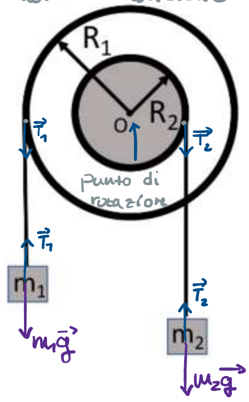
7-06-19

domenica 18 aprile 2021 16:06

momento iniziale



Dati

$I_{dischi} = 38 kg \cdot m^2$

$R_1 = 120 cm \quad R_2 = 50 cm$

$m_1 = 25 kg$

filo teso: le forze sono applicate al punto di contatto

carrucola: l'angolo tra $\vec{r}$ e $\vec{F}$ (ϕ) rimane costante

1. $\alpha = 0, \; m_2 = ?$

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = 0 = \vec{R}_1 \times m_1\vec{g} - \vec{R}_2 \times m_2\vec{g} = 0 \rightarrow \vec{R}_1 \times m_1\vec{g} = \vec{R}_2 \times m_2\vec{g}$$

$$\rightarrow R_1 m_1 \cancel{g} = R_2 m_2 \cancel{g} \rightarrow m_2 = \frac{R_1 m_1}{R_2} = \cdot$$

alternativa:

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = 0 \rightarrow m_1 g = T_1 \\ m_2 g - T_2 = 0 \rightarrow m_2 g = T_2 \\ \underbrace{R_1 T_1 - R_2 T_2}_{\sum \tau_{ext}} = 0 \rightarrow R_1 T_1 = R_2 T_2 \end{cases}$$

2. $m_1 = 35 kg, \; m_2 = \cdot, \; \alpha = ? = \frac{a}{r}$

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = I_T \alpha \rightarrow R_1 m_1 g - R_2 m_2 g = I_T \alpha$$

$$I_T = I_{dischi} + I_{m_1} + I_{m_2}$$

$$\alpha = \frac{R_1 m_1 g - R_2 m_2 g}{I_T}$$

Th. Huygens - Steiner

$$I_{m_1} = \cancel{I}^{0} + Md^2 = m_1 R_1^2$$

$$I_{m_2} = \cancel{I}^{0} + Md^2 = m_2 R_2^2$$

3. $\vec{T}_1 = ?, \; \vec{T}_2 = ?$ $\qquad a = R\alpha$

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 = m_1 \alpha R_1 \\ -m_2 g + T_2 = m_2 a_2 = m_2 \alpha R_2 \\ I_T \alpha = \sum \vec{\tau}_{ext} = \vec{R}_1 \times \vec{T}_1 - \vec{R}_2 \times \vec{T}_2 = R_1 T_1 - R_2 T_2 \end{cases}$$

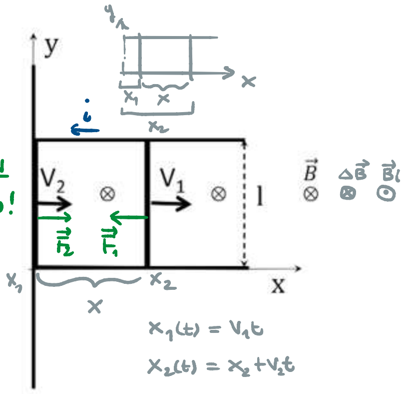
(dobbiamo dare un segno alle forze)

$$T_1 = m_1 g - m_1 \alpha R_1$$

$$T_2 = m_2 g + m_2 \alpha R_2$$

Esercizio 2

$\vec{F}_2$ e $\vec{F}_1$ **NON** si annullano!



Due sbarrette conduttrici, ciascuna di resistenza $R = 2\ \Omega$, poggiano e possono scorrere senza attrito su due binari orizzontali di resistenza trascurabile. La distanza tra i binari è $l = 1.3\ m$. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $B = 0.5\ T$, entrante nel piano della figura. Le sbarrette si muovono con velocità costante $v_1 = 8\ m/s$ e $v_2 = 3\ m/s$.

Determinare

1. L'intensità della corrente circolante (il suo modulo), i, e il verso (se orario e antiorario) giustificando la risposta

   $i =$ ....

2. Le forze esterne $\vec{F}_{ext1}$, $\vec{F}_{ext2}$ che debbono essere applicate per mantenere rispettivamente v_1 e v_2 costanti.

   $\vec{F}_{ext1} =$ .... $\vec{F}_{ext2} =$ ....

3. Determinare la potenza necessaria a mantenere in moto rispettivamente la sbarretta 1, P_1, e la sbarretta 2, P_2.

   $P_1 =$ .... $P_2 =$ ....

Dati: $R = 2\ \Omega$, $l = 1.3\ m$, $B = 0.5\ T$, $v_1 = 8\ m/s$, $v_2 = 3\ m/s$.

1. prima di tutto dobbiamo calcolare il flusso di campo magnetico, per Gauss:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint B\,dA = B \oint dA = Bl\,x(t) = Bl(x_2 + tv_2 - tv_1)$$

ove $x(t) = x_2(t) - x_1(t) = x_2 + v_2 t - v_1 t = x_2 + t(v_2 - v_1)$

adesso per Faraday: $\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -Blv_2 + Blv_1 = Bl(v_1 - v_2)$

e quindi la corrente varrà $i = \frac{fem}{2R} = \frac{Bl}{2R}(v_1 - v_2) = 0.8A$

e circolerà in verso antiorario per la regola della mano destra, in modo tale che il campo magnetico generato da essa sia opposto alla variazione di flusso di campo magnetico (che in questo caso aumenta); ciò è confermato anche dal segno della fem

2. la corrente i indotta fa sì che le sbarrette siano soggette alla forza di Lorentz, che vale:

$\vec{F}_1 = i\vec{l} \times \vec{B} = -ilB\hat{x}$ e $\vec{F}_2 = i\vec{l} \times \vec{B} = ilB\hat{x}$ con $ilB = 0.52N$

quindi $\vec{F}_{ext1} = -\vec{F}_1 = ilB\hat{x}$ e $\vec{F}_{ext2} = -\vec{F}_2 = -ilB\hat{x}$

attenzione: le due forze non si annullano dato che sono applicate a 2 corpi diversi

3. semplicemente:

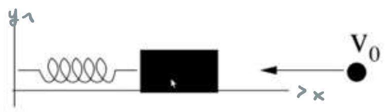
$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \vec{F}_{ext1} \cdot \vec{v}_1 = ilBv_1 = 4.2W \\ P_2 &= \underbrace{\vec{F}_{ext2}}\cdot \vec{v}_2 = -ilBv_2 = -1.6W \end{aligned}\right\}$$ la loro somma è $P = 2Ri^2$ dissipata per effetto Joule

quelle necessarie a fare in modo che le due sbarre non sbattano! ⟵

8-09-19

venerdì 30 aprile 2021 16:30

Esercizio 1



Una massa $M = 1\ kg$, assimilabile ad un punto materiale, oscilla su un piano orizzontale senza attrito sotto l'azione della forza elastica esercitata da una molla di costante elastica $k = 300\ N/m$. Una massa $m = 0.1\ kg$, anch'essa assimilabile ad un punto materiale, che si muove (vedi figura) con velocità orizzontale $v_0 = 30\ m/s$ sul piano, urta la massa M nel punto di massima elongazione della molla, corrispondente all'ampiezza massima di oscillazione $A_0 = 0.5\ m$. Subito dopo l'urto, la massa m resta attaccata ad M. Si calcoli:

1. La velocità del sistema $M + m$ subito dopo l'urto, v'

   $v' =$ ....

2. La quantità di energia dissipata nell'urto, E_{diss}

   $E_{diss} =$ ....

3. L'ampiezza massima delle oscillazioni dopo l'urto, A_{max}

   $A_{max} =$ ....

$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \phi)$

$v(t) = -A_0 \omega \sin(\omega t + \phi)$

$a(t) = -A_0 \omega^2 \cos(\omega t + \phi)$

urto anelastico
- $E \neq cost$
- $\vec{p} = cost$ ⟵ non ci sono forze impulsive

1. $P_i = P_f$

$m v_0 = (m+M) v' \longrightarrow v' = \frac{m v_0}{m+M} = 2.7\ m/s$

2. $K_i = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad K_f = \frac{1}{2}(m+M) v'^2 \qquad E_{diss} = K_f - K_i = \frac{1}{2}\left(m v_0^2 - \cancel{(m+M)} \frac{(m v_0)^2}{(m+M)^{\cancel{2}}}\right) = 41\ J$

3. $\underline{x(t=0)} = A\cos(\omega 0 + \phi) = A\cos(\phi) = \underline{A_0} \longrightarrow \cos(\phi) = \frac{A_0}{A}$

⚠ $\underline{v(t=0)} = -A\omega \sin(\omega 0 + \phi) = -A\omega \sin(\phi) = \underline{v'} \longrightarrow \sin(\phi) = \frac{v'}{-A\omega}$

$\left[\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1 \longrightarrow \left(\frac{A_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{v'}{-A\omega}\right)^2 = 1 \longrightarrow \frac{A_0^2}{A^2} + \frac{v'^2}{A^2\omega^2} = 1 \longrightarrow \frac{A^2}{A_0^2} + \frac{A^2\omega^2}{v'^2} = 1\right.$

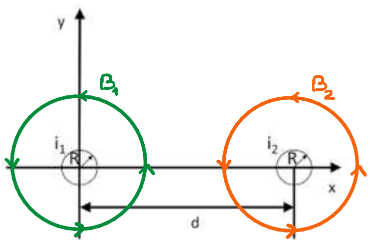
$\left[\omega^2 = \frac{K}{(m+M)} \longrightarrow \frac{A_0^2 v'^2 A^2 + A_0^2 v'^2 A^2 \omega^2}{A_0^2 v'^2} = 1 \longrightarrow \frac{\cancel{A_0^2 v'^2}(A^2 + A^2\omega^2)}{\cancel{A_0^2 v'^2}} = 1 \longrightarrow A^2(1+\omega^2) = 1\right.$

$\longrightarrow A^2 = \frac{1}{1+\omega^2} \longrightarrow A = \sqrt{\frac{1}{1+\omega^2}}$

3b. dopo l'urto, $E_{mecc} = cost \longrightarrow E_i = E_f$

$E_i = \frac{1}{2}(m+M)v'^2 + \frac{1}{2} K A_0^2 = \frac{1}{2} K A_{max}^2 \longrightarrow A_{max} = \sqrt{\frac{(m+M)v'^2}{K} + A_0^2}$

Esercizio 2



Consideriamo due fili di materiale conduttore paralleli, di raggio R, posti nel vuoto, con gli assi distanti d e percorsi dalla stessa corrente $i_1 = i_2 = i$ in direzione dell'asse z (vedi figura) e con lo stesso verso (ortogonale e uscente dal foglio). Assumendo l'asse x come indicato in figura:

1. Determinare l'espressione del campo di induzione magnetica nella regione (A) dell'asse x (y=z=0) corrispondente a $0 \leq x \leq R$, $\vec{B}_A(x)$ e calcolare le componenti del campo quando $x = 0$, $\vec{B}_A(0)$

   $\vec{B}_A(x) =$ .... $\vec{B}_A(0) =$ ....

2. Si determini l'espressione del campo di induzione magnetica nella regione (B) dell'asse x (y=z=0), compresa tra i due fili, corrispondente a $R \leq x \leq d - R$, $\vec{B}_B(x)$, e calcolare e componenti del campo quando $x = \frac{d}{2}$, $\vec{B}_B\left(\frac{d}{2}\right)$

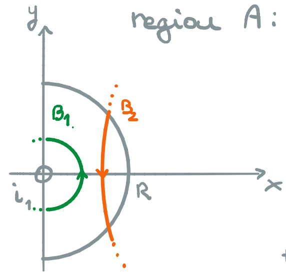
   $\vec{B}_B(x) =$ .... $\vec{B}_B\left(\frac{d}{2}\right) =$ ....

3. Si determini l'espressione del campo di induzione magnetica nella regione (C) dell'asse x (y=z=0), corrispondente a $x \geq d + R$, $\vec{B}_C(x)$

   $\vec{B}_C(x) =$ ....

Dati: $d = 4\ cm$, $i = 4\ A$.

1.



regione A: il campo magnetico è dato dalla somma vettoriale del campo interno al filo B_1 del primo filo ed esterno al filo B_2 del secondo filo.

Il verso dei due campi è ottenuto dalla regola della mano dx

"Kono Dio da" verso la i, il campo magnetico diretto come si chiude il palmo.

Dal th. di Ampere, il campo B_1 all'interno del filo vale:

$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \oint B_1\, dl = B_1 (2\pi r) = \mu_0 i'$

$i' = JA' = \underbrace{\frac{i}{A}}_{J} A' = i \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = i \frac{x^2}{R^2}$

$B_1(x) = \frac{\mu_0 i x^2}{2\pi x R^2} = \frac{\mu_0 i x}{2\pi R^2} \qquad \vec{B}_1(x) = B_1(x)\hat{y}$

Sempre dal th. Ampere, il campo B_2 vale:

$\oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{s} = \oint B_2\, ds = B_2[2\pi\underset{\smile}{(d-x)}] = \mu_0 i_{conc} = \mu_0 i \longrightarrow B_2(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi(d-x)} \qquad \vec{B}_2(x) = -B_2(x)\hat{y}$

B_2 è originato da i_2 che è a distanza d

B_2 è originato da i_2 che è a distanza d $\forall x: 0 \le x \le R$

Infine: $\vec{B}_A(x) = \vec{B}_1(x) + \vec{B}_2(x) = (B_1(x) - B_2(x))\hat{y} = \left(\frac{\mu_0 i x}{2\pi R^2} - \frac{\mu_0 i}{2\pi(d-x)}\right)\hat{y} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{x}{R^2} - \frac{1}{d-x}\right)\hat{y}$

$\vec{B}_A(0) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\cancel{\frac{x}{R^2}}^{\,0} - \frac{1}{d-\cancel{x}^{\,0}}\right)\hat{y} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d}\hat{y} = -2 \cdot 10^{-5}\, T\, \hat{y}$

a te serve la distanza dal centro di chi ha generato B_k in funzione di x.

2. Nella regione B i campi sono ancora discordi, per cui:

- dal th. Ampere, il campo B_1 all'esterno del filo vale: $\vec{B}_1(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}\hat{y}$
- sempre da Ampere, il campo B_2 all'esterno del filo vale: $\vec{B}_2(x) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi(d-x)}\hat{y}$

per $R \le x \le d-R$

Quindi $\vec{B}_B(x) = \vec{B}_1(x) + \vec{B}_2(x) = (B_1(x) - B_2(x))\hat{y} = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi x} - \frac{\mu_0 i}{2\pi(d-x)}\right)\hat{y} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d-x}\right)\hat{y}$

$\vec{B}_B\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{2}{d} - \frac{1}{d-\frac{d}{2}}\right)\hat{y} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{2}{d} - \frac{1}{d/2}\right)\hat{y} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\cancel{\frac{2}{d} - \frac{2}{d}}^{\,0}\right)\hat{y} = 0$

3. Nella regione C i campi sono concordi:

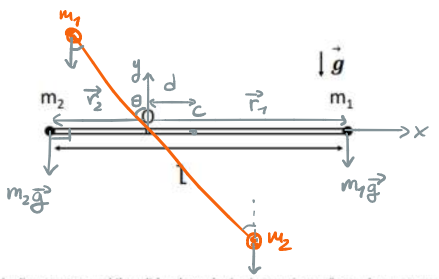
- $\vec{B}_1(x)$ come quello della regione B
- $\vec{B}_2(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi(x-d)}\hat{y}$

$\vec{B}_C(x) = \vec{B}_1(x) + \vec{B}_2(x) = (B_1(x) + B_2(x))\hat{y} = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi x} - \frac{\mu_0 i}{2\pi(\underline{x-d})}\right)\hat{y} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\underline{x-d}}\right)\hat{y}$

8-06-18

sabato 1 maggio 2021 23:32

Esercizio 1



Un'asta rigida di massa trascurabile e di lunghezza l, ai cui estremi sono fissate due masse puntiformi m_1 e m_2, è libera di ruotare in un piano verticale intorno a un asse orizzontale fisso passante per il punto O che dista d dal centro dell'asta.
Il sistema è posto inizialmente in posizione orizzontale (vedi figura) e lasciato cadere con velocità iniziale nulla.

1. Calcolare il momento delle forze, $\vec\tau$ agente sul sistema rispetto al polo O, e il verso di rotazione (orario o antiorario) del sistema quando esso viene lasciato cadere motivando la risposta
   $\vec\tau$ = ... *verso di rotazione* = ...

2. Con le stesse condizioni iniziali, calcolare la velocità angolare della sbarra, ω, quando questa raggiunge la posizione verticale
   ω = ...

3. Calcolare il periodo delle oscillazioni T attorno alla posizione verticale, assumendo piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio
   T = ...

[$m_1 = 400\ g$, $m_2 = 700\ g$, $l = 1.5\ m$, $d = 20\ cm$]

1. $\vec\tau_O^{ext} = \vec r_2 \times m_2\vec g - \vec r_1 \times m_1 \vec g$

$I\dot\omega = r_2 m_2 g - r_1 m_1 g$

$I\dot\omega = (\frac{l}{2} - d)m_2 g - (\frac{l}{2}+d)m_1 g$

$\vec\tau_O^{ext} > 0 \longrightarrow$ verso antiorario

2. $I_O = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m_1(\frac{l}{2}+d)^2 + m_2(\frac{l}{2}-d)^2$

$E = cost \longrightarrow E_i = 0 = \frac{1}{2}I\omega^2 - \overset{mgh}{(\frac{l}{2}-d)m_2 g} + \overset{mgh}{(\frac{l}{2}+d)m_1 g} = E_f$

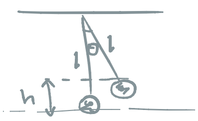
$\longrightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 = (\frac{l}{2}-d)m_2 g - (\frac{l}{2}+d)m_1 g \longrightarrow I\omega^2 = 2g[(\frac{l}{2}-d)m_2 - (\frac{l}{2}+d)m_1]$

$\longrightarrow \omega^2 = \frac{2g[(\frac{l}{2}-d)m_2 - (\frac{l}{2}+d)m_1]}{I} \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g[(\frac{l}{2}-d)m_2 - (\frac{l}{2}+d)m_1]}{m_1(\frac{l}{2}+d)^2 + m_2(\frac{l}{2}-d)^2}}$

3. $I\dot\omega = -(r_2 m_2 g - r_1 m_1 g)\sin\theta \xrightarrow[\text{oscillazioni}]{\text{piccole}} \sin\theta \simeq \theta \longrightarrow I\ddot\theta = -(r_2 m_2 g - r_1 m_1 g)\theta$
$\dot\omega = \ddot\theta$

$\longrightarrow \ddot\theta = -\Omega^2\theta \longrightarrow \Omega = \sqrt{\frac{(r_2 m_2 g - r_1 m_1 g)}{I}}$ $\qquad \Omega = \frac{K}{m}$

$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1(\frac{l}{2}+d)^2 + m_2(\frac{l}{2}-d)^2}{(r_2 m_2 g - r_1 m_1 g)}} = 21.5s$



$\frac{d}{dt}E = 0 \longrightarrow \Delta U = \Delta K$ $\qquad (m_1+m_2)g d_{CM}(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}I\omega^2 = cost$

$\underset{\omega = \dot\theta}{\longrightarrow}$ $M_T g d_{CM}(-\sin\theta)\cancel{\dot\theta} - I\cancel{\dot\theta}\ddot\theta = 0 \longrightarrow -M_T g d_{CM}\sin\theta - I\ddot\theta = 0$

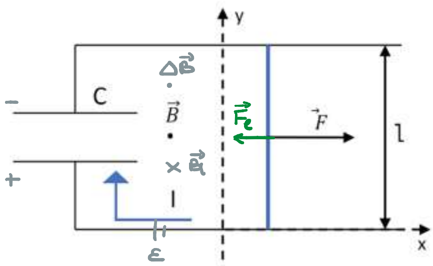
$\underset{\sin\theta \simeq \theta}{\longrightarrow} -M_T g d_{CM}\theta - I\ddot\theta = 0 \longrightarrow -I\lambda^2 - M_T g d_{CM} = 0 \longrightarrow \lambda = \pm\underbrace{\sqrt{\frac{M_T g d_{CM}}{I}}}_{\dot\theta}\, i$

$\longrightarrow T = \frac{2\pi}{\dot\theta} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{M_T g d_{CM}}} =$

$d_{CM} = \frac{m_1(\frac{l}{2}+d) + m_2(\frac{l}{2}-d)}{m_1+m_2}$

$= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1(\frac{l}{2}+d)^2 + m_2(\frac{l}{2}-d)^2}{\cancel{M_T} g\frac{[m_1(\frac{l}{2}+d) + m_2(\frac{l}{2}-d)]}{\cancel{m_1+m_2}}}}$

Esercizio 2



Il circuito illustrato in figura è costituito da due conduttori paralleli che giacciono su un piano orizzontale, distanti $l = 50\ cm$, che formano due binari sui quali può scorrere senz'attrito una sbarretta anch'essa conduttrice di massa $m = 40\ g$ e da un condensatore di capacità $C = 500\ \mu F$. La resistenza di tutti i conduttori in gioco è trascurabile e il circuito è immerso in una zona di campo magnetico uniforme B= 1 T ortogonale al piano orizzontale.
Al tempo t=0 viene applicata una forza meccanica costante $F = 10^{-2}\ N$ parallela all'asse x che mette in moto la sbarretta.

1. Determinare l'espressione della corrente I indotta che carica il condensatore in funzione dell'accelerazione, a della sbarretta. Assumere che la fem indotta si stabilisce instantaneamente ai capi della sbarretta.
   $I(a) =$ ....
2. Determinare la forza totale agente sulla sbarretta $\vec{F}_s$ e descrivere e motivare il tipo di moto della sbarretta (moto uniformente accelerato, moto vario, moto uniforme, ecc...)
   $\vec{F}_s =$ ....
3. Calcolare la carica del condensatore al tempo $t = 2\ s$, $Q(2s)$, assumendo al tempo t=0 il condensatore scarico e la velocità della sbarretta nulla
   $Q(2s) =$ ....

1. per trovare $I(a)$ abbiamo bisogno del flusso di campo magnetico attraverso il circuito, per Gauss:

$$\Phi_B = \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = \oint B\,dA = B\oint dA = Bl\,x(t) = Bl(x_0 + \tfrac{1}{2}at^2)$$

ove $x(t) = x_0 + \cancel{v_0}^{\,0} t + \frac{1}{2}at^2$ ove $a = \frac{F}{m} = \frac{1}{4}$

quindi, per Faraday:

$\mathcal{E}(t) = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -Blat$, il flusso aumenta, quindi la corrente girerà in verso orario cosicché il campo magnetico indotto si opponga a questa variazione (Legge di Lenz), ciò è confermato anche dal segno meno della fem.

Quindi $Q(t) = C\Delta V(t) = C\mathcal{E}(t)$

e $I(a) = \frac{dQ(t)}{dt} = C\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = -CBla = 6.25\cdot 10^{-5}\,A$

2. dato che si è generata una corrente, la sbarretta risentirà anche della forza di Lorentz, che per la regola della mano destra, è diretta come $-\hat{x}$, e vale:

$$\vec{F}_e = I(a)\vec{L}\times\vec{B} = \underline{-I(a)LB\,\hat{x}} = \underline{-CB^2l^2a\,\hat{x}} = -3.125\cdot 10^{-5}\,N\,\hat{x}$$

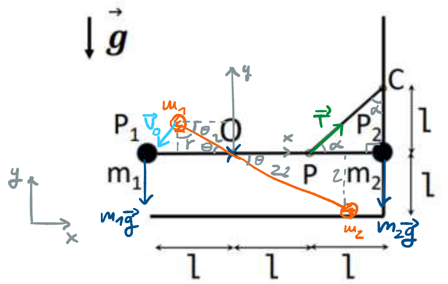
la forza totale agente sulla sbarretta sarà $\vec{F}_s = \vec{F}_e + \vec{F} = (-CB^2l^2a + ma)\,\hat{x} = a(-CB^2l^2 + m)\,\hat{x} = 10^{-2}\,N\,\hat{x}$
il moto è uniformemente accelerato verso $\hat{x}$.

3. molto semplicemente $Q(2s) = C\mathcal{E}(2s) = CBlat^* = 1.25\cdot 10^{-4}\,C$

14-09-18

domenica 2 maggio 2021 16:44

Esercizio 1



Due punti materiali di massa $m_1 = m$ e $m_2 = 2m$ sono collegati da un'asta rigida di massa trascurabile e lunghezza 3l. L'asta può ruotare, nel piano verticale, intorno al punto O, che si trova a distanza l dal corpo di massa m_1, come in figura. Un filo inestensibile collega il punto P al punto C. Entrambi P e C (vedi figura) sono ad una distanza l dal corpo di massa m_2. In questa configurazione l'asta risulta in equilibrio. Determinare:

1. La reazione del vincolo in O, $\vec{R}_O$.
   $\vec{R}_O =$ ....
2. Nell'ipotesi che ad un certo istante il filo si spezzi, calcolare la velocità angolare dell'asta, ω, un istante prima dell'urto con il piano orizzontale posto a distanza l dalla posizione di equilibrio dell'asta.
   $\omega =$ ....
3. Nell'ipotesi che, a causa dell'urto, le palline si stacchino istantaneamente dall'asta, calcolare il tempo (t^*) impiegato dalla seconda pallina (quella connessa all'estremo che non ha urtato il piano) per raggiungere il piano orizzontale dopo l'urto (trascurare l'effetto dell'aria).
   $t^* =$ ....

(dati: l=20 cm; m=50 g; g=10 m/s^2)

$$\vec{R}_0 = -\frac{3mg}{\sin\alpha}\cos\alpha\,\hat{x} = \left(-\frac{3mg}{\sin\alpha}\cos\alpha,\ 0\right)$$

1.

equilibrio $\begin{cases} \sum \vec{F}^{ext} = 0 \\ \sum \vec{\tau}^{ext} = 0 \end{cases}$ $\quad 2\alpha + \frac{\pi}{2} = \pi \rightarrow \alpha = 45°$

$m\vec{g} + 2m\vec{g} + \vec{T} + \vec{R}_0 = 0 \quad$ A

$l m g - 2l\,2mg + l\,T\sin\alpha = 0 \quad$ B

da B: $\cancel{l}\,T\sin\alpha = -\cancel{l}\,mg + 4\cancel{l}\,mg$

$\longrightarrow T = \frac{3mg}{\sin\alpha}$

da A $\begin{cases} (-mg - 2mg + T\sin\alpha + R_0^y)\,\hat{y} = 0 & A_1 \\ (T\cos\alpha + R_0^x)\,\hat{x} = 0 & A_2 \end{cases}$

da A_2: $R_0^x = -T\cos\alpha = -\frac{3mg}{\sin\alpha}\cos\alpha$

da A_1: $R_0^y = m_1 g - m_2 g - T\sin\alpha$

$= g(m_1 + m_2) - \frac{g\,3m}{\cancel{\sin\alpha}} \cdot \cancel{\sin\alpha}$

$= \cancel{g\,3m} - \cancel{g\,3m} = 0$

2.

$E = cost \longrightarrow E_i = K_i + U_i = 0 = E_f = K_f + U_f = \frac{1}{2}I\omega^2 + m_1 g l\sin\theta - m_2 g\,2l\sin\theta = 0$

$\longrightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mgl - 2mgl = 0$

$I = m_1 l^2 + m_2 4l^2 = ml^2 + 8ml^2$

$\longrightarrow I\omega^2 = -mgl + 4mgl = 3mgl$

$l = 2l\sin\theta \longrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\longrightarrow \omega^2 = \frac{3mgl}{I} = \frac{3\cancel{m}g\cancel{l}}{\cancel{m}l^{\cancel{2}} + 8\cancel{m}l^2} = \frac{3g}{9l} = \frac{1}{3}\frac{g}{l}$

$\longrightarrow \omega = -\sqrt{\frac{1}{3}\frac{g}{l}}\ \hat{z}$

3.

metto lo 0 delle y nel pavimento

moto unif. accel. $\longrightarrow y(t^*) = y_0 + V_0^y t^* - \frac{1}{2}g t^{*2} = 0$

$\frac{1}{2}l + l + \omega l\cos(\theta)t^* - \frac{1}{2}g t^{*2} = 0$

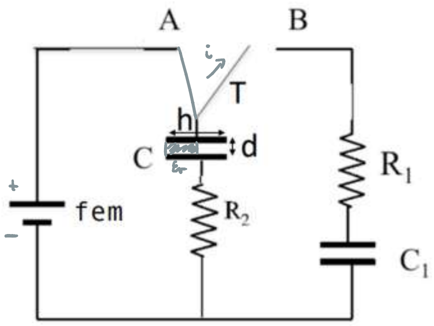
$-\frac{1}{2}g t^{*2} + \omega l\cos(\theta)t^* + \frac{3}{2}l = 0$

$\longrightarrow t^* = \frac{-\omega l\cos(\theta) \pm \sqrt{(\omega l\cos(\theta))^2 + 3gl}}{-g} = \dots$

$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{l} = \omega l(\cos\gamma, \sin\gamma, 0)$

$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta \longrightarrow V_{0y} = \omega l\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \omega l\cos(\theta)$

Esercizio 2



Un condensatore piano parallelo con armature di lati $h = 5\ mm$ e $l = 4\ mm$ e distanti $d = 3\ mm$ è riempito per metà della sua altezza ($h/2$) di un dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4.1$

1. Calcolare la capacità equivalente C_{eq} del condensatore C
   $C_{eq} =$ ....

Questo condensatore di capacità C_{eq} viene quindi inserito nel circuito in figura ($C_1 = 3\ nF$, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, $fem = 4\ V$) con l'interruttore T chiuso sul punto A, e si aspetta un tempo molto lungo ($t \gg \tau$).

2. Calcolare la carica (Q) e l'energia immagazzinata (U) nel capacitore C.
   $Q =$ .... $U =$ ....

Successivamente, l'interruttore è spostato sulla posizione B, e si aspetta ancora un tempo molto lungo ($t \gg \tau'$). Calcolare in questa configurazione:

3. la carica sui capacitori C (Q_C) e C_1 (Q_{C_1}) e le rispettive energie (U_C e U_{C_1}) in essi immagazzinate.
   $Q_C =$ .... $Q_{C_1} =$ .... $U_C =$ .... $U_{C_1} =$ ....

Dati: $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$

1. il condensatore può essere schematizzato come 2 condensatori piani in parallelo di superficie $S = \frac{1}{2} lh$, il primo di costante dielettrica ε_0 e l'altro $\varepsilon_0 \varepsilon_r$, di conseguenza:

$$C_{eq} = C_v + C_d = \frac{S}{d}\varepsilon_0 + \frac{S}{d}\varepsilon_r\varepsilon_0 = 1.5 \cdot 10^{-13}\ F$$

2. il circuito è un circuito RC, con soluzione:

$$Q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad \text{e per } t \gg T: \quad Q(t) = C\mathcal{E} = 6.02 \cdot 10^{-13}\ C$$

l'energia immagazzinata sarà quindi $U = \frac{1}{2} C \Delta V_c^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = 1.2 \cdot 10^{-12}\ J$

3. la carica si conserva: $Q = Q_c + Q_{c_1} = C\mathcal{E}$ sempre

da cui $Q = C\Delta V_c + C_1 \Delta V_{c_1} = C\mathcal{E}$ $\left(C = \frac{Q}{\Delta V} \rightarrow Q = C\Delta V\right)$

e, dato che collego due conduttori (i capacitori): $\Delta V_c = \Delta V_{c_1}$

e quindi $\frac{Q_c}{C} = \frac{Q_{c_1}}{C_1} \longrightarrow Q_c = C\frac{Q_{c_1}}{C_1}$

inoltre $Q = \Delta V (C + C_1) = C\mathcal{E} \longrightarrow \Delta V = \frac{C\mathcal{E}}{C + C_1} = \frac{Q_c}{C} = \frac{Q_{c_1}}{C_1}$

infine $Q_c = \frac{C^2\mathcal{E}}{C + C_1} = 3.04 \cdot 10^{-17}\ C$

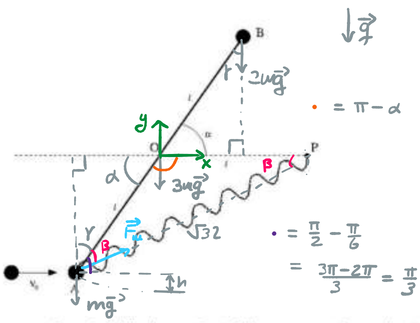
e $Q_{c_1} = \frac{C_1 C\mathcal{E}}{C + C_1} = 6 \cdot 10^{-13}\ C$

e $U_c = \frac{1}{2} Q_c^2 C = 3.03 \cdot 10^{-21}\ J$ $\quad U_{c_1} = \frac{1}{2} Q_{c_1}^2 C_1 = 6.09 \cdot 10^{-17}\ J$

1-02-19

martedì 4 maggio 2021   00:09

Esercizio 1



$\bullet = \pi - \alpha$

$\bullet = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi - 2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

Due masse, $m_A = m$ e $m_B = 2m$, assimilabili a due punti materiali, sono connesse da una sbarretta di massa $3m$ e lunghezza $2l$, incernierata nel suo punto medio O, sul piano verticale. La massa m_A è collegata al punto P, che si trova ad una distanza l da O e alla stessa quota di O, tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile. Inizialmente il sistema è in equilibrio nella configurazione di figura con angolo $\alpha = \pi/3$.

1. Calcolare la costante elastica della molla, k.

$k = \dots\dots\dots\dots$

Al tempo $t = 0$ un punto materiale di massa m colpisce il punto di massa m_A con velocità v_0, orizzontale e diretta verso destra. L'urto è perfettamente anelastico.

2. Calcolare la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto, ω, e l'energia dissipata nell'urto, E_{diss}.

$\omega = \dots\dots\dots\dots \quad E_{diss} = \dots\dots\dots\dots$

3. Determinare la velocità, $\vec{v}_A$ con cui il punto materiale A passa dall'asse orizzontale, nel moto successivo all'urto.

$\vec{v}_A = \dots\dots\dots\dots$

Dati: $m = 100\ g$, $l = 50\ cm$, $v_0 = 5\ m/s$, $g = 10\ m/s^2$.

1.

equilibrio $\begin{cases} \sum \vec{F}^{ext} = 0 \\ \sum \vec{\tau}^{ext} = 0 \end{cases}$ $\qquad x = \sqrt{3}lk$

$\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \gamma \longrightarrow \gamma = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{-3\pi - 2\pi + 6\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

$\cancel{\pi} = \cancel{\pi} - \alpha + 2\beta \longrightarrow 2\beta = \alpha \longrightarrow \beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6}$

$mg + 2mg + 3mg - F_m - R_o = 0$

$\longrightarrow 6mg - F_m - R_o = 0$

$-2l\,mg \sin\frac{\pi}{6} + l\,mg\sin\frac{\pi}{6} + l\,F_m \sin\frac{\pi}{6} = 0$

$\longrightarrow -\frac{1}{2}l\,mg + \frac{\sqrt{3}}{2}l^2 k = 0$

$\longrightarrow \sqrt{3}\,l^{\cancel{2}} k = \cancel{l}\,mg$

$\longrightarrow k = \frac{mg}{\sqrt{3}l}$

2.

urto anelastico $\longrightarrow E \neq cost$, $\vec{L}_o = cost \longrightarrow \vec{L}_i^{\,o} = \vec{L}_f^{\,o} \longrightarrow m v_0 \sin\frac{\pi}{3} = I\omega \longrightarrow \omega = \frac{\sqrt{3}\,l\,m v_0}{2I} = \frac{\sqrt{3}\cancel{l}\cancel{m}v_0}{10\cancel{m}l^{\cancel{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{10}\frac{v_0}{l}$

$I = ml^2 + 2ml^2 + ml^2 + \frac{1}{\cancel{12}}\cancel{3m4}\,l^2 = 5ml^2$

$E_{diss} = -\Delta E = -\left(\frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}mv_0^2\right) = -\frac{1}{2}\left(5ml^2\left(\frac{\sqrt{3}}{10}\frac{v_0}{l}\right)^2 - mv_0^2\right)$

3.

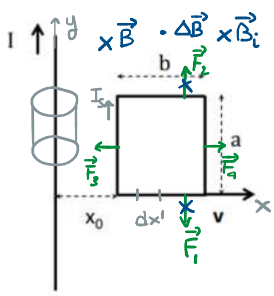
$\nearrow$ e $U_i = -U_f$

dopo l'urto : $E = cost \longrightarrow E_i = \cancel{\frac{1}{2}}I\omega^2 + \cancel{\frac{1}{2}}k(\sqrt{3}l)^2 = \cancel{\frac{1}{2}}I\omega'^2 = E_f$

asse orizzontale: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \longrightarrow \omega'^2 = \omega^2 + \frac{k(\sqrt{3}l)^2}{I} \longrightarrow \omega' = \sqrt{\omega^2 + \frac{k(\sqrt{3}l)^2}{I}}$

$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{l}$

Esercizio 2



Un filo conduttore ideale infinitamente lungo, è percorso da una corrente costante I nel verso indicato in figura. Un avvolgimento piatto di N spire di forma rettangolare con lati a e b indeformabile, giace nello stesso piano del filo, a distanza x_0, come in figura. La resistenza dell'avvolgimento di spire è R. Ad un certo istante ($t = 0$) l'avvolgimento di spire viene messo in moto con velocità costante v a partire dalla posizione x_0 nella direzione indicata in figura. Si trascuri il coefficiente di autoinduzione dell'avvolgimento di spire.

1. Calcolare la corrente che circola nell'avvolgimento di spire, $I_s(t')$, all'istante $t = t'$, e determinarne il verso (orario o antiorario) motivando la risposta.

$I_s(t') = \dots\dots\dots\dots$

2. Determinare la forza istantanea $\vec{F}(t')$ all'istante t', che deve essere applicata all'avvolgimento per mantenerlo in moto con velocità costante.

$\vec{F}(t') = \dots\dots\dots\dots$

3. Determinare la potenza dissipata nell'avvolgimento al tempo $t = t'$, $P(t')$

1. Il campo magnetico del filo ha simmetria cilindrica, per cui dal th. Ampere esso vale:

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \oint B\,ds = B\oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 i_{int} \longrightarrow B(x') = \frac{\mu_0 I}{2\pi x'}$

il flusso del campo magnetico è variabile (spira in movimento) e vale:

$\Phi(t) = \int_x^{x+b} B(x')\,dA = \int_x^{x+b} B(x')\,dx'a = \frac{\mu_0 I}{2\pi}a\int_x^{x+b}\frac{1}{x'}dx' = \frac{\mu_0 I}{2\pi}a\left[\ln x'\right]_x^{x+b}$

$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}a\left[\ln(x+b) - \ln x\right] = N\frac{\mu_0 I}{2\pi}a\ln\left(\frac{x+b}{x}\right) \longleftarrow$ spire

l'avvolgimento è mantenuto in modo a velocità costante secondo la legge

$\boxed{x(t) = x_0 + vt = x}$

$fem = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(N\frac{\mu_0 I}{2\pi}a\ln\left(\frac{x+b}{x}\right)\right) = -N\frac{\mu_0 I}{2\pi}a\frac{\cancel{x}}{x+b}\,\frac{\dot{x}x - x(\dot{x}+b)}{x^{\cancel{2}}}$

$= -N\frac{\mu_0 I}{2\pi}a\frac{\cancel{x} - (\cancel{x}+b)}{x(x+b)}\dot{x} = N\frac{\mu_0 I}{2\pi}a\frac{bv}{x(x+b)} = N\frac{\mu_0 I}{2\pi}a\frac{bv}{(x_0+vt)(x_0+vt+b)}$

$I(t') = \frac{fem(t')}{R} = \dots$

2. Determinare la forza istantanea $\vec{F}(t')$ all'istante t', che deve essere applicata all'avvolgimento per mantenerlo in moto con velocità costante.

$\vec{F}(t') = \ldots\ldots\ldots\ldots$

3. Determinare la potenza dissipata nell'avvolgimento al tempo $t = t'$, $P(t')$

$P(t') = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Dati: $I = 450\ A$, $N = 10000$, $a = 8\ cm$, $b = 5\ cm$, $R = 1\ \Omega$, $v = 0.5\ m/s$, $x_0 = 4\ mm$, $t' = 2\ s$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ T/m = 1.26 \times 10^{-6}\ T/m$.

$$= -N\frac{\mu_0 I}{2\pi} a \frac{[illegible]}{x(x+b)}\, x = N\frac{\mu_0 I}{2\pi} a \frac{[illegible]}{x(x+b)} = N\frac{\mu_0 I}{2\pi} a \frac{[illegible]}{(x_0+vt)(x_0+vt+b)}$$

$$I_s(t') = \frac{fem(t')}{R} = 1.7\,mA$$

2. per mantenere la velocità costante si deve applicare una forza uguale ed opposta alla forza di Lorentz risultante presente in $\hat{x}$ (che ha direzione opposta a quella del moto)

$$\vec{F}_2 = N I_s \vec{b} \times \vec{B} \longrightarrow F_2 = N I_s b B(x)\,\hat{y}$$
$$\vec{F}_1 = N I_s \vec{b} \times \vec{B} \longrightarrow F_1 = N I_s b B(x)\,\hat{y}$$

si annullano sempre perché hanno distanza uguale dal filo (ovvero dal campo magnetico)

$$\vec{F}_R(t) = (F_4 - F_3)\,\hat{x} = -(F_3 - F_4)\,\hat{x}$$

$$F_R(t) = F_3 - F_4 = N I_s a B(x) - N I_s a B(x+b) = N I_s a \left(B(x) - B(x+b)\right) = N I_s a \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi x} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+b)}\right) = N I_s a \frac{(x+b)\mu_0 I - x\mu_0 I}{2\pi x(x+b)}$$

$$= N I_s a \mu_0 I \frac{\cancel{x}+b-\cancel{x}}{2\pi x(x+b)} = \frac{N I_s a \mu_0 I b}{2\pi(x_0+vt)(x_0+vt+b)}$$

$$\vec{F}_R(t') = -\frac{N I_s(t') a \mu_0 I b}{2\pi(x_0+vt)(x_0+vt+b)}\,\hat{x} = -5.8\cdot 10^{-6}N\,\hat{x} = (-5.8\cdot 10^{-6}, 0, 0)\,N$$

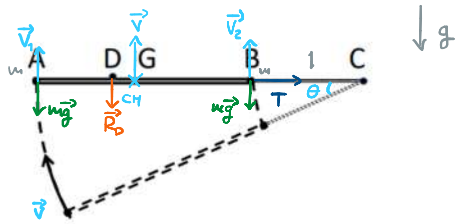
$$\vec{F}(t') = (5.8\cdot 10^{-6}, 0, 0)\,N$$

3. $P(t') = I_s(t')R = 1.7\cdot 10^{-6}\,W$

13-01-20

martedì 11 maggio 2021 00:46

Esercizio 1



Con riferimento alla figura, un'asta rigida di lunghezza $2l$ (AB), è appoggiata su un piano orizzontale (la forza di gravità è ortogonale al piano) privo di attrito ed è collegata a un punto fisso C di questo piano mediante una corda BC, flessibile, inestensibile, di massa trascurabile e di lunghezza l. Due punti materiali di ugual massa m sono posti negli estremi A e B dell'asta e sono solidali con essa, la massa dell'asta è trascurabile rispetto a m. L'asta ruota con la corda tesa intorno ad un asse verticale passante per C con una velocità angolare costante di modulo ω. Ad un certo istante viene posto in un punto D un chiodo di dimensioni trascurabili su cui l'asta va ad urtare. Dopo l'urto, perfettamente anelastico, l'asta rimane in quiete. Calcolare:

1. La tensione della corda (T) prima dell'urto

   $T =$ ....

2. L'energia meccanica persa nell'urto (ΔE)

   $\Delta E =$ ....

3. La distanza tra D e C (DC)

   $DC =$ ....

Dati: $m = 0.3\ kg$, $\omega = 2\pi\ s^{-1}$, $l = 30\ cm$

1. $E = cost$, moto circolare uniforme

· $v = r\omega = 2l\omega$

· $T = 2ma_c = 2m\frac{v^2}{r} = 2m\frac{v^2}{2l} = m\frac{4l^{\cancel{2}}\omega^2}{\cancel{l}} = 4ml\omega^2$

2. $\Delta E = E_i - E_f = \frac{1}{2}I\omega^2 - 0 = \frac{1}{2}I_c\omega^2 = 5ml^2\omega^2$

$I_c = ml^2 + m9l^2 = 10ml^2$

no mgh durante l'urto e' trascurabile

3. $\vec{L}_{D_i} = \underbrace{mv_1(3l - x)}_{\vec{DA} \times m\vec{v}_1} + \underbrace{mv_2(x - l)}_{\vec{DB} \times m\vec{v}_2} = 0 = \vec{L}_{Df}$

$-m3l\omega(3l - x) + ml\omega(x - l) = 0$

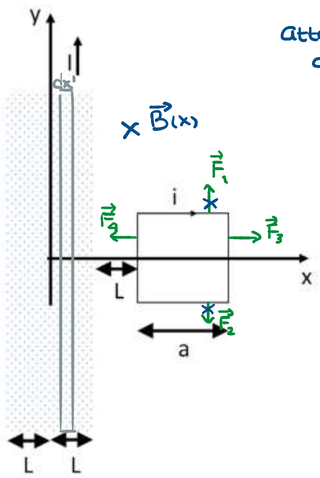
$-9l^2m\omega + 3lm\omega x + m l\omega x - ml^2\omega = 0$

$-10l^{\cancel{2}}\cancel{m\omega} + 6\cancel{l}\cancel{m\omega}x = 0$

$x = \frac{10}{6}l = \frac{5}{2}l$

Esercizio 2

Attenzione agli assi



Consideriamo un nastro conduttore rettilineo, virtualmente infinito, di spessore trascurabile e larghezza $2L$, percorso da una corrente costante ed uniforme I. Nel piano del nastro è posta una spira conduttrice rigida quadrata di lato a e distanza L dal bordo del nastro. Questa spira è percorsa da una corrente costante i. Tutto il sistema si trova nel vuoto. Vedi la figura per i versi delle correnti.

1. Esprimere il campo magnetico, $\vec{B}$ generato dal nastro a una distanza $x > L$ dall'asse del nastro sul piano individuato dal nastro e dalla spira.

   $\vec{B}(x) =$ ....

2. Esprimere la forza totale $\vec{F}$ esercitata sulla spira dal nastro percorso da corrente in modulo direzione e verso in funzione di a, L, I, i.

   $\vec{F} =$ ....

3. Calcolare il valore della forza nel caso in cui a=L, $\vec{F}_{a=L}$.

   $\vec{F}_{a=L} =$ ....

Dati: $I = 5\ A$, $i = 100\ mA$.

1. $dI = \frac{I}{2L}dx'$ ⟵ suddividiamo il nastro in strisce larghe dx'

per Biot-Savart per $x > L$, B è entrante nel foglio e, pr

Ampere, vale:

$dB(dx', x) = \frac{\mu_0 dI}{2\pi(x - x')}$ ⟵ $\frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ B del filo

$B(x) = \int_{-L}^{L} dB(dx', x) = \int_{-L}^{L} \frac{\mu_0 I}{2L2\pi(x - x')}dx' = \frac{\mu_0 I}{2L2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{dx'}{x - x'} =$

$= \frac{\mu_0 I}{2L2\pi}\left[-\ln(x - x')\right]_{-L}^{L} = \frac{\mu_0 I}{2L2\pi}\left[-\ln(x - L) + \ln(x + L)\right]$

$= \frac{\mu_0 I}{2L2\pi}\ln\frac{x + L}{x - L}$ $\qquad \vec{B}(x) = -B(x)\hat{z}$

2. La forza risultante $\vec{F}$ si ottiene sommando le forze sui quattro lati della spira, i lati paralleli all'asse x han

no uguale distanza dal nastro quindi si elidono, la risultante sarà la somma delle forze sui lati normali

$\vec{F}_3 = F_3\hat{x} = iaB(\underline{2L + a})\hat{x}$

$\vec{F}_4 = -F_4\hat{x} = -iaB(\underline{2L})\hat{x}$

$\vec{F} = \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = iaB(2L + a) - iaB(2L)\hat{x} =$

$= ia\left(\frac{\mu_0 I}{2L2\pi}\ln\frac{2L + a + L}{2L + a - L} - \frac{\mu_0 I}{2L2\pi}\ln\frac{2L + L}{2L - L}\right)\hat{x} =$

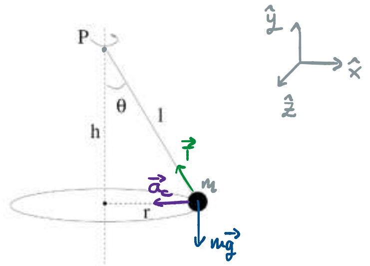
$= \frac{ia\mu_0 I}{4\pi L}\left(\ln\frac{3L + a}{L + a} - \ln\frac{3\cancel{L}}{\cancel{L}}\right)\hat{x} = \frac{ia\mu_0 I}{4\pi L}\left(\ln\frac{3L + a}{L + a} - \ln 3\right)\hat{x}$

3. $\vec{F}_{a=L} = \frac{i\cancel{L}\mu_0 I}{4\pi\cancel{L}}\left(\ln\frac{\cancel{3L+L}^{\,2}}{\cancel{L+L}_{\,1}} - \ln 3\right)\hat{x} = \frac{i\mu_0 I}{4\pi}(\ln 2 - \ln 3)\hat{x} = -2 \cdot 10^{-8}\,N\,\hat{x}$

21-01-18

martedì 22 giugno 2021 14:36

Esercizio 1



Una massa $m = 1\ kg$, attaccata ad un filo inestensibile e senza massa di lunghezza l_0, ruota attorno all'asse verticale inizialmente con velocità angolare ω_0, descrivendo un cono di angolo θ_0, come in figura. Da un certo istante in poi la lunghezza del filo viene lentamente aumentata in modo che comunque la massa descriva sempre un traiettoria circolare (seppure di raggio differente). Sapendo che all'inizio $l_0 = 2\ m$ e $\theta_0 = \pi/3$, si calcoli:

1. Il valore della tensione del filo e la velocità angolare iniziale:
   $T_0 =$ ....
   $\omega_0 =$ ....
2. Il valore della velocità angolare quando il raggio (ovvero la distanza dall'asse) diventa il doppio del raggio iniziale:
   $\omega_{2r_0} =$ ....
3. La lunghezza del filo quando il raggio diventa il doppio del raggio iniziale:
   $l_{2r_0} =$ ....

1. $r_0 = l_0 \sin\theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} l_0$ $\qquad v_0 = r_0\omega_0$

$h_0 = l_0\cos\theta_0 = \frac{1}{2} l_0$

$T\cos\theta_0 = mg \longrightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta_0}$ $\qquad \hat{x}$

$T\sin\theta_0 = ma_c = m\frac{v_0^2}{r_0} = m\frac{\cancel{r_0^2}\omega_0^2}{\cancel{r_0}} = m r_0\omega_0^2$ $\qquad \hat{y}$

$\hookrightarrow \frac{mg}{\cos\theta_0}\sin\theta = m r_0\omega_0^2$

$mg\tan\theta_0 = m r_0\omega_0^2$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g\tan\theta_0}{r_0}} = \sqrt{\frac{g\cancel{\sin\theta_0}}{\cos\theta_0\, l_0\cancel{\sin\theta_0}}} = \sqrt{\frac{g}{h_0}}$

2. $P = \text{polo}$ $\qquad \vec{\tau}_T = 0$ $\qquad r_{2r_0} = 2r$

$L_{0_i} = r_0 m v_0 = 2r_0 m v_{2r_0} = L_{0f}$

$\cancel{r_0^2}\cancel{m}\omega_0 = (2\cancel{r_0})^2\cancel{m}\omega_{2r_0}$

$\omega_{2r_0} = \frac{\omega_0}{4}$

3. $L_z = r_0 m v_0 = r_0^2 m\omega_0 = r_0^2 m\sqrt{\frac{g}{h_0}} = \text{cost!}$

$\frac{r^2}{h_0} = \text{cost}$

$\frac{r_0^2}{\sqrt{h_0}} = \frac{(2r_0)^2}{\sqrt{h_{2r_0}}}$

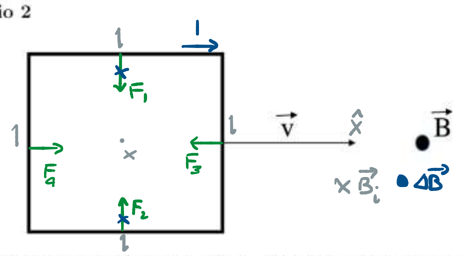
$\frac{\sqrt{h_0}}{r_0^2} = \frac{\sqrt{h_{2r_0}}}{(2r_0)^2}$

$\frac{4\cancel{r_0^2}\sqrt{h_0}}{\cancel{r_0^2}} = \sqrt{h_{2r_0}}$

$h_{2r_0} = 16h_0$

$l = \sqrt{\underbrace{(2r_0)^2}_{r_{2r_0}} + \underbrace{(16h_0)^2}_{h_{2r_0}}} = \sqrt{4r_0^2 + 256h_0^2} = \sqrt{4\cdot\frac{3}{4}l_0^2 + 256\cdot\frac{1}{4}l_0^2} = \sqrt{3l_0^2 + 64l_0^2} = \sqrt{67l_0^2} = \sqrt{67}\,l_0$

Esercizio 2



Una spira quadrata conduttrice con resistenza $R = 4\ \Omega$ e lato $l = 0.5$ m viene mantenuta in moto rettilineo uniforme con velocità $v = 6$ m/s, diretta lungo l'asse x, complanare al piano della spira. Nella stessa regione spaziale è presente un campo magnetico orientato ortogonalmente al piano della spira, che varia secondo la legge $B(x) = B_0(x/L)$ con $L = 4$ m e $B_0 = 2$ T. Supponendo che all'istante iniziale il centro della spira si trovi in $x = 0$
Si calcoli:

1. la corrente I circolante nella spira e la potenza P dissipata per effetto Joule ad un generico istante
   $I =$ .... $\qquad P =$ ....
2. il modulo della forza agente sulla spira, F, necessaria a mantenere il moto uniforme, specificandone direzione e verso
   $F =$ ....
3. la potenza associata al lavoro compiuto dalla forza di cui al punto precedente, P', commentando il risultato ottenuto
   $P' =$ ....

B dipende dalla distanza dal centro

1. $\Phi_B = \int_{x-\frac{l}{2}}^{x+\frac{l}{2}} \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int_{x-\frac{l}{2}}^{x+\frac{l}{2}} B\,dA = \int_{x-\frac{l}{2}}^{x+\frac{l}{2}} B_0\frac{x'}{L}l\,dx' = \frac{B_0}{L}l\int_{x-\frac{l}{2}}^{x+\frac{l}{2}} x'\,dx' = \frac{B_0}{L}l\left[\frac{x'^2}{2}\right]_{x-\frac{l}{2}}^{x+\frac{l}{2}}$

$= \frac{B_0}{L}l\left[\frac{(x+\frac{l}{2})^2}{2} - \frac{(x-\frac{l}{2})^2}{2}\right] = \frac{B_0}{L}l\left[\frac{\cancel{x^2}+\cancel{\frac{l^2}{4}}+lx}{2} - \frac{\cancel{x^2}+\cancel{\frac{l^2}{4}}-lx}{2}\right] = \frac{B_0}{L}l\,\frac{\cancel{2}lx}{\cancel{2}}$

$= \frac{B_0 x l^2}{L}$

$fem = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\partial B_0\frac{x}{L}l^2}{\partial t} = -B_0\frac{l^2}{L}\frac{dx}{dt} = -B_0\frac{l^2}{L}v$

< 0: corrente circola in senso orario

$I = \frac{|fem|}{R} = \frac{B_0 l^2 v}{RL} = 0.1875\,A$

$P = I^2R = 0.14\,W$

2. $\vec{F}_4 = i\vec{L}\times\vec{B} \longrightarrow F_4 = ilB = \frac{B_0 l^2 v}{RL}lB(x+\frac{l}{2}) = \frac{B_0 l^3 v}{RL}B_0\frac{x+l/2}{L} = \frac{B_0^2 l^3 v}{RL}\frac{2x+l}{2L}$

B dipende dalla distanza dal centro!

$\vec{F}_3 = i\vec{L}\times\vec{B} \longrightarrow F_3 = ilB = \frac{B_0 l^2 v}{RL}lB(x-\frac{l}{2}) = \frac{B_0 l^3 v}{RL}B_0\frac{x-l/2}{L} = \frac{B_0^2 l^3 v}{RL}\frac{2x-l}{2L}$

$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ perché $x_1 = x_2$

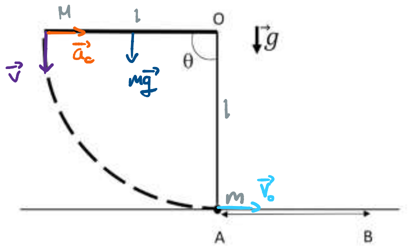
$$\vec{F} = \vec{F_4} - \vec{F_3} \longrightarrow F = F_4 - F_3 = \frac{B_0^2 l^3 v(2x+l)}{2RL^2} - \frac{B_0^2 l^3 v(2x-l)}{2RL^2} = \frac{B_0^2 l^3 v(\cancel{2x}+l-\cancel{2x}\cancel{+l})}{\cancel{2}RL^2} = \frac{B_0^2 l^4 v}{RL^2} = 2.3 \cdot 10^{-2}\,N$$

3. $P' = Fv = \dfrac{B_0^2 l^4 v^2}{RL^2} = 0.14\,W$ $\quad \boxed{P' = P}$

19-07-19

martedì 22 giugno 2021   15:29

Esercizio 1



Un'asta rigida sottile ed omogenea di massa $M = 3\ kg$ e lunghezza $l = 2\ m$ è vincolata a ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il punto fisso O. L'asta, lasciata libera di muoversi a partire dalla configurazione $\theta = 90°$, urta in modo completamente elastico un corpo assimilabile a un punto materiale situato sulla verticale, nel punto A. Dopo l'urto, l'asta rimane in quiete.

1. Si calcoli la velocità angolare dell'asta, ω_0, un'istante prima dell'urto.

   $\omega_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Si calcoli la massa del corpo, m, e la sua velocità, v_0, immediatamente dopo l'urto.

   $m = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad v_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Successivamente, il corpo percorre un tratto rettilineo su una guida orizzontale scabra, caratterizzata da un coefficente di attrito dinamico $\mu_d = 0.7$.

3. Calcolare la distanza, d, percorsa dal corpo sul piano, dal punto A fino al punto B in cui si arresta.

   $d = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1. $v_0 = l\omega_0$

$a_c = \frac{v_0^2}{l} = \omega_0^2 l$

$E_i = Mgl = \frac{1}{2} I_0\omega_0^2 + Mg\frac{l}{2} = E_f \longrightarrow Mgl - \frac{1}{2}Mgl = \frac{1}{6}Ml^2\omega_0^2$

$I_0 = \frac{1}{3}Ml^2$

$\frac{1}{2}Mgl = \frac{1}{6}Ml^2\omega_0^2$

$\sqrt{\frac{3g}{l}} = \omega_0$

$U_i \simeq U_f$ durante l'urto ?

2. $E_i = \cancel{\frac{1}{2}} I_0\omega_0^2 = \cancel{\frac{1}{2}} m v_0^2 = E_f \qquad \theta = 0$

$\vec{L}_{0_i} = I_0\omega_0 = l m v_0 = \vec{L}_{0f} \longrightarrow I_0^2\omega_0^2 = l^2 m^2 v_0^2$

divido nella ①: $I_0 = l^2 m \longrightarrow m = \frac{I_0}{l^2} = \frac{M}{3}$

sostituisco in ①: $I_0\omega_0^2 = \frac{M}{3}v_0^2 \longrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{3I_0\omega_0^2}{M}} = \sqrt{l^2\omega_0^2} = l\omega_0$

questo si può fare perché è un sistema (sono ambedue vere!)

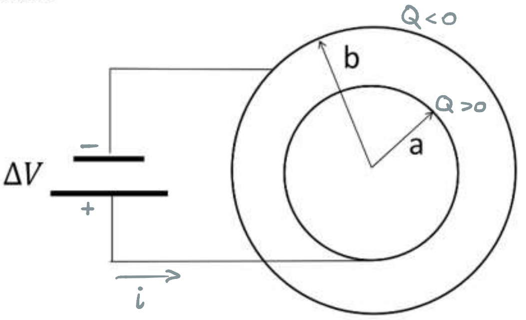
infatti $v_0 = \omega_0 \times l = l\omega_0$

3. $L = K_f - K_i = -\frac{1}{2}mv_0^2 = \int_a^b \vec{F}_a \cdot d\vec{s} = \vec{F}_a \int_a^b d\vec{s} = -\mu_d m g \int_a^b d\vec{s} = -\mu_d m g d$

unica forza in gioco: $\vec{F}_a$

$\hookrightarrow d = \frac{v_0^2}{2\mu_d g} = \frac{l^2\omega_0^2}{2\mu_d g}$

Esercizio 2



Le armature di un condensatore sferico di raggi a e b, e vengono mantenute ad una differenza di potenziale costante $\Delta V = V(a) - V(b)$ da una pila, come in figura.

1. Ricavare l'espressione e calcolare la capacità del condensatore, C, nonchè l'energia elettrostatica in esso immagazzinata, U.

   $C = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad U = \ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Calcolare la densità di carica sull'armatura interna σ_a.

   $\sigma_a = \ldots\ldots\ldots\ldots$

3. Determinare a parità di differenza di potenziale ΔV e di raggio b dell'armatura esterna, quanto deve valere il raggio dell'armatura interna a' affinchè su di essa il campo elettrico $E(a')$ sia minimo.

   $a' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Dati: $\Delta V = 10\ V$, $a = 0.6\ cm$, $b = 1\ cm$.

1. $U = \frac{1}{2}C\Delta V^2$?

$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\cancel{Q}4\pi\varepsilon_0}{\cancel{Q}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{b-a}{ab}} = 4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}$

$\Phi_E = \vec{E}\cdot\vec{A} = EA = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \longrightarrow E = \frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0}$

$\Delta V = V(A) - V(B) = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_a^b E\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b$

$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right]$

2. $\sigma_A = \frac{Q}{S_a} = \frac{Q}{4\pi a^2} = \frac{\cancel{4\pi}\varepsilon_0\cancel{a}b}{\cancel{4\pi}a^{\cancel{2}}(b-a)}\Delta V = \varepsilon_0\frac{b}{a(b-a)}\Delta V$

$C = \frac{Q}{\Delta V} \longrightarrow Q = C\Delta V = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{(b-a)}\Delta V$

3. $E(a') = \frac{Q(a')}{4\pi a'^2\varepsilon_0} = \frac{\cancel{4\pi\varepsilon_0}a'b}{\cancel{4\pi}a'^2\cancel{\varepsilon_0}(b-a')}\Delta V = \frac{b}{a'(b-a')}\Delta V$

$\frac{dE(a')}{da'} = -\Delta V b(a'b - a'^2)^{-2}(b - 2a') = 0$

ΔV cost

• $-\Delta V b[a'(b-a')]^{-2} = 0 \longrightarrow -\Delta V b = 0$ N.A.

• $b - 2a' = 0 \longrightarrow a' = \frac{b}{2}$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{bc}{x(b-x)}\right)$ $b = b$, $c = \Delta V$ $x = a'$

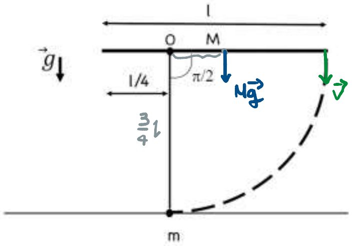
$\frac{bc}{xb - x^2} = bc(xb - x^2)^{-1}$

$\frac{d}{dx}$

$\boxed{-bc(xb - x^2)^{-2}(b - 2x)}$

$\frac{d}{dx}x^{-1}$

Esercizio 1



Un'asta omogenea di lunghezza l e massa M è libera di ruotare nel piano verticale (vedi figura) attorno ad un perno posto in O ad una distanza pari a 1/4 della sua lunghezza dal suo estremo superiore. L'asta, inizialmente in quiete in posizione orizzontale, viene lasciata cadere e quando giunge nella posizione verticale, urta elasticamente in corrispondenza del suo estremo un punto materiale di massa m. Si calcoli:

1. Il momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse di rotazione, I_O.

   $I_O =$ ....

2. La velocità angolare della sbarra subito prima dell'urto, ω.

   $\omega =$ ....

3. La velocità del punto materiale subito dopo l'urto, v.

   $v =$ ....

Dati: $l = 2\ m$, $M = 5\ kg$, $m = 200\ g$

1. $I_O = I_A + M\frac{1}{16}l^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{16}Ml^2 = \frac{4Ml^2+3Ml^2}{48} = \frac{7}{48}Ml^2$

2. $E_i = Mg\frac{3l}{4} = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + Mg\frac{l}{2} = E_f$

$\frac{3}{4}Mgl - \frac{1}{2}Mgl = \frac{1}{2}I_O\omega^2$

$\frac{1}{4}Mgl = \frac{1}{2}I_O\omega^2$

$\omega = \sqrt{\frac{Mgl}{2I_O}}$

3. $\frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_O\omega'^2$ cons. E

$I_O\omega = \frac{3}{4}lmv\cancel{\sin\theta}^{\,1} + I_O\omega'$ cons. $\vec{L}_O$

da ①: $\cancel{\frac{1}{2}}I_O(\omega^2 - \omega'^2) = \cancel{\frac{1}{2}}mv^2 \rightarrow \omega^2 - \omega'^2 = \frac{mv^2}{I_O}$

da ②: $I_O(\omega - \omega') = \frac{3}{4}lmv \rightarrow \omega - \omega' = \frac{3lmv}{4I_O}$

$\omega^2 - \omega'^2 = (\omega+\omega')(\omega-\omega') \rightarrow \omega + \omega' = \frac{\omega^2 - \omega'^2}{\omega - \omega'}$

da cui: $\omega + \omega' = \frac{\cancel{m}v^{\cancel{2}}}{\cancel{I_O}} \cdot \frac{4\cancel{I_O}}{3l\cancel{m}\cancel{v}} = \frac{4v}{3l}$

infine: $(\omega - \cancel{\omega'}) + (\omega + \cancel{\omega'}) = \frac{3lmv}{4I_O} + (\omega + \omega')$

$2\omega = \frac{3lmv}{4I_O} + \frac{4v}{3l} = \frac{9l^2mv + 16I_Ov}{12I_Ol}$

$24I_Ol\omega = 9l^2mv + 16I_Ov$

$24I_Ol\omega = v(9l^2m + 16I_O)$

$v = \frac{24I_Ol\omega}{9l^2m + 16I_O}$

Esercizio 2

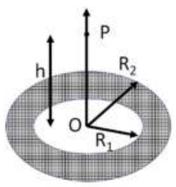


Fig.A

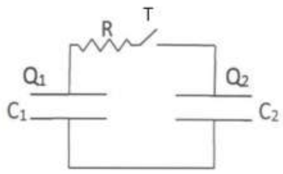


Fig.B

(Fig.A) Una carica elettrica positiva è uniformemente distribuita, con densità superficiale σ, su di una corona circolare di raggio interno R_1, raggio esterno R_2 e centro in O.

2.1 Determinare l'espressione della differenza di potenziale, $\Delta V = V(O) - V(P)$, tra il punto O ed un punto P posto sull'asse del disco a distanza h da O e calcolare esplicitamente il valore della differenza di potenziale nel caso in cui $\underline{R_2} = h = \underline{2R_1}$, $\Delta V_{R_2=h=2R_1}$

$\Delta V =$ .... $\Delta V_{R_2=h=2R_1} =$ ....

Consideriamo ora due condensatori di capacità C_1 e C_2, inizialmente caricati con carica Q_1 e Q_2 e isolati (vedi Fig.B). Se l'interruttore T viene chiuso, dopo un tempo sufficientemente lungo il sistema si porta all'equilibrio. Calcolare:

2.2 Il valore della ddp all'equilibrio ai capi dei due condensatori, ΔV_{C_1} e ΔV_{C_2}

$\Delta V_{C_1} =$ .... $\Delta V_{C_2} =$ ....

2.3 La variazione di energia elettrostatica di tutto il sistema tra l'istante iniziale (E_i) e quello finale(E_f), $\Delta E = E_f - E_i$

$\Delta E =$ ....

Dati: Es. Fig.A) $\sigma = 1.8 \times 10^{-11}\ C/m^2$, $R_1 = 10\ cm$. Es. Fig.B) $C_1 = 1\ \mu F$, $C_2 = 2\ \mu F$, $Q_1 = Q_2 = 2\ nC$.

1. $dV(r,h) = k\frac{dq}{D} = k\frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2+h^2}}$

e quindi

$r^2 + h^2 = t$

$2rdr = dt$

$V(h) = \int_{R_1}^{R_2} dV = \int_{R_1}^{R_2} k\frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2+h^2}} = k\sigma\pi\int_{R_1}^{R_2}\frac{2r}{\sqrt{r^2+h^2}}dr = k\sigma\pi\int_{R_1^2+h^2}^{R_2^2+h^2}\frac{d(r^2+h^2)}{\sqrt{r^2+h^2}} =$

$= \frac{2\sigma\pi}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sqrt{R_2^2+h^2} - \sqrt{R_1^2+h^2}\right] \longrightarrow V(0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[R_2 - R_1]$

$\Delta V = V(0) - V(h) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(R_2 - R_1 + \sqrt{R_2^2+h^2} - \sqrt{R_1^2+h^2}\right)$

$\Delta V_{R_2=h=2R_1} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(2R_1 - R_1 + \sqrt{R_2^2+4R_1^2} - \sqrt{R_1^2+4R_1^2}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1+\sqrt{5}+\sqrt{8})$

$= 0.04V$

2. all'equilibrio non circola corrente e la d.d.p. ai capi dei due condensatori è la stessa.

| due condensatori sono in parallelo, quindi $C_{eq} = C_1 + C_2$

dalla conservazione della carica: $Q_{eq} = Q_1 + Q_2$ ← sempre vero

per cui: $\Delta V_{C_1} = \Delta V_{C_2} = \frac{Q_{eq}}{C_{eq}} = \frac{4nC}{3\mu F} = \frac{4}{3}\cdot 10^{-3}V$

3. $E_i = E_{C_1} + E_{C_2} = \frac{1}{2}C_1\Delta V_1^2 + \frac{1}{2}C_2\Delta V_2^2 = \frac{1}{2}\cancel{C_1}\frac{Q_1^2}{C_1^{\cancel{2}}} + \frac{1}{2}\cancel{C_2}\frac{Q_2^2}{C_2^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{Q_2^2}{C_2}\right) = 3\cdot 10^{-12}\ J$

per cui: $\Delta V_{C_1} = \Delta V_{C_2} = \frac{[illegible]}{C_{eq}} = \frac{[illegible]}{3\mu F} = \frac{[illegible]}{3} \cdot 10^{[illegible]}\ V$

3. $E_i = E_{C_1} + E_{C_2} = \frac{1}{2} C_1 \Delta V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 \Delta V_2^2 = \frac{1}{2} \cancel{C_1} \frac{Q_1^2}{C_1^{\cancel{2}}} + \frac{1}{2} \cancel{C_2} \frac{Q_2^2}{C_2^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{Q_2^2}{C_2} \right) = 3 \cdot 10^{-12}\ J$

$\Delta V_1^2 = \frac{Q_1^2}{C_1^2} \qquad \Delta V_2^2 = \frac{Q_2^2}{C_2^2}$

$E_f = \frac{1}{2} C_{eq} \Delta V_{C_1}^2 = \frac{1}{2} \cancel{C_{eq}} \frac{Q_{eq}^2}{C_{eq}^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2} \frac{Q_{eq}^2}{C_{eq}} = \frac{8}{3} \cdot 10^{-12}\ J$

$\Delta E = E_f - E_i = -\frac{1}{3} \cdot 10^{-12}\ J$

parte dell'energia è dissipata nella resistenza

12-06-20

giovedì 24 giugno 2021 17:54

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Il disco forato in Figura è di spessore trascurabile, di materiale omogeneo, ha raggio R= 29 cm e massa M= 2.5 kg .
I fori praticati nel disco corrispondono a due circonferenze di raggio (R/4) e due finestre rettangolari di dimensioni (R/8)×(R/2) e sono disposti come in Figura.
I centri dei fori circolari e rettangolari giacciono su di una circonferenza (tratteggiata in Figura) di raggio r=R/2 .
Al centro del disco è attaccata una molla di massa trascurabile e di costante elastica k= 208 N/m .
Nell'ipotesi in cui il disco rotola senza strisciare sulla superfice orizzontale, si calcoli:

1) La massa rimossa dal disco pieno (m_{2r}) corrispondente ai 2 fori rettangolari

m_{2r} = ...

2) Il momento di inerzia del disco forato per rotazioni rispetto al punto di contatto con la superficie orizzontale, (I_{pc})

I_{pc} = ...

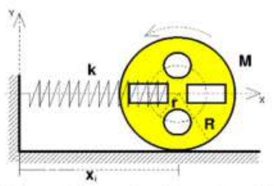
Suggerimento: per una lastra rettangolare sottile di massa m, lati a e b e densità di massa superficiale costante $\sigma = \frac{m}{ab}$, il momento di inerzia I^r_{cm} rispetto ad un asse ortogonale al piano che contiene la lastra e passante per il suo CM al centro del rettangolo è dato da:

$$I^r_{cm} = \frac{m}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

Il disco è lasciato libero da fermo dalla posizione (x_i) in cui la molla è allungata di Δx= 27.3 cm

3) Si calcoli l'energia cinetica di rotazione del disco (E_k^{rot}) nell'istante in cui il centro di massa del disco forato passa per la posizione di equilibrio della molla, per la quale l'allungamento della molla è nullo.

E_k^{rot} = ...



(Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo)

1. $$\sigma = \frac{M}{\pi R^2 - \pi\frac{R^2}{8} - \frac{R^2}{8}} = \frac{M}{\frac{8\pi R^2 - \pi R^2 - R^2}{8}} = \frac{8M}{R^2(8\pi - \pi - 1)} = \frac{8M}{R^2(7\pi - 1)}$$

$$A_{ret} = \frac{R}{8}\cdot\frac{R}{2} = \frac{R^2}{16}$$

$$A_c = \pi\frac{R^2}{16}$$

$$m_c = \pi\sigma\frac{R^2}{16} \qquad m_r = \sigma\frac{R^2}{16}$$

ricorda che $\sigma = \frac{M}{A}$

2. $M^* = \sigma\pi R^2$ perché M è sul disco forato

$$I^{hole}_{circ_0} = -\frac{m_c}{2}\left(\frac{R}{4}\right)^2 - m_c\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$I^{hole}_{r_0} = -\frac{m_r}{12}\left[\left(\frac{R}{8}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right] - m_r\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$I_{disc} = M^*\frac{R^2}{2} = \sigma\pi\frac{R^4}{2}$$

$$I^{hole}_{circ} = 2I^{hole}_{circ_0} = -m_c\frac{R^2}{16} - 2m_c\frac{R^2}{4} = -m_cR^2\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right) = -m_cR^2\frac{9}{16}$$

$$I^{hole}_{rect} = 2I^{hole}_{r_0} = -\frac{m_r}{6}\left[\frac{R^2}{64} + \frac{R^2}{4}\right] - 2m_r\frac{R^2}{4} = -\frac{m_r}{6}\left[\frac{17R^2}{64}\right] - m_r\frac{R^2}{2} = -m_rR^2\left(\frac{17}{384} + \frac{1}{2}\right) = -m_rR^2\frac{209}{384}$$

$$I^{TOT}_{CM} = I_{disc} + I^{hole}_{rect} + I^{hole}_{circ} = \sigma\pi\frac{R^4}{2} - m_cR^2\frac{9}{16} - m_rR^2\frac{209}{384} = \sigma\pi\frac{R^4}{2} - \pi\sigma\frac{R^2}{16}R^2\frac{9}{16} - \sigma\frac{R^2}{16}R^2\frac{209}{384}$$

$$= \sigma R^4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{256} - \frac{209}{6144}\right)$$

$$I_{pc} = I^{TOT}_{CM} + MR^2 = \sigma R^4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{256} - \frac{209}{6144}\right) + MR^2$$

3. $$E_i = \frac{1}{2}K\Delta x^2 = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I^{TOT}_{CM}\omega^2 = E_f \qquad V_{CM} = R\omega \rightarrow \omega = \frac{V_{CM}}{R}$$

$$K\Delta x^2 = MR^2\omega^2 + I^{TOT}_{CM}\omega^2$$

$$\omega^2\left(MR^2 + I^{TOT}_{CM}\right) = K\Delta x^2$$

$$\omega^2 = \frac{K\Delta x^2}{MR^2 + I^{TOT}_{CM}} \qquad E_K^{rot} = \frac{1}{2}I^{TOT}_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}I^{TOT}_{CM}\frac{K\Delta x^2}{MR^2 + I^{TOT}_{CM}}$$

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Nella Figura(a) è rappresentata una spira $MNPQ$ con i lati NP, PQ e QM di lunghezza variabile nel tempo.
Il lato MN ha una lunghezza L = 147 cm e una resistenza elettrica R = 482 mΩ .
Questa spira variabile giace in un piano orizzontale ed è immersa in un campo magnetico uniforme e costante di intensità B = 11.4 T diretto come in Figura(a).
Le equazioni orarie delle coordinate orizzontali degli estremi del lato PQ sono rispettivamente:

- $x_P(\text{cm}) = 588.0 + 73.5\cos(0.285\, t)$
- $x_Q(\text{cm}) = 588.0 + 73.5\cos(0.683\, t)$

La spira, instantaneamente indeformabile, è vincolata a giacere nel piano xy e non può ne ruotare ne traslare.

1) Determinare l'espressione del flusso del campo magnetico (Φ_m) attraverso la spira in funzione del tempo.

$$\Phi_m = \text{......................}$$

2) Determinare la f.e.m. indotta nella spira $MNPQ$ all'istante t^* = 22.0 s

$$fem(t^*) = \text{......................}$$

Consideriamo ora una spira che si ottiene da quella di prima con le lunghezze dei lati uguali NP=MQ= 73.5 cm , immersa come la prima nello stesso campo magnetico di intensità B = 11.4 T vedi Figura(b)
Per $t = 0$ s la spira viene messa in rotazione con una velocità angolare $\vec{\Omega} = 0.691\ \hat{y}$ rad/s

3) Determinare la potenza dissipata nella resistenza all'istante t^{**}= 24.9 s

$$P(t^{**}) = \text{......................}$$

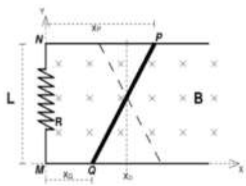


Figura (a)

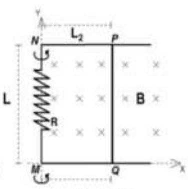


Figura (b)

1. $x_p = a + b\cos(\omega_p t)$ e $x_q = a + b\cos(\omega_q t)$

per Gauss:

$$\Phi_m = \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = \oint B\,dA = B\oint dA = B\Big[\overbrace{(x_p + x_q)L\cdot\tfrac{1}{2}}^{(B+b)h\cdot\frac{1}{2}}\Big] =$$

$$= \frac{BL}{2}\left[a + b\cos(\omega_p t) + a + b\cos(\omega_q t)\right]$$

$$= \frac{BL}{2}\left[2a + b(\cos(\omega_p t) + \cos(\omega_q t))\right]$$

2. l'area variabile della spira genererà una fem che vale:

$$fem = -\frac{\partial\Phi_m}{\partial t} = -\frac{BLb}{2}(-\sin(\omega_p t)\omega_p) - \frac{BLb}{2}(-\sin(\omega_q t)\omega_q) =$$

$$= \frac{BLb}{2}(\sin(\omega_p t)\omega_p + \sin(\omega_q t)\omega_q)$$

$$fem(t^*) = \frac{BLb}{2}(\sin(\omega_p t^*)\omega_p + \sin(\omega_q t^*)\omega_q)$$

da notare che il segno della fem varia nel tempo, quindi anche il verso della corrente lo farà

3. dobbiamo ricalcolare il flusso di campo magnetico attraverso la spira, essendo cambiata l'area:

$$\Phi_B = \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = \oint B\,dA\cos\theta = B\oint dA\cos\theta(t) = BLL_2\cos\theta(t)$$

adesso abbiamo bisogno di θ: la velocità angolare è costante, quindi segue:

$\theta(t) = \theta_0 + \Omega t$ con $\theta_0 = 0$, dato che $d\vec{A} \parallel \vec{B}$ inizialmente; quindi $\Phi_B = BLL_2\cos(\Omega t)$

e quindi la fem varrà $fem = -\frac{\partial\Phi_B}{\partial t} = BLL_2\sin(\Omega t)\Omega$

con corrente indotta che vale $i = \frac{|fem|}{R} = \frac{B}{R}LL_2\sin(\Omega t)\Omega$

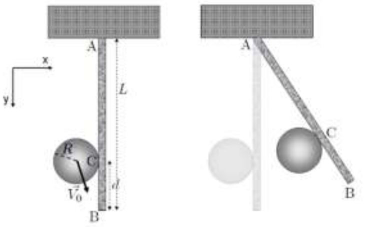
infine la potenza dissipata $P(t) = i^2(t)R \longrightarrow P(t^{**}) = i^2(t^{**})R = \frac{B}{R}LL_2\sin(\Omega t^{**})\Omega$

16-06-14

giovedì 24 giugno 2021 18:03

Esercizio 1

Un'asta sottile omogenea di massa $M = 1\text{Kg}$ e lunghezza $L = 1\text{m}$ è incernierata nel suo estremo A ed è libera di oscillare nel piano verticale. L'asta è inizialmente in equilibrio.



Ad un certo istante l'asta viene colpita nel punto C da una sfera di raggio $R = 0.5\text{m}$ e massa $m = 0.5\text{Kg}$. Il punto C dista $d = 0.3\text{m}$ dall'estremo B dell'asta. Un attimo prima dell'urto la velocità della sfera vale $\vec{V_0} = (5;10)\frac{m}{s}$ e l'urto è completamente anelastico (la sfera resta attaccata all'asta).

Si calcoli:

a) Quanto dista dall'estremo A il centro di massa del sistema subito dopo l'urto:

$D = \dots\dots\dots$

b) Il valore della velocità angolare ω subito dopo l'urto:

$\omega = \dots\dots\dots$

c) Qual è la massima variazione di altezza raggiunta dal centro di massa del sistema nel moto successivo all'urto:

$\Delta H_{max} = \dots\dots\dots$

1. $x_{CM} = \frac{-Rm}{m+M}$ $\qquad D = \sqrt{x_{CM}^2 + y_{CM}^2}$

$y_{CM} = \frac{m(L-d) + M\frac{L}{2}}{m+M}$

2. $\vec{L}_{A_i} = m(r_x v_y - r_y v_x) = m(-RV_y - (L-d)V_x) = I\omega = \vec{L}_{Af}$

$r = (\overset{x}{-R}, \overset{y}{(L-d)})$

$V = (V_x, V_y)$ $\qquad \omega = \frac{m(-RV_y - (L-d)V_x)}{I}$

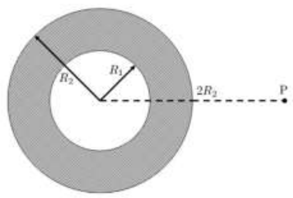
$I = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{2}{5}mR^2 + m(\overset{\vec{AO}}{R^2 + (L-d)^2})$

3. $E_i = \frac{1}{2}I\omega^2 + (m+M)gh_{CM} = (m+M)gh'_{CM} = E_f$

$\frac{1}{2}I\omega^2 = (m+M)g\Delta h_{CM}$

$\Delta h_{CM} = \frac{I\omega^2}{2(m+M)g}$

Esercizio 2



Una carica negativa Q è distribuita omogeneamente nel guscio sferico di raggio interno $R_1 = 0.1\text{m}$ e raggio esterno $R_2 = 0.2\text{m}$. La differenza di potenziale tra i punti a distanza R_2 e quelli a distanza R_1 è $|V_2 - V_1| = 200\text{V}$.

Si calcoli:

a) Quanto vale la carica Q :

$Q = \dots\dots\dots$

b) Il potenziale dei punti distanti R_1 dal centro (si assuma $V_\infty = 0$):

$V_1 = \dots\dots\dots$

c) La densità di energia elettrostatica di un punto P distante $2R_2$ dal centro della sfera:

$u_e = \dots\dots\dots$

1. nella zona dove è presente la carica sappiamo che, per Gauss:

$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \int_V \frac{\rho dV}{\varepsilon_0}$

sulla superficie interna $Q = 0 \longrightarrow E = 0$, nella esterna invece

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint E dA = E\oint dA = E(4\pi r^2)$

gaussiana!

quindi $E(4\pi r^2) = \int_V \frac{\rho dV}{\varepsilon_0} = \frac{\rho V'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)$

infine $E(r) = \frac{\rho\cancel{4\pi}}{\cancel{4\pi}r^2\varepsilon_0 3}(r^3 - R_1^3) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^3 - R_1^3}{r^2}$

$\Delta V = V(R_2) - V(R_1) = \int_{R_2}^{R_1}\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{R_2}^{R_1} E dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_{R_2}^{R_1}\frac{r^3 - R_1^3}{r^2}dr =$

$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_{R_2}^{R_1} r dr - \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\int_{R_2}^{R_1} r^{-2}dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{R_2}^{R_1} - \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_2}^{R_1} =$

$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R_1^2}{2} - \frac{R_2^2}{2}\right] - \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}[R_1^2 - R_2^2] - \frac{\rho R_1^{\cancel{3}\,2}}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R_1 - R_2}{\cancel{R_1}R_2}\right] = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}[R_1^2 - R_2^2] - \frac{\rho R_1^2}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R_1 - R_2}{R_2}\right] =$

$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R_1^2 - R_2^2}{2} - \frac{R_1^2(R_1 - R_2)}{R_2}\right] = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R_2(R_1^2 - R_2^2) - 2R_1^2(R_1 - R_2)}{2R_2}\right] = \Delta V$

quindi $\rho = 6R_2\varepsilon_0\Delta V\left[R_2(R_1^2 - R_2^2) - 2R_1^2(R_1 - R_2)\right]^{-1}$

e $Q = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)$

2. il potenziale in $r = R_2$ vale $V(R_2) = K\frac{Q}{R_2}$

quindi quello in R_1 vale $\Delta V = V_2 - V_1 = V(R_2) - V(R_1) \longrightarrow V(R_1) = V_1 = V_2 - \Delta V$

3. essa vale $u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(2R_2)$

3-02-15

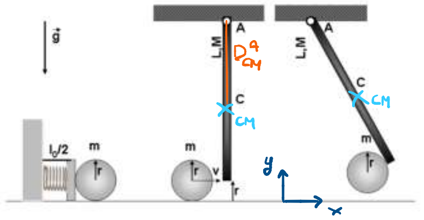
venerdì 25 giugno 2021 22:54

Esercizio 1

Una sferetta rigida di massa $m = 0.3$kg e raggio $r = 0.2$m è inizialmente ferma nei pressi di una molla di costante elastica $k = 50\text{Nm}^{-1}$ e lunghezza a riposo $l_0 = 0.40$m. La sferetta poggia su un piano orizzontale con attrito mentre la molla è tenuta compressa per un tratto $\Delta x = l_0/2$ da un filo. Ad un certo istante il filo si spezza e la molla scatta accelerando la sferetta. Si faccia l'ipotesi che l'attrito del piano orizzontale sia tale da avere sempre rotolamento puro.
Si calcoli:

a) La velocità angolare ω della sferetta sul piano orizzontale :

$\omega =$ ....



Si supponga quindi che, nel moto sul piano orizzontale, la sferetta urti anelasticamente un'asta rigida omogenea di lunghezza $L = 1$m e massa $M = 1$kg (l'asta è inizialmente ferma ed è libera di ruotare nel piano verticale intorno al vincolo liscio in A). Trascurando la componente lungo x della posizione del centro di massa, si calcoli :

b) Il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo in A durante l'urto:

$\Delta p_A =$ ....

c) l'altezza massima raggiunta dal centro dell'asta C nel moto successivo all'urto:

$h_{max}(C) =$ ....

1. $E_i = \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2} I_p \omega^2 = E_f$

$V_{CM} = r\omega \qquad I_p = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2$

$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}mr^2\omega^2$

$\frac{7}{10}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}k\Delta x^2$

$\omega^2 = \frac{10}{14}\frac{k\Delta x^2}{mr^2}$

$\omega = \sqrt{\frac{5}{7}}\frac{\sqrt{k}\,\Delta x}{\sqrt{m}\,r}$

oppure $\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}V_{CM}^2 m$

con $I_{CM} = \frac{2}{5}mr^2$

importante

2. $D^A_{CM_y} = \frac{M\frac{L}{2} + mL}{(M+m)}$ $\qquad V_{CM} = \omega_s D^A_{CM}$

$L_{A_i} = mLv = I_A\omega_s = L_{A_f}$

$mLr\omega = I_A\omega_s$

$\omega_s = \frac{mLr\omega}{I_A}$

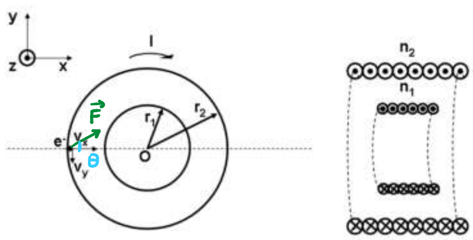
ove $I_A = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{2}{5}mr^2 + m(L^2+r^2)$ ← congiungente!

$\Delta p_a = p_f - p_i = \underbrace{\omega_s D^a_{CM_y}(m+M)}_{m_T V_{CM}} - \underbrace{mr\omega}_{m\,v_i} =$

3. $E_i = \frac{1}{2}I_A\omega_s^2 = (m+M)gh_{max} = E_f$ ← $U(0)$ in $y = \frac{L}{2}+r$ dal suolo

$h_{max} = \frac{I_A\omega_s^2}{2g(m+M)}$

Esercizio 2



Due solenoidi concentrici hanno raggio $r_1 = 10$cm e $r_2 = 20$cm. Questi solenoidi sono caratterizzati da due valori diversi di n definito come numero di spire per unità di lunghezza: $n_1 = 2\text{cm}^{-1}$, $n_2 = 1.1\text{cm}^{-1}$. All'interno dei due solenoidi circola la stessa corrente $I = 2$mA. Un elettrone di massa $m_e = 9.1\cdot10^{-31}$kg e carica $q_e = -1.6\cdot10^{-19}$C penetra nel campo magnetico prodotto dal sistema dei due solenoidi nel punto di coordinate ($-r_2$;0) con velocità $v = (5\cdot10^4; 1\cdot10^4)$m/s. Si calcoli:

a) il modulo della forza di Lorentz sull'elettrone nell'istante in cui entra nel solenoide più largo:

$F =$ ....

b) il punto in cui penetra nel solenoide più piccolo:

$x_P =$ .... $\quad y_P =$ ....

c) La forza di Lorentz nell'istante in cui l'elettrone entra nel solenoide di raggio r_1 e la componente x della velocità dell'elettrone sempre nello stesso istante:

$F' =$ .... $\quad v_x(P) =$ ....

1. il campo magnetico all'interno del solenoide più grande è $\vec{B}_2 = \mu_0 i n_2 \hat{z}$ e in quello più piccolo $\vec{B}_1 = \mu_0 i(n_1+n_2)\hat{z}$

$\vec{F} = q_e\vec{v}\times\vec{B}_2 = -q_e(V_x\hat{x}+V_y\hat{y})\times\mu_0 i n_2\hat{z} = q_e V_y \mu_0 i n_2\hat{x} + q_e V_x \mu_0 i n_2\hat{y}$

$F = \sqrt{F_x^2+F_y^2} = \sqrt{q_e^2\mu_0^2 i^2 n_2^2(V_y^2+V_x^2)} = q_e\mu_0 i n_2\sqrt{V_y^2+V_x^2}$

$= q_e\mu_0 i n_2 V = q_e V B = 0.23\cdot10^{-20}$ N

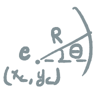
2. il punto in cui l'elettrone entra nel solenoide più piccolo si può trovare calcolando l'equazione della circonferenza su cui si muove l'elettrone e metterla a sistema con la circonferenza di centro (0,0) e raggio R_1

l'elettrone esegue un moto circolare il quale raggio vale:

$F = q_e V B_2 = m_e a_c = m_e\frac{V^2}{R} \rightarrow R = \frac{m_e V}{q_e B_2}$

per ottenere θ : $\theta = \arccos\left(\frac{V_x}{V}\right)$, da cui si calcola il centro della circonferenza:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= -R\cos\theta \\ y_c &= -R\sin\theta - r_2 \end{aligned}\right] \triangle$$



$2x_c = a, \quad 2y_c = b, \quad R^2 - x_c^2 - y_c^2 = k$

e l'equazione della circonferenza $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2 = R^2 \longrightarrow x^2+x_c^2-2xx_c+y^2+y_c^2-2yy_c = R^2$

quindi $x^2+y^2-ax-by = k$ e mettendo a sistema:

$$\begin{cases}(x-\cancel{x_0})^2+(y-\cancel{y_0})^2 = R_1^2 \\ x^2+y^2-ax-by = k\end{cases} \qquad \begin{cases}x^2+y^2 = R_1^2 \\ R_1^2-ax-by = k \longrightarrow ax+by = R_1^2-k = k^*\end{cases}$$

$ax = k^* - by$ elimina uno dall'altro

$\hookrightarrow (ax)^2 = (k^*-by)^2$

$$\begin{cases} (x-\cancel{x_0})^2+(y-\cancel{y_0})^2 = R_1^2 \\ x^2+y^2-ax-by = k \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2 = R_1^2 \\ R_1^2-ax-by = k \end{cases} \longrightarrow ax+by = R_1^2-k = k^*$$

altro

$$ax = k^*-by \longrightarrow (ax)^2 = (k^*-by)^2$$

$$\begin{cases} a^2x^2+a^2y^2 = a^2R_1^2 \longrightarrow (k^*-by)^2+(ay)^2 = (aR_1)^2 \longrightarrow k^{*2}+b^2y^2+2byk^*+a^2y^2-a^2R_1^2 = 0 \\ ax+by = k^* \end{cases}$$

che è una quadratica in y: $b^2y^2+a^2y^2+2byk^*+k^{*2}-a^2R_1^2 = 0 \longrightarrow y^2\overbrace{(b^2+a^2)}^{A}+y\overbrace{(2bk^*)}^{B}+\overbrace{k^{*2}-a^2R_1^2}^{C} = 0$

con soluzione $y = \dfrac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \longrightarrow y_p = -0.0262\,m$, scegliendo la soluzione più vicina all'origine

e $x = x_p = \dfrac{k^*-by}{a} = -0.0965\,m$

3. quando l'elettrone entra nel solenoide piccolo, dato che $B_T = \mu_0 i(n_1+n_2)$: $F' = q_e v B_T$

dato che $v \perp B_T$, quest'ultimo costante e diretto lungo $\hat{z}$.

13-01-21

lunedì 28 giugno 2021 13:28

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Con riferimento alla figura, una carrucola, di massa M= 0.5 kg e di forma cilindrica e omogenea, è libera di ruotare senza attrito intorno al proprio asse orizzontale. Essa è fissata alla sommità di un piano inclinato formante un angolo θ= 30° rispetto al piano orizzontale. Intorno alla carrucola è avvolto un filo, inestensibile e di massa trascurabile, alla cui estremità libera è fissato un corpo di massa m= 0.3 kg, di forma cubica e assimilabile a un punto materiale, che giace sul piano inclinato. Il filo si mantiene sempre parallelo al piano e non slitta sulla carrucola. Tra il corpo e piano inclinato si esercita attrito radente dinamico, caratterizzato dal coefficiente μ= 0.3 . Il corpo di massa m è inizialmente fermo.

Determinare:

1. La tensione del filo durante la discesa lungo piano $|\vec{T}|$

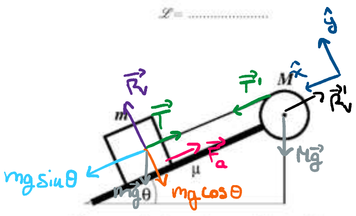
$|\vec{T}|$ = ...

2. Calcolare la velocità del corpo di massa m dopo che ha percorso un tratto di lunghezza L= 3 m lungo il piano inclinato

v = ...

3. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza di attito $\mathscr{L}$ quando la massa m ha percorso il tratto di lunghezza L lungo il piano.

$\mathscr{L}$ = ...



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

1.

$$ma = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta - T$$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{r} \times \vec{T}' = I\vec{\alpha} = rT'\hat{z} = I\alpha\hat{z} \\ &\text{ove } I = \tfrac{1}{2}Mr^2 \end{aligned}\right\} \text{carrucola}$$

$$|T| = |T'| \quad , \quad a = r\alpha \longrightarrow \alpha = \frac{a}{r}$$

$$rT = I\alpha = \frac{1}{2}Mr^{\cancel{2}}\frac{a}{\cancel{r}} \longrightarrow T = \frac{1}{2}Ma$$

sostituisco: $ma = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta - \frac{1}{2}Ma$

$$ma + \frac{1}{2}Ma = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$$

$$a(m + \tfrac{1}{2}M) = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$$

$$a = \frac{mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta}{m + \frac{1}{2}M} \quad \text{costante!}$$

2. $a = cost \longrightarrow$ moto unif. accelerato

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$x(t^*) = L$

$$x(t^*) = \cancel{x_0}^{\,0} + \cancel{v_0}^{\,0} t + \frac{1}{2}at^{*2} \longrightarrow 2L = at^{*2} \longrightarrow t^{*2} = \frac{2L}{a} \longrightarrow t^* = \sqrt{\frac{2L}{a}}$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$v(t^*) = \cancel{v_0}^{\,0} + at^* = a\sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2a^2L}{a}} = \sqrt{2aL}$$

$$a(t) = cost.$$

3. $\mathscr{L} = \int_0^L \vec{F}_a \cdot d\vec{s} = \vec{F}_a \int_0^L d\vec{s} = -\mu mg\cos\theta L$

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Con riferimento alla figura, una sfera uniformemente carica di raggio R_1= 0.03 m e carica Q= 1.1 nC, è contenuta all'interno di una superficie sferica di raggio R_2= 0.05 m, sulla quale è distribuita la stessa carica Q in modo uniforme. Le due sfere sono concentriche con centro in O e il sistema si trova nel vuoto.

1. Si determini il campo elettrico $\vec{E}$ in tutto lo spazio e si disegni il grafico del modulo del campo elettrico in funzione della distanza dal centro delle sfere.

$\vec{E}$ = ...

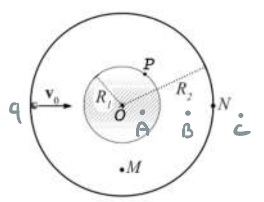
2. Determinare la differenza di potenziale $V_{MN} = V(M) - V(N)$ tra il punto M, posto a distanza $\frac{(R_1+R_2)}{2}$ dal centro delle sfere, e il punto N, posto a distanza R_2 sempre dal centro delle sfere.

V_{MN} = ...

3. Determinare la velocità minima iniziale, v_0, con cui deve essere lanciata una particella puntiforme di massa m= 4×10^{-12} kg e carica q=3 pC dalla superfice sferica esterna verso il centro delle sfere per raggiungere la superficie sferica interna.

v_0 = ...

Costanti Utili: ϵ_0 = 8.85 10^{-12} F/m



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

1.

$$\Phi_A = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA = E(4\pi r^2) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$Q : \frac{4}{3}\pi R_1^3 = Q_{int} : \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$Q_{int} = \frac{Q\,\cancel{\frac{4}{3}\pi}\,r^3}{\cancel{\frac{4}{3}\pi}\,R_1^3} = Q\frac{r^3}{R_1^3}$$

$$E_A = \frac{Qr^{\cancel{3}}}{4\pi\cancel{r^2}\varepsilon_0 R_1^3} = KQ\frac{r}{R_1^3} \qquad \vec{E}_A = E_A\hat{r}$$

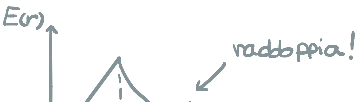
$$\Phi_B = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA = E(4\pi r^2) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$Q_{int} = Q$ per Gauss

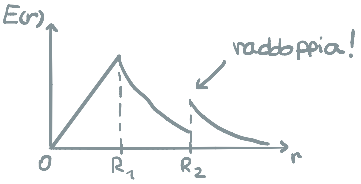
$$E_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k\frac{Q}{r^2} \qquad \vec{E}_B = E_B\hat{r}$$

$\Phi_C = 2\Phi_B$ dato che $Q_{int} = 2Q$

$$E_C = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \vec{E}_C = E_C\hat{r}$$



$\left(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} \quad r < R_1 \quad (\propto kr) \right.$



$$E_c = \frac{}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \vec{E}_c = E_c \hat{r}$$

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} & r < R_1 \quad (\propto k r) \\[2mm] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \quad (\propto k \frac{1}{r^2}) \\[2mm] \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R_2 \quad (\propto k \frac{1}{r^2}) \end{cases}$$

2. $V_{MN} = V(M) - V(N) = \int_M^N \vec{E}_B \cdot d\vec{r} = \int_M^N \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_M^N \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\frac{R_1+R_2}{2}}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{2}{R_1+R_2} \right) =$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-R_1 - R_2 + 2R_2}{(R_1+R_2)R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{(R_1+R_2)R_2}$$

$$V_{OP} = V(O) - V(P) = \int_O^P \vec{E}_A \cdot d\vec{r} = \int_O^P \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} \int_O^P r\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{R_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^{\cancel{3}}} \frac{\cancel{R_1^2}}{2} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R_1}$$

3. $\Delta E = 0 \longleftrightarrow E = \text{cost}$ (energia!)

$$E_{R_2} = \frac{1}{2} m v_0^2 + qV(R_2) = qV(R_1) = E_{R_1} \qquad V = \frac{U}{q} \longrightarrow U = qV$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = qV(R_1) - qV(R_2)$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = q \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_B \cdot d\vec{r} = q \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = q \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = q \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r^2} \right]_{R_1}^{R_2} = q \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right] = q \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

$$v_0^2 = \frac{\cancel{2}qQ}{\cancel{4}_{2}\pi\varepsilon_0 m} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

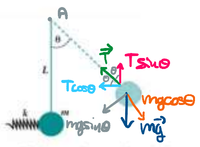
se ci arrivava con $v_1 \neq 0$, si sommava dentro la $\sqrt{\ }$

$$v_0 = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}$$

29-01-21

lunedì 28 giugno 2021 14:08

ESERCIZIO.1 – Meccanica



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, un corpo assimilabile a un punto materiale di massa $m = 100\ g$ è collegato ad un filo, indeformabile e privo di massa, di lunghezza $L = 50\ cm$. Inizialmente il punto materiale è tenuto fermo nella posizione in cui il filo forma un angolo $\theta_0 = 45^0$ con la verticale. Ad un certo istante, il punto materiale viene lasciato cadere. Calcolare:

1.a Il modulo della tensione del filo, T, un istante dopo che è stato lasciato cadere

$T =$ ....

1.b Il modulo della componente normale alla traiettoria del corpo della forza F_n che agisce su di esso, un istante dopo che il corpo è stato lasciato cadere

$F_n =$ ....

2.a Il modulo della velocità v_1 del punto quando il filo forma un angolo $\theta_1 = 30^0$ con la verticale e il modulo della forza F_1 che agisce su di esso

$v_1 =$ .... $F_1 =$ ....

2.b Il modulo della velocità v_1 del punto quando il filo forma un angolo $\theta_1 = 30^0$ con la verticale, e il modulo delle componenti normale, a_{1n}, e tangenziale, a_{1t}, alla traiettoria della sua accelerazione

$v_1 =$ .... $a_{1n} =$ .... $a_{1t} =$ ....

Supponiamo ora che nel suo moto di discesa il corpo vada a comprimere una molla di $d = 1.0\ cm$ (notare che $d \ll L$). La molla giace sul piano, è fissata a un estremo, è ideale, ha massa nulla, costante elastica k e quando raggiunge la massima compressione (d) il filo forma un angolo $\theta = 0^0$.

3. Determinare la costante elastica della molla k

$k =$ ....

1. $\overset{F_n}{ma_c} = T - mg\cos\theta_0 = 0 \longrightarrow T = mg\cos\theta_0$

2. $E_i = mgL(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgL(1-\cos\theta_1) = E_f$

$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgL(1-\cos\theta_0) - mgL(1-\cos\theta_1)$

$\frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 = \cancel{m}gL(1-\cos\theta_0) + \cancel{m}gL(\cos\theta_1 - 1)$

$v_1^2 = gL(\cancel{1} - \cos\theta_0 + \cos\theta_1 \cancel{-1})$

$v_1 = \sqrt{2gL(\cos\theta_1 - \cos\theta_0)}$

$F_1^n = ma_c = \frac{mv_1^2}{L} = 2mg(\cos\theta_1 - \cos\theta_0)$

$F_1^t = mg\sin\theta_1$

$F_1 = \sqrt{F_1^n + F_1^t} = \sqrt{4m^2g^2(\cos\theta_1 - \cos\theta_0)^2 + m^2g^2\sin^2\theta_1}$

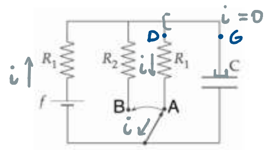
$= mg\sqrt{4(\cos\theta_1 - \cos\theta_0)^2 + \sin^2\theta_1}$

fermo!

3. $E_i = mgL(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}Kd^2 = E_f$

$K = \frac{2mgL(1-\cos\theta_0)}{d^2}$

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo



(*Figura qualitativa a solo scopo illustrativo*)

Con riferimento alla figura, il generatore di f.e.m. ha una resistenza interna trascurabile e stabilisce una d.d.p. di 12 V, le resistenze valgono rispettivamente $R_1 = 3\ \Omega$ e $R_2 = 0.6\ \Omega$, mentre il condensatore ha una capacità $C = 4\ \mu F$. Inizialmente il deviatore è commutato su A.

Una volta che il circuito ha raggiunto la condizione di regime, determinare:

1.1 La potenza P erogata dal generatore e la carica Q del condensatore

$P =$ .... $Q =$ ....

1.2 La potenza P erogata dal generatore e la differenza di potenziale, V_C ai capi del condensatore

$P =$ .... $V_C =$ ....

Il deviatore viene poi commutato nella posizione B.

Una volta che il circuito ha raggiunto la condizione di regime, si determini:

2.1 L'energia dissipata, E_{diss} nelle resistenze dopo un intervallo di tempo di Δt secondi

$E_{diss} =$ ....

2.2 La variazione di energia elettrostatica del sistema, $\Delta E = E_B - E_A$, tra quando il commutatore è deviato su B e quando lo è su A in condizione di regime per entrambi i casi

$\Delta E =$ ....

Sempre con il deviatore commutato nella posizione B si riempie il condensatore con un materiale di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 3$ e si aspetta che il circuito raggiunga una nuova condizione di regime. Si determini:

3.1 la variazione di energia elettrostatica del sistema, $\Delta E' = E'_B - E_B$

$\Delta E' =$ ....

3.2 la carica Q' del condensatore

$Q' =$ ....

Costanti Utili: $\varepsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}$ F/m

1. $P = Ri^2 = 2R_1 i^2 = \cancel{2}\cancel{R_1}\frac{(\Delta V)^2}{\cancel{4}R_1^{\cancel{2}}} = \frac{(\Delta V)^2}{2R_1}$

$Ri = \Delta V \longrightarrow i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V}{2R_1}$

$C = \frac{Q}{\Delta V} \longrightarrow Q = C\Delta V = CiR_1 \leftarrow$ c'è la resistenza davanti

$Ri = \Delta V \longrightarrow iR_1 = \Delta V = V_C$

2. $P_B = \frac{E^B_{diss}}{\Delta t} \longrightarrow E_{diss} = P_B\Delta t = \frac{(\Delta V)^2}{R_1+R_2}\Delta t$

$P_B = (R_1+R_2)i^2 = \cancel{(R_1+R_2)}\frac{(\Delta V)^2}{(R_1+R_2)^{\cancel{2}}} = \frac{(\Delta V)^2}{R_1+R_2}$

$i = \frac{\Delta V}{R_1+R_2}$

$E_B = \frac{1}{2}C\Delta V_B^2 = \frac{1}{2}Ci^2R_2^2$

$\Delta V_B = iR_2$

$E_A = \frac{1}{2}C\Delta V_A^2 = \frac{1}{2}Ci^2R_1^2$

$\Delta V_A = iR_1$

$\Delta E = E_B - E_A = \frac{1}{2}Ci^2R_2^2 - \frac{1}{2}Ci^2R_1^2$

3. $C' = \varepsilon_r C$

$E'_B = \frac{1}{2}C'\Delta V_B^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_r C i^2 R_2^2$

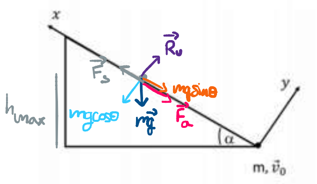
$\Delta E' = E'_B - E_B = \frac{1}{2}\varepsilon_r C i^2 R_2^2 - \frac{1}{2}Ci^2R_2^2$

$Q' = C'\Delta V_B = \varepsilon_r C i R_2$

19-02-21

lunedì 28 giugno 2021 15:40

ESERCIZIO.1 – Meccanica



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

Con riferimento alla figura, a un punto materiale che si trova nell'origine del sistema di assi cartesiani indicato, viene fornita all'istante $t = 0$ una velocità $\vec{v}_0 = (10, 0)\ ms^{-1}$. Il moto del punto materiale negli istanti successivi avviene lungo un piano inclinato, con un angolo di base $\alpha = 30°$, e scabro. Indichiamo con μ_s e μ_d rispettivamente il coefficiente di attrito statico e dinamico tra il piano ed il punto materiale, con μ_d=0.3.

1.a Scrivere la legge oraria per lo spazio percorso lungo il piano nel moto di salita

$x(t) =$ ....

1.b Esprimere la velocità in funzione del tempo, $v(t)$, nel moto di salita lungo il piano

$v(t) =$ ....

2.a Calcolare il tempo necessario , t^* perchè il punto materiale si fermi e la corrispondente quota massima rispetto al suolo, h_{max}, raggiunta dal punto nella salita

$t^* =$ .... $h_{max} =$ ....

2.b Calcolare il tempo necessario, t', affinché il punto materiale nel moto di salita raggiunga una velocità pari a $v(t') = v_0/2$ e la corrispondente quota, h', rispetto al suolo

$t' =$ .... $h' =$ ....

3.a Determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico, μ_s^{min}, per cui, una volta raggiunta la posizione di massima quota rispetto al suolo, il punto rimane in equilibrio.

$\mu_s^{min} =$ ....

1. $\cancel{m}a = -\mu_d \cancel{m}g\cos\alpha - \cancel{m}g\sin\alpha$

$a = -g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)$ = costante!

$$x(t) = \cancel{x_0}^{\,0} + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$= v_0 t - \frac{1}{2}g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)t^2$$

$$v(t) = v_0 + at = v_0 - g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)t$$

2. $v(t^*) = v_0 - g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)t^* = 0$

$$-t^* g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha) = -v_0$$
$$t^* = \frac{v_0}{g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)}$$

$$x(t^*) = v_0 t^* - \frac{1}{2}g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)t^{*2}$$
$$= \frac{v_0^2}{g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)} - \frac{1}{2}\cancel{g}\cancel{(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)}\frac{v_0^2}{g^{\cancel{2}}(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)^{\cancel{2}}}$$
$$= \frac{v_0^2}{g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)}$$

$$h_{max} = x(t^*)\sin\alpha = \frac{\sin\alpha\, v_0^2}{2g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)}$$

oppure: $K_f - K_i = U_i - U_f + L_{diss} \longrightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh_{max} + \int_0^{x(t^*)} \vec{F}_a \cdot d\vec{s}$

Th. forze vive

$$-\frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 = -\cancel{m}gh_{max} - \mu_d \cancel{m}g\cos\theta\, x(t^*)$$
$$\frac{1}{2}v_0^2 = gh_{max} - \mu_d g\cos\theta \frac{h_{max}}{\sin\alpha}$$

$h_{max} = x(t^*)\sin\alpha$

$$h_{max}\left(g - \mu_d g\cos\theta\frac{1}{\sin\alpha}\right) = \frac{1}{2}v_0^2$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g\left(1 - \frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right)} \longleftarrow \text{stesso risultato}$$

$$v(t') = v_0 - g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)t' = \frac{v_0}{2}$$
$$-g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)t' = \frac{v_0}{2} - v_0$$
$$t' = \frac{v_0}{2g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)}$$

$$x(t') = v_0 t' - \frac{1}{2}g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)t'^2$$
$$= v_0\frac{v_0}{2g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)} - \frac{1}{2}\cancel{g}\cancel{(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)}\frac{v_0^2}{4g^{\cancel{2}}(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)^{\cancel{2}}}$$
$$= \frac{v_0^2}{2g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)} - \frac{v_0^2}{8g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)}$$
$$= \frac{3v_0^2}{8g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)}$$

$$h' = x(t')\sin\alpha = \frac{3v_0^2\sin\alpha}{8g(\mu_d\cos\alpha + \sin\alpha)}$$

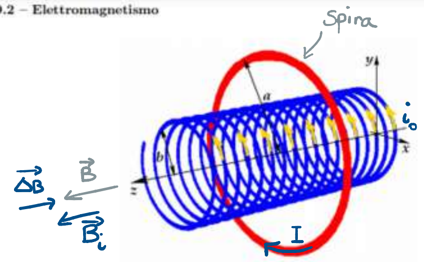
oppure: $K_f - K_i = U_i - U_f + L_{diss} \longrightarrow \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh' - \mu_d mg\cos\alpha\, x(t')$

3. $F_s^{max} \geq mg\sin\alpha \longrightarrow \mu_s \cancel{m}g\cos\alpha \geq \cancel{m}g\sin\alpha$

3. $F_s^{max} \geq mg\sin\alpha \longrightarrow \mu_s \cancel{mg}\cos\alpha \geq \cancel{mg}\sin\alpha$

$$\mu_s \geq \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

ESERCIZIO.2 – **Elettromagnetismo**



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

Una spira circolare conduttrice giace in un piano ortogonale all'asse di un solenoide ed è ad esso coassiale. La spira ha raggio $a = 10$ mm e resistenza $R = 4$ $m\Omega$, mentre il solenoide ha raggio $b = a/2$ e $n = 10^3$ spire/mm, spire per unità di lunghezza. Nell'ipotesi in cui la corrente nel solenoide è $i_0 = 0.5$ A e nel verso indicato in figura:

1.a Determinare l'espressione del campo di induzione magnetica $\vec{B}$ in tutto lo spazio, e calcolare il campo in un punto che giace in un piano parallelo alla spira e distante $a/4$ dall'asse del solenoide

$\vec{B}=$ .... $\vec{B}_{a/4}=$ ....

1.b Determinare l'espressione del campo di induzione magnetica $\vec{B}$ in tutto lo spazio, e calcolare il campo in un punto che giace in un piano parallelo alla spira e distante a dall'asse del solenoide

$\vec{B}=$ .... $\vec{B}_a=$ ....

Nell'ipotesi in cui la corrente che scorre nel solenoide sia variabile nel tempo e data da $i(t) = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, con $\tau = 1$ ms:

2.a Si determini l'espressione della corrente I che circola nella spira e il suo verso (giustificando la risposta e con un disegno)

$I =$ ....

3.a Calcolare l'energia complessivamente dissipata nella spira, E_{diss}

$E_{diss} =$ ....

3.b Calcolare il valore massimo della potenza dissipata nella spira P_{max}

$P_{max} =$ ....

Costanti Utili: $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m

1. dal th. Ampere, il campo magnetico vale:

$$B(r) = \begin{cases} \mu_0 n i_0 & 0 \leq r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$\vec{B} = B(r)\hat{z}$ $\quad \vec{B}_a = 0 \quad \vec{B}_{a/4} = 0.628\,T\,\hat{z}$

2. $$B(r) = \begin{cases} \mu_0 n i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} & 0 \leq r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$\vec{B} = B(r)\hat{z} \qquad n = 10^3 \frac{\text{spire}}{\text{mm}} \cdot 10^3 = 10^6 \frac{\text{spire}}{\text{m}}$

$$\Phi(B) = BA = \mu_0 n i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \pi b^2$$

$$f_{em} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial(\mu_0 n i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \pi b^2)}{\partial t} = \frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}$$

$$I = I(t) = \frac{|f_{em}|}{R} = \frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2 e^{-\frac{t}{\tau}}}{R\tau}$$

3. $$P = I^2 R = \left(\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2 e^{-\frac{t}{\tau}}}{R\tau}\right)^2 R$$

$$P_{max} = P(0) = \left(\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2}{R\tau}\right)^2 R = 0.609\ W$$

$$E_{diss} = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty \left(\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2 e^{-\frac{t}{\tau}}}{R\tau}\right)^2 R\,dt = \left(\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2}{R\tau}\right)^2 R \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}}dt$$

$$= -\frac{\tau}{2}\left(\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2}{R\tau}\right)^2 R \int_0^\infty -\frac{2}{\tau} e^{-\frac{2t}{\tau}}dt = \frac{\tau}{2}\left(\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2}{R\tau}\right)^2 R \left[-e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\tau}{2}\left(\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2}{R\tau}\right)^2 R \left[-\cancel{e^{-\infty}}^{\,0} + \cancel{e^{0}}^{\,1}\right] = 3.04 \cdot 10^{-4}\ J$$

24-07-20

giovedì 1 luglio 2021 10:57

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Un punto materiale di massa m= 16.3 kg può muoversi senza attrito su un piano orizzontale. Al punto sono collegate due molle ideali di costanti elastiche k_1= 71 Nm^{-1} e k_2= 571 Nm^{-1} , rispettivamente, come mostrato in figura. Nella posizione x_0=0 m il blocco è in equilibrio e le molle sono a riposo. All'istante t=0 s il punto materiale di massa m viene lasciato, da fermo, dalla posizione x= 133 cm . Determinare:

1) la pulsazione ω delle oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio:

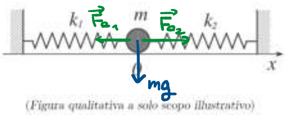
ω = ...

2) la legge oraria del punto per $t \geq 0$ s e il modulo della massima accelerazione $|a_{max}|$ raggiunta dal punto durante il suo moto:

$|a_{max}|$ = ... ; $x(t)$ =......................

3) l'energia meccanica totale E_{tot} del punto al tempo t=T/ 19 (con T periodo del moto oscillatorio):

E_{tot} = ...



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

1. $F(x) = -(\underline{K_1+K_2})x$; 2

$ma = -(K_1+K_2)x$

$m\ddot{x} = -(K_1+K_2)x$

$\ddot{x} = \dfrac{-(K_1+K_2)}{m}x$

$\ddot{x} + \dfrac{K_1+K_2}{m}x = 0 \longleftarrow$ oscillatore armonico

$\omega = \sqrt{\dfrac{K_1+K_2}{m}}$ $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K_1+K_2}}$ $\quad \nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K_1+K_2}{m}}$

2. $K_{eq} = K_1 + K_2$

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$

$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$

$$\begin{cases} x(0) = \bar{x} = A\cos\phi \longrightarrow \bar{x} = A \\ \dot{x}(0) = 0 = -\omega A\sin\phi \longrightarrow \phi = 0 \end{cases}$$

e quindi:
$$\begin{cases} x(t) = \bar{x}\cos(\omega t) \\ \dot{x}(t) = -\omega\bar{x}\sin(\omega t) \\ \ddot{x}(t) = -\omega^2\bar{x}\cos(\omega t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} |V_{max}| = \omega\bar{x} = \sqrt{\dfrac{K_1+K_2}{m}}\,\bar{x} \\ |a_{max}| = \omega^2\bar{x} = \dfrac{K_1+K_2}{m}\,\bar{x} \end{cases}$$

3. $$\left.\begin{aligned} K(t) &= \tfrac{1}{2}mV^2(t) = \tfrac{1}{2}m\omega^2\bar{x}^2\sin^2(\omega t) = \tfrac{1}{2}\cancel{m}\frac{K_1+K_2}{\cancel{m}}\bar{x}^2\sin^2(\omega t) = \tfrac{1}{2}K_{eq}\bar{x}^2\sin^2(\omega t) \\ K\left(t = \tfrac{T}{n}\right) &= \tfrac{1}{2}K_{eq}\bar{x}^2\sin^2\left(\omega\tfrac{T}{n}\right) = \tfrac{1}{2}K_{eq}\bar{x}^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{\cancel{T}}\cdot\frac{\cancel{T}}{n}\right) = \tfrac{1}{2}K_{eq}\bar{x}^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{aligned}\right\}\text{pallina}$$

$$\left.\begin{aligned} U(t) &= \tfrac{1}{2}k_1\bar{x}^2\cos^2(\omega t) + \tfrac{1}{2}k_2\bar{x}\cos^2(\omega t) = \tfrac{1}{2}K_{eq}\bar{x}^2\cos^2(\omega t) \\ U\left(t = \tfrac{T}{n}\right) &= \tfrac{1}{2}K_{eq}\bar{x}^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{aligned}\right\}\text{molle}$$

$$E = K(t) + U(t) = \tfrac{1}{2}K_{eq}\bar{x}^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \tfrac{1}{2}K_{eq}\bar{x}^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \tfrac{1}{2}K_{eq}\bar{x}^2$$

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

I due solenoidi in figura sono rettilinei, di lunghezza infinita, coassiali con l'asse in comune lungo l'asse Z e hanno raggi r_1= 21 mm ed r_2= 112 mm . I solenoidi hanno entrambi n= 5.38 10^5 spire m^{-1} e sono percorsi da una medesima corrente i_0= 36 A ma in versi opposti, come rappresentato in figura. Si determinino:

1) Il grafico di $B(r)$ in funzione della distanza r dall'asse Z e l'espressione del campo magnetico $\vec{B}(r,\varphi,z)$ $\forall r \geq 0$; $\forall\varphi \in [0,2\pi]$; $\forall z \in \mathbb{R}$

$\vec{B}(r,\varphi,z)$ = ...

2) Calcolare l'intensità del campo magnetico $|\vec{B}(0,\varphi,z)|$ $\forall\varphi \in [0,2\pi]$; $\forall z \in \mathbb{R}$

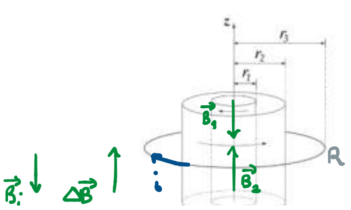
$|\vec{B}(0,\varphi,z)|$ = ...

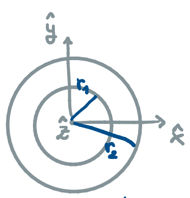
Intorno ai due solenoidi, e coassialmente ad essi, viene collocata una spira circolare, di raggio r_3= 71 cm e resistenza ohmica R= 119 Ω, mentre la corrente che scorre nei solenoidi viene fatta variare con legge $i(t) = \underbrace{24.1}_{a}\, t$. Determinare:

3) la potenza P dissipata in (mW) sulla spira per effetto Joule

P = ...

Costanti Utili: $\mu_0 = 1.257\ 10^{-6}$ TmA^{-1}

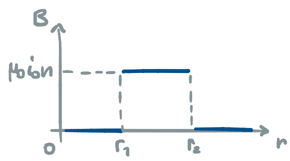




area anello: $\pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$

1. il campo magnetico di entrambi i solenoidi separatamente è $B = \mu_0 i_0 n$

si scrive così
$$\vec{B}(r) = \begin{cases} 0 & r < r_1 \\ \mu_0 i_0 n\hat{z} & r_1 < r < r_2 \\ 0 & r > r_2 \end{cases}$$



2. $|\vec{B}(0,\varphi,z)| = 0$ perché $\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 0$ in $r = 0$

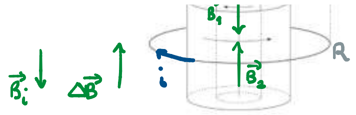
3. il flusso di campo magnetico attraverso la spira vale, per Gauss:

$$\Phi_B(t) = \oint\vec{B}\cdot d\vec{A} = \oint B\,dA = B\oint dA = B(\underbrace{\pi r^2}_{\text{area cerchio}}) = B\pi(\underbrace{r_2^2 - r_1^2}_{\text{area anello}})$$

$$= \mu_0 i(t) n\pi(r_2^2 - r_1^2) = \mu_0 a t n\pi(r_2^2 - r_1^2)$$

quindi, per Faraday si svilupperà una $\mathcal{E}$ sulla spira che vale

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial\Phi_B(t)}{\partial t} = -\mu_0 a n\pi(r_2^2 - r_1^2) \quad e \quad i = \frac{|\mathcal{E}|}{R}$$



$\pi r_2^2 - \pi r_1^2$
$= \pi(r_2^2 - r_1^2)$

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B(t)}{\partial t} = -\mu_0 a n \pi (r_2^2 - r_1^2) \quad e \quad i = \frac{|\mathcal{E}|}{R}$$

che scorrerà in senso orario per la regola della mano destra

quindi: $P = i^2(t) R = \frac{\mathcal{E}^2}{R^{\cancel{2}}} \cancel{R} = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$

2-07-21

venerdì 2 luglio 2021 21:43

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Un'asta omogenea di lunghezza $L = 107.4$ m e massa $m = 248$ kg giace su un piano orizzontale privo di attrito. Due corpi assimilabili a due punti materiali, di massa $m_1 = 62$ kg e $m_2 = 31$ kg, si muovono sullo stesso piano orizzontale con velocità rispettivamente $v_1 = 8\ ms^{-1}$ e $v_2 = 16\ ms^{-1}$ in direzione ortogonale alla sbarra e versi opposti come in figura. I due corpi colpiscono contemporaneamente l'asta, rispettivamente alle distanze $d_1 = 17.9$ m e $d_2 = 35.8$ m dal suo centro e rimangono attaccati ad essa.

1.a Dire quali delle seguenti grandezze fisiche si conserva nell'urto, giustificando la risposta:
- Energia del sistema, E
- quantità di moto del sistema, $\vec{P}$
- momento angolare con polo nel centro dell'asta, $\vec{L}^o$

2.a Calcolare la posizione $\vec{R}_{cm}$ e la velocità $\vec{v}_{cm}$ del centro di massa dopo l'urto

$\vec{R}_{cm}=$ .... $\vec{v}_{cm}=$ ....

2.b Calcolare il momento angolare del sistema dopo l'urto rispetto al centro dell'asta, $\vec{L}$

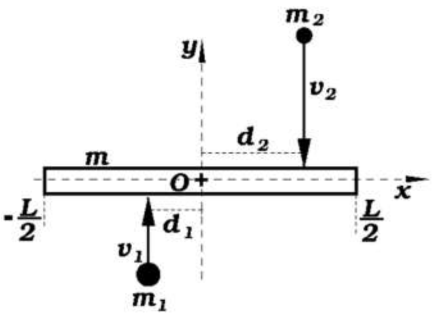
$\vec{L} =$ ....

3.a Calcolare l'energia cinetica K del sistema dopo l'urto

$K =$ ....

3.b Calcolare l'energia cinetica rotazionale E_{rot} del sistema dopo l'urto

$E_{rot} =$ ....



1. E = no (urto anelastico)

$\vec{P}$ = sì (no $\vec{F}dt$ impulsive)

$\vec{L}_o$ = sì $(\Sigma \vec{\tau}_{ext} = 0)$

2. $\vec{R}_{cm} = \left(\frac{-m_1 d_1 + m_2 d_2}{m_1+m_2+m}, 0, 0\right) = (0,0,0)\,m$

$P_{i_y} = -m_2 v_2 + m_1 v_1 = (m+m_2+m_1) V_{cm_y} = P_{f_y}$

$P_{i_x} = 0 = P_{f_y}$

$P_{i_z} = 0 = P_{f_z}$

$\vec{V}_{cm} = \left(0, \frac{-m_2 v_2 + m_1 v_1}{m+m_2+m_1}, 0\right) = (0,0,0)\ m/s$

$\vec{L}_{o_i} = \vec{d}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{d}_2 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{L}$

$\vec{L} = (-d_1 m_1 v_1 - d_2 m_2 v_2)\hat{z} = -(d_1 m_1 v_1 + d_2 m_2 v_2)\hat{z} = -2.66 \cdot 10^4\ kg m^2 s^{-1}\ \hat{z}$

3. $K = \frac{1}{2}\cancel{(m+m_1+m_2)V_{cm}^2}^{\,0} + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\cancel{I}\frac{(-d_1 m_1 v_1 - d_2 m_2 v_2)^2}{I^{\cancel{2}}} =$

$I = \frac{1}{12}mL^2 + m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 = 297 \cdot 10^3\ kg \cdot m$

$L_{o_i} = -d_1 m_1 v_1 - d_2 m_2 v_2 = I\omega = L_{of}$

$\omega = \frac{-d_1 m_1 v_1 - d_2 m_2 v_2}{I} = -0.09\ s^{-1}$

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Con riferimento alla Figura, una spira rettangolare di lati $a = 4$ cm e $b = 8$ cm e resistenza $R = 819$ mΩ è posta in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme e costante ortogonale al piano della spira con $\vec{B}_0 = (0 ; 0 ; 7)$ T per $(-\infty \le x \le 0 \,;\, y \in \mathcal{R})$. La spira viene poi portata nella regione del piano in cui l'intensità del campo magnetico è nulla $(0 < x \le \infty \,;\, y \in \mathcal{R})$ a velocità costante $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$ con $v_0 = 30$ m/s.
Si trascuri l'induttanza della spira.

1.a Esprimere il flusso del campo magnetico attraverso la spira in funzione della posizione x del lato a destro della spira, e farne il grafico, $\phi(\vec{B}, x)$ per $-\infty \le x \le \infty$

$\phi(\vec{B}, x) =$ ....

1.b Determinare la corrente $i(x)$ che circola nella spira in funzione della posizione x del lato destro della spira e il suo verso (quando non è nulla) motivando la risposta anche con un disegno. Fare il grafico di $i(x)$ per $-\infty \le x \le \infty$

$i(x) =$ ....

2.a Calcolare la forza esterna $\vec{F}$ che è necessario applicare nel tratto $(0 < x < b)$ al lato destro della spira per estrarla dalla zona di campo magnetico

$\vec{F} =$ ....

3.a Si calcoli il lavoro L necessario per estrarre la spira dalla regione in cui è presente il campo magnetico

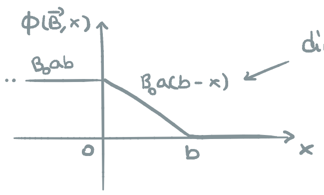
$L =$ ....

3.b Si calcoli l'energia complessivamente dissipata per effetto Joule nella spira durante il processo di estrazione E_{Diss}.

$E_{Diss} =$ ....

1. $$\phi(\vec{B}, x) = \begin{cases} \vec{B}_0 \cdot \vec{A} = B_0 A = B_0 ab = 2.24 \cdot 10^{-2}\ Wb & -\infty < x \le 0 \\ \vec{B}_0 \cdot \vec{A} = B_0 A = B_0 a(b-x) & 0 < x < b \\ \vec{B}_0 \cdot \vec{A} = 0 \cdot A = 0 & b \le x < \infty \end{cases}$$

$B_0 a(b-x) = 0 \longrightarrow x \ge b$ $\quad (2.24 \cdot 10^{-2} - 2.8 \cdot 10^{-1} \cdot x)\ Wb$



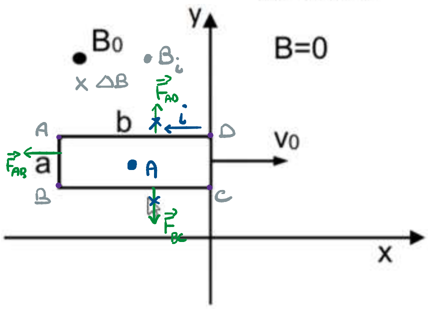
diminuisce: ΔB entrante

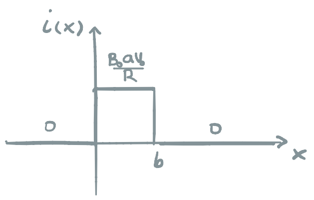
$i(x) \neq 0$ solo in $0 < x < b$, ove $\phi(\vec{B}, x)$ non è const

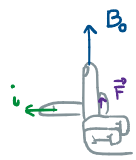
$f.e.m = -\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\partial(B_0 a(b-x))}{\partial t} = B_0 a \frac{dx}{dt} = B_0 a v_0 \leftarrow$ Lentz

$i = \frac{B_0 a v_0}{R} = 10.26\,A$ $\quad > 0$: segno concorde a B_0

negli altri casi $\frac{\partial\phi}{\partial B} = 0 \longrightarrow i = 0$







2. $\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$

$\vec{F}_{DA} = i\vec{L} \times \vec{B} = ibB_0\hat{y}$ } si annullano

$\vec{F}_{AB} = i\vec{L} \times \vec{B} = -iaB_0\hat{x} = -\frac{B_0 a v_0}{R} a B_0 \hat{x} = -\frac{B_0^2 a^2 v_0}{R}\hat{x} = \underline{2.87 \cdot 10^{-1} N\hat{x}}$

2. $\vec F = i\vec L \times \vec B$

$$\vec F_{DA} = i\vec L \times \vec B = i b B_0 \hat y$$
$$\vec F_{BC} = i\vec L \times \vec B = -i b B_0 \hat y$$
si annullano

$$\vec F_{AB} = i\vec L \times \vec B = -i a B_0 \hat x = -\frac{B_0 a v_0}{R} a B_0 \hat x = -\frac{B_0^2 a^2 v_0}{R}\hat x = \underline{2.87\cdot 10^{-1}\,\mathrm{N}\,\hat x}$$
$$\vec F_{CD} = i\vec L \times \vec B = 0$$

costante perché la spira è mantenuta a v cost $\longrightarrow \varepsilon$ cost $\longrightarrow i$ cost

3. $$L = \int_0^b \vec F \cdot d\vec l = Fb = \frac{B_0^2 a^2 v_0}{R} b = \frac{B_0^2 a^2 v_0 b}{R} =$$ ove $\vec F = -\vec F_{ab}$

$$W = i^2 R = \frac{B_0^2 a^2 v_0^2}{R^{\cancel{2}}} \cancel{R} = \frac{(B_0 a v_0)^2}{R}$$

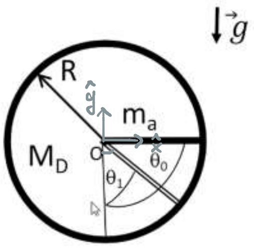
$$E_{diss} = \int_0^{t^*} W dt = W t^* = W \frac{b}{v_0} = \frac{(B_0 a v_0)^2}{R}\frac{b}{v_0} = \frac{B_0^2 a^2 v_0 b}{R}$$

$$x(t^*) = \cancel{x_0}^{\,0} + v_0 t^* = b \longrightarrow t^* = \frac{b}{v_0}$$

28-06-19

domenica 4 luglio 2021 22:28

Esercizio 1



Un'asta omogenea di massa m_a e di lunghezza R è rigidamente vincolata ad un disco omogeneo di massa M_D e raggio R. Il sistema è libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per il centro del disco (O, in figura) e perpendicolare al disco.

1. Calcolare la distanza d del centro di massa del sistema dal centro del disco (O).

   $d =$ ....

2. Determinare il momento di inerzia I_O del sistema rispetto all'asse di rotazione passante per il centro del disco e calcolare la velocità angolare del sistema (ω_1) quando esso raggiunge posizione indicata in figura (θ_1) una volta lasciato libero di ruotare dalla posizione corrispondente a θ_0.

   $I_O =$ .... $\omega_1 =$ ....

3. Determinare il periodo delle piccole oscillazioni T, attorno alla posizione di equilibrio del sistema.

   $T =$ ....

Dati: $m_a = 10\ g$, $M_D = 60\ g$, $R = 30\ cm$, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

1. $\vec{R}_{cm} = \left(\frac{\frac{R}{2} m_a + \cancel{0 M_D}^{\,0}}{M}, 0, 0 \right)$ $\quad m_a + M_D = M$

$d = \frac{R m_a}{2M}$ $\quad M_D = 6 m_a$

2. $I_o = \frac{1}{2} M_D R^2 + \frac{1}{3} m_a R^2 = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{6}^{\,3} m_a R^2 + \frac{1}{3} m_a R^2 = \frac{10}{3} m_a R^2$

$E_{\theta_1} = \frac{1}{2} I_o \omega_1^2 + Mgd(1-\cos\theta_1) = Mgd(1-\cos\theta_0) = E_{\theta_0}$

$\frac{1}{2} I_o \omega_1^2 = Mgd(\cancel{1}-\cos\theta_0) - Mgd(\cancel{1}-\cos\theta_1)$

$I_o \omega_1^2 = 2Mgd\cos\theta_0 + Mgd\cos\theta_1$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{2Mgd(\cos\theta_0 + \cos\theta_1)}{I_o}}$

3. $E_\theta = \frac{1}{2} I_o \omega^2 + Mgd(1-\cos\theta) = cost$

l'energia si conserva: $\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{1}{\cancel{2}} I_o \cancel{2} \omega \dot{\omega} + 0 + Mgd \sin\theta\dot{\theta}$

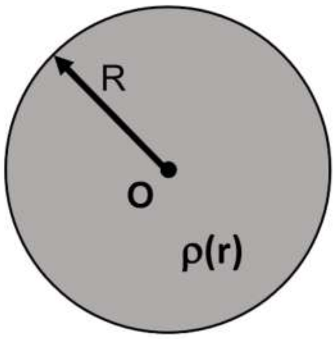
$\omega = \dot{\theta}$, $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$ $\longrightarrow$ $I_o \cancel{\dot{\theta}} \ddot{\theta} + Mgd\sin\theta\cancel{\dot{\theta}} = 0$

piccole oscillazioni, $\sin\theta \simeq \theta$ $\longrightarrow$ $I_o \ddot{\theta} + Mgd\theta = 0$ ovvero $\ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I_o}\theta = 0$

ovvero l'equazione differenziale dei moti armonici/oscillatori $a = -\frac{k}{m}x$ con $a = \ddot{\theta}$, $\frac{k}{m} = \frac{Mgd}{I_o}$ e $x = \theta$ con soluzione:

$\theta(t) = \theta_0 \cos(\Omega t)$ con $\Omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I_o}}$ e $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{Mgd}}$

Esercizio 2



Una nuvola sferica di raggio R, ha una densità di carica variabile con la distanza dal centro con la legge:

$$\rho = A\frac{r^2}{R^2} \quad per\ 0 \le r \le R$$

La nuvola ha una carica totale Q.
Determinare:

1. Il valore di A.

   $A =$ ....

2. Il campo elettrico ad una distanza dal centro della nuvola pari a R/2, $\vec{E}\left(\frac{R}{2}\right)$, e a distanza pari a $2R$, $\vec{E}(2R)$.

   $\vec{E}\left(\frac{R}{2}\right) =$ .... $\vec{E}(2R) =$ ....

3. Determinare la differenza di potenziale tra il centro, C, della nuvola e l'infinito, dovuta alla distribuzione di carica della nuvola, $V(C) - V(\infty)$.

   $V(C) - V(\infty) =$ ....

Dati: $Q = 5\ nC$, $R = 10\ cm$

1. $dq = \rho dV = \rho\, 4\pi r^2 dr = A\frac{r^2}{R^2} 4\pi r^2 dr$

$Q = \int_0^R A\frac{r^2}{R^2} 4\pi r^2 dr = A\frac{4\pi}{R^2}\int_0^R r^4 dr = A\frac{4\pi}{R^2}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R = \frac{A 4\pi \cancel{R^5}^{\,3}}{5\cancel{R^2}}$

$A = \frac{5Q}{4\pi R^3}$ $\longleftarrow$ Q è nota

2. $\Phi_E = \vec{E}\cdot\vec{A} = EA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{A 4\pi r^5}{\varepsilon_0 5 R^2}$

$q_{int} = \int_0^r \overset{\rho}{A\frac{r'^2}{R^2}}\, \overset{dV}{4\pi r'^2 dr'} = \frac{A 4\pi}{R^2}\int_0^r r'^4 dr' = \frac{A 4\pi}{R^2}\left[\frac{r'^5}{5}\right]_0^r = \frac{A 4\pi r^5}{5R^2}$

$E(r) = \frac{A \cancel{4\pi} \cancel{r^5}^{\,3}}{\varepsilon_0 5 R^2 \cancel{4\pi r^2}} = \frac{A r^3}{\varepsilon_0 5 R^2}$ $\quad \vec{E}(r) = E(r)\hat{r}$

$E\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{A R^{\cancel{3}}}{8\varepsilon_0 5 \cancel{R^2}} = \frac{AR}{40\varepsilon_0}$ $\quad \vec{E}\left(\frac{R}{2}\right) = E\left(\frac{R}{2}\right)\hat{r}$

$E^{r>R}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $\quad E(2R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 4R^2}$ $\quad \vec{E}(2R) = E(2R)\hat{r}$

3. $V(0) - V(R) = \int_0^R \vec{E}(r)\cdot d\vec{r} = \int_0^R E\,dr = \int_0^R \frac{Ar^3}{\varepsilon_0 5R^2} dr = \frac{A}{\varepsilon_0 5R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{A}{\varepsilon_0 5R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{A \cancel{R^4}^{\,2}}{20\varepsilon_0 \cancel{R^2}} = \frac{AR^2}{20\varepsilon_0}$

$V(R) - V(\infty) = \int_R^\infty \vec{E}(r)\cdot d\vec{r} = \int_R^\infty E\,dr = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

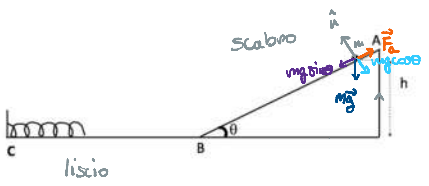
$$V(R) - V(\infty) = \int_R^\infty \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = \int_R^\infty E\,dr = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$V(0) - V(R) + V(R) - V(\infty) = V(0) - V(\infty)$$

2-02-18

venerdì 9 luglio 2021 20:03

Esercizio 1



Con riferimento alla figura, un punto materiale di massa $m = 0.2\ kg$ è posto su di un piano inclinato scabro di coefficiente d' attrito dinamico μ_d che forma con il piano orizzontale un angolo $\theta = 30^0$. Il punto materiale, partendo da fermo da una altezza $h = 0.8\ m$ rispetto al piano orizzontale, scende lungo il piano inclinato che si raccorda con un piano orizzontale liscio. Alla fine del piano orizzontale, il punto materiale si attacca ad una molla posta inizialmente nella sua posizione di riposo ed inizia un moto di oscillazione. Il moto di oscillazione avviene sul piano orizzontale che è privo di attrito. La molla ha massa nulla. Durante il moto di oscillazione la molla viene compressa di una lunghezza massima pari a $x_{max} = 0.2\ m$ e il periodo di oscillazione del sistema è T=1 s.
Si calcoli:

1. la costante elastica K della molla
   $K = \ldots\ldots\ldots\ldots$
2. l'accelerazione massima a_{max} e la velocità massima v_{max} del moto di oscillazione
   $a_{max} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $v_{max} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
3. il coefficiente di attrito dinamico μ_d esistente tra punto materiale e piano inclinato
   $\mu_d = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1. $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{2\pi}{T}$

$\omega^2 = \frac{K}{m} = \frac{4\pi^2}{T^2}$

$K = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = 7.9\ N/m$

2. $a_{max} = \overset{|-\omega^2 x_{max}|}{\frac{K x_{max}}{m}} = 7.9\ \frac{m}{s^2}$

velocità massima: $K = max$, $U = 0$, l'energia si conserva:

$E_i = \frac{1}{\cancel{2}} K x_{max}^2 = \frac{1}{\cancel{2}} m v_{max}^2 = E_f$

$V_{max} = \sqrt{\frac{K x_{max}^2}{m}} = \underline{x_{max}\,\omega} = 1.26\ \frac{m}{s}$

3. dal th. forze vive: $\underline{K_f - K_i = U_i - U_f - L_{diss}}$ $h = d\sin\theta$

$\frac{1}{2} m v_B^2 - \cancel{\frac{1}{2} m v_A^2}^{\,0} = mgh - \mu_d\, mg\cos\theta\, d = mgh - \mu_d\, mg\cos\theta \frac{h}{\sin\theta}$

quando la molla raggiunge la massima compressione

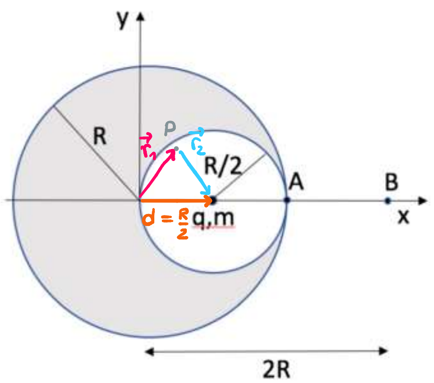
$\frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} K x_{max}^2$

$\frac{1}{2} K x_{max}^2 = mgh - \mu_d\, mg \frac{h}{\tan\theta}$

$\mu_d\, mg \frac{h}{\tan\theta} = mgh - \frac{1}{2} K x_{max}^2$

$\mu_d = \frac{mgh - \frac{1}{2} K x_{max}^2}{mgh} \tan\theta = \tan\theta\left(1 - \frac{K x_{max}^2}{2mgh}\right) = 0.52$

Esercizio 2



Una sfera di raggio R ha una distribuzione di carica ρ_0 uniforme. In essa viene praticato un foro sferico di raggio $R/2$. Assumendo un sistema di assi cartesiani in cui il centro della sfera ha coordinate $(0, 0, 0)$. Il centro del foro ha coordinate $(R/2, 0, 0)$. Nel centro del foro viene poi posta una carica puntiforme di carica q e massa m.
Con riferimento alla figura, e sapendo che $\rho_0 = 1\ \mu C/m^3$, $R = 1\ m$, $q = 1\ \mu C$, e $m = 10^{-6}\ kg$:

1. determinare l'espressione del campo elettrico dovuto alla distribuzione di carica della sfera cava $\left(\vec{E}\right)$ e il suo modulo $\left(|\vec{E}|\right)$ all'interno del foro
   $\vec{E} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $|\vec{E}| = \ldots\ldots\ldots\ldots$
2. calcolare il tempo t che impiega la carica q a raggiungere il punto A di coordinate $(R, 0, 0)$ sotto l'azione del campo elettrico generato dalla sfera cava
   $t = \ldots\ldots\ldots\ldots$
3. calcolare il modulo della velocità (v) della carica puntiforme q nel punto B di coordinate (2R,0,0)
   $v = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1. Il campo elettrico della sfera cava è dato dalla somma del campo elettrico di una sfera non cava con quello di una sfera con densità di carica opposta a quella della sfera intera; quindi il campo elettrico all'interno di una sfera qualunque è:

$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint E\,dA = E\oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

ove, dato che ρ è costante: $\rho = \frac{q}{V} = \frac{q_{int}}{V_{int}} \rightarrow q_{int} = q\frac{V_{int}}{V}$

quindi $q_{int} = q\frac{r^3}{R^3} = \rho V \frac{r^3}{R^3}$

e $E(r) = \rho \frac{\cancel{4}\cancel{\pi}\cancel{R^3} r^{\cancel{3}}}{3\,\cancel{4}\cancel{\pi}\cancel{R^3}\, r^{\cancel{2}} \varepsilon_0} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \longrightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}$

e quindi all'interno della sfera si ha $\vec{E}(r_1) = \frac{\rho\vec{r}_1}{3\varepsilon_0}$

e nella cavità $\vec{E}(r_2) = -\frac{\rho\vec{r}_2}{3\varepsilon_0}$

sommando i due si trova il campo all'interno della cavità, che vale

$\vec{E}_c = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho\vec{R}}{6\varepsilon_0} \longrightarrow |\vec{E}| = \frac{\rho R}{6\varepsilon_0} = 1.9\cdot 10^4\ Vm^{-1}$

mentre invece il campo elettrico all'esterno di una sfera qualsiasi è:

$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{\rho V}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{\cancel{4}\pi R^3 \rho}{\cancel{4}\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

2. il campo elettrico radiale genererà una forza sulla carica q che vale:

$\vec{F} = q\vec{E} = q\frac{\rho\vec{R}}{6\varepsilon_0}$, diretta quindi verso A.

assumendo che la sua velocità iniziale sia nulla, si ha un moto uniformemente accelerato lungo x

$F_x = q\frac{\rho R}{6\varepsilon_0} = ma_x \longrightarrow a_x = \frac{q\rho R}{6m\varepsilon_0}$

e quindi $x(t) = \cancel{x_0}^{0} + \cancel{v_{0x}t}^{0} + \frac{1}{\cancel{2}}a_x t^2 = \frac{R}{\cancel{2}} \longrightarrow t = \sqrt{\frac{R}{a_x}} = \sqrt{\frac{6m\varepsilon_0}{q\rho}} = 7.3\,ms$

3. adesso la carica risentirà di un campo elettrico diverso, dato dalla somma dei 2 campi elettrici delle sfere

21-02-17

venerdì 16 luglio 2021 17:48

Esercizio 1

Due sfere, una di massa $m_1 = 2\text{kg}$ e raggio $r_1 = 0.17\text{m}$ la seconda di massa $m_2 = 8\text{kg}$ e raggio $r_2 = 0.23\text{m}$, si urtano centralmente e rimangono attaccate senza deformarsi (troppo). La prima sfera viaggia alla velocità $v_1 = 34\text{m/s}$ verso la seconda che è ferma ma ruota su se stessa con una velocità angolare $\omega_2 = 20\text{rad/s}$ (vedere Fig.1).

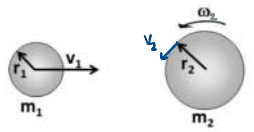
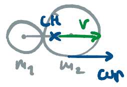


Fig.1



Si calcoli:

a) l'energia cinetica totale iniziale del sistema e la distanza tra il centro di massa del sistema (dopo l'urto) e il centro della prima sfera:

$E_c = \dots\dots\dots\dots$; $d_{cm} = \dots\dots\dots\dots$

b) la velocità angolare del sistema dopo l'urto e la massima velocità del centro della seconda sfera rispetto al laboratorio

$\omega = \dots\dots\dots\dots$; $v_{max} = \dots\dots\dots\dots$

c) la variazione di energia del sistema dovuta all'urto tra le due sfere:

$\Delta E = \dots\dots\dots\dots$

1. $E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{5} m_2 r_2^2 \omega_2^2 = 1189.9 \text{ J}$

$I_2 = \frac{2}{5} m_2 r_2^2 = 0.17 \text{ kgm}^2$

$d_{cm} = \frac{m_2 (r_2 + r_1)}{m_1 + m_2} = 0.32 \text{m}$

2. durante l'urto si conserva la quantità di moto

$P_i = m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V_f = P_f$

$V_f = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 6.8 \text{ ms}^{-1}$

... e il momento angolare del sistema (finale: polo nel CM)

$L_{s_i} = I_2 \omega_2 = I_{TOT} \omega = L_{s_f}$ ← puoi scegliere qualunque polo, anche diverso polo tra L_{s_i} e L_{s_f}

$\omega = \frac{I_2 \omega_2}{I_{TOT}} = 7.56 \text{ s}^{-1}$

$I_{TOT} = \frac{2}{5} m_1 r_1^2 + \frac{2}{5} m_2 r_2^2 + m_1 d_{cm}^2 + m_2 (r_1 + r_2 - d_{cm})^2 = 0.45 \text{ kgm}^2$

$V_{max} = (r_1 + r_2 - d_{cm}) \omega + V = 7.4 \text{ ms}^{-1}$ ← ci sarà un momento in cui V_{cm} e $V = \omega r$ sono allineati, quella sarà la V_{max}

3. $\Delta E = E_f - E_c = -946 \text{ J}$

$E_f = \frac{1}{2} I_{TOT} \omega^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_f^2 = 244 \text{ J}$

Esercizio 2

Una barra conduttrice, di massa $m = 100\text{g}$ e resistenza $R = 500\Omega$, appoggia senza attrito su due binari orizzontali di resistenza trascurabile. La distanza tra i binari è $l = 40\text{cm}$ e il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $B = 0.8\text{T}$, perpendicolare ai binari ed alla barra (entrante nel foglio, vedere Fig.2). All'istante t=0 la barra è ferma e tra i binari viene posto un generatore ($V_A - V_B > 0$).

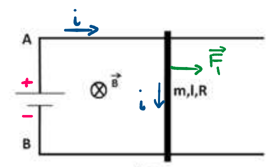


Fig.2

Δ

ignora la $\mathcal{E}$

Il generatore fornisce una corrente costante $i_0 = 0.2\text{A}$. Si calcoli:

a) in che direzione si muove la sbarra e la velocità della sbarra al tempo $t_1 = 15\text{s}$

$v_1 = \dots\dots\dots\dots$

b) il lavoro fatto dal generatore fino al tempo t_1

$L = \dots\dots\dots\dots$

Se invece il generatore fornisse una FEM costante pari a $V_0 = 8\text{V}$ calcolare:

c) la velocità limite della sbarra, ossia la velocità della sbarra quando si annulla l'accelerazione della sbarra stessa

$v_{lim} = \dots\dots\dots\dots$

1. $\vec{F_1} = i_0 \vec{l} \times \vec{B} \longrightarrow F_1 = i_0 l B \hat{x} \longrightarrow ma = i_0 l B \longrightarrow a = \frac{i_0 l B}{m} = \text{cost}$

$V(t) = \cancel{V_0}^{0} + a t_1 = \frac{i_0 l B}{m} t_1 = 9.6 \text{ ms}^{-1}$

perché sia i che B sono costanti!

2. il lavoro fatto equivale a:

$L = \Delta K = R i^2 t_1 + \frac{1}{2} m v^2 = 305 \text{ J}$

3. $\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B ds = B l x$

dato che viene fornita una tensione costante, l'accelerazione non sarà più costante perché la $\mathcal{E}$ cresce con la velocità della sbarra:

$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -B l v$

la velocità limite si raggiunge quando la $\mathcal{E}$ sarà uguale alla tensione del generatore, a quel punto non ci sarà più corrente nel circuito, e quindi non sarà più soggetta a forze esterne

$V_0 - B l V_{lim} = 0 \longrightarrow V_{lim} = \frac{V_0}{B l} = 25 \text{ ms}^{-1}$

23-07-21

martedì 10 agosto 2021 20:57

ESERCIZIO.1 – Meccanica

Un cilindro omogeneo di massa $m = 5.0$ kg e raggio $r = 25$ cm rotola senza strisciare su un piano orizzontale scabro sotto l'azione di una forza F orizzontale applicata al baricentro C del cilindro (vedi figura) di modulo $F = 77.0$ N. Sapendo che il cilindro parte da fermo e che il coefficiente di attrito statico fra il cilindro e il piano è $\mu_s = 0.79$, determinare:

1) il modulo dell'accelerazione del cilindro a e la Forza di attrito statico $\vec{F}_s$

a= .... $\vec{F}_s$= ....

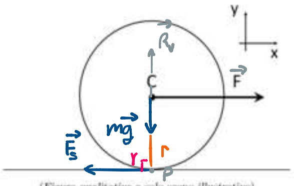
2) l'energia cinetica K del cilindro dopo un tempo $t^* = 2.2$ s dalla messa in moto

K = ...

3) il valore massimo del modulo della forza esterna orizzontale F_{max} che può essere applicata affinché il rotolamento avvenga senza strisciare

F_{max} = ...

Nota Bene: *assumere per i calcoli* $g = 10$ m/s^2



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

1.

- moto di puro rotolamento
- parte da fermo
- noti: F, μ_s, r, m
- incognite: $a, \vec{F_s}$

polo: C

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{F_s} = m\vec{a} \\ \vec{r} \times \vec{F_s} = I\vec{\alpha} \end{cases} \qquad a = -r\alpha \rightarrow \alpha = -\frac{a}{r}$$

$$\begin{cases} (F - F_s)\hat{x} = ma\hat{x} \rightarrow F - \frac{ma}{2} = ma \rightarrow \frac{3}{2}ma = F \rightarrow a = \frac{2}{3}\frac{F}{m} \\ -rF_s\hat{z} = -I\alpha\hat{z} \rightarrow F_s = \frac{I\alpha}{r} = -\frac{ma\cancel{r}}{2\cancel{r}} = -\frac{\cancel{2}F\cancel{m}}{3\cancel{2}\cancel{m}} = -\frac{1}{3}F \end{cases}$$

con $I = \frac{1}{2}mr^2$

$\vec{F_s} = (-\frac{1}{3}F, 0, 0) = -25.7$ N $\qquad a = 10.13$ ms^{-2}

$F_s \leq \mu_s N$

2. il cilindro esegue moto di puro rotolamento, dunque la sua energia cinetica avrà sia la componente traslazionale che rotazionale. Inoltre, esegue lungo x moto uniformemente accelerato, con a nota.

$$K = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{con} \quad \omega = -\frac{v_{cm}}{r}$$

Il moto è uniformemente accelerato: $a = cost$

$$\left.\begin{aligned} v_{cm}(t) &= \int_0^t a\,dt' = \cancel{v_0}^0 + at = at \\ x_{cm}(t) &= \int_0^t (v_0 + at')\,dt' = \cancel{x_0}^0 + \cancel{v_0}^0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}\right\} \text{il cilindro parte da fermo}$$

quindi $v_{cm}(t^*) = at^*$ e $x_{cm}(t) = \frac{1}{2}at^{*2}$;

di conseguenza: $K(t^*) = \frac{1}{2}mv_{cm}^2(t^*) + \frac{1}{2}I\frac{v_{cm}^2(t^*)}{r^2} =$

$= \frac{1}{2}ma^2t^{*2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m\cancel{r^2}\cdot\frac{a^2t^{*2}}{\cancel{r^2}} =$

$= \frac{1}{2}ma^2t^{*2} + \frac{1}{4}ma^2t^{*2} = \frac{\cancel{4+2}^3}{\cancel{8}_4}ma^2t^{*2} = 1862.5$ J

2b. Il lavoro L fatto dalle forze agenti sul cilindro in un tempo $t^* = 2.2$s dall'inizio del moto?

L'unica forza che compie lavoro è $\vec{F}$: F_s agisce sul punto di contatto P istantaneamente fermo!

$L = \int_0^{t^*}\vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^{t^*}F\,ds = F\int_0^{t^*}ds = Fx_{cm}(t^*) = \frac{1}{2}Fat^{*2} = \frac{Fat^{*2}}{2} = 1887.6$ J $\leftarrow$ dovrebbe corrispondere a K per il th.

3. il corpo continua a rotolare senza strisciare finché $\frac{1}{3}F = F_s \leq \mu_s mg$

dunque la forza massima applicabile per il moto di puro rotolamento è: $F_{max} = 3\mu_s mg = 118.5$N

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Con riferimento alla figura, due fili indefiniti paralleli, posti a distanza $r = 2\ m$ e perpendicolari al piano del foglio, sono percorsi dalla stessa corrente costante $i_0 = 3\ A$ nei versi indicati in figura. Si calcoli:

1.a la forza $\vec{F}_L^{12}$ per unità di lunghezza che il filo 1 esercita sul filo 2

$$\vec{F}_L^{12} = 9 \times 10^{-7}\ \hat{x}\ \mathrm{N/m}$$

1.b la forza $\vec{F}_L^{21}$ per unità di lunghezza che il filo 2 esercita sul filo 1

$$\vec{F}_L^{21} = -9 \times 10^{-7}\ \hat{x}\ \mathrm{N/m}$$

Nel punto P indicato in figura, a distanza r da entrambi i fili è posta una spira circolare conduttrice di raggio $a = 2\ cm$, con $a \ll r$ e di resistenza $R_s = 4\ \mu\Omega$, la cui normale forma un angolo $\theta = 45^0$ con l'asse y. Determinare:

2.a Il campo magnetico $\vec{B}$ nel punto P, e il flusso del campo magnetico $\phi\left(\vec{B}\right)$ attraverso la spira.

$$\vec{B} = 3 \times 10^{-7}\ \hat{y}\ T \qquad \phi\left(\vec{B}\right) = 2.67 \times 10^{-10}\ Wb$$

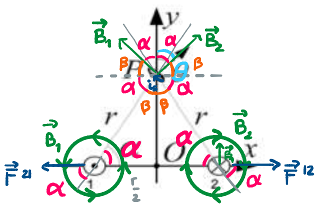
Dal tempo $t = 0$ la corrente nei fili varia nel tempo ed è data da $i(t) = i_0 + \beta t$, con $\beta = 10$ A/s. Si determini (trascurando l'autoinduzione):

3.a la forza elettromotrice, fem, indotta nella spira e l'energia in essa dissipata, E_{Diss}, al tempo $t^* = 5\ s$.

$$fem = -8.89 \times 10^{-10}\ V \qquad E_{Diss} = 9.88 \times 10^{-13}\ J$$

3.b la corrente che circola nella spira i_s e il suo verso (motivando la risposta e con un disegno), e la potenza dissipata P al tempo $t^* = 5\ s$

$$i_s = 2.22 \times 10^{-4}\ A \text{ orario} \qquad P = 1.98 \times 10^{-13}\ W$$



i due campi magnetici hanno lo stesso modulo dato che hanno stessa corrente i e sono equidistanti tra loro.

1a.

- 1 uscente
- 2 entrante
- fili indefiniti paralleli
- noti: r, i_0
- incognite: $\vec{F}_L^{12}$ ovvero forza per unità di lunghezza

Nei 2 fili si genereranno i rispettivi campi magnetici $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$, entrambi circonferenze sul piano xy dirette in 1 in senso antiorario e in 2 in senso orario per la regola della mano destra.

Per calcolare la forza per unità di lunghezza sul filo 2 ho bisogno del campo magnetico B_1 all'esterno del filo, che per Ampère vale:

$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \oint B_1 dl = B_1 \oint dl = B_1 (2\pi r) = \mu_0 i_{conc} = \mu_0 i_0 \longrightarrow B_1 = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r}\hat{y} \quad x>0$$

Utilizzando la forza di Lorentz:

$$\vec{F} = i\vec{L}_1 \times \vec{B} = i_0 \vec{L}_1 \times \vec{B}_1 = i_0 L_1 \hat{z} \times B_1 \hat{y} = i_0 L_1 B_1 \hat{x}$$

$$\text{quindi: } \vec{F}_L^{12} = \frac{i_0 L B_1}{L}\hat{x} = i_0 B_1 \hat{x} = \frac{\mu_0 i_0^2}{2\pi r}\hat{x} = 9 \cdot 10^{-7}\ \hat{x}\ \frac{N}{m}$$

1b. uguale ma col campo magnetico B_2

$$\oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \oint B_2 dl = B_2 \oint dl = B_2 (2\pi r) = \mu_0 i_{conc} = \mu_0 i_0 \longrightarrow B_2 = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r}\hat{y} \quad x<0$$

$$\vec{F} = i\vec{L}_2 \times \vec{B}_2 = -i_0 L_2 \hat{z} \times B_2 \hat{y} = -i_0 L_2 B_2 \hat{x}$$

$$\text{quindi: } \vec{F}_L^{12} = -\frac{i_0 L B_2}{L}\hat{x} = -i_0 B_2 \hat{x} = -\frac{\mu_0 i_0^2}{2\pi r}\hat{x} = -9 \cdot 10^{-7}\ \hat{x}\ \frac{N}{m}$$

2. per ottenere il campo magnetico $\vec{B}(P)$ dobbiamo sommare i due campi magnetici $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ in P; i campi magnetici sono ortogonali ai raggi congiungenti a P in quanto le linee di campo sono circonferenze.

Calcoliamoci innanzitutto gli angoli importanti α e β:

$$r\cos\alpha = \frac{r}{2} \longrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \qquad \beta = \frac{\pi}{6}$$

Dividiamo $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ nelle componenti:

$$\vec{B}_1 = -B_1 \sin\alpha\,\hat{x} + B_1 \cos\alpha\,\hat{y} \qquad \vec{B}_2 = B_2 \sin\alpha\,\hat{x} + B_2 \cos\alpha\,\hat{y}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \cancel{-B_1 \sin\alpha\,\hat{x}} + B_1\cos\alpha\,\hat{y} + \cancel{B_2 \sin\alpha\,\hat{x}} + B_2\cos\alpha\,\hat{y} = (B_1 + B_2)\cos\alpha\,\hat{y} = \frac{\mu_0 i_0}{\pi r}\cos\alpha\,\hat{y}$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i_0}{\pi r}\cos\alpha\,\hat{y} = 3 \cdot 10^{-7}\ T$$

dato che $a \ll r$, si può considerare uniforme sulla spira.

$$\phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA\cos\theta = B\pi a^2 \cos\theta = \frac{\mu_0 i_0 \cancel{\pi} a^2}{\cancel{\pi} r}\cos\alpha\cos\theta = \frac{\mu_0 i_0 a^2}{r}\cos\alpha\cos\theta = 2.67 \cdot 10^{-10}\ Wb$$

3. il flusso diventa

$$\phi_B(t) = \frac{\mu_0 i(t) a^2}{r}\cos\alpha\cos\theta = \frac{\mu_0 (i_0 + \beta t) a^2}{r}\cos\alpha\cos\theta = \frac{\mu_0 i_0 \cos\alpha\cos\theta\, a^2}{r} + \frac{\mu_0 \beta t a^2 \cos\alpha\cos\theta}{r}$$

$$fem = -\frac{\partial \phi_B(t)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mu_0 i_0 \cos\alpha\cos\theta\, a^2}{r} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mu_0 \beta t a^2 \cos\alpha\cos\theta}{r}\right) = -\left(0 + \frac{\mu_0 \beta a^2 \cos\alpha\cos\theta}{r}\right) = -\frac{\mu_0 \beta a^2 \cos\alpha\cos\theta}{r}$$

$$= -8.89 \cdot 10^{-10}\ V$$

La corrente nella spira circola in modo che il campo magnetico indotto si opponga alla variazione del flusso, quest'ultimo concorde a $\vec{B}$, dato che incrementa nel tempo. Il segno "−" della fem ci conferma il fatto che il campo magnetico indotto sia opposto a $\vec{B}$: il verso della corrente i_s è quindi orario.

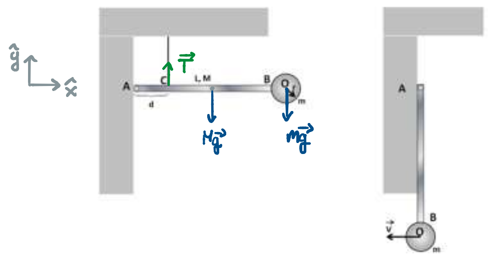
$$i_s = \frac{|fem|}{R_s} = 2.22 \cdot 10^{-4}\ A$$

$$P = i_s^2 R_s \qquad E_{diss} = \int_0^{t^*} P\,dt = \int_0^{t^*} i_s^2 R_s\,dt = i_s^2 R_s \int_0^{t^*} dt = i_s^2 R_s t^* = 9.85 \cdot 10^{-13}\ J$$

13-01-16

giovedì 26 agosto 2021 19:39

Una sbarra omogenea di lunghezza $L = 1\text{m}$ e massa $M = 3\text{kg}$ è incernierata su una parete verticale e può ruotare senza attrito nel piano verticale. All'estremo B dell'asta è saldata una sfera piena di raggio $r = 10\text{cm}$ e massa $m = 1\text{kg}$. Inizialmente la sbarra è tenuta in posizione orizzontale da un filo verticale, vincolato al punto C della sbarra e distante $d = 20\text{cm}$ dall'estremo A dell'asta.



Si calcoli:

a) il modulo della tensione del filo e della reazione vincolare in A

$T = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $R = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Il filo si spezza e l'asta ruota nel piano verticale; si calcoli:

b) il modulo dell'accelerazione angolare del sistema nell'istante immediatamente successivo alla rottura del filo

$\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c) il modulo della velocità del centro O della sfera nell'istante in cui l'asta passa per la sua posizione verticale

$v = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1. inizialmente si calcola il centro di massa da A

$$D_{cm} = \frac{M\frac{L}{2} + mL}{M+m}$$

$$\tau^A_{F_p} = \tau^A_T \longrightarrow (M+m)g D_{cm} = dT \longrightarrow T = \frac{(M+m)gD_{cm}}{d} = 127.4\,\text{N}$$

$$\vec{R} + \vec{T} + \vec{P} = 0 \longrightarrow R = T - P = T - (m+M)g = 88.2\,\text{N}$$

2. $a = r\alpha \longrightarrow \alpha = \frac{a}{r}$

$$\tau^A_{asta} = D_{cm}(m+M)g = I\alpha \quad \text{con} \quad I = \frac{2}{5}mL^2 + m(r+L)^2 + \frac{1}{3}ML^2$$

$$\longrightarrow \alpha = \frac{D_{cm}(m+M)g}{I} = 11.5\,\text{s}^{-2}$$

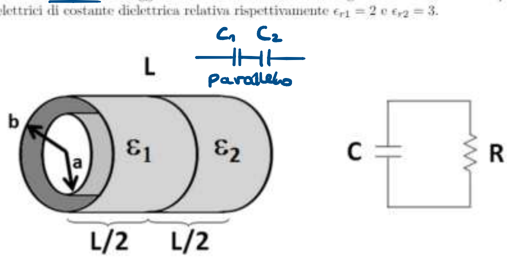
3. l'energia si conserva e $v = r\omega$ (l'altezza è D_{cm})

$$D_{cm}(M+m)g = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2D_{cm}(M+m)g}{I}}$$

quando la sbarra è in posizione verticale: $v = \omega(L+r) = 5.3\,\text{ms}^{-1}$

Un condensatore cilindrico di raggi $a = 0.3\text{cm}$ e $b = 1\text{cm}$ e di lunghezza $L = 30\text{cm}$ è riempito con due diversi dielettrici di costante dielettrica relativa rispettivamente $\epsilon_{r1} = 2$ e $\epsilon_{r2} = 3$.



Si calcoli:

a) la capacità del condensatore ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\text{F/m}$)

$C = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Il condensatore, caricato a una differenza di potenziale $V = 50\text{V}$, viene scaricato su una resistenza $R = 10\text{k}\Omega$. Si calcoli:

b) l'energia totale dissipata sulla resistenza

$E = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c) la potenza istantanea dissipata sulla resistenza dopo un tempo $t_1 = 100\text{ns}$ ($1\text{ns} = 10^{-9}s$)

$P(t_1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1. i due condensatori sono in parallelo (le superfici delle armature sono equipotenziali:

$$C = C_1 + C_2 = \varepsilon_1 \frac{\varepsilon_0 2\pi L}{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \varepsilon_2 \frac{\varepsilon_0 2\pi L}{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = 0.035 \cdot 10^{-9}\,\text{F}$$

2. l'energia nel condensatore è la stessa che viene dissipata dalla resistenza durante la scarica:

è un RC in scarica

$$E = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = 43.3 \cdot 10^{-9}\,\text{J}$$

3. la differenza di potenziale ai capi del condensatore durante il processo di scarica presenta il seguente andamento:

$$V_c(t) = Ve^{-\frac{t}{RC}}$$

all'istante t_1 quindi la potenza vale:

$$P(t_1) = \frac{V^2}{R}e^{-\frac{2t_1}{RC}} = 0.14\,\text{W}$$

2-02-16

sabato 28 agosto 2021 00:12

Esercizio 1

Una sfera di raggio $r = 40\text{cm}$ e massa $m = 3\text{kg}$ rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Il suo centro O è fissato a un punto P del piano da una molla di costante elastica $k = 60\text{N/m}$ e lunghezza a riposo nulla. All'inizio O si trova sulla verticale di P.

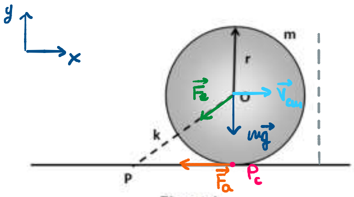


Figura 1

Si calcoli:

a) la lunghezza massima della molla nel caso in cui la sfera si muova inizialmente con una velocità del centro di massa $v_{cm} = 5\text{m/s}$

$l_{max} = \dots\dots\dots$

b) il momento angolare minimo (rispetto al punto di contatto) che deve avere la sfera per compiere un giro completo

$L_{min} = \dots\dots\dots$

c) il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio (suggerimento: scrivere l'energia del sistema in funzione dell'angolo di rotazione θ)

$T = \dots\dots\dots$

1. le uniche forze in gioco sono conservative, e l'unica forza non conservativa non compie lavoro: la forza di attrito statico, dato che il moto è di puro rotolamento

$$E_V = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}kl_{max}^2 = E_el$$

nel punto di max elongazione la sfera è ferma ($V_{cm} = \omega = 0$); considerando che $\omega = -\frac{V_{cm}}{r}$:

$$\cancel{\frac{1}{2}}mV_{cm}^2 + \cancel{\frac{1}{2}}I\frac{V_{cm}^2}{r^2} + \cancel{\frac{1}{2}}kr^2 = \cancel{\frac{1}{2}}kl_{max}^2 \qquad (\text{lunghezza a riposo } l_0 = 0)$$

con $I = \frac{2}{5}mr^2 = 0.192\,\text{kgm}^2$

$$kl_{max}^2 = mv_{cm}^2 + \frac{2}{5}m\cancel{r^2}\frac{V_{cm}^2}{\cancel{r^2}} + kr^2$$

$$l_{max} = \sqrt{\frac{mV_{cm}^2 + \frac{2}{5}mV_{cm}^2 + kr^2}{k}} = 1.38\,\text{m}$$

2. $L_{min} = I\omega_{min}$ con $I = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2 = 0.672\,\text{kgm}^2$

lo spostamento della sfera è $s = r\theta = r2\pi$

l'energia si conserva, per cui:

$$E_i = \cancel{\frac{1}{2}}I\omega_{min}^2 + \cancel{\frac{1}{2}}kr^2 = \cancel{\frac{1}{2}}k(r^2 + 4\pi^2r^2) = E_f$$

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{\cancel{kr^2} + 4k\pi^2r^2 - \cancel{kr^2}}{I}} = 23.75\,\text{s}^{-1}$$

infine: $L_{min} = I\omega_{min} = 16\,\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$

3. $E = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}k(r^2 + r^2\theta^2) = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{2}kr^2\theta^2$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \longrightarrow \cancel{\frac{1}{2}}I\cdot\cancel{2\dot{\theta}}\ddot{\theta} + \cancel{\frac{1}{2}}kr^2\cdot\cancel{2}\theta\cancel{\dot{\theta}} = 0$$

$$I\ddot{\theta} + kr^2\theta = 0$$

che corrisponde all'equazione di un oscillatore armonico con $\omega = \sqrt{\frac{kr^2}{I}}$ e $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{kr^2}} = 1.66\,\text{s}$

Esercizio 2

costante

Una sfera di raggio $R_1 = 0.4\text{m}$ presenta una distribuzione di carica positiva uniforme tale che il potenziale in un punto distante $2R_1$ dal centro è $V_0 = 0.2\text{V}$ rispetto all'infinito(fig.2A).

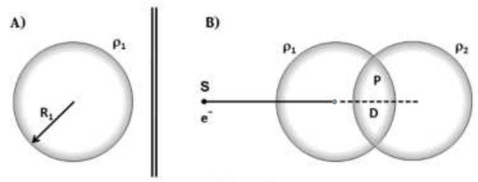
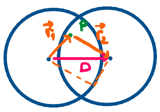


Figura 2



$D = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

è la diagonale

Si calcoli:

a) la densità di carica ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\text{F/m}$)

$\rho_1 = \dots\dots\dots$

Un'altra sfera di raggio $R_2 = 0.4\text{m}$ e densità di carica negativa uniforme ($\rho_2 = -\rho_1$) si avvicina e penetra nella precedente. Quando i centri delle due sfere distano $D = 0.6\text{m}$ (fig.2B).
Si calcoli:

b) il modulo del campo elettrico in un punto P interno alla regione di sovrapposizione delle due sfere (il campo elettrico è uniforme in tutta la regione di sovrapposizione)

$E_P = \dots\dots\dots$

c) l'accelerazione di un elettrone che si trova in un punto S a distanza $2R_1$ dal centro della sfera di raggio R_1 e giace sulla retta che passa per i centri delle due sfere ($q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}\text{C}$; $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\text{kg}$)

$a_e = \dots\dots\dots$

1. $\rho_1 = \frac{Q}{Vol}$

$V(2R_1) - V(\infty) = \int_{2R_1}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r} = V_0$ (A) $\Big\}$ quello che conosco

Il campo elettrico all'esterno di una sfera per il th. di Gauss è:

$$\Phi_E = \oint\vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint E\,dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad \text{con } q_{int} = Q$$

$$\longrightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2\epsilon_0}$$

sostituendo in (A): $\int_{2R_1}^{\infty}E\,dr = \int_{2R_1}^{\infty}\frac{Q}{4\pi r^2\epsilon_0}dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{2R_1}^{\infty}r^{-2}dr = V_0$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{2R_1}^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{2R_1} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0R_1} = V_0$$

ρ è costante

e quindi: $Q = 8V_0\pi\epsilon_0R_1$; $\rho_1 = \frac{3Q}{4\pi R_1^3} = 6.6\cdot10^{-12}\,\frac{\text{C}}{\text{m}^3}$

2. per trovare il campo elettrico in P dobbiamo trovare il campo elettrico all'interno di ognuna delle due sfere e sommarli, ad una distanza dal centro che sia interna alla regione in comune

Il campo elettrico (per Gauss) all'interno della sfera 1 è:

$$\Phi_E = \oint\vec{E}_1\cdot d\vec{A} = \oint E_1\,dA = E_1(4\pi r^2) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad \text{ove } q_{int} = Q\frac{r^3}{R_1^3} \longrightarrow E_1(r) = Q\frac{r^{\cancel{3}}}{4\pi\cancel{r^2}\epsilon_0R_1^3} = \frac{\rho Vr}{4\pi\epsilon_0R_1^3} = \frac{\cancel{4}\rho\cdot r\cdot\cancel{\pi}\cdot\cancel{R_1^3}}{\cancel{4\pi}\epsilon_0\cancel{R_1^3}\cdot3} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

il campo elettrico (per Gauss) all'interno della sfera 1 è:

$\Phi_E = \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = \oint E_1 dA = E_1(4\pi r^2) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$ ove $q_{int} = Q\frac{r^3}{R_1^3} \longrightarrow E_1(r) = Q\frac{r^{\cancel{3}}}{4\pi \cancel{r^2}\varepsilon_0 R_1^3} = \frac{\rho V r}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} = \frac{\cancel{4}\rho \cdot r \cdot \cancel{\pi} \cdot \cancel{R_1^3}}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0 \cancel{R_1^3} \cdot 3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$

$q_{int} : \frac{4}{3}\pi r^3 = Q : \frac{4}{3}\pi R_1^3 \longrightarrow q_{int} = Q\frac{\cancel{\frac{4}{3}\pi} r^3}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R_1^3} = Q\frac{r^3}{R_1^3}$

$$\vec{E}_1(r_1) = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\varepsilon_0}$$

quello interno alla sfera 2 è del tutto analogo: $E_2(r) = E_1(r)$ con la differenza che $\vec{E}_2(r_2) = -\frac{\rho \vec{r}_2}{3\varepsilon_0}$

di conseguenza si ottiene il campo della regione comune sommando vettorialmente i 2 contributi:

$\vec{E}(P) = \vec{E}_1(r_1) + \vec{E}_2(r_2) = \frac{\rho(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{3\varepsilon_0}$ dove r_1 indica la distanza del punto P dal centro della sfera 1, r_1 di quello della sfera 2.

→ importante: r_1, r_2 sono le variabili

quindi: $E_P = \frac{\rho D}{3\varepsilon_0} = 1.5 NC^{-1}$

3. $F = m_e a_e$ ove $F = q_e E$, quindi ci serve $E = E_1(2R_1) + E_2(2R_1 + D)$ ove $Q = 8V_0\pi\varepsilon_0 R_1 = Q_1 = -Q_2$

quindi $F = q_e\left(\frac{Q}{4\pi(2R_1)^2\varepsilon_0} - \frac{Q}{4\pi(2R_1+D)^2\varepsilon_0}\right) = \dots$

infine $a_e = \frac{F}{m_e} = 0.03 \cdot 10^{-12}\, ms^{-2}$

2-19-16

mercoledì 1 settembre 2021 20:05

Esercizio 1

Una sfera di raggio $r_1 = 40$cm e massa $m_1 = 3$kg rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Intorno ad essa è avvolto un filo inestensibile di massa nulla, che è collegato all'estremo opposto ad un blocco di massa $m_2 = 2$kg, posto su un piano inclinato privo di attrito. Il filo è avvolto attorno a una scanalatura di profondità trascurabile, in modo da non interferire col moto di rotolamento della sfera di raggio r_1. L'angolo tra il piano inclinato e l'orizzontale vale $\theta = \pi/6$rad. Inizialmente il sistema è in quiete.

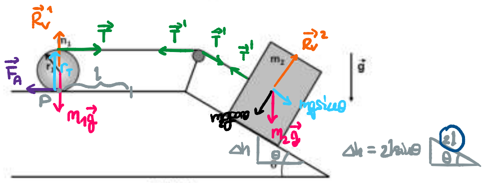
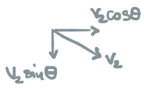


Figura 1

Dopo che la massa m_1 si è spostata di un tratto $l = 80$cm Si calcoli:



a) la velocità angolare della sfera

$\omega = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) il modulo della variazione di quantità di moto del sistema costituito da sfera, filo e blocco

$\Delta p = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c) L'accelerazione del centro di massa della sfera

$a_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1. l'energia si conserva (moto di puro rotolamento e nel piano inclinato non c'è attrito):

$$E_i = \cancel{m_1 g h_s^i} + m_2 g h_b^i = \cancel{m_1 g h_s^f} + m_2 g h_b^f + \frac{1}{2} I_s \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 v_b^2 = E_f$$

con $h_s^i = h_s^f$, $h_b^i - h_b^f = \Delta h = 2l\sin\theta$, $I_s = \frac{2}{5} m_1 r_1^2 + m_1 r_1^2 = \frac{7}{5} m_1 r_1^2$

e inoltre $V_s = V_b = V = 2r_1\omega$ per via dell'inestensibilità del filo:

$$m_2 g h_b^i = m_2 g h_b^f + \frac{1}{2} I_s \omega^2 + \frac{1}{\cancel{2}} m_2 \cancel{4}^{2} r_1^2 \omega^2$$

$$\frac{1}{2} I_s \omega^2 + 2 m_2 r_1^2 \omega^2 = m_2 g \Delta h$$

$$\omega^2 \left(\frac{1}{2} I_s + 2 m_2 r_1^2\right) = 2 m_2 g l \sin\theta$$

$$\frac{1}{2}\omega^2 \left(I_s + 4 m_2 r_1^2\right) = 2 m_2 g l \sin\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4 m_2 g l \sin\theta}{I_s + 4 m_2 r_1^2}} = 4 s^{-1}$$

2. $P_i = 0$, $P_f = \Delta p = \sqrt{(m_1\omega r_1 + m_2 V_2\cos\theta)^2 + (m_2 V_2 \sin\theta)^2}$

3. scriviamo l'energia in funzione dell'angolo φ: $E = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 (I_s + 4 m_2 r_1^2) - 2 m_2 g r_1 \varphi \sin\theta$ con $r_1\varphi = l = s$

dalla conservazione dell'energia $\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{1}{2}\cdot 2\cancel{\dot{\varphi}}\ddot{\varphi}(I_s + 4 m_2 r_1^2) - 2 m_2 g r_1 \cancel{\dot{\varphi}} \sin\theta = \ddot{\varphi}(I_s + 4 m_2 r_1^2) - 2 m_2 g r_1 \sin\theta = 0$

e quindi $\ddot{\varphi} = \frac{2 m_2 g r_1 \sin\theta}{I_s + 4 m_2 r_1^2} = \alpha$

infine $a = r_1\alpha = r_1\ddot{\varphi} = 1.6 ms^{-2}$

Esercizio 2

Una barretta metallica di lunghezza $L = 0.2$m può muoversi liberamente su una guida metallica, a U, posizionata su un tavolo (vedere figura 2). La massa della barretta è $M = 100$g e $D = 0.3$m. Barretta e guida metallica compongono un circuito elettrico rettangolare nel quale è presente una resistenza $R = 2\Omega$. Si suppone che il circuito sia immerso in un campo magnetico perpendicolare al piano del circuito e diretto verso l'alto.

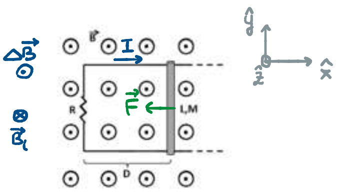


Figura 2

Il modulo del campo magnetico varia con il tempo secondo l'espressione $B(t) = B_0 + kt$ con $B_0 = 1$T e $k = 0.2T/s$. Considerando la barretta bloccata nella posizione iniziale, si calcoli:

a) la corrente che circola nel circuito al tempo $t_1 = 10$s

$I = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) il modulo della forza che agisce sulla barretta al tempo $t_1 = 10$s

$F = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Si assuma che, dopo $t_1 = 10$s, la barretta cominci a muoversi verso destra di moto rettilineo uniforme con velocità $v = 1$m/s.
Si calcoli:

c) la potenza istantanea che circola nel circuito al tempo $t_2 = 20$s

$P_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1. per trovare la corrente (indotta) nel circuito dobbiamo trovare il flusso del campo magnetico che passa nel circuito, per Gauss:

$$\Phi_B = \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = \oint B dA = B(t) DL = DL(B_0 + kt)$$

il campo magnetico varia, quindi ci sarà una fem, secondo la legge di Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(DLB_0 + DLkt) = -DLk$$

il campo magnetico incrementa nel tempo, la corrente circolerà nella spira in verso tale da produrre un campo magnetico indotto che si oppone a questa variazione, ciò è confermato anche dal segno negativo della fem.

La corrente circola quindi in senso orario e vale:

$$I = \frac{|fem|}{R} = \frac{DLk}{R} = 6\cdot 10^{-3} A$$

2. sulla sbarretta si svilupperà una forza (forza di Lorentz) che vale:

$$\vec{F} = I\vec{L}\times\vec{B} \longrightarrow F = ILB(t_1) = \frac{DLK}{R} L(B_0 + Kt_1) = 3.6\cdot 10^{-3} N$$

$$\vec{F} = -F\hat{y}$$

3. dato che la barretta inizia a muoversi, dobbiamo ricalcolare il flusso di campo magnetico:

$\Phi_B = \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = \oint B dA = B(t)L(D + x(t))$ con $x(t) = \cancel{x_0} + Vt_1 \longrightarrow B(t)LD + B(t)LVt_1 = (B_0 + Kt_2)LD + (B_0 + Kt_2)LVt_1 =$

$= B_0 LD + Kt_2 LD + B_0 LVt_1 + Kt_2 LVt_1$

e la fem $= -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -[0 + KLD + (B_0 + Kt_2)LV + KLVt_1] = -1.41 V$

infine la potenza sarà: $P = \frac{fem^2}{R} = 0.99 W$

$$\frac{\partial}{\partial t}(Kt_2 LVt_1) = Kt_2 LV + Kt_1 LV$$

infine la potenza sarà: $P = \frac{fem^2}{R} = 0.99\,W$

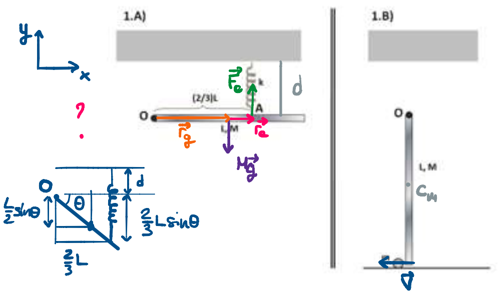
$$\frac{\partial}{\partial t}(K t_2 L V t_1) = K t_2 L V + K t_1 L V$$

10-06-16

giovedì 2 settembre 2021 20:20

Esercizio 1

Una sbarra omogenea di lunghezza $L = 0.2\text{m}$ e massa $M = 0.3\text{kg}$ è incernierata senza attrito a un estremo O. La sbarretta è mantenuta in posizione di equilibrio orizzontale da una molla verticale, di costante elastica $k = 20\text{N/m}$ e lunghezza a riposo nulla, fissata alla sbarra nel punto A distante $\frac{2}{3}L$ dall'estremo O (Fig.1.A).



Si calcoli:

a) l'allungamento d della molla quando il sistema si trova in equilibrio e il modulo della reazione vincolare in O:

$d =$ .... $R =$ ....

b) il periodo delle piccole oscillazioni della sbarretta (suggerimento: Data l'equazione differenziale $\ddot{x} = -\omega^2 x + cost$ il periodo delle piccole oscillazioni si ricava trascurando il termine costante)

$T =$ ....

Si supponga ora che la molla si spezzi e che la sbarretta, ruotando intorno all'estremo O, faccia un urto perfettamente elastico con il punto materiale di massa $m = 1\text{kg}$ (Fig.1.B).

Si calcoli:

c) il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo:

$p =$ ....

1. il sistema è in equilibrio:

$$\sum \vec{F} = 0 \longrightarrow \sum \vec{F_y} = 0 = \vec{F_e} + M\vec{g} + \vec{R} = (F_e - Mg + R)\hat{y} = 0$$

$$\text{(B)} \quad kd - Mg + R = 0$$

$$\sum \vec{\tau}^{O} = 0 = \vec{r_g} \times \vec{F_p} + \vec{r_e} \times \vec{F_e} \longrightarrow \sum \tau^{O} = 0 = -\frac{L}{2}Mg + \frac{2}{3}LF_e$$

$$\text{(A)} \quad = -\frac{\cancel{L}}{2}Mg + \frac{2}{3}\cancel{L}kd = 0$$

da (A): $\frac{2}{3}kd = \frac{1}{2}Mg$

$$d = \frac{3Mg}{4k} = 0.11\,\text{m}$$

in (B): $\cancel{k}\frac{3Mg}{4\cancel{k}} - Mg + R = 0$

$$R = \left|-\frac{3}{4}Mg + Mg\right| = \frac{1}{4}Mg = 0.74\,\text{N}$$

2. prima di tutto calcoliamoci il momento d'inerzia rispetto a O:

$$I_o = \frac{1}{3}ML^2 = 4 \cdot 10^{-3}\,\text{kgm}^2$$

dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}I_o\omega^2 + \overset{mgh}{Mg\frac{L}{2}\sin\theta} + \frac{1}{2}k\big(d - \frac{2}{3}L\sin\theta\big)^2\Big) = 0$$

in funzione di θ: $\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2 + Mg\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}k\big(d - \frac{2}{3}L\sin\theta\big)^2\Big) = 0$

quindi: $I_o\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2}\cos\theta\dot{\theta} + \frac{1}{\cancel{2}}k \cdot \cancel{2}\big(d - \frac{2}{3}L\sin\theta\big)\big(-\frac{2}{3}L\cos\theta\dot{\theta}\big)$

piccole oscillazioni: $\sin\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$: $I_o\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2}\cancel{\dot{\theta}} + k\big(d - \frac{2}{3}L\theta\big)\big(-\frac{2}{3}L\cancel{\dot{\theta}}\big) = 0$

$$I_o\ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2} + \big(kd - \frac{2}{3}kL\theta\big)\big(-\frac{2}{3}L\big) = 0$$

$$I_o\ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2} - \frac{2}{3}Lkd + \frac{4}{9}kL^2\theta = 0$$

$$I_o\ddot{\theta} + \frac{4}{9}kL^2\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{4kL^2}{9I_o}\theta = 0$$

equazione differenziale dell'oscillatore armonico con $\omega = \sqrt{\frac{4kL^2}{9I_o}}$ e $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{9I_o}{4kL^2}} = 0.67\,\text{s}$

3. l'energia si conserva: $E_i = Mg\frac{L}{\cancel{2}} = \frac{1}{\cancel{2}}I_o\omega^2 = E_f$ scegliendo $\frac{L}{2}$ come lo zero del potenziale

$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I_o}}$, velocità della sbarra prima dell'urto

quantità di moto della sbarra prima dell'urto: $p_i = MV = M\frac{L}{2}\omega$

durante l'urto si conservano sia l'energia: $E_i = \frac{1}{\cancel{2}}I_o\omega^2 = \frac{1}{\cancel{2}}mv_i^2 + \frac{1}{\cancel{2}}I_o\omega_f^2 = E_f$ (A)

che il momento angolare con polo in O: $L_{o_i} = I_o\omega = I_o\omega_f + mv_iL = L_{o_f}$ (B)

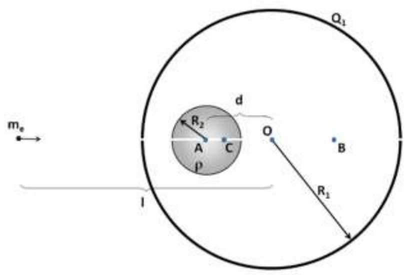
con soluzione: $v_i = \frac{2\omega I_o L}{mL^2 + I_o}$ e $\omega_f = \omega\frac{I_o - mL^2}{I_o + mL^2}$

la quantità di moto del sistema: $p_f = MV_f + mv_i = M\frac{L}{2}\omega_f + mv_i$

il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo: $p = p_i - p_f = M\frac{\cancel{L}}{\cancel{2}}\omega_f - \big(M\frac{\cancel{L}}{\cancel{2}}\omega_f + mv_i\big) = 0.2\,\text{kgms}^{-1}$

Esercizio 2

Una carica $Q_1 = +10^{-9}$C è distribuita su un guscio sferico di raggio $R_1 = 0.2$m. All'interno del guscio sferico è posizionata una sfera isolante, di raggio $R_2 = 0.05$m il cui centro è collocato nel punto A, distante $d = 0.1$m dal centro del guscio di raggio R_1. La carica distribuita sulla sfera isolante è anch'essa positiva e la densità di carica non è uniforme ma segue la legge $\rho = kr$ con $k = 3 \cdot 10^{-6}$C/m^4



Si calcoli:

a) La carica totale Q_2 contenuta nella sferetta e il modulo del campo elettrico nel punto B simmetrico di A rispetto al centro del guscio sferico ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$F/m)

$Q_2 = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $E_B = \ldots\ldots\ldots$

b) il potenziale all'interno della sfera piccola nel punto C distante $R_2/2$ da A

$V_C = \ldots\ldots\ldots$

Si supponga che un elettrone di massa $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$kg e carica $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$C si trovi, fermo, a una distanza $l = 2R_1$ dal punto O, e che sull'asse delle x sia praticato un piccolo foro che permetta il passaggio attraverso guscio e sfera.
Si calcoli:

c) con quale velocità l'elettrone passa per il punto O

$v_O = \ldots\ldots\ldots$

1. Q_1 non produce campo all'interno del guscio.

la carica Q_2 contenuta nella sfera si trova integrando:

$$Q_2 = \int_0^{R_2} \rho\, dV = \int_0^{R_2} kr 4\pi r^2 dr = 4k\pi \int_0^{R_2} r^3 dr = 4k\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{R_2} = \cancel{4}k\pi \cdot \frac{R_2^4}{\cancel{4}} = k\pi R_2^4$$

$$= 5.9 \cdot 10^{-11} C$$

Il campo elettrico all'esterno della sfera vale, per Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{Q_2}{\epsilon_0} = \frac{k\pi R_2^4}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{k\cancel{\pi} R_2^4}{4\cancel{\pi} r^2 \epsilon_0}$$

$$E(B) = \frac{kR_2^4}{4(2d)^2\epsilon_0} = 13.2\, NC^{-1}$$

2. Il campo elettrico all'interno della sfera vale, per Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = \oint E_1 dA = E_1 \oint dA = E_1(4\pi r^2) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \rightarrow E_1(r) = \frac{r^{\cancel{4}\,2} \cancel{\pi} k}{4 \cancel{\pi} \cancel{r^2} \epsilon_0} = \frac{r^2 k}{4\epsilon_0}$$

ove $q_{int} = \int_0^r \rho\, dV = \int_0^r kr' \cdot 4\pi r'^2 dr' = 4\pi k \int_0^r r'^3 dr' = 4\pi k \left[\frac{r'^4}{4}\right]_0^r = r^4 \pi k$

il potenziale in C si trova ponendo:

$$V_C - \cancel{V_\infty}^{\,0} = \int_C^{R_2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{R_2}^{R_1} \vec{E}_e \cdot d\vec{r} + \int_{R_1}^{\infty} \vec{E}_T \cdot d\vec{r} \quad \text{ove} \quad E_T = E_e + E_s$$

il campo elettrico all'esterno del guscio vale, per Gauss, come quello della sfera: $E_s(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

quindi $E_T(r) = \frac{kR_2^4}{4r^2\epsilon_0} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$V_C = \int_C^{R_2} E_i dr + \int_{R_2}^{R_1} E_e dr + \int_{R_1}^{\infty} E_T dr = \int_C^{R_2} \frac{r^2 k}{4\epsilon_0} dr + \int_{R_2}^{R_1} \frac{kR_2^4}{4r^2\epsilon_0} dr + \int_{R_1}^{\infty} \left(\frac{kR_2^4}{4r^2\epsilon_0} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) dr = \frac{k}{4\epsilon_0} \int_C^{R_2} r^2 dr + \frac{kR_2^4}{4\epsilon_0} \int_{R_2}^{R_1} r^{-2} dr + \frac{kR_2^4}{4\epsilon_0} \int_{R_1}^{\infty} r^{-2} dr + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{\infty} r^{-2} dr =$$

$$= \frac{k}{4\epsilon_0} \left[\frac{r^3}{3}\right]_C^{R_2} + \frac{kR_2^4}{4\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_{R_2}^{R_1} + \frac{kR_2^4}{4\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{\infty} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{\infty} = \frac{k}{4\epsilon_0} \left[\frac{R_2^3}{3} - \frac{R_2^3}{24}\right] + \frac{kR_2^4}{4\epsilon_0} \left[-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] + \frac{kR_2^4}{4\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1}\right] + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1}\right] =$$

$$= \frac{k}{4\epsilon_0} \left[\frac{8R_2^3 - R_2^3}{24}\right] + \frac{kR_2^4}{4\epsilon_0} \left[\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}\right] + \frac{kR_2^4}{4\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{7kR_2^3}{96\epsilon_0} + \frac{kR_2^4(R_1 - R_2)}{4R_1 R_2 \epsilon_0} + \frac{kR_2^4}{4\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = 3.09V + 7.95V + 2.69V + 44.96V$$

$$= 58.6V$$

Si poteva anche fare $V_C = \int_C^{R_2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_e \cdot d\vec{r} + \int_{R_1}^{\infty} \vec{E}_s \cdot d\vec{r}$

3. il campo elettrico è conservativo, quindi l'energia si conserva:

$$E_i = q_e V_e = \frac{1}{2} m_e V_0^2 + q_e V_0 = E_f$$

$$\frac{1}{2} m_e V_0^2 = q_e (V_e - V_0) \qquad \text{ove} \quad V_e = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 (2R_1)} + \frac{kR_2^4}{4\epsilon_0 (2R_1 - d)} \quad \text{e} \quad V_0 = \frac{kR_2^4}{4\epsilon_0 d}$$

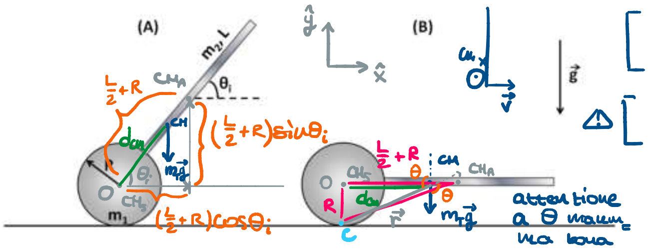
$$V_0 = \sqrt{\frac{2q_e(V_e - V_0)}{m_e}} =$$

14-09-16

lunedì 6 settembre 2021 11:28

Esercizio 1

Un disco di massa $m_1 = 3$kg ha raggio $R = 10$cm è saldato all'estremo di un'asta lunga $L = 40$cm di massa $m_2 = 5$kg. Inizialmente il disco poggia su un piano orizzontale, e l'asta forma un angolo $\theta_i = \pi/3$rad con l'orizzontale. A un certo istante si elimina il vincolo che tiene il sistema in equilibrio, questo sistema è soggetto all'accelerazione di gravità g.



Si calcoli:

a) la velocità angolare del corpo quando l'asta è orizzontale considerando il piano orizzontale privo di attrito

$\omega_a = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) la velocità angolare del corpo quando l'asta è orizzontale considerando che il disco rotola senza strisciare sul piano

$\omega_b = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c) il modulo dell'accelerazione angolare quando l'asta è orizzontale considerando che il disco rotola senza strisciare sul piano

$\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1. prima di tutto calcoliamoci il CM del sistema:

$$d_{cm_0}^{i} = \left(\frac{(\frac{L}{2}+R)\cos\theta_i m_2}{m_1+m_2}, \frac{(\frac{L}{2}+R)\sin\theta_i m_2}{m_1+m_2} \right) = (0.06,\ 0.08)\,m$$

[attenzione: questo corpo ha d_{cm_x} costante! Questo perché non ci sono forze lungo x, ma solo lungo y

[$a_{cm_x} = \frac{dV_{cm_x}}{dt} = 0$ e $V_{cm_x} = 0 \longrightarrow d_{cm_x}$ è costante

$a_{cm_y} = \frac{dV_{cm_y}}{dt} \neq 0$ e $V_{cm_y} = \frac{d}{dt} d_{cm_y} = \frac{(\frac{L}{2}+R)\cos\theta m_2 \dot{\theta}}{m_1+m_2}$

la forza totale esercitata sul corpo sarà solamente

$\vec{F}_y = -(m_1+m_2)g\hat{y}$ che è conservativa, quindi l'energia si conserva:

non essendoci un vincolo, c'è questa componente

$$E_i = (m_1+m_2)g d_{cm_y}^{i} = \frac{1}{2} I_{cm}\omega_a^2 + \underbrace{\frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{cm_y}^2} = E_f$$

scegliendo come zero del potenziale il punto in cui l'asta è orizzontale e

$$I_{cm} = \frac{1}{2}m_1R^2 + m_1 d_{cm}^2 + \frac{1}{12}m_2L^2 + m_2\left(\frac{L}{2}+R-d_{cm}\right)^2$$ rispetto al CM perché non c'è un vincolo (è sempre così)

risolvo l'energia in funzione di θ: $(m_1+m_2)g d_{cm}^{i} = \frac{1}{2} I_{cm}\dot{\theta}_{af}^2 + \frac{1}{2}\cancel{(m_1+m_2)}\frac{(\frac{L}{2}+R)^2\cos^2\theta m_2^2\dot{\theta}_{af}^2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}$

ove $d_{cm} = \sqrt{d_{cm_x}^2 + d_{cm_y}^2} = \frac{(\frac{L}{2}+R)m_2}{m_1+m_2}$

$$\dot{\theta}_{af}^2\left(I_{cm} + \frac{(\frac{L}{2}+R)^2\cos^2\theta m_2^2}{(m_1+m_2)}\right) = 2(m_1+m_2)g d_{cm}^{i}$$

$$\dot{\theta}_{af}^2 = 2(m_1+m_2)g d_{cm}^{i} \cdot \left(I_{cm} + \frac{(\frac{L}{2}+R)^2\cos^2\theta m_2^2}{(m_1+m_2)}\right)^{-1}$$

$$\dot{\theta}_{af} = \omega_a = \sqrt{2(m_1+m_2)g d_{cm}^{i} \cdot \left(I_{cm} + \frac{(\frac{L}{2}+R)^2\cos^2\theta m_2^2}{(m_1+m_2)}\right)^{-1}} = 6.92\,s^{-1}$$

2. si può considerare il sistema in MdPR rispetto al punto di contatto, in tal caso l'inerzia vale:

$$I_c = \frac{1}{2}m_1R^2 + m_1R^2 + \frac{1}{12}m_2L^2 + m_2\left(\cancel{\sqrt{}}\left(\frac{L}{2}+R\right)^2 + R^2\right)^{\cancel{2}}$$ e, per conservazione dell'energia:

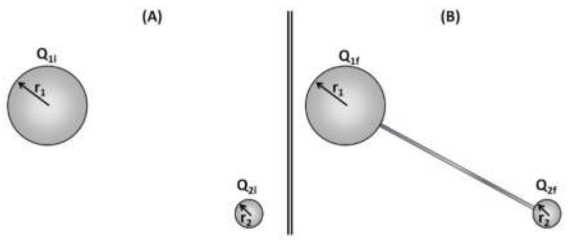
$$E_i = (m_1+m_2)g d_{cm_y}^{i} = \frac{1}{2} I_c \omega_b^2 = E_f$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{2(m_1+m_2)g d_{cm_y}^{i}}{I_c}} = 6.92\,s^{-1}$$

3. il moto è ancora di puro rotolamento, quindi: $I_c\alpha = T^{ext} = (m_1+m_2)gr = (m_1+m_2)g\sqrt{R^2+d_{cm}^2}$

Esercizio 2

Su una sfera conduttrice di raggio $r_1 = 20$cm è depositata la carica $Q_{1i} = 20 \cdot 10^{-5}$C; un'altra sfera conduttrice di raggio $r_2 = 5$cm presenta la carica $Q_{2i} = 30 \cdot 10^{-5}$C. Le sfere, inizialmente isolate, vengono poste in contatto attraverso un filo conduttore. Le sfere sono abbastanza lontane da non influenzarsi a vicenda e la carica sul filo è trascurabile ($\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$F/m).



Si calcoli:

a) la carica Q_{1f} e Q_{2f} presente sulle sfere rispettivamente di raggio r_1 e r_2 dopo che sono state collegate (in condizioni stazionarie)

$Q_{1f} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $Q_{2f} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) Il rapporto tra E_1 ed E_2 cioè tra i campi elettrici alla superficie (appena all'esterno di essa) delle sfere rispettivamente di raggio r_1 e r_2 dopo che sono state collegate

E_1

1. $Q_{tot} = Q_{1i} + Q_{2i} = Q_{1f} + Q_{2f}$, conservazione della carica

poiché sono a contatto, avranno lo stesso potenziale, quindi:

$$\cancel{k}\frac{Q_{1f}}{r_1} = \cancel{k}\frac{Q_{2f}}{r_2}$$

mettendo insieme queste relazioni si ha

$$Q_{1f} = \frac{Q_{tot}r_1}{r_1+r_2} = 10 \cdot 10^{-5}C \quad e \quad Q_{2f} = \frac{Q_{tot}r_2}{r_1+r_2} = 40 \cdot 10^{-5}C$$

2. I campi elettrici delle due sfere valgono per Gauss rispettivamente:

$$E_1 = k\frac{Q_{1f}}{r_1^2} \quad e \quad E_2 = k\frac{Q_{2f}}{r_2^2} \quad \text{quindi} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_{1f}\,r_2^2}{r_1^2 Q_{2f}} = 0.25$$

3. all'inizio l'energia elettrostatica vale:

$q_{1f} =$ .... $q_{2f} =$ ....

b) Il rapporto tra E_1 ed E_2 cioè tra i campi elettrici alla superficie (appena all'esterno di essa) delle sfere rispettivamente di raggio r_1 e r_2 dopo che sono state collegate

$$\frac{E_1}{E_2} = \text{................}$$

c) La variazione di energia elettrostatica tra il caso iniziale, in cui le sfere non sono collegate, e il caso finale, in cui le sfere sono unite dal filo conduttore (Si utilizzi la formula $U = 1/2CV^2$ considerando ogni sfera come un condensatore in cui la seconda armatura è a distanza infinita)

$$U_{diss} = \text{................}$$

3. all'inizio l'energia elettrostatica vale:

$U_i = \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2$ ove $C_1 = \varepsilon_0 \frac{4\pi ab}{b-a}$ ove $b \gg a$, quindi

$C_1 = \varepsilon_0 4\pi a = \varepsilon_0 4\pi r_1$ e $C_2 = \varepsilon_0 4\pi r_2$, $V_1 = k\frac{Q_{1i}}{r_1}$ e $V_2 = k\frac{Q_{2i}}{r_2}$

$U_i = \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0 4\pi} \cancel{r_1} k^2 \frac{Q_{1i}^2}{\cancel{r_1^2}} + \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0 4\pi} \cancel{r_2} k^2 \frac{Q_{2i}^2}{\cancel{r_2^2}} = \frac{1}{2}\frac{Q_{1i}^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_{2i}^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$

e alla fine vale $U_f = \frac{1}{2}\frac{Q_{1f}^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_{2f}^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$

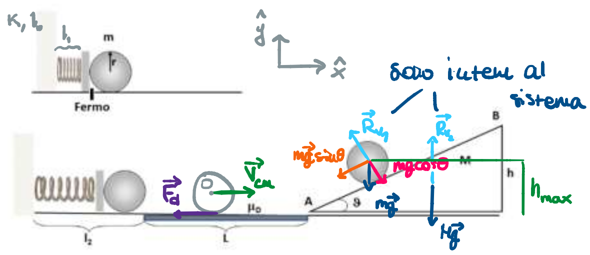
la differenza quindi vale $U_{diss} = U_i - U_f = 4500$ J

28-07-15

martedì 14 settembre 2021 17:17

Esercizio 1

Una sfera di massa $m = 1$kg e raggio $r = 0.1$m è appoggiata a una molla di costante elastica $K = 60$N/m e lunghezza a riposo $l_0 = 0.3$m. La molla è inizialmente compressa con un fermo, la sua lunghezza è $l_1 = 0.1$m. A un certo istante il fermo che trattiene la molla viene rimosso e la molla comincia a muoversi sul piano orizzontale. Il primo tratto fino alla distanza $l_2 = 0.5$m è privo di attrito, nel tratto successivo $L = 1$m è presente attrito dinamico $\mu_D = 0.4$. A distanza $l_2 + L$ dalla parete cui è ancorata la molla c'è un piano inclinato di massa $M = 2$kg, angolo $\theta = 30°$, altezza $h = 5$m privo di attrito nel tratto AB e che può muoversi senza attrito sul piano orizzontale.



Si calcoli:

a) la velocità del centro di massa della sfera quando inizia a percorrere il tratto L con attrito

v_{iL} = ...

b) il tempo impiegato dalla sfera a raggiungere il piano inclinato partendo dalla distanza l_2

t_{totL} = ...

c) la velocità del piano inclinato quando la sfera raggiunge il punto di massima altezza

v_{finp} = ...

1. l'energia si conserva (il moto è puro d'attrito)

$E_i = \cancel{\frac{1}{2}} K\Delta x^2 = \cancel{\frac{1}{2}} m v_{iL}^2 = E_f$ ove $\Delta x = l_1 - l_0$

$V_{iL} = \sqrt{\frac{K\Delta x^2}{m}} = 1.55 ms^{-1}$

2. inizialmente il corpo striscia senza rotolare, in questo tratto agisce la forza di attrito dinamico che vale

$\vec{F}_d = -\mu_d m g \hat{x}$ e quindi $a_{cm}(t) = \frac{F_d}{m} = -\mu_d g = cost$

e $x_{cm}(t) = \cancel{x_0}^{0} + V_{iL}t - \frac{1}{2}\mu_d g t^2$, $V_{cm}(t) = V_{iL} - \mu_d g t$

poi il corpo inizia a rotolare, per effetto del momento della forza di attrito dinamico. Scegliendo come polo il CM della sfera:

$I\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{F}_d = -rF_d\hat{z} = -r\mu_d m g\hat{z}$

con $I = \frac{2}{5}mr^2 = 4\cdot10^{-3}$ kgm²

d agisce solo nel moto rotazionale at this moment!

quindi $\alpha = \frac{r\mu_d m g}{I}$ e $\omega(t) = \alpha t = \frac{r\mu_d m g}{I}t = \frac{5\mu_d g}{2r}t$

non essendo il moto di puro rotolamento, $a \neq -r\alpha$ e ma inizia a crearsi una velocità rotazionale $\omega(t)$ fintanto il corpo, dopo un certo tempo t_1, inizia un moto di puro rotolamento, dove non agirà più μ_d ma μ_s, che non compie lavoro, ovvero il corpo compie moto rettilineo uniforme;

a tale istante t_1, $V_{cm} = \omega(t_1)r = \alpha t_1 r = V_{iL} - \mu_d g t_1 \longrightarrow \frac{5\mu_d g}{2\cancel{r}}t_1\cancel{r} = V_{iL} - \mu_d g t_1 \longrightarrow \frac{7}{2}\mu_d g t_1 = V_{iL}$

quindi $t_1 = \frac{2V_{iL}}{7\mu_d g}$ e anche $x(t_1) = V_{iL}t_1 - \frac{1}{2}\mu_d g t_1^2$ e $\omega(t_1) = \alpha t_1$

da questo momento il corpo compie moto rettilineo uniforme $x(t_2) = r\omega(t_1)t_2 = L - x(t_1)$ fino al tempo t_2 che vale:

$t_2 = \frac{L - x(t_1)}{r\omega(t_1)}$; il tempo totale che ci metterà la sfera è $t_{tot} = t_1 + t_2 = 0.87s$

3. qui si conserva l'energia e la quantità di moto lungo $\hat{x}$ (del sistema sfera + guida)

$P_i = m\omega(t_1)r = (M+m)V_{fimp} \longrightarrow V_{fimp} = \frac{m\omega(t_1)r}{m+M} = 0.37 ms^{-1}$

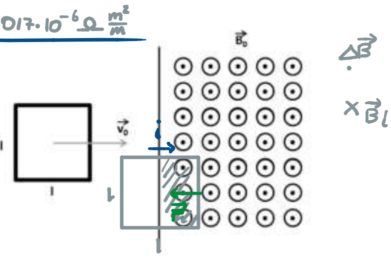
prendendo come sistema di riferimento il sistema di laboratorio possiamo considerare mg come su $\hat{y}$ senza le componenti

la velocità è tutta del piano inclinato

Esercizio 2

Un circuito quadrato di lato $l = 10$cm e massa $m = 10$g è costituito da un filo di resistività $\rho = 0.017\Omega$ mm²/m e sezione $S = 0.1$mm². Il circuito si sposta senza attrito su un piano orizzontale con velocità $v_0 = 1$m/s quando penetra in una regione in cui è presente un campo magnetico costante diretto verso l'alto, di modulo $B_0 = 0.1$T.

$0.017\Omega\frac{mm^2}{m} \rightarrow 0.017\cdot10^{-6}\Omega\frac{m^2}{m}$



Si calcoli:

a) Il tempo impiegato dal circuito per entrare nella regione in cui è presente il campo magnetico fino a $l/2$ (si ricordi che la soluzione generale di un'equazione differenziale del tipo $\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx$ è $\int\frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx$)

t_1 = ...

b) la forza che agisce sul circuito al tempo t_1

$F_{l/2}$ = ...

c) l'energia dissipata nel circuito per effetto joule nel tempo t_1

E_{diss} = ...

1. entrando nel campo magnetico, il flusso di campo magnetico varierà nel tempo:

$\Phi_B = \oint\vec{B}\cdot d\vec{A} = \oint B dA = B\oint dA = Bl\,x(t)$

con $x(t)$ ignoto dato che il circuito sarà poi sottoposto alla forza di Lorentz variabile nel tempo entrando nel campo, si genererà una $\mathcal{E}$ che per Faraday vale

$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -Blv(t)$ e corrente indotta $i(t) = \frac{f_{em}}{R} = -\frac{Blv(t)}{R}$

ove $R = \rho\frac{4l}{S} = 6.8\cdot10^{-6}\Omega$

che circolerà in senso orario secondo la legge di Lenz. e sul circuito si svilupperà una forza di Lorentz per via della corrente indotta che vale

$\vec{F} = i\vec{l}\times\vec{B} = -ilB\hat{x} = -\frac{B^2l^2v(t)}{R}\hat{x}$

quindi vale $a(t) = \frac{F(t)}{m} = -\frac{B^2l^2v(t)}{mR}$ non costante!

e quindi $\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2l^2v(t)}{mR}dt$

c) l'energia dissipata nel circuito per effetto Joule nel tempo t_1

$E_{diss} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

quindi vale $a(t) = \frac{F(t)}{m} = -\frac{B^2l^2v(t)}{mR}$ non costante!

e quindi $\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2l^2v(t)}{mR}\,dt$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{B^2l^2}{mR}\,dt$$

$$\int_{v_0}^{v} v^{-1}dv = -\frac{B^2l^2}{mR}t$$

$$\left[\ln v'\right]_{v_0}^{v} = -\frac{B^2l^2}{mR}t$$

$$\left[\ln v - \ln v_0\right] = -\frac{B^2l^2}{mR}t$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{B^2l^2}{mR}t$$

$$\frac{v}{v_0} = e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t} \longrightarrow v(t) = v_0 e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}$$

tutto questo bordello è perché il circuito non è mantenuto a velocità costante, quindi la forza di Lorentz aumenta nel tempo e influisce il flusso stesso

$$x(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \left[-v_0 e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\cdot\frac{mR}{B^2l^2}\right]_0^t = \left[-v_0 e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\cdot\frac{mR}{B^2l^2} + v_0\frac{mR}{B^2l^2}\right] =$$

$$= v_0\frac{mR}{B^2l^2}\left(1 - e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\right)$$

quindi $x(t_1) = v_0\frac{mR}{B^2l^2}\left(1 - e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t_1}\right) = \frac{l}{2}$

$$-v_0 e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t_1}\cdot\frac{mR}{B^2l^2} + v_0\frac{mR}{B^2l^2} = \frac{1}{2}l$$

$$-v_0 e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t_1}\cdot\frac{mR}{B^2l^2} = \frac{1}{2}l - v_0\frac{mR}{B^2l^2}$$

$$v_0 e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t_1}\cdot\frac{mR}{B^2l^2} = -\frac{1}{2}l + v_0\frac{mR}{B^2l^2}$$

$$e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t_1} = -\frac{B^2l^3}{2v_0mR} + 1 = \underbrace{\frac{-B^2l^3 + 2v_0mR}{2v_0mR}}_{\lambda}$$

$$-\frac{B^2l^2}{mR}t_1 = \ln\lambda$$

$$B^2l^2t_1 = -mR\ln\lambda$$

$$t_1 = -\frac{mR}{B^2l^2}\ln\lambda = 0.05\,s$$

2. semplicemente $F_{l/2} = \frac{B^2l^2v(t_1)}{R} = \frac{B^2l^2v_0e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t_1}}{R} = 1.5\cdot10^{-3}\,N$

3. la potenza dissipata è $P(t) = i(t)^2R = \frac{B^2l^2v^2(t)}{R^{\cancel{2}}}\cancel{R} = \frac{B^2l^2v^2(t)}{R}$ non usare subito t_1!

per trovare l'energia dissipata basta integrare:

$$E_{diss} = \int_0^{t_1}P(t)\,dt = \int_0^{t_1}\frac{B^2l^2v^2(t)}{R}dt = \frac{B^2l^2}{R}\int_0^{t_1}v^2(t)\,dt = \frac{B^2l^2}{R}\int_0^{t_1}v_0^2e^{-2\frac{B^2l^2}{mR}t}dt = \frac{B^2l^2}{R}v_0^2\left[-\frac{mR}{2B^2l^2}e^{-2\frac{B^2l^2}{mR}t}\right]_0^{t_1} =$$

$$= \frac{B^2l^2}{R}v_0^2\left[-\frac{mR}{2B^2l^2}e^{-2\frac{B^2l^2}{mR}t_1} + \frac{mR}{2B^2l^2}\right] = \frac{\cancel{B^2l^2}v_0^2}{\cancel{R}}\frac{m\cancel{R}}{2\cancel{B^2l^2}}\left[1 - e^{-2\frac{B^2l^2}{mR}t_1}\right] = 0.06\,J$$

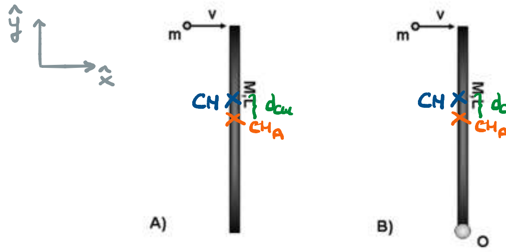
? (numericamente non torna)

14-04-15

mercoledì 15 settembre 2021 21:49

Esercizio 1

Sono date le due situazioni riportate in figura. Nel primo caso una massa puntiforme $m_1 = 4.0\text{kg}$ urta un'asta, libera di muoversi su un piano, di lunghezza $L = 4.2\text{m}$ e massa $M = 1.7\text{kg}$. Nel secondo caso, invece, i corpi coinvolti sono gli stessi ma l'asta è vincolata in un estremo. La massa m_1 si muove con velocità di modulo, $v_1 = 4.5\text{m/s}$. L'urto, che avviene all'estremo dell'asta, è perfettamente anelastico.



Si calcoli:

a) La velocità angolare del sistema subito dopo l'urto nei due casi:

$\omega_A = \ldots\ldots\ldots$ $\omega_B = \ldots\ldots\ldots$

b) L'energia dissipata nell'urto nei due casi:

$E_A = \ldots\ldots\ldots$ $E_B = \ldots\ldots\ldots$

c) La differenza tra la quantità di moto finale del sistema nel caso A e nel caso B:

$\Delta p = \ldots\ldots\ldots$ ← solo 1 blank space

1. nel primo caso si conserva la quantità di moto durante l'urto:

$$p_i = m_1 v_1 = (m_1 + M) \underbrace{v_{cm}}_{\text{sempre così}} = p_f$$

$v_{cm} = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 + M}$; inoltre il CM del sistema rispetto al centro dell'asta diventa $d_{cm} = \left(0, \dfrac{\frac{L}{2} m_1}{m_1 + M}\right)$ $v_{cm} \neq r\omega$ perché trasla

e rispettivamente $I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2 + M d_{cm}^2 + m_1 \left(\frac{L}{2} - d_{cm}\right)^2$

e, dato che il momento angolare si conserva:

$$L_i = -\left(\tfrac{L}{2} - d_{cm}\right) m_1 v_1 = -I_{cm}\omega_A = L_f$$ non ci sono forze

quindi $\omega_A = \dfrac{\left(\frac{L}{2} - d_{cm}\right) m_1 v_1}{I_{cm}} = 1.45 s^{-1}$

nel secondo caso invece la qdm non si conserva durante l'urto dato che c'è un vincolo, ma il momento angolare con polo in O sì, sempre durante l'urto:

$$\vec{L}_{O_i} = \vec{L} \times m\vec{v} = I_O \vec{\omega}_B = \vec{L}_{O_f}$$

$-Lmv\hat{z} = -I_O \omega_B \hat{z}$ con $I_O = \frac{1}{3} ML^2 + m_1 L^2$ quindi $\omega_B = \dfrac{L m_1 v_1}{I_O} = 0.99 s^{-1}$

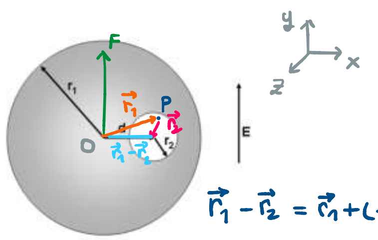
2. nel primo caso $E_A = E_i - E_f = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} I_{cm}\omega_A^2 - \underbrace{\tfrac{1}{2}(m+M)v_{cm}}_{\text{don't forget!}} = 3.09\,J$

nel secondo caso $E_A = E_i - E_f = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} I_O \omega_B^2 = 5.03\,J$ don't forget!

3. $\Delta p = p_{fin_A} - p_{fin_B} = \underbrace{(m+M)v_{cm}^A}_{\text{oppure } m_1 v_1} - (M+m)v_{cm}^B = m_1 v_1 - (M+m)\omega_B d_{cm}^B = 6.77\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$

$v_{cm} = r\omega$ perché ruota e basta

Esercizio 2



$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + (-\vec{r}_2)$$

Una sfera di raggio $r_1 = 0.20\text{m}$ presenta una densità di carica elettrica uniforme $\rho = 0.3 \cdot 10^{-6}\text{C/m}^3$. All'interno della sfera si trova una cavità sferica di raggio $r_2 = 0.05\text{m}$ con il centro posizionato a distanza $d = 0.10\text{m}$ dal centro della sfera. Si calcoli:

a) Il modulo del campo elettrico all'interno della cavità mostrando che tale campo elettrico è uniforme:

$E_{int} = \ldots\ldots\ldots$

Si accende quindi un campo elettrico esterno uniforme $E = 20 \cdot 10^{8} N/C$ diretto ortogonalmente rispetto all'asse che congiunge i centri delle due sfere (vedere figura). Calcolare:

b) Il modulo della forza sulla sfera:

$F = \ldots\ldots\ldots$

c) Il modulo del momento della forza rispetto al centro della sfera:

$\tau = \ldots\ldots\ldots$

1. la sfera carica uniformemente con una cavità sferica è equivalente ad una sfera piena con ρ costante sommato ad una sfera con densità opposta, per Gauss il campo elettrico all'interno di una qualunque sfera carica è:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E\,dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = q\frac{r^3}{R^3}$$

ove, dato che ρ è costante: $\rho = \dfrac{q}{V} = \dfrac{q_{int}}{V_{int}} \rightarrow q_{int} = q\dfrac{V_{int}}{V} = q\dfrac{r^3}{R^3}$

quindi $E(r) = q\dfrac{r^{\cancel{3}}}{4\pi \cancel{r^2} R^3 \varepsilon_0} = \rho V \dfrac{r}{4\pi R^3 \varepsilon_0} = \rho \dfrac{\cancel{4\pi R^3}\, r}{3\,\cancel{4\pi R^3}\, \varepsilon_0} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E}(r) = \dfrac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0}$

di conseguenza:

- per la sfera grande: $\vec{E}(r_1) = \dfrac{\rho \vec{r}_1}{3\varepsilon_0}$
- per la cavità: $\vec{E}(r_2) = -\dfrac{\rho \vec{r}_2}{3\varepsilon_0}$ dato che $\rho < 0 \rightarrow E < 0$

li sommo $\vec{E}_{int} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \dfrac{\rho \vec{D}}{3\varepsilon_0} \longrightarrow E_{int} = \dfrac{\rho D}{3\varepsilon_0} = 1.13 \cdot 10^3 \dfrac{N}{C}$

ed è costante.

2. Il modulo della forza sulla sfera sarà

$$F = QE = \rho \tfrac{4}{3}\pi(r_1^3 - r_2^3)E = 19.79\,N$$

ove $Q = \underline{\rho V - \rho V_c} = \rho \frac{4}{3}\pi r_1^3 - \rho \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \rho \frac{4}{3}\pi (r_1^3 - r_2^3)$

3. la forza è diretta ortogonalmente, all'asse x, piegato come il campo elettrico, ed è radiale, e parte dal centro della sfera: semplificando il sistema a 2 cariche puntiformi una nel centro della sfera e l'altra nel centro della cavità, si ha solo che il momento applicato su quest'ultima non è nullo

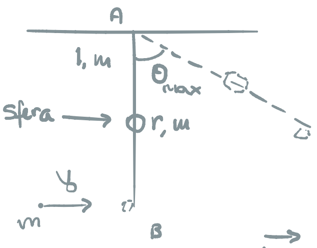
$$\vec{\tau}_0 = \vec{d} \times \vec{F} = \vec{d} \times q\vec{E} = dqE\hat{z} \longrightarrow \tau = d\frac{4}{3}\pi(r_1^3 - r_2^3)E = 0.031\ Nm$$

momento della forza di Coulomb

Orali 28-07

mercoledì 28 luglio 2021 08:33

TONELLI !



angolo max che raggiunge l'asta dopo l'urto ? parte da 18

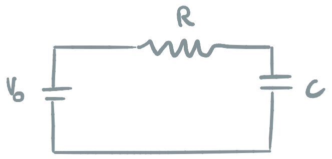
- si conserva L_A durante l'urto
- dopo l'urto l'energia meccanica si conserva
  - la F impulsiva in A non fa lavoro
  - l'altra F presente è la Fp che è conservativa

$$\vec{L}_{A_i} = \vec{l} \times m\vec{v}_0 = m v_0 l \hat{z} = I\vec{\omega} = I\omega\hat{z} = L_{A_f}$$

$$I = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{2}{5}ml^2 + m\left(\frac{r}{2}\right)^2 + ml^2$$ per il th. di Huygens - Steiner.

$$\omega = \frac{mlv_0}{I}$$

dopo l'urto: $E_i = mg\frac{1}{2}l + mg\frac{1}{2}l + \frac{1}{2}I\omega^2 = mg\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right) + mg\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right) + l\cos\theta + 0 = E_f$



circuito RC

dopo 1 sec la potenza sviluppata sulla resistenza ?

$$V_0 = Ri(t) + \frac{Q(t)}{C} \qquad i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \qquad C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$V_0 = R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C}$$

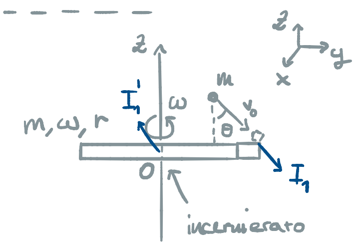
$$Q(t) = CV_0\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] \qquad \tau = RC$$

$$P_{diss} = Ri^2(t) \longrightarrow P_{diss}(1s) = R\frac{V_0^2}{R^2}e^{-\frac{2}{\tau}}$$

$$i(t) = \dot{Q}(t) = \cancel{C}V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{1}{R\cancel{C}} = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

fine: 26

$$i(1s) = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{1}{\tau}}$$

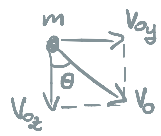


$\theta = \frac{\pi}{4}$, ω dopo l'urto (anelastico) ? parte da 24

Il disco sta ruotando, il "quadratino" è la protuberanza.

- non si conserva nulla durante l'urto (complessivamente)
  - p no: c'è una R_V
  - l'energia no: urto anelastico
  - L_O no: la pallina ha momento in 2 piani: sia x che z, dopo l'urto invece ha solo momento lungo z (?)

i momenti della pallina:



lungo $\hat{z}$ si conserva il momento angolare → quella in $\hat{y}$ è dissipata nell'urto (?)

lungo $\hat{z}$ durante l'urto la pallina ha momento angolare ?

$V_{0z} = V_0\cos\theta \qquad V_{0y} = V_0\sin\theta$

$\Delta\vec{p} = \vec{I}$

$v_{0z} = v_0 \cos\theta \qquad v_{0y} = v_0 \sin\theta$

$\Delta\vec{p} = \vec{I}$

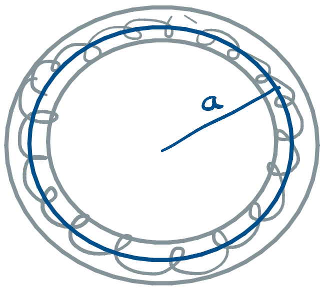
$\underbrace{\Delta\vec{L}_0 = \vec{J}}_{\text{non servono}}$

$\vec{l}_m = (-m v_0 \cos\theta\, \hat{x}, 0, 0)$ subito prima dell'urto (pallina)

$\vec{L}_0 = (0, 0, I\omega)$ subito dopo l'urto (sistema)

$\vec{L}_{0f} = (0, 0, I_{TOT}\,\omega_f) \longrightarrow \omega_f = \omega_i \dfrac{I}{I_{TOT}}$

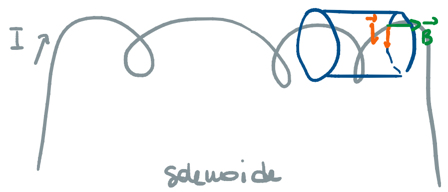
coefficiente di autoinduzione di un toroide $R, \pi r^2$, N spire



$L = \dfrac{\Phi_B}{I} = \ldots$

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{conc} \longrightarrow B(\pi a^2) = \mu_0 I N \longrightarrow B = \dfrac{\mu_0 I N}{\pi a^2}$

$\Phi_B = \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = \ldots$



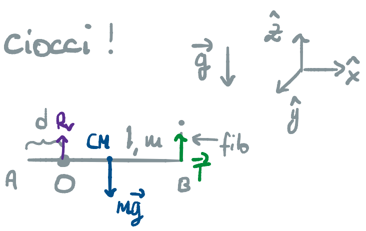
la $F_{Lorentz}$ tende ad avvicinare o ad allontanare le spire?

se aumento l'energia immagazzinata, la regione si espande o restringe?

$\rho = \dfrac{Q}{V} \qquad F_i = I\vec{l} \times \vec{B} \qquad$ fine: 28

* parlavano troppo veloce lol, ma era una cosa fuori programma *

Ciocci!



parte da: ?

che F devo applicare in B affinché il sistema sia in equilibrio

condizioni per l'equilibrio:

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_i = 0 \longrightarrow \sum F_i = 0 \longrightarrow & R_{0x} = 0 \quad \hat{x} \\ & -mg + T + R_{0y} = 0 \quad \hat{y} \\ & 0 \quad \hat{z} \\ \sum \vec{\tau}_i^{\,0} = 0 \end{cases}$$

l'asse $\hat{z}$ come è diretto?

cosa dice la regola della mano destra?

$\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$

$$\searrow \; -mg\left(\tfrac{l}{2} - d\right)\hat{z} + T(l-d)\hat{z} + \underbrace{R_{0y}\, d\,\hat{z}}_{0}$$

segno supposto!

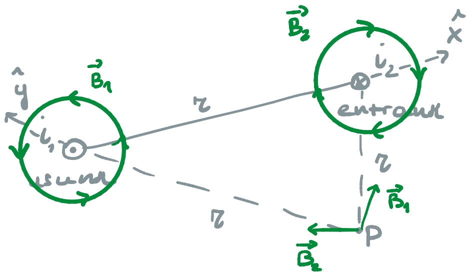
e trovo T e R_0.

se taglio il filo, l'asta inizia a ruotare attorno O. Avrà una ω.

$V_{estremo}$ quando l'asta è in posizione verticale? Supponiamo di avere ω. $\quad v = r\omega$

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_i = m\vec{a}_{cm} \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_i = m\vec{a}_{cm} \\ \sum \vec{\tau}_i^{\,0} = I\vec{\alpha} \end{cases}$$



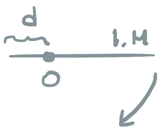
$\vec{B}(P) = ?$ $(i_1 = i_2)$

B è ortogonale alla congiungente al filo

– rip –

– – – –

parte da: ?

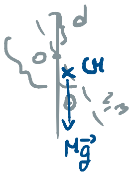


posizione di equilibrio ?

quando $\vec{\tau}_{F_g} = 0$, ovvero nella posizione verticale

$\sum \vec{F}_e = 0$ $\quad \sum \vec{\tau}(F_e) = 0$

periodo delle piccole oscillazioni? (usando $\vec{M}$) $\quad \cos\theta \simeq 1$, $\sin\theta \simeq \theta$



ruoto dalla posizione di equilibrio. $\quad I_{ASTA} = \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{l}{2}-d\right)^2$ per Steiner.

$T = \frac{2\pi}{\Omega}$

$\vec{M}^0 = I_o\vec{\alpha} \longrightarrow \vec{\alpha} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

$-Mg\left(\frac{l}{2}-d\right)\sin\theta\,\hat{z} = I_o\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{z}$ $\quad (+?)$

$I_o\frac{d^2\theta}{dt^2} + Mg\left(\frac{l}{2}-d\right)\theta = 0 \longleftarrow$ piccole oscillazioni

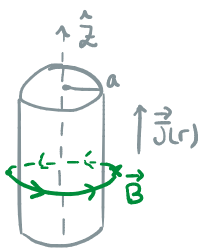
$\underbrace{\frac{d^2\theta}{dt^2}}_{\ddot{\theta}} + \underbrace{\frac{Mg}{I_o}\left(\frac{l}{2}-d\right)}_{\Omega^2}\theta = 0$

$\theta(t) = \theta_0\cos(\Omega t + \phi)$ $\quad \Omega = \sqrt{\frac{Mg}{I_o}\left(\frac{l}{2}-d\right)}$ $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{Mg\left(\frac{l}{2}-d\right)}}$

problema di Cauchy

il metodo con l'energia vuole che si conservi $\left(\frac{dE}{dt} = 0 \longrightarrow \text{troviamo } \theta\right)$ e se hai la velocità (in questo caso si può usare)

R_v è conservativa? Sì, non fa lavoro (uso la definizione, $\int \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0$ dato che $ds = 0$)



cilindro indefinito

$\vec{J}(r) = kr\hat{z}$ (densità di corrente)

$\vec{B} = ?$ (ovunque) $\quad \vec{B}$ concentrico col cilindro, sono delle circonferenze

prima si calcola la corrente all'interno del cilindro

cilindro indefinito

prima si calcola la corrente all'interno del cilindro

$i = \vec{J} \cdot \vec{A}$ quindi $i = \oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = \oint k r \hat{z} \cdot d\vec{A} = \int_0^a k r \hat{z} \cdot 2\pi r dr \hat{z} =$

$= \int_0^a 2\pi k r^2 dr = 2\pi k \int_0^a r^2 dr = 2\pi k \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a = 2\pi k \frac{a^3}{3}$

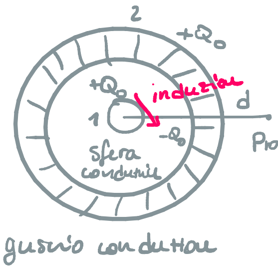
all'esterno ($r \geq a$):

th. Ampere: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{conc} = \mu_0 2\pi k \frac{a^3}{3} \longrightarrow B(2\pi a) = \mu_0 2\pi k \frac{a^3}{3} \longrightarrow B = \frac{\mu_0 2\pi k a^3}{6\pi a}$

quanto vale μ_0? $4\pi \times 10^{-7} \frac{Tm}{A}$

$\hookrightarrow \frac{\vec{B} \cdot \vec{L}}{i} = \frac{\mu_0 i}{i} \rightarrow \mu_0 = \frac{\vec{B} \cdot \vec{L}}{i} \longrightarrow \frac{[T][m]}{[A]}$

finisce con: 27



Forza di cui risente il protone?

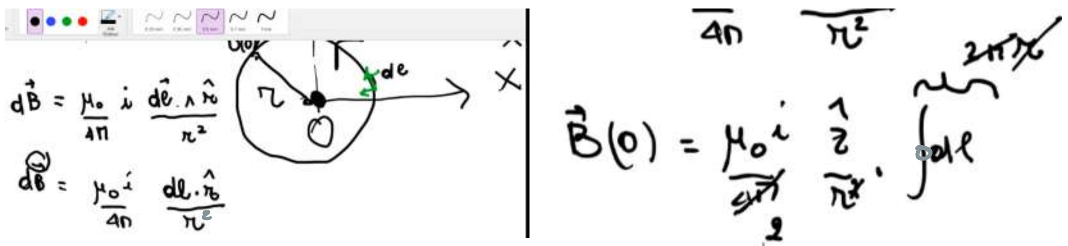
Calcolo $\vec{E}$ all'esterno, il problema ha simmetria radiale ($F = qE$)

prima ho $Q_0 = Q_2$, $Q_0 = Q_1$ a $t = 0$, Q_2'? $\searrow \vec{E} = E\hat{r}$

$\hookrightarrow E = 0$ dentro 2 (conduttore)

all'interno di 1 $E = 0$ e $q = 0$, all'esterno $E = k\frac{q}{r^2}$, si ricava con Gauss $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$ tramite superficie chiusa e orientata:

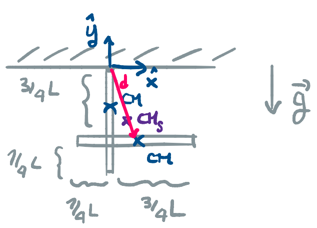
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$



questo è un altro esercizio in cui usa biot-savart per calcolare il campo magnetico del filo, mi sembrava interessante includerlo

finisce con: 27

PALMONARI!



periodo delle piccole oscillazioni? (imposta)

|

se lascio andare, questo pendolo fisico si muove o no? Sì, verso sx

↓

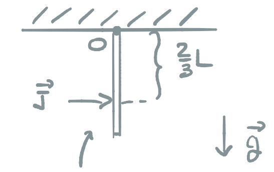
devo trovare il CM del sistema prima di tutto

l'inerzia del sistema rispetto alla cerniera è:

$I = \frac{1}{3} m l^2 + \frac{1}{12} m l^2 + \underbrace{\left(\frac{3}{4} l + \frac{l}{2}\right)}_{d} m$

in che verso l'asta ruoterà? antiorario

d



è un urto

in che verso l'asta ruoterà? antiorario

si conserva $\vec{p}$? No, vincolata

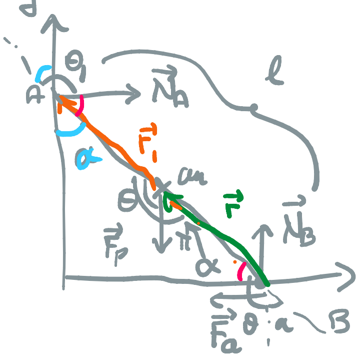
si conserva $\vec{L}_O$? Sì durante l'urto $\longrightarrow L_{O_1} = J = I\omega = L_f$

$\int F \cdot dt$ cosa è? Δp

Esame

venerdì 10 settembre 2021 19:13

$y \rightarrow$ no attrito



$x \rightarrow$ attrito

condizioni equilibrio:

$$\sum \vec{F}^{ext} = 0$$

$$\sum \vec{\tau}^{ext}_B = 0$$

$\theta = \pi - \alpha \qquad \theta_1 = \frac{\pi}{2} + \alpha = \theta_1$

$$\sum \vec{F}^{ext} = 0$$

$\sum F_x^{ext} = N_A - F_A = 0 \longrightarrow N_A = F_A = \frac{1}{2} mg\tan\alpha$ $\qquad \mu_s$ fisso

$$\sum F_y^{ext} = N_B - F_p = N_B - mg = 0 \longrightarrow N_B = mg$$

$$\sum \vec{\tau}^{ext}_B = \vec{r} \times \vec{F}_p + \vec{r}_1 \times \vec{N}_A = \frac{\ell}{2} F_p \sin\theta \hat{z} - \ell N_A \sin\theta_1 \hat{z} = 0$$

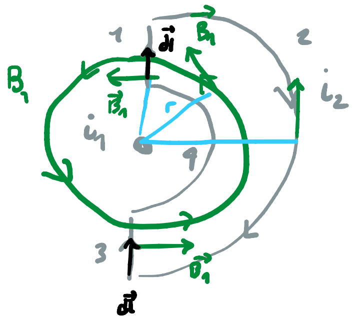
$$\frac{\ell}{2} mg \sin\alpha \hat{z} - \ell N_A \cos\alpha \hat{z} = 0$$

$$\rightarrow \ell N_A \cos\alpha = \frac{\ell}{2} mg \sin\alpha \longrightarrow N_A = \frac{\frac{\cancel{\ell}}{2} mg \sin\alpha}{\cancel{\ell}\cos\alpha} = \frac{1}{2} mg\tan\alpha$$

$$N_A = F_A = \frac{1}{2} mg\tan\alpha \leq \mu_s mg \longrightarrow \tan\alpha \leq \frac{\mu_s \cancel{mg}}{\cancel{mg}} 2 \longrightarrow \alpha \leq \arctan(2\mu_s)$$

$$F_A \leq \mu_s N$$

fissato α : $\frac{1}{2} mg\tan\alpha \leq \mu_s mg \longrightarrow \frac{1}{2}\tan\alpha \leq \mu_s$



$\vec{F}$ su ogni tratto ?

$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B} \qquad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

$$\vec{F}_1 =$$

$$B_1(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \longrightarrow B(2\pi R) = \mu_0 i \longrightarrow \mu_0 = \frac{B(2\pi R)}{i} = \frac{T\,m}{A}$$