.

3. **Funzione obiettivo**.

   Il vettore c, quindi le componenti c_{ij}, indicano il costo di trasporto di una quantità dal luogo di produzione i al luogo di raccolta j.

4. **Vincoli**.

   Definiamo

   - o_i come la capacità produttiva del luogo di produzione i (quantità prodotte dal luogo di produzione)
   - d_j come le domande del luogo di raccolta j (quantità richieste dal luogo di raccolta)

   Attraverso i vincoli imponiamo:

   - le quantità trasportate al luogo di raccolta j pari ad almeno la domanda d_j del luogo stesso
   $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

- le quantità trasportate dal luogo di produzione i al più uguali alla produzione o_i del luogo stesso
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le o_i \quad \forall i = 1, \ldots, m$$
- le quantità trasportate positive
$$x_{ij} \ge 0$$
- le quantità trasportate intere <u>se il bene è indivisibile</u>
$$x_{ij} \in \mathbb{Z} \qquad \forall i = 1, \ldots, m \;\; \forall j = 1, \ldots, n$$

Riprendiamo il teorema già visto per il problema dell'assegnamento

> **Teorema su poliedro del trasporto e del vertice.**
> Siano o_i e d_i numeri interi (richieste e disponibilità). Il poliedro del trasporto e il poliedro dell'assegnamento hanno vertici a componenti intere.

Entrambi i problemi (beni divisibili e beni indivisibili) possono essere risolti con *linprog*!

Esempio: azienda con depositi e luoghi di raccolta

Abbiamo un'azienda con due magazzini (A, B) e tre luoghi di raccolta (C, D, E). Considerando

- la capacità produttiva, cioè quanto può offrire un magazzino,
- i costi unitari di trasporto, e
- le domande dei punti di raccolta

vogliamo elaborare un piano di distribuzione che minimizzi i costi di spedizione. Consideriamo i costi di trasporto indicati nella seguente tabella

	C	D	E
A	6	8	4
B	5	9	7

c_{ij}

Le tonnellate richieste dai punti di consegna sono, rispettivamente, $25, 30, 40$. Le tonnellate offerte quotidianamente da ciascun magazzino sono 50.

1. **Variabili di decisione**.

   Consideriamo $m \times n$ variabili di decisione.

   $$x_{ij} \equiv \text{Quanta merce trasporto dal deposito } i \text{ al luogo di destinazione } j$$

2. **Funzione obiettivo**.

   Poniamo nel vettore c i costi di trasporto dal magazzino i al luogo di raccolta j (quelli nella tabella)

   $$\min 6 \cdot x_{11} + 8 \cdot x_{12} + 4 \cdot x_{13} + 5 \cdot x_{21} + 9 \cdot x_{22} + 7 \cdot x_{23}$$

3. **Vincoli**.

   - La merce trasportata da un certo magazzino non deve superare la disponibilità

     $$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 50 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 50 \end{cases}$$

   - Stabilisco le tonnellate esatte che devono arrivare in ciascun luogo di destinazione

     $$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 25 \\ x_{12} + x_{22} = 30 \\ x_{13} + x_{23} = 40 \end{cases}$$

   - Le tonnellate sono non negative: $x_{ij} \geq 0$

Quindi

$$\begin{cases} \min 6 \cdot x_{11} + 8 \cdot x_{12} + 4 \cdot x_{13} + 5 \cdot x_{21} + 9 \cdot x_{22} + 7 \cdot x_{23} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 50 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 50 \\ x_{11} + x_{21} = 25 \\ x_{12} + x_{22} = 30 \\ x_{13} + x_{23} = 40 \end{cases}$$

Programma linprog

```
>> c = [8,6,9,11,7,8]
>> A = [1,1,1,0,0,0;0,0,0,1,1,1]
>> b = [50;50]
>> Aeq = [1,0,0,1,0,0;0,1,0,0,1,0;0,0,1,0,0,1]
>> beq = [25;30;40]
>> UB = []
>> LB = [0,0,0,0,0,0]
```

5.4 Problema di caricamento (o problema dello zaino)

Immaginiamo un contenitore che ha capacità C, all'interno del quale vogliamo porre degli oggetti. Abbiamo a disposizione n oggetti (oppure n tipologie di oggetti), ciascuno di esso caratterizzato da un valore v_i e un peso p_i. Vogliamo capire quali degli n oggetti (o quanti oggetti di ciascuna tipologia) inseriremo nel contenitore rispettando la capacità C e massimizzando il valore totale posto nel contenitore.

5.4.1 Modello matematico

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq C \\ x_i \in \{0,1\} \qquad \text{oppure } x_i \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

1. **Tipologie di caricamento e variabili di decisione**.

   Abbiamo n variabili di decisione x_j, una per oggetto. Distinguiamo le seguenti tipologie:

   - *caricamento binario divisibile* ($0 \leq x_j \leq 1$, problema di PL).
     Si parla di singoli oggetti che sono o non sono posti nel contenitore.
     Gli oggetti possono essere posti nel contenitore anche in parte.
   - *caricamento binario indivisibile* ($x_j \in \{0,1\}$, problema di PLI).
     Si parla di singoli oggetti che sono o non sono posti nel contenitore.
     Gli oggetti devono essere interamente posti nel contenitore.
   - *caricamento intero divisibile* ($x_j \geq 0$, problema di PL).
     Si parla di tipologie di oggetti, possibile mettere più oggetti di una certa tipologia nel contenitore. Gli oggetti possono essere posti nel contenitore anche in parte.
   - *caricamento intero indivisibile* ($x_j \in \mathbb{Z}^+$, problema di PLI).
     Si parla di tipologie di oggetti, possibile mettere più oggetti di una certa tipologia nel contenitore. Gli oggetti devono essere interamente posti nel contenitore.

2. **Funzione obiettivo**.

   Quanto richiesto dalla consegna è la massimizzazione del valore posto nel contenitore. Facciamo ciò ponendo nel vettore c il valore v_j di ogni oggetto j.

   $$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

3. **Vincoli**.

   - La somma dei pesi degli oggetti non deve superare la capacità C del contenitore

     $$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq C$$

   - Si pone come condizione una tra quelle indicate nelle tipologie di caricamento.

5.4.2 Valutazione superiore e inferiore nel problema a caricamento intero

Valutazione superiore.
Prendiamo i seguenti valori

Valore	7	9	11	12	16	20	
Peso	2	4	6	8	10	15	$P = 63$

e scriviamo il rilassato continuo (senza vincoli di interezza)

$$\begin{cases} \max 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 12x_4 + 16x_5 + 20x_6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5 + 15x_6 \leq 63 \\ x_i \geq 0 & \forall i \end{cases}$$

Scriviamo il corrispondente duale, da cui rimuoviamo le variabili di scarto (ricordare la definizione - dalla PL - di *variabile di scarto*)

$$\begin{cases} \min 63y_1 \\ 2y_1 - y_2 = 7 \\ 4y_1 - y_3 = 9 \\ 6y_1 - y_4 = 11 \\ 8y_1 - y_5 = 12 \\ 15y_1 - y_7 = 20 \\ y_i \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \min 63y_1 \\ y_1 \geq 7/2 \\ y_1 \geq 9/4 \\ y_1 \geq 11/6 \\ y_1 \geq 12/8 \\ y_1 \geq 16/10 \\ y_1 \geq 20/15 \\ y_1 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \min 63y_1 \\ y_1 \geq 7/2 \end{cases}$$

La soluzione del duale è immediata: $y_1 = 7/2$. L'ottimo è

$$v_{ott} = 63 \cdot \frac{7}{2}$$

Per il *teorema della dualità* introdotto nella PL il valore ottimo di primale e duale è lo stesso (v_{ott}). Si osservi che nel primale si ha $c_1 = 7$. Segue

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \frac{63}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Generalizziamo usando le lettere

$$\begin{cases} \min y \cdot b \\ y \geq \frac{c_1}{a_1} \\ \vdots \\ y \geq \frac{c_n}{a_n} \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{Soluzione ottima (D): } y = \frac{c_1}{a_1} \\ \text{Valore ottimo: } v_{ott} = \frac{bc_1}{a_1} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{Soluzione ottima (P):} \\ \overline{x} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a_1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si osservi che abbiamo lavorato con i rendimenti, che definiamo come *rapporto tra valore e peso del bene*. Proviamo a costruire il relativo vettore dei rendimenti

$$\overline{r} = \begin{pmatrix} 3.5 & 2.25 & 1.83 & 1.5 & 1.6 & 1.3 \end{pmatrix}$$

Abbiamo riempito lo zaino col bene di massimo rendimento: ecco un teorema con cui costruire la valutazione superiore! Con tutti i ragionamenti fatti abbiamo individuato il rilassamento continuo, e quindi la valutazione superiore del problema di PLI

$$v_{ott} \leq v_S = 7\frac{63}{2} = 220.5$$

Il valore dello zaino intero è $\leq$ del valore dello zaino divisibile.

Teorema sulla valutazione superiore del problema dello zaino.

Conviene saturare lo zaino col bene di massimo rendimento, cioè

$$\begin{cases} \max \sum_{i}^{m} v_j x_j \\ \sum_{i}^{m} p_j x_j \leq C \\ x_j \geq 0 \end{cases} \implies \begin{array}{l} x_1 = 0, \dots, x_r = \frac{C}{p_r}, x_{r+1} = 0, \dots, x_n = 0 \\ \text{Valore ottimo: } c\frac{v_r}{p_r} \end{array}$$

Valutazione inferiore.
Individuiamo la valutazione inferiore col seguente algoritmo greedy:

1. ordino gli oggetti per rendimento, in senso decrescente;
2. inserisco ogni oggetto nella massima quantità, rispettando il vincolo di capacità.

Riprendiamo la tabella e il vettore dei rendimenti

Valore	7	9	11	12	16	20	
Peso	2	4	6	8	10	15	$P = 63$

$$\overline{r} = \begin{pmatrix} 3.5 & 2.25 & 1.83 & 1.5 & 1.6 & 1.3 \end{pmatrix}$$

- Il primo oggetto può essere messo 31 volte nello zaino. Rimane $P = 1$.
- Non abbiamo altri oggetto di peso 1 collocabili nello zaino.
- Segue la soluzione
$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
e la valutazione inferiore $V_I = 7 \cdot 31 = 217$

Eccoci qua!

$$\boxed{217 = V_i \leq v_{ott} \leq V_S = 7\frac{63}{2} = 220.5}$$

5.4.3 Valutazione superiore e inferiore nel problema a caricamento binario

Dopo aver visto i concetti introduttivi per il caricamento intero possiamo muoverci abbastanza agile col caricamento binario.

Valutazione superiore.
Lavoriamo sul rilassato continuo del problema binario

$$\begin{cases} \max 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 12x_4 + 16x_5 + 20x_6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5 + 15x_6 \leq 63 \\ x_i \in [0,1] & \forall i \end{cases}$$

Calcoliamo i rendimenti

$$\overline{r} = \begin{pmatrix} \frac{4}{2} & \frac{5}{3} & \frac{7}{5} & \frac{8}{6} & \frac{9}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1.66 & 1.4 & 1.3 & 1.28 \end{pmatrix}$$

- Metto il primo oggetto $P : 9 \to 7$
- Metto il secondo oggetto $P : 7 \to 4$
- Il terzo bene non entra per intero. Saturo lo zaino ponendo solo parte del terzo bene.

Otteniamo $\Longrightarrow \overline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{4}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $v_{ott} = 9 + \frac{28}{5} \approx 12.6 = V_S$

Valutazione inferiore.
Anche qua ricorriamo a un metodo greedy:

1. ordino gli oggetti per rendimento, in senso decrescente;
2. inserisco ogni oggetto nella massima quantità, rispettando il vincolo di capacità (questa volta l'oggetto può essere messo una volta soltanto)..

Quindi:

- Metto il primo oggetto $P : 9 \to 7$
- Metto il secondo oggetto $P : 7 \to 4$
- Gli oggetti successivi non entrano nello zaino (troppo pesi, salto gli oggetti che non entrano)
- Segue la soluzione $\overline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e il valore della funzione obiettivo: $V_I = 9$

Eccoci qua!

$$\boxed{9 = V_I \leq v_{ott} \leq V_S = 14.6}$$

5.4.4 Variante: oggetti che non possono stare insieme

Consideriamo i seguenti dati (problema dello *zaino binario*) con uno zaino di volume massimo 11

Oggetto	1	2	3	4	5
Valore	5	7	8	9	12
Volume	3	4	5	6	9

Gli oggetti 2 e 3, non possono stare insieme: possono non essere presenti entrambi, può essere presente uno dei due, ma non entrambi! Nella scrittura del modello matematico aggiungiamo un nuovo vincolo

$$\begin{cases} \max 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 12x_5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 \leq 11 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_i \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Per ampliare le possibili varianti consideriamo le seguenti disuguaglianze, in alternativa a quella appena inserita:

- $\mathbf{x_1 + x_3 = 1}$

  Imponiamo che sia presente, per forza, uno tra i due oggetti. Non possono essere presenti entrambi, non possono non essere presenti entrambi.

- $\mathbf{x_1 + x_3 \geq 1}$

  Imponiamo che sia presente almeno uno tra i due oggetti. Non possono non essere presenti entrambi, può esserne presente uno, possono essere presenti entrambi!

Per quanto riguarda valutazione superiore e inferiore...

- **Valutazione superiore**.

  Validissimo il rilassamento continuo del problema.

- **Valutazione inferiore**.

  L'*algoritmo coi rendimenti è sempre valido*, la cosa fondamentale è ricordarsi che inserire un oggetto (tra 2 e 3) comporta l'esclusione automatica dell'altro!

5.4.5 Variante multizaino: oggetti caratterizzati da peso e volume

Supponiamo di dover considerare in contemporanea sia peso che volume. I dati a disposizione sono i seguenti

Oggetto	1	2	3	4	5
Valore	5	7	8	9	12
Volume	3	4	5	6	9
Peso	7	10	12	14	18

Il volume massimo è 11, mentre il peso massimo è 34. Il modello matematico è lo stesso, con l'aggiunta di un vincolo relativo ai pesi

$$\begin{cases} \max 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 12x_5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 \leq 11 \\ 7x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 14x_4 + 18x_5 \leq 34 \\ x_i \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Una domanda sorge spontanea: come calcoliamo i rendimenti? Sono possibili due rendimenti:

- rapporto tra valore e peso;
- rapporto tra valore e volume.

Quale scelgo? In realtà non è sbagliato scegliere un rapporto rispetto a un altro

- **Valutazione superiore**.

  Calcolo il rilassamento continuo del problema.

- **Valutazione inferiore**.

  Ricordarsi che l'algoritmo greedy richiede solo che la soluzione sia ammissibile. L'algoritmo coi rendimenti visto nella variante standard del problema è validissimo, e possiamo scegliere liberamente tra le due tipologie di rendimento: otterremo sempre una soluzione ammissibile.

  Si può fare qualcosa di meglio?

  - Qualcuno propone calcolo e somma di entrambi i rendimenti (proposta non proprio ottima per il professore se i due rendimenti sono di ordini diversi, ci può stare solo se si normalizzano i due valori, portandoli in un intervallo $[0, 1]$).
  - Qualcuno propone un rendimento come rapporto tra valore e densità (che si ottiene a partire da peso e volume).

5.5 Problema del commesso viaggiatore (TSP)

Prendiamo il problema di ottimizzazione più noto, applicabile in numerosi contesti. Supponiamo di avere un grafo di n città (dove ogni città è un nodo), ogni arco ha un costo c_{ij}. Voglio visitare tutte le città tornando al punto di partenza:

- non voglio visitare nuovamente città già visitate,
- il tutto deve essere a costo minimo.

Quello che vogliamo trovare è il *ciclo hamiltoniano di costo minimo*

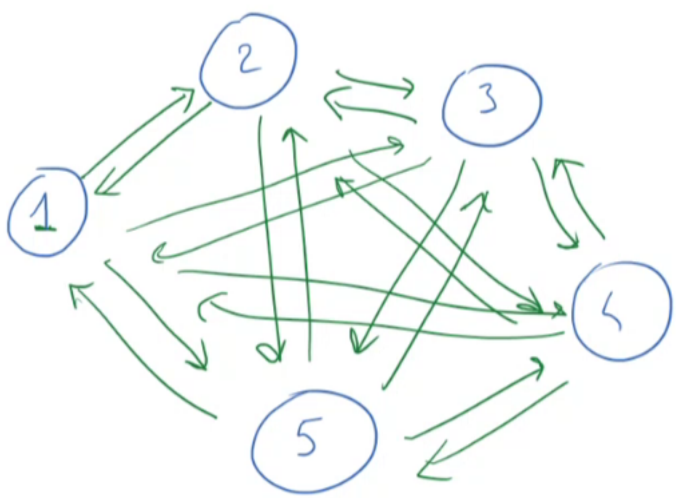
Definizione di *Ciclo hamiltoniano di costo minimo*.

Dato un insieme di nodi N e un insieme di archi $A \subseteq N \times N$ definiamo ciclo hamiltoniano quel ciclo che

- attraversa tutti i nodi (grafo connesso), e
- non ritorna sui nodi già visitati.

Si parla di ciclo di costo minimo quando gli archi sono scelti in modo tale da minimizzare i costi.

Il problema è detto *problema del commesso viaggiatore* (*Travelling Salesman Problem*, TSP).



Numero di archi Dati n nodi otterremo un numero consideriamo $n^2 - n$ archi: il quadrato perchè abbiamo un grafo completo, il valore n sottratto in quanto non consideriamo "i cappi" (gli archi che partono e ritornano nello stesso nodo).

Permutazioni Dato l'insieme dei nodi $N = \{1, \ldots, n\}$, i percorsi possibili sono *permutazioni* dell'insieme N. Questo significa che dati n nodi otteniamo $(n-1)!$ percorsi possibili (quindi $(n-1)!$ cicli hamiltoniani possibili): facile dedurre che un algoritmo di enumerazione totale è inapplicabile (già con $n = 10$ si ottiene un numero di percorsi possibili elevato).

Rappresentazione del valore degli archi La rappresentazione del valore degli archi può essere restituita attraverso una tabella del genere...

*	7	5	3	4
8	*	4	9	3
6	4	*	5	7
5	8	9	*	10
3	7	5	10	*

ricordarsi che con i rappresento il nodo di partenza, con j il nodo di arrivo. Gli asterischi sono posti negli n "nodi cappio" (che non consideriamo).

Tipologie del problema Tutti i problemi TSP da noi affrontati sono completi (ogni vertice è collegato ai rimanenti). Detto che ogni problema TSP è completo, distinguiamo:

- *problemi simmetrici*, dove $c_{ij} = c_{ji}$;
- *problemi asimmetrici*, dove l'uguaglianza detta prima non è automaticamente vera.

Il problema asimmetrico è quello più vicino alla realtà: si pensi alle strade, vogliamo muoverci da una città a un'altra, non è detto che al ritorno il percorso sia lo stesso (potrei avere strade a senso unico).

Legame col problema dell'assegnamento L'insieme dei cicli hamiltoniani è contenuto nell'insieme degli assegnamenti:

- ogni problema TSP può essere visto come un problema di assegnamento;
- un problema di assegnamento non è detto equivalga a un problema TSP.

In generale non si ha questa equivalenza: i problemi di assegnamento sono *unione di cicli disgiunti* in buona parte dei casi. Introduciamo, per prevenire questa situazione, i vincoli di connessione.

5.5.1 TSP completo e asimmetrico

5.5.1.1 Modello matematico

Scriviamo il modello matematico del problema

$$\begin{cases} \min c \cdot x \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & \forall j \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & \forall i \\ \displaystyle\sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq 1 & \forall S \subset N : |S| > 1 \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases}$$

1. **Variabili di decisione**.

   Il problema è chiaramente di PLI: la strada si percorre interamente, non solo in parte. Segue

   $$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{La strada sta nel ciclo hamiltoniano} \\ 1 & \text{La strada non sta nel ciclo hamiltoniano} \end{cases}$$

   Quante variabili? Ribadiamo quanto già detto: dati n nodi si hanno $n^2 - n$ archi, quindi $n^2 - n$ variabili.

2. **Funzione obiettivo**.

   E' nostro interesse minimizzare il "costo del percorso": porremo

   $$c_{ij} \text{ costo nel percorrere l'arco che va dal nodo } i \text{ al nodo } j$$

3. **Vincoli**.

   - **Vincoli di assegnamento**.
     Devo avere un arco uscente da ogni nodo

     $$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall j$$

   - **Vincoli di assegnamento**.
     Devo avere un arco entrante in ogni nodo

     $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i$$

   - **Vincoli di connessione**.
     Non devono esistere cicli disgiunti. Dato un qualunque sottoinsieme di nodi S ($S \subset N$), richiediamo la presenza di almeno un arco che connetta S ad un nodo non appartenente ad S.

     $$\sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq 1, \forall S \subset N : |S| > 1, |S| < n - 1$$

     Attenzione al numero di sottoinsiemi possibili:

     $$2^n - 2n - 2$$

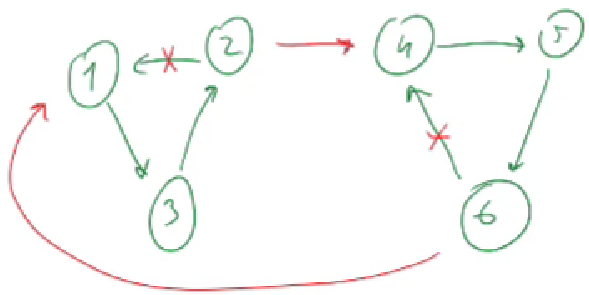
     dove levo gli insiemi con $|S| = 1$ (n insiemi) o $|S| = n - 1$ (n insiemi), questi ultimi poichè i vincoli di assegnamento (che impongono il collegamento con un arco entrante ed uno uscente per ogni nodo) garantiscono (se escludiamo questi insiemi riduciamo ulteriormente il numero di vincoli, e questo ci piace). Leviamo anche, tra i possibili insiemi, l'insieme vuoto e quello pieno. Il problema è che abbiamo un numero esponenziale di vincoli di connessione.

   - **Vincoli di interezza**.
     Le variabili devono essere intere: $x_{ij} \in \{0, 1\}$

5.5.1.2 Valutazione superiore e inferiore

Valutazione superiore (*Algoritmo delle toppe*).
Un metodo greedy, ricordiamo, deve essere rapido! In questo caso l'algoritmo greedy è la valutazione superiore (problema di minimo): il valore deve essere il più basso possibile. L'algoritmo greedy adottato è il cosiddetto *algoritmo delle toppe*.

- Si genera una soluzione ammissibile a partire dalla soluzione ottima offerta dalla valutazione inferiore: l'assegnamento di costo minimo!
- Questa valutazione inferiore è sempre unione di cicli disgiunti. Praticamente impossibile avere un unico ciclo, altrimenti avrei già l'ottimo.
- Supponiamo, come esempio, di avere due cicli disgiunti: si elimina un arco dal primo ciclo e un arco dal secondo, si uniscono i due cicli (si parla di *cucire le toppe*).



Nell'esempio abbiamo sostituito l'arco $(2,1)$ e l'arco $(6,4)$ con gli archi $(2,4)$ e $(6,1)$. Abbiamo la seguente regola di sostituzione

$$\boxed{\begin{matrix} i,j \\ k,l \end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} i,l \\ k,j \end{matrix}}$$

otteniamo un unico ciclo orientato (è orientato, abbiamo un TSP asimmetrico)!

  - La scelta degli archi da rimuovere è libera, abbiamo sempre una soluzione ottima. Nel nostro algoritmi poniamo per comodità, la rimozione degli archi aventi costo maggiore. Sono possibili n^2 rimozioni (uno tra n archi nel primo ciclo e uno tra n archi nel secondo ciclo).
  - Non possiamo scegliere a caso gli archi sostitutivi, dobbiamo ottenere un ciclo.

Ottengo la V_S con

$$V_S = V_I - c_{ij} - c_{kl} + c_{il} + c_{kj}$$

sottraggo il costo degli archi rimossi e aggiungo quello degli archi sostitutivi. Si osservi che $c_{ij} - c_{kl} < c_{il} + c_{kj}$, altrimenti il punto di partenza non sarebbe l'assegnamento di costo minimo: se introduciamo vincoli ulteriori rispetto all'assegnamento la regione si riduce, quindi il minimo aumenta e il massimo si riduce.

- Gli step sono ripetuti k volte, dove k dipende dal numero di cicli disgiunti presenti nella soluzione ottima.

Valutazione inferiore.
Non possiamo muoverci con rilassamento continuo (e quindi rimuovere solo il vincolo di interezza)? Il numero di vincoli è esponenziale! Quello che facciamo è rimuovere i vincoli di connessione. Inaspettatamente possiamo dire che l'assegnamento di costo minimo è un'ottima valutazione (con cui ci sbarazziamo di oltre $2^n - 2n - 2$ vincoli).

5.5.2 TSP completo e simmetrico

Nel TSP simmetrico abbiamo $c_{ij} = c_{ji}$. Per comodità consideriamo il sottoinsieme $\{x_{ij} : i < j\}$, dove abbiamo $\frac{n^2-n}{2}$ elementi, visto che gli elementi cancellati sono uguali a quelli mantenuti. Il disegno del simmetrico si fa senza frecce.

5.5.2.1 Modello matematico

Scriviamo il modello matematico

$$\begin{cases} \min c \cdot x \\ \sum\limits_{i<j} x_{ij} + \sum\limits_{k>j} x_{jk} = 2 & \forall j \\ \sum\limits_{i<j, i \in S, j \notin S} x_{ij} + \sum\limits_{i<j, i \notin S, j \in S} x_{ij} \geq 1 & \forall S \subset N, 1 < |S| \leq \lceil \frac{|N|}{2} \rceil \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

1. **Variabili di decisione**.

   Stesso discorso del problema asimmetrico:

   $$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{La strada sta nel ciclo hamiltoniano} \\ 1 & \text{La strada non sta nel ciclo hamiltoniano} \end{cases}$$

2. **Funzione obiettivo**.

   Anche qua nulla di nuovo. Poniamo

   $$c_{ij} \text{ costo nel percorrere l'arco che va dal nodo } i \text{ al nodo } j$$

3. **Vincoli**.

   - **Vincoli di grado** (sostituiscono quelli di assegnamento).
     Abbiamo n vincoli di grado, un dimezzamento rispetto ai vincoli di assegnamento. Dato il nodo j, gli archi relativi devono essere due:

     $$\sum_{i<j} x_{ij} + \sum_{k>j} x_{jk} = 2 \quad \forall j$$

     Prendiamo ad esempio il nodo 2 in un insieme $N = \{1, 2, 3\}$. Per il vincolo di grado introdotto è logico che dovrà avere un collegamento al nodo 1 e al nodo 3:

- $x_{12} = 1$ (e non $x_{21} = 1$, abbiamo posto per convenzione $i < j$)
- $x_{23} = 1$ (e non $x_{32} = 1$, *ibidem*)

x_{12} è nella prima sommatoria, x_{23} è nella seconda (dove sta il 2?). Imporre $i < j$ ci obbliga a rappresentare il vincolo con due sommatorie.

- **Vincoli di connessione**.
  Scriviamo i vincoli di connessione nel seguente formato (diverso)

$$\sum_{i<j, i \in S, j \notin S} x_{ij} + \sum_{i<j, i \notin S, j \in S} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S$$

  Dato un qualunque sotto-blocco S consideriamo due sommatorie. Anche qua il numero di vincoli si dimezza. Anche qua valgono i ragionamenti fatti per i vincoli di grado: imposizione di $i < j$, necessità di due sommatorie a causa di ciò (nella prima $i \in S, j \notin S$, nella seconda $i \notin S, j \in S$).

- **Vincoli di interezza**.
  Le variabili devono essere intere: $x_{ij} \in \{0, 1\}$

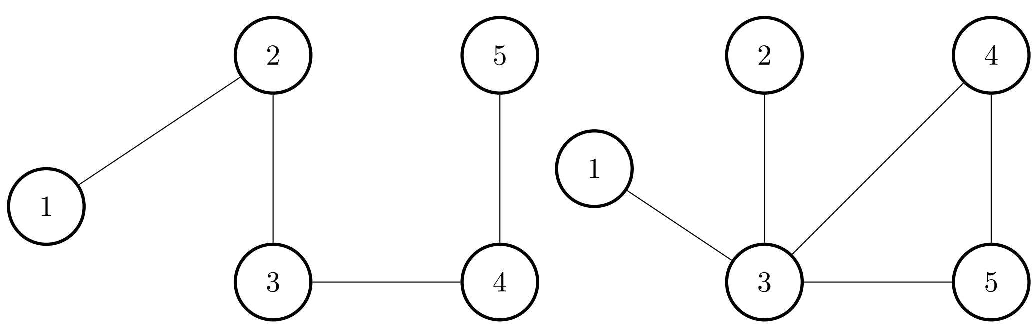
5.5.2.2 Valutazione superiore e valutazione inferiore

Definizione di *Grafo connesso*.

Un grafo si dice connesso se per ogni coppia di nodi del grafo esiste un cammino che li connette.

Definizione di *Albero di copertura di costo minimo*.

Dato un insieme di nodi N e un insieme di archi $A \subseteq N \times N$ definiamo albero di copertura un sottoinsieme di archi $\subseteq A$ tale che il sottografo con nodi N sia connesso e non contenga cicli. Si considerino ad esempio le seguenti figure:



quella a sinistra è un albero di copertura, la seconda no! L'albero è di costo minimo se gli archi sono posti in modo tale da minimizzare i costi (applicazione dell'Algoritmo di Kruskal).

Algoritmo di Kruskal.
L'algoritmo di Kruskal permette di individuare tra i possibili archi di copertura di un grafo quello avente costo minimo (il costo lo si determina dai valori associati agli archi).

Procedimento

1. Prendo tutti gli archi del grafo e li pongo in ordine crescente in base al loro valore.
2. Costruisco le componenti connesse:
   - Inizialmente i nodi sono considerati componenti connesse individuali.
   - Prendo gli archi e li considero uno alla volta:
     - Verifico se l'arco connette due componenti ancora non connesse
     - Se le componenti non sono connesse l'arco sarà parte del minimo albero di copertura finale
     - Se i due nodi sono già connessi scarto l'arco

Per l'esempio si rimanda all'applicazione di Kruskal nel TSP simmetrico.

Definizione di *k-albero di costo minimo*.

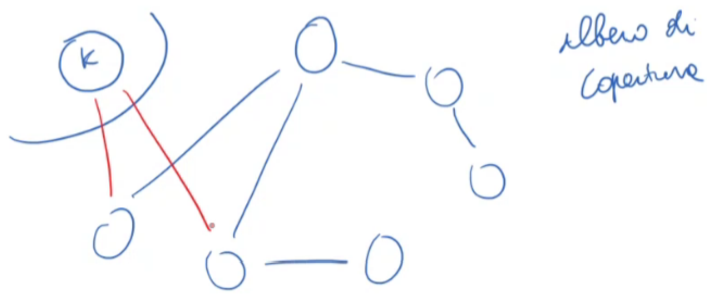
Dato un grafo di partenza caratterizzato da un insieme di nodi N, definiamo k-albero un insieme di n archi di cui:

- $n-2$ archi formano un albero di copertura sul sottografo formato dai nodi $N-\{k\}$;
- due archi sono incidenti sul nodo k.

Si parla di k-albero di costo minimo se:

- l'albero di copertura è di costo minimo (lo si trova con l'algoritmo di Kruskal);
- gli archi incidenti su k sono quelli di costo minimo.

Valutazione inferiore.
Non possiamo parlare del rilassamento continuo a causa del numero spropositato di vincoli di connessione. Eliminiamo tutti i vincoli di grado tranne uno, quello relativo al nodo k: mi rimane un problema dove ho tutti i vincoli di connessione e un solo vincolo di grado. Otteniamo quanto detto per mezzo del *k-albero di costo minimo*.



I k-alberi sono l'analogo degli assegnamenti per il TSP asimmetrico:

- tutti i cicli hamiltoniani sono k-alberi ;
- non tutti i k-alberi sono cicli hamiltoniani.

Come lo troviamo?

- Applico l'algoritmo di Kruskal per trovare l'albero di copertura di costo minimo su tutti i nodi tranne k.
- Aggiungo due archi di costo minimo per collegare il nodo k isolato.

Valutazione superiore (*Algoritmo del nodo più vicino*).
Abbiamo un nodo di partenza.

- Ad ogni iterazione ci si muove verso il nodo più vicino, cioè quello avente costo minore.
- Nello spostamento non posso ritornare su nodi dove sono già stato.
- Dopo aver coperto tutti i nodi ci si ricongiunge con quello iniziale.

Non è la miglior soluzione, ma la cosa non ci sorprende perchè l'algoritmo è *greedy*. Si osservi che gli algoritmi introdotti sono intercambiabili: semplicemente associamo i primi al TSP asimmetrico e i secondi al TSP simmetrico per ragioni statistiche (sono i migliori per il relativo contesto).

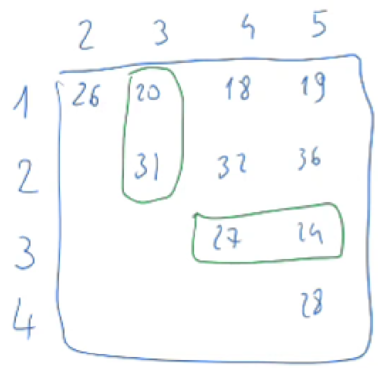
5.5.2.3 Esempio di costruzione di una valutazione inferiore con un 3-albero

Prendiamo la seguente tabelle contenente i costi (ribadiamo che non serve riempire per intero la tabella poichè $c_{ij} = c_{ji}$, il costo per andare dal nodo i al nodo j è uguale al costo per andare dal nodo j al nodo i)

	2	3	4	5
1	26	20	18	19
2		31	32	36
3			27	14
4				28

Procediamo nel seguente modo:

- si isola il k nodo, in questo caso il nodo 3;
- si prendono i nodi rimanenti $\neq k$, in questo caso i nodi $1, 2, 4, 5$, e si costruisce l'albero di copertura di costo minimo utilizzando Kruskal
  - Elimino dalla tabella, per comodità, i costi relativi al nodo 3



  - Si disegnano i nodi senza gli archi.
  - Prendiamo l'arco di costo minimo e poniamo l'arco nel grafo

$$c_{14} = c_{41} = 18$$

  - Prendiamo il secondo arco di costo minimo e poniamo l'arco nel grafo

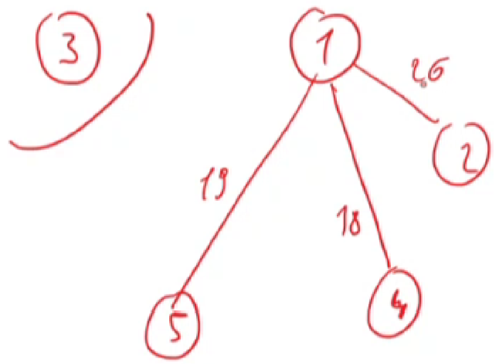
$$c_{15} = c_{51} = 19$$

  - Prendiamo il terzo arco di costo minimo e poniamo l'arco nel grafo

$$c_{12} = c_{21} = 26$$

  - Gli archi successivi, per l'algoritmo di Kruskal, non saranno inseriti nel grafo poichè gli inserimenti precedenti hanno permesso di collegare tutti i nodi del sottografo. Non dobbiamo creare un ciclo!

Il risultato è il seguente:

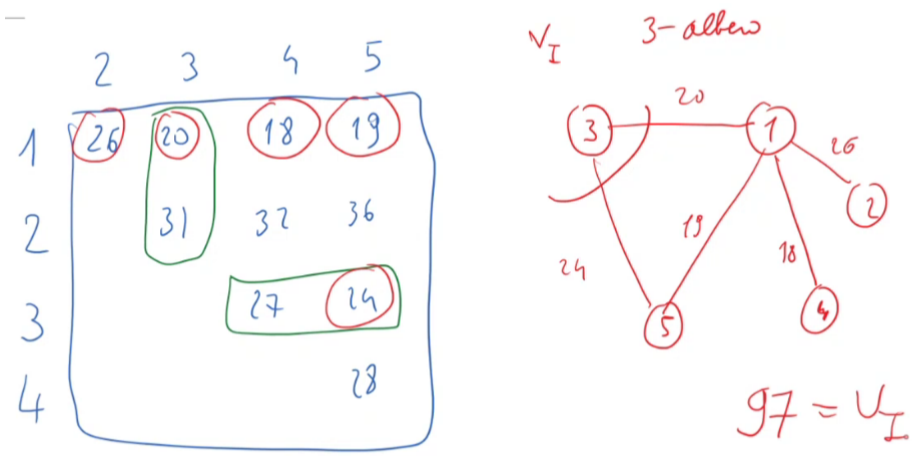


Esempio di vincolo violato dovuto alla rimozione dei vincoli di grado:

$$x_{15} + x_{14} + x_{12} = 2$$

- costruisco il 3-albero recuperando dalla tabella gli archi relativi a 3 di costo minimo, che sono

$$c_{13} = c_{31} = 20 \qquad\qquad c_{35} = c_{53} = 24$$



Abbiamo ottenuto come valutazione inferiore la somma dei valori degli archi inseriti

$$V_I = 19 + 18 + 26 + 20 + 24 = 97$$

5.5.2.4 Esempio di costruzione di una valutazione superiore con un 2-albero

Prendiamo la seguente tabelle contenente i costi degli archi e poniamo come nodo di partenza il nodo 2

	2	3	4	5
1	26	20	18	19
2		31	32	36
3			27	14
4				28

- Considero i costi c_{ij} dove $i = 2$ o $j = 2$. Mi accorgo che il costo minimo si ha con $c_{24} = 20$.

  Collego il nodo 2 al nodo 4.

- Considero i costi c_{ij} dove $i = 4$ o $j = 4$. Mi accorgo che il costo minimo si ha con $c_{34} = 19$.

  Collego il nodo 4 al nodo 3.

- Considero i costi c_{ij} dove $i = 3$ o $j = 3$. Mi accorgo che il costo minimo si ha con $c_{35} = 18$.

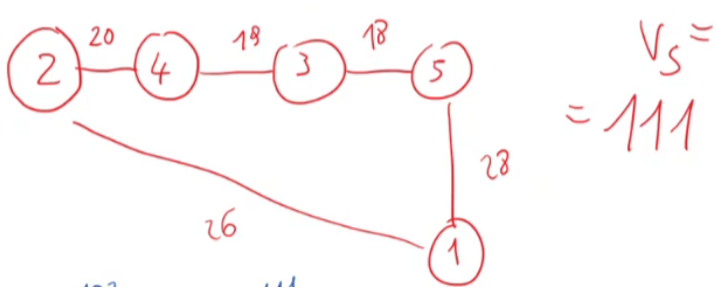
  Collego il nodo 3 al nodo 5.

- Considero i costi c_{ij} dove $j = 5$. Mi accorgo che il costo minimo si ha con $c_{35} = 18$. Scarto i primi tre archi aventi costo minore poichè questi sono già presenti all'interno del cammino realizzato (non dobbiamo creare cicli). Rimane una sola scelta, che è la più costosa nella colonna $j = 5$: $c_{15} = 28$

  Collego il nodo 5 al nodo 1.

- Mi ricollego al nodo iniziale, visto che ora tutti i nodi sono coperti. Abbiamo una sola scelta tra gli archi: $c_{12} = 26$.

Il risultato finale è il seguente



Abbiamo ottenuto la valutazione superiore sommando il valore degli archi

$$V_S = 20 + 19 + 18 + 28 + 26 = 111$$

5.5.3 Esempio di TSP asimmetrico

	1	2	3	4	5
1	-	33	13	25	33
2	33	-	46	58	76
3	39	33	-	12	30
4	35	29	12	-	23
5	60	54	30	23	-

I vincoli imposti sono *vincoli di assegnamento* (per ogni nodo devo avere un arco uscente, ma anche un arco entrante), *vincoli di connessione* (per ogni sottoinsieme di nodi devo avere almeno un arco che mi colleghi un elemento del sottoinsieme con un elemento non appartenente al sottoinsieme), *vincoli di interezza* (ovviamente). Nella funzione obiettivo poniamo i costi dei vari archi, enumerati nella tabella. Otteniamo:

1. **Funzione obiettivo**

$$\begin{aligned}\min \quad & 33x_{12} + 13x_{13} + 25x_{14} + 33x_{15} + 33x_{21} + 46x_{23} + 58x_{24} + 76x_{25} + 39x_{31} + 33x_{32} + \\ & + 12x_{34} + 30x_{35} + 35x_{41} + 29x_{42} + 12x_{43} + 23x_{45} + 60x_{51} + 54x_{52} + 30x_{53} + 23x_{54}\end{aligned}$$

2. **Vincoli di assegnamento**. Ogni nodo deve avere un arco entrante e un arco uscente.

$$\begin{aligned}
x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 1 && \text{Archi entranti nel nodo 1} \\
x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 1 && \text{Archi entranti nel nodo 2} \\
x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} &= 1 && \text{Archi entranti nel nodo 3} \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} &= 1 && \text{Archi entranti nel nodo 4} \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} &= 1 && \text{Archi entranti nel nodo 5} \\
x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 1 && \text{Archi uscenti dal nodo 1} \\
x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 1 && \text{Archi uscenti dal nodo 2} \\
x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} &= 1 && \text{Archi uscenti dal nodo 3} \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} &= 1 && \text{Archi uscenti dal nodo 4} \\
x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} &= 1 && \text{Archi uscenti dal nodo 5}
\end{aligned}$$

3. **Vincoli di connessione** ($2^n - 2n - 2 = 32 - 10 - 2 = 20$ vincoli).

   Abbiamo $n = 5$ nodi, escludiamo le combinazioni con 1 nodo, 5 nodi e $n - 1 = 4$ nodi, consideriamo solo le combinazioni di 2 e 3 nodi. Dobbiamo assicurarci che, tra gli elementi di S, ci sia almeno un collegamento con elementi non appartenenti ad S.

   1. $x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \geq 1$ $\quad S = \{1, 2\}, \{3, 4, 5\} \notin S$
   2. $x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{32} + x_{34} + x_{35} \geq 1$ $\quad S = \{1, 3\}, \{2, 4, 5\} \notin S$
   3. $x_{12} + x_{13} + x_{15} + x_{42} + x_{43} + x_{45} \geq 1$ $\quad S = \{1, 4\}, \{2, 3, 5\} \notin S$
   4. $x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{52} + x_{53} + x_{54} \geq 1$ $\quad S = \{1, 5\}, \{2, 3, 4\} \notin S$
   5. $x_{21} + x_{24} + x_{25} + x_{31} + x_{34} + x_{35} \geq 1$ $\quad S = \{2, 3\}, \{1, 4, 5\} \notin S$
   6. $x_{21} + x_{23} + x_{25} + x_{41} + x_{43} + x_{45} \geq 1$ $\quad S = \{2, 4\}, \{1, 3, 5\} \notin S$
   7. $x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{51} + x_{53} + x_{54} \geq 1$ $\quad S = \{2, 5\}, \{1, 3, 4\} \notin S$

8.	$x_{31} + x_{32} + x_{35} + x_{41} + x_{42} + x_{45} \geq 1$	$S = \{3,4\}, \{1,2,5\} \notin S$
9.	$x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{51} + x_{52} + x_{54} \geq 1$	$S = \{3,5\}, \{1,2,4\} \notin S$
10.	$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{51} + x_{52} + x_{53} \geq 1$	$S = \{4,5\}, \{1,2,3\} \notin S$
11.	$x_{14} + x_{15} + x_{24} + x_{25} + x_{34} + x_{35} \geq 1$	$S = \{1,2,3\}, \{4,5\} \notin S$
12.	$x_{13} + x_{15} + x_{23} + x_{25} + x_{43} + x_{45} \geq 1$	$S = \{1,2,4\}, \{3,5\} \notin S$
13.	$x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{53} + x_{54} \geq 1$	$S = \{1,2,5\}, \{3,4\} \notin S$
14.	$x_{12} + x_{15} + x_{32} + x_{35} + x_{42} + x_{45} \geq 1$	$S = \{1,3,4\}, \{2,5\} \notin S$
15.	$x_{12} + x_{14} + x_{32} + x_{34} + x_{52} + x_{54} \geq 1$	$S = \{1,3,5\}, \{2,4\} \notin S$
16.	$x_{12} + x_{13} + x_{42} + x_{43} + x_{52} + x_{53} \geq 1$	$S = \{1,4,5\}, \{2,3\} \notin S$
17.	$x_{21} + x_{25} + x_{31} + x_{35} + x_{41} + x_{45} \geq 1$	$S = \{2,3,4\}, \{1,5\} \notin S$
18.	$x_{21} + x_{24} + x_{31} + x_{34} + x_{51} + x_{54} \geq 1$	$S = \{2,3,5\}, \{1,4\} \notin S$
19.	$x_{21} + x_{23} + x_{41} + x_{43} + x_{51} + x_{53} \geq 1$	$S = \{2,4,5\}, \{1,3\} \notin S$
20.	$x_{31} + x_{32} + x_{41} + x_{42} + x_{51} + x_{52} \geq 1$	$S = \{3,4,5\}, \{1,2\} \notin S$

4. **Vincolo di interezza**. $x_{ij} \in \{0,1\}, \forall < i,j >$

La soluzione ottima è data dal ciclo hamiltoniano 1-3-5-4-2-1 di costo complessivo 128.

5.5.4 Esempio di TSP simmetrico

	2	3	4	5
1	29	24	28	47
2	-	18	94	61
3	-	-	53	26
4	-	-	-	20

I vincoli imposti sono *vincoli di grado* (gli archi relativi a un nodo devono essere due), *vincoli di connessione* (per ogni sottoinsieme di nodi devo avere almeno un arco che mi colleghi un elemento del sottoinsieme con un elemento non appartenente al sottoinsieme), *vincoli di interezza* (ovviamente). Nella funzione obiettivo poniamo i costi dei vari archi, enumerati nella tabella (simmetrica). Otteniamo:

- **Funzione obiettivo**.

$$\min\ 29x_{12} + 24x_{13} + 28x_{14} + 47x_{15} + 18x_{23} + 94x_{24} + 61x_{25} + 53x_{34} + 26x_{35} + 20x_{45}$$

- **Vincoli di grado**.

  Ogni nodo deve avere grado 2, cioè devono esservi due archi relativi ad ogni nodo.

$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 2$	Nodo 1
$x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 2$	Nodo 2
$x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} = 2$	Nodo 3
$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} = 2$	Nodo 4
$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 2$	Nodo 5

- **Vincoli di connessione**.

  Dato $n = 5$ consideriamo solo i sottoinsiemi di cardinalità 2.

$$\begin{array}{ll}
x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \geq 1 & S = \{1,2\}, \{3,4,5\} \notin S \\
x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{23} + x_{34} + x_{35} \geq 1 & S = \{1,3\}, \{2,4,5\} \notin S \\
x_{12} + x_{13} + x_{15} + x_{24} + x_{34} + x_{45} \geq 1 & S = \{1,4\}, \{2,3,5\} \notin S \\
x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{25} + x_{35} + x_{45} \geq 1 & S = \{1,5\}, \{2,3,4\} \notin S \\
x_{12} + x_{24} + x_{25} + x_{13} + x_{34} + x_{35} \geq 1 & S = \{2,3\}, \{1,4,5\} \notin S \\
x_{12} + x_{23} + x_{25} + x_{14} + x_{34} + x_{45} \geq 1 & S = \{2,4\}, \{1,3,5\} \notin S \\
x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{15} + x_{35} + x_{45} \geq 1 & S = \{2,5\}, \{1,3,4\} \notin S \\
x_{13} + x_{23} + x_{35} + x_{14} + x_{24} + x_{45} \geq 1 & S = \{3,4\}, \{1,2,5\} \notin S \\
x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{15} + x_{25} + x_{45} \geq 1 & S = \{3,5\}, \{1,2,4\} \notin S \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{15} + x_{25} + x_{35} \geq 1 & S = \{4,5\}, \{1,2,3\} \notin S
\end{array}$$

- **Vincolo di interezza**. $x_{ij} \in \{0,1\}, \forall < i,j >$

  La soluzione ottima è il ciclo hamiltoniano 1-2-3-5-4-1 di costo complessivo 121.

Scrivere i vincoli di connessione.
I vincoli di connessione non sono il massimo dell'intuitività, specie nel TSP simmetrico. Per poter scrivere i vincoli la cosa conveniente è:

- prendere la cardinalità $|N|$ dell'insieme dei nodi N;
- enumerare le cardinalità di tutti i possibili insiemi;
- costruire tutte i possibili sottoinsiemi S aventi quelle cardinalità.

Si ricordi che nel TSP asimmetrico la cardinalità del sottoinsieme S è $1 < |S| < |N| - 1$, mentre nel TSP simmetrico si ha $1 < |S| \leq \lceil \frac{|N|}{2} \rceil$. Negli esempi fatti abbiamo $|N| = 5$.

- Nell'esempio di TSP asimmetrico abbiamo come possibili cardinalità 2 e 3, quindi consideriamo i possibili sottoinsiemi $S \subset N$ aventi 2 o 3 elementi.
- Nell'esempio di TSP simmetrico abbiamo come possibile cardinalità 2, quindi consideriamo i possibili sottoinsiemi $S \subset N$ aventi 2 elementi.

Può risultare estremamente intuitivo disegnare i nodi, evidenziare quelli $\in S$ e rappresentare, per ogni nodo $\in S$, tutti i collegamenti possibili con nodi $\notin S$. Si ricordi nella scrittura dei vincoli che $i < j$ per convenzioine.

5.6 Problema del *bin packing*

Supponiamo di avere a disposizione

- n oggetti di peso $p_1, \dots, p_n$ e
- m contenitori, ciascuno di capacità C.

Vogliamo individuare il minimo numero di contenitori in cui inserire tutti gli oggetti. Poniamo un esempio più pratico: supponiamo di avere diecimila documenti di lunghezza variabile, quanti dischi di 1TB sono necessari per contenere i diecimila documenti?

5.6.1 Modello matematico

Scriviamo il modello matematico.

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i & \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 & \forall j = 1, \dots, n \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} \leq C y_i & \forall i = 1, \dots, m \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i, j \\ y_i \in \{0, 1\} & \forall i \end{cases}$$

La difficoltà nel problema non è tanto individuare il numero di contenitori da utilizzare, ma come caricare gli oggetti nei contenitori utilizzati.

Promemoria: problema di minimo, l'algoritmo Greedy si ha nella val. superiore!

1. **Variabili di decisione**.

   Contrariamente alle tipologie di problemi viste fino ad ora introduciamo due tipologie di variabili

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se oggetto } j \text{ inserito nel contenitore } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è usato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. **Funzione obiettivo**.

   L'obiettivo del problema è minimizzare il numero di contenitori utilizzati. Segue la funzione obiettivo con le variabili y_i, che segnalano se il contenitore è utilizzato o meno.

$$\min \sum_{i=1}^{m} y_i$$

3. **Vincoli**.

   - **Obbligo di collocare tutti gli oggetti in un contenitore**.
     Facciamo un confronto col problema dello zaino, che potrebbe sembrare simile al problema del bin packing: nel primo problema dobbiamo scegliere quali oggetti porre nello zaino, nel secondo dobbiamo porre TUTTI gli oggetti nei contenitori a disposizione. Imponiamo la cosa col seguente vincolo, fissato l'oggetto j:
     $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$$
   - **Legame tra contenitori usati e modo in cui il contenitore viene caricato**.
     Nella funzione obiettivo abbiamo solo le variabili y_i: chiaramente dobbiamo stabilire un legame tra queste variabili e le variabili x_{ij}. Dobbiamo fare in modo che siano rispettate le capienze dei vari contenitori. Fissato un contenitore i poniamo:
     $$\sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} \leq C y_i \xrightarrow{\text{In } \textit{intlinprog}} \sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} - C y_i \leq 0$$
     Si tiene conto dei pesi e visto la natura delle variabili x_{ij} si sommano solo i pesi degli oggetti posti nel contenitore i. La somma deve essere minore della capienza del contenitore, ma devo considerare se il contenitore è utilizzato o meno (ecco perchè si moltiplica C con y_i): se non è utilizzato abbiamo $y_i = 0$, quindi imponiamo che la somma dei pesi nel contenitore sia ≤ 0.
   - **Vincoli di interezza**.
     Chiaramente le variabili devono essere intere, quindi...
     $$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i,j \qquad\qquad y_i \in \{0,1\} \quad \forall i$$

5.6.2 Valutazione superiore e valutazione inferiore

Valutazione inferiore.
Supponiamo che ci sia la possibilità di porre un oggetto a cavallo tra due contenitori (un pezzo da una parte e un pezzo dall'altra): risolviamo il rilassato continuo!

$$\begin{cases} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 & \forall j = 1,\dots,n \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} \leq C y_i & \forall i = 1,\dots,m \end{cases}$$

Otteniamo la valutazione inferiore banalmente
$$V_I = \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i}{C} \right\rceil$$
Il valore è detto *valore ottimo del rilassato continuo.*

Valutazione superiore.
La valutazione superiore punta a ridurre il numero di variabili da considerare, tenendo conto che la funzione obiettivo deve essere minimizzata (cioè si punta a porre il maggior numero di variabili y_i uguali a zero). Abbiamo tre possibili algoritmi greedy per l'individuazione della V_S.

- *Next-fit decreasing* (NFD).
- *First-fit decreasing* (FFD).
- *Best-fit decreasing* (BFD).

5.6.2.1 Algoritmi greedy per la valutazione superiore

Per il confronto tra i vari algoritmi greedy si consideri la seguente tabella, dove abbiamo gli oggetti col loro peso (in ordine decrescente) e la capacità C dei vari contenitori.

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
p_j	70	60	50	33	33	33	11	7	3	$C = 100$

Si supponga di avere quattro contenitori. Prendiamo gli oggetti, ciascuno avente un certo peso, e i contenitori.

***Next-fit decreasing* (NFD)**

- Esamino gli oggetti in ordine di peso decrescente.
- Considero un contenitore corrente: prendo gli oggetti nell'ordine indicato e verifico se questi possono essere posti nel contenitore corrente.
- Non appena individuo un oggetto che non entra nel contenitore corrente passo ad un nuovo contenitore e pongo l'oggetto lì. **Non tornerò nel contenitore precedente!**

Otteniamo

Contenitori	**Oggetti**	**Capacità residua**
1	1	30
2	2	40
3	3 4	50 17
4	5 6 7 8 9	67 32 23 16 13

- "Creo" il primo contenitore. Pongo l'oggetto 1 grande 70, quindi $C : 100 \to 30$.
- L'oggetto 2 è grande 60 e non sta nel primo contenitore: "creo" il secondo contenitore! Lo pongo lì, quindi $C : 100 \to 40$.
- L'oggetto 3 è grande 50 e non sta nel secondo contenitore: "creo" il terzo contenitore! Lo pongo lì, quindi $C : 100 \to 50$.

- L'oggetto 4 è grande 33 e può essere posto nel terzo contenitore! Quindi $C : 50 \to 17$
- L'oggetto 5 è grande 33 e non sta nel terzo contenitore: "creo" il quarto contenitore! Lo pongo lì, quindi $C : 100 \to 67$
- L'oggetto 6 è grande 33 e può essere posto nel quarto contenitore! Quindi $C : 67 \to 34$
- L'oggetto 7 è grande 11 e può essere posto nel quarto contenitore! Quindi $C : 34 \to 23$
- L'oggetto 8 è grande 7 e può essere posto nel quarto contenitore! Quindi $C : 23 \to 16$
- L'oggetto 9 è grande 3 e può essere posto nel quarto contenitore! Quindi $C : 16 \to 13$.

***First-fit decreasing* (FFD)**

- Esamino gli oggetti in ordine di peso decrescente.
- Prendo gli oggetti nell'ordine indicato e li assegno al primo contenitore che può contenerlo.
- Se nessuno dei contenitori già utilizzato può contenere l'oggetto considerato allora si inserisce l'oggetto in un nuovo contenitore. **Contrariamente al next-fit posso tornare sui contenitori precedenti!**

La soluzione calcolata è sicuramente migliore di quella trovata con l'algoritmo precedente (NFD), ma l'attuale algoritmo è più lento! Otteniamo

Contenitori	**Oggetti**	**Capacità residua**
1	1 7 8 9	30 19 12 9
2	2 4	40 7
3	3 5	50 17
4	6	67

- "Creo" il primo contenitore". Pongo in esso l'oggetto 1, grande 70, quindi $C : 100 \to 30$.
- L'oggetto 2 è grande 60 e non sta nel primo contenitore: "creo" il secondo contenitore! Lo pongo lì, quindi $C : 100 \to 40$.
- L'oggetto 3 è grande 50: non sta nel primo contenitore e neanche nel secondo: "creo" il terzo contenitore! Lo pongo lì, quindi $C : 100 \to 50$.
- L'oggetto 4 è grande 33: non sta nel primo contenitore, ma può essere posto nel secondo! Quindi $C : 40 \to 7$
- L'oggetto 5 è grande 33: non sta nel primo contenitore e neanche nel secondo. Lo pongo nel terzo, quindi $C : 50 \to 17$
- L'oggetto 6 è grande 33, non sta nel primo contenitore, non sta nel secondo e neanche nel terzo: "creo" il quarto contenitore! Lo pongo lì, quindi $C : 100 \to 67$
- L'oggetto 7 è grande 11 e può essere posto nel primo contenitore! Quindi $C : 30 \to 19$
- L'oggetto 8 è grande 7 e può essere posto nel primo contenitore! Quindi $C : 19 \to 12$
- L'oggetto 9 è grande 3 e può essere posto nel primo contenitore! Quindi $C : 12 \to 9$.

Best-fit decreasing **(BFD)**

- Esamino gli oggetti in ordine di peso decrescente.
- Prendo gli oggetti nell'ordine indicato e li assegno al contenitore avente **capacità minima residua**.
- Se nessuno dei contenitori già utilizzato può contenere l'oggetto considerato allora si inserisce l'oggetto in un nuovo contenitore.

Otteniamo

Contenitori	**Oggetti**	**Capacità residua**
1	1	30
2	2 4 8	40 7 0
3	3 5 7 9	50 17 6 3
4	6	67

- Prendo il primo contenitore! Pongo al suo interno il primo oggetto, grande 70, quindi $C : 100 \to 30$
- Il secondo oggetto non può essere posto nel primo contenitore, quindi passo al secondo contenitore. Segue $C : 100 \to 40$.
- Il terzo oggetto non può essere posto nel primo contenitore e neanche nel secondo, quindi passo al terzo contenitore. Segue $C : 100 \to 50$.
- Il quarto oggetto, grande 33, non può essere posto nel primo contenitore (spazio insufficiente). Negli altri contenitori può essere posto senza problemi: quello con capienza rimanente minore è il secondo contenitore, dove andiamo a mettere l'oggetto. Segue $C : 40 \to 7$.
- Il quinto oggetto, grande 33, non può essere posto nel primo contenitore e neanche nel secondo (spazio insufficiente). Tra terzo e quarto contenitore quello con capienza rimanente minore è il terzo, dove andiamo a mettere l'oggetto. Segue $C : 50 \to 17$.
- Il sesto oggetto, grande 33, non può essere posto in nessun contenitore a parte il quarto (spazio insufficiente). Segue $C : 100 \to 67$ per il quarto contenitore.
- Il settimo oggetto, grande 11, può essere collocato in tutti i contenitori tranne il secondo (spazio insufficiente). Tra i contenitori possibili quello con capienza minore è il terzo, segue $C : 17 \to 6$.
- L'ottavo oggetto, grande 7, può essere collocato in tutti i contenitori tranne il terzo (spazio insufficiente). Tra i contenitori possibili quello con capienza minore è il secondo, segue $C : 7 \to 0$.
- Il nono oggetto, grande 3, può essere collocato in tutti i contenitori tranne il secondo (spazio insufficiente). Tra i contenitori possibili quello con capienza minore è il terzo, segue $C : 6 \to 3$.

Algoritmo migliore tra i tre: si osservi che con questo algoritmo siamo riusciti a riempire per intero due contenitori, mentre con gli altri abbiamo una maggiore distribuzione degli oggetti.

5.7 Problema di localizzazione

Il problema di localizzazione prevede l'individuazione di posizioni da assegnare ad un insieme di servizi. Di questo problema abbiamo numerose varianti, in base ai criteri di assegnazioni adottati. Abbiamo visto due varianti di questo problema:

- problema di copertura;
- problema di massima copertura.

5.7.1 Variante: problema di copertura

Supponiamo di avere la mappa di una città, dove individuiamo:

- luoghi che offrono servizi;
- utenti che usufruiscono di servizi.

Prendiamo ad esempio l'organizzazione del servizio delle ambulanze da parte delle autorità sanitarie. Consideriamo m depositi delle ambulanze ed n quartieri, che devono essere coperti dalle ambulanze presenti nei depositi. Il servizio deve garantire il raggiungimento di ogni quartiere da parte di un'ambulanza entro i quindici minuti. La richiesta è determinare quali depositi aprire (il minimo indispensabile) garantendo la regola dei quindici minuti.

5.7.1.1 Modello matematico

Scriviamo il modello matematico

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} x_j \\ A \cdot x \geq e \\ x \in \{0,1\}^n \end{cases}$$

1. **Variabili di decisione**.

   Consideriamo m variabili x_j (tante quanti i luoghi considerati)

   $$x_j = \begin{cases} 0 & \text{Non colloco il servizio nel luogo } j \\ 1 & \text{Colloco il servizio nel luogo } j \end{cases}$$

   Riprendiamo l'esempio delle ambulanze: nei dati del problema abbiamo n quartieri, ma soprattutto abbiamo m depositi possibili! **Non è detto che li useremo tutti**.

2. **Funzione obiettivo**.

   Il nostro interesse, nell'esempio delle ambulanze, è individuare tra gli m depositi possibili quelli da utilizzare, minimizzandone il numero e garantendo il criterio dei quindici minuti. Visto la natura booleana delle variabili decisionali poniamo una somma che restituisce il numero di depositi di ambulanze effettivamente utilizzati.

   $$\min \sum_{j=1}^{n} x_j$$

3. **Vincoli**.

   - **Matrice di copertura**.
     Introduciamo la matrice di copertura per rappresentare, nel nostro esempio, le distanze tra quartieri e depositi delle ambulanze (il rapporto tra luoghi e utenti). Il nostro interesse è che tutti i quartieri siano coperti da almeno un deposito di ambulanze
     $$A \cdot x \geq e \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_4 \geq 1 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \geq 1 \ \ldots \end{array}$$
     Abbiamo n vincoli, tanti quanti i quartieri (luoghi) considerati. Nella sezione successiva approfondiamo la questione.
   - **Vincoli di interezza**. Ovviamente $x \in \{0,1\}^n$.

Matrice di copertura

Nei vincoli del modello matematico abbiamo la cosiddetta *matrice di copertura*, con cui rappresentiamo il rapporto tra luoghi e utenti.

- Riprendiamo l'esempio delle ambulanze: dobbiamo riportare la distanza tra i depositi delle ambulanze e i quartieri.
  $$A = \begin{pmatrix} 18 & 16 & 10 & 9 & 10 \\ 19 & 21 & \ldots & & \\ 7 & 9 & 10 & 12 & \ldots \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$
  $\boxed{a_{ij} \text{ è la distanza in minuti tra il quartiere } i \text{ e il deposito di ambulanze } j}$
- Ai fini della risoluzione del problema, in realtà, è necessario conoscere solo se la distanza temporale tra quartiere e deposito rispetta o meno il requisito dei quindici minuti! Posto questo possiamo porre la matrice A nel seguente modo
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
  $\boxed{a_{ij} \text{ indica se la distanza temporale tra il quartiere } i \text{ e il deposito } j \text{ è minore di quindici minuti}}$

Regole di riduzione della matrice di copertura

Ulteriore aspetto è la possibilità di ridurre ulteriormente questa matrice: fare ciò significa ridurre i vincoli da considerare, e questo ci piace! Le regole da tenere a mente sono le seguenti:

1. se una riga della matrice è formata da soli zeri allora il problema è vuoto;

   Se nessun deposito di ambulanze è distante meno di quindici minuti da un quartiere j allora quel quartiere rimane fuori dal sistema di emergenza, ergo il problema non è risolvibile.

2. se una riga della matrice è formata da soli uno allora la riga può essere eliminata;

   Se tutti i depositi sono distanti meno di quindici minuti da un quartiere j allora il vincolo è superfluo. La scelta dei depositi per raggiungere gli altri quartieri entro quindici minuti soddisferà sempre il quartiere j.

3. se una riga della matrice ha un solo uno allora rimuoviamo questa, prendiamo la colonna dove è presente il numero, rimuoviamo la colonna detta e tutte le righe dove si ha uno nella colonna;

   Se un quartiere j può essere raggiunto solo da un deposito i allora possiamo già porre $x_j = 1$. Scorro le altre righe della matrice e rimuovo quelle relative ai quartieri che possono essere serviti dal deposito j (possiamo farlo, a noi interessa solo se il deposito è distante meno di quindici minuti o no, non i minuti precisi.).

4. (*Riduzione per dominanza*) gli uno di una riga sono un sottoinsieme degli uno di un'altra riga, rimuoviamo la riga dove è presente il sottoinsieme.

Ultima regola abbastanza impegnativo: le coppie da considerare sono $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-1)!}$.

Introduzione di costi nella scelta dei luoghi

Il problema visto fino ad ora pone lo stesso costo per l'apertura di un qualunque deposito di ambulanze (luogo). Supponiamo che ci siano costi diversi: collocare un servizio nel luogo j (tra quelli a nostra disposizione) comporta un costo c_j.

siti	1	2	3	4	5
costo	6	9	10	8	7

L'unica cosa che ci limitiamo a modificare è la funzione obiettivo, che cambia sia nell'aspetto che nel significato: la somma non restituisce più il numero di depositi utilizzati, ma i costi complessivi derivanti dai depositi utilizzati.

$$\begin{cases} \boxed{\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j} \\ A \cdot x \geq e \\ x \in \{0,1\}^n \end{cases}$$

5.7.1.2 Valutazione superiore e valutazione inferiore

Valutazione inferiore.
Per quanto riguarda la valutazione inferiore è sufficiente il rilassamento continuo

$$\begin{cases} \min e \cdot x \\ A \cdot x \geq e \\ x \in \{0,1\}^n \end{cases} \implies \begin{cases} \min e \cdot x \\ A \cdot x \geq e \\ x \in [0,1]^n \end{cases}$$

Definizione di *Costo unitario nel problema di copertura*.

Dato il problema di copertura definiamo *costo unitario* il rapporto tra costo e numero di quartieri coperti.

Valutazione superiore (*Algoritmo di Chvatal*).
Consideriamo la seguente tabella rappresentante luoghi e quartiere.

Quartieri Luoghi	1	2	3	4
	6	5	4	3
1	1	1	0	0
2	9	1	0	1
3	0	0	0	1
4	1	0	1	0
5	1	0	...	

L'Algoritmo di Chvatal punta a ottenere in modo *greedy* una soluzione ammissibile in grado di raggiungere una buona fetta di popolazione.

1. Prendo il luogo che copre il maggior numero di quartieri. Nel caso della variante si introduce un *costo unitario* per considerare in contemporanea numero di quartieri serviti e costo del luogo.

2. Aggiorniamo la tabella per il passo successivo rimuovendo la colonna relativa al luogo selezionato allo step precedente, e le righe relative ai quartieri serviti dal medesimo luogo.

3. Ritorno allo step (1).

5.7.2 Variante: problema di massima copertura

Consideriamo una *matrice di copertura* con le caratteristiche viste nella variante del problema precedente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo detto che le righe rappresentano i quartieri/utenti e le colonne i luoghi che offrono servizi (nel caso dell'esempio precedente i depositi delle ambulanze). Aggiungiamo i seguenti dettagli:

- per ogni quartiere si indica la popolazione;
- si indica un numero massimo p (Esempio $p = 2$) che rappresenta il numero massimo di luoghi dove attivo servizi.

L'obiettivo del problema non è più scegliere i luoghi per coprire tutti i quartieri, ma scegliere i luoghi in modo tale da raggiungere il maggior numero di persone possibile rispettando il vincolo dei quindici minuti. Il numero di soluzioni possibili è $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Scriviamo il modello matematico

$$\begin{cases} \max h \cdot z \\ A \cdot x \geq z \\ \sum_j x_j = p \\ x \in \{0,1\}^n \\ z \in \{0,1\}^m \end{cases}$$

dove n è il numero di luoghi ed m il numero di quartieri.

1. **Variabili di decisioni**.

   Abbiamo sicuro le variabili x_j viste nella variante precedente

   $$x_j = \begin{cases} 0 & \text{Non colloco il servizio nel luogo } j \\ 1 & \text{Colloco il servizio nel luogo } j \end{cases}$$

   Introduciamo anche nuove variabili binarie z_i

   $$z_i = \begin{cases} 0 & \text{Il quartiere (luogo) } i \text{ non è coperto} \\ 1 & \text{Il quartiere (luogo) } i \text{ è coperto} \end{cases}$$

   Complessivamente abbiamo $n + m$ variabili.

2. **Funzione obiettivo**.

   Abbiamo detto che il nostro obiettivo è massimizzare la popolazione raggiunta dai luoghi selezionati. Introduciamo il vettore h dove

   $$h_j \equiv \text{Popolazione del quartiere } j$$

   Se l'obiettivo è massimizzare la popolazione raggiunta allora la funzione obiettivo restituirà la popolazione raggiunta con i luoghi selezionati. Otteniamo

   $$\max h \cdot z \longrightarrow \text{Esempio: } \max\ 3000z_1 + 2000z_2 + 1500z_3 + \cdots + 1900z_9$$

3. **Vincoli**.

   - **Matrice di copertura**.
     Abbiamo bisogno di legare le variabili z_i ed x_j, visto che non stanno insieme nella funzione obiettivo. Poniamo quanto segue (prendiamo le prime due righe come esempio)

     $$\begin{array}{l} x_1 + x_3 + x_4 \geq z_1 \\ x_2 + x_3 + x_4 \geq z_2 \\ \vdots \end{array} \implies A \cdot x \geq z$$

     Con la variabile z_i indichiamo se un particolare quartiere è servito o meno. Per ogni riga i-esima considero i depositi/luoghi che rispettano il vincolo dei quindici minuti relativamente al quartiere i. Riflessioni

     - $z_1 = 0$. Il quartiere non viene servito. Con la disuguaglianza non impongo l'obbligo di scelta di almeno uno dei depositi

       $$x_1 + x_3 + x_4 \geq 0$$

       Si tenga a mente che la disuguaglianza non impedisce la scelta di uno di questi depositi (potrebbero essere scelti in virtù di altri vincoli della matrice di copertura).
     - $z_1 = 1$. Il quartiere viene servito. Con la disuguaglianza impongo l'obbligo di scelta di almeno uno dei depositi tra x_1, x_3 e x_4.
   - **Numero di luoghi in cui decido di aprire**.
     Abbiamo detto che abbiamo un numero massimo p di luoghi dove attivo servizi. Per imporre la cosa affermo che

     $$\sum_j x_j = p$$

     Chiaramente col vincolo impongo che i luoghi aperti **SIANO DUE**, e non che ne aprirò AL PIU' DUE. Soluzioni con $=$ e $\leq$ sono uguali (si considera un maggior numero di soluzioni, complicazioni essitenziali), mentre non ha senso imporre $<$[1].
   - **Vincoli di interezza**.
     Le variabili sono chiaramente binarie, quindi $x \in \{0,1\}^n, z \in \{0,1\}^m$

[1] Preso $p = 2$ supponiamo di porre il $<$: poniamo un solo luogo, se pongo un secondo luogo (e quindi pongo $=$) avrò una soluzione migliore!

5.7.2.1 Valutazione superiore e valutazione inferiore

Valutazione superiore.
Banalmente il rilassamento continuo del problema. Ricordarsi che la valutazione superiore del problema è valida in qualunque contesto, tranne il TSP (commesso viaggiatore) per il numero esponenziale di vincoli.

Valutazione inferiore (*Algoritmo di Chvatal*).
Consideriamo la seguente tabella rappresentante luoghi e quartiere (con tanto di popolazione per ogni quartiere).

Quartieri Luoghi	1	2	3
2000	1	0	1
3000	0	1	0
4000	1	1	0
1500	0	0	1
1700	1	0	0

L'Algoritmo di Chvatal punta a ottenere in modo *greedy* una soluzione ammissibile in grado di raggiungere una buona fetta di popolazione.

1. Prendo il luogo che, in virtù della matrice di copertura, raggiunge il numero maggiore di persone. Nell'esempio il luogo in questione è il num. 1.
2. Aggiorniamo la tabella per il passo successivo rimuovendo la colonna relativa al luogo selezionato allo step precedente, e le righe relative ai quartieri serviti dal medesimo luogo. Nell'esempio precedente rimane

Quartieri Luoghi	2	3
3000	1	0
1500	0	1

3. Ritorno allo step (1). Nell'esempio prenderemo il luogo 2, che copre una popolazione maggiore nei quartieri rimanenti (quelli che il luogo 1 non copre).

Il numero di passi da svolgere è p, nell'esempio $p = 2$. La soluzione ottenuta è la seguente

```
x=(1 1 0 1 1 1 0 1)      v=10700
```

- Le prime tre variabili in x derivano dai luoghi scelti con l'algoritmo (le variabili x_j). I luoghi scelti sono 1 (al primo step) e 2 (al secondo step), mentre 3 non è stato scelto.

  ```
  x=(1 1 0 ...
  ```

- Le variabili rimanenti (z_i) si ottengono osservando quali quartieri sono serviti dai luoghi scelti. Con la scelta dei luoghi 1 e 2 serviamo i quartieri $1, 2, 3, 5$.

  ```
  ... 1 1 1 0 1)
  ```

5.8 Flusso di costo minimo su reti bilanciate

$\boxed{\text{Si rimanda al capitolo della } \textit{PL su reti}.}$

5.9 Cammini di costo minimo orientati

$\boxed{\text{Si rimanda al capitolo della } \textit{PL su reti}.}$

5.10 Massimo flusso

$\boxed{\text{Si rimanda al capitolo della } \textit{PL su reti}.}$

Parte III

Appendici

Appendice A

Definizioni

A.1 Programmazione Lineare

Definizione di *Problema di programmazione lineare*.

Un problema di *Programmazione Lineare* (PL) consiste nel trovare il massimo o il minimo di una funzione lineare, soggetta ad un insieme finito di vincoli lineari di uguaglianza e/o di disuguaglianza:

$$\begin{cases} \min / \max c \cdot x \\ A \cdot x \leq b \\ B \cdot x \geq d \\ D \cdot x = e \end{cases}$$

Definizione di *Variabile di scarto*.

Una variabile all'interno di un problema di PL è detta *variabile di scarto* se rispetta le seguenti condizioni:

1. non è presente nella funzione obiettivo;
2. è presente in un solo vincolo;
3. è ≥ 0.

Definizione di *Forma standard di PL*.

La forma standard è una forma a cui possiamo ricondurre tutti i problemi di PL. Abbiamo come esempi il formato primale standard e il formato duale standard.

Definizione di *Problema di PL in formato primale standard*.

Un problema di PL nella seguente forma

$$\begin{cases} \max c^T \cdot x \\ A \cdot x \leq b \end{cases}$$

è detto *problema di programmazione lineare in formato primale standard.* Esso presenta una funzione obiettivo con max e disuguaglianze col minore o uguale.

Definizione di *Regione ammissibile*.

La regione ammissibile di un problema P consiste nell'insieme delle soluzioni ammissibili. La regione ammissibile è un poliedro, definito dai vincoli.

Definizione di *Poliedro*.

Dicesi poliedro l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi. Precisamente:

- *intersezione* in quanto tutti i vincoli devono essere rispettati
- *numero finito* in quanto il numero di vincoli deve essere finito
- *semispazi chiusi*, cioè vincoli di minore (semispazio) o uguale (semispazio chiuso, cioè semispazio a cui appartiene pure la sua frontiera)

Il poliedro costituisce la regione ammissibile del mio problema di PL. Nel caso dell'insieme $\mathbb{R}^2$ si ha un poligono: in quel caso possiamo risolvere geometricamente.

Definizione di *Poliedro (def. equivalente)*.

In modo equivalente possiamo definire il poliedro come il seguente insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x \leq b\}$$

dove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$ (ricordiamo che m consiste nel numero di vincoli, mentre n è il numero di variabili). Fornire la coppia $< A, b >$ significa fornire un poliedro.

Definizione di *Soluzione ammissibile*.

$\overline{x}$ è *soluzione ammissibile* per un problema P se rispetta tutti i vincoli (e quindi appartiene alla regione ammissibile), cioè $A \cdot \overline{x} \leq b$.

Definizione di *Soluzione ottima*.

$\overline{x}$ è detta *soluzione ottima* per un problema P se ottimizza la funzione obiettivo.

Definizione di *Linee di isocosto / isoguadagno*.

Insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ (nei casi di risoluzione geometrica poniamo $n = 2$) in cui la funzione obiettivo $c \cdot x$ assume lo stesso valore (*iso*).

$$L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : c^t x = v\}$$

dove $v \in \mathbb{R}$ rappresenta il costo / guadagno.

Definizione di *Combinazione convessa*.

Dato un insieme di punti $x^1, \dots, x^k$ appartenenti a $\mathbb{R}^n$ si dice combinazione convessa dei punti la seguente combinazione lineare

$$y = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j \qquad \text{dove } \lambda_j \in [0,1] \, \forall j \text{ e } \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$$

Otteniamo $y \in \mathbb{R}^n$.

Definizione di *Involucro convesso*.

Dato l'insieme dei punti $x^1, \dots, x^k$ definiamo involucro convesso l'insieme delle possibili combinazioni convesse. Lo denotiamo nel seguente modo

$$\mathrm{conv}(V)$$

dove $V = \{x^1, \dots, x^k\}$. Rappresentiamo con questa notazione la più piccola figura convessa contenente i punti dell'insieme V (per esempio con tre punti avrò un triangolo, con quattro punti un quadrilatero...).

Definizione di *Combinazione conica*.

Dato un insieme di punti $x^1, \dots, x^k$ appartenenti a $\mathbb{R}^n$ si dice combinazione conica dei punti la seguente combinazione lineare

$$y = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j \qquad \text{dove } \lambda j \geq 0 \forall j$$

Otteniamo $y \in \mathbb{R}^n$.

Definizione di *Involucro conico*.

Dato l'insieme dei punti $x^1, \dots, x^k$ definiamo involucro conico l'insieme delle possibili combinazioni coniche. Lo denotiamo nel seguente modo

$$\text{cono}(V)$$

dove $V = \{x^1, \dots, x^k\}$. Rappresentiamo con questa notazione la più piccola figura contenente i punti dell'insieme V (per esempio con un punto avrò una semiretta, con due punti un cono).

Definizione di *Vertice*.

Un vertice $\overline{x}$ è un punto del poliedro che non si può esprimere come combinazione convessa di altri punti del poliedro diversi da $\overline{x}$. Seguono alla definizione i seguenti corollari.

1. Se il poliedro ha vertici V è l'insieme dei vertici.
2. Se il poliedro è limitato questo ha sempre vertici.
3. Se il poliedro è limitato allora $E = \{\}$.

Definizione di *Base*.

Dato un poliedro $P =< A, b >$ definiamo base l'insieme di indici di riga $B = \{1, \dots, n\}$ (dove n è il numero di decisioni) tali che la sottomatrice A_B, ottenuta dall'estrazione delle righe indicate in B, abbia $\det(A_B) \neq 0$. Il determinante non nullo assicura che

- non siamo stati scelti vincoli paralleli, e
- l'unicità della soluzione per Rouchè-Capelli.

Definizione di *Matrice di base*.

La sottomatrice A_B, estratta dalla matrice A mantenendo solo le righe indicate in B, è detta *matrice di base*. Gli indici di riga non considerati nella base B sono solitamente posti nel vettore N.

Definizione di *Soluzione di base (primale)*.

Data la base B e la sottomatrice A_B definiamo *soluzione di base* il seguente calcolo

$$\overline{x} = A_B^{-1} b_B$$

Definizione di *Soluzione di base ammissibile (primale)*.

Dato un poliedro $< A, b >$, la base B e il conseguente vettore N, una soluzione di base $\overline{x}$ si dice *ammissibile* se

$$A_i \overline{x} \cdot \leq b_i \quad \forall i \in N$$

Tutti i vincoli sono soddisfatti.

Definizione di *Soluzione di base non ammissibile (primale)*.

Dato un poliedro $< A, b >$, la base B e il conseguente vettore N, una soluzione di base $\overline{x}$ si dice *non ammissibile* se

$$\exists i \in N : A_i \overline{x} > b_i$$

Esistono vincoli del poliedro non soddisfatti.

Definizione di *Soluzione di base degenere (primale)*.

Dato un poliedro $< A, b >$, la base B e il conseguente vettore N, una soluzione di base $\overline{x}$ si dice *degenere* se

$$\exists i \in N : A_i \overline{x} = b_i$$

La soluzione di base è generata da una sola base (B).

Definizione di *Soluzione di base non degenere (primale)*.

Dato un poliedro $< A, b >$, la base B e il conseguente vettore N, una soluzione di base $\overline{x}$ si dice *non degenere* se

$$A_i \overline{x} \neq b_i \;\; \forall i \in N$$

La soluzione di base è generata da più basi.

Definizione di *Problema di PL in formato duale standard*.

Un problema di PL nella seguente forma è detto *problema in formato duale standard.*

$$\begin{cases} \min c^T \cdot x \\ A \cdot x = b \\ x_k \geq 0 \qquad \forall k \end{cases}$$

Definizione di *Soluzione di base (duale)*.

Data la base B (e l'insieme complementare N) e la sottomatrice A_B definiamo *soluzione di base* il seguente calcolo

$$\overline{y} = (y_B, y_N) = \left(cA_B^{-1}, 0\right)$$

dove $y_i = 0$, $\forall i \in N$

Definizione di *Soluzione di base ammissibile (duale)*.

Dato un poliedro duale e la base B, una soluzione di base $\overline{y}$ si dice *ammissibile* se

$$y_i \geq 0 \ \forall i \in B$$

Tutti i vincoli del poliedro duale (i $\geq$) sono soddisfatti.

Definizione di *Soluzione di base non ammissibile (duale)*.

Dato un poliedro duale e la base B, una soluzione di base $\overline{y}$ si dice *non ammissibile* se

$$\exists i \in B : y_i < 0$$

Almeno un vincolo del problema duale non è rispettato.

Definizione di *Soluzione di base degenere (duale)*.

Dato un poliedro duale e la base B, una soluzione di base $\overline{y}$ si dice *degenere* se

$$\exists i \in B : y_i = 0$$

Si ha almeno una componente nulla in y_B.

Definizione di *Soluzione di base non degenere (duale)*.

Dato un poliedro duale e la base B, una soluzione di base $\overline{y}$ si dice *non degenere* se

$$y_i \neq 0 \ \ \forall i \in B$$

Non si hanno componenti nulle in y_B.

A.2 Programmazione Lineare Intera

Definizione di *Valutazione inferiore e valutazione superiore*.

Dato un problema di PLI definiamo *valutazione inferiore* e *valutazione superiore* come gli estremi di un intervallo (detto GAP) all'interno del quale è inclusa la soluzione ottima del problema di PLI. Nel caso di un problema di massimo abbiamo:

- una valutazione inferiore ottenuta mediante i cosiddetti *algoritmi greedy* (golosi), che differiscono per tipologia di problema;
- una valutazione superiore ottenuta mediante rimozione di vincoli ed espansione della regione ammissibile (solitamente si calcola il rilassamento del continuo del problema).

Nel problema di minimo valutazione inferiore e valutazione superiore si scambiano.

Definizione di *Rilassamento continuo del problema di PLI*.

Dato un problema di PLI definiamo rilassamento continuo il problema stesso privato dei vincoli di interezza: otteniamo un problema di PL risolvibile col simplesso!

Definizione di *Rendimento nel problema dello zaino*.

Dato il problema dello zaino definiamo rendimento il rapporto tra valore e peso di un bene. Questa cosa ci serve per la valutazione superiore nel problema dello zaino.

Definizione di *Costo unitario nel problema di copertura*.

Dato il problema di copertura definiamo *costo unitario* il rapporto tra costo e numero di quartieri coperti.

Definizione di *Grafo connesso*.

Un grafo si dice connesso se per ogni coppia di nodi del grafo esiste un cammino che li connette.

Definizione di *Ciclo hamiltoniano di costo minimo*.

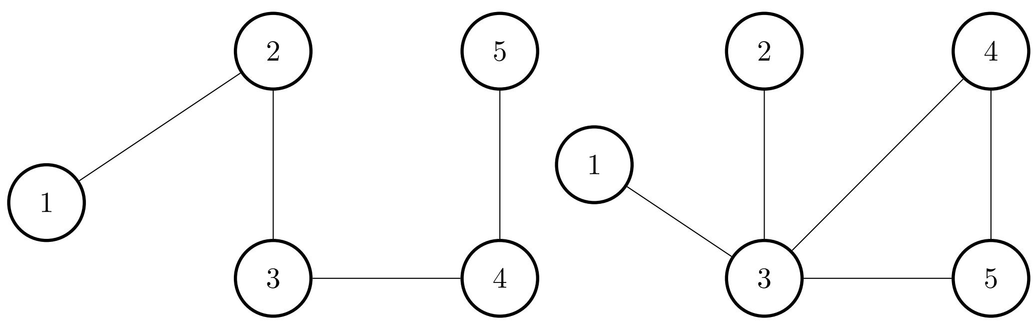
Dato un insieme di nodi N e un insieme di archi $A \subseteq N \times N$ definiamo ciclo hamiltoniano quel ciclo che

- attraversa tutti i nodi (grafo connesso), e
- non ritorna sui nodi già visitati.

Si parla di ciclo di costo minimo quando gli archi sono scelti in modo tale da minimizzare i costi. Questo ciclo è quanto ricercato da noi nel problema del commesso viaggiatore (TSP).

Definizione di *Albero di copertura di costo minimo*.

Dato un insieme di nodi N e un insieme di archi $A \subseteq N \times N$ definiamo albero di copertura un sottoinsieme di archi $\subseteq A$ tale che il sottografo con nodi N sia connesso e non contenga cicli. Si considerino ad esempio le seguenti figure:



quella a sinistra è un albero di copertura, la seconda no! L'albero è di costo minimo se gli archi sono posti in modo tale da minimizzare i costi (applicazione dell'Algoritmo di Kruskal).

Definizione di *k-albero di costo minimo*.

Dato un grafo di partenza caratterizzato da un insieme di nodi N, definiamo k-albero un insieme di n archi di cui:

- $n-2$ archi formano un albero di copertura sul sottografo formato dai nodi $N-\{k\}$;
- due archi sono incidenti sul nodo k.

Si parla di k-albero di costo minimo se:

- l'albero di copertura è di costo minimo (lo si trova con l'algoritmo di Kruskal);
- gli archi incidenti su k sono quelli di costo minimo.

A.3 Programmazione Lineare su Reti

Definizione di *Rete bilanciata*.

Data una rete con l'insieme dei nodi N, l'insieme degli archi $A \subseteq N \times N$ e il vettore dei bilanci b, questa è bilanciata se la somma dei bilanci è nulla

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = 0$$

dove n è il numero di nodi presenti nella rete.

Definizione di *Matrice di incidenza della rete*.

Data una rete caratterizzata da n nodi ed m archi definiamo *matrice di incidenza* la matrice $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$ dove una componente

$$E_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{Nodo } a \text{ è la destinazione dell'arco } b =< i,j >\text{, cioè } a = j \\ -1 & \text{Nodo } a \text{ è l'origine dell'arco } b =< i,j >\text{, cioè } a = i \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

La matrice è costituita da n righe ed m archi (con a indico la riga della matrice, con $b =< i,j >$ la colonna). Si tenga a mente che questa matrice è solitamente moltiplicata con x, quindi con le variabili x_{ij}.

Definizione di *Matrice unimodulare*.

Una matrice $m \times n$, con $n > m$ e rango massimo n si dice *unimodulare* se tutte le sottomatrici quadrate $n \times n$ invertibili hanno $\det A = \pm 1$

Definizione di *Costo ridotto dell'arco*.

Dato un potenziale di base definiamo

$$\overline{c}_{ij}^{\pi} = c_{ij} + \pi_i - \pi_j$$

il *costo ridotto dell'arco* ij.

Definizione di *Flusso di base (reti non capacitate)*.

Dato un problema di flusso di costo minimo non capacitato

$$\begin{cases} \min c \cdot x \\ x \cdot E^t = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

un flusso di base è $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_T & x_L \end{pmatrix}$, dove con la ripartizione distinguiamo:

- T, l'insieme degli archi che costituiscono l'albero di copertura;
- L, l'insieme degli archi che non fanno parte dell'albero di copertura.

Di default abbiamo $\overline{x}_L = 0$. La base è rappresentata dagli archi che costituiscono un albero di copertura, viceversa un albero di copertura può essere ricondotto a una base.

Definizione di *Flusso di base ammissibile (reti non capacitate)*.

Dato un flusso di base $\overline{x}$ (con la relativa bipartizione $\{T, L\}$, e conseguente $\overline{x}_L = 0$) affermiamo che questo è ammissibile se

$$\overline{x}_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \in T$$

Definizione di *Flusso di base non ammissibile (reti non capacitate)*.

Dato un flusso di base $\overline{x}$ (con la relativa bipartizione $\{T, L\}$, e conseguente $\overline{x}_L = 0$) affermiamo che questo è non ammissibile se

$$\exists (i,j) \in T : \overline{x}_{ij} < 0$$

Definizione di *Flusso di base degenere (reti non capacitate)*.

Dato un flusso di base $\overline{x}$ (con la relativa bipartizione $\{T, L\}$, e conseguente $\overline{x}_L = 0$) affermiamo che questo è degenere se

$$\exists (i,j) \in T : \overline{x}_{ij} = 0$$

In sostanza affermo che esistono archi dell'albero di copertura dove non passano unità di flusso.

Definizione di *Problema dei potenziali della rete (non capacitato)*.

Data un problema di flusso di costo minimo (non capacitato) di partenza definiamo il *problema dei potenziali della rete*, le cui soluzioni sono le complementari dei flussi di base

$$\begin{cases} \max b \cdot \pi \\ E^T \cdot \pi \leq c \end{cases}$$

Definizione di *Potenziale di base (non capacitato)*.

Dato un flusso di base $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_T & x_L \end{pmatrix}$ definiamo potenziale di base il seguente calcolo

$$\pi = c \cdot E_T^{-1}$$

in realtà svolgeremo questo calcolo evitando il calcolo delle matrici inverse.

Definizione di *Potenziale di base ammissibile (non capacitato)*.

Dato un potenziale di base π affermiamo che questo è ammissibile se

$$c_{ij}^{\pi} \geq 0 \, \forall (i,j) \in L$$

Definizione di *Potenziale di base non ammissibile (non capacitato)*.

Dato un potenziale di base π affermiamo che questo non è ammissibile se

$$\exists (i,j) \in L : c_{ij}^{\pi} < 0$$

Definizione di *Potenziale di base degenere (non capacitato)*.

Dato un potenziale di base π affermiamo che questo è degenere se

$$\exists (i,j) \in L : c_{ij}^{\pi} = 0$$

Definizione di *Flusso di base (reti capacitate)*.

Dato un problema di flusso di costo minimo capacitato

$$\begin{cases} \min c \cdot x \\ x \cdot E^t = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

un flusso di base è $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_T & x_U & x_L \end{pmatrix}$, dove con la tripartizione distinguiamo:

- T, l'insieme degli archi che costituiscono l'albero di copertura;
- U, l'insieme degli archi che non fanno parte dell'albero di copertura e che poniamo saturi;
- L, l'insieme degli archi che non fanno parte dell'albero di copertura e che poniamo vuoti.

Di default abbiamo $\overline{x}_L = 0, \overline{x}_U = u_L$. In parallelo consideriamo le partizioni delle variabili di scarto T', U', L'. La base è rappresentata dall'insieme

$$B = T \cup U \cup T' \cup L'$$

Definizione di *Flusso di base ammissibile (reti capacitate)*.

Dato un flusso di base $\overline{x}$ (con la relativa tripartizione $\{T, U, L\}$, e conseguente $\overline{x}_L = 0, \overline{x}_U = u_L$) affermiamo che questo è ammissibile se

$$0 \leq \overline{x}_{ij} \leq u_{ij}, \forall (i,j) \in T$$

Definizione di *Flusso di base non ammissibile (reti capacitate)*.

Dato un flusso di base $\overline{x}$ (con la relativa tripartizione $\{T, U, L\}$, e conseguente $\overline{x}_L = 0, \overline{x}_U = u_L$) affermiamo che questo è non ammissibile se

$$\exists (i,j) \in T : \overline{x}_{ij} < 0 \qquad \exists (i,j) \in T : \overline{x}_{ij} > u_{ij}$$

Definizione di *Flusso di base degenere (reti capacitate)*.

Dato un flusso di base $\overline{x}$ (con la relativa bipartizione $\{T, L\}$, e conseguente $\overline{x}_L = 0$) affermiamo che questo è degenere se

$$\exists (i,j) \in T : \overline{x}_{ij} = 0 \qquad\qquad \exists (i,j) \in T : x_{ij} = u_{ij}$$

In sostanza affermo che esistono archi dell'albero di copertura che sono vuoti (e non stanno in L) e/o archi che sono saturi (e non stanno in U).

Definizione di *Problema dei potenziali della rete (capacitato)*.

Data un problema di flusso di costo minimo (capacitato) di partenza definiamo il *problema dei potenziali della rete*, le cui soluzioni sono le complementari dei flussi di base

$$\begin{cases} \max\ b \cdot \pi + u \cdot \mu \\ \begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ \mu \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Definizione di *Potenziale di base ammissibile (capacitato)*.

Dato un potenziale di base π affermiamo che questo è ammissibile se

$$c^{\pi}_{ij} \geq 0 \,\forall (i,j) \in L \qquad\qquad c^{\pi}_{ij} \leq 0 \,\forall (i,j) \in U$$

Definizione di *Potenziale di base non ammissibile (capacitato)*.

Dato un potenziale di base π affermiamo che questo non è ammissibile se

$$\exists (i,j) \in L : c^{\pi}_{ij} < 0 \qquad\qquad \exists (i,j) \in U : c^{\pi}_{ij} > 0$$

Definizione di *Potenziale di base degenere (capacitato)*.

Dato un potenziale di base π affermiamo che questo è degenere se

$$\exists (i,j) \in L : c^{\pi}_{ij} = 0 \qquad\qquad \exists (i,j) \in U : c^{\pi}_{ij} = 0$$

A.4 Programmazione Non Lineare

Definizione di *Punto stazionario*.

Data una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisco *punto stazionario* il valore $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $\nabla f(x) = 0$

Definizione di *Matrice definita e semidefinita positiva e negativa*.

Definiamo quanto segue.

- Con **matrice definita positiva** si intende una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che il seguente prodotto scalare risulta positivo $< A \cdot x, x > > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$
- Con **matrice semidefinita positiva** si intende una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che il seguente prodotto scalare risulta positivo o nullo $< A \cdot x, x > \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$
- Con **matrice definita negativa** si intende una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che il seguente prodotto scalare risulta negativo $< A \cdot x, x > < 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$
- Con **matrice semidefinita negativa** si intende una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che il seguente prodotto scalare risulta negativo o nullo $< A \cdot x, x > \leq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$

Per definire la matrice troviamo gli autovalori calcolando i valori λ nel determinante $\det(A - \lambda I) = 0$. Prendiamo ad esempio la matrice seguente, poniamo la matrice $A - \lambda I$ e calcoliamo quanto detto

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \Longrightarrow (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \\ \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1 \end{matrix}$$

Definizione di *Restrizione della funzione*.

Data una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiamo *restrizione della funzione* una funzione $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ottenuta restringendo il dominio della funzione. Nel nostro caso ciò che ci interessa è la *restrizione a una semiretta*, dove scriviamo l'equazione della semiretta in formato parametrico e successivamente sostituiamo nella funzione f. Consideriamo il seguente esempio

$$\begin{matrix} f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 \\ \begin{cases} x_1 = 0 + t \\ x_2 = 3 + t \end{cases} \end{matrix} \Longrightarrow \gamma(t) = t^2 - (3+t)^2 = -9 - 6t$$

Definizione di *Funzione quadratica*.

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è detta *quadratica* se consiste in un polinomio di secondo grado avente la seguente struttura

$$< x, Ax > + < c, x >$$

dove si distingue una componente lineare da una non lineare. Queste funzioni ci piacciono poichè il gradiente è un sistema lineare, e la hessiana costante!

- **Esempio**. $3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 5x_1 - 6x_2$
- **Esempio sbagliato 1**. $4x_1^3 - 5x_1x_2$ (primo termine di grado 3)
- **Esempio sbagliato 2**. $x_1^2x_2 - 3x_2^2$ (termine misto di grado 3)

Definizione di *Funzione coerciva*.

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è detta *coerciva* se

$$\lim_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

cioè se la funzione va a $+\infty$ in tutte le direzioni. Queste funzioni ci piacciono perchè ci danno certezza dell'esistenza di un minimo assoluto. Verifico se una funzione è coerciva testando una serie di restrizioni della funzione.

Definizione di *Funzione anti-coerciva*.

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è detta *anti-coerciva* se la funzione f cambiata di segno è coerciva

$$\lim_{||x|| \to +\infty} -f(x) = +\infty$$

Queste funzioni ci piacciono perchè ci danno certezza dell'esistenza di un massimo assoluto.

Definizione di *Funzione convessa*.

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è detta *convessa* se, data una qualunque coppia di punti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ possiamo definire una corda che sottende la curva

$$f\left(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2\right) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2), \forall \lambda \in [0,1], \forall x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$$

Una funzione f è convessa se la hessiana è semidefinita positiva $\forall x$. Ci piacciono molto le funzioni convesse e quadratiche poichè la hessiana è costante, e questo permette una verifica veloce. In più si veda il *teorema su punti stazionari in funzioni convesse*.

Appendice B

Teoremi

B.1 Programmazione Lineare

Teorema (1) di Weyl per la rappresentazione dei poliedri.

Dato un qualunque poliedro P esisterà sempre un insieme di punti V e un insieme di vettori E tali che

$$P = \text{conv}(V) + \text{cono}(E)$$

dove $V \subseteq P$. E può essere vuoto (per vuoto si intende porre l'origine), mentre V non può essere vuoto. Si parla di CNS, cioè:

- dato un poliedro $P =< A, b >$ è possibile individuare $< V, E >$;
- data la coppia $< V, E >$ è possibile individuare $P =< A, b >$.

Teorema (2) fondamentale della PL.

Dato un problema di PL, se

- il poliedro è non vuoto,
- il poliedro ha vertici e
- la funzione obiettivo non va a infinito

allora esiste un valore k tale che il vertice v^k è soluzione ottima.

Teorema (3) della caratterizzazione dei vertici (primale).

Un punto $x \in P$ è un vertice di poliedro primale se e solo se esso è una soluzione di base ammissibile (primale).

Teorema (3bis) della caratterizzazione dei vertici (bis, duale).

Un punto $x \in D$ è un vertice di poliedro duale se e solo se esso è una soluzione di base ammissibile (duale).

Teorema (4) della dualità.

Sia $(P) \neq \emptyset$, $(D) \neq \emptyset$, allora

$$\max_{x \in P} c \cdot x = \min_{y \in D} y \cdot b$$

Teorema (5) su poliedro del trasporto e del vertice.

Siano o_i e d_i numeri interi (richieste e disponibilità). Il poliedro del trasporto e il poliedro dell'assegnamento hanno vertici a componenti intere. Il discorso è: esiste almeno una soluzione a componenti intere. In presenza di questo teorema possiamo risolvere il trasporto di problemi indivisibili e di assegnamento cooperativo con *linprog*.

Teorema (6) sul numero di step finiti del simplesso.

L'algoritmo del simplesso è corretto e termina in un numero finito di passi.

Teorema (7) sul numero di soluzioni del poliedro duale.

Dato il poliedro duale (D) e il corrispondente poliedro ausiliario (DA):

- se la soluzione ottima $v_{DA} = 0$ allora (D) è non vuoto
- se v_{DA} è strettamente positivo allora (D) è vuoto.

B.2 Programmazione Lineare Intera

Teorema (8) di equivalenza tra PL e PLI.

Dato un poliedro $P =< A, b, c >$ limitato, sia S il corrispondente poliedro in PLI con A, b interi (al più razionali), sia v_S l'ottimo in S. Possiamo dire che

$$v_S = V_{\text{conv } S}$$

dove v_S si ottiene da un problema di PLI, mentre $V_{\text{conv } S}$ si ottiene da un problema di PL.

Teorema (9) sui piani di taglio di Gomory.

Dato un problema di PLI posto nella seguente forma

$$(P) = \begin{cases} \min c \cdot x \\ A \cdot x = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

definiamo

x_{RC} ottimo del rilassamento continuo di (P)
A_B base ottima
$(x_{RC})_r$ una componente frazionaria nell'ottimo del rilassato continuo

Definiamo *piano di taglio di Gomory* quanto segue

$$\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{r_j}\} x_j \geq \{(x_{RC})_r\}$$

dove $\tilde{a}_{r_j}$ è una componente della matrice $\tilde{A} = A_B^{-1} A_N$

Teorema (10) sulla valutazione superiore del problema dello zaino.

Conviene saturare lo zaino col bene di massimo rendimento, cioè

$$\begin{cases} \max \sum_{i}^{m} v_j x_j \\ \sum_{i}^{m} p_j x_j \leq C \\ x_j \geq 0 \end{cases} \implies \begin{array}{l} x_1 = 0, \dots, x_r = \frac{C}{p_r}, x_{r+1} = 0, \dots, x_n = 0 \\ \text{Valore ottimo: } c\frac{v_r}{p_r} \end{array}$$

B.3 Programmazione Lineare su Reti

Teorema (11) sulla matrice di incidenza non singolare.

La matrice di incidenza di un albero di copertura è una matrice non singolare con

$$\det A = \pm 1$$

ergo è una matrice invertibile!

- Il rango di E^T è $n-1$.
- Ogni sottomatrice $(n-1) \times (n-1)$ invertibile è relativa ad un albero di copertura.

Ogni base ha un albero di copertura, ogni albero di copertura ha una base.

Teorema (11bis).

Dato il seguente modello

$$\begin{cases} \min c \cdot x \\ (x^T, w^T) \cdot \begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ u \end{pmatrix} \\ x \geq 0, w \geq 0 \end{cases}$$

Il rango della matrice $\begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix}$ è $m+n-1$. Il determinante della matrice è ± 1.

Teorema (12) sull'interezza.

Le soluzioni di base di problemi di PL con matrice A unimodulare sono a componenti intere! Dimostrazione immediata ricordando il *metodo di Cramer* per calcolare l'inversa.

Teorema (13) di Bellman (C.S.).

Sia T un albero di copertura che genera un flusso (x_T, x_L) ammissibile (cioè $x_T \geq 0$). Se

$$c_{ij}^{\pi} \geq 0, \forall (i,j) \in L$$

allora siamo all'ottimo.

Teorema (13bis) di Bellman (C.S.).

Data una tripartizione $\{T, L, U\}$ che genera un flusso ammissibile, se valgono le condizioni di Bellman

$$\begin{cases} c^{\pi}_{ij} \geq 0 & \forall (i,j) \in L \\ c^{\pi}_{ij} \leq 0 & \forall (i,j) \in U \end{cases}$$

allora siamo all'ottimo.

Teorema (14) sul calcolo del potenziale su reti capacitate.

Il potenziale su reti capacitate si calcola con le stesse tecniche di quello su reti non capacitate.

Teorema (15) di taglio sulla rete (*Max-Flow-Min-Cut*).

Il problema del taglio di capacità minima è il duale del flusso massimo!

Teorema (16) di correttezza di Ford-Furkelson.

L'algoritmo di *Ford-Furkelson* è corretto.

B.4 Programmazione Non Lineare

Teorema di AN2 sulla simmetria delle matrici hessiane.

Dato $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2$, $f \in C^{\infty}$, la matrice hessiana $Hf(x)$ è simmetrica!

Teorema di AL su matrici simmetriche e autovalori.

Le matrici simmetriche hanno autovalori reali

Teorema di Fermat per l'Analisi II (min locale).

Dato $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2$, $f \in C^{\infty}$, se $\overline{x}$ è minimo locale di f allora $\overline{x}$ è un p.to stazionario. Attenzione: è CN, ma non CS:

- se ho un p.to di minimo $\overline{x}$ è automatico che questo sia p.to stazionario;
- se ho un p.to stazionario $\overline{x}$ non è automatico che questo sia p.to di minimo.

Teorema 2 (min locale).

Dato $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2$, $f \in C^\infty$, se $\overline{x}$ è minimo locale di f e $\overline{x}$ p.to stazionario allora

$$Hf(\overline{x}) \geq 0$$

la Hessiana è *semidefinita positiva*. Attenzione: è CN, ma non CS:

- se ho p.to di minimo $\overline{x}$ è automatico che $Hf(\overline{x}) \geq 0$;
- se $Hf(\overline{x}) \geq 0$ non è automatico che $\overline{x}$ sia p.to di minimo.

Teorema 3 (min locale).

Dato $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2$, se $\nabla f(\overline{x}) = 0$ e $Hf(\overline{x}) > 0$ (hessiana nel p.to *definita positiva*) allora $\overline{x}$ è minimo locale! Questa è CS!

Teorema di Fermat per l'Analisi II (max locale).

Dato $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2$, $f \in C^\infty$, se $\overline{x}$ è massimo locale di f allora $\overline{x}$ è un p.to stazionario. Attenzione: è CN, ma non CS:

- se ho un p.to di massimo $\overline{x}$ è automatico che questo sia p.to stazionario;
- se ho un p.to stazionario $\overline{x}$ non è automatico che questo sia p.to di massimo.

Teorema 2 (max locale).

Dato $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2$, $f \in C^\infty$, se $\overline{x}$ è massimo locale di f e $\nabla f(\overline{x}) = 0$ allora

$$Hf(\overline{x}) \leq 0$$

la Hessiana è *semidefinita negativa*. Attenzione: è CN, ma non CS:

- se ho p.to di massimo $\overline{x}$ è automatico che $Hf(\overline{x}) \leq 0$;
- se $Hf(\overline{x}) \leq 0$ non è automatico che $\overline{x}$ sia p.to di massimo.

Teorema 3 (max locale).

Dato $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f \in C^2$, se $\nabla f(\overline{x}) = 0$ e $Hf(\overline{x}) < 0$ (hessiana nel punto *definita negativa*) allora $\overline{x}$ è massimo locale! Questa è CS!

Teorema sui punti stazionari in funzioni convesse.

I punti stazionari di funzioni convesse, se esistono, sono minimi assoluti.

Teorema di convergenza del metodo del gradiente.

Sia f una funzione coerciva, la successione del gradiente con ricerca esatta $\{x^k\}$

- termina con un numero finito di passi in un punto stazionario, o
- i suoi punti di accumulazione sono punti stazionari.

Teorema LKKT (Lagrange-Karush-Kulm-Tucker, C.N.).

Sia P il seguente problema

$$(P) = \begin{cases} \min / \max f(x) \\ g_1(x) \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(x) \leq 0 \\ h_1(x) = 0 \\ h_p(x) = 0 \end{cases}$$

siano $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, siano $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_p \in \mathbb{C}^2$. Sia D un insieme regolare. Affermiamo che (C.N., ma non C.S.):

- sia $\overline{x}$ minimo locale per (P). Allora $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n_+$ ed $\exists \mu$ tali che

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla h_j(\overline{x}) = 0 \\ < \lambda, g(\overline{x}) >= 0 \\ h(\overline{x}) = 0 \end{cases}$$

- sia $\overline{x}$ massimo locale per (P). Allora $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n_-$ ed $\exists \mu$ tali che

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla h_j(\overline{x}) = 0 \\ < \lambda, g(\overline{x}) >= 0 \\ h(\overline{x}) = 0 \end{cases}$$

Teorema LKKT (Lagrange-Karush-Kulm-Tucker, C.S.).

- Sia f convessa e D convesso, oltre che regolare. Inoltre $f, g, h \in C^2$. Sia $(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\mu})$ una soluzione del sistema LKKT. Se $\lambda \geq 0$ allora abbiamo $\overline{x}$ minimo globale.
- Sia f concava e D convesso, oltre che regolare. Inoltre $f, g, h \in C^2$. Sia $(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\mu})$ una soluzione del sistema LKKT. Se $\lambda \leq 0$ allora abbiamo $\overline{x}$ massimo globale.

Teorema di convergenza del metodo di Frank-Wolfe.

Una successione $\{x_k\}$ costruita con l'algoritmo di Frank-Wolfe converge ad un punto stazionario.

Teorema di convergenza del metodo del gradiente proiettato.

Una successione $\{x_k\}$ costruita con l'algoritmo del gradiente proiettato converge ad un punto stazionario.