Teorema di Dini e le sue applicazioni

(U. Dini, versione scalare n-dimensionale)

Th. $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, C^1

$x_0 \in f$ tale che $\nabla f(x_0) \neq 0$

Allora esiste un $\rho > 0$ tale che

$\{x : f(x) = 0\} \cap B_\rho(x_0)$ è una ipersuperficie in forma grafico, ovvero $\exists\, g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$:

in $B_\rho(x_0)$ $\quad f(x) = 0 \iff x_j = g($tutte le altre x_k tranne $k \neq j)$

$$f(x_1,\dots,x_n)=0 \iff x_2=g(x_1,x_3,\dots,x_n)$$
$$\left(\text{se } \frac{\partial f}{\partial x_2}\neq 0\right)$$

eq. in forma implicita

"esplicitato" x_2

Versione vettoriale

Th. (U. Dini versione vettoriale)

$A\subset\mathbb{R}^n$ aperto, $x_0\in A$

$f: A\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, C^1 $(m\geq 1)$

$m\leq n$

$Df(x_0)$ ha rango massimo m

$(n\times m)$

matrice delle derivate

Allora $\exists\, \rho>0$ tale che in $B_\rho(x_0)$

l'eq vettoriale $f(x)=0$ può essere espresso come

(ovvero il sistema di eq. $\begin{cases} f_1(x)=0\\ \vdots \\ f_m(x)=0\end{cases}$)

$\tilde{x}=g(\bar{x})$, dove

$\tilde{x}\in\mathbb{R}^m$, $\tilde{x}=(x_{i_1},\dots,x_{i_m})$

$\bar{x}\in\mathbb{R}^{n-m}$, $\bar{x}=(x_{j_1},\dots,x_{j_{n-m}})$

$j_\ell\notin\{i_1,\dots,i_m\}$

<u>Corollario</u> ($m=n$) $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in A$,

$f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, C^1

("cambio delle variabili")

$\det Df(x_0) \neq 0$

↑ matrice jacobiana

Allora $\exists \rho > 0$ tale che

in $\forall y \in B_\rho(f(x_0))$

l'eq $f(x) = y$ può essere

riscritta come $y = g(x)$,

ovvero, esiste una funzione inversa

di f

<u>Dimostrazione</u> (Idea): considerare la funzione

$$G(x,y) := f(x) - y$$

$G : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ e applicare

a G il th. di Dini.

Esempi

1°) $f(\rho,\varphi) := (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$

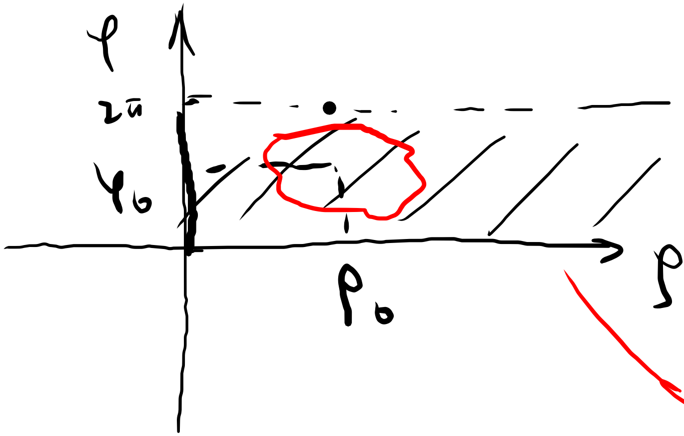
$f : [0,+\infty)\times[0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$x = f_1(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi$$
$$y = f_2(\rho,\varphi) = \rho\sin\varphi$$

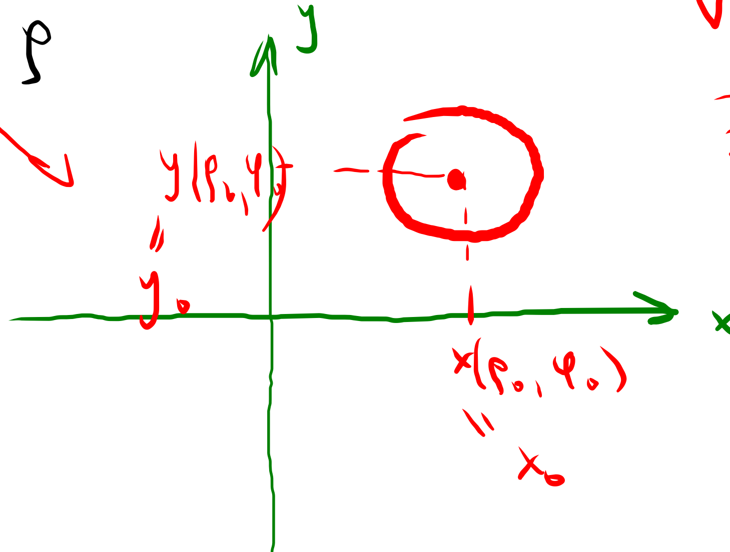
$$Df(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det Df(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \neq 0 \text{ se } \rho \neq 0$$

determinante jacobiano



$\rho_0 > 0$



$\forall (x,y) \in B_\rho((x_0,y_0))$

$\exists\ \rho, \varphi :$

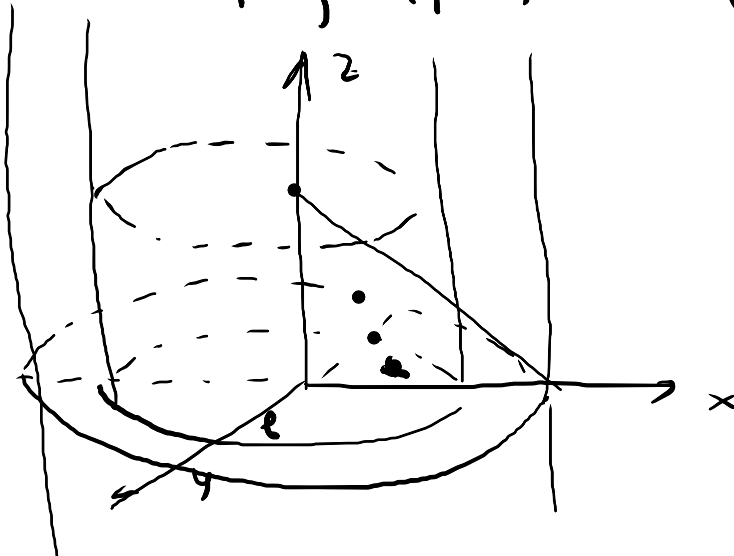
$x = \rho \cos \varphi$

$y = \rho \sin \varphi$

2°

$$f(\rho,\varphi,z) := (\underbrace{a\rho\cos\varphi}_{= x},\ \overbrace{b\rho\sin\varphi}^{= y},\ z)$$

$a, b > 0$



$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

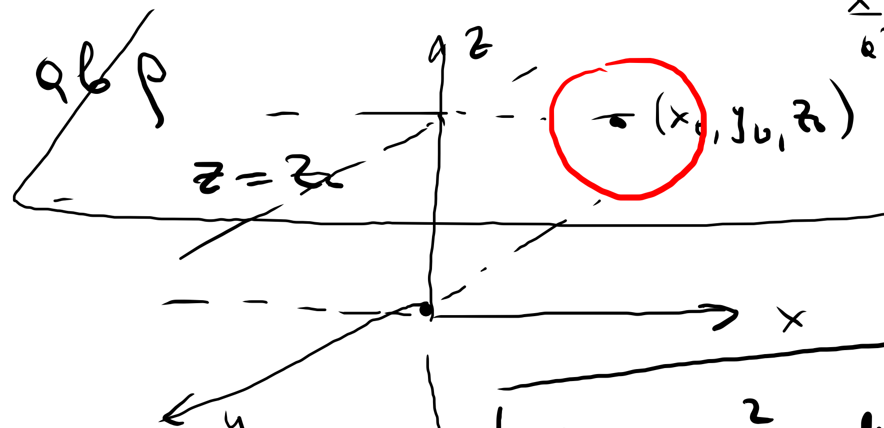
$$= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi$$

$$Df(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi & 0 \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det Df(\rho,\varphi,z) = 1\cdot\left(ab\rho\cos^2\varphi + ab\rho\sin^2\varphi\right) =$$

$$= ab\rho$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\rho^2$$



$$\boxed{\rho^2 = \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}$$

$$\frac{x^2}{(\rho a)^2}+\frac{y^2}{(\rho b)^2} = 1.$$

Altri esempi (coord. sferiche, cilindriche - da vedere lezioni precedenti)

Applicazione: massimi / minimi vincolati

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

funzione costo

$x \in \mathbb{R}^n$

$$: \begin{cases} f(x) \to \max \quad (o \min) \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

vincolo

Th. Sia f che g sono C^1 e x_0 è punto di max (o min) di f locale sull'insieme $\{x : g(x)=0\}$

Allora vale l'alternativa:

- o) o $\nabla g(x_0)=0$ ("caso irregolare")
- o) o $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ ("moltiplicatore di Lagrange") tale che x_0 è un punto stazionario della funzione

$$G(x;\lambda) := f(x)+\lambda g(x)$$

(ovvero $\nabla_x G(x,\lambda)=0 \iff \nabla f(x)+\lambda\nabla g(x)=0$)

("caso regolare")

O, nella maniera equivalente: $\exists \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ (moltiplicatori di Lagrange)

Fritz John

tali che $\lambda_0^2+\lambda_1^2\neq 0$ e

x_0 è un pt. stazionario della funzione

$$L(x;\lambda_0,\lambda_1) := \lambda_0 f(x)+\lambda_1 g(x)$$

$$\Updownarrow$$

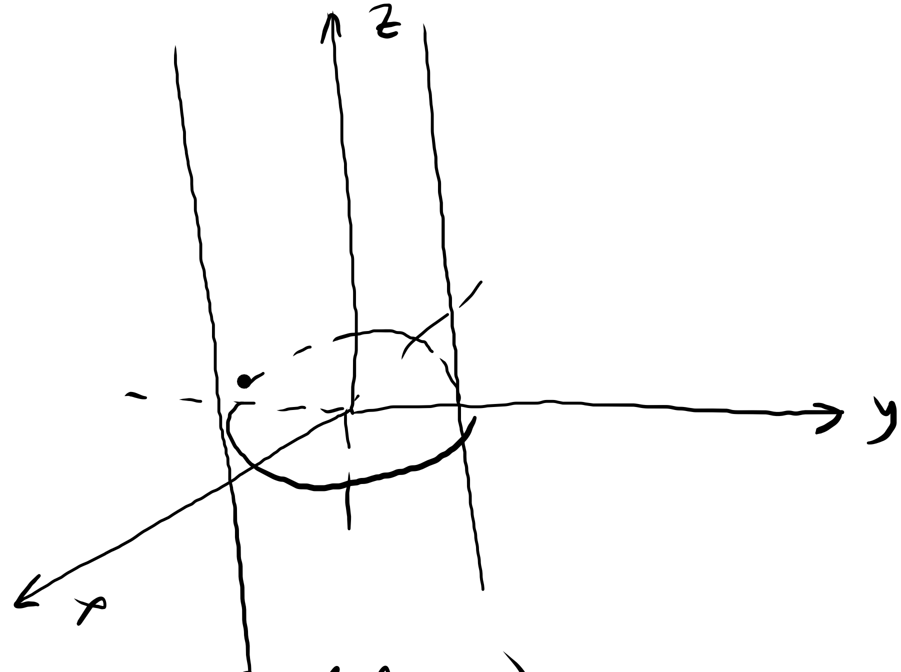
$$\nabla_x L=0 \iff \lambda_0\nabla f(x)+\lambda_1\nabla g(x)=0$$

Caso regolare corrisponde a $\lambda_0\neq 0$

irregolare ——"—— a $\lambda_0=0$

Esempi ed esercizi

1° $\begin{cases} f(x,y,z) := x + z^2 \longrightarrow \max/\min \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$



1) non c'è massimo (globale): $x = 0$ $(y = \pm 1)$

$$f(x,y,z) = z^2 \longrightarrow +\infty$$

$$z \to \pm\infty$$

•) f ha minimo ?

Per ora (!) facciamo solo il calcolo.

$$L(x,y,z;\lambda_0,\lambda_1) := \lambda_0(x+z^2)+\lambda_1(x^2+y^2-1)$$

$$\nabla L = (\lambda_0+2\lambda_1 x,\ 2\lambda_1 y,\ 2\lambda_0 z) = 0.$$

$$(1)\quad \begin{cases} \lambda_0+2\lambda_1 x = 0 \\ 2\lambda_1 y = 0 \\ 2\lambda_0 z = 0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

~~Caso I~~ ("irregolare") $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq 0$

Quindi, $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 x = 0 \\ 2\lambda_1 y = 0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}}$

$\lambda := \lambda_1/\lambda_0$

<u>Caso 2</u> $\lambda_0 \neq 0$

$$(1) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 x = -\lambda_0 \\ 2\lambda_1 y = 0 \\ 2\lambda_0 z = 0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\lambda x = -1 \\ 2\lambda y = 0 \\ 2z = 0 \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2} = 1.$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \mp 1$$

$$y = 0, \ z = 0$$

I punti "da sospettare" $(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$

∘) Vediamo se f ammette minimo (globale) nel cilindro

$$f(1,0,0) = 1+0^2 = 1$$

$$f(-1,0,0) = -1+0^2 = -1.$$

$$x^2+y^2 \leq 1 \implies -1 \leq x \leq 1$$

$$-1+z^2 \leq f(x,y,z) = x+z^2 \leq 1+z^2$$

se $|z| > 2$, allora $f(x,y,z) \geq 1+2^2 = 5$

Ma su $C_2 := \{x^2+y^2=1,\ |z| \leq 2\}$ la f ammette min per il th di Weierstrass

$$\left.\begin{array}{l} \min_{C_2} f \leq f(-1,0,0) = -1. \quad (-1,0,0) \in C_2 \\ f(x,y,z) \geq 5,\ \text{se } (x,y,z) \notin C_2 \end{array}\right| \Rightarrow$$

f ammette min su tutto il cilindro $\{x^2+y^2=1\}$ e lo ammette in C_2

Ne segue che $(-1,0,0)$ è un punto di min (globale) di f su $\{x^2+y^2=1\}$

e non ci sono altri pt. di min.

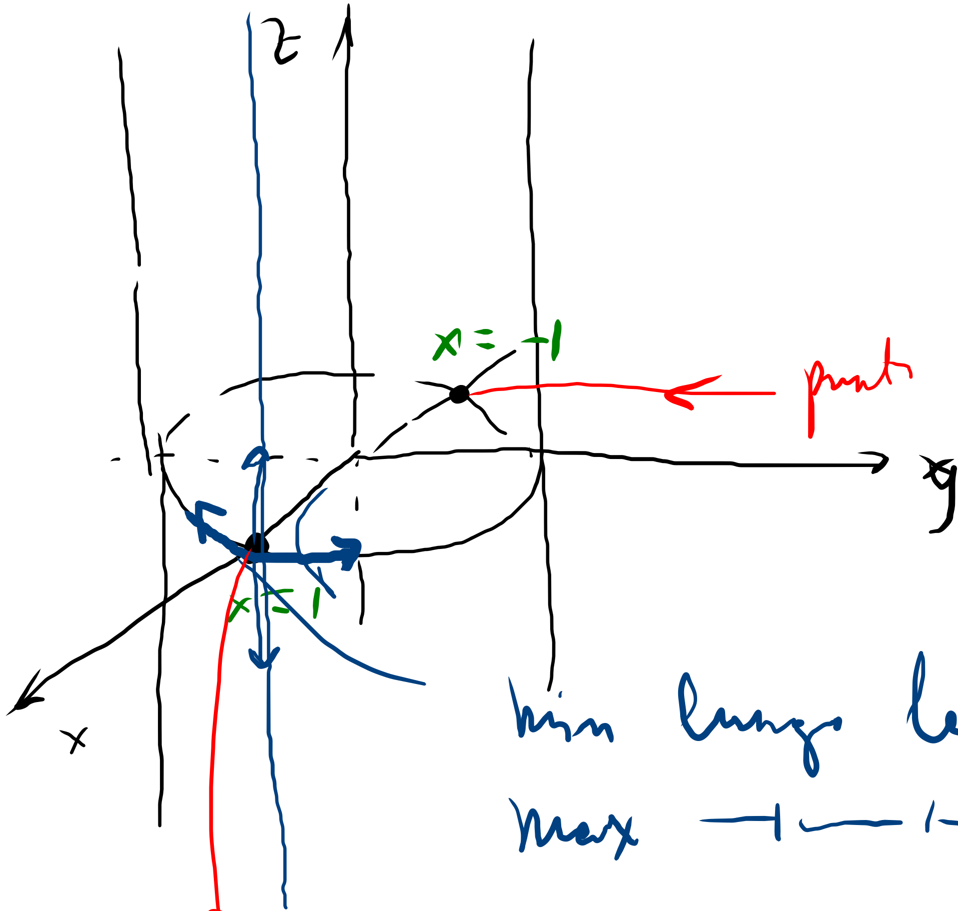
·) Cos'è $(1,0,0)$?

$$f(x,y,z) = x+z^2 = 1$$

$$\to f(1,0,z) = 1+z^2 \qquad z=0 \text{ è min di } f(1,0,\cdot)$$

$$\to f(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) = \cos\varphi \qquad \max f(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) = 1$$

$$x=\cos\varphi,\ y=\sin\varphi,\ z=0$$



punti di sella di f

min lungo le rette verticali

max — " — " circonf orizzontali

né di max né di min locale

Un "esempio" non da seguire

Dimostriamo che il massimo numero naturale è 1.

Sia n massimo numero naturale

$$n^2 \geq n, \text{ ma } n \text{ è massimo}$$

$$\Rightarrow n^2 = n \Rightarrow n^2 - n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0 \\ n = 1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 1 è massimo numero naturale.

2°]

$$\begin{cases} f(x,y) \to xy \\ x^2 - xy + y^2 = 1. \end{cases}$$

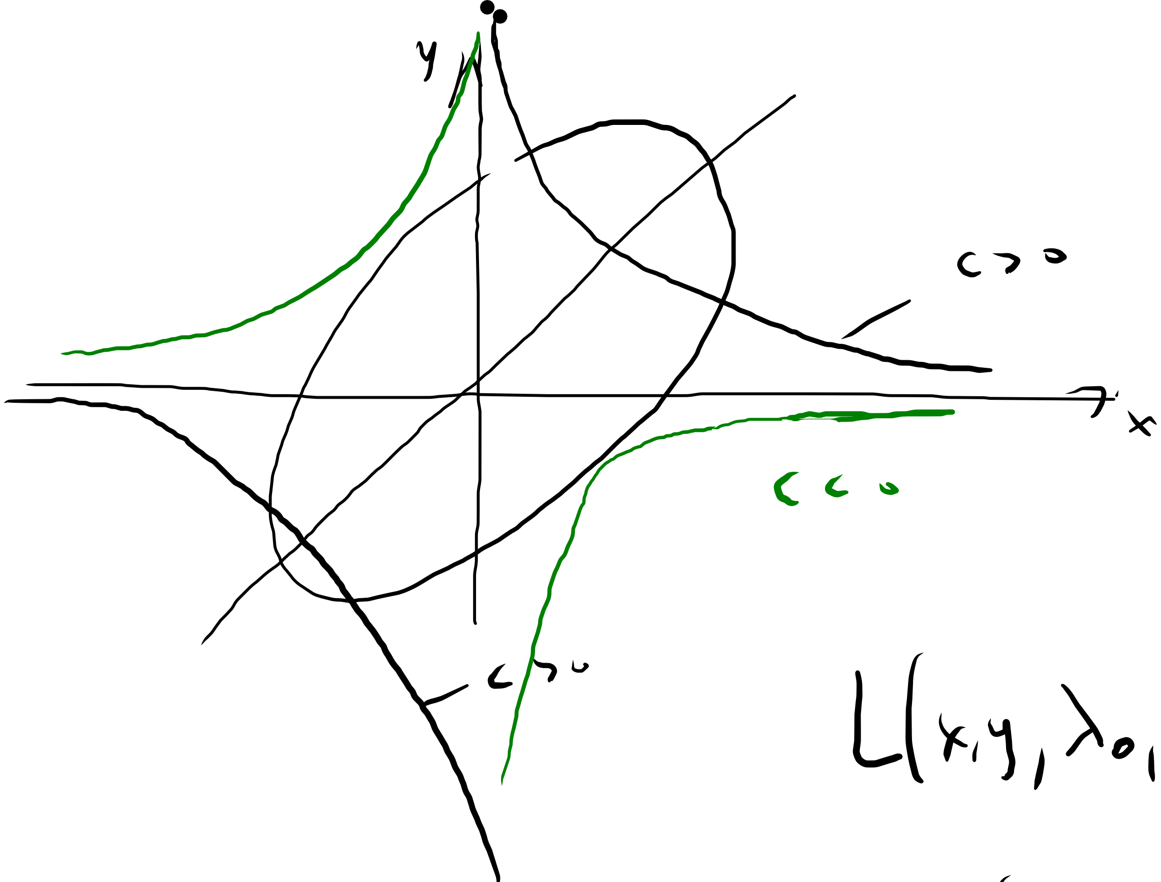
$$x^2 - xy + y^2 = \underbrace{x^2 - 2\cdot x \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4}}_{\left(x - y/2\right)^2} + \frac{3y^2}{4} = 1.$$

$$\left(x - y/2\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = 1.$$

$$\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = 1. \qquad \begin{array}{l} x' := x - \frac{y}{2} \\ y' := y. \end{array} \Bigg| \Rightarrow$$

$$x'^2 + \frac{y'^2}{(2/\sqrt{3})^2} = 1.$$

$f(x,y)=c.$



$$L(x,y,\lambda_0,\lambda_1):=$$

$$=\lambda_0 xy+\lambda_1(x^2-xy+y^2-1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=\lambda_0 y-\lambda_1 y+2\lambda_1 x=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=\lambda_0 x-\lambda_1 x+2\lambda_1 y=0 \\ x^2-xy+y^2=1. \end{cases}$$