# Forze di Contatto: Forza di attrito

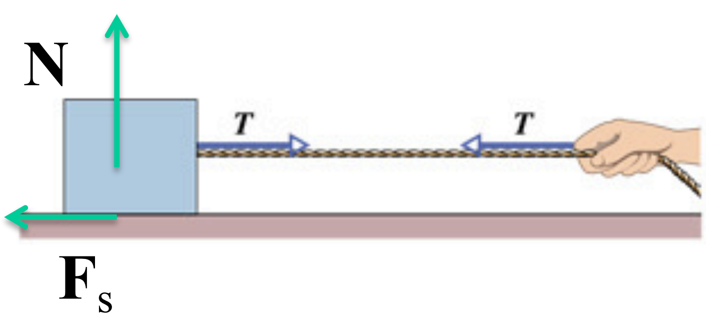
- La forza di attrito si esplica parallelamente alle superfici di contatto tra i corpi, si tratta di una interazione di contatto, media di interazioni elettromagnetiche tra i punti microscopici delle superfici a contatto dei corpi
  - ❖ La forza *di attrito si oppone* al moto dei corpi. Si parla di attrito statico quando il corpo è tenuto fermo dalla forza di attrito statico. La forza di attrito statico ha un valore massimo.

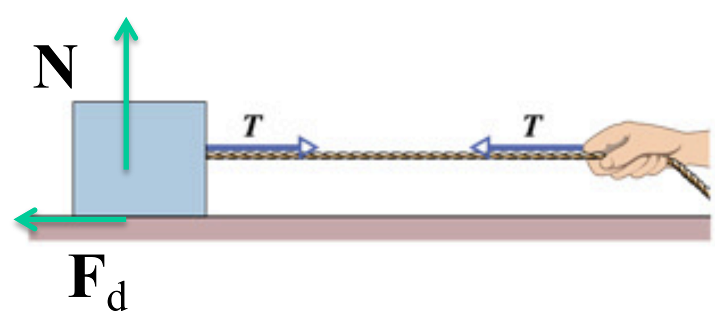
    Esempi

    valigia su nastro trasportatore (la valigia è ferma sul nastro)

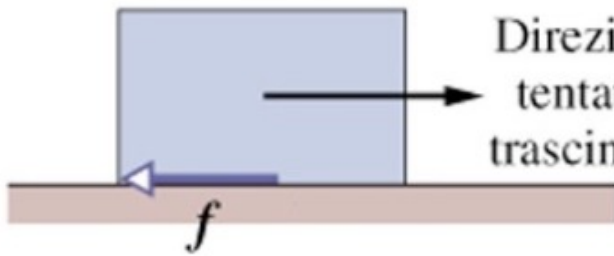
  - ❖ Se il corpo si muove su superfici scabre si osserva un moto di ***scivolamento a cui si oppone la forza di attrito dinamico*** diretta nel verso opposto alla velocita relativa fra le superfici.

Riassumendo sperimentalmente si osserva che:

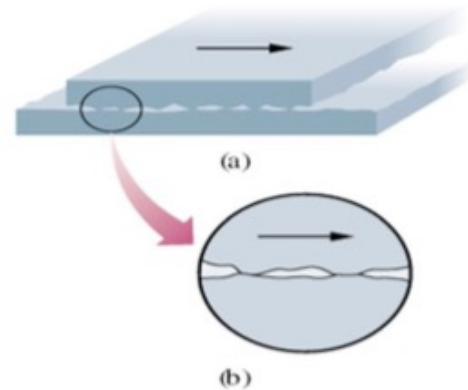



Se siamo in equilibrio: $F_s \leq N \mu_s$ Se siamo in moto: $F_d = N \mu_d$

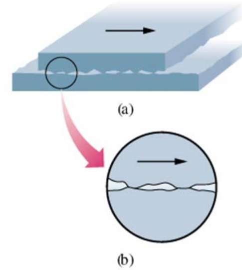



Da un punto di vista microscopico l'attrito è dovuto alle microfusioni che si formano in corrispondenza delle asperità delle due superfici a contatto

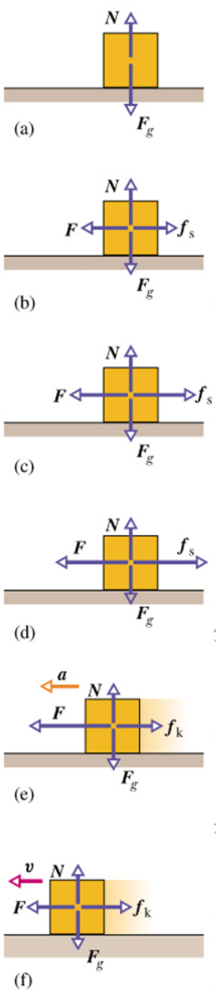


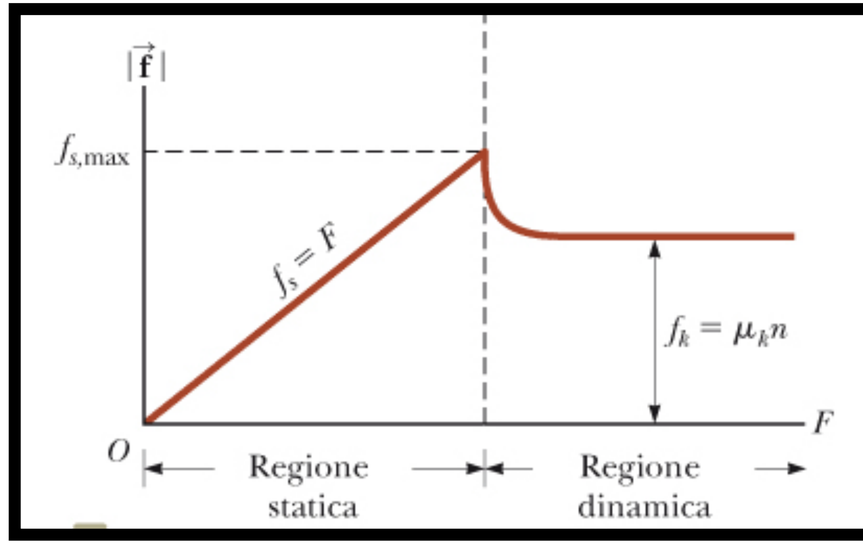
# Forza di Attrito Statico

*forza necessaria per **mettere in moto** un corpo di massa M su una superficie k*




proviene dalla **scabrosità** delle superfici
[coinvolge anche forze elettrostatiche]




**quiete**

corpo in quiete
non applico nessuna forza.

applico forza $\mathbf{F} < \mathbf{f_s}$
il corpo rimane fermo

aumento F ma sempre $\mathbf{F} < \mathbf{f_s}$
il corpo rimane fermo

$\mathbf{F} = \mathbf{f_s}$
il corpo rimane fermo

**accel.**

se $\mathbf{F} > \mathbf{f_k}$
il corpo acquista accelerazione **a**

**velocità costante**

per mantenere **v** costante riduco **F**:
$\mathbf{F} < \mathbf{F_{max}}$

# proprietà attrito

$$f_s \le \mu_s N$$
$$f_d = \mu_d N$$

$\mu_s$ **coefficiente** attrito **statico**
$\mu_d$ **coefficiente** attrito **dinamico**

- $\mu_s$, $\mu_d$ sono numeri (adimensionali)

- $\mu_s$, $\mu_d$ dipendono dai **materiali** a contatto $[0.05 < \mu < 1.5]$
- $\mu_d < \mu_s$
- $\mu_s$, $\mu_d$ **non** dipendono dall'**area** di contatto
- $\vec{f}_s$, $\vec{f}_d$ **parallele** alla superficie e **opposte** al moto

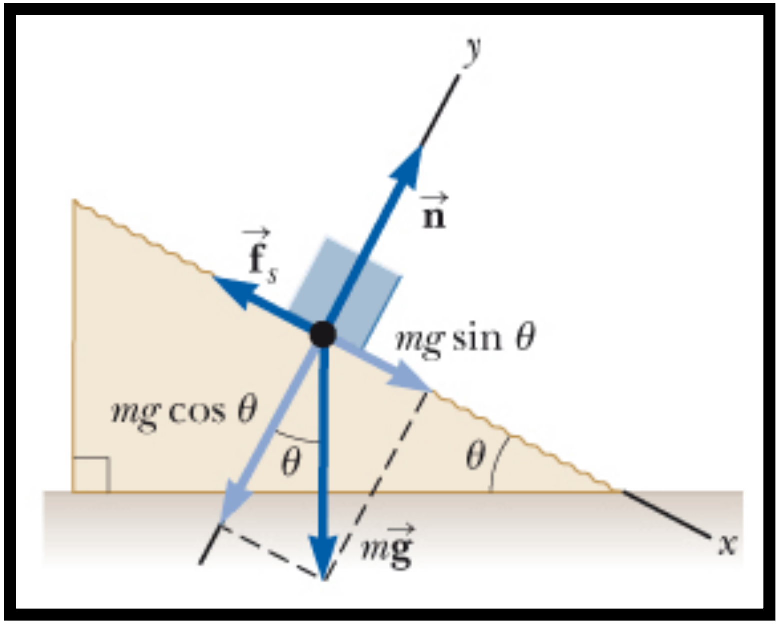
## coefficienti di attrito

| Materiale | Statico | Dinamico o Radente |
|---|---|---|
| Acciaio su acciaio | 0.74 | 0.57 |
| Acciaio su acciaio lubrificato | 0.11 | 0.05 |
| Alluminio su acciaio | 0.61 | 0.47 |
| Rame su acciaio | 0.53 | 0.36 |
| Ottone su acciaio | 0.51 | 0.44 |
| Vetro su vetro | 0.94 | 0.40 |
| Rame su vetro | 0.68 | 0.53 |
| Teflon su teflon | 0.04 | 0.04 |
| Teflon su acciaio | 0.04 | 0.04 |
| Acciaio su aria | 0.001 | 0.001 |
| Acciaio su ghiaccio | 0.027 | 0.014 |
| Legno su pietra | 0.7 | 0.3 |
| Gomma su cemento asciutto | 0.65 | 0.5 |
| Gomma su cemento bagnato | 0.4 | 0.35 |
| Gomma su ghiaccio asciutto | 0.2 | 0.15 |
| Gomma su ghiaccio bagnato | 0.1 | 0.08 |
| Grafite su grafite | 0.1 | |
| Gomma su asfalto | | 0.97 |

# Attrito su piano inclinato in discesa

- L'attrito è una forza, quindi va semplicemente inclusa nella somma $\sum \vec{F}$ che appare nella Legge di Newton

- Le regole per l'attrito permettono di determinare la direzione e la grandezza delle forze di attrito




## Attrito statico: $f_A = f_S$

- se statico il corpo non si muove

$$f_{S-MAX} = \mu_S \mathrm{N}$$

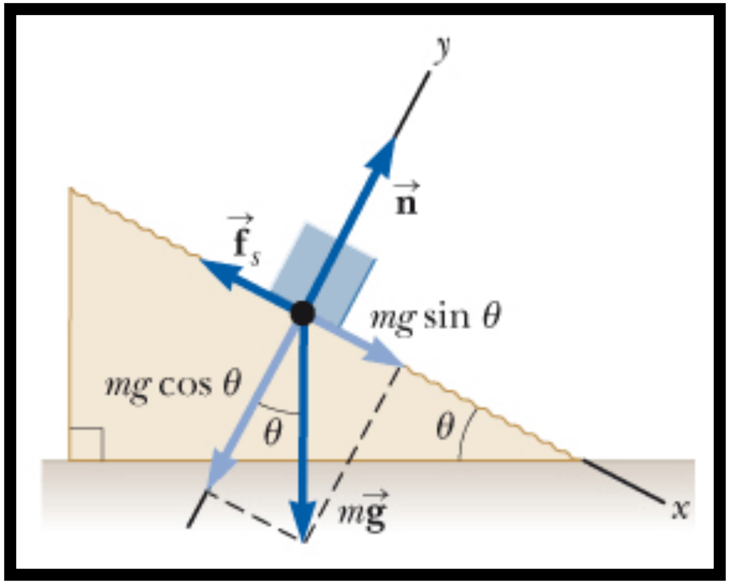
Se il corpo è fermo:

$$\begin{cases} 0 = ma_y = N - mgcos\theta \quad \Longrightarrow N = mgcos\theta \\ 0 = ma_x = -f_s + mgsin\theta \end{cases}$$

- La pendenza critica corrisponde alla forza massima esplicabile dell'attrito statico al di sopra del quale il corpo si mette in movimento

$$mgsin\theta = f_S \leq f_{S-max} = \mu_S \mathrm{N} = \mu_S \mathrm{mgcos}\theta \qquad \Rightarrow \mu_S \geq \mathrm{tg}\theta$$

# *Piano inclinato corpo in discesa: attrito dinamico*




se $mgsin\theta > f_{S-max} = \mu_S \mathrm{N} = \mu_S \mathrm{mg}cos\theta$

$\Leftrightarrow$ se $\mathrm{tg}\theta > \mu_S$

- il corpo scende e l'attrito diviene dinamico

$$f_A = f_D = \mu_D \mathrm{N}$$

Il corpo scende:

$$\begin{cases} 0 = ma_y = N - mgcos\theta \quad \Longrightarrow N = mgcos\theta \\ ma_x = -f_D + mgsin\theta = -\mu_D \mathrm{N} + mgsin\theta = -\mu_D mgcos\theta + mgsin\theta \end{cases}$$

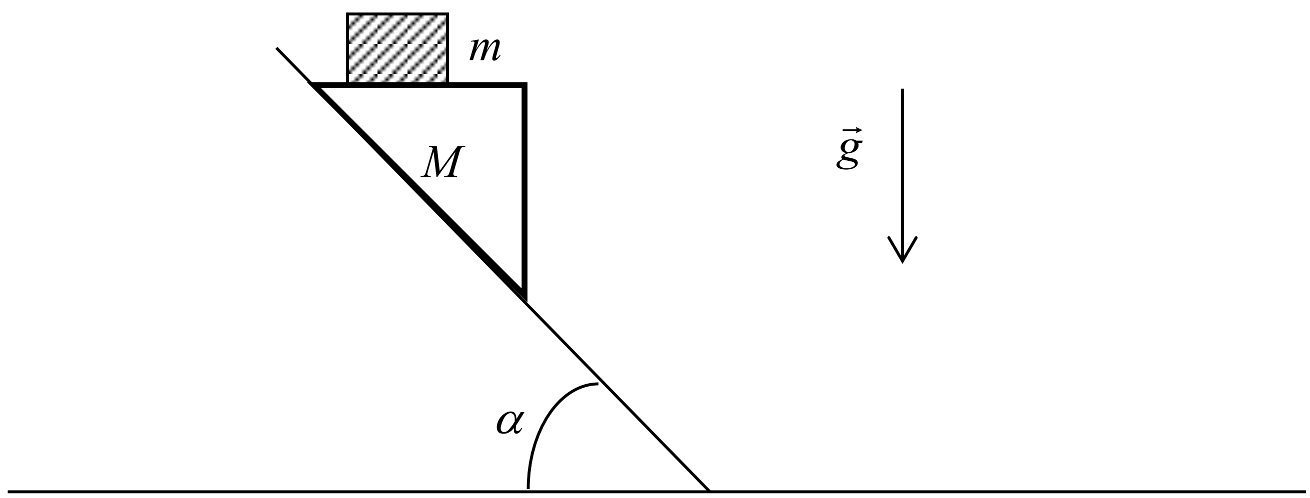
$$a_x = g(\sin\theta - \mu_d \cos\theta)$$

Risultato da paragonare al caso privo di attrito : $a_x = g \sin \theta$

Si consideri il sistema di figura . Il blocco di massa $M$ scivola su un piano inclinato privo di attrito ( e fisso) . Il corpo di massa $m$, a causa dell'attrito , è in equilibrio sul blocco.
Sono noti : $\alpha = \pi/4$ , $M = 5$ kg , $m = 2$ kg.

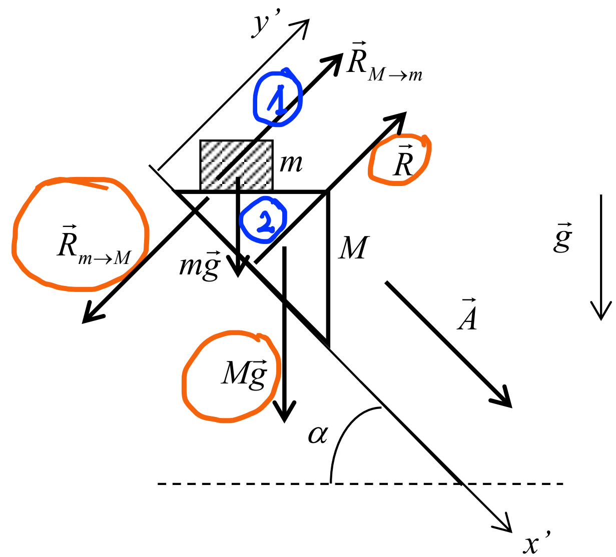
1) Calcolare la reazione di $M$ su $m$.

2) Calcolare la reazione del piano inclinato su $M$



***Soluzione***

*I due corpi possiedono la stessa accelerazione $\vec{A}$, diretta secondo l'asse x' di figura.*




*Scriviamo le equazioni di Newton per i due corpi*

$$\begin{cases} m) & \underbrace{\vec{R}_{M\to m}}_{1} + \underbrace{m\vec{g}}_{2} = m\vec{A} \\ M) & \vec{R}_{m\to M} + M\vec{g} + \vec{R} = M\vec{A} \end{cases}$$

*Passando alle componenti secondo gli assi x' e y' otteniamo*

$$\begin{cases} x') & R^{x'}_{M\to m} + mg\sin a = mA_x & a) \\ y') & R^{y'}_{M\to m} - mg\cos a = 0 & b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x') & R^{x'}_{m\to M} + Mg\sin a = MA_x & c) \\ y') & R^{y'}_{m\to M} + R - Mg\cos a = 0 & d) \end{cases}$$

a) + c) $(m+M) g \sin\alpha = (m+M) A_x$

b) + d) $R - (M+m) g\cos\alpha = 0$

$$\begin{cases} A_x = g\sin\alpha \\ R = (M+m) g\cos\alpha \end{cases}$$

dalla a) $R^{x'}_{M\to m} = 0 = R^{x'}_{m\to M}$

dalla b) $R^{y'}_{M\to m} = mg\cos\alpha$

*Sommando le equazioni a) e c) si ha* $A_x = g\sin a$ *e quindi* $R^{x'}_{M\to m} = R^{x'}_{m\to M} = 0$

*( i vettori* $\vec{R}_{M\to m}$ *e* $\vec{R}_{m\to M}$ *sono quindi perpendicolari al piano inclinato)*

*Sommando le equazioni b) e d) otteniamo* $R = (M+m)g\cos a$ .

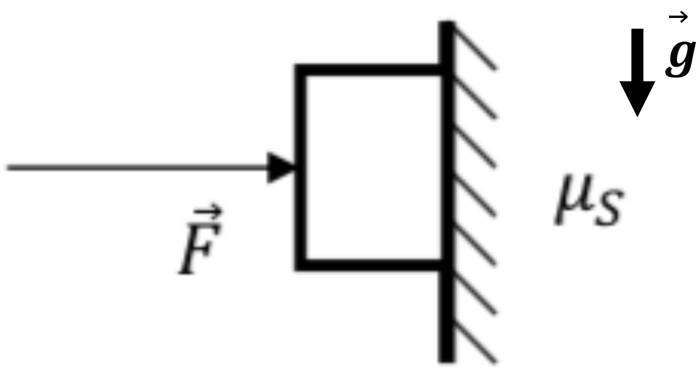
*Si ha quindi:*

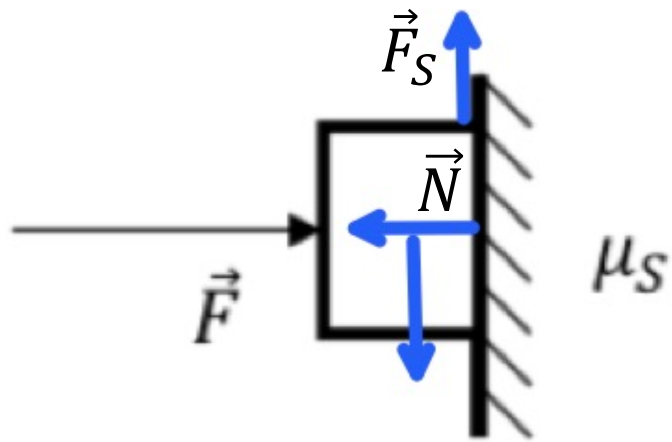
Solo componente ⊥ al piano →

1) $\vec{R}_{M\to m} = mg\cos a\ \vec{j}' \approx 14N\ \vec{j}'$

2) $\vec{R} = (M+m)g\cos a\ \vec{j}' \approx 49N\ \vec{j}'$

**Esercizio 4).** Un blocco (massa $M = 10\,\text{kg}$) è premuto contro una parete verticale con una forza orizzontale $\vec{F}$. Per quali valori del modulo di $\vec{F}$ il corpo si mantiene in equilibrio se il coefficiente di attrito statico fra parete e corpo è $\mu_S = 0.4$ ?




$$\vec{N} = -\vec{F}$$

$$F_S \leq \mu_S N$$

## Soluzione

La forza di attrito statico deve equilibrare la gravità

$$\Longrightarrow Mg = F_S \leq \mu_S N = \mu_S F$$

da cui: $\quad F = |\vec{F}| \geq \dfrac{Mg}{\mu_S}.$

**Esercizio .** Al tempo $t = 0$ un corpo viene lanciato su un piano orizzontale con velocità di modulo $V_0$.
Calcolare l'istante t* e la posizione x(t*) in cui si ferma, se il coefficiente di attrito dinamico fra corpo e piano è $\mu_D$.


## Dati e domande

$V(t=0)=V_0$

$\mu_D$

t* arresto?

x(t*)?

L'unica forza agente lungo l'asse $x$ è la forza di attrito dinamico, per cui:

$$F_x = ma_x = -\mu_D|N| = -\mu_D mg \quad \Longrightarrow a_x = -\mu_D g$$

Integrando l'accelerazione si ottiene ottiene la velocità del corpo in funzione del tempo $t$:

$$\boxed{V_x = V_0 + \int_0^t a_x(t')dt' = V_0 - \mu_D g t}$$

Integrando la velocità si ottiene lo spostamento del corpo in funzione del tempo $t$:

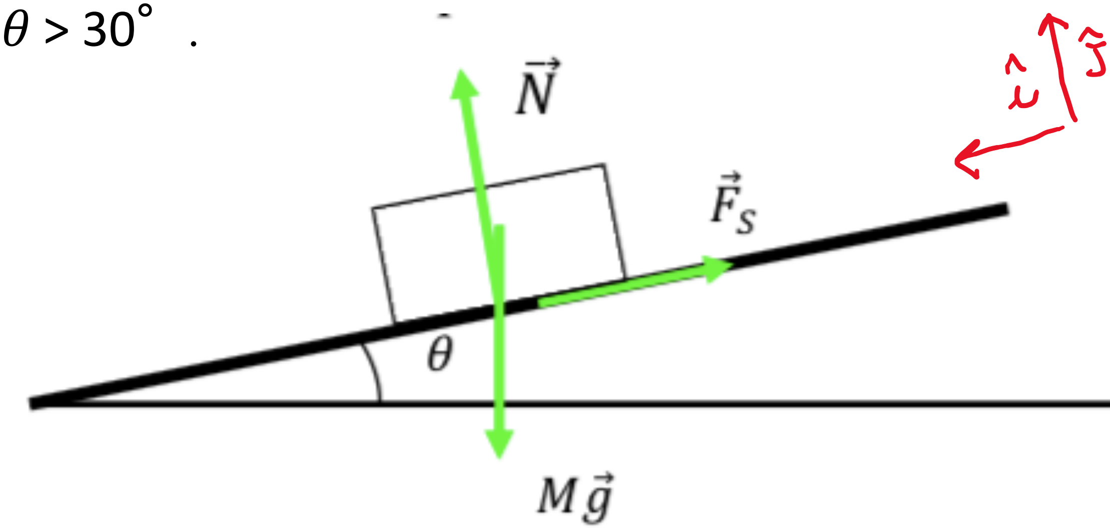
$$x = x_0 + \int_0^t V_x(t')dt' = 0 + V_0 t - \frac{\mu_D g t^2}{2} = V_0 t - \frac{\mu_D g t^2}{2}$$

il blocco si ferma quando $V_x$ diventa nullo, cioè al tempo: $\quad t^* = \frac{V_0}{\mu_D g}$

La posizione in cui si arresta è quindi:

$$x(t^*) = V_0 t^* - \frac{\mu_D g {t^*}^2}{2} = \frac{V_0^2}{\mu_D g} - \frac{\mu_D g}{2}\left(\frac{V_0}{\mu_D g}\right)^2 = \frac{V_0^2}{2\mu_D g}$$

**Esercizio.** Un corpo assimilabile a un punto materiale di massa M giace su un piano inclinato scabro. Calcolare il valore minimo di $\mu_s$ per mantenere il corpo fermo se il corpo inizia a muoversi quando $\theta > 30^\circ$ .




**Soluzione**.

Per l'equilibrio delle forze:

$$\vec{N} + \vec{F}_S + M\vec{g} = 0$$

proiettando in direzione parallela e perpendicolare al piano inclinato, poichè il corpo è fermo:

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} N - Mg\ \cos\theta\ = 0 \\ -F_S + Mg\sin\theta = 0 \end{cases}$$

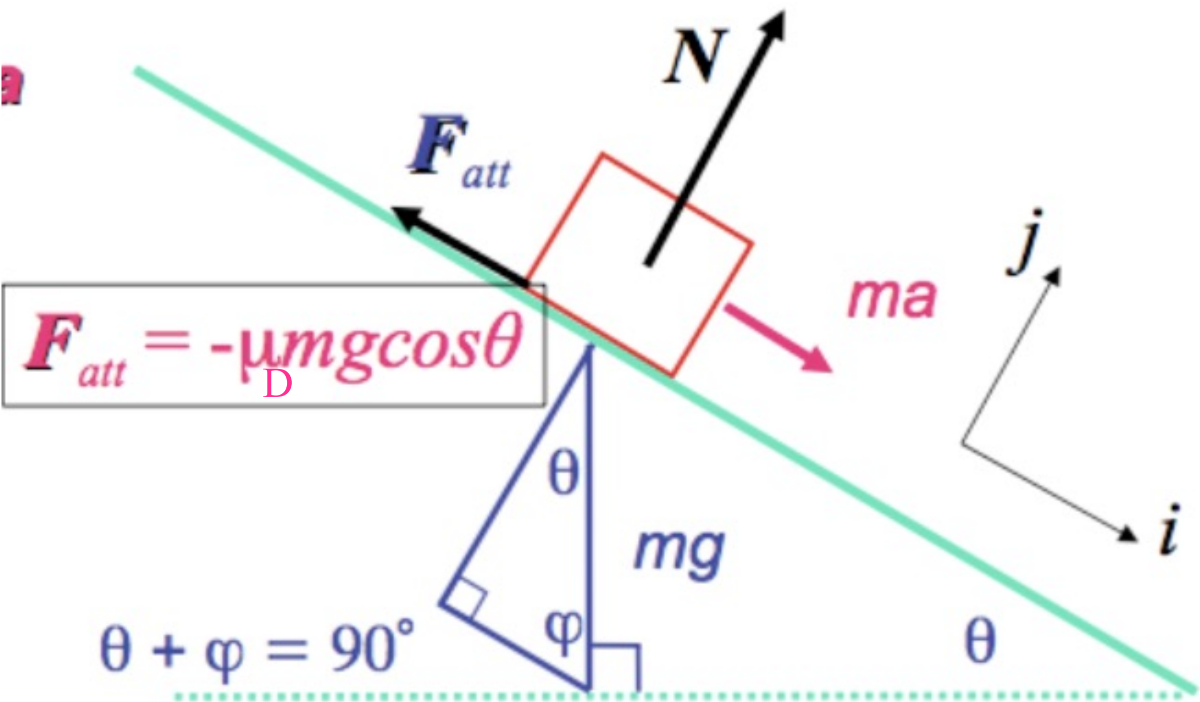
essendo:

$$Mg\sin\theta = F_S \leq \mu_S N = \ \mu_S Mg\cos\theta\,. \qquad Mg\sin\theta \leq \mu_S Mg\cos\theta$$

si ottiene:

$$\mu_S^{min} = \tan\theta = 0.577$$

**Esercizio.** Un blocco di legno (massa $m = 10$ kg) assimilabile a un punto materiale, inizialmente fermo su un piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$ rispetto ad un piano orizzontale, viene lasciato libero di muoversi al tempo $t = 0$. Fra il blocco ed il piano è presente attrito dinamico, caratterizzato da un coefficiente $\mu_D = 0.2$. Si esprima la velocità del blocco in funzione del tempo $\vec{V}$(t), se il blocco una volta lasciato in moto scende lungo il piano. Si determini l'accelerazione $\vec{a}$




**Dati e domande**

m=10 kg

$\theta = 30^0$

$\vec{V}(0)=0$

$\vec{V}(t)$ ?

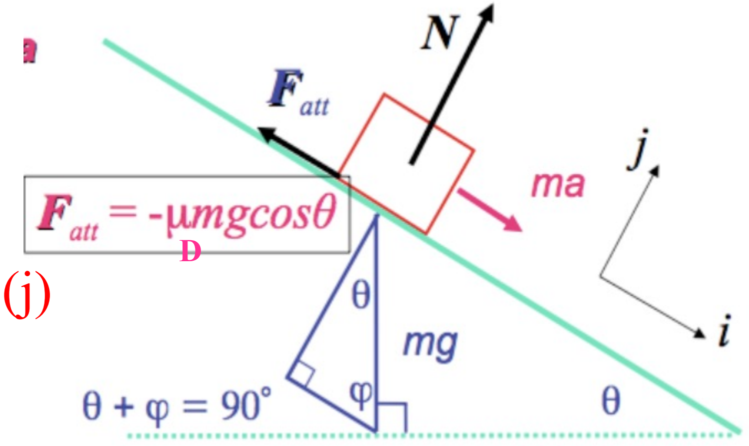
$\vec{a}$?

**Soluzione.**

Le uniche forze agenti sul blocco sono la forza di attrito e la forza peso (entrambe lungo x) e la reazione normale del piano.

Parte con Vx e Vy Vz nulle, di conseguenza moto lungo x

$\vec{V}$(t) ? $\vec{a}$?




Per cui il corpo è in moto lungo x (i) e fermo lungo y (j)

**Proiezione delle forze**

$$\begin{cases} \text{lungo y:} \quad N - mg\cos\theta = 0 = ma_y \\ \text{lungo x:} \quad mg\sin\theta - F_{att} = mg\sin\theta - \mu_D N = mg\sin\theta - \mu_D mg\cos\theta = ma_x \end{cases}$$

Quindi l'accelerazione risultante lungo la direzione del piano è :

$$a_x = \left(\frac{mg\sin\theta - \mu_D mg\cos\theta}{m}\right) = g(\sin\theta - \mu_D\cos\theta)$$

$a_x$ =costante $\Longrightarrow$ moto uniformemente accelerato

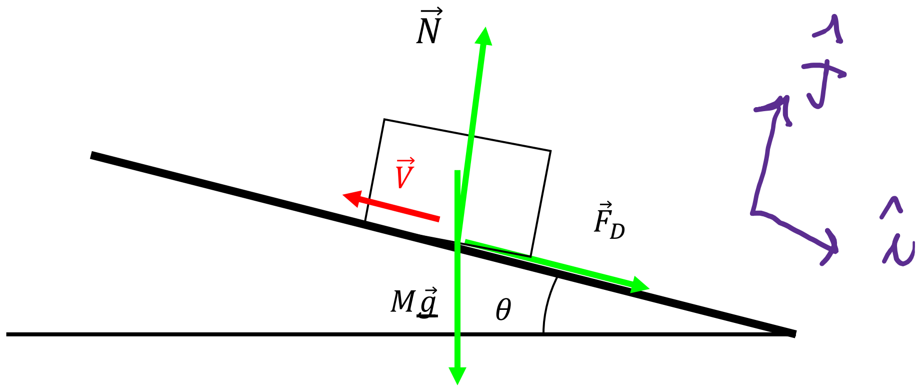
Poiché il blocco parte da fermo ed il moto è uniformemente accelerato si ha:

$$1) V_x = V_x(0) + \int_0^t a_x(t')dt' = 0 + a_x t = g(\sin\theta - \mu_D\cos\theta)t, V_y = 0, \ V_z = 0$$

per l'accelerazione, sostituendo i valori numerici delle funzioni trigonometriche si ricava:

$$2) a_x = 9.8\times(0.5 - 0.2\times0.866) = 3.2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \ a_y = 0, \quad a_z = 0$$

**Variazione:** come cambia il risultato se il blocco è **lanciato in salita** al tempo $t = 0$ con una velocità $10\ \mathrm{m/s}$? Con quale velocità ripassa nel punto di partenza ?




**Dati e domande**

m=10 kg

$\theta = 30^0$

In A $\vec{V}(0) = (-10,0,0)$m/s

$\vec{V}(t^*)$ quando ripassa in A?

**Soluzione**.

Nel moto di salita sia la forza di attrito dinamico che la forza di gravità si oppongono alla salita

**Proiezione delle forze**

lungo y: $N - mg\cos\theta = 0 = ma_y$

lungo x: $mg\sin\theta + F_{att} = mg\sin\theta + \mu_D N = mg\sin\theta + \mu_D mg\cos\theta = ma_x$

Quindi l'accelerazione risultante durante la salita è

$$a_x = a_S = g(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)$$

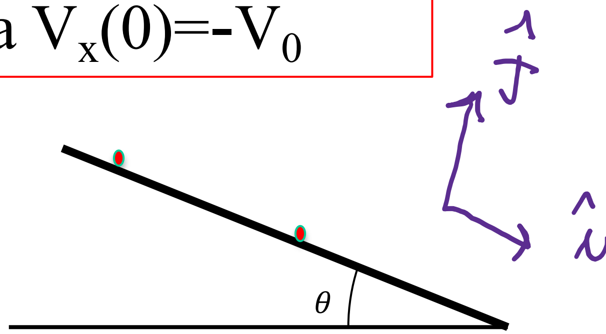
mentre nel moto di discesa la situazione è analoga al caso precedente, per cui

$$a_x = a_D = g(\sin\theta - \mu_D\cos\theta)$$

Integrando l'accelerazione otteniamo $V_x$ nel moto di salita

$$1)\; V_x = V_x(0) + \int_0^t a_x(t')dt' = -V_0 + a_x t$$

Nota $V_x(0) = -V_0$




quando arriva alla quota max

$$\Longrightarrow \quad V_x^s = 0 = -V_0 + g(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)t_s$$

$$t_S = \frac{V_0}{g(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)}$$

la coordinata x al tempo di salita, quando il punto materiale inverte il moto è data da:

$$x(t_s) = x_A - V_0\, t_s + \frac{1}{2} g\,(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)\, t_s^2 =$$
$$= x_A - V_0 \frac{V_0}{g(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)} + \frac{1}{2} g\,(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)\left(\frac{V_0}{g(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)}\right)^2$$

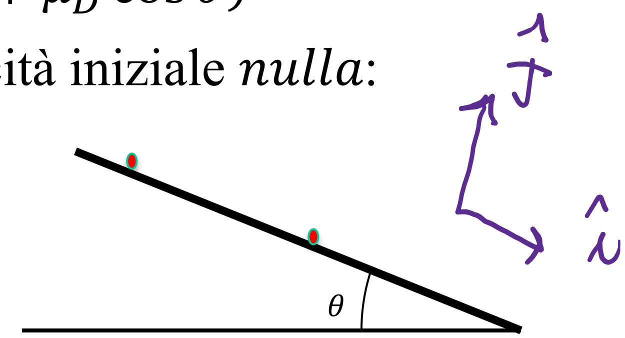
lo spostamento in salita è $\quad S_S = x(t_s) - x_A = \frac{-V_0^2}{2g(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)}$

lo spostamento in salita è legato allo spostamento in discesa da:

$$S_D = x_A - x(t_s) = -S_S = \frac{V_0^2}{2g(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)}$$

Il moto di discesa è uniformemente accelerato con velocità iniziale *nulla*:

$a_D = g(\sin\theta - \mu_D \cos\theta) \qquad V_D = a_D t_D$




per cui: $\qquad S_D = \frac{1}{2} a_D t_D^2 \Longrightarrow t_D = \sqrt{\frac{2S_D}{a_D}}$

La velocità con cui ripassa nel punto di partenza è

$$V_D = a_D t_D = a_D \sqrt{\frac{2S_D}{a_D}} = \sqrt{2(-S_S)a_D} = \sqrt{2\,\frac{V_0^2\, g(\sin\theta - \mu_D \cos\theta)}{2g(\sin\theta + \mu_D \cos\theta)}}$$

La velocità con cui ripassa nel punto di partenza è

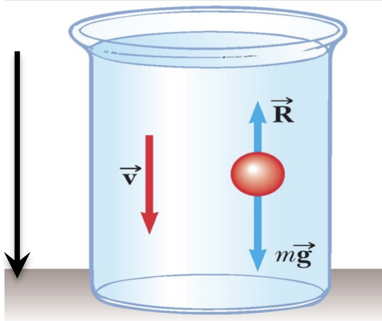
$$V_D = a_D t_D = a_D \sqrt{\frac{2S_D}{a_D}} = \sqrt{2(-S_S)a_D}$$

$$= \sqrt{2\frac{V_0^2 \mathrm{g}(\sin\theta - \mu_D\cos\theta)}{2g(\sin\theta + \mu_D\cos\theta)}} = V_0\sqrt{\frac{\sin\theta - \mu_D\cos\theta}{\sin\theta + \mu_D\cos\theta}}$$

# Moto in un fluido

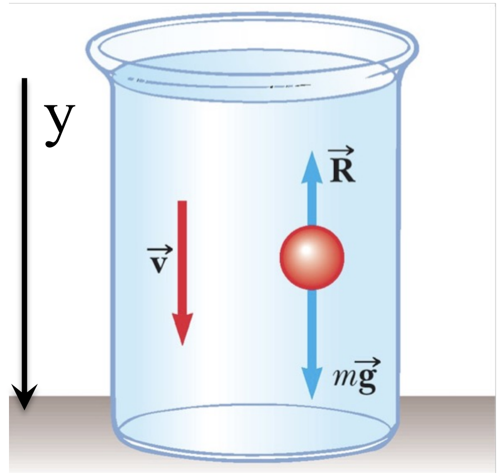
Un fluido (liquido o gas) esercita una forza di resistenza, $\vec{R}$ , su di un oggetto che si muove in esso.

- La direzione di $\vec{R}$ è opposta alla direzione $\vec{v}$ del moto dell'oggetto relativo al fluido.
- Il modulo di $\vec{R}$ dipende dal fluido e dalla forma dell'oggetto
- Il modulo di $\vec{R}$ dipende dalla velocità dell'oggetto in modo complicato:
  - in generale, aumenta per v crescente.
- Caso semplice: R proporzionale a v, ovvero : $\boxed{\vec{R} = b\vec{v}}$




- Basata su di un modello in cui la resistenza è proporzionale al numero di collisioni con gli atomi del fluido, che a sua volta è proporzionale a v.
  - È una buona approssimazione per moto lento o per oggetti molto piccoli.

# Moto in un fluido, esempio $\vec{R}$=b$\vec{v}$




Caduta di un grave in un fluido, con resistenza proporzionale alla velocità:

$$m\frac{dv}{dt} = -bv + mg \quad \Longrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v + g$$

Si tratta di un'equazione differenziale.
La velocità tende ad un valore finito $v_l$ (velocità limite), alla quale la forza di resistenza uguaglia la forza peso:

l'omogenea associata è: $\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}dt$

la cui soluzione è $\quad \mathrm{v}(t) = Ae^{-\frac{b}{m}t}$

La soluzione generale si ottiene imponendo la condizione di regime (velocità costante):

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Longrightarrow v_l = \frac{mg}{b} \Longrightarrow \text{soluzione globale:} \quad \mathrm{v}(t) = Ae^{-\frac{b}{m}t} + \frac{mg}{b}$$

# Moto in un fluido, esempio $\vec{R}=b\vec{v}$

$$v(t) = Ae^{-\frac{b}{m}t} + \frac{mg}{b}$$

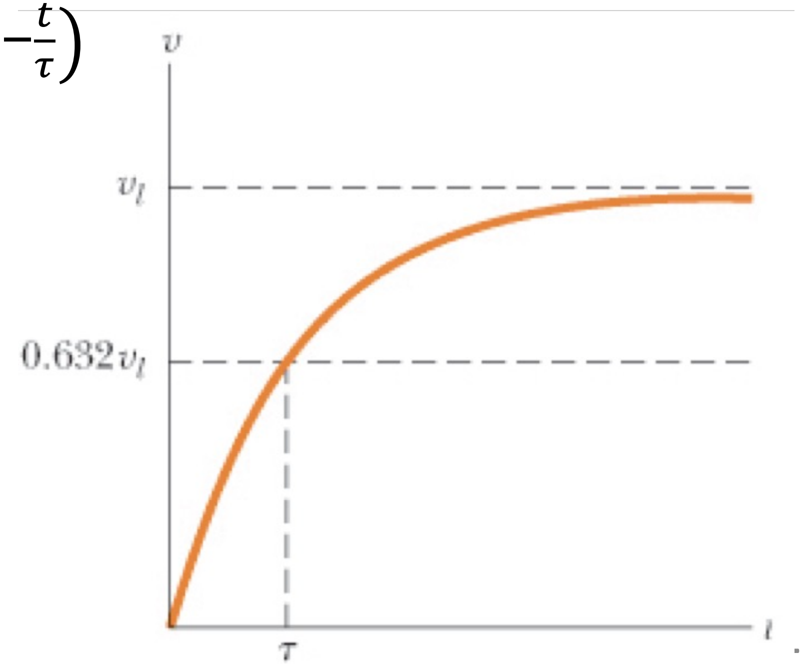
Se ad es. $v(t = 0) = 0$ $\quad 0 = A + \frac{mg}{b} \quad \Longrightarrow A = -\frac{mg}{b}$

e la soluzione dell'equazione differenziale $\dfrac{dv}{dt} = a = -\dfrac{b}{m}v + g$

ha la forma seguente: $\quad v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right)$

che si può riscrivere $\quad v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$$= v_l\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

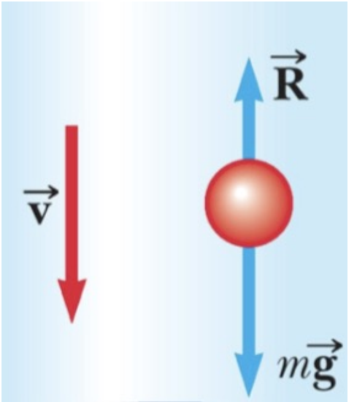



dove τ = m/b (costante di tempo) ci da l'ordine di grandezza del tempo necessario per arrivare alla velocità limite.

## Caduta di un grave in un fluido, $\vec{R}$=b$\vec{v}$

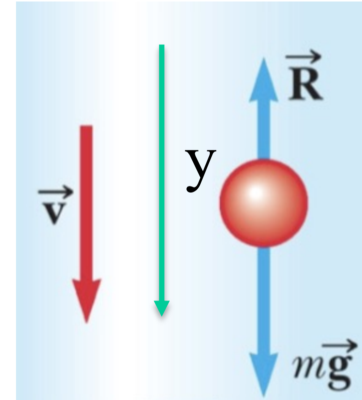
**Esercizio** Al tempo $t = 0$ un corpo sferico di massa $M = 100$ g e raggio $R = 10$ cm viene lasciato libero da fermo in aria. La forza fra corpo ed aria è di tipo viscoso con una costante $\beta = 0.1$ kg/s.

1) Esprimere la velocità del corpo in funzione del tempo
2) Calcolare il valore della velocità limite raggiunta. In questa domanda si trascuri la spinta di Archimede.



1) Esprimere la velocità del corpo in funzione del tempo
2) Calcolare il valore della velocità limite raggiunta.

**Soluzione.**




Con un asse *y* rivolto verso il basso l'equazione del moto è:

$$M\frac{dV}{dt} = -\beta V + Mg \implies \frac{dV}{dt} = -\frac{\beta}{M}V + g$$

l'equazione omogenea associata è $\frac{dV}{V} = -\beta/M \, dt$

la cui soluzione è: $V(t) = Ae^{-\frac{\beta}{M}t}$

Una soluzione particolare della non omogenea si ottiene imponendo la condizione di regime (velocità costante).
La velocità tende ad un valore finito $V_{lim}$ (velocità limite), alla quale la forza di resistenza uguaglia la forza peso:

$$\frac{dV}{dt} = 0 = -\beta V_{lim} + Mg \implies R1.2\ V_{lim} = \frac{Mg}{\beta} \implies$$

soluzione globale: $V(t) = Ae^{-\frac{\beta}{M}t} + \frac{Mg}{\beta}$

## Caduta di un grave in un fluido, con resistenza proporzionale alla velocità

soluzione globale: $$V(t) = Ae^{-\frac{\beta}{M}t} + \frac{Mg}{\beta}$$

Con la condizione iniziale, di partenza da fermo si ha:

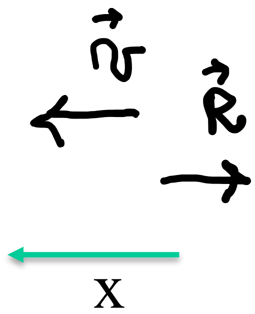
$$V(0) = A + \frac{Mg}{\beta} = 0 \Rightarrow A = -\frac{Mg}{\beta} \Rightarrow R1.1: V(t) = \frac{Mg}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{M}t}\right)$$

**Esempio** Un'automobile di massa $M = 1000\,\mathrm{kg}$ si muove con una velocità $V_0 = 20\,\mathrm{m/s}$ su una strada orizzontale. Al tempo $t = 0$ il motore dell'auto si spegne e su di essa si esercita solo la forza di attrito viscoso dell'aria $-\beta V_x$. Si calcoli il coefficiente $\beta$ se la velocità è $V_1 = 10\,\mathrm{m/s}$ al tempo $t_1 = 10s$.

$V_0 = 20$ m/s
$V_1 = 10$ m/s al tempo $t_1 = 10s$.

Si calcoli il coefficiente $\beta$

**Soluzione**.
Il moto dell'auto a motore spento è quello del problema precedente senza la gravità (e la spinta archimedea)




Per cui lungo l'asse x: $M\frac{dV}{dt} = -\beta V$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{\beta}{M}dt$$

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{\beta}{M}t}$$

da cui si ha: $V(t_1) = V_1 = V_0 e^{-\frac{\beta}{M}t_1} \Longrightarrow \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = -\ln\left(\frac{V_0}{V_1}\right) = -\frac{\beta}{M}t_1$

$$\Longrightarrow \beta = \frac{M}{t_1}\ln\left(\frac{V_0}{V_1}\right)$$

Inserendo i valori numerici si ricava: $\beta = 69.3$ kg/s

**Esercizio** Un'automobile di massa $M = 1000$ kg si muove con una velocità $V_0 = 20$ m/s su una strada in discesa con una pendenza del 5%. Al tempo $t = 0$ il motore dell'auto si spegne e su di essa si esercitano la forza di attrito viscoso dell'aria $F_x = -\beta V_x$, con $\beta = 70$ kg/s, e la componente della forza di gravità parallela alla strada.

i) Calcolare la velocità limite che viene raggiunta.

ii) Esprimere la velocità dell'automobile ad un tempo arbitrario $t$

iii) Cosa cambia se la velocità iniziale dell'automobile ha sempre modulo $V_0 = 20$ m/s, ma è diretta in salita?


**Soluzione**.

Equazione del moto lungo x nella discesa:

$$M\frac{dV}{dt} = -\beta V + Mg\sin\theta \;\Longrightarrow\; \frac{dV}{dt} = -\frac{\beta}{M}V + g\sin\theta$$

dall'equazione omogenea: $\frac{dV}{V} = -\frac{\beta}{M}dt$

$$V(t) = Ae^{-\frac{\beta}{M}t}$$

La soluzione dell'equazione particolare fornisce:

$$\frac{dV}{dt} = 0 = -\frac{\beta}{M}V_{lim} + g\sin\theta \Longrightarrow R.i \quad V_{lim} = \frac{Mg\sin\theta}{\beta}$$

dove $\tan\theta = 0.05 \cong \theta \cong \sin\theta$

La soluzione di questa equazione, tenendo conto sia dell'omogenea associata che della condizione di regime imposta per la non omogenea, è:

$$V(t) = Ae^{-\frac{\beta}{M}t} + \frac{Mg\sin\theta}{\beta}$$

$$V(t) = Ae^{-\frac{\beta}{M}t} + \frac{Mg\sin\theta}{\beta}$$

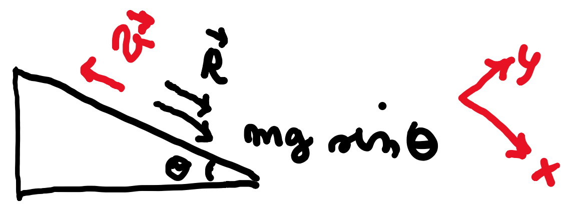
Con la condizione iniziale $V(0)=V_0$ nota

$$V(0) = A + \frac{Mg\sin\theta}{\beta} = V_0 \Longrightarrow A = V_0 - \frac{Mg\sin\theta}{\beta}$$

si ricava infine:

R.ii $V(t) = \frac{Mg\sin\theta}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{M}t}\right) + V_0 e^{-\frac{\beta}{M}t}$


Cosa cambia se la velocità iniziale dell'automobile ha sempre modulo $V_0 = 20\ \mathrm{m/s}$, ma è diretta in salita?




$v_{lim}$?

Quando il moto viene invertito

Equazione del moto lungo x:

$$M\frac{dV_x}{dt} = -\beta V_x + Mg\sin\theta \Longrightarrow \frac{dV_x}{dt} = -\frac{\beta}{M}V_x + g\sin\theta$$

$R.iii \quad V_{lim} = \frac{Mg\sin\theta}{\beta}$. La velocità limite non cambia!

La soluzione di questa equazione, tenendo conto sia dell'omogenea associata che della condizione di regime imposta per la non omogenea, è:

$$V_x(t) = Ae^{-\frac{\beta}{M}t} + \frac{Mg\sin\theta}{\beta}$$

Con la condizione iniziale

$$V_x(0) = -V_0 = A + \frac{Mg\sin\theta}{\beta} \Longrightarrow A = -V_0 - \frac{Mg\sin\theta}{\beta}$$


si ricava infine:

R.iv $V_x(t) = \dfrac{Mg\sin\theta}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{M}t}\right) - V_0 e^{-\frac{\beta}{M}t}$

**Esercizio 6)**

Una sferetta di massa $m = 1\ \mathrm{kg}$ è lasciata cadere da ferma nel vuoto da un'altezza $h = 2\ \mathrm{m}$ sulla superficie libera di una vasca piena d'acqua. All'interno della vasca la sferetta subisce una forza di attrito viscoso caratterizzabile con un coefficiente $\beta = 10\ \mathrm{kg/s}$ e la profondità dell'acqua è tale che la sferetta raggiunge la velocità limite prima di toccare il fondo.

1) Calcolare la velocità $V_0$ con cui la sferetta giunge a contatto con l'acqua.

2) Calcolare la velocità limite $V_L$ della sferetta nell'acqua.

3) Scrivere l'equazione del moto della sferetta nell'acqua e determinare l'andamento nel tempo della sua velocità. Rappresentarlo graficamente a partire dall'istante in cui la sferetta viene lasciata cadere.

sferetta $m = 1$ kg, $h = 2$ m, $\beta = 10$ kg/s

$V_0$ quando la sferetta giunge a contatto con l'acqua?
$V_L$ della sferetta nell'acqua?

**Soluzione.**

1) Il moto iniziale della sferetta avviene nel vuoto partendo da ferma, per cui è un moto di caduta libera sotto l'azione della forza di gravità .

Applicando le formule del moto uniformemente accelerato o la conservazione dell'energia

$g \downarrow$

$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$v = gt = \sqrt{2gh}$

si ottiene la relazione: $V_0 = \sqrt{2gh} = 6.26\ \text{m/s}$

2) La velocità limite corrisponde alla condizione in cui la forza di gravità è bilanciata dalla forza di attrito viscoso. Pertanto:

$$ma = 0 = mg - \beta V_L \Rightarrow V_L = \frac{mg}{\beta} = 0.98\ \text{m/s}$$

Si noti che la velocità limite è minore di $V_0$, cioè della velocità iniziale della sferetta quando inizia il suo moto in acqua.

Equazione del moto della sferetta nell'acqua e andamento nel tempo della sua velocità?
Grafico di V(t) a partire dall'istante in cui la sferetta viene lasciata cadere.

3) L'equazione del moto della sferetta è quella usuale del moto in presenza di attrito viscoso, per cui la soluzione è per $t > t_0$ :

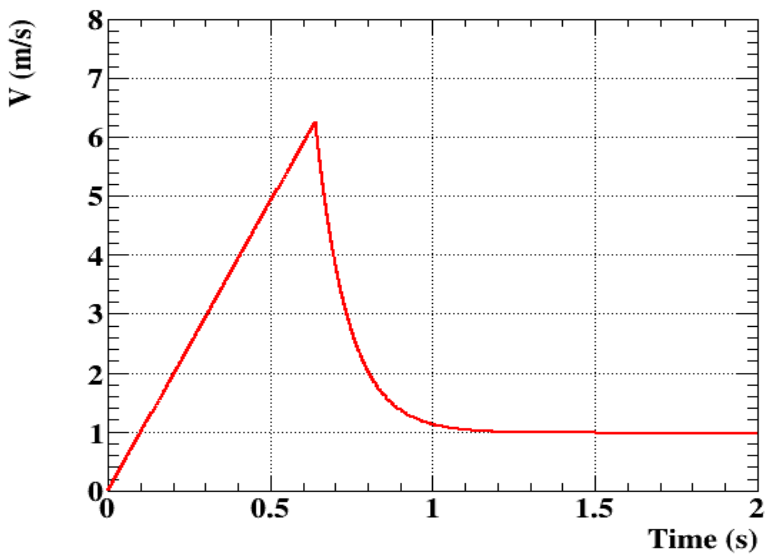
$$V(t) = \frac{mg}{\beta} + A\exp\left(-\frac{\beta(t-t_0)}{m}\right) \qquad t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

dove $A$ è una costante e $t_0$, calcolato nella domanda 1), è l'istante in cui la sferetta entra in contatto con la superficie dell'acqua. Il valore di $A$ si ricava imponendo la condizione iniziale ($V(t_0) = V_0 = \sqrt{2gh}$):

$$V(t_0) = \frac{mg}{\beta} + A = V_0 \quad \Longrightarrow A = V_0 - \frac{mg}{\beta}$$

da cui infine:

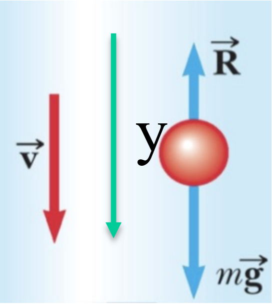
$$V(t) = \begin{cases} gt & t < t_0 \\ \dfrac{mg}{\beta} + \left(V_0 - \dfrac{mg}{\beta}\right)\exp\left(-\dfrac{\beta(t-t_0)}{m}\right) & t > t_0 \end{cases}$$




$$t_0 = \sqrt{2h/g}. \quad V_0 = \sqrt{2gh}$$

# Moto in un fluido (2)

Per oggetti non piccoli che si muovono a velocità elevate (per esempio: oggetto che cade in aria) la forza resistente $R$ è circa proporzionale a $v^2$ invece che a $v$. Si può scrivere




$$R = \frac{1}{2} C \rho A v^2,$$

dove $C$ è un *coefficiente di resistenza aerodinamica*, $\rho$ la densità del fluido, $A$ l'area efficace (della sezione trasversale alla direzione di moto).

$$ma = mg - \frac{1}{2} C \rho A v^2$$

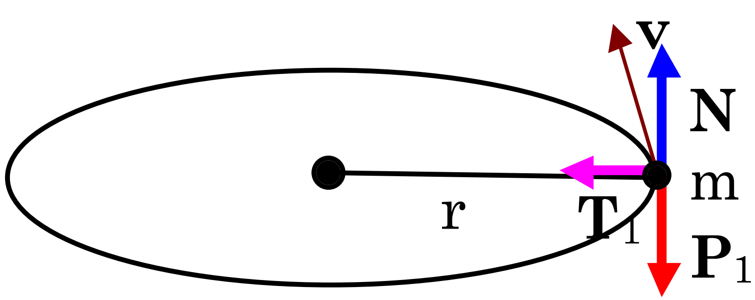
La velocità limite per un corpo che cade liberamente in aria è data dalla relazione

$$mg - \frac{1}{2} C \rho A v_l^2 = 0 \quad \rightarrow \quad v_l = \sqrt{\frac{2mg}{CA\rho}}.$$

L'equazione del moto si può risolvere per *separazione delle variabili*.

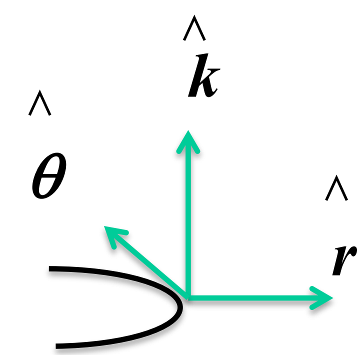
# Dinamica del moto circolare: piano orizzontale

- Un punto materiale di massa *m* si trova su un piano orizzontale liscio ed esegue una traiettoria circolare di raggio *r* con velocita *v* costante ed è collegato con un filo (lungo r) al centro del cerchio




$$\vec{T}_1 + \vec{N} + \vec{P}_1 = m\vec{a}$$

Proiettiamo secondo un sistema conveniente: coordinate cilindriche $(r, \theta, z)$



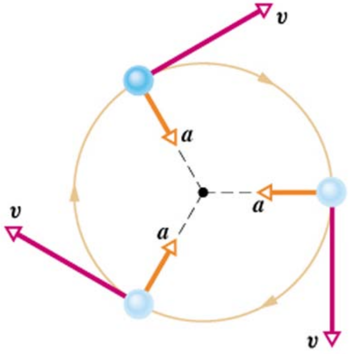

Lungo l'asse r : $-T_1 = m\, a_r = -\, m\, v^2/r$

Lungo l'asse z : $N - P_1 = N - mg = m a_z = 0$

# *Moto Circolare Uniforme*

corpo con:

- velocità **v costante** in modulo
- lungo **traiettoria circolare**

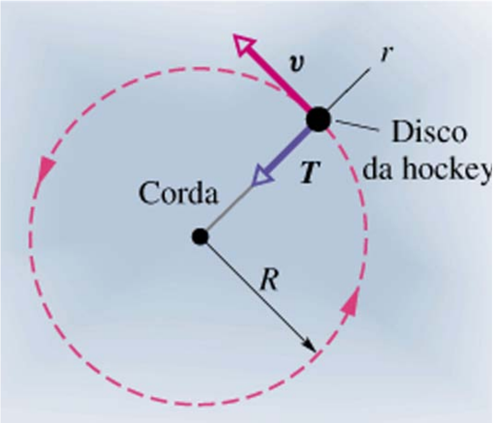



subisce accelerazione **centripeta:**

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

- diretta verso il **centro** circonferenza
- sempre **perpendicolare** a **v**

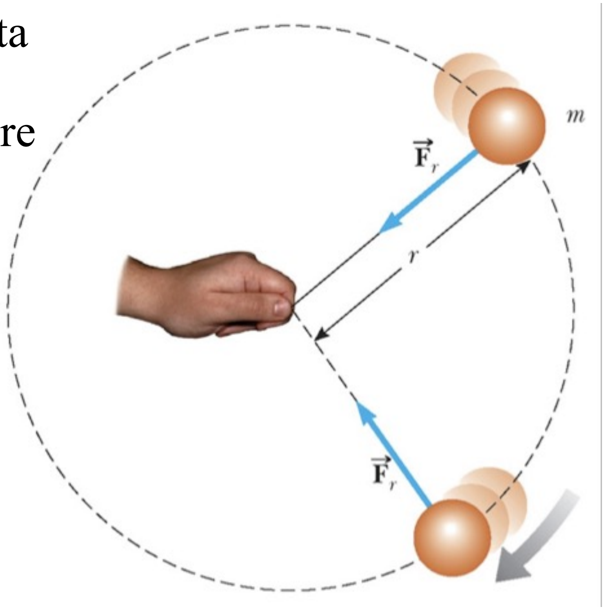
**esempio**: disco su traiettoria **circolare**




**inerzia** del disco: moto su linea retta

**tensione** del filo: mantiene traiettoria circolare

$$T = F_r = ma_r = m\frac{v^2}{r}$$



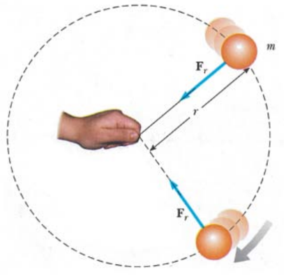

se **rompo** il filo il disco si muove lungo **linea retta** tangente alla circonferenza

[**v** è infatti **costante**]

- la **forza centripeta** **NON** è un **nuovo tipo** di forza
- è una **qualunque forza**
  che causa una **accelerazione centripeta**

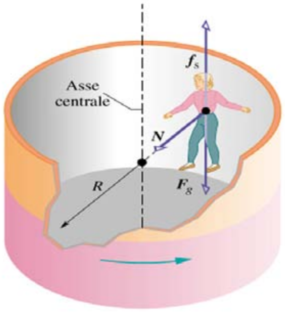
**esempi**:

**palla** trattenuta da un filo



$$\vec{F}_r = \vec{T}$$

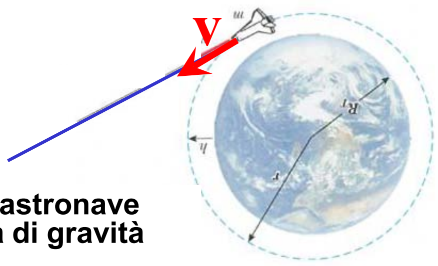
**rotore** del parco dei divertimenti




$$\vec{F}_r = \vec{N}$$

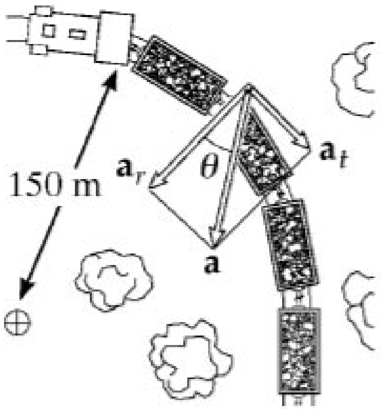
**satellite** attorno alla terra

$$\vec{F}_r = m\vec{g} = m\frac{GM_T}{(R_T+h)^2}\hat{r}$$



Un treno affrontando una curva rallenta da **90.0 km/h** a **50.0 km/h** nei **15.0** secondi che impiega ad affrontare la curva.
Il raggio della curva è **r = 150 m**.
Calcolare l'accelerazione nel momento in cui la velocità del treno è **50.0 km/h**, assumendo che in questo momento il treno continui a decelerare

Converto le unità di misura:




$$v_f = 50.0\frac{km}{h} = 50.0\frac{10^3 m}{60\times 60 s} = 13.9 m/s$$

$$v_i = 90.0\frac{km}{h} = 90.0\frac{10^3 m}{60\times 60 s} = 25.0 m/s$$

$$a_c = \frac{v_f^2}{r} = \frac{(13.9 m/s)^2}{150 m} = 1.29 m/s^2$$

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(v_f - v_i)}{\Delta t} = \frac{(13.9 - 25.0) m/s}{15.0 s} = \frac{-11.1 m/s}{15.0 s} = -0.74 m/s^2$$

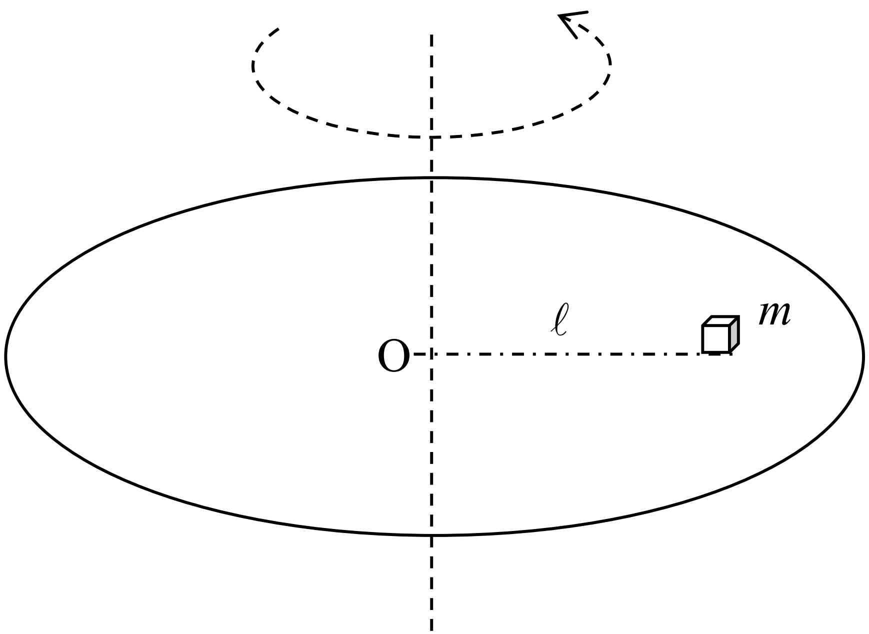
$$a = \sqrt{a_c^{\,2} + a_t^{\,2}} = \sqrt{\left(1.29\ \mathrm{m/s^2}\right)^2 + \left(-0.741\ \mathrm{m/s^2}\right)^2} = 1.48 m/s^2$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{a_t}{a_r}\right) = tg^{-1}\left(\frac{0.74}{1.29}\right) = 29.9^0$$

$$\vec{a} = (a_r, a_\theta, a_r) = (-1.29, -0.74, 0)\frac{m}{s^2}$$

Un corpo di massa $m$ è appoggiato su un disco orizzontale ad una distanza $\ell$ dal centro. C'è attrito tra il corpo e il disco e sia $\mu_s$ il coefficiente di attrito statico. Si mette in rotazione il disco con velocità angolare $\omega = kt$ con $k$ costante intorno al suo centro O.

Dopo quanto tempo il corpo comincia a strisciare sul disco?



*Il corpo di massa m, finché rimane in quiete rispetto al disco, si muove di moto circolare: le componenti tangenziale e normale dell'accelerazione sono date dalle relazioni:*

$$a_T = \frac{d\,v_s}{dt} = \frac{d(kt\ell)}{dt} = k\,\ell \quad , \quad a_N = \omega^2 \ell = (kt)^2 \ell$$

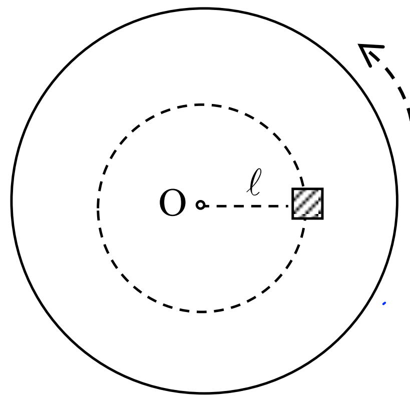
$\omega = kt$

$v = kt\ell$

$a_N = \omega^2 \ell$

*Dall'equazione di moto del corpo:*

$\vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{R}^N = m\vec{a}$ *seguono le relazioni:*




$\otimes \vec{g}$

Dopo quanto tempo inizia a strisciare?

$$\begin{cases} R^N - mg = 0 \\ F_{AT} \equiv \vec{F}_A \bullet \vec{T} = ma_T = mk\ell \\ F_{AN} \equiv \vec{F}_A \bullet \vec{N} = ma_N = m(kt)^2 \ell \end{cases}$$

*Affinché il corpo rimanga in quiete rispetto al disco deve essere soddisfatta la disequazione*

$\left|\vec{F}_A\right| \le \mu_s R^N$ *e cioè*

$$\sqrt{(mk\ell)^2 + \left(m(kt)^2 \ell\right)^2} \le \mu_s R_N = \mu_s mg$$

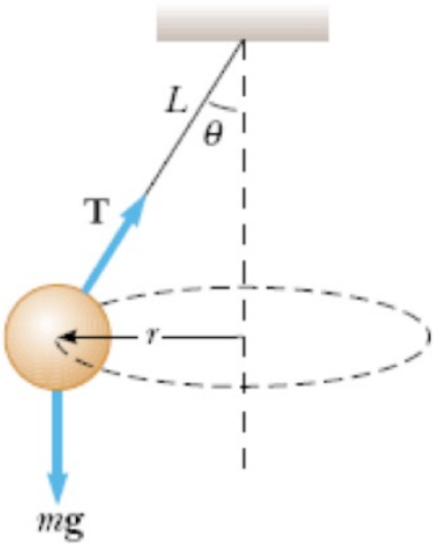
Dati
$k, \ell, g$
$\mu_s, m$

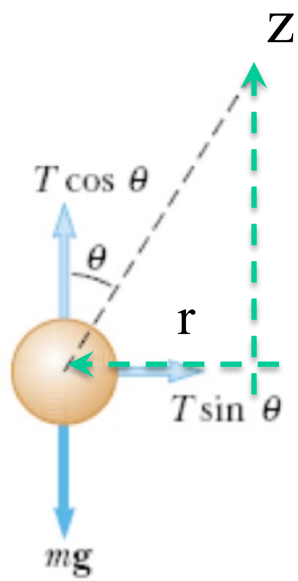
*Il corpo quindi non striscia sul disco finché si ha:*

$$k\ell\sqrt{1 + k^2 t^4} \le \mu_s g$$

# Pendolo conico

- Uno dei vostri passatempi preferiti….
- La giostra si muove con velocità angolare costante




$$\begin{cases} ma_z = 0 = T\cos\theta - mg \Rightarrow T = \dfrac{mg}{\cos\theta} \\ ma_r = -\mathrm{m}\omega^2\mathrm{r} = -T\sin\theta \end{cases}$$

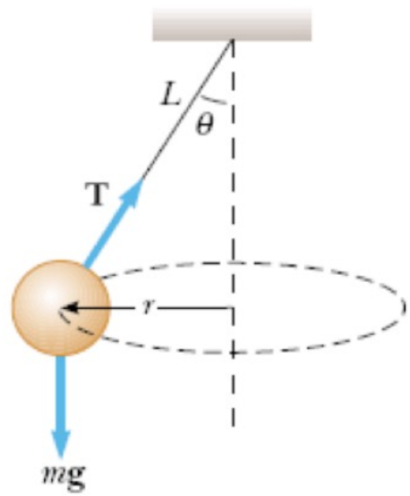
$$r = L\sin\theta$$

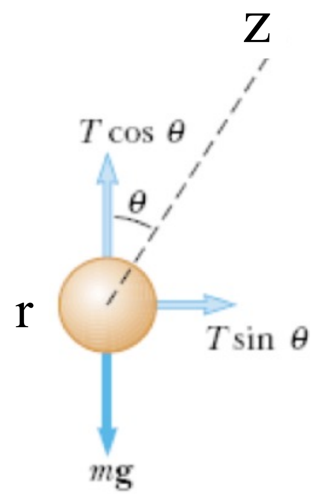
$$\mathrm{m}\omega^2 L\sin\theta = T\sin\theta \qquad \Rightarrow T = \mathrm{m}\omega^2 L$$

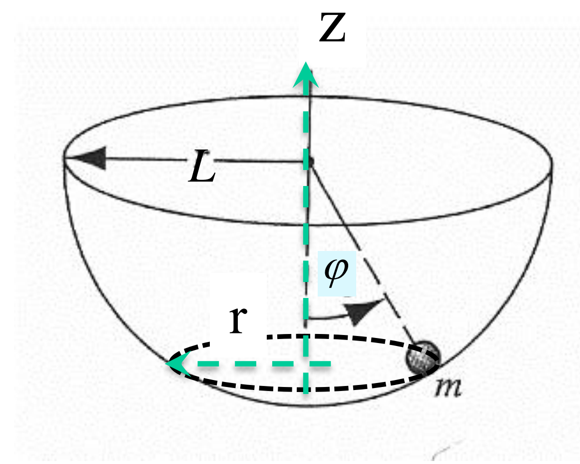
$$\Rightarrow \mathrm{m}\omega^2 L = \frac{mg}{\cos\theta} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos\theta}}$$

# Conca sferica

- Un punto materiale di massa *m* esegue una traiettoria circolare di raggio R all'interno di una conca sferica di raggio L



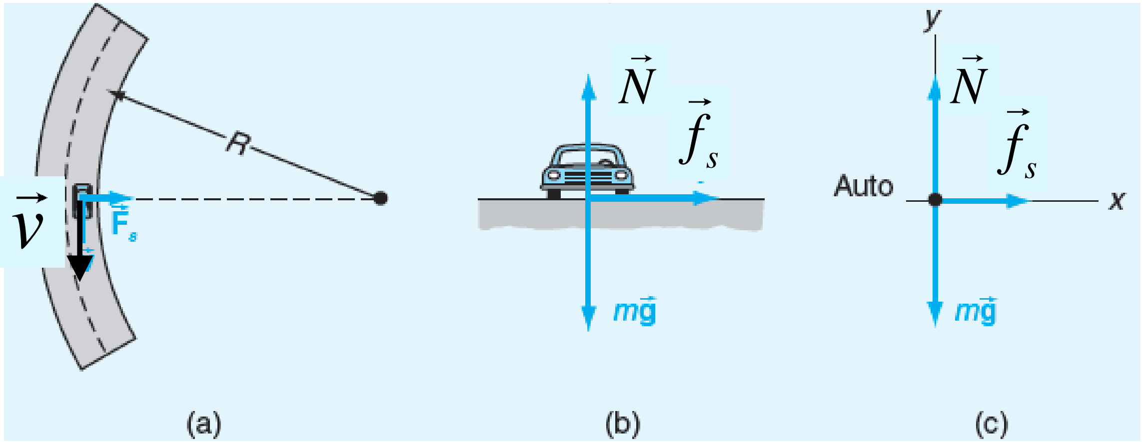




$$\begin{cases} ma_z = 0 = N\cos\varphi - mg \Rightarrow N = \dfrac{mg}{\cos\varphi} \\ ma_R = -m\dfrac{v^2}{R} = -N\sin\varphi \Rightarrow m\dfrac{v^2}{R} = m\omega^2 R = m\omega^2 L\sin\varphi = N\sin\varphi \end{cases}$$

$$N = m\omega^2 L = \frac{mg}{\cos\varphi} \qquad\qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos\varphi}}$$

# Attrito e traiettorie circolari: auto su curva orizzontale (piatta)

Auto o slitta in una curva piana (approssimabile con n arco di cerchio) percorsa a velocità con modulo costante. L'accelerazione è diretta verso il centro. L'auto è mantenuta nella sua traiettoria dalla forza di attrito statico (in direzione ⊥ al moto) dovuto ai pneumatici o ai pattini (nel caso della slitta). La forza di attrito statico è diretta verso il centro (infatti in sua assenza si «sbanda», si va verso l'esterno)




$$-f_S = ma_R = -m\frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow f_S = m\frac{v^2}{R}$$

$$f_S \le f_{S\,\max} = \mu_S N$$

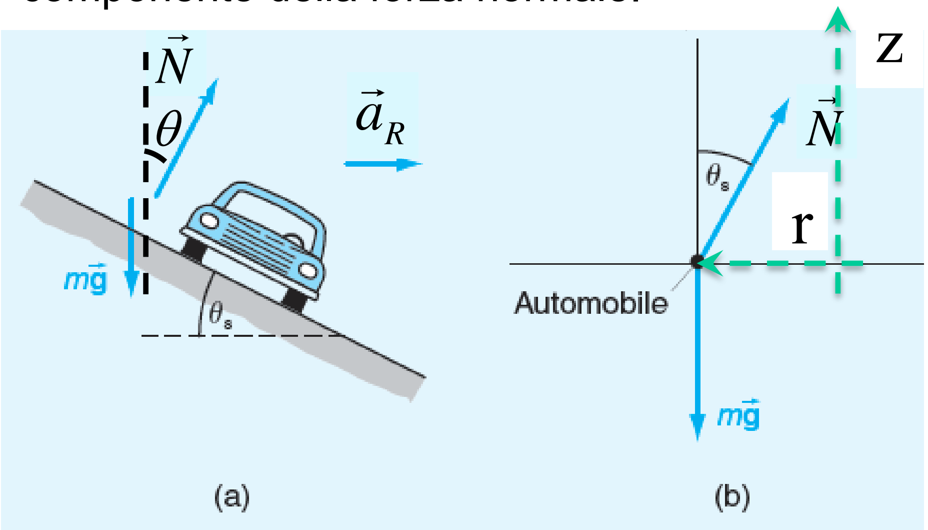
Se l'auto (slitta) percorre la curva senza sbandare deve essere soddisfatta la condizione

$$m\frac{v^2}{R} \le \mu_S mg \quad \Rightarrow \quad v \le v_{\max} = \sqrt{\mu_S gR}$$

Se il raggio di curvatura è piccolo la $v_{max}$ deve essere ridotta

# Curva soprelevata senza attrito

Auto o slitta (bob) in una curva sopraelevata senza attrito. Entra nella curva con una velocità v e percorre la curva a velocità con modulo costante.
L'accelerazione è diretta verso il centro. L'auto è mantenuta nella sua traiettoria dalla componente della forza normale.

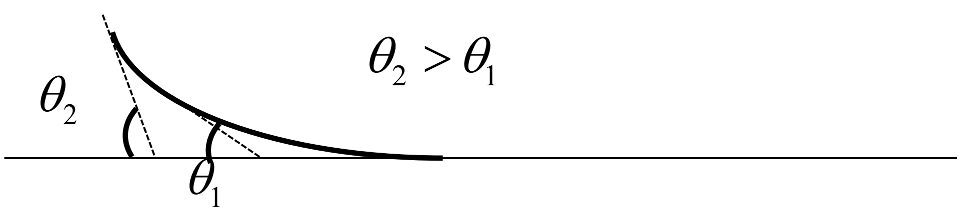



$$\begin{cases} ma_z = 0 = N\cos\theta - mg \\ ma_R = -m\dfrac{v^2}{R} = -N\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{N\sin\theta}{N\cos\theta} = \frac{mv^2}{Rmg} = \frac{v^2}{Rg}$$

$$tg\theta = \frac{v^2}{Rg}; \quad \theta = atg\left(\frac{v^2}{Rg}\right)$$

L'angolo giusto per non sbandare dipende dalla velocità, per questo motivo nelle piste da Bob o slittino la pendenza varia a seconda della velocità. Posizionandosi più in alto o più in basso si trova la condizione giusta per percorrenza.

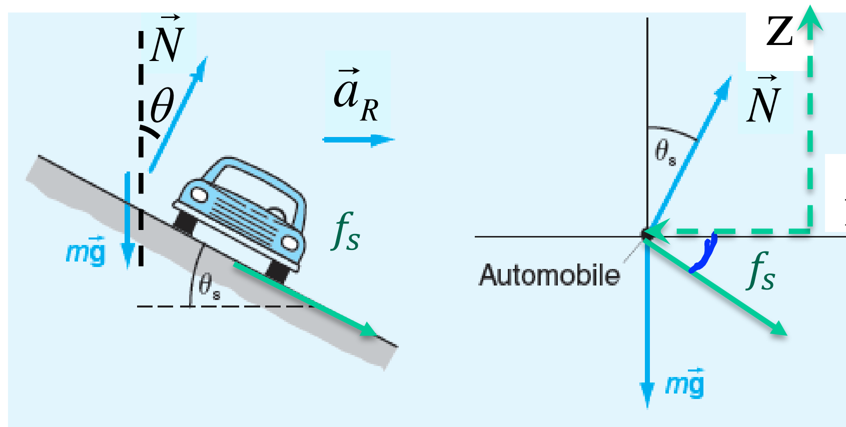



# Curva soprelevata con attrito

Auto o slitta (bob) in una curva sopraelevata con attrito. Oltre alla cmponente della forza normale c'è anche l'attrito statico.

$$\begin{cases} \sum_i F_{zi} = ma_z = 0 = N\cos\theta - mg - f_S\sin\theta & 1 \\ \sum_i F_{Ri} = ma_R = -m\dfrac{v^2}{R} = -f_S\cos\theta - N\sin\theta & 2 \end{cases}$$

$$f_S \le f_{S\max} = \mu_S N$$

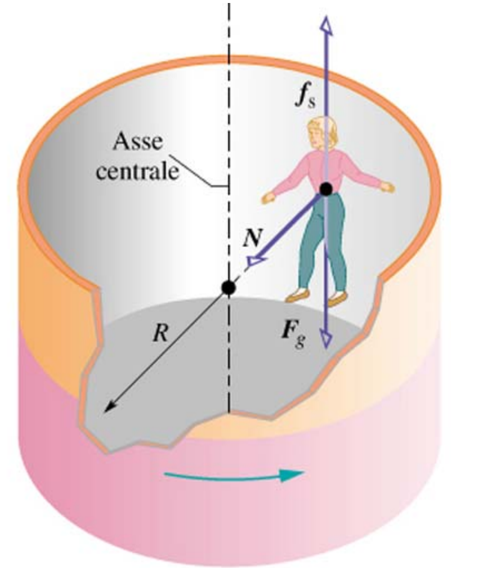



In condizioni limite $f_S=\mu_S N$: si possono trovare le condizioni che permettono di percorrere la curva alla velocità massima.

$$\begin{cases} mg = N\left(\cos\theta - \mu_S\sin\theta\right) \\ m\dfrac{v_{\max}^2}{R} = N\left(\sin\theta + \mu_S\cos\theta\right) \end{cases}$$

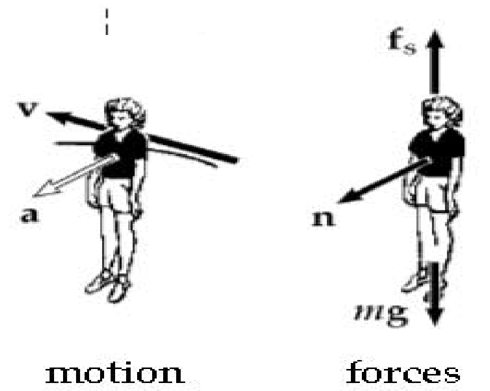
$$m\frac{v_{\max}^2}{R} = mg\frac{\sin\theta + \mu_S\cos\theta}{\cos\theta - \mu_S\sin\theta}$$

Nel rotore del Luna Park una persona viene fatta ruotare molto velocemente dentro un cilindro. La persona rimane bloccata contro la parete quando il pavimento del cilindro viene aperto.
Il coefficiente di attrito statico tra la persona e la parete è $\mu_s$ ed il raggio del cilindro è **R**.




a) determinare il massimo periodo di rotazione necessario perché la persona non cada.

b) dare un valore numerico per **T** se **R=4.00m** e $\mu_s$ **=0.400**. Quanti giri al minuto deve compiere il cilindro?




(a) $n = \dfrac{mv^2}{R}$ $\quad f - mg = 0$ $\quad \Rightarrow f_{max} - mg = 0$ $\quad$ max

$\Rightarrow n\mu_s - mg = 0 \Rightarrow n = \dfrac{mg}{\mu_s}$

$$v = \sqrt{\frac{nR}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s} R}$$

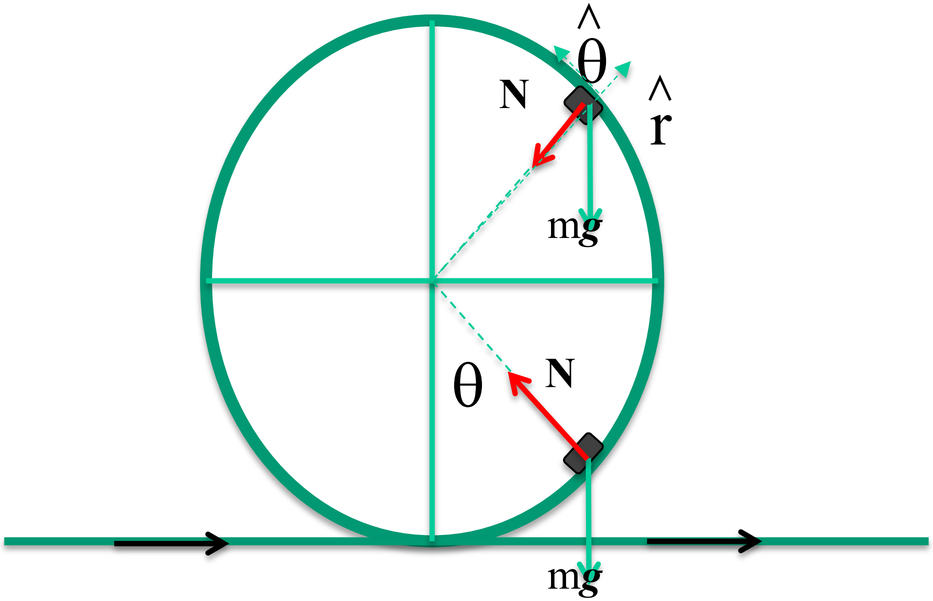
$$T = \frac{2\pi R}{v} \Rightarrow \sqrt{\frac{4\pi^2}{g} R \mu_s}$$

(b) $T = \boxed{2.54\ \text{s}}$

$$\nu = \frac{1\ \text{rev}}{2.54\ \text{s}}\left(\frac{60\ \text{s}}{\text{min}}\right) = \boxed{23.6\ \text{rev/min}}$$

# Giro della morte

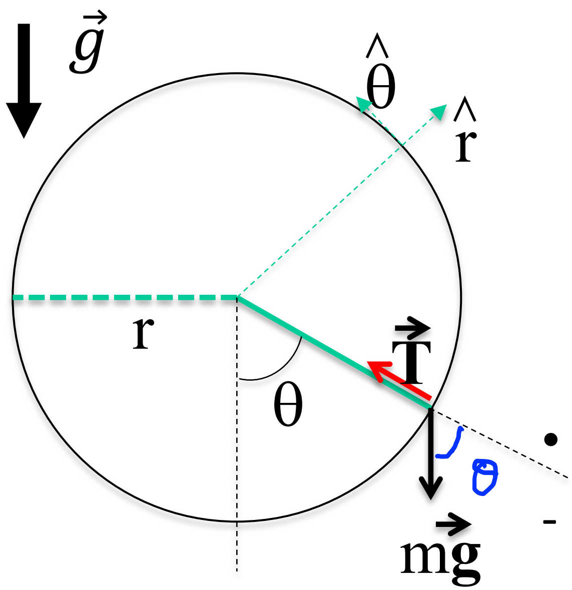
- Uno dei vostri passatempi preferiti….



# Dinamica del moto circolare: piano verticale

- Questo moto è più complicato: un punto materiale di massa *m* legato ad un filo lungo *r* esegue una traiettoria circolare (verso anti orario sul piano verticale), ci troviamo nei pressi della superficie terrestre

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$




Proiettiamo secondo un sistema conveniente (***r***, ***θ***) polari il moto avviene nel piano verticale

Lungo l'asse r : $-T + mg\cos\theta = m\,a_r = -\,m\,v^2/r$

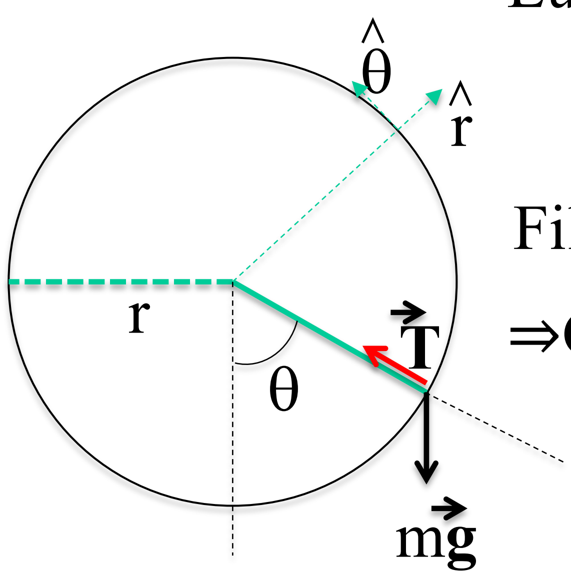
Lungo l'asse θ : $-mg\,\mathrm{sen}\,\theta = m\,a_\theta = m\,dv/dt$

- è un moto circolare vario

- ci aspettiamo una accelerazione tangenziale e che la velocità nell'arco di risalita ( θ che va da 0 a π ) diminuisce.

Quando è possibile un moto circolare completo (filo esteso in tutti gli istanti) ?

# Dinamica del moto circolare: piano verticale




$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Lungo l'asse r : $-T + mg\cos\theta = m\,a_r = -\,m\,v^2/r$

$$T = mg\cos\theta + m\,v^2/r$$

Filo sempre esteso implica $T = mg\cos\theta + m\,v^2/r \geq 0$

$\Rightarrow$Condizione sulla velocita scalare nella traiettoria

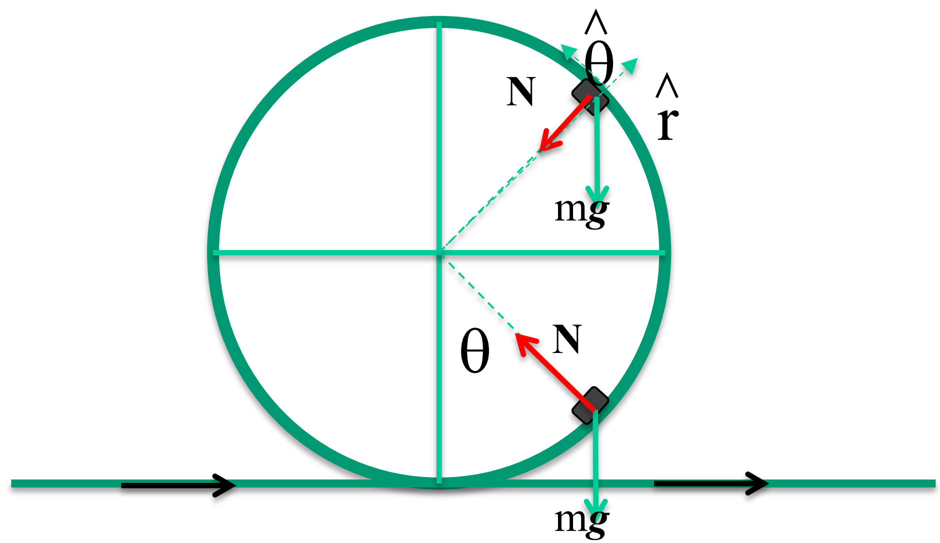
$$mg\cos\theta + m\,v^2/r \geq 0 \quad \Rightarrow v^2/r \geq -\,g\cos\theta$$

Il punto materiale per arrivare sulla verticale, $\theta = \pi$, deve avere

$$v_{min} = \sqrt[2]{gr}$$

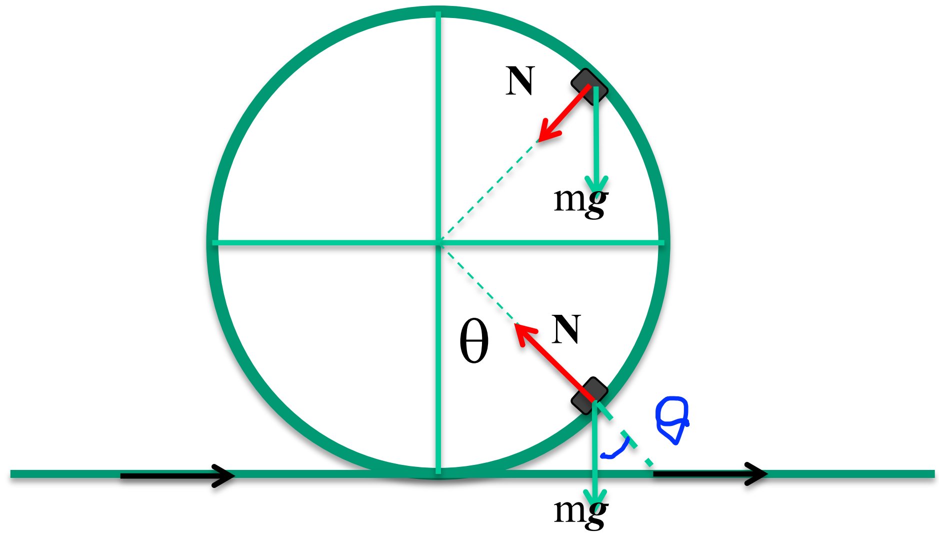
# Giro della morte

- Uno dei vostri passatempi preferiti….



# Giro della morte

- Uno dei vostri passatempi preferiti….




$$ma_R = -N + mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{R}$$

Sulla sommità avremo: $-N - mg = -m\dfrac{v^2_{sommità}}{R} \Rightarrow N = m\dfrac{v^2_{sommità}}{R} - mg$

Se voglio che il corpo sia in contatto N≥0 ⇒ $m\dfrac{v^2_{sommità}}{R} - mg > 0 \Rightarrow v_{\min} = \sqrt{gR}$

# Ordini di grandezza

## velocità

luce nel vuoto ………………. 300 000 km/s = 3 $10^8$ m/s

suono (in aria) ………………….......... ………. 330 m/s
(in acqua) ……………………………1493 m/s

aereo (record NASA) ………..........7 $v_{suono}$ ≈ 2310 m/s

aereo di linea ……………………...... 800 km/h = 222 m/s

auto in città ……………………… 30 km/h = 8.3 m/s

a piedi …………………………………………... 2 m/s

paracadutista ………………………50 km/h = 65 m/s
(caduta libera)

cavallo al galoppo ………………..250 m/min = 4.2 m/s

palla da baseball………………………………… 40 m/s

## accelerazione

gravità $g_{Terra}$…………………………………......9.8 m/$s^2$

gravità $g_{Luna}$……………………………………....1.7 m/$s^2$

$a_c$ centripeta Terra (attorno asse) ………...3.37 $10^{-2}$ m/$s^2$
$a_c$ centripeta Terra (attorno Sole) ………...4.4 $10^{-3}$ m/$s^2$

treno……………………………………………... 1.2 m/$s^2$

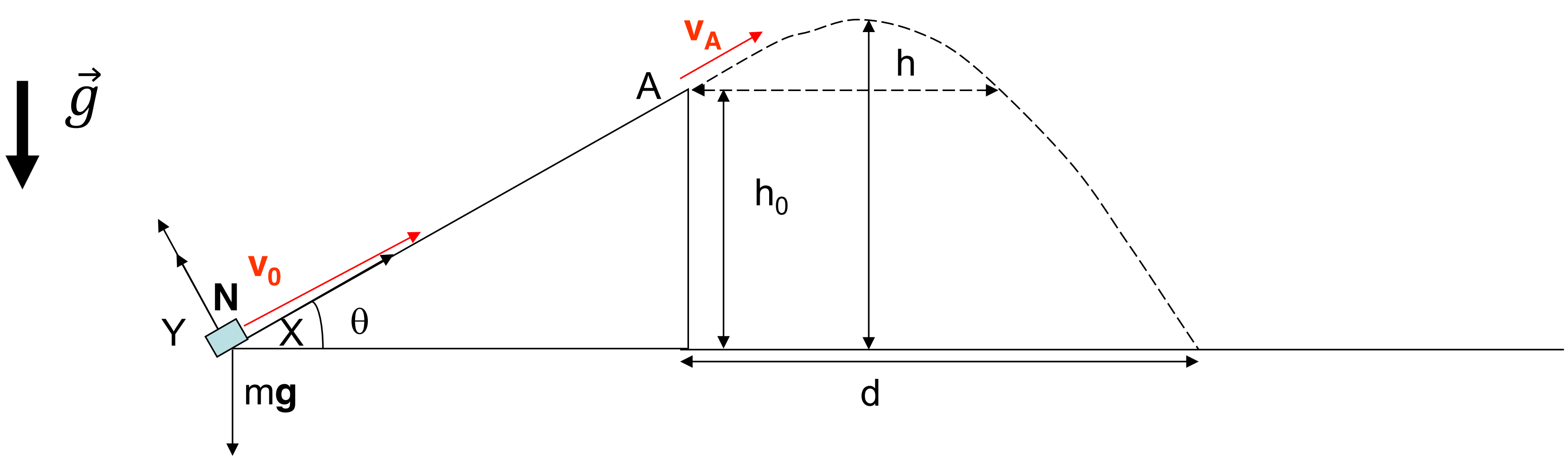
auto…………………………………………………. 4 m/$s^2$
(da 0 a 100 km/h in 7 sec)

palla da baseball 100 g…………………………≈$10^4$ m/$s^2$

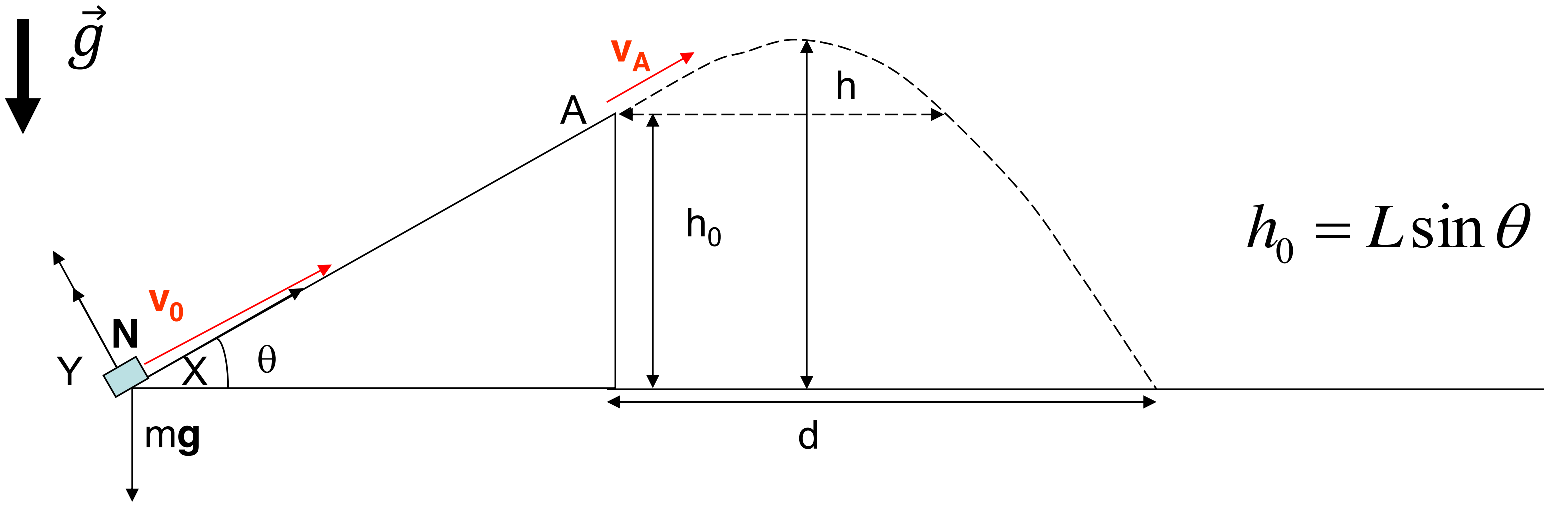
# Trampolino

- Uno sciatore risale un trampolino prima di eseguire il salto.

- Il moto si risolve immaginandolo come composto di due fasi:
  1. moto sul piano inclinato, in cui agiscono peso e vincolo
     - Sino al punto A
  2. moto parabolico, in presenza della sola forza peso
     - Dal punto A in poi



# Trampolino: piano inclinato(1)




$$h_0 = L \sin\theta$$

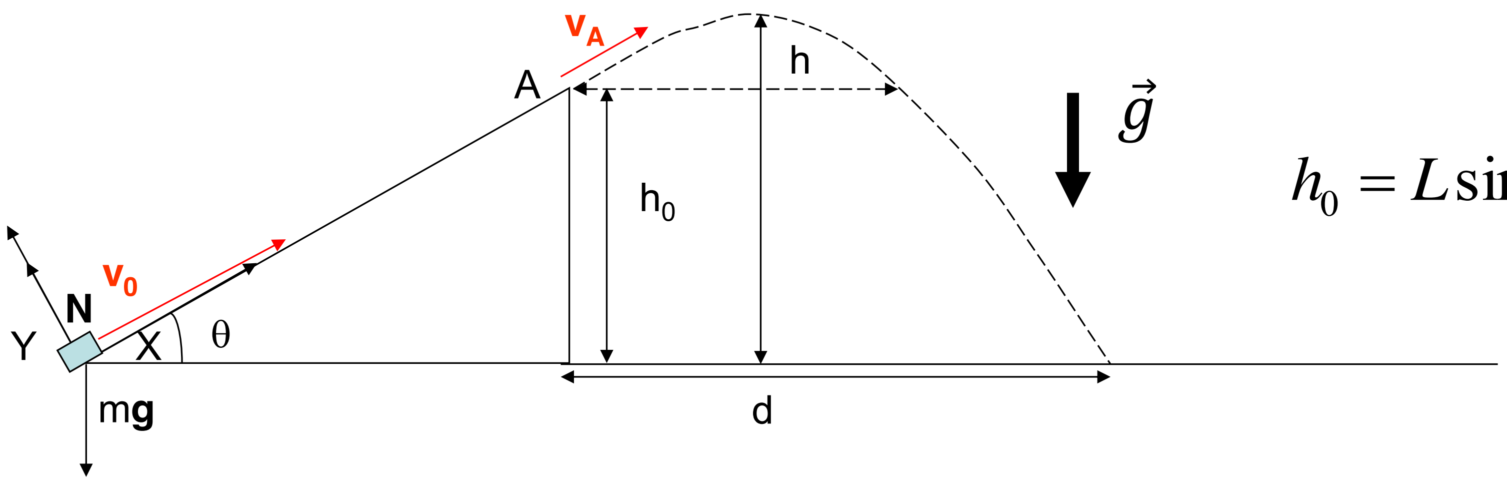
$$1) \quad \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = -mg\sin\theta = ma_x \Rightarrow a_x = -g\sin\theta$$

$$2) \quad 0 = ma_y = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = N - mg\cos\theta$$

$$\boxed{v_A^2 - v_0^2 = +2\left(-g\sin(\theta)\right)L} \quad \Rightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 - 2g\sin(\theta)L} = \sqrt{v_0^2 - 2gh_0}$$

da $2a_y\,(y(t)-y_0) = v_y(t)^2 - v_{0y}^2$

# Trampolino: piano inclinato(2)




$$h_0 = L\sin\theta$$

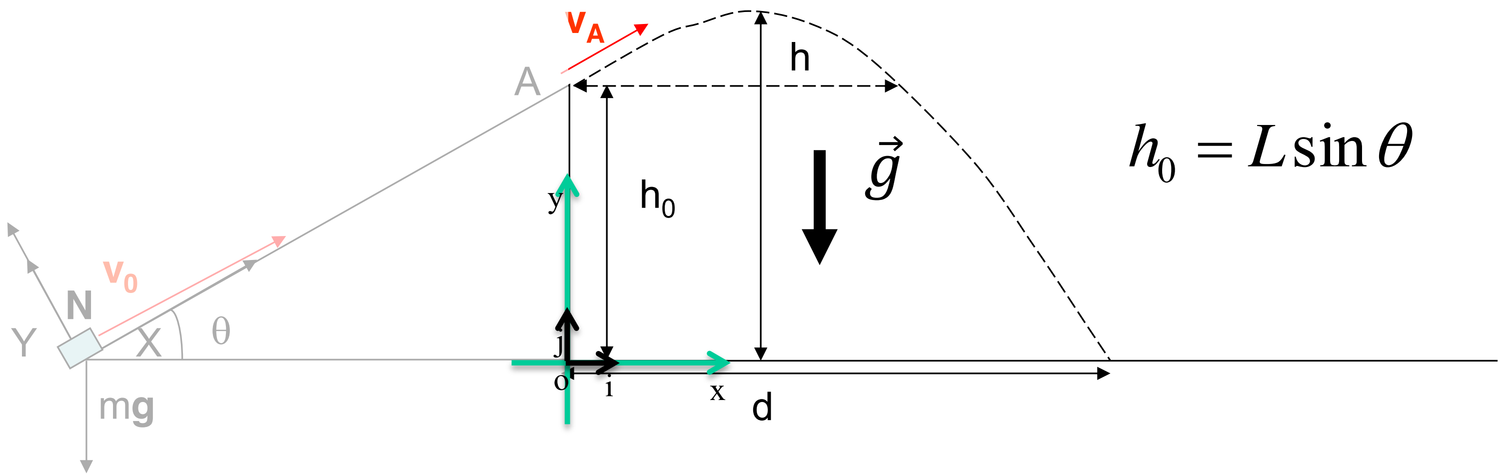
$$\left(\sum_i \vec{F}_i\right)_x = -mg\sin\theta = ma_x \Rightarrow a_x = -g\sin\theta$$

$$0 = ma_y = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_y = N - mg\cos\theta;$$

$$v_A^2 - v_0^2 = +2(-g\sin(\theta))L \Rightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 - 2g\sin(\theta)L} = \sqrt{v_0^2 - 2gh_0}$$

- Ci aspettiamo che la velocita iniziale diminuisca, si passa da $\mathbf{v}_0$ a $\mathbf{v}_a$ visto che l'accelerazione in questo caso è diretta in verso opposto alla velocità iniziale

# Trampolino: moto parabolico

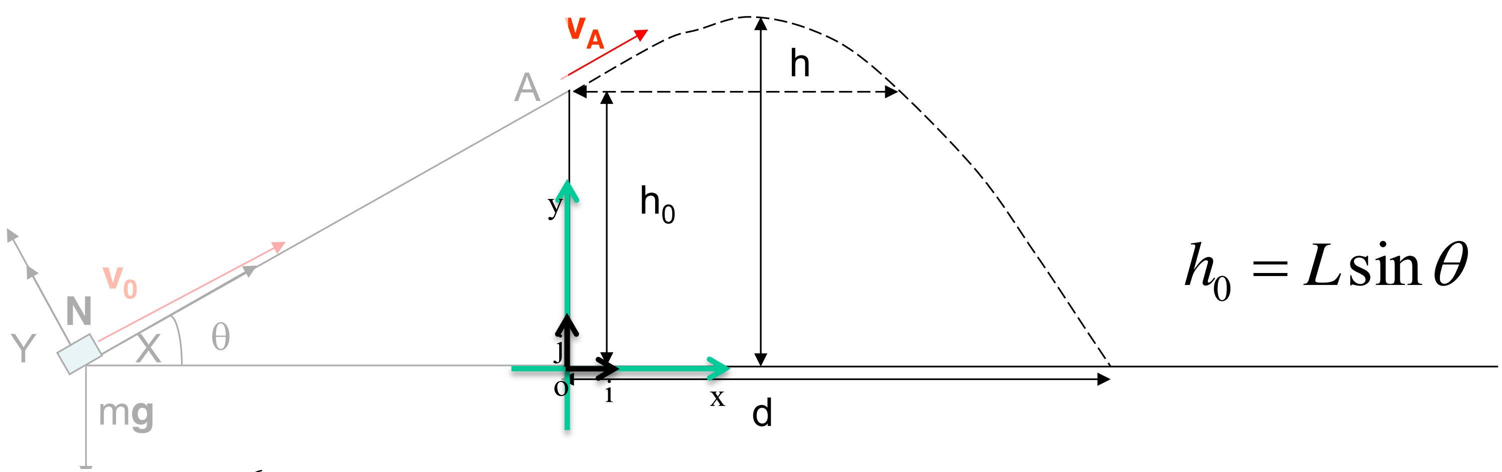



$$h_0 = L \sin\theta$$

$$\begin{cases} v_y = (v_A \sin\theta) - gt \\ v_x = (v_A \cos\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = h_0 + (v_A \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x = (v_A \cos\theta)t \end{cases}$$

# Trampolino: moto parabolico



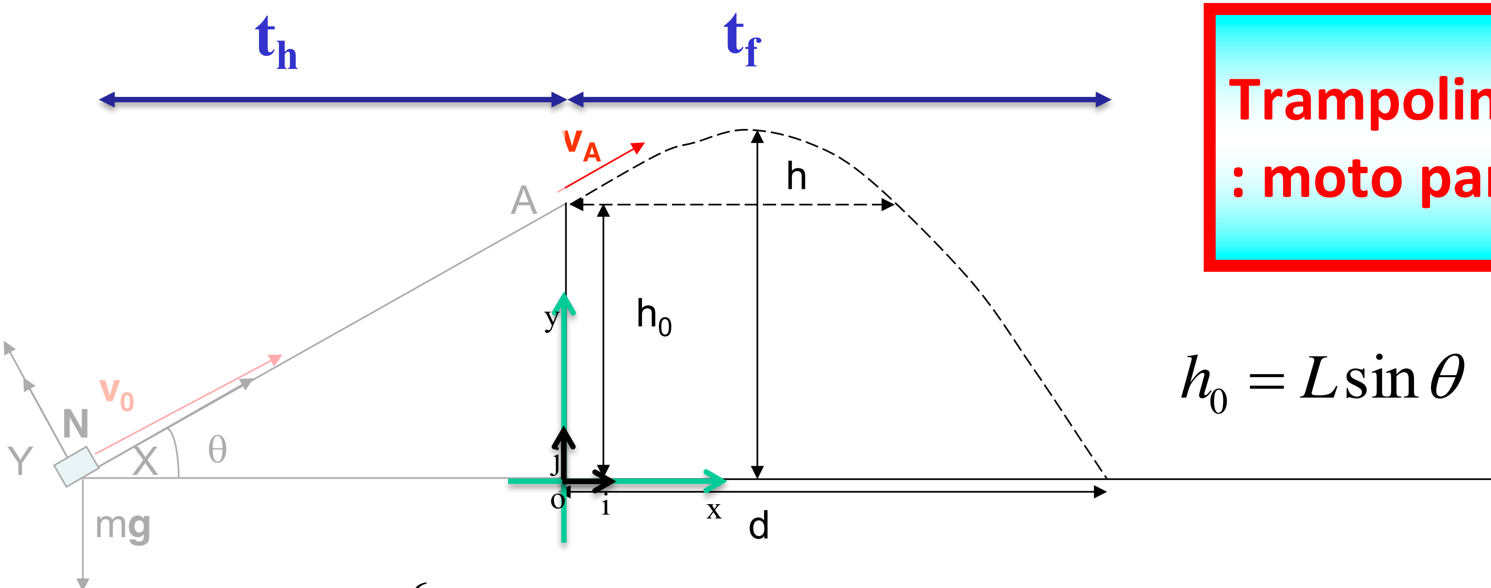

$$h_0 = L\sin\theta$$

$$\begin{cases} v_y = (v_A \sin\theta) - gt \\ v_x = (v_A \cos\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = h_0 + (v_A \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x = (v_A \cos\theta)t \end{cases}$$

- Quando lo sciatore arriva al punto più alto:

$$0 = v_y(t_h) = v_A \sin\theta - gt_h \qquad t_h = \frac{v_A \sin\theta}{g} \qquad y(t_h) = h_0 + \frac{(v_A \sin\theta)^2}{2g}$$

## Trampolino : moto parabolico




$$h_0 = L\sin\theta$$

$$\begin{cases} v_y = (v_A \sin\theta) - gt \\ v_x = (v_A \cos\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = h_0 + (v_A \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x = (v_A \cos\theta)t \end{cases}$$

- Lo sciatore arriva al punto più alto

$$0 = v_y(t_h) = v_A \sin\theta - gt_h \qquad t_h = \frac{v_A \sin\theta}{g} \qquad y(t_h) = h_0 + \frac{(v_A \sin\theta)^2}{2g}$$

- x=d y=0 quando lo sciatore arriva a terra

$$y(t_f) = h_0 + (v_A \sin\theta)t_f - \frac{1}{2}g{t_f}^2$$

$$d = (v_A \cos\theta)t_f$$

$$\Rightarrow t_f = \frac{v_A \sin\theta + \sqrt{(v_A \sin\theta)^2 + 2gh_0}}{g}$$