Esercizi Teams Andrielli:

1) Dati due eventi A e B tali che $A \subset B$, dimostrare che $P[A] \leq P[B]$

$$P[B] = P[A \cup (B \cup A^c)] = P[A] + P[B \cap A^c] \Rightarrow P[A] \leq P[B]$$

≥ 0 per def.

---

2) Si consideri un contenitore con 8 palline bianche e 4 nere, si estraggono a caso due palline, si calcoli:

Composizione di esperimenti non indipendenti

Def. classica della probabilità

$$\rightarrow P[\{\text{Entrambe nere}\}] = P[\{\text{Nera}\} \cap \{\text{Nera}\}] = P[\{\text{Nera}\} | \{\text{Nera}\}] P[\{\text{Nera}\}] = \frac{7}{11} \cdot \frac{8}{12} \simeq 0.424$$

Def di prob. condizionata $P[A \cap B] = P[A|B]P[B]$

$$\rightarrow P[\{\text{Entrambe bianche}\}] = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \simeq 0.091 \quad \text{oppure} \quad \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}}$$

Uguale a sopra

$\binom{4}{2}$ → Modi in cui posso estrarre due bianche

$\binom{12}{2}$ → Modi in cui posso estrarre due palline

---

3) Un arciere ha la probabilità $p = \frac{1}{3}$ di centrare il bersaglio con una freccia, quante frecce deve tirare affinché la probabilità di colpire almeno una volta il bersaglio superi l'80%?

Prove ripetute binarie ed indipendenti

$$P[\{\text{Almeno } 1\}] = 1 - P[\{\text{Esattamente } 0\}] = 1 - (1-p)^N \geq 0.8 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^N \leq 0.2 \Rightarrow N \geq 4$$

---

4) Dato un mazzo di 40 carte, si calcoli la probabilità di ottenere 3 assi in 3 estrazioni consecutive:

eventi indipendenti

→ Con reimmissione $P[\{3 \text{ assi di fila}\}] = P[\{1 \text{ asso}\}]^3 = \left(\frac{4}{40}\right)^3 = 1 \cdot 10^{-3}$

→ Senza reimmissione $P[\{3 \text{ assi di fila}\}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} \simeq 4 \cdot 10^{-4}$ oppure $\frac{\binom{4}{3}}{\binom{40}{3}}$

composizione di esperimenti non indipendenti

---

5) Si estraggono 5 carte da un mazzo di 40, qual è la probabilità di ottenere un tris di assi, il 7 di picche e il 4 di denari?

$P[\{\text{“}\}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{36} \simeq 3 \cdot 10^{-7}$

composizione di esperimenti non indipendenti

---

6) La percentuale di studenti del corso che porta la calcolatrice a lezione è pari al 75%, selezionando casualmente 6 studenti, qual'è la probabilità che non più di due abbiano la calcolatrice?

Prove ripetute binarie indipendenti

$P[\{\text{Non più di due}\}] = P[\{\text{Esattamente } 0\}] + P[\{\text{Esattamente } 1\}] + P[\{\text{Esattamente } 2\}]$

$= \frac{6!}{0!\,6!}\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(1-\frac{3}{4}\right)^6 + \frac{6!}{1!\,5!}\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(1-\frac{3}{4}\right)^5 + \frac{6!}{2!\,4!}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(1-\frac{3}{4}\right)^4$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^6 + 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 + 15 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^4 \simeq 0.0376$

---

7) Si enunci e si dimostri il teorema della probabilità totale

$A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i,j \ , \ \bigcup_{i=1}^{N} A_i = \Omega$

Sia $\{A_1, \dots, A_N\}$ una partizione di Ω e sia $B \subset \Omega$

allora $P[B] = \sum_{i=1}^{N} P[B|A_i]\, P[A_i]$

Assiomi prob. Bayes

$$P[B] = P[B \cap \Omega] = P[B \cap \bigcup_{i=1}^{N} A_i] = P\left[\bigcup_{i=1}^{N} B \cap A_i\right] \overset{\text{Assiomi prob.}}{=} \sum_{i=1}^{N} P[B \cap A_i] \overset{\text{Bayes}}{=} \sum_{i=1}^{N} P[B|A_i]\, P[A_i]$$

---

8) In una certa popolazione l'1% dei soggetti è affetto da COVID-19, il test disponibile ha:

- Sensibilità $= P[\{\text{Positivo} | \text{Infetto}\}] = 0.8$
- Specificità $= P[\{\text{Negativo} | \text{Sano}\}] = 0.8$

→ Una persona scelta casualmente effettua il test e risulta positivo, qual è la probabilità che sia davvero infetta?

$$P[\{\text{infetto} | \text{positivo}\}] \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P[\{\text{positivo} | \text{infetto}\}]\, P[\{\text{infetto}\}]}{P[\{\text{positivo}\}]} = \frac{0.8 \cdot 0.01}{0.8 \cdot 0.01 + 0.2 \cdot 0.99} = 0.0388$$

Probabilità totale

dove $P[\{\text{Positivo}\}] \overset{\text{Probabilità totale}}{=} P[\{\text{Positivo} | \text{Infetto}\}]\, P[\text{Infetto}] + \underbrace{P[\{\text{Positivo} | \text{Sano}\}]}_{1 - P[\{\text{Negativo} | \text{Sano}\}]}\, P[\{\text{Sano}\}]$

→ Esce un nuovo test e la specificità sale a 99,9%, come cambia la probabilità calcolata prima?

Cambia soltanto che $P[\{\text{Positivo} | \text{Sano}\}] = 1 - P[\{\text{Negativo} | \text{Sano}\}] = 1 - 0.999 = 0.001$

dunque $P[\{\text{infetto} | \text{positivo}\}] = \dfrac{0.8 \cdot 0.01}{0.8 \cdot 0.01 + 0.001 \cdot 0.99} = 0.8899$

---

9) In una fabbrica ho la seguente situazione:

	Macchinari A	B	C
Pezzi prodotti	50%	30%	20%
di cui difettosi	2%	3%	4%

viene estratto un pezzo a caso, determinare la prob che sia difettoso

Th. probabilità totale

$P[\{Difettoso\}] = P[\{Difettoso \mid Prodotto\ da\ A\}] \cdot P[\{Prodotto\ da\ A\}] +$
$P[\{Difettoso \mid Prodotto\ da\ B\}] \cdot P[\{Prodotto\ da\ B\}] +$
$P[\{Difettoso \mid Prodotto\ da\ C\}] \cdot P[\{Prodotto\ da\ C\}]$

$= 0.02 \cdot 0.5 + 0.03 \cdot 0.3 + 0.04 \cdot 0.2 = 0.027$

---

10) Un lampadario è composto da due lampadine identiche collegate in parallelo, ognuna con prob. $p = 0.2$ di guastarsi entro 5000 ore di funzionamento, qual è la prob. che dopo 5000 ore il lampadario risulti almeno parzialmente acceso?

(dopo 5000 ore)
Funzionante Guasto

$\Omega_2 = \Omega_1 = \{F, G\}$ $\quad P[G] = 0.2$, $P[F] = 1 - 0.2 = 0.8$

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(F_1,F_2),(F_1,G_2),(G_1,F_2),(G_1,G_2)\}$ ~ Esperimento aleatorio composto

Esperimenti indipendenti

$P[\{Almeno\ 1\ accesa\}] = P[\{(F_1,F_2),(F_1,G_2),(G_1,F_2)\}] = 1 - P[\{G_1,G_2\}] = 1 - P[G_1]P[G_2] = 1 - 0.2^2 = 0.96$

---

11) Data la f. distribuzione di probabilità di una v.a. X e dati due numeri reali x_1 e x_2, si mostri come calcolare $P[\{x_1 < X \leq x_2\}]$

$P[\{x_1 < X \le x_2\}] = F_X(x_2) - F_X(x_1)$, infatti:

$$\{X \le x_2\} = \{X \le x_1\} \cup \{x_1 < X \le x_2\}$$ Applico P[ ] a entrambi i lati

$$P[\{X \le x_2\}] = P[\{X \le x_1\} \cup \{x_1 < X \le x_2\}]$$ Gli eventi sono disgiunti

$$P[\{X \le x_2\}] = P[\{X \le x_1\}] + P[\{x_1 < X \le x_2\}]$$ Per definizione di F_X

$$F_X(x_2) = F_X(x_1) + P[\{x_1 < X \le x_2\}]$$

$$\Longrightarrow P[\{x_1 < X \le x_2\}] = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

---

12) Si descriva come misurare sperimentalmente la densità di prob. di una v.a. continua X utilizzando la frequenza relativa

Sapendo che, per definizione, $\int_{x_1}^{x_2} f_X(\alpha)\,d\alpha = F_X(x_2) - F_X(x_1) = P[\{x_1 < X \le x_2\}]$, allora, fissando $x_1 = x$ e $x_2 = x + dx$ con dx infinitesimo, $f_X(x)\,dx = P[\{x < X \le x + dx\}]$

Sperimentalmente, se $dx = \Delta x$ è sufficientemente piccolo ed effettuo un numero di prove N sufficientemente grande, $f_X(x) \simeq \frac{\Delta n(x)}{N \Delta x}$ → n° di risultati per cui $x < X \le x + \Delta x$

---

13) Il tempo di attesa X per sedersi ad un ristorante si può modellare attraverso una v.a. esponenziale monolatera $f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} u(x)$ con $\lambda = 10$ minuti. Si calcoli x_0 tale che la probabilità di non essere ancora entrati sia del 5%

$$P[X > x_0] = 1 - P[X \le x_0] = 1 - F_X(x_0) = 1 - \int_{-\infty}^{x_0} f_X(\alpha)\,d\alpha = 1 - \int_0^{x_0} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\alpha}{\lambda}}\,d\alpha = 1 - \frac{1}{\lambda}(-\lambda) e^{-\frac{\alpha}{\lambda}}\Big|_0^{x_0} = e^{-\frac{x_0}{\lambda}}$$

$$\Longrightarrow e^{-\frac{x_0}{\lambda}} = 0.05 \Longrightarrow -\frac{x_0}{10} = \ln(0.05) \Longrightarrow x_0 = -10\ln(0.05) = 29.9573 \text{ minuti}$$

14) Il peso dei pacchi di pasta X di una marca segue una distribuzione gaussiana di parametri $\eta_x = 502\,g$ $\sigma_x = 5\,g$

→ Qual'è la probabilità che un pacco pesi meno di 495 g?

$$P[\{X < 495\}] = \phi\left(\frac{495 - \eta_x}{\sigma_x}\right) = 1 - Q\left(\frac{495 - \eta_x}{\sigma_x}\right) = 1 - Q(-1{,}4) = Q(1{,}4) = 0.08$$

→ Si scelgono casualmente 20 pacchi di pasta, qual'è la probabilità che almeno uno di questi pesi meno di 495 g?

$$P[\{\text{Almeno uno} < 495\}] = 1 - P[\{\text{Esattamente } 0 < 495\}] \overset{\text{Prove ripetute binarie indipendenti}}{=} 1 - (1 - 0.08)^{20} = 0.8113$$

15) Si enunci e si dimostri il teorema dell'aspettazione per v.a. discrete

Sia X una v.a. discreta e sia $Y = g(X)$, allora $E[Y] = E[g(X)] = \sum_i g(x_i)\,P_x(x_i)$

$$E[Y] \overset{\text{definizione}}{=} \sum_i y_i\,P_Y(y_i) = y_1\,P_Y(y_1) + \dots$$

tuttavia $P_Y(y) = P[\{Y = y\}] = \sum_{G(y)} P[\{X = x_i\}] = \sum_{G(y)} P_x(x_i)$ con $G(y) = \{x_i : g(x_i) = y\}$

allora $y_1\,P_Y(y_1) = y_1 \sum_{G(y_1)} P_x(x_i) = \sum_{G(y_1)} \underbrace{g(x_i)}_{\text{è sempre } y_1} P_x(x_i)$

di conseguenza $E[Y] = \sum_i y_i\,P_Y(y_i) = \sum_{G(y_1)} g(x_i)\,P_x(x_i) + \dots \overset{\text{i vari } G(y_i) \text{ costituiscono una partizione di } \mathbb{R}}{=} \sum_i g(x_i)\,P_x(x_i)$

16) Una v.a. X ha densità di probabilità del tipo $f_X(x) = Kxe^{-\frac{x^2}{2}}u(x)$ con $K \in \mathbb{R}$

→ Determinare K affinché $f_X(x)$ sia effettivamente una densità di probabilità

Senza fare conti, se $K=1$ X assomiglia ad una v.a. di Rayleigh di parametro $\sigma^2 = 1$, infatti $f_X(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}u(x)$, mentre $f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}u(r)$, quindi sicuramente $K=1$ è ammissibile

$f_X(x)$ è una ddp se:

- $f_X(x) \geq 0 \Rightarrow Kxe^{-\frac{x^2}{2}}u(x) \geq 0 \quad \forall K \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} Kxe^{-\frac{x^2}{2}}u(x) = K\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = -Ke^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^{+\infty} = -K(-e^0) = K \Rightarrow K=1$

Come previsto!

→ Sia data ora la v.a. $Y = X^2$, calcolare $f_Y(y)$ e $\eta_Y(y)$

$y = g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x \Rightarrow x = g^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}\Bigg|_{x_i = g^{-1}(y)} = \frac{f_X(+\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \underbrace{\cancel{\frac{f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}}}_{u(-\sqrt{y})=0} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\sqrt{y}e^{-\frac{y}{2}}u(\sqrt{y})\right] = \frac{1}{2\sqrt{y}}\sqrt{y}e^{-\frac{y}{2}}u(\sqrt{y}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}u(y)$$

$\eta_Y = \lambda = 2$ ~ v.a. esponenziale

---

17) Sia $X \in U(2,4)$:

→ Scrivere $f_X(x)$, disegnarla e calcolare η_X e σ_X

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{per } 2 \le x \le 4 \\ 0 & \text{oltrove} \end{cases}$$

$$\eta_X = \frac{a+b}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{4-2}{\sqrt{12}} = 0.5774$$

→ Ricavare e disegnare $f_Y(y)$ dove $Y = 3X - 1$

$$y = g(x) = 3x - 1 \Rightarrow g'(x) = 3 \Rightarrow x = g^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}$$

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}\Bigg|_{x_i = g^{-1}(y)} = \frac{f_X\left(\frac{y+1}{3}\right)}{3} = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{per } 2 \le \frac{y+1}{3} \le 4 \\ 0 & \text{oltrove} \end{cases} = \begin{cases} 1/6 & \text{per } 5 \le y \le 11 \\ 0 & \text{oltrove} \end{cases}$$

---

18) La giornata di lavoro di un operatore in un centralino intasato di richieste prevede di rispondere a 100 telefonate che arrivano senza sosta e modellabili attraverso una v.a. X con $f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} u(x)$ dove $\lambda = 3$ minuti. Calcolare la probabilità che l'operatore lavori più di 6 ore

Sia $T_{100} = \sum_{i=1}^{100} X$ la v.a. che modella il tempo di lavoro totale dell'operatore

Dato che tutte le X sono indipendenti e hanno la stessa ddp, allora:

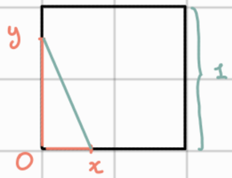
$$\eta_{100} = 100\,\eta_X = 100\,\lambda = 300$$

$$\sigma_{100}^2 = 100\,\sigma_X^2 = 100\,\lambda^2 = 900 \Rightarrow \sigma_{100} = 30$$

Per il teorema limite centrale $T_{100} \,\tilde{\in}\, N(\eta_{100}, \sigma_{100}^2)$

dunque $P[\{\text{Lavoro più di 6 ore}\}] = P[\{T_{100} > 360\}] = Q\left(\frac{360 - \eta_{100}}{\sigma_{100}}\right) = Q\left(\frac{360-300}{30}\right) = Q(2) = 0.023$

19) Sia dato un quadrato unitario e siano X ed Y, uniformemente distribuite ed indipendenti, le v.a che modellano i punti x ed y in figura:



$$X, Y \in U(0,1) \Rightarrow f_X(x) = f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

→ Calcolare la ddp congiunta $f_{XY}(x,y)$ del sistema X, Y

Dato che le v.a sono indipendenti $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

→ Calcolare la probabilità che l'area del triangolo xOy sia < di $\frac{1}{8}$

$\frac{xy}{2} < \frac{1}{8} \Rightarrow x < \frac{1}{4y}$

$$P\left[\left\{0 < X \le \min\left(\frac{1}{4y}, 1\right), 0 < Y \le 1\right\}\right] = \int_0^1 \int_0^{\min(1, \frac{1}{4y})} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \min\left(1, \frac{1}{4y}\right) dy$$

X è sempre ≤ 1

$$= \int_0^{1/4} 1\, dy + \int_{1/4}^{1} \frac{1}{4y}\, dy = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \ln(y)\Big|_{1/4}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1}{4}\right) = 0.5866$$

20) Di una v.a. X sono noti solo η_x e σ_x^2, sia $Y = 2X - 3$:

→ Calcolare η_Y e σ_Y^2 in funzione di η_x e σ_x^2

Th. aspettazione Linearità di E[·]

$$\eta_Y = E[Y] = E[2X - 3] = 2E[X] - 3 = 2\eta_x - 3$$

$$\sigma_Y^2 = P_Y - \eta_Y^2 = E[Y^2] - \eta_Y^2 = E[(2X-3)^2] - (2\eta_x - 3)^2 = E[4X^2 - 12X + 9] - (4\eta_x^2 - 12\eta_x + 9)$$

$$= 4P_x - 12\eta_x + 9 - 4\eta_x^2 + 12\eta_x - 9 = 4P_x - 4\eta_x^2 = 4\sigma_x^2$$

→ Calcolare correlazione, covarianza e coeff. di correlazione del sistema di v.a. X, Y, in funzione di m_X e σ_X^2

Dato che Y è combinazione lineare di X, $\rho_{XY} = 1$

di conseguenza $C_{XY} = \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y = \sigma_X 2\sigma_X = 2\sigma_X^2$

dunque $r_{XY} = C_{XY} + m_X m_Y = 2\sigma_X^2 + m_X(2m_X - 3) = 2m_X^2 - 3m_X + 2\sigma_X^2$