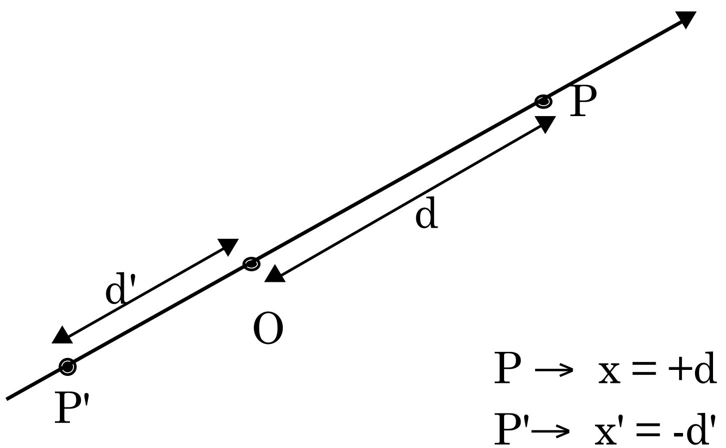
Sistemi di riferimento: 1D

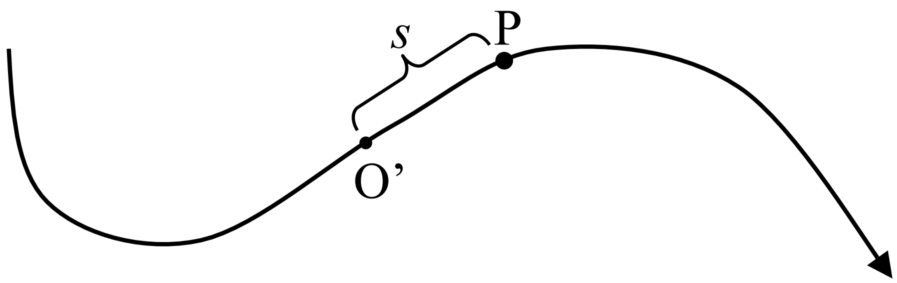
- **Posizione di un punto su di una retta: il moto del punto e` confinato a svolgersi sulla retta, Moto 1-Dimensionale**
- Per rappresentare la posizione di un punto su di una retta si sceglie in maniera arbitraria un punto della retta, O, come origine del riferimento e si fissa sempre in maniera arbitraria un verso sulla retta (retta orientata, asse orientato).



- Utilizzando la definizione operativa della lunghezza si può misurare la distanza tra l'origine O ed il generico punto sulla retta: sia d per il punto P e d' per il punto P'. Si assegna al punto la coordinata x uguale alla distanza da O presa **con il segno *più* (+)** se il punto viene dopo O quando la retta viene percorsa nel verso fissato, **con il segno *meno* (-),** se il punto viene prima di O quando la retta viene percorsa nel verso fissato.
  - **Nel caso della figura, la coordinata di P è positiva, quella di P' è negativa.**

Sistema di coordinate “curvilinee”

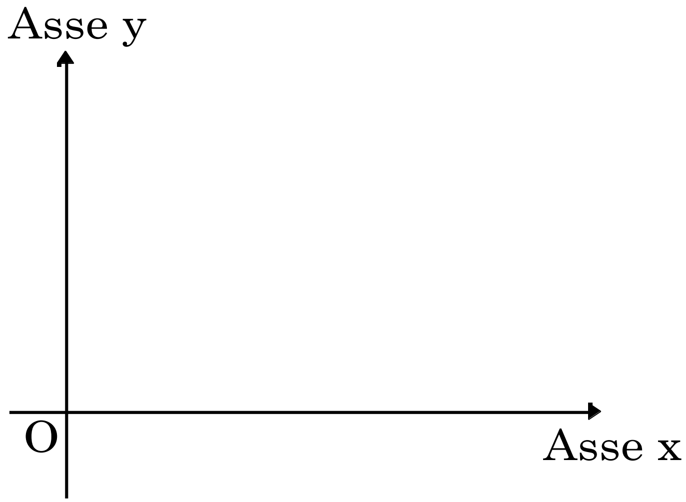
- **Posizione di un punto su di una curva, la cue equazione analitica sia nota: il moto del punto è confinato a svolgersi sulla curva, Moto 1-Dimensionale**
- Per rappresentare la posizione di un punto sulla traiettoria curva si sceglie in maniera arbitraria un punto, O, come origine del riferimento e si fissa sempre in maniera arbitraria un verso di percorrenza sulla curva.



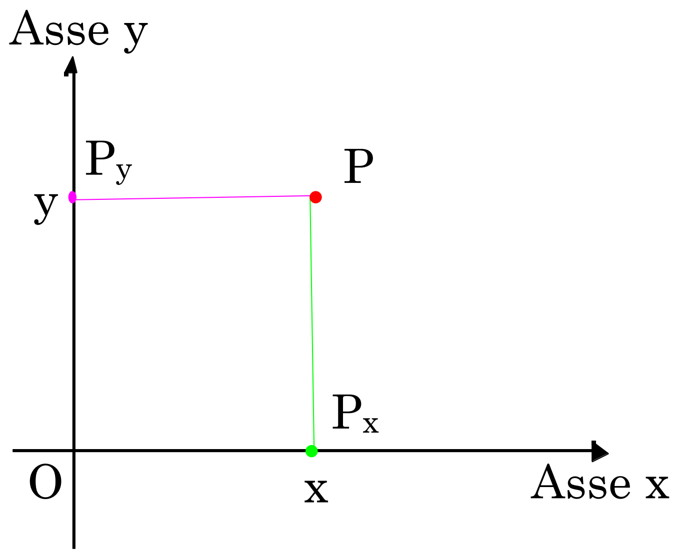
- Utilizzando la definizione operativa della lunghezza si può misurare la distanza tra l'origine O ed il generico punto sulla curva: sia “s” per il punto P.
  Si assegna al punto la coordinata s uguale alla distanza da O presa **con il segno *più* (+)** se il punto viene dopo O quando la curva viene percorsa nel verso fissato, **con il segno *meno* (-),** se il punto viene prima di O quando la curva viene percorsa nel verso fissato.

Sistemi di riferimento: 2D

- **Posizione di un punto nel piano**
  - Per specificare la posizione di un punto in un piano si può introdurre un sistema cartesiano formato da due assi orientati perpendicolari tra loro, l'asse x e l'asse y. Le origini sui due assi orientati vengono fissate in maniera da coincidere con il loro punto di intersezione. Inoltre l'orientazione dell'asse y viene scelta in modo che l'asse x per sovrapporsi all'asse y deve essere ruotato di 90° in senso antiorario.

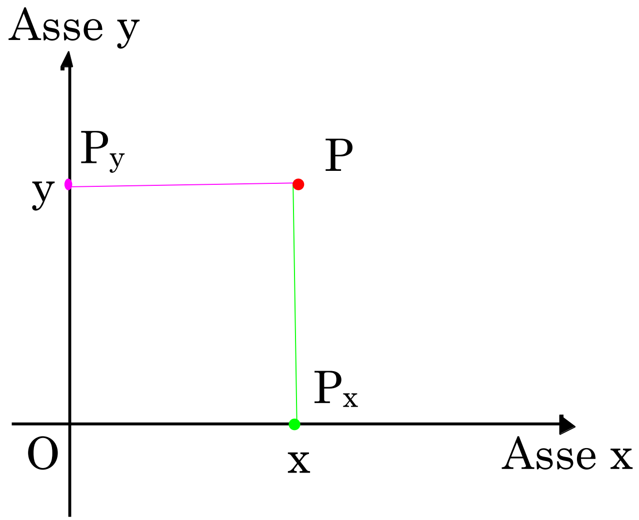


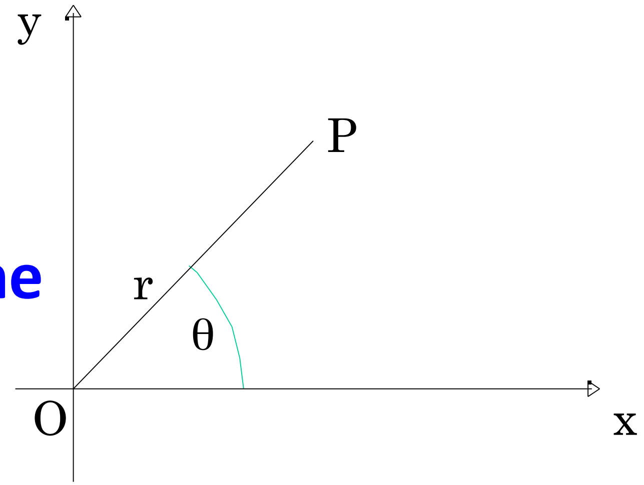
- **Posizione di un punto nel piano. Rappresentazione cartesiana.**
  - La posizione di un generico punto P del piano può essere descritta specificando la coppia ordinata (x,y), in cui x rappresenta la posizione del punto proiezione P_x sull'asse x (determinata utilizzando la definizione precedentemente data di posizione di un punto su una retta) e, in maniera analoga, y rappresenta la posizione del punto proiezione P_y sull'asse y.
    - **I punti proiezione P_x e P_y sugli assi x e y possono essere determinati in maniera univoca mandando da P le perpendicolari rispettivamente all'asse x e all'asse y.**



Sistemi di riferimento: 2D

- **Posizione di un punto nel piano. Rappresentazione polare.**
  - Una maniera alternativa per rappresentare la posizione del punto P nel piano è quella di specificare la coppia ordinata (r,θ) in cui r è la distanza di P dall'origine O e θ è l'angolo che la retta passante per O e P ed orientata da O a P forma con un asse orientato arbitrariamente scelto nel piano, per esempio l'asse x.
  - L'angolo, espresso in radianti, è positivo se l'asse di riferimento, nel nostro caso l'asse x, deve essere ruotato in senso antiorario per sovrapporlo alla retta orientata passante per O e P, negativo in caso contrario.
- Le due rappresentazioni cartesiana (P ≡ (x,y)) e polare (P ≡ (r,θ)), sono ovviamente equivalenti. Valgono infatti le seguenti relazioni per passare dall'una all'altra delle due rappresentazioni





Da Cartesiane a Polari

$r^2 = x^2 + y2$ r [0, ∞]

θ=arctang(y/x) se x>0

θ=arctang(y/x)+π se x<0

θ [0, 2 π]

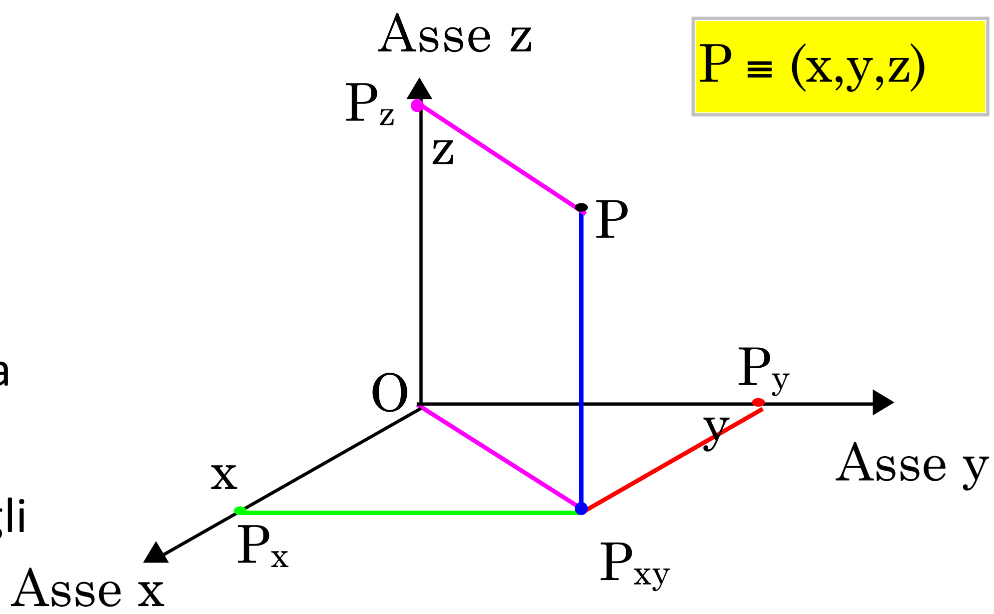
Da Polari a Cartesiane

x=r cosθ

y=r sinθ

Sistemi di riferimento: 3D

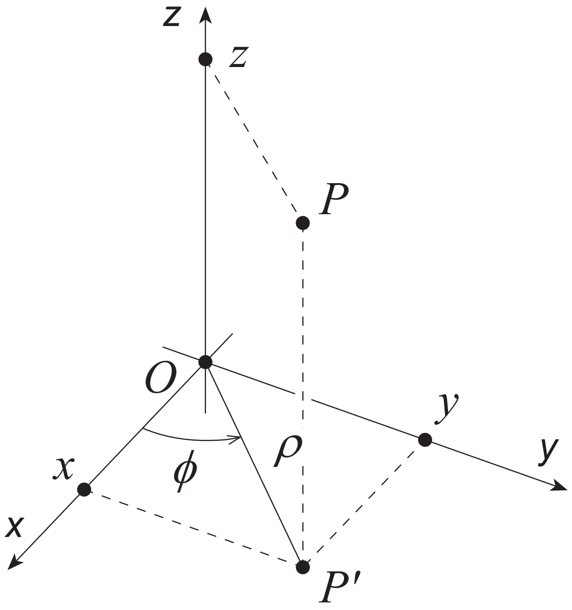
- **Posizione di un punto nello spazio. Rappresentazione cartesiana.**
  - Per specificare la posizione di un punto nello spazio introduciamo una terna di riferimento cartesiana, costituita da tre assi orientati, x,y,z, ortogonali tra di loro. In particolare useremo una terna **destrorsa**, cioè con l'asse x disposto secondo il **pollice**, l'asse y secondo **l'indice**, e quello z secondo il **medio** della mano destra. La posizione del generico punto P nello spazio sarà determinata dalle coordinate dei punti proiezione sugli assi orientati x,y e z.



  - Per determinare i punti proiezione sugli assi cartesiani si manda da P la parallela all'asse z fino ad incontrare il piano xy: si determina così il punto P_{xy} proiezione di P sul piano xy.
    - Si congiunge con un segmento l'origine O con il punto P_{xy}: P_{xy}. La proiezione P_x di P sull'asse x si determina mandando da P_{xy} la parallela all'asse y fino ad intersecare l'asse x, mentre la proiezione P_y di P sull'asse y si determina mandando da P_{xy} la parallela all'asse x fino ad intersecare l'asse y.
    - la proiezione di P sull'asse z, P_z, si determina mandando da P un segmento parallelo al segmento P_{xy} .

Sistemi di riferimento 3D: Cilindriche

- Sistema di coordinate Cilindriche: estensione a 3D del Sistema di riferimento polare, la terna è rappresentata da *(ρ,ϕ,z).*



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,$$

$$\tan\phi = \frac{y}{x}\ ,$$

$$z = z\ ;$$

viceversa:

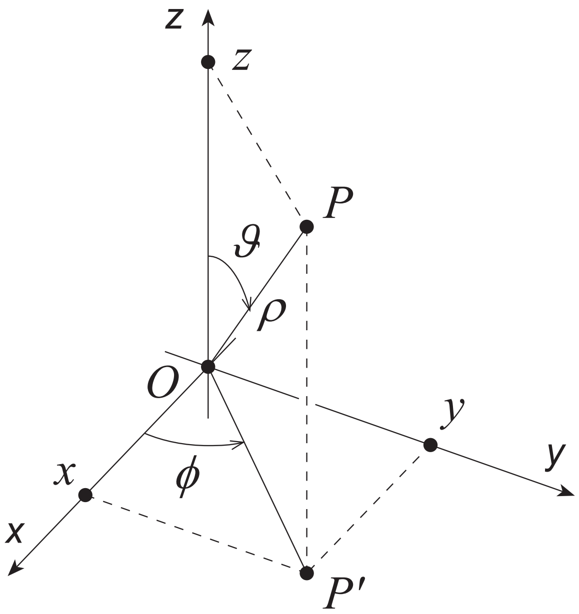
$$x = \rho\, cos\ \phi$$

$$y = \rho\, sin\ \phi$$

$$z = z\ .$$

Sistemi di riferimento 3D: coordinate Sferiche

- Sistema di coordinate Sferiche: la terna è rappresentata da *(ρ, ϕ, θ)*.



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,,$$

$$\tan\phi = \frac{y}{x}\,,$$

$$\cos\vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,;$$

viceversa, risulta:

$$x = \rho \sin\vartheta \cos\phi\,,$$

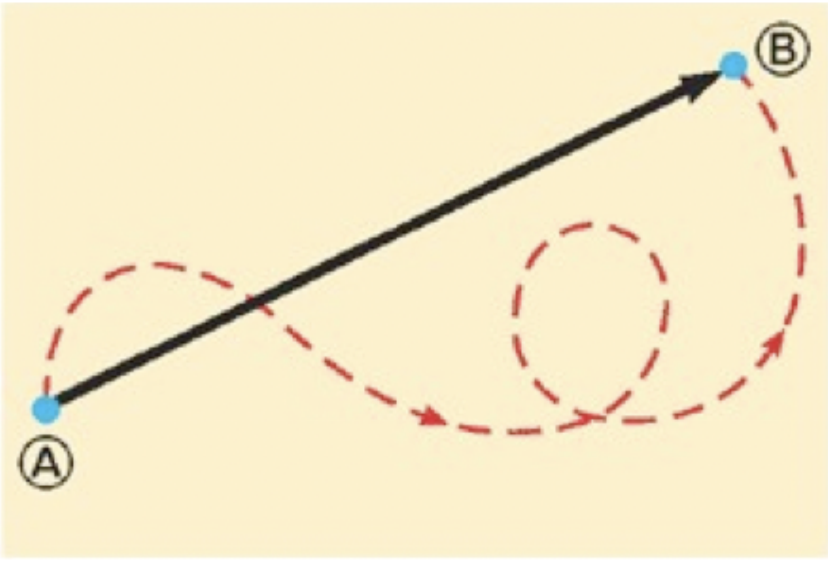
$$y = \rho \sin\vartheta \sin\phi\,,$$

$$z = \rho \cos\vartheta\,.$$

Grandezze scalari e vettoriali

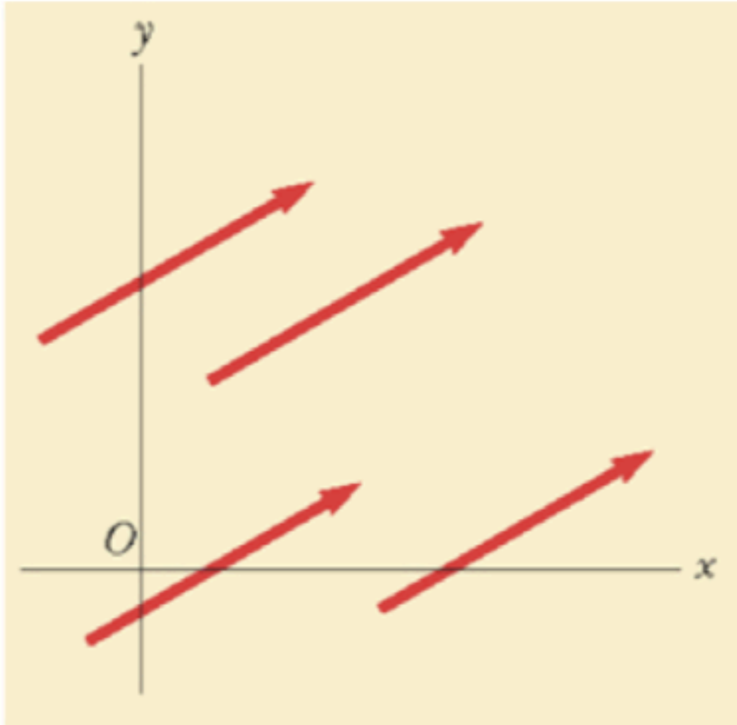
- Grandezze scalari: sono completamente specificate da un numero in unità appropriate.
  — Volume, massa, intervalli di tempo, etc., sono scalari.
- Grandezze vettoriali: sono specificate da modulo (o intensit`a), direzione, verso.
  — Spostamento, velocità, forze, etc., sono vettori.

Esempio: vettore spostamento di un punto materiale da A a B. Il modulo è la distanza fra A e B (differisce dalla distanza percorsa!)



Vettori

- Notazione: $\vec{A}$ o anche $\mathbf{A}$ o $\underline{A}$
- Modulo: $|\vec{A}|$ o semplicemente A (sempre positivo!)
- I vettori possono essere "applicati" ad un punto
- Tutti i vettori sovrapponibili con una traslazione sono equivalenti allo stesso vettore "libero"

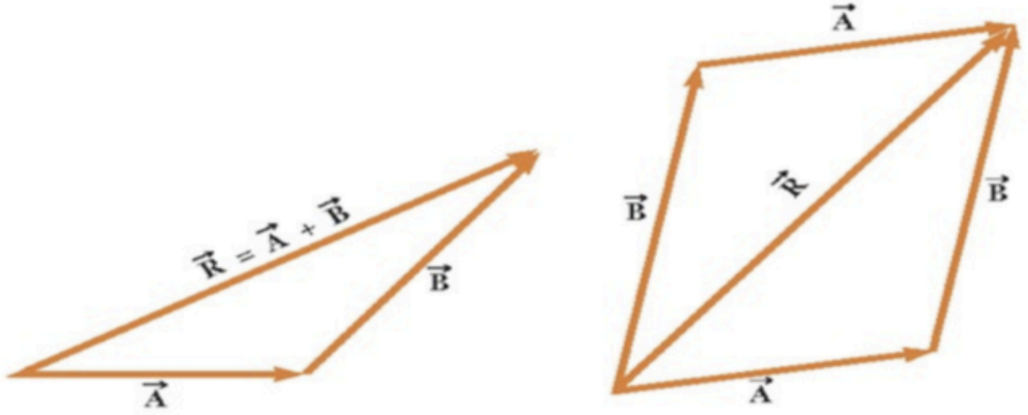


Nota: i vettori hanno le stesse unità di misura della grandezza che rappresentano: un vettore spostamento è in metri, un vettore velocità in metri al secondo etc.

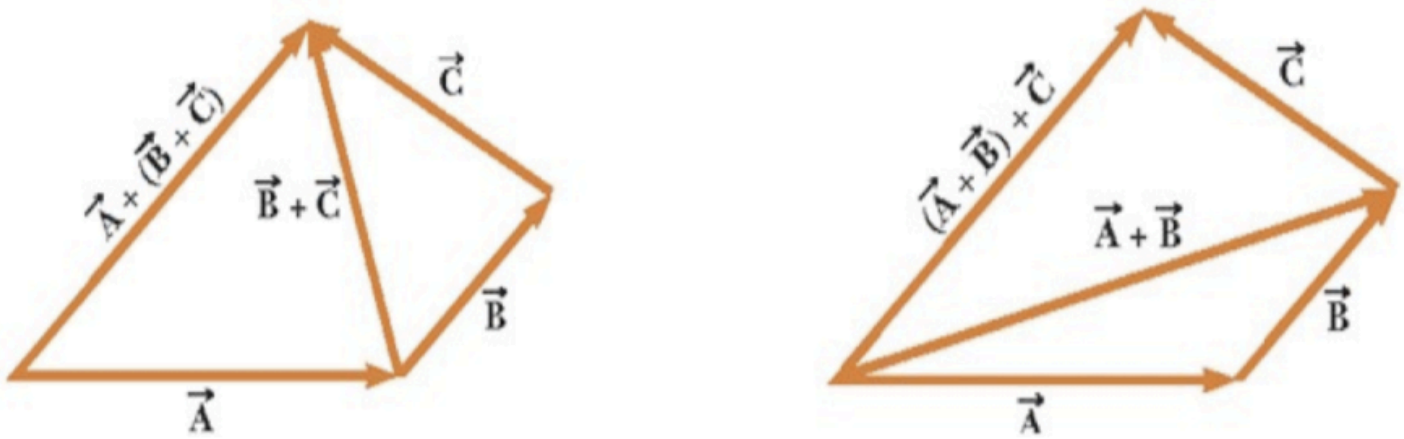
Somma di vettori (I)

Regola del parallelogramma per la somma di vettori

Attenzione: somma vettoriale $\neq$ somma dei moduli!

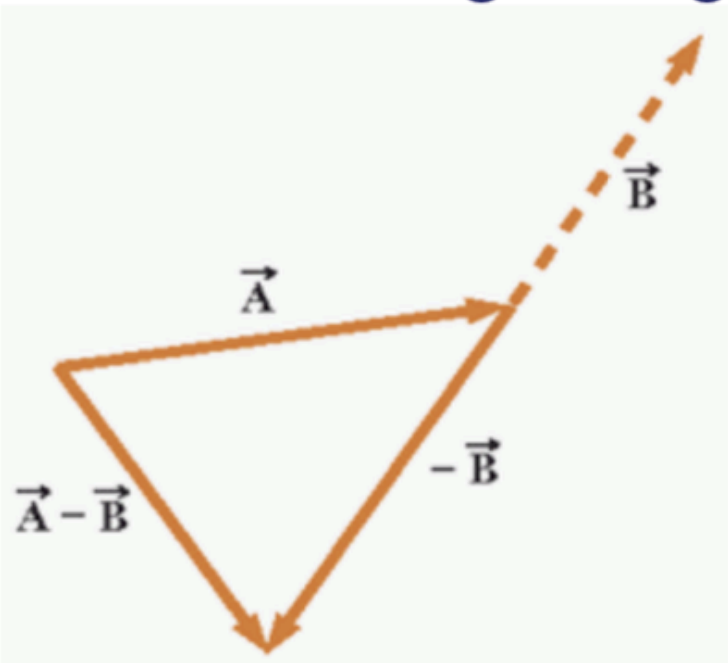


Vale la proprietà associativa $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$:

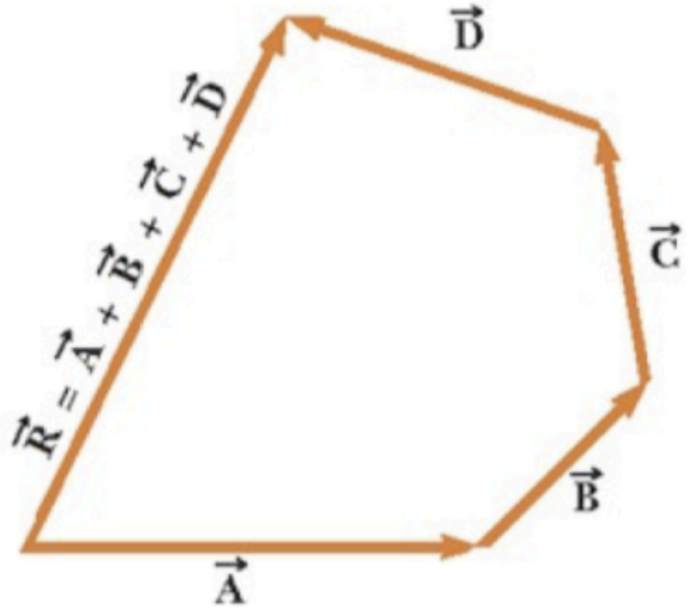


Somma di vettori (2)

Vettori con segno negativo:

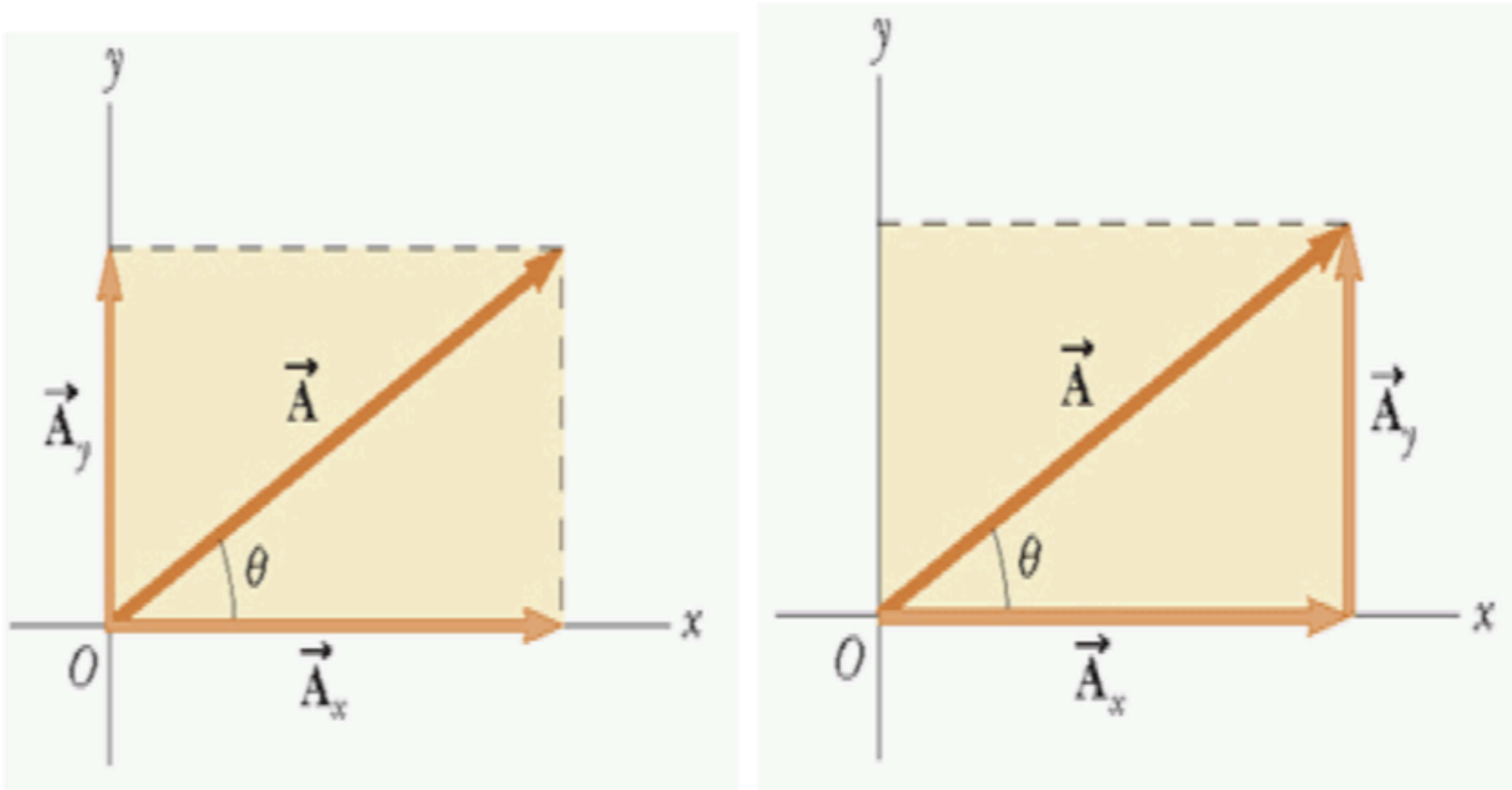


Somma di 4 vettori:



In generale, se a è un numero, $|a\vec{A}| = |a|A$.

Vettori in Coordinate Cartesiane

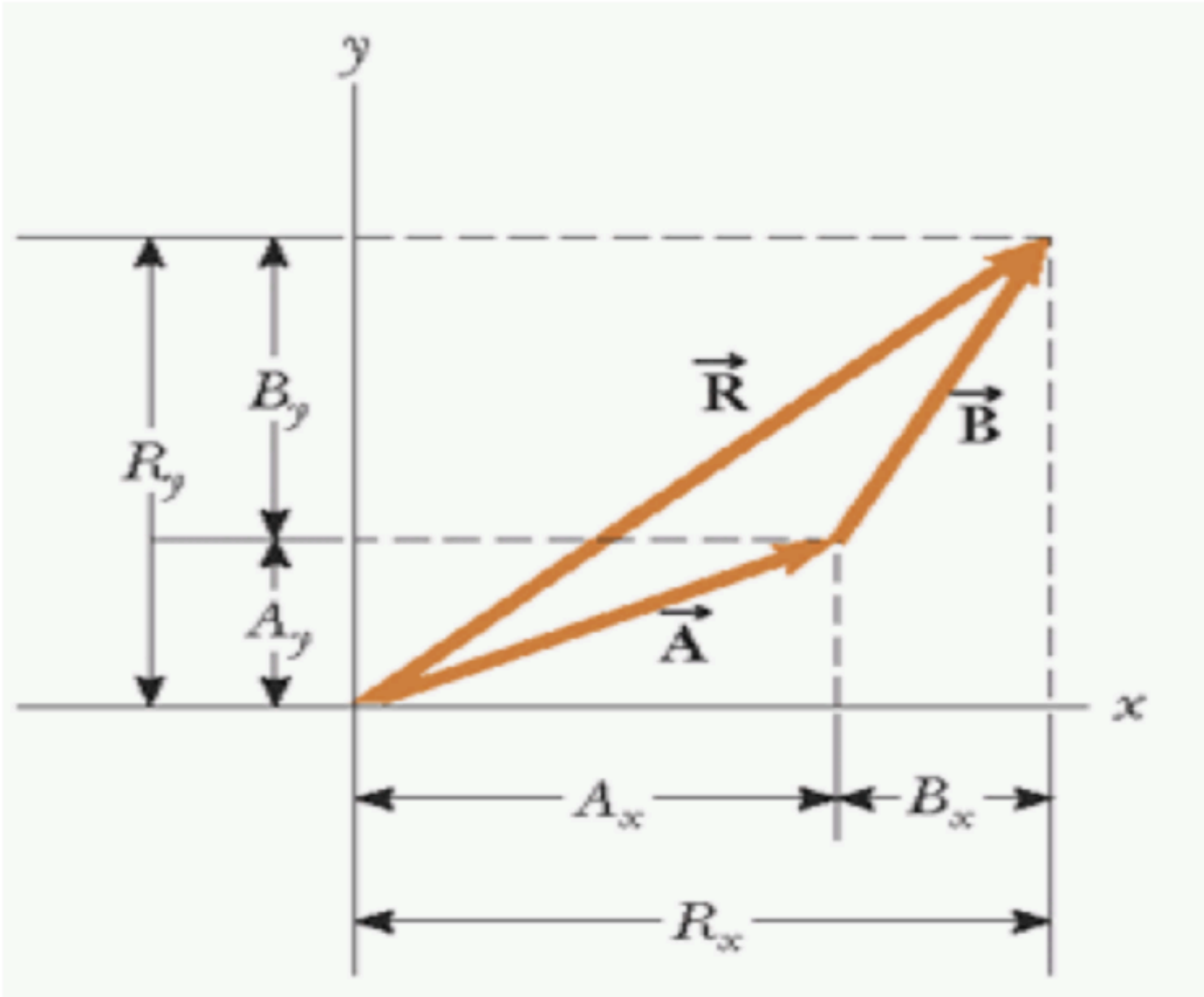


$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \equiv (A_x, A_y), \qquad A^2 = A_x^2 + A_y^2$$

Notare che $A_x = A\cos\theta,\ A_y = A\sin\theta.$

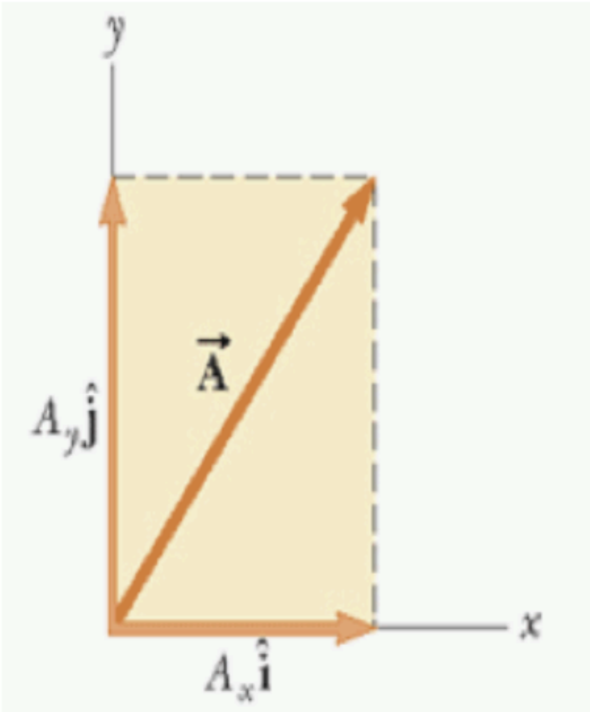
Somma di vettori in Coordinate Cartesiane

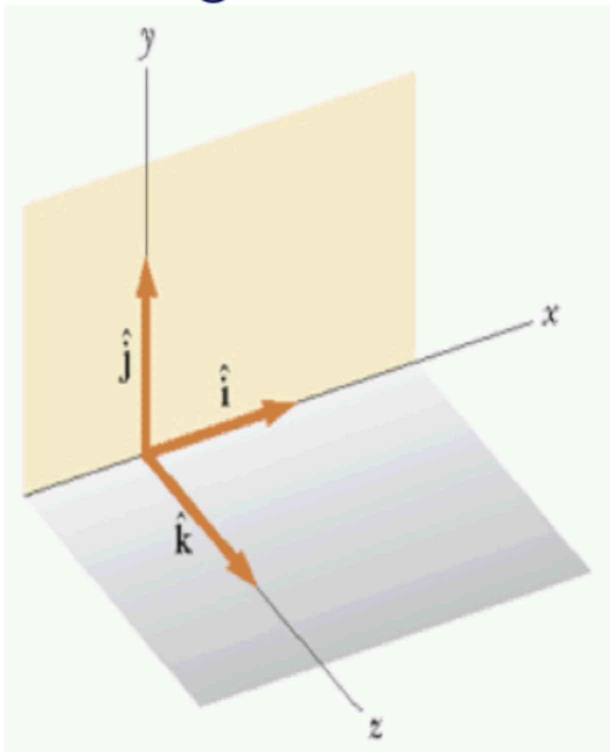
$$\vec{A} + \vec{B} \equiv (A_x + B_x, A_y + B_y)$$



Versori (vettori di modulo unitario)

Fra i *versori*, cioè vettori di modulo unitario, sono particolarmente importanti e utili i versori $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ lungo i tre assi cartesiani:





$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \equiv A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$

Prodotto Scalare

Il *prodotto scalare* di due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ si indica come $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ed è dato da $\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta,}$ dove θ è l'angolo fra i due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$. E' il prodotto del modulo del primo vettore (A) per la proiezione del secondo vettore sul primo $(B\cos\theta)$, o viceversa. Proprietà:

- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$; $\quad (a\vec{A}) \cdot (b\vec{B}) = (ab)(\vec{B} \cdot \vec{A})$; $\quad \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
- Il prodotto scalare di un vettore con se stesso è uguale al modulo del vettore al quadrato: $\boxed{\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2}$
- Sfruttiamo $\vec{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$ e $\vec{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$: troviamo

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

perché $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$; $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$

Versore di un Vettore

Il versore di un vettore $\vec{A}$ è $definito\ da$

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

Infatti:

$$\hat{A} \bullet \hat{A} = 1 = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \bullet \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{|\vec{A}||\vec{A}|}{|\vec{A}|^2} = 1$$

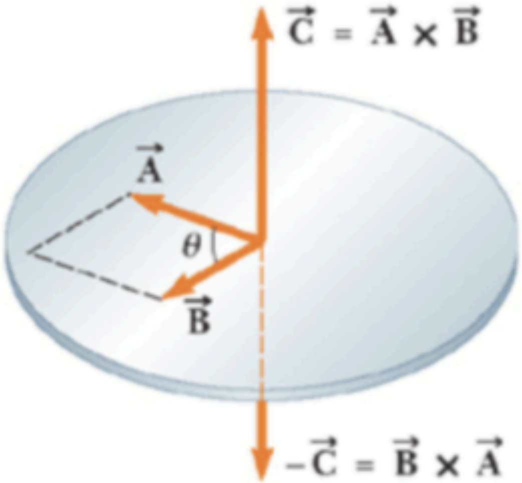
$$\boxed{\vec{n} = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{v}}|}}$$

- **modulo = 1**
- **direzione $\vec{\mathbf{v}}$**
- **verso $\vec{\mathbf{v}}$**

Prodotto Vettoriale

Come possiamo formare un vettore da altri due vettori? Il *prodotto vettore*: $\boxed{\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}}$ è definito come segue:

- $|\vec{C}| = AB \sin\theta$, dove θ è l'angolo compreso fra i due vettori;
- $\vec{C}$ è un vettore perpendicolare al piano formato da $\vec{A}$ e $\vec{B}$;
- il verso di $\vec{C}$ è determinato dalla *regola della mano destra*



Da notare che $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$, e che $\vec{A} \times \vec{A} = 0$. In generale, il prodotto vettore di due vettori paralleli è nullo. Il modulo del prodotto vettore è uguale alla superficie del parallelogramma formato da $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

Prodotto Vettore in Coordinate Cartesiane

Sfruttiamo la decomposizione dei vettori come somma sui versori:

$$\vec{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}, \quad \vec{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

Troviamo

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}\right) \times \left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}\right) \\ &= \hat{\mathbf{i}}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{\mathbf{j}}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{\mathbf{k}}(A_xB_y - A_yB_x)\end{aligned}$$

perché

$$\begin{aligned}&\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = 0, \qquad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = 0, \qquad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0 \\ &\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}, \qquad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}, \qquad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

Prodotto Vettoriale come determinante

Un modo semplice per ricordarsi l'espressione del prodotto vettore è usare le regole per il calcolo del determinante di una matrice:

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{i}}(A_y B_z - A_z B_y) - \hat{\mathbf{j}}(A_x B_z - A_z B_x) + \hat{\mathbf{k}}(A_x B_y - A_y B_x)\end{aligned}$$

E' utile introdurre il tensore di Ricci-Levi Civita ε_{ijk} che vale +1 se ijk = 123 e permutazioni cicliche; −1 se ijk = 213 e permutazioni cicliche; 0 altrimenti. Usando la convenzione di Einstein: indici ripetuti sono sommati, si può scrivere

$$C_i = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$$

Scalari, Vettori e leggi fisiche

- Le leggi fisiche non possono dipendere dal sistema di coordinate!
- Il prodotto scalare di due vettori *non* dipende dal sistema di coordinate: è *invariante* rispetto a rotazioni del sistema di coordinate.
- Una legge fisica espressa come relazione tra quantità vettoriali è *covariante*: per esempio, nella legge di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, entrambe i membri si trasformano allo stesso modo

Spesso avremo a che fare con *funzioni vettoriali*: ad esempio, $\vec{r}(t)$, posizioni di un punto al tempo t, equivalente a una terna di funzioni: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Campi

- In fisica sentiremo parlare del concetto di Campo. Si intende come una proprietà fisica dello spazio:
  – possiamo associare alla proprietà fisica una grandezza e di questa grandezza ne conosciamo i valori nei punti dello spazio (tutto o una regione limitata)
- I campi possono essere di tipo scalare o vettoriale

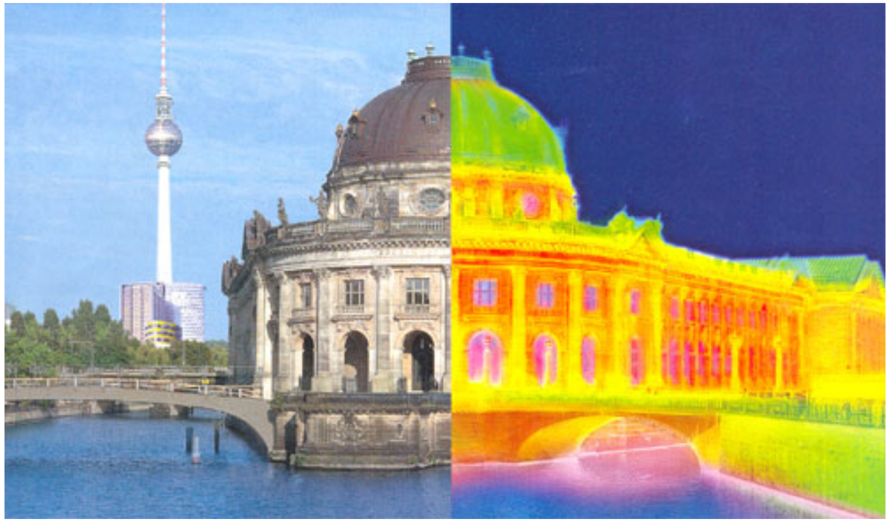
Scalare $T = T(x,y,z)$

Vettoriale $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x,y,z) = V_x(x,y,z)\,\mathbf{i} + V_y(x,y,z)\,\mathbf{j} + V_z(x,y,z)\,\mathbf{k}$

Esempi di campi

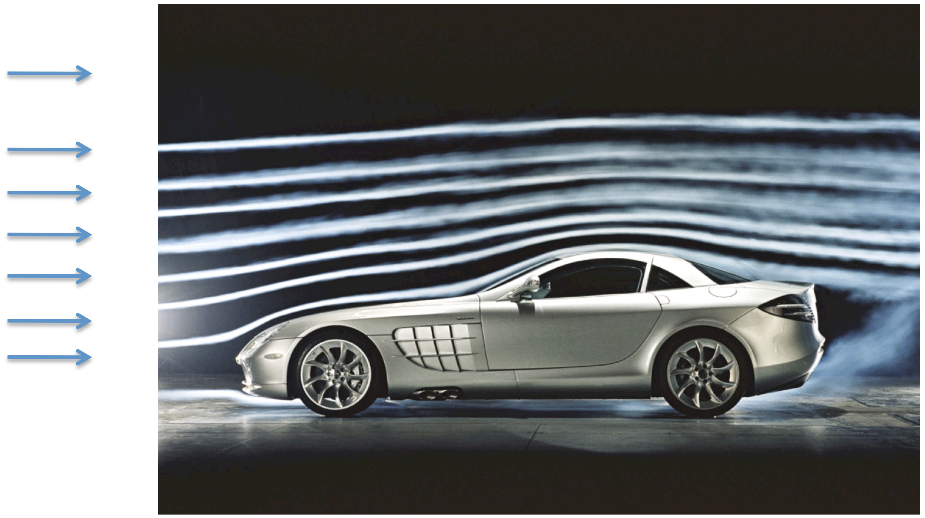
- Il concetto di campo di una grandezza fisica è comunemente utilizzato in varie applicazioni

Campo (scalare) di temperatura



$T = T(x,y)$

Campo (vettoriale) di velocità



$\vec{v}(x,y,z)$