Introduzione alla Meccanica: Cinematica

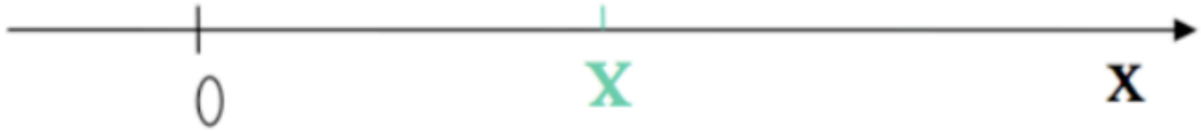
La *Cinematica* si occupa della *descrizione geometrica del moto*, senza riferimento alle sue cause. E' invece compito della *Dinamica* mettere in relazione il moto con le sue cause: *perché* e *come* gli oggetti si muovono.

Nel seguito ci occuperemo di fenomeni *classici*, ovvero:

- che avvengono a velocità $<<$ velocità della luce ($\sim 3 \times 10^8$ m/s)
- che avvengono su scale di lunghezza $d >>$ dimensioni atomiche, per corpi di massa $m >>$ massa delle particelle elementari; in tal caso si può parlare di una *traiettoria* ben definita per un corpo.

Cinematica moto rettilineo

Per localizzare un oggetto che si muove su di una retta, è sufficiente conoscere la sua *posizione*, $x(t)$, rispetto ad un sistema di riferimento:



- *Spostamento:* $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$[m]. E' la distanza percorsa in un tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ [s].

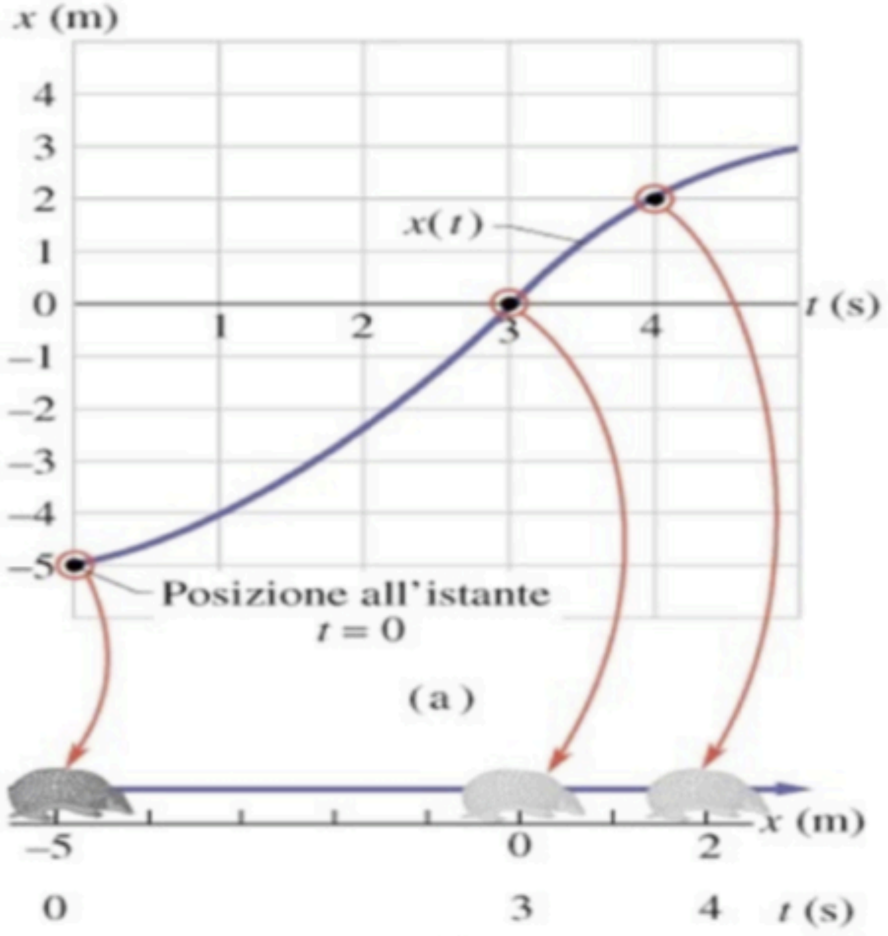
- *Velocità media:* $\overline{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ [m/s]

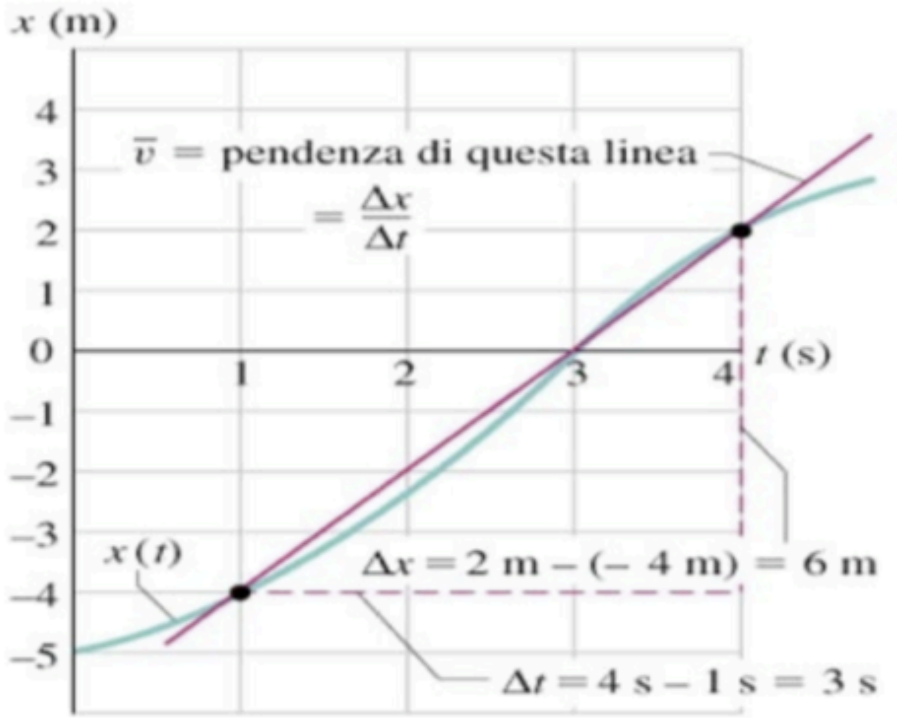
- *Velocità istantanea:* $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ [m/s]

Attenzione ai segni! La velocità può essere positiva o negativa, ma spesso si intende la *velocità scalare*, $|\overline{v}|$ o $|v|$, che è sempre positiva.

Moto rettilineo: rappresentazione grafica

Diagramma orario, $x(t)$
(o anche *Legge oraria*):

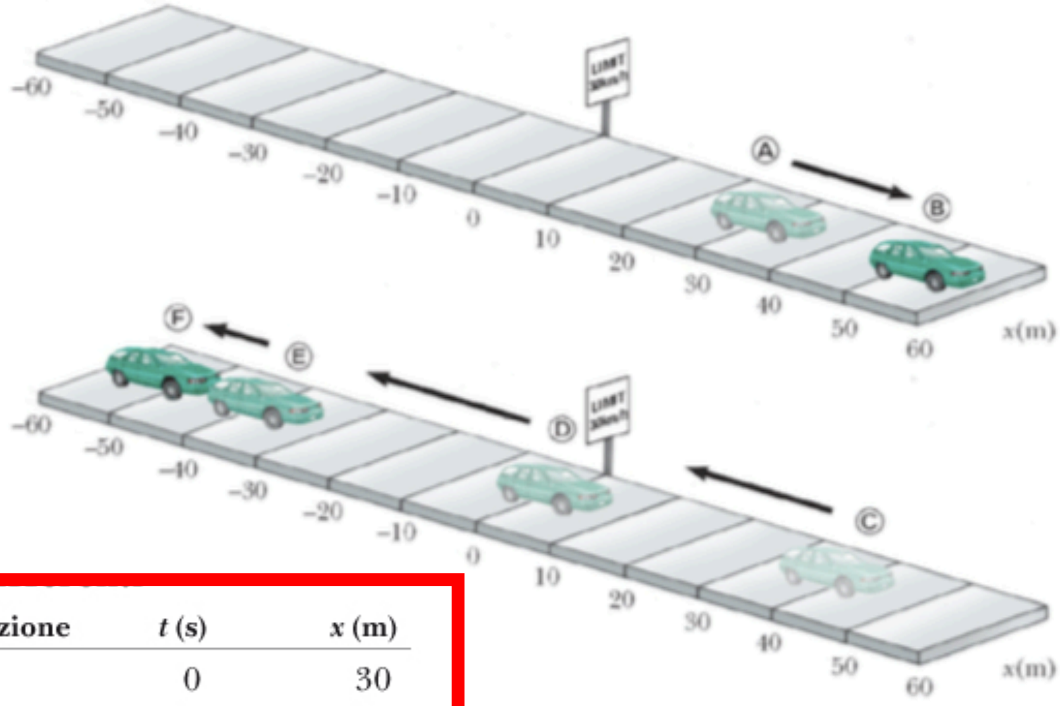




$\overline{v}$: velocità media, è la pendenza della retta che congiunge i punti $x(t_1)$ e $x(t_2)$

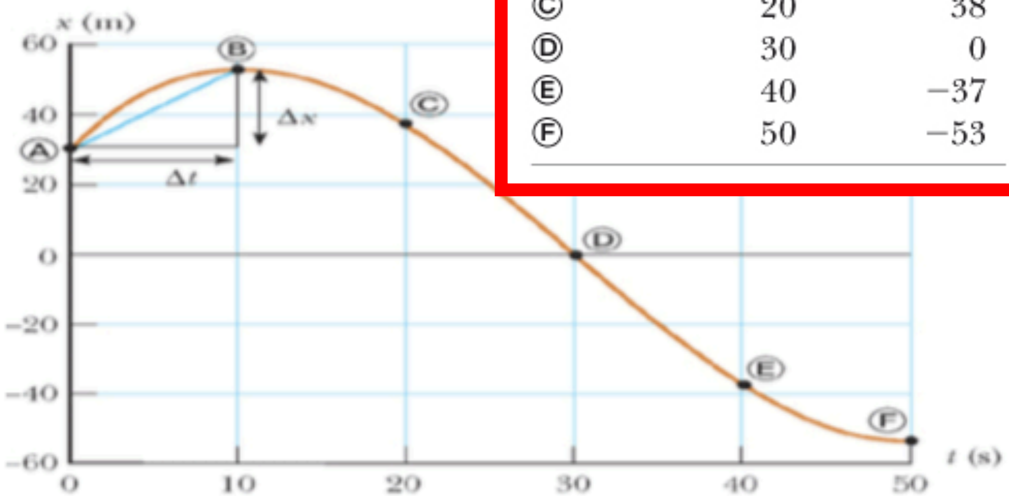
Un altro esempio velocità media

FIGURA 2.1 (Una rappresentazione pittorica del moto di una macchina. Sono mostrate e indicate le posizioni della macchina a sei istanti di tempo. (b) Una rappresentazione grafica, nota come grafico spazio-tempo, del moto della macchina rappresentata in (a). La velocità media $v_{x,\,avg}$ nell'intervallo da $t = 0$ a $t = 10$ s si ottiene dalla pendenza della linea retta che collega i punti Ⓐ e Ⓑ. (c) Il grafico velocità-tempo del moto della macchina rappresentata in (a).

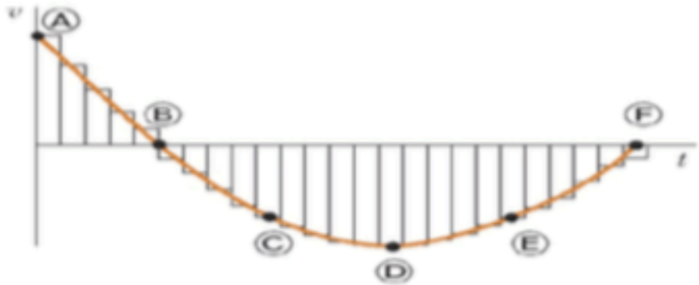


(a)

Posizione	t (s)	x (m)
Ⓐ	0	30
Ⓑ	10	52
Ⓒ	20	38
Ⓓ	30	0
Ⓔ	40	−37
Ⓕ	50	−53



(b)



(c)

Velocità istantanea

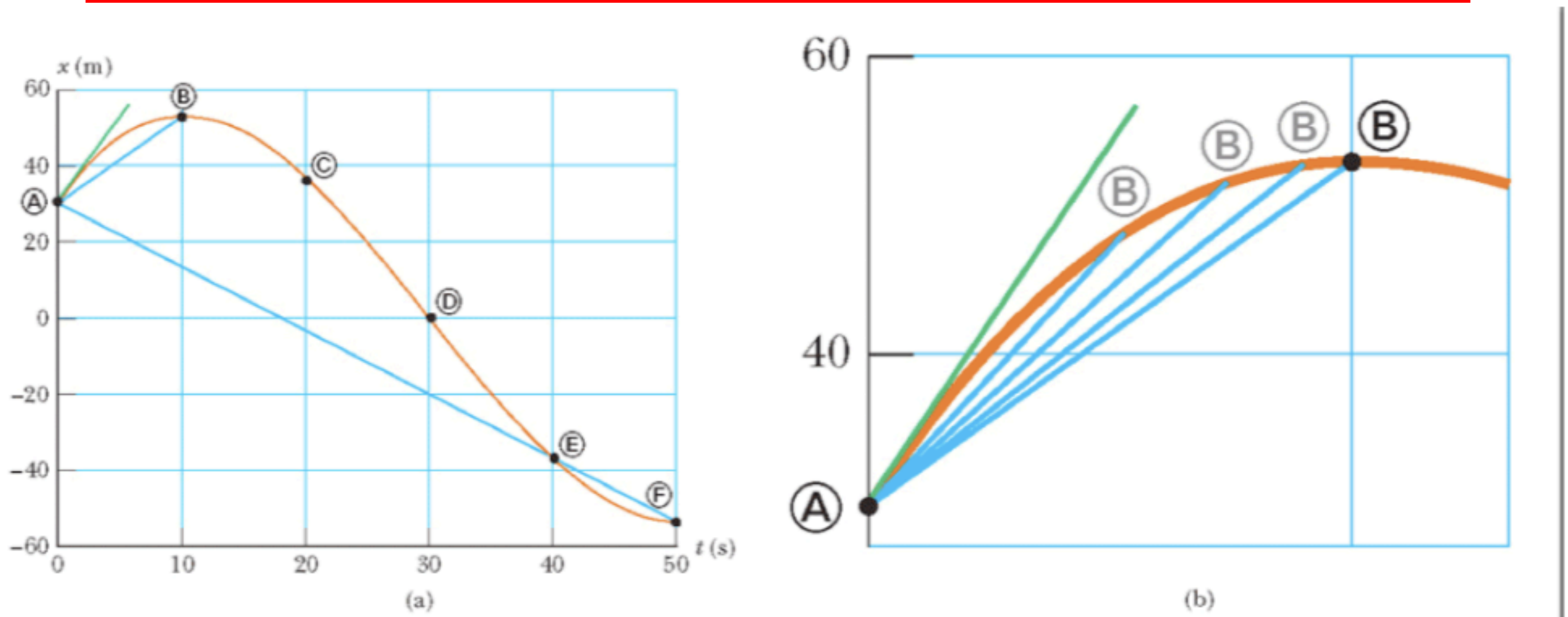


FIGURA 2.2 (a) Grafico posizione-tempo per il moto della macchina di Figura 2.1. (b) Un ingrandimento dell'angolo superiore sinistro del grafico di (a) mostra come la linea blu fra le posizioni Ⓐ e Ⓑ si avvicinano alla linea verde tangente quando il punto Ⓑ si muove avvicinandosi al punto Ⓐ.

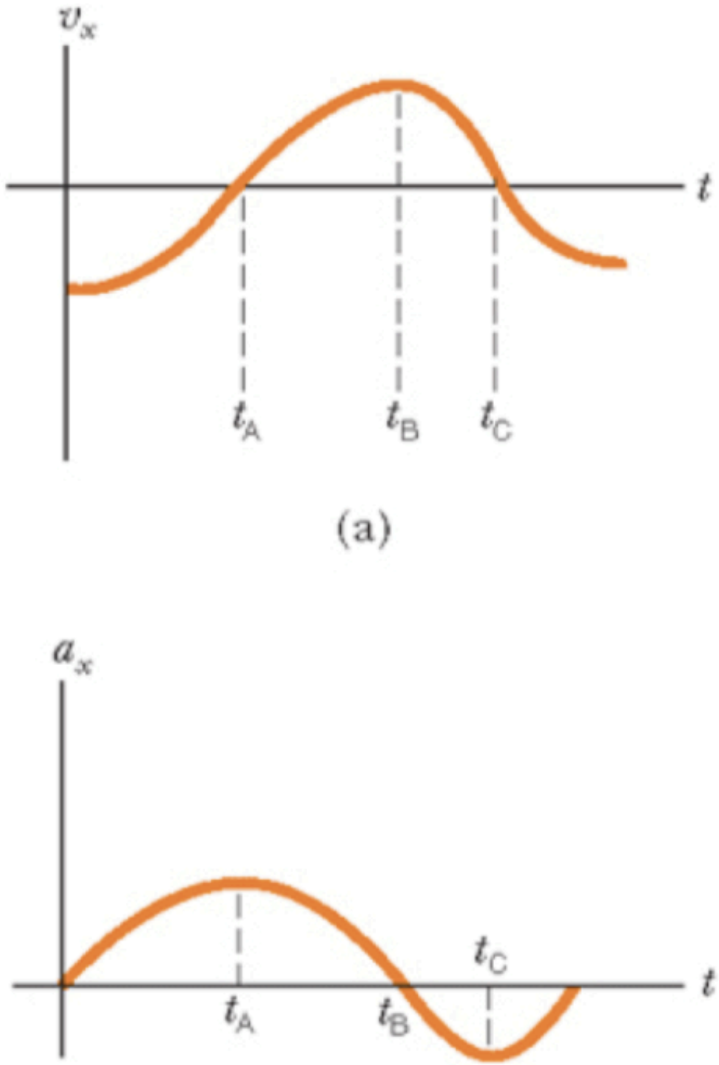
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

La velocità istantanea è la *derivata* di $x(t)$ rispetto al tempo (notazione alternativa: $v(t) = \dot{x}(t)$), e la pendenza della tangente alla curva $x(t)$.

Accelerazione media e istantanea

- *Accelerazione media:* $\overline{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ $[\mathrm{m/s^2}]$

- *Accelerazione istantanea:* $a = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$



L'accelerazione istantanea è la derivata di $v(t)$ rispetto al tempo, ovvero la *derivata seconda* di $x(t)$ rispetto al tempo:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

(notazione alternativa: $a(t) = \ddot{x}(t)$),
ovvero la pendenza della tangente alla curva $v(t)$.

Richiamo: calcolo di derivate

- Derivata della somma di funzioni:
$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x)$$

- Se α è costante, $\frac{d}{dx}(\alpha f)(x) = \alpha \frac{df}{dx}(x)$

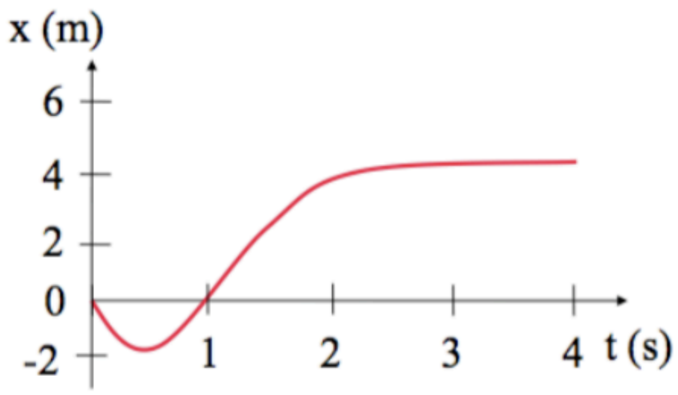
- Derivata del prodotto di due funzioni:
$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = g(x)\frac{df}{dx}(x) + f(x)\frac{dg}{dx}(x)$$

- Derivata di funzione di funzione:

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \frac{df}{dg}(g(x))\frac{dg}{dx}(x)$$

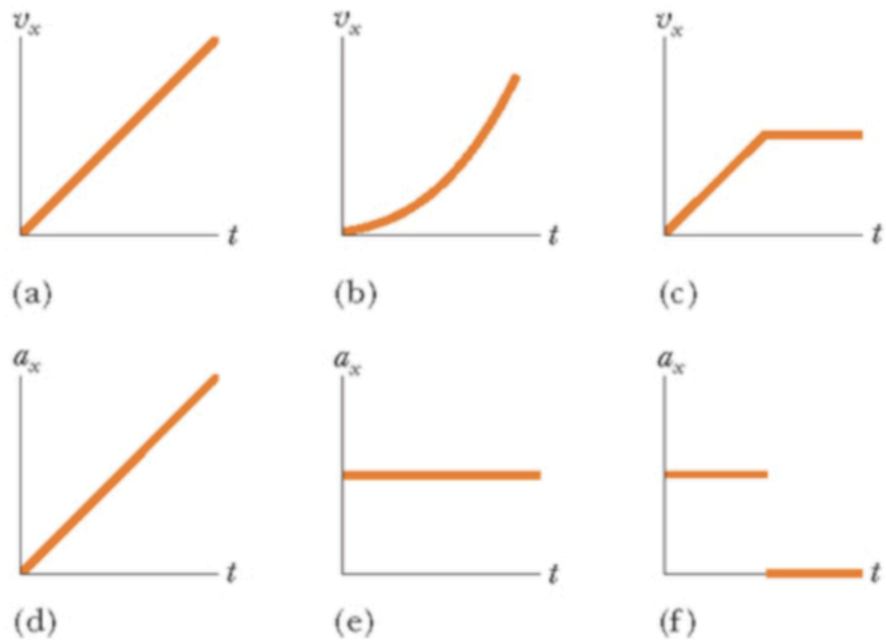
funzione	derivata
$y = \alpha$	$y' = 0$
$y = x^\alpha$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = 1/\cos^2 x$
$y = \log x$	$y' = 1/x$
$y = e^x$	$y' = e^x$

Quiz rapido



Quanto vale la velocità media nei primi 4 secondi? E la velocità istantanea nell'istante $t = 4$ s ?

Qual è l'accoppiamento corretto fra grafici di velocità e di accelerazione qui accanto?

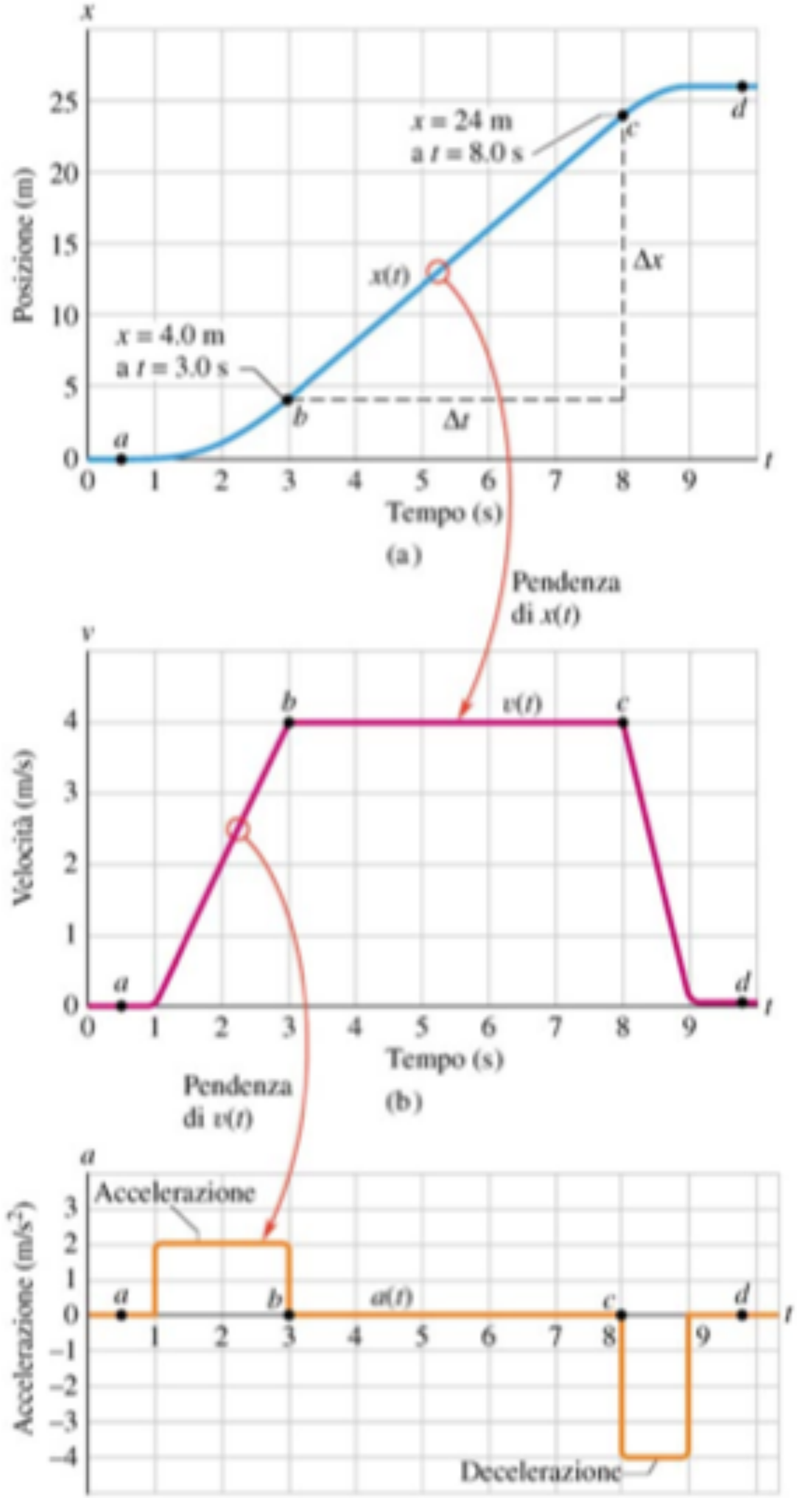


Riassunto

Se conosciamo la posizione x(t) in funzione del tempo, possiamo determinare velocità e accelerazione in funzione del tempo come:

$$\mathrm{v} = \frac{dx(t)}{dt} \quad \mathrm{a} = \frac{dv(t)}{dt}$$

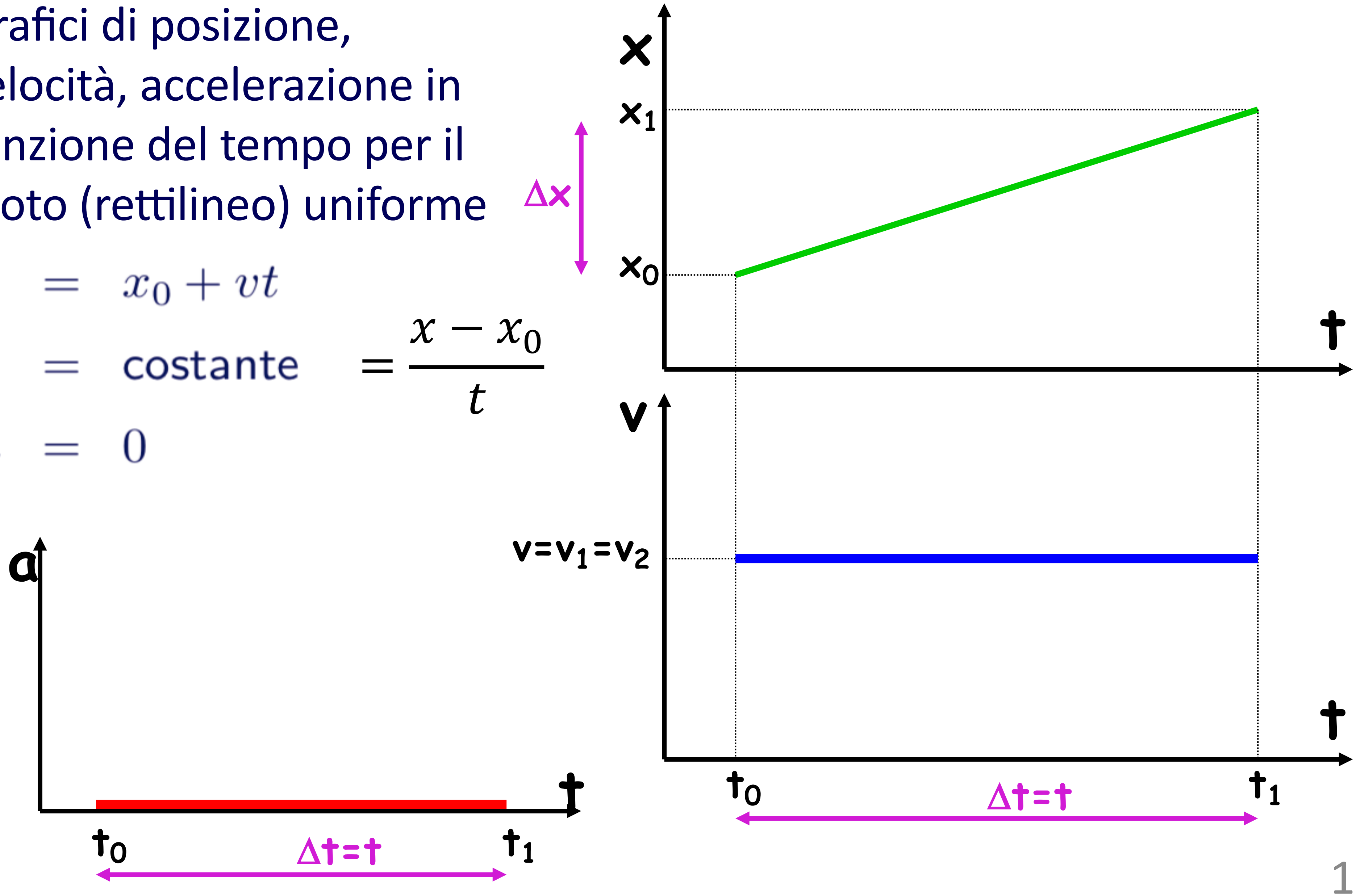
Esercizio: La posizione di una particella sull'asse x è data dalla funzione: $x(t) = 8t^2 - 6t + 4$, dove le unità di misura sono m per x, s per t. Trovare le funzioni v(t) e a(t) della particella.



Moto rettilineo uniforme v= cost

Grafici di posizione, velocità, accelerazione in funzione del tempo per il moto (rettilineo) uniforme

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + vt \\
v &= \text{costante} \quad = \frac{x - x_0}{t} \\
a &= 0
\end{aligned}
$$



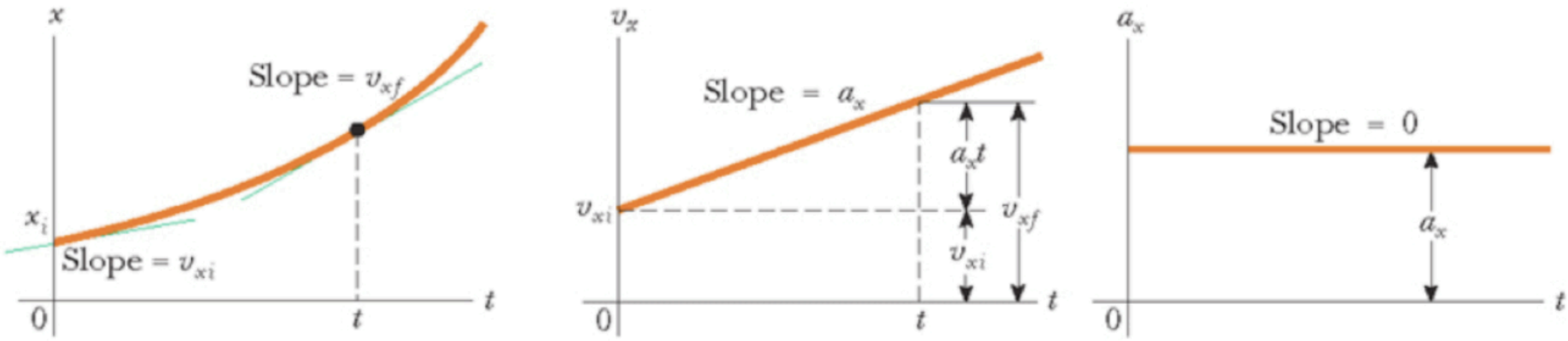
Moto uniformemente accelerato: a=costante

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + at$$

$$a = \text{costante} = \frac{v - v_0}{t}$$

Grafici di posizione, velocità, accelerazione in funzione del tempo per il moto (rettilineo) uniformemente accelerato



Moto uniformemente accelerato, relazioni utili

Da $v = v_0 + at$, risolvendo rispetto a t: $t = \dfrac{v - v_0}{a}$

Da $x = x_0 + \underset{0}{v}t + \dfrac{1}{2}at^2$, sostituendo l'espressione per t prima trovata

$$x = x_0 + v_0\frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

ovvero

$$x - x_0 = \left(v_0 + \frac{1}{2}a\frac{v - v_0}{a}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right) = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right)$$

da cui un'espressione che lega velocità e spazio percorso:

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)}$$

leggi moto uniformemente accelerato

1) $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

2) $v = v(t) = at + v_0$

3) $x = x_0 + \frac{1}{2}(v + v_0)t$

sostituendo nella 1) $a = \frac{(v - v_0)}{t}$

4) $v^2 - v_0^2 + 2a(x - x_0)$

sostituendo nella 1) $t = \frac{v - v_0}{a}$

Un altro esempio

- Un punto materiale si muove partendo da una posizione iniziale all'istante ***t=0*** pari a $\boldsymbol{X_0=1m}$ secondo il sistema di riferimento scelto.
- Osserviamo i dati riportati in tabella come "fotografie" della posizione in istanti di tempo successivi. Il punto materiale termina il suo moto "vicino" all'origine dei sistema di riferimento

t (s)	x (m)
0,00	1,00
0,03	0,99
0,07	0,98
0,10	0,95
0,13	0,91
0,17	0,86
0,20	0,80
0,23	0,73
0,27	0,65
0,30	0,56
0,33	0,46
0,37	0,34
0,40	0,22
0,43	0,08

traiettoria

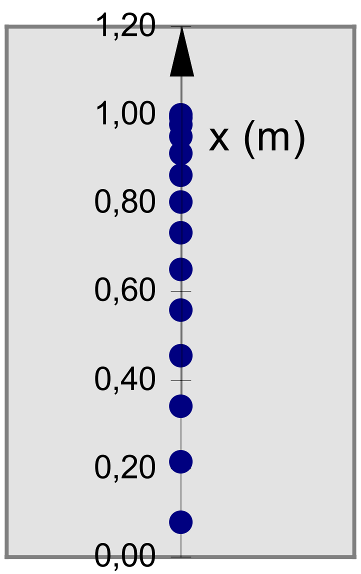
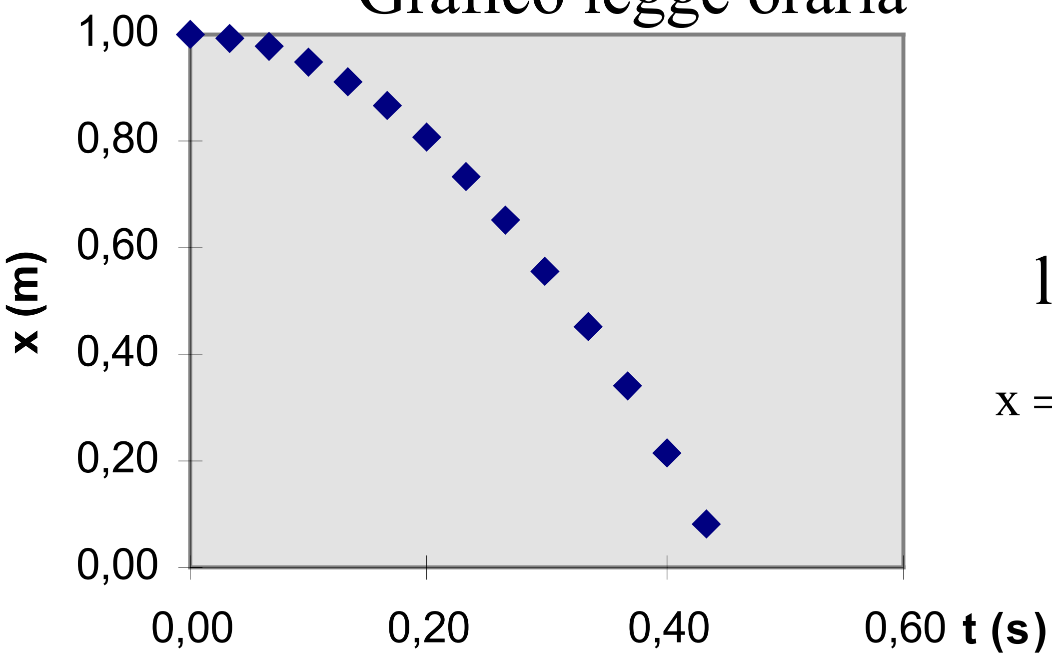


Grafico legge oraria



legge oraria

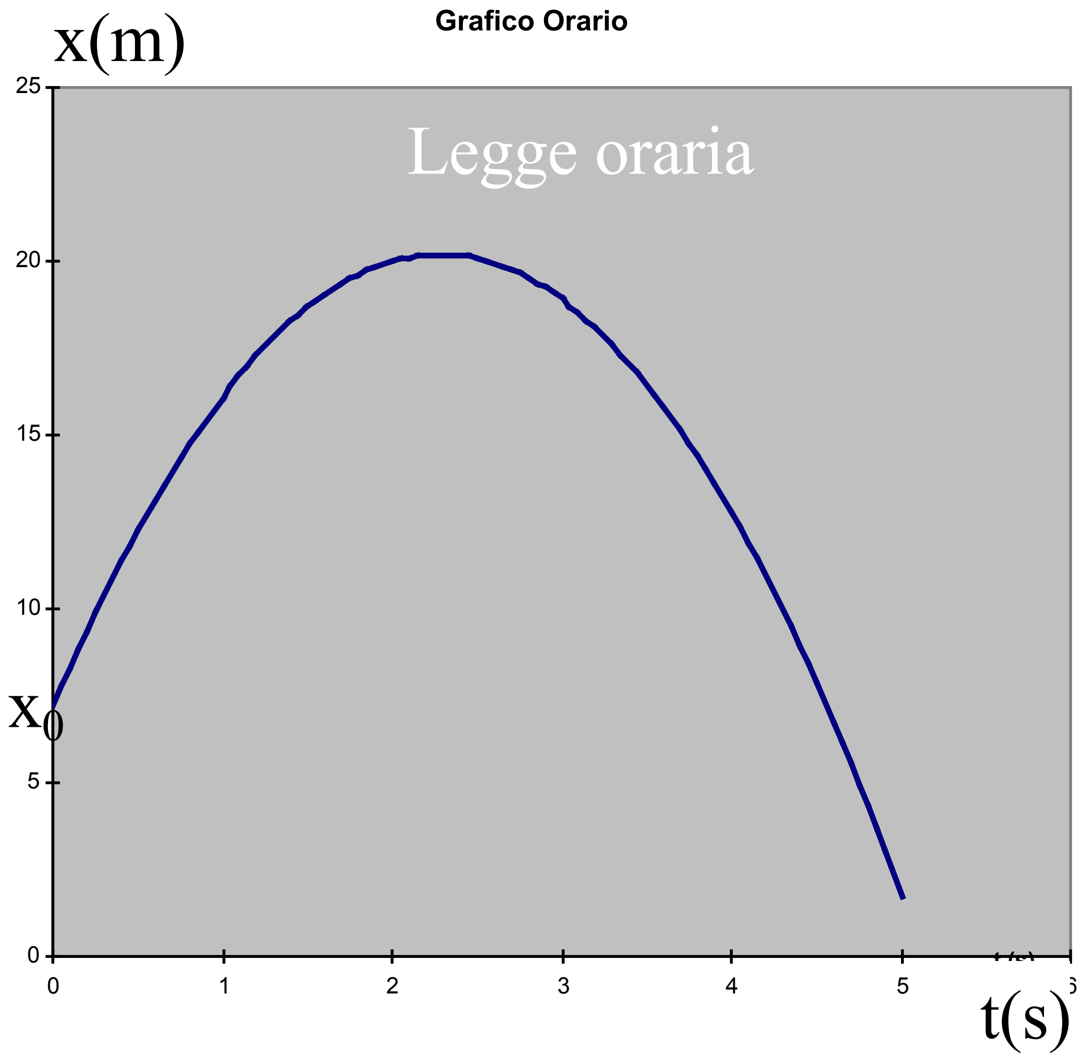
$$x = 1,0 - \frac{1}{2}9,81t^2$$

x in m

t in s

Moto rettilineo (1D): Esempio moto uniformemente accelerato

- La traiettoria viene percorsa con una legge oraria del moto del punto rappresentata dalla curva ("Legge oraria")



$x(t) = x_0 + v_0\, t + \frac{1}{2} \cdot a\, t^2$

mette in relazione diverse grandezze fisiche che adesso introduciamo: $\mathbf{x_0}$ **,** $\mathbf{v_0}$ **, a.** Vediamo innanzitutto la consistenza "dimensionale" e le conseguenze:

- $x(t)$ dimensione $[L]$ si misura in m
- x_0 dimensione $[L]$ si misura in m
- $v_0\, t$ dimensione $[L]$ ➔ v_0 dimensione $[L]/[T]$ si misura in m/s
- $\frac{1}{2} \cdot a\, t^2$ dimensione $[L]$ ➔ a_0 dimensione $[L]/[T]^2$ si misura in m/s^2

Dall'accelerazione al diagramma orario

In generale, se conosciamo l'accelerazione istantanea (la legge con cui varia in funzione di t) a(t), possiamo ricavare velocità e posizione istantanee mediante integrazione.

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \quad dv = a\,dt$$

Se la funzione a(t) è integrabile possiamo ricavare v(t).

$$\int_{t_0}^{t} dv = v(t) - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$$

Analogamente

$$dx = v\,dt \rightarrow \int_{t_0}^{t} dx = x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau$$

Esempio moto uniformemente accelerato

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \quad dv = a\,dt$$

$$\int_{t_0}^{t} dv = v(t) - v_0 = a \int_{t_0}^{t} d\tau = a(t - t_0)$$

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

$$dx = v\,dt \rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau$$

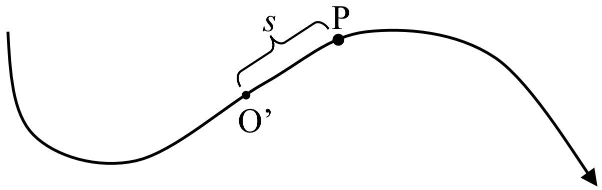
Analogamente

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + a(\tau - t_0))\,d\tau$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + a \int_{t_0}^{t} ((\tau - t_0))\,d\tau$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2$$

Con un sistema di assi 1D curvilineo



Velocità scalare media

$$\begin{cases} v_s^m(t_1,t_2) = \dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} & (\,tra\ t_1\ e\ t_2\,) \\ \Delta t\ =\ t_2\text{-}t_1 \quad > 0 & \\ v_s^m(t,t+\Delta t) = \dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} & (\,tra\ t\ e\ t+\Delta t) \end{cases}$$

Velocità scalare (istantanea) $\quad v_s(t) = \dfrac{ds}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$

Accelerazione scalare media

$$\begin{cases} a_s^m(t_1,t_2) = \dfrac{v_s(t_2)-v_s(t_1)}{t_2-t_1} & (\,tra\ t_1\ e\ t_2\,) \\ \Delta t\ =\ t_2\text{-}t_1 \quad > 0 & \\ a_s^m(t,t+\Delta t) = \dfrac{v_s(t+\Delta t)-v_s(t)}{\Delta t} & (\,tra\ t\ e\ t+\Delta t) \end{cases}$$

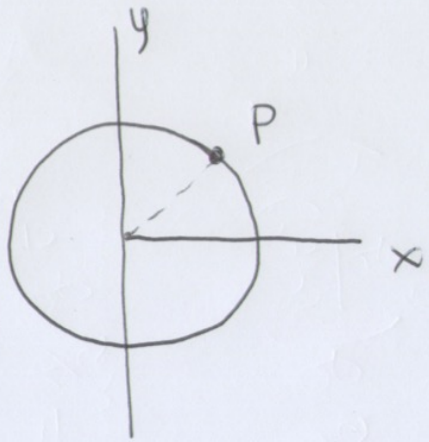
Accelerazione scalare (istantanea)

$$a_s(t) = \frac{d\,v_s}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_s(t+\Delta t)-v_s(t)}{\Delta t}$$

Esercizio ①

Si consideri nel piano x, y una circonferenza di raggio $r = 2\,m$ centrata nell'origine del sistema di assi

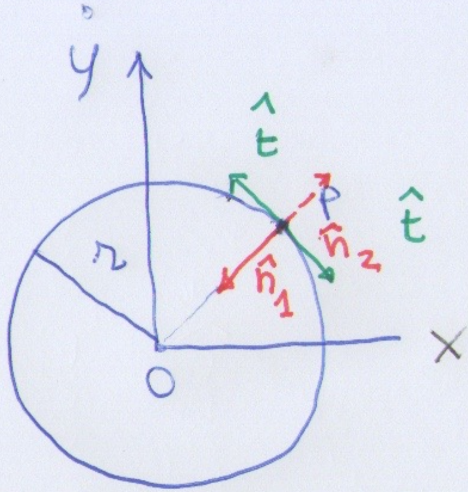
D. 1 Ricavare le espressioni dei versori tangenti e perpendicolari alla circonferenza nel generico punto P sul piano x y



Dati

$r = 2\,m$

$\hat{u}_T$ e $\hat{u}_n$ in P?



Versori perpendicolari

$$\hat{n}_1 = -\frac{\vec{OP}}{|\vec{OP}|} \qquad \hat{n}_2 = \frac{\vec{OP}}{|\vec{OP}|}$$

con $\vec{OP} = (r\cos\theta\,, r\sin\theta)$

$$|\vec{OP}| = r$$

Otteniamo
$$\begin{cases} \hat{n}_1 = (-\cos\theta\,, -\sin\theta) \\ \vec{n}_2 = (\cos\theta\,, \sin\theta) \end{cases}$$

Versori tangenti sono tali che

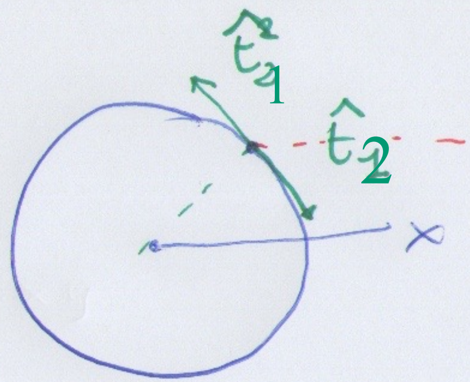
$$\begin{cases} \vec{t} \cdot \vec{OP} = 0 & (1) \\ t_x^2 + t_y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} t_x r\cos\theta + t_y r\sin\theta = 0 \\ t_x = -t_y \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \end{cases}$$

dalla ② $\begin{cases} t_x^2 + t_y^2 = 1 \\ \end{cases}$ usando t_x dalla ①. ③

$$t_y^2 \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + t_y^2 = 1 \Rightarrow t_y^2 \left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right) = 1$$

$\boxed{t_y = \pm \cos\theta}$ e dalla ① $t_x = \mp \sin\theta$



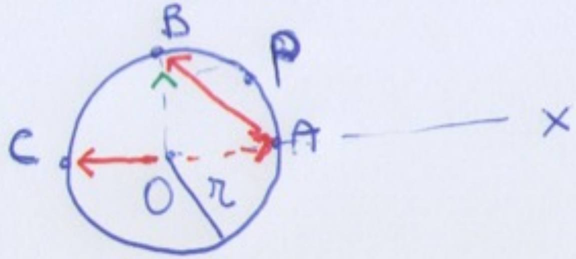
$\hat{t}_1 = (-\sin\theta, \cos\theta)$

$\hat{t}_2 = (\sin\theta, -\cos\theta)$

Calcolare i) * $\vec{OC} - \vec{OA}$, ii) $\vec{AB}$ iii) $\vec{PB}$ ④

in figura.

ricordiamo:



i $\vec{OC} - \vec{OA}$

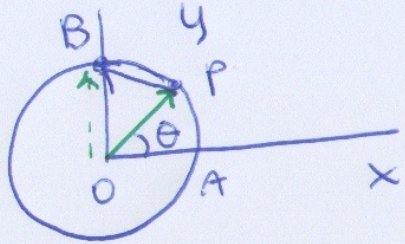
$$
i \begin{cases} \vec{OC} = -r\hat{\imath} \\ \vec{OA} = r\hat{\imath} \\ \boxed{\vec{OC} - \vec{OA} = -2r\hat{\imath} = (-4,0)\,m} \end{cases}
$$

ii) $\vec{AB}$? vediamo che $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$ perciò →

$$
\vec{AB} = \underbrace{\vec{OB}}_{r\hat{\jmath}} - \underbrace{\vec{OA}}_{r\hat{\imath}} = -r\hat{\imath} + r\hat{\jmath}
$$

$$
\boxed{\Rightarrow \vec{AB} = (-r, r) = (-2,2)\,m}
$$

⑤



iii) $\vec{PB}$?

notiamo che: $\vec{OP} + \vec{PB} = \vec{OB}$

per cui $\vec{PB} = \vec{OB} - \vec{OP}$

$\vec{OB} = (0, r)$

$\vec{OP} = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{PB} = (-r\cos\theta,\ r(1-\text{sen}\,\theta))}$$

iiii) determinare $\vec{PB}$ per $\theta = \pi/6$

$$\boxed{\vec{PB} = \left(-r\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ r\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\right) = (-1{,}7,\ 1)\,m}$$

Esercizio

Discutere e disegnare la velocità in funzione del tempo ($v(t)$) e i diagrammi orari $S(t)$ di 2 punti materiali che si muovono di moto rettilineo e con le accelerazioni mostrate nelle seguenti figure (a) e (b). In entrambi i casi $v(0) = 0$ e $S(0) = 0$

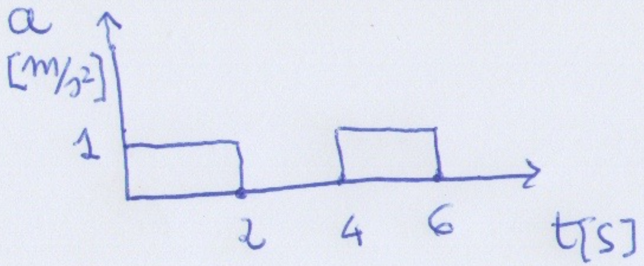
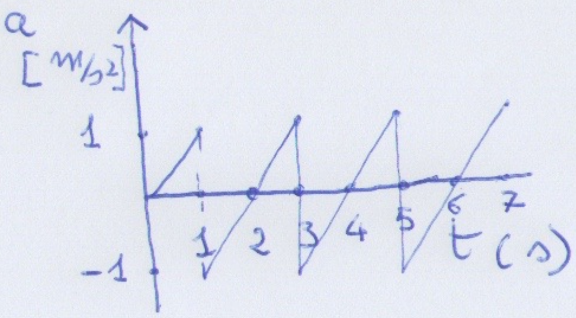


fig a



fig(b)

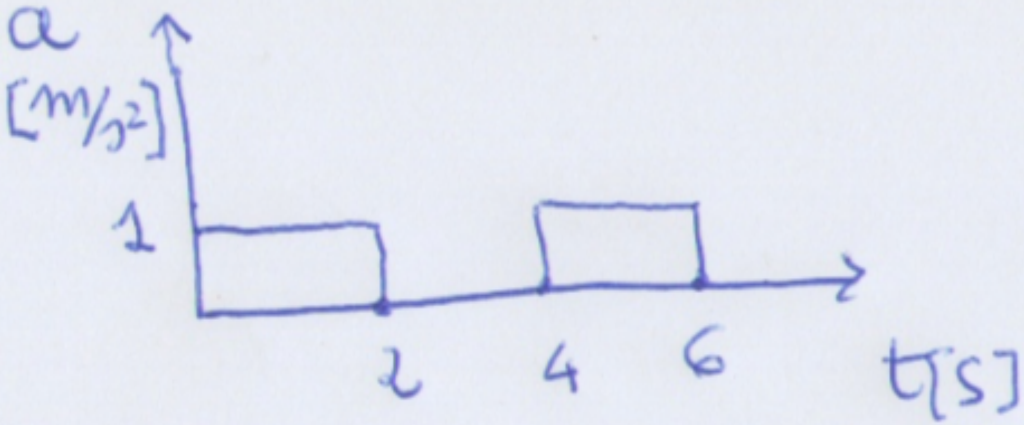


fig a

(2)

Caso A)

a) $t \in [0,2]$ s e $[4,6]$ s

$a = 1\ m/s^2 = \text{cost}$

$\Rightarrow$ moto unif. accelerato

- $v(t)$ ha tratti lineari con pendenza $1\ m/s^2$
- $s(t)$ è costituita da tratti di parabola

$t \in [2,4]$ s e $[6,8]$ s

$a = 0$

$\Rightarrow$ moto rettilineo unif

- $v(t)$ ha tratti orizzontali
- $s(t)$ ha tratti lineari con pendenza $v(t)$

$t \in [0,2]\,s$, $a = 1\, m/s^2$ $\quad v(0) = 0 \quad S(0) = 0$ 3

$$v(t) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{v(0)} + \int_0^t a\,dt' \qquad v(t) = at \qquad \begin{cases} v(2) = 2\, m/s \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$S(t) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{S(0)} + \int_0^t v(t')\,dt' = \int_0^t a t'\,dt' = \frac{1}{2} a t^2 \qquad \begin{cases} S(2) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = \\ = 2\, m \end{cases}$$

$t \in [2,4]$ $\quad a = 0 \quad v(2) = 2\, m/s \quad S(2) = 2\, m$

$$v(t) = \text{cost} = v(2) = 2\, m/s$$

$$S(t) = S(2) + \int^t v(t')\,dt' = S(2) + v(2)(t-2)$$

④

$t \in [4,6]\,s \qquad a = 1\,m/s^2 \qquad v(4) = v(2) = 2\,m/s$

$s(4) = 6\,m$

$$v(t) = \underset{\overset{\shortparallel}{v(2)}}{v(4)} + \int_4^t a\,dt' = v(2) + a(t-4)$$

$$v(6) = 2 + 1\,(2) = 4\,m/s$$

$$s(t) = s(4) + \int v(t')\,dt' = s(4) + \int_4^t \left(v(2) + a(t'-4)\right) dt'$$

$$s(t) = s(4) + v(2)(t-4) + \tfrac{1}{2}\,a(t-4)^2$$

$$s(6) = 6 + 2 \times 2 + \tfrac{1}{2} \times 1 \times 4 = 12\,m$$

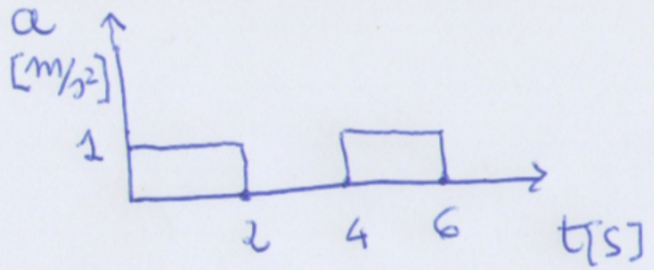
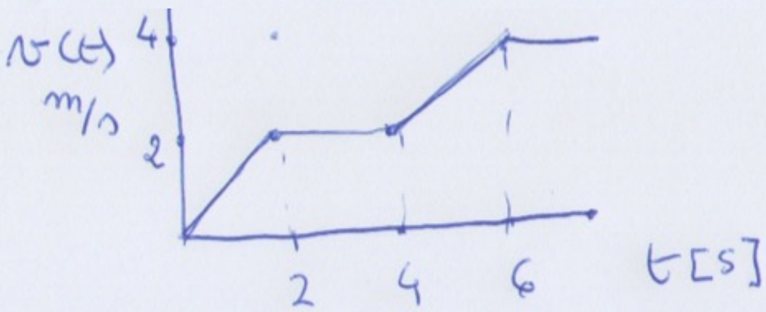
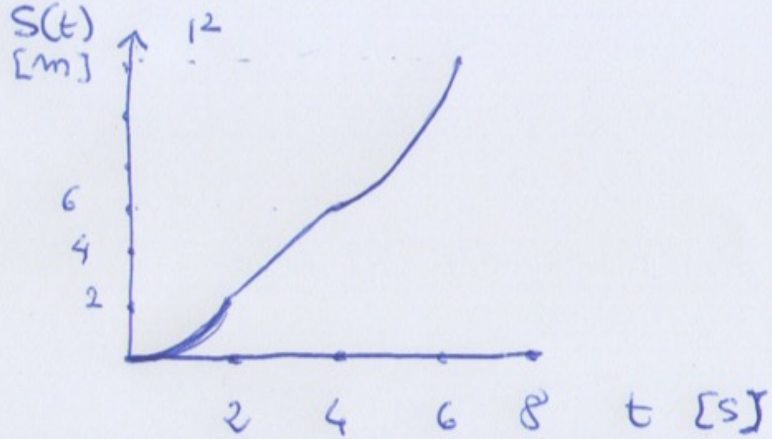
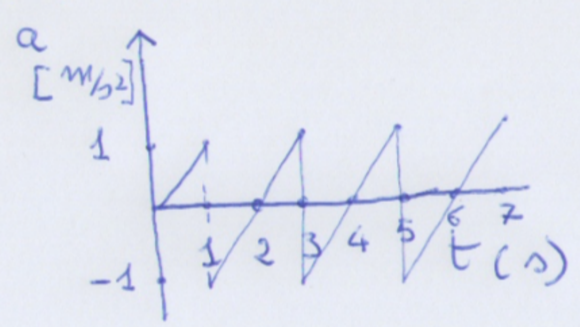


fig a







fig(b)

Caso B

b) $t \in [0,1]$ $[1,3]$ $[3,4]$ $[4,5]$ $[5,6]$ a varia linearmente nel tempo

$t \in [0,1]$ $\quad a_1 = kt \quad$ con $k = 1 \ m/s^3$

nei tratti successivi $\quad a(t) = a_m + k(t - t_i)$

con $a_m = -1 \ m/s^2$

e t_i gli istanti in cui $a = a_m$

$$t \in [0,1] \quad \begin{cases} a(t) = kt & a(0) = 0 \quad v(0) = 0 \quad S(0) = 0 \\ v(t) = v_0 + \int_0^t \underbrace{a(t')}_{kt'} dt' = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{v_0} + \frac{1}{2} k t^2 \end{cases}$$

$t \in [0, 1]$ $\quad \begin{cases} s(t) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{s(0)} + \displaystyle\int_0^t \underbrace{v(t')}_{v_0 + \frac{1}{2} k t'^2} dt' = \frac{1}{2} k \frac{t^3}{3} \end{cases}$

$$\begin{cases} v(1) = \frac{1}{2} \cdot \underset{k}{1} \cdot \underset{t^2}{1} = 0.5\, m/s \\[2ex] s(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\, m = 0.166\, m \end{cases}$$

$t \in [1, 3]$ $\quad a = a_m + k(t-1)$

$$v(t) = v(1) + \int_1^t a\, dt = \begin{cases} v(1) + a_m(t-1) + \\ + \frac{1}{2} k (t-1)^2 \end{cases}$$

$$v(2) = \underset{v(1)}{0.5} - \underset{(a_m)}{1} \cdot \underset{(t-1)}{1} + \frac{1}{2} \cdot \underset{k}{1} \cdot \underset{(t-1)^2}{1} = 0\, m/s$$

$t \in [1,3]$ $\quad v(3) = 0.5 - 1.(3-1) + \frac{1}{2} \times 1 \times (3-1)^2$ 8

$\quad a_m(t-1) \qquad K \quad (t-1)^2$

$$v(3) = 0.5 - 2 + 2 = 0.5\ m/s$$

$t \in [1,3]$ $\quad s(t) = s(1) + \int_1^t v(t')\,dt' = s(1) + \int_1^t \Big[v(1) + a_m(t'-1) + \frac{1}{2}K(t'-1)^2\Big]dt'$

$$s(t) = s(1) + v(1)(t-1) + \frac{1}{2} a_m (t-1)^2 + \frac{1}{2} K \frac{(t-1)^3}{3}$$

$$s(2) = \frac{1}{6} + \underbrace{0.5 \times 1}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{2}(-1)(1)^2}_{-\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 1 \times \frac{1}{3}}_{+\frac{1}{6}} = \frac{2}{6}\ m = 2\,s(1)$$

$$s(3) = \frac{1}{6} + \underbrace{0.5 \times 2} + \frac{1}{2}(-1)\,2^2 + \frac{1}{2}\,1 \times \frac{8}{3} =$$

$$= \frac{1}{6} + 1 - 2 + \frac{4}{3} = \frac{1-6+8}{3} = \frac{3}{6}\ m = 3\,s(1)$$

$t \in [3, 5]$ $\quad S(3) = 3S(1) = 3/6\ m \quad v(3) = 0.5\ m/s$ $\quad$ 9

$$v(t) = v(3) + a_m(t-3) + \tfrac{1}{2}K(t-3)^2$$

$$v(4) = 0.5 + (-1)1 + \tfrac{1}{2} \times 1 \times 1 = 0$$

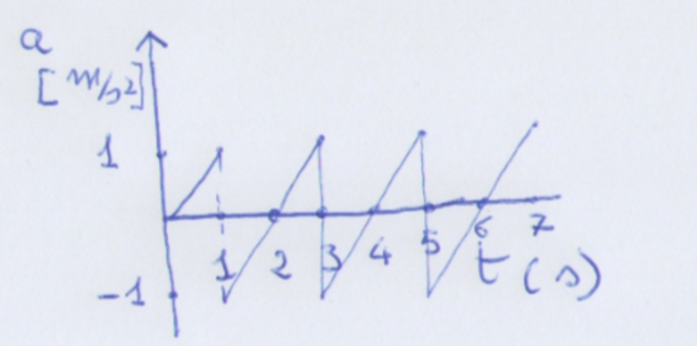
$$v(5) = 0.5) + (-1)2 + \tfrac{1}{2} \times 1 \times 4 = 0.5\ m/s$$

$$S(t) = S(3) + v(3)(t-3) + \tfrac{1}{2}a_m(t-3)^2 + \tfrac{1}{2}K\frac{(t-3)^3}{3}$$

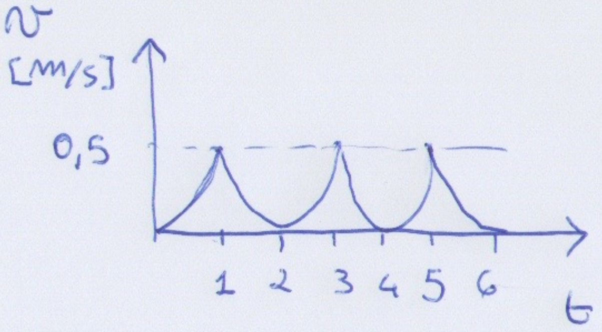
$$S(4) = \frac{3}{6} + \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}(-1)(1) + \frac{1}{2} \times 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{6}\ m = 4S(1)$$

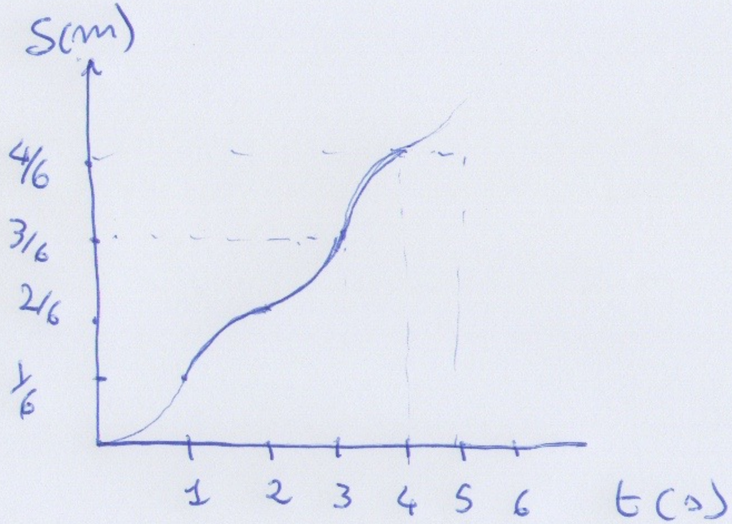
$$S(5) = \frac{3}{6} + \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}(-1)2^2 + \frac{1}{2}(1)\frac{2^3}{3}$$

$$= \frac{3}{6} + 1 - 2 + \frac{4}{3} = \frac{5}{6}\ m = 5S(1)$$



Caso B





Inoltre i due punti materiali partono allo stesso istante ma non si raggiungono mai b) precede sempre a)