Dispensa di

Elettrotecnica

(Dai circuiti in continua a Laplace)

Autore: Gabriele Frassi

Università di Pisa
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Corso di Laurea triennale in Ingegneria Informatica

prof. Emanuele Crisostomi

SOMMARIO DISPENSA

1 UNIMAP (A.A.2021-2022)

1. Mar 28/09/2021 15:00-17:00 (*2:0 h*) lezione: Introduzione ai contenuti dell'insegnamento. Definizione delle principali grandezze elettriche. (Emanuele Crisostomi)
2. Gio 30/09/2021 10:30-11:30 (*1:0 h*) lezione: Principi di Kirchhoff. Proprietà dei bipoli elettrici. Definizione di un resistore. (Emanuele Crisostomi)
3. Ven 01/10/2021 09:30-11:30 (*2:0 h*) lezione: Resistori: collegamenti serie, parallelo, triangolo e stella. Esercizi di calcolo di una resistenza vista. (Emanuele Crisostomi)
4. Mar 05/10/2021 15:00-17:00 (*2:0 h*) lezione: Generatori ideali e reali di tensione e corrente. Generatori pilotati. Partitori di tensione e corrente. (Emanuele Crisostomi)
5. Gio 07/10/2021 10:30-11:30 (*1:0 h*) lezione: Principio di sovrapposizione degli effetti. (Emanuele Crisostomi)
6. Ven 08/10/2021 09:30-10:30 (*1:0 h*) lezione: Metodi generali per la risoluzione di un circuito: metodo delle correnti di ramo (anche in presenza di generatori di corrente). (Emanuele Crisostomi)
7. Ven 08/10/2021 10:30-11:30 (*1:0 h*) esercitazione: Applicazioni del metodo delle correnti di ramo; calcolo della resistenza vista; applicazioni del principio di sovrapposizione degli effetti. (Emanuele Crisostomi)
8. Mar 12/10/2021 15:00-17:00 (*2:0 h*) lezione: Teoremi di Thevenin e di Norton. Soluzione di esercizi per il calcolo di equivalenti Thevenin/Norton anche in presenza di generatori pilotati. (Emanuele Crisostomi)
9. Gio 14/10/2021 10:30-11:30 (*1:0 h*) lezione: Dimostrazione teorema di Thevenin. Metodi generali per la risoluzione dei circuiti: metodo delle correnti di maglia. (Emanuele Crisostomi)
10. Ven 15/10/2021 09:30-10:30 (*1:0 h*) esercitazione: Esercizi ed applicazioni del metodo delle correnti di maglia. (Emanuele Crisostomi)
11. Ven 15/10/2021 10:30-11:30 (*1:0 h*) lezione: Metodi generali per la risoluzione dei circuiti: metodo delle tensioni di nodo. Soluzione in presenza di generatori di tensione ideali e reali. (Emanuele Crisostomi)
12. Mar 19/10/2021 15:00-16:00 (*1:0 h*) esercitazione: Applicazione dei metodi delle correnti di maglia e tensioni di nodo per calcolo di Thevenin/Norton equivalenti. (Emanuele Crisostomi)
13. Mar 19/10/2021 16:00-17:00 (*1:0 h*) lezione: Condensatori: relazioni costitutive, relazioni tensione-corrente, potenza ed energia. (Emanuele Crisostomi)
14. Gio 21/10/2021 10:30-11:30 (*1:0 h*) lezione: Induttori ed induttori mutuamente accoppiati: relazioni costitutive, relazioni tensione-corrente, potenza ed energia. (Emanuele Crisostomi)
15. Ven 22/10/2021 09:30-11:30 (*2:0 h*) lezione: Generalità sulle reti in regime periodico sinusoidale. Definizione di fasore. Metodo fasoriale: legami tensione-corrente in resistori, induttori e condensatori. (Emanuele Crisostomi)
16. Mar 26/10/2021 15:00-17:00 (*2:0 h*) lezione: Applicazione del metodo delle correnti di ramo con i fasori. Triangoli delle impedenze e delle ammettenze. (Emanuele Crisostomi)
17. Gio 28/10/2021 10:30-11:30 (*1:0 h*) lezione: Valore efficace di una corrente/tensione. Potenze a regime periodico sinusoidale: potenza istantanea, potenza attiva, potenza reattiva, potenza apparente. (Emanuele Crisostomi)
18. Ven 29/10/2021 09:30-10:30 (*1:0 h*) lezione: Potenza complessa, triangolo delle potenze. (Emanuele Crisostomi)
19. Ven 29/10/2021 10:30-11:30 (*1:0 h*) esercitazione: Risoluzione di passati esercizi d'esame sui circuiti a regime periodico sinusoidale. (Emanuele Crisostomi)
20. Mar 02/11/2021 15:00-16:00 (*1:0 h*) lezione: Teorema di Tellegen e teorema di Boucherot con dimostrazione. Potenza complessa negli induttori mutuamente accoppiati. (Emanuele Crisostomi)
21. Mar 02/11/2021 16:00-17:00 (*1:0 h*) esercitazione: Risoluzione di vecchi testi d'esame sui circuiti a regime periodico sinusoidale. (Emanuele Crisostomi)
22. Gio 04/11/2021 10:30-11:30 (*1:0 h*) esercitazione: Risoluzione di esercizi di esame per circuiti in continua e circuiti a regime periodico sinusoidale. (Emanuele Crisostomi)

23. Ven 05/11/2021 09:30-10:30 (*1:0 h*) esercitazione: Risoluzione di esercizi di esame per circuiti in continua e circuiti a regime periodico sinusoidale. (Emanuele Crisostomi)
24. Ven 05/11/2021 10:30-11:30 (*1:0 h*) lezione: Trasformazione topologica di due induttori mutuamente accoppiati in tre induttori senza mutuo accoppiamento. Componenti multipoli, definizione di porta. Reti a due porte. Parametri Z: circuito equivalente e determinazione dei parametri. (Emanuele Crisostomi)
25. Mar 09/11/2021 15:00-17:00 (*2:0 h*) lezione: Parametri Z: Reti reciproche e simmetriche. Circuito equivalente in caso di rete reciproca. Esercizio svolto. Parametri Y: circuito equivalente, anche in caso di rete reciproca. Determinazione dei parametri ed esercizio svolto. (Emanuele Crisostomi)
26. Gio 11/11/2021 10:30-11:30 (*1:0 h*) lezione: Parametri h: circuito equivalente e determinazione dei parametri. Equivalenza tra circuiti a due porte espressi con diverse parametrizzazioni, e parametri h in caso di rete reciproca. Esercizio svolto. (Emanuele Crisostomi)
27. Ven 12/11/2021 09:30-11:30 (*2:0 h*) lezione: Parametri T: circuito equivalente e determinazione dei parametri. Condizione di reciprocità. Esercizio svolto. Collegamenti fra doppi bipoli: collegamenti serie, parallelo, cascata e ibrido serie/parallelo. (Emanuele Crisostomi)
28. Mar 16/11/2021 15:00-17:00 (*2:0 h*) esercitazione: Risoluzione di esercizi di esame sui circuiti a due porte. (Emanuele Crisostomi)
29. Gio 18/11/2021 10:30-11:30 (*1:0 h*) lezione: Introduzione ai fenomeni transitori nelle reti elettriche: equazioni differenziali associate e calcolo delle condizioni iniziali. (Emanuele Crisostomi)
30. Ven 19/11/2021 09:30-11:30 (*2:0 h*) lezione: Trasformata di Laplace e sue proprietà. Trasformata inversa di Laplace: richiami all'espansione in fratti semplici delle funzioni razionali fratte. Poli reali semplici. (Emanuele Crisostomi)
31. Mar 23/11/2021 15:00-16:00 (*1:0 h*) esercitazione: Soluzione di esercizi sui transitori nei circuiti utilizzando la trasformata di Laplace. (Emanuele Crisostomi)
32. Mar 23/11/2021 16:00-17:00 (*1:0 h*) lezione: Antitrasformata di Laplace in presenza di poli complessi coniugati, e in presenza di numeratore e denominatore di pari grado. (Emanuele Crisostomi)
33. Gio 25/11/2021 10:30-11:30 (*1:0 h*) lezione: Antitrasformata di Laplace nel caso di poli con molteplicità maggiore di uno. Soluzione di esercizio sui transitori. (Emanuele Crisostomi)
34. Ven 26/11/2021 09:30-11:30 (*2:0 h*) esercitazione: Soluzione di esercizi di esame sui transitori, anche utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti. (Emanuele Crisostomi)
35. Mar 30/11/2021 15:00-17:00 (*2:0 h*) esercitazione: Soluzione di esercizi di esame sui transitori, anche utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti. (Emanuele Crisostomi)
36. Gio 02/12/2021 10:30-11:30 (*1:0 h*) esercitazione: Soluzione di esercizi di esame sui transitori, anche utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti. (Emanuele Crisostomi)
37. Ven 03/12/2021 09:30-11:30 (*2:0 h*) lezione: Studio dei circuiti magnetici. Legge di Hopkinson. Trasformatore ideale. (Emanuele Crisostomi)
38. Mar 07/12/2021 15:00-17:00 (*2:0 h*) lezione: Trasformatore reale: circuito equivalente e determinazione dei parametri tramite prova a vuoto e prova in corto circuito. (Emanuele Crisostomi)
39. Gio 09/12/2021 10:30-11:30 (*1:0 h*) lezione: Conversione elettromeccanica dell'energia: trasduttori reali a bobina mobile. Leggi "Bli" e "Blu" e calcolo della velocità a regime. (Emanuele Crisostomi)
40. Ven 10/12/2021 09:30-11:30 (*2:0 h*) lezione: Campo magnetico rotante. Macchina asincrona: principio di funzionamento e circuito equivalente. (Emanuele Crisostomi)
41. Mar 14/12/2021 15:00-17:00 (*2:0 h*) lezione: Determinazione parametri del circuito equivalente di una macchina asincrona. Funzionamento da generatore, motore e freno. Calcolo della coppia e coppia massima. Rendimento. (Emanuele Crisostomi)
42. Gio 16/12/2021 10:30-11:30 (*1:0 h*) esercitazione: Esercitazione finale per la prova scritta di Elettrotecnica. Lezione tenuta esclusivamente online a causa della chiusura del Polo F. (Emanuele Crisostomi)
43. Ven 17/12/2021 09:30-11:30 (*2:0 h*) esercitazione: Esercitazione finale per la prova scritta di Elettrotecnica. (Emanuele Crisostomi)

2 INFORMAZIONI SUL CORSO E RIFLESSIONI DELL'AUTORE

Il libro del corso è *Lezioni di Elettrotecnica* del prof. Marco Raugi, edito dalla casa editrice dell'ateneo *Pisa University Press*.

Copertina del libro di Raugi

- Segue l'ordine degli argomenti adottato nel corso
- Adotta la simbologia tipica della tradizione pisana.

Il libro è utile per rimanere al passo e correggere eventuali errori nei nostri appunti, ma non è fondamentale averlo per il superamento dell'esame

Per quanto riguarda l'eserciziario il docente consiglia caldamente di limitarsi agli esercizi presenti sul suo sito personale (dove sono disponibili prove passate): https://people.unipi.it/emanuele_crisostomi/didattica/

La prima parte dell'esame consiste in uno scritto di quattro esercizi:

- **Primo esercizio**.
  Il primo esercizio consiste in uno dei seguenti:
  - individuazione dell'equivalente Thevenin,
  - individuazione dell'equivalente Norton,
  - calcolo della potenza erogata/dissipata da un particolare bipolo.

  I circuiti presentanti per l'equivalente Thevenin e l'equivalente Norton presentano sempre un generatore pilotato.
- **Secondo esercizio**.
  Esercizi dove si utilizzano i fasori. Tra le possibili cose abbiamo:
  - individuazione dell'andamento della corrente (passante da un ramo) nel dominio del tempo
  - individuazione dell'andamento della tensione (rispetto a un particolare bipolo o ramo) nel dominio del tempo;

  Solitamente l'esercizio richiede anche il calcolo di potenze in regime periodico sinusoidale: potenza attiva, potenza reattiva, potenza apparente, potenza complessa. Altra tipologia su cui tenere occhio (novità): determinare cose partendo da una potenza complessa (di cui fornisce il valore). Ogni tanto presenti esercizi dove è estremamente utile applicare il teorema di Boucherot.
- **Terzo esercizio**.
  Il terzo esercizio prevede una risoluzione di un circuito dove sono presenti transitori. In ogni caso si ha risoluzione con trasformate di Laplace e sviluppo in fratti semplici. Due tipologie:
  - generatori che erano tensioni e/o correnti discontinue;
  - interruttori che si aprono/chiudono all'istante $t = 0$ provocando un transitorio.

  Possibile anche una fusione di entrambe le tipologie.

- **Quarto esercizio**.
  Circuiti a due porte. Viene sempre richiesto il calcolo di una matrice dei parametri relativa a una particolare parametrizzazione (Z, Y, H, T). In alcuni casi si limita a chiedere solo questo, in altri potrebbe chiedere anche:
    - calcolo della matrice dei parametri di un circuito a due porte ottenuto dall'interconnessione di due circuiti a due porte (serie, parallelo, ibrido, a cascata);
    - collegamento di generatori e impedenze alle porte del circuito, esercizio possibile è il calcolo della potenza erogata / dissipata dall'impedenza.

A seguito dello scritto la prova d'esame prevede un orale (che in realtà è un altro scritto):

- lo studente deve rispondere a tre domande scritte
- la prima domanda è comune per tutti gli studenti esaminati e riguarda le macchine elettriche (due macro-argomenti, macchina rudimentale e macchina asincrona)
- le due domande rimanenti variano da persona a persona (il professore fornisce una domanda dopo che lo studente ha consegnato la risposta scritta alla domanda precedente);

Non c'è un tempo particolare per rispondere a ciascuna domanda (ognuno si muove coi suoi tempi), ma è chiaro che non si può andare per le lunghe. Dopo aver consegnato tutte e tre le domande il professore procede a una lettura delle risposte con lo studente, ponendo ulteriori quesiti in caso di dubbio.

<u>Osservazione</u>.

- La dispensa raccoglie la teoria dalle prime lezioni ai circuiti con transitorio (Laplace). Ho scelto di non includere i miei appunti sulle macchine elettriche perché non li ritengo di qualità adeguata.
- La dispensa presenta tutte le nozioni teoriche necessarie per affrontare lo scritto. Sono sufficienti le spiegazioni del professore (il libro di Raugi è utile per piccoli chiarimenti, ma non per studiare interi argomenti).
- La dispensa presenta diversi esercizi accompagnati da spiegazione, utili in caso di dubbi sul procedimento.
    - È indispensabile fare moltissimi esercizi: non c'è necessità di prendere ulteriori libri, bastano le prove passate fornite dal professore sul suo sito web. **<u>Non ho posto nella dispensa esercizi per ogni possibile tipologia</u>** (occhio su circuiti a due porte e Laplace).
    - È vitale riuscire a minimizzare gli errori di calcolo e avere le idee ben chiare su come si pongono i segni (applicazione dei principi di Kirkhoff, differenza tra riferimenti associati e non associati): sbagliare queste cose all'esame è **mortale**.
- Partecipate alla correzione post-scritto e fatevi un'idea chiara di cosa avete sbagliato: le domande individuali all'orale dipenderanno dagli errori nel vostro scritto.

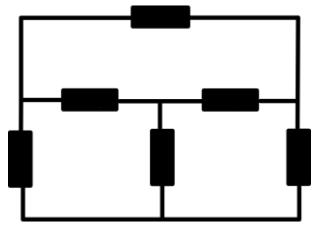
3 INTRODUZIONE ALL'ELETTROTECNICA

3.1 Cosa si intende per elettrotecnica

L'elettrotecnica studia la teoria dei circuiti elettrici che discende dalle leggi di Maxwell. Ricordiamo che queste leggi descrivono l'andamento dei campi elettrici e magnetici nel tempo e nello spazio.

- In generale risolvere le equazioni di Maxwell significa dover risolvere equazioni differenziali, ergo calcoli molto complessi. Certe situazioni richiedono addirittura l'uso di metodi numerici (Calcolo numerico).
- **Buone notizie!** Le equazioni di Maxwell si semplificano drasticamente nel contesto dei circuiti elettrici, per le ragioni spiegate di seguito.

3.2 Circuiti a parametri concentrati



Consideriamo il circuito a lato, dove:

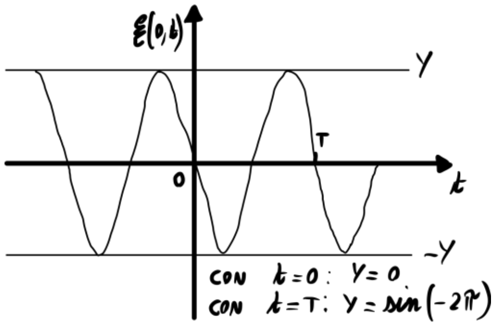
- i rettangolini sono dispositivi elettrici.
- i dispositivi sono collegati tra loro per mezzo di linee elettriche

Scriviamo l'equazione di un'onda che si propaga in un'unica direzione.
Otteniamo un'equazione a due variabili dipendente dal tempo e dalla posizione all'interno del circuito

$$\xi(x,t) = y\,sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right)$$

Dove λ e T sono valori costanti in un particolare circuito (dipendono dalle caratteristiche di questo). Fare un grafico a tre dimensioni è cosa estremamente antipatica. Solitamente si fissa una delle due variabili e si realizza un grafico a due dimensioni (se poniamo un valore costante otterremo la classica funzione a singola variabile su cui sappiamo lavorare tranquillamente).

- **Poniamo x costante e nullo**.
  Fissiamo un punto nello spazio. L'equazione risultante è la seguente



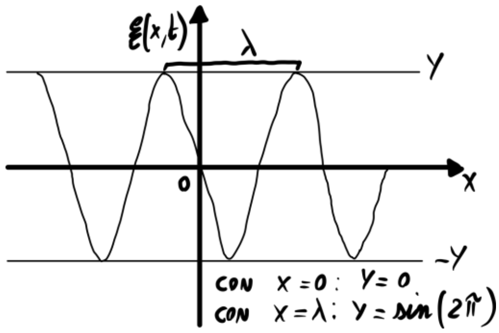
$$\xi(0,t) = y\,sin\left(-\frac{2\pi}{T}t\right)$$

  Abbiamo un'equazione periodica dove il periodo è T, che è valore temporale. Come lo troviamo?

$$\xi(0,T) = y\,sin\left(-\frac{2\pi}{T}T\right) = y\,sin(-2\pi) = 0$$

  Uno dei valori t^* tale per cui $\xi(0,t^*) = 0$. Si distinguano, ovviamente gli altri casi dove $\xi(0,t) = 0$ (ad esempio quando $t = 0$).

- **Poniamo t costante e nullo**.
  Fissiamo un istante temporale. L'equazione risultante è la seguente



$$\xi(x,0) = y\,sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

  Adesso il periodo della funzione è λ, che non è un valore temporale ma la distanza tra due fronti d'onda successivi. Proviamo a calcolare λ: poniamo come velocità di propagazione dell'onda la velocità della luce c e come frequenza quella tipica della corrente nelle abitazioni ($f = 50Hz$)

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{300 \cdot 10^6 \text{ m/s}}{50 \text{ Hz}} = 6 \cdot 10^3 \text{ Km}$$

  Ricordiamo che l'unità di misura della frequenza è Hz, cioè s^{-1}.

Perché questi ragionamenti ci piacciono? Noi lavoriamo su circuiti di dimensioni nell'ordine dei metri, non siamo in grado di apprezzare variazioni della funzione rispetto allo spazio

$$d \ll \lambda$$

Questo significa che possiamo porre x costante e nullo come fatto prima! Si parla di **circuiti a parametri concentrati** (in inglese *lumped circuit*, in un certo senso è come se avessi un circuito concentrato in un unico punto).

La cosa è molto simile all'approssimazione al punto materiale vista nel corso di Fisica generale, e come in Fisica è possibile ritrovarsi in circostanze che non rendono più applicabile tale approssimazione:

- cresce d (Si pensi alle linee di trasmissione della corrente elettrica, distanze molto grandi che non sono estremamente piccole rispetto a λ)
- diminuisce λ (Si pensi alle trasmissioni di segnali, che adottano frequenze molto elevate).

3.3 Grandezze elettriche

3.3.1 Corrente elettrica

La corrente elettrica consiste nella quantità di carica che attraversa un componente di un circuito nell'unità di tempo, detta in altro modo consiste *nella variazione di carica nell'unità di tempo*.

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q_2(t_2) - q_1(t_1)}{t_2 - t_1}$$

L'unità di misura è l'Ampere (A), il verso della corrente è quello che avrebbero le cariche positive se si muovessero (ricordarsi che la corrente c'è perché si muovono le cariche negative, non le positive).

3.3.2 Tensione (o differenza di potenziale)

Sappiamo da Fisica che la tensione consiste nel rapporto tra il lavoro per portare una carica positiva q da un punto iniziale A ad un punto finale B e la carica q stessa

$$v_{AB}(t) = \frac{L_{AB}}{q} = \frac{U_A - U_B}{q} = \frac{U_A}{q} - \frac{U_B}{q} = v_A(t) - v_B(t)$$

L'unità di misura è il Volt (V), che consiste nel Joule su Coulomb, o nel Watt su Ampere. La tensione può essere posta anche come una differenza tra potenziali (il potenziale nel punto A e il potenziale nel punto B).

- **Esempio per la comprensione**.
  Cerchiamo di fare un esempio per avere le idee più chiare, prendendo a riferimento l'energia potenziale gravitazionale. Supponiamo di confrontare le altitudini di Pisa (4) e Firenze (50).
  - Si prende un riferimento comune: il suolo (altitudine zero, quella del livello del mare).
  - Vogliamo muoverci da una città a un'altra.
  - Calcoliamo la differenza di energia potenziale (confronto possibile perché abbiamo scelto lo stesso riferimento)
    - Se ci spostiamo da Firenze a Pisa la variazione è positiva: $50 - 4 = 46$ (Discesa)
    - Se ci spostiamo da Pisa a Firenze la variazione è negativa: $4 - 50 = 46$ (Salita)
- **Interpretazione del segno della tensione**.
  Torniamo a ragionare in termini di tensione.
  - Se $v_{AB} > 0$ allora il verso di percorrenza della corrente coincide col verso delle grandezze del campo elettrico (*discesa*).
  - Se $v_{AB} < 0$ allora è necessario il lavoro di forze esterne rispetto al campo elettrico per spostare una carica q dal punto A al punto B (*salita*). Per la formula vista prima avere tensione negativa significa avere lavoro $L_{AB} < 0$

  Non è possibile sapere a priori il segno di v_{AB}. Quello che facciamo nella risoluzione degli esercizi è fare un'ipotesi iniziale: saranno poi i calcoli (per mezzo del segno) a dirci se abbiamo scelto il verso giusto.

3.3.3 Potenza elettrica (o potenza istantanea)

Definiamo la potenza istantanea come il prodotto tra intensità di corrente e velocità istantanea (si parla di potenza istantanea perché non è assolutamente detto che sia costante)

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

L'unità di misura è il Watt (W), cioè il Volt per Ampere. Attenzione al segno (si veda poco più avanti la sezione sui bipoli elettrici).

3.3.4 Energia elettrica

L'energia consiste nell'integrale della potenza rispetto al tempo

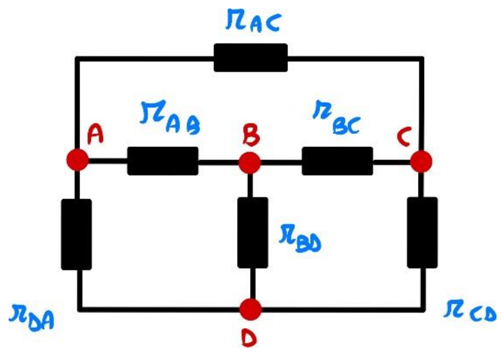
$$w(t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau$$

L'unità di misura è il Joule (J), ma molto spesso si parla di Watt per secondo (W · s).

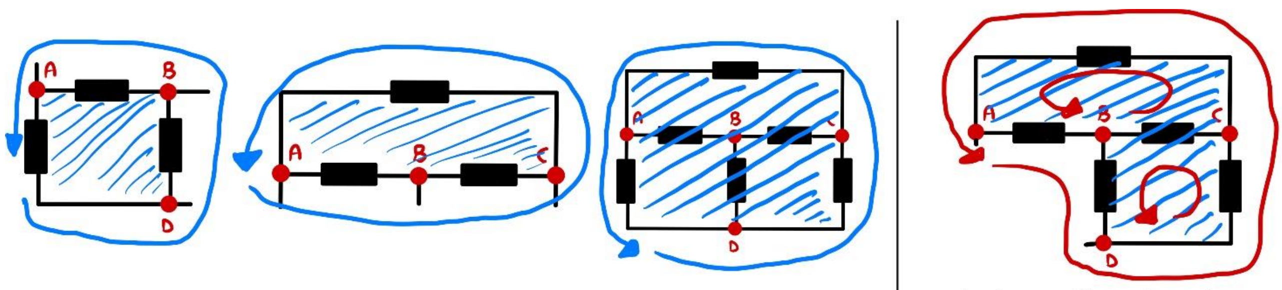
La definizione è estremamente generale e non strettamente correlata all'elettrotecnica. Se la potenza è costante otterremo (l'ovvio) che l'energia è il prodotto tra potenza costante e intervallo di tempo $t - t_0$.

3.4 Nodi e maglie

Riprendiamo la figura utilizzata per definire il circuito a parametri concentrati e diamo un po' di nomi



- In rosso sono evidenziati i **nodi** (in figura A, B, C, D)
- I nodi sono collegati per mezzo di **rami** (in figura $r_{AC}, r_{AB}, r_{BC}, r_{CD}, r_{BD}, r_{DA}$). Ogni nodo è intersezione di almeno tre rami.
- Dicesi **maglia** *un insieme di rami distinti che formano un percorso chiuso, dove partendo da uno dei possibili nodi ritorno allo stesso passando da ogni ramo dell'insieme una e una sola volta*.



Esempi di maglie

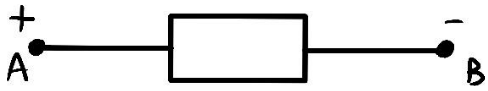
Insieme di rami escluso dalla definizione di maglia

L'esempio a lato non è maglia perché esistono casi in cui scegliendo un particolare nodo non sono in grado di trovare un percorso dove attraverso tutti i rami dell'insieme (ad esempio il nodo B).

3.5 Bipoli elettrici

3.5.1 Cosa sono e perché sono detti così

Gli elementi costitutivi di un circuito elettrico sono detti Bipoli elettrici per la presenza dei poli A e B (detti anche morsetti) con cui il dispositivo comunica col mando esterno.



Per ogni Bipolo elettrico individueremo:

- proprietà;
- leggi che legano tensione ed intensità di corrente.

Per convenzione si distingue un polo positivo da un polo negativo: il primo è quello con potenziale maggiore, il secondo quello con potenziale minore.

3.5.2 Segno della potenza istantanea

Attenzione a come si prendono i riferimenti rispetto a un particolare Bipolo: riferimenti diversi implicano segno del risultato diverso e interpretazione diversa del segno della potenza. Riprendiamo la figura precedente:

- la potenza considerata sarà $p(t) = V_{AB}(t) \cdot i(t)$
- si ha indeterminatezza di segno sia rispetto alla tensione, sia rispetto alla corrente.

Si consideri verso della corrente e potenziali agli estremi di un qualunque Bipolo.

Riferimenti associati (corrente dal polo + al polo -)
- Se P > 0 si ha dissipazione di potenza.
- Se P < 0 si ha erogazione di potenza.

Riferimenti non associati (corrente dal polo - al polo +)
- Se P < 0 si ha dissipazione di potenza.
- Se P > 0 si ha erogazione di potenza.

Se la potenza è erogata si ha qualcuno che eroga potenza elettrica per fare andare le cariche nella direzione opposta rispetto a quella dove andrebbe in virtù del campo elettrico.

3.5.3 Proprietà dei Bipoli

I dispositivi elettrici possono assumere le seguenti proprietà:

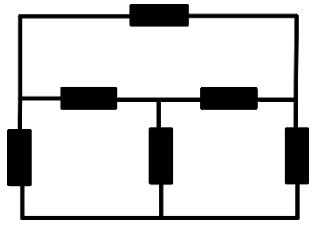
- ***Linearità***.
  Il Bipolo è lineare se la sua equazione costitutiva è lineare. Con equazione costitutiva si intende l'equazione che lega la tensione all'intensità di corrente.
  $$v(t) = A \cdot i(t)$$
  La formula è rappresentabile graficamente come una retta passante per l'origine. Il coefficiente angolare è una costante dipendente dal Bipolo trattato.
  Un circuito è detto lineare se lo sono tutte le sue componenti, vedremo solo circuiti lineari.

- ***Tempo-invarianza***.
  Il Bipolo è tempo-invariante se la curva rappresentante l'equazione costitutiva è costante nel tempo.
- ***Con memoria***.
  Il Bipolo si dice con memoria se i valori di tensione e corrente a un istante t dipendono dai valori di tensione e correnti assunti in istanti temporali precedenti.
- ***Passività***.
  Un Bipolo è detto passivo se, presi riferimenti associati, l'energia $w(t)$ è sempre maggiore o uguale a zero. L'energia si calcola, ricordiamo, integrando la potenza

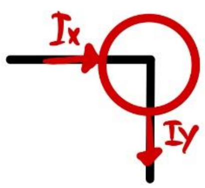
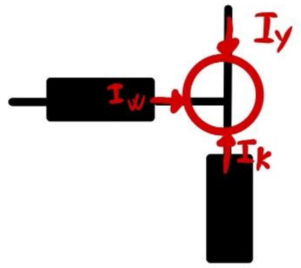
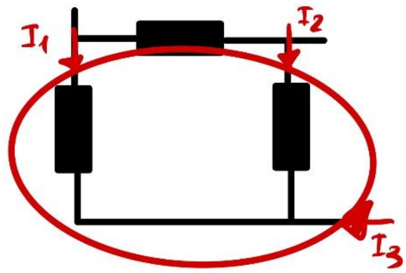
$$w(t) = \int_{t_0}^{t} \rho(\tau)\, d\tau$$

3.6 Primo principio di Kirkhoff (1°K)

Il primo principio di Kirkhoff afferma che la somma algebrica delle correnti che scorrono sui rami di un circuito, tagliato da una linea chiusa, è uguale a zero. Prendiamo il solito circuito e facciamo degli esempi

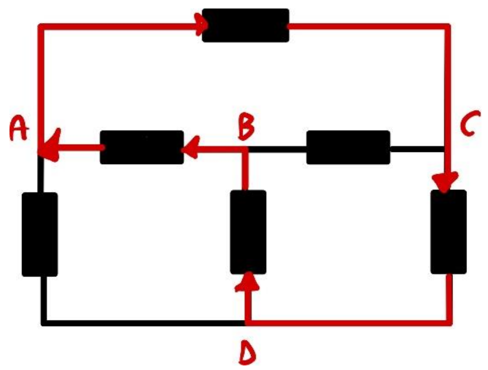


Nella somma algebrica poniamo le correnti entranti positive e quelle uscenti negative.

		
$I_X - I_Y = 0 \Longrightarrow I_X = I_Y$	$I_Y + I_W + I_K = 0$	$I_1 + I_2 + I_3 = 0$

3.7 Secondo principio di Kirkhoff (2°K)

Il secondo principio di Kirhoff afferma che la somma algebrica delle cadute di potenziale lungo un percorso chiuso è uguale a zero. Prendiamo il seguente esempio e dimostriamolo!



$$v_{AC}(t) + v_{CD}(t) + v_{DB}(t) + v_{BA}(t) = 0$$
$$v_A(t) - v_C(t) - v_D(t) + v_D(t) - v_B(t) + v_B(t) - v_A(t) = 0$$

Si osservi che con la maglia percorsa in verso opposto il risultato non cambia

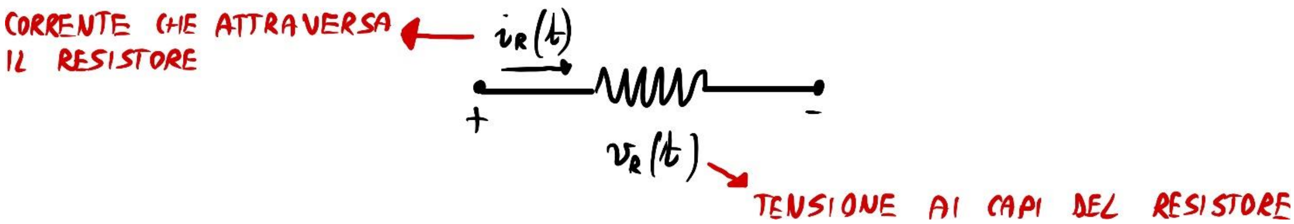
$$v_{xy}(t) = v_x(t) - v_y(t) \qquad\qquad v_{yx}(t) = v_y(t) - v_x(t) = -v_{xy}$$

4 CIRCUITI IN CONTINUA

4.1 Bipolo elettrico: resistore

4.1.1 Proprietà e costante R

Partiamo distinguendo resistore da resistenza: sono la stessa cosa, ma si preferisce usare il primo per riferirsi al dispositivo, mentre il secondo si usa per riferirsi alla costante R.

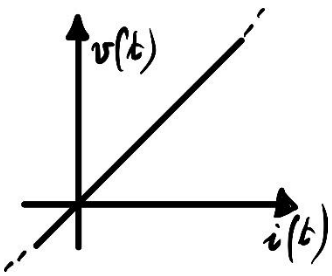


La costante R dipende dal materiale e dalle sue dimensioni. Si ripensi alla seconda legge di Ohm, che stabilisce: proporzionalità diretta tra resistenza e lunghezza; proporzionalità inversa tra resistenza e sezione; proporzionalità diretta rispetto a una costante ρ, che dipende dalle proprietà del materiale (valore basso se conduttore, valore intermedio se semiconduttore, valore elevato se isolante).

$$R = \rho \frac{l}{s}$$

L'unità di misura è l'Ohm (Ω), cioè il Volt su Ampere (ricordarsi la prima legge di Ohm: $R = \frac{\Delta V}{i}$).

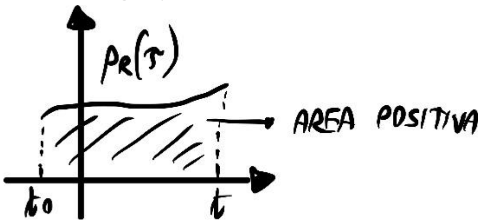
- ***Linearità***.
  Il resistore è lineare perché l'equazione costitutiva è una retta passante per l'origine.
  $$v(t) = R \cdot i(t)$$
  Nella figura si è scelto un riferimento associato (se avessimo scelto riferimento non associato sarebbe stato necessario mettere segno negativo prima di $i(t)$).



- ***Tempo-invarianza***.
  Il resistore è tempo-invariante, dato che R è costante nel tempo (si pensi ai valori posti nella seconda legge di Ohm). Questa cosa vale nel nostro modello ideale, dato che:
  - esistono dispositivi che hanno resistenza variabile in funzione della temperatura
  - la resistenza può essere influenzata dall'usura del dispositivo.

- ***Con memoria***.
  Il resistore non ha memoria (Bipolo *memoryless*).

- ***Passività***.
  Il resistore è passivo, dimostriamolo. Sappiamo che la potenza è
  $$p_R(t) = v_R(t) \cdot i_R(t) = R \cdot i_R(t) \cdot i_R(t) = R \ \cdot i_R^2(t)$$
  Il valore al quadrato è sicuramente positivo (minimo nullo), la resistenza è sempre positiva (formula seconda legge di Ohm). Per l'interpretazione grafica dell'integrale potenza sempre positiva significa avere energia positiva



$$w(t) = \int_{t_0}^{t} \rho(\tau)\, d\tau$$

4.1.2 Conduttanza G

Con semplice manipolazione della formula per trovare la tensione otteniamo

$$v(t) = R \cdot i(t) \longrightarrow i(t) = \frac{1}{R} \cdot v(t) = G \cdot v(t)$$

L'unità di misura è il Siemens (S), cioè 1/Ohm. In alcuni libri si parla di Mho come unità di misura (Ohm letto al contrario). Se la conduttanza è bassa il resistore non è un buon conduttore, se la conduttanza è alta il resistore è un buon conduttore (amanti dell'ovvio).

4.2 Circuito aperto e cortocircuito

Introduciamo due casi particolari di resistenza:

- ***Corto circuito***.
  Se la resistenza è nulla si parla di corto circuito: i poli del dispositivo hanno lo stesso potenziale, ergo si ha tensione nulla. Il resistore è assente!

$$v_{AB}(t) = 0 \Longrightarrow v_A(t) = v_B(t)$$

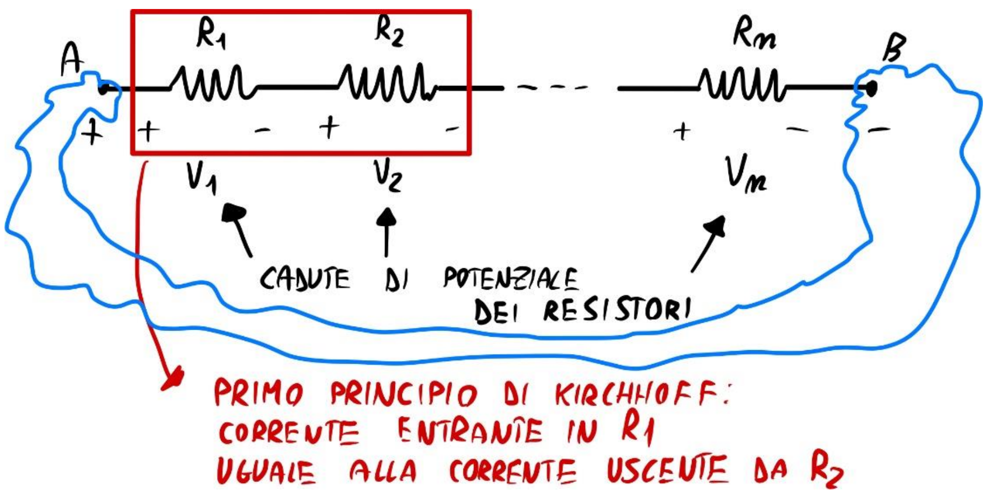
- ***Circuito aperto***.
  Se la resistenza tende a infinito (con tensione costante) allora la corrente tende a zero: si parla di circuito aperto.

4.3 Disposizione delle resistenze

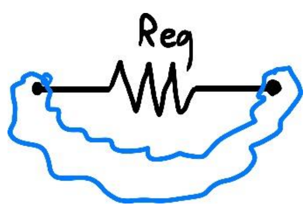
$\boxed{\text{Occhio, argomento di base su cui si fanno molti errori all'esame.}}$

4.3.1 Resistenze in serie e concetto di resistenza equivalente

Una o più resistenze (ma in generale uno o più bipoli elettrici) si dicono disposte in serie se attraversati dalla stessa corrente elettrica.



La cosa ci torna perché applicando il principio di Kirkhoff otteniamo che la corrente entrante è uguale alla corrente uscente. Quello che vogliamo fare è calcolare la resistenza equivalente agli effetti esterni R_{eq}, in un certo senso è come sostituire gli n resistori con un'unica resistenza collegata a un circuito esterno (che non conosciamo)



Il circuito ottenuto è diverso (le componenti cambiano), ma gli effetti esterni sono gli stessi. Due passi per compiere la sostituzione (*passaggio topologico* apparentemente banale, ma fonte di errori nello scritto):

- sostituire una resistenza con la resistenza equivalente;
- sostituire le $n-1$ resistenze rimanenti con un corto circuito.

Calcoliamo la resistenza. Se non cambia nulla rispetto agli effetti esterni la caduta di potenziale da A a B è la stessa. Applichiamo il secondo principio di Kirkhoff:

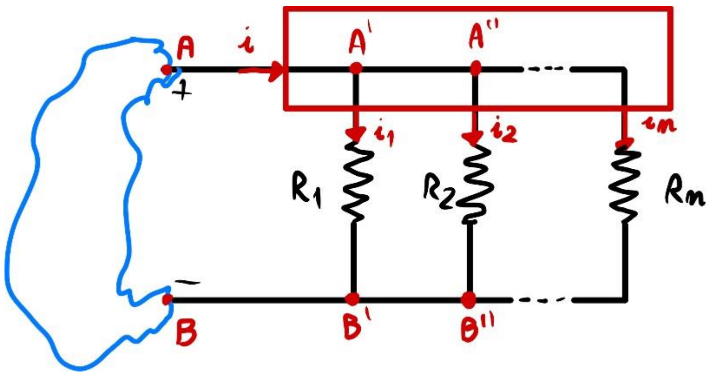
$$v_{AB}(t) = v_1(t) + v_2(t) + \cdots + v_n(t) = R_1 \cdot i_1(t) + R_2 \cdot i_2(t) + \cdots + R_n \cdot i_n(t) =$$
$$= (R_1 + R_2 + \cdots + R_n) \cdot i(t) = \sum_{j=1}^{n} R_j \cdot i(t) = R_{eq} \cdot i(t)$$

Abbiamo ottenuto che la resistenza equivalente consiste nella somma delle singole resistenze

$$R_{eq} = \sum_{j=1}^{n} R_j$$

4.3.2 Resistenze in parallelo

Una o più resistenze (ma in generale uno o più bipoli elettrici) si dicono disposte in parallelo se presentano la stessa tensione.



- I punti A, A’, A’’, … hanno lo stesso potenziale, data la presenza di un cortocircuito tra essi (tra A e A’ non è presente un particolare bipolo, così come tra A’ e A’’).
- Stesso ragionamento si può fare rispetto ai punti B, B’, B’’, … ma ovviamente il potenziale ai punti B e il potenziale ai punti A non è lo stesso, vista la presenza delle resistenze.

Come prima è nostro interesse calcolare la resistenza equivalente R_{eq}. Applichiamo il primo principio di Kirkhoff rispetto alla linea chiusa evidenziata in figura (abbiamo segnato anche il verso delle correnti):

$$\begin{aligned} i(t) &= i_1(t) + i_2(t) + \cdots + i_n(t) = \\ &= \frac{v_{AB}(t)}{R_1} + \frac{v_{AB}(t)}{R_2} + \cdots + \frac{V_{AB}(t)}{R_n} = v_{AB}(t)\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right] = \\ &= v_{AB}(t)[G_1 + G_2 + \cdots + G_n] = v_{AB}(t) \cdot G_{eq} \end{aligned}$$

Invece di esprimere questa relazione in termini di inverse delle resistenze può essere conveniente ragionare in termini di conduttanze: i calcoli precedenti ci dicono che n conduttanze in parallelo sono equivalenti ad un’unica conduttanza di valore pari alla somma delle n conduttanze.

Concludiamo tenendo a mente la prima legge di Ohm

$$R_{eq} = \frac{v_{AB}(t)}{i(t)} \Longrightarrow v_{AB}(t) = R_{eq} \cdot i(t)$$

Dai passaggi sulla conduttanza troviamo che

$$i(t) = v_{AB}(t) \cdot G_{eq} \Longrightarrow \; v_{AB}(t) = \frac{1}{G_{eq}} i(t)$$

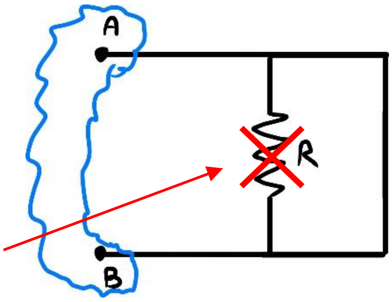
Quindi

$$R_{eq} \cdot i(t) = \frac{1}{G_{eq}} \cdot i(t) \longrightarrow R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}}$$

$$R_{eq} = \frac{1}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}}$$

Calcoliamo la resistenza equivalente nei seguenti casi:

- $\boldsymbol{n = 2}$
  Calcoliamo la resistenza equivalente di due resistenze in parallelo
$$R_{eq} = \frac{1}{G_1 + G_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$
  Si osservi che se $R = R_1 = R_2$ …
$$R_{eq} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$
- $\boldsymbol{n = 3}$
  Calcoliamo la resistenza equivalente di tre resistenze in parallelo
$$R_{eq} = \frac{1}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$
  Si osservi che se $R = R_1 = R_2 = R_3$ …
$$R_{eq} = \frac{R^3}{3R^2} = \frac{R}{3}$$



<u>Caso particolare</u>. Supponiamo di avere una resistenza R_1 parallela a un cortocircuito: quale sarà la resistenza equivalente?

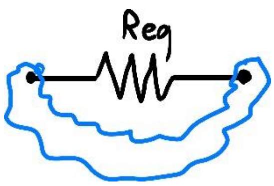
$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{0}{R_1} = 0$$

La resistenza è nulla! Come se non ci fosse, la si può cancellare dalla figura.
Altro modo per vedere la cosa è partendo dalla prima legge di Ohm

$$R_{eq} = \frac{v_{AB}(t)}{i(t)}$$

Se abbiamo un cortocircuito il potenziale ai due estremi è uguale, ergo $v_{AB}(t) = 0$.

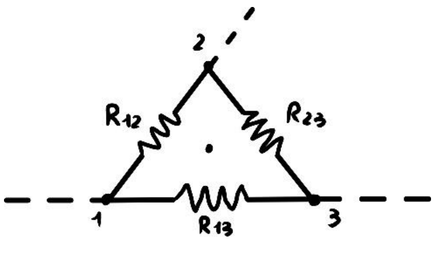
<u>Passaggio topologico</u>. Due passi per compiere la sostituzione (solito passaggio)



- sostituire una resistenza con la resistenza equivalente;
- sostituire le $n - 1$ resistenze rimanenti con un circuito aperto.

4.3.3 Resistenze a triangolo

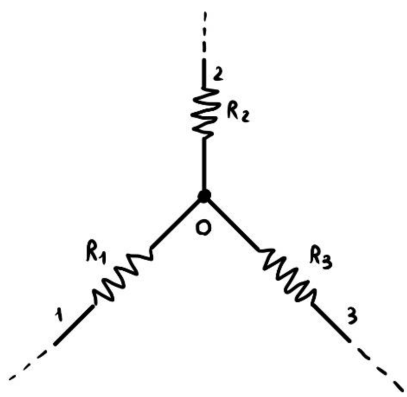
Tre resistenze si dicono disposte a triangolo se hanno a due a due un morsetto in comune.



- Non sono in serie perché il circuito costituito dai tre resistori è collegato ad un circuito più ampio.
- Non sono in parallelo perché non hanno gli stessi nodi.

4.3.4 Resistenze a stella

Tre resistenze si dicono disposte a stella se hanno tutte e tre un morsetto in comune.



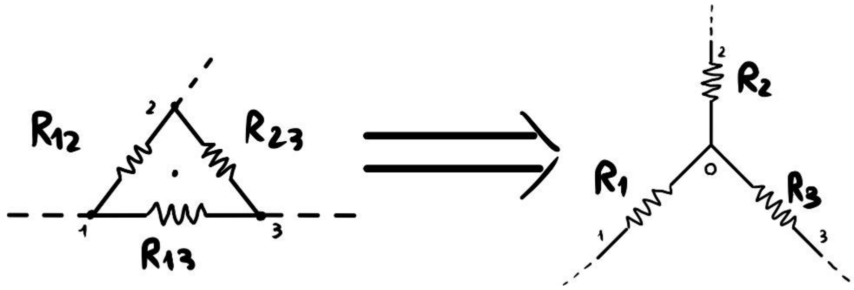
4.3.5 Step da adottare nella semplificazione di un circuito a una resistenza equivalente

I passaggi che si adottano per semplificare un insieme di resistenze in un'unica resistenza equivalente sono i seguenti:

1. Semplificare le resistenze in serie, se presenti.
2. Semplificare le resistenze in parallelo, se presenti.
3. Trasformare resistenze a triangolo in resistenze a stella, o viceversa, se non sono presenti altre resistenze in serio o resistenze in parallelo (le abbiamo sistemate negli step precedenti).
4. Fermarsi se rimane un'unica resistenza, altrimenti tornare al punto (1).

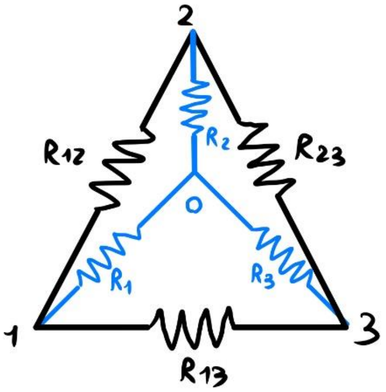
Risulta necessario chiarire il punto (3). Seguono le formule necessarie per fare tali trasformazioni (che per il prof. non vanno imparate a memoria, questo è uno dei casi in cui la persona consulta il libro durante lo scritto)

- **Passaggio da resistenze disposte a triangolo a resistenze disposte a stella**.



$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$
$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$
$$R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

- **Passaggio da resistenze disposte a stella a resistenze disposte a triangolo**.



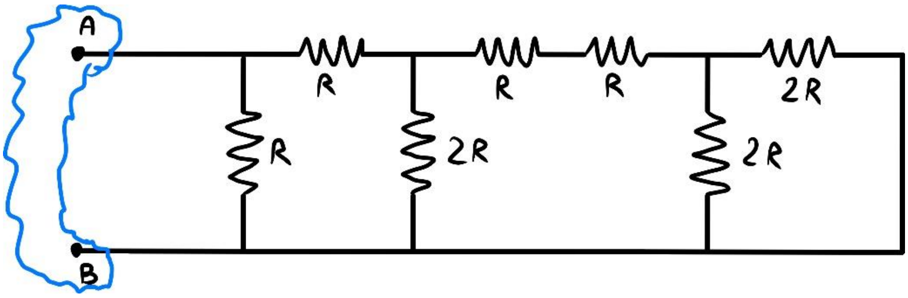
Per svolgere questa trasformazione si suggeriscono i seguenti passaggi:
  - disegnare la stella dentro il triangolo;
  - calcolare i valori delle nuove resistenze;
  - cancellare le resistenze a triangolo lasciando solo la stella.

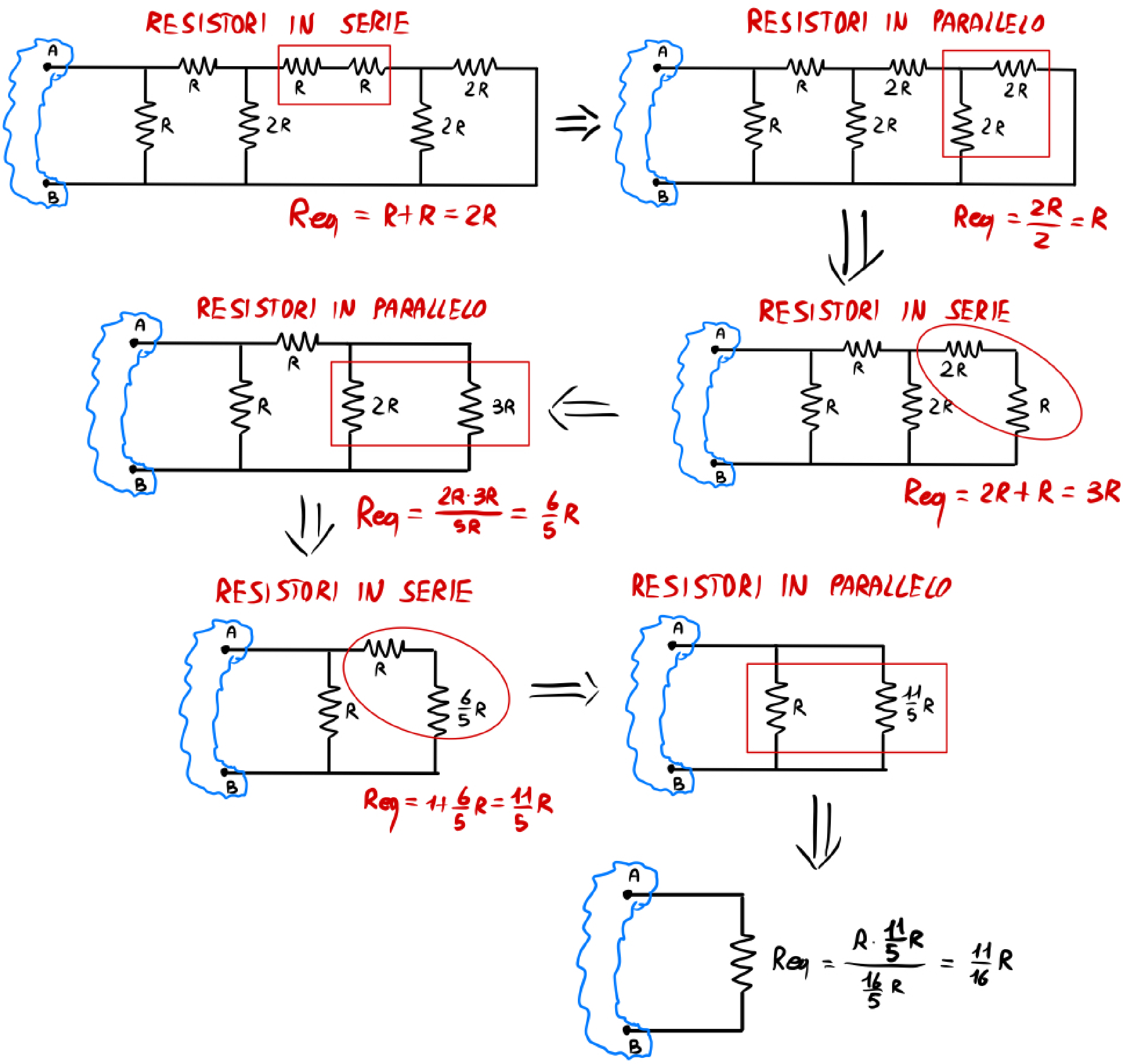
Le formule da utilizzare sono le seguenti

$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_3}$$
$$R_{13} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_2}$$
$$R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_1}$$

4.3.6 Calcolo di resistenze equivalenti (solo resistenze in serie e in parallelo)

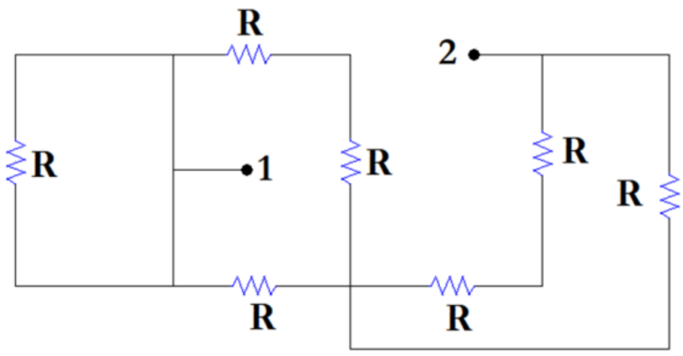
Riduciamo il seguente insieme di resistenze a un'unica resistenza equivalente, applicando i passaggi descritti nella pagina precedente.



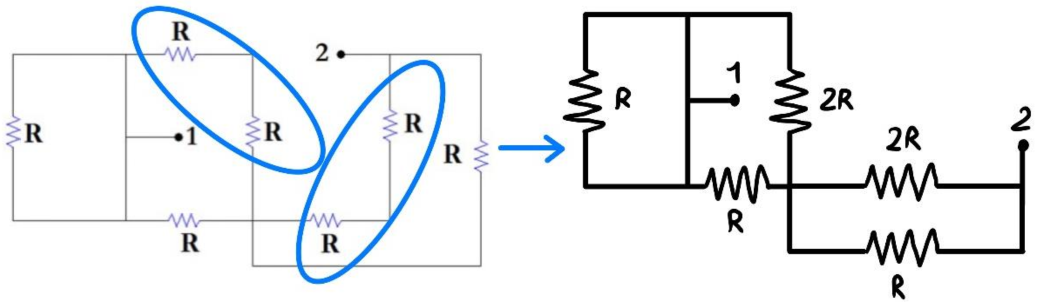


4.3.7 Calcolo di resistenze equivalenti (Primo compitino A.A.2022/2023)

Primo esercizio. Calcolare la R_{eq} vista dai morsetti 1-2 del bipolo in figura, sapendo che tutte le resistenze valgono $R = 80\ \Omega$

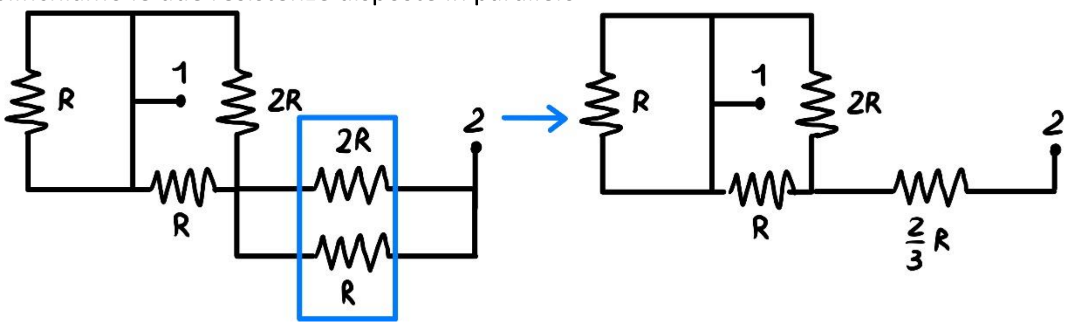


- Semplifichiamo delle resistenze disposte in serie



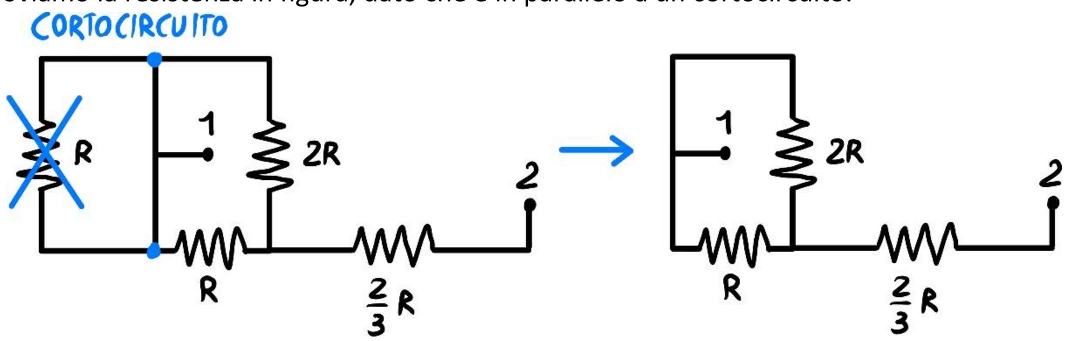
In entrambi i casi $R_s = R + R = 2R$

- Semplifichiamo le due resistenze disposte in parallelo



Otteniamo $R_p = \frac{R \cdot 2R}{R+2R} = \frac{2R^2}{3R} = \frac{2}{3}R$

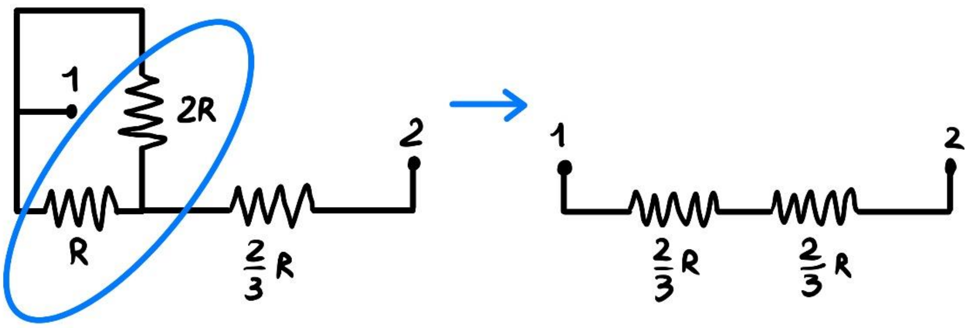
- Rimuoviamo la resistenza in figura, dato che è in parallelo a un cortocircuito.



Se una resistenza è in parallelo a un cortocircuito allora tutta la corrente scorre nel cortocircuito. È come avere sul ramo del cortocircuito un resistore con resistenza nulla!

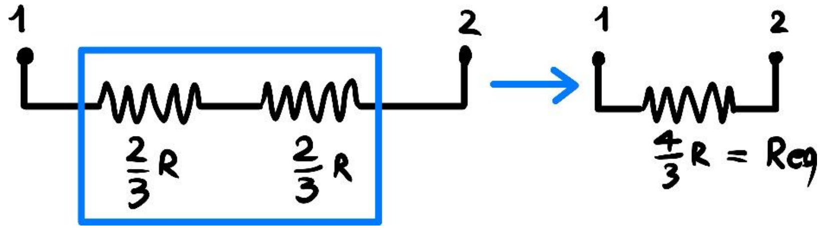
$$R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R \cdot 0}{R + 0} = 0$$

- Semplifichiamo due resistenze disposte in parallelo



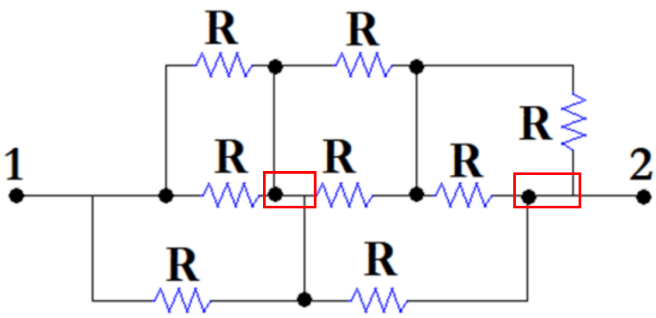
Anche qua $R_p = \frac{R \cdot 2R}{R+2R} = \frac{2R^2}{3R} = \frac{2}{3}R$.
Necessario stare attenti: si potrebbe pensare che quella in figura sia una resistenza a stella. È vero che i tre resistori hanno un morsetto in comune, ma è anche vero che le due resistenze semplificate hanno due morsetti in comune (e quindi sono in parallelo)! Gli step da noi adottati prevedono l'eventuale trasformazione di resistenze a triangolo o a stella solo dopo aver verificato la presenza di resistenze in serie o resistenze in parallelo.

- Concludiamo semplificando due resistenze in serie

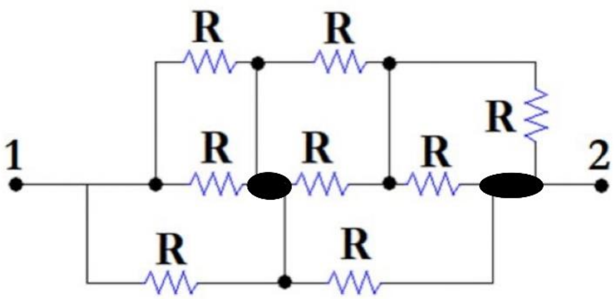


$$R_{eq} = \frac{2}{3}R + \frac{2}{3}R = \frac{4}{3}R = \frac{4}{3} \cdot 80 = 106.67\Omega$$

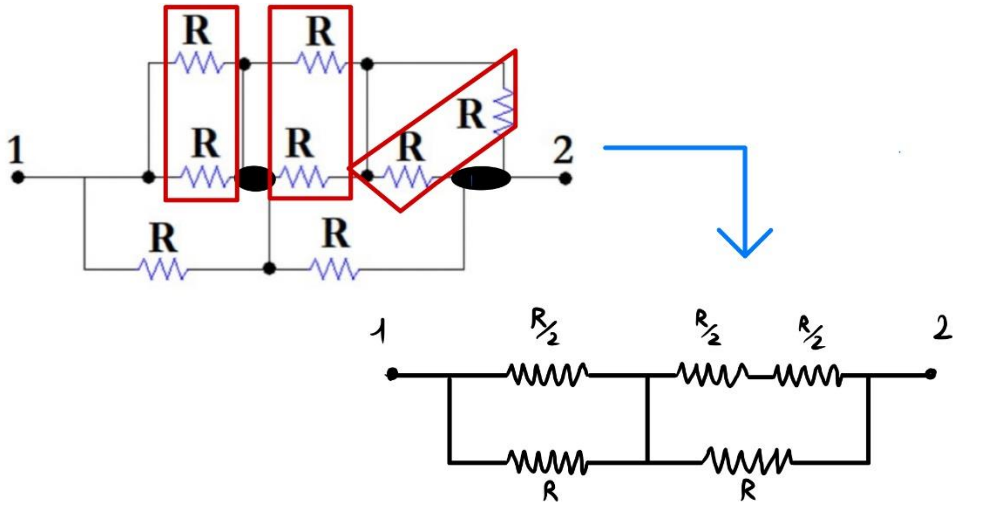
<u>Secondo esercizio</u>. Calcolare la R_{eq} vista dai morsetti 1-2 del bipolo in figura, sapendo che tutte le resistenze valgono $R = 10\ \Omega$



- Osservazione idiota: vediamo alcuni collegamenti (i due evidenziati nella figura sopra) che potrebbero farci venire dubbi. Ricordarsi come l'ave Maria che se tra due nodi non si hanno bipoli elettrici allora non si ha caduta di potenziale, quindi il potenziale ai capi dei due nodi sono gli stessi.

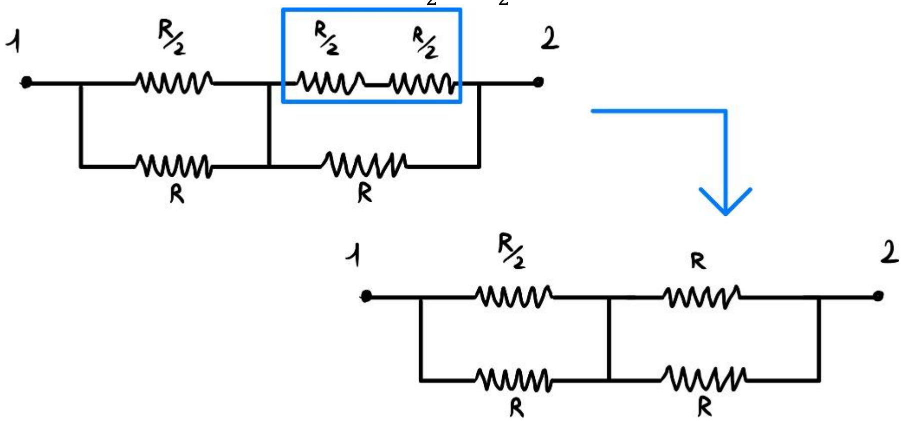


- Semplifichiamo le resistenze in parallelo

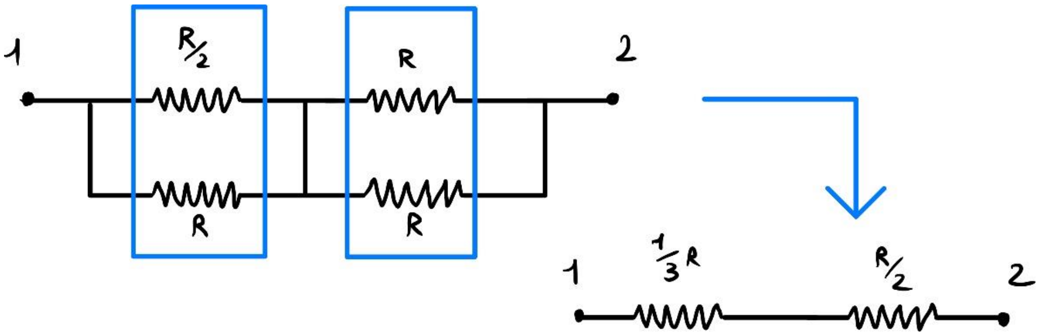


Per tutte e tre $R_p = \frac{R \cdot R}{R+R} = \frac{R^2}{2R} = \frac{1}{2}R$

- Semplifichiamo le due resistenze in serie ($R_s = \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}R = R$)

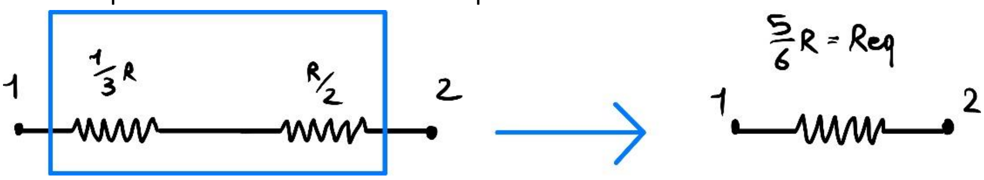


- Semplifichiamo le due resistenze disposte in parallelo



$$R_p^1 = \frac{\frac{R}{2} \cdot R}{\frac{R}{2} + R} = \frac{1}{3}R \qquad R_p^2 = \frac{R \cdot R}{R + R} = \frac{R}{2}$$

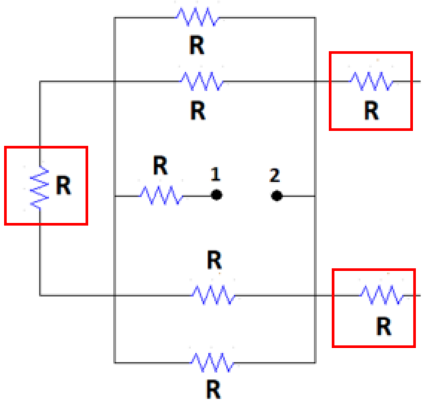
- Concludiamo semplificando le due resistenze disposte in serie



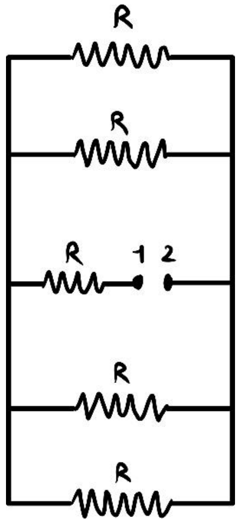
$$R_{eq} = \frac{1}{3}R + \frac{R}{2} = \frac{5}{6}R = 8.34\ \Omega$$

4.3.8 Calcolo di resistenze equivalenti (Primo compitino A.A.2018/2019)

Calcolare la R_{eq} vista dai morsetti 1-2 del bipolo in figura, sapendo che tutte le resistenze valgono $R = 50\Omega$



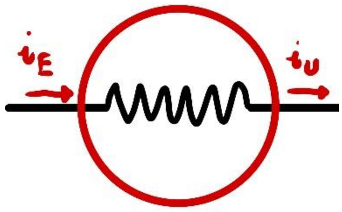
- Per prima cosa semplifichiamo il circuito sbarazzandoci delle tre resistenze segnalate in figura.
  - La resistenza a sinistra perché in parallelo a un cortocircuito.
  - Le due resistenze a destra perché non scorre corrente nei relativi rami.



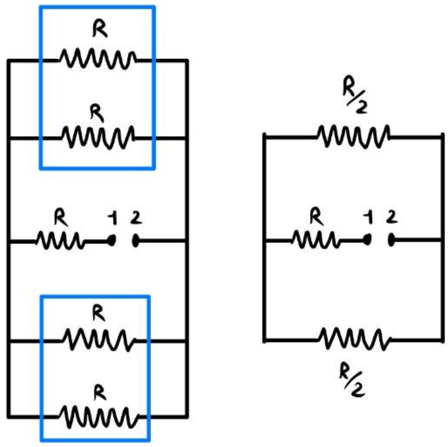
<u>Perché le due resistenze a destra non sono attraversate da corrente?</u>

Applichiamo il primo principio di Kirkhoff. La corrente entrante è uguale alla corrente uscente, ma sappiamo dalla struttura del circuito che la corrente uscente è nulla. Segue che entrambe sono nulle, quindi non scorre corrente nel ramo

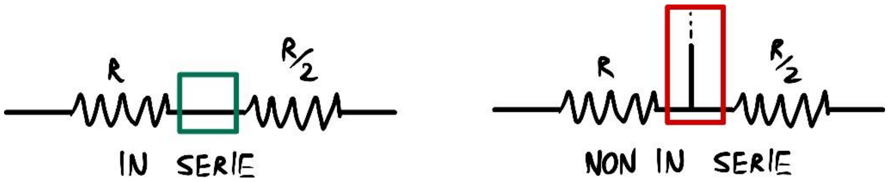
$$i_E = i_U = 0$$



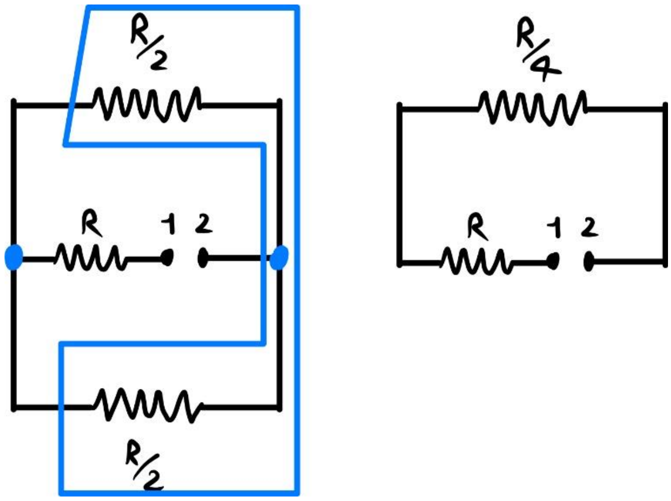
- Semplifichiamo le due coppie di resistenze in parallelo (In entrambi i casi $R_p = \frac{R \cdot R}{R+R} = \frac{1}{2}R$)



- In questo punto dell'esercizio potrebbe emergere la tentazione di considerare le resistenze $\frac{R}{2}$ ed R come due resistenze in serie: errore! Ricordarsi che per poter considerare due dispositivi in serie è necessario che non si abbiano "cose nel mezzo"

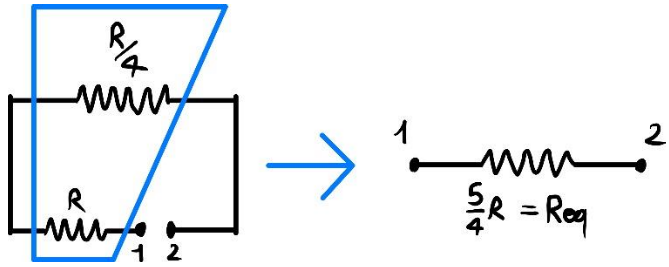


Chiarito questo aspetto consideriamo in parallelo le resistenze indicate nella figura che segue (evidenziati i nodi che hanno in comune)



$$R_p = \frac{\frac{R}{2} \cdot \frac{R}{2}}{\frac{R}{2} + \frac{R}{2}} = \frac{R}{4}$$

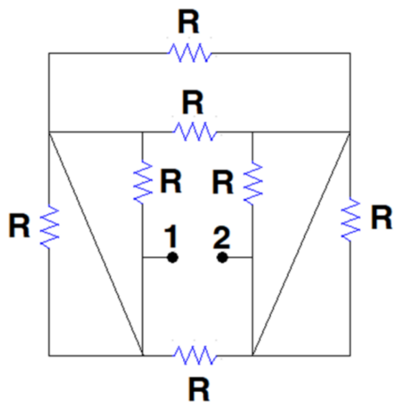
- Concludiamo semplificando le due resistenze disposte in serie



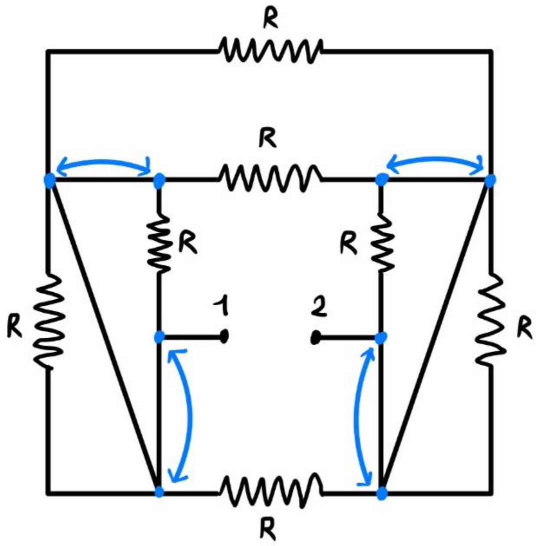
$$R_{eq} = \frac{1}{4}R + R = \frac{5}{4}R = 62.5\ \Omega$$

4.3.9 Calcolo di resistenze equivalenti (Primo compitino A.A.2019-2020)

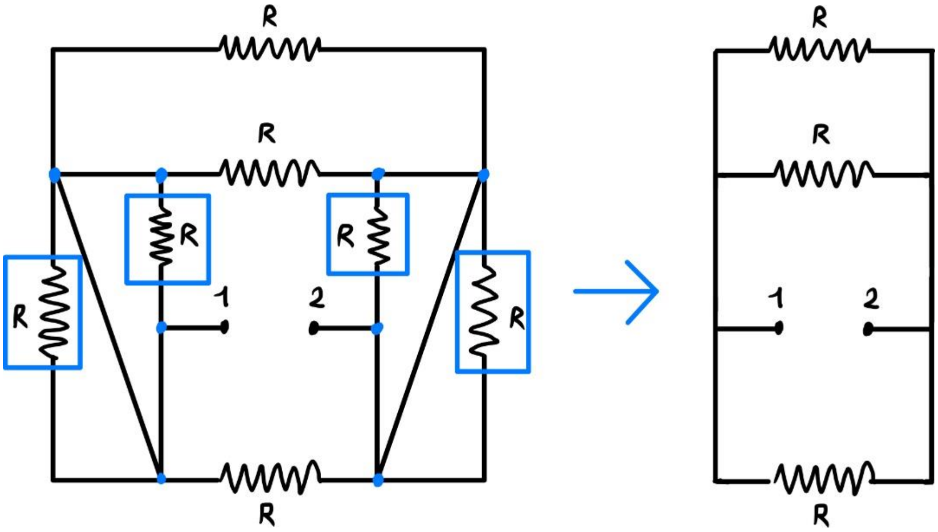
Calcolare la R_{eq} vista dai morsetti 1-2 del bipolo in figura, sapendo che tutte le resistenze valgono $R = 50\Omega$



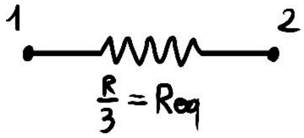
- Facciamo nuovamente l'osservazione idiota: dati due nodi, se tra essi non sono presenti bipoli elettrici allora non si ha caduta di potenziale e quindi presentano lo stesso potenziale. Evidenziamo con le frecce i nodi che presentano la stessa caduta di potenziale



Deduciamo che è possibile rimuovere ben quattro resistenze, tutte in parallelo rispetto a un cortocircuito.

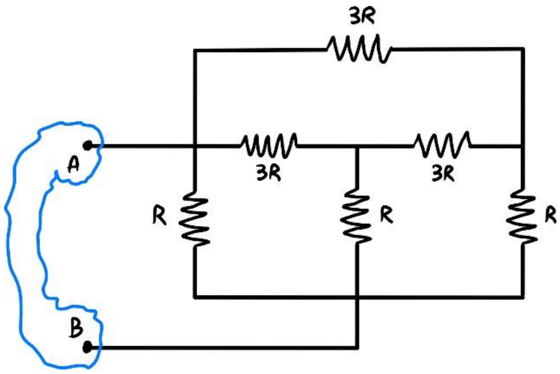


Possiamo concludere perché le tre resistenze rimanenti sono disposte in parallelo. Dato che le resistenze hanno stesso valore possiamo concludere senza fare calcoli che $R_{eq} = \frac{R}{3}$



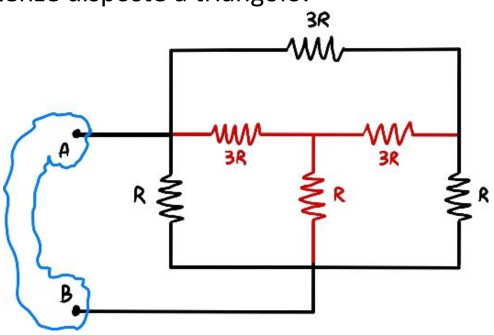
4.3.10 Calcolo di resistenze equivalenti (con resistenze a triangolo e a stella)

Consideriamo un secondo esempio dove la sostituzione di resistenze a triangoli o resistenze a stella è necessaria.

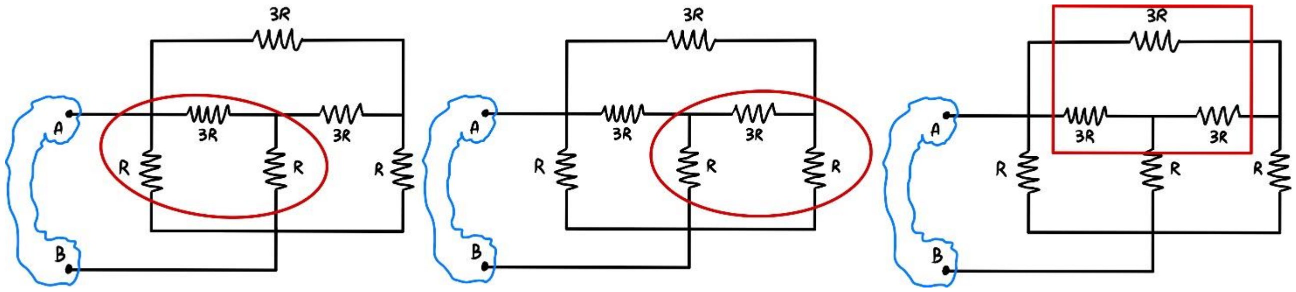


Abbiamo due strade possibili per risolvere il problema:

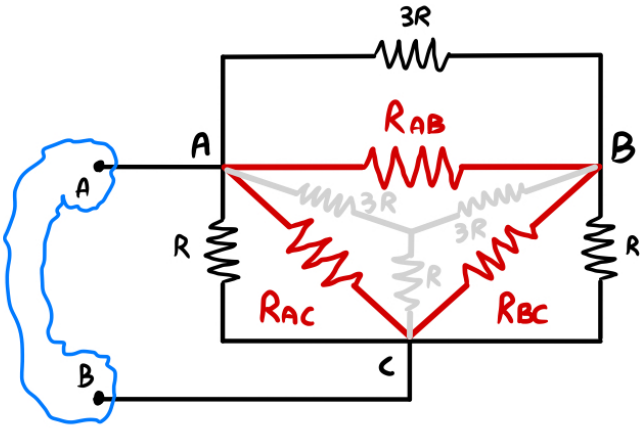
- Sostituzione della stella indicata in rosso con tre resistenze disposte a triangolo.



- Sostituzione di uno dei triangoli evidenziati coi cerchi con tre resistenze disposte a stella.



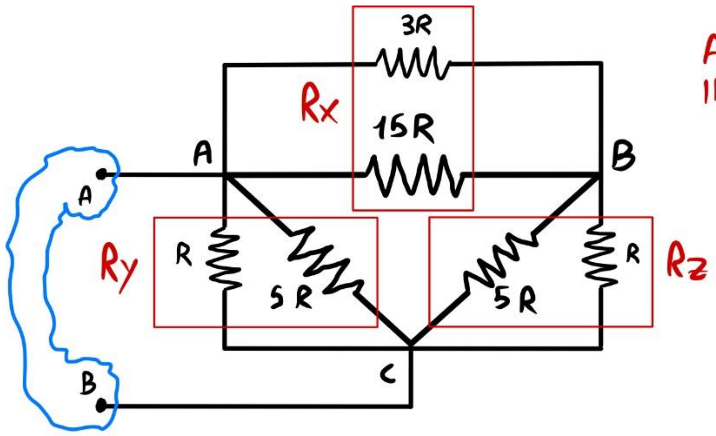
Partiamo da una risoluzione col primo metodo



$$R_{AB} = \frac{3R\cdot \cancel{R} + 3R\cdot \cancel{R} + 3R\cdot 3\cancel{R}}{\cancel{R}} = 15R$$

$$R_{BC} = \frac{3R\cdot \cancel{R} + 3R\cdot \cancel{R} + 3R\cdot 3\cancel{R}}{3R} = 5R$$

$$R_{AC} = \frac{3R\cdot \cancel{R} + 3R\cdot \cancel{R} + 3R\cdot 3\cancel{R}}{3R} = 5R$$

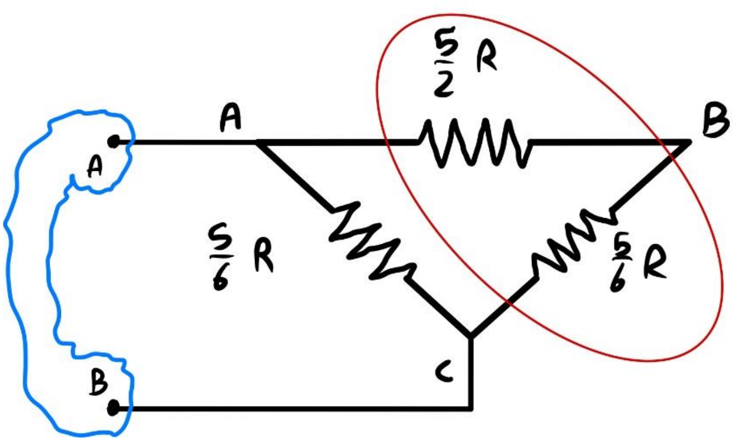


ATTENZIONE ALLE DISPOSIZIONI IN PARALLELO

$$R_x = \frac{3R\cdot 15R}{3R+15R} = \frac{45R^2}{18R} = \frac{5}{2}R$$

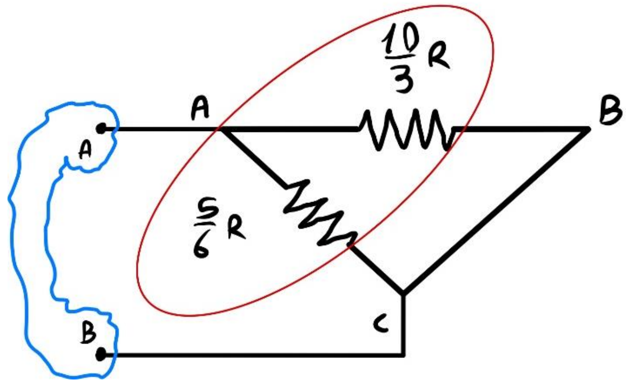
$$R_y = \frac{R\cdot 5R}{R+5R} = \frac{5R^2}{6R} = \frac{5}{6}R$$

$$R_z = \frac{R\cdot 5R}{R+5R} = \frac{5R^2}{6R} = \frac{5}{6}R$$



DISPOSIZIONE IN SERIE

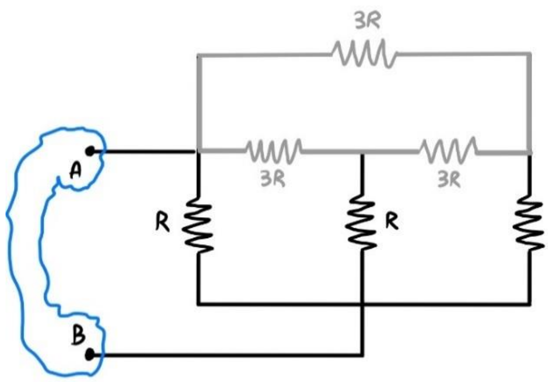
$$R_{eq} = \frac{5}{2}R + \frac{5}{6}R = \frac{10}{3}R$$

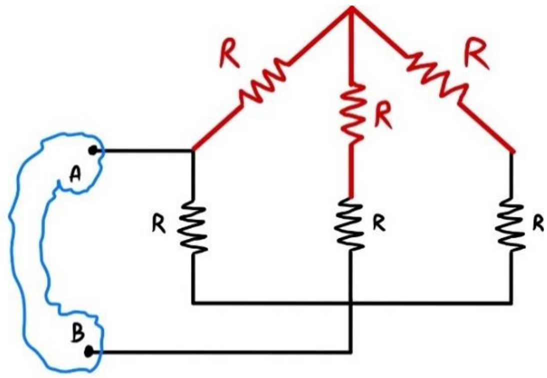


CONCLUDIAMO CON LA DISPOSIZIONE IN PARALLELO

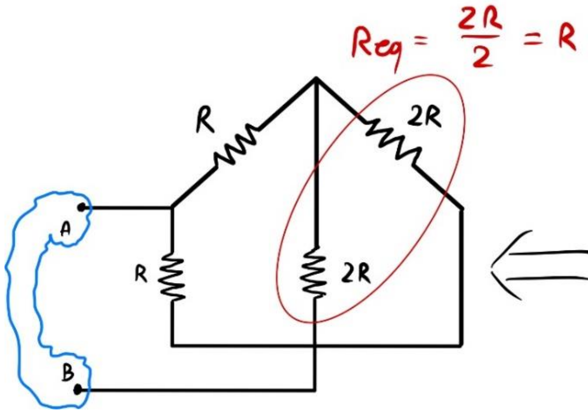
$$R_{eq} = \frac{\frac{10}{3}R \cdot \frac{5}{6}R}{\frac{10}{3}R + \frac{5}{6}R} = \frac{\frac{25}{9}R^2}{\frac{25}{6}R} = \frac{2}{3}R$$

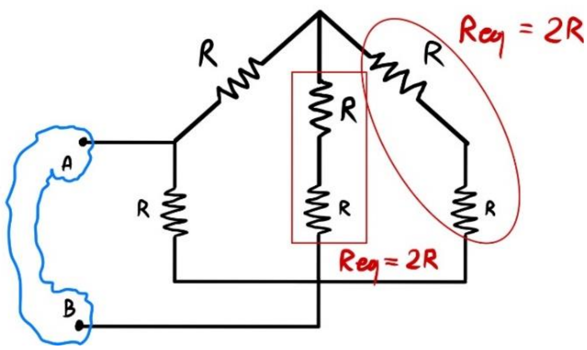
Riproviamo risolvendo lo stesso problema con l’altro metodo: prendiamo il triangolo con resistenze tutte uguali a 3R e sostituiamolo con una stella. Vedremo, al termine della risoluzione, che la resistenza equivalente è la stessa!

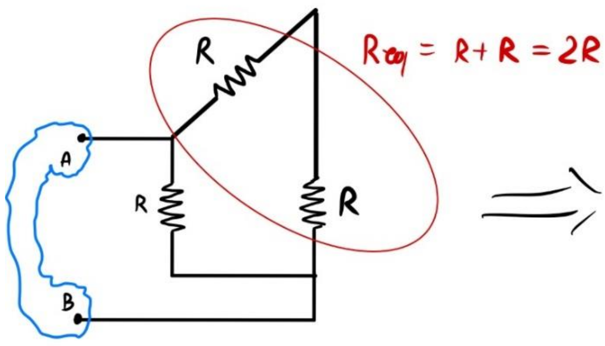


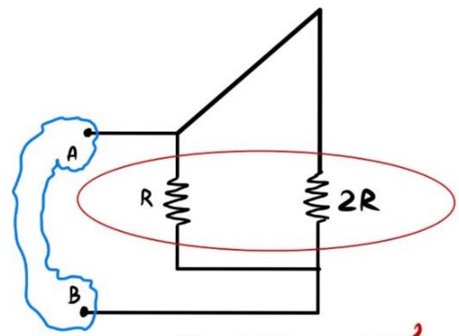


$$R_1 = R_2 = R_3 = \frac{3R}{3} = R$$





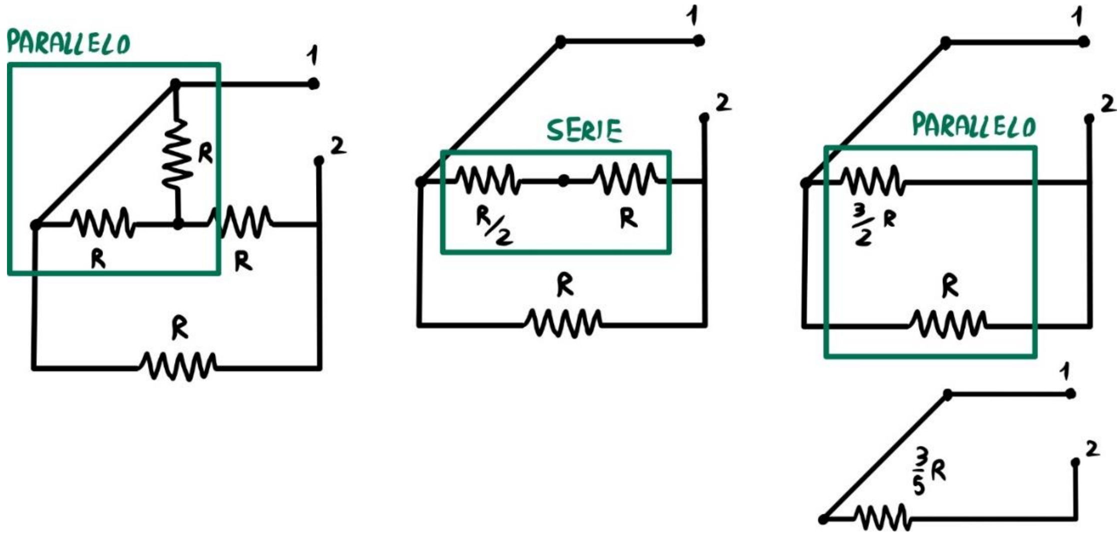




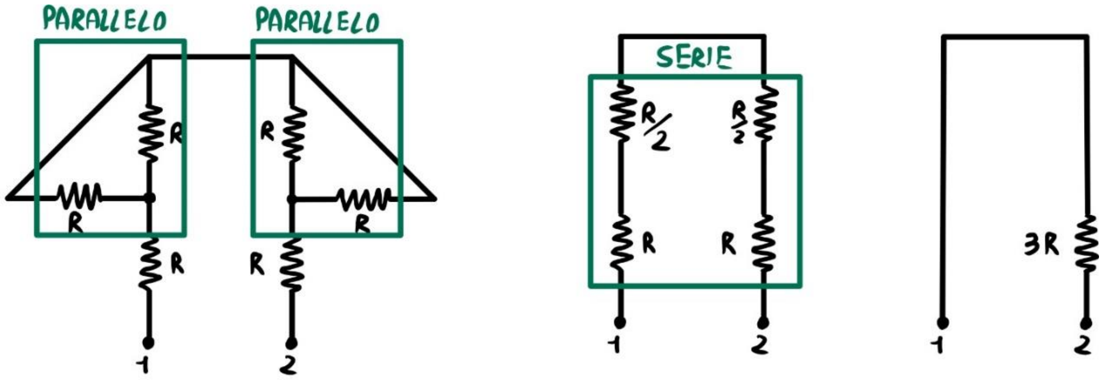
$$R_{eq} = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2R^2}{3R} = \frac{2}{3}R$$

4.3.11 Individuazione di resistenze viste (Ulteriori esempi)

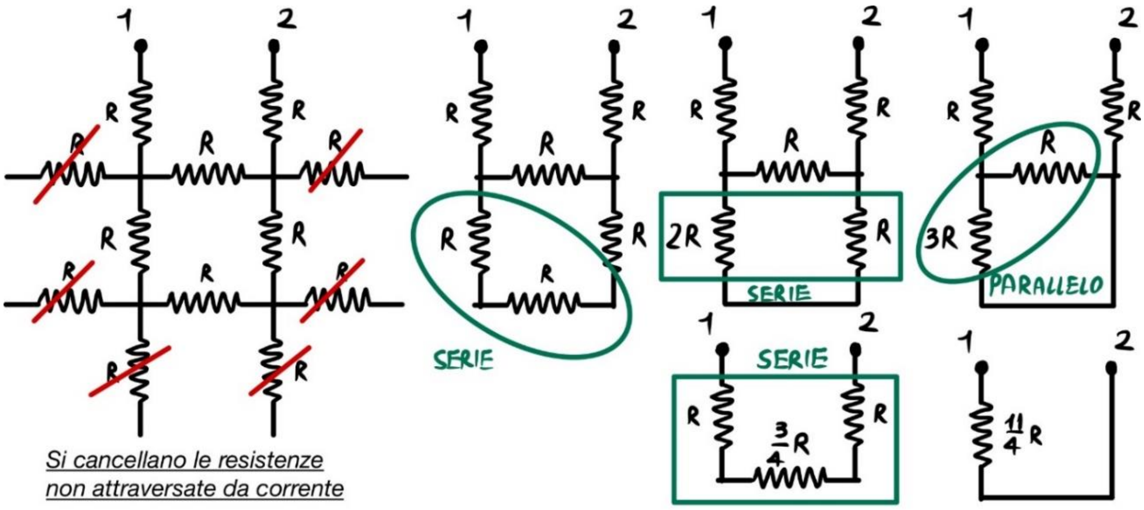
Si calcoli la resistenza vista nel seguente circuito



Si calcoli la resistenza vista nel seguente circuito



Si calcoli la resistenza vista nel seguente circuito



4.4 Bipolo elettrico: generatore (indipendente) di tensione

Fino ad ora abbiamo visto chi dissipa potenza, ma non chi la genera!

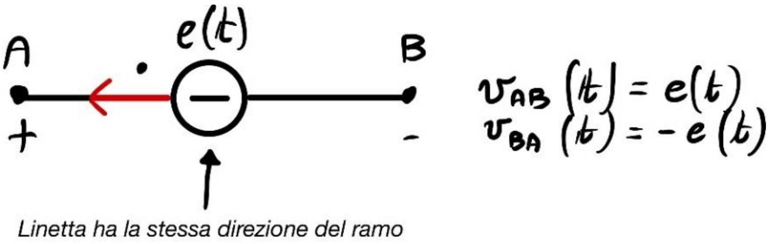
4.4.1 Cosa sono e quali proprietà hanno

Il generatore di tensione è un dispositivo in grado di dare luogo a una differenza di potenziale $e(t)$ ai suoi capi, indipendentemente dal valore della corrente che lo attraversa.

Osservazione. La corrente non può essere calcolata senza conoscere il resto del circuito!

Si usa un puntino per segnalare il polo con potenziale maggiore. Segue che il + sta dalla parte del contrassegno.

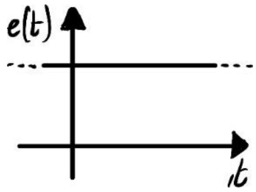
La corrente é per convenzione uscente dal contrassegno: si preferisce avere potenza positiva nel caso comune, cioè l'erogazione.



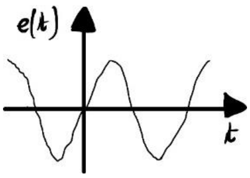
Occhio alla notazione spiegata qua sopra (senza il puntino ci sarebbe ambiguità su quale lato presenta il potenziale maggiore). Si osservi che per i generatori si scelgono riferimenti non associati (in contrasto alle resistenze dove si scelgono riferimenti associati): questo perché si vuole avere potenza positiva quando la potenza viene erogata.

Ci interessano due tipologie di tensioni generate:

- **Tensione continua**.
  Si parla di tensione continua se $e(t)$ è costante nel tempo.



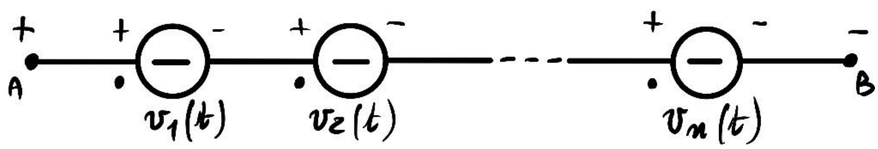
- **Tensione alternata**.
  Si parla di tensione alternata se $e(t)$ ha andamento sinusoidale.



<u>**Cosa succede il generatore eroga tensione nulla?**</u> Abbiamo un cortocircuito: la tensione ai capi è uguale.

4.4.2 Disposizioni in serie dei generatori di tensione

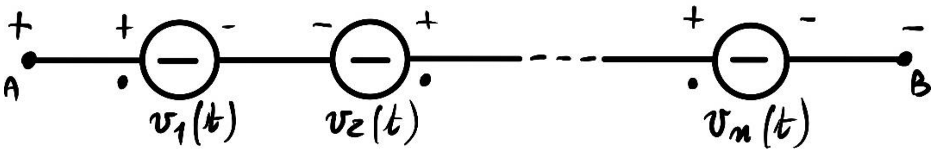
Disponiamo n generatori in serie nel seguente modo



Otteniamo, in virtù delle combinazioni stabilite precedentemente, la seguente sommatoria

$$v_{AB}(t) = v_1(t) + v_2(t) + \cdots + v_n(t)$$

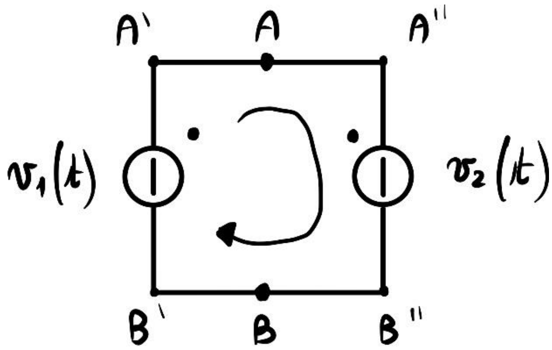
Supponiamo di cambiare verso a uno dei generatori: come cambia la formula? Interveniamo sul secondo generatore:



$$v_{AB}(t) = v_1(t) - \boldsymbol{v_2(t)} + \cdots + v_n(t)$$

4.4.3 Disposizione in parallelo dei generatori di tensione

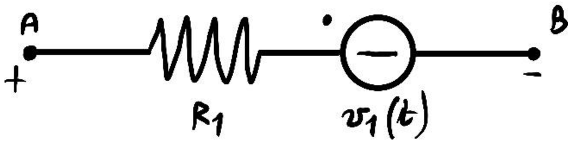
Proviamo a disporre due generatori di tensione in parallelo.



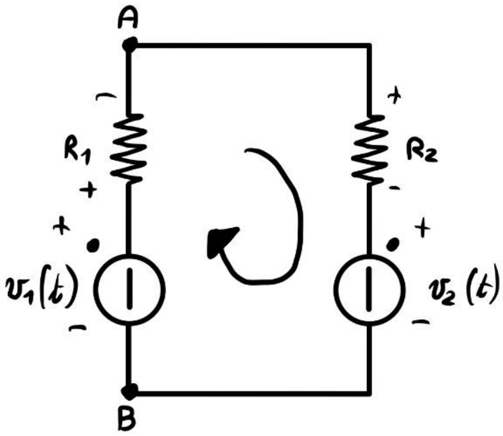
$$-v_1(t) + v_2(t) = 0 \Longrightarrow v_1(t) = v_2(t)$$

Due generatori disposti in parallelo dovrebbero erogare, si suppone, la stessa tensione: da un punto di vista matematico pare impossibile disporre in parallelo due dispositivi che generano tensioni diverse.

In realtà quello descritto è un modello ideale, dove non si tiene in considerazione la dissipazione per effetto Joule di parte della potenza (la pila dopo un po' scotta, cit.): l'efficienza nella conversione della potenza spinta in potenza elettrica non è al 100%. Possiamo rappresentare la pila in maniera decisamente più realistica disponendola in serie con una resistenza.



La tensione ai capi di A e B è ovviamente più piccola di $v_1(t)$. A questo punto disponiamo in parallelo due pile reali e applichiamo il secondo principio di Kirkhoff.



Ricordiamo che:

- nei generatori il segno positivo è dalla parte del contrassegno;
- nelle resistenze si adottano riferimenti associati, si guarda il verso della corrente (che va dal più al meno).

Otteniamo

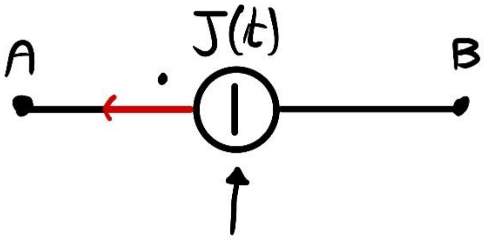
$$R_2 \cdot i(t) + v_2(t) - v_1(t) + R_1 \cdot i(t) = 0$$

- **Dispositivi che generano la stessa tensione**.
  Se $v_2(t) = v_1(t)$ allora $(R_2 + R_1)i(t) = 0$, cioè $i(t) = 0$. Non scorre corrente.
- **Dispositivi che generano tensione diversa**.
  Se $v_2(t) \neq v_1(t)$ non succede niente di strano: il secondo principio è ok. Pur rispettando il secondo principio la disposizione è da evitare: il circuito si scalderebbe troppo con dispositivi che generano tensioni estremamente diverse (si consideri che le resistenze hanno valori bassi, ergo scorre tanta corrente – si ricordi che la potenza dissipata per effetto Joule è direttamente proporzionale al quadrato della corrente).

4.5 Bipolo elettrico: generatori (indipendenti) di corrente

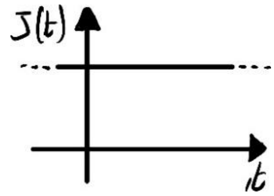
4.5.1 Cosa sono

Il generatore di corrente è un dispositivo che genera una certa corrente $J(t)$ nel ramo, indipendentemente dalla tensione imposta ai capi.

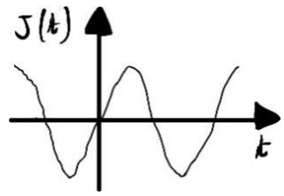


Linetta é ortogonale al ramo

Anche in questo generatore si scelgono riferimenti non associati (per le stelle ragioni del generatore di tensione). Come nel generatore di tensione ci interessano due tipologie di corrente:



- **Corrente continua**.
  Si parla di corrente continua se $J(t)$ è costante nel tempo.

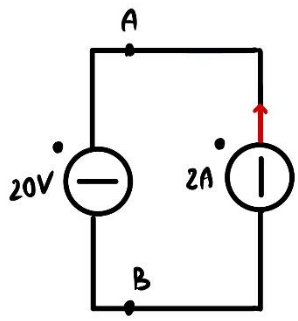


- **Corrente alternata**.
  Si parla di corrente alternata se $J(t)$ ha andamento sinusoidale.

<u>**Cosa succede il generatore eroga corrente nulla?**</u> Abbiamo un circuito aperto.

Anche qua…

$\boxed{\textbf{NB}\text{. La tensione ai capi è indeterminata, dipende dal resto del circuito!}}$



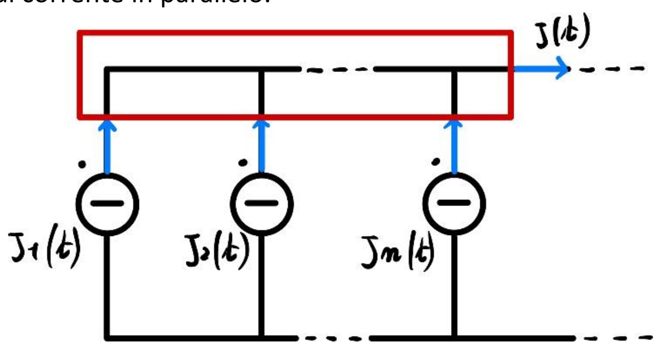
<u>**Esempio banale**</u>. Consideriamo il circuito a lato, dove disponiamo in parallelo un generatore di corrente e uno di tensione. Come troviamo la potenza erogata dal generatore di corrente?

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = 20V \cdot 2A = 40W$$

Il risultato dipende dalla tensione erogata dall'altro generatore, ergo *dal resto del circuito.*

4.5.2 Disposizione in parallelo dei generatori di corrente

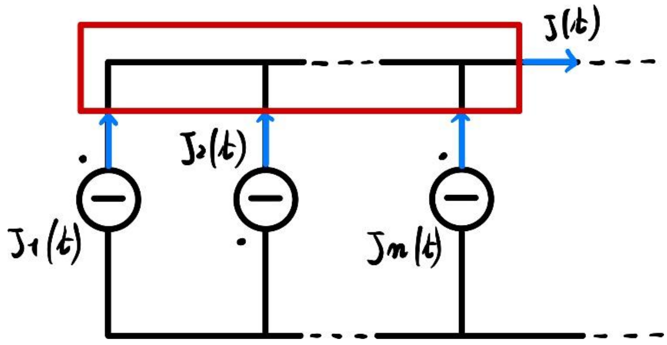
Disponiamo n generatori di corrente in parallelo.



Applichiamo il primo principio di Kirkhoff

$$J(t) = J_1(t) + J_2(t) + \cdots + J_n(t)$$

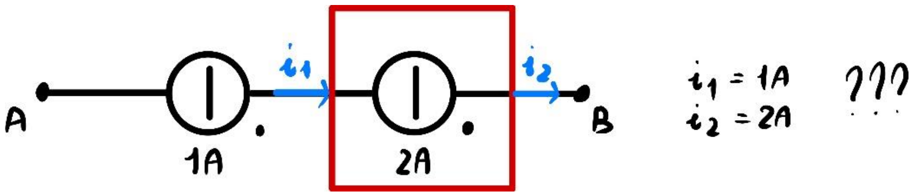
Morale della favola: n generatori di corrente disposti in parallelo sono equivalenti a un unico generatore di corrente che eroga una corrente pari alla somma algebrica (ricordarsi che le correnti possono essere negative, inoltre alcuni dispositivi potrebbero avere il contrassegno posto in basso) delle correnti generate dai singoli generatori.



$$J(t) = J_1(t) \; - \boldsymbol{J_2(t)} + \cdots + J_n(t)$$

4.5.3 Disposizione in serie dei generatori di corrente

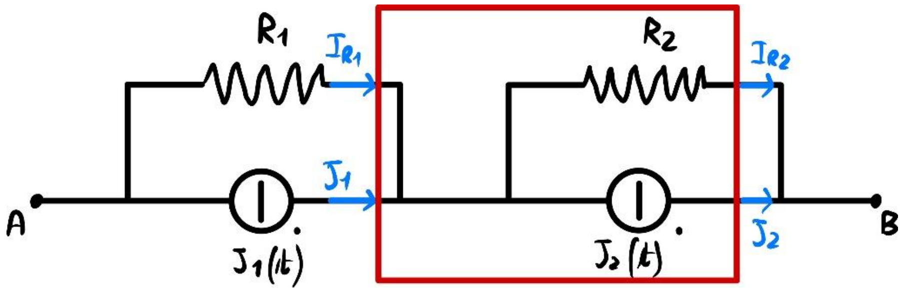
Cosa succede se proviamo a disporre due generatori di corrente in serie? Emerge un problema simile a quello già visto coi generatori di tensione disposti in parallelo.



Dall'applicazione del primo di Kirkhoff troviamo che non è matematicamente possibile disporre in serie due generatori di corrente che erogano correnti diverse

$$i_1 - i_2 = 0 \Longrightarrow i_1 = i_2$$

Come prima abbiamo ragionato di generatori ideali, non tenendo conto della dissipazione termica. Un generatore di corrente realistico è disposto in parallelo ad una resistenza!



Adesso l'applicazione del principio di Kirkhoff non presenta complicazioni

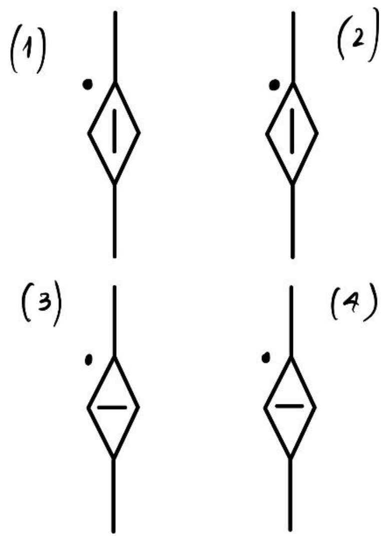
$$I_{R_1} + J_1 - J_2 - I_{R_2} = 0 \Longrightarrow I_{R_1} + J_1 = J_2 + I_{R_2}$$

Morale della favola: generatori di corrente reali possono essere montati in serie, ci saranno correnti interne che circoleranno sulle resistenze in parallelo ai generatori.

4.6 Bipoli elettrici: generatori pilotati di tensione e di corrente

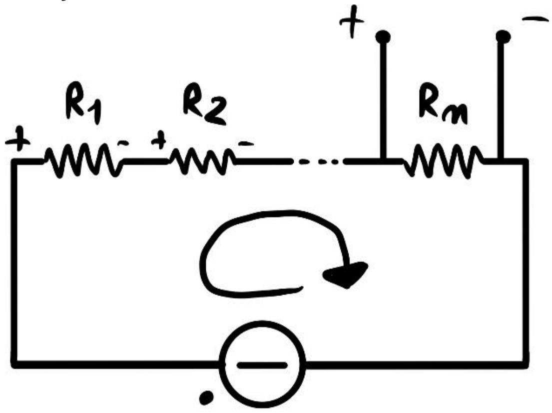
Nei generatori dipendenti la tensione o la corrente dipende da una qualche altra grandezza del circuito elettrico. Graficamente si rappresentano per mezzo di rombi, distinguendo le varie tipologie di generatori.

- **Generatore di tensione pilotato in tensione (1)**
$$v_1(t) = \alpha_1 v_r(t)$$
dove $v_r(t)$ è la tensione su un certo ramo r, mentre α_1 è un valore adimensionale.
- **Generatore di tensione pilotato in corrente (2)**
$$v_2(t) = \alpha_2 i_r(t)$$
dove $i_r(t)$ è la corrente su un certo ramo r, mentre α_2 si misura in Ohm.
- **Generatore di corrente pilotato in tensione (3)**
$$i_3(t) = \alpha_3 v_r(t)$$
dove $v_r(t)$ è la tensione su un certo ramo r, mentre α_3 si misura in Siemens.
- **Generatore di corrente pilotato in corrente (4)**
$$i_4(t) = \alpha_4 i_r(t)$$
dove $i_r(t)$ è la corrente su un certo ramo r, mentre α_4 è adimensionale.



4.7 Problema del partitore di tensione

Abbiamo un generatore di tensione $e(t)$ ed n resistenze disposte in serie. Il problema consiste nel calcolare la tensione a capo di una resistenza j-esima.



Applichiamo il secondo principio di Kirkhoff e spostiamo a primo membro $e(t)$

$$e(t) = v_1(t) + v_2(t) + \cdots + v_n(t) = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n)i(t)$$

cioè

$$i(t) = \frac{e(t)}{\sum_{i=1}^{n} R_i}$$

Concludiamo sostituendo nella prima legge di Ohm

$$v_j(t) = R_j(t) \cdot i(t) = \frac{R_j}{\sum_{i=1}^{n} R_i} e(t)$$

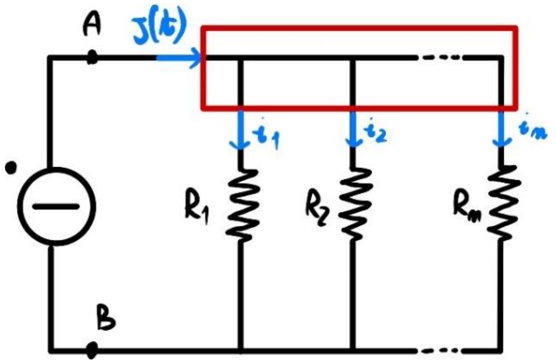
Il denominatore è costante, il numeratore no. Si ha una ripartizione direttamente proporzionale al valore della resistenza j-esima.

Cosa succede se tutte le resistenze presentano uno stesso valore? La tensione si ripartisce in ugual misura su tutte le n resistenze.

$$v_j(t) = \frac{R}{n \cdot R} e(t) = \frac{e(t)}{n}$$

4.8 Problema del partitore di corrente

Abbiamo un generatore di tensione $J(t)$ ed n resistenze in parallelo. Il problema consiste nel trovare la corrente passante da una di queste resistenze.



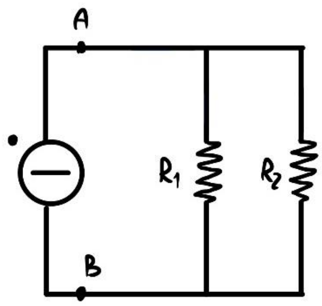
Applichiamo il primo principio di Kirkhoff: l'esito è una formula molto simile a quella già vista per il partitore di tensione.

$$J(t) = i_1 + \cdots + i_n = \frac{v_{AB}(t)}{R_1} + \cdots + \frac{v_{AB}(t)}{R_n} = G_1 v_{AB}(t) + \cdots + G_n v_{AB}(t) = (G_1 + \cdots + G_n) v_{AB}(t)$$

Cioè $v_{AB}(t) = \frac{J(t)}{\sum_{i=1}^{n} G_i}$. Concludiamo sostituendo nella prima legge di Ohm

$$i_j(t) = \frac{v_{AB}(t)}{R_j} = G_j v_{AB}(t) = \frac{G_j}{\sum_{i=1}^{n} G_i} J(t)$$

Supponiamo che si voglia ragionare in termini di resistenze con un circuito caratterizzato da un generatore di tensione e due resistenze disposte in parallelo.



$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} J(t) = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} J(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} J(t)$$

$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} J(t) = \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} J(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} J(t)$$

Il caso con due resistenze è facile da ricordare, le cosa si complicano quando il numero di rami aumenta.

- **Cosa succede con due resistenze uguali?**
  Perfetta ripartizione della corrente tra i due rami.

$$i_x = \frac{R}{2R} J(t) = \frac{J(t)}{2}$$

E se invece le resistenze sono diverse? Ripartizione per ogni ramo inversamente proporzionale rispetto alla resistenza del ramo. Detta in altro modo: se la conduttanza la è alta la corrente è alta, se la conduttanza è bassa la corrente è bassa

- **Supponiamo che $\boldsymbol{R_1 = R, R_2 = 2R}$.**
  Otteniamo

$$i_1(t) = \frac{2R}{3R} J(t) = \frac{2}{3} J(t) \qquad\qquad i_2(t) = \frac{R}{3R} J(t) = \frac{1}{3} J(t)$$

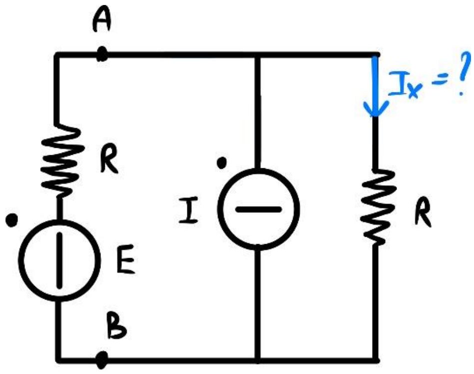
- **Cosa succede se $\boldsymbol{R_2 \to 0}$?**
  Riprendiamo le formule con le resistenze. La corrente va tutta nel ramo 1!

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} J(t) = \frac{0}{R_1 + 0} J(t) = 0 \qquad\qquad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} J(t) = \frac{R_1}{R_1 + 0} J(t) = J(t)$$

4.9 Principio di sovrapposizione degli effetti

In un sistema lineare ogni causa da luogo a un effetto, date più cause in contemporanea possiamo calcolare gli effetti sommando singolarmente gli effetti di ogni causa.

<u>Detto con termini dell'elettrotecnica</u>. In un circuito con più generatori indipendenti si calcola la tensione o la corrente su un ramo del circuito come somma algebrica delle tensioni e delle correnti su quel ramo, calcolate facendo agire singolarmente i generatori indipendenti.



Facciamo un esempio col seguente circuito. Conosciamo:

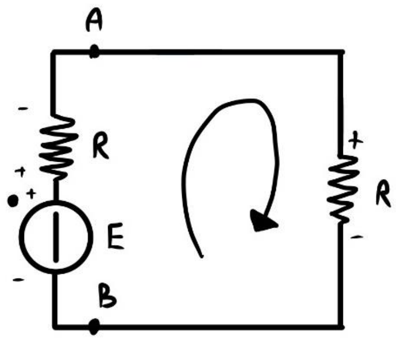
- la tensione E fornita dal generatore di tensione,
- la corrente I fornita dal generatore di corrente, e
- la resistenza R.

Vogliamo trovare la corrente I_x, quella che attraversa il ramo del circuito con solo la resistenza. L'esercizio può essere risolto solo applicando il principio di sovrapposizione:

- non possiamo applicare le leggi di Ohm e basta perché per calcolare la corrente serve conoscere la tensione ai capi della resistenza (che è in parallelo con un generatore di corrente, dove abbiamo detto che la tensione è indeterminata e dipende dal resto del circuito)
- non possiamo applicare i partitori di corrente e di tensione perché non abbiamo resistenze in serie o in parallelo.

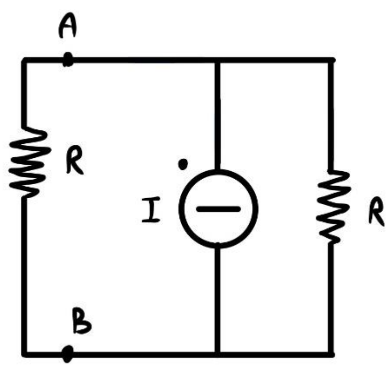
Tre passaggi.

- **Primo passaggio**.
  Risoluzione del circuito immaginando che il generatore di corrente eroghi corrente zero (circuito aperto, è come se non ci fosse il ramo)



$$-E + R \cdot I'_x + R \cdot I'_x = 0 \Longrightarrow I'_x = \frac{E}{2R}$$

- **Secondo passaggio**.
  Risoluzione del circuito immaginando che il generatore di tensione eroghi tensione zero (corto circuito). Dato che abbiamo due resistenze disposte in parallelo possiamo applicare il partitore di corrente.



$$I''_x = \frac{1}{2}$$

- **Passaggio conclusivo**.
  Concludiamo sommando gli effetti
$$I_x = I'_x + I''_x = \frac{E}{2R} + \frac{1}{2}I$$

Osservazioni:

- **Applicabilità del principio rispetto a sottoinsiemi**.
  La sovrapposizione si intende anche per sottoinsiemi, non per forza singolarmente. Si prenda ad esempio un caso con tre generatori:
    - possiamo studiare ogni generatore singolarmente e poi sommare gli effetti;
    - studiare l'applicazione di due generatori insieme e poi del terzo da solo, e poi sommare gli effetti.
- **Calcolo della potenza dissipata sulla resistenza**.
  Il principio di sovrapposizione non si può applicare nel calcolo della potenza, in quanto non si ha linearità!
    - **Applicazione del principio (SBAGLIATO!!!)**
$$P_R = P'_R + P''_R = R(I'_X)^2 + R(I''_X)^2 = R\left[\left(\frac{E}{2R}\right)^2 + \left(\frac{I}{2}\right)^2\right]$$
    - **Calcolo corretto della potenza**
$$P_R = R(I_X)^2 = R\left[\left(\frac{E}{2R}\right) + \left(\frac{I}{2}\right)\right]^2$$

  Sbagliare questo all'esame è grave errore.

4.10 Risoluzione di un circuito

4.10.1 Cosa significa risolvere un circuito?

Risolvere un circuito significa *calcolare tutte le correnti e tutte le tensioni a capo di tutti i rami del circuito*.

Potremo utilizzare le cose viste fino ad ora, ma in alcuni casi è possibile applicare metodi generali che permettono la risoluzione di un qualunque tipo di circuito (al di là degli elementi presenti e della loro disposizione).

- Abbiamo r rami ed n nodi (supposizione che facciamo per ogni metodo).
- In linea di principio ogni metodo dovrebbe permettere l'individuazione di $2r$ incognite (due per ogni ramo, tensione e corrente).
- Nella pratica si riducono le incognite, si calcolano solo le tensioni o solo le correnti (in alcuni casi otteniamo cose gratis grazie alla prima legge di Ohm).

4.10.2 Primo metodo: metodo delle correnti di ramo (o metodo del tableau)

4.10.2.1 Spiegazione

Il metodo delle correnti di ramo prevede l'individuazione di r incognite: troviamo, per ogni ramo, la corrente passante da esso. All'individuazione della corrente segue gratis il calcolo della tensione per mezzo della prima legge di Ohm.

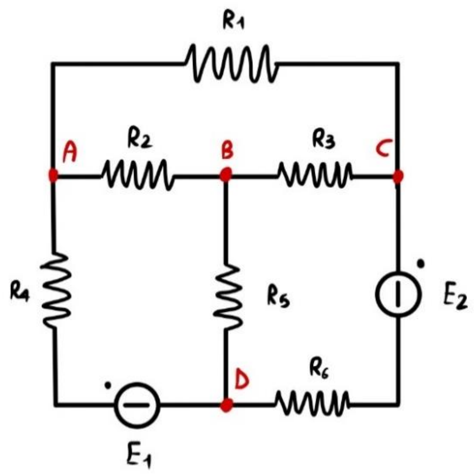
I passaggi da svolgere sono quattro:

1. Dare nome ai nodi
2. Dare un nome alle correnti di ramo (e anche un verso)
3. Scrivere $n-1$ equazioni applicando il primo principio di Kirkhoff ad $n-1$ nodi.
4. Scrivere $r-(n-1)$ equazioni ricorrendo al secondo principio di Kirkhoff (si scelgono le maglie).

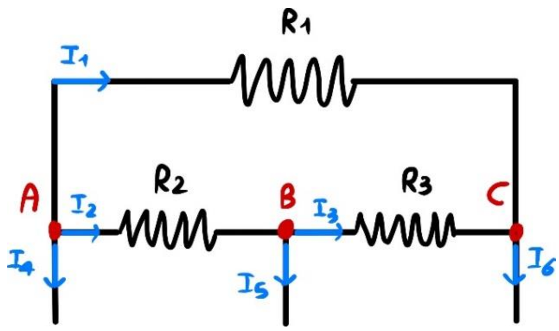
4.10.2.2 Esempio

Per avere le idee chiare procediamo risolvendo il circuito evidenziato nel passo 1.

- **Primo passo**.
  Diamo nomi ai nodi



- **Secondo passo**.
  Diamo nomi e verso alle correnti di ramo

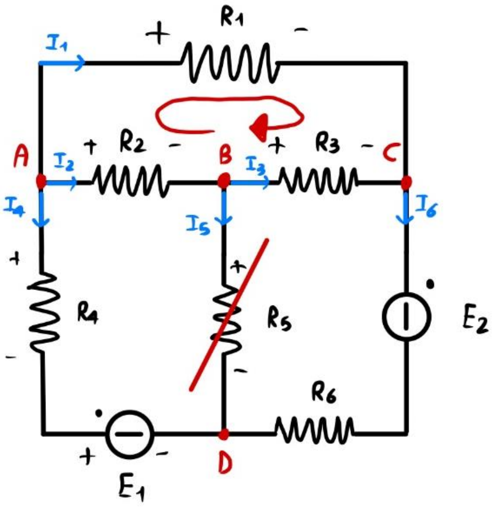


- **Terzo passo**.
  Scriviamo le prime $n-1$ equazioni ricorrendo al primo principio di Kirkhoff. Consideriamo il nodo A, il nodo B e il nodo D:

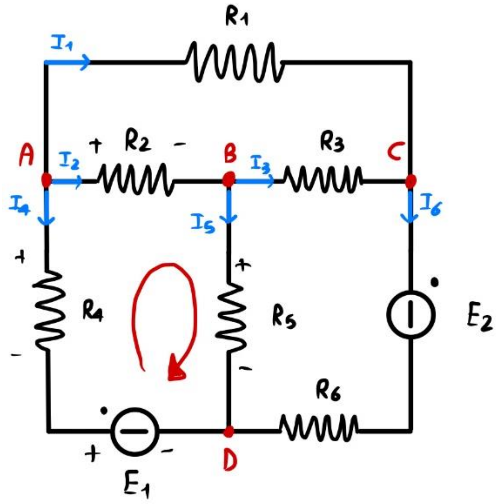
$$A\colon\ I_1 + I_2 + I_4 = 0$$
$$B\colon\ I_2 = I_4 + I_5$$
$$D\colon\ I_4 + I_5 + I_6 = 0$$

  È dimostrabile che ulteriori equazioni scritte col primo principio risulteranno linearmente dipendenti rispetto alle equazioni già scritte.

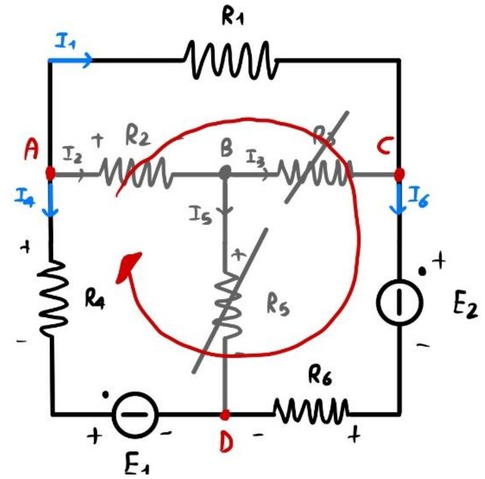
- **Quarto passo**.
  Scriviamo le rimanenti $r-(n-1)$ equazioni ricorrendo al secondo principio di Kirkhoff. Scegliamo in modo arbitrario le maglie, ma dopo aver scritto l'equazione di una maglia cancelliamo un ramo della stessa, in modo tale da non scrivere di nuovo la stessa equazione (o comunque sia un'equazione linearmente dipendente alla precedente).



$$-E_1 - R_4 I_4 + R_2 I_2 + R_5 I_5 = 0$$



$$-R_2 I_2 + R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$$



$$-R_4 I_4 + R_1 I_1 + E_2 + R_6 I_6 - E_1 = 0$$

Dopo aver scritto la terza equazione non abbiamo più maglie.

Il risultato dei quattro passi precedenti è un sistema di equazioni lineari ($\Longrightarrow Ax = b \Longrightarrow x = A^{-1}b$).

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_4 = 0 \\ I_2 = I_4 + I_5 \\ I_4 + I_5 + I_6 = 0 \\ -E_1 - R_4 I_4 + R_2 I_2 + R_5 I_5 = 0 \\ -R_2 I_2 + R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0 \\ -R_4 I_4 + R_1 I_1 + E_2 + R_6 I_6 - E_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & R_2 & 0 & -R_4 & R_5 & 0 \\ R_1 & -R_2 & -R_3 & 0 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & 0 & -R_4 & 0 & R_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 \\ 0 \\ E_1 - E_2 \end{pmatrix}$$

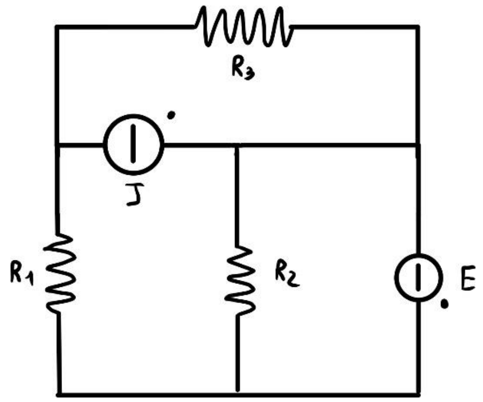
Il vettore dei termini noti rappresenta gli ingressi esterni al circuito: i generatori! In assenza di generatori avrei avuto una colonna di tutti zeri, quindi $x = 0$ (non circolano correnti).

Il metodo funziona sempre, ma ha due difetti:

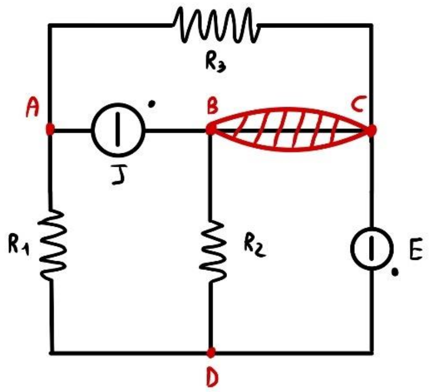
- **Complessità computazionale elevata**
  Più grande è il circuito, più grande è il numero di rami, ergo maggiore è il numero di equazioni da risolvere e quindi la dimensione della matrice da invertire.
- **Non si possono calcolare singole correnti e basta**
  Obbligatorio calcolare tutte le correnti, anche quando siamo interessati a una sola.

4.10.2.3 Riduzione del numero di incognite: supernodo e presenza di generatore di corrente

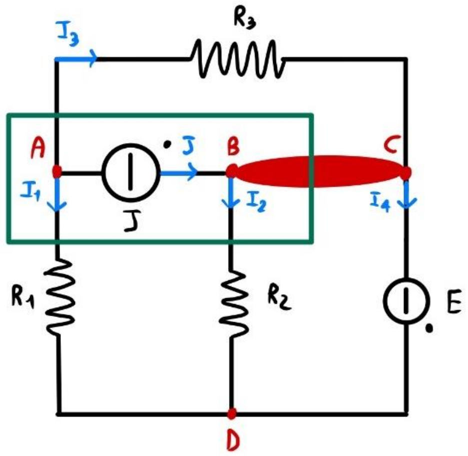
Consideriamo il seguente circuito applicando il metodo delle correnti di ramo



- **Primo passo**.
  Diamo nomi ai nodi. I nodi B e C sono allo stesso potenziale e non sono i capi di alcun bipolo: cortocircuito! Domanda che sorge spontanea: possiamo considerare i nodi B e C come un unico nodo BC? Sì, ci conviene perché riduciamo il numero di incognite e quindi il numero di equazioni da risolvere.



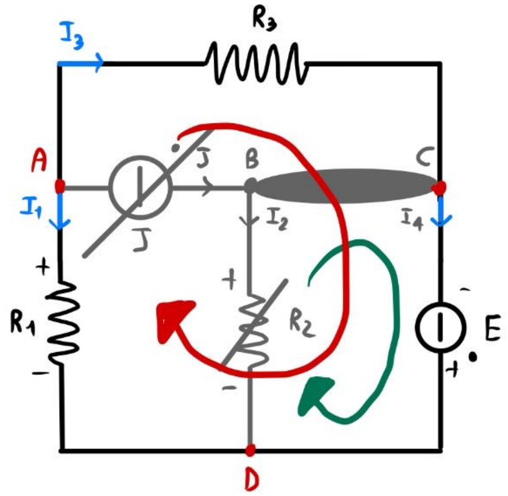
- **Secondo passo**.
  Diamo nomi e verso alle correnti di ramo. Osserviamo che la corrente nel ramo AB è nota: in quel ramo abbiamo il generatore di corrente! Conviene dare alla corrente un nome diverso, in figura J.



Il numero di incognite non è più r, ma $r - N_{gc}$, dove N_{gc} è il numero di generatori di corrente.

- **Terzo passo**.
  Scriviamo le prime $n-1$ equazioni ricorrendo al primo principio di Kirkhoff. Consideriamo il nodo A, e il supernodo BC:
  $$A:\ I_1 + I_2 + J = 0$$
  $$BC: J + I_3 = I_2 + I_4$$
  Considerato che abbiamo un nodo in meno possiamo già fermarci.

- **Quarto passo**.
  Scriviamo le rimanenti $r - N_j - (n-1)$ equazioni ricorrendo al secondo principio di Kirkhoff. Il metodo è lo stesso spiegato precedentemente, ma si fa una cosa in più: si cancellano subito i rami dove sono presenti i generatori di correnti.
    - Meno maglie per la presenza del generatore di corrente.
    - Non possiamo scrivere la caduta di potenziale sui generatori di corrente: è indeterminata e dipende dal resto del circuito.



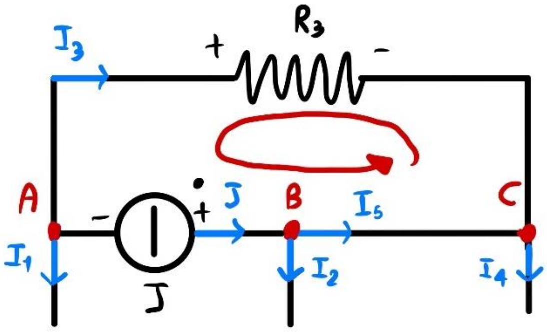
$$-R_2I_2 - E = 0 \qquad\qquad R_3I_3 - E - R_1I_1 = 0$$

Nella scelta delle maglie non si considera il macronodo BC, ma i nodi B e C distinti.

Scriviamo il sistema lineare in forma compatta

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + J = 0 \\ J + I_3 = I_2 + I_4 \\ -R_2I_2 - E = 0 \\ R_3I_3 - E - R_1I_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 \\ -R_1 & 0 & R_3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J \\ J \\ -E \\ E \end{pmatrix}$$

- **Come trovo effettivamente la tensione ai capi del generatore di corrente?**
  Se conosciamo tutte le correnti possiamo trovare tutte le tensioni, inclusa quella ai capi del generatore di corrente. Quello che dobbiamo fare è scegliere una particolare maglia all'interno della quale è presente il generatore di corrente e applicare la seconda legge di Kirkhoff. Prendiamo ad esempio la seguente maglia



Otteniamo

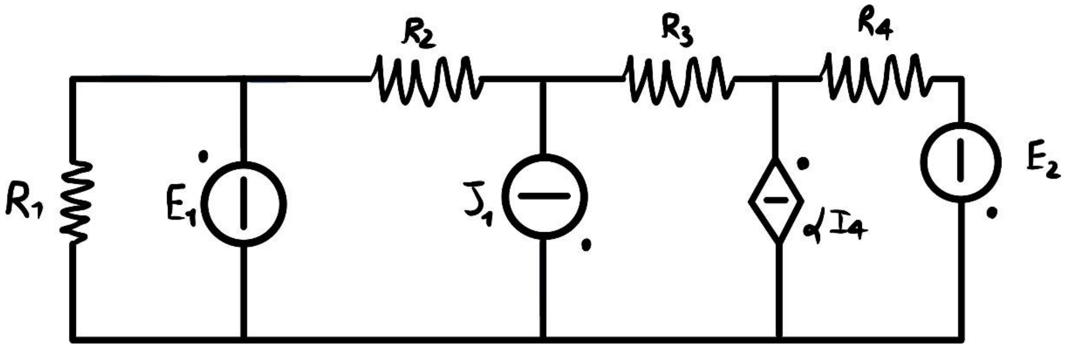
$$V_J + R_3I_3 = 0 \Longrightarrow V_J = -R_3I_3$$

- **Come trovo la corrente passante per il ramo BC?**
  Precedentemente abbiamo sostituito il ramo BC con un supernodo BC, eliminando incognite. Non abbiamo calcolato la corrente passante per quel ramo, ma possiamo trovarla gratis utilizzando i dati a nostra disposizione. Applichiamo la prima legge di Kirkhoff sul nodo B (dove poniamo in uscita una corrente I_5)

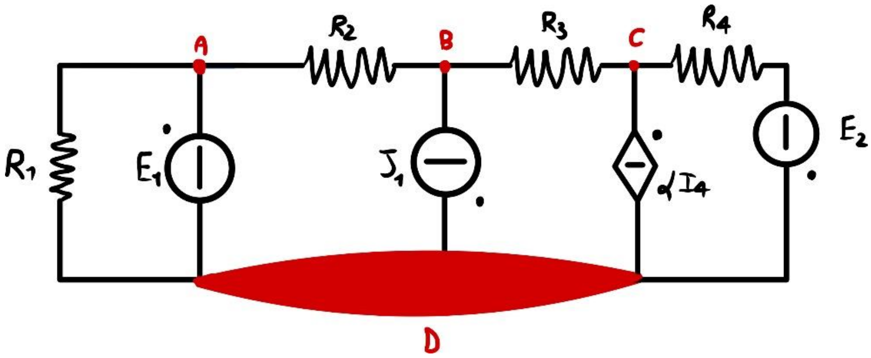
$$J = I_5 + I_2 \Longrightarrow I_5 = J - I_2$$

4.10.2.4 Risoluzione di un esercizio con generatore di corrente pilotato

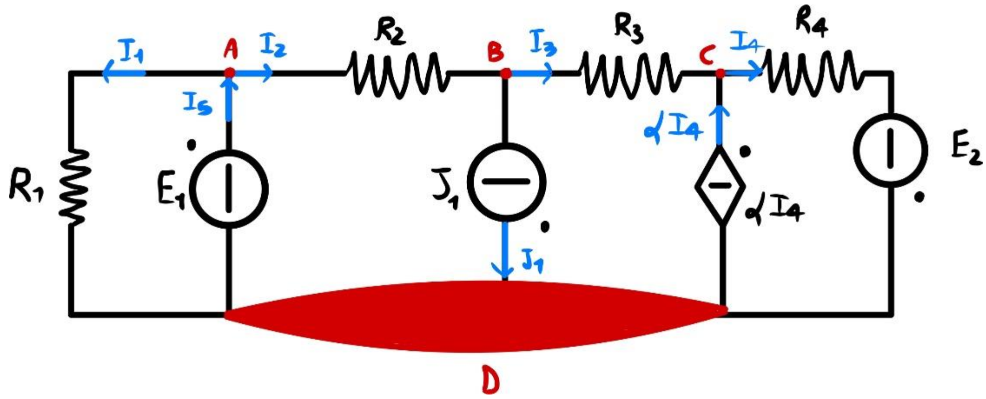
Consideriamo il seguente circuito, che presenta al suo interno un generatore pilotato, e andiamo a risolverlo utilizzando il metodo delle correnti di ramo.



- **Primo passo**.
  Abbiamo dato i nomi ai nodi, creando il supernodo D.



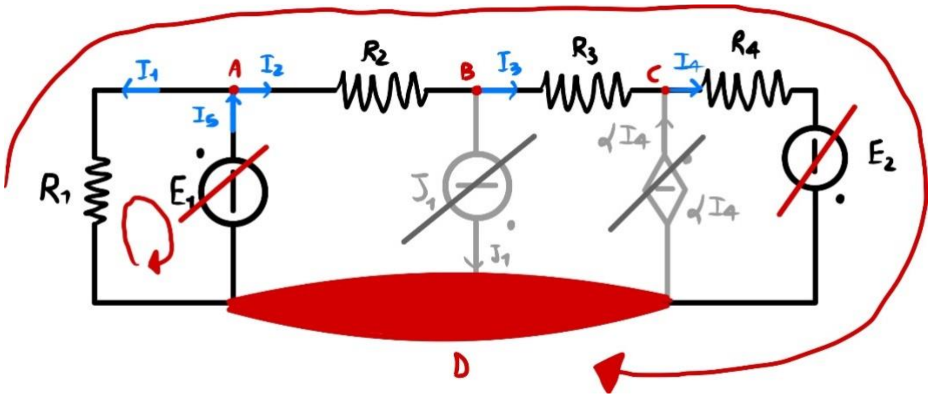
- **Secondo passo**.
  Abbiamo dato nomi e versi alle correnti, tenendo conto della presenza di due generatori di corrente: quello indipendente (che eroga corrente J_1) e quello pilotato (che eroga corrente αI_4)



  Complessivamente cinque correnti da trovare, dove non considero i due generatori di corrente citati prima (uno è già noto, l'altro si ha il valore gratis dopo aver trovato I_4).
- **Terzo passo**.
  Abbiamo trovato le prime tre equazioni applicando il primo principio di Kirkhoff (i nodi sono quattro, considerando il supernodo)

$$A: I_5 = I_1 + I_2$$
$$B: I_2 = J_1 + I_3$$
$$D: I_1 + J_1 + I_4 = I_5 + \alpha I_4$$

Scriviamo le due equazioni rimanenti col secondo principio di Kirkhoff, ignorando i rami con i generatori di corrente



Con le frecce abbiamo indicato le maglie percorse: prima quella più piccola e poi quella più grossa.

$$-R_1 I_1 + E_1 = 0$$
$$-R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 - E_2 = 0$$

A questo punto concludiamo scrivendo il sistema lineare

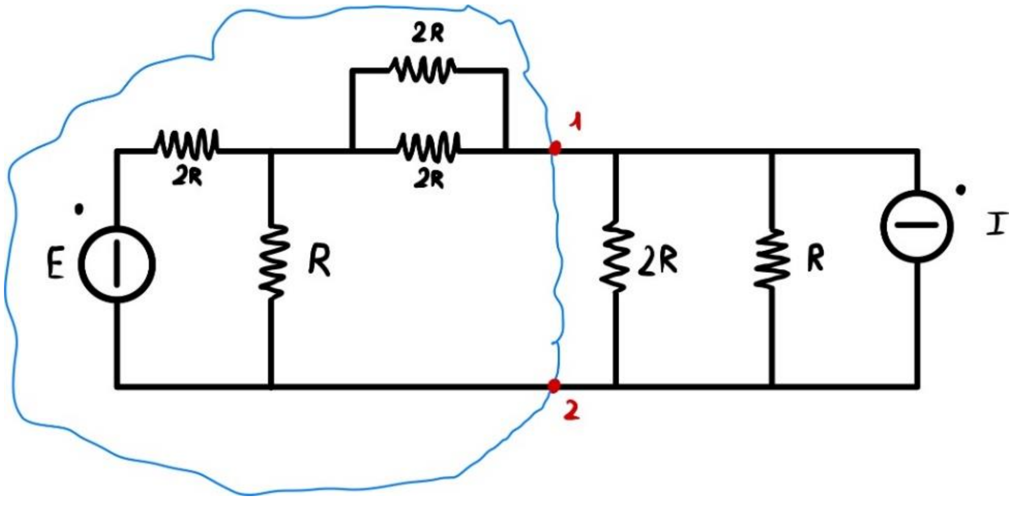
$$\begin{cases} I_5 = I_1 + I_2 \\ I_2 = J_1 + J_3 \\ I_1 + J_1 + I_4 = I_5 + \alpha I_4 \\ -R_1 I_1 + E_1 = 0 \\ -R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 - E_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\alpha & -1 \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ J_1 \\ -J_1 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

Non abbiamo alcuna traccia del generatore dipendente di corrente!

4.10.3 Teoremi di Thevenin e di Norton

4.10.3.1 Teorema di Thevenin

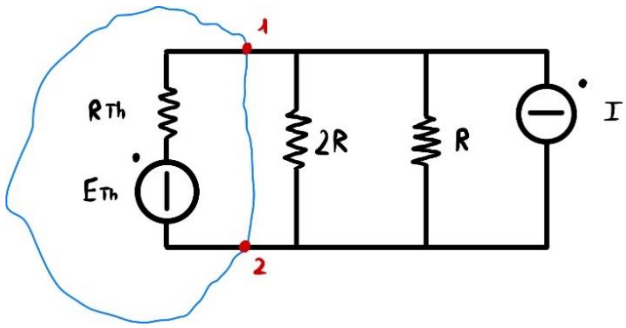
Supponiamo di avere il seguente circuito.



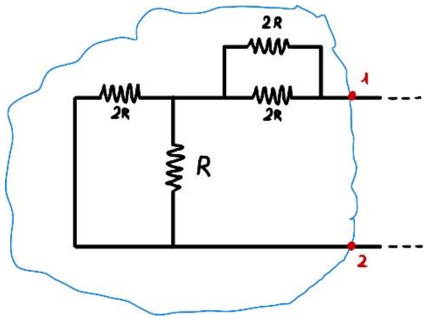
Potrebbe essere utile trovare una sottorete equivalente agli effetti esterni, rispetto alla sottorete evidenziata in figura. Non bastano le nozioni viste fino ad ora (nella sottorete è presente un generatore).

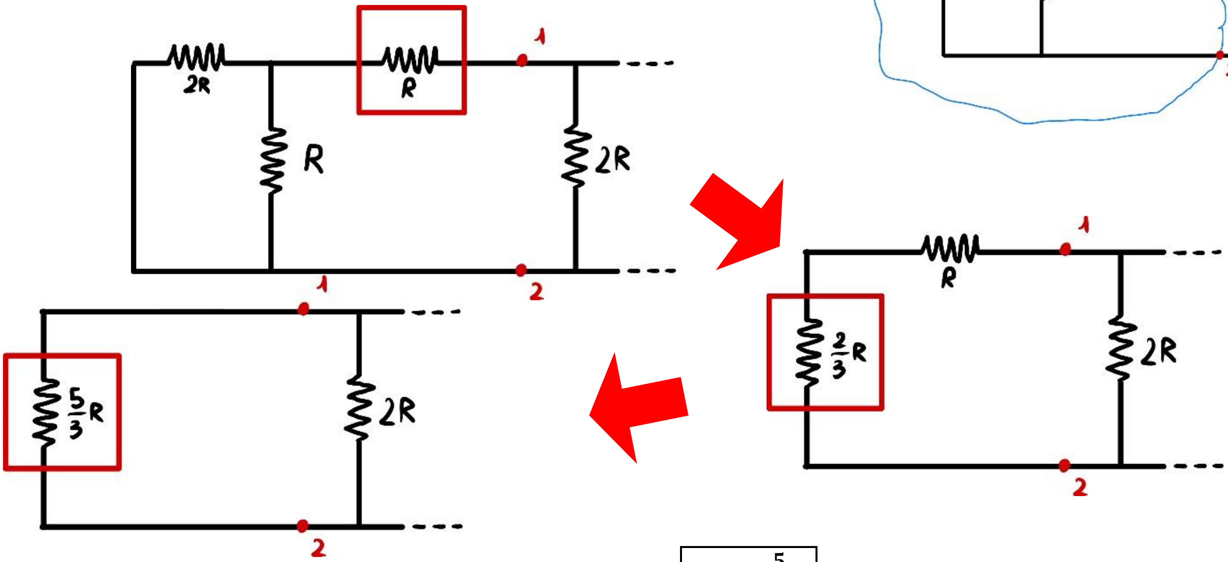
Si va a introdurre quello che noi conosciamo come teorema di Thevenin. Esso afferma che una sottorete può essere semplificata con una sottorete (equivalente agli effetti esterni), che consiste in una resistenza disposta in serie a un generatore di tensione.

Col circuito precedente otteniamo la semplificazione a lato!



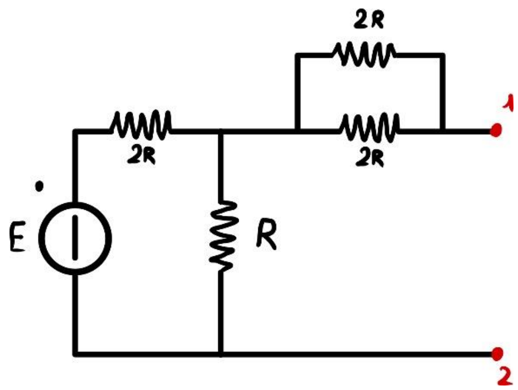
- **Definiamo la resistenza R_{Th} *resistenza di Thevenin*.**
  La resistenza di Thevenin consiste nella resistenza vista ai morsetti 1 e 2 dopo aver disattivato tutti i generatori indipendenti della sottorete. Prendiamo la sottorete dopo aver disattivato il generatore di tensione presente.



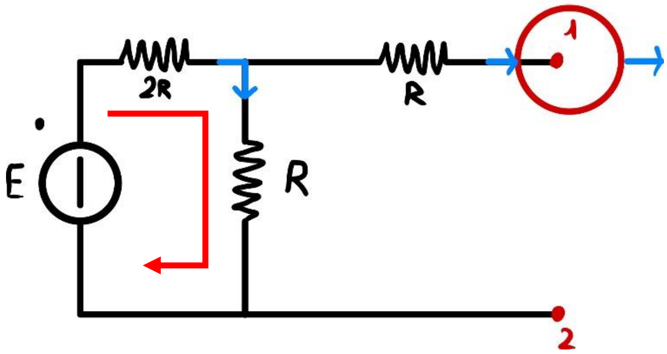


Abbiamo trovato che la resistenza di Thevenin è $\boxed{R_{Th} = \frac{5}{3}\boldsymbol{R}}$

- **Definiamo il generatore di tensione E_{Th} *generatore di Thevenin*.**
  Il generatore di tensione di Thevenin genera una tensione pari *alla tensione a vuoto ai morsetti 1 e 2 (V_{12})*. Si intende che noi stacchiamo la sottorete dal resto del circuito e la trattiamo come se la parte di rete rimanente non esistesse.



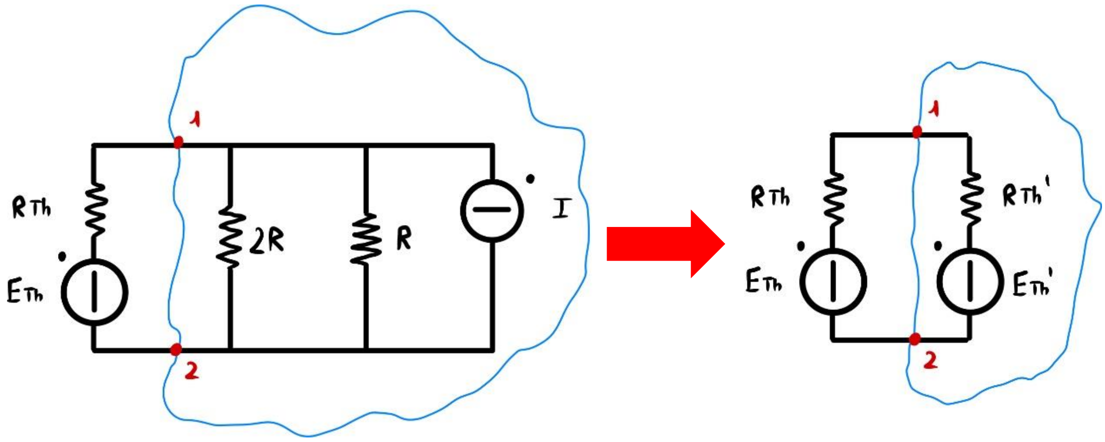
Semplifichiamo le due resistenze 2R disposte in parallelo e teniamo presente sul ramo vicino ad 1 non scorre più corrente (dato che abbiamo scollegato la sottorete dal resto del circuito, la cosa è dimostrabile applicando il primo principio di Kirkhoff rispetto alla linea chiusa rossa in figura).



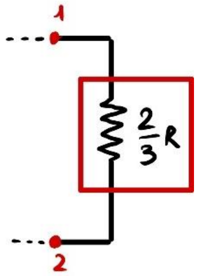
Segue che possiamo trattare le due resistenze rimanenti come due resistenze disposte in serie e applicare il partitore di tensione per trovare V_{12}.

$$V_{12} = E \cdot \frac{R}{2R + R} = \boxed{\frac{1}{3}E = E_{Th}}$$

Adesso semplifichiamo l’altra sottorete

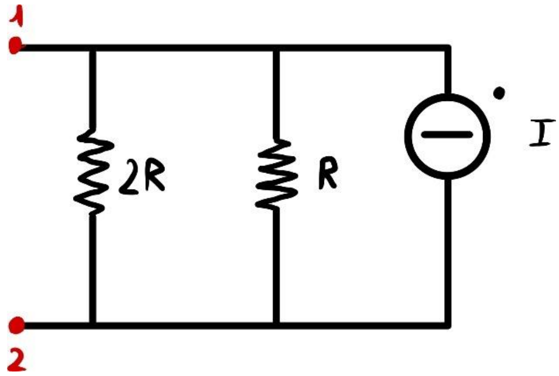


- **Resistenza di Thevenin R'_{Th}**
  Rimuoviamo i generatori indipendenti della sottorete, in questo caso il generatore di corrente. Semplificando due resistenze disposte in parallelo otteniamo

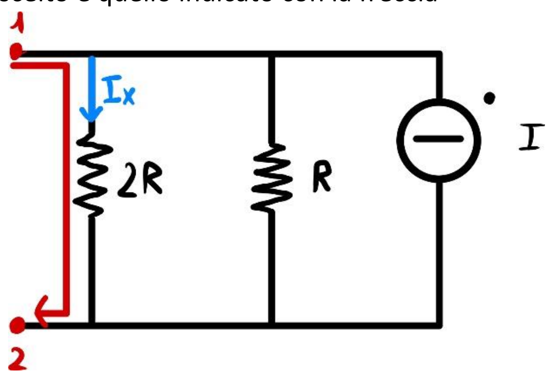


$$\boxed{R'_{Th} = \frac{2}{3}R}$$

- **Generatore di Thevenin E'_{Th}**
  Scolleghiamo la sottorete dal resto del circuito e troviamo V_{12}



Vari metodi per calcolare la tensione: in generale si sceglie un percorso da 1 a 2 e si sommano tutte le cadute di potenziale lungo questo percorso. Si osservi che non ha senso scegliere un percorso passante da un generatore di corrente, in quanto la tensione ai capi del generatore è indeterminata. Il percorso scelto è quello indicato con la freccia

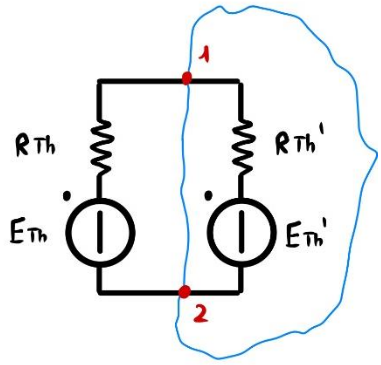


$$V_{12} = 2R \cdot I_x$$

La corrente lungo il ramo si trova utilizzando il partitore di corrente (la corrente erogata dal generatore è ripartita tra i due rami)

$$I_x = I\frac{R}{2R+R} = \boxed{\frac{I}{3} = E'_{Th}}$$

Riflessione. Come si dispongono resistenze e generatori?



- L'ordine in serie di resistenza e generatore è irrilevante.
- Attenzione, invece, al contrassegno del generatore di tensione: lo si mette sempre dalla parte dell'1, in modo tale E'_{Th} sia la differenza tra potenziale di 1 e potenziale di 2.

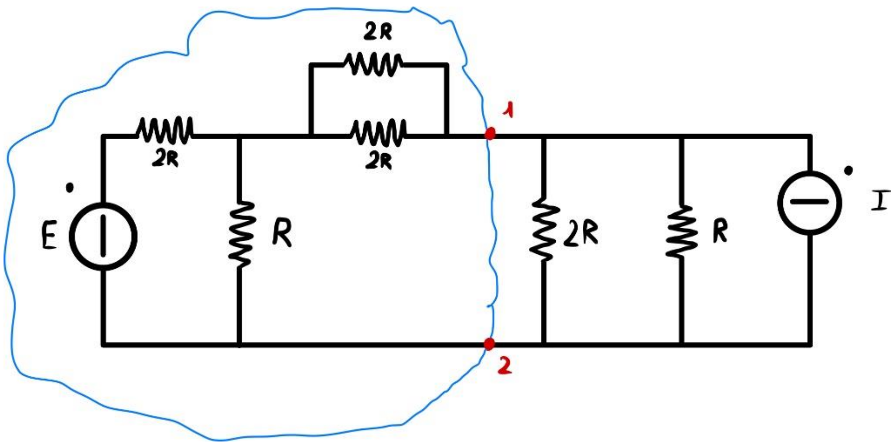
Ipotesi. Le ipotesi necessarie per l'applicazione del teorema di Thevenin sono le seguenti:

- il circuito è lineare (si tenga a mente che la dimostrazione si basa sull'applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti, valido esclusivamente in circuiti lineari);
- in circuiti isolati (non posso sostituire una sottorete con la sottorete equivalente se ho, ad esempio, generatori pilotati da valori esterni alla sottorete);
- in circuiti accessibili dai morsetti 1 e 2.

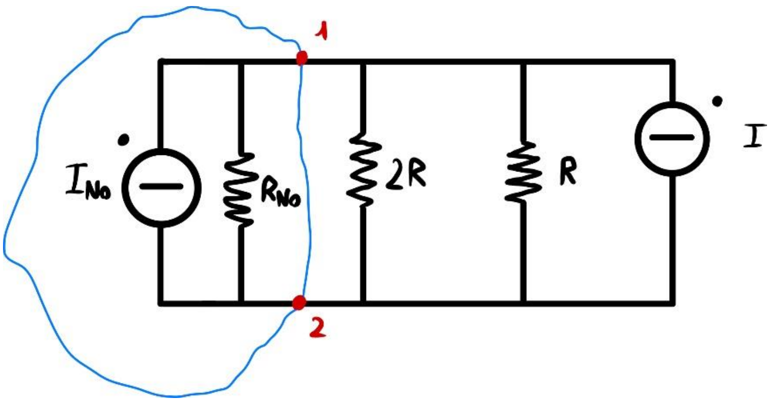
4.10.3.2 Teorema di Norton

Si va a introdurre quello che noi conosciamo come teorema di Norton, che è il duale del teorema di Thevenin. Esso afferma che una sottorete può essere semplificata con una sottorete (equivalente agli effetti esterni), che consiste in una resistenza disposta in parallelo a un generatore di corrente.

Riprendiamo l'esempio di circuito visto col teorema di Thevenin



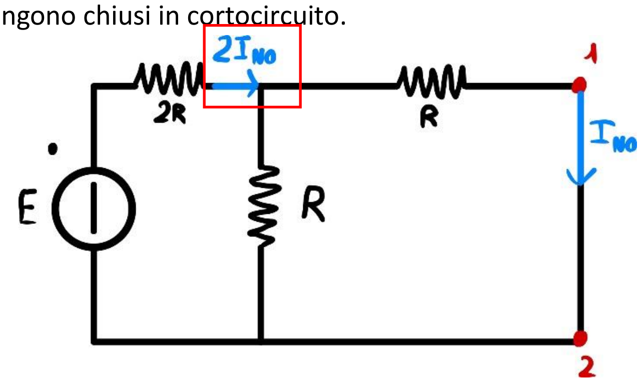
Otteniamo:



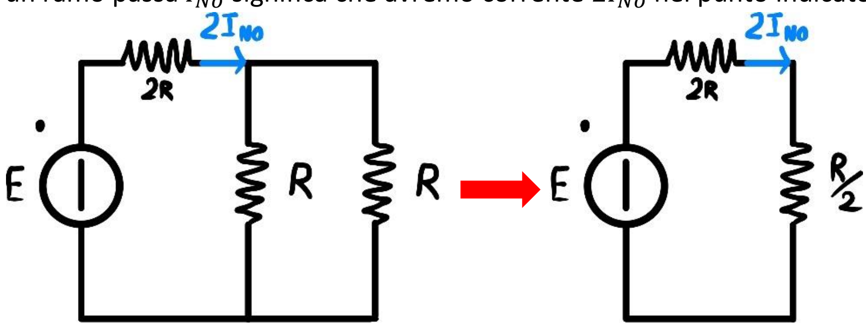
- **Definiamo la resistenza di Norton R_{No}.**
  La resistenza di Norton è uguale alla resistenza di Thevenin: si trova con lo stesso metodo.

$$R_{Th} = \boxed{R_{No} = \frac{5}{3}R}$$

- **Definiamo il generatore di corrente di Norton I_{No}.**
  Il generatore di corrente di Norton genera una corrente pari alla corrente che scorre sui morsetti 1 e 2 dopo che questi vengono chiusi in cortocircuito.



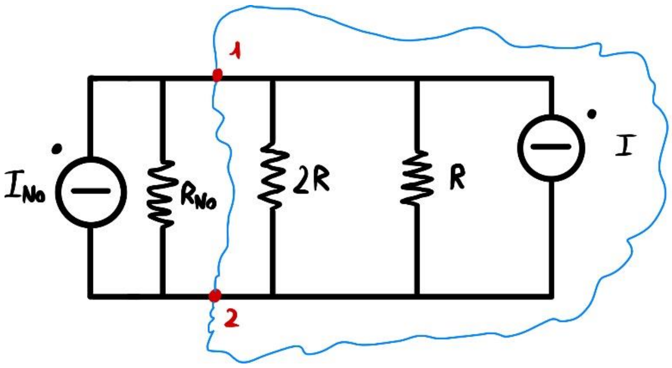
La prima cosa che potrebbe venirci in mente è di mettere in parallelo le due resistenze R, ma se facciamo questo sparisce il ramo dove è presente la corrente I_{No}. Come risolviamo? Con un trucco:
  - si applicano le regole del partitore di corrente;
  - se le due resistenze sono uguali sappiamo che la corrente si ripartisce in parti uguali tra i due rami;
  - se da un ramo passa I_{No} significa che avremo corrente $2I_{No}$ nel punto indicato in figura.

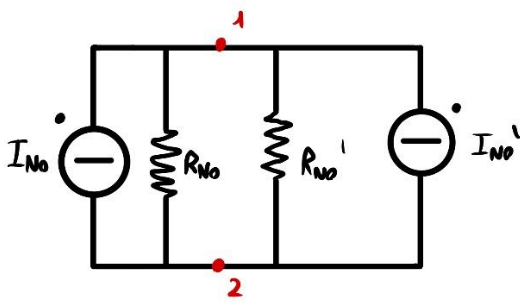


A questo punto troviamo la corrente applicando la prima legge di Ohm

$$i = \frac{v}{R} \longrightarrow 2I_{No} = \frac{E}{2R + \frac{R}{2}} \Longrightarrow \boxed{I_{No} = \frac{E}{5R}}$$

Sistemiamo l'altra sottorete

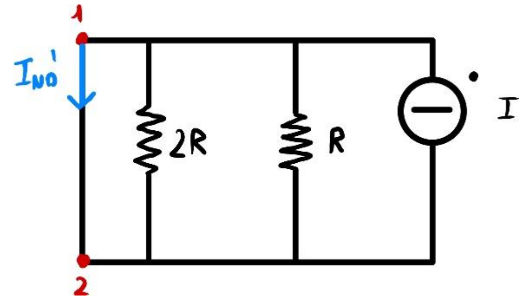




- **Resistenza di Norton R'_{No}.**
  Uguale alla resistenza di Thevenin.

$$R'_{Th} = \boxed{R'_{No} = \frac{2}{3}R}$$

- **Generatore di Norton I'_{No}.**
  Poniamo il cortocircuito tra nodo 1 e nodo 2.



Dato che è presente un cortocircuito la corrente va tutta in quel ramo, e non circola corrente nei rami dove sono presenti resistenza. In conclusione

$$\boxed{I'_{No} = I}$$

Corollario da Thevenin e Norton. Se una sottorete è equivalente alla sottorete di Thevenin e a quella di Norton allora la sottorete di Thevenin è equivalente alla sottorete di Norton.

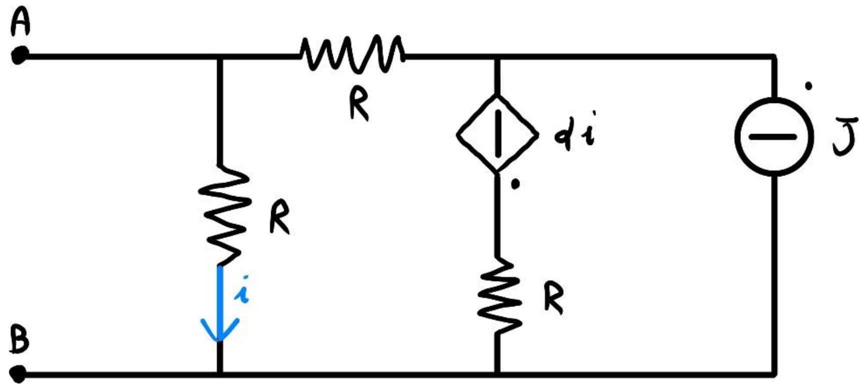
4.10.3.3 Passaggio da Thevenin a Norton e viceversa

È possibile passare al volo da Thevenin a Norton, e viceversa, utilizzando le seguenti formule

$$\begin{cases} I_{No} = \dfrac{E_{Th}}{R_{Th}} \\ R_{No} = R_{Th} \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} E_{Th} = R_{No} \cdot I_{No} \\ R_{Th} = R_{No} \end{cases}$$

4.10.3.4 Esempio di circuito con generatore pilotato

Vogliamo trovare l'equivalente Norton ai morsetti A e B del seguente circuito, che presenta un gen. pilotato



In presenza di generatori pilotati si aggiunge ai capi di A e B un generatore indipendente: nostra scelta se mettere un generatore di tensione o un generatore di corrente. Calcoliamo la resistenza come la tensione tra A e B divisa la corrente.

$$R_{AB} = \frac{V_p}{I_p}$$

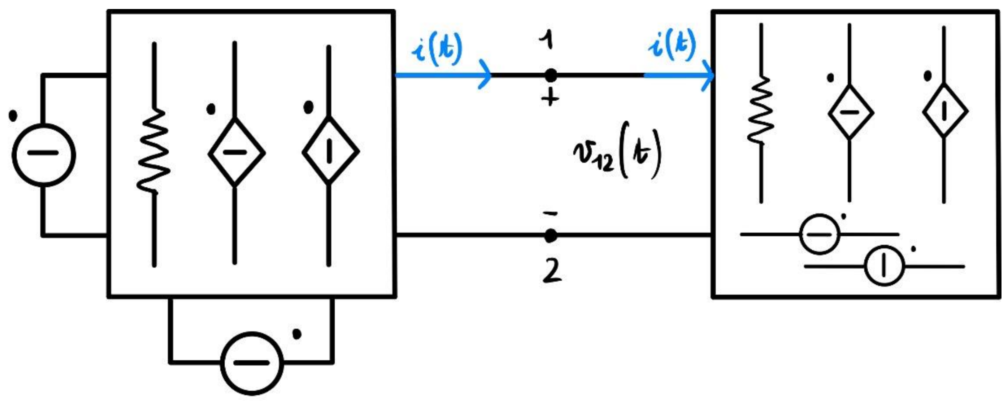
- Se si sceglie un generatore di tensione calcoliamo I_p e successivamente R_{AB} (V_p è valore noto)
- Se si sceglie un generatore di corrente calcoliamo V_p e successivamente R_{AB} (I_p è valore noto)

Si rimanda ad esempi di esercizi successivi (tutti i primi esercizi delle prove d'esame presentano un generatore pilotato). Il valore fornito dal generatore scelto per la risoluzione scomparirà nel calcolo della resistenza.

$$R_{AB} = \frac{V_p}{I_p} = \frac{V_p}{\alpha V_p} = \frac{\beta I_p}{I_p}$$

4.10.3.5 *Dimostrazione del teorema di Thevenin*

Dimostriamo il teorema di Thevenin partendo dal seguente circuito, diviso in due sottoreti

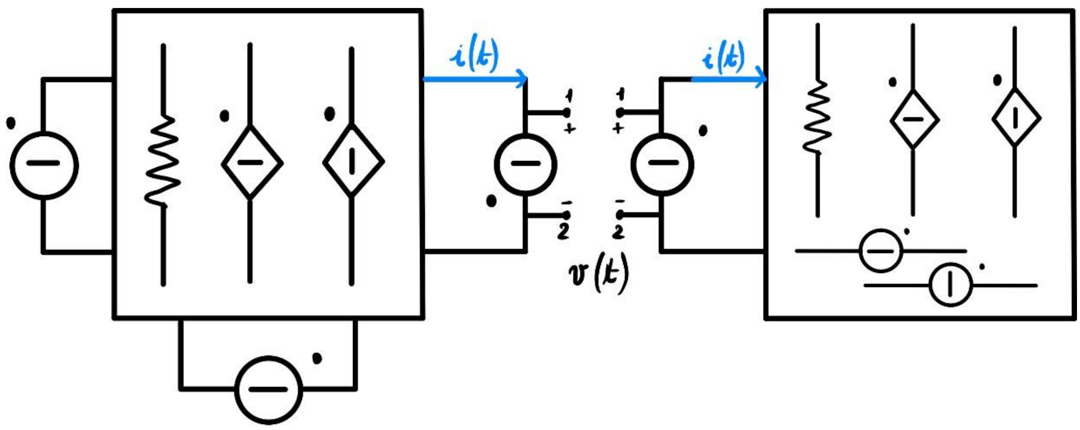


I due box rappresentano sottoreti generiche all'interno delle quali possono essere presenti i dispositivi indicati in figura. Avremo chiaro più avanti il motivo per cui abbiamo rappresentato esternamente i generatori indipendenti, per quanto riguarda la sottorete sinistra.

Vogliamo sostituire il box a sinistra con una sottorete equivalente agli effetti esterni. Questo significa due cose rispetto ai morsetti 1 e 2:

- scorre corrente $i(t)$ come prima della sostituzione;
- la tensione $v_{12}(t)$ ai capi dei due morsetti rimane la stessa.

Separiamo le due sottoreti ponendo dei generatori di corrente affinchè continui a scorrere la corrente $i(t)$ (occhio a come si pone il contrassegno)

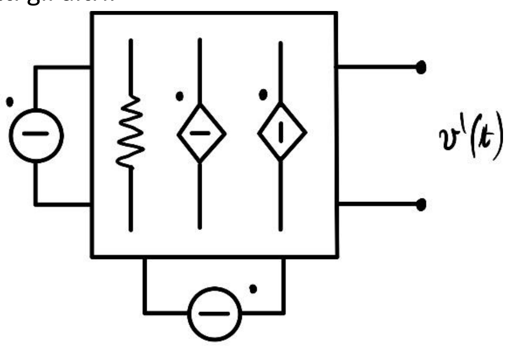


Fatto ciò vogliamo sapere quanto vale la tensione $v(t)$. Sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti andiamo a porre la tensione come la seguente sommatoria:

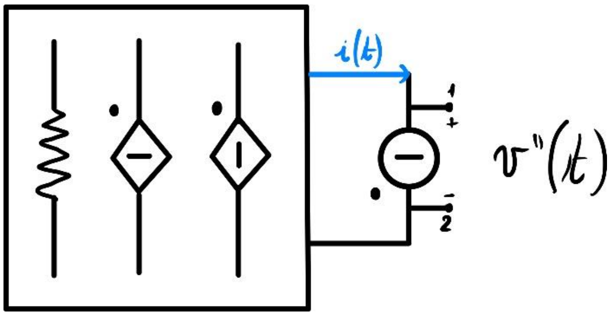
$$v(t) = v'(t) + v''(t) = v_0(t) - R_{12} \cdot i(t)$$

Dove:

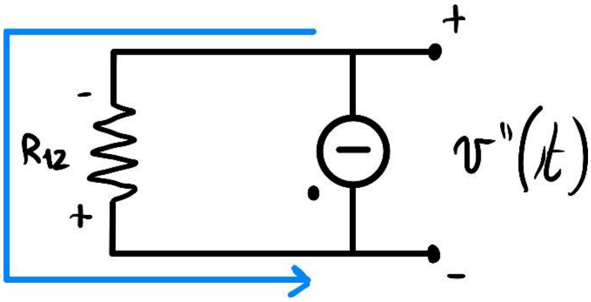
- $v'(t)$ è la caduta di potenziale tra il + e il – quando si disattiva quel generatore di corrente (circuito aperto) e si lasciano attivi tutti gli altri.



- $v''(t)$ è la caduta di potenziale tra il + e il – quando si disattivano tutti i generatori presenti (circuito aperto al posto dei generatori di corrente, cortocircuito al posto dei generatori di tensione) tranne il generatore di corrente posto ai morsetti.



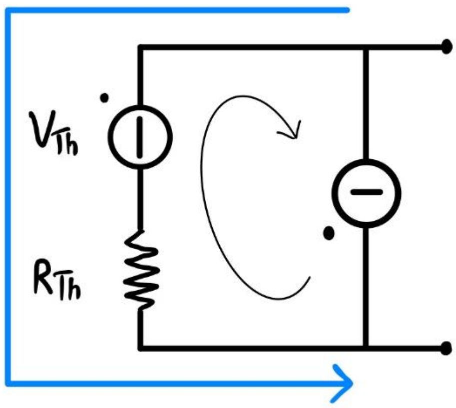
Se non sono presenti generatori di alcun tipo nel box allora possiamo sostituire la sottorete con un'unica resistenza vista



Scegliamo un percorso che non passi dal generatore di corrente, dove la tensione è indeterminata. Applichiamo il secondo principio di Kirkhoff sul percorso

$$v''(t) = -R_{12} \cdot i(t)$$

Adesso applichiamo letteralmente Thevenin



Affinchè si abbia equivalenza è necessario che la tensione $v(t)$ ai morsetti sia la stessa di prima. Scegliamo anche qua un percorso che non passi da generatori di corrente e applichiamo il 2° principio di Kirkhoff

$$v(t) = V_{Th} - R_{Th} \cdot i(t)$$

A questo punto possiamo confrontare le due formule, che devono essere uguali

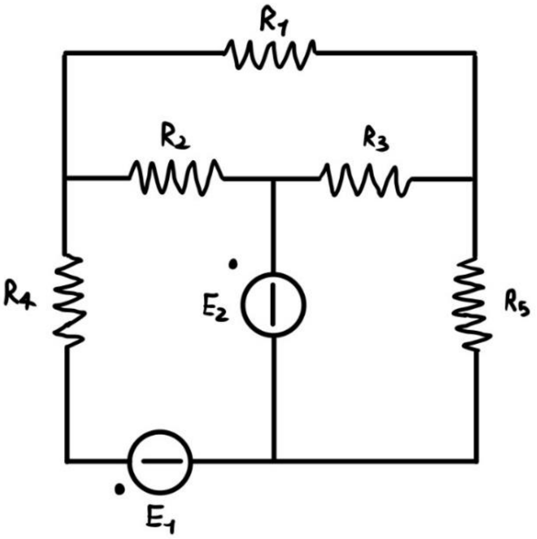
$$V_{Th} - R_{Th} \cdot i(t) = v_0(t) - R_{12} \cdot i(t)$$

E concludere che l'uguaglianza è valida solo se $V_{Th} = v_0(t)$ e $R_{Th} = R_{12}$.

4.10.4 Secondo metodo: metodo delle correnti di maglia

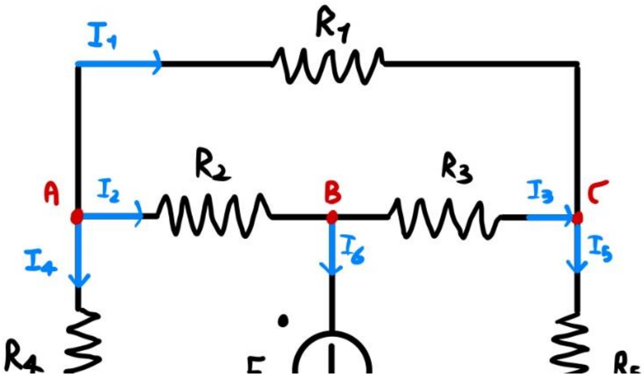
4.10.4.1 Spiegazione con esempio

Consideriamo il seguente circuito e introduciamo un nuovo metodo: il metodo delle correnti di maglia.



Per prima cosa facciamo un confronto col metodo delle correnti di ramo risolvendo il circuito anche col metodo vecchio.

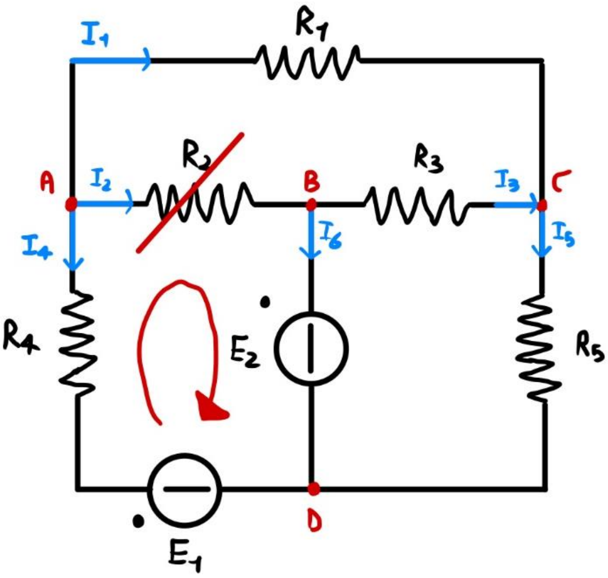
- **Nomi ai nodi, nomi e verso alle correnti di ramo**.
  Diamo nomi ai nodi, nomi e verso alle correnti di ramo. Non sono presenti generatori di corrente e non si hanno supernodi.



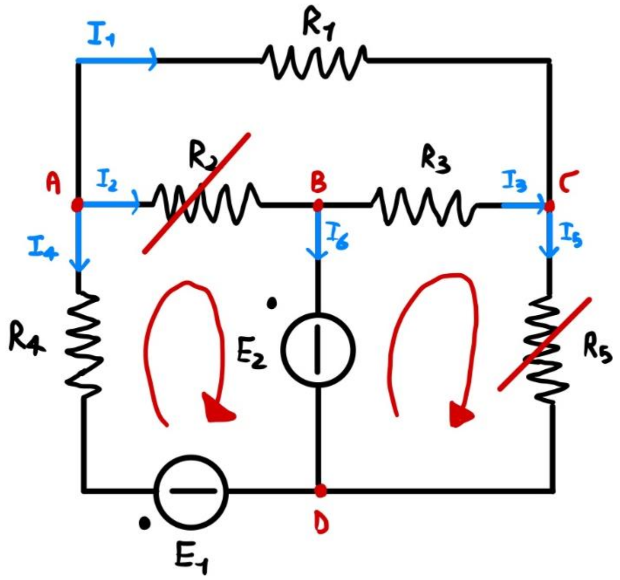
- **Equazioni col primo principio di Kirkhoff**.
  Scriviamo le prime $n-1=3$ equazioni col primo principio di Kirkhoff, prendendo a riferimenti i nodi A, B e C.

$$A: I_1 + I_2 + I_4 = 0$$
$$B: I_2 = I_3 + I_6$$
$$C: I_1 + I_3 = I_5$$

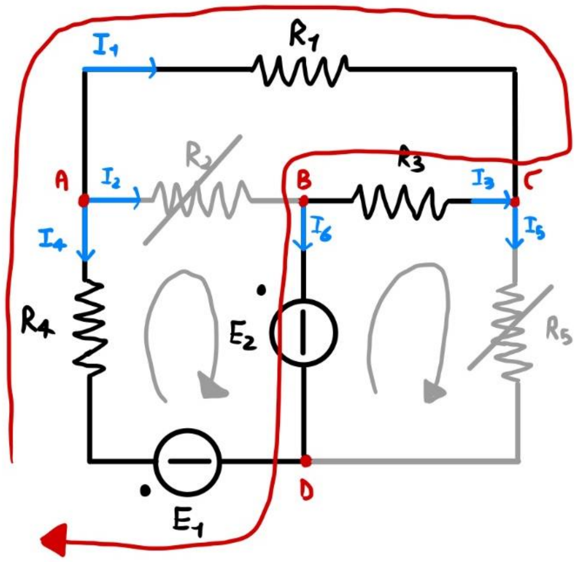
- **Equazioni col secondo principio di Kirkhoff**.
  Ci mancano da scrivere $r-(n-1)=3$ equazioni. Facciamolo col secondo principio di Kirkhoff prendendo a riferimento le seguenti maglie:



$$-R_1 I_4 + R_2 1_2 + E_2 - E_1 = 0$$



$$-E_2 + R_3 I_3 + R_5 I_5 = 0$$



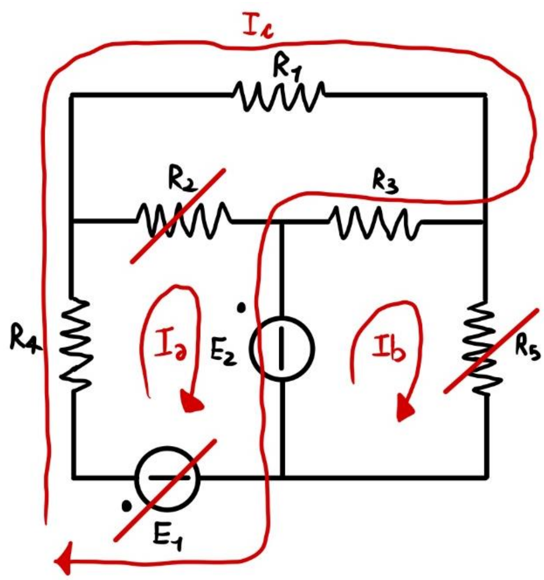
$$-R_4 I_4 + R_1 I_1 - R_3 I_3 + E_2 - E_1 = 0$$

Fatto ciò risolviamo il circuito col nuovo metodo. Questo metodo immagina in maniera fittizia l'esistenza di correnti di maglia, cioè andiamo a calcolare una corrente relativa a una maglia: la cosa è apparentemente impropria, dato che non è detto che scorra la stessa corrente lungo tutti i rami di una maglia.

$\boxed{\text{Metodo intuitivo del professore , diverso dalle spiegazioni sul libro}}$

- **Scelta delle maglie**.
  La prima cosa da fare è scegliere le maglie all'interno del circuito. Per ogni maglia:
  - si sceglie un verso e si attribuisce un nome;
  - si rimuove un ramo della maglia in modo tale che questa non venga scelta nuovamente;
  - si continua a scegliere maglie fino ad esaurimento.

  In questo circuito abbiamo scelto tre correnti di maglia, dove scorre corrente I_a, I_b, I_c.



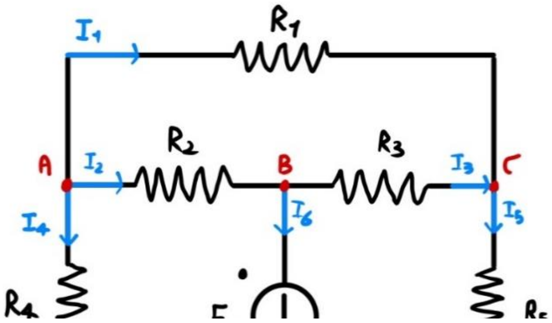
- **Scrittura delle equazioni con la seconda legge di Kirkhoff**.
  Scriviamo le equazioni delle maglie con la seconda legge di Kirkhoff, percorrendole con un certo verso. Per quanto riguarda le resistenze si moltiplichi la costante con la somma algebrica delle correnti di maglia passanti dal bipolo (segno positivo se verso con cui percorriamo la maglia coincide col verso della corrente di maglia, segno negativo altrimenti)

  Maglia a: $-E_1 + R_4(I_a + I_C) + R_2 I_a + E_2 = 0$
  Maglia b: $-E_2 + R_3(I_b - I_c) + R_5 I_b = 0$
  Maglia c: $-E_1 + R_4(I_c + I_a) + R_1 I_c + R_3(I_c - I_b) + E_2 = 0$

  - **Maglia a**.
    - La resistenza R_4 è attraversata dalle correnti di maglia I_a e I_C. Entrambe scorrono nello stesso verso col quale sto percorrendo questa maglia.
    - La resistenza R_2 è attraversata solo dalla corrente I_a
  - **Maglia b**.
    - La resistenza R_3 è attraversata dalle correnti di maglia I_b e I_c. La prima corrente ha come verso quello di percorrenza della maglia, la seconda ha verso opposto.
    - La resistenza R_2 è attraversata solo dalla corrente I_b
  - **Maglia c**.
    - La resistenza R_1 è attraversata solo dalla corrente I_c.
    - Nulla di nuovo sulla resistenza R_4, già incontrata nella maglia a.
    - La resistenza R_3 è attraversata dalle solite correnti di maglia, ma tenendo conto del verso con cui percorriamo la maglia c il segno delle due correnti è invertito.

  Abbiamo scritto $r - (n-1) = 3$ equazioni: non scriviamo le equazioni col primo principio, ma non perdiamo nessuna informazione grazie alle corrispondenze che seguono.

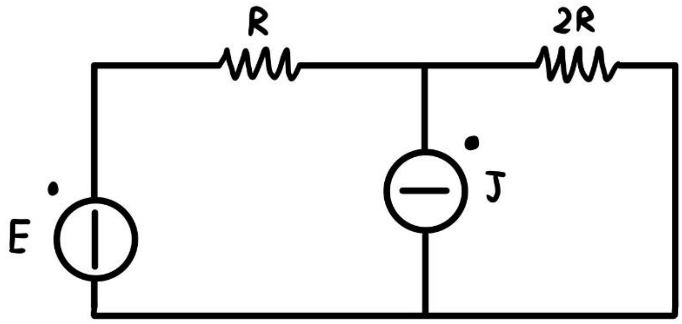
- **Individuazione delle correnti di ramo**.
  Abbiamo scritto tre equazioni con tre incognite. Domanda finale: come troviamo le correnti nei vari rami a partire da I_a, I_b e I_c? Prima cosa dobbiamo dare nome e verso a correnti di ramo



  Successivamente possiamo stabilire le corrispondenze.
  - I_1 è uguale ad I_c perché sul ramo dove è presente I_1 scorre solo la corrente di maglia I_c
    $$I_1 = I_c$$
  - I_2 è uguale ad I_a perché sul ramo dove è presente I_2 scorre solo la corrente di maglia I_a
    $$I_2 = I_a$$
  - I_3 è uguale a $I_b - I_c$. Sul ramo dove è presente I_3 scorrono le correnti di maglia I_b e I_c. Occhio al verso: il verso della corrente di ramo I_b coincide col verso della corrente di maglia (segno positivo), il verso della corrente di ramo I_c è opposto (segno negativo).
    $$I_3 = I_b - I_c$$
  - I_4 è uguale a $-I_a - I_c$. Sul ramo dove è presente I_4 scorrono le correnti di maglia I_b e I_c. Occhio al verso: il verso di entrambe le correnti di maglia è opposto al verso con cui percorriamo la maglia (segno negativo).
    $$I_4 = -I_a - I_c$$
  - I_5 è uguale ad I_b perché sul ramo dove è presente I_5 scorre solo la corrente di maglia I_b
    $$I_5 = I_b$$
  - I_6 è uguale a $I_a + I_c - I_b$. Sul ramo dove è presente I_6 scorrono le correnti I_a, I_b e I_c.
    $$I_6 = I_a + I_c - I_b$$

4.10.4.2 *Risoluzione in presenza di generatori di corrente*

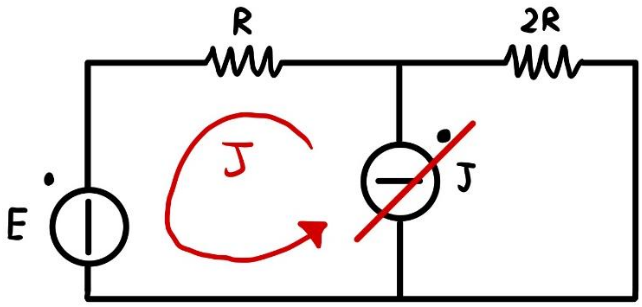
Consideriamo il seguente circuito, che presenta al suo interno un generatore indipendente di corrente.



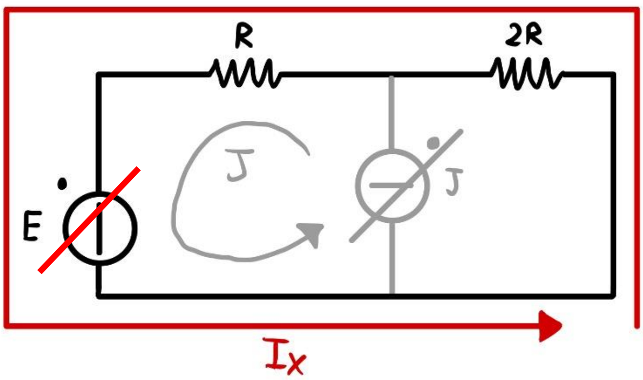
Quali differenze prevediamo rispetto all'applicazione standard?

- La prima maglia non può essere scelta a caso: dobbiamo scegliere una maglia che include il generatore di corrente, per forza.
- Il verso con cui percorriamo la maglia deve essere coerente col contrassegno del generatore di corrente (uscente dal lato del contrassegno).
- Diamo alla corrente di maglia un nome uguale alla corrente erogata dal generatore di corrente.
- Cancelliamo il generatore di corrente (non ha senso cancellare un altro dispositivo nella maglia)!

Segue



Non c'è bisogno di scrivere un'equazione: la corrente di maglia è nota! Il resto è standard, rimane una maglia da considerare



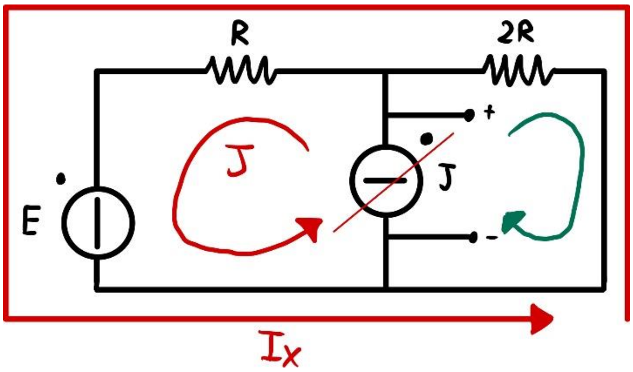
La corrente di maglia J è nota, mentre la corrente I_x deve essere calcolata. Scriviamo la relativa equazione col secondo principio di Kirkhoff.

$$2RI_x + R(J + I_x) + E = 0 \Longrightarrow I_x = -\frac{E + R \cdot J}{3R}$$

<u>Come si calcola la potenza erogata dal generatore?</u> La formula per il calcolo è la solita

$$P_j = J \cdot v_j(t)$$

Troviamo la tensione ai capi del generatore $v_j(t)$ scegliendo un percorso che va dal + al – (quello in verde)

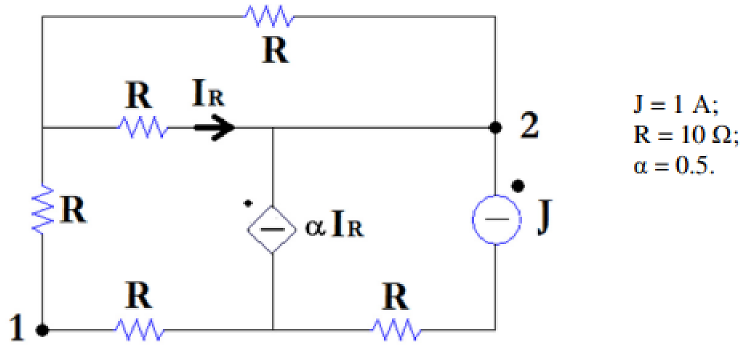


$$P_J = J \cdot \left(2R \cdot I_y\right) = J \cdot (2R \cdot (-I_x)) = J \cdot \left(2R\frac{E + R \cdot J}{3R}\right) = J \cdot \frac{2R}{3R}(E + R \cdot J)$$

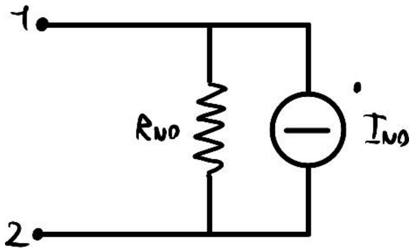
La corrente sul ramo I_y corrisponde all'unica corrente di maglia che scorre su quel ramo (I_x), ma il verso è opposto rispetto a quello di percorrenza della maglia (segue segno negativo).

4.10.5 Esercizio: equivalente Norton (Primo es. appello 27-01-2021)

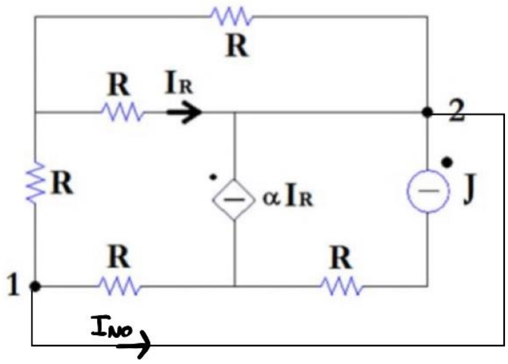
Determinare il circuito equivalente di Norton fra i punti 1 e 2 del circuito in figura.



- **Dati richiesti**.
  Quando si chiede di trovare l'equivalente Norton si chiedono due cose:
  - trovare R_{No} e I_{No} (che nei fatti sono due esercizi distinti);
  - disegnare il circuito equivalente (il professore non da per scontato che sappiamo in cosa consista l'equivalente Norton - generatore di corrente disposto in parallelo a una resistenza).

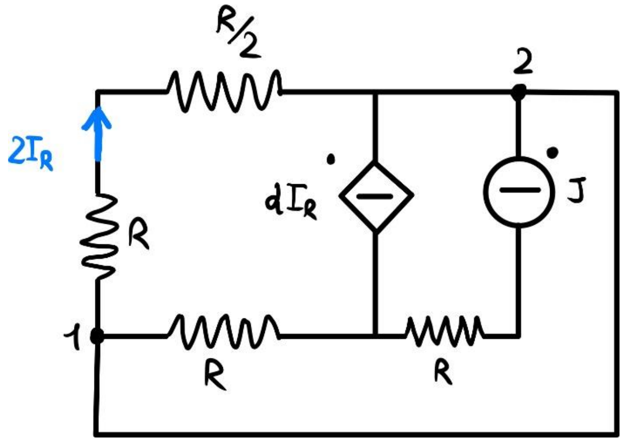


- **Calcolo della corrente I_{No}**
  La corrente di Norton consiste nella corrente che percorre il cortocircuito che collega i morsetti 1 e 2, con verso che va dal nodo 1 al nodo 2 (nel caso in cui l'equivalente Norton abbia il contrassegno del generatore che guarda il nodo 1, come nella figura precedente).

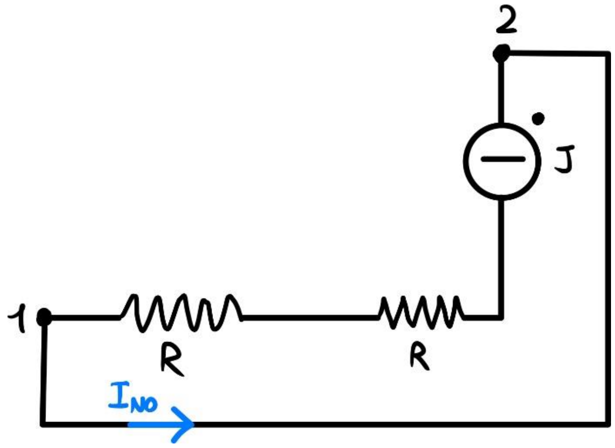


Prima di proseguire e applicare uno dei metodi di risoluzione chiediamoci: è possibile semplificare il circuito? Sì

- Per prima cosa osserviamo come le due resistenze R, poste nei due rami più alti del circuito, siano disposte in parallelo. Attenzione alla corrente I_R: se ci limitiamo a sostituire le due resistenze in parallelo con la resistenza equivalente perdiamo la corrente. Risolviamo tenendo in considerazione che la corrente si ripartisce in parti uguali tra due rami aventi resistenze uguali (che abbiamo scoperto introducendo il partitore di corrente).



- Si osservi che il ramo percorso dalla corrente $2I_R$, formato da sole resistenze, è in parallelo rispetto al cortocircuito che collega i morsetti 1 e 2. Questo significa che possiamo cancellarlo: segue $I_R = 0$. Sparisce anche il ramo col generatore di corrente pilotato, vista la corrente nulla.

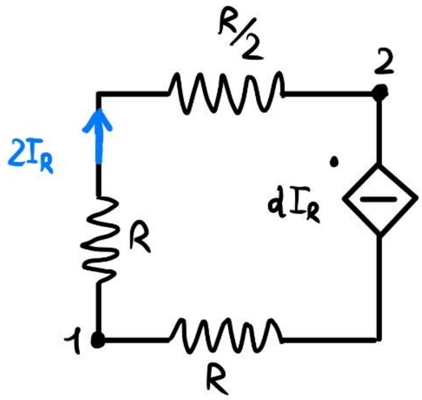


Possiamo concludere l'esercizio:

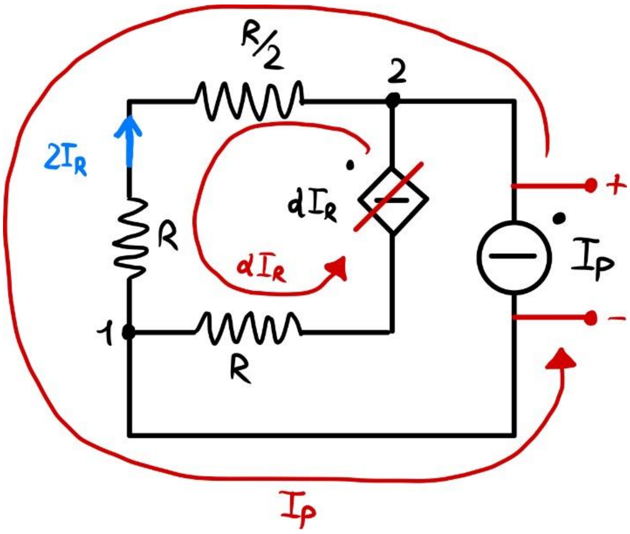
$$I_{No} = -J = -1\,\mathrm{A}$$

Si pone segno negativo dato che la corrente di Norton ha verso opposto rispetto a quello della corrente J (quest'ultima uscente dal contrassegno del generatore di corrente).

- **Calcolo della resistenza R_{No}**
  Disattiviamo i generatori indipendenti.



È presente un generatore pilotato di corrente, ergo non possiamo concludere al volo trovando la resistenza vista. Introduciamo un generatore indipendente di corrente. Si osservi che entrambe le maglie presentano un generatore di corrente (chiameremo le correnti di maglia con i nomi delle correnti erogate dai generatori).



Calcoliamo la resistenza di Norton trovando V_p

$$R_{No} = \frac{V_p}{I_p}$$

Applichiamo il secondo principio di Kirkhoff sulla maglia più esterna

$$\frac{R}{2}(\alpha I_R + I_p) + R(\alpha I_R + I_p) = V_p$$
$$\left(\frac{R}{2} + R\right) I_P + \left(\frac{R}{2}\alpha + R\alpha\right) I_R = V_p$$

Che valore ha I_R ? La corrente $2I_R$ è uguale alla somma algebrica delle correnti di maglia che attraversano quel particolare ramo del circuito

$$2I_R = -I_P - \alpha I_R \longrightarrow I_R = -\frac{I_p}{2+\alpha}$$

Segno negativo per entrambe le correnti, dato che hanno verso opposto rispetto a quello di $2I_R$.
Sostituiamo I_R nella prima equazione e troviamo V_p

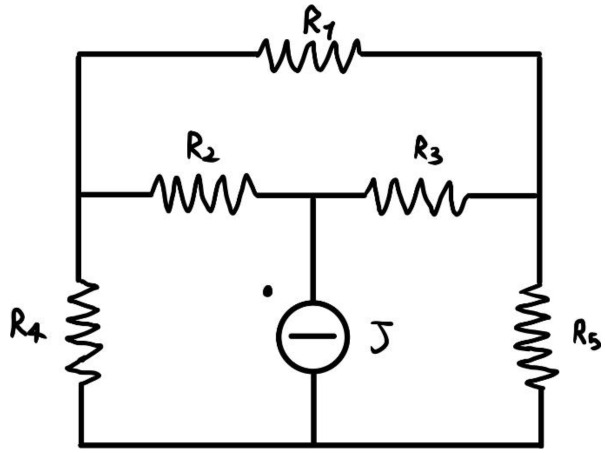
$$\left(\frac{3}{2}R\right) I_P + \left(\frac{3}{2}\alpha R\right)\left(-\frac{I_p}{2+\alpha}\right) = V_p$$
$$(2+\alpha)3RI_p - 3\alpha RI_p = 2V_p(2+\alpha)$$
$$(2+\alpha-\alpha)3RI_p = 2V_p(2+\alpha)$$
$$6RI_p = 2V_p(2+\alpha)$$
$$V_p = \frac{6RI_p}{2(2+\alpha)}$$

In conclusione

$$R_{No} = \frac{V_p}{I_p} = \frac{6RI_p}{2(2+\alpha)} \cdot \frac{1}{I_p} = \frac{3R}{(2+\alpha)} = 12\,\Omega$$

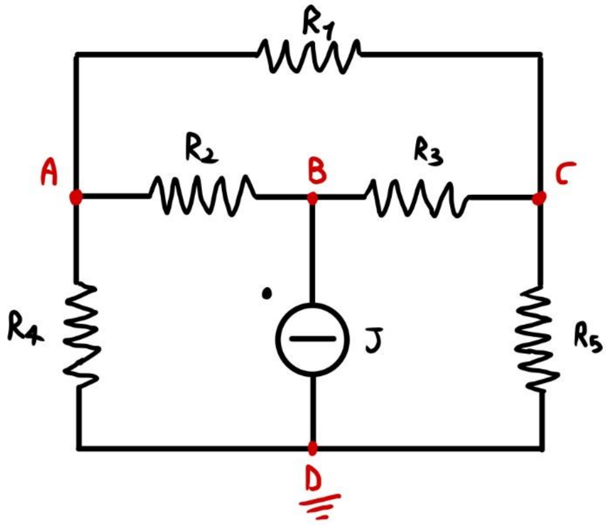
4.10.6 Terzo metodo: metodo delle tensioni di nodo

Riprendiamo il circuito utilizzato per introdurre il metodo delle correnti di maglia e utilizziamolo per introdurre un nuovo metodo: quello delle tensioni di nodo.



Le incognite sono le tensioni di nodo, cioè le tensioni ai capi di tutti i rami del circuito. Duale del metodo precedente, anche qua sensazione di parlare di qualcosa di improprio. Abbiamo n incognite (il numero di nodi).

- **Scelta del nodo di riferimento**.
  Si sceglie un nodo del circuito come nodo di riferimento, si segnala ciò per mezzo del simbolo di terra. Il nodo di riferimento, se collegato a terra, ha tensione pari a zero.

  Tutti le tensioni di nodo, ad eccezione della tensione del nodo di riferimento, devono essere uguali. Cosa si intende?
    - Supponiamo che uno studente scelga il nodo D come nodo arbitrario, mentre un secondo studente sceglie il nodo C.
    - Il primo avrà la tensione sul nodo D nulla, il secondo avrà la tensione sul nodo C nulla.
    - Le tensioni sui nodi diversi da D e C calcolate dai due studenti devono essere uguali.

  Nel circuito che stiamo considerando prenderemo il nodo D a riferimento, dunque $V_D = 0$

- **Equazioni relative ai nodi**.
  Scriviamo le equazioni per ogni nodo.
    - A sinistra dell'uguale si mette la somma algebrica delle correnti erogate dal generatore di corrente, con ramo collegato direttamente al nodo considerato. Si pone 0 se nessun ramo collegato direttamente al nodo presenta generatori di corrente. Segno positivo se il segno guarda il contrassegno, segno negativo altrimenti.
    - A destra la tensione di nodo moltiplicata per la somma delle conduttanze su tutti i rami collegati al nodo considerato). Si sottraggono le tensioni di nodo dei nodi adiacenti a quello considerato, ciascuna moltiplicata per la conduttanza del ramo che collega i due nodi.

Per quanto riguarda il nostro circuito

$$
\begin{aligned}
&D:\ V_D = 0\\
&A: 0 = V_A\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right) - V_B\left(\frac{1}{R_2}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_1}\right) - V_D\left(\frac{1}{R_4}\right)\\
&B: J = V_B\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) - V_A\left(\frac{1}{R_2}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_3}\right)\\
&C: 0 = V_C\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right) - V_A\left(\frac{1}{R_1}\right) - V_B\left(\frac{1}{R_3}\right) - V_D\left(\frac{1}{R_5}\right)
\end{aligned}
$$

Semplifichiamo annullando dove $V_D = 0$

$$
\begin{aligned}
&A: 0 = V_A\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right) - V_B\left(\frac{1}{R_2}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_1}\right)\\
&B: J = V_B\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) - V_A\left(\frac{1}{R_2}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_3}\right)\\
&C: 0 = V_C\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right) - V_A\left(\frac{1}{R_1}\right) - V_B\left(\frac{1}{R_3}\right)
\end{aligned}
$$

<u>Perchè queste formule?</u> Se mettiamo in evidenza le conduttanze invece delle tensioni otteniamo

$$A: 0 = (\boldsymbol{V_A} - \boldsymbol{V_C})\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R_1}} + (\boldsymbol{V_A} - \boldsymbol{V_B})\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R_2}} + (\boldsymbol{V_A} - \boldsymbol{V_D})\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R_4}}$$

Abbiamo l'applicazione mascherata del primo principio di Kirkhoff: non ci sono correnti entranti, si sommano le correnti uscenti a secondo membro.

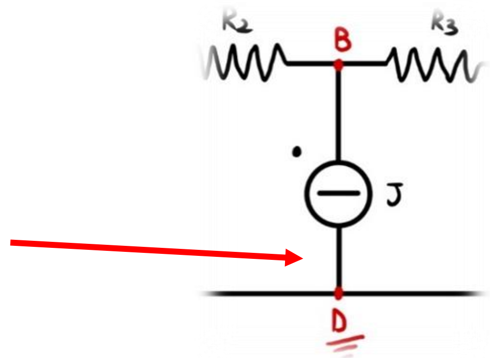
- Il primo termine è l'applicazione della prima legge di Ohm sul ramo con resistenza R_1
- Il secondo termine è l'applicazione della prima legge di Ohm sul ramo con resistenza R_2
- Il terzo termine è l'applicazione della prima legge di Ohm sul ramo con resistenza R_4

Facciamo la stessa cosa anche sugli altri due nodi

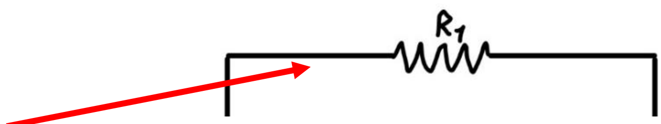
$$
\begin{aligned}
&B: J = (V_B - V_A)\frac{1}{R_2} + (V_B - V_C)\frac{1}{R_3}\\
&C: 0 = (V_C - V_A)\frac{1}{R_1} + (V_C - V_B)\frac{1}{R_3} + (V_C - V_D)\frac{1}{R_5}
\end{aligned}
$$

<u>Variazioni che commentiamo</u>.

- **<u>[ULTERIORE REGOLA]</u> Cosa succede se mettiamo resistenze in serie al generatore di corrente?**



  Non cambia niente, resistenze disposte in serie a generatori di corrente non hanno alcuna influenza nella scrittura delle equazioni col metodo delle tensioni di nodo (la corrente che passa per quel ramo è quella erogata dal generatore, punto).
- **Cosa succede se mettiamo in cima due resistenze disposte in serie?**
  Aggiungiamo resistenza R_7 nel punto indicato.

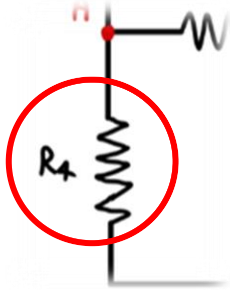


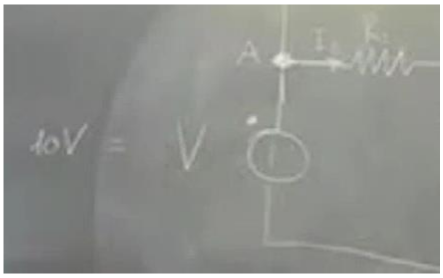
  Cambiano le equazioni dove è presente R_1, dove si pone $R_1 + R_7$

$$A: 0 = V_A\left(\frac{1}{\boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_7}} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) - V_B\left(\frac{1}{R_2}\right) - V_C\left(\frac{1}{\boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_7}}\right)$$
$$B: J = V_B\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - V_A\left(\frac{1}{R_2}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_3}\right)$$
$$C: 0 = V_C\left(\frac{1}{\boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_7}} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) - V_A\left(\frac{1}{\boldsymbol{R_1} + \boldsymbol{R_7}}\right) - V_B\left(\frac{1}{R_3}\right)$$

È corretto scrivere $\frac{1}{R_1+R_7}$, mentre è errore grave scrivere $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_7}$

- **Cosa succede se sostituiamo la resistenza indicata in figura con un generatore di tensione?**





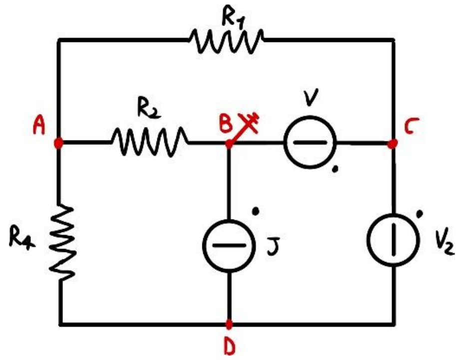
$\boldsymbol{V_D = 0}$
$\boldsymbol{V_A = V} = \mathbf{10}\,\mathrm{V}$

Il generatore è posto tra i nodi D e A. Se il nodo D è nodo di riferimento allora la tensione al nodo è nulla: segue che la tensione al nodo A è gratis, quella erogata dal generatore di tensione!

<u>**Osservazione**</u>. Il segno della tensione di nodo si ottiene ragionando nel modo seguente: segno positivo se attraversiamo il generatore dal – al +, segno negativo altrimenti. Perché?

$$V_{DA} = V_D - V_A = 0 - V_A = -10\,\mathrm{V} \longrightarrow V_A = 10\,\mathrm{V}$$

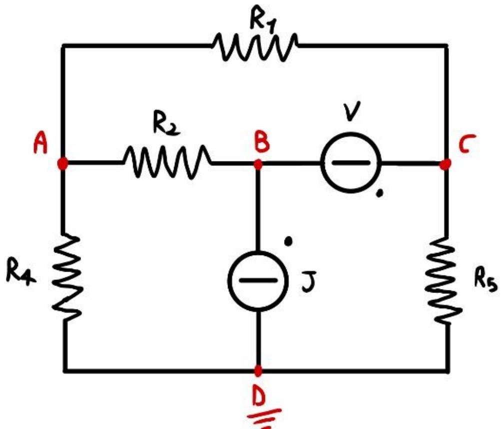
- **Somma di cadute di potenziale in generatori di tensione**.
  Lavoriamo sul seguente circuito.

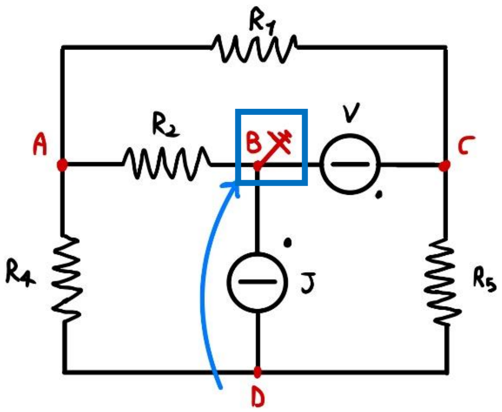


Quanto vale la tensione di nodo in D? Si applica il secondo principio di Kirkhoff:

$$V_D = V_D - V_B = -V_2 + V$$

- **Una scelta adeguata del nodo di riferimento**.
  Si ponga il circuito nel seguente modo (generatore di tensione spostato in un altro ramo)





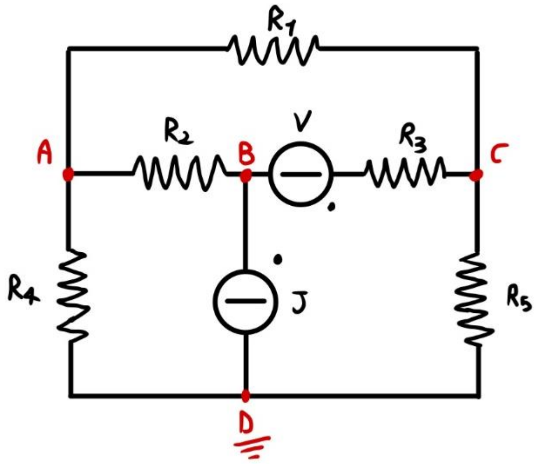
In questo circuito non è più conveniente mantenere il nodo D come nodo di riferimento. Si pone il nodo B come nodo di riferimento, in modo tale da poter dire $V_B = 0,\ V_C = V$

Scriviamo le equazioni

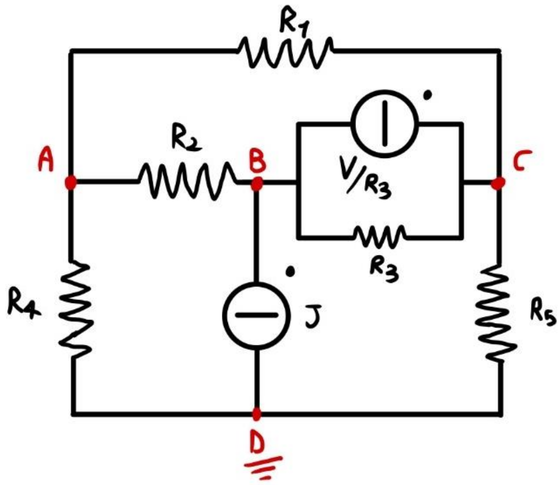
$$A: 0 = V_A\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right) - 0 - V_C\left(\frac{1}{R_1}\right) - V_D\left(\frac{1}{R_4}\right)$$
$$D: -J = V_D\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right) - V_A\left(\frac{1}{R_4}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_5}\right)$$

Occhio al verso della corrente erogata dal generatore: è uscente dal nodo D!

- **Generatore reale di tensione: sostituzione con equivalente Norton**.
  Prendiamo il seguente circuito con presenza di un generatore reale di tensione (un generatore in serie a una resistenza). Cattiva notizia: non possiamo ridurre il numero di equazioni (nel ramo col generatore di tensione va considerata anche la caduta di potenziale della resistenza)!



Si trasforma il generatore reale nel suo equivalente Norton!



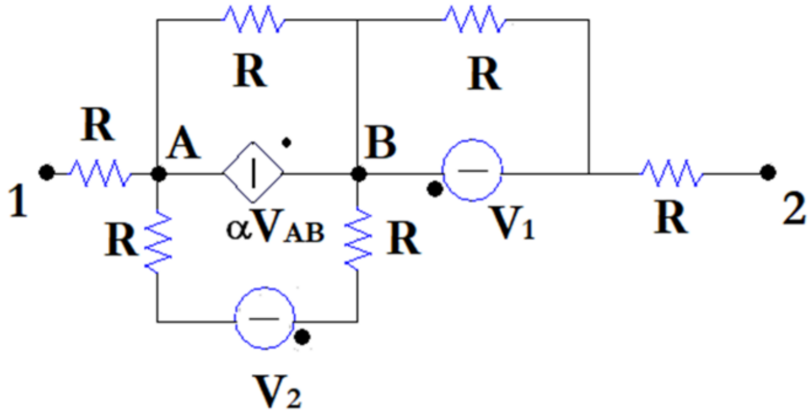
  - La resistenza è la stessa di prima: R_3
  - La corrente è la tensione fratto la resistenza: $\frac{V}{R_3}$
  - Il contrassegno del generatore di corrente è nella stessa posizione del gen. di tensione.

Scriviamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} A:\ \ 0 = V_A\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right) - V_B\left(\frac{1}{R_2}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_1}\right) \\ B:\ \ J - \frac{V}{R_3} = V_B\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) - V_A\left(\frac{1}{R_2}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_3}\right) \\ C:\ \ \frac{V}{R_3} = V_C\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right) - V_A\left(\frac{1}{R_1}\right) - V_B\left(\frac{1}{R_3}\right) \end{cases}$$

4.11 Esercizio: equivalente Thevenin (Primo es. appello 11-01-2021)

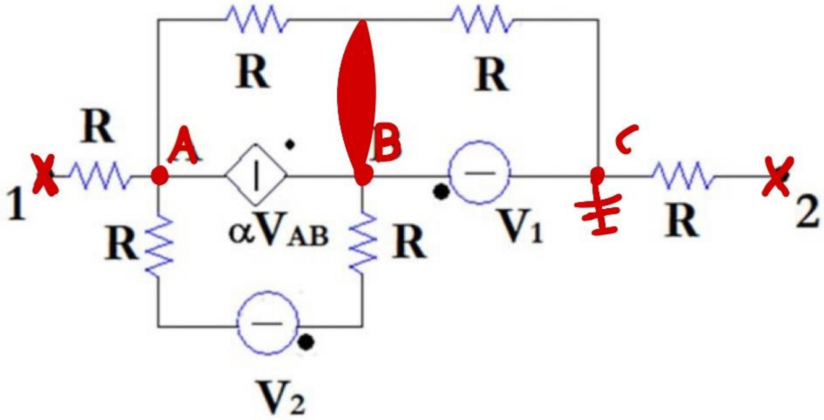
Determinare il circuito equivalente di Thevenin fra i punti 1 e 2 del circuito in figura



$V_1 = 10$ V;
$V_2 = 20$ V;
$R = 50\ \Omega$;
$\alpha = 0.2$ A/V.

- **Individuazione della tensione di Thevenin V_{Th}.**
  Poniamo un aperto sui morsetti 1 e 2: le resistenze in immediata prossimità dei due morsetti sono sostituite da cortocircuito. Scegliamo il metodo considerando, tra le cose, il numero di equazioni per metodo.
  - Correnti di maglia: tre maglie e un generatore di corrente, due equazioni
  - Tensioni di nodo: tre nodi e un generatore di tensione da solo, un'equazione!

  Apparentemente il metodo più conveniente è tensioni di nodo!



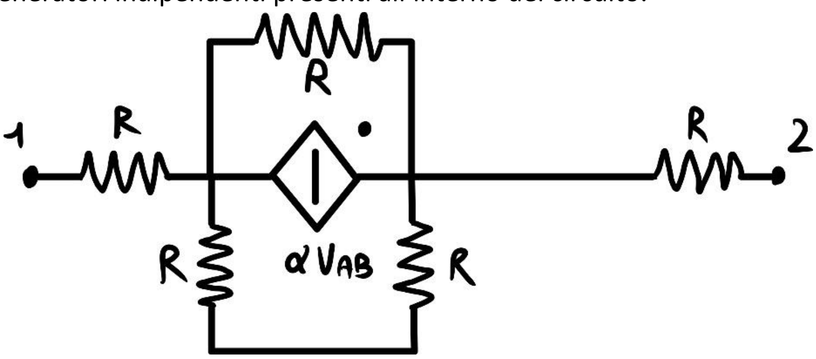
Poniamo il nodo C come nodo di riferimento. Si osservi che $V_{Th} = V_A - V_C = V_A$: segue che trovando V_A avremo trovato automaticamente V_{Th}

$$V_A: -\alpha V_{AB} - \frac{V_2}{2R} = V_A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right) - V_B\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right)$$
$$V_B = 10\,\mathrm{V}$$
$$V_C = 0$$

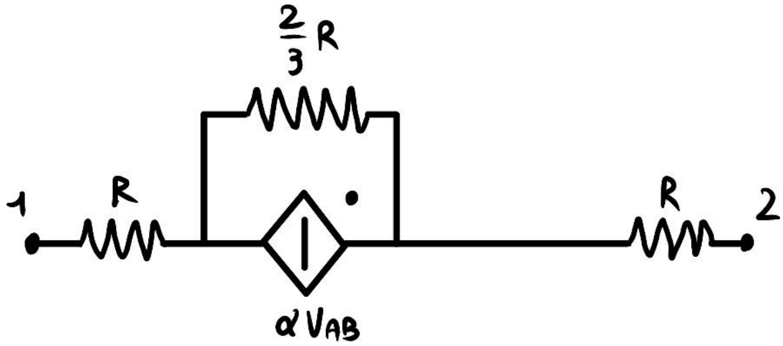
Occhio alla presenza di un generatore reale di tensione nel ramo inferiore AB: abbiamo scritto l'equazione per il nodo A dopo aver sostituito con l'equivalente Norton. Proseguiamo

$$-\alpha(V_A - V_B) - \frac{V_2}{2R} = V_A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right) - V_B\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right)$$
$$-\alpha(V_A - 10) - \frac{20}{2R} = V_A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right) - 10\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right)$$
$$-2\alpha R(V_A - 10) - 20 = 3V_A - 30$$
$$-2\alpha R V_A + 20\alpha R - 20 = 3V_A - 30$$
$$(-2\alpha R - 3)V_A = -20\alpha R + 20 - 30$$
$$(-2\alpha R - 3)V_A = -20\alpha R - 10$$
$$V_A = \frac{-20\alpha R - 10}{-2\alpha R - 3} = \frac{20\alpha R + 10}{2\alpha R + 3} = 9.13\,\mathrm{V} = V_{Th}$$

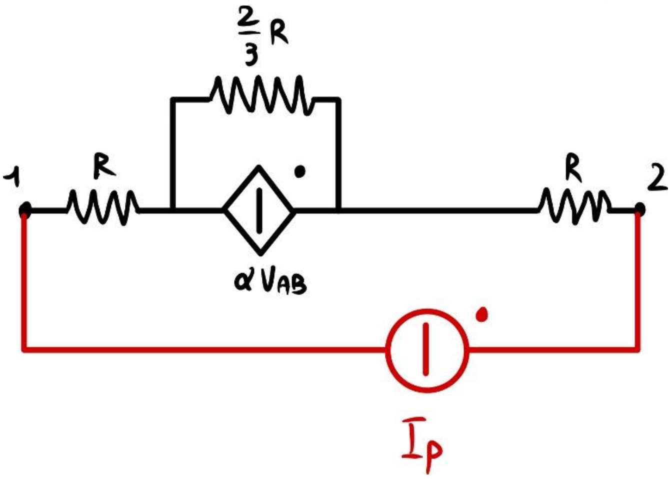
- **Individuazione della resistenza di Thevenin R_{Th}.**
  Disattiviamo i generatori indipendenti presenti all'interno del circuito.



Possiamo cancellare una resistenza R, che è in parallelo rispetto a un cortocircuito.

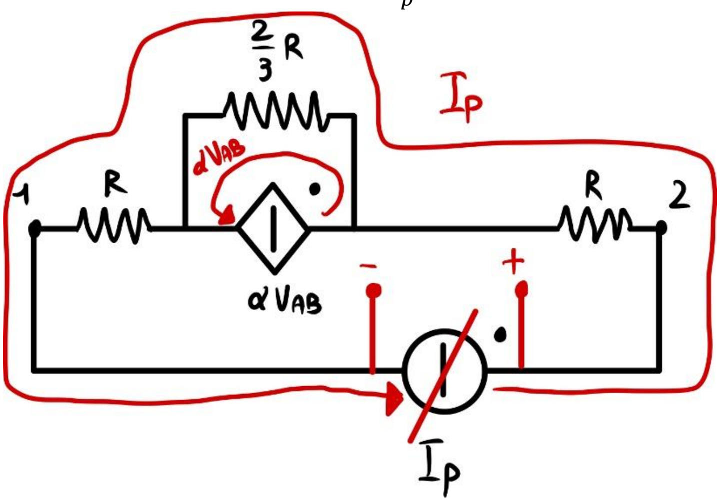


Attenzione al generatore pilotato, che ci impedisce di poter concludere al volo calcolando la resistenza vista. Necessario introdurre un generatore indipendente ai capi dei due morsetti.



Poniamo un generatore di corrente, questo significa che dovremo trovare V_p e sostituire nella seguente formula

$$R_{Th} = \frac{V_p}{I_p}$$



Scriviamo l'equazione della maglia passante dal generatore di corrente I_p

$$V_p = RI_p + \frac{2}{3}R\left(I_p + \alpha V_{AB}\right) + RI_p$$

Calcoliamo V_{AB} scegliendo un percorso dal nodo A al nodo B: l'unico percorso possibile è quello della maglia αV_{AB}

$$\frac{2}{3}R\left(\alpha V_{AB} + I_p\right) = -V_{AB}$$
$$\frac{2}{3}R\alpha V_{AB} + \frac{2}{3}RI_p = -V_{AB}$$
$$\left(\frac{2}{3}R\alpha + 1\right)V_{AB} = -\frac{2}{3}RI_p$$
$$(2R\alpha + 3)V_{AB} = -2RI_p$$
$$V_{AB} = -\frac{2RI_p}{3 + 2R\alpha}$$

Sostituiamo nell'equazione precedente e troviamo V_p

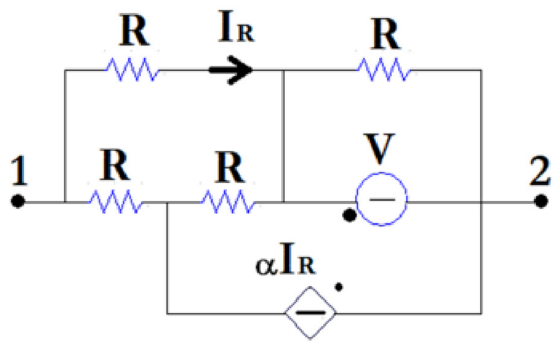
$$V_p = 2RI_p + \frac{2}{3}RI_p + \frac{2}{3}R\alpha\left(-\frac{2RI_p}{3 + 2R\alpha}\right) = \frac{8}{3}RI_p - \frac{2}{3}R\alpha\left(\frac{2RI_p}{3 + 2R\alpha}\right)$$

Sostituiamo e concludiamo

$$R_{Th} = \frac{V_p}{I_p} = \frac{\frac{8}{3}RI_p - \frac{2}{3}R\alpha\left(\frac{2RI_p}{3 + 2R\alpha}\right)}{I_p} = \frac{8}{3}R - \frac{2}{3}R\alpha\left(\frac{2RI_p}{3 + 2R\alpha}\right) = 104.34\,\Omega$$

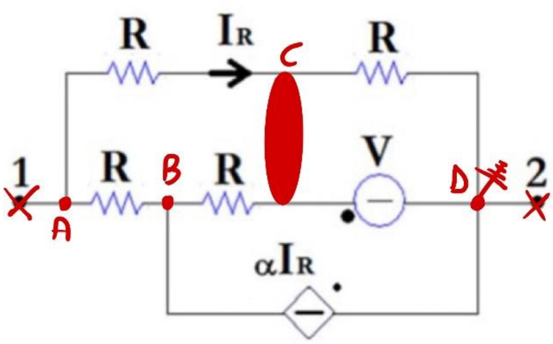
4.12 Esercizio: equivalente Thevenin (Primo es. appello 09-01-2020)

Determinare il circuito equivalente di Thevenin fra i punti 1 e 2 del circuito in figura.



V = 50 V;
R = 15 Ω;
α = 6 V/A;

- **Individuazione della tensione di Thevenin V_{Th}.**
  Poniamo un aperto sui nodi 1 e 2. Abbiamo quattro nodi e ben due generatori di tensione: possiamo utilizzare il metodo delle tensioni di nodo in modo tale da dover scrivere solo un'equazione.



Poniamo il nodo D come nodo di riferimento.

$$V_A: 0 = V_A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) - V_B\left(\frac{1}{R}\right) - V_C\left(\frac{1}{R}\right)$$
$$V_B = -\alpha I_R$$
$$V_C = V$$
$$V_D = 0$$

Sapendo che $V_{Th} = V_A - V_D = V_A$ andiamo a calcolare

$$0 = V_A\left(\frac{2}{R}\right) - V_B\left(\frac{1}{R}\right) - V_C\left(\frac{1}{R}\right)$$
$$0 = \frac{2V_A - V_B - V_C}{R}$$
$$0 = 2V_A - V_B - V_C$$
$$2V_A = V_B + V_C$$
$$V_A = \frac{V_B + V_C}{2} = \frac{-\alpha I_R + V}{2}$$

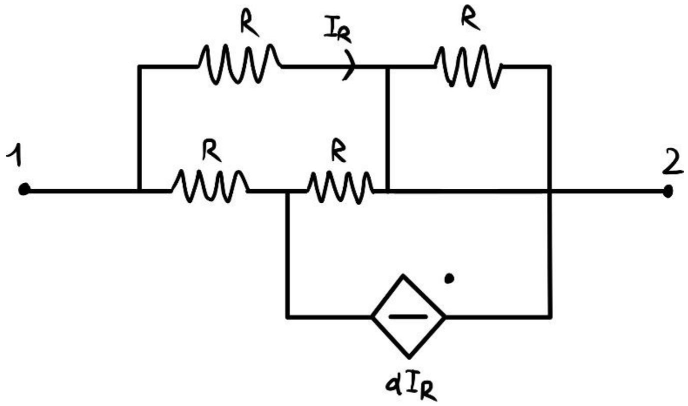
Troviamo I_R considerando la resistenza R in alto a sinistra del circuito

$$V_R = V_{AC} = V_A - V_C = R \cdot I_R$$
$$I_R = \frac{V_A - V_C}{R} = \frac{V_A - V}{R}$$

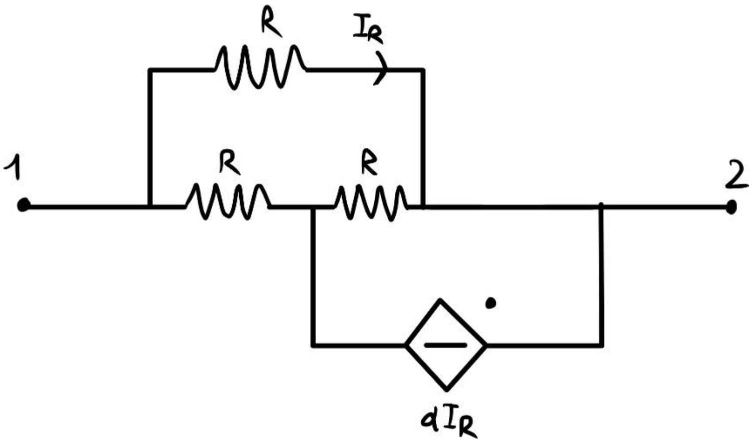
Sostituiamo

$$V_A = \frac{V_B + V_C}{2} = \frac{-\alpha\left(\frac{V_A - V}{R}\right) + V}{2}$$
$$2V_A = -\alpha\left(\frac{V_A - V}{R}\right) + V$$
$$2RV_A = -\alpha V_A + \alpha V + R$$
$$(2R + \alpha)V_A = \alpha V + R$$
$$V_A = \frac{\alpha V + R}{2R + \alpha} = 29.17\,\mathrm{V} = V_{Th}$$

- **Individuazione della resistenza di Thevenin R_{Th}.**
  Disattiviamo i generatori indipendenti

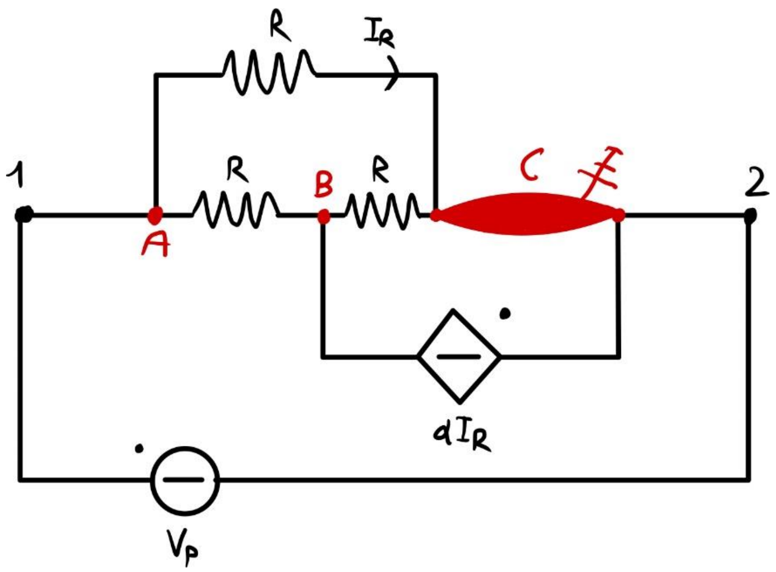


Semplifichiamo eliminando la resistenza R in parallelo al cortocircuito



Abbiamo un generatore pilotato, che ci impedisce di concludere subito col calcolo della resistenza vista. Introduciamo un generatore di tensione indipendente V_p a capo dei morsetti 1 e 2: dobbiamo trovare I_p

$$R_{Th} = \frac{V_p}{I_p}$$



Applichiamo il metodo delle tensioni di nodo: tutte e tre le tensioni di nodo risultano già definite senza passare dalle equazioni previste dal metodo.

$$V_A = V_p$$

$$V_B = -\alpha I_R = -\alpha \frac{V_A - V_C}{R} = -\alpha \frac{V_A}{R} = -\alpha \frac{V_p}{R}$$

$$V_C = 0$$

Applichiamo la prima legge di Kirkhoff rispetto al nodo A

$$I_p = I_R + I_R' = \frac{V_A - V_C}{R} + \frac{V_A - V_B}{R} = \frac{2V_A - V_C - V}{R} = \frac{2V_A - V_B}{R} =$$

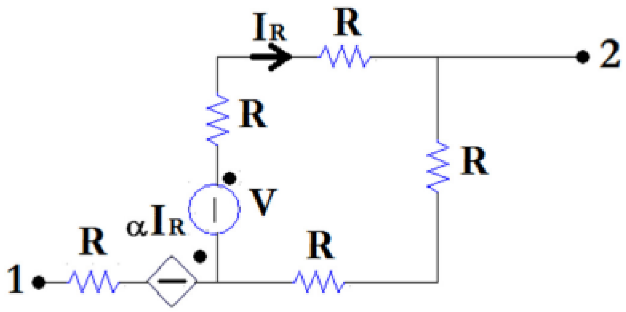
$$= \frac{2V_p - \left(-\alpha \frac{V_p}{R}\right)}{R} = \frac{2V_p}{R} + \frac{1}{R}\left(\alpha \frac{V_p}{R}\right) = \frac{2V_p}{R} + \frac{\alpha V_p}{R^2} = \left(\frac{2}{R} + \frac{\alpha}{R^2}\right) V_p$$

Sostituiamo

$$R_{Th} = \frac{V_p}{I_p} = \frac{V_p}{\left(\frac{2}{R} + \frac{\alpha}{R^2}\right) V_p} = \frac{1}{\frac{2}{R} + \frac{\alpha}{R^2}} = 6.25\,\Omega$$

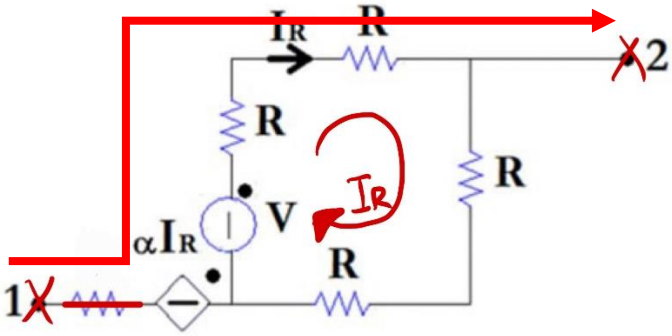
4.13 Esercizio: equivalente Thevenin (Primo es. appello 19-02-2020)

Determinare il circuito equivalente di Thevenin fra i punti 1 e 2 del circuito in figura.



V = 12 V;
R = 10 Ω;
α = 10 V/A;

- **Individuazione della tensione di Thevenin V_{Th}.**
  Troviamo la tensione di Thevenin seguendo un percorso dal nodo 1 al nodo 2.



$$V_{Th} = V_{12} = -\alpha I_R - V + RI_R + RI_R$$

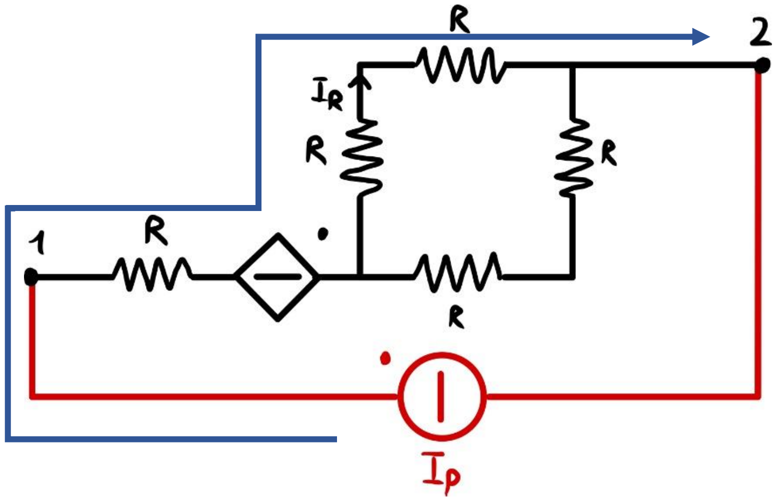
Non si considera la resistenza immediatamente vicina al nodo 1, sostituita da cortocircuito (siamo vicini a un aperto). Non sparisce il generatore di tensione! Dall'unica maglia presente in questo circuito otteniamo I_R

$$RI_2 + RI_2 + RI_2 + RI_2 = V \longrightarrow 4RI_R = V \longrightarrow I_R = \frac{V}{4R}$$

Sostituiamo

$$V_{Th} = -\alpha\frac{V}{4R} - V + 2R\frac{V}{4R} = -\frac{\alpha V}{4R} + \frac{V}{2} - V = -9\,\mathrm{V}$$

- **Individuazione della resistenza di Thevenin R_{Th}.**
  Disattiviamo i generatori indipendenti.



Un generatore di tensione, che ci porterebbe all'applicazione di tensioni di nodo, non è assolutamente conveniente: l'aggiunta del generatore di tensione di prova non ci permette di ridurre il numero di equazioni da sviluppare. Segue che poniamo un generatore di corrente I_p, e che dobbiamo calcolare V_p

$$R_{Th} = \frac{V_p}{I_p}$$

Anche qua, in realtà, non serve applicare un metodo. Scegliamo un percorso dal nodo 1 al nodo 2.

$$V_p = RI_p - \alpha I_R + RI_R + RI_R = RI_p + (2R - \alpha)I_R$$

Inizialmente scorre corrente I_p, successivamente la corrente si ripartisce in parti uguali (entrambe le "strade" hanno due resistenze R): segue $I_p = 2I_R \longrightarrow I_R = \frac{I_p}{2}$. Sostituiamo

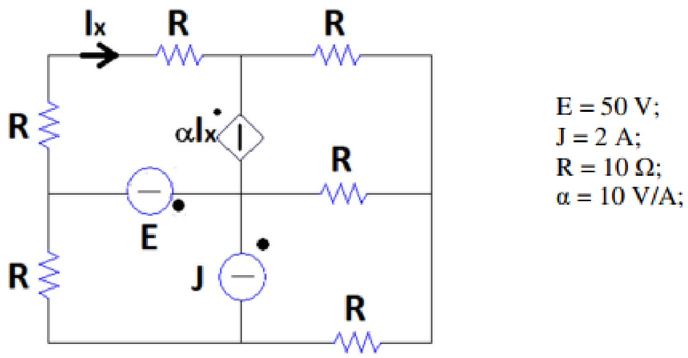
$$V_p = RI_p + (2R - \alpha)\frac{I_p}{2} = \left(R + R - \frac{1}{2}\alpha\right)I_p = \left(2R - \frac{1}{2}\alpha\right)I_p$$

In conclusione

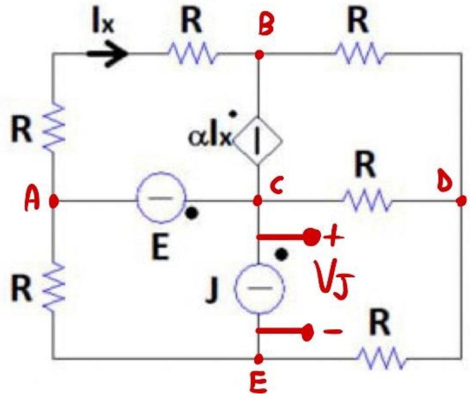
$$R_{Th} = \frac{V_p}{I_p} = \frac{\left(2R - \frac{1}{2}\alpha\right)I_p}{I_p} = 2R - \frac{1}{2}\alpha = 15\,\Omega$$

4.14 Esercizio: calcolo potenza erogata da generatore (Primo es. appello 10/01/2018)

Determinare la potenza elettrica erogata dal generatore di corrente J nel circuito in figura.



- **Punto di partenza**.
  Ci interessa esclusivamente individuare la potenza ai capi dell'unico generatore di corrente presente all'interno del circuito.



Per fare ciò utilizziamo la formula

$$P_J = V_j \cdot J$$

La corrente J è un valore noto, mentre la tensione V_j non lo è. Quest'ultima è indeterminata se consideriamo il generatore da solo: può essere calcolata solo se si considera il resto del circuito.

- **Metodo delle correnti di nodo: scelta e applicazione**.
  Osserviamo che sono presenti due generatori di tensione. Scegliamo il metodo delle tensioni di nodo in quanto la presenza di generatori di tensione permette di ridurre il num. di equazioni da scrivere (abbiamo cinque nodi, conosciamo la tensione del nodo di riferimento A e possiamo ottenere in modo immediato le tensioni dei nodi C e B, scriviamo solo le equazioni dei nodi D ed E).

$$V_A = 0$$
$$V_B = V_C + \alpha \cdot I_x = E + \alpha I_x$$
$$V_C = E$$
$$V_D:\ \ 0 = V_D\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\right) - V_B\left(\frac{1}{R}\right) - V_C\left(\frac{1}{R}\right) - V_E\left(\frac{1}{R}\right)$$
$$V_E:\ -J = V_E\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\right) - V_D\left(\frac{1}{R}\right)$$

Procediamo calcolando V_D e V_E

$$V_E: -J = \frac{2V_E}{R} - \frac{V_D}{R} \longrightarrow -J \cdot R = 2V_E - V_D \longrightarrow \boxed{V_D = 2V_E + J \cdot R}$$

$$V_D: 0 = \frac{3V_D}{R} - \frac{V_B}{R} - \frac{V_C}{R} - \frac{V_E}{R} \longrightarrow 0 = \frac{3V_D - V_B - V_C - V_E}{R} \longrightarrow 0 = 3V_D - V_B - V_C - V_E$$
$$0 = 3(2V_E + J \cdot R) - V_B - V_C - V_E$$
$$0 = 6V_E + 3JR - V_B - V_C - V_E$$
$$0 = 5V_E - V_B - V_C + 3JR$$
$$\boxed{V_E = \frac{V_B + V_C - 3JR}{5}}$$

Sostituiamo ponendo i valori che conosciamo all'interno di V_E

$$\begin{cases} V_D = 2V_E + J \cdot R \\ V_E = \dfrac{E + \alpha I_x + E - 3JR}{5} \end{cases}$$

- **Calcolo della corrente I_x**.
  Ci manca la corrente I_x, che troviamo agilmente calcolando la tensione V_{AB}.
  - È la tensione della resistenza equivalente $2R$ in alto a sinistra del circuito, attraversata dalla corrente I_x,
  $$V_{AB} = (R + R)I_x$$
  - È uguale alla differenza tra due tensioni di nodo
  $$V_{AB} = V_A - V_B = 0 - V_B = -E - \alpha I_x$$

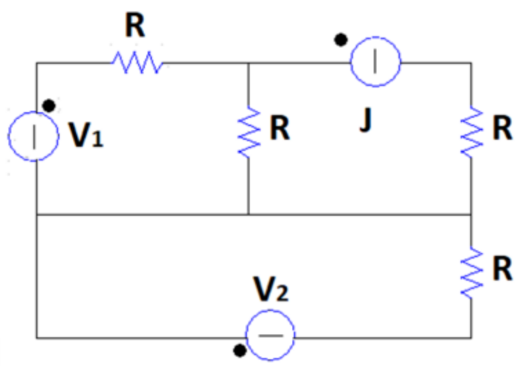
  Sviluppiamo
  $$V_{AB} = (R + R)I_x \longrightarrow V_{AB} = 2TI_x \longrightarrow I_x = \frac{V_{AB}}{2R}$$
  $$I_x = \frac{-E - \alpha I_x}{2R}$$
  $$I_x \cdot 2R = -E - \alpha I_x$$
  $$(2R + \alpha) \cdot I_x = -E$$
  $$\boxed{I_x = -\frac{E}{2R + \alpha}} = -1.66\,\mathrm{A}$$

  A questo punto possiamo trovare V_E e V_D
  $$V_E = 4.68\,\mathrm{V}$$
  $$V_D = 29.36\,V$$

- **Individuazione della corrente V_j e conclusione dell'esercizio**.
  Concludiamo calcolando la corrente che attraversa il generatore di corrente (V_j) e la potenza richiesta dall'esercizio!
  $$P_J = V_J \cdot J = (V_C - V_E) \cdot J = (E - V_E) \cdot J = 45.32\,\mathrm{W} \cdot 2\,\mathrm{A} = 90.64\,\mathrm{W}$$

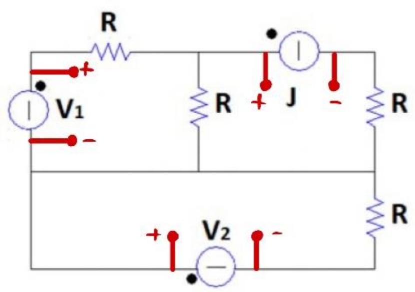
4.15 Esercizio: calcolo potenza totale (Primo esercizio appello 05/06/2019)

Determinare la potenza (totalmente) erogata dai generatori del circuito.

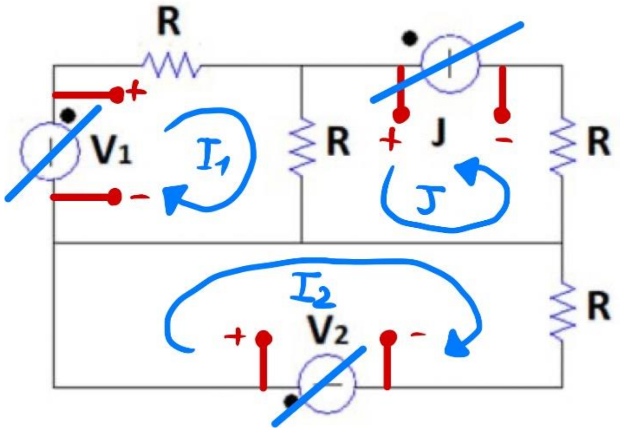


$V_1 = 10$ V;
$V_2 = 20$ V
$J = 3$ A;
$R = 10\ \Omega$;

- **Punto di partenza**.
  Contrariamente a prima dobbiamo trovare la potenza totale. Essa consiste nella somma algebrica (occhio ai segni) delle potenze erogate dai tre generatori presenti all'interno del circuito.
  $$P_{tot} = P_{V_1} + P_{V_2} + P_J$$



- **Applicazione del metodo delle correnti di maglia**.
  Risolviamo il circuito applicando il metodo delle correnti di maglia. Abbiamo due equazioni da scrivere (non tre dato che conosciamo la corrente di maglia J).



$$I_1 : -V_1 + R \cdot I_1 + R \cdot (I_1 + J) = 0 \longrightarrow -V_1 + 2R \cdot I_1 + R \cdot J = 0 \longrightarrow \boxed{I_1 = \frac{V_1 - R \cdot J}{2R}} = -1\,\mathrm{A}$$

$$I_2 : -V_2 + R \cdot I_2 = 0 \longrightarrow \boxed{I_2 = \frac{V_2}{R}} = 2\,\mathrm{A}$$

- **Individuazione della tensione V_j ai capi del generatore di corrente**.
  Ci manca la tensione V_j, che troviamo applicando il secondo principio di Kirkhoff alla maglia in alto a destra.

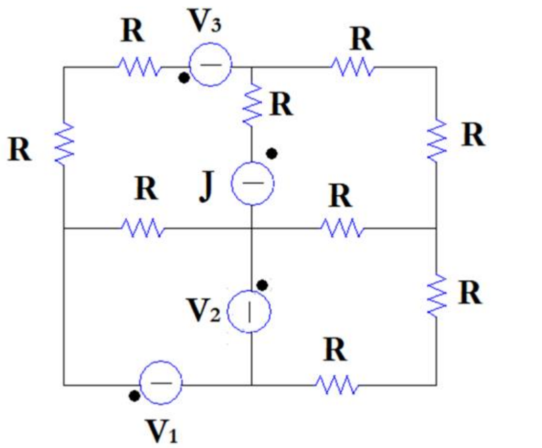
$$-V_J + R \cdot J + R \cdot (I_1 + J) = 0 \longrightarrow V_J = R(I_1 + J) + R \cdot J = 50\,\mathrm{V}$$

- **Calcolo delle potenze e potenza complessiva**.
  Adesso possiamo calcolare le varie potenze

$$P_{V_1} = V_1 \cdot I_1 = 10\,\mathrm{V} \cdot (-1\,\mathrm{A}) = -10\,\mathrm{W}$$
$$P_{V_2} = V_2 \cdot I_2 = 20\,\mathrm{V} \cdot 2\,\mathrm{A} = 40\,\mathrm{W}$$
$$P_J = V_J \cdot J = 50\,\mathrm{V} \cdot 3\,\mathrm{A} = 150\,\mathrm{W}$$
$$P_{tot} = -10\,\mathrm{W} + 40\,\mathrm{W} + 150\,\mathrm{W} = 180\,\mathrm{W}$$

4.16 Esercizio: calcolo potenza erogata da generatore (Primo es. appello 17/09/2021)

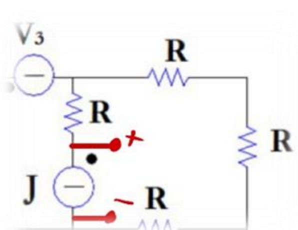
Determinare la potenza erogata dal generatore di corrente J nel circuito in figura.



J = 1 A;
V₁ = 10 V;
V₂ = 20 V;
V₃ = 30 V;
R = 10 Ω.

- **Punto di partenza**.
  Ci interessa esclusivamente individuare la potenza ai capi dell'unico generatore di corrente presente all'interno del circuito.

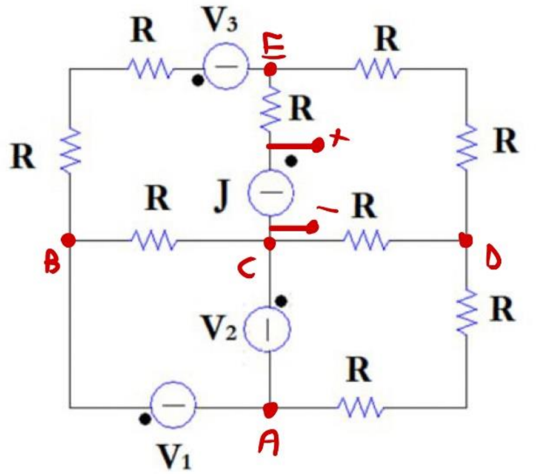
  Per fare ciò utilizziamo la formula



$$P_J = V_j \cdot J$$

La corrente J è un valore noto, mentre la tensione V_j non lo è. Quest'ultima è indeterminata se consideriamo il generatore da solo: può essere calcolata solo se si considera il resto del circuito. Occhio fin da subito alla presenza di un generatore di tensione reale (che trattiamo nel punto successivo).

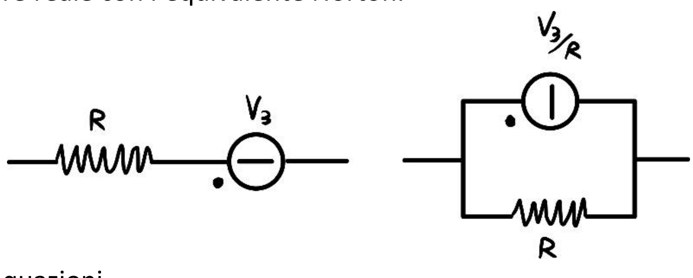
- **Applicazione del metodo delle tensioni di nodo**.
  Il metodo più conveniente da applicare è quello delle tensioni di nodo.
  - Si osservi la presenza di due generatori di tensione, con cui riduciamo il numero di equazioni applicando eventualmente il metodo delle tensioni di nodo (cinque nodi, togliamo il nodo di riferimento e due nodi per la presenza dei due generatori, rimangono solo due equazioni da scrivere).
  - Se si applica il metodo delle correnti di maglia abbiamo almeno tre equazioni (quattro maglie, passo da quattro a tre equazioni per la presenza di un generatore di corrente).



Poniamo il nodo A come nodo di riferimento.

$$V_A = 0$$
$$V_B = V_1$$
$$V_C = V_2$$
$$V_D: 0 = V_D\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{2R}+\frac{1}{2R}\right) - V_E\left(\frac{1}{2R}\right) - V_C\left(\frac{1}{R}\right)$$
$$V_E: J - \frac{V_3}{2R} = V_E\left(\frac{1}{2R}+\frac{1}{2R}\right) - V_B\left(\frac{1}{2R}\right) - V_D\left(\frac{1}{2R}\right)$$

Per la scrittura dell'equazione del nodo E si deve considerare la presenza di un generatore di tensione reale (generatore di tensione in serie con una resistenza): si scrive l'equazione dopo aver sostituito il generatore reale con l'equivalente Norton.



Sviluppiamo le due equazioni

$$V_D: 0 = \frac{2V_D}{R} - \frac{V_E}{2R} - \frac{V_C}{R} \longrightarrow 0 = 4V_D - V_E - 2V_C \longrightarrow \boxed{V_E = 4V_D - 2V_C} = 5.68\ \mathrm{V}$$

$$\begin{aligned} V_E: \frac{2JR - V_3}{2R} = \frac{2V_E}{2R} - \frac{V_B}{2R} - \frac{V_D}{2R} &\longrightarrow 2JR - V_3 = 2V_E - V_B - V_D \\ &\longrightarrow 2JR - V_3 = 2(4V_D - 2V_C) - V_B - V_D \\ &\longrightarrow 2JR - V_3 = 8V_D - 4V_C - V_B - V_D \\ &\longrightarrow 2JR - V_3 + 4V_C + V_B = 7V_D \\ &\longrightarrow \boxed{V_D = \frac{2JR - V_3 + 4V_C + V_B}{7}} = 11.42\ \mathrm{V} \end{aligned}$$

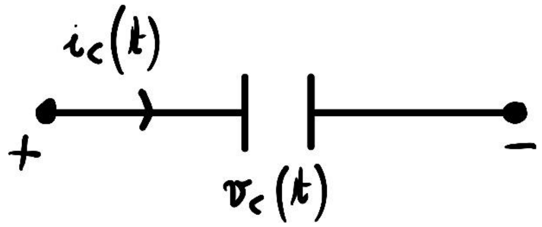
- **Individuazione della resistenza V_J.**
  Calcoliamo la tensione ai capi del generatore percorrendo il ramo EC. Osservazione rilevante: non si confonda la tensione ai capi EC con la tensione ai capi del generatore, nel ramo non è presente solo il generatore (c'è anche una resistenza, con la sua caduta di potenziale)!!
  $$V_{EC} = V_E - V_C = -RJ + V_J \longrightarrow V_J = V_{EC} + R \cdot J$$
  $$\longrightarrow V_J = V_E - V_C + RJ = 5.68V - 20V + 10V = -4.32\,\mathrm{V}$$
- **Calcolo della potenza**.
  Possiamo concludere calcolando la potenza.
  $$P_J = V_J \cdot J = -4.32\,\mathrm{V} \cdot 1\,\mathrm{A} = -4.32\,\mathrm{W}$$
  Le differenze nelle cifre rispetto alla soluzione del professore sono dovute alle cifre significative considerate. Il procedimento è lo stesso della soluzione proposta dal professore, ma ho dato nomi diversi ai nodi!

5 CIRCUITI A REGIME PERIODICO SINUSOIDALE

5.1 Bipolo elettrico: il condensatore

5.1.1 Introduzione e proprietà

Il condensatore è un dispositivo che permette di immagazzinare energia. Il principio costruttivo prevede due armature conduttrici separate da un materiale isolante detto dielettrico (inizialmente le due armature erano separate dal vuoto, successivamente ci si è resi conto che porre particolari materiali isolanti permette di aumentare l'energia immagazzinabile dal condensatore).



La carica sulle armature è direttamente proporzionale alla differenza di potenziale ai capi del condensatore.

- **Linearità**.
  Abbiamo già anticipato che questo corso affronta esclusivamente circuiti lineari. L'equazione costitutiva (che si può rappresentare per mezzo di una retta passante per l'origine) è la seguente
  $$Q = C \cdot V$$
  Il coefficiente angolare è la costante C, che consiste nella *capacità del Condensatore* (Unità di misura è il Farad, F[1]). La costante dipende dal materiale del condensatore e dalle caratteristiche geometriche dello stesso, come dimostrato dalla seguente formula
  $$C = \epsilon \frac{S}{d}$$
  Dove S è l'area delle armature, d è la distanza tra le due armature, ϵ è la costante dielettrica dipendente dal materiale.
  $$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$$
  - $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ è la costante dielettrica nel vuoto
    ($\epsilon = \epsilon_0$ se le armature sono separate dal vuoto)
  - ϵ_R è la costante dielettrica relativa al materiale isolante posto tra le due armature.
- **Tempo-invarianza**.
  L'equazione costitutiva non cambia nel tempo: si parla di circuito tempo-invariante.
- **Con memoria**?
  Prendiamo il legame tensione-corrente dalla definizione di corrente.
  $$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dv(t)}{dt}$$
  Spostiamo C al primo membro e integriamo
  $$\frac{1}{C}i(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$
  $$\int \frac{1}{C}i(t) = \int \frac{dv(t)}{dt}$$
  $$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d$$
  $$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)d\tau + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau = \boxed{v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau}$$
  Abbiamo appena dimostrato che il condensatore è un elemento con valore, dato che la tensione dipende dai valori assunti precedentemente.

[1] Tipicamente si lavora con sottomultipli del Farad: micro Farad, nano Farad, pico Farad…

- **Passività**.
  Abbiamo detto che un dispositivo è passivo se in presenza di riferimenti associati l'energia è sempre ≥ 0. Calcoliamo la potenza
  $$p(t) = v(t) \cdot i(t) = v(t)C\frac{dv(t)}{dt}$$
  La potenza è indeterminata in segno, se consideriamo le proprietà tipiche della derivata:
    - potrei avere tensione positiva in calo, e quindi derivata negativa
    - potrei avere tensione negativa in aumento, e quindi derivata positiva.

  Non possiamo concludere subito, come invece abbiamo fatto con le resistenze. Verifichiamo il segno dell'energia sostituendo la formula trovata prima
  $$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} Cv(\tau)\frac{dv(\tau)}{d\tau}d = C\int_{-\infty}^{t} v(\tau)dv(\tau) = C\left[\frac{v^2(t)}{2}\right]_{-\infty}^{t}$$
  $$= \frac{1}{2}Cv^2(t) - \frac{1}{2}Cv^2(-\infty) = \frac{1}{2}Cv^2(t) - 0 = \boxed{\frac{1}{2}Cv^2(t) \geq 0, \forall t}$$
  Il secondo termine è nullo perché abbiamo posto come condizione iniziale che il condensatore è scarico, ergo $v^2(-\infty) = 0$. L'energia trovata è sempre positiva, ergo il condensatore è passivo!

5.1.2 Passaggio da circuiti in continua a circuiti non in continua

Perché parliamo solo ora di condensatori? La corrente nel condensatore è legata alla derivata della tensione, ergo a una variazione della tensione

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

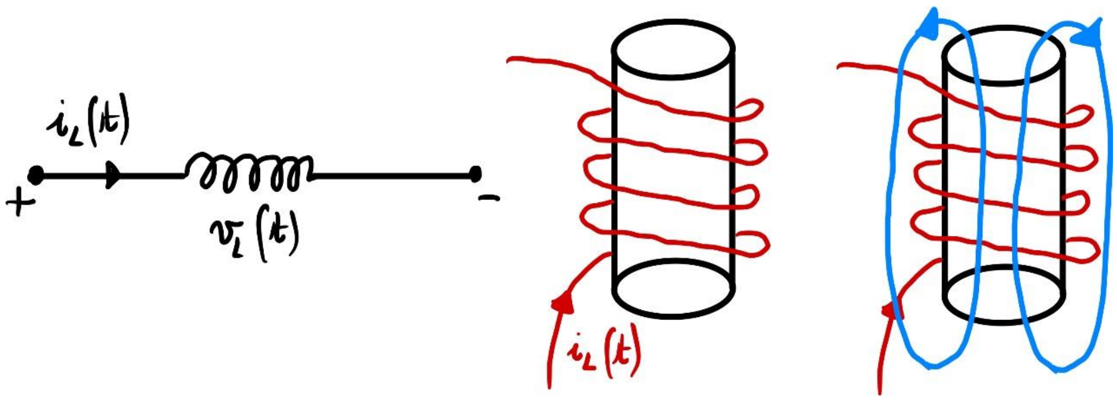
Fino ad ora abbiamo parlato esclusivamente di circuiti in continua, cioè circuiti dove correnti e tensioni sono costanti nel tempo: nel caso del condensatore significherebbe avere $i(t) = 0$, $\forall t$ per il valore nullo della derivata

$$\Longrightarrow \boxed{\text{Nel circuito in continua il condensatore equivale a un circuito aperto}}$$

5.2 Bipolo elettrico: induttore

5.2.1 Introduzione e proprietà

L'induttore è un dispositivo che permette di generare un campo magnetico al passaggio della corrente elettrica. Il principio costruttivo prevede l'avvolgimento del conduttore per un certo numero di volte, attorno a un supporto in materiale ferro-magnetico.



Il campo magnetico generato è direttamente proporzionale alla corrente. Si ricordi che le linee del campo magnetico sono linee chiuse, e che il verso è dato dalla regola della mano destra (pollice segue il verso della corrente, il palmo guarda il verso delle linee di campo magnetico verso l'alto).

- **Linearità**.
  Affrontiamo esclusivamente circuiti lineari. L'equazione costitutiva (che si può rappresentare per mezzo di una retta passante per l'origine) è la seguente
  $$\phi(t) = L \cdot i_L(t)$$
  dove il coefficiente angolare è la costante L, l'induttanza (L'unità di misura è l'Henry, H)! Questa costante dipende dalle caratteristiche geometriche del dispositivo. Prendiamo ad esempio la formula per un induttore cilindrico
  $$L = \mu \frac{S}{l} N^2$$
  dove l è la lunghezza del conduttore, S è la sezione, N è il numero di spire, mentre μ è la permeabilità del materiale ferromagnetico. Come prima
  $$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$
    - $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ è la costante di permeabilità nel vuoto
    - μ_r è la costante di permeabilità relativa al materiale del supporto
- **Tempo-invarianza**.
  Anche questo bipolo è tempo-invariante: l'equazione costitutiva non cambia nel tempo.
- **Con memoria?**
  Anche questo bipolo ha memoria. Dimostriamolo in modo non troppo diverso da quanto visto nel condensatore. Prendiamo la legge di Lenz
  $$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = L\frac{di_L(t)}{dt}$$
  Integriamo
  $$\int \frac{di_L(t)}{dt} = \int \frac{1}{L} v(t)$$
  $$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau$$
  $$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} v(\tau)d\tau + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau = \boxed{i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}$$
- **Passività**.
  Anche questo bipolo è passivo. Anche qua dimostrazioni simili a prima
  $$p(t) = v_L(t) \cdot i_L(t)$$
  $$p(t) = L \cdot i_L(t)\frac{di_L(t)}{dt}$$
  $$w_L(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} L \cdot i_L(\tau)\frac{di_L(\tau)}{d\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{t} L \cdot i_L(\tau)di_L(\tau) =$$
  $$= L\int_{-\infty}^{t} i_L(\tau)di_L(\tau) = L\left[\frac{i_L^2(t)}{2}\right]_{-\infty}^{t} = \frac{1}{2}Li_L^2(t) - 0 = \boxed{\frac{1}{2}Li_L^2(t) \geq 0}$$

5.2.2 Passaggio da circuiti in continua a circuiti non in continua

Anche l'induttore rientra tra quei dispositivi che non possono essere trattati adeguatamente nel contesto dei circuiti in continua

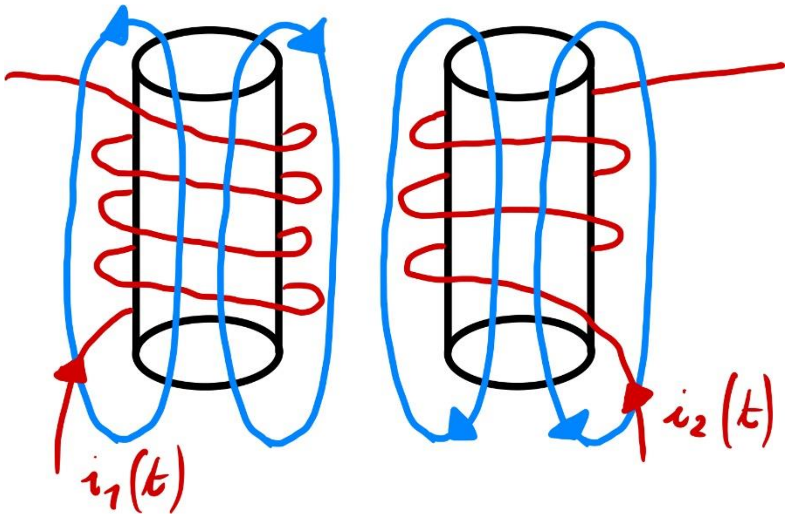
$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

Se la corrente è costante allora $v_L(t) = 0$, $\forall t$ per la derivata nulla.

$$\Longrightarrow \boxed{\text{Nel circuito in continua l'induttore equivale a un cortocircuito}}$$

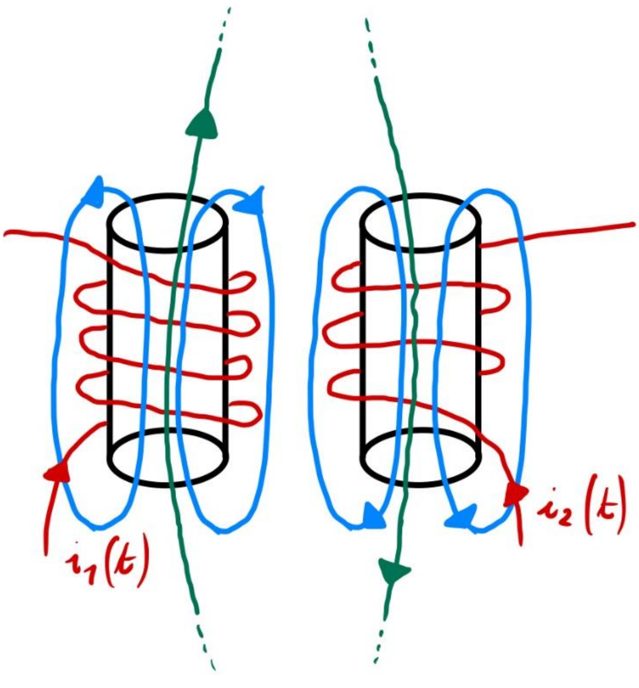
5.2.3 Induttori mutuamente accoppiati

Supponiamo di voler disporre ravvicinati due induttori, come in figura



Le linee del campo magnetico B_2, generato dalla corrente i_2, si richiudono sul primo induttore. Detta in altre parole: le linee di campo magnetico completamente concatenate sul primo induttore non sono solo quelle causate dalla corrente i_1, ma anche linee di campo causate dalla corrente i_2.

Si può dire che il flusso di campo magnetico sul primo induttore è la somma di due contributi: il flusso causato dal primo induttore ($\phi_{1,1}$) e il flusso causato dal secondo induttore richiudendosi sul primo ($\phi_{1,2}$).

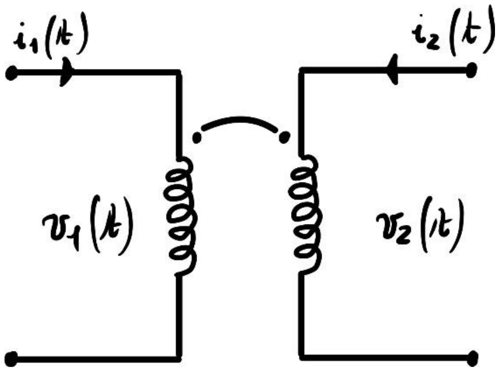


$$\phi_1(t) = \phi_{1,1}(t) \pm \phi_{1,2}(t)$$

La somma è algebrica: positiva se le correnti passanti dai due induttori sono concordi, negativa altrimenti. Possiamo dire le stesse cose pure sul secondo induttore

$$\phi_2(t) = \phi_{2,2}(t) \pm \phi_{2,1}(t)$$

Due induttori mutuamente accoppiati sono rappresentabili nel circuito per mezzo di contrassegni uniti da un archetto. Complessivamente abbiamo quattro variabili: correnti passanti per gli induttori (che non è assolutamente detto siano uguali) e tensioni ai capi dei due induttori.



Se i due induttori sono sufficientemente lontani, al punto che uno non può influenzare l'altro, allora non avremo l'archetto che collega i due contrassegni.

<u>Come calcoliamo le tensioni?</u> Deriviamo le formule per il flusso del campo magnetico

$$\frac{d}{dt}(\phi_1(t)) = \frac{d}{dt}\left(\phi_{1,1}(t) \pm \phi_{1,2}(t)\right)$$
$$\frac{d}{dt}(\phi_2(t)) = \frac{d}{dt}\left(\phi_{2,2}(t) \pm \phi_{2,1}(t)\right)$$

La derivate dei flussi al primo membro sono le cadute di potenziale ai capi dell'induttore!

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt}$$
$$v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \frac{di_1(t)}{dt}$$

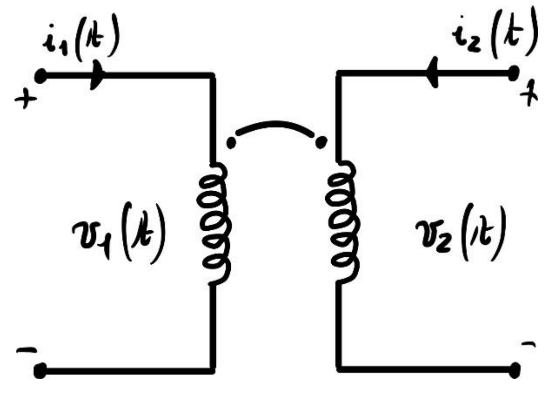
Le induttanze degli induttori possono essere diverse (ad esempio per un numero di spire diverso). M consiste nel *coefficiente di mutua induttanza*.

<u>Segno dei termini</u>. L'aspetto più complicato nell'uso di queste formule è la determinazione dei segni: non abbiamo un disegno tridimensionale dove applicare la regola della mano destra! Come risolviamo?

- Il primo termine (detto *caduta di potenziale di auto-induttanza*) è positivo o negativo a seconda del verso della corrente:
  - positivo se la corrente va dal + al -,
  - segno negativo altrimenti.
- Sul secondo termine (detto *caduta di potenziale di mutua-induttanza*) affermiamo che il segno è uguale al segno del primo termine (segno della caduta di auto-induttanza) se entrambe le correnti entrano nei contrassegni, o entrambe escono dai contrassegni.

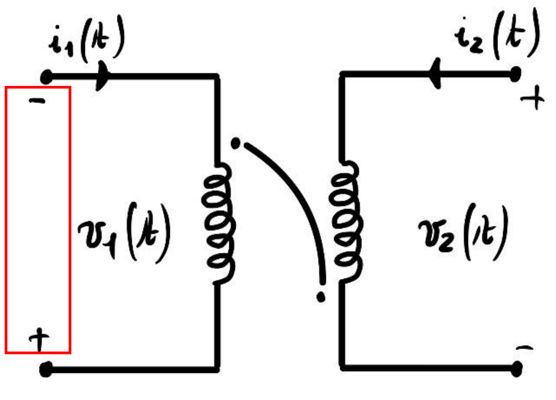
$$\boxed{\text{I contrassegni servono solo a individuare i segni delle cadute di mutua induttanza!}}$$

Prendiamo la figura nella pagina precedente come esempio, e facciamo esempi ulteriori alterando la figura.



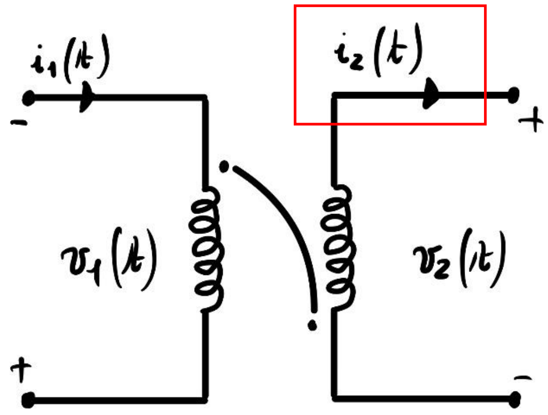
- Primi termini positivi perché entrambe le correnti vanno dal + al -
- Secondi termini sono entrambi positivi dato che entrambe le correnti entrano nel contrassegno: segue uguaglianza con le cadute di auto-induttanza

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$
$$v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt}$$



- Primi termini: segni discordi, una corrente va dal – al + (segno negativo) e l'altra dal + al – (segno positivo)
- Il segno delle cadute di mutua induttanza non è uguale a quello delle cadute di auto-induttanza, in quanto un induttore ha la corrente entrante dal contrassegno e l'altro no!

$$v_1(t) = -L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$
$$v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - M \frac{di_1(t)}{dt}$$



- La corrente i_2 adesso va dal – al + (confronto con esempio precedente): il segno del primo termine in v_2 diventa negativo.
- Adesso entrambe le correnti entrano nel contrassegno, ergo i segni di auto-induttanza sono uguali a quelli di mutua induttanza.

$$v_1(t) = -L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M\frac{di_2(t)}{dt}$$
$$v_2(t) = -L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - M\frac{di_1(t)}{dt}$$

- **Passività?**
  La potenza erogata da due induttori mutuamente accoppiati si calcola per mezzo della seguente somma

$$p(t) = v_1(t) \cdot i_1(t) + v_2(t) \cdot i_2(t)$$
$$p(t) = \left(L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M\frac{di_2(t)}{dt}\right) i_1(t) + \left(L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M\frac{di_1(t)}{dt}\right) i_2(t)$$
$$\boxed{p(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} i_1(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} i_2(t) \pm M\frac{di_2(t)}{dt} i_1(t) \pm M\frac{di_1(t)}{dt} i_2(t)}$$

Il segno della potenza è chiaramente indeterminato. I primi due termini rappresentano potenza del primo e del secondo induttore, con la novità della derivata della corrente per la corrente stessa!

Calcoliamo l'energia. Per semplificarci i calcoli mettiamo in evidenza M

$$p(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} i_1(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} i_2(t) \pm M\left(\frac{di_2(t)}{dt} i_1(t) + \frac{di_1(t)}{dt} i_2(t)\right) =$$
$$p(t) = \cdots + \cdots \pm M\frac{d}{dt}\big(i_1(t)i_2(t)\big)$$

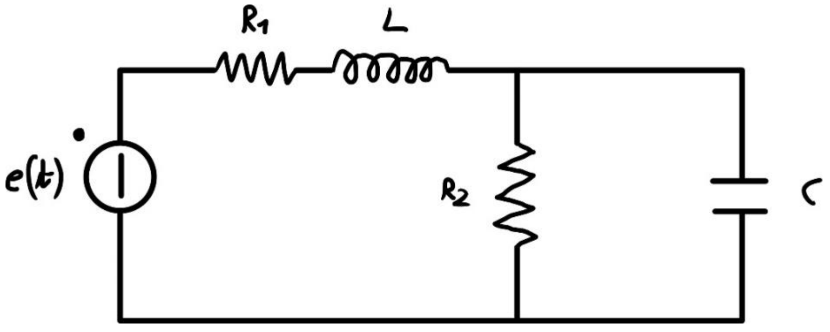
Otteniamo (primi due termini nulla di strano, potenze degli induttori se fossero per conto loro)

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} L_1 \frac{di_1(\tau)}{d\tau} i_1(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{t} L_2 \frac{di_2(\tau)}{d\tau} i_2(\tau)d\tau \pm \int_{-\infty}^{t} M\frac{d}{d\tau}\big(i_1(\tau)i_2(\tau)\big)d\tau$$
$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} L_1 i_1(\tau)di_1(\tau) + \int_{-\infty}^{t} L_2 i_2(\tau)di_2(\tau) \pm M\int_{-\infty}^{t} \frac{d}{d\tau}\big(i_1(\tau)i_2(\tau)\big)d\tau$$
$$w(t) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2(t) - 0 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2(t) - 0 + M(i_1(t)i_2(t)) = \boxed{\frac{1}{2}L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2}L_2 i_2^2(t) \pm \mathrm{M}(i_1(t)i_2(t))}$$

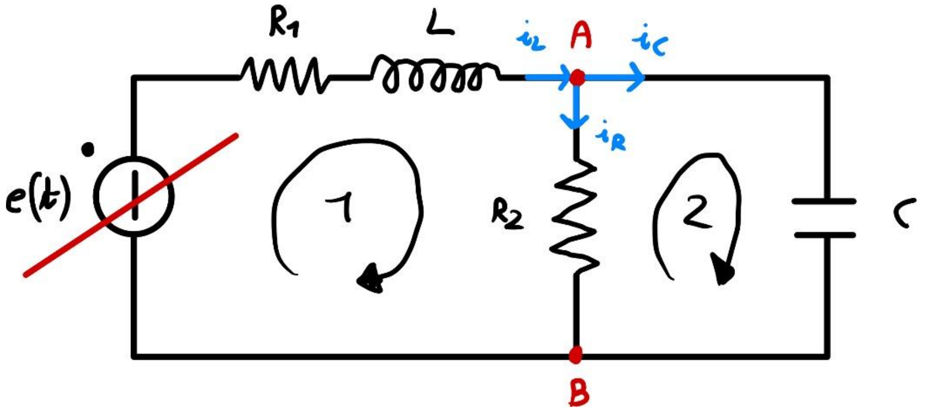
I primi due termini sono sicuramente positivi, ma sul terzo? Per ragioni di Fisica degli induttori mutuamente accoppiati affermiamo che M è sempre $\leq \sqrt{L_1L_2}$: in virtù di questa condizione concludiamo che $w(t) > 0$, quindi il bipolo è passivo.

5.3 Risoluzione di circuiti non in continua: e i metodi precedenti?

Vogliamo risolvere circuiti non in continua: come facciamo? Consideriamo il seguente circuito, dove supponiamo $e(t)$ non costante (altrimenti si tratterebbe un circuito in continua).



Proviamo a risolvere col metodo delle correnti di ramo (lo prendiamo al volo per semplicità, solo due rami). Definiamo nodi e correnti, e scriviamo le equazioni seguendo i due principi di Kirkhoff.



- **Primo principio di Kirkhoff al nodo A**

$$A: i_L(t) = i_R(t) + i_C(t)$$

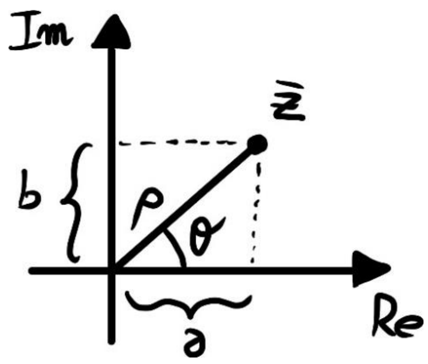
- **Secondo principio di Kirkhoff applicato alle due maglie in figura**

$$1: \; -e(t) + R_1 i_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} + R_2 i_r(t) = 0$$
$$2: -Ri_R(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau = 0$$

Abbiamo ottenuto un sistema di tre incognite in tre equazioni, ma il sistema non è più lineare (CATTIVA NOTIZIA). La cosa non ci piace: vedremo nelle prossime lezioni metodi di risoluzione diversi, con cui otterremo nuovamente sistemi lineari.

5.4 Ripasso sui numeri complessi

Indichiamo il numero complesso con un trattino sopra. Può essere rappresentato nelle seguenti forme:



- **forma cartesiana**

$$\overline{z} = a + j \cdot b$$

dove a è la parte reale e b la parte immaginaria del numero complesso.

- **forma polare**

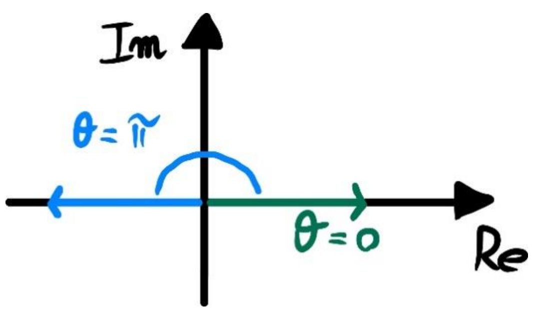
$$\overline{z} = \rho \cdot e^{j\theta}$$

dove ρ è la lunghezza del vettore nel piano di Gauss, θ è l'angolo formato con l'asse dell'ascisse (*fase*). Possibile anche la seguente forma

$$\overline{z} = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$$

La cosa è rappresentabile graficamente sul piano di Gauss, come a lato. Procediamo facendo alcune osservazioni!

- **Numeri reali**.
I numeri reali presentano fase uguale a zero o a π: zero se il numero reale è positivo, π se il numero reale è negativo.



- **Numeri immaginari puri**.
I numeri immaginari puri (con parte reale nulla) presentano fase uguale a $\pm\frac{\pi}{2}$.

- **Passaggio da forma polare a forma cartesiana**.
  Il passaggio da forma polare a forma cartesiana è semplice
$$\begin{cases} a = \rho \cos\theta \\ b = \rho \sin\theta \end{cases}$$
- **Passaggio da forma cartesiana a forma polare**.
$$\begin{cases} \rho = |\overline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan\theta = \frac{b}{a} \longrightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$
  Occhio al segno quando calcoliamo l'arcotangente con la calcolatrice: il risultato potrebbe essere sbagliato se non stiamo attenti ai segni di a e b. Confrontiamo i seguenti numeri complessi
$$\overline{z}_1 = 10 + j \cdot 10 = 10\sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{4}}$$
$$\overline{z}_2 = -10 - j \cdot 10 = 10\sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \frac{3}{4}\pi}$$
  La fase in $\overline{z}_2$ è $\frac{3}{4}\pi$, ma la calcolatrice restituisce $\frac{\pi}{4}$ dato che lavora su un dominio diverso rispetto al nostro. Risolviamo osservando il quadrante di appartenenza, sommiamo o sottraiamo π al risultato della calcolatrice per riportarci nel quadrante giusto.
$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & a > 0, \forall b \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & a < 0, b > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & a < 0, b < 0 \end{cases}$$
- **Complesso coniugato**.
  Definiamo il complesso coniugato il numero complesso $\overline{z}$ con parte immaginaria posta negativa.
$$\overline{z}^* = a - j \cdot b = \rho e^{-j\theta}$$
  Si osservi che $\overline{z} \cdot \overline{z}^* = \rho^2$

5.5 Introduzione ai circuiti a regime periodico sinusoidale

5.5.1 Definizione

I circuiti a regime periodico sinusoidale sono circuiti non in continua con le seguenti proprietà:

- ***"periodico"***
  Il segnale si ripete uguale a se stesso dopo un certo lasso T, detto periodo
$$f(t) = f(t - T), \forall t \in R$$
- ***"sinusoidale"***
  Tutte le correnti e tutte le tensioni possono essere scritte come un certo $x(t)$
$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \phi_x) = X_M \cos\left(\omega t + \phi_x + \frac{\pi}{2}\right)$$
  e tutte presentano la stessa pulsazione ω. Definiamo le cose presenti nella funzione.
  - X_M è il valore massimo, mentre $-X_M$ è il valore minimo (si ricordi che sin e cos restituiscono valori nell'intervallo [-1; 1])
  - ϕ_x è la fase, valore utilizzato per poter compiere una traslazione della funzione lungo l'ascissa temporale (si osservi che $\phi_x = 0$ se $x(t = 0) = 0$)
  - ω è detta pulsazione, ed è uguale a $\omega = \frac{2\pi}{T}$

  Equivalenze: "presentano tutte la stessa pulsazione" -> "presentano tutte lo stesso periodo" -> "presentano tutte la stessa frequenza".

Possiamo calcolare la frequenza in modo banale (Nelle nostre abitazioni la frequenza vale 50Hz)

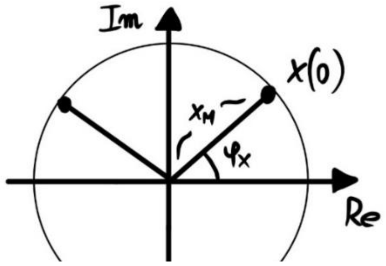
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

5.5.2 Introduzione ai fasori

Ritorniamo alla questione fondamentale: come possiamo risolvere sistemi non lineari evitando derivate e integrali? Utilizziamo i numeri complessi: si compie il seguente passaggio, dal dominio del tempo alla nuova grandezza $X(t)$

$$x(t) = X_M \cdot sin(\omega t + \phi_x) \Longrightarrow \boxed{X(t) = X_M \cdot e^{j\cdot(\omega t + \phi_x)}}$$

La grandezza introdotta è un numero complesso posto in forma polare, e ammette una sua rappresentazione nel piano di Gauss.



Il valore massimo X_M non cambia al variare del tempo, mentre cambia la fase ϕ_x: si parla, non a caso, di vettore rotante (il vettore ruota "disegnando una circonferenza").

In realtà quanto descritto è solo uno strumento intermedio:

- Il vettore rotante si basa sull'evoluzione di t;
- noi vogliamo muoverci diversamente, presa la posizione iniziale del vettore (istante $t = 0$) possiamo determinare una qualunque posizione in istanti temporali successivi t^* aggiungendo alla fase iniziale ϕ_x un angolo pari a ωt^*

Il numero complesso (vettore) che individua la posizione del vettore rotante nel piano di Gauss all'istante iniziale $t = 0$ è noto come **fasore**!

$$\boxed{\dot{X} = X(0) = X_M \cdot e^{j\phi_x}} = X_M(cos\,\phi_x + j\,sin\,\phi_x)$$

Perché ci piace utilizzare i fasori?

- Maggiore facilità di utilizzo:
  - si ottiene una formula non dipendente dal tempo
  - vedremo che è possibile sistemare derivate e integrali per mezzo di equazioni algebriche
- Contengono tutte le informazioni di cui abbiamo bisogno (fase e valore massimo, si consideri che la pulsazione è uguale per tutte le correnti e tutte le tensioni del circuito

5.5.3 Passaggio da dominio del tempo a dominio del fasore

La cosa è di immediata comprensione: prendiamo ad esempio la seguente tensione

$$v_{AB}(t) = 100 \cdot \sin\left(10t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \dot{v_{AB}} = 100 \cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{4}}$$

$$\boxed{v_{AB}(t) = V_M \cdot sin(\omega t + \phi_v) \quad \Rightarrow \dot{v_{AB}} = X_M \cdot e^{j\phi_V}}$$

5.5.4 Passaggio da dominio del fasore a dominio del tempo

Abbiamo capito come si passa dal dominio del tempo al dominio del fasore, ma come avviene il contrario?

$$x(t) = \mathrm{Im}\{\dot{X} \cdot e^{j\omega t}\}$$

Dimostriamolo!

$$x(t) = \mathrm{Im}\{\dot{X} \cdot e^{j\omega t}\} = \mathrm{Im}\{X_M \cdot e^{j\phi_x} \cdot e^{j\omega t}\} = \mathrm{Im}\{X_M \cdot e^{j(\omega t + \phi_x)}\} =$$
$$= \mathrm{Im}\{X_M\,cos(\omega t + \phi_x) + j \cdot X_M\,sin(\omega t + \phi_x)\} = X_M\,sin(\omega t + \phi_x)$$

Abbiamo ottenuto la formula iniziale nel dominio del tempo.

5.5.5 Proprietà dei fasori

5.5.5.1 Proprietà di somma e differenza

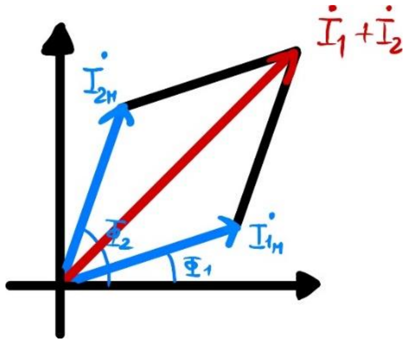
Cosa succede se si sommano due fasori di correnti o due fasori di tensione?

$$\dot{I_1} + \dot{I_2} = I_{1_M} \cdot e^{j\phi_1} + I_{2_M} \cdot e^{j\phi_2} =$$
$$= I_{1_M} \cos(\phi_1) + j \cdot I_{1_M} sin(\phi_1) + I_{2_M} cos(\phi_2) + j \cdot I_{2_M} sin(\phi_2)$$

Raccogliamo rispetto a j

$$= I_{1_M} \cos(\phi_1) + I_{2_M} cos(\phi_2) + j\left[I_{1_M} sin(\phi_1) + I_{2_M} sin(\phi_2)\right]$$

Segue una rappresentazione su piano cartesiano dei due numeri complessi, e della somma tra essi: si applica la regola del parallelogramma



5.5.5.2 Derivata del fasore

Supponiamo di voler calcolare la derivata di una funzione $x(t)$: se riprendiamo la formula vista nel passaggio da dominio del fasore a dominio del tempo abbiamo derivata della parte immaginaria

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\mathrm{Im}\{\dot{X} \cdot e^{j\omega t}\}\right]$$

Dato che stiamo lavorando con operatori lineari possiamo affermare che la derivata della parte immaginaria è uguale alla parte immaginaria della derivata

$$\frac{d}{dt}\left[\mathrm{Im}\{\dot{X} \cdot e^{j\omega t}\}\right] = \mathrm{Im}\left\{\frac{d}{dt}\left(\dot{X}e^{j\omega t}\right)\right\} = \mathrm{Im}\{\dot{X}e^{j\omega t} \cdot j\omega\} = \mathrm{Im}\{j\omega\dot{X} \cdot e^{j\omega t}\} = \mathrm{Im}\{\dot{Y} \cdot e^{j\omega t}\}$$

$\dot{Y}$ è il fasore di $y(t)$!!!

$$\boxed{\dot{Y} = j\omega\dot{X}}$$

Calcolare la derivata è diventata una semplice operazione algebrica.

5.5.5.3 Integrale del fasore

Supponiamo di voler integrare una funzione $x(t)$: anche qua riprendiamo la formula vista nel passaggio da dominio del fasore a dominio del tempo.

$$y(t) = \int x(t)dt = \int \mathrm{Im}\{\dot{x} \cdot e^{j\omega t}\}dt$$

Come prima scambiamo le due operazioni, ottenendo che l'integrale della parte immaginare è la parte immaginaria dell'integrale.

$$\int \mathrm{Im}\{\dot{x} \cdot e^{j\omega t}\}dt = \mathrm{Im}\{\int \dot{x} \cdot e^{j\omega t}dt\} = \mathrm{Im}\left\{\dot{x} \cdot \frac{e^{j\omega t}}{j\omega}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{\dot{x}}{j\omega} \cdot e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\{\dot{Y} \cdot e^{j\omega t}\}$$

$\dot{Y}$ è il fasore di $x(t)$!!!

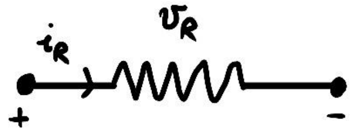
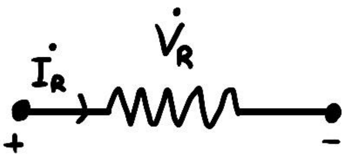
$$\boxed{\dot{Y} = \frac{\dot{X}}{j\omega}}$$

Anche in questo caso otteniamo una funzione algebrica: l'integrale del fasore $\dot{X}$ consiste nel

5.5.6 Rappresentazione fasoriale delle relazioni tensioni – corrente

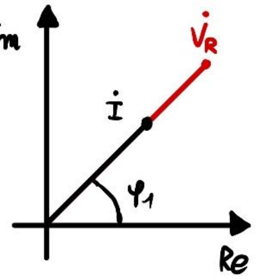
5.5.6.1 Resistenze

Lavoriamo sulle resistenze coi fasori, facendo un confronto con le classiche formule nel dominio del tempo.

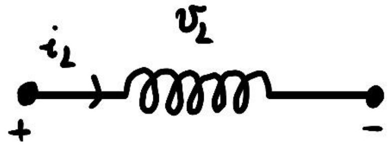
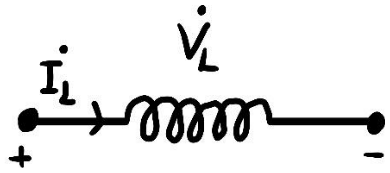
$$i_R(t) = I_M \cdot sin(\omega t + \phi_I) \quad \Longrightarrow \dot{I_R} = I_M \cdot e^{j\phi_I}$$
$$v(t) = R \cdot i(t) \quad \Longrightarrow \dot{V_R} = R \cdot \dot{I_R} = RI_M \cdot e^{j\phi_I}$$

Il fasore della tensione ha la stessa fase del fasore della corrente, ma modulo diverso (ipotizziamo $R > 1$).



5.5.6.2 Induttori

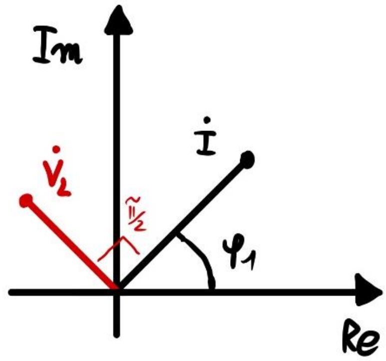
Lavoriamo sugli induttori coi fasori.

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \Longrightarrow \dot{V_L} = j\omega L \cdot \dot{I_L} = \mathrm{j\omega L\, I_M} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_1}$$

Il valore scritto non è posto, al momento, in nessuna delle forme che conosciamo (né cartesiana, né polare). Possiamo immaginare j come un numero complesso avente parte reale nulla e parte immaginaria uguale ad uno: poniamolo in forma polare!

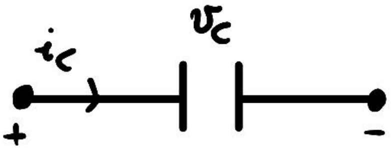
$$\dot{V_L} = \mathrm{j\omega L\, I_M} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_1} = e^{j\frac{\pi}{2}}\mathrm{\omega L\, I_M} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_1} = \omega L\, I_M \cdot e^{j\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right)}$$

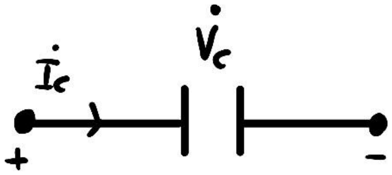


Il fasore della tensione ha come fase quella del fasore della corrente, più $\frac{\pi}{2}$. Il modulo dipende dall'avere o meno $\omega L < 1$ (non lo sappiamo, si suppone che sia vero nella figura superiore)

5.5.6.3 Condensatori

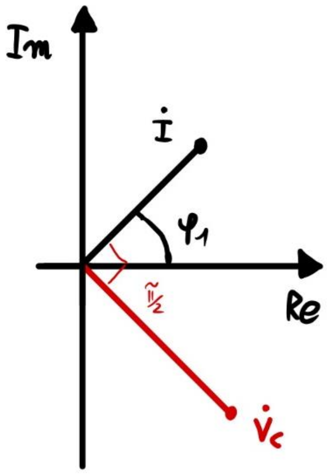
Lavoriamo sui condensatori coi fasori.





$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau \Rightarrow \dot{V}_C = \frac{1}{j\omega\, C}\dot{I_C} = \frac{1}{j}\cdot\frac{1}{\omega\, C}I_M e^{j\phi_1} = -j\frac{1}{\omega\, C}I_M e^{j\phi_1} = e^{-j\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\omega\, C}I_M e^{j\phi_1} = \frac{I_M}{j\omega C}e^{j\left(\phi_1-\frac{\pi}{2}\right)}$$

Otteniamo che il fasore della tensione ha come fase quella del fasore della corrente, meno $\frac{\pi}{2}$. Anche qua non siamo in grado di determinare a priori la dimensione del modulo.



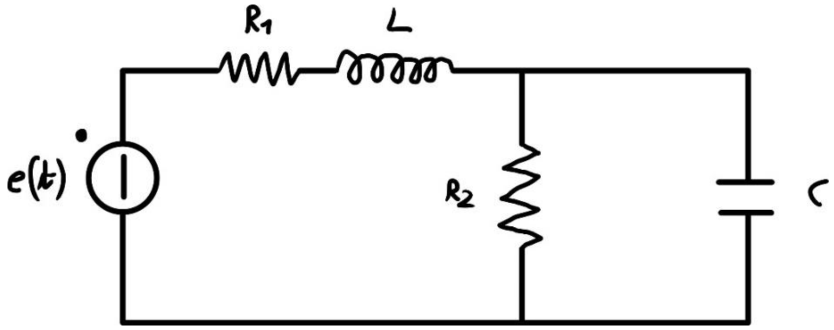
Occhio a $\frac{1}{j}$, non ci piace! Come abbiamo fatto a ottenere nei calcoli $-j$?

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{j}\cdot\frac{j}{j} = \frac{j}{-1} = -j$$

Fatto questo è stato possibile immaginare $-j$ come un numero complesso avente parte reale nulla e parte immaginaria uguale a -1. Segue, come nei conduttori, la rappresentazione del numero complesso in forma polare.

5.5.7 Prima risoluzione di un circuito nel dominio dei fasori

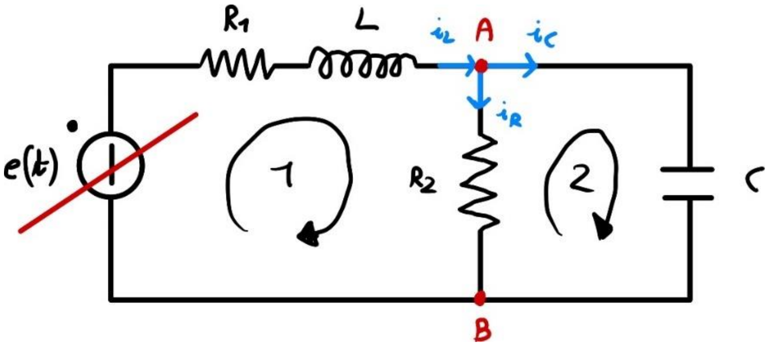
Riprendiamo il circuito che avevamo cercato di risolvere (invano, sistema non lineare) col metodo delle correnti di ramo



Supponiamo di avere una corrente erogata con andamento periodico e sinusoidale. Trasformiamo la formula in un fasore

$$e(t) = 10\, sin\left(100t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \dot{E} = 10\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Applichiamo il metodo delle correnti di ramo nel dominio dei fasori, applichiamo primo e secondo principio di Kirkhoff sugli stessi nodi e rami citati nel precedente tentativo di risoluzione



- **Primo principio di Kirkhoff al nodo A**

$$A\colon \dot{I}_L = \dot{I}_R + \dot{I}_C$$

- **Secondo principio di Kirkhoff applicato alle due maglie in figura**

$$\begin{aligned} &1\colon -\dot{E} + R_1 \cdot \dot{I}_R + j\omega L \cdot \dot{I}_L + R_2 \dot{I}_R = 0 \\ &2\colon -R_2 \cdot \dot{I}_R + \frac{1}{j\omega C} \cdot \dot{I}_C = 0 \end{aligned}$$

Non abbiamo più derivate e integrali! Concludiamo scrivendo il sistema in forma compatta

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ j\omega L & R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 & \dfrac{1}{j\omega C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_L \\ \dot{I}_R \\ \dot{I}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{E} \\ 0 \end{pmatrix}$$

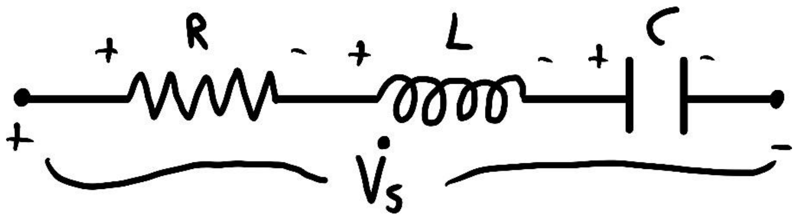
Si consideri che ogni incognita è un vettore, dato che per ogni fasore vogliamo trovare parte reale e parte immaginaria. Si prenda l'equazione vettoriale ottenuta dal primo principio: possiamo scomporla in due nuove equazioni scalari

$$\dot{I}_L = \dot{I}_R + \dot{I}_C \Longrightarrow \begin{aligned} \mathrm{Re}\{\dot{I}_L\} &= \mathrm{Re}\{\dot{I}_R\} + \mathrm{Re}\{\dot{I}_C\} \\ Im\{\dot{I}_L\} &= \mathrm{Im}\{\dot{I}_R\} + \mathrm{Im}\{\dot{I}_C\} \end{aligned}$$

5.5.8 Impedenza come rappresentazione di bipoli in serie

5.5.8.1 Introduzione

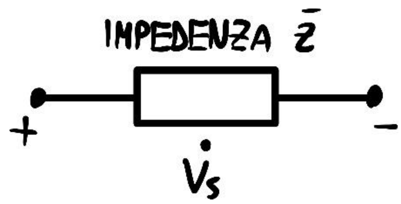
Supponiamo di avere disposti in serie tre bipoli elettrici: una resistenza, un induttore e un condensatore.



Nel dominio del tempo abbiamo visto in modo approfondito come ricondurre resistenze in serie e/o in parallelo a un'unica resistenza equivalente agli effetti esterni. Sempre nel dominio del tempo non è possibile ricondurre i tre bipoli in figura a un unico bipolo elettrico: le cose cambiano nel dominio dei fasori! Vogliamo trovare la tensione ai capi dei morsetti + e -

$$\dot{V}_S = \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C = R \cdot \dot{I} + j\omega L \dot{I} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \dot{I} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) \cdot \dot{I}$$

I tre bipoli sono attraversati dalla stessa corrente $\dot{I}$. La cosa è utile perché possiamo immaginare i tre bipoli elettrici disposti in serie come un unico bipolo attraversato da corrente $\dot{I}$ avente tensione ai capi $\dot{V}_S$.



Il bipolo elettrico ottenuto da una serie di bipoli elettrici generici è noto come ***impedenza***! La rappresentiamo col simbolo $\overline{Z}$ (è un numero complesso)

$$\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) \cdot \dot{I} = \boxed{\dot{V}_S = \overline{Z} \cdot \dot{I}} = (R + j \cdot X) \cdot \dot{I}$$

La formula è interessante perché rappresenta una generalizzazione della prima legge di Ohm.

- La parte reale è detta ***resistenza***.
- La parte immaginaria è detta ***reattanza***.

5.5.8.2 Comportamento delle impedenze

Alcune osservazioni

- **$\overline{Z}$ numero reale?**
  Abbiamo una resistenza: $\dot{V} = R \cdot \dot{I}$.
- **$\overline{Z}$ immaginario puro positivo?**
  Abbiamo un induttore: $\dot{V} = j\omega L \cdot \dot{I}$.
- **$\overline{Z}$ immaginario puro negativo?**
  Abbiamo un condensatore: $\dot{V} = -\frac{j}{\omega C} \cdot \dot{I}$
- **$\overline{Z}$ con componente reale e immaginaria.**
  Logicamente possiamo aspettarci che un circuito non presenti solo resistenze, solo induttori o solo condensatori. Riprendiamo l'esempio precedente e compiamo alcuni calcoli matematici
  $$\dot{V_S} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) \cdot \dot{I} = \left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right) \cdot \dot{I} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] \cdot \dot{I}$$
  La tensione trovata non è un numero reale, ma neanche un numero immaginario puro!
  - Si parla di dispositivo con ***comportamento Ohmico-induttivo*** se la parte immaginaria è > 0
  - Si parla di dispositivo con ***comportamento Ohmico-capacitivo*** se la parte immaginaria è < 0

$$\dot{V} = \overline{Z} \cdot \dot{I}$$

Perché $\dot{V}$ e $\dot{I}$ hanno il pallino e $\overline{Z}$ no? Tutti e tre sono numeri complesso, ma solo $\dot{V}$ e $\dot{I}$ sono fasori. $\overline{Z}$ non può essere riportato nel dominio del tempo, e non ha nella sua formula il valore massimo di una sinusoide.

$$\dot{V} = V_M \cdot e^{j\phi_V} \qquad \dot{I} = I_M \cdot e^{j\phi_I} \qquad \overline{Z} = z \cdot e^{j\phi}$$

5.5.8.3 Classificazione per differenza di fase

Sostituiamo i valori

$$V_M \cdot e^{j\phi_V} = z \cdot e^{j\phi} \cdot I_M \cdot e^{j\phi_I} = (z \cdot I_M) \cdot e^{j(\phi+\phi_I)}$$

Affinchè $\dot{V} = \overline{Z} \cdot \dot{I}$ è necessario che siano uguali moduli e fasi nei due membri dell'equazione. Segue

$$V_M = z \cdot I_m$$
$$\phi_V = \phi + \phi_I \longrightarrow \phi = \phi_V - \phi_I \text{ (Differenza di fase tra la tensione e la corrente)}$$

Distinguiamo cinque casi a partire da questa differenza di fase:

- $\phi = 0$ Carico resistivo (se l'angolo è nullo la parte immaginaria è nulla)
- $\phi = \frac{\pi}{2}$ Carico induttivo (se l'angolo è $\pm\frac{\pi}{2}$ la parte reale è nulla)
- $\phi = -\frac{\pi}{2}$ Carico capacitivo (se l'angolo è $\pm\frac{\pi}{2}$ la parte reale è nulla)
- $\phi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ Carico Ohmico-Induttivo (se $\phi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ la parte immaginaria è positiva)
- $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ Carico Ohmico-Capacitivo (se $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ la parte immaginaria è negativa)

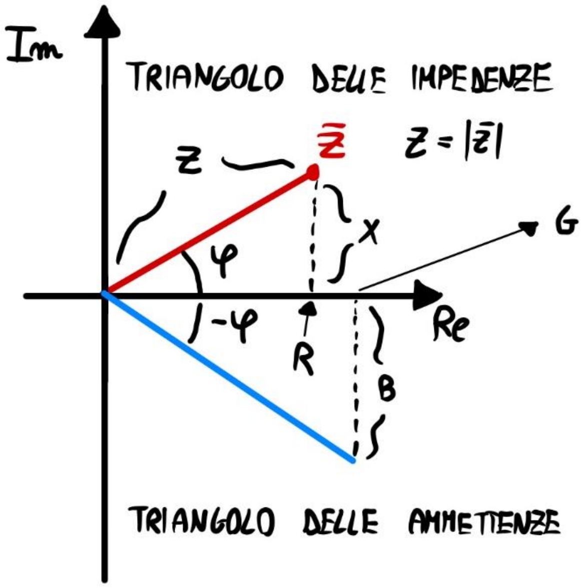
In un certo senso è vedere "chi è in anticipo tra corrente e tensione, entrambe rappresentate per mezzo di funzioni sinusoidali".

5.5.8.4 *Ammettenze*

L'inversa dell'impedenza $\overline{Z}$ è nota come ***ammettenza*** $\overline{Y}$.

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{R + j \cdot X} = \frac{1}{R + j \cdot X} \cdot \frac{R - j \cdot X}{R - j \cdot X} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2} = G + j \cdot B$$

Anche l'ammettenza è un numero complesso, caratterizzato da parte reale e parte immaginaria:



- La parte reale G è nota come ***conduttanza***

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

- La parte immaginaria B è nota come ***suscettanza***.

$$B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

  Si osservi che se $X > 0$ allora $B < 0$, e viceversa.

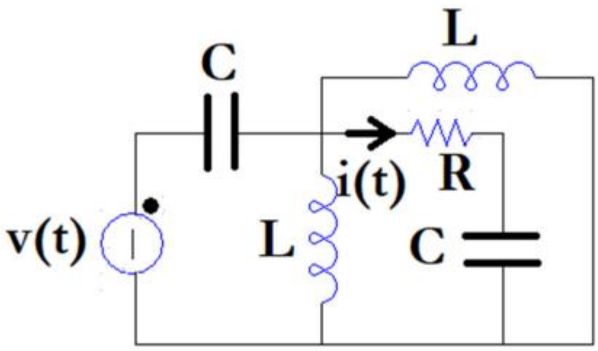
A lato abbiamo una rappresentazione grafica dei due numeri complessi (triangolo delle impedenze e triangolo delle ammettenze)

Come abbiamo determinato la fase nel triangolo delle induttanze? Rappresentando il vettore $\overline{Z}$ in forma polare

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{z \cdot e^{j\phi}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{e^{j\phi}} = \frac{1}{z} \cdot e^{j(-\phi)}$$

5.5.8.5 *Esercizio: determinare andamento nel tempo della corrente (Secondo appello 29-1-2020)*

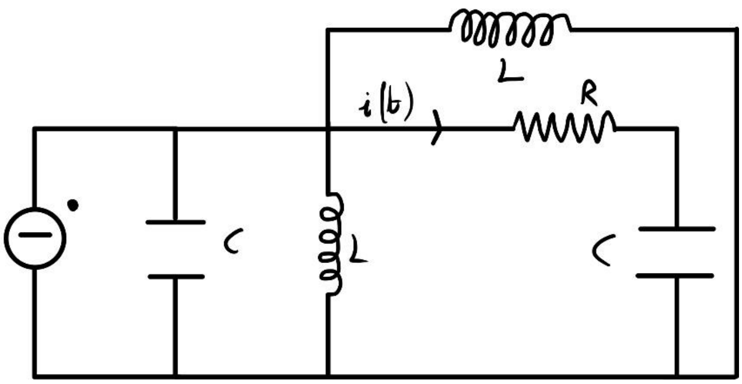
Determinare l'andamento nel tempo della corrente $i(t)$ indicata nel circuito in figura



$v(t) = 50\sqrt{2}\sin(1000t + \pi/2)$ V;
R = 10 Ω;
L = 10 mH;
C = 100 μF.

- **Passaggio al dominio fasoriale**.
  Per prima cosa poniamo $v(t)$ nel dominio fasoriale.
  $$v(t) = 50\sqrt{2}\,sin\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \dot{V} = 50\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = 50\sqrt{2} \cdot j$$
  Il professore ha posto i valori nel modo indicato: per le regole formali si vedano gli esercizi successivi all'introduzione del valore efficace.

- **Calcolare il fasore della grandezza che ci interessa**.
  Possiamo risolvere questo esercizio evitando di passare da una risoluzione vera e propria del circuito, applicando il partitore di corrente (si osservi che tutti i rami sono caratterizzati dalla stessa tensione). La regola del partitore di corrente è applicabile anche nel dominio fasoriale, trattando i bipoli eterogenei disposti in serie su ogni ramo come un unico dispositivo (impedenza). Prima di fare ciò è necessario trasformare il generatore di tensione disposto in serie a un condensatore nel corrispondente equivalente Norton.



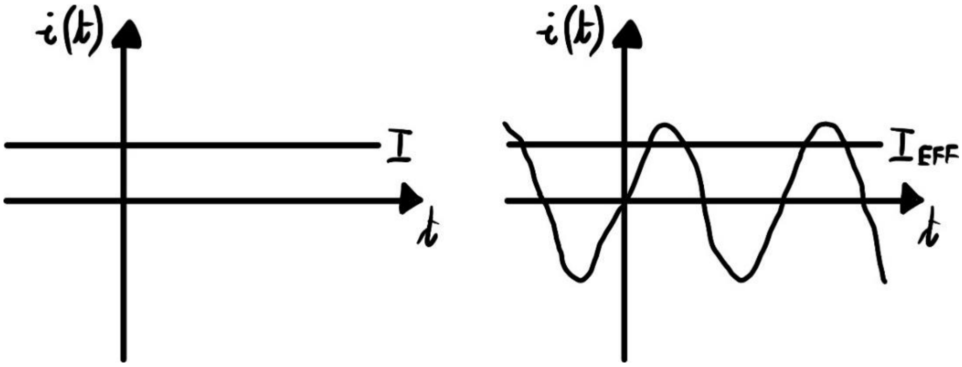
  Dove la corrente erogata dal generatore di corrente vale
  $$\frac{\dot{V}}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega C \cdot \dot{V}$$
  Concludiamo applicando la formula: la corrente è posta nel formato fasoriale (la formula precedente), le conduttanze sono sostituite dalle ammettenze (ricordiamo, le inverse delle impedenze).
  $$\dot{I} = j\omega C\dot{V}\frac{\frac{1}{R+\frac{1}{j\omega C}}}{j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R+\frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{1}{10}j \cdot \dot{V}\frac{\frac{1}{20}+\frac{1}{20}j}{\frac{1}{20}+\frac{1}{20}j - \frac{1}{10}j} = \frac{1}{10}j \cdot \left(50\sqrt{2}\cdot j\right)\cdot j = -5\sqrt{2}\cdot j$$
  Per il calcolo delle formule si consiglia di utilizzare la calcolatrice scientifica, si perde troppo tempo nel fattorizzare a mano (cosa che non è focus dell'esame). [2]

[2] Occhio a non scrivere formule troppo complesse in un colpo solo (le Casio segnalano, nel caso, *Stack error*). Conviene fare più passaggi (come è evidente nella risoluzione appena fatta).

- **Passaggio dal dominio fasoriale al dominio del tempo**.
  Concludiamo ritornando nel dominio del tempo (ci viene richiesto l'andamento di $i(t)$)
  $$i(t) = 5\sqrt{2}\, sin\left(1000t - \frac{\pi}{2}\right)$$
  Occhio al segno della fase (nello step prec. abbiamo ottenuto un num. immaginario puro negativo).

5.6 Concetto di valore efficace: introduzione ed esempio con le resistenze.

Vogliamo calcolare la potenza erogata da un particolare dispositivo, prendiamo ad esempio una resistenza! Facciamo il confronto tra corrente continua e corrente in regime periodico sinusoidale.



$$p(t) = R \cdot I^2$$
$$w = \int_0^T p(t)dt = RI^2T$$

$$p(t) = R \cdot i^2(t)$$
$$w = \int_0^T p(t)dt = \int_0^T R \cdot i^2(t)dt$$

La potenza, in presenza di corrente in regime periodico sinusoidale, risulta oscillare in virtù della formula nota: questa cosa non ci piace!

Andiamo a introdurre il concetto di valore efficace: quello che affermiamo è che la corrente sinusoidale è efficace come una corrente continua di valore I_{eff} se nello stesso intervallo di tempo dissipa la stessa energia che dissiperebbe una corrente costante pari a questo valore efficace.

Riprendiamo il calcolo dell'energia con corrente in regime periodico sinusoidale e individuiamo I_{eff}

$$w = \int_0^T p(t)dt = \int_0^T R \cdot i^2(t)dt = R\int_0^T i^2(t)dt = RI_{eff}^2 \cdot T$$

Semplifichiamo togliendo R e concludiamo

$$\int_0^T i^2(t)dt = I_{eff}^2 \cdot T \Longrightarrow I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt \Longrightarrow \boxed{I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}}$$

Sviluppiamo la formula ulteriormente (si suppone $i(t) = I_M\, sin(\omega t)$, con fase nulla) ricorrendo alle formule di duplicazione

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_M^2\, sin^2(\omega t)\, dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_M^2(1 - cos^2(\omega t))\, dt} = \sqrt{\frac{I_M^2}{T}\int_0^T \left[1 - \frac{1 + cos(2\omega t)}{2}\right] dt} =$$
$$= \sqrt{\frac{I_M^2}{T}\left[\int_0^T \frac{1}{2}dt - \int_0^T \frac{1}{2}cos(2\omega t)\, dt\right]} = \sqrt{\frac{I_M^2}{T}\left[\int_0^T \frac{1}{2}dt\right]} = \sqrt{\frac{I_M^2}{2T} \cdot T} = \sqrt{\frac{I_M^2}{2}} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

Per quanto riguarda il secondo integrale abbiamo un valore nullo: questo perché integriamo su un multiplo del periodo. Abbiamo trovato il legame tra valore efficace e valore massimo della corrente!

$$\boxed{I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}}$$

Il valore efficace risulterà estremamente utile nel dominio fasoriale!

- **Uso dei valori efficaci invece dei valori massimi: perché?**
    - Si può verificare quanto sia equivalente una corrente che cambia continuamente nel tempo rispetto a una corrente costante nel tempo.
    - Le equazioni per il calcolo delle potenze sono più semplici utilizzando i valori efficaci.
- **Uso del valore efficace nelle formule**.
  Si osservi che nell'uso dei fasori è equivalente l'uso del valore massimo all'uso del valore efficace.
  $$\dot{V} = V_M \cdot e^{j\phi_V} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\phi_V}$$
  Stabiliamo come convenzione che nelle formule dei fasori utilizzeremo i valori efficaci.
  Ricordarsi che dopo aver operato coi valori efficaci bisogna moltiplicare per $\sqrt{2}$ se si vuole ottenere i valori massimi
  $$\dot{I} = 7 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} \longrightarrow i(t) = 7\sqrt{2}\, sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

5.7 Potenze in regime periodico sinusoidale

5.7.1 Potenza istantanea

Abbiamo già introdotto il concetto di potenza istantanea all'inizio del corso.

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

La novità sta nel fatto che sostituiremo tensione e corrente con formule aventi andamento sinusoidale.

$$\begin{aligned} i(t) &= I_M\, sin(\omega t) \\ v(t) &= V_M\, sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Ricordarsi che $\phi = 0$ solo in presenza di bipolo resistivo. Ricordiamo che $\phi = \phi_V - \phi_I$: se poniamo di base $\phi_I = 0$ (nella formula della corrente) allora $\phi = \phi_V$. Sostituiamo!

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_M\, sin(\omega t + \phi) \cdot I_M\, sin(\omega t) = V_M I_M\, sin(\omega t)\, sin(\omega t + \phi)$$

Sfruttiamo la formula di addizione per sostituire $sin(\omega t + \phi)$

$$sin(\omega t + \phi) = sin(\omega t)\, cos\, \phi + cos(\omega t)\, sin\, \phi$$

$$\begin{aligned} p(t) &= V_M I_M\, sin(\omega t) \cdot [sin(\omega t)\, cos\, \phi + cos(\omega t)\, sin\, \phi] = \\ &= V_M I_M [sin^2(\omega t)\, cos\, \phi + cos(\omega t)\, sin(\omega t)\, sin\, \phi] = \\ &= V_M I_M [(1 - cos^2(\omega t))\, cos\, \phi + sin(\omega t)\, cos(\omega t)\, sin\, \phi] = \\ &= V_M I_M \left[\left(1 - \frac{1 + cos(2\omega t)}{2}\right) cos\, \phi + \left(\frac{sin(2\omega t)}{2}\right) sin\, \phi\right] = \\ &= V_M I_M \left[\frac{1}{2} cos\, \phi - \frac{1}{2} cos(2\omega t)\, cos\, \phi + \frac{1}{2} sin(2\omega t)\, sin\, \phi\right] = \\ &= \frac{V_M I_M}{2} [cos\, \phi - cos(2\omega t)\, cos\, \phi + sin(2\omega t)\, sin\, \phi] \end{aligned}$$

La potenza cambia nel tempo! Si osservi che:

- $cos\, \phi$ e $sin\, \phi$ sono costanti dopo aver individuato la fase;
- la potenza è una funzione che oscilla, ma ha pulsazione doppia e quindi periodo diviso per due.

Si distinguono due componenti all'interno della formula:

- **Potenza attiva istantanea** $\frac{V_M I_M}{2} [cos\, \phi - cos(2\omega t)\, cos\, \phi]$
- **Potenza reattiva istantanea** $\frac{V_M I_M}{2} [sin(2\omega t)\, sin\, \phi]$

Dove sa la differenza? La potenza attiva istantanea è moltiplicata per $cos\, \phi$, la potenza reattiva è moltiplicata per $sin\, \phi$. Primo termine da solo se ho resistore, secondo termine da solo se ho induttore o condensatore. In generale li abbiamo entrambi!

5.7.2 Definizione di potenza attiva (P)

La potenza attiva consiste nel valore medio della potenza istantanea, che calcoliamo per mezzo di integrazione (nulla di strano, ripensare al teorema della media integrale di Analisi 1)

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_M I_M}{2}[\cos\phi]\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_M I_M}{2}[\cos(2\omega t)\cos\phi]\,dt + \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_M I_M}{2}[\sin(2\omega t)\sin\phi]\,dt$$

Secondo e terzo termine sono nulli perché integriamo su un multiplo del periodo una funzione periodica.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_M I_M}{2}[\cos\phi]\,dt = \frac{1}{T}\cdot\frac{V_M I_M}{2}\cos\phi\cdot T = \frac{V_M I_M}{2}\cos\phi$$

Quanto trovato si misura in Watt (W). <u>**N.B**. È sbagliato all'orale porre subito come definizione</u> $\frac{V_M I_M}{2}\cos\phi$

5.7.3 Definizione di potenza reattiva (Q)

La potenza reattiva consiste nel valore massimo rispetto al tempo della potenza reattiva istantanea.

$$Q = \max_t\left\{\frac{V_M I_M}{2}[\sin(2\omega t)\sin\phi]\right\} = \frac{V_M I_M}{2}\sin\phi$$

Si misura in VAR (Volt per Ampere reattivi, è il Watt ma si dice così per distinguere le potenze). La formula finale si ottiene sapendo che il massimo rispetto al tempo si ha con $\sin(2\omega t) = 1$.

<u>**N.B**. È sbagliato all'orale porre subito come definizione</u> $\frac{V_M I_M}{2}\sin\phi$

5.7.4 Definizione di potenza apparente (S)

La potenza apparente consiste nel valore massimo assumibile tra potenza attiva e potenza reattiva!

$$S = \max\left\{\frac{V_M I_M}{2}\cos\phi, \frac{V_M I_M}{2}\sin\phi\right\} = \frac{V_M I_M}{2}$$

L'unità di misura è il Volt per Ampere (VA, è il Watt ma si dice così per distinguere le potenze).

<u>**N.B**. È sbagliato all'orale porre subito come definizione</u> $\frac{V_M I_M}{2}$

5.7.5 Potenza attiva, reattiva e apparente dipendenti da valori efficaci

Riprendiamo le formule introdotte precedentemente.

$$P = \frac{V_M I_M}{2}\cos\phi \quad \text{(Potenza attiva)}$$
$$Q = \frac{V_M I_M}{2}\sin\phi \quad \text{(Potenza reattiva)}$$
$$S = \frac{V_M I_M}{2} \quad \text{(Potenza apparente)}$$

Recap formule viste fino ad ora
$\dot{V} = \overline{z}\cdot\dot{I} \Rightarrow \begin{cases} V = z\cdot I \\ \phi_V = \phi + \phi_I \end{cases}$
$\overline{z} = R$ (Resistenze)
$\overline{z} = j\omega L$ (Induttori)
$\overline{z} = \frac{1}{j\omega C}$ (Condensatori)
$\overline{z} = R + j\cdot X$ (In generale)

Vogliamo sostituire i valori massimi coi valori efficaci!

$$\begin{matrix} I_{eff} = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \\ V_{eff} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} I_M = I_{eff}\sqrt{2} \\ V_M = V_{eff}\sqrt{2} \end{matrix} \Rightarrow I_{eff}\sqrt{2}V_{eff}\sqrt{2} = I_{eff}V_{eff}\cdot 2 = IV\cdot 2$$

Otteniamo

$$P = \frac{V_M I_M}{2}\cos\phi = \frac{IV\cdot 2}{2}\cos\phi = \boldsymbol{VI\cos\phi} \quad \text{(Potenza attiva)}$$
$$Q = \frac{V_M I_M}{2}\sin\phi = \frac{IV\cdot 2}{2}\sin\phi = \boldsymbol{VI\sin\phi} \quad \text{(Potenza reattiva)}$$
$$S = \frac{V_M I_M}{2} = \frac{IV\cdot 2}{2} = \boldsymbol{VI} \quad \text{(Potenza apparente)}$$

Convenzione. Se ai pedici di V ed I non è scritto nulla si parla di tensione e corrente efficace

5.7.6 Interpretazione di segno e valori di potenza attiva, reattiva e apparente

Facciamo una riflessione sul comportamento dei dispositivi, partendo dalle formule trovate!

$$\mathrm{P} = \mathrm{VI}\cos\phi \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{VI}\sin\phi \qquad \mathrm{S} = \mathrm{VI}$$

ϕ è la fase del vettore impedenza. Consideriamo elementi puramente reattivi ed el. puramente resistivi.

- **Elementi puramente resistivi (resistenze).**
  Un elemento puramente resistivo ha parte immaginaria sempre nulla (la fase è uguale a 0 o π) e parte reale non nulla, sempre positiva!
  - **Potenza attiva (P)**.
    La potenza attiva è massima in modulo: $VI\, cos(0) = VI$ oppure $VI\, cos(\pi) = -VI$
  - **Potenza reattiva (Q)**.
    La potenza reattiva è nulla: $VI\, sin(0) = VI\, sin(\pi) = 0$
  - **Potenza apparente (S)**.
    La potenza apparente S è uguale in modulo alla potenza attiva P, l'unica non nulla.
- **Elementi puramente reattivi (induttore o condensatore).**
  Un elemento puramente resistivo ha parte reale sempre nulla (la fase è uguale a $\pm\frac{\pi}{2}$) e parte immaginaria non nulla, <u>con segno positivo in caso di comportamento Ohmico-Induttivo e segno negativo in caso di comportamento Ohmico-Capacitivo</u>!
  - **Potenza attiva (P)**.
    La potenza attiva è nulla: $VI\, cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = VI\, cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$
  - **Potenza reattiva (Q)**.
    La potenza reattiva è massima in modulo: $VI\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = VI$ oppure $VI\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -VI$
    Non posso avere Q positivo con un condensatore, o Q negativo con un induttore.
  - **Potenza apparente (S)**.
    La potenza apparente S è uguale in modulo alla potenza reattiva Q, l'unica non nulla.

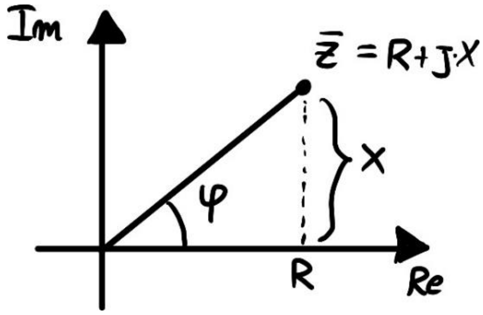
Altro aspetto: queste potenze sono tutte numeri reali, avere risultati complessi significa presenza di errori.

5.7.7 Potenza attiva, reattiva e apparente dipendente da componenti dell'impedenza

Prendiamo le formule appena trovate e sostituiamo $V = z \cdot I$: segue

$$P = \frac{V_M I_M}{2} cos\,\phi = VI\, cos\,\phi = \boldsymbol{z \cdot I^2 \cos\phi} \quad \text{(Potenza attiva)}$$
$$Q = \frac{V_M I_M}{2} sin\,\phi = VI\, sin\,\phi = \boldsymbol{z \cdot I^2\, sin\,\phi} \quad \text{(Potenza reattiva)}$$
$$S = \frac{V_M I_M}{2} = VI = \boldsymbol{zI^2} \quad \text{(Potenza apparente)}$$

Consideriamo la rappresentazione grafica del numero complesso



Otteniamo $R = Z\, cos\,\phi$ e $X = Z\, sin\,\phi$. Segue (le nuove espressioni sono utili quando non si conosce ϕ o V)

$$P = \frac{V_M I_M}{2} cos\,\phi = VI\, cos\,\phi = z \cdot I^2 \cos\phi = \boldsymbol{RI^2} \quad \text{(Potenza attiva)}$$
$$Q = \frac{V_M I_M}{2} sin\,\phi = VI\, sin\,\phi = z \cdot I^2\, sin\,\phi = \boldsymbol{XI^2} \quad \text{(Potenza reattiva)}$$
$$S = \frac{V_M I_M}{2} = VI = \boldsymbol{zI^2} \quad \text{(Potenza apparente)}$$

5.7.8 Potenza attiva, reattiva e apparente dipendente da componenti dell'ammettenza

Consideriamo adesso l'inverso dell'impedenza $\overline{z}$

$$\dot{V} = \overline{z} \cdot \dot{I} \Longrightarrow \dot{I} = \overline{y} \cdot \dot{V} \Longrightarrow \begin{cases} I = y \cdot V \\ \phi_I = \phi_Y + \phi_T \longrightarrow \phi_I = -\phi + \phi_V \end{cases}$$

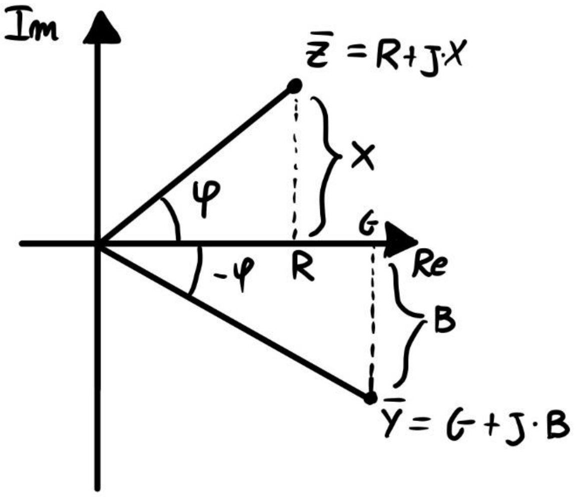
Come cambiano le formule per il calcolo della potenza?

$$P = \frac{V_M I_M}{2} cos\, \phi = VI\, cos\, \phi = \boldsymbol{y \cdot V^2 \cos \phi} \quad \text{(Potenza attiva)}$$
$$Q = \frac{V_M I_M}{2} sin\, \phi = VI\, sin\, \phi = \boldsymbol{y \cdot V^2\, sin\, \phi} \quad \text{(Potenza reattiva)}$$
$$S = \frac{V_M I_M}{2} = VI = \boldsymbol{yV^2} \quad \text{(Potenza apparente)}$$

Quando abbiamo introdotto le ammettenze abbiamo visto che

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{z \cdot e^{j\phi}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{e^{j\phi}} = \frac{1}{z} \cdot e^{j(-\phi)}$$

$\phi_Y = -\phi$!!! Dal triangolo delle potenze



Otteniamo $G = y\, cos(-\phi) = y\, cos(\phi)$ e $B = y \sin(-\phi) = -y\, sin(\phi)$. Segue

$$P = \frac{V_M I_M}{2} cos\, \phi = VI\, cos\, \phi = y \cdot V^2 \cos \phi = \boldsymbol{GV^2} \quad \text{(Potenza attiva)}$$
$$Q = \frac{V_M I_M}{2} sin\, \phi = VI\, sin\, \phi = y \cdot V^2\, sin\, \phi = \boldsymbol{-BV^2} \quad \text{(Potenza reattiva)}$$
$$S = \frac{V_M I_M}{2} = VI = \boldsymbol{yV^2} \quad \text{(Potenza apparente)}$$

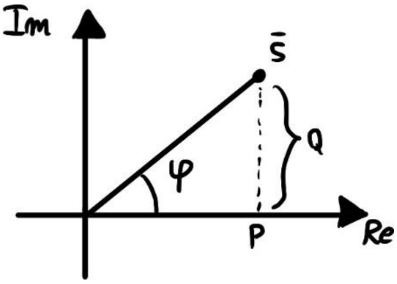
5.7.9 Definizione di potenza complessa ($\overline{S}$)

La potenza complessa è un numero complesso. Essa consiste nel fasore della tensione, moltiplicato per il fasore della corrente complesso coniugato.

$$\overline{S} = \dot{V} \cdot \dot{I}^* = Ve^{j\phi_V} \cdot Ie^{j(-\phi_I)} = VI \cdot e^{j(\phi_V - \phi_I)} = VI \cdot e^{j\phi} = (VI\, cos\, \phi) + j \cdot (VI\, sin\, \phi) = P + j \cdot Q$$

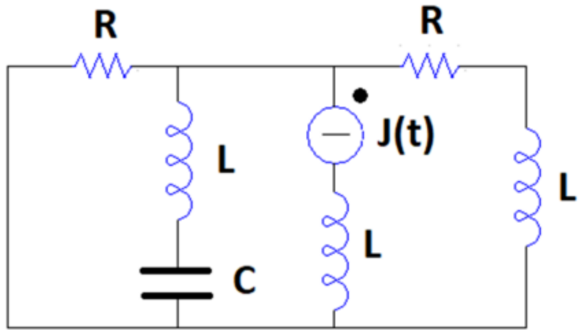
Anche qua si suppone di lavorare con i valori efficaci.

- La parte reale è la potenza attiva
- La parte immaginaria la potenza reattiva
- Il modulo è la potenza apparente



5.8 Potenza attiva erogata da generatore di corrente (Secondo es. appello 30-1-2019)

Determinare la potenza attiva erogata dal generatore di corrente nel circuito in figura.



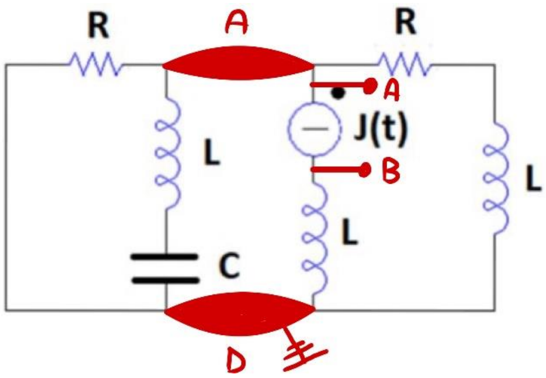
J(t) = $3\sqrt{2}\sin(1000t)$ A;
R = 20 Ω;
L = 20 mH;
C = 10 μF.

- **Punto di partenza**.
  Sappiamo dalla teoria che la potenza attiva si calcola nel seguente modo
  $$P_J = \mathrm{Re}\{\dot{V_{AB}} \cdot \dot{J}^*\}$$
  Dove $\dot{V_{AB}}$ è la tensione, nel dominio fasoriale, ai capi del generatore di corrente $J(t)$.

- **Passaggio nel dominio fasoriale**.
  Poniamo $J(t)$ nel dominio fasoriale
  $$J(t) = 3\sqrt{2}\,sin(1000t) \Longrightarrow \dot{J} = 3e^{j0} = 3$$
  Nel passaggio si tiene a mente che nel dominio fasoriale è possibile utilizzare sia il valore massimo che il valore efficace: noi abbiamo deciso di porre il valore efficace; pertanto, il valore massimo $3\sqrt{2}$ viene diviso per $\sqrt{2}$.

- **Applicazione del metodo delle tensioni di nodo**.
  Applichiamo il metodo delle tensioni di nodo per trovare la tensione fasoriale $\dot{V_{AB}}$. Perché?
  - Se si applica correnti di maglia si deve prima ottenere un'impedenza (prima si trova l'impedenza equivalente al condensatore e l'induttore disposti in serie, poi si pone questa impedenza in parallelo con la resistenza R). Rimangono due maglie: c'è un generatore di corrente e quindi rimane una sola equazione da trovare. L'esercizio non finirebbe, dato che l'esercizio ci chiede di trovare la tensione fasoriale.
  - Con tensioni di nodo il metodo è più veloce: una sola equazione come prima (il circuito a due nodi di cui uno di riferimento – quindi con tensione di nodo nulla), ma troviamo al volo il dato che ci serve per concludere l'esercizio.

  Poniamo il nodo D come nodo di riferimento.



Si ricordi che la tensione ai capi del generatore è diversa dalla tensione ai capi del ramo (in questo ramo sono presenti, in serie, un generatore di corrente e un induttore): vogliamo $\dot{V_{AB}}$, non $\dot{V_{AD}}$.

$$\dot{V_{AD}} = \dot{V_{AB}} + \dot{V_{BD}} \longrightarrow \dot{V_{AB}} = \dot{V_{AD}} - \dot{V_{BD}}$$
$$\longrightarrow \dot{V_{AB}} = \dot{V_A} - \dot{V_D} - \dot{V_{BD}} = \dot{V_A} - \dot{V_{BD}} =$$
$$\longrightarrow \dot{V_{AB}} = \dot{V_A} - (j\omega L)(-\dot{J})$$
$$\longrightarrow \boxed{\dot{V_{AB}} = \dot{V_A} + (j\omega L)\dot{J}}$$

Scriviamo l'equazione per il nodo A e troviamo $\dot{V}_A$

$$\dot{J} = \dot{V}_A\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{R + j\omega L}\right)$$

- Si ignora il ramo col generatore di corrente (ricordarsi che stiamo applicando il primo principio di Kirkhoff in modo subdolo, e la corrente lungo il ramo è nota)
- Nei rami rimanenti si sommano le impedenze (diverso rispetto al dominio del tempo): in un ramo sommo induttore e condensatore, in un altro sommo resistenza con induttore.

Risolviamo con calcolatrice scientifica:

$$\boxed{\dot{V}_A = \frac{\dot{J}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{R + j\omega L}}} = 38.9189 + j \cdot 6.4865$$

Recuperando la formula precedente otteniamo $\dot{V_{AB}}$

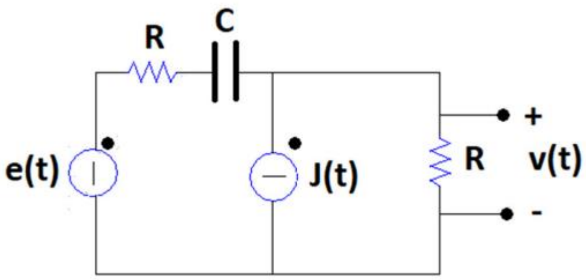
$$\dot{V_{AB}} = \dot{V}_A + (j\omega L)\dot{J} = 28.9189 + j \cdot 66.4865$$

- **Calcolo della potenza**.
  A questo punto concludiamo calcolando la potenza

$$P_J = \text{Re}\{116.76 + j \cdot 199.46\} = 116.76\,\text{W}$$

5.9 Andamento temporale tensione e potenza reattiva (Secondo es. appello 05-6-2019)

Determinare l'andamento temporale della tensione $v(t)$ e la potenza reattiva Q impegnata nel condensatore del circuito in figura.



e(t) = $50\sqrt{2}\sin(1000t)$ V;
J(t) = $2\sqrt{2}\cos(1000t)$ A;
R = 10 Ω;
C = 100 μF;

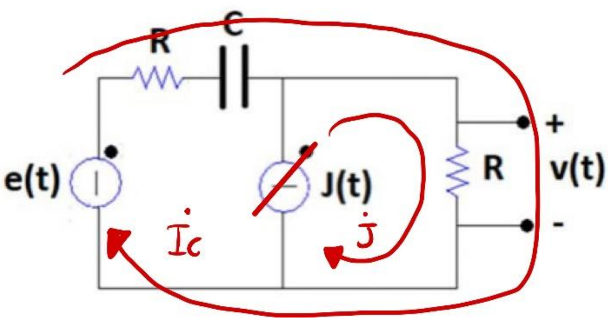
- **Passaggio nel dominio fasoriale**.
  Poniamo $e(t)$ e $J(t)$ nel dominio fasoriale, ma attenzione: non abbiamo due formule entrambe con sin o entrambe con cos, ma una formula con sin e una formula con cos. Prima di procedere dobbiamo trasformare il cos in sin

$$J(t) = 2\sqrt{2}\,cos(1000t) = 2\sqrt{2}\,sin\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right)$$

  A questo punto possiamo procedere

$$\dot{J} = 2e^{j\frac{\pi}{2}}$$
$$\dot{E} = 50e^{j0} = 50$$

- **Metodo di risoluzione**.
  Applichiamo il metodo delle correnti di maglia (si potrebbe applicare il partitore di corrente dopo aver sostituito l'equivalente Norton, ma anche tensioni di nodo).



Scriviamo l'unica equazione necessaria e calcoliamo la corrente $\dot{I_C}$

$$-\dot{E} + R\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I_C} + R\left(\dot{I_C} + \dot{J}\right) = 0 \longrightarrow \boxed{\dot{I_C} = \frac{\dot{E} - R\dot{J}}{2R + \frac{1}{j\omega C}}} = 2.4 + j \cdot 0.2$$

Trovato $\dot{I_C}$ possiamo trovare la tensione $\dot{V}$ relativa alla resistenza R sul ramo destro del circuito.

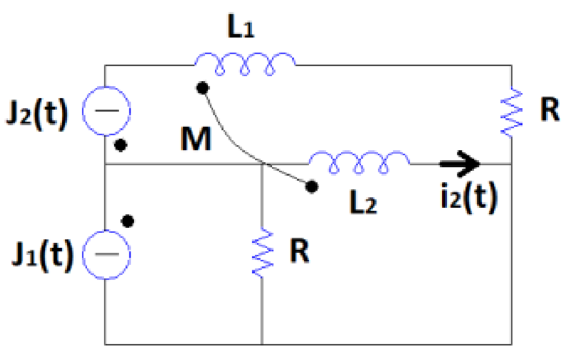
$$\dot{V} = R\left(\dot{I_C} + \dot{J}\right) = 24 + j \cdot 22$$

- **Ritorno nel dominio del tempo**.
  L'esercizio richiede l'andamento della tensione nel dominio del tempo. Poniamo $\dot{V}$ in forma polare
  $$\dot{V} = 32.5576 \cdot e^{j \cdot 0.7419}$$
  Concludiamo il punto
  $$v(t) = 32.5576\sqrt{2}\sin(1000t + 0.7419)$$

- **Potenze reattiva sul condensatore**.
  Vogliamo trovare la potenza reattiva Q. Sappiamo qual è la corrente che scorre sul condensatore, ergo la formula più conveniente da utilizzare è la seguente
  $$Q = X_C {I_C}^2$$
  X_C è la parte immaginaria dell'impedenza $\overline{z}$, mentre ${I_C}^2$ è il quadrato del modulo della corrente
  $$\overline{z} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = \left(-\frac{1}{\omega C}\right)j$$
  Concludiamo
  $$Q = \left(-\frac{1}{\omega C}\right)\left(\sqrt{2.4^2 + 0.2^2}\right)^2 = -58\,\mathrm{VAR}$$
  Alcune osservazioni:
    - **Occhio ai risultati dei nostri calcoli**.
      Non stare attenti a queste cose significa ignorare la teoria.
        - Q è sempre un numero reale, se il risultato è complesso dobbiamo capire subito che è sbagliato.
        - Q non può essere positiva in un condensatore.
    - ***Noo, ecco quell'altro* (Crisostomi in risposta a studente che cade in errore tipico)**.
      Il modulo è radice quadrata della somma tra quadrato della parte reale e quadrato della parte immaginaria. Ciò significa calcolare questo
      $$\sqrt{2.4^2 + 0.2^2}$$
      E non questo:
      $$\sqrt{2.4^2 + (0.2j)^2}$$

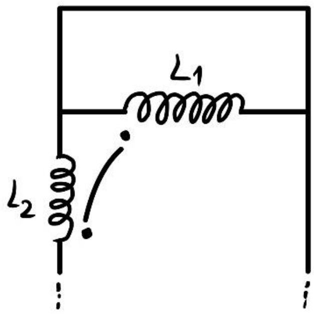
5.10 Andamento temporale e pot. complessa con induttori m.a. (Appello 15/02/2019)

Determinare l'andamento temporale della corrente $i_2(t)$ e la potenza complessa erogata dal generatore di corrente J_1. L'esercizio è interessante perché parliamo per la prima volta di induttori mutuamente accoppiati.

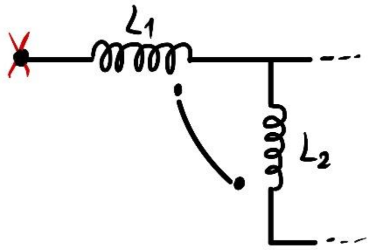


$J_1(t) = \sqrt{2}\sin(1000t)$ A;
$J_2(t) = 2\sqrt{2}\sin(1000t + \pi/2)$ A;
R = 10 Ω;
L_1 = 10 mH;
L_2 = 20 mH;
M = 14 mH.

- **Novità: induttori mutuamente accoppiati!**
  L'esercizio presenta due induttori mutuamente accoppiati. Prendiamo l'induttore L_1
  $$\dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$
  Si osservi che nel calcolo dell'impedenza non potremo porre $\dot{V}_1 = \overline{z} \cdot \dot{I}_1$: scriveremo
  $$\dot{V}_1 = \overline{z}_1 \cdot \dot{I}_1 + \overline{z}_2 \cdot \dot{I}_2$$
  Questo ha implicazioni nella risoluzione di un circuito.
    - **Uno dei due induttori è posto in parallelo a un cortocircuito**.
      Supponiamo di avere un induttore L_1 in parallelo a un cortocircuito: non possiamo eliminarlo, dato che avremo sempre una caduta di potenziale lungo il suo ramo.

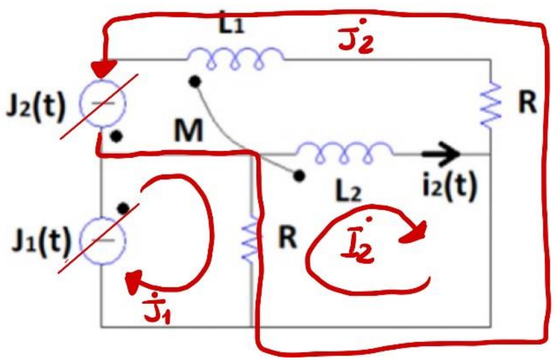
      La caduta di potenziale non è dovuta all'induttore L_1, ma all'induttore L_2 con cui è mutuamente accoppiato.
      $$\dot{V}_1 = \overline{z}_1 \cdot \dot{I}_1 + \overline{z}_2 \cdot \dot{I}_2 = 0 + \overline{z}_2 \cdot \dot{I}_2 = \overline{z}_2 \cdot \dot{I}_2 \neq 0$$
    - **Uno dei due induttori è posto in vicinanza di un aperto**.
      I ragionamenti fatti prima valgono anche con un induttore vicino a un aperto!

      Non possiamo togliere l'induttore L_1 perché ci sarà caduta di potenziale dipendente dall'altro induttore.

  Ulteriore novità è la seguente:
    - **Non è possibile applicare il metodo delle tensioni di nodo!!!**
      Tensioni di nodo è l'applicazione del primo principio di Kirkhoff: non è più possibile fare la somma delle impedenze in presenza di induttori mutuamente accoppiati. Conseguenze:
        - Vedere induttori mutuamente accoppiati implica scegliere per forza il metodo delle correnti di maglia.
        - Ulteriore aspetto è la maggiore libertà di scelta sulle maglie: non dobbiamo partire obbligatoriamente dai generatori di corrente, come fatto fino ad ora.
        - Libertà di scelta non significa scegliere maglie completamente a caso: criterio da adottare è scegliere le maglie in modo tale che non scorrano troppe correnti sugli induttori mutuamente accoppiati. Non è un obbligo, ma troppe correnti complicano le formule.

- **Passaggio al dominio fasoriale**.
  Poniamo $J_1(t), J_2(t)$ nel dominio fasoriale.
  $$J_1(t) = \sqrt{2}\,sin(1000t) \qquad \Rightarrow \dot{J}_1 = 1 \cdot e^{j0} = 1$$
  $$J_2(t) = 2\sqrt{2}\,sin\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \dot{J}_2 = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = 2j$$
- **Risoluzione e ritorno al dominio del tempo**
  Consideriamo le maglie in figura e risolviamo il circuito.



Grazie alla presenza di due generatori di correnti riduciamo il numero di equazioni da scrivere da tre a uno!

$$R(\dot{I}_2 - \dot{J}_1 - \dot{J}_2) + j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{J}_2 = 0$$

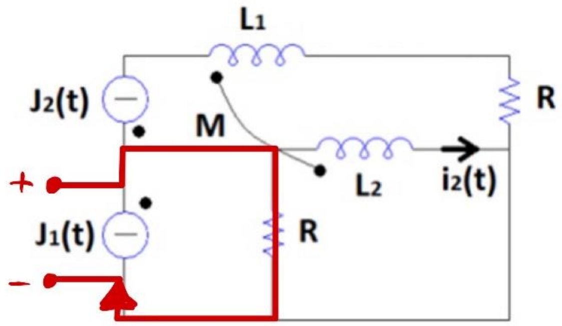
$$\dot{I}_2 = \frac{R\dot{J}_1 + R\dot{J}_2 + J\omega M \dot{J}_2}{R + j\omega L_2} = 1.2033 \cdot e^{j \cdot 1.1965}$$

Possiamo tornare nel dominio del tempo e trovare la prima cosa richiesta dal problema.

$$i_2(t) = 1.2033\sqrt{2}\, sin(1000t + 1.1965)$$

- **Calcolo della potenza complessa erogata dal generatore di corrente $\dot{J}_1$.**
  Ci manca solo la potenza complessa del generatore di corrente

$$\overline{S} = \dot{V}_1 \cdot \dot{I}_1^*$$



$\dot{I}_1$ è uguale al numero reale 1 (la trasporta di un numero reale è il numero reale stesso), mentre $\dot{V}_1$ dobbiamo calcolarla: lo facciamo con un percorso che va dal più al meno.

$$\overline{S} = \dot{V}_1 \cdot \dot{I}_1^* = \dot{V}_1 = R(\dot{J}_1 + \dot{J}_2 - \dot{I}_2) = 5.6 + 8.8j$$

5.11 Teorema di Tellegen

Il teorema di Tellegen afferma che

$$\sum_{j,k=1}^{n} v_{jk}(t) i_{jk}(t) = 0$$

Dove n è il numero dei nodi.

- $v_{jk}(t)$ è la tensione sul ramo che collega i nodi j e k
- $i_{jk}(t)$ è la corrente sul ramo che unisce i nodi j e k, dal primo nodo verso il secondo.

Non dipende dal circuito, non dipende dall'essere in circuiti in continua o circuiti a regime periodico sinusoidale (e altri circuiti non in continua). L'applicazione è valida in qualunque contesto dove valgono i principi di Kirkhoff, non solo l'elettrotecnica.

Dimostrazione. Per prima cosa esprimiamo la tensione $v_{jk}(t)$ come la differenza di potenziale tra il nodo j e un nodo zero di riferimento, meno la differenza di potenziale tra un nodo k e il nodo zero.

$$\sum_{j,k=1}^{n} \left(v_{j0}(t) - v_{k0}(t)\right) \cdot i_{jk}(t) = 0$$

Scomponiamo la sommatoria

$$\sum_{j,k=1}^{n} v_{j0}(t) i_{jk}(t) - \sum_{j,k=1}^{n} v_{k0}(t) i_{jk}(t) = 0$$

Esprimiamo le correnti ponendole come sommatorie

$$\sum_{j=1}^{n} v_{j0}(t) \left(\sum_{k=1}^{n} i_{jk}(t)\right) - \sum_{k=1}^{n} v_{k0}(t) \left(\sum_{j=1}^{n} i_{jk}(t)\right) = 0$$

Concludiamo osservando che le sommatorie delle correnti sono nulle ai sensi del primo principio di Kirkhoff. La cosa vale per ogni valore j fissato nella prima sommatoria e per ogni valore k fissato nella seconda sommatoria.

$$\sum_{k=1}^{n} i_{jk}(t) = 0 \qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} i_{jk}(t) = 0$$

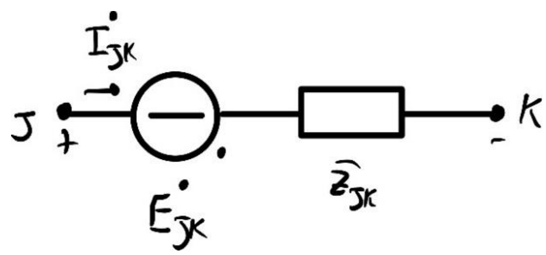
5.12 Teorema di Boucherot

5.12.1 Pseudo-dimostrazione ed enunciato

Supponiamo che la sommatoria di tutte le potenze complesse su tutti i rami della corrente sia nulla:

$$\sum_{j,k=1}^{n} \dot{V}_{jk} \dot{I}_{jk}^{*} = 0$$

Tra nodi j e k ci saranno, in generale, generatori di tensioni e impedenze, il tutto attraversato da un'unica corrente[3]



[3] Occhio all'immagine. C'è un'impedenza attraversata da un'unica corrente. Non si può applicare Boucherot se è presente un induttore mutuamente accoppiato. A tal proposito vi invito a risolvere **l'esercizio 2 dell'appello 09/06/2023**: la variazione topologica degli induttori mutuamente accoppiati è obbligatoria (spiegazione più avanti).

Occhio al contrassegno: riferimenti non associati! Possiamo scrivere, percorrendo il ramo da j a k

$$\dot{V_{jk}} = -\dot{E_{jk}} + \overline{z}_{jk} \cdot \dot{I_{jk}}$$

Sostituendo nella formula iniziale otteniamo

$$\sum_{j,k=1}^{n} (-\dot{E_{jk}} + \overline{z}_{jk} \cdot \dot{I_{jk}})\dot{I_{jk}}^* = \sum_{j,k=1}^{n} (-\dot{E_{jk}}\dot{I_{jk}}^* + \overline{z}_{jk} \cdot \dot{I_{jk}}\dot{I_{jk}}^*) = \sum_{j,k=1}^{n} \left(-\dot{E_{jk}}\dot{I_{jk}}^* + \overline{z}_{jk}\left(I_{jk}\right)^2\right) = 0$$

Dividiamo la sommatoria in due parti e portiamone una a secondo membro

$$\sum_{j,k=1}^{n} \dot{E_{jk}}\dot{I_{jk}}^* = \sum_{j,k=1}^{n} \overline{z}_{jk}\left(I_{jk}\right)^2 \Rightarrow \sum_{j,k=1}^{n} \overline{S}_{jk}^{\text{gen}} = \sum_{j,k=1}^{n} (R_{jk} + jX_{jk})I_{jk}^2$$

$$\boxed{\sum_{j,k=1}^{n} \left(P_{jk}^{gen} + j \cdot Q_{jk}^{gen}\right) = \sum_{j,k=1}^{n} (R_{jk} + jX_{jk})I_{jk}^2}$$

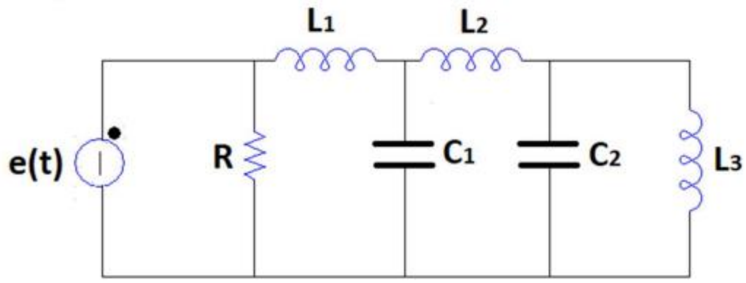
Uguaglianza tra numeri complessi equivale a due uguaglianze tra numeri reali: il teorema di Boucherot!

$$\sum_{j,k=1}^{n} \left(P_{jk}^{gen}\right) = \sum_{j,k=1}^{n} (R_{jk})I_{jk}^2 \qquad \sum_{j,k=1}^{n} \left(Q_{jk}^{gen}\right) = \sum_{j,k=1}^{n} (X_{jk})I_{jk}^2$$

- La somma delle potenze attive erogate dai generatori di un circuito è uguale alla somma delle potenze dissipate sugli elementi resistivi del circuito stesso (resistenze).
  - Si osservi che la seconda sommatoria è sempre positiva.
  - **Esempio di applicazione**. Se la somma delle potenze dissipate sulle resistenze è 100 W allora, se ho un solo generatore, questo deve erogare per forza 100 W. In presenza di più generatori si parla di somma algebrica tra le potenze (potrei avere un generatore che eroga 200 W e uno che dissipa 100 W).
- La somma delle potenze reattive erogate dai generatori di un circuito è uguale alla somma delle potenze reattive sugli elementi reattivi del circuito (induttori e condensatori).
  - Seconda sommatoria è numero reale, non è detto che il valore sia positivo (lo è di sicuro se si hanno solo induttori). Avrò una somma algebrica di valori negativi se si hanno solo condensatori.

5.12.2 Esempio di esercizio

Determinare la potenza attiva erogata dal generatore di tensione $e(t)$



$e(t) = 10\sqrt{2}\cos(1000t)\ V$;
R = 10 Ω;
L_1 = 10 mH;
L_2 = 15 mH;
L_3 = 20 mH;
C_1 = 100 μF;
C_2 = 200 μF.

- **Applicazione del teorema di Boucherot (E BASTA)**.
  Non ho necessità di fare calcoli particolarmente complessi. Al sensi del teorema di Boucherot la potenza attiva erogata dal generatore di tensione è pari alla potenza dissipata dall'unica resistenza presente in tutto il circuito! Conosciamo la resistenza, con semplici calcoli otteniamo la corrente

  $$i(t) = \frac{e(t)}{R} = \sqrt{2}\,cos(1000t)$$

  A questo punto compiamo il passaggio nel dominio fasoriale e applichiamo la formula

  $$\dot{I} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{j0} = 1 \Rightarrow \boxed{P = RI^2 = 10 \cdot 1 = 10\,\text{W}}$$

5.13 Calcolo della potenza negli induttori mutuamente accoppiati

Cosa succede negli induttori mutuamente accoppiati? Seguiamo il libro di testo, ponendo induttori mutuamente accoppiati reali: con questo intendiamo che ogni induttore è posto in serie a una resistenza (parte della potenza dissipata per effetto Joule, rappresentiamo questo con la potenza dissipata).

Abbiamo le seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = R_1\dot{I}_1 + j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = R_2\dot{I}_2 + j\omega L_2\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 \end{cases}$$

Applichiamo la formula della potenza complessa considerando i due contributi

$$\begin{aligned}
\overline{S} &= \dot{V}_1\dot{I}_1^* + \dot{V}_2\dot{I}_2^* \\
&= \left(R_1\dot{I}_1 + j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2\right)\dot{I}_1^* + \left(R_2\dot{I}_2 + j\omega L_2\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1\right)\dot{I}_2^* \\
&= \left(R_1\dot{I}_1 + j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2\right)I_1e^{j(-\phi_1)} + \left(R_2\dot{I}_2 + j\omega L_2\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1\right)I_2e^{j(-\phi_2)} \\
&= \left(R_1I_1e^{j(\phi_1)} + j\omega L_1I_1e^{j(\phi_1)} + j\omega MI_2e^{j(\phi_2)}\right)I_1e^{j(-\phi_1)} + \left(R_2I_2e^{j(\phi_2)} + j\omega L_2I_2e^{j(\phi_2)} + j\omega MI_1e^{j(\phi_1)}\right)I_2e^{j(-\phi_2)} \\
&= R_1I_1^2 + j\omega L_1I_1^2 + j\omega MI_1I_2e^{j(\phi_2-\phi_1)} + R_2I_2^2 + j\omega L_2I_2^2 + j\omega MI_1I_2e^{j(\phi_1-\phi_2)}
\end{aligned}$$

Raccogliamo

$$= R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + j\left(\omega L_1I_1^2 + \omega L_2I_2^2 + \omega MI_1I_2\left(e^{j(\phi_2-\phi_1)} + e^{j(\phi_1-\phi_2)}\right)\right)$$

$$= R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + j\left(\omega L_1I_1^2 + \omega L_2I_2^2 + \omega MI_1I_2(cos(\phi_2-\phi_1) + j\,sin(\phi_2-\phi_1) + cos(\phi_1-\phi_2) + j\,sin(\phi_1-\phi_2))\right)$$

Poniamo $\alpha = \phi_1 - \phi_2$

$$= R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + j\left(\omega L_1I_1^2 + \omega L_2I_2^2 + \omega MI_1I_2(cos(-\alpha) + j\,sin(-\alpha) + cos(\alpha) + j\,sin(\alpha))\right)$$

Ricordando che $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$ e $sin(-\alpha) - sin(\alpha)$ arriviamo a conclusione

$$\begin{aligned}
&= R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + j\left(\omega L_1I_1^2 + \omega L_2I_2^2 + \omega MI_1I_2(2\,cos(\alpha))\right) \\
&= R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + j(\omega L_1I_1^2 + \omega L_2I_2^2 + 2\omega MI_1I_2\,cos(\phi_1-\phi_2))
\end{aligned}$$

Abbiamo trovato la potenza attiva P e la potenza reattiva Q

$$\begin{aligned}
P &= R_1I_1^2 + R_2I_2^2 \\
Q &= \omega L_1I_1^2 + \omega L_2I_2^2 + 2\omega MI_1I_2\,cos(\phi_1-\phi_2)
\end{aligned}$$

In presenza del caso ideale (induttori mutuamente accoppiati senza le resistenze in serie) avremo una potenza complessa puramente reattiva!

<u>Osservazione</u>: occhio ai termini seguenti

$$j\omega M\dot{I}_2\dot{I}_1^* \qquad\qquad j\omega M\dot{I}_1\dot{I}_2^*$$

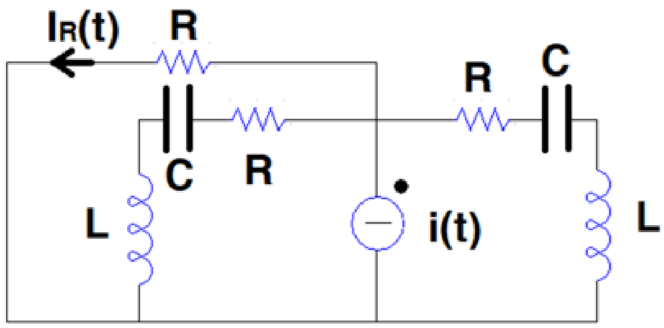
Da essi emergono parte reale e parte immaginaria (non sono come gli altri termini, puramente reali o puramente immaginari).

- Se si considerano gli induttori individualmente abbiamo sia componente reale sia componente immaginaria: contributo alla potenza attiva e uno alla potenza reattiva.
- Se si considerano gli induttori mutuamente accoppiati la somma dei due termini comporta l’azzeramento della componente reale: rimane solo un contributo alla potenza reattiva.

I contributi alla potenza attiva sono uguali e opposti: passaggio di potenza attiva da un induttore all’altro, se un induttore assorbe potenza elettrica l’altro la cede (o viceversa).

5.14 Andamento temporale corrente e pot. apparente (Secondo es. appello 16-9-2019)

Determinare l'andamento temporale della corrente $i_R(t)$ e la potenza apparente erogata dal generatore di corrente nel circuito in figura.

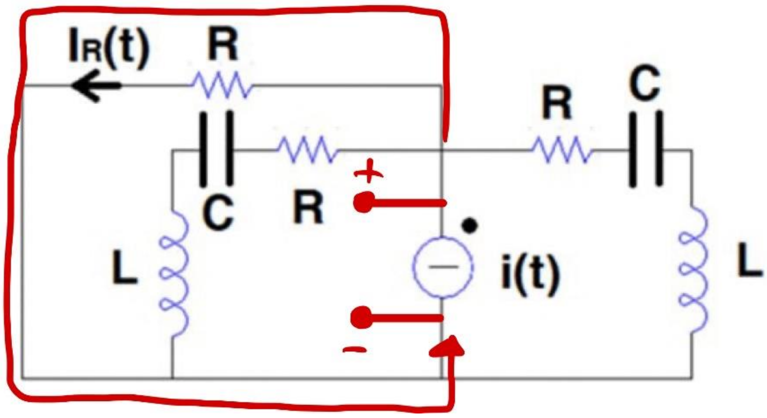


$i(t) = \sqrt{2}\cos(1000t)$ A;
R = 10 Ω;
C = 100 μF;
L = 10 mH;

- **Passaggio al dominio fasoriale**.
  Poniamo $i(t)$ nel dominio fasoriale.
$$i(t) = \sqrt{2}\,cos(1000t) \longrightarrow \dot{J} = 1e^{j0} = 1$$

- **Risoluzione del circuito e individuazione dell'andamento nel tempo della corrente richiesta**.
  Se facciamo il confronto tensioni di nodo pare il metodo più adatto (numero di equazioni decisamente minore, una sola, rispetto alle tre equazioni previste nel metodo delle correnti di maglia). In realtà possiamo astenerci anche da tensioni di nodo e utilizzare la formula del partitore di corrente (tutti i rami del circuito sono posti alla stessa tensione).
$$\dot{I_R} = \dot{J} \cdot \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}} = \dot{J} \cdot \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{2}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}} = \frac{1}{3}$$
  Concludiamo
$$i_R(t) = \frac{1}{3}\sqrt{2}\,cos(1000t)$$

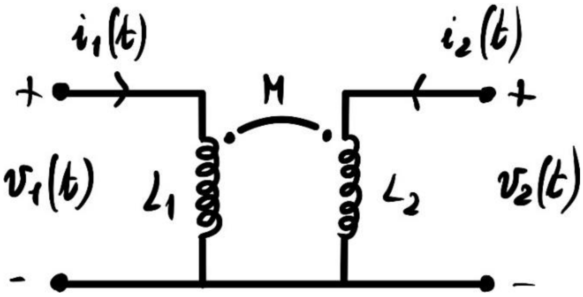
- **Calcolo della potenza apparente**.
  Vogliamo trovare la potenza apparente S_j erogata dal generatore di corrente.
$$S_j = |\dot{V_J}| \cdot |\dot{J}| = \frac{10}{3} \cdot 1 = \frac{10}{3}$$
  Troviamo $\dot{V_J}$ percorrendo il percorso indicato in figura



$$\dot{V_J} = R \cdot \dot{I_R} = \frac{10}{3}$$

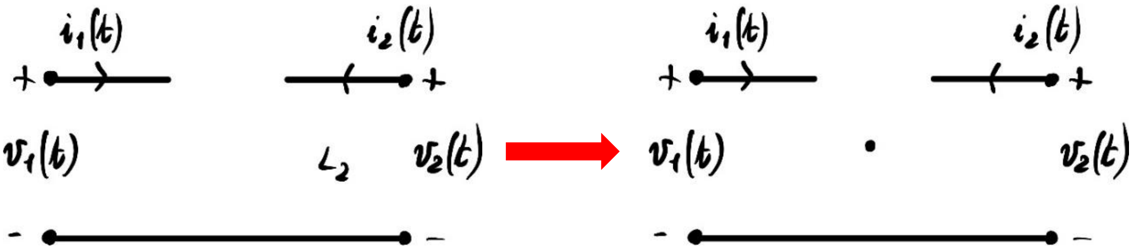
5.15 Variazione topologica di induttori mutuamente accoppiati

Supponiamo di avere una coppia di induttori mutuamente accoppiati

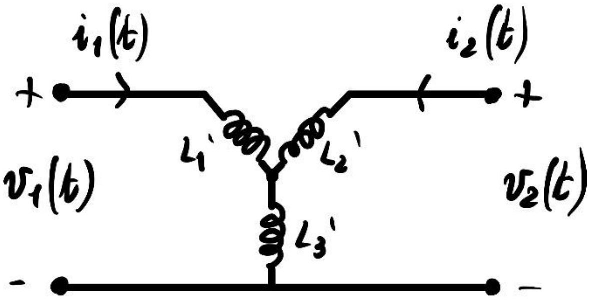


Essi hanno un nodo in comune (una caratteristica fondamentale): è possibile introdurre un'alterazione topologica dove rappresentiamo due induttori mutuamente accoppiati con tre induttori indipendenti.

- Disegniamo lo stesso circuito in tutti i suoi rami, tranne quelli dove sono presenti i due induttori. Poniamo successivamente un nuovo nodo



- Colleghiamo i vari rami col nodo precedentemente disegnato, e poniamo i tre induttori.



- Calcoliamo le induttanze.

$$L_1' = L_1 \mp M \qquad L_2' = L_2 \mp M \qquad L_3' = \pm M$$

Se i contrassegni sono dalla stessa parte (rispetto al nodo a comune) si utilizzano i segni

$$L_1' = L_1 - M \qquad L_2' = L_2 - M \qquad L_3' = +M$$

Altrimenti (contrassegni discordi tra loro)

$$L_1' = L_1 + M \qquad L_2' = L_2 + M \qquad L_3' = -M$$

<u>Perché funziona?</u> Le equazioni delle maglie, se sviluppate, ci permettono di ottenere le solite formule di partenza degli induttori mutuamente accoppiati.

$$\dot{V}_1 = j\omega(L_1 - M)\dot{I}_1 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = j\omega L_1\dot{I}_1 \boldsymbol{- j\omega M\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_1} + j\omega M\dot{I}_2 = j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2$$
$$\dot{V}_2 = j\omega(L_2 - M)\dot{I}_2 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = j\omega L_2\dot{I}_2 \boldsymbol{- j\omega M\dot{I}_2} + j\omega M\dot{I}_1 \boldsymbol{+ j\omega M\dot{I}_2} = j\omega L_2\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1$$

Vantaggio è la possibilità di usare tensioni di nodo, il rischio è l'errore facile nella sostituzione topologica.

<u>Caso particolare</u>. La sostituzione topologica risulta vantaggiosa se

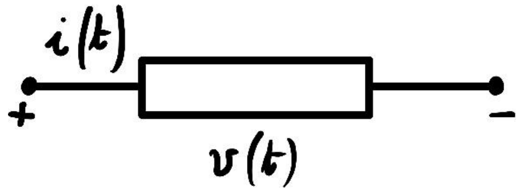
- un valore tra L_1 ed L_2 è uguale ad M;
- i due contrassegni non sono discordi in posizione (entrambi hanno la corrente uscente dal contrassegno o la corrente entrante).

In questo caso uno dei tre induttori sarà sostituito da un cortocircuito: si passa così da due induttori mutuamente accoppiati a due induttori indipendenti (più semplici da gestire). Il secondo punto è necessario: se i contrassegni sono discordi le somme algebriche non ci permettono di "annullare" un induttore ($L_1' = L_1 + M$, $L_2' = L_2 + M$, $L_3' = -M$).

6 CIRCUITI A DUE PORTE

6.1 Introduzione al multipolo

Nella prima parte del corso abbiamo introdotto i cosiddetti bipoli elettrici



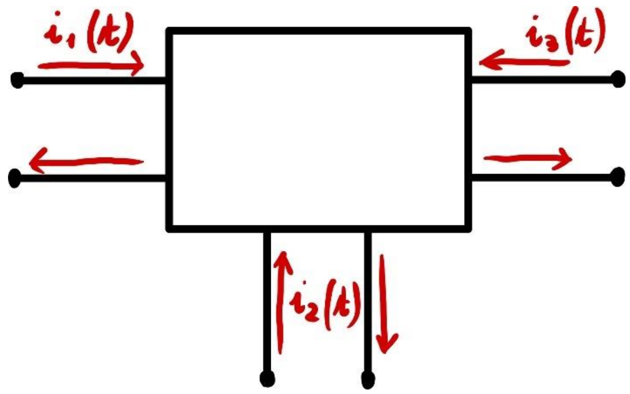
In generale indichiamo qualunque bipolo con un rettangolino, e a questi rettangolini associamo particolari relazioni tra tensione e corrente.

$$v(t) = f\big(i(t)\big) \leftrightarrow i(t) = g\big(v(t)\big)$$

Perché ripartiamo dai bipoli? Per generalizzare il concetto, prendiamo atto che esistono componenti elettrici aventi più poli.

Si parla di multipolo, o n-polo. Nel bipolo la corrente che entra in un polo è uguale alla corrente che esce dall'altro polo. Affermiamo che, in un circuito multipolo, due poli formano una porta se hanno corrente uguale in modulo (entrante in un polo, uscente dall'altro).

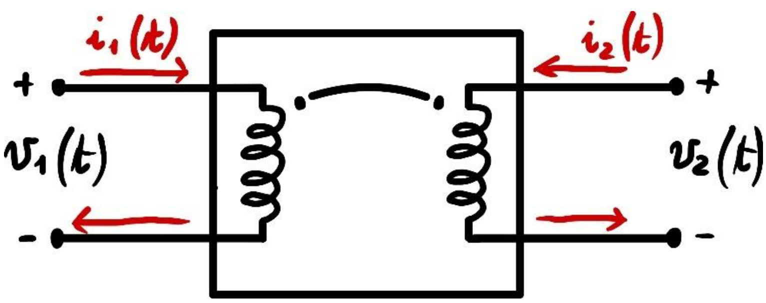
Un circuito multipolo si definisce multi-porta se tutti i suoi poli, a due a due, formano una porta. Si prenda ad esempio il seguente circuito, con sei poli.



6.2 Circuiti a due porte (o doppi bipoli)

6.2.1 Esempio, valori di interesse e convenzioni

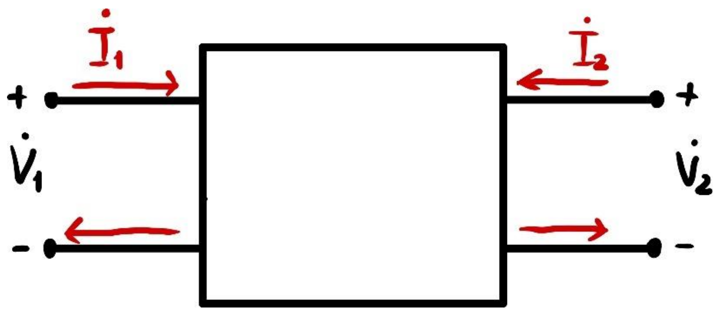
A noi interesseranno soprattutto i circuiti a due porte, con quattro poli. Ne abbiamo già visto uno: i due induttori mutuamente accoppiati!



I valori di nostro interesse sono: le correnti $i_1(t), i_2(t)$; le tensioni $v_1(t), v_2(t)$. Nella teoria dei circuiti a due porte rientrano tutti i componenti elettrici che elaborano un segnale di ingresso alla porta 1 per trasformarlo in un segnale di uscita passante dalla porta 2. Detta in notazione matematica:

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = f(\dot{I}) = f\left(\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}\right)$$

La buona notizia è che affrontando solo circuiti lineari la funzione f andrà a stabilire una proporzionalità diretta.



Per convenzione si pongono le correnti entranti nei poli in alto. Le tensioni si scelgono col + in alto.

Un circuito a due porte può essere scritto per mezzo di parametrizzazioni .

Possiamo scegliere se lavorare nel dominio del tempo o nel dominio dei fasori: noi lavoreremo nel dominio dei fasori, quindi introdurremo le parametrizzazioni nel dominio dei fasori.

6.2.2 Parametrizzazione Z

6.2.2.1 Equazioni

Nella parametrizzazione z si calcolano le tensioni in funzione delle correnti.

$$\dot{V} = \overline{Z} \cdot \dot{I} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{z}_{11} & \overline{z}_{12} \\ \overline{z}_{21} & \overline{z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{V}_1 = \overline{z}_{11}\dot{I}_1 + \overline{z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \overline{z}_{21}\dot{I}_1 + \overline{z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

La notazione utilizzata ci è familiare, ma $\overline{Z}$ è una matrice 4×4. Si parla di parametrizzazione di tipo z perché tutte le componenti della matrice $\overline{Z}$ hanno la dimensione di un'impedenza.

6.2.2.2 Esempio specifico di parametri: induttori mutuamente accoppiati.

Come calcoliamo i parametri nel caso di due induttori mutuamente accoppiati?

$$\overline{z}_{11} = j\omega L_1 \qquad \overline{z}_{22} = J\omega L_2 \qquad \overline{z}_{12} = \overline{z}_{21} = j\omega M$$

6.2.2.3 Calcolo dei parametri

Come determino i parametri z, in generale? Utilizziamo le seguenti formule

$$\overline{z}_{11} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} \qquad \overline{z}_{12} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$
$$\overline{z}_{21} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} \qquad \overline{z}_{22} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0}$$

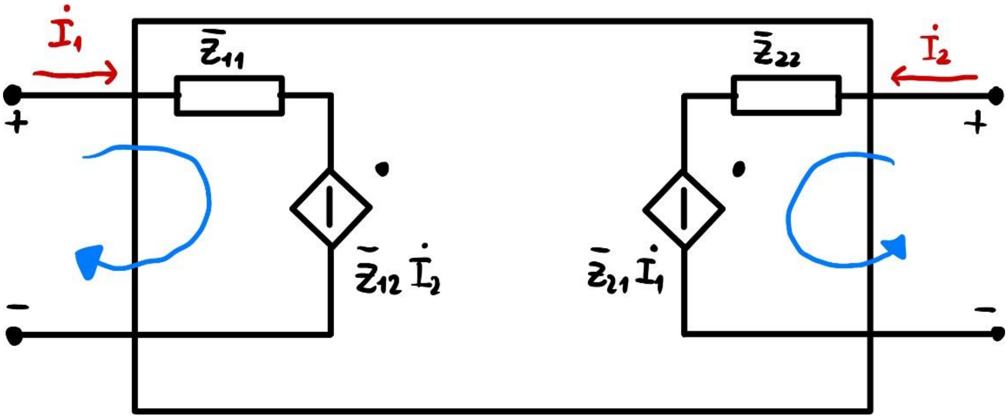
Matematicamente parlando affermiamo che ogni componente può essere calcolata con la formula indicata se si pone nulla la corrente indicata in pedice. Quale significato elettrotecnico si cela dietro questo passaggio? Per ogni componente:

- Considero una particolare porta tra le due.
- Lascio l'altra porta non alimentata, in modo tale che non scorra corrente.
- Metto un generatore di corrente (tensione) alla porta considerata e misuro la tensione (corrente).

Tensioni divise per corrente: le formule ci confermano che i parametri sono impedenze. Si tenga a mente questo ragionamento nella risoluzione degli esercizi (vedremo più avanti un esempio concreto).

6.2.2.4 *Circuito equivalente*

Per calcolare i parametri $\overline{z}$ di un generico circuito a due porte è necessario ricondurre questo a un circuito equivalente agli effetti esterni. Possiamo ricondurre il circuito generico a un circuito equivalente caratterizzato da due impedenze e due generatori di tensione pilotati.

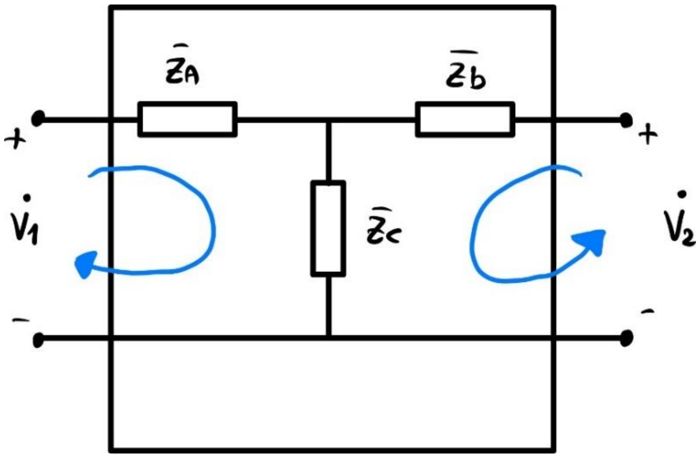


Dalle equazioni delle maglie (secondo principio di Kirkhoff, frecce in figura) otteniamo le formule introdotte nella pagina precedente (la cosa non dovrebbe meravigliarci, dato che stiamo cercando un circuito equivalente)

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \overline{z}_{11}\dot{I}_1 + \overline{z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \overline{z}_{21}\dot{I}_1 + \overline{z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$

Esiste un ulteriore circuito equivalente a cui possiamo ricondurre il circuito se valgono le seguenti ipotesi:

- le due porte hanno due morsetti collegati in cortocircuito
- $\overline{z}_{12} = \overline{z}_{21}$



Si tenga a mente che (non lo dimostreremo) quanto segue

Se il circuito a due porte originale non presenta al suo interno generatori pilotati allora è possibile ricondurlo al circuito equivalente appena visto. Dunque $\overline{z}_{12} = \overline{z}_{21}$

Applichiamo il metodo delle correnti di maglia per scrivere le equazioni (si prendano a riferimento le due maglie indicate in figura)

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \overline{z}_A\dot{I}_1 + \overline{z}_C\dot{I}_1 + \overline{z}_C\dot{I}_2 = (\overline{z}_A + \overline{z}_C)\dot{I}_1 + \overline{z}_C\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \overline{z}_B\dot{I}_2 + \overline{z}_C\dot{I}_1 + \overline{z}_C\dot{I}_2 = \overline{z}_C\dot{I}_1 + (\overline{z}_B + \overline{z}_C)\dot{I}_2 \end{cases}$$

Confrontando col precedente sistema otteniamo

$$\begin{matrix} \begin{cases} \dot{V}_1 = \overline{z}_{11}\dot{I}_1 + \overline{z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \overline{z}_{21}\dot{I}_1 + \overline{z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{V}_1 = \overline{z}_A\dot{I}_1 + \overline{z}_C\dot{I}_1 + \overline{z}_C\dot{I}_2 = (\overline{z}_A + \overline{z}_C)\dot{I}_1 + \overline{z}_C\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \overline{z}_B\dot{I}_2 + \overline{z}_C\dot{I}_1 + \overline{z}_C\dot{I}_2 = \overline{z}_C\dot{I}_1 + (\overline{z}_B + \overline{z}_C)\dot{I}_2 \end{cases} \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{z}_{11} = \overline{z}_A + \overline{z}_C \\ \overline{z}_{12} = \overline{z}_{21} = \overline{z}_C \\ \overline{z}_{22} = \overline{z}_B + \overline{z}_C \end{cases}$$

Spostando le componenti tra i membri delle equazioni concludiamo

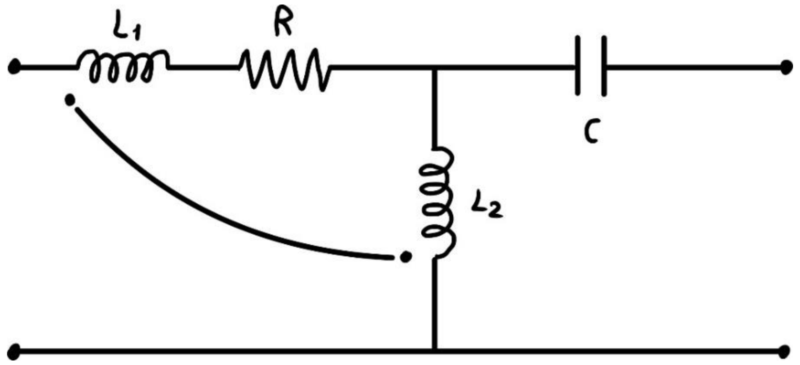
$$\begin{gathered}\overline{z}_C = \overline{z}_{12} = \overline{z}_{21} \\ \overline{z}_A = \overline{z}_{11} - \overline{z}_{12} \\ \overline{z}_B = \overline{z}_{22} - \overline{z}_{21}\end{gathered}$$

Due definizioni:

- **Circuito reciproco**
  Un circuito si dice reciproco quando la matrice dei parametri $\overline{Z}$ è simmetrica!
- **Circuito simmetrico**
  Un circuito si dice simmetrico se la matrice dei parametri $\overline{Z}$ è simmetrica, inoltre $\overline{z}_{11} = \overline{z}_{22}$

6.2.2.5 Esempio di esercizio con parametrizzazione z

Consideriamo il seguente circuito, con i dati a lato



$$\begin{gathered}L_1 = 20\,\mathrm{mH} \\ L_2 = 20\,\mathrm{mH} \\ M = 15\,\mathrm{mH} \\ \\ R = 20\,\Omega \\ \\ \omega = 1000\,\mathrm{rad/s} \\ \\ C = 0.1\,\mathrm{mF}\end{gathered}$$

Vogliamo trovare la rappresentazione a parametri z di questo circuito a due porte. Dato il seguente sistema

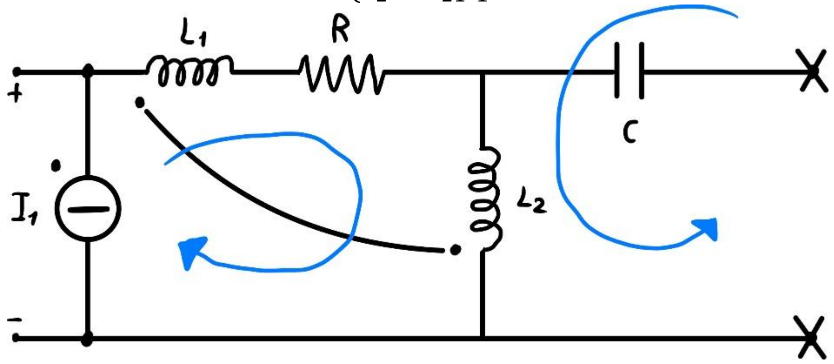
$$\begin{cases}\dot{V}_1 = \overline{z}_{11}\dot{I}_1 + \overline{z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \overline{z}_{21}\dot{I}_1 + \overline{z}_{22}\dot{I}_2\end{cases}$$

Trovare la rappresentazione a parametri z significa trovare $\overline{z}_{11}, \overline{z}_{12}, \overline{z}_{21}, \overline{z}_{22}$. La risoluzione passa dall'applicazione delle seguenti formule, che abbiamo detto avere una interpretazione elettrotecnica (porre una corrente nulla significa scollegare la relativa porta dall'alimentazione, fare il rapporto equivale a porre un generatore di corrente e misurare la tensione).

$$\overline{z}_{11} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} \qquad \overline{z}_{12} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$
$$\overline{z}_{21} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} \qquad \overline{z}_{22} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0}$$

- $\boldsymbol{\dot{I}_2 = 0}$
  Scolleghiamo la porta due, poniamo un generatore di corrente alla porta 1 e calcoliamo le tensioni

$$\begin{cases}\dot{V}_1 = \overline{z}_{11}\dot{I}_1 \\ \dot{V}_2 = \overline{z}_{21}\dot{I}_1\end{cases}$$



Applichiamo il metodo delle correnti di maglia (è quello che ci conviene maggiormente, dato che abbiamo messo un generatore di corrente)

- **Maglia a sinistra**

$$\dot{V}_1 = j\omega L_1\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_1 + R\dot{I}_1 + j\omega L_2\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_1 = (j\omega L_1 - 2j\omega M + R + j\omega L_2)\dot{I}_1$$

  Abbiamo trovato che

$$\overline{z}_{11} = j\omega L_1 - 2j\omega M + R + j\omega L_2 = 5j$$

- **Maglia a destra**

  Si consideri che la caduta del condensatore è nulla, dato che non è percorso da corrente

$$\dot{V}_2 = j\omega L_2\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_1 = (j\omega L_2 - j\omega M)\dot{I}_1$$

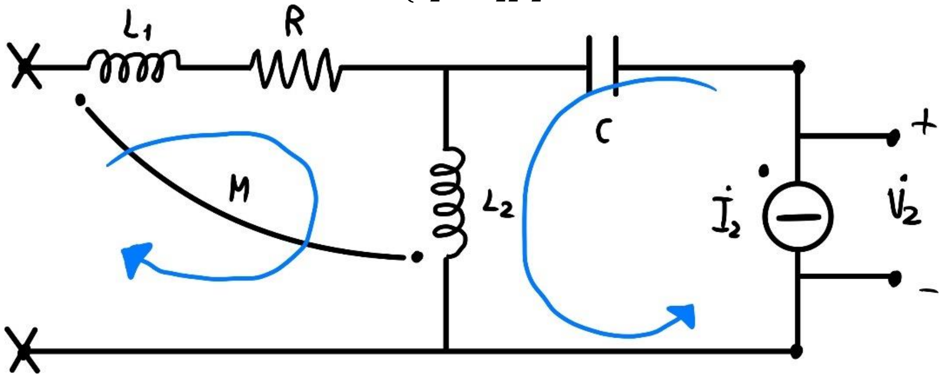
  Abbiamo trovato che

$$\overline{z}_{21} = j\omega L_2 - j\omega M = 5j$$

- $\dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{0}$

  Scolleghiamo la porta uno, poniamo un generatore di corrente alla porta 2 e calcoliamo le tensioni

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \overline{z}_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = \overline{z}_{22}\dot{I}_2 \end{cases}$$



- **Maglia a destra**

  La formula del condensatore è adesso presente, ma si tiene conto che un termine degli induttori mutuamente accoppiati è nullo dato che non scorre corrente nell'altro ramo (la caduta di potenziale di mutua-induttanza)

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_2 + j\omega L_2\dot{I}_2 = \left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L_2\right)\dot{I}_2 = 0$$

  Abbiamo trovato che

$$\overline{z}_{22} = \frac{1}{j\omega C} + j\omega L_2 = 10j$$

- **Maglia a sinistra**

  Contrariamente a prima la caduta di potenziale di mutua-induttanza non è nulla (dato che si tiene in considerazione la corrente non nulla che scorre nell'altra maglia), ma è nulla la caduta di potenziale di auto-induttanza. Risulta essere nulla anche la caduta di potenziale lungo la resistenza. Tutto ciò perché non scorre corrente (abbiamo scollegato la porta 1).

$$\dot{V}_1 = -\mathrm{j}\omega\mathrm{M}\dot{I}_2 + j\omega L_2\dot{I}_2 = (-j\omega M + j\omega L_2)\dot{I}_2$$

  Abbiamo trovato che

$$\overline{z}_{11} = -j\omega M + j\omega L_2 = 20 + 10j$$

Abbiamo finito: possiamo scrivere la matrice $\overline{Z}$

$$\overline{Z} = \begin{bmatrix} 20 + 10j & 5j \\ 5j & 10j \end{bmatrix}$$

- Abbiamo un circuito reciproco, cioè un circuito dove la matrice $\overline{Z}$ è simmetrica. La cosa non ci sorprende dato che il circuito di partenza non presentava alcun tipo di generatore pilotato.
- Attenzione alle prove d'esame. La matrice non simmetrica può essere un campanello d'allarme su errori da noi compiuti: la cosa non va ignorata, se non si riesce a trovare l'errore conviene scrivere una postilla per segnalare al docente che siamo consapevoli dell'errore (senza la postilla il docente potrebbe pensare che non conosciamo questa proprietà tipica di circuiti senza generatori pilotati).

6.2.3 Parametrizzazione Y

6.2.3.1 Equazioni

La parametrizzazione Y prevede la corrente in funzione della tensione! Banalmente otteniamo:

$$\dot{\mathrm{V}} = \overline{Z} \cdot \dot{\mathrm{I}} \Longrightarrow \dot{\mathrm{I}} = \overline{\mathrm{Z}}^{-1} \cdot \dot{\mathrm{V}} = \overline{\mathrm{Y}} \cdot \dot{\mathrm{V}} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{I}_1 = \overline{y}_{11}\dot{V}_1 + \overline{y}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \overline{y}_{21}\dot{V}_1 + \overline{y}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

dove $\overline{Y}$ è la matrice inversa di $\overline{Z}$. Ricordarsi che l'inversa esiste solo se $det(\overline{Z}) \neq 0$. I parametri sono tutti ammettenze!

6.2.3.2 Calcolo dei parametri

Utilizziamo le seguenti formule per determinare i parametri y

$$\overline{y}_{11} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{V}_2=0} \qquad \overline{y}_{12} = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{V}_1=0}$$

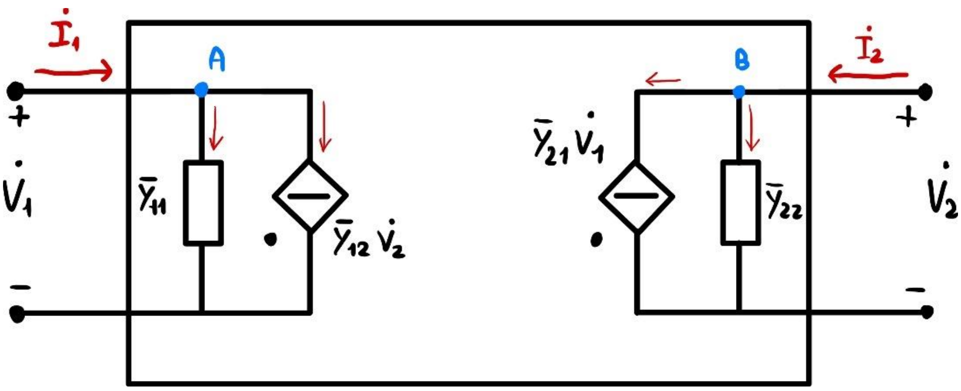
$$\overline{y}_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{V}_2=0} \qquad \overline{y}_{22} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{V}_2=0}$$

Matematicamente parlando affermiamo che ogni componente può essere calcolata con la formula indicata se si pone nulla la tensione indicata in pedice. Quale significato elettrotecnico si cela dietro questo passaggio? Per ogni componente:

- Considero una particolare porta tra le due.
- Metto in cortocircuito l'altra porta.
- Metto un generatore di tensione (corrente) alla porta considerata e misuro la corrente (tensione).

6.2.3.3 Circuito equivalente

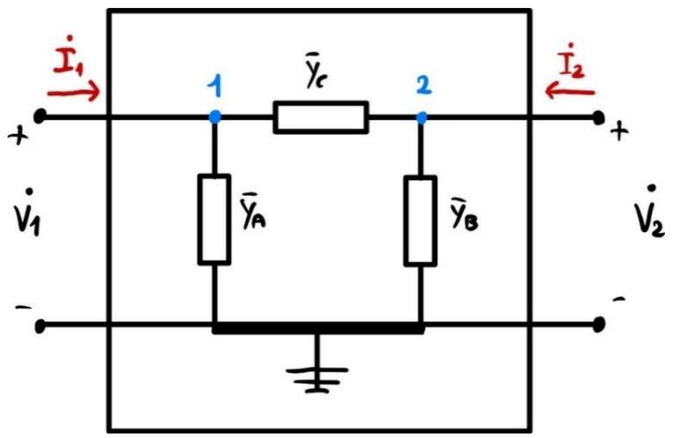
Qual è il circuito equivalente a parametri y? Due impedenze, ciascuna posta in parallelo rispetto a un generatore di corrente.



Applicando il primo principio di Kirkhoff sui nodi A e B evidenziati in figura otteniamo le equazioni del sistema

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \overline{y}_{11}\dot{V}_1 + \overline{y}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \overline{y}_{21}\dot{V}_1 + \overline{y}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

Ogni addendo è il prodotto tra una ammettenza e una tensione, restituisce una corrente. Due addendi per somma: uno per ogni ramo! Anche qua esiste un circuito equivalente adottabile con le stesse ipotesi di prima



Risolviamo il metodo con le tensioni di nodo: scegliamo come nodo di riferimento quello indicato in figura e lavoriamo sui nodi 1 e 2 evidenziati in figura.

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{V}_1(\overline{y}_A + \overline{y}_C) - \dot{V}_2\overline{y}_C \\ \dot{I}_1 = \dot{V}_2(\overline{y}_B + \overline{y}_C) - \dot{V}_1\overline{y}_C \end{cases}$$

Confrontando col precedente sistema otteniamo

$$\begin{array}{c} \begin{cases} \dot{I}_1 = \overline{y}_{11}\dot{V}_1 + \overline{y}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \overline{y}_{21}\dot{V}_1 + \overline{y}_{22}\dot{V}_2 \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{V}_1(\overline{y}_A + \overline{y}_C) - \dot{V}_2\overline{y}_C \\ \dot{I}_1 = \dot{V}_2(\overline{y}_B + \overline{y}_C) - \dot{V}_1\overline{y}_C \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \overline{y}_{11} = \overline{y}_A + \overline{y}_C \\ \overline{y}_{12} = y_{21} = -\overline{y}_C \\ \overline{y}_{22} = \overline{y}_B + \overline{y}_C \end{cases}$$

Spostando le componenti tra i membri delle equazioni concludiamo

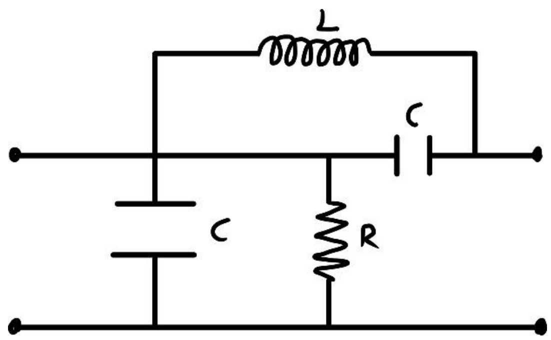
$$\begin{aligned} \overline{y}_C &= -\overline{y}_{12} = -\overline{y}_{21} \\ \overline{y}_A &= \overline{y}_{11} - \overline{y}_C = \overline{y}_{11} + \overline{y}_{12} \\ \overline{y}_B &= \overline{y}_{22} - \overline{y}_C = \overline{y}_{22} + \overline{y}_{21} \end{aligned}$$

Vale lo stesso teorema (che non dimostriamo)

$$\boxed{\text{Si può parlare di rete reciproca se non ci sono generatori pilotati all'interno del circuito a due porte}}$$

6.2.3.4 *Esempio di esercizio con parametrizzazione Y*

Si consideri il seguente circuito a due porte: si richiede di calcolare la rappresentazione a parametri y.



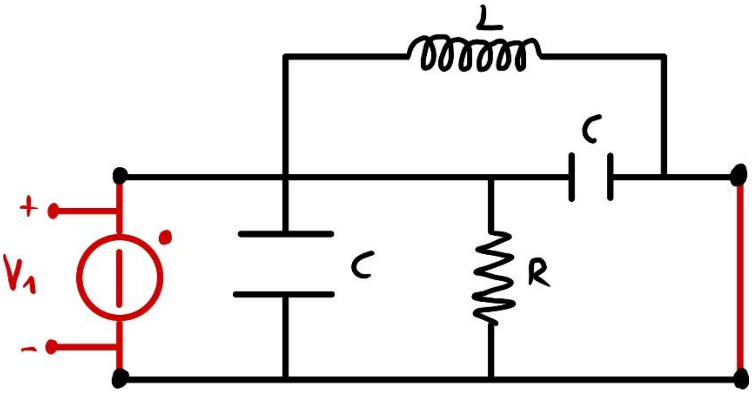
$$\begin{aligned} &R = 10\,\Omega \\ &L = 10\,\text{mH} \\ &C = 10\,\mu\text{F} \\ &\omega = 1000\,\text{rad/s} \end{aligned}$$

Abbiamo visto che il problema consiste nello svolgimento di due esercizi:

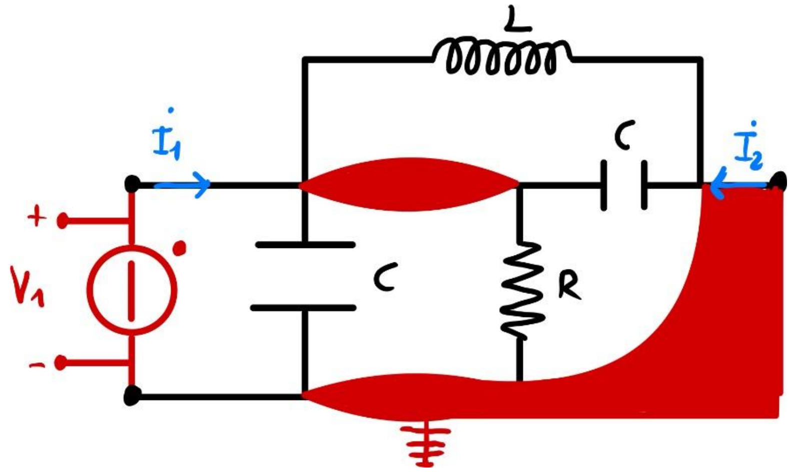
- **Primo esercizio**.
  Si pone cortocircuito sulla porta 2 ($\dot{V}_2 = 0$) e un generatore sulla porta 1 per trovare $\overline{y}_{11}$ e $\overline{y}_{21}$.
- **Secondo circuito.**
  Si pone cortocircuito sulla porta 1 ($\dot{V}_1 = 0$) e un generatore sulla porta 2 per trovare $\overline{y}_{22}$ e $\overline{y}_{12}$.

Si osservi che l'assenza di generatori pilotati ci garantisce fin da subito che avremo $\overline{y}_{12} = \overline{y}_{21}$. Procediamo!

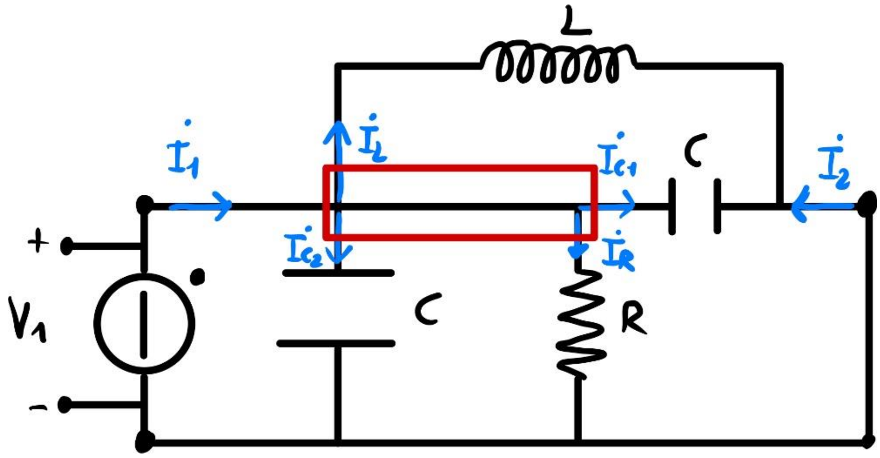
- **Primo esercizio**.
  Facciamo quanto detto nell'introduzione precedente.



Abbiamo scelto un generatore di tensione, che ci permette un'applicazione istantanea di tensioni di nodo: non abbiamo da scrivere equazioni!



Il nodo di riferimento ha tensione nulla, l'altro nodo avrà tensione V_1. Le correnti I_1 e I_2 non scorrono su particolari impedenze. Definiamo ulteriori correnti, applichiamo il primo principio di Kirkhoff sull'area evidenziata e sviluppiamo la formula



$$\dot{I_1} = \dot{I_L} + \dot{I_{C2}} + \dot{I_{C1}} + \dot{I_R} = \dot{V_1}\left(\frac{1}{j\omega L}\right) + \dot{V_1}\left(\frac{1}{R}\right) + \dot{V_1}(j\omega C) + \dot{V_1}(j\omega C) =$$
$$= \dot{V_1}\left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R} + 2j\omega C\right)$$

Abbiamo trovato i vari termini applicando la prima legge di Ohm su ogni impedenza presente nei vari rami. Concludiamo

$$\overline{y}_{11} = \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R} + 2j\omega C = 0.1 - 0.08j$$

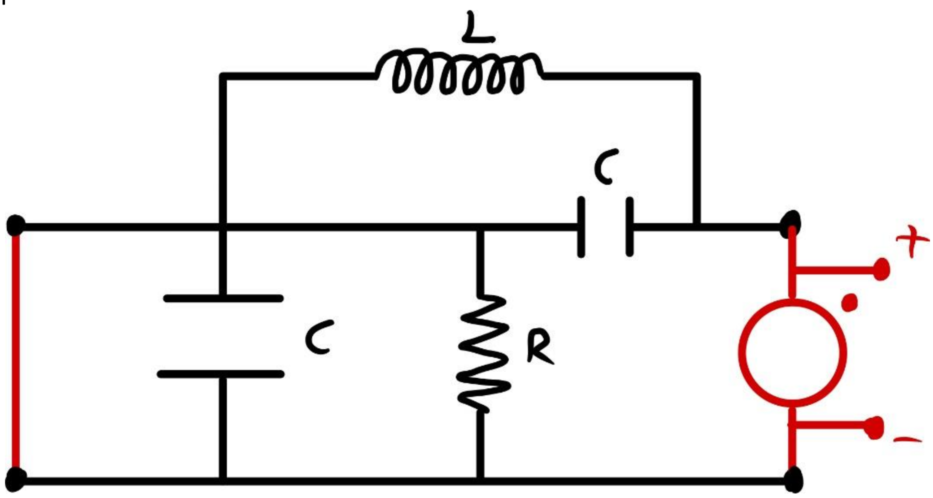
Adesso troviamo $\dot{I_2}$, con lo stesso metodo

$$\dot{I}_2 = -\dot{I_{C1}} - \dot{I}_L = -j\omega C\dot{V}_1 - \frac{1}{j\omega L}\dot{V}_1 = -\left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L}\right)\dot{V}_1$$

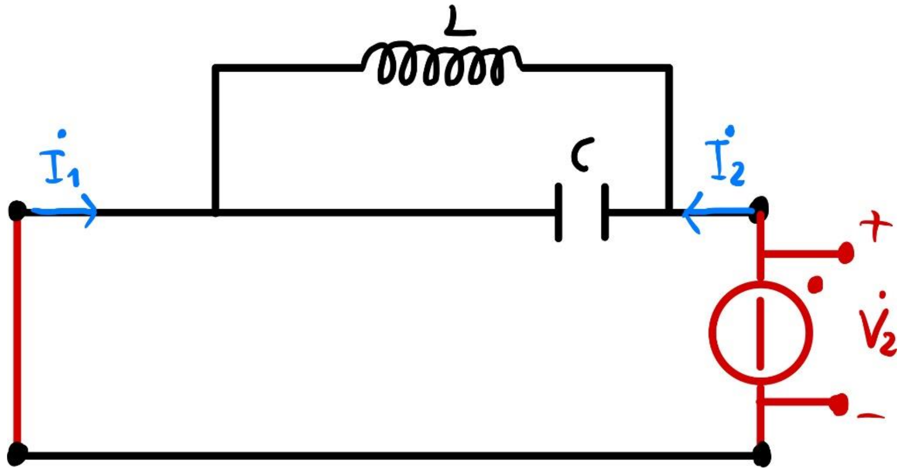
Concludiamo

$$\overline{y}_{21} = -j\omega C - \frac{1}{j\omega L} = 0.09j$$

- **Secondo esercizio**.
  Facciamo quanto detto nell'introduzione.

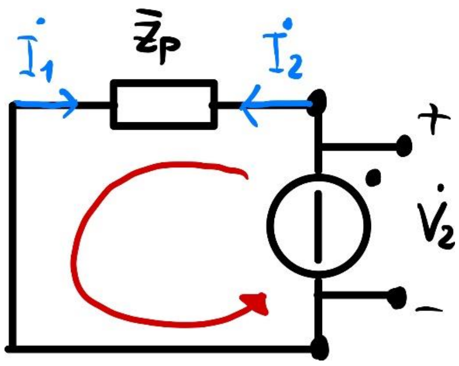


Si osservi che abbiamo ben due rami paralleli al cortocircuito (quello immediatamente vicino col condensatore e anche quello con la resistenza). Otteniamo un circuito estremamente semplice dove scegliere generatore di tensione o generatore di corrente fa poca differenza.



Poniamo un generatore di tensione. Condensatore e induttore sono posti in parallelo: li possiamo trattare come un'unica impedenza avente il seguente valore

$$\overline{z}_P = \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$



Percorrendo la maglia otteniamo

$$\dot{I}_2\overline{z}_P = \dot{V}_2 \Longrightarrow \dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_2}{\overline{z}_P}$$

Concludiamo

$$\overline{y}_{22} = \frac{1}{\overline{z}_P} = -0.09j$$

Per quanto riguarda l'altro valore sostituiamo $\dot{I}_2 = -\dot{I}_1$

$$-\dot{I}_1\overline{z}_P = \dot{V}_2 \longrightarrow \dot{I}_1 = -\frac{\dot{V}_2}{\overline{z}_P} \Longrightarrow \overline{y}_{12} = -\frac{1}{\overline{z}_P} = 0.09j$$

Per quanto riguarda i parametri lungo la controdiagonale non abbiamo errori palesi: $\overline{y}_{12} = \overline{y}_{21}$

(Avrei potuto non calcolare, ma vi conviene farlo perché aiuta a beccare eventuali errori)

Abbiamo finito!

$$\overline{Y} = \begin{bmatrix} 0.1 - 0.08j & 0.09j \\ 0.09j & -0.09j \end{bmatrix}$$

Bastian contrario all'esame. C'è sempre qualcuno che quando viene chiesta la parametrizzazione Y calcola la parametrizzazione Z e fa l'inversa della matrice ottenuta.

- La cosa non è sbagliata, non viene considerato errore da un punto di vista di procedimento.
- Il rischio di sbagliare è maggiore: se un solo parametro z risulta sbagliato l'inversa $\overline{Y}$ potrebbe risultare completamente diversa rispetto a quella giusta. Errori di calcolo pesano maggiormente.

6.2.4 Parametrizzazione H (o parametrizzazione ibrida)

6.2.4.1 Equazioni

La parametrizzazione H, detta anche parametrizzazione ibrida, prevede un sistema ibrido dove avremo a primo membro la tensione della porta 1 e la corrente della porta 2.

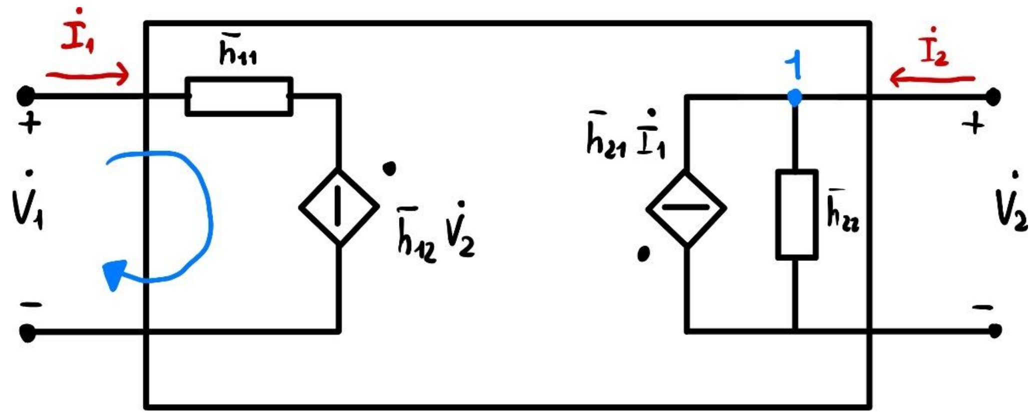
$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{h}_{11} & \overline{h}_{12} \\ \overline{h}_{21} & \overline{h}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{V}_1 = \overline{h}_{11}\dot{I}_1 + \overline{h}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \overline{h}_{21}\dot{I}_1 + \overline{h}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

La matrice $\overline{H}$ contiene sia ammettenze che impedenze.

6.2.4.2 Circuito equivalente

Qual è il circuito equivalente a parametri H? Abbiamo un misto dei circuiti equivalenti visti con le parametrizzazioni precedenti:

- da un lato abbiamo, disposti in serie, un'impedenza di valore $\overline{h}_{11}$ e un generatore pilotato di tensione $\overline{h}_{11}\dot{V}_2$ (Simile alla parametrizzazione z);
- dall'altro lato abbiamo, disposti in parallelo, un'ammettenza di valore $\overline{h}_{22}$ e un generatore pilotato di corrente $\overline{h}_{21}\dot{I}_1$ (Simile alla parametrizzazione y).



Con l'applicazione del secondo principio di Kirkhoff sulla parte sinistra del circuito (maglia indicata in figura, la unica possibile) e del primo principio di Kirkhoff sulla parte destra del circuito (nodo evidenziato in figura) otteniamo le equazioni viste prima

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \overline{h}_{11}\dot{I}_1 + \overline{h}_{12}\dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 = \overline{h}_{21}\dot{I}_1 + \overline{h}_{22}\dot{V}_2 \end{cases}$$

6.2.4.3 Calcolo dei parametri

Utilizziamo le seguenti formule per determinare i parametri H

$$\overline{h}_{11} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{V}_2=0} \qquad \overline{h}_{12} = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$

$$\overline{h}_{21} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{V}_2=0} \qquad \overline{h}_{22} = \left.\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{I}_2=0}$$

Matematicamente parlando affermiamo che ogni componente può essere calcolata con la formula indicata se si pone nulla la tensione indicata in pedice.

- Le unità di misura sono diverse, e queste formule ne sono dimostrazione.
- Le interpretazioni elettrotecniche sono quelle citate nelle parametrizzazioni precedenti (spiegazione della parametrizzazione z se si pone una corrente nulla, spiegazione della parametrizzazione y se si pone una tensione nulla).

6.2.4.4 *Perché tutto questo?*

I quattro parametri h hanno un significato pratico, nel caso in cui si rappresenti un dispositivo come un amplificatore:

- h_{11} rappresenta un'impedenza di ingresso
- h_{21} amplificazione della corrente
- h_{12} inverso dell'amplificazione della corrente
- h_{22} rappresenta l'ammettenza in uscita (o inverso dell'impedenza in uscita)

Le documentazioni allegate agli amplificatori, così come ad altri dispositivi elettronici, forniscono i valori appena citati.

6.2.4.5 *Passaggio alla parametrizzazione z: formule*

È possibile passare in modo agile da una parametrizzazione ad un'altra. Limitiamoci ad analizzare il passaggio dalla parametrizzazione ibrida alla parametrizzazione z: questo significa trovare le due tensioni in funzione delle correnti.

- Per quanto riguarda $\dot{V}_2$ la cosa è estremamente semplice

$$\dot{I}_2 = \overline{h}_{21}\dot{I}_1 + \overline{h}_{22}\dot{V}_2 \longrightarrow \dot{I}_2 - \overline{h}_{21}\dot{I}_1 = \overline{h}_{22}\dot{V}_2 \longrightarrow \boxed{\dot{V}_2 = -\frac{\overline{h}_{21}}{\overline{h}_{22}}\dot{I}_1 + \frac{1}{\overline{h}_{22}}\dot{I}_2}$$

  Dove $\overline{z}_{21} = -\frac{\overline{h}_{21}}{\overline{h}_{22}}$ e $\overline{z}_{22} = \frac{1}{\overline{h}_{22}}$

- Per quanto riguarda $\dot{V}_1$ è necessario fare qualche passaggio in più.

$$\dot{V}_1 = \overline{h}_{11}\dot{I}_1 + \overline{h}_{12}\dot{V}_2 = \overline{h}_{11}\dot{I}_1 + \overline{h}_{12}\left(-\frac{\overline{h}_{21}}{\overline{h}_{22}}\dot{I}_1 + \frac{1}{\overline{h}_{22}}\dot{I}_2\right)$$

$$\dot{V}_1 = \overline{h}_{11}\dot{I}_1 - \frac{\overline{h}_{12}\overline{h}_{21}}{\overline{h}_{22}}\dot{I}_1 + \frac{\overline{h}_{12}}{\overline{h}_{22}}\dot{I}_2 = \left(\overline{h}_{11} - \frac{\overline{h}_{12}\overline{h}_{21}}{\overline{h}_{22}}\right)\dot{I}_1 + \frac{\overline{h}_{12}}{\overline{h}_{22}}\dot{I}_2$$

  Dove $\overline{z}_{11} = \overline{h}_{11} - \frac{\overline{h}_{12}\overline{h}_{21}}{\overline{h}_{22}}$ e $\overline{z}_{12} = \frac{\overline{h}_{12}}{\overline{h}_{22}}$

6.2.4.6 *Relazione di reciprocità*

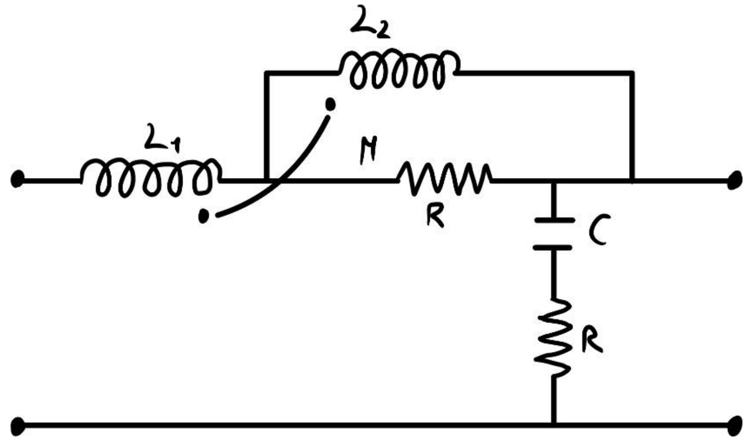
Se il circuito non presenta generatori dipendenti al suo interno allora $\overline{z}_{21} = \overline{z}_{12}$

$$\frac{\overline{h}_{12}}{\overline{h}_{22}} = -\frac{\overline{h}_{21}}{\overline{h}_{22}} \Longrightarrow \boxed{\overline{h}_{12} = -\overline{h}_{21}}$$

La condizione è diversa da quelle viste nelle precedenti parametrizzazioni: gli elementi diagonali sono uguali in modulo, ma opposti in verso. Si parla di matrici antisimmetriche.

6.2.4.7 Esempio di esercizio con parametrizzazione H

Si consideri il seguente circuito a due porte: si richiede di calcolare la rappresentazione a parametri H.

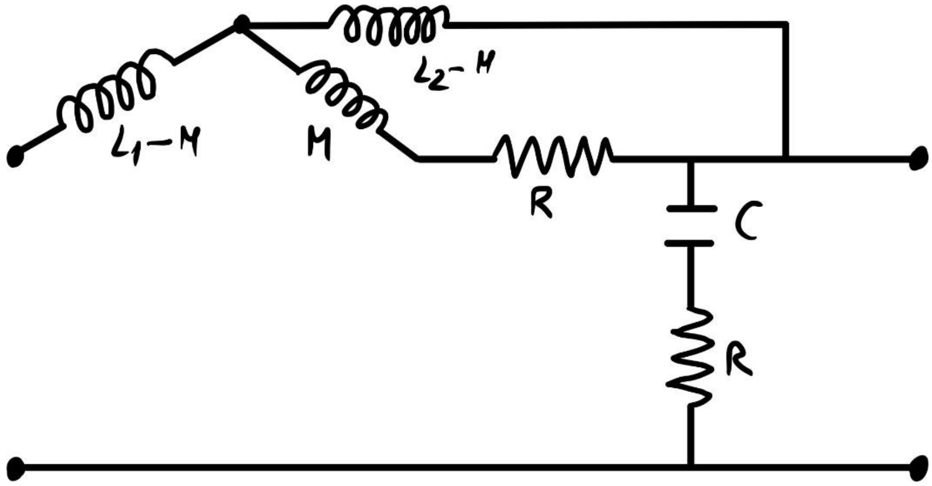


$R = 10\,\Omega$
$C = 100\,\mu\mathrm{F}$
$L_1 = 10\,\mathrm{mH}$
$L_2 = 20\,\mathrm{mH}$
$M = 10\,\mathrm{mH}$
$\omega = 1000\,\mathrm{rad/s}$

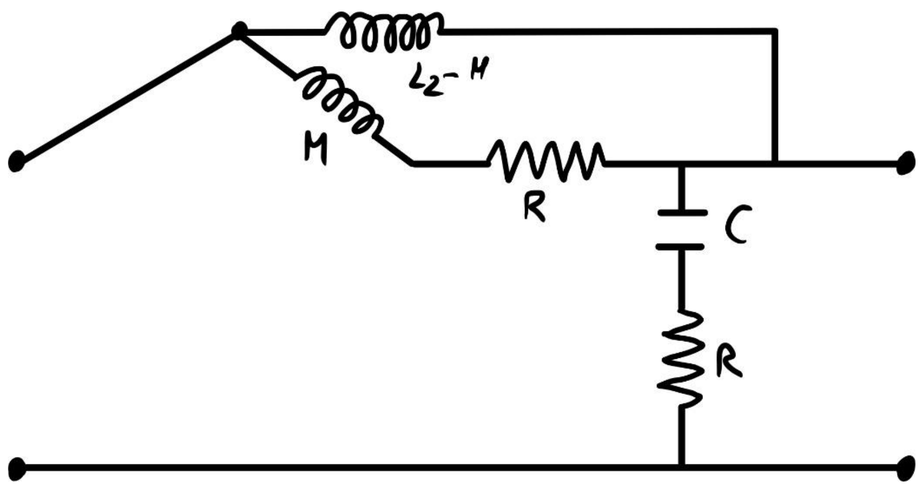
La prima cosa che salta all'occhio è la presenza di induttori mutuamente accoppiati: possiamo fare la sostituzione topologica con tre induttori indipendenti?

- Il criterio di base (un nodo in comune) è soddisfatto.
- Vale la pena correre il rischio nella sostituzione? Sì, si osservi che $L_1 = M$

Procediamo



L'induttore $L_1 - M$ diventa un cortocircuito, dato che $L_1 - M = 10\,\mathrm{mH} - 10\,\mathrm{mH} = 0$.

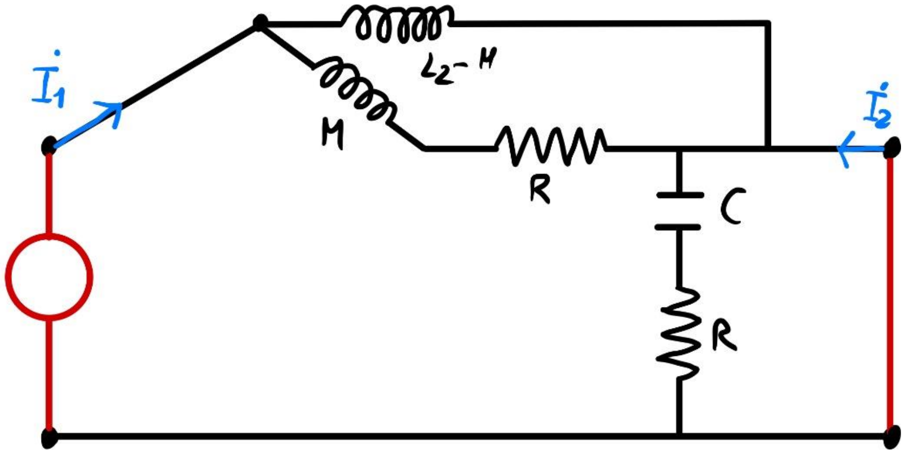


Abbiamo visto che il problema consiste nello svolgimento di due esercizi:

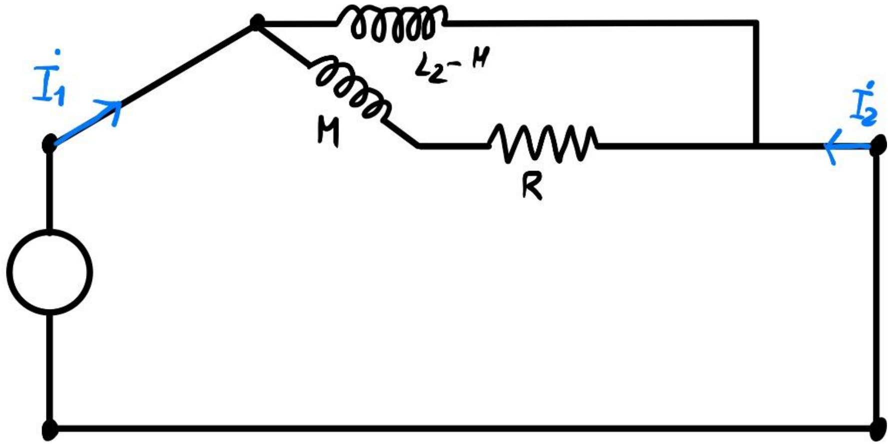
- **Primo esercizio**.
  Si pone cortocircuito sulla porta 2 ($\dot{V}_2 = 0$) e un generatore sulla porta 1 per trovare $\overline{h}_{11}$ e $\overline{h}_{21}$.
- **Secondo circuito.**
  Si scollega la porta 1 dalla corrente ($\dot{I}_1 = 0$) e si pone un gen. sulla porta 2 per trovare $\overline{h}_{22}$ e $\overline{h}_{12}$.

Procediamo!

- **Primo esercizio**.
  Poniamo cortocircuito alla porta 2 e generatore alla porta 1.



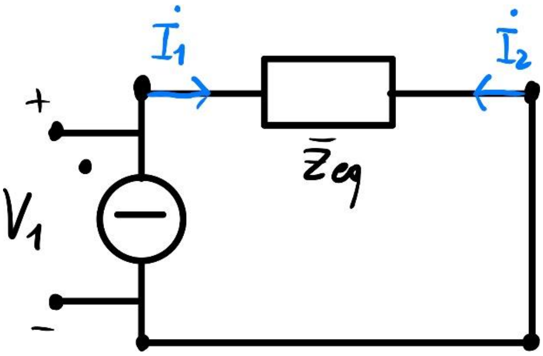
La prima cosa che notiamo è il ramo con condensatore e resistenza è in parallelo a un cortocircuito: quindi sparisce.



A seguito di questo notiamo che $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2$, da cui otteniamo immediatamente

$$\overline{h}_{21} = -1$$

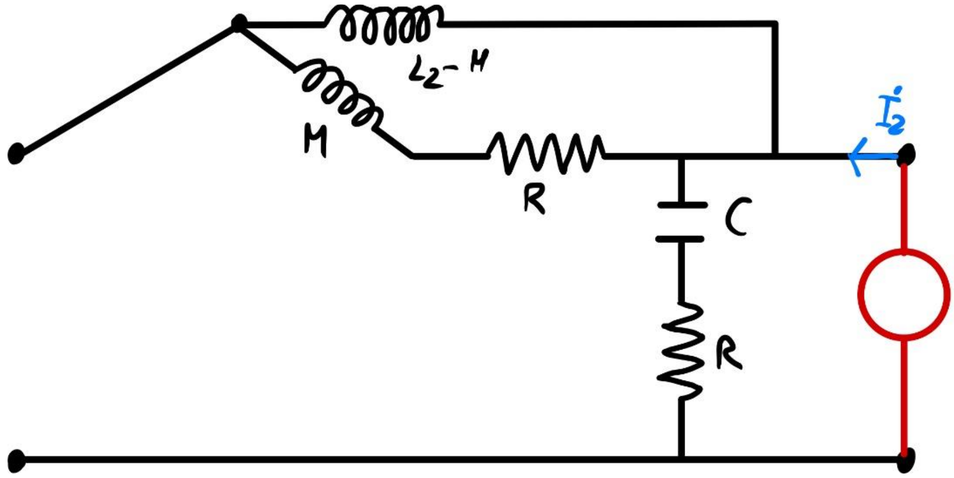
A questo punto il circuito è estremamente semplice: non serve applicare metodi particolari. Poniamo un generatore di corrente e sostituiamo i due rami con impedenza con un'unica impedenza equivalente!



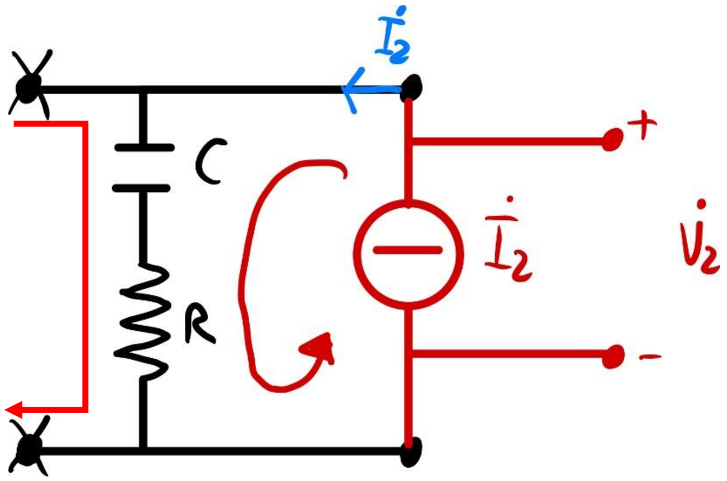
$$\overline{z}_{eq} = \frac{j\omega(L_2 - M) \cdot (R + j\omega M)}{j\omega(L_2 - M) + R + j\omega M}$$

Concludiamo: $\dot{V}_1 = \overline{z}_{eq}\dot{I}_1 \Rightarrow \overline{h}_{11} = 2 + 6j$

- **Secondo esercizio**.
  Scolleghiamo la porta 1 dalla corrente e poniamo un generatore alla porta 2.



I rami con gli induttori spariscono perchè non sono percorsi da corrente (siamo vicini ad un aperto)! Anche qua circuito semplice: non fa molta differenza mettere un generatore o un altro. Mettiamolo di corrente!



Percorrendo la maglia in figura (quella che parte dal generatore di corrente) otteniamo

$$\dot{V}_2 = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_2 \Longrightarrow \overline{h}_{22} = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)^{-1} = 0.05 + 0.05j$$

Troviamo $\dot{V}_1$ facendo un percorso dal + al – (quello indicato in figura a sinistra). Otteniamo (di nuovo)

$$\dot{V}_1 = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}_2 \Longrightarrow \dot{V}_1 = \dot{V}_2 \Longrightarrow \overline{h}_{12} = 1$$

Abbiamo finito!

$$H = \begin{bmatrix} 2+6j & 1 \\ -1 & 0.05+0.05j \end{bmatrix}$$

Ricordarsi che cambia la relazione di reciprocità (che la matrice soddisfa): $\overline{h}_{12} = -\overline{h}_{21}$

6.2.5 Parametrizzazione T (anche questa parametrizzazione ibrida)

6.2.5.1 Equazioni

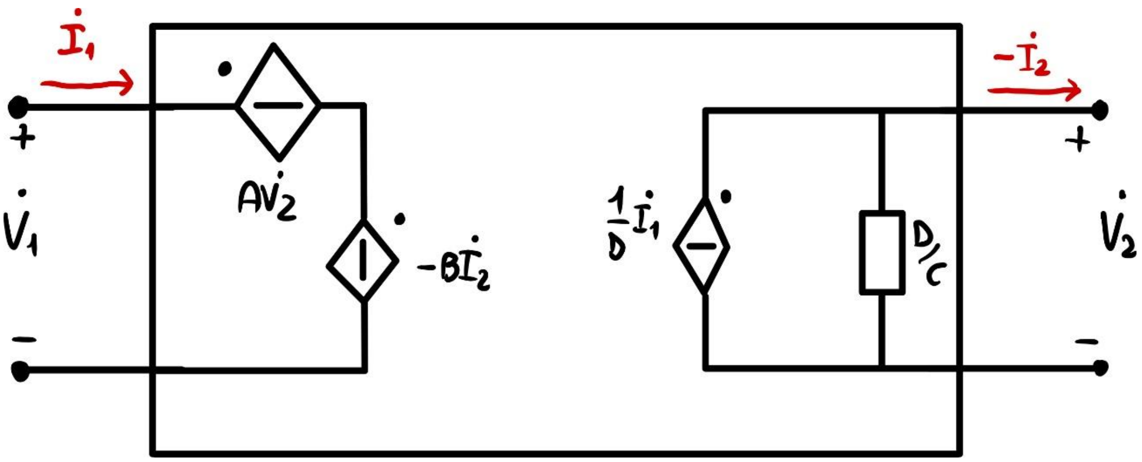
La parametrizzazione T, anche parametrizzazione ibrida, prevede un sistema ibrido dove avremo a primo membro la tensione e la corrente della porta 1.

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_I \end{bmatrix} = \overline{T} \cdot \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{V}_1 = A\dot{V}_2 + B(-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 = C\dot{V}_2 + D(-\dot{I}_2) \end{cases}$$

Convenzione è porre matrice con le maiuscole $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

6.2.5.2 Circuito equivalente

L'individuazione del circuito equivalente è più antipatica: entrambi i valori, della porta 1, dipendono da valori della porta 2.



- Per quanto riguarda la parte sinistra del circuito (porta 1) la cosa è semplice: due generatori pilotati, uno di tensione e uno di corrente!
- Per quanto riguarda la parte destra del circuito (porta 2) effettuiamo un semplice spostamento di termini tra i membri della seconda equazione
$$-\dot{I}_2 = \frac{1}{D}\dot{I}_1 - \frac{C}{D}\dot{V}_2$$
Otteniamo che la parte destra del circuito equivale a un'impedenza $\frac{D}{C}$ disposta in parallelo con un generatore pilotato di corrente $\frac{1}{D}\dot{I}_1$. Si faccia attenzione al segno negativo di $\dot{I}_2$

6.2.5.3 Calcolo dei parametri: formule solite e necessità di calcolare le inverse dei parametri

Calcoliamo i parametri

$$A = \left.\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{I}_2=0} \qquad B = \left.\frac{\dot{V}_1}{-\dot{I}_2}\right|_{\dot{V}_2=0}$$
$$C = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{I}_2=0} \qquad D = \left.\frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2}\right|_{\dot{V}_2=0}$$

Le formule non fanno una grinza matematicamente parlando. Il problema è la lettura di queste formule da un punto di vista elettrotecnico. Prendiamo il parametro A:

- metto un aperto alla porta 2
- metto un generatore di prova alla porta di 2
- misuro la tensione alla porta 1.

Non posso dire in contemporanea "metto una porta 2" e poi "metto un generatore di prova alla porta 2": o una cosa o l'altra! Stesso problema, ad esempio, col parametro B:

- metto un cortocircuito alla porta 2

- metto un generatore di prova alla porta 2
- misuro la tensione alla porta 1

Come risolviamo? Calcolando l'inverso dei parametri!

$$\frac{1}{A} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} \qquad \frac{1}{B} = \left.\frac{-\dot{I}_2}{\dot{V}_1}\right|_{\dot{V}_2=0}$$
$$\frac{1}{C} = \left.\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} \qquad \frac{1}{D} = \left.\frac{-\dot{I}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{V}_2=0}$$

Le formule sono equivalenti alle precedenti matematicamente parlando, ma a differenza di prima abbiamo un'interpretazione elettrotecnica sensata!

6.2.5.4 Relazione di reciprocità

Riprendiamo la parametrizzazione T scritta in sistema, riconduciamola a una parametrizzazione Z e individuiamo la relazione di reciprocità

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = A\dot{V}_2 + B(-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 = C\dot{V}_2 + D(-\dot{I}_2) \end{cases}$$

Calcoliamo i parametri z e imponiamo $\overline{z}_{12} = \overline{z}_{21}$

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{C}\dot{I}_1 + \frac{D}{C}\dot{I}_2$$
$$\dot{V}_1 = \frac{A}{C}\dot{I}_1 + \frac{AD}{C}\dot{I}_2 + D(-\dot{I}_2) = \frac{A}{C}\dot{I}_1 + \left(\frac{AD-BC}{C}\right)\dot{I}_2$$

Abbiamo trovato

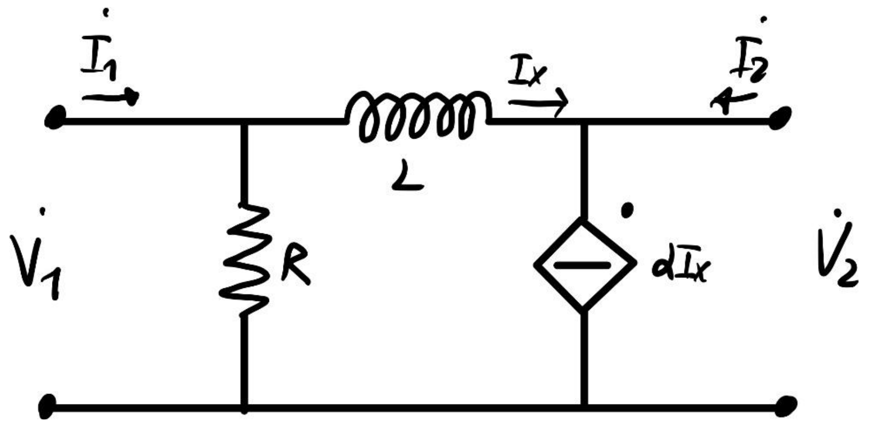
$$\overline{z}_{11} = \frac{A}{C} \qquad \overline{z}_{12} = \frac{AD-BC}{C}$$
$$\overline{z}_{21} = \frac{1}{C} \qquad \overline{z}_{22} = \frac{D}{C}$$

Otteniamo la seguente condizione di reciprocità

$$\frac{1}{C} = \frac{AD-BC}{C} \Rightarrow AD - BC = 1 \Rightarrow \boxed{det(T) = 1}$$

6.2.5.5 Esempio di esercizio con parametrizzazione T

Supponiamo di avere il seguente circuito



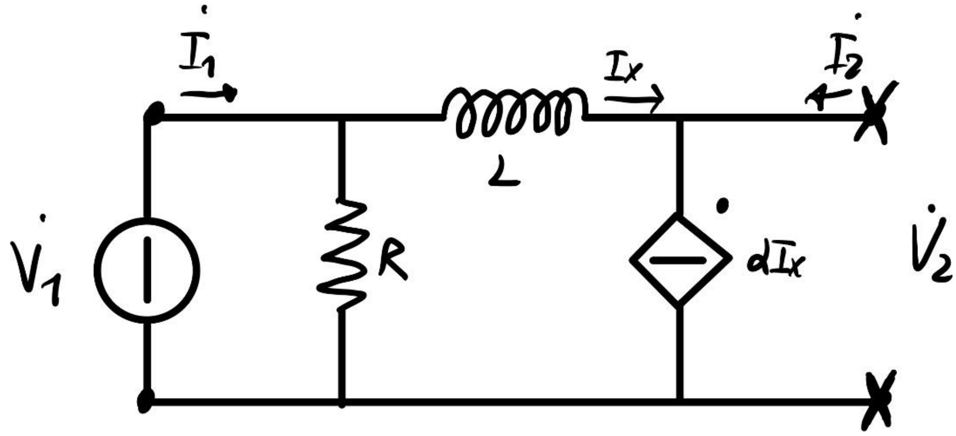
$R = 5\,\Omega$
$L = 10\,\text{mH}$
$\alpha = 2$
$\omega = 1000\,\text{rad/s}$

Si vuole trovare la rappresentazione a parametri T, cioè la matrice $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = A\dot{V}_2 + B(-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 = C\dot{V}_2 + D(-\dot{I}_2) \end{cases}$$

- **Prima parte dell'esercizio**.

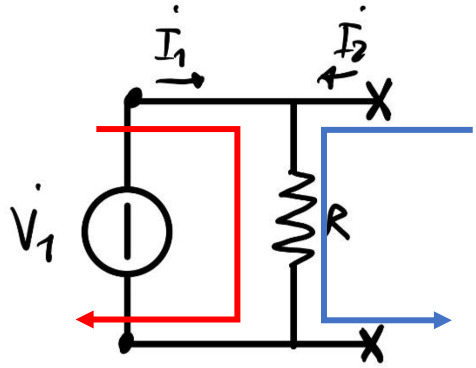
  Poniamo $\dot{I}_2 = 0$, cioè poniamo un aperto sulla porta 2 e un generatore sulla prima porta (scegliamo un generatore di tensione, ma non è scelta obbligata).



Attenzione all'aperto: possiamo scrivere al volo quanto vale la corrente I_x, cioè

$$\dot{I}_x = -\alpha\dot{I}_x \implies \dot{I}_x = 0$$

Dato che $\alpha = 2$. Il circuito si semplifica parecchio!



Calcoliamo $\dot{V}_1$ col percorso a sinistra (freccia rossa). Si osservi che $\dot{V}_2 = \dot{V}_1$ (percorso a destra, freccia blu).

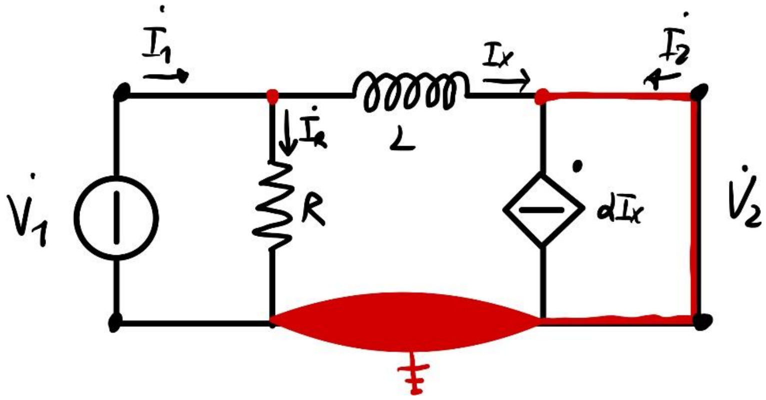
$$\dot{V}_1 = R\dot{I}_1 = \dot{V}_2$$

$A = 1$ poiché $\dot{V}_2 = \dot{V}_1$. Per quanto riguarda C

$$C = \left.\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}\right|_{\dot{I}_2=0} \implies \mathrm{C} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2} = \frac{1}{R} = 0.2$$

- **Seconda parte dell'esercizio**.

  Poniamo $\dot{V}_2 = 0$, cioè poniamo un cortocircuito alla porta 2 e un generatore (a nostra scelta) alla porta 1. Scegliamo un generatore di tensione, che in tensioni di nodo ci permette di definire in modo agile tutte le tensioni di nodo.



1°K al nodo sopra la resistenza: $\dot{I}_1 = \dot{I}_R + \dot{I}_x = \dfrac{\dot{V}_1}{R} + \dfrac{\dot{V}_1}{j\omega L} = \left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{j\omega L}\right)\dot{V}_1$

1°K al nodo sopra il gen. pilotato: $\dot{I}_2 = -\left(\dot{I}_x + \alpha\dot{I}_x\right) = -3\dot{I}_x = -\dfrac{3}{j\omega L}\dot{V}_1$

Calcoliamo B

$$B = \frac{\dot{V}_1}{-\dot{I}_2} = \frac{\dot{V}_1}{\frac{3}{j\omega L}\dot{V}_1} = \frac{j\omega L}{3} = \frac{10}{3}j$$

Dalla prima delle due equazioni scritte poco indietro otteniamo

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_R + \dot{I}_x = \frac{\dot{V}_1}{R} + \frac{\dot{V}_1}{j\omega L} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}\right)\dot{V}_1 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}\right)B(-\dot{I}_2)$$

Cioè

$$D = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}\right)B = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}j$$

Non ha senso fare controlli sulla reciprocità: il circuito presenta un generatore pilotato.

<u>Dove sta il "segreto"?</u>

- L'esercizio si divide in due parti.
- Ad ogni parte una grandezza è posta nulla.
- Pongo un generatore di prova e scrivo le rimanenti in funzione del generatore di prova.
- Ottengo i parametri per mezzo di opportune divisioni e spostamenti.

6.3 Interconnessione tra circuiti a due porte

Introdotte le nozioni necessarie per affrontare un circuito a due porte ci chiediamo:

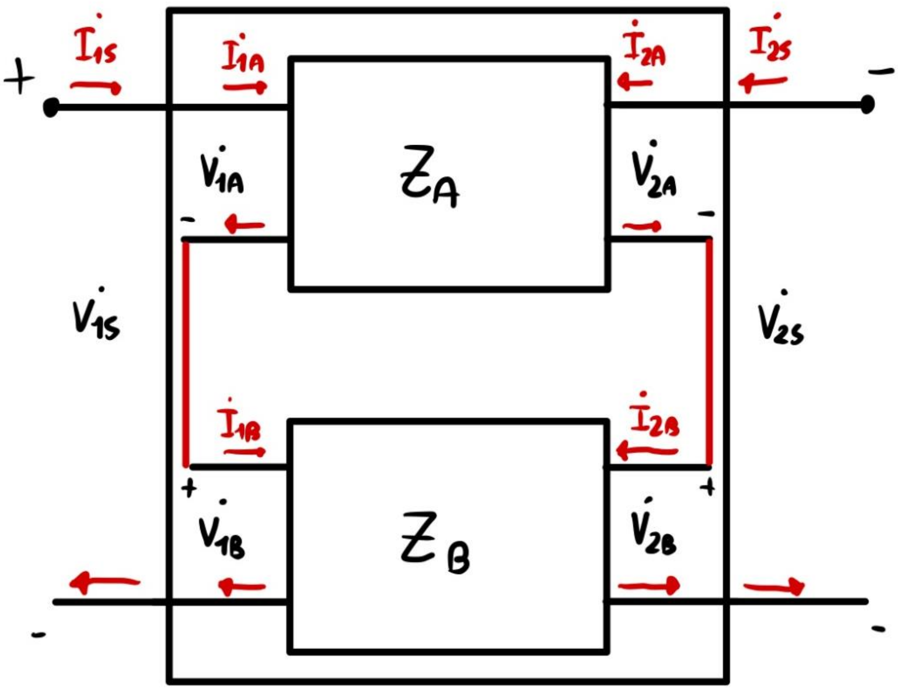
- È possibile disporre più circuiti in serie e/o in parallelo?
- Se sì, è possibile rappresentare il tutto come un unico circuito a due porte?
- Come calcoliamo, nel caso, i relativi parametri?

Possiamo dire subito che ciò è possibile! Vedremo che per gestire certe disposizioni ricorreremo a particolari parametrizzazioni tra quelle viste nelle pagine precedenti.

6.3.1 Interconnessione in serie (Parametrizzazione z)

Due circuiti a due porte si dicono disposti in serie se sono percorsi dalle stesse correnti $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$, cioè

$$\dot{I}_{1A} = \dot{I}_{1B} \qquad \dot{I}_{2A} = \dot{I}_{2B}$$



Quali sono i parametri z? Consideriamo che le cadute di potenziale del circuito a due porte unico si ottengono dalla sommatoria di due cadute di potenziale (secondo principio di Kirkhoff).

$$\begin{bmatrix} \dot{V_{1S}} \\ \dot{V_{2S}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V_{1A}} \\ \dot{V_{2A}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{V_{1B}} \\ \dot{V_{2B}} \end{bmatrix} = \overline{z}_A \begin{bmatrix} \dot{I_{1A}} \\ \dot{I_{2A}} \end{bmatrix} + \overline{z}_B \begin{bmatrix} \dot{I_{1B}} \\ \dot{I_{2B}} \end{bmatrix} =$$

Sapendo che $\dot{I_{1S}} = \dot{I_{1A}} = \dot{I_{1B}}$ e $\dot{I_{1S}} = \dot{I_{2A}} = \dot{I_{2B}}$ otteniamo

$$\begin{bmatrix} \dot{V_{1S}} \\ \dot{V_{2S}} \end{bmatrix} = \overline{z}_A \begin{bmatrix} \dot{I_{1S}} \\ \dot{I_{2S}} \end{bmatrix} + \overline{z}_B \begin{bmatrix} \dot{I_{1S}} \\ \dot{I_{2S}} \end{bmatrix}$$

In conclusione (raccogliamo)

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{V_{1S}} \\ \dot{V_{2S}} \end{bmatrix} = (\overline{z}_A + \overline{z}_B) \begin{bmatrix} \dot{I_{1S}} \\ \dot{I_{2S}} \end{bmatrix}}$$

Si coglie così la duplice utilità della parametrizzazione z:

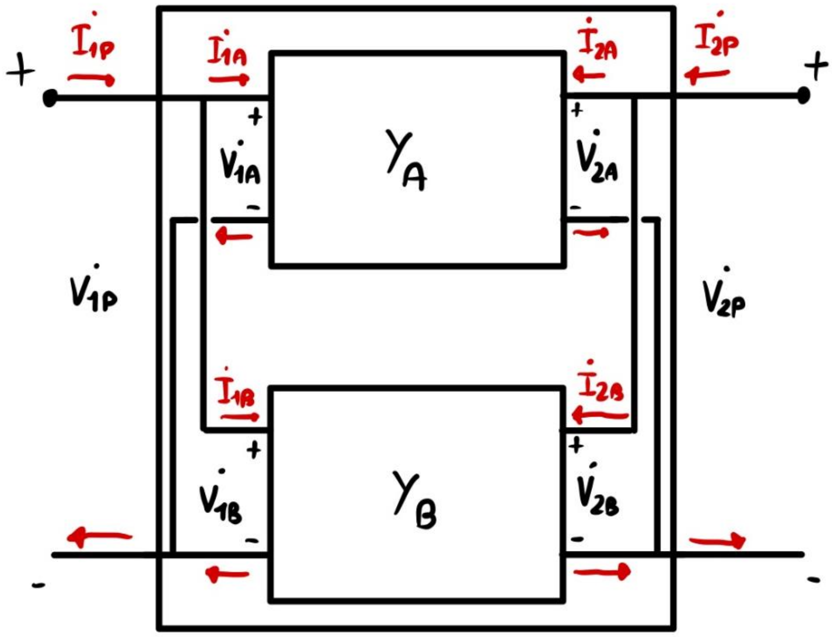
- estensione della legge di Ohm ai circuiti a due porte (già visto precedentemente);
- maggiore facilità nel trovare i parametri z in caso di disposizione in serie (NOVITA' VISTA ORA).

6.3.2 Interconnessione in parallelo (Parametrizzazione y)

Due circuiti a due porte si dicono disposti in parallelo se le due tensioni $\dot{V_1}$ e $\dot{V_2}$, poste a capo delle porte, sono uguali. Questo significa

$$\dot{V_{1A}} = \dot{V_{1B}} \qquad \dot{V_{2A}} = \dot{V_{2B}}$$

Otteniamo ciò collegando i poli negativi in cortocircuito, stessa cosa per i poli positivi.



Quali sono i parametri y? Applicando il primo principio di Kirkhoff otteniamo

$$\begin{bmatrix} \dot{I_{1P}} \\ \dot{\iota_{2P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I_{1A}} \\ \dot{I_{2A}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{I_{1B}} \\ \dot{I_{2B}} \end{bmatrix} = \overline{y}_A \begin{bmatrix} \dot{V_{1A}} \\ \dot{V_{2A}} \end{bmatrix} + \overline{y}_B \begin{bmatrix} \dot{V_{1B}} \\ \dot{V_{2B}} \end{bmatrix} =$$

Sapendo che $\dot{V_{1P}} = \dot{V_{1A}} = \dot{\mathrm{V}}_{1B}$ e $\dot{V_{2P}} = \dot{V_{2A}} = \dot{\mathrm{V}}_{2B}$ otteniamo

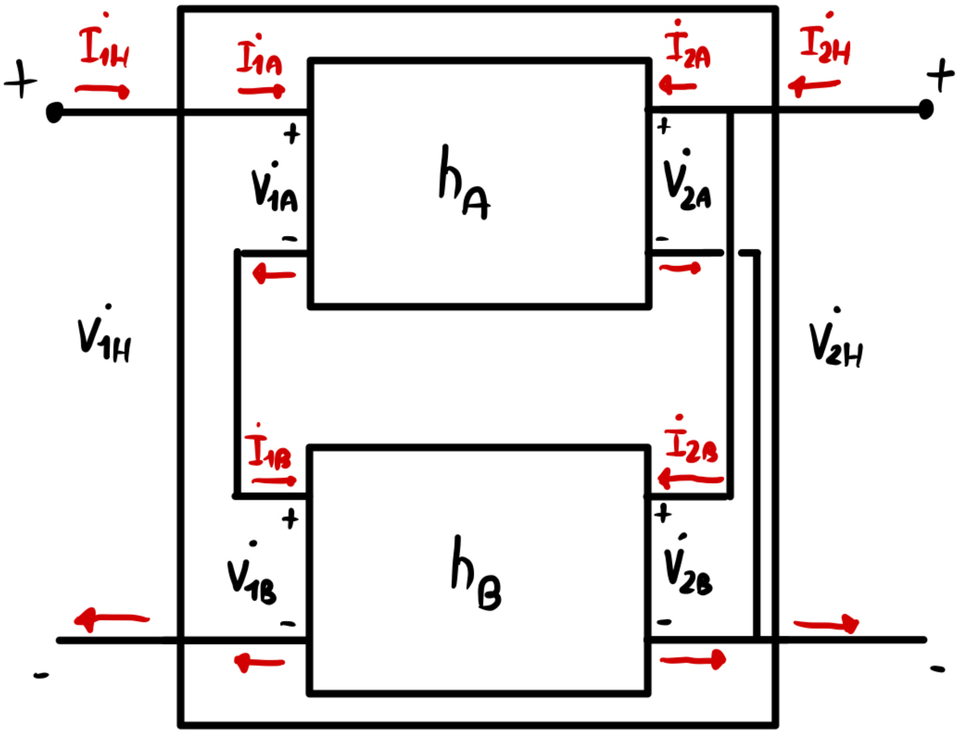
$$\begin{bmatrix} \dot{I_{1P}} \\ \dot{\iota_{2P}} \end{bmatrix} = \overline{y}_A \begin{bmatrix} \dot{V_{1P}} \\ \dot{V_{2P}} \end{bmatrix} + \overline{y}_B \begin{bmatrix} \dot{V_{1P}} \\ \dot{V_{2P}} \end{bmatrix}$$

In conclusione (raccogliamo)

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{I_{1P}} \\ \dot{\iota_{2P}} \end{bmatrix} = (\overline{y}_A + \overline{y}_B) \begin{bmatrix} \dot{V_{1P}} \\ \dot{V_{2P}} \end{bmatrix}}$$

6.3.3 Interconnessione ibrida (Parametrizzazione h)

Supponiamo di avere la seguente interconnessione, dove si ha disposizione in serie alla porta 1 e disposizione in parallelo alla porta 2.



Possiamo compiere lo studio di tale circuito unico ricorrendo alla parametrizzazione h

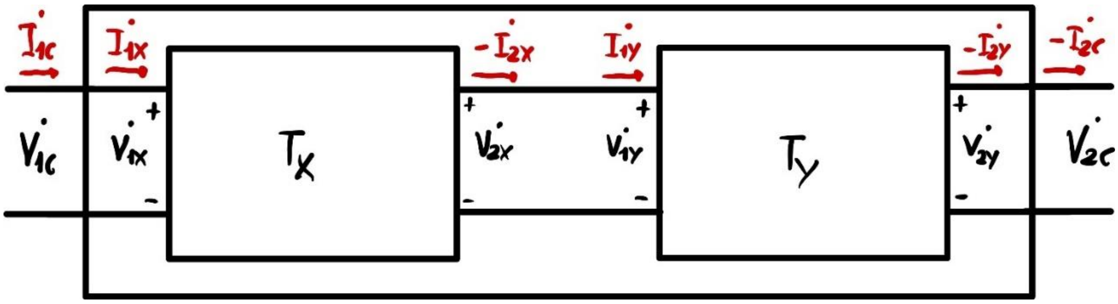
$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{1H} \\ \dot{I}_{2H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{1A} \\ \dot{I}_{2A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{V}_{1B} \\ \dot{I}_{2B} \end{bmatrix} = \overline{h}_A \begin{bmatrix} \dot{I}_{1A} \\ \dot{V}_{2A} \end{bmatrix} + \overline{h}_B \begin{bmatrix} \dot{I}_{1B} \\ \dot{V}_{2B} \end{bmatrix}$$

Dato che $\dot{I}_{1H} = \dot{I}_{1A} = \dot{I}_{1B}$ (dovuto alla disposizione in serie della porta 1) e $\dot{V}_{2H} = \dot{V}_{2A} = \dot{V}_{2B}$ (dovuto alla disposizione in parallelo della porta 2) otteniamo

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{V}_{1H} \\ \dot{I}_{2H} \end{bmatrix} = (\overline{h}_A + \overline{h}_B) \begin{bmatrix} \dot{I}_{1H} \\ \dot{V}_{2H} \end{bmatrix}}$$

6.3.4 Interconnessioni a cascata (Parametrizzazione T)

Due circuiti a due porte si dicono interconnessi a cascata quando la corrente e la tensione d'uscita del primo circuito coincidono con la corrente e la tensione d'ingresso del secondo circuito, come in figura:



Poniamo quanto segue (solito festival di sostituzioni):

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{1C} \\ \dot{I}_{1C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{1x} \\ \dot{I}_{1x} \end{bmatrix} = T_x \begin{bmatrix} \dot{V}_{2x} \\ -\dot{I}_{2x} \end{bmatrix} = T_x \begin{bmatrix} \dot{V}_{1y} \\ \dot{I}_{1y} \end{bmatrix} = T_x \cdot T_y \begin{bmatrix} \dot{V}_{2C} \\ -\dot{I}_{2C} \end{bmatrix}$$

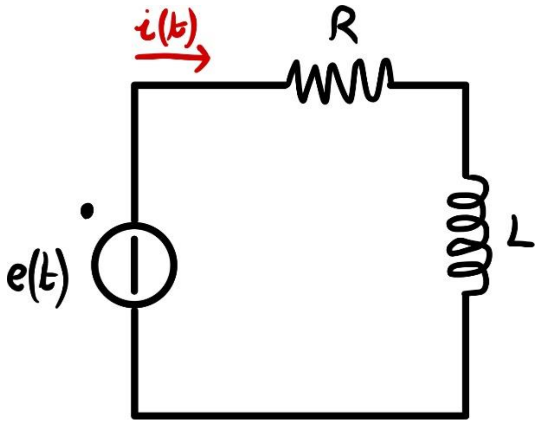
Ci vuole il meno in $\dot{I}_{2x}$ affinchè la corrente in uscita del primo blocco sia uguale alla corrente in ingresso del secondo blocco.

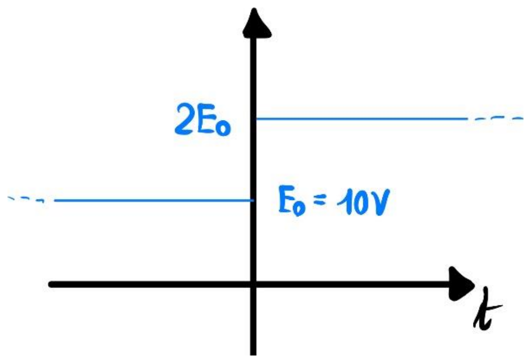
7.1 Introduzione

Fino ad ora abbiamo visto le seguenti tipologie di circuito:

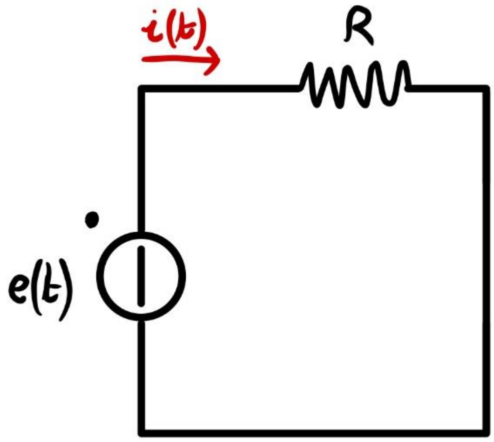
- **Circuiti in continua**
  Tutte le correnti e tutte le tensioni sono a valori costanti
- **Circuiti in regime periodico-sinusoidale**
  Tutte le correnti e tutte le tensioni sono descritte per mezzo di funzioni periodiche aventi andamento sinusoidale. Si pone la stessa pulsazione in tutte queste funzioni!

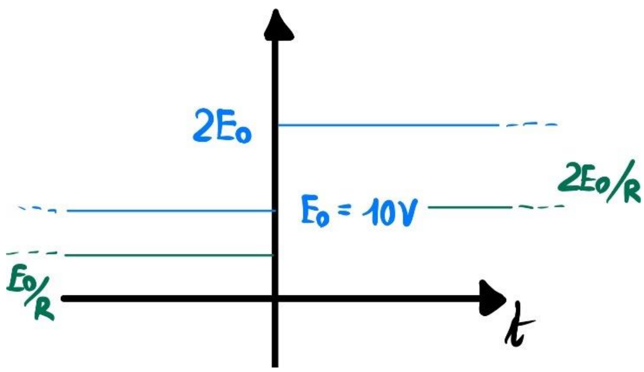
Cosa succede se le forme d'onda dei generatori hanno comportamenti diversi rispetto a quelli visti nei circuiti in regime periodico-sinusoidale? Consideriamo il seguente circuito, dove la tensione erogata $e(t)$ ha un andamento diverso rispetto a quello solito (figura a destra)





Se consideriamo solo tempi negativi o solo tempi negativi otteniamo un circuito in continua, dove l'induttore viene sostituito con un cortocircuito (si pongono in verde le correnti che circolano nel circuito).





Cosa succede, invece, nel passaggio dal tempo negativo al tempo positivo? Si ha un transitorio a seguito del quale (un tempo sufficiente) avremo nuovamente una corrente costante.

Siamo in grado di capire cosa succede nel transitorio con gli strumenti adottati fino ad ora? Sì!

Studiamo il circuito per t > 0. Applichiamo il secondo principio di Kirkhoff

$$-e(t) + Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = 0 \Longrightarrow -2E_0 + Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = 0$$

L'equazione ottenuta è un'equazione differenziale che risolviamo individuando soluzione omogenea e soluzione particolare.

$$i(t) = i_O(t) + i_P(t)$$

Partiamo dalla omogenea

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = 0$$

Un'equazione di questo tipo può essere soddisfatta con una soluzione del tipo

$$i_O(t) = Ae^{\lambda t}$$

Troviamo λ scrivendo l'equazione caratteristica

$$R\lambda^0 + L\lambda^1 = 0$$

$$R + L\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = -\frac{R}{L}$$

Segue

$$i_O(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

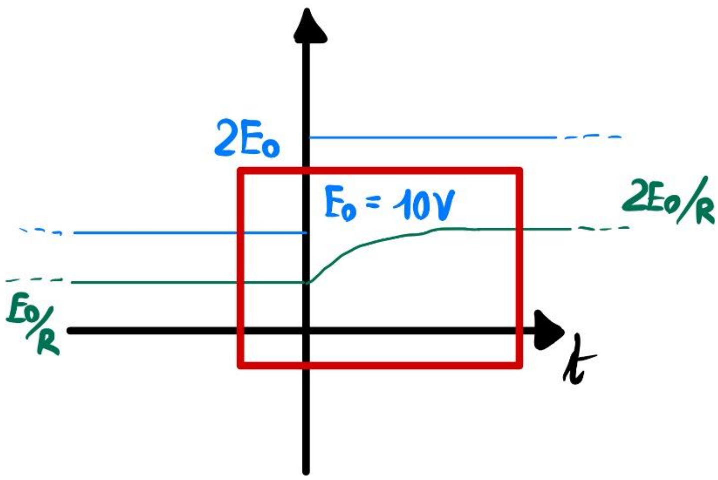
Adesso troviamo la soluzione particolare, che ha come andamento quello del termine noto: costante!

$$i_P(t) = I_P \Longrightarrow -2E_0 + RI_P = 0 \longrightarrow I_P = \frac{2E_0}{R}$$

$$i(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{2E_0}{R}$$

Imponendo $i(0) = \frac{E_0}{R}$ otteniamo $i(0) = \frac{E_0}{R} = A + \frac{2E_0}{R} \Longrightarrow A = -\frac{E_0}{R}$

$$\boxed{i(t) = -\frac{E_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{2E_0}{R}}$$



Due aspetti:

- Tanti calcoli per un circuito estremamente semplice (ci siamo limitati a studiare t > 0 !!!)
- A fronte di una variazione istantanea della tensione la corrente non cambia seguendo lo stesso andamento: abbiamo un'esponenziale, non è più vero che tutte le correnti e tutte le tensioni hanno lo stesso andamento.

Per poter studiare circuiti di questo tipo in modo semplice è necessario introdurre un nuovo strumento: la trasformata di Laplace!

7.2 Introduzione alla trasformata di Laplace

7.2.1 Definizione

Definiamo nel seguente modo la trasformata di Laplace.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Si compie il passaggio dal dominio del tempo al dominio di Laplace (dove si lavora con le frequenze generalizzate, $s = \sigma + j\omega$), in modo simile al passaggio già visto dal dominio del tempo al dominio dei fasori (stessi vantaggi, trasformare operazioni integro-differenziali in operazioni algebriche)!

7.2.2 Proprietà della trasformata

Introduciamo le proprietà principali della trasformata di Laplace

- **Linearità**

  $$\boxed{\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{f_2(t)\} = c_1F_1(s) + c_2F_2(s)}$$

  La dimostrazione è immediata osservando le proprietà degli integrali (integrale di una somma equivale alla somma degli integrali, inoltre le costanti si portano fuori dagli integrali). Esempio (si veda più avanti la relativa trasformata notevole):

  $$\mathcal{L}\left\{-7e^{-5t} + \frac{1}{4}e^{3t}\right\} = -7\cdot\frac{1}{s+5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-3}$$

- **Derivata**

  $$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-)}$$

- **Integrale**

  $$\boxed{\mathcal{L}\left\{\int f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} f(t)dt}$$

Derivazione e integrazione possono essere immaginate come una generalizzazione del metodo fasoriale, ma abbiamo ulteriori termini che tengono conto delle condizioni iniziali (nulle se si parte dall'istante 0 con un circuito completamente scarico).

7.2.3 Trasformate notevoli

La definizione porterebbe a pensare che dobbiamo calcolare integrali ogni volta: in realtà no, utilizzeremo le seguenti trasformate notevoli senza calcolare integrali

[Si vedano due ulteriori trasformate notevoli nella sezione dedicata ai casi limite dello sviluppo in fratti semplici]

<u>**Trasformata della funzione esponenziale**</u>.

$$\boxed{f(t) = e^{at} \Rightarrow \mathrm{F(s)} = \frac{1}{\mathrm{s-a}}} \qquad \boxed{f(t) = e^{-at} \Rightarrow \mathrm{F(s)} = \frac{1}{\mathrm{s+a}}}$$

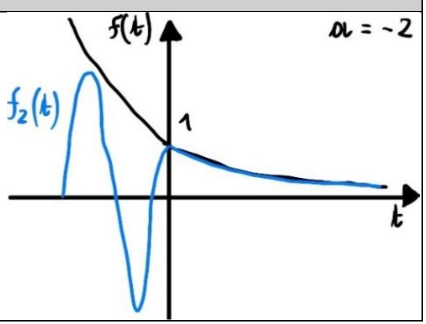
$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} e^{at}\,e^{-st}dt \int_{0^-}^{+\infty} e^{(a-s)t}\,dt = \left.\frac{e^{(a-s\}t}}{a-s}\right|_{0^-}^{+\infty} = 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

Riflessione

Supponiamo di avere una funzione $f_2(t)$ che presenta lo stesso andamento di $f(t)$ per ogni $t \geq 0$: quale sarà la trasformata di Laplace?

Ai sensi della definizione, che tiene conto solo dell'intervallo $[0; +\infty]$, otteniamo che la trasformata di Laplace è la stessa ottenuta da $f(t)$!

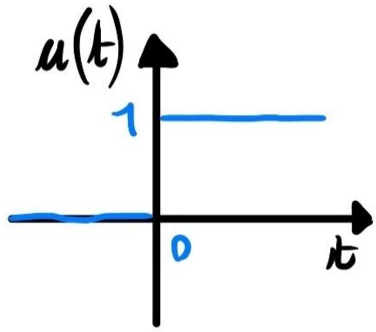
Questione: cosa succede se calcoliamo la *anti-trasformata di Laplace*



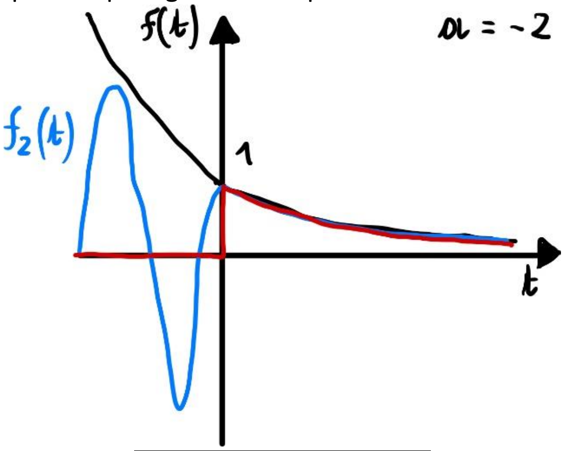
(inverso dell'operazione con cui abbiamo ottenuto $F(s)$)? Allo stato attuale non abbiamo univocità (abbiamo infinite possibilità, basta che sia tutto uguale nel tratto $t \geq 0$)!

Risolviamo introducendo la cosiddetta *funzione gradino*

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Affermiamo, nel calcolo dell'anti-trasformata, che esiste una sola funzione nel dominio del tempo che coincide con $F(s)$: quella che per tempi negativi è sempre zero.



$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{at} \cdot u(t)}$$

Trasformata della funzione gradino.

$$\boxed{f(t) = u(t) \Longrightarrow F(s) = \frac{1}{s}} \qquad \boxed{f(t) = 1 \Longrightarrow F(s) = \frac{1}{s} \quad \text{(Per le stesse ragioni poste nelle riflessioni)}}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{0s}\} = \frac{1}{s}$$

Trasformata dell'integrale della funzione gradino (trasformata della funzione rampa).
Otteniamo la trasformata applicando la proprietà della trasformata dell'integrale e utilizzando la trasformata notevole della funzione gradino:

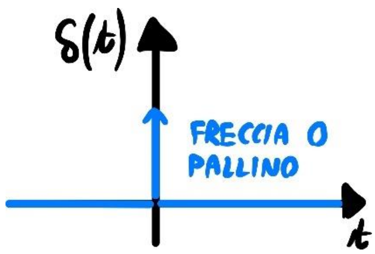
$$\boxed{f(t) = \int u(t)dt = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{F(s)} = \frac{1}{s^2}}$$

$$F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

Trasformata della derivata della funzione gradino (trasformata della Delta di Dirac, o segnale impulsivo).
La derivata è nulla in tutti i punti (valori costanti), tranne nell'origine (dove si ha variazione istantanea) dove assumerà un valore $+\infty$: abbiamo ottenuto la cosiddetta **Delta di Dirac**. Otteniamo la trasformata applicando la proprietà della trasformata della derivata e utilizzando la trasformata notevole della funzione gradino

$$\boxed{f(t) = \frac{du(t)}{dt} = \delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases} \Longrightarrow F(s) = 1}$$

$$F(s) = s\frac{1}{s} = 1$$

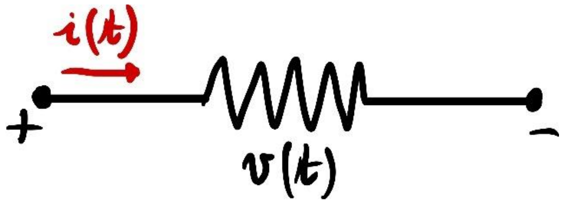


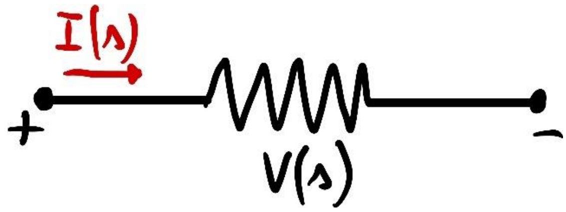
7.2.4 Trasformate dei bipoli elettrici

Calcoliamo le trasformate dei bipoli elettrici noti sfruttando le proprietà e le trasformate notevoli.

7.2.4.1 Resistenze

Equivalenza molto semplice: abbiamo una resistenza nel dominio del tempo e continuiamo ad avere una resistenza nel dominio di Laplace



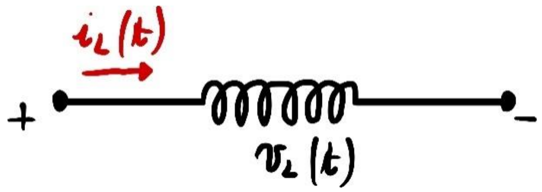


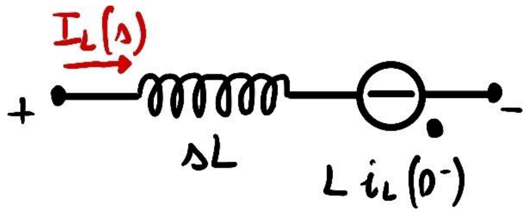
$$v(t) = R \cdot i(t)$$

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = \mathcal{L}\{R \cdot i(t)\}$$
$$V(s) = R \cdot \mathcal{L}\{i(t)\}$$
$$\boxed{V(s) = R \cdot I(s)}$$

7.2.4.2 Induttori

L'induttore, nel dominio di Laplace, si rappresenta con un induttore avente induttanza sL, disposto in serie a un generatore di tensione che definiamo *generatore di condizioni iniziali*, che eroga una tensione $L \cdot i_L(0^-)$. Occhio alla posizione del contrassegno (che tiene conto del segno negativo nella formula).



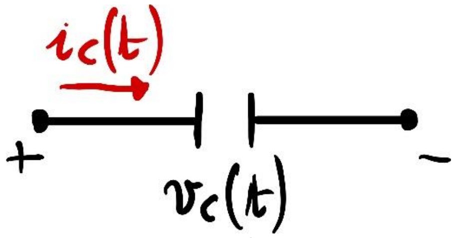


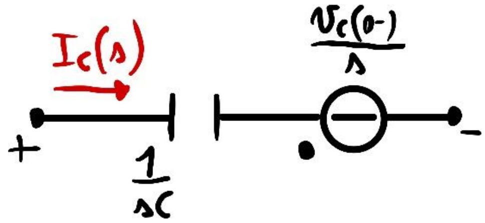
$$v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\mathcal{L}\{v_L(t)\} = \mathcal{L}\left\{L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}\right\}$$
$$V_L(s) = L \cdot \mathcal{L}\left\{\frac{di_L(t)}{dt}\right\}$$
$$V_L(s) = L\big(s \cdot I_L(s) - i_L(0^-)\big)$$
$$\boxed{V_L(s) = sL \cdot I_L(s) - L \cdot i_L(0^-)}$$

7.2.4.3 Condensatori

Anche in questo caso otteniamo, nel dominio di Laplace, il bipolo elettrico stesso (il condensatore, avente capacità $\frac{1}{Cs}$) disposto in serie con un generatore di condizioni iniziali che eroga tensione $\frac{v_C(0^-)}{s}$.





$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau$$

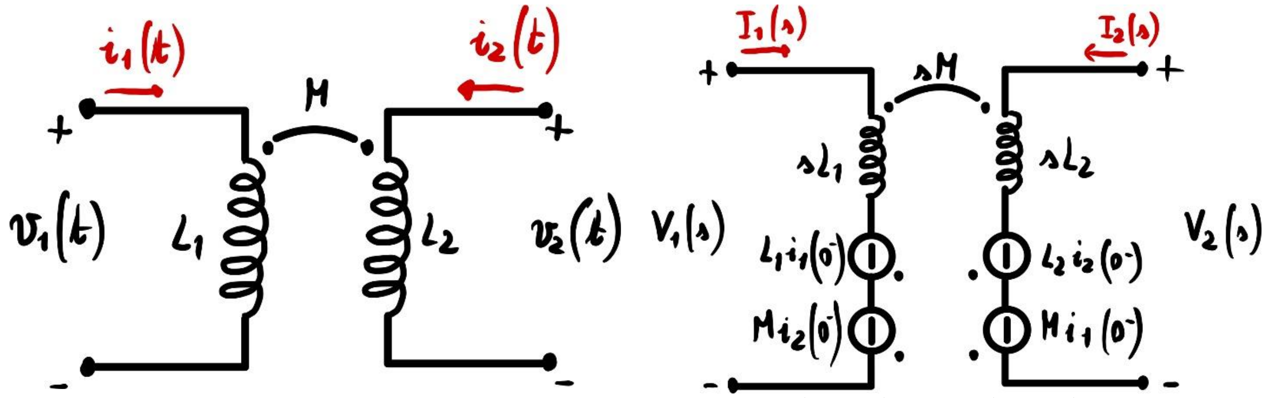
$$\mathcal{L}\{v_C(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau\right\}$$
$$V_C(s) = \frac{1}{C}\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau\right\}$$
$$V_C(s) = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{s}I_C(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} i_c(t)dt\right)$$
$$V_C(s) = \frac{1}{Cs}I_c(S) + \frac{1}{Cs}q(0^-)$$

Passaggio conclusivo (sostituzione della carica) ottenuto ricordando che $q(0^-) = C \cdot v(0^-)$

$$\boxed{V_C(s) = \frac{1}{Cs}I_C(s) + \frac{1}{s}v_C(0^-)}$$

7.2.4.4 *Induttori mutuamente accoppiati*

Osserviamo che le formule nel dominio di Laplace, per gli induttori mutuamente accoppiate, sono le solite già viste per il singolo induttore, ma con l'aggiunta di un ulteriore generatore di condizioni iniziali per induttore. Complessivamente dobbiamo aggiungere la bellezza di quattro generatori di condizioni iniziali!



$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \dfrac{di_1(t)}{dt} \pm M \dfrac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = L_2 \dfrac{di_2(t)}{dt} \pm M \dfrac{di_1(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1(s) = L_1 \mathcal{L}\left\{\dfrac{di_1(t)}{dt}\right\} \pm M\mathcal{L}\left\{\dfrac{di_2(t)}{dt}\right\} \\ V_2(s) = L_2 \mathcal{L}\left\{\dfrac{di_2(t)}{dt}\right\} \pm M\mathcal{L}\left\{\dfrac{di_1(t)}{dt}\right\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_1(s) = sL_1I_1(s) - L_1i_1(0^-) \pm (sMI_2(s) - Mi_2(0^-)) \\ V_2(s) = sL_2I_2(s) - L_2i_2(0^-) \pm (sMI_1(s) - Mi_1(0^-)) \end{cases}$$

Si faccia estrema attenzione al segno dei termini della mutua induzione, secondo quanto già spiegato a introduzione degli induttori mutuamente accoppiati: la cosa si ripercuote sulla posizione dei contrassegni!

7.2.5 Sviluppo in fratti semplici per l'individuazione delle anti-trasformate

Consideriamo la seguente formula, di cui vogliamo trovare l'anti-trasformata.

$$I(s) = \frac{s^2 + 5}{3s^3 + 9s^2 + 6s}$$

Non sono evidenti trasformate notevoli. La prima cosa che viene in mente è applicare la definizione di *anti-trasformata di Laplace*, con cui compiamo il passaggio dal dominio di Laplace al dominio del tempo.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\cdot\infty}^{\sigma + j\cdot\infty} F(s)e^{-st}\, ds$$

La formula dell'anti-trasformata di Laplace risulta decisamente poco intuitiva. Possiamo trovare l'anti-trasformata in modo più veloce? Vediamo i seguenti passaggi

- **Rendere monico il polinomio al denominatore**.
  Il passaggio aiuta ad evitare errori negli step successivi.

$$I(s) = \frac{s^2 + 5}{3(s^3 + 3s^2 + 2s)} = \frac{3\left(\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}\right)}{3(s^3 + 3s^2 + 2s)} = \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

  Fattorizzazione del denominatore.
  Fattorizziamo il denominatore. Si ottiene s con raccoglimento, si ottengono $s + 1$ ed $s + 2$ individuando le radici dell'equazione di secondo grado.

$$I(s) = \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s^3 + 3s^2 + 2s} = \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s(s + 1)(s + 2)}$$

- **Sviluppo in fratti semplici**.
  Attuiamo la cosiddetta decomposizione in fratti semplici: vogliamo porre la $I(s)$ ottenuta al passo precedente nella seguente forma.

$$I(s) = \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+2} \qquad \boxed{I(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s - p_i}}$$

  La cosa ci piace: grazie alle trasformate notevoli possiamo ottenere al volo l'anti-trasformata.

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = (A_1 + A_2 e^{-t} + A_3 e^{-2t})u(t)$$

  Si ricordi che per essere formali (per avere un'unica possibile anti-trasformata) si deve moltiplicare tutta la formula per la funzione gradino $u(t)$.

  Sviluppiamo l'uguaglianza per trovare A_1, A_2, A_3

$$\frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+2} = \frac{A_1(s+1)(s+2) + A_2(s+2)(s) + A_3(s+1)(s)}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A_1(s^2+3s+2) + A_2(s^2+2s) + A_3(s^2+s)}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3} = A_1(s^2+3s+2) + A_2(s^2+2s) + A_3(s^2+s)$$

$$\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3} = A_1 s^2 + 3A_1 s + 2A_1 + A_2 s^2 + 2A_2 s + A_3 s^2 + A_3 s$$

$$\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3} = s^2(A_1 + A_2 + A_3) + s(3A_1 + 2A_2 + A_3) + (2A_1)$$

$$\frac{1}{3}s^2 + 0s + \frac{5}{3} = s^2(A_1 + A_2 + A_3) + s(3A_1 + 2A_2 + A_3) + (2A_1)$$

  Dai passaggi svolti si è ottenuto che

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{3} \\ 3A_1 + 2A_2 + A_3 = 0 \\ 2A_1 = \frac{5}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{5}{6} \\ A_2 = -2 \\ A_3 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I(s) = \frac{5}{6s} - \frac{2}{s+1} + \frac{3}{2(s+2)} \quad \Longrightarrow \boxed{i(t) = \left(\frac{5}{6} - 2e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}\right)u(t)}$$

7.2.6 Teorema dei residui

Possiamo semplificarci la vita nel calcolo dei valori A_i utilizzando il teorema dei residui

$$I(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s - p_i} \Longrightarrow A_i = \lim_{s \to p_i} (s - p_i)\, I(s)$$

Applichiamolo nell'esempio appena visto! $I(s) = \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+2}$

- **Calcolo di A_1**

$$A_1 = \lim_{s \to 0} s\, I(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s \to 0} \frac{\frac{5}{3}}{(1)(2)} = \frac{5}{6}$$

- **Calcolo di A_2**

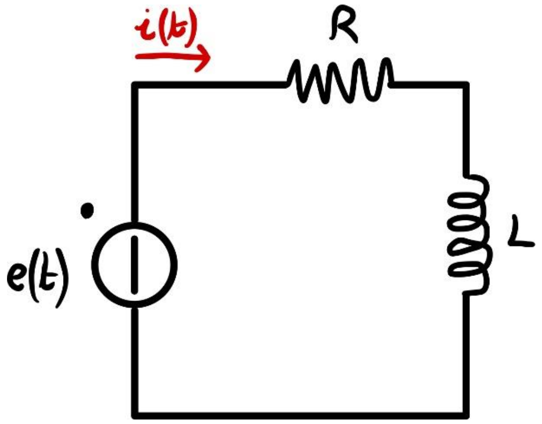
$$A_2 = \lim_{s \to -1} s\, I(s) = \lim_{s \to -1} (s+1) \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s \to -1} \frac{\frac{1}{3} + \frac{5}{3}}{-1(-1+2)} = \lim_{s \to -1} \frac{\frac{6}{3}}{-1} = -2$$

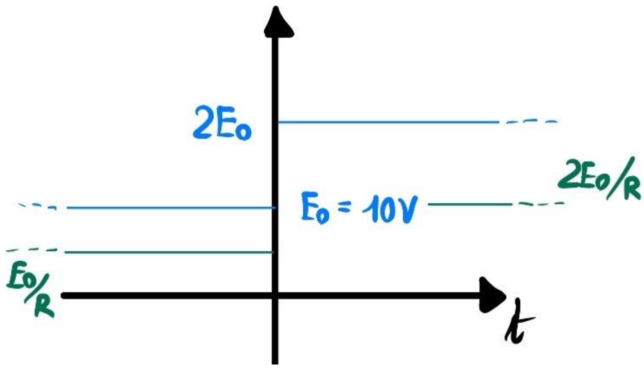
- **Calcolo di A_3**

$$A_3 = \lim_{s \to -2} s\, I(s) = \lim_{s \to -2} (s+2) \frac{\frac{s^2}{3} + \frac{5}{3}}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s \to -2} \frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{3}}{-2(-2+1)} = \lim_{s \to -2} \frac{\frac{9}{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

7.2.7 Risoluzione dell'esempio di partenza nel dominio di Laplace

Riprendiamo l'esempio di partenza e impostiamo una risoluzione nel dominio di Laplace. Si richiede di calcolare la corrente $i(t)$ in tempi positivi.

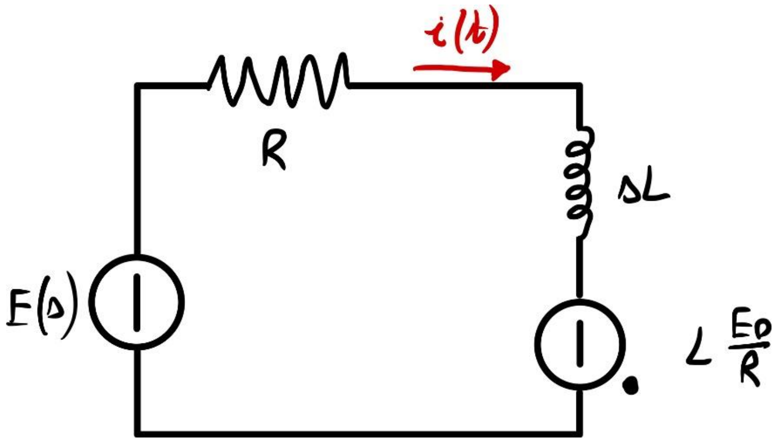




Tre passaggi:

- **Calcolo condizioni iniziali a 0^-**
  Il calcolo è necessario per le trasformate di Laplace di derivate e integrali
  $$i_L(0^-)$$
  Studiamo il circuito per $t \leq 0$: abbiamo un circuito in continua dove l'induttore è sostituito da un cortocircuito. Osserviamo che
  $$v_L(0^-) = E_0 \qquad\qquad i_L(0^-) = \frac{E_0}{R}$$
  E se avessimo avuto 0^+ invece di 0^-? Male, ci sarebbe stato il transitorio e quindi l'induttore sarebbe rimasto.

- **Risoluzione dell'esercizio nel dominio di Laplace**.
  Studiamo il circuito per tempi $t \ \geq 0$. Disegniamo il circuito L-trasformato, nel dominio di Laplace (ricordarsi le cose spiegate nelle pagine precedenti).



  Quanto vale $E(s)$? Si ricordi che studiando i tempi positivi si scarta la parte nei tempi negativi, non dobbiamo trovare la trasformata di Laplace della funzione gradino, ma la trasformata di $2E_0$
  $$E(s) = \mathcal{L}\{2E_0\} = \frac{2E_0}{s}$$
  La resistenza rimane uguale, l'induttore L diventa un induttore avente induttanza di Laplace sL, in serie con un generatore di condizioni iniziali $L\frac{E_0}{R}$ (che ha contrassegno consistente col verso della corrente richiesta). Presa la maglia in figura scriviamo l'equazione
  $$-\frac{2E_0}{s} + RI(s) + sLI(s) - \frac{E_0}{R}L = 0$$
  Otteniamo

$$I(s) = \frac{\frac{2E_0}{s} + \frac{E_0}{R}L}{R + sL} = \frac{2E_0R + sE_0L}{sR(R + sL)}$$

Abbiamo ottenuto una funzione razionale fatta data da un rapporto tra due polinomi nella var. s.

- **Sviluppo in fratti semplici e teorema dei residui per trovare l'anti-trasformata**.
  L'esercizio richiede $i(t)$, non $I(s)$: dobbiamo tornare nel dominio del tempo! Non vogliamo usare la definizione di anti-trasformata per trovare $i(t)$: applichiamo lo sviluppo in fratti semplici e il teorema dei residui!

$$I(s) = \frac{2E_0R + sE_0L}{sR(R + sL)} = \frac{sLE_0 + 2RE_0}{s^2RL + sR^2} = \frac{\frac{sE_0}{R} + \frac{2E_0}{L}}{s^2 + s\frac{R}{L}} = \frac{\frac{sE_0}{R} + \frac{2E_0}{L}}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{R}{L}}$$

$$\Rightarrow i(t) = \left(A + B \cdot e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t)$$

Calcoliamo A e B

$$A = \lim_{s\to 0} s\frac{\frac{sE_0}{R} + \frac{2E_0}{L}}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)} = \frac{2E_0}{R}$$

$$B = \lim_{s\to -\frac{R}{L}} \left(s + \frac{R}{L}\right)\frac{\frac{sE_0}{R} + \frac{2E_0}{L}}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)} = \frac{-\frac{E_0}{L} + \frac{2E_0}{L}}{-\frac{R}{L}} = -\frac{E_0}{R}$$

Finito!

$$i(t) = \left(\frac{2E_0}{R} - \frac{E_0}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t)$$

La stessa soluzione che avevamo trovato agli inizi utilizzando le equazioni differenziali!

7.2.8 Casi limite

Avviso. Solitamente lo scritto presenta sviluppo in fratti semplici "normale", quanto segue viene chiesto soprattutto all'orale.

7.2.8.1 Funzioni fratte con polinomi dello stesso grado

Consideriamo il seguente esempio

$$I(s) = \frac{2s^2}{s^2 + 4s + 3}$$

I due polinomi hanno una caratteristica particolare: il grado del numeratore è sempre minore o uguale di quello del denominatore. Grado uguale è un caso limite! Cosa succede se attuiamo lo sviluppo in fratti semplici?

$$I(s) = \frac{2s^2}{(s + 3)(s + 1)} = \frac{A}{s + 3} + \frac{B}{s + 1}$$

- Se ci muoviamo con la procedura classica ci accorgiamo che qualcosa sta andando storto
$$\frac{A}{s + 3} + \frac{B}{s + 1} = \frac{A(s + 1) + B(s + 3)}{(s + 3)(s + 1)}$$
  Non otteniamo mai s^2 al denominatore!
- Se utilizziamo il teorema dei residui otteniamo A e B, sbagliando tutto.

Risolviamo andando ad effettuare una divisione tra numeratore e denominatore, in modo tale da abbassare il grado del numeratore. Questa divisione è considerata dal docente come cosa appresa nei corsi precedenti: ci limitiamo ad osservare un trucchetto

$$I(s) = \frac{2s^2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{2(s^2 + 4s + 3) - 8s - 6}{s^2 + 4s + 3} = 2 - \frac{8s + 6}{s^2 + 4s + 3}$$

Abbiamo sostituito s^2 al numeratore col denominatore, e successivamente tolto le cose non presenti al numeratore. Il nuovo polinomio fratto può essere risolto col teorema dei residui

$$I(s) = 2 - \frac{8s+6}{s^2+4s+3} = 2 - \frac{8s+6}{(s+3)(s+1)} = 2 - \frac{A}{s+3} - \frac{B}{s+1}$$
$$\Rightarrow i(t) = 2\delta(t) - Ae^{-3t} - Be^{-t}$$

$$A = \lim_{s\to -3}(s+3)\frac{8s+6}{(s+3)(s+1)} = 9$$
$$B = \lim_{s\to -1}(s+1)\frac{8s+6}{(s+3)(s+1)} = -1$$

Finito!

$$i(t) = 2\delta(t) - 9e^{-3t} + e^{-t}$$

7.2.8.2 Radici complesse e coniugate al denominatore

7.2.8.2.1 Spiegazioni

Consideriamo il seguente esempio

$$I(s) = \frac{s+2}{s^2+9}$$

Quali sono le radici in questo caso (Abbiamo $s^2 = -9$)? Radici complesse coniugate!

Per prima cosa applichiamo il teorema dei residui.

$$\frac{s+2}{s^2+9} = \frac{s+2}{(s+3j)(s-3j)}$$

Applicando il teorema dei residui otteniamo

$$A = \lim_{s\to -3j}(s+3j)\frac{s+2}{(s+3j)(s-3j)} = \frac{2-3j}{-6j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}j$$
$$B = \lim_{s\to 3j}(s-3j)\frac{s+2}{(s+3j)(s-3j)} = \frac{2+3j}{6j} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}j$$

Quindi

$$i(t) = \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}j\right)e^{3jt} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}j\right)e^{-3jt}\right]u(t)$$

$i(t)$ è una grandezza complessa? Verifichiamolo!

$$i(t) = (M + j\cdot N)e^{-(\sigma+j\omega)t} + (M - jN)e^{-(\sigma-j\omega)t}$$
$$i(t) = Me^{-(\sigma+j\omega)t} + jNe^{-(\sigma+j\omega)t} + Me^{-(\sigma-j\omega)t} - jNe^{-(\sigma-j\omega)t}$$
$$i(t) = M\left(e^{-(\sigma+j\omega)t} + e^{-(\sigma-j\omega)t}\right) + j\cdot N\left(e^{-(\sigma+j\omega)t} - e^{-(\sigma-j\omega)t}\right)$$
$$i(t) = Me^{-\sigma t}\left(e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}\right) + j\cdot Ne^{-\sigma t}\left(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}\right)$$
$$i(t) = Me^{-\sigma t}[cos(-\omega t) + j\,sin(-\omega t) + cos(\omega t) + j\,sin(\omega t)] + j\cdot Ne^{-\sigma t}[cos(-\omega t) + j\,sin(-\omega t) - cos(\omega t) - j\,sin(\omega t)]$$
$$i(t) = Me^{-\sigma t}[cos(\omega t) - j\,sin(\omega t) + cos(\omega t) + j\,sin(\omega t)] + j\cdot Ne^{-\sigma t}[cos(\omega t) - j\,sin(\omega t) - cos(\omega t) - j\,sin(\omega t)]$$
$$i(t) = Me^{-\sigma t}[2cos(\omega t)] + j\cdot Ne^{-\sigma t}[-2j\,sin(\omega t)]$$
$$i(t) = 2Me^{-\sigma t}[cos(\omega t)] + j\cdot 2Ne^{-\sigma t}[-j\,sin(\omega t)]$$
$$i(t) = 2Me^{-\sigma t}[cos(\omega t)] + 2Ne^{-\sigma t}[sin(\omega t)]$$

Abbiamo ottenuto che $i(t)$ ha valori reali in qualunque istante temporale t: la formula va bene!

$$i(t) = K\,e^{-\sigma t}\,sin(\omega t + \alpha)$$

Troviamo K e α sviluppando la formula appena detta

$$i(t) = Ke^{-\sigma t}[sin(\omega t)\,cos(\alpha)] + Ke^{-\sigma t}[cos(\omega t)\,sin(\alpha)]$$

Poniamo le seguenti uguaglianze

$$\begin{cases} Ke^{-\sigma t}[sin(\omega t)\,cos(\alpha)] = 2Ne^{-\sigma t}[sin(\omega t)] \longrightarrow K\,cos(\alpha) = 2N \\ Ke^{-\sigma t}[cos(\omega t)\,sin(\alpha)] = 2Me^{-\sigma t}[cos(\omega t)] \Rightarrow K\,sin(\alpha) = 2M \end{cases}$$

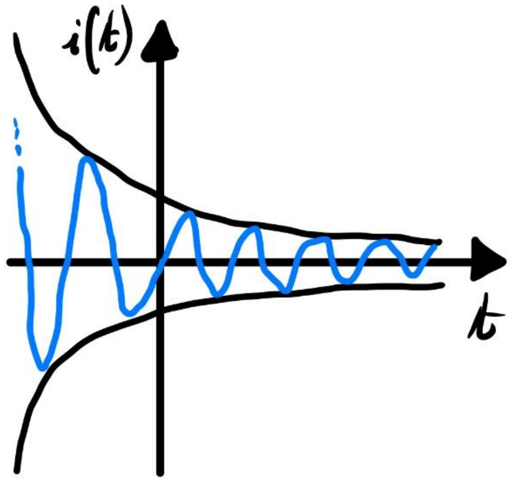
Dividiamo la seconda equazione per la prima

$$K\,tan(\alpha) = \frac{2M}{2N} \longrightarrow \alpha = arctan\left(\frac{M}{N}\right)$$
$$K^2\,cos^2(\alpha) + K^2\,sin^2(\alpha) = 4N^2 + 4M^2$$
$$K^2[cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha)] = 4N^2 + 4M^2$$
$$K^2 = 4N^2 + 4M^2 \Rightarrow K = \sqrt{4N^2 + 4M^2}$$

Fatto! Sostituiamo in $i(t)$

$$i(t) = \sqrt{4N^2 + 4M^2}\,e^{-\sigma t}\,sin\left(\omega t + arctan\left(\frac{M}{N}\right)\right)$$

Se disegniamo graficamente la funzione osserviamo che questa oscilla con un sin tra il min e il max.



Abbiamo dimostrato che quando $I(s)$ ha poli complessi coniugati $i(t)$ non sarà un esponenziale negativo, ma un esponenziale oscillatorio il cui comportamento dipende da σ.

- Se $\sigma < 0$ il comportamento è quello della figura qua sopra.
- Se $\sigma = 0$ otteniamo una funzione oscillatoria non smorzata.
- Se $\sigma > 0$ gli asintoti tenderanno a $+\infty$ e non a zero come in figura.

7.2.8.2.2 Ulteriori trasformate notevoli

Introduciamo le seguenti trasformate notevoli

$$\boxed{f(t) = sin(\omega t) \Rightarrow F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}$$
$$\boxed{f(t) = cos(\omega t) \Rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}}$$

Riprendiamo l'esempio delle pagine precedenti e anti-trasformiamolo con le trasformate notevoli

$$I(s) = \frac{s+2}{s^2+9} = \frac{s}{s^2+9} + \frac{2}{s^2+9} \Rightarrow i(t) = cos(3t) + \frac{2}{3}sin(3t)$$

Il secondo termine è stato ottenuto ponendo $\frac{2}{s^2+9} = \frac{2}{s^2+9} \cdot \frac{3}{3} = \frac{2}{3}\frac{3}{s^2+9}$

7.2.8.3 Poli multipli

Consideriamo il seguente esempio dove abbiamo tre radici dello stesso valore

$$V(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} \qquad \boxed{V(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(s-p_i)^i}}$$

Come ci comportiamo? Nel seguente modo

$$V(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)^3}$$

Ci serve un'ulteriore trasformata notevole

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \Longrightarrow F(s) = \frac{1}{(s+a)^n}}$$

La formula per il calcolo dei residui si complica!

$$A_i = \lim_{s \to p_i} \frac{1}{(n-i)!} \frac{\partial^{n-i}}{\partial s^{n-i}} [(s-p_i)^n \cdot V(s)]$$

Applichiamo il teorema dei residui all'esempio

$$A_1 = \lim_{s \to -1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[(s+1)^3 \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3} \right] = 1$$

$$A_2 = \lim_{s \to -1} \frac{1}{1} \frac{\partial}{\partial s} \left[(s+1)^3 \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3} \right] = 0$$

$$A_3 = \lim_{s \to -1} \frac{1}{1} \left[(s+1)^3 \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3} \right] = 2$$

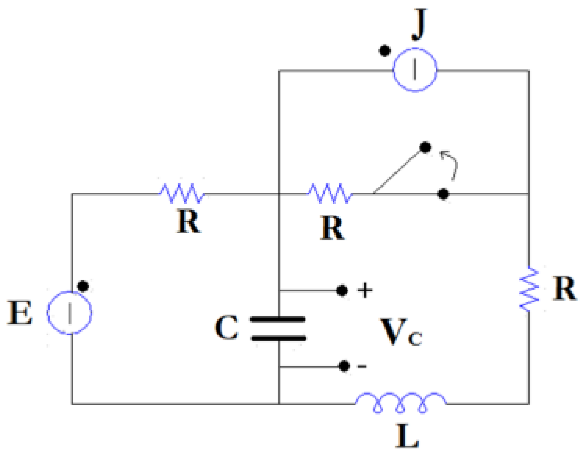
Individuiamo l'anti-trasformata

$$V(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^3} \Longrightarrow v(t) = \left[e^{-t} + 2\left(\frac{1}{2} t^2 e^{-t}\right) \right] u(t)$$

7.3 Andamento temporale della tensione con interruttore (Appello 27-01-2021)

7.3.1 Esercizio

Determinare l'andamento temporale della tensione $V_C(t)$ ai capi del condensatore per $-\infty < t < +\infty$, considerando che l'interruttore si APRE per t=0. Il circuito è ipotizzato a regime per tempi negativi.



E = 50 V (costante);
J = 5 A (costante);
R = 10 Ω;
L = 10 mH;
C = 100 μF.

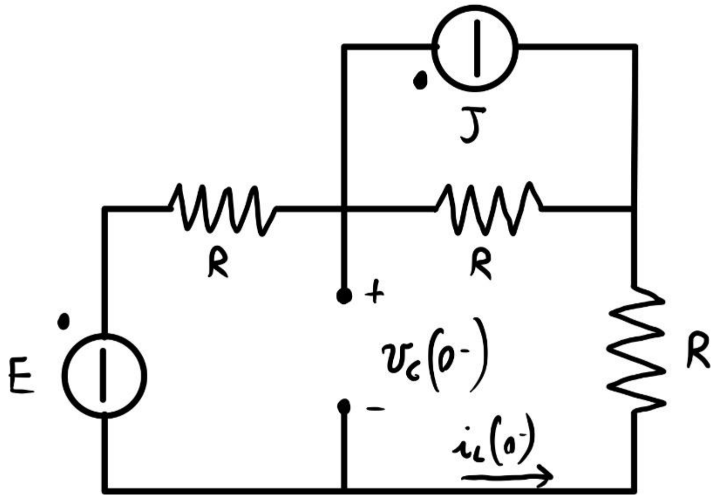
La difficoltà dell'esercizio sta su un aspetto: i valori sono costanti in tutti l'intervallo temporale richiesto, ma si ha un interruttore aperto o chiuso. Se l'interruttore è aperto non scorre corrente sul ramo.

- L'interruttore viene aperto a $t = 0$.
- Per tempi positivi non scorre più corrente sulla resistenza vicina all'interruttore, ma c'è un transitorio da gestire.

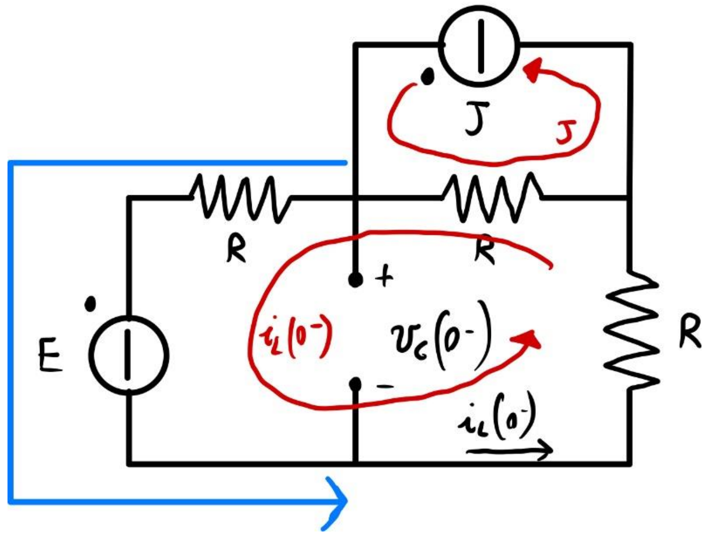
Come risolviamo?

- **Studio del circuito in $t < 0$**
  Studiamo il circuito in tempi negativi.

- L'interruttore è chiuso, quindi la resistenza nel ramo è presente nel circuito.
- Valori costanti: sostituiamo induttore col cortocircuito e condensatore con circuito aperto.



Due strade: applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, applicare un metodo generale per la risoluzione di un circuito. Applichiamo correnti di maglia



Scriviamo l'equazione della maglia inferiore (non serve per quella sopra, corrente già nota).

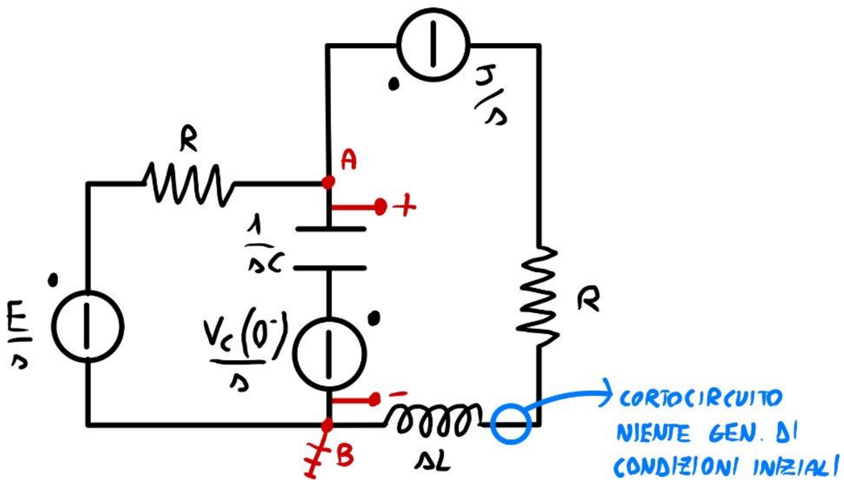
$$3Ri_L(0^-) - RJ + E = 0 \Longrightarrow i_L(0^-) = \frac{RJ - E}{5R} = \frac{50 - 50}{30} = 0$$

Ci manca la tensione $v_C(0^-)$, che troviamo percorrendo il ramo indicato con la freccia blu

$$v_C(0^-) = Ri_L(0^-) + E = 0 + E = 50\,\mathrm{V}$$

- **Studio del circuito in $t \geq 0$**

  Disegniamo il circuito L-trasformato, nel dominio di Laplace.



Occhio a quale tensione del condensatore calcoliamo: il condensatore, nel dominio di Laplace, è un condensatore in serie a un generatore di condizioni iniziali (non va bene calcolare la tensione considerando solo la caduta di potenziale del condensatore $\frac{1}{sC}$). Si osservi anche che il generatore di condizioni iniziali dell'induttore è sostituito con un cortocircuito: questo perché abbiamo trovato

$$i_L(0^-) = 0$$

Utilizziamo tensioni di nodo ponendo il nodo B come nodo di riferimento: questo significa che il risultato dell'unica tensione di nodo da trovare sarà la tensione del condensatore, il valore che stiamo cercando

$$V_C = V_A - V_B = V_A$$

Occhio al generatore reale di

$$\frac{5}{s} + \frac{\left(\frac{50}{s}\right)}{R} + \frac{\left(\frac{50}{s}\right)}{\frac{1}{sC}} = V_A\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{\left(\frac{1}{sC}\right)}\right]$$

Abbiamo fatto tensione fratto impedenza in ogni termine del primo membro. Non abbiamo considerato (come da regole) il ramo col generatore di corrente.

$$V_A = \frac{\left[\frac{5}{s} + \frac{50}{sR} + \frac{\left(\frac{50}{s}\right)}{\frac{1}{sC}}\right]}{\frac{1}{R} + \mathrm{sC}} = \frac{\frac{10}{s} + 50C}{\frac{1}{R} + \mathrm{sC}} = \frac{\frac{10}{s} + 50C}{\frac{1}{R} + \mathrm{sC}} \cdot \frac{sR}{sR} = \frac{10R + 50RCs}{s + s^2RC}$$

- **Sviluppo in fratti semplici e teorema dei residui**.
  Scomponiamo al denominatore e applichiamo il teorema dei residui per trovare A e B

$$V_A = \frac{10R + 50RCs}{s + s^2RC} = \frac{50s + \frac{10}{C}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$A = \lim_{s\to 0} s\frac{50s + \frac{10}{C}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = \frac{\frac{10}{C}}{\frac{1}{RC}} = 10R = 100$$

$$B = \lim_{s\to -\frac{1}{RC}} \left(s + \frac{1}{RC}\right)\frac{50s + \frac{10}{C}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = \frac{-\frac{50}{RC} + \frac{10}{C}}{-\frac{1}{RC}} = \frac{50 - 10R}{1} = -50$$

Concludiamo (per $t \geq 0$)

$$V_A \Longrightarrow v_C = 100 - 50e^{-\frac{1}{RC}t} = 100 - 50e^{-1000t}$$

Ricapitolando

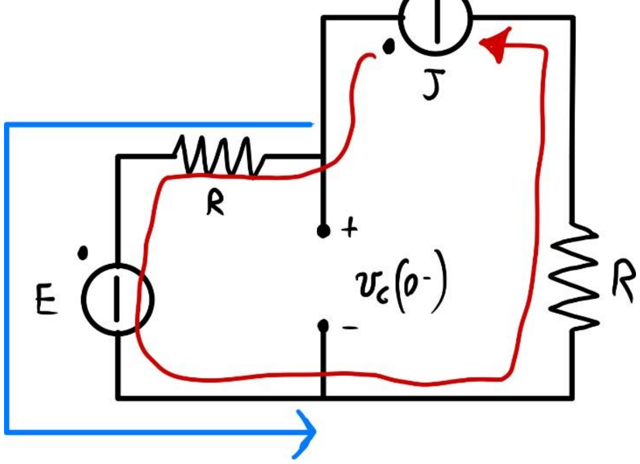
$$\boxed{v_C(t) = \begin{cases} 100\,\mathrm{V}, & t < 0 \\ 100 - 50e^{-1000t}, & t \geq 0 \end{cases}}$$

7.3.2 Considerazioni post-esercizio

È possibile fare delle considerazioni a posteriori per avere certezze sulla correttezza dei risultati.

- **Circuito con $t \to +\infty$**
  Si può risolvere il circuito con $t \to +\infty$: i transitori sono esauriti, tratteremo il circuito come un circuito in continua

$$\lim_{t \to +\infty} V_C(t) = 100\,\mathrm{V}$$



  La corrente dell'unica maglia possibile è nota (J). Percorrendo il ramo indicato (freccia blu) otteniamo

$$V_c(+\infty) = 50\,\mathrm{V} + 50\,\mathrm{V} = 100\,\mathrm{V}$$

  Torna!
- **Limiti su zero**.
  Calcoliamo i limiti su zero.

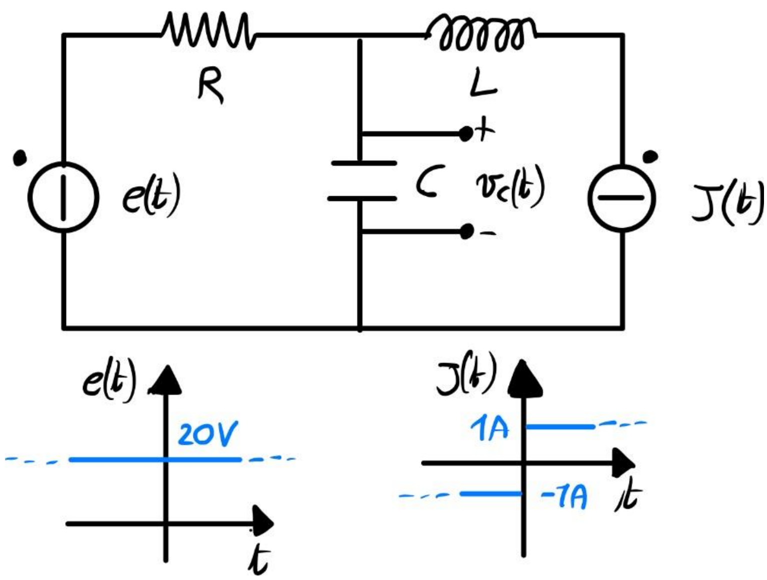
$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to 0^-} V_C\,(t) = 50\,\mathrm{V} \\ \lim\limits_{t \to 0^+} V_C\,(t) = 50\,\mathrm{V} \end{cases}$$

  È un caso? No. Le tensioni ai capi dei condensatori[4] non possono variare in modo discontinuo: segue che avere i due limiti diversi è segnale di errore.

Il professore penalizza maggiormente se sbagliamo l'esercizio e non abbiamo fatto alcun controllo!

7.4 Andamento temporale della tensione, con funzione a gradino

Consideriamo il seguente circuito: vogliamo determinare l'andamento temporale della tensione $v_C(t)$ indicata in figura per $-\infty < t < +\infty$



$R = 10\,\Omega$
$C = 10\,\mu\mathrm{F}$
$L = 10\,\mathrm{mH}$
$e(t) = 20\,\mathrm{V}$

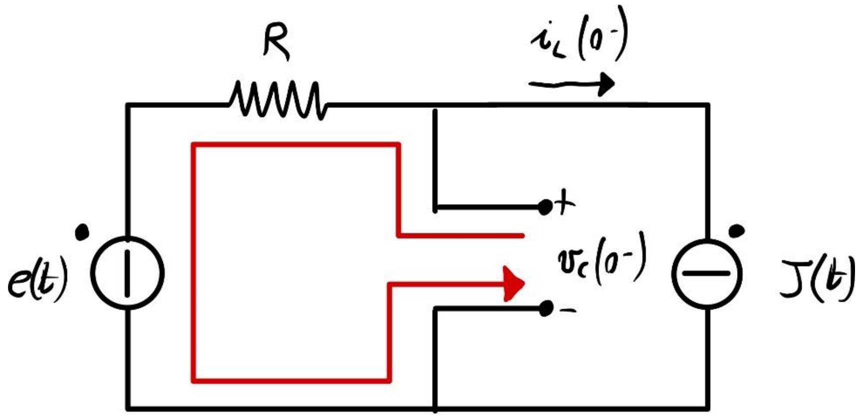
$v_C(t) = ?$

[4] Anche le correnti degli induttori!

7.4.1 Risoluzione "classica"

La risoluzione del problema passa dai soliti passaggi.

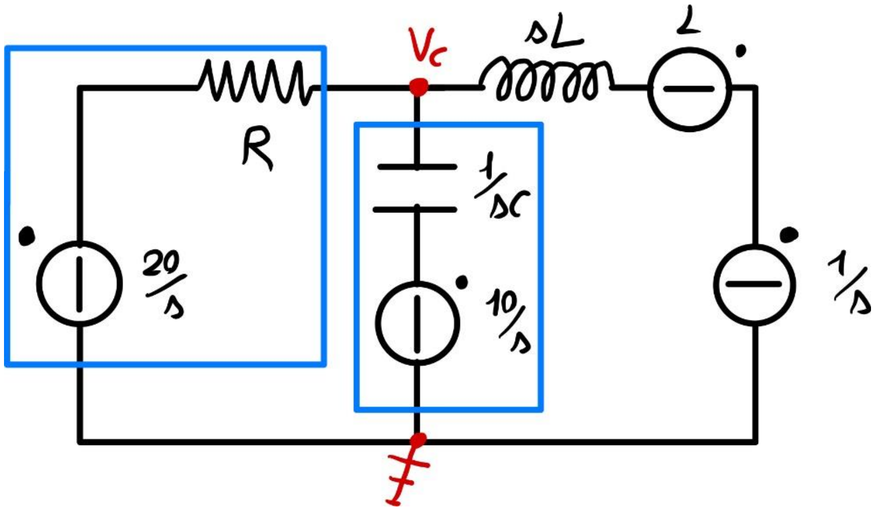
- **Studio del circuito per tempi $t < 0$**
  Circuito in continua: calcoliamo le condizioni iniziali (e quindi metà soluzione).



Per quanto riguarda $i_L(0^-)$ possiamo affermare subito che $i_L(0^-) = 1\text{ A}$, grazie all'aperto (la corrente va tutta in un ramo, non passa dove c'è l'aperto). Calcoliamo la tensione $v_C(0^-)$ col percorso indicato in figura

$$v_C(0^-) = -Ri_L(0^-) + e(t) = -10\text{ V} + 20\text{ V} = 10\text{ V}$$

- **Studio del circuito per tempi $t \geq 0$**
  Poniamo il circuito L-trasformato



Applichiamo tensioni di nodo, risolviamo con un'unica equazione! Si osservi la presenza di ben due generatori di tensione reali (quelli evidenziati), che sostituiamo con gli equivalenti Norton.

$$V_C: \frac{20}{sR} + 10C + \frac{1}{s} = V_C\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{sC}}\right)$$

$$\Rightarrow V_C(s) = \frac{\frac{3}{s} + 10C}{\frac{1}{R} + sC} = \frac{10s + \frac{3}{C}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

- **Sviluppo in fratti semplici e applicazione del teorema dei residui**.
  Poniamo

$$V_C(s) = \frac{\frac{3}{s} + 10C}{\frac{1}{R} + sC} = \frac{10s + \frac{3}{C}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$\Rightarrow v_C(t) = \left(A + B \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \cdot u(t)$$

Troviamo A e B col teorema dei residui.

$$A = \lim_{s\to 0} s \frac{10s + \frac{3}{C}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = \frac{\frac{3}{C}}{\frac{1}{RC}} = 3R = 30$$

$$B = \lim_{s\to -\frac{1}{RC}} \left(s + \frac{1}{RC}\right) \frac{10s + \frac{3}{C}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = \frac{-\frac{10}{RC} + \frac{3}{C}}{-\frac{1}{RC}} = \frac{-10 + 30}{-1} = -20$$

Finito!

$$\Longrightarrow \boxed{v_C(t) = \left(30 - 20 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \cdot u(t)}$$

Uniamo le soluzioni

$$v_C(t) = \begin{cases} 10\,\mathrm{V}, & t < 0 \\ 30 - 20e^{-\frac{1}{RC}t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Sulla seconda funzione: non serve moltiplicare per $u(t)$ se si indica che la funzione è applicata in tempi positivi.

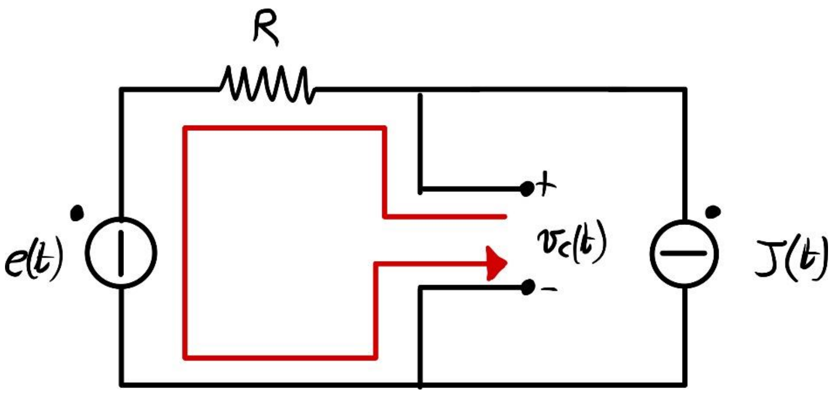
Verifica.

- **Limiti sullo zero coincidenti (assenza di discontinuità)**.

$$\lim_{t\to 0^-} v_C\,(t) = 10\,\mathrm{V}$$
$$\lim_{t\to 0^+} v_C\,(t) = 30\,\mathrm{V} - 20\,\mathrm{V} = 10\,\mathrm{V}$$

- **Limite della tensione con t a infinito**.
  Verifichiamo $\lim_{t\to +\infty} v_C\,(t)$ risolvendo il circuito per tempi "abbondantemente" positivi (circuito in continua dove induttore è sostituito da cortocircuito e condensatore da circuito aperto).

$$\lim_{t\to +\infty} v_C\,(t) = 30 - 20 \cdot 0 = 30\,\mathrm{V}$$



Scriviamo $v_C(t)$ utilizzando il percorso in figura

$$v_C(t) = R \cdot J(t) + e(t) = (10 \cdot 1 + 20)\,\mathrm{V} = 30\,\mathrm{V}$$

7.4.2 Risoluzione semplificata con principio di sovrapposizione degli effetti

La difficoltà degli esercizi con le trasformate di Laplace sta nel gestire induttori e condensatori, in particolare il passaggio al circuito L-trasformato quando ci sono condizioni iniziali non nulle (come nell'esempio appena fatto).

$$\boxed{\text{Trucco consiste nell'evitare condizioni iniziali non nulle!}}$$

Come si fa? Applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti:

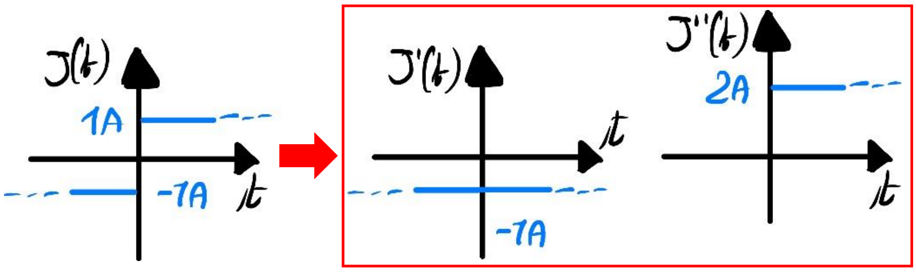
- Si scompone la corrente $J(t)$ in due correnti

$$J(t) = J'(t) + J''(t)$$

  Da un punto di vista elettrotecnico significa sostituire un generatore di corrente indipendente $J(t)$ con due generatori disposti in parallelo ($J'(t)$ e $J''(t)$).

- Si risolvono due circuiti:
  - quello con $J'(t)$ attivo e $J''(t)$ disattivo
  - quello con $J'(t)$ disattivo e $J''(t)$ attivo
- Si uniscono i risultati delle due risoluzioni.

Prendiamo l'esercizio appena fatto: cosa significa scomporlo in due correnti?

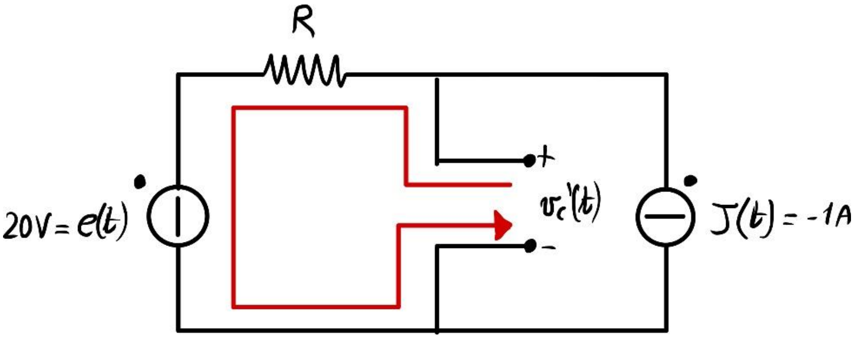


- Il generatore $J'(t)$ eroga su $-\infty < t < +\infty$ la corrente erogata da $J(t)$ in tempi negativi
- Il generatore $J''(t)$ eroga corrente nella forma di una funzione a gradino: la corrente erogata in tempi negativi è nulla, mentre la corrente erogata in tempi positivi deve essere tale che

$$J'(t) + J''(t) = J(t), \quad \forall t \geq 0$$

Risolviamo l'esercizio con la scomposizione appena fatta

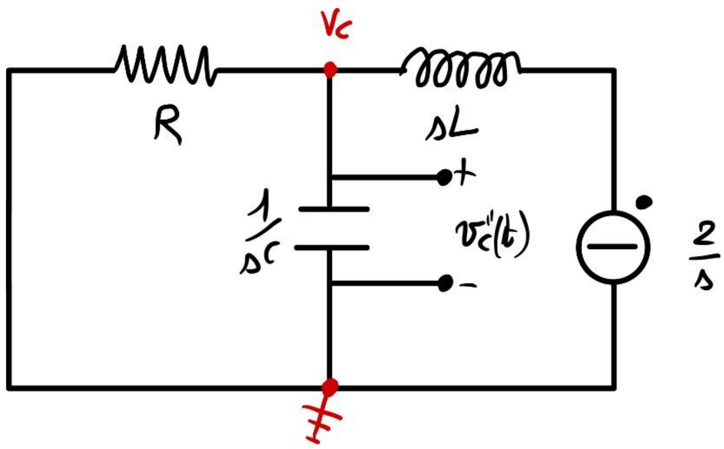
- **Risoluzione del circuito con $J'(t)$ attivo e $J''(t)$ disattivo**.
  Otteniamo un semplice circuito con regime in continua.



Possiamo calcolare al volo la tensione richiesta col percorso indicato.

$$v_C'(t) = RJ'(t) + 20\,\text{V} = -10\,\text{V} + 20\,\text{V} = 10\,\text{V}$$

- **Risoluzione del circuito con $J'(t)$ disattivo e $J''(t)$ attivo**.
  Il circuito in questione prevede un transitorio, ma contrariamente a prima questo transitorio ha condizioni iniziali nulle!
  - Non serve studiare il circuito in tempi $t < 0$
  - È più facile studiare il circuito in tempi $t \geq 0$: otteniamo un circuito L-trasformato senza generatori di condizioni iniziali, a circuito più semplice seguono formule più semplici e veloci da calcolare!



Applichiamo tensioni di nodo ponendo il nodo sotto come riferimento. Otteniamo

$$\frac{2}{s} = V_C''\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\left(\frac{1}{sC}\right)}\right) \Longrightarrow V_C''(s) = \frac{\frac{2}{s}}{\frac{1}{R} + sC}$$

Raccogliamo al denominatore e applichiamo il teorema dei residui per trovare A e B

$$V_C''(s) = \frac{\frac{2}{s}}{\frac{1}{R} + sC} = \frac{\frac{2}{C}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$A = \lim_{s \to 0} s \frac{\frac{2}{C}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = 20$$

$$B = \lim_{s \to -\frac{1}{RC}} \left(s + \frac{1}{RC}\right) \frac{\frac{2}{C}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = -20$$

Concludiamo

$$\Longrightarrow \boxed{v_C''(t) = \left(20 - 20e^{-\frac{1}{RC}}\right)u(t)}$$

- **Unione dei risultati**.
  Uniamo i risultati per ottenere quanto richiesto dal problema

$$\boxed{v_C(t) = v_C'(t) + v_C''(t) = 10 + \left(20 - 20e^{-\frac{1}{RC}}\right)u(t)}$$

8 FORMULARIO DI PARTENZA

Trasformate fasoriali

Resistenze.

$$i_R(t) = I_M \cdot sin(\omega t + \phi_I) \quad \Longrightarrow \dot{I_R} = I_M \cdot e^{j\phi_I}$$
$$v(t) = R \cdot i(t) \quad \Longrightarrow \dot{V_R} = R \cdot \dot{I_R} = RI_M \cdot e^{j\phi_I}$$

Induttori.

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \Longrightarrow \dot{V_L} = j\omega L \cdot \dot{I_L} = \mathrm{j\omega L\, I_M \cdot e^{j\phi_1}}$$
$$\dot{V_L} = \mathrm{j\omega L\, I_M \cdot e^{j\phi_1}} = e^{j\frac{\pi}{2}}\omega\mathrm{L\, I_M \cdot e^{j\phi_1}} = \omega L\, I_M \cdot e^{j\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Condensatori.

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau \Longrightarrow \dot{V_C} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I_C} = \frac{1}{j}\cdot\frac{1}{\omega C}I_M e^{j\phi_1} = -j\frac{1}{\omega C}I_M e^{j\phi_1} = e^{-j\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\omega C}I_M e^{j\phi_1} = \frac{I_M}{j\omega C}e^{j\left(\phi_1 - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Trasformate di Laplace

Linearità, derivata e integrale

$$\boxed{\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-)} \qquad \boxed{\mathcal{L}\left\{\int f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} f(t)dt}$$

Trasformata della funzione esponenziale.

$$\boxed{f(t) = e^{at} \Longrightarrow \mathrm{F(s)} = \frac{1}{\mathrm{s-a}}} \qquad \boxed{f(t) = e^{-at} \Longrightarrow \mathrm{F(s)} = \frac{1}{\mathrm{s+a}}}$$

Trasformata della funzione gradino.

$$\boxed{f(t) = u(t) \Longrightarrow F(s) = \frac{1}{s}} \qquad \boxed{f(t) = 1 \Longrightarrow F(s) = \frac{1}{s}}$$

Trasformata dell'integrale della funzione gradino (trasformata della funzione rampa).

$$\boxed{f(t) = \int u(t)dt = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{F(s)} = \frac{1}{\mathrm{s}^2}}$$

Trasformata della derivata della funzione gradino (trasformata della Delta di Dirac, o segnale impulsivo).

$$\boxed{f(t) = \frac{du(t)}{dt} = \delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases} \Longrightarrow F(s) = 1}$$

Trasformate di sin e cos.

$$\boxed{f(t) = sin(\omega t) \Longrightarrow F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}} \qquad \boxed{f(s) = cos(\omega t) \Longrightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}}$$

Resistenze.

$$v(t) = R \cdot i(t) \Longrightarrow \boxed{V(s) = R \cdot I(s)}$$

Induttori.

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \Longrightarrow \boxed{V_L(s) = sL \cdot I_L(s) - L \cdot i_L(0^-)}$$

Condensatori.

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau \Longrightarrow \boxed{V_C(s) = \frac{1}{Cs}I_C(s) + \frac{1}{s}v_C(0^-)}$$

Induttori mutuamente accoppiati.

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1\dfrac{di_1(t)}{dt} \pm M\dfrac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = L_2\dfrac{di_2(t)}{dt} \pm M\dfrac{di_1(t)}{dt} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V_1(s) = sL_1 I_1(s) - L_1 i_1(0^-) \pm \left(sMI_2(s) - Mi_2(0^-)\right) \\ V_2(s) = sL_2 I_2(s) - L_2 i_2(0^-) \pm \left(sMI_1(s) - Mi_1(0^-)\right) \end{cases}$$

Parametrizzazioni

Parametri z.

$$\dot{V} = \overline{Z} \cdot \dot{I} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{V_1} \\ \dot{V_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{z}_{11} & \overline{z}_{12} \\ \overline{z}_{21} & \overline{z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I_1} \\ \dot{I_2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{V_1} = \overline{z}_{11}\dot{I_1} + \overline{z}_{12}\dot{I_2} \\ \dot{V_2} = \overline{z}_{21}\dot{I_1} + \overline{z}_{22}\dot{I_2} \end{cases}$$

$$\overline{z}_{11} = \left.\frac{\dot{V_1}}{\dot{I_1}}\right|_{\dot{I_2}=0} \qquad \overline{z}_{12} = \left.\frac{\dot{V_1}}{\dot{I_2}}\right|_{\dot{I_1}=0}$$

$$\overline{z}_{21} = \left.\frac{\dot{V_2}}{\dot{I_1}}\right|_{\dot{I_2}=0} \qquad \overline{z}_{22} = \left.\frac{\dot{V_2}}{\dot{I_1}}\right|_{\dot{I_2}=0}$$

<u>In assenza di gen. pilotati</u>: $\overline{z}_{12} = \overline{z}_{21}$

Parametri y.

$$\dot{\text{I}} = \overline{\text{Z}}^{-1} \cdot \dot{\text{V}} = \overline{\text{Y}} \cdot \dot{\text{V}} \Rightarrow \begin{cases} \dot{I_1} = \overline{y}_{11}\dot{V_1} + \overline{y}_{12}\dot{V_2} \\ \dot{I_2} = \overline{y}_{21}\dot{V_1} + \overline{y}_{22}\dot{V_2} \end{cases}$$

$$\overline{y}_{11} = \left.\frac{\dot{I_1}}{\dot{V_1}}\right|_{\dot{V_2}=0} \qquad \overline{y}_{12} = \left.\frac{\dot{I_1}}{\dot{V_2}}\right|_{\dot{V_1}=0}$$

$$\overline{y}_{21} = \left.\frac{\dot{I_2}}{\dot{V_1}}\right|_{\dot{V_2}=0} \qquad \overline{y}_{22} = \left.\frac{\dot{I_2}}{\dot{V_1}}\right|_{\dot{V_2}=0}$$

<u>In assenza di gen. pilotati</u>: $\overline{y}_{12} = \overline{y}_{21}$

Parametri h.

$$\begin{bmatrix} \dot{V_1} \\ \dot{I_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{h}_{11} & \overline{h}_{12} \\ \overline{h}_{21} & \overline{h}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I_1} \\ \dot{V_2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{V_1} = \overline{h}_{11}\dot{I_1} + \overline{h}_{12}\dot{V_2} \\ \dot{I_2} = \overline{h}_{21}\dot{I_1} + \overline{h}_{22}\dot{V_2} \end{cases}$$

$$\overline{h}_{11} = \left.\frac{\dot{V_1}}{\dot{I_1}}\right|_{\dot{V_2}=0} \qquad \overline{h}_{12} = \left.\frac{\dot{V_1}}{\dot{V_2}}\right|_{\dot{I_1}=0}$$

$$\overline{h}_{21} = \left.\frac{\dot{I_2}}{\dot{I_1}}\right|_{\dot{V_2}=0} \qquad \overline{h}_{22} = \left.\frac{\dot{I_2}}{\dot{V_2}}\right|_{\dot{I_2}=0}$$

<u>In assenza di gen. pilotati</u>: $\overline{h}_{12} = -\overline{h}_{21}$

Parametri T.

$$\begin{bmatrix} \dot{V_1} \\ \dot{I_I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{V_2} \\ -\dot{I_2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{V_1} = A\dot{V_2} + B(-\dot{I_2}) \\ \dot{I_1} = C\dot{V_2} + D(-\dot{I_2}) \end{cases}$$

$$A = \left.\frac{\dot{V_1}}{\dot{V_2}}\right|_{\dot{I_2}=0} \qquad B = \left.\frac{\dot{V_1}}{-\dot{I_2}}\right|_{\dot{V_2}=0}$$

$$C = \left.\frac{\dot{I_1}}{\dot{V_2}}\right|_{\dot{I_2}=0} \qquad D = \left.\frac{\dot{I_1}}{-\dot{I_2}}\right|_{\dot{V_2}=0}$$

<u>In assenza di gen. pilotati</u>: $det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = 1$

- **Interconnessione in serie, Interconnessione in parallelo**

$$\begin{bmatrix} \dot{V_{1S}} \\ \dot{V_{2S}} \end{bmatrix} = (\overline{z}_A + \overline{z}_B) \begin{bmatrix} \dot{I_{1S}} \\ \dot{I_{2S}} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dot{I_{1P}} \\ \dot{\iota_{2P}} \end{bmatrix} = (\overline{y}_A + \overline{y}_B) \begin{bmatrix} \dot{V_{1P}} \\ \dot{V_{2P}} \end{bmatrix}$$

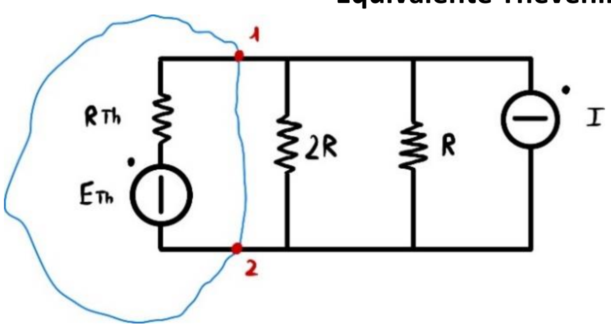
- **Interconnessione ibrida**

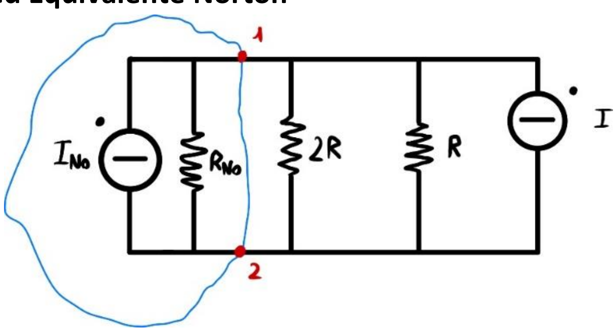
$$\begin{bmatrix} \dot{V_{1H}} \\ \dot{I_{2H}} \end{bmatrix} = (\overline{h}_A + \overline{h}_B) \begin{bmatrix} \dot{I_{1H}} \\ \dot{V_{2H}} \end{bmatrix}$$

- **Interconnessione a cascata**

$$\begin{bmatrix} \dot{V_{1C}} \\ \dot{I_{1C}} \end{bmatrix} = T_x \cdot T_y \begin{bmatrix} \dot{V_{2C}} \\ -\dot{I_{2C}} \end{bmatrix}$$

Equivalente Thevenin ed Equivalente Norton





Potenze in regime periodico sinusoidale

Per le potenze in regime periodico sinusoidale si vedano le relative pagine nel capitolo dei circuiti in quel regime