

# Fisica Generale I Elettromagnetismo

Per supportarmi un po' ❤  
[https://paypal.me/mgiannini01?locale.x=it\\_IT](https://paypal.me/mgiannini01?locale.x=it_IT)

# La forza elettrica

→ **FENOMENI ELETROMAGNETICI**: lampi, fulmini, etc → deriva da elettroni: proprietà dell'ambiente scoperte fino dagli antichi greci → definiti già nel 360 a.C.

Sono alla base della società moderna

Carica elettrica alla base → Analogia della marea quando fa insorgere forza gravitazionale

→ Diversamente dalla carica gravitazionale, essa è MOLTO INTESA

→ La carica può essere POSITIVA o NEGATIVA → La materia in questo caso si dice (protoni) (elettroni) elettricamente ATTIVA

→ Se l'oggetto NON è carico viene detto NEUTRO → cariche positive e negative si compensano

→ Oggetti con cariche opposte si ATTRAGGONO, mentre oggetti con cariche concordi si REPELLENNO

→ L'ATOMO: Struttura indivisibile costituita da nucleo centrale carico positivamente, con elettroni intorno che ruotano → la forza elettrica permette di tenere insieme la struttura

↓  
La carica del protone è data da  $+e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$

Le dimensioni di un atomo sono dell'ordine di  $10^{-10} m$  ed è vuoto per la maggior parte. È infatti presente il nucleo e poi a distanza gli elettroni

Gli elettroni hanno massa molto inferiore ai protoni ed ai neutroni. Oltre alle forze elettriche sono inoltre presenti anche interazioni forti e deboli, mentre sono irrelevanti le gravitazionali

→ La CARICA ELETTRICA. La materia è costituita dai multipli interi degli atomi, e quindi ↓ la carica è un multiplo intero di e →  $Q = \pm ne$

Varie tipologie di materiali → Materiali IONICI: costituiti da ioni. È possibile separare gli ioni positivi da quelli negativi. Se l'atomo ha più ioni negativi si dice ANIONE. Se ha più cariche positive si dice CATIONE → La carica complessiva è NEUTRA

Elettroizzazione per raffigamento: è possibile separare gli elettroni dagli strati esterni in quanto legati più debolmente

VERIFICA della presenza di CARICA avvicinando due oggetti carichi

→ Gli oggetti possono avvicinarsi o respingersi a seconda che le cariche siano concordi o discordi

→ Conduttori e isolanti elettrici: Si chiamano isolanti elettrici i materiali che NON permettono alle cariche di muoversi, i conduttori invece permettono alle cariche elettriche di muoversi. I semiconduttori invece hanno proprietà intermedie tra i due

↓  
Quando un conduttore viene caricato, la carica si distribuisce su tutto il corpo, mentre ciò NON accade per gli ISOLANTI

Mecanismo di carica: INDUZIONE → Quando viene avvicinato ad un conduttore un oggetto carico, si avvicina alla sua superficie cariche di segno opposto

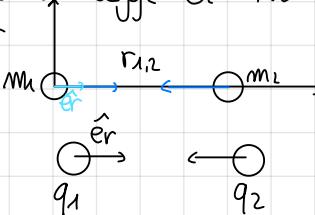
Le cariche si spostano in quanto gli elettroni sono liberi di muoversi e, se sono repelte con forza ed il corpo è collegato con un filo a Terra, le cariche vengono disporre → Quando un conduttore ha le cariche "spostate" si dice polarizzato

→ Misurazione: elettronotropio a foglie → Quando la pallina viene toccata con un oggetto carico, le lumelle si divolvono come → l'angolo fornisce una misurazione qualitativa della quantità di carica

→ La legge di Coulomb: equivalente della legge di Newton per l'elettrostatica

↪ Legge di Newton:  $\vec{F} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{e}_r$

↪ Legge di Coulomb:  $\vec{F} = \pm \frac{K q_1 q_2}{r^2} \hat{e}_r$



$\Delta_1 F \gg G$

$\Delta_2$  può essere attrattiva o repulsiva (segno - o +)

Due cariche si attraggono o repingono con una forza direttamente proporzionale alle cariche ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

↪ Unità di misura: Forza = Newton, Carica = Coulomb, Distanza = metri

La costante  $K$  è la forza che si esercita tra due cariche unitarie a distanza unitaria.  $\rightarrow K = 8.9876 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$

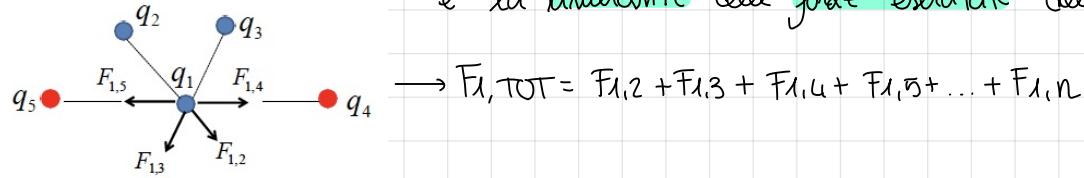
↪ Forma alternativa:  $1 / 4\pi\epsilon_0$

$\rightarrow$  Costante dielettrica NEL VUOTO

Le forze opposte che si sviluppano sono uguali e contrarie (III legge di Newton)

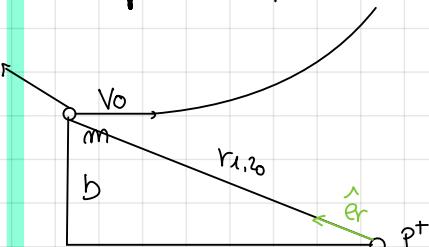
↪ Consigliazioni riguardo la conservazione ① la COSTANTE perché è una FORZA EXTRALE  
② l'energia si CONSERVA  $\rightarrow V_c = \pm K \frac{q_1 q_2}{r}$

→ PRINCIPIO di SOVRAPPPOSIZIONE: la forza agente su una particella dovuta ad un insieme di cariche è la risultante delle forze esercitate dalle singole cariche



→ Il POTENZIALE:  $V = \frac{V_c}{q_1} = \pm K \frac{q_2}{r}$

### Esempio (repulsione)



$$V = \frac{K q_p^2}{r_{1,2}}$$

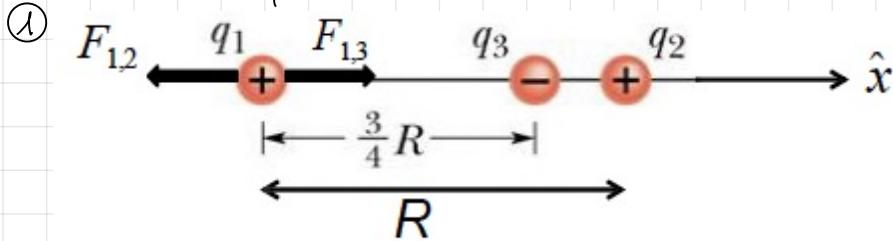
$$F_C = + \frac{K q_p^2}{r_{1,2}^2} \hat{e}_r$$

$$\text{Conservazione dell'energia: } \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{K q_p^2}{r_{1,2,0}} = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{K q_p^2}{r_{\min}}$$

$$\text{Conservazione del momento angolare: } \frac{\vec{r}_{1,2,0} \times m \vec{v}_0}{m v_0 b} = \vec{r}_{\min} \times m \vec{v}_1 = r_{\min} m v_1$$

$$m v_0 b = r_{\min} m v_1 \rightarrow v_0 b = r_{\min} v_1$$

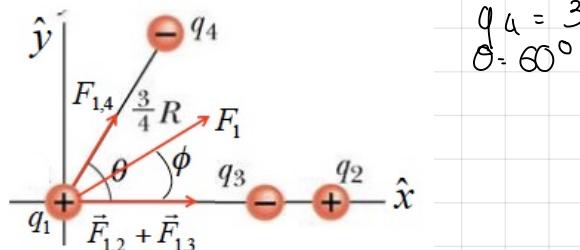
## Esercizi di esempio



$$\begin{aligned}q_1 &= 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\q_2 &= 3.2 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\q_3 &= -3.2 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\R &= 2 \text{ cm} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}\end{aligned}$$

Forza su  $q_1$  esercitata dalle altre 2 cariche

$$\text{Forze su } q_1 \rightarrow F_{q1} = F_{1,3} + F_{1,2} = \frac{K q_1 q_3}{(\frac{3}{4} R)^2} + \frac{K q_1 q_2}{R^2} = \frac{K q_1}{R^2} \left( \frac{16}{9} q_3 + q_2 \right) = 0.89 \cdot 10^{-24} \text{ N} \hat{x}$$



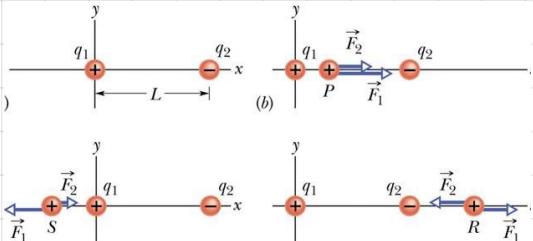
$$q_4 = 3.2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$\theta = 60^\circ$

$$\begin{aligned}\text{Forze su } q_{1x} &= F_{1,3x} + F_{1,2x} + F_{1,4x} = \frac{K q_1 q_3}{(\frac{3}{4} R)^2} + \frac{K q_1 q_2}{R^2} + \frac{K q_1 q_4}{(\frac{3}{4} R)^2} \cos 60^\circ = 1.91 \cdot 10^{-24} \text{ N} \hat{x} \\q_{1y} &= F_{1,3y} + F_{1,2y} + F_{1,4y} = 0 + 0 + \frac{K q_1 q_4}{(\frac{3}{4} R)^2} \sin 60^\circ = 1.77 \cdot 10^{-24} \text{ N} \hat{y}\end{aligned}$$

$$\text{Angolo: } \tan \phi = \frac{\text{cat. opposto}}{\text{cat. adiacente}} = \frac{F_{1y}}{F_{1x}} = \frac{1.77 \cdot 10^{-24}}{1.91 \cdot 10^{-24}} = 1.03 \rightarrow \phi = 47.2^\circ$$

②



$$q_1 = 8q \quad \text{distanza} = d$$

$$q_2 = -2q$$

$$qp = e$$

Positione di equilibrio?

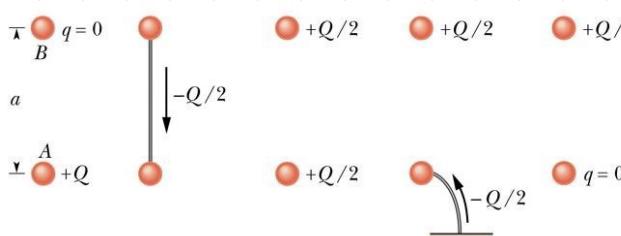
$$\text{① Condizione di equilibrio: } \vec{F}_{p,1} + \vec{F}_{p,2} = 0$$

$$F_{p,1} = \frac{K q_1 qp}{xp^2} \quad F_{p,2} = \frac{K q_2 qp}{(xp-d)^2} \rightarrow K \frac{q_1 qp}{xp^2} + K \frac{q_2 qp}{(xp-d)^2} = 0$$

$$Kqp (q_1(xp^2 - 2xp + d^2) + q_2 xp^2) = 0 \rightarrow Kqp (q_1 xp^2 - 2q_1 xp + d^2 q_1 + q_2 xp^2) = 0$$

$\hookrightarrow xp = dd$  sostituendo i valori delle cariche

③



Cosa succede se uno camasse da un filo conduttore?

$\hookrightarrow$  La carica si redistribuisce in parti uguali  $\frac{Q}{2}$

④ Fe  $\rightarrow r = 6 \cdot 10^{-15} \text{ m}$  com 26 protoni.

① Forza repulsiva tra protoni

$$F = K \frac{q p^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \text{ m}^2 \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{6 \cdot 10^{-30}} = 16 \cdot 6 \text{ N}$$

$$⑤ q_1 = -5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$q_2 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

$$r_{1,2} = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$

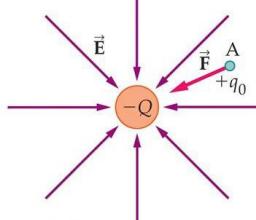
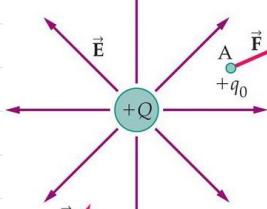
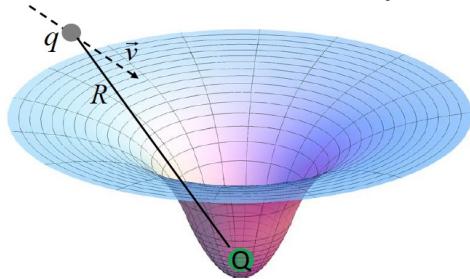
$$F_{\text{el}} = K \frac{q_1 q_2}{(r_{1,2})^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-7}}{10^{-2}} = 0.9 \text{ N}$$

$$F_{\text{grav}} = -G \frac{m_1 m_2}{(r_{1,2})^2} = \frac{-6.67 \cdot 10^{-11}}{10^{-2}} = 6.67 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

# Il campo elettrico

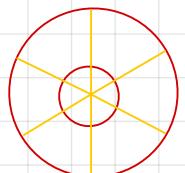
→ **CAMPOL ELETROSTATICO:** Attribuire una proprietà a ciascun punto dello spazio, data da una carica → Linee di campo: Il campo è tangente e la densità delle linee fornisce l'intensità del campo

Quando viene posta una carica di prova nel campo elettrico, viene generata una forza di agire A DISTANZA → Il campo elettrico può generare forze sia attrattive che repulsive  
↳ Il campo elettrico è già presente ma non è rilevato finché non viene inserita la carica di prova



→ Linee di campo  
↳  $+Q$ : uscenti  
 $-Q$ : entranti

Linee equipassate perché il campo è simmetrico  
 $\vec{E} = k \frac{Q}{R^2} \hat{r}$

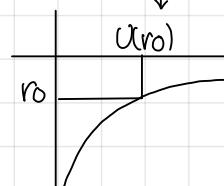


$$\vec{F} = \pm \frac{kqQ}{R^2} \hat{r}, \text{ mentre il campo gravitazionale è dato da } \vec{a} = G \frac{M}{R^2} \hat{r}$$

→ Energia potenziale:  $U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{-kqQ}{R}$

Le superfici equi potenziali sono sfere di raggio  $r$

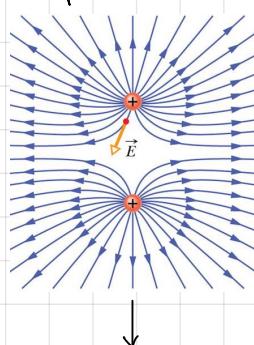
Derivando l'energia potenziale si ottiene la forza e da superfici equi potenziali si passa a linee di forza del campo elettrico → la direzione della forza è TANGENTE alla linea di forza



→ Quando un punto si sposta da un punto a potenziale più alto ad uno con potenziale più basso l'energia potenziale si trasforma in energia cinetica in quanto l'energia si conserva

Unità di misura:  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ , quindi  $[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{N}{C}$

→ Campo di una COPIA di CARICHE

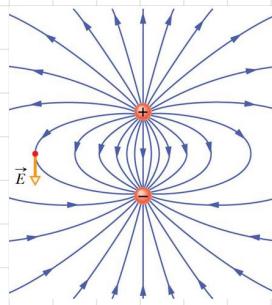


→ Cariche POSITIVE

Presente un piano di simmetria dove NON sono presenti linee di forza

In quel punto il campo è NULLO

Allontanandosi dalle cariche il campo elettrico diminuisce



→ Cariche di SEGNO OPPOSTO

Le linee di campo uscenti dalla carica positiva entrambno dentro la carica negativa

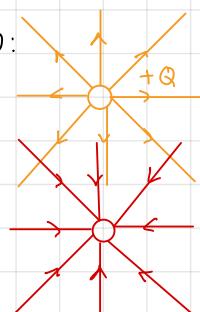
NON c'è nessuna regione con  $E=0$

Il campo della ZONA CENTRALE è dato dalla sovrapposizione dei due campi e per questo è PIÙ INTENSO, mentre all'esterno si indebolisce

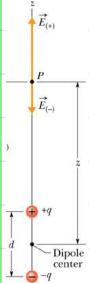
$\left. \begin{array}{l} \text{E più debole: Campi discordi} \\ \text{E più intenso: Campi concordi} \end{array} \right\}$  Allontanandosi molto il campo diventa NULLO

$\left. \begin{array}{l} \text{E più debole: Campi discordi} \end{array} \right\}$

$\left. \begin{array}{l} \text{E più intenso: Campi concordi} \end{array} \right\}$



## Esempio



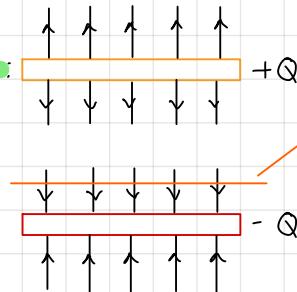
→ Calcolo del campo nel punto  $z$ : PRINCIPIO di SOVRAPPPOSIZIONE

$$\hookrightarrow \mathcal{E}(z) = K \frac{q}{(z-(d/2))^2} - K \frac{q}{(z+(d/2))^2} = \frac{Kq}{z^2} \left[ \frac{1}{(1-(d/2z))^2} - \frac{1}{(1+(d/2z))^2} \right]$$

$$\text{Posto } x = \frac{d}{2z}: \mathcal{E}(z) = \frac{Kq}{z^2} \left[ \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} \right] \rightarrow \text{Se } x \ll 1 \rightarrow \frac{1}{1-x} = 1+x \Rightarrow \mathcal{E}(z) = \frac{Kq}{z^2} \cdot 4x = \frac{2K \frac{qd}{z^3}}{1+x}$$

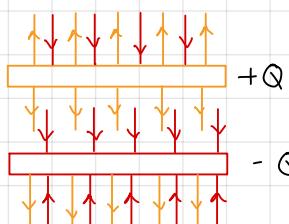
$$= 2K \frac{qd}{z^3}$$

→ PRIMO APPROCCIO al CONDENSATORE:



Superficie equi potenziale

↪ CAMPO COSTANTE (come gravitazione)

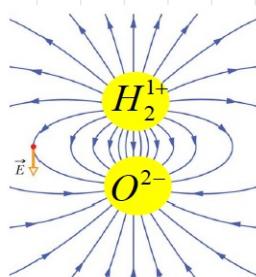
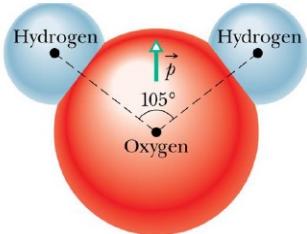


→ Campi discordi: campo <

→ Campi concordi: campo >

→ Campi discordi: campo <

→ DIPOLI nelle MOLECOLE

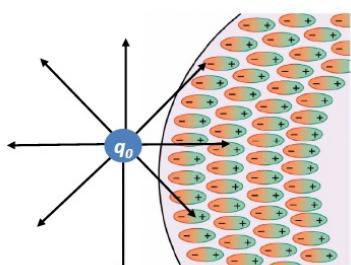


→ Applicazione pratica: tensioattivo del sapone

Le molecole di tensioattivo si agganciano a quelle di grano perché sono POLARI

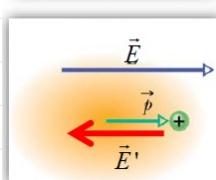
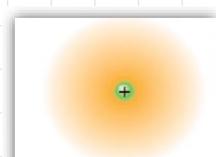
→ In  $H_2O$ , il polo negativo è l'ossigeno (-de), mentre il polo positivo è l'idrogeno (+de in quanto  $2H^+$ )

→ Dipoli di carica in solidi ISOKANTI



→ Se un materiale isolante viene avvicinato ad una carica elettrica, ovo si POLARIZZA → Se, per esempio, viene avvicinata una carica positiva, le cariche negative si "affacciano" e si produce una polarizzazione negativa sulla superficie

In un atomo: Se viene posto un campo elettrico verso destra, le cariche negative si spostano verso sinistra, mentre le positive verso destra → NASCE un dipolo orientato



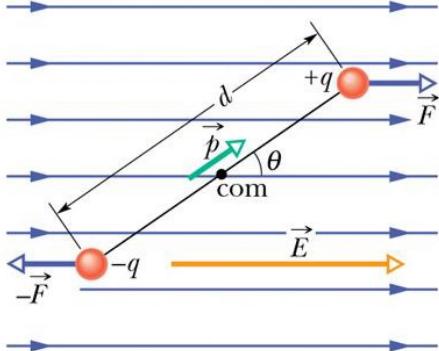
→ MOMENTO di DIPOLO ELETTRICO

$$\hookrightarrow \vec{P} = qd, \text{ da cui si ricava}$$

$$\text{avendo che } \mathcal{E}(z) = 2K \frac{qd}{z^3} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}(z) = 2K \frac{\vec{P}}{z^3}$$

$\rightarrow$  va rapidamente a 0

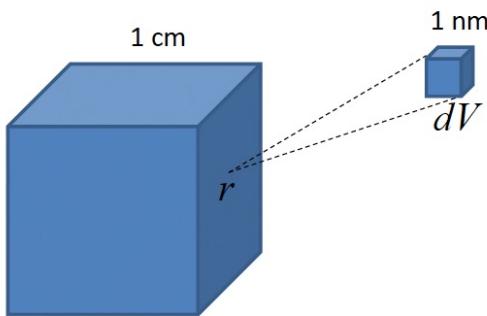
→ DIPOLO all'interno di un CAMPO UNIFORME



→ Un campo elettrico positivo allontana la carica positiva ed allontana allo stesso tempo la carica negativa, quindi il dipolo è sottoposto a momento torcente  
 $\vec{T} = \vec{d} \times \vec{F} = \vec{P} \times \vec{E} \rightarrow T = dF \sin\theta = dqE \sin\theta = PE \sin\theta$

Il dipolo si ADDINNA, quindi una serie di dipoli sottoposti ad un campo elettrico si orienta producendo la polarizzazione.

→ DISTRIBUZIONI CONTINUE



→ Sono presenti moltissimi contributi per il campo elettrico, forniti da ciascuna molecola

Si pensa quindi dai puntiforme al continuo con densità di carica costante

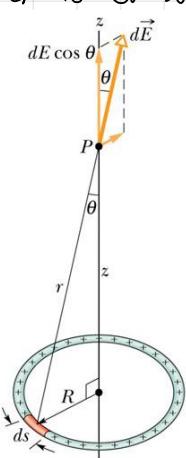
$$\rho(\vec{r}) = \frac{dq}{dV} \rightarrow dq = \rho(\vec{r})dV$$

$$q = \int dq = \int \rho(\vec{r})dV$$

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{dq}{dA} \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

$$\lambda(\vec{r}) = \frac{dq}{ds} \left[ \frac{C}{m} \right]$$

→ CAMPO di un ANELLO CARICO



→ Anello di carica positiva distanza z dal centro

distribuita uniformemente ad una

Si guarda ogni contributo che ha carica  $dq = \lambda ds$

di ogni pezzo di spessore nullo  $ds$  e quindi  $dE = K dq = K \lambda ds = K \lambda ds$

$$\frac{z^2}{r^2}$$

$$\frac{z^2}{z^2 + R^2}$$

Una volta calcolato si sommano tutti i contributi (integrale) de componenti x, y. Si ANNULANO a causa della simmetria

$$dE_z = dE \cos\theta \rightarrow \text{Componente } z \text{ di } dE$$

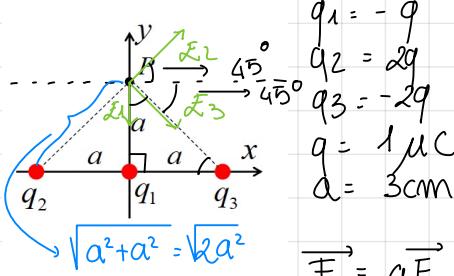
$$r \cos\theta = z \rightarrow \cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

$$\text{Quindi } dE_z = dE \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} = K \frac{\lambda ds z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \rightarrow \int_C dE_z = K \frac{z \lambda}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} ds = K \frac{z \lambda}{(z^2 + R^2)^{3/2}} (2\pi R)$$

$$\text{Si conclude che } \frac{dE_z}{z} = K \frac{z q}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \xrightarrow{z \gg R} 1 \gg \frac{R}{z} : dE_z = K \frac{z q}{\left[z^2 + \frac{R^2}{z^2}\right]^{3/2}} = K \frac{z q}{z^{3/2}} = K \frac{q}{z^{1/2}}$$

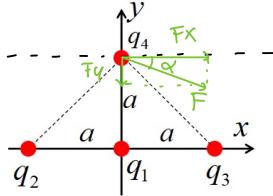
## Esercizi di esempio

①



$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_2 x + \mathcal{E}_3 x = \frac{k Q_2}{2a^2} \cos 45^\circ + \frac{k Q_3}{2a^2} \cos 45^\circ = 1.41 \cdot 10^7 \frac{N}{C}$$

$$\mathcal{E}_y = -\frac{k Q_1}{a^2} + \frac{k Q_2 \sin 45^\circ}{a^2} - \frac{k Q_3 \sin 45^\circ}{a^2} = -1.0 \cdot 10^7 \frac{N}{C}$$



$$\vec{F} = q_4 \vec{E} \rightarrow F_x = q_4 \mathcal{E}_x = 3q \mathcal{E}_x = 3 \mu C \cdot 1.41 \cdot 10^7 \frac{N}{C} = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^7 = 42.3 N$$

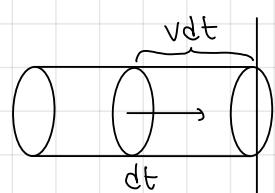
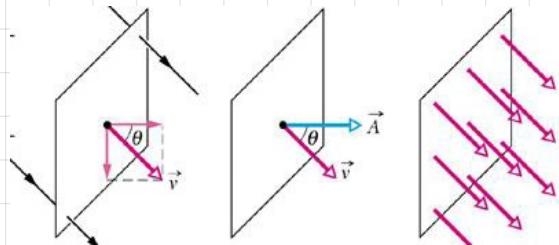
$$F_y = q_4 \mathcal{E}_y = 3q \mathcal{E}_y = 3 \cdot 10^{-6} \cdot -1 \cdot 10^7 = -30.0 N$$

$$F = \sqrt{(42.3)^2 + (30.0)^2} = 51.9 N$$

$$\alpha = \arctan \frac{F_y}{F_x} = -35.3^\circ$$

# Il flusso del campo elettrico

## CONCETTO GENERALE



Esempio: velocità di una corrente di aria o liquido che scorre attraverso una sezione di area A con v uniforme in tutta l'area

Flusso = quantità di fluido che attraversa A nell'unità di tempo  
 $\phi = \vec{V} \cdot \vec{A} = vA \cos\theta$ , dove  $\vec{A}$  è il vettore SUPERFICIE, convenzionalmente ORTOGONALE ad essa

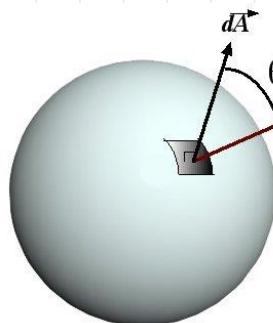
Poniamo solo le ultime molecole, in quanto prima delle altre pura altro tempo  $dt$   
 $\phi = \frac{dq}{dt} = \frac{v dt A}{dt} = VA$  → Volume =  $VA$

Flusso:  $\frac{v dt A}{dt} = VA$

Flusso:  $\phi$

Quindi il flusso è dato da  $\vec{V} \cdot \vec{A}$

Flusso del CAMPO ELETTRICO



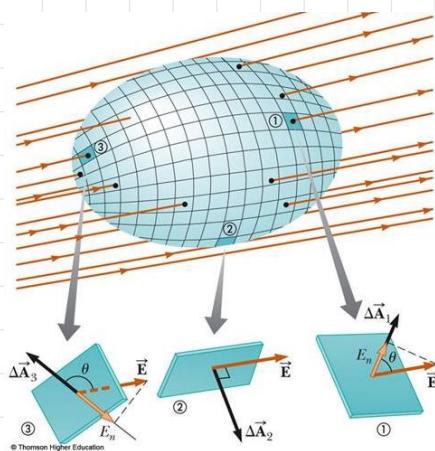
Le linee di forza del campo elettrico attraversano la superficie

$\phi = \vec{E} \cdot \vec{A}$ : prodotto scalare del campo elettrico per il vettore perpendicolare alla superficie

Se la superficie non è piana va ricomposta in piccolissimi tratti in modo da renderla piana

$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{A}$ , quindi  $\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$  [ $\phi$ ] =  $N/m^2$  C

Il flusso attraverso una SUPERFICIE CHIUSA

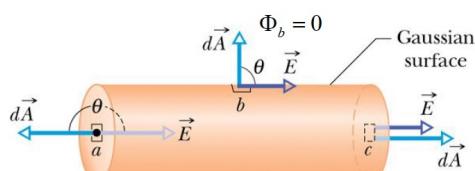


GAUSSIANA:  $\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$

Vi sono linee che entrano ed escono dalla superficie

Il flusso entrante è pari a quello uscente se NON sono presenti sorgenti o absoritori di campo elettrico  $\oint d\phi = 0$

Per una superficie chiusa il vettore normale punta verso l'esterno della superficie



Sulla superficie laterale il flusso è NULLO perché  $\vec{A}$  e  $\vec{n}$  sono ortogonali

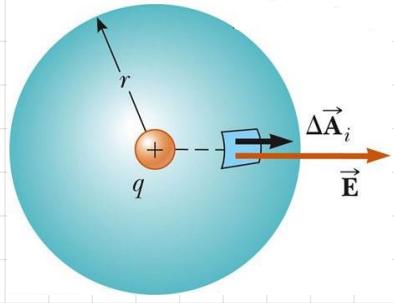
A sinistra è NEGATIVO ed è uguale a  $-EA$

A destra è POSITIVO ed è uguale a  $EA$

Il flusso totale è NULLO

## La LEGGE di GAUSS

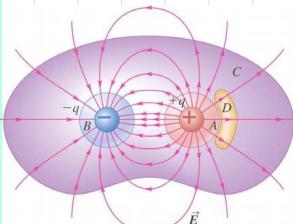
Il flusso totale del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è pari alla carica contenuta nella superficie, divisa per la costante dielettrica del vuoto  $\epsilon_0$   $\rightarrow \Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$



$Q$  = carica contenuta nel volume racchiuso dalla superficie chiusa

Le cariche esterne producono flusso totale NULO

### Esempio



- La superficie C contiene la carica positiva e quella negativa, quindi il flusso è 0
- La superficie A contiene la carica  $q$ , quindi il flusso è dato da  $q/\epsilon_0$
- La superficie B contiene la carica  $-q$ , quindi il flusso è dato da  $-q/\epsilon_0$
- La superficie D non contiene alcuna carica, quindi il flusso è 0

## CAMPIONE DI UNA SFERA

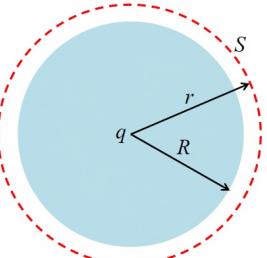
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint \vec{E} dA = EA = E(4\pi r^2)$$

incognita  $\rightarrow$  Gauss:  $EA = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{q}{r^2} = \frac{kq}{r^2}$

## SFERA ISOLANTE UNIFORMEMENTE CARICA

Campo a  $r > R$ , dove  $R$  è il raggio della sfera

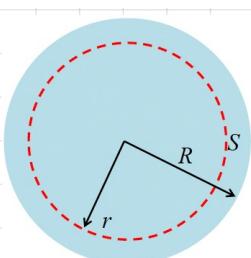
$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow \text{La sfera uniformemente carica diventa una carica puntiforme posta al suo centro}$$



Campo a  $r < R$   $\rightarrow$  Anche in questo caso il campo è radiale

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(4\pi r^2) = \frac{q'}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r^2}$$

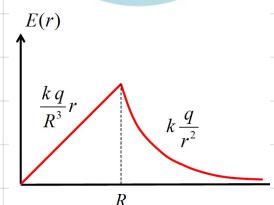
$$q = \rho \frac{4\pi R^3}{3}, \quad q' = \rho \frac{4\pi r^3}{3} \rightarrow q' = q \frac{r^3}{R^3}$$



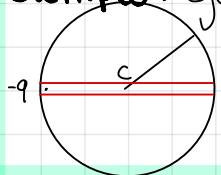
$$\rho = \frac{q}{4\pi R^3} \rightarrow \text{Carica della sfera grande presente nella sfera piccola}$$

Volume sfera grande

Considerando  $q'$ , il campo diventa  $E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} \frac{r}{r^2} = \frac{kq}{R^3} r$



### Esempio: sfera con una fenditura



Sfera carica positivamente:  $+Q$  con campo  $E = Kr$

con elettrone:  $-q \rightarrow F = -qE = -Krq$

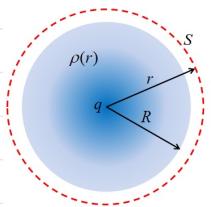
$$-Krq = m\frac{dv^2}{dt} \rightarrow \text{MOTORE ARMONICO}$$

## SFERA ISOLANTE con densità di carica RADIALE

Anche in questo caso il campo ha simmetria sferica

$$\text{All'esterno } E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{kq}{r^2}$$

$$\text{All'interno } \Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(4\pi r^2) = \frac{q'}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r^2}$$



$\vec{E}$  necessario adesso calcolare  $q'$

$dV = 4\pi r'^2 dr' \rightarrow$  guscio interno che si espande da  $0$  fino al raggio della sfera

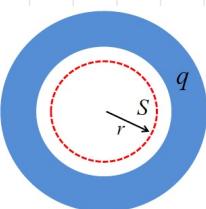
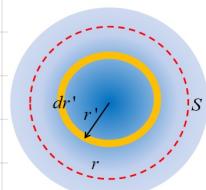
$$dq' = \rho(r') dV = \rho(r') 4\pi r'^2 dr' \rightarrow q'(r) = \int_0^r dq' = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r')$$

$\rightarrow$  GUSCIO ISOLANTI A SIMMETRIA SFERICA

$\hookrightarrow$  All'interno del guscio ha simmetria radiale  $\rightarrow \phi = E(4\pi r^2) = 0$

$\hookrightarrow$  All'esterno il campo può essere calcolato con il teorema di Gauss

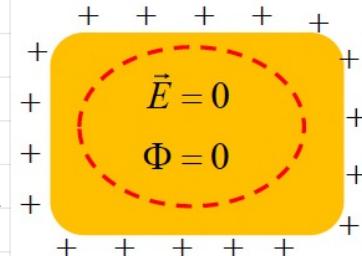
$$\hookrightarrow \phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$



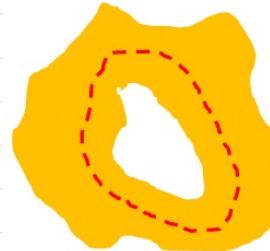
$\rightarrow$  MATERIALI CONDUTTORI

$\hookrightarrow$  Le cariche possono muoversi appena entriamo in contatto con un campo elettrico

$\downarrow$   
In una superficie gaussiana all'interno del conduttore, il campo è NULLO



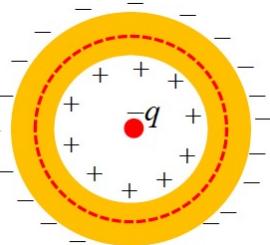
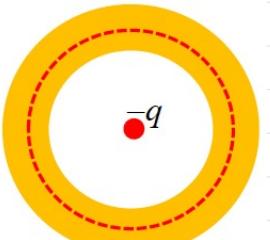
$\downarrow$   
Se presentiamo una cavità interna e si sceglie una gaussiana interna, la carica ad essa interna è nulla



$\rightarrow$  GUSCIO CONDUTTORE con CARICA PONTIFORME INTERNA

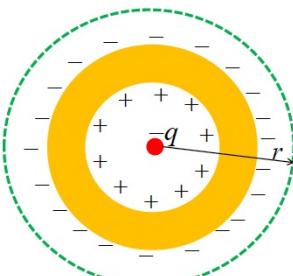
$\hookrightarrow$  Il campo elettrico interno è NULLO  $\rightarrow$  se  $\phi=0$ , allora deve essere nulla anche la carica interna

$\downarrow$   
 $\vec{E}$  quindi presenta una carica  $+q$  chiusa al conduttore che compensa la carica  $-q$ . Inoltre, essendo il conduttore neutro, sulla superficie del conduttore si genera una carica negativa



$\downarrow$   
Se la carica NON è al centro, la distribuzione  $+q$  sulla superficie interna NON è uniforme, mentre lo è sulla superficie esterna perché quello della carica puntiforme e quello del conduttore si compensano

$\rightarrow$  CAMPO all'esterno del CONDUTTORE



$\rightarrow$  Applicando la legge di Gauss ad una gaussiana esterna si ha che il campo è uniforme su tutti i punti della superficie esterna

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = ES = \frac{-q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} = -k \frac{q}{r^2}$$

→ CAMPO ELETTRICO esterno alla superficie piana di un conduttore carico

↳ Qualunque superficie diventa piana se ci si trova ad una distanza piccola

↓  
Cilindro posto in modo da essere tagliato dalla superficie

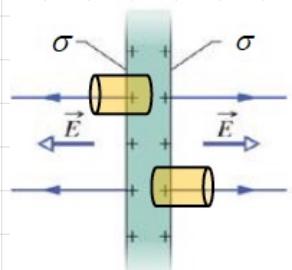
↓  
Il campo elettrico è solo perpendicolare alla superficie

$$\downarrow d\phi = \vec{E} dA = \frac{dq}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

↓  
Si ha che il flusso attraverso la superficie è nullo perché il vettore normale è ortogonale al campo elettrico. Il flusso sulla base interna è nullo perché il campo interno al conduttore è nullo.

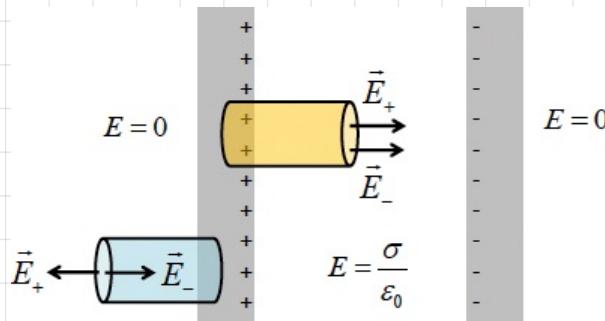
↳ Il flusso totale è dato solo dalla base esterna, quindi  $d\phi = dA = \frac{dq}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

→ CAMPO ESTERNO ad una lamina carica



→ Lamina infinita con carica positiva in eccedenza. Il campo interno è nullo, mentre la carica si distribuisce sulla superficie  
 $\downarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  → Densità superficiale di carica  
 ↳  $\sigma > 0$ : campo uscente dalla piastra  
 ↳  $\sigma < 0$ : campo entrante nella piastra

→ CAMPO ELETTRICO di una DOPPIA PIASTRA CONDUTTIVA



→ La doppia piastra conduttrice è il dispositivo alla base di un condensatore. In questo caso si hanno due piastre con la stessa densità superficiale di carica e di lunghezza infinita.  
 ↳ In una piastra le cariche positive sono attratte verso la superficie. Il campo è ⊥ alle piastre ed esce dalla positiva per entrare nella negativa.

Applicando il teorema di Gauss al cilindro interno si ha che sia il campo + che il campo - generano flusso

$$d\phi = (\vec{E}_+ + \vec{E}_-) dA = \frac{dq}{\epsilon_0} = \frac{\sigma dA}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow$$

Applicando la stessa regola al cilindro esterno si ha che il campo esterno è nullo

→ CAMPO ELETTRICO di una LAMINA ISOLANTE

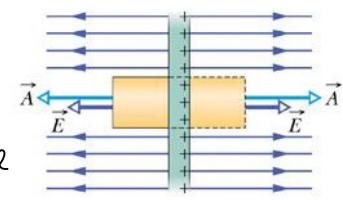
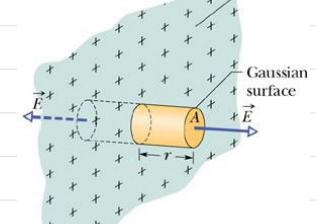
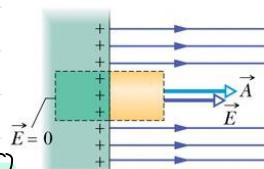
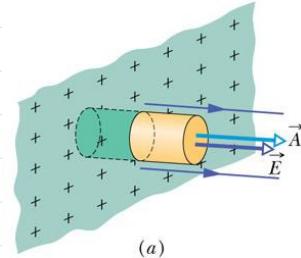
↳ Se la lamina è ∞ o la distanza è // il campo è ⊥ alla superficie → Superficie gaussiana utilizzata: cilindro

↓  
Il flusso è nullo sulla superficie laterale, quindi il flusso è NON NULLO sulle basi in quanto è // al vettore normale  
 $\downarrow \rightarrow d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 = 2\epsilon_0 dA$

$$\rightarrow 2\epsilon_0 dA = \frac{\sigma dA}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

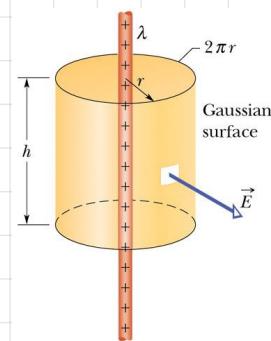
DENSITÀ SUPERFICIALE

Essendo isolante, la carica non si distribuisce come nel caso della lamina conduttrice → La densità nel caso isolante è DOPPIA del conduttore



→ CAMPO ELETTRICO di un FILO CARICO  
↳ densità di carica lineare  $\lambda$

Simmetrici: le componenti trasversali e parallele al filo si ANNULLANO, mentre le componenti perpendicolari si SOMMANO



Costituendo un cilindro che fa come →  $S_{\text{LAT}} = 2\pi rh$   
caso il filo, si ha flusso solo sulla SUPERFICIE LATERALE

$$\begin{aligned} \oint \vec{\phi} &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(2\pi rh) \\ \phi &= \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} = 2k \frac{\lambda}{r}$$

→ CAMPO GENERATO da CILINDRO ISOLANTE

↳ densità lineare  $\lambda$  e di volume  $\rho$  UNIFORMI

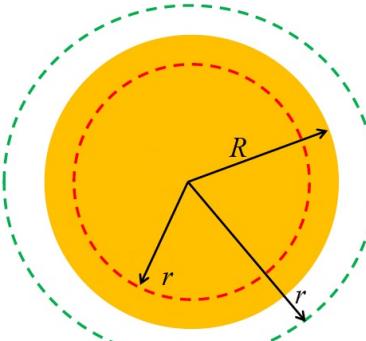
→ campo all'ESTERNO: perpendicolare al cilindro

↳ Superficie gaussiana: cilindro coaxiale di raggio  $r$

$$\oint \vec{\phi} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(2\pi rh)$$

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{rh} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} = 2k \frac{\lambda}{r}$$

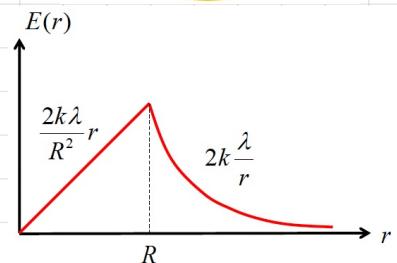


→ INTERNALEMENTE →  $\oint \vec{\phi} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(2\pi rh) = \frac{q'}{\epsilon_0} \Rightarrow E = 2k \frac{\lambda'}{r}$

$$\text{calcolo } q': q' = \rho(\pi r^2 h) \rightarrow \lambda'(r) = \frac{q'(r)}{h} = \rho \pi r^2$$

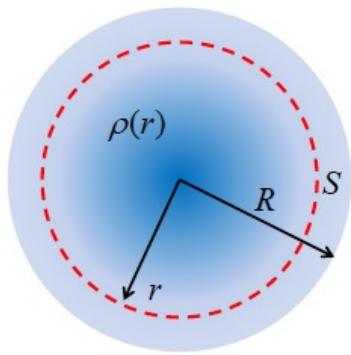
$$\text{Avendo che } \lambda'(r) = \rho \pi r^2 \text{ e } \lambda = \rho \pi R^2 \rightarrow \lambda' = \lambda \frac{r}{R^2}$$

$E(r) = 2k \frac{\lambda'}{r} = 2k \frac{\lambda}{R^2} r \rightarrow$  cresce come  $r$  all'interno  
mentre decresce come  $\frac{1}{r}$  all'esterno



# Esercizi di esempio sulla legge di Gauss

①



$$R = 6 \text{ cm} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\rho(r) = \frac{A}{r}, \text{ dove } A = 1 \mu\text{C} \text{ m}^2$$

calcolare campo per  $r=2, R=6, n=8$   
interno esterno

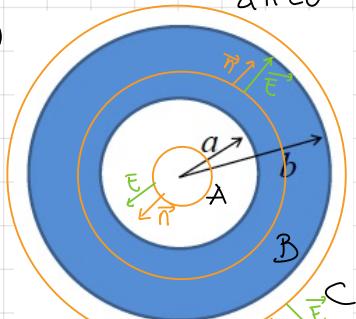
$$\mathcal{E}(r) = K \frac{q'(r)}{r^2}$$

$$q'(r) = \int_0^r dq' = \int_0^r 4\pi dr' r'^2 \rho(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \cdot \frac{A}{r'} dr' = \frac{2\pi Ar^2}{2} = 2\pi Ar^2$$

$$\mathcal{E}(r) = K \cdot \frac{2\pi Ar^2}{r^2} = K \cdot 2\pi A$$

$$\text{All'esterno: } \mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = K \frac{q}{r^2} \rightarrow 2\pi Ar^2 = K \frac{2\pi Ar^2}{r^2}$$

②



$$q_S = 3 \mu\text{C} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$a = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$b = 1 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

$$r < a \rightarrow \phi_A = \frac{2\pi Ar^2}{r^2} \rightarrow 2\pi r^2 A = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow 0 \Rightarrow \mathcal{E} = 0$$

$$a > r > b \rightarrow \phi_B = \frac{2\pi r^2}{r^2} \\ \rightarrow \phi_B = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow \rho (\text{Varancione - Vbianca})$$

$$\text{Varancione} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$V_{\text{bianca}} = \frac{4\pi a^3}{3}$$

$$\text{densità di carica} \\ q_S = \rho (\text{Vtot - Vbianca}) = \rho \left( \frac{4\pi b^3}{3} - \frac{4\pi a^3}{3} \right)$$

$$q_S = \frac{4\pi}{3} \rho (b^3 - a^3) \rightarrow \rho = \frac{3}{4} q_S \cdot \frac{1}{\pi (b^3 - a^3)}$$

$$\phi_B = \frac{4\pi}{3} (r^3 - a^3) \cdot \frac{q_S}{\pi (b^3 - a^3) \epsilon_0} = \frac{q_S (r^3 - a^3)}{\epsilon_0 (b^3 - a^3)}$$

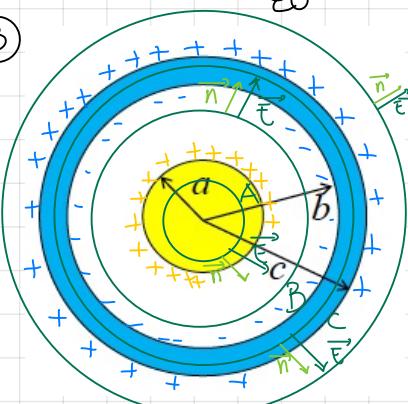
$$\frac{2\pi r^2}{r^2} = \frac{q_S (r^3 - a^3)}{(b^3 - a^3)} \rightarrow \mathcal{E} = \frac{q_S (r^3 - a^3)}{4\pi r^2 \epsilon_0 (b^3 - a^3)} = \frac{K q_S (r^3 - a^3)}{r^2 (b^3 - a^3)}$$

$$r > b: \phi_C = \frac{2\pi r^2}{r^2}$$

$$\phi_C = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{q_S}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow 2\pi r^2 = \frac{q_S}{\epsilon_0} \rightarrow \mathcal{E} = \frac{q_S}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{K q_S}{r^2}$$

③



Sfera gialla isolante con carica  $q_S = 3 \mu\text{C} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$  con raggio  $a$

Guscio conduttore con raggio interno  $b = 6 \text{ cm}$  e raggio

esterno  $c = 7 \text{ cm}$

Guscio con carica  $q_C = -7 \mu\text{C}$

① Campo elettrico

a. Intorno alla sfera:  $\phi_A = \frac{2\pi r^2}{r^2}$

$$\phi_A = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow Q_{\text{int}}: Q_{\text{tot}} = \frac{4\pi r^3}{3} : \frac{6\pi a^3}{3}$$

$$Q_{\text{int}} = \frac{Q_{\text{tot}} \cdot \frac{4\pi r^3}{3}}{\frac{4\pi a^3}{3}} = \frac{Q_{\text{tot}} r^3}{a^3} = \frac{q_S r^3}{a^3}$$

$$\phi_A = \frac{q_s r^3}{a^3 \epsilon_0} \longrightarrow \mathcal{E}_{\text{GTR}} = \frac{q_s r^3}{a^3 \epsilon_0} \longrightarrow \mathcal{E} = \frac{q_s r}{4\pi \epsilon_0 a^3} = K \frac{q_s r}{a^3}$$

$$\phi_A = \mathcal{E}_{\text{GTR}} r^2$$

b.  $a < r < b$  (interno alla cavità)

$$\phi_B = \mathcal{E} \cdot 4\pi r^2 \longrightarrow \mathcal{E}_{\text{GTR}}^2 = \frac{q_s}{\epsilon_0} \longrightarrow \mathcal{E} = \frac{q_s}{4\pi r^2 \epsilon_0} = K \frac{q_s}{r^2}$$

$$\phi_B = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{q_s}{\epsilon_0}$$

c.  $b < r < c$  (dentro al conduttore)

$$\phi_C = \mathcal{E}_{\text{GTR}} r^2$$

$$\phi_C = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{0}{\epsilon_0} \longrightarrow \text{Le cariche si distribuiscono sulla superficie}$$

$$\mathcal{E}_{\text{GTR}}^2 = 0 \longrightarrow \mathcal{E} = 0$$

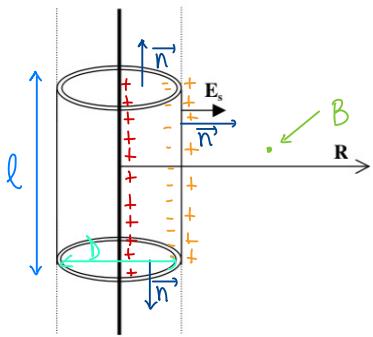
d.  $r > c$  (esterna al conduttore)

$$\phi_D = \mathcal{E}_{\text{GTR}}^2 \longrightarrow \mathcal{E} = K \frac{(q_s + q_c)}{r^2}$$

$$\phi_D = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{q_s + q_c}{\epsilon_0}$$

# Esercizi esercitazione

①



Diametro  $D$  e lunghezza  $\infty$

Filo con densità lineare  $\lambda = 6.67 \cdot 10^{-10} \frac{C}{m}$

campo sulla superficie esterna:  $\mathcal{E}_S = 120 \frac{V}{m}$

$$\phi_{cil} = \mathcal{E} \cdot 2\pi \frac{D}{\lambda} l = \mathcal{E} \pi D l \rightarrow \mathcal{E} \pi D l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \rightarrow D = \frac{\lambda}{\epsilon_0 \pi \mathcal{E}_S} = 0.2m$$

$$\phi_{cil} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$\lambda = \frac{q}{l} \rightarrow q = \lambda l$$

$$\delta = \frac{q}{S_{lat}} = \frac{q}{2\pi \frac{D}{2} l} = \frac{\lambda l}{\pi D} = \frac{\lambda}{\pi \frac{D}{2}} = \frac{\lambda}{\epsilon_0 \pi \mathcal{E}_S} = \epsilon_0 \mathcal{E}_S = 1.08 \cdot 10^{-9} \frac{C}{m^2}$$

$$q = 10^{-6} C \quad R = 88 \cdot 10^{-2} m = 8.8 \cdot 10^{-1} m$$

$$\phi_B = \mathcal{E} 2\pi R l \quad \rightarrow \mathcal{E} 2\pi R l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \rightarrow \mathcal{E} = \frac{\lambda}{2\pi R \epsilon_0} \rightarrow F = \frac{\lambda}{2\pi R \epsilon_0} \cdot q = \frac{6.67 \cdot 10^{-10} C/m \cdot 1 \cdot 10^{-6} C}{2\pi \cdot 8.8 \cdot 10^{-1} m \cdot \epsilon_0 C^2/N \cdot m^2}$$

# Lavoro ed energia potenziale

→ Forza elettrica CONSERVATIVA: il lavoro dipende solo dal punto iniziale e quello finale e NON dal percorso

$$\vec{L} = \vec{F} \cdot \vec{s} = q \vec{E} \cdot \vec{ds} \rightarrow \text{Se subisce uno spostamento rettilineo si ha } \Delta L = q \vec{E} \cdot \vec{d}$$

↳ Lavoro = Variazione di energia potenziale del sistema:  $\Delta U = -\Delta L = -q \vec{E} \cdot \vec{d}$

Potenziale elettrico: ottenuto dividendo  $U$  per  $q \rightarrow V = \frac{U}{q}$

→ da differenza di potenziali: Energia potenziale per unità di carica

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{\Delta U}{q_0} = -\frac{\vec{L}}{q_0} = -\vec{E} \cdot \vec{s}, \text{ quindi } V_i - V_f = \vec{E} \cdot \vec{s}$$

Variazione di energia potenziale quando una carica viene spostata da un punto ad un altro divise per la carica → Esiste e dipende soltanto dalla carica sorgente

Unità di misura:

→ Lavoro = Energia potenziale = J

→ Potenziale = V (Volt)

→ Campo elettrico:  $\frac{V}{m}$  → Rapporto di variazione del potenziale con la posizione

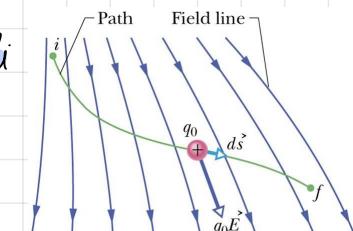
→ Elettronvolt eV: energia pura o acquistata quando una carica e si muove attraverso una c.d.p. di 1V

→ Calcolo in campi NON UNIFORMI

↳ Necesario dividere la traiettoria della particella in tratti infinitesimali in modo che su di essi il campo sia uniforme

Lavoro infinitesimo:  $dL = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} \rightarrow dV = \frac{dL}{q_0} = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$

Integrando si ha:  $L = q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$ ,  $\Delta U = -q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$ ,  $\Delta V = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$



SEMPLIFICAZIONE: il campo è conservativo, quindi è possibile scegliere il percorso più semplice

→ CALCOLO in CAMPI UNIFORMI

↳  $\Delta V = V_f - V_i = (V_f - V_c) + (V_c - V_i) = V_c - V_i = -Ed$

↳ Indica che nella posizione finale è presente un potenziale minore rispetto a quella iniziale

Le linee di campo sono orientate nel verso di DECRESITA del potenziale

↳  $\Delta U = q \Delta V = -qEd \rightarrow$  l'energia di un sistema formato da un campo e da una carica positiva diminuisce se la carica si sposta nel verso delle linee di campo (inverso se la carica è negativa)

→ Campo elettrico dal potenziale

↳  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = -E_s dS \implies E_s = \frac{dV}{ds}$ , dove  $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ ,  $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ ,  $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}$

Dette le formule precedenti, si ha che il grafico di  $V$  rispetto ad una variabile rappresenta l'intensità di quella componente del campo elettrico in quel punto

→ SUPERFICI EQUIPOTENZIALI

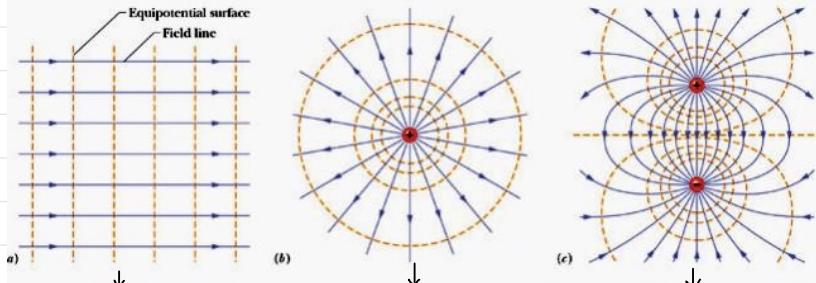
↳ Se in una determinata direzione il potenziale non varia, la componente del campo in quella direzione è nulla

Il luogo dei punti aventi uguale potenziale si dice superficie equipotenziale

↳ Sono sempre PERPENDICOLARI alle linee di campo

Il campo elettrico NON compie lavoro sulla superficie e la componente  $E_{\perp}$  è nulla in direzione tangente

Per un campo uniforme le superfici equipotenziali sono piani perpendicolari alle linee di campo, mentre per i campi radiali sono sfere concentriche



campo uniforme

campo radiale

dipolo elettrico

→ POTENZIALE di una CARICA PUNTIFORME

$$\hookrightarrow \Delta V = q_0 \int_{\infty}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_r^{\infty} K \frac{q}{r'^2} dr' = q_0 \int_r^{\infty} K \frac{q}{r'^2} dr' = K q_0 q \int_r^{\infty} \frac{1}{r'^2} dr'$$

Lavoro necessario per spostare

$q_0$  da un punto  $P$  a  $\infty$

↪ Il lavoro è fatto dalla carica

$q$

All'infinito il potenziale è NUOLO → dalla formula precedente si ha

$$\Delta V = V(\infty) - V(r) = \frac{-\Delta}{90} = -K \frac{q}{r}$$

La formula precedente può essere utilizzata anche per calcolare la differenza di potenziale tra due generici punti  $A$  e  $B$

$$\hookrightarrow V_B - V_A = -Kq \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr'}{r'^2} = Kq \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

Se le cariche sono più di una si ha che  $V = K \sum_i \frac{q_i}{r_i}$

→ ENERGIA POTENZIALE di una CARICA PUNTIFORME

↪ Si considera un agente esterno che sposta  $q_0$  da  $P$  ad  $\infty$ . Il lavoro che deve compiere è dato da  $\Delta E = q_0 \Delta V \rightarrow \Delta U = \Delta E = q_0 \Delta V$

$$\hookrightarrow U - 0 = (q_0 Kq / r) - 0 \rightarrow U(r) = K q_0 q / r$$

Se le cariche sono positive il lavoro fatto deve essere positivo, quindi anche  $U$  è positiva, mentre invece è negativo se hanno segni opposti

↓ SISTEMA NON LEGATO

SISTEMA LEGATO

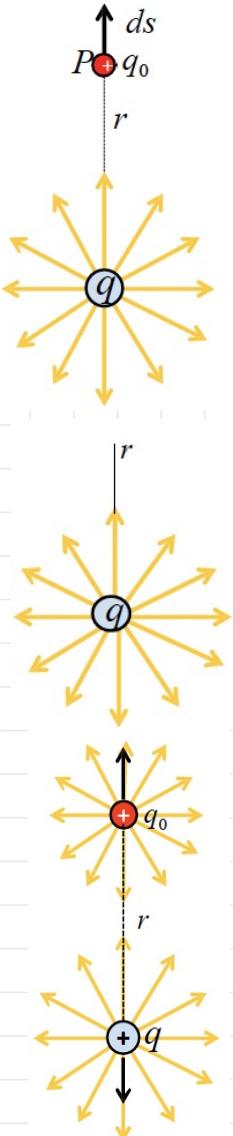
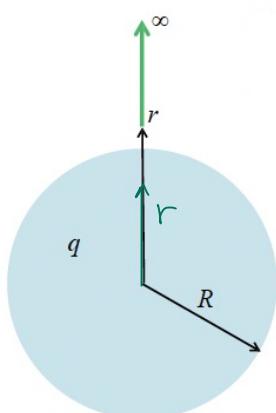
Se le cariche sono molte, l'energia del sistema si ottiene calcolando quella che si genera tra le singole coppie di cariche

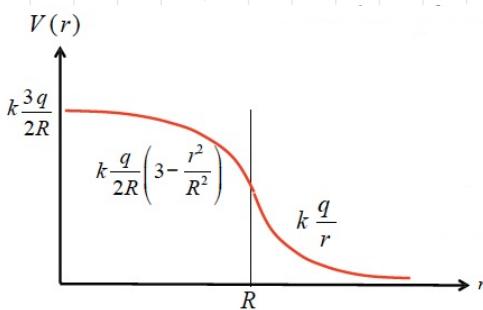
→ POTENZIALE di una SFERA ISOLANTE

$$\begin{aligned} &\rightarrow V(r) - V(\infty) = \int_r^{\infty} dr' \vec{E}(r') = Kq \int_r^{\infty} dr' \frac{1}{r'^2} = Kq \frac{1}{r} \rightarrow V(r) = Kq \frac{1}{r} \\ &\Delta V = V(r_B) - V(r_A) = Kq \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \end{aligned}$$

→ POTENZIALE INTERNO

$$\begin{aligned} &\hookrightarrow V(r) - V(\infty) = V(r) = \int_r^{\infty} dr' \vec{E}(r') \rightarrow \vec{E} \text{ è diverso tra zona interna ed esterna, quindi è necessario dividere} \\ &V(r) = \int_r^R dr' \vec{E}(r') + \int_R^{\infty} dr' \vec{E}(r') = Kq \int_r^R dr' \frac{1}{r'^2} + Kq \int_R^{\infty} dr' \frac{1}{r'^2} \\ &V(r) = Kq \frac{r^{-1}}{R^2} \Big|_r^R - Kq \frac{1}{r'} \Big|_R^{\infty} = \frac{Kq}{2R} - \frac{Kq R^2}{2R^3} + \frac{Kq}{R} = \frac{Kq}{2R} \left( 3 - \frac{R^2}{R^2} \right) \end{aligned}$$





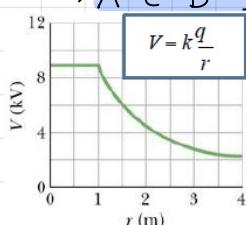
→ Andamento parabolico all'interno, mentre è iperbolico all'esterno. Al bordo coincidono  
 → Derivando  $V$  è possibile ricavare  $E$   
 $\hookrightarrow \frac{dV(r)}{dr} = E(r)$

### → POTENZIALE di un CONDUTTORE CARICO

↪ Comunque prenso un percorso sulla superficie del conduttore, il campo è ORTOGONALE a questo spostamento  $\rightarrow V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ : la superficie è una superficie equipotenziale

↓  
 Internamente, per Gauss, il campo elettrico è NULO, quindi il campo è COSTANTE

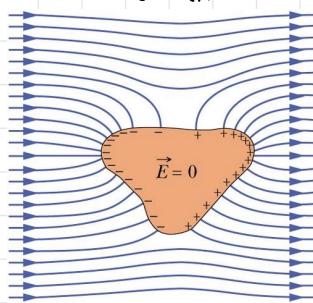
↪ A e B interni:  $\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow V_B = V_A$



→ POTENZIALE Costante all'interno del conduttore

↪ Uguale a quello di una carica puntiforme posta al centro di una sfera all'estero

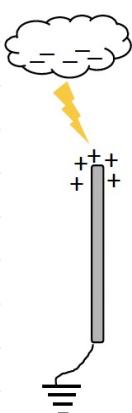
### → Conduttore neutro immerso in un CAMPO UNIFORME



→ INDUZIONE ELETROSTATICA: Le linee NON possono entrare dentro al conduttore, quindi si generano curvilinee positive e negative sulla superficie

↓  
 Internamente si ha che  $V = \text{costante}$  ed  $E = 0$

↪ Linee di forza sempre ortogonali alla superficie

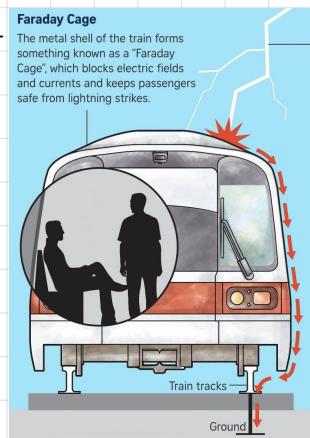


→ PARAFUMINE: Durante un temporale le nuvole creano un accumulo di carica + sulla punta  
 ↪ Quando c'è molta d.d.p. tra nuvole e suolo si generano i fulmini (carichi-) che vengono attratti dal parafumine

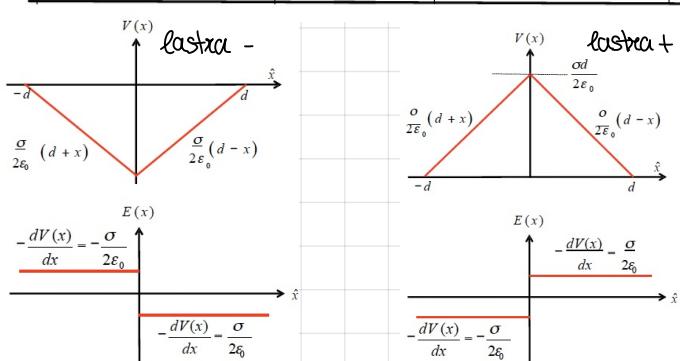
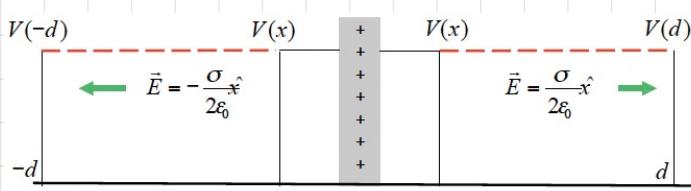
### GABBIA di FARADAY



Protezione: la corrente attraversa la superficie ma il campo interno è NULO



### → POTENZIALE di una PIASTRA CARICA ISOLANTE (CONDUTTIVA)



→ L'altra pista in  $x=0$  e con densità  $\sigma'$ .  
 ↪ Posizione iniziale carica:  $x = -d$   
 ↪ Posizione finale:  $d \rightarrow V(d) = V(-d) = 0$

$$\text{A destra: } V(x) - V(d) = \int_d^x \vec{E} \cdot d\vec{x} = \frac{\sigma'(d-x)}{2\epsilon_0} \rightarrow V(x) = \frac{\sigma'(d-x)}{2\epsilon_0}$$

$$\text{A sinistra: } V(-d) - V(x) = \int_{-d}^x \vec{E} \cdot d\vec{x} \rightarrow V(x) = \frac{\sigma(d+x)}{2\epsilon_0}$$

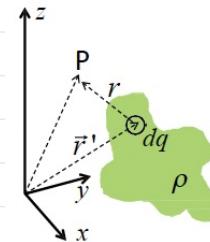
→ Il potenziale è SIMMETRICO ai due lati della piastra e decresce con  $|x|$ . La pendenza rappresenta il campo ed è opposta ai due lati perché il campo cambia verso. Si ha una discontinuità per  $x=0$

→ POTENZIALE di DISTRIBUZIONI CONTINUE

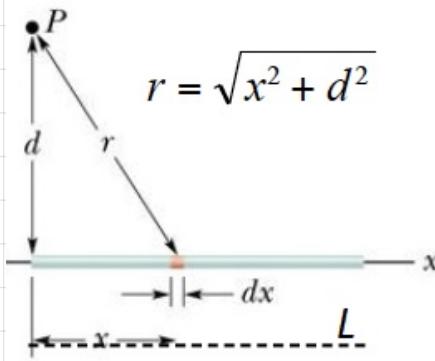
Calcolo infinitesimale: volume  $d^3r'$  con densità  $\rho(r')$

$$dV_p = \kappa \frac{dq}{r} = \kappa \frac{\rho(r') d^3r'}{r} \rightarrow V_p = \kappa \int \frac{\rho(r') d^3r'}{r}$$

Carica contenuta:  $dq = \rho(r') d^3r'$



→ POTENZIALE di una BACCHETTA ISOLANTE



→ Bacchetta di lunghezza  $\lambda$  e densità  $\lambda$  (l'estremo in  $x=0$ )

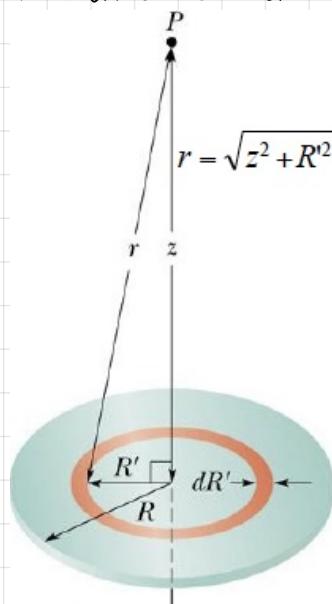
Carica  $dx$ :  $dq = \lambda dx$

$$dV_p = \kappa \frac{dq}{r} = \kappa \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2+d^2}} \rightarrow V_p = \kappa \lambda \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}}$$

Sostituzione:  $x' = x + \sqrt{x^2+d^2}$  →  $\frac{dx'}{x'} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}}$

$$V_p = \kappa \lambda \int \frac{dx'}{x'} = \kappa \lambda \ln x' = \kappa \lambda \ln (x + \sqrt{x^2+d^2}) \Big|_0^L = \\ = \kappa \lambda [\ln (\lambda + \sqrt{\lambda^2 + d^2}) - \ln d] = \kappa \lambda \ln \left( \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + d^2}}{d} \right)$$

→ POTENZIALE di un DISCO CARICO ISOLANTE



→ Disco di raggio  $R$ , densità  $\sigma$

Carica omello di raggio  $R'$  e spessore  $dR'$  →  $dq = \sigma (2\pi R') dR'$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma (2\pi R') dR'}{\sqrt{z^2+R'^2}} \rightarrow V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{R' dR'}{\sqrt{z^2+R'^2}}$$

Sostituzione:  $x = \sqrt{z^2+R'^2}$ , quindi  $dx = \frac{R' dR'}{\sqrt{z^2+R'^2}}$

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{z^2+R^2} \Big|_0^R \rightarrow V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2+R^2} - z)$$

$$\mathcal{E}(z) = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{2z}{\sqrt{z^2+R^2}} - 1 \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \right)$$

Se  $|R| \gg z$ ,  $\frac{z}{R} \rightarrow 0$

$$\mathcal{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}} \right) \sim \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{R} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z$$

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2+R^2} - z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( R \sqrt{\left(\frac{z}{R}\right)^2 + 1} - z \right) \sim \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (R - z)$$

## Esercizi esercitazione

### ① Esercizio di esame

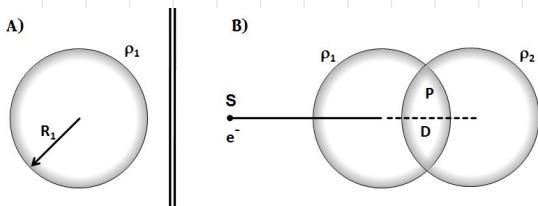


Figura 2

① Densità di carica  $\infty$  ( $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ )

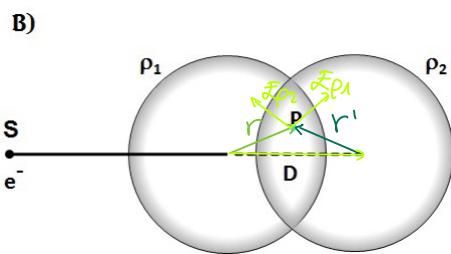
$$\hookrightarrow \text{Potenziale: } V = - \int_{2R_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot dr = \left. \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right|_{2R_1}^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 2R_1}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 2R_1} \rightarrow Q = V 4\pi\epsilon_0 2R_1 \rightarrow \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} \rightarrow Q = \rho \frac{4}{3}\pi R_1^3$$

$$\hookrightarrow V = \rho \frac{4}{3}\pi R_1^3 = \frac{\rho R_1^3}{6\epsilon_0} \rightarrow \rho = \frac{V 6\epsilon_0}{R_1^3} = 66 \cdot 10^{-12} \frac{C}{m^3}$$

$\lambda \propto \epsilon_0 2R_1$

② Modulo del campo elettrico intorno alla zona di sovrapposizione



$$\begin{aligned} &\text{Sia } p \text{ il campo elettrico all'interno delle due sfere} \\ &\phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot 4\pi r^2 \rightarrow \vec{E} \cdot 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &\downarrow \\ &\phi_E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \\ &\vec{E} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\text{Campo sferra p1: } \vec{E}_1 = \frac{\rho_1 r}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\rho_1 r}{3\epsilon_0} \vec{r}'$$

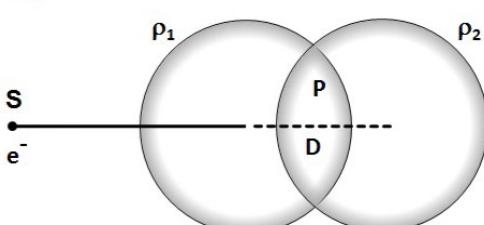
$$\text{Si ha che } \vec{D} + \vec{r}' = \vec{r}, \text{ quindi} \\ \vec{r}' = \vec{r} - \vec{D}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_1 r}{3\epsilon_0} \quad \vec{E}_2 = -\frac{\rho_1 r}{3\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{D})$$

$$\rightarrow \text{Campo su } P: \frac{\rho_1 r}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_1 r}{3\epsilon_0} + \frac{\rho_1 r}{3\epsilon_0} \vec{D}$$

$$\vec{E}_p = \left( \frac{\rho_1}{3\epsilon_0} \vec{D}, 0, 0 \right) = \left( 1.5, 0, 0 \right) \frac{N}{C}$$

③ B)



Elettrone in S a distanza  $2R_1$  da sfera di raggio  $R_1$  e giace sulla retta che congiunge i due centri

$\hookrightarrow$  II legge di Newton:  $\vec{F} = m\vec{a}$

$\hookrightarrow$  Agisce la FORZA ELETTRICA

$$F_{el} = ma \rightarrow a = \frac{F_{el}}{m_e} = \frac{F_{est}}{m_e} \text{ q.e}$$

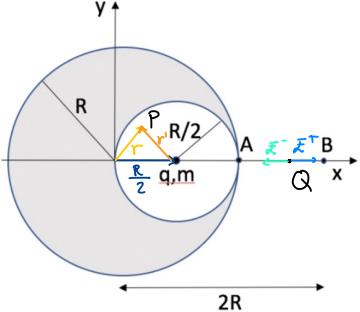
$$\text{Campi elettrici} \rightarrow \text{Sfera p1: } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3 \cdot \frac{2V\epsilon_0}{R_1^2} \cdot \frac{1}{dist^2} = 2R_1 V \cdot \frac{1}{dist^2}$$

$$\text{Sfera p2: } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi R_2^3 \cdot \frac{2V\epsilon_0}{R_2^2} \cdot \frac{1}{(dist+D)^2} = -2R_2 V \cdot \frac{1}{(dist+D)^2}$$

$$\vec{F}_S = 2R_1 V \left( \frac{1}{dist^2} - \frac{1}{(dist+D)^2} \right) \quad > 0$$

$$a = \frac{2R_1 V \left( \frac{1}{dist^2} - \frac{1}{(dist+D)^2} \right)}{m_e} \quad q.e = 2.96 \cdot 10^{10} \frac{m}{s^2}$$

## 2) △ Esercizio di esame



Sfera di raggio  $R$  con distribuzione di carica po uniforme. Viene praticato un foro di raggio  $\frac{R}{2}$ . Centro sfera in  $(0,0,0)$ , mentre il centro del foro è  $(\frac{R}{2}, 0, 0)$

$$\rho_0 = 1 \mu\text{C} \quad R = 1\text{m} \quad q = 1 \mu\text{C} \quad m = 10^{-6}\text{kg}$$

- ① Campo elettrico  $\vec{E}$  all'interno della sfera cava

$$\vec{r} = \frac{\vec{R}}{2} + \vec{r}' \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \frac{\vec{R}}{2}$$

Essendo che la parte piena della sfera ha carica positiva, si può considerare la sfera cava come una sfera di carica negativa con la stessa densità  $\rho_0$   
 Campo sfera piena  $\rightarrow \phi_{EP} = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \pi R^2 \rightarrow E_p = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1}{R} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R$   
 $\phi_{EP} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\text{Campo sfera vuota} \rightarrow \phi_{EV} = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \pi R^2 \rightarrow E_v = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1}{R} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R$$

$$\phi_{EV} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\vec{E}_p = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{R} \quad \vec{E}_v = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{r}' \rightarrow \vec{E}_v = \frac{-\rho_0}{3\epsilon_0} \left( \vec{r} - \frac{\vec{R}}{2} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{R} - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{r} + \frac{\vec{R}}{2} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R}{2} \hat{x} \rightarrow \vec{E} = \left( \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R}{2}, 0, 0 \right)$$

directo come  $\hat{x}$        $E = 1.9 \cdot 10^4 \text{ N/C}$

- ② Tempo impiegato da  $q$  per raggiungere  $A(R,0,0)$   
 Calcolo l'accelerazione:  $\vec{F} = ma$

↪ Solo la forza elettrica  $q\vec{E} = qE\hat{x}$

$$\text{Accelerazione su } x: qE = ma \rightarrow a = \frac{qE}{m} = \frac{q\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{m}$$

$$x(t) = \frac{R}{2} + \frac{1}{2} \frac{q\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R}{2} \frac{1}{m} t^2 \rightarrow R - \frac{R}{2} = \frac{1}{2} \frac{q\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R}{2} \frac{1}{m} t^2$$

$$\rightarrow \frac{R}{2} = \frac{1}{2} \frac{q\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R}{2} \frac{1}{m} t^2$$

$$\rightarrow q \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} \cdot \frac{1}{m} t^2 = 1 \rightarrow t^2 = \frac{6\epsilon_0 m}{q\rho_0} \rightarrow t = \sqrt{\frac{6\epsilon_0 m}{q\rho_0}} = 7.3 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 7.3 \text{ ms}$$

- ③ Velocità nel punto B di coordinate  $(2R, 0, 0)$

$$\hookrightarrow \text{Conservazione dell'energia} \rightarrow E_i = \frac{1}{2} mv_i^2 + U_i = V_i q$$

$$\rightarrow E_f = \frac{1}{2} mv_f^2 + U_f = \frac{1}{2} mv_f^2 + V_f q$$

Esternamente alla sfera si ha che il campo è dato dalla somma dei campi di due cariche puntiformi

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1}{R^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1}{(R - \frac{R}{2})^2}$$

$$V(\frac{R}{2}) - V(2R) = \int_{\frac{R}{2}}^R \frac{\rho_0 R}{6\epsilon_0} dr + \int_R^{2R} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1}{R^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1}{(R - \frac{R}{2})^2} dr =$$

$$\rightarrow \int_{\frac{R}{2}}^R \frac{\rho_0 R}{6\epsilon_0} dr = \frac{\rho_0 R}{6\epsilon_0} \left( R - \frac{R}{2} \right) = \frac{R}{2} \frac{\rho_0 R}{6\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \int_R^{2R} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1}{r^2} dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1}{r} \Big|_R^{2R} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3 \left[ \frac{1}{2R} - \frac{1}{R} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1}{2R} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \rho_0 \frac{2}{3}\pi R^2$$

$$\rightarrow \int_R^{2R} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1}{(r-\frac{R}{2})^2} dr \quad r - \frac{R}{2} = t \quad \rightarrow dr = dt$$

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3 \int_a^b \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{1}{(r-\frac{R}{2})} \Big|_R^{2R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_0 \frac{2}{3}\pi R^2 \frac{1}{3R} -$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_0 \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \rho_0 \frac{2}{9}\pi R^2 - \frac{1}{\pi\epsilon_0} \rho_0 \frac{2}{3}\pi R^2 =$$

$$= \frac{\rho_0 \pi R^2}{9\pi\epsilon_0} (2-6) = -4 \frac{\rho_0 \pi R^2}{9\pi\epsilon_0}$$

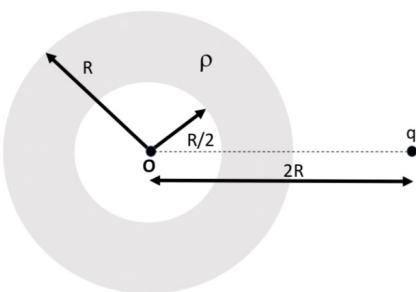
$$V\left(\frac{R}{2}\right) - V(2R) = \frac{R}{2} \frac{\rho_0 R}{6\epsilon_0} - \frac{4\rho_0 \pi R^2}{9\pi\epsilon_0} = \frac{\rho_0 R^2}{12\epsilon_0} - \frac{4}{9} \frac{\rho_0 R^2}{9\epsilon_0} =$$

$$= \frac{-13\rho_0 R^2}{36\epsilon_0}$$

Conservazione energia:  $V_f q = \frac{1}{2} mv_f^2 + V_f q \rightarrow \frac{1}{2} mv_f^2 = -\underbrace{\Delta V}_{-13 \frac{\rho_0 R^2}{36\epsilon_0}}$

$$V_f = \sqrt{\frac{-13\rho_0 R^2}{18\epsilon_0 m}} =$$

### ③ ΔEsercizio di esame



Distribuzione di carica data da  $\rho = Ar$  con  $A$  costante tra  $R/2$  ed  $R$

Bottiglia di massa  $m$  e carica  $q$  si trova a  $2R$  da  $O$

$$R = 0.2 \text{ m}$$

$$Q = 20 \mu\text{C} = 20 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$m = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

① Densità di carica sul bordo esterno della regione sferica

$$Q = \int_p dV$$

Dipende solo dal raggio, quindi  $dV = 4\pi r^2 dr \rightarrow Q = \int_{R/2}^R A \cdot 4\pi r^2 dr =$

$$Q = \int_{R/2}^R A \cdot 4\pi r^3 dr = A \cdot 4\pi \frac{r^4}{4} \Big|_{R/2}^R = A \cdot \pi \left[ R^4 - \frac{R^4}{16} \right] = \frac{15}{16} R^4 A \pi$$

$$\rightarrow Q = \frac{15}{16} R^4 A \pi \rightarrow A = \frac{16Q}{15\pi R^4}$$

$$\rho(R) = \frac{16Q}{15\pi R^3} = \frac{16Q}{15\pi R^3} = 8 \cdot 10^{-10} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$$

② Accelerazione a cui è soggetta la particella

↪ II legge di Newton:  $\sum F = ma$

↪ Agisce solo la forza elettrica

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E} \rightarrow \vec{E} = \text{carica puntiforme: } k \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{4R^2} \hat{x}$$

$$q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{4R^2} = ma \rightarrow a = \frac{Qq}{16\pi\epsilon_0 R^2 m} = 1.08 \cdot 10^{10} \frac{m}{s^2}$$

③ Velocità minima per arrivare in O

Conservazione dell'energia:  $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_f$   $\rightarrow \mathcal{E}_i = \frac{1}{2}mv_i^2 + U_i \rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + U_i - U_f = 0$

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + U_f$$

$$\rightarrow V_i = \sqrt{\frac{2\Delta U}{m}} = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$$

$$\Delta U = \int_B^A \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r} \rightarrow \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r} \cdot q$$

Campo nelle varie regioni

↪ Regione tra 0 e  $R/2$  → legge di Gauss:  $\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} 4\pi r^2 \rightarrow \vec{E} = 0$

$$\phi_E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \rightarrow 0$$

↪ Regione tra  $R/2$  ed  $R$  →  $\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} 4\pi r^2$

$$\phi_E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \int_{R/2}^R \rho(r) dV = \int_{R/2}^R A \cdot r \cdot 4\pi r^2 dr = \int_{R/2}^R \frac{16Q}{15\pi R^4} 4\pi r^3 dr =$$

$$= \frac{16}{15} \frac{Q}{R^4} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{R/2}^R = \frac{16}{15} \frac{Q}{R^4} \left[ r^4 - \frac{R^4}{16} \right]$$

$$\vec{E} = \frac{16}{15} \frac{Q}{R^4} \left[ r^4 - \frac{R^4}{16} \right] \quad : \text{campo elettrico tra } \frac{R}{2} \text{ ed } R$$

$$(4\pi\epsilon_0)^{-1} r^2$$

↪ Regione tra  $R$  e  $2R$

$$\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} 4\pi r^2 \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$$-\Delta U = \int_0^{2R} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2R} \vec{E} dr = \int_0^{R/2} 0 dr + \int_{R/2}^R \frac{16}{15} \frac{Q}{R^4} \left[ r^4 - \frac{R^4}{16} \right] dr + \int_R^{2R} \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} dr =$$

$$- \frac{16}{15} \frac{Q}{R^4} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R/2}^R \frac{r^4}{16} - \frac{R^4}{16r^2} dr + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{2R} \frac{1}{r^2} dr =$$

$$= \frac{16}{15} \frac{Q}{R^4} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{R/2}^R + \frac{1}{16} R^4 \left[ \frac{1}{r} \right]_{R/2}^R + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_R^{2R} =$$

$$= \frac{16}{15} \frac{Q}{R^4} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{24} \right) + \left( \frac{1}{16} R^4 \left( \frac{1}{R} - \frac{2}{R} \right) \right) \right] - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{2R} - \frac{1}{R} \right] =$$

$$= \frac{16}{15} \frac{Q}{R^4} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{7R^3}{24} - \frac{1R^3}{16} \right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R} =$$

$$= \frac{16}{15} \frac{Q}{R^4} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{14R^3 - 3R^3}{48} \right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R} =$$

$$= \frac{16}{15} \frac{Q}{R^4} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{MR^3 + Q}{683} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R} = \frac{M}{15R} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} + \frac{1}{4R} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} = \frac{37}{30R} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

$$V_i = \sqrt{\frac{-2q}{3\sigma} \frac{37}{4\pi\epsilon_0}} = 1.13 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$$

## 3 condensatori

→ Introduzione:



→ Consente di immagazzinare e rilanciare energia elettrica

↳ flash, atmosfera terrestre

↓

Condensatore piano: lastre piene affacciate, una con curva + ed una con curva - dette ARMATURE

↳ Se la distanza del bordo è ampia e la distanza tra le piastre è piccola, è possibile considerare il campo come quello di due lastre infinite

→ La capacità: La carica è PROPORTIONALE alla differenza di potenziale

$$\hookrightarrow C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\sigma A}{\Delta V} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

↓ Unità di misura: Farad → molto grande, quindi usati rettificatori multipli

↳ Sempre POSITIVA

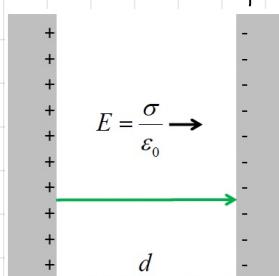
↳ Quantità di carica necessaria per generare una ddp di 1V

$$\text{da } C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \text{ si ha che } \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} = 8.85 \frac{pF}{m} = 8.85 \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

→ Carica

↳ Viene collegato ad un generatore e lasciandolo collegato per un po' di tempo raggiunge la stessa ddp presente ai capi del condensatore → Il moto delle cariche si arresta quando viene raggiunto lo stesso potenziale

→ Condensatore piano



→ Campo uniforme in tutti i punti interni al condensatore

$$\hookrightarrow \Delta V = V_+ - V_- = \int_{-d}^0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d \rightarrow C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\sigma A}{\Delta V} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Dipende solo da aspetti geometrici: Aumenta con l'area e si riduce con la distanza

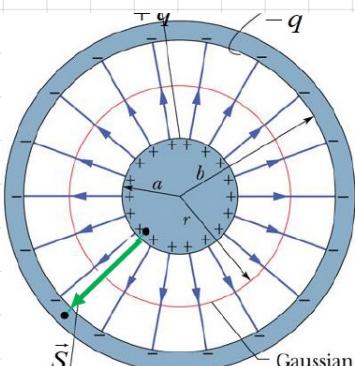
→ Condensatore cilindrico

↳ Capacità del condensatore: Devo conoscere la differenza di potenziale e di conseguenza anche il campo elettrico

$$\hookrightarrow E = \frac{2K\lambda}{r} \quad \downarrow \quad \text{Determinato utilizzando la legge di Gauss avendo che la carica interna ha simmetria cilindrica}$$

$$\Delta V = V_+ - V_- = \int_{-r}^0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_a^b \vec{E} dr = 2K\lambda \int_a^b \frac{1}{r} dr = 2K\lambda \ln \frac{b}{a}$$

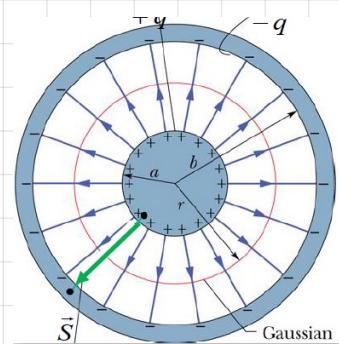
$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\lambda L}{2K \ln b/a} = \epsilon_0 \frac{2\pi L}{\ln(b/a)}$$



→ Condensatore sferico

↳ Campo elettrico interno:  $\frac{Kq}{r^2}$

$$\text{Differenza di potenziale: } \Delta V = V_+ - V_- = \int_{-r}^0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_a^b \vec{E} dr = Kq \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = -Kq \frac{1}{r} \Big|_a^b = Kq \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

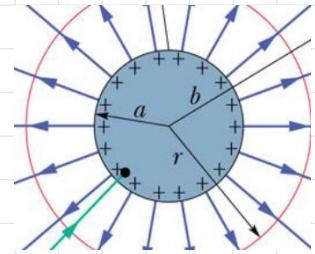


$$\text{Capacità: } C = \frac{q}{\Delta V} = \epsilon_0 \frac{4\pi ab}{b-a}$$

Portando a distanza infinita:  $b \rightarrow +\infty$

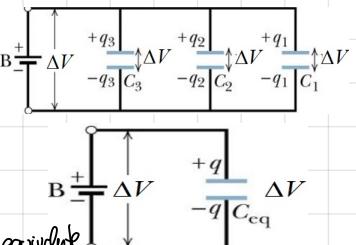
$$\hookrightarrow C = 4\pi \epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \underset{b-a \gg a}{\underset{\rightarrow}{\cancel{b}}} = 4\pi \epsilon_0 a$$

↳ Sfera isolata



## → Condensatori in SERIE e in PARALLELLO

→ in PARALLELLO: fanno la stessa differenza di potenziale sulle due armature → Se fanno la stessa ddp ma diverse capacità somma cariche la carica è diversa per ciascun condensatore e capacità  $\downarrow q_1 = C_1 \Delta V, q_2 = C_2 \Delta V, q_3 = C_3 \Delta V$

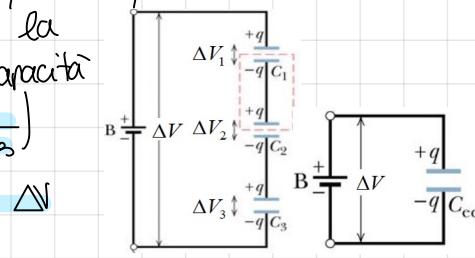
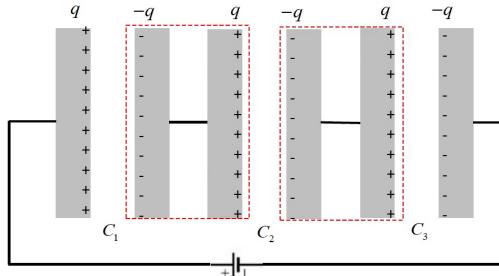


Equivalegono ad un circuito ideale con un solo condensatore di  $q$  e  $\Delta V$  →  $q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3) \Delta V = C_{eq} \Delta V \rightarrow C_{eq}$  equivalente

→ in SERIE: Si costruisce una configurazione in modo che la carica sia la stessa → la ddp è diversa se la capacità resistitiva è diversa →  $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \rightarrow q = C_{eq} \Delta V$$

Soltanto le piastre collegate alla batteria si caricano attraverso di essa, mentre le altre si caricano per induzione



→ Per le lastre evidenziate di sono devono generare cariche uguali ed opposte in quanto esse sono NEUTRE

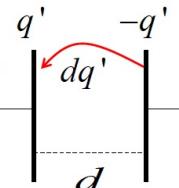
## → Energia immagazzinata nel condensatore

→ Caricare il condensatore significa fornire energia da parte della batteria:  $dU = dq' \Delta V' = dq' \frac{q'}{C}$

Energia = lavoro effettuato dalla batteria per portare tutta la carica da un piatto all'altro

$$\Delta U = \int_0^q dq' \Delta V' = \int_0^q dq' \frac{q'}{C} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

→ Energia immagazzinata nel volume compreso tra le due lastre → Contiene il campo elettrico, che è invece nullo fuori



È possibile calcolare la densità di energia:  $u = \frac{\Delta U}{Vol} = \frac{1}{2} C \Delta V^2 \frac{1}{Ad} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A (Ed)^2}{d} \frac{1}{Ad} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

→ Energia nella regione dove è presente  $E$

$$Vol = \frac{1}{2} Ad \rightarrow u = \frac{1}{2} \epsilon_0 A (Ed)^2 \frac{1}{d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d$$

## → Condensatore con DIELETTRICO

→ Le armature sono separate con materiale isolante → Faraday: aumenta la capacità

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 L \rightarrow L = \text{fattore geometrico}$$

- piano:  $A/d$
- cilindrico:  $2\pi L / \ln(b/a)$
- sferico:  $4\pi ab / (b-a)$

Con condensatore comune al circuito

$$\Delta U = \frac{1}{2} C_{vuoto} \Delta V^2$$



Mantenendo la stessa ddp ed aumentando → la ddp è infatti "fissata" dalla batteria il dielettrico aumenta l'energia

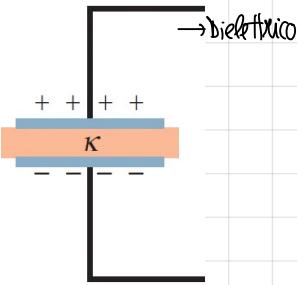
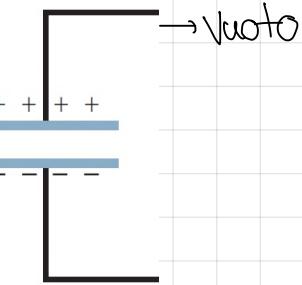
→ Introducendo un isolante si aumenta quindi la capacità, la ddp massima di funzionamento e la distanza minima, in quanto le piastre NON possono toccarsi

## → Condensatore isolato

↪ essendo isolato la carica NON può variare  
↪ introducendo il dielettrico si PERDE ENERGIA

Circuito vuoto  $\rightarrow \Delta U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\epsilon_0}$   
 $\rightarrow \Delta V = \frac{q}{\epsilon_0 C_{vuoto}}$

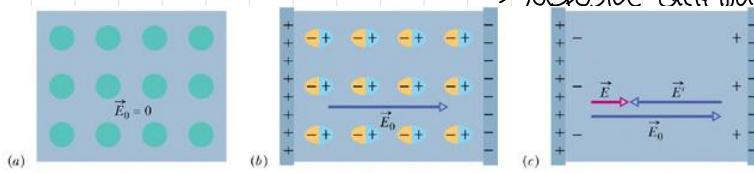
Con dielettrico  $\rightarrow \Delta V' = \frac{q}{\epsilon_0' C_{vuoto}} = \frac{\Delta V}{\epsilon_0}$ ,  $\Delta U' = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\epsilon_0'}$



## → da POLARIZZAZIONE

↪ il dielettrico può polarizzarsi perché gli elettroni NON sono liberi di muoversi in quanto è un ISOLANTE → utilizzando un campo elettrico è possibile polarizzare il dielettrico facendo muovere un campo indotto che annulla il campo esterno

↪ Nuove leggi:  $E_0 \rightarrow E_0' \epsilon_r$ , quindi  $K \rightarrow K/\epsilon_r$ , da cui  $V(r) = \frac{K}{\epsilon_r} \frac{q}{r}$  e  $E(r) = \frac{K}{\epsilon_r} \frac{q}{r^2}$



↪ risposta dielettrica all'azione del campo esterno: riduzione campo  
→ gli atomi formano catene di dipoli // al campo del condensatore → ogni doppio polo ad un unico doppio polo avendo la carica del singolo ma avendo la lunghezza della catena → le catene formano un doppio STRATO ISOLANTE ed un campo  $E'$

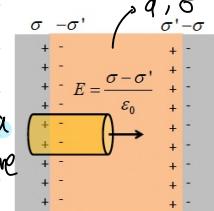
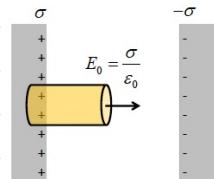
## Legge di Gauss nei dielettrici

→ Senza dielettrico:  $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

→ Con dielettrico:  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$  → diminuisce la carica

Rapporto tra i due casi:  $\frac{E_0}{E} = \frac{\sigma - \sigma'}{\sigma} = \frac{q - q'}{q}$

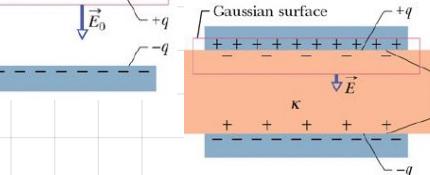
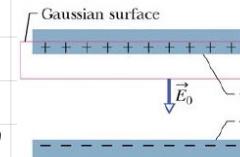
↪ In ogni punto si ha che  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$



Legge di Gauss:  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q - q'}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_0}$

## → Energia potenziale condensatore con dielettrico

↪  $\Delta U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\epsilon_0'}$   $= \frac{\Delta U_0}{\epsilon_0}$  → Si perde energia perché la lamina conduttrice è tenuta all'interno del condensatore e questa operazione richiede energia

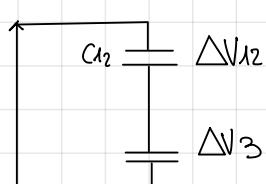
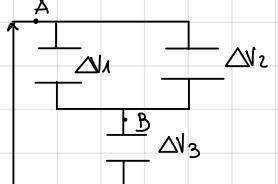


### Esercizi di esempio

①  $A = 1 \text{ mm}^2$  (area dei piatti)  $\rightarrow C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-2}}{1 \cdot 10^{-1}} \cdot \frac{10^{-2}}{10^{-1}} \frac{\text{m}}{\text{m}} = 88.5 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 88.5 \text{ pF}$

$$q = C \Delta V = 88.5 \text{ pF} \cdot 45 \text{ V} = 400 \text{ fC} = 0.4 \text{ pC} \rightarrow n = \frac{q}{e} = \frac{4 \cdot 10^{-18} \text{ C}}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 2.5 \cdot 10^6$$

② Circuito collegato a batteria con  $\Delta V = 12 \text{ V}$ .  $C_1 = 12 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 6 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 6 \mu\text{F}$



$\Delta V_{12} \rightarrow C_{1,2}$  e  $C_3$  sono connesi in PARALLELO, quindi si ha che  $\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_3 + C_{12}}{C_{12} C_3} \rightarrow C_{123} = \frac{C_{12} C_3}{C_3 + C_{12}}$

$$\downarrow q_{123} = q_{12} = q_3$$

$\hookrightarrow C_1$  e  $C_2$  sono connesi IN SERIE, quindi si ha che  $C_{eq,12} = C_1 + C_2 = 18 \mu\text{F}$ ,  $\Delta V_{1,2} = \Delta V_1 = \Delta V_2$  differenza di potenziale ai capi dei 3 condensatori

$\hookrightarrow$  Partiamo dal circuito comprendente tutti i condensatori, collegati in parallelo, mantenendo quindi costante  $\Delta V \rightarrow q_{123} = C_{123} \Delta V = 6.5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{C}}{\text{V}} \cdot 12 \text{ V} = 5.4 \cdot 10^{-2} \text{ C}$

Essendo che sono connesi in parallelo,  $q_{123} = q_{12} = q_3 \rightarrow \Delta V_{12} = \frac{q_{12}}{C_{12}} = \frac{54 \cdot 10^{-3}}{18 \cdot 10^{-3}} = 3 \text{ V}$

$$\rightarrow \Delta V_3 = \frac{q_3}{C_3} = \frac{54 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-3}} = 9 \text{ V}$$

Essendo che i condensatori sono collegati in parallelo, la ddp ai capi di tutti è la stessa quindi  $\Delta V_{12} = \Delta V_1 = \Delta V_2 = 3 \text{ V}$

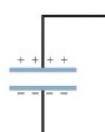
come che sei 3 piatti

$$\hookrightarrow q_1 = C_1 \Delta V_1 \rightarrow q_1 = 12 \cdot 10^{-3} \frac{\text{C}}{\text{V}} \cdot 3 \text{ V} = 0.036 \text{ C}$$

$$\hookrightarrow q_2 = C_2 \Delta V_2 \rightarrow q_2 = 6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{C}}{\text{V}} \cdot 3 \text{ V} = 0.018 \text{ C}$$

$$\hookrightarrow q_3 = C_3 \Delta V_3 \rightarrow q_3 = 6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{C}}{\text{V}} \cdot 9 \text{ V} = 0.054 \text{ C}$$

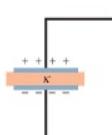
③



$C_V = 20 \text{ pF}$ , ddp =  $10 \text{ V}$ . Inserita lastra di porcellana con  $\epsilon_r = 5$ .

$$\text{Calcolare l'energia } \Delta U = \frac{1}{2} q \Delta V = \frac{1}{2} C_{vuoto} \Delta V^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-12} \cdot 100 = 1 \cdot 10^{-9} = 1 \text{ mJ}$$

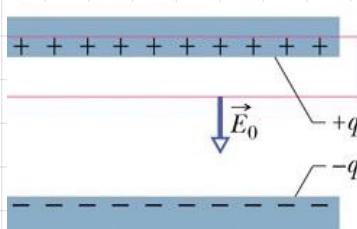
$$\text{Dopo l'inserimento: } \Delta U' = \frac{1}{2} q \Delta V = \frac{1}{2} C_{con} \Delta V^2 = \frac{\Delta U}{\epsilon_r} = \frac{1 \cdot 10^{-9}}{5} = 0.2 \text{ mJ}$$



Differenza di potenziale  $\rightarrow$  Prima:  $q = C \Delta V \rightarrow \Delta V = \frac{q}{C}$

$$\text{Dopo: } \Delta V' = \frac{q}{C_{con}} = \frac{\Delta V}{\epsilon_r} = \frac{10}{5} = 2 \text{ V}$$

④



Condensatore piano con  $A = 100 \text{ cm}^2$  distanti  $d = 2 \text{ cm}$ .  $\Delta V_0 = 100 \text{ V}$

① Capacità  $C_0$  a vuoto

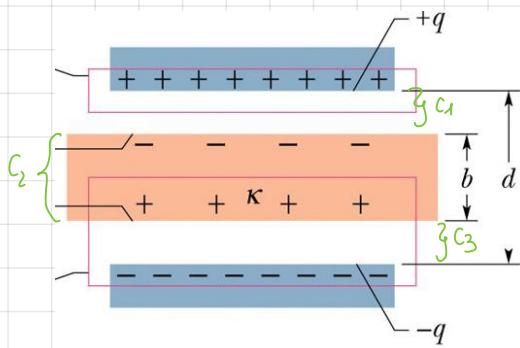
$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon_0 \frac{10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}} = 4.63 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

② Carica sui piatti

$$\text{Si ha che } C = \frac{Q}{\Delta V} \text{ e quindi } Q = C \Delta V = 4.63 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

③ Campo elettrico  $E_0$

$$\hookrightarrow E_0 = \frac{\Delta V}{d} = \frac{100}{2 \cdot 10^{-2}} = 5000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$



- lamina dielettrica spessa  $b=1$  cm con dielettrico  $\epsilon_x = 2$
- ④ campo elettrico  $\mathcal{E}$  nell'intercapedine tra piatti e l'area e all'interno della lastra
- Nell'intercapedine il campo rimane LO STESSO  
Nella lastra
- $\mathcal{E}_{\text{lastra}} = \frac{\Delta V}{d} \rightarrow$  si avrà che  $\Delta V = \frac{Q}{C} \rightarrow C = C_0 \epsilon_x$
- $\mathcal{E}_{\text{lastra}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\epsilon_x} = 2500 \frac{V}{m}$

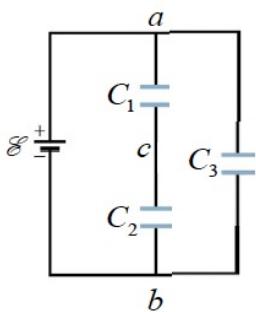
⑤ Ddp tra i piatti dopo l'introduzione del dielettrico

↪ Condensatori IN SERIE:  $\Delta V_{\text{TOT}} = \sum \Delta V \rightarrow$  Se  $\mathcal{E} = \frac{\Delta V}{d}$  si avrà che  $\Delta V = \mathcal{E}d$   
e quindi  $\Delta V_{\text{TOT}} = \sum \mathcal{E}d = \frac{\mathcal{E}_0(d-b)}{2} + \mathcal{E}_{\text{lastra}}b + \frac{\mathcal{E}_0(d-b)}{2} = 75V$

⑥ Capacità con lastra

↪  $C = \frac{Q}{\Delta V} = 5.9 \mu F$

⑤



→  $\Delta V = 12V$  comune a condensatori  $C_1 = 5 \cdot 10^{-12} F$ ,  $C_2 = 10 \cdot 10^{-12} F$ ,  $C_3 = 12 \cdot 10^{-12} F$

①  $q_1, q_2, q_3$  sui condensatori

$C_1$  e  $C_2$  sono IN SERIE:  $\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \rightarrow C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

$C_{\text{eq}}$  e  $C_3$  sono IN PARALLELLO:  $C_{\text{TOT}} = C_{\text{eq}} + C_3 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3$

$C_1$  e  $C_2$  hanno la STESSA CARICA

↪  $Q = C_{\text{eq}} \Delta V = 4 \cdot 10^{-11} C$

$C_3$  è in PARALLELLO: stessa ddp

↪  $Q = C_3 \Delta V = 1.44 \cdot 10^{-10} C$

② Differenza di potenziale ai capi dei condensatori

↪  $C_1$  e  $C_2$  in SERIE:  $\rightarrow \Delta V_1 = \frac{q_1}{C_1} = 8V \quad \Delta V_2 = 4V$

↪  $C_3$  in PARALLELLO:  $\Delta V = 12V$

③ Energia  $V_1, V_2, V_3$  immagazzinata

↪  $V_1 = \frac{1}{2} C_1 \Delta V_1^2 = 160 \mu J$

↪  $V_2 = \frac{1}{2} C_2 \Delta V_2^2 = 80 \mu J$

↪  $V_3 = \frac{1}{2} C_3 \Delta V_3^2 = 864 \mu J$

④  $C_2$  riempito con  $\epsilon_{x2} = 4$  e  $C_3$  con  $\epsilon_{x3} = 2$

↪ Se  $C_2$  viene riempito con dielettrico la sua capacità diventa  $C_2 = C_2 \epsilon_{x2}$

$C_1$  e  $C_2$  sono ancora in serie e quindi si ha che  $\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{\epsilon_{x2} C_2}$

e quindi  $\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{\epsilon_{x2} C_2 + C_1}{C_1 \epsilon_{x2} C_2} \rightarrow C_{\text{eq}} = \frac{C_1 \epsilon_{x2} C_2}{\epsilon_{x2} C_2 + C_1} = 6.666 \mu F$

La carica  $q$  scende quindi pari a  $q = C \Delta V = 6.666 \cdot 10^{-12} \cdot 12 = 80 \mu F$

Carica su  $q_3 \rightarrow \mathcal{E}$  in parallelo, quindi  $\Delta V$  è comune a tutti gli altri ed è pari a  $12V \rightarrow q_3 = C_3 \epsilon_{x3} \cdot 12 = 288 \cdot 10^{-12} C$

Ricalcola  $\Delta V$

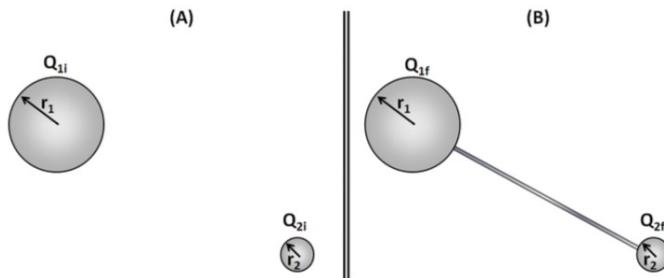
$$\rightarrow \Delta V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{20 \cdot 10^{-12}}{5 \cdot 10^{-12}} = 16 \text{ V}$$
$$\rightarrow \Delta V_2 = \frac{Q_2}{C_2 \epsilon_r} = \frac{80 \cdot 10^{-12}}{40 \cdot 10^{-12}} = 2 \text{ V}$$
$$\rightarrow \Delta V_3 = 12 \text{ V} \text{ (in parallelo)}$$

Ricalcola  $V$

$$\rightarrow V_1 = \frac{1}{2} C_1 \Delta V_1^2 = 6.4 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$
$$\rightarrow V_2 = \frac{1}{2} C_2 \epsilon_r \Delta V_2^2 = 0 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$
$$\rightarrow V_3 = \frac{1}{2} C_3 \Delta V_3^2 = 8.64 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

## Esercizi esercitazione

### ① Esercizio di esame



$$r_1 = 20 \text{ cm} \quad Q_{1i} = 20 \cdot 10^{-5} \text{ C}$$

$$r_2 = 5 \text{ cm} \quad Q_{2i} = 30 \cdot 10^{-5} \text{ C}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

① Carica sulle sfere dopo che sono state collegate

Relazione 1: Stessa ddp  $\rightarrow V_1 = V_2 \rightarrow$  Potenziale carica puntiforme:  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$   
 Relazione 2: La carica finale deve essere uguale alla somma delle iniziali  
 $\hookrightarrow Q_{1f} + Q_{2f} = Q_{1i} + Q_{2i}$

Stesso potenziale sulla superficie:  $\frac{Q_{1f}}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{Q_{2f}}{4\pi\epsilon_0 r_2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{1f} + Q_{2f} = Q_{1i} + Q_{2i} \\ \frac{Q_{1f}}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{Q_{2f}}{4\pi\epsilon_0 r_2} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} Q_{2f} \frac{r_1}{r_2} + Q_{2f} = Q_{1i} + Q_{2i} \\ Q_{1f} = Q_{2f} \frac{r_1}{r_2} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{Q_{2f}(r_1+r_2)}{r_2} = Q_{1i} + Q_{2i} \\ " \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{2f} = \underbrace{(Q_{1i} + Q_{2i})}_{Q_{\text{tot}}} r_2 \\ r_1 + r_2 \end{array} \right. = 10 \cdot 10^{-5} \text{ C}$$

$$Q_{2f} = \frac{(Q_{1i} + Q_{2i}) r_1}{r_1 + r_2} = 40 \cdot 10^{-5} \text{ C}$$

② Rapporto fra campi elettrici alla superficie dopo il collegamento  
 $\hookrightarrow$  Campo di una carica puntiforme:  $\mathcal{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{Q_{1f}}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \quad \mathcal{E}_2 = \frac{Q_{2f}}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \quad \rightarrow \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{Q_{1f}}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 r_2^2}{Q_{2f}}$$

$$= \frac{Q_{\text{tot}} r_1}{r_1^2} \cdot \frac{r_2^2}{Q_{\text{tot}} r_2} = \frac{r_2}{r_1} = 0.25$$

③ Variazione di energia elettrostatica

$\hookrightarrow$  ogni sfera è un condensatore: l'energia è data da  $\frac{1}{2} C \Delta V^2$

Mi calcolo  $\Delta V$  considerando la distanza ad  $\infty$  (e quindi mi calcolo  $V$ )  
 $\hookrightarrow V = \int_p^\infty \mathcal{E} \cdot d\vec{r} \rightarrow \mathcal{E}$  da teorema di Gauss:  $\mathcal{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Potenziale  $V = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

Si ha che  $C = \frac{Q}{\Delta V} \rightarrow$  Energia:  $\frac{1}{2} Q \Delta V$

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} Q_{1i} \Delta V_{1i} + \frac{1}{2} Q_{2i} \Delta V_{2i} \rightarrow \mathcal{E}_{\text{diss}} = \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f =$$

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2} Q_{1f} \Delta V_{1f} + \frac{1}{2} Q_{2f} \Delta V_{2f} = \frac{1}{2} \frac{Q_{1i}^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_{2i}^2}{4\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{1}{2} \frac{Q_{1f}^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_{2f}^2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

$$= 4500 \text{ J}$$

(2)

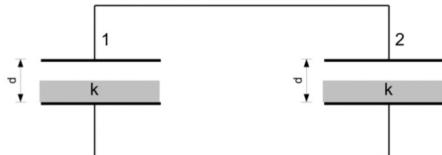


Figura 2:

→ Armature di area  $400 \text{ cm}^2$  a  $d = 500 \text{ mm}$   
 Per metà spessore è inserita una lastra di dielettrico di  $\epsilon_r = 2.00$   
 $q_i = 6.00 \text{ mC} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ C}$

① Differenza di potenziale tra le due armature

↪ i condensatori sono collegati in PARALLELO → La ddp ai capi delle lastre è LA STESSA. In più si possono vedere come due condensatori collegati IN SERIE i due condensatori con la stessa dielettrico  
 ↓

Condensatori IN SERIE :  $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_{vuoto}} + \frac{1}{C_{dielettrico}}$  →  $\frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{\epsilon_0 A/2} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r A/2} + \frac{1}{\epsilon_0 A/2}$

$$\frac{1}{\epsilon_0 A/2} + \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r A/2} = \frac{\epsilon_r + 1}{\epsilon_0 \epsilon_r A/d/2} \rightarrow C_{eq} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r 2A}{d(\epsilon_r + 1)} = 47.2 \mu F$$

Definizione di capacità:  $C = \frac{Q}{\Delta V} \rightarrow \Delta V = \frac{Q}{C} \rightarrow \Delta V = \frac{q}{C_{eq}} = 127 \text{ mV}$

② Dielettrico spostato dal primo condensatore nel SECONDO a RIEMPIRE

↪ carica finale sui condensatori → la carica NON rimane uguale perché sono IN PARALLELO  
 a. Conservazione della carica:  $q_1 + q_2 = 2q_0 \rightarrow q_2 = 2q_0 - q_1$   
 b. Condensatori in PARALLELO:  $q_{TOT} = C_{eq} \Delta V = (C_1 + C_2) \Delta V$

$$2q_0 = (C_1 + C_2) \Delta V \rightarrow \text{calcolo } C_1 \text{ e } C_2 \rightarrow C_1: \text{condensatore vuoto: } \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$\rightarrow C_2: \text{condensatore pieno: } \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$$

$$2q_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} (1 + \epsilon_r) \Delta V \rightarrow \Delta V = \frac{2q_0 d}{\epsilon_0 A (1 + \epsilon_r)}$$

↪ la STESSA PER ENTRAMBI: PARALLELO

$$\text{Avendo } C = \frac{q}{\Delta V} \text{ si ottiene che } q_1 = C_1 \Delta V = \frac{\epsilon_0 A}{d} \frac{2q_0 d}{\epsilon_0 A (1 + \epsilon_r)} = \frac{2q_0}{1 + \epsilon_r} = 4 \text{ mC}$$

$$q_2 = 2q_0 - \frac{2q_0}{1 + \epsilon_r} = \frac{2q_0 + 2q_0 \epsilon_r - 2q_0}{1 + \epsilon_r} = \frac{2q_0 \epsilon_r}{1 + \epsilon_r} = 8 \text{ mC}$$

③ Variazione di energia elettrostatica

↪ Uelettrostatica:  $\frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} q \Delta V \rightarrow \mathcal{E}_i = q \frac{q d (\epsilon_r + 1)}{\epsilon_0 \epsilon_r 2A} = q^2 \frac{d (\epsilon_r + 1)}{\epsilon_0 \epsilon_r 2A}$

$$\rightarrow \mathcal{E}_f = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} \left( \frac{2q_0 d}{\epsilon_0 A (1 + \epsilon_r)} \right)^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \left( \frac{2q_0 d}{\epsilon_0 A (1 + \epsilon_r)} \right)^2$$

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = -84 \text{ kJ}$$

③ Cernice positiva uniformemente distribuita su corona di raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2$  e centro in  $O$ . La densità di cernice è lineare

① Differenza di potenziale  $\Delta V = V(O) - V(P)$  tra punto  $O$  e punto  $P$  posto a distanza  $h$  da  $O$  e valore esplicito quando  $h = 2R_1$

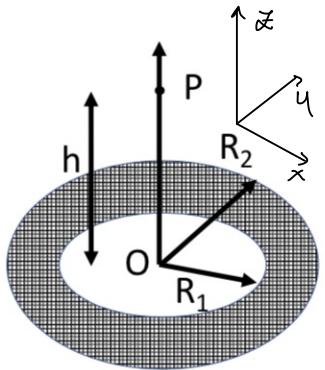
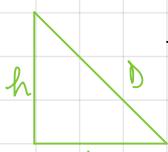


Fig.A

Il campo elettrico è INVARIANTE per rotazioni di  $180^\circ$  ed è diretto SOLO lungo  $z$  perché gli altri contributi si annullano → Potenziale:  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{D}$

Si ha che  $dq = \sigma 2\pi r dr$   
Devo calcolare anche  $D$  →



$$D = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + h^2}} \rightarrow V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

$$\text{t: } r^2 + h^2 \rightarrow 2r dr = dt \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \pi \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{t}} = c \quad \sigma \sqrt{t} \Big|_a^b \\ \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sigma \sqrt{r^2 + h^2} \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R_2^2 + h^2} - \sqrt{R_1^2 + h^2})$$

$$\begin{aligned} \text{Calcolo di } V(O) - V(P) &\rightarrow V(O) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (R_2 - R_1) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} R_1 \rightarrow \Delta V = \frac{\sigma R_1 (1 + \sqrt{5} - \sqrt{3})}{2\epsilon_0} \\ &\rightarrow V(2R_1) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{3R_1^2} - \sqrt{5R_1^2}) = 0.06V \end{aligned}$$

② Espressione del campo elettrico in  $P$

$$\hookrightarrow \mathcal{E} = -\nabla V \rightarrow \text{In questo caso il potenziale ha una sola componente e quindi} \\ \downarrow \text{anche il campo ha una sola componente } (\hat{x}) \\ \mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R_2^2 + x^2} - \sqrt{R_1^2 + x^2}) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{x}{\sqrt{R_2^2 + x^2}} - \frac{x}{\sqrt{R_1^2 + x^2}} \right) \hat{x}$$

④ conduttore sferico posto all'interno di un conduttore con recchio & moto. Nel conduttore interno c'è carica  $Q$  ed il conduttore esterno presenta un potenziale  $V$ . da ddp tra conduttore interno ed esterno vale  $\Delta V$

① Energia elettrostatica immagazzinata dal sistema

Essendo che si parla di energia immagazzinata da un sistema si può scrivere, conoscendo  $Q$  e  $V \rightarrow E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i V_i \rightarrow$  la superficie del conduttore è EQUIPOTENZIALE, quindi  $V_{int} = V_{ext}$

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} q V_{int}}_{\text{condensatore interno}} + \underbrace{\frac{1}{2} Q_{sup} V_{ext} + \frac{1}{2} Q_{int} V_{ext}}$$

Condensatore:  $\Delta V \rightarrow Q_{inf} \neq Q_{sup}$ : c'è potenziale, quindi non avviene il fenomeno di redistribuzione tipico dei conduttori

Si aveva che  $V_{in} - V_{ext} = \Delta V$ , quindi  $V_{in} = \Delta V + V_{ext}$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2} q(\Delta V + V_{ext}) + \frac{1}{2} Q_{sup} V_{ext} + \frac{1}{2} Q_{int} V_{ext} = \frac{1}{2} V_{ext}(Q_{int} + Q_{sup} + q) + \frac{1}{2} q \Delta V$$

Il campo interno al conduttore è NUDO  $\rightarrow$  Bisogna utilizzare il teorema di Gauss:  $\oint E \cdot dS = \mathcal{E}_{tot} A^2 \rightarrow 0 = \frac{Q + Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 R^2} \rightarrow Q_{int} = -q$

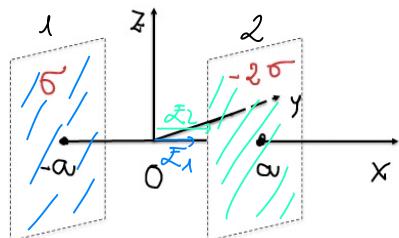
Campo interno  $\square \oint E = \int \mathcal{E} \cdot d\vec{S} = \mathcal{E} A \vec{x}^2 \rightarrow 0 = \frac{Q + Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 R^2} \rightarrow Q_{int} = -q$

Dovrò infine calcolare  $Q_{sup}$   $\rightarrow$  So il potenziale della sfera, quindi posso utilizzare la formula del potenziale per una sfera uniforme

$$V = \frac{Q_{sup}}{4\pi\epsilon_0 R} \rightarrow V_{ext} = \frac{Q_{sup}}{4\pi\epsilon_0 R} \rightarrow Q_{sup} = 4\pi\epsilon_0 R V_{ext}$$

Tornando all'energia:  $E = \frac{1}{2} Q_{sup} V_{ext} + \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} (4\pi\epsilon_0 R V_{ext} + Q \Delta V)$

⑤



$\rightarrow$  Riferimento O xyz con piani uniformemente carichi  
Piano 1 in  $x = -a$  con densità  $\sigma > 0$   
Piano 2 in  $x = a$  con densità  $-2\sigma < 0$

① Componenti del campo elettrico in  $O(0,0,0)$  e in  $B(2a,a,0)$  e grafico della componente  $x$  del campo in funzione di  $x$

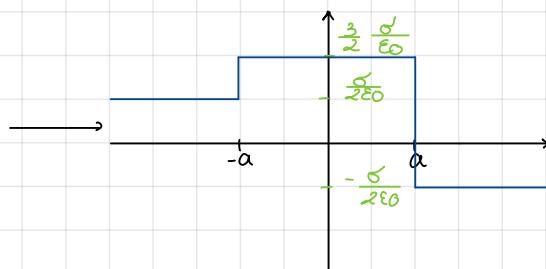
$\hookrightarrow$  Campo di una piastra:  $E = \frac{\sigma_p}{2\epsilon_0}$  COSTANTE

Campo generato dal piano 1:  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x} \rightarrow$  Diretto lungo  $\hat{x}$  a destra della piastra e nel verso opposto a sinistra

Campo generato dal piano 2:  $E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{x} \rightarrow$  Diretto lungo  $\hat{x}$  a sinistra della piastra e opposto a  $\hat{x}$  a destra

$$\text{Campo in } O(0,0,0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Grafico campo:  $\begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & x < -a \\ \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} & -a < x < a \\ -\frac{\sigma}{\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} & x > a \end{cases}$



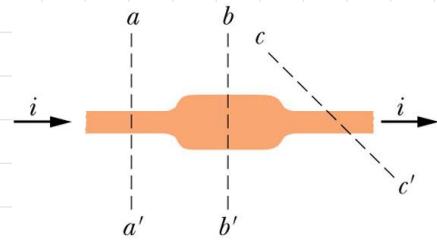
② L'integrale del campo dal punto O a B(2a, a, 0) dipende dal percorso scelto? XB, in quanto il campo elettrico è conservativo

$$\begin{aligned} -\Delta V &= \int_0^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^a \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} dr + \int_a^{2a} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} dr = \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} a - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (2a-a) = \\ &= \frac{3}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} a - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} a = \\ &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} a \end{aligned}$$

# La corrente elettrica

## → Introduzione

→ da corrente si definisce come la quantità di carica che attraversava la sezione di un filo conduttore per unità di tempo →  $i = \frac{dq}{dt}$  e quindi  $q = \int_0^t dq = \int_0^t i dt$

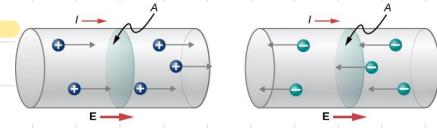


Unità di misura: Ampere = Coulomb / secondo

→ La corrente si conserva: in un filo, la corrente che entra è uguale a quella che esce →  $i_{\text{entrante}} = i_{\text{escente}}$

→ A muoversi sono gli ELETTRONI ma si prende come vero positivo quello opposto al movimento degli elettroni

↪ Le cariche che si muovono sono dette PORTATRICI di CARICA



## → Corrente continua e corrente alternata

↪ Se la corrente è continua fluisce sempre nella stessa direzione, mentre se è alternata invierte periodicamente il suo verso

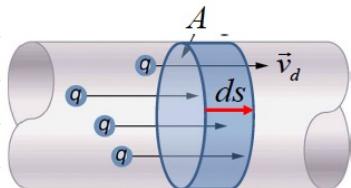
## → Corrente come flusso di carica

↪ Le cariche si muovono con un moto di trascinamento o di deriva →  $ds = Vd dt$ ,  $dq = ne (Vd dt)$

↪ elettroni per unità di volume

$i = ne Vd$  → Velocità di deriva: acquistata a causa della forza elettrica

Attraverso il flusso:  $i = ne \int_A \vec{Vd} \cdot d\vec{A}$ : flusso di cariche attraverso il conduttore nell'unità di tempo



$i = ne Vd$  → IPOTESI:  $Vd$  uniforme in tutti i punti della sezione

## → Densità di corrente: corrente per unità di carica

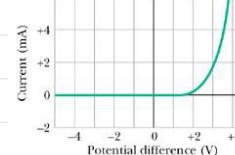
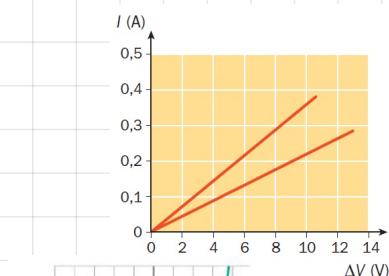
↪  $\vec{J} = ne \vec{Vd}$  →  $i = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = J_A dA = JA$  →  $J = \frac{i}{A}$  →  $J$  è un VETTORE diretto come la velocità della carica e concorde a  $q^+$

Se la superficie diminuisce e la corrente rimane costante allora aumenta la velocità di deriva

## → La resistenza elettrica

↪ La corrente che circola nel materiale, a parità di ddp dipende dal materiale del conduttore: RESISTENZA

Rapporto tra ddp e i:  $R = \frac{\Delta V}{I}$ , quindi  $I = \frac{\Delta V}{R}$ ,  $\Delta V = IR$



Legge di Ohm: la corrente varia linearmente con la ddp

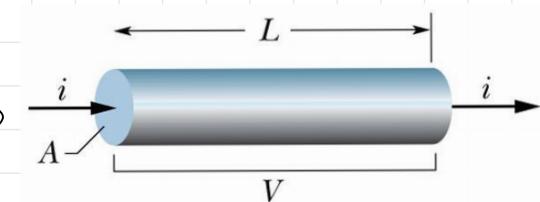
↪ Dipendenza lineare da  $\Delta V$  ed  $R$

↪ conduttori NON omogenei NON seguono questo andamento

## → 2<sup>a</sup> legge di Ohm

↪  $R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{E}{J} \frac{L}{A}$ : filo di lunghezza  $L$ , area  $A$  e ddp  $\Delta V$  con  $J$  uniforme all'interno

↪  $\rho$ : Resistività elettrica →  $R = \rho \frac{L}{A}$   
↪  $\rho = \frac{RA}{L}$ , [ $\rho$ ] =  $\Omega \cdot \text{m}$



per i conduttori è MOLTO BASSA, per gli isolanti è ASSAI e per i semiconduttori è INTERNA

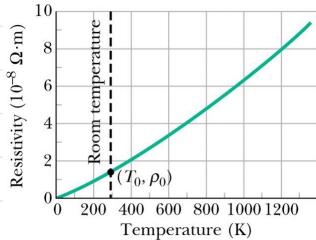
↪ La resistività rappresenta la resistenza di un materiale di lunghezza e sezione unitarie

Origine microscopica:  $E = \rho$ ,  $J = \frac{E}{\rho} = neVd \rightarrow Vd = \frac{1}{ne\rho} E$ : costante nel tempo

Il fatto che vi sia costante NON è in accordo con il modello di moto di un corpo soggetto ad una forza (accelerato):  $\ddot{a} = \frac{F}{m}$ : Valore MOLTO ALTO dato dalla massa molto piccola di e

Per di più è PRENATO all'interno dagli altri con gli altri atomi → complessivamente resistività

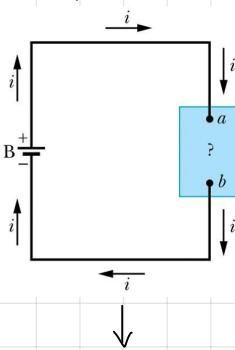
La resistività AUMENTA con la temperatura perché si hanno PIÙ ORTI → Nei semi conduttori invece accade il contrario in quanto solo alcuni elettroni possono muoversi e la carica aumenta con la temperatura



→ L'effetto Joule

↪ L'elettrone accelerato aumenta la sua velocità e quindi la sua energia cinetica e diminuisce energia potenziale → La velocità  $v$  è però costante, quindi la dispersione dell'energia che si ha vede una trasformazione in energia TERMICA

→ La POTENZA ELETTRICA



→ La batteria  $B$  crea e mantiene un potenziale  $\Delta V$  tra i punti  $a$  e  $b$  collegati ai poli generando la corrente  $i$  nel circuito. Lavoro compiuto per far circolare da  $a$  in  $b$ :  $dV = dq \Delta V = idt \Delta V$

Energia totale erogata:  $\Delta U = \Delta V \cdot q = \Delta V \cdot It = Q \Delta V$  tempo  $t$

Potenza erogata:  $P_B = \frac{dU}{dt} = \frac{dq \Delta V}{dt} = i \Delta V$

Legge di Joule:  $P_B = i \Delta V$ ,  $\Delta V = V_A - V_B$  → Se è presente solo la resistenza  $R$ , allora tutta la potenza viene dissipata in calore:  $P_R = P_B = i \Delta V \rightarrow P_B = I^2 R$

Se il dispositivo è un resistore tutta la potenza viene trasformata in calore, mentre se è un condensatore essa viene immagazzinata. Se si tratta di un motore elettrico essa viene dissipata sotto forma di lavoro meccanico

↪ Le resistenze sono identificate da un codice COLORE

→ I CIRCUITI ELETTRICI

↪ Percorsi chiusi in cui le cariche possono muoversi con continuità

Componente fondamentale: generatore → mantiene la ddp che in questo caso si chiama FORZA ELETTRONOTRICE

Massima differenza di potenziale possibile che la batteria può erogare ai suoi terminali. La differenza tra polo positivo e polo negativo è data dal filo.

Se un circuito è formato da un filo elettrico che collega le varie componenti, allora la sua resistenza può essere trascurata in favore di quella delle componenti → L'insieme delle resistenze si dice CARICO RESISTIVO

Se NON è presente, si genera un CORTOCIRCUITO: la corrente diventa enorme e danneggia il generatore.

## → delle leggi di Kirchoff

Manifestazione dei principi di conservazione di corrica ed energia

→ 1<sup>a</sup> legge: La corrente entrante deve essere uguale a quella uscente

$$\sum_{i=1}^n i_i = 0 \rightarrow i \text{ prese con il segno + se entrano e con il segno - se escono}$$

→ 2<sup>a</sup> legge di Kirchoff: La somma algebrica delle ddp calcolate su ciascun ramo di un percorso chiuso è nulla

$$(V_a - V_b) + (V_b - V_c) + (V_c - V_d) + (V_d - V_a) = 0$$

→ legge di Ohm ai capi dei rami:  $(V_b - V_c) = i R_1$ ,  $(V_c - V_d) = i R_2$ ,  $(V_d - V_a) = i R_3$

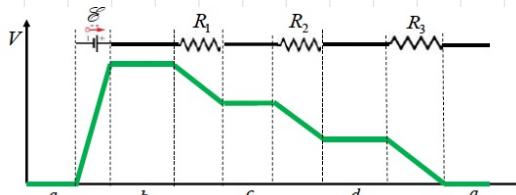
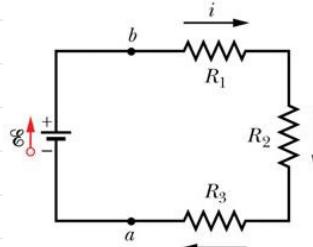
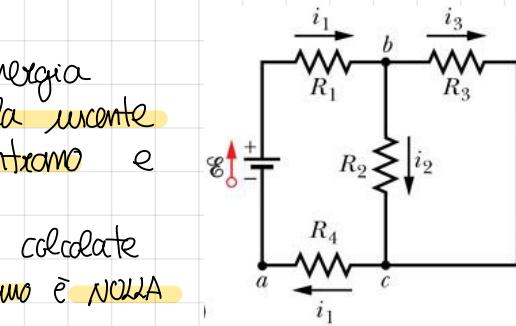
$$(V_b - V_a) = \mathcal{E} \rightarrow \text{Fetta del generatore}$$

$$-\mathcal{E} + i R_1 + i R_2 + i R_3 = 0 \rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Profilo del potenziale

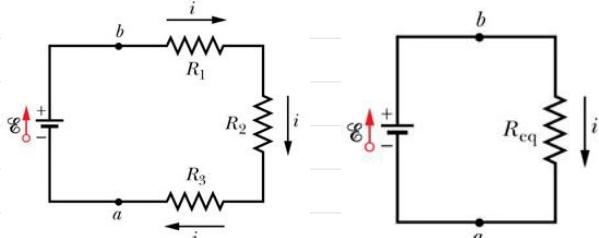
- Costante sui fili
- Aumenta sul generatore
- Diminuisce sulle resistenze

d'energia fornita dal generatore deve essere uguale a quella dissipata dai resistori



## → composizione di resistenze

### In SERIE

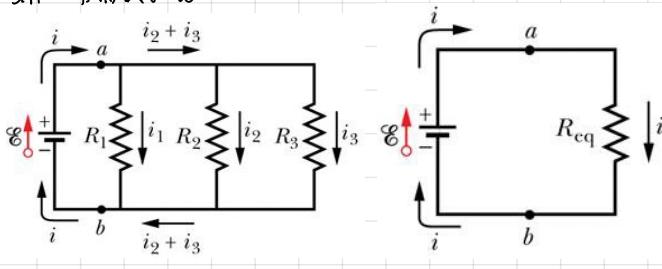


→ Sono poste lungo lo STESSO FILO e quindi hanno la STESSA CORRENTE, mentre la ddp si RIPARTISCE

→ Resistenza equivalente: stessa corrente ma SOMMA di  $\Delta V$  ai capi

$$\mathcal{E} = i (R_1 + R_2 + R_3) = i R_{eq}, R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

### In PARALLELO



→ Ordinate in rami di circuito con cui capi la stessa ddp

→ La corrente è data dalla SOMMA delle CORRENTI

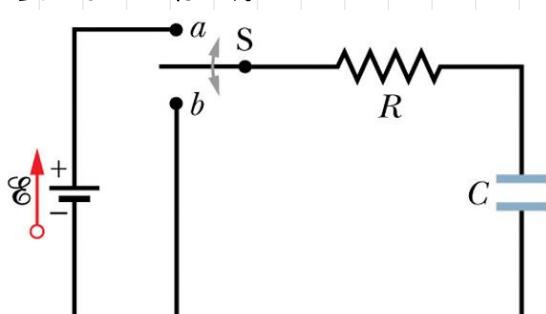
→ Resistenza equivalente con inverso della resistenza = somma degli inversi

$$\mathcal{E} = V_a - V_b = i_1 R_1 = i_2 R_2 = i_3 R_3$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = (V_a - V_b) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = (V_a - V_b) \frac{1}{R_{eq}}$$

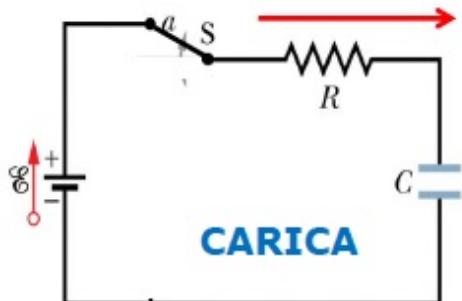
Le lampadine dell'albero di Natale sono connesse in SERIE, mentre gli elettrodomestici sono connesi in PARALLELO così da non far saltare di funzionare il circuito se uno si rompe

## → Il circuito RC



→ Il circuito è formato dal generatore, che è una batteria, uno o più condensatori ed uno o più resistori

→ Inizialmente il condensatore è scarico e poi viene caricato chiudendo l'interruttore → Non è stazionario in quanto le correnti, la ddp e le cariche sono variabili



La CARICA del CONDENSATORE  
 $\rightarrow \mathcal{E} = i(t)R + \Delta V_C(t)$  → Quando  $\Delta V_C = \mathcal{E}$ , la corrente si ferma perché  $i(t)t = 0$   
 $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$      $\Delta V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$      $\Rightarrow \frac{dq(t)}{dt} R + \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E}$

Risoluzione equazione differenziale:  $q' R + \frac{q}{C} = \mathcal{E} \rightarrow q' = -\frac{q}{RC} + \frac{\mathcal{E}}{R}$

Metodo del fattore integrante:  $a(t) = -\frac{1}{RC}$      $A(t) = \frac{-t}{RC}$      $b(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}$

$$q(t) = e^{\frac{-t}{RC}} \int e^{\frac{t}{RC}} \frac{\mathcal{E}}{R} dt = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{\frac{-t}{RC}} [RC e^{\frac{t}{RC}} + \text{cte}] = \frac{\mathcal{E}}{R} [RC + e^{\frac{-t}{RC}} \text{cte}]$$

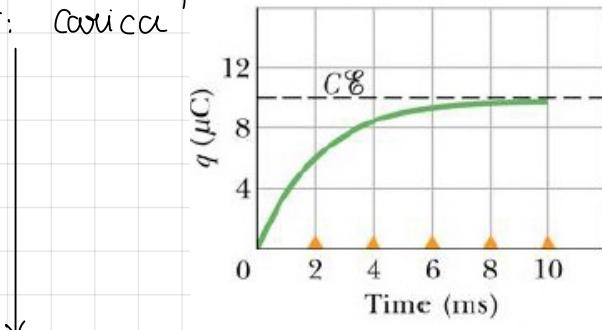
→ Trovo c.te:  $q(0) = 0 \rightarrow 0 = \frac{\mathcal{E}}{R} [RC + \text{cte}] \rightarrow 0 = \mathcal{E}C + \frac{\mathcal{E}}{R} \text{cte} \rightarrow 0 = C + \frac{\text{cte}}{R} \rightarrow \text{cte} = -RC$

$q(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} C [1 - e^{\frac{-t}{RC}}] = \mathcal{E}C [1 - e^{\frac{-t}{\tau}}]$  →  $\tau = RC$ : costante di tempo caratteristica

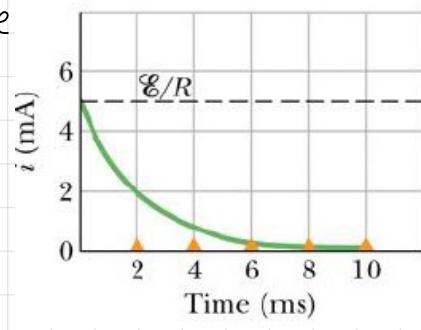
$$q(t) = \mathcal{E}C [1 - e^{\frac{-t}{\tau}}] \rightarrow q'(t) = \frac{\mathcal{E}C}{\tau} e^{\frac{-t}{\tau}} = \frac{\mathcal{E}C}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = i(t)$$

Carica limite: per  $t \gg \tau$  si ha che  $e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$ , quindi  $q_{\lim} = C\mathcal{E}$

Grafici: Carica



Corrente



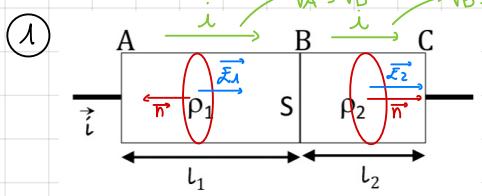
Bilancio energetico → Energia erogata  $\Delta U_B = \Delta U_C + \Delta U_R$

lavoro assorbito dal condensatore

Dissipata dal resistore

$$\Delta U_B = q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2 \quad \text{e} \quad \Delta U_C = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2 \rightarrow \text{Legge di Joule: } P = i^2 R = \frac{dU_R}{dt}$$

$$\Delta U_R = \int_0^\infty i^2(t) R dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$$



1) Conduttori metallici con  $\rho_1$  e  $\rho_2$  lunghi  $l_1$  ed  $l_2$  con sezione  $S$ .

Ai capi è presente una ddp  $V_1 = V_A - V_B$  e  $V_2 = V_B - V_C$

Fig.B

1) Corrente che scorre nei conduttori  $i$

→ I conduttori possono essere schematizzati come: ——————

↓

Sono quindi due resistenze in SERIE e quindi la corrente è la STESSA, mentre la ddp viene RIPARTITA

↓

$$V_1 = iR_1, \quad V_2 = iR_2 \quad \rightarrow \quad V_1 + V_2 = i(R_1 + R_2) \quad \rightarrow \quad i = \frac{V_1 + V_2}{R_1 + R_2} = \frac{V_1 + V_2}{\rho_1 \frac{l_1}{S} + \rho_2 \frac{l_2}{S}} = \frac{S(V_1 + V_2)}{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2} \approx 0.05 \text{ A}$$

2) Densità superficiale di carica presente sulla superficie  $S$  di separazione, σ

→ Essendo conduttori, la carica è presente SOLO sulla superficie

↓

Bisogna considerare un cilindro contenente la superficie di separazione come gaussiana → Il campo elettrico di un conduttore è dato da  $E = \rho J$  e quindi, dato che  $J$  è la densità di corrente per unità di carica, si ha che  $J = \frac{i}{S} \rightarrow E = \rho \frac{i}{S}$  e dato che  $\rho = R \frac{S}{l}$  si ha che

$$E = \frac{RS}{l} \cdot \frac{i}{S} = \frac{Ri}{l} = \frac{V}{l} \quad \rightarrow \quad E_1 = \frac{V_1}{l_1} \quad E_2 = \frac{V_2}{l_2}$$

Il campo elettrico si muove in VERSO CONCORDE alla densità di corrente, che in questo caso si muove come  $\hat{x}$ . Possiamo quindi scrivere che  $\oint E \cdot d\vec{s} = \int_S E_1 \vec{d}s + \int_S E_2 \vec{d}s + 0 = -E_1 S + E_2 S = S(E_2 - E_1)$

→ La superficie laterale NON fa contributo

Per il teorema di Gauss si ha che  $\oint E \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma' S}{\epsilon_0}$

Uguagliando le due relazioni si ottiene:  $\frac{\sigma' S}{\epsilon_0} = \frac{S}{l}(V_2 - V_1)$

$$\rightarrow \sigma' = \epsilon_0 \left( \frac{V_2 - V_1}{l} \right) = -4.5 \cdot 10^{-10} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

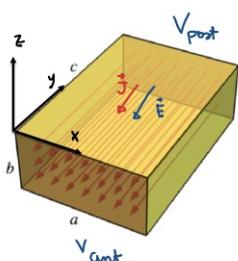
2) parallelepipedo ohmico con  $\rho$  noto di lati  $a, b, c$  con campo di modulo  $E \parallel$  al lato  $c$ . Potenza dissipata per effetto Joule:  $P = i \Delta V$  → Per la legge di Ohm si ha che  $R = \frac{\Delta V}{I}$

e quindi che  $P = i^2 R \rightarrow R$  è definita come  $R = \frac{\rho}{A}$

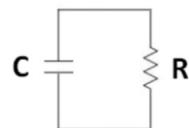
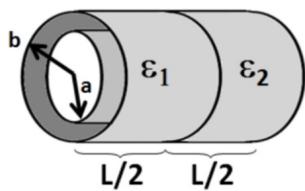
La corrente è definita come  $i = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$   
 $J$  si definisce come  $\vec{E}$  per un conduttore

$$\text{In questo modo l'integrale diventa } i = \int_A \frac{\vec{E}}{\rho} \cdot d\vec{A} = \frac{E}{\rho} \cdot a \cdot b \rightarrow i = \frac{E^2}{\rho^2} \cdot a \cdot b \cdot \frac{\rho \cdot c}{a \cdot b} =$$

$$i = \frac{E^2}{\rho} abc$$



③



$$\begin{aligned}a &= 0.3 \text{ cm} \\b &= 1 \text{ cm} \\L &= 80 \text{ cm} \\E_{\text{ext}} &= 2 \\E_{\text{ext}} &= 3\end{aligned}$$

① Capacità del condensatore ( $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ )  
condensatori con  $\epsilon_1$  ed  $\epsilon_2$  in PARALLELLO



I condensatori sono in PARALLELLO, quindi  $C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$   
capacità condensatore cilindrico:  $C = \frac{Q}{\Delta V}$ , che devo ricavare

$$\text{Per ricavarla parto da } \Delta V \rightarrow V^+ - V^- = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$\vec{E}$  è presente solo interamente e posso calcolarlo usando la legge di Gauss  
Gauss omici: cilindro di raggio  $r$   $\rightarrow Q_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{2\pi r h} \epsilon_0$   
 $\rightarrow Q_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow$  carica condensatore

$$\frac{Q}{2\pi r h \epsilon_0} = \frac{Q}{2\pi r h \epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi r h \epsilon_0}$$

$$\begin{aligned}\text{Calcolo } V^+ - V^- &= \int_b^a \frac{Q}{2\pi r h \epsilon_0} dr = \frac{Q}{2\pi h \epsilon_0} \int_b^a \frac{1}{r} dr = \frac{-Q}{2\pi h \epsilon_0} [\ln(a) - \ln(b)] = \\&= \frac{Q}{2\pi h \epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \xrightarrow{\text{Avendo un direttivo}} = \frac{Q}{2\pi h \epsilon_0 \epsilon_r} \ln\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

$$C = \frac{\frac{Q}{\epsilon_r}}{\frac{Q}{2\pi h \epsilon_0 \epsilon_r} \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi h \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$C_{\text{TOT}} = \frac{2\pi h \epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} [E_{\text{ext}} + E_{\text{ext}}] = \frac{\pi h \epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} [E_{\text{ext}} + E_{\text{ext}}] = 3.16 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$

$$② V = 50 \text{ V} \quad R = 10 \cdot 10^3 \Omega$$

$$\text{Energia dissipata: } E_{\text{diss}} = \int_0^\infty P(t) dt$$

in questo caso corrisponde a quella dissipata dal condensatore perché abbiamo che questa verrà tutta dissipata nella resistenza  
 $E_{\text{diss}} = \frac{1}{2} C V^2 = 6.33 \cdot 10^{-3} \text{ J}$

$$③ V = 50 \text{ V}, \quad R = 10 \cdot 10^3 \Omega \rightarrow \text{potenza dissipata dopo } t_1 = 100 \text{ ms}$$

$$\text{Si ha un circuito RC in serie di carica, quindi possiamo scrivere che} \\0 = \frac{dq}{dt} R + \frac{Q_{\text{cond}}}{C_{\text{cond}}} \rightarrow q'(t)R + \frac{q(t)}{C} = 0 \rightarrow q'(t) = -\frac{q(t)}{RC} \quad a(t) = -\frac{1}{RC}$$

$$A(t) = \frac{-t}{RC}$$

$$e^{-\frac{t}{RC}} \int e^{\frac{t}{RC}} \cdot 0 dt = ce^{-\frac{t}{RC}}$$

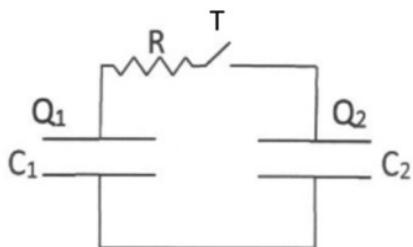
$$q(0) = q_{\text{cond}} \longrightarrow q(t) = q_{\text{cond}} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = -\frac{1}{RC} q_{\text{cond}} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$P(t) = R i^2 = R \cdot \frac{1}{R^2 C^2} \Delta V^2 e^{-\frac{2t}{RC}}$$

$$= \frac{1}{R} \Delta V^2 e^{-\frac{2t}{RC}} = 0.25 \text{ W}$$

④



Condensatori con capacità  $C_1$  e  $C_2$  con carica  $Q_1$  e  $Q_2$   
Dopo tempo passano all'equilibrio

$$C_1 = 1 \mu F \quad C_2 = 2 \mu F$$

$$Q_1 = Q_2 = 2 \text{ mC}$$

① d.d.p all'equilibrio ai capi dei due condensatori

Tra i condensatori scorre corrente fino a quando la differenza di potenziale non è più lo stesso  $\rightarrow$  Per questo in condizione di equilibrio i condensatori sono in parallelo  
condizione di equilibrio:  $\Delta V_{\text{TOT}} = \Delta V_1 = \Delta V_2 \longrightarrow \Delta V_{2F} = \frac{Q_{2F}}{C_2}, \Delta V_{1F} = \frac{Q_{1F}}{C_1}$

In più abbiamo il principio della carica, secondo il quale la carica iniziale sarà equivalente a quella finale:  $Q_{1i} + Q_{2i} = Q_{1f} + Q_{2f}$

$$\begin{cases} C_2 \Delta V_F = Q_{2F} \\ C_1 \Delta V_F = Q_{1F} \\ Q_{1i} + Q_{2i} = Q_{1f} + Q_{2f} \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \cdot 10^{-6} \Delta V_F = Q_{2F} \\ 1 \cdot 10^{-6} \Delta V_F = Q_{1F} \\ 2 \cdot 10^{-9} + 2 \cdot 10^{-9} = Q_{1f} + Q_{2f} \end{cases} \quad \text{⊗}$$

$$\text{⊗} \quad 4 \cdot 10^{-9} = 1 \cdot 10^{-6} \Delta V_F + 2 \cdot 10^{-6} \Delta V_F \longrightarrow \Delta V_F = \frac{6 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-6}} = 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

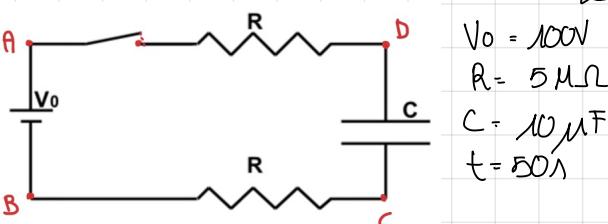
② Variazione totale energia elettrostatica tra istante iniziale e quello finale

$$\Delta E_i = \text{energia immagazzinata: } \frac{1}{2} C_1 \Delta V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 \Delta V_2^2$$

$$\Delta E_f = \frac{1}{2} C_1 \Delta V_F^2 + \frac{1}{2} C_2 \Delta V_F^2 \longrightarrow \frac{1}{2} \Delta V_F^2 (C_1 + C_2)$$

$$\begin{aligned} \text{Variazione di energia: } & \frac{1}{2} C_1 \Delta V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 \Delta V_2^2 - \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \Delta V_F^2 = \\ & = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} - \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \Delta V_F^2 = (6.65 \cdot 10^{-9}) \end{aligned}$$

⑤



$$V_0 = 100 \text{ V}$$

$$R = 5 \mu \Omega$$

$$C = 10 \mu \text{F}$$

$$t = 50 \text{ s}$$

① Energia fornita dal generatore a  $t = 50 \text{ s}$

L'energia fornita dal generatore è data dalla somma dell'energia accumulata dal condensatore e di quella dissipata dalla resistenza

Affiamo un circuito RC con generatore, del quale è possibile ricavare le equazioni di corrente e carica di un circuito RC:  $V_0 = \frac{dq}{dt} R + \frac{q}{C}$

Le resistenze sono in serie:  $R_1 R_2$

$$V_0 = q'(t) R_{TOT} + \frac{q(t)}{C} \longrightarrow q'(t) = \frac{V_0}{R_{TOT}} - \frac{q(t)}{C R_{TOT}}$$

$$\text{Risolvendo l' equazione otteniamo: } a(t) = -\frac{1}{C R_{TOT}} \quad A(t) = \frac{-t}{C R_{TOT}}$$

$$b(t) = \frac{V_0}{R_{TOT}}$$

$$e^{\frac{-t}{C R_{TOT}}} \int e^{\frac{t}{C R_{TOT}}} \frac{V_0}{R_{TOT}} dt = \frac{V_0}{R_{TOT}} e^{\frac{t}{C R_{TOT}}} \left[ C R_{TOT} e^{\frac{t}{C R_{TOT}}} + C \right] = V_0 C e^{\frac{t}{C R_{TOT}}} e^{\frac{-t}{C R_{TOT}}} = V_0 C e^{\frac{t}{C R_{TOT}}}$$

$$q(0) = 0 \longrightarrow \cancel{V_0 C} + c \cancel{e^{\frac{t}{C R_{TOT}}}} = 0 \longrightarrow c = -C R_{TOT}$$

$$q(t) = V_0 C - C V_0 e^{\frac{t}{C R_{TOT}}} = V_0 C [1 - e^{\frac{t}{C R_{TOT}}}]$$

$$i(t) = V_0 C e^{\frac{t}{C R_{TOT}}} \frac{1}{C R_{TOT}} = \frac{V_0 e^{\frac{t}{C R_{TOT}}}}{R_{TOT}}$$

$$\text{Potenza dissipata: } R_{TOT} i(t)^2 = \frac{R_{TOT} V_0^2 e^{-\frac{2t}{C R_{TOT}}}}{R_{TOT}^2} = \frac{V_0^2 e^{-\frac{2t}{C R_{TOT}}}}{R_{TOT}}$$

$$\mathcal{E} \text{ accumulata: } \mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} \frac{V_0 C [1 - e^{-\frac{t}{C R_{TOT}}}]^2}{C}$$

$$\begin{aligned} \text{Energia dissipata da 0 a t: } \int_0^t \frac{V_0^2 e^{-\frac{2t}{C R_{TOT}}}}{R_{TOT}} dt &= \frac{V_0^2}{R_{TOT}} \int_0^t e^{-\frac{2t}{C R_{TOT}}} dt = -\frac{V_0^2}{R_{TOT}} \cdot \frac{C R_{TOT}}{2} \cdot e^{-\frac{2t}{C R_{TOT}}} \Big|_0^t = \\ &= -\frac{V_0^2 C}{2} e^{-\frac{2t}{C R_{TOT}}} \Big|_0^t = \\ &= \frac{V_0^2 C}{2} \left[ 1 - e^{-\frac{2t}{C R_{TOT}}} \right] \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_{\text{RESISTENZE}}: \mathcal{E}_R(50) = 0.0316 J$$

$$\mathcal{E}_{\text{RESISTENZA}}: \underline{\mathcal{E}_R(50)} = 0.0150 J$$

2

$$\mathcal{E}_{\text{GEN}} = \mathcal{E}_{\text{CONDENSATORE}} = 0.0235 J$$

$$\mathcal{E}_{\text{CONDENSATORE}}: \mathcal{E}_C(50) = 7.74 \cdot 10^{-3} J$$

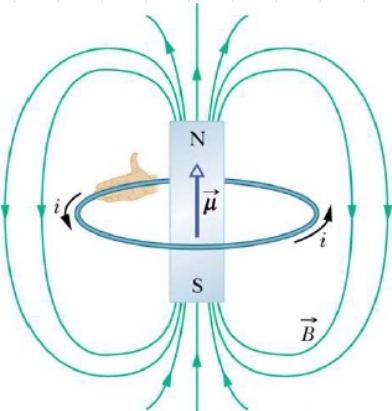
# Il magnetismo

- I fenomeni magnetici sono parte della vita di tutti i giorni e sono studiati fin dall'antichità → Fenomeni elettrici e magnetici sono STRETTAMENTE CORRELATI e ci si produce l'altro
- Per avere fenomeni magnetici significativi devono essere **corrente** e **corrente**

↓  
Non vi è un equivalente alla singola carica elettrica come monopolo magnetico

→ Magnetismo generato da elettroni

- I magneti (calamite) generano campo magnetico a causa della corrente che circola al suo interno → è un circuito composto da molte spire

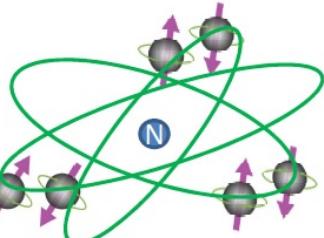


Le linee di campo magnetico escono dal polo nord ed entrano al polo sud

- Il campo magnetico è prodotto dal momento di dipolo magnetico dovunque dalla rotazione degli atomi attorno al nucleo e dello spin (rotazione su se stessi) → Si annullano (materia neutra)

Varie tipologie di materiali

- Diamagnetici: orbitali si accoppiano a due a due con momenti magnetici opposti
- Paramagnetici: gli elettroni esterni sono spostati ma gli spin sono costanti: momento netto zero
- Ferromagnetici: spin generano campo magnetico macroscopico

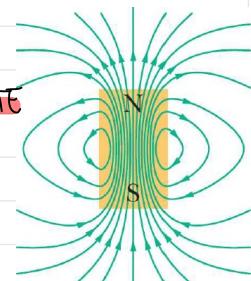


→ Linee di campo magnetico

- Sono linee uscenti dal polo nord ed entranti al polo sud

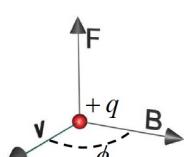
chiuse: NON è possibile separare dipoli in monopoli → Campo TANGENTE

Se una calamita viene spezzata si creano solo dipoli più piccoli



Legge di Gauss per il campo magnetico: il doppio magnetico è equivalente al doppio elettrico e quindi il flusso attraverso una superficie chiusa è sempre zero:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$

→ La FORZA di Lorentz



Il campo elettrico q che si muove con

B esercita una forza su una particella di carica v data da  $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$

- Direzione: ad entrambi i vettori
- Verità: Regola della mano destra
- Modulo:  $|q| |v| B \sin \theta = |q| |A|$

Formula prodotto vettore:  $\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (v_y B_z - v_z B_y) \hat{x} - (v_z B_x - v_x B_z) \hat{y} + (v_x B_y - v_y B_x) \hat{z}$

→ Unità di misura

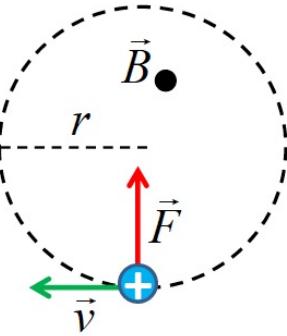
→ TESLA T:  $[B] = \frac{[F]}{[q \cdot v]} \rightarrow T = \frac{N}{A \cdot m} = \frac{N}{C \cdot m} \rightarrow$  Sottomultiplo comune:  $Gauss = 10^{-4} T$

→ Moto in un campo magnetico

- Forza  $\perp$  alla velocità, quindi l'energia cinetica non cambia in quanto la forza NON fa lavoro (teorema delle forze vive)

Il corpo compie un **MOTO CIRCOLARE** in quanto la **velocità tangenziale** in **direzione** ma **non in modulo** → Agisce come **forza centripeta** e quindi  $\frac{qvB}{R} = \frac{mv^2}{R}$ , da cui si ha  $R = \frac{mv}{qB}$ : **raggio di curvatura**

Altre relazioni:  $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$  → **frequenza**  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$   
 $\omega = 2\pi\nu = \frac{qB}{m}$

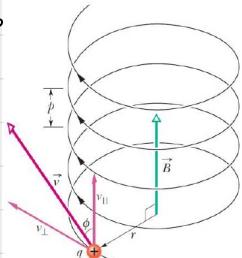


### → Moto elicoidale

↪ Angolo tra  $v$  e  $B \neq 90^\circ$  → **Scomponi**  $v$  in  $v_{\parallel}$  e  $v_{\perp}$  →  $\vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}$  →  $\vec{F} = q(\vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}) \times \vec{B} = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}$

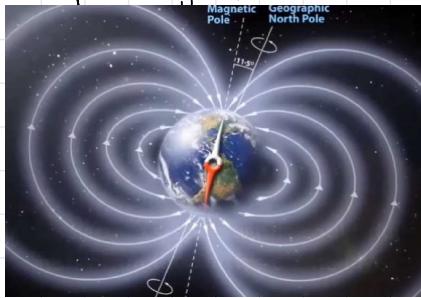
da componente  $\parallel$  della **velocità** produce un **moto rettilineo uniforme** nel piano dove essa agisce → produce un **moto elicoidale**

↪ **Passo** = **distanza** tra due spire:  $p = v_{\parallel} T = \frac{v_{\parallel} 2\pi r}{v_{\perp}}$  ed avendo che



$$\frac{p}{v_{\perp}} = \frac{mn}{qB}, \text{ allora } p = \frac{v_{\parallel} 2\pi m}{qB}$$

### → Campo magnetico terrestre



→ Campo magnetico di intensità **10 Gau** generato dal nucleo terrestre: **fuoco liquido** ad alta temperatura

↪ **Misurato con bussola**

→ Il polo **meridiano** e **sud** magnetico e **geografico** si **scambiano**  
 → Il campo magnetico intrappola protoni ed elettroni provenienti dal **sole** formando le **fasce di Van Allen** nella **scia mediana** del campo → danneggiano satelliti

Quando parte del **vento solare** colpisce la **magnetosfera** e raggiunge la **ionosfera** gli **ioni** **carichi** con le **particelle** accumulate producono il **fenomeno dell'aurora**

### → Forza su un **filo** percorso da corrente

↪ Le cariche si **muovono** quindi con una certa **velocità** e quindi risentono della **Forza di Lorentz**:  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  (sulla singola carica)

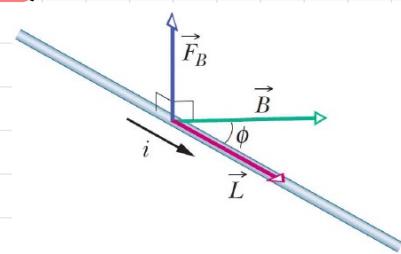
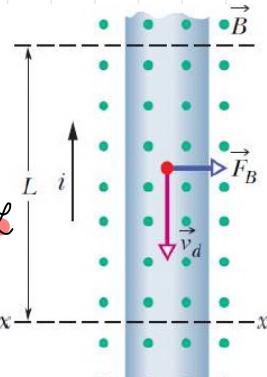
invertendo sia il segno ↪ velocità di deriva con cui della carica che la velocità si muovono le particelle il risultato rimane lo stesso nel conduttore:  $v_d = \alpha / t \rightarrow qv_d = iL$

Fili percorsi da corrente con campo magnetico: Essendo che corre una corrente in verso **opposto**, a causa della forza di Lorentz si avvicinano →  $\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$

↪ **Modulo** lunghezza del **filo** e **direzione** come la corrente

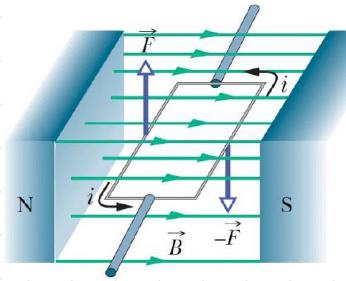
Per fili **NON RETTILINEI** si ha  $dF = i d\vec{L} \times \vec{B}$   
 tratto di filo infinitesimale

Integrando si ottiene la forza agente su tutto il tratto  $L$ .  
 Si avrà  $\vec{F}_B = i \int_0^L d\vec{L} \times \vec{B}$



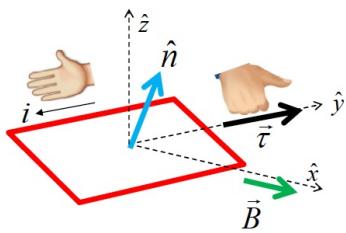
→ Spira rettangolare percorso da corrente

↪ Nella spira circola corrente: i tratti orizzontali non generano forza perché il prodotto vettoriale è NUOLO in quanto  $\vec{e}$  e  $\vec{B}$  sono paralleli. Negli altri tratti il prodotto vettoriale è NON NUOLO e si genera una forza in VERSO OPPOSTO → Fanno ruotare la spira producendo un momento torcente:  $T = i \vec{A} \times \vec{B} = i A \hat{n} \times \vec{B}$

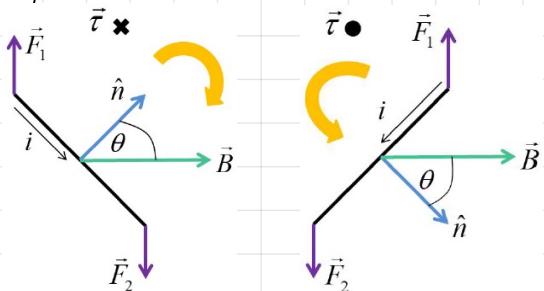


Le forze agenti sono presenti soltanto sui lati ortogonali alle linee di campo  $\vec{F}_1 = i d_1 \times \vec{B} = i d_1 B \hat{x}$   $\vec{F}_2 = i d_2 \times \vec{B} = -i d_2 B \hat{x}$

La torsione prodotta tende a fare allineare la spira al campo magnetico → Quando si allinea il momento diventa nullo



Equilibrio:



→ Quando  $\theta = \pi$ , ovvero  $\hat{n}$  è coincidente a  $\vec{B}$  il verso di rotazione si invverte dato che  $T$  cambia il verso → Si ha quindi che quando  $\hat{n}$  e  $\vec{B}$  sono paralleli si ha una posizione di equilibrio stabile

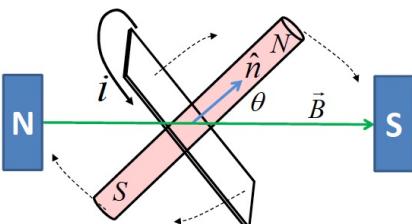
↪ Invertendo il verso della corrente si avrà che la spira ruota senza mai fermarsi

uniforme

→ La bobina

↪ Gruppo di spire: Momento torcente = somma dei momenti di ciascuna spira:  $\vec{T} = Ni \vec{A} \times \vec{B}$

→ Il momento di dipolo magnetico



→ La bobina in un campo magnetico ha un comportamento analogo ad un dipolo magnetico che allinea il suo polo Sud verso il Nord del campo magnetico e vice-versa) → Momento di dipolo = vettore  $\vec{\mu} = Ni A \hat{n}$  [ $A \cdot m^2$ ] e quindi  $\vec{T} = \vec{\mu} \times \vec{B}$  [J]

Invertire il verso della corrente equivale ad invertire i poli, quindi la spira invierte il suo verso di rotazione regola della mano destra: il pollice indica il verso di rotazione della spira.

→ Lavoro del campo magnetico

→ Su una singola carica: lavoro nullo in quanto forza e spostamento (velocità) sono ortogonali

→ Su corpi conduttori: il filo percorso da corrente viene spostato, quindi viene compiuto lavoro → per circuiti chiusi si definisce anche l'ENERGIA POTENZIALE

→ L'energia potenziale è data  $V(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \theta$

$$\Delta E$$

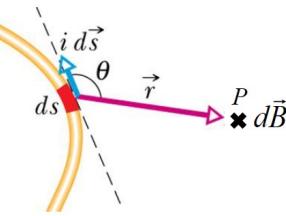
$$= -\mu B \cos \theta$$

→ da legge di Biot-Savart

→ Legge campo magnetico  $d\vec{B}$  generato da  $ds$  del filo in un punto  $P$

$$\hookrightarrow \vec{dB} = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{i ds \times \vec{r}}{r^3}$$

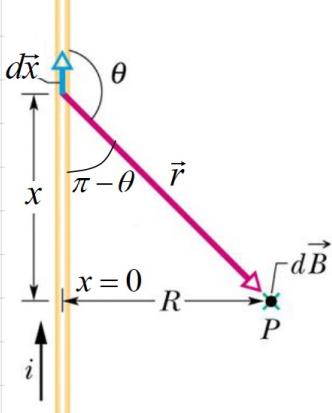
Campo magnetico perpendicolare sia ad  $ds$  che a  $\vec{r}$



$\mu_0$  è la costante di permeabilità magnetica nel vuoto che vale  $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$

→ Campo di un filo infinito

→ Filo rettilineo infinito percorso da corrente  $i$  orientato lungo  $x$ .



$$\hookrightarrow dB = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{i dx \sin(\pi - \theta)}{r^{3/2}} = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{i dx \sin\theta}{r^2}$$

Ricavo adesso il lato  $r$  e il seno dell'angolo  $\theta$  in funzione di  $x$  →  $r \sin(\pi - \theta) = r \sin\theta = R$  →  $\sin\theta = R/r$  con  $r = \sqrt{x^2 + R^2}$

$$\text{Sostituendo si ha: } dB = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{i dx R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{i R dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$B = \int_0^\infty \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{i R dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) i R \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad x = Rt \tan t \\ dx = R dt \quad \cos^2 t$$

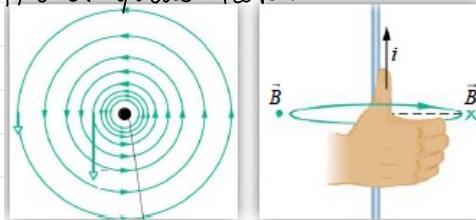
$$B = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) i R^2 \int_a^b \frac{dt}{R^2 \cos^2 t (R^2 \tan^2 t + R^2)^{3/2}} = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{i R^2}{R^3} \int_a^b \frac{dt}{\cos^2 t (\tan^2 t + 1)^{3/2}} = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{i}{R} \int_a^b \frac{dt}{\cos^2 t (\cos^4 t)^{3/2}} =$$

$$= \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{i}{R} \int_a^b \cos^2 t dt = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{i}{R} \left[ \frac{1}{2} \sin 2t \right]_a^b = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{i}{R} \left[ \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right]_a^b = B = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{i}{R} \left[ \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right]_0^\infty = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R}$$

→ Essendo che la parte di filo opposta contrabarra, il campo è dopPIO a quello trovato

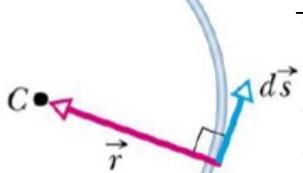
Il campo ha simmetria cilindrica e dipende solo dalla distanza  $R$  dal filo → Linee = cerchi concentrici sul piano  $\perp$  alla direzione del filo, quindi simmetria cilindrica

→ Orientando il pollice lungo  $i$ , le dita piegate danno il campo  $B$ , ortogonale sia al filo che alla distanza del suo



→ Campo di un filo piegato ad arco

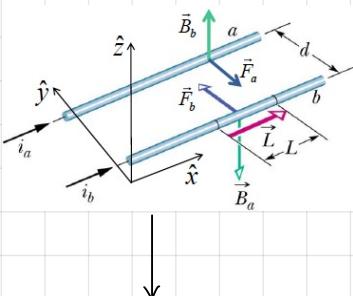
$$\rightarrow ds ed r sono \perp, quindi si ha che dB = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{i ds}{r^2}$$



$$\text{Integrando per } ds, \text{ essendo } r \text{ costante si ha } B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i s}{R^2}$$

Essendo che, per la definizione di radienti, si ha che  $\phi_{\text{rad}} \pi = 1$ ,  $B$  diventa  $B = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{i \phi_{\text{rad}}}{R}$

→ Forza tra due conduttori paralleli



→ Le correnti sono di verso CONCORDE → Axe  $x$  parallelo ai due fili

→ Campo  $B_a$  e  $B_b$  generati da primo e secondo filo

$$\rightarrow B_a = -\frac{\mu_0 i_a \hat{z}}{2\pi d}, \quad B_b = -\frac{\mu_0 i_b \hat{z}}{2\pi d}$$

$$\rightarrow \text{Forza agente su sezione } L \text{ del filo } b: \vec{F}_a = i_b \vec{L} \times \vec{B}_a = \frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi d} \vec{L}$$

$$\rightarrow \text{Forza agente su sezione } L \text{ del filo } a: \vec{F}_b = i_a \vec{L} \times \vec{B}_b = -\frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi d} \vec{L}$$

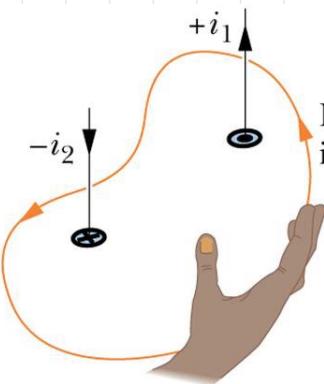
Se le correnti fanno di verso opposto, i fili si respingono l'uno sull'altro

## → Legge di Ampère

→ L'integrale di linea del campo magnetico lungo un cammino chiuso (circuito) è uguale alla corrente complessiva che attraversa la superficie del circuito chiuso, moltiplicata per  $\mu_0$ :  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{int}}$

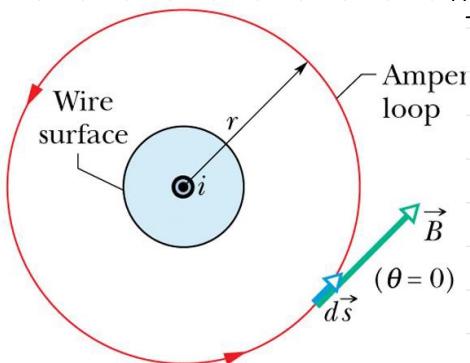
↳ circuito AMPERIANO

Il segno delle correnti dipende dal verso netto per l'integrazione. Orientando la dita lungo il verso di integrazione, le correnti concordi al pollice sono positive, mentre quelle discordi sono negative. Nel caso in esempio si avrà che  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{int}} = \mu_0 (i_1 - i_2)$



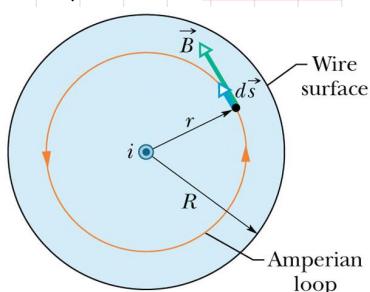
## → Campo all'esterno di un filo percorso da corrente

→  $B$  perpendicolare al filo e al vettore  $\vec{r}$  per Biot-Savart, quindi ha SIMMETRIA CIRCONFERENZIALE



Circuito amperiano: circonferenza di raggio  $r$  attorno al filo  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B ds = B \oint ds = B 2\pi r$   $\rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$   
Legge di Ampere:  $\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 i$

## → Campo all'interno del filo



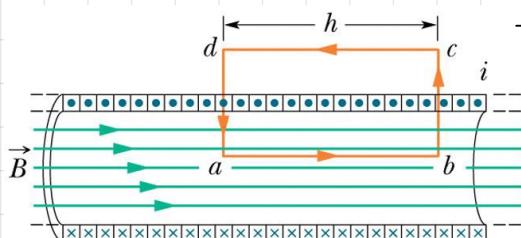
→ Densità di corrente  $j$  uniforme all'interno del filo e campo con SIMMETRIA CILINDRICA

↳  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B 2\pi r$  → Circuito amperiano: circonferenza di  $x < R$  interna al filo

$$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 i' \rightarrow i_{\text{tot}} \cdot \lambda = A_{\text{tot}} \cdot A \rightarrow \pi R^2 \rightarrow i' = \frac{\pi R^2 i_{\text{tot}}}{\pi R^2}$$

da cui  $\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 \frac{R^2 i_{\text{tot}}}{R^2}$ , da cui infine  $B = \frac{\mu_0 i_{\text{tot}}}{2\pi R^2}$

## → Il SOLENOIDE



→ Bobina cilindrica nella quale la lunghezza del filo avvolto è molto maggiore del suo diametro

Viene detto ideale se è infinitamente lungo  
↳ Analogia a condensatore per il campo elettrico: il campo magnetico è uniforme e parallelo all'asse internamente.

Se la distanza dai bordi è abbastanza grande si può supporre il campo esterno NULO → Internamente è dato dalla regola della MANO DESTRA. Avvolgendo la dita nel verso della corrente, il verso del campo è dato dal pollice

↓  
Legge di Ampere sul rettangolo abcd:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{s}$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} = Bh$$

$$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 i_{\text{int}} \quad \text{Uguagliando}$$

$$Bh = \mu_0 i_{\text{int}} \rightarrow B = \frac{\mu_0 i_{\text{int}}}{h} \rightarrow i_{\text{int}} = i_m h \rightarrow \text{unità di lunghezza}$$

numero di spire per unità di lunghezza

$$B = \frac{\mu_0 i_{\text{int}}}{h} = \frac{\mu_0 i_m}{h}$$

Solenoidi reali: Avvicinandosi ai bordi si ha un CAMPO VARIABILE, mentre fuori dal solenoide è più debole in quanto si sommano distruttivamente

### → se TOROIDI

↪ Solenoide che si chiude su se stesso: spire chiuse l'una sull'altra con CAMPO UNIFORME all'interno delle spire → Circonferenza su cui calcola il campo con Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B 2\pi r \rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I_{\text{conc}} = \mu_0 i N \quad \begin{matrix} \text{forza da esterne ed} \\ \text{intere} \end{matrix}$$

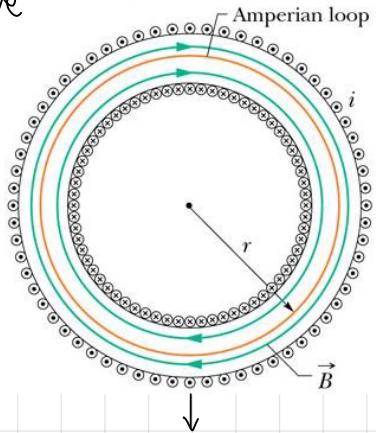
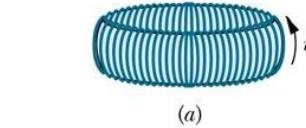
$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 I_{\text{conc}}$  concentra di una spira  $\times$  numero di spire

$$B = \frac{\mu_0 i N}{2\pi r} : \text{simmetria circolare}$$

Campo interno o esterno al toroide

→ Da concentrazione concatenata è 0

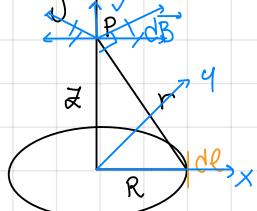
Sia per l'interno che per l'esterno del toroide il campo è NULO



Campo magnetico con linee che formano circonferenze concentriche al toroide

→ Campo di una bobina

↪ Lungo l'asse è analogo ad un dipolo magnetico



$$r^2 = z^2 + R^2 \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 i d\ell \times \vec{r}}{r^3} \rightarrow \text{rimane solo la componente verso l'alto} (\hat{z}) \quad \downarrow dB \cos\theta = dB_z$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 i dl}{r^2} \quad \downarrow dB_z = \frac{\mu_0 i dl}{r^2} \cos\theta = \frac{\mu_0 i dl \cos\theta}{z^2 + R^2}$$

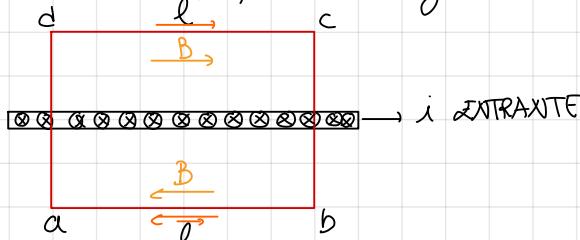
$$\cos\theta = \frac{R}{r} \quad dB_z = \frac{\mu_0 i dl}{z^2 + R^2} \rightarrow B_z = \frac{\mu_0 N i}{2\pi} \frac{N}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

↓ Al centro

$$B(z) = \frac{\mu_0 N i \pi R^2}{2\pi R^3} = \frac{\mu_0 N i}{2 R}$$

$$\rightarrow \text{In particolare, se } z \gg R \text{ si avrà: } B_z = \frac{\mu_0 N i A}{2\pi z^3 ((R/z)^2 + 1)^{3/2}} \xrightarrow{z \gg R} \frac{\mu_0 N i A}{2\pi z^3}$$

→ Campo di una piastra di fili



→ I tratti laterali non contano perché campo e lato sono ortogonali

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl + Bl = 2Bl$$

$$\text{legge di Ampere: } \Gamma(\vec{B}) = \mu_0 I_{\text{conc}}$$

$\downarrow$   
m = Numero di fili per unità di lunghezza:  $m = \frac{n \text{ fili}}{l}$

$\downarrow$   
 $m = \text{Numero di fili per unità di lunghezza: } m = \frac{n \text{ fili}}{l}$

$$\downarrow \text{Il campo sarà quindi dato da } 2Bl = \mu_0 m l i \rightarrow B = \frac{\mu_0 m i}{2} : \text{costante}$$

## Esercizi esercitazione

①



Campo  $\vec{B}$  costante  
Massa M e carica Q  
Velocità  $V_0$  ad un istante  $\perp$  a  $B$

① Dimostrare che la traiettoria è circolare

$$\vec{F}_L = Q \vec{V} \times \vec{B} \quad \rightarrow \text{I equazioni cardinali: } \vec{F}_L = m\vec{a}$$

ORTOGONALE a  $V$

lavoro della forza di Lorentz:  $\Delta AB = \int_A^B Q(V \times B) \cdot dL$

Teorema delle forze vive:  $\Delta AK = \Delta KV$

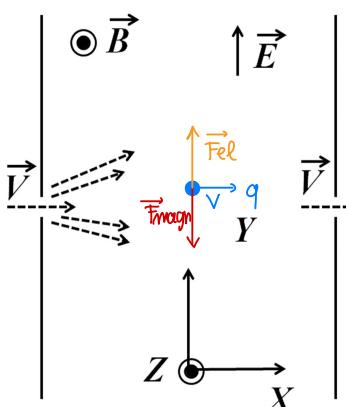
$$\Delta K = \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 = 0 \quad \text{in quanto la velocità istantanea attuale visto che è sempre } V_0$$

$$\Delta AB = 0 \quad \rightarrow \text{Attiviamo che } \vec{F} \perp \vec{dL}$$

$V$  è costante ed ortogonale all'accelerazione, quindi si ha un moto circolare uniforme

Selettore di velocità: campi  $E$  e  $B$  ortogonali tra di loro

Relazione che rende possibile il passaggio della particella dalla sferula

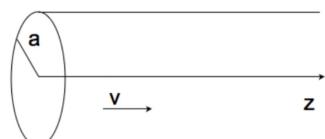


Per avere il passaggio del foro si deve avere che  $F_{el} = F_{magn}$

in quanto dirette lungo  $\vec{V}$

$$F_{el} = F_{magn} \quad \rightarrow qE = qVB, \quad \text{quindi } V = \frac{E}{B}$$

③



$$a = 1 \text{ mm} \quad m_p = 10^{18} \frac{\text{protoni}}{\text{m}^3}$$

$$V = 3000 \text{ m}/\text{l}$$

$$q \text{ proton} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

① Carica elettrica per unità di lunghezza  $\lambda$

$\lambda = \frac{q}{l}$  i protoni costituiscono normalmente un cilindro di sezione di area  $A$  e lunghezza  $l$  → il volume è dato da  $Al$

Nel volume di questo cilindro sono presenti  $m_p Al$  protoni

di carica  $q$  quindi data da  $q = m_p Al q_p$

$$\text{Si avrà quindi } \lambda = \frac{m_p q_p A l}{l} = 5.03 \cdot 10^{-12} \text{ C/m}$$

② Campo a distanza  $a/2$  ed espressione vettoriale  $\vec{E}\left(\frac{a}{2}\right)$  → Per ogni punto il campo elettrico è radiale, quindi scegliendo a come raggio si avrà che  $\vec{E} = E\hat{r}$

Per determinare il campo interno possiamo utilizzare il teorema di Gauss scegliendo come gaussiana un cilindro della stessa lunghezza  $l$  del fascio e di raggio  $r$

$$\Phi_E = E 2\pi r l$$

$\Phi_E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$  per trovare  $Q_{int}$  devo trovare la carica contenuta nel cilindro di raggio  $r$  e lunghezza  $l$  → Volume:  $\pi r^2 l$

$$\text{Carica interna: } m_p \pi r^2 l q_p$$

$$E \pi r^2 l / \epsilon_0 = \frac{m_p \pi r^2 l q_p}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{m_p q_p}{2 \epsilon_0} \rightarrow E\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{m_p q_p a}{4 \epsilon_0} = 45.18 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

③ Campo magnetico a distanza  $a/2$  ed a distanza  $2a$

Le linee di campo magnetico sono circonferenze concentriche al fascio sia interamente che esternamente ad esso  $\rightarrow$  posso applicare il teorema di Ampere scegliendo come amperiano dei circuiti circolari di raggio  $r$  sia dentro che fuori l'intercavante  $\rightarrow \oint B = B 2\pi r$



$$\oint B = \mu_0 i_{\text{conc}} \rightarrow \text{dov'è calcolare i conc}$$

$\hookrightarrow$  posso utilizzare la relazione:  $J = mqv$  e quindi  $i_{\text{conc}} = mqv\pi r^2$

$\Delta$  ATT: non me lo ricordo

$$\text{Otteniamo } B 2\pi r = \mu_0 m q v \pi r^2 \rightarrow B = \frac{\mu_0 m q v \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 m q v r}{2}$$

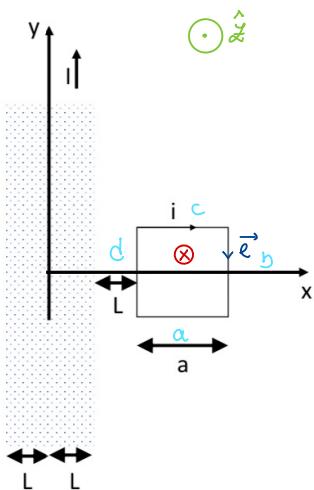
$$B\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\mu_0 m q v a}{4} = 1.5 \cdot 10^{-12} T$$

Esternamente  $\rightarrow \oint B = B 2\pi r$

$\oint B = \mu_0 i_{\text{conc}}$   $\rightarrow$  in questo caso dobbiamo prendere tutta la corrente contenuta e quindi si avrà  $i_{\text{conc}} = mqv\pi a^2$

$$\text{Avremo quindi } B 2\pi r = \mu_0 m q v \pi a^2 \rightarrow B = \frac{\mu_0 m q v \pi a^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 m q v a^2}{4r} = 1.5 \cdot 10^{-12} T$$

④



Lunghezza  $2L$  con corrente uniforme  $I$   
Spira quadrata di lato  $a$  a distanza  $x$  con corrente costante

① Campo  $B$  a distanza  $x > L$   $B(x)$

$\hookrightarrow$  Il nucleo è approssimabile ad un insieme di fili, quindi le linee di campo sono dirette lungo  $\hat{x}$  su tutto il piano  $xy$

Ciascun filo avrà quindi di "Area"  $\frac{1}{2L}$ . In ciascun filo passerà una corrente pari a  $\frac{dI}{dx} = \frac{I}{2L} dx$

Per il teorema di Ampere, in una zona con  $x > L$  si avrà che, per il teorema di Ampere, il campo di un filo avrà dato da  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(r-x)}$

$$B = \int_{-L}^{L} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{2L} \frac{1}{(r-x')} dx' = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{2L} \int_{-L}^{L} \frac{1}{r-x'} dx'$$

$$r-x' = t$$

$$-dx' = dt$$

$$-L \rightarrow r+L$$

$$= -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{2L} \int_{r+L}^{r-L} \frac{1}{t} dt = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{2L} \int_{r-L}^{r+L} \frac{1}{t} dt =$$

$$L \rightarrow r-L$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{2L} \ln \left( \frac{r+L}{r-L} \right)$$

$$\vec{B}(r) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{2l} \ln\left(\frac{r+d}{r-d}\right) \hat{z}$$

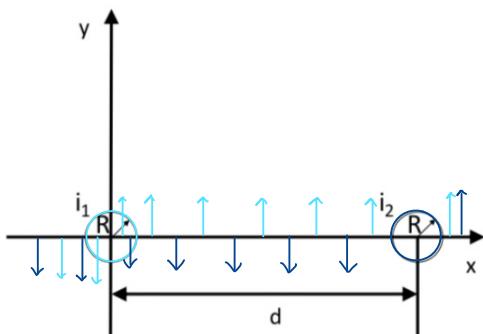
② Forza magnetica sulla spira

↪ il campo è ENTRANTE, quindi sceglieremo  $\vec{l}$  orientata in verso ORARIO  
la forza sui lati a e c si annulla, quindi rimane soltanto la forza sui lati b e d

$$F_d(b) = F_d(d+a) = ia B(d+a) \hat{x} \quad \rightarrow \quad \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{2l} \left[ \ln\left(\frac{3d+a}{2d}\right) - \ln\left(\frac{3d}{2d}\right) \right] = -2 \cdot 10^{-3} N$$

$$F_d(d) = F_d(d) = -ia B(d) \hat{x}$$

⑤



Fili di raggio R con assi distanti d  
 $i_1 = i_2 = i$

① Campo per  $0 \leq x \leq R$ ,  $\vec{B}_A(x)$

$$\hookrightarrow \vec{B}_A(x) = B_A(x) \hat{y}$$

Princípio di sovrapposizione:  $B_A(x) = B_{A1}(x) - B_{A2}(x)$

$$\text{Campo di un filo: } B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x}$$

Campo interno al filo: Teorema di Ampere:  $B 2\pi R = \mu_0 i_{\text{conc}}$

$$\text{calcolo i conc: } i_{\text{tot}}: i_{\text{conc}} = \pi R^2: \pi r^2 \rightarrow i_{\text{conc}} = \frac{i}{R^2}$$

$$B 2\pi R = \frac{ir^2}{R^2} \mu_0 \rightarrow B = \frac{\mu_0 ir}{2\pi R^2}$$

$$B_{A1}(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{x}{R^2} - \frac{1}{d-x} \right)$$

$$② B_{A2}(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x} - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{d-x} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{d-x} \right)$$

$$③ B_C(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} i \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d+x} \right)$$

# L'induzione magnetica

→ Introduzione

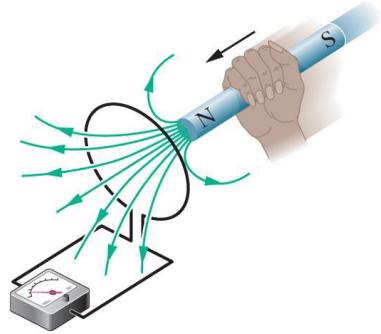
↪ da corrente si genera soltanto se spira e magnete sono in moto RELATIVO → Maggiore velocità corrisponde a maggiore campo magnetico

↪ da corrente generata si chiama corrente indotta

Perché per generare corrente è necessario che sia presente

**FUSSO DEL CAMPO MAGNETICO** attraverso la **superficie scelta**

↪ la superficie **NON** deve essere chiusa, altrimenti per tutti il flusso sarebbe 0



La corrente indotta dipende quindi dalla **VARIAZIONE di FUSSO nel TEMPO** e non dipende dall'intensità del campo ma belli dalla **VELOCITÀ** della sua **VARIAZIONE**

↪ Flusso del campo magnetico:  $\phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$  superficie piatta  $\rightarrow \phi_B = BA$

↪ Unità di misura: **Weber = T · m<sup>2</sup>**

→ La legge di Faraday

↪  $E = -\frac{d\phi_B}{dt}$  → Il - indica che la corrente si oppone alla variazione di flusso

↪ Legge di Lenz

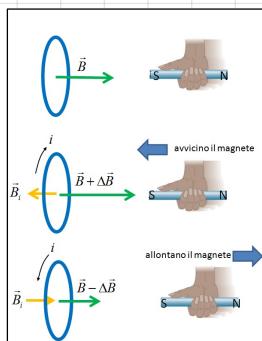
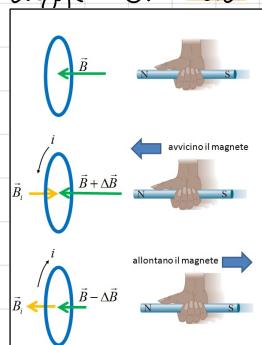
La variazione nel tempo del flusso magnetico attraverso l'area della spira induce nella spira una forza elettromotrice uguale alla derivata del flusso rispetto al tempo, causata di segno → Equivale ad inserire una batteria

Attraverso una bobina:  $E = -N \frac{d\phi_B}{dt}$ : le fmm indotte su ciascuna spira si **SOMMANO** come batterie **N SERIE**

4 modi per fare variare il campo

- **B variabile nel tempo**
- **Variazione dell'area**
- **Variazione della posizione della spira in B non uniforme**
- **Ruotare la spira per variare angolo tra B e dA**

→ Legge di Lenz



→ Avvicinando o allontanando il magnete ad una spira aumentiamo o diminuiamo le linee di campo che la attraversano → Il campo magnetico della spira si oppone alla variazione di flusso, quindi **repuge il magnete in avvicinamento e trattiene quello che si allontana**

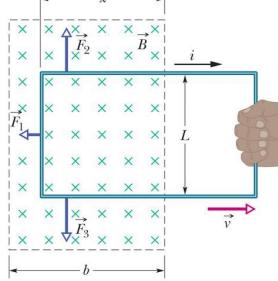
→ Trasferimento di energia

↪ Come già visto, per avvicinare o allontanare il magnete dalla spira viene richiesta forza → Bisogna SPENDERE ENERGIA

L'effetto Joule prevede che per circolare corrente indotta sì richieda **energia termica** da spendere nel circuito → Necesaria **energia meccanica** dall'esterno

→ Durante l'estrazione, il flusso del campo magnetico **DIMINUISCE**

↪ Si ha che  $\phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = BxL$



Con v costante si avrà  $x = b - vt \rightarrow \frac{d\phi_B}{dt} = -BvL$

Campo indotto opposto alla variazione:  $E_i = -\frac{d\phi_B}{dt} = BvL \rightarrow i = \frac{BvL}{R}$

Sul lato verticale si genera forza di Lorentz:  $\vec{F}_1 = -i\lambda B \hat{x} = -\frac{\lambda^2 B^2 V}{R} \hat{x}$

→ Riscuchia la spira all'interno

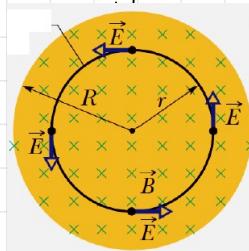
Per estrarre la spira è necessaria una forza uguale ed opposta a  $F_1$ . Il lavoro di tale forza è dato da  $d\ell = F_1 dx \rightarrow P = \frac{d\ell}{dt} = \frac{F_1 dx}{dt} = F_1 V = \frac{\lambda^2 B^2 V^2}{R}$

La potenza dissipata da un resistore è pari a  $P = RI^2 = \frac{\lambda^2 B^2 V^2}{R}$

→ Campo elettrico indotto

$$\hookrightarrow \mathcal{E} = V^+ - V^- = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \xrightarrow{\text{Legge di Faraday}} \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t}$$

da variazione di flusso di campo magnetico  $\phi_B$ , intorno alla direzione di variazione di flusso, un campo elettrico indotto



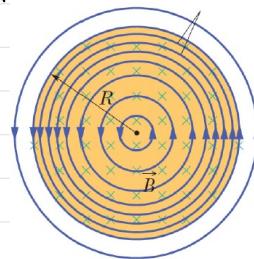
→ solenoide con campo magnetico  $B$  nel tempo (per esempio, cambia la corrente) → se il campo varia in direzione dell'asse del solenoide, se consideriamo un cerchio intorno concentrico all'asse, vi è un campo  $E$  con simmetria cilindrica opposto a variazione di  $B$   
 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(2\pi r) = \frac{\partial \phi_B}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} \pi r^2 \rightarrow E(r) = \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial t} r$

Le linee si acciuffano per  $r$  maggiore

All'esterno del solenoide

$$\hookrightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(2\pi r) = \frac{\partial \phi_B}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} \pi r^2 \rightarrow E(r) = \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{r^2}{R^2} \rightarrow \text{Diminuisce}$$

flusso varia fino ad  $r=R$  con  $r$



Relazione tra campo indotto e campo di Coulomb: le linee del campo di Coulomb vanno da cava a + a cava - ed è conservativo, mentre il campo indotto ha linee chiuse e NON è conservativo perché **non** è conservativo perché **non** è conservativo

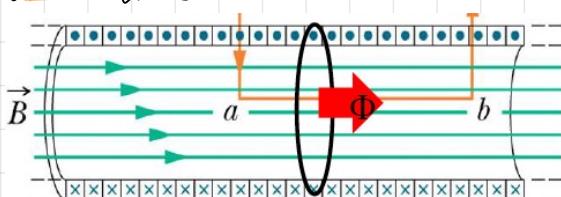
→ gli induttori

→ Sono dispositivi che permettono di generare campi magnetici di prima specie come ad esempio solenoidi, toroidi e bobine → All'esterno il campo è supposto nullo

Induttanza:  $\mathcal{L} = \frac{N\phi_B}{i}$ : ha lo stesso ruolo della CAPACITÀ

$$[\mathcal{L}] = \frac{V \cdot m^2}{A} = \frac{Wb}{A} = H$$

Induttanza di un solenoide



$$B = \mu_0 i \text{ m}$$

$$\phi_B = BA = \mu_0 i \text{ mA}$$

$$\mathcal{L} = \frac{N\phi_B}{i} = \frac{N \mu_0 i A}{i} = \mu_0 N^2 A$$

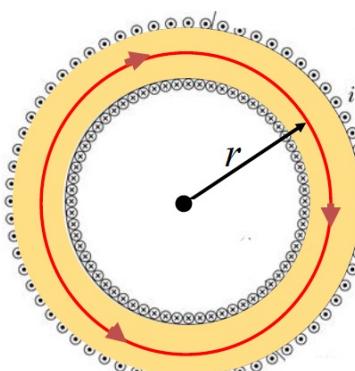
Induttanza per unità di lunghezza:  $\frac{\mathcal{L}}{l} = \mu_0 N^2 A$

Induttanza del toroide

→ Toroide di sezione  $R$  e spira di raggi  $r$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ni}{r} \rightarrow N\phi_B = NB\pi R^2 = \frac{\mu_0 N^2 i R^2}{2\pi}$$

$$\mathcal{L} = \frac{N\phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 R^2}{2\pi}$$



## → Autoinduzione magnetica

Se faccio circolare una corrente in un solenoide od in un toroide si genera una variazione di flusso magnetico, che genera un campo elettrico indotto e quindi una f.e.m. indotta

$$\text{In un induttore si ha } i_d = N\phi_B \rightarrow \frac{d\phi_B}{dt} = \frac{N\phi_B}{dt}$$

$$\text{Se la corrente varia, si genera una f.e.m. autoindotta } \mathcal{E}_L = -N\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

→ Dipende dalla derivata della corrente nel tempo → si oppone alla variazione di  $i(t)$  nel tempo per la legge di Lenz

## → Il circuito RL

Circuito composto da RESISTENZA ed INDUCTANZA

La resistenza è INTRINSECA del filo dell'induttanza

Se non ci fosse induttanza la corrente avrebbe subito  $i = \frac{\mathcal{E}}{R}$  mentre, grazie all'induttanza si curva che

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} \rightarrow \text{Per Kirchoff: } \mathcal{E} + \mathcal{E}_L = R i$$

$$\mathcal{E} = R i + L \frac{di}{dt}$$

$$\text{Equazione differenziale di soluzione } i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_L}} \right) \text{ con } T_L = \frac{L}{R} \text{ c.t. di tempo caratteristica}$$

→ condizione iniziale:  $i(0) = 0$

→ Trascurando l'alimentazione, la corrente si acciona sulla resistenza:  $Ri + L \frac{di}{dt} = 0$  con  $i(0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$

→ Energia immagazzinata nell'induttore → l'energia del generatore viene dissipata in forma di perdita della resistenza

→ Energia immagazzinata nell'induttore:  $i^2 \frac{L}{2}$

$$\mathcal{E}_i = R i^2 + i L \frac{di}{dt} : \text{conservazione dell'energia}$$

Potenza erogata dalla batteria

Energia immagazzinata nell'induttore:  $i \Delta U_L$

$$\text{Potenza immagazzinata: } P_L = \frac{dU}{dt} = i \frac{di}{dt} \rightarrow U(t) = \frac{1}{2} S_0 i^2 = \frac{1}{2} L i^2 (t)$$

Al termine della fase transiente si avrà  $U = \frac{1}{2} \alpha i^2 (\infty)$

Densità di energia in un solenoide di lunghezza  $l$  ed area  $A$

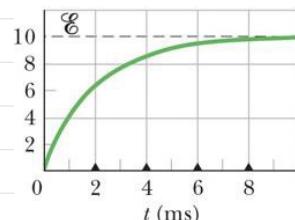
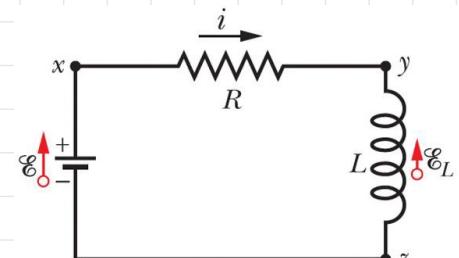
$$u = \frac{U}{Al} = \frac{1}{2} \frac{i^2}{A} = \frac{\alpha}{l} \frac{i^2}{2A} \text{ con } \frac{\alpha}{l} = \mu_0 m^2 A \rightarrow u = \frac{1}{2} \mu_0 m^2 i^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 m^2 i^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

## → Correnti di Foucault o percorrente

→ Sono le correnti prodotte dalla variazione di flusso magnetico in tutti i conduttori

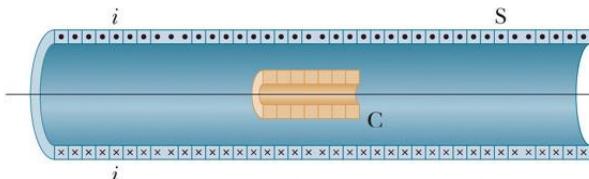
Le corde nichili generano milioni di corrente lungo le linee di flusso del campo elettrico indotto → possono essere molto forti nel caso di variazione molto rapida



del flujo del campo magnético

## Esercizi di esempio

- ① Solenoide ideale con  $n = 200 \text{ ncoil/cm}^2 = 20.000 \text{ ncoil/m}^2$  percorso da  $i_0 = 5A$   
 Corrente nulla dopo  $\Delta t = 60 \cdot 10^{-3} s$ . Nel centro viene messa bobina con  $N = 100 \text{ ncoil}$  e  
 diametro  $d = 2\text{cm}$



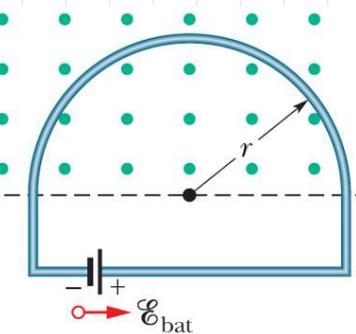
Campo di un solenoide:  $B = \mu_0 i n$   
 corrente diminuisce linearmente:  $i(t) = i_0 - ct$

$$\text{Trovo } c: 0 = 5 - C \cdot 10^{-3} \rightarrow C = \frac{5}{10^{-3}} = 5000 \text{ A}^{-1}$$

$$\phi_B = B \cdot N \cdot \pi \cdot d^2 = \mu_0 i(t) N \pi d^2 / L = \mu_0 [i_0 - 5000t] N \pi d^2 / L$$

$$E_{\text{ind}} = -\frac{d\phi}{dt} = 5000 \mu_0 N \pi d^2 / L$$

②



Semicerchio di raggio  $r$  e  $3$  tratti rettilinei di resistenza  $R$

Campo magnetico  $B$  ucente e perpendicolare

$$E_{\text{bat}} = 1V$$

$$R = 2\Omega$$

$$r = 10 \text{ cm} = 0.1m$$

$$B = (4t^2 + 2t + 3) T$$

- ① fissa indotta e verso della corrente indotta a  $t = 10s$

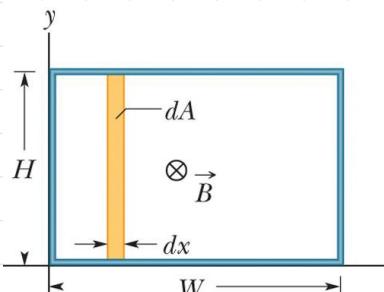
$$\phi_B = B \frac{\pi r^2}{2} \rightarrow E_{\text{ind}} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(4t^2 + 2t + 3)}{dt} \frac{\pi r^2}{2} = -(8t + 2) \frac{\pi r^2}{2} = \\ = (-4t - 1) \pi r^2 \rightarrow a \ t = 10s = -0.41 \pi V = -1.29V$$

La corrente scorre in senso orario

- ② Corrente totale a  $t = 10s$

$$E_{\text{ind}} - E_{\text{bat}} = Ri \rightarrow i = \frac{E_{\text{ind}} - E_{\text{bat}}}{R} = \frac{0.29}{2\Omega} = 0.145A$$

③



$$a = 3m$$

$$b = 2m$$

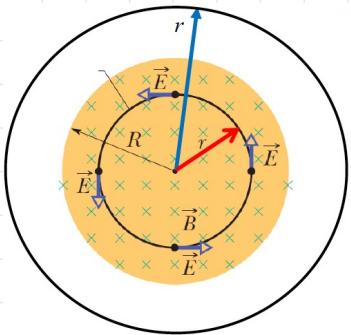
$$B = (4x^2 + t^2) T$$

$$t = 0.1s$$

$$\phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_A B dA = \int_0^a 4x^2 t^2 b dx = 4t^2 b \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a = 4t^2 \frac{a^3 b}{3} \text{ Tm}^2$$

$$E_{\text{ind}} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} 4t^2 \frac{a^3 b}{3} = -\frac{8}{3} t + \frac{a^3 b}{3} \sqrt{\frac{t=0.1}{16.4V}}$$

(4)



Solenoido di raggio  $R = 5\text{cm}$   
 $\frac{dB(t)}{dt} = 0.1 \text{T/s}$

Campo elettrico per  $r = 5\text{cm}$

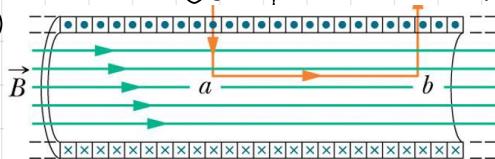
$$\text{Campo indotto: } \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\phi_B}{dt} \longrightarrow \phi_B \text{ è dato da } B\pi r^2$$

$$\vec{E}(2\pi r) = - \frac{dB}{dt} \pi r^2 \longrightarrow E_{2\pi r} = -0.1 \frac{\text{Tm}^2}{\text{s}}$$

Campo elettrico per  $r = 1\text{cm}$  → esterno

$$\vec{E}(2\pi r) = \frac{dB}{dt} \frac{\pi r^2}{R^2} \longrightarrow E = \frac{dB}{dt} \frac{r^2}{2R} = 2.7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

(5)



$$l = 10\text{cm} = 0.1\text{m}$$

$$m = 10\text{cm} = 100\text{cm}$$

$$R = 1\text{cm}$$

$$i = i_0 \sin(\omega t) \quad i_0 = 1\text{A}$$

$$\omega = 100 \text{ rad/s}$$

① Induttanza del solenoide

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \longrightarrow B_{\text{solenoido}} = \mu_0 n i \quad L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} = \mu_0 n^2 A l = 100^2 \cdot 10^{-6} \text{ H} = 39.5 \mu\text{H}$$

② campo autoindotto a  $t = 5\text{ms}$ ,  $t = 100\text{ms}$ ,  $t = 1\text{s}$

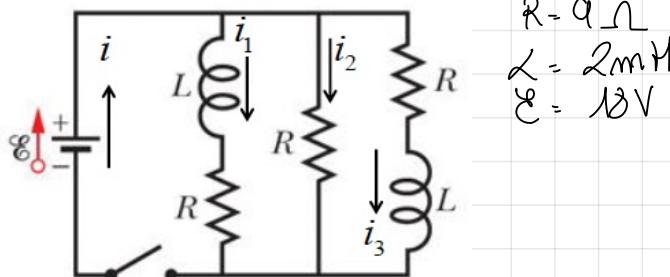
$$V_{\text{autoind}} = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d}{dt} i_0 \sin(\omega t) = -L \omega \cos(\omega t) i_0$$

$$\rightarrow t = 5\text{ms} = -3.47 \text{ mV}$$

$$\rightarrow t = 100\text{ms} = 3.31 \text{ mV}$$

$$\rightarrow t = 1\text{s} = -3.61 \text{ mV}$$

(6)



$$R = 9\Omega$$

$$L = 2\text{mH}$$

$$\mathcal{E} = 18\text{V}$$

① Corrente  $i$  che attraversa il ramo e le correnti lungo i 3 rami all'inizio 3 rami in parallelo, quindi  $\Delta V = \mathcal{E}$  per tutti i 3 rami

$$\text{Primo ramo: } \mathcal{E} = i_1 R + L \frac{di_1}{dt}$$

$$\text{Secondo ramo: } \mathcal{E} = i_2 R$$

$$\text{Terzo ramo: } \mathcal{E} = i_3 R + L \frac{di_3}{dt}$$

$$\text{per } t=0: i_2(0)=0 = i_3(0)$$

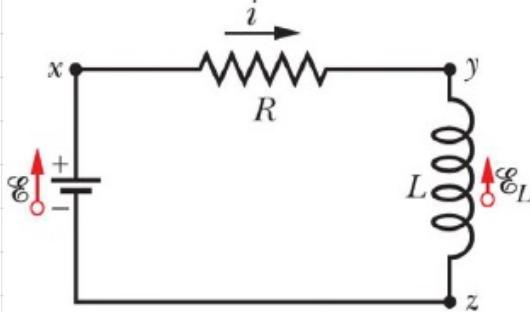
$$\text{All'intante iniziale } \mathcal{E} = i_2 R \longrightarrow i_2 R = \mathcal{E} \longrightarrow i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R} = 2\text{A}$$

② Correnti nel regime stazionario

$$\hookrightarrow \text{Induttori = fili conduttori: } 10 \times 10 \longrightarrow i_1 = 2\text{A} = i_2 = i_3$$

$$i_{\text{tot}} = i_1 + i_2 + i_3 = 6\text{A}$$

⑦



$$R = 0.25 \Omega$$

$$\lambda = 50 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

Tempo necessario per arrivare a voltaggio di equilibrio  $\rightarrow$  Condizione di equilibrio  
quando  $i = \frac{E}{R}$

$$E = R i(t) + \lambda i'(t) \rightarrow \lambda i'(t) = E - R i(t) \rightarrow i'(t) = \frac{E}{\lambda} - \frac{R}{\lambda} i(t)$$

$$a(t) = -\frac{R}{\lambda} \quad A(t) = -\frac{R}{\lambda} t \quad b(t) = \frac{E}{\lambda}$$

$$e^{\frac{-R}{\lambda} t} \int e^{\frac{R}{\lambda} t} \frac{E}{\lambda} dt = \frac{E}{\lambda} e^{\frac{R}{\lambda} t} \int e^{\frac{R}{\lambda} t} dt = \frac{E}{\lambda} e^{\frac{R}{\lambda} t} \left[ \frac{1}{\lambda} e^{\frac{R}{\lambda} t} + C \right] =$$

$$= \frac{E}{\lambda} e^{\frac{-R}{\lambda} t} \cancel{\frac{e^{\frac{R}{\lambda} t}}{\lambda}} + C \frac{E}{\lambda} e^{\frac{-R}{\lambda} t} \rightarrow \frac{E}{\lambda} + \frac{E}{\lambda} e^{\frac{-R}{\lambda} t} C = i(t)$$

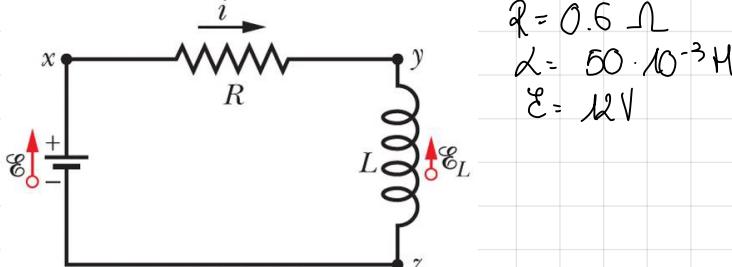
$$i(0) = 0 \rightarrow \cancel{\frac{E}{\lambda}} + \cancel{\frac{E}{\lambda} C} = 0 \rightarrow C = -\frac{\lambda}{R}$$

$$i(t) = \frac{E}{\lambda} - \frac{E}{\lambda} e^{-\frac{R}{\lambda} t} = \frac{E}{\lambda} \left( 1 - e^{-\frac{R}{\lambda} t} \right) = \frac{E}{\lambda} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_L}} \right) \text{ con } T_L = \frac{\lambda}{R}$$

$$\frac{E}{2\lambda} = \frac{E}{\lambda} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_L}} \right) \rightarrow \frac{1}{2} = \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_L}} \right) \rightarrow \frac{1}{2} = f e^{-\frac{t}{T_L}}$$

$$e^{-\frac{t}{T_L}} = \frac{1}{2} \rightarrow -t \cdot \frac{R}{\lambda} = \ln \frac{1}{2} \rightarrow t = -\frac{\lambda}{R} \ln \frac{1}{2} = 0.161$$

⑧



$$R = 0.6 \Omega$$

$$\lambda = 50 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

$$E = 12 \text{ V}$$

① Energia dell'induttore all'equilibrio

$$\hookrightarrow V = \frac{1}{2} \lambda i^2 \rightarrow i = \frac{E}{R} = \frac{12}{0.6} = 20 \text{ A}$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot (20)^2 = 10 \text{ J}$$

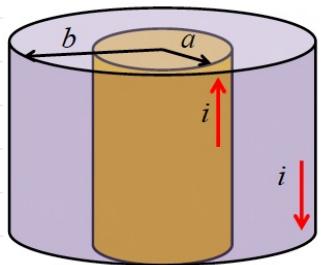
② Tempo necessario per immagazzinare metà energia di quella di equilibrio

$$V(t) = \frac{1}{2} \lambda \left( \frac{E^2}{R^2} \right) \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_L}} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \lambda \left( \frac{E^2}{R^2} \right) \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_L}} \right)^2$$

$$10 = \left( \frac{E}{R} \right)^2 \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_L}} \right)^2 \rightarrow -e^{-\frac{t}{T_L}} = 1 - \sqrt{10} \frac{R}{E}$$

$$-\frac{t}{T_2} = \ln \left( \sqrt{10} \frac{R}{\epsilon} - 1 \right) \rightarrow t = -\frac{\epsilon}{R} \ln \left( 1 - \sqrt{10} \frac{R}{\epsilon} \right) = 0.018$$

⑨



$$\begin{aligned} a &= 1.2 \text{ mm} \\ b &= 3.6 \text{ mm} \\ i &= 2A \text{ in versi opposti} \end{aligned}$$

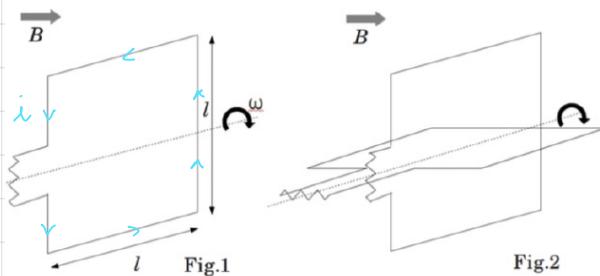
① Energia immagazzinata in tratto di lunghezza  $l \cdot 1 \text{ m}$  campo volto intorno nell'intercapedine:  $B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r}$

$$w(r) = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0^2 i^2}{8\pi \mu_0 r^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{i^2}{r^2}$$

$$\begin{aligned} V &= l \int_a^b \frac{\mu_0}{48\pi} \frac{i^2}{r^2} dr = l \frac{\mu_0 i^2}{4} \int_a^b \frac{1}{r} dr = l \frac{\mu_0 i^2}{4} \ln \left( \frac{b}{a} \right) = \\ &= 6.6 \cdot 10^{-7} \text{ J} \end{aligned}$$

## Esercizi esercitazione

①



lato  $l$   
resistenza  $R$   
velocità angolare  $\omega$   
campo  $B$  costante ed uniforme

- ① Flusso di  $B$  in funzione del tempo avendo che a  $t=0$  la spira è ortogonale al campo magnetico  $\phi^B(t)$

$$\phi^B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = Bl^2 \cos(\omega t)$$

angolo dato dalla velocità di rotazione  $\omega$

- ② Corrente  $I(t)$

$$I(t) = \frac{E(t)}{R} = - \frac{d\phi(B)}{dt} = \frac{Bl^2 w \sin(\omega t)}{R} = \frac{Bl^2 w \sin(\omega t)}{R}$$

- ③ Potenza dissipata su  $R$  in funzione di  $t$ ,  $P(t)$

$$P(t) = R(i(t))^2 = R \frac{Bl^2 w^2 \sin^2(\omega t)}{R^2} = \frac{B^2 l^4 w^2 \sin^2(\omega t)}{R}$$

- ④ Spire ortogonali di stesso lato  $l$  con resistenza  $R$  ruotano insieme. Si dimostri che  $P_{TOT} = P_1(t) + P_2(t) =$  COSTANTE

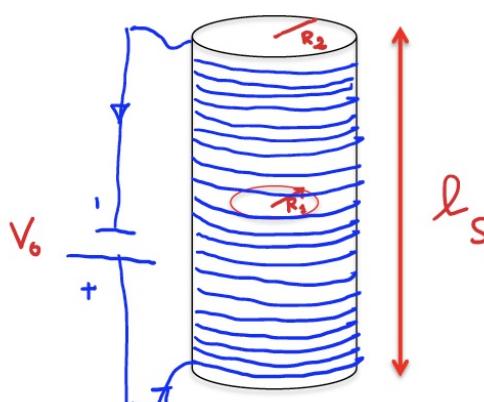
Tutto ciò che riguarda la prima spira rimane INVARIATO  
Per la seconda spira si avrà uno sfasamento di  $\phi = \frac{\pi}{2}$

$$\phi^B = Bl^2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -Bl^2 \sin(\omega t)$$

$$I(t) = \frac{-d(-Bl^2 \sin(\omega t))}{dt} \cdot \frac{1}{R} = \frac{Bl^2 \cos(\omega t)}{R} \longrightarrow P_2(t) = \frac{B^2 l^4 w^2 \cos^2(\omega t)}{R}$$

$$P_{TOT} = \frac{B^2 l^4 w^2}{R} (\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) = \frac{B^2 l^4 w^2}{R} : \text{COSTANTE NEL TEMPO}$$

- ② ATT: esercizio di esame



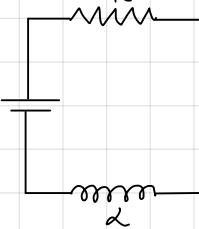
$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \text{ m} \\ R_{circ} &= 10 \Omega \\ R_2 &= 3 \text{ m} \\ l_s &= 10 \text{ cm} \\ S &= 1 \text{ cm}^2 \\ \rho &= 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m} \\ l_f &= 10 \text{ km} \\ V_0 &= 100 \text{ V} \end{aligned}$$

① Campo magnetico nel solenoide in condizioni STAZIONARIE corrente continua

↓

Circuito equivalente al solenoide:

↪ Circuito RL



$R = \rho \frac{l}{A}$  → Resistività del filo  
l → lunghezza del filo  
A → Sezione del filo

$$R = 1.7 \Omega$$

Termine del resistore:  $Ri$

Termine dell'induttore:  $\alpha \frac{di}{dt}$

Devo trovare l'induttanza del solenoide:  $L = N \frac{\phi_B}{i}$  → numero spire solenoide

Per trovare il numero di spire:  $N_s = \frac{10 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 3} = 530$  spire

B solenoide:  $\mu_0 m i = \mu_0 \frac{N_s}{ls} i$

$\phi_B = \mu_0 \frac{N_s}{ls} i \cdot A$  → Area solenoide:  $\pi R_i^2 = 20.3 \text{ m}^2$

$$L = N_s \mu_0 \frac{N_s}{ls} \lambda A \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{N_s^2 \mu_0 A}{ls} = 1 \text{ H}$$

$$V_o = Ri + \alpha \frac{di}{dt} \rightarrow V_o = Ri(t) + \alpha i'(t)$$

$\downarrow -\alpha i'(t) = Ri(t) - V_o \rightarrow i'(t) = \frac{V_o}{\alpha} - \frac{R}{\alpha} i(t)$

$$a(t) = -\frac{R}{\alpha} \quad A(t) = \frac{-Rt}{\alpha} \quad b(t) = \frac{V_o}{\alpha} e^{-\frac{R}{\alpha} t} \int \frac{V_o}{\alpha} e^{\frac{R}{\alpha} t} dt$$

$$\frac{V_o}{\alpha} e^{-\frac{R}{\alpha} t} \left[ \frac{1}{\alpha} e^{\frac{R}{\alpha} t} + C \right] = \frac{V_o}{\alpha} + C e^{-\frac{R}{\alpha} t} = i(t) \quad i(0) = 0$$

$$\frac{V_o}{\alpha} + C = 0 \rightarrow C = -\frac{V_o}{\alpha} \rightarrow i(t) = \frac{V_o}{\alpha} (1 - e^{-\frac{R}{\alpha} t}) = \frac{V_o}{\alpha} (1 - e^{-\frac{R}{T} t})$$

↪ Condizioni stazionarie

$$i(\infty) = \frac{V_o}{R} = 50.0 \text{ A} \rightarrow B_{\text{staz}} = \mu_0 \frac{N_s}{ls} i(\infty) = 3.92 \cdot 10^{-3} \text{ T} \quad T = \frac{L}{R} = 0.588 \text{ s}$$

② Energia immagazzinata nel solenoide a  $t_1 = 0.21$

$$\Delta E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \alpha i(t_1)^2$$

$$\text{Calcolo } i(t_1) \rightarrow i(t_1) = \frac{V_o}{\alpha} (1 - e^{-\frac{R}{T} t_1}) = 17 \text{ A} \rightarrow \Delta E_{\text{magn}} = 146 \text{ J}$$

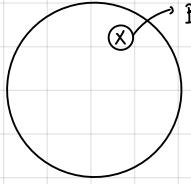
③ Corrente nel circuito di raggio  $R_i$  per  $t_2 = 0.51$

$$B_{\text{sol}} = \mu_0 \frac{N_s}{ls} \frac{V_o}{R} (1 - e^{-\frac{R}{T} t_2}) \quad \frac{d}{dt} e^{-\frac{R}{T} t} + \frac{1}{T} e^{-\frac{R}{T} t}$$

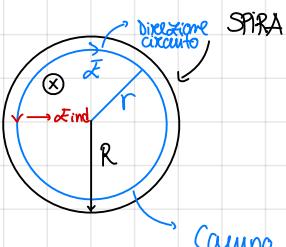
$$\phi_B \text{ circuito} = \mu_0 \frac{N_s}{ls} \frac{V_o}{R} (1 - e^{-\frac{R}{T} t_2}) \pi R_i^2$$

$$i_{\text{ind circuito}} = -\frac{d\phi_B}{dt} \cdot \frac{1}{R_{\text{circuito}}} \rightarrow i_{\text{ind}} = -\mu_0 \frac{N_s}{ls} \frac{V_o}{R} \cdot \frac{1}{T} e^{-\frac{R}{T} t_2} \pi R_i^2 \cdot \frac{1}{R_{\text{circuito}}}$$

$$|i_{\text{ind}}(t_2)| = 0.94 \cdot 10^{-4} \text{ A}$$

③  varia con la legge  $\vec{B}(t) = -at\hat{z}$  → Determinare il campo elettrico indotto  
In ogni arco  $\hat{z}$  ind ha linee chiuso ed è evidente che non sono parallele, NON è conservativo

Per calcolare  $\hat{z}$  ind divido il problema in 2 casi, internamente ed esternamente alla spira



$$\text{Avendo che } \mathcal{E} = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

$$\text{Si ha che } \mathcal{E} = \int \mathcal{E} ds$$

Rappresenta il circuito blu che ho così deciso

$$\rightarrow \mathcal{E}_{2\pi r} = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

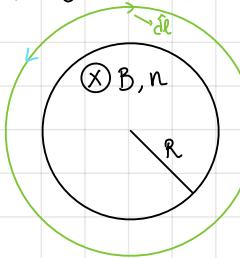
↓

Determino il flusso attraverso la zona blu  $\rightarrow \phi_{B,\text{blu}} = B\pi r^2 = at\pi r^2$

$$\mathcal{E}_{2\pi r} = -at\pi r^2 \rightarrow \mathcal{E} = \frac{-ar}{2}$$

Diretto nel verso opposto alla direzionalità del circuito compieremo

esternamente alla spira



$$\rightarrow \phi_B = B\pi R^2 = at\pi R^2$$

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = - \frac{d\phi_B}{dt} = -at\pi R^2$$

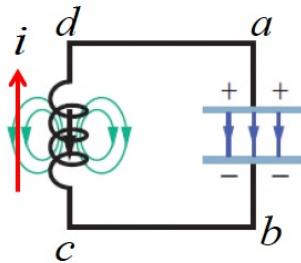
$$\mathcal{E}_{2\pi r} = -at\pi R^2 \rightarrow \mathcal{E} = \frac{-aR^2}{2r}$$

→ Diminuisce linearmente all'esterno

## La corrente alternata

- Inverte il suo verso periodicamente (ad esempio sinusoidalmente) con una frequenza precisa → con un'induttanza il campo  $B$  cambia periodicamente verso
  - ↪ Permette di ottimizzare produzione, trasporto ed utilizzo

## Il circuito LC



→ Quando l'interruttore carica e poi circola

viene chiuso l'induttanza si carica in verso alternato

L'induttanza viene collegata ad un condensatore carico  
↪ Per Kirchoff i cui devono stare allo stesso potenziale

$$\frac{Q}{C} - \frac{L \frac{di}{dt}}{C} \rightarrow \frac{Q(t)}{C} + \frac{L \frac{di}{dt}}{C} = 0 \rightarrow \frac{q(t)}{C} + \frac{L \frac{d^2 q(t)}{dt^2}}{C} = 0$$

$$\rightarrow \frac{L \frac{d^2 q(t)}{dt^2}}{C} = -\frac{q(t)}{C}$$

Analogia moto armonico

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

base arbitraria  $\sqrt{LC}$

$$i(t) = -\omega q_0 \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow \text{differenza per } \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ da } q(t)$$

valore massimo della carica sui piatti

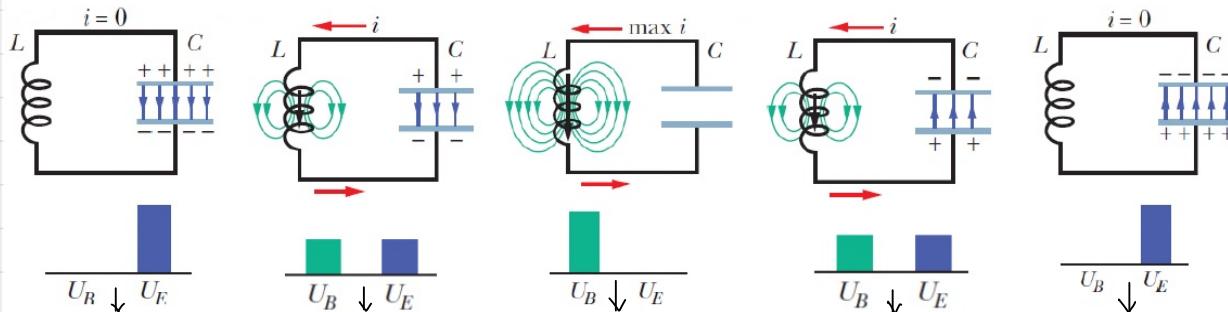
possiamo anche ricavare l'energia del circuito

$$\hookrightarrow \text{conservazione dell'energia E: } U_{TOT} = U_R + U_C = \text{cost} \rightarrow \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \text{cost}$$

$$\text{Posso trovare la legge oraria: } \frac{dU}{dt} = L \cdot \frac{1}{2} \frac{di}{dt} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{2} \frac{1}{C} \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

Primo semiperiodo ↗



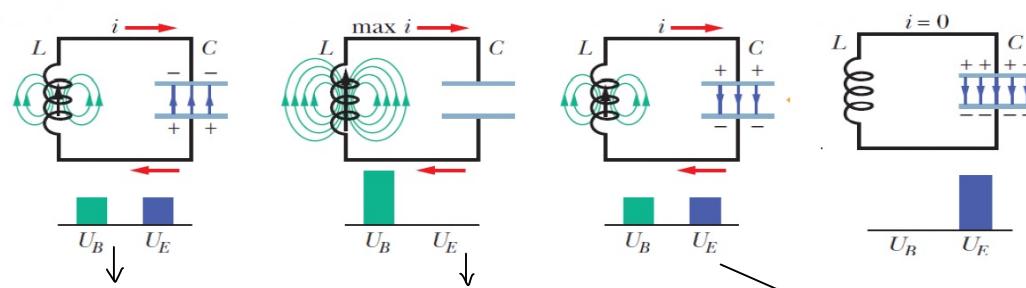
$i=0$  con  $C$  totalmente scarico e con  $L$  totale mente carico

$C$  totale mente scarico ed  $i$  si scarica e

corrente fluisce solo in  $L$  in  $C$

$C$  è carico totalmente ma ha campo opposto a quello iniziale

Secondo semiperiodo ↗



→ Condizione iniziale

$C$  si scarica e cresce la corrente ed il campo magnetico in  $L$

corrente e campo sono massimi e  $C$  è scarico

Ricarica del condensatore per tornare nello stato iniziale

La ddp ai capi di  $C$  ed  $i$  differisce di  $T/2$ , quindi è uguale ed opposta

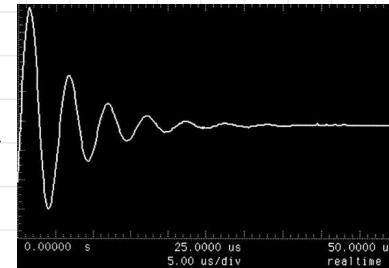
↓ Energia del circuito  $\rightarrow$  Elettrica:  $V_C(t) = \frac{Q_0 t^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} \cos^2(\omega t)$

$\rightarrow$  Magnetica:  $V_L(t) = \frac{L(t)^2}{2} = \frac{W^2 Q^2 L}{2} \sin^2(\omega t) = \frac{Q^2}{2C} \sin^2(\omega t)$

TOTALE:  $V_C(t) + V_L(t) = \frac{Q^2}{2C}$

→ Il circuito RLC

→ Le resistenze DISSIPANO ENERGIA ( $P_{diss} = R i^2$ )



Le oscillazioni sono SUONATE e per mantenerle costanti è necessario un generatore di corrente alternata variabile sinusoidalmente nel tempo con frequenza uguale a quella del circuito AC

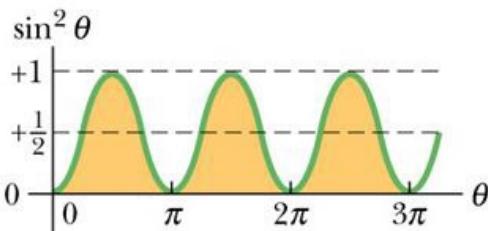
→ Generatore di corrente alternata

Spira nel campo magnetico  $B$  che viene fatta ruotare con frequenza costante  $\omega_g$  → Flusso magnetico variabile ( $\phi_B = BA \cos(\omega_g t)$ )

$$\rightarrow \text{FEM INNATA: } \mathcal{E}(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} = B A \omega_g \sin(\omega_g t)$$

$$\rightarrow \text{CORRENTE INNATA: } i(t) = \frac{\mathcal{E}_{max} \sin(\omega_g t)}{R} = I \sin(\omega_g t)$$

Potenza media nel circuito RLC  $\downarrow$  e corrente indotta sono ALTERNATE



→ Potenza intantanea dissipata su  $R$

$$P(t) = R i^2(t) = R^2 I^2 \sin^2(\omega_g t)$$

valore medio di  $\sin^2$  e  $\cos^2$  = 1/2

$$\bar{P} = R \bar{i}^2 = R I^2 \langle \sin^2(\omega_g t) \rangle = \frac{R I^2}{2}$$

Valore quadratrico medio corrente  $I_{q.m.} = \sqrt{\langle i^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{I^2}{2}} = \frac{I}{\sqrt{2}}$   $\rightarrow \bar{P} = R I_{q.m.}^2$

Potenza intantanea:  $P(t) = i(t) \mathcal{E}_g(t) = I \mathcal{E}_{max} \sin^2(\omega_g t)$

$$\bar{P} = R \bar{i}^2 = I \mathcal{E}_{max} \langle \sin^2(\omega_g t) \rangle = I \mathcal{E}_{max} \frac{1}{2} = \frac{I}{\sqrt{2}} \mathcal{E}_{max} = I_{q.m.} \mathcal{E}_{q.m.}$$

Valori quadratrici medi: con questi, le leggi di Ohm e Kirchhoff di un circuito AC assumono la forma di un circuito DC:  $\mathcal{E}_{q.m.} = \frac{\mathcal{E}_{max}}{\sqrt{2}}$ ,  $I_{q.m.} = \frac{I}{\sqrt{2}}$ ,  $\Delta_{q.m.} = \frac{\Delta_{max}}{\sqrt{2}}$

→ TRASPORTO di CORRENTE

↳ da rete a tensione può essere trasportata da correnti alte a basso voltaggio oppure da correnti basse ad alta tensione



Nel luogo di produzione ed utilizzo si utilizzano alte correnti, mentre per il trasporto si utilizzano alte tensioni per ridurre l'effetto Joule

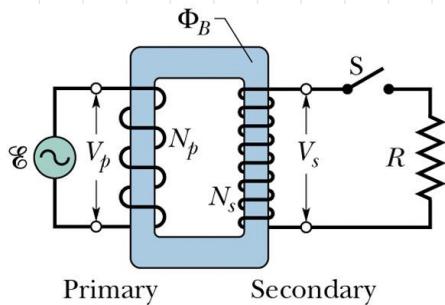
↳ Necesario trasformatore



→ 2 bobine avvolte attorno a nucleo di ferro → lamellato per diminuire al massimo gli effetti delle correnti parasite

→ Bobina primaria con  $N_p$  spire e secondaria con  $N_s$  spire

↳ corrente alternata in circuito  $N_p$  produce  $\phi_B$  variabile nella bobina primaria perché il ferro è ferromagnetico



Sulla bobina secondaria c'è lo stesso  $\Phi_B$  e quindi la stessa f.e.m.  $\rightarrow \Delta V_p = N_p \frac{d\Phi_B}{dt}$   $\Delta V_s = N_s \frac{d\Phi_B}{dt}$

$$\frac{\Delta V_s}{\Delta V_p} = \frac{N_s}{N_p} \rightarrow \Delta V_s = \Delta V_p \left( \frac{N_s}{N_p} \right)$$

CUTPUT: deriva della trasformazione / INPUT: fissa da del generatore

- È un **LEVATORE** se  $N_s > N_p$ , altrimenti è un **riduttore**
- Tutta la potenza erogata nel circuito primario deve essere dissipata sul circuito secondario
  - PRIMARIO:  $P_g = I_p V_p = I_p \Delta V_p \rightarrow I_s = I_p \left( \frac{\Delta V_p}{\Delta V_s} \right) = I_p \left( \frac{N_p}{N_s} \right)$
  - SECONDARIO:  $P_d = I_s V_s = I_s \Delta V_s$