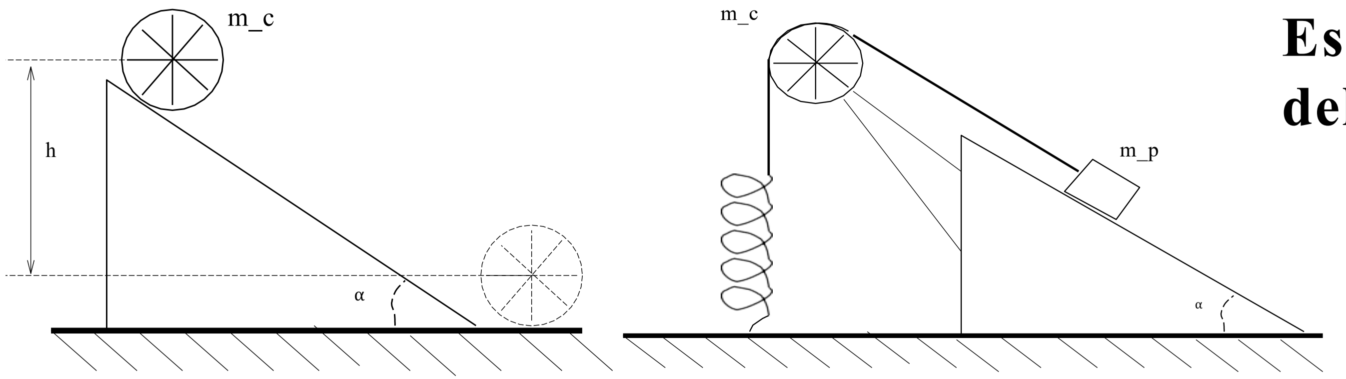
Es. del 6/5/ Ciocci

Esercizi di esame da
https://www.pi.infn.it/~ciocci/



Esame di Fisica Generale del 09/06/2017

Una ruota di raggio R = 30 cm e massa m_C = 2 kg raggiunge la velocità v = 4 m/s scendendo di una quota h = 1 m con moto di puro rotolamento su un piano scabro, inclinato di un angolo $\alpha = \pi/6$ e fisso, come nella figura a sinistra. Il modulo dell'accelerazione di gravità g vale 9.8 m/s^2.

1. Si calcoli il momento di inerzia della ruota rispetto all'asse passante per il suo centro: I = ...

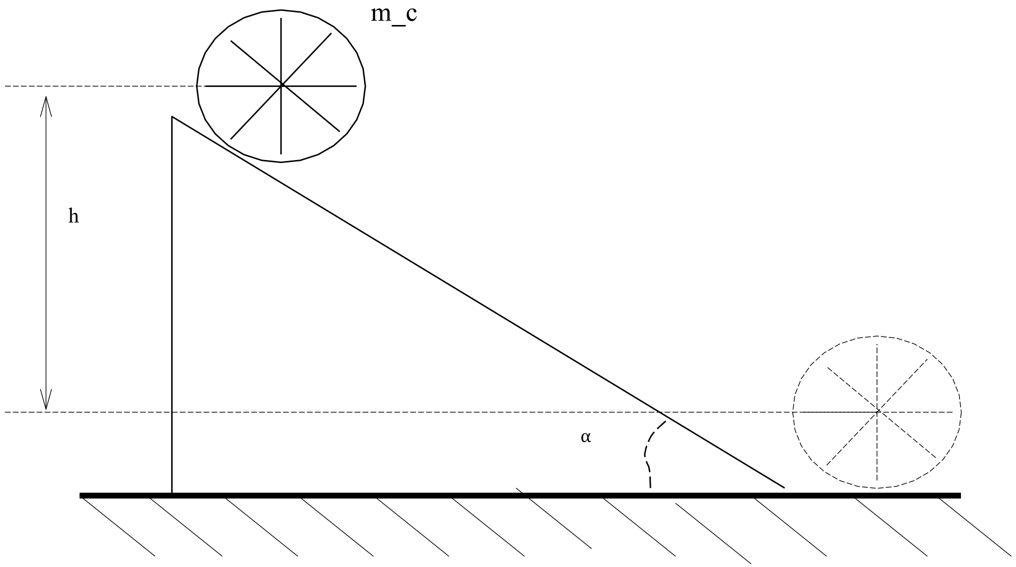
La stessa ruota ed un piano fisso e questa volta liscio, inclinato dello stesso angolo α, vengono utilizzati come nella figura a destra. La ruota può ruotare senza attrito intorno al perno orizzontale fisso passante per il suo centro. Un filo ideale, inestensibile e privo di massa, appoggia sulla ruota e non slitta su di essa. Un estremo è collegato ad una massa m_p = 1 kg e l'altro ad una molla di costante elastica k = 16 N/m e lunghezza a riposo nulla.

Si calcoli:

2. la lunghezza della molla quando il sistema è in equilibrio: ΔL = ...
3. il periodo delle oscillazioni del sistema: T = ...

Il sistema viene messo in oscillazione a partire dalla posizione di equilibrio e con un'ampiezza di oscillazione uguale alla lunghezza della molla all'equilibrio.

4. Trovare il valore massimo delle tensioni del filo dal lato delle molla T_{molla} e dal lato del peso T_P: $T_{molla,max}$ = ...
$T_{P,max}$ = ...



Ruota

moto di puro rotolamento su un piano scabro inclinato di un angolo $\alpha = \pi/6$ e fisso

raggio $R = 30\ cm$

massa $m_C = 2\ kg$

$v = 4\ m/s$ dopo aver sceso di una quota $h = 1\ m$

1.Si calcoli il momento di inerzia della ruota rispetto all'asse passante per il suo centro: I=..

- Non è specificato come è fatta la ruota
- Ma il moto è di puro rotolamento
- Nel puro rotolamento la Forza di attrito non compie lavoro: punto di applicazione della forza istantaneamente fermo.

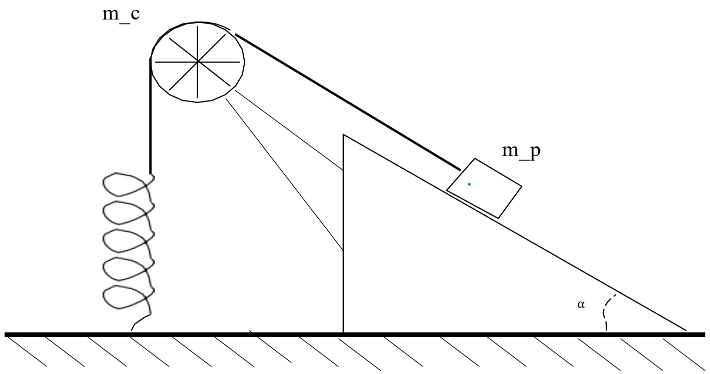
- $v_{CM} = |\omega| R$

- Non ci sono altre forze dissipative → l'energia è conservata

$$m_c g h = \frac{1}{2} m_c v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow v^2 = \omega^2 R^2$$

$$m_c g h = \frac{1}{2} m_c v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R^2} \Rightarrow (2 m_c g h - m_c v^2)\frac{R^2}{v^2} = I = m_c R^2 \left(\frac{2gh}{v^2} - 1\right)$$

$$I = 0.040\ Kg\ m^2$$



Stessa ruota

piano inclinato liscio

di angolo α

La ruota può ruotare senza attrito intorno al perno orizzontale fisso passante per il suo centro.

Filo ideale, inestensibile e privo di massa appoggia sulla ruota e non slitta su di essa.

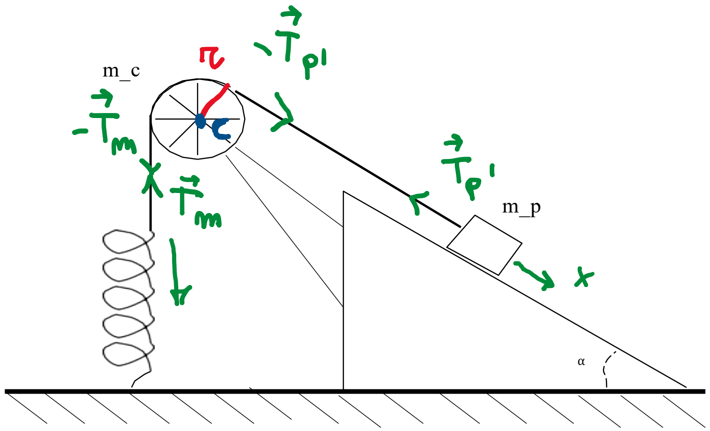
massa $m_p = 1\ kg$, molla $k = 16\ N/m$ lunghezza a riposo nulla.

2. Si calcoli la lunghezza della molla quando il sistema è in equilibrio: $\Delta L =$ ....

3. Il periodo delle oscillazioni del sistema: $T =$ ....

a) All' equilibrio la ruota non ruota!

b) All' equilibrio $\vec{a}_p = \emptyset$



a) $\vec{M}^c = M^c_z \hat{z} = \emptyset$

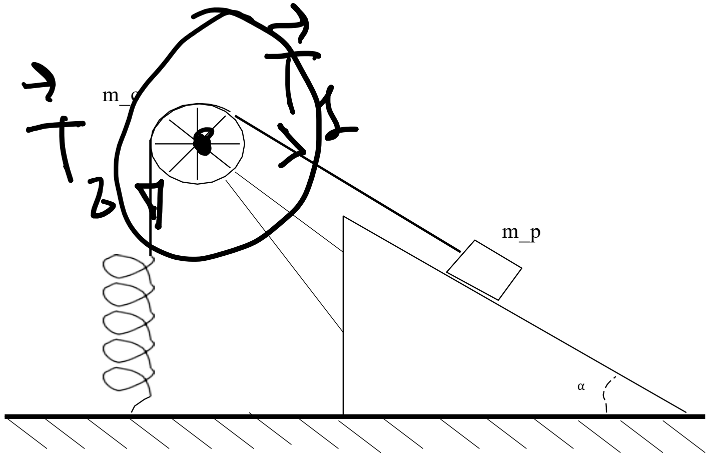
b) $m_p \vec{a}_p = 0$

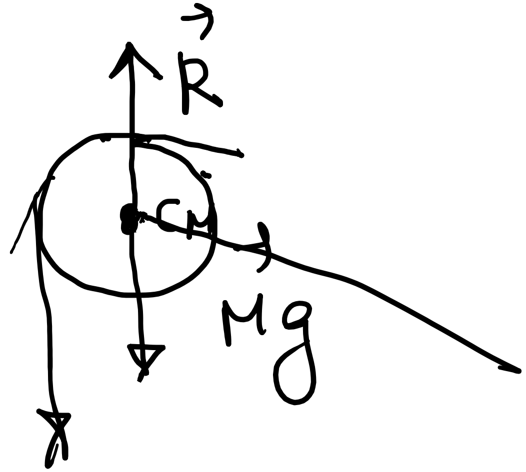
a) $-|r||\vec{T}_p{}'| + |r|\,|\vec{T}_m| = \emptyset \Rightarrow T_p{}' = T_m$

a.1) $\vec{T}_m + \vec{F}_m = 0 \Rightarrow T_m = K\Delta\ell$

b) $\sum_x F_x = \emptyset \Rightarrow m_p g \sin\alpha - K\Delta\ell = 0$

$\Rightarrow \Delta\ell = \dfrac{m_p g \sin\alpha}{K} = 0.31\ m$



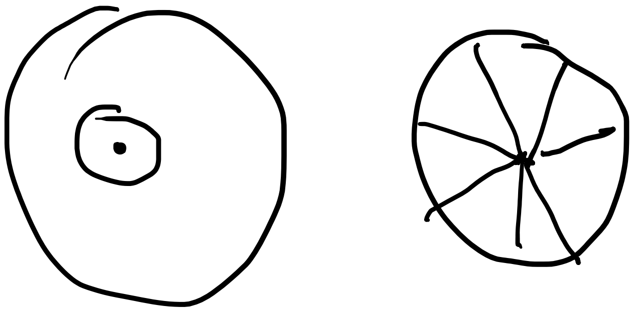


$2\cancel{\vec{T}}$

$$\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{R}+M\vec{g}=0$$

$$\vec{R}+M\vec{g}=0$$

$$R_x+0=0$$

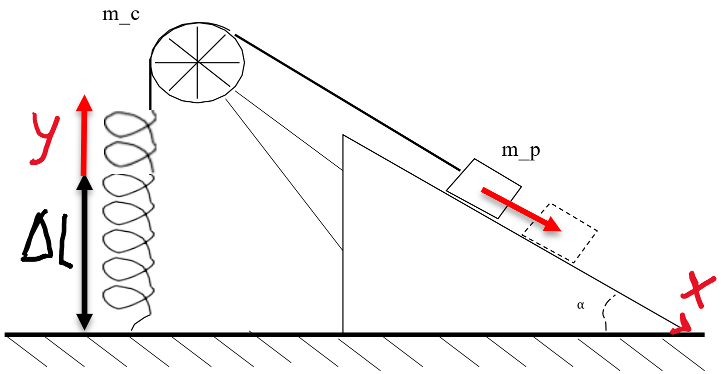


$$R_y-mg=0$$

$$R_y=mg$$

3. Si calcoli il periodo delle oscillazioni del sistema: T = ...

Scegliamo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale nella posizione di equilibrio.



① Se la molla si allunga di y, il CM di m_p si sposta di y lungo x

② L'energia si conserva

Scegliamo lo ∅ dell'energia potenziale nella posizione di equilibrio.

$$E_{mecc} = \frac{1}{2} m_p v_p^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} K (y+\Delta L)^2 - m_p g y \sin\alpha$$

$$E_{mecc} = \text{cost} \Rightarrow \frac{dE_{mecc}}{dt} = 0 \quad \text{inoltre } v_p = \dot{y}, \omega = -\dot{y}/R$$

$$\frac{dE_{mecc}}{dt} = \frac{1}{2} m_p 2 \dot{y} \ddot{y} + \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{I}{R^2} \dot{y} \ddot{y} - m_p g \dot{y} \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot 2 K (y + \Delta \ell) \dot{y} = \emptyset$$

$$\Rightarrow \left(m_p + \frac{I}{R^2}\right) \ddot{y} - m_p g \sin\alpha + K (y + \Delta \ell) = 0$$

$$\Rightarrow \left(m_p + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{y} \underbrace{- m_p g \sin\alpha + K\Delta\ell}_{*} + Ky = 0$$

$*$ avevamo determinato all'equilibrio $m_p g \sin\alpha = K\Delta\ell$

$$\Rightarrow \left(m_p + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{y} + Ky = 0$$

: equazione di un oscillatore armonico $y(t) = A\cos(\Omega t + \phi)$

$$\ddot{y} + \left(\frac{K}{m_p + I/R^2}\right) \cdot y$$

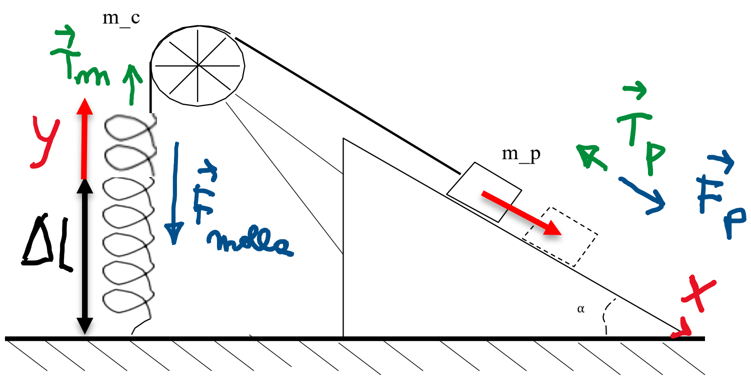
$$\Omega = \sqrt{\frac{K}{m_p + I/R^2}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_p + \frac{I}{R^2}}{K}} = 1.9\ s$$

Il sistema viene messo in oscillazione a partire dalla posizione di equilibrio e con un'ampiezza di oscillazione uguale alla lunghezza della molla all'equilibrio.

4. Trovare il valore massimo delle tensioni del filo dal lato delle molla T_{molla} e dal lato del peso T_P: $T_{molla,max}$ = ... $T_{P,max}$ = ...

L'ampiezza dell'oscillazione è ΔL ed è nota essendo ΔL uguale alla lunghezza della molla all'equilibrio.



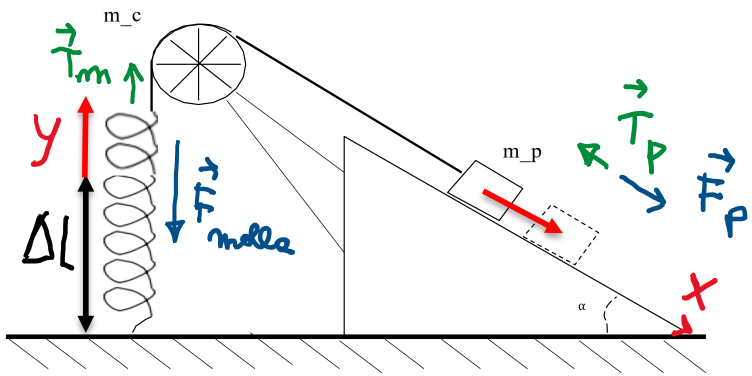
L'equazione che soddisfa $y(t)$ è data da $y(t) = A\cos(\Omega t + \phi)$

Le cui condizioni iniziali sono

$A = \Delta L$ e $y(0) = \emptyset \Rightarrow \phi = \pi/2$

per cui $y(t) = \Delta L \cos(\Omega t + \pi/2) = \Delta L \sin(\Omega t)$

dalla quale $\begin{cases} \dot{y}(t) = \Omega \Delta L \cos(\Omega t) \\ \ddot{y}(t) = -\Omega^2 \Delta L \sin(\Omega t) \end{cases}$



$$y(t) = \Delta L \sin(\Omega t)$$

$$\dot{y}(t) = \Omega \Delta L \cos(\Omega t)$$

$$\ddot{y}(t) = -\Omega^2 \Delta L \sin(\Omega t)$$

$\Rightarrow \quad T_{molla} = K(y + \Delta L)$ dalla quale

$$T_{molla\text{-}max} = K(y_{max} + \Delta L) = K \cdot 2\Delta L = 2 m_p g \sin\alpha = 9.92\,N$$

$\Rightarrow \quad T_{peso}: \quad m_p g \sin\alpha - T_{peso} = m_p \ddot{x} = m_p \ddot{y}$

$$T_{peso} = \underbrace{m_p g \sin\alpha}_{K\Delta L} - m_p \ddot{y} = K\Delta L + m_p \Omega^2 \Delta L \sin(\Omega t)$$

$T_{peso\text{-}max}$ si ha per $\sin(\Omega t) = 1 \Rightarrow T_{peso\text{-}max} = K\Delta L + m_p \Omega^2 \Delta L$

$T_{peso-max}$ si ha per $\sin(\Omega t)=1 \Rightarrow T_{peso-max} = K\Delta L + m_p \Omega^2 \Delta L$

$$\Omega = \sqrt{\frac{K}{m_p + I/R^2}}$$

$$\underbrace{m_p g \sin\alpha}_{K\Delta L}$$

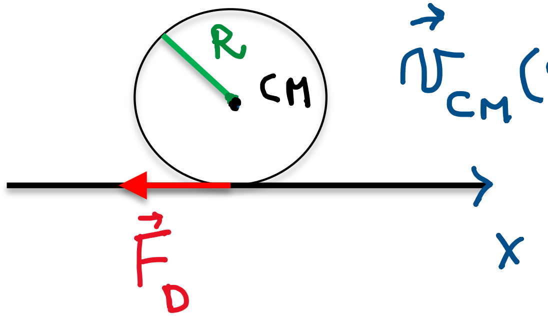
$$T_{peso-max} = m_p g \sin\alpha + m_p \frac{K}{\left(m_p + \frac{I}{R^2}\right)} \cdot \Delta L$$

$$= m_p g \sin\alpha \left(1 + \frac{1}{1 + I/R^2 m_p}\right) = 8.3 \text{ N}$$

Esercizio. Un cilindro di massa M e raggio R è appoggiato su un piano orizzontale scabro di lunghezza infinita e coefficiente di attrito dinamico μ_D. All'istante $t = 0$ al centro di massa del cilindro viene impressa una velocità orizzontale di modulo V_0, mentre la velocità angolare iniziale del cilindro è nulla.

1) Calcolare in funzione del tempo la velocità del CM

2) Calcolare l'intervallo di tempo necessario affinché il cilindro raggiunga la condizione di puro rotolamento.



$\vec{v}_{CM}(0) = v_0 \hat{x}$

Fino al raggiungimento della condizione di puro rotolamento il moto del cilindro è una generica combinazione di una traslazione orizzontale del centro di massa e di una rotazione intorno al centro di massa. È quindi necessario utilizzare la prima e seconda equazione cardinale della meccanica

$$\begin{cases} M\vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_{ext} = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_D \\ \dfrac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = I_{CM}\vec{\alpha} = \dfrac{MR^2\vec{\alpha}}{2} = \sum \vec{\tau}_{ext} = \vec{R} \wedge \vec{F}_D = -\mu_D R M g \hat{z} \end{cases}$$

come polo per il calcolo del momento abbiamo usato il CM per non annullare il momento dovuto alla forza di attrito dinamico che determina il moto del cilindro.

$$\begin{cases} M a_{CM\,y} = 0 = N - Mg \qquad M a_{CM\,x} = -\mu_D M g \hat{x} \\ \dfrac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = I_{CM}\vec{\alpha} = \dfrac{MR^2}{2}\vec{\alpha} = -\mu_D R M g \hat{z} \end{cases}$$

Nota: il CM è sull'asse z

$$① \; M a_{CM\,x} = -\mu_D M g \hat{x} \qquad \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = I_{CM}\vec{\alpha} = \frac{MR^2}{2}\vec{\alpha} = -|\mu_D R M g|\hat{z} \Rightarrow$$

$$-I_{CM}|\alpha|\hat{z} = -\mu_D M g R \hat{z} \iff ② \; I_{CM}\alpha = \mu_D M g R = |F_D| R$$

$$② \; I_{CM}\dot{\omega}_{cil} = |F_D| R$$

① Moto uniformemente decelerato $v_{CM}(t) = v_{CM}(0) - \mu_D g t$

② $\dot{\omega}_{cil} = \dfrac{|F_D| R}{I} \Rightarrow$ moto unif accelerato in $\theta(t)$

$$\omega_{cil}(t) = \underbrace{\omega_0}_{=0 \text{ a } t=0} + \frac{|F_D| R}{I} t$$

$\Rightarrow$ al trascorrere del tempo diminuisce v_{CM} e aumenta ω fino a quando il moto diviene di puro rotolamento $\Rightarrow v_{CM}(t^*) = \omega(t^*) R$

$$v_{CM}(t) = v_{CM}(0) - \mu_D g t \qquad \omega_{cil}(t) = \frac{|F_D| R}{I} t \qquad \text{per } t = t^* \Rightarrow$$

$$v_{CM}(t^*) = \omega_{cil}(t^*) R$$

$$v_{CM}(0) - \mu_D g t^* = \frac{F_D R t^*}{I} R = \frac{\mu_D M g R^2 t^*}{I}$$

$$t^* (\mu_D g)\left(\frac{MR^2}{I} + 1\right) = v_{CM}(0) \Rightarrow t^* = \frac{v_0}{\mu_D g} \frac{I}{MR^2 + I}$$

per $t \geq t^*$ il moto è di puro rotolamento.

$$v_{CM} = \text{cost} = v_{CM}(0) - \mu_D g t^* = V_0 - \cancel{\mu_D g} \frac{v_0}{\cancel{\mu_D g}} \frac{I}{MR^2 + I}$$

per cui:

$$v_{CM}(t \in [0, t^*]) = V_0 - \mu_D g t$$

$$v_{CM}(t \geq t^*) = V_0 \left(1 - \frac{I}{MR^2 + I}\right) = \omega_{cil} \cdot R = \boxed{\text{cost}}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{CM} = \vec{R} \wedge \vec{F}_A = \emptyset = I \vec{\alpha} \qquad \Rightarrow \vec{F}_A = 0 \,! \qquad \vec{\alpha} = -\dot{\omega}_{cyl} \hat{z}$$

3) Calcolare il lavoro compiuto dalla forza di attrito dinamico nell'intervallo di tempo necessario per il raggiungimento del puro rotolamento.

L'energia cinetica iniziale del cilindro è di pura traslazione, mentre una volta raggiunto il puro rotolamento è di rototraslazione. Si noti che a partire da questo istante in poi l'attrito è nullo, per cui l'energia cinetica rimane invariata. Il lavoro compiuto dall'attrito dinamico, per il teorema delle forze vive, è quindi:

$$\mathcal{L} = \Delta K = \frac{MV^2{}_{CM}(t^*)}{2} + \frac{1}{2} I\omega^2(t^*) - \frac{MV_0^2}{2} = \frac{MV^2{}_{CM}(t^*)}{2} + \frac{1}{2}\frac{MR^2\omega^2(t^*)}{2} - \frac{MV_0^2}{2}$$

$$\mathcal{L} = \frac{3MV^2{}_{CM}(t^*)}{4} - \frac{MV_0^2}{2}$$

dove abbiamo inserito

$I = \frac{MR^2}{2}$ e $V_{CM}(t^*) = \omega(t^*)R$

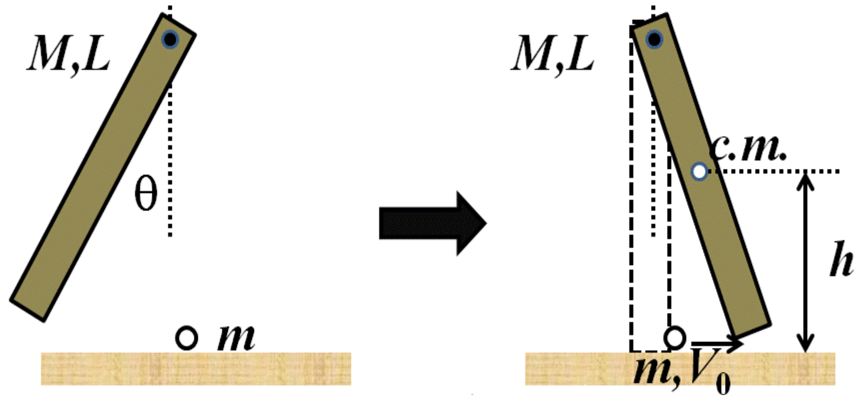
La velocità $V(t^*)$ è: $V(t^*) = V_0 - \mu_D g \frac{V_0}{3\mu_D g} = V_0 - \frac{V_0}{3} = \frac{2V_0}{3}$

$$\mathcal{L} = \frac{3M}{4}\left(\frac{2V_0}{3}\right)^2 - \frac{MV_0^2}{2} = MV_0^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{MV_0^2}{6}$$

$$t^* = \frac{v_0}{\mu_D g} \frac{I}{MR^2 + I} \Rightarrow \frac{v_0}{\mu_D g} \cdot \frac{MR^2/2}{3/2\,(MR^2)} = \frac{v_0}{\mu_D g} \frac{1}{3}$$

Prova scritta 01/07/2016 Esercizio 1. **Non è sulla raccolta www.pi.infn.it/~ciocci**

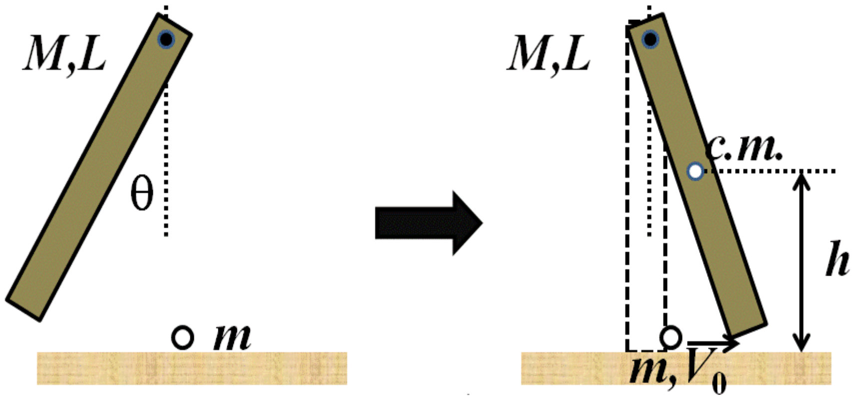
Una sbarra omogenea di lunghezza L e massa M è vincolata a ruotare in un piano verticale attorno ad un asse senza attrito passante per un suo estremo, come in Figura. La sbarra viene ruotata di un angolo $\theta = 30^o$ rispetto alla posizione di equilibrio e lasciata libera sotto l'azione della gravità con velocità iniziale nulla. Giunta in posizione verticale la sbarra colpisce una massa m ferma, che a seguito dell'urto inizia a muoversi su un piano orizzontale con attrito, di coefficiente d'attrito dinamico $\underline{\mu_D}$ ignoto. La velocità iniziale (subito dopo l'urto) della massa m è $\vec{V}_0$ e la sbarra dopo l'urto continua a ruotare superando la verticale.



1) Si dimostri che una sola fra le seguenti quantità si conserva sicuramente durante l'urto: quantità di moto totale, momento angolare del sistema rispetto all'asse di rotazione, energia meccanica del sistema.

2) Utilizzando la legge di conservazione opportuna determinare la velocità angolare della sbarra subito dopo l'urto e la quota h a cui risale il suo centro di massa ($c.m.$ nella Figura a destra). Qual è il valore massimo di V_0 al di sopra del quale la sbarra rimbalza all'indietro ?

3) Si calcoli la variazione delle grandezze citate nel punto 1) che in generale non si conservano durante l'urto, specificando se esistono casi particolari in cui esse o alcune di esse possono conservarsi.
4) Per determinare il modulo della velocità iniziale V_0 si misura la velocità della massa m durante il suo moto sul piano con attrito in due punti: a distanza $l_1 = 1$ m dal punto dell'urto la velocità è $V_1 = 4\ \mathrm{m/s}$, mentre a distanza $l_2 = 2$ m la velocità è $V_2 = 1\ \mathrm{m/s}$. Si calcolino i valori numerici di V_0 e μ_D usando $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.



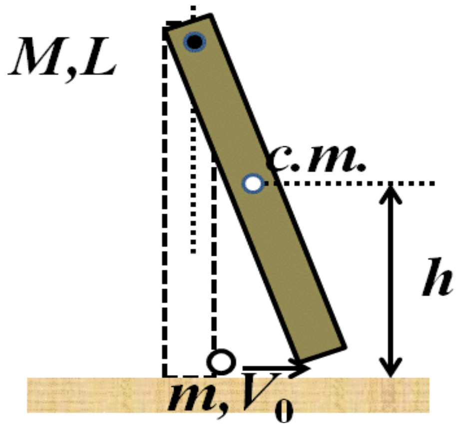
1) Si dimostri che una sola fra le seguenti quantità si <u>conserva sicuramente</u> durante l'urto: quantità di moto totale, momento angolare del sistema rispetto all'asse di rotazione, energia meccanica del sistema.

1) Nell'istante dell'urto si conserva sicuramente il momento angolare $\vec{L}$ rispetto all'asse di rotazione perché le uniche forze esterne applicate sono la reazione dell'asse (che ha braccio nullo per definizione) e la gravità, che non è impulsiva e la cui direzione nel punto di equilibrio è a braccio nullo.

La quantità di moto totale $\vec{P}$ non si conserva a causa della forza impulsiva esercitata dall'asse di rotazione

L'energia totale E in generale può non conservarsi a causa delle forze interne che si sviluppano durante l'urto.

2) Utilizzando la legge di conservazione opportuna determinare la velocità angolare della sbarra subito dopo l'urto e la quota h a cui risale il suo centro di massa ($c.m.$ nella Figura a destra). Qual è il valore massimo di V_0 al di sopra del quale la sbarra rimbalza all'indietro ?



2) Applichiamo la legge di conservazione del momento angolare un istante prima dell'urto e un istante dopo l'urto: $\vec{L}_i = I\vec{\omega}_i = \vec{L}_f = I\vec{\omega}_f + mLV_0\hat{z}$

dove $I = ML^2/3$ è il momento d'inerzia della sbarra rispetto all'asse di rotazione, $\vec{\omega}_i$ e $\vec{\omega}_f$ sono le velocità angolari della sbarra prima e dopo l'urto e $\hat{z}$ è la direzione dell'asse di rotazione (uscente dallo schermo).

Si ottiene quindi:

$$\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_i - \frac{mLV_0}{M\,L^2/3}\hat{z} = \left(\omega_i - \frac{3mV_0}{ML}\right)\hat{z}$$

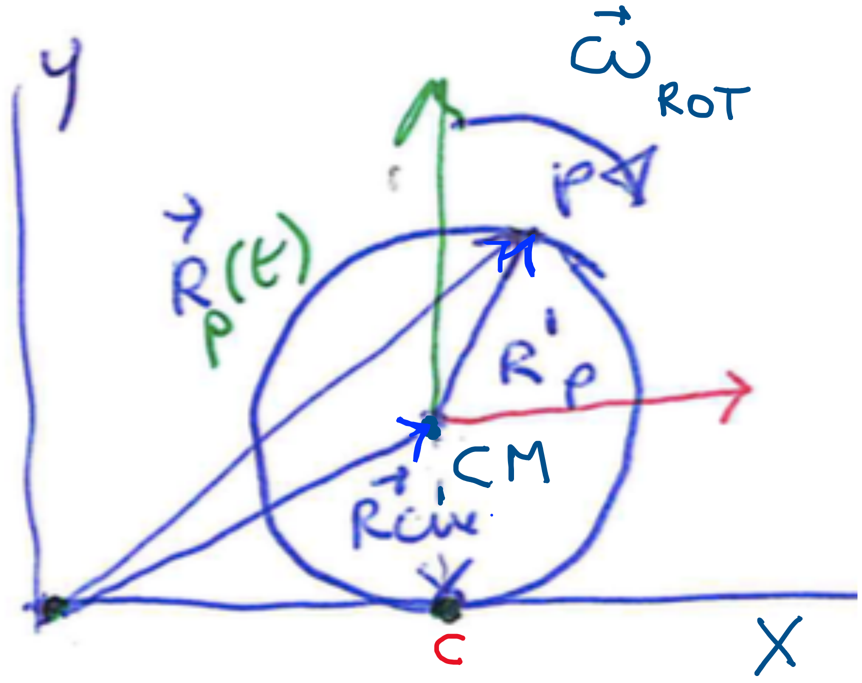
La sbarra continua a ruotare nello stesso verso se $\omega_f > 0 \quad \Longrightarrow V_0 < \frac{ML}{3m}\omega_i.$

backup

$$\vec{R}_p(t) = \vec{R}_{CM} + \vec{R}'_p(t)$$

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'(t)$$

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega}_{ROT} \wedge \vec{R}'_p$$



$$\vec{\omega}_{Rot} = +\omega\hat{z}$$

$\omega > \emptyset$ ↺ $\omega < \emptyset$ ↻

per P = al punto di contatto = C

$$\vec{v}_C = 0 \Rightarrow \vec{v}_{CM} = -\vec{\omega}_{Rot} \wedge \vec{R}'_{CM} = -\omega\hat{z} \wedge R'_{CM}(-\hat{y})$$

$$\vec{v}_{CM} = \omega R\ \hat{z} \wedge \hat{y}$$

$$\vec{v}_{CM} = -\omega R\ \hat{x}$$ nell'es $\omega < 0$