Raccolta definizioni e teoremi degli esami orali di Analisi 2 a.a. 20-21 prof. Longo

É consigliato un confronto con altre fonti, il materiale potrebbe essere parzialmente errato o incompleto.

Elenco delle risorse *pubbliche* che sono state particolarmente utili per la realizzazione di questo file:

- Lista domande analisi 2
  https://unipiit-my.sharepoint.com/personal/f_nardi12_studenti_unipi_it/_layouts/15/onedrive.aspx?originalPath=aHR0cHM6Ly91bmlwaWl0LW15LnNoYXJlcG9pbnQuY29tLzpmOi9nL3BlcnNvbmFsL2ZfbmFyZGkxMl9zdHVkZW50aV91bmlwaV9pdC9Fc2JYRU8wbXI3cEZrVm9FVmZuX3FLTUJvRTNsVU04RFZxMXN2ZW5QRGQtY2pnP3J0aW1lPUktQnNWbEk1MlVn&sortField=Modified&isAscending=false&id=%2Fpersonal%2Ff%5Fnardi12%5Fstudenti%5Funipi%5Fit%2FDocuments%2FINGEGNERIA%20INFORMATICA%2FPRIMO%20ANNO%2FAnalisi%202%2FLezioni%2FLISTA%20DOMANDE%20ANALISI%202%2Epdf&parent=%2Fpersonal%2Ff%5Fnardi12%5Fstudenti%5Funipi%5Fit%2FDocuments%2FINGEGNERIA%20INFORMATICA%2FPRIMO%20ANNO%2FAnalisi%202%2FLezioni

- Bot analisi 2 telegram
  @Analisi2bot

- Appunti di M. Giannini
  https://drive.google.com/file/d/1tx55xHg58hMzLPzCJ5hp9C52PZLXTyR2/view

- Appunti di M. Lampis
  https://github.com/Guray00/IngegneriaInformatica/blob/master/PRIMO%20ANNO/II%20SEMESTRE/Analisi%20Matematica%20II/Analisi%20II%20teoremi%20e%20definizioni.pdf

- Gruppo WhatsApp Analisi 2
  In particolare sono stati fondamentali i messaggi di Cristina.
  È stato possibile raccogliere molte domande grazie al suo contributo,

G.G.

Raccolta definizioni e teoremi degli esami orali di Analisi 2 a.a. 20-21 prof. Longo.

É consigliato un confronto con altre fonti, il materiale potrebbe essere parzialmente errato o incompleto.

Elenco delle risorse *pubbliche* che sono state particolarmente utili per la realizzazione di questo file:

- Lista domande analisi 2
  https://unipiit-my.sharepoint.com/personal/f_nardi12_studenti_unipi_it/_layouts/15/onedrive.aspx?originalPath=aHR0cHM6Ly91bmlwaWl0LW15LnNoYXJlcG9pbnQuY29tLzpmOi9nL3BlcnNvbmFsL2ZfbmFyZGkxMl9zdHVkZW50aV91bmlwaV9pdC9Fc2JYRU8wbXI3cEZrVm9FVmZuX3FLTUJvRTNsVU04RFZxMXN2ZW5QRGQtY2pnP3J0aW1lPUktQnNWbEk1MlVn&sortField=Modified&isAscending=false&id=%2Fpersonal%2Ff%5Fnardi12%5Fstudenti%5Funipi%5Fit%2FDocuments%2FINGEGNERIA%20INFORMATICA%2FPRIMO%20ANNO%2FAnalisi%202%2FLezioni%2FLISTA%20DOMANDE%20ANALISI%202%2Epdf&parent=%2Fpersonal%2Ff%5Fnardi12%5Fstudenti%5Funipi%5Fit%2FDocuments%2FINGEGNERIA%20INFORMATICA%2FPRIMO%20ANNO%2FAnalisi%202%2FLezioni

- Bot analisi 2 telegram
  @Analisi2bot

- Appunti di M. Giannini
  https://drive.google.com/file/d/1tx55xHg58hMzLPzCJ5hp9C52PZLXTyR2/view

- Appunti di M. Lampis
  https://github.com/Guray00/IngegneriaInformatica/blob/master/PRIMO%20ANNO/II%20SEMESTRE/Analisi%20Matematica%20II/Analisi%20II%20teoremi%20e%20definizioni.pdf

- Gruppo WhatsApp Analisi 2
  In particolare sono stati fondamentali i messaggi di Cristina.
  È stato possibile raccogliere molti domande grazie al suo contributo,

G.G.

Definizioni

Le seguenti definizioni sono state prese dal documento che contiene tutte le domande fatte all'esame di Analisi 2 a.a. 20-21. Grazie a coloro che hanno contribuito ad aggiornarlo

https://unipiit-my.sharepoint.com/personal/f_nardi12_studenti_unipi_it/_layouts/15/onedrive.aspx?originalPath=aHR0cHM6Ly91bmlwaWl0LW15LnNoYXJlcG9pbnQuY29tLzpmOi9nL3BlcnNvbmFsL2ZfbmFyZGkxMl9zdHVkZW50aV91bmlwaV9pdC9Fc2JYRU8wbXl3cEZrVm9FVmZuX3FLTUJvRTNsVU04RFZxMXN2ZW5QRGQtY2pnP3J0aW1lPUktQnNWbEk1MlVn&sortField=Modified&isAscending=false&id=%2Fpersonal%2Ff%5Fnardi12%5Fstudenti%5Funipi%5Fit%2FDocuments%2FINGEGNERIA%20INFORMATICA%2FPRIMO%20ANNO%2FAnalisi%202%2FLezioni%2FLISTA%20DOMANDE%20ANALISI%202%2Epdf&parent=%2Fpersonal%2Ff%5Fnardi12%5Fstudenti%5Funipi%5Fit%2FDocuments%2FINGEGNERIA%20INFORMATICA%2FPRIMO%20ANNO%2FAnalisi%202%2FLezioni

Definizioni

	N°	Definizione	Sezione	Volte chiesto
1	A1	Successione di vettori divergente	1 - Successioni	2
2	A2	Successione di vettori convergente	1 - Successioni	0
3	A3	Successione non limitata	1 - Successioni	6
4	A4	Successione limitata	1 - Successioni	0
5	B1	Curva parametrica	2 - Vario	1
6	B2	superficie parametrica regolare	2 - Vario	1
7	B3	Retta tangente ad una curva regolare	2 - Vario	1
8	B4	Piano tangente alla superficie parametrica regolare (in un punto del suo sostegno)	2 - Vario	14
9	C1	Insieme limitato	3 - Insiemi e punti	1
10	C2	Insieme non limitato	3 - Insiemi e punti	4
11	C3	Insieme connesso / connessione	3 - Insiemi e punti	9
12	C4	Insieme aperto	3 - Insiemi e punti	2
13	C5	Insieme chiuso	3 - Insiemi e punti	4
14	C6	Insieme stella	3 - Insiemi e punti	4
15	C7	Insieme semplicemente connesso	3 - Insiemi e punti	7
16	C8	Punto interno	3 - Insiemi e punti	6
17	C9	Punto di frontiera	3 - Insiemi e punti	10
18	C10	Punto di accumulazione	3 - Insiemi e punti	10
19	C11	Insieme convesso / convessità	3 - Insiemi e punti	7
20	C12	Punto esterno	3 - Insiemi e punti	1
21	C13	Punto isolato	3 - Insiemi e punti	1
22	D1	Funzione @-omogenea	4 - Funzioni Introduzione	1
23	D2	Funzione limitata	4 - Funzioni Introduzione	1
24	D3	Funzione non limitata	4 - Funzioni Introduzione	1
25	E1	Limiti	5 - Funzioni e limiti	12
26	F1	Differenziabilità e differenziale	6 - Derivate	15
27	F2	Derivata direzionale	6 - Derivate	10
28	F3	Matrice Jacobiana	6 - Derivate	9
29	G1	Forma lineare (differenziabile)	7 - Teoria dei campi	1
30	G2	Campo integrabile	7 - Teoria dei campi	4
31	G3	Forma esatta o integrabile	7 - Teoria dei campi	7
32	G4	Campo irrotazionale e forma chiusa aka condizione del rotore	7 - Teoria dei campi	11
33	G5	Forma associata	7 - Teoria dei campi	1
34	H1	Omotopia (deformazione)	8 - Curve	6
35	H2	Lunghezza di una curva e della poligonale inscritta	8 - Curve	1
36	H3	Curva rettificabile	8 - Curve	10

37	H4	Curva regolare	8 - Curve	5
38	I1	Pluriintervallo	9 - Integrali Lebesque	2
39	I2	Misura di un insieme aperto	9 - Integrali Lebesque	3
40	I3	Misura di un insieme compatto	9 - Integrali Lebesque	4

Successioni

A1) Successione di vettori divergente

$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ si dirà successione divergente se

$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, ciò significa che $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \nu : |a_n| > \varepsilon \quad \forall\, m > \nu$

DA UN CERTO PUNTO IN POI, DEFINITIVAMENTE

A2) Successione di vettori convergente

$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ si dirà successione convergente se

$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$, ciò significa che $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \nu : |a_n - L| < \varepsilon \quad \forall\, m > \nu$

A3) Successione di vettori non limitata

$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ viene detta non limitata se

$\forall\, K \in \mathbb{R} : \exists\, m \in \mathbb{N} : |a_n| \geq K$

A4) Successione di vettori limitata

$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ viene detta limitata se

$\exists\, K \in \mathbb{R} : \forall\, m \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$

Vario

B1) Curva parametrica

Una curva nel piano è una qualunque funzione $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ nello spazio $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^3$

La variabile $t\in[a,b]$ verrà detta PARAMETRO della curva
L'immagine $\varphi[a,b]$ verrà detta SOSTEGNO

Inoltre questa viene detta di classe C^0, C^1, C^∞ se è tale la funzione che la definisce

B2) Superficie parametrica (regolare)

La superficie parametrica $\varphi\ D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$
$\varphi(u,v)=(f(u,v),g(u,v),h(u,v))$ verrà detta REGOLARE se

1. f,g,h continue su D $(\in C^1(D))$
2. φ iniettiva
3. $|v|\neq 0\quad \forall (u,v)\in D \Rightarrow |\varphi_u\wedge\varphi_v|\neq 0$

CURVA REGOLARE

Una curva $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ si dirà regolare se

$\dot\varphi(t)\neq 0\quad\forall t\in[a,b]$

$\varphi\in C^1(\Omega)$

B3) Retta tangente ad una curva regolare

$\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^n\qquad t_0\in[a,b]\qquad \dot\varphi(t_0)\neq 0$

$$\boxed{\sigma(t)=\varphi(t_0)+\underbrace{\dot\varphi(t_0)}_{\text{VELOCITÀ}}(t-t_0)}$$

B4) Piano tangente alla superficie parametrica (regolare) in un punto del suo sostegno

$\varphi:\Delta\to\mathbb{R}^3\qquad (u_0,v_0)=x_0$

ESPLICITA

$$\psi(\alpha,\beta)=\underbrace{\varphi(u_0,v_0)}_{\text{PUNTO DI TANGENZA}}+\underbrace{\varphi_u(u_0,v_0)\alpha+\varphi_v(u_0,v_0)\beta}_{\text{JACOBIANA } \varphi'(u_0,v_0)\begin{pmatrix}\alpha-u_0\\ \beta-v_0\end{pmatrix}}$$

IMPLICITA

$\varphi(u_0,v_0)=\underbrace{(x_0,y_0,z_0)}_{\text{PT. TANGENZA}}$

$\varphi_u(u_0,v_0)\wedge\varphi_v(u_0,v_0)\neq 0$

$\quad\parallel$

$\underbrace{(a,b,c)}_{\text{VETTORE NORMALE}}$

$\to a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$

- devi trovare una retta perpendicolare allo spostamento
- impongo che il prodotto scalare tra la retta perp. e lo spostamento sul piano sia = 0

Insiemi e punti

C1) Insieme limitato

Ω detto insieme limitato se
$\exists K : \forall x \in \Omega \quad |x| \leq K$

C2) Insieme non limitato

Ω detto insieme non limitato se
$\forall K : \exists x \in \Omega : \quad |x| > K$

C3) Insieme connesso / connessione

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ viene detto INSIEME CONNESSO se
$\forall x_1, x_2 \in \Omega \quad \exists \varphi : [0,1] \to \Omega$ <u>continua</u> in $[0,1]$ tale che
$\varphi(0) = x_1$ e $\varphi(1) = x_2$

C4) Insieme aperto

Ω detto aperto se ogni suo punto è interno, dunque NON contiene la frontiera

$\forall x \in \Omega : \exists \rho > 0 : B(x, \rho) \subseteq \Omega \qquad]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$

C5) Insieme chiuso

Ω detto chiuso se contiene tutta la propria frontiera, ovvero se
$\partial\Omega \subseteq \Omega$
indica la frontiera

C6) Insieme stella

Ω è detta stella rispetto al centro (polo) SE ESISTE $x_0 \in \Omega$ tale che $\forall x \in \Omega$ IL SEGMENTO $\overline{x x_0} \subseteq \Omega$
ovvero che il segmento che collega ogni punto al centro è incluso in Ω
~~$(1-\lambda)x + \lambda x_0 \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0,1]$~~
NOTA: tutti gli insiemi stella sono convessi

C7) Insieme semplicemente connesso

Ω si dirà SEMPLICEMENTE CONNESSO, se ogni <u>CURVA CHIUSA</u> in Ω, a valori in Ω, è OMOTOPA ad una curva costante
$\gamma(t) = x_0 \in \Omega \;\forall t$

C8) Punto interno

x_0 si dirà INTERNO ad Ω se
$\exists \rho > 0 : B(x_0, \rho) \subseteq \Omega$

C9) Punto di frontiera

Un punto xo si dice di frontiera per Ω se
$\forall \rho>0 : \exists x_1 \in \Omega, x_2 \in C^{\Omega} : x_1, x_2 \in B(x_0, \rho)$

C10) Punto di accumulazione

Un punto xo si dice di accumulazione per Ω se
$\forall \rho>0 : \exists x \in \Omega : x \in B(x_0, \rho)$ con $x \neq x_0$

NOTA: tutti i punti interni sono di accumulazione

C11) Insieme convesso

Un insieme Ω si dirà convesso se
$\forall x_1, x_2 \in \Omega$ il segmento $\overline{x_1 x_2}$ è internamente **CONTENUTO** in Ω
$\forall x_1, x_2 \in \Omega$ $\forall \lambda \in [0,1]$ **CHE CONGIUNGE i 2 PUNTI**
$(1-\lambda) x_1 + \lambda x_2 \subseteq \Omega$

C12) Punto esterno

xo si dirà ESTERNO se $\exists \rho>0$ $B_\rho(x_0) \cap \Omega = \emptyset$
quindi xo INTERNO a C^{Ω}

C13) Punto isolato

Xo si dirà ISOLATO di Ω SE

1. $x_0 \in \Omega$
2. $\exists \varepsilon>0 : \Omega \cap B_\varepsilon(x_0) = \{x_0\}$

Funzioni introduzione

D1) Funzione @-omogena

Una funzione è definita omogenea su un insieme Ω CONO con $f: \Omega \to \mathbb{R}$ se:

$f(tx) = t^{\alpha} f(x) \quad \forall x \in \Omega \quad \forall t > 0$

di grado α

D2) Funzione limitata

$f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ si dirà LIMITATA se l'immagine è limitata

$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \Omega \quad |f(x)| \leq \varepsilon$

D3) Funzione non limitata

$f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ si dirà NON LIMITATA

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in \Omega \quad |f(x)| > \varepsilon$

Funzioni e limiti

E1) Limiti

FORMA GENERALE: $\lim_{A} f(x) = B \longleftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x \in \mathrm{dom} f \Rightarrow A' = B'$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty}$ $\quad \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x \in \mathrm{dom} f \Rightarrow |x|>\delta \quad |f(x)|>\varepsilon$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = L}$ $\quad \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x \in \mathrm{dom} f \Rightarrow |x|>\delta \quad |f(x)-L|<\varepsilon$

$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty}$ $\quad \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x \in \mathrm{dom} f \Rightarrow \overset{x \neq x_0}{|x-x_0|<\delta} \quad |f(x)|>\varepsilon$

$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$ $\quad \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x \in \mathrm{dom} f \Rightarrow \overset{x \neq x_0}{|x-x_0|<\delta} \quad |f(x)-L|<\varepsilon$

Derivate

F1) Differenziabilitá e differenziale

Data una funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ essa verrà detta DIFFERENZIABILE in x_0 se

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)}{|w|} = 0$$

$A(w)$ verrà detta DIFFERENZIALE con $A(w): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ LINEARE

$$A(w) = df(x_0, w) = \sum_{1}^{m} \frac{\partial f(x_0)}{\partial (x_i)}(w_i) = \nabla f(x_0) w$$

F2) Derivata direzionale

Si definisce derivata direzionale di $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ lungo la direzione di $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ come

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t}$$ SE ESISTE E FINITO

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0)}{\partial v} \qquad f_v(x_0) \qquad \partial_v f(x_0)}$$

F3) Matrice jacobiana

La matrice di una $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ (APERTO) che HA PER ELEMENTI LE DERIVATE PARZIALI PRIME DELLA FUNZIONE CALCOLATE IN UN PUNTO X

$$(Jf)_{ij} = \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

N° RIGHE = spazio di arrivo

N° COLONNE = spazio di partenza

$$[f'(x_0)]_{ij} = \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j}$$

La matrice jacobiana in un punto X0.
L'elemento generico di una matrice jacobiana é dato dalla derivata parziale della componente i-esima nel punto X0 rispetto alla variabile i-esima

$i = 1 \dots m \qquad J = 1 \dots m$

ESEMPIO

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad (\rho,\theta) \xrightarrow{T} (x,y)$$

DERIVATA della x rispetto a tutte le variabili che trovi al 2° membro

$$T' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

Teoria dei campi

G1) Forma lineare (differenziabile)

PRODOTTO CARTESIANO

Si definisce forma lineare differenziabile una funzione $\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:
con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che la funzione
$t \to \alpha(\bar{x}, t)$ sia lineare $\forall\, t \in \Omega$

$\exists\, f : \Omega \to \mathbb{R}^n : \nabla f \equiv \alpha$ in $\mathbb{R}^n \times \Omega$

GRADIENTE

G2) Campo integrabile

Un campo $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dirà INTEGRABILE (potenziale, conservativo, non dissipativo) se esiste $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ detta PRIMITIVA (POTENZIALE) tale che $\nabla \equiv A$ su Ω

$$\left(\nabla f(x) = A(x) \ \forall\, x \in \Omega \right)$$

G3) Forma integrabile (esatta)

Una forma $\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ si dirà INTEGRABILE (ESATTA), se esiste $f : \Omega \to \mathbb{R}$ detta PRIMITIVA (POTENZIALE) tale che $df \equiv \alpha$ su $\Omega \times \mathbb{R}^n$

$$\left(df(x, \omega) = \alpha(x, \omega) \ \ \forall\, x \in \Omega, \forall\, \omega \in \mathbb{R}^n \right)$$

G4) Campo irrotazionale e forma chiusa (condizione del rotore)

Se A campo con $\underline{A \in C^1}$ verificante la condizione
$(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i}$ si dirà IRROTAZIONALE

VARIABILI RISPETTO ALLE QUALI EFFETTUARE LA DERIVAZIONE

Una forma $\alpha(x, \omega) = A(x)\omega$ è detta <u>CHIUSA</u> se il suo campo associato è irrotazionale

G5) Forma associata

$\alpha(x, \omega) = \underbrace{A(x)}_{\text{CAMPO ASSOCIATO}} \omega \ \to \int_\varphi \alpha = \int_\varphi A$ forma e campo associato hanno per definizione lo stesso integrale sulle curve C^1 (a tratti)

$$\| $$

$$\sum_{i=1}^{m} A_i(x)\omega_i = \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\, dx_i$$

Differenziale della proiezione asse x

Curve

H1) Omotopia (deformazione)

2 curve φ_1 e $\varphi_2 : [0,1] \to \Omega$ continue C^0

$\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ e $\varphi(1) = \varphi_2(1)$

Si diranno OMOTOPE IN Ω se esiste $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ detta OMOTOPIA tale che

1. h è continua in $[0,1] \times [0,1]$
2. $h(0,t) = \varphi_1(t) \qquad h(1,t) = \varphi_2(t) \qquad \forall\, t \in [0,1]$
3. $h(\lambda, 0) = \varphi_1(0) \qquad h(\lambda, 1) = \varphi_1(\lambda)$

H2) Lunghezza di una curva e della poligonale inscritta

Sia φ una curva $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

→ continua

→ Data una partizione π $\left[\text{sequenza } \underset{a}{\overset{\shortparallel}{t_0}} < t_1 < \dots < t_{n-1} < \underset{b}{\overset{\shortparallel}{t_n}}\right]$

LUNGHEZZA POLIGONALE INSCRITTA ALLA PARTIZIONE π

$$\Lambda(\pi) = \sum_{1}^{m-1} \left| \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) \right|$$

LUNGHEZZA della CURVA

$$\Lambda(\varphi) = \sup_{\pi} \Lambda(\pi)$$

La lunghezza di φ è l'estremo superiore della lunghezza di tutte le poligonali inscritte

H3) Curva rettificabile

Una curva detta RETTIFICABILE se ESISTE E FINITA

$\Lambda(\varphi) < +\infty$

H4) Curva regolare

Una curva $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dirà REGOLARE se $\dot{\varphi}(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in [0,1]$ e $\varphi \in C^1(\Omega)$

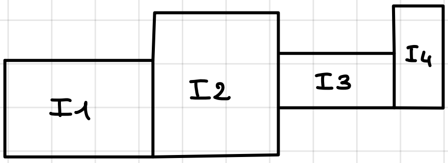
Integrali Lebesgue

I1) Plurintervallo

$P = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ ove I_i è un intervallo $\forall\, i = 1 \dots N$ verificanti $I_i \cap I_j$ non contiene punti interni di I_i e I_j

$\downarrow$

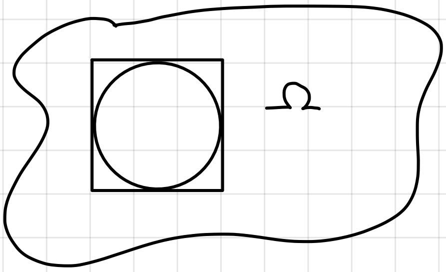
$|P| = \sum_{1}^{n} |I_i|$ → AREA di UN PLURINTERVALLO



Solo punti di frontiera

I2) Misura di un insieme aperto

Se Ω APERTO $\exists$ P plurintervalli $P \subseteq \Omega$ e si pone $|\Omega| = \sup\limits_{P \subseteq \Omega} |P|$



per ogni punto è presente una sfera tutta contenuta in Ω all'interno della quale si può inscrivere un plurintervallo

I3) Misura di un insieme compatto

Se K è compatto (CHIUSO E LIMITATO), poichè K È LIMITATO è contenuto in una sfera e quindi in un intervallo (e quindi plurintervallo)

$|K| = \inf |P| \quad P \supseteq K$

Teoremi

I seguenti teoremi sono stati presi dal documento che contiene tutte le domande fatte all'esame di Analisi 2 a.a. 20-21.

Grazie a coloro che hanno contribuito ad aggiornarlo

https://unipiit-my.sharepoint.com/personal/f_nardi12_studenti_unipi_it/_layouts/15/onedrive.aspx?originalPath=aHR0cHM6Ly91bmlwaWl0LW15LnNoYXJlcG9pbnQuY29tLzpmOi9nL3BlcnNvbmFsL2ZfbmFyZGkxMl9zdHVkZW50aV91bmlwaV9pdC9Fc2JYRU8wbXI3cEZrVm9FVmZuX3FLTUJvRTNsVU04RFZxMXN2ZW5QRGQtY2pnP3J0aW1lPUktQnNWbEk1MlVn&sortField=Modified&isAscending=false&id=%2Fpersonal%2Ff%5Fnardi12%5Fstudenti%5Funipi%5Fit%2FDocuments%2FINGEGNERIA%20INFORMATICA%2FPRIMO%20ANNO%2FAnalisi%202%2FLezioni%2FLISTA%20DOMANDE%20ANALISI%202%2Epdf&parent=%2Fpersonal%2Ff%5Fnardi12%5Fstudenti%5Funipi%5Fit%2FDocuments%2FINGEGNERIA%20INFORMATICA%2FPRIMO%20ANNO%2FAnalisi%202%2FLezioni

Teoremi

	N°	Teorema	Sezione	Volte chiesto
1	CC1	Insieme stella implica insieme semplicemente connesso	3 - Insiemi e punti	2
2	DD1	Teorema del Dini C0 - Teorema delle funzioni implicite	4 - Funzioni Introduzione	3
3	DD2	Lemma di Hermite (3 del TH. Fondamentale)	4 - Funzioni Introduzione	3
4	DD3	Teorema degli Zeri	4 - Funzioni Introduzione	6
5	FF1	Continuita' delle funzioni differenziabili	6 - Derivate	4
6	FF2	Una funzione diffrenziabile ha tutte le derivate direzionali	6 - Derivate	2
7	FF3	Teorema del differenziale (totale) - Se una funzione è di classe C1 allora è differenziabile	6 - Derivate	4
8	FF4	Teorema di Fermat	6 - Derivate	1
9	FF5	Teorema Lagrange su segmento	6 - Derivate	1
10	FF6	Se un insieme e' sfera- e il gradiente di f sull'insieme e nullo- la f e costante	6 - Derivate	3
11	FF7	Teorema Dini C1	6 - Derivate	0
12	GG1	CN integrabiliità campi C0 - integrale dipende solo da estremi => campo integrabile	7 - Teoria dei campi	9
13	HH1	Rettificabilita' di funzioni C^1	8 - Curve	2

Insiemi e punti

CC1) Insieme stella implica semplicemente connesso

Ω stella rispetto $x_0 \implies \Omega$ semplicemente connesso

Ω SEMPLIC. CONN. SE OGNI CURVA CHIUSA È OMOTOPA AD UNA CURVA CONSTANTE $\gamma(t) = x_0 \in \Omega \ \forall t$

2 curve φ_1 e $\varphi_2 : [0,1] \to \Omega$ continue C^0
$\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ e $\varphi(1) = \varphi_2(1)$
si dicono OMOTOPE in Ω se esiste $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ detta OMOTOPIA tale che

1. h è continua in $[0,1] \times [0,1]$
2. $h(0,t) = \varphi_1(t)$ $\quad h(1,t) = \varphi_2(t)$ $\quad \forall t \in [0,1]$
3. $h(\lambda, 0) = \varphi_1(0)$ $\quad h(\lambda,1) = \varphi_1(\lambda)$

Ci sono 2 casi

$\boxed{x_0 = 0 \text{ (ORIGINE)}}$

Prendiamo una curva chiusa qualsiasi φ
Poi definiamo la funzione h come
$h(\lambda,t) = (1-\lambda)\varphi(t)$ $\quad \lambda \in [0,1]$ $\quad t \in [0,1]$

$h(0,t) = \varphi(t)$ $\quad h(1,t) = 0$

Deforma in $\gamma(t) = 0$

$$\int_\varphi A = \int_\gamma A = \int_0^1 A(\underbrace{\gamma(t)}) \cdot \underbrace{\dot\gamma(t)} \, dt = 0$$

valgono zero

$\boxed{x_0 = K \text{ ARBITRARIO}}$

$h(\lambda,t) = x_0 + (1-\lambda)(\varphi(t) - x_0)$

- h continua $[0,1] \times [0,1]$
- $h(0,t) = x_0 + \varphi(t) - x_0 = \varphi(t)$
- $h(1,t) = x_0$

il segmento $h(\lambda,t) = x_0 + (1-\lambda)(\varphi(t) - x_0)$ È INTERNO AD Ω PERCHÈ QUEL PUNTO DI SEGMENTO DI ESTREMI x_0 e $\varphi(t)$

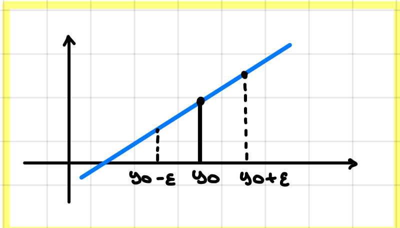
Funzioni introduzione

DD1) Teorema Dini C0

1 $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ $\quad f \in C^1(\Omega)$
2 (x_0, y_0) punto interno ad Ω
3 $f(x_0, y_0) = 0$
4 $t \to f(x, t)$ STRETTAMENTE CRESCENTE
ALLORA $\exists\, \delta > 0 : \varphi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R} :$
5 $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall\, x \in \text{dom}\, \varphi$
6 $\varphi(x_0) = y_0 \quad \forall\, x \in \text{dom}\, \varphi$
7 φ continua nel suo dominio

il TH. DINI è per la costruzione di zeri. Non ci dice se ci sono, ma come sono. Scelgo uno zero, ovvero un punto $(x_0, y_0) \in \Omega : f(x_0, y_0) = 0$

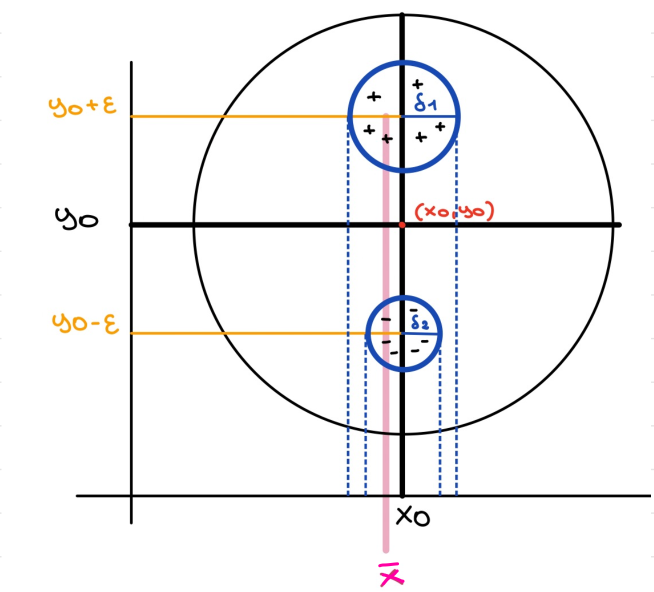
Siccome (x_0, y_0) è PUNTO INTERNO ad Ω da definizione
$\forall\, \rho > 0 \ \exists\, B((x_0, y_0), \rho) \subseteq \Omega$
Sia $\rho = \frac{\varepsilon}{2} \longrightarrow$ sicuramente sta in B



Siccome f STRETTAMENTE CRESCENTE
$f(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$ perché $y_0 + \varepsilon > y_0$
$f(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$ perché $y_0 - \varepsilon > y_0$

Essendo f continua in Ω, si può dunque applicare il TH. DELLA PERMANENZA DEL SEGNO possiamo costruire 2 sfere in cui il segno rimane costante

$\exists\, \delta_1 > 0 : |x - x_0| < \delta_1, \ f(x, y_0 + \varepsilon) > 0$
$\exists\, \delta_2 > 0 : |x - x_0| < \delta_2, \ f(x, y_0 - \varepsilon) > 0$



Fissato $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ottengo sicuramente un intorno di x_0 dove la funzione assume sicuramente valori sia positivi che negativi in $y_0 + \varepsilon$ e $y_0 - \varepsilon$

$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in dom\, \varphi$ TESI 5

Prendo $\bar{x} \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ $\left(|x_0-\bar{x}|<\delta\right)$ e traccio le verticali,

Sicuramente $f(\bar{x}, y_0-\varepsilon) < 0$ perchè
$|(\bar{x}, y_0-\varepsilon), (x_0, y_0-\varepsilon)| = |\bar{x}-x_0| < \delta < \delta_2$

VALORI DISCORDI

Allo stesso modo $f(\bar{x}, y_0+\varepsilon) > 0$ perchè
$|(\bar{x}, y_0+\varepsilon), (x_0, y_0+\varepsilon)| = |\bar{x}-x_0| < \delta < \delta_1$

$t \to f(x, y)$ definita su $[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$ perchè essendo $B_P((x_0, y_0))$ CONVESSA contiene anche il segmento di estremi $(x, y_0+\varepsilon)$ e $(x, y_0-\varepsilon)$, ed è continua perchè f lo è
RIENTRANO NEGLI INTORNI DI PERMANENZA del SEGNO

Applicando TH. ZERI $\Longrightarrow$ $\exists$ almeno uno zero in $\bar{y}$, dato è strett. monotona esso è anche unico $\forall\, \bar{x}$

$\varphi(x) = \bar{y}$ = unico zero $\quad \bar{y} \in [y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$

DI CONSEGUENZA

$$f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0 \longrightarrow f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$$

LA φ così costruita è l'unico zero di $f(\bar{x}, t)$ almeno per $\bar{x} \in [x_0 \pm \delta]$ e dunque $f(x, \varphi(x)) = 0$

$\varphi(x_0) = y_0$ TESI 6

$x = x_0$ essendo $\varphi(x_0)$ l'unico zero di $y \to f(\bar{x}, t)$ almeno per $\bar{x} \in [x_0 \pm \delta]$ e dunque $\varphi(x_0) = y_0$

φ continua in dom φ TESI 7

Dalla costruzione

$\varepsilon > 0 \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall\, x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$
sappiamo che è continua in x_0, cerchiamo di estendere l'intorno

Consideriamo ε' più grande di ε [si può scegliere comunque anche la sfera B e la dimostrazione è ancora valida]

Per ε' più piccola invece, è necessario applicare il TEOREMA e giungere a trovare una φ' che no ϕ in $\bar{y}$.

Tuttavia x costruzione la φ restituisce l'unico zero di $f(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))$, dunque in $\bar{x}$ i loro risultati coincidono proprio per l'unicità di tale $\emptyset$.

Diminuendo ε bisogna cambiare per forza la definizione di φ ma che da stessi risultati nell'intorno

DD2) Lemma di Hermite (3° del th. Fondamentale)

Sia $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ non costante (polinomio complesso)
$x_0 \in \mathbb{C} : P(z_0) \neq 0$
ALLORA
$\exists\, \bar{z} : |P(\bar{z})| \leq |P(z_0)|$

Definisco $Q(w) = \dfrac{P(z_0+w)}{P(z_0)}$

Osservo che
(A) $Q(0) = \dfrac{P(z_0)}{P(z_0)} = 1$
(B) $\deg P = \deg Q$

La tesi diventa quindi

$$\underbrace{|P(\bar{z})|}_{|Q(w)|} < \underbrace{|P(z_0)|}_{1}$$

$|Q(w)| < 1$

Sviluppando il numeratore
$P(z_0+w) = \sum_{1}^{m} a_i (z_0+w)^i$
a questo punto dato che deg p = deq ed è NON COSTANTE ha almeno un coefficiente non nullo.

Considerando k il minimo intero positivo per cui $\alpha_k \neq 0$
$Q(w) = 1 + \alpha_k w^k + w^{k+1} \tilde{q}(w)$
polinomio ottenuto raccogliendo w^{k+1}

$$|Q(w)| = \left| \frac{P(z_0+w)}{P(z_0)} \right| < 1$$
$$\|$$
$$|1 + \alpha_k w^k + w^{k+1}\tilde{q}(w)| \leq \underbrace{|1+\alpha_k w^k|}_{A} + \underbrace{|w^k||\tilde{Q}(w)|}_{B} < 1$$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

TERMINE (A)
per poter verificare è necessario che $\alpha_k w^k \in \mathbb{R}$ e $\boxed{\alpha_k < 0}$ (x ipotesi)
MA $\alpha_k w^k$ è complesso, perciò per farlo diventare reale:

REALE e NEGATIVO
$\alpha_k w^k < 0$
$\Downarrow$
$|1+\alpha_k w^k|$
$\|$
$1 - |\alpha_k w^k|$

$\theta = \arg(\alpha_k w^k) = \pi$
$\downarrow$
$\arg(\alpha_k) + \arg(w^k) = \arg \alpha_k + k \arg w = \pi$
$\downarrow$
$\arg w = \dfrac{\pi - \arg \alpha_k}{k}$

Imponiamo inoltre che $|\alpha_k w^k| < 1 \longrightarrow |w| \le \frac{1}{|\alpha_k|^{1/k}}$

ADESSO POSSIAMO DIRE

$$|Q(w)| = \left|\frac{P(z_0+w)}{P(z_0)}\right| < 1$$

$$\|$$

$$|1 + \alpha_k w^k + w^{k+1}\tilde{Q}(w)| \le \boxed{|1+\alpha_k w^k|} + |w^k||\tilde{Q}(w)| < 1$$

$$\|$$

$$|Q(w)| \le \boxed{1 - |\alpha_k||w^k|} + |w^k||\tilde{Q}(w)|$$

raccogliendo

$$|Q(w)| \le 1 - |w^k|\left[|\alpha_k| - |w||\tilde{Q}(w)|\right]$$

PER $w \to 0$

$$|Q(w)| \le 1 - |w^k|\Big[\underbrace{|\alpha_k| - |w||\tilde{Q}(w)|}_{}\Big]$$

$|\alpha_k| \to |\alpha_k| > 0$

non si annulla
perché [ ] sono
infinitesimo di ordine superiore
↓
$|w^k| > 0$

I vincoli posti su w sono

$\boxed{|w| \le \frac{1}{|\alpha_k|^{1/k}}}$ $\boxed{|w| < \delta}$

da quando lo faccio tendere a 0
per eliminare parentesi

Considerando $|w| \le \min\{\delta, |\alpha_k|^{-1/k}\}$ sono sicuro di avere w abbastanza piccolo.
Quindi sicuramente $|Q(w)| < 1$
da $z = z_0 + w$ abbiamo soddisfatto la tesi

DD3) Teorema degli zeri

Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$

1. Ω connesso
2. f continua in Ω
3. $\exists\, x_1, x_2 \in \Omega : f(x_1) f(x_2) < 0$

ALLORA

$\exists\, \bar{x} \in \Omega : f(\bar{x}) = 0$

Per connessione di Ω

$\exists\, \varphi : [0,1] \to \Omega$ continua tale che

$\varphi(0) = x_1$ $\qquad \varphi(1) = x_2$

Definisco una nuova funzione $h(t)$

$\rightarrow h : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\rightarrow h(t) = f(\varphi(t))$

$\rightarrow h$ continua

$$\left.\begin{array}{l} h(0) = f(\varphi(0)) = f(x_1) \\ h(1) = f(\varphi(1)) = f(x_2) \end{array}\right\} \text{VALORI DISCORDI}$$

Dato che $[0,1]$ = intervallo chiuso e limitato e h continua, posso applicare TH. DEGLI ZERI 1 VARIABILE

$$\exists\, \bar{t} \in [0,1] : h(t) = 0$$

$$0 = h(\bar{t}) = f(\varphi(\bar{t})) \qquad \bar{x} = \varphi(\bar{t})$$

Allora

$$\exists\, \bar{x} \in \Omega : f(\bar{x}) = 0$$

Derivate

FF1) Continuità delle funzioni differenziabili

Se f differenziabile in $x_0 \longrightarrow f$ continua in x_0

f differenziabile significa che

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{f(x_0+\omega) - f(x_0) - A(\omega)}{\omega} = 0$$

f continua vuole dire che

$$\lim_{\substack{\cancel{x \to x_0} \\ \omega \to 0}} f(x_0+\omega) \overset{?}{=} f(x_0)$$

$$\lim_{\substack{\cancel{x \to x_0} \\ \omega \to 0}} f(x_0+\omega) - f(x_0) = 0$$

Procediamo a ritroso

$$f(x_0+\omega) - f(x_0) - A(\omega) + A(\omega) =$$ moltiplico per $|\omega|$

$$|\omega| \boxed{\frac{f(x_0+\omega) - f(x_0) - A(\omega)}{|\omega|}} + \frac{A(\omega)}{\cancel{|\omega|}} \cancel{|\omega|}$$

$\boxed{\dfrac{f(x_0+\omega) - f(x_0) - A(\omega)}{|\omega|}} = 0$

PER DIFFERENZIABILITÀ
PER $\omega \to 0$

$$\alpha\,\omega = \sum_{1}^{n} \alpha_i \underbrace{\omega_i}_{\omega \to 0} = 0$$

FF2) Una funzione differenziabile ha tutte la derivate direzionali

f differenziabile in un punto x_0 $\longrightarrow$ $\exists \underbrace{f_v(x_0)}_{\text{TUTTE DERIVATE DIREZIONALI}} = \underbrace{df(x_0, v)}_{\text{DIFFERENZIALE IN } x_0} = A(v)$

$\forall\, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Ho bisogno di dimostrare che

$$\underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t}}_{\text{DERIVATA DIREZ.}} = \underbrace{A(v)}_{\text{DIFFERENZIALE}}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} - A(v) = 0$$

porto $A(v)$ dentro il rapporto

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0) - A(v)t}{t} \overset{?}{=} 0$$

per linearità di $A(v)$ porto dentro t,
inoltre dimostro che continua a fare zero mostrando che lo è anche il modulo

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f(x_0+tv) - f(x_0) - A(vt)|}{|t|} \overset{?}{=} 0$$

moltiplico e divido per $|v|$ (COSTANTE)

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f(x_0+tv) - f(x_0) - A(vt)|}{|tv|} |v| \overset{?}{=} 0$$

Quanto scritto sopra è una funzione composta
preso $w = tv$
$t \to 0$, quindi $tv \to 0 = w \to 0$

$$\lim_{w \to 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)|\,|v|}{|w|} = 0$$

tende a 0 PER IPOTESI di DIFFERENZIABILITÀ

FF3) Teorema del differenziale (totale)

Sia Ω APERTO
(x_0, y_0) interno ad Ω
$f: \Omega \to \mathbb{R}$
$\exists\ f_x, f_y: \Omega \to \mathbb{R}$
$f_x, f_y \in C^1(\Omega)$

$\longrightarrow$ f è differenziabile in ogni $x_0, y_0 \in \Omega$
$\exists\ df(x_0, w)$

Dalla tesi si ha che

$$df\left((x_0,y_0),(h,k)\right) \overset{?}{=} f_x(x_0,y_0)h + f_x(x_0,y_0)k$$ (QUELLO CHE DICE LA TESI)

Posso scriverlo come

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{\overbrace{\boxed{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)}}^{A} - f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

A $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$

Aggiungo e sottraggo $f(x_0, y_0+k)$

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) + f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)$$

Creo 2 nuove funzioni g e h (dove il parametro indica l'asse di spostamento)

$g: t \to f(t, y_0+k)$ // lungo x
$h: s \to f(x_0, s)$ // lungo y

Quindi

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \overbrace{\boxed{g(x_0+h) - g(x_0)}}^{A_1} + \overbrace{\boxed{h(y_0+k) - h(y_0)}}^{A_2}$$

A_1 $g(x_0+h) - g(x_0)$

Moltiplico e divido per $(x_0+h) - x_0$

$$\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{(x_0+h) - x_0} \overbrace{(x_0+h) - x_0}^{h}$$

Lagrange 1 VARIABILE

$$\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{(x_0+h) - x_0} \overbrace{(x_0+h) - x_0}^{h} = g'(\bar{x})h$$

in 2 variabili

$$= f_x(\bar{x}, y_0+k)h$$

A2 Vale lo stesso ragionamento di A1

$$h'(\bar{y})k = f_y(x_0, \bar{y})\,k$$

Perciò A

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = f_x(\bar{x}, y_0+k)\,h + f_y(x_0,\bar{y})\,k$$

Quindi ho che:

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{\overset{A}{\boxed{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)}} - f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\|$$

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{\overset{A}{\boxed{f_x(\bar{x}, y_0+k)\,h + f_y(x_0,\bar{y})\,k}} - f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Per disuguaglianza triangolare

$$\leq \lim \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \left| f_x(\bar{x}, y_0+k) - f_x(x_0,y_0) \right|$$

$$+ \lim \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \left| f_y(x_0,\bar{y}) - f_y(x_0,y_0) \right|$$

$$\lim \boxed{\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}} \boxed{\left| f_x(\bar{x}, y_0+k) - f_x(x_0,y_0) \right|}$$

$$+ \lim \boxed{\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}} \boxed{\left| f_y(x_0,\bar{y}) - f_y(x_0,y_0) \right|}$$

1) SONO LIMITATE ≤ 1

$= 0$ perché f_x e f_y continue

2) $\bar{x} \in [x_0, x_0+h]$ $h \to 0$ $k \to 0$ segue x confronto che $\bar{x} \to x_0$ $\bar{y} \to y_0$

FF4) Teorema di Fermat

Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $x_0 \in \Omega$
1) x_0 punto di minimo locale
2) x_0 interno ad Ω
3) $f_v(x_0)$ esiste per qualche $v \neq 0$

utilizzo la definizione di PUNTO INTERNO
x_0 si dice INTERNO ad Ω
$\exists\, \rho_1 > 0 : \forall\, x \in B(x_0, \rho_1) \subseteq \Omega$

utilizzo la definizione di PUNTO di MINIMO LOCALE
$\exists\, \rho_2 > 0 : \forall\, x \in \Omega \cap B(x_0, \rho_2) \quad |f(x_0)| \leq |f(x)|$

prendo $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$, in questo modo entrambe le condizioni sono rispettate.

La STRATEGIA è quella di passare dal caso in 2 variabile a quello in 1 sola variabile.

Da sopra sappiamo che x_0 continuerà ad essere punto di minimo:

$$\exists\, \rho > 0 : \forall\, x \in \Omega \cap B(x_0, \rho) \qquad |f(x_0)| \leq |f(x)|$$

Riportando tutto in una variabile, considerando la derivata direzionale che voglio dimostrare essere uguale a 0

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \overset{?}{=} 0$$

Creo una funzione h
$h(t) = f(x_0 + tv)$
$h(0) = f(x_0)$

h è definita nell'intervallo in cui tv non esce dalla sfera...
IN PAROLE POVERE: la distanza tra $x_0 + tv$ e x_0 deve essere minore del raggio.

$$|x_0 + tv - x_0| < \rho$$

$$|tv| < \rho \to |t||v| < \rho$$

da cui $|t| < \dfrac{\rho}{|v|}$

Dunque h sarà definita in questo modo

$$h: \left]-\frac{P}{|v|}, \frac{P}{|v|}\right[\to \mathbb{R}$$

lo ZERO È INCLUSO!

Per cui riscrivendo il limite precedente

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{h(t)-h(0)}{t}$$

Ciò è lecito perché sappiamo esistere qualche derivata direzionale che che compone in 1 variabile il limite del rapporto incrementale (traducibile nella derivata 1ª della funzione h)

Abbiamo provato $\exists\, (f_v(x_0)$ esiste per qualche $v\neq 0)$

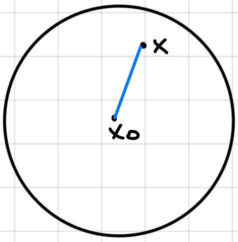
Da FERMAT in una variabile, il limite del rapporto incrementale nel punto di minimo sappiamo fare 0, dunque

$$\lim_{t\to 0} \frac{h(t)-h(0)}{t-0} = h'(0) = 0$$

$$h'(0) = f_v(x_0) = 0 \quad \text{TESI!}$$

FF5) Teorema di Lagrange in più variabili (segmento)

Sia una sfera contenuta nel dominio della funzione, x_0 centro e $x \in$ sfera, ALLORA
$\exists\, \xi \in \,]0,1[\, : \ f(x) - f(x_0) = \nabla f(x_0 + \xi(x - x_0))(x - x_0)$



$f(x) - f(x_0)$

Definisco una funzione h tale che

$h(t) = f(x_0 + t(x - x_0)) \quad t \in [0,1]$

$h(0) = f(x_0)$ e $h(1) = f(x)$

Poiché sfera convessa $\to$ $h : [0,1] \to \mathbb{R}$

SE f e $\varphi(t)$ sono differenziabili se $f \in C^1$

$h'(t) = \nabla f(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)$

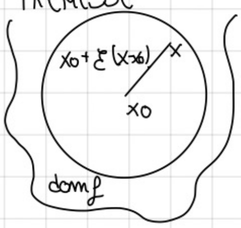
PRODOTTO SCALARE

$f(x) - f(x_0) = h(1) - h(0) \underset{\substack{\text{Lagrange} \\ \text{1 variabile} \\ \text{h è da} \\ \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R}}}{=} h'(\xi)(x - x_0)$

$= \nabla f(x_0 + \xi(x - x_0))(x - x_0)$

- TEOREMA del DINI per funzioni vettoriali

PREMESSE



Sia una sfera contenuta nel dominio della funzione, x_0 centro e $x \in$ sfera, allora
$\exists\, \xi \in \,]0,1[\, : f(x) - f(x_0) = \nabla f(x_0 + \xi(x - x_0))(x - x_0)$
$h(t) = f(\underbrace{x_0 + t(x - x_0)}_{\text{segmento da } x_0 \text{ a } x})$

$f \in C^1 \Longrightarrow f$ è differenziabile $\Longrightarrow$ derivabilità della funzione composta $h(t)$

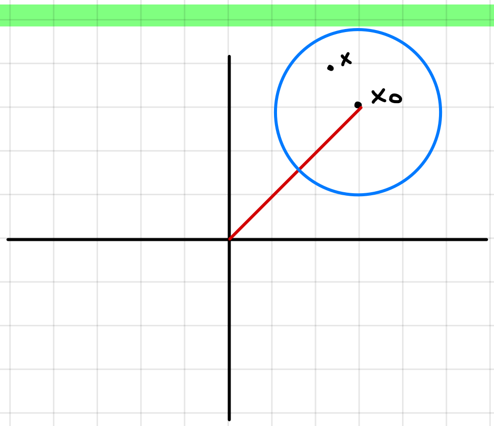
$h'(t) = \nabla f(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0) \longrightarrow \sigma(t) = x_0 + t(x - x_0) \quad \sigma'(t) = (x - x_0)$

Per il teorema di Lagrange applicato ad h su $[0,1]$, segue che $\exists\, \xi \in \,]0,1[\, : h(1) - h(0) =$
$= h'(\xi)(1 - 0)$

$\underbrace{f(\sigma(1))}_{f(x)} - \underbrace{f(\sigma(0))}_{f(x_0)} = \nabla f(x_0 + \xi(x - x_0))(x - x_0)$

FF6) Se un insieme é sfera e il gradiente di f sull'insieme é nullo, f é costante

$$\boxed{\nabla f = 0 \text{ su } B_\delta(x_0) \longrightarrow f \text{ costante su } B_\delta(x_0)}$$



Ho una sfera fatta dai punti dell'insieme con centro x_0 e considero un punto x

Poi, prendo la funzione

$t \to f(x_0 + t(x - x_0)) = h(t)$

Osserviamo che

$h(0) = f(x_0)$ $\quad h(1) = f(x)$

Inoltre $\nabla f = 0 \xrightarrow{\text{IMPLICA}} f$ ha derivate parziali continue $\longrightarrow f$ è differenziabile

DA CUI

$$h'(t) = \underbrace{\nabla f(x_0 + t(x - x_0))}_{= 0 \text{ X IPOTESI}} \cdot (x - x_0)$$

Vuol dire che h è definita su un intervallo $[0,1]$

$h'(t) = 0$ in $]0,1[$

$\downarrow$ segue

$h(t)$ è costante in $[0,1]$

$\downarrow$

$h(0) = h(1) \longleftrightarrow f(x_0) = f(x) \quad \forall x \in B(x_0)$

FF7) Teorema Dini C1

1 $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ $\quad f \in C^1(\Omega)$
2 (x_0, y_0) interno ad Ω
3 $f(x_0, y_0) = 0$
4 $f_y(x_0, y_0) > 0$

ALLORA $\exists\ \delta > 0 : \varphi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$:

5 $f(x, \varphi(x)) \quad \forall\ x \in \mathrm{dom}\ \varphi$
6 $\varphi(x_0) = y_0 \quad \forall\ x \in \mathrm{dom}\ \varphi$
7 φ differenziabile nel dom φ
8 $\varphi'(x) = \dfrac{-f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} \quad \forall\ x \in \mathrm{dom}\ \varphi$

Siccome (x_0, y_0) è PUNTO INTERNO ad Ω da definizione
$\forall\ \rho > 0\ \exists\ B((x_0, y_0), \rho) \subseteq \Omega$

Poichè f è continua in Ω ed è strettamente crescente, posso applicare TEOREMA PERMANENZA del SEGNO, ottenendo
$\exists\ \sigma > 0 : f_y(x, y) > 0 \quad \forall\ (x, y) \in \Omega \cap B(x_0, y_0)$

Preso $\varepsilon = \min\{\sigma, \rho\}$ ne segue che
$f_y(x, y) > 0 \quad \forall\ (x, y) \in B_\varepsilon(x_0, y_0)$

Fissato $\bar{x}$, poichè l'insieme $\{y \in \mathbb{R} : (\bar{x}, y) \in B_\varepsilon(x_0, y_0)\}$ è un intervallo possiamo applicare il TEOREMA di LAGRANGE alla funzione $t \to f(x, t)$ la quale risulterà strettamente crescente $\forall\ (x, t) \in B_\varepsilon(x_0, y_0)$

Per il TEOREMA DINI C0 $\exists\ \delta, \varphi$ verificanti le tesi 5, 6, 7

Per verificare la tesi 8, considero (x_0, y_0) e $(x, \varphi(x))$

$x \in\ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\ \to$ dalla tesi (verificata) $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall\ x \in \mathrm{dom}\ \varphi$

Quindi

$$\underbrace{f(x, \varphi(x))}_{=0} - \underbrace{f(x_0, y_0)}_{=0}$$

$\parallel$ LAGRANGE

$$f_x\big(x_0 + \xi(x - x_0), \varphi(x_0) + \xi(\varphi(x) - \varphi(x_0))\big)(x - x_0) + f_y\big(x_0 + \xi(x - x_0), \varphi(x_0) + \xi(\varphi(x) - \varphi(x_0))\big)(\varphi(x) - \varphi(x_0))$$

Supposto che $x \neq x_0$ e notando che $(x_0 + \xi(x - x_0), \varphi(x_0) + \xi(\varphi(x) - \varphi(x_0))$ è un punto del segmento di estremi (x_0, y_0) e $(x, \varphi(x))$ che appartengono alla sfera di raggio ε in cui $f_y > 0$

Dividendo per $(x-x_0)$ e per $f_y(\dots)$ ne segue che

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = -\frac{f_x\big(x_0+\xi(x-x_0),\ \varphi(x_0)+\xi(\varphi(x)-\varphi(x_0))\big)}{f_y\big(x_0+\xi(x-x_0),\ \varphi(x_0)+\xi(\varphi(x)-\varphi(x_0))\big)}$$

(confronto?)

Ora, per $x \to x_0$, si ha $\varphi(x) \to \varphi(x_0)$ per il teorema precedente (continuità di φ, 7)), da cui, essendo $\boxed{0<\xi<1}$, segue

$$x_0+\xi(x-x_0) \to x_0 \qquad \varphi(x_0)+\xi(\varphi(x)-\varphi(x_0)) \to \varphi(x_0)$$

Dalla continuità di f_x ed f_y si ha infine che

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = -\frac{f_x(x_0,\varphi(x_0))}{f_y(x_0,\varphi(x_0))} = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$$

Teoria dei campi

GG1) CN integrabilitá campi C0 - integrale dipende solo dagli estremi == > campo integrabile

Campo $A \in C^0(\Omega)$ integrabile se $\int_\varphi A$ dipende dagli estremi della curva

Il campo A è integrabile, quindi

A integrabile $\longrightarrow \nabla f \equiv A$ su Ω

Prendo una curva

$\varphi : [a,b] \to \Omega$ curva $C^1(\Omega)$

$$\int_\varphi A = \int_a^b A(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)\, dt$$

per integrabilità

$$\int_\varphi A = \int_a^b A(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)\, dt = \int_a^b \underbrace{\nabla f(\varphi(t))\, \dot{\varphi}(t)}_{\text{sarebbe la derivata della funzione}}\, dt$$

① $\underset{C^1}{\nabla f(\varphi(t))}\ \underset{C^0}{\dot{\varphi}(t)} = C^0$

PERCHÈ PROD. SCAL. DI FUNZIONI CONTINUE È CONTINUO

LA F(x) HA TUTTE LE DERIVATE CONTINUE PER $\nabla f = A \in C^0$ QUINDI DIFFERENZIABILE

②

$$= f(\varphi(x))\Big|_a^b = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$$

È VERO PERCHÈ LA FUNZIONE HA TUTTE LE DERIVATE CONTINUE PERCHÈ $\nabla f = A \in C^0$ QUINDI DIFFERENZIABILE

Curve

HH1) Rettificabilitá di funzioni C1

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n \qquad \varphi \in C^1([a,b])$

ALLORA

φ è rettificabile e inoltre

$$\Lambda(\varphi) \leq \int_a^b |\dot{\varphi}(t)|\, dt$$

LUNGHEZZA di φ

Scelgo una partizione π : $a = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = b$

per controllare se $\Lambda(\varphi)$ ESISTE e FINITA calcolo la lunghezza della poligonale inscritta

$$\Lambda(\pi) = \sum_0^{m-1} |\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)|$$

Siccome φ continua e differenziabile, posso applicare Torricelli

$$\Lambda(\pi) = \sum_0^{m-1} |\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| = \boxed{\sum_0^{m-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\varphi}(t)\, dt \right|}$$

Posso applicare la DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE
[NORMA SOMMA ≤ SOMMA NORME]

$$\Lambda(\pi) = \sum_0 |\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| = \sum_0^{m-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\varphi}(t)\, dt \right| \leq \boxed{\sum_0^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\varphi}(t)\, dt|}$$

perché è somma di integrali di funzioni scalari, sparisce la partizione (può essere scelta arbitrariamente in quanto indipendente)

$$\Lambda(\pi) = \sum_0 |\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| = \sum_0^{m-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\varphi}(t)\, dt \right| \leq \sum_0^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\varphi}(t)\, dt| = \boxed{\int_a^b |\dot{\varphi}(t)|\, dt}$$

SEGUE CHE

$$\Lambda(\varphi) \leq \int_a^b |\dot{\varphi}(t)|\, dt$$

UN MAGGIORANTE $\Lambda(\pi)\ \forall \pi$

TESI!

DA DEFINIZIONE
MINIMO dei MAGGIORANTI