

# Lavoro ed energia potenziale

Come il campo di gravità, anche il **campo elettrico** è **CONSERVATIVO**; dunque **una carica all'interno del campo elettrico possiede un'energia potenziale**, in virtù del fatto che essa può essere spostata dalla forza del campo elettrico; se una carica  $q$  in un **campo uniforme  $E$**  subisce uno spostamento rettilineo  $\vec{d}$ , **il lavoro compiuto dal campo elettrico sulla carica è**

$$L = \vec{F} \cdot \vec{S} = q \vec{E} \cdot \vec{d}$$

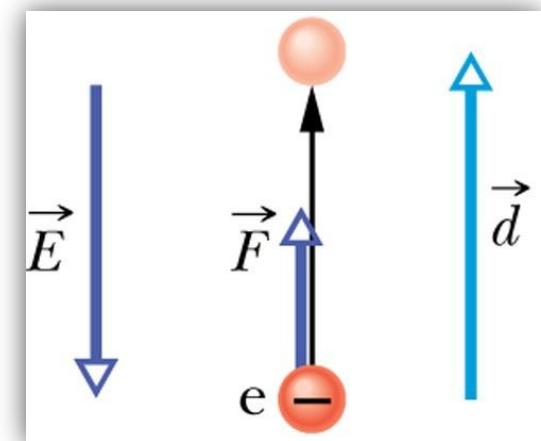
A seguito dello spostamento  $\vec{d}$ , l'energia potenziale della carica  $q$  sarà variata (diminuita) di una quantità

$$\Delta U = -L = -q \vec{E} \cdot \vec{d}$$

Esempio: consideriamo un elettrone in un campo elettrico uniforme  $E = 100 \text{ N/C}$ ; calcoliamo il lavoro compiuto dal campo e la variazione di energia potenziale dell'elettrone corrispondente ad uno spostamento verso l'alto uguale a  $d=100 \text{ m}$

$$L = e E d = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 100 \frac{\text{N}}{\text{C}} \times 100 \text{ m} = 1.6 \times 10^{-15} \text{ J}$$

$$\Delta U = -L = -1.6 \times 10^{-15} \text{ J}$$



# Lavoro e differenza di potenziale

- ✓ In ambito elettronico o elettrotecnico, più del lavoro e dell'energia potenziale, si utilizza il **POTENZIALE**  $\Delta V$  (comunemente anche detto **tensione** o **voltaggio**), ovvero **l'energia potenziale per carica unitaria**; se  $q_0$  è la carica spostata, per un campo elettrico uniforme si ha:

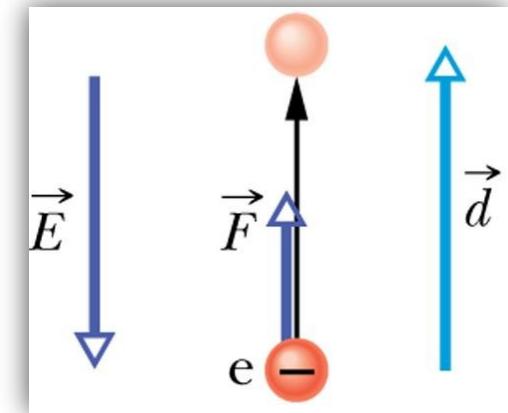
$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{\Delta U}{q_0} = -\frac{L}{q_0} = -\vec{E} \cdot \vec{S} \quad V_i - V_f = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

- ✓ Notiamo che il potenziale non dipende dalla carica spostata, ma soltanto dal campo elettrico che compie lavoro; dunque è una grandezza più generale di lavoro ed energia potenziale
- ✓ Come l'energia potenziale, anche il potenziale è in realtà una **differenza di potenziale (d.d.p.)** tra due punti dello spazio
- ✓ **La d.d.p.  $V_f - V_i$  tra due punti del campo è uguale a (meno) il lavoro compiuto dal campo per spostare la carica unitaria dal punto iniziale a quello finale**

# Elettrone nel campo uniforme

Consideriamo un elettrone in un campo elettrico uniforme d'intensità  $E = 100 \text{ N/C}$ ; l'elettrone viene spostato di 100 m

$$L = eEd = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 100 \frac{\text{N}}{\text{C}} \times 100 \text{ m} = 1.6 \times 10^{-15} \text{ J}$$



**Il lavoro compiuto da un campo uniforme d'intensità  $E=100 \text{ N/C}$  per spostare un elettrone di 100 m è uguale a  $1.6 \times 10^{-15} \text{ J}$**

$$\Delta U = U_f - U_i = -L = -1.6 \times 10^{-15} \text{ J}$$

**A seguito di uno spostamento di 100 m, l'energia potenziale dell'elettrone si è ridotta di  $1.6 \times 10^{-15} \text{ J}$**

$$\Delta V = V_f - V_i = -Ed = -100 \frac{\text{N}}{\text{C}} \times 100 \text{ m} = -10^4 \text{ V}$$

**Un campo uniforme d'intensità  $E=100 \text{ N/C}$  genera, tra due punti distanti 100 m, una d.d.p. di  $10^4 \text{ V}$**

# Unità di misura

il lavoro ha le dimensioni di una energia, e si misura in **Joule (J)**:

$$[U] = [L] = N \cdot m = J$$

Il Potenziale ha dimensioni di energia diviso carica, e si misura in **Volt (V)**

$$[V] = \left[ \frac{U}{q} \right] = \frac{J}{C} = \frac{Nm}{C} = V$$

Dalla precedente equazione si vede che il **campo elettrico si può anche esprimere in V/m**, essendo:

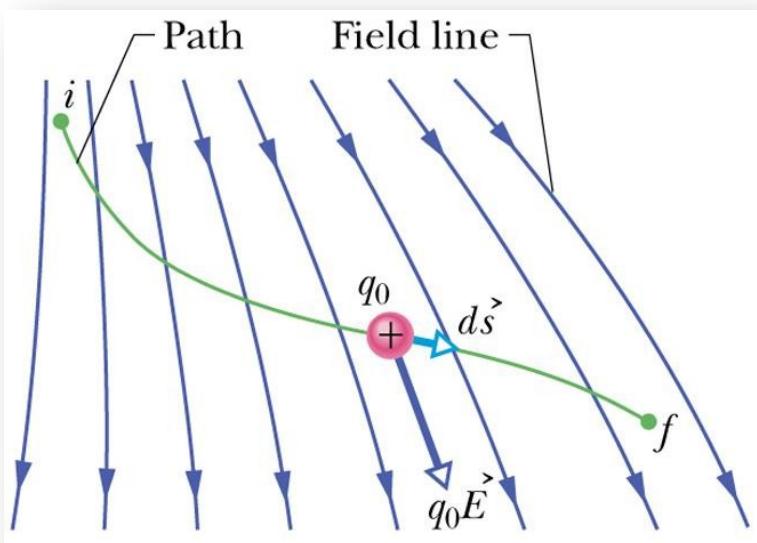
$$\frac{V}{m} = \frac{N}{C}$$

Una unità di lavoro ed energia molto utilizzata in fisica atomica è l'**elettronvolt (eV)**; 1 eV è il lavoro compiuto per variare di 1 Volt il potenziale di una carica elementare:

$$L = q \Delta V = e \times 1V = 1.6 \times 10^{-19} C \times \frac{J}{C} = 1.6 \times 10^{-19} J$$

# Lavoro e differenza di potenziale

- ✓ In generale, i **campi elettrici non sono uniformi**, e la **traiettoria della particella può essere non rettilinea**; in questo caso dobbiamo usare il formalismo infinitesimale
- ✓ Consideriamo una carica  $q_0$  all'interno di un campo elettrico qualsiasi, ed una traiettoria curvilinea (in verde); dividiamo la traiettoria in spostamenti infinitesimali  $d\vec{s}$ , sui quali il campo possa considerarsi uniforme; il lavoro, anch'esso infinitesimo, associato a questo spostamento è:



$$dL = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

La differenza di potenziale infinitesima:

$$dV = - \frac{dL}{q_0} = - \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

lavoro e d.d.p. complessiva tra  $i$  ed  $f$  si ottengono integrando lungo la traiettoria:

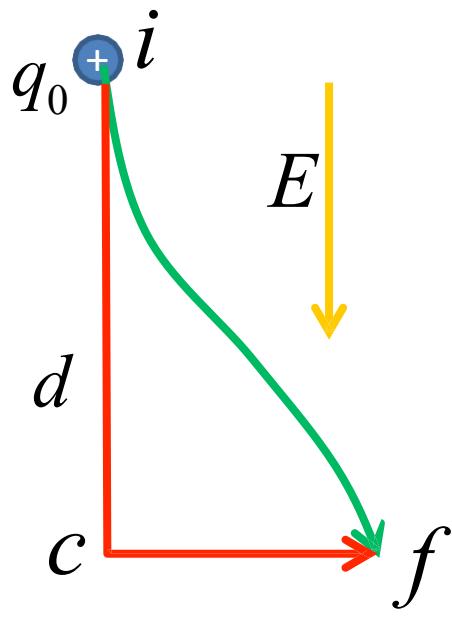
$$L = q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\Delta U = -q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\Delta V = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

# Percorso d'integrazione

- ✓ Nel calcolo della d.d.p. una notevole semplificazione all'integrale del campo elettrico lungo la traiettoria della particella si ottiene dal fatto che, essendo il **campo elettrico conservativo, lavoro e d.d.p. tra due punti non dipendono dalla traiettoria specifica** utilizzata per andare da  $i$  ed  $f$ , ma solo dai due punti.
- ✓ Dunque **possiamo sempre scegliere il percorso più conveniente possibile** tra  $i$  ed  $f$  ed alla fine ottenere lo stesso risultato.



Esempio: consideriamo un **campo uniforme**, indicato in giallo in figura; vogliamo calcolare la d.d.p. tra i punti  $i$  ed  $f$ ; scegliendo la **traiettoria rossa** il calcolo è molto semplice; infatti, è chiaro che la d.d.p. nel tratto  $c-f$  è nulla, poiché campo e spostamento sono perpendicolari; dunque conta solo il segmento tra  $i$  e  $c$ ; sia  $d$  la distanza tra  $i$  e  $c$  :

$$\Delta V = V_f - V_i = (V_f - V_c) + (V_c - V_i) = V_c - V_i = -Ed$$

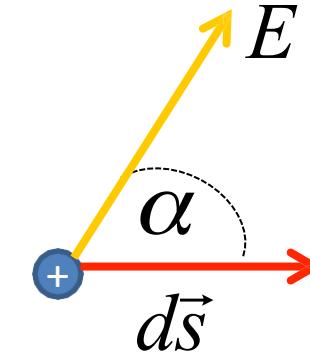
Seguendo la traiettoria verde non rettilinea, il calcolo sarebbe molto più complicato, ma alla fine si otterrebbe lo stesso risultato

# Dal potenziale al campo elettrico

Dalla relazione:  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = -E_s ds$

$E_s = E \cos(\alpha)$  componente del campo parallela a  $d\vec{s}$

si ottiene:  $E_s = - \frac{dV}{ds}$



Ovvero la **componente del campo elettrico in una direzione s è uguale alla derivata (cambiata di segno) del potenziale rispetto allo spostamento in quella direzione**

**Conoscendo il potenziale**  $V(x,y,z)$  in tutti i punti  $\mathbf{r}=(x,y,z)$  all'interno di una certa regione di spazio, **possiamo ricavare il campo elettrico IN OGNI PUNTO ed OGNI DIREZIONE**, calcolando le derivate del potenziale rispetto a  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Le componenti del campo elettrico lungo gli assi principali del riferimento cartesiano sono:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

In forma vettoriale:  $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}$

**NB: a differenza del campo, il potenziale è una quantità SCALARE**

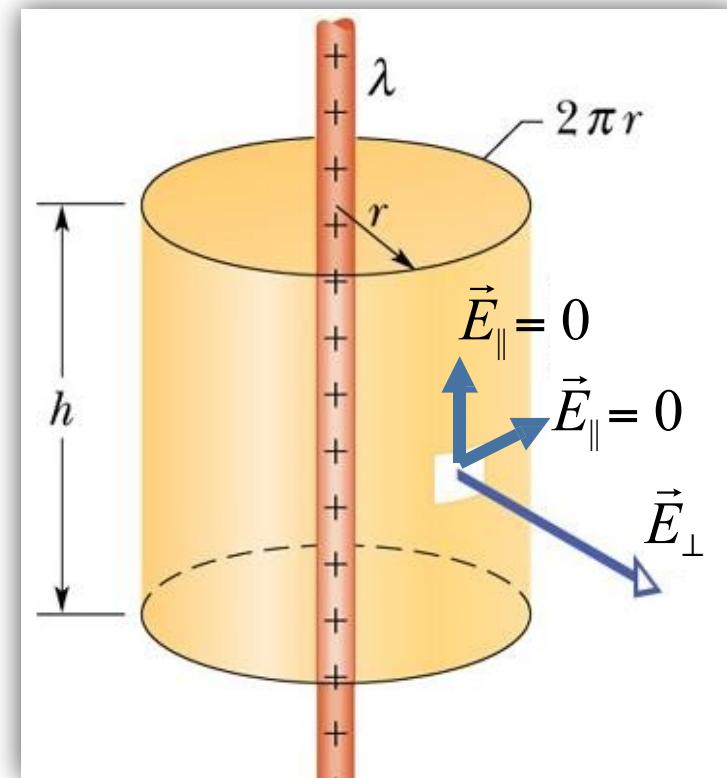
# Superfici equipotenziali

- ✓ Se in una determinata direzione il potenziale non varia ( $\Delta V=0$ , dunque  $V$  è costante in quella direzione), ciò significa che **la componente del campo in quella direzione è NULLA**
- ✓ il luogo dei punti nello spazio aventi uguale potenziale si dice **superficie equipotenziale**

Su ciascun punto di una superficie equipotenziale:

- ✓ lungo una qualsiasi direzione tangenziale alla superficie, la **componente parallela alla superficie** del campo  $E_{||}$  è nulla
- ✓ **il campo elettrico non compie lavoro** sulla carica che si sposta lungo una traiettoria contenuta sulla superficie

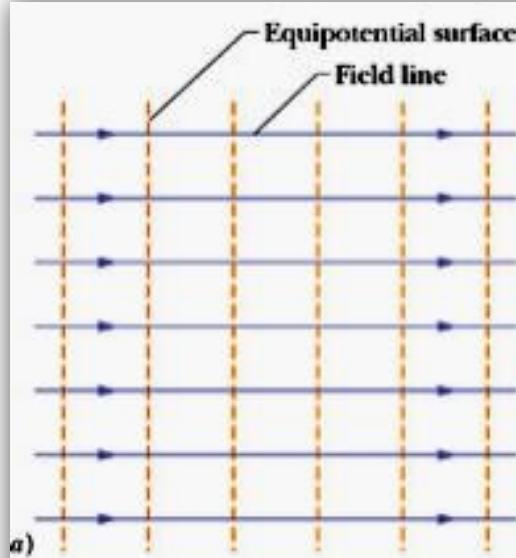
Ad esempio, nel campo elettrico a simmetria cilindrica del filo carico, **ogni superficie cilindrica è una superficie equipotenziale**



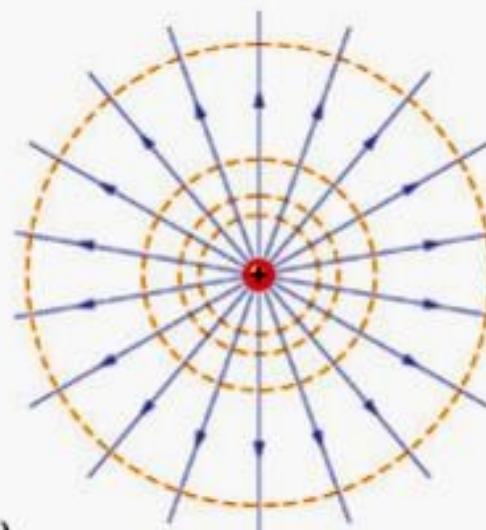
# Superfici equipotenziali

- ✓ Le **superfici equipotenziali sono sempre perpendicolari alle linee di forza e dunque alla direzione del campo elettrico**: se così non fosse il campo avrebbe una direzione tangenziale alla superficie, ed il potenziale non sarebbe costante
- ✓ per un **campo uniforme** le superfici equipotenziali sono **piani perpendicolari alle linee di campo**; per un **campo radiale** le superfici equipotenziali sono sfere concentriche

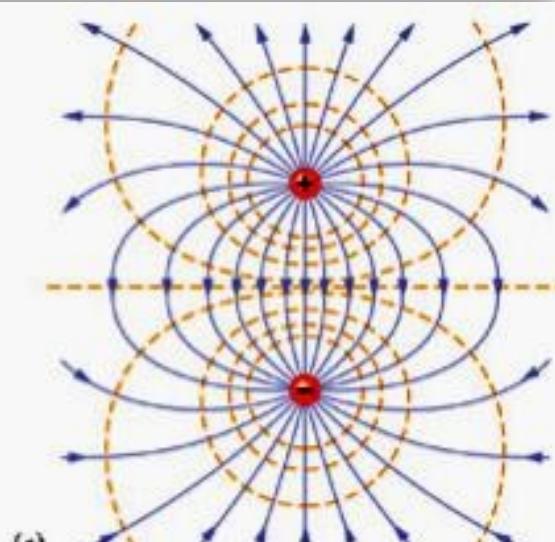
CAMPO UNIFORME



CAMPO RADIALE

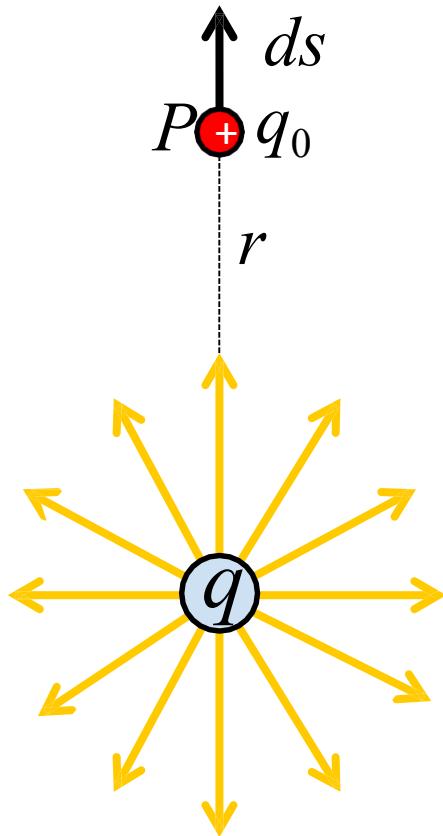


CAMPO DI DIPOLO



**Le superfici equipotenziali coincidono, in tutto o in parte, con le superfici gaussiane utilizzate per il calcolo del campo elettrico !**

# Potenziale generato da una carica puntiforme



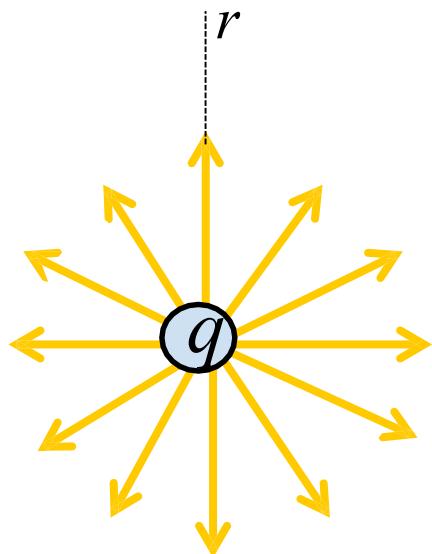
- ✓ Calcoliamo il **potenziale generato dalla carica**  $q > 0$  in un generico punto  $P$  distante  $r$  da  $q$
- ✓ Poniamo una carica di prova  $q_0 > 0$  nel punto  $P$  e **calcoliamo il lavoro compiuto dal campo** generato da  $q$  per spostare  $q_0$  dal punto  $P$  a distanza infinita
- ✓ Poiché il campo è conservativo,  $L$  non dipende dal percorso di  $q_0$ , per cui possiamo scegliere il percorso sul quale è più semplice calcolare l'integrale; questo è chiaramente la **traiettoria radiale** ( $ds = dr'$ ) lungo la quale **spostamento e campo sono sempre paralleli**

$$L = q_0 \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_r^{\infty} E dr' = q_0 \int_r^{\infty} k \frac{q}{r'^2} dr' = k q q_0 \int_r^{\infty} \frac{1}{r'^2} dr'$$

Risolvo l'integrale:

$$\int_r^{\infty} \frac{1}{r'^2} dr' = - \frac{1}{r'} \Big|_r^{\infty} = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow L = k \frac{q_0 q}{r}$$

# Potenziale generato da una carica puntiforme



$$\Rightarrow \Delta V = V(\infty) - V(r) = -\frac{L}{q_0} = -k \frac{q}{r}$$

Possiamo assumere NULLO il potenziale a distanza infinita; ovvero **l'infinito** per il campo elettrico della carica puntiforme **è lo ZERO del potenziale**; dunque

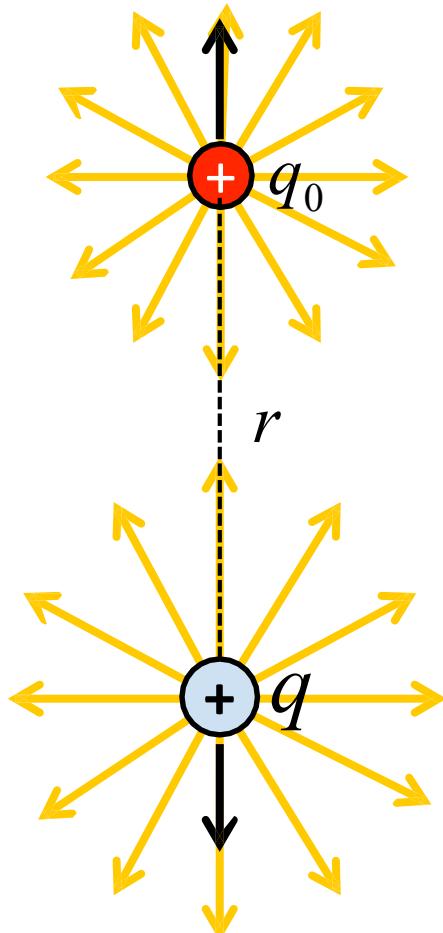
$$V(\infty) = 0 \quad \Rightarrow V(r) = k \frac{q}{r}$$

Come PROVA che il risultato è giusto, possiamo ricavare nuovamente il campo elettrico dalla derivata del potenziale (cambiata di segno) rispetto ad  $r$ :

$$E(r) = -\frac{dV(r)}{dr} = k \frac{q}{r^2}$$

OK, si ritrova il campo elettrico descritto dalla legge di Coulomb !

# Energia potenziale di cariche puntiformi



Dal potenziale nel punto  $r$  si ricava immediatamente l'energia potenziale della carica  $q_0$  posta in  $r$ :

$$U(r) = q_0 V(r) = k \frac{q_0 q}{r} = L$$

L'interazione tra  $q$  e  $q_0$  può essere ugualmente descritta considerando che  $q_0$  genera un campo che agisce su  $q$ ; se  $q$  e  $q_0$  sono diverse, i **campi ed i potenziali generati dalle due cariche sono DIVERSI:**

Potenziale generato da  $q$

$$V_q = k \frac{q}{r}$$

Potenziale generato da  $q_0$

$$V_{q_0} = k \frac{q_0}{r}$$

Ma l'**energia potenziale del SISTEMA** (ovvero di entrambe le cariche) è **LA STESSA**:

$$U = q_0 V_q = q V_{q_0} = k \frac{q_0 q}{r}$$

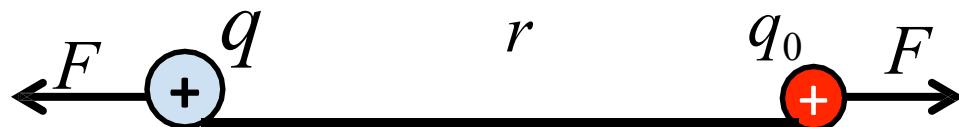
A differenza del potenziale, proprietà della sola carica che genera il campo, l'**energia potenziale è proprietà delle cariche che interagiscono**

# Energia potenziale di cariche puntiformi

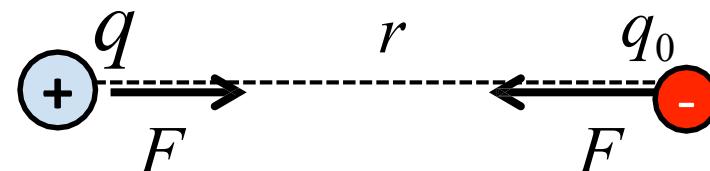
L'**energia potenziale di una coppia di cariche puntiformi**  $q$  e  $q_0$ , rispetto ad uno stato di potenziale nullo in cui le cariche sono infinitamente lontane, è:

$$U(r) = k \frac{q q_0}{r} = L$$

✓ quando  $q$  e  $q_0$  hanno **segni concordi**,  $U(r)$  è **POSITIVA**, e decresce separando le cariche da  $r$  all'infinito; essa corrisponde al **lavoro fatto dal campo** per portare le due cariche da  $r$  all'infinito; in questo caso il sistema si dice **NON LEGATO**, poiché le forze tendono ad allontanare le particelle



✓ quando  $q$  e  $q_0$  hanno **segni discordi**,  $U(r)$  è **NEGATIVA** ed aumenta separando le cariche da  $r$  all'infinito; essa corrisponde al **lavoro speso contro il campo** per separare le cariche da  $r$  ad infinito; in questo caso il sistema è **LEGATO**, poiché le forze tendono ad avvicinare le particelle



# Problema 24.3

Date le 4 cariche in figura,  $q_1=6 \text{ nC}$ ,  $q_2=-4 \text{ nC}$ ,  $q_3=-3 \text{ nC}$ ,  $q_4=8 \text{ nC}$ , a distanza  $d=1 \text{ m}$ , calcolare:

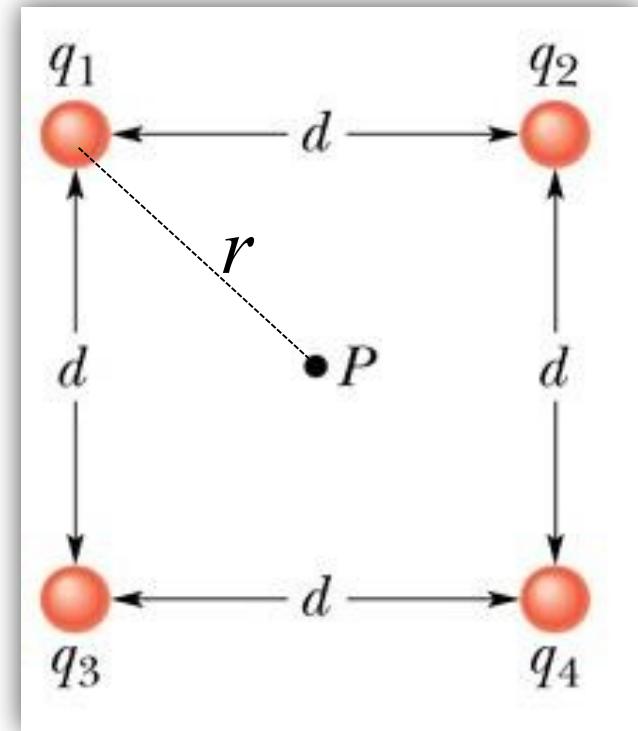
1. il potenziale totale generato dalle cariche nel punto P (assumendo  $V(\infty)=0$ )
2. L'energia potenziale totale del sistema
3. L'energia necessaria a separare le cariche ad una ad una, partendo da  $q_4$  e proseguendo con  $q_3$  e  $q_2$

**1. il potenziale totale è la somma dei potenziali generati in P dalle 4 cariche:**

$$V_P = \frac{k}{r} (q_1 + q_2 + q_3 + q_4) = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{7 \text{ nC}}{m} \sqrt{2} = 89.1 V$$

**2. L'energia potenziale totale è la somma delle energie potenziali di ciascuna coppia di cariche:**

$$\begin{aligned} U &= \frac{k}{d} \left\{ q_1 q_2 + q_1 q_3 + \frac{q_1 q_4}{\sqrt{2}} + \frac{q_2 q_3}{\sqrt{2}} + q_2 q_4 + q_3 q_4 \right\} = \frac{k}{d} (-24 - 18 + 33.94 + 8.48 - 32 - 24) (nC)^2 \\ &= -9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{55.6 (nC)^2}{m} = -500.2 nJ \end{aligned}$$



## Problema 24.3

3.  $U < 0$  significa che il sistema è **LEGATO** e possiede **un'energia potenziale immagazzinata al suo interno**, per cui è necessario **compiere lavoro dall'esterno** se si vuole portare le particelle cariche a distanza infinita, CONTRO l'azione legante del campo elettrico; calcoliamo l'energia potenziale che lega la carica  $q_4$  alle altre 3 cariche:

$$U_4 = \frac{k}{d} \left( q_4 \left| \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\sqrt{2}} \right. \right) = \frac{k}{d} (+33.9 - 32 - 24)(nC)^2 = -9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{22.06(nC)^2}{m} = -198.54 nJ$$

Il segno – indica che dobbiamo spendere un'energia  $-U=198.54 nJ$  per separare  $q_4$  dal sistema e portarla all'infinito; dopo aver eliminato  $q_4$ , calcoliamo l'energia potenziale che lega la carica  $q_3$  alle altre 2 cariche rimanenti:

$$U_3 = \frac{k}{d} \left( q_1 q_3 + \frac{q_2 q_3}{\sqrt{2}} \right) = \frac{k}{d} (-18 + 8.48)(nC)^2 = -9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{9.52(nC)^2}{m} = -85.7 nJ$$

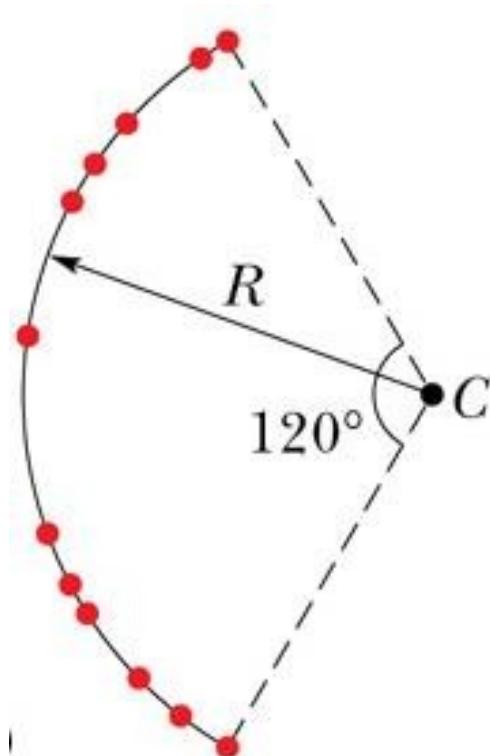
Dobbiamo spendere un'energia  $-U=85.7 nJ$  per separare  $q_3$  dalle altre due cariche; infine, calcoliamo l'energia che lega  $q_2$  a  $q_1$ :

$$U_2 = \frac{k}{d} (q_1 q_2) = \frac{k}{d} (-18 + 12)(nC)^2 = -9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{24(nC)^2}{m} = -216 nJ$$

216 nJ è l'energia necessaria per separare all'infinito  $q_2$  e  $q_1$ ; chiaramente la somma di  $U_4$ ,  $U_3$ ,  $U_2$  ci restituisce l'energia potenziale totale del sistema

## Problema 24.4

Consideriamo il potenziale nel punto C generato da 12 elettroni disposti lungo un arco di cerchio di raggio R



Le distanze da C degli elettroni sono tutte uguali, per cui anche i potenziali sono uguali; la loro somma è:

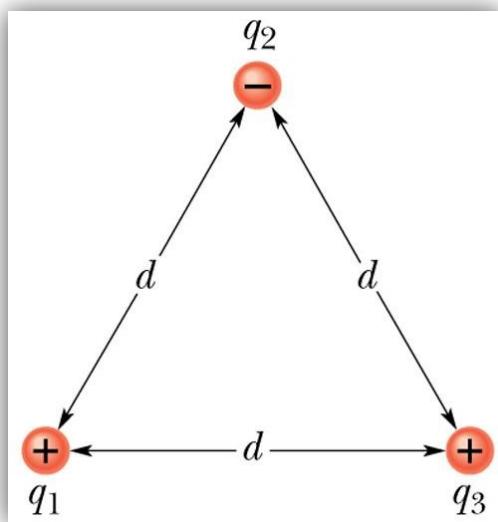
$$V_C = -\frac{12}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R}$$

Il calcolo del campo elettrico in C è molto più complesso, poiché richiede di considerare la somma vettoriale dei 12 campi generati dalle singole cariche

ATTENZIONE: dalla precedente espressione del potenziale nel punto C possiamo ricavare il campo elettrico ? NO, la derivata del potenziale richiede la conoscenza del potenziale in tutti i punti di una regione attorno a C, non in un punto soltanto !!

## Problema 24.6

Consideriamo le 3 cariche in figura  $q_1=q$ ,  $q_2=-4q$ ,  $q_3=+2q$ ,  $q=100 \text{ nC}$ ;  $d=9 \text{ cm}$ ; si calcoli l'energia potenziale del sistema. L'energia potenziale totale è la somma delle energie potenziali di ciascuna coppia di cariche:



$$\begin{aligned} U &= \frac{k}{d}(q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3) = \frac{k}{d}(-4 + 2 - 8)q^2 \\ &= -9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{10 \times 10^{-14} C^2}{9 \times 10^{-2} m} = -10^{-2} J \end{aligned}$$

Questa energia rappresenta il **lavoro necessario per separare le 3 cariche all'infinito**

- ✓  $U$  negativa indica che il **lavoro netto per portare le cariche all'infinito è fatto non dal campo ma CONTRO il campo** (infatti il campo tende ad avvicinare le coppie  $q_1-q_2$  e  $q_2-q_3$ , e ad allontanare la sola coppia  $q_1-q_3$ )
- ✓  $U$  negativa indica che il **SISTEMA** è **STABILE** e possiede **un'energia potenziale immagazzinata al suo interno**, per cui è necessario **compiere lavoro dall'esterno** se si vuole disgregare il sistema e portare le particelle cariche a distanza infinita **CONTRO l'azione legante del campo elettrico**.

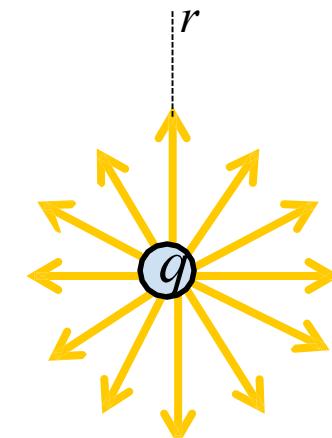
# Riepilogo: campo e potenziale generati dalla carica puntiforme

Una carica puntiforme  $q$  genera a distanza  $r$  dalla carica un campo elettrico:

$$E(r) = k \frac{q}{r^2}$$

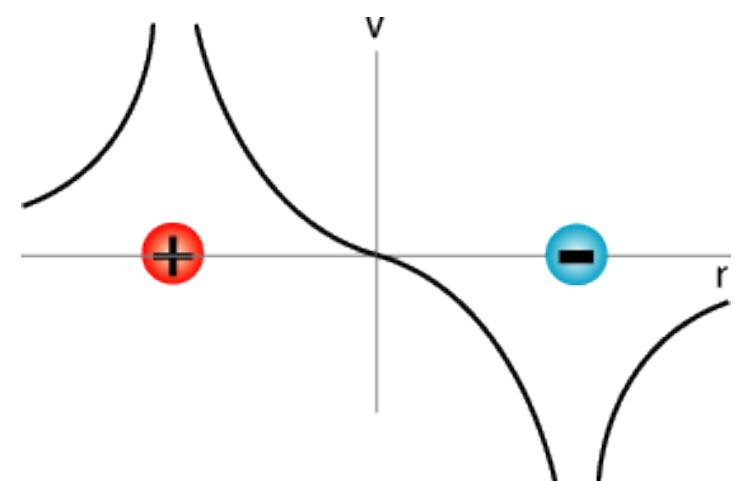
ed un potenziale elettrico (assumendo  $V(\infty)=0$ ):

$$V(r) = k \frac{q}{r}$$



Il potenziale della carica puntiforme ha andamento **iperbolico**:

- ✓ Se  $q$  è **positiva**, il **potenziale è massimo (infinito)** per  $r=0$ , ovvero nel punto dove è posta la carica generatrice, e si riduce allontanandosi da  $q$
- ✓ se  $q$  è **negativa**, il **potenziale è minimo (meno infinito)** per  $r=0$ , e aumenta allontanandosi da  $q$
- ✓ In generale, il **potenziale diminuisce muovendosi dalle cariche positive a quelle negative**

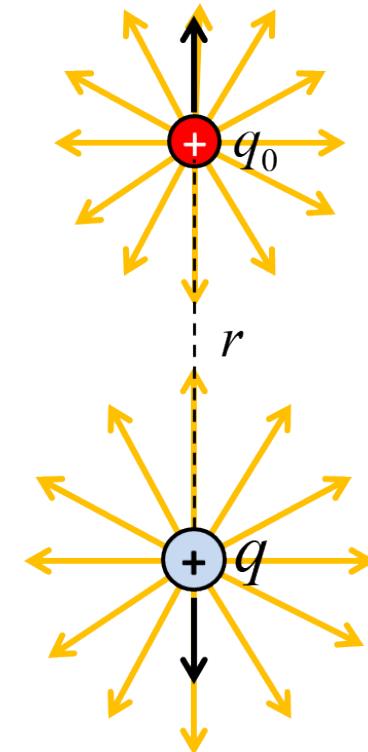


# Riepilogo: energia potenziale del sistema di cariche puntiformi

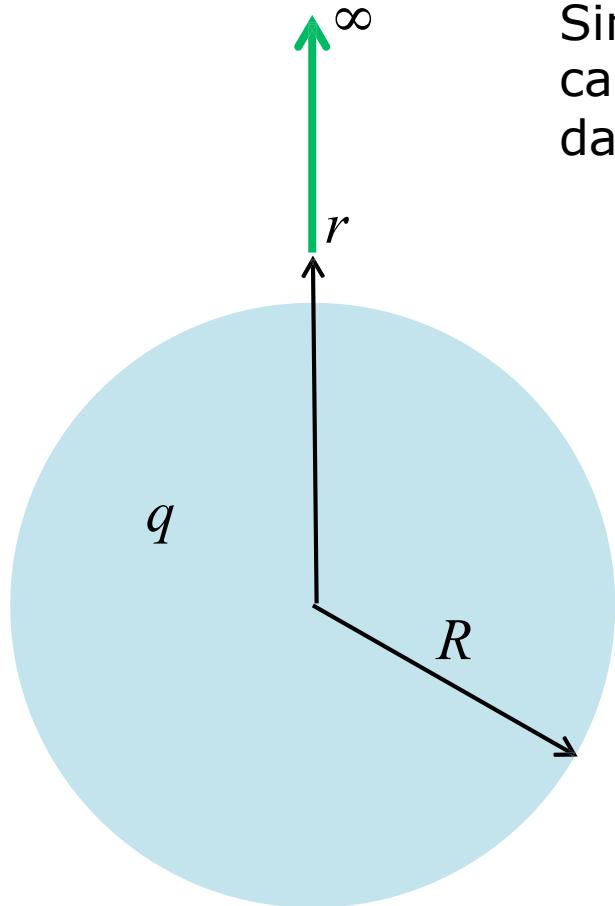
Il sistema di due cariche interagenti  $q_0$  e  $q$  poste a distanza  $r$  possiede un'energia potenziale:

$$U(r) = k \frac{q_0 q}{r}$$

- ✓ se le cariche hanno **stesso segno**, dunque  $U > 0$ , il **sistema tende a disgregarsi**, e l'energia potenziale rappresenta il lavoro speso dal campo per separare le cariche da  $r$  ad infinito
- ✓ se le cariche hanno **segno opposto** il **sistema è LEGATO**; l'energia potenziale è negativa, e rappresenta il lavoro che deve essere speso dall'esterno (dunque contro il campo elettrico) per separare le cariche all'infinito
- ✓ Per il **principio di stabilità**, il **campo tende sempre a ridurre l'energia potenziale del sistema**; per due cariche di stesso segno, il campo tende a separarle all'infinito per ridurre l'energia potenziale positiva a zero; per due cariche di segno opposto il campo tende ad avvicinarle il più possibile, in modo da ridurre l'energia potenziale negativa a meno infinito



# Potenziale all'ESTERNO di una sfera isolante uniformemente carica



Similmente a quanto fatto per la carica puntiforme, calcoliamo il potenziale integrando il campo elettrico da un punto  $r$  esterno alla sfera all'infinito:

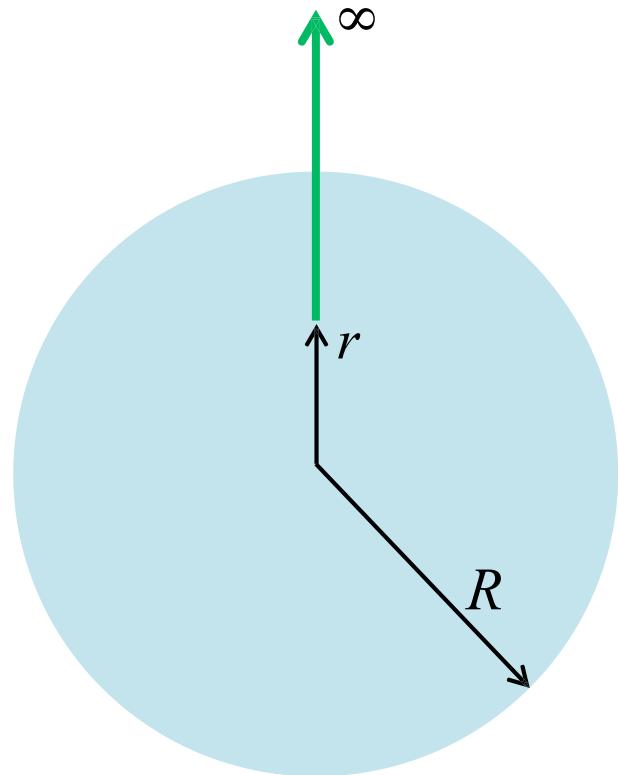
$$\begin{aligned} V(r) - V(\infty) &= \int_r^\infty dr' E(r') \\ &= k q \int_r^\infty dr' \frac{1}{r'^2} = k \frac{q}{r} \end{aligned}$$

Al solito, assumendo nullo il potenziale all'infinito si ottiene:

$$V(r) = k \frac{q}{r}$$

Come era prevedibile, così come il campo elettrico, anche il **potenziale esterno alla sfera uniformemente carica è equivalente a quello generato dalla carica puntiforme**:

# Potenziale all'INTERNO di una sfera isolante uniformemente carica



Per calcolare il potenziale in un punto  $r$  **interno alla sfera**, consideriamo una traiettoria radiale (verde) che va dal punto  $r$  ad infinito e calcoliamo il corrispondente lavoro del campo (al solito, si assume nullo  $V$  all'infinito):

$$V(r) - V(\infty) = V(r) = \int_r^\infty dr' E(r')$$

Essendo la formula del campo differente nella regione interna ed esterna alla sfera, dobbiamo spezzare l'integrale in due porzioni:

$$\begin{aligned} V(r) &= \int_r^R dr' E(r') + \int_R^\infty dr' E(r') = k \frac{q}{R^3} \int_r^R dr' r' + k q \int_R^\infty dr' \frac{1}{r'^2} \\ &\quad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\ \text{interno} &\quad \text{interno} & \text{esterno} \\ k \frac{q}{R^3} r' & \qquad \qquad \qquad k \frac{q}{r'^2} \end{aligned}$$

# Potenziale all'INTERNO di una sfera isolante uniformemente carica

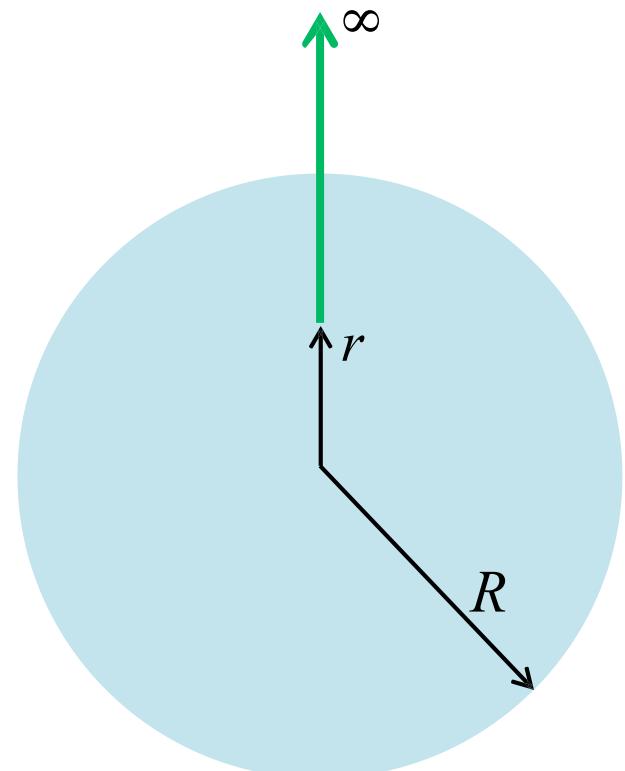
$$V(r) = \int_r^R dr' E(r') + \int_R^\infty dr' E(r') = k \frac{q_3}{R} \int_r^R dr' r' + k q \int_R^\infty dr' \frac{1}{r'^2}$$

↓                    ↓                    ↓  
 interno          interno          esterno  
 $k \frac{q}{R^3} r'$            $k \frac{q}{r'^2}$

Risolviamo l'integrale:

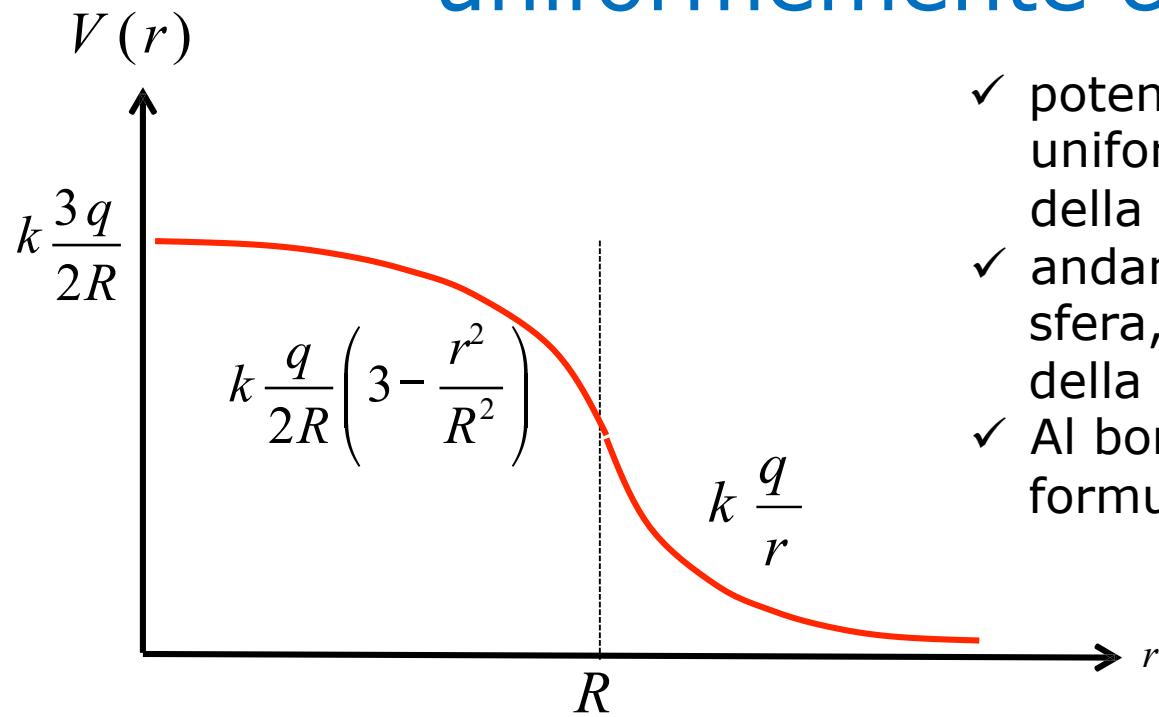
$$\begin{aligned} V(r) &= k \frac{q}{R^3} \frac{r'^2}{2} \Big|_r^R - k q \frac{1}{r'} \Big|_R^\infty \\ &= k \frac{q_3}{2R} \left( R^2 - r^2 \right) + k q \frac{1}{R} = k \frac{q}{2R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \end{aligned}$$

Come verifica del risultato, si può calcolare la derivata del potenziale cambiata di segno e riottenere l'espressione del campo:

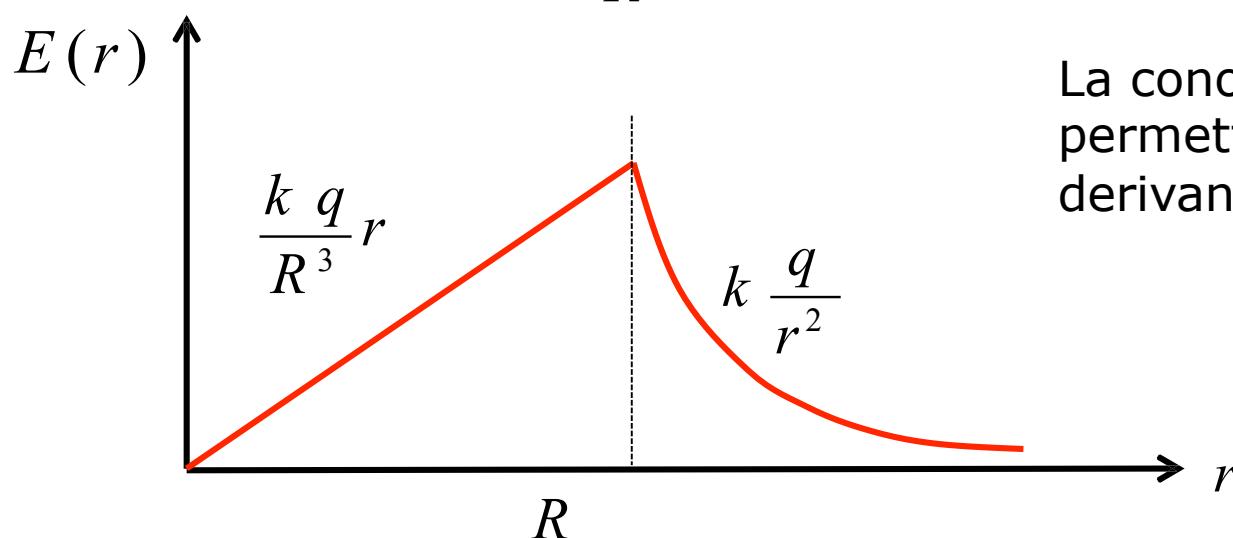


$$-\frac{dV(r)}{dr} = k \frac{q}{R^3} r$$

# Potenziale di una sfera isolante uniformemente carica



- ✓ potenziale di una sfera uniformemente carica in funzione della distanza dal centro
- ✓ andamento **parabolico** dentro la sfera, **iperbolico** all'esterno della sfera
- ✓ Al bordo della sfera ( $r=R$ ) le due formule coincidono



La conoscenza di  $V(r)$  ci permette di ricavare il campo derivando rispetto ad  $r$ :

$$-\frac{dV(r)}{dr} = E(r)$$

# Potenziale di un conduttore carico

- ✓ Abbiamo visto che in un conduttore, sia esso pieno o contenente una cavità, il campo è sempre nullo in ogni punto interno al conduttore per il principio di equilibrio elettrostatico
- ✓ Applicando Gauss, ne segue che le cariche in un conduttore possono essere posizionate soltanto sulla superficie esterna
- ✓ Segue che il **potenziale all'interno di un conduttore è SEMPRE costante in tutti i punti.** Possiamo dimostrarlo facilmente:

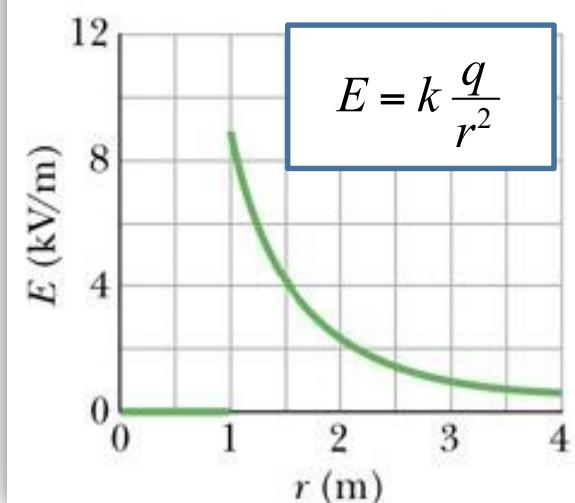
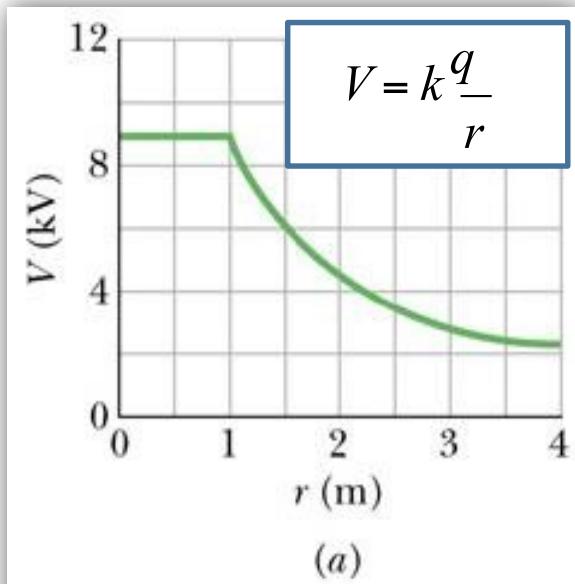
Siano  $i$  ed  $f$  due punti qualsiasi all'interno di un conduttore; dalla formula generale della d.d.p. si ha:

$$\Delta V = V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Se il campo è nullo in ogni punto, anche l'integrale è nullo, per cui, per qualsiasi  $i$  ed  $f$ :

$$V_f = V_i$$

# Potenziale e campo elettrico di una sfera (o guscio sferico) conduttore



## Potenziale:

- ✓ All'interno del conduttore il potenziale è costante
- ✓ All'esterno del conduttore il potenziale è uguale a quello di una carica puntiforme posta al centro della sfera

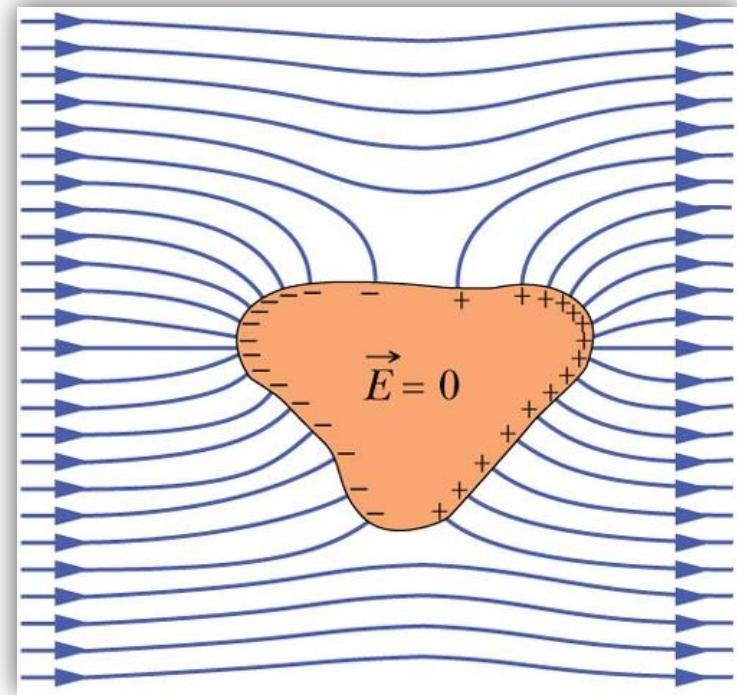
## Campo elettrico:

- ✓ All'interno del conduttore il campo è nullo
- ✓ All'esterno del conduttore il campo è uguale a quello di una carica puntiforme posta al centro della sfera

NB: il campo elettrico ha una **discontinuità** al bordo della sfera, in corrispondenza della carica di superficie; la discontinuità si presenta sempre in corrispondenza di piani carichi

# Conduttore neutro immerso in un campo esterno uniforme

- ✓ Si verifica **induzione elettrostatica**: le linee di flusso non possono penetrare all'interno del conduttore, per cui si generano cariche positive e negative sulla superficie che schermano (ovvero compensano) il campo esterno in modo che sia  $E=0$  e  $V$  costante in tutti i punti interni al conduttore
- ✓ Le **cariche positive sono i rubinetti** del campo: da esse fuoriescono le linee; le **cariche negative sono i lavandini**, poiché assorbono le linee entranti
- ✓ Dalla figura si nota che in **condizioni elettrostatiche** le **linee di forza sono sempre PERPENDICOLARI alla superficie** del conduttore. Se così non fosse ci sarebbero forze superficiali in grado di muovere le cariche sulla superficie, contravvenendo al principio di equilibrio elettrostatico

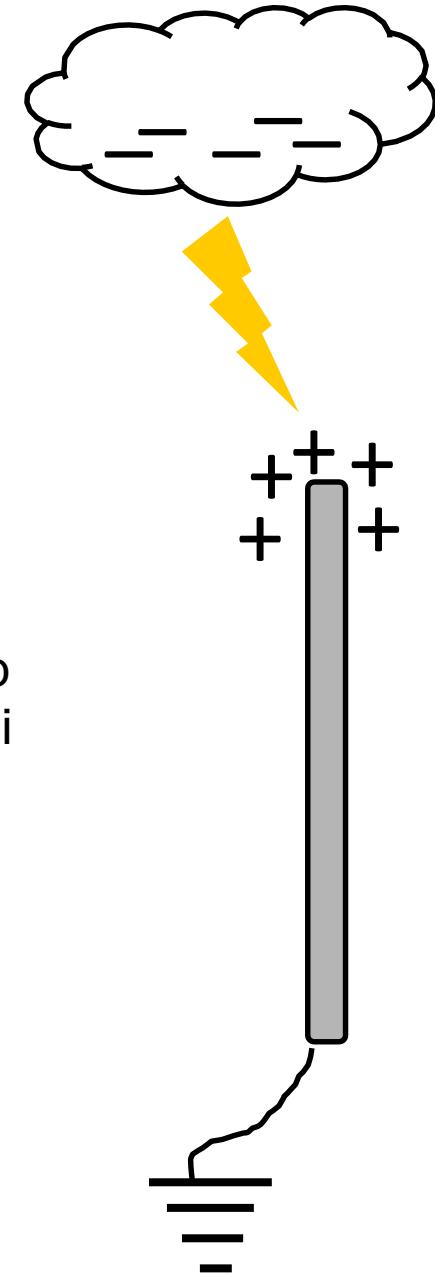


# Il parafulmine

- ✓ Se il conduttore non è sferico, la carica tende ad accumularsi fortemente sulle punte. Il **parafulmine inventato da Benjamin Franklin nel 1700** è un'asta di metallo appuntita, collegata a terra da un filo conduttore
- ✓ Durante il temporale, la carica elettrica negativa delle nuvole crea per induzione un forte **accumulo di carica positiva sulla punta** del parafulmine

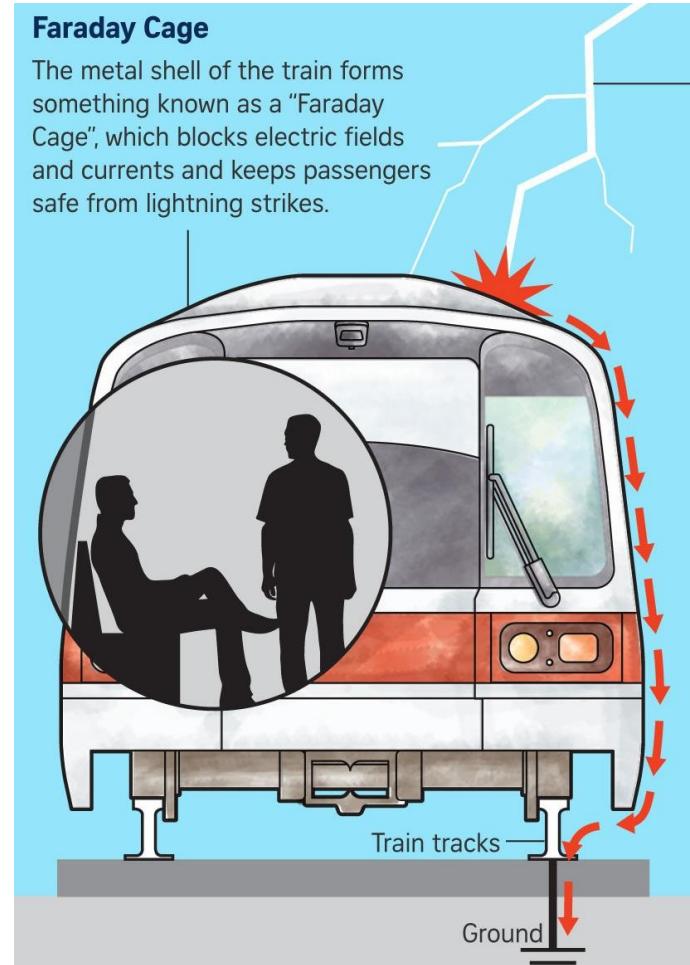
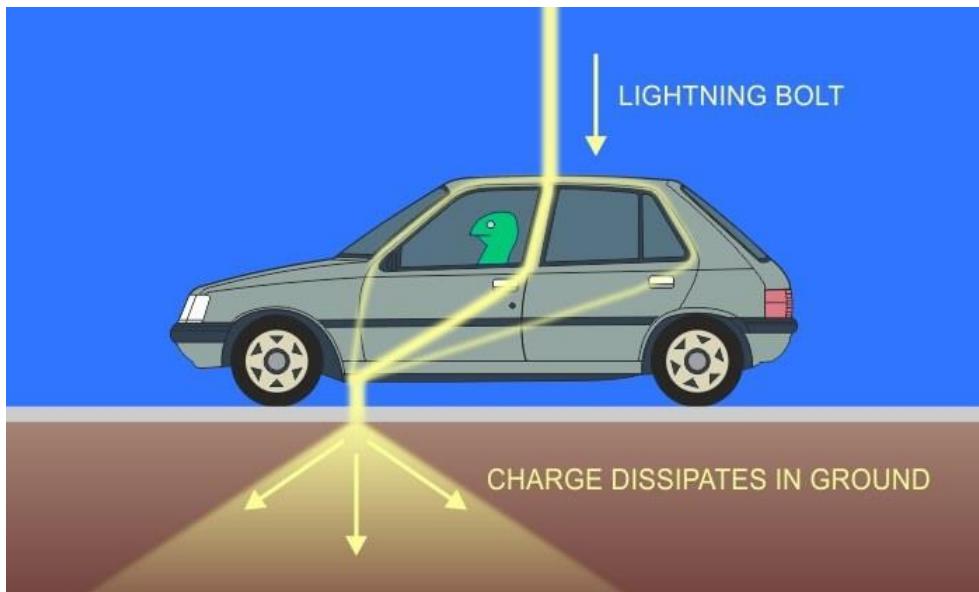


- ✓ Quando la d.d.p. tra nuvole e suolo supera un valore massimo si generano i **fulmini**, ovvero scariche elettriche di carica negativa (in pratica un flusso di elettroni) dalle nuvole al suolo
- ✓ I fulmini, attratti dalla carica positiva della punta, scaricano la tensione sul parafulmine. La carica attraversa il parafulmine e si disperde al suolo



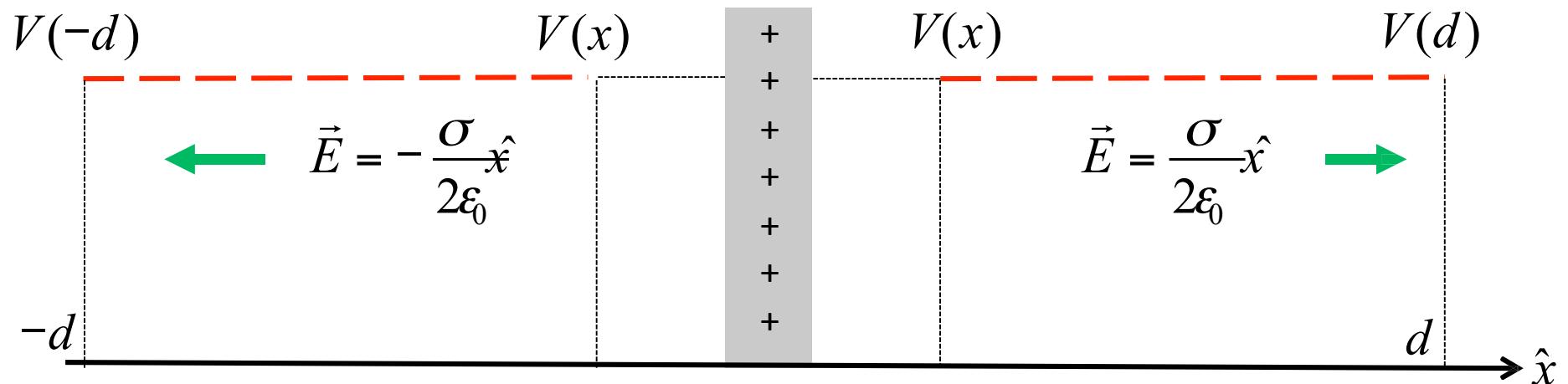
# La gabbia di Faraday

- ✓ Un effetto protettivo si ottiene mantenendosi all'interno di un conduttore cavo
- ✓ la corrente attraversa la superficie del conduttore ma nella cavità il campo è nullo (effetto **gabbia di Faraday**).  
L'automobile e la carrozza del treno sono buoni esempi di gabbia di Faraday



# Potenziale di una piastra carica isolante

- ✓ Calcoliamo il **potenziale elettrico di una piastra isolante infinita** posta in  $x=0$  con densità di carica uniforme  $\sigma$ , in un punto distante  $x$
- ✓ Consideriamo il cammino d'integrazione rettilineo (rosso) che va da  $x$  ad  $d$  a destra della piastra, e da  $-d$  ad  $x$  a sinistra; sia  $d$  **abbastanza distante dal piano** da poter assumere  $V(d)=V(-d)=0$



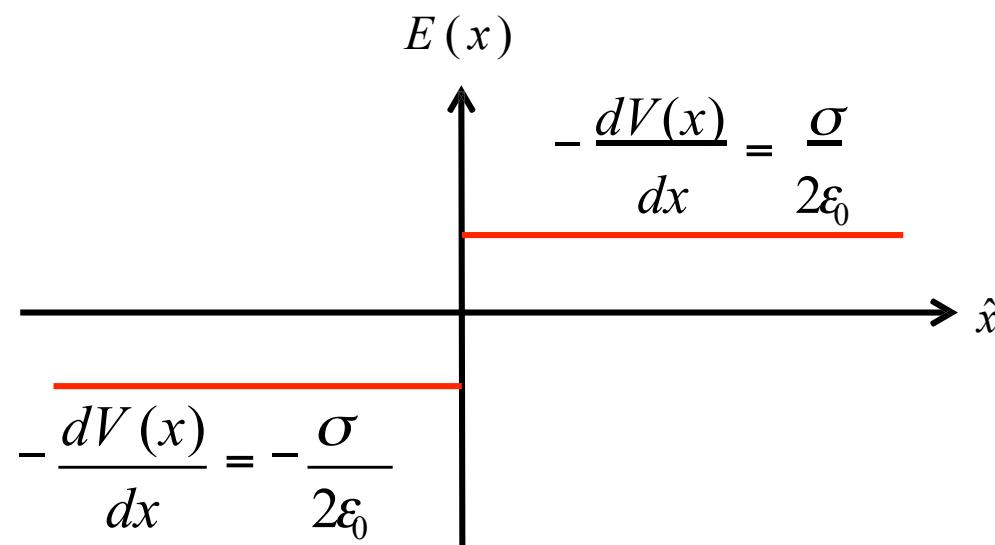
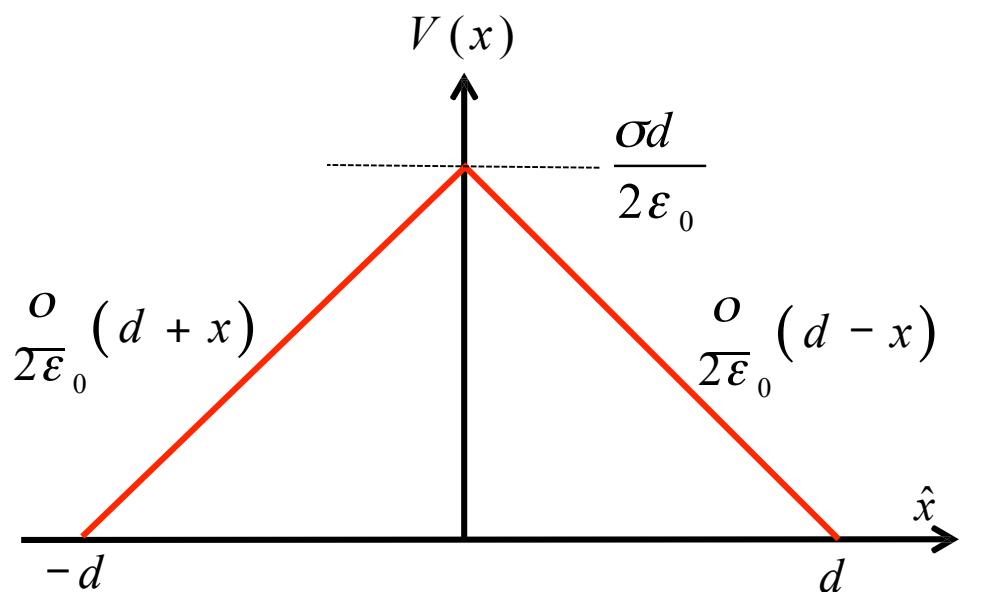
**a destra ( $x>0$ ):**

$$V(x) - V(d) = \int_x^d E dx' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (d - x) \Rightarrow V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (d - x)$$

**a sinistra ( $x<0$ ):**

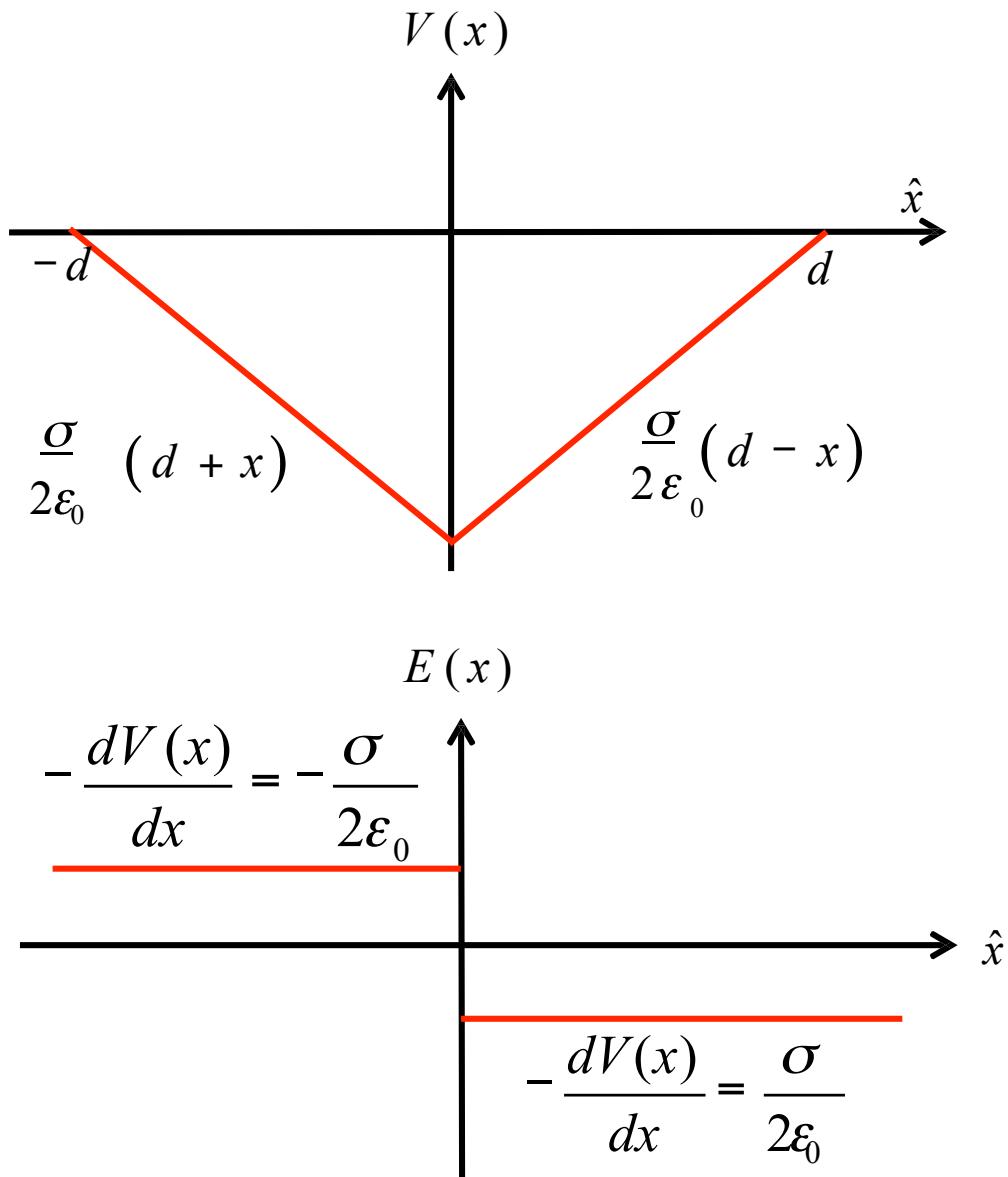
$$V(-d) - V(x) = \int_{-d}^x \vec{E} \cdot d\vec{x}' = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{-d}^x dx' = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x + d) \Rightarrow V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (d + x)$$

# Potenziale di una piastra carica isolante



- ✓ Il potenziale è simmetrico ai due lati della piastra, e **decresce linearmente** con  $|x|$ , ovvero con la distanza dalla piastra
- ✓ **il valore  $d$  è arbitrario**, ma questo ha poca importanza; quello che conta è la d.d.p. tra 2 punti dello spazio, la quale non dipende da una costante additiva
- ✓ La **pendenza** di  $V(x)$  (cambiata di segno) ci ridà il campo elettrico; notiamo che il campo ha segno differente ai due lati della piastra: rispetto ad  $x$ , infatti, il **campo cambia verso**
- ✓ Ne segue che il campo elettrico ha una **discontinuità** in corrispondenza della piastra; la presenza di **discontinuità in corrispondenza di piani carichi** è caratteristica generale dei campi elettrici

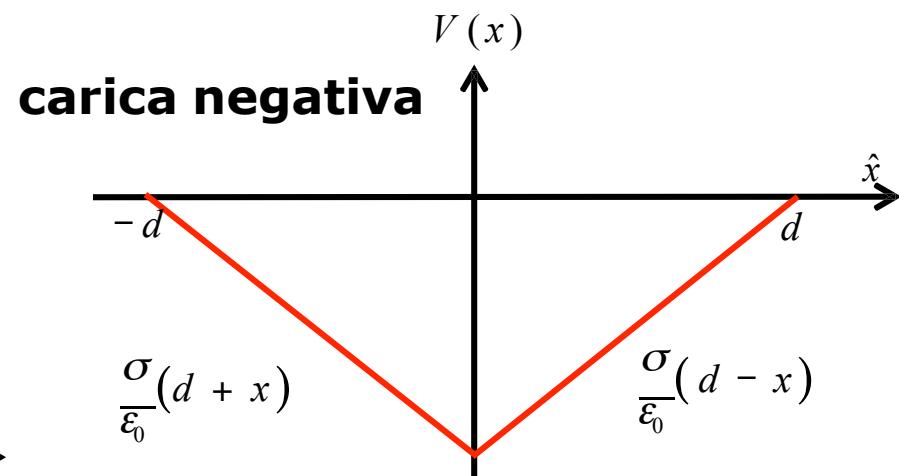
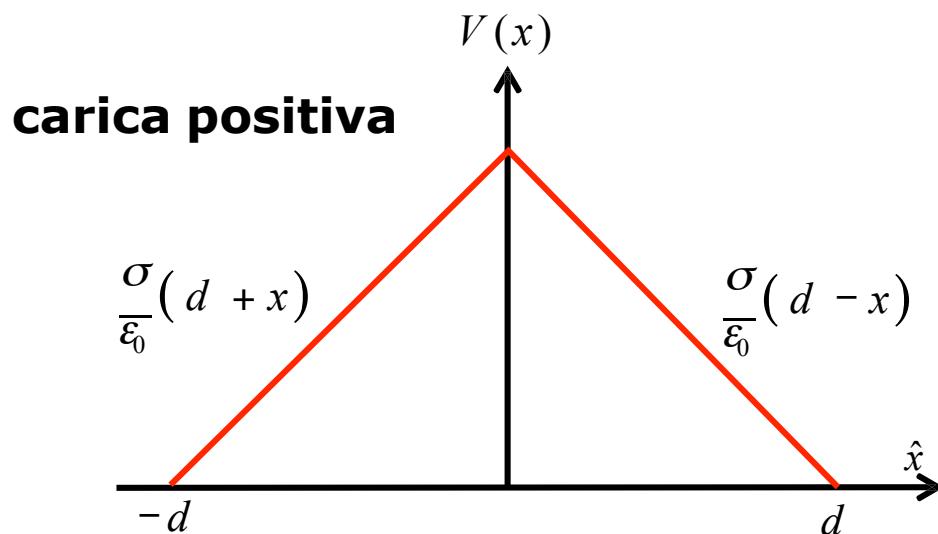
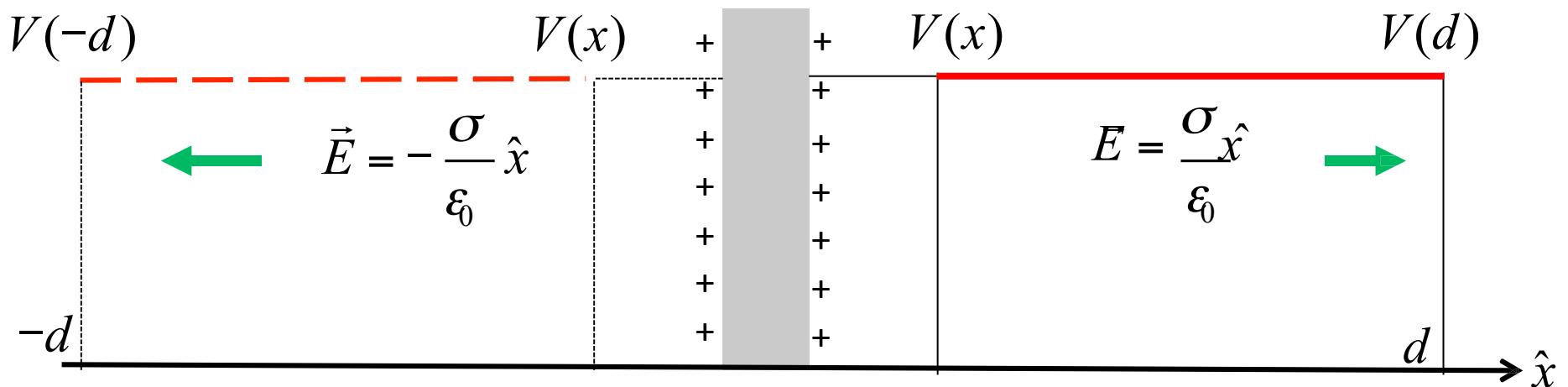
# Potenziale di una piastra carica isolante



- ✓ Se la **densità di carica uniforme** **è NEGATIVA**, le formule del potenziale e del campo restano le stesse
- ✓ Ciò significa che il **potenziale cresce linearmente** con  $|x|$ , ovvero con la distanza dal piano di carica
- ✓ il campo elettrico adesso è negativo a destra, e positivo a sinistra della piastra; ciò è ovvio considerando che il campo ha verso opposto rispetto al caso della densità di carica positiva

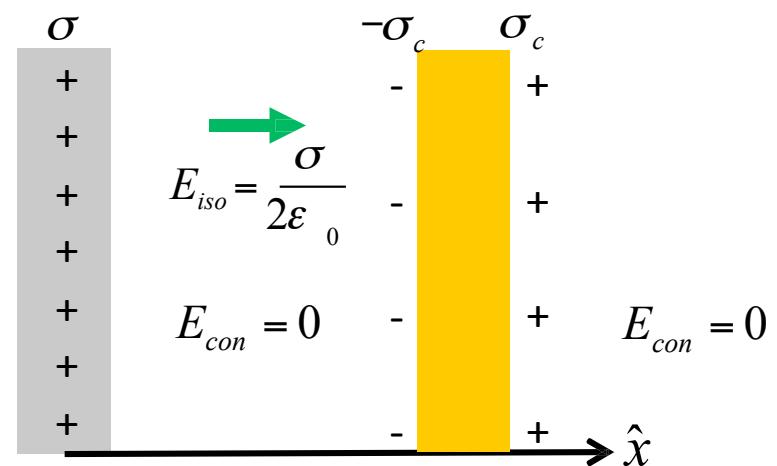
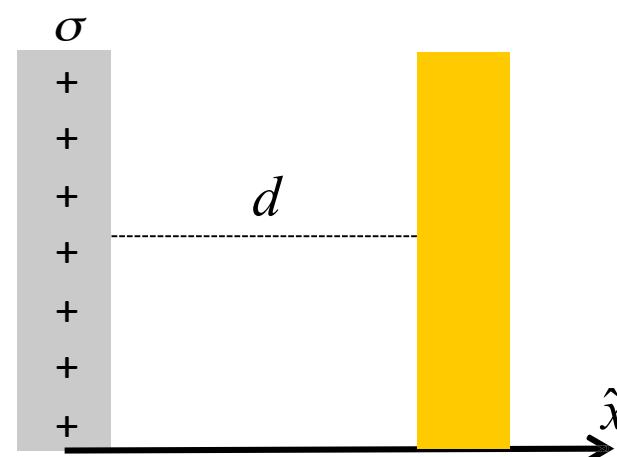
# Potenziale di una piastra carica conduttiva

Nel caso della piastra conduttriva, possiamo ripetere esattamente lo stesso procedimento visto per la piastra isolante, con l'unica differenza che adesso la carica è distribuita ai due lati della piastra, e la densità  $\sigma$ , che compare nel campo elettrico è quella relativa alla singola faccia



# Problema

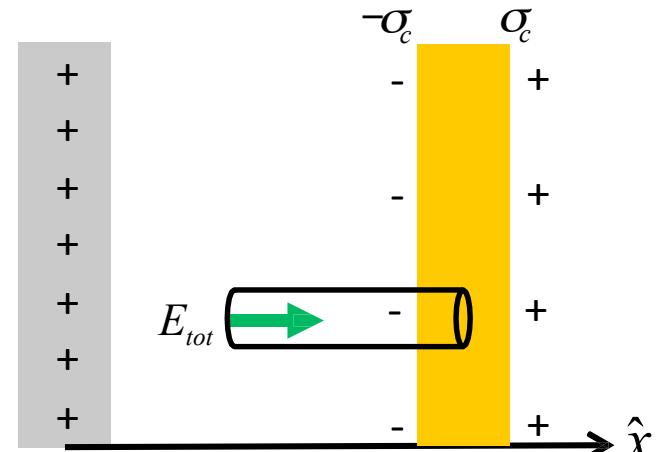
- ✓ Consideriamo una **piastra isolante infinita** (grigia) uniformemente carica con  $\sigma = 1 \mu\text{C}/\text{m}^2$ , in posizione  $x=0$ ; a distanza  $d = 5 \text{ cm}$  è posta una **piastra conduttrice infinita neutra** (gialla); calcolare:
- ✓ La densità di carica  $\sigma_c$  indotta sulle superfici del conduttore
- ✓ La d.d.p. tra i punti  $x=2 \text{ cm}$  e  $x=4 \text{ cm}$
- ✓ La d.d.p. tra i punti  $x=2 \text{ cm}$  e  $x=8 \text{ cm}$
  
- ✓ Essendo le piastre infinite possiamo supporre che la **densità indotta sia uniforme** sulle facce del conduttore
- ✓ inoltre, essendo neutro il conduttore **avrà stessa densità ma di segno opposto** sulle 2 facce
- ✓ i campi generati da piastre infinite sono anch'essi uniformi
- ✓ Il campo  $E_{con}$  generato dal conduttore è nullo al di fuori del conduttore, poiché le due facce del conduttore producono campi orientati in direzione opposta; dunque al di fuori della regione gialla vi è solo il campo dell'isolante  $E_{iso}$



# Problema

- ✓ Il campo totale  $E_{tot}$  nella regione tra le due piastre può essere calcolato applicando Gauss al cilindretto in figura; essendo nullo il campo all'interno del conduttore, il flusso è solo attraverso la base  $dA$  posizionata tra le piastre; dunque:

$$E_{tot}dA = \frac{\sigma dA}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{tot} = \frac{\sigma_c}{\epsilon_0}$$



- ✓ poiché  $E_{con}$  è nullo tra le piastre, si ha  $E_{tot} = E_{iso} \Rightarrow \frac{\sigma_c}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
- ✓ Dunque sulle facce del conduttore si genera per induzione una densità  $\pm\sigma_c = \pm 0.5\mu\text{C}/\text{m}^2$ ; in questo modo all'interno del conduttore  $E_{con}$  è uguale in modulo ma opposto in verso ad  $E_{iso}$  per cui  $E_{tot}=0$
- ✓ Poiché al di fuori del conduttore l'unico campo è quello dell'isolante, si ha:

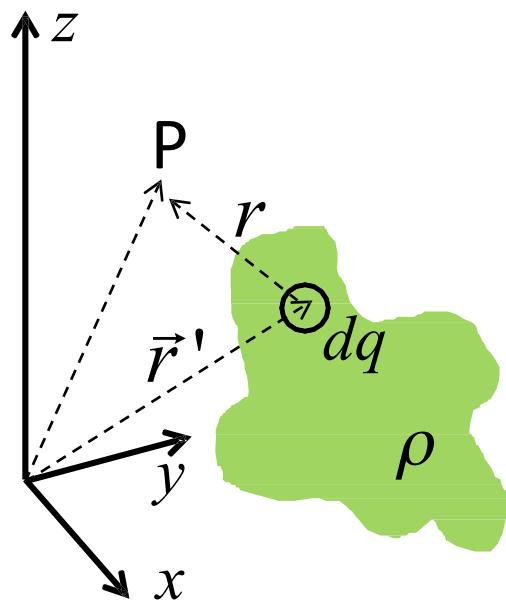
$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{1\mu\text{C}/\text{m}^2}{2 \times 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2} = 5.6 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$V(x = 2\text{cm}) - V(x = 4\text{cm}) = (\sigma / 2\epsilon_0) \Delta x = 5.6 \times 10^4 \text{ N/C} \times 2\text{cm} = 1120\text{V}$$

$$V(x = 2\text{cm}) - V(x = 8\text{cm}) = (\sigma / 2\epsilon_0) \Delta x = 5.6 \times 10^4 \text{ N/C} \times 6\text{cm} = 3360\text{V}$$

# Potenziale dovuto a distribuzioni continue di carica

- ✓ Se abbiamo a che fare con **distribuzioni continue di carica**, e non conosciamo il campo elettrico da esse generato (ad esempio distribuzioni la cui simmetria non sia così alta da poter applicare la legge di Gauss), dobbiamo calcolare il potenziale utilizzando il **calcolo infinitesimale**
- ✓ consideriamo un volumetto infinitesimo  $d^3\mathbf{r}'$  all'interno della regione carica disegnata in verde, caratterizzata dalla densità  $\rho(\mathbf{r}')$ ; nel volumetto è contenuta una carica  $dq = \rho(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'$  ( $\mathbf{r}'$  è la posizione di  $dq$  nel riferimento cartesiano); il potenziale infinitesimo  $dV$  generato da  $dq$  in un punto P distante  $\mathbf{r}$  da  $dq$  è:



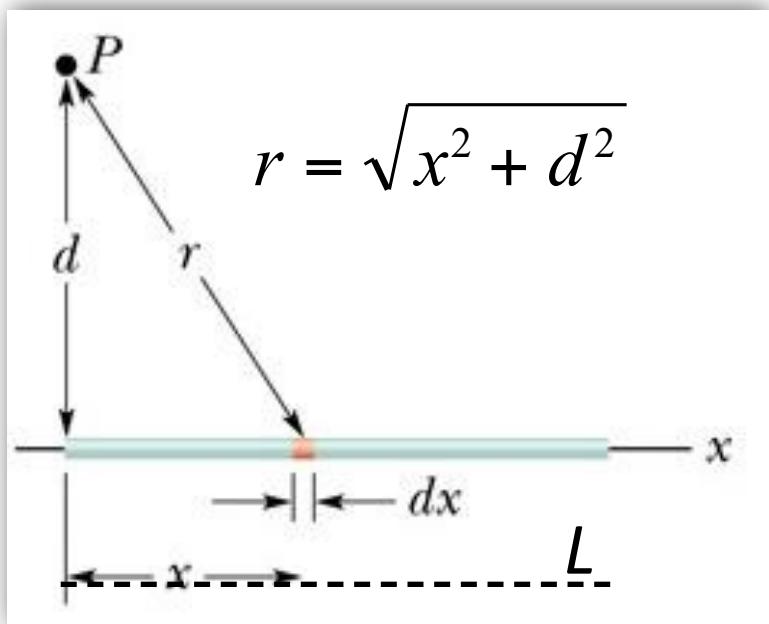
$$dV_P = k \frac{dq}{r} = k \frac{\rho(r')dr'}{r}$$

Il potenziale totale nel punto P è ottenuto integrando su tutta la regione verde in cui è presente la densità di carica:

$$V_P = k \int \frac{\rho(r')}{r} d^3r'$$

# Potenziale dovuto ad una bacchetta isolante

- ✓ Data una bacchetta di plastica di lunghezza  $L$  e **densità di carica lineare uniforme**  $\lambda$ , calcolare il potenziale nel punto P
- ✓ Poniamo la bacchetta lungo l'asse x, con l'estremo sinistro della bacchetta in corrispondenza dell'origine; consideriamo il potenziale dovuto al segmento infinitesimo  $dx$  (in giallo) con carica  $dq = \lambda dx$ :



$$dV_P = k \frac{dq}{r} = k \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

$$\Rightarrow V_P = k\lambda \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

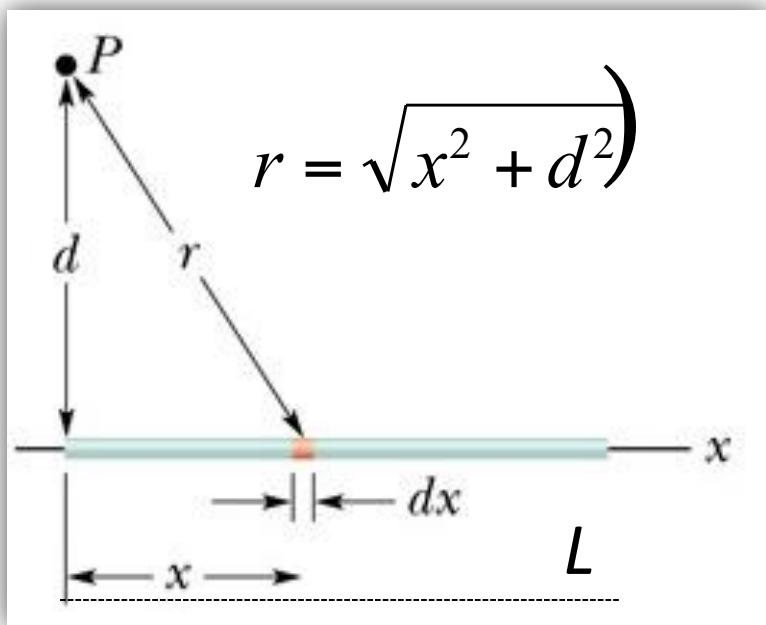
La chiave per risolvere l'integrale è la sostituzione di variabile:

$$x' = x + \sqrt{x^2 + d^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx'}{x'} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

# Potenziale dovuto ad una bacchetta isolante

$$\Rightarrow V_P = k\lambda \int \frac{dx'}{x'} = k\lambda \ln x' = k\lambda \ln \left| \left( x + \sqrt{x^2 + d^2} \right) \right|_0^L$$
$$= k\lambda \left[ \ln \left( L + \sqrt{L^2 + d^2} \right) - \ln d \right] = k\lambda \ln \left| \frac{L + \sqrt{L^2 + d^2}}{d} \right|$$



Si noti che l'argomento del logaritmo è  $> 1$ , per cui il logaritmo è sempre  $> 0$ ; dunque il potenziale è positivo se la densità di carica è positiva, negativo se la densità è negativa

# Potenziale dovuto ad un disco carico isolante

Dato un disco isolante di raggio  $R$  e densità di carica uniforme  $\sigma$ , calcolare il potenziale  $V(z)$  lungo l'asse z perpendicolare al disco e passante per il centro

Consideriamo il potenziale nel punto P dovuto all'anello arancione, di raggio  $R'$ , spessore infinitesimo  $dR'$ , e carica  $dq$ :

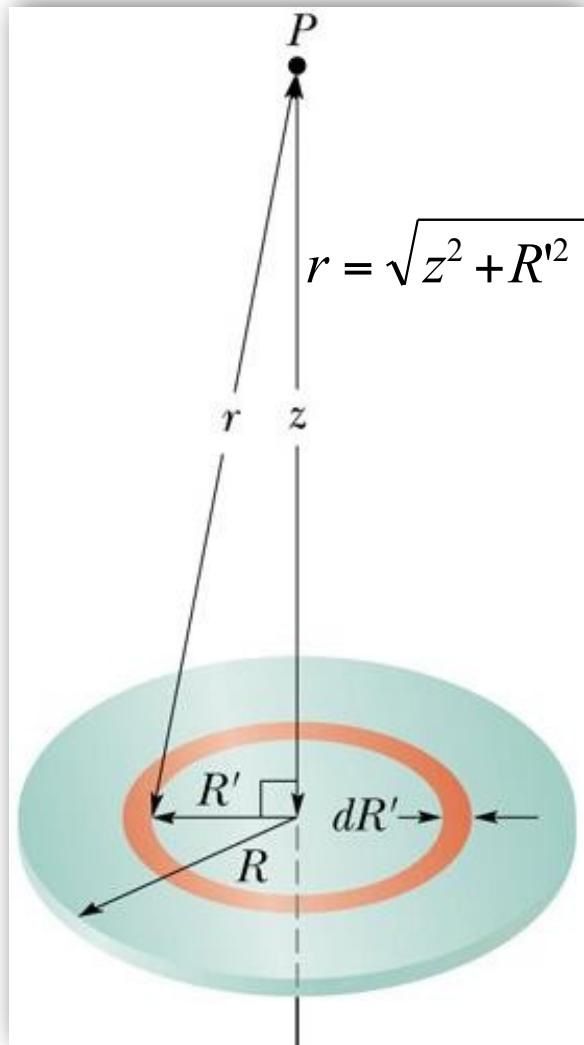
$$dq = \sigma(2\pi R') dR'$$

Lungo l'anello, la distanza  $r$  da P è costante, per cui il potenziale dovuto a tutto l'anello è dato da:

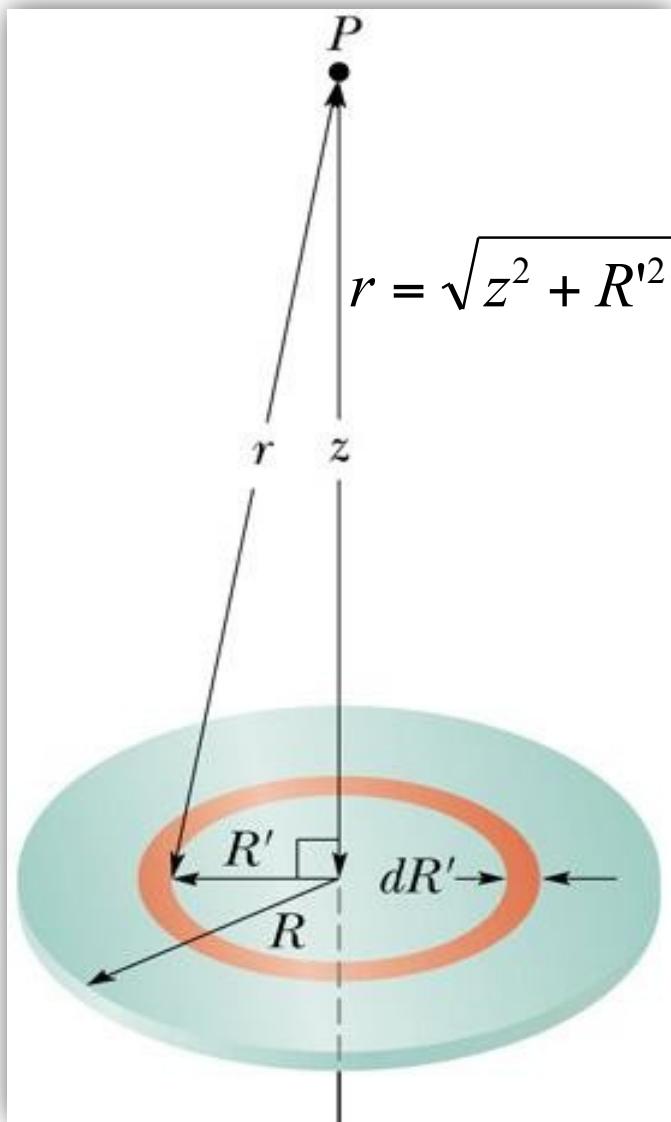
$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(2\pi R') dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}}$$

Il potenziale totale del disco richiede la somma su tutti gli anelli, ovvero l'integrale in  $dR'$ :

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{R' dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}}$$



# Potenziiale dovuto ad un disco carico isolante



$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{R' dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}}$$

operiamo la sostituzione di variabile:

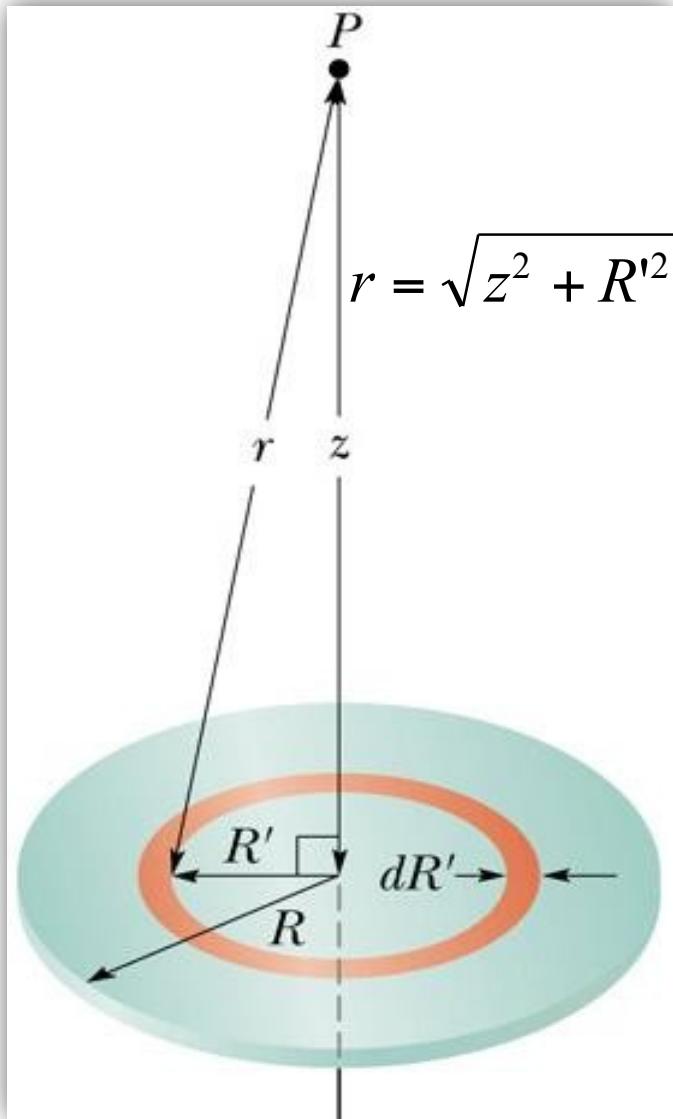
$$x = \sqrt{z^2 + R'^2}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{R' dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}}$$

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left| \sqrt{z^2 + R'^2} \right|_0^R$$

$$\Rightarrow V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{z^2 + R^2} - \right)$$

# Campo elettrico del disco carico isolante



$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{z^2 + R^2} - \right.$$

) Conoscendo il potenziale in tutti i punti lungo l'asse  $z$ , possiamo ricavare il campo elettrico lungo  $z$  (per simmetria, è evidente che il campo lungo l'asse è perpendicolare al piano del disco)

$$E(z) = - \frac{\partial V}{\partial z} = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{2z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 1 \right)$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

# Limite di disco infinito

- ✓ Nel limite  $R \gg z$  ( $z/R \rightarrow 0$ ) gli effetti di bordo diventano trascurabili, ed **il disco si trasforma in un piano infinito uniformemente carico**
- ✓ Calcoliamo il potenziale per  $R \gg z$ :

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left| 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left| 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} \right| \sim \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left| 1 - \frac{z}{R} \right| \sim \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{z^2 + R^2} - z \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left| R \sqrt{\left(\frac{z}{R}\right)^2 + 1} - z \right| \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (R - z)$$

- ✓ Ritroviamo il **campo elettrico uniforme ed il potenziale lineare generato dal disco carico isolante**, come era ragionevole attendersi
- ✓ Si noti che il termine costante del potenziale dipende dal raggio infinitamente grande del disco; come visto in precedenza ricavando il potenziale dal lavoro del campo elettrico, **questo termine costante è inessenziale**, poiché in pratica ciò che conta realmente è soltanto la d.d.p. tra due punti distinti dello spazio