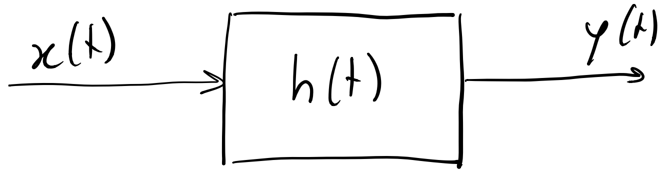
·) DISTORSIONI LINEARI



·) REPLICA "FEDELE" DI UN SEGNALE

$y(t)$ è una replica fedele di $x(t)$ se

$$y(t) = K\, x(t - t_0) \qquad K, t_0 \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow \text{TCF}$$

$$Y(f) = K\, X(f)\, e^{-j 2\pi f t_0}$$

·) FILTRO "FEDELE"

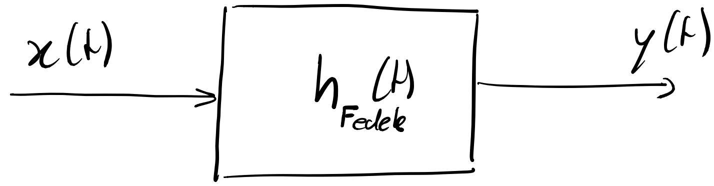
$$H(f) = K\, e^{-j 2\pi f t_0}$$

se K è complesso

$$H(f) = |K|\, e^{-j 2\pi f t_0}\, e^{j \angle K}$$

$$= |K|\, e^{-j(2\pi f t_0 - \angle K)}$$

$$\Rightarrow h(t) = K\, \delta(t - t_0) \qquad K \in \mathbb{C}$$



$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = K\,x(t-t_0)$$

replica fedele

$\Rightarrow$ Un filtro "fedele" produce (sempre) un'uscita che è una replica fedele dell'ingresso

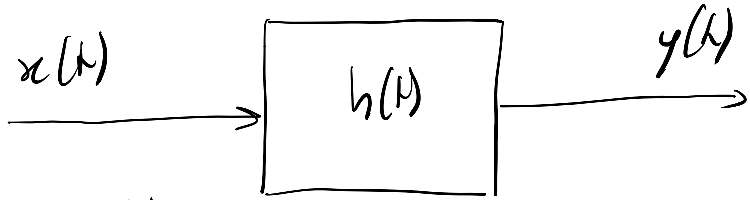
N.B.! Non vale il contrario

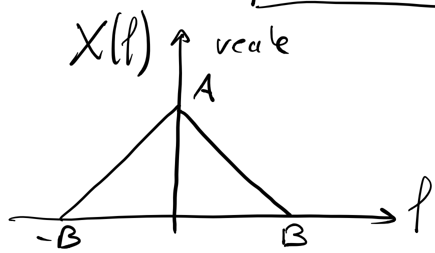
se non ho un filtro "fedele"

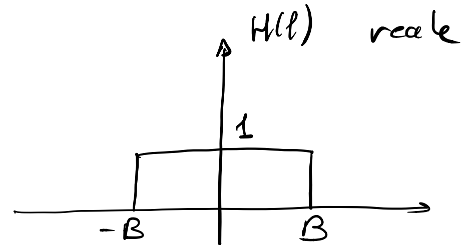
$$h(t) \neq K\,\delta(t-t_0)$$

non è detto che l'uscita non sia una replica fedele dell'ingresso

Esempio







Il filtro lineare e stazionario rappresentato dalla $H(f)$, quindi con $h(t) = 2B\,\mathrm{sinc}(2Bt)$, non è un filtro fedele

$$h(t) \neq K\,\delta(t - t_0)$$

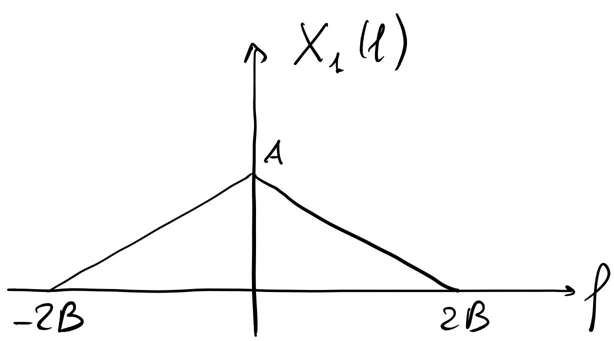
$$Y(f) = X(f)\,H(f) = X(f)$$

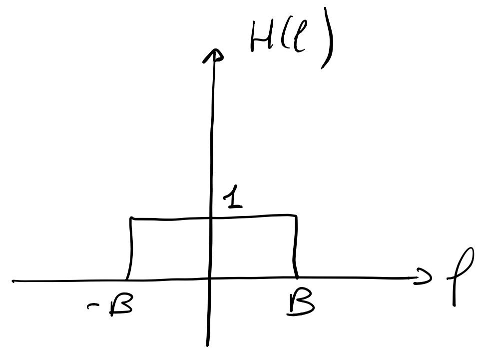
$$y(t) = x(t)$$

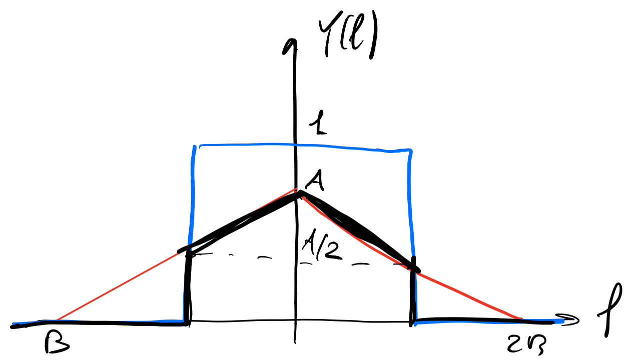
$$y(t) = K\,x(t - t_0) \qquad \text{se scelgo } K = 1,\ t_0 = 0$$

$y(t)$ è una replica fedele del segnale di ingresso

Contro esempio:



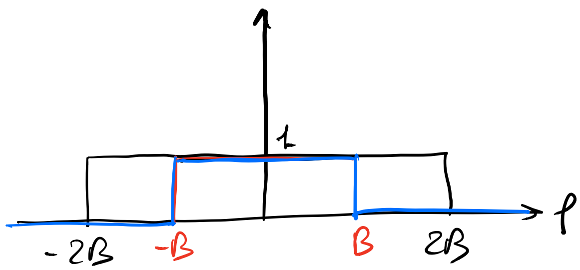




$$Y(f) = X(f)\,H(f) = A\left(1 - \frac{|f|}{2B}\right)\text{rect}\left(\frac{f}{4B}\right)\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$= A\left(1 - \frac{|f|}{\underbrace{2B}}\right)\text{rect}\left(\frac{f}{\underbrace{2B}}\right)$$

NON È UN TRIANGOLO



$$y(t) = ?$$

$$Y(f) = Y_1(f) + Y_2(f) = \frac{A}{2}\,\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) + \frac{A}{2}\left(1 - \frac{|f|}{B}\right)\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$y(t) = AB\,\text{sinc}(2Bt) + \frac{AB}{2}\,\text{sinc}^2(Bt)$$

$$x(t) = 2AB\,\text{sinc}^2(2Bt)$$

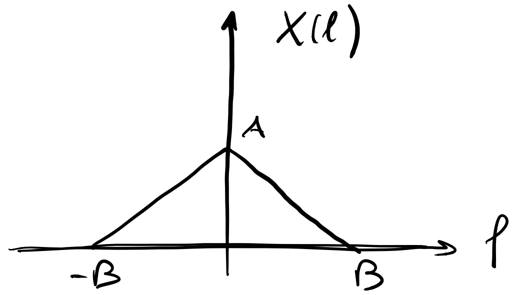
$y(t) \neq K\,x(t - t_0)$ non è una replica fedele

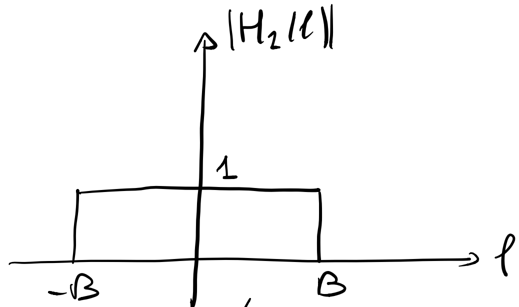
$$\boxed{\Rightarrow \text{Un SLS introduce distorsioni lineari su un segnale in ingresso se l'uscita non è scrivibile come una replica fedele dell'ingresso}}$$

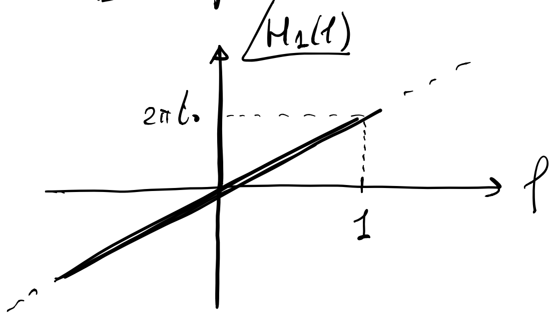
Distorsioni lineari di ampiezza e di fase

- AMPIEZZA: QUANDO È IL MODULO DEL SEGNALE IN USCITA A SUBIRE UNA VARIAZIONE (DISTORSIONE)
- FASE: QUANDO È LA FASE A SUBIRE UNA VARIAZIONE DIVERSA DALLA SOMMA CON UN TERMINE LINEARE

Esempi







$$Y(f) = H(f)\,X(f)$$
$$= |H(f)|\,|X(f)|\,e^{j\left(\angle X(f) + \angle H(f)\right)}$$
$$= |X(f)|\,e^{j2\pi f t_0}$$
$$= X(f)\,e^{j2\pi f t_0}$$

$t_0 > 0$
$t_0 \in \mathbb{R}$

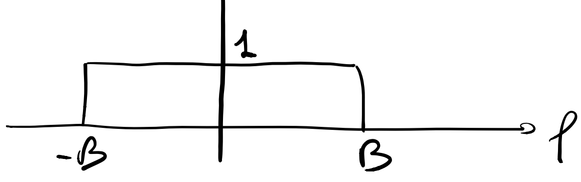
$$\Downarrow$$

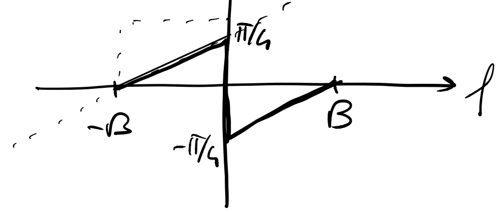
$$y(t) = x(t+t_0)$$

è una replica fedele
$H_1(f)$ non introduce
distorsioni lineari

·) Un sistema lineare può solo introdurre distorsioni lineari

Esempio di distorsione di fase





⇒ la fase non è lineare (è solo lineare a tratti)

↳ introduce una distorsione di fase

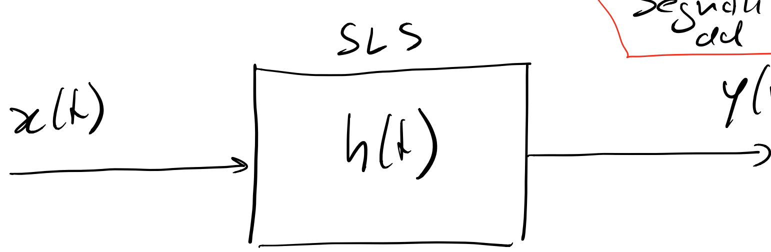
$$\boxed{Y(f) \neq K\,X(f)\,e^{-j2\pi f t_0}}$$

$$= K\,X(f)\,e^{-j2\pi f t_1}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f-B/2}{B}\right) +$$

$$+ K\,X(f)\,e^{-j2\pi f t_2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f+B/2}{B}\right)$$

-) ANALISI ENERGETICA IN PRESENZA DI SLS

Segnali aperiodici ad energia finita



$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,x^*(t-\tau)\,dt$$

autocorrelazione del segnale IN

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,y^*(t-\tau)\,dt$$

autocorrelazione del segnale OUT

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

$$= R_x(\tau) \otimes R_h(\tau)$$

h reale

$$h(\tau) \otimes h(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, h(t-\tau)\, dt$$

$$= R_h(\tau)$$

$$S_x(f) = TCF\left[R_x(\tau) \right] = |X(f)|^2$$

$$S_y(f) = TCF\left[R_y(\tau) \right] = |Y(f)|^2$$

$$= TCF\left[R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) \right]$$

$$= S_x(f)\, H(f)\, H^*(f) = S_x(f)\, |H(f)|^2$$

Densità spettrale di energia del segnale di uscita $\boxed{S_y(f) = S_x(f)\, |H(f)|^2}$

Dimostrazione

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

I strada

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, y^*(t-\tau)\, dt$$

sostituisco $y(t) = x(t) \otimes h(t)$

⋮

strada è lunga e complessa perché bisogna gestire tre integrali

II^a strada (attraverso la DSE)

$$R_x(\tau) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} S_x(f) = |X(f)|^2$$

$$R_Y(\tau) \Longleftrightarrow S_y(f) = |Y(f)|^2$$

$$R_y(\tau) = ATCF\left[S_y(f)\right] = ATCF\left[|Y(f)|^2\right]$$

$$= ATCF\left[Y(f)\,Y^*(f)\right] = ATCF\left[X(f)\,H(f)\,X^*(f)\,H^*(f)\right]$$

$$= ATCF\left[|X(f)|^2\,H(f)\,H^*(f)\right] = ATCF\left[S_x(f)\,H(f)\,H^*(f)\right]$$

$$= R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

$\Rightarrow$ Per segnali periodici

$$x(t) = x(t - kT_0) \quad , \; k \in \mathbb{Z}, \; T_0 \in \mathbb{R}^+$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

autocorrelazione del segnale IN (periodico)

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t)\, y^*(t-\tau)\, dt$$

autocorrelazione del segnale OUT (periodico)

$$\Rightarrow R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

Dimostrazione

$$S_y(f) = \sum_k |Y_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

$$Y(f) = \frac{1}{T_0} \sum_k Y_k \, \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

$$Y_k = X_k \, H\left(\frac{k}{T_0}\right) \Rightarrow |Y_k|^2 = |X_k|^2 \left|H\left(\frac{k}{T_0}\right)\right|^2$$

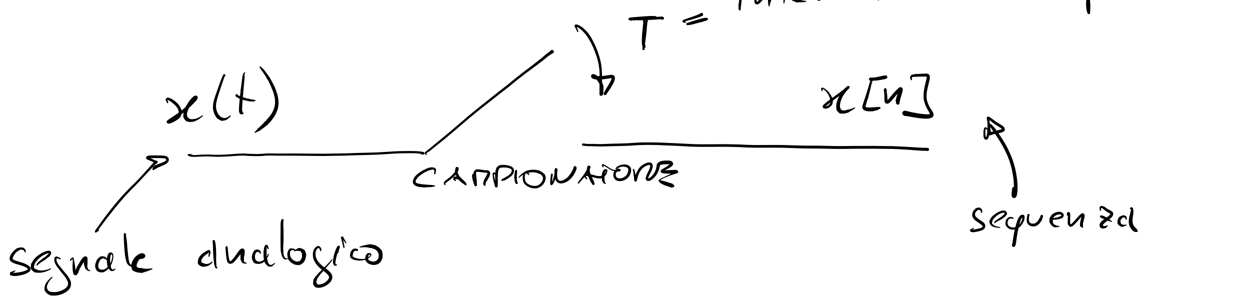
$$\Rightarrow S_y(f) = \sum_k |X_k|^2 \left|H\left(\frac{k}{T_0}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

$$= \left(\sum_k |X_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)\right) |H(f)|^2$$

$$= S_x(f)\, H(f)\, H^*(f)$$

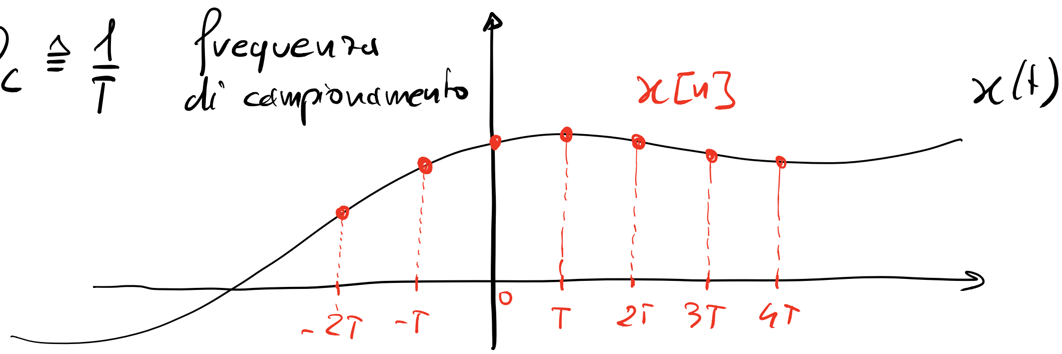
$$\Rightarrow R_y(\tau) = \text{ATCF}\left[S_y(f)\right] = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

·) SEGNALI CAMPIONATI

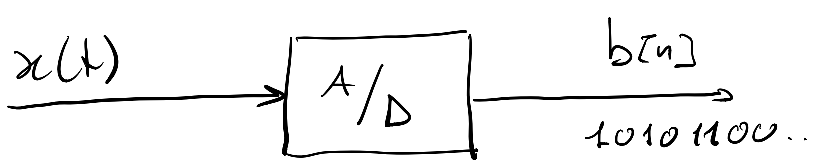


$$x[n] = x(nT) \qquad n \in \mathbb{Z} \quad , T \in \mathbb{R}^+$$

$f_c \triangleq \frac{1}{T}$ frequenza di campionamento



·) DIGITALIZZAZIONE DI UN SEGNALE ANALOGICO



il campionatore è un elemento del convertitore A/D

·) SEQUENZE

·) variabile indipendente (tempo) ⇒ discreta

·) variabile dipendente (ampiezza) ⇒ continua

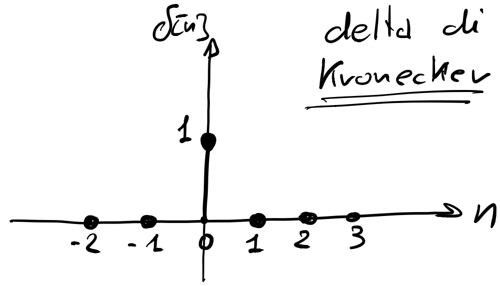
$$x[n]$$

continua → x, discreta → $[n]$

⇒ sequenze notevoli

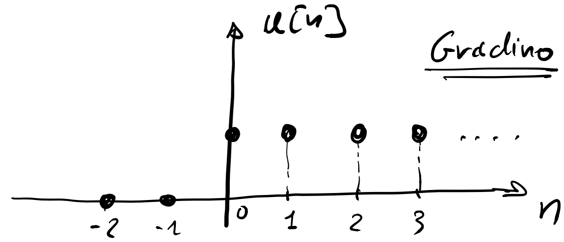
·) $\delta[n] \triangleq \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$

delta di Kronecker



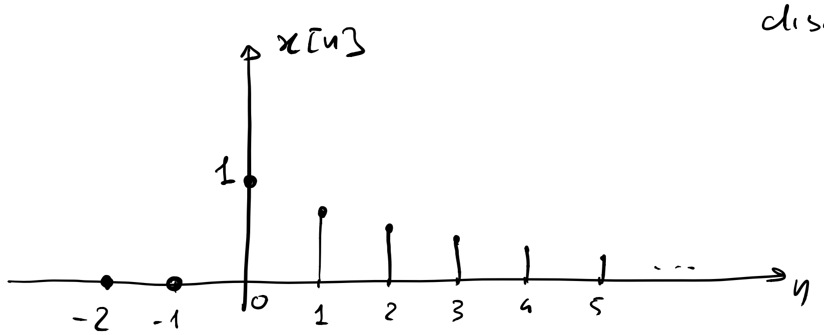
·) $u[n] \triangleq \begin{cases} 1 & n\geq 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$

Gradino



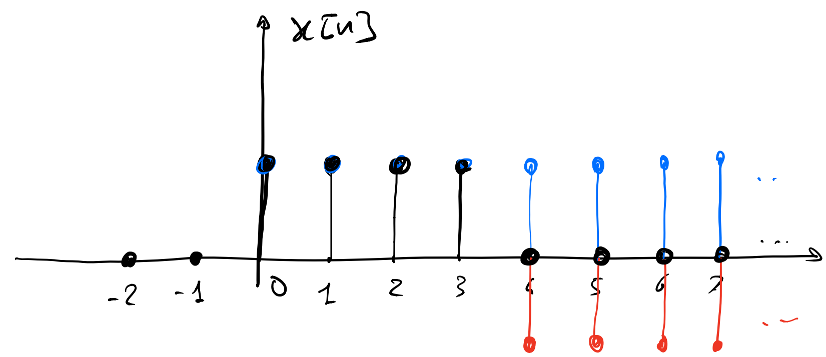
·) $x[n] = a^n u[n] \qquad 0<a<1$

esponenziale monolatera discreta



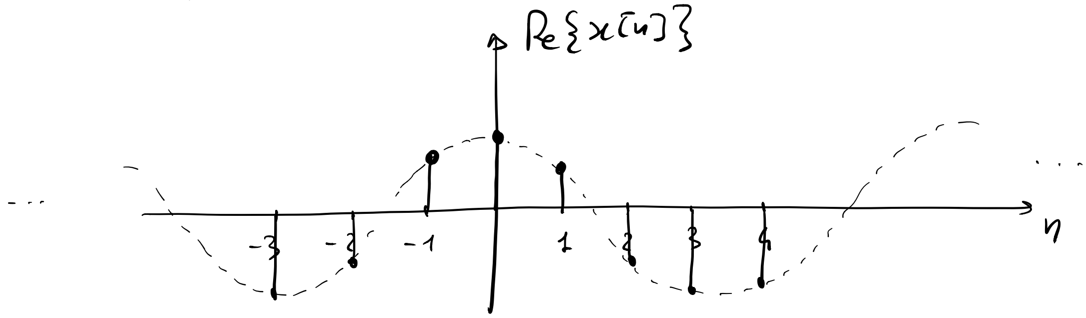
·) $x[n] = \underbrace{u[n]} - \underbrace{u[n-N]}$ rettangolo discreto

$N = 4 \Rightarrow$



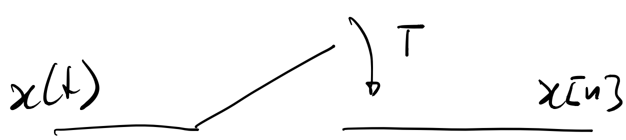
·) $x[n] = e^{j 2\pi F_0 n}$ $\qquad F_0 \in \mathbb{R}^+$ oscillazione discreta

$= \cos(2\pi F_0 n) + j \sin(2\pi F_0 n)$



N.B. $x[n]$ è periodico ?

in generale non è periodico



$x(t) = e^{j 2\pi f_0 t} \Leftarrow$ è periodico

$x[n] = x(nT) = e^{j 2\pi f_0 n T} = e^{j 2\pi F_0 n}$ $\qquad F_0 \triangleq f_0 T$

in generale non è periodico

$\Rightarrow$ $x[n]$ è periodico solo se

$$F_0 \in \mathbb{Q}$$

ovvero

$$F_0 = \frac{p}{q} \qquad p, q \in \text{interi positivi } (\mathbb{N})$$

$\Rightarrow$ Se p e q sono primi tra loro

$\Downarrow$

q è il periodo della sequenza

$\Rightarrow$ Se p e q non sono primi tra loro

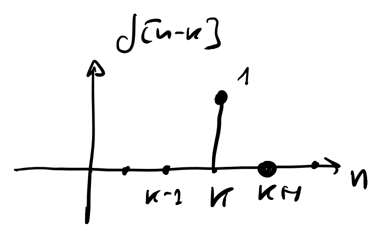
$\Rightarrow$ $\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q}$ con p' e q' primi tra loro

$\Rightarrow$ q' è il periodo

-) Proprietà di $\delta[n]$ e $u[n]$

-) $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$

-) $\delta[n-k] = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$



-) $u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$

→ TRASFORMATA DI FOURIER DI UNA SEQUENZA

$$x[n] \overset{TFS}{\Longleftrightarrow} \bar{X}(f)$$

$$\boxed{\bar{X}(f) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi f n T}}$$

TRASFORMATA DI FOURIER DI UNA SEQUENZA

$T \in \mathbb{R}^+$

Proprietà

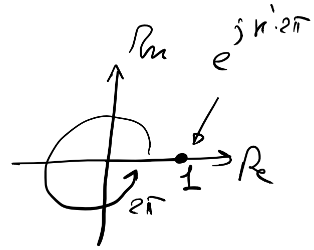
$\bar{X}(f)$ è periodica di periodo $\frac{1}{T}$

$$\bar{X}(f) = \bar{X}\left(f - \frac{n}{T}\right) \qquad n \in \mathbb{Z},\ T \in \mathbb{R}^+$$

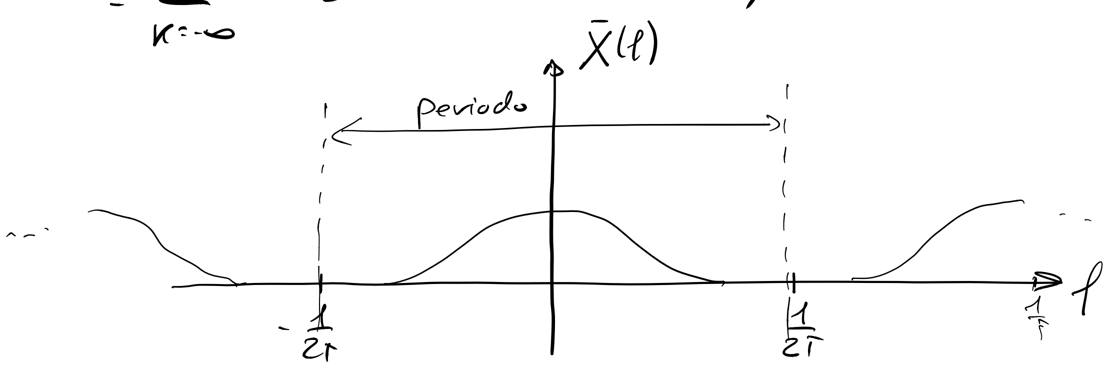
Dim.

$$\bar{X}\left(f - \frac{n}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, e^{-j2\pi\left(f - \frac{n}{T}\right)kT}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, e^{-j2\pi f k T} \underbrace{e^{j2\pi k n}}_{=1}$$

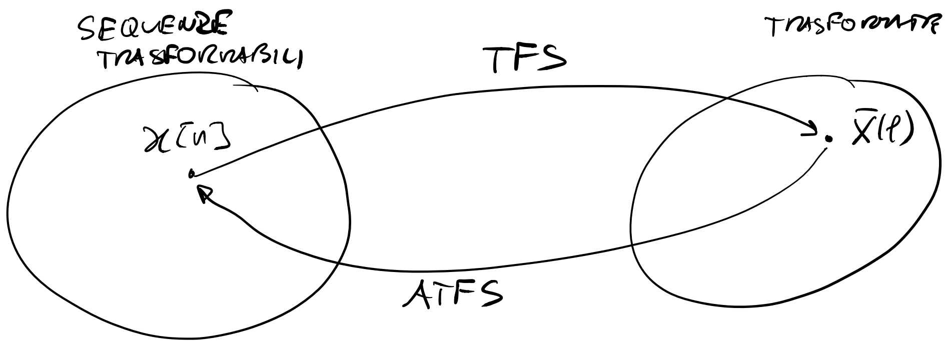


$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, e^{-j2\pi f k T} = \bar{X}(f)$$



$$\boxed{x[n] = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f)\, e^{j2\pi f n T}\, df}$$

ANTITRASFORMATA DI FOURIER DI UNA SEQUENZA



Dim.

$$\underbrace{T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi f n T}}_{\bar{X}(f)}\, e^{j2\pi f k T}\, df}_{ATFS[TFS[\cdot]]} \overset{?}{=} x[k]$$

$$= T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{j2\pi f (k-n) T}\, df = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ (\cdot) & k = n \end{cases}$$

$$\cos(2\pi f (k-n) T) + j \sin(2\pi f (k-n) T)$$

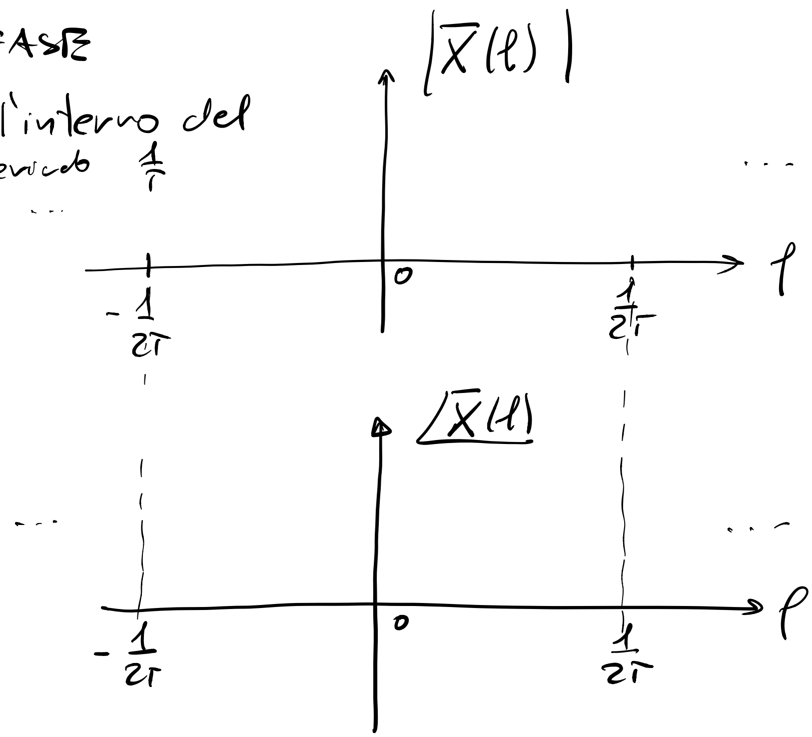
$\Downarrow$

ha periodo $\frac{1}{T}$

$$(\cdot) = T \cdot x[k] \cdot \frac{1}{T} = x[k] \qquad \text{c.v.d.}$$

- RAPPRESENTAZIONE DELLA TFS

  - MODULO
  - FASE
  - all'interno del periodo $\frac{1}{T}$



- Perché la TFS è periodica

  - prendiamo due oscillazioni discrete

$$x_1[n] = e^{j2\pi F_1 n} \qquad F_1 = f_1 T$$

$$x_2[n] = e^{j2\pi F_2 n} \qquad F_2 = f_2 T$$

$$f_2 = f_1 + \frac{K}{T}$$

$$x_2[n] = e^{j2\pi F_2 n} = e^{j2\pi f_2 T n} = e^{j2\pi\left(f_2 + \frac{K}{T}\right)Tn}$$

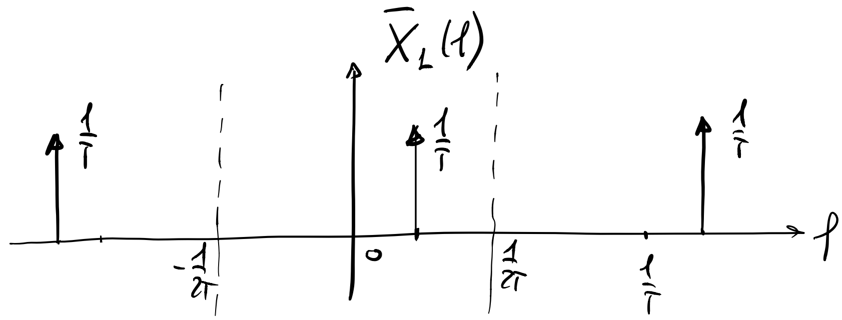
$$= e^{j2\pi f_1 T n} \underbrace{e^{j2\pi \frac{k}{\cancel{T}} \cancel{T} n}}_{1} = e^{j2\pi F_1 n} = x_1[n]$$

$$x_1[n] = x_2[n]$$

$$\bar{X}_1(f) = \bar{X}_2(f)$$

$$\bar{X}_1(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]\, e^{-j2\pi f n T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \overset{f_1 T}{F_1} n} e^{-j2\pi f n T}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f-f_1) n T} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - f_1 - \frac{n}{T}\right)$$



$$\bar{X}_2(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi F_2 n} e^{-j2\pi f n T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \left(f_1 + \frac{k}{T}\right) n T} e^{-j2\pi f n T}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi \left(f - f_1 - \frac{k}{T}\right) n T} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - f_1 - \frac{k}{T} - \frac{n}{T}\right)$$

$$k + n = n'$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - f_1 - \frac{n'}{T}\right) = \bar{X}_1(f)$$

- TRASFORMABILITÀ DI UNA SEQUENZA

- condizione sufficiente

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \Rightarrow \exists \text{ TFS}$$

Dimostrazione

$$\left|\bar{X}(f)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi f n T}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| \underbrace{\left|e^{-j2\pi f n T}\right|}_{=1}$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|$$

se questa converge allora converge anche la serie di Fourier