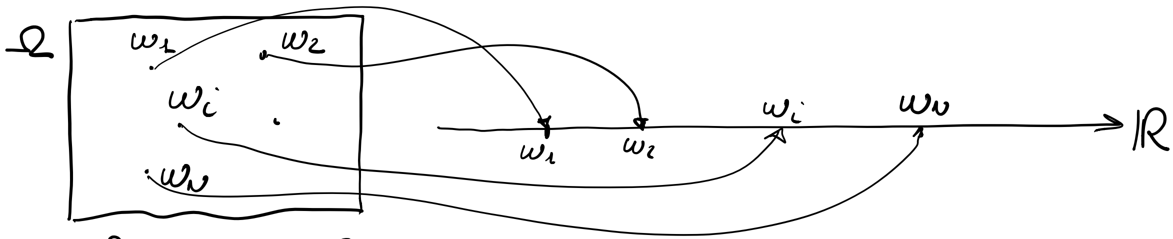
VARIABILI ALEATORIE

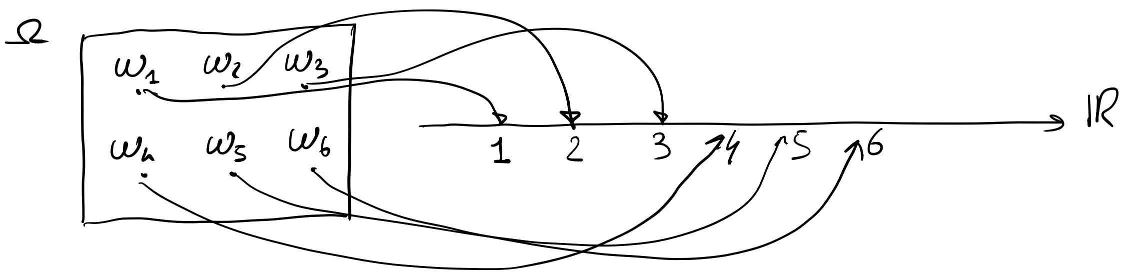
ESPER. CASUALE



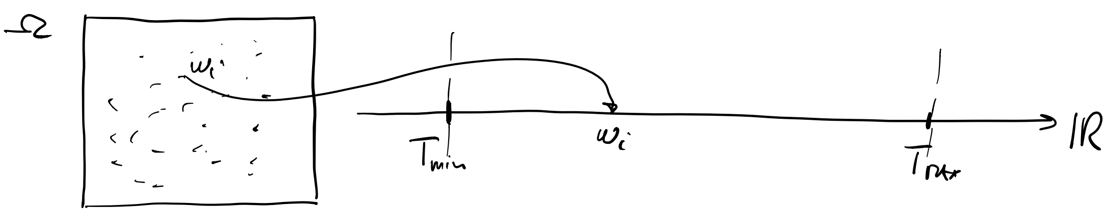
SPAZIO CAMPIONE

Esempi

.) LANCIO DI UN DADO



.) MISURA DI UNA TEMPERATURA (IN UNA STANZA)



$X(\omega_i)$ corrispondenza che mappa un risultato dell'esp. casuale sull'asse dei numeri reali

$X(\omega)$ è una variabile aleatoria se l'insieme dei risultati per cui si verifica che $X(\omega) \leq a \quad \forall a$ è un evento

$X(\omega) \Rightarrow X$

$X \leq a$ è rappresentativo di un evento

$\Rightarrow$ Associamo ad un evento la sua probabilità

$\Downarrow$

FUNZIONE DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ

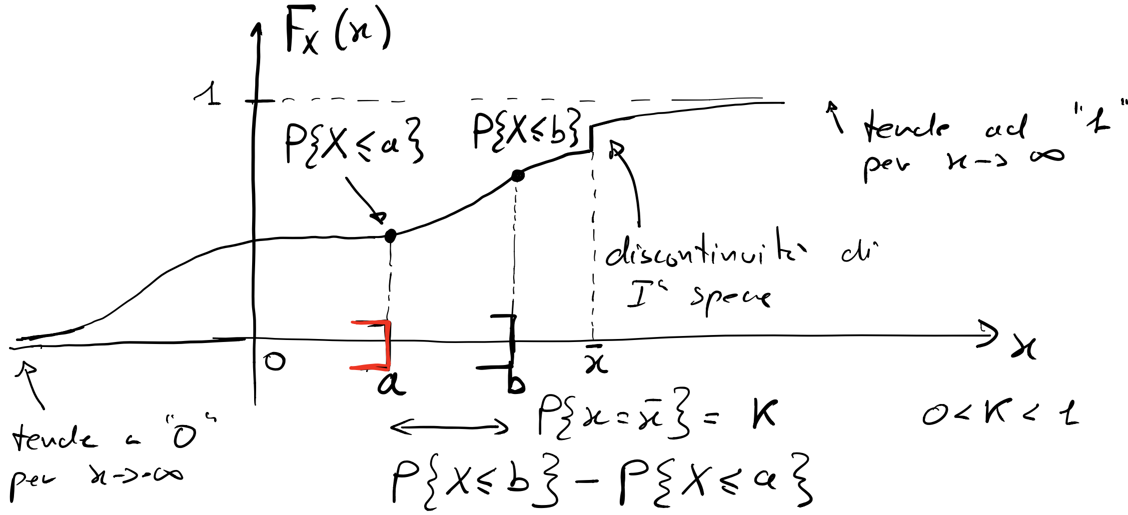
$$F_X(x) \triangleq P\{X \leq x\}$$

PROPRIETÀ

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- se $x_2 > x_1 \Rightarrow F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$ (monotona non decrescente)
- $\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X$ (continua da destra)
- se si presenta una discontinuità (di prima specie) in $x = \bar{x}$, allora

$$F_X(\bar{x}^+) - F_X(\bar{x}^-) = P\{x = \bar{x}\}$$ massa di probabilità

·) $P\{a < X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a) \qquad a < b$



$$P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\}$$

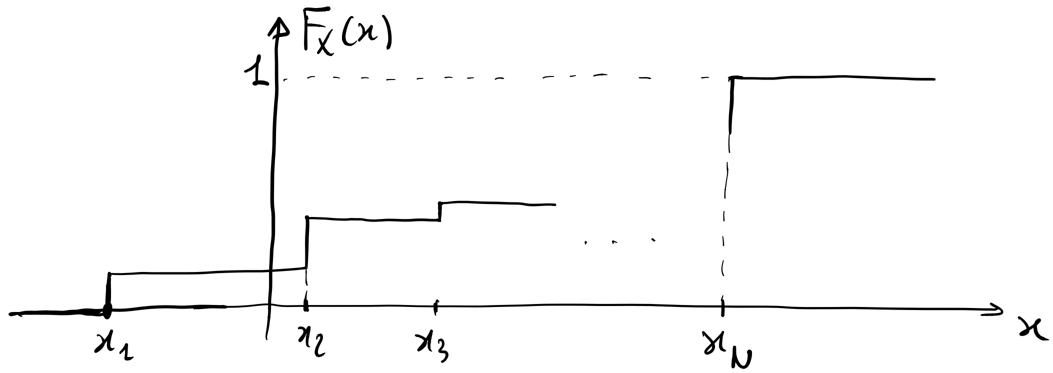
$$F_X(b) - F_X(a)$$

·) TIPI DI V.A. : DISCRETE, CONTINUE, MISTE

·) X discreta

$$F_X(x) = \sum_n P\{X = x_n\}\, u(x - x_n)$$

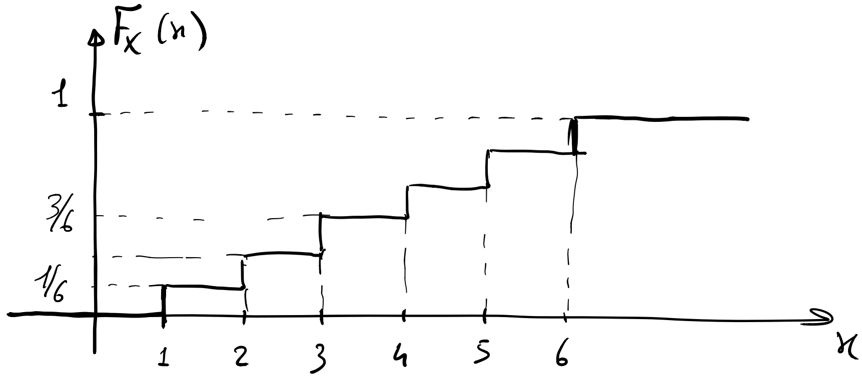
$P\{X = x_n\}$ massa di probabilità



Es lancio di un dado

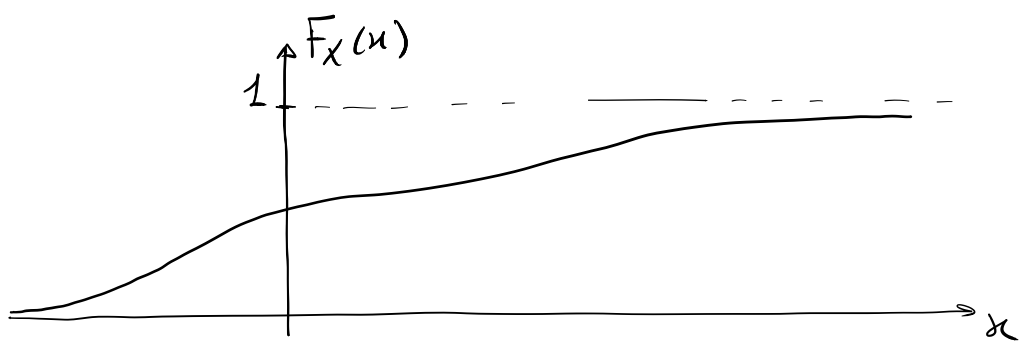
se il dado non è truccato

$$P\{X=1\} = P\{X=2\} = \cdots = P\{X=6\}$$

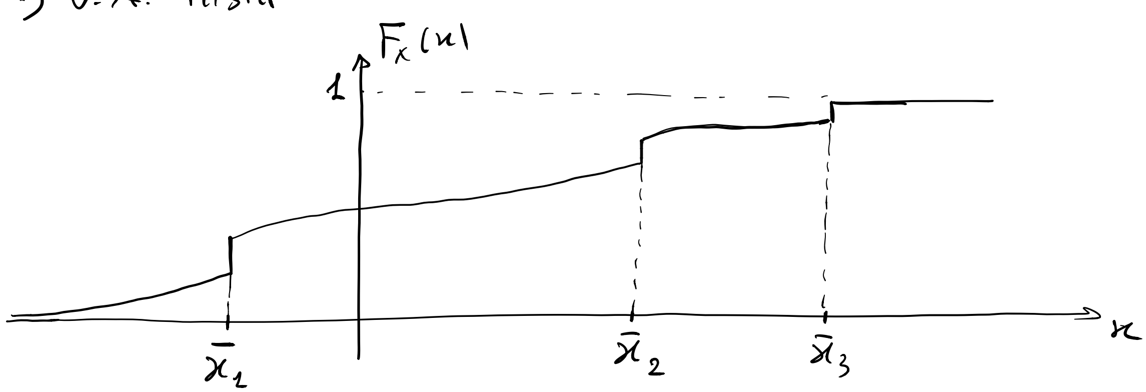


·) V.A. continua

·) produce una $F_X(x)$ continua



·) V.A. Miste



DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI UNA V.A.

$$\boxed{f_X(x) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x)}$$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ (ddp)

$\Downarrow$ si deduce

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha$$

Proprietà della ddp

- $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x$ poiché la $F_X(x)$ è monotona non decrescente

- $$P\{a < X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a)$$
$$= \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\, dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\, dx$$
$$= \int_{a}^{b} f_X(x)\, dx = P\{a < X \leq b\}$$

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$ (evento certo)

CONCETTO DI DDP

$$P\{\bar{x} < X \leq \bar{x} + \Delta x\} = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\Delta x} f_X(x)\,dx \simeq f_X(\bar{x}) \cdot \Delta x$$

Δx molto piccolo

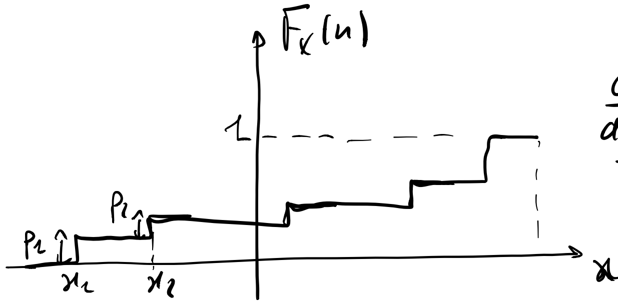
$$\Downarrow$$

$$f_X(\bar{x}) \simeq \frac{P\{\bar{x} < X \leq \bar{x} + \Delta x\}}{\Delta x}$$

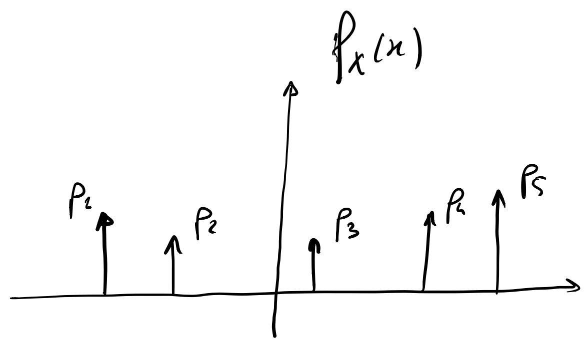
$$\simeq \frac{F_X(\bar{x} + \Delta x) - F_X(\bar{x})}{\Delta x}$$

$$f_X(\bar{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(\bar{x} + \Delta x) - F_X(\bar{x})}{\Delta x} = \frac{d}{dx} F_X(\bar{x})$$

$\cdot$) Per V.A. discrete



$$\frac{d}{dx} \Rightarrow$$



$$F_X(x) = \sum_n p_n\, u(x - x_n)$$

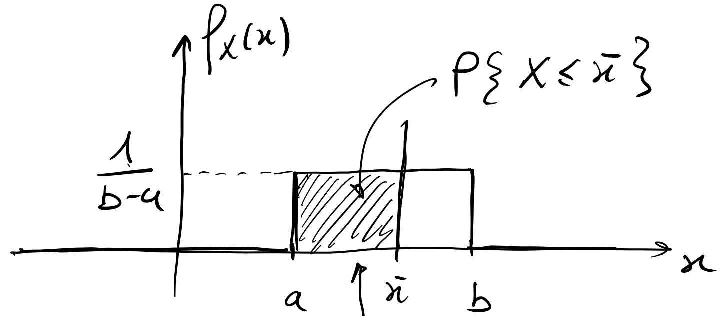
$$\frac{d}{dx} F_X(x) = \sum_n p_n\, \delta(x - x_n)$$

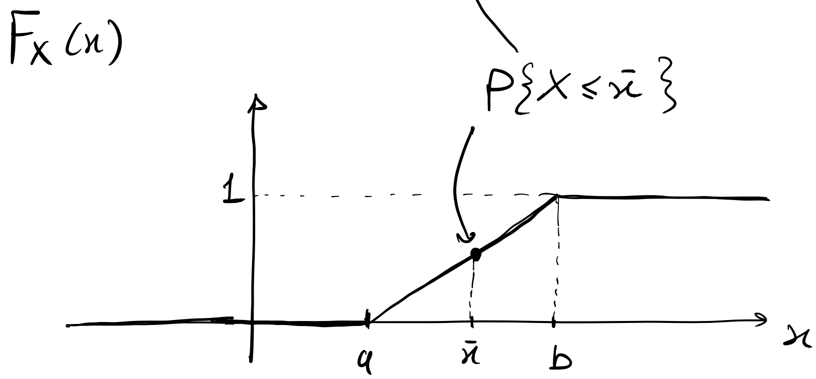
ALCUNE V.A. TIPICHE

·) V.A. UNIFORME

X è una v.a. uniforme sull'intervallo (a,b) se

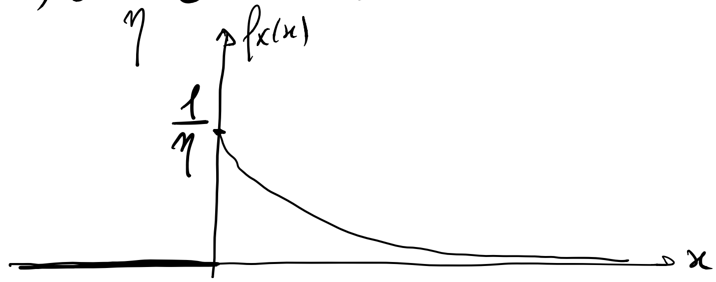
$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\, \mathrm{rect}\left(\frac{x-\frac{b+a}{2}}{b-a}\right)$$





·) V.A. ESPONENZIALE (UNILATERA)

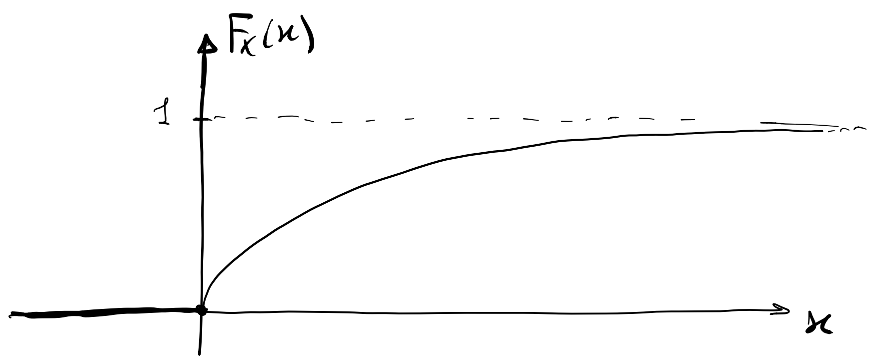
$$f_X(x) \triangleq \frac{1}{\eta} e^{-\frac{x}{\eta}} u(x)$$



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\eta} e^{-\frac{\alpha}{\eta}} u(\alpha)\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{\eta} \int_{0}^{x} e^{-\frac{\alpha}{\eta}} d\alpha = \frac{1}{\eta} \left(-\eta\right) e^{-\frac{\alpha}{\eta}} \Big|_{0}^{x}$$

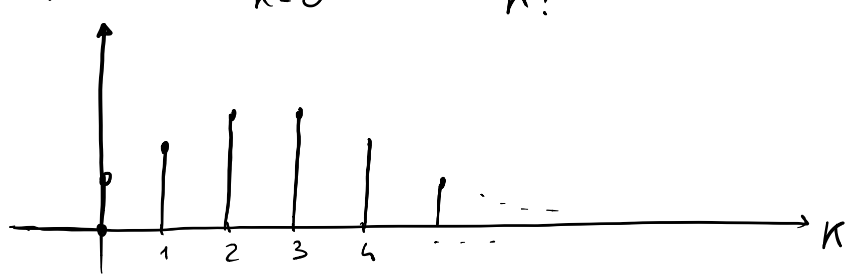
$$= 1 - e^{-\frac{x}{\eta}} \qquad x \geq 0$$



·) V.A. DISCRETA

·) V.A. DI POISSON

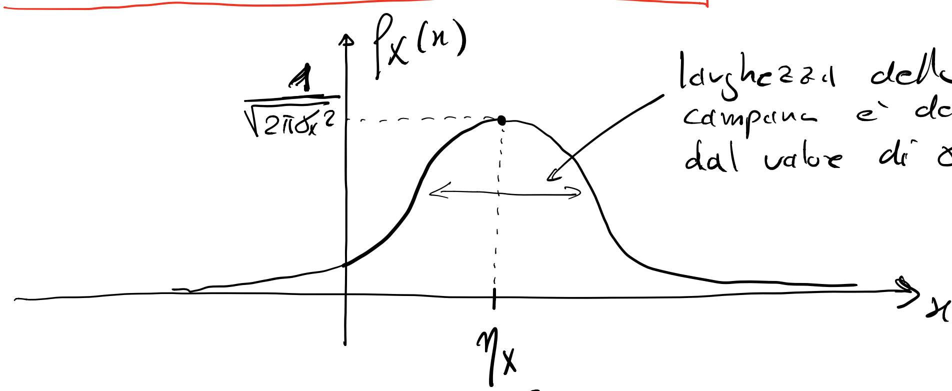
$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\Lambda} \frac{\Lambda^k}{k!} \delta[x-k]$$



V.A. GAUSSIANA (O NORMALE)

$$\boxed{X \in \mathcal{N}(\eta_X, \sigma_X^2)}$$ SIMBOLOGIA

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-\eta_X)^2}{2\sigma_X^2}}}$$ DDP



larghezza della campana è determinata dal valore di σ_X^2

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(\alpha-\eta_X)^2}{2\sigma_X^2}} d\alpha$$

NON ESISTE UNA FORMA CHIUSA !!

⟩ V.A. GAUSSIANA STANDARD

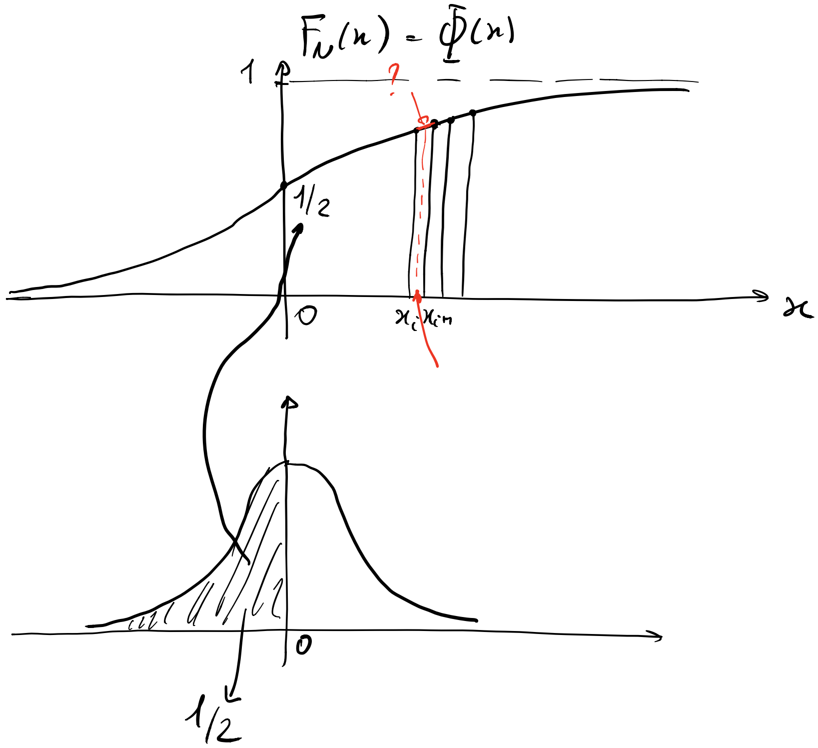
$$X \in \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\underbrace{\eta_X = 0 \ , \ \sigma_X^2 = 1}_{\text{V.A. Gaussiana standard}}$$

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

f_N ↑ Gaussiana standard

$$F_N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \triangleq \Phi(x)$$ $\Rightarrow$ prima dell'avvento dei calcolatori el. era stata tabulata



·) TRASFORMAZIONE DI V.A.

$x \rightarrow y = g(x)$

$\downarrow$

$X \rightarrow Y = g(X)$

$f_X(x)$ ddp della V.A. X

$\Rightarrow f_Y(y) = ?$

TEOREMA FONDAMENTALE PER LA TRASFORMAZIONE DI V.A.

$$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

$x_i \; , \; i = 1, \dots, N$

↳ sono le soluzioni della trasf. inversa

$$x_i = g^{-1}(y)$$

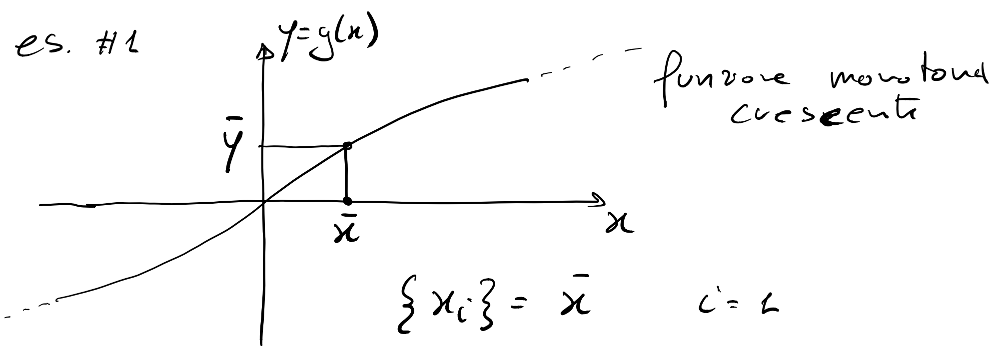
·) Applicazione del T.F.

1) A seconda del valore di y

·) $\{x_i\}$ è un insieme vuoto $\Rightarrow f_Y(y) = 0$

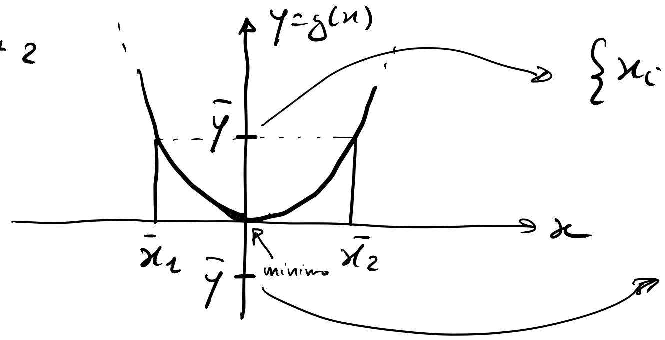
·) $\{x_i\}$ contiene un numero finito oppure infinito ma numerabile di soluzioni

es. #1



$\{x_i\} = \bar{x} \qquad i = 1$

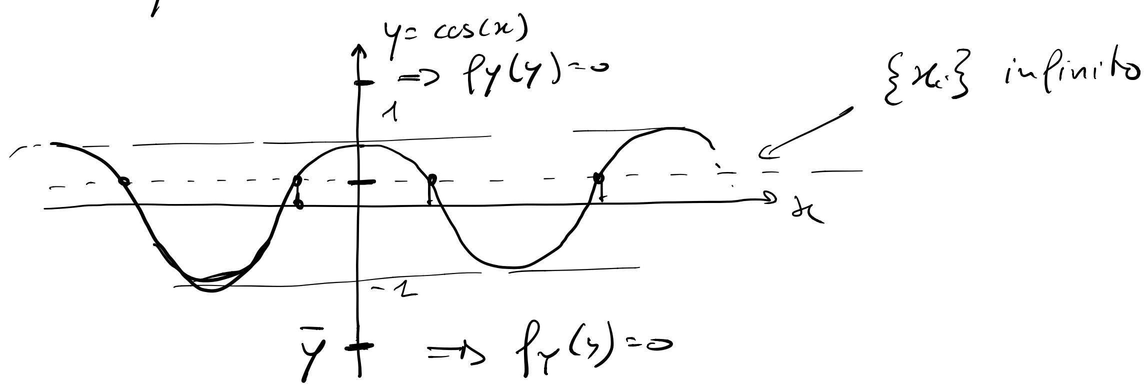
es # 2



$y = x^2$

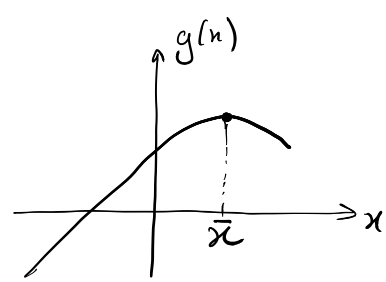
↳ $f_Y(y) = 0 \qquad y < 0$

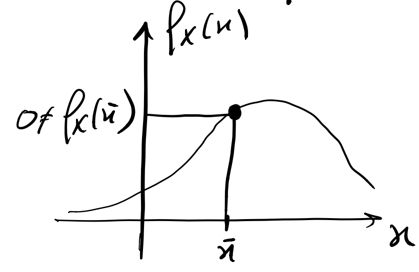
$y = \cos(x)$

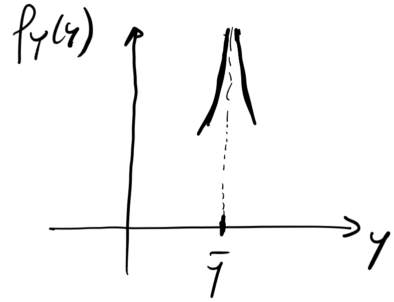


2) Se in un punto $x = \bar{x}$ la derivata della trasformazione $g'(x)$ è nulla

•) la trasformazione $g(x)$ ha un min o max in $x = \bar{x}$ $\Rightarrow$ se $f_X(\bar{x}) \neq 0 \Rightarrow f_Y(y) \to +\infty$

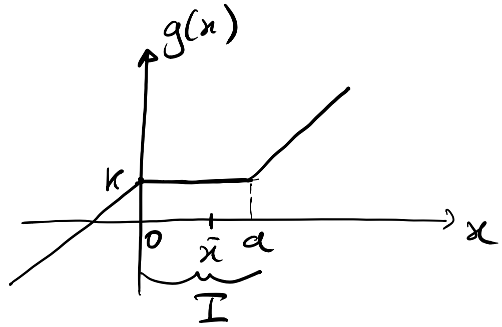






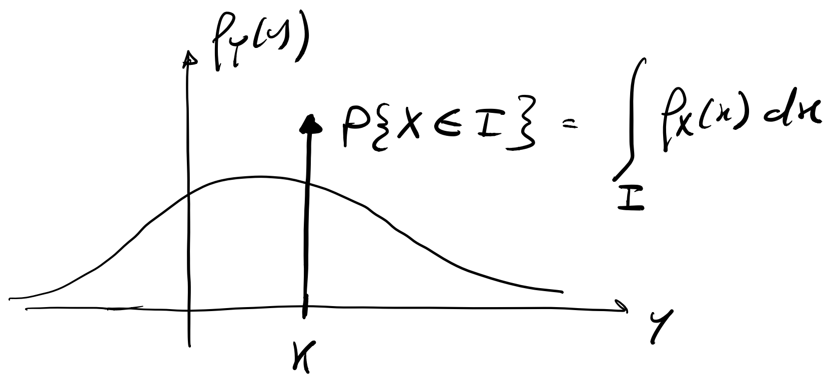
$\bar{y} = g(\bar{x})$

•) $\bar{x}$ appartiene ad un intervallo I nel quale la $g(x)$ assume un valore costante



$y = K \Rightarrow \quad P\{Y = K\} = P\{X \in I\}$
massa di prob.

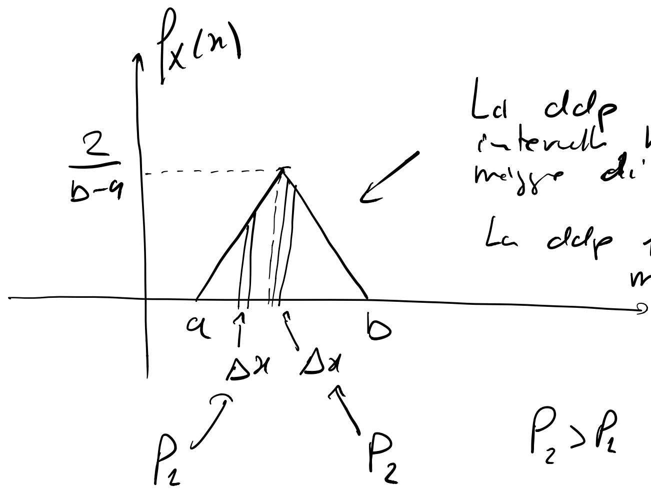
$f_Y(y)$ diventa la ddp di una v.A. mista



INDICI CARATTERISTICI DI UNA V.A.

⇒ VALOR MEDIO (SPERANZA O VALORE ATTESO)

$$\boxed{\eta_X \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x) \, dx}$$ VALOR MEDIO



La ddp mi indica quali intervalli hanno una prob. maggiore di verificarsi

La ddp fa da "peso" per la media pesata che mi fornisce il V.M.

$P_2 > P_1$

⇒ PER V.A. DISCRETE

$$\eta_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \sum_{k=1}^{N} p_k \, \delta(x - x_k) \, dx$$

$$= \sum_{k=1}^{N} p_k \int_{-\infty}^{+\infty} x \, \delta(x - x_k) \, dx = \sum_{k=1}^{N} p_k x_k$$

⇒ OPERATORE VALOR MEDIO

Expectation (Aspettazione) $\qquad \eta_X = \mathbf{E}[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x) \, dx$

$\Rightarrow$ TEOREMA DEL VALOR MEDIO

$$Y = g(X)$$

$$\eta_Y = E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, dy$$

comporta l'applicazione del T.F. per le trasf. di V.A.

$$\boxed{\eta_Y = E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx}$$

si evita di dover calcolare la $f_Y(y)$

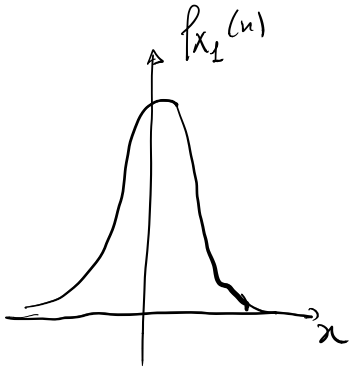
$\Rightarrow$ Si applica la linearità

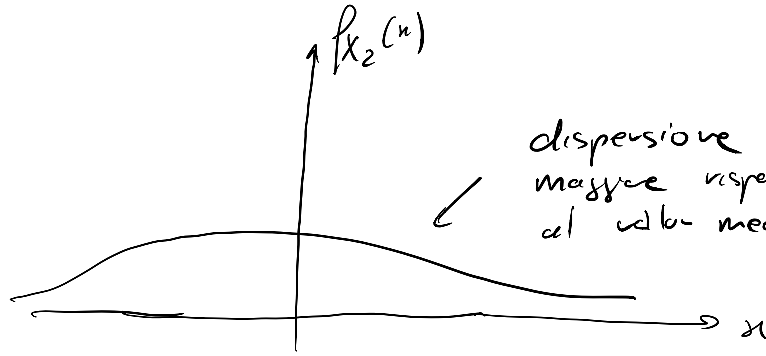
$$Y = \alpha\, g(X) + \beta\, h(X)$$

$$\eta_Y = \alpha\, E[g(X)] + \beta\, E[h(X)]$$

$\Rightarrow$ VARIANZA DI UNA V.A.

$$\sigma_X^2 \triangleq E\left[(X-\eta_X)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\eta_X)^2 f_X(x)\, dx$$

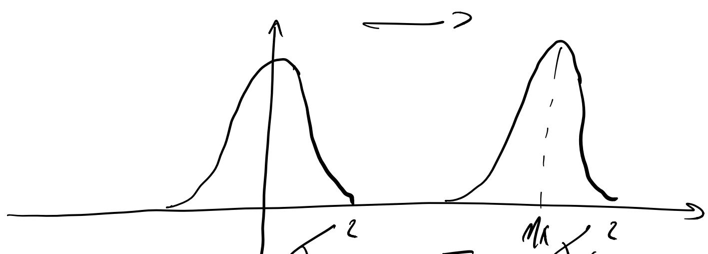




dispersione maggiore rispetto al valore medio

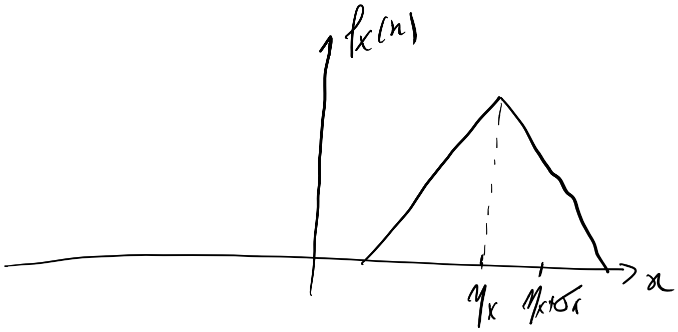
$$X_1 \qquad\qquad X_2$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$\sigma_{X_1}^2 < \sigma_{X_2}^2$$

traslazione ⇒ non cambia la varianza



$$\sigma_{X_2}^2 = \sigma_X^2$$

DEVIAZIONE STANDARD $= \sqrt{\sigma_X^2} = \sigma_X$



$\cancel{\eta_X + \sigma_X^2}$ SBAGLIATO!! non hanno la stessa dimensione

·) VALOR QUADRATICO MEDIO

$$m_X^2 \triangleq E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx$$

$$\sigma_X^2 = m_X^2 - \eta_X^2$$

$$= E[(X-\eta_X)^2] = E[X^2 + \eta_X^2 - 2\eta_X X]$$

$$= E[X^2] + E[\eta_X^2] - 2\, E[\eta_X X]$$

$$= m_X^2 + \eta_X^2 - 2\eta_X E[X]$$

$$= m_X^2 + \eta_X^2 - 2\eta_X^2 = m_X^2 - \eta_X^2$$