Compito del 3/07/07

Es 1 Si calcoli la trasformata continua di Fourier del segnale trapezoidale

$$x(t) = \begin{cases} t+2 & -2 < t < -1 \\ 1 & -1 < t < 1 \\ -t+2 & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Osservando che la sua derivata

$$y(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = \mathrm{rect}\left(t+\frac{3}{2}\right) - \mathrm{rect}\left(t-\frac{3}{2}\right)$$

ha area nulla e trasformata

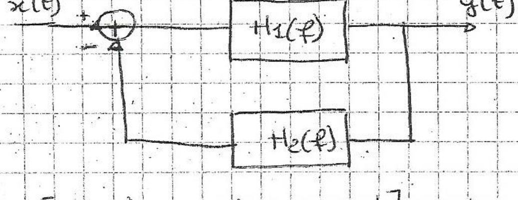
$$Y(f) = \mathrm{sinc}(f)\, e^{j3\pi f} - \mathrm{sinc}(f)\, e^{-j3\pi f}$$

$$= 2j\,\mathrm{sinc}(f)\sin(3\pi f)$$

la trasformata di $x(t)$ può essere ottenuta mediante la regola di integrazione

$$X(f) = \frac{Y(f)}{j2\pi f} = \mathrm{sinc}(f)\,\frac{\sin(3\pi f)}{\pi f} = 3\,\mathrm{sinc}(f)\,\mathrm{sinc}(3f)$$

Es 2 Risposta in freq del sistema LTI in figura 1.



$$y(t) = \left[x(t) - y(t) \otimes h_2(t)\right] \otimes h_1(t)$$

Trasformiamo

$$X(f)H_1(f) - Y(f)H_2(f)H_1(f) = Y(f)$$

$$H(f) = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)}$$ ✓

Es. 4 Un trasmettitore trasmette, con le stesse probabi-
lità, bit uguali a 1 e a 0. A causa del rumore sul canale
trasmissione il segnale al ricevitore giunge corrotto e qu
non sempre il ricev. riconosca correttamente il bit trasme
Il ricevitore commette un errore se decide per il bit 1 qua
è stato trasmesso 0 e viceversa. Indicando con R il valore del
bit ricevuto e con T quello del bit trasmesso, si sa che
$P(R=0|T=1) = P(R=1|T=0) = 0.1$. Si calcoli la prob. d'erro
complessiva del ricevitore. Quanto vale la prob. di decidere
sapendo che è stato trasmesso il bit 0?

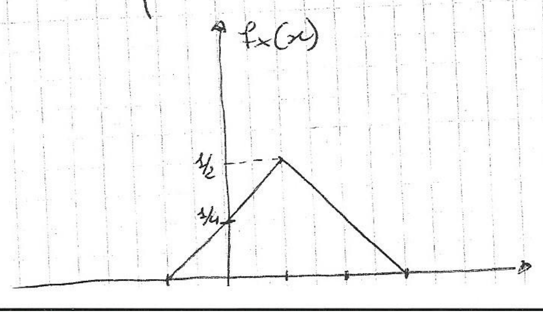
1) $P(e) = P(T=0)P(R=1|T=0) + P(T=1)P(R=0|T=1) =$
$= 0.5 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.1 = 0.1$

2) $P(R=0|T=0) = 1 - P(R=1|T=0) = 0.9$

Es. 5

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{4} & -1 < x < 1 \\ -\frac{x-3}{4} & 1 < x < 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Disegno



Per la simmetria della ddp è evidente che $E\{x\}=1$

3 ②

$$E\{x^2\} = \int_{-1}^{3} x^2 f_x(x)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{4}(x+1)\,dx - \int_{1}^{3} \frac{x^2}{4}(x-3)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{4}\right) dx - \int_{1}^{3} \left(\frac{x^3}{4} - \frac{3x^2}{4}\right) dx$$

$$= \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{12}\Bigg|_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{4}\right]_1^3 = \frac{5}{3}$$

$$\sigma_x^2 = E\{x^2\} - E^2\{x\} = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

Es. 6 Si considerino i 2 processi aleatori

$$X(t) = A\sin(2\pi f_0 t) + B\cos(2\pi f_0 t)$$
$$Y(t) = B\sin(2\pi f_0 t) - A\cos(2\pi f_0 t)$$

dove A e B sono v.a. incorrelate a valor medio nullo e varianza σ^2. Si verifichi se i 2 processi sono cong. staz. in senso lato.

E' facile verificare che $E\{X(t)\} = E\{Y(t)\} = 0$

$$R_X(t, t+\tau) = R_X(\tau) = \sigma^2 \cos 2\pi f_0 \tau = R_Y(\tau)$$

Calcoliamo la cross-correlazione

$$R_{XY}(t, t+\tau) = E\{X(t+\tau)Y(t)\} =$$

$$= E\Big\{\left[A\sin(2\pi f_0(t+\tau)) + B\cos(2\pi f_0(t+\tau))\right]\left[B\sin(2\pi f_0 t) - A\cos(2\pi f_0 t)\right]$$

$$= -E\{A^2\}\sin(2\pi f_0(t+\tau))\cos(2\pi f_0 t) + E\{B^2\}\cos(2\pi f_0(t+\tau))\sin(2\pi f_0$$

$$= -\sigma^2 \sin\alpha\cos\beta + \sigma^2\cos\beta\sin\alpha = -\sigma^2 \sin(2\pi f_0 \tau)$$

staz. in senso lato.

4

COMPITO 24/07/07

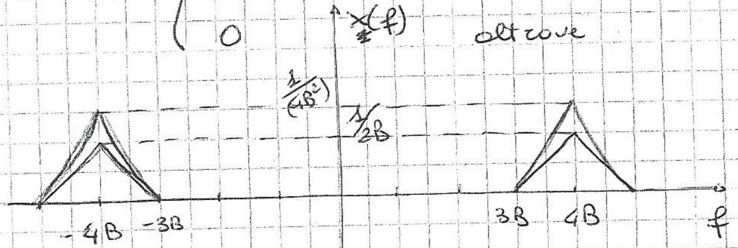
Es. 1 - Si calcoli l'energia E_x del segnale $x(t) = \mathrm{sinc}^2(Bt)\cdot\cos(2\pi f_0 t)$

nei 2 casi a) $f_0 = 4B$; b) $f_0 = B/2$

Poniamo $x_1(t) = \mathrm{sinc}^2(Bt) \Rightarrow X(f) = \frac{1}{2}\left[X_1(f-f_0) + X_1(f+f_0)\right]$

dove $X_1(f) = \begin{cases} \frac{1}{B}\left(1 - \frac{|f|}{B}\right) & |f| < B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

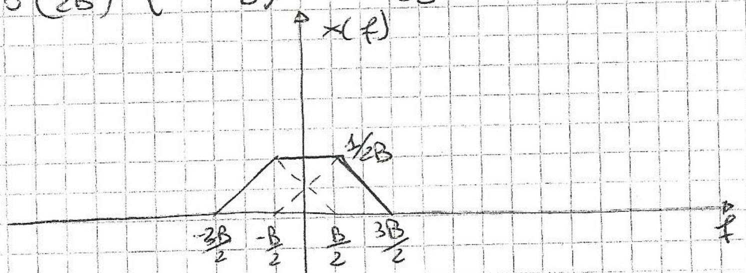
a)



Dalle proprietà di simmetria si deduce che

$$E_x = 4\int_0^B \left(\frac{1}{2B}\right)^2 \left(1 - \frac{f}{B}\right)^2 df = \frac{1}{3B}$$

b)



da cui $E_x = B\cdot\frac{1}{4B^2} + 2\int_0^B \left(\frac{1}{2B}\right)^2 \left(1 - \frac{f}{B}\right)^2 df = \frac{5}{12B}$

Es. 2. Calcolare la risposta in frequenza $H(f)$ del filtro la cui risposta impulsiva è $h(t) = \sqrt{2}\,\omega_0 \exp\left[-\omega_0 t/\sqrt{2}\right] \sin(\omega_0 t/\sqrt{2})\,u(t)$.

Si può porre $h(t) = h_1(t)\,h_2(t)$ dove

$h_1(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}}\,u(t)$ $\qquad h_2(t) = \sqrt{2}\,\omega_0 \sin\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)$

$$H_1(f) = \frac{1}{\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} + j 2\pi f}$$ ⑤

$$H_2(f) = \frac{\sqrt{2}\,\omega_0}{2j}\left[\delta\left(f - \frac{\omega_0}{2\pi\sqrt{2}}\right) - \delta\left(f + \frac{\omega_0}{2\pi\sqrt{2}}\right)\right]$$

Risulta $\quad H(f) = H_1(f) \otimes H_2(f)$

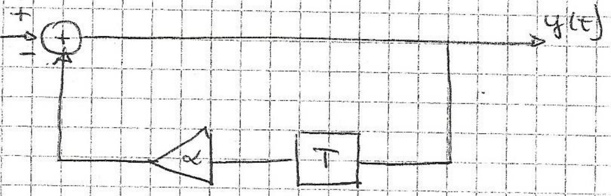
$$= \frac{\sqrt{2}\,\omega_0}{2j}\left[\frac{1}{\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} + j2\pi\left(f - \frac{\omega_0}{2\pi\sqrt{2}}\right)} - \frac{1}{\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} + j2\pi\left(f + \frac{\omega_0}{2\pi\sqrt{2}}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{1 + j\sqrt{2}\left(\frac{2\pi f}{\omega_0}\right) - \left(\frac{2\pi f}{\omega_0}\right)^2}$$

Lo spettro d'ampiezza è $|H(f)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi f}{\omega_0}\right)^4}}$

Il filtro è passa-basso.

Es. 3 Si determini l'andamento del segnale $y(t)$ in uscita al sistema di figura se in ingresso si ha un'onda quadra di periodo T.



$$y(t) = x(t) - \alpha\, y(t - T)$$

Essendo $x(t)$ periodico di periodo T, lo è anche $y(t)$, dunque $y(t-T) = y(t)$

$$y(t) = x(t) - \alpha\, y(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{1+\alpha}\, x(t)$$

Es. 4 – Si supponga di disporre di 2 sistemi identici caratterizzati da un tempo di vita T_i $(i = 1, 2)$ distribuito in modo exp con ddp data da

$$f_{T_i}(t) = \frac{1}{\eta} \exp\left[-\frac{t}{\eta}\right] u(t)$$

Si determini la funzione di distribuzione $F_{T_S}(t)$ della v.a. T_S che rappresenta il tempo di vita del sistema, nell'hp che i singoli dispositivi siano indipendenti e siano collegati

a) in serie

b) in parallelo $\qquad F_{T_i}(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\eta}}\right) u(t)$

a) $F_{T_S}(t) = Pr\{T_S \le t\} = Pr\{(T_1 \le t) + (T_2 \le t)\} =$

$$= Pr\{T_1 \le t\} + Pr\{T_2 \le t\} - Pr\{T_1 \le t, T_2 \le t\} =$$

$$= F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t) - F_{T_1}(t) F_{T_2}(t) = \left(1 - e^{-\frac{2t}{\eta}}\right) u(t)$$

b) $F_{T_S}(t) = Pr\{T_1 \le t, T_2 \le t\} = F_{T_1}(t) F_{T_2}(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\eta}}\right)^2$

Es. 5 – Una scrivania ha 3 cassetti. Nel I sono contenute 2 monete d'oro, nel II 2 monete d'argento, nel III una moneta d'oro e una d'argento. Si sceglie casualmente un cassetto, lo si apre e si estrae senza guardare una delle 2 monete contenute. Dire qual è la prob. che la moneta rimasta nel cassetto aperto sia d'oro, se la moneta estratta risulta essere d'oro.

Def. i seguenti eventi

$A \equiv \{$estraz. monete d'oro da uno qualunque dei cassetti$\}$

$B = \{$moneta d'oro rimasta nel cassetto aperto$\}$

Dobbiamo calcolare $P(B|A) = P(BA)/P(A)$

Se si indica con C_i $(i=1,2,3)$ l'evento $C_i \equiv \{$apertura i-esimo cassetto$\}$

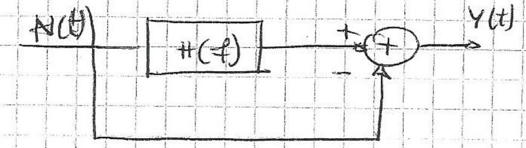
$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A|C_i)\,P(C_i) = 1\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

3 monete d'oro su 6

Osserviamo che l'evento $\{AB\}$ coincide con C_1, quindi risulta $P(AB) = P(C_1) = 1/3$, da cui

$$P(B|A) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

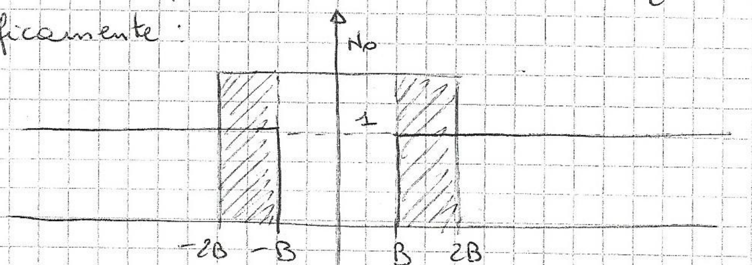
Es 6 Si calcoli la densità spettrale di potenza del processo $Y(t)$ all'uscita del sistema in figura, dove $H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$ e $N(t)$ è un processo Gaussiano con dsp $S_N(f) = N_0\,\text{rect}\left(\frac{f}{4B}\right)$



La risposta equivalente del sistema è $1 - H(f) = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$

$$S_Y(f) = S_N(f)\,|H_{eq}(f)|^2 = N_0\,\text{rect}\left(\frac{f}{4B}\right)\left[1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)\right]^2$$

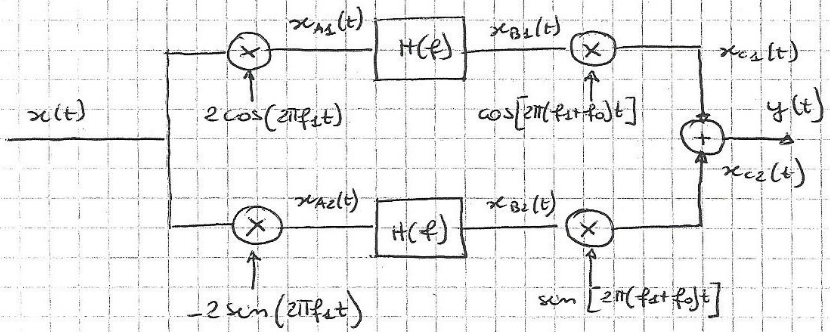
Graficamente:

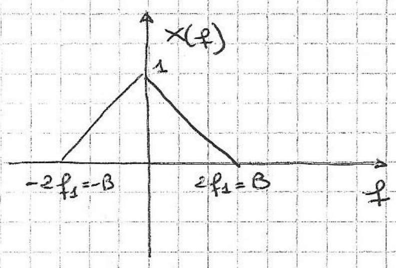


$$S_Y(f) = N_0\left[\text{rect}\left(f - \frac{3}{2}B\right) + \text{rect}\left(f + \frac{3}{2}B\right)\right]$$

COMPITO DEL 19/11/07

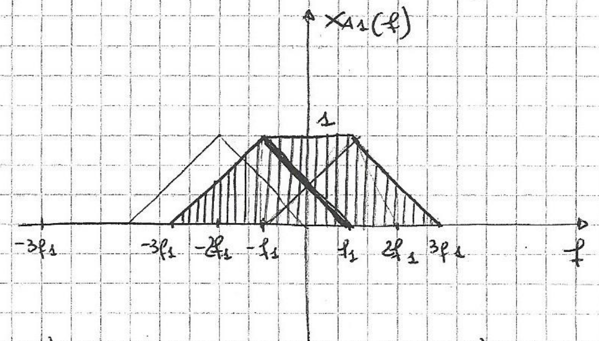
Es 1 - Si rappresenti graficamente lo spettro del segnale $y(t)$ in uscita al sistema mostrato in fig. 1 con $H(f) = \text{rect}(f/2f_1)$, nell'hp che la TCF del segnale in ingresso $x(t)$ sia $X(f) = \left(1 - \frac{|f|}{B}\right)\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$ con $B = 2f_1$. $f_0 \gg f_1$



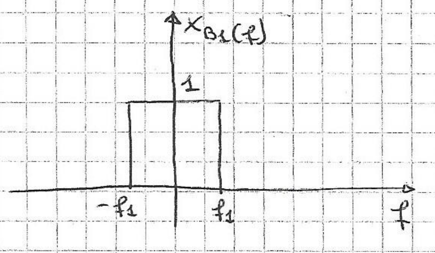


$$x_{A1}(t) = 2x(t)\cos(2\pi f_1 t)$$

$$X_{A1}(f) = X(f-f_1) + X(f+f_1)$$

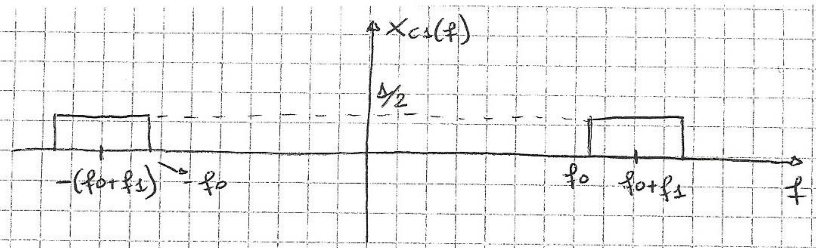


Disegniamo l'uscita di $H(f)$. $X_{B1}(f) = X_{A1}(f) \cdot H(f)$



$$x_{c1}(t) = x_{B1}(t)\cos[2\pi(f_1+f_0)t]$$

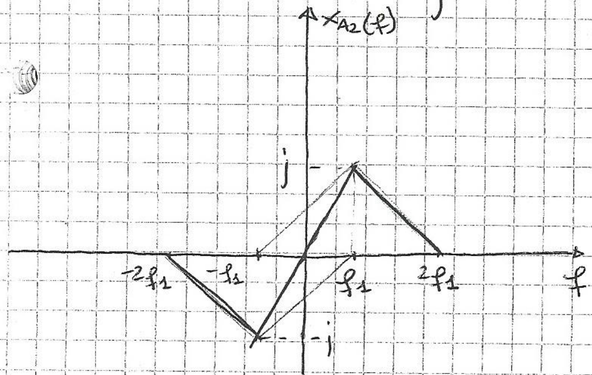
$$X_{c1}(f) = \frac{1}{2}X_{B1}(f-f_1-f_0) + \frac{1}{2}X_{B1}(f+f_1+f_0)$$



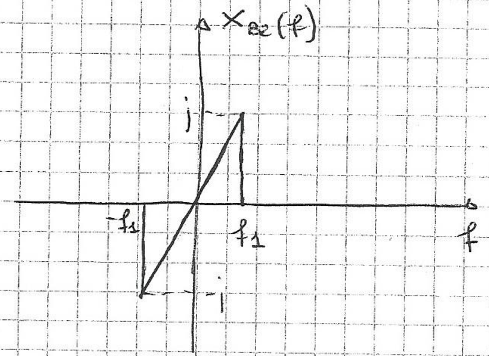
Analizziamo il ramo inferiore

$$x_{A2}(t) = -2x(t)\sin(2\pi f_1 t)$$

$$X_{A2}(f) = -\cancel{2}\,\frac{X(f-f_1)-X(f+f_1)}{j} = j\left[X(f-f_1)-X(f+f_1)\right]$$

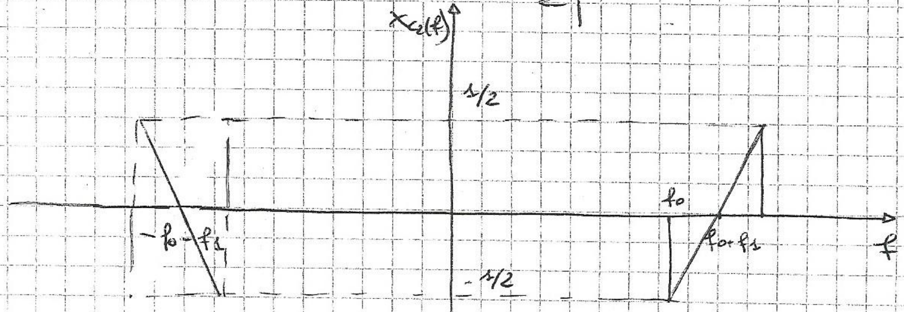


$$X_{B2}(f) = X_{A2}(f)\,H(f)$$

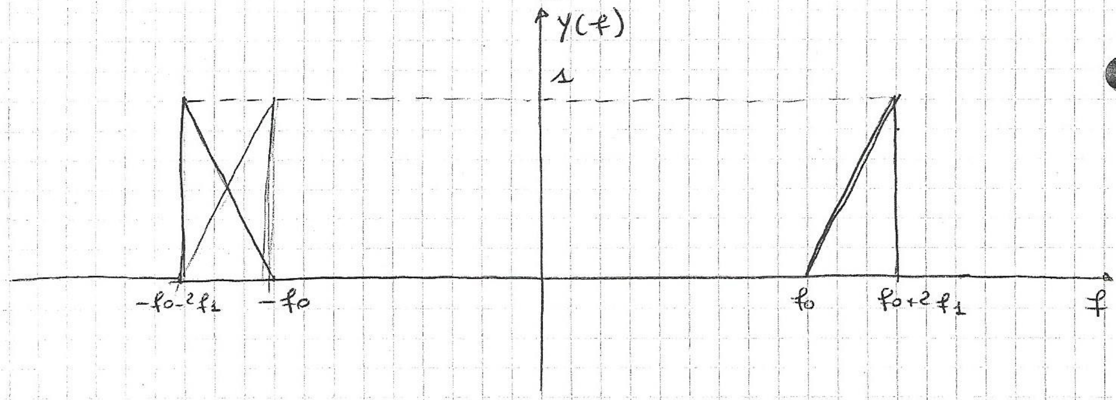


$$x_{C2}(t) = x_{B2}(t)\sin\left[2\pi(f_1+f_0)t\right]$$

$$X_{C2}(f) = \frac{X_{B2}(f-f_1-f_0)-X_{B2}(f+f_1+f_0)}{2j}$$



Sommiamo $X_{c1}(f)$ e $X_{c2}(f)$



Es. 2 – Calcolare l'energia del segnale

$$y(t) = 4\,\mathrm{sinc}\left(\frac{8t}{T} - \frac{1}{2}\right) + 4\,\mathrm{sinc}\left(\frac{8t}{T} + \frac{1}{2}\right)$$

Applichiamo il teorema di Parseval

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

$$Y(f) = 4 \cdot \frac{T}{8}\,\mathrm{rect}\left(\frac{fT}{8}\right) e^{-j\frac{\pi f T}{8}} + 4\frac{T}{8}\,\mathrm{rect}\left(\frac{fT}{8}\right) e^{j\frac{\pi f T}{8}}$$

$$= T\,\mathrm{rect}\left(\frac{fT}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi f T}{8}\right)$$

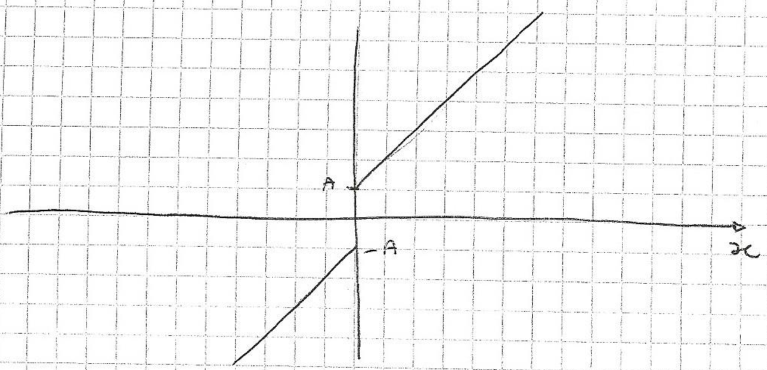
$$E_y = T^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{fT}{8}\right)\cos^2\left(\frac{\pi f T}{8}\right) df =$$

$$= T^2 \int_{-\frac{4}{T}}^{\frac{4}{T}} \cos^2\left(\frac{\pi f T}{8}\right) df = \frac{T^2}{2}\int_{-\frac{4}{T}}^{\frac{4}{T}} \left[1 + \cos\left(\frac{T\pi f}{4}\right)\right] df = 4T$$

Es. 3 – Calcolare la ddp della v.a. $z = A\,\mathrm{sgn}(x) + x$ dove $x \in \mathcal{N}(0,1)$ e $\mathrm{sgn}(\cdot)$ è la funzione segno, cioè

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \qquad A > 0$$

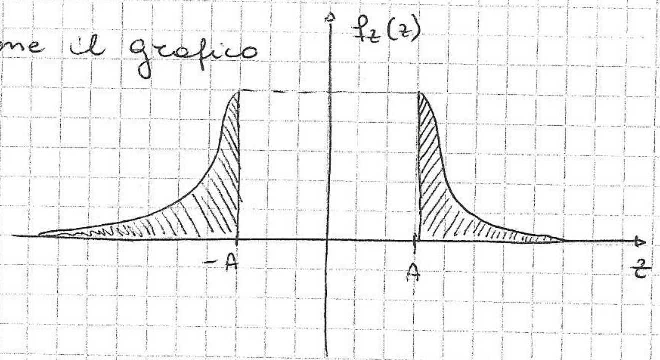
Disegniamo la trasformazione



z può assumere con continuità tutti i valori maggiori di A e minori di $-A$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z-A)^2}{2}\right] & z > A \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z+A)^2}{2}\right] & z < -A \end{cases}$$

Facciamone il grafico



Es. 4 — Si dimostri che, dato un sistema LTI a risposta impulsiva $h(t)$, al cui ingresso si ha un processo stazionario $x(t)$, la densità spettrale di potenza del processo $y(t)$ all'uscita è data da $S_Y(f) = S_X(f)\,|H(f)|^2$ dove $S_X(f)$ è la DSP del processo all'ingresso

Es. 5 — Siano X e Y la lunghezza in anni della vita di 2 componenti di un sistema elettronico. Se la densità di probabilità congiunta di queste variabili è

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

x e y sono indip.? Quanto vale $P(x<1 \mid y>2)$?

$$f(x) = \int_0^{+\infty} f(x,y)\,dy = e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = e^{-x} \qquad x>0$$

$$f(y) = e^{-y} \qquad y>0$$

$$f(x,y) = f(x)f(y) \Rightarrow x \text{ e } y \text{ sono indip.}$$

$$P(0<x<1 \mid y>2) = P(0<x<1) = \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1-e^{-1}$$

COMPITO DEL 16/01/08

1) Si calcoli la risposta in frequenza del sistema LTI caratterizzato dalla seguente relazione ingresso-uscita: $y(t) = -3\frac{dy(t)}{dt} + x(t-2T)$. Se $x(t) = \cos(\pi t/T)$, qual è espressione di $y(t)$?

Trasformiamo entrambi i membri

$$Y(f) = -3j2\pi f\,Y(f) + X(f)e^{-j4\pi f T}$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{e^{-j4\pi f T}}{1+j6\pi f} \qquad |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+36\pi^2 f^2}}$$

$$\angle H(f) = -4\pi f T - \operatorname{arctg} 6\pi f$$

$$x(t) \Rightarrow y(t) = \left|H\left(\tfrac{1}{2T}\right)\right| \cos\left(\pi t/T + \angle H\left(\tfrac{1}{2T}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+9\pi^2/T^2}} \cos\left(\pi t/T - 2\pi - \operatorname{arctg}(3\pi/T)\right)$$

Es. 2 - Sia dato il sistema definito dalla seguente caratteristica ingresso - uscita : $y(t) = 3x(t)\cos(2\pi f_1 t)$. (13)

Dire, giustificando ogni affermazione fatta, se il sistema è 1) lineare, 2) causale, 3) stabile (BIBO) 4) tempo-invariante.
È possibile calcolare la risposta impulsiva del sistema?

1) lineare

$y_1(t) = 3x_1(t)\cos(2\pi f_1 t)$

$y_2(t) = 3x_2(t)\cos(2\pi f_1 t)$

$y(t) = 3(a x_1(t) + b x_2(t))\cos(2\pi f_1 t) = a y_1(t) + b y_2(t)$

È lineare

2) causale $x(t)=0 \quad t<t_0 \Rightarrow y(t)=0 \quad t<t_0$ è causale

3) stabile se $|x(t)|< m \quad |y(t)|< M$ è verificato dunque è stabile

4) Tempo invariante

$z(t) = 3x(t-t_0)\cos(2\pi f_1 t) \neq y(t-t_0)$

Non è tempo invariante dunque non è possibile calcolare la risposta impulsiva del sistema.

Es. 4 Un lotto di 100 cuscinetti ne contiene 20 difettosi. 2 cuscinetti vengono selezionati casualmente senza reimmissione dal lotto.

1) Qual è la prob. che il I cuscinetto sia difettoso? 0.2

2) " " " " che il II " " " sapendo che lo è anche il primo? 19/99

3) La prob. che entrambi siano difettosi? 20/100 · 19/99 =

Es. 5 – Le 2 v.a. discrete X e Y hanno massa di prob. congi. come riportato in tabella.

	X = -1	0	1
Y = -1	1/4	1/8	0
0	0	1/4	0
1	0	1/8	1/4

Determinare $P(Y=1|X=1)$, $P(X=1|Y=1)$ e $R_{XY} = E\{XY\}$.

$$P(Y=1|X=1) = \frac{P(Y=1, X=1)}{P(X=1)} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

$$P(X=1|Y=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{1/4}{3/8} = \frac{2}{3}$$

$$E\{XY\} = \frac{1}{4}(-1 \cdot -1) + \frac{1}{4}(+1 \cdot 1) = \frac{1}{2}$$

Es. 6 – Il processo casuale $Y(t)$ è definito da $Y(t) = A X(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ dove A e f_0 sono costanti reali e θ è una v.a. unif. distr. in $[-\pi, \pi]$. $X(t)$ è un processo stazionario in senso lato a media nulla con funzione di autocorr. $R_X(\tau)$ e densità spettrale di potenza $S_X(f)$. Si dimostri che anche $Y(t)$ è stazionario in senso lato e si calcoli $S_Y(f)$.

$$E\{Y(t)\} = A\, E\{X(t)\}\, E\{\cos(2\pi f_0 t + \theta)\} = 0$$

$$R_Y(t, t+\tau) = A^2 E\{X(t) X(t+\tau)\}\, E\{\cos(2\pi f_0 t + \theta) \cos(2\pi f_0 (t+\tau) + \theta)\}$$
$$= \frac{A^2}{2} R_X(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) = R_Y(\tau)$$

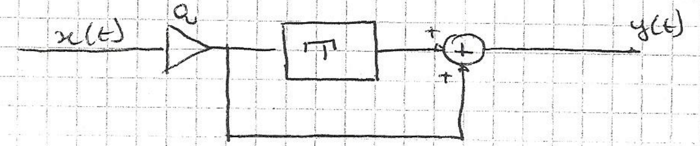
Stazionario in senso lato.

$$S_x(f) = \frac{A^2}{4}\left[S_x(f-f_0) + S_x(f+f_0)\right]$$

COMPITO DEL 4/2/08

Es. 1 - Teorema del campionamento per segnali passa-basso e interpolazione cardinale

Es. 2 - Calcolare la risposta in frequenza del sistema in figura e fare il grafico dello spettro di fase e d'ampiezza con $a > 0$.



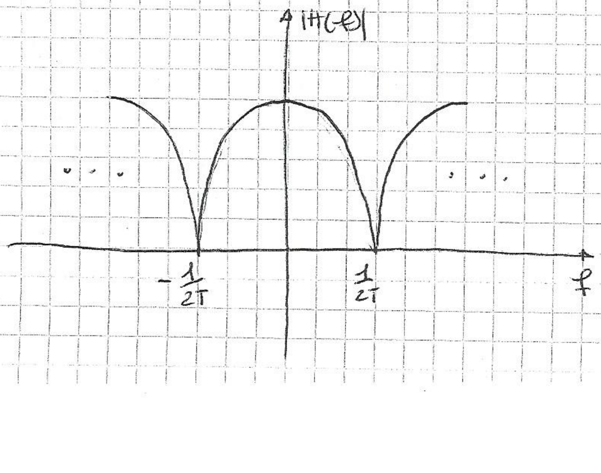
$$y(t) = a\,x(t) + a\,x(t-T)$$

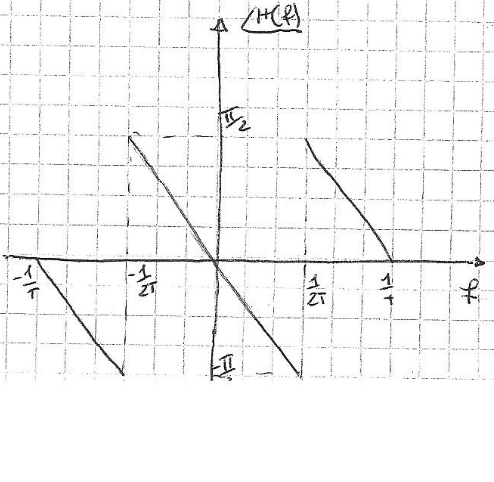
$$Y(f) = aX(f) + aX(f)e^{-j2\pi fT} \quad \text{da cui}$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = a\left[1 + e^{-j2\pi fT}\right] = a e^{-j\pi fT}\left[e^{j\pi fT} + e^{-j\pi fT}\right]$$

$$= 2a\, e^{-j\pi fT}\cos(\pi fT)$$

$$|H(f)| = 2a\,|\cos\pi fT| \qquad \angle H(f) = -\pi fT + \angle \cos\pi fT$$





Es. 3 - Trovare la trasformata di $y(t) = x(t) \otimes h(t)$ dove $x(t) = e^{-t} u(t)$ e $h(t) = u(t-3)$

Si sa che $Y(f) = X(f)H(f)$

$$X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} \qquad H(f) = U(f)\, e^{-j6\pi f} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \right) e^{-j6\pi f}$$

$$Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} \left[\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \right] e^{-j6\pi f}$$

$$= \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{1+j2\pi f} \cdot \frac{e^{-j6\pi f}}{j2\pi f}$$

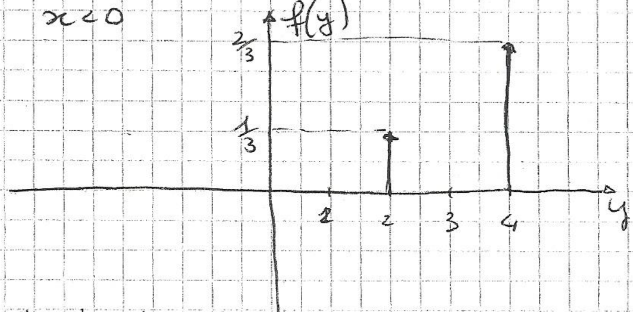
Es. 4 - Sia data la v.a. $x \in U(-2,1)$ e la trasformazione $y = \mathrm{sgn}(x) + 3$. Si trovi la ddp. di y.

È evidente che y può assumere solo 2 valori

$$y = \begin{cases} 4 & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$P(y=4) = Pr\{x > 0\} = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=2) = Pr\{x < 0\} = \frac{2}{3}$$



Es. 5 - Si supponga che un test di laboratorio per individuare una certa malattia dia i seguenti risultati.

Sia A = evento in cui la persona sottoposta al test ha la malattia

B = evento in cui il risultato del test è positivo.

Si sa che $P(B|A) = 0.99$ e $P(B|\bar{A}) = 0.005$ e lo 0.1% della popolazione ha effettivamente contratto la malattia. (17)

Qual è la prob. che una persona abbia la malattia dato che il risultato del test è positivo?

$$P(A) = 0.001 \qquad P(\bar{A}) = 0.999$$

Vogliamo calcolare $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})\,P(\bar{A})} = \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.99 \cdot 0.001 + 0.005 \cdot 0.999}$$

$$\simeq 0.165$$

Es. 6 – Dimostrare che per processi stazionari

$$\eta_Y = H(0)\,\eta_X \quad \text{e} \quad S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$

dove $X(t)$ è un processo stazionario all'ingresso di un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f)$ e $Y(t)$ è il processo stazionario all'uscita.

COMPITO 11/6/08

Es. 1. Sia dato il sistema definito dalla seguente caratteristica ingresso-uscita $y(t) = |x(t)|^2$. Dire, giustificando ogni affermazione fatta, se il sistema è 1) lineare, 2) causale, 3) stabile (BIBO), 4) tempo-invariante. E' possibile calcolare la risposta impulsiva del sistema?

1) linearità

$x(t) = a\, x_1(t) + b\, x_2(t)$ $\qquad y_1(t) = |x_1(t)|^2 \qquad y_2(t) = |x_2(t)|^2$

$y(t) = |a x_1(t) + b x_2(t)|^2 \neq a\, y_1(t) + b\, y_2(t)$

NON LINEARE

2) causale

Se $x(t) = x(t)\, u(t-t_0)$ $\qquad y(t) = |x(t)|^2 u(t-t_0) \neq 0$ per $t > t$

È CAUSALE

3) Stabile BIBO

Se $|x(t)| \leq M \Rightarrow |y(t)| \leq N$ è stabile

4) tempo-invariante

$z(t) = |x(t-t_0)|^2 = y(t-t_0)$ è tempo-invariante

Non è possibile calcolare $h(t)$ poiché il sistema non è lineare.

Es. 2 Si consideri un LTI con $H(f) = \dfrac{1/2}{\left(1 + j\frac{f}{f_p}\right)}$

1) Si calcoli $h(t)$

$$H(f) = \frac{1}{2} \frac{2\pi f_p}{2\pi f_p + j 2\pi f} \Longleftrightarrow h(t) = \pi f_p \exp\left[-2\pi f_p t\right] u(t)$$

2) Si determini il segnale $y(t)$ in uscita dal sistema quando in ingresso viene applicato il segnale $x(t) = 1 + 2A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$. $A > 0$ e θ sono costanti arbitrarie, e $f_0 = 2f_p$. (19)

$$y(t) = |H(0)| + 2A\,|H(2f_p)| \cos\left(4\pi f_p t + \theta + \angle H(2f_p)\right)$$

$$|H(0)| = \frac{1}{2} \qquad H(2f_p) = \frac{1}{2}\,\frac{2\pi f_p}{2\pi f_p + j4\pi f_p} \qquad |H(2f_p)| = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$\angle H(2f_p) = -\operatorname{arctg} 2$$

Es. 4. Due numeri vengono scelti a caso tra i numeri da 1 a 10 senza reimmissione. Si calcoli la prob. che il secondo numero scelto sia 5.

Sia A_i con $i = 1, 2, \dots 10$ l'evento in cui il primo numero scelto è i. Sia B l'evento in cui il secondo numero scelto è 5. Quindi $P(B) = \sum_{i=1}^{10} P(B|A_i)\,P(A_i)$

$P(A_i) = 1/10$, $P(B|A_i) = 0$ per $i = 5$ e $1/9$ $i \neq 5$

$$\Rightarrow P(B) = 9 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} = 1/10$$

Es. 5 Siano X e Y v.a. tali che

$$f_{XY}(x,y) = \frac{x^2+y^2}{4\pi} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2}\right] \quad -\infty < x < \infty, \; -\infty < y < \infty$$

Si dimostri che X e Y sono dipendenti ma incorrelate.

$$f_X(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2+y^2)\, e^{-(x^2+y^2)/2}\, dy = \frac{(x^2+1)}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$-\infty < x < +\infty$$

Allo stesso modo

$$f_Y(y) = \frac{(y^2+1)}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \qquad -\infty < y < +\infty$$

E' evidente che $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x)\, f_Y(y)$

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx = 0 \qquad \text{poichè } f_X(x) \text{ è pari}$$

$$E\{y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, dy = 0 \qquad \text{" } f_Y(y) \text{ " "}$$

$$E\{xy\} = \iint_{-\infty}^{\infty} x\, y\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = 0$$ per la simmetria di $f_{XY}(x,y)$

$$E\{xy\} = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{2} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} y \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy = 0$$

x e y sono incorrelate poichè $R_{XY} = \eta_X \eta_Y = 0$

Es. 6 $\quad X(t)$ staz. in senso lato $\quad R_X(\tau) = e^{-|\tau|/2}$

$E\{X^2(5)\} = ? \qquad Y = X(5) - X(3) \qquad E\{Y^2\} = ?$

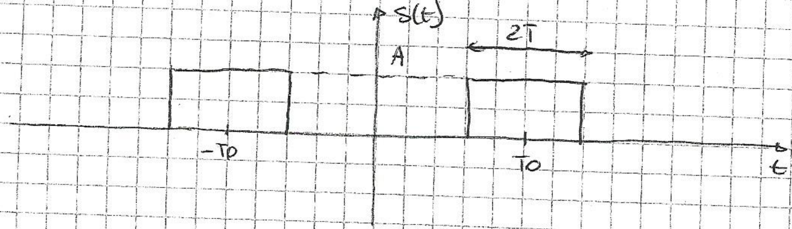
Poichè il processo è staz. $E\{X^2(5)\} = R_X(0) = 1$

$$E\{Y^2\} = E\{[X(5) - X(3)]^2\} = E\{X^2(5)\} + E\{X^2(3)\} - 2E\{X(5)X(3)\}$$

$$= 1 + 1 - 2e^{-2/2} = 2(1 - e^{-1})$$

COMPITO DEL 2/7/08

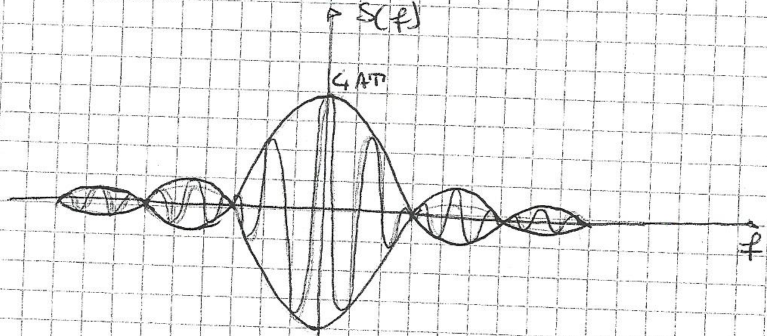
Es. 1 Calcolare la tras. continua di Fourier del segnale in fig. 1 e farne il grafico



$$s(t) = A\,rect\left(\frac{t-T_0}{2T}\right) + A\,rect\left(\frac{t+T_0}{2T}\right)$$

$$S(f) = 2AT\,sinc(2fT)\,e^{-j2\pi f T_0} + 2AT\,sinc(2fT)\,e^{j2\pi f T_0}$$

$$= 4AT\,sinc(2fT)\cos(2\pi f T_0)$$



Es. 3 Sia dato il segnale periodico

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin\left(\frac{2\pi f_0 t}{3}\right)$$

1) Calcolare quanto vale il periodo del segnale $x(t)$

$\cos(2\pi f_0 t)$ ha periodo $T_0 = \frac{1}{f_0}$

$\sin\left(\frac{2\pi f_0 t}{3}\right)$ ha periodo $T_1 = \frac{3}{f_0} = 3T_0$

Il periodo del segnale è dunque $3T_0$ e la freq. fondamentale è $f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{3T_0}$

Dunque

$$X_k = \begin{cases} \frac{B}{2j} & k = 1 \\ -\frac{B}{2j} & k = -1 \\ \frac{A}{2} & k = \pm 3 \end{cases}$$

Es. 4 Si consideri l'esperimento consistente nel lanciare una moneta ripetutamente e nel contare il numero di lanci fino all'apparire della prima testa.

1) Si scrivano gli elementi dello spazio campione Ω

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4 \ldots k, \ldots\}$$

2) Si calcoli la prob. che la prima testa appaia al k-esimo lancio.

A ciascun lancio la prob. che esca testa è uguale a quella che esca croce $= 1/2 = p = q$

Se la testa esce per la prima volta al k-esimo lancio, nei $k-1$ precedenti è uscito croce, dunque

$$P(A_k) = p^{k-1} q = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

3) Si verifichi che $P(\Omega) = 1$

$$P(\Omega) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2}^k = 1$$

Es. 5 - Sia $X = \sin\Theta$ dove Θ è una v.a. $\Theta \in U[0, 2\pi]$

$f_X(x) = ?$

$$f_X(x) = \sum_{\theta_i} \left. \frac{f_\Theta(\theta_i)}{|g'(\theta_i)|} \right|_{\theta_i = g^{-1}(x)}$$

Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ le soluzioni sono 2

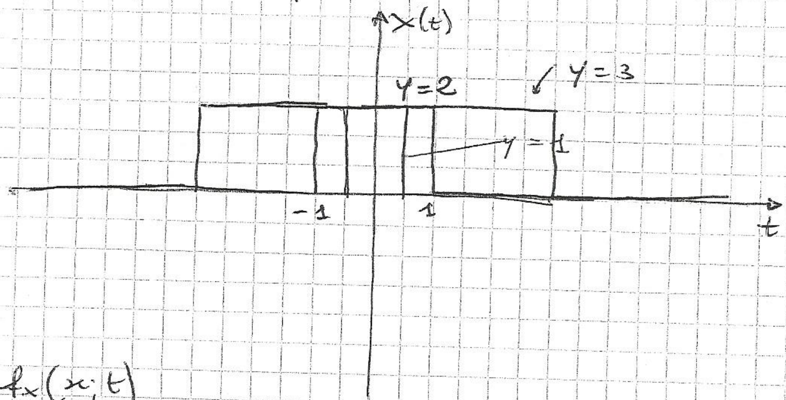
$$\theta_{1/2} = \arcsin x \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} = \pm\sqrt{1-y^2}$$

$$g'(\theta) = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & |x|<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Es. 6 Sia dato il processo parametrico $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{Y}\right)$ dove Y è una v.a. con ddp esp. neg.

$$f(y) = \frac{1}{\lambda}\exp\left[-\frac{y}{\lambda}\right]u(y)$$

1) Si disegnino 3 possibili realizzazioni di $x(t)$



2) $f_x(x;t)$

È chiaro che x può assumere solo 2 valori, 1 e 0

$$\Pr\{x(t)=1\} = \Pr\{Y \geq 2|t|\} = \int_{2|t|}^{+\infty} \frac{1}{\lambda}\exp\left[-\frac{y}{\lambda}\right]dy = \exp\left[-\frac{2|t|}{\lambda}\right]$$

$$\Pr\{x(t)=0\} = 1 - \Pr\{x(t)=1\}$$

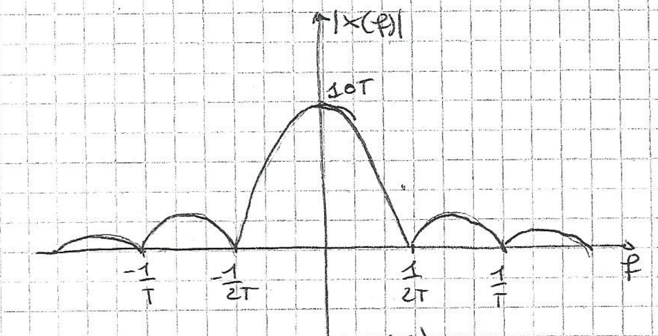
$$f_x(x;t) = \exp\left[-\frac{2|t|}{\lambda}\right]\delta(x-1) + \left[1-\exp\left[-\frac{2|t|}{\lambda}\right]\right]\delta(x)$$

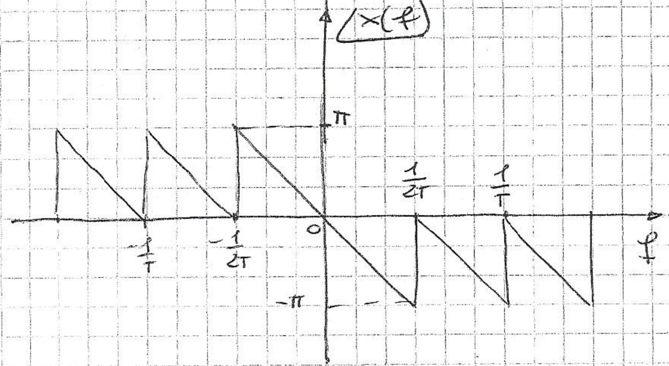
COMPITO DEL 22/7/08

Es. 1 - Dimostrare la proprietà del ritardo temporale dei segnali continui a energia finita e tracciare il diagramma della trasformata in ampiezza e fase del segnale $x(t) = 5\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-T}{2T}\right)$.

$$X(f) = 10T\,\mathrm{sinc}(2fT)\,e^{-j2\pi fT}$$

$$|X(f)| = 10T\,|\mathrm{sinc}(2fT)| \qquad \angle X(f) = -2\pi fT + \angle \mathrm{sinc}(2fT)$$





Es. 3 - Calcolare la risposta in ampiezza e fase del sistema LTI caratterizzato dalla seguente equaz. $y(t) = -\frac{3dy(t)}{dt} + 3x(t) + x(t-2T)$

$$Y(f) = -j6\pi f Y(f) + 3X(f) + X(f)e^{-j4\pi fT}$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{3+e^{-j4\pi fT}}{1+j6\pi f} = \frac{3+\cos(4\pi fT) - j\sin(4\pi fT)}{1+j6\pi f}$$

$$|H(f)| = \frac{\sqrt{[3+\cos(4\pi fT)]^2 + \sin^2(4\pi fT)}}{\sqrt{1+36\pi^2 f^2}} = \sqrt{\frac{10+6\cos(4\pi fT)}{1+36\pi^2 f^2}}$$

$$\angle H(f) = -\operatorname{arctg}\frac{\sin(4\pi f T)}{3+\cos(4\pi f T)} - \operatorname{arctg} 6\pi f$$ 25

Es 4 - Si supponga di disporre di 2 sistemi identici caratterizzati da un tempo di vita T_i $(i=1,2)$ distribuito in modo exp. con ddp data da

$$f_{T_i}(t) = \eta \exp[-\eta t]\, u(t)$$

Si determini la funz. di distrib. $F_{T_S}(t)$ della v.a. T_S che rappresenta il tempo di vita del sistema, nell'hp che i singoli dispositivi siano indip. e siano collegati

a) in serie, b) in parallelo.

$$F_{T_i}(t) = \left(1 - e^{-\eta t}\right) u(t)$$

a) $F_{T_S}(t) = P_r\{T_S \le t\} = P_r\{(T_1 \le t) + (T_2 \le t)\} =$

$$= P_r\{T_1 \le t\} + P_r\{T_2 \le t\} - P_r\{T_1 \le t,\ T_2 \le t\}$$

$$= F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t) - F_{T_1}(t)\, F_{T_2}(t) = \left(1 - e^{-2\eta t}\right) u(t)$$

b) $F_{T_S}(t) = P_r\{T_1 \le t,\ T_2 \le t\} = F_{T_1}(t)\, F_{T_2}(t) = \left(1 - e^{-\eta t}\right)^2 u(t)$

Es 5 - Siano X_1 e X_2 due v.a. indip. unif. distribuite nell'intervallo $[0,1]$. Si determini la media e la funzione di autocorrelazione del processo $Y(t) = 2X_1 \sin(3X_2 t)$. Si determini se il processo è stazionario, almeno in senso lato.

$$E\{Y(t)\} = 2E\{X_1\}\, E\{\sin(3X_2 t)\}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(3X_2 t)\, dX_2 = \frac{1-\cos(3t)}{3t}$$

$E\{Y(t)\}$ dipende dal tempo

$$R_Y(t_1,t_2) = E\{Y(t_1)Y(t_2)\} = E\{4\, x_1^2 \sin(3x_2t_1)\sin(3x_2t_2)\}$$ 26

$$= 4\, E\{x_1^2\}\, E\{\sin(3x_2t_1)\, \sin(3x_2t_2)\}$$

$$E\{\sin(3x_2t_1)\sin(3x_2t_2)\} = \int_0^1 \sin(3x_2t_1)\sin(3x_2t_2)\, dx_2$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\cos(3x_2t_2 - 3x_2t_1) - \cos(3x_2t_1 + 3x_2t_2)\right] dx_2$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{\sin 3x_2(t_2-t_1)}{3(t_2-t_1)}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\, \frac{\sin 3x_2(t_1+t_2)}{3(t_1+t_2)}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{\sin[3(t_2-t_1)]}{6(t_2-t_1)} - \frac{\sin[3(t_1+t_2)]}{6(t_1+t_2)}$$

$$E\{x_1^2\} = \frac{1}{3}$$

COMPITO DEL 24/09/08

Es. 1 - Si calcoli la trasformata continua di Fourier del segnale $y(t) = x(t) \otimes h(t)$ dove $x(t) = 3e^{-t}u(t)$ e $h(t) = u(t-4)$

$$X(f) = \frac{3}{1+j2\pi f} \qquad H(f) = \left[\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}\right] e^{-j8\pi f}$$

da cui
$$Y(f) = X(f)H(f) = \frac{3\,e^{-j8\pi f}}{1+j2\pi f}\left[\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\delta(f) + \frac{3\,e^{-j8\pi f}}{j2\pi f\,(1+j2\pi f)}$$

Es. 2 - Sia dato un sistema lineare tempo invariante la cui risposta impulsiva è $h(t) = \delta(t) - \frac{1}{\alpha}\exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right)u(t)$.
Si calcoli la risposta $y(t)$ del sistema al gradino unitario

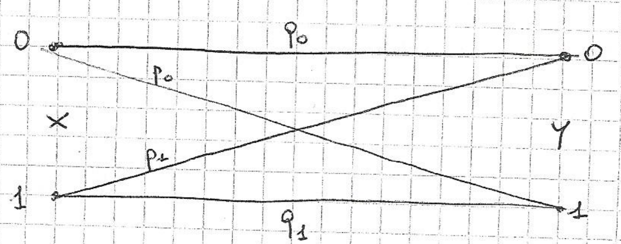
$$H(f) = 1 - \frac{1}{1+j2\pi\alpha f}$$

$$U(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

$$Y(f) = H(f)U(f) = \frac{1}{2}\delta(f)H(0) + \frac{1}{j2\pi f}\,\frac{j2\pi\alpha f}{1+j2\pi\alpha f} = \frac{\alpha}{1+j2\pi\alpha f}$$

Antitrasformando si ottiene
$$y(t) = e^{-t/\alpha}\,u(t)$$

Es. 4 - Canale di comunicazione binario



$p_0 = P(y_1|x_0)$

$p_1 = P(y_0|x_1)$

$q_0 = P(y_0|x_0)$

$q_1 = P(y_1|x_1)$

$P(x_0) = 0.5$ $p_0 = 0.1$; $p_1 = 0.2$

1) Si calcolino $P(y_0)$ e $P(y_1)$

Dal teorema della prob. totale si sa che

$P(y_0) = P(y_0|x_0)P(x_0) + P(y_0|x_1)P(x_1)$

$P(y_1) = P(y_1|x_0)P(x_0) + P(y_1|x_1)P(x_1)$

Dai dati del testo si ricava che

$P(x_1) = 1 - P(x_0) = 1 - 0.5 = 0.5$

$P(y_0|x_0) = q_0 = 1 - p_0 = 0.9$

$P(y_1|x_1) = q_1 = 1 - p_1 = 0.8$

Sostituendo otteniamo $P(y_0) = 0.55$ e $P(y_1) = 0.45$

2) Se all'uscita è stato osservato 0, qual è la prob. che anche lo stato di ingresso fosse 0?

Usando la formula di Bayes si ottiene

$$P(x_0|y_0) = \frac{P(x_0)P(y_0|x_0)}{P(y_0)} = \frac{0.5 \cdot 0.9}{0.55} = 0.818$$

Es. 5 - Si supponga che la durata in ore della vita di un macchinario sia una v.a. esp. neg. a parametro λ con ddp $f(x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left[-\frac{x}{\lambda}\right] u(x)$

1) Le misure mostrano che la prob. che la vita del macchinario superi 10^4 ore è pari a $1/e$ ($\simeq 0.368$). Si calcoli il valore del parametro λ

La funzione di distribuzione della variabile x è data da

$$F_x(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

quindi $P(X > 10^4) = 1 - P(X \leq 10^4) = 1 - F_x(10^4)$

$$= e^{-\lambda \cdot 10^4} = e^{-1} \Rightarrow \lambda = 10^{-4}$$

2) Usando il valore di λ del pt precedente, si calcoli il tempo x_0 tale che la prob. di vita minore di x_0 sia 0.05

Si vuole che $F_x(x_0) = P(X \leq x_0) = 0.05$

quindi $1 - e^{-\lambda x_0} = 1 - e^{-10^{-4} x_0} = 0.05 \Rightarrow x_0 \simeq 513$ ore

Es. 6 - Un processo aleatorio stazionario in senso lato $x(t)$, con funz. di autocorrelazione $R_x(\tau) = e^{-a|\tau|}$ dove a è una cost. reale > 0, è applicato all'ingresso di un LTI con $h(t) = e^{-bt} u(t)$.
Si determini $R_y(\tau)$. $a \neq b$

$$H(f) = \frac{1}{b + j2\pi f}$$

$$S_x(f) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

da cui $$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) = \left(\frac{1}{b^2 + 4\pi^2 f^2}\right)\left(\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}\right)$$

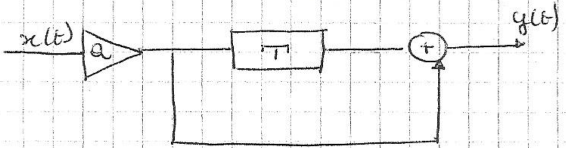
$$= \frac{a}{(a^2 - b^2) b} \frac{2b}{b^2 + 4\pi f^2} - \frac{b}{(a^2 - b^2) b} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Antitrasformo

$$R_y(\tau) = \frac{1}{(a^2 - b^2) b} \left(a e^{-b|\tau|} - b e^{-a|\tau|}\right)$$

COMPITO DEL 15/01/09

Es. 1 – Calcolare la risposta in frequenza del sistema in fig. 1 e fare il grafico dello spettro d'ampiezza e di fase con $a > 0$.



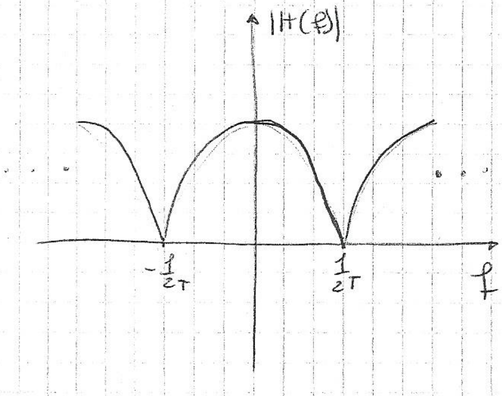
$$y(t) = a\,x(t) + a\,x(t-T)$$

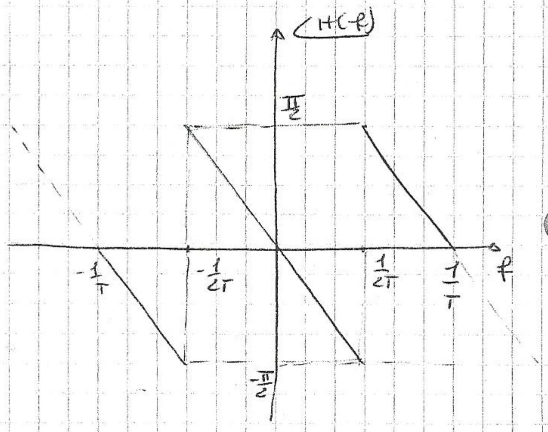
$$Y(f) = a\,X(f) + a\,X(f)\,e^{-j2\pi fT}$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = a\left[1 + e^{-j2\pi fT}\right] = a\,e^{-j\pi fT}\left[e^{j\pi fT} + e^{-j\pi fT}\right]$$

$$= 2a\,e^{-j\pi fT}\cos(\pi fT)$$

$$|H(f)| = 2a\,|\cos(\pi fT)| \qquad \angle H(f) = -\pi fT + \angle\cos(\pi fT)$$





Es. 2 – Si calcoli la trasformata continua di Fourier del segnale $y(t) = x(t) \otimes h(t)$ dove $x(t) = e^{-5t}u(t)$ e $h(t) = u(t-T)$

$$X(f) = \frac{1}{5 + j2\pi f} \qquad H(f) = U(f)\,e^{-j2\pi fT}$$

$$U(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

$$Y(f) = \frac{1}{5+j2\pi f} e^{-j2\pi f T} \left[\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \right]$$

$$= \frac{\delta(f)}{10} + \frac{e^{-j2\pi f T}}{j10\pi f - 4\pi^2 f^2}$$

Es. 4 - In un computer la prob di un difetto alla memoria è pari a 0.02, mentre la prob. di un difetto all'hard disk è pari a 0.01. Se la prob. che difettino contemporaneamente è pari a 0.0014.

1) I difetti all'hard disk e alla memoria sono indip.?

No, se lo fossero $P(AB) = P(A)P(B)$

$P(AB) = 0.0014$ $\quad P(A) = 0.02$ $\quad P(B) = 0.01$ $\quad P(A)P(B) = 0.002$

quindi $P(AB) \neq P(A)P(B)$

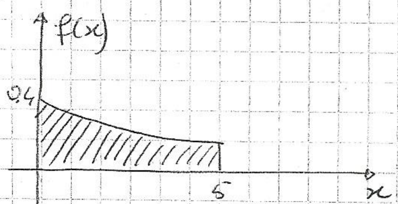
2) Quanto vale la prob. di avere un difetto alla memoria sapendo che l'hard disk è difettoso?

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.0014}{0.01} = 0.14$$

Es. 5

$$f(x) = \begin{cases} 0.4 + cx & 0 \le x \le 5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

1) Calcolare il valore di c



$$1 = \int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 [0.4 + cx]\, dx$$

$$c = -\frac{2}{25} = -0.08$$

2) Determ. $Pr\{x>3\}$ e $Pr\{1<x\leq 4\}$

$$Pr\{x>3\} = \int_3^5 f(x)\,dx = 0.4x - \frac{x^2}{25}\Big|_3^5 = 0.16$$

$$Pr\{1\leq x\leq 4\} = \int_1^4 f(x)\,dx = 0.4x - 0.04x^2\Big|_1^4 = 0.6$$

3) Trovare $F(x)$

$$F(x) = \int_0^x f(\alpha)\,d\alpha = 0.4x - 0.04x^2$$

Es. 6 – $x(t) = 1 + 9\sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$ $\quad \theta_0 \in U(-\pi,\pi)$

$h(t) = e^{-t}u(t-2)$ Si calcolino valor medio e DSP del processo all'ingresso e all'uscita del sistema.

$$E\{x(t)\} = E\{1 + 9\sin(2\pi f_0 t + \theta_0)\} = 1$$

[illegible]

$$h(t) = e^{-(t-2)}e^{-2}u(t-2) \qquad H(f) = \frac{e^{-2}e^{-j4\pi f}}{1+j2\pi f}$$

$$H(0) = e^{-2} \qquad E\{y(t)\} = H(0)\,E\{x(t)\} = e^{-2}$$

$$R_x(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = E\{[1+9\sin(2\pi f_0 t+\theta_0)][1+9\sin(2\pi f_0(t+\tau)+\theta_0)]\}$$

$$= 1 + \frac{81}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

$$S_x(f) = \delta(f) + \frac{81}{4}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$$

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = S_x(f)\frac{e^{-4}}{1+4\pi^2 f^2}$$

COMPITO DEL 3/02/09

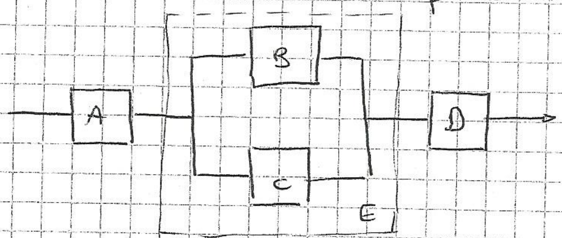
Es. 2 – Si calcoli la risposta impulsiva $h(t)$ di un sistema lineare tempo-invariante caratterizzato dalla seguente equaz. diff. $\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 3x(t-T)$ dove $y(t)$ è il segnale all'uscita corrisp. all'ingresso $x(t)$ e T è un ritardo.

$$j2\pi f Y(f) + 5Y(f) = 3X(f)e^{-j2\pi fT}$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{3e^{-j2\pi fT}}{5+j2\pi f}$$

$$h(t) = 3e^{-5(t-T)}u(t-T)$$

Es. 4 – Sia dato il sistema di fig. 1. La prob. che il sottosistema A funzioni è $P_A = 0.95$. Si ha poi $P_B = 0.7$, $P_C = 0.8$, $P_D = 0.9$. Quanto vale la prob. che l'intero sistema funzioni?



La prob. che il sistema E funzioni è pari a:

$P(E) = P_E = P(B+C) = P_B + P_C - P_B P_C =$

Il sistema A+E+D funziona se funzionano tutti e 3, dunque $P_T = P_A \cdot P_E \cdot P_D =$

Es. 5 – La ddp congiunta di 2 var. al. X e Y è data da:

$$f(x,y) = \begin{cases} 10xy^2 & 0<x<y<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

1) Calcolare la ddp marginale di X e Y

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{x}^{1} 10xy^2\,dy = \frac{10}{3} x y^3 \Big|_{y=x}^{y=1}$$

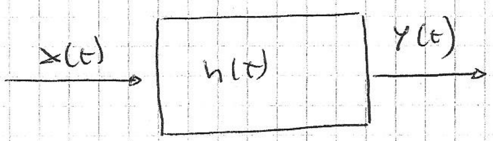
$$= \frac{10}{3} x (1 - x^3) \qquad 0 < x < 1$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{0}^{y} 10xy^2\,dx = 5x^2y^2 \Big|_{x=0}^{x=y} = 5y^4 \quad 0 < y < 1$$

2) Calcolare $f(y|x)$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{10xy^2}{\frac{10}{3}x(1-x^3)} = \frac{3y^2}{(1-x^3)} \qquad 0 < x < y < 1$$

6) $h(t) = e^{-2t} u(t)$



$$R_x(\tau) = 2 + 3\,\delta(\tau) = C_x(\tau) + \eta_x^2 \qquad \eta_x^2 = 2$$

Valor medio del processo all'uscita

$$E\{Y(t)\} = H(0)\, E\{x(t)\}$$

$$H(f) = \frac{1}{2 + j2\pi f} \qquad H(0) = \frac{1}{2}$$

$$\eta_x = E\{x(t)\} = \sqrt{2} \qquad E\{Y(t)\} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Per calcolare $R_Y(\tau)$ calcoliamo $S_Y(f)$ e poi antitrasf.

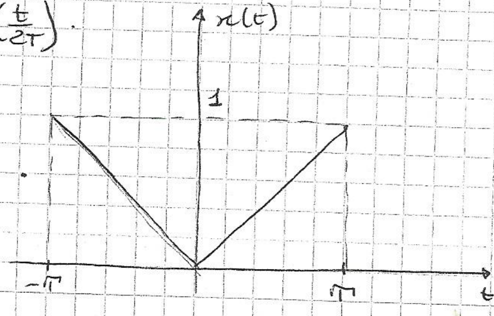
$$S_Y(f) = S_x(f)\,|H(f)|^2 = \left[2\,\delta(f) + 3\right] \frac{1}{4 + 4\pi^2 f^2}$$

$$= \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{3}{4 + 4\pi^2 f^2}$$

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e^{-2|\tau|}$$

COMPITO DEL 24/02/09

1) Si calcoli la trasformata continua di Fourier del segnale $x(t) = \frac{|t|}{T}\, rect\left(\frac{t}{2T}\right)$.



Il segnale $x(t)$ può essere scritto come:

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{2T}\right) - \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) rect\left(\frac{t}{2T}\right)$$

Trasformiamo

$$X(f) = 2T\, sinc(2fT) - T\, sinc^2(fT)$$

2) Sfruttando le proprietà della funzione delta di Dirac si calcoli il valore dell'integrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(at)\,dt$ con $x(t)$ funzione continua e a numero reale.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(at)\,dt$$

$a > 0$ $\quad z = at$ $\quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{z}{|a|}\right)\delta(z)\,\frac{dz}{|a|} = \frac{x(0)}{|a|}$

$a < 0$ $\quad I = -\int_{+\infty}^{-\infty} x\left(-\frac{z}{|a|}\right)\delta(z)\,\frac{dz}{|a|} = \frac{x(0)}{|a|}$

Es. 4 - Al centro del fondo di un contenitore a base quadrata di lato $l = 1m$ è praticato un foro circolare di diametro $d = 20cm$. Sul fondo del contenitore vengono depositate a caso e in modo indip. 10 palline con un diametro DIAMETRO è molto inferiore a quello del foro. Determinare la prob. che nella scatola rimangono esattamente 6 palline (la scatola non viene scossa).

La prob. q che la pallina esca dal foro è pari al rapporto tra area del foro e l'area del fondo della scatola. Si ha quindi:

$$q = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\ell^2} = \frac{\pi}{100}$$

La prob. che la pallina resti nella scatola è $p = 1-q$

La prob. che restino 6 palline su 10 è:

$$Pr\{A\} = \binom{10}{6} p^6 q^4$$

Es. 5 – In una stanza ci sono 2 lampadari collegati in parallelo. Le 2 lampade sono indip. l'una dall'altra. Il tempo di vita di ciascuna lampada può essere modellato come una v.a. con densità di prob. exp monolatera e valor medio pari a $\eta = 6000\,h$. Si calcoli il tempo medio di illuminazione della stanza.

$$f_{T_1}(t_1) = \frac{1}{\eta_1} \exp\left[-t_1/\eta_1\right] u(t_1)$$

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta$$

$$f_{T_2}(t_2) = \frac{1}{\eta_2} \exp\left[-t_2/\eta_2\right] u(t_2)$$

$$T = \max(T_1, T_2)$$

$$F_T(t) = Pr\{T \le t\} = Pr\{T_1 \le t,\ T_2 \le t\} = \iint_0^t f_{T_1T_2}(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2$$

$$f_{T_1T_2}(t_1, t_2) = \frac{1}{\eta^2} \exp\left[-\frac{t_1}{\eta}\right] \exp\left[-\frac{t_2}{\eta}\right] u(t_1)\, u(t_2)$$

$$F_T(t) = \iint_0^t \frac{1}{\eta^2} e^{-\frac{t_1}{\eta}} e^{-\frac{t_2}{\eta}} dt_1 dt_2$$

$$= \int_0^t \frac{1}{\eta} e^{-t_1/\eta} dt_1 \int_0^t \frac{1}{\eta} e^{-t_2/\eta} dt_2 =$$

$$= \left(1 - e^{-\frac{t}{\eta}}\right)^2 u(t)$$

Derivando la $F_T(t)$ si ricava la $f_T(t)$

$$f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = \frac{2}{\eta} e^{-t/\eta}\left(1 - e^{-t/\eta}\right) u(t)$$

$$= \frac{2}{\eta}\left[e^{-t/\eta} - e^{-2t/\eta}\right] u(t)$$

$$E\{T\} = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{\eta}\left[e^{-t/\eta} - e^{-2t/\eta}\right] dt =$$

$$= 2\eta - \frac{\eta}{2} = \frac{3}{2}\eta$$

Es. 6 - Il processo $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Theta_0)$, dove $\Theta_0 \in U(-\pi, \pi)$ è staz. in senso lato. Si verifichi che esso è ergodico in senso lato.

$\eta_x = 0 \qquad R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$

Calcoliamo le medie temporali

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} X(t)\, dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)\, dt = 0$$

$$\langle x(t)\, x(t+\tau) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)\cos(2\pi f_0 (t+\tau) + \theta_0)\, dt$$

$$= \frac{A^2}{2} \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f_0 \tau)\, dt + \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(2\pi f_0 (2t+\tau) + 2\theta\right) dt \right.$$

$$= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) = R_x(\tau)$$

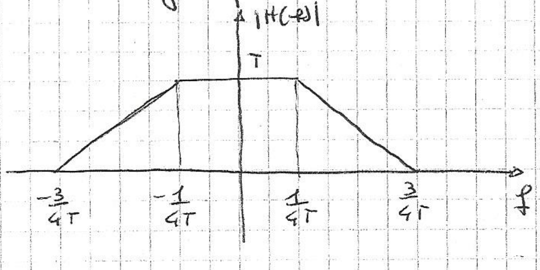
Processo ergodico in senso lato.

COMPITO DEL 28/04/09

Es.2 Consideriamo il sistema lineare tempo-inv. di risposta impulsiva $h(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \text{sinc}\left(\frac{t}{2T}\right)$ al quale vengono applicati i seguenti $x_1(t) = \text{sinc}\left(\frac{t-T/2}{3T}\right) + \text{sinc}\left(\frac{t+T/2}{3T}\right)$ e $x_2(t) = \text{sinc}^2(t/T)$. Dopo aver trovato $H(f)$, $X_1(f)$ e $X_2(f)$ si dice che tipo di distorsioni lineari sono introdotte dall'LTI su $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

$$H(f) = T\,\text{rect}(fT) \otimes 2T\,\text{rect}(2fT)$$

Facciamone il grafico



$$X_1(f) = 3T\,\text{rect}(3Tf)\, e^{-j\pi f T} + 3T\,\text{rect}(3Tf)\, e^{j\pi f T}$$

$$= 6T\,\text{rect}(3Tf) \cos(\pi f T)$$

La banda di $X_1(f)$ è pari a $B = 1/6T < 1/4T$.

$h(t)$ non introduce distorsioni su $x_1(t)$

$$X_2(f) = T\left(1 - |f|T\right) \operatorname{rect}\left(\frac{fT}{2}\right).$$

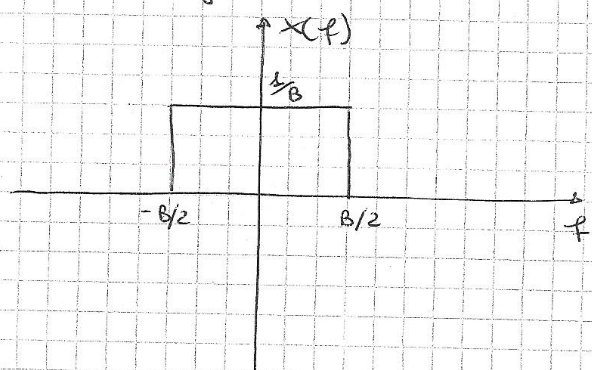
la banda di $X_2(f)$ è $B = 1/T > 1/(4T)$.

$x_2(t)$ viene distorto in ampiezza.

3) La trasformata di Hilbert di un segnale $x(t)$ è il segnale $x_H(t)$ tale che $X_H(f) = -j\,X(f)\,\mathrm{sgn}(f)$. Si ricavi la trasformata di Hilbert del segnale $x(t) = \mathrm{sinc}(Bt)$

$$X(f) = \frac{1}{B} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

Facciamone il grafico



$$X_H(f) = -j\,X(f)\,\mathrm{sgn}(f) = -\frac{j}{B} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{B}\right) \mathrm{sgn}(f)$$

$$= -\frac{j}{B}\left[\operatorname{rect}\left(\frac{f-B/4}{B/2}\right) - \operatorname{rect}\left(\frac{f+B/4}{B/2}\right)\right]$$

$$x_H(t) = -\frac{j}{\cancel{B}}\left[\frac{\cancel{B}}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{B}{2}t\right) e^{j2\pi t\frac{B}{4}} - \frac{\cancel{B}}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{B}{2}t\right) e^{-j2\pi t\frac{B}{4}}\right]$$

$$= \mathrm{sinc}\left(\frac{B}{2}t\right) \sin\left(\frac{\pi t B}{2}\right)$$

4) La popolazione di una data regione è affetta dal virus Ebola con una prob. dell'1%. Il miglior test per il virus ha affidabilità pari al 80%. Una persona viene scelta casualmente dalla popolazione e risulta positiva al

test. Qual è la prob. che la persona scelta sia effettivamente affetta da Ebola?

$A = \{\text{soggetto malato}\}$; $P(A) = 1\% = 0.01$

$B = \{\text{test positivo}\}$ $\quad P(B|A) = 0.8 = P(\bar{B}|\bar{A})$

$P(A|B) = ?$ $\quad P(A|B) = \dfrac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$

$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$

$P(B|\bar{A}) = 1 - P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.2$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.99$

$P(B) = 0.8 \cdot 0.01 + 0.2 \cdot 0.99 = 0.008 + 0.198 = 0.206$

$P(A|B) = \dfrac{0.008}{0.206} = 0.038835 \simeq 3,9\,\%$

5) E' data la v.a. Gaussiana standard X. Determinare la ddp $f_Y(y)$ e il valor medio η_Y della v.a. log-normale $Y = e^{-X}$.

$$f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x)}{|g'(x)|}\right|_{x = g^{-1}(y)}$$

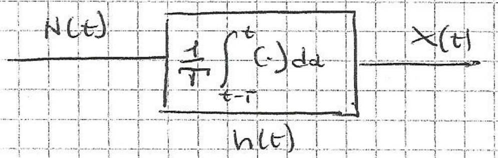
Da $y = e^{-x}$ si ricava $-x = \ln y \Rightarrow x = -\ln y$

$dy = e^{-x}dx \quad g(x) = e^{-x} = y$

$$f_Y(y) = \left.\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]}{e^{-x}}\right|_{x = -\ln y} =$$

$$= \frac{1}{y\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{\ln^2 y}{2}\right]$$

Es. 6 - Il processo di rumore bianco $N(t)$ con DSP pari a $N_0/2$ è filtrato dall'integratore a finestra mobile, come indicato in figura. Quanto vale la densità spettrale di potenza del processo all'uscita?



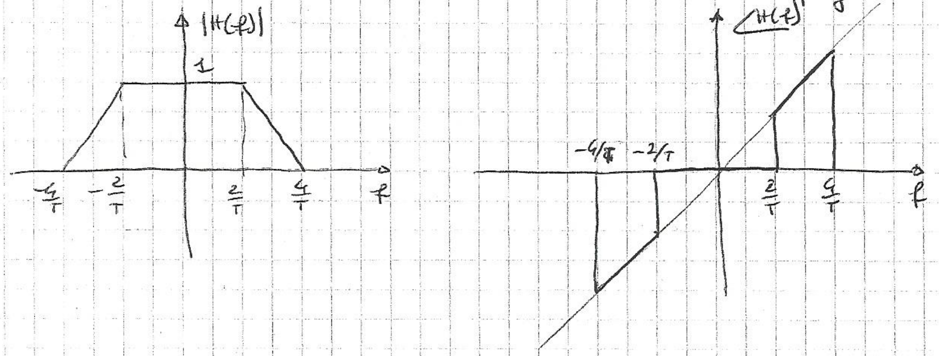
Si ricava che $h(t) = \frac{1}{T}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$ da cui

$$H(f) = \mathrm{sinc}(fT)\, e^{-j\pi f T}$$

$$S_X(f) = S_N(f)\,|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

Compito 7/7/09

Es. 1 – Per ciascuno dei seguenti segnali $x_1(t) = 2+\cos\left(\frac{9\pi t}{T}\right)$ e $x_2(t) = 5\cos(\pi t/T) - \sin(3\pi t/T + \pi/6)$ dire (giustificando il risultato) se ed eventualmente in che modo vengono introdotte le distorsioni dal sistema LTI di fig. 1



Trasformiamo

$$X_1(f) = 2\delta(f) + \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{9}{2T}\right) + \delta\left(f + \frac{9}{2T}\right)\right]$$

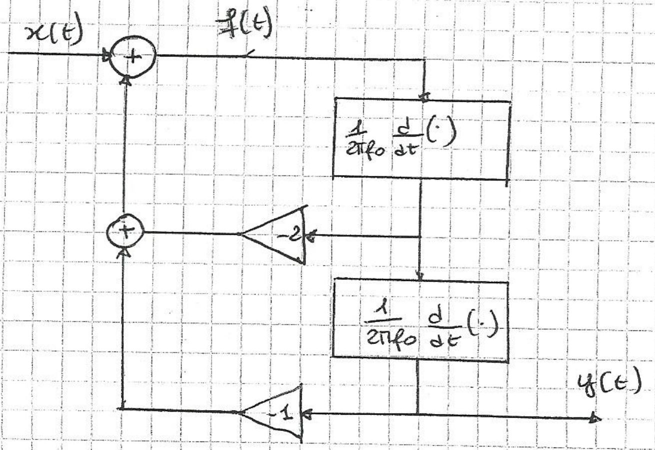
$\frac{9}{2T} > \frac{4}{T}$ Il segnale subisce delle distorsioni in ampiezza. Non subisce delle distorsioni in fase.

$$X_2(f) = \frac{5}{2}\left[\delta\left(f - \frac{1}{2T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2T}\right)\right] - \frac{1}{2j}\left[\delta\left(f - \frac{3}{2T}\right) - \delta\left(f + \frac{3}{2T}\right)\right]e^{j\frac{\pi}{6}}$$

Il segnale non subisce alcun tipo di distorsione.

Es. – 2

Trovare la risposta in frequenza del sistema lineare tempo-invariante in figura 2.



Dal grafico si vede che

$$y(t) = \frac{1}{(2\pi f_0)^2}\frac{d^2}{dt^2}f(t)$$

$$f(t) = x(t) - \frac{2}{2\pi f_0}\frac{d f(t)}{dt} - y(t)$$

da cui: $$Y(f) = \frac{1}{(2\pi f_0)^2}(j2\pi f)^2 F(f)$$

$$F(f) = X(f) - j2\frac{f}{f_0}F(f) - Y(f)$$

Sostituendo

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1-\left(\frac{f_0}{f}\right)^2\left[1+2j\frac{f}{f_0}\right]} = \frac{1}{1-\left(\frac{f_0}{f}\right)^2 - 2j\frac{f_0}{f}}$$

Es 4 - Un esperimento consiste nell'osservare la somma dei dadi quando vengono lanciati 2 dadi non truccati. Si trovi:

1) la prob. che la somma sia 6
2) " " " " " " > 9

Le combinazioni che mi danno la somma $= 6$ sono

1) $A = \{\omega_{15}, \omega_{24}, \omega_{33}, \omega_{42}, \omega_{51}\}$ $\qquad P(A) = \frac{5}{36}$

44

2) Le comb. che mi danno somme > 9 sono

$B = \{\omega_{46}, \omega_{55}, \omega_{56}, \omega_{65}, \omega_{66}, \omega_{64}\}$ $\qquad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

ES. 5 – Nella fabbricazione di chip di memorie per computer la ditta A ne produce uno difettoso per ogni 9 buoni. Sia X il tempo di durata fino al guasto (in mesi) dei chip. Si sa che X è una v.a. exp con parametro $\lambda_0 = 1/2$ per un chip difettoso e $\lambda_1 = \frac{1}{10}$ per un chip buono. Si calcoli la prob. che un chip acquistato a caso si guasti

1) prima di 6 mesi

2) dopo 1 anno

$$f(x|H_0) = \lambda_0 \exp[-x\lambda_0]\, u(x)$$

$$f(x|H_1) = \lambda_1 \exp[-\lambda_1 x]\, u(x)$$

$$Pr\{x \le 6\} = P(H_0)\, Pr\{x \le 6 | H_0\} + P(H_1)\, Pr\{x \le 6 | H_1\}$$

$$= \frac{1}{10}\int_0^6 \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{x}{2}\right]dx + \frac{9}{10}\int_0^6 \frac{1}{10}\exp\left[-\frac{x}{10}\right]dx$$

$$= 1 - 0.1e^{-3} - 0.9e^{-3/5}$$

$$Pr\{x > 2\} = 1 - Pr\{x \le 2\} = 0.1e^{-6} + 0.9e^{-1,2}$$

COMPITO 28/07/09

Es. 1 - Si calcolino i coeff. della serie di Fourier del segnale $x(t) = A\,|\cos(2\pi f_0 t)|$ con $A>0$.

Il segnale ha periodo $T_0/2$ quindi una freq. fondamentale $2f_0$.
Poiché il segnale è pari si può scrivere

$$X_k = \frac{4A}{T_0}\int_0^{T_0/4} \cos(2\pi f_0 t)\cos(4\pi k f_0 t)\,dt$$

$$= \frac{2A}{T_0}\int_0^{T_0/4} \left\{\cos\left[2\pi(1+2k)f_0 t\right] + \cos\left[2\pi(1-2k)f_0 t\right]\right\} dt$$

$$X_k = \frac{A}{\pi}\left\{\frac{1}{1+2k}\sin\left[\frac{\pi}{2}(1+2k)\right] + \frac{1}{1-2k}\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-2k)\right]\right\}$$

$$\sin\left[\frac{\pi}{2}(1+2k)\right] = \sin\left[\frac{\pi}{2}(1-2k)\right] = (-1)^k$$

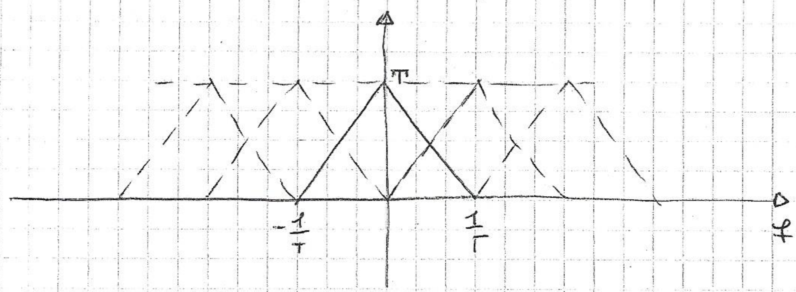
da cui, semplificando

$$X_k = (-1)^k\,\frac{2A}{\pi}\,\frac{1}{1-4k^2}$$

Es. 3 - Il segnale $x(t) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right)$ viene campionato a freq. $f_c = 1/T$ e poi interpolato per mantenimento. Il segnale $z(t)$ così ottenuto viene filtrato da un sistema LTI con risposta in freq. pari a $H(f) = \frac{\pi f T}{\sin(\pi f T)}\,\mathrm{rect}(fT)$. Determinare l'espressione del segnale d'uscita.

Calcoliamo prima $X(f)$.

$X(f) = T\left(1 - |f|T\right) \operatorname{rect}\left(\frac{fT}{2}\right)$



Lo spettro del segnale campionato è dunque, come da figura,

$\overline{X}(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right) = 1$ a causa dell'aliasing

Dopo l'interpolatore $Z(f) = P(f)\overline{X}(f)$ dove

$P(f) = T\operatorname{sinc}(fT)e^{-j\pi fT}$

$Z(f) = T\operatorname{sinc}(fT)e^{-j\pi fT} = P(f)$

Dopo il filtro $H(f)$ abbiamo $Y(f) = Z(f)H(f)$

$Y(f) = T\cancel{\operatorname{sinc}(fT)}e^{-j\pi fT} \frac{1}{\cancel{\operatorname{sinc}(fT)}} \operatorname{rect}(fT) = T\operatorname{rect}(fT)e^{-j\pi fT}$

Antitrasformando $y(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$

Es. 4 - Il tempo di vita di una lampadina può essere modellato come una v.a. con ddp $f_X(x) = \frac{1}{\eta}\exp\left[-\frac{x}{\eta}\right]u(x)$ e $\eta = 2$. Supponiamo ora che il produttore mette in commercio solo le lampadine che sono sopravvissute ad un rodaggio di 1 mese; come è fatta la ddp del tempo di vita delle lampadine commercializzate?

Ciò che vogliamo determinare è la ddp condizionata

$f_{X|B}(x|B)$ dove $B \equiv \{X > 1\}$. A tal fine calcoliamo prima $F_{X|B}$ e poi deriviamo.

Intanto $Pr\{B\} = Pr\{X > 1\} = 1 - F_X(1)$

$$Pr\{X \le x, B\} = Pr\{X \le x, X > 1\} = \begin{cases} F_X(x) - F_X(1) & x \ge 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

quindi $Pr\{X \le x, B\} = \left[F_X(x) - F_X(1)\right] u(x-1)$

$$F_{X|B}(x|B) = \frac{F_X(x) - F_X(1)}{1 - F_X(1)}\, u(x-1)$$

deriviamo rispetto ad x e otteniamo

$$f_{X|B}(x|B) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(1)}\, u(x-1)$$

ES.5 - In un esperimento aleatorio sull'asse x vengono fissati 2 pt P_1 e P_2, le cui coordinate x_1 e x_2 sono entrambe v.a. Gaussiane standard indip. l'una dall'altra. Definita y come la lunghezza del segmento che unisce i 2 pt, trovarne la ddp.

$$y = |x_1 - x_2| = |z|$$

dove $z \in \mathcal{N}(0,2)$

Di conseguenza $f_Y(y) = \dfrac{2}{\sqrt{4\pi}} \exp\left[-\dfrac{y^2}{4}\right] u(y)$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{4}\right] u(y)$$

Es 6) - Sia dato il processo aleatorio $x(t) = 2\cos(2\pi F t)$ con F v.a. - unif. distr. in $[0, f_0]$. Si calcolino valor medio e funzione di autocorrelazione del processo.

$$E\{x(t)\} = \frac{1}{f_0}\int_0^{f_0} 2\cos(2\pi F t)\,dF = \frac{2}{f_0}\cdot\frac{1}{2\pi t}\sin(2\pi F t)\Big|_0^{f_0}$$ 48

$$= \frac{2}{2\pi f_0 t}\sin(2\pi f_0 t) = 2\,\mathrm{sinc}(f_0 t)$$

$$R_x(t_1,t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = \frac{1}{f_0}\int_0^{f_0} 4\cos(2\pi F t_1)\cos(2\pi F t_2)\,dF$$

$$= \frac{2}{f_0}\left[\frac{1}{2\pi(t_1+t_2)}\sin[2\pi f_0(t_1+t_2)] + \frac{1}{2\pi(t_2-t_1)}\sin[2\pi f_0(t_2-t_1)]\right]$$

$$= \frac{2}{f_0}\left[\mathrm{sinc}(2f_0(t_1+t_2)) + \mathrm{sinc}(2f_0(t_2-t_1))\right]$$

COMPITO DEL 3/02/2010

Es. 1 Sia $x(t)$ un'oscillazione cosinusoidale di ampiezza A e freq. f_0 costituita da N cicli. Si determini lo spettro $X(f)$ e si scelga N in modo che la larghezza del lobo principale di $X(f)$ sia inferiore a $0.02 f_0$

Si può scrivere

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)\, \mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \quad \text{dove } T = N/f_0.$$

Trasformiamo

$$X(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right] \otimes e^{-j\pi f T}\, T\, \mathrm{sinc}(fT)$$

$$= \frac{A}{2} T\, \mathrm{sinc}(f-f_0)T\, e^{-j\pi(f-f_0)T} +$$

$$+ \frac{A}{2} T\, \mathrm{sinc}(f+f_0)T\, e^{-j\pi(f+f_0)T}$$

Il lobo principale di ogni sinc è largo $\frac{2}{T}$

quindi $\Delta = \frac{2}{T} = \frac{2 f_0}{N} = 0.02 f_0 \Rightarrow N \geq 100$

Es. 2 Calcolare ampiezza e fase della trasformata continua di Fourier del segnale $x(t) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right) \otimes \left[2\, \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]$

Chiamiamo $y(t) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right)$ e $z(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

Di conseguenza $X(f) = 2\, Y(f)\, Z(f)$

$$Y(f) = T\left(1 - T|f|\right)$$

$$Z(f) = \frac{T}{2}\left[\mathrm{sinc}\, T\left(f - \frac{1}{T}\right) + \mathrm{sinc}\, T\left(f + \frac{1}{T}\right)\right]$$

$$X(f) = \frac{T^2}{2}(1 - f|T|)\left[\operatorname{sinc}T\left(f-\frac{1}{T}\right) + \operatorname{sinc}T\left(f+\frac{1}{T}\right)\right] \operatorname{rect}\left(\frac{Tf}{2}\right)$$

$$|X(f)| = \frac{T^2}{2}\left(1 - f|T|\right)\left|\operatorname{sinc}T\left(f-\frac{1}{T}\right) + \operatorname{sinc}T\left(f+\frac{1}{T}\right)\right| \operatorname{rect}\left(\frac{Tf}{2}\right)$$

50

$$\angle X(f) = \angle \operatorname{sinc}T\left(f-\frac{1}{T}\right) + \operatorname{sinc}T\left(f+\frac{1}{T}\right)$$

Es. 3 Si calcoli la risposta in frequenza del sistema LTI caratterizzato dalla seguente relazione ingresso-uscita: $y(t) = -\frac{dy(t)}{dt} + 2x(t-T)$. Se $x(t) = \cos(\pi t/T)$, quale è l'espressione di $y(t)$?

$$Y(f) = -j2\pi f Y(f) + 2e^{-j2\pi f T} X(f)$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{2e^{-j2\pi f T}}{1 + j2\pi f}$$

$$y(t) = |H(f_0)| \cos\left(\frac{\pi t}{T} + \angle H(f_0)\right) \qquad \text{dove } f_0 = \frac{1}{2T}$$

$$|H(f_0)| = \frac{2}{\sqrt{1 + \cancel{4}\pi^2 \cdot \frac{1}{\cancel{4}T^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{T^2}}}$$

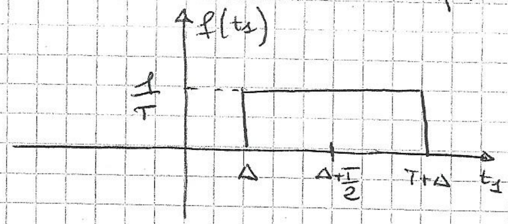
$$\angle H(f_0) = -\cancel{2}\pi \cancel{T} \cdot \frac{1}{\cancel{2T}} - \operatorname{arctg}\frac{2\pi}{2T} = -\pi - \operatorname{arctg}(\pi/T)$$

$$y(t) = \frac{2T}{\sqrt{T^2 + \pi^2}} \cos\left(\frac{\pi t}{T} - \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{T}\right)\right)$$

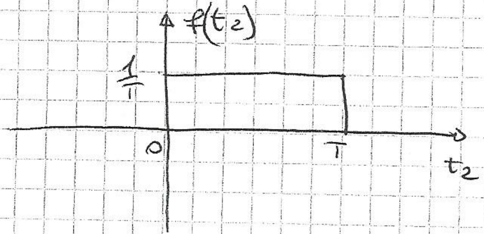
Es. 4 Un treno arriva a caso in una stazione nell'intervallo $(0, T)$ e vi sosta Δ minuti. Un viaggiatore a sua volta, arriva alla stazione in un istante qualsiasi dello stesso intervallo di tempo, indipendentemente dal treno. Determinare:

1) quanto deve valere Δ affinché la prob. che il viaggiatore prende il treno sia pari a 0.68

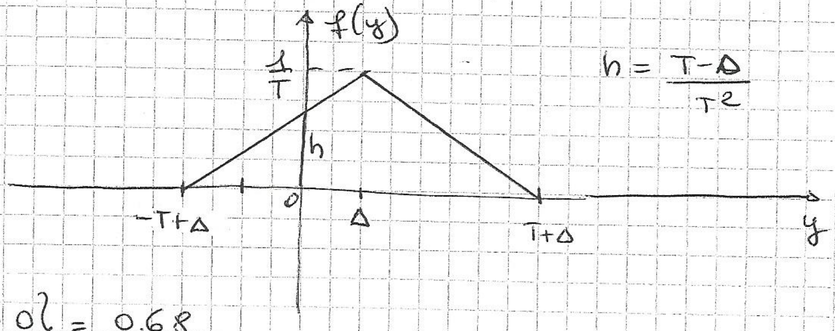
Indichiamo con t_1 l'istante di partenza del treno.
Esso risulta essere una v.a. unif. distribuita in $[\Delta, T+\Delta]$



Indichiamo con t_2 l'istante di arrivo del passeggero.
Esso è una v.a. unif. distribuita in $[0, T]$



Indichiamo con y la v.a. $y = t_1 - t_2$
Affinché il passeggero prende il treno è necessario che $t_1 - t_2 > 0$
Troviamo la ddp di y. Graficamente risulta



$Pr\{y > 0\} = 0.68$

$1 - \frac{T-\Delta}{T^2} \cdot \frac{T-\Delta}{2} = 0.68 \Rightarrow \Delta^2 - 2\Delta T + 0.36T^2 = 0$

Δ

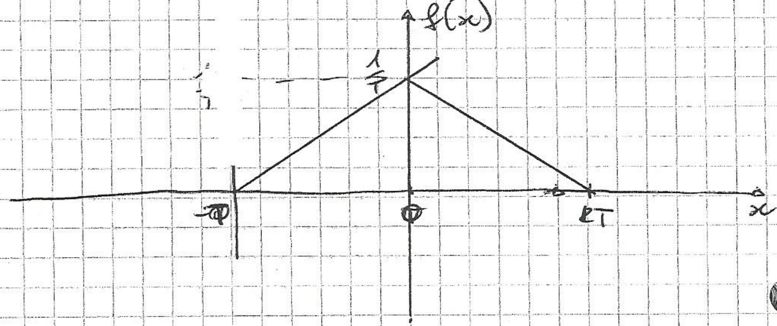
$\Delta_{1/2} = \begin{cases} 0.2T \\ 1.8T \end{cases}$

2) la prob. di prendere il treno senza aspettare.

Indichiamo con t il tempo di arrivo del treno.

$t \in U(0,T)$. Affinché il passeggero non aspetti è necessario che $t < t_2$

Se indichiamo con $x = t - t_2 \Rightarrow x \leq 0$



$P\{x<0\} = 1/2$

3) la prob. di prendere il treno senza aspettare sapendo che il treno è arrivato dopo $0.5T$

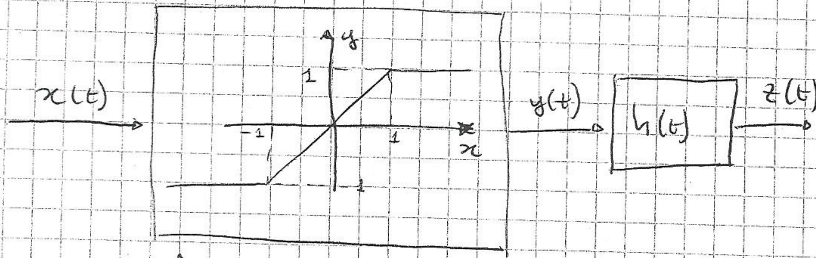
$$Pr\{x<0 \mid t>0.5T\} = \frac{Pr\{x<0,\ t>0.5T\}}{Pr\{t>0.5T\}} = \frac{Pr\{t_2>0.5T\}}{Pr\{t>0.5T\}}$$

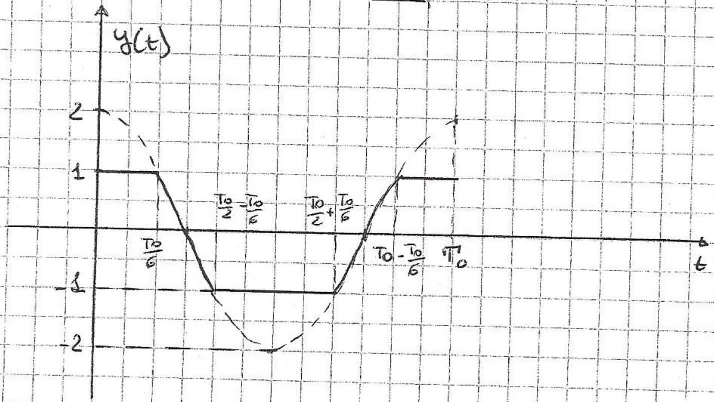
$$= \qquad = 1$$

4)

COMPITO DEL 23/02/10

Es 1 – Il segnale $s(t) = 2\cos(2\pi B t)$ è applicato al sistema di Fig. 1. Sapendo che $h(t) = 2B\,\mathrm{sinc}^2(2Bt)$ determinare la potenza P_z del segnale di uscita $z(t)$





Dalla figura si ricava che

$$Y_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} y(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\left[\int_0^{\frac{T_0}{6}} dt + 2\int_{\frac{T_0}{6}}^{\frac{T_0}{2}-\frac{T_0}{6}} \cos(2\pi B t)\,dt - \int_{\frac{T_0}{2}-\frac{T_0}{6}}^{\frac{T_0}{2}+\frac{T_0}{6}} dt + 2\int_{T_0+\frac{T_0}{6}}^{T_0-\frac{T_0}{6}} \cos(2\pi f_0 t)\,dt + \int_{T_0-\frac{T_0}{6}}^{T_0} dt\right] =$$

$= 0$ come evidente anche dalla figura.

Calcoliamo $H(f)$

$$h(t) = 2B\,\mathrm{sinc}(2Bt)\cdot\mathrm{sinc}(2Bt)$$

$$H(f) = \frac{1}{2B}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \otimes \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) = \frac{1}{4B}\left(1 - \frac{|f|}{2B}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{4B}\right)$$

Poiché tutte le componenti sono localizzate a nB, le uniche componenti non nulle all'uscita di $h(t)$ sono quelle per $n=\pm 1$.

Calcoliamo Y_1

$$Y_1 = \int_0^{T_0/6} e^{-j2\pi Bt}\,dt + \int_{\frac{T_0}{6}}^{\frac{T_0}{2}-\frac{T_0}{6} = \frac{T_0}{3}} \left(e^{-j4\pi Bt}+1\right)dt - \int_{\frac{T_0}{2}-\frac{T_0}{6} = \frac{T_0}{3}}^{\frac{T_0}{2}+\frac{T_0}{6} = \frac{2}{3}T_0} e^{-j2\pi Bt}\,dt$$

$$+ \int_{\frac{T_0}{2}+\frac{T_0}{6} = \frac{2}{3}T_0}^{T_0-\frac{T_0}{6} = \frac{5T_0}{6}} \left(e^{-j4\pi Bt}+1\right)dt + \int_{T_0-\frac{T_0}{6} = \frac{5T_0}{6}}^{T_0} e^{-j2\pi Bt}\,dt$$

$$= \frac{-1+e^{-j\frac{\pi}{3}}}{-j2\pi B} + \frac{e^{-j4\pi Bt}}{-j4\pi B}\Bigg|_{\frac{T_0}{6}}^{\frac{T_0}{3}} + \frac{T_0}{6} - \frac{e^{-j2\pi Bt}}{-j2\pi B}\Bigg|_{\frac{T_0}{2}-\frac{T_0}{6}}^{\frac{T_0}{2}+\frac{T_0}{6}}$$

$$+ \frac{e^{-j4\pi Bt}}{-j4\pi B}\Bigg|_{\frac{T_0}{2}+\frac{T_0}{6}}^{T_0-\frac{T_0}{6}} + \frac{T_0}{6} + \frac{e^{-j2\pi Bt}}{-j2\pi B}\Bigg|_{T_0-\frac{T_0}{6}}^{T_0} = \frac{\cancel{2} - j\,2\sin \pi/3}{-j2\pi B} + \frac{1}{3B}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\pi B} + \frac{1}{3B}$$

Dunque $P_z = 2|Y_1|^2$

Es. 2 - Teorema di Parseval generalizzato. Dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,Y^*(f)\,df$$

Si sa che $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,e^{j2\pi ft}\,df = x(t)$ quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,e^{j2\pi ft}\,y^*(t)\,df\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)\,e^{j2\pi ft}\,dt\right]}_{Y^*(f)} df \qquad \text{c.v.d.}$$

Es. - 3 Sia data la v.a. $x \in U(-2, 1)$ e la trasformazione $y = 1/x + 1$. Si trovi la ddp di y.

$$f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x)}{|g'(x)|}\right|_{x = g^{-1}(y)} \qquad x = \frac{1}{y-1} \qquad f_X(x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{rect}\left(\frac{x + 1/2}{3}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} = (y-1)^2$$

Sostituiamo: $$f_Y(y) = \frac{\frac{1}{3}\,\mathrm{rect}\left[\left(\frac{1}{y-1} + \frac{1}{2}\right)/3\right]}{(y-1)^2}$$

Es. 4 - La stazione radio NEWS trasmette il segnale orario allo scoccare di ogni ora. L'ascoltatore-tipo sintonizza il proprio radioricevitore sulla stazione ad un istante unif. distribuito tra le ore 7:10 e 19:30 nella giornata. Calcolare la prob. che l'ascoltatore riceva il segnale orario entro 5 minuti dalla sintonizzazione su NEWS.

$7{:}10 - 19{:}30 \Rightarrow 12h\ e\ 20\,m = 740\,m$

Nell'intervallo gli annunci possibili sono 12.

Quindi $Pr\{A\} = \frac{1}{740}\ 5 \cdot 12 = \frac{60}{740} = \frac{3}{37}$

Es. 5 - Sono dati 2 processi stazionari in senso lato e indip. $X(t)$ e $Y(t)$ con funzione di autocorrelazione $R_X(\tau) = R_Y(\tau) = \sigma^2 \mathrm{sinc}^2(B\tau)$.

Costruito il processo $Z(t) = X(t)\cos(4\pi Bt) - Y(t)\sin(4\pi Bt)$ dimostrare che $Z(t)$ è stazionario in senso lato. Determinare e rappresentare la DSP di $Z(t)$.

$$E\{Z(t)\} = E\{X(t)\}\cos(4\pi Bt) - E\{Y(t)\}\sin(4\pi Bt) = 0$$

$$R_Z(t_1,t_2) = E\Big\{\big[X(t_1)\cos(4\pi B t_1) - Y(t_1)\sin(4\pi B t_1)\big]\big[X(t_2)\cos(4\pi B t_2) - Y(t_2)\sin(4\pi B t_2)\big]\Big\} =$$

$$= E\{X(t_1)X(t_2)\}\cos(4\pi B t_1)\cos(4\pi B t_2)$$

$$- E\{X(t_1)Y(t_2)\}\cos(4\pi B t_1)\sin(4\pi B t_2)$$

$$- E\{Y(t_1)X(t_2)\}\sin(4\pi B t_1)\cos(4\pi B t_2)$$

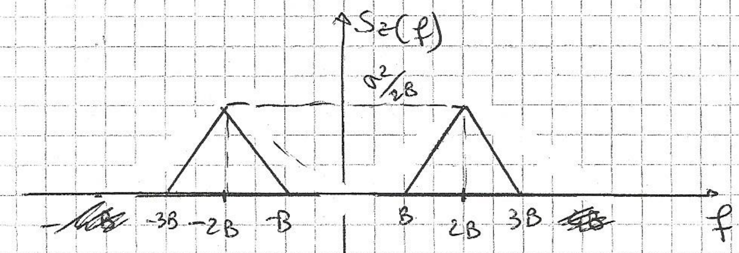
$$+ E\{Y(t_1)Y(t_2)\}\sin(4\pi B t_1)\sin(4\pi B t_2)$$

$$= R_X(t_1,t_2)\big[\cos(4\pi B t_1)\cos(4\pi B t_2) + \sin(4\pi B t_1)\sin(4\pi B t_2)\big]$$

$$= R_X(\tau)\cos[4\pi B\tau]$$

$$S_Z(f) = \frac{1}{2}S_X(f-2B) + \frac{1}{2}S_X(f+2B)$$

$$S_X(f) = \frac{\sigma^2}{B}\left(1-\frac{|f|}{B}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

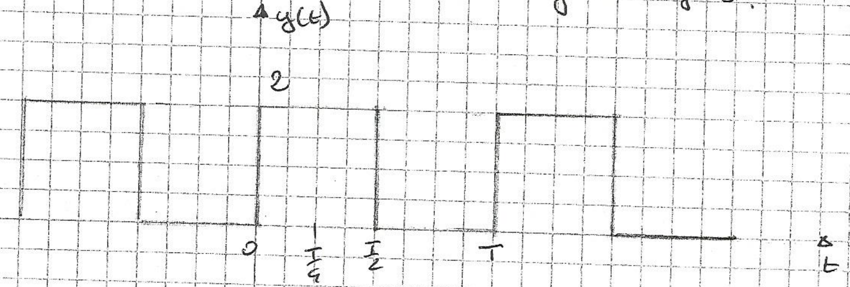


COMPITO 22/04/10

Es. 2 Sia dato il segnale di periodo T a potenza finita
$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT) + 1$, con $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{t-3T/4}{T/2}\right)$.

1) Si disegnino le repliche del segnale per $k=-1$, $k=0$ e $k=1$.

2) Si calcolino le prime 3 componenti ($n=0, 1, e\ 2$) della trasformata serie di Fourier del segnale $y(t)$.



$$Y_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

$$Y_1 = \frac{1}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} 2\, e^{-j2\pi f_0 t}\, dt\right] = \frac{2}{T}\, \frac{e^{-j\frac{2\pi t}{T}}}{-j2\pi/T}\Bigg|_0^{T/2} = \frac{2}{j\pi}$$

$$Y_2 = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 2\, e^{-j4\pi f_0 t}\, dt = 0$$

Es. 4 Siano A e B due eventi. Dimostrare che se $P(A|B) = P(A|\bar{B})$, A e B sono eventi statisticamente indipendenti.

Per il teorema della prob. totale sappiamo che

$$P(A) = P(A|B)\,P(B) + P(A|\bar{B})\,P(\bar{B}) =$$
$$P(A|B)\,P(B) + P(A|B)\,(1-P(B)) = P(A|B)$$

Gli eventi sono indipendenti

Es. 5 - Le 2 v.a. X e Y hanno ddp congiunta pari a $f_{XY}(x,y) = A\exp[-2x]\exp[-3y]\,u(x)\,u(y)$. Calcolare A, le ddp marginali e $P\left(X>\frac{1}{2} \middle| Y>\frac{1}{3}\right)$.

Per la condizione di normalizzazione

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

Nel nostro caso

$$A\int_0^{+\infty} \exp(-2x)\,dx \int_0^{+\infty}\exp(-3y)\,dy = 1 \quad\Rightarrow\quad A = 6$$

$$f_X(x) = 6\exp(-2x)\,u(x)\int_0^{+\infty} e^{-3y}\,dy = 2e^{-2x}u(x)$$

$$f_Y(y) = 6e^{-3y}u(y)\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = 3e^{-3y}u(y)$$

le 2 v.a sono indipendenti di conseguenza

$$P\left(X>\tfrac{1}{2}\middle|Y>\tfrac{1}{3}\right) = P\left(X>\tfrac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} 2e^{-2x}\,dx = e^{-1}$$

Es. 6. Sia $u(t)$ un processo stazionario a valor medio nullo e funzione di autocorrelazione $R_u(\tau)=\sigma_u^2 e^{-|\tau|}$. Siano dati ora i processi $u(t)=X(t)$ e $Y(t)=u(t)+3u(t-T)$. Si calcoli la DSP di entrambi.

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau = \frac{2\sigma_u^2}{1+(2\pi f)^2}$$

Il secondo processo $Y(t)$ può essere pensato come ottenuto da un filtro lineare di risposta $H(f) = 1+3e^{-j2\pi fT}$

per cui $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$.

COMPITO DEL 21/09/10

Es. 2 – Allo schema di fig. 1 è applicato il segnale $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + \cos(6\pi f_0 t)$. Si determini e si rappresenti lo spettro del segnale di uscita

$$\longrightarrow \boxed{y = x^2} \longrightarrow$$

$$Y(f) = X(f) \otimes X(f)$$

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) + \frac{1}{2}\delta(f - 3f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + 3f_0)$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) \otimes X(f) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) \otimes X(f)$$

$$+ \frac{1}{2}\delta(f - 3f_0) \otimes X(f) + \frac{1}{2}\delta(f + 3f_0) \otimes X(f)$$

$$= \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0) + \frac{1}{2}X(f - 3f_0) + \frac{1}{2}X(f + 3f_0)$$

$$= \frac{1}{4}\delta(f - 6f_0) + \frac{1}{4}\delta(f + 6f_0) + \frac{1}{2}\delta(f - 4f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + 4f_0)$$

$$+ \frac{3}{4}\delta(f - 2f_0) + \frac{3}{4}\delta(f + 2f_0) + \delta(f)$$

Es. 3 – Trovare la risposta in frequenza e la risposta impulsiva del sistema descritto dall'equaz. differenziale:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{3d}{dt}y(t) + 2y(t) = \frac{2d}{dt}x(t) + x(t)$$

$$(j2\pi f)^2 Y(f) + 6j\pi f\, Y(f) + 2Y(f) = 4j\pi f\, X(f) + X(f)$$

$$H(f) = \frac{1 + 4j\pi f}{2 + 6j\pi f + (j2\pi f)^2} = \frac{1 + 4j\pi f}{(1 + j2\pi f)(2 + 2j\pi f)}$$

$$= -\frac{1}{1 + j2\pi f} + \frac{3}{2 + 2j\pi f}$$

$$h(t) = -e^{-t}u(t) + 3e^{-2t}u(t)$$

Es. 4 - Determinare la ddp di $Z = XY$ sapendo che X e Y sono v. a. continue indip. di cui sono note le ddp. marginali

$Z = XY$ $\quad f_Z(z) = \int f_Z(z|y)\, f_Y(y)\, dy$

$f_Z(z|y) = f_X(z/y)\ \cdot$

$$f_Z(z) = \int f_X\left(\frac{z}{y}\right) f_Y(y)\, dy$$

Es. 5 - Sia data la v. a. $x \in \mathcal{N}(0,5)$ e la trasf. $y = |x| + 1$. Si trovi la ddp di y

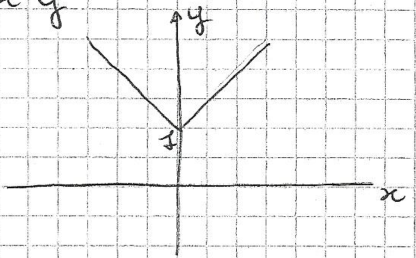


Grafico trasformazione

$$f_Y(y) = 2\, f_X(y-1)\, u(y-1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi 10}} \exp\left[-\frac{(y-1)^2}{10}\right] u(y-1)$$

Es. 6 - Il processo aleatorio stazionario Gaussiano $X(t)$ ha densità spettrale di potenza $S_X(f) = 4 - 3\, \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$. Tale processo viene filtrato con due sistemi lineari tempo-invarianti in cascata, ottenendo in uscita il processo $Y(t)$. Il primo sistema ha risposta in frequenza $H_1(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$ e il secondo è un filtro passa-basso ideale di banda $2B$.

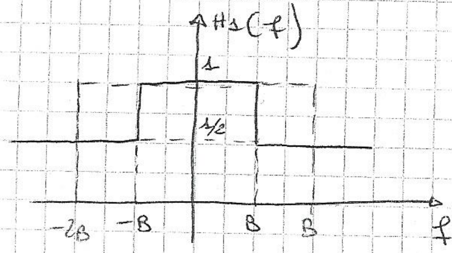
) Calcolare la funzione di autocorrelazione $r_X(\tau)$ del processo $X(t)$.

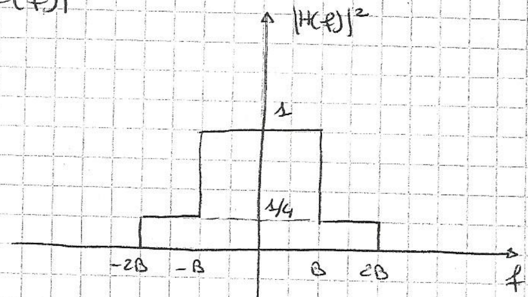
Antitrasformiamo $S_X(f)$

$$r_X(\tau) = 4\delta(\tau) - 6B\, \mathrm{sinc}(2B\tau)$$

2) Calcolare e disegnare la DSP $S_y(f)$ del processo $y(t)$

$$S_y(f) = S_x(f)\,|H_1(f)|^2\,|H_2(f)|^2$$





$$S_y(f) = rect\left(\frac{f}{4B}\right)$$

3) $R_y(\tau) = 4B\,sinc(4B\tau)$ $\qquad P_y = \int_{-2B}^{2B} df = 4B$

COMPITO DEL 22/11/10

Es. 1 – Sapendo che la trasformata di $x_0(t) = \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) rect\left(\frac{t}{2T}\right)$ è $X_0(f) = T\,sinc^2(fT)$, calcolare la Trasformata serie di Fourier del segnale ottenuto dalla periodicizzazione di $x_0(t)$ con periodo $T_0 = 2T$.

Si sa che $X_k = f_0 X_0(k f_0) = \frac{1}{2T} X_0\left(\frac{k}{2T}\right)$

$$\frac{1}{2T} X_0\left(\frac{k}{2T}\right) = \frac{1}{2T}\,T\,sinc^2\left(\frac{kT}{2T}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2}$$

$$= \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ \frac{2}{k^2\pi^2} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

Es. 2 Dimostrare che, ~~y(t)~~ dato un sistema LTI caratterizzato dalla risposta impulsiva $h(t)$ al cui ingresso viene inviato il segnale $x(t)$ il segnale d'uscita è dato da $y(t) = x(t) \otimes h(t)$

Si può scrivere che $x(t) = x(t) \otimes \delta(t) =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

$$T[x(t)] = T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,T[\delta(t-\tau)]\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = x(t) \otimes h(t)$$

Es. 3 Siano A e B due eventi a prob. non nulla.

1) Dimostrare che se sono indip. non sono mutualmente esclusivi e viceversa

Eventi indip $\quad P(A,B) = P(A)P(B) \neq 0$

Due eventi sono mutuamente esclusivi se $P(A,B) = 0$

2) Dimostrare che se sono indip., lo sono anche A e $\bar{B}$, $\bar{A}$ e B, $\bar{A}$ e $\bar{B}$.

$$P(A,\bar{B}) = P(A) - P(A,B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)]$$
$$= P(A)P(\bar{B})$$

Simile dimostrazione per $\bar{A}$ e B

$$P(\bar{A},\bar{B}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A},B) = P(\bar{A}) - P(\bar{A})P(B) = P(\bar{A})P(\bar{B})$$

Es. 4 v. p. 55

Es. 5 v. p. 55-56

COMPITO DEL 1/3/11

Es. 1 – Si calcoli l'energia del segnale $x(t) = e^{-|t|}\cos(2\pi f_0 t)$ assumendo $f_0 \gg 1$

Utilizziamo il teorema di Parseval

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\,df$$

Poniamo $y(t) = e^{-|t|} \Rightarrow X(f) = \frac{1}{2}\left[Y(f-f_0) + Y(f+f_0)\right]$

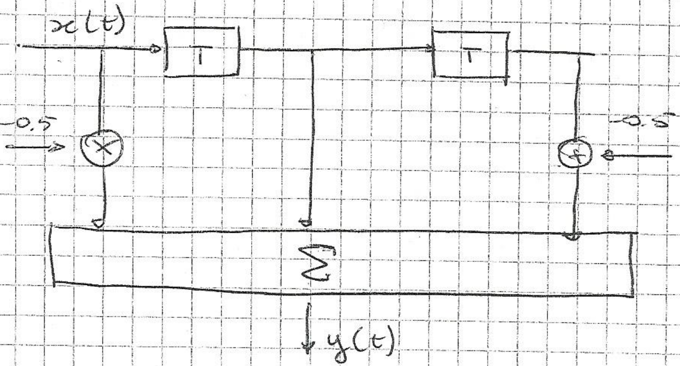
Poiché $f_0 \gg 1$ le 2 repliche sono praticamente separate.

$$\Rightarrow |X(f)|^2 \simeq \frac{1}{4}|Y(f-f_0)|^2 + \frac{1}{4}|Y(f+f_0)|^2$$

$$E_x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f-f_0)|^2\,df = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2\,df$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|}\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-2t}\,dt = \frac{1}{2}$$

Es. 2



1) Si calcoli risposta in ampiezza e fase.

$$y(t) = -\frac{1}{2}x(t) + x(t-T) - \frac{1}{2}x(t-2T)$$

Trasformiamo

64

$$Y(f) = -\frac{1}{2}X(f) + X(f)e^{-j2\pi fT} - \frac{1}{2}X(f)e^{-j4\pi fT}$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = -\frac{1}{2} + e^{-j2\pi fT} - \frac{1}{2}e^{-j4\pi fT}$$

$$= e^{-j2\pi fT}\left[-\frac{1}{2}e^{j2\pi fT} + 1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi fT}\right]$$

$$= 2e^{-j2\pi fT}\sin^2(\pi fT)$$

$$|H(f)| = 2\sin^2(\pi fT)$$

$$\angle H(f) = -2\pi fT$$

Si calcoli la risposta al segnale

$$x(t) = A\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) + B\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

$f_0 = \frac{1}{2T}$ e $f_1 = \frac{1}{T}$

$$y(t) = A\left|H\left(\frac{1}{2T}\right)\right|\cos\left(\frac{\pi t}{T} + \angle H\left(\frac{1}{2T}\right)\right) + B\left|H\left(\frac{1}{T}\right)\right|\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \angle H\left(\frac{1}{T}\right)\right)$$

$$= 2A\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi t}{T} - \pi\right) + 2B\sin^2(\pi)\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - 2\pi\right)$$

$$= 2A\cos\left(\frac{\pi t}{T} - \pi\right) = -2A\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

Es. 3 v. teoria

Es. 4 Una macchina produce viti il cui diametro X in mm può essere considerato una v. Gaussiana a valor medio 5 e varianza 0.01, mentre una seconda macchina produce dadi il cui diametro Y può considerarsi una v. a. Gaussiana di valor medio 5.2 e varianza 0.04. Un dado si avvita in maniera soddisfacente su una vite se il suo diametro è > di quello della vite di almeno 0.04 mm, ma non più di 0.05. Qual è la prob. che un dado ed una vite scelti a caso si avvitino correttamente?

65

Definiamo la v.a. $Z = Y - X$

Vite e bullone si avvitano se $0.04 \leq Z \leq 0.05$

Dobbiamo quindi calcolare $Pr\{0.04 \leq Z \leq 0.05\}$

Z è una v.a. Gaussiana $E\{Z\} = E\{Y\} - E\{X\} = 0.2 = \eta_Z$

$var\{Z\} = \sigma_Y^2 + \sigma_X^2 = 0.05$

$$Pr\{0.04 \leq Z \leq 0.05\} = \int_{0.04}^{0.05} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Z^2}} \exp\left[-\frac{(z-\eta_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right] dz$$

$$= Q\left(\frac{0.05 - 0.2}{\sqrt{0.05}}\right) - Q\left(\frac{0.04 - 0.2}{\sqrt{0.05}}\right)$$

Es. 5 La ddp di una v.a. x è data da:

$$f(x) = \begin{cases} 0.4 + Cx & 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

1) Calcolare C affinché $f(x)$ sia una ddp valida

Per la proprietà di normalizzazione si ha

$$1 = \int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^5 [0.4 + Cx]\,dx \qquad C = -0.08$$

2) Determinare $Pr\{x > 3\}$ e $Pr\{1 \leq X \leq 4\}$

$$Pr\{X > 3\} = \int_3^5 f(x)\,dx = 0.4x - \frac{x^2}{25}\Big|_3^5 = 0.16$$

$P\{1 \le x \le 4\} = \int_1^4 f(x)dx = 0.4x - 0.04x^2 \Big|_1^4 = 0.6$

) Trovare $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x f(\alpha)d\alpha = 0.4x - 0.04x^2 & 0 \le x \le 5 \\ 0 & x < 0 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

Es. 6 $\quad x(t) = 1 + 4\sin(2\pi f_0 t + 2\theta_0) \quad \theta \in U(0, \pi)$

$h(t) = \exp(-t)u(t) \quad E\{x(t)\} = ? \quad E\{Y(t)\} \quad S_x(f) = ?$

$S_Y(f) = ?$

$E\{x(t)\} = E\{1 + 4\sin(2\pi f_0 t + 2\theta_0)\} = 1$

$R_x(\tau) = E\{[1 + 4\sin(2\pi f_0 t + 2\theta_0)][1 + 4\sin(2\pi f_0(t+\tau) + 2\theta_0)]\}$

$= 1 + 16E\{\sin(2\pi f_0 t + 2\theta_0)\sin(2\pi f_0(t+\tau) + 2\theta_0)\}$

$= 1 + 8\cos(2\pi f_0 \tau)$

$H(f) = \dfrac{1}{1 + j2\pi f} \qquad S_x(f) = \delta(f) + 4\delta(f - f_0) + 4\delta(f + f_0)$

$\eta_Y = \eta_x [H(0)] = 1$

$S_Y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = [\delta(f) + 4\delta(f - f_0) + 4\delta(f + f_0)] \dfrac{1}{1 + 4\pi^2 f^2}$

$= \delta(f) + \dfrac{4}{1 + 4\pi^2 f_0^2}\delta(f - f_0) + \dfrac{4}{1 + 4\pi^2 f_0^2}\delta(f + f_0)$

COMPITO DELL' 8/06/11

Es. 1 – Si calcoli lo sviluppo in serie di Fourier del segnale $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT)$ dove $x(t) = A e^{j\frac{2\pi t}{\tau}} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ e $\tau \le T$.

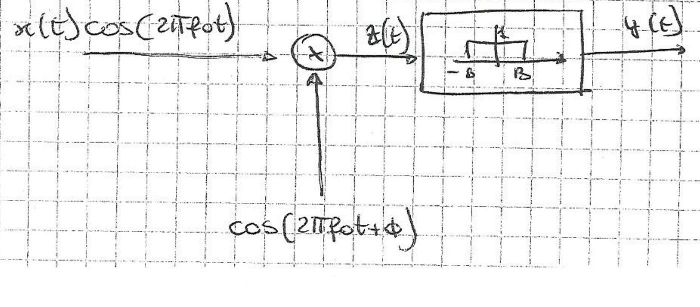
$$Y_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)\, e^{-j\frac{2\pi k}{T}t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{j\frac{2\pi t}{\tau}} e^{-j\frac{2\pi k t}{T}}\, dt = \frac{A}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{j 2\pi t\left(\frac{1}{\tau}-\frac{k}{T}\right)}\, dt$$

$$= \frac{A}{T} \frac{e^{j\frac{2\pi\tau}{2}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{k}{T}\right)} - e^{-j\frac{2\pi\tau}{2}\left(\frac{1}{\tau}-j\frac{k}{T}\right)}}{2\pi j\left(\frac{1}{\tau}-\frac{k}{T}\right)} =$$

$$= \frac{A}{T} \frac{\sin\left(\pi - \pi\tau k/T\right)}{\pi\left(\frac{1}{\tau}-\frac{k}{T}\right)} = A\frac{\tau}{T}\,\mathrm{sinc}\left(1-\frac{\tau k}{T}\right)$$

Es. 2 – Si consideri lo schema di Fig. 1, dove ϕ e f_0 sono costanti. $x(t)$ è un segnale ad energia finita passa-basso a banda strettamente limitata B. Si supponga $f_0 = 8B$ e si calcoli l'espressione analitica dell'uscita $y(t)$ del sistema. Esiste un qualche valore della fase ϕ per cui il segnale $y(t)$ è identicamente nullo per qualunque t?



$z(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t + \phi)$

$= \frac{x(t)}{2}\left[\cos(4\pi f_0 t + \phi) + \cos\phi\right]$

Il filtro passa-basso cancella le repliche centrate su $\pm 2 f_0$. Dunque

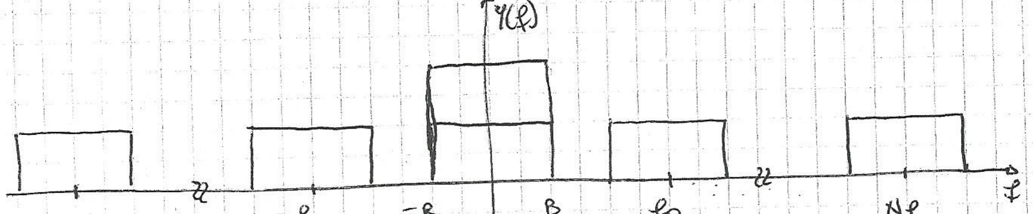
$y(t) = \frac{x(t)}{2}\cos\phi$.

Se $\phi = \pi(2k+1)$ $y(t) = 0$ $\forall t$.

Es. 3 - Si consideri il segnale $y(t) = x(t) + x(t)\cos 2\pi f_0 t + x(t)\cos(2\pi N f_0 t)$ dove $x(t)$ è un segnale passa-basso rigorosamente limitato in banda B. Il segnale $y(t)$ viene campionato ad una frequenza $f_c = 10\,kHz$. Determinare valori di f_0 e N affinché

1) i 3 segnali componenti all'ingresso siano spettralmente separati
2) sia possibile una corretta ricostruzione del segnale $y(t)$ con int. card.
3) N sia massimo (supposte vere le 2 cond. precedenti)

1) Affinché i 3 segnali siano spettralmente ~~necessari~~ separati è necessario che $f_0 \geq 2B$



2) La banda totale occupata da $g(t)$ è pari a $B_T = N f_0 + B$ dunque $f_c \geq 2(N f_0 + B)$

$$\Rightarrow f_0 \leq \frac{f_c - 2B}{2N} \qquad 2B \leq f_0 \leq \frac{f_c - 2B}{2N}$$

3) Dalla relazione precedente si ricava

$$2B \leq \frac{f_c - 2B}{2N} \quad \text{da cui} \quad N \leq \frac{f_c}{4B} - \frac{1}{2}$$

Se poniamo ad esempio $B = 1\,kHz$

$$f_0 \geq 2\,kHz \quad , \quad 2\,kHz \leq f_0 \leq \frac{8\,kHz}{N}$$

da cui chiaramente $N = 2$.

Es. 4 – La prob. che un aereo parta in orario è pari a 0.83, la prob. che arrivi in orario è 0.82 e la prob. che parta e arrivi in orario è 0.78. Su 100 aerei che sono partiti in orario, quanti arrivano puntuali? E quanto vale la prob. che un aereo arrivato in tempo sia partito in tempo?

$A = \{\text{partenza in orario}\}$

$B = \{\text{arrivo in orario}\}$

$P(A) = 0.83 \qquad P(B) = 0.82 \qquad P(AB) = 0.78$

$P(B|A) = ? \qquad P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{0.78}{0.83} =$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.78}{0.82} =$$

Es. 5 – Una persona entra in banca per cambiare un assegno ma trova i 2 sportelli disponibili occupati da un cliente ciascuno. Allora si mette in fila (unica per entrambi gli sportelli) e aspetta che uno dei 2 si liberi. Sapendo che non ci sono altri clienti in fila e che i tempi residui di servizio sono v.a. i.i.d. exp $f_T(t) = \lambda \exp(-\lambda t) u(t)$, con media pari a 4 minuti, determinare il tempo medio di attesa del cliente in fila.

Calcoliamo la funzione di distribuzione del tempo di attesa del cliente in fila.

$$F_X(x) = P_r(X \le x) = P_r\left(T_1 \le x \text{ o } T_2 \le x\right) =$$

$$= P_r(T_1 \le x) + P_r(T_2 \le x) - P_r(T_1 \le x) P_r(T_2 \le x)$$

$$= F_{T1}(x) + F_{T2}(x) - F_{T1}(x) F_{T2}(x)$$

$$= 2F_T(x) - F_T^2(x)$$

Calcoliamo la ddp $f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$

$$f_X(x) = 2 f_T(x) - 2 f_T(x) F_T(x) =$$

$$= 2 f_T(x) \left[1 - F_T(x)\right]$$

$$F_T(x) = \left[1 - \exp\left[-\lambda x\right]\right] u(x)$$

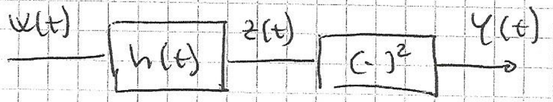
$$f_X(x) = 2\lambda \exp\left[-\lambda x\right] \left(\exp(-\lambda x)\right) u(x)$$

$$= 2\lambda \exp(-2\lambda x) u(x)$$

$$E\{X\} = \frac{1}{2\lambda} = 2 \text{ minuti}$$

Es. 6 – Un processo Gaussiano $W(t)$ bianco in banda B, cioè con DSP pari a $S_W(f) = \frac{N_0}{2} \, rect\left(\frac{f}{2B}\right)$ viene filtrato da un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t) = \delta(t) + 0.5\,\delta(t-T)$ e poi inviato in un quadratore. Quanto vale il valor medio del processo $Y(t)$ all'uscita del quadratore, sapendo che $B = \frac{3}{4T}$?

#1



$$z(t) = W(t) + 0.5\,W(t-T)$$

$$Y(t) = z^2(t) = \left[W(t) + 0.5\,W(t-T)\right]^2 =$$

$$= W^2(t) + \frac{1}{4} W^2(t-T) + W(t)\,W(t-T)$$

$$E\{Y(t)\} = E\{W^2(t)\} + \frac{1}{4} E\{W^2(t-T)\} + E\{W(t)\,W(t-T)\}$$

$$= \sigma_W^2 \left(1 + \frac{1}{4}\right) + R_W(T)$$

$$\sigma_W^2 = R_W(0) = \frac{N_0}{2} \cdot 2B = N_0 B = \frac{3 N_0}{4T}$$

Da $S_W(f)$ si può ricavare $R_W(\tau) = N_0 B \, sinc(2B\tau)$

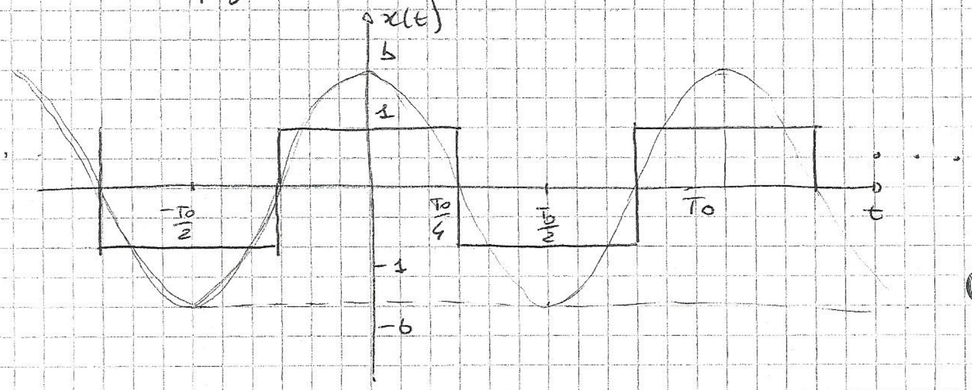
$$R_W(T) = \frac{N_0\, 3}{4T} \, sinc\left(\frac{6}{4\cancel{T}} \cancel{T}\right) = -\frac{N_0}{2\pi T}$$

$$E\{Y(t)\} = \frac{15\pi - 8}{16 \pi T} \cdot N_0$$

COMPITO DEL 28/06/11

Es. 1 - Si consideri il segnale $x(t) = \operatorname{sgn}\left(b \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)\right)$ dove b è un numero reale positivo. Si rappresenti graficamente il segnale e se ne calcolino energia e potenza.

Il segnale $b\cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$ è un segnale periodico di periodo T_0.



Il segnale che ne deriva è un'onda quadra, quindi un segnale periodico di periodo T_0.
Essendo il segnale periodico l'energia è infinita e ~~la~~ potenza si può calcolare sul periodo

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t)\,dt = 1$$

Es. 2 - Dato il sistema $y(t) = \int_{t-3}^{t+3} x(z)\,dz + x(t-5)$, verificare che il sistema è lineare e tempo-invariante. Calcolarne poi la risposta impulsiva

Il sistema è lineare infatti

$$x(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t)$$

$$y(t) = \int_{t-3}^{t+3} a\,x_1(z)\,dz + \int_{t-3}^{t+3} b\,x_2(z)\,dz + a\,x_1(t-5) + b\,x_2(t-5)$$

$$= a\,y_1(t) + b\,y_2(t)$$

Ed è tempo-invariante

$$z(t) = T\{x(t-t_0)\} = \int_{t-3}^{t+3} x(\tau - t_0)\,d\tau + x(t - t_0 - 5)$$

$$= \int_{t-3-t_0}^{t+3-t_0} x(\rho)\,d\rho + x(t-t_0-5) = y(t-t_0)$$

Calcoliamo la risposta impulsiva 73

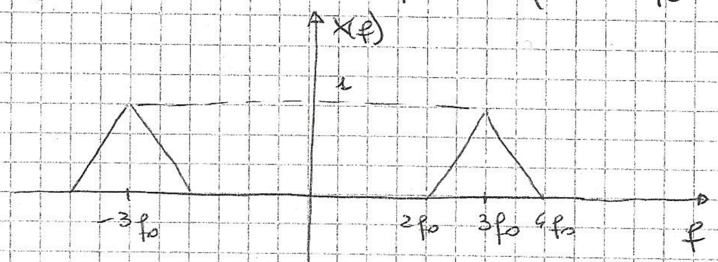
$$h(t) = T[\delta(t)] = \int_{t-3}^{t+3} \delta(\tau)\,d\tau + \delta(t-5)$$

$$= \text{rect}\left(\frac{t}{6}\right) + \delta(t-5)$$

Es. 3 – Il segnale $x(t) = 2f_0 \,\text{sinc}^2(f_0 t)\cos(6\pi f_0 t)$ viene campionato con passo di campionamento $T_c = 1/(4f_0)$ e viene successivamente filtrato con un filtro passa-basso ideale avente banda $B = 2f_0$. Calcolare l'espressione del segnale in uscita al filtro.

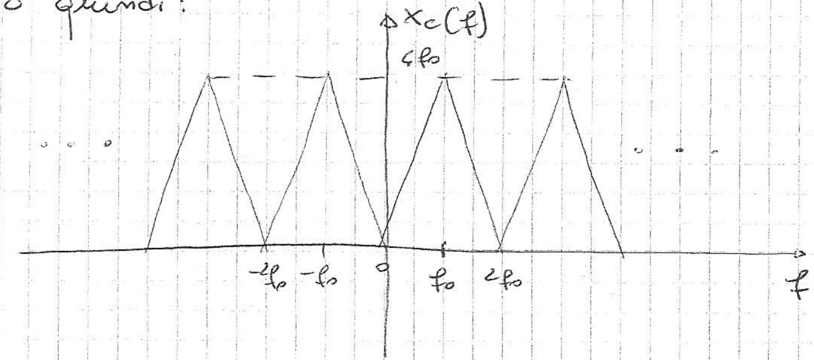
Calcoliamo $X(f)$

$$X(f) = \left(1 - \frac{|f-3f_0|}{f_0}\right)\text{rect}\left(\frac{f-3f_0}{2f_0}\right) + \left(1 - \frac{|f+3f_0|}{f_0}\right)\text{rect}\left(\frac{f+3f_0}{2f_0}\right)$$



Dopo il campionamento $X_c(f) = 4f_0 \sum_k X(f - k4f_0)$

Otteniamo quindi:



Dopo il filtro avremo solo le 2 repliche centrali, quindi

$$Y(f) = X_c(f)\,H(f) = 4f_0\left[1 - \frac{|f-f_0|}{f_0}\right]\operatorname{rect}\left(\frac{f-f_0}{2f_0}\right)$$
$$+ 4f_0\left[1 - \frac{|f+f_0|}{f_0}\right]\operatorname{rect}\left(\frac{f+f_0}{2f_0}\right)$$

$$y(t) = 8f_0^2\,\operatorname{sinc}^2(f_0t)\cos(2\pi f_0 t)$$

Es. 4 - Siano date 2 v.a. Gaussiane a medie ~~nulle~~ unitarie e varianze unitarie e correlazione pari a 0.5. Si trovino le ddp di $z = x+y$ e $t = x-y$.

Combin. lineari di v.a. Gaussiane sono ancora v.a. Gaussiane. Dobbiamo determinare valor medio e varianza di z e t

$$E\{z\} = E\{x\} + E\{y\} = 2$$
$$E\{t\} = E\{x\} - E\{y\} = 0$$

$$E\{z^2\} = E\{x^2\} + E\{y^2\} + 2E\{xy\} = 2+2+2\cdot 0.5 = 5$$
$$\sigma_z^2 = E\{z^2\} - E^2\{z\} = 1$$

$$E\{t^2\} = E\{x^2\} + E\{y^2\} - 2E\{xy\} = 3$$

$\sigma_t^2 = E\{t^2\} - E^2\{t\} = 3 - 0 = 3$

Di conseguenza $z \in \mathcal{N}(2, 1)$, $t \in \mathcal{N}(0, 3)$

Es. 5 – Sia dato il processo stocastico $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + |\theta|)$, dove A è un parametro determ. noto e θ una v.a. unif. distr. in $[-\pi, \pi]$. Calcolare valor medio e funzione di correlazione di $x(t)$ e dire se il processo è staz. in senso lato

Calcoliamo $E\{x(t)\}$

$$E\{x(t)\} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} A\cos(2\pi f_0 t + |\theta|)\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \frac{A}{2\pi} \cos(2\pi f_0 t - \theta)\, d\theta + \int_{0}^{\pi} \frac{A}{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \theta)\, d\theta$$

$$= \frac{A}{2\pi} \Big[-\sin(2\pi f_0 t - \theta)\Big]_{-\pi}^{0} + \frac{A}{2\pi} \Big[\sin(2\pi f_0 t + \theta)\Big]_{0}^{\pi} =$$

$$= -\frac{2A}{\pi} \sin(2\pi f_0 t)$$ Dipende dal tempo

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A^2}{2\pi} \cos(2\pi f_0 t_1 + |\theta|) \cos(2\pi f_0 t_2 + |\theta|)\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A^2}{2\pi} \cos(2\pi f_0 t_1 + 2\pi f_0 t_2 + 2|\theta|)\, d\theta$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A^2}{2\pi} \cos(2\pi f_0 t_2 - 2\pi f_0 t_1)\, d\theta = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

Il processo non è stazionario in senso lato.

Es. 6 - Un processo Gaussiano $w(t)$ bianco con densità spettrale di potenza pari a $S_w(f) = N_0/2$ viene filtrato da un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$. Sia $Z(t)$ il processo all'uscita, calcolare la densità di probabilità di $Z(t)$, la prob. che $Z(t) > 0.5$ e la funzione di corr. di $Z(t)$ 76

La v.a. $Z(t)$ è Gaussiana. Dobbiamo calcolare valor medio e varianza.

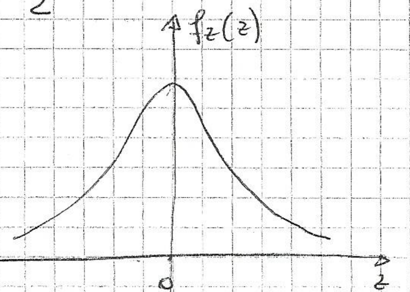
$$E\{Z(t)\} = \eta_w \, H(0) = 0$$

$$\sigma_z^2 = P_z = \int_{-\infty}^{+\infty} S_z(f)\,df = R_z(0)$$

$$S_z(f) = \frac{N_0}{2} \cdot |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \, \frac{1}{1+4\pi^2 f^2}$$

$$R_z(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_z(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df = \frac{N_0}{2}\, e^{-|\tau|}$$

$$P_z = \frac{N_0}{2}$$



$P\{Z(t) > 0.5\} = \frac{1}{2}$ poiché la ddp è simmetrica rispetto all'origine

Compito del 12/7/2011

Es. 1 - Calcolare l'energia del segnale $x(t)=e^{-kt}\cos(2\pi f_0 t)u$
per qualunque valore di k e di f_0.

Per definizione $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$

Nel nostro caso

$$E_x = \int_0^{+\infty} e^{-2kt} \cos^2(2\pi f_0 t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2kt}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2kt} \cos(4\pi f_0 t)\, dt$$

$$= -\frac{1}{4k} e^{-2kt}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2kt} \frac{e^{j4\pi f_0 t} + e^{-j4\pi f_0 t}}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{4k} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{-2(k-j2\pi f_0)t}\, dt + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{-2(k+j2\pi f_0)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{4k} + \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{2(k-j2\pi f_0)} e^{-2(k-j2\pi f_0)t}\Big|_0^{+\infty}\right.$$

$$\left.\frac{-1}{2(k+j2\pi f_0)} e^{-2(k+j2\pi f_0)t}\Big|_0^{+\infty}\right]$$

$$= \frac{1}{4k}\left[1 + \frac{k^2}{k^2+4\pi^2 f_0^2}\right]$$

Es. 2 - Un sistema LTI ha risposta impulsiva $h(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$. Al suo ingresso viene posto il segnale $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$. Dire per quali valori della frequenza f_0 la risposta del sistema è identicamente nulla

Calcoliamo la risposta in frequenza del sistema.

$$H(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)\, e^{-j\pi f T}$$

$$X(f) = \frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0) - \delta(f-f_0)\right]$$

Affinchè $Y(f) = H(f)X(f)$ sia nulla è necessario che le δ finiscano nei nulli di $H(f)$

$$\mathrm{sinc}(fT) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\pi f T) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \pi f T = k\pi \quad \Rightarrow \quad f = \frac{k}{T}$$

Per cui $\quad Y(f) = 0 \quad$ se $f_0 = \frac{k}{T}$

Es. 3 – Teoria

Es. 4 – In una scatola di dischetti ci sono 10 dischetti buoni e 10 difettosi. Estraendo a caso 5 dischetti dalla scatola quanto vale la prob. di trovare almeno 2 dischetti guasti? E quella di trovarne esattamente 3?

A = dischetto guasto $\qquad P(A) = P(B) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

B = " buono

$P(A) \to p$, $P(B) \to q$

Almeno 2 dischetti guasti $= P(1 \text{ guasto}) + P(2 \text{ guasti}) = 15p^5$

$$P(1) = \binom{5}{1} p q^4 = \frac{5!}{4!\,1!} p q^4 = 5p^5$$

$$P(2) = \binom{5}{2} p^2 q^3 = \frac{5!}{2!\,3!} p^2 q^3 = 10p^5$$

$$15p^5 = \frac{15}{2^5} = 0.4688$$

$$P(3) = \binom{5}{3} p^2 q^3 = 10p^5 = 0,3125$$

Es 5 Un processo casuale stazionario $N(t)$ ha DSP $S_N(f) = \frac{N_0}{2} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$. Ogni v.a. estratta dal processo ha una ddp uniforme nell'intervallo $[-A, A]$. Quanto vale A?

Per calcolare A ricordiamo che la potenza statistica deve essere uguale all'area della DSP, dunque

$$\frac{(2A)^2}{12} = \frac{N_0}{2} \cdot B \quad \Rightarrow A = \sqrt{\frac{3 N_0 B}{2}}$$

Il processo viene filtrato da un sistema LTI a risposta in frequenza $H(f) = 1 + e^{-j2\pi f T}$. Il processo di uscita viene elevato al quadrato. Sia $M(t)$ il risultato di tale operazione. Quanto vale il valor medio di $M(t)$ nel caso in cui $B = 1/T$?

$$N(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \xrightarrow{\;Y(t)\;} \boxed{(\cdot)^2} \xrightarrow{\;M(t)\;}$$

$$Y(t) = N(t) + N(t-T)$$

$$M(t) = Y^2(t) = [N(t) + N(t-T)]^2 = N^2(t) + N^2(t-T) + 2N(t)N(t-T)$$

$$E\{M(t)\} = 2E\{N^2(t)\} + 2E\{N(t)N(t-T)\}$$

$$= N_0 B + N_0 B \underbrace{\mathrm{sinc}(BT)}_{=0} = N_0 B$$

Es 6 - Si consideri un processo aleatorio ~~Z(t) X(t)~~

$$Z(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t) - Y(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

dove $X(t)$ e $Y(t)$ sono processi aleatori a media nulla,

indip. e con la stessa correlazione $R_X(t_1, t_2) = R_Y(t_1, t_2)$.
Calcolare la correlazione di $Z(t)$ e dimostrare che se $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1)$, vale anche la relazione $R_Z(t_1, t_2) = R_Z(t_2 - t_1)$

$$R_Z(t_1, t_2) = E\{Z(t_1) Z(t_2)\} = E\{[X(t_1) \cos 2\pi f_0 t_1 - Y(t_1) \operatorname{sen} 2\pi f_0 t_1] [X(t_2) \cos 2\pi f_0 t_2 - Y(t_2) \operatorname{sen} 2\pi f_0 t_2]\}$$

80

$$= E\{X(t_1) X(t_2)\} \cos 2\pi f_0 t_1 \cos(2\pi f_0 t_2)$$
$$- E\{X(t_1) Y(t_2)\} \cos 2\pi f_0 t_1 \operatorname{sen} 2\pi f_0 t_2$$
$$- E\{Y(t_1) X(t_2)\} \operatorname{sen} 2\pi f_0 t_1 \cos 2\pi f_0 t_2$$
$$+ E\{Y(t_1) Y(t_2)\} \operatorname{sen} 2\pi f_0 t_1 \operatorname{sen} 2\pi f_0 t_2$$

Per i termini intermedi vale $E\{X(t_1) Y(t_2)\} = E\{X(t_1)\} E\{Y(t_2)\} = 0$

$$R_Z(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) \cos 2\pi f_0 (t_2 - t_1)$$

Se $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1)$ $\qquad R_Z(t_1, t_2) = R_Z(t_2 - t_1)$

COMPITO DEL 21/7/2011

Es 1 - Calcolare energia e potenza del segnale

$x(t) = e^{-t}\, rect\left(\frac{t-1}{2}\right) - e^{-t}\, rect\left(\frac{t-3}{2}\right)$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-t}|^2 \left| rect\left(\frac{t-1}{2}\right) - rect\left(\frac{t-3}{2}\right)\right|^2 dt$$

$$= \int_0^4 e^{-2t} dt = \frac{1-e^{-8}}{2} \qquad P_x = 0$$

Es 2 Calcolare il prodotto di convoluzione $z(t) = x(t) \otimes y(t)$ tra i seguenti segnali: $x(t) = e^{-t}$ e $y(t) = 2 rect\left(\frac{t-4}{2}\right) - rect\left(\frac{t-1}{2}\right)$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\alpha)\, x(t-\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t+\alpha} \left[2 rect\left(\frac{\alpha-4}{2}\right) - rect\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\right] d\alpha$$

$$= 2\int_3^5 e^{-t+\alpha} d\alpha - \int_0^3 e^{-t+\alpha} d\alpha = -2 e^{t-\alpha}\Big|_3^5 + e^{t-\alpha}\Big|_0^2$$

$$= e^{-t}\left[2e^{+3} - 2e^{+5} - 1 + e^{+2}\right]$$

Es 3 - Il segnale $x(t) = e^{-b|t-t_0|}$ viene posto in ingresso ad un sistema LTI ottenendo in uscita il segnale $y(t)$ il cui spettro risulta: $Y(f) = \frac{2b\, e^{-j2\pi f t_0 - 2\pi^2\sigma^2 f^2}}{b^2 + 4\pi^2 f^2}$

con b, σ e t_0 costanti positive. Calcolare la risposta in freq.

del sistema.

Calcoliamo la trasformata di $x(t)$

$$X(f) = \frac{2b\, e^{-j2\pi f t_0}}{b^2+4\pi^2 f^2}$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\cancel{2b e^{-j2\pi f t_0}}}{\cancel{b^2+4\pi^2 f^2}} e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2} \quad \frac{\cancel{b^2+4\pi^2 f^2}}{\cancel{2b e^{-j2\pi f t_0}}}$$

$$= e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2}$$

Es. 4 - Sia data la seguente trasformazione non lineare:

$$Y = g(X) = \begin{cases} 1 & x \geq 2 \\ 0 & -2 \leq x < 2 \\ -1 & x < -2 \end{cases}$$

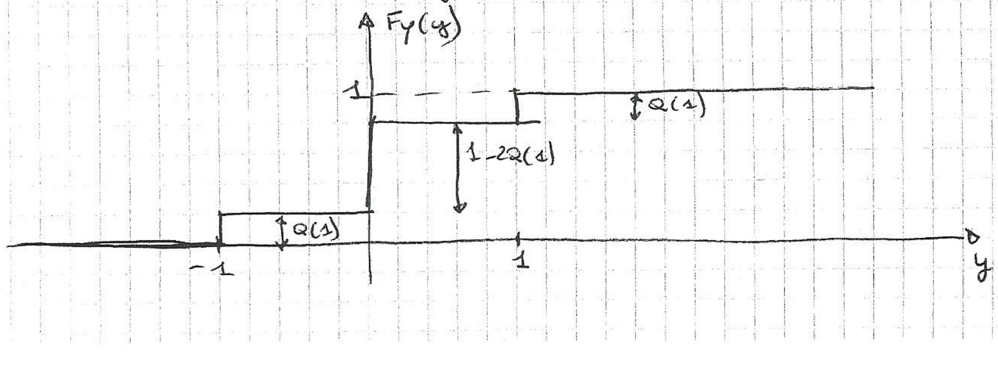
Sia $X \in \mathcal{N}(0,4)$. Calcolare e disegnare la funzione di distribuzione di Y.

$$P(Y=1) = P(X \geq 2) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{x^2}{8}\right] dx = Q(1)$$

$$P(Y=0) = P(-2 \leq X < 2) = 1 - 2Q(1)$$

$$P(Y=-1) = Q(1)$$

$$F_Y(y) = Q(-1)\, u(y+1) + (1-2Q(1))\, u(y) + Q(1)\, u(y-1)$$



Es. 5 – In un negozio di materiale elettrico è possibile trovare cavi la cui lunghezza può essere schematizzata come una v.a. uniforme nell'intervallo $[0.9, 1.1]$ m, $[0.95, 1.05]$ m e $[0.98, 1.02]$ m, a seconda che essi siano stati prodotti negli stabilimenti A, B e C rispettivamente. Sapendo che un cavo proviene da A con prob. 0.5, da B con prob. 0.2 e da C con prob. 0.3, calcolare:

1) la lunghezza media del cavo
2) la prob. che un cavo ~~sia stato~~ prodotto nello stabilimento A si discosti dalla media per più di 1 cm in valore assoluto.
3) la prob. che un cavo sia stato prodotto nello stabilimento A, sapendo che la sua lunghezza si discosta dalla media per più di 1 cm in valore assoluto.

1) $P(A) = 0.5 \quad P(B) = 0.2 \quad P(C) = 0.3$

Scriviamo la densità di prob. di X, lunghezza del cavo

$$f_x(x) = P(A) f_x(x|A) + P(B) f_x(x|B) + P(C) f_x(x|C)$$

$$= 0.5 \, \mathrm{rect}\left(\frac{x-1}{0.2}\right) + 0.2 \, \mathrm{rect}\left(\frac{x-1}{0.1}\right) + 0.3 \, \mathrm{rect}\left(\frac{x-1}{0.04}\right)$$

$$E\{x\} = P(A) E\{x|A\} + P(B) E\{x|B\} + P(C) E\{x|C\} = 1$$

2) $$P(|x-1| > 0.01 | A) = 1 - P(0.99 \le x \le 1.01 | A) = 1 - \frac{0.02}{0.2} = 0.9$$

3) $$P(|x-1| > 0.01) = P(A) P(|x-1| > 0.01 | A) + P(B) P(|x-1| > 0.01 | B) + P(C) P(|x-1| > 0.01 | C)$$

$$P(|x-1| > 0.01 | B) = 1 - \frac{0.02}{0.1} = 0.8$$

$$P(|x-1| > 0.01 | C) = 1 - \frac{0.02}{0.04} = 0.5$$

$P(|x-1|) = 0.5 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.5 = 0.76$

$$P(A \mid |x-1|>0.01) = \frac{P(|x-1|>0.01 \mid A)\,P(A)}{P(|x-1|>0.01)} = \frac{0.9 \cdot 0.5}{0.76} = 0.592$$

Es.6 – Spiegare le differenze tra processi stazionari in senso stretto, del I e II ordine e in senso lato.

COMPITO DEL 15/09/11

Es. 1 – Si calcoli la risposta impulsiva $h(t)$ di un sistema lineare tempo-invariante caratterizzato dalla ~~risposta impulsiva~~ equaz. diff.:

$$\frac{2\,dy(t)}{dt} + 4\,y(t) = 5\,x(t-2T)$$

dove $y(t)$ è il segnale d'uscita e $x(t)$ è quello di ingresso.

$$2\,j2\pi f\,Y(f) + 4\,Y(f) = 5\,X(f)\,e^{-j4\pi fT}$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{5\,e^{-j4\pi fT}}{2(2+j2\pi f)}$$

$$h(t) = \frac{5}{2}\,e^{-2(t-2T)}\,u(t-2T)$$

Es. 2 – Si calcolino i coeff. della serie di Fourier del segnale $x(t) = 2A|\cos(2\pi f_0 t)|$ con $A>0$. Si calcoli la potenza del segnale.

Il segnale ha periodo $T_0/2$ quindi una freq. fondamentale $2f_0$. Poiché il segnale è pari si può scrivere

$$X_k = \frac{8A}{T_0}\int_0^{T_0/4} \cos(2\pi f_0 t)\cos(4\pi k f_0 t)\,dt$$

$$= \frac{4A}{T_0}\int_0^{T_0/4}\left\{\cos\left[2\pi(1+2k)f_0 t\right] + \cos\left[2\pi(1-2k)f_0 t\right]\right\}dt$$

$$X_k = \frac{2A}{\pi}\left\{\frac{1}{1+2k}\sin\left[\frac{\pi}{2}(1+2k)\right] + \frac{1}{1-2k}\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-2k)\right]\right\}$$

$$\sin\left[\frac{\pi}{2}(1+2k)\right] = \sin\left[\frac{\pi}{2}(1-2k)\right] = (-1)^k$$

da cui $\quad X_k = (-1)^k\,\frac{4A}{\pi}\,\frac{1}{1-4k^2}$

$$P_x = \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} 4A^2\cos^2(2\pi f_0 t)\,dt$$

$$= \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} 4A^2\,\frac{1+\cos(4\pi f_0 t)}{2}\,dt = \frac{\cancel{2}4A^2}{\cancel{T_0}}\cdot\frac{\cancel{T_0}}{\cancel{2}_1} = 2A^2$$

Es. 5 - Siano X e Y 2 v.a. con ddp

$$f_{X|Y}(x|y) = y\,e^{-xy}u(x)u(y)$$

e $Y \in U(1,2)$

1) Si calcoli la ddp di X

2) Si dica se X e Y siano indip.

$$f_{XY}(x,y) = f_{X|Y}(x|y)\,f_Y(y)$$

$$= y\,e^{-xy}\,u(x)u(y)\,\mathrm{rect}\left(y-\frac{3}{2}\right)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_1^2 y\,e^{-xy}\,u(x)\,dy$$

$$= \int_x^{2x} \frac{t}{x^2}\,e^{-t}\,u(x)\,dt = \frac{1}{x^2}\,u(x)\left[-t-1\right]e^{-t}\Big|_x^{2x}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[(-2x-1)e^{-2x} + (x+1)e^{-x}\right]u(x)$$

X e Y non sono indip. poiché $f_{XY} \neq f_X f_Y$

Es. 3 - Il segnale $\mathrm{sinc}^2(3t) = x(t)$ viene fatto passare per un filtro passa-basso ideale (fase nulla e ampiezza unitaria) avente banda B. Detto $y(t)$ il segnale all'uscita del filtro, determinare l'energia di $y(t)$ in funzione di B

$$x(t) = \text{sinc}^2(3t)$$

$$\Rightarrow \quad X(f) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{|f|}{3}\right) \text{rect}\left(\frac{f}{6}\right)$$

$$Y(f) = X(f)\, \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$E_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = 2\int_0^B \frac{1}{9}\left(1 - \frac{f}{3}\right)^2 \qquad B < 3$$

$$= \frac{2}{9}\int_0^B \left(1 + \frac{f^2}{9} - \frac{2f}{3}\right) df = \frac{2}{9}\left(B + \frac{B^3}{27} - \frac{B^2}{3}\right)$$

$$E_Y = \frac{2}{9} \quad \text{per } B \geq 3$$

Es. 6 – Date 3 v.a. indip. A, B e Θ aventi distrib. uniforme rispettivamente in $[-1, 1]$, $[-2, 2]$ e $[0, 4\pi]$, si verifichi la stazionarietà in senso lato del processo

$$x(t) = (A + 2B)\cos(300\pi t - \Theta) + n(t)$$

dove $n(t)$ è rumore bianco indip. da A, B e Θ con autocorrelazione $R_N(\tau) = 10\,\delta(\tau)$. Si calcoli poi la DSP

Calcoliamo $E\{x(t)\}$

$$E\{x(t)\} = E\{A + 2B\}\, E\{\cos(300\pi t - \Theta)\} + E\{n(t)\} = 0$$

Calcoliamo ora la correlazione

$$R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)\, x(t_2)\} =$$

$$= E\left\{\left[(A+2B)\cos(300\pi t_1 - \Theta) + n(t_1)\right]\left[(A+2B)\cos(300\pi t_2 - \Theta) + n(t_2)\right]\right\}$$

$$= E\{(A+2B)^2\} \; E\{\cos(300\pi t_1 - \theta)\cos(300\pi t_2 - \theta)\} + R_N(\tau)$$

$$= \frac{E\{(A+2B)^2\}}{2} \cos 300\pi\tau + R_N(\tau)$$

88

Il processo è staz. almeno in senso lato

$$E\{(A+2B)^2\} = E\{A^2\} + 4E\{B^2\} = \frac{17}{3}$$

$$S_x(f) = \frac{17}{12}\left[\delta(f-150) + \delta(f+150)\right] + 10$$

COMPITO DEL 13/6/2012

Es. 4 Nel lancio di due monete non contraffatte si considerino gli eventi $A = \{\text{prima testa}\}$, $B = \{\text{seconda testa}\}$ e $C = \{\text{una testa in totale}\}$. Si dimostri che gli eventi presi a coppie sono indipendenti, ma a terne non lo sono: $P(A,B,C) \neq P(A)P(B)P(C)$

$P(A,B) = P(A)P(B)$ perché i lanci delle 2 monete sono indip.

$P(A,C) = P(A|C)P(C)$

$= P(A)P(C)$ poiché sapere che si ha una testa in totale non dice nulla su quale delle 2 è stata estratta

$P(B,C) = P(B|C)P(C) =$

$P(B)P(C)$ come prima

$P(A,B,C) = P(A,B|C)P(C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$

poiché sapendo che c'è stata una sola testa, l'evento $P(A,B|C)$ ha probabilità nulla

COMPITO 3/7/2012

Es. 1 - Sia dato il segnale periodico $x(t) = \frac{3A}{4}\sin(\pi B t) + \frac{A}{4}\sin(3\pi B t)$. Si calcoli il periodo del segnale, la TSF e il rapporto in dB tra pot. fondam. e III armonica.

Il periodo di $\sin(\pi B t)$ è $\frac{2}{B}$, quello di $\sin(3\pi B t)$ è $\frac{2}{3B}$, quindi $T_0 = \frac{2}{B}$ e $f_0 = \frac{B}{2}$

$$x(t) = \frac{3A}{4}\sin(2\pi f_0 t) + \frac{A}{4}\sin(2\pi(3f_0)t)$$

$$= \frac{3A}{8j}\left[e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}\right] + \frac{A}{8j}\left[e^{j6\pi f_0 t} - e^{-j6\pi f_0 t}\right]$$

$$X_k = \begin{cases} \frac{3A}{8j} & k=1 \\ -\frac{3A}{8j} & k=-1 \\ \frac{A}{8j} & k=3 \\ -\frac{A}{8j} & k=-3 \end{cases} \quad \text{e } \emptyset \text{ altrove}$$

Potenza della fondamentale $P_1 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{9A^2}{16}\sin^2(2\pi f_0 t)\,dt =$

$$= \frac{9A^2}{32} \qquad P_3 = \frac{A^2}{32}$$

$$R_{dB} = \frac{9A^2}{\cancel{32}} \cdot \frac{\cancel{32}}{A^2}\Bigg|_{dB} = 10\log_{10} 9 = 9.54 \text{ dB}$$

Es. 2 Sia dato il sistema LTI la cui risposta in frequenza è $H(f) = \frac{1 - j4\pi f T}{1 + j4\pi f T}$. All'ingresso viene posto il segnale $x(t) = T\,\text{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right)$. Si calcoli l'energia del segnale all'uscita.

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2\,df$$

$$|Y(f)| = |X(f)|\,|H(f)|$$

$|H(f)| = 1$ quindi $E_x = E_y$

$$X(f) = T^2(1 - |f|T)\,\text{rect}\left(\frac{fT}{2}\right)$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 = 2\int_0^{\frac{1}{T}} T^4 (1 - fT)^2\,df = \frac{2}{3}T^3$$

Es. 3 Il segnale $y(t) = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{3\pi f_0 t}{2}\right) - \cos\left(\frac{5\pi f_0 t}{2}\right)$ viene campionato a frequenza $f_c = 2f_0$. Si determini e si disegni la trasf. di Fourier del segnale campionato.

$$Y(f) = \frac{1}{8}\left[\delta\left(f - \frac{3}{4}f_0\right) + \delta\left(f + \frac{3}{4}f_0\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{5}{4}f_0\right) + \delta\left(f + \frac{5}{4}f_0\right)\right]$$

$$\bar{Y}(f) = 2f_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y(f - 2kf_0)$$

Es. 4 - Si consideri la coppia di variabili aleatorie $\{A_1, A_2\}$ ognuna delle quali può assumere solo i valori 0 e 5 con prob. $P(0) = 1/4$ e $P(5) = 3/4$. Sapendo che $P(5,5) = 21/32$ si calcolino anche $P(0,0)$ e $P(0,5)$ e $P(5,0)$.

92

$P(0) = P(0,0) + P(0,5) = P(0,0) + P(5,0)$

$P(0,5) = P(5,0)$

$P(5) = P(5,5) + P(0,5) \Rightarrow P(0,5) = 3/4 - 21/32 = \frac{24-21}{32} = \frac{3}{32}$

$P(0,0) = 1/4 - 3/32 = \frac{5}{32}$

Es 5 - Sia dato il processo $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ con A v.a. normale standard e f_0 det. noto.

Si dica se $X(t)$ è staz. in senso lato

Si calcoli la ddp della gen. v.a. $X(t)$

$E\{X(t)\} = E\{A\}\cos(2\pi f_0 t) = 0$

$R_X(t_1,t_2) = E\{A^2\cos(2\pi f_0 t_1)\cos(2\pi f_0 t_2)\} = \cos(2\pi f_0 t_1)\cos(2\pi f_0 t_2)$

Non è staz. in senso lato

$X(t)$ è ancora una v.a. Gaussiana a valor medio nullo e varianza $\cos^2(2\pi f_0 t)$

Il processo viene mandato all'ingresso di $H(f) = \left(1 - \frac{|f|}{2f_0}\right)\text{rect}\left(\frac{f}{4f_0}\right)$ la cui uscita è $Y(t)$.

3) Si calcoli la ddp di $Y(t)$

All'uscita il processo è

$$Y(t) = A\,|H(f_0)|\cos(2\pi f_0 t + \angle H(f_0)) =$$

$$= \frac{A}{2}\cos(2\pi f_0 t)$$

$Y(t)$ è ancora Gaussiana a valor medio nullo e varianza $\cos^2(2\pi f_0 t)/4$.

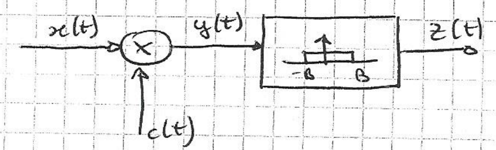
COMPITO DEL 29/01/2013 TLC

Es. 1 - Il segnale $x(t) = B\,\text{sinc}^2(Bt)$ viene moltiplicato per il segnale periodico $c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_0(t-nT)$ con $c_0(t) = \text{rect}\left(\frac{2t}{T}\right)$ e $T = 1/B$. Il segnale risultante $y(t) = x(t)c(t)$ viene filtrato poi con un filtro passa basso ideale di banda B alla cui uscita si ha il segnale $z(t)$. Si calcolino

1) lo spettro del segnale $y(t)$

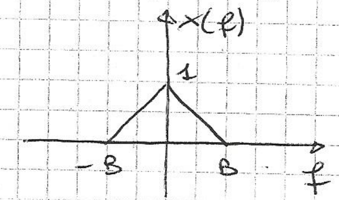
2) lo spettro e l'energia di $z(t)$.

1)



Calcoliamo la trasformata di $x(t)$

$$X(f) = \left(1 - \frac{|f|}{B}\right)\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) = \left(1 - |f|T\right)\text{rect}\left(\frac{fT}{2}\right)$$



$C_k = \frac{1}{T} C_0\left(\frac{k}{T}\right)$ dove $C_0(f)$ è la TCF di $c_0(t)$

$$c_0(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T/2}\right) \iff C_0(f) = \frac{T}{2}\,\text{sinc}\left(f\frac{T}{2}\right)$$

$$C_k = \frac{1}{T}\frac{T}{2}\,\text{sinc}\left(\frac{k}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$

$$C(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

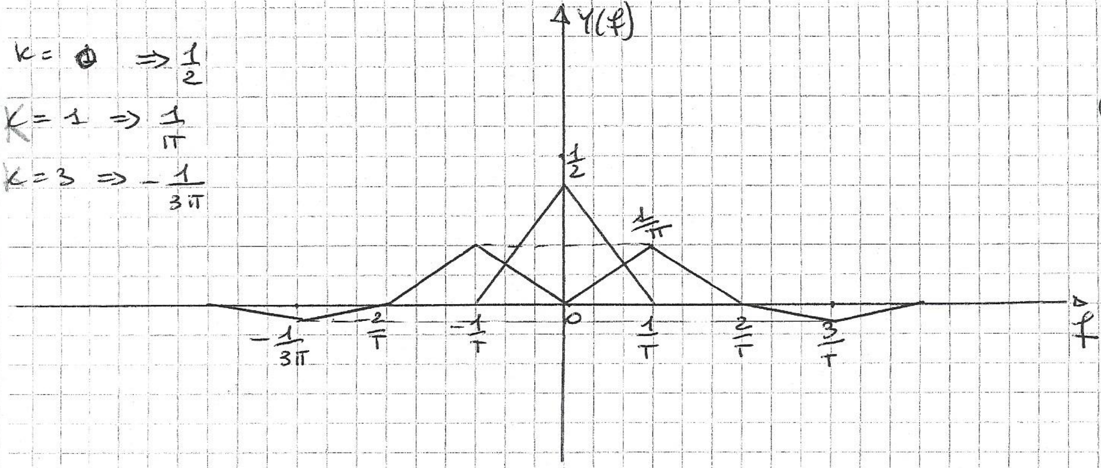
$$\operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \text{ pari} \\ \pm \frac{2}{k\pi} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

$$Y(f) = X(f) \circledast C(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

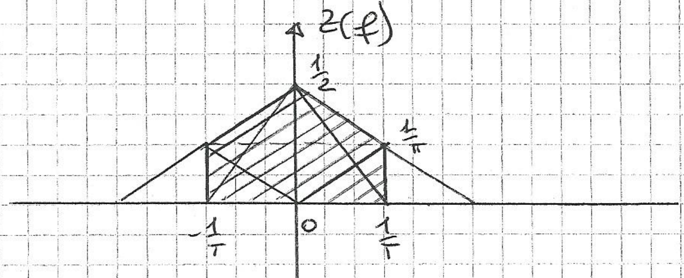
$k = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}$

$k = 1 \Rightarrow \frac{1}{\pi}$

$k = 3 \Rightarrow -\frac{1}{3\pi}$



2) Applichiamo il filtro passa-basso di banda $B = 1/T$



$Z(f)$ è un trapezio

$$Z(f) = \left[\frac{1}{2} - |f|\, T \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)\right] \operatorname{rect}\left(\frac{Tf}{2}\right)$$

$$E_Z = \int_{-\infty}^{+\infty} |Z(f)|^2 \, df \qquad \text{Teo. di Parseval}$$

$$E_Z = 2\int_0^{+\infty} |Z(f)|^2 \, df = 2\int_0^{+\frac{1}{T}} \left[\frac{1}{2} - fT\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right)\right]^2 df$$

$$= 2\int_0^{+\frac{1}{T}} \left[\frac{1}{4} + f^2T^2\,\frac{(\pi-2)^2}{4\pi^2} - \frac{fT}{2\pi}(\pi-2)\right] df$$

$$= 2\left[\frac{f}{4} + \frac{f^3}{3}T^2\,\frac{(\pi-2)^2}{4\pi^2} - \frac{f^2}{4\pi}T(\pi-2)\right]_0^{\frac{1}{T}} = \frac{(\pi+2)^2}{12T\pi^2}$$

Es. 2 – Si determini e si rappresenti graficamente la TCF di

$$x(t) = \sqrt{\frac{1}{B}}\ \mathrm{sinc}(Bt)\cos(2\pi f_0 t) + \sqrt{B}\ \mathrm{rect}(Bt)\sin(2\pi f_0 t)$$

con $f_0 \gg B$. Si calcoli l'energia del segnale $x(t)$.

$$\mathrm{sinc}(Bt) \Longleftrightarrow \frac{1}{B}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

$$\mathrm{rect}(Bt) \Longleftrightarrow \frac{1}{B}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{f}{B}\right)$$

$$X(f) = \frac{1}{B\sqrt{B}}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right) \otimes \left[\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)\right]$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{B}}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{f}{B}\right) \otimes \left[\frac{1}{2j}\,\delta(f-f_0) - \frac{1}{2j}\,\delta(f-f_0)\right]$$

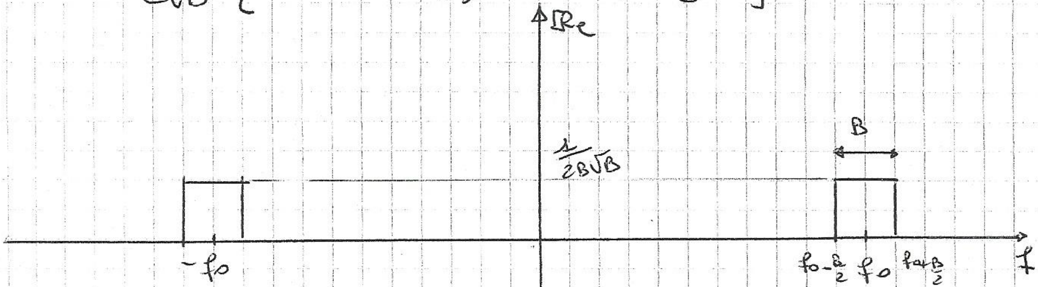
$$= \frac{1}{2B\sqrt{B}}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+f_0}{B}\right)\right]$$

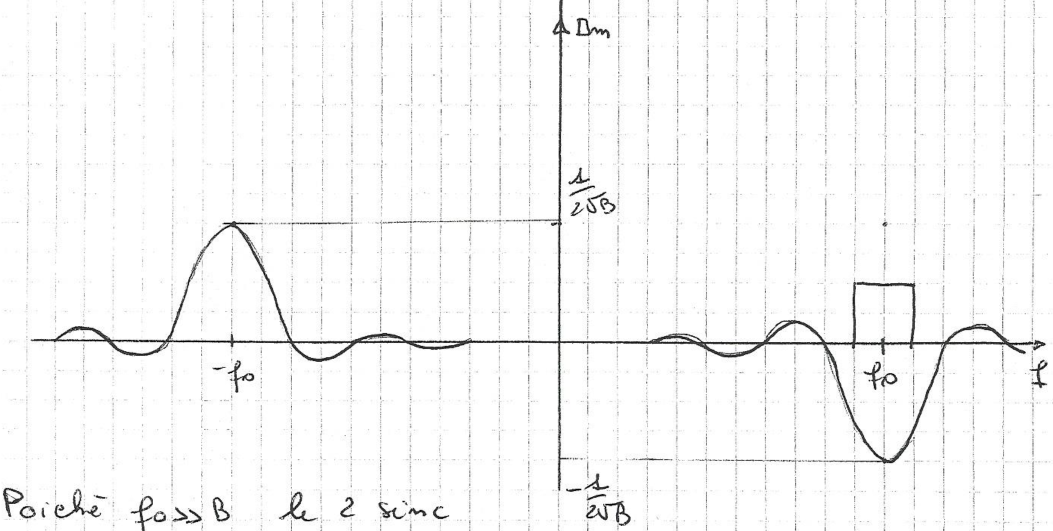
$$-j\,\frac{1}{2\sqrt{B}}\left[\mathrm{sinc}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) - \mathrm{sinc}\left(\frac{f+f_0}{B}\right)\right] =$$

Grafichiamo parte reale e parte immaginaria

$$\mathrm{Re} = \frac{1}{2B\sqrt{B}}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+f_0}{B}\right)\right]$$

$$\mathrm{Im} = -\frac{1}{2\sqrt{B}}\left[\mathrm{sinc}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) - \mathrm{sinc}\left(\frac{f+f_0}{B}\right)\right]$$





Poiché $f_0 \gg B$ le 2 sinc possono considerarsi disgiunte.

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

$$|X(f)|^2 = \mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2$$

$$E_x = E_R + E_I \qquad E_R = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}^2\, df \qquad E_I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Im}^2\, df$$

$$E_R = \frac{1}{4B^2 \cancel{B}} \, 2\cancel{B} = \frac{1}{2B^2}$$

$$E_I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4B} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) - \operatorname{sinc}\left(\frac{f+f_0}{B}\right) \right]^2 df$$

Poiché le 2 sinc possono essere considerate disgiunte

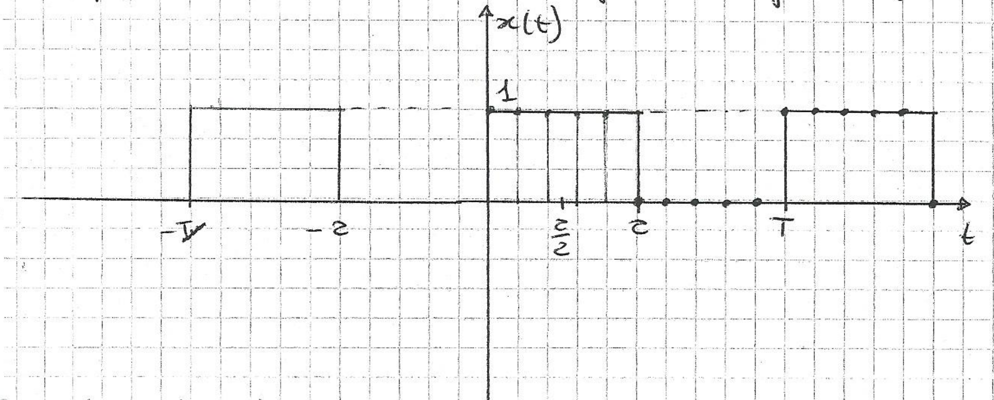
$$\Rightarrow E_I = \frac{1}{4B} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\operatorname{sinc}^2\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f+f_0}{B}\right) \right] df$$

$$= \frac{2}{4B} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{B}\right) df = \frac{2B}{4B} = \frac{1}{2}$$

$$E_x = \frac{1}{2B^2} + \frac{1}{2}$$

COMPITO DEL 19/02/2013 TLC

1 - Un treno di impulsi rettangolari di ampiezza unitaria $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{t-\tau/2-kT}{\tau}\right)$ ha periodo di ripetizione $T=125\mu s$ e durata degli impulsi $\tau=65.5\mu s$. Tale segnale viene campionato a frequenza $f_c=80kHz$, ottenendo una sequenza di campioni: $x(nT_c)$. Trovare la Trasformata di Fourier del segnale campionato.



Risulta dai dati che $\tau = T/2$ e $T_c = \frac{1}{80\cdot 10^3}s = 12.5\mu s$

I campioni per periodo sono dunque 10, come mostrato in figura.

Si può scrivere che $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_0(t-kT)$ dove

$X_0(t) = rect\left(\frac{t-\tau/2}{\tau}\right)$ e $\frac{1}{T}=8kHz$

$x_m = \frac{1}{T} X_0\left(\frac{m}{T}\right)$

$X_0(f) = \tau\, sinc(f\tau)\, e^{-j2\pi f\frac{\tau}{2}}$. Sostituiamo e otteniamo

$x_m = \frac{1}{2} sinc\left(\frac{m}{2}\right) e^{-j\frac{\pi m}{2}}$

la trasformata di Fourier di $x(t)$ è dunque

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) e^{-j\frac{\pi n}{2}} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

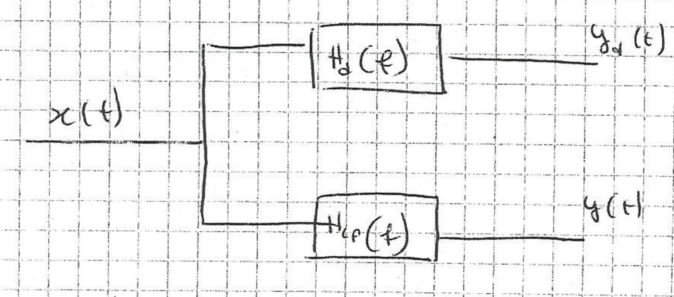
$$\begin{cases} X_n = 0 & n \text{ pari } (\neq 0) \\ X_1 = \frac{1}{2} & \\ X_n = -\frac{1}{n\pi} & n \text{ dispari } \neq 1 \end{cases}$$

Dopo il campionamento

$$\bar{X}(f) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_c}\right) = \qquad \text{con } T_c = 10T$$

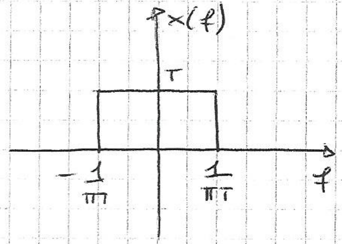
$$= \frac{1}{10T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) e^{-j\frac{\pi n}{2}} \delta\left(f - \frac{n}{T} - \frac{k}{10T}\right)$$

Es. 2 - Il segnale ad energia finita $x(t) = \frac{2}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{2t}{\pi T}\right)$ viene filtrato con 2 sistemi LTI diversi. Il primo è una squadra RC di risposta in frequenza $H_d(f)$. Il secondo è un filtro passa-basso ideale di banda B $\left(B < \frac{1}{\pi T}\right)$ con risposta in frequenza $H_{LP}(f)$ tale che $H_{LP}(0) = H_d(0)$. Posto $\tau = RC$, trovare il valore di B per cui i segnali in uscita ai 2 filtri hanno la stessa energia.



$$x(t) = \frac{2}{\pi} \, \mathrm{sinc}\left(\frac{2t}{\pi T}\right)$$

$$X(f) = T \, \mathrm{rect}\left(\frac{\pi}{2} f T\right)$$



$$H_d(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f \tau} \qquad \text{con } \tau = RC$$

$$Y_d(f) = T \, \mathrm{rect}\left(\frac{\pi}{2} f T\right) \frac{1}{1 + j2\pi f \tau}$$

$$E_{y_d} = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y_d(f)|^2 \, df = T^2 \int_{-\frac{1}{\pi T}}^{\frac{1}{\pi T}} \frac{1}{1 + 4\pi^2 \tau^2 f^2} \, df$$

$$= \frac{T^2}{2\pi\tau} \int_{-\frac{2\tau}{T}}^{\frac{2\tau}{T}} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{T^2}{\pi\tau} \, \mathrm{arctg} \, \frac{2\tau}{T}$$

$$H_d(0) = 1 \implies H_{LP}(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

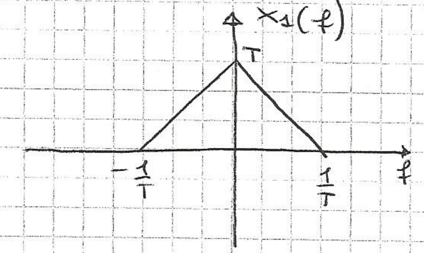
$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} T^2 \, \mathrm{rect}\left(\frac{\pi}{2} f T\right) \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) df = 2T^2 B$$

Affinché $E_{y_d} = E_y$ $\qquad B = \frac{1}{2\pi\tau} \, \mathrm{arctg}\left(\frac{2\tau}{T}\right)$

COMPITO DEL 29/07/2013

Es 1) Calcolare la trasformata continua di Fourier di $x(t) = 2\,\text{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right) \otimes \left[\text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]$.
Fare grafico di ampiezza e fase.

$$2\,\text{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right) \Longleftrightarrow 2T\left(1-|f|T\right)\text{rect}\left(\frac{fT}{2}\right) = X_1(f)$$



$$\text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \Longleftrightarrow T\,\text{sinc}\left(fT-1\right)e^{-j\pi\left(f-\frac{1}{T}\right)T} + T\,\text{sinc}\left(fT+1\right)e^{-j\pi\left(f+\frac{1}{T}\right)T}$$

$$= -T\,\text{sinc}\left(fT-1\right)e^{-j\pi fT} - T\,\text{sinc}\left(fT+1\right)e^{-j\pi fT}$$

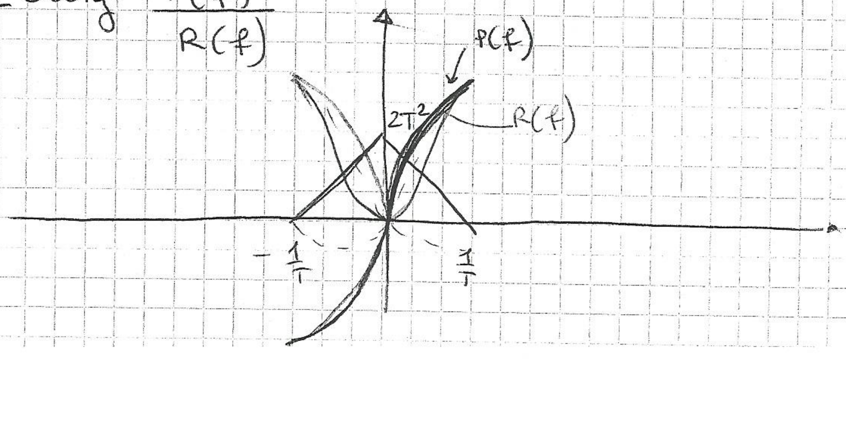
$$= -TR(f)\cos\pi fT + jTP(f)\sin\pi fT$$

con $R(f) = \text{sinc}(fT-1) + \text{sinc}(fT+1)$

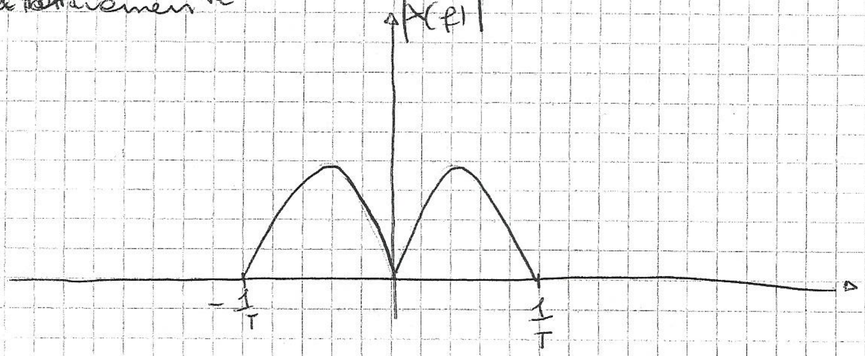
$P(f) = \text{sinc}(fT-1) - \text{sinc}(fT+1)$

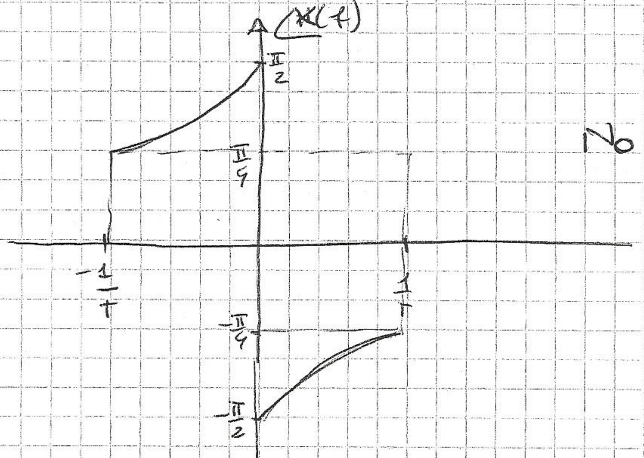
$$|X(f)| = 2T^2\left(1-|f|T\right)\text{rect}\left(\frac{fT}{2}\right)\sqrt{R^2(f)+P^2(f)}$$

$$\angle X(f) = -\text{arctg}\,\frac{P(f)}{R(f)}$$



Qualitativamente





No

. 2 Si supponga di avere un segnale $x(t)$ di spettro
ettangolare e banda B. Tale segnale viene campionato alla
equenza di Nyquist e poi interpolato utilizzando
me segnale base $p(t)$ il segnale di fig. 1 dove $T = 1/B$.
are il grafico del modulo dello spettro del segnale
iterpolato e dire se è possibile da esso estrarre $x(t)$

l segnale $p(t)$ è dato dalla convoluzione di 2 rettangoli

$x_1(t) = rect\left(\frac{t}{T/2}\right)$ e $x_2(t) = \frac{2}{T} rect\left(\frac{t}{T}\right)$

Dunque $P(f) = X_1(f) X_2(f) = \frac{T}{2} sinc\left(f\frac{T}{2}\right) \cdot \frac{2}{T} T \; sinc(fT)$

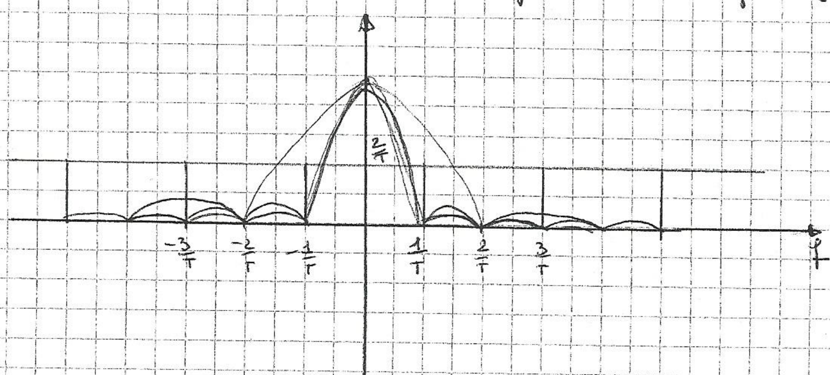
$= T sinc\left(f\frac{T}{2}\right) sinc(fT)$

Dopo il campionamento si sa che

$$\bar{X}(f) = \frac{1}{T_c}\sum_k X\left(f - \frac{k}{T_c}\right)$$

Nel nostro caso $T_c = \frac{T}{2}$ poiché $\frac{1}{T_c} = f_c = 2B = \frac{2}{T}$

Disegniamo il modulo dello spettro del segnale



Il segnale $x(t)$ si potrebbe ricavare ponendo all'uscita del sistema un filtro con risposta in freq.

$$H(f) = \frac{K}{\text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right)\sin(fT)}\ \text{rect}\left(\frac{fT}{2}\right)$$

Es. 3 Si supponga che un test di lab. per individuare una certa malattia dia i seguenti risultati.

Siano $A = \{$la persona sottoposta al test è malata$\}$

$B = \{$il risultato del test è positivo$\}$

Si sa che $P(B|A) = 0.99$, $P(B|\bar{A}) = 0.005$ e lo 0.1% della popolaz. ha effettivamente contratto la malattia. Qual è la prob. che una persona abbia la malattia dato che il risultato del test è positivo

Stiamo cercando $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

$$P(A) = \frac{0.1}{100} = 0.001 \qquad P(B|A) = 0.99$$

$$P(B) = P(B|A)\,P(A) + P(B|\bar{A})\,P(\bar{A}) = 0.99 \cdot 0.001 + 0.005 \cdot 0.999$$
$$= 0.005985$$

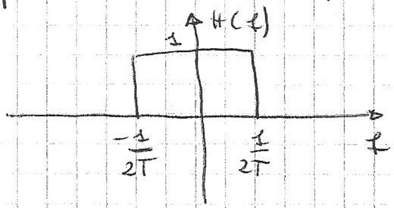
$$P(A|B) = \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.005985} \simeq 0.1654$$

Es. 4 Il processo Gaussiano estaz. $N(t)$ avente PSD $S_N(f) = N_0/2$ viene inviato in ingresso al filtro la cui risposta impulsiva è data da:

$$h(t) = \frac{1}{T}\,\mathrm{sinc}(t/T)$$

Il processo all'uscita $x(t)$ viene campionato per $t=0$
Si chiede di calcolare la prob. di $x > \sqrt{N_0/T}$ dove $X = x(0)$

$$H(f) = \mathrm{rect}(fT)$$



$$S_x(f) = \frac{N_0}{2}\,\mathrm{rect}(fT)$$

da cui $P_x = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{T} = \frac{N_0}{2T}$ $\quad P_x$ è anche la varianza di $x = x(0)$ la cui ddp è data da

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

$$P\left(x \geq \sqrt{\frac{N_0}{T}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{\frac{N_0}{T}}}{\sqrt{\frac{N_0}{2T}}}\right) = Q(\sqrt{2})$$