

# Calcolo di stime certificate per il numero cromatico di un grafo

Tesi di Laurea in  
Ingegneria Informatica

**Candidato**

Alessandro Xavier Battisti

**Relatore**

Prof. Stefano Massei

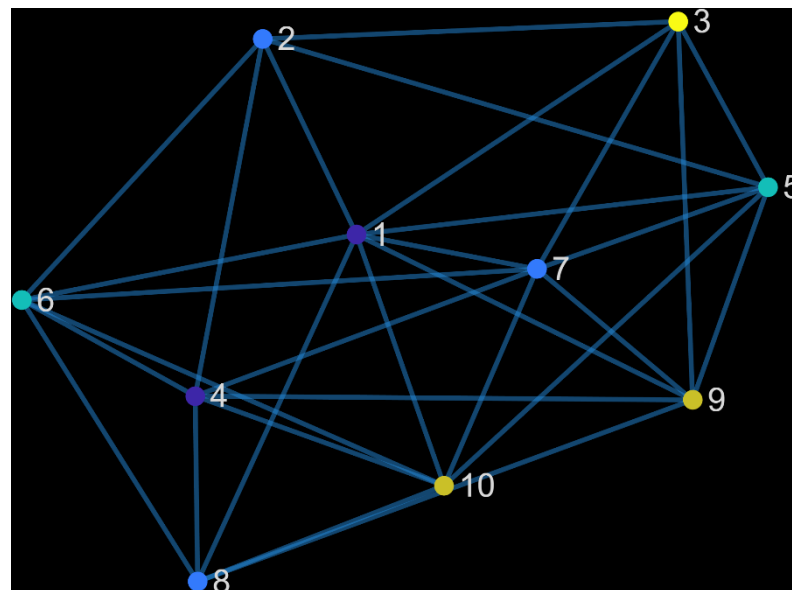


UNIVERSITÀ DI PISA

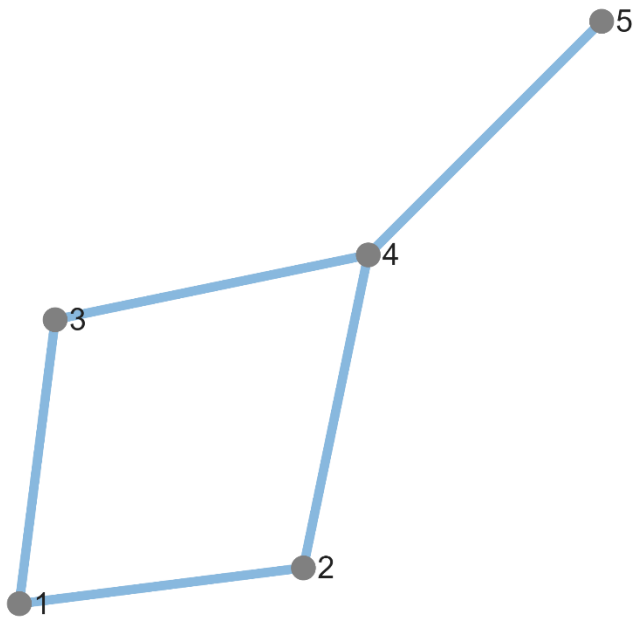
# Introduzione e Problema

- Dato un grafo si vuole assegnare un colore ad ogni vertice dando colori diversi a vertici adiacenti. Il minor numero di colori necessari si chiama numero cromatico del grafo.
- Trovare il numero cromatico è un problema NP-completo.

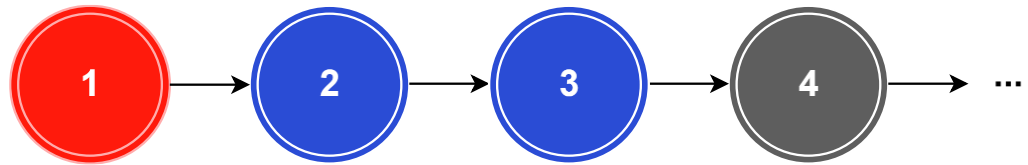
Esempio di colorazione di  
un grafo con 10 vertici



- Stima dall'alto di  $k + 1$  colori con algoritmo *greedy*:



Colorazione dei primi 3 vertici



- Se  $k$  colori non sono sufficienti,  $k + 1$  è il numero cromatico cercato.
  - Per verificarlo serve una modellizzazione matematica del problema.

- Si associa a ciascuno dei  $k$  colori una radice  $k$ -esima dell'unità:  $\sqrt[k]{1}$ .
- Si definisce il seguente sistema polinomiale:
  - $v_i^k - 1 = 0$
  - $\sum_{L=0}^{k-1} v_i^{k-L-1} \cdot v_j^L = 0$   
↑ ottenuto dallo sviluppo di  $(v_i^k - v_j^k)$
- Si verifica l'esistenza della soluzione col teorema degli zeri di Hilbert:
  - Se si trovano polinomi  $\beta_i$  tali che  $\sum_{i=1}^s \beta_i f_i = 1$  allora il sistema polinomiale non ha soluzione (certificato Nullstellensatz).
  - Per trovarli va risolto un sistema lineare

## ■ Esempio di sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1^3 - 1 = 0 \\ v_2^3 - 1 = 0 \\ v_3^3 - 1 = 0 \\ v_4^3 - 1 = 0 \\ v_5^3 - 1 = 0 \\ v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2 = 0 \\ v_2^2 + v_2 v_3 + v_3^2 = 0 \\ v_1^2 + v_1 v_4 + v_4^2 = 0 \\ v_2^2 + v_2 v_4 + v_4^2 = 0 \\ v_1^2 + v_1 v_5 + v_5^2 = 0 \\ v_2^2 + v_2 v_5 + v_5^2 = 0 \\ v_3^2 + v_3 v_5 + v_5^2 = 0 \\ v_4^2 + v_4 v_5 + v_5^2 = 0 \end{array} \right.$$

Numero di righe sistema  $\beta_i$ :

$$\binom{n + (k + d)}{(k + d)}$$

Numero di colonne:

$$\sum_{i=0}^d ((n + m) \cdot n^i)$$

Tempo d'esecuzione rispetto al numero di vertici

