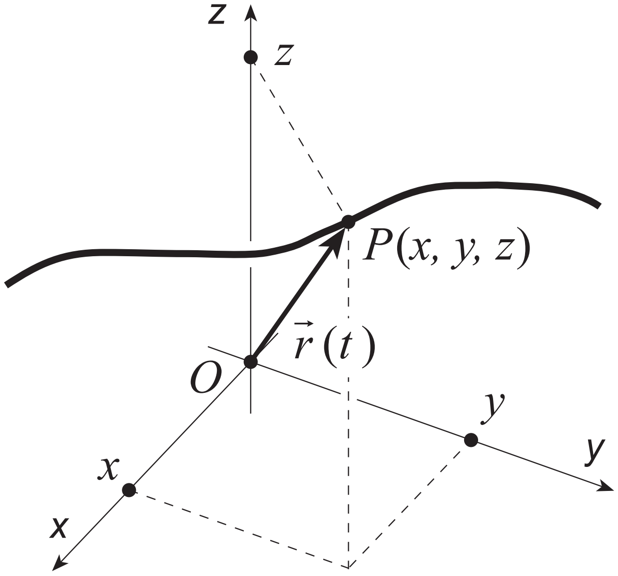
Moto curvilineo

Traiettoria=insieme delle <u>posizioni</u> occupate al trascorrere del tempo

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$



- **La legge oraria** è ora una funzione vettoriale in cui le coordinate sono variabili dipendenti ed il tempo è la variabile indipendente:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

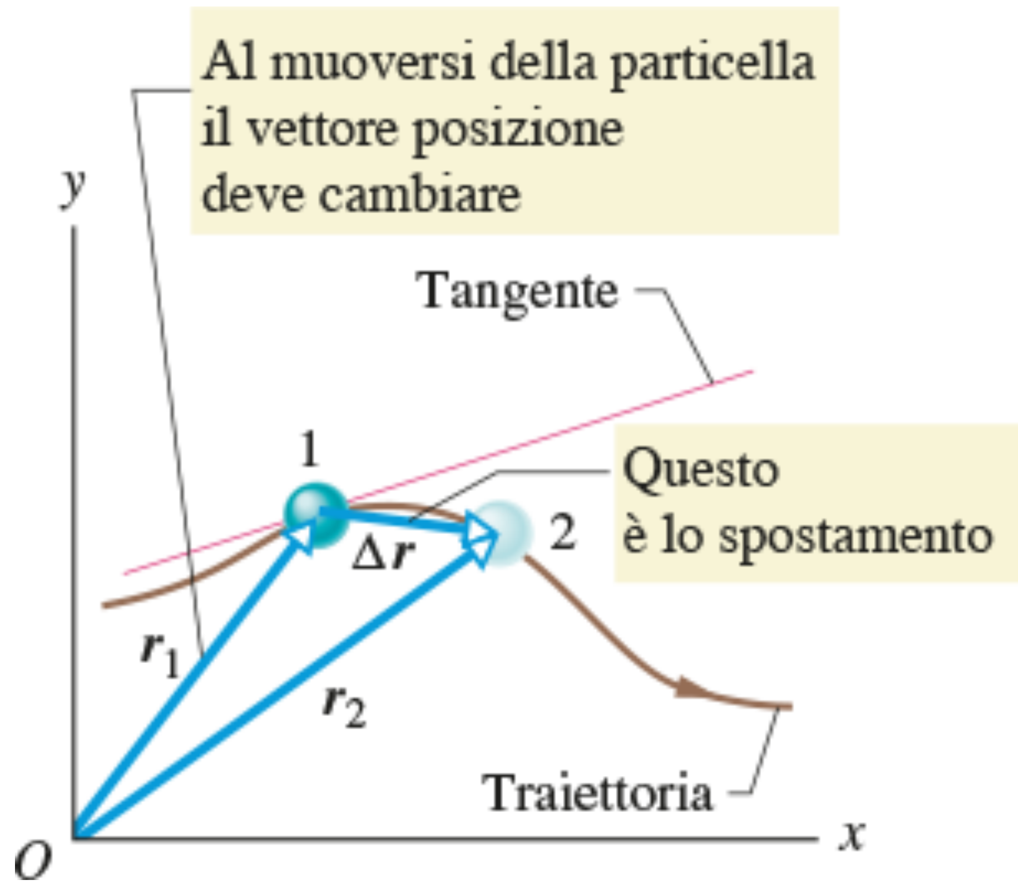
Spostamento e velocità media

Spostamento in un intervallo di tempo:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = [x(t_2) - x(t_1)]\hat{\imath} + [y(t_2) - y(t_1)]\hat{\jmath} + [z(t_2) - z(t_1)]\hat{k}$$

Velocità media:

$$\vec{v}_{media} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$



Velocità istantanea

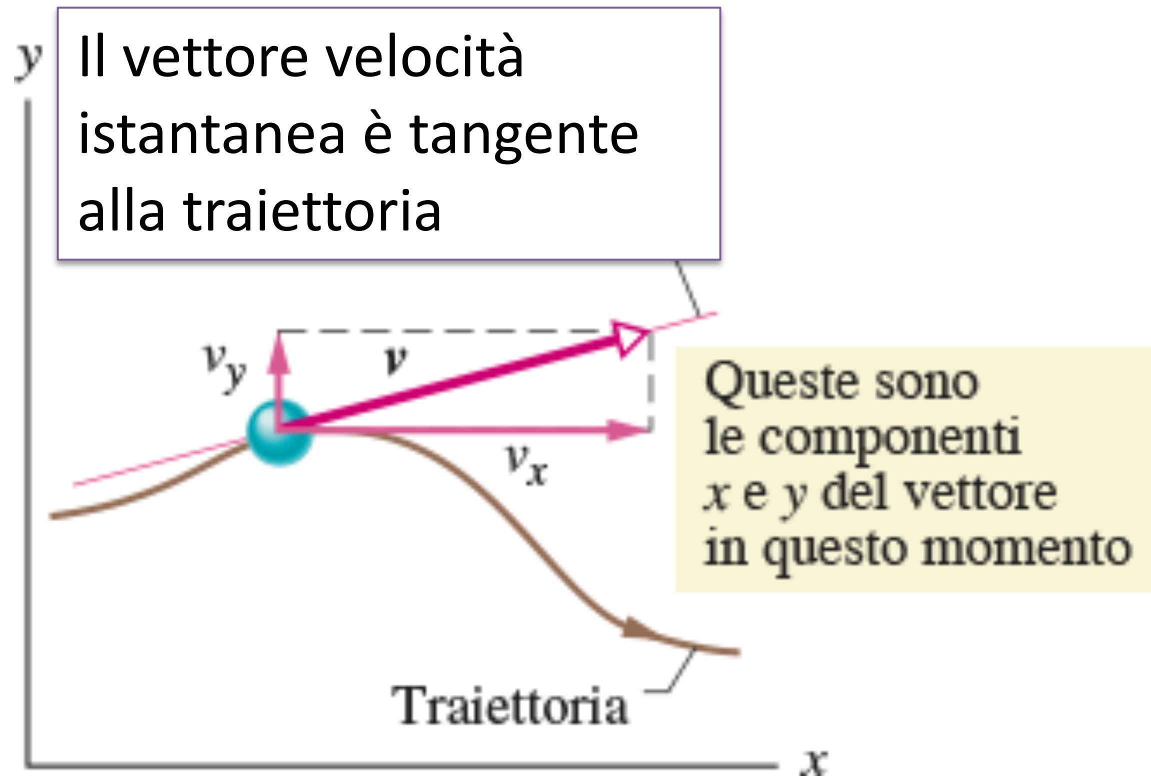
Velocità istantanea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ha componenti:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = \dot{z} \end{cases}$$

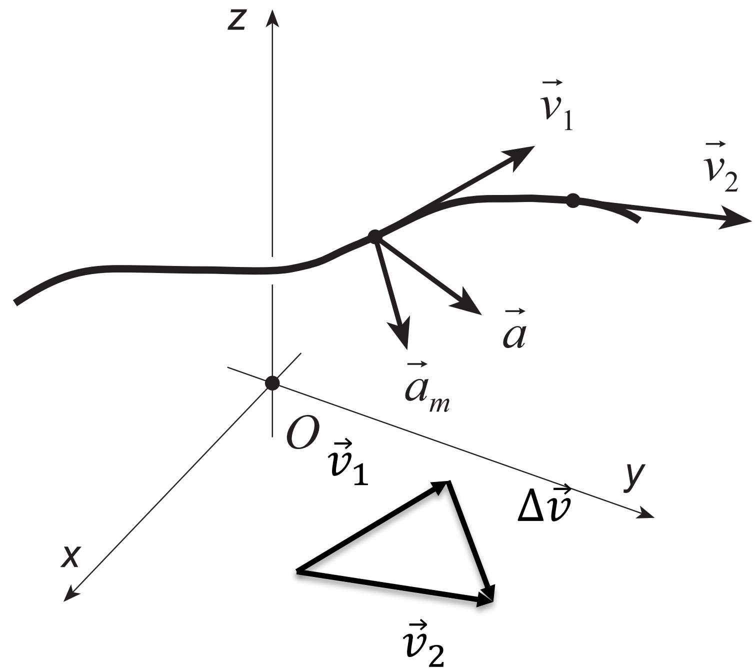
- **È la derivata del vettore posizione rispetto al tempo.**
- **È sempre tangente alla traiettoria.**



Accelerazione media e istantanea

- Analogamente definiamo la rapidità con cui cambia il vettore velocità nel tempo, tra due tempi t_1 e t_2 con $t_2 > t_1$, l'accelerazione media tra t_1 e e t_2:

$$\vec{a}_m \equiv \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$



- Nel caso 3-D l'accelerazione istantanea al tempo t è definita da:

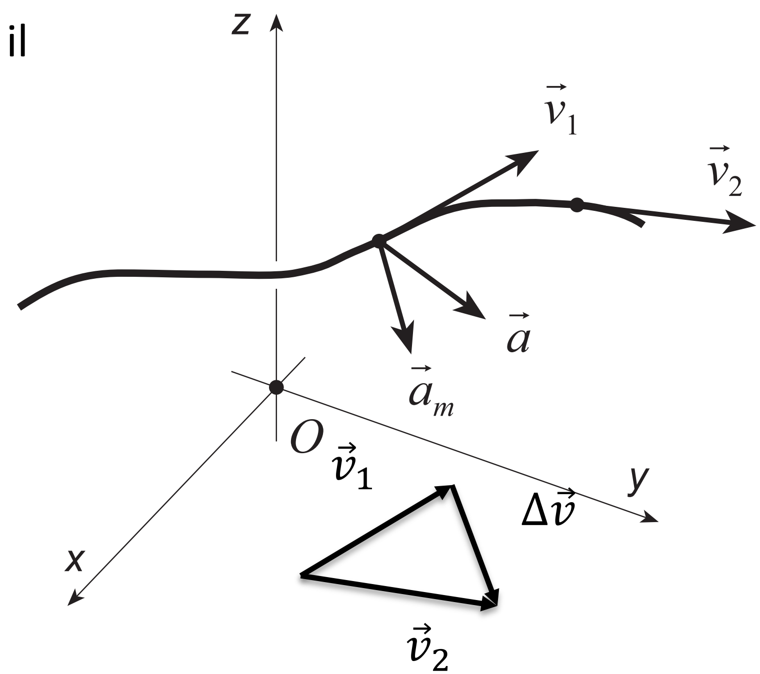
$$\vec{a}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}$$

Note sull'accelerazione

- In generale, in un moto curvilineo, la velocità cambia sia in modulo che in direzione

  ⇒ l'accelerazione può essere non nulla anche se il modulo della velocità non cambia.



- L'accelerazione è un vettore nella direzione della variazione della velocità.

⇒ Poichè la velocità cambia nella direzione in cui la traiettoria s'incurva, l'accelerazione è sempre diretta verso la concavità della traiettoria

Velocità e velocità scalare

Pisa-Pontedera

Lunghezza del percorso (lunghezza della traiettoria) =30.6 km

Spostamento (modulo) = 21.1 km

Il viaggio dura 30 minuti.

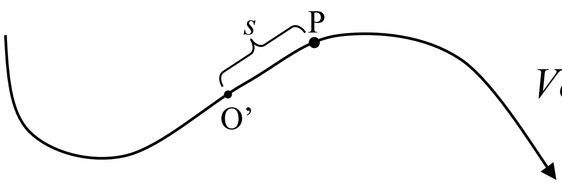
$$velocità\ scalare\ \ media = \frac{lunghezza\ \ del\ percorso}{durata\ del\ viaggio} = \frac{30.6\ km}{0.5\ h} = 61.2\ km\ h^{-1} = 17.0\ m\ s^{-1}$$

$$|velocità\ media| = \frac{|spostamento|}{durata\ del\ viaggio} = \frac{21.1\ km}{0.5\ h} = 42.2\ km\ h^{-1} = 11.7\ m\ s^{-1}$$

- Se la traiettoria è rettilinea: $velocità\ scalare\ media = |velocità\ media|$

Sistema 1D curvilineo

Velocità scalare media
$$\begin{cases} v_s^m(t_1,t_2) = \dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} & (\,tra\ t_1\ e\ t_2\,) \\ \Delta t = t_2\text{-}t_1 \quad > 0 & \\ v_s^m(t, t+\Delta t) = \dfrac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} & (\,tra\ t\ e\ t+\Delta t) \end{cases}$$



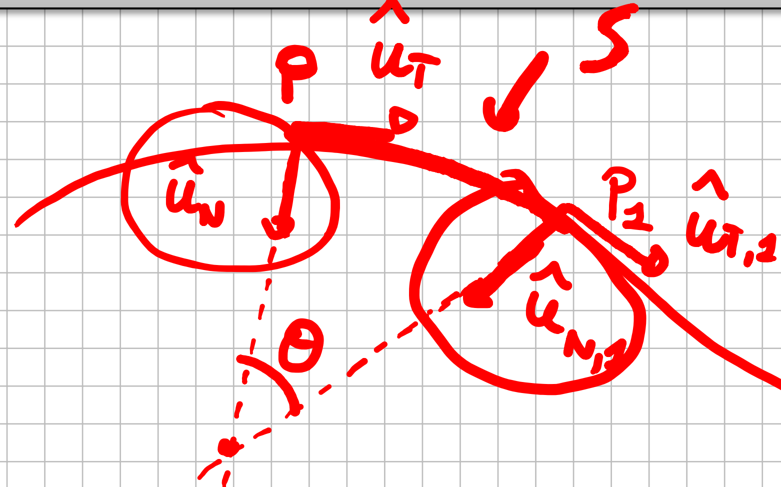
Velocità scalare (istantanea)
$$v_s(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

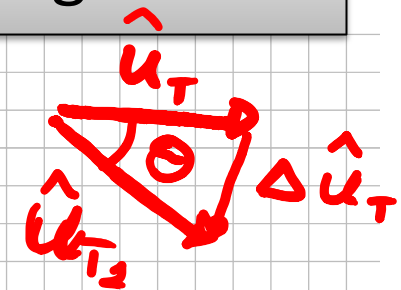
Accelerazione scalare media
$$\begin{cases} a_s^m(t_1,t_2) = \dfrac{v_s(t_2) - v_s(t_1)}{t_2 - t_1} & (\,tra\ t_1\ e\ t_2\,) \\ \Delta t = t_2\text{-}t_1 \quad > 0 & \\ a_s^m(t, t+\Delta t) = \dfrac{v_s(t+\Delta t) - v_s(t)}{\Delta t} & (\,tra\ t\ e\ t+\Delta t) \end{cases}$$

Accelerazione scalare (istantanea)
$$a_s(t) = \frac{d\,v_s}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_s(t+\Delta t) - v_s(t)}{\Delta t}$$

$$velocità\ scalare\ istantanea = |velocità\ istantanea|$$

Accelerazione: componenti radiale e tangenziale





$\Delta\hat{v}_T$

$$\vec{v} = v\,\hat{u}_T$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

$$d\hat{u}_T \perp \hat{u}_T$$

$$\vec{u}_T \cdot \vec{u}_T = 1$$

$$d\,(\hat{u}_T \cdot \hat{u}_T) = d\hat{u}_T \cdot \hat{u}_T + \hat{u}_T \cdot d\hat{u}_T = 0$$

$$2\,\vec{u}_T \cdot d\,\vec{u}_T$$

$$\hat{u}_T \perp d\hat{u}_T$$

$$\left| d\,\hat{u}_T \right| = 1\, d\theta$$

$d\theta$

$\theta = \frac{s}{R}$

$$= \frac{ds}{R}$$

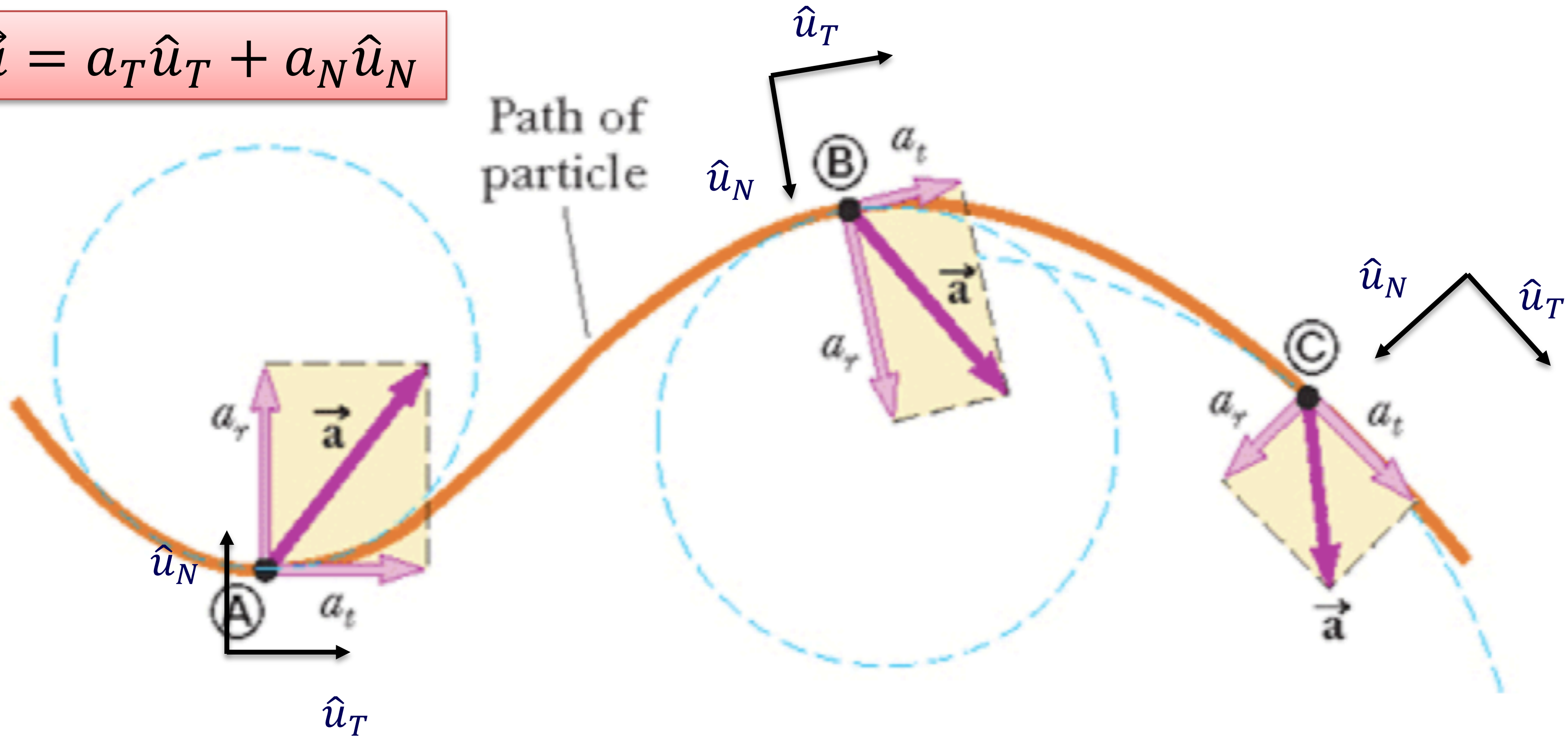
$d\theta = \frac{ds}{R}$

$$\left| \frac{d\hat{u}_T}{dt} \right| = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{1}{R} = \frac{v}{R}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt} =$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{v}{R}\hat{u}_N = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{u}_T + \frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\hat{u}_N$$

$$\vec{a} = a_T \hat{u}_T + a_N \hat{u}_N$$



- il cambiamento del modulo della velocità produce l'accelerazione tangenziale:

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

- il cambiamento della direzione del vettore velocità produce l'accelerazione radiale:

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

Dove v è la velocità scalare istantanea e R è il raggio di curvatura.

Dall'accelerazione alla legge oraria

Possiamo trattare le componenti in modo analogo al caso del moto rettilineo

(1) da $a_{x,y,z}$ a $v_{x,y,z}$

$$\int_{t_0}^{t} dv_x = v_x(t) - v_{x0} = \int_{t_0}^{t} a_x(\tau)d\tau$$

$$\int_{t_0}^{t} dv_y = v_y(t) - v_{y0} = \int_{t_0}^{t} a_y(\tau)d\tau$$

$$\int_{t_0}^{t} dv_z = v_z(t) - v_{z0} = \int_{t_0}^{t} a_z(\tau)d\tau$$

(2) da $v_{x,y,z}$ a x,y,z

$$\int_{t_0}^{t} dx = x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v_x(\tau)d\tau$$

$$\int_{t_0}^{t} dy = y(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} v_y(\tau)d\tau$$

$$\int_{t_0}^{t} dz = z(t) - z_0 = \int_{t_0}^{t} v_z(\tau)d\tau$$

- In forma vettoriale indicando con :

$$\overrightarrow{r_0} = (x_0, y_0, z_0) \ ; \ \vec{v}_0 = \left(v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}\right)$$

il vettore posizione e la velocità al tempo t sono dati rispettivamente da:

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{r_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(\tau)d\tau \quad ; \quad \vec{v}(t) = \overrightarrow{v_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(\tau)d\tau$$

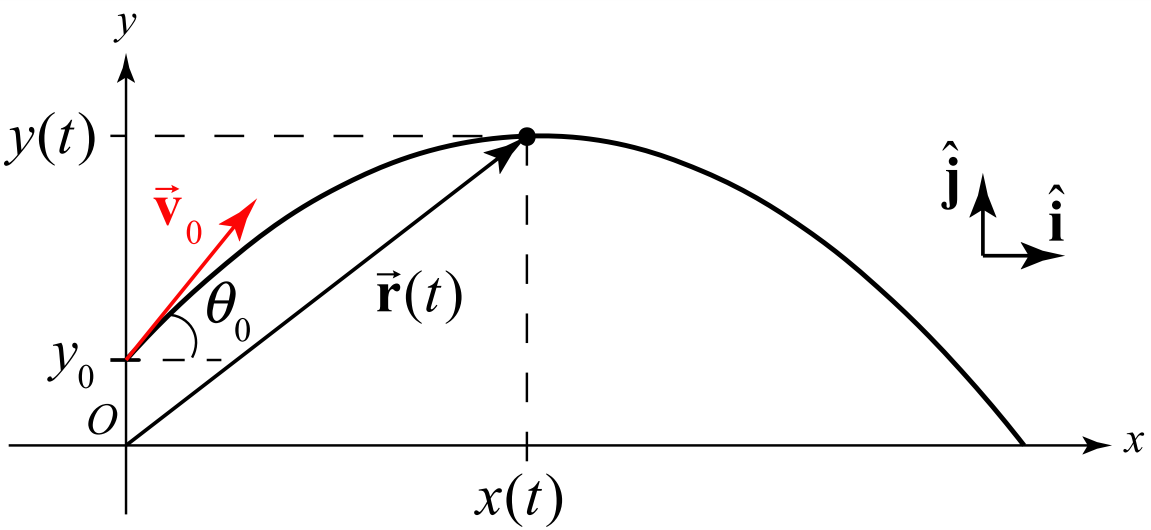
Moti piani

I Moti piani sono moti la cui traiettoria giace su un piano che, per semplicità viene indicato come il piano xy.

- E' possibile descrivere un moto piano utilizzando un sistema di coordinate cartesiane bidimensionale o un sistema di coordinate polari.

- A seconda dei casi, un sistema di coordinate è più conveniente dell'altro.

Moto parabolico



Componenti dell'accelerazione:

$$a_x = 0,$$
$$a_y = -g.$$

Condizioni iniziali: $\vec{\mathbf{r}}_0 = x_0\,\hat{\mathbf{i}} + y_0\,\hat{\mathbf{j}}\,.$ $\quad \vec{\mathbf{v}}_0 = v_{x,0}\,\hat{\mathbf{i}} + v_{y,0}\,\hat{\mathbf{j}}\,.$

Componenti della velocità iniziale:

$$v_{x,0} = v_0 \cos\theta_0\,,$$
$$v_{y,0} = v_0 \sin\theta_0\,.$$

Modulo della velocità iniziale: $v_0 = (v_{x,0}^2 + v_{y,0}^2)^{1/2}\,.$

Angolo iniziale: $\theta_0 = \tan^{-1}(v_{y,0} / v_{x,0})\,.$

$$v_x(t) - v_{x,0} = \int_0^t a_x(\tau)\,d\tau \qquad v_x(t) = v_{x,0}$$

COMPONENTE X VELOCITÀ

$$x(t) - x_0 = \int_0^t v_x(\tau)\,d\tau = \int_0^t v_{x,0}\,d\tau = v_{x,0}\,t$$

EQ. COORD. X(t)

$$v_y(t) - v_{y,0} = \int_0^t a_y(\tau)\,d\tau = -\int_0^t g\,d\tau = -g\,t$$

$$v_y(t) = v_{y,0} - g\,t$$

$$y(t) - y_0 = \int_0^t v_y(\tau)\, d\tau = \int_0^t v_{y,0}\, d\tau - \int_0^t g\, \tau\, d\tau =$$

$$= v_{y,0}\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y(t) = y_0 + v_{y,0} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} = (x_0 + v_{x,0} t)\,\hat{i} + \left(y_0 + v_{y,0} t - \frac{1}{2} g t^2\right)\hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j} = v_{x,0}\,\hat{i} + (v_{y,0} - g t)\,\hat{j}$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\,\hat{i} + a_y(t)\,\hat{j} = -g\,\hat{j}$$

Esercizio

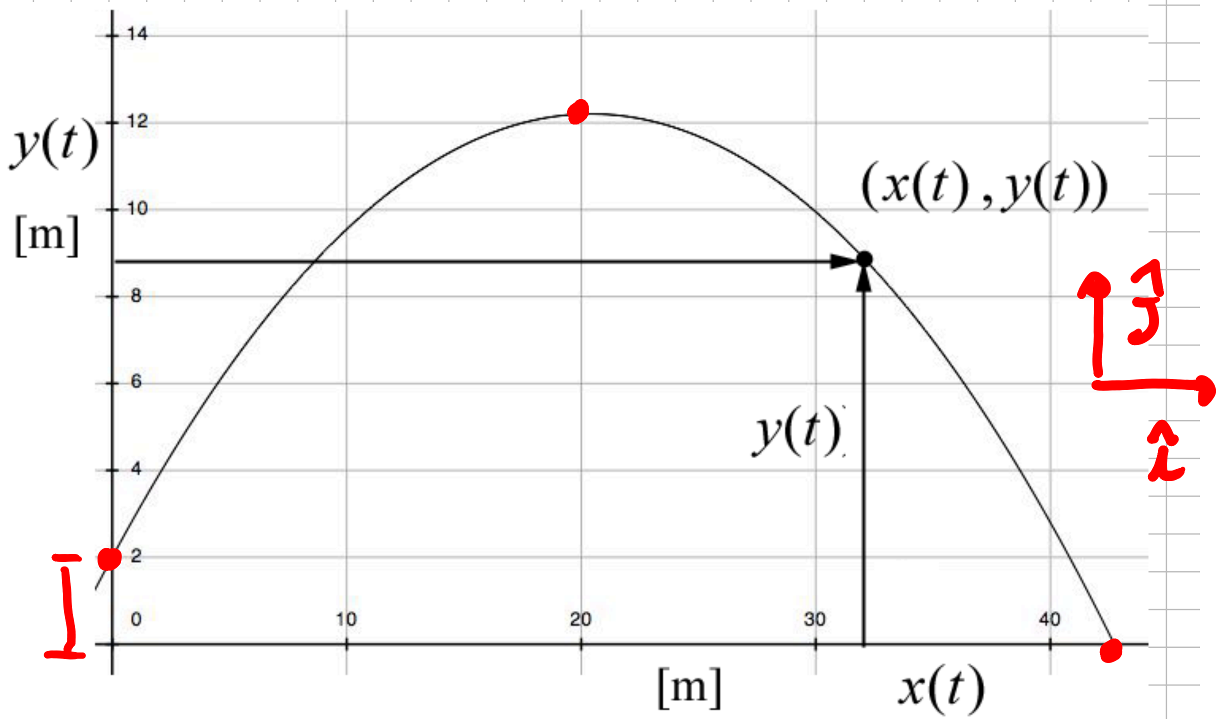
Una persona lancia un sasso con un angolo iniziale $\theta = 45°$ rispetto all'orizzontale e una velocità iniziale di modulo $v_0 = 20 m/s$. Il punto di rilascio del sasso si trova a un'altezza $d = 2\, m$ dal suolo. Trascurare la resistenza dell'aria.

a) Quanto tempo impiega il sasso a raggiungere il punto più alto della sua traiettoria?

b) Qual è stato lo spostamento verticale massimo del sasso?

Ignorare la resistenza dell'aria.

Scegliamo questo sistema di coordinate:



$$x: \begin{cases} v_x(t) = v_{x,0} \\ x(t) = x_0 + v_{x,0}\, t \end{cases}$$

$$y: \begin{cases} v_y(t) = v_{y,0} - g t \\ y(t) = y_0 + v_{y,0}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

t_1 $\quad v_y(t_1) = 0$

$$v_{y,0} - g t_1 = 0 \qquad t_1 = \frac{v_{y,0}}{g} = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$$

$\theta_0 = 45^\circ \quad v_0 = 20\ ms^{-1}$

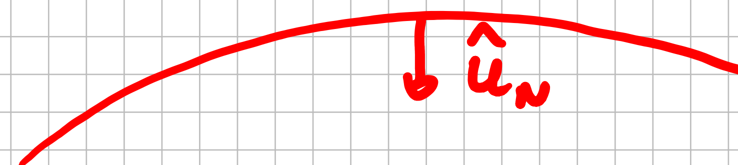
$\Rightarrow$

$$t_1 = 1.44\,s$$

$$y(t_1) = y_0 + v_{y,0}\, t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = d + v_0 \sin\theta_0\, t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$y(t_1) = d + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} - \frac{1}{2} g \left[\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g^2} \right] =$$

$$= d + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$



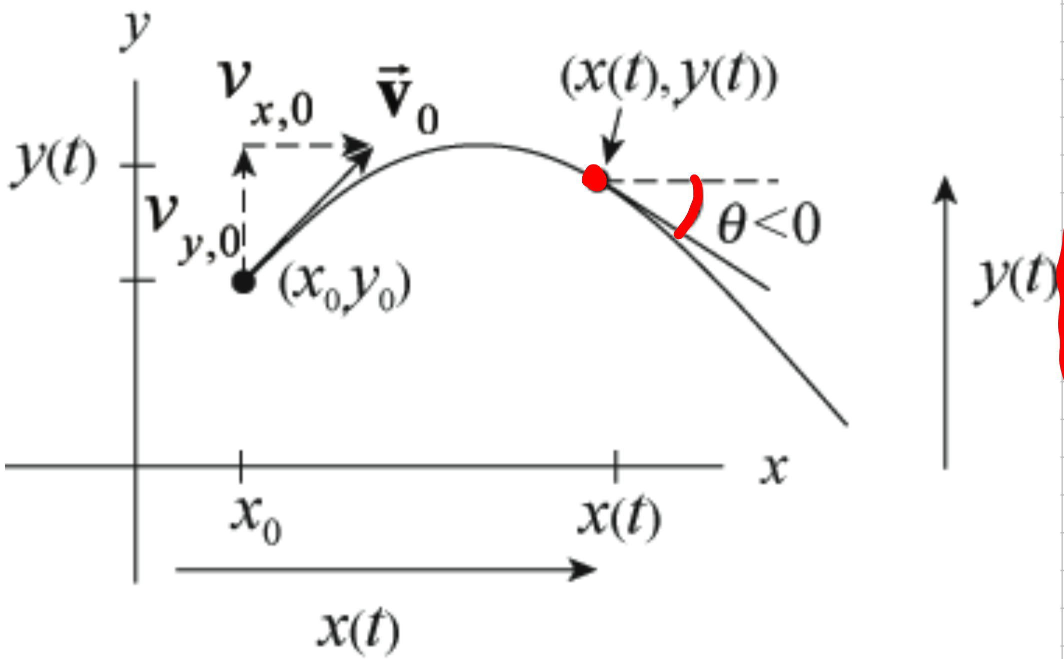
$$a_n = + \frac{v^2}{R}$$

$$g = \frac{v^2}{R}$$

PUNTO DI MAX ALTEZZA

$$v = v_{x,0} = v_0 \cos\theta_0$$

Moto parabolico: equazione dell'orbita



- Scrivere l'equazione dell'orbita $y(x)$.
- Calcolare la direzione del vettore velocità nel punto della traiettoria $(x(t), y(t))$

$$y = y(x)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}(t)\,\hat{i} + \frac{dy}{dt}(t)\,\hat{j} = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y(t)}{v_x(t)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

TRAIETTORIA:

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x,0}^2}x^2 + \left(\frac{g x_0}{v_{x,0}^2} + \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}}\right)x - \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}}x_0 - \frac{1}{2}\frac{g x_0^2}{v_{x,0}^2} + y_0$$

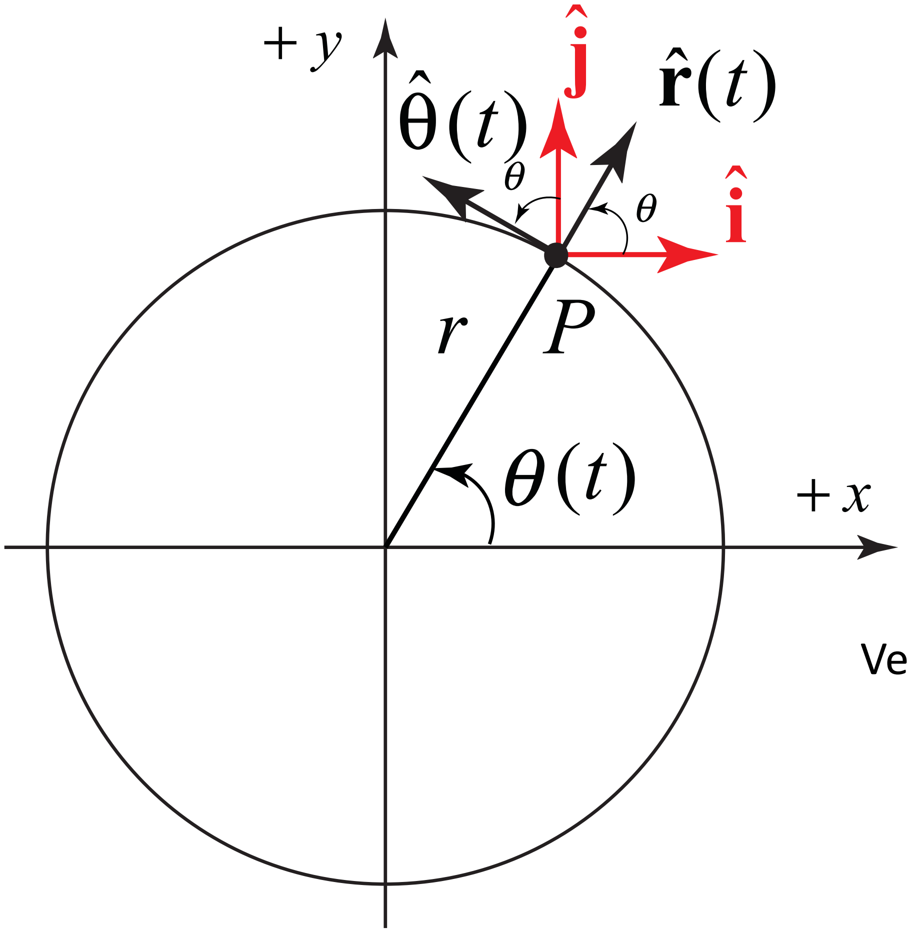
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{v_{x,0}^2}x + \frac{g x_0}{v_{x,0}^2} + \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$v_x = v\cos\theta$$

$$v = \frac{v_x}{\cos\theta}$$

Moto circolare



Vettore posizione:

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = r\,\hat{\mathbf{r}}(t)\,.$$

Versori polari, in funzione di quelli cartesiani:

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = \cos\theta(t)\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta(t)\,\hat{\mathbf{j}}\,,$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = -\sin\theta(t)\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta(t)\,\hat{\mathbf{j}}\,.$$

Moto circolare: calcolo delle componenti della velocità

Vettore posizione:

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = r\,\hat{\mathbf{r}}(t)\,.$$

Vettore velocità:

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{r} = \dot{\hat{r}}$$

$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

$$\dot{\hat{r}} = -\sin\theta\,\dot{\theta}\,\hat{i} + \cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{j} = \dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}\right) =$$

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\,\hat{\theta} \qquad \frac{d}{dt}\hat{r} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{i} - \sin\theta\,\dot{\theta}\,\hat{j} = -\dot{\theta}\left(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}\right)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\,\hat{r} \qquad \frac{d}{dt}\hat{\theta} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{r}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[r\,\hat{r}\right] = r\frac{d\hat{r}}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\theta}$$

$$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} \qquad v_r = 0$$

$$\omega \equiv \left|\frac{d\theta}{dt}\right|$$ VELOCITÀ ANGOLARE SCALARE

$$v = r\left|\frac{d\theta}{dt}\right| = r\,\omega \qquad \omega = \frac{v}{r}$$

Moto circolare: calcolo delle componenti dell'accelerazione

Accelerazione:

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}(t)}{dt}$$

Componenti dell' accelerazione:

$$\vec{\mathbf{a}} = a_r\,\hat{\mathbf{r}}(t) + a_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$$

$$\vec{v}(t) = r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} = r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\dot{v} = r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} \qquad \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}$$

$$= r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r(\dot{\theta})^2\hat{r} \qquad a_r = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$\vec{a} = r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{r} \qquad a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\omega = \left|\frac{d\theta}{dt}\right|$$

$$a_r = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$a_r = -r\,\omega^2$$

Esercizio

Una particella si muove lungo un cerchio di raggio R. Al tempo $t = 0$ essa si trova sull'asse x. L'angolo che la particella forma con l'asse x positivo è dato da

$$\theta(t) = A\,t^3 - B\,t,$$

dove A e B sono costanti positive.
Determinare:

(a) il vettore velocità,

(b) il vettore accelerazione.

Esprimere la risposta in coordinate polari.
A quale istante l'accelerazione centripeta è nulla?

$$\vec{v}(t) = r\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\theta}$$

$$\theta(t) = A t^3 - B t$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 3At^2 - B \qquad r = R$$

$$\vec{v}(t) = R\left(3At^2 - B\right)\hat{\theta}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{r}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = 6At$$

$$\tau = \sqrt{\frac{B}{3A}}$$

$$a_\theta = R\left(6At\right)$$

$$a_r = -R\left(3At^2 - B\right)^2$$

$$3At^2 - B = 0$$

Moto circolare uniforme: velocità e accelerazione

$$\left|\frac{d\theta}{dt}\right| = \omega = \text{COSTANTE}$$

$$v = r\,\omega \qquad \text{COSTANTE}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

$$\vec{a} = r\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\hat{\theta} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{r}$$

$$\vec{a} = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{r} = -r\,\omega^2\,\hat{r}$$

Moto circolare uniforme: periodo e frequenza

$$s = 2\pi r = v\,T$$

Periodo

Lunghezza della circonferenza

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{r\,\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Calcolo del periodo

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Definizione di frequenza

$$\left[\mathrm{s}^{-1}\right] \equiv [\mathrm{Hz}]$$

Unità di misura della frequenza

Modulo dell’accelerazione centripeta in funzione di

$$|a_r| = r\,\omega^2$$

Velocità angolare

$$|a_r| = \frac{v^2}{r}$$

Velocità tangenziale

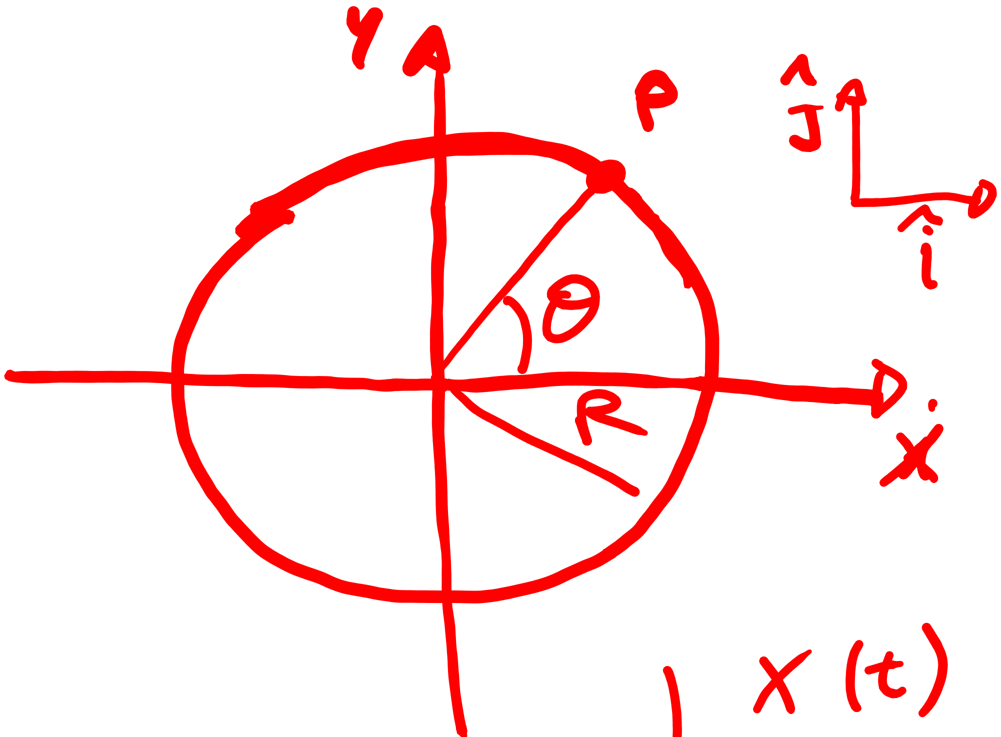
$$|a_r| = 4\pi^2 r\,f^2$$

Frequenza

$$|a_r| = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Periodo

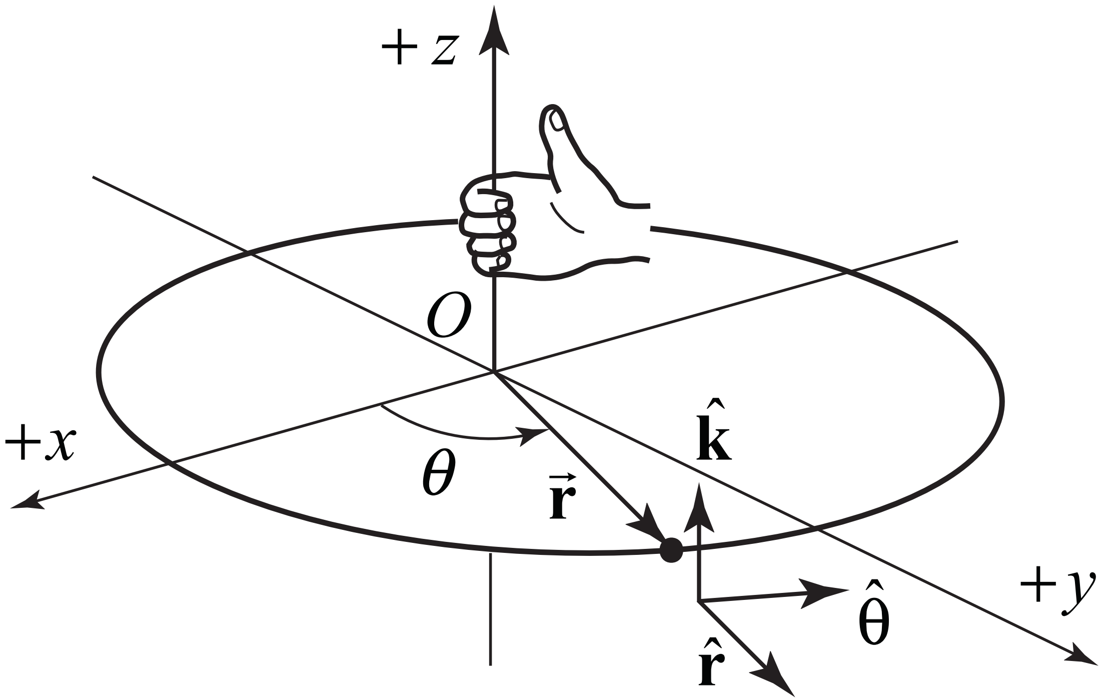
R ω



DETERMINARE:

$$\begin{cases} x(t) \\ v_x(t) \\ a_x(t) \end{cases}$$

Vettore velocità angolare



Consideriamo un sistema di coordinate cilindriche e supponiamo che il moto sia circolare e avvenga sul piano xy $(z = 0)$

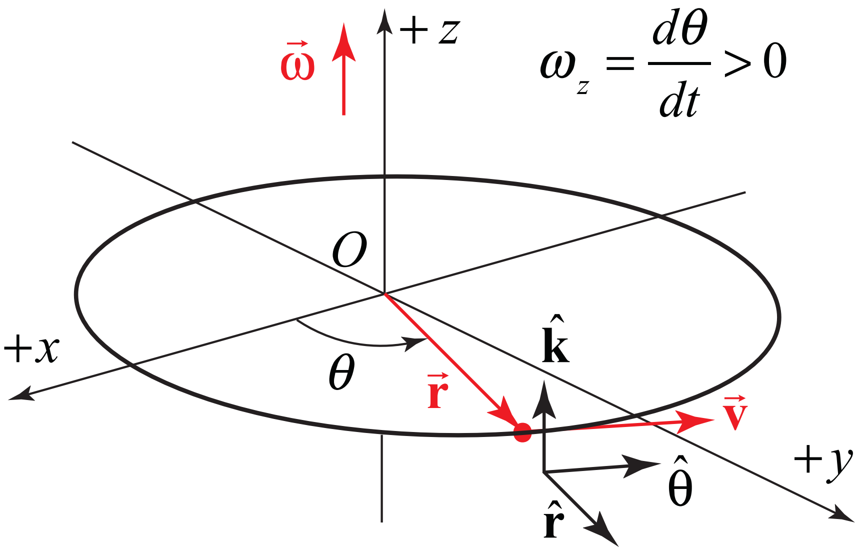
Introduciamo il vettore velocità angolare:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{k}} = \omega_z \hat{\mathbf{k}} \qquad [\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}]$$

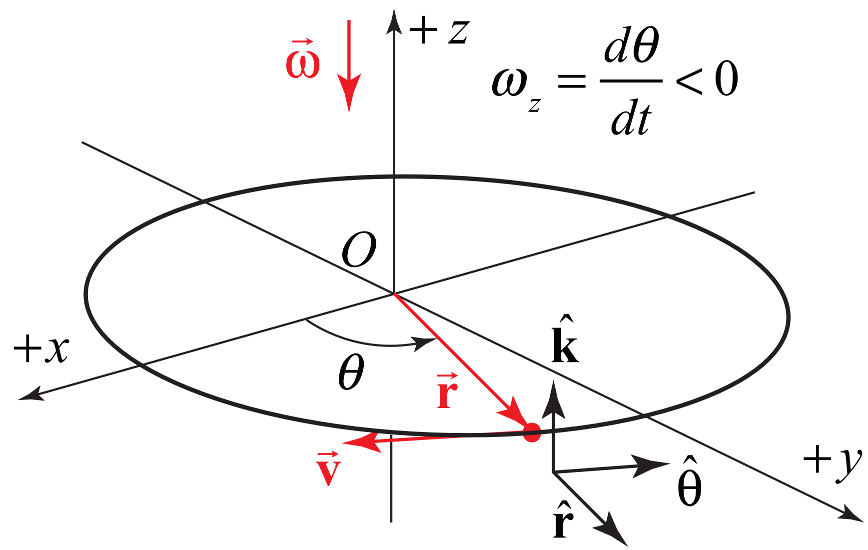
La velocità angolare scalare è il modulo della componente lungo z della velocità angolare:

$$\omega \equiv \left|\omega_z\right| = \left|\frac{d\theta}{dt}\right|$$

Vettore velocità angolare



Antiorario



Orario

La relazione tra vettore velocità
e vettore velocità angolare è:

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat{\mathbf{k}} \times r\,\hat{\mathbf{r}} = r\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Deduzione della relazione

Consideriamo un punto che si muove lungo una traiettoria circolare di raggio costante r. In coordinate cilindriche la posizione del punto è data da

$$\vec{r} = r\,\hat{r},$$

Nel sistema di coordinate cilindriche, il vettore velocità è:

$$\vec{v} = r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}.$$

Definiamo il vettore velocità angolare come:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\hat{k},$$

dove $\hat{k}$ è il versore lungo l'asse z, perpendicolare al piano del moto. Calcoliamo il prodotto vettoriale tra $\vec{\omega}$ e $\vec{r}$:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \dot{\theta}\,\hat{k} \times (r\,\hat{r}) = r\,\dot{\theta}\,(\hat{k} \times \hat{r}).$$

Nel sistema cilindrico (orientato secondo la regola della mano destra) risulta:

$$\hat{k} \times \hat{r} = \hat{\theta}.$$

Pertanto:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}.$$

Osservando che l'espressione trovata per la velocità è:

$$\vec{v} = r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta},$$

concludiamo che:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Velocità angolare in funzione della velocità

Consideriamo un moto di rotazione puro attorno all'origine, per il quale vale:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Prendiamo il prodotto vettoriale di $\mathbf{r}$ con entrambi i membri dell'equazione:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Utilizziamo l'identità del triplo prodotto vettoriale:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\, \mathbf{c},$$

con $\mathbf{a} = \mathbf{r}$, $\mathbf{b} = \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{c} = \mathbf{r}$. Pertanto,

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\, \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\, \mathbf{r}.$$

Nel caso di moto circolare puro, il vettore posizione $\mathbf{r}$ è sempre ortogonale al vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$; cioè,

$$\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Quindi la relazione precedente semplifica a:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\, \boldsymbol{\omega} = \|\mathbf{r}\|^2\, \boldsymbol{\omega}.$$

Infine, isolando $\boldsymbol{\omega}$ otteniamo:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{r}\|^2}.$$

Esercizio

Una particella si muove lungo una circonferenza di raggio R. Al tempo $t = 0$ essa si trova sull'asse x. L'angolo che la particella forma con l'asse x positivo è dato da

$$\theta(t) = A\,t - B\,t^3,$$

dove A e B sono costanti positive. Usando un sistema di coordinate polari, determinare:

(a) il vettore velocità angolare,

(b) il vettore velocità.

(c) In quale istante, $t = t_1$, la velocità angolare è zero.

(d) Qual è la direzione della velocità angolare per:

(i) $t < t_1$,

(ii) $t > t_1$?

$t=0$ ASSE X

$$\theta(t) = At - Bt^3$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\hat{k} = [A - 3Bt^2]\hat{k}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \left(\frac{d\theta}{dt}\hat{k}\right) \times (r\hat{r}) = r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$$

$$\vec{v} = R\,(A - 3Bt^2)\,\hat{\theta}$$

$$A - 3Bt_1^2 = 0 \qquad t_1 = \sqrt{\frac{A}{3B}}$$

Notare che a $t = 0$ abbiamo:

$$\omega_z(t=0) = \frac{d\theta}{dt}(t=0) = A$$

Poichè A è positiva, la componente è positiva e il moto è inizialmente antiorario.

$t = t_2 \quad \frac{d\theta}{dt} = 0$

$t < t_2$

$A > 3Bt^2$

Quindi $\frac{d\theta}{dt} = \omega_z > 0$, verso antiorario

$t > t_2$

$A < 3Bt^2$

Quindi $\frac{d\theta}{dt} = \omega_z < 0$, verso orario

Esercizio 1

Enunciato del Problema

Un'automobile, che si muove nel piano xy, parte a $t = t_0 = 0$ dal punto

$$A = (R, 0)$$

e percorre, in verso antiorario, la semicirconferenza di raggio

$$R = 1\,\mathrm{km}$$

e centro O fino al punto

$$B = (-R, 0).$$

Successivamente prosegue in linea retta fino al punto

$$C = (-R, -3R),$$

che raggiunge al tempo $t = t_f$. Durante tutto il moto il modulo della velocità è costante:

$$V_0 = 20\,\mathrm{m/s}.$$

Si richiede di calcolare:

(i) $\int_0^{t_f} V\,dt'$ (cioè la lunghezza della traiettoria).

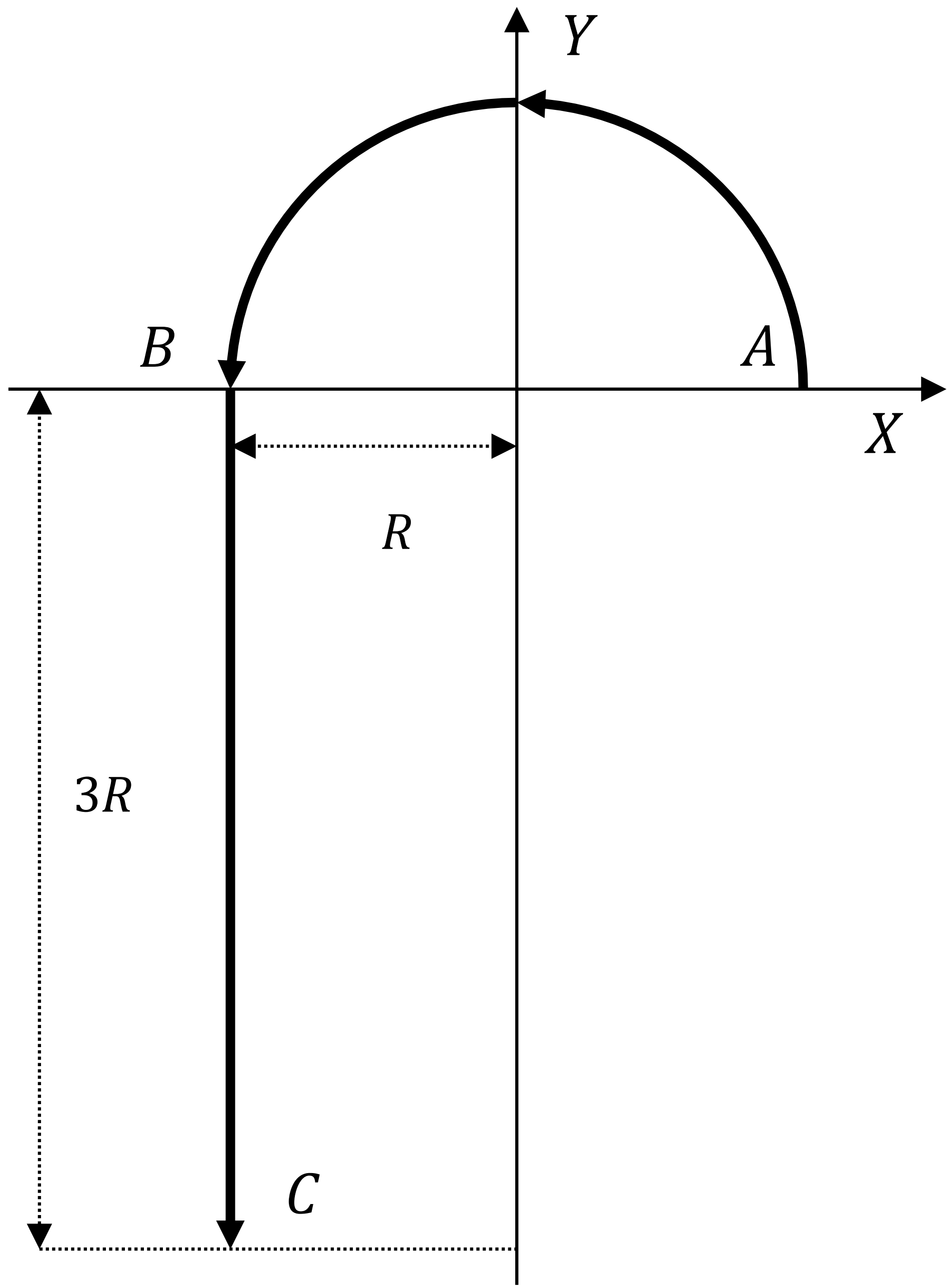
(ii) $\int_0^{t_f} \vec{V}\,dt$ (lo spostamento vettoriale dall'inizio alla fine del moto).

(iii) $\int_0^{t_f} \vec{a}\,dt$ (la variazione della velocità).

(iv) Il tempo t_f in cui l'auto raggiunge il punto C.

(v) Determinare le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ per $0 < t < t_f$.

(vi) Determinare l'accelerazione $\vec{a}(t)$.



Y
B
A
X
R
3R
C

Soluzione

(i) Lunghezza della traiettoria

La lunghezza della traiettoria è l'integrale, nell'intervallo di tempo, della velocità scalare, ovvero del modulo della velocità:

$$\int_0^{t_f} V\,dt' = s,$$

dove s è la lunghezza percorsa. L'automobile compie due tratti:

- **Tratto circolare:** dalla posizione $A = (R, 0)$ a $B = (-R, 0)$ lungo una semicirconferenza. La lunghezza di questo tratto è

  $$s_1 = \pi R,$$

  poiché la circonferenza completa è $2\pi R$ e ne percorre metà.

- **Tratto rettilineo:** dalla posizione $B = (-R, 0)$ a $C = (-R, -3R)$. La distanza percorsa è

  $$s_2 = 3R,$$

  in quanto il segmento verticale ha lunghezza pari a $3R$.

Pertanto, la lunghezza totale è

$$s = s_1 + s_2 = \pi R + 3R.$$

Con $R = 1\,\mathrm{km}$ si ha:

$$s = (\pi + 3)\,\mathrm{km} \approx 6.14\,\mathrm{km}.$$

(ii) Spostamento vettoriale

Lo spostamento vettoriale $\Delta\vec{r}$ è dato dalla differenza tra la posizione finale e quella iniziale:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_f) - \vec{r}(0).$$

Dai dati:

$$\vec{r}(0) = A = (R, 0) \quad \text{e} \quad \vec{r}(t_f) = C = (-R, -3R),$$

si ottiene:

$$\Delta\vec{r} = (-R, -3R) - (R, 0) = (-2R, -3R).$$

(iii) Variazione di velocità

Per definizione,

$$\int_0^{t_f} \vec{a}\,dt = \vec{V}(t_f) - \vec{V}(0).$$

Consideriamo la velocità all'istante iniziale e a quello finale:

- All'inizio ($t = 0$), l'automobile parte da $A = (R, 0)$ e, essendo il moto lungo la semicirconferenza in senso antiorario, la velocità è tangente alla traiettoria e punta verso l'alto:

  $$\vec{V}(0) = (0, V_0).$$

- Al termine del moto ($t = t_f$), durante il tratto rettilineo dalla posizione B a C, la velocità è parallela all'asse y (verso il basso):

  $$\vec{V}(t_f) = (0, -V_0).$$

Pertanto,

$$\vec{V}(t_f) - \vec{V}(0) = (0, -V_0) - (0, V_0) = (0, -2V_0),$$

cioè la variazione di velocità è $-2V_0$ lungo l'asse y.

(iv) Tempo totale t_f

Il tempo totale impiegato è dato dalla lunghezza totale del percorso divisa per la velocità costante:

$$t_f = \frac{s}{V_0} = \frac{\pi R + 3R}{V_0}.$$

Con $R = 1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$ e $V_0 = 20\,\mathrm{m/s}$, si ha:

$$t_f = \frac{(\pi + 3) \cdot 1000}{20} \approx \frac{6.14 \times 1000}{20} \approx 307\,\mathrm{s}.$$

(v) Funzioni orarie $x(t)$ e $y(t)$

Il moto dell'automobile si compone di due tratte:

1. Moto circolare (da A a B)

L'automobile percorre la semicirconferenza con moto circolare uniforme. La velocità angolare è:

$$\omega = \frac{V_0}{R}.$$

Il tempo per percorrere la semicirconferenza (tratto circolare) è

$$t_1 = \frac{\pi R}{V_0}.$$

Con $R = 1000\,\mathrm{m}$ e $V_0 = 20\,\mathrm{m/s}$ si ha:

$$t_1 \approx 157\,\mathrm{s}.$$

Le coordinate del moto circolare (centro $O = (0, 0)$) sono:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta(t) = R\cos\left(\frac{V_0}{R}t\right), \\ y(t) = R\sin\theta(t) = R\sin\left(\frac{V_0}{R}t\right), \end{cases} \qquad 0 \le t \le t_1.$$

2. Moto rettilineo (da B a C)

Per $t_1 < t \le t_f$, l'automobile procede lungo una retta. Poiché i punti $B = (-R, 0)$ e $C = (-R, -3R)$ hanno la stessa coordinata x, si ha:

$$x(t) = -R.$$

Il moto lungo y è rettilineo uniforme. Sia t_1 l'istante in cui $y = 0$; la velocità lungo y è $-V_0$ (verso il basso), pertanto:

$$y(t) = -V_0\,(t - t_1), \quad t_1 < t \le t_f.$$

Notiamo che, poiché $y(t_f) = -3R$, deve valere:

$$t_f - t_1 = \frac{3R}{V_0}.$$

(vi) Accelerazione $\vec{a}(t)$

L'accelerazione dipende dal tratto del moto.

1. **Moto circolare (per $0 \leq t \leq t_1$):**
   Nel moto circolare uniforme l'accelerazione è centripeta ed ha modulo:

$$a_c = \frac{V_0^2}{R}.$$

   Essa è diretta verso il centro $O = (0,0)$, ovvero in direzione opposta al versore radiale $\hat{r}(t)$. Quindi:

$$\vec{a}(t) = -\frac{V_0^2}{R}\,\hat{r}(t).$$

2. **Moto rettilineo (per $t_1 < t \leq t_f$):**
   Nel moto rettilineo uniforme l'accelerazione è nulla:

$$\vec{a}(t) = \vec{0}.$$

Esercizio 2

Enunciato del Problema

Consideriamo un moto descritto, in coordinate polari, dalle seguenti equazioni:

$$r = r_0 \sin(\omega t), \quad \theta = \omega t,$$

con

$$r_0 = 0.05\,\mathrm{m}, \quad \omega = 2\pi\,\mathrm{rad/s}.$$

- Determinare la traiettoria (in coordinate cartesiane).
- Analizzare le grandezze cinematiche (velocità, accelerazione, periodo).

Soluzione

1. Conversione in Coordinate Cartesiane

Le relazioni tra coordinate polari e cartesiane sono:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Sostituendo $r = r_0 \sin(\omega t)$ e $\theta = \omega t$, si ottiene:

$$x(t) = r_0 \sin(\omega t)\cos(\omega t), \quad y(t) = r_0 \sin(\omega t)\sin(\omega t) = r_0 \sin^2(\omega t).$$

Utilizziamo ora la formula del doppio angolo:

$$\sin(2\omega t) = 2\sin(\omega t)\cos(\omega t),$$

da cui:

$$x(t) = \frac{r_0}{2}\sin(2\omega t).$$

Per $y(t)$ sfruttiamo l'identità:

$$\sin^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2},$$

ottenendo:

$$y(t) = \frac{r_0}{2}\Big(1 - \cos(2\omega t)\Big).$$

2. Determinazione della Traiettoria

Per evidenziare la forma della traiettoria, si introduce il cambio di variabile:

$$X = x(t), \quad Y = y(t) - \frac{r_0}{2}.$$

Così:

$$X = \frac{r_0}{2}\sin(2\omega t), \quad Y = \frac{r_0}{2}\Big(1 - \cos(2\omega t)\Big) - \frac{r_0}{2} = -\frac{r_0}{2}\cos(2\omega t).$$

Calcolando:

$$X^2 + Y^2 = \left(\frac{r_0}{2}\sin(2\omega t)\right)^2 + \left(\frac{r_0}{2}\cos(2\omega t)\right)^2 = \frac{r_0^2}{4}\Big(\sin^2(2\omega t) + \cos^2(2\omega t)\Big) = \frac{r_0^2}{4}.$$

Questa è l'equazione di una circonferenza di raggio

$$R = \frac{r_0}{2},$$

centrata in:

$$\left(0, \frac{r_0}{2}\right).$$

Con $r_0 = 0.05$ m:

$$R = 0.025\,\text{m} \quad \text{e il centro è in } (0, 0.025\,\text{m}).$$

3. Analisi del Moto in Coordinate Polari

Ricordiamo che qui le coordinate polari sono definite rispetto alla stessa origine del sistema cartesiano. Il vettore posizione è:

$$\vec{r}(t) = r(t)\,\hat{r}, \quad \text{con } r(t) = r_0 \sin(\omega t) \text{ e } \theta(t) = \omega t.$$

Derivando il vettore posizione rispetto al tempo, si ottiene il vettore velocità:

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\,\hat{r} + r(t)\,\dot{\theta}(t)\,\hat{\theta}.$$

Calcoliamo $\dot{r}(t)$:

$$\dot{r}(t) = \frac{d}{dt}\Big[r_0 \sin(\omega t)\Big] = r_0\omega\cos(\omega t).$$

Poiché $\theta(t) = \omega t$, la derivata è:

$$\dot{\theta}(t) = \omega.$$

Quindi, la componente tangenziale è:

$$r(t)\,\dot{\theta}(t) = r_0 \sin(\omega t)\,\omega.$$

Il modulo della velocità è:

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\Big(r_0\omega\cos(\omega t)\Big)^2 + \Big(r_0\omega\sin(\omega t)\Big)^2} = r_0\omega\sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = r_0\omega.$$

Inserendo i valori numerici:

$$|\vec{v}(t)| = 0.05 \times 2\pi \approx 0.314\,\mathrm{m/s}.$$

Poiché il modulo della velocità è costante, il moto è uniforme.

4. Moto Circolare Uniforme

Dalla parte precedente abbiamo ottenuto che il moto avviene con velocità costante, in modulo. La traiettoria è una circonferenza di raggio:

$$R = \frac{r_0}{2} = 0.025\,\mathrm{m},$$

con centro nel punto:

$$(0, 0.025\,\mathrm{m}).$$

Quindi si tratta di un moto circolare uniforme. Nel moto circolare uniforme, la relazione tra la velocità tangenziale v e la velocità angolare Ω è:

$$v = R\,\Omega.$$

Poiché $v = r_0\omega$, si deduce:

$$r_0\omega = \frac{r_0}{2}\Omega \quad \Longrightarrow \quad \Omega = 2\omega.$$

Con $\omega = 2\pi$ rad/s:

$$\Omega = 4\pi\,\mathrm{rad/s}.$$

Il periodo del moto circolare è:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}\,\mathrm{s}.$$

L'accelerazione centripeta è verso il centro della traiettoria, ovvero il punto

$$(0, 0.025\,\mathrm{m}),$$

e ha modulo:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(r_0\omega)^2}{r_0/2} = 2r_0\omega^2.$$

Calcolando il valore numerico:

$$a_c = 2 \times 0.05 \times (2\pi)^2 \approx 3.95\,\mathrm{m/s^2}.$$

Esercizio 3

Enunciato del Problema

Una ruota di raggio $r = 50$ cm gira con moto uniforme in senso orario attorno a un'asse passante per il suo centro O ed ortogonale al piano della ruota con velocità angolare

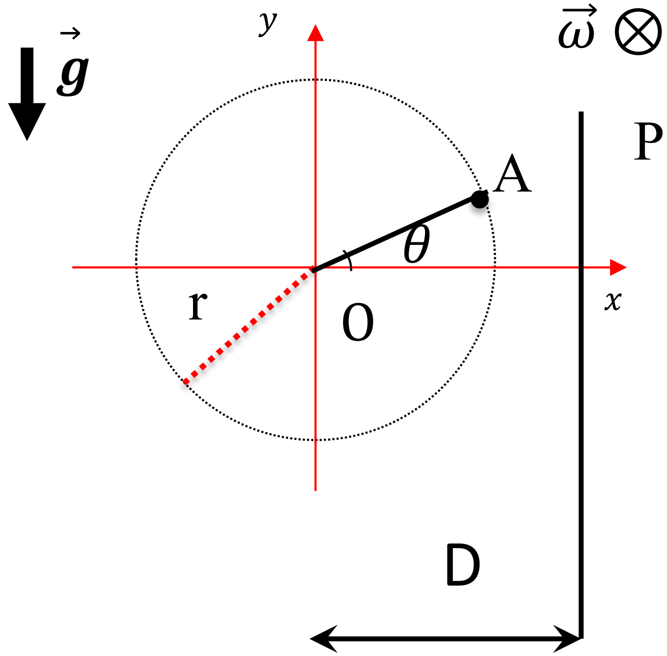
$$\omega = 4 \text{ rad/s}.$$

Nell'istante in cui il raggio OA forma un angolo $\theta = 30°$ con l'asse x, si stacca da A un punto materiale che si muove di moto parabolico e, dopo un certo tempo, colpisce una parete P distante

$$D = 1 \text{ m}$$

dall'origine O lungo l'asse x. Il moto iniziale del punto è circolare con centro in O.
Si richiede di determinare:

1. Il tempo di volo t_v del punto da A al punto B in cui avviene l'impatto con la parete.
2. La sua velocità subito prima dell'impatto.
3. Le coordinate del punto di impatto B.



$\vec{g}$
y
$\vec{\omega}$ ⊗
P
A
θ
x
r
O
D

Soluzione

Velocità Iniziale del Punto Materiale

La velocità tangenziale del punto A al momento del distacco è data da:

$$V_0 = \omega r = (4 \text{ rad/s}) \cdot (0.50 \text{ m}) = 2 \text{ m/s}.$$

Essendo il moto circolare uniforme orario, la velocità del punto A ha componenti:

$$\begin{aligned} V_{0x} &= V_0 \sin\theta = 2 \sin 30^\circ = 2 \cdot (1/2) = 1 \text{ m/s}, \\ V_{0y} &= -V_0 \cos\theta = -2 \cos 30^\circ = -2 \cdot (\sqrt{3}/2) = -\sqrt{3} \text{ m/s} \approx -1.73 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Determinazione del Tempo di Volo

Il punto materiale segue un moto parabolico con accelerazione gravitazionale $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. L'equazione del moto lungo x è:

$$x(t) = x_0 + V_{0x} t.$$

Poiché il punto A si trova inizialmente a $x_A = r \cos\theta = 0.50 \cos 30^\circ = 0.50 \cdot (\sqrt{3}/2) \approx 0.43$ m, abbiamo:

$$D = x(t_v) = x_A + V_{0x} t_v.$$

Determiniamo il tempo di volo:

$$t_v = \frac{D - x_A}{V_{0x}} \quad \Rightarrow \quad t_v \approx 0.57 \text{ s}.$$

Determinazione della Velocità Subito Prima dell'Impatto

La componente orizzontale della velocità resta invariata:

$$V_x(t) = V_{0x} = 1 \text{ m/s}.$$

La componente verticale della velocità segue l'equazione:

$$V_y(t) = V_{0y} - gt.$$

Subito prima dell'impatto:

$$V_y(t_v) = V_{0y} - g t_v.$$

Sostituendo i valori:

$$V_y(t_v) \approx -7.29 \text{ m/s}.$$

Il modulo della velocità, subito prima dell'impatto, è:

$$V(t_v) = \sqrt{V_x^2(t_v) + V_y^2(t_v)} \approx 7.36 \text{ m/s}.$$

Determinazione delle Coordinate del Punto di Impatto B

Le coordinate del punto di impatto B sono date da:

$$x_B = D = 1.00 \text{ m},$$
$$y_B = y_A + V_{0y}t_v - \frac{1}{2}g{t_v}^2.$$

Sostituendo i valori numerici, calcoliamo y_B:

$$y_B \approx -3.53 \text{ m}.$$

Quindi, il punto di impatto ha coordinate:

$$B = (1.00 \text{ m}, -3.53 \text{ m}).$$