Analisi II

Marco Campis

non mi assumo alcuna responsabilità se il materiale è interamente o parzialmente errato :D

Definizioni	Chiesto
Successione	
Successione di vettori convergente	
Successione di vettori divergente	2
Successione limitata	
Successione non limitata	3
Distanza metrica	
Insieme non limitato	2
Insieme limitato	1
Insieme connesso	8
Insieme semplicemente connesso	4
Insieme aperto	
Insieme chiuso	1
Insieme compatto	
Insieme di livello	
Insieme cono	
Insieme stella	5
Convessità	2
Sfera aperta	
Punto interno	4
Punto esterno	2
Punto isolato	3
Punto di frontiera	7
Punto di accumulazione	6
Funzione limitata	
Funzione oscillante	
Funzione continua	3
Funzione composta	
Forma lineare	
Retta tangente ad una curva regolare	2
Differenziabilità	13 3
Forma esatta	5 5
superficie parametrica regolare	11 1
Matrice Jacobiana	10 10
Limiti (Tutte le tipologie)	9 9
Teorema di Weierstrass del max e min	
Limiti di forme quadratiche	
[redacted]	[redacted]
Funzione α-omogenea	
Prodotto e rapporto di funzioni omogenee	
Potenze di funzioni omogenee	
Condizione di Cauchy	
Punto di minimo locale	1
Punto di massimo locale	
Punto di massimo globale	
Punto di minimo globale	
Derivata direzionale	7
Derivata parziale	
Derivate successive	
Differenziale	
Gradiente	
Rappresentazione del differenziale	

Differenziabilità di funzioni composte	
Direzione di massima pendenza	
Retta tangente	
Partizione	
Poligonale	
Curva parametrica	
Curva semplice (senza fiocchi)	1
Curva chiusa	1
Curva regolare	7
Curva generalmente regolare (a tratti)	
Curva rettificabile	9
Lunghezza di una curva	2
Lunghezza della poligonale inscritta un una curva	1
Integrale curvilineo	
Curve equivalenti	
Teorema di Clairaut-Schwarz (solo enunciato)	
Formula di Taylor	
Matrice hessiana	
Massimo locale (hessiana)	
Minimo locale (hessiana)	
Sella (hessiana)	
Matrice hessiana non degenere	
Teorema di Invarianza omotopica (solo enunciato)	
Potenziale Newtoniano	
Teorema (formula) Fubini-Tonelli	
Dominio normale rispetto all'asse X	
Dominio normale rispetto all'asse Y	
Cambio di variabili (Integrali)	
Piano tangente al graf	2
Spazio tangente	1
Integrale di campo	1
Coordinate polari e sferiche	
Campo associato	3
Rotore	
Campo irrotazionale e forma chiusa	2
Omotopie	3
Vettore normale alla superficie P. R.	6
Retta tangente al piano	1
Integrale di superficie	4
Ascissa curvilinea	
Integrale di un campo	
Integrabilità	
Curva non rettificabile di classe C0	1
Piano tg alla sup para	5
Funzione NON limitata	1
	4

(ancora def)

eq di stokes

Forma chiusa 2

Teoremi	Chiesto
Se una successione è convergente, allora è limitata	
Se esiste un punto di accumulazione, esiste una successione che gli converge	
Teorema della Permanenza del Segno	
Insieme stella implica insieme semplicemente connesso	1
Composizione di Funzioni Continue è ancora una funzione continua	
Teorema degli Zeri	2
La sfera Aperta è un insieme Convesso	
Divergenza dei polinomi non costanti	
Esistenza del minimo dei polinomi divergenti	
Teorema di Hermite	3
Teorema Fondamentale Dell'Algebra	2
Convergenza delle @-omogenee (CN / CS)	
Convergenza delle 0-omogenee	
Convergenza di funzioni composte	
Teorema di Fermat	2
Differenziale di funzioni lineari	
Continuità delle funzioni.differenziabili	1
Una funzione differenziabile ha tutte le derivate direzionali	1
Il differenziale è unico	
Teorema del differenziale (totale)	2
Teorema del Dini (C0)	3
Teorema del Dini (C1)	
Enunciato del Teorema del Dini (C^n)	
Teorema di inversione Locale	
Rettificabilità di funzioni C^1	2
Lunghezza di curve equivalenti	
Integrale di Campi su Curve Equivalenti	
A integrabile se e solo se l'integrale curvilineo non dipende dal cammino (CN / CS = teorema di torricelli)	3
? → A integrabile di classe C^1 implica campo Irrotazionale (Teorema del rotore)	
E~~nunciato del teorema d'invarianza Omot~~opica	
In~~sieme Convesso implica insieme Stella~~	
Se un insieme è aperto connesso, e il gradiente di f sull'insieme è nullo, la f è costante	
Enunciato Cambio di Variabile	
insieme semplicemente connesso e A simmetrico ⇒ A integrabile	1
Condizione del rotore (CN A integrabile di classe C^1)	1

Tipologia Esercizi

√ 1) Lunghezza del grafico della parabola — Es. $\rho = \theta$ con $\theta \in [0,\pi]$

√ 2) calcolare la superficie di una sfera

√ 3) calcolare il limite in 0, esempio:

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(0,0)} \frac{x^3-xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

√ 4) Preso il cerchio di centro (x_0, y_0) calcolare l'integrale di f con ρ raggio del cerchio.

√ 5) Come definisci l'integrale di una funzione esteso a una curva nel dominio

√ 6) Come definisci l'integrale di una superficie?

√ 7) studiare la differenziabilità di f in (x_0, y_0)

Esempio:

$$\sqrt{|x^2+y^2|} \quad \text{in } (0,0)$$

√ 8) come si comporta una funzione data a_n per $n \to \infty$?

Es.:

$$a_n = \begin{pmatrix} n \\ \frac{n+1}{n} \end{pmatrix}$$ successione con $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$

√ 9) Come calcoli l'integrale della forma tra

Esempio:

$x\,dy$ su $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ tra $[0, 2\pi]$

√ 10) Dato un campo e una curva parametrica in coordinate cartesiane, come fai l'integrale di campo?

√ 11) Valutare se un insieme (ad esempio a circonferenza) e' stella, connesso, convesso, semplicemente connesso

√ 12) lunghezza del grafico $f(x) = x + x^2$ con $x \in [0,1]$

Successione

È definita successione di vettori una funzione:

$$a_n = \mathbb{N} \to \mathbb{R}^N = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{N \text{ volte}}$$

Successioni limitata

a_n è detta limitata se:

$\exists K \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq K$

successione non limitata

a_n è detta non limitata se:

$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \nu : |a_\nu| \geq K$

Successione convergente

$\lim_{\infty} a_n = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : |a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$

successione divergente

$\lim_{\infty} a_n = \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : |a_n| > \varepsilon \quad \forall n > \nu$

Distanza su spazio metrico

La distanza tra $x, y \in \mathbb{R}^n$ è calcolata come: $|x - y|$. Sia (x, d) spazio metrico, gode delle seguenti proprietà:

1) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \Omega$

2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

3) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y$ [simmetria]

4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z$ [disug. triangolare]

Insieme di livello K

Un insieme di livello Ω^K è detto tale per una funzione:

$$f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{con } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \Omega^K = \{(x,y) \in \Omega : \underbrace{f(x,y) = K}\}$$

Dove il livello K indica l'insieme dei punti in cui la funzione ha come immagine K.

Sfera aperta (Ball aperta)

La sfera B si definisce aperta quando:

$$B(x_0, \rho) = \{ x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < \rho \}$$

centro ↗ ↑ raggio — strettamente

Il luogo dei punti sarà: $]x-\rho, x+\rho[$

Sfera chiusa (Ball chiusa)

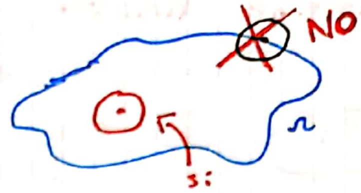
La sfera B si definisce chiusa quando:

$$B(x_0, \rho) = \{ x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| \leq \rho \}$$

anche uguale

Il luogo dei punti sarà: $[x-\rho, x+\rho]$

Punto Interno



x_0 si dirà interno ad Ω se:

$$\exists \rho > 0 : B(x_0, \rho) \subseteq \Omega$$

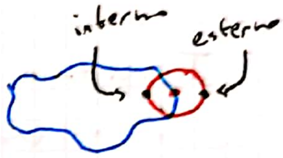
NB: Interno non significa appartenente, un punto può appartenere all'insieme ma non esserne interno.

Punto esterno

x_0 si dirà esterno ad Ω se questo sarà interno al suo complementare.

$$\exists \rho > 0 : B(x_0, \rho) \subseteq C\Omega \quad \text{e dunque} \quad x_0 \in C\Omega$$

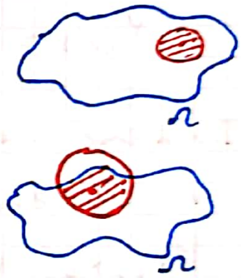
Punto di Frontiera



Un punto x_0 è detto di frontiera per Ω se:

$$\forall \rho > 0 \quad \exists x_1 \in \Omega, \exists x_2 \in C\Omega : x_1, x_2 \in B(x_0, \rho)$$

Punto di accumulazione



Un punto x_0 è detto di accumulazione per Ω se:

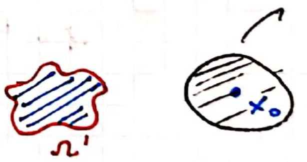
$$\forall \rho > 0 \quad \exists x \in \Omega : x \in B(x_0, \rho) \quad \text{con } \underline{\underline{x \neq x_0}}$$

NB: tutti i punti interni sono di accumulazione

Punto ~~[illegible]~~ Isolato

Un punto x_0 è detto punto ~~esterno~~ isolato a Ω se:

$$\exists \rho > 0 : B(x_0, \rho) \cap \Omega = \{ x_0 \}$$



i punti della sfera a eccezione di x_0 non fanno parte di Ω.

$$\Omega = \Omega' \cup x_0$$

Insieme aperto

Un insieme Ω è detto aperto se ogni suo punto è interno, dunque non contiene la frontiera:

$$\forall x \in \Omega \quad \exists \rho > 0 : B(x, \rho) \subseteq \Omega \qquad \text{con intervallo }]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$$

Insieme chiuso

Un insieme Ω è detto chiuso se contiene tutta la propria frontiera, ovvero se $\partial\Omega \subseteq \Omega$

$\partial\Omega$ indica la frontiera di Ω

Insieme limitato

~~Un insieme Ω è detto limitato se: $\forall \rho > 0 \ \exists x \in \Omega : x \in B(0, \rho)$~~ centro

Ω è limitato se $\exists K : \forall x \in \Omega \ |x| \leq K$

Insieme non limitato

~~Un insieme Ω è detto non limitato se: $\forall \rho > 0 \ \exists x \in \Omega : x \notin B(0, \rho)$~~ centro

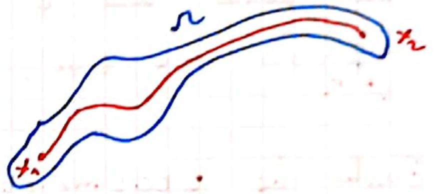
Ω è detto non limitato se: $\forall K \ \exists x \in \Omega : |x| > K$

Insieme compatto

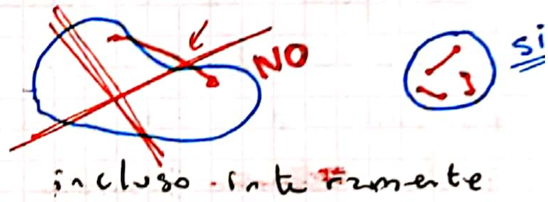
Un insieme Ω è detto compatto quando chiuso e limitato.

Insieme connesso

Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto connesso se:
$\forall x_1, x_2 \in \Omega \ \exists \gamma : [0,1] \to \Omega$ continua in $[0,1]$
tale che:
$\gamma(0) = x_1$ e $\gamma(1) = x_2$



Insieme convesso



Un insieme Ω si dirà convesso se:
$\forall x_1, x_2 \in \Omega$ il segmento $\overline{x_1 x_2}$ è incluso interamente in Ω.

$$\forall x_1, x_2 \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad \underbrace{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}_{\text{formula del segmento}} \in \Omega$$

Insieme cono

Un insieme Ω è detto cono di vertice x_0 se:
$\forall x \in \Omega$ e $\forall t > 0$ anche $tx \in \Omega$

Nota: Dunque il cono è costituito da un fascio di semirette uscenti dall'origine, ed ad esclusione dell'origine stessa, ogni cono è un insieme illimitato.

Insieme stella

Un insieme Ω è detto stella rispetto al centro (o polo) $x_0 \in \Omega$ tale che ~~ogni~~ $\forall x \in \Omega$ $\overline{x_0 x} \in \Omega$ ovvero il segmento che collega ogni punto al centro è incluso in Ω

$$(1-\lambda)x + \lambda x_0 \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

TUTTI gli insiemi stella sono anche convessi.

Funzione continua

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è detta continua se:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{dom} f$ con $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Funzione convergente

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è detta convergente se:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{dom} f$ con $x \neq x_0$
$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Funzione divergente

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è detta divergente se:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ ovvero se:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{dom} f$ con $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$

Funzione limitata

Una funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è detta limitata su Ω se:

$\exists M > 0 \in \Omega : \forall x \in \mathrm{dom}_{\Omega} f$ $|f(x)| < M$

Funzione composta

Date le funzioni $f: A \to B$ $g: B \to C$ con A, B, C sotto spazi vettoriali, si definisce $f \circ g$ (si legge f composto g) la funzione che manda dal dominio di f al codominio di g

$$f(g(x)) = f \circ g \qquad A \to C$$

Perciò al valore della variabile x prima viene calcolato il valore in $g(x)$ e poi vi viene applicata f

Funzione Omogenea

Una funzione f è definita omogenea su un insieme Ω cono con $f: \Omega \to \mathbb{R}$ se:

di grado α

$$f(tx) = t^{\alpha} f(x) \quad \forall x \in \underset{\text{cono}}{\Omega} \quad \forall t > 0$$

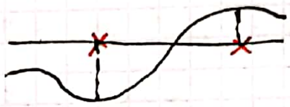
Th di Weierstrass del massimo e del minimo (no dimostrazione)

Hp: sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con Ω compatto (ovvero chiuso e limitato), f continua in Ω in ogni suo punto

Ts: $\exists\, x_1, x_2 \in \Omega : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in \Omega$

x_1 è punto di minimo

x_2 è punto di massimo



Funzione oscillante

Una funzione è detta oscillante quando non è né convergente né divergente.

Condizione di Cauchy

Data la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il criterio di convergenza di Cauchy dice che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f, \text{ con } x_1 \neq 0$$

e $x_2 \neq 0$ e tali che rispettano le seguenti condizioni:

- $|x_1 - x_0| < \delta$
- $|x_2 - x_0| < \delta$
- $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Limiti di Polinomi

Forma generale: $\lim_{A} f(x) = B \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \operatorname{dom} f \Rightarrow A' = B'$

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \operatorname{dom} f \Rightarrow |x| > \delta \quad |f(x)| > \varepsilon$
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \operatorname{dom} f \Rightarrow |x| > \delta \quad |f(x) - L| < \varepsilon$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \operatorname{dom} f \text{ con } \boxed{x \neq x_0} \ |x - x_0| < \delta \ |f(x)| > \varepsilon$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \operatorname{dom} f \text{ con } \boxed{x \neq x_0} \ |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

Limiti delle forme quadratiche

Sia $f(x)$ una funzione esprimibile come $\sum_{1}^{w} a_{ij} x_i x_j$, per conoscerne i limiti della forma quadratica e studiarne il il comportamento si costruisce la matrice diagonale con i coefficienti della forma quadratica e ~~[illegible]~~ si studia:

- se f è definita positiva $\Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$
- se f è definita negativa $\Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$
- se f è indefinita il limite non esiste in quanto f oscilla.

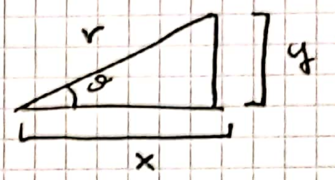
Coordinate polari piane

2 dimensioni

Si parla di coordinate polari quando ogni punto di uno spazio è associato un angolo e una distanza da un punto fisso (detto polo).

Un esempio per passare da coordinate polari a cartesiane è il seguente:

$\boxed{x = r\cos\theta}$ $\qquad$ $\boxed{y = r\sin\theta}$



con $r \in [0, +\infty[$ e $\theta \in [0, 2\pi]$ o $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$

generalmente:

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad$ $\theta = 2\arctan\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$

$$\theta = [0, 2\pi] \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x>0 \text{ e } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{se } x>0 \text{ e } y<0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x<0 \text{ e } \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x=0 \text{ e } y>0 \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x=0 \text{ e } y<0 \end{cases}$$

$$\theta = [-\pi, \pi] \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x>0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x<0 \text{ e } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{se } x<0 \text{ e } y<0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x=0 \text{ e } y>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x=0 \text{ e } y<0 \end{cases}$$

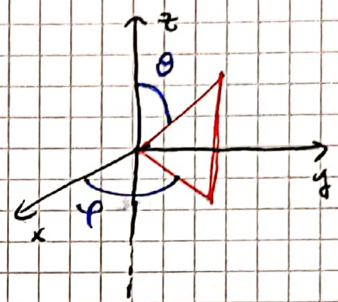
NB: se $r=0$ θ può assumere qualsiasi valore reale, sennò se $r \neq 0$ ci si limita a uno dei due intervalli di θ per una rappresentazione univoca

Coordinate polari sferiche

Le coordinate polari possono essere estese su 3 dimensioni utilizzando le coordinate sferiche mediante la terna (ρ, θ, φ) dove ρ è la distanza dal centro (polo), θ è l'angolo formato con l'asse z e φ l'angolo formato dalla proiezione sul piano xy con l'asse x.

Per passare da coordinate polari sferiche a cartesiane:

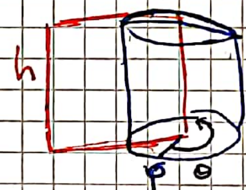
- $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$
- $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$
- $z = \rho \cos\theta$



Coordinate polari cilindriche

Le coordinate polari cilindriche consente l'utilizzo delle coordinate polari su 3 dimensioni, rispetto alle coordinate piane è aggiunta una terza dimensione indicante l'altezza.

- $x = \rho \cos\theta$
- $y = \rho \sin\theta$
- $z = h$



Derivata direzionale

si definisce derivata direzionale di $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ lungo la direzione di $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ come:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$ se esiste finito

Derivata parziale

Prende il nome di derivata parziale di una funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ la derivata direzionale di f nella direzione della base canonica:

$$f_{e_i}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$$

componenti del punto x_0

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[f(x_0^1 + 0 \cdot t, \dots, x_0^i + 1 \cdot t, \dots) \right]$$

alla i-esima posizione. 1 perché base canonica.

derivate parziali e direzionali si indicano in 3 modi: ① $\frac{\partial f(x_0)}{\partial v}$ ② $f_v(x_0)$ ③ $\partial_v f(x_0)$

Differenziabilità e differenziale

Data una funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ essa verrà detta differenziabile in x_0 se:

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(x_0 + w) - f(x_0) - \lambda(w)}{|w|} = 0$$

$\lambda(w)$ verrà detto differenziale con $\lambda(w): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ed è lineare. Si calcola in x_0 lungo l'incremento w

$$\lambda(w) \equiv df(x_0, w) \equiv \sum_1^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial(x_i)}(w_i) \equiv \nabla f(x_0) w$$

Gradiente

si definisce con gradiente il vettore avente per componenti tutte le derivate direzionali di una funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nel punto x_0.

$$\nabla f(x_0) \equiv \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

Derivate successive

Data la funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ di classe $C^k(\Omega)$ si ottiene la derivata k-esima successiva come:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_i \dots \partial x_k}$$

Retta tangente a un grafico di f

Si definisce come retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ la retta:

$$y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$

è inoltre

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

Punto di minimo locale

x_0 si dirà punto di minimo locale per $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se:

$$\exists \rho > 0 : \forall x \in \operatorname{dom}_\Omega f \cap B(x_0, \rho) \quad |f(x_0)| \leq |f(x)|$$

con $x_0 \in \Omega$

Punto di massimo locale

x_0 si dirà punto di massimo locale per $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \in \mathbb{R}^n$ se:

$$\exists \rho > 0 : \forall x \in \operatorname{dom}_\Omega f \cap B(x_0, \rho) \quad |f(x_0)| \geq |f(x)|$$

con $x_0 \in \Omega$

Punto di max globale

Data la funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e il punto $x_0 \in \Omega$ si dice che esso e' di massimo globale se:

$$\forall x \in \text{dom} f \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$$

Punto di min globale

Data la funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \Omega$ questo si dice di minimo globale se:

$$\forall x \in \text{dom} f \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

Teorema di Clairaut - Schwarz (no dimostrazione)

Data la funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $f \in C^2(\Omega)$, allora il teorema afferma che:

$$f_{x_i x_j} \equiv f_{x_j x_i} \quad \text{con } i, j = 1 \dots n$$

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & \cdots & f_{xy} \\ f_{yx} & \cdots & f_{yy} \end{pmatrix} \to \text{matrice simmetrica}$$

Non e' dunque rilevante l'ordine in cui vengono svolte le derivate, queste possono essere riordinate a piacimento.

Prodotto e divisione di funzioni omogenee

$$\frac{\alpha\text{-omogenea}}{\beta\text{-omogenea}} = (\alpha - \beta) \text{ omogenea}$$

$$\alpha\text{-omogenea} \cdot \beta\text{-omogenea} = (\alpha + \beta) \text{ omogenea.}$$

Insieme semplicemente connesso

Ω si dice semplicemente connesso se ogni curva chiusa in Ω, a valori in Ω, e' omotopa ad una curva costante:

$$\sigma(t) = x_0 \in \Omega \quad \forall t$$

Superficie parametrica regolare

La superficie parametrica $\phi : \Delta \to \mathbb{R}^3$ con $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ verrà detta regolare se rispetta le seguenti condizioni:

$$\phi_{(u,v)} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

- $\phi \in C^1(\Delta)$
- ϕ iniettiva su $\mathring{\Delta}$
- $|v| \neq 0 \quad \forall (u,v) \in \Delta \Rightarrow |\phi_u \wedge \phi_v| \neq 0$

Vettore normale alla superficie parametrica

Data la superficie parametrica regolare $\Phi(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, si definisce il vettore normale alla superficie in (u_0, v_0) come:

$$w = \Phi_u(u_0, v_0) \wedge \Phi_v(u_0, v_0)$$

derivate parziali

$\boxed{\text{se regolare } |w| \neq 0}$

Dominio normale

Ω si dice dominio normale rispetto all'asse x se $\exists\, a, b$ con $a > b \in \varphi, \psi = [a,b] \to \mathbb{R}$ tali che

$$\Omega = \{(x,y) : x \in [a,b] \text{ e } y \in [\varphi(x), \psi(x)]\}$$

$$\int_\Omega f = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy$$

per ottenere il dominio normale all'asse y serve scambiare invertire le variabili e ciò che ne è connesso ovvero i collegamenti segnati sopra.

Potenze di funzioni omogenee

$$(\alpha\text{-omogenea})^{(\beta\text{-omogenea})} = (\alpha \cdot \beta)\text{-omogenea}$$

Direzione della minima e della massima pendenza

Data che $df(x_0, w) = \nabla f(x_0) w$, allora per Schwarz $|\nabla f(x_0) w| \leq |\nabla f(x_0)||w|$, se w è un multiplo scalare del gradiente (ovvero $w = \alpha \nabla f$) assicura che se $\alpha = 1$:

$$\underbrace{-|df(x_0,w)|^2}_{\text{direzione della minima pendenza}} \leq \nabla f(x_0) w = df(x_0,w) \leq \underbrace{|df(x_0,w)|^2}_{\text{direzione della massima pendenza}}$$

Punti critici (o stazionari)

Si definiscono punti critici/stazionari/singolari quelli in cui il gradiente si annulla. Fra di essi ci sono: massimi e minimi locali interni, ma non coincidono soltanto con massimi/minimi sulla frontiera o punti in cui le derivate direzionali non esistono. min, max = d. parziali si annullano.
singolari ⇒ gradiente non esiste   sella = gradiente si annulla

Matrice jacobiana

La matrice jacobiana di una funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ è quella che ha per elementi le derivate parziali prime della funzione stessa calcolate in un punto x: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (può non esistere)
↳ Ω aperto

$$Jf = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \Rightarrow (Jf)_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$$

↳ Avente m righe ed n colonne

NB: se la matrice è quadrata allora è possibile calcolare lo jacobiano, ovvero il suo determinante.

Integrale di superficie

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\Phi: \Delta \to \Omega$ regolare

$$\int_\Phi f \, ds = \int_\Delta f(\Phi(u,v)) \underbrace{|\Phi_u(u,v) \wedge \Phi_v(u,v)| \, du \, dv}_{ds}$$

Matrice Hessiana

Data una funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$, se tutte le sue derivate seconde esistono, allora si definisce matrice hessiana della funzione f la seguente: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f \in C^2(\Omega)$

NB: e' una matrice $n \times n$, dunque e' quadrata.

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$(Hf)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}$$

Inoltre:

$$\underbrace{\lambda}_{\text{minimo autovalore}} \leq Hf_{(x)} = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0)\, w_i w_j \leq \underbrace{\Lambda}_{\text{massimo autovalore}}$$

se $\lambda > 0 \Rightarrow$ definita positiva

se $\Lambda < 0 \Rightarrow$ definita negativa

se $\lambda < 0 \vee \Lambda > 0 \Rightarrow$ indefinita

Infine se $\nabla f(x_0) = 0$ e $f \in C^2(\Omega)$ con Ω aperto allora l'hessiana:

- ↳ definita positiva $\Rightarrow$ x_0 minimo locale
- ↳ definita negativa $\Rightarrow$ x_0 e' un massimo locale
- ↳ indefinita $\Rightarrow$ x_0 punto di sella

Th Differenziabilita' di funzioni composte

Sia $f: \Omega \to \mathcal{E}$ e $g: \mathcal{E} \to H$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^n$ e $H \subseteq \mathbb{R}^p$, e $h: \Omega \to H$ tale che $h(x) = g(f(x))$. Ne segue che $dh(x_0, w) = dg(f(x_0), df(x_0, w))$.

$\Rightarrow$ Il differenziale di una funzione composta e' la composizione dei differenziali.

$$\underbrace{h'(x_0)}_{\mathbb{R}^{p \times m}} = \underbrace{g'(f(x_0))}_{\mathbb{R}^{p \times n}} \underbrace{f'(x_0)}_{\mathbb{R}^{m \times n}}$$

NB: Attento, non puoi scambiare i fattori

Curva parametrica

Si definisce curva parametrica in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ una funzione $\gamma : [a,b] \to \Omega$, con $[a,b]$ intervallo arbitrario.

La variabile $t \in [a,b]$ verrà detta parametro della curva.

L'immagine $\gamma[a,b]$ verrà detta sostegno.

Inoltre questa verrà detta di classe $C^0, C^1, \dots, C^\infty$ se è tale la funzione γ che la definisce, e perciò se sono tali le sue componenti $\gamma_i : [a,b] \to \mathbb{R}$, definita da

$$\gamma(t) = \left(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)\right)$$

Curva semplice

Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dice semplice se è iniettiva in $]a,b[$.

Curva chiusa

Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dice chiusa se:

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

Curva regolare

Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è detta regolare se:

$$|\dot{\gamma}(t)| \neq 0 \quad \forall t \in [a,b] \qquad \gamma \in C^1([a,b])$$

Curva generalmente regolare (a tratti)

Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dirà generalmente regolare se è tale che:

$$|\dot{\gamma}(t)| \neq 0 \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \ \forall i : t_i \text{ è partizione}$$

Partizione

Dato un intervallo arbitrario $[a,b]$, si definisce partizione di $[a,b]$ ogni sequenza finita di punti $\pi = \{t_0, t_1, \dots t_n\}$ tale che:

$$a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = b$$

B

NOTA: Ad ogni punto $[a,b]$ appartiene un solo intervallo $[t_i, t_{i+1}]$, salvo i punti $t_1, \dots t_{n-1}$ che appartengono ai due intervalli contigui.

Lunghezza della curva

Data una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ continua ed una partizione dell'intervallo $[a,b]$ $\pi = \{t_0, \dots, t_n\}$ (con $t_0 = a$, $t_n = b$)
si definisce la lunghezza della poligonale inscritta $\Lambda(\pi)$
e ... vertici $\gamma(a), \gamma(t_1), \dots, \gamma(b)$ ha lunghezza pari a: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$

poligonale inscritta $\to$ $\Lambda(\pi) = \sum_{0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$

curva $\to$ $\Lambda(\gamma) = \sup_{\pi} \Lambda(\pi)$ $\hookrightarrow$ tutte le possibili poligonali inscritte, prendiamo l'estremo sup.

Curva rettificabile

Una curva parametrica è detta rettificabile se esiste finito il numero:

$$\Lambda(\gamma) = \sup_{\pi} \Lambda(\pi)$$

Al variare di tutte le possibili partizioni dell'intervallo dei parametri. Il numero $\Lambda(\gamma)$ verrà detto "lunghezza della curva"

NOTA: Esistono curve continue di lunghezza infinita e dunque non rettificabili per le quali $\Lambda(\gamma) = +\infty$

Poligonale

Si definisce come poligonale una linea spezzata, ovvero un insieme ordinato di segmenti ~~ordinatamente consec~~ orientati ordinatamente consecutivi.

Retta tangente al sostegno della curva

Dati $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in [a, b]$ si definisce retta tangente al sostegno (ovvero all'immagine della curva γ) nel suo punto t come la retta parametrica

$$\sigma = \gamma(t_0) + (t - t_0)\dot{\gamma}(t_0)$$

Il vettore $\dot{\gamma}(t_0)$ si dirà anche velocità.

NB: se $\dot{\gamma}(t_0) = 0$ **NON** è così definita.

Curva equivalente

Data la curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ si dirà equivalente a una curva $\sigma : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ se:

$\exists\, \alpha : [c, d] \to [a, b]$ **invertibile** ovvero $\dot{\alpha}_t \neq 0 \ \forall t \in [c,d]$ e con $\alpha \in C^1([a,b])$ tale che:

$$\sigma(t) = \gamma(\alpha(t))$$

Ascissa curvilinea

L'ascissa curvilinea è la distanza di un punto $\gamma(t)$ dal punto $\gamma(t_0)$ assunto come origine su un arco di curva parametrica, con segno dipendente dalle posizioni relative nell'orientamento prescelto.

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\gamma}(t)|\, dt \qquad \text{con } \gamma \in C^1$$

Curva non rettificabile di classe C^0

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \qquad \gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda(\pi) \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

siccome diverge: $\sup_{\pi} \Lambda(\pi) = \infty$

Integrale di superficie (regolare)

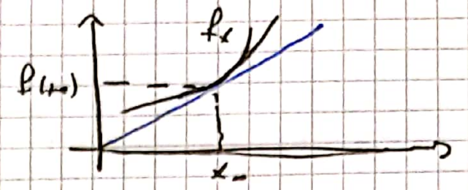
Data una superficie $\Phi : \Delta \to \Omega$ e una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$, e Φ regolare è uguale a:

$$\int_{\Phi} f \underbrace{ds}_{\text{elemento di superficie}} = \int_{\Delta} f(\Phi(u,v)) \cdot |\Phi_u(u,v) \wedge \Phi_v(u,v)|\, du\, dv$$

Retta tangente al graph di f

La retta tangente al graph f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è:

$$y = \underset{\overset{\shortparallel}{y_0}}{f(x_0)} + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{df(x_0,\, x-x_0)}$$



Piano tangente al grafico

Il piano tangente al grafico cartesiano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$ della funzione f, differenziabile in (x_0, y_0), nel suo punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è il piano di equazione implicita:

impl: $$z - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

esplicita: $$z = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{z_0} + \underbrace{f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\nabla f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \to df\left((x_0,y_0),(x-x_0,\, y-y_0)\right)}$$

x e y ⇒ coordinate del dominio

z ⇒ coordinata del codominio

direzione normale $\quad \nu = \left(-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1\right)$

↳ orientata verso l'alto

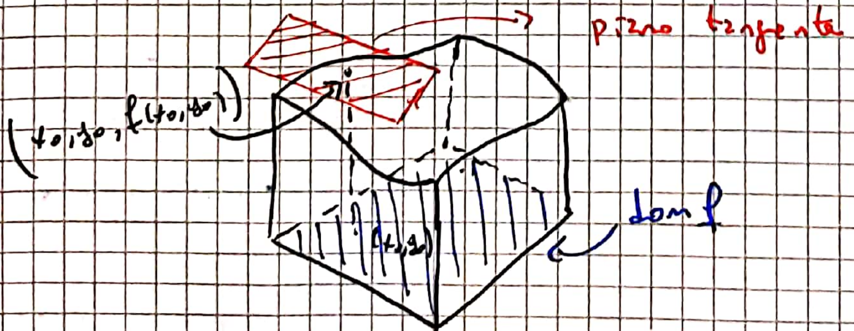
$$\boxed{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$$

Il piano tangente al grafico di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ e $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ è:

$$z - f(x_0) - \nabla f(x_0)(x - x_0) = 0 \qquad z \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$$

esplicita: $$z = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)(x - x_0)}_{df(x_0,\, x-x_0)}$$

direzione normale $= \nu = \left(-\nabla f(x_0), 1\right) = \left(-f_{x_1}(x_0), \dots, -f_{x_n}(x_0), 1\right)$



Equazione parametrica di un piano tangente a f in $f(\bar{u},\bar{v})$ in $\mathbb{R}^3$

$$\Psi(\alpha,\beta) = f(\bar{u},\bar{v}) + \alpha f_u(\bar{u},\bar{v}) + \beta f_v(\bar{u},\bar{v})$$

Grafici cartesiani (graph di f)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $\text{graph } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y = f(x)\}$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad$ $\text{graph } f = \{(x,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : z = f(x)\}$

Spazio affine tangente

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si definisce spazio tangente ad f in x_0 lo spazio t generato dalle colonne T_i di $f'(x_0)$ (la sua matrice jacobiana in x_0).

L'equazione parametrica dello spazio affine tangente sarà:

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(x_0) + \sum_1^n \alpha_i T_i$$

$f(u) \in \mathbb{R}^m$ $\quad$ $u_0 = (u_0^1, \dots, u_0^n)$

$u \in \mathbb{R}^n$

$$f'(u_0) = \begin{pmatrix} \partial u_1 f_1(u_0) & \partial u_2 f_1(u_0) & \dots & \partial u_n f_1(u_0) \\ \vdots & & & \\ \partial u_1 f_m(u_0) & \partial u_2 f_m(u_0) & \dots & \partial u_n f_m(u_0) \end{pmatrix}$$

Jacobiana $\Rightarrow$ $[f'(u_0)]_{ij} = (f_{(i)})_{u_j} = (f_{u_1} \dots f_{u_n})$

$$f_{x_i} = \begin{pmatrix} \partial_{x_i} f_1 \\ \partial_{x_i} f_m \end{pmatrix}$$

punto di tangenza

$$\Psi(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \overbrace{f(u_0)}^{\text{punto di tangenza}} + f'(u_0)\,\alpha =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(u_0^1 \dots u_0^n) \\ \vdots \\ f_m(u_0^1 \dots u_0^m) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial u_1 f_1(u_0^1 \dots u_0^m) & \dots & \partial u_n f_1(u_0^1 \dots u_0^n) \\ \vdots & & \\ \partial u_1 f_m(u_0^1 \dots u_0^m) & \dots & \partial u_n f_m(u_0^1 \dots u_0^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(u_0) \\ \vdots \\ f_m(u_0) \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \begin{pmatrix} \partial u_i f_1(u_0) \\ \vdots \\ \partial u_i f_m(u_0) \end{pmatrix}$$

vettore tangente alla curva ottenuta da f tenendo fermi tutti i parametri tranne U_j

$t \to f(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{i-1}, \bar{u}_i, \dots, \bar{u}_n)$

$$\boxed{\Psi(\alpha_1 \dots \alpha_n) = f(u_0) + \langle f_{u_1}(u_0), \dots, f_{u_n}(u_0) \rangle}$$

spazio affine tangente

spazio tangente

5 TEORIA DEI CAMPI

1) Campo vettoriale (generalmente indicato con A)

Si dice campo (di vettori) in Ω, di classe C^k, una funzione $A: \Omega \to \mathbb{R}^n$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, le cui componenti scalari ($A \equiv (A_1, A_2, \dots, A_n)$) sono tutte funzioni di Ω in $\mathbb{R}$ continue con le loro derivate fino all'ordine K.

A ogni punto della regione Ω è associata dunque un campo di vettori. $\exists f: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $A \equiv \nabla f$ su Ω!

Nota: "il vettore di arrivo" $A(x)$ ha lo stesso numero di componenti scalari del vettore di partenza x.

2) Forma differenziale lineare (generalmente indicato con α)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce forma differenziale lineare una funzione $\alpha: \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $\forall \bar{x} \in \Omega$ la funzione $t \to \alpha(\bar{x}, t)$ sia lineare in t. $\exists f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ tale che $\nabla f \equiv \alpha$ in $\mathbb{R}^n \times \Omega$

Nota: Poiché ogni funzione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ è uguale al prodotto scalare del suo argomento per il vettore formato dalle immagini dei vettori della base canonica in $\mathbb{R}^n$, data una qualunque forma $\alpha(x, w)$ e dunque $w \to \alpha(x, w)$ è lineare per ogni x fissato, perciò si può definire un campo di vettori $A(x)$ tale che:

$\alpha(x, w) = A(x)\, w$ alla quale si arriva ponendo $A(x) = \alpha(x, e_i)$, perciò fissato x $\alpha(x, w) = \alpha(x, \sum_1^n w_i e_i)$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum w_i}_{w} \underbrace{\alpha(x, e_i)}_{A(x)} \Rightarrow \underline{\underline{A(x)\, w}}$$

3) Campo associato alla forma α

Se il campo A è di classe C^k, ove C^k è la medesima classe di una forma α, allora questo verrà detto campo associato alla forma α.

4) Forma associata al campo A

Dato un campo A, si dirà che α è la sua forma associata se della medesima classe e verificante $\alpha(x, w) = A(x)\, w$

NB: l'integrale di una forma corrisponde con l'integrale del campo associato, ma non è sempre vero il contrario.

5. Integrale di campo.

Sia A un campo e $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e di classe $C^0(\Omega)$ ovvero continua su Ω. Per ogni curva (generalmente regolare) parametrizzata $\gamma : [a,b] \to \Omega$, si definisce l'integrale di A esteso a γ ponendo:

$$\int_\gamma A = \int_a^b \underbrace{A(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)}_{\text{prodotto scalare.}}\, dt$$

A integrabile si dirà anche conservativo o potenziale.

6. Campo di vettori Integrabile

Un campo di vettori $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ si dirà integrabile se $\exists f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e $\nabla f(x) \equiv A(x)$ $\forall x \in \Omega$. Il campo si dirà inoltre potenziale mentre f sarà la primitiva del campo. Ciò si risolve solo nei campi conservativi. **Attento**: campo potenziale! $\neq$ potenziale

7. Forma integrabile (o esatta)

Una forma $\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dirà integrabile se $\exists f : \Omega \to \mathbb{R}$: $df \equiv \alpha$ su $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Ogni funzione verificante tale identità verrà detta primitiva (o potenziale) della forma α in Ω. Tale forma si dirà anche esatta o un differenziale esatto.

8. Curva chiusa

Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si di chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$

9. Congiunzione di due curve

Date due curve $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{R}$ si definisce congiunzione delle due curve $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ quella definita:

$$\gamma_1 \oplus \gamma_2 \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t) & \text{se } t \in [b,c] \end{cases} \qquad \gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a,c] \to \Omega$$

10. Curva Opposta

Si definisce curva opposta a $\gamma : [a,b] \to \Omega$ la curva $\ominus\gamma : [a,b] \to \Omega$ definita ponendo $\ominus\gamma(t) = \gamma(b-t+a)$, medesimo sostegno di γ ma in verso opposto.

11. Campo irrotazione e forma chiusa (area condizione del rotore)

Se A è un campo vettoriale con $A \in C^1$ verificante la condizione $(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i}$ dove x_i e x_j sono le variabili rispetto alle quali effettuare la derivazione, e ciò è verificato $\forall i, j$ si dirà irrotazionale mentre la sua forma associata si dirà chiusa.

NB: non tutti i campi irrotazionali sono integrabili, non importa mettere $i \neq j$

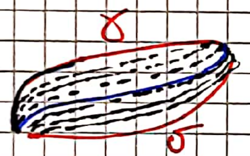
12. Curve omotope (deformazione di curve)

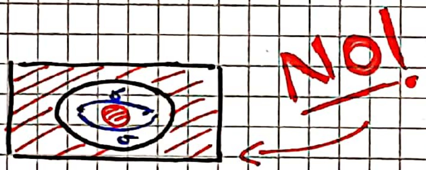
Due curve $\gamma : [0,1] \to \Omega$ e $\sigma : [0,1] \to \Omega$ si dicono omotope (deformabili) in Ω se esiste:

$h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ continua e tale che:

$h(0,t) = \gamma(t)$ e $h(1,t) = \sigma(t)$ $\forall t \in [0,1]$

Tale deformazione non deve mai uscire da Ω, e può essere pensata come una "trasformazione" graduale della curva γ in σ.





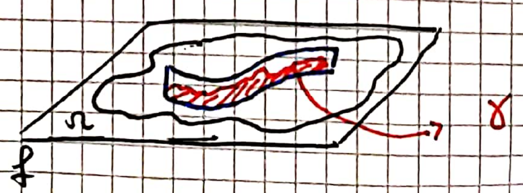
13. Insieme semplicemente connesso

Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dirà semplicemente connesso se per ogni curva chiusa $\gamma : [0,1] \to \Omega$ è omotopa in Ω ad una curva costante $\sigma(t) \equiv x_0$ $\forall t \in [0,1]$

14. Integrale curvilineo

Data la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e la curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$ si definisce l'integrale curvilineo (ovvero di f lungo la curva γ) come:

$$\int_\gamma f \, d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t)) \, |\dot{\gamma}(t)| \, dt$$



Cambio di variabili

se le seguenti ipotesi sono vere:

1) $x, y \in \mathbb{R}^n$
2) $dx = dx_1 \dots dx_n$
3) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto
4) $x = g(y)$
5) $g, g^{-1} \in C^1(\Sigma)$
6) $g : \Sigma \to \mathbb{R}^n$
7) $\dot{g}(y) = \dfrac{\partial x_1 \dots \partial x_n}{\partial y_1 \dots \partial y_n}$

Rotore

Dato $A : \Omega \to \mathbb{R}^3$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e di classe $C^1(\Omega)$, si definisce rotore come:

$$\operatorname{rot} A \equiv \nabla \wedge A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

E facendo i calcoli:

$$\operatorname{rot} A \equiv \begin{pmatrix} (A_3)_{x_2} - (A_2)_{x_3} \\ (A_1)_{x_3} - (A_3)_{x_1} \\ (A_2)_{x_1} - (A_1)_{x_2} \end{pmatrix}$$

Th di invarianza omotopica (no dim)

siano $\gamma_1(t) : [0,1] \to \Omega$ e $\gamma_2(t) : [0,1] \to \Omega$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ due curve continue di estremi coincidenti, sia $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo irrotazionale in Ω e siano $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ omotope in Ω. Allora:

$$\int_{\gamma_1} A = \int_{\gamma_2} A$$

La stessa conclusione si ottiene considerando curve chiuse $\gamma_1(0) = \gamma_1(1)$ e $\gamma_2(0) = \gamma_2(1)$ (anche senza punti in comune) invece le mere curve con estremi uguali.

Divergenza di un campo

Sia A un campo irrotazionale:

$$\operatorname{div} A = (A_1)_{x_1} + (A_2)_{x_2} + \dots + (A_n)_{x_n}$$

Ne segue che: (Teorema di Gauss)

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} A \, dx\, dy = \overbrace{\int_{\partial\Omega} A \boxed{\nu} \, d\sigma}^{\text{flusso del campo uscente dalla superficie}}$$

ν: vettore normale esterno

Integrabilità di campo (gradiente)

Un campo $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto integrabile se $\exists f : \Omega \to \mathbb{R} \; : \; \nabla f_{(x)} = A_{(x)} \;\; \forall x \in \Omega$

Piano tangente alla superficie parametrica

Sia $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}^3$ con $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ superficie parametrica, si definisce il piano tangente ad essa come:

$$\Psi(\alpha, \beta) = \Phi(x_0) + \Phi_u(x_0)\,\alpha + \Phi_v(x_0)\,\beta$$

Parte 1 - Teoremi

1) Criterio di convergenza

TS: $a_n \to L \iff (a_n)_i \to (L_i) \quad \forall i = 1 ... n \quad$ con $a_n = \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$

dim:

C.N.
$\Rightarrow$

Sappiamo che $a_n \to L$, dunque $(a_n - L) \to 0$

Per comodità denominiamo $w = a_n - L$ allora:

$0 \leq (w_i)^2 \leq |w|^2 \leq |w|^2$ e ciò è vero perché il quadrato di un numero (reale) è sempre maggiore uguale di zero.

Ricordando che una generica successione b_n:

$b_n \to 0 \iff |b_n|^2 \to 0$

Dunque sapendo che $(a_n - L) \to 0$, segue allora che anche $|(a_n - L)|^2 \to 0$

Possiamo allora dire che:

$$\underbrace{0}_{\downarrow\, 0} \leq [(a_n)_i - (L)_i]^2 \leq \underbrace{|(a_n - L)|^2}_{\downarrow\, 0}$$

$$0 \longrightarrow 0 \longleftarrow 0$$

Dunque per il teorema dei carabinieri sappiamo che $[(a_n)_i - (L)_i]^2 \to 0$, ~~ed~~ essendo "un quadrato" che va a zero anche il suo contenuto andrà a zero, segue che: $((a_n)_i - L_i) \to 0$

$(a_n)_i \to L_i \quad \forall i = 1 ... N$, tesi!

C.S.
$\Leftarrow$

$(a_n)_i \to (L)_i$ perciò $(a_n)_i - (L)_i \to 0$

Sappiamo dunque che ogni elemento tende a zero, si ha perciò che anche l'elemento maggiore tenderà a zero.

Sia $w_i = (a_n)_i - L_i$

$$\underbrace{\underbrace{0}_{\downarrow\, 0} \leq w_i^2 \leq |w|^2}_{\downarrow\, 0} \leq \underbrace{N \cdot (\max w_i^2)}_{\downarrow\, 0 \text{ da prima.}}$$

ovviamente il prodotto per N volte del massimo elemento al quadrato (≥ 0) è maggiore della funzione stessa.

Per il teorema dei carabinieri. Perciò $a_n - L \to 0 \Rightarrow a_n \to L$, tesi!

2. se la successione converge allora è limitata

Sia $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$

TS: se la soluzione converge allora è limitata.

dim:

$$|a_n| = |a_n - L + L| = |a_n - L| + |L|$$ per la disuguaglianza triangolare.

Per definizione di limite sappiamo che:

$\exists\, \varepsilon > 0 : |a_n - L| < \varepsilon \quad \underbrace{\forall n > N}$ → da un certo punto in poi.

Dunque:

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|, \varepsilon + |L|\} = K$$

Dunque esiste un estremo finito K sotto al quale la funzione sta sempre ($\varepsilon + |L|$ nel migliore dei casi, un altro punto in altri casi).

3. somma di successioni limitate è limitata

Sia $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, $b_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ e siano tali che $a_n \to L$ e $b_n \to M$

TS: $(a_n + b_n) \to L + M$

Dim:

$a_n \to L$ perciò $(a_n - L) \to 0$

$b_n \to M$ perciò $(b_n - M) \to 0$

somma dei limiti è uguale al limite della somma:

$$|a_n + b_n - L - M| \leq \underbrace{|a_n - L|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n > V_1} + \underbrace{|b_n - M|}_{< \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n > V_2}$$

→ da un certo punto in poi.

perciò preso il $\max\{V_1, V_2\}$, ovvero quello per cui entrambe le affermazioni sopra dette sono vere segue che la somma è minore di ε

$$|a_n - L| + |b_n - M| < \varepsilon \quad \text{(da un certo punto in poi).}$$

Quindi tale ε esiste ed è finito, perciò anche la somma è limitata.

CS Convergenza

Hp: sia x_0 punto di accumulazione
Ts: $\exists\, x_n \in \Omega : x_n \to x_0$

<u>dim</u>:

Per hp sappiamo che x_0 è un punto di accumulazione, dunque applicando la definizione:

$\forall \rho > 0 \quad \exists\, x_n \in \Omega,\ x_n \neq x_0,\ x_n \in B(x_0, \rho)$ e dunque $|x_n - x_0| \leq \rho$

si consideri ρ, ovvero il raggio, tale che:

$\rho = \frac{1}{n}$ e che (per comodità) sia il più piccolo tra tutti i raggi dei punti da x_1 a x_{n-1}.
Dunque:

$$\rho = \min\left\{ |x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|, \dots, |x_{n-1} - x_0|, \frac{1}{n} \right\}$$

preso dunque un $\varepsilon > 0$, con $\varepsilon > \frac{1}{\bar{\nu}}$ e dunque $\bar{\nu} > \frac{1}{\varepsilon}$

segue dunque che:

$$|x_n - x_0| < \rho = \frac{1}{n} < \frac{1}{\bar{\nu}} < \varepsilon \quad \forall n > \bar{\nu}$$

dunque:

$$|x_n - x_0| < \varepsilon \quad \forall n > \bar{\nu}$$

e dunque converge "da un certo punto in poi"

Continuità della funzione composta

hp: siano f, g, h funzioni così descritte:

$f : \Omega \to \Sigma$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ e continua in x_0

$g : \Sigma \to H$ con $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ e continua in $f(x_0)$

$h : \Omega \to H$ con $H \subseteq \mathbb{R}^p$ e $h(x) = g(f(x))$

Ts: $h(x)$ è continua in x_0

Dim:

- ciò che vogliamo dimostrare è la continuità di h, dunque applicando la definizione quello che vogliamo ottenere è:

$$\varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \underset{\Omega}{\underset{\parallel}{\operatorname{dom} h}} \quad |x - x_0| < \delta \quad |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$$

- consapevoli del fatto che ancora non sia dimostrato, analizziamo la parte finale "decomponendola" e cercando di dimostrarne la veridicità:

$$|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$$ sapendo per hp che $h(x) = g(f(x))$ sostituiamo:

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$ per comodità, rinominiamo: $y = f(x)$ $\quad y_0 = f(x_0)$

$$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

- Rispetto a prima, sappiamo per hp che g è continua nel punto $f(x_0) = y_0$, dunque adesso la definizione di continuità è applicabile (su g):

$$\varepsilon > 0 \ \exists \sigma > 0 : \forall y \in \underset{\Sigma}{\underset{\parallel}{\operatorname{dom} g}} \quad |y - y_0| < \sigma \quad \underline{|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon}$$

Dunque la seconda parte è verificata, per quanto riguarda la prima procediamo come prima dimostrando la veridicità di $|y - y_0| < \sigma$. essendo $y = f(x)$ e $y_0 = f(x_0)$

$$|f(x) - f(x_0)| < \sigma$$, come prima sappiamo per hp che f è continua in x_0, per cui:

$$\sigma > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \underset{\Omega}{\underset{\parallel}{\operatorname{dom} f}} \quad \underline{|x - x_0| < \delta} \quad |f(x) - f(x_0)| < \sigma$$

Essendo $\operatorname{dom} f = \Omega = \operatorname{dom} h$ ed essendo $|g(y) - g(y_0)| = |h(x) - h(x_0)|$

segue: $\varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \operatorname{dom} h \quad \underline{|x - x_0| < \delta} \quad \underline{|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon}$

TESI! Definizione di continuità

Teorema degli zeri (Weierstrass)

Hp:

1) Ω connesso
2) f continua in Ω
3) $\exists\, x_1, x_2 \in \Omega : f(x_1) f(x_2) < 0$ ↳ ovvero di segni discordi

Ts: $\exists\, \bar{x} \in \Omega : f(\bar{x}) = 0$ ← ovvero esiste uno zero

Dim:

Scelti x_1, x_2 con Ω connesso, per definizione di connessione:

$\forall x_1, x_2 \in \Omega \ \exists\, \gamma : [0,1] \to \Omega$ e continua in $[0,1]$
tale che $\gamma(0) = x_1$ e $\gamma(1) = x_2$

sia definita una nuova funzione h come segue:

- $h : [0,1] \to \mathbb{R}$
- $h(t) = f(\gamma(t))$
- h continua nel dominio ovvero nell'intervallo $[0,1]$
  (in quanto continua per il th. della continuità di funzioni composte di f. continue). data dalla connessione di γ lungo tutto Ω e la continuità di f per hp.

Dunque per quanto detto sopra:

$$h(0) = f(\gamma(0)) = f(x_1)$$
$$h(1) = f(\gamma(1)) = f(x_2)$$

Essendo $\underbrace{h(0) \cdot h(1)}_{<0} = \underbrace{f(x_1) f(x_2)}_{<0}$ per hp

Per il th degli zeri in una variabile (vista in Analisi I) possiamo affermare che ~~[illegible]~~ $h(t)$ ammette uno zero perciò: $\exists\, \bar{t} \in [0,1] : h(\bar{t}) = 0$, essendo però tale funzione composta sappiamo:

$$0 = h(\bar{t}) = f(\underbrace{\gamma(\bar{t})}_{\to \bar{x}}) \qquad \text{preso } \bar{x} = \gamma(\bar{t})$$

segue che:

$\exists\, \bar{x} \in \Omega : f(\bar{x}) = 0$, tesi!

Convessità del cerchio

Hp: Sia $\Omega = B(0,1)$ ovvero una sfera con raggio unitario (per comodità della dimostrazione).
Dunque $\forall x \in \Omega \quad |x| < 1$

Ts: $\forall x_1, x_2 \in \Omega \quad |(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2| < 1$ → ovvero che il cerchio è convesso

Dim:

Dimostriamo sviluppando la tesi e dimostrandone la veridicità

Essendo entrambe quantità positive, sappiamo che l'elevamento al quadrato non altera la disuguaglianza:

$$|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2|^2 < 1^2 \equiv 1$$

$$\underbrace{|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2|^2 =}_{\text{sviluppiamo}} (1-\lambda)^2|x_1|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\underbrace{x_1 x_2}_{<} + \lambda^2|x_2|^2$$

proprietà del prodotto scalare.

Per la disuguaglianza di Schwarz sappiamo che quello scritto sopra è $\leq$ di:

$$\leq (1-\lambda)^2|x_1|^2 + 2\lambda(1-\lambda)|x_1||x_2| + \lambda^2|x_2|^2$$

e questo sopra equivale a:

$$[(1-\lambda)|x_1| + \lambda|x_2|]^2$$

perciò:

$$|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2|^2 \leq [(1-\lambda)\underbrace{|x_1|} + \lambda\underbrace{|x_2|}]^2$$

$0 \leq - < 1$ per hp. Maggioriamo ad uno i loro valori

$$|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2|^2 \leq [(1-\lambda)|x_1| + \lambda|x_2|]^2 \leq [(1-\lambda)\cdot 1 + \lambda \cdot 1]^2 \equiv 1 - \lambda + \lambda \equiv$$

dunque:

$$|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2|^2 < 1$$

$$|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2| < 1 \rightarrow \text{Tesi!}$$

AN 3.1

Th del Dini

hp: sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ verificanti le seguenti proprietà:

1) (x_0, y_0) punto interno ad Ω
2) $(x_0, y_0) = 0$
3) f continua in Ω
4) la funzione che manda da $t \to f(\bar{x}, t)$ è strettamente crescente in t $\forall \bar{x} : (\bar{x}, t) \in \Omega$

TS: $\exists\, \delta > 0$ e $\varphi(x) : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ tali che:

5) $\varphi(x_0) = y_0$
6) $f(\bar{x}, \varphi(x)) = 0 \quad \forall \bar{x} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
7) φ continua in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

Dim:

Essendo (x_0, y_0) punto interno ad Ω, esiste una sfera di punti ~~per~~ in cui è possibile "muoversi" senza uscire da Ω, perciò:

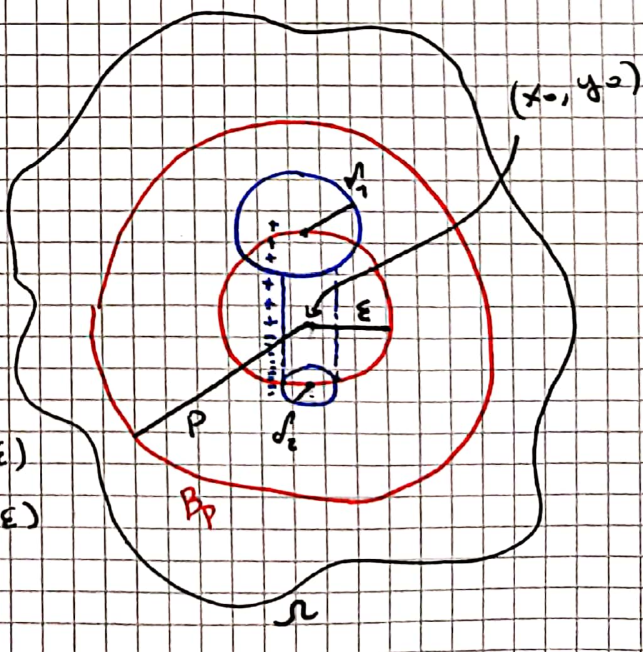
$\exists\, \rho > 0 : B_\rho(x_0, y_0) \subseteq \Omega$

Preso un $\varepsilon = \frac{\rho}{2}$ (valore arbitrario per essere sicuri di non uscire da B_ρ) e poiché $t \to f(x, t)$ è strettamente crescente e vale 0 per $t = y_0$, ne segue che sarà strettamente positiva per $t > y_0$ e strettamente negativa per $t < y_0$ (ci stiamo "muovendo" sulle rette verticali).

Ne segue dunque:

$f(x_0, t - \varepsilon) < 0$ per $t < y_0$

$f(x_0, t + \varepsilon) > 0$ per $t > y_0$



Essendo f continua in Ω

$\exists\, \delta_1, \delta_2 > 0$ tali che, per la permanenza del segno:

- $f(x, y) > 0$ se $(x, y) \in B_{\delta_1}(x_0, y_0 + \varepsilon)$
- $f(x, y) < 0$ se $(x, y) \in B_{\delta_2}(x_0, y_0 - \varepsilon)$

È dunque evidente che:

- $f(x_0, \varepsilon + y_0) > 0$ se $|x - x_0| < \delta_1$
- $f(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$ se $|x - x_0| < \delta_2$

fissato ora $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e definito $\bar{x} \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ sappiamo che la funzione $t \to f(\bar{x}, t)$ è:

- definita in $y_0 - \varepsilon$ e $y_0 + \varepsilon$, dove assume valori di segno discorde.

- Essendo $(\bar{x}, y_0 - \varepsilon)$ e $(\bar{x}, y_0 + \varepsilon)$ due punti di $B_\rho(x_0, y_0) \subseteq \Omega$ ed essendo B_ρ convessa, $t \to f(\bar{x}, t)$ è definita sull'intervallo $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$

- è continua in tutti i punti per i quali $(\bar{x}, t) \in \Omega$ e perciò in particolare in $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$

Ne segue dunque che per il Th degli zeri di Weierstrass per le funzioni in una variabile ci sono zeri in $[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$ ed essendo $t \to f(\bar{x}, t)$ strettamente monotona lo zero è unico per ogni $\bar{x} \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ e definisce univocamente una funzione di $\bar{x}$ che chiameremo con $\varphi(\bar{x})$. (non possono esserci più zeri sulla stessa retta verticale).

Si noti che φ assumendo valori di segno discorde in $y_0 - \varepsilon$ e $y_0 + \varepsilon$ ciò significa che non possono essere punti dove compare lo zero e ne segue che $\varphi(x) \in]y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon[$ e cioè $|\varphi(x) - y_0| < \varepsilon$.

Osserviamo che per $x = x_0$ $\varphi(x_0)$ è l'unico zero di $t \to f(x_0, t)$ per $(x_0, t) \in \Omega$, ed essendo per ipotesi $f(x_0, y_0) = 0$ ne segue la 5) ovvero $\varphi(x_0) = y_0$.

Dalla costruzione di $\varphi(\bar{x})$ è immediata la 6), lo zero unico di $f(\bar{x}, t)$ è per tutti gli $\bar{x}$ $f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0$.

Per provare la continuità di φ bisognerà eseguire la costruzione per ogni $\bar{x}$ diverso da x_0 scegliendo come punto di partenza $(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))$ invece di (x_0, y_0). Otterremo agni volta delle funzioni φ differenti, ma in realtà queste coincideranno per l'unicità degli zeri di $t \to f(\bar{x}, t)$ sull'intersezione dei rispettivi domini. Essendo coincidenti e definite, rappresentano punti di continuità per φ partendo dalla zero centrato in $(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))$.

Divergenza dei polinomi non costanti

hp: $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con P polinomio <u>non</u> costante

ts: $\lim_{z \to \infty} p(z) = \infty$

<u>dim</u>:

si riscrive il polinomio sotto forma di somme:

$$p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad \text{con } \alpha_0 \neq 0$$

si raccoglie per z^n:

$$p(z) = z^n \left(\alpha_n + \frac{\alpha_{n-1}}{z} + \dots + \frac{\alpha_{n-k}}{z^k} + \dots + \frac{\alpha_0}{z^n} \right)$$

Poiché $z \to \infty \Rightarrow z^k \to \infty$ per ogni k intero strettamente positivo.

$f \to \infty \Rightarrow \frac{1}{f} \to 0$

ne segue che l'intera parentesi tende a $\alpha_n \neq 0$

$\downarrow$

Mentre $z^n \to \infty$ motivo per cui diverge. ∎

Esistenza del minimo dei polinomi divergenti

Hp: $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomio.

Ts: $|p|$ ha minimo.

dim:

① Per i polinomi costanti è banale, ogni punto è di minimo.

② Fissato ad arbitrio $z_0 \in \mathbb{C}$, se $p(z_0) = 0$ allora è immediato il teorema in questione (e vale il th Fondamentale) perché:

$$|p(z)| \geq 0 = |p(z_0)| \qquad \text{caso banale.}$$

③ se $p(z_0) \neq 0$, allora segue dalla divergenza dei polinomi a infinito che scelto:

$$\varepsilon = |p(z_0)| \underset{\text{strettamente}}{>} 0$$

si ha che $\exists\, \delta > 0 : |p(z)| > \varepsilon = |p(z_0)|$

per ogni z tale che $|z| > \delta$. A causa della disuguaglianza stretta precedente $|z_0| \leq \delta$.

Sia ora $f(z) = |p(z)|$ e si considera la sfera chiusa (e limitata) $B(0, \delta)$. La funzione f è continua (perché composta di funzioni continue) su un compatto ovvero la sfera $B(0,\delta)$. Perciò per il Th di Weierstrass ha massimo e minimo, sia dunque $\bar{z}$ un punto di minimo di f su $B(0,\delta)$

- si ha subito che $\forall z \in B(0,\delta)$:

$$|p(z)| = f(z) \geq f(\bar{z}) = |p(\bar{z})|$$

ecco il minimo!

- Se $z \notin B(0,\delta)$ si ottiene

$$|p(z)| \geq \varepsilon = |p(z_0)| \geq |p(\bar{z})|$$ e dunque

$$\underbrace{|p(z)| \geq |p(\bar{z})|}_{\text{Ho trovato comunque un minimo!}} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$\boxed{//}$

Lemma di Hermite - 3° del Th fondamentale

hp: sia $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ non costante con $P(z_0) \neq 0$

Ts: ~~P(z)~~ $\exists\, \bar{z} \in \mathbb{C} : |P(\bar{z})| < |P(z_0)|$

dim.

Creo un nuovo polinomio $q(w) = \frac{P(z_0 + w)}{P(z_0)}$ che avrà lo stesso grado di z in quanto sviluppandone le potenze si ottiene sempre il medesimo grado.

$$q(0) = \frac{\cancel{P(z_0+0)}}{\cancel{P(z_0)}} = 1$$

Riscriviamo ora tale polinomio scomponendolo nelle sue somme.

$$q(w) = 1 + \alpha_0 w^0 + \alpha_1 w^1 + \dots + \alpha_n w^n$$

Consideriamo ora con k il primo grado presente avente coefficiente non nullo ovvero $\alpha_k \neq 0$ — esiste perché il polinomio è non costante

$$q(w) = 1 + \alpha_k w^k + \underbrace{w^{k+1}\, \tilde{q}(w)}$$

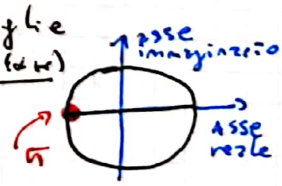
raggruppo in un altro polinomio tutti gli altri gradi.

Quello che dobbiamo dimostrare è che $|P(\bar{z})| < |P(z_0)|$ che, preso $\bar{z} = z_0 + \bar{w}$, otteniamo:

$$|P(\bar{z})| < |P(z_0)| \Rightarrow \frac{|P(\bar{z})|}{|P(z_0)|} < 1 \Rightarrow \underbrace{|q(\bar{w})| < 1}$$

↳ sfruttiamo il nuovo polinomio

Dove $q(\bar{w})$ avrà $\bar{w}$ reale e negativo, e di norma minore di 1. Motivo per cui si sceglie
$\bar{w} \in \mathbb{C} : \arg(\alpha_k \bar{w}^k) = \pi \Rightarrow \arg(w) = \frac{\pi - \arg(\alpha_k)}{k}$
e ~~...~~ $|\alpha_k \bar{w}^k| < 1 \Rightarrow \bar{w} = \frac{1}{\sqrt[k]{|\alpha_k|}}$



Dal momento che dobbiamo lavorare con $|q(\bar{w})|$, vediamo quanto vale applicando su $q(w)$ la norma.

$$|q(w)| \leq \underbrace{|1 + \alpha_k w^k|} + |\alpha w^{k+1}|\,|\tilde{q}(w)|$$

↓

quanto vale realmente?

sapendo come abbiamo scelto $\bar{w}$, sappiamo che $|1+\alpha_k w^k|$ è la somma tra 1 e un numero reale negativo, per cui il calcolo che realmente eseguiamo (essendo $\alpha_k w^k < 1$):

$$|1+\alpha_k w^k| = 1 - |\alpha_k w^k|$$ "il più grande meno il più piccolo"

Per cui otteniamo:

$$|q(\bar{w})| \leq 1 - |\alpha_k w^k| + |\bar{w}^{k+1}|\,|\tilde{q}(\bar{w})| =$$

ora raccogliamo per $|\bar{w}^k|$:

$$= \underbrace{1 - |\bar{w}^k|}_{\to 0} \, \underbrace{[\, |\alpha_k| + -\underbrace{|w^1|\,|\tilde{q}(\bar{w})|}_{0}\,]}_{\to \alpha_k}$$

scegliendo $\bar{w}$ sempre più piccolo, abbiamo che per $\bar{w} \to 0$ le quadre tendono ad $\alpha_k \neq 0$ da come abbiamo preso $\alpha_k w^k$ per cui:

$$|q(\bar{w})| \leq 1 - |\alpha_k \underbrace{w^k}_{}| < 1$$ che tende a 0 per $w^k \to 0$

da cui:

$$|q(\bar{w})| < 1$$

$$\left|\frac{P(z_0+\bar{w})}{P(z_0)}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |P(z_0+\bar{w})| < |P(z_0)|$$

preso $\xi = z_0 + \bar{w}$ si ha la tesi!

$\blacksquare$

Teorema di Fermat

hp: Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$
① x_0 pt di minimo locale
② x_0 è interno ad Ω ($x_0 \in \mathring{\Omega}$)
③ $f_v(x_0)$ esiste per qualsiasi $v \neq 0$

Ts: $f_v(x_0) = 0$

Th in analisi I
① x_0 min locale
② $x_0 \in \mathring{\Omega}$
③ $\exists f'(x_0)$
$\Downarrow$
$f'(x_0) = 0$

dim:

- Dal punto 2, essendo x_0 interno ad Ω sappiamo per definizione che,
  $\exists \rho_1 > 0 \ : \ \forall x \in B(x_0, \rho_1) \subseteq \Omega$

- Applicando anche la definizione di punto di minimo locale:
  $\exists \rho_2 > 0 \ : \ \forall x \in \Omega \cap B(x_0, \rho) \quad |f(x_0)| \leq |f(x)|$

Prendiamo adesso $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$ in modo che entrambe le condizioni siano rispettate. Il nostro obbiettivo è quello di riportare il caso in due variabili in una variabile, in modo da poter utilizzare il th di Analisi I.
Da sopra, sappiamo che:

$B(x_0, \rho) \subseteq B(x_0, \rho_1) \cap B(x_0, \rho_2)$ e x_0 continua ad essere punto di minimo per cui

$\forall x \in B(x_0, \rho) \quad |f(x_0)| \leq |f(x)|$

Riportando il tutto in una variabile, consideriamo la derivata direzionale che vogliamo dimostrare essere uguale a zero:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[f(x_0 + tv) - f(x_0)\right] \overset{?}{=} 0 \leftarrow \text{ancora da dimostrare.}$$

Creiamo una funzione h:
$h(t) = f(x_0 + tv)$ dove quindi:

$h(0) = f(x_0) \leftarrow$ minimo locale

L'intervallo di h è quello in cui tv non esce dalla sfera, ovvero che la distanza di $tv + x_0$ da x_0 sia minore del raggio, per cui calcoliamo la distanza e poniamola minore di ρ:

$$|tv + x_0 - x_0| < \rho \Rightarrow |tv| < \rho \Rightarrow |t||v| < \rho$$

da cui $|t| < \frac{\rho}{|v|}$, dunque:

h sarà definita in $h: \left] -\frac{\rho}{|v|}, \frac{\rho}{|v|} \right[\longrightarrow \mathbb{R}$

lo zero è incluso!

Per cui, riscrivendo il limite precedente:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{h(t) - h(0)}{t}$$

Ciò è lecito perché sappiamo esistere qualche derivata direzionale, che compone in una variabile un limite del rapporto incrementale traducibile nella derivata prima della funzione h. Abbiamo trovato la terza ipotesi!

Da Fermat in una variabile, il limite del rapport incrementale nel punto di minimo sappiamo fare 0, dunque:

per Fermat!

$$\lim_{t\to 0} \frac{h(t) - h(0)}{t - 0} = h'(0) = 0$$

perché rapport incrementale!

dunque:

$$h'(0) = f_v(x_0) = 0$$, da cui la tesi!

$\blacksquare$

Se una funzione è differenziabile in un punto, allora è anche continua

Ts: se f è diff in $x_0 \Rightarrow f$ è continua in x_0

Dim:

Dalle hp sappiamo che f è differenziabile, ovvero che, dalla definizione, segue:

$$\lim_{w\to 0} \frac{f(x_0+w) - f(x_0) - \lambda(w)}{w} = 0$$

- Ciò che vogliamo dimostrare è la continuità in x_0, ovvero:

$$\lim_{w\to 0} f(x_0+w) \overset{?}{=} f(x_0) \quad \text{da cui segue}$$

$$\lim_{w\to 0} f(x_0+w) - f(x_0) \overset{?}{=} 0 \leftarrow \text{Tesi.}$$

- Per dimostrarne la veridicità partiamo dalla tesi e procediamo a ritroso evidenziando che quanto detto è vero, cercando dunque di ricomporre la differenziabilità.

$$\lim_{w\to 0} f(x_0+w) - f(x_0) + \lambda(w) - \lambda(w) \overset{?}{=} 0$$

$$\lim_{w\to 0} |f(x_0+w) - f(x_0) - \lambda(w) + \lambda(w)| \overset{?}{=} 0$$

se questo è uguale a zero, lo è anche il modulo.

- Per la disuguaglianza triangolare sappiamo che quanto scritto sopra è sempre $\leq$ di:

$$\lim_{w\to 0} |f(x_0+w) - f(x_0) - \lambda(w)| + |\lambda(w)| \overset{?}{=} 0$$

- moltiplichiamo e dividiamo il primo termine per ottenere la definizione di differenziabilità:

$$\lim_{w\to 0} \underbrace{\frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - \lambda(w)|\,|w|}{|w|}}_{\text{fa zero per hp, in quanto differenziabile}} + \underbrace{|\lambda(w)|}_{\text{fa zero perché } w\to 0} \overset{?}{=} 0$$

$\lambda(w) = \lambda\left(\sum_1^n w_i e_i\right) = \sum_1^n w_i \lambda(e_i)$ ed essendo $w\to 0$ allora $w_i = 0 \ \forall i$ da $1 \dots n$, segue che $\lambda(w) = 0$

Dunque la somma fa zero e segue la tesi

Se f è differenziabile in un punto x_0, allora esistono tutte le derivate direzionali e coincidono con il differenziale in x_0 calcolato con l'incremento v

TS: se f diff in x_0 $\Rightarrow \exists f_v(x_0) = df(x_0,v) = \lambda(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

dim:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - \lambda(v) \overset{?}{=} 0$$

è ciò che voglio dimostrare, ovvero che la derivata direzionale esista e coincida con il differenziale

- Proseguo a ritroso dimostrandone la veridicità
- Porto $\lambda(v)$ dentro il rapporto

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)-\lambda(v)t}{t} \overset{?}{=} 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f(x_0+tv)-f(x_0)-\lambda(tv)|}{|t|} \overset{?}{=} 0$$

per linearità di λ posso portare t, inoltre dimostro che fa zero mostrando che lo è il modulo

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f(x_0+tv)-f(x_0)-\lambda(tv)|\,|v|}{|tv|} \overset{?}{=} 0$$

moltiplico e divido per $|v|$

quanto scritto sopra è una funzione composta, si noti come preso $w = tv$, per $t\to 0$ $tv \to 0$ perché v è costante e perciò $w \to 0$. Ciò si può fare perché non è definita nello zero. segue:

$$\underbrace{\lim_{w\to 0} \frac{|f(x_0+w)-f(x_0)+\lambda(w)|}{|w|}}_{\text{tende a zero per hp, per definizione di differenziabilità}}\;\overbrace{|v|}^{\text{costante}} = 0$$

Convergenza delle 0-omogenee

hp: sia f una 0-omgenea

Ts: f converge <u>se e solo se</u> e' costante.

dim:

Essendo f una 0-omgenea, abbiamo per proprietà delle funzioni omgenee:

$$f(tx) = t^{\alpha} f(x) \Rightarrow t^{0} f(x) \Rightarrow f(x)$$

$\rightarrow$ se f e' costante, allora essa convergerà alla costante.

$\rightarrow$ supponiamo che $\exists\, x_1, x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$ ovvero che f non sia costante:

$$f(tx_1) = f(x_1)$$
$$f(tx_2) = f(x_2)$$

In ogni sfera $B(0,\delta)$ existono punti nei quali f vale $f(x_1)$ ed altri in cui vale $f(x_2)$, e assumendo valori distinti non converge, assurdo!

Preso un $\varepsilon = |f(x_2) - f(x_1)|$ ciò significa che

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \text{dom} f \quad |x_1 - x_0| < \delta \quad |x_2 - x_0| < \delta$

e $x_1 \neq x_0$ e $x_2 \neq x_0 \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$

Cauchy violato! Deve essere vero per ogni sfera, quindi abbiamo trovato una sfera in cui f e non costante e la problemi.

Convergenza delle α-omogenee (CNS)

hp: sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che:

- Ω cono
- f omogenea di grado $\alpha > 0$ (verificante $f(tx) = t^\alpha f(x)$ $\forall x \in \Omega$ $\forall t > 0$

TS:

f è limitata su $\Omega \cap \partial\{B(0,1)\} = \{x \in \Omega : |x| = 1\}$

$\iff \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

C.S.

$\Longrightarrow$

- Essendo f omogenea:

$$\forall x \in \Omega \text{ con } x \neq 0 \quad f(x) = f\left(|x| \cdot \frac{x}{|x|}\right) = |x|^\alpha f\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

- Dalla hp sulla limitatezza:

$\exists K > 0 : |f(y)| \leq K \quad \forall y \in \{x \in \Omega : |x| = 1\}$

e dunque:

è il "limite invalicabile", perciò è necessariamente tutto più piccolo di lui

$$0 \leq f(x) = |x|^\alpha |f(x)| \leq K|x|^\alpha \quad \forall x \in \Omega \text{ con } x \neq x_0$$

Per il th del confronto anche $f(x) \to 0$ perché $\alpha > 0$ e $|x|^\alpha \to 0$

$\boxed{//}$

C.N.
$\Longleftarrow$

supponiamo per $\boxed{\text{assurdo}}$ che siano verificate tutte le ipotesi ma che f non sia limitata su $\Omega \cap \partial B(0,1) = \{x \in \Omega : |x| = 1\}$

allora per definizione di non limitatezza:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in \Omega : |x_n| = 1 \quad e \quad f(x_n) > n \qquad *$$

sapendo che f converge in zero in quanto $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ scelto un $\varepsilon = 1$ $\exists \delta > 0 : x \in \Omega$ con $|x| < \delta$ e $x \neq 0 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon = 1$ (def di convergenza in un punto).

si consideri ora la successione:

$$y_n = \frac{\delta}{2} x_n$$

$y_n \in \Omega$ poiché Ω è un cono e $\frac{\delta}{2} > 0$

si ha inoltre che $|y_{(n)}| = \frac{\delta}{2} \underbrace{|x_{(n)}|}_{1} = \frac{\delta}{2} < \delta$

Inoltre:

$$|f(y_n)| = \left|f\left(\frac{\delta}{2} x_n\right)\right| \underset{\text{dalla omogeneità}}{=} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha} |f(x_n)| \underset{\text{dalla limitatezza } *}{>} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha} n$$

scelto un $\bar{n} > \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\alpha}$ si ha subito che:

$$|f(y_{\bar{n}})| > 1$$

Poiché $|y_{\bar{n}}| < \delta$, ciò contraddice la disuguaglianza del limite precedente, portandoci ad un assurdo!

$\blacksquare$

Teorema del differenziale totale

hp: Sia Ω aperto e (x_0, y_0) punto interno ad Ω
$f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $f_x, f_y : \Omega \to \mathbb{R}$ e queste siano continue $(f \in C^1(\Omega))$

Ts: $\exists\, df(x_0, \omega) \quad \forall x \in \Omega$ ovvero f differenziabile in ogni punto di Ω

dim:

$$df((x_0, y_0), (h, k)) \overset{?}{=} f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k \qquad \text{TS}$$

segue che:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\overline{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)} - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{|(h,k)| \Rightarrow \sqrt{h^2+k^2}} \overset{?}{=} 0$$

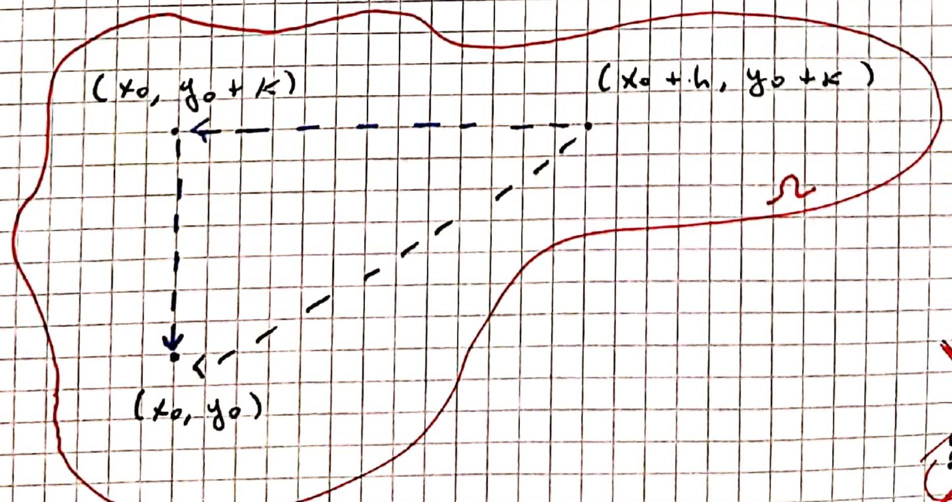
- Analizziamo ora la prima parte:

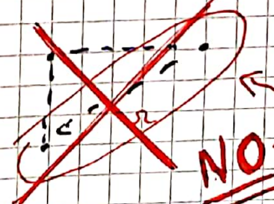
$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)$$

- ho sottratto e sommato per la stessa quantità, quindi è uguale a prima

FAcciamo ciò perché vogliamo scomporre lo spostamento da (x_0+h, y_0+k) a (x_0, y_0) in due piccoli spostamenti in un solo asse (dunque in una sola variabile). Ciò lo facciamo per semplificare lo studio, dunque realizziamo due funzioni fittizie g, H in cui un parametro (relativo all'asse di spostamento) è fissato.

N.B. (x_0, y_0) è punto interno per assicurarci di non uscire nel tentativo di fare questa scomposizione.





Come accennato creiamo le nostre due funzioni:

$$g: t \to f(t, y_0 + k) \quad \text{lungo } x \qquad \text{"a ogni } t \text{ corrisponde } f(t, y_0+k)\text{"}$$
$$H: s \to f(x_0, s) \quad \text{lungo } y$$

- motivo per cui:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)$$
$$= \underline{g(x_0+h) - g(x_0)} + H(y_0+k) - H(y_0)$$

- Concentriamoci sulla prima parte consapevoli del fatto che sarà replicabile sulla seconda.

$$g(x_0+h) - g(x_0) =$$

$$= \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{(x_0+h) - x_0} [(x_0+h) - x_0] =$$

moltiplico e divido per i parametri di g

$$= \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{(x_0+h) - x_0} h$$

Ricordandoci Lagrange di Analisi I

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c) \quad \text{con } c \in [a, b]$$

- Possiamo applicarlo perché:
  - Ω è un intervallo chiuso
  - f è continua per hp. (in Ω)

$$\exists\, \bar{x} \in [x_0, x_0+h] = \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = g'(\bar{x})$$

- Dunque sostituendo:

$$\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{(x_0+h) - x_0} h \Rightarrow g'(\bar{x}) h$$

Riportiamo ora ciò in due variabili:

$$g'(\bar{x}) h = f_x(\bar{x}, y_0 + k) h$$

in 2 variabili si deriva in "una direzione", e questa è x vista la natura dello spostamento

- seguendo lo stesso ragionamento ed applicandolo anche sulla parte restante si ottiene:

$$\exists\, \bar{y} \in [y_0, y_0+k] : \frac{H(y_0+k)-H(y_0)}{(y_0+k)-y_0}(k) = H'(\bar{y})$$

$$H'(\bar{y})k = f_y(x_0, \bar{y})\,k$$

- Perciò:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = f_x(\bar{x}, y_0+k)h + f_y(x_0,\bar{y})k$$

- che sostituendo nell'espressione iniziale:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_x(\bar{x}, y_0+k)h + f_y(x_0,\bar{y})k - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{[f_x(\bar{x}, y_0+k) - f_x(x_0,y_0)]h + [f_y(x_0,\bar{y}) - f_y(x_0,y_0)]k}{\sqrt{h^2+k^2}} \overset{?}{=} 0$$

- Dimostro che va a zero studiandone il modulo, allo stesso tempo scompongo i due limiti sapendo che la loro somma sarà $\geq$ della precedente per la disuguaglianza triangolare.

$$\leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \left| f_x(\bar{x}, y_0+k) - f_x(x_0,y_0) \right| +$$

$$+ \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \left| f_y(x_0,\bar{y}) - f_y(x_0,y_0) \right|$$

Analizziamo quanto abbiamo ottenuto:

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$$

perché abbiamo tutta roba positiva, e sicuramente $|h|$ è $\leq$ della somma di se stesso per un altro numero positivo.

$$\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$$

Th del differenziale totale

• Abbiamo da prima che $(h,k) \to (0,0)$ e per $h \to 0$ segue che, essendo:

$\bar{x} \in [x_0, x_0+h]$ questo per confronto tende x_0 in quanto $h \to 0$, per cui:

→ $h \to 0$ segue per confronto $\bar{x} \to x_0$

→ $k \to 0$ segue per confronto $\bar{y} \to y_0$

Perciò:

$$(\bar{x}, y_0+k) \to (x_0, y_0)$$
$$(x_0, \bar{y}) \to (x_0, y_0)$$

Per cui:

$$f_x(\bar{x}, y_0+k) \to f_x(x_0, y_0)$$
$$f_y(x_0, \bar{y}) \to f_y(x_0, y_0)$$

Segue che:

Perché f_x e f_y sono continue

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \underbrace{\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\leq 1,\ \text{finito}} \underbrace{\left| f_x(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0) \right|}_{\to 0} +$$

$$+ \lim_{(h,k)\to 0,0} \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \underbrace{\left| f_y(x_0,y_0) - f_y(x_0,y_0) \right|}_{\to 0}$$

Segue la tesi! poiché la somma di prodotti di funzioni limitate per funzioni infinitesime è infinitesimo, da cui la differenziabilità.

$\nabla f \equiv 0 \Rightarrow f$ è costante

hp: data una funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso
il cui $\nabla f \equiv 0$

Ts: $f(x) = K \quad \forall x \in \operatorname{dom} f$

dim:

per hp il $\nabla f \equiv 0$, ciò implica che ∇f è continuo ed esistendo ciò implica che $f \in C^1(\Omega)$ e dunque f è differenziabile.

scegliendo una curva $\gamma(t) = [0,1] \to \Omega$ regolare, essendo tale è differenziabile e $\gamma \in C^1([0,1])$.

"Creando" una funzione $h: [0,1] \to \mathbb{R}$ definita come:

$$h(t) = f(\gamma(t)) \quad \text{implica che:}$$

$$h'(t) = \underbrace{\nabla f(\gamma(t))}_{\substack{\| \\ 0 \text{ per hp}}} , \dot{\gamma}(t) = 0$$

perciò $h'(t) \equiv 0$ su $[0,1]$. Essendo $h'(t)$ continua perché composizione di funzioni continue e derivabile nel medesimo intervallo $[0,1]$, per il th di Lagrange di Analisi I:

$$\exists\, c \in [0,1] : \frac{h(1) - h(0)}{1-0} = 0 \Rightarrow h(1) - h(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(1) = h(0) \quad \text{sostituendo:}$$

$$f(\gamma(1)) = f(\gamma(0)) \quad \text{per cui}$$

$\forall t_1, t_2 \in \Omega \quad f(\gamma(t_1)) = f(\gamma(t_2))$ perciò f è costante in Ω e segue la tesi

Coincidenza delle applicazioni lineari con il proprio differenziale

hp: sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lineare

Ts: $df(x_0, w) = f(w)$

dim:

ciò che dobbiamo dimostrare è che:

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(x_0+w) - f(x_0) - f(w)}{|w|} \overset{?}{=} 0$$

Essendo f lineare per hp abbiamo che:

$$\lim_{w \to 0} \frac{f\cancel{(x_0)} + \cancel{f(w)} - \cancel{f(x_0)} - \cancel{f(w)}}{|w|} = 0 \quad \text{Tesi!}$$

$\blacksquare$

5 Teoria dei campi

1. Lemma integrale del campo

hp: siano $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ e $\gamma_2 : [b,c] \to \Omega$ due curve e A il campo $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Ts: ① $\displaystyle\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} A = \int_{\gamma_1} A + \int_{\gamma_2} A$

② $\displaystyle\int_{\ominus\gamma_1} A = -\int_{\gamma_1} A$

dim:

① Dalla definizione di congiunzione tra due curve abbiamo:

$$\gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a,c] \to \Omega \quad \text{e} \quad \gamma_1 \oplus \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t) & \text{se } t \in [b,c] \end{cases}$$

Perciò dalla definizione di integrale su un campo:

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} A = \int_a^c A(\gamma_1 \oplus \gamma_2(t)) (\gamma_1 \oplus \gamma_2)^{\cdot}(t)\, dt =$$

Per la proprietà additiva dell'integrale ordinario:

$$\int_a^c A = \int_a^b A + \int_b^c A \quad \text{e dunque:}$$

$$= \int_a^b A(\gamma_1(t)) \dot{\gamma}(t)\, dt + \int_b^c A(\gamma_2(t))\dot{\gamma}_2(t)\, dt = \int_{\gamma_1} A + \int_{\gamma_2} A$$

② $\displaystyle\int_a^b A(\ominus\gamma_1(t))(\ominus\dot{\gamma}_1)(t)\, dt =$

essendo per definizione $\ominus\gamma_1(t) = \gamma_1(a+b-t)$ e $(\ominus\dot{\gamma}_1)(t) = -\dot{\gamma}_1(a+b-t)$ e ponendo $s = a+b-t$

$$= \int_a^b A(\gamma_1(a+b-t))[-\dot{\gamma}_1(a-t+b)]\, dt$$

$$= -\int_a^b A(\gamma_1(s))[\dot{\gamma}_1(s)]\, ds = \int_b^a A(\gamma_1(s))\dot{\gamma}_1(s)\, ds$$

$\blacksquare$

An 5.1 An 5.2

Teorema di Torricelli:

hp: sia A un campo tale che $A: \Omega \to \mathbb{R}^n$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
e γ una generica curva $\gamma: [a,b] \to \Omega$

Ts: $\int_\gamma A$ dipende solo dagli estremi di γ a, b e non dal suo sostegno ("cammino") $\Longleftrightarrow$ A è integrabile su γ

Dim:

CS $\Rightarrow$ ciò che dobbiamo dimostrare è che A sia integrabile, ovvero applicando la definizione $\exists f: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f \equiv A$, e perciò che $f_{x_i} \equiv A_i$ $\forall i \in \operatorname{dom} A$. Inoltre da ciò si sa che, se la tesi è vera, $f \equiv \int_\gamma A$.

La curva sarà tale che $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$, con x_0 fissato e x arbitrario.

Per dimostrare la tesi sarà necessario applicare il procedimento, che segue per tutte le componenti di A, iniziamo dimostrando per la prima:

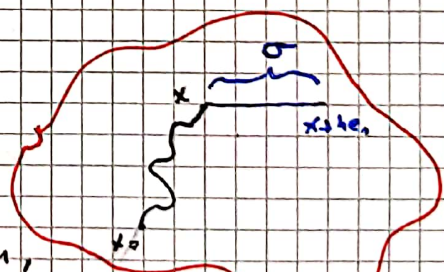
$$f_{x_1}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+he_1) - f(x)}{h} \quad \text{con } h \neq 0$$

è stato riscritta la derivata parziale come rapporto incrementale

L'intento è quello di effettuare delle sostituzioni suggerite dalla tesi per poi dimostrare che sono lecite, perciò si nota che, da quanto detto prima, $f(x) = \int_\gamma A$

mentre per $f(x+he_1)$?

Osservando la figura si nota come ciò corrisponda a un integrale di campo come prima, ma ora relativo a tutta la curva da x_0 a $x+he_1$, ovvero quella che è congiunzione di γ e del segmento "artificiale" σ che così descrive:



$\sigma(t) = x + (t-b)e_1$ dove $\sigma(b) = x$ ~~$\sigma(b+h) = x+he_1$~~
$\sigma(b+h) = x + he_1$

Abbiamo perciò la curva "totale":

$$\gamma_{x_0(x+he_1)} = \gamma_{x_0 x} \oplus \sigma$$

Per cui otteniamo che $f(x+he_1) = \int_{\gamma \oplus \sigma} A$

ottenendo dunque:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(x_0+he_1) - f(x)\right] \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_{\gamma\oplus\sigma} A + \int_{\gamma} A\right] =$$

per la proprietà dell'integrale

$$\int_{\gamma\oplus\sigma} A = \int_{\gamma} A + \int_{\gamma} A$$ e sostituendo

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\cancel{\int_{\gamma} A} + \int_{\sigma} A - \cancel{\int_{\gamma} A}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_{\sigma} A\right]$$

$$= \int_b^{b+h} A(\sigma(t))\dot{\sigma}(t)\,dt$$

dove:

$\sigma = x + (t-b)e_1 = x + te_1 - be_1$

$\dot{\sigma} = 0 + e_1 + 0 \Rightarrow e_1$

Per agevolare il calcolo si prenda $s = t-b$ e perciò $ds = dt$ $\quad s \in [0, h]$ ↗ descrive pienamente l'intero segmento

$$= \int_b^{b+h} A(\sigma(t))\dot{\sigma}(t)\,dt = \int_b^{b+h} A(x+(t-b)e_1)e_1\,dt = \int_b^{b+h} A(x+se_1)e_1\,ds$$

si noti come A sia moltiplicato per e_1:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} = A_1$$

$$= \frac{1}{h}\int_b^{b+h} A_1(x+se_1)\,ds$$

Ciò ricorda quanto già visto in Analisi 1 con il Th della media integrale secondo cui:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) = f(c)$$ e dunque

$$= \frac{1}{b+h-b}\int_b^{b+h} A_1(x+se_1)\,ds = A_1(x+\varepsilon e_1)$$

dove $\varepsilon \in [0, h]$ e fa riferimento a un punto specifico. Perciò per $h\to 0$ $\varepsilon \to 0$ e anche $\varepsilon e_1 \to 0$

$$A_1(x+\underbrace{\varepsilon e_1}_{\to 0}) = A_1(x)$$

Tesi!

CN $A \in C^0(\Omega)$ è integrabile se non dipende dal cammino

hp: $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $A \in C^0(\Omega)$

Ts: data ogni curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$ $\int_\gamma A$ non dipende dal sostegno di γ ("cammino") ma unicamente dagli estremi $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$

dim:

Per hp A è integrabile, ciò significa che per definizione di integrabilità di campo

$\exists f : \Omega \to \mathbb{R}$ per cui $\nabla f = A$ su Ω,

Essendo $A \in C^0(\Omega)$, ovvero continua, ciò implica che anche $\nabla f \in C^0(\Omega)$ e dunque $f \in C^1(\Omega)$.

Allora, per ogni curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$ e $\gamma \in C^1(\Omega)$

$$\int_\gamma A = \int_a^b A(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt = \int_a^b \nabla f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d\,[f(\gamma(t))]}{dt} = f(\gamma(t))\Big|_a^b$$

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \quad \text{(differenza di potenziale).}$$

Dunque qualunque sia il sostegno ("cammino") di γ, l'integrale alla fine sarà uguale alla differenza fra i valori che il potenziale f assume nel punto finale $\gamma(b)$ e nel punto iniziale $\gamma(a)$.

NOTA: Per il th della derivazione della funzione composta, visto che le componenti sono differenziabili (poiché il gradiente di f è continuo e la f è di classe C^1) so che l'argomento dell'integrale è continuo e posso utilizzare il th di Torricelli in una variabile ~~e~~ trovare la tesi

Ω semplicemente connesso e A irrotazionale $\Rightarrow$ A integrabile

hp: sia $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un campo irrotazionale e Ω un insieme semplicemente connesso.

Ts: A è integrabile

<u>dim</u>:

Essendo per hp Ω semplicemente connesso, ciò implica che esista una curva $\gamma : [a, b] \to \Omega$ omotopa a una curva costante $\sigma(t) \equiv x_0 \quad \forall t \in [a, b]$.

Essendo A irrotazionale, dal th di invarianza omotopica segue che:

$$\int_\gamma A = \int_\sigma A$$

Essendo σ costante, implica che $\dot{\sigma} \equiv 0$ e perciò:

$$\int_\sigma A = \int_a^b A(\sigma(t)) \underbrace{\dot{\sigma}(t)}_{0} = 0$$

Poiché $\int_\gamma A = \int_\sigma A$ ne segue che l'integrale su ogni curva chiusa è nullo, il che è CNS perché A sia integrabile.

$\blacksquare$

Ω stella $\Rightarrow$ Ω semplicemente connesso

hp: sia Ω un insieme con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ stella.

Ts: Ω è semplicemente connesso.

dim:

Data una generica curva $\gamma : [0,1] \to \Omega$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, essendo Ω stella ciò implica che l'esistenza di una funzione $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ così definita e centrata in x_0:

$$h(\lambda, t) = x_0 + (1-\lambda)[\gamma(t) - x_0]$$

Sostituendo i valori 0 e 1 si ottiene:

- $h(1,t) = x_0 + \underbrace{(1-1)}_{0}[\gamma(t) - x_0] = x_0$
- $h(0,t) = x_0 + \gamma(t) - x_0 = \gamma(t)$

Da ciò si nota come essa sia omologa a una generica curva chiusa $\sigma : [0,1] \to \Omega$ con $\sigma(t) = x_0$ $\forall t \in \operatorname{dom} \sigma$, ed essendo omologa in quanto segue la definizione $(h(0,t) = \gamma(t)$ e $h(1,t) = x_0 = \sigma(t))$ a una curva costante, si ha dunque Ω è semplicemente connesso perché esegue la definizione.

∎

Curva $C^1 \Rightarrow$ Rettificabile

hp: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\gamma(t) \in C^1([a,b])$

Ts: γ sia rettificabile con lunghezza pari a

$$\Lambda(\gamma) \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$

dim:

Ciò che vogliamo dimostrare è che ~~sia~~ γ sia rettificabile, ovvero che esista finito il numero:

$$\Lambda(\gamma) = \sup_{\pi} A(\pi)$$

dove π è una partizione fissata ad arbitrio

$$\pi = \{ a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b \}$$

Per vedere se esiste finito, calcoliamo la lunghezza della poligonale inscritta nella curva assicurandoci che non sia di lunghezza infinita:

$$\Lambda(\pi) = \sum_0^{n-1} | \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) |$$

Dalla formula di torricelli nel caso vettoriale in cui

$$\gamma(d) - \gamma(c) = \int_c^d \dot{\gamma}(t)\, dt$$

È applicabile alla formula di sopra perché sappiamo essere di classe $C^1([a,b])$ ottenendo:

$$\Lambda(\pi) = \sum_0^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\gamma}(t)\, dt \right|$$ e per la

diseguaglianza triangolare sappiamo che:

$$\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\gamma}(t)\, dt \right| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$

per la proprietà additiva dell'integrale e sappiamo che avviene su tutta la partizione.

Sappiamo ora che $\Lambda(\pi)$ è maggiorante dell'insieme $\{ \Lambda(\pi) : \pi \text{ partizione di } [a,b] \}$ perché $\Lambda(\gamma) = \sup_{\pi} \Lambda(\pi)$ e il minimo dei maggioranti

precedenti, segue che:

$$\Lambda(\gamma) \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$ da cui segue la tesi in quanto risulta minore di un numero finito

Th $\boxed{CN}$ A integrale di classe $C^1 \Rightarrow$ Campo irrotazionale
AKA Condizione del Rotore

hp: $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $A \in C^1(\Omega)$
e dunque A integrabile.

ts: A e' irrotazionale, ovvero $(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i} \quad \forall i \neq j$

Dim:

se A e' integrabile, $\exists f : \nabla f = A$
e cioe':

$$f_{x_i} = A_i \quad \forall i = 1 \dots n$$

da cio' ne segue che:

$$(A_i)_{x_j} = (f_{x_i})_{x_j} = f_{x_i x_j}$$

e allo stesso modo:

$$(A_j)_{x_i} = (f_{x_j})_{x_i} = f_{x_j x_i}$$

Poiche' il campo A e' di classe C^1 e le sue ~~derivate~~ componenti sono le derivate di f ne segue che f e' di classe C^2.

La tesi segue immediatamente dal teorema di Clairaut - Schwarz sull'eguaglianza delle derivate miste:

hp: $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boxed{f \in C^2(\Omega)}$
ts: $\forall i \neq j \quad (f_{x_i})_{x_j} = (f_{x_j})_{x_i}$