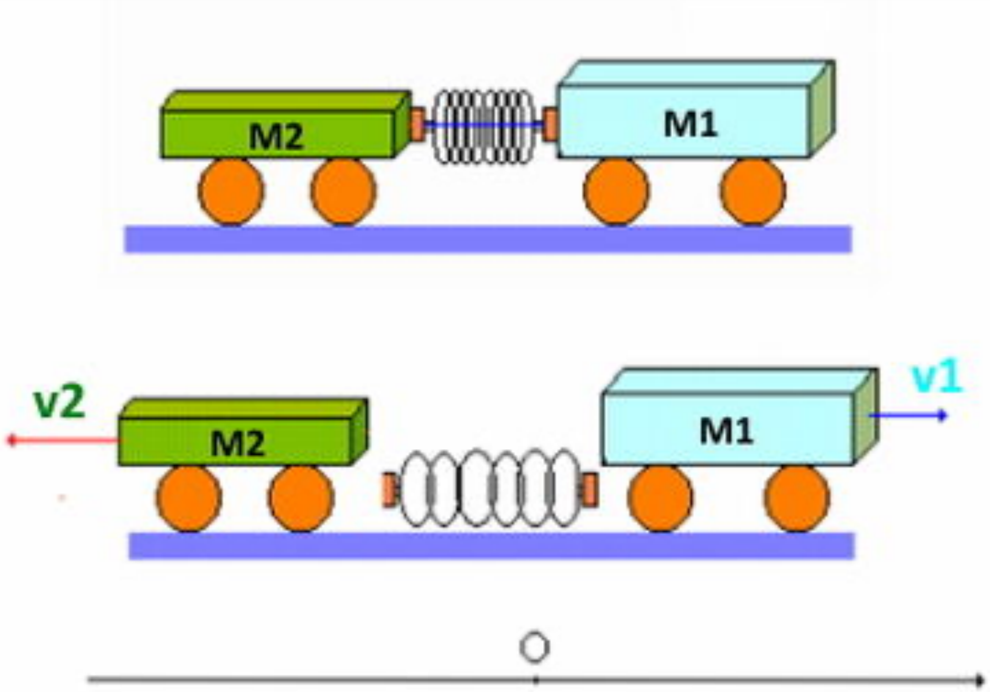
esercizio



Consideriamo due carrelli di massa $m_1 = 4kg$ e $m_2 = 1kg$, inizialmente fermi e collegati da una molla compressa con energia potenziale elastica immagazzinata pari a $U = 50\ J$. Assumiamo che la molla sia libera di espandersi, che si possa trascurare l'attrito, e che la molla abbia una massa trascurabile.

- Determinare le velocità finali dei due carrelli.

$\vec{v}_1 \qquad \vec{v}_2 \qquad\qquad \vec{P}_{sis} = 0$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0 \qquad\qquad \vec{v}_{cm} = 0$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1$$

$$L_{A \to B} = \frac{1}{2} \mu \left(v_B^2 - v_A^2 \right) = -\Delta U_{A \to B}$$

v_A e v_B VELOCITÀ RELATIVE

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(v_B^2 - v_A^2 \right) = -U_B + U_A$$

STATO A : $v_A = 0$ $\qquad U_A = 50 \, J$

STATO B : $v_B = v_2 - v_1$ $\qquad U_B = 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(v_2 - v_1 \right)^2 = U_A \quad * \\ \boxed{v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1} \end{cases}$$

$$(v_2 - v_1)^2 = \left(-\frac{m_1}{m_2} v_1 - v_1\right)^2 = \left(\frac{m_1}{m_2} v_1 + v_1\right)^2$$

$$= v_1^2 \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right)^2$$

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_2^2} (m_1 + m_2) v_1^2 = U_A$$

$$v_1^2 = \frac{2 m_2 U_A}{m_1 (m_1 + m_2)} \qquad v_1 = \sqrt{\frac{2 m_2 U_A}{m_1 (m_1 + m_2)}}$$

A : $\quad E = U_A \quad$ ENERGIA MECCANICA NELLO STATO A

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

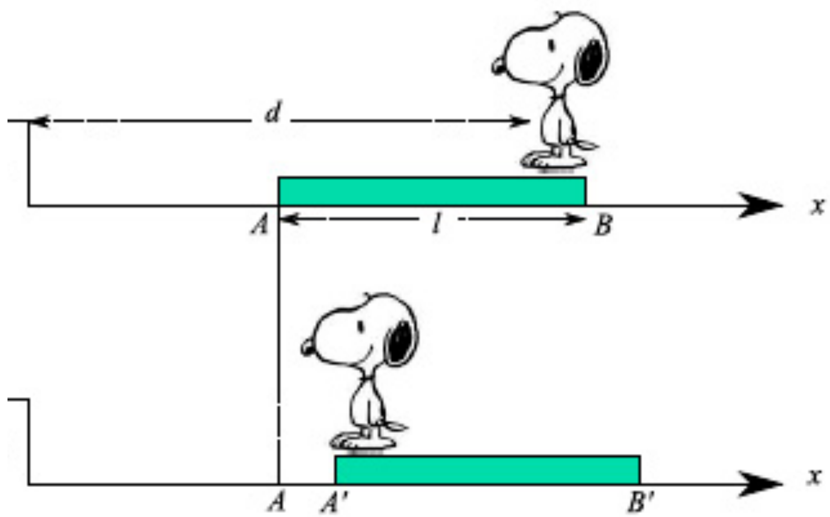
$$v_2 = -\frac{m_2}{m_1} v_1$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = U_A$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 v_1^2 = U_A$$

$$v_1^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 (m_2 + m_1)}{m_2}\right) = U_A \qquad v_1 = \sqrt{\frac{2 m_2 U_A}{m_1 (m_1 + m_2)}}$$

esercizio



Snoopy, che è un punto materiale di massa m, si trova inizialmente all'estremità di una piattaforma di massa M e lunghezza l, in quiete, libera di muoversi su un piano orizzontale liscio. Successivamente Snoopy si reca all'estremo opposto della piattaforma.

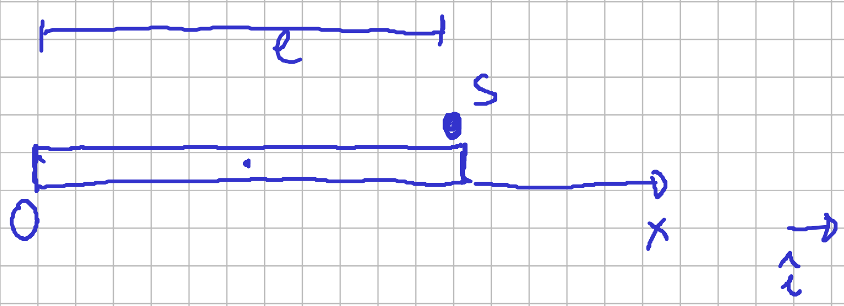
- Determinare lo spostamento di Snoopy e della piattaforma

$$\vec{F}_{RIS,EXT} = 0$$

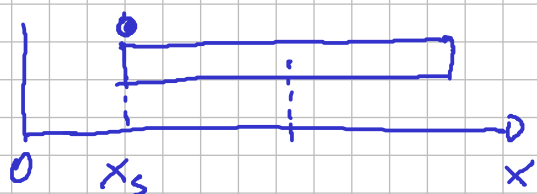
$\vec{v}_s$ = VELOCITÀ SNOOPY

$\vec{v}_p$ = VELOCITÀ PIATTAFORMA

$$m\,\vec{v}_s(t) + m\,\vec{v}_p(t) = 0 \qquad \forall\, t$$



$$X_{cMi} = \frac{m_s \ell + M_p \frac{\ell}{2}}{m_s + M_p}$$



$$X_{cMF} = \frac{m_s X_s + M_p\left(x_s + \frac{\ell}{2}\right)}{m_s + M_p}$$

$$m_s \ell + \cancel{M_p \frac{\ell}{2}} = m_s X_s + M_p X_s + \cancel{M_p \frac{\ell}{2}}$$

$$x_s = \frac{m_s \ell}{m_s + M_p}$$

esercizio

Il carrello 1, di massa m_1 si muove con velocità $v_{1,0}$ verso il carrello 2, di massa m_2 e inizialmente fermo. Trascurando tutti gli attriti, calcolare:

- le velocità dei due carrelli quando la molla è massimamente compressa;
- la massima energia potenziale immagazzianata nella molla;
- le velocità dei due carrelli una volta che la molla è di nuovo rilassata.

$$\vec{F}_{RIS,EXT} = 0$$

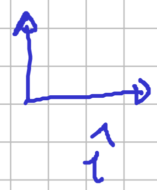
$$\vec{P}_{SIS} = m_{TOT}\, \vec{v}_{CM} = m_1 \vec{v}_1(t) + m_2 \vec{v}_2(t) = \text{COSTANTE}$$

STATO 0 (PRIMA DELL'INTERAZIONE)

STATO A (MOLLA MASSIMAMENTE COMPRESSA)

STATO B (MOLLA DI NUOVO RILASSATA)

$$\vec{P}_{sis}(0) = m_1 \vec{v}_{10}$$



$$P_{sis} = m_{TOT} v_{CM} = m_1 v_{10} \qquad v_{CM} = \frac{m_1 v_{10}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{P}_{sis}(A) = m_1 v_{1A} + m_2 v_{2A} \qquad v_{1A} = v_{2A} = v_{CM}$$

$$\vec{P}_{sis}(B) = m_1 v_{1B} + m_2 v_{2B} = m_{TOT} v_{CM} = m_1 v_{10}$$

$$E(0) = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2$$

$$E(A) = \frac{1}{2} m_1 v_{1A}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2A}^2 + U_{MAX} =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{CM}^2 + U_{MAX} =$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 + U_{MAX}$$

$$E(A) = E(0)$$ RICAVARE U_{MAX}

$$U_{MAX} = \frac{1}{2} v_{10}^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

STATO B

$$m_1 v_{1B} + m_2 v_{2B} = m_1 v_{10}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1B}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2B}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2$$

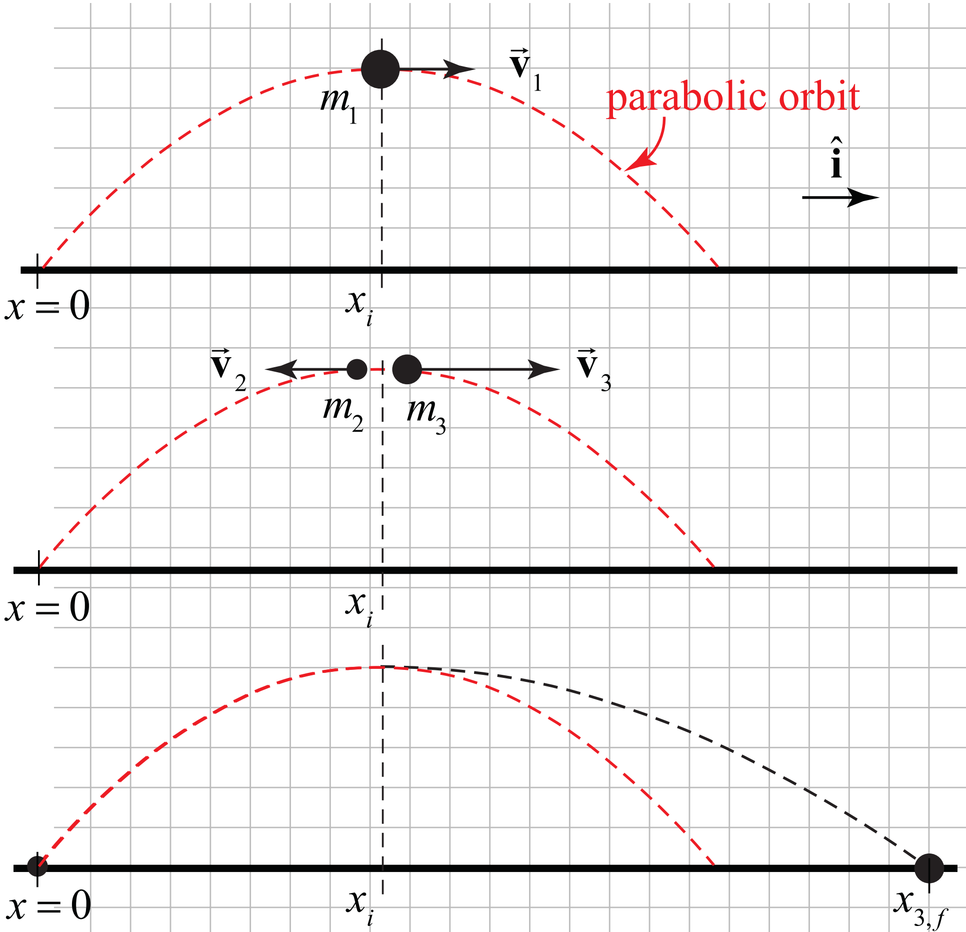
0

$$v_{1B} = \frac{m_1 v_{10} - m_2 v_{2B}}{m_1}$$

$v_{2B} = 0$ $\qquad$ $v_{2B} = 2 \frac{m_1}{m_2} v_{10}$

esercizio

Un proiettile di massa m_1 esplode accidentalmente al vertice della sua traiettoria. La distanza orizzontale tra il punto di lancio x_0 e il punto dell'esplosione è x_i. Il proiettile si frantuma in due pezzi che si disperdono orizzontalmente. Il pezzo più grande, di massa m_3, ha una massa tre volte quella del pezzo più piccolo, di massa m_2 (cioè, $m_3 = 3m_2$). Il pezzo più piccolo ritorna a terra esattamente alla stazione di lancio, cioè $x_{2,f} = x_0$. Trascurando la resistenza dell'aria e gli effetti dovuti alla curvatura terrestre, determinare la distanza, $x_{3,f}$, dal punto di lancio originale in cui atterra il pezzo più grande.



$$m_p = m_1 = m_2 + m_3$$

$$m_p \vec{a}_p = m_p \vec{g}$$

$$m_p \vec{a}_{cm} = m_p \vec{g}$$

Calcolare anche l'energia liberata nell'esplosione

$$X_{CM} = 2X_i \qquad Y_{CM} = 0$$

$$m_{TOT} = m_1 = m_2 + m_3 \qquad m_3 = 3m_2 \qquad m_2 = \frac{m_1}{4}$$

$$m_3 = \frac{3}{4} m_1$$

$$X_{CM,f} = \frac{m_2 X_2 + m_3 X_3}{m_2 + m_3} = \frac{\frac{m_1}{4} x_2 + \frac{3}{4} m_1 X_3}{m_1} =$$

$$= \frac{x_2}{4} + \frac{3}{4} x_3 \qquad x_2 = 0$$

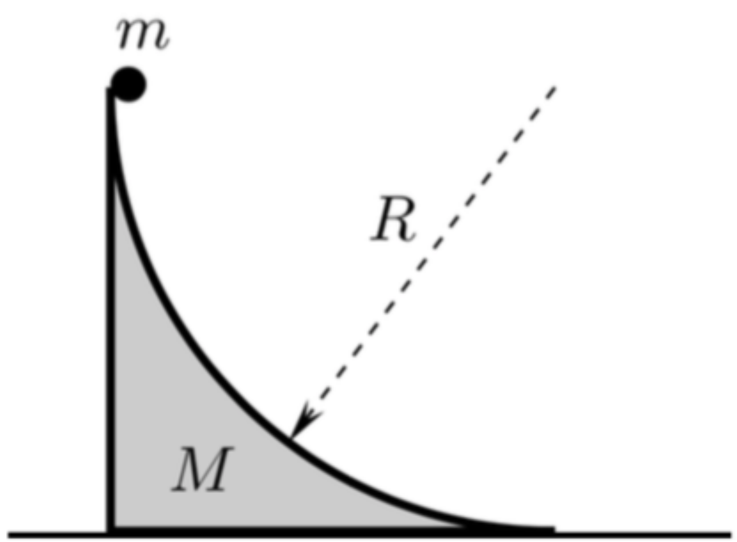
$$X_{CM,f} = \frac{3}{4} x_3 \qquad X_3 = \frac{4}{3} X_{CM} = \frac{4}{3} \times 2 X_i =$$

$$= \frac{8}{3} x_i$$

$$m_2 v_{2i} + m_3 v_{3i} = m_2 v_{2f} + m_3 v_{3f}$$

$$v_{2f} = - v_{2i}$$

esercizio

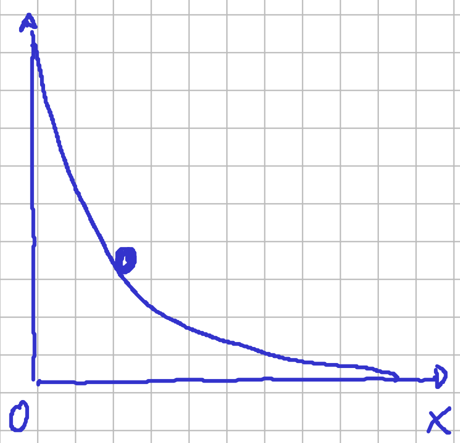


Un punto materiale di massa m è inizialmente fermo sulla cima di di una guida liscia con profilo circolare di raggio R (vedi figura). La guida, di massa M, anch'essa inizialmente ferma, può scivolare su di un piano orizzontale privo di attrito.

Al tempo $t = 0$ il punto materiale viene lasciato libero.

- Calcolare la velocità finale del punto materiale $\vec{v}$, della guida $\vec{V}$, e del centro di massa $\vec{V}_{cm}$ del sistema quando il punto materiale arriva sul piano.

$$mgR = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2$$



$$P_{sis,x} = \text{COSTANTE}$$

$$M V_x + m v_x = 0$$

$$V_x = -\frac{m}{M} v_x$$

$$V_x(t) = -\frac{m}{M} v_x(t)$$

$$V \qquad v$$

$$V = -\frac{m}{M} v$$

$$mgR = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{m}{M}\right)^2 v^2$$

$$gR = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{M} v^2$$

$$v^2 \left(\frac{m}{M} + 1\right) = 2gR \qquad v = \sqrt{\frac{2gR\, M}{M+m}}$$

$$V = -\frac{m}{M} \sqrt{} = -\sqrt{\frac{2gR\, m^2}{M(M+m)}}$$

Interazioni istantanee

Forze che vengono esercitate per un tempo limitato sono chiamate forze impulsive.
Durante l'intervallo di tempo nel quale queste forze agiscono, possono essere di intensità molto maggiore rispetto a tutte le altre forze.
Se consideriamo un intervallo finito di tempo, sia pur breve, per il singolo corpo soggetto alla forza impulsiva vale per il teorema dell'impulso:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{ris} dt \approx \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{imp} dt$$

Se $\vec{F}_{imp}$ è prevalente, nell'intervallo di tempo $[t_i, t_f]$, su tutte le altre forze.

In questo esempio, la forza peso del chiodo è trascurabile rispetto alla forza esercitata sul chiodo dal martello, durante la martellata.

esercizio

Un aereo, di massa $m_a = 1000\ kg$, effettua un atterraggio d'emergenza su una pista corta. Con il motore spento, atterra sulla pista a una velocità $v_0 = 40\ m/s$.
Un gancio sull'aereo si aggancia a un cavo collegato a un sacco di sabbia di massa $m_s = 1000\ kg$ e trascina il sacco di sabbia. Se il coefficiente di attrito dinamico tra il sacco di sabbia e la pista è $\mu_d = 0.4$, e se i freni dell'aereo producono una forza frenante addizionale di $F_{freni} = 1400\ N$, quanto percorre l'aereo prima di fermarsi?

$$P_{sis,1,x} = P_{sis,0,x} = m_a v_0$$

$$(m_a + m_s) v_{sis,1} = m_a v_0$$

$$v_{sis} = \frac{m_a}{m_a + m_s} v_0$$

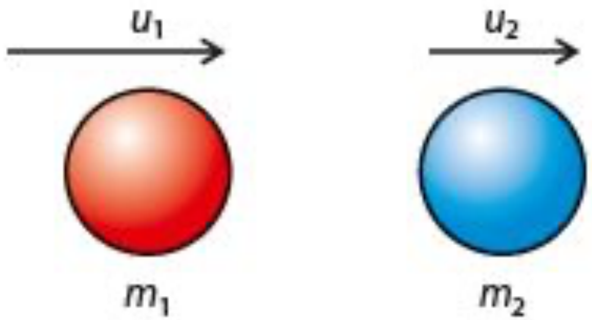
$$-F_{FRENI} - \mu_d m_s g = (m_a + m_s) a$$

$$a = \frac{-F_{FRENI} - \mu_d m_s g}{m_a + m_s}$$

$$v_{sis}(t) = v_{sis,i} - \frac{F_{FRENI} + \mu_d m_s g}{m_a + m_s} t$$

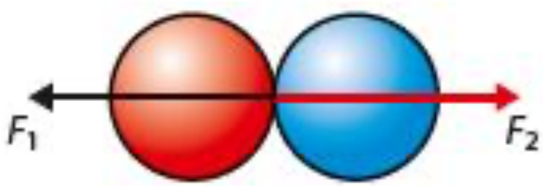
Interazioni tra corpi e urti

Un urto è una interazione tra corpi, limitata nello spazio e nel tempo.

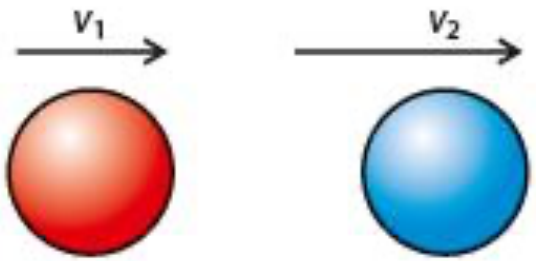


<u>Prima dell'urto</u> le particelle non interagiscono.

<u>Durante l'urto</u> le particelle interagiscono (forze interne al sistema).



Le particelle scambiano quantità di moto ed energia



<u>Dopo l'urto</u> le particelle non interagiscono.

Se non agiscono forze esterne, la quantità di moto del sistema è costante. Quindi:

$$\vec{p}_{sis}(prima) = \vec{p}_{sis}(durante) = \vec{p}_{sis}(dopo)$$

Osservazioni sugli urti

Durata e forze impulsive:
Quando la durata dell'urto è molto breve, le forze impulsive generate nel processo superano di gran lunga tutte le altre forze in gioco, le quali possono pertanto essere trascurate.

Conservazione della quantità di moto:
In presenza di forze impulsive che agiscono come forze interne al sistema, la quantità di moto totale del sistema si conserva, anche se agiscono forze esterne (nell'ipotesi che queste possano essere trascurate)

Trascurabilità degli spostamenti:
Poiché il tempo di collisione è breve, gli spostamenti dei corpi durante l'urto possono essere trascurati.

Urti elastici e anelastici

Prima dell'urto:
le particelle si muovono separatamente

L'energia del sistema è:

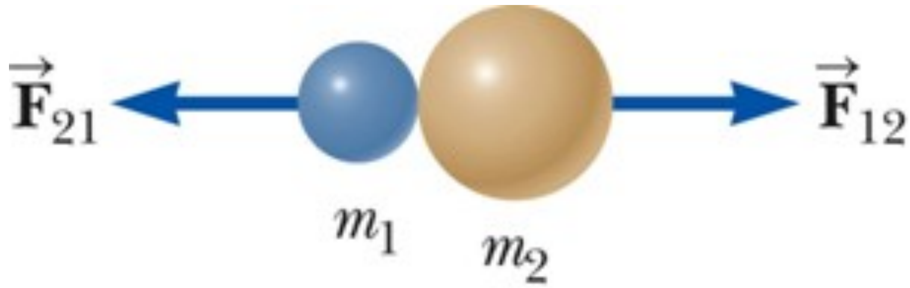
$$E_i = E_{1,i} + E_{2,i}$$

Dopo l'urto:
le particelle si muovono separatamente con nuove velocità

L'energia del sistema è:

$$E_f = E_{1,f} + E_{2,f}$$

Durante l'urto



Durante l'urto **elastico**, le forze interne sono conservative e l'energia meccanica non cambia. Dunque:

$$E_f = E_i$$

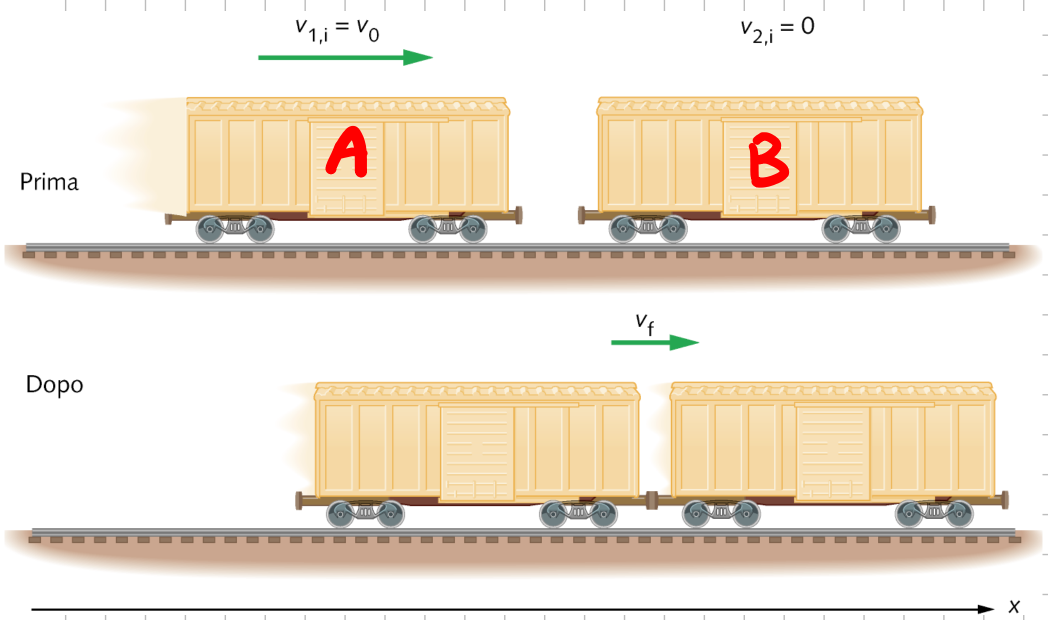
Durante l'urto **anelastico**, le forze interne non sono conservative. L'energia meccanica diminuisce durante l'urto:

$$E_f < E_i$$

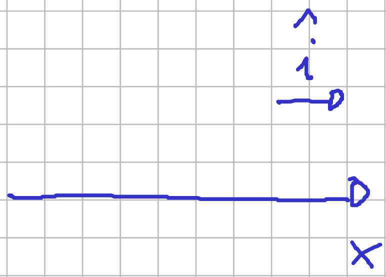
esercizio

Su un binario privo di attrito un carrello A, che si muove con una velocità $|\vec{V}_{1,i}| = 4\ \mathrm{m}/s$, urta in un tempo $\tau = 0.4\ s$ un secondo carrello B . Nell'urto i due carrelli si saldano insieme e procedono con una velocità finale $\vec{V}_f$ sul binario. I due carrelli hanno stessa massa ($m = 1000\ kg$). Nell'urto non ci sono forze esterne ai carrelli ad eccezione della gravità e della reazione normale del piano di appoggio. Calcolare:

- la velocità finale $\vec{V}_f$;
- la forza media fra i carrelli durante l'urto;
- l'energia persa nell'urto.



$$\vec{P}_{sis}(t) = M_{TOT}\,\vec{v}_{cm}(t) = \vec{P}_{sis}(0)$$



$$P_{sis}(t) = m\,v_{1i}$$

$$v_f = v_{cm} = \frac{P_{sis}}{M_{TOT}} = \frac{m\,v_{1i}}{2m} = \frac{v_{1i}}{2}$$

$$\Delta P_2 = m\,v_f = \frac{m}{2}\,v_{1i}$$

VAR. QUANTITÀ DI MOTO DEL CARRELLO 2

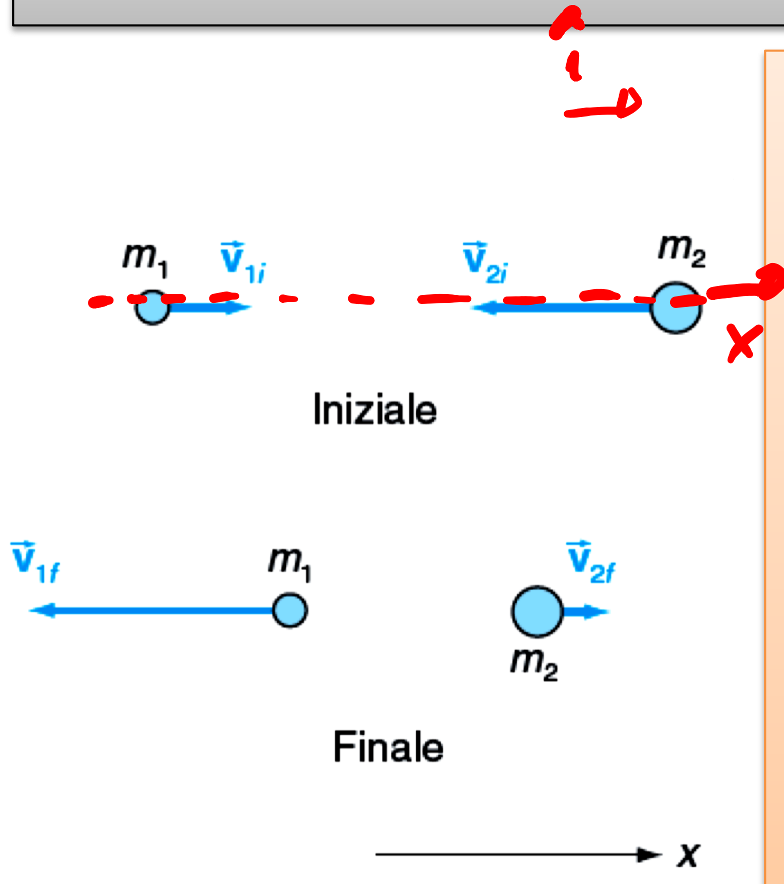
CARRELLO 1 = CARRELLO A

" " 2 = " " B

$$\vec{I}_{1\to 2} = \int_0^{\Delta t} \vec{F}_{12}\,dt = \vec{F}_{MEDIA\;1,2}\,\Delta t$$

$$F_{MEDIA_{1,2}}\,\Delta t = \frac{m}{2}\,v_{1i} = F_{MEDIA_{1,2}} = \frac{m\,v_{1i}}{2\Delta t}$$

Urto elastico



Il moto avviene lungo una retta, fissiamo un sistema di riferimento con l'asse x orientato da 1 verso 2. Usiamo l'indice i per le quantità prima dell'urto e l'indice f per quelle dopo l'urto.

Il sistema è isolato e chiuso, quindi si conserva la quantità di moto totale **del sistema:**

$$\vec{p}_{sis}(t_f) = \vec{p}_{sis}(t_i)$$

L' equazione scalare per le componenti è:

$$m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} = m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i}$$

L' urto è elastico e si conserva l'energia cinetica:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2$$

Urto elastico unidimensionale

Consideriamo due punti materiali di massa m_1 e m_2 che, lungo la direzione x, si muovono con velocità iniziali v_{1i} e v_{2i} e che, dopo l'urto elastico, hanno velocità v_{1f} e v_{2f}. Per un urto elastico valgono le seguenti leggi di conservazione:

1. Leggi di conservazione

Conservazione della quantità di moto:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}\,. \tag{1}$$

Conservazione dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2\,. \tag{2}$$

Moltiplicando l'equazione (2) per 2 si ottiene:

$$m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{2i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2\,. \tag{3}$$

2. Risoluzione del sistema

Partiamo dalle equazioni (1) e (3).

Passo 1: Scrittura della differenza tra quadrati

Riscriviamo l'equazione dell'energia come differenza di quadrati:

$$m_1 \left(v_{1i}^2 - v_{1f}^2 \right) = m_2 \left(v_{2f}^2 - v_{2i}^2 \right).$$

Utilizzando l'identità:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)\,,$$

si ottiene:

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})\,.$$

Passo 2: Relazione fra le differenze

Dall'equazione della quantità di moto (1) possiamo ricavare:

$$m_1 \left(v_{1i} - v_{1f} \right) = m_2 \left(v_{2f} - v_{2i} \right). \tag{4}$$

Sostituendo (4) nella precedente relazione, si ha:

$$m_1 \frac{m_2}{m_1} (v_{2f} - v_{2i})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})\,.$$

Assumendo $v_{2f} \neq v_{2i}$ e dividendo per $m_2(v_{2f} - v_{2i})$, si ottiene:

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}\,. \tag{5}$$

Passo 3: Risoluzione del sistema lineare

Il sistema si riduce a:

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}\,, \\ v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava:

$$v_{1f} = v_{2f} + v_{2i} - v_{1i}\,. \tag{6}$$

Sostituendo (6) in (1):

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 \big[v_{2f} + v_{2i} - v_{1i} \big] + m_2 v_{2f}\,.$$

Sviluppando:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_{2f} + m_1 v_{2i} - m_1 v_{1i}\,.$$

Isoliamo v_{2f}:

$$(m_1 + m_2) v_{2f} = 2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i}\,,$$

quindi:

$$v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i}}{m_1 + m_2}\,. \tag{7}$$

Sostituendo (7) in (6) si ottiene:

$$v_{1f} = \frac{2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i}}{m_1 + m_2} + v_{2i} - v_{1i}\,.$$

Raggruppando i termini:

$$\begin{aligned} v_{1f} &= \frac{2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i} + (v_{2i} - v_{1i})(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{2m_1 v_{1i} - (m_1 + m_2) v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i} + (m_1 + m_2) v_{2i}}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{(m_1 - m_2) v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}\,. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2) v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}\,. \tag{8}$$

3. Calcolo delle velocità relative

Definiamo le velocità relative iniziale e finale:

$$v_{\text{rel},i} = v_{1i} - v_{2i}\,,$$

$$v_{\text{rel},f} = v_{1f} - v_{2f}\,.$$

Sostituendo (8) e (7):

$$\begin{aligned} v_{\text{rel},f} &= \frac{(m_1 - m_2) v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} - \frac{2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i}}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{(m_1 - m_2 - 2m_1) v_{1i} + \big[2m_2 - (m_2 - m_1) \big] v_{2i}}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{-(m_1 + m_2) v_{1i} + (m_1 + m_2) v_{2i}}{m_1 + m_2} \\ &= -(v_{1i} - v_{2i})\,. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\boxed{v_{\text{rel},f} = -v_{\text{rel},i}\,.}$$

Questo mostra che, in un urto elastico, la velocità relativa si inverte.

4. Calcolo delle velocità rispetto al centro di massa

La velocità del centro di massa è data da:

$$V_{\text{cm}} = \frac{m_1 v + m_2 v}{m_1 + m_2}\,, \tag{9}$$

che, per le velocità prima e dopo l'urto, diventa:

$$V_{\text{cm}} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}}{m_1 + m_2}\,.$$

Le velocità dei singoli corpi rispetto al centro di massa sono:

$$v'_{1i} = v_{1i} - V_{\text{cm}}, \quad v'_{2i} = v_{2i} - V_{\text{cm}},$$

$$v'_{1f} = v_{1f} - V_{\text{cm}}, \quad v'_{2f} = v_{2f} - V_{\text{cm}}\,.$$

Dimostrazione dell'inversione nel sistema del centro di massa: Nel sistema del centro di massa, la quantità di moto totale è nulla:

$$m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = 0\,.$$

Pertanto, per il primo corpo:

$$v'_1 = -\frac{m_2}{m_1} v'_2\,.$$

L'energia cinetica, essendo conservata, impone che lo scambio delle velocità avvenga con inversione di segno. In altre parole, l'urto elastico comporta:

$$v'_{1f} = -v'_{1i} \quad \text{e} \quad v'_{2f} = -v'_{2i}\,.$$

Questo risultato, ottenuto anche dal fatto che la velocità relativa nel sistema del centro di massa è:

$$v'_{\text{rel}} = v'_1 - v'_2 = v_1 - v_2\,,$$

si inverte, come dimostrato, durante l'urto.

5. Risultati finali

Le velocità finali nei termini delle velocità iniziali sono:

$$\boxed{\begin{aligned} v_{1f} &= \frac{(m_1 - m_2) v_{1i} + 2 m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}\,, \\ v_{2f} &= \frac{2 m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i}}{m_1 + m_2}\,. \end{aligned}}$$

Le velocità relative risultano:

$$\boxed{\begin{aligned} v_{\text{rel},i} &= v_{1i} - v_{2i}\,, \\ v_{\text{rel},f} &= -(v_{1i} - v_{2i})\,. \end{aligned}}$$

Le velocità rispetto al centro di massa sono:

$$\boxed{\begin{array}{c} v'_{1i} = v_{1i} - V_{\mathrm{cm}}, \quad v'_{2i} = v_{2i} - V_{\mathrm{cm}}, \\ v'_{1f} = v_{1f} - V_{\mathrm{cm}}, \quad v'_{2f} = v_{2f} - V_{\mathrm{cm}}, \end{array}}$$

con

$$\boxed{v'_{1f} = -v'_{1i}, \quad v'_{2f} = -v'_{2i}\,.}$$

Questo evidenzia che, anche nel sistema del centro di massa, le velocità si invertono durante l'urto elastico.

Urto elastico: casi particolari

$$v_{2i} = 0 \qquad \text{BERSAGLIO FERMO}$$

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)\, v_{1i}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2f} = \frac{2\, m_1\, v_{1i}}{m_1 + m_2}$$

$m_1 = m_2 = m$ $\qquad v_{1f} = 0 \qquad v_{2f} = v_{1i}$

$m_1 \gg m_2$

$$v_{1f} \simeq \frac{m_1}{m_1} v_{1i} = v_{1i}$$

$$v_{2f} \simeq \frac{2 m_1}{m_1} v_{1i} = 2\, v_{1i}$$

$m_1 \ll m_2$

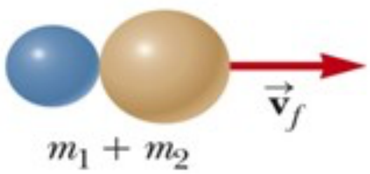
$$v_{1f} \simeq \frac{-m_2}{m_2} v_{1i} = -\, v_{1i}$$

$$v_{2f} \simeq 0$$

Urto totalmente anelastico

Prima dell'urto:
le particelle si muovono separatamente

Dopo l'urto:
le particelle si muovono insieme, alla stassa velocità



La condizione sulle componenti della velocità perché avvenga l'urto è:

$$v_{1,i} > v_{2,i}$$

Il sistema è isolato e chiuso, quindi si conserva la quantità di moto:

$$\vec{p}_{sis}(t_f) = \vec{p}_{sis}(t_i)$$

da cui:

$$m_2 v_{2,f} + m_1 v_{1,f} = m_2 v_{2,i} + m_1 v_{1,i}$$

Poiché l'urto è totalmente anelastico, le velocità finali sono uguali (uguale alla velocità del centro di massa):

$$v_{2,f} = v_{1,f} = V_f$$

Sostituendo:

$$(m_2 + m_1) V_f = m_2 v_{2,i} + m_1 v_{1,i} \;\Rightarrow\; V_f = \frac{m_2 v_{2,i} + m_1 v_{1,i}}{m_2 + m_1}$$