Meccanica Classica

- La meccanica è la branca della fisica che descrive il movimento dei corpi materiali.

Essa si suddivide in tre ulteriori branche

- Cinematica
- Dinamica
- Statica

Nel seguito ci occuperemo di fenomeni classici, ovvero:

- che avvengono a velocità<< velocità della luce ($\sim 3 \times 10^8$ m/s)
- che avvengono su scale di lunghezza d >> dimensioni atomiche, (10^{-10} m) per corpi di massa m >> massa delle particelle elementari (10^{-31} kg)

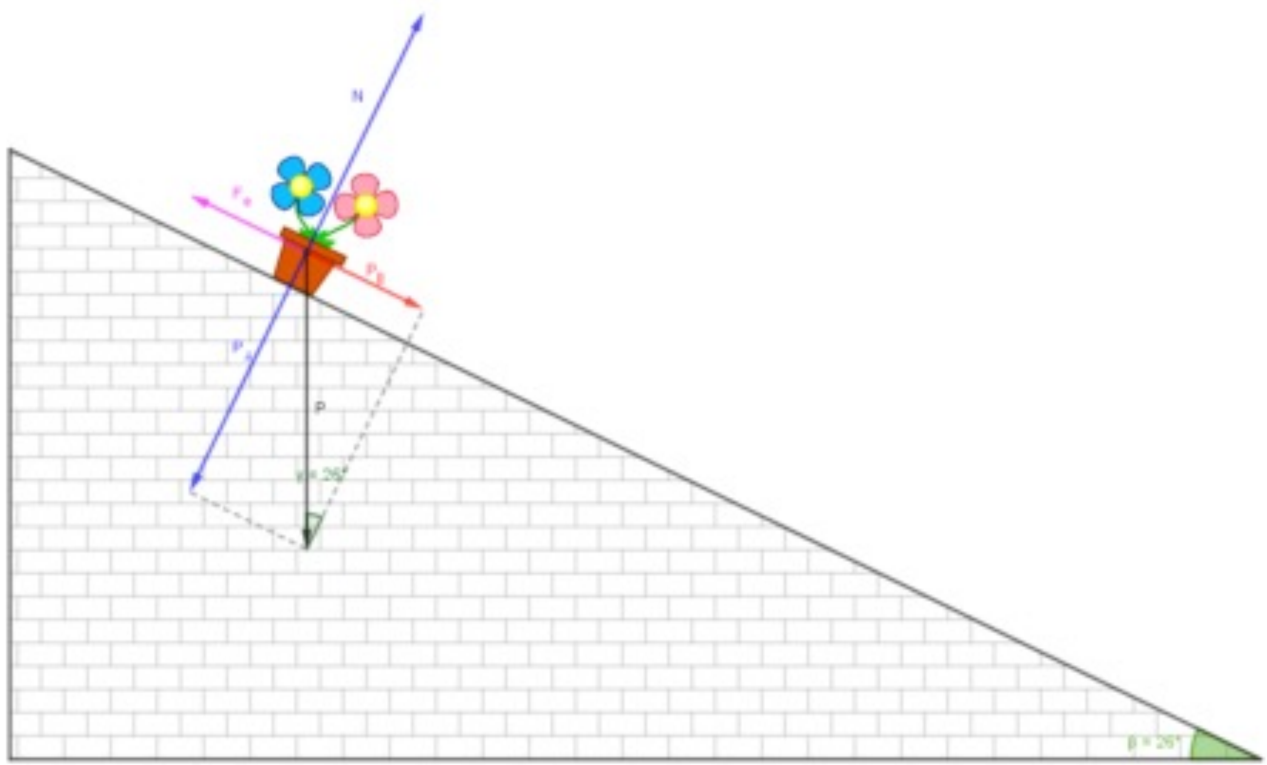
in tal caso si può parlare di una traiettoria ben definita per un corpo.

Introduzione alla Meccanica : Cinematica

La *Cinematica* si occupa della descrizione del moto, senza riferimento alle sue cause.

Dinamica

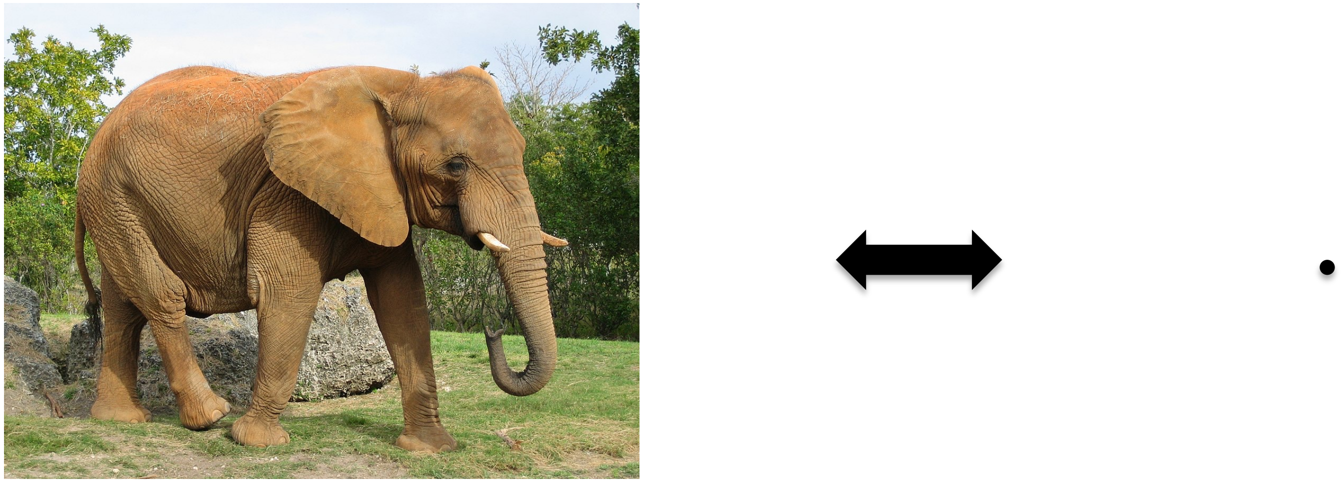
La *Dinamica* mette in relazione il moto con le sue cause: perchè e come gli oggetti si muovono.



Statica

la statica è la parte della meccanica che studia le condizioni di equilibrio di un corpo materiale ovvero le condizioni necessarie affinché un corpo, inizialmente in quiete, resti in equilibrio anche dopo l'intervento di azioni esterne dette forze.

Il Punto Materiale



- Il punto materiale permette di sostituire un oggetto esteso (di dimensioni non nulle) con una particella che ha massa, ma ha dimensione nulla

Il Punto Materiale

- Le due condizioni che permettono di usare il punto materiale sono:
  - La dimensione effettiva dell'oggetto non ha importanza ai fini dell'analisi del suo moto

    cioè le sue dimensioni sono molto minori di ogni suo spostamento misurato $\Longrightarrow$ Esempio: una nave in mezzo al mare

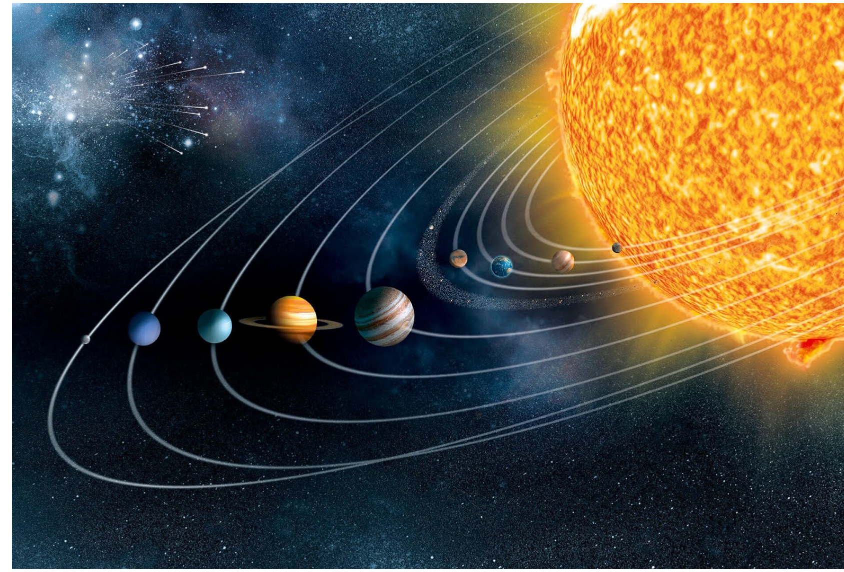
  - Qualunque processo avvenga all'interno dell'oggetto non ha importanza ai fini dell'analisi del suo moto

    cioè un oggetto che non ruota e non si deforma (oppure con rotazioni e deformazioni trascurabili) $\Longrightarrow$ Esempio: il moto di un corpo rigido che sia puramente traslatorio.

Esempi di moti descrivibili approssimando il corpo a un punto

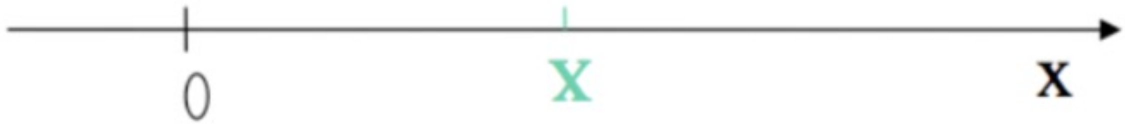
- Terra intorno al Sole
- Treno in cui si studia il moto da città a città
- ~~Treno in cui si studia l'oscillazione dei vagoni~~: NO ! (le posizioni relative dei vagoni cambiano, per cui non è un corpo rigido)
- Auto in cui si studia la frenata
- ~~Auto in cui si studia il ribaltamento in curva~~: NO ! (le dimensioni sono importanti nel determinare l'eventuale ribaltamento)

Esempi di moti descrivibili approssimando il corpo a un punto materiale



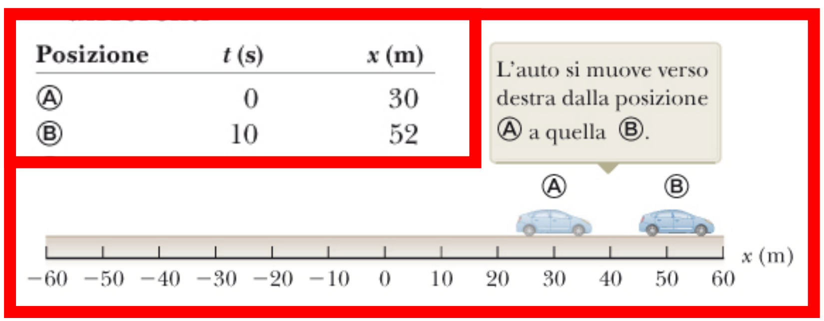
Cinematica: moto rettilineo

Per localizzare un oggetto che si muove su di una retta, (traiettoria rettilinea) è sufficiente conoscere la sua posizione, x(t), rispetto ad un sistema di riferimento:



- Spostamento: $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ [m].
  È la distanza percorsa in un tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ [s] con $t_2 > t_1$
- Velocità media tra t_1 e t_2 : $\bar{v}_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ [m/s]

Esempio



Posizione	t (s)	x (m)
Ⓐ	0	30
Ⓑ	10	52

$\Delta x = (52 - 30)\text{m} = 22$ m.

$\Delta t = (10 - 0)\text{s} = 10$ s

$\bar{v}_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = 2{,}2$ [m/s]

Attenzione ai segni! La velocità può essere positiva o negativa

Nota

La velocità è un vettore, come lo è lo spostamento e come lo è la velocità media. Ad es.:

$$\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z)$$

$$\overrightarrow{\Delta s} \equiv (\Delta s_x, \Delta s_y, \Delta s_z)$$

$$\vec{\bar{v}} \equiv (\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z)$$

Nel moto unidimensionale l'unica componente diversa da 0 è quella lungo l'asse del moto (x) .

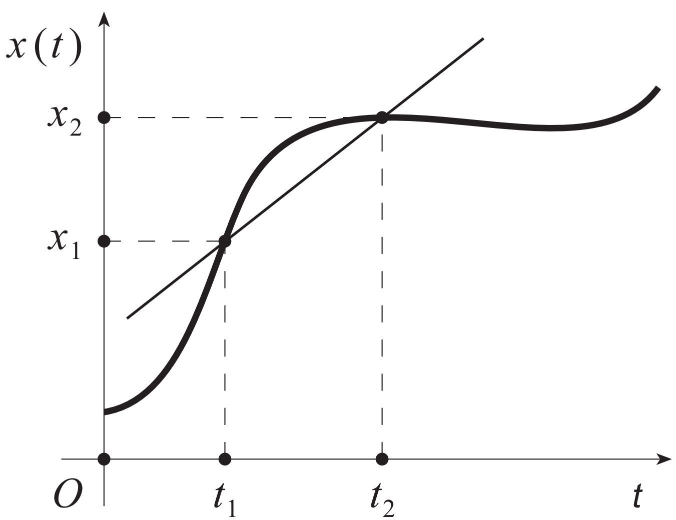
La velocità si misura in m/s.

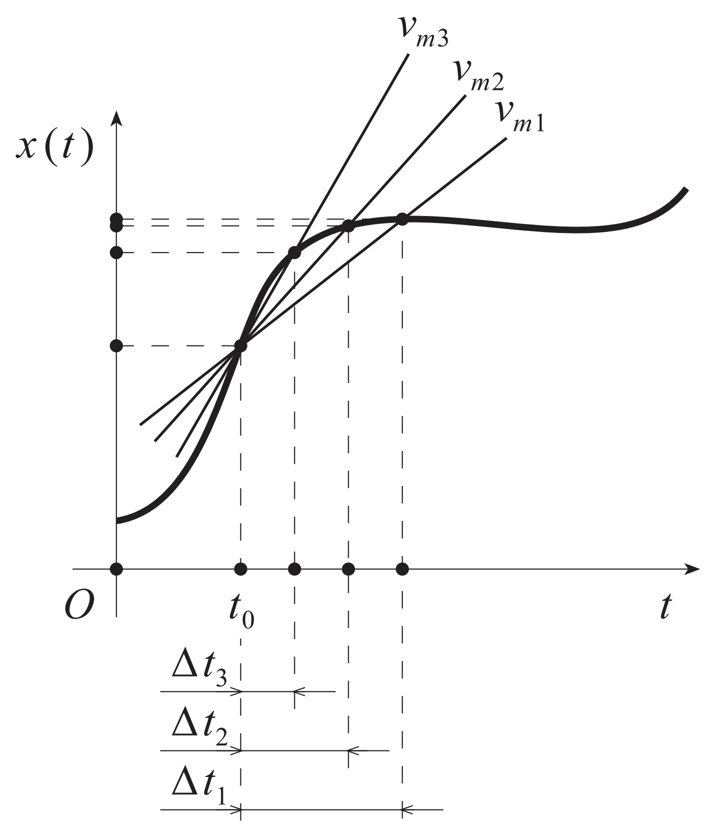
Velocità media: caso 1D

- Velocità : La rapidità con cui la posizione cambia nel tempo
- Definiamo **velocità media** il rapporto tra lo spostamento del punto materiale ed il corrispondente intervallo di tempo
  - può essere: >0 , < 0 oppure evidentemente nulla

$$\bar{v}_x = v_m \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Esempio:





Esempio 1 moto rettilineo (1D)

- Un punto materiale si muove partendo da una posizione iniziale $\boldsymbol{X_0=1m}$ all'istante $\boldsymbol{t=0}$ *nel* sistema di riferimento scelto.
- I dati riportati in tabella sono "fotografie" della posizione in istanti di tempo successivi.

t (s)	x (m)
0,00	1,00
0,03	0,99
0,07	0,98
0,10	0,95
0,13	0,91
0,17	0,86
0,20	0,80
0,23	0,73
0,27	0,65
0,30	0,56
0,33	0,46
0,37	0,34
0,40	0,22
0,43	0,08

traiettoria

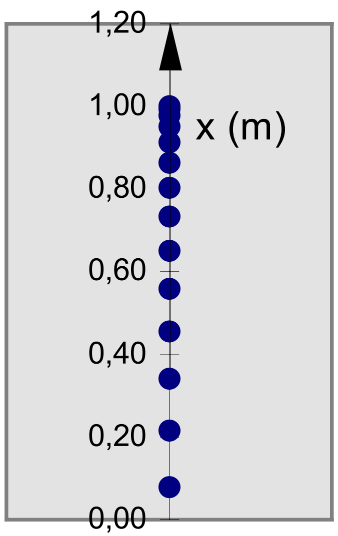
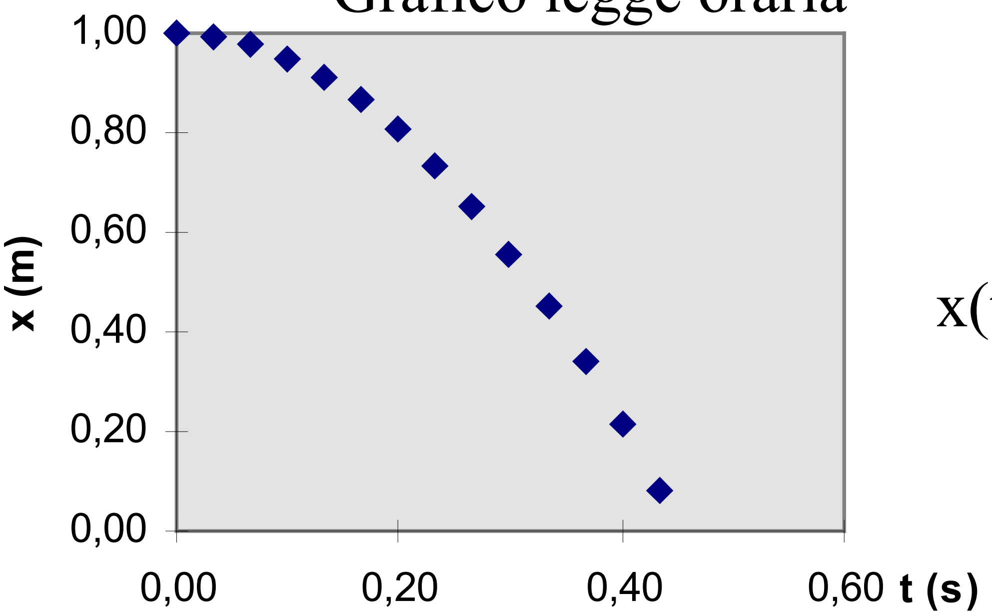


Grafico legge oraria



$$x(t) = 1.0 - \frac{1}{2} 9{,}81 t^2$$

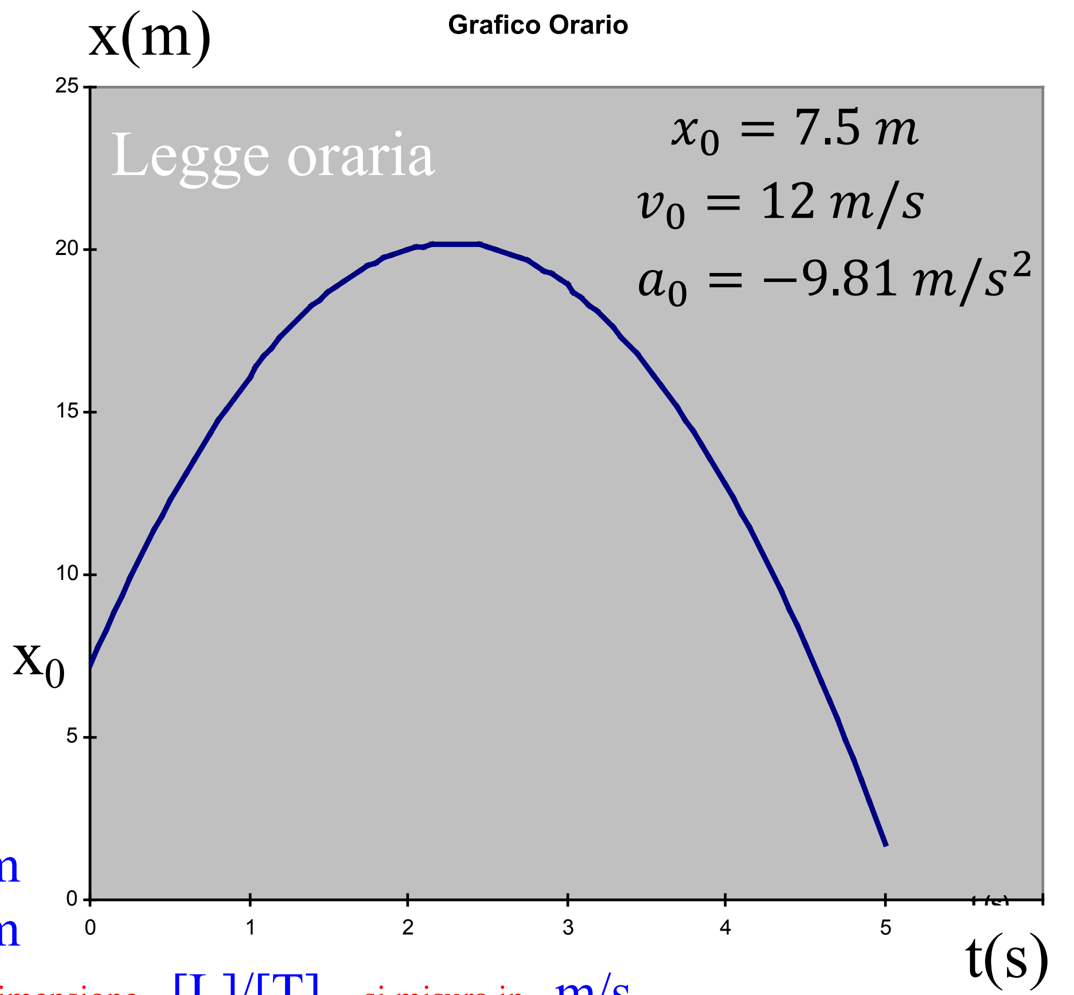
Esempio 2 Moto rettilineo (1D)

- La traiettoria viene percorsa con una legge oraria del moto del punto rappresentata dalla curva ("Legge oraria")

$x(t)= x_0 + v_0\, t+ \frac{1}{2} \cdot a_0\, t^2$

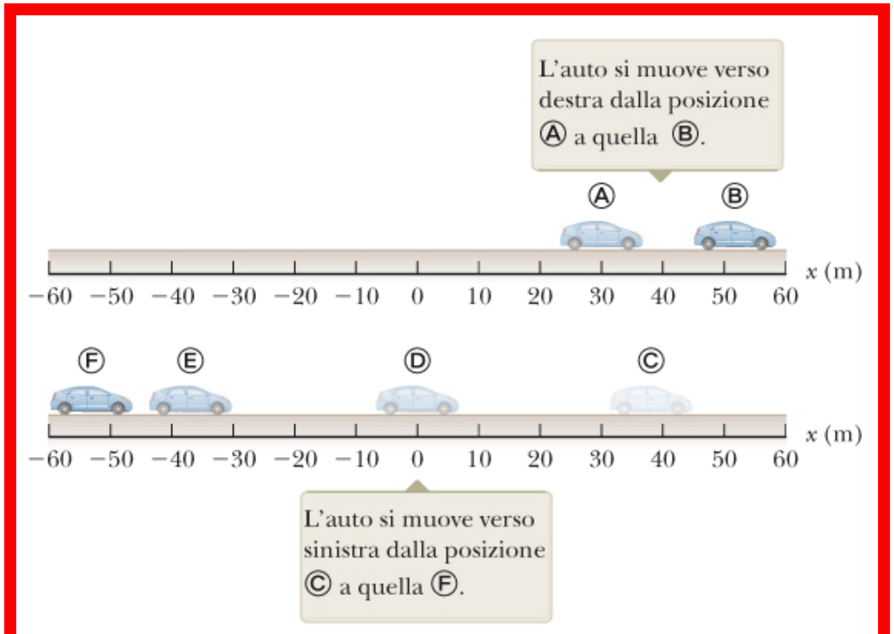
- Legge oraria: relazione tra diverse grandezze fisiche : $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{v_0}$, $\mathbf{a_0}$.

- consistenza "dimensionale" conseguenze:



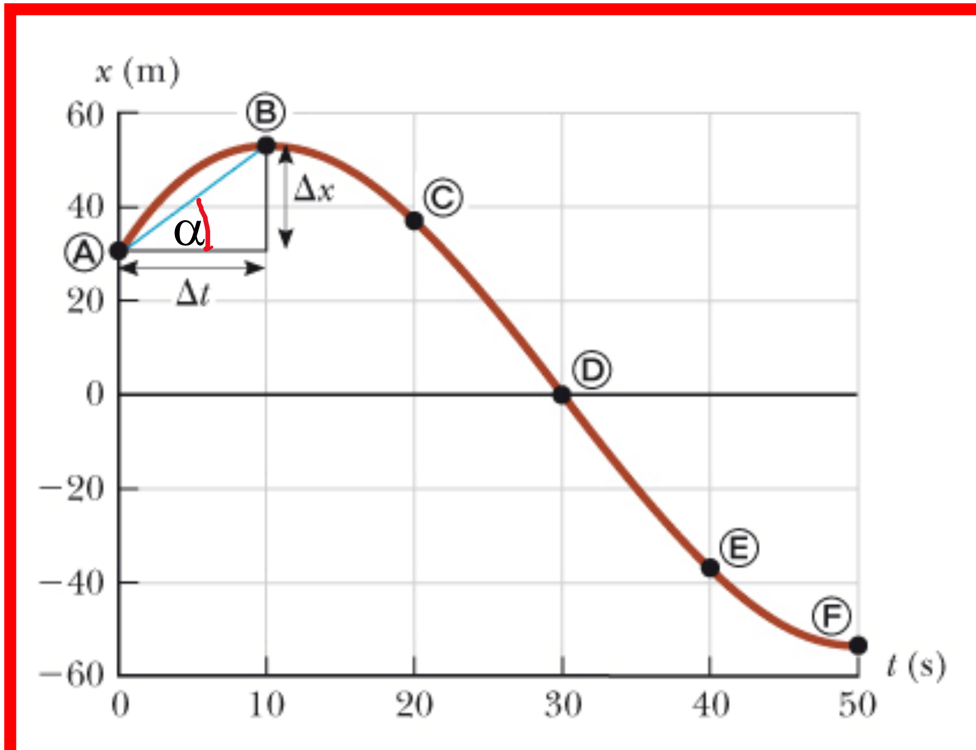
- $x(t)$ dimensione [L] si misura in m
- x_0 dimensione [L] si misura in m
- $v_0\, t$ dimensione [L] ➔ v_0 dimensione [L]/[T] si misura in m/s
- $\frac{1}{2} \cdot a_0\, t^2$ dimensione [L] ➔ a_0 dimensione $[L]/[T]^2$ si misura in m/s^2

Moto rettilineo: rappresentazione grafica esempio 3



Posizione	*t* (s)	*x* (m)
Ⓐ	0	30
Ⓑ	10	52
Ⓒ	20	38
Ⓓ	30	0
Ⓔ	40	−37
Ⓕ	50	−53

Diagramma orario, x(t) (o anche Legge oraria)

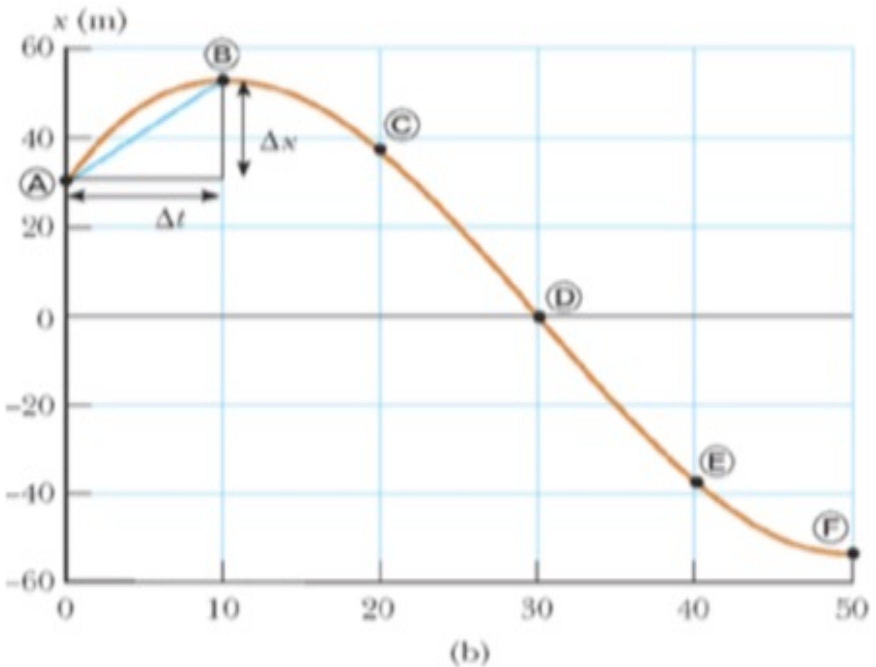


velocità media tra t_1 e t_2?

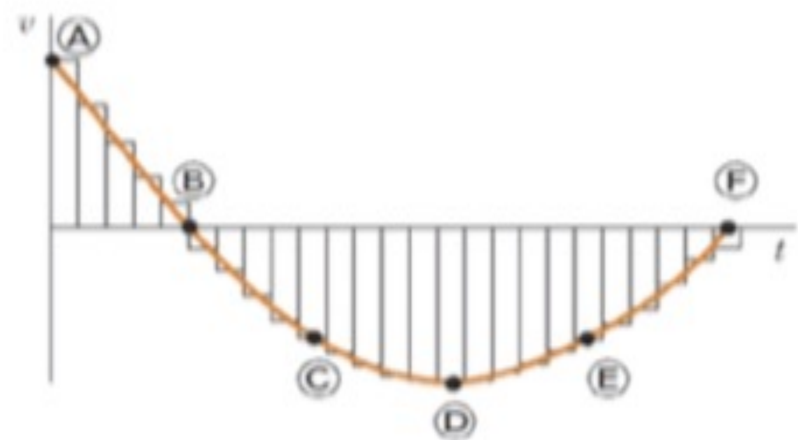
$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = tg\alpha$$

- $tg\alpha$ pendenza della retta che congiunge A a B

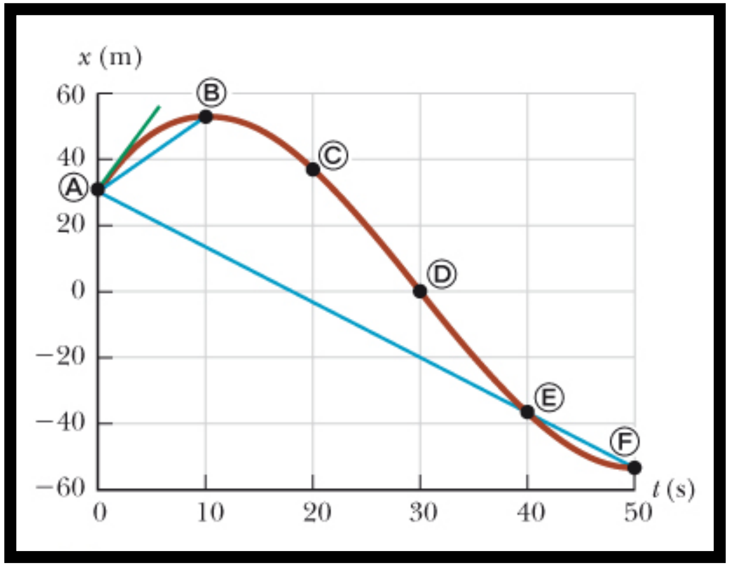
Dal fit dei dati si ottiene la curva continua

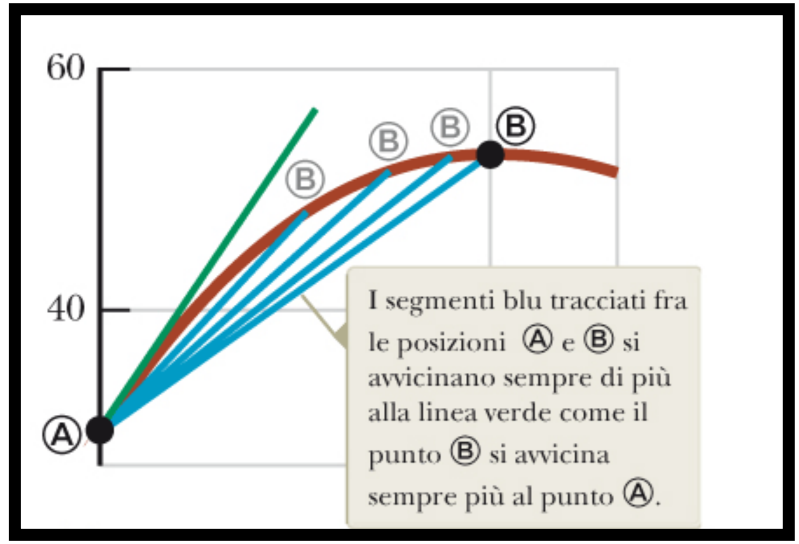


Dal calcolo della velocità media su intervalli di 2 secondi usando la curva continua possiamo ottenere il grafico della velocità media in funzione del tempo



Velocità istantanea

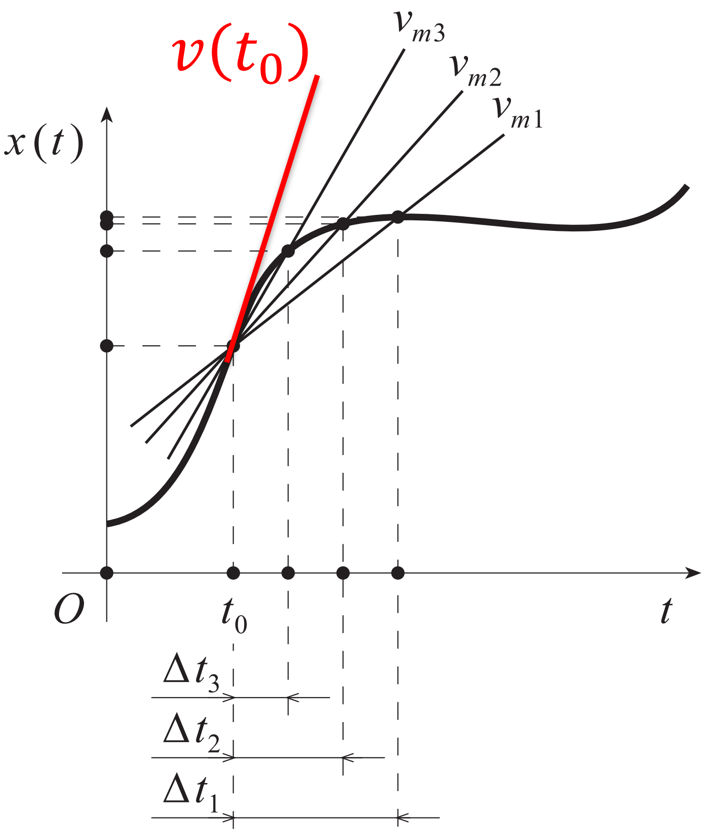




$$v_x(t) \equiv \mathrm{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\mathrm{v}}_x = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt}$$

- La velocità istantanea è la derivata di x(t) rispetto al tempo (notazione alternativa: v_x(t) = $\dot{x}$(t))
- coincide con la pendenza della tangente alla curva x(t)

Velocità istantanea: caso 1D



- Quando Δt decresce si raggiunge un valore limite
- Si riesce ad attribuire il valore della velocità posseduta dal punto materiale ad ogni istante di tempo, cioè il valore della sua velocità in ogni posizione occupata, utilizzando un procedimento di passaggio al limite.
- la velocità istantanea coincide con la tangente alla curva nel punto di interesse

Velocità istantanea al tempo t_0

$$v(t_0) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t \equiv t_0}$$

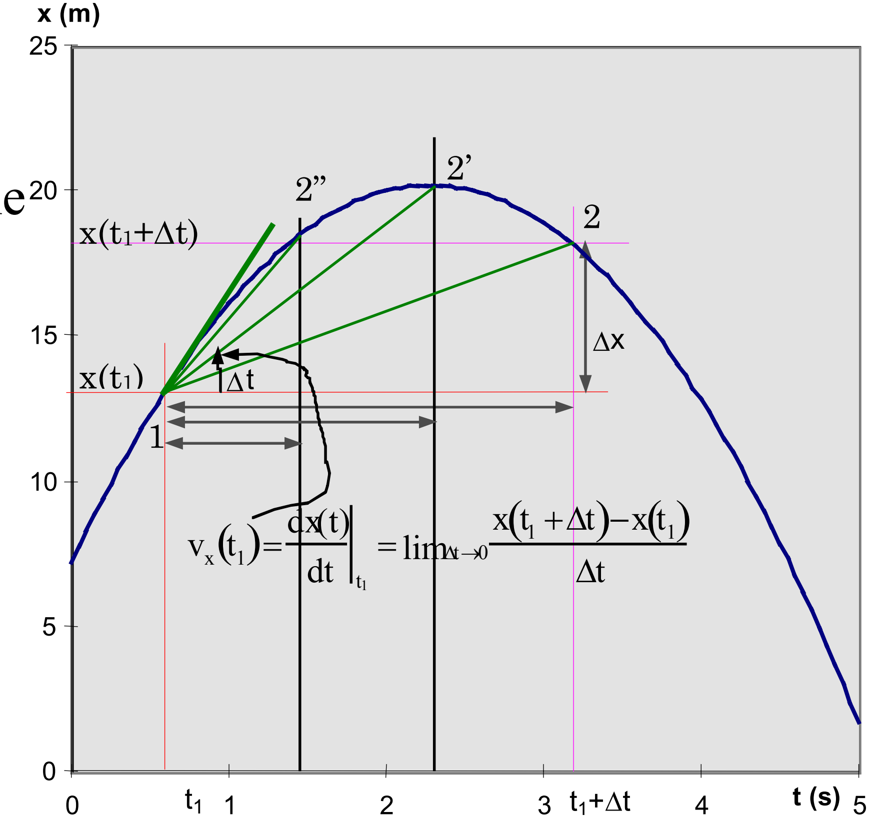
Velocità istantanea esempio 2

$$x(t) = x_0 + v_0\, t + \tfrac{1}{2} \cdot a_0\, t^2$$

- La velocità istantanea si calcola attraverso una operazione di derivazione rispetto al tempo della legge oraria

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + a_0\, t$$

È valida a qualsiasi istante generico t



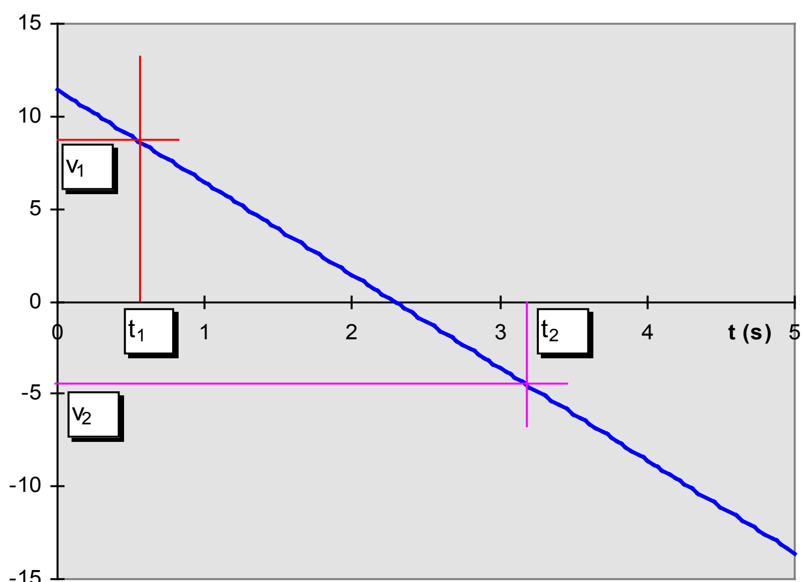
$x_0 = 7.5\ m$

$v_0 = 12\ m/s$

$a_0 = -9.81\ m/s^2$

$v_x(t)$(m/s)

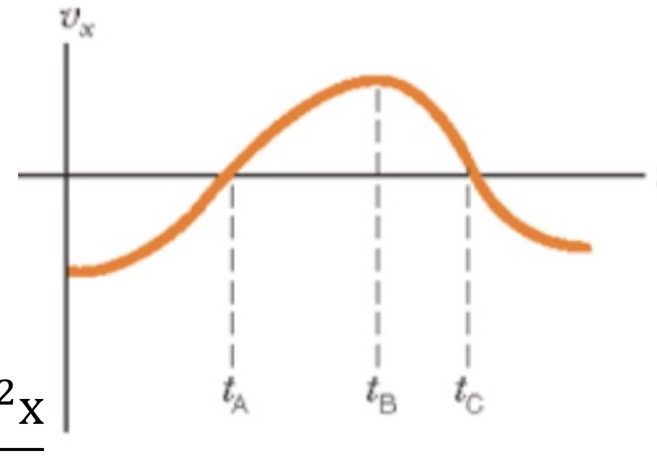
Grafico della velocità istantanea



Accelerazione media e istantanea nel moto rettilineo

- Accelerazione media:

$$\bar{a}_x \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = a_m = \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}$$

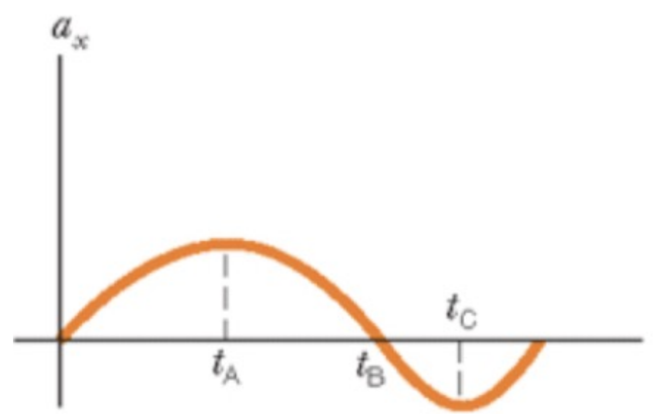


(a)

- Accelerazione istantanea:

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a}_x = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d^2 x}{dt^2}$$

- L'accelerazione istantanea è la derivata di v_x(t) rispetto al tempo, ovvero la derivata seconda di x(t) rispetto al tempo (notazione alternativa: a_x(t) = $\ddot{x}$ (t))
- Coincide con la pendenza della tangente alla curva v_x(t).



- l'accelerazione si misura in m/s^2 ed è una grandezza vettoriale

Accelerazione media e istantanea esempio 3

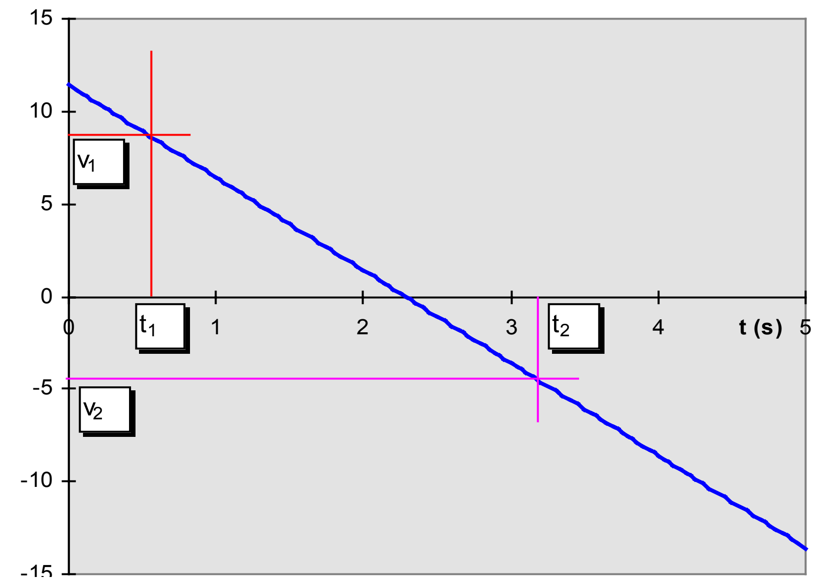
$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + a_0\, t$$

- la velocità non è costante, ma varia linearmente con il tempo. **Possiamo perciò calcolare** **l'accelerazione media**, **cioè la rapidità con cui varia la velocità.**

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$\boxed{[a_m] = \frac{m}{s^2},}$$

$v_x(t)$(m/s) **Grafico della velocità istantanea**



$$\bar{a}_x = a_m = \frac{v_o + a_o t_2 - (v_o + a_o t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{v_o + a_o t_2 - v_o - a_o t_1}{t_2 - t_1} = \frac{a_o (t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = a_o$$

- l'accelerazione istantanea, è data da

Accelerazione istantanea al tempo t_1

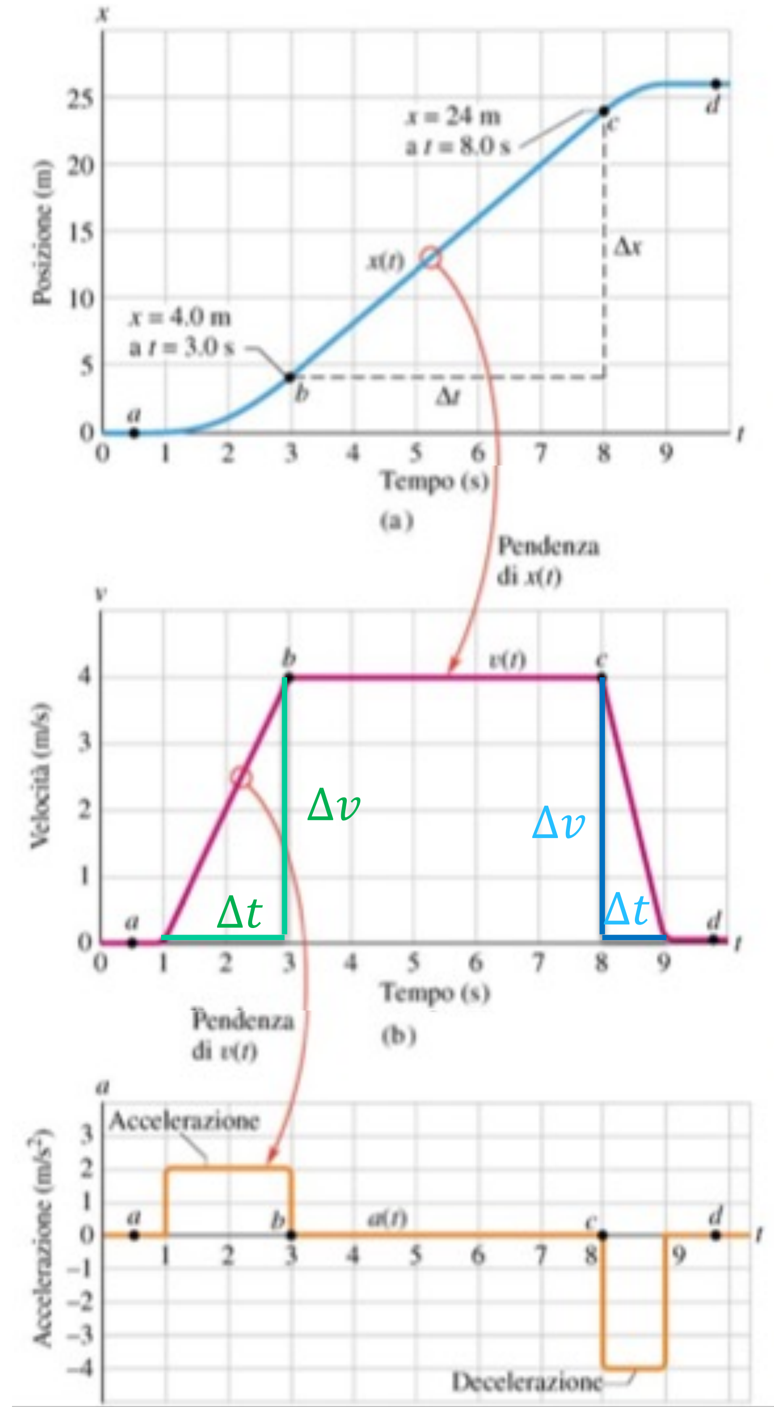
$$a_x(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t_1 + \Delta t) - v_x(t_1)}{\Delta t}$$

$$\boxed{a_x(t_1) = \left.\frac{dv_x(t)}{dt}\right|_{t=t_1}}$$

Dal diagramma orario all'accelerazione

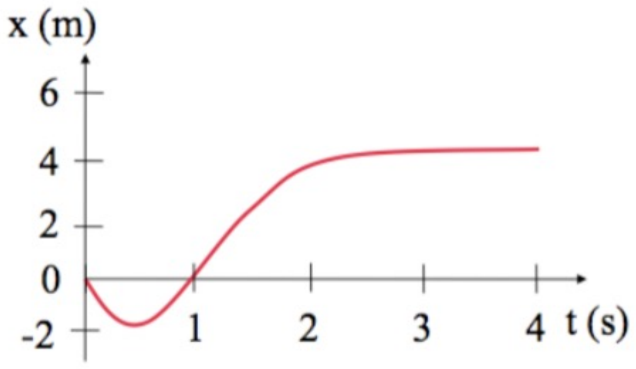
Se conosciamo la posizione x(t) in funzione del tempo, possiamo determinare velocità e accelerazione in funzione del tempo come:

$$\mathrm{v} = \frac{dx(t)}{dt} \qquad\qquad \mathrm{a} = \frac{dv(t)}{dt}$$



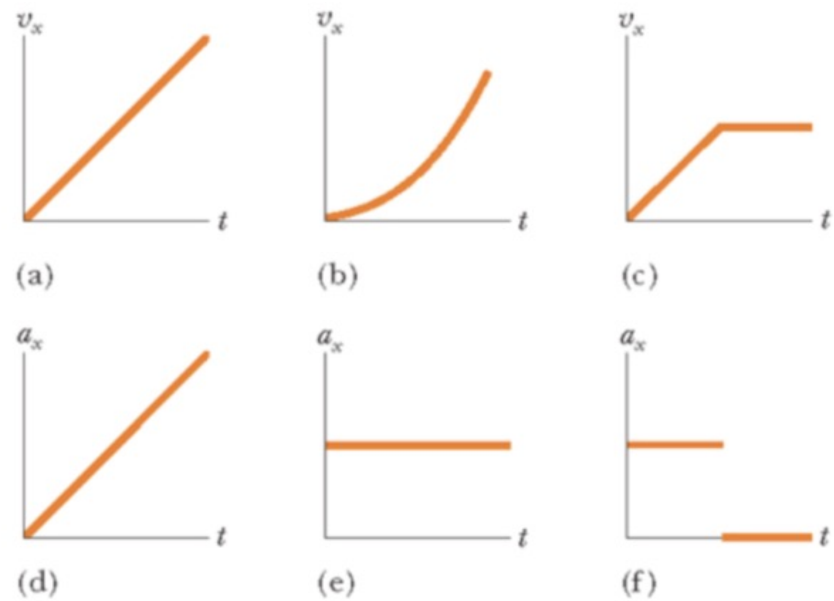
Esercizio: La posizione di una particella sull'asse x è data dalla funzione: $x(t) = 8t^2 - 6t + 4$, dove le unità di misura sono m per x, s per t. Trovare le funzioni v(t) e a(t) della particella.

Quiz rapidi



Quanto vale la velocità media nei primi 4 secondi? E la velocità istantanea nell'istante $t = 4$ s ?

Qual è l'accoppiamento corretto fra grafici di velocità e di accelerazione qui accanto?



Richiamo: calcolo di derivate

- Derivata della somma di funzioni:
$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x)$$

- Se α è costante, $\frac{d}{dx}(\alpha f)(x) = \alpha\frac{df}{dx}(x)$

- Derivata del prodotto di due funzioni:
$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = g(x)\frac{df}{dx}(x) + f(x)\frac{dg}{dx}(x)$$

- Derivata di funzione di funzione:

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \frac{df}{dg}(g(x))\frac{dg}{dx}(x)$$

funzione	derivata
$y=\alpha$	$y'=0$
$y=x^\alpha$	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=\tan x$	$y'=1/\cos^2 x$
$y=\log x$	$y'=1/x$
$y=e^x$	$y'=e^x$

Dall'accelerazione alla legge oraria

- Se conosco l'accelerazione in funzione del tempo in un moto rettilineo che avviene lungo x posso risalire alla legge oraria a patto di conoscere le condizioni iniziali (posizione e velocità)

$a_x(\mathrm{t})= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{dt}}$ da $v_x = \frac{dx}{dt}$ $v_x\, dt$=dx

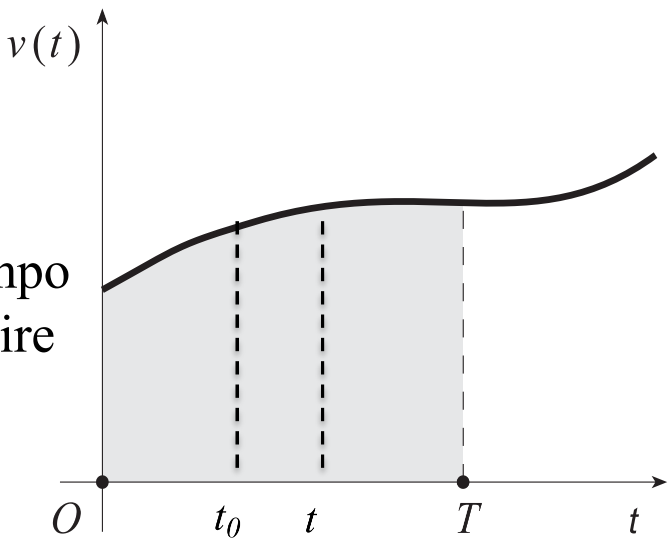
$\int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} a_x\, \mathrm{dt}' = \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \frac{dv_x}{\mathrm{dt}'} \mathrm{dt}' = v_x - v_{0x}$ $v_x = v_{0x} + \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} a_x\, \mathrm{dt}'$

$\int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} v_x\, \mathrm{dt}' = \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \frac{dx}{\mathrm{dt}'} \mathrm{dt}' = \int_{x(\mathrm{t}_0)}^{x(t)} dx = x(t) - x(\mathrm{t}_0)$

$x(t) = x(\mathrm{t}_0) + \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} v_x\, \mathrm{dt}'$ $= x(\mathrm{t}_0) + \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} v_x\, \mathrm{dt}'$

- anche conoscendo la sola velocità in funzione del tempo in un moto rettilineo che avviene lungo x posso risalire alla legge oraria, conoscendo la posizione iniziale, e dalla derivata della velocità ottengo l'accelerazione

$\int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} v_x\, \mathrm{dt}' = \int_{x(\mathrm{t}_0)}^{x(t)} dx = x(t) - x(\mathrm{t}_0)$



Es: Moto rettilineo uniforme lungo x, v_x = cost= v_{0x}, $a_x = 0$

$a_x(\mathrm{t})= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{dt}}=0$ da $v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x}$ $v_{0x}\, dt$=dx

$$\int_{\mathrm{t_0}}^{\mathrm{t}} v_{0x}\, \mathrm{dt}' = \int_{\mathrm{t_0}}^{\mathrm{t}} \frac{dx}{\mathrm{dt}'} \mathrm{dt}' = \int_{x(\mathrm{t_0})}^{x(t)} dx = x(t) - x(\mathrm{t_0})$$

$$x(t) = x(\mathrm{t_0}) + \int_{\mathrm{t_0}}^{\mathrm{t}} v_{0x}\, \mathrm{dt}' = x(\mathrm{t_0}) + v_{0x}(\mathrm{t} - \mathrm{t_0})$$

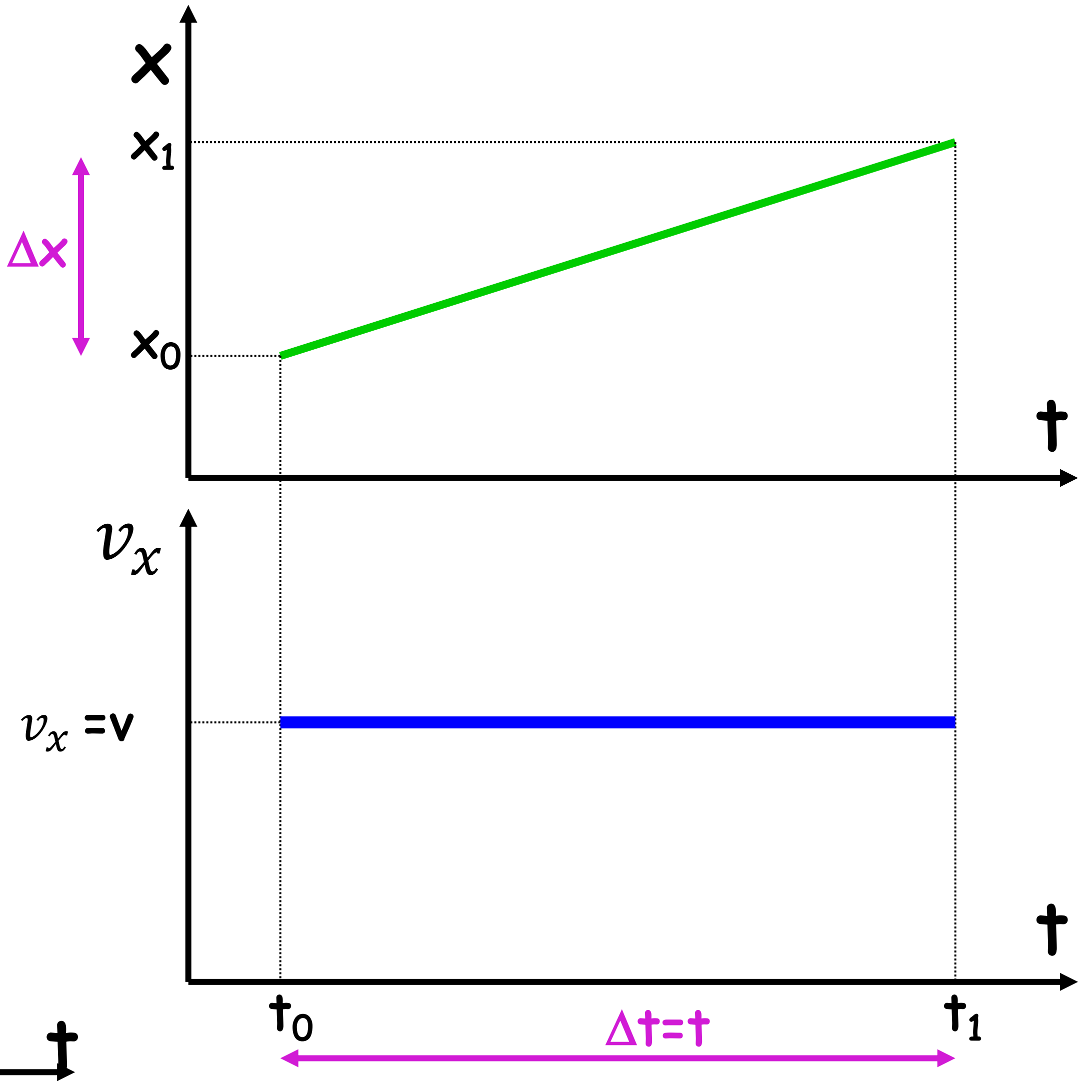
Es: Moto rettilineo uniforme lungo x, v_x = cost= v_{0x}, $a_x = 0$

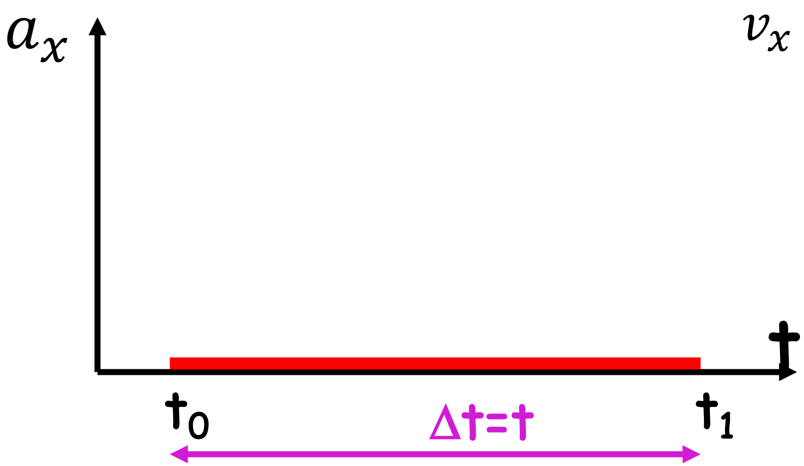
Grafici di posizione, velocità, accelerazione in funzione del tempo per il moto (rettilineo) uniforme

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0)$$

$$v_x = cost = v_{0x}$$

$$v_{0x} = \frac{x - x_0}{(t - t_0)}$$





Es. Moto uniformemente accelerato: a_x =costante= a

$a_x(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{dt}} = \mathrm{a}$ da $v_x = \frac{dx}{dt}$ $v_x\, dt = \mathrm{dx}$

$$\int_{\mathrm{t_0}}^{\mathrm{t}} a_x\, \mathrm{dt}' = \int_{\mathrm{t_0}}^{\mathrm{t}} a\ \mathrm{dt}' = \mathrm{a}(t - \mathrm{t_0}) = \int_{\mathrm{t_0}}^{\mathrm{t}} \frac{dv_x}{\mathrm{dt}'} \mathrm{dt}' = v_x - v_{0x}$$

$$v_x = v_{0x} + \mathrm{a}(t - \mathrm{t_0})$$

$$\int_{\mathrm{t_0}}^{\mathrm{t}} v_x\, \mathrm{dt}' = \int_{\mathrm{t_0}}^{\mathrm{t}} [v_{0x} + \mathrm{a}(t' - \mathrm{t_0})]\, \mathrm{dt}' = \int_{\mathrm{t_0}}^{\mathrm{t}} \frac{dx}{\mathrm{dt}'} \mathrm{dt}' = \int_{x(\mathrm{t_0})}^{x(t)} dx = x(t) - x(\mathrm{t_0})$$

$$x(t) = x(\mathrm{t_0}) + v_{0x}(t - \mathrm{t_0}) + \frac{1}{2} a (t - \mathrm{t_0})^2$$

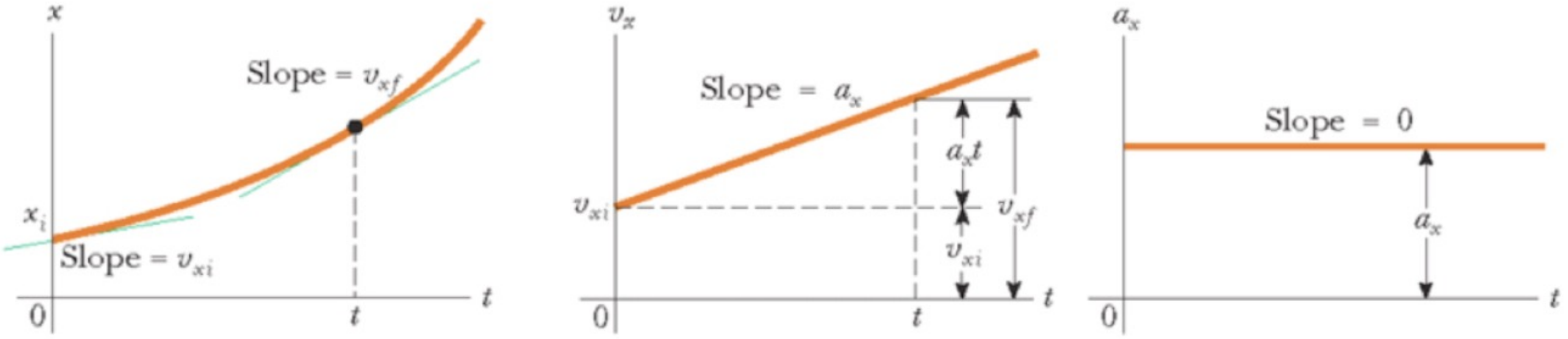
Moto uniformemente accelerato: a_x =costante

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \text{costante}$$

Grafici di posizione, velocità, accelerazione in funzione del tempo per il moto (rettilineo) uniformemente accelerato con $\boldsymbol{a}_x > 0$



Moto uniformemente accelerato, relazioni utili

Per semplificare la notazione poniamo $v = v_x \quad v_0 = v_{0x} \quad a = a_x$

da $v = v_0 + at \qquad t = \dfrac{v - v_0}{a}$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 =$$

$$= x_0 + \left(v_0 + \frac{1}{2} a \frac{v - v_0}{a}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right)$$

$$x - x_0 = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

Per cui nota la velocità iniziale, l'accelerazione e lo spazio percorso al tempo t, vale:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

leggi moto uniformemente accelerato

1) $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

2) $v = v(t) = at + v_0$

3) $x = x_0 + \frac{1}{2}(v + v_0)t$

4) $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

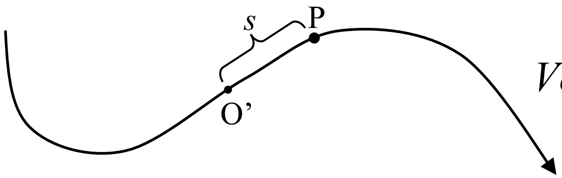
dalla 2) $a = \dfrac{v - v_0}{t}$

sostituendo nella 1)

sostituendo nella 3) $t = \dfrac{v - v_0}{a}$

Con un sistema di assi 1D curvilineo

Velocità scalare media
$$\begin{cases} v_s^m(t_1,t_2) = \dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} & (\textit{ tra } t_1 \textit{ e } t_2) \\ \Delta t = t_2 - t_1 > 0 & \\ v_s^m(t,t+\Delta t) = \dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} & (\textit{ tra } t \textit{ e } t+\Delta t) \end{cases}$$



Velocità scalare (istantanea)
$$v_s(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

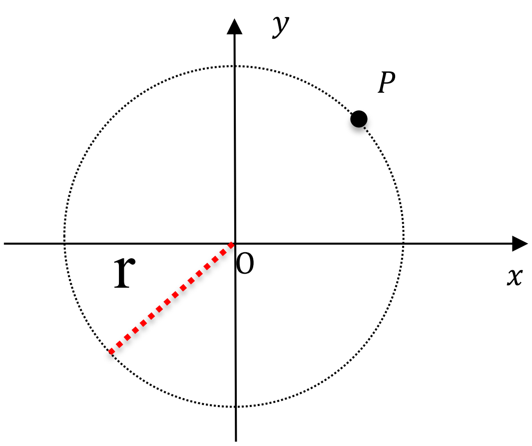
Accelerazione scalare media
$$\begin{cases} a_s^m(t_1,t_2) = \dfrac{v_s(t_2)-v_s(t_1)}{t_2-t_1} & (\textit{ tra } t_1 \textit{ e } t_2) \\ \Delta t = t_2 - t_1 > 0 & \\ a_s^m(t,t+\Delta t) = \dfrac{v_s(t+\Delta t)-v_s(t)}{\Delta t} & (\textit{ tra } t \textit{ e } t+\Delta t) \end{cases}$$

Accelerazione scalare (istantanea)
$$a_s(t) = \frac{d\,v_s}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_s(t+\Delta t)-v_s(t)}{\Delta t}$$

Esercizio

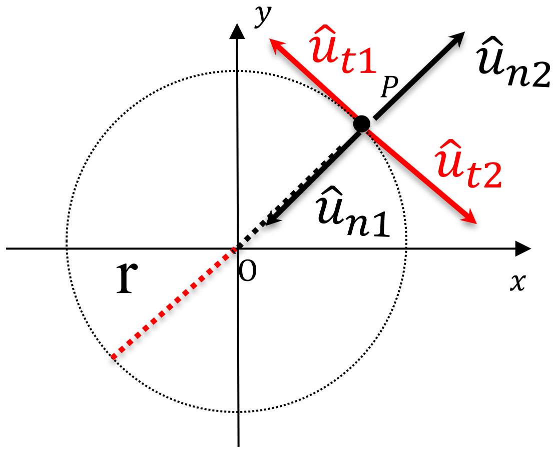
Si consideri nel piano xy una circonferenza di raggio r=2 m con centro O nell'origine del sistema di assi cartesiani mostrato in figura.

1. Ricavare le espressioni dei versori normali e tangenti ($\hat{u}_n$ e $\hat{u}_t$) alla circonferenza in un generico punto P sul piano della circonferenza



Dati
r=2 m
$\hat{u}_t$ e $\hat{u}_n$ *in P*?

$\hat{u}_t$ e $\hat{u}_n$ *in P*?



$$\overrightarrow{OP} = (r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad \left|\overrightarrow{OP}\right| = \mathrm{r}$$

$$\hat{u}_{n1} = \frac{-\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} \qquad \hat{u}_{n2} = \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$$

$$\hat{u}_{n1} = (-\cos\theta, -\sin\theta) \qquad \hat{u}_{n2} = (\cos\theta, \sin\theta)$$

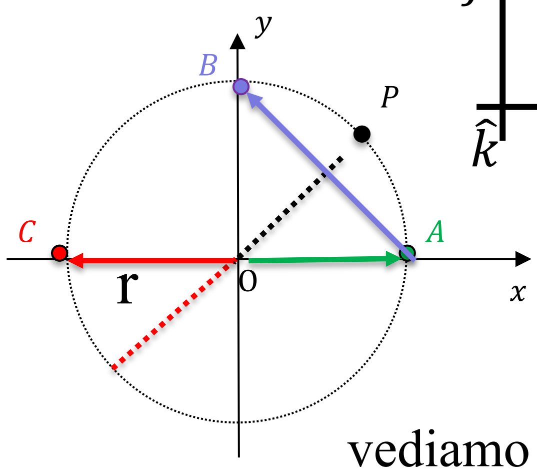
I versori tangenti sono tali che $\begin{cases} \hat{u}_t \cdot \overrightarrow{OP} = 0 \\ u_{tx}^2 + u_{ty}^2 = 1 \end{cases}$

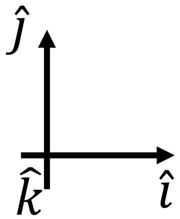
$$\begin{cases} u_{tx} r\cos\theta + u_{ty} r\sin\theta = 0 \\ \Rightarrow u_{tx} = -u_{ty} \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \end{cases}$$

$$u_{ty}^2 \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + u_{ty}^2 = u_{ty}^2 \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = u_{ty}^2 \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 \quad \Longrightarrow u_{ty} = \pm\cos\theta$$

$$\Longrightarrow u_{tx} = \mp\sin\theta$$

$$\hat{u}_{t1} = (-\sin\theta, +\cos\theta) \qquad \hat{u}_{t2} = (+\sin\theta, -\cos\theta)$$





Calcolare: $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OC} = -r\hat{\imath} \\ \overrightarrow{OA} = r\hat{\imath} \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = -2r\hat{\imath} = (-4{,}0)\mathrm{m}$$

Calcolare: $\overrightarrow{AB}$

vediamo che $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -r\hat{\imath} + r\hat{\jmath}$

$$\overrightarrow{AB} = (-r, r) = (-2{,}2)m$$

Calcolare $\overrightarrow{PB}$ per $\theta = \pi/6$

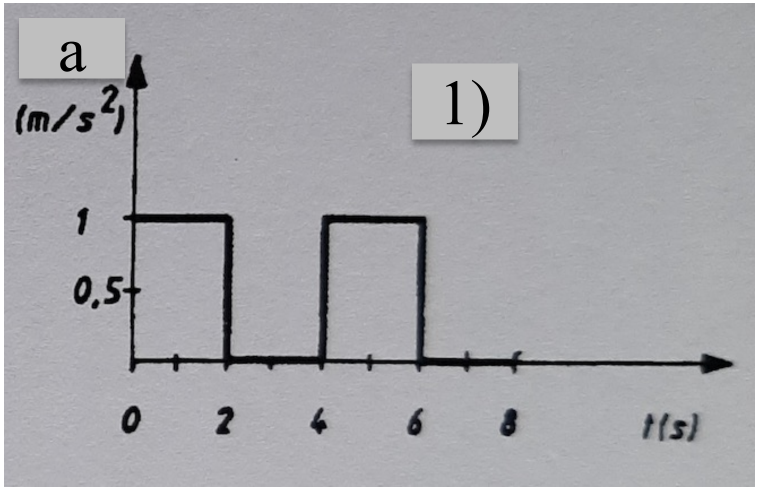
vediamo che $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} \Longrightarrow \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}$

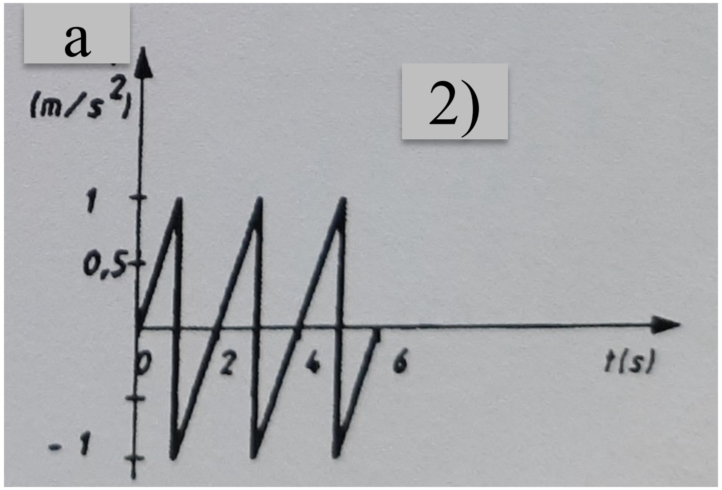
$\overrightarrow{OB}$=(0,r) $\overrightarrow{OP} = (rcos\theta, rsin\theta) \Longrightarrow \overrightarrow{PB}$=(- $rcos\theta, r(1 - sin\theta)$)

$$\overrightarrow{PB} = \left(-2\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right)\mathrm{m} = (-1.7,\ 1)\mathrm{m}$$

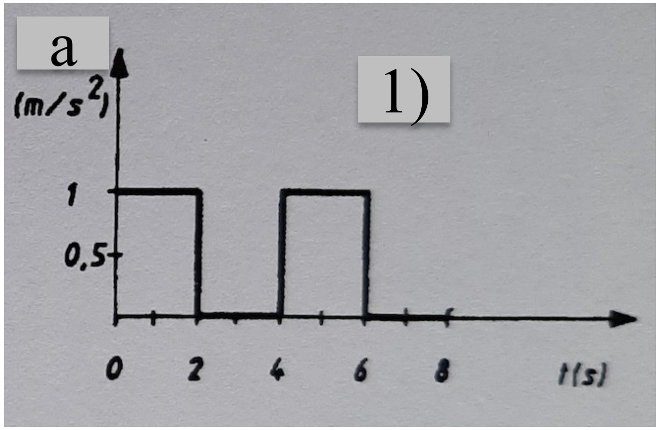
Esercizio

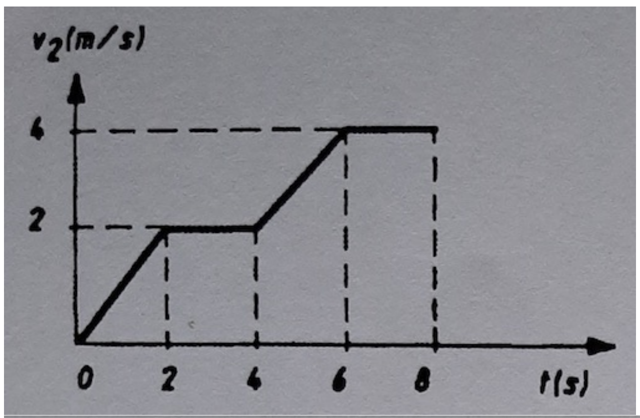
Discutere e disegnare la velocità in funzione del tempo e i diagrammi orari di 2 punti materiali che si muovono di moto rettilineo e con le accelerazioni mostrate nelle seguenti figure. In entrambi i casi v(0)=0 e s(0)=0

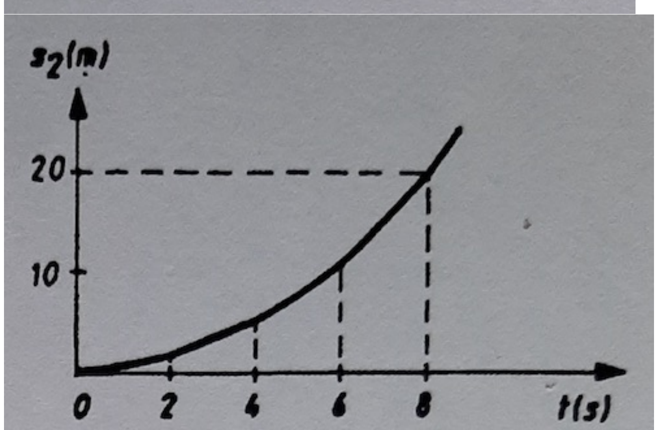




1) velocità in funzione del tempo e diagrammi orari







Classificazione del moto

- Intervalli [0,2]s e [4,6]:
  moto rettilineo uniformemente accelerato $a=1 m/s^2$
- Intervalli [2,4]s e [6,8]:
  moto rettilineo uniforme, a=0 e v=costante

Grafico della velocità

- tratti lineari negli intervalli [0,2]s e [4,6]s con pendenza ($a=1m/s^2$)
- tratti orizzontali negli intervalli [2,4]s e [6,8]s (a=0, v=costante)

Diagramma orario s(t)

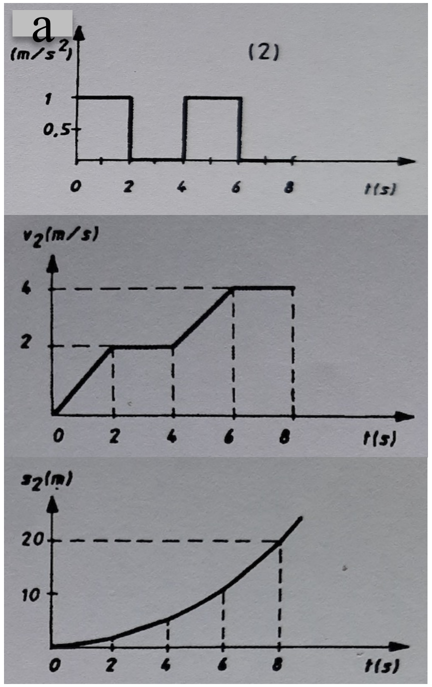
- tratti di parabola negli intervalli [0,2]s e [4,6]s ($a=1m/s^2$) con pendenza la velocità del moto uniforme
- tratti lineari negli intervalli [2,4]s e [6,8]s (a=0, v=costante) la cui pendenza è la velocità del moto uniforme

- Intervallo [0,2]s a=1 m/s^2

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a\,dt = at \Rightarrow v(2) = 1 \cdot 2\; m/s$$

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v\,dt = \int_0^t at\,dt = \frac{1}{2}at^2$$

$$\Rightarrow s(2) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4\; m = 2m$$



- Intervallo [2,4]s a=0

$$v(t) = v(2) = 2 \text{ m/s} \quad \Rightarrow v(4) = 2\; m/s$$

$$s(t) = s(2) + \int_2^t v\,dt = s(2) + v(2)(t-2) \Rightarrow s(4) = 2 + 2 \cdot (4-2) = 6\; m$$

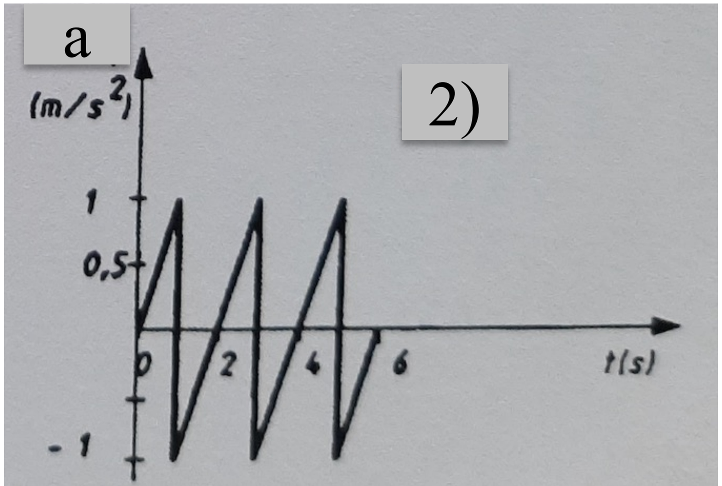
- Intervallo [4,6]s a= 1 m/s^2

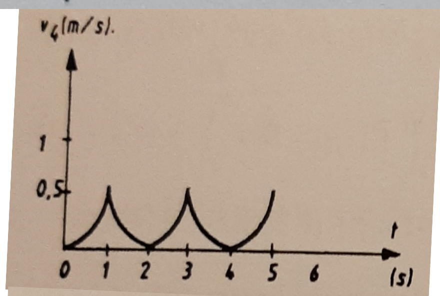
$$v(t) = v(4) + \int_4^t a\,dt = v(4) + a(t-4) \Rightarrow v(6) = 2 + 1 \cdot (6-4) = 4\; m/s$$

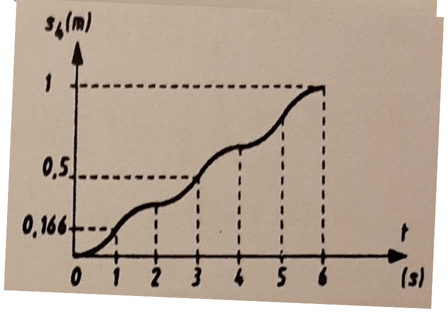
$$s(t) = s(4) + \int_4^t v\,dt = s(4) + v(4)(t-4) + \int_4^t a(t'-4)\,dt' = s(4) + v(4)(t-4) + \frac{1}{2}a(t-4)^2$$

$$\Rightarrow s(6) = 6 + 2 \cdot (6-4) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 12\; m$$

2) velocità in funzione del tempo e diagrammi orari







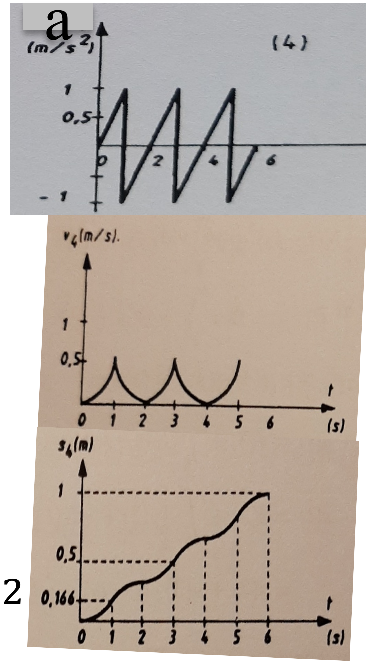
Classificazione del moto

In questo caso l'accelerazione varia linearmente con il tempo in tutti gli intervalli di tempo

- Intervallo [0,1]s $a=kt$ $k=1m/s^3$
- nei tratti successivi [1,3]s [3,5]s [5,7]s
  $a=a_m+k(t-t_i)$ con $a_m=-1m/s^2$

con t_i che corrisponde all'istante dell'intervallo in cui $a=a_m$

es. tratto [1,3]: $a(t)=-1+1(t-1)=-2+t$
$a(1)=-1m/s^2$ $a(3)= 1m/s^2$



- Intervallo [0,1]s a=kt

$$v(t) = v(0) + \int_0^t kt\,dt = \frac{1}{2}kt^2 \Rightarrow v(1) = 0.5\ m/s$$

$$s(t) = s(0) + \int_0^t \frac{1}{2}kt^2 dt = \frac{1}{6}\mathrm{k}t^3 \Rightarrow \mathrm{s}(1) = \frac{1}{6}m$$

- Intervallo [1,3]s a=a_m+k(t-1)

$$v(t) = v(1) + \int_1^t (\mathrm{a_m}+\mathrm{k}(\mathrm{t}-1))dt = v(1) + \mathrm{a_m}(t-1) + \frac{1}{2}k(t-1)^2$$

$$= 0.5 - 1(t-1) + \frac{1}{2}1(t-1)^2$$

$$\Rightarrow v(2) = 0.5 - 1 + 0.5 = 0$$

$$\Rightarrow v(3) = 0.5 - 2 + 2 = 0.5\ m/s$$

$$s(t) = s(1) + \int_1^t \left(v(1) + \mathrm{a_m}(t-1) + \frac{1}{2}k(t-1)^2\right)dt =$$

$$= s(1) + v(1)\ (t-1) + \frac{1}{2}a_m(t-1)^2 + \frac{1}{6}\mathrm{k}(t-1)^3$$

$$= 1/6 + 1/2\ (t-1) - \frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{1}{6}(t-1)^3$$

$$\Rightarrow \mathrm{s}(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = = \frac{2}{6}m = 2s(1) \qquad \Rightarrow \mathrm{s}(3) = \frac{1}{6} + 1 - 2 + \frac{4}{3} = \frac{3}{6}m = 3s(1)$$

- Intervallo [3,5]s $a=a_m+k(t-3)$

$$v(t) = v(3) + \int_3^t (a_m+k(t-3))dt = v(3) + a_m(t-3) + \frac{1}{2}k(t-3)^2$$

$$v(t) = 0.5 - (t-3) + \frac{1}{2}(t-3)^2 \quad \begin{aligned} &\Rightarrow v(4) = 0.5 - 1 + 0.5 = 0 \\ &\Rightarrow v(5) = 0.5 - 2 + 2 = 0.5\ m/s \end{aligned}$$

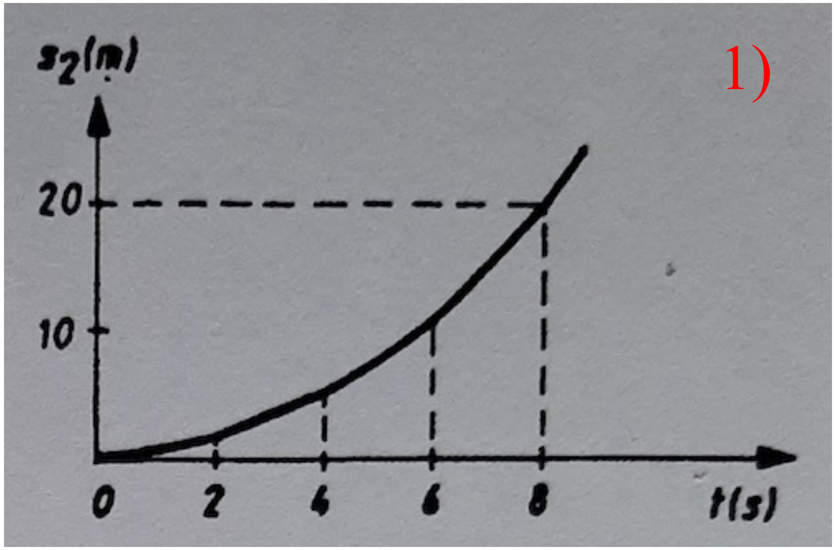
$$s(t) = s(3) + \int_1^t \left(v(3) + a_m(t-3) + \frac{1}{2}k(t-3)^2\right)dt =$$

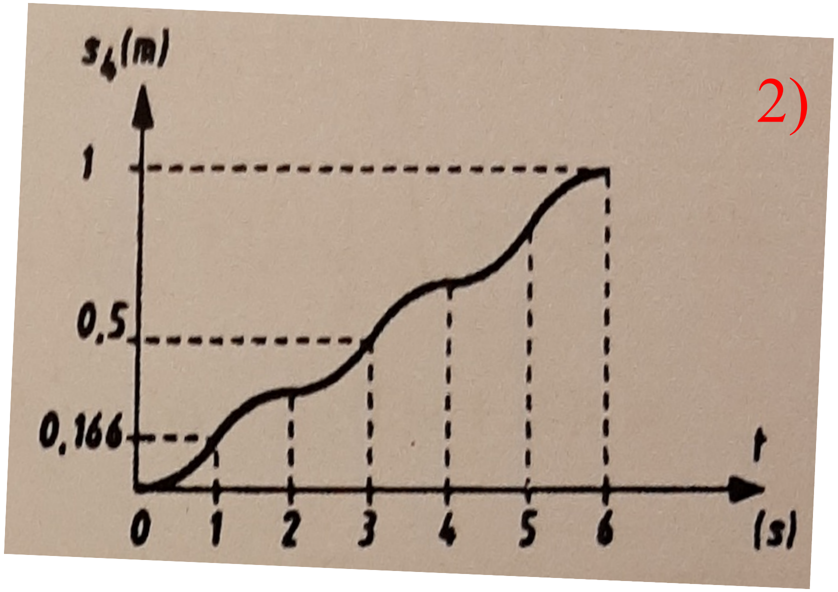
$$= s(3) + v(3)\,(t-3) + \frac{1}{2}a_m(t-3)^2 + \frac{1}{6}k(t-3)^3$$

$$= 3/6 + 1/2\,(t-3) - \frac{1}{2}(t-3)^2 + \frac{1}{6}(t-3)^3$$

$$\Rightarrow s(4) = \frac{3}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}m = 4s(1) \qquad \Rightarrow s(5) = \frac{3}{6} + 1 - 2 + \frac{4}{3} = \frac{3}{6}m = 5s(1)$$

Inoltre i due punti materiali partono allo stesso istante ma non si raggiungono mai: 2) è più lento di 1)





Esercizio

Dato il moto in linea retta $x = L(1 - \exp(-t/\tau))$ con $L = 10$ m e $\tau = 2$ s, trovare velocità ed accelerazione. Dimostrare che l'accelerazione è proporzionale alla velocità e ricavare la costante di proporzionalità.

$$V_x = \frac{d}{dt}[L(1 - \exp(-t/\tau))] = L\left(-\frac{1}{\tau}\right)(-)\exp(-t/\tau)$$

$$= \frac{L}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d\left(\frac{L}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}{dt} = -\frac{L}{\tau^2}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = -\frac{V_x}{\tau}$$

La costante di proporzionalità è $-\frac{1}{\tau} = -0.5\ s^{-1}$