

# Fondamenti di Automatica - I Parte

Antonio Bicchi

Università di Pisa

Versione del 10 Giugno 2015.

Alcune parti della dispensa sono in corso di integrazione o  
riscrittura.

Si consiglia di procedere ad aggiornarle circa mensilmente.



# Indice

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 0.1      | Organizzazione del Corso . . . . .                     | 7         |
| 0.1.1    | Finalità . . . . .                                     | 7         |
| 0.1.2    | Obiettivi . . . . .                                    | 7         |
| 0.1.3    | Metodologia del Corso . . . . .                        | 8         |
| 0.1.4    | Pre-requisiti . . . . .                                | 8         |
| 0.1.5    | Modalità di verifica . . . . .                         | 8         |
| 0.1.6    | Contenuti e articolazione temporale . . . . .          | 8         |
| 0.1.7    | Testi suggeriti . . . . .                              | 9         |
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>                                    | <b>11</b> |
| 1.1      | Di che si tratta . . . . .                             | 11        |
| <b>2</b> | <b>Sistemi Dinamici</b>                                | <b>17</b> |
| 2.1      | Modelli di Sistemi Dinamici . . . . .                  | 17        |
| 2.1.1    | Esempi di Sistemi Dinamici in Tempo Continuo . . . . . | 18        |
| 2.1.2    | Esempi di Sistemi Dinamici in Tempo Discreto . . . . . | 21        |
| 2.1.3    | Sistemi TD per la simulazione numerica. . . . .        | 25        |
| 2.2      | Forma normale e forma di stato . . . . .               | 30        |
| 2.2.1    | Sistemi di equazioni differenziali . . . . .           | 33        |
| 2.2.2    | Stati, ingressi, uscite . . . . .                      | 33        |
| 2.3      | Proprietà dei Sistemi Dinamici . . . . .               | 36        |
| 2.3.1    | Causalità . . . . .                                    | 36        |
| 2.3.2    | Stazionarietà . . . . .                                | 37        |
| 2.3.3    | Linearità . . . . .                                    | 38        |
| 2.3.4    | Forma Canonica di Controllo . . . . .                  | 39        |
| 2.4      | Soluzioni delle Equazioni Dinamiche . . . . .          | 45        |
| 2.4.1    | Soluzioni di equilibrio . . . . .                      | 46        |
| 2.5      | Linearizzazione approssimata . . . . .                 | 48        |
| 2.6      | Cambiamenti di coordinate . . . . .                    | 51        |
| 2.6.1    | Cambiamenti di Coordinate Lineari . . . . .            | 51        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>3 Soluzioni dei Sistemi Lineari</b>                          | <b>53</b>  |
| 3.1 Sistemi Lineari Tempo-Invarianti Tempo-Continui . . . . .   | 53         |
| 3.2 Sistemi Lineari Tempo-Invarianti Tempo-Discreti . . . . .   | 62         |
| 3.3 Analisi Modale . . . . .                                    | 66         |
| 3.3.1 Modi dei Sistemi LTITC . . . . .                          | 66         |
| 3.3.2 Modi dei sistemi LTITD . . . . .                          | 67         |
| <b>4 Stabilità dei Sistemi Lineari</b>                          | <b>69</b>  |
| 4.1 Definizioni di stabilità . . . . .                          | 69         |
| 4.2 Criteri algebrici di stabilità. . . . .                     | 70         |
| 4.2.1 Criterio di Routh . . . . .                               | 71         |
| 4.2.2 Equazione di Lyapunov. . . . .                            | 76         |
| 4.2.3 Criterio di Kharitonov . . . . .                          | 76         |
| 4.2.4 Criterio di Gershgorin . . . . .                          | 78         |
| 4.2.5 Criterio di Mikhailov . . . . .                           | 78         |
| 4.2.6 Sistemi a tempo discreto . . . . .                        | 81         |
| 4.2.7 Limitazioni pratiche dei criteri algebrici di stabilità . | 83         |
| <b>5 Risposte Forzate dei Sistemi LTI</b>                       | <b>85</b>  |
| 5.1 Calcolo Operazionale . . . . .                              | 86         |
| 5.1.1 Applicazione alla soluzione di ODE . . . . .              | 97         |
| 5.1.2 Antitrasformazioni . . . . .                              | 99         |
| 5.2 Funzioni di Trasferimento . . . . .                         | 104        |
| 5.2.1 Connessione di Sistemi . . . . .                          | 106        |
| 5.3 Risposte Forzate ad Ingressi Tipici . . . . .               | 109        |
| 5.3.1 Risposte a segnali permanenti . . . . .                   | 110        |
| 5.3.2 Risposta al gradino . . . . .                             | 112        |
| 5.3.3 Uso sperimentale della risposta indiciale . . . . .       | 115        |
| 5.4 Risposta al gradino di sistemi del primo ordine . . . . .   | 116        |
| 5.4.1 Sistemi ad un polo dominante . . . . .                    | 117        |
| 5.5 Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine . . . . . | 119        |
| 5.5.1 Poli dominanti . . . . .                                  | 123        |
| 5.6 Effetto degli zeri . . . . .                                | 124        |
| 5.6.1 Ruolo degli zeri nelle approssimazioni a poli dominanti   | 127        |
| 5.6.2 Zeri a parte reale positiva . . . . .                     | 128        |
| 5.7 Risposta Armonica . . . . .                                 | 131        |
| <b>6 Diagrammi di Bode, Nyquist, Nichols</b>                    | <b>137</b> |
| 6.1 Diagrammi di Bode . . . . .                                 | 137        |
| 6.1.1 Il contributo della costante di guadagno . . . . .        | 140        |
| 6.1.2 Il contributo di poli e zeri nell'origine . . . . .       | 140        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 6.1.3    | Il contributo di poli e zeri reali. . . . .                       | 141        |
| 6.1.4    | Il contributo di una coppia di poli complessi coniugati . . . . . | 144        |
| 6.1.5    | Il contributo di un coppia di zeri complessi coniugati . . . . .  | 149        |
| 6.1.6    | Esempi . . . . .  | 149        |
| 6.2      | Formula di Bode . . . . .   | 152        |
| 6.3      | Banda passante, picco e pulsazione di risonanza . . . . .         | 153        |
| 6.4      | Altre rappresentazioni grafiche . . . . .                         | 154        |
| 6.4.1    | Diagramma Polare (o di Nyquist). . . . .                          | 154        |
| 6.4.2    | Diagramma di Nichols. . . . .                                     | 156        |
| <b>7</b> | <b>Retroazione</b>  | <b>159</b> |
| 7.1      | Generalità . . . . .  | 159        |
| 7.2      | Effetti della Retroazione . . . . .                               | 163        |
| 7.2.1    | Robustezza alle Variazioni Parametriche . . . . .                 | 163        |
| 7.2.2    | Reiezione dei Disturbi . . . . .                                  | 166        |
| 7.3      | Errore di regime per riferimenti persistenti. . . . .             | 168        |
| 7.4      | Stabilità in Retroazione . . . . .                                | 171        |
| 7.4.1    | Criterio di Nyquist . . . . .                                     | 172        |
| 7.4.2    | Margini di stabilità. . . . .                                     | 178        |
| 7.4.3    | Luoghi a modulo e fase costanti . . . . .                         | 181        |
| <b>8</b> | <b>Progetto del Controllore</b>                                   | <b>187</b> |
| 8.1      | Specifiche e Struttura del Controllore Elementare . . . . .       | 188        |
| 8.1.1    | Specifiche statiche . . . . .                                     | 189        |
| 8.1.2    | Specifiche dinamiche . . . . .                                    | 189        |
| 8.2      | Metodi di progetto del controllore . . . . .                      | 190        |
| 8.3      | Approssimazioni della f.d.t. in anello chiuso . . . . .           | 191        |
| 8.4      | Specifiche nel Dominio della Frequenza . . . . .                  | 195        |
| 8.5      | Costruzione del controllore $C_0(s)$ . . . . .                    | 198        |
| 8.5.1    | Azioni correttive . . . . .                                       | 198        |
| 8.5.2    | Causalità del controllore . . . . .                               | 204        |
| 8.6      | Esempio di Progetto . . . . .                                     | 204        |
| 8.6.1    | Progetto del Controllore . . . . .                                | 205        |
| 8.6.2    | Simulazione in ambiente Simulink del sistema controllato          | 208        |
| <b>9</b> | <b>Luogo delle Radici</b>   | <b>215</b> |
| 9.1      | Equazione del luogo delle radici . . . . .                        | 216        |
| 9.2      | Proprietà del luogo delle radici . . . . .                        | 217        |
| 9.3      | Progetto mediante luogo delle radici . . . . .                    | 221        |
| 9.3.1    | Controllo in Cascata . . . . .                                    | 221        |
| 9.3.2    | Progetto di Controllori Stabilizzanti sul Luogo delle Radici      | 222        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 9.3.3    | Contorno delle radici . . . . .                      | 228        |
| <b>A</b> | <b>Richiami di Algebra Lineare</b>                   | <b>231</b> |
| A.0.4    | Matrici simili e Diagonalizzazione . . . . .         | 231        |
| A.0.5    | Forma di Jordan . . . . .                            | 233        |
| A.0.6    | Instabilità numerica della forma di Jordan . . . . . | 237        |
| A.0.7    | Risposte dei sistemi lineari con Matlab . . . . .    | 238        |

## 0.1 Organizzazione del Corso

Queste dispense di Fondamenti di Automatica – I Parte sono rivolte agli studenti di un corso di primo livello (Laurea triennale) in Ingegneria, e coprono materiale didattico corrispondente a circa 6 Crediti Formativi Universitari, tra cui 1 di attività di laboratorio.

### 0.1.1 Finalità

Il corso si propone di fornire agli allievi le nozioni fondamentali e gli strumenti necessari per l’analisi di sistemi dinamici meccanici ed elettromeccanici, e per il progetto dei dispositivi che possono essere utilizzati per modificare la dinamica di tali sistemi in modo da rispondere a date specifiche di funzionamento. Nel corso si dà particolare risalto alle applicazioni nelle quali il controllo dei sistemi meccanici mediante dispositivi elettronici e/o digitali costituisce un aspetto tecnologico fondamentale, come l’automazione industriale, la robotica, e la componentistica intelligente per veicoli e macchine in genere.

### 0.1.2 Obiettivi

Al termine del corso lo studente sarà posto in grado di:

- saper definire semplici modelli matematici di sistemi elettro-meccanici dinamici;
- saper determinare le caratteristiche fondamentali di tali modelli (stabilità, controllabilità, osservabilità, risposte ad ingressi tipici);
- saper porre, e interpretare, le specifiche di funzionamento di un sistema dinamico nelle diverse forme in cui esse possono venir descritte;
- conoscere le tecniche di analisi dei sistemi lineari nel dominio della frequenza (funzioni di trasferimento, diagrammi di Bode e Nyquist, luogo delle radici);
- Saper costruire un algoritmo di simulazione per sistemi dinamici, mediante programmazione esplicita o grafica, avvalendosi di strumenti SW commerciali;
- saper progettare un regolatore per un sistema assegnato che realizzi date specifiche di stabilità pratica, precisione, prontezza;

- saper realizzare una implementazione digitale per un sistema di controllo progettato in tempo continuo.

### 0.1.3 Metodologia del Corso

Le lezioni sono prevalentemente tenute proiettando in aula il materiale di queste dispense, che sono peraltro rese disponibili agli studenti in rete. Il corso si avvale per le esercitazioni di strumenti informatici (software di analisi e simulazione) disponibili presso le strutture della facoltà, e di un telelaboratorio con esperimenti reali accessibili in rete senza limitazioni di orario.

### 0.1.4 Pre-requisiti

- Matematica: equazioni differenziali, algebra delle matrici, nozioni di geometria;
- Fisica: meccanica ed elettromagnetismo;

Si presuppone inoltre una dimestichezza di base con la lingua inglese e con gli strumenti di calcolo automatico.

### 0.1.5 Modalità di verifica

La verifica e' articolata in uno o piu' esercizi da svolgere autonomamente, con l'uso del materiale del corso e di ogni altro materiale ritenuto utile; ed in una o piu' domande cui rispondere oralmente interagendo con la commissione.

### 0.1.6 Contenuti e articolazione temporale

1. Introduzione. Presentazione del corso. Sistemi dinamici, sistemi di regolazione e di controllo nella automazione industriale e nelle macchine moderne. (L:2; E:0)
2. Definizioni e nozioni introduttive. Sistemi dinamici continui e discreti. Esempi. Significato fisico di ingressi, uscite, stati. Schemi a blocchi. Proprietà dei sistemi: linearità, stazionarietà, fisica realizzabilità. (L:4; E:2)
3. Sistemi lineari. Rappresentazioni di sistemi lineari (equazioni ordinarie, forma di stato, trasformate e funzioni di trasferimento). Soluzione dei sistemi lineari: risposte libere, forzate, transitorie e permanenti. Risposta armonica dei sistemi lineari. Diagrammi di risposta armonica (Bode, Nyquist). (L:6; E: 3).

4. Proprietà fondamentali dei sistemi dinamici. Concetto e definizioni di stabilità. (L:6; E:2)
5. Specifiche di funzionamento dei sistemi regolati. Motivazioni per la retroazione: reiezione dei disturbi, insensibilità agli errori di modellazione, modifica del comportamento dinamico. Specifiche di stabilità, specifiche sul regime e sul transitorio. Verifica delle specifiche sul sistema regolato sulla base delle caratteristiche in anello aperto. (L:5; E:2)
6. Retroazione degli stati e retroazione delle uscite. Effetti della retroazione sulle proprietà fondamentali. Retroazione degli stati e retroazione delle uscite. Il luogo delle radici. Azioni e reti correttive. Progetto del controllore per sistemi a fase minima. Progetto in cascata. (L:7; E:2)
7. Sistemi a dati campionati. Campionamento di segnali e discretizzazione di sistemi dinamici continui: applicazioni alla simulazione e alla realizzazione digitale dei regolatori. (L:4; E:3)
8. Analisi e sintesi assistita da calcolatore. Uso di pacchetti SW commerciali per la analisi e la simulazione di sistemi dinamici (Matlab, Simulink). (L:0; E:7)
  - Numero totale di ore in cui si sviluppano nuovi argomenti (L): 34
  - Numero totale di ore in cui si svolgono esemplificazioni ed esercitazioni di laboratorio (E): 21
  - Numero totale di ore: 55

### 0.1.7 Testi suggeriti

- P. Bolzern, R. Scattolini, N. Schiavoni: “Fondamenti di Controlli Automatici, McGraw Hill
- G. Marro, Controlli Automatici, Zanichelli



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Di che si tratta

Si consideri il semplice problema di muovere un carrello di massa  $m$  su un binario senza attrito, da una posizione iniziale  $p = 0$  a una posizione assegnata  $p = \hat{p}$ , potendo scegliere la forza  $f$  di spinta fornita da un apposito attuatore. La massa nominale  $\bar{m}$  del carrello sia nota, ma tale valore differisca dal valore vero (non noto) entro una tolleranza (ad esempio del 10%). In tali condizioni, si chiede di stabilire una legge che definisca un valore  $f(t)$  della spinta in ogni istante, tale da garantire che il carrello raggiunga la posizione desiderata con precisione elevata (dell'ordine ad esempio dell'1%) in un tempo sufficientemente breve, senza mai superare il valore finale desiderato.

Un approccio razionale al problema inizierà dalla scrittura delle equazioni del moto del sistema, che sono in questo caso estremamente semplici:

$$a(t) = f(t)/m,$$

dove  $a(t)$  indica la accelerazione del carrello.

Una prima possibile soluzione potrebbe essere data calcolando una particolare legge oraria per  $f(t)$  che ottenga lo scopo nel caso nominale. Ad esempio, si pensi di applicare una forza costante  $F$  per un tempo  $T$ , seguita da una forza opposta  $-F$  per un tempo uguale,

$$f(t) = \begin{cases} F, & 0 < t \leq T \\ -F, & T < t \leq 2T \\ 0 & t > 2T \end{cases}$$

e si imponga una condizione  $2 * \frac{FT^2}{2\bar{m}} = \hat{p}$ , da cui facilmente una soluzione per  $F$  fissato  $T$ , o viceversa.

Questa soluzione sarebbe in pratica soggetta a molti problemi:

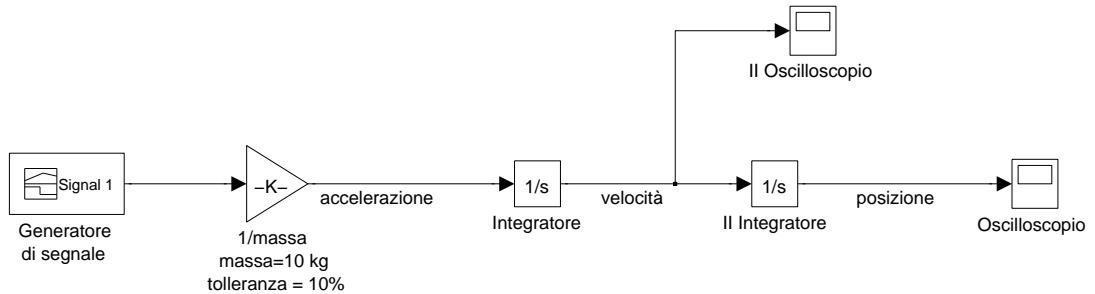


Figura 1.1: Schema per la simulazione del carrello dell'esempio.

- la posizione finale raggiunta sarebbe pari a quella desiderata solo nel caso nominale, ma se ne discosterebbe in realtà di una quantità dello stesso ordine di grandezza della tolleranza sulla massa;
- se il sistema fisico differisse dal modello matematico in altri parametri, ad esempio se esistesse una resistenza di attrito al moto, la posizione finale non raggiungerebbe mai la posizione desiderata;
- se anche tutto il modello fosse noto esattamente, ma la posizione iniziale della massa non fosse esattamente quella attesa, la posizione raggiunta sarebbe diversa da quella desiderata. Nel caso poi che il carrello avesse inizialmente velocità non nulla, seppur piccola, esso si allontanerebbe indefinitamente dalla posizione desiderata;

Per verificare direttamente queste osservazioni, sono molto utili software di simulazione con interfaccia grafica come il pacchetto **Simulink** del programma **Matlab**. In questi programmi i componenti dei sistemi dinamici sono rappresentati da blocchetti con ingressi, uscite e parametri, che possono essere tra loro collegati con linee dirette che simboleggiano la trasmissione di segnali.

Ad esempio, mediante lo schema Simulink di fig. 1.1 si realizza lo schema sopra visto, e si verificano facilmente gli effetti degli errori nei parametri e nelle condizioni iniziali.

Questi problemi potrebbero essere affrontati se la forza da applicare istante per istante venisse decisa non sulla base di un piano preordinato e fisso, ma basandosi sull'attuale evolvere del sistema. Disponendo ad esempio di un

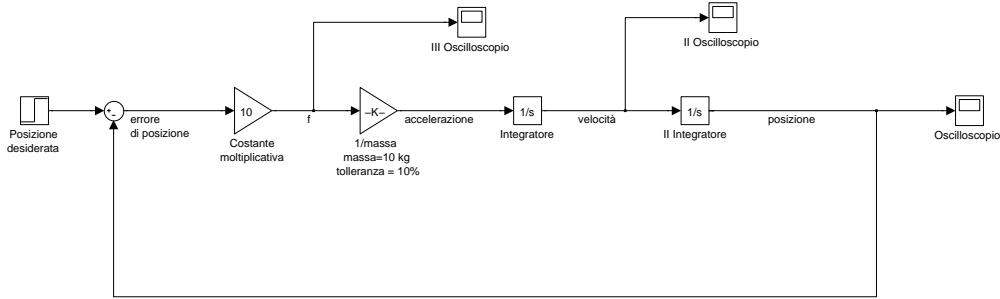


Figura 1.2: Schema per la simulazione del carrello dell'esempio con retroazione proporzionale all'errore di posizione.

sensore di posizione, che metta a disposizione la misura della posizione istantanea del carrello  $p(t)$ , si potrebbe pensare di scrivere la legge di azionamento del carrello come funzione di tale misura:  $f(p(t))$ .

Un esempio elementare di una tale legge consiste nell'applicare una forza proporzionale alla distanza tra la posizione desiderata e quella attuale, cioè porre

$$f = k(\hat{p} - p), \quad (1.1)$$

con  $k$  una costante da scegliersi opportunamente.

È interessante notare come questo tipo di legge, detta *in retroazione*, abbia bisogno di tre fondamentali elementi tecnologici per la realizzazione: oltre all'*attuatore* (in questo caso, il motore che genera la spinta  $f$ ), un *sensore* che misura la posizione, ed un *elaboratore* di segnali, che utilizza la misura del sensore (ed il valore desiderato) per effettuare calcoli (nel caso specifico, una semplice moltiplicazione per una costante) e trasformarli in un valore di forza, che dovrà poi essere applicato dall'attuatore.

È anche interessante notare che la equazione del sistema originale, con la legge di spinta descritta, diviene

$$ma + k(p - \hat{p}) = 0,$$

coincidendo quindi con la equazione di un sistema di pari massa collegato ad una molla di costante elastica  $k$ , a riposo nella posizione  $\hat{p}$  e inizialmente posto in  $p(t=0) = 0$ . Ne segue che la evoluzione del sistema sarebbe una oscillazione attorno al punto desiderato  $\hat{p}$ , che non soddisfarebbe le richieste sia perchè supererebbe la posizione desiderata, sia perchè non sarebbe mai in quiete in essa, come si può verificare con lo schema Simulink di fig. 1.2)

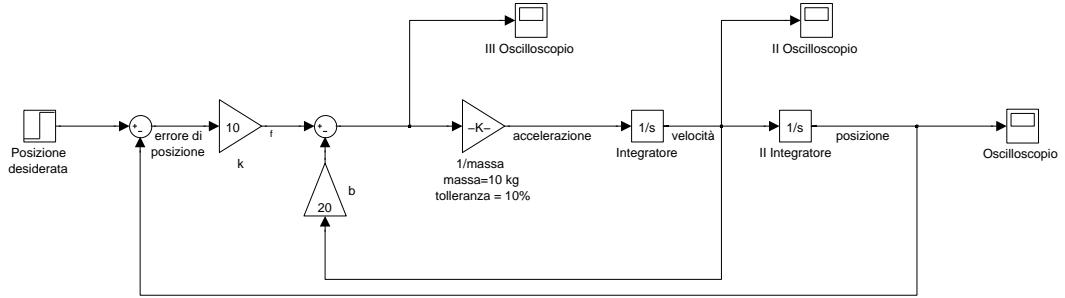


Figura 1.3: Schema per la simulazione del carrello con retroazione proporzionale all'errore di posizione e termine di smorzamento

Per quanto una retroazione troppo semplice non risolva il problema, il principio della retroazione, se applicato con maggiore sagacia, permette la soluzione di questo problema, come di altri ben più difficili. Una legge che può ad esempio risolvere il problema in esempio, nel caso si disponga anche di un sensore di velocità del carrello, è data da

$$f = k(\hat{p} - p) - bv, \quad (1.2)$$

dove  $v$  è la velocità misurata del carrello, e  $b$  è una opportuna costante positiva. Le equazioni del sistema divengono in questo caso quelle di un sistema massa-molla-smorzatore, che, scegliendo opportunamente le costanti, possono essere tali da soddisfare le specifiche date.

Riesaminando il significato pratico dello scrivere una legge di retroazione come questa, possiamo individuare altri elementi di interesse. La legge (1.2) assume la disponibilità, oltre che di una misura della posizione del carrello, anche della sua velocità: quindi, di un ulteriore sensore (ad esempio una *dinamo tachimetrica*) o della capacità di effettuare una operazione differenziale sul segnale di posizione. Il funzionamento di questo sistema può essere osservato mediante lo schema Simulink di fig. 1.3)

Le operazioni sui segnali in (1.2) consistono in prodotti e somme. Operazioni di questo genere possono essere ottenute agevolmente con circuiti analogici (ad esempio elettronici o fluidici), che trattano cioè segnali continui. Sempre più spesso, peraltro, considerazioni economiche e/o la maggiore complessità delle operazioni da svolgere rendono preferibile adottare per la elaborazione dei segnali strumenti digitali programmabili. Questo implica che le grandezze misurate, che sono continue, vengano *discretizzate*, cioè *quantizzate* (per essere rappresentate da un numero finito di bit) e *campionate*, cioè

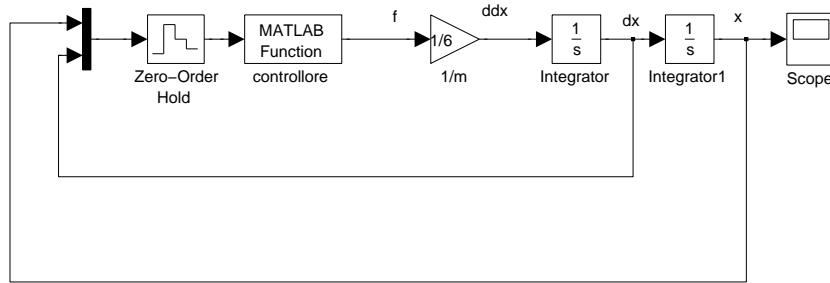


Figura 1.4: Schema per la simulazione del carrello dell'esempio con realizzazione digitale della retroazione

trasformate da funzioni continue del tempo in successioni ordinate di valori corrispondenti a intervalli di tempo prefissati: questa operazione si dice *conversione analogico/digitale*.

In un elaboratore digitale di segnali, le operazioni indicate dalla legge di feedback sono realizzate da una opportuna sequenza di istruzioni, programmabili in uno dei linguaggi disponibili sulla macchina, eseguite poi ciclicamente, producendo ad ogni ciclo un valore per l'azione dell'attuatore. Questo valore deve infine essere trasformato dalla forma digitale in cui è calcolato in forma di segnale continuo con caratteristiche opportune per comandare l'attuatore (*conversione digitale/analogica*).

Si veda ad esempio lo schema Simulink di fig. 1.4 Il blocco “Zero-Order Hold” è qui usato per campionare il segnale di ingresso al blocco con periodo  $T$  a scelta.

Il blocco Matlab Function contiene il programma “controllore.m” che è scritto come segue:

```

function out = Controllore(in)
rp = 1; % riferimento di posizione
% Ingressi del blocco
p = in(1); %misura di posizione
v = in(2); %misura di velocità
% Costanti del sistema
kp = 10; %moltiplicatore dell'errore di posizionamento
kv = 15; %moltiplicatore della misura della velocità
% legge di controllo
f = kp*(rp - p) - kv*v;
% Uscite del blocco
out(1) = f;

```

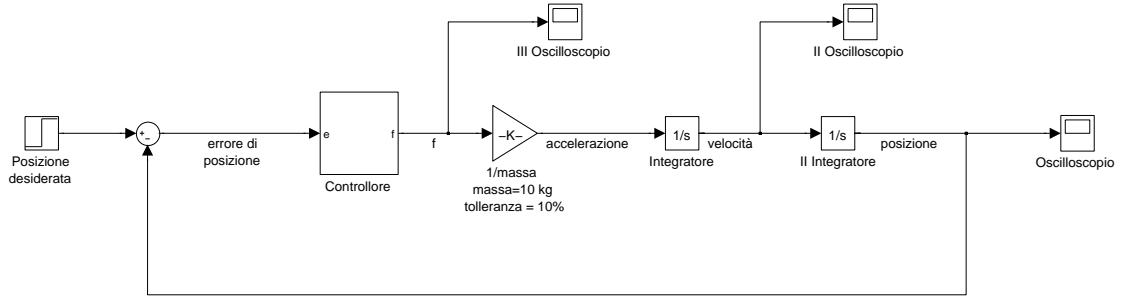


Figura 1.5: Schema per la simulazione del carrello dell'esempio con controllore che usa solo un sensore di posizione.

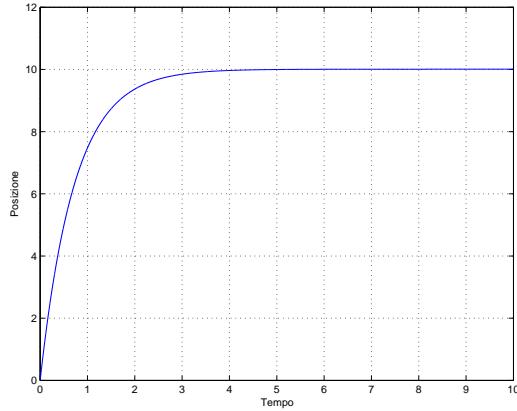


Figura 1.6: Risultati ottenuti dal controllore con l'uso del solo un sensore di posizione.

È importante osservare che, per valori del tempo di campionamento troppo elevati (campionamento troppo lento, ad esempio  $T = 1$ ), il sistema non si comporta affatto come desiderato, mentre questo avviene con un campionamento sufficientemente rapido (ad es.  $T \leq 0.1$ ).

Per la soluzione in assenza di misure di velocità, e di molti altri casi quotidianamente incontrati nella pratica della ingegneria dei sistemi meccanici dinamici, sono necessari strumenti più avanzati, che sono proprio l'oggetto di questo corso: si veda ad esempio lo schema di fig. 1.5, ed il risultato di posizione in fig. 1.6

# Capitolo 2

## Sistemi Dinamici

### 2.1 Modelli di Sistemi Dinamici

Questo corso si occupa di studiare sistemi dinamici, che cioè evolvono la loro configurazione nel tempo, così come essi si trovano in natura o nei dispositivi ingegneristici.

Oltre a studiare il modo in cui questi sistemi si comportano quando lasciati a sé stessi, ci interessa capire come è possibile influenzare il loro comportamento secondo le nostre finalità. Inoltre, vogliamo studiare come è possibile estrarre le migliori informazioni possibili sulle caratteristiche “interiori” di un sistema dinamico, quando solo alcuni fenomeni che lo riguardano possono essere misurati.

Evitando per il momento di dare una definizione formale di Sistemi Dinamici, ci richiamiamo alla nozione comune di “Sistema Dinamico” come insieme di elementi variabili, che evolvono in modo interdipendente secondo date leggi. Il concetto di S.D. è sviluppato induttivamente a partire dagli innumerevoli esempi di esperienza comune, tra cui si citano di solito la dinamica di un sistema meccanico massa–molla–smorzatore, o quella di un circuito elettrico RLC; la crescita/diminuzione delle popolazioni di specie animali in competizione, o le iterazioni di un algoritmo iterativo; il sistema di riscaldamento/condizionamento di un edificio, o il meccanismo di funzionamento di un riconoscitore di codici a barre.

Lo strumento fondamentale a nostra disposizione sarà il modello matematico di questi sistemi. Non tutti i problemi che coinvolgono sistemi sono matematizzabili in modo soddisfacente: d'altronde, la matematica è l'unico strumento che consente ad un ingegnere di valutare quantitativamente e obietivamente le proprietà di un sistema.

Ci troveremo spesso perciò di fronte a *modelli matematici approssimati*

di sistemi reali: sarà in questo caso necessario tenere conto di quanto i risultati del nostro studio approssimato permangano validi anche rispetto al vero sistema.

Tra tutti i sistemi dinamici, quelli di forse più immediata comprensione sono quelli descritti mediante *equazioni differenziali* o *equazioni alle differenze*, concetti già noti dalla analisi matematica e numerica. Nel primo caso si parla di sistemi che evolvono in *tempo continuo*, mentre nel secondo si parla di *tempo discreto*

### 2.1.1 Esempi di Sistemi Dinamici in Tempo Continuo

Nella modellazione di sistemi fisici sottoposti a leggi che legano tra loro grandezze variabili in modo continuo in funzione di una sola variabile, tipicamente il tempo, lo strumento matematico fondamentale sono le Equazioni Differenziali Ordinarie (“O.D.E.”, in sigla). Vediamo rapidamente alcuni semplicissimi esempi di come tali O.D.E. modellino le leggi fisiche in alcuni domini fisici di uso comune nell’ingegneria.

**Esempio: Meccanica: Leggi di Newton, Hooke, Rayleigh** La legge del moto di un corpo di massa  $m$  in posizione  $x$  sottoposto a una forza esterna variabile  $u(t)$  è data da una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine,

$$u(t) = m\ddot{y}$$

Se il corpo è collegato ad una molla di costante elastica (di Hooke)  $k$ , a riposo in posizione  $\hat{y}$ , si ha

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}(y - \hat{y}) + \frac{1}{m}u(t).$$

Se inoltre il corpo è collegato ad uno smorzatore viscoso di costante dissipativa (di Rayleigh)  $b$ , si ha

$$\ddot{y} = -\frac{b}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}(y - \hat{y}) + \frac{1}{m}u(t).$$

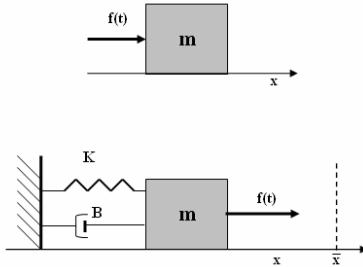


Figura 2.1: Esempi di sistemi dinamici meccanici.

**Esempio: Modello Semplificato di Sospensione Meccanica**

Sia  $m$  la massa sospesa di un veicolo che insiste su una singola ruota, e siano  $k$  e  $b$  coefficienti di elasticità e di smorzamento della sospensione. Sia  $y$  la posizione (in un riferimento assoluto) della massa sospesa e  $u$  indichi la posizione del punto cui è riferita la sospensione. Assegnato il moto del veicolo ed il profilo della strada, l'altezza dal suolo della sospensione è determinata dalla legge  $u(t)$ , che interpretiamo come un ingresso di disturbo. Si desidera studiare il moto della massa sospesa.

Le equazioni del moto sono (immaginando un moto orizzontale)

$$m\ddot{y} + b(\dot{y} - \dot{u}) + k(y - u) = 0$$

ovvero

$$\ddot{y} = -\frac{b}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y + \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

**Esempio: Modello Disaccoppiato di Sospensione Attiva di un Veicolo**

Sia  $m_v$  la massa di un veicolo che insiste su una singola ruota, e siano  $k_s$  e  $b_s$  le costanti della sospensione. Sia inoltre  $m_r$  la massa della ruota,  $k_r$  e  $b_r$  i coefficienti di elasticità e di smorzamento caratteristici del pneumatico. Siano infine  $y_v$  la posizione verticale (in un riferimento assoluto) del veicolo e  $y_r$  quella della ruota, e  $u_d$  indichi l'altezza assoluta del manto stradale incontrato dal veicolo nel suo moto, e  $u_a$  la forza che un attuatore posto tra cassa e ruota può esercitare al fine di modificare il comportamento della sospensione.

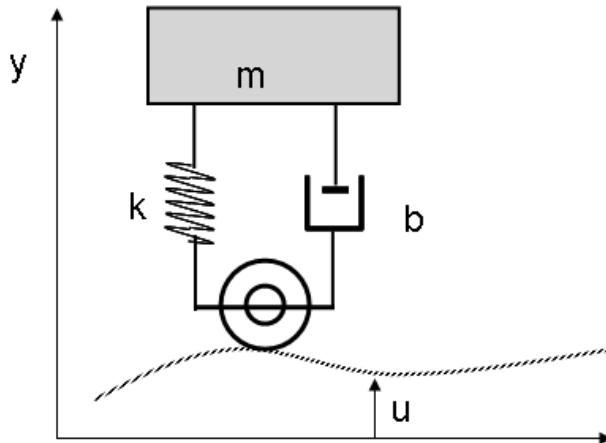


Figura 2.2: Semplice modello di sospensione con un solo elemento inerziale

Le equazioni del moto sono in questo caso

$$\begin{aligned} m_v \ddot{y}_v + b_s(\dot{y}_v - \dot{y}_r) + k_s(y_v - y_r) &= u_a \\ m_r \ddot{y}_r + b_s(\dot{y}_r - \dot{y}_v) + k_s(y_r - y_v) + b_r(\dot{y}_r - \dot{u}_d) + k_r(y_r - u_d) &= -u_a \end{aligned}$$

### Esempio: Circuiti elettrici: Leggi di Ohm, Faraday, Henry

La relazione tra la caduta di tensione ai capi di una resistenza di \$R\$ e la corrente \$i\$,

$$v(t) = i(t)R,$$

è una semplice relazione algebrica che non richiede equazioni differenziali. Invece la relazione tra la corrente tra le armature di un condensatore di capacità \$C\$ e la tensione \$v\$,

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt},$$

e la relazione tra la tensione ai capi di una induttanza \$L\$ e la corrente,

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt},$$

sono descritte da equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

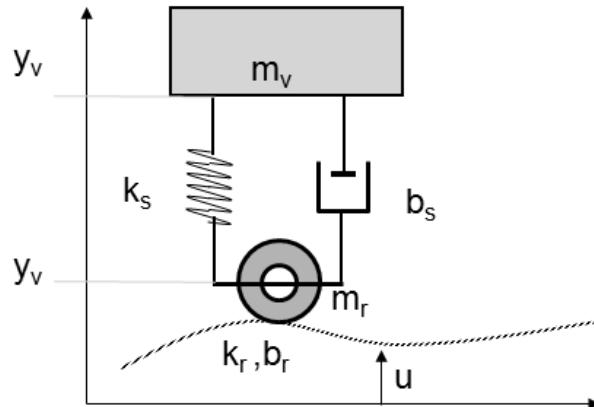


Figura 2.3: Modello di sospensione con due elementi inerziali

La legge di Kirchoff (bilancio delle cadute di potenziale lungo le maglie, o delle correnti ai nodi) ci permette di scrivere le equazioni di un circuito. Ad esempio su un parallelo di  $R, C, L$ , con corrente totale  $i(t) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t)$  e tensione  $v(t)$  si ottiene

$$\frac{di(t)}{dt} = \ddot{v}C + \frac{\dot{v}}{R} + \frac{v}{L},$$

cioè una O.D.E. del secondo ordine.

**Esempio: Leggi di scambio del calore**

Un modello elementare di uno scambiatore di calore alla temperatura  $T$ , cui viene fornito calore proporzionalmente al valore di controllo  $u$ , e che scambia con un ambiente esterno a temperatura costante (fig. 2.5), è dato dalla O.D.E. di primo ordine  $\dot{T} = \alpha u - \beta T$ .

### 2.1.2 Esempi di Sistemi Dinamici in Tempo Discreto

Le Equazioni alle Differenze sono invece spesso usate per descrivere matematicamente le leggi che legano grandezze continue variabili in funzione di una variabile indipendente discreta, che procede cioè “a salti”.

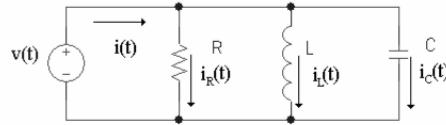


Figura 2.4: Esempio di sistema dinamico elettrico.

### Esempio: Calcolo degli interessi bancari

Se si deposita in banca un capitale iniziale di valore  $x(0)$ , e il tasso di interesse annuo è  $\alpha > 0$ , la legge che esprime la crescita del capitale dall'anno  $t$ -esimo al successivo è semplicemente

$$x(t+1) = \alpha x(t)$$

Perchè il capitale aumenti, deve essere  $\alpha > 1$ .

La stessa legge si applica, solo in prima approssimazione però, alla crescita delle popolazioni, in cui il fattore di fertilità  $\alpha$  regola la crescita geometrica.

### Esempio: Crescita delle Popolazioni

Un modello più dettagliato della crescita di una popolazione è dato dal modello a coorti (o generazioni). Si divide la popolazione in  $n$  gruppi di età comprese in un dato intervallo, ad es. 5 anni, e si indica con  $x_i$  il numero di individui vivi al tempo  $t$  nella  $i$ -esima coorte. In un intervallo di tempo, un numero di individui passa alla coorte  $i+1$ -esima pari a quelli che erano nella coorte  $i$ -esima, moltiplicato per un fattore  $\beta_i < 1$  che tiene conto della mortalità all'età  $i$ -esima.

Si ha quindi

$$x_i(t+1) = \beta_{i-1} x_{i-1}(t), i = 2, \dots, n$$

Resta da determinare  $x_1(t+1)$  dati tutti gli  $x_i(t)$ , cioè il numero dei nuovi nati in ogni intervallo. Poniamo che sia

$$x_1(t+1) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_n x_n(t)$$

dove gli  $\alpha_i$  sono i fattori di fertilità delle diverse età.

Per riassumere il modello con notazione matriciale, si può definire un vettore colonna  $x$  a  $n$  componenti  $x_1, \dots, x_n$ , per il quale si avrà

$$x^+ = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix} x.$$

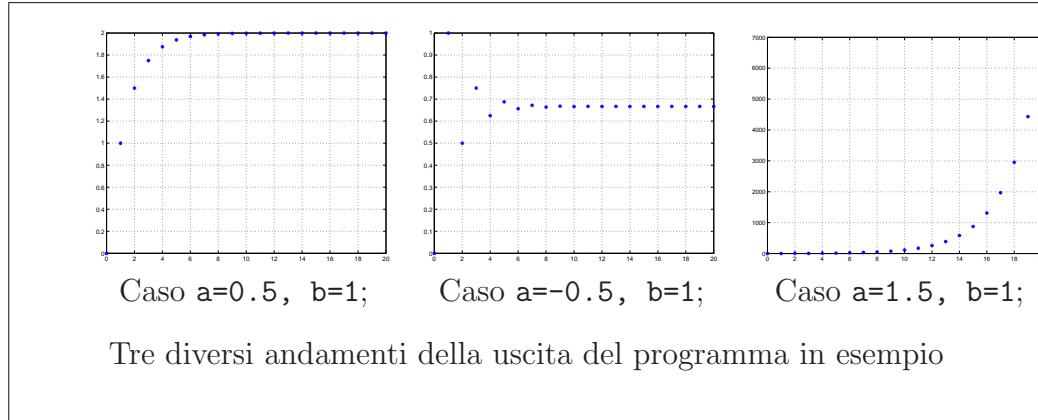
**Esempio: Programma di Calcolo** Si consideri il semplicissimo programma scritto in linguaggio Matlab:

```
%% Programma di calcolo come Sistema Dinamico
% Definizione delle costanti:
% Caso 1:
% a = 0.5; b = 1;
% Caso 2:
a = -0.5; b = 1;
% Caso 3:
% a = 1.5; b = -1;
x = 0; % Inizializza la variabile corrente e del grafico;
for t = 0:20
    plot(t,x,'.b') % Mette il punto sul diagramma x(t).
    x = a*x + b; % Aggiorna la variabile corrente
    hold on; % Evita la reinizializzazione del diagramma
end
grid on; % Aggiunge una griglia al diagramma
hold off; % Permette la reinizializzazione del diagramma
```

Questo programma realizza un sistema dinamico tempo discreto, che è possibile descrivere completamente con la equazione alle differenze

$$x(t+1) = ax(t) + b, \quad x(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 20.$$

Osservando i risultati di questo programma per valori diversi delle costanti  $a$  e  $b$ , si possono ottenere andamenti qualitativi diversi, come riportato in figura.



**Esempio: Mappa Logistica** La “mappa logistica” proposta nel 1976 dal biologo R. May (1976) è un esempio di equazione alle differenze nonlineare che modella la crescita di una popolazione isolata, tenendo conto di un tasso di natalità pressochè costante, e invece di un aumento del tasso di mortalità con le dimensioni della popolazione (dovuta alla competizione degli individui tra loro per assicurarsi il cibo necessario). La più semplice mappa logistica è rappresentata dalla equazione alle differenze

$$x(k+1) = rx(k)(1 - x(k)), \quad x(0) = x_0,$$

dove  $x(k)$  rappresenta la numerosità della popolazione (normalizzata tra 0 e 1) nel periodo  $k$ -esimo,  $x_0$  è la popolazione iniziale,  $r$  è un numero positivo che rappresenta un tasso combinato tra la riproduzione e mortalità.

È immediato costruire un programma che simuli questa equazione, ed è interessante notare cosa succede al variare del parametro  $r$  e delle condizioni iniziali (si veda [http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic\\_map](http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map))

- Per  $r$  tra 0 e 1, la popolazione si estingue, indipendentemente da  $x_0$ ;
- Per  $r$  tra 1 e 2, la popolazione converge rapidamente a  $\frac{r-1}{r}$ , a partire da qualsiasi  $x_0$ ;
- Per  $r$  tra 2 e 3, la popolazione converge ancora a  $\frac{r-1}{r}$  ma in modo oscillante;
- Per  $r$  tra  $3$  e  $1 + \sqrt{6}$ , per *quasi tutte* le condizioni iniziali, la popolazione oscilla indefinitamente tra due valori distinti

- Per  $r$  tra  $3$  e  $1 + \sqrt{6} \approx 3.45$ , per *quasi tutte* le condizioni iniziali, la popolazione oscilla indefinitamente tra due valori distinti
- Per  $r$  tra  $\sim 3.45$  e  $\sim 3.54$ , per *quasi tutte* le condizioni iniziali, la popolazione oscilla indefinitamente tra quattro valori distinti
- Per  $r$  in intervalli superiori, di ampiezza sempre più piccola, e per *quasi tutte* le condizioni iniziali, la popolazione oscilla indefinitamente tra otto, sedici, trentadue etc. valori distinti
- Per  $r$  superiore a  $3.57$ , si ha comportamento *caotico* delle soluzioni: non si osserva più periodicità, e piccolissime variazioni delle condizioni iniziali danno luogo a risposte completamente differenti.

Un programma Matlab che realizza la mappa logistica può essere scritto con piccole modifiche rispetto al precedente, anche se questo sistema esibisce comportamenti dinamici molto differenti e vari.

```
%% Mappa Logistica
r = 0.99;    % Definizione delle costanti
x_0=0.5;      % Definizione delle condizioni iniziali

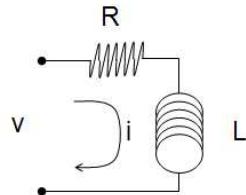
x=x_0;        % Inizializzazione variabili
% Ciclo
for t=0:100
    plot(t,x,'.b') % Mette il punto sul diagramma x(t).
    x=r*x*(1-x);   % Aggiorna la variabile corrente
    hold on;         % Evita la reinizializzazione del diagramma
end
hold off;
```

### 2.1.3 Sistemi TD per la simulazione numerica.

Una applicazione particolarmente importante delle equazioni alle differenze, ovvero dei sistemi a tempo discreto, è nella simulazione numerica della evoluzione di sistemi fisici continui. È evidente come questo problema sia di importanza centrale in ogni metodo di calcolo e di verifica di comportamenti dinamici non banali tali da richiedere l'uso di un algoritmo numerico eseguito

da un computer, in cui ogni calcolo è svolto su tempi multipli di un tempo di “clock” fissato.

Per fissare l’attenzione, si consideri inizialmente il sistema elettrico di figura



La equazione differenziale che regge il sistema è

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}v.$$

Supponiamo che la tensione  $v(t)$  sia una funzione assegnata (ad esempio generata da un dispositivo esterno ad alta impedenza), misurabile ma non nota a priori. Si supponga anche che si desideri conoscere la corrente  $i(t)$ , che non è accessibile ad una misura diretta. Si disponga di un computer con una porta di ingresso (un *convertitore Analogico/Digitale*) che renda disponibile la misura istantanea di  $v$  nell’istante in cui viene emesso un comando di `read(input)`. Si desidera infine porre i valori di corrente calcolati in un apposito registro di uscita mediante un comando di `write(valore,output)`. In taluni casi, questo potrebbe essere ad esempio un *convertitore digitale/analogico* che trasforma il valore calcolato in una effettivo segnale analogico di corrente.

Poiché nel computer non è possibile rappresentare segnali continui se non con sequenze di valori ad istanti discreti, fissando un tempo di ciclo delle operazioni pari a  $T$ , i dati su cui un’algoritmo di *simulazione* quale quello richiesto dovrà lavorare sono sequenze di *campioni* della funzione  $f(t)$  agli istanti  $t = kT$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Per convenienza, indicheremo semplicemente  $f(kT)$  con il solo indice del campione, cioè con  $f(k)$ .

Per realizzare la simulazione numerica, si devono inoltre approssimare le derivate con differenze finite. Ad esempio, possiamo usare il metodo delle *differenze in avanti*, ponendo

$$\dot{f}(k) \approx \frac{f(k+1) - f(k)}{T}.$$

Per la equazione del circuito in esame, otteremmo quindi l’algoritmo

$$\frac{i(k+1) - i(k)}{T} = -\frac{R}{L}i(k) + \frac{1}{L}v(k)$$

da cui ricaviamo

$$i(k+1) = \left(1 - \frac{RT}{L}\right) i(k) + \frac{T}{L} v(k)$$

Un programma per simulare il circuito corrispondente a questa scelta algoritmica su un intervallo di tempo di durata assegnata  $T_{fin}$  e con periodo  $T$  può essere scritto come segue

```
R = 10; L = 5; % Assegnazione Costanti
T_fin = 10; % Durata Simulazione
T = 0.001; % Tempo di campionamento
i0 = 10; % Condizioni iniziali corrente
%Generazione di segnali
t_vec=0:T:T_fin; % Vettore dei tempi
v_in=10*sin(3*t_vec); % Vettore delle tensioni di ingresso:
% ad esempio sinusoidale
i_out=zeros(1,length(t_vec)); % Allocazione vettore
% delle correnti in uscita
i = i0; %Inizializzazione variabili dinamiche
% Simulazione con formula di Eulero in avanti
for k=1:length(t_vec)
    i_out(k) = i;
    V=v_in(k);
    i_buffer=i;
    i = (1-R*T/L)*i_buffer + T/L*V;
end
plot(t_vec,i_out,'-b',t_vec,v_in,'-r'); % Grafica
```

È possibile osservare sperimentalmente che, se il tempo di ciclo  $T$  è sufficientemente piccolo, il comportamento della variabile calcolata con questo algoritmo approssima bene quello della soluzione esatta. Se invece  $T$  è grande, il comportamento simulato può essere affatto diverso da quanto atteso.

Si noti che se il ciclo interno al programma fosse scritto evitando l'introduzione della variabile di appoggio  $i_{buffer}$ , ovvero

```
for k=1:length(t_vec)
    i_out(k) = i;
    V=v_in(k);
    i = (1-R*T/L)*i + T/L*V;
end
```

il programma fornirebbe lo stesso risultato numerico. La introduzione delle variabili di appoggio (buffer) è comunque funzionale ad una più ordinata scrittura, e sarà indispensabile in casi meno semplici.

Un problema di simulazione leggermente più complesso si ha considerando un sistema meccanico massa-molla-smorzatore di equazione

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = f.$$

Procedendo ad approssimare le derivate con le differenze in avanti come sopra, si ottiene

$$\begin{aligned}\ddot{y} &\approx \frac{\dot{y}(k+1)-\dot{y}(k)}{T} \\ &\approx \frac{1}{T} \left( \frac{y(k+2)-y(k+1)}{T} - \frac{y(k+1)-y(k)}{T} \right) \\ &= \frac{1}{T^2} (y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)),\end{aligned}$$

da cui si ha l'algoritmo di simulazione numerica

$$y(k+2) = \alpha y(k+1) + \beta y(k) + \gamma f(k).$$

$$\text{dove } \alpha = \frac{2m-bT}{m}, \beta = -\frac{m-bT+kT^2}{m}, \gamma = \frac{T^2}{m}.$$

Si noti che in questo caso, per il calcolo del valore di  $y$  ad un istante  $kT$  generico, si ha bisogno di conoscere non solo il valore di  $y$  nel campione immediatamente precedente, ma anche in quello prima. Nella implementazione su programma, è quindi necessario provvedere a assegnare una locazione di memoria ai valori intermedi necessari al calcolo.

Per simulare il sistema su un orizzonte temporale  $T_{fin}$  con tempo di campionamento  $T$  potremo scrivere ad esempio

```
m = 2; b = 2; K = 3; % Assegnazione Costanti
T = 0.1; % Tempo di Campionamento
T_fin = 10; % Durata Simulazione
% Calcolo parametri dell'equazione alle differenze.
alpha = (2*m - b*T)/m;
beta = -(m - b*T + K*T^2)/m;
gamma = T^2/m;
% Valori iniziali di posizione e velocità
y_0 = .2; Dy_0=0;
%Generazione di segnali
t_vec=0:T:T_fin; % Vettore dei tempi
f_in=10*cos(2*t_vec); % Vettore delle forze di ingresso
```

```

y_out=zeros(1,length(t_vec)); % Allocazione vettore
                                % delle posizioni in uscita
%Inizializzazione variabili dinamiche
x_1 = y_0;
x_2 = Dy_0;
% Simulazione con formula di Eulero in avanti
for k=1:length(t_vec)
    y_out(k) = x_1;
    F=f_in(k);
    x_1_buffer = x_1;
    x_2_buffer = x_2;
    x_1 = x_2_buffer;
    x_2 = alpha*x_2_buffer + beta*x_1_buffer + gamma*F;
end
% Grafica
plot(t_vec,y_out,'-b',t_vec,f_in,'-r');

```

### Esempio: Algoritmo di Newton–Raphson

Questo algoritmo è usato per la soluzione di  $n$  equazioni algebriche nonlineari in  $n$  incognite del tipo  $f(x) = 0$ , dove  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Se la matrice jacobiana  $J = \frac{\partial f}{\partial x}$  esiste in un punto  $x(t)$  (cioè se  $f(x(t))$  è differenziabile), per lo sviluppo di Taylor al primo ordine si può scrivere

$$f(x(t+1)) \approx f(x(t)) + J(x(t))(x(t+1) - x(t))$$

Cercando di imporre che sia  $f(x(t+1)) = 0$ , si ottiene (laddove  $J$  sia invertibile)

$$x(t+1) = x(t) - J^{-1}f(x(t)) \quad \text{ovvero } x^+ = x - J^{-1}f(x)$$

Un semplice esempio in Matlab per trovare le radici dell'equazione  $f(x) = \exp(-x) + \sin(0.1 * x) = 0$  (con  $x \geq 0$ ) è riportato nel seguito.

```

%% Grafico della funzione f.
x = 0:.1:100; f = exp(-x) + sin(0.1*x);
figure(1), plot(x,f), grid on
%% Applicazione dell'Algoritmo
% Valore iniziale assunto dalla funzione in x_0
x_0 = 20; fx_0 = exp(-x_0) + sin(.1*x_0);

```

```
% Scelta della precisione desiderata
prec = 10^-4;
% Inizializzazione variabili dinamiche
x = x_0; k = 1;
figure(2); % Cambia figura per non cancellare la prima
while 1 % ciclo di lunghezza indefinita
    plot(k,x,'.b') % Andamento della variabile x(t).
    hold on, grid on
    x_buffer = x;
    % Derivata df/dx valutata in x_buffer
    J = -exp(-x_buffer) + 0.1 * cos(.1*x_buffer);
    %Residuo valutato in x_buffer
    f_x = exp(-x_buffer) + sin(.1*x_buffer);
    % Aggiornamento della variabile
    x = x_buffer - J^-1*f_x
    k = k + 1;      % Conta i passi
    if (abs(x_buffer - x)<= prec) break, end
    % Se la lunghezza del passo è piccola, esce dal ciclo
end
hold off;
```

## 2.2 Forma normale e forma di stato

Rivolgeremo il nostro studio a sistemi rappresentati da equazioni differenziali o alle differenze ordinarie di ordine  $n$  del tipo

$$F(y(t), \mathbb{D}y(t), \dots, \mathbb{D}^n y(t), u(t), \mathbb{D}u(t), \dots, \mathbb{D}^p u(t), t) = 0,$$

dove:

- nel caso delle ODE,  $t$  è la variabile indipendente che assume valori reali continui ( $t \in \mathbb{R}$ ), e  $\mathbb{D}$  è l'operatore differenziale totale rispetto a  $t$ , cioè  $\mathbb{D}^k y(t) = \frac{d^k}{dt^k} y(t)$ . Questi sistemi si dicono “a tempo continuo”;
- per le eq. alle differenze, la variabile indipendente  $t$  assume valori discreti, tipicamente interi  $t \in \mathbb{Z}$ , e  $\mathbb{D}$  è l'operatore di scorrimento in avanti (*shift*)  $\mathbb{D}^k y(t) = y(t + k)$ . Talvolta si usa anche la scrittura

compatta  $y^+$  per indicare  $\mathbb{D}y(t) = y(t+1)$  quando l'istante di riferimento è chiaro dal contesto. Sistemi di questo tipo sono detti “a tempo discreto”;

- Il termine forzante  $u(t)$  è rispettivamente una funzione (continua a tratti)  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ovvero una successione  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ricordiamo che, se il modello è ben posto, è sempre possibile riscriverlo in forma *normale*, cioè

$$\mathbb{D}^n y = \hat{F}(y, \mathbb{D}y, \dots, \mathbb{D}^{n-1}y, u, \mathbb{D}u, \dots, \mathbb{D}^p u, t). \quad (2.1)$$

Sotto opportune ipotesi, tra cui quella fondamentale  $n \geq p$ , è possibile ricondurre questa equazione di ordine  $n$  ad un sistema di  $n$  equazioni del primo ordine

$$\mathbb{D}x(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (2.2)$$

dove si usa la notazione vettoriale

$$f(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} f_1(\cdot) \\ \vdots \\ f_n(\cdot) \end{bmatrix}; \quad x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Si noti che in questa equazione appaiono solo le funzioni (successioni)  $x_i(t)$ ,  $u(t)$  e la derivata (shift) prima delle  $x_i(t)$ .

Una equazione differenziale o alle differenze (ben posta) individua tutta l'evoluzione delle grandezze coinvolte quando ne siano date le *condizioni iniziali*. Queste sono specificate, nel caso della (2.1) in T.C., dai valori ad un istante  $t_0$  di  $y$  e delle sue prime  $n-1$  derivate, e di  $u$  e delle sue prime  $p-1$  derivate; ovvero dai valori di  $y(t_0)$ ,  $y(t_0+1)$ ,  $\dots$ ,  $y(t_0+n-1)$  e delle  $u(t_0)$ ,  $u(t_0+1)$ ,  $\dots$ ,  $u(t_0+p-1)$  in T.D..

Nel caso della (2.2), le condizioni iniziali sono date dai valori dello stato al tempo  $t_0$ , ad es.  $x(t_0) = x_0$ .

Una soluzione del sistema (2.2) è una funzione  $x(t)$  che verifica (2.2) per ogni  $t$ , quindi

$$x(t_0) = x_0$$

e

$$\mathbb{D}x(t) = f(x(t), u(t), t), \quad \forall t.$$

Per sottolineare la dipendenza di questa soluzione dalle condizioni iniziali e dalle funzioni di ingresso, scriveremo talvolta  $x(t, x_0, u)$ .

Nota che sia la soluzione  $x(t)$  della (2.2), è possibile trovare la soluzione  $y(t)$  della (2.1) attraverso una relazione algebrica

$$y(t) = h(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t), t) = h(x, u, t). \quad (2.3)$$

La descrizione di un sistema dinamico data da (2.2) e (2.3) è molto conveniente per il nostro studio. Una parte del nostro studio sarà quindi rivolta alla rappresentazione dei sistemi in forma di stato, che, ove si ometta la dipendenza di  $x$  e  $u$  da  $t$ , sono sinteticamente descritti dalle equazioni

$$\begin{aligned} \mathbb{D}x &= f(x, u, t) \\ y &= h(x, u, t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

La tecnica per passare dalla forma (2.1) alla forma (2.2) è molto semplice nel caso  $p = 0$

$$\mathbb{D}^n y = \hat{F}(y, \mathbb{D}y, \dots, \mathbb{D}^{n-1}y, u, t).$$

Basta infatti porre

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \mathbb{D}y \\ \vdots \\ \mathbb{D}^{n-1}y \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

così che si ottiene

$$\mathbb{D}x = \begin{bmatrix} \mathbb{D}x_1 \\ \mathbb{D}x_2 \\ \vdots \\ \mathbb{D}x_{n-1} \\ \mathbb{D}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \hat{F}(x, u, t) \end{bmatrix} = f(x, u, t),$$

cioè la forma voluta. Le condizioni iniziali della forma (2.1) si traducono immediatamente in condizioni iniziali sulle  $x$  della forma (2.2). Inoltre, la variabile  $y$  è banalmente ottenuta dalla conoscenza di una soluzione  $x(t)$ :

$$y(t) = h(x, u, t) = x_1$$

Nel caso più generale in cui sia  $0 < p \leq n$ , il passaggio nella forma di sistema di  $n$  equazioni del primo ordine è più complesso. Vedremo più avanti come procedere a scrivere sistemi con  $0 < p \leq n$  nella forma di stato con soli  $n$  stati, nel caso che l'equazione differenziale abbia una particolare, notevolissima proprietà detta di linearità.

### 2.2.1 Sistemi di equazioni differenziali

Quanto sopra detto nel caso di una equazione in forma normale con un termine forzante si generalizza al caso di  $l$  equazioni con  $m$  termini forzanti:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{n_i} y_i &= \hat{F}_i(y_1, \dots, \mathbb{D}^{n_1-1} y_1, \dots, y_l, \dots, \mathbb{D}^{n_l-1} y_l, \\ &\quad u_1, \dots, \mathbb{D}^{p_{i1}} u_1, \dots, u_m, \dots, \mathbb{D}^{p_{im}} u_m, t); \end{aligned} \quad (2.6)$$

che si riporta, sotto opportune ipotesi, ad un sistema di equazioni del primo ordine:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}x &= f(x, u, t) \\ y &= h(x, u, t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $n = \sum_{i=1}^l n_i$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ , e  $y \in \mathbb{R}^l$ . Ad illustrazione, si veda

l'esempio di due masse mobili vincolate riportato poco sotto.

### 2.2.2 Stati, ingressi, uscite

Nella forma

$$\begin{aligned} \mathbb{D}x &= f(x, u, t) \\ y &= h(x, u, t) \end{aligned}$$

si individuano alcuni degli elementi fondamentali dei Sistemi Dinamici, cui si danno particolari denominazioni:

**Stato** Il vettore  $x \in \mathbb{R}^n$  è detto vettore di stato (o brevemente “stato”) del sistema;

**Ingressi** I termini (funzioni o successioni) forzanti raccolti nel vettore  $u(t)$  sono detti ingressi del sistema;

**Uscite** Le funzioni (o successioni)  $y(t)$  sono dette uscite del sistema.

Lo stato del sistema è un insieme di variabili, la cui conoscenza ad un generico istante  $t_0$ , assieme alla conoscenza degli ingressi  $u(t)$  per ogni  $t \geq t_0$  e delle equazioni del modello (2.7)), è sufficiente a determinare univocamente i valori dello stato stesso  $x(t)$  e delle uscite  $y(t)$  per ogni tempo successivo a  $t_0$ . Questa proprietà dei modelli a spazio di stato viene detta di “separazione tra passato e futuro”.

Un ingresso  $u_i(t)$  rappresenta tipicamente l’azione che un agente esterno al sistema può esercitare su di esso, forzandone la sua evoluzione. Dal punto di vista dell’ingegnere, sarà importante distinguere

- ingressi manipolabili a piacere dal progettista, detti anche “controlli”, che potranno essere scelti in modo da influenzare il comportamento del sistema in modo da rispondere a prestabilite specifiche;
- ingressi incontrollabili, o “disturbi”, che invece possono alterare i comportamenti del sistema in senso negativo.

Una uscita  $y_i(t)$  del sistema rappresenta una grandezza variabile in termini della quale è “riassunto” il comportamento del sistema. A seconda dei casi, una uscita si può caratterizzare come

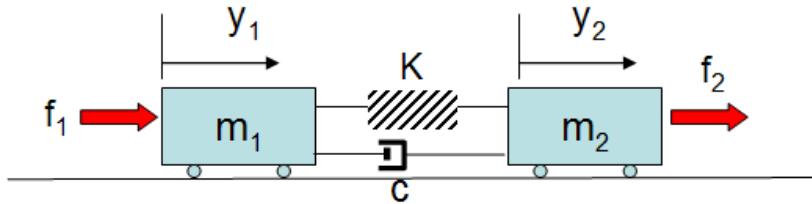
- una grandezza indicatrice del comportamento del sistema, il cui andamento nel tempo è soggetto a specifiche di progetto ed è l’obiettivo primario delle scelte di controllo (uscita primaria o “controllata”);
- una grandezza disponibile per la misurazione (a differenza degli stati, che in generale possono non esserlo), la cui conoscenza, assieme eventualmente alla conoscenza del modello (2.7) e/o a quella dell’ingresso  $u(t)$ , può essere utilizzata per acquisire maggiori informazioni sul sistema (uscita secondaria o “misurata”);

Si noti che, mentre gli ingressi sono alternativamente di controllo o di disturbo, le uscite controllate sono anche tipicamente misurate.

Ad esempio, nel sistema massa–molla–smorzamento sopra visto, le variabili di stato scelte coincidono con posizione e velocità del punto materiale; l’ingresso con la forza esterna agente sulla massa, e l’uscita con la posizione. In un modello più completo, possiamo pensare che sia presente oltre alla forza intenzionalmente controllata  $f$  una forza di disturbo  $f_{dist}$ ; e che, sebbene si desideri primariamente trovare una legge per  $f$  che faccia in modo che la posizione della massa sia quella desiderata ad ogni istante (uscita primaria), sia disponibile a questo scopo non solo la misura della posizione stessa, ma anche quella della velocità ad ogni istante (si vedrà più avanti che questa uscita misurata potrà essere molto utile nel migliorare le caratteristiche del sistema).

Un sistema con singolo ingresso viene indicato con la sigla SI, mentre per ingressi multipli si usa MI. Analogamente le sigle SO e MO sono usate per singole e multiple uscite. Si parla poi di sistemi SISO, SIMO, MISO, e MIMO, con ovvio significato.

**Esempio: Masse mobili vincolate.** Si consideri il sistema descritto in figura



che è retto dal sistema di due equazioni differenziali di secondo ordine

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2) &= f_1 \\ m_2 \ddot{y}_2 + c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k(y_2 - y_1) &= f_2, \end{aligned}$$

ovvero in forma normale

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} (-c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - k(y_1 - y_2) + f_1) \\ \frac{1}{m_2} (-c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k(y_2 - y_1) + f_2) \end{bmatrix}.$$

Ponendo  $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = \dot{y}_1, x_4 = \dot{y}_2$ , si ottiene la forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{1}{m_1} (-c(x_3 - x_4) - k(x_1 - x_2) + f_1) \\ \frac{1}{m_2} (-c(x_4 - x_3) - k(x_2 - x_1) + f_2) \end{bmatrix}; \\ y &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

che può essere riscritta in forma matriciale:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x. \end{aligned}$$

## 2.3 Proprietà dei Sistemi Dinamici

### 2.3.1 Causalità

Un sistema si dice “causale” (o “proprio”) se per esso la evoluzione della uscita  $y(t)$  dipende (oltre che dalle condizioni iniziali) solo dai valori dell’ingresso  $u(\tau)$  per  $\tau \leq t$ . Se questo vale per  $\tau < t$ , il sistema si dice “strettamente” causale (o proprio).

In un sistema causale, la uscita  $y(t)$  non dipende quindi dalla intera funzione di ingresso  $u(\cdot)$ , ma solo dal suo andamento nel passato (se strettamente proprio) o nel passato e nel presente (se non strettamente proprio).

Un sistema dinamico rappresentato da una equazione in forma normale

$$\mathbb{D}^n y = \hat{F}(y, \mathbb{D}y, \dots, \mathbb{D}^{n-1}y, u, \mathbb{D}u, \dots, \mathbb{D}^p u, t)$$

è causale tra l’uscita  $y$  e l’ingresso  $u$  se  $n \geq p$ , e strettamente causale se  $n > p$ .

Se un sistema è non causale tra  $u$  e  $y$ , esso diviene strettamente causale qualora si inverta il ruolo di ingresso e uscita. Questa osservazione spiega la scelta, indicata in precedenza, di identificare come “uscita” la grandezza che appare con derivata o differenza di ordine più alto nella equazione del sistema.

Se un sistema non è causale tra  $u$  e  $y$ , esso si dice anche *non fisicamente realizzabile*. Questo è particolarmente evidente per i sistemi a tempo discreto, nei quali per valutare la  $y$  in un istante  $t$ , sarebbe necessario conoscere la  $u$  in istanti successivi a  $t$ , cioè nel futuro.

In alcuni casi particolari, in cui tutta la evoluzione della  $u(\cdot)$  sia fissa e nota a priori, sistemi non causali possono in effetti essere implementati e usati nella pratica (si pensi ad esempio ai lettori di CD che leggono anticipatamente tratti della traccia da eseguire per ottenere migliore filtraggio e robustezza). Tali sistemi non sono però di interesse per questo corso, dove la conoscenza delle variabili correnti deve essere sempre pensata come disponibile solo *al momento* (o addirittura con ritardo), cioè in tempo reale.

Si consideri ora un sistema in forma di stato (2.7), e si consideri la interpretazione grafica di tale scrittura rappresentata in fig. ??

Lo schema suggerisce un rapporto causa–effetto tra gli ingressi e le uscite, mediato dagli stati.

Un sistema dinamico rappresentato in forma di stato è sempre causale, a causa della definizione stessa di vettore di stato. In altri termini, un sistema con equazione in forma normale non causale non può essere posto in forma di stato (a meno di non scambiare il ruolo di ingressi e uscite).

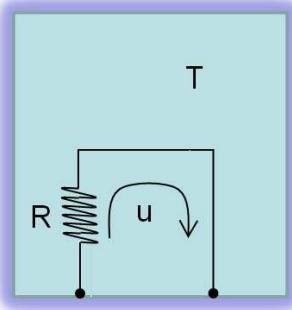


Figura 2.5: Modello elementare di ambiente riscaldato

La forma di stato di un sistema strettamente causale evidenzia la mancanza di una dipendenza immediata, algebrica, tra l'uscita e l'ingresso, che non appare nella equazione di uscita se non attraverso l'effetto che esso ha sugli stati:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}x &= f(x, u, t) \\ y &= h(x, t)\end{aligned}$$

### 2.3.2 Stazionarietà

Un sistema nelle cui equazioni non appare esplicitamente il tempo, si dice “stazionario” o “tempo-invariante”. Un sistema in forma normale (2.1) è stazionario se  $\frac{\partial \hat{F}(\cdot)}{\partial t} = 0$ . Un sistema in forma di stato (2.2) è tempo-invariante se  $\frac{\partial f(\cdot)}{\partial t} = 0$  e  $\frac{\partial h(\cdot)}{\partial t} = 0$ , e semplicemente si scrive

$$\begin{aligned}\mathbb{D}x &= f(x, u) \\ y &= h(x, u)\end{aligned}$$

Le soluzioni di un sistema tempo-invariante non dipendono dall'istante iniziale. In altri termini, la soluzione

$$x_1(t) = x(t, x(t_0) = x_0, u(t - t_0))$$

corrispondente a condizioni iniziali  $x_0$  al tempo  $t_0$  e all'ingresso  $u(\tau)$  applicato a partire da  $\tau = t_0$ , differisce dalla soluzione

$$x_2(t) = x(t, x(t - t_1) = x_0, u(t - t_1))$$

che invece corrisponde a condizioni iniziali  $x_0$  al tempo  $t_1$  e allo stesso ingresso  $u(\tau)$  applicato però a partire da  $t_1$ , solo per una traslazione nel tempo:  $x_1(t - t_0) = x_2(t - t_1)$ . Si può verificare questo per semplice sostituzione e calcolo.

### 2.3.3 Linearità

Un sistema in forma normale (2.1) nel quale la funzione  $\hat{F}(\cdot)$  sia lineare rispetto alle  $\mathbb{D}^i y, i = 1, \dots, n-1$  e alle  $\mathbb{D}^j u, j = 1, \dots, p$ , cioè un sistema nella forma

$$\mathbb{D}^n y = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i(t) \mathbb{D}^i y + \sum_{j=0}^p b_j(t) \mathbb{D}^j u, \quad (2.8)$$

si dice un **sistema lineare**. I coefficienti  $a_i, b_j$  della combinazione lineare sono in generale funzioni del tempo. Se il sistema lineare è anche stazionario, i coefficienti sono costanti.

Si ricordano dalla analisi le seguenti proprietà delle equazioni lineari differenziali e alle differenze in forma normale

- Ogni soluzione della equazione lineare (2.8) è data dalla somma di un integrale omogeneo (ottenuto per  $u \equiv 0$ ) e di un integrale particolare (ottenuto ignorando le condizioni iniziali);
- Se  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  sono  $n$  soluzioni omogenee indipendenti, ogni soluzione omogenea è una combinazione lineare delle  $y_i(t)$ ;
- Le  $n$  costanti della combinazione lineare sono univocamente determinate date le  $n$  condizioni iniziali del sistema. Pertanto, e per la linearità del sistema, se  $y_a(t)$  è la soluzione corrispondente alle condizioni iniziali  $y(t_0) = y_{a0}, \dots, \mathbb{D}^{n-1}y(t_0) = y_{a0}^{(n-1)}$ , e  $y_b(t)$  quella corrispondente a  $y(t_0) = y_{b0}, \dots, \mathbb{D}^{n-1}y(t_0) = y_{b0}^{(n-1)}$ , la soluzione corrispondente a  $y(t_0) = \alpha y_{a0} + \beta y_{b0}, \dots, \mathbb{D}^{n-1}y(t_0) = \alpha y_{a0}^{(n-1)} + \beta y_{b0}^{(n-1)}$  è data da  $y(t) = \alpha y_a(t) + \beta y_b(t)$  (sovraposizione degli effetti delle condizioni iniziali).
- La sovrapposizione degli effetti vale anche per le funzioni (successioni) di ingresso: se  $y_{pi}(t)$  è l'integrale particolare di (2.8) per  $u(t) = u_i(t)$ , allora la soluzione corrispondente a  $u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) + \dots$  è data da  $\alpha_1 y_{p1}(t) + \alpha_2 y_{p2}(t) + \dots$ ;
- Se  $y_p(t)$  è un integrale particolare di (2.8) per  $u(t)$ , allora  $\mathbb{D}y_p(t)$  è un integrale particolare corrispondente a  $Du(t)$  (si derivi una volta — o si trasli avanti di un passo — la equazione (2.8)).

Un sistema in forma di stato (2.7) nel quale le funzioni  $f(x, u, t)$  e  $h(x, u, t)$  siano lineari rispetto sia ad  $x$  che a  $u$ , è un sistema lineare. In altri termini, in un sistema lineare si ha

$$\begin{aligned} f(x, u, t) &= A(t)x + B(t)u \\ h(x, u, t) &= C(t)x + D(t)u \end{aligned}$$

dove  $A, B, C, D$  sono matrici rispettivamente di dimensioni  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $l \times n$ , e  $l \times m$ , i cui elementi sono in generale funzioni del tempo (ma non dello stato).

Un sistema lineare e stazionario in forma di stato è scritto poi

$$\begin{aligned} \mathbb{D}x &= Ax + Bu; \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \tag{2.9}$$

con matrici a elementi costanti, delle stesse dimensioni.

### 2.3.4 Forma Canonica di Controllo

Come già visto, quando un sistema SISO è dato in termini della sua equazione normale (come spesso avviene derivando un modello fisico da equazioni differenziali o incrementali di ordine superiore) del tipo

$$\mathbb{D}^n y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i \mathbb{D}^i y(t) + u(t),$$

il metodo più diretto per riscrivere il sistema nello spazio di stato consiste nel porre  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \mathbb{D}y$ , etc.. Si ottiene così una equazione di stato nella quale le matrici hanno una forma particolare:

$$A_c = \left[ \begin{array}{c|ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{array} \right]; \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [1 \mid 0 \ 0 \ \cdots \ 0]; \quad D_c = 0$$

La forma di  $A_c$  si dice *compagna orizzontale inferiore* (il motivo di tale denominazione è nel fatto che questa matrice ha autovalori coincidenti con le radici del polinomio  $a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$  che ad essa si accompagna).

Nel caso più generale in cui appaiano nella forma normale anche le derivate (differenze) di ordine più elevato dell'ingresso, cioè

$$\mathbb{D}^n y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i \mathbb{D}^i y(t) + \sum_{j=0}^p b_j \mathbb{D}^j u(t)$$

si può scrivere ancora il sistema in forma simile, utilizzando le proprietà dei sistemi lineari di sovrapposizione degli effetti degli ingressi e di risposta alla derivata di un segnale come derivata della risposta.

Infatti, detta  $z(t)$  la soluzione particolare della equazione “ausiliaria”

$$\mathbb{D}^n z(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i \mathbb{D}^i z(t) + u(t), \quad (2.10)$$

si consideri ancora la realizzazione nello spazio di stato data poco sopra, con stato  $x_1 = z$ ,  $x_2 = \mathbb{D}z$ , ...,  $x_n = \mathbb{D}^{n-1}z$ . La soluzione particolare corrispondente a un diverso ingresso  $v(t)$  che sia combinazione lineare di  $u(t)$  e delle sue derivate,  $v(t) = \sum_{i=0}^p b_j \mathbb{D}^j u(t)$  è data da

$$y(t) = \sum_{j=0}^p b_j \mathbb{D}^j z(t). \quad (2.11)$$

Per dimostrarlo, basta osservare (moltiplicando entrambe i termini della (2.10) per una costante  $\alpha$ ) che la soluzione particolare corrispondente a  $\alpha u(t)$  è data da  $\alpha z(t)$ . D'altronde, applicando ad entrambe i termini della equazione l'operatore  $\mathbb{D}$ , si osserva anche che la soluzione particolare corrispondente a  $v(t) = \mathbb{D}u(t)$  è data da  $y(t) = \mathbb{D}z(t)$  ( $y(0) = \mathbb{D}z(0)$ ). Il resto segue dal principio di sovrapposizione degli effetti reiterando queste osservazioni. Si osservi esplicitamente che la soluzione omogenea di queste equazioni dipende dalle condizioni iniziali, che devono essere correttamente specificate per le nuove soluzioni (vedi più avanti).

Sulla base di quanto detto, si può quindi ottenere una forma di stato (detta *canonica di controllo* per motivi che saranno chiari in corsi più avanzati) che utilizza le stesse matrici  $A$ ,  $B$  corrispondenti alla equazione ausiliare, ma modifica le matrici  $C$  (ed eventualmente  $D$ ) per ottenere le opportune combinazioni della soluzione ausiliare descritte dalla (2.11).

Infatti, nel caso di sistemi strettamente propri ( $p < n$ ), si può scrivere

$$y(t) = \sum_{j=0}^p b_j \mathbb{D}^j z(t) = \sum_{i=1}^n b_{i-1} x_i$$

quindi

$$A_c = \left[ \begin{array}{c|ccccccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_m & -a_{m+1} & \cdots & -a_{n-1} \end{array} \right], \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [ \ b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \ ], \quad D_c = 0.$$

Nel caso di sistemi non strettamente propri ( $p = n$ ), usando la (2.10), si può invece scrivere

$$y(t) = \sum_{j=0}^n b_j \mathbb{D}^j z(t) = \sum_{i=1}^n b_{i-1} x_i + b_n \mathbb{D}^n z = \sum_{i=1}^n b_{i-1} x_i - b_n \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1} + b_n u$$

quindi la forma canonica ha le stesse matrici  $A_c$  e  $B_c$  ma

$$C_c = [ \ b_o - b_n a_0 \quad b_1 - b_n a_1 \quad b_2 - b_n a_2 \quad \dots \quad b_{n-1} - b_n a_{n-1} \ ]; \quad D_c = [b_n].$$

**Esempio:** Data l'equazione  $\ddot{y} + y = 2u + \dot{u}$ , un sistema in forma di stato che la realizza (in forma canonica di controllo) è

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_c = 0.$$

La realizzazione di un algoritmo numerico che simuli un sistema LTITC dato nella forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c x + B_c u \\ y &= C_c x + D_c u \end{aligned}$$

è resa immediata dalla forma di stato. Usando ancora il metodo di Eulero in avanti, cioè ponendo  $\dot{x}(kT) \approx \frac{1}{T}(x(kT + T) - x(kT))$ , si ottiene il sistema LTITD

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \hat{A}_c x(k) + \hat{B}_c u(k) \\ y(k) &= C_c x(k) + D_c u(k) \end{aligned}$$

con  $\hat{A}_c = I + A_c T$  e  $\hat{B}_c = T B_c$ .

**Esempio:** Il codice che realizza una simulazione del sistema dell'esempio più recente può essere scritto in un linguaggio che permette le operazioni tra matrici come Matlab in modo semplicissimo:

```
m = 2; b = 2; K = 3; % Assegnazione Costanti
T = 0.1; % Tempo di Campionamento
T_fin = 10; % Durata Simulazione
% Valori iniziali di posizione e velocità
y_0 = .2; Dy_0=0;
%Generazione di segnali
t_vec=0:T:T_fin; % Vettore dei tempi
f_in=10*cos(2*t_vec); % Vettore delle forze di ingresso
y_out=zeros(1,length(t_vec)); % Allocazione vettore
                                % delle posizioni in uscita
% Calcolo delle matrici (A,B,C,D) del modello discretizzato
A = [1 0;0 1] + [0 1;-K/m -b/m]*T;
B = [0; 1/m]*T;
C = [1 0];
D = 0;
% Assegnazione delle condizioni iniziali alle variabili di stato.
x_1 = y_0; x_2 = Dy_0;
x = [x_1 x_2]';
for k=1:length(t_vec)
    F=f_in(k);
    y_out(k)= C*x + D*F;
    x = A*x + B*F;
end
% Grafica
plot(t_vec,y_out,'-b',t_vec,f_in,'-r');
```

Si osservi che l'introduzione dello stato nell'algoritmo permette di non usare le variabili di buffer: in effetti, il numero delle variabili di buffer indispensabili a scrivere un programma che realizza un sistema corrisponde al numero di stati necessario ad una sua realizzazione.

### Interpretazione degli stati della forma canonica di controllo

Si è sinora fornito un metodo per scrivere nello spazio di stato un sistema le cui soluzioni particolari coincidono con le soluzioni particolari del

sistema originalmente dato in forma normale. Per avere perfetta ugualanza delle soluzioni della stessa equazione in forma normale per assennate condizioni iniziali (che considereremo per comodità riunite nel vettore  $Y_0 = [y(0) \ \mathbb{D}y(0) \ \dots \ \mathbb{D}^{(n-1)}y(0)]^T$ ), è però necessario poter scegliere opportunamente le condizioni iniziali dello stato  $x(0)$ .

Si osservi innanzitutto che, nel caso della equazione ausiliare (2.10), per le posizioni fatte si ha immediatamente che deve essere  $x(0) = Y_0$ .

In generale, data una equazione differenziale lineare in forma normale ed una sua realizzazione nello spazio di stato

$$\begin{aligned}\mathbb{D}x &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du,\end{aligned}$$

consideriamo la funzione di uscita  $y(t)$ , e calcoliamo le sue derivate/differenze fino all'ordine  $(n - 1)$ :

$$\begin{aligned}y &= Cx + Du \\ \mathbb{D}y &= CAx + CBu + D\mathbb{D}u \\ \mathbb{D}^2y &= CABx + CABu + CB\mathbb{D}u + D\mathbb{D}^2u \\ &\vdots \\ \mathbb{D}^{(n-1)}y &= CA^{n-1}x + CA^{n-2}Bu + \dots + CB\mathbb{D}^{(n-2)}u + D\mathbb{D}^{(n-1)}u.\end{aligned}$$

Ponendo in notazione più compatta

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & D & 0 \\ CA^{n-2}B & \dots & \dots & \dots & CB & D \end{bmatrix};$$

e introducendo i vettori

$$\begin{aligned}Y_t &= [y(t) \ \mathbb{D}y(t) \ \dots \ \mathbb{D}^{(n-1)}y(t)]^T, \\ U_t &= [u(t) \ \mathbb{D}u(t) \ \dots \ \mathbb{D}^{(n-1)}u(t)]^T,\end{aligned}$$

si ha in forma matriciale

$$Y_t = \mathcal{O}x(t) + \mathcal{H}U_t. \quad (2.12)$$

Nella ipotesi che la matrice  $\mathcal{O}$  che moltiplica lo stato  $x(t)$  sia invertibile, e valutando questa equazione al tempo  $t = 0$ , si ottiene il valore desiderato per lo stato iniziale

$$x(0) = \mathcal{O}^{-1}(Y_0 - \mathcal{H}U_0).$$

Come è possibile osservare da quest'ultima espressione, le condizioni da assegnare allo stato iniziale  $x(0)$  dipendono da quelle della forma normale  $Y_0$  nonché dai valori dell'ingresso e delle sue prime  $n - 1$  derivate al tempo zero (ovvero, in T.D., dai suoi primi valori al tempo  $0, 1, \dots, n - 1$ ).

È inoltre evidente da questa relazione che il significato fisico dello stato scelto per la forma canonica di controllo differisce da quello inizialmente posto (e valido per le equazioni ausiliarie), che ricordiamo era una catena di derivate o differenze (nella notazione recentemente introdotta, lo stato della forma canonica di controllo per l'equazione ausiliare coincide con  $Y_t$ ).

Come è evidente, affinchè sia possibile nel caso generale determinare condizioni iniziali dello stato che diano evoluzione della uscita congruente a quella assegnata nella forma normale con condizioni iniziali, è necessario che la matrice

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

sia invertibile. Tale matrice prende il nome di matrice di osservabilità, e verrà studiata in corsi più avanzati: si vedrà che  $\mathcal{O}$  non risulterà invertibile solo qualora esista una equazione differenziale di ordine inferiore ad  $n$  che produce la stessa evoluzione in corrispondenza agli stessi ingressi (quindi, quando la equazione differenziale da cui si parte non sia la minima possibile per descrivere il sistema dato).

È infine possibile facilmente ottenere la forma normale a partire dalla forma di stato. A tal fine, si iteri la procedura di derivazione/differenza ancora una volta, ottenendo

$$\mathbb{D}^{(n)}y = CA^n x + CA^{n-1}B u + \cdots + CB \mathbb{D}^{(n-1)}u + D \mathbb{D}^{(n)}u,$$

e si sostituisca lo stato  $x$  con la soluzione della (2.12). Si noti che sarà  $D = 0$  se il sistema è strettamente causale. Inoltre, come è facile verificare direttamente dalle matrici della forma canonica, si ha che  $CB = CAB = \cdots = CA^{n-p-2}B = 0$ , e che il primo termine non nullo è  $CA^{n-p-1}B$ , che moltiplica  $\mathbb{D}^p u$ . La differenza  $n - p$  tra l'ordine massimo delle derivate delle uscite  $n$  e degli ingressi  $p$  che appaiono nella equazione dinamica del sistema viene detto *grado relativo* del sistema<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Un sistema proprio ha quindi grado relativo non negativo; un sistema strettamente proprio ha grado relativo positivo

## 2.4 Soluzioni delle Equazioni Dinamiche

Per un sistema ingresso–stati nella forma

$$\mathbb{D}x = f(x, u(t), t) \quad x(0) = x_0,$$

l'esistenza di soluzion, cioè di funzioni o successioni  $\hat{x}(\cdot)$  tali per cui valga

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(x_0, u(t), t) : \quad \mathbb{D}\hat{x} = f(\hat{x}, u(t), t) \quad \hat{x}(0) = x_0,$$

non è in generale garantita; né peraltro, laddove esistano, ne è garantita l'unicità. Ad esempio, la semplice equazione in tempo-continuo

$$\dot{x} = \frac{1}{2x}, \quad x(0) = 0$$

ha due soluzioni  $x(t) = \pm\sqrt{t}$  entrambe valide; l'equazione

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0$$

ha soluzione  $x(t) = \frac{-x_0}{x_0 t - 1}$  definita solo per  $0 \leq t < 1/x_0$  (quindi ha soluzione localmente, e non globalmente per ogni  $t$  (si dice che questo sistema ha “tempo di fuga finito”).

Ricordiamo dallo studio delle equazioni differenziali in Analisi che i Teoremi di Peano e Lipschitz assicurano rispettivamente l'esistenza e la unicità delle soluzioni in particolari ipotesi (in particolare, si ricorda che la continua differenziabilità di  $f(x, u(t), t)$  rispetto a  $x$  e  $t$  è sufficiente a garantire la esistenza e unicità delle soluzioni).

Anche nel caso in cui si possa dimostrare che una soluzione esiste, il calcolo esplicito della soluzione di una equazione differenziale o alle differenze è in genere proibitivo: solo di pochissime equazioni differenziali nonlineari si conosce la soluzione esplicita. Peraltro, questa conoscenza non è affatto l'oggetto dello studio che faremo dei sistemi dinamici e dei sistemi per il loro controllo: quello che ci interesserà è una caratterizzazione qualitativa delle soluzioni, in termini ad esempio di stabilità e instabilità, di sensibilità alle condizioni iniziali o alle variazioni dei parametri che descrivono il modello, etc.

Vi sono peraltro alcune soluzioni che sono di importanza fondamentale per lo studio ed il controllo dei sistemi dinamici, perché tipicamente rappresentano le condizioni nominali di funzionamento del sistema, cioè quelle in prossimità delle quali si è progettato il sistema per il suo funzionamento normale.

### 2.4.1 Soluzioni di equilibrio

Consideriamo il sistema tempo–continuo nonlineare stazionario autonomo (senza ingressi)

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.13)$$

Uno stato  $\bar{x}$  si dice “stato di equilibrio” se il sistema, trovandosi in  $\bar{x}$  in un qualsiasi istante  $\bar{t}$ , vi rimane  $\forall t \geq \bar{t}$ . Condizione necessaria e sufficiente perché  $\bar{x}$  sia di equilibrio è che  $f(\bar{x}) = 0$ .

Più in generale, per il sistema  $\dot{x} = f(x, u, t)$ , la coppia  $(\bar{x}, \bar{u})$ , con  $\bar{u}$  costante, è una coppia di stati e ingressi di equilibrio se  $f(\bar{x}, \bar{u}, t) = 0, \forall t$ .

Per un sistema tempo–discreto senza ingressi  $x^+ = f(x)$ , i punti di equilibrio (definiti ancora come sopra) sono tutti e soli gli  $\bar{x}$  tali che  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ . Analogamente per le coppie di equilibrio  $(\bar{x}, \bar{u})$  di un sistema  $x^+ = f(x, u, t)$ , che sono tali se  $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}, t), \forall t$ .

**Esempio: Equilibri di un Pendolo** Si consideri l’equazione di un pendolo di massa  $m$  e lunghezza  $L$  soggetto alla sua forza peso, ad un attrito viscoso proporzionale alla sua velocità di rotazione, e ad un momento motore  $u$  applicato all’asse:

$$mL^2\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgL \sin \theta = u.$$

Il sistema è facilmente descritto in uno spazio di stato bidimensionale in cui  $x_1 = \theta$  e  $x_2 = \dot{\theta}$ :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L} \sin x_1 - \frac{c}{mL^2} x_2 + \frac{1}{mgL} u \end{bmatrix}.$$

Gli equilibri sono pertanto dati da

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \Rightarrow \bar{x}_2 = 0; \\ \dot{x}_2 &= 0 \Rightarrow \sin \bar{x}_1 = \frac{1}{mgL} \bar{u} \end{aligned}$$

Per ogni valore di  $\bar{u}$  con  $|\bar{u}| \leq mgl$  si hanno quindi due posizioni di equilibrio simmetriche rispetto all’asse orizzontale. Nel caso  $\bar{u} = 0$ , si hanno i due equilibri in posizione verticale inferiore e superiore. Naturalmente, sono equilibri anche tutte le configurazioni con angolo  $\theta$  aumentato di multipli di  $2\pi$ .

**Equilibri di sistemi lineari T.C.** Per un sistema LTITC soggetto ad un ingresso costante  $\bar{u}$ , gli equilibri sono caratterizzati dalla equazione

$$A\bar{x} = -B\bar{u}.$$

Quindi:

- se la matrice dinamica è invertibile (se quindi non ha autovalori nell'origine), in corrispondenza ad ogni ingresso  $\bar{u}$  esiste un solo punto di equilibrio. Per  $\bar{u} = 0$ , l'origine è l'unico possibile equilibrio.
- se la matrice dinamica ha uno o più autovalori nell'origine, non è detto che un equilibrio esista per ogni  $\bar{u}$ , ma se esiste un tale  $\bar{x}$ , allora ogni punto  $x' = \bar{x} + x_n$  con  $x_n \in \ker A$  è un punto di equilibrio corrispondente a  $\bar{u}$ . Per  $\bar{u} = 0$ , l'origine è un equilibrio non isolato, in quanto tutto lo spazio nullo di  $A$  è di equilibrio.

Per il sistema massa-molla-smorzatore di fig.2.1, per il quale, ponendo  $x = [y - \hat{y}, \dot{y}]^T$  e  $u = f$ , si ha

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{B}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u,$$

gli equilibri sono isolati se  $K \neq 0$ :  $\bar{x}_1 = \frac{1}{K}\bar{u}$ ,  $x_2 = 0$ . Se  $K = 0$ , si ha invece che un equilibrio è possibile solo se  $\bar{u} = 0$ , ed in quel caso, esiste una infinità di possibili equilibri, con  $\bar{x}_1$  qualsiasi e  $\bar{x}_2 = 0$ .

**Equilibri di Sistemi lineari T.D.** Per un sistema LTITD soggetto ad un ingresso costante  $\bar{u}$ , si ha

$$(I - A)\bar{x} = B\bar{u}.$$

Quindi:

- se la matrice  $I - A$  è invertibile (se quindi  $A$  non ha autovalori in 1), in corrispondenza ad ogni ingresso  $\bar{u}$  esiste un solo punto di equilibrio. Per  $\bar{u} = 0$ , l'origine è l'unico possibile equilibrio.
- se la matrice dinamica ha uno o più autovalori in 1, non è detto che un equilibrio esista per ogni  $\bar{u}$ , ma se esiste un tale  $\bar{x}$ , allora è equilibrio ogni punto  $x' = \bar{x} + x_n$  con  $x_n \in \ker(I - A)$ . Per  $\bar{u} = 0$ , l'origine è ovviamente un equilibrio, ma non è isolato, in quanto tutto lo spazio nullo di  $(I - A)$  è di equilibrio.

Nel modello di crescita di una popolazione a coorti sopra introdotto nel paragrafo 2.1.1, non vi sono ingressi. Si hanno equilibri non banali (cioè con stati non tutti nulli) solo nel caso in cui valga  $\det(I - A) = 0$ , che rappresenta una equazione nei parametri di fertilità e mortalità. Il caso in cui i valori dei parametri soddisfano questa equazione è praticamente irrilevante: si intuisce da ciò come le popolazioni evolvano sempre in modo dinamico, non raggiungendo mai equilibri duraturi.

## 2.5 Linearizzazione approssimata

Nella prima parte del corso di Fondamenti di Automatica si studierà prevalentemente l'importante classe dei sistemi dinamici lineari. Tale studio, grazie alle forti proprietà valide per i sistemi lineari, riesce ad essere abbastanza completo e semplice. L'importanza pratica dei sistemi lineari è peraltro enorme, in particolare come *approssimazioni locali* di sistemi più in generale non lineari, in prossimità di *condizioni di funzionamento nominali*. Descriviamo adesso gli strumenti con i quali un sistema nonlineare può venire approssimato linearmente.

Molto spesso la condizione di funzionamento nominale attorno alla quale si vuole approssimare il comportamento di un sistema dinamico coincide con un equilibrio  $(\bar{x}, \bar{u})$ . Consideriamo innanzitutto sistemi tempo-invarianti  $\mathbb{D}x = f(x, u)$ . Sviluppando in serie di Taylor e troncando al primo ordine, si ha

$$f(x, u) \approx f(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\begin{array}{l} x = \bar{x} \\ u = \bar{u} \end{array}} (x - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\begin{array}{l} x = \bar{x} \\ u = \bar{u} \end{array}} (u - \bar{u})$$

Definendo

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\begin{array}{l} x = \bar{x} \\ u = \bar{u} \end{array}} \quad e \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\begin{array}{l} x = \bar{x} \\ u = \bar{u} \end{array}},$$

si osserva che  $A$  e  $B$  sono matrici rispettivamente  $n \times n$  e  $n \times m$  a valori costanti. Introducendo nuove variabili di stato  $\tilde{x} = x - \bar{x}$ , e nuovi ingressi  $\tilde{u} = u - \bar{u}$  come differenza rispetto ai valori nominali, si osserva facilmente che vale

$$\mathbb{D}\tilde{x} = \mathbb{D}x - \mathbb{D}\bar{x} \approx f(\bar{x}, \bar{u}) + A\tilde{x} + B\tilde{u} - \mathbb{D}\bar{x}.$$

Pertanto, dalle condizioni di equilibrio in T.C. ( $\mathbb{D}\bar{x} = \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ ) o in T.D. ( $\mathbb{D}\bar{x} = \bar{x}^+ = f(\bar{x}, \bar{u})$ ), il sistema

$$\mathbb{D}\tilde{x} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$$

risulta una approssimazione al primo ordine (cioè lineare) del sistema dato.

Se vi è una mappa di uscita  $y = h(x, u)$ , si potrà linearizzare anch'essa in modo simile, ponendo  $\tilde{y} = y(x, u) - y(\bar{x}, \bar{u}) = C\tilde{x} + D\tilde{u}$ , dove

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\begin{array}{l} x = \bar{x} \\ u = \bar{u} \end{array}} ; \quad D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{\begin{array}{l} x = \bar{x} \\ u = \bar{u} \end{array}} .$$

### Esempio: Linearizzazione delle equazioni di un pendolo

Per il modello di pendolo visto in precedenza, si ha

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} \cos x_1 & -\frac{c}{mL^2} \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL^2} \end{bmatrix}.$$

Valutando queste matrici nei due equilibri corrispondenti a un dato  $\bar{u} \geq 0$ , si ottiene per l'equilibrio con  $0 \leq \theta \leq \pi/2$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{m^2 g^2 L^2 - \bar{u}^2}}{mL^2} & -\frac{c}{mL^2} \end{bmatrix},$$

mentre per l'equilibrio con  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$  si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{m^2 g^2 L^2 - \bar{u}^2}}{mL^2} & -\frac{c}{mL^2} \end{bmatrix}.$$

Si noti che, partendo da un sistema  $\mathbb{D}x = f(x, u, t)$  tempo-variante, in generale anche il linearizzato corrispondente risulta non stazionario. I sistemi lineari tempo-varianti sono molto più difficili da analizzare e controllare che quelli stazionari.

Alcune volte linearizzare un sistema attorno a valori di equilibrio non è sufficiente, o perché il funzionamento nominale del sistema non consiste in un equilibrio, o perché la reale evoluzione del sistema comporta variazioni in grande. Si può in questi casi ricorrere ad una *linearizzazione attorno ad*

*una traiettoria.* Sia dunque  $\bar{x}(x_0, \bar{u}, t)$  la soluzione della eq. nonlineare del sistema corrispondente ad un ingresso nominale  $\bar{u}(t)$ . Si può procedere alla linearizzazione in modo del tutto analogo ai casi precedenti, con la unica accortezza che adesso il punto  $\bar{x}$  in cui calcolare le matrici Jacobiane di  $f$  e  $h$  rispetto a  $x$  e  $u$ , non è costante ma una funzione del tempo. Anche nel caso che il sistema originario fosse stazionario, si può ottenere quindi in generale un sistema approssimato che è lineare, ma non stazionario, cioè in cui

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\begin{array}{l} x = \bar{x}(t) \\ u = \bar{u}(t) \end{array}} = A(t) \quad e \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\begin{array}{l} x = \bar{x}(t) \\ u = \bar{u}(t) \end{array}} = B(t),$$

e analogamente per  $C(t)$  e  $D(t)$ . Il trattamento di sistemi tempo-varianti, anche se lineari, non è facile.

Anche se la linearizzazione attorno ad una traiettoria in generale può dare tempo varianza del modello, questo non è sempre il caso. Nella pratica dei sistemi ingegneristici, anzi, è frequente che questo non avvenga, come nell'esempio seguente.

**Esempio: Linearizzazione approssimata della dinamica longitudinale di un veicolo** Consideriamo un veicolo di massa  $m$  sottoposto ad attrito aerodinamico quadratico nella velocità e spinta del propulsore pari a  $u$ :

$$m\ddot{y} + c\dot{y}^2 = u.$$

Nello spazio di stato, posto  $x_1 = y$  e  $x_2 = \dot{y}$ , si ha

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{c}{m}x_2^2 + \frac{1}{m}u \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene immediatamente

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2c}{m}x_2 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}.$$

In questo caso, il regime di funzionamento di interesse non è l'equilibrio (in cui il veicolo è fermo), ma piuttosto la traiettoria data dalla soluzione particolare  $\dot{y} = v$  costante,  $u = \bar{u} = cv^2$ , e  $y(t) = vt$ . Si ha dunque in questo caso  $\bar{x}_1(t) = vt$  e  $\bar{x}_2(t) = v$ , e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2c}{m}v \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix},$$

da cui si nota che, in questo caso particolare, il sistema linearizzato attorno ad una traiettoria risulta comunque stazionario.

## 2.6 Cambiamenti di coordinate

La forma di stato di un sistema dinamico mette in luce come esso sia da intendersi come una relazione dinamica tra tre insiemi di grandezze, gli ingressi, gli stati, e le uscite, definite su spazi di dimensioni diverse.

Quando si sono derivate le forme di stato dei sistemi, si sono descritti come ingressi  $u$  ed uscite  $y$  le grandezze che apparivano nella forma normale. Abbiamo anche visto come in alcuni casi gli stati potevano essere individuati con le uscite e le loro derivate. Talvolta però non è possibile scegliere così gli stati; altre volte questa scelta non è la più conveniente.

Mentre le uscite e gli ingressi di un sistema in forma di stato sono in certo modo fissati dalla equazione in forma normale (anche se vedremo più avanti che talvolta sarà opportuno manipolare queste definizioni), la scelta degli stati stessi è in certa misura arbitraria. In particolare, dato un sistema in forma di stato descritto da un vettore  $x$ , è possibile pensare ad un cambiamento di coordinate sullo spazio in cui è definito lo stato, in generale introducendo una nuova variabile di stato definita in termini della precedente come

$$z = \Phi(x)$$

Perchè  $z$  e  $x$  siano corrette rappresentazioni di uno stesso stato, pur se diverse, sarà necessario che la mappa  $\Phi(\cdot)$  sia biettiva (su tutto l'insieme delle variabili di stato di interesse): cioè, ad ogni  $x$  corrisponda uno ed un solo  $z$ . Di conseguenza, deve esistere la applicazione inversa di  $\Phi$ , e scriveremo  $x = \Phi^{-1}(z)$ .

### 2.6.1 Cambiamenti di Coordinate Lineari

Particolari cambiamenti di coordinate sono quelli lineari, cioè quelli per cui vale

$$\Phi(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha\Phi(x_1) + \beta\Phi(x_2).$$

Ricordiamo che una applicazione lineare da uno spazio a  $p$  dimensioni a uno spazio a  $q$  dimensioni è sempre rappresentabile mediante una matrice  $q \times p$ . Nel nostro caso, un cambiamento di coordinate lineare e stazionario è pertanto espresso in generale da

$$x = Tz$$

dove  $T$  è una matrice  $n \times n$  costante e invertibile, cioè  $\det(T) \neq 0$ .

Un cambiamento di variabili lineare stazionario applicato ad un sistema dinamico anch'esso lineare e stazionario agisce nello stesso modo per sistemi a tempo continuo e discreto, lasciandone inalterata la natura lineare e stazionaria:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}z &= \hat{A}z + \hat{B}u, \\ y &= \hat{C}z + Du\end{aligned}$$

con  $\hat{A} = T^{-1}AT$ ,  $\hat{B} = T^{-1}B$ ,  $\hat{C} = CT$ .

Si osservi esplicitamente che tutte le descrizioni del sistema dinamico che differiscono solo per un cambiamento di coordinate sono del tutto equivalenti, e che quindi non esistono coordinate privilegiate o “naturali” in cui descrivere il sistema.

Inoltre, le matrici dinamiche di tutte le rappresentazioni equivalenti di un sistema LS (lineare stazionario), sono trasformazioni per “similitudine” (o “contragredienza”) delle altre.

**Esempio: Masse mobili vincolate in coordinate baricentriche.**

RiconSIDERANDO l'esempio sopra visto, una descrizione alternativa può essere data in termini delle variabili  $y_g = (m_1y_1 + m_2y_2)/(m_1 + m_2)$  (posizione del baricentro) e  $y_d = y_2 - y_1$  (configurazione interna del sistema). Definendo lo stato come  $z^T = (y_g, y_d, \dot{y}_g, \dot{y}_d)^T$ , si avrebbe

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_3 \\ \dot{z}_2 &= z_4 \\ \dot{z}_3 &= \frac{1}{m_1+m_2}(f_1 + f_2) \\ \dot{z}_4 &= -\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}(kz_2 + cz_4) - \frac{1}{m_1}f_1 + \frac{1}{m_2}f_2\end{aligned}$$

ovvero  $\dot{z} = Az + BzF$  con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k\frac{m_1+m_2}{m_1m_2} & 0 & -c\frac{m_1+m_2}{m_1m_2} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1+m_2} & \frac{1}{m_1+m_2} \\ -\frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}.$$

Tra le due rappresentazioni di stato del sistema esiste una relazione lineare  $x = Tz$ , dove

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{m_1+m_2} & \frac{m_2}{m_1+m_2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1}{m_1+m_2} & \frac{m_2}{m_1+m_2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Capitolo 3

## Soluzioni dei Sistemi Lineari

Per i sistemi lineari è possibile caratterizzare le soluzioni in modo molto più articolato: per i sistemi lineari e stazionari è addirittura possibile risolverle esplicitamente.

### 3.1 Sistemi Lineari Tempo–Invarianti Tempo–Continui

Ricordiamo dalla analisi che la soluzione della equazione lineare a coeff. costanti con forzamento  $u(t)$

$$\dot{x} = ax + bu(t),$$

con condizioni iniziali  $x(0) = x_0$ , è data dalla somma di un integrale omogeneo e di un integrale particolare, esplicitamente

$$x(t) = x_0 e^{at} + b \int_0^t e^{a(t-\tau)} u(\tau) d\tau$$

Nel caso di un sistema di  $n$  equazioni differenziali che rappresentano un sistema lineare stazionario, con una equazione di uscita, cioè

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{3.1}$$

con condizioni iniziali  $x(0) = x_0$ , la soluzione può essere scritta in forma del tutto analoga:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \\ y(t) &= Ce^{At} x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

**Esempio: Esponenziale di Matrici**

Naturalmente, l'esponenziale di una matrice necessita di una definizione appropriata. Daremo tale definizione in termini della serie di potenze

$$e^M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + M + 1/2M^2 + 1/6M^3 + \dots$$

che generalizza la definizione dell'esponenziale di uno scalare

$$e^m \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k}{k!} = I + m + 1/2m^2 + 1/6m^3 + \dots$$

Sulla base della definizione, è immediato verificare che  $e^{M_1}e^{M_2} = e^{M_2}e^{M_1} = e^{(M_1+M_2)t}$  se e solo se  $M_1M_2 = M_2M_1$ . Prova: applica la definizione e l'identità delle serie di potenze.

Segue anche che  $(e^M)^{-1} = e^{-M}$ . Infatti, se  $e^M e^{-M} = e^{M-M} = e^0 = I$ . Nota bene:  $e^M$  è sempre invertibile, qualsiasi sia  $M$ .

L'esponenziale di una matrice ha altre importanti proprietà:

- Se  $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , allora  $e^M\mathbf{v} = e^\lambda\mathbf{v}$ . Prova: applica la definizione e ricorda  $M^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v}$ .
- $e^{T^{-1}MT} = T^{-1}e^MT$ . Prova: applica la definizione e osserva che  $(T^{-1}MT)^k = T^{-1}M^kT$ .
- Sono possibili altre definizioni dell'esponenziale, tutte equivalenti. Ad esempio:  $e^M = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(I + \frac{M}{m}\right)^m$ .

Ponendo  $M = At$ , si ottiene un esponenziale di matrice funzione del tempo

$$e^{At} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k = I + At + 1/2A^2t^2 + 1/6A^3t^3 + \dots$$

da cui è facile verificare che

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}.$$

Dalle relazioni viste è quindi facile anche verificare che 3.2 è effettivamente una soluzione della 3.1. Infatti, valendo  $e^{A0} = I$ , si ha  $x(0, x_0, u) = Ix_0$ , e

inoltre, derivando la prima delle 3.2,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t, x_0, u) &= Ae^{At}x_0 + \frac{d}{dt} \left( e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \right) \\ &= Ax + Bu\end{aligned}$$

È opportuno guardare con attenzione alla struttura della soluzione stessa. Nella soluzione si distinguono due termini. Il primo, che dipende dagli stati iniziali e non dagli ingressi, si dice **evoluzione libera** del sistema; il secondo, che invece dipende dagli ingressi ma non dallo stato iniziale, si dice **evoluzione forzata**.

Per quanto riguarda l'evoluzione libera, si noti che gli stati iniziali  $x_0$  vengono trasformati in quelli ad un dato istante  $t$  attraverso il prodotto per la matrice  $e^{At}$ , quindi in modo lineare.

Si dice traiettoria libera di un sistema l'insieme degli stati  $x$  raggiunti per qualche  $t$  da una evoluzione libera  $x(t)$ . Essendo l'esponenziale di una matrice sempre invertibile, due traiettorie libere di un sistema o coincidono o non si intersecano mai. Infatti, se le evoluzioni libere a partire da  $x_0$  e  $x'_0$  si intersecano in un qualsiasi punto  $x$ , devono esistere  $t$  e  $t'$  tali che  $x = e^{At}x_0 = e^{At'}x'_0$ , quindi  $x'_0 = e^{A(t-t')}x_0$  ovvero  $x'_0$  deve appartenere alla traiettoria libera che passa da  $x_0$  stessa, quindi le traiettorie coincidono.

Si ricordi infine che il determinante di una matrice  $\det(A)$  è il prodotto dei suoi autovalori, e inoltre è pari al volume (con segno) del parallelepipedo i cui lati sono le colonne di  $A$ . Inoltre, la traccia di una matrice,  $\text{Tr}(A)$  è la somma degli autovalori. Si ha che

$$\det(e^{At}) = e^{\text{Tr}(A)t}$$

quindi che il volume di una regione dello spazio di stato è maggiore, uguale, o minore della sua immagine attraverso la trasformazione  $e^{At}$  a seconda che  $\text{Tr}(At)$  sia maggiore, uguale, o minore di zero.

Per quanto riguarda l'evoluzione forzata, si noti che anche l'operatore integrale che agisce sulla funzione di ingresso è lineare (l'integrale di una somma è la somma degli integrali, e l'integrale del prodotto di una funzione per una costante è pari al prodotto della costante per l'integrale della funzione). È quindi immediato, nella soluzione della eq. di stato di un sistema lineare stazionario, verificare il *principio di sovrapposizione degli effetti* degli stati e degli ingressi.

L'integrale che appare nella evoluzione forzata è detto *di convoluzione*. Più in generale, date due funzioni  $f(t)$  e  $g(t)$  definite per  $-\infty < t < \infty$ , si definisce il loro prodotto di convoluzione come la funzione

$$w(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Per funzioni  $f(t)$  e  $g(t)$  che si annullano identicamente per ogni  $t < 0$  (quali sono i segnali nei sistemi causali che considereremo), la convoluzione diviene

$$w(t) = f(t) * g(t) = \int_{\tau=0}^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Il termine forzato può quindi quindi essere scritto  $e^{At} * Bu(t)$ , dove si estenda in modo banale al prodotto tra matrici la definizione di convoluzione.

### Esponenziale di Matrici Diagonalizzabili

L'espressione della definizione dell'esponenziale di una matrice non è in generale adatta al calcolo esplicito del valore della soluzione. Nel caso di una matrice  $A$  diagonalizzabile, per cui valga  $\Lambda = T^{-1}AT$  con  $\Lambda$  diagonale, il calcolo è comunque semplice. Infatti se

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

si ha

$$e^{\Lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} t^k = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k t^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k t^k}{k!} \end{bmatrix}$$

cioè

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix},$$

quindi si ha

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$$

### Matrici Diagonalizzabili con Autovalori Complessi – Forma Reale

Nel caso di matrici diagonalizzabili con autovalori complessi, il risultato precedente comprende ovviamente esponenziali complessi, così come colonne complesse nella matrice degli autovettori  $T$ . Se  $A$  è a valori reali (come sarà sempre il caso per le matrici dinamiche dei sistemi che studieremo), gli autovalori e autovettori complessi appaiono sempre assieme al loro coniugato, e questo fa sì che la matrice  $e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$  sia comunque a valori reali.

È possibile e utile in questi casi, usare un cambiamento di coordinate reale, che trasforma per similitudine la matrice diagonalizzabile (sui complessi)  $A$  in una matrice reale diagonale a blocchi, con blocchi al più di dimensione 2, e con un numero di blocchi pari al numero di coppie di autovalori complessi coniugati della matrice. Consideriamo ad esempio una matrice  $2 \times 2$ , diagonalizzata nella forma  $A = Q\Lambda Q^{-1}$ , e siano<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\Lambda(1,1) &= \sigma + j\omega \\ \Lambda(2,2) &= \sigma - j\omega \\ Q(:,1) &= q_r + jq_i \\ Q(:,2) &= q_r - jq_i\end{aligned}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}A \left[ \begin{array}{c|c} q_r + jq_i & q_r - jq_i \end{array} \right] &= \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} q_r + jq_i & q_r - jq_i \end{array} \right] \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}e^{At} \left[ \begin{array}{c|c} q_r + jq_i & q_r - jq_i \end{array} \right] &= \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} q_r + jq_i & q_r - jq_i \end{array} \right] e^{\sigma t} \begin{bmatrix} e^{j\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-j\omega t} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ricordando le eguaglianze  $e^{\alpha+j\beta} = e^\alpha(\cos \beta + j \sin \beta)$  e  $e^{\alpha-j\beta} = e^\alpha(\cos \beta - j \sin \beta)$ , introduciamo la matrice complessa  $E$  e la sua inversa

$$E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix}; \quad E^{-1} = -j \begin{bmatrix} j & j \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Scrivendo  $AQE = Q\Lambda E = QE E^{-1} \Lambda E$ , si ottiene

$$A \left[ \begin{array}{c|c} q_r & q_i \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} q_r & q_i \end{array} \right] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

e

$$e^{At} \left[ \begin{array}{c|c} q_r & q_i \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} q_r & q_i \end{array} \right] e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

---

<sup>1</sup>per comodità di notazione si usa qui il simbolo  $Q$  invece che  $T$  per la matrice di cambiamento di coordinate

### Esponenziale di Matrici Difettive

Per matrici difettive, il calcolo dell'esponenziale si può fare con la forma di Jordan. Si ricordi<sup>2</sup> che qualsiasi matrice quadrata  $A$  quadrata di dimensione  $n$  può essere trasformata per similitudine in forma di Jordan,  $A = QJQ^{-1}$ . Una matrice  $J$  in forma di Jordan è una matrice diagonale a blocchi,

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_N \end{bmatrix}$$

dove ogni blocco  $J_i$  è un *miniblocco di Jordan* di dimensione  $q_i$  ed autovalore  $\lambda_i$ , ovvero una matrice quadrata con tutti gli elementi sulla diagonale uguali a  $\lambda_1$ , tutti gli elementi della prima sopradiagonale pari a 1, e con ogni altro elemento zero, ovvero

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q_i \times q_i}.$$

Si noti innanzitutto che l'esponenziale di una matrice diagonale a blocchi può essere calcolato per blocchi. Infatti, essendo

$$\left( \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_N \end{bmatrix} t \right)^k = \begin{bmatrix} (A_1 t)^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (A_N t)^k \end{bmatrix}$$

si ha ovviamente

$$\exp \left( \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_N \end{bmatrix} t \right) = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{A_N t} \end{bmatrix}$$

È quindi necessario solo calcolare l'esponenziale di un blocco di Jordan  $J$  di dimensione generica  $q$ . Si ha

$$\begin{aligned} e^{Jt} &= \exp \left( \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} t \right) = \\ &= e^{(\lambda I + J_0)t} = e^{\lambda t} e^{J_0 t} \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>si vedano al proposito i richiami di algebra lineare in appendice

(infatti  $\lambda It$  commuta con ogni matrice). Si noti che  $J_0$  è un miniblocco di Jordan con autovalore 0, perciò nilpotente di ordine  $q$  ( $J_0^q = 0$ , ma  $J_0^k \neq 0, \forall k < q$ ). Avendosi

$$e^{J_0 t} = I + J_0 t + J_0^2 \frac{t^2}{2} + \dots + J_0^{q-1} \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}$$

si ottiene infine

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{(q-2)}}{(q-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Matrici Difettive con Autovalori Complessi – Forma Reale

Nel caso che  $A$  abbia miniblocchi di Jordan di dimensione  $q > 1$  corrispondenti ad autovalori complessi coniugati, è ancora possibile ottenere per la matrice e per il suo esponenziale una forma reale, procedendo in modo analogo a quanto fatto per la forma reale delle matrici diagonalizzabili.

Sia ad esempio  $AQ = QJ$ , con

$$J = \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + j\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - j\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix}$$

e con

$$Q = \begin{bmatrix} q_r^{(1)} + jq_i^{(1)} & q_r^{(2)} + jq_i^{(2)} & q_r^{(1)} - jq_i^{(1)} & q_r^{(2)} - jq_i^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Ponendo

$$E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -j \\ 1 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & j \end{bmatrix}; E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ j & 0 & -j & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & j & 0 & -j \end{bmatrix},$$

si ha una base reale

$$QE = \begin{bmatrix} q_r^{(1)} & q_i^{(1)} & q_r^{(2)} & q_i^{(2)} \end{bmatrix}$$

rispetto alla quale, la forma reale di Jordan è

$$J_r = E^{-1}JE = \left[ \begin{array}{cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} M & I \\ 0 & M \end{array} \right]$$

Per miniblocchi di dimensioni maggiori, si può generalizzare facilmente (per esercizio) a:

$$J_r = \left[ \begin{array}{ccccc} M & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M & I & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & M & I \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & M \end{array} \right]$$

Per quanto riguarda l'esponenziale, si considerino le potenze

$$J_r^k = \left[ \begin{array}{cc} M^k & kM^{k-1} \\ 0 & M^k \end{array} \right],$$

e, applicando la definizione di esponenziale, si ha

$$e^{tJ_r} = \left[ \begin{array}{c|c} I + Mt + M^2t^2/2 + \dots & 0 + It + 2M\frac{t^2}{2} + 3M^2\frac{t^3}{3!} + \dots \\ \hline 0 & I + Mt + M^2t^2/2 + \dots \end{array} \right]$$

cioè

$$e^{tJ_r} = \left[ \begin{array}{cc} e^{Mt} & te^{Mt} \\ 0 & e^{Mt} \end{array} \right]$$

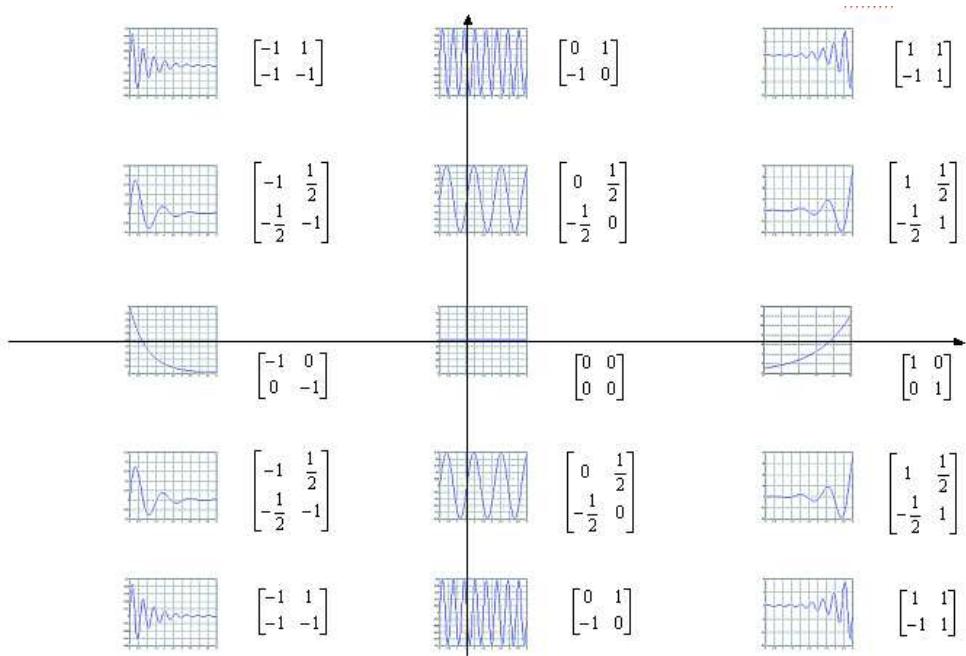
dove ricordiamo dalla forma reale delle matrici diagonalizzabili

$$e^{Mt} = e^{\sigma t} \left[ \begin{array}{cc} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{array} \right]$$

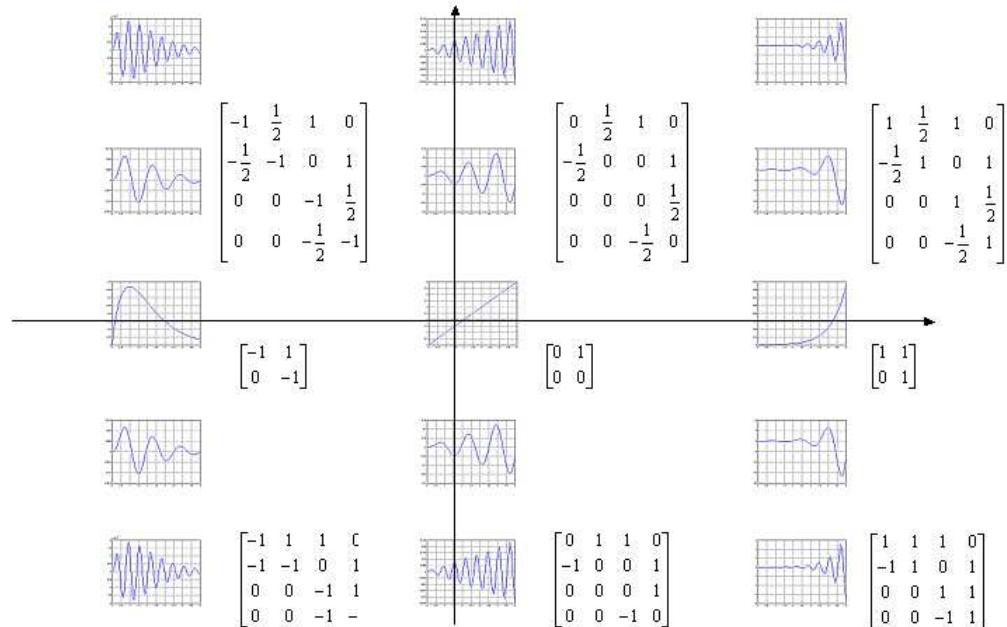
In generale, dunque, se  $J_r$  ha  $q$  blocchi diagonali

$$e^{tJ_r} = \left[ \begin{array}{ccccc} e^{Mt} & te^{Mt} & \frac{t^2}{2!}e^{Mt} & \cdots & \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}e^{Mt} \\ 0 & e^{Mt} & te^{Mt} & \cdots & \frac{t^{q-2}}{(q-2)!}e^{Mt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{Mt} \end{array} \right]$$

### 3.1. SISTEMI LINEARI TEMPO-INVARIANTI TEMPO-CONTINUI 61



In questa figura, sono riportati gli andamenti dei modi corrispondenti ad autovalori nelle diverse posizioni del piano complesso, nel caso di autovalori associati a miniblocchi di dimensione uno.



In questa figura, sono riportati gli andamenti dei modi corrispondenti ad autovalori nelle diverse posizioni del piano complesso, nel caso di autovalori associati a miniblocchi di dimensione due.

### 3.2 Sistemi Lineari Tempo-Invarianti Tempo-Discreti

Nel caso di un sistema di  $n$  equazioni alle differenze stazionario, con una equazione di uscita, cioè

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

con condizioni iniziali  $x(0) = x_0$ , la soluzione può essere calcolata direttamente per induzione:

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax(0) + Bu(0); \\ x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1); \\ x(3) &= Ax(2) + Bu(2) = \dots; \end{aligned}$$

e

$$x(t) = A^t x(0) + A^{t-1}Bu(0) + \dots + ABu(t-2) + Bu(t-1);$$

e quindi

$$\begin{aligned} x(t) &= A^t x(0) + \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-i-1} Bu(i) \\ y(t) &= CA^t x(0) + \sum_{i=0}^{t-1} CA^{t-i-1} Bu(i) + Du(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Poiché  $A^t$  è una matrice costante, fissato che sia il tempo  $t$ , gli stati iniziali si trasformano negli stati all'istante  $t$  linearmente; parimenti, l'operatore di convoluzione che agisce sulla successione di ingresso è lineare. Nella soluzione, si distinguono due termini di **evoluzione libera** e di **evoluzione forzata**, e si verifica immediatamente il principio di sovrapposizione degli effetti degli stati e degli ingressi.

La sommatoria che appare nella evoluzione forzata è detta *di convoluzione*. Più in generale, date due successioni  $f(t)$  e  $g(t)$  definite per  $-\infty < t < \infty$ , si definisce il loro prodotto di convoluzione come la funzione

$$w(t) = f(t) * g(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau).$$

Per successioni  $f(t)$  e  $g(t)$  che si annullano identicamente per ogni  $t < 0$  (come considereremo nei nostri sistemi causali), la convoluzione diviene

$$w(t) = f(t) * g(t) = \sum_{\tau=0}^t f(\tau)g(t-\tau).$$

Il termine forzato può quindi quindi essere scritto come convoluzione tra

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ A^{t-1}, & t \geq 1 \end{cases}$$

e  $g(t) = Bu(t)$ .

Per quanto riguarda la risposta forzata, si noti che la somma di convoluzione può essere scritta anche in forma matriciale:

$$\sum_{i=0}^{t-1} A^{t-i-1} Bu(i) = [ B \mid AB \mid \cdots \mid A^{t-1}B ] \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Le potenze di una matrice hanno alcune proprietà:

- $A_1^t A_2^t = A_2^t A_1^t = (A_1 A_2)^t, \forall t$  se e solo se  $A_1 A_2 = A_2 A_1$ ;
- Se  $A$  è invertibile,  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = A^{-t}$ .
- Se  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , allora  $A^t\mathbf{v} = \lambda^t\mathbf{v}$ .
- $(T^{-1}PT)^t = T^{-1}P^tT$ .
- $\det(A^t) = (\det(A))^t$ . Il volume di una regione dello spazio di stato è maggiore, uguale, o minore della sua immagine attraverso la trasformazione  $A^t$  a seconda che  $\det(A)$  sia maggiore, uguale, o minore di uno.

### Potenze di Matrici Diagonalizzabili

Nel caso di matrice diagonalizzabile, si ha

$$A^t = T^{-1}\Lambda^t T = T^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^t \end{bmatrix} T$$

Nel caso di matrici diagonalizzabili con autovalori complessi, ad es.  $\lambda_1 = \sigma + j\omega$ ,  $\lambda_2 = \sigma - j\omega$  si puo' dare una forma reale ponendo per ogni blocco della forma reale (ottenuto come nel caso visto sopra)

$$M = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} = \rho \mathbf{R} = \rho \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

dove  $\rho = |\lambda_1| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$  e  $\theta = \arg(\lambda_1) = \text{atan2}(\omega, \sigma)$ , e quindi  $\omega = \rho \sin \theta$ ,  $\sigma = \rho \cos \theta$ .

Si ottiene

$$M^t = \rho^t \mathbf{R}^t = \rho^t \begin{bmatrix} \cos t\theta & \sin t\theta \\ -\sin t\theta & \cos t\theta \end{bmatrix}$$

### Potenze di Matrici Difettive

Per matrici difettive, il calcolo si può effettuare usando la forma di Jordan. Tenendo conto del fatto che le potenze di una matrice a blocchi mantengono questa struttura, coi blocchi elevati a potenza, è necessario solo calcolare le potenze di un blocco di Jordan  $J$  di dimensione generica  $q$ . Si ha

$$\begin{aligned} J^t &= \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}^t = \\ &= (\lambda I + J_0)^t = \sum_{i=0}^t (C_i^t \lambda^{t-i} J_0^i), \end{aligned}$$

dove  $C_i^t = \binom{t}{i} = \frac{t!}{i!(t-i)!} = \frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-i+1)}{i!}$ , ovvero un polinomio in  $t$  di grado  $i$ .

Si ottiene, esplicitamente per un miniblocco  $J$   $q \times q$

$$J^t = \begin{bmatrix} \lambda^t & C_1^t \lambda^{t-1} & C_2^t \lambda^{t-2} & \cdots & C_{q-1}^t \lambda^{t-q+1} \\ 0 & \lambda^t & C_1^t \lambda^{t-1} & \cdots & C_{q-2}^t \lambda^{t-q+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^t & C_1^t \lambda^{t-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^t \end{bmatrix}$$

dove, nel caso  $t < q - 1$ , si deve intendere  $C_j^t = 0, \forall j > t$ .

**Esempio:**

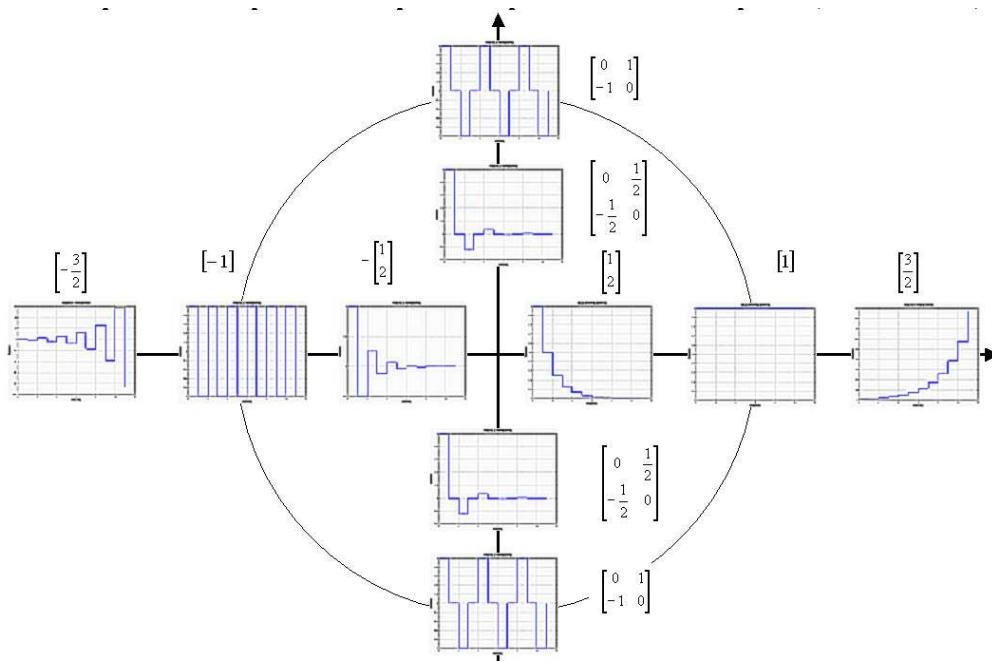
$$J^t = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \lambda^t & t\lambda^{t-1} & \frac{t(t-1)}{2}\lambda^{t-2} \\ 0 & \lambda^t & t\lambda^{t-1} \\ 0 & 0 & \lambda^t \end{bmatrix}$$

Nel caso che  $A$  abbia miniblocchi di Jordan di dimensione  $q > 1$  corrispondenti ad autovalori complessi coniugati, è ancora possibile ottenere per la matrice e le sue potenze una forma reale, procedendo in modo analogo a quanto fatto per la forma reale delle matrici diagonalizzabili. Considerando quindi un miniblocco reale di dimensione  $2q \times 2q$

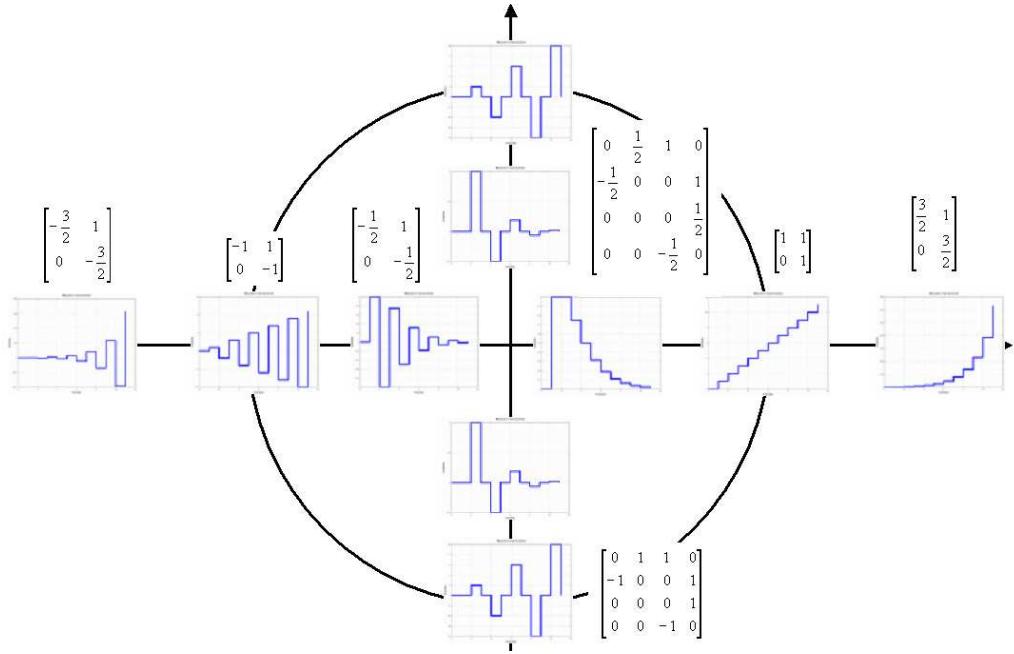
$$J_r = \begin{bmatrix} M & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M & I & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & M & I \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & M \end{bmatrix}$$

si verifica facilmente

$$J_r^t = \begin{bmatrix} M^t & C_1^t M^{t-1} & C_2^t M^{t-2} & \cdots & C_{q-1}^t M^{t-q+1} \\ 0 & M^t & C_1^t M^{t-1} & \cdots & C_{q-2}^t M^{t-q+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & M^t & C_1^t M^{t-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M^t \end{bmatrix}$$



In questa figura, sono riportati gli andamenti dei modi corrispondenti ad autovalori nelle diverse posizioni del piano complesso, nel caso di autovalori associati a miniblocchi di dimensione uno.



In questa figura, sono riportati gli andamenti dei modi corrispondenti ad autovalori nelle diverse posizioni del piano complesso, nel caso di autovalori associati a miniblocchi di dimensione due.

### 3.3 Analisi Modale

Nella evoluzione libera di un sistema LTITC descritto dalle matrici  $(A, B, C, D)$ , si potranno trovare, in base a quanto visto, combinazioni lineari reali di tutte e sole le funzioni che possono apparire nell'esponenziale di una matrice in forma di Jordan reale. Queste funzioni sono dette "modi" del sistema.

#### 3.3.1 Modi dei Sistemi LTITC

Riassumendo i vari casi visti, i modi di un sistema LTITC possono essere esclusivamente dei seguenti tipi:

- 1) Esponenziali semplici del tipo  $e^{\lambda t}$ , corrispondenti a miniblocchi semplici con autovalore  $\lambda$  reale; questi modi sono convergenti a zero, costanti, o divergenti a seconda che  $\lambda$  sia minore, uguale, o maggiore di zero;
- 2) Quasi-polinomi di tipo  $t^k e^{\lambda t}$ ,  $0 \leq k \leq q-1$ , corrispondenti a miniblocchi di dimensione  $q > 1$  con autovalore reale  $\lambda$ ; questi modi sono conver-

genti a zero se  $\lambda < 0$ , polinomialmente divergenti se  $\lambda = 0$  e  $k > 0$ , esponenzialmente divergenti se  $\lambda > 0$ ;

- 3) Funzioni oscillanti del tipo  $e^{\sigma t} \cos(\omega t)$ ,  $e^{\sigma t} \sin(\omega t)$ , corrispondenti a due miniblocchi semplici associati ad una coppia di autovalori complessi coniugati  $\sigma \pm j\omega$  (ovvero ad un miniblocco reale semplice); questi modi sono convergenti a zero se la parte reale degli autovalori  $\sigma$  è minore di 0, limitati ma non convergenti se  $\sigma = 0$ , esponenzialmente divergenti se  $\sigma > 0$ ;
- 4) Funzioni oscillanti del tipo  $t^k e^{\sigma t} \cos(\omega t)$ ,  $t^k e^{\sigma t} \sin(\omega t)$ ,  $0 \leq k \leq q-1$ , corrispondenti a due miniblocchi di dimensione  $q$  associati ad una coppia di autovalori complessi coniugati  $\sigma \pm j\omega$  (ovvero ad un miniblocco reale costituito da  $q \times q$  blocchi reali); questi modi sono convergenti a zero se  $\sigma < 0$ , polinomialmente divergenti se  $\sigma = 0$  e  $k > 0$ , esponenzialmente divergenti se  $\sigma > 0$ ;

### 3.3.2 Modi dei sistemi LTITD

Nella evoluzione libera di un sistema LTITD descritto dalle matrici  $(A, B, C, D)$ , si potranno trovare, in base a quanto visto, combinazioni lineari reali di tutte e sole le successioni (modi) che possono apparire nelle potenze di una matrice in forma di Jordan reale.

Riassumendo i vari casi visti, i modi di un sistema LTITD possono essere esclusivamente dei seguenti tipi:

- 1) Potenze del tipo  $\lambda^t$ , corrispondenti a miniblocchi semplici con autovalore  $\lambda$  reale; questi modi sono convergenti a zero, limitati ma non convergenti, o divergenti a seconda che  $|\lambda|$  sia minore, uguale, o maggiore di uno. I modi reali con  $\lambda < 0$  sono successioni oscillanti, con segno alternante ad ogni campione.
- 2) Successioni di tipo  $C_k^t \lambda^{t-k}$ ,  $0 \leq k \leq q-1$ , corrispondenti a miniblocchi di dimensione  $q > 1$  con autovalore reale  $\lambda$ ; questi modi sono convergenti a zero se  $|\lambda| < 1$ , polinomialmente divergenti con segno costante se  $|\lambda| = 1$ , esponenzialmente divergenti se  $|\lambda| > 1$ ; hanno segno costante o alternante a seconda che  $\lambda$  sia maggiore o minore di zero.
- 2-bis)** Nel caso  $\lambda = 0$ , la matrice  $J_0$  è nilpotente di ordine  $q$  (cioè  $J_0^q = 0$ ). In altri termini, ogni successione  $C_k^t \lambda^{t-k}$  ( $0 \leq k \leq q-1$ ) vale zero per ogni  $t \geq q$ : ogni evoluzione libera quindi si esaurisce a zero *in un tempo finito* (e non asintoticamente come per  $0 < |\lambda| < 1$ ): questi modi vengono detti *dead-beat*.

- 3)** Successioni oscillanti del tipo  $\rho^t \cos(\theta t)$ ,  $\rho^t \sin(\theta t)$ , corrispondenti a due miniblocchi semplici associati ad una coppia di autovalori complessi coniugati  $\rho e^{\pm j\theta}$  (ovvero ad un miniblocco reale semplice); questi modi sono convergenti a zero se il modulo degli autovalori  $\rho$  è minore di 1, limitati ma non convergenti se  $\rho = 1$ , esponenzialmente divergenti se  $\rho > 1$ . Le oscillazioni della successione sono tanto più frequenti quanto più alto è  $\theta$ , sino al caso  $\theta = \pi$ , in cui il periodo è di due campioni (quest'ultimo caso coincide con quanto visto al punto 1) per  $\lambda < 0$ ;
- 4)** Successioni oscillanti del tipo  $C_k^t \rho^{t-k} \cos(\theta(t-k))$ ,  $C_k^t \rho^{t-k} \sin(\theta(t-k))$ ,  $0 \leq k \leq q-1$ , corrispondenti a due miniblocchi di ordine  $q$  associati ad una coppia di autovalori complessi coniugati  $\rho e^{\pm j\theta}$  (ovvero ad un miniblocco reale costituito da  $q \times q$  blocchi reali); questi modi sono convergenti a zero se il modulo degli autovalori  $\rho$  è minore di 1, polinomialmente divergenti se  $\rho = 1$  e  $k > 0$ , esponenzialmente divergenti se  $\rho > 1$ .

# Capitolo 4

## Stabilità dei Sistemi Lineari

Nello studio delle soluzioni libere dei sistemi LTI in forma di stato,  $\mathbb{D}x = Ax$ , abbiamo osservato modi di tipi diversi, ed in particolare modi convergenti a zero, esponenzialmente divergenti, polinomialmente divergenti, e non convergenti né divergenti. Nella discussione di questi modi, si è fatto osservare come questi siano associati alla posizione degli autovalori della matrice dinamica  $A$  rispetto ad una regione del piano complesso (che diremo *Regione Stabile* - RS), rappresentata dal semipiano sinistro per sistemi LTITC, e dal cerchio unitario per i sistemi LTITD.

### 4.1 Definizioni di stabilità

A seconda di quali modi possiede, un sistema LTI si dice:

**Asintoticamente Stabile** (AS) se tutti i suoi modi sono convergenti (si ricordi che, se convergenti, i modi di un sistema LTI sono esponenzialmente convergenti). La evoluzione libera dello stato di un sistema LTI asintoticamente stabile a partire da qualsiasi condizione iniziale tende quindi, per tempi sufficientemente lunghi, a zero ( $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ ). Un sistema LTI è AS se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  appartengono alla parte interna della RS.

**Marginalmente Stabile** (MS) se non possiede alcun modo divergente, ma possiede almeno un modo non convergente. La evoluzione libera dello stato di un sistema LTI marginalmente stabile, a partire da qualsiasi condizione iniziale, non converge a zero né diverge, ma si mantiene limitata. Si noti che, se si desidera che tutta la evoluzione libera dello stato resti limitata in un intorno di raggio arbitrariamente piccolo della origine (ad esempio, se si vuole che  $\|x(t)\| < \epsilon$ ,  $\forall t$ , per un  $\epsilon > 0$ ), è

sufficiente che le condizioni iniziali siano sufficientemente vicine a zero ( $\|x(0)\| < \delta$ , con  $0 < \delta \leq \epsilon$ ). Un sistema LTI è MS se e solo se valgono tutte le seguenti condizioni:

- a) nessun autovalore di  $A$  è al di fuori della RS;
- b) almeno un autovalore di  $A$  appartiene al bordo della RS;
- c) nessun autovalore di  $A$  sul bordo della RS ha molteplicità algebrica maggiore della geometrica.

In altri termini, per la stabilità marginale, agli autovalori sul bordo della Regione Stabile possono essere associati solo miniblocchi di Jordan di dimensione uno.

**Instabile** se non è AS né MS. Un sistema instabile si dice poi più precisamente

- **Esponenzialmente Divergente** (ED) se possiede almeno un modo esponenzialmente divergente. Un sistema LTI è ED se e solo se almeno un autovalore di  $A$  è al di fuori della RS
- **Polinomialmente Divergente** (PD) se non è ED e se possiede almeno un modo polinomialmente divergente. Un sistema LTI è PD se e solo se nessun autovalore di  $A$  è al di fuori della RS, ma almeno un autovalore di  $A$  è sul bordo della RS ed ha molteplicità geometrica inferiore alla molteplicità algebrica (cioè, è associato ad un miniblocco di Jordan di dimensione maggiore di uno).

## 4.2 Criteri algebrici di stabilità.

Le caratteristiche di stabilità di un sistema dinamico sono ovviamente di fondamentale importanza nello studio che faremo: si può dire infatti che la stabilizzazione del funzionamento di un sistema sia la prima e più importante delle specifiche che il progettista di un sistema di controllo si troverà di fronte.

Ne segue l'importanza dei metodi per la determinazione delle caratteristiche di stabilità. Per i sistemi LTI, abbiamo visto che questa determinazione è legata all'accertamento della posizione degli autovalori della matrice dinamica. Per sistemi di dimensioni elevate, il calcolo esplicito degli autovalori è proibitivo: si ricordi che è possibile in generale determinare in forma chiusa (cioè, esattamente con formule esplicite) solo gli autovalori di matrici di dimensione massima pari a 4, mentre il calcolo numerico può dare risultati sino

a dimensioni molto maggiori, ma a costo di un tempo di calcolo piuttosto lungo, e della perdita di qualsiasi intuizione sul ruolo che i vari parametri fisici del sistema dinamico giocano rispetto alla stabilità.

Vedremo nel seguito alcuni criteri algebrici che consentono, in modo relativamente semplice, di conoscere la posizione delle radici di una equazione polinomiale senza risolvere l'equazione stessa.

### 4.2.1 Criterio di Routh

Si tratta di una importante generalizzazione del noto criterio di Descartes, per il quale le radici di un polinomio di secondo ordine  $a_0 + a_1s + a_2s^2$  sono tutte a parte reale negativa se e solo se i coefficienti hanno tutti lo stesso segno.

La condizione che tutti i coefficienti di un polinomio di ordine  $n$

$$\pi(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

siano dello stesso segno rimane ovviamente necessaria, ma non sufficiente. Esempi:

$$\begin{aligned}\pi(s) &= s^3 + s^2 + 7.25s + 18.5 = (s+2)(s^2 - s + 9.25); \\ \pi(s) &= s^3 + s + 10 = (s+2)(s^2 - 2s + 5); \\ \pi(s) &= s^3 + s^2 + s + 1 = (s+1)(s^2 + 1).\end{aligned}$$

Una condizione necessaria e sufficiente è invece fornita dal criterio di Routh-Hurwitz<sup>1</sup>. Data l'equazione caratteristica

$$\pi(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

poniamo per comodità di notazione  $b_0 = a_n \neq 0$ ,  $b_1 = a_{n-1}$ , etc. (cioè  $b_i = a_{n-i}$ ). Si noti incidentalmente che nei polinomi caratteristici di matrici si ha  $b_0 = a_n = 1$ . Riscriveremo quindi

$$\pi(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n = 0.$$

---

<sup>1</sup>La più frequente pronuncia del nome di Edward Routh, che ha dimostrato il criterio nel 1874, è simile a quella per “South”. Adolf Hurwitz ha dimostrato indipendentemente lo stesso risultato nel 1895

Si costruisca la *tabella di Routh* come segue

$$\begin{array}{cccc} b_0 & b_2 & b_4 & \dots \\ b_1 & b_3 & b_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots \\ l_1 & l_2 & l_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

La tabella di Routh è costituita da  $n+1$  righe, e la sua struttura determinata (a partire dalle prime due righe note) secondo la seguente regola: gli elementi della generica riga  $l$  sono determinati a partire da quelli delle due righe precedenti ( $h$  e  $k$ ) con l'algoritmo

$$l_i = -\frac{1}{k_1} \det \left( \begin{bmatrix} h_1 & h_{i+1} \\ k_1 & k_{i+1} \end{bmatrix} \right) = h_{i+1} - \frac{h_1}{k_1} k_{i+1}$$

Quindi nel calcolo di  $l_i$  si richiedono i valori della prima e della  $i+1$ -esima colonna delle due righe precedenti. Se la  $i+1$  colonna non è stata definita, si considerano zero i suoi elementi. Pertanto, sulla destra delle righe si avrà un numero crescente di zeri nel progredire dell'algoritmo verso la  $n+1$  riga: questi zeri tipicamente vengono omessi dalla tabella. Se a qualche livello risulta  $k_1 = 0$ , l'algoritmo non può essere applicato, si interrompe e la tabella si dice *non ben definita*.

Diciamo che una tabella di Routh è ben definita se tutti gli elementi della prima colonna sono diversi da zero. Vale il seguente

**Criterio di Routh** *Un polinomio ha tutte le radici a parte reale strettamente negativa se e solo se la sua tabella di Routh è ben definita e tutti gli elementi della prima colonna della tabella hanno lo stesso segno.*

Le conseguenze del Criterio di Routh sulla stabilità dei sistemi LTITC sono immediate: un sistema la cui matrice dinamica  $A$  ha polinomio caratteristico  $\pi(s)$  è asintoticamente stabile se e solo se il polinomio soddisfa il criterio di Routh.

Si può inoltre affermare che se la tabella di Routh di  $\pi(s)$  è ben definita, e ci sono  $m$  cambiamenti di segno nella prima colonna, allora il polinomio ha  $m$  radici positive (e il sistema lineare associato è instabile con modi esponenzialmente divergenti)

**Esempio:**  $\pi(s) = s^3 + s^2 + 7.25s + 18.5$

$$\begin{array}{rr} 1 & 7.25 \\ 1 & 18.5 \\ -11.25 \\ 18.5 \end{array}$$

Due cambiamenti di segno nella prima colonna indicano la presenza di due radici a parte reale positiva ( $\pi(s) = (s+2)(s^2 - s + 9.25)$ ).

**Esempio:**  $\pi(s) = s^4 + 3s^3 + 12.25s^2 + 19.5s + 9.25$

$$\begin{array}{rrr} 1 & 12.25 & 9.25 \\ 3 & 19.5 & \\ 5.75 & 9.25 & \\ 14.67 & & \\ 9.25 & & \end{array}$$

Nessun cambiamento di segno nella prima colonna, quindi tutte radici a parte reale negativa ( $\pi(s) = (s+1)^2(s^2 + s + 9.25)$ ).

Se la tabella di Routh di  $\pi(s)$  non è ben definita, si può escludere la asintotica stabilità, ma è necessario uno studio ulteriore per fare altre affermazioni.

Il criterio di Routh può essere esteso al caso di tabelle non ben definite nei seguenti modi:

1. quando il primo termine di una riga è nullo. In questo caso si può applicare il criterio di Routh all'equazione in questione moltiplicata per  $(s+a)$ , essendo  $a$  un numero positivo;

**Esempio:**  $\pi(s) = s^3 + s + 10$

$$\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 0 & 10 \end{array}$$

Introducendo ad esempio  $\pi'(s) = (s^3 + s + 10)(s + 1) = s^4 + s^3 + s^2 + 11s + 10$  si ha

$$\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 10 \\ 1 & 11 & \\ -10 & 10 & \\ 12 & & \\ 10 & & \end{array}$$

quindi due radici a parte reale positiva (infatti,  $\pi(s) = (s+2)(s^2 - 2s + 5)$ ).

2. quando tutti i termini di una riga sono nulli. In questo caso il sistema possiede radici immaginarie pure, radici reali di segno opposto o un numero pari di radici simmetriche rispetto all'origine. Si considera in questo caso il cosiddetto *polinomio ausiliario*, che ha per coefficienti i termini della riga precedente a quella che si annulla. Le radici immaginarie pure, reali di segno opposto o simmetriche rispetto all'origine sono le radici di tale polinomio.

Per proseguire nell'applicazione del criterio di Routh occorre scrivere, al posto della riga che si è annullata, i coefficienti della derivata del polinomio ausiliario. Si noti che è conveniente in questi casi giustapporre sulla sinistra una colonna con le potenze decrescenti della variabile  $s$ , che indica il grado massimo del polinomio corrispondente ad ogni riga.

**Esempio:**  $\pi(s) = s^3 + s^2 + s + 1$

|       |   |   |  |
|-------|---|---|--|
| $s^3$ | 1 | 1 |  |
| $s^2$ | 1 | 1 |  |
| $s$   | 0 | 0 |  |
| $s$   | 2 | 0 |  |
| $s^0$ | 1 |   |  |

Le radici del polinomio ausiliare  $s^2 + 1$  sono immaginarie pure. Non essendoci cambiamenti di segno nella prima colonna, tutte le altre radici hanno parte reale negativa, ed il sistema risulta marginalmente stabile ( $\pi(s) = (s+1)(s^2 + 1) = 0$ ).

**Esempio:**  $\pi(s) = s^4 + s^3 + 5s^2 + 4s + 4 = 0$

|       |   |   |   |  |
|-------|---|---|---|--|
| $s^4$ | 1 | 5 | 4 |  |
| $s^3$ | 1 | 4 |   |  |
| $s^2$ | 1 | 4 |   |  |
| $s$   | 0 | 0 |   |  |
| $s$   | 2 | 0 |   |  |
| $s^0$ | 4 |   |   |  |

In questo caso la quarta riga risulta nulla. Il polinomio ausiliario è  $s^2 + 4$  e  $\frac{d}{ds}(s^2 + 4) = 2s$ . Le radici del polinomio ausiliario sono immaginarie pure ( $s = \pm j2$ ). Non essendovi cambiamenti di segno nella prima colonna, le altre radici hanno tutte parte reale negativa. Un sistema avente tale polinomio come polinomio caratteristico risulta marginalmente stabile.

**Esempio:**  $\pi = s^6 + s^5 + 2s^4 + 12s^3 + 11s^2 + 11s + 10$

|       |     |    |    |    |  |
|-------|-----|----|----|----|--|
| $s^6$ | 1   | 2  | 11 | 10 |  |
| $s^5$ | 1   | 12 | 11 |    |  |
| $s^4$ | -10 | 0  | 10 |    |  |
| $s^3$ | 12  | 12 |    |    |  |
| $s^2$ | 10  | 10 |    |    |  |
| $s$   | 0   | 0  |    |    |  |
| $s$   | 20  | 0  |    |    |  |
| $s^0$ | 10  |    |    |    |  |

Il polinomio ausiliario è  $10s^2 + 10$  e la sua derivata è  $20s$ . Le radici del polinomio ausiliario sono  $s = \pm\sqrt{10}$ . La prima colonna presenta due variazioni di segno quindi esistono due radici a parte reale positiva ( $\pi(s) = (s+1)(s+2)(s^2+1)(s^2-2s+5)$ ). Il sistema avente tale polinomio come polinomio caratteristico risulta instabile.

**Esempio:**  $\pi(s) = s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4$  Questo polinomio caratteristico ha ovviamente radici a parte reale positiva, in quanto i coefficienti non hanno segno costante. Procedendo comunque con la tabella di Routh si ottiene

|       |        |    |    |    |  |
|-------|--------|----|----|----|--|
| $s^6$ | 1      | -2 | -7 | -4 |  |
| $s^5$ | 1      | -3 | -4 |    |  |
| $s^4$ | 1      | -3 | -4 |    |  |
| $s^3$ | 0      | 0  |    |    |  |
| $s^3$ | 4      | -6 |    |    |  |
| $s^2$ | -1.5   | -4 |    |    |  |
| $s$   | -16.67 | 0  |    |    |  |
| $s^0$ | -4     |    |    |    |  |

Il polinomio ausiliario è  $s^4 - 3s^2 - 4$  e  $\frac{d}{ds}(s^4 - 3s^2 - 4) = 4s^3 - 6s$ . Le radici del polinomio ausiliario sono  $s = \pm\sqrt{2}$  e  $s = \pm\sqrt{6}$ . La prima colonna presenta una variazione di segno quindi esiste una radice positiva (+2). Il sistema avente tale polinomio come polinomio caratteristico risulta instabile.

### Criterio di Routh e variazioni parametriche

Il criterio di Routh-Hurwitz può essere applicato per determinare la regione in cui alcuni parametri possono variare. Ad esempio, per un sistema con polinomio caratteristico

$$\pi(s) = s^3 + \alpha s^2 + (1 + \alpha)s + \beta,$$

la tabella di Routh risulta

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 + \alpha \\ \alpha & \beta \\ -\frac{\beta - \alpha(1+\alpha)}{\alpha} & \\ & \beta \end{array}$$

per cui il sistema è asintoticamente stabile se e solo se vale  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , e  $\alpha^2 + \alpha - \beta > 0$ . Queste relazioni definiscono una porzione del primo quadrante nel piano  $\alpha, \beta$  dei parametri delimitata superiormente da una parabola.

### 4.2.2 Equazione di Lyapunov.

Per il sistema  $\dot{x} = Ax$ , si consideri la equazione

$$PA + A^T P = -Q.$$

dove  $Q$  è una arbitraria matrice  $n \times n$  simmetrica e definita positiva (ad esempio,  $Q = I$ ), e  $P$  è una matrice  $n \times n$  simmetrica ma incognita.

Si tratta quindi di una equazione matriciale che rappresenta un sistema di  $n(n+1)/2$  equazioni lineari in  $n(n+1)/2$  incognite (che potrebbe essere riscritto quindi come  $Mp = q$ , dove  $p$  e  $q$  sono vettori a  $n(n+1)/2$  componenti formati ad es. giustapponendo le colonne di  $P$  e  $Q$ ).

Si dimostra che il sistema ha soluzione (unica)  $P$  positiva definita se e solo se  $A$  ha tutti gli autovalori a parte reale minore di zero. Risolvendo quindi un sistema di equazioni lineari e determinando la positiva definitezza del risultato  $P$  è possibile determinare la asintotica stabilità del sistema.

**Osservazione.** Gli autovalori di  $A + \epsilon I$  valgono  $\lambda_i + \epsilon$ . Quindi, se si risolve l'equazione

$$(A + \epsilon I)^T P + P(A + \epsilon I) = A^T P + PA + 2\epsilon P = -Q$$

con  $Q$  p.d., e si trova  $P$  p.d., il sistema ha autovalori a parte reale minore di  $-\epsilon$ .

### 4.2.3 Criterio di Kharitonov

Nelle applicazioni, accade spesso che i parametri del modello siano incerti, ma si possa stabilire per essi un massimo campo di variazione. Cosa si può dire delle radici di un polinomio i cui coefficienti siano incerti, ma limitati in dati intervalli?

Supponiamo ad esempio che il polinomio caratteristico sia

$$\pi(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n$$

e indichiamo con  $b = [ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_n ]$  il vettore dei suoi coefficienti. Per ciascuno di essi sia noto l'intervallo massimo di variazione:  $b_i^{\min} \leq b_i \leq b_i^{\max}$ . Vi sono ovviamente infiniti possibili polinomi caratteristici, e la determinazione della asintotica stabilità dei sistemi corrispondenti appare difficile. Vale comunque (piuttosto sorprendentemente) il seguente

**Criterio di Kharitonov.** Si definiscano quattro polinomi “angolari” con vettore dei coefficienti

$$\begin{aligned} b_A &= [ b_0^{\max} \ b_1^{\max} \ b_2^{\min} \ b_3^{\min} \ b_4^{\max} \ b_5^{\max} \ b_6^{\min} \dots ] \\ b_B &= [ b_0^{\min} \ b_1^{\min} \ b_2^{\max} \ b_3^{\max} \ b_4^{\min} \ b_5^{\min} \ b_6^{\max} \dots ] \\ b_C &= [ b_0^{\max} \ b_1^{\min} \ b_2^{\min} \ b_3^{\max} \ b_4^{\max} \ b_5^{\min} \ b_6^{\min} \dots ] \\ b_D &= [ b_0^{\min} \ b_1^{\max} \ b_2^{\max} \ b_3^{\min} \ b_4^{\min} \ b_5^{\max} \ b_6^{\max} \dots ] \end{aligned}$$

Le radici del polinomio  $\pi(s)$  sono tutte a parte reale negativa per qualsiasi valore dei coefficienti di  $\pi(s)$  negli intervalli dati, se e solo se sono tutte a parte reale negativa le radici dei quattro polinomi angolari corrispondenti.

Ovviamente, l'applicazione del criterio alla stabilità dei sistemi con parametri incerti in intervalli si riduce alla applicazione di un criterio di asintotica stabilità ai soli quattro polinomi angolari. Ciò può essere fatto applicando il criterio di Routh, o anche trovando numericamente tutte le soluzioni.

**Esempio.** Applichiamo il criterio di Kharitonov al polinomio

$$\pi(s) = s^4 + 4s^3 + 34s^2 + 60s + 200$$

e supponiamo che ogni parametro sia noto solo con tolleranza  $\pm 5\%$ . I quattro polinomi angolari sono:

$$\begin{aligned} b_A(s) &= 1.05s^4 + 4.2s^3 + 32.3s^2 + 57s + 210 \\ b_B(s) &= 0.95s^4 + 3.8s^3 + 35.7s^2 + 63s + 190 \\ b_C(s) &= 1.05s^4 + 3.8s^3 + 32.3s^2 + 63s + 210 \\ b_D(s) &= 0.95s^4 + 4.2s^3 + 35.7s^2 + 57s + 190 \end{aligned}$$

Si può verificare che tutti questi polinomi hanno tutte le radici a parte reale negativa. Dunque, per il criterio di Kharitonov, le radici del polinomio di partenza hanno parte reale negativa per tutti i valori assunti dai coefficienti negli intervalli sopra specificati. Si osservi che perturbazioni dei coefficienti dell'ordine del 10% sarebbero invece sufficienti a generare instabilità per il sistema.

#### 4.2.4 Criterio di Gershgorin

Un criterio con analoghi caratteri di “robustezza” che si applica direttamente agli elementi di una matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  che sia “quasi” diagonale, cioè  $A = \Lambda + F$  con  $\Lambda$  diagonale,  $F$  nulla sulla diagonale e sufficientemente piccola, si ricava immediatamente dal seguente:

**Teorema di Gershgorin** Tutti gli autovalori di  $A$  sono contenuti nell'unione di  $n$  cerchi centrati in  $\Lambda_i$  e di raggio  $r_i = \sum_{j=1}^n |F_{ij}|$ .

Se tutti i cerchi sono contenuti nel semipiano a parte reale negativa, si ha quindi la asintotica stabilità del sistema LTITC che ha  $A$  come matrice dinamica. Analogo criterio si applica al caso LTITD, considerando l'opportuna regione di stabilità (il cerchio unitario).

**Esempio**

$$A = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.1 & -0.5 \\ 0 & -0.2 & 0.15 \\ 0.1 & 0 & -0.3 \end{bmatrix}$$

La matrice è stabile in TC, in quanto i tre cerchi di Gershgorin sono centrati in  $-0.8, -0.2, -0.3$  e hanno raggi rispettivamente di  $0.6, 0.15$ , e  $0.1$ . La matrice è anche stabile in T.D.: infatti, il criterio può essere applicato alla trasposta di  $A$ , dando così luogo a tre cerchi con gli stessi centri, ma raggi  $0.1, 0.1, 0.65$ , che sono quindi contenuti nel cerchio unitario.

#### 4.2.5 Criterio di Mikhailov

Si consideri il polinomio caratteristico  $\pi(s)$  di grado  $n$  di cui vogliamo caratterizzare la eventuale presenza ed il numero di radici a parte reale positiva. Il criterio di Mikhailov è uno strumento grafico, che utilizza il diagramma sul piano complesso della funzione  $\pi(s)$  calcolata per valori immaginari di  $s$ , cioè  $\pi(j\omega)$ ,  $0 \leq \omega < \infty$ . Per quanto l'utilizzo di metodi grafici sia oggi superato dal punto di vista del calcolo, il metodo è importante ai fini della comprensione del fondamentale teorema di Nyquist che sarà incontrato più avanti.

Si ponga  $\pi(j\omega)$  nella forma fattorizzata

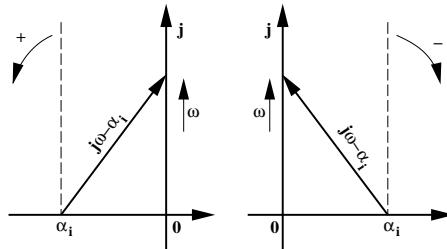
$$\pi(j\omega) = b_0(j\omega - \alpha_1)(j\omega - \alpha_2) \dots (j\omega - \alpha_n)$$

dove possiamo assumere che sia  $b_0 > 0$ . Si noti che l'argomento del vettore  $\pi(j\omega)$  che congiunge l'origine del piano complesso col punto del grafico  $\pi(j\omega)$ , è pari alla somma degli argomenti dei fattori, cioè

$$\angle \pi(j\omega) = \sum_{k=1}^n \angle(j\omega - \alpha_k).$$

Osservando quindi i vari contributi distintamente, per  $\omega$  che varia tra zero e infinito si ha che

- ogni radice reale negativa dà luogo ad una rotazione di  $\frac{\pi}{2}$  in senso positivo (antiorario);
- ogni radice reale positiva dà luogo ad una rotazione di  $\frac{\pi}{2}$  in senso opposto;
- una coppia di radici complesse coniugate produce complessivamente una rotazione di  $\pi$  se la loro parte reale è negativa, oppure di  $-\pi$  se la parte reale è positiva;
- una radice in zero fa sì che il grafico di  $\pi(j\omega)$  inizi nell'origine;
- una coppia di radici immaginarie pure  $(j\omega - jb)(j\omega + jb) = -\omega^2 + b^2$  fa sì che, per  $\omega = b$ , il grafico di  $\pi(j\omega)$  passi per l'origine.



È facile dunque osservare che, in assenza di radici sull'asse immaginario, il punto rappresentativo di  $\pi(j\omega)$  nel piano complesso ruota intorno all'origine in senso antiorario (ovvero in senso positivo) di un angolo pari a

$$\phi = (n - 2r)\frac{\pi}{2}$$

dove  $n$  è il grado del polinomio  $\pi(s)$  e  $r$  è il numero di radici con parte reale positiva dell'equazione  $\pi(s) = 0$ .

Da queste considerazioni deriva il seguente **Criterio di Mikhailov**:

*Condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione algebrica di grado  $n$   $\pi(s) = 0$  abbia solo radici con parte reale negativa è che la curva rappresentativa della funzione  $\pi(j\omega)$  quando  $\omega$  varia da 0 a  $\infty$  non tocchi l'origine e compia attorno all'origine stessa una rotazione di  $n\frac{\pi}{2}$  in senso antiorario.*

### Esempio

$$\pi(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 46s^2 + 89s + 260$$

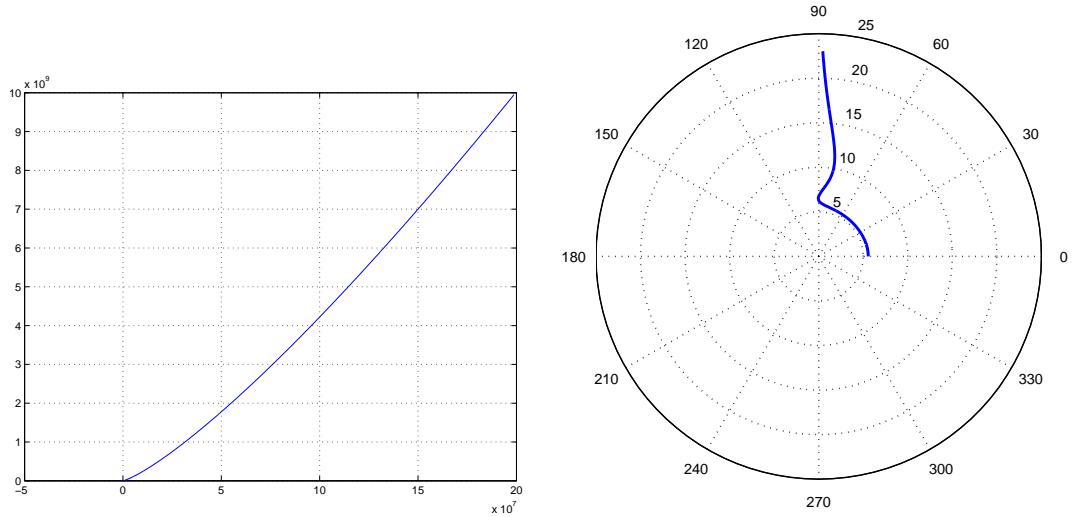


Figura 4.1: Diagramma polare usato per applicare il teorema di Mikhailov al polinomio  $\pi(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 46s^2 + 89s + 260$ . A sinistra, il diagramma ottenuto in Matlab ponendo `omega=1.0e-5:0.1:1.0e2`, e piazzando i valori di `PolCar = polyval([1 2 2 46 89 260], j*omega)` mediante `plot(real(polcar),imag(polcar))`. Il diagramma a destra è stato invece ottenuto scegliendo le pulsazioni in scala logaritmica con `omega=10.^(-5:0.1:2)`, e piazzando i valori di `PolCar = polyval([1 2 2 46 89 260], j*omega)` in coordinate polari semilogaritmiche con `polar(angle(PolCar), log(abs(PolCar)))`.

si ottiene la rappresentazione  $\pi(j\omega)$  riportata in fig. 4.1 e quindi  $\phi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2}(5 - 2r) = \frac{\pi}{2}$ , da cui  $r = 2$ .  $\pi(s)$  ammette quindi due radici a parte reale positiva.

**Esempio** Per il polinomio:

$$\pi(s) = s^7 + 7s^6 + 23s^5 + 37s^4 + 56s^3 + 36s^2 + 12s + 4$$

si ottiene la rappresentazione riportata in fig. 4.2, e quindi  $\phi = 7\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2}(7 - 2r) = 7\frac{\pi}{2}$ , da cui  $r = 0$ .  $\pi(s)$  non ammette radici di parte reale positiva.

Il criterio di Mikhailov è di natura grafica, e come tale può apparire meno adatto ai moderni mezzi di calcolo automatico. La sua importanza è comunque legata ad un suo importante sviluppo, che costituisce uno strumento fondamentale per lo studio della stabilità dei sistemi in retroazione (il *teorema di Nyquist*).

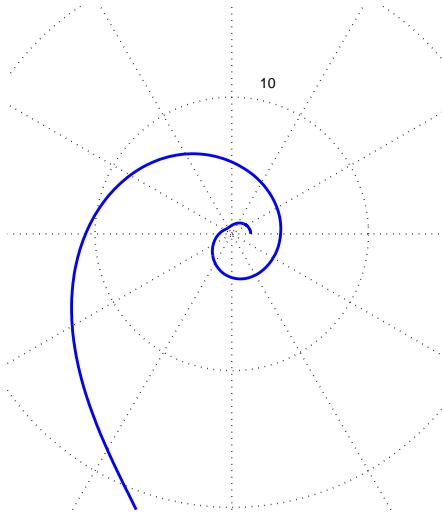


Figura 4.2: Diagramma polare usato per applicare il teorema di Mikhailov al polinomio  $\pi(s) = s^7 + 7s^6 + 23s^5 + 37s^4 + 56s^3 + 36$

#### 4.2.6 Sistemi a tempo discreto

Nel caso di sistemi lineari stazionari a tempo discreto, sarebbe utile un criterio che permetta di stabilire quante sono le radici di un polinomio (indicheremo per comodità questi polinomi con  $\pi(z)$ ) che hanno modulo maggiore di 1. A tale scopo esistono criteri specifici, come ad esempio il *Criterio di Jury*, ma si può utilizzare ancora il criterio di Routh, applicato ad una equazione ausiliaria  $\pi'(s) = 0$ , ottenuta in  $\pi(z)$  la seguente sostituzione:

$$z = \frac{1+s}{1-s}$$

La trasformazione, detta bilineare nel senso che è una funzione razionale fratta, con sia numeratore che denominatore lineari, mappa il cerchio unitario nel semipiano sinistro: infatti, posto  $s = \sigma + j\omega$  si ha

$$|z|^2 < 1 \leftrightarrow \frac{(1+\sigma)^2 + \omega^2}{(1-\sigma)^2 + \omega^2} < 1$$

e quindi

$$(1+\sigma)^2 + \omega^2 < (1-\sigma)^2 + \omega^2$$

cioè  $\sigma < 0$ . Analogamente si ottiene che la circonferenza è mappata sull'asse immaginario, e che punti esterni al cerchio vanno su punti a parte reale positiva. La trasformazione inversa vale

$$s = \frac{z - 1}{z + 1}$$

Le radici di  $\pi(z)$  hanno tutte modulo  $< 1$  se e solo se le soluzioni di  $\pi'(s) = 0$  hanno tutte parte reale negativa.

**Esempio.** Dato  $\pi(z) = 8z^3 + 12z^2 + 6z + 1$ , applicando la trasformazione bilineare si ottiene:

$$\pi'(s) = 8 \left( \frac{1+s}{1-s} \right)^3 + 12 \left( \frac{1+s}{1-s} \right)^2 + 6 \left( \frac{1+s}{1-s} \right) + 1.$$

Semplificando si ottiene:

$$\pi'(s) = s^3 + 9s^2 + 27s + 27 = 0$$

la cui tabella di Routh è la seguente:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 27 \\ s^2 & 9 & 27 \\ s & 24 & \\ s^0 & 27 & \end{array}$$

Tutti gli elementi della prima colonna sono positivi, quindi tutte le radici di  $\pi'(s)$  hanno parte reale negativa quindi tutte le radici di  $\pi(z)$  hanno modulo  $< 1$ .

### Equazione di Lyapunov per Sistemi LTITD.

Per il sistema  $x(t+1) = Ax(t)$ , si consideri l'equazione

$$-Q = A^T P A - P$$

dove  $Q$  è una arbitraria matrice  $n \times n$  simmetrica e definita positiva (ad esempio,  $Q = I$ ), e  $P$  è una matrice  $n \times n$  simmetrica ma incognita. Si tratta quindi ancora, come nel caso LTITC, di una equazione matriciale che rappresenta un sistema di  $n(n+1)/2$  equazioni lineari in  $n(n+1)/2$  incognite (che potrebbe essere riscritto quindi come  $Mp = q$ , dove  $p$  e  $q$  sono vettori a  $n(n+1)/2$  componenti formati ad es. giustapponendo le colonne di  $P$  e  $Q$ ).

Si dimostra che il sistema ha soluzione (unica)  $P$  positiva definita se e solo se  $A$  ha tutti gli autovalori a modulo minore di uno. Risolvendo quindi

un sistema di equazioni lineari e determinando la positiva definitezza del risultato  $P$  è possibile determinare la asintotica stabilità del sistema.

**Osservazione.** Gli autovalori di  $\frac{1}{\rho}A$  valgono  $\frac{1}{\rho}\lambda_i$ . Quindi, se si risolve l'equazione

$$\frac{1}{\rho^2}A^T P A - P = -Q$$

con  $Q$  p.d. e si trova  $P$  p.d., il sistema ha autovalori a modulo minore di  $\rho$ .

#### 4.2.7 Limitazioni pratiche dei criteri algebrici di stabilità

L'applicazione del criterio di Routh, e degli altri analoghi visti in precedenza, alla sintesi dei sistemi in retroazione, soffre di alcune limitazioni:

- i criteri algebrici indicano soltanto se le radici sono situate o meno nel semipiano positivo senza precisare la loro posizione. La conoscenza di quest'ultima è indispensabile per lo studio delle caratteristiche dinamiche del sistema;
- quando il grado dell'equazione caratteristica è elevato, l'applicazione diretta dei criteri è difficoltosa;
- questi criteri sono applicabili soltanto quando si conosce l'espressione matematica del modello del sistema, e non sono utilizzabili quando di essa si conosce solo una rappresentazione grafica determinata per via sperimentale.



# Capitolo 5

## Risposte Forzate dei Sistemi LTI

Passiamo adesso a considerare più in dettaglio gli effetti degli ingressi sulle evoluzioni degli stati e delle uscite di un sistema dinamico. Ricordiamo le espressioni della risposta forzata dei sistemi lineari, che corrisponde alla applicazione di un segnale identicamente nullo prima del tempo  $t = 0$  ad un sistema in stato di quiete sino all'istante  $t = 0$  stesso. Per sistemi LTITC si ha

$$y(x(0) = 0, u(t), t) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)$$

mentre per sistemi LTITD

$$y(x(0) = 0, u(t), t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} C A^{t-\tau-1} B u(\tau) + D u(t)$$

In generale, dati due segnali TC, cioè due funzioni  $f(t)$  e  $g(t)$ , si chiama *convoluzione* di  $f(t)$  e  $g(t)$  la funzione

$$w(t) = f(t) * g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau.$$

Per segnali T.D., cioè successioni  $f(t)$  e  $g(t)$ , la convoluzione è invece definita da

$$w(t) = f(t) * g(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) g(\tau).$$

Se i segnali  $f(t)$  e  $g(t)$  sono nulli per  $t < 0$ , si ha equivalentemente

$$w(t) = f(t) * g(t) = \int_{\tau=0}^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau.$$

e

$$w(t) = f(t) * g(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} f(t-\tau)g(\tau).$$

Le risposte forzate dei sistemi LTI possono quindi essere viste come la convoluzione del segnale di ingresso  $u(t)$  con la funzione  $Ce^{At}B + D$

$$y(x(0) = 0, u(t), t) = (Ce^{At}B + D\delta(t)) * u(t)$$

ovvero con la successione  $CA^tB + D\delta(t)$

$$y(x(0) = 0, u(t), t) = (CA^tB + D\delta(t)) * u(t).$$

La definizione del prodotto di convoluzione mal si presta ad una valutazione diretta, e non fornisce una chiara interpretazione del rapporto ingresso–uscita.

Il calcolo esplicito della risposta forzata per sistemi e ingressi generici è molto semplificato se si usa il cosiddetto *calcolo operazionale*, introdotto nell’ingegneria da Heaviside e in seguito reso matematicamente rigoroso da Laplace (per il tempo continuo) e altri, con l’introduzione della teoria delle distribuzioni.

## 5.1 Calcolo Operazionale

Consideriamo di nuovo la forma normale dei sistemi lineari stazionari SISO

$$\mathbb{D}^n y = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) \mathbb{D}^i y + \sum_{j=0}^p b_j(t) \mathbb{D}^j u,$$

e indichiamo con  $y_p(t)$  la evoluzione forzata corrispondente all’ingresso  $u(t)$ .

Considereremo solo sistemi causali, per i quali è sempre possibile supporre che esista un tempo, convenzionalmente posto a 0, prima del quale entrambe i segnali  $u$  e  $y_p$  sono identicamente nulli. A ogni funzione/successione  $u(t)$  nell’insieme  $\mathcal{D}$  delle funzioni/successioni che soddisfano  $u(t) = 0, \forall t < 0$ , corrisponde una unica  $y_p(t) \in \mathcal{D}$ ; inoltre questa mappa è lineare.

Per convenienza, associamo allo spazio delle funzioni/successioni semi-infinite  $\mathcal{D}$  uno spazio di funzioni di variabile complessa attraverso le definizioni seguenti:

**Trasformata monolatera di Laplace** della funzione  $f(t) \in \mathcal{D}$ :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (5.1)$$

definita per ogni  $s \in \mathbb{C}$  in cui l'integrale esiste.

**Trasformata Z monolatera** della successione  $f(t) \in \mathcal{D}$ :

$$\mathcal{Z}[f(t)] = F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t} \quad (5.2)$$

definita per ogni  $z \in \mathbb{C}$  in cui la serie esiste.

**Osservazione.** Non per tutte le funzioni/successioni semi-infinite esiste una trasformata. Condizioni necessarie e sufficienti perché esistano le trasformate sono nei due casi:

$$\begin{aligned} TC : & f(t) \text{ quasi-continua e } \exists A \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R} : |f(t)| < Ae^{\sigma t}, \forall t \\ TD : & \exists A \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R} : |f(t)| < A\sigma^t, \forall t \end{aligned}$$

La dimostrazione segue dai teoremi di convergenza degli integrali/serie di funzioni/successioni maggiorate in modulo da funzioni/successioni per le quali gli integrali/serie convergano. Con gli stessi argomenti si dimostrano i seguenti fatti:

- Se l'integrale (5.1) esiste per un certo  $s_* = \sigma_* + j\omega_*$ , allora esiste per ogni  $s = \sigma + j\omega$  con  $\sigma > \sigma_*$ .
- Se la serie (5.2) esiste per un certo  $z_* = \rho_* e^{j\phi_*}$ , allora esiste per ogni  $z = \rho e^{j\phi}$ , con  $\rho > \rho_*$ .

Quindi, si può parlare nei due casi di una *regione di convergenza* del piano complesso, che è rappresentata rispettivamente

- dal semipiano a parte reale maggiore dell'estremo inferiore  $\sigma_*$  delle parti reali dei punti  $s$  per cui si ha convergenza. Si dice *ascissa di convergenza* tale valore  $\sigma_*$ ;
- dall'esterno del cerchio di raggio  $\rho_*$ , estremo inferiore dei moduli dei punti  $z$  per cui si ha convergenza. Si dice *raggio di convergenza* tale valore  $\rho_*$ .

### Linearità delle Trasformate

Le operazioni di trasformazione sono lineari:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)]; \\ \mathcal{Z}[\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \alpha \mathcal{Z}[f(t)] + \beta \mathcal{Z}[g(t)]; \end{aligned}$$

### Alcune Importanti Trasformate

**Funzione gradino** La funzione gradino (o di Heaviside) è definita in TC da

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

e rappresenta un modo di un sistema lineare TC associato ad un autovalore semplice in zero. Dalla definizione si ha

$$\mathcal{L}[H(t)] = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s}[e^{-st}]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

con ascissa di convergenza  $\sigma_* = 0$ .

Il gradino in TD è definito allo stesso modo, e rappresenta un modo associato ad un autovalore semplice in uno. Si ha

$$\mathcal{Z}[H(t)] = \sum_0^\infty z^{-t} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

con raggio di convergenza  $\rho_* = 1$ .

### Modi TC esponenziali reali

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} H(t)] = \int_0^\infty e^{(\lambda-s)t} dt = \frac{1}{\lambda - s} [e^{(\lambda-s)t}]_0^\infty = \frac{1}{s - \lambda}$$

con ascissa di convergenza  $\sigma_* = \lambda$

### Modi esponenziali reali TD

$$\mathcal{Z}[\lambda^t H(t)] = \sum_{t=0}^\infty \lambda^t z^{-t} = \sum_{t=0}^\infty \left(\frac{\lambda}{z}\right)^t = \frac{1}{1 - \lambda z^{-1}} = \frac{z}{z - \lambda}$$

con raggio di convergenza  $\rho_* = |\lambda|$

**Modi TC quasi-polinomiali reali** (autovalori in  $\lambda$ , miniblocco di ordine  $q$ ):

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{(q-1)} e^{\lambda t}}{(q-1)!} H(t)\right] = \frac{1}{(s-\lambda)^q}$$

Dimostrazione: partendo dalla trasformata dei modi esponenziale

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} H(t)] = \int_0^\infty e^{(\lambda-s)t} dt = \frac{1}{s - \lambda}$$

si derivino il secondo e terzo membro  $q - 1$  volte rispetto a  $\lambda$ :

$$\mathcal{L} [t^{q-1} e^{\lambda t} H(t)] = \frac{(q-1)!}{(s-\lambda)^q}$$

da cui, dividendo per  $(q-1)!$ , la tesi. L'ascissa di convergenza è ancora  $\sigma_* = \lambda$ .

Ad esempio

$$\begin{aligned}\mathcal{L} [te^{\lambda t} H(t)] &= \frac{1}{(s-\lambda)^2} \\ \mathcal{L} \left[ \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} H(t) \right] &= \frac{1}{(s-\lambda)^3}.\end{aligned}$$

Come caso particolare per  $\lambda = 0$  vale la pena di notare

$$\begin{aligned}\mathcal{L} [tH(t)] &= \frac{1}{s^2}, \\ \mathcal{L} \left[ \frac{t^2}{2} H(t) \right] &= \frac{1}{s^3}.\end{aligned}$$

**Modi TD quasi-polinomiali reali** (autovalore in  $\lambda$ , miniblocco di ordine  $q$ ):

$$\mathcal{Z} [C_{q-1}^t \lambda^{(t-q+1)} H(t)] = \frac{z}{(z-\lambda)^q}$$

Dimostrazione: partendo dalla trasformata dei modi esponenziali

$$\mathcal{Z} [\lambda^t H(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t z^{-t} = \frac{z}{z-\lambda}$$

si derivino il secondo e terzo membro  $q - 1$  volte rispetto a  $\lambda$ :

$$\sum_{t=0}^{\infty} t(t-1)\cdots(t-q+2)\lambda^{t-q+1} z^{-t} = \frac{(q-1)!z}{(z-\lambda)^q}$$

da cui, dividendo per  $(q-1)!$ , la tesi. Il raggio di convergenza è ancora  $\rho_* = |\lambda|$

La proprietà di linearità delle trasformate ci permette di calcolare facilmente anche le trasformate dei modi oscillanti dei sistemi LTI:

**Modi TC associati ad autovalori immaginari  $\pm j\omega$ .**

Ponendo  $\lambda = \pm j\omega$ , si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{L} [H(t) \sin \omega t] &= \mathcal{L} \left[ \frac{e^{j\omega t}}{2j} - \frac{e^{-j\omega t}}{2j} \right] \\ &= \frac{1}{2j} \mathcal{L} [e^{j\omega t}] - \frac{1}{2j} \mathcal{L} [e^{-j\omega t}] \\ &= \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[H(t) \cos \omega t] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t}}{2} + \frac{e^{-j\omega t}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{j\omega t}] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-j\omega t}] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2},\end{aligned}$$

con ascissa di convergenza  $\sigma_* = 0$ .

**Modi TD associati ad autovalori complessi a modulo unitario  $e^{\pm j\theta}$ .** Ponendo  $\lambda = e^{\pm j\theta}$ , si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[H(t) \sin \theta t] &= \mathcal{Z}\left[\frac{e^{j\theta t}}{2j} - \frac{e^{-j\theta t}}{2j}\right] \\ &= \frac{1}{2j}\left[\frac{z}{z-e^{j\theta}} - \frac{z}{z-e^{-j\theta}}\right] = \frac{z \sin \theta}{z^2-2z \cos \theta+1},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[H(t) \cos \theta t] &= \mathcal{Z}\left[\frac{e^{j\theta t}}{2} + \frac{e^{-j\theta t}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{Z}[e^{j\theta t}] + \frac{1}{2}\mathcal{Z}[e^{-j\theta t}] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^{j\theta}} + \frac{z}{z-e^{-j\theta}}\right] = \frac{z^2-z \cos \theta}{z^2-2z \cos \theta+1},\end{aligned}$$

con raggio di convergenza  $\rho_* = 1$ .

**Modi TC associati ad autovalori in  $\sigma \pm j\omega$ .**

In modo del tutto analogo si trova

$$\mathcal{L}[H(t)e^{\sigma t} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2}$$

e

$$\mathcal{L}[H(t)e^{\sigma t} \cos \omega t] = \frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2 + \omega^2},$$

$(\sigma_* = \sigma)$ , e per autovalori in  $\rho e^{j\theta}$  in TD:

$$\mathcal{Z}[H(t)\rho^t \sin \theta t] = \frac{\frac{z}{\rho} \sin \theta}{\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 - 2\frac{z}{\rho} \cos \theta + 1}$$

e

$$\mathcal{Z}[H(t)\rho^t \cos \theta t] = \frac{\frac{z}{\rho} \left(\frac{z}{\rho} - \cos \theta\right)}{\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 - 2\frac{z}{\rho} \cos \theta + 1},$$

$(\rho_* = \rho)$ .

**Modi TC associati ad autovalori in  $\sigma \pm j\omega$  con miniblocco di ordine  $q$ .**

$$\mathcal{L}\left[H(t) \frac{t^{(q-1)}}{(q-1)!} e^{\sigma t} \sin \omega t\right] = \frac{1}{2j} \frac{[(s-\sigma) + j\omega]^q - [(s-\sigma) - j\omega]^q}{[(s-\sigma)^2 + \omega^2]^q}$$

e

$$\mathcal{L} \left[ H(t) \frac{t^{(q-1)}}{(q-1)!} e^{\sigma t} \cos \omega t \right] = \frac{1}{2} \frac{[(s-\sigma)+j\omega]^q + [(s-\sigma)-j\omega]^q}{[(s-\sigma)^2 + \omega^2]^q}$$

Si osservi che i termini immaginari scompaiono sistematicamente nello sviluppo delle potenze. Ad esempio si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[te^{\sigma t} \sin \omega t] &= \frac{2\omega(s-\sigma)}{[(s-\sigma)^2 + \omega^2]^2}, \\ \mathcal{L}[te^{\sigma t} \cos \omega t] &= \frac{(s-\sigma)^2 - \omega^2}{[(s-\sigma)^2 + \omega^2]^2}. \end{aligned}$$

**Modi TD associati ad autovalori in  $\rho e^{\pm j\theta}$  con miniblocco di ordine  $q$**

e

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left[ H(t) C_{q-1}^t \rho^{t-q+1} \sin(\theta(t-q+1)) \right] &= \\ &= \frac{\rho^{-q+1}}{2j} \frac{\frac{z}{\rho} \left[ \left(\frac{z}{\rho} - e^{j\theta}\right)^q - \left(\frac{z}{\rho} - e^{-j\theta}\right)^q \right]}{\left[ \left(\frac{z}{\rho}\right)^2 - 2\frac{z}{\rho} \cos(\theta) + 1 \right]^q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left[ H(t) C_{q-1}^t \rho^{t-q+1} \cos(\theta(t-q+1)) \right] &= \\ &= \frac{\rho^{-q+1}}{2} \frac{\frac{z}{\rho} \left[ \left(\frac{z}{\rho} - e^{j\theta}\right)^q + \left(\frac{z}{\rho} - e^{-j\theta}\right)^q \right]}{\left[ \left(\frac{z}{\rho}\right)^2 - 2\frac{z}{\rho} \cos(\theta) + 1 \right]^q} \end{aligned}$$

(i termini immaginari scompaiono sistematicamente nello sviluppo delle potenze)

### Funzione Impulsiva

La funzione impulsiva in tempo continuo – o delta di Dirac – è definita matematicamente come l'operatore  $\delta(\cdot)$  che agisce su una funzione generica  $f(\cdot)$  in modo tale da avere

$$\int_a^b f(\tau) \delta(\tau) d\tau = f(0), \forall a \leq 0, b > 0.$$

Dalla definizione stessa di impulso di Dirac, si ha immediatamente che la sua trasformata vale

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s0} = 1$$

Più in generale,  $\mathcal{L}[a\delta(t - \tau)] = ae^{-s\tau}$ , per  $\tau > 0$ .

L'impulso  $\delta(t)$  sopra definito ha alcune proprietà molto utili nello studio dei sistemi dinamici. In particolare, dalla sua definizione si ricava immediatamente che la sua convoluzione con una qualsiasi funzione/successione la lascia inalterata:

$$f(t) * \delta(t) = \int_0^t f(t - \tau)\delta(\tau)d\tau = f(t)$$

Rispetto al prodotto tra funzioni definito dalla convoluzione, l'impulso ha quindi il ruolo dell'unità.

L'impulso TC può essere anche caratterizzato in modo più facilmente visualizzabile come limite

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{H(t) - H(t - \Delta)}{\Delta}$$

cioè come un impulso quadrato di durata  $\Delta$  infinitesima e ampiezza  $1/\Delta$  infinita, il cui integrale vale 1 su qualunque intervallo lo contenga. Le due definizioni sono consistenti, infatti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^t f(t - \tau)\delta(\tau)d\tau &= \int_0^t f(t - \tau) \left[ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{H(\tau) - H(\tau - \Delta)}{\Delta} \right] d\tau = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left[ \int_0^t f(t - \tau) \frac{H(\tau)}{\Delta} d\tau - \int_0^t f(t - \tau) \frac{H(\tau - \Delta)}{\Delta} d\tau \right] = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[ \int_0^t f(t - \tau) d\tau - \int_\Delta^t f(t - \tau) d\tau \right] = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[ \int_0^\Delta f(t - \tau) d\tau \right] = f(t) \end{aligned}$$

La definizione di impulso TD è più diretta:  $\delta(0) = 1, \delta(t) = 0 \forall t \neq 0$ . La sua trasformata si ottiene immediatamente:

$$\mathcal{Z}[\delta(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} \delta(t)z^{-t} = z^0 = 1$$

Più in generale,  $\mathcal{Z}[a\delta(t - \tau)] = az^{-\tau}$ , per  $\tau > 0$ .

Per la convoluzione T.D. vale

$$f(t) * \delta(t) = \sum_{\tau=0}^t f(t - \tau)\delta(\tau) = f(t)$$

### Proprietà delle Trasformate

#### Traslazione in TC

**A destra (ritardo):** se  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , allora per  $\tau > 0$   $\mathcal{L}[f(t - \tau)] = F(s)e^{-s\tau}$ . Infatti, se  $t' = t - \tau$

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = \int_{t'=0}^{\infty} f(t')e^{-s(t'+\tau)}dt' = e^{-s\tau}F(s)$$

**A sinistra (anticipo):** se  $\tau < 0$ , si viola l'ipotesi di semi-infinitezza di  $f(\cdot)$ . Ma se si ignora ciò che avviene prima di  $t = 0$ , cioè se si ridefinisce (con un piccolo abuso di notazione)

$$f(t + |\tau|) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ f(t - \tau) & t \geq 0 \end{cases}$$

allora si ha

$$\mathcal{L}[f(t + |\tau|)] = e^{s|\tau|} \left( F(s) - \int_{t=0}^{|\tau|} f(t)e^{-st}dt \right)$$

#### Traslazione in TD.

**A destra (ritardo):** se  $\mathcal{Z}[f(t)] = F(z)$ , allora per  $\tau > 0$   $\mathcal{Z}[f(t - \tau)] = F(z)z^{-\tau}$ . Infatti, posto  $t' = t - \tau$ ,

$$\mathcal{Z}[f(t - \tau)] = \sum_{t'=0}^{\infty} f(t')z^{-t'}z^{-\tau} = z^{-\tau}F(z)$$

**A sinistra (anticipo):** se  $\tau < 0$ , si viola l'ipotesi di semi-infinitezza di  $f(\cdot)$ . Ma se si ignora ciò che avviene prima di  $t = 0$ , cioè se si ridefinisce

$$f(t + |\tau|) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ f(t - \tau) & t \geq 0 \end{cases}$$

allora si ha

$$\mathcal{Z}[f(t + |\tau|)] = z^{|\tau|} \left( F(z) - \sum_{t=0}^{|\tau|-1} f(t)z^{-t} \right)$$

Caso particolarmente importante: per  $|\tau| = 1$

$$\mathcal{Z}[f(t + 1)] = z(F(z) - f(0))$$

cioè, data la successione

$$f(t) = \{\dots, f(-2) = 0, f(-1) = 0, f(0) = f_0, f(1) = f_1, f(2) = f_2, \dots\}$$

con  $\mathcal{Z}[f(t)] = F(z)$ , la Z-trasformata della successione

$$f(t+1) = \{\dots, f(-2) = 0, f(-1) = 0, f(0) = f_1, f(1) = f_2, f(3) = f_4, \dots\}$$

vale  $zF(z) - zf_0$ .

### Traslazioni e Scalature nel dominio complesso:

$\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)] = F(s - \alpha)$  (traslazione nel dominio "s").

$\mathcal{Z}[\alpha^t f(t)] = F(\frac{z}{\alpha})$  (cambiamento di scala nel dominio "z").

### Trasformate e convoluzioni

Uno dei più importanti vantaggi offerti dalle trasformate è legato alla espressione particolarmente semplice che assumono i segnali ottenuti per convoluzione: la trasformata di un prodotto di convoluzione è pari al prodotto delle trasformate dei segnali convoluti. Iniziamo dal caso TD

Siano  $f(t)$  e  $g(t)$  due segnali, e sia

$$w(t) = f(t) * g(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)$$

la loro convoluzione. Se  $f(t)$  e  $g(t)$  sono entrambe semi-infiniti, come sarà sempre il caso per noi, si ha equivalentemente  $w(t) = \sum_{\tau=0}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)$ . Si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f * g] &\stackrel{def}{=} \sum_{t=0}^{+\infty} \left\{ \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} f(t-\ell)g(\ell) \right\} z^{-t} \\ &= \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} f(t-\ell)g(\ell) z^{-(t-\ell)} z^{-\ell} \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{t=-\infty}^{+\infty} f(t-\ell) z^{-(t-\ell)} \right\} g(\ell) z^{-\ell} \end{aligned}$$

e poiché nella sommatoria interna  $\ell$  è una costante, e la sommatoria interna stessa è costante rispetto a  $\ell$  (infatti converge a  $F(z)$ ), si ha la tesi:

$$\mathcal{Z}[f * g] = F(z)G(z).$$

Siano ora  $f(t)$  e  $g(t)$  due segnali TC, e sia

$$w(t) = f(t) * g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

la loro convoluzione.

Se  $f(t)$  e  $g(t)$  sono entrambe semi-infiniti, si ha equivalentemente  $w(t) = \int_{\tau=0}^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ . Si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f * g] &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{t=0}^{+\infty} \left\{ \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \right\} e^{-st}dt \\ &= \int_{t=-\infty}^{+\infty} \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)e^{-s(t-\tau)}e^{-s\tau}d\tau dt \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}d(t-\tau) \right\} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau\end{aligned}$$

e poiché nell'integrale interno  $\tau$  è una costante, e l'integrale stesso è costante rispetto a  $\tau$  (infatti converge a  $F(s)$ ), si ha la tesi:

$$\mathcal{L}[f * g] = F(s)G(s).$$

#### Trasformata della derivata e dell'integrale di una funzione:

Supponendo che  $f(t)$  non abbia impulsi nell'origine, se  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , si ha  $\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0)$ . Infatti, integrando per parti,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\dot{f}(t)] &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \frac{d}{dt}f(t)e^{-st}dt \\ &= [f(t)e^{-st}]_0^\infty + \int_0^\infty f(t)se^{-st}dt \\ &= sF(s) - f(0)\end{aligned}$$

Per l'integrale, vale invece  $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$ . Infatti, applicando il risultato precedente alla funzione  $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ , e notando che, se  $f(t)$  non ha impulsi nell'origine,  $g(0) = 0$ , si ha

$$\mathcal{L}[f(t)] = s\mathcal{L}[g(t)].$$

**Teorema del Valore Iniziale TC:**  $f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$  (dove il limite si deve intendere per  $\Re(s) \rightarrow +\infty$ ). Discende direttamente dalla espressione della trasformata della derivata

$$\int_0^\infty \dot{f}(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$$

quando si passa al limite per  $\Re(s) \rightarrow \infty$

**Teorema del Valore Iniziale TD:**  $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$   
 (dove il limite si deve intendere per  $|z| \rightarrow +\infty$ ). Direttamente dalla definizione:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \sum_0^{\infty} f(t)z^{-t} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} (f(0) + f(1)z^{-1} + \dots) = f(0)$$

Nota: vale ovviamente anche  $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} (\frac{z-1}{z}) F(z)$ , forma analoga a quella del teorema T.C. e perciò facilmente memorizzabile ( $\frac{z-1}{z}$  è la inversa della trasformata del gradino in TD, così come  $s$  lo è in TC)

**Teorema del Valore Finale TC:** Se sia  $f(t)$  che  $\dot{f}(t)$  hanno ascissa di convergenza non positiva, e se inoltre esiste (nei reali o a  $\infty$ ) il  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ , allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Infatti, usando ancora il teorema di trasformazione della derivata,

$$\int_0^{\infty} \dot{f}(t)e^{-st} dt = s \left( \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \right) - f(0)$$

e passando al limite per  $s \rightarrow 0$  (qui serve l'ipotesi sulle ascisse di convergenza),

$$\int_0^{\infty} \dot{f}(t)dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0)$$

dove si usa l'ipotesi di esistenza del limite.

**Osservazione:** le ipotesi del teorema del valore finale TC, nel caso in cui si considerino come  $f(t)$  delle combinazioni di modi di un sistema lineare, coincidono col chiedere che i modi siano tutti convergenti o al più limitati ma non oscillanti (considera e.g.  $f(t) = h(t)$  [ $(F(s) = \frac{1}{s})$ , e  $f(t) = \cos \omega t$   $[F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}]$ ]). Nel caso di modi polinomialmente divergenti non oscillanti si ha  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$  (e.g.  $f(t) = t^k$   $[F(s) = \frac{1}{s^{k+1}}]$ )

**Teorema del Valore Finale TD:** se  $f(t)$  ha raggio di convergenza minore di uno, e se esiste finito  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \stackrel{\text{def}}{=} f_{\infty}$  (cioè se  $\forall \epsilon > 0, \exists T : \forall \tau > 0 |f(T + \tau) - f_{\infty}| < \epsilon$ ), allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F(z)$$

(dove il limite si deve intendere per  $|z| \rightarrow 1_+$ , ad es.  $z \in \mathbb{R}, z > 1$ ). Infatti:

$$F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t} = \sum_{t=0}^{T-1} f(t)z^{-t} + \sum_{\tau=0}^{\infty} f(T + \tau)z^{-(T+\tau)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=0}^{T-1} f(t)z^{-t} + z^{-T} \left\{ \sum_{\tau=0}^{\infty} [f(T+\tau) - f_{\infty}] z^{-\tau} + \sum_{\tau=0}^{\infty} f_{\infty} z^{-\tau} \right\} = \\
&= \sum_{t=0}^{T-1} f(t)z^{-t} + z^{-T} \sum_{\tau=0}^{\infty} [f(T+\tau) - f_{\infty}] z^{-\tau} + z^{-T} f_{\infty} \frac{z}{z-1}
\end{aligned}$$

Moltiplicando ambo i membri per  $(z - 1)$  e passando al limite si ha ovviamente

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \sum_{t=0}^{T-1} f(t)z^{-t} = 0$$

mentre

$$\begin{aligned}
&\lim_{z \rightarrow 1} \left| (z - 1) z^{-T} \sum_{\tau=0}^{\infty} [f(T+\tau) - f_{\infty}] z^{-\tau} \right| < \\
&< \lim_{z \rightarrow 1} \left| (z - 1) z^{-T} \sum_{\tau=0}^{\infty} \epsilon z^{-\tau} \right| = |\epsilon z^{-T+1}|
\end{aligned}$$

quindi arbitrariamente piccolo. In conclusione, si ha la tesi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) F(z)$$

Nota: vale ovviamente anche

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1)}{z} F(z),$$

forma analoga a quella del teorema T.C. e perciò facilmente memorizzabile ( $\frac{z-1}{z}$  è la inversa della trasformata del gradino in TD, così come  $s$  lo è in TC)

**Osservazione:** le ipotesi del teorema del valore finale TD, nel caso in cui si considerino come  $f(t)$  delle combinazioni di modi di un sistema lineare, coincidono col chiedere che i modi siano tutti convergenti o al più limitati ma non oscillanti (considera e.g.  $f(t) = h(t)$  [ $F(z) = \frac{z}{z-1}$ ], e  $f(t) = \sin \theta t$  [ $F(z) = \frac{z \sin \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}$ ]). Nel caso di modi polinomialmente divergenti non oscillanti si ha  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z)$  (e.g.  $f(t) = C_k^t$  [ $F(z) = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}$ ]))

### 5.1.1 Applicazione alla soluzione di ODE

Riconsideriamo l'equazione differenziale in forma normale

$$\mathbb{D}^n y = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathbb{D}^i y + \sum_{j=0}^p b_j \mathbb{D}^j u, \quad (5.3)$$

con condizioni iniziali  $y(0) = y_0$ ,  $\mathbb{D}y(0) = y_0^{(1)}$ , …  $\mathbb{D}^{n-1}y(0) = y_0^{(n-1)}$ , e  $u(0) = u_0$ ,  $\mathbb{D}u(0) = u_0^{(1)}$ , …  $\mathbb{D}^p u(0) = u_0^{(p)}$ . Applichiamo alla equazione differenziale la trasformazione di Laplace. Si ottiene facilmente che la trasformata della risposta forzata è pari a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\mathbb{D}^n y] &= s\mathcal{L}[\mathbb{D}^{n-1} y] - y_0^{(n-1)} \\ &= s^2\mathcal{L}[\mathbb{D}^{n-2} y] - sy_0^{(n-2)} - y_0^{(n-1)} \\ &\vdots \\ &= s^n\mathcal{L}[y] - \sum_{\ell=1}^n s^{n-\ell} y_0^{(\ell-1)}\end{aligned}$$

Dette  $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$  e  $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ , e posto per semplicità di notazione  $a_n = 1$ , svolgendo i calcoli si ottiene

$$Y(s) = \frac{\sum_{i=0}^p b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} U(s) + \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, \quad (5.4)$$

dove  $\Pi_0(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i s^i$  è un polinomio di grado al più  $n-1$  i cui coefficienti  $\gamma_i$  dipendono solo dai valori iniziali  $y^{(i)}(0)$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , e  $u^{(j)}(0)$ ,  $j = 0, \dots, p$ .

Si osserva quindi che nella trasformata della uscita  $Y(s)$  appaiono due termini, di cui il primo dipende solo dalla trasformata dell'ingresso  $U(s)$  ed il secondo solo dalle condizioni iniziali. Questi due termini corrispondono evidentemente alle trasformate della evoluzione forzata e della evoluzione libera del sistema, rispettivamente.

Se  $U(s)$  è un rapporto di polinomi, anche  $Y(s)$  lo è. Come vedremo più avanti, nota la trasformata della uscita  $Y(s)$ , si potrà agevolmente calcolare l'uscita  $y(t)$  mediante una operazione di “antitrasformazione”.

Analogamente si procede per equazioni lineari alle differenze della forma 5.3, con condizioni  $y(0)$ ,  $\mathbb{D}y(0) = y(1)$ , …  $\mathbb{D}^{n-1}y(0) = y(n-1)$  e  $u(0)$ ,  $\mathbb{D}u(0) = u(1)$ , …  $\mathbb{D}^{n-1}u(0) = u(n-1)$ . Applicando la trasformata Z, e applicando la proprietà di traslazione a sinistra nel tempo discreto, si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\mathbb{D}^n y] &= z\mathcal{Z}[\mathbb{D}^{n-1} y] - zy(n-1) \\ &= z^2\mathcal{Z}[\mathbb{D}^{n-2} y] - z^2y(n-1) - zy(n-2) \\ &\vdots \\ &= z^n\mathcal{Z}[y] - \sum_{\ell=0}^{n-1} z^{n-\ell} y(\ell)\end{aligned}$$

Dette  $Y(z) = \mathcal{Z}[y(t)]$  e  $U(z) = \mathcal{Z}[u(t)]$ , si ottiene quindi una equazione algebrica nella incognita  $Y(z)$ , che può essere risolta calcolando  $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^p b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} U(z) + \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} \quad (5.5)$$

con  $a_n = 1$  e dove  $\Pi_0(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i s^i$  è un polinomio di grado al più  $n-1$  i cui coefficienti  $\gamma_i$  dipendono solo dai valori nei primi istanti  $y(i)$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , e  $u(j)$ ,  $j = 0, \dots, p$ .

Se  $U(z)$  è un rapporto di polinomi, anche  $Y(z)$  lo è, che si potrà agevolmente calcolare mediante antitrasformazione.

### 5.1.2 Antitrasformazioni

#### Antitrasformata di Laplace

Si dicono antitrasformazioni gli operatori che mappano una funzione complessa (in  $s$  o  $z$ ) in funzioni o successioni nel tempo.

Antitrasformata TC:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

con  $\sigma > \sigma_*$

Antitrasformata TD:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_R} F(z) z^{t-1} dz$$

con  $\Gamma_R$  una circonferenza di raggio  $R > \rho_*$ .

Queste formule sono di interesse teorico, ma non vengono usate spesso in pratica. Infatti, molto spesso le funzioni complesse di cui si vuole trovare la antitrasformata sono (combinazioni di) trasformate già note. Si consideri in particolare che tutte le trasformate sinora trovate (ad eccezione della traslazione in TC) sono funzioni polinomiali fratte nella variabile complessa, che quindi possiedono un numero finito di singolarità al finito.

Consideriamo, per il TC, in particolare il caso in cui  $F(s)$  sia polinomiale fratta, con grado del denominatore superiore o uguale a quello del numeratore:

$$F(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\gamma_m s^m + \gamma_{m-1} s^{m-1} + \dots + \gamma_0}{s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_0} =$$

cioè

$$F(s) = \gamma_m \frac{\prod_{j=1}^{\ell} (s - z_j)^{m_j}}{\prod_{i=1}^h (s - p_i)^{n_i}}$$

dove gli  $z_j$  sono gli  $\ell$  zeri distinti di ordine  $m_j$ , ed i  $p_i$  sono gli  $h$  poli distinti di ordine  $n_i$  ( $\sum_{j=1}^{\ell} m_j = m$ ,  $\sum_{i=1}^h n_i = n$ ).

È sempre possibile, per opportuni coefficienti  $\alpha_i$ , riscrivere la funzione polinomiale fratta come una somma di fratti semplici. Nel caso di poli reali, si avrà

$$F(s) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^h \left\{ \sum_{k=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ik}}{(s - p_i)^k} \right\}$$

La antitrasformata è a questo punto immediata, sulla base delle trasformate calcolate in precedenza:

$$f(t) = \alpha_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^h \left\{ \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_{ik} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{p_i t} \right\}$$

Nel caso che vi siano coppie di poli complessi coniugati  $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ ,  $p_j = \sigma_i - j\omega_i$  (supponendo di averli contati con indice  $i$  e  $j$ ), di molteplicità  $n_i$ , si otterranno coefficienti  $\alpha_{ik} = a_{ik} + jb_{ik}$ ,  $\alpha_{jk} = a_{ik} - jb_{ik}$ , e quindi

$$\frac{\alpha_{ik}}{(s - p_i)^k} + \frac{\alpha_{jk}}{(s - p_j)^k} = \frac{(a_{ik} + jb_{ik})(s - \sigma - j\omega)^k + (a_{ik} - jb_{ik})(s - \sigma + j\omega)^k}{[(s - \sigma)^2 + \omega^2]^k}$$

cui corrisponde l'antitrasformata reale

$$2 \frac{t^{(k-1)}}{(k-1)!} e^{\sigma t} (a_{ik} \cos(\omega t) + b_{ik} \sin(\omega t))$$

ovvero, posto  $\phi = \text{atan}2(a_{ik}, b_{ik})$ ,

$$2 \frac{t^{(k-1)}}{(k-1)!} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi).$$

Per  $k = 1$ , in particolare, si ha

$$\frac{\alpha_{i1}}{(s - p_i)} + \frac{\alpha_{j1}}{(s - p_j)} = 2 \frac{a_{i1}(s - \sigma) - b_{i1}\omega}{[(s - \sigma)^2 + \omega^2]}$$

e l'antitrasformata

$$2e^{\sigma t} (a_{i1} \cos(\omega t) - b_{i1} \sin(\omega t))$$

ovvero

$$2e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi).$$

Per il calcolo dei coefficienti  $\alpha_{ik}$ , si può ricorrere nei casi più semplici alla uguaglianza dei coefficienti di potenze uguali di  $s$  nei due polinomi.

**Esempio:**  $F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2} = \frac{\alpha_{11}}{s} + \frac{\alpha_{21}}{s+1} + \frac{\alpha_{22}}{(s+1)^2}$ . Sviluppando la somma, semplificando la frazione, ed uguagliando i polinomi a numeratore si ha

$$s+2 = (\alpha_{11} + \alpha_{21})s^2 + (2\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{22})s + \alpha_{11}$$

da cui  $\alpha_{11} = 2$ ,  $\alpha_{21} = -2$ , e  $\alpha_{22} = -1$ , da cui si ha immediatamente  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2H(t) - 2e^{-t} - te^{-t}$ .

**Esempio:**  $F(s) = \frac{1}{s(s^2+bs+c)}$  con  $b^2 - 4c < 0$ : conviene riscrivere  $F(s) = \frac{1}{s[(s-\sigma)^2+\omega^2]}$ , dove  $\sigma = -\frac{b}{2}$  e  $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}$ . Si ponga  $F(s) = \frac{\alpha_{11}}{s} + \frac{\beta_1(s-\sigma)+\beta_0\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$ , e si uguaglino i coefficienti delle potenze di  $s$ : si ha  $\alpha_{11} = \frac{1}{\sigma^2+\omega^2}$ ,  $\beta_1 = -\alpha_{11}$ , e  $\beta_0 = \frac{\sigma}{\omega}\alpha_{11}$ , da cui

$$f(t) = \frac{1}{\sigma^2 + \omega^2} \left( H(t) - e^{\sigma t} \cos(\omega t) + \frac{\sigma}{\omega} e^{\sigma t} \sin(\omega t) \right).$$

Un metodo più rapido, di particolare utilità nei casi in cui vi sia un numero elevato di poli, è il seguente. Si supponga che  $F(s)$  abbia  $\alpha_0 = F(s \rightarrow \infty) = 0$  (se così non fosse, si ponga  $F(s) = \alpha_0 + F'(s)$  e si proceda come segue per  $F'(s)$ ). Valgono le formule di calcolo dei coefficienti:

$$\alpha_{i,n_i-r} = \frac{1}{r!} \left[ \frac{d^r}{ds^r} \{ F(s)(s-p_k)^{n_i} \} \right]_{s=p_i}, \quad r = 0, \dots, n_i - 1; i = 1, \dots, h$$

dove si intende  $\frac{d^0}{ds^0}G(s) = G(s)$ .

**Esempio:** Riconsideriamo  $F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2} = \frac{\alpha_{11}}{s} + \frac{\alpha_{21}}{s+1} + \frac{\alpha_{22}}{(s+1)^2}$ . Per il polo in  $p_1 = 0$ , si ha  $n_1 = 1$  e  $r = 0$  quindi  $\alpha_{1,1} = \frac{1}{0!} \left[ \frac{s+2}{s(s+1)^2} s \right]_{s=0} = 2$ . Per  $p_2 = -1$  si ha  $n_2 = 2$  e, per  $r = 0$ ,  $\alpha_{22} = \frac{1}{0!} \left[ \frac{s+2}{s(s+1)^2} (s+1)^2 \right]_{s=-1} = -1$ ; invece per  $r = 1$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_{21} &= \frac{1}{1!} \left[ \frac{d}{ds} \left\{ \frac{s+2}{s(s+1)^2} (s+1)^2 \right\} \right]_{s=-1} = \left[ \frac{d}{ds} \left\{ \frac{s+2}{s} \right\} \right]_{s=-1} \\ &= \left[ \frac{s-(s+2)}{s^2} \right]_{s=-1} = -2 \end{aligned}$$

La formula è di facile dimostrazione: moltiplicando entrambe i termini della definizione dello sviluppo in fratti semplici per  $(s - p_i)^{n_k}$ , si ha infatti

$$\begin{aligned} F(s)(s - p_k)^{n_k} &= \frac{\prod_{j=1}^{\ell}(s - z_j)^{m_j}}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^h (s - p_i)^{n_i}} \\ &= \sum_{i=1}^h \left\{ \sum_{\ell=1}^{n_i} \frac{\alpha_{i\ell}(s - p_k)^{n_k}}{(s - p_i)^\ell} \right\} + \sum_{\ell=1}^{n_k} \alpha_{k\ell}(s - p_k)^{n_k - \ell} \end{aligned}$$

Valutando questa relazione in  $s = p_k$  si ottiene direttamente

$$[F(s)(s - p_k)^{n_k}]_{s=p_k} = \alpha_{k,n_k}$$

Derivando poi la stessa relazione rispetto alla variabile complessa si ha

$$\frac{d}{ds} [F(s)(s - p_k)^{n_k}] = \Theta(s - p_k) + \sum_{\ell=1}^{n_k-1} \alpha_{k\ell}(n_k - \ell)(s - p_k)^{n_k - \ell - 1}$$

dove  $\Theta(s - p_k)$  è una funzione che si annulla per  $s = p_k$ ; quindi la formula data.

I coefficienti di tipo  $\alpha_{i1}$  vengono anche detti “residui polari”. Per i residui polari di trasformate del tipo

$$F(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

con  $m < n$ , valgono le utili relazioni

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha_{i1} &= b_m, & m = n - 1 \\ \sum_i \alpha_{i1} &= 0, & m < n - 1 \end{aligned}$$

### Antitrasformata Z

Per calcolare le  $Z$ -antitrasformate di funzioni polinomiali fratte, conviene porre preliminarmente in evidenza un fattore  $z$ :

$$F(z) = z \frac{\prod_{j=1}^{\ell}(z - z_j)^{r_j}}{z \prod_{i=1}^h (z - p_i)^{n_i}}$$

per poi sviluppare in fratti semplici

$$F(z) = z \sum_{i=1}^{h+1} \left\{ \sum_{k=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ik}}{(z - p_i)^k} \right\}$$

dove il polo introdotto in  $z = 0$  è trattato come tutti gli altri. La antitrasformata è a questo punto immediata, sulla base delle trasformate calcolate in precedenza:

$$f(t) = \sum_{i=1}^h \left\{ \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_{ik} C_{(k-1)}^t p_i^{t-k+1} \right\}$$

**Esempio:**  $F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^3} = \frac{\alpha_{11}}{s} + \frac{\alpha_{21}}{(s+1)} + \frac{\alpha_{22}}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_{23}}{(s+1)^3}$ . Si ha  $\alpha_{11} = \left[ \frac{(s+2)}{(s+1)^3} \right]_{s=0} = 2$ ;  $\alpha_{23} = \left[ \frac{(s+2)}{s} \right]_{s=-1} = -1$ ;  $\alpha_{22} = \left[ \frac{d}{ds} \frac{(s+2)}{s} \right]_{s=-1} = \left[ \frac{-2}{s^2} \right]_{s=-1} = -2$ ;  $\alpha_{21} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{ds} \frac{-2}{s^2} \right]_{s=-1} = \left[ \frac{1}{2} \frac{4}{s^3} \right]_{s=-1} = -2$ . Più rapidamente, si poteva trovare  $\alpha_{21}$  da  $\alpha_{11} + \alpha_{21} = 0$ .

**Esempio:**  $F(z) = \frac{z-1}{z+1} = z \frac{z-1}{z(z+1)}$ , ovvero  $\frac{1}{z} F(z) = \frac{\alpha_{11}}{z} + \frac{\alpha_{21}}{z+1}$ . Si trova  $\alpha_{11} = [zF(z)/z]_{z=0} = -1$  e  $\alpha_{21} = [(z+1)F(z)/z]_{z=-1} = 2$ , da cui  $F(z) = -1 + 2 \frac{z}{z+1}$  e  $f(t) = -\delta(t) + 2(-1)^t = 1, -2, 2, -2, \dots$

### Antitrasformata Z: i primi campioni

È talvolta particolarmente utile ottenere esplicitamente i primi valori della successione corrispondente ad una data funzione polinomiale fratta  $F(z)$ , senza ricorrere alla antitrasformata vera e propria. Si possono utilizzare due tecniche:

#### 1) Tecnica del teorema del valore iniziale e della traslazione a sinistra.

Il primo campione  $f(0)$  è ottenuto semplicemente come  $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \stackrel{\text{def}}{=} F(\infty)$ ; il secondo campione  $f(1)$  non è altro che il primo campione della successione  $f_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(t+1)$ , quindi  $f(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(F(z) - f(0))$ ,  $f(2) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z^2 F(z) - z^2 f(0) - z f(1))$ . Il  $k$ -esimo campione è quindi dato da

$$f(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left( z^k F(z) - \sum_{t=0}^{k-1} f(t) z^{k-t} \right).$$

**Esempio:**  $F(z) = \frac{z+1}{z^2+z+1}$ . Si ottiene  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 0$ ,  $f(3) = -1$ ,  $f(4) = 1$ , etc.

### 2) Tecnica della divisione continua.

Consiste nell'applicare la divisione di polinomi al polinomio a numeratore della  $F(z)$ , opportunamente prolungato con le potenze negative di  $z$  moltiplicate da coefficienti nulli, diviso il polinomio a denominatore. Il risultato ottenuto è un polinomio nelle potenze di  $z^{-1}$ , i cui coefficienti sono, per definizione i termini della serie  $f(t)$ .

**Esempio:**  $F(z) = \frac{z+1}{z^2+z+1}$ . Ricordando la regola di divisione dei polinomi si ha

$$\begin{array}{r} z + 1z^0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + \dots (-) \\ z + 1z^0 + 1z^{-1} + 0z^{-2} + \dots (=) \\ \hline 0 + 0 - 1z^{-1} + 0z^{-2} + \dots (-) \\ 0 + 0 - 1z^{-1} + 1z^{-2} - z^{-3} (=) \\ \hline 0 + 0 + 0 + 1z^{-2} + z^{-3} (-) \end{array} \left| \begin{array}{r} z^2 + z + 1 \\ z^{-1} - z^{-3} + z^{-4} + \dots \end{array} \right.$$

I primi campioni sono quindi  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 0$ ,  $f(3) = -1$ ,  $f(4) = 1$ , etc.

## 5.2 Funzioni di Trasferimento

La applicazione delle trasformate alle equazioni di stato dei sistemi LTI dà luogo a molti e interessanti sviluppi. Per sistemi LTITC,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

$L$ -trasformando ambo i membri si ha

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

(dove la trasformata di un vettore è inteso come vettore delle trasformate) da cui

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s)$$

e

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + \left[ C(sI - A)^{-1}B + D \right]U(s)$$

Dal confronto di questa equazione con quelle delle soluzioni esplicite già ottenute, si ottiene subito

$$\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1} \quad e \quad \mathcal{L}[e^{At}B * u(t)] = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Di particolare interesse è la risposta forzata nell'uscita,

$$Y_p(s) = \mathcal{L}[Ce^{At}B * u(t) + Du(t)] = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \stackrel{\text{def}}{=} G(s)U(s)$$

nella quale alla  $G(s)$  si dà il nome di *matrice di trasferimento TC (funzione di trasf. nel caso SISO)*.

Per sistemi LTITD si ha

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

$Z$ -trasformando ambo i membri si ha

$$\begin{aligned} zX(z) - zx(0) &= AX(z) + BU(z) \\ Y(z) &= CX(z) + DU(z) \end{aligned}$$

da cui

$$X(z) = z(zI - A)^{-1}x(0) + (zI - A)^{-1}BU(z)$$

Dal confronto di questa equazione con quelle delle soluzioni esplicite già ottenute, si ottiene subito

$$\mathcal{Z}[A^t] = z(zI - A)^{-1}; \quad \mathcal{Z}[A^{t-1}B * u(t)] = (zI - A)^{-1}BU(z)$$

Per la risposta forzata nell'uscita vale

$$Y_p(z) = \mathcal{Z}[CA^{t-1}B * u(t) + Du(t)] = [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z) \stackrel{\text{def}}{=} G(z)U(z)$$

nella quale alla  $G(z)$  si dà il nome di *matrice di trasferimento TD (funzione di trasferimento per sistemi SISO)*.

Per un sistema LTI

$$\begin{aligned}\mathbb{D}x &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

il rapporto ingresso/uscita forzata è dunque rappresentato dalla funzione (o matrice, per sistemi MIMO) di trasferimento

$$G(p) = C(pI - A)^{-1}B + D$$

dove  $p \in \mathbb{C}$  rappresenta la opportuna variabile nei casi TC e TD.

Osserviamo esplicitamente che il rapporto ingresso/uscita forzata per un dato sistema è già compiutamente descritto nelle equazioni in forma normale del sistema, in cui non appaiono gli stati. In altri termini, tale rapporto pre-scinde dalla particolare rappresentazione scelta per gli stati, e ci aspettiamo che sia invariante al cambiare delle coordinate nello spazio di stato.

Infatti, se si usano coordinate  $w = T^{-1}x$ , il sistema in forma di stato diviene come noto

$$\begin{aligned}\mathbb{D}w &= T^{-1}ATw + T^{-1}Bu \\ y &= CTw + Du\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}G(p) &= CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D\end{aligned}$$

Si dice che la funzione di trasferimento è un invariante strutturale del sistema.

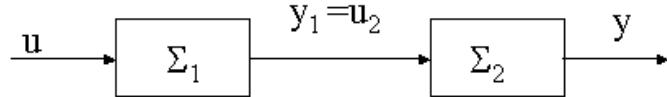
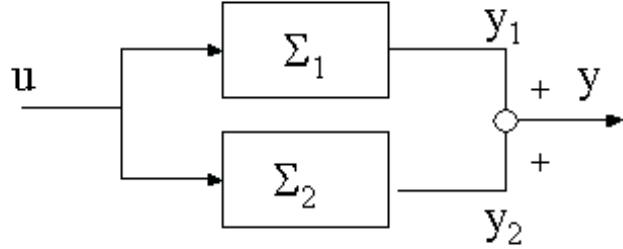
### 5.2.1 Connessione di Sistemi

Nelle applicazioni dei sistemi di controllo molto spesso si incontrano sistemi dinamici connessi tra loro attraverso le loro “porte” di ingresso e uscita. I tre tipi fondamentali di connessioni sono la connessione in parallelo, in serie, ed in retroazione. Esaminiamo queste connessioni cercando di fornire rappresentazioni di un sistema dinamico equivalente, sia nello spazio di stato che utilizzando le funzioni di trasferimento.

Nella connessione in parallelo lo stesso ingresso eccita due sistemi  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , le cui uscite si sommano e determinano l’uscita complessiva del sistema.

Scrivendo le realizzazioni nello spazio di stato dei due sistemi nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{D}x_1 = A_1x_1 + B_1u \\ y_1 = C_1x_1 + D_1u \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{D}x_2 = A_2x_2 + B_2u \\ y_2 = C_2x_2 + D_2u, \end{array} \right. \quad (5.6)$$



definiamo un nuovo vettore di stato  $\bar{x} = (x_1 \ x_2)$ .

Il sistema complessivo ha la seguente rappresentazione in forma di stato:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\bar{x} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \bar{x} + (D_1 + D_2)u \end{aligned} \quad (5.7)$$

La funzione di trasferimento del sistema complessivo  $\Sigma$  è ottenuta semplicemente osservando che

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s)$$

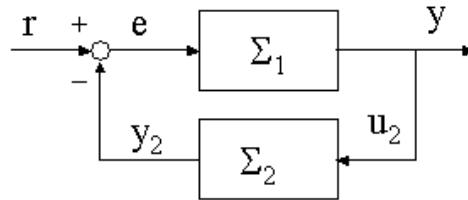
quindi equivale alla somma delle funzioni di trasferimento dei sistemi connessi in parallelo:  $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$ .

Nella connessione in serie l'uscita del primo sistema costituisce l'ingresso del secondo. Scrivendo

$$\begin{cases} \mathbb{D}x_1 = A_1x_1 + B_1u \\ y_1 = C_1x_1 + D_1u \end{cases}, \begin{cases} \mathbb{D}x_2 = A_2x_2 + B_2y_1 \\ y_2 = C_2x_2 + D_2y_1 \end{cases} \quad (5.8)$$

e definendo ancora  $\bar{x} = (x_1 \ x_2)$ , il sistema complessivo è rappresentato in forma di stato da

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\bar{x} &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{pmatrix} \bar{x} + D_2D_1u \end{aligned} \quad (5.9)$$



La funzione di trasferimento del sistema complessiva  $\Sigma$  è invece semplicemente ottenuta da

$$Y(s) = Y_2(s) = G_2(s)U_2(s) = G_2(s)Y_1(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$$

quindi è pari al prodotto delle funzioni di trasferimento dei sistemi connessi in serie:  $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ .

Nella connessione in retroazione l'ingresso del secondo sistema è l'uscita del primo, e viceversa. E' utile considerare in questo schema anche la funzione di un ulteriore ingresso, detto "di riferimento"  $r(t)$ , cui l'uscita del secondo sistema (quello detto "in retroazione") si sottrae a formare l'ingresso (detto segnale di "errore") del primo sistema (che viene detto "in catena diretta"). Si noti che la scelta dei segni al nodo sommatore è puramente convenzionale, ma riflette il fatto che nella maggioranza delle applicazioni la retroazione è "negativa".

Scriviamo

$$\begin{cases} \mathbb{D}x_1 = A_1x_1 + B_1r - B_1y_2 \\ y_1 = C_1x_1 + D_1u \end{cases}, \begin{cases} \mathbb{D}x_2 = A_2x_2 + B_2y \\ y_2 = C_2x_2 + D_2y \end{cases} \quad (5.10)$$

e definiamo ancora  $\bar{x} = (x_1 \ x_2)$ . Si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} Dx_1 = A_1x_1 - B_1C_2x_2 + B_1r - B_1D_2y \\ Dx_2 = A_2x_2 + B_2y \\ (1 + D_1D_2)y = C_1x_1 - D_1C_2x_2 + D_1r \end{cases}$$

da cui risulta che il sistema è ben posto solo se  $D_1D_2 \neq -1$ .

In tale ipotesi si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\bar{x} &= \begin{pmatrix} A_1 - \frac{B_1C_1D_2}{1+D_1D_2} & -B_1C_2 + \frac{B_1C_2D_1D_2}{1+D_1D_2} \\ B_2C_1\frac{1}{1+D_1D_2} & A_2 - \frac{B_2C_2D_1}{1+D_1D_2} \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} B_1 - \frac{B_1D_1D_2}{1+D_1D_2} \\ B_2D_1\frac{1}{1+D_1D_2} \end{pmatrix} r \\ y &= \left( C_1\frac{1}{1+D_1D_2} \quad -D_1C_2\frac{1}{1+D_1D_2} \right) \bar{x} + \frac{D_1}{1+D_1D_2}r \end{aligned}$$

La situazione sinora descritta in massima generalità, che ammette che entrambi i sistemi siano propri ma non strettamente (abbiano cioè grado relativo nullo) creando così un cosiddetto “anello algebrico”, è comunque assai rara anche quando ammissibile.

Il caso di gran lunga più frequente nelle applicazioni è quello in cui sia  $D_1 = 0$ , per cui si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\bar{x} &= \begin{pmatrix} A_1 - B_1 C_1 D_2 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} r \\ y &= \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} \end{aligned} \quad (5.11)$$

La funzione di trasferimento tra il riferimento e l'uscita del sistema in retroazione è ottenuta da  $Y(s) = G_1(s)R(s) - G_1(s)G_2(s)Y(s)$  da cui

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}.$$

Nella f.d.t. di un sistema in retroazione, troviamo quindi a numeratore la f.d.t tra riferimento ed uscita in anello aperto, e a denominatore la f.d.t. dell'anello chiuso sommata ad uno.

### 5.3 Risposte Forzate ad Ingressi Tipici

Si consideri la risposta forzata dell'uscita di un sistema LTITC SISO descritto dalle matrici  $(A, B, C, D)$  ad un impulso al tempo 0:

$$y_\delta(t) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B \delta(\tau) d\tau + D \delta(t) = C e^{At} B + D \delta(t)$$

Si ricordi che la risposta forzata ad un generico segnale  $u(t)$  può essere scritta come convoluzione con la risposta impulsiva, ovvero

$$y_u(t) = y_\delta(t) * u(t).$$

Trasformando la definizione della risposta impulsiva secondo laplace si ha poi

$$Y_\delta(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

La risposta impulsiva è quindi la funzione che corrisponde alla funzione di trasferimento (f.d.t.) attraverso la trasformata di Laplace.

In altri termini, se conosco la risposta impulsiva di un sistema, ne posso ricavare la f.d.t. per  $\mathcal{L}$ -trasformata, e quindi posso determinare la risposta forzata a qualsiasi altro ingresso.

In modo del tutto analogo per sistemi LTITD:  $y(0) = D$  e, per  $t > 0$ ,

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{(t-\tau-1)} B \delta(\tau) + D \delta(t) = CA^{t-1} B$$

e,  $\mathcal{Z}$ -trasformando,

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1} B + D$$

La risposta impulsiva è quindi la successione che corrisponde alla f.d.t. attraverso la  $Z$ -trasformata. In altri termini, se conosco la risposta impulsiva di un sistema TD, ne posso ricavare la f.d.t.  $\mathcal{Z}$ -trasformandola, e quindi posso determinare la risposta forzata a qualsiasi altro ingresso.

### 5.3.1 Risposte a segnali permanenti

Si è visto che nel caso di equazioni in forma normale TC

$$D^n y = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) D^i y + \sum_{j=0}^p b_j(t) D^j u,$$

la trasformata della risposta forzata è data da

$$Y(s) = \frac{P_0(s)}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} + \frac{\sum_{i=0}^p b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} U(s)$$

dove  $P_0(s)$  è un polinomio (di grado al più  $n - 1$ ), nullo per condizioni iniziali nulle. La prima frazione rappresenta quindi l'evoluzione libera dell'uscita. La funzione polinomiale fratta che moltiplica l'ingresso è detta anch'essa funzione di trasferimento del sistema (matrice di trasferimento nel caso MIMO).

È utile ribadire che i denominatori di entrambe le funzioni polinomiali fratte che appaiono nella risposta libera e forzata condividono  $n$  radici (naturalmente, nella risposta forzata appariranno anche i poli della trasformata dell'ingresso  $U(s)$ ). Il sistema è asintoticamente stabile se i poli della risposta libera sono tutti a parte reale negativa.

Analogamente, per un sistema in forma di stato, si aveva

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} x(0) + [C(sI - A)^{-1} B + D] U(s)$$

che può essere riscritta, secondo la definizione di inversa di una matrice,

$$Y(s) = \frac{C \operatorname{adj}(sI - A)x(0)}{\pi_A(s)} + \frac{C \operatorname{adj}(sI - A)B + D\pi_A(s)}{\pi_A(s)}U(s)$$

dove  $\pi_A(s) = \det(sI - A)$  è il polinomio caratteristico di  $A$ , e  $\operatorname{adj}(M)$  indica l'aggiunta di  $M$  (il cui elemento  $(i, j)$  è il minore ottenuto da  $M$  sopprimendo la  $i$ -esima colonna e la  $j$ -esima riga, col segno  $(-1)^{(i+j)}$ ). Il polinomio a numeratore del primo addendo ha quindi grado al più  $n - 1$ , e si annulla per condizioni iniziali nulle.

La funzione di trasferimento (cioè la funzione polinomiale fratta che moltiplica la trasformata dell'ingresso nel secondo addendo) ha numeratore di grado  $n$  se  $D \neq 0$  ovvero al più  $n - 1$ .

Le trasformate della evoluzione libera e di quella forzata condividono gli  $n$  poli, che sono evidentemente gli autovalori di  $A$ ; ovviamente, l'evoluzione forzata presenta anche i poli relativi alla trasformata dell'ingresso  $U(s)$ .

Si noti che i polinomi a numeratore e denominatore della f.d.t. possono avere radici comuni; in questo caso, i fattori monomiali corrispondenti possono essere semplificati, diminuendo il grado di entrambe. Nel caso generale, quindi, i poli della f.d.t. sono solo un sottoinsieme degli autovalori della matrice  $A$ .

Argomenti perfettamente analoghi possono essere svolti nel caso TD, con la sostituzione di  $z$  per  $s$ .

Consideriamo ora il caso di un sistema con condizioni iniziali nulle (ovvero “inizialmente rilassato”). Questo caso, che può apparire raro in pratica, è particolarmente interessante in relazione al fatto che, per sistemi asintoticamente stabili, la risposta libera è in ogni caso esponenzialmente convergente a zero, ed è quindi trascurabile per tempi sufficientemente lunghi.

Ci chiediamo in particolare quale è la risposta nell'uscita di un sistema (SISO e strettamente proprio per semplicità) inizialmente rilassato sottoposto ad ingresso esponenziale  $u(t) = e^{\lambda t}$ , al variare di  $\lambda$ . Si ha immediatamente

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{n(s)}{\pi(s)} \frac{1}{s - \lambda}$$

che, se  $p_1, \dots, p_n$  sono i poli di  $G(s)$ , e  $p_i \neq \lambda$ , può essere sviluppata in fratti semplici

$$Y(s) = \sum_{i=1}^h \left\{ \sum_{k=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ik}}{(s - p_i)^k} \right\} + \frac{\beta}{s - \lambda}$$

Il calcolo dei coefficienti può essere fatto agevolmente secondo le regole viste; in particolare, si avrà

$$\beta = \left[ (s - \lambda)G(s) \frac{1}{s - \lambda} \right]_{s=\lambda} = G(\lambda)$$

La antitrasformata è quindi

$$y(t) = \sum_{i=1}^h \left\{ \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_{ik} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{p_i t} \right\} + G(\lambda) e^{\lambda t} \quad (5.12)$$

La risposta forzata è dunque data dalla somma di termini composti dai modi del sistema, e da un termine proporzionale all'ingresso. Nel caso che il sistema sia asintoticamente stabile, tutti i modi sono convergenti a zero, quindi trascurabili per tempi sufficientemente lunghi. Si parla in questo caso, per la sommatoria in 5.12, di *termine transitorio* della risposta forzata.

Per ingressi di tipo  $u(t) = \hat{u}e^{\lambda t}$  non convergenti a zero (cioè con  $\Re(\lambda) \geq 0$ , detti anche permanenti, applicati a sistemi asintoticamente stabili, si ha dunque che la risposta forzata (anche in presenza di condizioni iniziali non nulle), per tempi sufficientemente lunghi vale

$$y(t) \approx y_r(t) = G(\lambda)u(t).$$

Questo comportamento nel lungo termine viene detto *termine permanente* dell'uscita (o *risposta a regime*). Il comportamento a regime delle uscite è particolarmente importante in pratica perché è una delle misure più facilmente ottenute dai sistemi fisici il cui modello debba essere stabilito sperimentalmente.

### 5.3.2 Risposta al gradino

Particolarmente interessante è la risposta al gradino unitario  $H(t)$  (detta anche *risposta indiciale*). Il suo comportamento iniziale e finale si ottiene facilmente applicando i teoremi relativi alle trasformate dei segnali. Per il comportamento a regime, si hanno le formule (dove applicabili)

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s}$$

e

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} G(z) \frac{z}{z-1}$$

Se il sistema TC è asintoticamente stabile, la risposta a regime è costante e vale  $y(\infty) = G(0)$ . Tale valore viene detto *guadagno statico* del sistema.

Se il sistema TC ha un polo nell'origine, si ottiene  $y(\infty) = \infty$ . Supponiamo che il sistema abbia  $m$  poli nell'origine, e che quindi si possa scrivere

$$G(s) = \frac{1}{s^m} \hat{G}(s)$$

dove  $\hat{G}(0) \neq \infty$ . Applicando iterativamente il teorema di trasformazione delle derivate alla risposta indiciale, si ottiene

$$\mathcal{L}[y^{(p)}(t)] = \frac{s^p}{s^m} \hat{G}(s) \frac{1}{s} - \sum_{k=0}^{p-1} s^k y^{(p-k-1)}(0)$$

dalla quale direttamente si osserva che le funzioni  $y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(m-1)}(t)$  sono infiniti per  $t \rightarrow \infty$ ; mentre si ha che  $y^{(m)}(\infty) = \hat{G}(0)$ . I sistemi di questo tipo (con  $m$  poli nell'origine) vengono detti sistemi di **tipo “m”**.

Se il sistema TD è asintoticamente stabile,  $y(\infty) = G(1)$ , valore detto di guadagno statico. Se il sistema TD ha un polo unitario, si ottiene  $y(\infty) = \infty$ . Supponiamo che il sistema abbia  $m$  poli unitari, e che quindi si possa scrivere

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)^m} \hat{G}(z)$$

dove  $\hat{G}(1) \neq \infty$ .

Definiamo la *differenza finita di ordine p* di una successione  $y(t)$  ricorsivamente come

$$\begin{aligned} y^{(0)}(t) &= y(t) \\ y^{(1)}(t) &= y(t) - y(t-1) \\ y^{(2)}(t) &= y^{(1)}(t) - y^{(1)}(t-1) = y(t) - 2y(t-1) + y(t-2) \\ \vdots &= \vdots \\ y^{(p)}(t) &= y^{(p-1)}(t) - y^{(p-1)}(t-1) = \sum_{i=0}^p (-1)^i C_i^p y(t-i) \end{aligned}$$

Applicando iterativamente il teorema di traslazione nel tempo alla risposta indiciale, si ottiene per le trasformate delle differenze finite

$$\mathcal{Z}[y^{(p)}(t)] = \frac{(z-1)^p}{(z-1)^m} \hat{G}(z) \frac{z}{z-1}$$

dalla quale direttamente si osserva che le differenze finite  $y^{(0)}(t)$ ,  $y^{(1)}(t)$ , ...,  $y^{(m-1)}(t)$  tendono a infinito per  $t \rightarrow \infty$ ; mentre si ha che  $y^{(m)}(\infty) = \hat{G}(1)$ . I sistemi di questo tipo (con  $m$  poli unitari) vengono detti sistemi di **tipo "m"**.

Per il comportamento al tempo iniziale delle risposte indiciali, si hanno le formule

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) \frac{1}{s}$$

e

$$y(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} G(z) \frac{z}{z-1}$$

La natura di questi limiti è dettata dalla differenza tra il grado del denominatore e quello del numeratore delle f.d.t., differenza che si definisce *grado relativo o eccesso poli-zeri* (si dicono zeri di una f.d.t. i valori della variabile complessa che la annullano, cioè le radici del numeratore nel caso di una f.d.t. polinomiale fratta).

In TC, per un sistema proprio ma non strettamente si ha che

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) \frac{1}{s} = G(\infty)$$

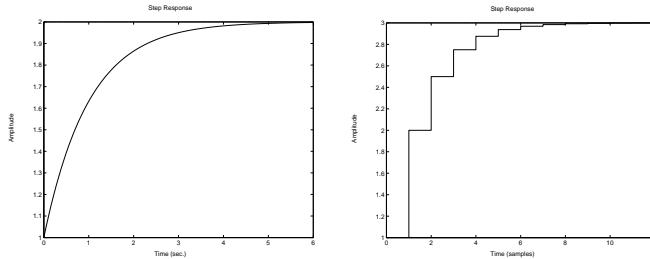
con  $0 < G(\infty) < \infty$  (varrà quindi  $G(\infty) = b_n$  nella forma normale e  $G(\infty) = D$  nella forma di stato SISO). Se invece l'eccesso poli-zeri è pari a  $n - m$ , applicando ancora il teorema della trasformazione delle derivate alla risposta indiciale, si ottiene facilmente che  $y(0) = y^{(1)}(0) = \dots = y^{(n-m-1)}(0) = 0$ , e la prima derivata non nulla (e finita) è la  $n-m$ -esima.

In TD, per un sistema proprio ma non strettamente, si ha che

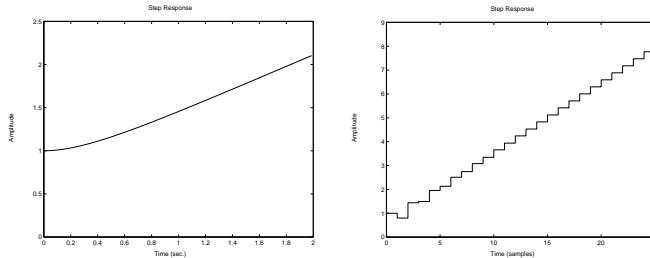
$$y(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} G(z) \frac{z}{z-1} = G(\infty)$$

con  $0 < G(\infty) < \infty$ . Se l'eccesso poli-zeri è pari a  $n - m$ , applicando ancora il teorema della traslazione a sinistra alla risposta indiciale, si ottiene facilmente che  $y(0) = y(1) = \dots = y(n-m-1) = 0$ , e il primo campione non nullo è l'  $n-m$ -esimo.

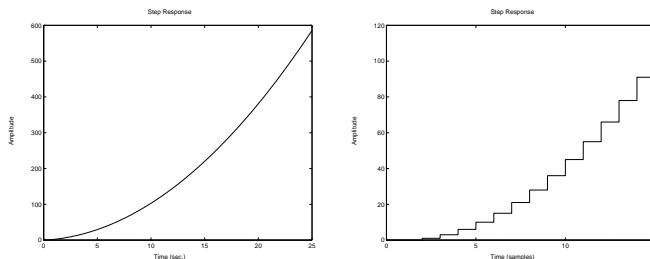
**Esempio:** La risposta indiciale dei sistemi di tipo "0"  $G(s) = \frac{s+2}{s+1}$  e  $G(z) = \frac{z+0.5}{z-0.5}$  si porta ad un regime costante pari a 2 e 3, rispettivamente.



**Esempio:** La risposta indiciale dei sistemi di tipo “1”  $G(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{s(s+3)}$ ,  $G(z) = \frac{z(z-0.5)}{(z-1)(z+0.7)}$  diverge, con pendenza pari a  $\text{arctan}(\hat{G}(0)) \approx 0.6\text{rad}$  e  $\text{arctan}(\hat{G}(1)) \approx 0.3\text{rad}$ , rispettivamente.

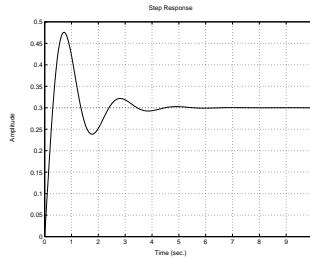


**Esempio:** La risposta indiciale del sistema di tipo “2”  $G(s) = \frac{(s+7)(s+1)}{s^2(s+4)}$  diverge con pendenza sempre crescente, ma con derivata seconda che tende a  $\hat{G}(0) = 7/4$ . La risposta di  $G(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$  ha differenza finita del secondo ordine pari a  $\hat{G}(1) = 1$



### 5.3.3 Uso sperimentale della risposta indiciale

Dall’andamento della risposta indiciale si possono trarre facilmente alcune informazioni sulla struttura del sistema. Ad esempio, osservando la risposta



si trova una oscillazione di periodo  $T \approx 2$ , quindi deduco che in  $G(s)$  compariranno due poli complessi coniugati con parte immaginaria  $\frac{2\pi}{T} \approx 3$ .

La parte reale dei poli si può stimare osservando la velocità di smorzamento della oscillazione. Si consideri ad esempio una curva esponenziale  $e^{\sigma t}$  che coincida, agli estremi di un periodo di oscillazione, con i massimi o minimi locali della risposta (si deve scegliere un periodo quanto possibile avanzato nel tempo, in modo che l'effetto degli altri modi esponenziali presenti nella risposta sia decresciuto sufficientemente).

Si può calcolare  $\sigma$  a partire dai valori dei picchi  $y(t_o)$  e  $y(t_o + T)$  facendo il logaritmo del rapporto (depurato del valore di regime)

$$\log \frac{e^{\sigma(t_o+T)}}{e^{\sigma(t_o)}} = \log \frac{y(t_o + T) - y(\infty)}{y(t_o) - y(\infty)}$$

da cui nel nostro esempio (usando i minimi in  $y(1.7) \approx 0.24$ ,  $y(3.7) \approx 0.29$ ,  $y(\infty) = 0.3$ ) si ottiene  $\sigma \approx -0.9$ .

## 5.4 Risposta al gradino di sistemi del primo ordine

Un sistema del primo ordine è caratterizzato da una funzione di trasferimento che, a meno di un fattore costante, ha la forma

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}.$$

La costante  $\tau$  è detta *costante di tempo* (ha infatti le dimensioni fisiche di un tempo), e caratterizza il comportamento dinamico del sistema. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine è data da

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(1 + \tau s)} \right\} = \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) H(t).$$

La seguente tabella mostra l'andamento nel tempo della risposta al gradino.

| tempo   | % del valore di regime |
|---------|------------------------|
| $\tau$  | 63.2 %                 |
| $2\tau$ | 86.5 %                 |
| $3\tau$ | 95.0 %                 |
| $5\tau$ | 99.3 %                 |
| $7\tau$ | 99.91 %                |

Si definisce *Tempo di Assestamento* entro un valore percentuale  $p$  il tempo  $T_{a,p}\%$  occorrente affinché la risposta al gradino di un sistema entri e resti indefinitamente entro il  $\pm p\%$  del valore di regime. Si usa indicare il tempo di assestamento entro il 5%, il più frequentemente usato, semplicemente con il simbolo  $T_a$ . Per un sistema del primo ordine, si ha quindi  $T_a = 3\tau$ .

#### 5.4.1 Sistemi ad un polo dominante

Per passare a considerare il caso di sistemi di ordine superiore al primo, è utile iniziare a considerare un sistema del secondo ordine con due poli entrambe reali, con costanti di tempo  $\tau_1$  e  $\tau_2$  rispettivamente, ovvero

$$G(s) = \frac{1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}.$$

Si noti che questo sistema può essere considerato come la serie di due sistemi del primo ordine  $G_1(s) = \frac{1}{\tau_1 s + 1}$  e  $G_2(s) = \frac{1}{\tau_2 s + 1}$ . La risposta al gradino del sistema è data da

$$y_s(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} \right\} = \left( 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) H(t).$$

È facile osservare che, assumendo ad esempio  $\tau_2 < \tau_1$ , si ha

$$y_s(t) < \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) H(t) < \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) H(t), \forall t > 0,$$

quindi la risposta di due sistemi in cascata è sempre più lenta di quella di ciascun sistema singolarmente preso. Inoltre si può notare che per  $\tau_2 \ll \tau_1$  si ha

$$y_s(t) \approx \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) H(t),$$

ovvero se uno dei due sistemi in cascata è molto più veloce dell'altro, la risposta del sistema serie è del tutto simile a quella del sistema più lento, che

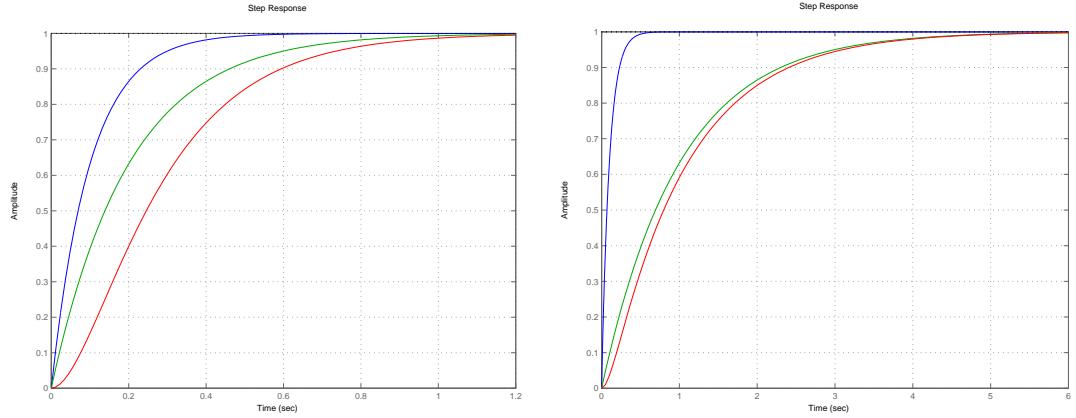


Figura 5.1: Risposta al gradino di  $G_1(s)$  (blu),  $G_2(s)$  (verde) e  $G_1(s)G_2(s)$  (rosso), per  $\tau_1 = 0.1$  e per  $\tau_2 = 0.2$  (sinistra) e  $\tau_2 = 1$  (destra)

viene definito *dominante*. Tale dominanza è già molto pronunciata per un rapporto tra le costanti di tempo  $\tau_1/\tau_2 > 10$  (vedi fig. 5.1).

L'estensione al caso in cui 3 o più sistemi del primo ordine sono connessi in cascata è immediata. Assumendo infatti che  $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_k$  dove  $k$  esprime il numero di sistemi connessi in cascata, la risposta al gradino del sistema serie è data da

$$\begin{aligned} y_s(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)\cdots(1+\tau_k s)} \right\} \\ &= \left( 1 - \sum_{i=1}^k \frac{\tau_i}{\prod_{j=1, j \neq i}^k (\tau_i - \tau_j)} e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) H(t). \end{aligned}$$

Nel caso in cui  $\tau_1 \ll \tau_i$ ,  $\forall i \geq 2$ , ovvero se la risposta di uno dei sistemi è molto più lenta degli altri, la risposta del sistema serie è del tutto simile a quella del sistema più lento. In modo del tutto analogo si comporta anche un sistema che ha anche poli complessi coniugati purché la loro posizione nel piano complesso sia molto più a sinistra di quella del polo reale dominante.

In base a queste considerazioni, diremo che il sistema “ha un polo dominante” se possiede un polo reale con parte reale negativa almeno dieci volte più piccola in valore assoluto di ogni altro polo e ogni altro zero<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Il ruolo degli zeri nella risposta dei sistemi verrà considerato in un paragrafo successivo

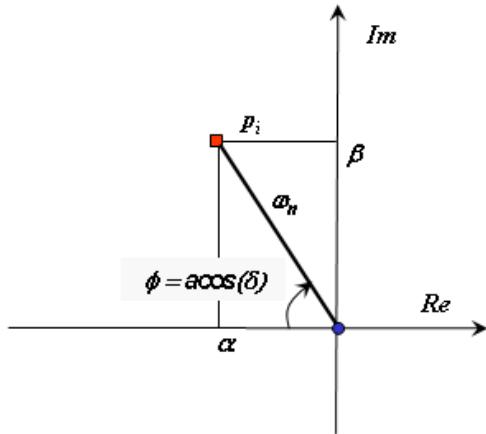


Figura 5.2: Relazioni tra parte reale  $\alpha$  e immaginaria  $\beta$  di poli complessi coniugati e loro pulsazione naturale  $\omega_n$  e smorzamento  $\delta$ .

## 5.5 Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine

Un sistema del secondo ordine con due poli complessi coniugati  $p = \alpha \pm j\beta$  e senza zeri è caratterizzato, a meno di un fattore costante, da una funzione di trasferimento del tipo

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

dove  $\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  e  $\delta = -\frac{\alpha}{\omega_n}$  sono detti rispettivamente *pulsazione naturale* e *coefficiente di smorzamento*. Si noti che vale  $\beta = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$  e che, per avere poli complessi coniugati, deve essere  $-1 < \delta < 1$  (fig. 5.2). Lo studio della riposta al gradino è peraltro interessante solo nel caso in cui il sistema sia stabile, quindi quando i suoi poli siano a parte reale non positiva, ovvero per  $0 \leq \delta < 1$ .

La risposta al gradino di un sistema di secondo ordine è facilmente determinata per antitrasformazione, ottenendo

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(1 + 2\frac{\delta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2})} \right\} = (1 - Ae^{-\delta\omega_n t} \sin(\beta t + \phi)) H(t)$$

dove  $A = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}$  e  $\phi = \arctan \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} = \arccos \delta$ .

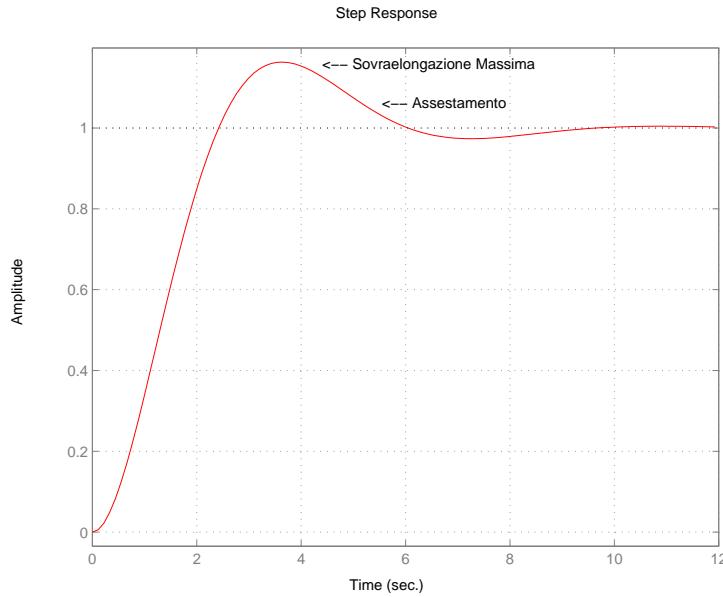


Figura 5.3: Risposta al gradino di un sistema del secondo ordine con  $\omega_n = 1$ ,  $\delta = 0.5$ .

Una tipica risposta al gradino è riportata in fig. 5.3. Si osserva che si ha un superamento del valore che verrà poi raggiunto a regime.

Un parametro importante per descrivere la risposta dei sistemi del secondo ordine è quindi il valore  $S$  della massima sovraelongazione (o di *overshoot*), dato dalla differenza fra il valore massimo raggiunto  $y_{max}$  ed il valore di regime raggiunto  $\bar{y}$ , normalizzato rispetto alla differenza tra valore iniziale  $y_0$  e valore di regime:

$$S = \frac{|y_{max} - \bar{y}|}{|\bar{y} - y_0|}.$$

La fig. 5.4 illustra le risposte di alcuni sistemi del secondo ordine al variare dei parametri di pulsazione naturale e di smorzamento.

La relazione esatta fra il coefficiente di smorzamento  $\delta$  e la massima sovraelongazione  $S$ , può essere ricavata imponendo

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -Ae^{-\delta\omega_n t}\beta \cos(\beta t + \phi) + A\delta\omega_n e^{-\delta\omega_n t} \sin(\beta t + \phi) = 0 \\ \Leftrightarrow \delta\omega_n \sin(\beta t + \phi) - \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} \cos(\beta t + \phi) &= 0 \end{aligned}$$

ovvero ancora

$$\tan(\beta t + \phi) = \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta}.$$

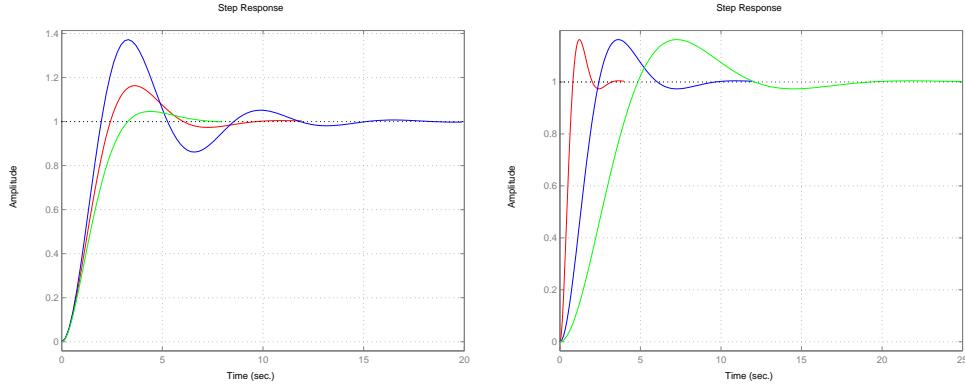


Figura 5.4: Risposte al gradino di sistemi del secondo ordine al variare dello smorzamento (a sinistra, tre casi con  $\omega = 1$  e, rispettivamente,  $\delta = 0.3$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\delta = 1/\sqrt{2}$ ), e della pulsazione naturale (a destra, tre casi con  $\omega_n = 0.5$ ,  $\omega_n = 1$ , e  $\omega_n = 3$ , e  $\delta = 0.5$ ).

Poiché  $\phi = \arctan \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$ , deve valere  $\beta t = k\pi$  ( $k = 0, 1, \dots$ ). Si ottiene quindi, per gli istanti di massimo o minimo (potendosi escludere l'esistenza di flessi sulla base della analisi delle derivate successive), l'espressione

$$t_k = \frac{k\pi}{\beta} = \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}},$$

da cui è evidente la presenza nella risposta al gradino del modo oscillante con pulsazione  $\beta$  proprio dei poli in  $\alpha \pm j\beta$ .

Sostituendo questi istanti nella risposta, si ottiene

$$y(t_k) = 1 - \frac{e^{-\frac{k\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin(k\pi + \phi) = 1 - (-1)^k e^{-\frac{k\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}.$$

Dalle espressioni precedenti, si ha immediatamente  $T_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$  e

$$S = y_{t_1} - 1 = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \quad (5.13)$$

La massima sovraelongazione avviene quindi tanto prima quanto maggiore è la pulsazione naturale, e tanto più tardi quanto maggiore è lo smorzamento.

Il picco di sovraelongazione è invece funzione solo dello smorzamento della coppia di poli del sistema, e decresce piuttosto rapidamente con esso (vedi fig. 5.5). Affinché la sovraelongazione non ecceda un valore massimo  $S_{max}$ , il sistema deve avere smorzamento maggiore o uguale di un valore  $\delta_{min}$  calcolabile facilmente dalla (5.13), ovvero ricavabile dal grafico in fig. 5.5. Corrispondentemente, i poli del sistema devono appartenere ad un settore conico

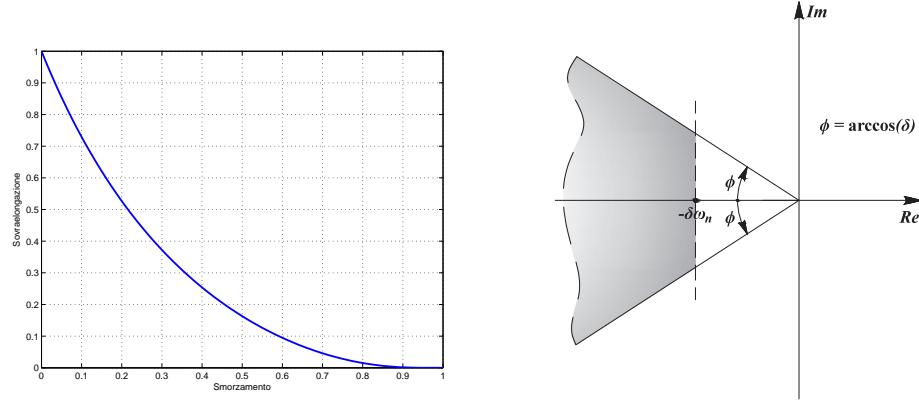


Figura 5.5: A sinistra, andamento delle sovraelongazioni ottenute per diversi valori dello smorzamento. A destra, regioni del piano complesso corrispondenti a dati limiti di sovraelongazione e di rapidità di risposta.

con asse la semiretta reale negativa e semiapertura  $\phi_{max} = \arccos(\delta_{min})$  (vedi diagramma a destra in fig. 5.5).

Affinché invece il sistema sia sufficientemente rapido nel rispondere al gradino, si deve garantire un tempo di assestamento sufficientemente rapido. Il tempo di assestamento  $T_{a,p\%}$  è definito come il più piccolo valore per il quale vale

$$|1 - y(t)| = |Ae^{-\delta\omega_n t} \sin(\beta t + \phi)| \leq p/100, \quad \forall t \geq T_a.$$

Questa relazione è di difficile valutazione esplicita, a causa del termine sinusoidale. Si può dare una approssimazione per eccesso assegnando a  $|\sin(\beta t + \phi)|$  il suo valore massimo nel periodo. Essendo  $A = 1/\sqrt{1 - \delta^2} > 0$  per  $0 < \delta < 1$ , si può riscrivere (considerando in particolare  $p = 5\%$ )

$$e^{-\delta\omega_n t} \leq \frac{0.05}{A}$$

e, passando ai logaritmi,

$$\delta\omega_n t \geq -\log(0.05) + \log(A)$$

da cui

$$T_a \approx \frac{3 - \frac{1}{2} \log(1 - \delta^2)}{\delta\omega_n}.$$

Per smorzamenti  $\delta$  sufficientemente piccoli (minori di circa 0.8), si può adottare la relazione approssimata spesso usata in pratica

$$T_a \approx \frac{3}{\omega_n \delta},$$

che ricorda da vicino l'analoga espressione per i sistemi del primo ordine (si osservi che  $1/\delta\omega_n$  è pari all'inverso del valore assoluto della parte reale dei poli, è svolge ruolo analogo qui alla costante di tempo  $\tau$  nei sistemi del primo ordine).

Questa relazione concorda d'altronde con la intuizione che si può avere dalla analisi dei modi propri la quale, nella valutazione della rapidità di risposta di un sistema del secondo ordine, indica come un ruolo fondamentale debba essere giocato dalla parte reale  $\alpha = -\omega_n\delta$  dei poli, che deve essere sufficientemente grande in modulo (vedi fig. 5.5).

Riassumendo, nel caso di sistemi con due poli complessi, il tempo di assestamento della risposta al gradino è legato alla parte reale dei poli e la sua sovraelongazione al loro smorzamento. Per visualizzare queste caratteristiche si usa spesso tracciare nel piano complesso la regione a sinistra di una retta parallela all'asse immaginario in  $-\frac{3}{T_{a,max}}$  e contenuta in un cono di semiapertura  $\phi_{max} = \arccos(\delta_{min})$  (vedi fig. 5.5).

### 5.5.1 Poli dominanti

In modo analogo a quanto fatto in precedenza per i sistemi del primo ordine, anche nel caso dei sistemi di secondo ordine connessi in serie si può osservare che la risposta è sostanzialmente simile a quella del più lento dei due sistemi, cioè alla coppia di poli più vicini all'asse immaginario, purchè le parti reali delle due coppie di poli differiscano di un fattore almeno dieci.

Si comporta in modo simile anche un sistema che ha un numero anche elevato di poli sia reali che complessi coniugati, purchè la loro posizione nel piano complesso sia molto più a sinistra di quella di una coppia di poli complessi che viene detta dominante. Se un sistema possiede due poli complessi (ovviamente stabili) la cui parte reale è almeno dieci volte più piccola in valore assoluto di ogni altro polo e ogni altro zero, diremo che il sistema “ha due poli dominanti”.

Si vedrà più avanti che i comportamenti di sistemi anche molto diversi dai modelli del primo o secondo ordine sinora considerati, dopo la progettazione di opportuni compensatori, sono spesso assimilabili a quelli di sistemi ad uno o due poli dominanti.

Riassumendo, nel caso di sistemi ad uno o due poli dominanti, il tempo di assestamento della risposta al gradino è legato alla parte reale dei poli dominanti e la sua sovraelongazione al loro smorzamento (che è ovviamente nullo per sistemi ad un polo dominante). Per questo motivo, la regione del piano complesso a sinistra di una retta in  $-\frac{3}{T_{a,max}}$  e interna a un cono di semiapertura  $\phi_{max} = \arccos(\delta_{min})$ , già descritta in fig. 5.5, è sovente usata

per definire specifiche di funzionamento che si desidera ottenere da un sistema dopo la compensazione.

## 5.6 Effetto degli zeri

Per quanto visto, i poli di una f.d.t. hanno una chiara interpretazione fisica in termini degli autovalori della matrice dinamica del sistema, e determinano i modi e quindi la stabilità di un sistema lineare.

Come si ricorderà dalla trattazione iniziale, gli zeri di una funzione di trasferimento, ovvero le radici del polinomio a numeratore della f.d.t., sono legati alla presenza nella equazione differenziale che governa l'uscita delle derivate della funzione d'ingresso: ad esempio, la eq. in forma normale

$$\mathbb{D}^2y(t) = -a_0y(t) - a_1\mathbb{D}y(t) + b_o u(t) + b_1\mathbb{D}u(t)$$

è associata in tempo continuo alla f.d.t.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 s}{s^2 + a_1 s + a_0},$$

che ha uno zero in  $s = -b_0/b_1$ .

Si consideri un sistema asintoticamente stabile con uno zero reale con costante di tempo  $\tau$ , descritto dalla f.d.t.

$$G(s) = \frac{\tau s + 1}{D(s)}$$

dove  $D(s)$  è un generico polinomio di grado maggiore o uguale a due le cui radici possono essere reali o complesse coniugate. Detta  $y_0 = G_0(s)/s$  la trasformata della risposta del sistema con  $\tau = 0$ , allora la risposta nel caso  $\tau \neq 0$  è  $y_\tau(s) = y_0(s) + \tau s y_0(s)$ , quindi consiste della risposta del sistema senza lo zero sommata alla sua derivata moltiplicata per  $\tau$ .

L'effetto che gli zeri hanno sulla risposta al gradino al variare dipende dalla loro posizione nel piano complesso. Per illustrare ciò, si consideri un sistema SISO del secondo ordine del tipo

$$G(s) = \frac{1 + \tau s}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}.$$

con  $\tau_1 \neq \tau$  e  $\tau_2 \neq \tau$ . Assumendo che  $\tau_1 \neq \tau_2$ , la risposta al gradino per tale sistema è

$$y_s(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1 + \tau s}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} \right\} = \left( 1 - \frac{\tau_1 - \tau}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2 - \tau}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) H(t). \quad (5.14)$$

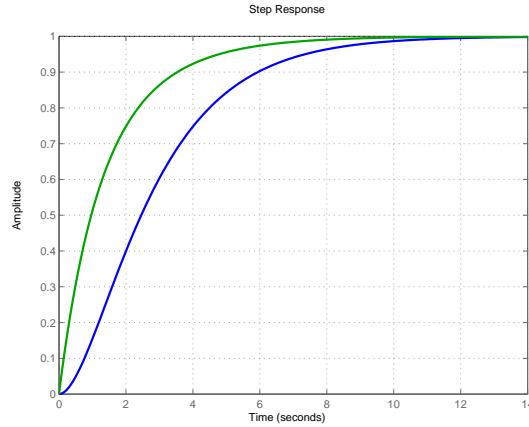


Figura 5.6: Risposta al gradino di  $G(s) = \frac{1+\tau s}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$ , assumendo  $\tau_1 = 2$  e  $\tau_2 = 1$  e con  $\tau = 0$  (in blu) e  $\tau = 1.5$  (in verde).

Le caratteristiche della risposta dipendono in maniera non immediata dalle costanti di tempo  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  e  $\tau$  e quindi dalla posizione nel piano complesso dello zero rispetto ai poli. Supponendo che  $\tau_1 > \tau_2$  e che  $\tau > 0$  (zero reale negativo), si considerino i seguenti casi:

$\tau_1 > \tau$ : la presenza dello zero tende a velocizzare la risposta e quindi a ridurre il tempo di assestamento rispetto al caso con  $\tau = 0$ . In figura 5.6 è riportato un esempio con  $\tau_1 = 2$ ,  $\tau_2 = 1$  e con  $\tau = 1.5$ .

$\tau \approx \tau_1 > \tau_2$ : in tal caso l'andamento dell'uscita è ben approssimabile con quella associata ad un sistema del primo ordine con costante di tempo  $\tau_2$ . La piccola differenza esistente tra il polo e lo zero dà luogo ad un transitorio che produce una lenta deriva dell'uscita verso il valore di regime, allungando di fatto il tempo di assestamento. In figura 5.7 è mostrato un esempio. Nel caso di egualanza esatta  $\tau = \tau_1$ , lo zero ed il polo si cancellano nella f.d.t., per cui il comportamento è esattamente quello del sistema del primo ordine con costante di tempo  $\tau_2$ .

$\tau > \tau_1 > \tau_2$ : in tal caso la risposta supera il valore di regime prima di tendervi asintoticamente, presentando quindi una sovraelongazione tanto più ampia quanto più vicino all'origine è lo zero rispetto ai poli. L'istante di tempo in cui la risposta raggiunge il suo valore di massimo può essere determinato come quell'istante tale che  $\dot{y}_0(t) = -\tau \ddot{y}_0(t)$ , ovvero derivando rispetto al tempo la (5.14) ed uguagliando a zero il risultato.

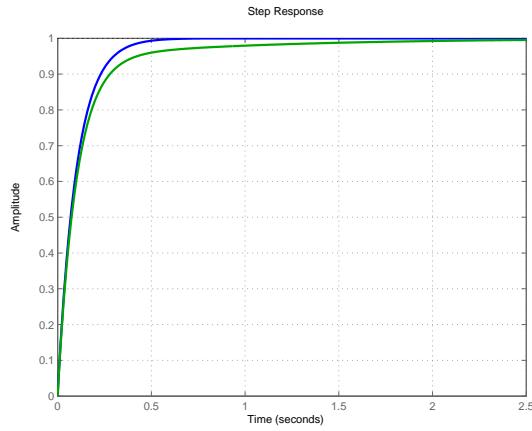


Figura 5.7: Risposta al gradino di  $G(s) = \frac{1+\tau s}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$  (in verde) e di  $G(s) = \frac{1}{1+\tau_2 s}$  (in blu), assumendo  $\tau_1 = 1$  e  $\tau_2 = 0.1$  e con  $\tau = 0.95$ .

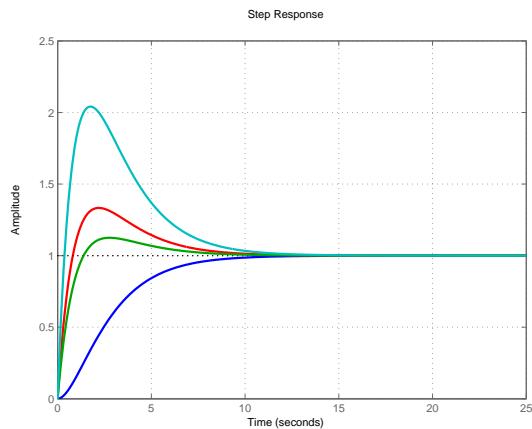


Figura 5.8: Risposta al gradino di  $G(s) = \frac{1+\tau s}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$ , assumendo  $\tau_1 = 2$  e  $\tau_2 = 1$  e con  $\tau = 0$  (in blu),  $\tau = 3$  (in verde) e  $\tau = 4$  (in rosso) e  $\tau = 7$  (in ciano).

Si ottiene

$$T_m = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 \tau_2} \log \left( \frac{1 - \frac{\tau}{\tau_2}}{1 - \frac{\tau}{\tau_1}} \right), \quad \tau_1 \neq \tau_2.$$

In figura 5.8 sono riportati alcuni casi al variare della posizione dello zero.

Si consideri adesso un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati e con uno zero reale,

$$G(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

con  $0 < \delta < 1$  (cioè con poli complessi coniugati a parte reale negativa), e  $\tau > 0$ . La risposta al gradino per un sistema di questo tipo è

$$\begin{aligned} y_s(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{1 + \tau s}{s \left( 1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right)} \right\} \\ &= (1 - Ae^{-\delta\omega_n t} \sin(\beta t + \phi) + \tau Ae^{-\delta\omega_n t} \omega_n \sin \beta t) H(t) \end{aligned}$$

e dipende in maniera non semplice dai parametri  $\omega_n$ ,  $\delta$  e  $\tau$ . L'effetto che lo zero ha sulla risposta dipende anche in tal caso della sua posizione nel piano complesso. In figura 5.9 sono rappresentate alcune risposte al gradino relative a vari valori di  $\tau > 0$  per un sistema del secondo ordine con  $\omega_n = 1$  e  $\delta = 0.1$  (i poli sono quindi in  $p = -1 \pm j9.95$ ). Le curve hanno massimi e minimi locali: se con  $y_0(t)$  indichiamo la risposta del sistema con  $\tau = 0$ , la risposta al gradino per  $\tau \neq 0$  è  $y_\tau(t) = y_0(t) + \tau \dot{y}_\tau(t)$ , e quindi l'istante in cui si hanno i massimi e minimi locali verificano  $\ddot{y}_0(t) = -\tau \ddot{y}_0(t)$ . Inoltre, le curve  $y_\tau(t)$  si intersecano tutte per i punti di massimo o minimo della risposta  $y_0(t)$ . Per  $\tau > 0$  il primo picco è anticipato e si riconosce quindi l'**effetto anticipativo** della risposta (effetto che si riscontrerà anche più avanti nei diagrammi delle fasi di Bode) che comporta comunque una sovraelongazione tanto più ampia quanto più lo zero si trova vicino all'asse immaginario, e quindi per  $\tau$  elevato.

### 5.6.1 Ruolo degli zeri nelle approssimazioni a poli dominanti

Come importante conseguenza di quanto detto, si deve osservare che nel caso in cui il sistema abbia uno o due poli molto più lenti rispetto a tutti gli altri poli, ma esistano anche uno o più zeri con costanti di tempo paragonabili o maggiori di quella dei poli più lenti, le conclusioni tratte riguardo al comportamento a poli dominanti debbano essere riviste, tenendo conto di questi zeri. Come visto, infatti, un sistema che ha poli dominanti rispetto ad ogni altro polo, ma con rispetto agli zeri, può avere tempi di assestamento e sovraelongazioni sostanzialmente diversi da quelle previste dalle formule viste in precedenza per il caso di assenza di zeri. La necessità di cautela nelle approssimazioni a poli dominanti in presenza di zeri sarà confermata

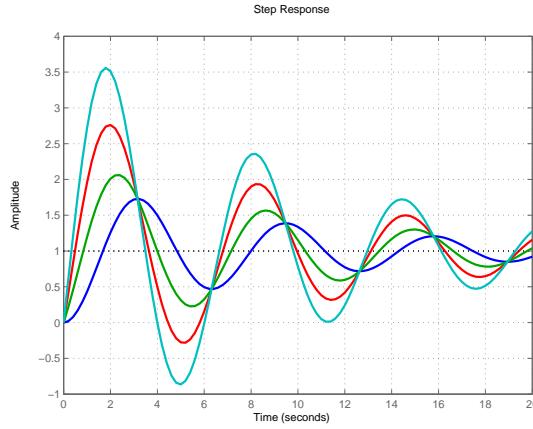


Figura 5.9: Risposta al gradino di  $G(s) = \frac{1+\tau s}{1+2\delta\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$ , con  $\omega_n = 10$  e  $\delta = 0.1$  e con  $\tau = 0$  (in blu),  $\tau = 1$  (in verde),  $\tau = 2$  (in rosso) e  $\tau = 3$  (in ciano).

e amplificata nel caso di zeri a parte reale positiva, studiato nel prossimo paragrafo.

### 5.6.2 Zeri a parte reale positiva

Vediamo ora in maggior generalità l'effetto di zeri a parte reale positiva. Consideriamo un sistema asintoticamente stabile, con eccesso poli-zeri pari ad uno, con tutti gli zeri a parte reale negativa, eccetto uno che è positivo:

$$G(s) = K(s + z_1) \frac{\prod_{i=2}^{n-1} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}, \quad \Re(z_i) < 0, \Re(p_j) < 0, \forall i, j$$

La risposta indiciale in questo caso presenta  $y(0) = 0$ ,  $y^{(1)}(0) = K$  e

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = K z_1 \frac{\prod_{i=2}^{n-1} -z_i}{\prod_{j=1}^n -p_i}$$

ed essendo le produttorie a secondo membro tutte positive, si ha che il segno di  $y^{(1)}(0)$  e di  $y(\infty)$  sono opposti. Si riconosce quindi un effetto di **inversione** iniziale della risposta, e di **ritardo**, per i sistemi con zeri a parte reale positiva.

Per illustrare questo aspetto, si consideri di nuovo un sistema asintoticamente stabile del tipo

$$G(s) = \frac{1 + \tau s}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$$

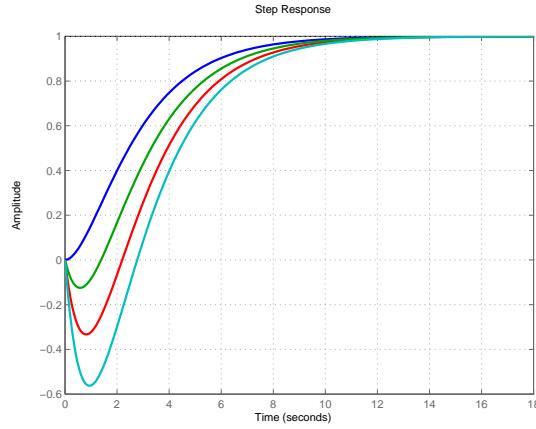


Figura 5.10: Risposta al gradino di  $G(s) = \frac{1+\tau s}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$ , con  $\tau = 0$  (in blu),  $\tau = -1$  (in verde),  $\tau = -2$  (in rosso) e  $\tau = -3$  (in ciano).

con  $\tau < 0$  e  $\tau_1 \neq \tau_2$ , ovvero uno zero reale positivo. La risposta al gradino al variare del valore di  $\tau$  è riportata in figura 5.10. Si noti come l'inversione e il ritardo della risposta è tanto più marcato quanto più lo zero si trova vicino all'origine.

Per un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati, la presenza di uno zero reale positivo comporta sempre l'inversione della risposta ed il primo picco positivo è raggiunto in ritardo rispetto al caso senza zero. In figura 5.11 sono riportati gli andamenti della risposta a regime per diversi valori di  $\tau$ . Si noti come anche in tal caso le risposte si incontrano tutte nei punti di massimo e minimo della risposta relativa al sistema senza zero.

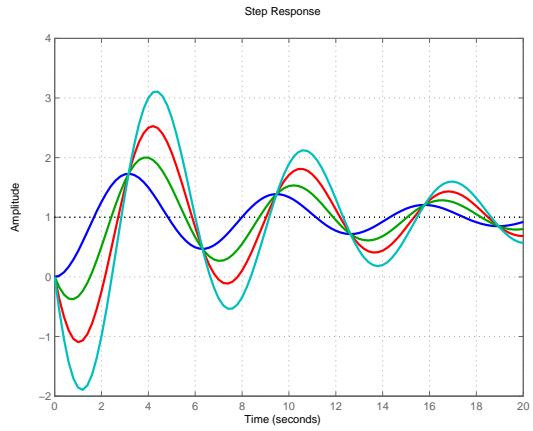
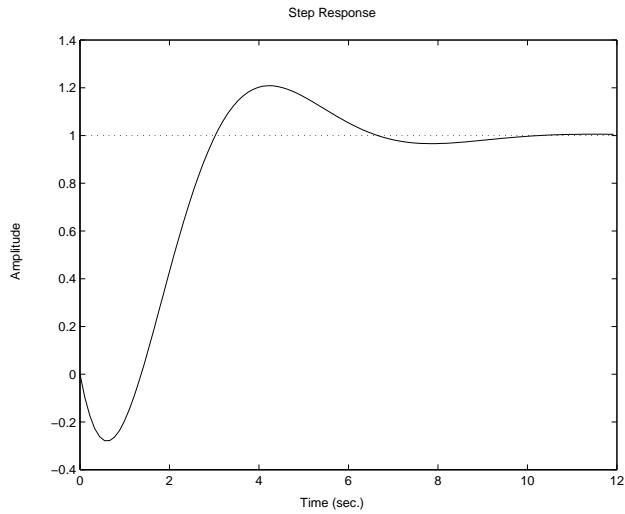


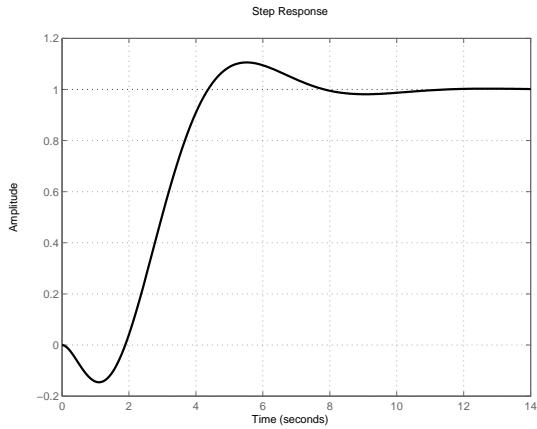
Figura 5.11: Risposta al gradino di  $G(s) = \frac{1+\tau s}{1+2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$ , con  $\omega_n = 10$  e  $\delta = 0.1$  e con  $\tau = 0$  (in blu),  $\tau = -1$  (in verde),  $\tau = -2$  (in rosso) e  $\tau = -3$  (in ciano).

**Esempio:**  $G(s) = -\frac{s-1}{s^2+s+1}$ .



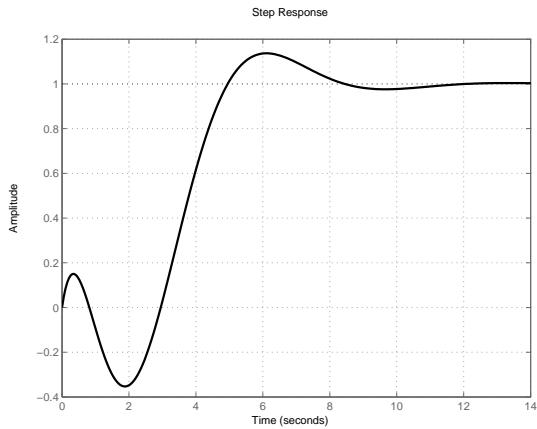
Se l'eccesso poli–zeri è superiore, si avrà comunque che la prima derivata non nulla in 0 è di segno opposto a quello del valore di regime.

**Esempio:**  $G(s) = -\frac{s-1}{(s^2+s+1)(s+1)}$ .



Se infine vi sono più zeri a parte reale positiva, anche se la prima derivata non nulla può avere lo stesso segno del valore a regime, vi saranno comunque oscillazioni in senso opposto a quello di regime.

**Esempio:**  $G(s) = \frac{(s-1)^2}{(s^2+s+1)(s+1)}$ .



In fig. 5.12 sono riportati due esempi di sistemi fisici con zeri a parte reale positiva.

## 5.7 Risposta Armonica

Il concetto di risposta a regime è particolarmente importante nel caso di ingressi sinusoidali a sistemi asintoticamente stabili. Per  $u(t) = \sin(\omega t)$  si ha infatti, per la sovrapposizione degli effetti,

$$y_r(t) = \frac{1}{2j} (G(j\omega)e^{j\omega t} - G(-j\omega)e^{-j\omega t}).$$

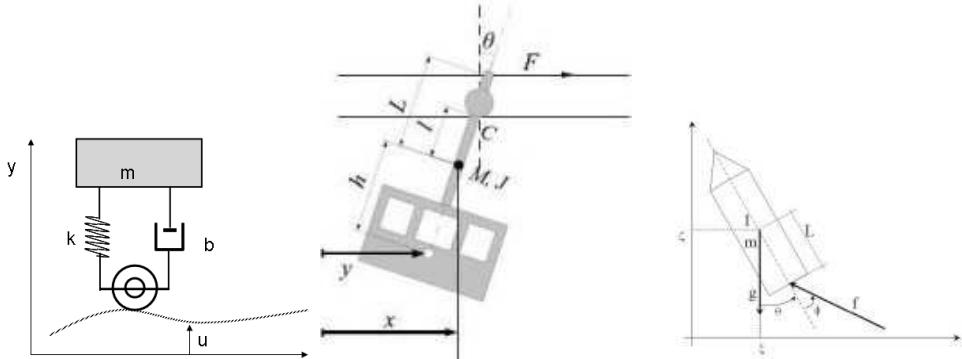


Figura 5.12: Il semplice modello di sospensione con un solo elemento inerziale a sinistra, già visto nel paragrafo 2.1.1 ha uno zero a parte reale negativa. Il modello linearizzato della funivia al centro ha f.d.t. tra la forza  $F$  e la posizione  $y$  marginalmente stabile, con uno o due zeri a parte reale positiva, in dipendenza dai parametri fisici (vedi teso esame del 19 Febbraio 2009). Il modello del razzo a destra ha f.d.t. tra l'angolo  $\phi$  e la posizione orizzontale  $\xi$  con quattro poli nell'origine, e con due zeri di cui uno a parte reale positiva.

Osservando che, essendo  $G(s)$  una funzione polinomiale fratta a coefficienti reali,  $G(a^H) = G^H(a)$  (dove  $a^H$  indica il coniugato di  $a$ ) e in particolare se  $G(j\omega) = R_G(\omega) + jI_G(\omega)$ ,  $G(-j\omega) = R_G(\omega) - jI_G(\omega)$ , si ha

$$\begin{aligned} y_r(t) &= \frac{1}{2j} [R_G(\omega)(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) + I_G(\omega)j(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})] = \\ &= R_G(\omega) \sin(\omega t) + I_G(\omega) \cos(\omega t), \end{aligned}$$

ovvero ancora, posto  $G(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ , con  $M(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{R_G^2(\omega) + I_G^2(\omega)}$  e  $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \arctan(\frac{I_G}{R_G})$ ,

$$y_r(t) = M \cos(\varphi) \sin(\omega t) + M \sin(\varphi) \cos(\omega t) = M \sin(\omega t + \varphi).$$

Quest'ultima relazione rappresenta un notevole risultato talvolta descritto come **Teorema della risposta armonica**:

*La risposta a regime di un sistema asintoticamente stabile ad un ingresso sinusoidale  $\sin(\omega t)$  è una sinusoide della stessa frequenza, con ampiezza pari al modulo della f.d.t. in  $s = j\omega$ , e ritardata in fase di un angolo pari all'argomento della f.d.t. in  $s = j\omega$ .*

La funzione complessa di variabile reale  $G(s = j\omega)$ , valutata per  $0 \leq \omega \leq \infty$ , è detta *funzione di risposta armonica* del sistema la cui f.d.t. è  $G(s)$ .

Nel caso di sistema MIMO, le stesse relazioni valgono per ogni elemento della matrice di trasferimento, considerando quindi che  $G_{ij}(j\omega)$  caratterizza, col suo modulo ed il suo argomento, la risposta armonica dell'uscita  $i$ -esima corrispondente ad un ingresso sinusoidale sull'ingresso  $j$ -esimo.

La conoscenza della risposta armonica di un sistema LTITC (ottenuta ad esempio sperimentalmente applicando una serie di ingressi sinusoidali di frequenza variabile, e misurando la ampiezza e la fase del segnale di uscita a regime) consente la caratterizzazione completa del sistema dal punto di vista ingresso–uscita (cioè di sapere la risposta del sistema per qualsiasi ingresso), purché il sistema sia asintoticamente stabile (come d'altronde implicito nell'uso del concetto di risposta armonica). Infatti, si può in tal caso applicare la definizione di antitrasformata di Laplace, calcolando esplicitamente per  $\sigma = 0$

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma+j\infty}^{\sigma-j\infty} G(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

ottendo quindi la risposta impulsiva  $g(t)$ , che, a sua volta  $\mathcal{L}$ -trasformata, fornisce  $G(s)$ .

La risposta di un sistema TD inizialmente rilassato sottoposto ad ingresso esponenziale  $u(t) = \lambda^t$  è

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{n(z)}{\pi(z)} \frac{z}{z - \lambda}$$

Se  $p_1, \dots, p_n$  sono i poli di  $G(z)$ , e  $p_i \neq \lambda$ , si ha

$$Y(z) = \sum_{i=1}^h \left\{ \sum_{k=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ik} z}{(z - p_i)^k} \right\} + \frac{\beta z}{z - \lambda}$$

con

$$\beta = \left[ (z - \lambda) \frac{G(z)}{z} \frac{z}{z - \lambda} \right]_{z=\lambda} = G(\lambda)$$

La antitrasformata è quindi

$$y(t) = \sum_{i=1}^h \left\{ \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_{ik} C_{k-1}^t p_i^{t-k+1} \right\} + G(\lambda) \lambda^t$$

Per ingressi permanenti di tipo  $u(t) = \hat{u} \lambda^t$  non convergenti a zero (cioè con  $|\lambda| \geq 1$ ) applicati a sistemi asintoticamente stabili, la risposta a regime vale

$$y(t) \approx y_r(t) = G(\lambda)u(t).$$

Per  $u(t) = H(t)$ , la risposta a regime di un sistema asintoticamente stabile TD è  $y_r(t) = G(1)$ , ed il valore  $G(1)$  viene detto *guadagno statico* del sistema. Questo risultato si poteva ottenere anche semplicemente applicando il teorema del valore finale:  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} G(z) \frac{z}{z-1} = G(1)$ .

Per  $u(t) = \sin(\theta t)$  si ha

$$y_r(t) = \frac{1}{2j} (G(e^{j\theta}) e^{j\theta t} - G(e^{-j\theta}) e^{-j\theta t}).$$

Ancora una volta, essendo  $G(z)$  una funzione polinomiale fratta a coefficienti reali, si ha che  $G(e^{j\theta}) = R_G(\theta) + jI_G(\theta)$ ,  $G(e^{-j\theta}) = R_G(\theta) - jI_G(\theta)$ , e

$$y_r(t) = R_G \sin(\theta t) + I_G \cos(\theta t),$$

ovvero ancora, posto  $G(e^{j\theta}) = M(\theta)e^{j\varphi(\theta)}$ , con  $M(\theta) = |G(e^{j\theta})| = \sqrt{R_G^2 + I_G^2}$  e  $\varphi(\theta) = \arg G(e^{j\theta}) = \arctan(\frac{I_G}{R_G})$ ,

$$\begin{aligned} y_r(t) &= M(\theta) \cos(\varphi(\theta)) \sin(\theta t) + M(\theta) \sin(\varphi(\theta)) \cos(\theta t) = \\ &= M(\theta) \sin(\theta t + \varphi(\theta)). \end{aligned}$$

che esprime il teorema della risposta armonica per sistemi TD asintoticamente stabili. La funzione complessa di variabile reale  $G(z = e^{j\theta})$ , prende il nome di risposta armonica TD.

A differenza che nel caso TC, in TD la funzione  $G(e^{j\theta})$  (e quindi ovviamente  $M(\theta)$  e  $\varphi(\theta)$ ) sono periodiche con periodo  $2\pi$ . Questo significa che due ingressi  $u_1(t) = \sin(\theta t)$  e  $u_2(t) = \sin((2\pi + \theta)t)$  danno luogo, se applicati ad un sistema LTITD asintoticamente stabile, ad uscite di pari ampiezza e fase (i segnali di ingresso sono in effetti uguali!).

Inoltre, poiché  $e^{-j\theta}$  è il complesso coniugato di  $e^{j\theta}$ , e quindi è possibile esprimere  $e^{j(\theta+\pi)} = e^{j(\theta-\pi)}$  come il coniugato di  $e^{j(\pi-\theta)}$ , il valore di  $G(e^{j\theta_1})$  per  $\pi < \theta_1 < 2\pi$  si può ottenere da  $G^H(e^{2\pi-\theta_1})$ . Ogni valore di  $G(e^{j\theta})$  può essere dunque dedotto dalla conoscenza della risposta armonica limitata all'intervallo  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

La conoscenza della risposta armonica di un sistema LTITD (ottenuta ad esempio sperimentalmente) consente la caratterizzazione completa del sistema dal punto di vista ingresso–uscita, purché il sistema sia asintoticamente stabile. Infatti, si può in tal caso applicare la definizione di antitrasformata  $Z$ , calcolando esplicitamente

$$\mathcal{Z}^{-1}[G(z)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_1} G(z) z^{t-1} dz =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi J} \int_0^{2\pi} G(e^{J\theta}) (e^{J\theta})^{t-1} e^{J\theta} J d\theta = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(e^{J\theta}) (e^{J\theta})^t d\theta
 \end{aligned}$$

ottenendo quindi la risposta impulsiva  $g(t)$ , che, a sua volta  $\mathcal{Z}$ -trasformata, fornisce  $G(z)$ .



# Capitolo 6

## Diagrammi di Bode, Nyquist, Nichols

In questo capitolo si studieranno le rappresentazioni grafiche usate per descrivere l'andamento della funzione complessa  $G(j\omega)$ , il cui significato è, come si è visto, legato alla risposta armonica per sistemi asintoticamente stabili. La funzione, ed i relativi diagrammi, hanno comunque significato molto importante per ogni sistema lineare.

### 6.1 Diagrammi di Bode

I diagrammi di Bode di un sistema TC descritto dalla f.d.t.  $G(s)$  riportano il modulo  $M(\omega) = |G(j\omega)|$  e la fase  $\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega))$  di  $G(j\omega)$ , in funzione della pulsazione  $\omega$  quando questa varia tra 0 e  $\infty$ .

Nel caso di sistemi asintoticamente stabili, i diagrammi di Bode sono quindi una rappresentazione della funzione di risposta armonica del sistema. È possibile peraltro tracciare i diagrammi di Bode anche per sistemi non asintoticamente stabili, o instabili, pur non essendo definita in questo caso una risposta armonica.

Consideriamo una f.d.t. data nelle consuete forme polinomiale fratta e fattorizzata (detta anche forma zero-pole-gain e “zpk”), ovvero rispettivamente

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} = K_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}.$$

Per tracciare i diagrammi di ampiezza e fase, è conveniente preliminarmente

porre la f.d.t. nella forma cosiddetta *di Bode*:

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (1 + \tau'_i s)}{s^h \prod_{i=1}^{n-h} (1 + \tau_i s)}$$

in cui  $\tau'_i = -\frac{1}{z_i}$  e  $\tau_i = -\frac{1}{p_i}$ ,  $\forall p_i, z_i \neq 0$ , e  $K = K_0 \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{i=1}^{n-h} (-p_i)}$ . Se  $h > 0$  il sistema ha  $h$  poli nell'origine, ovvero è di tipo  $h$ ; se  $h < 0$  il sistema ha  $|h|$  zeri nell'origine.

Quando vi siano poli complessi coniugati  $p_i = p_j^H$ , si ha ovviamente anche  $\tau_i = \tau_j^H$ . Si denoti con  $\omega_{n,i} = \frac{1}{|\tau_i|}$  il modulo dei poli in questione, con  $\pm\phi_i$  il loro argomento (o fase), e sia  $\delta_i = -\cos(\phi_i) < 1$  (altrimenti i due poli sarebbero reali). Utilizzando questa notazione si può riscrivere il contributo dei poli complessi coniugati nella forma

$$\frac{1}{(1 + s\tau_i)(1 + s\tau_i^H)} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_{n,i}^2} + 2\frac{\delta_i}{\omega_{n,i}}s + 1}.$$

Procedendo in modo analogo anche per eventuali zeri complessi coniugati, si ottiene la cosiddetta *forma reale di Bode*

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{m-2c} (1 + \tau'_i s) \prod_{j=1}^c \left( \frac{s^2}{\omega_{n,j}^2} + 2\frac{\delta'_j}{\omega_{n,j}^2}s + 1 \right)}{s^h \prod_{i=1}^{n-h-2d} (1 + \tau_i s) \prod_{j=1}^d \left( \frac{s^2}{\omega_{n,j}^2} + 2\frac{\delta_j}{\omega_{n,j}^2}s + 1 \right)},$$

$$\text{con } K = K_0 \frac{\prod_{i=1}^{m-2c} \left( \frac{1}{\tau'_i} \right) \prod_{j=1}^c (\omega_{n,j}^2)}{\prod_{i=1}^{n-h-2d} (\tau_i) \prod_{j=1}^d \left( \frac{1}{\omega_{n,j}^2} \right)}.$$

I diagrammi di Bode utilizzano una carta semilogaritmica per la rappresentazione dell'andamento del modulo e della fase di  $G(j\omega)$  (vedi fig. 6.1).

Sull'asse delle ascisse, che è in scala logaritmica in base 10 per entrambi i diagrammi, è consuetudine riportare i valori della pulsazione (e non del suo logaritmo). Si dice *decade* la distanza, in scala logaritmica, tra due pulsazioni il cui rapporto è 10 (ad es. tra 20 e 200). Si dice *ottava* la distanza, in scala logaritmica, tra due numeri il cui rapporto è 2 (ad es. tra 20 e 40). Si usa talvolta combinare queste distanze per esprimere distanze diverse, ad esempio si può dire che le pulsazioni  $\omega_1 = 4$  e  $\omega_2 = 10$  distano di una decade meno due ottave ( $10 = 4 * 10/2/2$ ).

Il modulo (detto anche *ampiezza* o *guadagno*) della f.d.t. viene riportato nel diagramma sull'asse delle ordinate in una scala graduata in *decibel* (dB)<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Il valore  $B_{dB}$  in decibel di una grandezza  $B$  è dato da  $B_{dB} = 20 \log_{10} B$ . Nel seguito, useremo la notazione  $\text{Log } B$  per indicare  $\log_{10} B$ , mentre con  $\log B$  si intenderà il logaritmo naturale di  $B$ .

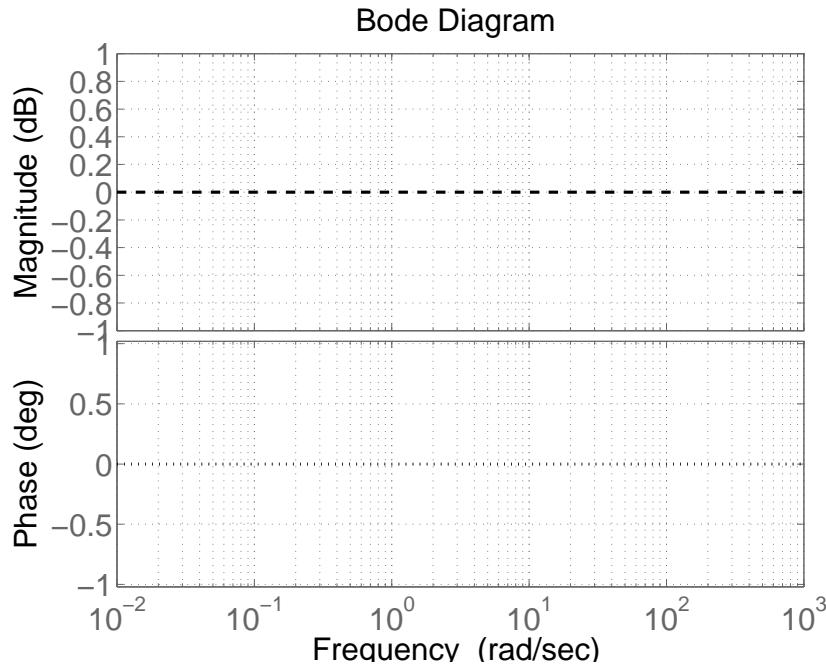


Figura 6.1: Carte semilogaritmiche usate per i diagrammi di Bode

La fase della f.d.t. viene rappresentata sull'asse delle ordinate del relativo diagramma in radianti, ovvero in gradi.

L'utilizzo della scala logaritmica per le pulsazioni è giustificato dalla opportunità di mostrare in maggior dettaglio il comportamento dei diagrammi per pulsazioni basse, pur mantenendo ampio il campo di visualizzazione delle funzioni  $M(\omega)$  e  $\varphi(\omega)$ .

L'utilizzo del logaritmo del modulo e dell'argomento di  $G(j\omega)$  è invece spiegato dalla facilità con cui si possono tracciare (anche manualmente) i relativi diagrammi, utilizzando le proprietà dei moduli e delle fasi di prodotti di numeri complessi.

Si ricorda che, se  $a, b$  sono due numeri complessi scritti in notazione esponenziale come  $a = |a|e^{j\arg(a)}$  e  $b = |b|e^{j\arg(b)}$ , si ha  $ab = |a||b|e^{j(a+b)}$  e dunque  $\log(|ab|) = \log(|a|) + \log(|b|)$ , e  $\arg(ab) = \arg(a) + \arg(b)$ . In altri termini, il logaritmo del modulo e la fase di un prodotto complesso sono pari rispettivamente alla somma dei logaritmi dei moduli e alla somma delle fasi dei fattori. Ricordiamo infine che il modulo e la fase dell'inverso  $1/a$  di un numero complesso  $a$  sono pari rispettivamente all'inverso del modulo e all'opposto della fase di  $a$  ( $|\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|}$ ;  $\arg(\frac{1}{a}) = -\arg(a)$ ).

La costruzione dei due diagrammi si riduce quindi al calcolo del con-

tributo, in modulo e in fase, di ciascun fattore che compare in  $G(j\omega)$  e alla somma dei vari contributi. Trovati i diagrammi dei fattori, essi verranno semplicemente sommati con l'opportuno segno per ottenere quelli complessivi.

Passiamo quindi a valutare i diversi contributi ad una generica f.d.t. in forma reale di Bode, ponendo  $s = j\omega$

### 6.1.1 Il contributo della costante di guadagno

Per un termine di guadagno  $K$ , costante rispetto alle pulsazioni  $\omega$ , possiamo scrivere

$$K = |K|e^{-jr\pi} \text{ con } r = \begin{cases} 0 & \text{se } K > 0 \\ 1 & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

Si ha quindi per il diagramma delle ampiezze

$$M(\omega) = 20 \log |K| = \text{costante}$$

mentre per il diagramma delle fasi si ha

$$\varphi = \arg(K) = \begin{cases} 0 & \text{se } K > 0 \\ -\pi & \text{se } K < 0 \end{cases}.$$

Si osservi che la fase può essere espressa in radianti ovvero in gradi, e che essa deve essere sempre letta modulo l'angolo giro: quindi, per  $K < 0$ , si può avere sui diagrammi  $\varphi = \pm\pi$  ovvero  $\varphi = \pm 180$ , a seconda della convenzione usata.

### 6.1.2 Il contributo di poli e zeri nell'origine

Per un termine del tipo  $\frac{1}{s^h}$  corrispondente a  $h$  poli nell'origine, possiamo scrivere

$$\frac{1}{(j\omega)^h} = (\omega e^{j\frac{\pi}{2}})^{-h} = (\omega)^{-h} e^{-jh\frac{\pi}{2}}.$$

Per il diagramma delle ampiezze si ha

$$M(\omega) = 20 \log (\omega)^{-h} = -20h \log \omega,$$

che si rappresenta sulla carta logaritmica come una retta per il punto ( $\omega = 1$ ,  $M(\omega) = 0$ dB) con pendenza di  $-20h$  dB per decade (ovvero  $\approx -6h$  dB per ottava).

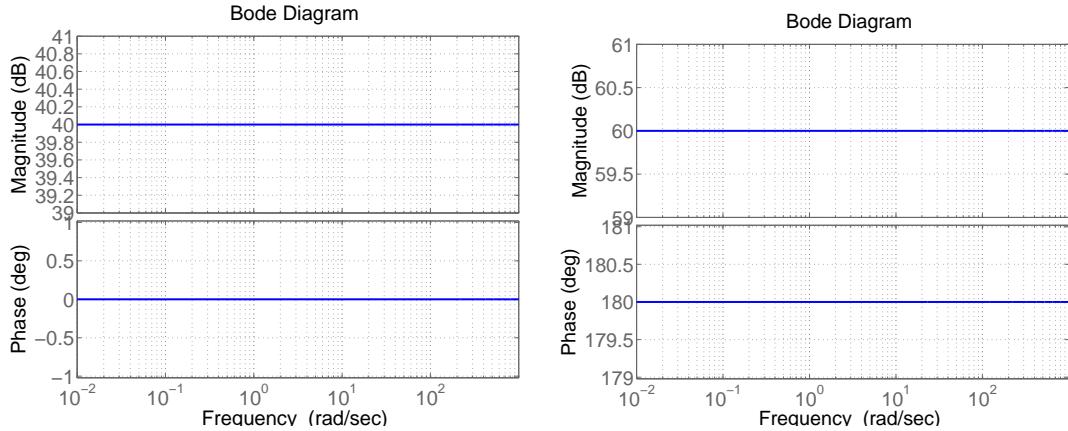


Figura 6.2: Contributo ai diagrammi di Bode in ampiezza e fase per costanti di guadagno  $K = 100$  (sinistra) e  $K = -1000$  (destra). Si osservi che il diagramma a destra, ottenuto usando il programma Matlab, indica una fase costante e pari a 180 gradi.

Per il diagramma delle fasi si ha

$$\varphi = \arg \left( \frac{1}{(\jmath\omega)^h} \right) = -h \frac{\pi}{2} = \text{costante.}$$

Nel caso (non frequente) in cui la f.d.t.  $G(s)$  contenga  $k$  zeri nella origine, i contributi di  $s^k$  per  $s = \jmath\omega$  sono dati da

$$\begin{aligned} M(\omega) &= 20k \log \omega \\ \varphi &= k \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Si noti che il contributo di fase di  $s^k$  è opposto di quello di  $1/s^k$ , mentre il contributo in ampiezza ne è l'inverso, quindi opposto in scala logaritmica. I diagrammi di Bode corrispondenti ai contributi degli zeri possono quindi essere tracciati semplicemente ribaltando rispetto all'asse delle ascisse quelli corrispondenti a un pari numero di poli nell'origine (vedi ad es. fig. 6.3).

### 6.1.3 Il contributo di poli e zeri reali.

Per un polo reale semplice con costante di tempo  $\tau$ , ovvero per un termine  $\frac{1}{(\tau s + 1)}$ , possiamo scrivere per  $s = \jmath\omega$

$$\frac{1}{1 + \jmath\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} e^{-\jmath \arctan \omega\tau}.$$

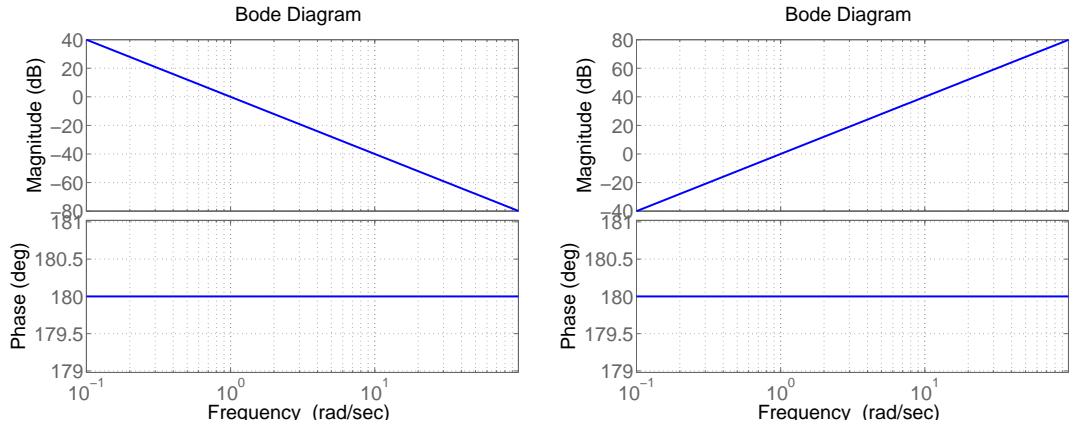


Figura 6.3: Diagrammi di Bode di  $G(s) = \frac{1}{s^2}$  e  $G(s) = s^2$

Per quanto riguarda la ampiezza di questo termine si ha

$$M(\omega) = 20 \operatorname{Log} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}.$$

quindi

- Per  $\omega|\tau| \ll 1$  si ha  $M(\omega) \simeq 0$ ,
- per  $\omega|\tau| = 1$  si ha  $M(\omega) = -20 \operatorname{Log} \sqrt{2} \simeq -3\text{dB}$ ,
- per  $\omega|\tau| \gg 1$  si ha  $M(\omega) \simeq 20 \operatorname{Log} \frac{1}{\omega|\tau|} = 20 \operatorname{Log} \frac{1}{|\tau|} - 20 \operatorname{Log} \omega$ .

Dunque il diagramma ha una rappresentazione approssimata tendente asintoticamente, per  $\omega$  che tende a 0, all'asse orizzontale a 0dB. Per  $\omega$  che tende a infinito, invece, il diagramma tende ad un asintoto costituito da una retta di pendenza -20dB/decade che interseca l'asse a 0dB nel punto  $\operatorname{Log} \omega = \operatorname{Log} \frac{1}{|\tau|}$ . La curva reale si discosta di -3dB dal diagramma asintotico nel punto di rottura (o “ginocchio”), cioè per  $\operatorname{Log} \omega = \operatorname{Log} \frac{1}{|\tau|}$ . Si noti che il diagramma delle ampiezze non dipende dal segno di  $\tau$ , quindi un polo reale semplice negativo (stabile) ed uno positivo (instabile) hanno identico diagramma di ampiezza.

Per le fasi abbiamo invece

$$\varphi = -\arctan \omega \tau$$

e quindi si devono distinguere due casi.

- a)  $\tau > 0$  (polo reale negativo):

- per  $\omega\tau \ll 1$  si ha  $\varphi \simeq 0$ ,
- per  $\omega\tau = 1$  si ha  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ ,
- per  $\omega\tau \gg 1$  si ha  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ .

**b)**  $\tau < 0$  (polo reale positivo):

- per  $\omega|\tau| \ll 1$  si ha  $\varphi \simeq 0$ ,
- per  $\omega|\tau| = 1$  si ha  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,
- per  $\omega|\tau| \gg 1$  si ha  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

Il diagramma delle fasi quindi tende asintoticamente, per  $\omega \rightarrow 0$ , all'asse orizzontale a 0 rad. Per  $\omega \rightarrow \infty$ , il diagramma tende all'asse orizzontale a  $-\pi/2$  nel caso di polo negativo, ovvero all'asse orizzontale a  $\pi/2$  nel caso di polo positivo.

Una prima rappresentazione grafica approssimata del diagramma delle fasi consiste proprio in due semirette orizzontali corrispondenti ai valori sopra indicati, che si distaccano dal punto di rottura  $1/|\tau|$  (vedi fig. 6.4).

Una migliore approssimazione del diagramma delle fasi può essere ottenuta raccordando i due asintoti orizzontali con la tangente al diagramma effettivo nel punto  $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ .

La pendenza della tangente al diagramma in  $\omega = \frac{1}{|\tau|}$  si ottiene derivando la fase  $\varphi$  rispetto alla variabile in ascissa, ovvero

$$\frac{d\varphi}{d \log \omega} \Big|_{\omega=\frac{1}{|\tau|}} = \frac{d\varphi}{d\omega} \frac{d\omega}{d \log \omega} \Big|_{\omega=\frac{1}{|\tau|}} = -\frac{\tau}{1+(\omega\tau)^2} \omega \log 10 \Big|_{\omega=\frac{1}{|\tau|}} = -\frac{\log 10}{2}$$

Si consideri il caso  $\tau > 0$ : la retta passante per  $(\omega = 1/|\tau|, \varphi = -\pi/4)$  con倾inazione  $-(\log 10)/2$  interseca l'asse  $\varphi = 0$  in una pulsazione  $\omega_a$  data da

$$\frac{\pi/4}{\log(1/\tau) - \log \omega_a} = \frac{\log 10}{2}$$

quindi  $\omega_a = \frac{1}{4.81} \frac{1}{|\tau|}$ . Approssimando  $4.81 \approx 5$ ,  $\omega_a$  si trova quindi circa una decade meno una ottava prima della pulsazione di rottura  $1/|\tau|$ . Analogamente per il punto  $\omega_b = 4.81 \frac{1}{|\tau|}$  dove la retta a pendenza  $-(\log 10)/2$  interseca la retta  $\varphi = -\pi/2$ . Il caso  $\tau < 0$  è del tutto analogo, dove si cambi il segno di  $\varphi$  (vedi fig. 6.4).

Il contributo di uno zero reale ( $\tau's + 1$ ) è dato da

$$M(\omega) = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau'^2}$$

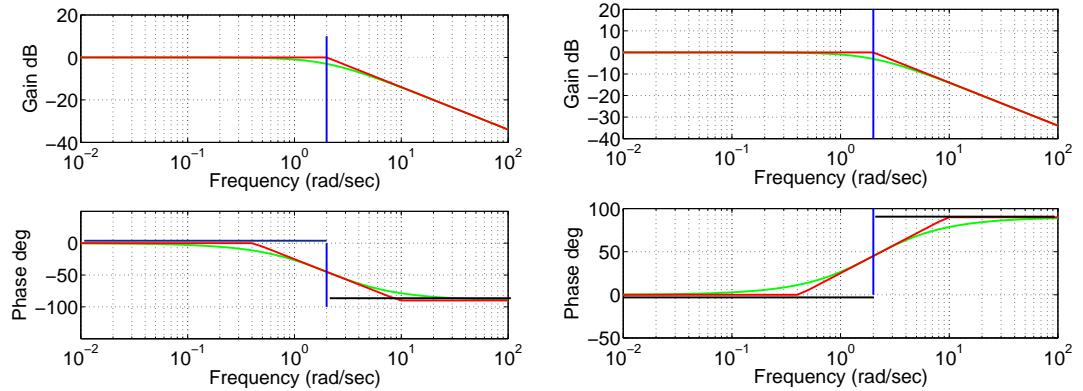


Figura 6.4: Diagrammi di Bode per un polo con costante di tempo  $|\tau| = 1/2$  a parte reale negativa (a sinistra) e positiva (a destra). La linea verticale in blu indica la pulsazione di ginocchio. In verde sono riportati i diagrammi effettivi; in nero, la prima approssimazione asintotica del diagramma delle fasi; in rosso la approssimazione asintotica a spezzate.

e

$$\varphi = \arctan \omega \tau'.$$

Si noti ancora che i contributi ai diagrammi di Bode di fase e ampiezza di uno zero reale sono opposti a quelli di un polo reale di pari costante di tempo  $\tau$ , e che i diagrammi di Bode sono simmetrici rispetto all'asse delle ascisse (vedi ad es. fig. 6.5).

#### 6.1.4 Il contributo di una coppia di poli complessi coniugati

Consideriamo il termine

$$C(j\omega) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\frac{\delta}{\omega_n}s + 1} \Bigg|_{s=j\omega} = \frac{1}{(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2) + j2\delta\frac{\omega}{\omega_n}}.$$

Considereremo solo il caso  $|\delta| < 1$  (se fosse  $|\delta| \geq 1$ , si avrebbe la somma di due contributi di poli reali semplici).

Per la regola di Descartes,  $\delta > 0 \Rightarrow \pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2$  (i poli sono stabili), mentre  $\delta < 0 \Rightarrow -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$  (i poli sono instabili).

Per il modulo si ha:

$$M(\omega) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}.$$

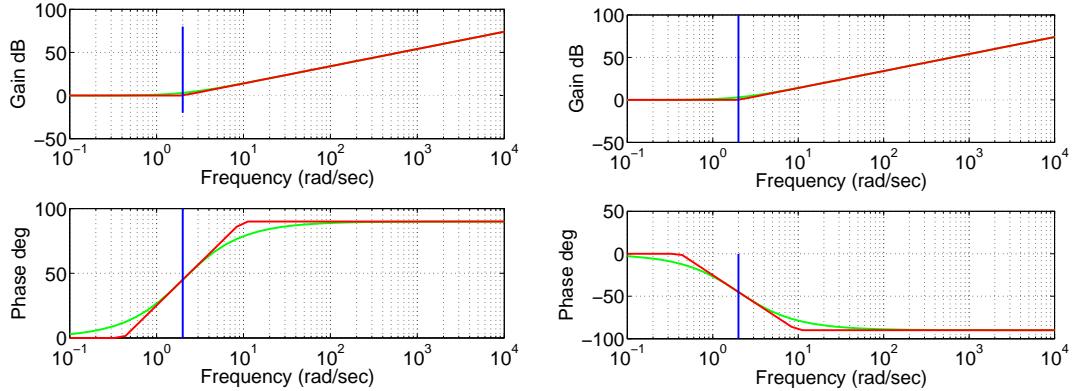


Figura 6.5: Diagrammi di Bode per uno zero con costante di tempo  $|\tau| = 2$  a parte reale negativa (a sinistra) e positiva (a destra).

quindi

- per  $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$  si ha  $M(\omega) \simeq 0$ ,
- per  $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$  si ha  $M(\omega) = -20 \log 2|\delta|$ ,
- per  $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$  si ha  $M(\omega) \simeq -20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 40 \log \omega_n - 40 \log \omega$ .

Il diagramma ha una rappresentazione asintotica data da un asintoto orizzontale (per  $\omega$  che tende a 0) passante per 0 e da un asintoto costituito da una retta di pendenza -40dB/decade (-12 dB/ottava) che interseca l'asse delle ascisse nel punto  $\log \omega = \log \omega_n$ .

La curva reale si discosta in tale punto dalla rappresentazione asintotica (vedi fig. 6.6) di

$$-20 \log 2|\delta| = \begin{cases} -6 \text{ dB} & \text{per } |\delta| = 1 \\ 0 & \text{per } |\delta| = 1/2 \\ \infty & \text{per } |\delta| = 0 \end{cases}$$

Come si osserva dalla fig. 6.6, in alcuni casi il diagramma può avere un massimo. Per valutarlo, si può calcolare il valore che minimizza la funzione

$$(1 - u^2)^2 + 4\delta^2 u^2,$$

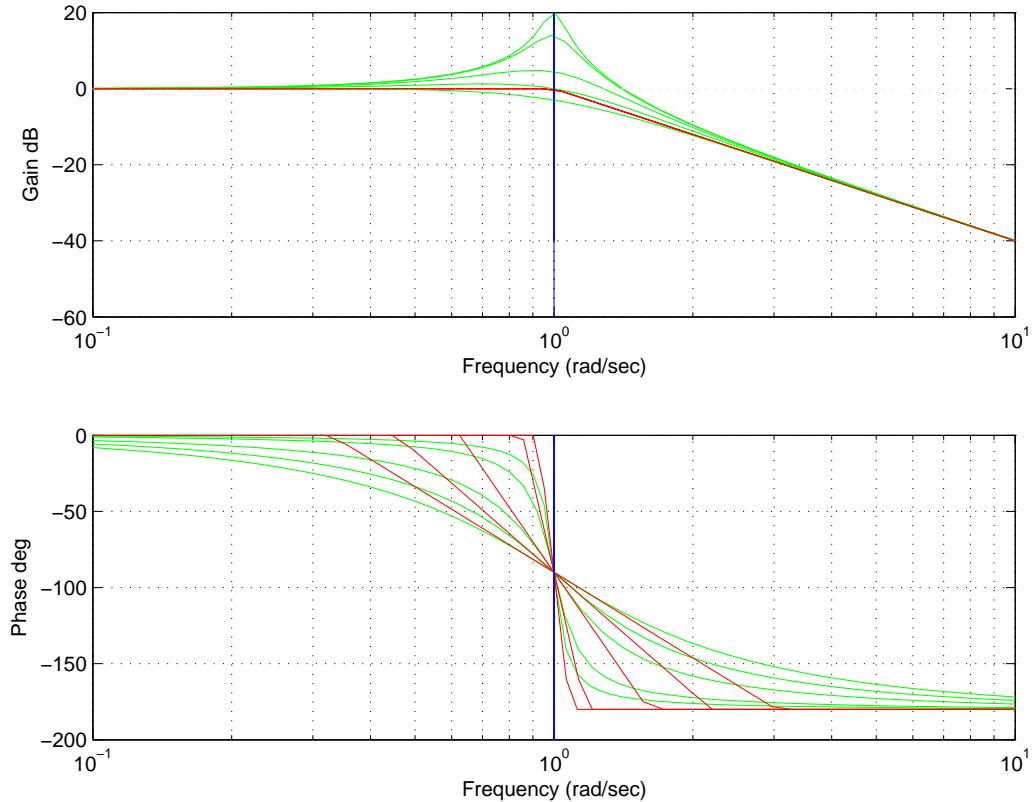


Figura 6.6: Andamento asintotico (rosso) ed effettivo (verde) dei diagrammi di Bode di un sistema del secondo ordine con  $\omega_n = 1$  e  $\delta \in \{1/\sqrt{2}, 1/2, 0.3, .1, 0.05\}$

dove  $u = \frac{\omega}{\omega_n}$ . Calcolando la derivata rispetto a  $u$  e uguagliando a zero si ottiene:

$$-4u(1 - u^2) + 8\delta^2u = 0$$

la cui soluzione (trascurando la soluzione banale) è data da

$$u_R = \frac{\omega_R}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\delta^2}, \quad |\delta| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

che corrisponde alla *pulsazione di risonanza*

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}.$$

A tale pulsazione di risonanza corrisponde il *picco di risonanza*

$$M_R = \frac{1}{\sqrt{(1-1+2\delta^2)^2+4\delta^2(1-2\delta^2)}} = \\ \frac{1}{\sqrt{4\delta^2-4\delta^4}} = \frac{1}{2|\delta|\sqrt{1-\delta^2}}$$

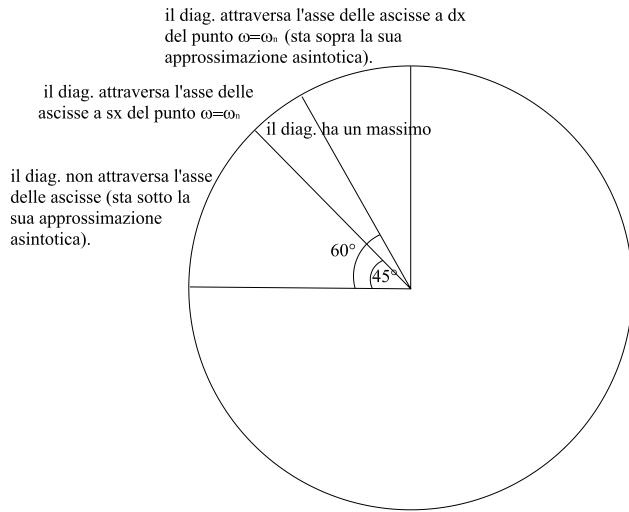


Figura 6.7: Relazione tra regioni del piano complesso in cui giacciono i poli e andamento della risposta per un sistema del secondo ordine

La risonanza è detta perfetta quando  $\delta = 0$ : in questo caso,  $M_R$  è infinito. Per un sistema asintoticamente stabile con  $\delta = 0$ , quando la pulsazione della sinusoide in ingresso tende al valore della pulsazione di risonanza, l'ampiezza della sinusoide di uscita a regime tende a infinito.

Si distinguono quindi i seguenti casi:

- $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq |\delta| \leq 1$  ( $0 \leq \phi \leq \pi/4$  ovvero  $3\pi/4 \leq \phi \leq \pi$ ):  $\Rightarrow$  il diagramma non ha massimo, non attraversa l'asse delle ascisse e sta sempre sotto la sua approssimazione asintotica;
- $0 \leq |\delta| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ( $\pi/4 \leq \phi \leq \pi/2$  ovvero  $\pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/4$ ):  $\Rightarrow$  il diagramma ha un massimo;
  - $\frac{1}{2} \leq |\delta| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ( $\pi/4 \leq \phi \leq \pi/3$  ovvero  $3\pi/4 \leq \phi \leq 5\pi/6$ ):  $\Rightarrow$  la curva attraversa l'asse delle ascisse a sinistra del punto  $\omega = \omega_n$ ;
  - $0 \leq |\delta| \leq \frac{1}{2}$  ( $\pi/3 \leq \phi \leq \pi/2$  ovvero  $\pi/2 \leq \phi \leq 5\pi/6$ ):  $\Rightarrow$  il diagramma attraversa l'asse delle ascisse a destra del punto  $\omega = \omega_n$  e sta sempre sopra la sua approssimazione asintotica;

Per il diagramma delle fasi si ha

$$\varphi = -\arctan \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

a)  $\delta > 0$  (poli stabili):

- per  $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$  si ha  $\varphi \simeq 0$ ,
- per  $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$  si ha  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ,
- per  $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$  si ha  $\varphi = -\pi$ .

b)  $\delta < 0$  (poli instabili):

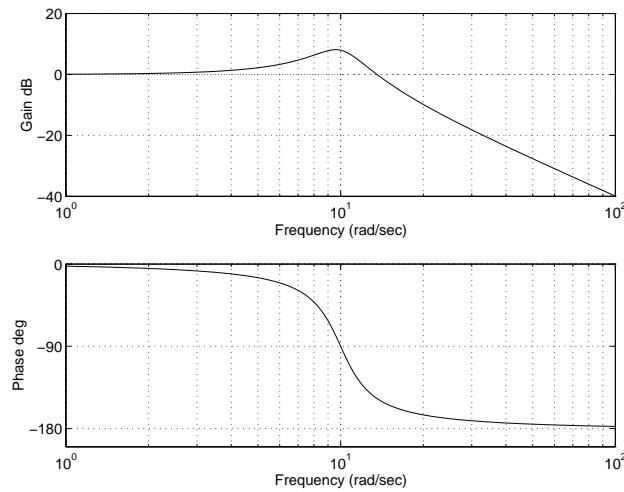
- per  $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$  si ha  $\varphi \simeq 0$ ,
- per  $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$  si ha  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,
- per  $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$  si ha  $\varphi = \pi$ .

Il diagramma asintotico delle fasi (per  $\delta > 0$ ) può essere rappresentato come la spezzata ottenuta collegando i due asintoti per  $\varphi = 0$  e  $\varphi = -\pi$  con la tangente al diagramma effettivo nel punto  $\omega = \omega_n$  in cui  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ .

Calcoliamo la pendenza della tangente al diagramma in  $\omega = \omega_n$ ; ponendo  $u = \frac{\omega}{\omega_n}$  possiamo scrivere  $\varphi = -\arctan \frac{2\delta u}{1-u^2}$  e la tangente viene calcolata valutando

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\varphi}{d \log \omega} \right|_{\omega=\omega_n} &= \left. \frac{d\varphi}{du} \frac{d u}{d \log \omega} \right|_{u=1} = \\ &= - \left. \frac{1}{1+(\frac{2\delta u}{1-u^2})^2} \left( \frac{2\delta}{1-u^2} + \frac{4\delta u^2}{(1-u^2)^2} \right) u \log 10 \right|_{u=1} = - \frac{\log 10}{\delta} \end{aligned}$$

Per  $\delta \rightarrow 0$  la tangente al diagramma in  $\omega = \omega_n$  tende a  $-\infty$ ; mentre per  $\delta = 1$  la tangente vale  $-\log 10$ .



### 6.1.5 Il contributo di un coppia di zeri complessi coniugati

$$(1 + j\omega\tau')(1 + j\omega\bar{\tau}') = (1 - \omega^2|\tau'|^2) + j2\omega|\tau'|\cos(\phi')$$

dove  $\frac{1}{|\tau'|}$  è il modulo degli zeri e  $\pm\phi'$  è la fase.

Utilizzando la notazione  $\omega'_n = \frac{1}{|\tau'|}$  e  $-\cos\phi' = \delta'$  si ottiene

$$M(\omega) = -20 \log \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega'^2})^2 + 4\delta'^2 \frac{\omega^2}{\omega'^2}}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{2\delta' \frac{\omega}{\omega'_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega'^2}}$$

I diagrammi sono quindi semplicemente ottenuti ribaltando rispetto all'asse delle ascisse i precedenti.

### 6.1.6 Esempi

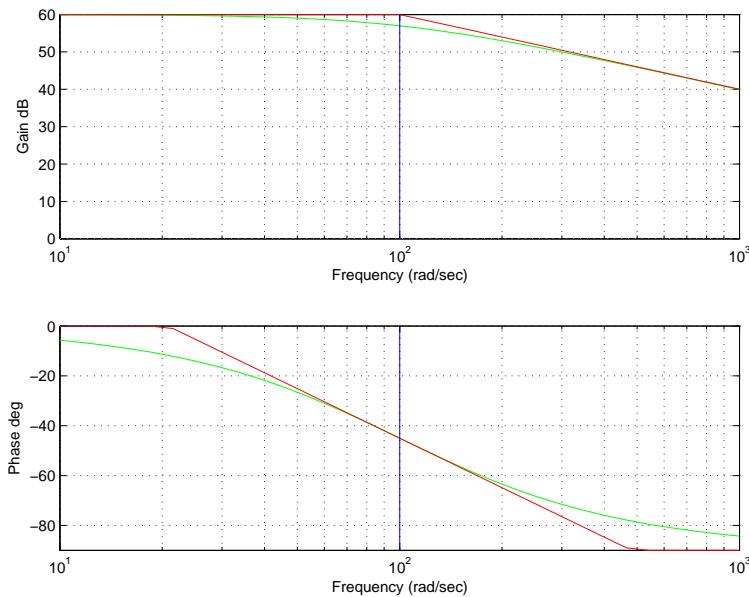


Figura 6.8:  $G(s) = 1000 \frac{1}{0.01s+1}$

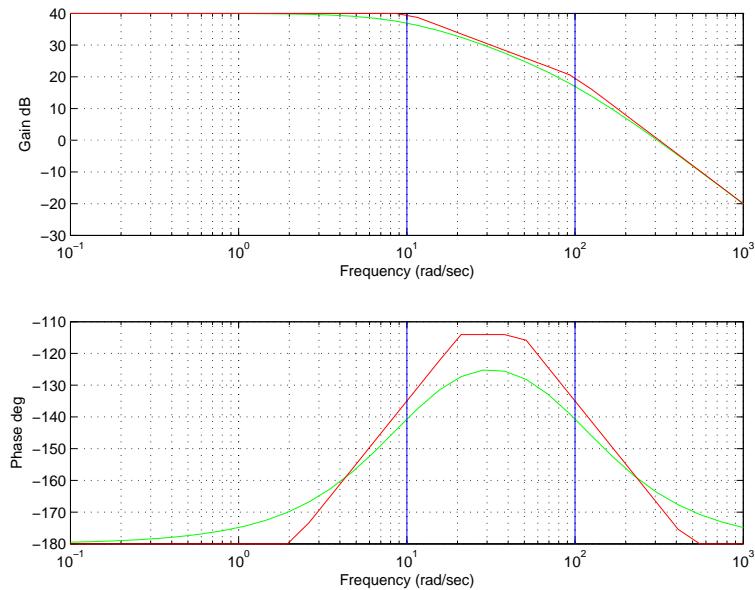


Figura 6.9:  $G(s) = -100 \frac{1}{(0.01s+1)(-0.1s+1)}$

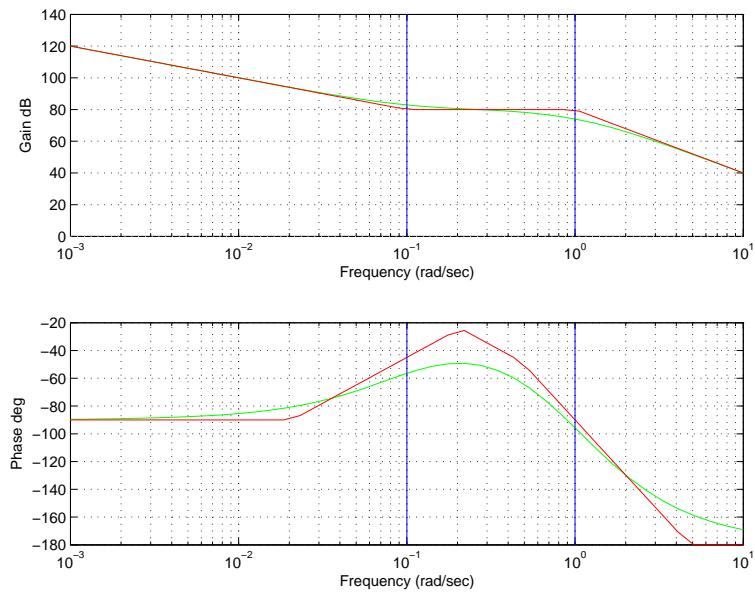


Figura 6.10:  $G(s) = 1000 \frac{10s+1}{s(s+1)^2}$

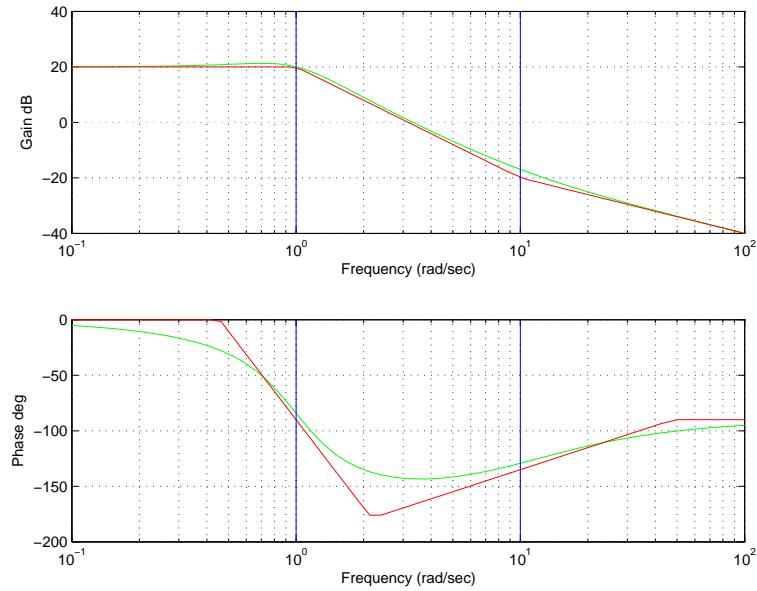


Figura 6.11:  $G(s) = \frac{s+10}{s^2+s+1}$

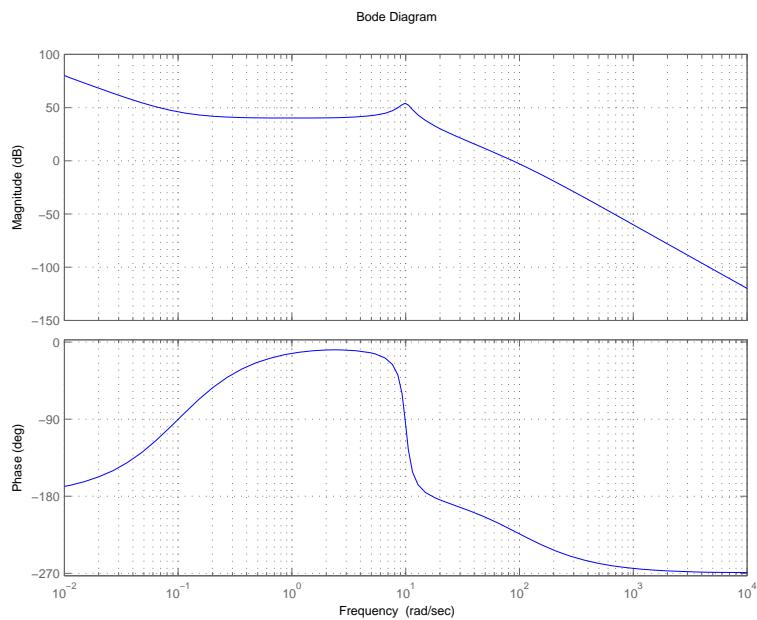


Figura 6.12:  $G(s) = 10^6 \frac{(s+0.1)^2}{s^2(s+100)(s^2+2s+100)} = \frac{(10s+1)^2}{s^2(0.01s+1)(0.01s^2+0.02s+1)}$

## 6.2 Formula di Bode

Dalla analisi dei diagrammi del modulo e della fase della risposta armonica di sistemi LTITC che abbiano tutti gli zeri a parte reale negativa (oltre che tutti i poli, come richiesto dall'uso stesso del concetto di risposta armonica), si osserva che vi è una relazione tra la pendenza del diagramma dei moduli e la fase: quando la pendenza è nulla, la fase tende ad essere zero, se la pendenza è di  $-20 h$  dB/decade, la fase tende a  $-h\pi/2$ . La relazione è valida tanto più quanto più la pendenza è costante nei pressi della pulsazione che si considera.

Questa correlazione tra la fase  $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$  e il modulo  $M(\omega) = |G(j\omega)|$  è in effetti resa precisa dalla cosiddetta *formula di Bode*:

$$\varphi(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{M(\omega)} \frac{dM(\omega)}{d\omega} \log \left| \frac{\omega + w}{\omega - w} \right| d\omega$$

che esprime il fatto che la pendenza alla pulsazione  $w$  dipende in effetti dall'andamento del diagramma dei moduli a tutte le pulsazioni, ma il logaritmo del rapporto che appare nell'integrando è molto piccolo per  $\omega$  lontane da  $w$ .

La formula di Bode può essere riscritta in termini dei logaritmi delle grandezze, cioè in termini delle pendenze dei diagrammi di Bode:

$$\varphi(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\alpha}{du} \log \left( \coth \frac{|u|}{2} \right) du$$

dove  $\alpha = \log M(\omega)$  e  $u = \log(\frac{w}{\omega})$

La formula di Bode può essere utile, nel caso di una derivazione sperimentale della risposta armonica di un sistema, per ricavare il diagramma della fase (di più difficile misura) dal diagramma delle ampiezze. Si procede in questo caso nel seguente modo:

- si approssima il diagramma dei moduli con una spezzata, per la quale la pendenza è costante a tratti
- per ogni tratto di pendenza  $\frac{d\alpha}{du}$  costante, si calcola

$$\varphi(w) = \frac{d\alpha}{du} \beta(u)$$

dove

$$\beta(u) = \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \log \left( \coth \frac{|u|}{2} \right) du \right)$$

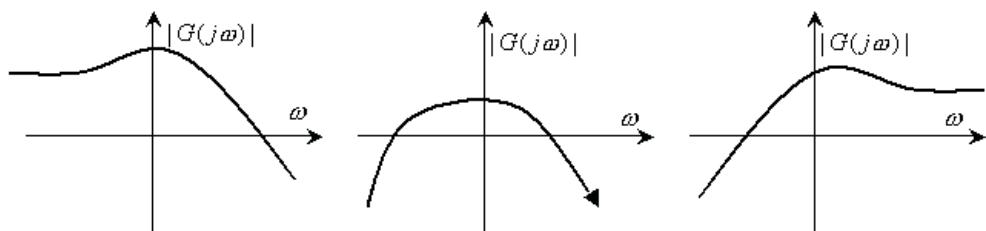
è una funzione che si tabula facilmente (ad es. con Matlab)

La fase calcolata con la formula di Bode ad una certa pulsazione è quella col minimo valore assoluto compatibile col diagramma delle ampiezze: altri andamenti delle fasi compatibili con lo stesso diagramma delle ampiezze che si potrebbero ottenere se gli zeri della  $G(s)$  fossero a parte reale positiva, avrebbero certamente sfasamenti più elevati. Per questo motivo, i sistemi che non hanno zeri a parte reale positiva si dicono *a fase minima*.

### 6.3 Banda passante, picco e pulsazione di risonanza

I diagrammi di Bode permettono la visualizzazione di alcune caratteristiche qualitativamente importanti dei sistemi dinamici lineari.

I tre comportamenti tipici di sistemi dinamici riportati in figura



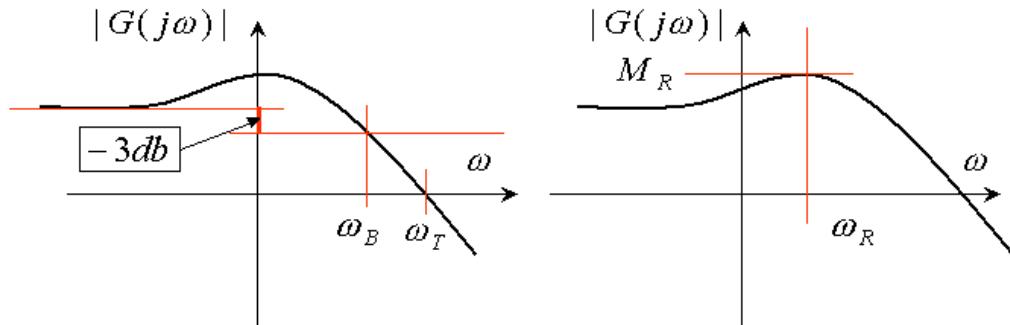
sono detti “passa-basso”, “passa-banda” e “passa-alto”, rispettivamente. Il significato di tali nomi è chiaro in relazione al significato fisico dei diagrammi di risposta armonica: tutti i segnali sinusoidali di pulsazioni alle quali il diagramma delle ampiezze ha valori molto inferiori a quelli massimi “non passano”, ovvero generano a regime uscite di trascurabile entità.

I sistemi più frequentemente incontrati nella ingegneria sono quelli passa-basso: tra questi, vi è la quasi totalità dei sistemi meccanici.

È utile fornire un indice per confrontare, in modo sintetico seppur qualitativo, diversi sistemi con analoghe caratteristiche passa-basso. Si definiscono a tale scopo, con riferimento ai diagrammi in figura, le seguenti grandezze:

- Pulsazione di taglio: è la pulsazione  $\omega_T$  alla quale il diagramma delle ampiezze di Bode attraversa l’asse a 0dB, cioè la pulsazione che distingue le sinusoidi che il sistema amplifica in uscita, da quelle che il sistema attenua;

- Banda passante (a  $-3\text{dB}$ ): è la pulsazione alla quale il sistema attenua di  $3\text{dB}$  rispetto al valore di amplificazione statica, cioè per pulsazioni che tendono a zero (tendono cioè a  $-\infty$  sull'asse delle ascisse del diagramma di Bode).
- Picco di risonanza  $M_R$ : valore massimo assunto dal diagramma delle ampiezze, normalizzato rispetto al valore del guadagno statico;
- Pulsazione di risonanza  $\omega_R$ , valore della pulsazione corrispondente al picco di risonanza.



## 6.4 Altre rappresentazioni grafiche

Si è visto che i diagrammi di risposta armonica di un sistema asintoticamente stabile contengono tutte le informazioni necessarie alla caratterizzazione del suo comportamento per qualsiasi ingresso, e si è detto che i diagrammi di Bode, che sono applicabili anche a sistemi non asintoticamente stabili rappresentati da una funzione polinomiale fratta  $G(s)$ , sono anch'essi strumenti molto utili nello studio dei sistemi lineari.

Vedremo adesso alcune diverse rappresentazioni grafiche delle stesse informazioni contenute nel tracciamento dei diagrammi di Bode, cioè in sostanza dell'andamento della variabile complessa  $G(j\omega)$  per  $\omega$  variabile tra 0 e  $\infty$ .

### 6.4.1 Diagramma Polare (o di Nyquist).

I diagrammi di Nyquist riportano tali dati direttamente sul piano complesso. Gli assi del diagramma polare (o di Nyquist) riportano quindi la parte reale  $R_g(j\omega)$  di  $G(j\omega)$  sulle ascisse, e la parte immaginaria  $I_G(j\omega)$  sulle ordinate.

Ad ogni valore di  $\omega$  corrisponde un punto nel piano complesso: il vettore che unisce l'origine del piano con questo punto è lungo  $M(\omega) = |G(j\omega)|$ , e forma un angolo con l'asse delle ascisse di  $\phi(\omega) = \arg(G(j\omega))$  (contato con segno positivo per rotazioni antiorarie).

Al variare di  $\omega$ , il punto rappresentativo percorre una curva, detta diagramma polare o di Nyquist della funzione di trasferimento. È consuetudine graduare questa curva con i valori della pulsazione  $\omega$  corrispondenti ad intervalli scelti su una scala logaritmica.

Il diagramma di Nyquist si può ottenere in modo immediato dal diagramma di Bode dello stesso sistema. Vale la pena comunque osservare che alcune caratteristiche qualitative dei diagrammi polari possono essere ottenute per ispezione diretta del sistema, e questo fatto potrà essere utile in alcune applicazioni.

Riferendoci ad un sistema descritto da una f.d.t.

$$G(s) = K_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (1 + \tau'_i s)}{s^h \prod_{i=1}^{n-h} (1 + \tau_i s)}$$

si ha:

- 1) Il punto di inizio del diagramma (per  $\omega = 0$ ) è a distanza finita dall'origine solo se il sistema non ha poli nell'origine ( $h = 0$ ). In tal caso, il diagramma inizia da un valore reale (positivo o negativo) pari al guadagno statico del sistema  $K$ .
- 2) Per sistemi con un polo nell'origine, si ha  $M(0) = \infty$ . La fase vale

$$\phi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \arg G(j\omega) = \arg \frac{K}{(j\omega)} = \arg K - \arg(j\omega) = \arg K - \frac{\pi}{2},$$

dove  $\arg(K) = 0$  se  $K > 0$  e  $\arg(K) = -\pi$  se  $K < 0$ . Ad esempio quindi, se  $K > 0$ , il diagramma inizia staccandosi da un asintoto verticale nel semipiano inferiore. La posizione dell'asintoto può essere valutata considerando il  $\lim_{\omega \rightarrow 0} R_G(\omega)$ . Nel caso di poli tutti reali si ha

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K}{j\omega} \frac{\prod_{i=1}^m (1 + j\tau'_i \omega)}{\prod_{i=1}^{n-h} (1 + j\tau_i \omega)} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K}{j\omega} \frac{(1 + j \sum_{i=1}^m \tau'_i \omega + O(\omega^2))}{(1 + j \sum_{i=1}^m \tau_i \omega + O(\omega^2))}$$

da cui

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} R_G(j\omega) = \sigma = K \left( \sum_{i=1}^m \tau'_i - \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i \right)$$

In generale, se  $G(s)$  è in forma reale di Bode, cioè

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{m-2\bar{m}} (1 + \tau'_i s) \prod_{i=1}^{\bar{m}} (1 + \frac{2\delta'_i}{\omega'_{n,i}} s + \frac{s^2}{\omega'^2_{n,i}})}{s^h \prod_{i=1}^{n-h-2\bar{n}} (1 + \tau_i s) \prod_{i=1}^{\bar{n}} (1 + \frac{2\delta_i}{\omega_{n,i}} s + \frac{s^2}{\omega^2_{n,i}})}$$

con  $h = 1$ , allora si ha

$$\sigma = K \left( \sum_{i=1}^{m-2\bar{m}} \tau'_i + \sum_{i=1}^{\bar{m}} \frac{2\delta'_i}{\omega'_{n,i}} - \sum_{i=1}^{n-1-2\bar{n}} \tau_i - \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{2\delta_i}{\omega_{n,i}} \right)$$

- 3) Per sistemi con doppio polo nell'origine, si ha ancora che il diagramma inizia con un punto a distanza infinita. Sia la parte reale che la parte immaginaria hanno limite infinito per  $\omega$  tendente a zero; comunque vale il limite  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \phi(\omega) = \arg K - \pi$ . Per sistemi con molteplicità  $h$  dei poli nell'origine, il modulo iniziale è infinito e la fase di partenza del diagramma vale  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \phi(\omega) = \arg K - h\frac{\pi}{2}$ .
- 4) Per  $\omega \rightarrow \infty$ , si ha che il punto limite del diagramma polare è finito (e pari a  $K_0$ ) solo per sistemi con grado relativo  $n - m$  zero (cioè propri ma non strettamente). Altrimenti, il diagramma tende all'origine, con fase data da

$$\phi(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg G(j\omega) = (m - n)\frac{\pi}{2} + (\text{sign}(K_0) - 1)\frac{\pi}{2}.$$

- 5) Si osservi che  $\text{sign}(K) = \text{sign}(K_0)$  se il numero di poli e zeri a parte reale positiva è nullo o pari;  $\text{sign}(K) = -\text{sign}(K_0)$  altrimenti.

#### 6.4.2 Diagramma di Nichols.

I diagrammi di Nyquist presentano l'informazione sull'andamento della curva  $G(j\omega)$  in modo più compatto dei (due) diagrammi di Bode, ma hanno due grandi limitazioni legate al fatto di non usare scale logaritmiche: non permettono una visualizzazione dettagliata degli andamenti alle basse frequenze e non consentono la derivazione dell'andamento di f.d.t. combinate per prodotto mediante somma dei contributi.

A tali inconvenienti risponde il diagramma di Nichols, che riporta sulle ascisse la fase di  $G(j\omega)$  (in radianti o gradi) e sulle ordinate il modulo di  $G(j\omega)$  in decibel. I diagrammi di Nichols sono graduati nelle pulsazioni.

I diagrammi di Nichols possono quindi essere ottenuti per somma di contributi elementari, quali:

- $G(s) = K$ : il diagramma si riduce ad un punto, di modulo pari a  $20\log|K|$ , e di fase pari a 0 se  $K > 0$ ,  $-\pi$  se  $K < 0$ ;
- $G(s) = s^{-h}$ : il diagramma è una retta parallela alle ordinate, di ascissa  $-h\frac{\pi}{2}$ ;
- $G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$ : il diagramma inizia con fase 0 e modulo 0db, e tende asintoticamente alla retta di fase  $-\frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(\tau)$ , con ampiezze sempre decrescenti e tendenti a 0 ( $-\infty$  in db.);
- $G(s) = \tau s + 1$ : il diagramma è analogo al precedente, ma ribaltato rispetto all'origine;
  
- $G(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\frac{\delta}{\omega_n}s + 1}$ : Il diagramma inizia con fase 0 e ampiezza 0db, e tende asintoticamente alla retta di fase  $-\pi \operatorname{sign}(\tau)$ , con ampiezze tendenti a 0 ( $-\infty$  in db.). Le ampiezze sono sempre decrescenti per  $\delta > \sqrt{2}/2$ , altrimenti si ha un massimo (per  $\omega = \omega_R$ ) di ampiezza  $M_R$ .
- $G(s) = \frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\frac{\delta}{\omega_n}s + 1$ : il diagramma è analogo al precedente, ma ribaltato rispetto all'origine.

La somma dei contributi ai diagrammi di Nyquist deve essere ottenuta vettorialmente, sommando, pulsazione per pulsazione, i vettori che uniscono l'origine al punto  $(\phi_1(j\omega), M_1(j\omega))$  col punto  $(\phi_2(j\omega), M_2(j\omega))$  etc. Tale somma è meno agevole di quella fatta sul diagramma di Bode (in cui si sommano semplicemente le ordinate corrispondenti alle stesse ascisse). Inoltre, l'assenza di una significativa approssimazione asintotica al diagramma di Nichols ne rende l'uso meno immediato rispetto a quello di Bode.



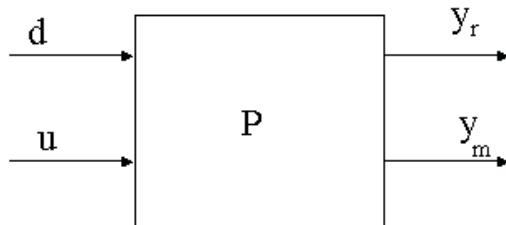
# Capitolo 7

## Retroazione

### 7.1 Generalità

Lo scopo del controllo dei sistemi dinamici è molto spesso quello di ottenere caratteristiche di funzionamento desiderate a fronte di condizioni di funzionamento non perfettamente predibili.

La configurazione di un sistema dinamico con gli ingressi di controllo  $u$  e di disturbo  $d$ , e le uscite di riferimento  $y_r$  e misurate  $y_m$ , è riportata in figura.



Nel caso lineare, il sistema  $P$  sarà caratterizzato nello spazio di stato dalla matrice dinamica  $A$ , dalla matrice degli ingressi di controllo  $B_u$  e da quella dei disturbi  $B_d$ , dalla matrice delle uscite di misura  $C_m$  e di riferimento  $C_r$ , e dalle quattro matrici di accoppiamento ingresso-uscita  $D_{u,m}$ ,  $D_{u,r}$ ,  $D_{d,m}$ ,  $D_{d,r}$ .

Alternativamente, un sistema lineare può essere caratterizzato mediante le funzioni di trasferimento tra i diversi ingressi e le diverse uscite. In forma compatta, indicando le trasformate di Laplace di una variabile con la lettera maiuscola corrispondente, si avrà

$$\begin{bmatrix} Y_r(s) \\ Y_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ru}(s) & G_{rd}(s) \\ G_{mu}(s) & G_{md}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ D(s) \end{bmatrix}$$

dove naturalmente vale  $G_{ru} = C_r(sI - A)^{-1}B_u$ , etc..

Ad esempio, si consideri il semplice modello di un asservimento di asse meccanico, costituito da un motore in corrente continua comandato da un amplificatore di transconduttanza (che regola cioè la corrente di uscita sulla base della tensione di entrata), e connesso ad un asse meccanico con proprie caratteristiche inerziali e di smorzamento. Il segnale di tensione a bassa potenza  $u$  viene dunque amplificato in una corrente  $c$  dall'azionamento elettrico, il quale possiede una dinamica descritta da

$$\tau \dot{c}(t) + c(t) = Ku(t).$$

La corrente immessa nell'armatura del motore in CC genera una coppia  $K_m c$ , che agisce sul carico meccanico secondo la legge

$$J\ddot{\theta}(t) + f\dot{\theta}(t) = K_m c(t) + d(t)$$

dove  $J$ ,  $f$  sono l'inerzia e lo smorzamento meccanico all'asse del motore, e  $d(t)$  è una coppia di disturbo (generata ad esempio dagli sforzi di taglio di un utensile). Se lo scopo del sistema è quello di ottenere un certo profilo temporale dalla posizione dell'asse, si dovrà considerare la posizione angolare dell'asse  $\theta$  come uscita di riferimento. Per quanto riguarda le misure, si potranno avere casi diversi, nei quali siano misurabili la sola  $\theta$ , o anche la velocità  $\dot{\theta}$  e/o la corrente di armatura  $c$ .

Il modello nello spazio di stato di questo sistema si può dunque ottenere dal sistema delle due equazioni differenziali (di ordine uno e due, rispettivamente). Ponendo ad esempio come stati  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ , e  $x_3 = c$ , si avrà

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_u u + B_d d \\ y_r &= C_r x \\ y_m &= C_m x\end{aligned}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J} & \frac{K_m}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}; \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \end{bmatrix}; \quad B_d \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_r = [1 \ 0 \ 0]; \quad C_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

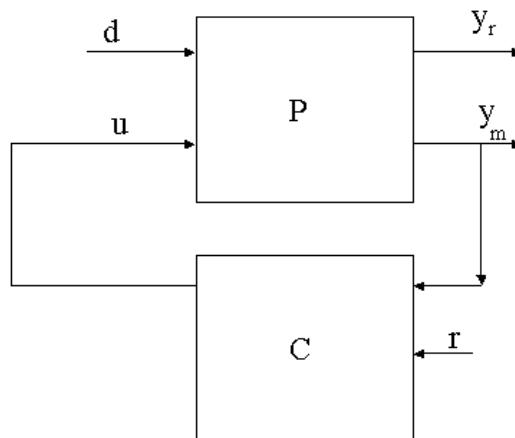
Naturalmente, la matrice  $C_m$  sopra scritta vale nel caso in cui tutte le grandezze sopra elencate fossero disponibili per la misura. La seconda e terza riga devono essere rimosse se si hanno solo misure di posizione dell'asse,

cosa che assumiamo: pertanto, d'ora in poi, considereremo semplicemente  $C_m = C_r$ .

In termini di funzioni di trasferimento, considerando che l'uscita di posizione è allo stesso tempo uscita di riferimento e di misura, si può scrivere

$$\begin{aligned} G_{ru}(s) = G_{mu}(s) &= \frac{KK_m}{s(\tau s+1)(Js+f)}; \\ G_{rd}(s) = G_{md}(s) &= \frac{1}{s(Js+f)}. \end{aligned}$$

In generale, il comportamento dinamico del sistema così come viene dato non soddisferà ai requisiti. Il problema del controllo sarà dunque quello di progettare un altro sistema, che diremo genericamente **controllore**, capace di usare le informazioni contenute nelle uscite misurate per determinare un ingresso di controllo opportuno, e tale che il sistema risultante dalla interconnessione verifichi le specifiche.



Nella figura, viene evidenziato anche il ruolo di un eventuale nuovo ingresso  $r$  al controllore, che può servire per far seguire al sistema desiderate traiettorie. Il controllore è in generale esso stesso un sistema dinamico, con un numero di stati  $n_c$  la cui scelta è uno degli obiettivi del progetto, il cui ingresso sono le uscite di misura del sistema, e la cui uscita viene usata come ingresso di controllo del sistema. Nel caso di un controllore lineare, questo può venire caratterizzato dalle matrici  $A_c, B_c, C_c, D_c$ , ovvero da una f.d.t.  $C(s)$ .

Nel caso frequente di sistemi SISO in cui l'uscita di misura e di riferimento coincidono, lo schema del sistema controllato può essere tracciato in qualche maggior dettaglio come riportato in figura

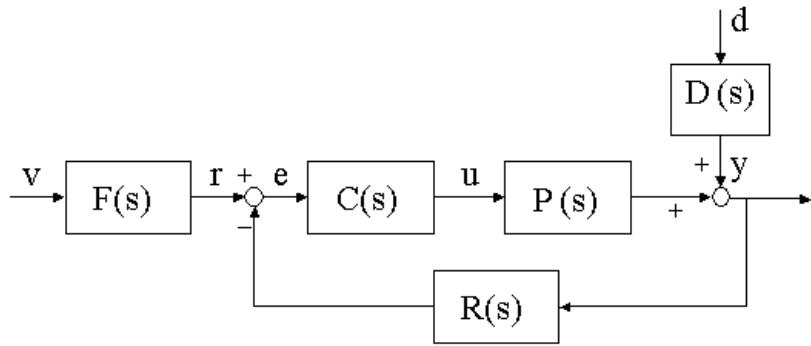


Figura 7.1: Schema a blocchi di un sistema controllato

Il significato dei blocchi in figura è il seguente:

**P(s)** indica la f.d.t. dell'impianto da controllare tra l'ingresso  $u$  e l'uscita  $y$ ;

**D(s)** indica la f.d.t. tra il disturbo  $d$  e l'uscita  $y$ ;

**R(s)** è la f.d.t. della catena di reazione. Con questa f.d.t si può modellare la dinamica di trasduttori non istantanei (come ad esempio accelerometri, inclinometri, giroscopi, etc.). In alcuni casi,  $R(s)$  può anche rappresentare un sistema dinamico per la compensazione che il progettista può intenzionalmente inserire in questo tratto dell'anello;

**C(s)** indica la f.d.t. del controllore, o compensatore, in catena diretta, il cui progetto è oggetto del nostro studio;

**F(s)** indica una f.d.t. di precompensazione, o di “azione in avanti” (*feedforward*), talvolta usata per adattare il riferimento esterno  $v$  al riferimento diretto  $r$ .

Nel caso dell’azionamento elettrico di un asse meccanico si ha ad esempio:

$$P(s) = \frac{KK_m}{s(\tau s + 1)(Js + f)}; \quad D(s) = \frac{1}{s(Js + f)}; \quad R(s) = 1.$$

## 7.2 Effetti della Retroazione

Lo schema di asservimento riportato sopra è utile per spiegare alcuni dei motivi che rendono spesso indispensabile l'adozione di meccanismi di controllo in retroazione.

### 7.2.1 Robustezza alle Variazioni Parametriche

Consideriamo dapprima la sensibilità della risposta del sistema alle difformità di comportamento delle componenti rispetto a quello nominale (problema della *robustezza* del sistema rispetto ad errori di modello). Per semplicità, modelliamo tali difformità come variazioni di un parametro  $\alpha$  significativo del modello (una massa, una lunghezza, etc.) rispetto ad un valore nominale  $\hat{\alpha}$ . Sia dunque  $\hat{Y}(s) = P(\hat{\alpha}, s)U(s)$  la risposta dell'impianto in anello aperto ad un particolare ingresso  $U(s)$  in condizioni nominali, e  $Y(s) = P(\alpha, s)U(s)$  la risposta in condizioni perturbate. La differenza relativa tra le uscite vale

$$\frac{\Delta Y(s)}{\hat{Y}(s)} = \frac{Y(s) - \hat{Y}(s)}{\hat{Y}(s)} = \frac{P(\alpha, s) - P(\hat{\alpha}, s)}{P(\hat{\alpha}, s)} = \frac{\Delta P(s)}{P(s)}.$$

Supponiamo che tale variazione sia piccola, ed esprimiamo la variazione risentita sulla uscita in termini relativi approssimandola al primo ordine. Si avrà dunque

$$\frac{\Delta P(s)}{P(s)} \approx \left[ \frac{\partial P(s, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\hat{\alpha}} \frac{\hat{\alpha}}{\hat{P}(s)} \right] \frac{\Delta \alpha}{\hat{\alpha}} = S_{\alpha, o}(s) \frac{\Delta \alpha}{\hat{\alpha}}$$

dove  $S_{\alpha, o}(s)$  ha il significato di una sensibilità dell'impianto (in anello aperto) alle variazioni del parametro in questione.

Nel nostro esempio di azionamento, nel caso di variazioni sulla costante di coppia  $K_m$  del motore, si ha

$$S_{K_m, o}(s) = 1$$

quindi la sensibilità è totale ( $\frac{\Delta Y(s)}{Y(s)} = \frac{\Delta K_m}{K_m}$ ). Tale forte dipendenza dai valori effettivi dei parametri del modello è inaccettabile nelle maggioranza delle applicazioni.

Supponendo invece che la costante elettrica  $\tau$  sia soggetta a piccole variazioni, si ottiene

$$S_{\tau, o}(s) = \frac{-\tau s}{\tau s + 1}.$$

Questo significa che, per variazioni lente del segnale di ingresso, si ha scarsa sensibilità della risposta agli errori in  $\tau$ , mentre per segnali ad alta frequenza, cioè per  $s = j\omega$ ,  $\omega \gg 1/\tau$ , l'effetto sulla uscita è della stessa entità dell'errore parametrico (in termini relativi): infatti,

$$|S_{\tau,o}(j\omega)| \approx 1, \text{ per } \omega \gg 1/\tau.$$

Studiamo adesso l'effetto di variazioni di tal genere quando avvengono in un sistema chiuso in retroazione. A tal fine, scriviamo utilizzando le regole di composizione dei blocchi la f.d.t. in anello chiuso tra il riferimento esterno  $v$  e l'uscita  $y$ :

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = G_c(s) = F(s) \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)R(s)}$$

Si verifica facilmente che in questo caso si ottiene

$$\frac{\Delta Y(s)}{Y(s)} = \frac{\Delta G_c(s)}{G_c(s)} \approx \frac{1}{G_c(s)} \frac{\partial G_c(s)}{\partial P(s)} \Delta P(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)R(s)} \frac{\Delta_P(s)}{P(s)},$$

cioè

$$\frac{\Delta Y(s)}{Y(s)} = S(s)S_{\alpha,o}(s) \frac{\Delta \alpha}{\alpha}$$

dove il fattore

$$S(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)R(s)}$$

viene detto funzione di **sensibilità dell'anello**.

Si osserva che, per riferimenti contenenti pulsazioni  $\bar{\omega}$  tali che  $|S(j\bar{\omega})| \ll 1$ , l'effetto delle variazioni parametriche è quasi completamente annullato nelle uscite.

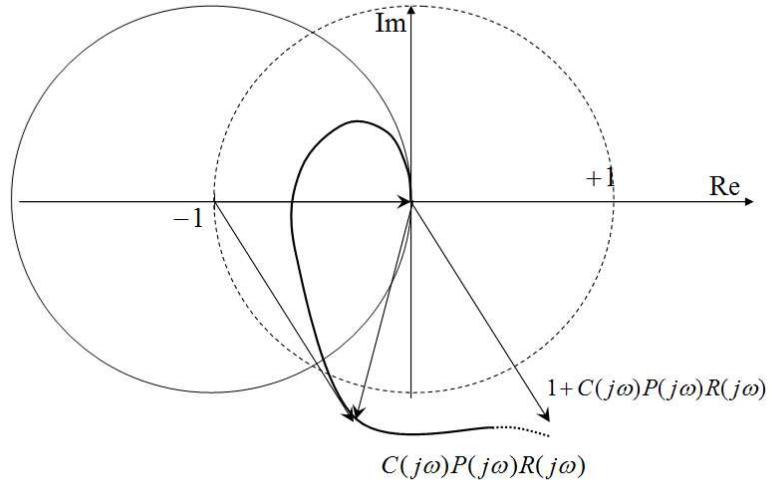
Nell'esempio dell'asservimento elettromeccanico precedentemente considerato, nel quale si ponga per semplicità  $R(s) = 1$  (sensore ideale), l'effetto della variazione di costante di coppia  $K_m$  per un ingresso a gradino viene ridotto dalla presenza anche di una semplice retroazione costante  $C(s) = a$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta G_c(s)}{G_c(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + aP(s)} \frac{\Delta K_m}{K_m} = 0$$

grazie al fatto che  $P(s)$  possiede un polo nell'origine.

Gli effetti positivi di una bassa sensibilità d'anello sono ottenuti ogni volta  $|1 + C(j\bar{\omega})P(j\bar{\omega})R(j\bar{\omega})| > 1$ : ciò può essere preso ad indicazione del fatto che valori elevati della autorità del controllore (cioè di  $|C(j\omega)|$ ) hanno effetto positivo sulla robustezza alle variazioni parametriche nel modello dell'impianto e sulla accuratezza di inseguimento dei riferimenti.

Se si traccia il diagramma di Nyquist della f.d.t.  $C(s)P(s)R(s)$ , si osserva facilmente che la sensibilità di anello del sistema è minore di uno per tutte le frequenze per le quali il diagramma stesso rimane fuori dal cerchio di raggio unitario centrato in  $-1$ .



È da osservare che, per qualsiasi sistema strettamente proprio (quali sono prevalentemente i sistemi fisici), il diagramma di Nyquist tende all'origine per  $\omega$  tendente a infinito: pertanto, la sensibilità di anello tende ad essere unitaria, o ancor maggiore, per alte frequenze.

Si consideri adesso la sensibilità della risposta del sistema in retroazione alle variazioni parametriche che possono occorrere in altri blocchi del sistema in retroazione. Si ottiene facilmente che

$$\begin{aligned} \frac{\Delta G_c(s)}{G_c(s)} &\approx \frac{1}{1+C(s)P(s)R(s)} \frac{\Delta P(s)}{P(s)} \\ &+ \frac{1}{1+C(s)P(s)R(s)} \frac{\Delta_C(s)}{C(s)} \\ &+ \frac{\Delta_F(s)}{F(s)} \\ &- \frac{C(s)P(s)R(s)}{1+C(s)P(s)R(s)} \frac{\Delta_R(s)}{R(s)} \end{aligned}$$

Se ne deduce:

- l'effetto delle variazioni nei parametri del controllore è identico a quello dei parametri dell'impianto;
- l'effetto delle variazioni di parametri del precompensatore non sono mitigati dalla retroazione (in quanto l'anello non è chiuso attorno alla fonte della incertezza). I precompensatori sono quindi elementi critici,

da usarsi con cautela: vengono usati prevalentemente per traslare i riferimenti esterni  $v$  a livelli compatibili con i riferimenti interni  $r$ .

- l'effetto delle variazioni di parametri del sensore o del compensatore in retroazione è legato alla funzione di **sensitività complementare**  $\bar{S}(s) = \frac{C(s)P(s)R(s)}{1+C(s)P(s)R(s)} = 1 - S(s)$ . Tale effetto è quindi elevato laddove è piccola la sensitività, e viceversa.

Il terzo punto è cruciale nel progetto dei sistemi di controllo. Esso esprime in sostanza il fatto che i vantaggi offerti dalla retroazione sono indissolubilmente legati alla disponibilità di sensori, la cui accuratezza è indispensabile. Laddove il sensore disponibile fosse più inaccurato dell'impianto stesso, sarebbe addirittura preferibile usare il sistema in anello aperto.

Il compromesso tra le due funzioni di sensitività si trova spesso nel campo delle frequenze. La maggioranza dei sensori in uso negli asservimenti sono sufficientemente accurati nella misura di grandezze variabili lentamente, e perdono accuratezza quando le variazioni diventano più veloci.

Come già osservato in precedenza, per impianti strettamente causali si ha  $P(s) \rightarrow 0$  quando  $|s| \rightarrow \infty$ . Per segnali di frequenza sufficientemente alta, quindi, si ottiene tipicamente  $S(s) \approx 1$ , e  $\bar{S}(s) \approx 0$ .

Il progetto accurato di  $C(s)$  può fare in modo che le due opposte esigenze si incontrino nella zona di frequenze più opportuna.

### 7.2.2 Reiezione dei Disturbi

Si consideri adesso la sensibilità della risposta del sistema ai disturbi. Nel caso di anello aperto, si ha

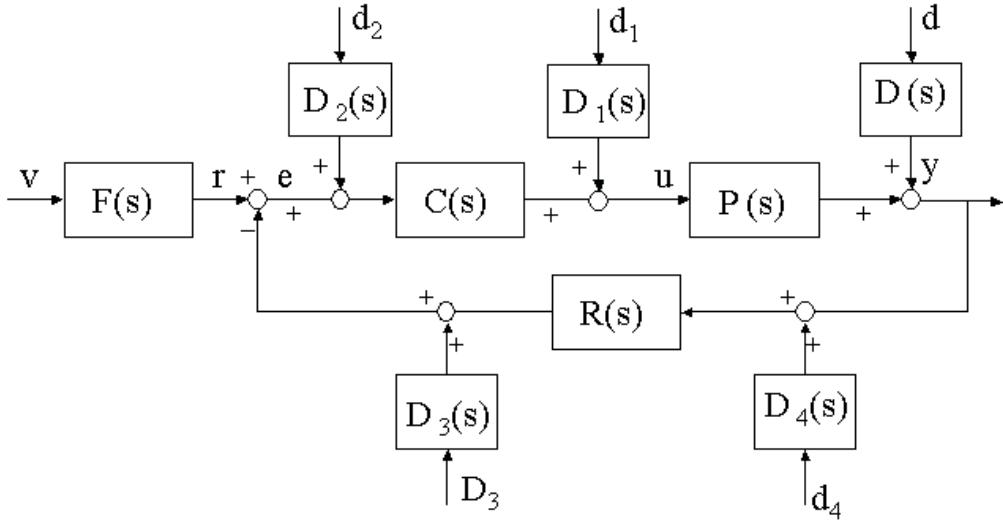
$$Y(s) = P(s)u(s) + D(s)d(s)$$

mentre in anello chiuso si ottiene

$$Y(s) = \frac{F(s)C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)R(s)}v(s) + \frac{D(s)}{1 + C(s)P(s)R(s)}d(s)$$

Si osserva che la sensibilità al disturbo è ridotta di un fattore pari alla funzione di sensitività dell'anello  $S(s)$ : i disturbi a pulsazioni in cui  $S(s)$  è piccola vengono efficacemente attenuati dalla retroazione. Conoscendo una stima del tipo di segnali di disturbo da attendersi in un sistema, è quindi possibile progettare il controllore  $C(s)$  (ed eventualmente la parte di compensazione in  $R(s)$ ) in modo da avere adeguata immunità.

È utile osservare l'effetto dei disturbi sui sistemi in retroazione in maggior dettaglio, in relazione alle possibili localizzazioni del punto di ingresso del disturbo. Si consideri quindi



Si ha facilmente che

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{F(s)C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)R(s)}v(s) \\
 &+ \frac{D(s)}{1+C(s)P(s)R(s)}d(s) \\
 &+ \frac{D_1(s)P(s)}{1+C(s)P(s)R(s)}d_1(s) \\
 &+ \frac{D_2(s)C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)R(s)}d_2 \\
 &+ \frac{-D_3(s)C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)R(s)}d_3 \\
 &+ \frac{-D_4(s)R(s)C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)R(s)}d_4
 \end{aligned}$$

da cui è facile vedere come la immunità al disturbo è via via diminuita, muovendosi a ritroso nell'anello, rispetto alla funzione di sensitività per un fattore pari alla f.d.t. in anello diretto tra il punto di inserimento del disturbo e l'uscita. La f.d.t. tra il disturbo di misura  $d_4$  e l'uscita  $y$  è pari alla funzione di sensitività complementare: è nulla nel caso di anello aperto, ed è massima (sensibilità totale) quando il guadagno di anello è elevato. Questo conferma il principio sopra delineato per cui la retroazione è valida solo in quanto i sensori sono affidabili.

Un caso particolarmente interessante è quello in cui i disturbi considerati siano costanti, ad esempio di ampiezza unitaria  $D_i(s)d_i(s) = 1/s$ . Affinchè l'effetto di un tale disturbo sulla uscita a regime del sistema possa venir

compensato completamente dalla retroazione, è necessario (per il teorema del valore finale) che la f.d.t. che lega il disturbo alla uscita si annulli per  $s = 0$ . È quindi facile osservare dalle espressioni precedenti che ciò è possibile solo quando una delle f.d.t. *a monte* del punto d'ingresso del disturbo (considerando di percorrere l'anello in senso orario) contiene un polo nell'origine.

### 7.3 Errore di regime per riferimenti persistenti.

Uno dei requisiti di un sistema controllato è la capacità di riprodurre in uscita i segnali di riferimento forniti in ingresso.

È interessante osservare, dallo schema di controllo in retroazione sopra riportato, che in assenza di disturbi la f.d.t. tra il riferimento interno  $r$  e l'errore  $e$  vale

$$e(s) = R(s)y(s) - r(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)R(s)}r(s) = S(s)r(s),$$

ovvero coincide con la funzione di sensitività dell'anello. Per valori di  $\omega$  nei quali la sensitività è piccola, l'errore nell'inseguimento di  $r$  da parte di  $y$  è piccolo rispetto al riferimento stesso.

Nell'ipotesi in cui si possa applicare al sistema chiuso in retroazione il teorema del valore finale possiamo conoscere il valore assunto dal segnale errore per  $t = \infty$ . Possiamo infatti scrivere:

$$e(t = \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)}r(s),$$

dove per semplicità si è posto  $C(s)P(s)R(s) = G(s)$ .

Si ricorda che le condizioni di applicabilità del teorema del valore finale richiedono che il segnale  $e(s)$  contenga solo modi convergenti o polinomialmente divergenti ma non oscillanti. Questo significa che si deve richiedere

- che la sensitività  $S(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)R(s)}$  (e quindi anche la f.d.t. in anello chiuso  $G_c(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$ ) sia asintoticamente stabile.
- che il segnale di riferimento sia polinomiale con poli in zero. Anche nel caso di riferimento convergente a zero (cioè non persistente) si può applicare il teorema del valore finale, ma in questo caso ovviamente il comportamento della uscita per  $t \rightarrow \infty$  tende anch'esso a zero e l'applicazione del teorema non fornisce utili indicazioni.

Vediamo dunque in dettaglio le risposte dei sistemi in retroazione rispetto ad alcuni di questi segnali di riferimento.

### Errore a regime per riferimento a gradino

Segnali a gradino del tipo  $aH(t)$  sono spesso usati per generare riferimenti costanti tali da far procedere il sistema da una configurazione di equilibrio ad un'altra, portando il valore di uscita in prossimità del valore costante  $a$ . Si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{a}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a}{1 + G(s)}.$$

Si possono dare due casi:

1. se  $G(s) = P(s)C(s)R(s)$  è di tipo 0 (cioè, non ha poli nell'origine),  $\lim_{s \rightarrow 0+} G(s)$  assume un valore finito  $G(0) = k_p \in \mathbb{R}$ , detto *guadagno statico o di posizione*. Si ha in questo caso  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{a}{1+k_p}$ ;
2. se  $G(s) = P(s)C(s)R(s)$  è di tipo 1 o superiore (cioè, ha uno o più poli nell'origine, si ha  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ )

Si osserva che, per sistemi di tipo zero, valori elevati del guadagno statico  $G(0) = C(0)P(0)R(0)$  (e quindi in particolare del guadagno statico del controllore,  $C(0)$ ) riducono in modo pressoché inversamente proporzionale l'errore di regime nell'inseguimento del gradino. Si osserva anche che, per avere inseguimento perfetto di un riferimento a gradino, è necessario avere almeno un polo nell'origine in  $G(s)$ : questo può essere in  $P(s)$  o  $R(s)$ , oppure può essere posto intenzionalmente in  $C(s)$ .

**Esempio** Si consideri la f.d.t. di impianto

$$P(s) = \frac{s + 10}{s^2 + 9s + 20}$$

con  $R(s) = 1$  e  $C(s) = K_c$ . Si osservi (ad esempio mediante il criterio di Routh) che il sistema è asintoticamente stabile ad anello chiuso per ogni valore di  $K_c$ . Nella risposta al gradino  $aH(t)$  si ha  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{a}{1 + \frac{K_c}{2}}$ .

Per avere ad esempio errore inferiore al 10%, cioè minore di  $0.1a$ , si dovrà scegliere  $K_c > 18$ . Se il controllore è invece scelto nella forma  $C(s) = K_c/s$ , si avrebbe errore a regime nullo per qualsiasi gradino e per qualsiasi  $K_c \neq 0$ .

### Errore a regime per riferimento a rampa lineare

Segnali a rampa lineare del tipo  $btH(t)$  sono spesso usati per generare riferimenti a crescita costante per il valore di uscita, spesso usati nei sistemi meccanici per spostamenti dell'organo di riferimento in tratti da percorrere a velocità costante. Si ha in questo caso

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \cdot \frac{b}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b}{sG(s)}.$$

Si possono dare qui tre casi:

1. se  $G(s)$  è di tipo 0,  $\lim_{s \rightarrow 0^+} sG(s) = 0$  quindi l'errore di inseguimento è illimitato;
2. se  $G(s)$  è di tipo 1,  $\lim_{s \rightarrow 0^+} sG(s)$  assume un valore finito  $k_v \in \mathbb{R}$ , detto *guadagno di velocità*. Si ha in questo caso  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{b}{k_v}$ ;
3. se  $G(s) = P(s)C(s)R(s)$  è di tipo 2 o superiore (cioè, ha due o più poli nell'origine, si ha  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

Si osserva qui che, se  $P(s)R(s)$  è di tipo zero, per avere inseguimento ad errore limitato di una rampa lineare è necessario che il controllore abbia almeno un polo in zero. Per rendere piccolo tale errore, è poi opportuno che il guadagno di velocità del controllore stesso, cioè  $\lim_{s \rightarrow 0} sC(s)$ , sia elevato. Se si ponessero due poli del controllore nell'origine, si otterrebbe poi l'inseguimento perfetto della rampa.

Si avrà modo di osservare nel seguito che l'utilizzo di elevati guadagni e/o l'inserimento di poli nell'origine nel controllore provoca in genere anche altri effetti indesiderabili sul sistema, e che pertanto non è mai opportuno andare oltre quanto strettamente richiesto dalle specifiche di funzionamento date.

**Esempio** Si consideri la f.d.t. di impianto

$$P(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 9s + 20}$$

con  $R(s) = 1$ . Un controllore che consistesse in una semplice amplificazione costante  $C(s) = K_c$  porterebbe ad errori di inseguimento illimitati. Ponendo  $C(s) = K_c/s$  si avrebbe  $\lim_{s \rightarrow 0} sC(s)P(s)R(s) = K_c P(0) = K_c/20$ . Per avere errore di inseguimento alla rampa lineare inferiore allo 1%, quindi, sarebbe necessario porre  $K_c > 2000$ .

#### Errore a regime per riferimenti polinomiali

Valutiamo l'errore di posizione commesso rispetto ad un generico riferimento polinomiale, cioè del tipo

$$r(t) = (a + bt + \frac{c}{2!}t^2 + \frac{d}{3!}t^3 + \dots)H(t)$$

per il quale si ha

$$r(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s^3} + \frac{d}{s^4} + \dots$$

Si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} \left( a + \frac{b}{s} + \frac{c}{s^2} + \frac{d}{s^3} + \dots \right)$$

Se  $G(s)$  è di tipo  $h$ , si ha  $\lim_{s \rightarrow 0} s^j G(s) = 0$  per ogni  $j < h$ , mentre  $\lim_{s \rightarrow 0} s^h G(s)$  assume un valore finito  $k_h \in \mathbb{R}$ . Si ha dunque che

1. l'errore a regime per ogni riferimento polinomiale di grado inferiore al tipo del sistema è nullo;
2. l'errore a regime per un riferimento polinomiale di grado  $h$  ( $h > 1$ ) pari al tipo del sistema è inverso a  $k_h$ ;
3. l'errore a regime per un riferimento polinomiale di grado superiore al tipo del sistema è illimitato.

Nella tabella seguente si riassumono gli errori a regime per sistemi di tipo 0, 1, 2 in corrispondenza di tre riferimenti standard

|        | Gradino<br>$r(t) = a$ | Rampa Lineare<br>$r(t) = bt$ | Rampa Parabolica<br>$r(t) = \frac{c}{2}t^2$ |
|--------|-----------------------|------------------------------|---|
| Tipo 0 | $\frac{a}{1+k_p}$     | $\infty$                     | $\infty$                                    |
| Tipo 1 | 0                     | $\frac{b}{k_v}$              | $\infty$                                    |
| Tipo 2 | 0                     | 0                            | $\frac{c}{k_a}$                             |

## 7.4 Stabilità in Retroazione

Nei paragrafi precedenti si sono visti alcuni importanti vantaggi della retroazione, riguardanti la robustezza, la reiezione dei disturbi, e l'inseguimento dei riferimenti. È stato osservato come in molti casi l'utilizzo di una retroazione con forte autorità del controllo (cioè grande modulo di  $C(s)$ ) fosse vantaggiosa. Possiamo attenderci peraltro che vi siano in pratica limitazioni a quanto ci si possa spingere in quella direzione. La principale limitazione discende dalla necessità di garantire la stabilità del sistema retroazionato.

Il requisito di *stabilità* del sistema nell'intorno di un punto o di una traiettoria di equilibrio che descrive il suo comportamento nominale discende dalla necessità di garantire che il sistema, per lo meno nella sua evoluzione libera, sia in grado di mantenere limitate le escursioni delle grandezze fisiche che sono coinvolte nella sua dinamica quando le condizioni iniziali non

siano esattamente quelle nominali. Oltre alla stabilità si richiede in molte applicazioni la attrattività dell'equilibrio (quindi la *asintotica stabilità*).

Nei sistemi lineari, sappiamo che la asintotica stabilità di un equilibrio comporta la sua globale asintotica stabilità, cioè la limitatezza delle traiettorie e la loro convergenza all'equilibrio a partire da qualunque condizione iniziale perturbata. Ricordiamo peraltro che nella pratica si verifica spesso il caso di un sistema il cui modello originale è nonlineare, ma che viene studiato nei pressi di un suo equilibrio con una approssimazione lineare.

In questo caso, sappiamo che se il sistema di controllo progettato per l'approssimazione lineare riesce a renderla asintoticamente stabile, allora lo stesso controllore renderà anche il sistema originale (non lineare) stabile e convergente a quell'equilibrio, anche se ciò vale solo limitatamente a condizioni iniziali perturbate per le quali l'evoluzione non si allontani mai troppo dalla regione di validità della approssimazione lineare.

È ovvio che, in linea di principio, lo studio della stabilità di un sistema retroazionato non comporta difficoltà maggiori di un sistema in anello aperto: basterebbe infatti applicare le definizioni o i criteri usati per l'anello aperto al modello del sistema in anello chiuso, che è ottenuto in modo assai semplice.

Ad esempio, per un sistema con f.d.t. in anello aperto  $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$  chiuso in retroazione negativa unitaria, basterebbe considerare la f.d.t.  $G_c(s) = \frac{n(s)}{d(s)+n(s)}$ , quindi -ad esempio- applicare il criterio di Routh al polinomio  $d(s) + n(s)$ .

Il nostro scopo è però diverso. Piuttosto che studiare le proprietà in anello chiuso di un particolare sistema, si vuole infatti studiare come le modifiche del sistema in anello aperto alterano le proprietà del sistema in anello chiuso. Sarà spesso necessario, nel progetto dei controllori, ricorrere a procedure iterative di modifica e verifica. Per tale studio sarà utile disporre di criteri di immediata applicabilità, anche a costo di una certa approssimazione.

### 7.4.1 Criterio di Nyquist

Lo studio della stabilità di sistemi lineari in anello aperto è legato all'analisi della matrice dinamica della sua rappresentazione in forma di stato, ovvero dei poli della sua rappresentazione come f.d.t..

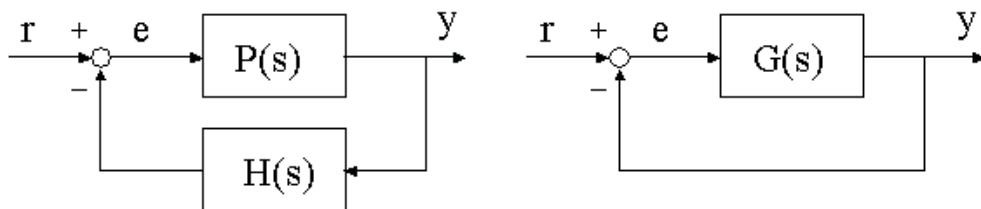
Tra i metodi visti per compiere questa analisi, oltre al calcolo esplicito o numerico delle radici del polinomio caratteristico, si ricordano i criteri di Routh-Hurwitz e Jury, i teoremi di Gershgorin e di Kharitonov per i sistemi incerti, l'equazione di Lyapunov. Si ricorda infine il criterio dell'indice

logaritmico, o criterio di Mikhailov, che pur non fornendo risposte numericamente precise, ha una immediata interpretazione grafica che lo rende particolarmente utile per quanto segue.

Il criterio di Nyquist è un criterio grafico che, sulla base dello studio del diagramma polare *completo* di una f.d.t.  $G(s)$ , fornisce indicazioni precise sul numero di poli instabili della f.d.t.  $G_c(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$  ottenuta ponendo il sistema in retroazione negativa unitaria.

L'ipotesi di retroazione unitaria negativa non è limitante in quanto molte configurazioni di sistemi in retroazione possono essere ricondotte in questa forma.

Se ad esempio si desidera studiare la stabilità in retroazione del sistema a sinistra nella figura sottostante,



si può far riferimento allo schema riportato a destra, dove si ponga  $G(s) = P(s)H(s)$ , ed applicare quindi il criterio di Nyquist al diagramma polare della  $G(s)$ .

Si forniscono nel seguito due versioni del criterio di Nyquist, di cui la prima è di di più facile applicazione e dimostrazione, ma limitata generalità, mentre la seconda è pienamente generale.

**Criterio di Nyquist** *Dato un sistema avente una funzione di trasferimento  $G(s)$  priva di poli immaginari puri, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema  $G_c(s)$  in retroazione negativa unitaria sia asintoticamente stabile, è che il diagramma polare completo della  $G(s)$  circondi senza toccarlo il punto  $(-1 + j0)$  in senso antiorario tante volte quante sono i poli con parte reale positiva della  $G(s)$ .*

Si dice *completo* il diagramma di  $G(s)$  ottenuto per  $s = j\omega$  con  $\omega \in (-\infty, +\infty)$ . Per determinare  $G(-j\omega)$  osserviamo che se  $G(j\omega) = R(j\omega) + jI(j\omega)$ , allora  $G(-j\omega) = R(j\omega) - jI(j\omega)$ . Per disegnare il diagramma completo è quindi sufficiente ribaltare il diagramma di Nyquist rispetto all'asse reale.

Come caso particolare del criterio sopra esposto, si ha che nel caso in cui la  $G(s)$  sia priva di poli instabili, il diagramma polare completo non deve circondare né toccare il punto critico.

### Dimostrazione del criterio di Nyquist.

Data la funzione di trasferimento ad anello aperto  $G(s)$ , indichiamo con  $n(s)$  e  $d(s)$  i polinomi a numeratore e a denominatore. Si ha

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, \quad G_c(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{n(s)}{n(s) + d(s)},$$

quindi i poli del sistema in anello chiuso sono le radici del polinomio  $d^*(s) = n(s) + d(s)$ .

Utilizzeremo qui una versione leggermente modificata del criterio di Mikhailov. Per un polinomio  $p(s)$ , si consideri l'angolo  $\Phi_p$  di cui ruota il vettore  $p(j\omega)$  quando  $\omega$  varia da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Essendo  $p(-j\omega)$  pari al compleso coniugato di  $p(j\omega)$ , l'angolo  $\Phi_p$  per  $0 < \omega < \infty$  risulta il doppio di quello valutato per  $0 \leq \omega < \infty$ . Applicando questo criterio ai due polinomi dei poli in anello aperto,  $d(s)$ , e chiuso,  $d^*(s)$ , si ha

$$\begin{aligned} \Phi_d &= \pi(n_a - 2r_a), \\ \Phi_{d^*} &= \pi(n_c - 2r_c), \end{aligned}$$

dove  $n_a$  è il numero dei poli in anello aperto,  $r_a$  il numero dei poli instabili in anello aperto,  $n_c$  il numero dei poli in anello chiuso, e  $r_c$  quello dei poli instabili in anello chiuso. Se il sistema  $G(s)$  è causale, cosa che assumeremo, il grado di  $d^*(s) = n(s) + d(s)$  è uguale a quello di  $d(s)$ , quindi si avrà  $n_c = n_a$ .

Si osservi ancora che

$$1 + G(s) = \frac{d^*(s)}{d(s)}.$$

Quindi, detto  $\Psi$  l'angolo di cui ruota il vettore  $1 + G(j\omega)$  intorno alla origine per  $0 < \omega < \infty$ , si ha

$$\Psi = \Phi_{d^*} - \Phi_d = \pi(n_c - 2r_c) - \pi(n_a - 2r_a) = 2\pi(r_a - r_c)$$

da cui

$$r_c = r_a - \frac{\Psi}{2\pi}.$$

Infine, osservando che il numero di giri  $\frac{\Psi}{2\pi}$  compiuto da  $1 + G(j\omega)$  attorno all'origine coincide con il numero di giri compiuti da  $G(j\omega)$  attorno al punto  $-1 + j0$ , la tesi è dimostrata.

Nel caso in cui si presenti singolarità sull'asse immaginario il teorema di Nyquist si applica ancora, con l'accortezza di considerare anche le rotazioni di  $\pi$  (“mezzi giri”):

*Il sistema in retroazione è asintoticamente stabile se e solo se il diagramma polare della  $G(j\omega)$ , tracciato per  $\omega \in (-\infty, +\infty)$ , compie attorno al punto  $-1 + j0$  senza toccarlo tanti giri in senso antiorario quanti sono i poli di  $G(s)$  a parte reale positiva, e tanti mezzi giri in senso antiorario quanti sono i poli immaginari puri.*

**Esempio 1.** La funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2 + \frac{1}{2}s + 1},$$

ha il diagramma di Nyquist riportato in fig. 7.2, Il punto  $(-1 + j0)$  non è ne

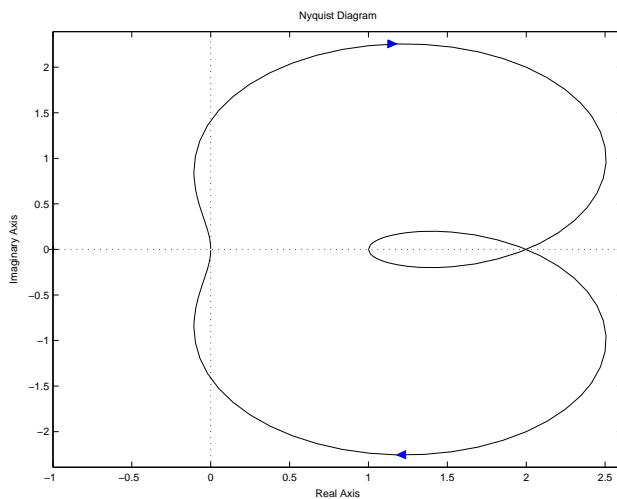


Figura 7.2: Diagramma di Nyquist per l'esempio 1, con  $K = 1$ .

toccato né circondato dal diagramma: pertanto il sistema rimane asintoticamente stabile in anello chiuso. Si nota inoltre che il diagramma polare non attraversa mai l'asse reale negativo. Pertanto, anche per valori maggiori di  $K$ , la stabilità in anello chiuso è sempre garantita (la amplificazione per  $K$  ha l'effetto di aumentare il modulo di  $G(j\omega)$  senza alterarne la fase, quindi di scalare radialmente il diagramma polare senza alterarne la forma).

**Esempio 2.** La funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10K}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6},$$

ha poli in  $-1, -2$ , e  $-3$ . Il suo diagramma polare completo è riportato in figura 7.3. Il diagramma tracciato con  $K = 1$  non circonda né tocca il

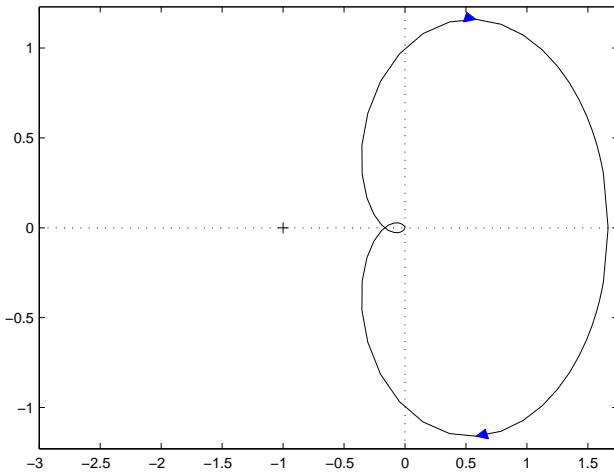


Figura 7.3: Diagramma di Nyquist per l'esempio 2, con  $K = 1$ .

punto critico quindi, per il criterio di Nyquist, il sistema in retroazione é asintoticamente stabile. Si osserva però che, per valori maggiori di  $K$ , il luogo attraversa l'asse reale negativo in punti sempre più a sinistra. Per un valore di  $K$  sufficientemente alto, il luogo raggiunge il punto  $-1 + j0$ ; per valori superiori a tale valore critico, il luogo circonda in senso orario il punto  $-1 + j0$  ed il sistema diviene instabile in anello chiuso. Per il valore di  $K$  per il quale il diagramma polare tocca il punto critico, almeno un polo del sistema in anello chiuso si trova sull'asse immaginario, quindi il sistema in retroazione è marginalmente stabile. La stabilità in anello chiuso si dice *condizionata* dal valore del guadagno  $K$ .

**Esempio 3.** La funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K}{2s(s^2 + s + 1)},$$

ha il diagramma di Nyquist riportato in fig. 7.4. Il sistema in anello aperto

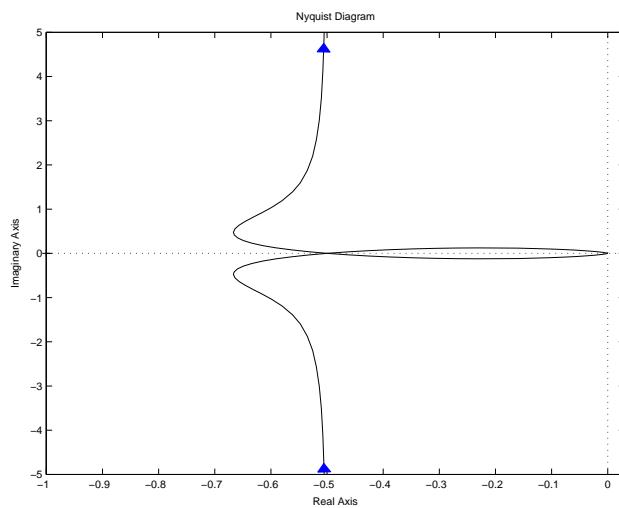


Figura 7.4: Diagramma di Nyquist per l'esempio 3 con  $K = 1$ .

non ha alcun polo instabile ma un polo nell'origine. Non essendo il punto  $(-1 + j0)$  né toccato né circondato per  $K = 1$ , ma compiendosi un mezzo giro in senso antiorario, il sistema in retroazione è asintoticamente stabile. All'aumentare di  $K$  si ottiene però anche in questo caso una retroazione instabile.

**Esempio 4.** La funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K}{s^2(s^2 + s + 1)},$$

ha il diagramma di Nyquist riportato in fig. 7.5. Si osservi che  $\angle G(j\omega) \rightarrow -\pi$  sia per  $\omega \rightarrow 0^+$  che per  $\omega \rightarrow 0^-$ . Il diagramma di sinistra compie un giro

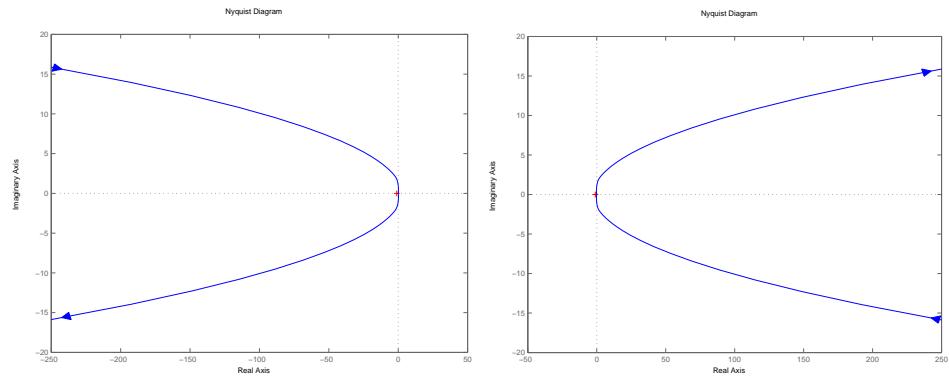


Figura 7.5: Diagrammi di Nyquist per l'esempio 4 con  $K = 1$  (a sinistra) e  $K = -1$  (a destra).

orario intorno al punto  $(-1 + j0)$ , e tanto rimane vero indipendentemente dal valore di  $K > 0$ , pertanto il sistema complessivo è instabile. Anche nel caso in cui il segno di  $K$  sia negativo (diagramma a destra), si avrebbe instabilità dell'anello chiuso: infatti si hanno in questo caso zero circondamenti, insufficienti per il teorema di Nyquist applicato ad un sistema con due poli sull'asse immaginario.

**Esempio 5.** La funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + s - 2},$$

avente poli in  $-2$  e  $1$ , ha il diagramma polare completo riportato in figura 7.6. Il diagramma tracciato con  $K = 2.5$  circonda il punto critico una volta in senso antiorario: il sistema, instabile in anello aperto, è quindi stabilizzato dalla retroazione per guadagni sufficientemente alti ( $K > 2$ ). b

### 7.4.2 Margini di stabilità.

Una delle implicazioni più importanti del criterio di Nyquist è la possibilità di studiare, sulla base del diagramma polare dell'anello aperto, non solo

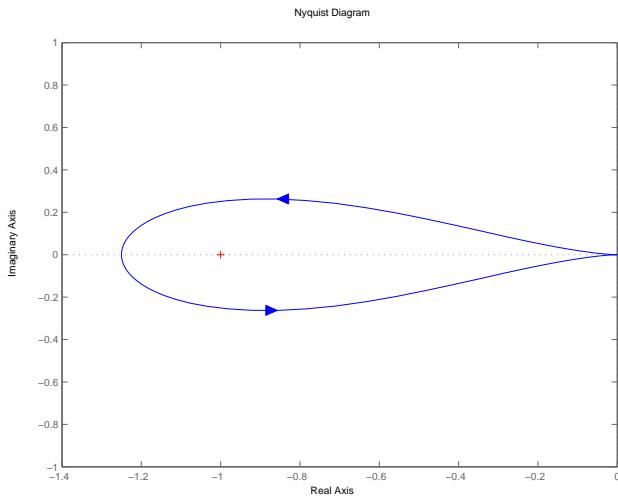


Figura 7.6: Diagramma di Nyquist (o polare) per l'esempio 5, con  $K = 2.5$ .

la stabilità dell'anello chiuso, ma anche la robustezza di questa proprietà rispetto a deviazioni del sistema dal modello nominale.

Si consideri il modello di un sistema in anello aperto nominalmente dato dalla funzione di trasferimento  $G(s)$ . Su questo modello si pensino applicata una perturbazione costituita dalla moltiplicazione per un fattore  $K$  (che altera il guadagno statico del sistema) e da un ritardo di  $\tau$  secondi. Il modello perturbato è quindi dato da

$$G'(s) = KG(s)e^{-s\tau}.$$

Si noti che l'effetto della modifica del guadagno sul diagramma di Nyquist della  $G(s)$  è, come già osservato, quello di scalare radialmente il diagramma senza alterarne la fase. L'effetto del ritardo è invece quello di sfasare la risposta senza alterarne la ampiezza. Si osservi infatti che il numero complesso  $e^{-j\omega\tau}$  ha modulo unitario per ogni pulsazione, e fase  $-j\omega\tau$  tanto più negativa (in ritardo) quanto più alta è la pulsazione (fig. 7.7 - a)). Quando il ritardo è posto in serie ad una f.d.t., il diagramma polare di quest'ultima è modificato ruotando in senso orario i punti di  $G(j\omega)$  di angoli crescenti con la pulsazione - conferendo al diagramma delle  $G(s)$  strettamente proprie un andamento a spirale convergente a zero<sup>1</sup>.

Dalla applicazione del criterio di Nyquist ad un modello perturbato di f.d.t. in anello aperto, risulta evidente come qualsiasi sistema può essere reso instabile in anello chiuso se perturbato da un sufficiente variazione del

<sup>1</sup> $G(j\omega)e^{-j\omega\tau}$  converge al cerchio di raggio  $G(j\infty)$  per sistemi a grado relativo zero.

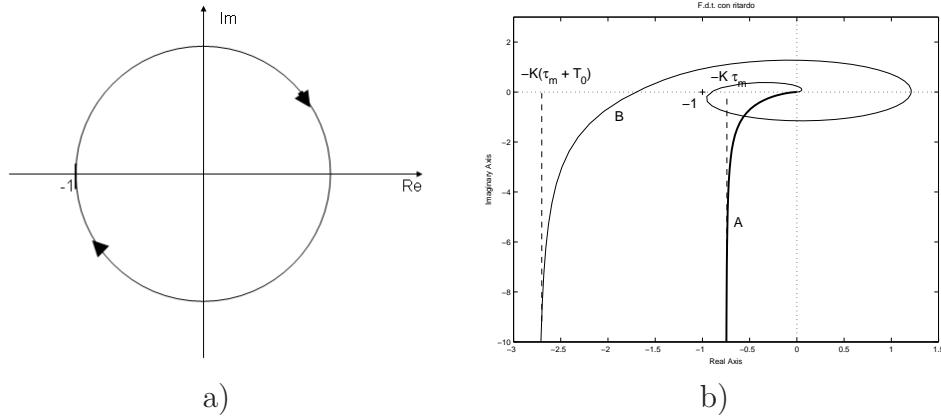


Figura 7.7: Diagramma polare di un elemento di ritardo puro  $e^{-s\tau}$ , e suo effetto in serie ad una f.d.t.  $G(s) = \frac{K}{s(1+\tau_m s)}$ . Si noti che per  $\omega \rightarrow \infty$  la fase di  $G(s)e^{-s\tau}$  diverge a  $-\infty$ , ed il diagramma polare converge a zero avvolgendosi a spirale (non visibile nel disegno per motivi di scala).

guadagno e/o da un ritardo sufficientemente lungo. È molto importante nello studio pratico della stabilità dei sistemi caratterizzare il massimo margine tollerabile di tali perturbazioni.

Per una f.d.t.  $G(s)$  stabile in anello aperto, si introducono pertanto le seguenti definizioni

- *Margine di Ampiezza* (o di guadagno)  $M_a$ : la massima amplificazione compatibile con la stabilità dell'anello chiuso;
- *Margine di Fase*: il massimo ritardo di fase compatibile con la stabilità dell'anello chiuso;

I margini così definiti sono visualizzati immediatamente sul diagramma polare della  $G(s)$  (fig. 7.8):

- Il margine di ampiezza è l'inverso del modulo dell'intercetta tra il diagramma polare e l'asse reale:  $M_a = \frac{1}{|G(j\omega_a)|}$ , dove  $\omega_a$  è la pulsazione alla quale il diagramma polare intercetta l'asse reale negativo, cioè dove  $\angle G(j\omega_a) = -\pi$ ;
- Il margine di fase è l'angolo tra l'asse reale negativo ed il vettore  $G(j\omega_f)$ , dove  $\omega_f$  è la pulsazione alla quale il diagramma polare intercetta la circonferenza di modulo unitario centrata nell'origine, cioè dove  $\|G(j\omega_f)\| = 1$ .

In entrambe i casi, se le pulsazioni  $\omega_a$  e  $\omega_f$  non fossero unicamente definite, il valore dei margini è il minimo tra quelli corrispondenti.

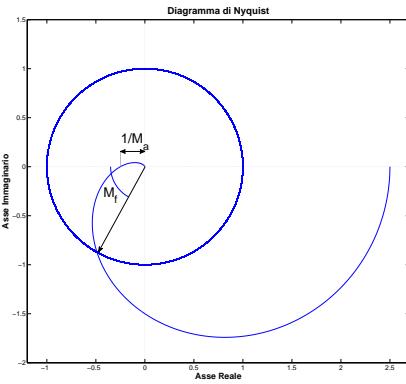


Figura 7.8: Margini di ampiezza e fase illustrati sul diagramma di Nyquist.

I margini di ampiezza e fase sono ben caratterizzati anche sui diagrammi di Bode (fig. 7.9):

- Nel diagramma delle fasi, la pulsazione  $\omega_a$  viene individuata dalla ascissa in corrispondenza della quale il diagramma attraversa la retta a  $-\pi$ . Il margine  $M_a$  è visualizzato dalla distanza tra il diagramma delle ampiezze a quella pulsazione, e l'asse a  $0db$  (cioè a guadagno unitario), ovvero  $M_a(db) = -|G(j\omega_a)|$ .
- Nel diagramma delle ampiezze, la pulsazione  $\omega_f$  è individuata dalla ascissa in corrispondenza all'attraversamento dell'asse a  $0db$ . Il margine di fase  $M_f$  è quindi visualizzato dalla distanza tra il diagramma delle fasi a quella pulsazione, e l'asse a  $-\pi$ .

### 7.4.3 Luoghi a modulo e fase costanti

Oltre alle caratteristiche di stabilità dell'anello chiuso evidenziate dal criterio di Nyquist, la analisi del diagramma polare del sistema  $G(s)$  in anello aperto può fornire altre utili e più dettagliate informazioni sul comportamento dello stesso in anello chiuso.

Considerando la funzione di trasferimento in anello chiuso (con retroazione negativa unitaria)

$$G_C(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}, \quad (7.1)$$

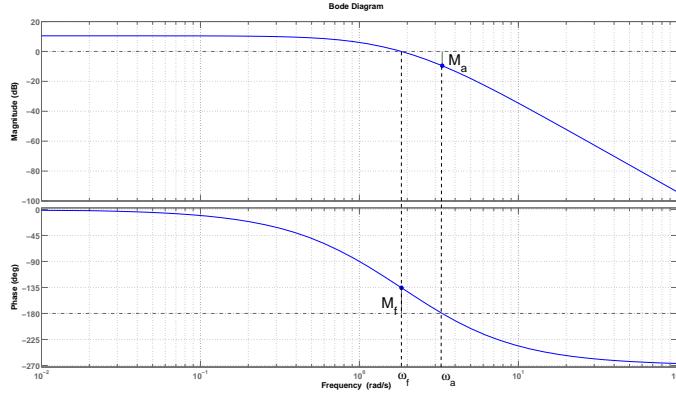


Figura 7.9: Margini di ampiezza e fase illustrati sul diagramma di Bode

indichiamo con  $M$  e  $\phi$ , rispettivamente, il modulo e la fase del numero complesso  $G_C(j\omega) = M \exp(j\phi)$ , mentre  $R$  e  $I$  indicheranno la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso  $G(j\omega) = R + Ij$ .

### Luoghi a modulo costante.

Si ha facilmente

$$M^2 = \frac{|R + Ij|^2}{|1 + R + Ij|^2} = \frac{R^2 + I^2}{(1 + R)^2 + I^2},$$

dalla quale si ottiene

$$M^2[(1 + R)^2 + I^2] = R^2 + I^2,$$

ovvero

$$R^2(M^2 - 1) + I^2(M^2 - 1) + 2M^2R + M^2 = 0. \quad (7.2)$$

Questa equazione corrisponde ad una famiglia di circonferenze nel piano complesso, parametrizzata dal valore di  $M^2$ . Si distinguono i seguenti casi (vedi fig. 7.10):

1.  $0 < M < 1$ : la circonferenza ha centro nel punto dell'asse reale di ascissa  $\frac{M^2}{1-M^2} > 0$  e raggio  $r = \sqrt{\frac{M^2}{(1-M^2)^2}}$ ;
2.  $M = 1$ : la circonferenza degenera in una retta parallela all'asse immaginario con ascissa reale  $R = -\frac{1}{2}$ ;

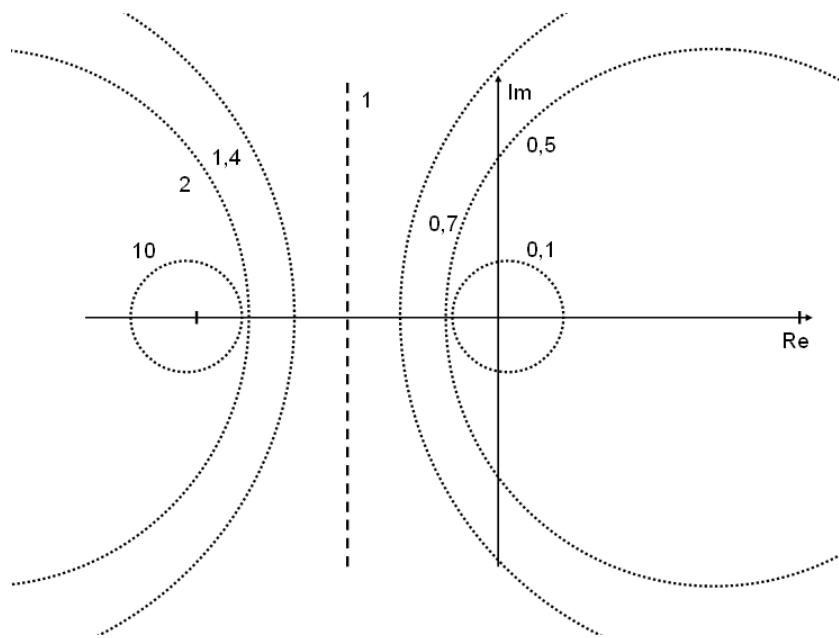


Figura 7.10: Luoghi a modulo costante nel piano complesso.

3.  $M > 1$ : la circonferenza ha centro nel punto dell'asse reale di ascissa  $\frac{M^2}{1-M^2} < -1/2$  e raggio  $r = \sqrt{\frac{M^2}{(1-M^2)^2}}$ ;
4.  $M \rightarrow \infty$  : la circonferenza degenera nel punto  $(-1, 0)$ ;

Una volta tracciate le circonference di questa famiglia nel piano complesso su cui è riportato il diagramma polare di  $G(j\omega)$ , è immediato ricavare il valore del modulo di  $G_C(j\omega)$  per i diversi valori della pulsazione  $\omega$ .

### **Luoghi a fase costante.**

Si scriva adesso

$$G_C(j\omega) \frac{(1 + R - Ij)}{(1 + R - Ij)} = \frac{R(1 + R) + I^2 + Ij}{(1 + R)^2 + I^2}$$

da cui

$$\phi = \arctan \frac{I}{(1 + R)R + I^2}.$$

Definendo  $N = \tan \phi$  si ha

$$N = \frac{I}{(1 + R)R + I^2}$$

da cui

$$R(R+1) + I^2 - \frac{I}{N} = 0.$$

Questa equazione corrisponde ancora ad una famiglia di circonferenze nel piano complesso, parametrizzata dal valore di  $N$ . Si distinguono i seguenti casi (vedi fig. 7.11):

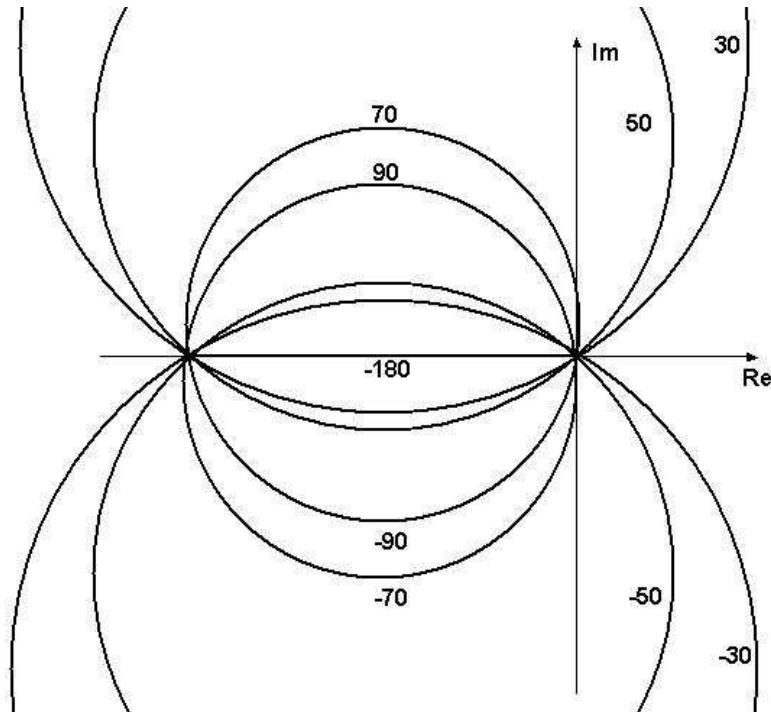


Figura 7.11: Luoghi a fase costante.

1.  $N < 0$  ( $-\pi/2 < \phi < 0$ ): la circonferenza è centrata in un punto di ascissa reale  $-\frac{1}{2}$  e parte immaginaria  $\frac{1}{2N} < 0$ , di raggio  $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(N^2+1)}{N^2}}$ ;
2.  $N = 0$  ( $\phi = 0$ ): la circonferenza degenera nell'asse reale;
3.  $N > 0$  ( $0 < \phi < \pi/2$ ): la circonferenza è centrata in un punto di ascissa reale  $-\frac{1}{2}$  e parte immaginaria  $\frac{1}{2N} > 0$ , il cui raggio è ancora  $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(N^2+1)}{N^2}}$ .

Si noti che tutte le circonferenze della famiglia passano per i punti  $(0,0)$  e  $(-1,0)$ .

### Banda passante, picco e pulsazione di risonanza di un sistema retroazionato

Dall'esame del diagramma polare di un sistema in anello aperto tracciato su una carta su cui sono riportati i cerchi a  $M$  e  $N$  costanti, è possibile ricavare alcune utili indicazioni sul comportamento del sistema in anello chiuso.

Il modulo del *picco di risonanza*  $M_R$  del sistema in anello chiuso, ovvero il massimo modulo della funzione di trasferimento in anello chiuso, si legge come il valore associato alla circonferenza di massimo modulo  $M$  toccata dal diagramma polare - quindi alla circonferenza tangente al diagramma stesso (vedi fig. 7.12); la pulsazione di risonanza  $\omega_R$  è letta dalla graduazione del diagramma polare stesso, nel punto di tangenza.

La *banda passante* in anello chiuso di un sistema è facilmente visualizzata come la pulsazione  $\omega_B$  alla quale il diagramma polare in anello aperto della  $G(s)$  interseca la circonferenza a  $M$  costante con  $M = M_0/\sqrt{2}$  (ovvero  $M_0 - 3$  se le grandezze ed i luoghi sono espressi in decibel), dove  $M_0 = |G(0)/(1 + G(0))|$  è il guadagno statico in anello chiuso. Il valore di  $M_0$  può essere anch'esso letto dalla carta, essendo quello che caratterizza la circonferenza passante per  $G(0)$ ). Si veda ad es. la fig. 7.12.

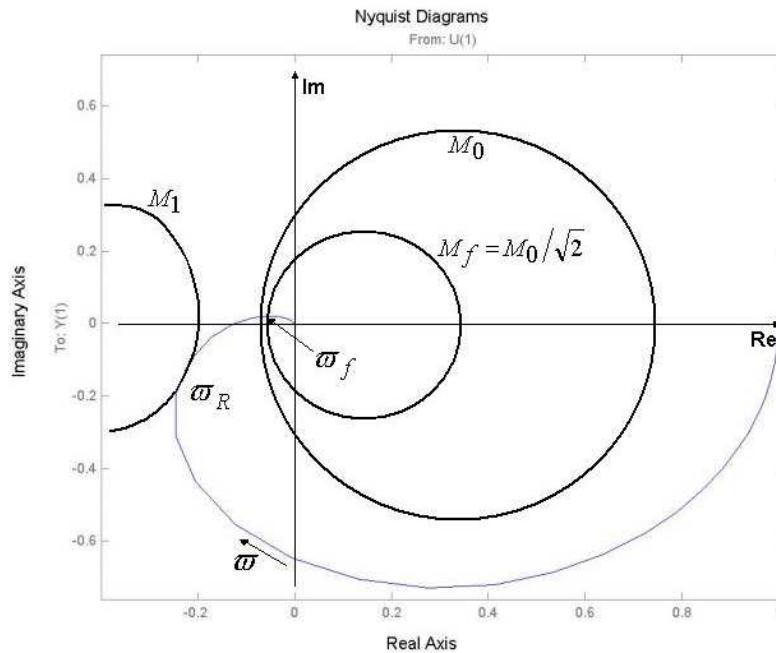


Figura 7.12: Diagramma polare di un sistema in anello aperto tracciato su carta che riporta i luoghi a modulo costante.

Nel caso di sistemi con uno o più poli nell'origine si ha  $M_0 = 1$ ; analogamente, per sistemi ad alto guadagno statico  $G(0) \gg 1$  si ha  $M_0 \approx 1$ . In questo caso, la banda passante è data dalla intersezione con la circonferenza a  $M = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ( $-3\text{db}$ ). Come si osserva in fig. 7.13, tale circonferenza interseca la circonferenza unitaria nei punti  $0 \pm j1$ .

Se ne deduce che, per sistemi con alto guadagno statico in anello aperto per i quali l'attraversamento del cerchio a modulo unitario avviene con fase di circa  $-\pi/2$ , la pulsazione alla quale si attraversa tale cerchio approssima bene la banda passante  $\omega_B$ . Questo stesso argomento, trasposto in termini dei diagrammi di Bode del sistema, indica che *per un sistema a fase minima di tipo  $t > 0$ , ovvero ad alto guadagno statico, il cui diagramma delle ampiezze attraversi l'asse a 0db con pendenza  $-1$  sostenuta<sup>2</sup>, la pulsazione di taglio  $\omega_T$  è una buona approssimazione della banda passante in anello chiuso  $\omega_B$* . Nel caso che  $G(j\omega)$  raggiunga modulo unitario con sfasamenti maggiori, dalla

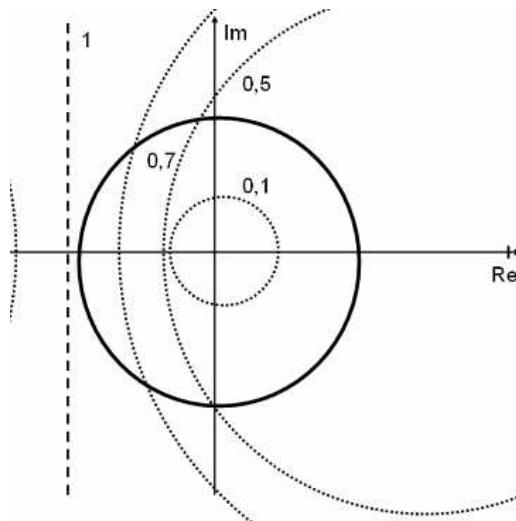


Figura 7.13: Circonferenza unitaria e luogo a modulo  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  costante.

fig. 7.13 si osserva che  $\omega_T$  diviene una approssimazione per difetto della banda passante  $\omega_B$

---

<sup>2</sup>Se l'attraversamento avviene sufficientemente lontano dalle pulsazioni caratteristiche dei poli e degli zeri del sistema, infatti, per il teorema di Bode la pendenza  $-1$  (cioè  $-20\text{decibel per decade}$ ) implica fase pari a circa  $-\pi/2$

# Capitolo 8

## Progetto del Controllore

Si consideri un impianto da controllare  $P$ , che accetta un ingresso di comando  $u(t)$  ed una uscita di prestazione  $y(t)$ . Sulla uscita del sistema influisce anche un disturbo esterno  $d(t)$ . Supponiamo che la misura della uscita sia resa disponibile da un sensore con caratteristiche dinamiche sufficientemente veloci da poter essere trascurate, ma soggetto a un rumore di misura  $\nu(t)$ .

Ci proponiamo di progettare un *controllore* per questo sistema, cioè un nuovo sistema dinamico che accetta per ingressi gli errori di inseguimento  $e(t)$  e produce come uscite ingressi di comando  $u(t)$ , tali per cui il l'evoluzione temporale dell'uscita  $y(t)$  sia prossima a quella desiderata  $r(t)$ , a dispetto delle imprecisioni del modello usato rispetto al vero sistema, dei disturbi  $d(t)$  e del rumore di misura  $\nu(t)$ .

Le caratteristiche del controllore da progettare dovranno essere tali che i segnali nel sistema rispettino una serie di specifiche, che saranno analizzate nel dettaglio in questo capitolo.

Il problema del progetto di un controllore è in generale arduo. Esso è comunque grandemente facilitato, nel caso di sistemi lineari quali quelli trattati in questo corso, dall'utilizzo delle tecniche di analisi e sintesi dei sistemi mediante trasformate dei segnali.

Facendo riferimento allo schema di retroazione di fig. 7.1, in cui per semplicità si abbia  $R(s) = F(s) = 1$ , il sistema di controllo è quindi ridotto a quello descritto in fig. 8.1.

Il progetto del controllore  $C(s)$  determina la f.d.t. in anello chiuso

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_c(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

oltreché le relazioni tra i disturbi e le uscite. Naturalmente, l'utilizzo delle trasformate comporta anche la necessità di trasformare le specifiche, date tipicamente nel *dominio del tempo* (cioè espresse mediante relazioni tra segnali

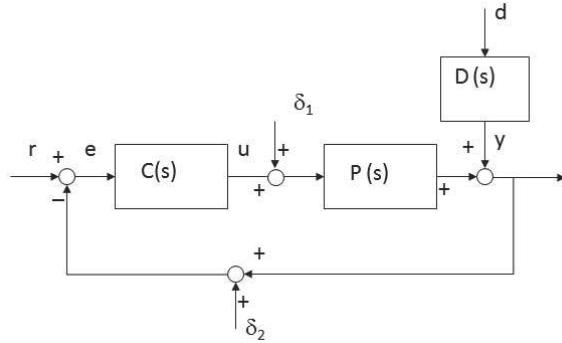


Figura 8.1: Schema di controllo in retroazione con ingressi di disturbo e rumore di misura

funzioni del tempo  $t$ ), in forma opportuna nel *dominio della frequenza* (cioè espresse mediante funzioni di variabile complessa  $s$ ).

La scelta di  $C(s)$  in modo che  $G_c(s)$  abbia caratteristiche desiderate non è immediata, se si considerano i complessi effetti del controllore sulla f.d.t. in anello chiuso. D'altra parte, questo compito risulta molto semplificato quando alcune importanti proprietà del sistema chiuso in retroazione possano essere dedotte direttamente attraverso l'analisi della funzione di trasferimento di anello  $C(s)P(s)$ . In altri termini, in questi casi le specifiche su  $G_c(s)$  possono essere tradotte (almeno in prima approssimazione) in specifiche su  $C(s)P(s)$ . Ricordiamo che gli effetti del progetto del controllore  $C(s)$  su  $C(s)P(s)$  sono facilmente prevedibili, sulla base di una analisi svolta ad esempio sui diagrammi logaritmici (principalmente quelli di Bode), nei quali i contributi del controllore semplicemente si sommano a quelli dell'impianto  $P(s)$ .

## 8.1 Specifiche e Struttura del Controllore Elementare

La prima specifica che il sistema in anello chiuso deve soddisfare è, ovviamente, la asintotica stabilità: assumeremo implicitamente questa specifica in quanto segue.

Le specifiche che il sistema in anello chiuso deve soddisfare possono essere suddivise in due categorie: specifiche riguardanti il comportamento a regime

del sistema, o *statiche*, e specifiche sul comportamento del sistema durante i transitori, o *dinamiche*.

### 8.1.1 Specifiche statiche

Le principali specifiche statiche riguardano

1. inseguimento di riferimenti  $r(t)$  polinomiali (a gradino, rampa, parabola, etc.) con errore limitato o nullo;
2. reiezione (totale o parziale) di disturbi costanti che intervengono in diverse sezioni della catena aperta.

La applicazione dei teoremi del valore finale alla trasformata del segnale di errore  $e(t) = r(t) - y(t)$  permette, come visto in precedenza, di stabilire i minimi valori del guadagno statico e del tipo della f.d.t. di anello  $C(s)P(s)$  in grado di assolvere la specifica.

### 8.1.2 Specifiche dinamiche

Le specifiche dinamiche riguardano il comportamento di un sistema durante i transitori. Tra le più importanti e comuni specifiche dinamiche si hanno le seguenti:

1. Prontezza della risposta, indicata ad esempio dal tempo di assestamento della risposta ad un gradino unitario;
2. Natura oscillatoria della risposta, caratterizzata spesso mediante la massima sovraelongazione tollerabile nella risposta al gradino;
3. Attenuazione dell'effetto di disturbi variabili che intervengono sulla catena aperta;
4. Reiezione del rumore di misura dei sensori;
5. Robustezza alle incertezze del modello, modellate come tolleranze su parametri che intervengono nella descrizione del modello di  $P(s)$ ;

In corrispondenza a questa suddivisione delle specifiche, la tecnica di progetto dei controllori per sistemi stabili in anello aperto che descriveremo nel seguito si basa su una struttura del controllore del tipo

$$C(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s), \quad (8.1)$$

dove il controllore  $C_0(s)$  ha guadagno statico almeno unitario, cioè  $C_0(0) \geq 1$ . Il numero  $t$  di poli nella origine del controllore è detto il suo *tipo*; il valore di  $K$  è il *guadagno* del controllore. La scelta dei valori di  $t$  e  $K$  ha diretta influenza sulle caratteristiche della risposta a regime del sistema in anello chiuso, che invece non è influenzata da  $C_0(s)$  se  $C_0(0) = 1$  (se  $C(0) > 1$ , le specifiche statiche verranno rispettate a maggior ragione). Che ciò sia vero discende dalla applicazione del teorema del valore finale ai segnali che sono nel sistema nelle ipotesi fatte, in particolare che l'anello chiuso sia stabile. Viceversa, la scelta di guadagno e tipo del controllore ha grande influenza anche sulle caratteristiche dinamiche del sistema. Il progetto avverrà dunque in due fasi: nella prima, si sceglieranno  $K$  e  $t$  per soddisfare le specifiche statiche; nella seconda, si cercherà di progettare  $C_0(s)$  per fare in modo che il sistema  $C_0(s)\frac{K}{s^t}P(s)$  soddisfi le desiderate specifiche dinamiche (la condizione  $C_0(0) \geq 1$  garantisce che le specifiche statiche rimangano verificate anche dal sistema controllato complessivo).

## 8.2 Metodi di progetto del controllore

Se il sistema da controllare  $P(s)$  è stabile in anello aperto, il progetto del controllore può essere effettuato con grande efficacia lavorando sul diagramma di Bode della funzione di trasferimento di anello  $C(s)P(s)$ , ovvero scegliendo  $C(s)$  in modo da dare al diagramma di Bode di  $C(s)P(s)$  una forma confacente le specifiche: questo metodo è l'argomento dei successivi paragrafi di questo capitolo.

In particolare, se la funzione di trasferimento  $P(s)$  è a fase minima, se cioè non presenta zeri a parte reale positiva, in base alla formula di Bode la sola analisi del diagramma del modulo  $|C(j\omega)P(j\omega)|$  può fornire tutte le informazioni necessarie ad una primissima approssimazione del progetto. Se invece  $P(s)$  non è a fase minima, l'analisi deve essere condotta utilizzando entrambi i diagrammi di Bode di ampiezza e fase della funzione di trasferimento di anello  $C(j\omega)P(j\omega)$ .

Nel caso in cui la funzione di trasferimento del sistema da controllore  $P(s)$  abbia poli a parte reale positiva, non è invece possibile operare attraverso i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello  $C(s)P(s)$ . In questo caso, infatti, la stabilità dell'anello chiuso non è immediatamente analizzabile dai diagrammi di Bode (sui quali i circondamenti del punto critico non sono evidenti come sui diagrammi di Nyquist); né i concetti di margine di ampiezza e fase mantengono gli stessi significati e implicazioni visti in precedenza per sistemi stabili in anello aperto. Ad esempio, si consideri

la f.d.t.  $P(s) = \frac{-100}{(s+1)(s-10)}$ , il cui diagramma di Bode potrebbe erroneamente suggerire un margine di fase di  $135^\circ$ , mentre l'anello chiuso è instabile.

Per sistemi instabili in anello aperto sarà necessario costruire un primo controllore  $C_1(s)$  che renda il sistema in anello chiuso  $G_1(s) = \frac{C_1(s)P(s)}{1+C_1(s)P(s)}$  asintoticamente stabile. Il controllore  $C_1(s)$ , in grado di stabilizzare il sistema di partenza  $P(s)$ , può essere progettato ad esempio con l'impiego della tecnica del luogo delle radici, che sarà studiata più avanti. Il controllore  $C_1(s)$  può venir progettato senza altro scopo se non quello di rendere asintoticamente stabile il sistema  $G_1(s)$ . A questo punto, il sistema  $G_1(s)$  ottenuto può venir a sua volta chiuso in retroazione e nella catena diretta viene inserito un controllore  $C_2(s)$ , in grado di soddisfare le altre specifiche richieste; il progetto di questo controllore viene effettuato sulla base dei diagrammi di Bode della funzione di trasferimento di anello  $C_2(s)G_1(s)$ . La tecnica appena descritta, nota come tecnica del doppio anello di retroazione o della retroazione in cascata, è schematizzata in figura 8.2.

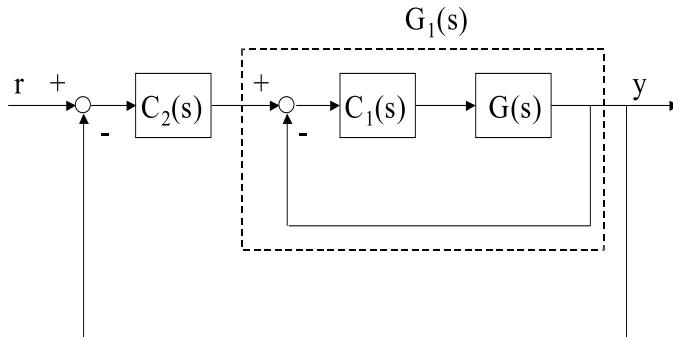


Figura 8.2: Tecnica del doppio anello di retroazione

### 8.3 Approssimazioni della f.d.t. in anello chiuso

In questa sezione, si intende mostrare come alcune delle principali caratteristiche della f.d.t. in anello chiuso  $G_c(s)$  siano deducibili, in prima approssimazione, dalla analisi della funzione di anello  $C(s)P(s)$ . Le considerazioni che seguono si devono intendere non come valide in assoluto, ma come indicazioni di massima applicabili al progetto di controllori per sistemi con caratteristiche e specifiche di tipo comune.

In particolare, è da tenersi in conto il fatto che, nonostante le tipologie di impianti da controllare siano piuttosto ampie, il tipo di comportamento che ci si attende come risultato del controllo dei sistemi meccanici è invece piuttosto omogeneo.

È infatti spesso il caso che un sistema, anche di ordine elevato, quando controllato opportunamente in modo da rispettare le specifiche comunemente richieste, venga ad avere comportamenti dinamici simili a quelli di sistemi del primo o del secondo ordine. Conseguentemente, la funzione di trasferimento  $G_c(s)$  che lo rappresenta può essere approssimata da una funzione di trasferimento con un solo polo o con due poli complessi coniugati.

Una funzione di trasferimento  $G_c(s)$  si dice avere un *polo dominante* se è stabile e se possiede un polo reale molto più lento (cioè con costante di tempo più alta) di ogni altro.  $G_c(s)$  si dice avere due *poli dominanti* se è stabile e se possiede una coppia di poli complessi coniugati molto più lenti (cioè con parte reale molto minore in modulo) di ogni altro polo. Per “molto più lento” si intende avere una parte reale circa dieci volte minore, in valore assoluto, di ogni altro polo, e quindi una costante di tempo della risposta circa dieci volte maggiore.

Si consideri lo schema di retroazione rappresentato in fig. 8.1; ci proponiamo di analizzare le relazioni che esistono tra i diagrammi di Bode del modulo della funzione di trasferimento di anello  $C(s)P(s)$  e della funzione di trasferimento di anello chiuso  $G_c(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}$ .

Si consideri una funzione di trasferimento di anello  $C(s)P(s)$  stabile in anello aperto e (per semplicità di trattazione) si assuma che il relativo diagramma di Bode delle ampiezze abbia un solo attraversamento dell’asse a 0 dB (cf. fig. 8.3). Sia  $\omega_T$  la pulsazione di taglio. Osservando che, per  $\omega \ll \omega_T$ ,  $|1 + C(j\omega)P(j\omega)| \simeq |C(j\omega)P(j\omega)|$  e che, per  $\omega \gg \omega_T$ ,  $|1 + C(j\omega)P(j\omega)| \simeq 1$ , è possibile adottare la seguente approssimazione:

$$|G_c(j\omega)| = \frac{|C(j\omega)P(j\omega)|}{|1+C(j\omega)P(j\omega)|} \simeq 1, \quad \omega < \omega_T$$

$$|G_c(j\omega)| = \frac{|C(j\omega)P(j\omega)|}{|1+C(j\omega)P(j\omega)|} \simeq |C(j\omega)P(j\omega)|, \quad \omega > \omega_T.$$

Ovviamente, l’approssimazione appena ricavata risulta molto buona per pulsazioni  $\omega \ll \omega_T$  e  $\omega \gg \omega_T$ , mentre può essere meno buona per pulsazioni prossime a quella di taglio.

Dall’esame della figura 8.3, si osserva che il modulo della funzione di trasferimento  $G_c(j\omega)$  presenta un cambiamento di pendenza proprio per  $\omega = \omega_T$ , quindi è lecito aspettarsi che nelle vicinanze di questa pulsazione  $G_c(s)$  possieda uno o più poli. Inoltre, poiché il diagramma del modulo di  $G_c(j\omega)$  è orizzontale per  $\omega < \omega_T$ , in questa approssimazione  $G_c(s)$  non ha poli a

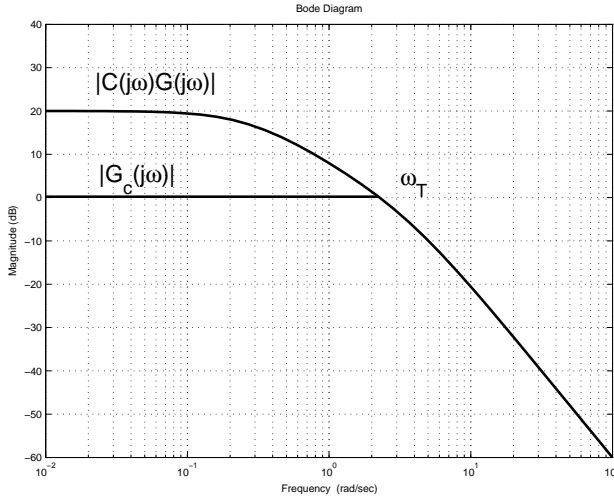


Figura 8.3: Approssimazione della funzione di trasferimento di anello chiuso  $G_c(j\omega)$

pulsazione inferiore di  $\omega_T$ . Se inoltre  $G(s)$  non ha ulteriori poli o zeri a pulsazioni superiori in vicinanza di  $\omega_T$ , i poli in corrispondenza di  $\omega_T$  saranno quindi i poli dominanti del sistema in anello chiuso.

Nella pulsazione di taglio si ha

$$\begin{aligned} |C(j\omega_T)P(j\omega_T)| &= 1 \\ \angle C(j\omega_T)P(j\omega_T) &= \phi_T = -\pi + M_f, \end{aligned}$$

dove  $M_f$  è il margine di fase del sistema in anello aperto. Possiamo quindi scrivere, posto  $C(j\omega_T)P(j\omega_T) = e^{j\phi_T}$ ,

$$G_c(j\omega_T) = \frac{e^{j\phi_T}}{1 + e^{j\phi_T}}$$

da cui (ricordando che  $\sin(\alpha/2) = \pm\sqrt{(1 - \cos \alpha)/2}$ )

$$|G_c(j\omega_T)| = \frac{1}{|1 + e^{j\phi_T}|} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos M_f)}} = \frac{1}{2 \sin(M_f/2)} \quad (8.2)$$

e

$$\angle G_c(j\omega_T) = \phi_T - \arctan \left( \frac{\sin(\phi_T)}{1 + \cos(\phi_T)} \right) \quad (8.3)$$

Per sistemi con  $\phi_T = -\pi/2$  (quindi con margine di fase  $M_f = \pi + \phi_T = \pi/2$ ), si ottiene quindi

$$\begin{aligned} |G_c(j\omega_T)| &= \frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB, \\ \angle G_c(j\omega_T) &= -\pi/4. \end{aligned}$$

In questo caso, il sistema in anello chiuso è quindi ben approssimabile con un sistema ad un polo dominante, ovvero

$$G_c(s) \approx \frac{1}{\tau s + 1},$$

con  $\tau = 1/\omega_T$ . La pulsazione di taglio dell'anello aperto coincide in questo caso con la banda passante a -3dB del sistema in anello chiuso. Si ricorda che, per sistemi a fase minima, la condizione  $\phi_T = -\pi/2$  coincide (per il teorema di Bode) con la condizione che la pendenza del diagramma delle ampiezze in prossimità della pulsazione di taglio  $\omega_T$  sia di -20 dB/decade.

Per sistemi con margine di fase sostanzialmente inferiore a  $\pi/2$ , è più opportuna una approssimazione con un sistema a due poli dominanti, ovvero

$$G_c(s) \approx \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\delta}{\omega_n}s + 1}$$

con pulsazione naturale  $\omega_n = \omega_T$ . La pulsazione di taglio dell'anello aperto in questo caso è solo una approssimazione della banda passante a -3dB del sistema in anello chiuso.

Per determinare lo smorzamento dei poli dominanti dal diagramma di Bode della  $G(s)$ , dal confronto di questa espressione con la (8.2) si ottiene

$$|G_c(j\omega_T)| = \frac{1}{2\delta} = \frac{1}{2 \sin(M_f/2)}$$

da cui

$$\delta = \sin\left(\frac{M_f}{2}\right)$$

La relazione appena trovata è molto importante poiché esprime un legame tra lo smorzamento dei poli dominanti del sistema in anello chiuso e il margine di fase della funzione di trasferimento di anello, il quale può essere facilmente calcolato dai diagrammi di Bode di  $C(s)P(s)$ . D'altra parte, questa relazione si basa su tutta una serie di ipotesi semplificative che, nella pratica, possono non essere esattamente verificate; dunque, il valore dello smorzamento  $\delta$  così ottenuto è approssimato e fornisce solamente un'indicazione di primo tentativo del vero smorzamento dei poli dominanti del sistema in anello chiuso.

Per valori di  $M_f$  inferiori a circa 1.3 radianti (75 gradi), è possibile sostituire alla funzione seno il suo argomento. Si ha quindi la relazione approssimata (dove il margine di fase si intende espresso in gradi):

$$\delta = \frac{M_f}{2} \frac{\pi}{180} \simeq \frac{M_f}{100}. \quad (8.4)$$

## 8.4 Specifiche nel Dominio della Frequenza

Per quanto le specifiche dinamiche siano date prevalentemente nel cosiddetto *dominio del tempo*, cioè in termini della risposta temporale del sistema in anello chiuso, grazie alle approssimazioni di questo con sistemi ad uno o due poli dominanti è possibile ricondurle a specifiche nel *dominio della frequenza*, cioè in termini dell'andamento desiderato della risposta armonica della  $G_c(s)$ , e quindi in ultima analisi della funzione di anello  $C(s)P(s)$ .

**Carattere Oscillatorio delle Risposte** Le specifiche che tendono a limitare il carattere oscillatorio delle risposte, vengono tipicamente espresse nel dominio del tempo in termini della massima sovraelongazione della risposta al gradino, e si traducono nel dominio della frequenza in una richiesta di smorzamento del sistema in anello chiuso. Uno strumento utile per valutare lo smorzamento dell'anello chiuso consiste nella stima del picco di risonanza, che si può fare ad esempio attraverso l'uso dei luoghi ad ampiezza costante sul piano di Nyquist.

Se si preferisce lavorare sui diagrammi di Bode, si possono inferire le caratteristiche di smorzamento dell'anello chiuso da quelle dell'anello aperto mediante le approssimazioni a poli dominanti. In particolare, supponiamo che sia assegnato un massimo valore tollerabile  $\bar{S}$  per la sovraelongazione.

- Se le specifiche richiedono che la massima sovraelongazione sia nulla, è opportuno che il sistema in anello chiuso sia approssimabile con un sistema del primo ordine (approssimazione ad un polo dominante). Ciò significa chiedere  $\phi_T = \arg G(j\omega_T) \approx -\pi/2$ , ovvero un margine di fase del sistema in anello aperto pari a circa 90 gradi. Se il sistema è a fase minima e la pulsazione di taglio è sufficientemente lontana da altre singolarità, questa condizione equivale (per il teorema di Bode) a chiedere che l'attraversamento dell'asse a 0dB avvenga con pendenza -1, cioè  $-20$  dB/decade.
- Se è tollerabile una sovraelongazione non superiore a  $\bar{S} > 0$ , è sufficiente fare in modo che il sistema in anello chiuso possa essere approssimato da un sistema del secondo ordine (approssimazione a due poli dominanti). In base alla relazione (5.13) tra sovraelongazione e smorzamento dei sistemi del secondo ordine,

$$S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}},$$

data la massima sovraelongazione consentita  $\bar{S}$  si può agevolmente ricavare il valore  $\bar{\delta}$  del minimo smorzamento che i poli dominanti

del sistema devono avere, ad esempio usando il grafico in fig. 5.5. In base alla relazione (8.4) è quindi possibile ricavare il minimo valore del margine di fase  $\bar{M}_f = 100\bar{\delta}$  richiesto per la funzione di trasferimento di anello  $C(s)P(s)$ . Ad esempio, se si impone  $\bar{S} = 25\%$ , si ha  $\bar{\delta} \approx 0.45$  e quindi si richiede  $M_f \approx 45$  gradi. Se il sistema è a fase minima e la pulsazione di taglio è sufficientemente lontana da altre singolarità, questa condizione equivale a chiedere che l'attraversamento dell'asse a 0dB avvenga in vicinanza di un polo in anello aperto di  $C(s)P(s)$  nel quale il diagramma delle ampiezze passa da pendenza -1 a pendenza -2.

**Prontezza di Risposta** Le specifiche di prontezza, che vengono tipicamente espresse nel dominio del tempo in termini di un tempo di assestamento massimo si traducono nel dominio della frequenza in una richiesta di banda passante sufficientemente elevata.

- Se il sistema in anello chiuso è approssimabile come un sistema ad un polo dominante, infatti, una specifica del tipo  $T_a \leq \bar{T}_a$  impone che la costante di tempo  $\tau$  del polo dominante sia sufficientemente piccola, quindi che valga per la pulsazione di taglio

$$\omega_T > \frac{3}{\bar{T}_a}.$$

- Se il sistema in anello chiuso è approssimabile come un sistema a due poli dominanti di pulsazione naturale  $\omega_n = \omega_T$  e smorzamento  $\delta \leq 0.8$  (corrispondente a un margine di fase non superiore a circa 80 gradi), si ha invece la condizione

$$\omega_T > \frac{3}{\delta \bar{T}_a}.$$

**Attenuazione dei disturbi in catena aperta** I disturbi che agiscono in catena aperta (vedi fig.8.1) sono tipicamente modellati come segnali  $d(t)$  composti da armoniche in un range di pulsazioni limitato e di ampiezza limitata, ad esempio  $d(t) = \sum_{i=1}^m D_i \sin(\omega_i t)$  con  $\sum D_i \leq \bar{D}$  e  $\bar{\omega} \leq \omega_i \leq \bar{\omega}$ ,  $1 \leq i \leq m$ .

Una tipica specifica che, in questo caso, il sistema in anello chiuso dovrà soddisfare è quella di limitare in uscita l'ampiezza delle oscillazioni causate dal disturbo al di sotto di un dato valore di soglia  $\bar{Y}$ . Applicando il teorema della risposta armonica alla f.d.t.  $\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{Q(s)}{1+C(s)P(s)}$ ,

una condizione sufficiente è che, per tutte le pulsazioni  $\bar{\omega} \leq \omega \leq \bar{\omega}$ , valga la relazione

$$\frac{|Q(j\omega)|}{|1 + C(j\omega)P(j\omega)|} \leq \frac{\bar{Y}}{\bar{D}}.$$

Per verificare questa relazione è necessario che nel range di frequenze in considerazione (tipicamente composto da frequenze basse rispetto alla banda del sistema in anello chiuso) si abbia un valore elevato per il guadagno di anello  $|C(j\omega)P(j\omega)|$ , quindi  $|C(j\omega)P(j\omega)| \gg 1$ . In prima approssimazione la relazione da soddisfare diventa quindi la seguente

$$|C(j\omega)P(j\omega)| \geq K_{min} \quad \text{per } \bar{\omega} \leq \omega \leq \bar{\omega}$$

con  $K_{min}$  una costante che maggiora il termine  $\frac{\bar{D}}{\bar{Y}}|Q(j\omega)|$  nel range di frequenze dato.

**Reiezione del rumore di misura**. Il rumore di misura dei sensori è tipicamente modellabile come un disturbo  $\nu(t)$  che interviene nella catena di retroazione (vedi fig.8.1) composto da armoniche di ampiezza limitata in un range di frequenze elevato, ad esempio  $\nu(t) = \sum_{j=1}^p N_j \sin(\omega_j t)$  con  $\sum N_j \leq \bar{N}$  e  $\bar{\omega}_j \geq \bar{\omega}_n$ ,  $1 \leq j \leq p$ .

L'effetto del disturbo di misura  $\nu$  sulla uscita è dato dalla f.d.t.

$$\frac{Y(s)}{\nu(s)} = -\frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}.$$

Se le specifiche impongono che in uscita l'ampiezza delle oscillazioni causate dal disturbo sia inferiore o al più uguale ad un dato valore ammissibile  $\bar{Y}$ , si può cautelativamente imporre che in tutto il campo delle pulsazioni  $\omega > \bar{\omega}_n$  valga la relazione:

$$\bar{N} \frac{|C(j\omega)P(j\omega)|}{|1 + C(j\omega)P(j\omega)|} \leq \bar{Y}.$$

Per ottenere questo scopo, è necessario che  $|C(j\omega)P(j\omega)|$  sia piccolo nel campo di frequenze di interesse, quindi  $|C(j\omega)P(j\omega)| \ll 1$ , ed in prima approssimazione la relazione da soddisfare diventa

$$|C(j\omega)P(j\omega)| \leq \frac{\bar{Y}}{\bar{N}}, \quad \text{per } \omega > \bar{\omega}.$$

## 8.5 Costruzione del controllore $C_0(s)$

### 8.5.1 Azioni correttive

Per soddisfare le specifiche dinamiche è possibile introdurre nella f.d.t. del controllore  $C_0(s)$  opportune *azioni correttive*. A questo scopo il progettista ha a disposizione essenzialmente due tipi di azioni, *anticipatrici* e *attenuatrici* (o *ritardatrici*).

- Una *azione anticipatrice* è descritta da una funzione di trasferimento del tipo

$$R(s) = \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1}$$

con  $\tau > 0$  e  $0 < \alpha < 1$ . I diagrammi di Bode (reali e asintotici) di una azione anticipatrice vengono riportati in fig. 8.4; come si vede, questo tipo di azione permette di ottenere un anticipo di fase nella f.d.t. di anello  $C(s)P(s)$ .

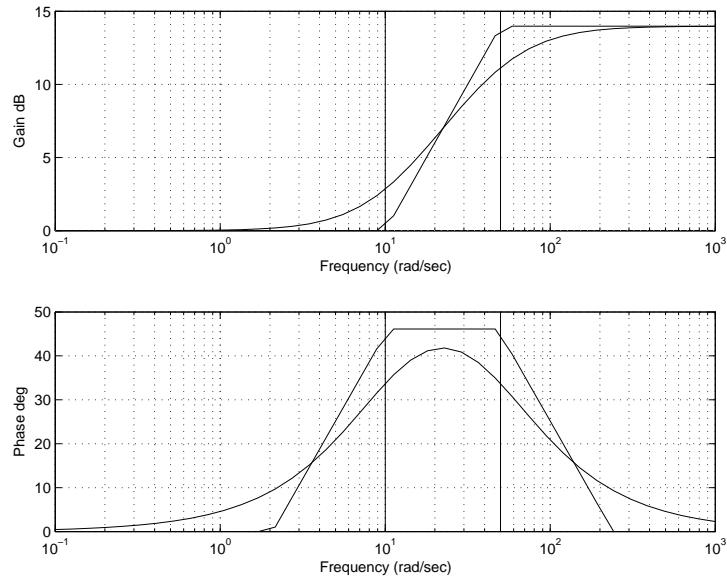


Figura 8.4: Diagrammi di Bode di una azione anticipatrice

- Una *azione attenuatrice* è invece descritta da una funzione di trasferimento del tipo

$$R(s) = \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1}$$

con  $\tau > 0$  e  $\alpha > 1$ . I diagrammi di Bode (reali e asintotici) di una azione attenuatrice vengono riportati in fig. 8.5; come si vede, una azione attenuatrice contribuisce a ridurre l'ampiezza della f.d.t. di anello per alte frequenze, mentre introduce uno sfasamento negativo nel diagramma delle fasi.

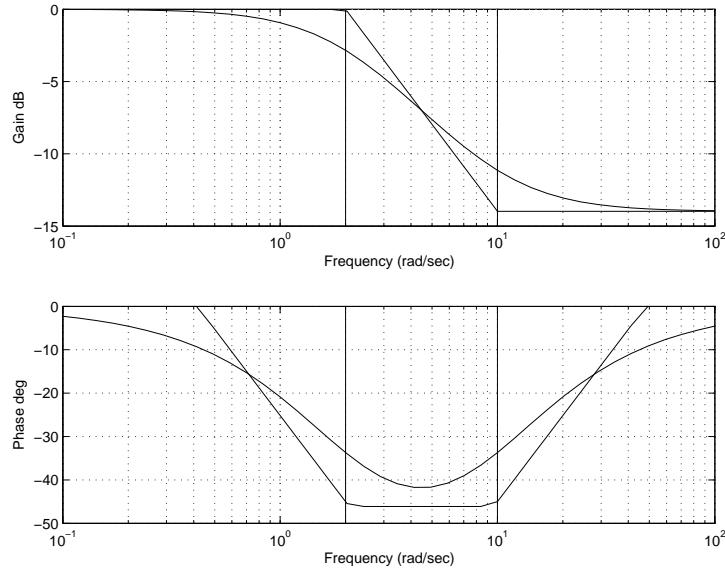


Figura 8.5: Diagrammi di Bode di una azione attenuatrice

### Esempio di utilizzo di azioni anticipatrici

Come esempio di utilizzo di azioni anticipatrici, si consideri la f.d.t.  $\frac{K}{s}P(s) = \frac{1000}{s(s+20)(s+1)}$ . Si ipotizzi che la prima parte del controllore  $\frac{K}{s}$  sia stata preventivamente progettata in modo da soddisfare le specifiche statiche; ci proponiamo adesso di progettare un controllore  $C_0(s)$  tale che la f.d.t. di anello  $C(s)P(s) = \frac{K}{s}C_0(s)P(s)$  soddisfi le seguenti specifiche:

- pulsazione di taglio  $\omega_T \geq 50$  rad/s;
- margine di fase  $M_f$  di circa  $90^\circ$ ;
- $|C(j\omega)P(j\omega)| < -50$  dB per  $\omega > 5000$  rad/sec.

Il diagramma di Bode della f.d.t.  $\frac{K}{s}P(s)$  è riportato in fig. 8.6. Poiché la f.d.t. è a fase minima, la specifica sul margine di fase è soddisfatta se il

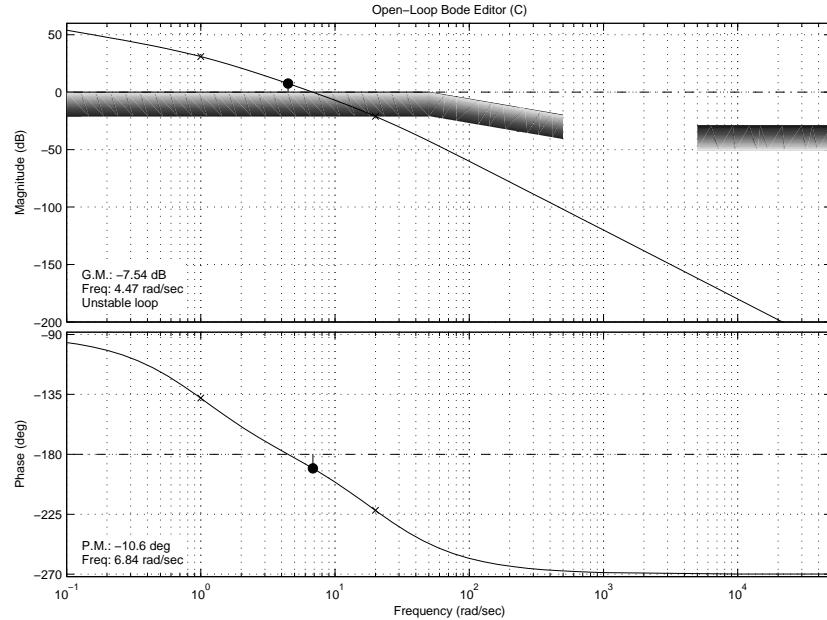


Figura 8.6: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $\frac{K}{s}P(s)$

diagramma delle ampiezze taglia l'asse a 0 dB lontano dalle singolarità con pendenza di  $-20$  dB/decade.

Le specifiche richieste possono essere tradotte da un punto di vista grafico, riportando sul diagramma delle ampiezze una serie di vincoli che il grafico di  $|C(j\omega)P(j\omega)|$  dovrà rispettare; nel caso in esame, il modulo in dB della f.d.t.  $C(j\omega)P(j\omega)$  dovrà essere positivo per  $\omega < 50$  rad/s, tagliare l'asse a 0 dB per  $\omega \geq 50$  rad/s con pendenza di circa  $-20$  dB/decade e mantenersi al di sotto di  $-50$  dB per  $\omega > 5000$  rad/s.

Come si vede, per soddisfare le specifiche è necessario aumentare la pulsazione di taglio e, in corrispondenza ad essa, aumentare la fase della f.d.t. di anello; è quindi necessaria un'azione anticipatrice. Se si inseriscono nel controllore  $C_0(s)$  due zeri in  $-10$  e  $-1$ , le specifiche sulla pulsazione di taglio e sul margine di fase vengono soddisfatte (fig. 8.7).

A questo punto, per soddisfare l'ultima specifica è possibile inserire due poli ad alta frequenza, in modo da abbassare ulteriormente il modulo della f.d.t.  $C(j\omega)P(j\omega)$  per pulsazioni vicine a 5000 rad/s. Se si inseriscono due poli in  $-1000$ , l'ultima specifica viene soddisfatta ed il margine di fase, seppur diminuito, si mantiene comunque molto prossimo a  $90^\circ$  (fig. 8.8). Si noti inoltre che il controllore  $C(s)$  progettato è strettamente proprio.

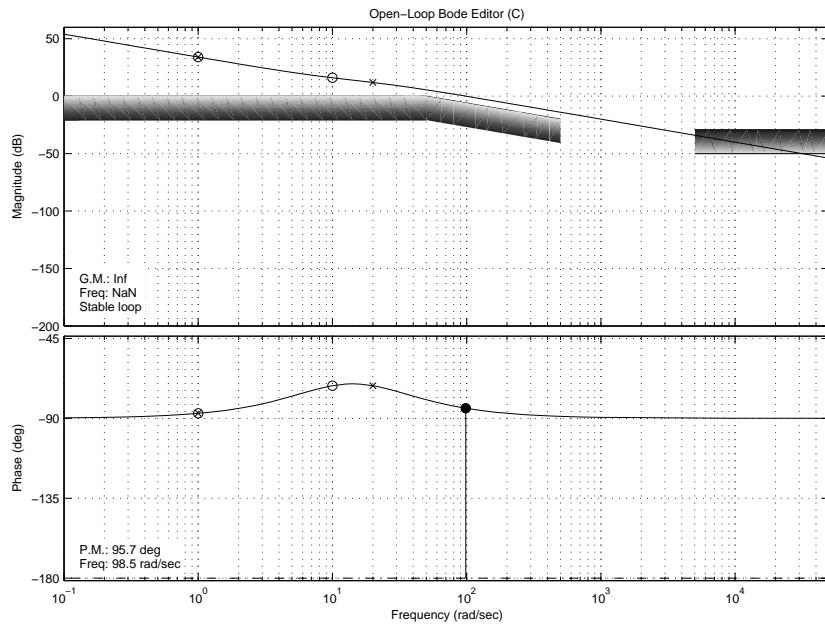


Figura 8.7: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $\frac{K(0.1s+1)(s+1)}{s} P(s)$

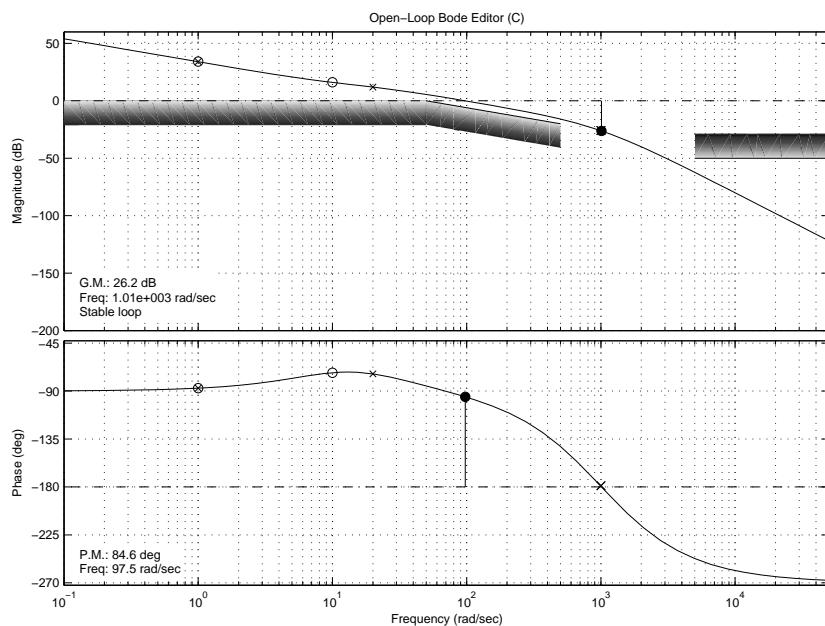


Figura 8.8: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $\frac{K(0.1s+1)(s+1)}{s(0.001s+1)^2} P(s)$

### Esempio di utilizzo di azioni attenuatrici

Si consideri la f.d.t.  $P(s) = \frac{5000}{(s+10)(s+5)(s+1)}$ ; ci proponiamo di progettare un controllore  $C(s) \equiv C_0(s)$  in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

- pulsazione di taglio  $\omega_T \geq 0.5$  rad/s;
- margine di fase  $M_f \geq 60^\circ$ ;
- $|C(j\omega)P(j\omega)| < -20$  dB per  $\omega > 10$  rad/s.

Il diagramma di Bode della f.d.t.  $P(s)$  è riportato in fig.8.9.

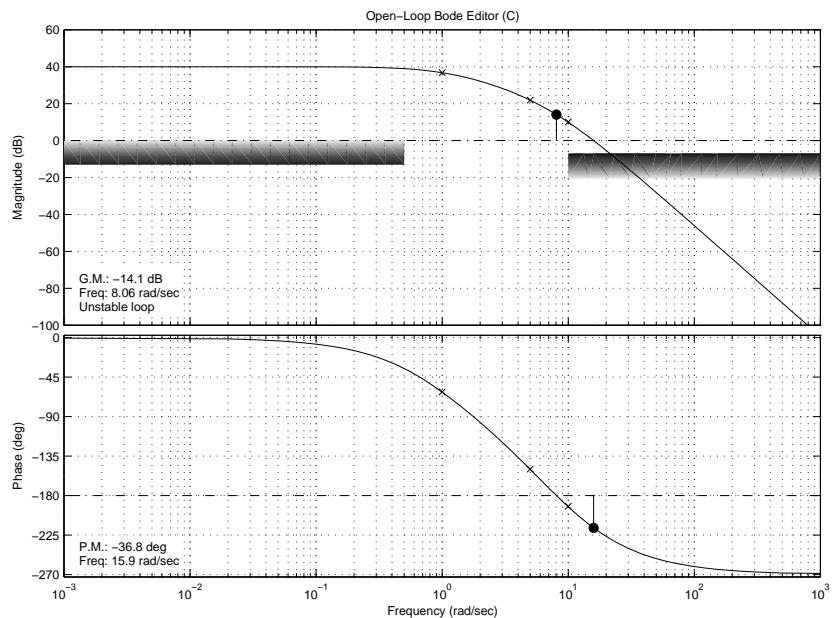


Figura 8.9: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $P(s) = \frac{5000}{(s+10)(s+5)(s+1)}$

In questo caso è necessario che il diagramma delle ampiezze inizi a decrescere in maniera sensibile per pulsazioni inferiori a quelle mostrate in fig. 8.9. Per fare questo, è possibile inserire nel controllore  $C(s)$  un polo in bassa frequenza, ad esempio in  $-0.01$  (fig. 8.10).

Come si vede in fig. 8.10, il margine di fase è di  $39.6^\circ$  ed è quindi ancora troppo basso. Per aumentare il margine di fase è possibile inserire nel controllore  $C(s)$  uno zero per pulsazioni vicine a quella in cui avviene l'attraversamento dell'asse a 0 dB. Inserendo quindi nel controllore uno zero in  $-1$  si ottiene un margine di fase di  $74^\circ$  e vengono soddisfatte tutte le specifiche richieste (fig. 8.11).

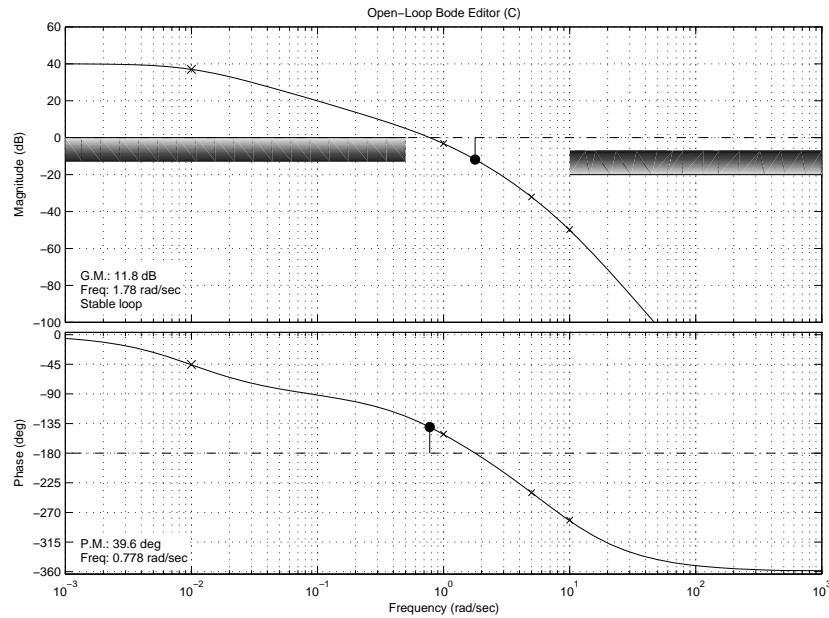


Figura 8.10: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $C(s)P(s)$ , con  $C(s) = \frac{1}{(100s+1)}$

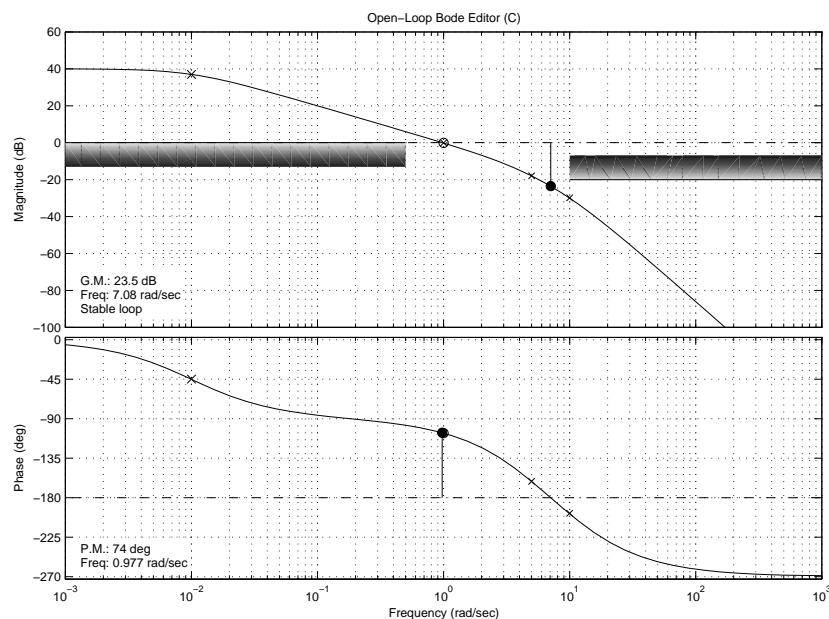


Figura 8.11: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $C(s)P(s)$ , con  $C(s) = \frac{(s+1)}{(100s+1)}$

### 8.5.2 Causalità del controllore

La funzione di trasferimento  $C(s)$  del controllore è rappresentativa di un sistema dinamico e, come tale, dovrà essere causale. Una volta che nel controllore sia stato inserito un numero di zeri e di poli strettamente necessario a soddisfare tutte le specifiche richieste, può capitare che il numero degli zeri sia maggiore del numero dei poli e che, quindi, il controllore stesso non risulti causale. Per garantire la causalità del controllore è quindi necessario introdurre al suo interno altri poli fino a che la differenza poli - zeri non sia nulla. Poiché il sistema in anello chiuso ottenuto prima dell'inserimento dei nuovi poli soddisfa già tutte le specifiche, è necessario che questi poli non modifichino in maniera sostanziale il margine di fase e la pulsazione di taglio della f.d.t. di anello, né l'andamento del suo modulo in bassa frequenza (reiezione dei disturbi). Solitamente, quindi, i poli che vengono inseriti nel controllore per avere la causalità sono in alta frequenza, cioè a pulsazione molto maggiore di quella di taglio. In questo modo non solo non vengono modificati apprezzabilmente il margine di fase, la pulsazione di taglio e il comportamento in bassa frequenza della f.d.t. di anello  $C(s)P(s)$ , ma vengono ulteriormente attenuati gli effetti sull'uscita dei disturbi in alta frequenza.

## 8.6 Esempio di Progetto

Consideriamo il sistema descritto dalla f.d.t.

$$G(s) = 10 \frac{1}{1 + s + s^2}$$

avente i seguenti diagrammi di Bode (in figura 8.12)

Progettare un controllore in modo che siano rispettate le seguenti specifiche:

1. errore a regime al gradino nullo;
2. errore a regime alla rampa  $\leq 1\%$ ;
3. reiezione totale a regime di tutti i disturbi statici sull'ingresso e sulla uscita dell'impianto;
4. sensibilità alla variazione dei parametri dell'impianto  $\leq 1\%$  per frequenze sino a  $0.16 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ;
5. reiezione del rumore di misura a frequenze maggiori o uguali di  $2.4 KHz$ , nella misura di almeno il 10%;

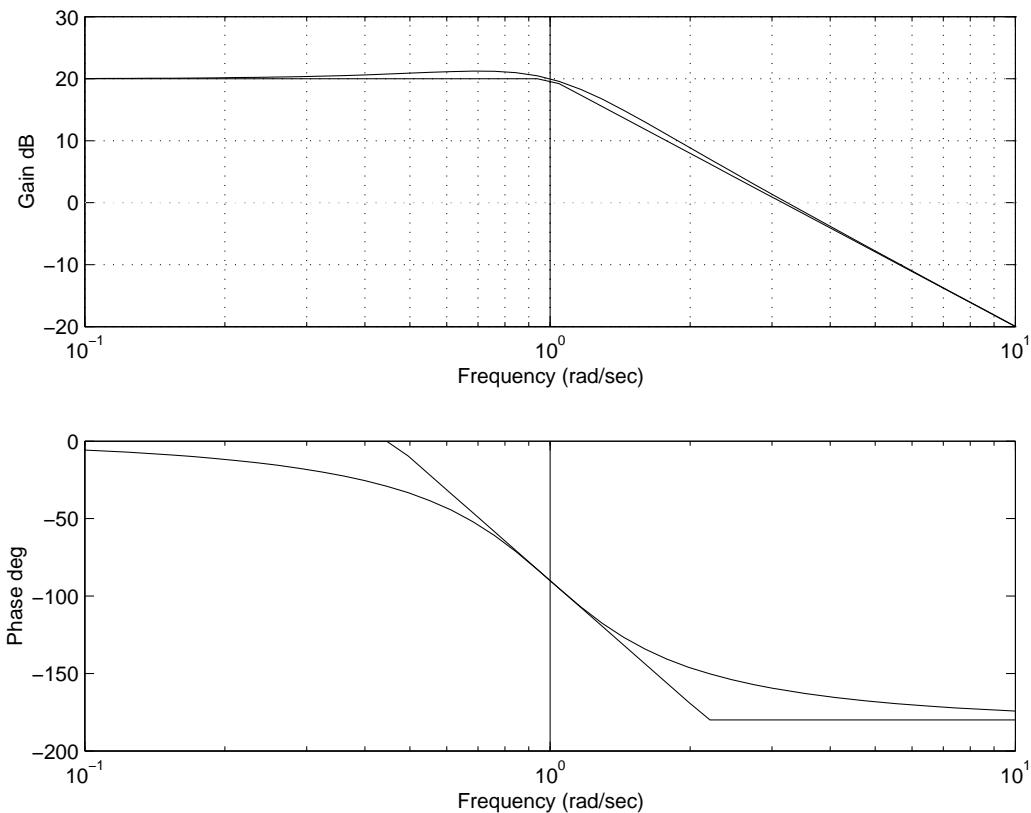


Figura 8.12: Diagramma di Bode per il sistema in anello aperto

6. sovraelongazione massima  $\leq 50\%$ ;

7. tempo di assestamento  $\leq 0.01sec$

### 8.6.1 Progetto del Controllore

Essendo l'impianto dato stabile e a fase minima, il progetto di prima massima può essere condotto supponendo una semplice configurazione dell'anello con un controllore  $C(s)$  in catena diretta (da progettare), ed una retroazione unitaria negativa, ed operando direttamente sul diagramma di Bode delle ampiezze del sistema in catena aperta, cioè di  $C(s)G(s)$ . Le specifiche date sono rispettivamente rappresentate su tale piano nel modo seguente:

1.  $C(s)G(s)$  deve avere almeno un polo nell'origine, quindi il diagramma deve iniziare con pendenza superiore o uguale a  $-1$ ;

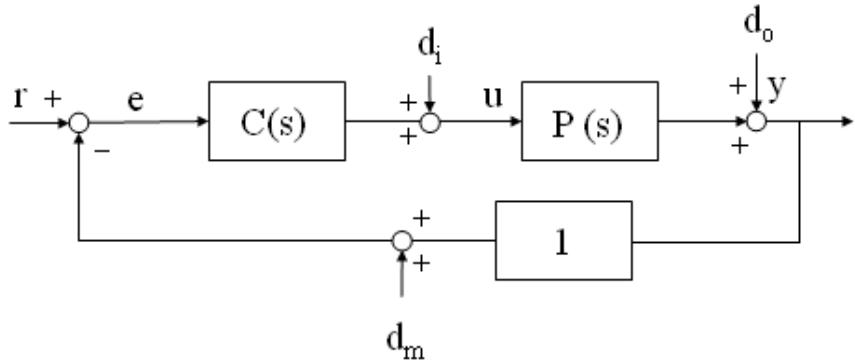


Figura 8.13: Schema del sistema: controllo, impianto e distrubbi.

2. il valore della costante di velocità del sistema,  $K_v = (sC(s)G(s))|_{s=0}$ , deve essere pari ad almeno 100. Questo, assieme alla prima specifica, implica che il diagramma deve stare, per le basse frequenze, al di sopra della retta di pendenza -1 passante per ( $\omega = 1, \|C(j\omega)G(j\omega)\| = 40db$ ).
3. Questa specifica indica che, negli elementi della catena diretta *a monte* dei punti di intervento del rumore, vi deve essere un polo nell'origine. La sua rappresentazione sul piano di Bode delle ampiezze dipende quindi dalle caratteristiche della  $G(s)$ : se  $G(s)$  fosse di tipo 1, questa specifica imporrebbe che la pendenza iniziale del diagramma fosse pari a  $-2$  (dovendosi avere un polo nell'origine a monte del disturbo in ingresso all'impianto, se ne avrebbero in totale almeno due). Se  $G(s)$  non ha poli nell'origine, la pendenza  $-1$  già stabilita dalle precedenti specifiche è invece sufficiente.
4. La sensibilità alle variazioni dei parametri è determinata dalla funzione di sensitività  $\Sigma(s) = \frac{1}{1+C(s)G(s)}$ . Per rispettare la specifica, è quindi necessario che sia  $\|\Sigma(j\omega)\| \leq 0.01, 0 \leq \omega \leq 0.16rad/sec$ . Questo si può garantire se  $\|1 + C(j\omega)G(j\omega)\| \geq \|C(j\omega)G(j\omega)\| - 1 \geq 100$ , quindi nel piano di Bode  $(M, \omega)$  se il diagramma  $C(j\omega)G(j\omega)$  non interseca la regione  $M < 20 \log(101) \approx 40db, \omega < 1rad/sec$ ;
5. La funzione di trasferimento tra il rumore di misura e l'uscita del sistema è data da

$$\frac{y(s)}{d_m(s)} = -\frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

che è pari in modulo alla funzione di sensitività complementare  $\bar{\Sigma}(s) = 1 - \Sigma(s)$ . Imporremo quindi  $\|1 + C(j\omega)G(j\omega)\| > 10\|C(j\omega)G(j\omega)\|$ , ovvero cautelativamente  $\|C(j\omega)G(j\omega)\| \leq \frac{1}{11} \approx -21db$  nel range di frequenze specificato. Nel piano di Bode  $(M, \omega)$ , questo si traduce nella condizione che il diagramma delle ampiezze di  $C(j\omega)G(j\omega)$  non intersechi la regione  $M > -21db, \omega > 15000rad/sec$ ;

6. la specifica sulla sovraelongazione ammette che il sistema in anello chiuso sia approssimabile con un sistema del secondo ordine con smorzamento dei poli dominanti dell'ordine di 0.25 (come si ricava dalla espressione della sovraelongazione dei sistemi di secondo ordine  $s = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$ ). Sul piano di Bode, questo significa che si ammette un margine di fase  $\phi_M \approx \pi/8$ . In termini del solo diagramma delle ampiezze, questa specifica si riflette grossolanamente nel richiedere che l'attraversamento dell'asse a 0db avvenga con pendenza pari anche a  $-2$ , purché ad una distanza da un precedente tratto a pendenza  $-1$  non superiore a circa una ottava;
7. la specifica sul tempo di assestamento, per il caso di sistema in anello chiuso a due poli dominanti stabilito dalla precedente specifica, indica che la pulsazione naturale dei due poli deve essere  $\omega_N \geq 3/\delta T_a \approx 1200rad/sec$ . Questa specifica si riflette nel chiedere che il diagramma delle ampiezze di  $C(j\omega)G(j\omega)$  intersechi l'asse a 0db a pulsazioni superiori a  $1200rad/sec$ .

Il diagramma di Bode della sola  $G(s)$  chiaramente non rispetta i vincoli posti. Facciamo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{K}{s^t} \hat{C}(s), \quad \text{con} \quad \hat{C}(0) = 1$$

Iniziamo considerando la scelta del *tipo*  $t$  e della costante di guadagno  $K$  del controllore basandoci sulle specifiche statiche (cioè le specifiche 1,2,3).

La prima specifica impone ovviamente che sia  $t = 1$  poiché vogliamo che sia nullo (solo) l'errore al gradino. Questo valore garantisce automaticamente anche la soddisfazione della specifica 3, come visto sopra. La specifica 2 impone invece un valore per la costante di guadagno del controllore  $K \geq 10$ .

Conviene adesso riportare il diagramma di  $\frac{K}{s} G(s)$  sul piano di Bode sul quale abbiamo tracciato le specifiche. Si può così verificare che in questo esempio, oltre alle specifiche statiche, è già praticamente verificata anche la prima specifica dinamica, ovvero quella sulla insensibilità alle variazioni parametriche.

Non sono invece verificate le specifiche sulla banda passante (il taglio avviene a pulsazioni inferiori a  $10\text{rad/sec}$ ) e sul margine di fase (la pendenza nel taglio è di  $-3$ . Per migliorare la situazione, è quindi necessario agire con una azione anticipatrice piuttosto decisa. Iniziamo ponendo due zeri a una pulsazione pari a  $0.1\text{rad/sec}$ . Il diagramma del sistema con f.d.t.  $\frac{K(10s+1)^2}{s}G(s)$  taglia l'asse a  $0\text{db}$  alla pulsazione  $10000\text{rad/sec}$  con pendenza  $-1$ , soddisfacendo largamente le specifiche di tempo di assestamento e sovraeleggazione, ma violando quella sulla sensibilità al rumore di misura. La introduzione di un polo a  $1000\text{rad/sec}$  fa sì che il taglio avvenga a pendenza  $-2$  ad una pulsazione di  $1000\sqrt{10} \approx 3000\text{rad/sec}$ , soddisfacendo ancora la specifica sul tempo di assestamento. La distanza tra il ginocchio tra le pendenze  $-1$  e  $-2$ , e il taglio, è di poco superiore ad una ottava, e quindi accettabile in questa prima fase di progettazione approssimata. Infine, anche la specifica di reiezione del rumore di misura è adesso verificata.

In conclusione, in questa fase di progetto di prima massima si propone un controllore

$$C(s) = \frac{K}{s} \frac{(2s + 1)^2}{(0.001s + 1)}$$

che verifica già la condizione di causalità necessaria a garantire la fisica realizzabilità (se così non fosse stato, si sarebbe dovuto procedere ad aumentare il numero dei poli aggiungendone quanti necessario in alta frequenza).

La conclusione effettiva del progetto dovrà svolgersi con l'ausilio di mezzi di calcolo appropriati, ottenendo prima un diagramma di Bode esatto del sistema  $C(s)G(s)$  e verificando più puntualmente le specifiche, e infine simulando le varie condizioni operative (ingressi a gradino e a rampa, disturbi di misura e variazioni parametriche).

### 8.6.2 Simulazione in ambiente Simulink del sistema controllato

Il modello Simulink del sistema di controllo analizzato nella sezione precedente è riportato in figura 8.16. Di seguito riportiamo alcuni risultati di simulazione che mostrano il pieno soddisfacimento delle specifiche.

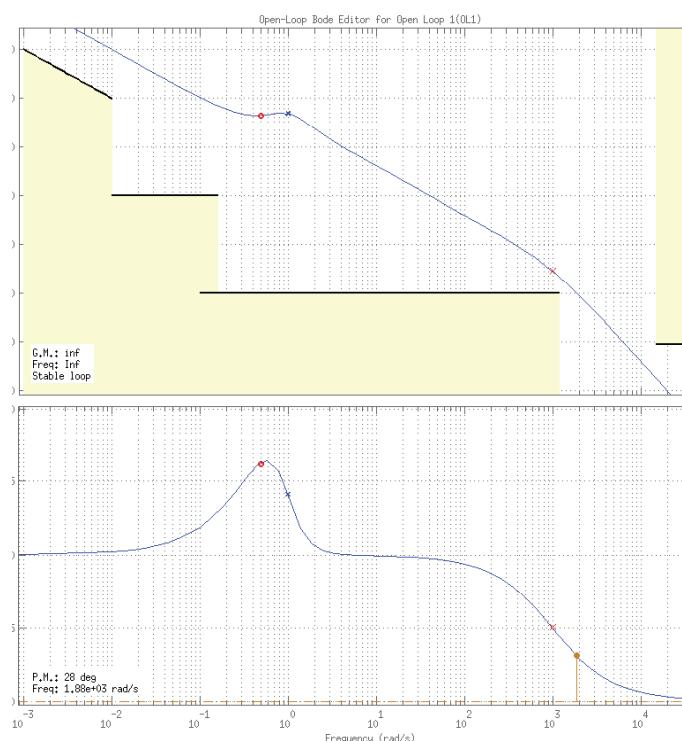


Figura 8.14: Diagrammi di Bode del sistema controllato con specifiche di progetto.

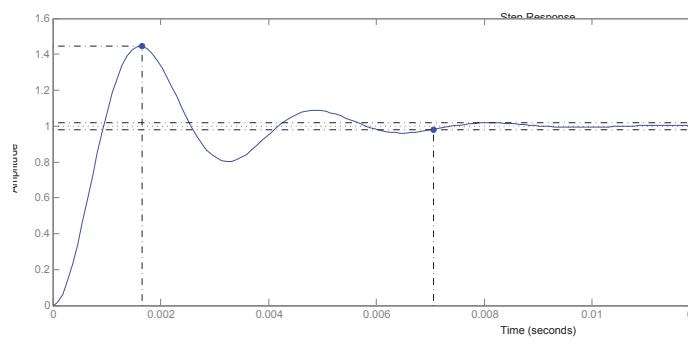


Figura 8.15: Risposta al gradino del sistema controllato.

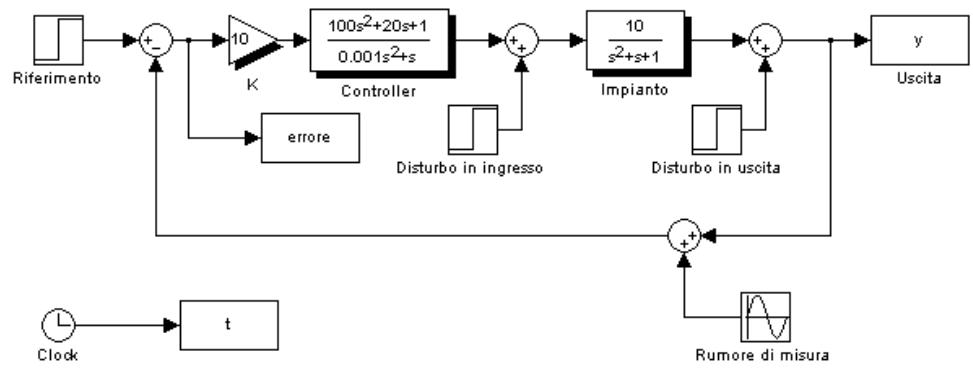


Figura 8.16: Modello Simulink del sistema di controllo.

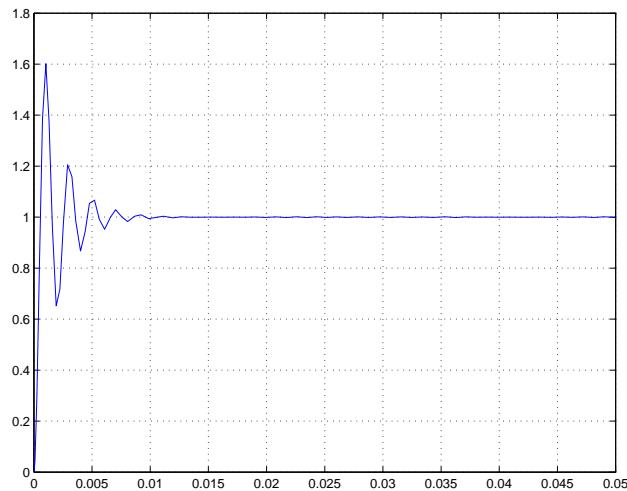


Figura 8.17: Risposta al gradino: in particolare, la figura mostra il soddisfacimento approssimato delle specifiche riguardanti il tempo di assestamento e la sovraelongazione massima.

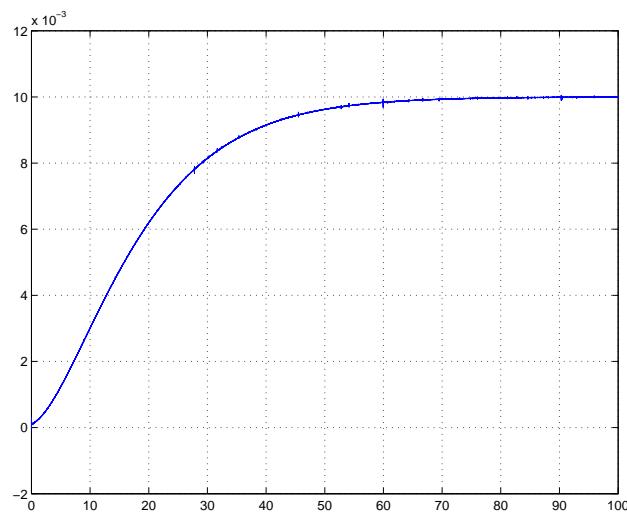


Figura 8.18: Errore alla rampa.

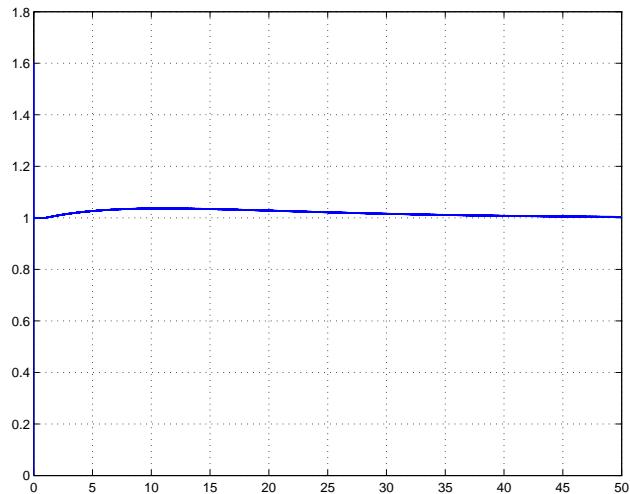


Figura 8.19: Reiezione del disturbo  $d_i = 10u(t - 1)$  in ingresso.

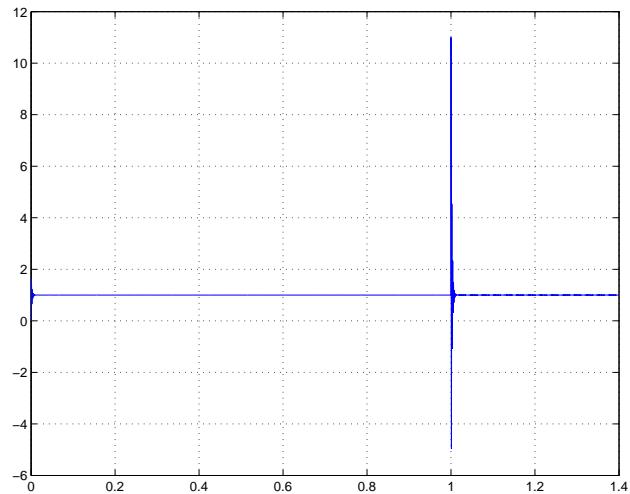


Figura 8.20: Reiezione del disturbo  $d_o = 10u(t - 1)$  in uscita.

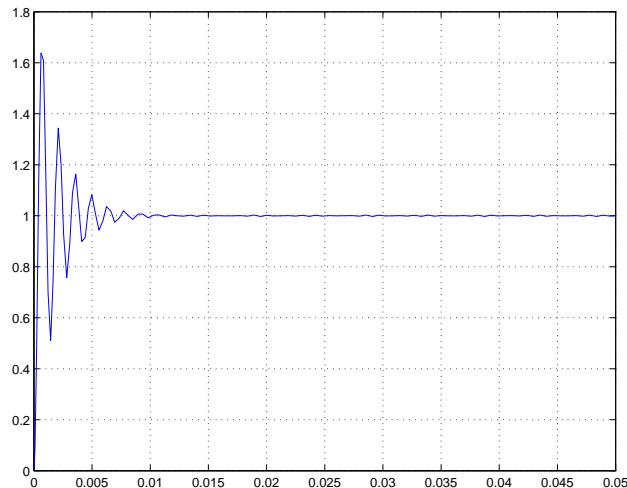


Figura 8.21: Risposta del sistema con una variazione del guadagno statico di impianto pari al 100% ( $G(s) = 20 \frac{1}{1+s+s^2}$ ).

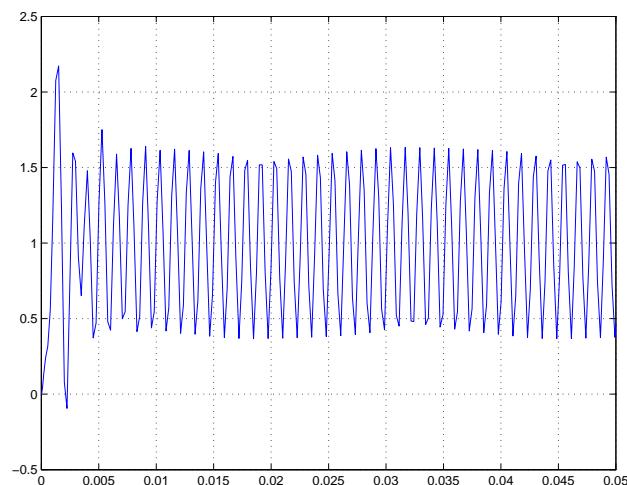


Figura 8.22: Reiezione del rumore di misura  $d_m = 10\sin(5000t)$ .



# Capitolo 9

## Luogo delle Radici

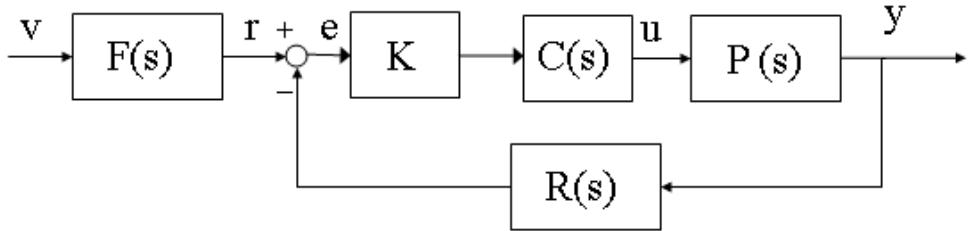
I metodi di sintesi dei controllori nel dominio della frequenza, in particolare quelli basati sul diagramma di Bode del sistema in anello aperto, sono metodi di grande semplicità e potenza applicativa per progettare sistemi di compensazione che assicurino date specifiche statiche e dinamiche, ma hanno alcune limitazioni.

Il progetto fatto sul diagramma di Bode basa la sua semplicità sulla approssimazione del sistema in anello chiuso con un sistema a poli dominanti - uno o due a seconda dei casi. Dei rimanenti poli dell'anello chiuso, che hanno un effetto sulla risposta del sistema – anche se relativamente minore – non si ha esplicita cura.

Una limitazione certamente più grave si ha quando il sistema da regolare sia instabile in anello aperto. In tale caso, infatti, il diagramma di Bode non permette di leggere le grandezze di margine di fase e di ampiezza, né permette in modo semplice di determinare la stabilità dell'anello chiuso. Peraltro, il criterio di stabilità di Nyquist, che ci pone in grado di analizzare tale problema, non dà valido aiuto nella sintesi, per il fatto che il diagramma di Nyquist non permette una semplice composizione dei sistemi che compongono l'anello di retroazione.

Per superare queste limitazioni, si può efficacemente usare il metodo del Luogo delle Radici, o Luogo di Evans. Questo consiste in un procedimento grafico per la costruzione delle curve descritte nel piano complesso dalle radici del denominatore della f.d.t. dell'anello chiuso al variare di un parametro, tipicamente (ma non unicamente) la costante di guadagno di anello.

Il luogo delle radici consente di visualizzare facilmente e di determinare con precisione la posizione dei poli del sistema in anello chiuso, così da avere indicazioni complete sulle caratteristiche del sistema in anello chiuso. Inoltre, consente il progetto di un controllore nel caso in cui le caratteristiche del sistema non siano soddisfacenti.

Figura 9.1: Schema di sistema in retroazione con guadagno variabile  $K$ 

## 9.1 Equazione del luogo delle radici

Si consideri il sistema in retroazione negativa in figura nella quale si è messo in evidenza il guadagno  $K_g$  delle cui variazioni si desidera studiare l'effetto sui poli della f.d.t. in anello chiuso, che è data da

$$G_c(s) = F(s) \frac{K_g C(s) P(s)}{1 + K_g C(s) P(s) R(s)}.$$

I poli sono quindi le radici della equazione

$$1 + K_g G(s) = 0, \quad (9.1)$$

dove per semplicità si è posto  $C(s)P(s)R(s) = G(s)$ .

Si osservi che, nel caso in cui la retroazione fosse positiva, l'equazione (9.1), dovrebbe essere modificata cambiando la somma che vi appare in una sottrazione. Continueremo in ogni caso a fare riferimento alla stessa equazione, potendosi tenere conto facilmente di un'eventuale retroazione positiva con un cambiamento di segno della  $G(s)$ . Potremo quindi limitarci a considerare le radici dell'equazione (9.1) ottenute al variare di  $K_g$  da 0 ad  $+\infty$ . Il luogo dei punti nel piano complesso formato da queste radici al variare di  $K_g$  è appunto detto Luogo delle Radici.

Per il tracciamento del luogo, conviene esprimere la  $G(s)$  in forma fattorizzata (o "zpk"), in modo da metterne in evidenza i poli e gli zeri:

$$G(s) = K_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = K_0 \frac{n(s)}{d(s)}.$$

Definendo  $K_1 = K_0 K_g$ , si osserva che l'equazione (9.1) implica una equazione sul modulo di  $\frac{n(s)}{d(s)}$ ,

$$\left| \frac{n(s)}{d(s)} \right| = \frac{1}{|K_1|} \quad (9.2)$$

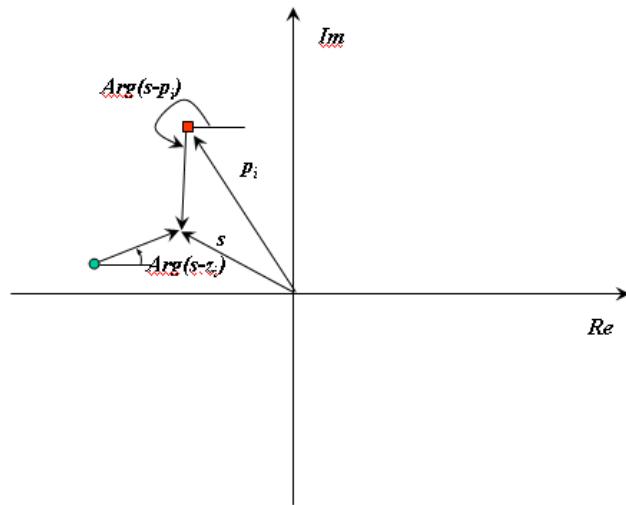


Figura 9.2: Costruzione geometrica per la costruzione del luogo delle radici.

e una sulla fase, che vale

$$\arg \frac{n(s)}{d(s)} = \arg \frac{-1}{K_1}$$

da cui si ha

$$\sum_{i=1}^m \arg(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \arg(s - p_j) = \begin{cases} \pi \pmod{2\pi} & \text{se } K_1 > 0 \\ 0 \pmod{2\pi} & \text{se } K_1 < 0 \end{cases} \quad (9.3)$$

Quest'ultima equazione indica che un punto *s* del piano complesso fa parte del luogo delle radici se, considerando i vettori che partono dalle singolarità e hanno vertice in *s*, la somma delle loro fasi è pari al valore indicato (vedi figura 9.2). L'equazione delle fasi è sufficiente a costruire il luogo. Per trovare le corrispondenze tra le diverse posizioni delle radici sul luogo, ed il valore del *K<sub>g</sub>* che le produce, cioè per *graduare* il luogo, si usa invece la equazione dei moduli.

## 9.2 Proprietà del luogo delle radici

Il luogo delle radici presenta alcune proprietà che ne vincolano l'andamento e ne facilitano il tracciamento. Tali proprietà inducono regole di tracciamento,

che si differenziano a seconda del caso in cui valga  $K_1 > 0$  o  $K_1 < 0$ : nel primo caso si parla di luogo diretto delle radici, nel secondo di luogo inverso.

**Proprietà 1:** il luogo delle radici ha tanti rami quanti sono i poli della F.d.T. ad anello aperto  $G(s)$  (cioè le radici di  $d(s)$ ). Ogni ramo parte, per  $K_g = 0$ , da un polo di  $G(s)$ ;  $m$  rami terminano, per  $K_g \rightarrow \infty$ , in uno zero di  $G(s)$  (cioè una radice di  $n(s)$ ); gli altri  $n - m$  rami terminano in un punto all'infinito.

La proprietà è di facile dimostrazione, semplicemente considerando l'equazione

$$d(s) + K_g K_0 n(s) = 0, \quad (9.4)$$

che ha ovviamente le stesse radici della (9.1).

**Proprietà 2:** il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

La proprietà discende dal fatto che, se  $s = \sigma$  è radice della equazione polinominale a coefficienti reali (9.4), allora anche il coniugato  $s = \sigma^H$  è radice della stessa equazione.

**Proprietà 3:** Se  $K_1 > 0$ , un punto dell'asse reale appartiene al luogo se e solo se lascia alla sua destra un numero totale dispari di singolarità (poli e zeri). Se  $K_1 < 0$ , un punto dell'asse reale appartiene al luogo se e solo se lascia alla sua destra un numero totale pari o nullo di singolarità.

Questa proprietà è semplicemente dimostrata facendo riferimento alla costruzione grafica di figura (9.2) per punti dell'asse reale, riportata in figura (9.3). Si consideri innanzitutto che ogni coppia di singolarità complesse e coniugate del sistema in anello aperto fornisce un contributo totale nullo alla somma delle fasi nella equazione (9.3) per qualsiasi punto  $s \in \mathbb{R}$ . Inoltre, ogni polo o zero reale fornisce contributo nullo per ogni  $s$  sull'asse reale con ascissa maggiore della loro. Ogni polo (zero, rispettivamente) reale fornisce invece un contributo di  $\pi$  ( $-\pi$ ) ad ogni  $s$  reale con ascissa inferiore alla sua. La proprietà segue immediatamente dall'esame della (9.3).

**Proprietà 4:** Gli  $n - m$  rami del luogo delle radici che tendono a infinito vi tendono secondo altrettante direzioni asintotiche che formano con l'asse reale positivo angoli pari a

$$\gamma = \frac{\pi(2r+1)}{n-m}, \quad r = 0 \dots n - m - 1, \quad \text{se } K_1 > 0$$

ovvero

$$\gamma = \frac{2r\pi}{n-m}, \quad r = 0 \dots n - m - 1, \quad \text{se } K_1 < 0$$

Gli asintoti sono individuati da semirette di un fascio centrato in un punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_\alpha = \frac{\sum_1^n p_i - \sum_1^m z_i}{n - m}$$

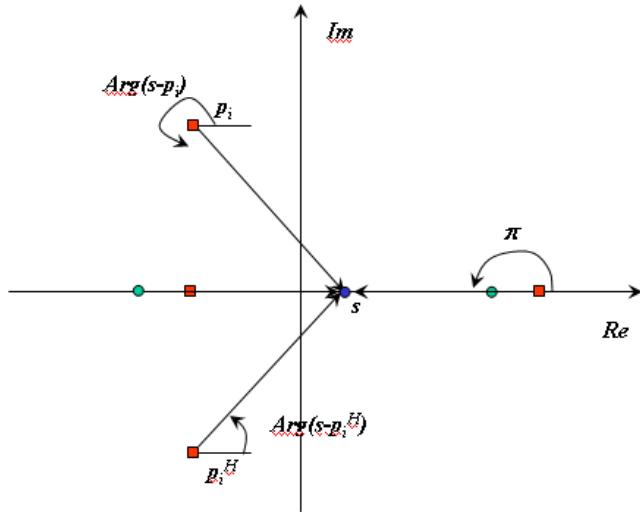


Figura 9.3: Illustrazione della proprietà del luogo delle radici relativa ai tratti dell'asse reale che ne fanno parte.

dove  $\sum p_i$  e  $\sum z_i$  sono, rispettivamente, le somme dei poli e degli zeri. Questo punto può essere considerato come il centro di gravità di un sistema di masse unitarie positive poste nei poli e di masse unitarie negative poste negli zeri.

La proprietà discende dalla (9.3), laddove si considerino valori di  $s = Re^{j\gamma}$  per  $R \rightarrow \infty$ . Si ha infatti che

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \arg(Re^{j\gamma} - z_i) - \sum_{i=1}^n \arg(Re^{j\gamma} - p_i) &= \\ \sum_{i=1}^m \arg(Re^{j\gamma}) - \sum_{i=1}^n \arg(Re^{j\gamma}) &= \\ \sum_{i=1}^m \gamma - \sum_{i=1}^n \gamma &= -(n-m)\gamma, \end{aligned}$$

da cui immediatamente la prima parte della proprietà in esame.

**Proprietà 5:** Il luogo delle radici può possedere punti di biforcazione, in cui un numero  $h$  di rami si intersecano. Tali punti sono quelli che soddisfano, oltre alla equazione (9.3), tutte le ulteriori equazioni

$$\frac{d^j G(s)}{ds^j} = 0, \quad j = 0, \dots, h-1.$$

La proprietà discende dal fatto che un punto di biforcazione in  $s = \sigma$  tra  $h$  rami coincide con una radice di molteplicità  $h$  della equazione  $1 + K_g G(s)$ , che può quindi essere fattorizzata in forma  $1 + K_g G(s) = (s - \sigma)^h p(s)$ . Questa

forma mostra che in  $\sigma$  anche le prime  $h-1$  derivate rispetto a  $s$  della equazione devono annullarsi, essendo in particolare

$$\frac{d}{ds} 1 + K_g G(s) = \frac{d}{ds} G(s) = (s - \sigma)^{h-1} [hp(s) + (s - \sigma) \frac{d}{ds} p(s)],$$

e analogamente per le seguenti derivate. Nel caso  $h = 2$ , questa equazione si specializza nella

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma - z_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma - p_i}, \quad s = \sigma + j\omega,$$

che può talvolta essere convenientemente usata.

Si osserva infine che gli  $h$  rami entranti in un punto di biforcazione e gli  $h$  che corrispondentemente ne escono, hanno tangenti in  $\sigma$  che dividono l'angolo giro simmetricamente, formando angoli di  $\pi/h$  tra ogni ramo entrante e i suoi adiacenti, che sono uscenti (e viceversa, ovviamente).

**Proprietà 6:** Se  $K_1 > 0$ , l'angolo secondo il quale il luogo delle radici lascia un polo  $p_i$  di molteplicità  $h_i$  è dato da

$$\frac{1}{h_i} \left( (2\nu + 1)\pi + \sum_{j=1}^m \arg(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \arg(p_i - p_j) \right)$$

dove  $\nu = \{0, 1, \dots, h_i - 1\}$ .

Invece l'angolo secondo il quale il luogo tende ad uno zero  $z_i$  con molteplicità  $h_i$  è dato da

$$\frac{1}{h_i} \left( (2\nu + 1)\pi + \sum_{j=1}^n \arg(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \arg(z_i - z_j) \right)$$

con  $\nu = \{0, 1, \dots, h_i - 1\}$ .

La proprietà vale nel caso  $K_1 < 0$  se si usano nelle formule sopra riportate i multipli pari di  $\pi$  invece che i multipli dispari (cioè sostituendo  $(2\nu + 1)$  con  $2\nu$ ).

La proprietà segue direttamente dalla (9.3).

Gli eventuali punti di intersezione del luogo con l'asse immaginario possono essere utili per individuare il massimo valore del guadagno  $K_g$  compatibile con la stabilità. Essi possono essere trovati risolvendo  $1 + K_g G(j\omega) = 0$ , cioè risolvendo le due equazioni scalari ottenute annullando la parte reale e la parte immaginaria rispetto a  $\omega$  e  $K_g$ . Lo stesso può essere fatto utilizzando

il Criterio di Routh applicato all'equazione  $d(s) + K_g K_0 n(s) = 0$ . Se il luogo è tracciato mediante l'uso di programmi di calcolo numerico con interfaccia grafica avanzata, quali *Matlab*, i valori numerici relativi a questi punti, così come alle altre caratteristiche salienti del luogo, sono spesso ottenibili con facilità.

## 9.3 Progetto mediante luogo delle radici

L'analisi con la tecnica del luogo delle radici permette di evidenziare, oltre all'effetto della azione proporzionale di  $K_g$ , alcuni aspetti delle altre azioni compensatrici viste in precedenza.

Si può facilmente osservare ad esempio che per una azione anticipatrice del tipo  $\frac{\tau_z s + 1}{\tau_p s + 1}$  con  $\tau_z > \tau_p$  nella catena diretta in serie ad una  $G(s)$ , si aggiungono in anello aperto a quelli di  $G(s)$  un polo e uno zero reali negativi, dei quali il secondo è più vicino all'origine: questo implica che il centro degli eventuali asintoti sia spostato verso sinistra, favorendo così la stabilità e la banda passante dell'anello chiuso. Nel caso di azione attenuatrice ( $\tau_z < \tau_p$ ), il polo aggiuntivo più vicino all'origine dello zero spinge invece il centro degli eventuali asintoti verso destra: l'azione apparentemente sfavorevole alla stabilità, già noto come effetto ritardatore dell'azione attenuatrice, è però compensato dalla diversa graduazione in  $K_g$  sul luogo, che può permettere un aumento del guadagno di anello compatibile con la stabilità.

Una più dettagliata analisi può essere effettuata con strumenti analoghi al luogo delle radici, come illustrato nel seguito.

### 9.3.1 Controllo in Cascata

Quando si consideri il progetto di un controllore per problemi non banali, è piuttosto raro il caso in cui la tecnica del luogo delle radici sia in grado di indicare una soluzione che soddisfi tutte le specifiche. È più efficace in genere usare una strategia che adotta il luogo delle radici per individuare un primo controllore  $C_0(s)$  che si limiti a rendere asintoticamente stabile il sistema in anello chiuso  $G_0(s) = \frac{C_0(s)G(s)}{1+C_0(s)G(s)}$ , per poi passare a soddisfare le specifiche statiche e dinamiche con il progetto di dettaglio di un anello più esterno di retroazione con i metodi esaminati in precedenza. Questa tecnica, nota con il nome di “progetto in cascata”, è illustrata in figura 9.4.

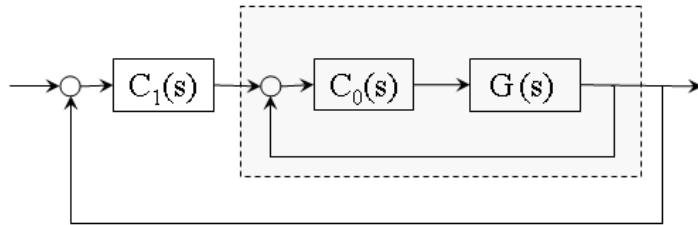


Figura 9.4: Nel progetto in cascata, il controllore interno  $C_0(s)$  ha il compito di precompensare e rendere stabile il sistema, così da poter applicare un anello esterno di controllo progettato in maggior dettaglio usando le tecniche basate sui diagrammi di Bode.

### 9.3.2 Progetto di Controllori Stabilizzanti sul Luogo delle Radici

Si espongono qui alcune considerazioni utili al progetto di controllori che possano rendere stabile in retroazione un sistema che sia instabile in anello aperto.

- Consideriamo innanzitutto il caso in cui il sistema sia costituito da un solo polo positivo, cioè  $G(s) = K_0 \frac{1}{s-p}$ , con  $p > 0$ . Se  $K_0 > 0$ , il luogo diretto implica che esiste un valore minimo  $\bar{K}_g$  del guadagno di anello tale che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile per  $K_g > \bar{K}_g$  (fig. 9.5). Se  $K_0 < 0$  l'applicazione del luogo indiretto porterebbe ad avere un sistema instabile in retroazione per qualunque  $K_g > 0$  (fig. 9.5). In questo caso, è sufficiente considerare retroazioni positive per tornare al luogo diretto e ai risultati precedenti. Si osservi che scegliere retroazione positiva con  $K_g > 0$  è del tutto equivalente, ai fini della stabilità, a scegliere  $K_g < 0$  con retroazione negativa.
- Passiamo a considerare adesso un sistema con due poli, di cui almeno uno instabile, ovvero  $G(s) = K_0 \frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)}$  con  $p_1 > 0$ . Se  $K_0 > 0$  e la retroazione è negativa, il luogo diretto ha due asintoti paralleli all'asse immaginario, con centro in  $\frac{p_1+p_2}{2}$ . Se il secondo polo è negativo e  $p_2 < -p_1$ , gli asintoti giacciono a sinistra dell'asse immaginario, ed esiste un valore minimo  $\bar{K}_g$  tale che per  $K_g > \bar{K}_g$  il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile (fig. 9.6-a). Se invece  $p_2 > -p_1$ , non esiste alcun  $K_g > 0$  che può stabilizzare il sistema (fig. 9.6-b), né può

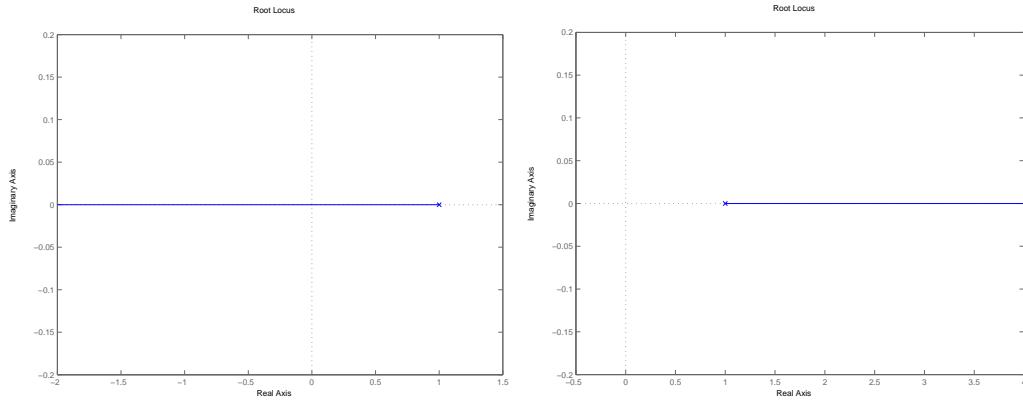


Figura 9.5: Luogo delle radici di  $G(s) = \frac{K_0}{(s-1)}$  diretto (a sinistra) e indiretto (a destra).

aiutare il passaggio al luogo indiretto (adottando ad es. una retroazione positiva). La stabilizzazione si può comunque ottenere facilmente introducendo nel controllore in retroazione negativa una azione anticipatrice  $C(s) = K_c \frac{s-z_c}{s-p_c}$ , con  $p_c < z_c < 0$  e  $K_c = z_c/p_c$ . La rete ad anticipo deve essere sufficientemente energica da attirare nel semipiano a parte reale negativa il centro degli asintoti, ovvero  $(p_1 + p_2 + p_c - z_c)/2 < 0$  (fig. 9.6-c). In generale, l'effetto di una coppia polo-zero in  $p_c$  e  $z_c$  sul centro degli asintoti del luogo di un sistema con differenza poli-zeri  $n - m$  è uno spostamento di una quantità  $\Delta = (p_c - z_c)/(n - m)$ .

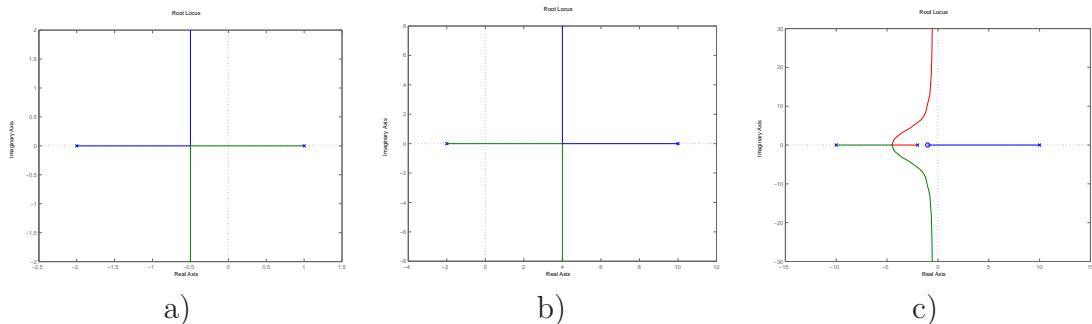


Figura 9.6: Luogo delle radici di  $G_1(s) = \frac{K_0}{(s-1)(s+2)}$  (a), di  $G_2(s) = \frac{K_0}{(s-10)(s+2)}$  (b), e di  $C(s)G_2(s)$ , con  $C(s) = \frac{s+1}{s+10}$  (c).

- Considerazioni analoghe valgono nel caso di un numero superiore di poli in anello aperto, di cui uno o più a parte reale positiva. Quando vi

siano solo poli a parte reale positiva, l'azione che tipicamente si richiede è anticipatrice. In fig. 9.7 è riportato il luogo delle radici per il sistema  $G(s) = \frac{1}{(s+3)(s+1)(s-2)}$  (a sinistra) e per lo stesso sistema compensato da una doppia azione anticipatrice  $C(s) = 9\frac{(5s+1)(1.7s+1)}{(0.01s+1)(0.001s+1)}$  (a destra). In fig. 9.8 è invece riportato il luogo delle radici per il sistema

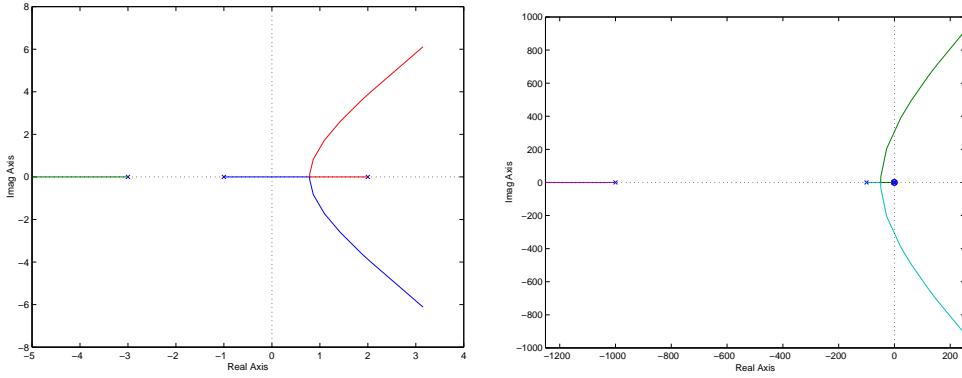


Figura 9.7: Applicazione di azioni anticipatrici al sistema con un polo instabile in anello aperto  $G(s) = \frac{1}{(s+3)(s+1)(s-2)}$ , ed effetto del compensatore  $C(s) = 9\frac{(5s+1)(1.7s+1)}{(0.01s+1)(0.001s+1)}$

$G(s) = \frac{1}{(s+3)(s+1)(s-2)}$  (a sinistra in alto) e per il sistema compensato da una doppia azione anticipatrice  $C(s) = 9\frac{(5s+1)(1.7s+1)}{(0.01s+1)(0.001s+1)}$  (a destra in alto). In basso sono riportate due viste dell'andamento del luogo nelle vicinanze dell'origine con ingrandimenti crescenti.

- In alcuni casi, progetto della rete compensatrice può essere sostanzialmente più complesso. Ad esempio, già nel caso di tre poli

$$G(s) = K_0 \frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$

con  $p_1 = 8$ ,  $p_2 = -2$  e  $p_3 = -3$ , il cui luogo è riportato in fig. 9.9, una rete ad anticipo del tipo

$$\frac{K_g(s+1)}{(s+25)}$$

riesce a fare in modo che il centro degli asintoti ed il punto di biforcazione si spostino nel semipiano reale negativo, cosicché il ramo che inizia dal polo instabile è intercettato dallo zero della rete, ed esiste un  $\bar{K}_g$  tale che per  $K_g > \bar{K}_g$  questa radice si porta nel semipiano stabile. Esiste anche un  $\bar{K}'_g$  tale che per  $K_g < \bar{K}'_g$  i rami che si staccano dal

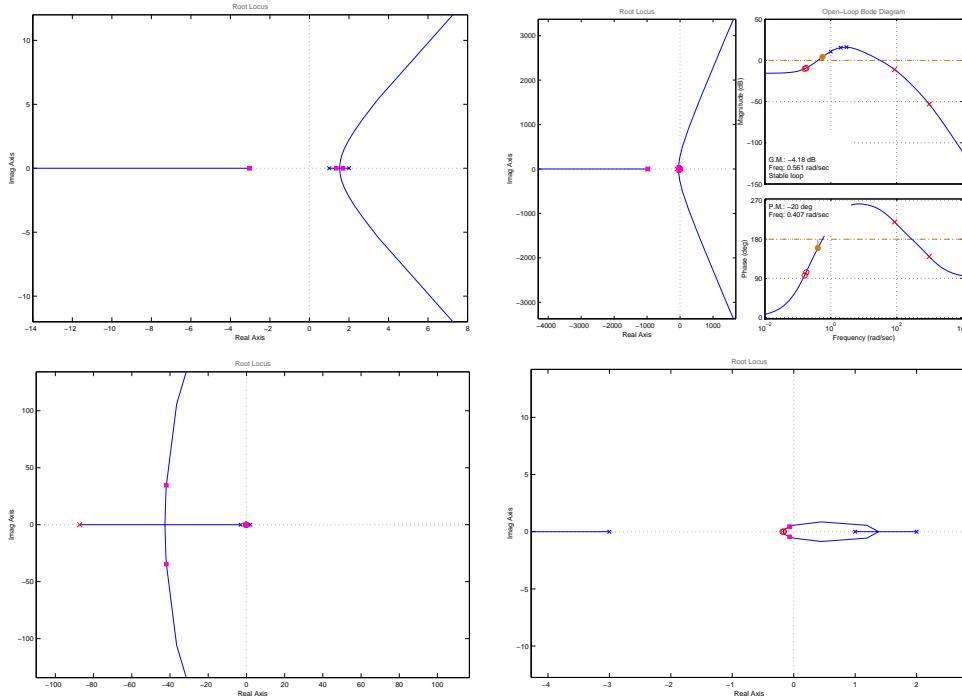


Figura 9.8: Sistema con due poli instabili in anello aperto  $G(s) = \frac{1}{(s+3)(s-1)(s-2)}$  e sua stabilizzazione con un controllore a doppia azione anticipatrice  $C(s) = 1 \frac{(5s+1)(6s+1)}{(0.01s+1)(0.001s+1)}$

punto di biforcazione rimangono nel semipiano stabile. Sfortunatamente però  $\bar{K}'_g < \bar{K}_g$ , ovvero le radici complesse divengono instabili prima che quella reale divenga stabile, quindi non esiste un  $K_g$  stabilizzante. Si rende necessario in casi simili un intervento più energico, come ad esempio una rete ad anticipo complessa (cioè formata da due zeri e due poli coniugati, di cui i primi più lenti). Introducendo ad esempio una rete con due zeri in  $-1 \pm 2j$  e due poli in  $-30 \pm 15j$ , ovvero

$$C(s) = \frac{(s^2 + 2s + 5)}{(s^2 + 60s + 1125)}$$

si ottiene l'andamento riportato in fig. 9.10, e si ha che esiste un intervallo di valori (pari circa a  $2.4 \cdot 10^4 \leq K_g \leq 5 \cdot 10^4$ ) per cui il sistema è stabilizzato.

- Quando vi siano anche zeri a parte reale positiva, la compensazione dei sistemi può essere sostanzialmente più difficile. Se la f.d.t. ha uno zero a parte reale positiva maggiore di ogni polo, può essere considerata

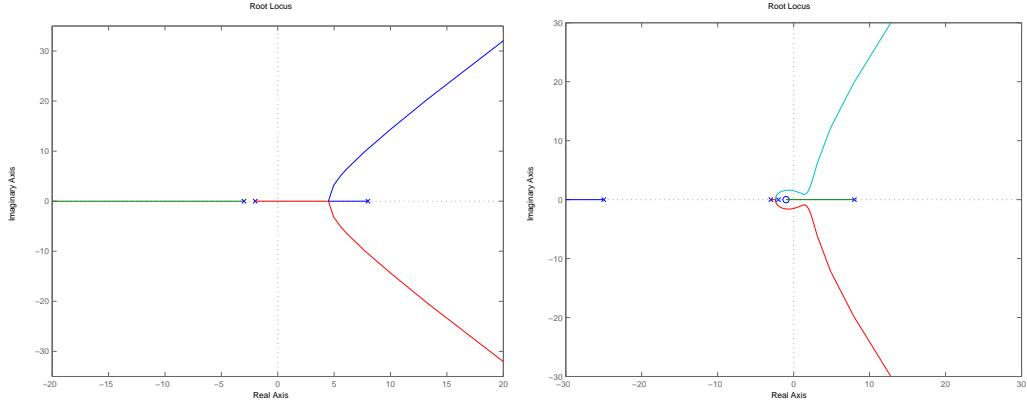


Figura 9.9: Luogo delle radici di  $G(s) = \frac{K_0}{(s-8)(s+2)(s+3)}$  (a sinistra) e di  $C(s)G(s)$ , con  $C(s) = 25 \frac{s+1}{s+25}$ .

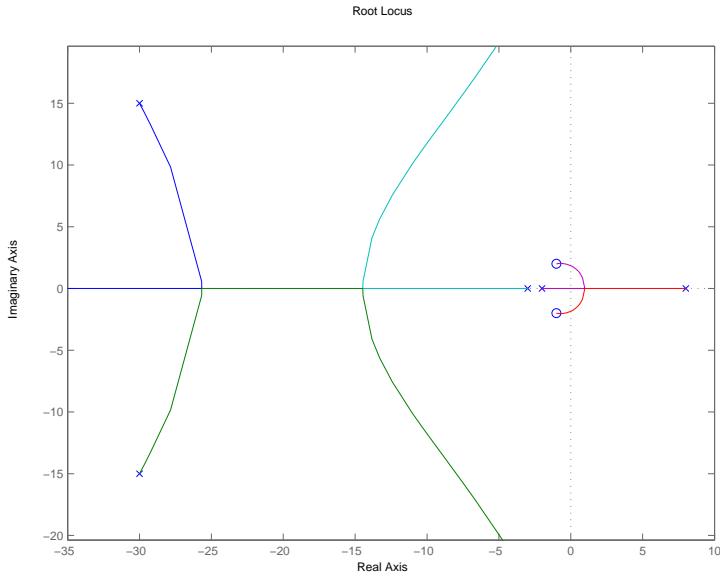


Figura 9.10: Luogo delle radici di  $C(s)G(s)$ , con  $C(s) = \frac{(s^2+2s+5)}{(s^2+60s+1125)}$ .

l'opportunità di scegliere per  $K_g$  un segno tale da avere  $K_1 = K_g K_0 < 0$ , (quindi usare le regole del luogo inverso). Si consideri ad esempio la  $G(s) = \frac{s-2}{s-1}$ , che non è stabilizzabile con alcun valore positivo di  $K_g$ , ma lo è per valori di  $K_g$  in un intervallo  $-0.5 > K_g > -1$ .

- Se vi sono un polo ed uno zero reali positivi, il segmento che li uni-

sce produce una radice instabile in anello chiuso per qualsiasi valore del guadagno, nè ciò può essere modificato da una semplice azione anticipatrice o ritardatrice. Per modificare questo stato di cose, è necessario intervenire con singolarità a parte reale positiva che possano interrompere questo segmento. Si può procedere ad aggiungere una azione anticipatrice instabile, consistente in una coppia polo/zero con polo instabile e zero a parte reale negativa.

Si consideri ad esempio il sistema  $G(s) = \frac{s-1}{(s+3)(s+1)(s-2)}$  (a sinistra in fig. 9.11), e l'effetto di una prima compensazione con azione anticipatrice instabile  $C_1(s) = \frac{s+3}{s-6}$  (a destra). Si osservi che lo zero può essere usato per cancellare un polo stabile, ma non per cancellare poli instabili (anche piccolissimi errori in questa cancellazione darebbero infatti luogo a modi instabili in anello chiuso). Nonostante il sistema non

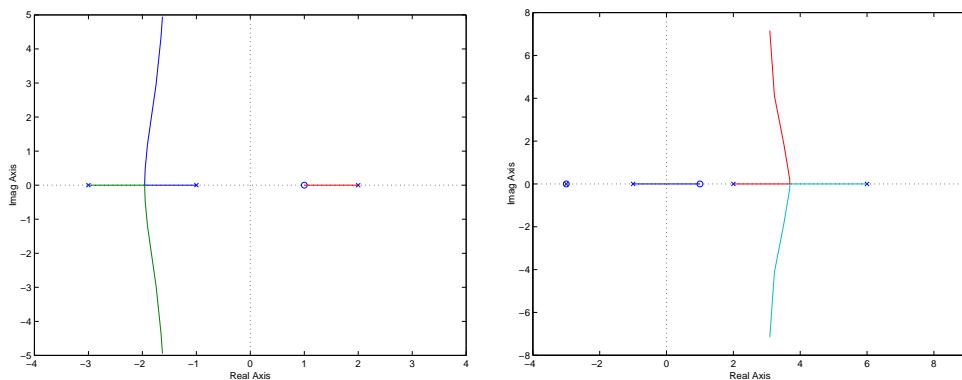


Figura 9.11: Pre-compensazione di un sistema con un polo ed uno zero a parte reale positiva mediante introduzione di una azione anticipatrice instabile.

sia ancora stabilizzato, le radici dell'anello chiuso che partono dai poli instabili si muovono adesso lungo asintoti verticali, e possono essere attratti da una opportuna ulteriore azione compensatrice verso il semipiano sinistro. Ad esempio, un controllore  $C_2(s) = \frac{s+1}{s^2+40s+700}$  (che usa uno zero per cancellare l'altro polo stabile, ed utilizza due poli complessi coniugati), fornisce un luogo delle radici come riportato in fig. 9.12, dal quale si deduce che il sistema è stabilizzato scegliendo un guadagno pari circa a 7000. A destra in fig. 9.12 è riportato il diagramma di Bode del sistema  $\frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$ , con  $C(s) = C_1(s)C_2(s)$  che dovrà essere usato per progettare il controllore esterno del sistema in cascata in modo da soddisfare le specifiche progettuali.

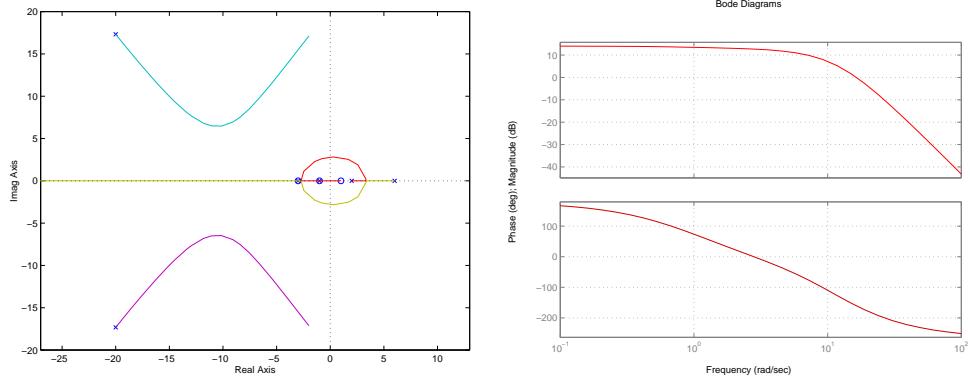


Figura 9.12: A sinistra: compensazione del sistema della figura precedente con un controllore complessivo  $C(s) = 7000 \frac{(s+1)(s+3)}{(s-6)(s^2+40s+700)}$ . A destra: diagramma di Bode del sistema in anello chiuso.

### 9.3.3 Contorno delle radici

Il metodo del luogo delle radici può essere utilizzato utilmente per visualizzare l'effetto sui poli dell'anello chiuso di altri parametri del controllore. Questo richiede alcune piccole manipolazioni delle equazioni che vengono qui descritte per i casi in cui il parametro  $i$  cui effetti si vogliono studiare siano la costante di tempo di un polo e quella di uno zero della catena aperta.

Nel primo caso, si scriva dunque

$$C(s)G(s) = \frac{K_g}{(\tau s + 1)} G(s) = K_g K_0 \frac{n(s)}{d(s)(\tau s + 1)}$$

ottenendo quindi la f.d.t. in anello chiuso

$$G_c(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{K_g G(s)}{(\tau s + 1) + K_g G(s)}$$

L'equazione caratteristica corrispondente

$$\tau s + 1 + K_g G(s) = \tau s + 1 + K_g K_0 \frac{n(s)}{d(s)} = 0$$

può essere divisa per  $1 + K_g G(s)$ , dando la

$$1 + \tau \frac{s d(s)}{d(s) + K_g K_0 n(s)} = 0.$$

Pertanto, i rami del luogo delle radici della f.d.t. in anello chiuso al variare di  $\tau$  sono ottenibili applicando il metodo di cui sopra alla f.d.t.  $\frac{d(s)s}{d(s) + K_g K_0 n(s)}$ . Si

può osservare che i rami di questo luogo partono, con  $\tau = 0$  e  $K_g$  fissato, dai poli in anello chiuso della  $G(s)$ ; i rami che terminano al finito raggiungono, con  $\tau = \infty$ , i poli in anello aperto della  $G(s)$  o l'origine.

La costruzione grafica di questo luogo può venir fatta appoggiandosi ad un luogo delle radici al variare di  $K_g$  tracciato e graduato in precedenza: per ogni valore di  $K_g$  si ha un luogo graduato in  $\tau$ . Questa costruzione che illustra graficamente le variazioni dei poli in anello chiuso al variare di due parametri si dice “contorno delle radici”.

Nel caso in cui invece si consideri la variazione della costante di tempo di uno zero del controllore, si ha

$$C(s)G(s) = K_g(\tau s + 1)G(s) = K_g K_0 (\tau s + 1) \frac{n(s)}{d(s)}$$

ottenendo quindi la f.d.t. in anello chiuso

$$G_c(s) = \frac{K_g(\tau s + 1)G(s)}{1 + K_g(\tau s + 1)G(s)}$$

L'equazione caratteristica corrispondente

$$1 + K_g G(s) + \tau K_g s G(s) = 0$$

può essere divisa per  $1 + K_g G(s)$ , dando la

$$1 + \tau \frac{K_g s G(s)}{1 + K_g G(s)} = 1 + \tau \frac{K_g K_0 s n(s)}{d(s) + K_g K_0 n(s)} = 0.$$

I rami del luogo al variare di  $\tau$  partono quindi, con  $\tau = 0$  e  $K_g$  fissato, ancora dai poli in anello chiuso della  $G(s)$ , mentre quelli che terminano al finito raggiungono, per  $\tau = \infty$ , gli seri in anello aperto della  $G(s)$  o l'origine. Anche in questo caso si può visualizzare graficamente l'effetto dei due parametri  $K_g$  e  $\tau$  contemporaneamente mediante il contorno delle radici.



# Appendice A

## Richiami di Algebra Lineare

È opportuno qui richiamare dal corso di Algebra delle matrici alcune proprietà delle matrici simili.

### A.0.4 Matrici simili e Diagonalizzazione

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è simile a  $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se esiste una matrice  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertibile tale che  $A = T^{-1}\hat{A}T$ ;
- Due matrici simili hanno gli stessi autovalori, mentre gli autovettori sono trasformati secondo  $T$ : se  $Ax = \lambda_1 x$ ,  $\hat{A}y = \lambda_2 y \Rightarrow TAT^{-1}y = \lambda_2 y$ ; posto  $z = T^{-1}y$ , premoltiplicando per  $T^{-1}$  si ha  $Az = \lambda_2 z$ , quindi  $\lambda_2 = \lambda_1$  e  $z = x \Rightarrow y = Tx$ .
- Per una matrice  $A$  che ha  $n$  autovettori indipendenti, esiste una  $Q$  che trasforma  $A$  per similitudine in una matrice  $\Lambda$  diagonale,  $Q^{-1}AQ = \Lambda$ .  $\Lambda$  può essere ordinata in modo da avere l' $i$ -esimo autovalore più grande di  $A$ ,  $\lambda_i$ , nella posizione diagonale  $\Lambda(i, i)$ , nel qual caso la  $i$ -esima colonna  $Q(:, i)$  di  $Q$  è l'autovettore di  $A$  corrispondente a  $\lambda_i$ .
- La  $i$ -esima riga  $Q^{-1}(i, :)$  di  $Q^{-1}$  soddisfa alla equazione  $Q^{-1}(i, :)A = \lambda_i Q^{-1}(i, :)$ , e viene pertanto detta autovettore destro di  $A$ . Si noti che, trasponendo questa relazione e poichè gli autovalori di una matrice e della sua trasposta coincidono, risulta che gli autovettori destri di  $A$  sono i trasposti degli autovettori comuni, o sinistri, di  $A^T$ .
- Un altro modo di scrivere  $A = Q\Lambda Q^{-1}$  è pertanto

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i Q(:, i) Q^{-1}(i, :),$$

cioè come somma pesata di matrici diadiiche (prodotto colonna per riga).

- Caso particolare: una matrice simmetrica  $A = A^T$  ha sempre  $n$  autovettori indipendenti, che possono sempre essere scelti ortogonali tra loro, e di norma unitaria. Pertanto esiste una matrice  $Q$  che diagonalizza  $A$  per similitudine, ed è ortonormale:  $Q^T Q = I \Leftrightarrow Q^T = Q^{-1}$ . Autovettori destri e sinistri in questo caso coincidono, a meno di una trasposizione.
- Non tutte le matrici  $n \times n$  sono in generale diagonalizzabili per similitudine, in quanto possono non possedere  $n$  autovettori indipendenti con cui costruire la matrice  $Q$ . Questo caso è escluso per matrici  $A$  che abbiano tutti gli autovalori diversi: infatti, autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono certamente indipendenti (se  $Ax_1 = \lambda_1 x_1$  e  $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ , posto per assurdo  $x_2 = \gamma x_1$  si ottiene  $\lambda_1 = \lambda_2$ ).
- La non-diagonalizzabilità (o difettività) può darsi solo se la matrice ha qualche autovalore multiplo, cioè se il *polinomio caratteristico* della matrice, ottenuto ponendo  $\det(A - \lambda I) = 0$ , contiene almeno una soluzione con molteplicità algebrica doppia o superiore. In altri termini, il polinomio caratteristico  $\pi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ , deve essere fattorizzabile nella forma  $(\lambda - \lambda_1)^{\mu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\mu_2} \cdots (\lambda - \lambda_q)^{\mu_q}$ , dove  $\lambda_i, i = 1, \dots, q$  sono i  $q$  autovalori distinti ( $\lambda_i \neq \lambda_j$ ), e  $\mu_i$  le loro rispettive molteplicità algebriche, tali che  $\sum_{i=1}^q \mu_i = n$ , con almeno uno dei  $\mu_i$  maggiore di uno.
- Non tutte le matrici con autovalori multipli sono difettive: esempio lampante di matrice con autovalore multiplo ma diagonalizzabile è la matrice identica di ordine  $n$  (che ha un solo autovalore  $\lambda = 1$  con molteplicità algebrica  $n$ ); esempi meno banali sono tutte le matrici simili ad una matrice diagonale  $D$ , probabilmente con alcuni elementi della diagonale ripetuti (cioè del tipo  $PDP^{-1}$ ). In questi casi, nonostante la presenza di autovalori  $\lambda_i$  a molteplicità algebrica  $\mu_i > 1$ , è ancora possibile trovare un numero di autovettori corrispondenti pari ad  $\mu_i$ . In altri termini, l'equazione  $(A - \lambda_i I)x = 0$  può ammettere  $\mu_i$  soluzioni  $x_1, \dots, x_{\mu_i}$  indipendenti, o ancora, equivalentemente, lo spazio nullo (kernel) della matrice  $(A - \lambda_i I)$  ha dimensione  $\mu_i$ . Questi  $\mu_i$  autovettori indipendenti possono essere usati quindi come colonne della matrice diagonalizzante  $Q$ .

- Il numero  $\nu_i$  di autovettori indipendenti corrispondenti allo stesso autovalore  $\lambda_i$ , cioè la dimensione dello spazio nullo di  $(A - \lambda_i I)$ , viene detta “molteplicità geometrica” dell’autovalore. Una condizione necessaria e sufficiente alla diagonalizzabilità di una matrice è quindi che i suoi autovalori abbiano molteplicità geometrica pari a quella algebrica.
- Uno degli esempi più semplici di difettività è offerto dalla seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

al cui unico autovalore  $\lambda_1 = 0$ , di molteplicità algebrica 2, corrisponde un solo autovettore,  $x = [1, 0]^T$ .

### A.0.5 Forma di Jordan

Un risultato assai utile dell’algebra lineare, che generalizza la diagonalizzazione per similitudine delle matrici, è quello che afferma che *ogni* matrice  $A$  quadrata di dimensione  $n$  può essere trasformata per similitudine in forma di Jordan,  $A = QJQ^{-1}$ . Una matrice in forma di Jordan  $J$  è diagonale ( $J_{ij} = 0$  per  $i \neq j$ ), eccetto al più per elementi non nulli sulla prima sopradiagonale ( $J_{i+1,i}$ ). Di questi elementi sopradiagonali non nulli ve ne sono tanti quanti la differenza tra la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di  $A$  (cioè  $n$ ), e la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori stessi. Pertanto, la diagonalizzazione di una matrice è un caso particolare della sua jordanizzazione.

- Più precisamente, la forma di Jordan di  $A$  è una matrice diagonale a blocchi di dimensioni diverse, i cui blocchi sono tanti quanti gli autovettori indipendenti di  $A$ . Ogni blocco ha sulla diagonale l’autovalore corrispondente al suo autovettore, e sulla sopradiagonale tutti 1. Ad esempio la matrice di Jordan

$$J = \left[ \begin{array}{c|ccc|ccc} 1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5 \end{array} \right]$$

corrisponde (al variare di  $Q$ ) a matrici  $A$   $6 \times 6$  con tre soli autovalori distinti (1.3 con molteplicità algebrica 1; 2 con  $\mu = 2$ ; e 3.5 con  $\mu = 3$ ), ognuno dei quali ha molteplicità geometrica uno.

- Invece, nel caso

$$J = \left[ \begin{array}{c|cc|cc|c} 1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5 \end{array} \right]$$

si hanno gli stessi autovalori e le stesse molteplicità algebriche dell'esempio precedente, ma l'autovalore in 3.5 ha ora molteplicità geometrica doppia. Esistono altre quattro possibili strutture non equivalenti per una matrice con gli stessi autovalori e le stesse molteplicità algebriche di quelle sopra riportate.

- Si deve notare che conoscere la molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori di una matrice non è sufficiente a stabilire la struttura della sua forma di Jordan: ad esempio, nel caso di un autovalore  $\lambda$  con  $\mu = 4$  e  $\nu = 2$ , si possono avere i due casi

$$J = \left[ \begin{array}{cccc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right]; \quad J = \left[ \begin{array}{cccc} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right];$$

- Consideriamo ad esempio il caso di una matrice  $A$   $n \times n$  con un autovalore  $\lambda$  a molteplicità algebrica  $\mu = n$  e geometrica  $\nu = 1$ . Sia  $x_1$  un autovettore corrispondente; per ottenere una matrice  $Q$  che rappresenti un legittimo cambiamento di coordinate, possiamo utilizzare  $x_1$  come prima colonna di  $Q$ , ma abbiamo bisogno di altri  $n - 1$  vettori indipendenti da questo per completare le colonne di  $Q$ . Se vogliamo che la trasformata per similitudine di  $A$  sia in forma di Jordan, dovrà essere

$$AQ = QJ$$

quindi (ponendo per semplicità  $n = 3$ )

$$A [q_1, q_2, q_3] = [q_1, q_2, q_3] \left[ \begin{array}{ccc} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array} \right]$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} Aq_1 &= \lambda q_1 \\ Aq_2 &= q_1 + \lambda q_2 \\ Aq_3 &= q_2 + \lambda q_3 \end{aligned}$$

ovvero ancora

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)q_1 &= 0 \\ (A - \lambda I)q_2 &= q_1 \\ (A - \lambda I)q_3 &= q_2. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Da queste relazioni risulta chiaramente che, mentre come ovvio  $q_1 \in \text{kernel}(A - \lambda I)$  essendo un autovettore,  $q_2 \in \text{kernel}(A - \lambda I)^2$  e  $q_3 \in \text{kernel}(A - \lambda I)^3$ . Da questo esempio si capisce il ruolo che, nella jordanizzazione di una matrice, viene svolto dallo spazio nullo delle potenze successive di  $(A - \lambda I)$ , quando lo spazio nullo di  $(A - \lambda I)$  stessa non offre una dimensione pari alla molteplicità algebrica di  $\lambda$ . Per questo motivo, lo spazio nullo di  $(A - \lambda I)^k$  viene definito “autospazio generalizzato di ordine  $k$  associato a  $\lambda$ ”.

Torniamo al caso generale di una matrice  $A$   $n \times n$  con autovalori  $\lambda_i$  a molteplicità algebrica  $\mu_i$  e geometrica  $\nu_i$ , e consideriamo la matrice  $A_p = A - pI$  e le sue potenze  $A_p^k$ . Definiamo  $d_k = \dim \text{kernel} A_p^k$ : è facile vedere che  $d_k \leq d_{k+1}$ . Inoltre  $d_k \leq n$  per ovvi motivi. È possibile dimostrare che, se  $d_k = d_{k+1}$ , allora  $d_{k+p} = d_k, \forall p \geq 1$ . Questo significa che la successione dei  $d_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  è strettamente crescente sino ad un valore  $k = \bar{k}$ , per il quale la successione si stabilizza al valore  $d_{\bar{k}}$ .

Per  $p \neq \lambda_i$ , si ha  $d_0 = d_1 = 0$ , per cui  $d_k = 0, \forall k$ .

Per  $p = \lambda_i$  si ha invece  $d_0 = 0$  e  $d_1 = \nu_i$ ; poniamo che sia  $s_i$  il valore a cui si stabilizza la successione dei  $d_k$ . Si dimostra che  $s_i = \mu_i$ , in altre parole: La dimensione dello spazio nullo di  $(A - \lambda_i I)^k$ , cioè dell'autospazio di ordine  $k$  associato a  $\lambda$ , per  $k$  sufficientemente alto è pari alla molteplicità algebrica di  $\lambda_i$ .

I vettori che appartengono ad un autospazio generalizzato associato all'autovalore  $\lambda_i$  di ordine  $k$ , ma non a quello di ordine  $k-1$ , si dicono “autovettori generalizzati” di ordine  $k$  associati a  $\lambda_i$ . A ogni autovettore generalizzato di ordine  $k$  associato a  $\lambda_i$ , designato ad esempio con  $q_i^{(k)}$ , si associano altri  $k-1$  vettori mediante una “catena” definita da

$$\begin{aligned} q_i^{(k-1)} &= (A - \lambda_i I) q_i^{(k)} \\ &\vdots \\ q_i^{(1)} &= (A - \lambda_i I) q_i^{(2)} \end{aligned}$$

Se si prendessero tutte le catene di autovettori generalizzati si potrebbe avere un numero di vettori maggiore di  $n$ , quindi certamente dipendenti tra loro. Per costruire una base di  $n$  vettori giustapponendo catene prive di vettori in comune, si procede dunque in questo modo:

1. Si prendono al livello  $\bar{k}$   $d_{\bar{k}} - d_{\bar{k}-1}$  autovettori generalizzati di ordine  $\bar{k}$ ,  $q_1^{(\bar{k})}, \dots, q_{d_{\bar{k}} - d_{\bar{k}-1}}^{(\bar{k})}$  e se ne costruiscono le catene lunghe  $\bar{k}$ .
  2. Al livello  $\bar{k} - 1$  è necessario avere  $d_{\bar{k}-1} - d_{\bar{k}-2}$  vettori indipendenti. Se tale numero è uguale al numero di vettori generati a questo livello dalle catene iniziate a livello superiore, si prendono questi e si procede. Altrimenti (cioè se  $(d_{\bar{k}-1} - d_{\bar{k}-2}) > (d_{\bar{k}} - d_{\bar{k}-1})$ ), si aggiungono al livello  $\bar{k} - 1$  tutti gli autovettori generalizzati di ordine  $\bar{k} - 1$  che sono linearmente indipendenti dai vettori  $q_1^{(\bar{k}-1)}, \dots, q_{d_{\bar{k}} - d_{\bar{k}-1}}^{(\bar{k}-1)}$ , e se ne generano le catene corrispondenti. Risulteranno in questo caso  $(d_{\bar{k}-1} - d_{\bar{k}-2}) - (d_{\bar{k}} - d_{\bar{k}-1})$  nuove catene, lunghe  $\bar{k} - 1$ ;
  3. si procede così sino ad avere generato un totale di  $d_1 = \nu$  catene, il che avviene quando sono stati generati  $n$  vettori indipendenti.
- Si procede ora a costruire la matrice  $Q$  ponendo nelle sue colonne tutti le catene generate dagli autovettori generalizzati, con l'accortezza di porre a sinistra l'ultimo elemento della catena  $q_i^{(1)}$ , poi  $q_i^{(2)}$ , sino a  $q_i^{(\nu)}$ . Se si invertisse questo ordine, la matrice  $Q^{-1}AQ$  avrebbe non nulla la sottodiagonale, anzichè la sopradiagonale.
  - Ad ogni catena di vettori corrisponde nella forma di Jordan un mini-blocco di dimensioni pari alla lunghezza della catena.
  - Si noti che, data una forma di Jordan  $A = QJQ^{-1}$ , è possibile ottenere un'altra forma con scambi dell'ordine dei blocchi di Jordan, semplicemente scambiando l'ordine delle corrispondenti catene in  $Q$ . A meno di questi inessenziali scambi, la forma di Jordan di una matrice è peraltro unica, ed è perciò chiamata “canonica”. Invece, date una coppia di matrici simili  $A$  e  $J$  (questa in forma di Jordan), esistono infinite possibili matrici  $Q$ .

### A.0.6 Instabilità numerica della forma di Jordan

La forma di Jordan, sia reale che complessa, è numericamente molto instabile. Ciò significa che, data una matrice  $A$  difettiva, esiste sempre una matrice  $A'$  ad essa arbitrariamente vicina (cioè, con norma  $\|A - A'\| < \epsilon, \forall \epsilon > 0$ ), che è diagonalizzabile.

$$\begin{aligned} \text{Esempio: } A &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ A' &= \begin{bmatrix} -1 + \epsilon & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 + \epsilon & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

Potrebbe apparire che, in qualsiasi modello realistico di un sistema, che dovrà tener conto di inevitabili approssimazioni, la rilevanza della forma di Jordan sia scarsa, e che, ad esempio, i modi di tipo  $t^k e^{\lambda t}$ , o  $C_i^k \lambda^k$ , non debbano apparire nelle risposte dei sistemi reali. In effetti non è così, poiché la risposta associata ad una forma di Jordan può essere vista come il limite a cui tende la risposta associata ad una matrice diagonalizzabile quando si avvicina alla difettività.

Si considerino due sistemi LTITC con matrici dinamiche  $A$  e  $A'$  dall'esempio precedente. Nel primo caso si hanno modi  $e^{-t}$  e  $te^{-t}$ . Nel secondo caso (matrice diagonalizzabile) si ha

$$\begin{aligned} e^{A't} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(-1+\epsilon)t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/\epsilon \\ 0 & -1/\epsilon \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{(-1+\epsilon)t} & \frac{1}{\epsilon}(e^{-(1+\epsilon)t} - e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e quindi una combinazione di modi che, per  $\epsilon$  piccoli, tende a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (e^{-t} - e^{-(1+\epsilon)t}) = e^{-t} - (e^{-t} - te^{-t}\epsilon) = te^{-t}$$

Nel caso LTITD si ha

$$A'^t = \begin{bmatrix} (-1 + \epsilon)^t & \frac{1}{\epsilon}((-1 + \epsilon)^t - (-1)^t) \\ 0 & (-1)^t \end{bmatrix}$$

dove

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} ((-1 + \epsilon)^t - (-1)^t) = t(-1)^{t-1}.$$

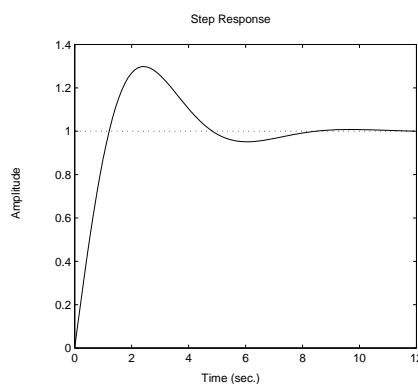
### A.0.7 Risposte dei sistemi lineari con Matlab

```
% Risposta al gradino
>>help step
```

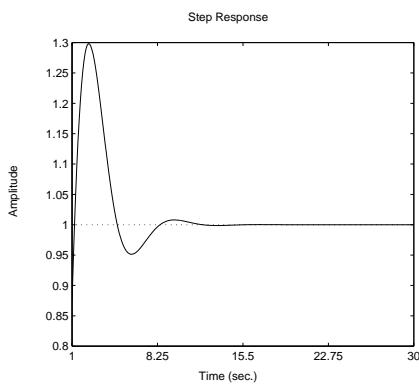
STEP Step response of continuous-time linear systems.

STEP(A,B,C,D,IU) plots the time response of the linear system:  $\dot{x} = Ax + Bu$   
 $y = Cx + Du$  to a step applied to the input IU. The time vector is automatically determined. STEP(A,B,C,D,IU,T) allows the specification of a regularly spaced time vector T. [Y,X] = STEP(A,B,C,D,IU,T) or [Y,X,T] = STEP(A,B,C,D,IU) returns the output and state time response in the matrices Y and X respectively. No plot is drawn on the screen. The matrix Y has as many columns as there are outputs, and LENGTH(T) rows. The matrix X has as many columns as there are states. If the time vector is not specified, then the automatically determined time vector is returned in T. [Y,X] = STEP(NUM,DEN,T) or [Y,X,T] = STEP(NUM,DEN) calculates the step response from the transfer function description  $G(s) = \frac{NUM(s)}{DEN(s)}$  where NUM and DEN contain the polynomial coefficients in descending powers of s. See also: INITIAL, IMPULSE, LSIM and DSTEP.

```
% Descrizione nello spazio di stato (ISU)
>>A=[0 1; -1 -1]; B=[0;1]; C=[1,1]; D=0;
>>step(A,B,C,D)
>>print -deps step1.eps
```



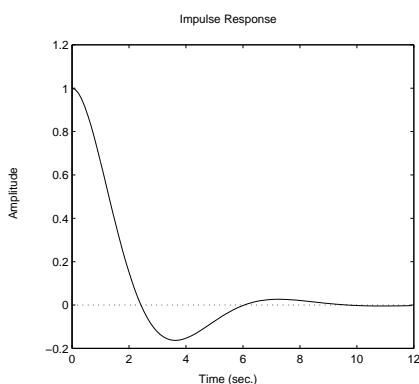
```
>>t=1:0.1:30;
>>step(A,B,C,D,1,t)
```



```
%Risposta impulsiva
>>help impulse
```

**IMPULSE** Impulse response of continuous-time linear systems. **IMPULSE(A,B,C,D,IU)** plots the time response of the linear system .  $x = Ax + Bu$   $y = Cx + Du$  to an impulse applied to the single input IU. The time vector is automatically determined. **IMPULSE(NUM,DEN)** plots the impulse response of the polynomial transfer function  $G(s) = \text{NUM}(s)/\text{DEN}(s)$  where NUM and DEN contain the polynomial coefficients in descending powers of s. **IMPULSE(A,B,C,D,IU,T)** or **IMPULSE(NUM,DEN,T)** uses the user-supplied time vector T which must be regularly spaced. When invoked with left hand arguments,  $[Y,X,T] = \text{IMPULSE}(A,B,C,D,...)$   $[Y,X,T] = \text{IMPULSE}(\text{NUM},\text{DEN},...)$  returns the output and state time history in the matrices Y and X. No plot is drawn on the screen. Y has as many columns as there are outputs and length(T) rows. X has as many columns as there are states. See also: STEP,INITIAL,LSIM and DIMPULSE.

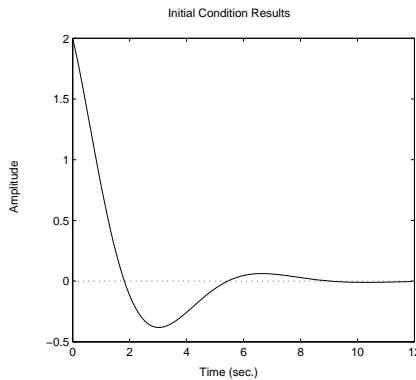
```
>>impulse(A,B,C,D)
```



```
% Evoluzione libera
>>help initial
```

**INITIAL** Initial condition response of continuous-time linear systems.  
**INITIAL(A,B,C,D,X0)** plots the time response of the linear system .  $x = Ax + Bu$   $y = Cx + Du$  due to an initial condition on the states. The time vector is automatically determined based on the system poles and zeros. **INITIAL(A,B,C,D,X0,T)** plots the initial condition response for the times specified in the vector T. The time vector must be regularly spaced. When invoked with left hand arguments: [Y,X,T] = **INITIAL(A,B,C,D,X0,...)** returns the output and state responses (Y and X), and the time vector (T). No plot is drawn on the screen. The matrix Y has as many columns as outputs and one row for element in T. Similarly, the matrix X has as many columns as states and length(T) rows. See also: IMPULSE,STEP,LSIM, and DINITIAL.

```
>>initial(A,B,C,D,[1,1])
```



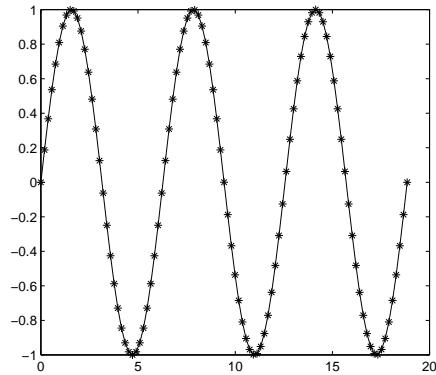
```
%Ingresso generico
>>help lsim
```

**LSIM** Simulation of continuous-time linear systems to arbitrary inputs.  
**LSIM(A,B,C,D,U,T)** plots the time response of the linear system: .  $x = Ax + Bu$   $y = Cx + Du$  to the input time history U. Matrix U must have as many columns as there are inputs, U. Each row of U corresponds to a new time point, and U must have LENGTH(T) rows. The time vector T must be regularly spaced. **LSIM(A,B,C,D,U,T,X0)** can be used if initial conditions exist. **LSIM(NUM,DEN,U,T)** plots the time response of the polynomial transfer function  $G(s) = \text{NUM}(s)/\text{DEN}(s)$  where NUM and DEN contain the polynomial coefficients in descending powers of s. When invoked with left hand arguments, [Y,X] =

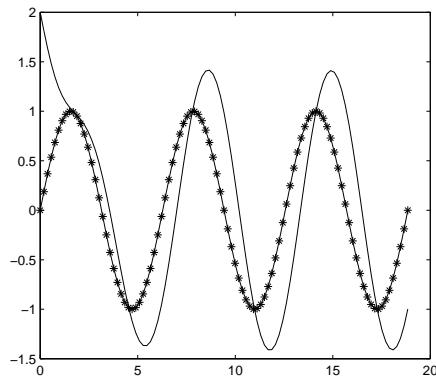
LSIM(A,B,C,D,U,T) [Y,X] = LSIM(NUM,DEN,U,T) returns the output and state time history in the matrices Y and X. No plot is drawn on the screen. Y has as many columns as there are outputs, y, and with LENGTH(T) rows. X has as many columns as there are states. See also: STEP,IMPULSE,INITIAL and DLSIM.

```
>>t=0:0.01*6*pi:6*pi;
>>u=sin(t);
```

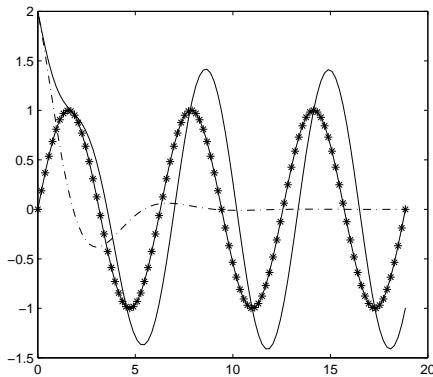
```
>>plot(t,u,'r',t,u,'r*')
```



```
>>Y0=lsim(A,B,C,D,u,t,[1,1]);
>>hold on;
>>plot(t,Y0,'g')
```



```
>>Y1=lsim(A,B,C,D,0*u,t,[1,1]);
>>plot(t,Y1,'c:')
```



```
% Per mettere in evidenza il transitorio,
% calcoliamo la risposta a regime
% Passiamo alla fdt
>>help ss2tf
```

SS2TF State-space to transfer function conversion.  
 $[NUM, DEN] = SS2TF(A, B, C, D, iu)$  calculates the transfer function:

$$H(s) = \frac{NUM(s)}{DEN(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

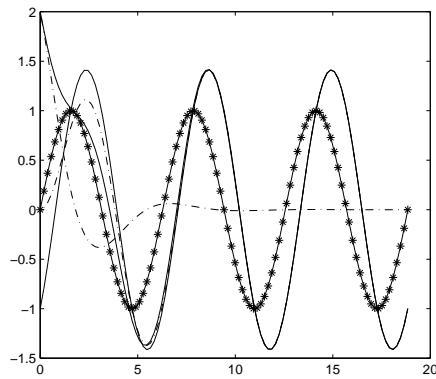
of the system:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

from the  $i_u$ 'th input. Vector DEN contains the coefficients of the denominator in descending powers of s. The numerator coefficients are returned in matrix NUM with as many rows as there are outputs y. See also: TF2SS.

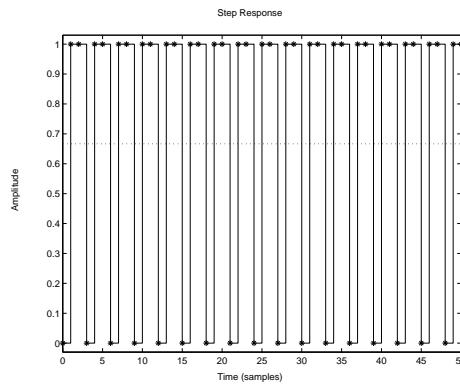
```
>> [num, den]=ss2tf(A, B, C, D)
num =
    0      1      1
den =
    1.0000    1.0000    1.0000
>> omega=1; j=sqrt(-1);
>> Gomega=polyval(num, j*omega)/polyval(den, j*omega)
Gomega =
    1.0000 - 1.0000i
>> abs(Gomega)
ans =
    1.4142
>> angle(Gomega)
ans =
   -0.7854
```

```
>>Yr=abs(Gomega)*sin(t+angle(Gomega));
>>plot(t,Yr,'k-')
% risposta forzata
>>Yf=lsim(A,B,C,D,u,t,[0,0]);
>>plot(t,Yf,'y-.')
```

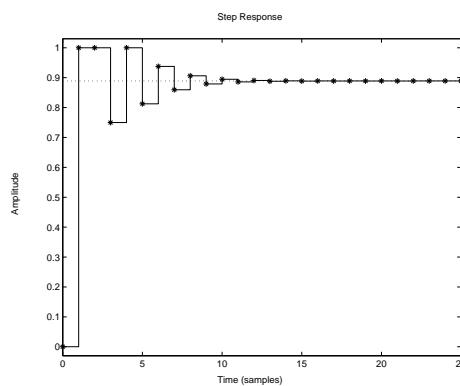


```
%% Risposte dei sistemi lineari TD
%% Descrizione ISU TD:
%% attenzione al diverso significato!
>>A=[0 1; -1 -1]; B=[0;1]; C=[1,1]; D=0;
eig(A)
ans =
-0.5000 + 0.8660i
-0.5000 - 0.8660i
>>abs(ans)
ans =
1
1

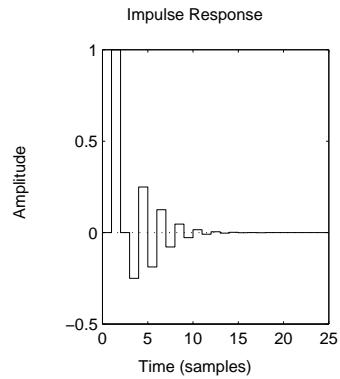
%Non e' asintoticamente stabile. Infatti
>>dstep(A,B,C,D,1)
>>y=dstep(A,B,C,D,1);
>>hold on; plot(0:length(y)-1,y,'r*')
```



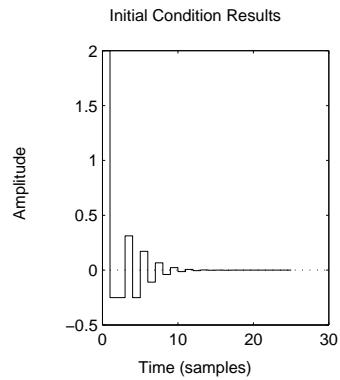
```
%%Scegliamo allora
>>A=[0 1; -1/4 -1]; B=[0;1]; C=[1,1]; D=0;
>>abs(eig(A))
ans =
    0.5000
    0.5000
>>dstep(A,B,C,D,1);
>>hold on;
>>y=dstep(A,B,C,D,1);
>>plot(0:length(y)-1,y,'r*'); hold on; plot(0:length(y)-1,y,'r')
```



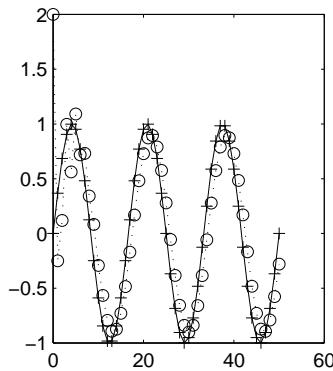
```
>>hold off;
>>dimpulse(A,B,C,D)
```



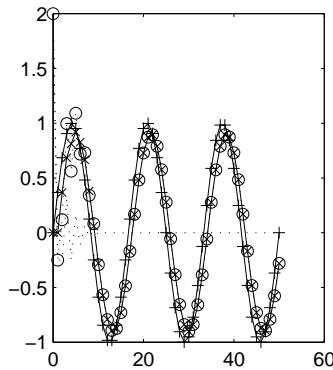
```
>>dinitial(A,B,C,D,[1,1])
```



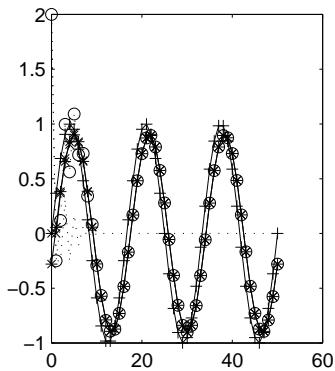
```
%% Risposta ad una sinusoide
>>t=0:50;
>>u=sin(0.12*pi*t);
>>plot(t,u,'r+')
>>hold on; plot(t,u,'r')
%% Risposta totale
>>Y0=dlsim(A,B,C,D,u,[1,1]);
>>plot(t,Y0,'go',t,Y0,:')
```



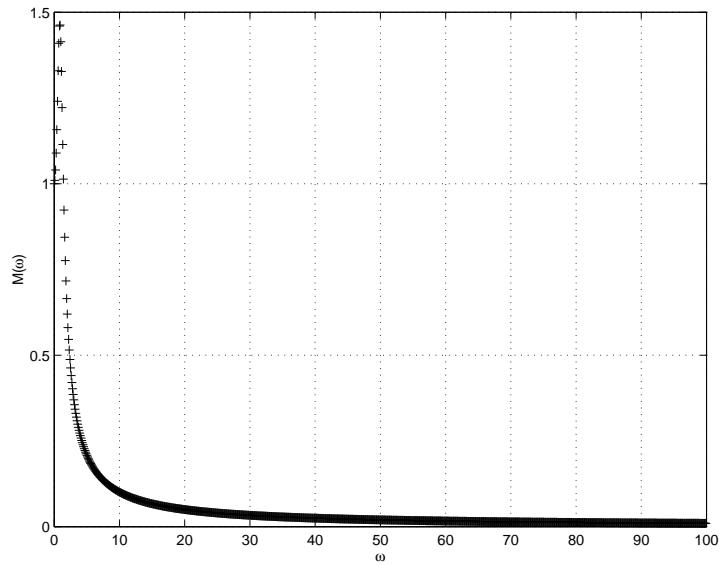
```
%% Risposta libera
>> Yl=dlsim(A,B,C,D,0*u,[1,1]);
>> plot(t,Yl,'k:');
%% Risposta forzata
>> Yf=dlsim(A,B,C,D,u,0*[1,1]);
>> plot(t,Yf,'cx',t,Yf,'c-')
```



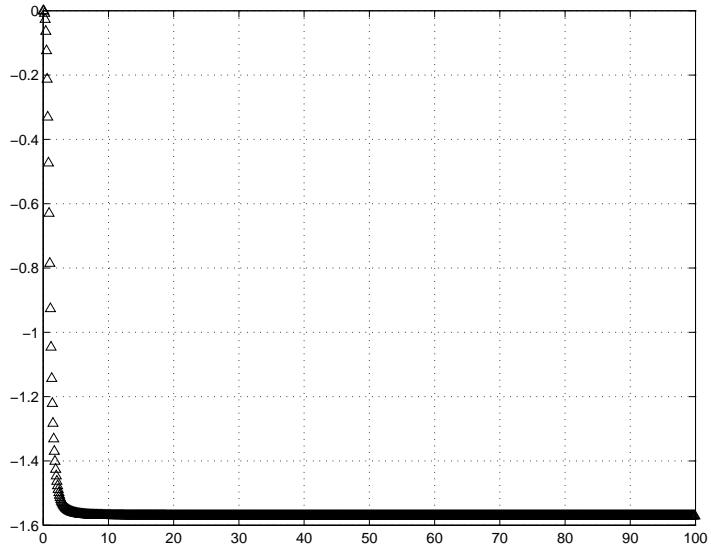
```
%% Risposta di regime
>> [num,den]=ss2tf(A,B,C,D);
>> theta=0.12*pi; etheta=exp(sqrt(-1)*theta);
>> Getheta=polyval(num,etheta)/polyval(den,etheta);
>> Yr=abs(Getheta)*sin(0.12*pi*t+angle(Getheta));
>> plot(t,Yr,'g*',t,Yr,'g-')
```



```
%% Risposta armonica TC
>>omega=0.0001:100/1000:100;
>>Gomega=polyval(num,j*omega)./polyval(den,j*omega);
>>M=abs(Gomega);
>>phi=angle(Gomega);
>>plot(omega, M, 'r+'); grid
```



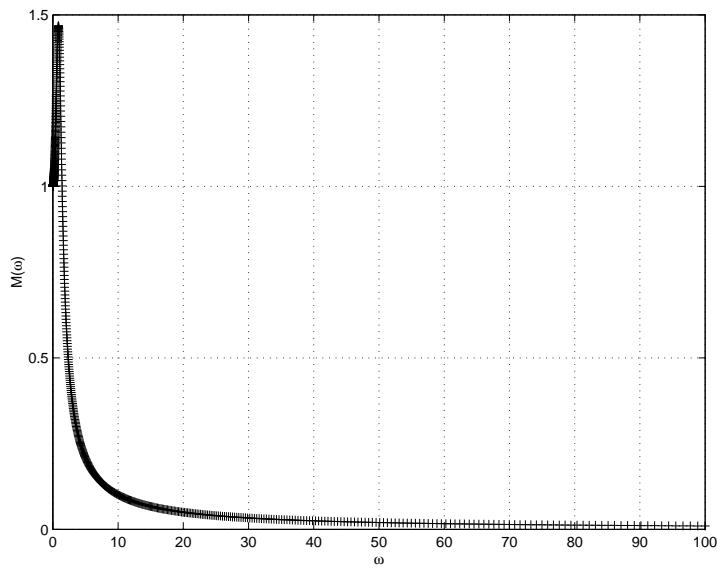
```
>>plot(omega, phi, 'r^'); grid
```



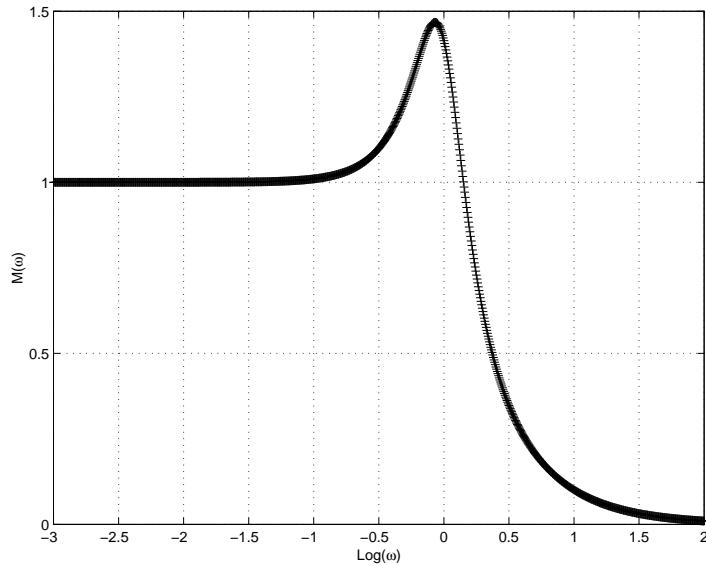
```

>>%Scala logaritmica
>>eomega=-3:5/1000:2;
>>omega=10.^ (eomega);
>>Gomega=polyval(num,j*omega). / polyval(den,j*omega);
>>M=abs(Gomega); phi=angle(Gomega);
>>plot(omega, M,'r+');grid;
>>xlabel('omega'); ylabel('M(\omega)')

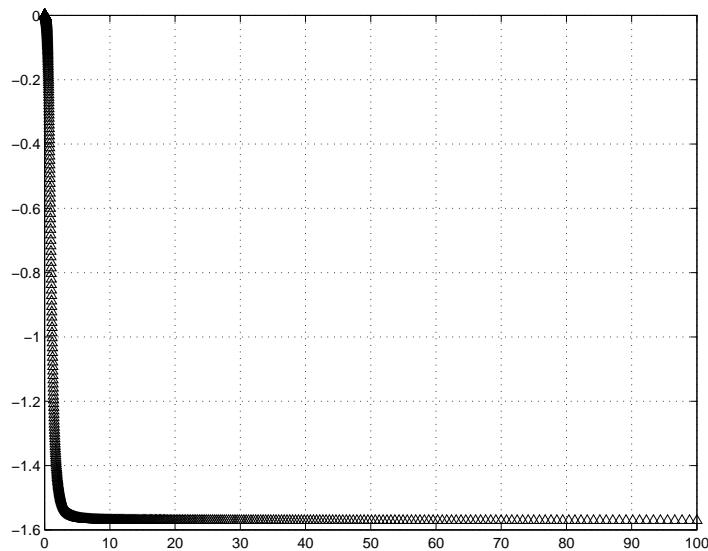
```



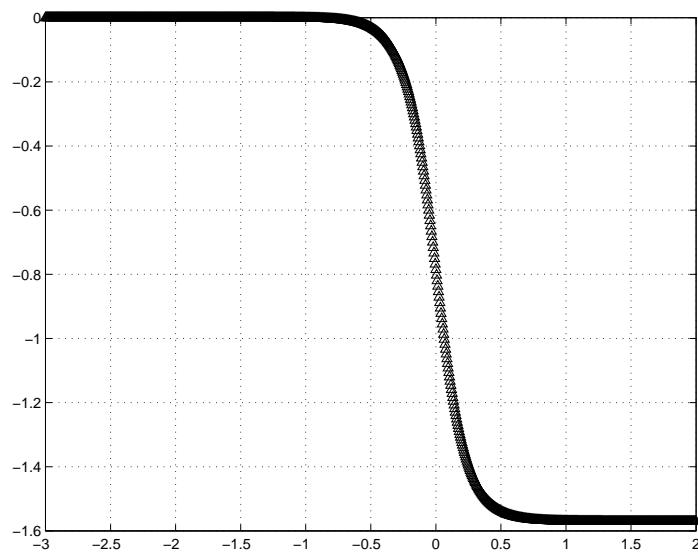
```
>>plot(eomega, M, 'r+');grid;
```



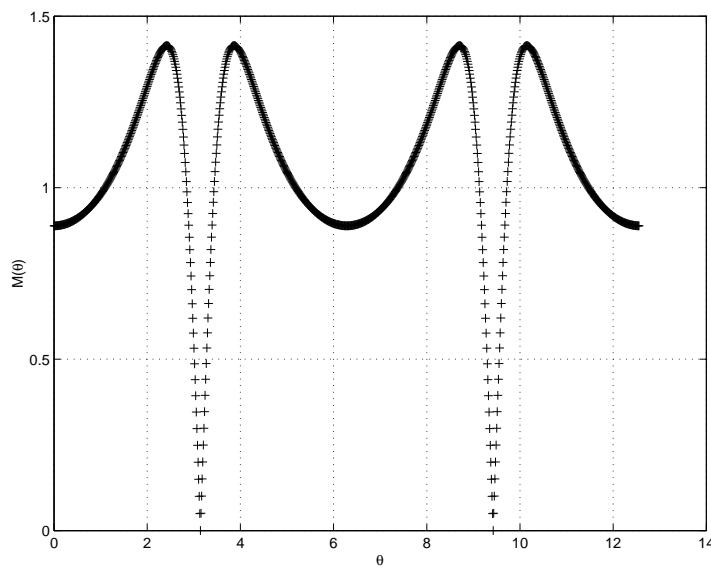
```
>>plot(omega, phi, 'r^'); grid
```



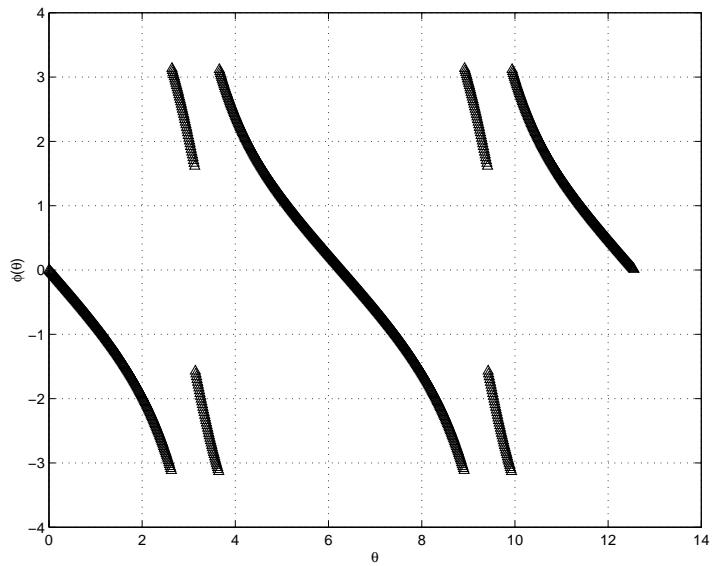
```
>>plot(eomega, phi, 'r^'); grid
```



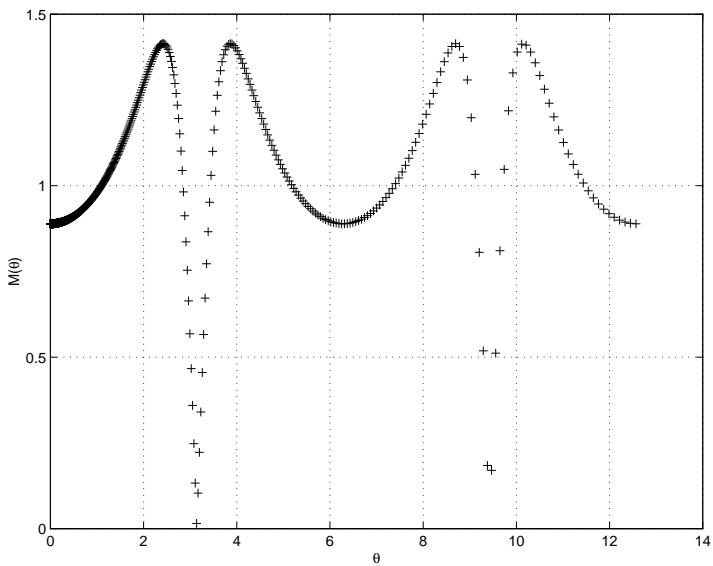
```
>> %% Risposta armonica TD
>>theta=0.0001:4*pi/1000:4*pi;
>>etheta=exp(j*theta);
>>Gtheta=polyval(num,etheta)./polyval(den,etheta);
>>M=abs(Gtheta); phi=angle(Gtheta);
>>plot(theta, M, 'r+'); grid
```



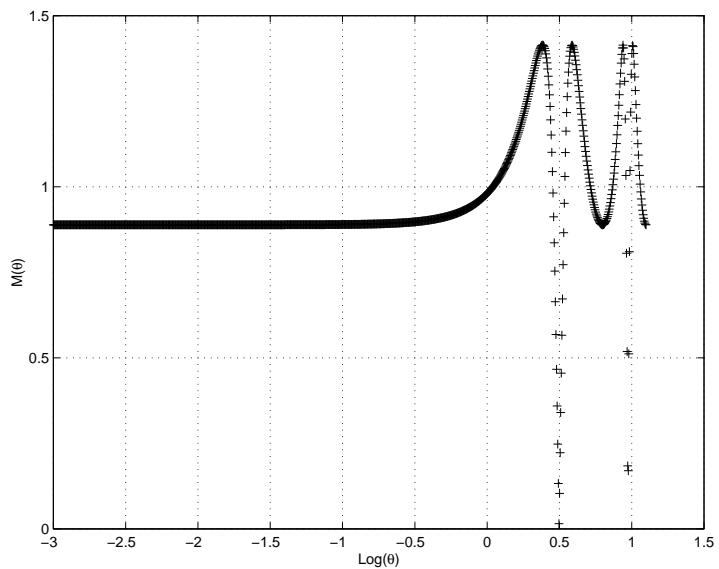
```
>>plot(theta, phi, 'r^'); grid
```



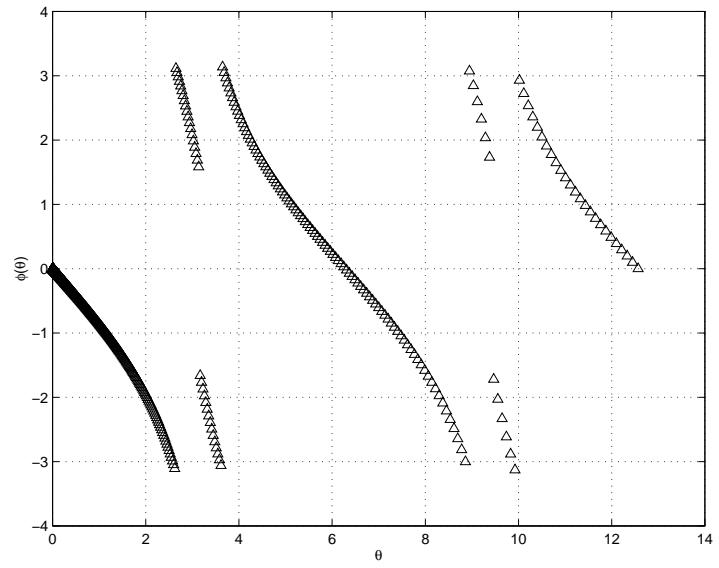
```
>>% Scala logaritmica
>>ltheta=-3:(log10(4*pi)+3)/1000:log10(4*pi);
>>theta=10.^ltheta; etheta=exp(j*theta);
>>Gtheta=polyval(num,etheta)./polyval(den,etheta);
>>M=abs(Gtheta); phi=angle(Gtheta);
>>plot(theta, M,'r+'); grid
```



```
>>plot(ltheta, M,'r+'); grid
```



```
>>plot(theta, phi,'r^'); grid
```



```
>>plot(ltheta, phi,'r^'); grid
```

