CRITERIO DI NYQUIST PER L'ASSENZA DI ISI

$$\boxed{h[n] = h(nT) = \delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}}$$ TEMPO

$\Downarrow$

si può estendere anche al caso più generico

$$h[n] = K\,\delta[n] \quad , \quad K \in \mathbb{R}$$

$$y[n] = x[n]\,h(0) + \underbrace{\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{+\infty} x[k]\,h\big((n-k)T_s\big)}_{ISI}$$

$$y[n] = K\,x[n] + \underbrace{\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{+\infty} x[k]\cdot 0}_{=0} = K\,x[n] = h(0)x[n]$$

-) CONDIZIONE DI NYQUIST PER L'ASSENZA DI ISI IN FREQUENZA

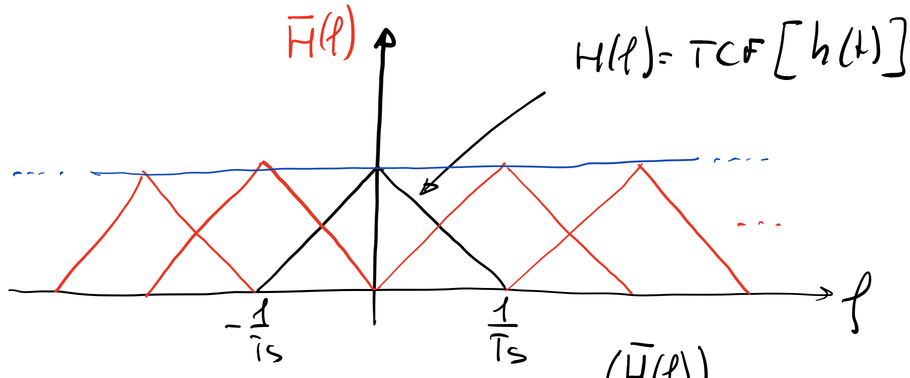
$$h[n] = K\,\delta[n]$$

$$\Downarrow \text{TFS}$$

$$\bar{H}(f) = K = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

$$\Downarrow$$

FREQUENZA $$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = K\,T_s = h(0)\,T_s = \text{costante}}$$




In assenza di ISI questa somma è costante

- Per verificare l'assenza di ISI

nel tempo

$h(nT_s) = K\,\delta[n]$

in frequenza

$\bar{H}(f) = \text{cost}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = \text{cost.}$$

steps

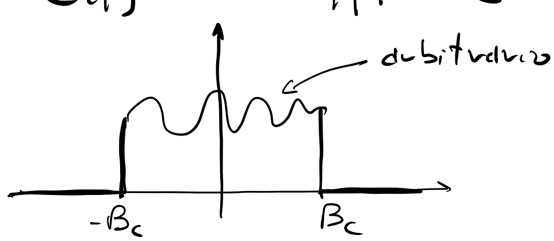
$\Rightarrow h(t) = p(t) \otimes c(t) \otimes h_R(t)$ $\Rightarrow$ cond. di N. nel tempo

$\Rightarrow H(f) = P(f)\,C(f)\,H_R(f)$ $\Rightarrow$ cond. di N. in freq.

- CONDIZIONE NECESSARIA PER L'ASSENZA DI ISI

  - Canale a banda rigorosamente limitata

$C(f) = 0 \quad |f| > B_c$ = banda del canale



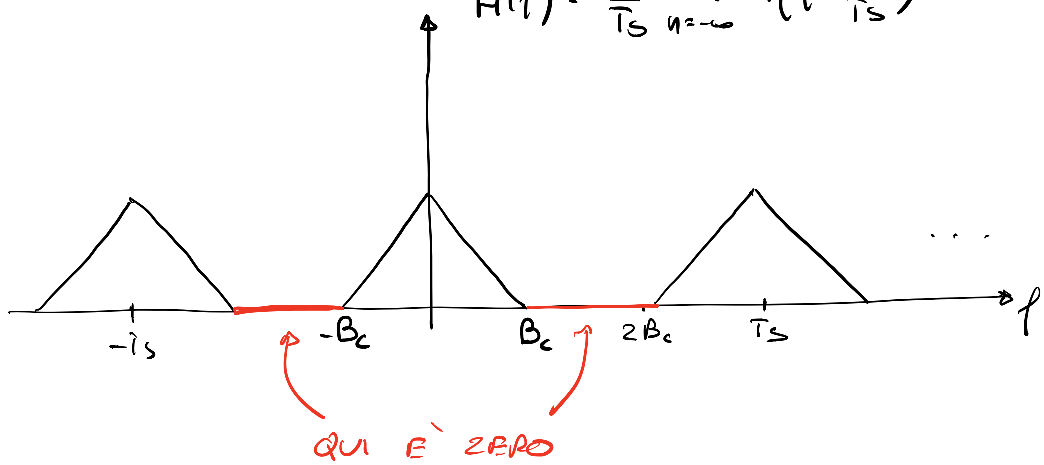
·) $B_T = B_c = B_{HR}$

⇒ CONDIZIONE PER CUI NON È POSSIBILE ELIMINARE L'ISI

$$T_s < \frac{1}{2B_c}$$

Dim.

$$\bar{H}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$




⇓

<u>non</u> è possibile raggiungere la condizione

$$\bar{H}(f) = \text{cost}$$

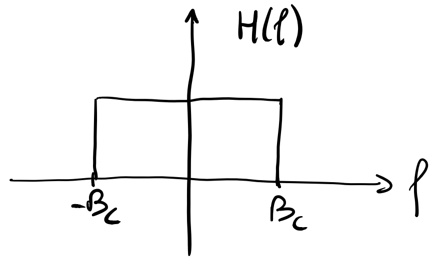
⇓

non posso soddisfare la cond. di N.

·) CONDIZIONE DI $T_s$ MINIMO

$$T_s^{(min)} = \frac{1}{2B_c}$$

⇒ ho un'unica soluzione per $H(f)$

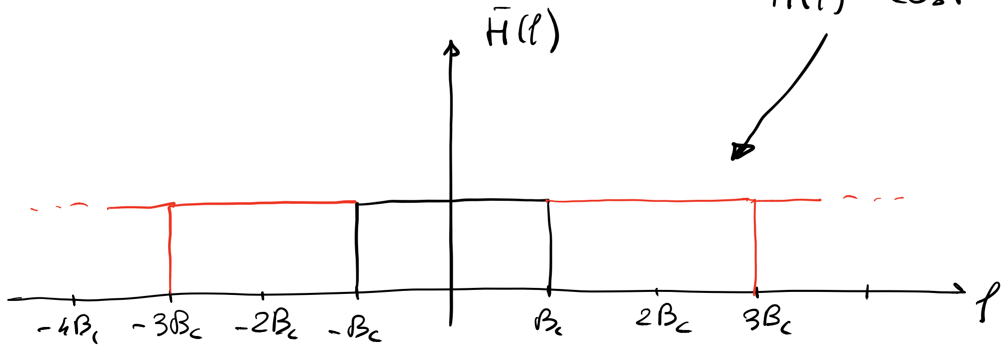



UNICA SOLUZIONE

$\Downarrow$

PER OTTENERE

$\bar{H}(f) = \text{cost}$



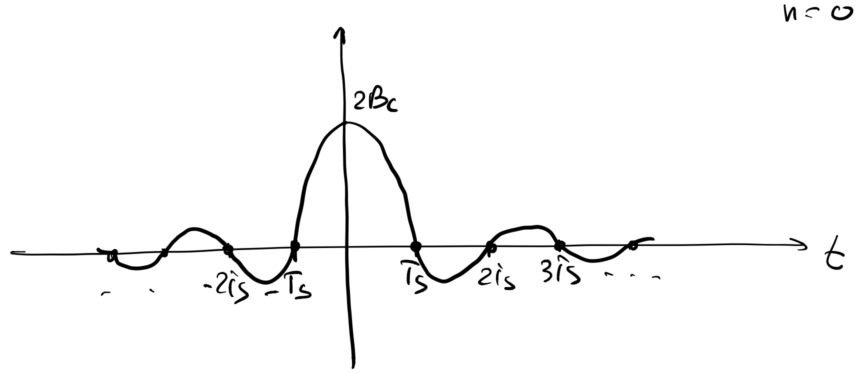

$$\Rightarrow H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B_c}\right) \Rightarrow h(t) = 2B_c \,\text{sinc}(2B_c t)$$

$$h[n] = h(nT_s) = 2B_c \,\text{sinc}(2B_c n T_s)$$

$$\overset{!}{=} 2B_c \,\text{sinc}\left(\cancel{2B_c}\frac{n}{\cancel{2B_c}}\right) = 2B_c \,\text{sinc}(n)$$

si annulla per tutti gli $n$ interi eccetto $n=0$

$$= 2B_c \,\delta[n]$$




$R_s = 2B_c$ massimo ottenibile

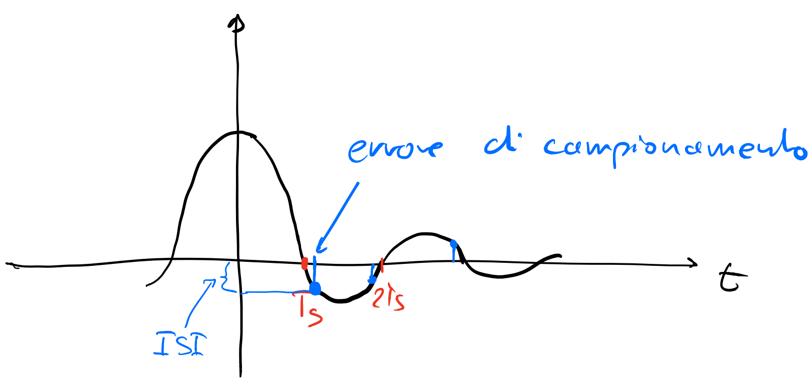
Questa soluzione, nonostante possa apparire come la migliore (massimo data rate), ha due problemi

1) Realizzabilità di un $H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B_c}\right)$

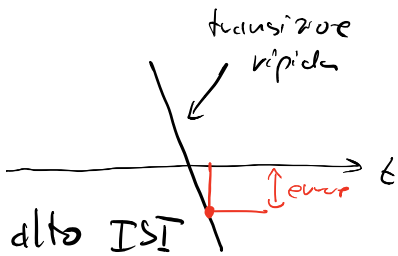
$\Downarrow$

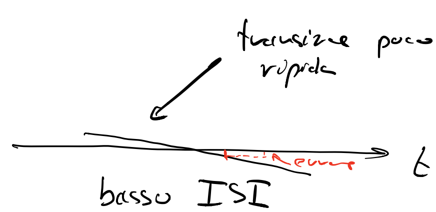
criterio di Paley-Wiener dice che non può esistere una $h(t)$ di questo tipo

2) Piccoli errori di campionamento provocano un grosso ISI



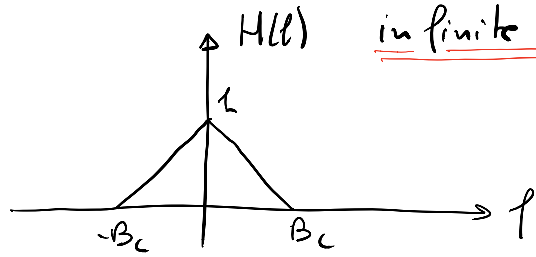

-) transizioni intorno allo zero



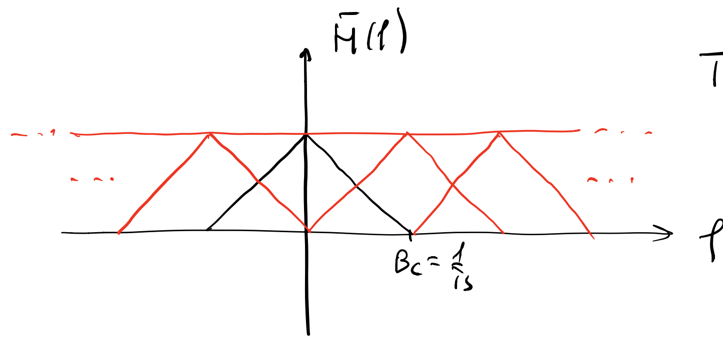
-) CONDIZIONE PRATICABILE E A BASSO IMPATTO SULL' ISI

$$T_s > \frac{1}{2B_c}$$




infinite soluzioni, tali che

$\bar{H}(f) = cost$

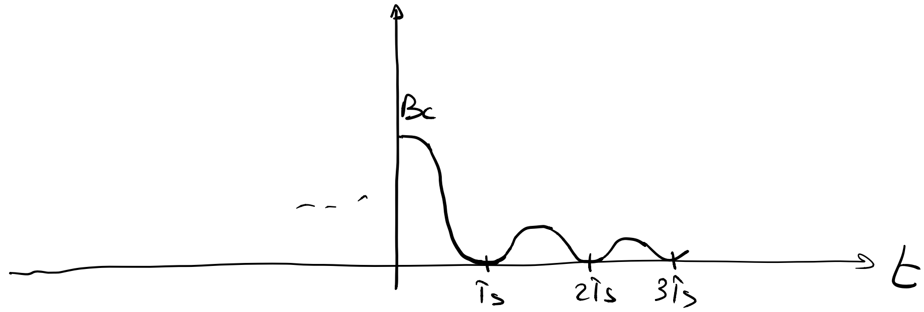



$$T_s = \frac{1}{B_c}$$

Esempio con triangolo

$$H(f) = \left(1 - \frac{|f|}{B_c}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B_c}\right)$$

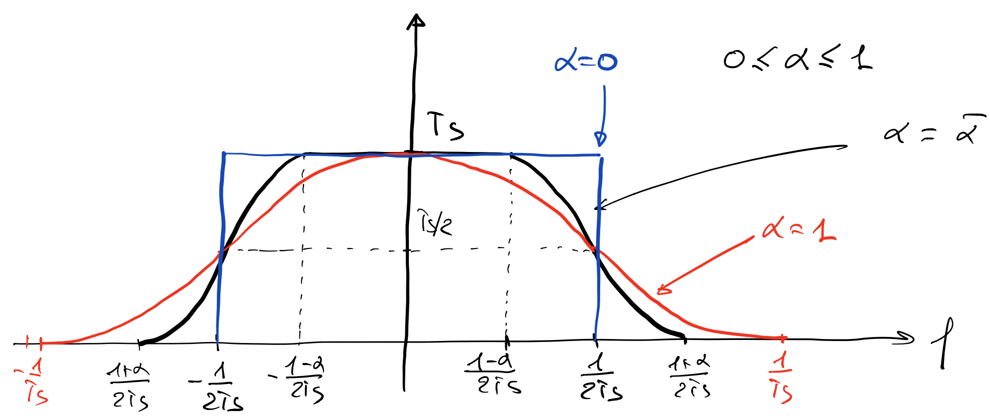
$$h(t) = B_c \, \mathrm{sinc}^2(B_c t)$$



·) Si rilassa la condizione sul $T_s$, quindi $T_s > \frac{1}{2B_c}$, per poter giocare sulla definizione di una $H(f)$ realizzabile e robusta all'ISI (con transizioni dolci intorno allo zero)

·) COSENO RIALZATO (RAISED COSINE)

$$H_{RC}(f) = \begin{cases} T_s & 0 \leq |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_s} \\ \frac{T}{2}\left[1 - \sin\left(\frac{\pi T_s}{\alpha}\left(|f| - \frac{1}{2T_s}\right)\right)\right] & \frac{1-\alpha}{2T_s} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T_s} \\ 0 & |f| \geq \frac{1+\alpha}{2T_s} \end{cases}$$




$\alpha$ = roll-off $\Rightarrow$ viene gestito per trovare un compromesso tra velocità di trasmissione e ISI

$$h_{RC}(t) = ATCF\left[H_{RC}(f)\right] = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)\frac{\cos\left(\frac{\alpha\pi t}{T_s}\right)}{\left(1 - \frac{2\alpha t}{T_s}\right)^2}$$

$$h_{RC}[n] = h_{RC}(nT_s) = \delta[n] \Rightarrow \text{soddisfa Nyquist}$$

$$\text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \Rightarrow \text{decresce verso } 0 \text{ per } t \to \infty \text{ come } \frac{1}{t}$$

$$h_{RC}(t) \Rightarrow \text{decresce come } \frac{1}{t^3} \Rightarrow \text{minore ISI}$$

$\Rightarrow$ Efficienza spettrale

$$\Rightarrow \boxed{T_s = \frac{1}{2B_c}} \Rightarrow h(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

$$\eta_B = \frac{R_b}{B_c} = \frac{\log_2 M}{T_s B_c} = \frac{\log_2 M}{\frac{1}{2B_c} B_c} = 2 \log_2 M$$

$$R_b = \log_2 M \, R_s = \frac{\log_2 M}{T_s}$$

$\Rightarrow$ Caso del coseno rialzato

$$B_{RC} = \frac{1+\alpha}{2T_s} > \frac{1}{2T_s} \qquad \alpha > 1$$

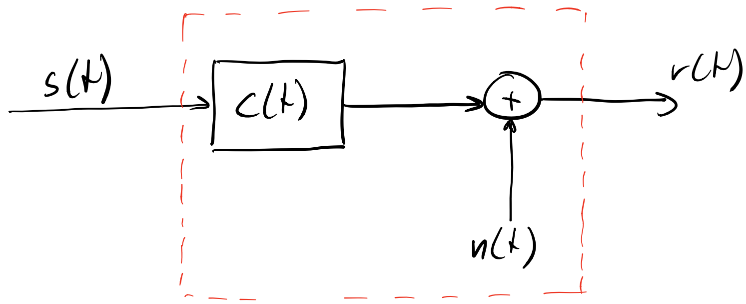
$$\eta_B^{(rc)} = \frac{\log_2 M}{T_s} \frac{1}{B_{RC}} = \frac{\log_2 M}{T_s} \frac{2T_s}{1+\alpha} = \frac{2 \log_2 M}{1+\alpha} < \eta_B^{(rett)}$$

·) CAPACITÀ DI CANALE

$C$ = massimo valore del bit-rate ($R_b$) al variare di tutte le possibili coppie modulatore/demodul. sotto il vincolo che la $P_E$ sia nulla

$$\boxed{C = \max\{R_b\} \,, \quad P_E(b) = 0}$$

$[C] = \text{bit}/s$




·) NEL CASO DI RUMORE GAUSSIANO BIANCO

Shannon

Potenza del segnale s(t)

$$\boxed{C = B_T \log_2\left(1 + \frac{P_s}{N_0 B_T}\right)}$$

banda del segnale s(t)

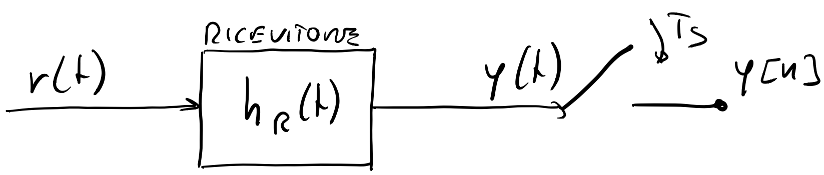
$\frac{N_0}{2}$ è la DSP del rumore Gaussiano Bianco

SISTEMA DI COMUNICAZIONE NUMERICO IDEALE

·) $R_b = C$

·) $P_E(b) = 0$

·) RICEVITORE OTTIMO IN PRESENZA DI RUMORE BIANCO



OTTIMO ⇒ CRITERIO DI OTTIMALITÀ ⇒ MAX RAPPORTO SEGNALE / RUMORE

SNR = Signal-to-noise ratio

$$r(t) = s(t) \otimes c(t) + n(t)$$

⇒ semplifichiamo ⇒ $c(t) = \delta(t)$

$$r(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{segnale utile}}}{s(t)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rumore}}}{n(t)}$$

$s(t)$ = segnale trasmesso

Nota = se $c(t) \neq \delta(t)$ $s(t)$ si chiama ancora segnale utile, ma è diverso dal segnale tx

$$y(t) = s_u(t) + n_u(t)$$

$$s_u(t) = s(t) \otimes h_R(t)$$

$$n_u(t) = n(t) \otimes h_R(t)$$

$$y(T_s) = s_u(T_s) + n_u(T_s)$$

$$SNR \triangleq \frac{s_u^2(T_s)}{E[n_u^2(T_s)]}$$

questo si ritiene noto poiché nel calcolo della $P_E$, devo calcolare le prob. di transizione è quindi ritengo il simbolo tx noto

$$P_E(b) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} \underbrace{P\{\hat{b}_i \mid b_j\}}_{\substack{\text{simbolo tx è} \\ \text{ritenuto noto}}} P\{b_j\}$$

$h_R(t)$ ottimo ⇒ max SNR

$h_R(t)$ ottimo nel caso di rumore bianco

$$\Downarrow$$

FILTRO ADATTATO

$$h_R^{(ott)}(t) = \boxed{h_{FA}(t) = s(T_s - t)}$$

RISP. IMPULSIVA

$\uparrow$ deve essere noto

$$\boxed{H_{FA}(f) = S^*(f)\, e^{-j2\pi f T_s}}$$

RISP. IN FREQUENZA

$$|H_{FA}(f)| = |S(f)|$$

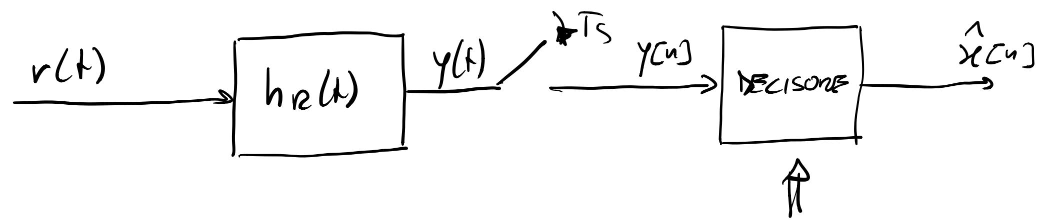
(si capisce il significato di "ADATTATO")

esempio

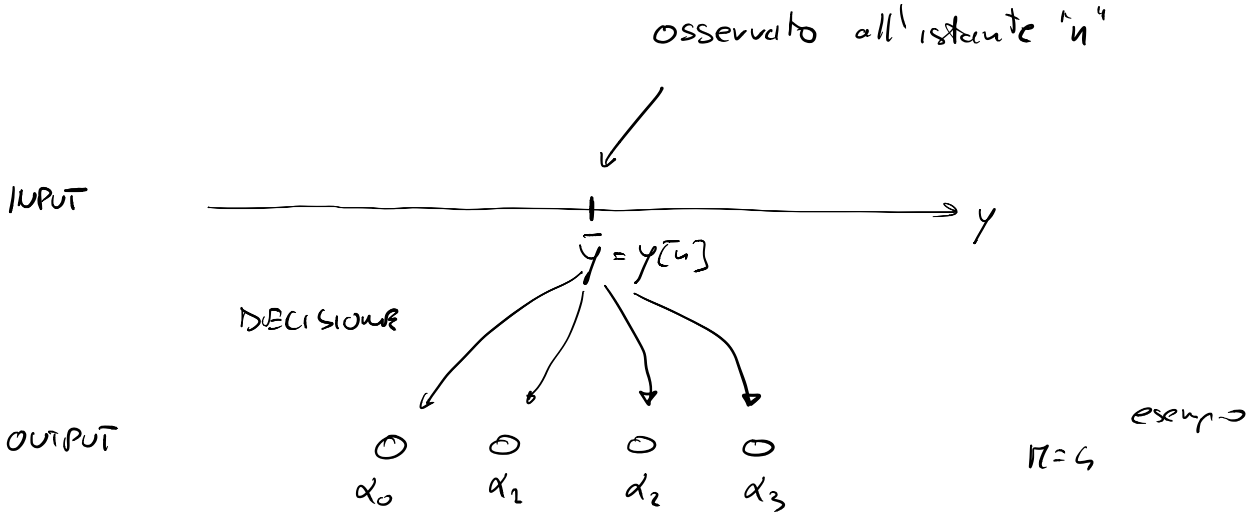

$$y[n] = s_u(nT_s) + n_u(nT_s)$$

MAX SNR $\quad \dfrac{s_u^2(nT_s)}{E[n_u(nT_s)]}$ è max

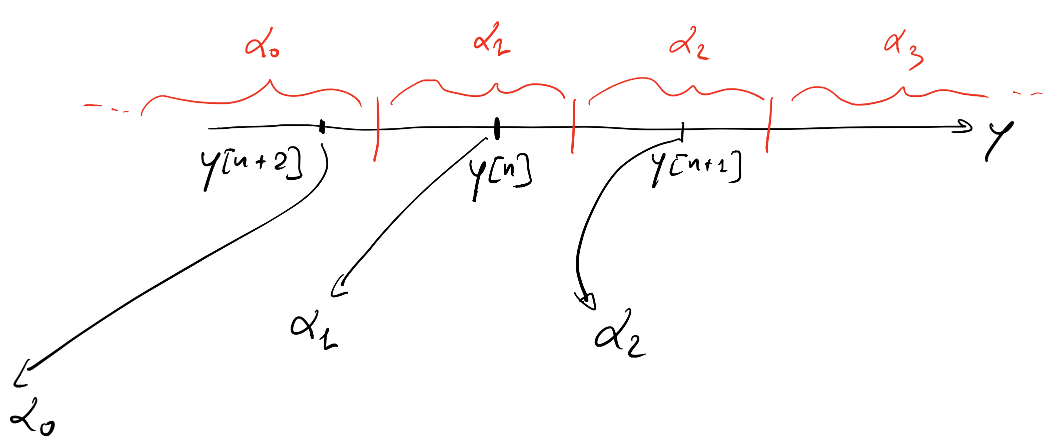
IL FILTRO ADATTATO FA SI CHE SI OTTENGA LA MIGLIORE SOLUZIONE IN TERMINI DI POTENZA DEL SEGNALE UTILE RISPETTO AL LIVELLO DI RUMORE.

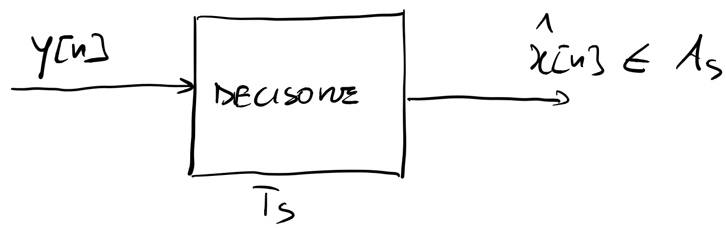



IL DECISORE OTTIMO




-) ZONE DI DECISIONE






⇒ Il decisore, in generale, potrebbe decidere dopo aver osservato tutti i campioni

⇒ Il decisore ad un sol colpo (single shot) decide sulla base di un singolo campione

.) simboli sono indipendenti

⇓

non c'è correlazione tra i simboli

⇓

conoscere il valore dei simboli passati o futuri non aiuta a decidere per il simbolo attuale

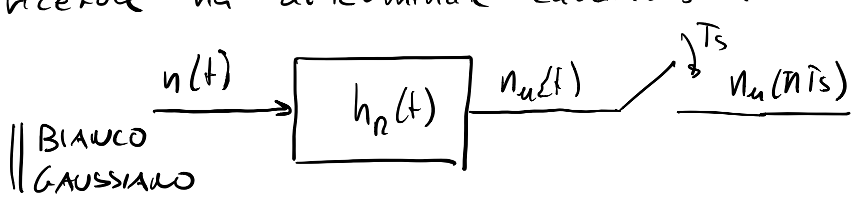
.) campioni di rumore siano incorrelati

⇓

condizione che andrebbe verificata ogni volta

⇓

⇒ è sempre verificata quando il filtro in ricezione ha determinate caratteristiche



$$R_{n_u}(\tau) = R_n(\tau) \otimes h_R(\tau) \otimes h_R(-\tau)$$

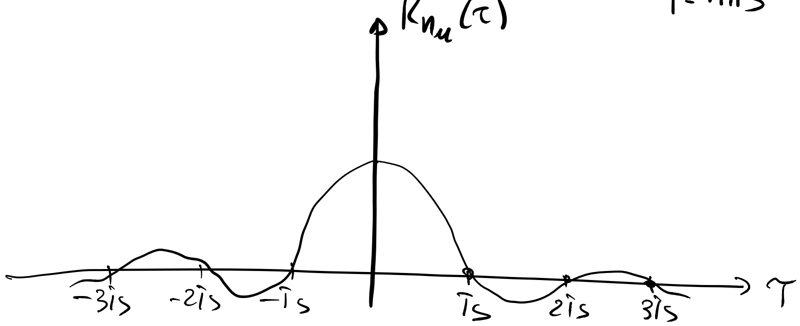
$$S_{n_u}(f) = S_n(f)\,|H_R(f)|^2$$

$$E\left[n_u[n]\, n_u[n-m]\right] = R_{n_u}[m] = \sigma_{n_u}^2\, \delta[m]$$

potenza

$$E\left[n_u[n]\right] = 0$$

$$R_{n_u}(\tau)\Big|_{\tau = mT_s} = \sigma_{n_u}^2\, \delta[m]$$



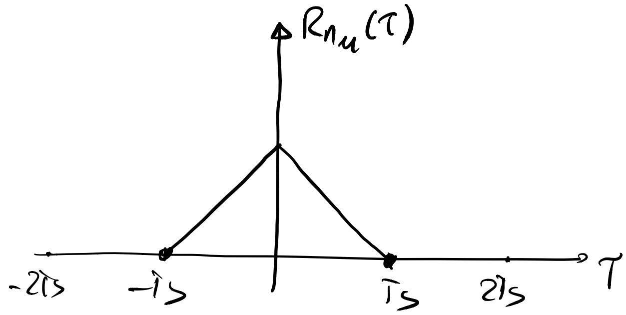

$$S_{n_u}(f) = \frac{N_0}{2}|H_R(f)|^2$$ , quando $S_n(f)$ è bianco

$$H_R(f) = TCF\left[h_R(t)\right]$$

$$\Rightarrow h_R(t) = rect\left(\frac{t}{T_s}\right) \Rightarrow H_R(f) = T_s\, sinc(T_s f)$$

$$|H_R(f)|^2 = T_s^2\, sinc^2(T_s f)$$

$$R_{n_u}(\tau) = \frac{N_0}{2} T_s \left(1 - \frac{|\tau|}{T_s}\right) rect\left(\frac{\tau}{2T_s}\right) \Leftarrow S_{n_u}(f) = \frac{N_0}{2}|H_R(f)|^2 = \frac{N_0 T_s^2}{2} sinc^2(T_s f)$$




Altro caso

-) $H_R(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$ p.b. ideale

$$|H_R(f)|^2 = H_R(f) \Rightarrow R_{n_u}(\tau) = \frac{N_0}{2} B \,\text{sinc}(Bt)$$

$$T_s = \frac{1}{B} \qquad R_{n_u}(mT_s) = \frac{N_0}{2} B \,\text{sinc}(BmT_s)$$

$$= \frac{N_0 B}{2} \text{sinc}\left(\cancel{B}\frac{m}{\cancel{B}}\right) = \frac{N_0 B}{2} \delta[m]$$

-) Calcolo della $R_{n_u}(\tau)$

-) Campionamento in $\tau = mT_s$

-) Si verifica che $R_{n_u}[m] = \sigma^2_{n_u} \delta[m]$

potenz. del rumore in uscita al filtro

$$E[n_u[n]] = 0$$

$$E[n(t)] = 0 \Rightarrow E[n_u(t)] = 0 \Rightarrow E[n_u[n]] = 0$$

$$\eta_{n_u}(t) = \eta_n(t) \otimes h_R(t)$$

$$E[n_u^2[n]] = P_{n_u} = C_{n_u}[0] + \eta_{n_u}^2 = \sigma_{n_u}^2$$

$\Rightarrow$ DECISORE AD UN SOL COLPO

$$\xrightarrow[T_s]{y[n]} \boxed{\text{DECISORE}} \xrightarrow{\hat{x}[n]}$$

ad ogni $T_s$ entra un campione $y[n]$ e solo su quello si decide il simbolo

DECISORE SINGLE-SHOT OTTIMO

- CRITERIO DI OTTIMALITÀ
  - minima probabilità di errore

$$\min P_E$$

$$P_E(n) = P\{\hat{x}[n] \neq x[n]\}$$

- CRITERIO A MASSIMA PROBABILITÀ A POSTERIORI (MAP)
  - viene introdotto per trovare una soluzione al criterio di minima prob. di errore
  - si dimostra che massimizzando la prob. a posteriori $\Rightarrow$ si minimizza la prob di errore

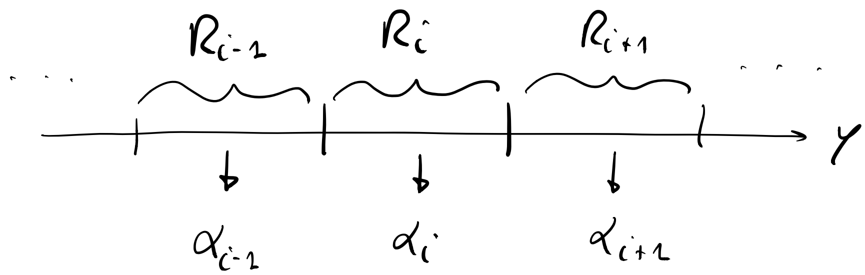
CRITERIO MAP $\Longrightarrow$ CRITERIO A MINIMA $P_E(M)$

Dimostrare

-) Definizione delle zone di decisione

-) $R_i \triangleq \{ y \in \mathbb{R} \mid \hat{x} = \alpha_i \}$

su M simboli




-) $P\{ x = \alpha_i \mid y \}$

simbolo trasmesso

Probabilità a posteriori (dopo aver osservato qualcosa)

-) $\hat{x} = \max\limits_{\substack{\alpha_i \\ i=1,\dots,M}} P\{ x = \alpha_i \mid y \}$ CRITERIO MAP

-) $P\{ x = \alpha_i \mid y \} = \dfrac{f_Y(y \mid x = \alpha_i)\, P\{ x = \alpha_i \}}{f_Y(y)}$ BAYES

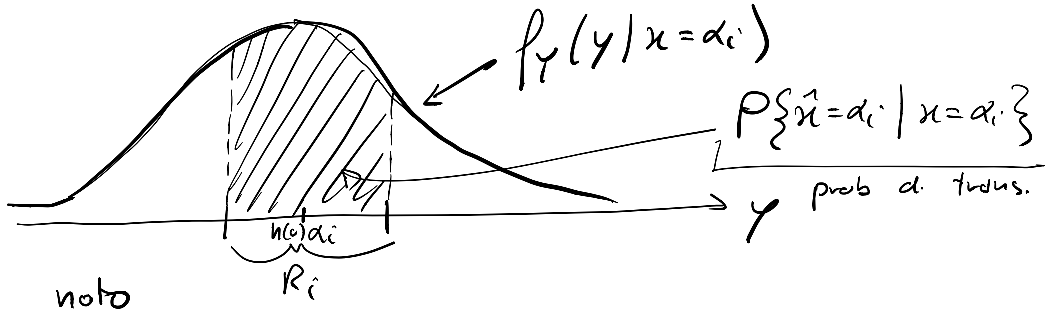
$$P_E(M) = P\{\hat{x} \neq x\} = 1 - P\{\hat{x} = x\}$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{M} P\{\hat{x} = \alpha_i , x = \alpha_i\}$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{M} P\{\hat{x} = \alpha_i \mid x = \alpha_i\} P\{x = \alpha_i\}$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{M} P\{x = \alpha_i\} P\{\underbrace{y \in R_i}_{\hat{x} = \alpha_i} \mid x = \alpha_i\}$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{M} P\{x = \alpha_i\} \int_{y \in R_i} f_Y(y \mid x = \alpha_i)\, dy$$




$$\Rightarrow y = \overbrace{h(0)\,\alpha_i}^{\text{noto}} + n_u$$ in assenza di di ISI

$n_u$ = V.A. estratta dal processo di rumore