



TRASFORMATA DI LAPLACE E FdT



- Definizioni e Proprietà
 - Teoremi sulla Trasformata di Laplace
 - Soluzione di Equazioni Differenziali
- Definizione di Funzione di Trasferimento
 - Funzione di Trasferimento come modello di sistema
 - Algebra e Diagrammi a Blocchi
- Esempi
- Uso di Matlab

... Figlio di un contadino piccolo proprietario o forse di un bracciante, dovette la sua educazione all'interesse suscitato in alcuni ricchi vicini dalle sue capacità e dalla sua bella presenza. (???)..... (WIKI)





Riferimenti

- Capitoli 4, 5 Testo di Bolzern (parte)
- App. B Testo di Bolzern (parte)
- Capitolo 8 testo di Murray (download)
- Capitolo 3 e App E Testo di Lewis (download)
- Corso di Elettrotecnica



Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.

Con. Avanzati

Con. Standard



Introduzione - Motivazioni



- Descrizione dell'impianto (sistema) mediante un'approssimazione o Modello

MODELLO → Sistema Dinamico Lineare

- Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di ordine arbitrario
- Sistema di equazioni differenziali a coefficienti costanti del primo ordine

Nota: Uno dei metodi più efficaci per la risoluzione di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti:

- Conversione dell'equazione differenziale in equazione algebrica mediante trasformazione
- Conversione della soluzione nel dominio iniziale mediante anti-trasformazione
- Introduzione del concetto di Funzione di Trasferimento
- Manipolazione di sistemi complessi mediante semplici operazioni algebriche.



Definizioni

- **Definizione - Trasformata di Laplace:** Sia $f(t)$ una funzione reale definita per $t \geq 0$, compreso 0; e sia $s = \sigma + j\omega$ una variabile complessa. Si definisce trasformata di Laplace $F(s)$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

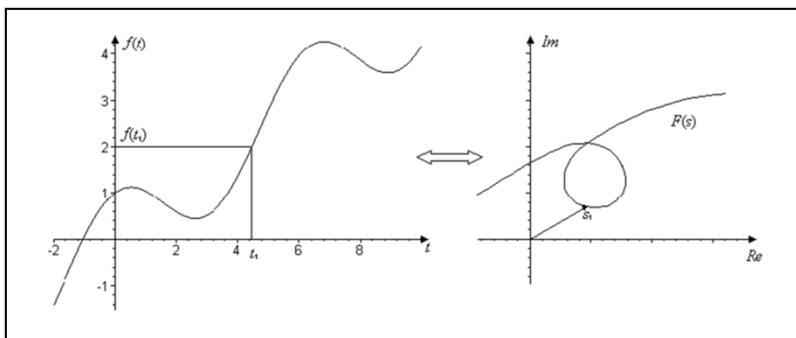
$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+j\omega)t} f(t) dt$$

Include sia funzioni esponenziali $e^{-\sigma t}$
che funzioni armoniche (sinusoidali) $e^{-j\omega t}$

- $F(s)$ è analitica
- $\operatorname{Re}(s) > \sigma$

- **Definizione - Antitrasformata di Laplace:** Si definisce antitrasformata di Laplace $f(t)$ (oppure trasformata inversa di Laplace), la funzione

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\sigma-jR}^{\sigma+jR} e^{st} F(s) ds \right\}$$



- **Trasformazione biunivoca** dal dominio del tempo al dominio complesso (o della frequenza)



Proprietà - Esempi



- Teoremi di esistenza (integrale improprio) ed unicità
 - Le funzioni che ammettono la Trasformata di Laplace sono le funzioni continue a tratti
- **Teorema di Linearità:** La Trasformata di Laplace è una trasformazione lineare

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = af(t) + bg(t)$$

- Il Calcolo della Trasformata di Laplace viene eseguito applicando direttamente la definizione
 - **Esempio**

$$f(t) = k$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} ke^{-st} dt = \frac{k}{-s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{k}{-s} = \frac{k}{s}$$



Esempi

- **Esempio** $f(t) = e^{-5t}$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-5t} e^{-st} dt = \frac{-1}{s+5} e^{-(s+5)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s+5}$$

In generale: $f(t) = e^{\textcolor{red}{at}}$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \frac{-1}{s+5} e^{-(s-a)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s - \textcolor{red}{a}}$$

- **Esempio**

$$f(t) = \sin(at)$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty \sin(at) e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \int_0^\infty (e^{jat} - e^{-jat}) e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \left[\int_0^\infty e^{-(s-j)a} dt - \int_0^\infty e^{-(s+j)a} dt \right] \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s-j} - \frac{1}{s+j} \right] = \frac{a}{s^2 + a^2} \end{aligned}$$

- **Esempio**

$$f(t) = t^n$$

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$



Esempi

- **Esempio**

$$f(t) = 6t^2 - 12t^5 + 9e^{-2t} + \sin(2t)$$

$$F(s) = 6\frac{2!}{s^3} - 12\frac{5!}{s^6} + \frac{9}{s+2} + \frac{4}{s^2+4}$$

□ Uso delle Tabelle per il calcolo della TL di varie funzioni $f(t)$

TABLE 2-1 Laplace Transform Pairs

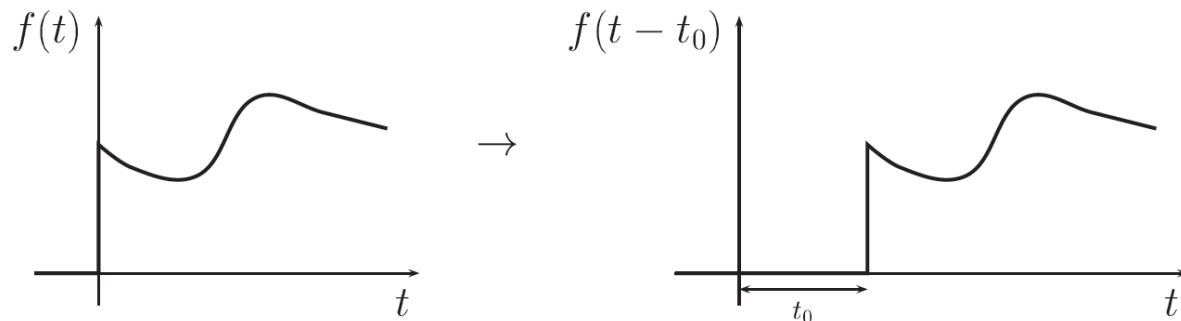
$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
Unit impulse $\delta(t)$	1	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
Unit step $1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)	$\frac{1}{s^n}$	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
t^n ($n = 1, 2, 3, \dots$)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\omega_0 t} \sin \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t$	$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$	$\frac{\omega_0^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)}$
$t^n e^{-at}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$a\omega - \sin \omega t$	$\frac{\omega^2}{s^2(s^2 + \omega^2)}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	$\sin \omega t - a\omega \cos \omega t$	$\frac{2a\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$ ($\omega_1^2 \neq \omega_2^2$)	$\frac{1}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$
$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{2\omega} (\sin \omega t + \omega \cos \omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b} (be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$		



Teoremi sulla Trasformata di Laplace

□ **Teorema:** Traslazione nel tempo. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$, nulla per $t < 0$. Vale la relazione

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$$



$$f(t - t_0) = e^{-5(t-t_0)} \Rightarrow F(s) = e^{-t_0 s} \frac{1}{s + 5}$$

$$f(t) = (t - 1)^2 + 4 \sin(t - 10) \Rightarrow F(s) = e^{-s} \frac{3!}{s^3} + 4e^{-10s} \frac{1}{s^2 + 1}$$

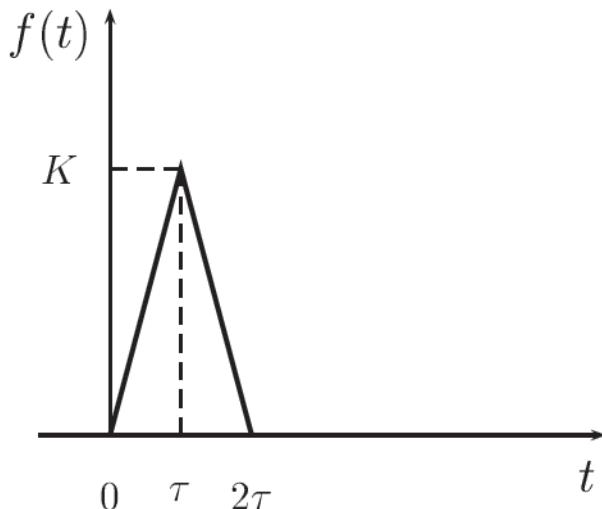


Teoremi sulla Trasformata di Laplace

Esempio: Il segnale $f(t)$ è scomponibile nella somma di tre rampe, di pendenze K/τ , $-2K/\tau$ e K/τ , applicate rispettivamente agli istanti $t=0$, $t=\tau$ e $t=2\tau$ utilizzando il teorema della traslazione nel tempo, si deduce

$$F(s) = \frac{K}{\tau s^2} (1 - 2 e^{-\tau s} + e^{-2\tau s})$$

$$= \frac{K}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s})^2$$





Teoremi sulla Trasformata di Laplace

- **Teorema:** Traslazione nel dominio della variabile complessa

Sia $f(t)$ una funzione con Trasformata di Laplace $F(s)$ e sia a una costante reale o complessa. Vale la seguente relazione:

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)}$$

$$\hat{f}(t) = e^{2t} \cos(3t) \quad \text{posto: } f(t) = \cos 3t \rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + 9}$$

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\cos(3t)\} = F(s-2) = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 9}.$$

- Passaggio inverso: $F(s) \rightarrow f(t)$

$$F(s) = \frac{s+9}{s^2 + 6s + 13}$$

$$F(s) = \frac{s+9}{(s+3)^2 + 4} = \frac{(s+3)+6}{(s+3)^2 + 2^2} = \frac{s+3}{(s+3)^2 + 2^2} + 3 \frac{2}{(s+3)^2 + 2^2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s+3}{(s+3)^2 + 2^2} + 3 \frac{2}{(s+3)^2 + 2^2} \right\} = e^{-3t} \cos(2t) + 3e^{-3t} \sin(2t).$$

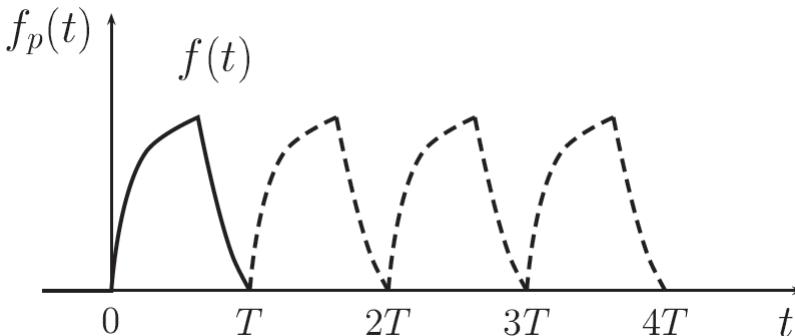


Teoremi sulla Trasformata di Laplace

□ **Teorema:** Trasformata di una funzione periodica. Sia $f(t)$ una funzione non nulla solo per $0 \leq t \leq T$ e sia $f_p(t)$ la funzione che si ottiene ripetendo in modo periodico la funzione $f(t)$.

$$f_p(t + nT) = f(t)$$

$$\forall n, \quad 0 \leq t \leq T$$



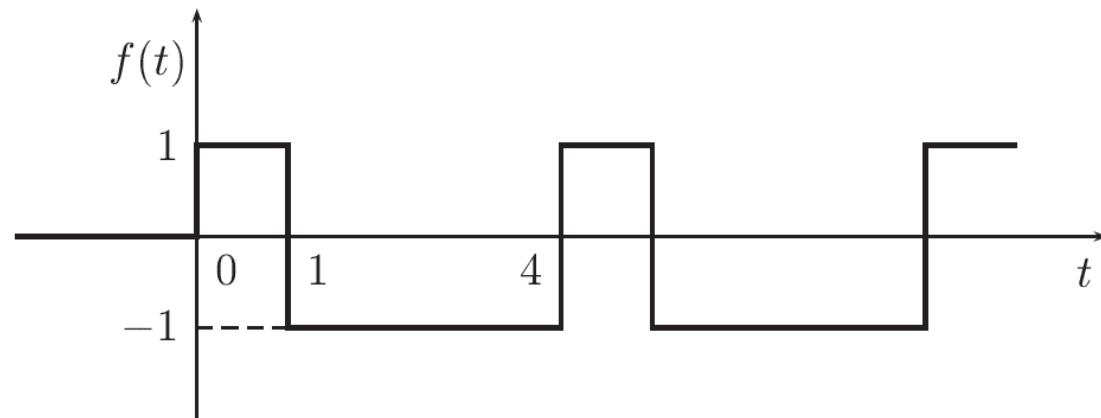
Vale la seguente relazione:

$$\boxed{\mathcal{L}[f_p(t)] = \frac{F(s)}{1 - e^{-Ts}}}$$

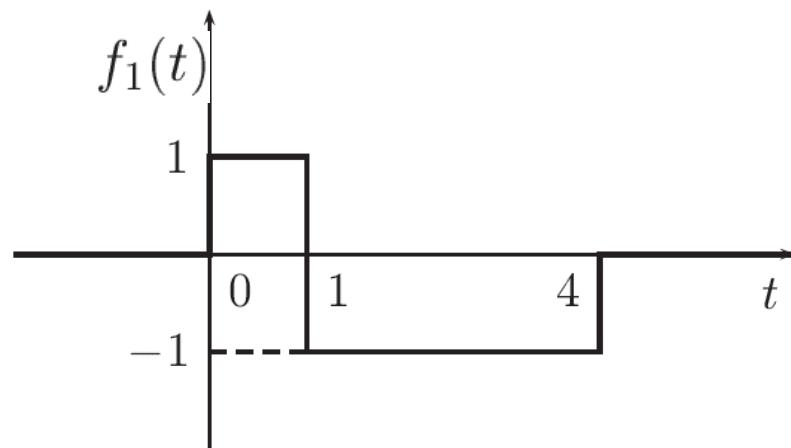


Teoremi sulla Trasformata di Laplace

Esempio. Calcolare la trasformata di Laplace del seguente segnale:



La funzione $f(t)$ è periodica di periodo $T = 4$.



$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{1 - e^{-4s}} \mathcal{L}[f_1(t)] \\ &= \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-4s}}{s(1 - e^{-4s})}\end{aligned}$$



Derivata, Integrale



- **Teorema – Derivazione:** sia $f(t)$ una funzione continua a tratti, limitata superiormente e con derivata continua, avente come trasformata di Laplace $F(s)$. Si dimostra che:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = sF(s) - f(0)$$

- **Derivate di Ordine Superiore:** La trasformata di Laplace delle derivate di ordine superiore di una funzione $f(t)$ sono ottenute mediante la relazione ricorsiva:

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} \frac{d^j f(0)}{dt^j}}$$

- Il teorema precedente permette di rappresentare un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti mediante una relazione algebrica tra la soluzione e tutte le sue derivate.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = u(t) \Rightarrow Y(s) = F[s, u(s)]$$



Derivata, Integrale

□ **Teorema – Integrazione:** data una funzione $f(t)$ integrabile e con trasformata di Laplace $F(s)$. Vale la relazione (con condizioni iniziali nulle):

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

- **Esempio**

$$\mathcal{L} \{ \cos(at) \} = \frac{s}{a} \mathcal{L} \{ \sin(at) \} = \frac{s}{a} \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L} \{ \sin(at) \} = \mathcal{L} \left\{ \int_0^t \cos(a\tau) d\tau \right\} = a \frac{1}{s} \frac{s}{s^2 + a^2} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$



Derivata, Integrale

- Esempio

$$\begin{cases} \ddot{y} + 4y = 0 \\ y_0 = 1, \quad \dot{y}_0 = 2 \end{cases}$$

$$y(s) = \frac{s+2}{s^2 + 4} = \frac{s}{s^2 + 2^2} + \frac{2}{s^2 + 2^2} \Rightarrow y(t) = \cos(2t) + \sin(2t)$$

$$\begin{cases} \ddot{y} - 4y = 0 \\ y_0 = 1, \quad \dot{y}_0 = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{y} - 4y\} = s^2 y(s) - sy_0 - \dot{y}_0 - 4y(s) = 0$$

$$(s^2 - 4)y(s) = s + 2 \Rightarrow y(s) = \frac{s+2}{s^2 - 4}$$

$$y(s) = \frac{1}{s-2} \Rightarrow y(t) = e^{2t} \quad \leftarrow \quad \text{Nota la cancellazione}$$



Convoluzione

□ **Nota:** $\mathcal{L}[f(t) \cdot g(t)] \neq F(s) \cdot G(s)$

□ **Definizione:** Prodotto di Convoluzione. Date due funzioni $f(t)$ e $g(t)$ con trasformate $F(s)$ e $G(s)$, si definisce Prodotto di Convoluzione:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t g(t - \eta)f(\eta)d\eta = g(t) * f(t)$$
$$\eta = t - \tau$$

- Il Prodotto di Convoluzione ammette Trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$$

- **Esempio:**

$$F(s) \cdot G(s) = \frac{4}{s+2} \cdot \frac{3}{s^2 + 9}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = 4 \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \sin(3\tau)d\tau$$



Teoremi ai limiti (Valore Finale, Valore Iniziale)

- **Teorema del Valore Finale:** Data una funzione $f(t)$ con Trasformata $F(s)$, se e solo se il limite temporale esiste ed è finito, vale la seguente relazione:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)]$$

- **Esempio:**

$$f(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-4t} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{1}{4}$$

$$F(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{s+4+3s}{s(s+4)} = \frac{s+1}{s(s+4)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{s+1}{s(s+4)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+1}{s+4} = \frac{1}{4}$$



Teoremi ai limiti (Valore Finale, Valore Iniziale)

□ Nota !

$$f(t) = \frac{1}{4} + e^{+4t} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty !!! \quad \text{Il teorema non si può applicare}$$

$$F(s) = \frac{1}{4s} + \frac{1}{s-4} = \frac{1}{4} \left[\frac{5s-4}{s(s-4)} \right] \quad \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{4} \left[\frac{5s-4}{s(s-4)} \right] \Rightarrow -\frac{1}{4}$$

□ **Teorema del Valore Iniziale:** Data una funzione $f(t)$ con Trasformata $F(s)$, se e solo se il limite in s esiste, vale la seguente relazione:

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]}$$

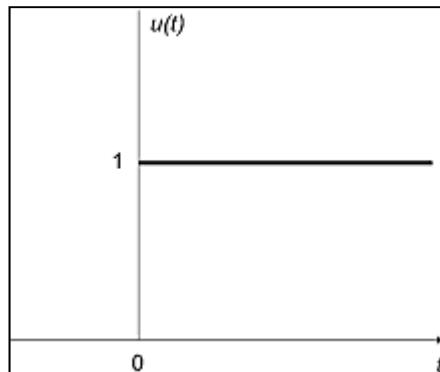
$$F(s) = \frac{1}{4s} + \frac{1}{s-4} = \frac{1}{4} \left[\frac{5s-4}{s(s-4)} \right]$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{5s-4}{4s(s-4)} = \frac{5}{4}$$

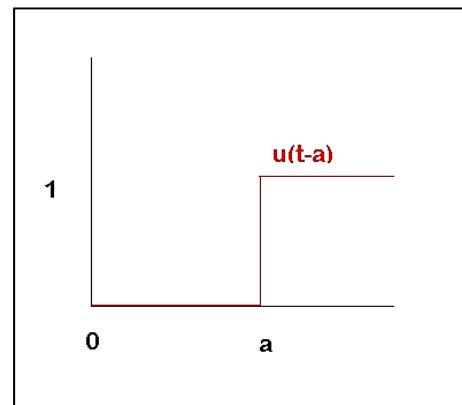


Segnali Canonici

- Nello studio dei sistemi di controllo, due funzioni particolari sono utilizzate in molte applicazioni: **la funzione a gradino e la funzione impulsiva.**
- **Definizione:** Si definisce funzione a gradino unitario (funzione di Heaviside), la funzione $H(t)$:



$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



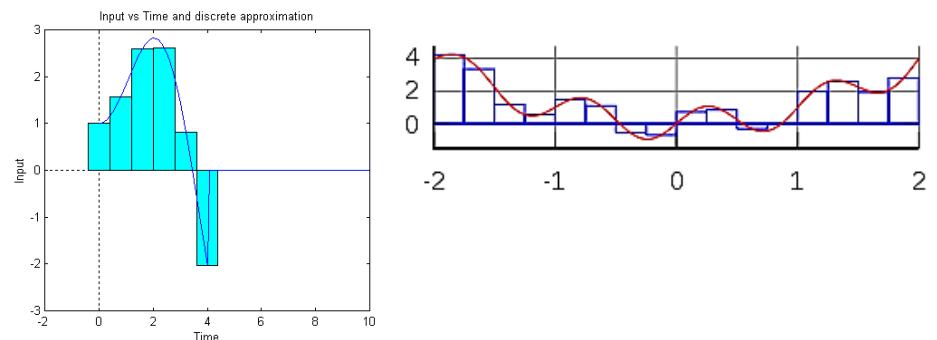
$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

a = ritardo temporale

$$L[H(t)] = \int_0^{\infty} H(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

$$L[H(t-a)] = \int_0^{\infty} H(t-a)e^{-st} dt = \int_a^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-as}}{s}$$

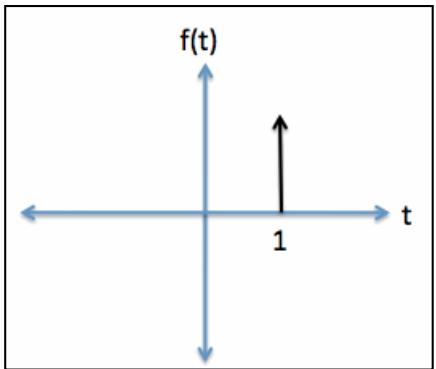
- Uso della funzione a gradino come approssimante





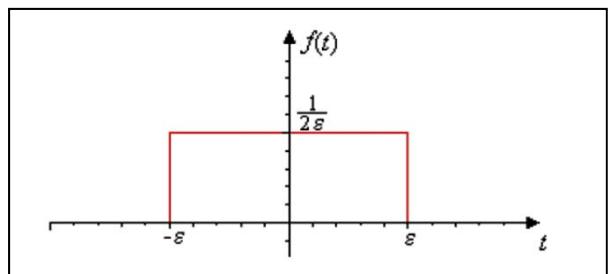
Segnali Canonici

- **Definizione:** Si definisce funzione a impulso unitario (Delta di Dirac), $\delta(t - \tau)$, come passaggio al limite di una funzione rettangolare avente area unitaria.



$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & t \neq \tau \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) dt = 1 & t = \tau \end{cases}$$

- La funzione a impulso unitario (Delta di Dirac) si può considerare come passaggio al limite di una funzione rettangolare avente area unitaria.



$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & |t| \leq \varepsilon \\ 0 & |t| > \varepsilon \end{cases}$$

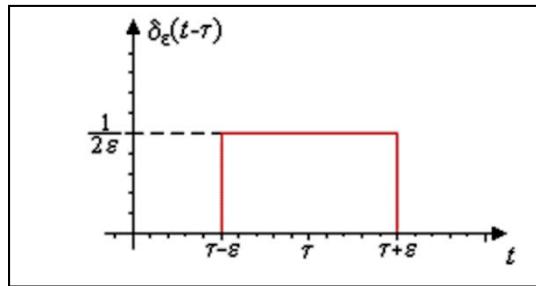
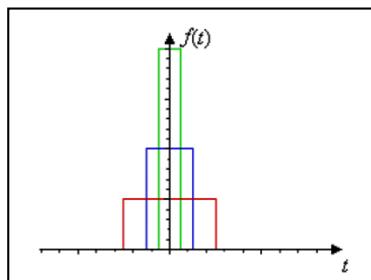
$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dt = 1$$



Segnali Canonici

- Calcolo della Trasformata di Laplace della Funzione di Dirac

<http://khan.addu.edu.ph/math/differential-equations/laplace-transform/properties-of-laplace-transform/v/dirac-delta-function/>



- Trasformata di $\delta_\varepsilon(t)$
- Calcolo del limite

$$\delta_\varepsilon(t - \tau) = \frac{1}{2\varepsilon} [H(t - (\tau - \varepsilon)) - H(t - (\tau + \varepsilon))]$$

$$L[\delta(t - \tau)] = L\left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t - \tau)\right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L[\delta_\varepsilon(t - \tau)]$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{e^{-(\tau-\varepsilon)s}}{s} - \frac{e^{-(\tau+\varepsilon)s}}{s} \right) \right] = \frac{e^{-\tau s}}{2s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\varepsilon s} - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon} = \frac{e^{-\tau s}}{2s} 2s = e^{-\tau s}$$

$$\begin{cases} L[\delta(t - \tau)] = e^{-\tau s} \\ L[\delta(t)] = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} L[H(t - \tau)] = \frac{e^{-\tau s}}{s} \\ L[H(t)] = \frac{1}{s} \end{cases}$$

la funzione impulso unitario può essere vista come la derivata della funzione gradino unitario.



Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

$$\begin{cases} \ddot{y} + a\dot{y} + by = u(t) \\ y_0 = 1, \dot{y}_0 = 0 \end{cases} \longrightarrow (s^2 + as + b)y(s) - (s + a)y_0 - \dot{y}_0 = u(s)$$

- Come esempio consideriamo un ingresso a gradino unitario

$$y(s) = \frac{(s + a)}{(s^2 + as + b)} + \frac{u(s)}{(s^2 + as + b)} \quad u(t) = H(t) \Rightarrow u(s) = \frac{1}{s}$$

$$y(s) = \frac{(s + a)}{(s^2 + as + b)} + \frac{1}{s(s^2 + as + b)} = \frac{s^2 + as + 1}{s^3 + as^2 + bs}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2 + as + 1}{s^3 + as^2 + bs}\right]$$



Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u(t)$$

$$y_0 = 3, \dot{y}_0 = 0$$

$$u(t) = e^{-2t} \cos(4t) \Rightarrow u(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 16}$$

$$y(s) = \frac{s+3}{(s^2 + 3s + 2)} + \frac{s+2}{[(s+2)^2 + 16](s^2 + 3s + 2)} =$$

$$= \frac{(s+3)(s^2 + 4s + 20) + s + 2}{(s^2 + 4s + 20)(s^2 + 3s + 2)} = \frac{s^3 + 7s^2 + 33s + 62}{s^4 + 7s^3 + 34s^2 + 68s + 40}$$

□ **Considerazione Generale:** data l'espressione analitica dell'ingresso $u(t)$ e la sua trasformata di Laplace si può sempre scrivere la trasformata di Laplace della soluzione come funzione complessa razionale fratta della forma:

$$y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}; m \leq n$$

Nota: l'unica eccezione riguarda funzioni con ritardo per le quali si ha una $F(s)$ che è una funzione irrazionale.



Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

1. Soluzione analitica mediante uso di tabelle disponibili in letteratura
2. Soluzione analitica mediante la tecnica della scomposizione in Fratti Semplici
3. Soluzione mediante Matlab oppure altro software (simbolico o numerico)

□ Scomposizione in Fratti Semplici

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = k \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Se $F(s)$ è strettamente propria (ovvero $m < n$), si può scomporre in una somma di termini semplici antitrasformabili detti fratti semplici.
- Se $F(s)$ è propria (ovvero $m = n$), si può scomporre nella somma di una costante + una somma di termini semplici antitrasformabili.

$$F(s) = k \frac{(s + z_1)(z + z_2)\dots(s + z_m)}{(s + p_1)(z + p_2)\dots(s + p_n)}$$



Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

$$y(s) = \frac{A_1}{s + p_1} + \frac{A_2}{s + p_2} + \dots + \frac{A_i}{s + p_i} + \frac{B_r}{(s + p_r)^r} + \frac{B_{r-1}}{(s + p_r)^{r-1}} + \dots + \frac{B_1}{(s + p_r)} + \begin{cases} \frac{C_k}{s + p_k} + \frac{C_k^*}{s + p_k^*} \\ \frac{C_k s + D_k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \end{cases}$$

$$L^{-1}\left[\frac{A}{s + p}\right] = A e^{-pt} \quad L^{-1}\left[\frac{B_r}{(s + p)^r}\right] = \frac{B_r t^{(r-1)}}{(r-1)!} e^{-pt}$$

$$L^{-1}\left[\frac{C}{(s + p)} + \frac{C^*}{(s + p^*)}\right] =$$

$$\mathbf{A} e^{\operatorname{Re}\{-p\}t} \cos[\operatorname{Im}\{-p\}t + \mathbf{B}] = \mathbf{A} e^{\operatorname{Re}\{-p\}t} \sin[\operatorname{Im}\{-p\}t + \mathbf{B} + \frac{\pi}{2}]$$

$$\mathbf{A} = 2\sqrt{\operatorname{Re}^2\{C\} + \operatorname{Im}^2\{C\}}$$

$$\mathbf{B} = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im}\{C\}}{\operatorname{Re}\{C\}}$$

□ I termini $A_i, B_i, C_i, D_i, C, C^*$ sono detti **RESIDUI**

NOTA: nel seguito si dimostra la relazione tra residui e condizioni iniziali di un'equazione differenziale, ovvero dell'ampiezza della risposta di un sistema



Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

□ Calcolo dei Residui:

■ Esempio: Radici Reali e Distinte

$$\frac{A_i}{s + p_i} \Rightarrow A_i = (s + p_i)F(s) \Big|_{s=-p_i}$$

$$y(s) = \frac{4}{s^2 + 5s + 4} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+4}$$

$$A_1 = y(s) \cdot (s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{4(s+1)}{s^2 + 5s + 4} \Big|_{s=-1} = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = y(s) \cdot (s+4) \Big|_{s=-4} = \frac{4(s+4)}{s^2 + 5s + 4} \Big|_{s=-4} = -\frac{4}{3}$$

$$y(s) = \frac{4}{s^2 + 5s + 4} = \frac{4}{3} \frac{1}{s+1} - \frac{4}{3} \frac{1}{s+4} \quad \rightarrow \quad y(t) = \frac{4}{3} e^{-t} - \frac{4}{3} e^{-4t}$$



Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

- **Esempio:** Radici Reali con molteplicità $r > 1$

$$\frac{B_r}{(s+p)^r} \Rightarrow B_{r-k} = \frac{1}{k!} \left\{ \frac{d^k}{ds^k} [(s+p)^r F(s)] \right\}_{s=-p}$$

$$y(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2} = \frac{B_2}{(s-1)^2} + \frac{B_1}{(s-1)}$$

$$B_2 = \left[y(s) \cdot (s-1)^2 \right]_{s=1} = \left. \frac{(s+1)(s-1)^2}{(s-1)^2} \right|_{s=1} = 2$$

$$B_1 = \left. \frac{d}{ds} [y(s) \cdot (s-1)^2] \right|_{s=1} = 1$$

$$y(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2} = \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)} \quad \longrightarrow \quad y(t) = 2te^{+t} + e^{+t}$$



Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

■ Esempio: Radici Complesse e Coniugate

$$\begin{cases} \frac{C_k}{s + p_k} + \frac{C^*_k}{s + p_k^*} & -p = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \\ \frac{C_k s + D_k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \end{cases}$$

$$y(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2} = \frac{C}{(s + 1 + j)} + \frac{C^*}{(s + 1 - j)}$$

$$C = \frac{1}{-j}; C^* = \frac{1}{j}; \quad y(t) = \frac{1}{-j} e^{-(1+j)t} + \frac{1}{j} e^{-(1-j)t}$$

$$y(t) = \dots \quad \text{Completare per esercizio}$$

□ Calcolo dei residui mediante Matlab:

```
RESIDUE Partial-fraction expansion (residues).
[R,P,K] = RESIDUE(B,A) finds the residues, poles and direct term of
a partial fraction expansion of the ratio of two polynomials B(s)/A(s).
If there are no multiple roots,
B(s)      R(1)      R(2)      R(n)
----- = ----- + ----- + ... + ----- + K(s)
A(s)      s - P(1)    s - P(2)    s - P(n)
```



Funzione di Trasferimento

- Concetto fondamentale nello studio dei sistemi lineari e del loro controllo



$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = u(t) \quad D(s)Y(s) = N_H(s) + U(s)$$

$$Y(s) = \frac{N_H(s)}{D(s)} + \frac{1}{D(s)}U(s) = Y_H(s) + Y_P(s)$$

- La funzione di trasferimento è una espressione che, dato un ingresso qualsiasi, permetta di valutare l'uscita del sistema



Funzione di Trasferimento

- **Definizione (1):** La Funzione di Trasferimento di un sistema lineare è il rapporto tra la Trasformata di Laplace dell'uscita e la Trasformata di Laplace dell'ingresso a condizioni iniziali nulle

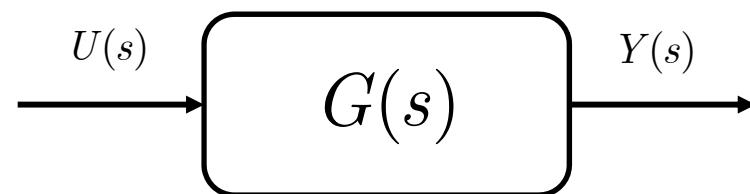
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

- **Nota la FdT, è possibile calcolare la trasformata di Laplace dell'uscita, per un qualsiasi valore dell'ingresso**

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

- **Nel dominio del tempo, l'uscita si calcola mediante l'integrale di convoluzione**

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau \Leftrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)]$$





Funzione di Trasferimento



□ **Definizione (2):** La Funzione di Trasferimento di un sistema lineare è la Trasformata di Laplace dell'uscita del sistema, quando l'ingresso è un impulso applicato all'istante $t = 0$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \quad \begin{matrix} u(t) = \delta(t) \\ \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 = U(s) \end{matrix} \quad \rightarrow \quad Y(s) = G(s)$$

- **In generale, per condizioni iniziali non nulle:**

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) + G^{IC}(s)$$

- **Forme equivalenti per la FdT:**

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, m \leq n \quad G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

- K = **Guadagno** del sistema (della FdT)
- $-p_j$ = **Poli** del sistema
- $-z_i$ = **Zeri** del sistema



Funzione di Trasferimento

- Consideriamo un sistema lineare descritto dalla seguente equazione differenziale:

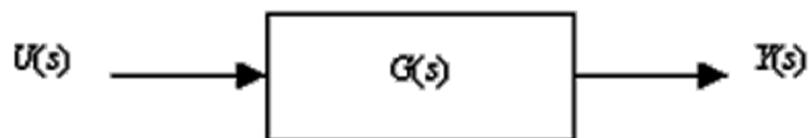
$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 4\dot{u}(t) - 8u(t) \\ y_0, \dot{y}_0 \end{cases}$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 3)y_0 + \dot{y}_0 + (4s - 8)U(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{(s + 3)y_0 + \dot{y}_0}{(s^2 + 3s + 2)} + \frac{(4s - 8)}{(s^2 + 3s + 2)} U(s) = Y_h(s) + Y_p(s)$$

- La FdT del sistema è data da:

$$G(s) = \frac{4(s - 2)}{s^2 + 3s + 2}$$



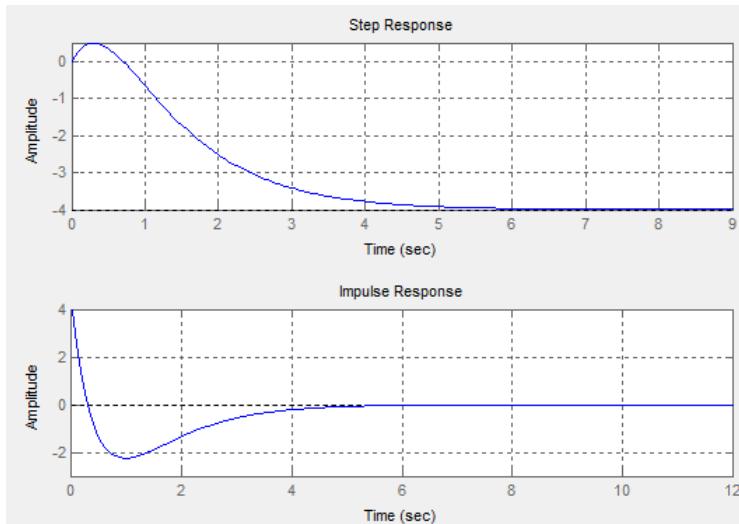
- Supponiamo che il sistema sia soggetto ad un gradino unitario $u(t) = 1$

$$y(s) = G(s) \cdot u(s) = \frac{4(s - 2)}{s(s + 2)(s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s + 2}$$



Funzione di Trasferimento

$$y(t) = -4 + 12e^{-t} - 8e^{-2t}$$

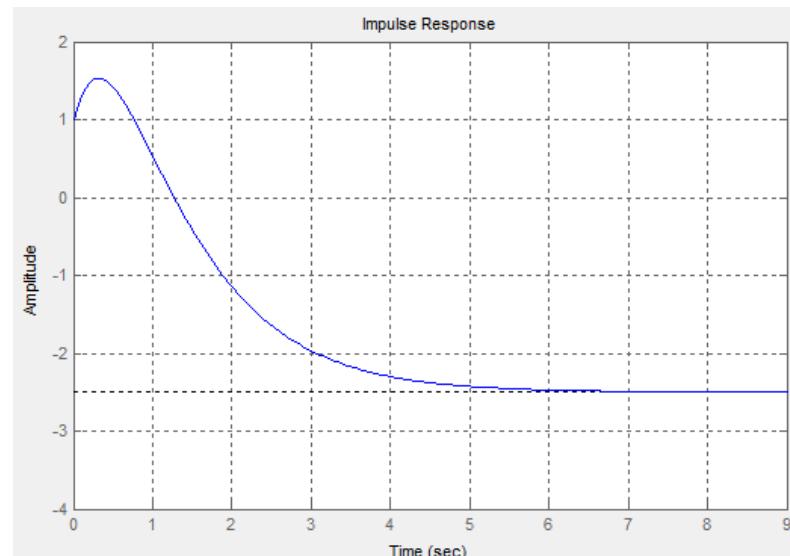
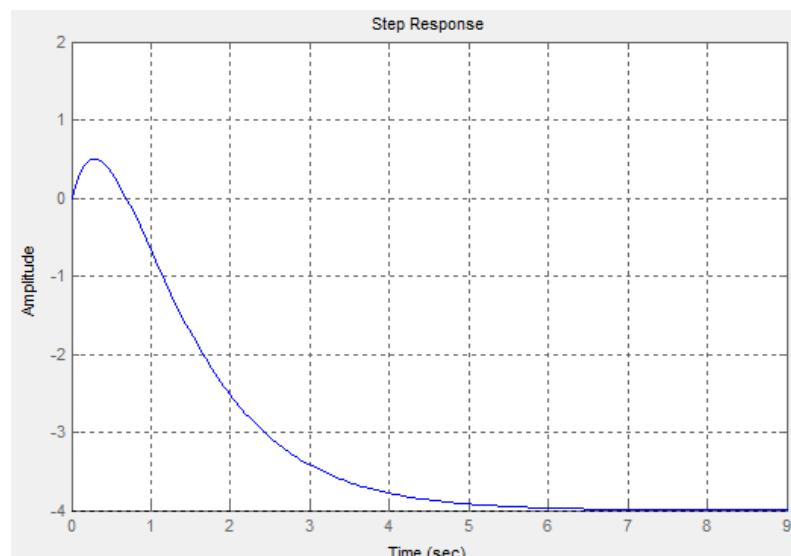


- Supponiamo di avere le seguenti condizioni iniziali:

$$y(0) = 1; \dot{y}(0) = 0$$

$$y(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} + \frac{4(s-2)}{s(s+2)(s+1)} = \frac{s^2 + 7s - 5}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

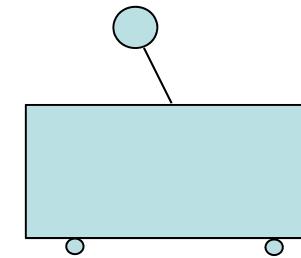
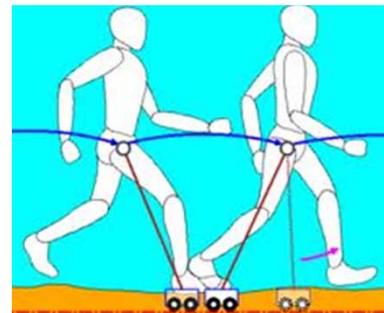
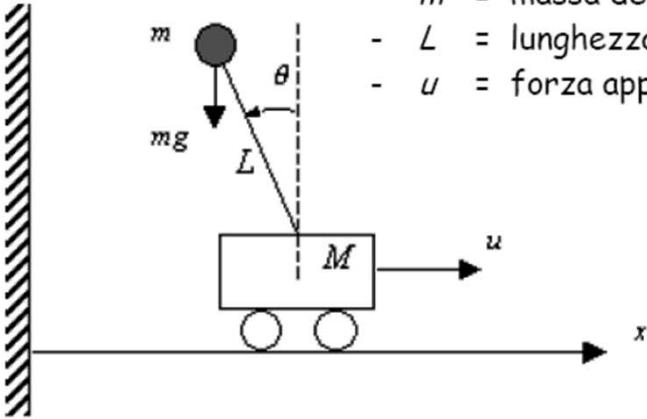
$y(t) = ?$ esercizio





Esempio: Carrello con Pendolo

- M = massa del carrello
- m = massa del pendolo
- L = lunghezza del braccio (supposto di massa trascurabile)
- u = forza applicata al carrello



□ Studio del movimento del bacino

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{p}(t) + ml\ddot{\theta}(t) = F(t) \\ ml\ddot{p}(t) + ml^2\ddot{\theta}(t) = mgl\theta(t) \end{cases}$$

$$M = 20Kg; m = 1Kg; l = 1m; g = 9.8m / \text{sec}^{-2}$$

$$\begin{cases} 21\ddot{p} + \ddot{\theta} = F \\ \ddot{p} + \ddot{\theta} = 9.8\theta \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 21s^2 & s^2 \\ s^2 & s^2 - 9.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(s) \\ \theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$



Esempio: Carrello con Pendolo

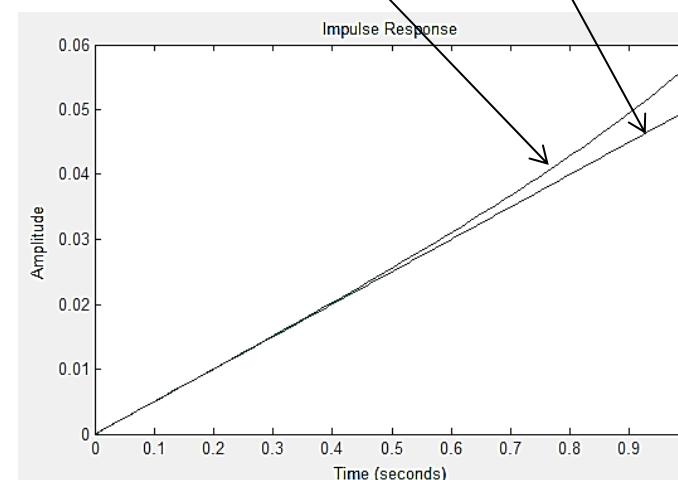
$$\Delta(s) = \det \begin{bmatrix} 21s^2 & s^2 \\ s^2 & s^2 - 9.8 \end{bmatrix} = 21s^2(s^2 - 9.8) - s^4$$

$$G_F^\theta(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{\det \begin{bmatrix} 21s^2 & 1 \\ s^2 & 0 \end{bmatrix}}{\Delta(s)} = \frac{-s^2}{21s^2(s^2 - 9.8) - s^4} = \frac{-1}{20s^2 - 205.8} = \frac{-1}{20(s^2 - 10.29)}$$

$$G_F^p(s) = \frac{p(s)}{F(s)} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & s^2 \\ 0 & s^2 - 9.8 \end{bmatrix}}{\Delta(s)} = \frac{s^2 - 9.8}{21s^2(s^2 - 9.8) - s^4} = \frac{s^2 - 9.8}{20s^2(s^2 - 10.29)} \approx \frac{1}{20s^2}$$

□ Cosa possiamo Concludere sul tipo di moto? Ovvero:

1. Come si muove il Pendolo (bacino)?
2. Come si muove il carrello (passo)?





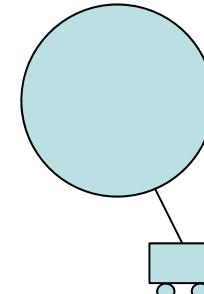
Esempio: Carrello con Pendolo

$$M = 1Kg; m = 20Kg; l = 1m; g = 9.8m / \text{sec}^{-2}$$

$$\begin{cases} 21\ddot{p} + \ddot{\theta} = F \\ \ddot{p} + \ddot{\theta} = 9.8\theta \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 21s^2 & 20s^2 \\ 20s^2 & 20s^2 - 19.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(s) \\ \theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

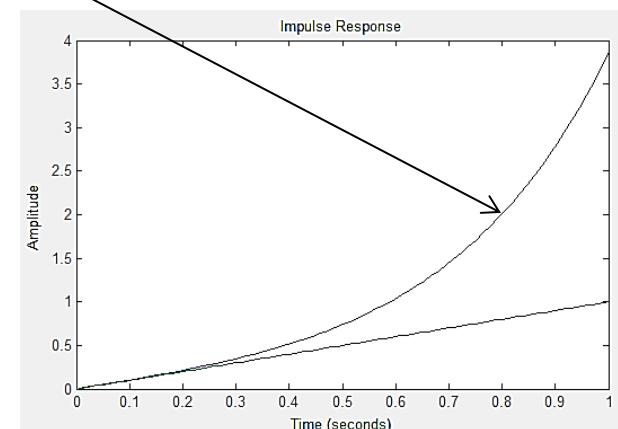
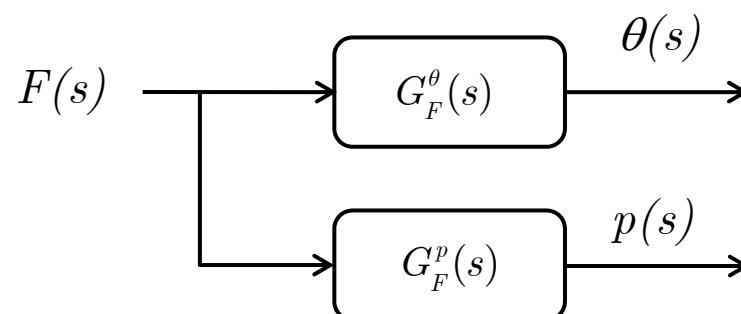
$$G_F^\theta(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{-20s^2}{20s^2(s^2 - 20.58)} = \frac{-1}{s^2 - 20.58}$$

$$G_F^p(s) = \frac{p(s)}{F(s)} = \frac{20s^2 - 19.6}{2s^2(s^2 - 20.58)} = \frac{s^2 - 0.98}{s^2(s^2 - 10.29)}$$



□ Cosa possiamo Concludere sul tipo di moto? Ovvero:

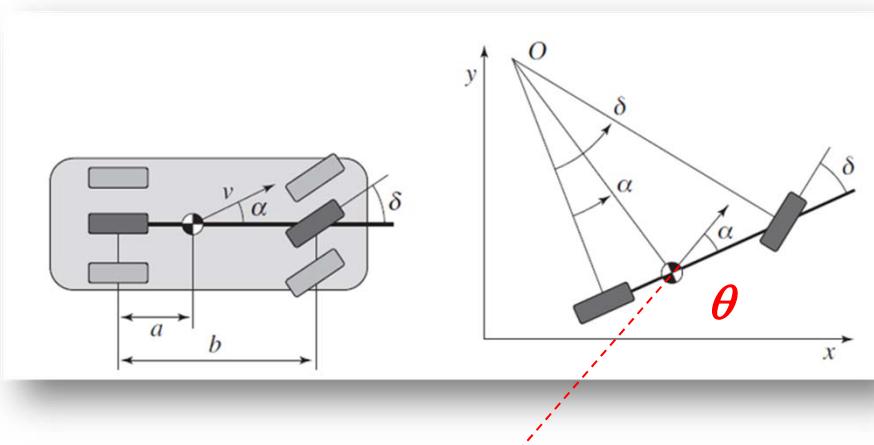
1. Come si muove il Pendolo (bacino)?
2. Come si muove il carrello (passo)?





Esempio: Modello di Autoveicolo

- Dinamica della sterzata



$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{av_0}{b} \\ \frac{v_0}{b} \end{bmatrix} u$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\begin{cases} sy(s) = v_0 \theta(s) + \frac{av_0}{b} \delta(s) \\ s\theta(s) = \frac{v_0}{b} \delta(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(s) = \frac{1}{s} [v_0 \theta(s) + \frac{av_0}{b} \delta(s)] \\ \theta(s) = \frac{1}{s} \frac{v_0}{b} \delta(s) \end{cases}$$

$$G_{\delta}^y(s) = \frac{y(s)}{\delta(s)} = \frac{v_0}{b} \frac{as + v_0}{s^2}$$

$$G_{\delta}^{\theta}(s) = \frac{\theta(s)}{\delta(s)} = \frac{v_0}{b} \frac{1}{s}$$

□ Esempio Numerico

$$v_0 = 60 \text{ km/h}$$

$$b = 4 \text{ m}$$

$$a = 1.5 \text{ m}$$

$$\delta = 10^\circ = \frac{10}{57.3} \text{ rad}$$



Esempio: Modello di Autoveicolo

$$\frac{\theta(s)^{rad}}{\delta(s)^{rad}} = \frac{4.1675}{s}$$

$$\frac{y(s)^{metri}}{\delta(s)^{rad}} = 6.25 \frac{s + 11.13}{s^2}$$

- Comando costante dello sterzo ($\delta = \text{cost.}$)

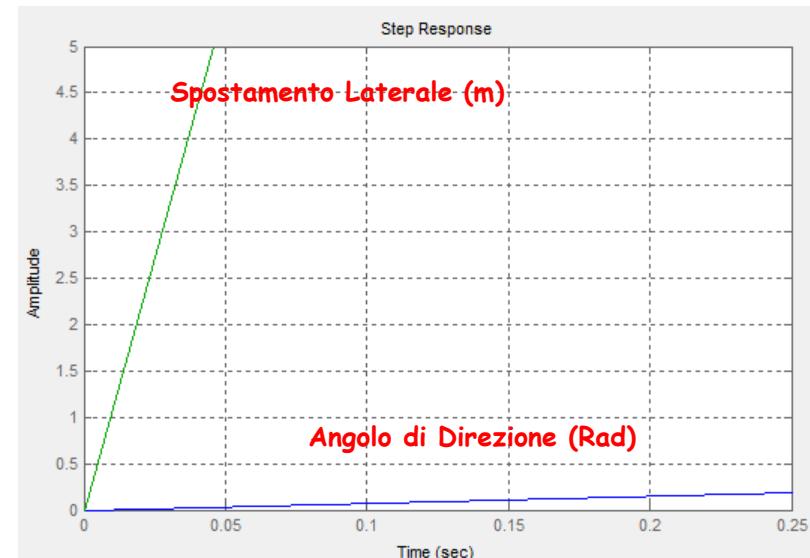
$$y(s)^{metri} = 6.25 \frac{s + 11.13}{s^2} \cdot \frac{0.1745}{s} = 1.0906 \frac{s + 11.13}{s^3}$$

$$\theta(s)^{gradi} = \frac{238.7978}{s^2}$$

Esercizio:

- Verificare analiticamente i risultati del grafico
- Calcolare lo spostamento laterale nel caso di ingresso di sterzo dato da:

$$\delta(t) = \begin{cases} 10^\circ & 0 \leq t < 1 \\ 0^\circ & t \geq 1 \end{cases}$$





Esempio: modello biciclo



1. Sistema attuale

2. Passaggio intermedio



3. Target di controllo



Esempio: modello biciclo

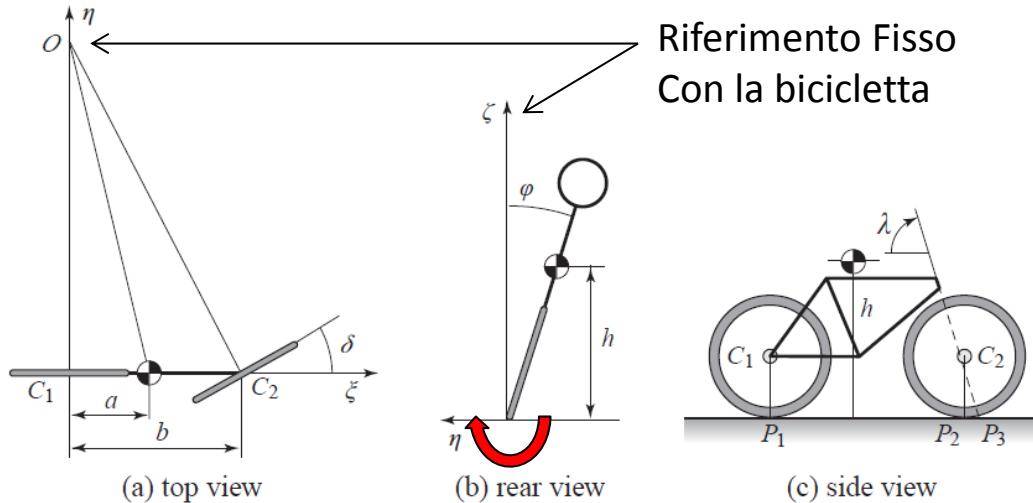


Figure 3.5: Schematic views of a bicycle. The steering angle is δ , and the roll angle is φ . The center of mass has height h and distance a from a vertical through the contact point P_1 of the rear wheel. The wheel base is b , and the trail is c .

Riferimento Fisso
Con la bicicletta

$$v_0 = \text{velocità lineare}$$

$$\frac{v_0 \delta}{b} = \omega \quad \begin{array}{l} \text{Velocità} \\ \text{Angolare} \\ \text{Rispetto ad O} \end{array}$$

m be the total mass of the system, J the moment of inertia of this body with respect to the ξ -axis and D the product of inertia with respect to the $\xi\zeta$ axes. Furthermore, let the ξ and ζ coordinates of the center of mass with respect to the rear wheel contact point, P_1 , be a and h , respectively. We have $J \approx mh^2$ and $D = mah$. The torques acting on the system are due to gravity and centripetal action. Assuming

- **Modello del movimento di Rollio**

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{Dv_0}{b} \frac{d\delta}{dt} = mgh \sin \varphi + \frac{mv_0^2 h}{b} \delta.$$

Ipotesi semplificativa

$$\begin{cases} \lambda = 90^\circ \\ |P_2 - P_3| = 0 \end{cases}$$



Esempio: modello biciclo

Con l'ipotesi di piccoli valori angolari di φ

$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} = \frac{\frac{Dv_0}{b}s + \frac{mv_0^2 h}{b}}{J(s^2 - mgh)}$$

$$J \approx mh^2 \quad D \approx mah$$

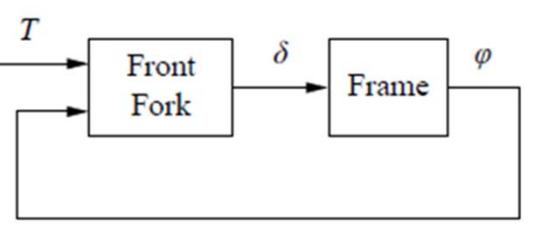
$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} \approx \frac{av_0}{bh} \frac{s + \frac{v_0}{a}}{s^2 - \frac{g}{h}}$$

Ci sono 2 POLI
ed uno ZERO:

$$P_{1,2} \pm \sqrt{\frac{mgh}{J}} \approx \pm \sqrt{\frac{g}{h}}$$

$$Z_1 = -\frac{mv_0 h}{D} \approx -\frac{v_0}{a}$$

- Esistono altri modelli con diverso grado di Complessità:
- Modello di Whipple**, 1899 (vedi Articolo online)
tiene conto del **manubrio**, che ha un impatto fondamentale, nella dinamica della bicicletta.



$$\delta = k_1(v_0)T - k_2(v_0)\varphi$$

$$k_1(v_0) = \frac{b^2}{(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)mac \sin \lambda}$$

$$k_2(v_0) = \frac{bg}{v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda}$$



Esempio: modello biciclo

$$J\ddot{\varphi} + \frac{Dv_0g}{v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda} \dot{\varphi} + \frac{mg^2(bh \sin \lambda - ac \cos \lambda)}{v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda} \varphi = \\ = \frac{Dv_0b}{mac(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)} \dot{T} + \frac{b(hv_0^2 - acg)}{ac(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)} T$$

$$M \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} + Cv_0 \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + (K_0 + K_2 v_0^2) \begin{bmatrix} \varphi \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}$$

Table 1. Basic bicycle parameters. This table gives the mass, inertia tensor, and geometry for a standard bicycle with a rider. The values in parentheses are for a bicycle without a rider.

	Rear Frame	Front Frame	Rear Wheel	Front Wheel
Mass m [kg]	87 (12)	2	1.5	1.5
Center of Mass				
x [m]	0.492 (0.439)	0.866	0	b
z [m]	1.028 (0.579)	0.676	R_{rw}	R_{fw}
Inertia Tensor				
J_{xx} [kg-m ²]	3.28 (0.476)	0.08	0.07	0.07
J_{xz} [kg-m ²]	-0.603 (-0.274)	0.02	0	0
J_{yy} [kg-m ²]	3.880 (1.033)	0.07	0.14	0.14
J_{zz} [kg-m ²]	0.566 (0.527)	0.02	J_{xx}	J_{xx}

$$M = \begin{pmatrix} 96.8 (6.00) & -3.57 (-0.472) \\ -3.57 (-0.472) & 0.258 (0.152) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -50.8 (-5.84) \\ 0.436 (0.436) & 2.20 (0.666) \end{pmatrix},$$

$$K_0 = \begin{pmatrix} -901.0 (-91.72) & 35.17 (7.51) \\ 35.17 (7.51) & -12.03 (-2.57) \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & -87.06 (-9.54) \\ 0 & 3.50 (0.848) \end{pmatrix}.$$

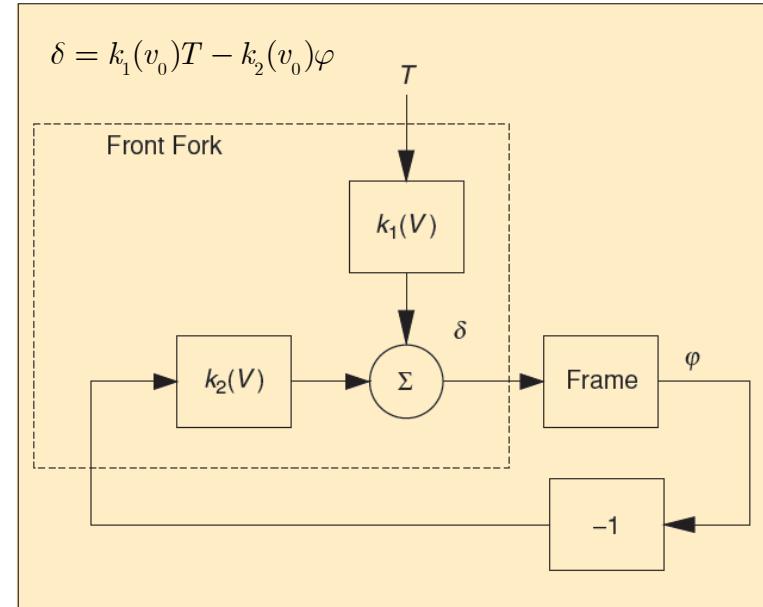


Esempio: modello biciclo

$$\left[Ms^2 + Cv_0 s + (K_0 + K_2 v_0^2) \right] \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \delta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} T(s)$$

$$A(s) \Big|_{2 \times 2} \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \delta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} T(s)$$

$$\begin{cases} \frac{\varphi(s)}{T(s)} = A_{12}^{-1}(s) \\ \frac{\delta(s)}{T(s)} = A_{22}^{-1}(s) \end{cases}$$



$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{Dv_0 g}{J(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)} \\ A_2 &= \frac{mg^2(bh \sin \lambda - ac \cos \lambda)}{J(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)} \\ B_1 &= \frac{Dv_0 b}{mac J(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)} \\ B_2 &= \frac{b(hv_0^2 - acg)}{ac J(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + A_1 \dot{\varphi} + A_2 \varphi &= B_1 \dot{T} + B_2 T \\ \delta &= k_1(v_0)T - k_2(v_0)\varphi \end{aligned} \quad G_T^\varphi(s) = B_1 \frac{s + \frac{B_2}{B_1}}{s^2 + As + A_2}$$

Note: $v_w = \sqrt{bg \cot \lambda}$ Velocità di Auto allineamento

$$\begin{cases} v_0 > v_w \\ bh > ac \tan \lambda \end{cases} \quad \text{Stabilità}$$



Esempio: modello biciclo

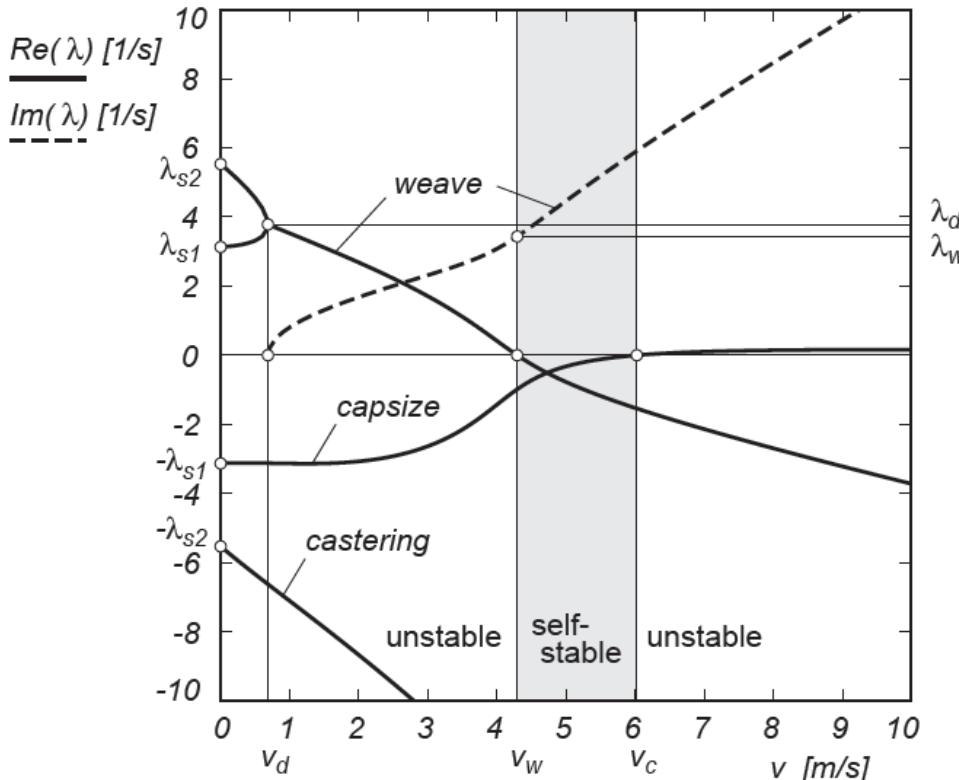


Figure 3. Eigenvalues λ from the linearized stability analysis for the benchmark bicycle from figure 1 and table 1 where the solid lines correspond to the real part of the eigenvalues and the dashed line corresponds to the imaginary part of the eigenvalues, in the forward speed range of $0 \leq v \leq 10$ m/s. The speed range for the asymptotic stability of the benchmark bicycle is $v_w < v < v_c$. The zero crossings of the real part of the eigenvalues are for the weave motion at the weave speed $v_w \approx 4.3$ m/s and for the capsizing motion at capsizing speed $v_c \approx 6.0$ m/s, and oscillations emerge at the real double root at $v_d \approx 0.7$ m/s. For accurate eigenvalues and transition speeds see table 2.

Table 2. Some characteristic values for the forward speed v and the eigenvalues λ from the linearized stability analysis for the benchmark bicycle from figure 1 and table 1. Fourteen digit results are presented for benchmark comparisons. (a) $v = 0$, weave speed v_w , capsizing speed v_c and the speed with a double root v_d . In the forward speed range of $0 \leq v \leq 10$ m/s (b) Complex (weave motion) eigenvalues λ_{wave} , and (c) Real eigenvalues λ .

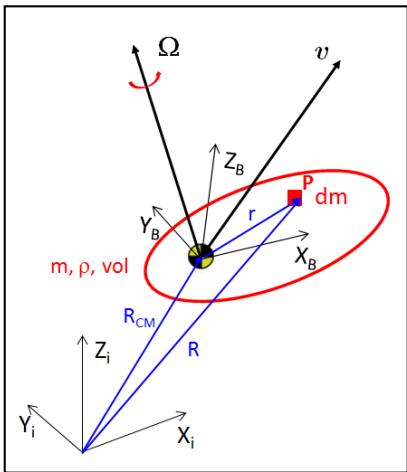
v [m/s]	λ [1/s]
$v = 0$	$\lambda_{s1} = \pm 3.131\,643\,247\,906\,56$
$v = 0$	$\lambda_{s2} = \pm 5.530\,943\,717\,653\,93$
$v_d = 0.684\,283\,078\,892\,46$	$\lambda_d = 3.782\,904\,051\,293\,20$
$v_w = 4.292\,382\,536\,341\,11$	$\lambda_w = 0 \pm 3.435\,033\,848\,661\,44 i$
$v_c = 6.024\,262\,015\,388\,37$	0

v [m/s]	$\text{Re}(\lambda_{\text{wave}})$ [1/s]	$\text{Im}(\lambda_{\text{wave}})$ [1/s]
0	-	-
1	3.526 961 709 900 70	0.807 740 275 199 30
2	2.682 345 175 127 45	1.680 662 965 906 75
3	1.706 756 056 639 75	2.315 824 473 843 25
4	0.413 253 315 211 25	3.079 108 186 032 06
5	-0.775 341 882 195 85	4.464 867 713 788 23
6	-1.526 444 865 841 42	5.876 730 606 987 09
7	-2.138 756 442 583 62	7.195 259 133 298 05
8	-2.693 486 835 810 97	8.460 379 713 969 31
9	-3.216 754 022 524 85	9.693 773 515 317 91
10	-3.720 168 404 372 87	10.906 811 394 762 87

v [m/s]	λ_{capsize} [1/s]	$\lambda_{\text{castering}}$ [1/s]
0	-3.131 643 247 906 56	-5.530 943 717 653 93
1	-3.134 231 250 665 78	-7.110 080 146 374 42
2	-3.071 586 456 415 14	-8.673 879 848 317 35
3	-2.633 661 372 536 67	-10.351 014 672 459 20
4	-1.429 444 273 613 26	-12.158 614 265 764 47
5	-0.322 866 429 004 09	-14.078 389 692 798 22
6	-0.004 066 900 769 70	-16.088 371 230 980 26
7	0.102 681 705 747 66	-18.157 884 661 252 62
8	0.143 278 797 657 13	-20.279 408 943 945 69
9	0.157 901 840 309 17	-22.437 885 590 408 58
10	0.161 053 386 531 72	-24.624 596 350 174 04



Dinamica del Corpo Rigido



- Meccanica classica → Newton
 - Sistema di Riferimento: Inerziale
 - Quantità di moto, Momento della quantità di moto

$$\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$$
$$\mathbf{H} = \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i)$$

- Corpo rigido → moto del CM + moto intorno al CM

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{EXT} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \Big|_{In} = \frac{d(m_{TOT} \mathbf{v}_{CM})}{dt} \Big|_{In}$$

$$\sum_i \mathbf{M}_i^{EXT} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} \Big|_{In} = \frac{d([I]\boldsymbol{\Omega})}{dt} \Big|_{In}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$

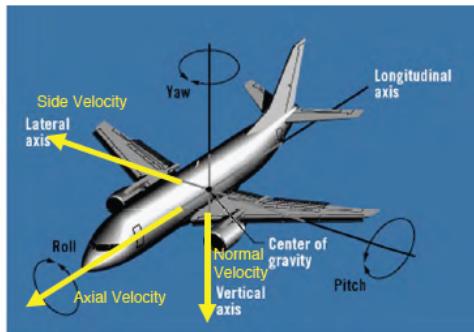
$$I_x = \int_{vol} (y^2 + z^2) dm \quad I_y = \int_{vol} (x^2 + z^2) dm$$
$$I_z = \int_{vol} (x^2 + y^2) dm \quad I_{xy} = I_{yx} = \int_{vol} xy dm$$
$$I_{xz} = I_{zx} = \int_{vol} xz dm \quad I_{yz} = I_{zy} = \int_{vol} yz dm$$

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} + \dot{m}\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{v}} = m\dot{\mathbf{v}}_{CM} + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{CM}) \\ \mathbf{M} = [I]\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times ([I]\boldsymbol{\Omega}) + [\dot{I}]\boldsymbol{\Omega} = [I]\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times ([I]\boldsymbol{\Omega}) \end{cases}}$$

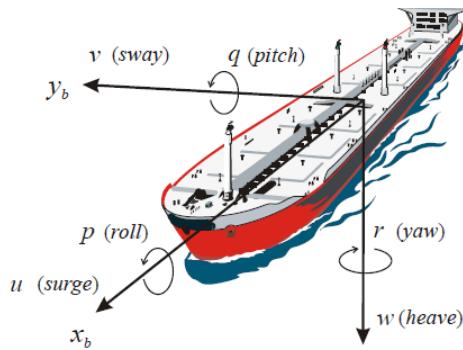
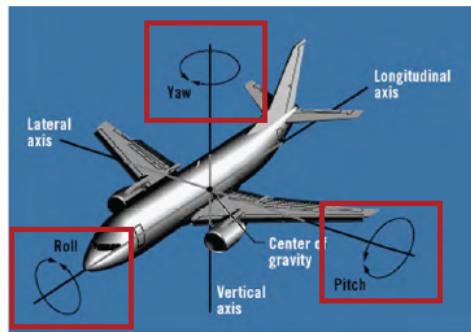


Esempi Aero/Navali

Airplane Translational Degrees of Freedom



Airplane Rotational Degrees of Freedom



Lecture Notes 2005



A.P.L.

DOF		forces and moments	linear and angular velocities	positions and Euler angles
1	motions in the x -direction (surge)	X	u	x
2	motions in the y -direction (sway)	Y	v	y
3	motions in the z -direction (heave)	Z	w	z
4	rotation about the x -axis (roll, heel)	K	p	ϕ
5	rotation about the y -axis (pitch, trim)	M	q	θ
6	rotation about the z -axis (yaw)	N	r	ψ



Esempi Aero/Navali



Models for ships, semi-submersibles, and underwater vehicles are usually represented as one of the following subsystems:

- ✓ **Surge model:** velocity u
- ✓ **Maneuvering model (sway and yaw):** velocities v and r
- ✓ **Horizontal motion (surge, sway, and yaw):** velocities u, v , and r
- ✓ **Longitudinal motion (surge, heave, and pitch):** velocities u, w , and q
- ✓ **Lateral motion: (sway, roll, and yaw):** velocities v, p , and ψ

or:

- ✓ **Horizontal plane models:** DOFs 1, 2, 6
- ✓ **Longitudinal motion:** DOFs 1, 3, 5
- ✓ **Lateral motion:** DOFs 2, 4, 6

The 6 DOF equations of motion can in many cases be divided into two non-interacting (or lightly interacting) subsystems:

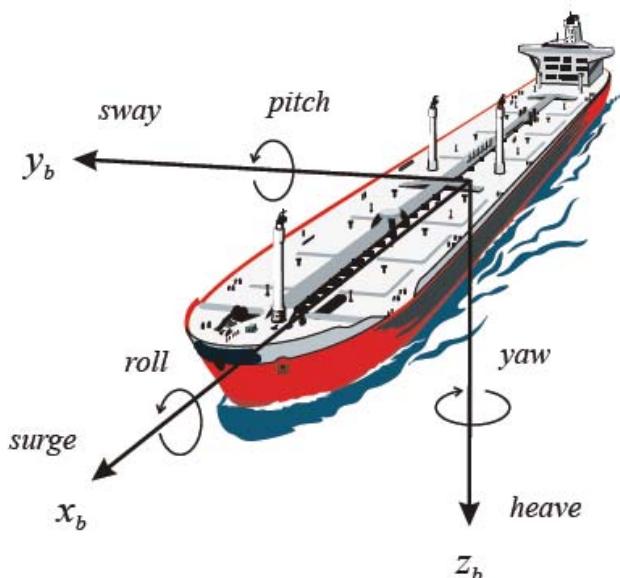
- ✓ **Longitudinal subsystem:** states u, w, q , and θ
- ✓ **Lateral subsystem:** states v, p, r , and ψ

This decomposition is good for *slender bodies* (large length/width ratio). Typical applications are *aircraft, missiles, and submarines*.



Esempi Aero/Navali

Degrees-of-Freedom (DOF)



In maneuvering, a marine craft experiences motion in 6 DOF. The motion in the horizontal plane is referred to as **surge** (**longitudinal motion**, usually superimposed on the steady propulsive motion) and **sway** (**sideways motion**).

Heading, or **yaw** (rotation about the vertical axis) describes the course of the vessel. The remaining three DOFs are **roll** (rotation about the longitudinal axis), **pitch** (rotation about the transverse axis), and **heave** (vertical motion).

Roll is probably the most troublesome DOF, since it produces the highest accelerations and, hence, is the principal villain in seasickness. Similarly, pitching and heaving feel uncomfortable to humans.

When designing ship autopilots, yaw is the primary mode for feedback control. Station-keeping of a marine craft implies stabilization of the surge, sway and yaw modes.



Esempi Aero/Navali

□ Moto longitudinale (traslazione x, z e rotazione y)

$$\begin{bmatrix} m - X_{\dot{u}} & -X_{\dot{w}} & mz_g - X_{\dot{q}} \\ -X_{\dot{w}} & m - Z_{\dot{w}} & -mx_g - Z_{\dot{q}} \\ mz_g - X_{\dot{q}} & -mx_g - Z_{\dot{q}} & I_y - M_{\dot{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -X_u & -X_w & -X_q \\ -Z_u & -Z_w & -Z_q \\ -M_u & -M_w & -M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(m - X_{\dot{u}})u \\ 0 & (Z_{\dot{w}} - X_{\dot{u}})u & mx_g u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ WBG_z \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_3 \\ \tau_5 \end{bmatrix}$$

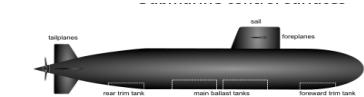
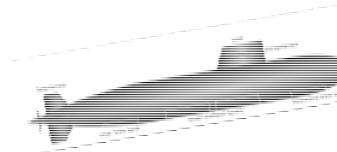
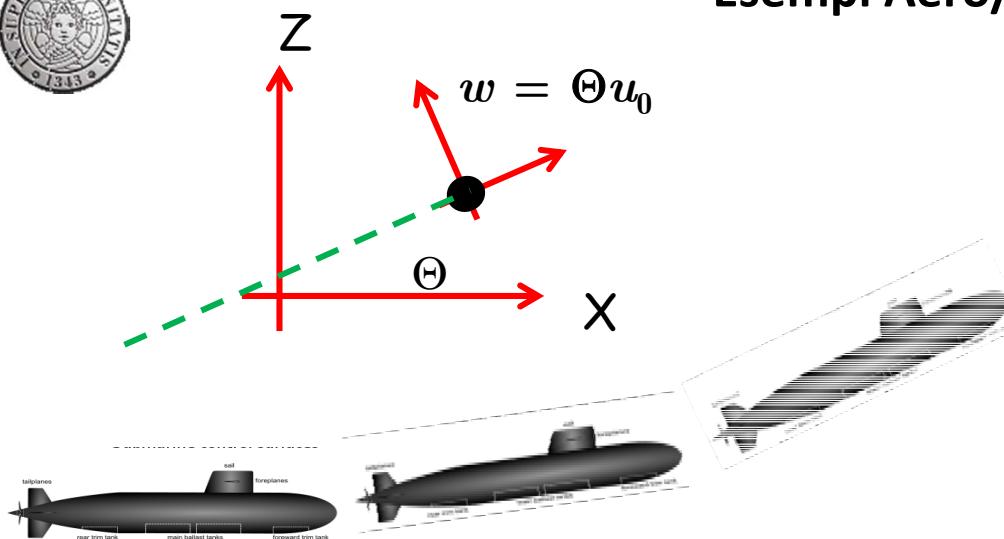
$$u = u_o = \text{constant}$$

$$\begin{bmatrix} m - Z_{\dot{w}} & -mx_g - Z_{\dot{q}} \\ -mx_g - Z_{\dot{q}} & I_y - M_{\dot{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Z_w & -Z_q \\ -M_w & -M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \end{bmatrix}$$

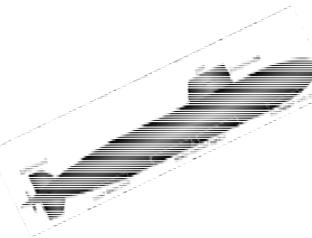
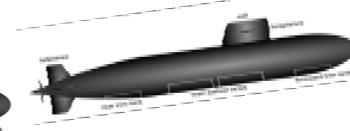
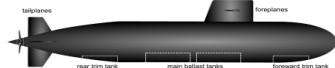
$$+ \begin{bmatrix} 0 & -(m - X_{\dot{u}})u_o \\ (Z_{\dot{w}} - X_{\dot{u}})u_o & mx_g u_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ BG_z W \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_3 \\ \tau_5 \end{bmatrix}$$



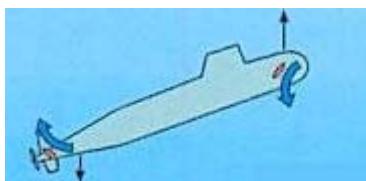
Esempi Aero/Navali



$$(I_y - M_q)\ddot{\theta} - M_q\dot{\theta} + BG_zW\theta = \tau_5$$



□ Standard Size Diesel Submarine: Depth = 280 ft, Speed = 9 Kts



$$\frac{\theta(s)}{\delta_E(s)} = \frac{-0.467(s + 0.12)}{s(s^2 + 0.8s + .25)}$$



$$p_{1,2} = -0.4 \pm j0.3$$



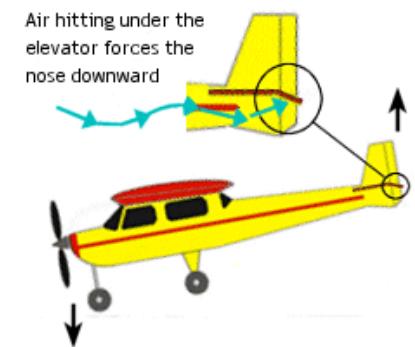
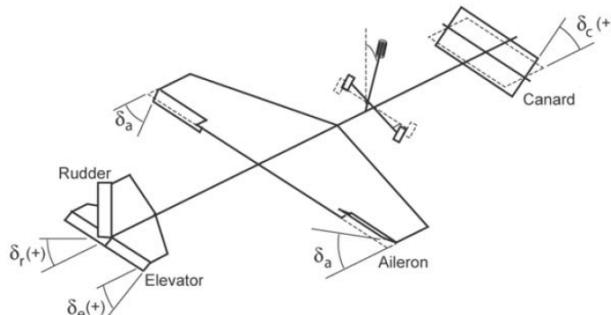
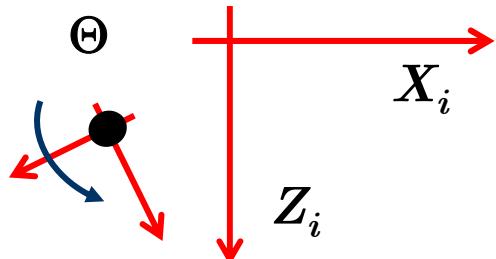
Super Falcon is equipped with high heads-up combined graphics navigation and is controlled by a pilot.

The flight controls are mechanical linkages for pitch, roll and yaw, with a throttle lever for forward and reverse thrust. As proven by the previous generations of DeepFlight winged submersibles, the craft is highly maneuverable, and can be flown level and gently over the reef, or dive nose-first to depth and spyhop to the surface. DeepFlight Merlin can be flown at cruising speeds up to 2-5 knots, or less than 1 knot for observation.

Another first is the navigation module which includes an on-board computerized track plot that enables the pilot to mark way points and will guide the sub back to its launch point.



Esempi Aero/Navali



□ Linearized Model for Pitch Rotation: Altitude = 40Kft, Speed = 0.8 M

$$G_{\delta_E}(s) = 1.1569 \frac{s + 0.2929}{s(s^2 + 0.7410s + 0.9272)}$$

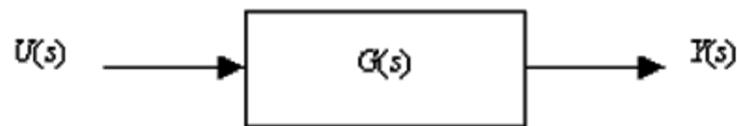
$$p_{1,2} = -0.37 \pm 0.89j$$



Algebra a Blocchi

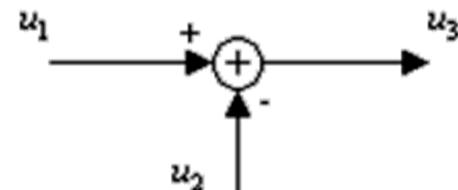
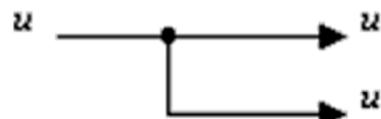
Come visto, un generico sistema può essere studiato tramite la sua *FdT* e, in particolare, tramite schemi che ne rappresentano il funzionamento; le interconnessioni e gli accoppiamenti dei componenti di sistemi lineari dinamici sono facilmente trattabili in termini di diagrammi a blocchi.

Sistema dinamico



- Sequenzialità causa - effetto

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) , \quad Y(s) = G(s) U(s)$$

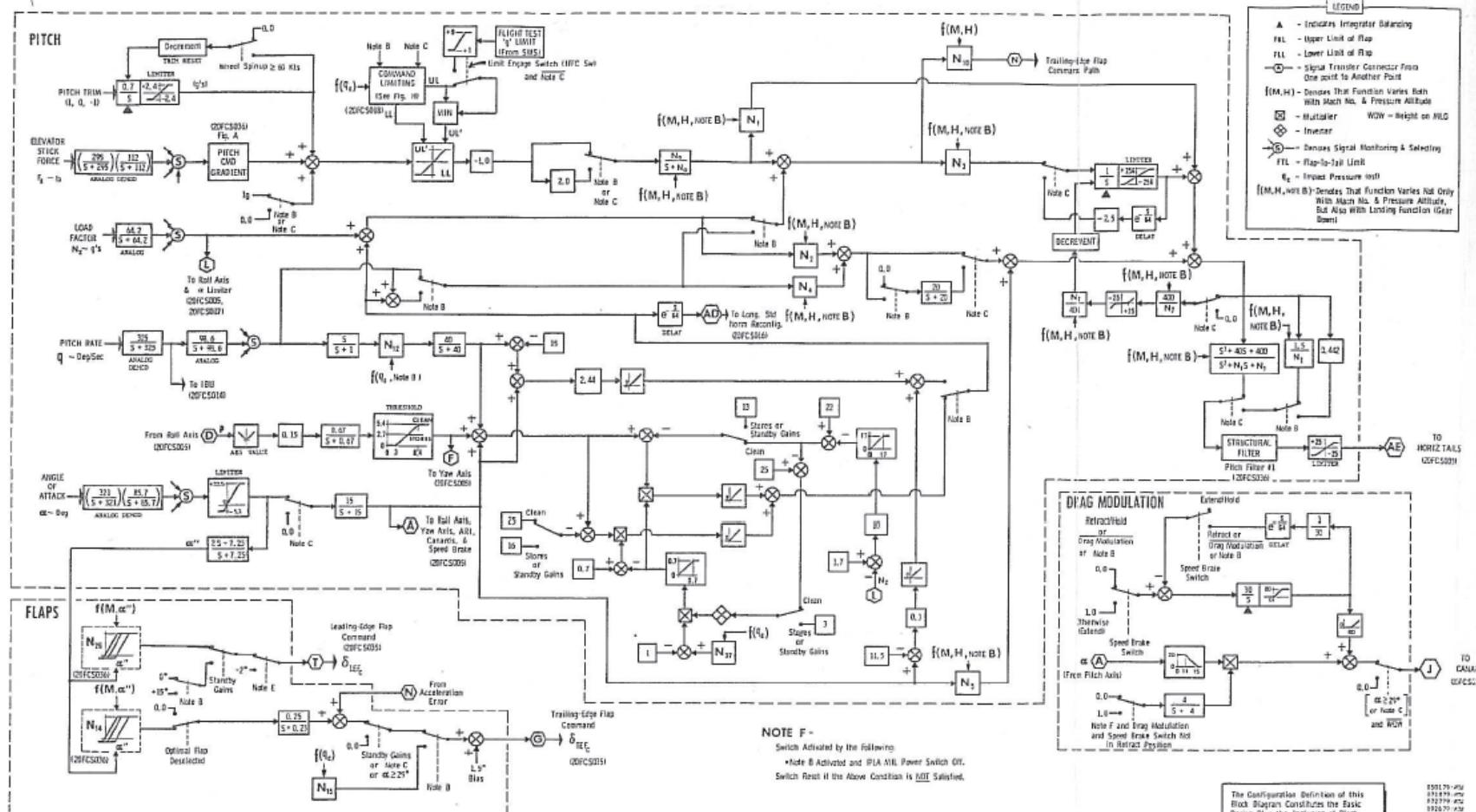


$$u_3 = u_1 - u_2$$

- https://www.youtube.com/watch?v=Wj_vfeuksUM



Algebra a Blocchi



001179-HW
011199-HW
011200-HW
011201-HW
011202-HW
011203-HW
011204-HW
011205-HW
011206-HW
011207-HW
011208-HW
011209-HW
011210-HW
011211-HW
011212-HW
011213-HW
011214-HW
011215-HW
011216-HW
011217-HW
011218-HW
011219-HW
011220-HW



GENERAL DYNAMICS
Ft Worth Division

LONGITUDINAL
STANDARD NORMAL MODE

20FC5001

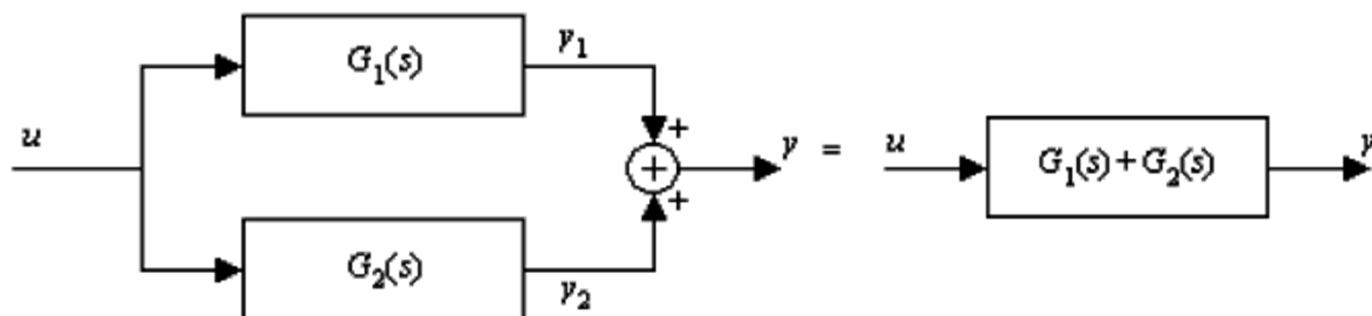


Algebra a Blocchi



$$y_1 = G_1 u_1, \quad y_2 = G_2 u_2, \quad u_2 = y_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = G_2(s)G_1(s)$$

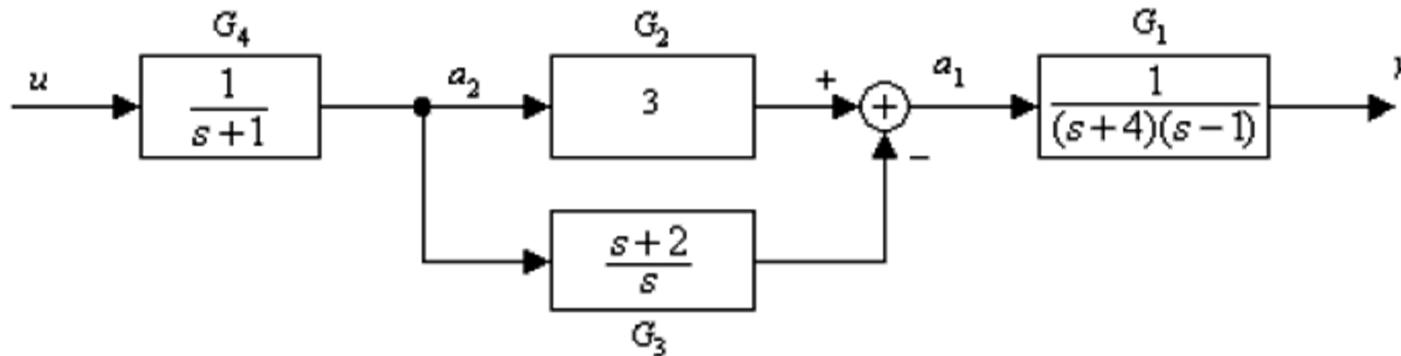


$$y = G_1 u + G_2 u = (G_1 + G_2) u$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s)$$



Algebra a Blocchi



$$\begin{cases} y = G_1 a_1 \\ a_1 = (G_2 - G_3) a_2 \quad \Rightarrow \quad y = G_1 (G_2 - G_3) G_4 u \quad \Rightarrow \\ a_2 = G_4 u \end{cases}$$

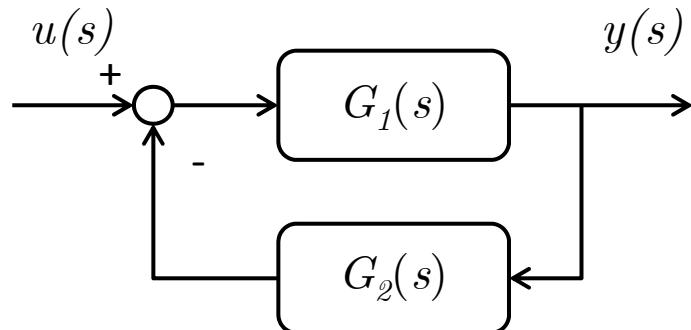
$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1 (G_2 - G_3) G_4 = \frac{1}{(s+4)(s-1)} \left(3 - \frac{s+2}{s} \right) \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+4)(s-1)} \cdot \frac{2(s-1)}{s} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{2}{s(s+1)(s+4)}$$



Algebra a Blocchi

□ Sistemi in Retroazione



$$\begin{aligned} y(s) &= G_1(s)[u(s) - y(s)] = G_1(s)[u(s) - G_2(s)y(s)] \\ [1 + G_1(s)G_2(s)]y(s) &= G_1(s)u(s) \end{aligned}$$

□ **Definizione** - FdT in anello chiuso o Funzione di sensitività complementare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

□ **Definizione** - Funzione di Trasferimento di Anello (o ad Anello aperto): prodotto di tutte le funzioni di trasferimento presenti in anello:

$$G_{OL}(s) = G_1(s)G_2(s)$$

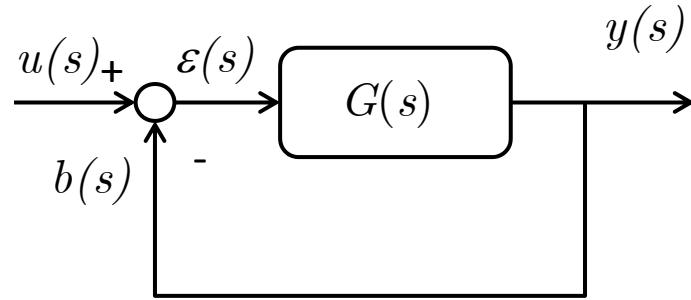
□ **Definizione** - Funzione di Sensitività :

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$



Algebra a Blocchi

□ Retroazione Unitaria



$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

- **u = segnale di Riferimento/Comando**
- **y = variabile controllata**
- **e = segnale di errore**
- **b = segnale di retroazione**

- FdT in anello chiuso o Funzione di sensitività complementare

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = G_u^y(s)$$

- FdT di Sensitività (Errore)

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)} = G_u^\varepsilon(s)$$

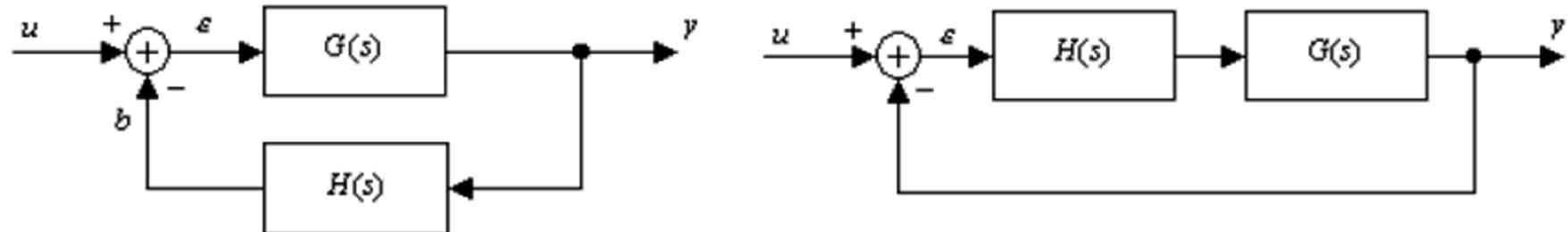
- Vincolo Algebrico

$$S(s) + T(s) = \frac{1}{1 + G(s)} + \frac{G(s)}{1 + G(s)} = 1$$



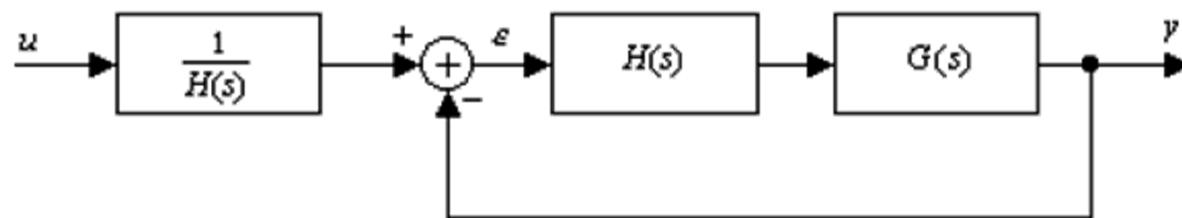
Algebra a Blocchi

□ Relazione tra retroazione non unitaria e retroazione unitaria



$$G_{CL}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$G_{CL}(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



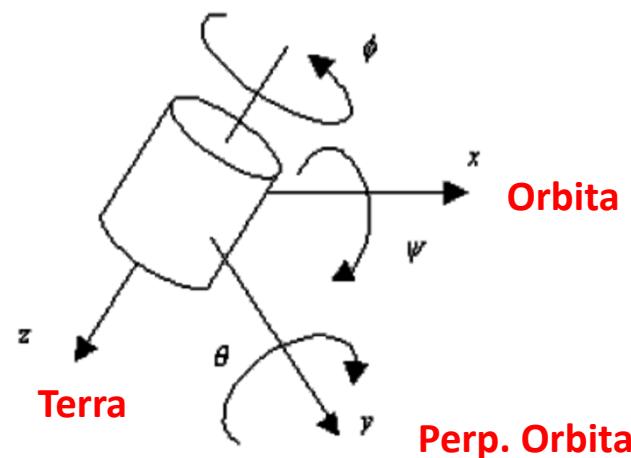
$$G_{CL}(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{H(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



Algebra a Blocchi

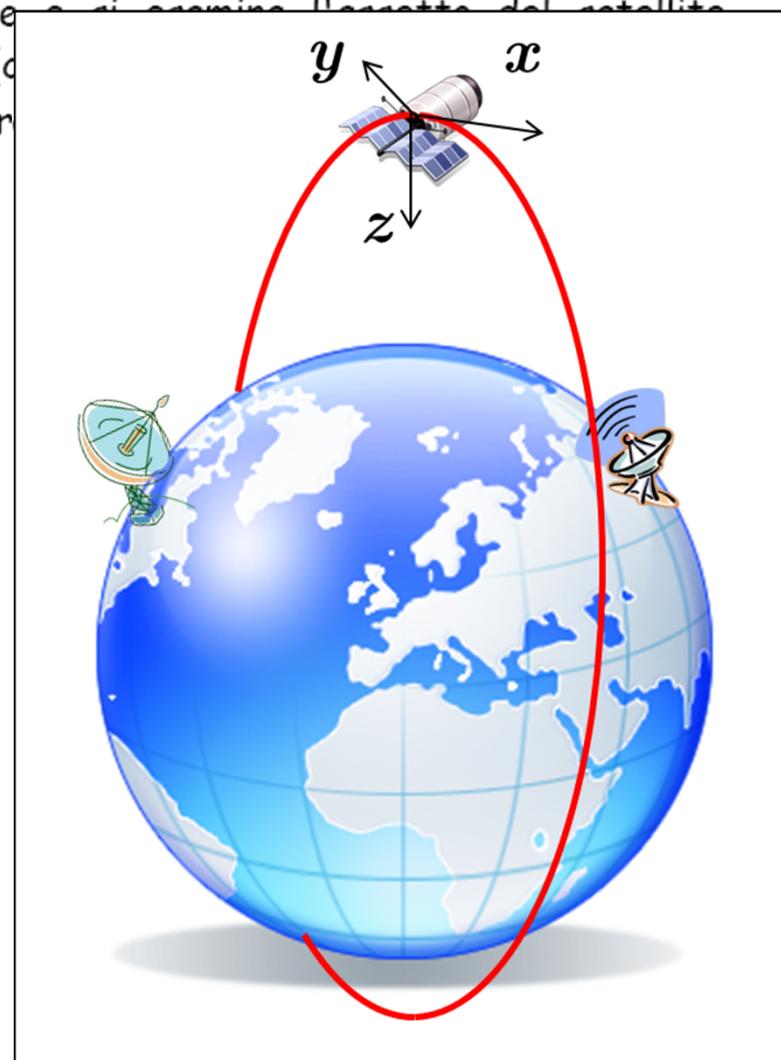
□ Moto di Assetto di un Satellite

L'asse z è rivolto verso la Terra mentre il moto orbitale avviene lungo l'asse x : in questo esempio si trascura il moto orbitale relativamente alla rotazione in beccheggio (il satellite risulti sempre orientato nella maniera rivolto verso le antenne a terra).



- coppie di controllo
- coppia magnetica
- coppia gravitazionale
- coppie dovute agli urti

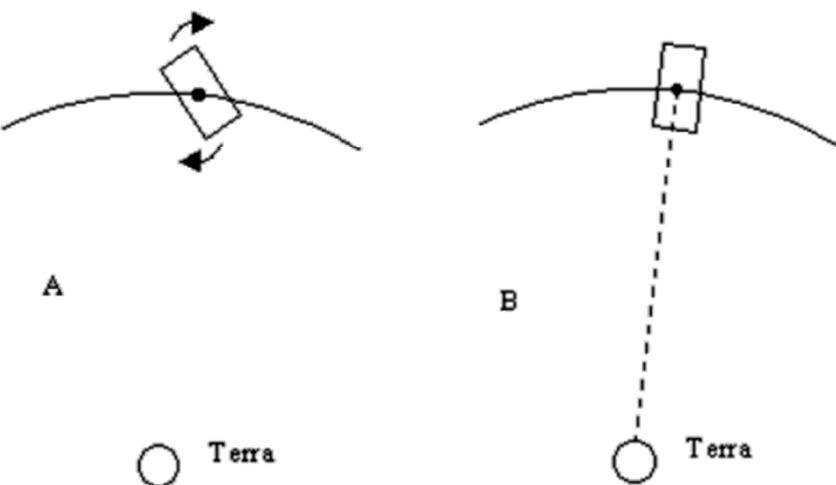
$$[I]\dot{\omega} = \sum_i T_i$$





Algebra a Blocchi

In questo caso si prendono in considerazione solo una coppia di controllo (M) ed una (M_G) gravitazionale; si noti che quest'ultima è dovuta all'effetto dell'attrazione gravitazionale quando il satellite non ha una distribuzione uniforme intorno al centro di massa:

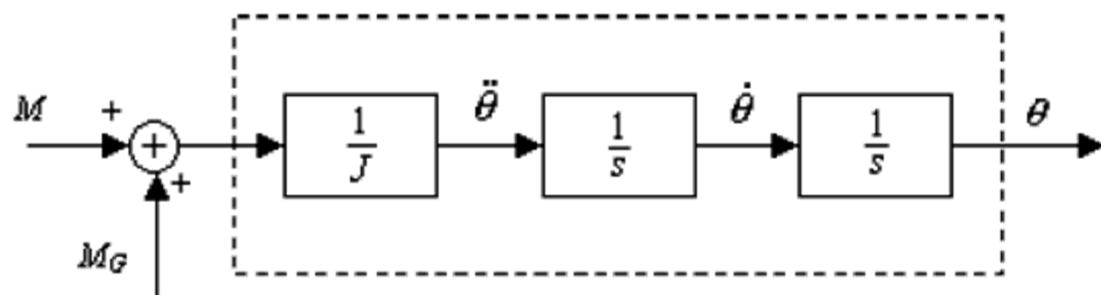


$$J \cdot \ddot{\theta} = M + M_G$$

$$M_G = C_g \sin(2\theta_T)$$

$$\theta_T = \theta_c + \theta$$

- θ_c = Angolo di riferimento
- θ = Angolo di assetto effettivo

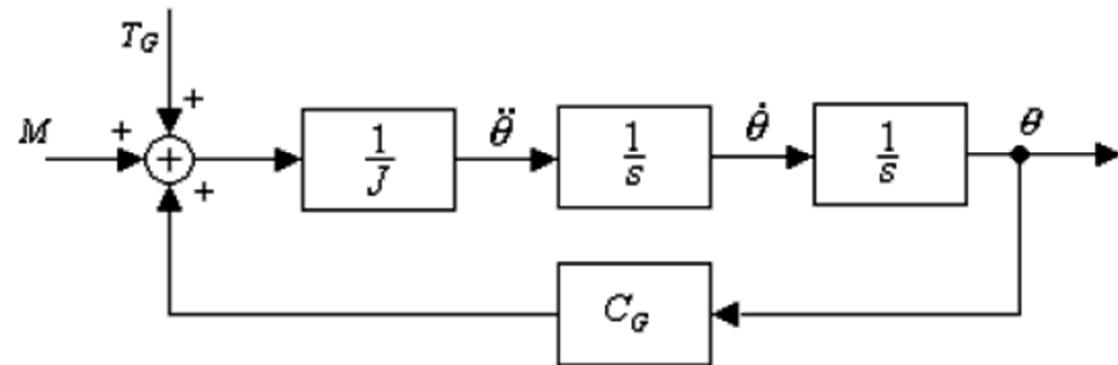




Algebra a Blocchi

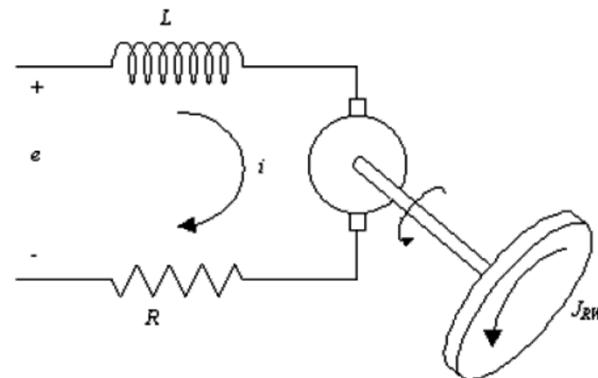
$$M_G = C_g \sin(2\theta_C + 2\theta) = C_g [\sin(2\theta_C) \cos(2\theta) + \cos(2\theta_C) \sin(2\theta)]$$

$$M_G = C_g \sin(2\theta_C) + [C_g \cos(2\theta_C)] \cdot 2\theta_C = T_G + C_G \theta$$



- **Coppia di controllo (M)**

- ad elementi continui con parti rotanti,
 - piatti inerziali
 - giroscopio
 - ruote inerziali
- ad elementi discontinui:
 - razzetti d'assetto



Motore in Continua ad eccitazione di armatura. La tensione variabile cambia la velocità di rotazione dell'albero



Algebra a Blocchi

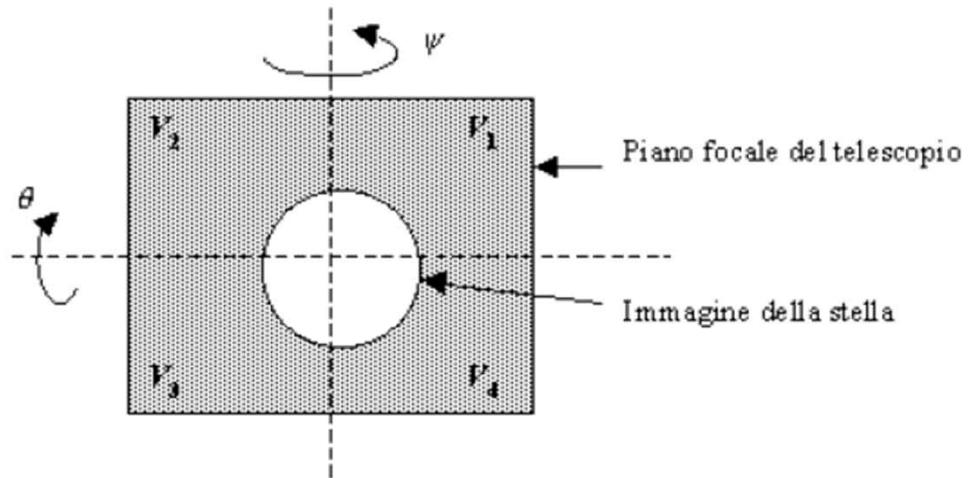
$$e = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + e_b$$

$$I(s) = \frac{E(s) - E_b(s)}{R + L \cdot s}$$

- **Sistema sensori**

L'insieme degli elementi di misura

- piattaforme inerziali
- sensori giroscopici
- sensori stellari
- sensori d'orizzonte
- sistemi GPS

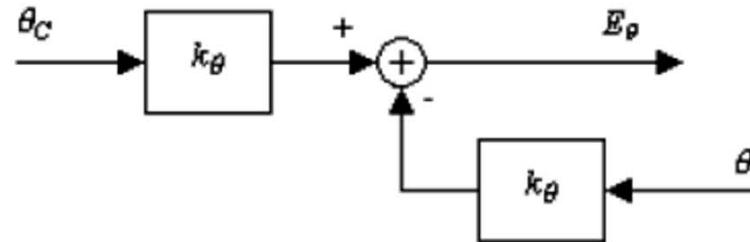


I quattro pannelli riescono a generare da una variazione di intensità luminosa una variazione di potenziale; nel caso in esame, prendendo in considerazione solo la rotazione θ

$$k_\theta(\theta_c - \theta) = (V_3 + V_4) - (V_1 + V_2) \triangleq E_\theta$$



Algebra a Blocchi



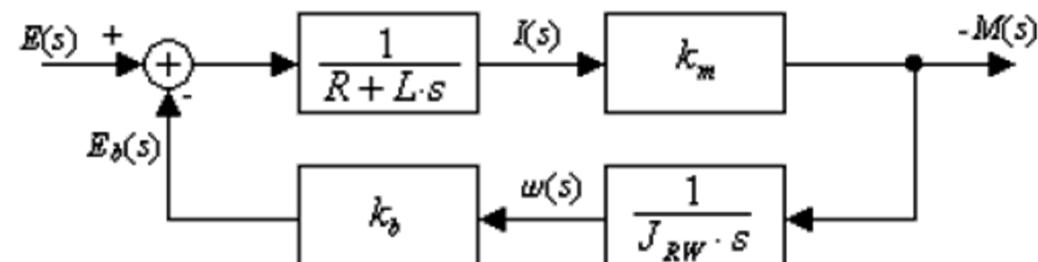
- Motore in continua (a corrente di campo costante)

$$\begin{cases} -M = k_m i \\ J_{RW} \cdot \dot{\omega} = -M \end{cases}$$

$$I(s) = \frac{1}{R + L \cdot s} [E(s) - E_b(s)]$$

$$E_b(s) = k_b \cdot \omega(s)$$

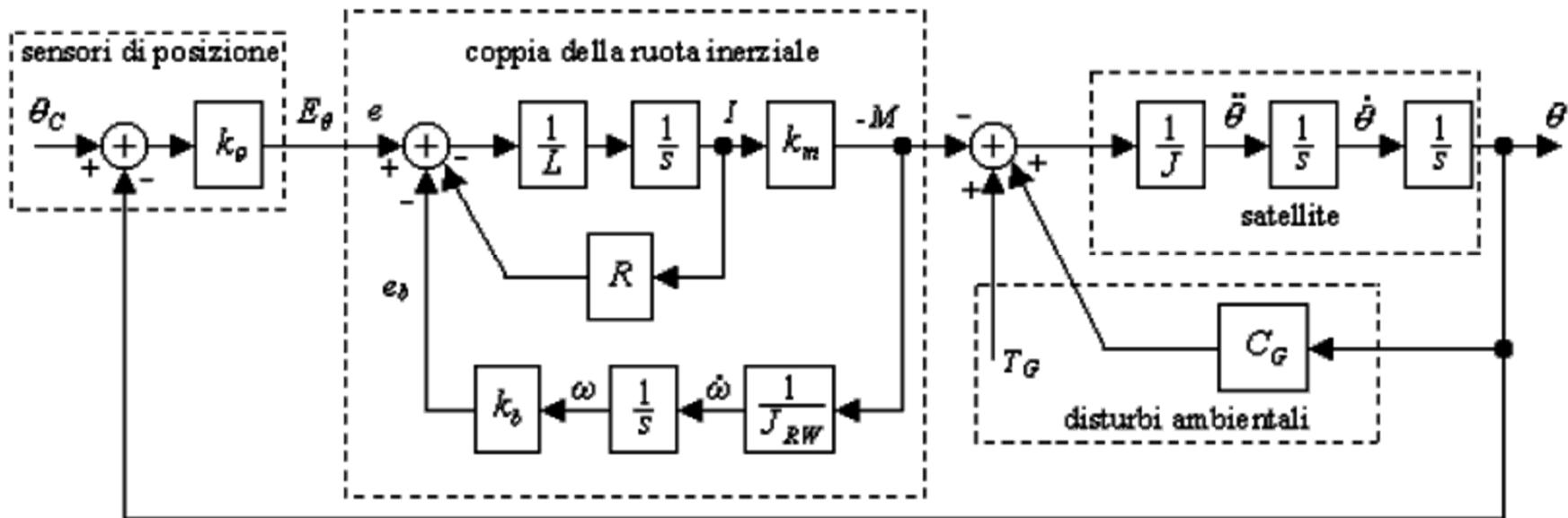
$$\omega(s) = \frac{1}{J_{RW} \cdot s} [-M(s)]$$



$$-M(s) = \frac{k_m \cdot J_{RW} \cdot s}{J_{RW} \cdot s \cdot (R + L \cdot s) + k_m k_b} E(s) = G_{ACT}(s) \cdot E(s)$$



Algebra a Blocchi

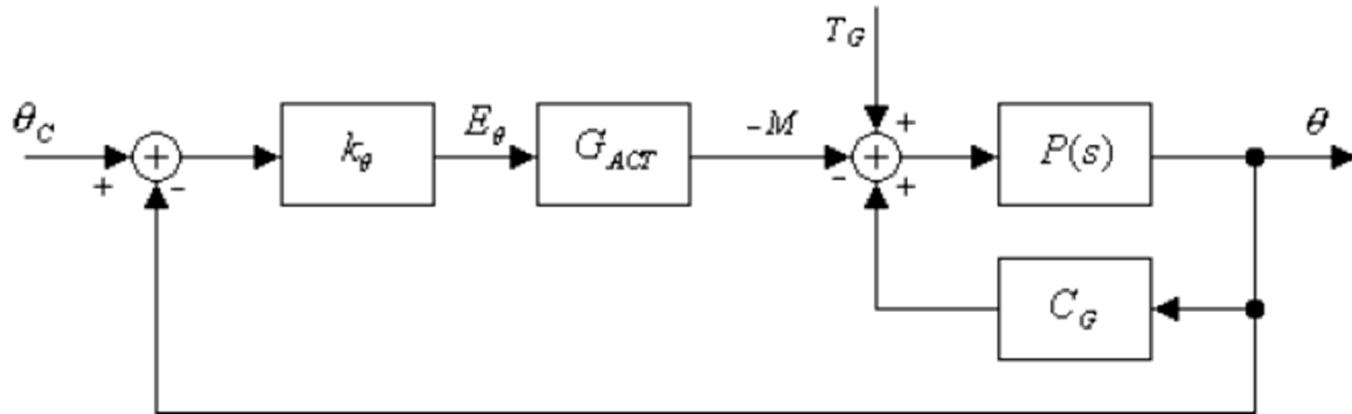


$$P(s) = \frac{1}{J \cdot s^2} \quad , \quad G_{ACT}(s) = \frac{k_m \cdot J_{RW} \cdot s}{J_{RW} \cdot s \cdot (R + L \cdot s) + k_m k_b}$$

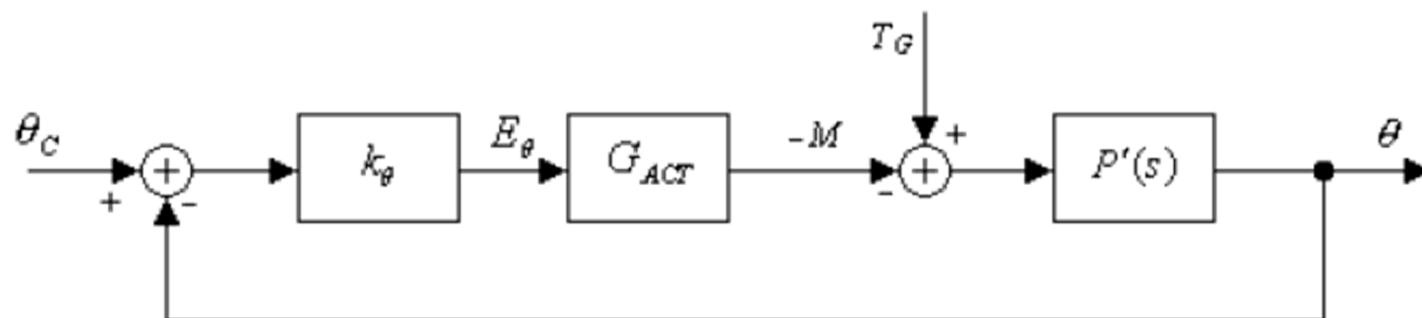
□ Riduzione del Diagramma completo →



Algebra a Blocchi



$$P'(s) = \frac{P(s)}{1 - C_G P(s)} = \frac{1}{J \cdot s^2 - C_G}$$

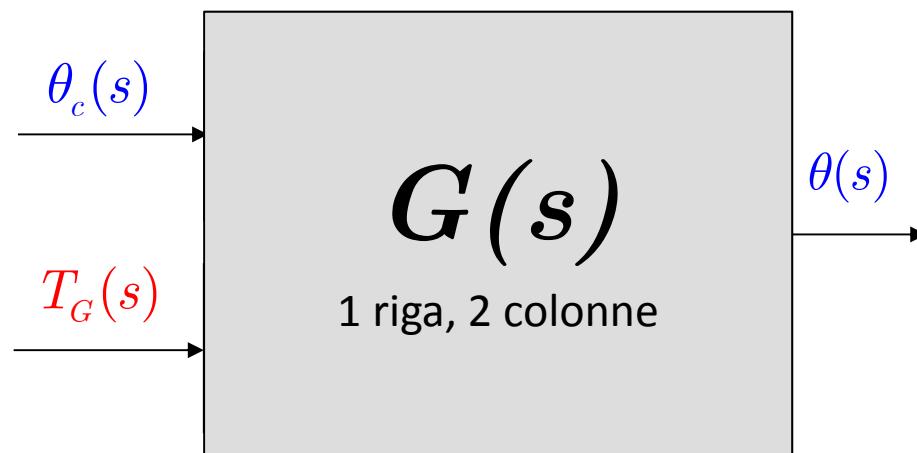




Algebra a Blocchi

$$\theta(s) = \frac{k_\theta G_{ACT}(s) P'(s)}{1 + k_\theta G_{ACT}(s) P'(s)} \theta_c(s) + \frac{P'(s)}{1 + k_\theta G_{ACT}(s) P'(s)} T_G(s)$$

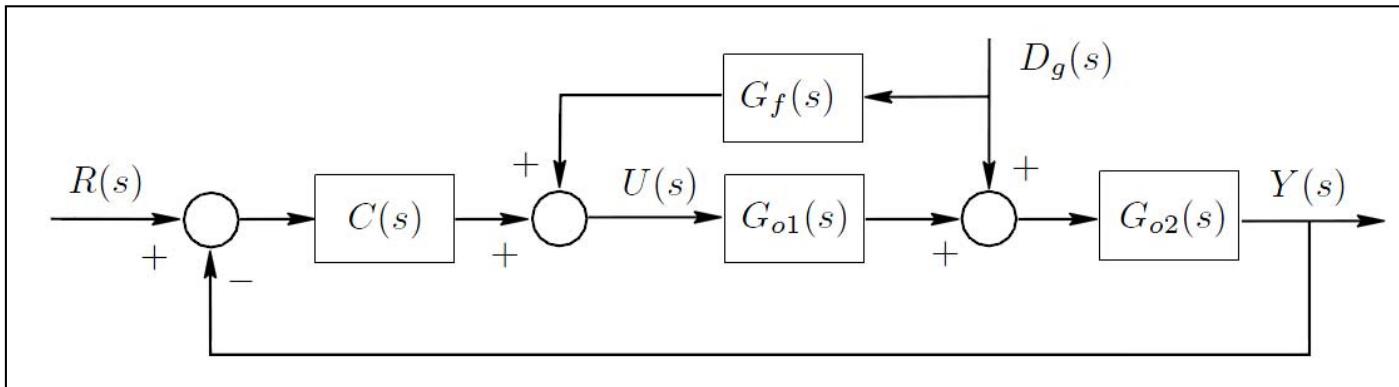
$$\theta(s) = G_1(s) \theta_c(s) + G_2(s) T_G(s)$$





Algebra a Blocchi

□ Struttura di controllo con **feedforward** e **feedback** per attenuazione di disturbi



- **Obiettivo:** far sì che l'uscita segua il riferimento in presenza di un disturbo esterno
- **Sistema descritto dalle FdT:** $G_{o1}(s)$ e $G_{o2}(s)$
- **Controllore descritto dalle FdT:** $G_f(s)$ e $C(s)$

$$Y(s) = G_{o2}(s) \left\langle D_g(s) + G_{o1}(s) \left\{ G_f(s)D_g(s) + C(s)[R(s) - Y(s)] \right\} \right\rangle$$

$$Y(s) = \frac{G_{o2}(1 + G_{o1}G_f)}{1 + G_{o2}G_{o1}C} D_g(s) + \frac{G_{o2}G_{o1}C}{1 + G_{o2}G_{o1}C} R(s)$$

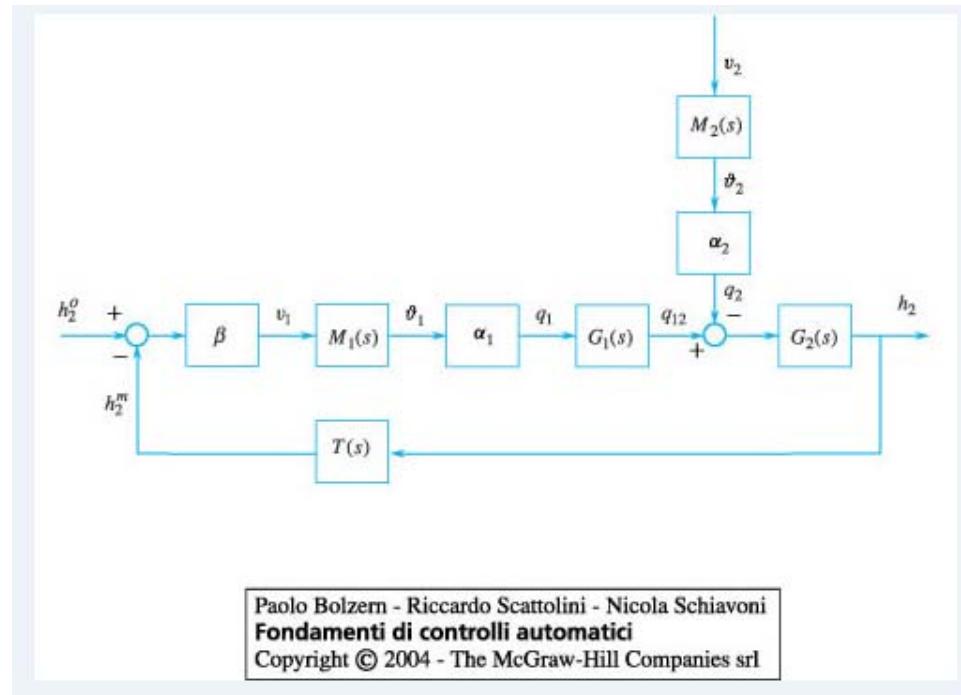
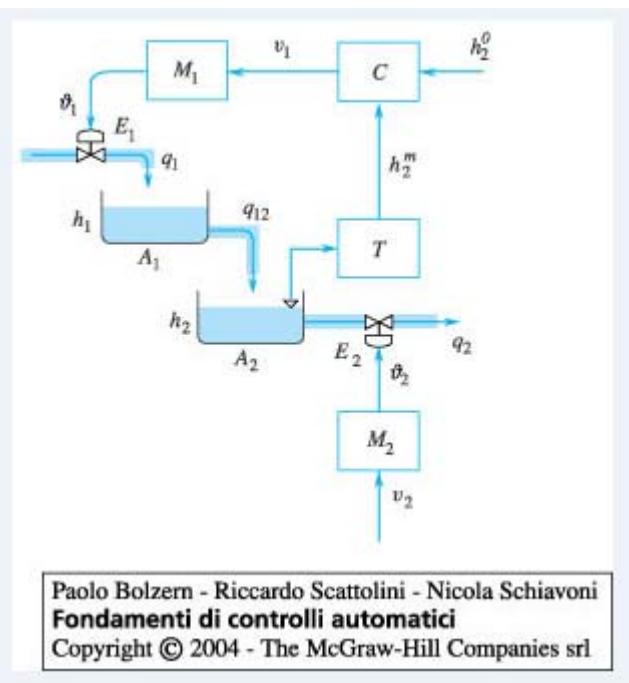
□ **Che succede se poniamo:**

$$G_f(s) = -\frac{1}{G_{o1}(s)}$$



Algebra a Blocchi

- Esercizio: Capitolo 5, libro di testo



- Il sistema a sinistra mostra un sistema a doppio serbatoio in ciclo chiuso con il controllore $C(s)$ che provvede a mantenere il livello del secondo serbatoio costante ad un valore desiderato:

$$h_2 = h_2^0$$

- Derivare il diagramma a blocchi e la FdT in ciclo chiuso del sistema