ESERCIZIARIO CALCOLO NUMERICO

A cura di Marco Lampis

Licenza

Disclaimer

I seguenti appunti non sono stati redatti da un docente o un'addetto ai lavori, sono solamente appunti presi durante la preparazione dell'esame di calcolo numerico e perciò potrebbero contenere degli errori. Non mi assumo alcuna responsabilità e vi invito a guardare con cura e avvertirmi nel caso trovaste qualche imprecisione.

Attenzione: in particolare si segnala come le parti riferenti a troncamento e arrotondamento non siano sempre corrette, frutto di qualche generalizzazione di troppo.

Buona fortuna per la preparazione, non perdete i capelli!

ESERCIZI

Cardinalità Insieme di numeri macchina

$F(3, 3, -3, 3)$

Calcolare la cardinalità dell'insieme dei numeri di macchina F

Svolgimento

La formula per calcolare la cardinalità è:

$$2(\beta - 1)\beta^{m-1}(U - L + 1) + 1$$

dove:

- β = è la base di rappresentazione
- m = numero di cifre della rappresentazione nella mantissa
- L = minimo esponente da dare alla base
- U = massimo esponente da dare alla base

I valori di F sono:

$$(\underset{\beta}{3}, \underset{m}{3}, \underset{L}{-3}, \underset{U}{3})$$

sostituendo i valori nella formula:

$$2 \cdot (3-1) \cdot 2^{3-1} (3+3+1) + 1 = 253$$

↳ cardinalità

Errore Assoluto - Problema inverso

$$f(x,y) = \frac{x}{y} \qquad D = [1,2] \times [-2,-1]$$

Come si deve eseguire l'operazione e con quale errore assoluto bisogna introdurre x_1 e x_2 per avere $|\delta_f| \leq 10^{-2}$?

Svolgimento

Essendo due i contributi dell'errore, si divide l'errore in 2 parti uguali richiedendo:

$$\left.\begin{aligned} |\delta_A| &\leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \\ |\delta_D| &\leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \end{aligned}\right] = 10^{-2}$$

$\Rightarrow$ Errore derivante dall'algoritmo

$\Rightarrow$ Errore derivante dai dati

L'errore derivante dall'algoritmo rimarrà fino alla fine tale e quale, calcoliamo invece come deve essere quello commesso dai dati:

$$|\delta_D| \leq A_x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{errore su } x}}{|\delta x|} + A_y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{errore su } y}}{|\delta y|} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$$

Nuovamente dividiamo in due parti uguali:

$$\left.\begin{aligned} A_x |\delta x| &\leq \frac{1}{4} \cdot 10^{-2} \\ A_y |\delta y| &\leq \frac{1}{4} \cdot 10^{-2} \end{aligned}\right] = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$$

Continuiamo cercando i valori degli errori, si fa facendo la derivata della funzione rispetto a entrambe:

$$\frac{\partial \frac{x}{y}}{\partial x} = \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial \frac{x}{y}}{\partial y} = \cancel{\frac{1}{y}} \cdot -\frac{x}{y^2}$$

$$A_x = \max_{P \in D} \left|\frac{1}{y}\right| = 1 \qquad A_y = \max_{P \in D} \left|-\frac{x}{y^2}\right| = 2$$

$$|\delta_x| \leq \frac{\frac{1}{4}\cdot 10^{-2}}{A_x} = \frac{1}{4}\cdot 10^{-2}$$

$$|\delta_y| \leq \frac{\frac{1}{4}\cdot 10^{-2}}{A_y} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 10^{-2}}{A_y} = \frac{1}{8}\cdot 10^{-2}$$

Purché siano soddisfatte entrambe le limitazioni basta introdurre le due variabili troncando alla terza cifra decimale avendo quindi:

$$|\delta_x| \leq 10^{-3} \qquad |\delta_y| \leq 10^{-3}$$

Mettendo insieme ora tutte le maggiorazioni:

$$\begin{aligned}|\delta_F| &\leq |\delta_A| + |\delta_D| \\ &\leq \frac{1}{2}\cdot 10^{-2} + 1\cdot 10^{-3} + 2\cdot 10^{-3} \\ &= \boxed{\frac{4}{5}\cdot 10^{-2}}\end{aligned}$$

Errore assoluto - problema inverso 2

$$f(x,y) = \frac{x}{y} \qquad P_0 \in D = [1,3] \times [4,5]$$

dominio di x — dominio di y

con $|\delta_x| \leq 10^{-2}$ e $|\delta_y| \leq 10^{-2}$

Qual è l'errore massimo $|\delta_f|$ sapendo che il risultato dell'operazione è arrotondato alla seconda cifra decimale?

Svolgimento

L'errore finale è dato da $|\delta_f| = |\delta_A| + |\delta_D|$, dove $|\delta_A| \leq \frac{1}{2} 10^{-2}$ perché è scritto nel testo che si arrotonda alla seconda cifra decimale, mentre $|\delta_D|$:

$$|\delta_d| \leq A_x |\delta_x| + A_y |\delta_y|$$

si calcolano allora A_x ed A_y:

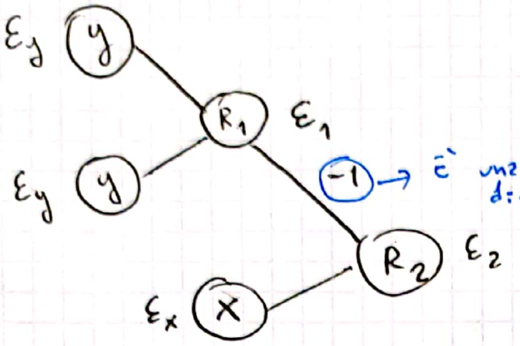
$$A_x = \max_D \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right| = \max \left| \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}$$

$$A_y = \max_D \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right| = \max \left| \frac{1}{y^2} \right| = \left| \frac{3}{16} \right| = \frac{3}{16}$$

Adesso abbiamo tutti i dati:

$$|\delta_f| \leq \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}}_{\delta_A} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{4}}_{A_x} \cdot \underbrace{10^{-2}}_{\delta_x} + \underbrace{\frac{3}{16}}_{A_y} \cdot \underbrace{10^{-2}}_{\delta_y}}_{\delta_D}$$

$$f(x, y) = \frac{x}{y^2}$$



→ è una divisione, per cui il divisore lo cambio di segno! $\Rightarrow \frac{x}{y} \Rightarrow \varepsilon_x - \varepsilon_y$

$$\varepsilon_f = \varepsilon_{R_2} = \overbrace{\varepsilon_2 + \varepsilon_x}^{T_1} - \overbrace{\varepsilon_{R_1}}^{T_2}$$

si sommano perché $x \otimes y \Rightarrow \varepsilon_x + \varepsilon_y$

$$= \varepsilon_2 + \varepsilon_x - (\varepsilon_1 + \varepsilon_y + \varepsilon_y) =$$

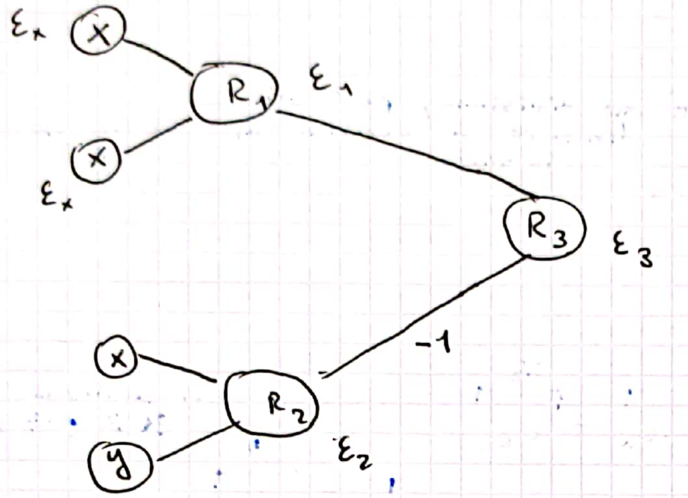
$$= \varepsilon_2 + \varepsilon_x - \varepsilon_1 - 2\varepsilon_y =$$

$$= \boxed{\underbrace{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}_{\varepsilon_a} + \underbrace{\varepsilon_x - 2\varepsilon_y}_{\varepsilon_d}}$$

Operazione	δ_d	ϵ_d
$x \oplus y$	$\delta_x + \delta_y$	$\frac{x}{x+y}\epsilon_x + \frac{y}{x+y}\epsilon_y$
$x \ominus y$	$\delta_x - \delta_y$	$\frac{x}{x-y}\epsilon_y + \frac{y}{x-y}\epsilon_{x}$
$x \otimes y$	$y\delta_x + x\delta_y$	$\epsilon_x + \epsilon_y$
$x \oslash y$	$\frac{1}{y}\delta_x + \frac{1}{x}\delta_y$	$\epsilon_x - \epsilon_y$

Errore relativo - Traccia 17/01/2015 (1)

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x+y}$$



$$\varepsilon_f = \varepsilon_{R_3} = \varepsilon_3 + \varepsilon_{R_1} - \varepsilon_{R_2}$$

$$= \varepsilon_3 + \left(\varepsilon_x + \varepsilon_x + \varepsilon_1\right) - \left(\frac{x}{x+y}\varepsilon_x + \frac{y}{x+y}\varepsilon_y + \varepsilon_2\right) =$$

$$= \varepsilon_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_x - \frac{x}{x+y}\varepsilon_x - \frac{y}{x+y}\varepsilon_y$$

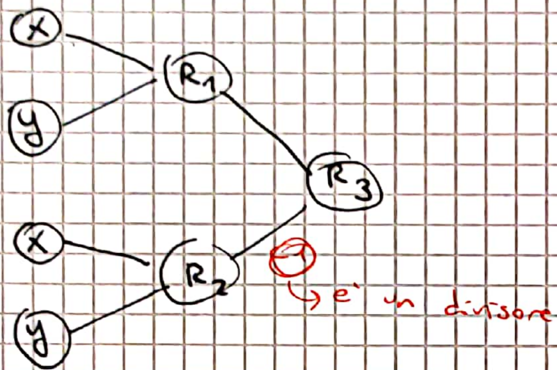
$$= \varepsilon_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_x(x+2y) - (y)\varepsilon_y}{x+y} =$$

$$= \varepsilon_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2 + \frac{x+2y}{x+y}\varepsilon_x - \frac{y}{x+y}\varepsilon_y$$

Esercizio errore relativo - 14/01/2020

$$f(x,y) = \frac{x-y}{xy}$$

Svolgimento



$$\epsilon_f = \epsilon_{R3} = \epsilon_3 + \underbrace{\epsilon_{R1}}\ \cancel{+}- \underbrace{\epsilon_{R2}}$$

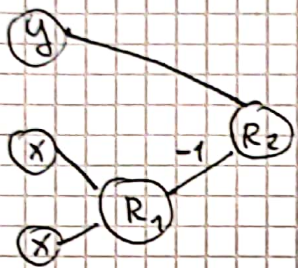
$$= \epsilon_3 + \underbrace{\epsilon_1 + \frac{x}{x-y}\epsilon_y + \frac{y}{x-y}\epsilon_x} - \underbrace{[\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_2]}$$

$$= \epsilon_1 + \epsilon_3 - \epsilon_2 + \epsilon_x\left(1 - \frac{x}{x-y}\right) + \epsilon_y\left(1 + \frac{y}{x-y}\right)$$

errore relativo 15/06/2020

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2}$$

svolgimento



$$\epsilon_f = \epsilon_{R_2} = \epsilon_2 + \epsilon_y - \epsilon_{R_1} =$$
$$= \epsilon_2 + \epsilon_y - [\epsilon_x + \epsilon_x] =$$
$$= \boxed{\epsilon_2 - \epsilon_1 + \epsilon_y - 2\epsilon_x}$$

Autovalori di A^{-1}

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ ed ha autovalori:

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = i \qquad \lambda_3 = -i$$

determinare il polinomio caratteristico di A^{-1}

Svolgimento

Gli autovalori della matrice inversa sono, rispettivamente, il reciproco degli autovalori della matrice originale. Motivo per cui

il polinomio della matrice inversa sarà:

$$P(\lambda) = -(\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}\right)\left(\lambda + \frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}\right) =$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

Verificare convergenza matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Verificare per quale α converge.

Svolgimento

Non essendo richiesto un metodo risolutivo specifico, quello che si può fare è cercare il modulo del massimo autovalore e verificare che questo ci minore di uno, solo in tal caso potremo dire che la matrice converge.

- Trucco: si può lavorare, mediante traslazione dello spettro, su matrici più semplici per semplificare i calcoli. Ciò equivale a sottrarre un valore dalla diagonale della matrice per poi risommarlo agli autovalori.

$$B = A - 2I = B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

sulla diagonale ci sono solo 2!

Per trovare gli autovalori bisognerà risolvere l'equazione caratteristica:

ed individuare i λ

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & 0 \\ -\alpha & -\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Per risolverlo conviene usare il metodo di sarrus.

$$
\left|\begin{array}{ccc|cc}
-\lambda & -\alpha & 0 & -\lambda & -\alpha \\
-\alpha & -\lambda & \alpha & -\alpha & -\lambda \\
0 & \alpha & -\lambda & 0 & \alpha
\end{array}\right.
$$

$\oplus$

$\ominus$

si sono riportate le prime due colonne alla fine.

$$-\lambda^3 + 0 + 0 - [0 - \lambda\alpha^2 - \lambda\alpha^2] = 0$$

$$-\lambda^3 + 2\alpha\lambda = 0$$

$$\lambda(2\alpha^2 - \lambda) = 0 \qquad \lambda = 0 \qquad \mu = 1$$

$$2\alpha^2 - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \begin{cases} \alpha\sqrt{2} \\ -\alpha\sqrt{2} \end{cases}$$

da cui:

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = \alpha\sqrt{2} \qquad \lambda_3 = -\alpha\sqrt{2}$$

$$\xRightarrow{\boxed{+2I}}$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 2 + \alpha\sqrt{2} \qquad \lambda_3 = 2 - \alpha\sqrt{2}$$

il max sarà sempre maggiore di 1!

$\rho(A) \geq 2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ non converge.

Esercizio Riducibilità

Data la matrice da risolvere:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 12 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l}] \ N1 \\ ] \ N2 \\ ] \ N3 \end{array} \quad \text{nodi}$$

- Per prima cosa si disegna il grafo orientato associato ad A, ovvero quello dove, per ogni riga (considerata elemento N_j) si verifica se la colonna i ~~si collega~~ ha un valore diverso da zero. se è diverso, si riporta il cammino orientato

N1 si collega a N1 ? si, $-1 \neq 0$

N1 si collega a N2 ? NO, $0 = 0$

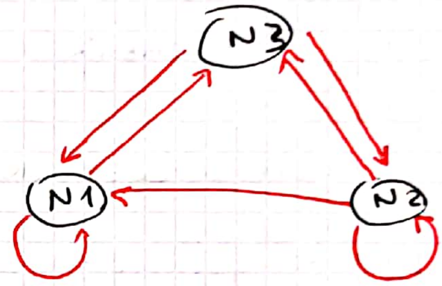
N1 si collega a N3 ? si, $5 \neq 0$

⋮

N2 si collega a N2 ? si, $12 \neq 0$

⋮

N_3 si collega a N3 ? No, $0 = 0$



- Adesso bisogna verificare se da ogni nodo posso raggiungere tutti gli altri, se ciò è possibile il grafo è fortemente connesso, e una matrice è detta irriducibile se e solo se il grafo associato è fortemente connesso.

se ciò non è possibile, allora è riducibile

Da N1 arrivo a N2 ? si...

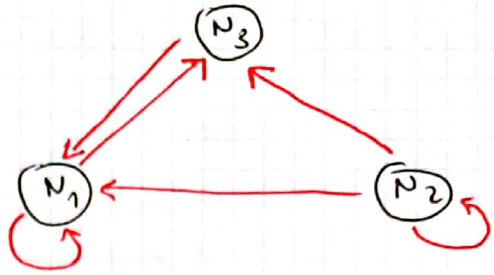
	N1	N2	N3
N1	✓	✓	✓
N2	✓	✓	✓
N3	✓	✓	✓

<u>Fortemente connesso</u>

se sono tutte ✓ allora non è mai riducibile!!

caso Riducibile

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l}]\, N_1 \\ ]\, N_2 \\ ]\, N_3 \end{array}$$



	N1	N2	N3
N1	✓	×	✓
N2			
N3			

già qua mi posso fermare $\Rightarrow$ è riducibile

Prendo un elemento che non si connette a tutti, da sopra N1, e ordino in modo:

elemento — elementi connessi — elementi sconnessi

ottenendo: N1 — N3 — N2

da cui deduciamo la matrice di permutazione che sarà:

$$\begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$\mapsto$ modo per indicare la base canonica. Adesso, i passaggi che bisogna eseguire per riportarla a identica sono gli stessi che applicheremo sia sulle righe che sulle colonne.

visto che sono scambiate e_3 ed e_2 dovrò applicare tale permutazione sia su righe che su colonne:

$$\begin{matrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} 3 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{matrix}}$$

- Adesso partizioniamo in modo da avere:
  - blocchi diagonali quadrati sulla diagonale
  - matrice nulla in alto a destra

  (gli altri possono essere triangolari)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 7 & 4 \end{array}\right)$$

0 !!

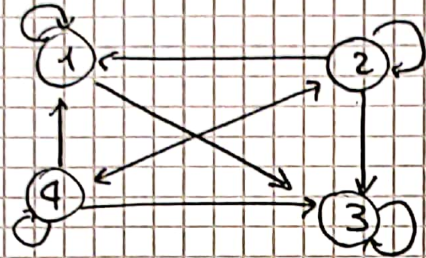
quadrati

Attenzione: per avere meno calcoli cerca di posizionare le colonne in modo da ridurre gli scambi da fare.

Riducibilità - altro esempio

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix}] \ N1 \\ ] \ N2 \\ ] \ N3 \\ ] \ N4 \end{matrix}$$

svolgimento



N1 non è capace di arrivare a tutti, nemmeno N3 ed N2,

è riducibile!

quale si sceglie? Quello su cui si intravede che si faranno meno permutazioni (in modo da metterci meno tempo).

elemento - elementi connessi - elementi non connessi

N1 - N3 - N2 - N4

e_1	e_3	e_2	e_4
↓	↓	↓	↓
1	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	1

Cosa devo fare per tornare all'identità? devo invertire la seconda e terza colonna, di conseguenza anche le righe.

$$\Downarrow$$

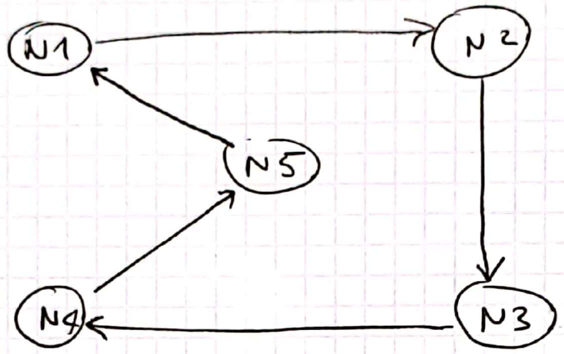
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice di permutazione

Esercizio per casa

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l}]\ N_1 \\ ]\ N_2 \\ ]\ N_3 \\ ]\ N_4 \\ ]\ N_5 \end{array}$$

è riducibile?



	N1	N2	N3	N4	N5
N1	✓	✓	✓	✓	✓
N2	✓	✓	✓	✓	✓
N3	✓	✓	✓	✓	✓
N4	✓	✓	✓	✓	✓
N5	✓	✓	✓	✓	✓

$\boxed{\text{non è riducibile}}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

Calcolare gli autovalori della matrice:

$$A = I + ab^T \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}^n$$

Svolgimento

Per prima cosa si nota come questo sia un richiamo alle matrici di traslazione, per cui si sostituirà:

$$A - I = ab^T \Rightarrow B = ab^T$$

con $B = A - I$

Sappiamo ora che per il th. A e B avranno gli stessi autovettori e medesimi autovalori ma traslati di un tot.

$$B = \begin{pmatrix} \underbrace{a_1 b_1} & - & - & - & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & \cdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n b_1 & - & - & - & a_n b_n \end{pmatrix}$$

↳ avendo fatto il trasposto, le componenti di B rimangono uguali lungo le colonne e non le righe.

Per sapere gli autovalori caratteristici ci calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$\det(B - \mu I) = (-1)^n \mu^n + (-1)^{n-1} \mu^{n-1} \sigma_1 + \dots + \dots + \sigma_n$$

dove ogni σ_j sarà uguale al $\det(B_j)$ ovvero:

$$\sigma_1 = \sum_1^n \alpha_i b_i$$

$$\sigma_2 = \det\begin{pmatrix} \alpha_1 b_1 & \alpha_1 b_2 \\ \alpha_2 b_1 & \alpha_2 b_2 \end{pmatrix} = \cancel{\alpha_1 b_1 \alpha_2 b_2} - \cancel{\alpha_1 b_2 \alpha_2 b_1} = 0$$

la cui ci ricordiamo che il det di roba linearmente dipendente è zero, ed essendo sopra tutto dipendente allora l'unico

Calcolare punti fissi:

$$\phi(x) = \frac{7x-6}{x^2}$$

calcolare i punti fissi.

Svolgimento

Sono punti fissi quelli per cui $\phi(x) = x$, da cui eseguendo una semplice sostituzione:

$$x = \frac{7x-6}{x^2} \Rightarrow x^3 - 7x + 6 = 0$$

si utilizza ora ruffini per riuscire a trovare le radici:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -7 & +6 \\ 1 & & +1 & +1 & -6 \\ \hline & 1x^2 & +1x & -6 & 0 \end{array}$$

$$(x^2 + x - 6)(x - 1) = 0$$

- $x - 1 = 0 \rightarrow x = \boxed{1}$
- $x^2 + x - 6 = 0$

  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac} = 5$

  $x = \frac{-b \pm \Delta}{2a} = \begin{cases} \boxed{-3} \\ \boxed{2} \end{cases}$

Idoneità Bisezione

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0$$

Ha una soluzione $\alpha = -2$, il metodo di bisezione è idoneo per approssimare α?

Svolgimento

Il metodo di bisezione è adatto per individuare zeri con molteplicità dispari (e dunque singola), dunque dovremmo scoprire che molteplicità ha -2.

Usiamo Ruffini:

	1	+4	+3	−4	−4
1		+1	+5	+8	+4
	$1x^3$	$+5x^2$	$+8x$	+4	0

$$(x^3 + 5x^2 + 8x + 4)(x-1) = 0$$

	1	+5	+8	+4
−1		−1	−4	−4
	$1x^2$	$+4x$	+4	0

$$(x^2 + 4x + 4)(x-1)(x+1) = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$\Delta = 0$ $\quad x = \dfrac{-4 \pm 0}{2}$ $\nearrow -2$, $\searrow -2$ $\Rightarrow$ molteplicità 2

Non va bene!

Jacobi verificare convergenza

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio: 14/01/2020

dire se il metodo iterativo di Jacobi risulta convergente.

svolgimento

Il metodo iterativo di Jacobi converge se lo fa la sua matrice iterativa, ovvero se il suo autovettore di massimo modulo è strettamente minore di 1.

Calcoliamo la matrice di iterazione:

$$J = - \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} & \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}} \\ \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} & 0 & \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{22}} \\ \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{33}} & \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{33}} & 0 \end{pmatrix}$$

come si ottiene: è la matrice di partenza con gli zeri messi sulla diagonale ed ogni elemento di ogni riga è diviso per quello diagonale.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{matrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{matrix} \right| \begin{matrix} -\lambda & 0 \\ -1 & -\lambda \\ -1 & 0 \end{matrix}$$

$$= \lambda^3 + 0 + 0 - \lambda - 0 - 0 = 0$$

$$-\lambda^3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{matrix}\right] \overset{?}{<} 1$$

NO

Non converge.

Gauss - Seidel

Dato il sistema lineare $Ax = b$ con matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dire se con il metodo di Gauss - Seidel converge.

Svolgimento

Ricordando che = $A = D - E - F$ con:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad -E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad -F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bisognerà individuare la matrice H_{GS} tale che:

$$H_{GS} = (D - E)^{-1} F$$

Attenzione: F ha il segno cambiato rispetto all'originale

$$(D - E) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per trovare l'inversa si mette con la matrice identica e si risolve con Gauss fino ad avere a sinistra la matrice identica

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(rows of the lower block labelled II and III)

$$l_{21} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$l_{31} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Ora si esegue il prodotto tra matrici (prima riga per prima colonna ecc...):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{(D-E)^{-1}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{F} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}}_{H_{GS}}$$

Adesso si individuano gli autovalori, se quello di massimo modulo è minore di 1 allora converge:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{2}$

Il metodo converge!

Intervallo di separazione

$$x e^{-x} + 1 = 0$$

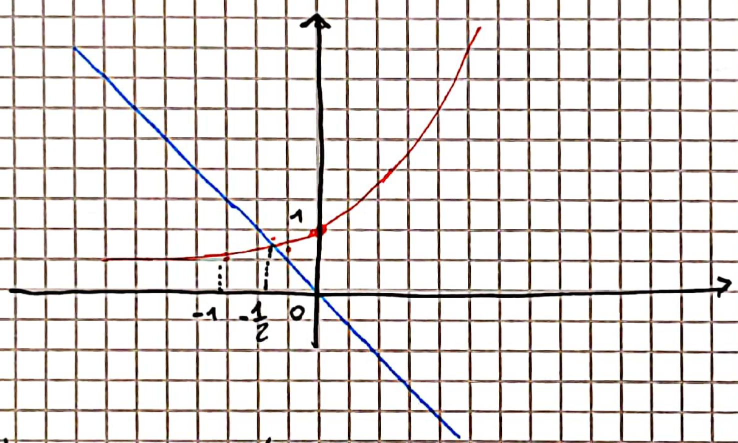
determinare un intervallo di separazione

svolgimento

Non vi è richiesto alcun metodo particolare, solitamente quando compaiono funzioni con e^x conviene studiare qualitativamente il grafico dopo la separazione in due funzioni:

$$x e^{-x} + 1 = 0 \Rightarrow x e^{-x} = -1 \Rightarrow \left[\cancel{x} e^{-x}\right]^{-1} = \left[-\frac{1}{x}\right]^{-1}$$

$$\underbrace{e^{x}}_{f(x)} = \underbrace{-x}_{g(x)}$$



dal grafico notiamo che un buon intervallo di separazione è $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[$

Separazione grafica + Newton

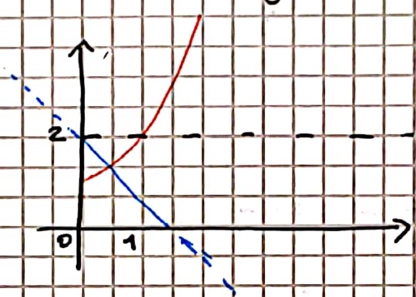
$$f(x) = e^x + 2x - 2 = 0$$

Determinare gli intervalli di separazione e per ciascuna delle soluzioni indicare un punto iniziale che rende convergente il metodo di Newton.

Svolgimento

Per prima cosa si individuano il numero di soluzioni per via grafica individuando gli intervalli di separazione:

- $h(x) = e^x$
- $g(x) = 2 - 2x$



La soluzione è compresa tra 0 e 1, ciò si deduce facendo qualche calcolo "a occhio" notando che per $x = 2$ $g(x)$ fa zero, che non è mai raggiunto da h e perciò non può essere zero di f

Si fanno ora le derivate per studiare quale estremo prendere:

$$f(x) = e^x + 2x - 2$$
$$f'(x) = e^x + 2 \quad > 0$$
$$f''(x) = e^x \quad > 0$$

in $[\overset{a}{0}, \overset{b}{1}]$

$f'(x) > 0$	$f''(x) > 0$	$x_0 = b$
$f'(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$x_0 = a$
$f'(x) < 0$	$f''(x) > 0$	$x_0 = a$
$f'(x) < 0$	$f''(x) < 0$	$x_0 = b$

Attenzione: $\underbrace{f(x_0)\, f''(x_0) > 0}$ ⇓ segno concorde

da cui $x_0 = b \Rightarrow 1$

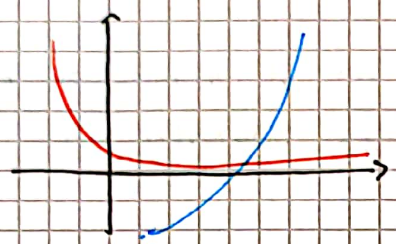
Altro esempio - Newton

$$e^{-x} - x^2 + 2x = 0 \qquad \alpha \in [2,3]$$

Individuare x_0 partendo dal quale il metodo di newton converge ad α

Svolgimento

$$e^{-x} = x^2 - 2x$$



$$f(x) = e^{-x} - x^2 + 2x$$

$$f'(x) = -e^{-x} - 2x^2 + 2$$

$$f''(x) = e^{-x} - 4x^2$$

$f'(2) < 0 \qquad f'(3) < 0$

$f''(2) < 0 \qquad f''(3) < 0$

$$f'(x) < 0 \quad f''(x) < 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = 3}$$

Convergenza per Newton

$$x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + x + 3 = 0$$

le soluzioni sono $\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = -1$ $\alpha_3 = -3$

Svolgimento

Per sapere l'ordine di convergenza di un polinomio secondo il metodo di Newton è necessario individuare le molteplicità di ciascuna ~~termine~~ soluzione.

Applichiamo Ruffini

	1	+3	-2	-6	+1	+3
1		+1	+4	+2	-4	-3
	$+1x^4$	$+4x^3$	$+2x^2$	$-4x$	-3	0

$$(x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 3)\cdot(x-1) = 0$$

	1	+4	+2	-4	-3
1		+1	+5	+7	+3
	$1x^3$	$+5x^2$	$+7x$	$+3$	0

$$(x^3 + 5x^2 + 7x + 3)(x-1)^2 = 0$$

	1	+5	+7	+3
-1		-1	-4	-3
	$1x^2$	$+4x$	$+3$	0

$$(x^2 + 4x + 3)(x-1)^2(x+1) = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16 - 12} = 2$$

$$x = \frac{-4 \pm 2}{2} \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$$

Se:

$\mu_\alpha > 1 \Rightarrow p = 1$

$\mu_\alpha = 1$ $\begin{cases} f''(\alpha) = 0 \Rightarrow p \geq 2 \\ f''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow p = 2 \end{cases}$

Soluzioni

	μ		p
$-1 \Rightarrow$	2	$\Rightarrow$	1
$-3 \Rightarrow$	1	$\Rightarrow$	?
$1 \Rightarrow$	2	$\Rightarrow$	1

$f'(x) = 5x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 12x + 1$

$f''(x) = 20x^3 + 36x^2 - 12x + 12$

$f''(-3) \neq 0 \rightarrow \boxed{p = 2}$

Polinomio di Newton + Errore massimo

$f(x) = x^3 - 3x + 1 \qquad x_0 = -1 \qquad x_1 = 1$

Si calcoli il massimo Errore $= | f(x) - P_1(x) |$ sull' intervallo $[x_0, x_1]$ una volta determinato il polinomio P_1.

Svolgimento

Per prima cosa si cerca il polinomio di Newton del primo ordine, stando alla formula:

$$P_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1]$$

Calcoliamo allora i vari valori:

$$f(x_0) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = \cancel{-1} + 3 + \cancel{1} = 3$$
$$f(x_1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = 1 + 1 - 3 = -1$$
$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{-1 - 3}{1 - (-1)} = -2$$

da cui:

$$P_1(x) = 3 + (x+1)(-2) = -2x + 1$$

Calcolimo ora la funzione dell' errore:

$$E = | f(x) - P_1(x) | = | x^3 - 3x + 1 + 2x - 1 | =$$
$$= x^3 - x = x(x^2 - 1)$$

Cerchiamo adesso il punto di massimo, che come ricorderemo dall' Analisi I si ottiene eseguendo la derivata prima della funzione, cercando gli zeri e sostituendo tali valori nella funzione originale:

$$E'(x) = x^2 - 1 + 2x^2 = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x \begin{cases} +\sqrt{\frac{1}{3}} \\ -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$E\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) = \left| \sqrt{\tfrac{1}{3}} \left[\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)^2 - 1 \right] \right| = \left| -\frac{2\sqrt{3}}{9} \right| = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Fattorizzazione LR

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolare la fattorizzazione LR

svolgimento

Il quesito richiede di trovare le due matrici L ed R tali che:

- L sia la matrice triangolare inferiore con 1 nella diagonale e il resto dei valori gli ℓ adoperati durante Gauss
- R la matrice triangolare superiore che si trova alla fine dell'applicazione di Gauss.

$$\begin{array}{c|cccc} \mathrm{I} & -1 & 0 & -1 & 0 \\ & -1 & 1 & -1 & 1 \\ & 1 & -1 & 0 & -1 \\ & -1 & 1 & -2 & 2 \\ \hline \mathrm{II} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \mathrm{III} & 0 & -1 & -1 & 1 \\ \mathrm{IV} & 0 & 1 & -1 & 2 \\ \hline \mathrm{III} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \mathrm{IV} & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \mathrm{IV} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$\ell_{21} = \frac{-1}{-1} = 1$

$\ell_{31} = \frac{1}{-1} = -1$

$\ell_{41} = \frac{-1}{-1} = 1$

$\ell_{32} = \frac{-1}{1} = -1$

$\ell_{42} = \frac{1}{1} = 1$

$\ell_{43} = \frac{-1}{-1} = 1$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Minimi quadrati + sovradeterminato

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & -\alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Indicare per quali valori di α il sistema ha un'unica soluzione nel senso dei minimi quadrati

Svolgimento

Per avere un'unica soluzione vuol dire che il sistema deve avere rango massimo, in questo caso 2

I minori di ordine due sono 3 e valgono:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & -\alpha \end{vmatrix} = -\alpha^2 - \alpha^3 = -\alpha^2(1+\alpha)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - \alpha^2 = \alpha(1-\alpha)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - \alpha = 0$$

gli alfa capaci di annullare tutti e 3 sono quelli da scartare, in questo caso l'unico caso è per $\alpha = 0$, perciò ~~l'unico caso~~ si ha rango 2 per $\alpha \neq 0$

Secondo esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \\ 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Indicare per quali valori reali di α il sistema ha un'unica soluzione nel senso dei minimi quadrati.

Svolgimento

Per avere un'unica soluzione la matrice A deve essere di rango massimo, ovvero di dimensione pari al minimo numero tra righe e colonne: $3 \times \boxed{2}$ ↗ rango richiesto.

Scriviamo i suoi minoranti di rango 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = \boxed{1+\alpha^2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} = -\alpha+\alpha = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = \boxed{1+\alpha^2}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} = \boxed{-\alpha^2-1}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = \alpha-\alpha = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = \boxed{1+\alpha^2}$$

Esiste qualche α capace di annullare contemporaneamente tutti i determinanti? NO → perciò ha rango 2 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Altro esempio - minimi quadrati

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Per quali α il sistema ha un'unica soluzione nel senso dei minimi quadrati

svolgimento

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \alpha^3 + 1$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -\alpha - 1$$

$\forall \alpha \setminus \{-1\}$

Annulla tutti e 3!

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1$$

Minimi quadrati - sovradeterminato

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b}$$

Risolvere nel senso dei minimi quadrati il sistema sovradeterminato

<u>svolgimento</u>

Per prima cosa si nota che sono assenti α, per ottenere dunque la soluzione sarà necessario applicare il metodo classico:

$$\boxed{A^T A x = A^T b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^T \wedge A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$A^T \wedge b$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

si risolve ora il sistema ~~facendo~~ impostandolo in seguito al prodotto matrice per vettore tra A^TA e x.

$$\begin{cases} 4x_1 + 0x_2 = 0 \\ 0x_1 + 10x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \frac{3}{5} \end{aligned}}$$

Differenze divise

x	0	1	-1	2
$f(x)$	α	0	2	$-\alpha^2$

$\alpha \in \mathbb{R}$

Determinare gli α per cui il polinomio di interpolazione è di grado minimo.

Svolgimento

I punti che ci vengono forniti hanno α soltanto su $f(x)$ (non compare in x), ciò significa che possiamo "ignorare" gli α per trovare il polinomio di Newton per poi inserire i punti per calcolare i valori equivalenti.

	x	$f(x)$	
x_0	1	0	
x_1	-1	2	-1

$$P_3(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3]$$

$n-1$ elementi

$$P_3(x) = 0 - (\underbrace{x-1}_{x_0}) = \underline{-x+1}$$

Adesso imponiamo le condizioni per 0 e 2:

$$\begin{cases} -0+1 = \alpha \\ -2+1 = -\alpha^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha \nearrow 1 \\ \quad \searrow -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

calcolare polinomio di interpolazione di Lagrange

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	0	1	2	-1
$f(x)$	1	1	3	3

calcolare il polinomio di interpolazione di grado 3
Lagrange 3

$$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(-x_1)(-x_2)(-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x+1)}{(-1)(-2)(1)}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(-x_0)(-x_2)(-x_3)} = \frac{(x-0)(x-2)(x+1)}{}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(-x_0)(-x_1)(-x_3)} =$$

$$\ell_3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(-x_0)(-x_1)(-x_2)} =$$

per ognuno mancherà il fattore di x_i, del tipo:
ℓ_0 manca $(x-x_0)$, per ℓ_1 manca $(x-x_1)$ ecc...

Il polinomio di interpolazione di Lagrange sarà:

$$L_3(x) = \ell_0(x)\underset{f(x_0)}{1} + \ell_1(x)\cdot\underset{f(x_1)}{1} + \ell_2(x)\cdot\underset{f(x_2)}{3} + \ell_3(x)\cdot\underset{f(x_3)}{3}$$

E risulta tale da soddisfare $L_K(x) = \sum_{r=0}^{K} \ell_r$

Integrale con formula di quadratura.

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

approssimare l'integrale con la formula di quadratura.

$$J_3(f) = a_0 f(x_0) + \frac{3}{4}\left(f\left(-\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)\right) + a_0 f(-x_0)$$

svolgimento

Abbiamo 2 incognite che sono il nodo x_0 e il peso a_0, per tale motivo dovremo impostare un sistema tale che gli errori siano pari a zero per poter calcolare le incognite. Per farlo sostituiamo, fino a un numero "adeguato" di equazioni ad $f(x)$ i valori $1, x, x^2, \dots$

$$\begin{cases} a_0 + \frac{3}{4}(1+1) + a_0 = \int_{-1}^{1} \underbrace{1}\,dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2 & 1) \\ a_0 x_0 + \frac{3}{4}\cancel{\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)} - a_0 x_0 = \int_{-1}^{1}\underbrace{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0 & x) \\ a_0 x_0^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right) + a_0 x_0^2 = \int_{-1}^{1}\underbrace{x^2}\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} & x^2 \end{cases}$$

Inutile

da cui:

$$a_0 + \frac{3}{4}(2) + a_0 = 2 \Rightarrow 2a_0 + \frac{3}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{4}}$$

mentre per x_0:

$$\frac{1}{4}x_0^2 + \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}_{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{9}_{3}}\right) + \frac{1}{4}x_0^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x_0 = \sqrt{1} \Rightarrow \boxed{x_0 \nearrow +1 \atop \searrow -1}$$

Per sapere il grado di precisione bisogna calcolare gli errori fino a trovare il primo $\neq 0$ che sarà il grado$+1$. Per costruzione $E_1(1) = 0$, $E_1(x) = 0$, $E_1(x^2) = 0$

$$E_1(x^3) = I - J_3 \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3\,dx - \cancel{\frac{1}{4}(x_0)^3} - \cancel{\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{27}+\frac{1}{27}\right)} + \cancel{\frac{1}{4}(x_0^3)} \Rightarrow \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

si annulla, allora si continua con $E_1(x^4)$.

$$E_1(x^4) \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^4\,dx - \frac{1}{4}x_0^4 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{81}+\frac{1}{81}\right) - \frac{1}{4}(x_0)^4 \Rightarrow \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} - \frac{2}{4} - \frac{1}{54} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{2}{4} - \frac{1}{54}\ \boxed{\neq 0}$$

precisione $m=3$

Integrali - formula di quadratura con $Kf^{(s)}(\theta)$

$$I_{(f)} = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

$$J_3(f) = \frac{1}{4}\left(f(-1) + 3f\left(-\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) + f(1)\right)$$

Utilizzare la formula di quadratura sopra e supposto che risulti: $E_3(f) = k f^{(s)}(\theta)$ determinare k ed s.

Svolgimento

Per prima cosa bisogna individuare il grado di precisione della formula, per farlo si cercano tutti gli errori fino a quando uno non si annullerà, quello sarà il grado +1.
Si sostituisce al posto di $f(x)$ $1, x, x^2 \dots$

- $E_3(1) = I_{(1)} - J_3(1)$
  $= \int_{-1}^{1} 1\,dx - \frac{1}{4}(1+3+3+1) \Rightarrow x \Big|_{-1}^{1} - 2 = 0$
- $E_3(x) = \int_{-1}^{1} x\,dx - \frac{1}{4}(-1-1+1+1) \Rightarrow \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} - 2 = 0$
- $E_3(x^2) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1\right) \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\left(\frac{6}{3} + \frac{2}{3}\right) = 0$
- $E_3(x^3) = \int_{-1}^{1} x^3\,dx - \frac{1}{4}\left(-1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 1\right) \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 0 = 0$
- $E_3(x^4) = \int_{-1}^{1} x^4\,dx - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{81} + \frac{3}{81} + 1\right) \Rightarrow \frac{2}{5} - \frac{1}{4}\left(\frac{56}{27}\right) = -\frac{16}{135} \neq 0$

Adesso sappiamo che il grado di precisione è $m = 3$ mentre $s = 4$, essendo:

$E_3(x^4) = -\frac{16}{135} = k f^{(s)}(\theta)$ segue che: $f(x^4) = x^4$

da cui $f^{(1)}(x) = 4x^3$ $f^{(2)}(x) = 12x^2$ $f^{(3)}(x) = 24x$ $f^{(4)}(x) = 24$

e perciò:

$-\frac{16}{135} = k \cdot 24 \Rightarrow \boxed{k = -\frac{16}{135} \cdot \frac{1}{24} \Rightarrow -\frac{2}{405}}$

Integrali - formula dei trapezi

22/07/2019

$$I = \int_1^2 \log(x)\,dx$$

approssimare l'integrale utilizzando la formula dei trapezi.

Indicare il numero L di intervalli ~~che~~ in cui bisogna suddividere l'intervallo di integrazione in modo da avere un errore assoluto $|E(f)| \leq 10^{-2}$

Svolgimento

La formula dei trapezi e' la seguente:

$$\left| -\frac{(b-a)^3}{12\,L^2}\, M_2 \right| \leq \frac{1}{2}\cdot|E(f)|$$

max di $f''(x)$

intervalli

b ed a sono gli estremi di integrazione, L e' il numero di sottointervalli ed M_2 e' il massimo della derivata seconda della funzione; $E(f)$ e' l'errore fornito. Per prima cosa si trova M_2:

$$f(x) = \log(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| = \max_{x\in[1,2]} \left|-\frac{1}{x^2}\right| = 1$$

sostituendo nella formula:

$$\left| -\frac{(2-1)^3}{12\,L^2}\cdot 1 \right| \leq \left|\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}\right| \implies L \geq \sqrt{\frac{1\cdot 2}{12\cdot 10^{-2}}} = \boxed{4{,}08 \sim 5}$$

Il risultato e' 5!

il numero di intervalli ~~non può mai~~ e' un intero, va approssimato per eccesso!

$$L \geq 5$$