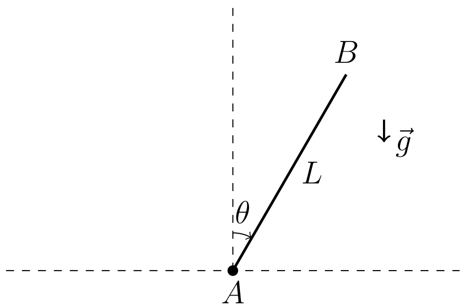
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica	
Esame di Fisica Generale, Sessione del: 25/6/2025	
Cognome:	**Matricola:**
Nome:	**Anno di Corso:**

Problema 1

Una sottile asta rigida AB ha lunghezza L, massa M, è incernierata alla sua estremità A ed è libera di ruotare in un piano verticale. Inizialmente l'asta si trova in equilibrio (instabile) allineata in verticale. A seguito di una piccola perturbazione, l'asta cade sotto l'azione della gravità, ruotando in senso orario attorno ad A.



Si richiede di determinare, in funzione dell'angolo θ formato dall'asta rispetto all'asse verticale passante per A:

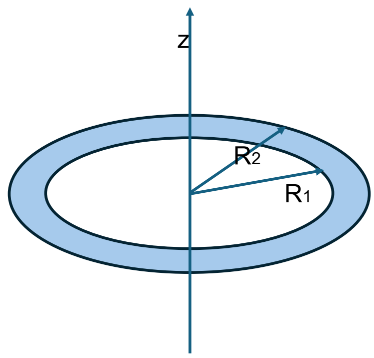
1. l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}(\theta)$ dell'asta, specificandone modulo, direzione e verso;
2. l'accelerazione $\vec{a}_B(\theta)$ dell'estremità B;
3. la reazione $\vec{R}(\theta)$ del vincolo in A, esprimendone le componenti rispetto a un sistema di coordinate cartesiane che comprenda un asse orizzontale e un asse verticale.

Suggerimento: per il punto 2. è utile utilizzare un sistema di coordinate polari con origine in A e specificare le componenti tangenziale e radiale dell'accelerazione di B.

Problema 2

Su una corona circolare di materiale isolante, di spessore trascurabile, con raggio interno R_1 e raggio esterno R_2, viene depositata una densità di carica superficiale uniforme σ. Si calcoli:

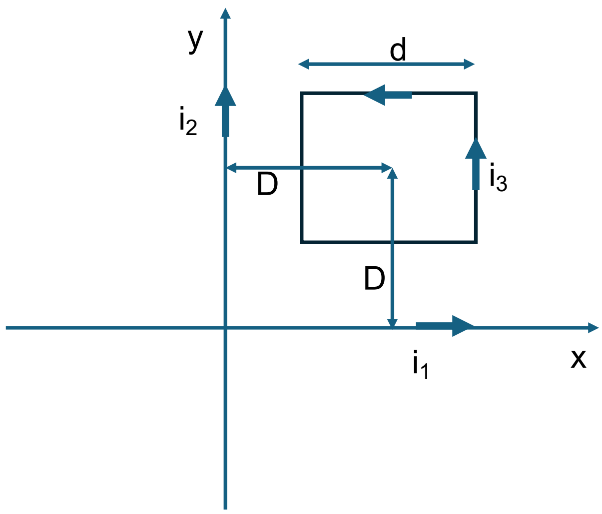
1. il potenziale elettrostatico $V(z)$ sulla retta ortogonale al piano della corona e passante per il suo centro, in funzione della coordinata z misurata con origine nel piano della corona;
2. le componenti cartesiane del vettore campo elettrico $\vec{E}(z)$ sulla stessa retta, una volta specificato un opportuno sistema di riferimento.



Problema 3

Si considerino due fili conduttori rettilinei infiniti, posizionati lungo gli assi x e y e attraversati da correnti costanti i_1 e i_2, secondo le direzioni indicate in figura. Nel medesimo piano è presente una spira quadrata di lato d, non deformabile, il cui centro dista D da ciascun filo ($D > d/2$). La spira è percorsa da una corrente i_3 con verso di circolazione mostrato in figura.

Calcolare la forza totale $\vec{F}$ che agisce sulla spira, esprimendone le componenti nel sistema di riferimento mostrato.



Soluzione del problema 1

Fissiamo il sistema di coordinate cartesiane con origine in A, assi x e y nel piano del moto dell'asta e:

$$\hat{\imath}: \text{ verso destra}, \quad \hat{\jmath}: \text{ verso il basso}, \quad \hat{k} = \hat{\imath} \times \hat{\jmath}: \text{ entrante rispetto allo schermo.}$$

Fissiamo anche il sistema di coordinate cilindriche, sempre con origine in A e:

$$\hat{r}: \text{ lungo l'asta}, \quad \hat{\theta}: \text{ senso orario}, \quad \hat{k} = \hat{r} \times \hat{\theta}: \text{ entrante rispetto allo schermo.}$$

Tra i due sistemi di coordinate, valgono le relazioni:

$$\hat{r} = -\cos\theta\,\hat{\jmath} + \sin\theta\,\hat{\imath}, \qquad \hat{\theta} = \sin\theta\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{\imath}, \qquad \hat{k} = \hat{k}.$$

Le condizioni iniziali sono:

$$\theta(0) = 0, \qquad \omega(0) = \dot{\theta}(0) = 0.$$

1. Accelerazione angolare $\vec{\alpha}(\theta)$ dell'asta

Il moto è quello di un corpo rigido con asse di rotazione fisso passante per A. Utilizziamo la seconda cardinale, rispetto al polo A:

$$\vec{\tau}_A = I_A \vec{\alpha},$$

dove $\vec{\tau}_A$ è il momento torcente totale e I_A è il momento d'inerzia dell'asta calcolati rispetto al polo A. L'unica forza che ha momento non nullo rispetto ad A è il peso $M\vec{g}$ che ha come punto di applicazione il centro di massa G. Se indichiamo con $\vec{r}_{G/A}$ il vettore posizione del centro di massa dell'asta, abbiamo:

$$\vec{\tau}_A = \vec{r}_{G/A} \times M\vec{g} = \frac{L}{2}\hat{r} \times (Mg\,\hat{\jmath}) = \frac{MgL}{2}\sin\theta\,\hat{k}.$$

D'altra parte, il momento d'inerzia dell'asta rispetto ad A è:

$$I_A = \frac{1}{3}ML^2.$$

Di conseguenza:

$$I_A\,\vec{\alpha} = \frac{MgL}{2}\sin\theta\,\hat{k} \implies \boxed{\vec{\alpha}(\theta) = \frac{3g}{2L}\sin\theta\,\hat{k}.}$$

Quindi, entrante rispetto allo schermo.

2. Componente tangenziale $a_{B,t}(\theta)$ dell'accelerazione del punto B

Un generico punto P dell'asta a $\vec{r}_{P/A}$ dall'origine A si muove di moto circolare rispetto ad A. L'accelerazione di P è:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P,t} + \vec{a}_{P,r} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/A}}_{\text{tangenziale}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/A}\right)}_{\text{centripeta (radiale)}}.$$

Il punto B si trova a distanza L da A e per esso abbiamo:

$$\vec{a}_{B,t} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} = \alpha\,\hat{k} \times (L\,\hat{r}) = L\,\alpha\,\hat{\theta} = \frac{3g}{2}\sin\theta\,\hat{\theta}.$$

Quindi, la componente tangenziale dell'accelerazione è data da:

$$\boxed{a_{B,t}(\theta) = \frac{3g}{2}\sin\theta}.$$

3. Componente radiale $a_{B,r}(\theta)$ dell'accelerazione del punto B

Per l'accelerazione radiale di B abbiamo:

$$\vec{a}_{B,r} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}) = -L\,\omega^2\,\hat{r}.$$

Per calcolare la velocità angolare $\omega(\theta)$, usiamo la conservazione dell'energia:

Energia potenziale iniziale:

$$U_i = Mg \cdot \frac{L}{2}.$$

Energia potenziale all'angolo θ:

$$U(\theta) = Mg \cdot \frac{L}{2}\cos\theta.$$

Energia cinetica all'angolo θ:

$$K(\theta) = \frac{1}{2} I_A\,\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ML^2\cdot\omega^2 = \frac{1}{6}ML^2\omega^2.$$

Imponendo la conservazione dell'energia:

$$Mg\cdot\frac{L}{2} = Mg\cdot\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{1}{6}ML^2\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g}{L}(1-\cos\theta).$$

Di conseguenza, la componente radiale dell'accelerazione di B è:

$$\boxed{a_{B,r}(\theta) = -L\cdot\omega^2 = -L\cdot\frac{3g}{L}(1-\cos\theta) = -3g(1-\cos\theta).}$$

4. Reazione vincolare $\vec{R}(\theta)$ nel punto A

Vogliamo determinare le componenti R_x ed R_y della reazione vincolare in A. Consideriamo l'accelerazione del centro di massa G, che si muove di moto circolare attorno a A con raggio $L/2$.

Accelerazione tangenziale del centro di massa:

$$\vec{a}_{G,t} = \vec{\alpha}\times\vec{r}_{G/A} = \alpha\,\hat{k}\times(\frac{L}{2}\,\hat{r}) = \frac{L}{2}\,\alpha\,\hat{\theta} = \frac{3g}{4}\,\sin\theta\,\hat{\theta}.$$

Nel sistema di coordinate cartesiane $\{\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k}\}$ abbiamo:

$$\vec{a}_{G,t} = \frac{3g}{4}\sin\theta\big(\sin\theta\,\hat{\jmath}+\cos\theta\,\hat{\imath}\big) = \frac{3g}{4}\sin\theta\cos\theta\,\hat{\imath} + \frac{3g}{4}\sin^2\theta\,\hat{\jmath}.$$

Accelerazione radiale del centro di massa:

$$\vec{a}_{G,r} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{G/A}) = -\frac{L}{2}\,\omega^2\,\hat{r} = -\frac{3g}{2}(1-\cos\theta)\hat{r}.$$

Nel sistema di coordinate cartesiane $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ abbiamo:

$$\vec{a}_{G,r} = -\frac{3g}{2}(1-\cos\theta)\sin\theta\,\hat{\imath} \;+\; \frac{3g}{2}(1-\cos\theta)\cos\theta\,\hat{\jmath}.$$

Di conseguenza, l'accelerazione di G può essere scritta come:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_{G,t} + \vec{a}_{G,r} = \begin{cases} a_{Gx} = \dfrac{3g}{4}\sin\theta\cos\theta - \dfrac{3g}{2}(1-\cos\theta)\sin\theta, \\ a_{Gy} = \dfrac{3g}{4}\sin^2\theta + \dfrac{3g}{2}(1-\cos\theta)\cos\theta. \end{cases}$$

Componente orizzontale della reazione:

$$R_x = Ma_{G,x} = M\cdot\frac{3g}{4}\sin\theta\cos\theta - M\cdot\frac{3g}{2}(1-\cos\theta)\sin\theta,$$

da cui:

$$\boxed{R_x = \frac{3Mg}{2}\sin\theta\left(\frac{3}{2}\cos\theta - 1\right).}$$

Componente verticale della reazione:

$$R_y = -Mg + Ma_{G,y} = -M\cdot g + M\cdot\frac{3g}{4}\sin^2\theta + M\cdot\frac{3g}{2}(1-\cos\theta)\cos\theta,$$

da cui:

$$\boxed{R_y = -\frac{Mg}{4}\left(3\cos\theta - 1\right)^2.}$$

Osservazioni per $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ **:**

La componente orizzontale della reazione R_x è positiva per $\cos\theta > \frac{2}{3}$, è negativa per $\cos\theta < \frac{2}{3}$ ed è nulla per $\cos\theta = \frac{2}{3}$.

La componente verticale della reazione R_y è nulla per $\cos\theta = \frac{1}{3}$ e negativa per tutti gli altri angoli.

Soluzione del problema 2

Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane con origine nel centro della corona, assi x e y nel piano della corona e asse z come in figura.

1. Potenziale elettrostatico $V(z)$ sull'asse Un elemento anulare della corona, di raggio r e spessore dr contiene la carica

$$dQ = \sigma \, 2\pi r \, dr$$

e contribuisce al potenziale in $P(0, 0, z)$ con

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dQ}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi \, r \, dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

Integrando su tutta la corona, da $r = R_1$ a $r = R_2$:

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r \, dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{r^2 + z^2}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{R_2^2 + z^2} \; - \; \sqrt{R_1^2 + z^2}\right).$$

$$\boxed{V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{R_2^2 + z^2} - \sqrt{R_1^2 + z^2}\right).}$$

2. Campo elettrico $\vec{E}(z)$ sull'asse Partendo dalla relazione $\vec{E} = -\nabla V$ e derivando il potenziale rispetto a z, calcoliamo la componente $E_z(z)$:

$$E_z(z) = -\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{d}{dz} \left(\sqrt{R_2^2 + z^2} - \sqrt{R_1^2 + z^2}\right).$$

Poiché:

$$\frac{d}{dz} \sqrt{R_i^2 + z^2} = \frac{z}{\sqrt{R_i^2 + z^2}} \qquad (i = 1, 2),$$

otteniamo:

$$E_z(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_1^2 + z^2}}\right).$$

Per simmetria, il campo è diretto lungo l'asse z e possiamo scriverlo come.

$$\boxed{\vec{E}(z) = E_z(z) \, \hat{z} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_1^2 + z^2}}\right) \hat{z}.}$$

Pertanto, le componenti cartesiane sono:

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_1^2 + z^2}}\right).$$

Osservazione Alternativamente, il campo elettrico può essere calcolato a partire dal campo elettrico generato da un elemento anulare, integrando su tutta la corona.

Soluzione del problema 3

Etichettiamo i lati della spira quadrata come segue:

- Lato 1: verticale destro, in $x = D + \frac{d}{2}$, $y \in [D - \frac{d}{2},\, D + \frac{d}{2}]$, con $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}y\,\hat{\jmath}$.
- Lato 2: orizzontale superiore, in $y = D + \frac{d}{2}$, $x \in [D - \frac{d}{2},\, D + \frac{d}{2}]$, con $\mathrm{d}\vec{\ell} = -\,\mathrm{d}x\,\hat{\imath}$ (verso sinistra).
- Lato 3: verticale sinistro, in $x = D - \frac{d}{2}$, $y \in [D + \frac{d}{2},\, D - \frac{d}{2}]$, con $\mathrm{d}\vec{\ell} = -\,\mathrm{d}y\,\hat{\jmath}$ (verso il basso).
- Lato 4: orizzontale inferiore, in $y = D - \frac{d}{2}$, $x \in [D + \frac{d}{2},\, D - \frac{d}{2}]$, con $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\,\hat{\imath}$.

Nel piano (x, y) i due fili generano due campi magnetici, rispettivamente:

$$\vec{B}_1(y > 0) = \frac{\mu_0\, i_1}{2\pi\, y}\,\hat{k}, \qquad \vec{B}_2(x > 0) = -\frac{\mu_0\, i_2}{2\pi\, x}\,\hat{k}.$$

Ciascun lato della spira subisce una forza:

$$\vec{F}_i = i_3 \int_{\text{lato } i} \mathrm{d}\vec{\ell} \times (\vec{B}_1 + \vec{B}_2).$$

Forza sul lato 1 (verticale destro, $x = D + \frac{d}{2}$). Abbiamo:

$$\mathrm{d}\vec{F}_1 = i_3\,(\mathrm{d}y\,\hat{\jmath}) \times \left(\tfrac{\mu_0 i_1}{2\pi y}\,\hat{k}\right) + i_3\,(\mathrm{d}y\,\hat{\jmath}) \times \left(-\tfrac{\mu_0 i_2}{2\pi (D + \frac{d}{2})}\,\hat{k}\right) = \frac{\mu_0\, i_1\, i_3}{2\pi\, y}\,\mathrm{d}y\,\hat{\imath} - \frac{\mu_0\, i_2\, i_3}{2\pi\,(D + \frac{d}{2})}\,\mathrm{d}y\,\hat{\imath}$$

e integrando y da $D - \frac{d}{2}$ a $D + \frac{d}{2}$:

$$\boxed{\vec{F}_1 = \int_{D - \frac{d}{2}}^{D + \frac{d}{2}} \frac{\mu_0\, i_1\, i_3}{2\pi\, y}\,\mathrm{d}y\,\hat{\imath} - \frac{\mu_0\, i_2\, i_3\, d}{2\pi\,(D + \frac{d}{2})}\,\hat{\imath}.}$$

Forza sul lato 3 (verticale sinistro, $x = D - \frac{d}{2}$). Analogamente al lato 1:

$$\mathrm{d}\vec{F}_3 = i_3\,(-dy\,\hat{\jmath}) \times \left(\tfrac{\mu_0 i_1}{2\pi y}\,\hat{k}\right) + i_3\,(-dy\,\hat{\jmath}) \times \left(-\tfrac{\mu_0 i_2}{2\pi (D - \frac{d}{2})}\,\hat{k}\right) = -\,\frac{\mu_0\, i_1\, i_3}{2\pi\, y}\,\mathrm{d}y\,\hat{\imath} + \frac{\mu_0\, i_2\, i_3}{2\pi\,(D - \frac{d}{2})}\,\mathrm{d}y\,\hat{\imath}$$

e integrando y da $D - \frac{d}{2}$ a $D + \frac{d}{2}$:

$$\boxed{\vec{F}_3 = -\int_{D - \frac{d}{2}}^{D + \frac{d}{2}} \frac{\mu_0\, i_1\, i_3}{2\pi\, y}\,\mathrm{d}y\,\hat{\imath} + \frac{\mu_0\, i_2\, i_3\, d}{2\pi\,(D - \frac{d}{2})}\,\hat{\imath}.}$$

Forza sul lato 2 (orizzontale superiore, $y = D + \frac{d}{2}$). Abbiamo:

$$\mathrm{d}\vec{F}_2 = i_3\,(-\mathrm{d}x\,\hat{\imath}) \times \left(-\tfrac{\mu_0 i_2}{2\pi x}\,\hat{k}\right) + i_3\,(-\mathrm{d}x\,\hat{\imath}) \times \left(\tfrac{\mu_0 i_1}{2\pi(D+\frac{d}{2})}\,\hat{k}\right) = -\,\frac{\mu_0\,i_1\,i_2}{2\pi\,x}\,\mathrm{d}x\,\hat{\jmath} + \frac{\mu_0\,i_1\,i_3}{2\pi\,(D+\frac{d}{2})}\,\mathrm{d}x\,\hat{\jmath}$$

e integrando x da $D - \frac{d}{2}$ a $D + \frac{d}{2}$:

$$\boxed{\vec{F}_2 = -\int_{D-\frac{d}{2}}^{D+\frac{d}{2}} \frac{\mu_0\,i_2\,i_3}{2\pi\,x}\,\mathrm{d}x\,\hat{\jmath} + \frac{\mu_0\,i_1\,i_3\,d}{2\pi\,(D+\frac{d}{2})}\,\hat{\jmath}.}$$

Forza sul lato 4 (orizzontale inferiore, $y = D - \frac{d}{2}$). Analogamente al lato 2,

$$\mathrm{d}\vec{F}_4 = i_3\,(\mathrm{d}x\,\hat{\imath}) \times \left(-\tfrac{\mu_0 i_2}{2\pi x}\,\hat{k}\right) + i_3\,(\mathrm{d}x\,\hat{\imath}) \times \left(\tfrac{\mu_0 i_1}{2\pi(D-\frac{d}{2})}\,\hat{k}\right) = \frac{\mu_0\,i_1\,i_2}{2\pi\,x}\,\mathrm{d}x\,\hat{\jmath} - \frac{\mu_0\,i_1\,i_3}{2\pi\,(D-\frac{d}{2})}\,\mathrm{d}x\,\hat{\jmath}$$

e integrando x da $D - \frac{d}{2}$ a $D + \frac{d}{2}$:

$$\boxed{\vec{F}_4 = \int_{D-\frac{d}{2}}^{D+\frac{d}{2}} \frac{\mu_0\,i_2\,i_3}{2\pi\,x}\,\mathrm{d}x\,\hat{\jmath} - \frac{\mu_0\,i_1\,i_3\,d}{2\pi\,(D-\frac{d}{2})}\,\hat{\jmath}.}$$

Somma vettoriale Eseguendo la somma vettoriale

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_3,$$

i contributi sotto il segno di integrale si cancellano a coppie e:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \underbrace{\left(-\frac{\mu_0 i_2 i_3 d}{2\pi(D+\frac{d}{2})} + \frac{\mu_0 i_2 i_3 d}{2\pi(D-\frac{d}{2})}\right)}_{F_x}\hat{\imath} + \underbrace{\left(\frac{\mu_0 i_1 i_3 d}{2\pi(D+\frac{d}{2})} - \frac{\mu_0 i_1 i_3 d}{2\pi(D-\frac{d}{2})}\right)}_{F_y}\hat{\jmath}.$$

Semplificando, la componente x è:

$$\boxed{F_x = \frac{\mu_0 i_2 i_3 d^2}{2\pi(D^2 - \frac{d^2}{4})}.}$$

La componente y è:

$$\boxed{F_y = -\frac{\mu_0 i_1 i_3 d^2}{2\pi(D^2 - \frac{d^2}{4})}.}$$