

# **DISPENSE ANALISI II**

Prof Placido Longo

GIUSEPPE SORIANO

## **INDICE**

DISPENSA	PAGINA
AN_1.1	1
AN_1.2	12
AN_1.3	30
AN_1.4	38
AN_1.5	48
AN_1.6	54
AN_2.1	68
AN_2.2	76
AN_2.3	83
AN_2.4	90
AN_2.5	97
AN_2.6	104
AN_2.7	109
AN_2.8	122
AN_2.9	131
AN_3.1	137
AN_3.2	145
AN_4.1	155
AN_4.2	163
AN_4.3	169
AN_5.1	173
AN_5.2	186
AN_5.3	200
AN_6.1	219
AN_6.2	233
AN_6.3	236

AN

## IL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

La storia del teorema fondamentale dell'algebra sarebbe interessante di per sé, ma richiederebbe un impegno ed un'estensione impensabile per una dispense.

Ad ogni modo, in estrema sintesi, la storia è questa. Leonardo Fibonacci, pisano, accompagnando il padre nei suoi viaggi di commercio, soggiornò per qualche tempo in Algeria, ove prese contatto con l'Algebra, nota in ambiente islamico, e le importò in Europa. A quell'epoca erano noti i procedimenti di risoluzione delle equazioni di primo e secondo grado.

In Italia, durante il Rinascimento si compirono progressi molto importanti: le formule di Cardano, per la soluzione dell'equazione generale di terzo grado, e quelle di Ludovico Ferrari, per quelle di quarto. Ogni tentativo di reperire formule simili per l'equazione di quinto grado era inutile. Gli sforzi degli algebristi italiani condussero anche all'"invenzione" dei numeri complessi, in origine col solo scopo di estrarre le radici di numeri negativi, che si incontravano applicando le formule di Cardano, anche quando le soluzioni sono tutte reali.

Due secoli più tardi, fu chiaro il perché non si riuscisse a trovare le formule risolutive per le equazioni algebriche dal quinto grado in su: Galois, la sera prima di venire ucciso in un duello, scrisse la dimostrazione del fatto che tali formule NON ESISRONO, nel caso generale (ovviamente  $x^5 = 1$  è risolvibile!). Il problema algebrico era definitivamente chiuso: non è sempre possibile trasformare, utilizzando le identità algebriche elementari (permutare e associare addendi, mettere in evidenza, sommare e sottrarre, spostare ad un altro membro...) un'equazione generale di 5° grado

in una di tipo "speciale" che utilizzi solo le "operazioni"  $\sqrt{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[4]{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[5]{\phantom{x}}$ , ossia le soluzioni delle rispettive equazioni "pure"  $z^2 = k$ ,  $z^3 = k$ ,  $z^4 = k$ ,  $z^5 = k$ .

Dove sta allora il problema? Il problema consiste nel fatto che una cosa è che non esiste formula risolutiva, un'altra è che non esistono soluzioni!

Il punto di vista rivoluzionario, che nei secoli successivi verrà l'intera Analisi Matematica, è di rinunciare del tutto a porsi il problema delle ricercate di formule risolutive (fra l'altro così complicate da essere di uso assai poco agevole!) ed occuparsi del seguente problema:

**DATO UN POLINOMIO, ESISTONO PUNTI  
SUI QUALI SI ANNULLA?**

Ciò fece Gauss, il "princeps mathematicorum". Una prima osservazione è che i polinomi costanti (non nulli) NON hanno zeri. Prenderemo dunque in considerazione solo polinomi NON costanti. Anche i polinomi non costanti, però, hanno i loro problemi:  $1 + z^2$  NON ha zeri reali, ma ha zeri complessi:  $z = \pm i$ . La risposta fornita da C.F. GAUSS, dopo vent'anni di ripensamenti e quattro diverse dimostrazioni, fu semplice e formidabile:

**TEOREMA (fondamentale dell'Algebra):**

Ogni polinomio non costante a coefficienti in  $\mathbb{C}$  ha zeri in  $\mathbb{C}$ .

Abbiamo già visto che un simile teorema è FALSO in  $\mathbb{R}$ . Osserviamo anche che il teorema non si occupa minimamente di come determinare tali soluzioni di  $f(z) = 0$ , ma solo del fatto che esistono.

Osserviamo infine che se  $f(z^*) = 0$ , allora  $f$  è divisibile per  $(z - z_0)$  (Ruffini), e dunque, eseguite la divisione, si ottiene

$$f(z) = (z - z^*) q(z)$$

ove  $q$  (il quoziente della divisione) è un polinomio di grado diminuito di 1. Poiché  $f$  si annulla solo in  $z^*$  e in tutti i punti sui quali si annulla  $q$  (legge di annullamento del prodotto) ne segue che, finché il grado di  $q$  non è zero ( $q$  costante) si può riapplicare il teorema di GAUSS il quoziente e, alla fine, fattorizzare  $f$  in fattori di primo grado (e una costante)

$$f(z) = A(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

ove alcuni degli zeri  $z_1, \dots, z_n$  possono anche coincidere. Dunque, ogni polinomio complesso può essere composto nel prodotto di polinomi di grado uno e zero. La costante  $A$  risulta essere il coefficiente del teorema d'ordine massimo.

La dimostrazione presentata (una delle tante), è basata sulle seguenti linee di ragionamento, e su due risultati:

- Per ogni polinomio complesso  $p(z)$  la funzione  $f(z) = |p(z)|$  ha minimo assoluto in  $\mathbb{C}$ .
- Per ogni polinomio complesso non costante, se  $p(z^*) \neq 0$  allora esiste  $\bar{z} \in \mathbb{C}$  tale che

$$|p(z^*)| > |p(\bar{z})|$$

Il teorema di GAUSS segue da questi due risultati perché, dato  $z^*$  un punto di minimo assoluto di  $|p(z)|$  su  $\mathbb{C}$  deve risultare  $|p(z^*)| = 0$  (e quindi  $p(z^*) = 0$ ):

se così non fosse, per il secondo risultato si avrebbe,  
per qualche  $\bar{z}$

$$|p(\bar{z})| < |p(z^*)|$$

contro l'ipotesi che  $z^*$  sia di minimo assoluto per  $|p(z)|$ .  
Le prossime due sezioni sono dedicate a stabilire questi  
due risultati.

**NOTA:** secondo altri, fu Niels Abel a provare la  
non esistenza di formule risolutive. Morì giovanissimo  
anch'egli (di malattia) e patì, come Galois, le  
angherie di Cauchy.

**TEOREMA:** Se  $p$  è un polinomio in  $\mathbb{C}$ , allora  $|p|$   
ha minimo in  $\mathbb{C}$

Il primo risultato da stabilire riguarda il comportamento  
dei polinomi non costanti all'infinito

**LEMMA:** Se  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  è non costante, allora

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty$$

**DIM** Posto  $p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$ ,  $\alpha_n \neq 0$ ,  
si ha,

$$p(z) = z^n \left( \alpha_n + \frac{\alpha_{n-1}}{z} + \dots + \frac{\alpha_1}{z^{n-1}} + \frac{\alpha_0}{z^n} \right)$$

Poiché  $z \rightarrow \infty \Rightarrow z^k \rightarrow \infty$  per ogni  $k$  intero strettamente  
positivo e  $\frac{1}{z} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{z^k} \rightarrow 0$ , ne segue che il termine  
in parentesi tende a  $\alpha_n \neq 0$ , mentre  $z^n \rightarrow \infty$ , da  
cui  $p(z)$  diverge.

**Dimostrazione del teorema**

È immediato per i polinomi costanti: ogni punto è di minimo

Fissato ad arbitrio  $z_0 \in \mathbb{C}$ , se  $p(z_0) = 0$  abbiamo già provato il teorema (ed anche il teorema di Gauss) perché

$$|p(z)| \geq 0 = |p(z_0)|$$

Se, invece, risulta  $p(z_0) \neq 0$  allora segue dalla divergenza di  $p$  all'infinito che, scelto  $\varepsilon = |p(z_0)| > 0$ , si ha che esiste  $\delta > 0$  tale che

$$|p(z)| > \varepsilon = |p(z_0)|$$

per ogni  $z$  tale che  $|z| > \delta$ . A causa della diseguaglianza stretta precedente,  $|z_0| \leq \delta$ .

Sia ora  $f(z) = |p(z)|$  e si consideri la sfera chiusa (e limitata)  $\bar{B}(0, \delta)$ . La funzione  $f$  è continua (perché composta da funzioni continue) su un compatto (la sfera  $\bar{B}(0, \delta)$ ) e dunque, per il teorema di Weinstross, ha minimo e massimo.

Sia  $z^*$  un punto di minimo di  $f$  su  $\bar{B}(0, \delta)$ .

Si ha subito, per ogni  $z \in \bar{B}(0, \delta)$

$$|p(z)| = f(z) \geq f(z^*) = |p(z^*)|$$

Se invece è  $z \notin \bar{B}(0, \delta)$ , e cioè  $|z| > \delta$ , ricordando che  $z_0 \in \bar{B}(0, \delta)$ , si ottiene

$$|p(z)| \geq \varepsilon = |p(z_0)| \geq |p(z^*)|$$

e dunque

$$|p(z)| \geq |p(z^*)| \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

c.v.d.

La proprietà di divergenza all'infinito, che permette di restringere la ricerca del minimo ad un insieme chiuso e limitato sul quale essa è assicurata dal teorema di Weinstross viene (in altro contesto) chiamata di **COERCIVITÀ**.

Se  $p(z)$  è non costante, e  $p(z^*) \neq 0$ , allora esiste  $\bar{z} \in \mathbb{C}$  tale che  $|p(\bar{z})| < |p(z^*)|$

Poiché  $p(z^*) \neq 0$ , si può definire un nuovo polinomio

$$q(w) = \frac{1}{p(z^*)} p(z^* + w)$$

Il polinomio  $q$  ha lo stesso grado di  $p$ , perché sviluppando tutte le potenze  $(z^* + w)^m$  si ottiene sempre il termine  $w^m$ , ed inoltre  $q(0) = 1$ .

Riordinando  $q$  per potenze crescenti di  $w$  si otterà

$$q(w) = 1 + \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \dots + \alpha_m w^m + \dots + \alpha_n w^n \quad (1)$$

ove  $\tilde{q}(w)$  è il polinomio che si ottiene raccogliendo  $w^{k+1}$  fra tutti i termini di grado strettamente maggiore di  $k$ .

Da (1), per la diseguaglianza triangolare in  $\mathbb{C}$ , segue

$$|q(w)| \leq |1 + \alpha_k w^k| + |w|^{k+1} |\tilde{q}(w)|$$

L'idea della dimostrazione è di scegliere  $\bar{w}$  in modo che  $\alpha_k w^k$  sia reale, negativo, e di modulo minore di 1.

Perché  $\alpha_k w^k$  sia reale e negativo dovrà essere:

$$\arg(\alpha_k w^k) = \pi$$

e cioè

$$\pi = \arg \alpha^k + \arg w^k = \arg \alpha_k + k \arg w$$

e infine

$$\Theta \equiv \arg w = \frac{\pi - \arg \alpha_k}{k}$$

Volendo poi avere  $|\alpha_k w^k| \leq 1$ , basta scegliere

$$|w| \leq \frac{1}{|\alpha_k|^{1/k}}$$

In definitiva, per ogni  $\bar{w} = p e^{i\theta}$ , con  $p \leq \frac{1}{|\alpha_k|^{1/k}}$  e  $\Theta = \pi - \arg \alpha_k$ , essendo  $\alpha_k \bar{w}^k$  reale, negativo e di modulo  $k$  minore di 1 risulta

$$|1 + \alpha_k \bar{w}^k| = 1 - |\alpha_k| |\bar{w}|^k$$

da cui

$$|q(\bar{w})| \leq 1 - |\bar{w}|^k [|\alpha_k| - |\bar{w}| |\tilde{q}(\bar{w})|]$$

Facendo ora tendere  $|\bar{w}|$  a zero, mantenendone l'argomento costantemente uguale a  $\Theta$ , si ottiene che il termine in parentesi quadra tende a  $|\alpha_k| (> 0$  per come  $k$  è stato definito) da cui, per il teorema delle permanenze del segno, esso mantiene lo stesso segno strettamente positivo del limite  $|\alpha_k|$  per tutti i  $\bar{w} \neq 0$ , di argomento uguale a  $\Theta$  e modulo, già in parentesi minore di  $\frac{1}{|\alpha_k|^{1/k}}$ , abbastanza piccolo. Ne segue che, per kali  $\bar{w}$

$$\underset{\substack{>0 \\ \rightarrow}}{|\bar{w}|^k} \left[ \underset{\substack{\rightarrow \\ |\alpha_k| > 0}}{|\alpha_k|} - |\bar{w}| |\tilde{q}(\bar{w})| \right] > 0$$

e, di conseguenza,

$$|q(\bar{w})| < 1$$

Ricordando la definizione di  $q$ , ne segue

$$|\rho(z^* + \bar{w})| < |\rho(z^*)|$$

e la tesi, scegliendo

$$\bar{z} = z^* + \bar{w}$$

c.v.d.

L'impiego del teorema della permanenza del segno consente di concludere che  $|q|$  si composta, per  $w$  di norme piccole, come

$$1 + \alpha_k w^k$$

e la caratteristica di  $\mathbb{C}$  (non presente in  $\mathbb{R}$ ) che consente di concludere la prova è quella di potere fissare e piccere l'argomento di  $\alpha_k w^k$ ! Per un polinomio reale con  $k$  pari e  $\alpha_k > 0$  non si può evitare che  $\alpha_k w^k$  sia positivo (è esattamente ciò che accade a  $p(u) = 1 + u^2$ !). Su  $\mathbb{C}$ , invece, c'è una libertà maggiore.

## NOTE CONCLUSIVE

A che serve, in definitiva, un teorema di esistenza di soluzioni, senza sapere come calcolarle?

La risposta è meno ovvia di quanto non possa apparire, e vista la fatica notevole che essi richiedono, di solito, per stabilirli, è necessario soffermarsi sulla questione. I discorsi che stiamo per fare sono comuni anche ad altri celebri teoremi di esistenza, primo fra tutti quello per le soluzioni delle equazioni differenziali.

Un approccio non solo realistico, ma anche teoricamente corretto al problema non può prescindere dal fatto che già le formule risolutive

$$u = -\frac{b}{a} \quad u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

delle equazioni di primo e secondo grado sono, nella stragrande maggioranza dei casi, almeno altrettanto approssimate - non "esatte" - di quanto non lo sia un

procedimento di bisezione, ai fini del calcolo delle radici.

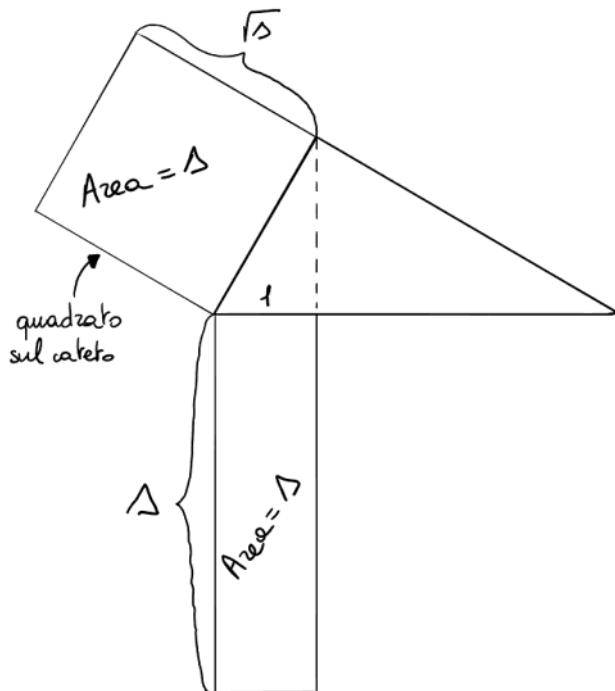
$$\frac{1}{3} = 0,3333\dots$$

$$1 - \sqrt{2} = -0,4142\dots$$

La parte "esatta" (algebrica) del processo di risoluzione è la riduzione dell'equazione originaria (completa) ad altre "pure" ( $\sqrt{k}$  soluzione positiva di  $x^2 = k$ ).

Una volta arrivati a  $[-b \pm \sqrt{\Delta}] / 2a$ , se  $\Delta$  non è un quadrato perfetto il simbolo  $\sqrt{\Delta}$  non è nullo di "esatto" e nasconde un'approssimazione.

Non a caso i Greci penalizzarono l'aritmetica a favore della Geometria. Per la radice quadrata, il teorema fornisce la costruzione:



Anche gli antichi ebbero i loro problemi: non esiste una simile costruzione per la radice cubica (come l'oracolo di Apollo mise in diario).

Una volta accettato il principio che "esatto" e "approssimato" sono due concetti largamente criticabili, i teoremi d'esistenza entrano prepotentemente in gioco, offrendo la base teorica sulla quale edificare la costruzione di algoritmi di risoluzione approssimata.

L'esistenza dell'estremo superiore, e cioè la teoria dei numeri reali, fornisce il necessario supporto teorico alla convergenza dell'algoritmo di bisezione per il calcolo degli zeri, ad esempio. Occasionalmente, il favore viene reso. Una delle dimostrazioni del teorema di esistenza (senza unicità) di Peano per equazioni e sistemi differenziali del primo ordine in forma normale è basata sull'algoritmo di Eulero di risoluzione approssimata e su un teorema di compattezza (Ascoli-Arzela) che permette di provare la convergenza di tali approssimazioni oltre ad un'altra mezza dozzina di concetti e risultati: la trasformazione in equazione integrale, la convergenza uniforme e le sue proprietà rispetto agli integrali, e la continuità, il comportamento delle funzioni equi lipschitziane rispetto al teorema di Ascoli-Arzela... una discreta fatica, pienamente giustificata dalla portata dei risultati.

Un altro esempio, perfino più lampante, è costituito dalla teoria dei sistemi di equazioni differenziali lineari: teoria puramente algebrica, non appena si sapeva provare che un sistema lineare a coefficienti continui su  $\mathbb{R}$  ha soluzione UNICA in  $\mathbb{R}$ .

Non è possibile entrare qui nei dettagli, né accennare a tutte le applicazioni alla Geometria Analitica e all'Algebra Lineare del teorema di Gauss (si pensi alle storie molto diverse del teorema spettrale su  $\mathbb{R}$  o su  $\mathbb{C}$ ).

Forse si dice abbastanza dichiarando che è il primo dei teoremi della Matematica di oggi ad essere stato dimostrato.

AN.1.2

## CONVERGENZA DELLE FUNZIONI OMOGENEE NELL'ORIGINE

Una delle conseguenze più interessanti della formula di Taylor per le funzioni di una variabile è che, per funzioni sufficientemente regolari nell'intorno di un punto  $x_0$ , la differenza  $f(x) - f(x_0)$  si comporta come  $(x-x_0)^h$  al tendere di  $x$  ad  $x_0$ , ove  $h$  è la prima derivata non nulla in  $x_0$  (se esiste).

Ciò permette di studiare il limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ , supposto che  $f$  e  $g$  siano ivi infinitesime, sostituendo ad  $f$  e  $g$  i loro sviluppi di Taylor con relativi resti, cioè

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-x_0)^h \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!} + o(x-x_0)^h}{(x-x_0)^k \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} + o(x-x_0)^k}$$

e tutto si risolve raccogliendo in evidenza  $(x-x_0)^h$  a numeratore,  $(x-x_0)^k$  a denominatore, ottenendo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-x_0)^h}{(x-x_0)^k} \cdot \frac{\frac{1}{h!} f^{(h)}(x_0) + \frac{o(x-x_0)^h}{(x-x_0)^h}}{\frac{1}{k!} g^{(k)}(x_0) + \frac{o(x-x_0)^k}{(x-x_0)^k}}$$

E, per definizione di o piccolo, la seconda frazione tende a

$$\frac{\frac{1}{h!} f^{(h)}(x_0)}{\frac{1}{k!} g^{(k)}(x_0)}$$

e dunque tutto si decide confrontando gli ordini  $h$  e  $k$  delle prime derivate non nulle di  $f$  e  $g$ . Esattamente lo stesso accadrebbe adoperando il teorema di Bernoulli (detto olio de l'Hopital).

Poiché per le funzioni di più variabili non esiste un simile teorema, mentre esiste la formula di Taylor, sarebbe di grandissimo interesse sapere come adoperarla per calcolare i limiti. Prima di altre (più dolorose) considerazioni sui resti o(...), cominciamo con l'osservare che, mentre in una variabile i

termini polinomiali sono potenze (sia a numeratore che denominatore) direttamente confrontabili e "semplificabili" mille di simile accade in più variabili.

Infatti supponiamo per semplicità che il punto "fisso" nel quale studiare il limite sia  $(0,0)$  e che  $f$  e  $g$  siano funzioni di due variabili, derivabili quante volte si vuole e nulle nell'origine. Supponiamo infine che qualunque delle derivate parziali (prime) non si annulli. In tal caso:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x f_x(0,0) + y f_y(0,0) + o(\sqrt{x^2+y^2}) \\ g(x,y) &= x g_x(0,0) + y g_y(0,0) + o(\sqrt{x^2+y^2}) \end{aligned}$$

Anche se forse vero (e NON LO È!) che i resti siano trascurabili, ci si troverebbe a studiare il limite

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y}$$

con uno fra i valori  $\alpha$  e  $\beta$  e uno fra  $\gamma$  e  $\delta$  non nulli, e non è affatto detto che i due complessi dei termini di primo grado si possano semplificare: se forse

$f_x = 1 \quad f_y = -1 \quad g_x = 1 \quad g_y = -1$  la frazione sarebbe  $\frac{x-y}{x+y}$  che non è in alcun modo semplificabile, e vedremo presto essere persino riguardo le convergenze.

L'unica cosa che hanno in comune le funzioni di una o di più variabili è che, una volta scoperte una derivate parziale non nulla, verrà individuato un polinomio omogeneo costituito con tutte le derivate dello stesso ordine e dunque, invece dei rapporti  $\frac{(x-x_0)^h}{(x-x_0)^k}$ , stavolta occorrerà studiare i rapporti  $\frac{p(x-x_0)}{q(x-x_0)}$

ove  $p$  e  $q$  sono due polinomi omogenei di grado  $h$  e  $k$ , rispettivamente

Anche se i nesti non esistessero, come nel caso di  $f(x,y) = x-y$  e  $g(x,y) = x+y$  che verificano  $f(0,0) = g(0,0) = 0$  e  $f_x(0,0), f_y(0,0), g_x(0,0), g_y(0,0) \neq 0$ , e per i quali i nesti sono nulli, ci sarebbe comunque il problema di studiare i limiti dei rapporti di polinomi omogenei, che verrà svolto in queste note nel caso più generale delle funzioni (positivamente) omogenee. Gli strumenti che verranno sviluppati consentono di riconoscere subito che gli eventuali nesti non sono trascurabili (in generale) rispetto ai termini di ordine più basso.

Ho studio che segue riguarda il comportamento nell'origine.

Ho studio in  $(x_0, y_0)$  può essere svolto sulla funzione

$\tilde{f}(u,v) = f(x-x_0, y-y_0)$ , che si comporta in  $(0,0)$  come  $f$  fa in  $(x_0, y_0)$ .

## FUNZIONI POSITIVAMENTE OMOGENEE

In prossima definizione, inutile parlando di polinomi, è indispensabile nel caso generale.

**DEFINIZIONE** Dato  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , si dice che  $X$  è un cono (rispetto all'origine  $O$ ) se

$$x \in X \Rightarrow t x \in X \quad \forall t > 0$$

Dunque se un cono contiene un punto, contiene anche tutta la semiretta per l'origine nella direzione del punto, ma niente si dice dell'origine (notate la diseguaglianza stretta  $t > 0$ ?)

**DEFINIZIONE** Una funzione  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , ove  $X$  è un cono, si dica  $\alpha$ -omogenea, o anche omogenea di grado  $\alpha$ , ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) se

$$f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \forall x \in X, \forall t > 0$$

Il dover calcolare  $f(tu)$   $\forall u, t > 0$  rende necessario che il dominio di  $f$  sia un cono. Notiamo subito che il concetto è più generale di quello di polinomio omogeneo. Infatti, la funzione  $|tu|$ , definito sul cono  $\mathbb{R}^n$  verifica  $|tu| = |t| |u| = t |u| \forall u, t > 0$ , ed è dunque una funzione omogenea di grado 1, senza essere un polinomio mentre, dato un qualunque polinomio omogeneo di grado  $k$

$$p(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{\substack{i_1 + i_2 + \dots + i_n = k \\ i_1, i_2, \dots, i_n \geq 0}} \alpha_{i_1, i_2, \dots, i_n} u_1^{i_1} u_2^{i_2} \dots u_n^{i_n}$$

si ha, raccogliendo in evidenza  $t^k$  in ogni addendo

$$p(tu) = p(tu_1, tu_2, \dots, tu_n) = t^k p(u_1, \dots, u_n) = t^k p(u)$$

e dunque un polinomio omogeneo di grado  $k$  è una funzione  $k$ -omogenea.

Un semplicissimo esempio di funzione  $\alpha$ -omogenea è la funzione  $f: u \rightarrow |u|^\alpha$ .

Dalle leggi di moltiplicazione, divisione e potenze di potenze segue subito che:

**LEMMA** Se  $f$  è  $\alpha$ -omogenea e  $g$  è  $\beta$ -omogenea, definite sullo stesso cono  $X$ , allora

- $fg$  è  $(\alpha+\beta)$ -omogenea
- $\frac{f}{g}$  è  $(\alpha-\beta)$ -omogenea in  $X - \{g=0\}$
- $f^\beta$  è  $(\alpha\beta)$ -omogenea

■

### Osservazioni

Se  $f$  è  $\alpha$ -omogenea, allora ( $t^\alpha = 1$ ) e  $f$  è costante sui raggi uscenti dall'origine (come per una scala a chiocciola). Un'altra utile osservazione è che, se  $f$  è  $\alpha$ -omogenea e  $u \neq 0$ , allora

$$f(u) = f\left(1|u|\frac{u}{|u|}\right) = |u|^\alpha f\left(\frac{u}{|u|}\right)$$

e dunque una funzione omogenea è completamente individuata dai valori che assume sulla porzione della sfera unitaria che appartiene al proprio dominio  $X$ . Concludiamo con qualche esempio.

La funzione  $f(u, y) = \frac{u-y}{u+y}$  è definita sull'insieme

$X = \{(u, y) \in \mathbb{R}^n : u \neq -y\}$  che è un cono, perché  $(u, y) \in X \Rightarrow u \neq -y \Rightarrow tu \neq -ty \quad \forall t > 0 \Rightarrow (tu, ty) \in X$  ed è omogenea di grado 0, perché rapporto di polinomi omogeni di grado 1.

La funzione  $\frac{u^3 - u^2 y}{u^2 + y^2}$  è definita su  $X = \{(u, y) \neq (0, 0)\}$  che

è un cono perché  $(u, y) \in X \Leftrightarrow (u, y) \neq (0, 0) \Rightarrow (tu, ty) \neq t(0, 0) = (0, 0)$   $\forall t > 0 \Leftrightarrow (tu, ty) \in X$ , ed è 1-omogenea, perché rapporto di un polinomio 3-omogeneo e uno 2-omogeneo.

La funzione  $\operatorname{sen}\left(\frac{u^2 - y^2}{u^2 + y^2}\right)$  è definita nel cono precedente ed è 0-omogenea, perché  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  è 0-omogenea, e dunque costante sui raggi uscenti dall'origine e di conseguenza anche  $\operatorname{sen}\left(\frac{u^2 - y^2}{u^2 + y^2}\right)$  lo è.

La norma di  $\mathbb{R}^n$ , essendo una norma, è 1-omogenea; la cosa è riconoscibile anche del fatto che

$$\|u\| = \left(\sum u_i^2\right)^{1/2}$$

e poiché  $\sum u_i^2$  è un polinomio 2-omogeneo, la sua potenza  $\frac{1}{2}$  è di grado  $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Infine, le forme quadratiche sono 2-omogenee.

## LE FUNZIONI $\alpha$ -OMOGENEE, $\alpha > 0$ , SONO (PIUTTOSTO SPESSE) INFINITESIME IN 0!

La proprietà prima osservata, per la quale

$$f(u) = |u|^\alpha f\left(\frac{u}{|u|}\right)$$

lascia intravedere qualcosa di buono perché, al rendere di  $u \neq 0$ , anche  $|u|$  fa altrettanto e dunque anche  $|u|^\alpha$  per  $\alpha > 0$ , per la continuità della composizione di funzioni continue.

L'unico problema, serio, è che non sempre un prodotto uno dei fattori del quale è infinitesimo risulta infinitesimo soprattutto se l'altro fattore fa il diavolo a quattro!

**TEOREMA** Sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$   $\alpha$ -omogenea, con  $\alpha > 0$ . Sia inoltre  $f$  limitata su  $X \cap \{|u|=1\}$ . Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

**DIM** Poiché  $f$  è limitata sulla porzione di sfera unitaria che appartiene ad  $X$ , esiste  $k > 0$  tale che

$$|f(w)| \leq k \quad \forall w \in X \cap \{|w|=1\}$$

Allora da

$$0 \leq |f(u)| = |u|^\alpha \left| f\left(\frac{u}{|u|}\right) \right| \leq k |u|^\alpha$$

poiché  $\frac{u}{|u|} \in X \cap \{|w|=1\}$

e dal teorema del confronto, poiché  $k |u|^\alpha \rightarrow 0$  allora anche  $|f(x)|$  farebbe altrettanto.

c.v.d.

Determinare la costante  $k$ , "a mano", vuol dire risolvere la disequazione  $|f(u)| \leq k$ , con  $|u|=1$  e  $u \in X$ , cosa tutt'altro che banale. La seguente versione fa uso del teorema di Weinstross per decidere che  $k$  esiste, anche senza calcolarlo.

**TEOREMA** Sia  $f$  come sopra, ma in più sia continua su  $X$ , e infine  $X \cap \{|w|=1\}$  sia chiuso. Allora  $f$  è infinitesima in  $O$ .

**DIM** Per ipotesi, l'intersezione  $X \cap \{|w|=1\}$  è chiusa, ed è anche limitata, perché contenuta nelle sfera unitaria  $B(0, \epsilon)$ .

Dal teorema di Weierstrass, applicato alla funzione continua  $|f|$  ed al chiuso limitato  $X \cap \{|w|=1\}$  segue che

$$|f(u)| = |u|^\alpha |f\left(\frac{u}{|u|}\right)| \leq |u|^\alpha \max_{v \in X \cap \{|w|=1\}} |f(v)|$$

e il ragionamento del teorema precedente si può ripetere ponendo

$$k = \max_{v \in X \cap \{|w|=1\}} |f(v)|$$

c.v.d.

### Esempio

$$\lim_{u,y \rightarrow \infty} \frac{u^3 - u^2 y}{u^2 + y^2}$$

perché  $X = \{(u, y) \neq (0,0)\}$  e dunque

$$X \cap \{|w|=1\} = \{|w|=1\}$$

che è chiuso (e limitato).

Invece, cosa accade a  $\lim_{(u,y) \rightarrow (0,0)} \frac{u^2+y^2}{u-y}$ , che è 1-omogenea come la precedente?

Il dominio è  $\{(u,y) \in \mathbb{R}^2 : u=y\}$  e, intersecando con il cerchio unitario, si ottiene l'insieme

$$\{(u,y) \in \mathbb{R}^2 : u^2+y^2=1 \text{ e } u=y\}$$

che non è chiuso!

Dunque il teorema non si può adoperare, ma resta il dubbio che risultati meno elementari potrebbero aggiungere il problema.

Purtroppo non è così!

Infatti, fissato ad arbitrario un intorno  $B(0, \delta)$  si considerino i punti  $(\frac{\delta}{2} \cos \theta, \frac{\delta}{2} \sin \theta)$  che stanno sulla circonferenza di raggio dimezzato (e dunque appartengono all'intorno), ma per i quali risulta

$$f\left(\frac{\delta}{2} \cos \theta, \frac{\delta}{2} \sin \theta\right) = \frac{\frac{\delta^2}{4} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{\frac{\delta}{2} (\cos \theta - \sin \theta)} = \frac{\frac{\delta^2}{4}}{\frac{\delta}{2} (\cos \theta - \sin \theta)} = \frac{1}{2 (\cos \theta - \sin \theta)}$$

che diverge in modulo quando  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}$ , con segni discordi delle due parti. Dunque, in ogni intorno (un tempo si sarebbe detto: "comunque piccolo") esistono punti sui quali  $f$  assume valori arbitrariamente grandi, il che contrasta con la convergenza (la  $f$  tutta compresa fra  $L-\varepsilon$  e  $L+\varepsilon$  in un opportuno intorno).

Il teorema, dunque, si raffina male! Basta che alla sfera unitaria manchi un punto d'accumulazione, può capitare che  $f$  diverge (o diverge in modulo) su una successione ad esso convergente e la festa è finita!

## UN CRITERIO "PIÙ PRATICO"

Sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua  $\alpha$ -omogenea, con  $\alpha > 0$ . Il risultato provato in precedenza assicura che il  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  se  $f$  è limitata su  $X \setminus \{|x|=1\}$ .

Se tale insieme è chiuso, essendo anche limitato, permette di ottenere la limitatezza di  $f$  mediante il teorema di Weinstros, ma cosa fare se  $X \setminus \{|x|=1\}$  NON è chiuso?

Il seguente criterio, in apparenza meccanico, ma molto utile in alcuni casi "nesli", offre una risposta.

**TEOREMA** Se  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  è continua e  $\alpha$ -omogenea,  $\alpha > 0$ , ed inoltre esiste finito il  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  per ogni  $x_0$ , punto di accumulazione di  $X \setminus \{|x|=1\}$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

### Dimostrazione

Si può definire  $\tilde{f}$  nei punti di accumulazione di  $X \setminus \{|x|=1\}$  non appartenenti ad esso ponendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \setminus \{|x|=1\} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \text{se } x \in \partial(X \setminus \{|x|=1\}) \end{cases}$$

e la continuità di  $\tilde{f}$  assicura che le definizioni sono coerenti sui punti d'accumulazione già appartenenti ad  $X \setminus \{|x|=1\}$ .

La funzione  $\tilde{f}$ , così definita, è continua sull'insieme chiuso e limitato  $X \setminus \{|x|=1\} \cup \partial(X \setminus \{|x|=1\})$ , chiuso perché contiene per definizione i suoi punti di accumulazione e limitato perché sottoinsieme di  $B(0,1)$ .

Ne segue che se  $\tilde{f}$  è limitata (ed anche  $f$ ) e di conseguenza lo è, da cui la tesi segue come nel teorema precedente.

## ESEMPIO

$$f(u, y) = \frac{u^2 + y^2}{u - y}$$

Posto  $u = \cos \theta$   $y = \sin \theta$  si ottiene, sul cerchio unitario,

$$f(\cos \theta, \sin \theta) = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$$

che è una funzione di una sola variabile  $\theta$ , di modulus divergente se  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}$  e  $\theta \rightarrow \frac{5\pi}{4}$ , che sono esattamente i punti di  $\{(u, y) | u^2 + y^2 = 1\} \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}$  **NON** appartenenti al dominio di  $f$ , che è  $\{(u, y) \in \mathbb{R}^2 : u \neq y\}$ . Dunque  $f$  non è limitata.

**ATTENZIONE!** Una funzione può benissimo essere limitata nell'intorno di un punto senza essere iri convergente, come ad esempio  $f(u) = \sin(\frac{1}{u})$  intorno a 0. Dunque, occorre stare attenti: l'esistenza dei limiti nei punti di accumulazione del dominio sulla sfera unitaria è una condizione sufficiente, MA NON NECESSARIA, perché  $f$  sia infinitesima.

# LE FUNZIONI 0-OMOGENEE NON CONVERGONO QUASI MAI IN 0

Le cattive notizie non arrivano mai da sole !

**TEOREMA** Sia  $f$  0-omogenea non costante fuori dell'origine.  
Allora  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  NON ESISTE !

## Dimostrazione

Se  $f$  è non costante fuori di 0, esistono  $u_1, u_2 \in X$ , non nulli, tali che  $f(u_1) \neq f(u_2)$ . Allora

$$f(tu_1) = f(u_1) \quad \forall t > 0$$

$$f(tu_2) = f(u_2)$$

Scelto allora il solito intorno  $B = B(0, \delta)$ , si osserva che, essendo  $|u_1| \neq 0$  e  $|u_2| \neq 0$ , segue che

$tu_1 \in B$  se  $|tu_1| < \delta$ , e cioè se  $|t| < \frac{\delta}{|u_1|}$ ,  
e che

$$tu_2 \in B \text{ se } |t| < \frac{\delta}{|u_2|}$$

In definitiva, in ogni intorno di 0, esistono punti (quelli dei raggi per l'origine e  $u_1$  e  $u_2$ ) sui quali  $f$  assume i valori  $f(u_1) \neq f(u_2)$ . Basta allora porre  $\varepsilon < |f(u_2) - f(u_1)|$  per vedere violata la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \text{dom } f \quad |x - x_0| < \delta \quad |y - x_0| < \delta \quad x \neq x_0 \text{ e } y \neq x_0$   
risulta  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  (CONDIZIONE DI CAUCHY)

e dunque  $f$  non converge.

c.v.d.

## ESEMPI

$\frac{u-y}{u+y}, \frac{u^2-y^2}{u^2+y^2}$  non sono costanti, e quindi non convergono.

Ad esempio, la restrizione di  $\frac{u-y}{u+y}$  all'asse  $u$  ( $y=0$ ) vale (costantemente) 1, mentre la restrizione all'asse  $y$  ( $u=0$ ) vale -1, da cui ogni intorno contiene punti sui quali  $f$  vale 1 e altri sui quali  $f = -1$ . La condizione di Cauchy è violata scegliendo  $\varepsilon < 2$

... E LE  $\alpha$ -OMOGENEE CON  $\alpha$  NEGATIVO?

... al peggio non c'è fine!

**TEOREMA** Sia  $f$   $\alpha$ -omogenea,  $\alpha < 0$ , non identicamente nulla fuori dall'origine. Allora  $f$  non converge in 0.

**Dimostrazione**

Sia  $u_1 \neq 0$  :  $f(u_1) \neq 0$ . Allora  $f(tu_1) = t^\alpha f(u_1)$

Poiché  $\alpha < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha = +\infty$  e dunque, essendo  $f(u_1) \neq 0$ , ne segue che  $f$  non è limitata in nessun intorno di 0.

## ... IN CONCLUSIONE ?

È una questione assai delicata ! È abbastanza evidente che se il denominatore si annulla nel punto limite ed il numeratore no, è insensato sperare nella convergenza, ma cosa dice di  $\frac{u^2-y^2}{u+y} = u-y$  su  $\mathbb{R}^2 - \{u=y\}$  che è certamente infinitesimo in (0,0).

Una prima questione da affrontare, illustrata bene dall'esempio precedente, e di semplificare tutto il semplificabile, ma la cosa è difficile in più variabili, e ha condotto alle teorie delle "BASI DI GROBNER", davvero troppo per un corso elementare.

Anche se numeratore e denominatore si annullano entrambi nel punto e limite, può capitare che i luoghi degli zeri di  $f$  e  $g$  abbiano dimensioni diverse, come ad esempio

$$\frac{u^2-y^2}{y} \quad \boxed{1\text{-omogenea}}$$

Come fare a farle "scoppiare"? Basta osservare che scegliendo un cammino che, senza toccare mai l'asse  $u$ , che è l'insieme singolare ( $y=0$ ), si può avvicinarsi ad esso rapidamente, per esempio lungo le parabole cubiche  $y=u^3$  ottenendo

$$\frac{u^2-u^6}{u^3} = \frac{1-u^4}{u}$$

da cui, facendo tendere  $u$  a 0 e mantenendo  $y=u^3$  si ha che  $|f|$  diverge, nonostante  $f$  sia 1-omogenea. Mentre in 1 sola variabile i rapporti di infinitesimi non convergenti sono quelli nei quali il denominatore è infinitesimo di ordine superiore rispetto al numeratore, ciò è (in qualche senso) FALSO, almeno se si pensa di identificare l'ordine di infinitesimi con il grado di omogenità !

Concludendo, non ci sono alternative allo studio degli zeri di numeratore e denominatore, che poi è il problema generale della Geometria Algebrica, la moderna erede della Geometria Analitica di Fermat. Come direbbero gli anglosassoni: "There is no silver bullet".

## ADDENDUM

### LIMI<sup>I</sup> DI FUNZIONI OMOGENEE

Queste brevi note sono dedicate a un'integrazione di quanto esposto, in un altro contributo, a proposito delle funzioni omogenee di grado  $\alpha > 0$ . Si è già visto il

**TEOREMA** Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  cono in  $\mathbb{R}^N$  (con vertice nell'origine), omogenee di grado  $\alpha > 0$ , che verifica quindi  $f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \forall x \in \Omega \quad \forall t > 0$ . Allora, se  $f$  è limitata su  $\Omega \cap \partial B(0,1) = \{u \in \Omega : |u|=1\}$   $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 0$

Per completezza, riemanniamo la dimostrazione.

#### Dimostrazione

Dall'ipotesi di omogenità risulta,  $\forall u \in \Omega, u \neq 0$

$$f(u) = f\left(|u| \frac{u}{|u|}\right) = |u|^\alpha f\left(\frac{u}{|u|}\right)$$

Per l'ipotesi di limitatezza di  $f$  su  $\{u \in \Omega : |u|=1\}$  si ha che  $\exists k > 0 : |f(y)| \leq k \quad \forall y \in \{u \in \Omega : |u|=1\}$  e dunque

$$0 \leq |f(u)| = |u|^\alpha \left| f\left(\frac{u}{|u|}\right) \right| \leq k |u|^\alpha \quad \forall u \in \Omega, u \neq 0$$

da cui, infine, per il teorema del confronto, segue la tesi, in quanto  $\alpha > 0$  e  $|u|^\alpha \rightarrow 0$

c.v.d.

È interessante notare che la condizione di limitatezza su  $\Omega \cap \partial B(0,1)$  non è solo sufficiente per l'esistenza del limite: è anche necessaria! Ciò sarà stabilito nel seguente teorema.

**TEOREMA:** Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha$ -omogenea con  $\alpha > 0$  sul cono  $\Omega$ , e sia inoltre convergente (a zero) per  $u$  che tende a 0. Allora  $f$  è limitata su  $\Omega \cap \partial B(0,1)$ .

### Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che  $f$  verifichi tutte le ipotesi, ma che non sia limitata su  $\Omega \cap \partial B(0,1) = \{u \in \Omega : |u| = 1\}$ . Allora, per definizione di non limitatezza,

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists u_n \in \Omega : |u_n| = 1 \text{ e } |f(u_n)| > n \quad (1)$$

Ora  $f$  converge a 0 in 0 e, salvo  $\bar{\varepsilon} = 1$ , esiste

$$\bar{\delta} > 0 : u \in \Omega, |u| < \bar{\delta}, u \neq 0 \Rightarrow |f(u)| < \bar{\varepsilon} = 1$$

Si consideri allora la successione  $y_n = \frac{\bar{\delta}}{z} u_n$ . Si ha  $y_n \in \Omega$  perché  $\Omega$  è un cono e  $\frac{\bar{\delta}}{z} > 0$ . Si ha anche che  $|y_n| = \frac{\bar{\delta}}{z} |u_n| = \frac{\bar{\delta}}{z} < \bar{\delta}$

Dall'ipotesi di omogeneità e da (1), segue poi

$$|f(y_n)| = |f\left(\frac{\bar{\delta}}{z} u_n\right)| = \left(\frac{\bar{\delta}}{z}\right)^\alpha |f(u_n)| > \left(\frac{\bar{\delta}}{z}\right)^\alpha n$$

Se si sceglie, infine,  $\bar{n} > \left(\frac{z}{\bar{\delta}}\right)^\alpha$ , si ha subito

$$|f(y_n)| > 1$$

e, poiché  $|y_n| < \bar{\delta}$ , ciò contraddice la diseguaglianza di limite precedente

c.v.d.

Dunque, la limitatezza su  $\Omega \cap \partial B(0,1)$  è necessaria e sufficiente per la convergenza a 0 di  $f$ . Visto che ogni  $\alpha$ -omogenea con  $\alpha > 0$  tende comunque a zero sui raggi uscenti dall'origine, in quanto  $h(t) = f(t\bar{u}) = t^\alpha f(\bar{u})$ ,  $\bar{u}$  fissato, ne segue che  $f$  non può avere altri (eventuali) limiti. Dunque, " $f$   $\alpha$ -omogenea,  $\alpha > 0$ , è infinitesima se e solo se è limitata su  $\text{dom } f \cap \partial B(0,1)$ ".

**NORA:** la verifica diretta della limitatezza di  $f$  comporta la risoluzione dell'equazione

$$|f(u)| = k$$

che, di regola, non può essere ottenuta esplicitamente.

Poiché non è importante determinare  $k$ , un'eccellente scacchiera per ottenerla a costo zero è (quando è possibile) di usare il teorema di Weierstrass. In effetti, se  $f$  è continua e se  $\Omega \cap \partial B(0,1)$  è chiuso (poiché è di certo limitato essendo un sottoinsieme di  $\overline{B(0,1)}$ ) ne segue immediatamente la limitatezza applicandolo a  $|f|$ , continua, sul compatto  $\Omega \cap \partial B(0,1)$ . Esamineremo due esempi illuminanti:

$$(1) \lim_{(u,y) \rightarrow (0,0)} \frac{u^2+y^2}{u+y}$$

La funzione è continua sul suo dominio  $\{y \neq -u\}$ , che è un cono, ed è 1-omogenea. Naturalmente, occorre attendersi guai dalle parti di  $y = -u$ , ma supponiamo di restringere il dominio di  $f$  al cono  $\{u \geq 0, y \geq 0\}$ : il primo quadrante completo di frontiera.

In tal caso,  $(0,0)$  a parte, il denominatore non ha zeri in tale regione e quindi  $f$  è continua in ogni punto di  $\{u \geq 0, y \geq 0\}$ , salvo l'origine.

Ne segue che è continua sul compatto

$$\{u \geq 0, y \geq 0\} \cap \{u^2+y^2=1\}$$

e si può applicare il teorema di Weierstrass alla  $f$  su tale insieme, da cui segue la limitatezza di  $f$ , e il fatto che  $f \rightarrow 0$  se  $u \rightarrow 0$  nella regione  $\{u \geq 0, y \geq 0\}$ .

Cosa accade invece se si considera il dominio massimale di  $f$  (il suo campo di definizione)?

In tal caso  $\text{dom } f \cap \partial B(0,1)$  è l'intera circonferenza unitaria privata dei due punti  $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$  e  $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  dove essa interseca  $y = -u$ , sui quali il denominatore si annulla. Per verificare che  $f$  NON è limitata su  $\{y \neq -u\} \cap \{u^2+y^2=1\} = \text{dom } f \cap \partial B(0,1)$  e quindi, per il teorema appena provato, non è neppure infinitesimo al tendere di

$n \neq 0$ , basta osservare che ogni punto della circonferenza unitaria può scriversi nelle forme  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$  e che

$$f(\cos \varphi, \sin \varphi) = \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\cos \varphi + \sin \varphi}$$

Poiché  $\lim_{\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi} \right| = +\infty$  ne segue subito la tesi.

Osserviamo, inoltre, che in tal caso  $\text{dom } f \cap J\mathbb{B}(0,1)$  NON è chiuso perché i punti prima individuati sono suoi punti di frontiera che non gli appartengono. Cioè, di per sé, non vorrebbe dire nulla, perché la compattezza è, con le continue, sufficiente per la limitatezza e non necessaria. È però un fatto che  $f(n) = n$  su  $J\mathbb{B}(0,1)$  non ha punti estremi, pur essendo limitata, ma  $f(n) = \frac{1}{n}$ , sull'intervallo aperto, non ha punti estremi, né massimo né minimo, e NON è limitata. Naturalmente, fa molto comodo conoscere come sia fatto il luogo degli zeri del denominatore: nel caso dei polinomi, questo è il problema centrale delle Geometrie Algebriche. E farebbe altrettanto comodo semplificare gli eventuali fattori comuni al numeratore e al denominatore, e ciò è stato uno dei problemi imposti dalle Computer Algebra. Purtroppo, il vecchio algoritmo di Euclide per il massimo divisore comune, che si generalizza senza pena ai polinomi di una (sola) variabile è estremamente più complesso, matematicamente e computazionalmente, nel caso di polinomi di più variabili. Per saperne di più, chiedere in giro di: "Basi di Gröbner".

AN\_1.3

## IL CAMBIO DI VARIABILE NEL CALCOLO DEI LIMITI

Una tecnica piuttosto nota, efficace, ed insegnata nelle scuole, per il calcolo dei limiti fa uso del cambio di variabile. Un esempio:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2} \stackrel{n=y^2}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

Tecnica elegante, suggestiva, apparentemente efficace ma, in generale, **FALSA**! Infatti, siamo

$$g(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y=0 \\ 0 & \text{se } y \neq 0 \end{cases} \quad f(u) = u \sin\left(\frac{1}{u}\right)$$

Si ha  $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0$  e  $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 0$

In tal caso,  $g(f(u))$ , che calcoleremo esplicitamente più giù, dovrebbe aver limite.

$$\lim_{u \rightarrow 0} g(f(u)) \stackrel{y=f(u)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0$$

ma ciò è FALSO. Infatti

$$g(f(y)) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} = k\pi \Leftrightarrow y = \frac{1}{k\pi} \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Poiché  $\lim_k \frac{1}{k\pi} = 0$ , vuol dire che in ogni intorno di centro 0 esistono punti sui quali  $g(f(u)) = 1$ , e dunque esse non può essere infinitesima in 0, in quanto viene violata la condizione di Cauchy.

Tutto diventa più chiaro se si cerca di dimostrare il seguente:

**"TEOREMA"** **FALSO!!**

Siano  $f: \Omega \rightarrow \Sigma$  e  $g: \Sigma \rightarrow \mathbb{H}$  con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^M$ ,  $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{R}^P$ , e vogliamo indire  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  e  $\lim_{y \rightarrow L} g(y) = M$

"Allora" (si sa dall'esempio che è FALSO!)

$$\lim_{n \rightarrow n_0} g(f(n)) = \lim_{y \rightarrow L} g(y) = M$$

### Dimostrazione

Per provare la tesi occorre verificare che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall n \in \text{dom } g \quad |n - n_0| < \delta, n \neq n_0 \Rightarrow |g(f(n)) - M| < \varepsilon$$

Dall'ipotesi sulla  $g$  si ha che, in corrispondenza allo STESSO  $\varepsilon$

precedente  $\exists \sigma > 0 : \forall y \in \text{dom } g : |y - L| < \sigma, y \neq L \Rightarrow |g(y) - M| < \varepsilon$

e ciò è esattamente quanto richiesto, a patto di poter sostituire  $y$  con  $f(n)$  (e cioè cambiare variabili!)

Per poter fare  $y = f(n)$  occorre che:

- $f(n) \in \text{dom } g$
- $|f(n) - L| < \sigma$
- $f(n) \neq L$

Le ipotesi assunte garantiscono le prime due, perché  $f: \Omega \rightarrow \Sigma$  e  $\text{dom } g = \Sigma$  e perché, dall'ipotesi di  $f$ ,  $\lim_{n \rightarrow n_0} f(n) = L$  e quindi, dato il  $\sigma$  precedente esiste  $\delta > 0$  tale che  $\forall n \in \text{dom } f, |n - n_0| < \delta, n \neq n_0$  si ha proprio  $|f(n) - L| < \sigma$

**NON GARANISCONO, INVECE, IN ALCUN MODO, LA CONDIZIONE  $f(n) \neq L$**

Nel controesempio, infatti,  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  ed  $f(n) = 0$  per ogni  $n = \frac{1}{k\pi}$ , ed in ogni intorno comunque piccolo di 0 si troveranno valori punti, che sono proprio quelli che hanno fatto saltare il teorema.

Il controesempio, per quanto fastidioso, è nella natura delle cose. L'ipotesi  $\lim_{y \rightarrow L} g(y) = M$  fornisce stime su  $|g(y) - M|$

solo per i punti vicini ad  $L$ , MA DISTINTI DA ESSO!

NULLA DICE, o PUÒ DIRE, per  $y = L$ .

Quanto detto più su indica chiaramente il problema e le sue possibili soluzioni.

### TEOREMA 1 VERO

Siano  $f: \Omega \rightarrow \Sigma$  verificante  $\lim_{n \rightarrow n_0} f(n) = L$  e  $g: \Sigma \rightarrow \mathbb{H}$  continua in  $L$ .

Allora:

$$\lim_{n \rightarrow n_0} g(f(n)) = g(L)$$

#### Dimostrazione

In tal caso la continuità fornisce lo stesso

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \sigma > 0 : \forall y \in \text{dom } g \quad |y - L| < \sigma \text{ si ha } |g(y) - g(L)| < \varepsilon$$

senza nessuna necessità di escludere il caso  $y = L$  e ciò elimina  
il problema delle radice

c.v.o.

Un altro modo draconiano, ma molto utile in pratica in tutti i casi nei quali il teorema precedente sia inutilizzabile (come nell'esempio iniziale), è il seguente:

### TEOREMA 2

Siano  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  verificante  $\lim_{n \rightarrow n_0} f(n) = L$  e

$g: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$ , verificante  $\lim_{y \rightarrow L} g(y) = M$

e sia inoltre  $g$  NON DEFINITA in  $L$ .

Allora, se  $n_0$  è di accumulazione per il dominio di  $g(f(n))$  si ha:

$$\lim_{n \rightarrow n_0} g(f(n)) = M$$

#### Dimostrazione

La condizione  $n_0 \in \partial \text{dom } g(f(n))$  serve solo a garantire di poter considerare il limite delle tesi. La prova in tal caso, è esattamente quella del teorema FALSO "dimostrato" prima, perché in tal caso

per ogni  $x$  per cui  $f(x)=L$  (quelli "proibiti"), la funzione composta  $g(f(x))=g(L)$  non è definita, e dunque tali punti non appartengono al dom  $g(f(x))$  e non devono essere considerati nelle diseguaglianze del limite che esprime la tesi.

c.v.d.

Questo teorema giustifica il cambio di variabile nell'esempio iniziale di queste note: la funzione "più esterna"  $g(y)=\sin y$  non è definita in  $L=0$ .

Questi casi restano esclusi dai due risultati precedenti e devono dunque porre in allarme l'utilizzatore finale del cambio di variabili? Si può cambiare variabile se la funzione "esterna" è continua, oppure se non è definita. Resta fuori il caso in cui è definita "male", nel senso che è definita, ma discontinua in  $L$ . Una soluzione in tal caso, di uso pratico piuttosto farfugioso, è espresa dal seguente

### TEOREMA 3 ( pressoché inutilizzabile, ma vero! )

Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = L$  ed esista  $\eta > 0$ :  $f(u) \neq L$   $\forall u \neq u_0$  verificante  $|u - u_0| < \eta$ .

Sia poi  $g: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$ , tale che

$$\lim_{y \rightarrow L} g(y) = M \neq g(L)$$

Allora, se  $x_0 \in \text{dom } g(f(x))$ , si ha  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = M$

#### Dimostrazione

In tal caso, i punti "proibiti" nei quali  $f(u)=L$  vengono esclusi per ipotesi da tutto l'interno  $B_\eta(x_0)$ , con l'eventuale eccezione del punto  $x_0$ , che verrà comunque soppresso dalla definizione stessa di  $\lim_{u \rightarrow u_0} g(f(u))$

Dunque, dentro  $B_\eta(x_0)$  non ci sono altri punti, a parte al più  $x_0$ , nei quali  $f(u)=L$ , e ne segue che i problemi segnalati nel controesempio, e derivanti dalla condizione  $y \neq L$  per la validità delle stime  $|g(y)-M|<\varepsilon$ , non hanno ragione d'essere quando si fa  $y=f(u)$ .

c.v.d.

Questa ipotesi è d'impiego assai difficile, in generale. Occorre determinare tutte le soluzioni di  $f(u) = L$ , e verificare che  $u_0$  è insieme rispetto all'insieme di tali soluzioni. Di regole provare che  $g$  è continua in  $L$ , o non definita in  $L$ , è cosa più facile.

Un'ultima osservazione sul fatto che le condizioni precedenti sono in certo senso anche necessarie e che il limite della funzione composta esiste.

Supponiamo che non si verifichi nessuna delle ipotesi dei tre teoremi validi. Allora  $g$  è definita e discontinua per  $y=L$  ed  $f$  assume infinite volte il valore  $L$ , ma non vale costantemente  $L$  in un intorno (eventualmente "bucato") di  $u_0$ .

In tal caso si verifica esattamente lo scenario del controesempio: la funzione composta farà costantemente  $g(L)$  su tali infiniti punti in ogni intorno di  $u_0$ , mentre tenderà ad  $M \neq g(L)$  in tutti gli altri, per effetto del "teorema" iniziale, che è vero se  $f(u) \neq L$ .

Se infine  $f(u) \equiv L$  in  $B_{\eta}(u_0) - \{u_0\}$  allora  $g(f(u)) \equiv g(L)$  in  $B_{\eta}(u_0) - \{u_0\}$  e dunque in tale "strano" caso  $\lim_{u \rightarrow u_0} g(f(u)) = g(L)$ , comunque "diverso" dal valore "previsto"  $M$ .

**CONCLUSIONE:** Come per molte proprietà basiliari dell'Analisi, il cambio di variabile nei limiti non è un diritto civile: è un **TEOREMA** (tre, nel nostro caso) valido solo sotto opportune ipotesi.

In pratica, basta definire con cura le funzioni componenti e verificare la continuità di  $g$  e il fatto che essa non sia definita nel punto sul quale è noto il suo limite.

Come esempio di applicazione rilevante, dimostriamo il teorema sulla derivazione di funzioni composte in  $\mathbb{R}$ .

$$\frac{g(f(u)) - g(f(u_0))}{u - u_0} = \begin{cases} \frac{g(f(u)) - g(f(u_0))}{f(u) - f(u_0)} \cdot \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} & \text{se } f(u) \neq f(u_0) \\ 0 & \text{se } f(u) = f(u_0) \end{cases}$$

Consideriamo il limite per  $u \rightarrow u_0$  nelle due regioni.

Se  $f(u) = f(u_0)$ , il

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(f(u)) - g(f(u_0))}{f(u) - f(u_0)} = \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0}$$

può essere calcolato con il cambio di variabile  $y = f(u)$  perché la funzione "più esterna" è

$$\frac{g(y) - g(f(u_0))}{y - f(u_0)}$$

che non è definita in  $y = f(u_0)$  (che è ciò a cui tende  $f(u)$  quando  $u \rightarrow u_0$ ), e dunque

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(f(u)) - g(f(u_0))}{f(u) - f(u_0)} = \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} = g'(f(u_0)) f'(u_0)$$

Resta il problema di stabilire cosa accade sull'altro sottoinsieme del dominio,  $\{u : f(u) \neq f(u_0)\}$ : su di esso il rapporto incrementale di  $g(f(u))$  è identicamente nullo ed ha limite 0.

Osserviamo che, se  $f(u_0) \neq 0$ , per la permanenza del segno il rapporto incrementale  $\frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0}$  è non nullo in tutto un "intorno"

$B_{\delta}(u_0) - \{u_0\}$ , nel quale dunque  $f(u) \neq f(u_0)$ . Ne segue che se  $f'(u_0) \neq 0$ , l'insieme  $\{u : f(u) = f(u_0)\}$  dista almeno  $\delta$  da  $u_0$ , ed il comportamento di  $f$  su di esso non influenza sul limite in  $u_0$ : si usa allora il teorema 3.

Se invece  $f'(u_0) = 0$ , allora  $g(f(u_0)) f'(u_0) = 0$  e dunque i limiti sui due insiemi  $\{f(u) \neq f(u_0)\}$  e  $\{f(u) = f(u_0)\}$  sono entrambi nulli (e quindi uguali fra loro) da cui infine risulta

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \frac{g(f(u)) - g(f(u_0))}{u - u_0} = g'(f(u_0)) f'(u_0) = 0$$

□

Ecco dimostrata la più potente formula del calcolo differenziale!

Ci sono prove più dirette (da G. Prodi: Analisi Matematica I Bancheri).

Un esempio, meno notabile e più semplice, è il

$$\lim_{(u,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos \sqrt{u^2+y^2}}{u^2+y^2}$$

che vale  $\frac{1}{2}$ , perché la funzione è composta da:

$$f(u,y) = \sqrt{u^2+y^2}$$

che è la norma in  $\mathbb{R}^2$ , e tende a  $L=0$   
se il vettore  $(u,y)$  tende a  $(0,0)$   
(per definizione di convergenza)

e da

$$g(t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \quad \text{che NON È DEFINITA in } L=0 \\ \text{ma che converge in tale punto a } \frac{1}{2}$$

In questo caso è stato adoperato, senza pena, il teorema 2.

Per tornare al "vecchio stile" si potrebbe ragionare così:

$$\lim_{u,y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{u^2+y^2}}{\sqrt{u^2+y^2}} \xrightarrow[t=\sqrt{u^2+y^2}]{} ? \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

Il punto interrogativo serve a ricordare che l'uguaglianza dei due limiti è di solito FALSA, ma (ed è qui che occorre negliersi) in tal caso è vera perché la funzione nel limite e secondo membro non è definita (Th. 2) [o è continua (Th. 1) o infine (discontinua) è definita e discontinua, ma quelle più interne, che definisce la variabile  $t$ , non assume mai il valore proibito  $L$  vicino ad  $0$  se non, al più, in  $0$  stesso]!

Tutto sommato, per cambiare variabile decentemente ci vuole la stessa fatiga che per farlo scorrettamente. Va comunque riconosciuto che gli esempi di funzioni discontinue hanno un che di certificabile, di "puramente matematico" e "poco pratico": ciò spiega adeguatamente la ragione per la quale tale questione viene di solito ignorata.

I risultati precedenti chiariscono completamente la situazione: ciascuno decide per sé per il meglio!

AN.1.4

# SPAZI METRICI E DISTANZE

I concetti di convergenza, di continuità e di limite, nati prima del XX secolo, in cui gli studi di topologia sono esplosi, hanno preso le mosse da quello di distanza. Prima, dunque, di introdurli negli insiemi o per le funzioni oggetto di questo corso, le funzioni fra spazi euclidei, dovremo approfondire un aspetto delle strutture euclidean che è stato alquanto trascurato nello studio dell'algebra lineare. Anche se faremo sempre riferimento ad  $\mathbb{R}^N$ , i concetti che seguiamo sono molto generali e, in realtà, non richiedono neppure la struttura lineare: quella di spazio vettoriale.

**DEFINIZIONE** Un insieme (arbitrario) si dice SPAZIO METRICO se esiste  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , detta METRICA o DISTANZA su  $X$ , tale che:

- 1)  $d(u, y) \geq 0 \quad \forall u, y \in X$
- 2)  $d(u, y) = 0$  se e solo se  $u = y$
- 3)  $d(u, y) = d(y, u) \quad \forall u, y \in X$
- 4)  $d(u, y) \leq d(u, z) + d(z, y) \quad \forall u, y, z \in X$

In sostanza:

- Per ogni coppia di punti c'è definita una distanza
- È sempre maggiore o uguale a zero
- È uguale a zero se e solo se i punti coincidono
- È indipendente dall'ordine cui si considerano i punti
- Vale la diseguaglianza triangolare originale di Euclide: nel triangolo di vertici  $u, y, z$ , ogni lato è minore o uguale alla somma degli altri due.

**ESEMPIO:**  $\mathbb{R}$  è uno spazio metrico se si pone  $d(u, y) = |u - y|$ .

Le verifiche sono immediate, e suggeriscono di investigare sul legame fra spazi nonuati e in particolare euclidei, e spazi metrici.

**TEOREMA** Sia  $X$  uno spazio normato. Allora  $d(u, y) = \|u - y\|$  definisce su  $X$  una distanza.

Dunque, TUTTI GLI SPAZI NORMATI SONO METRICI.

### Dimostrazione

Ricordiamo che su  $X$  è definita una norma, verificante

- $\|u\| \geq 0$
- $\|u\| = 0 \iff u = 0$
- $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
- $\|u+y\| \leq \|u\| + \|y\|$

da cui

- $d(u, y) = \|u - y\| \geq 0 \quad \forall u, y \in X$
- $d(u, y) = \|u - y\| = 0 \iff u - y = 0 \Rightarrow u = y$
- $d(u, y) = \|u - y\| = \|\lambda_1(y - u)\| = d(y, u)$
- $d(u, z) = \|u - z\| = \|u - y + y - z\| \leq \|u - y\| + \|y - z\| = d(u, y) + d(y, z)$   
c.v.d

Dunque  $\mathbb{R}^n$  è metrico e la distanza fra due punti  $u, y \in \mathbb{R}^n$  è

$$d(u, y) = \|u - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - y_i)^2}$$

che è l'ordinaria distanza fra due punti calcolata iterando il teorema di Pitagore.

Il fatto di non avere usato da nessuna parte le somme o il multiplo scalare per definire la metrice, e dunque lo spazio metrico, fa sì che, pur presentando stesse analogie col concetto di norma e i relativi spazi, essi siano molto più generali. In effetti:

**TEOREMA** Se  $X$  è metrico, con distanza  $d$ , e  $Y \subseteq X$ , allora  $Y$  è metrico con la stessa distanza.

**ESEMPIO:** La superficie della sfera unitaria  $S^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\|=1\}$  è uno spazio metrico con l'ordinaria distanza in  $\mathbb{R}^n$ . Il motivo per la notazione  $S^{n-1}$  è da ricercarsi nel fatto che, ad esempio, la

sfera in  $\mathbb{R}^3$  è una superficie a due dimensioni; quelle di  $\mathbb{R}^2$ , le circonferenze unitarie, è una curva di una dimensione, "sempre" una di meno. Per fare un discorso "pulito", occorre la Geometria Differenziale, me credo ci si possa accontentare.

Una volta capito cos'è una distanza, è immediato definire le sfere "cave", come quelle appena considerate, o "piene".

**DEFINIZIONE:** Per ogni  $u \in \mathbb{R}^n$  e  $p \geq 0$  si definisce

$$B(u_0, p) \equiv B_p(u_0) \equiv \{u \in \mathbb{R}^n : |u - u_0| < p\}$$

che verrà detta palla aperta di centro  $u_0$  e raggio  $p$ .

la palla chiusa include anche la superficie

$$\overline{B}(u_0, p) = \{u \in \mathbb{R}^n : |u - u_0| \leq p\}$$

la sfera, infine, include solo la superficie, ed è quella di Euclide

$$S(u_0, p) = \{u \in \mathbb{R}^n : |u - u_0| = p\}$$

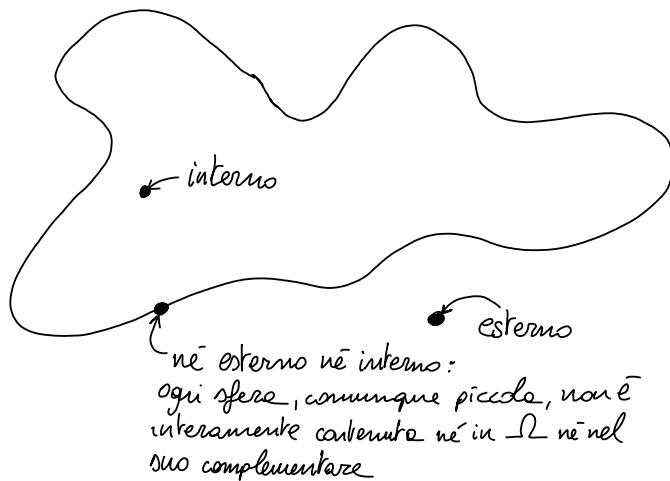
la palla aperta verrà anche detta intorno di centro  $u_0$  e raggio  $p$ .

## PUNTI INTERNI, ESTERNI E DI FRONTERA. INSIEMI APERTI E CHIUSI

**DEFINIZIONE** Dato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , il punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  si dice **INTERNO** ad  $\Omega$  se  $\exists p > 0 : B(x_0, p) \subseteq \Omega$  e si dice **ESTERNO** se  $\exists p > 0 : B(x_0, p) \cap \Omega \neq \emptyset$  cioè, se è interno al complemento di  $\Omega$ .

**ATTENZIONE:**  $x_0$  INTERNO ad  $\Omega$  non vuol dire (solo) che vi appartiene: deve appartenere con tutta una sfera, opportuna, di centro  $x_0$ . Analogamente, un punto ESTERNO non solo non sta in  $\Omega$  ma non ci stanno neppure tutti i punti abbastanza vicini.

**DEFINIZIONE** Un insieme  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice **APERTO** se ogni suo punto è interno. Dunque  $\Omega$  è aperto se  $\forall x_0 \in \Omega \exists p > 0 : B(x_0, p) \subseteq \Omega$



Indipendentemente dal fatto che appartengano o meno ad  $\Omega$ , ci sono punti che non sono né interni né esterni. Ad esempio, se  $x_0 = 0$  e  $\Omega = [0, 1]$ , qualunque sfera  $B(0, p)$  conterrà numeri positivi e numeri negativi e dunque non sarà tutta contenuta né in  $\Omega$  né nel suo complementare.

**DEFINIZIONE** Dato  $\Omega$ , un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  si dice **PUNTO DI FRONTERA** di  $\Omega$  se  $\forall p > 0 \exists \bar{x} \in \Omega$  e  $\bar{x} \notin \Omega : \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in B(x_0, p)$

**IN SOSTANZA:** Ogni sfera interseca sia  $\Omega$  sia il suo complementare. L'insieme di tali punti si chiama - FRONTIERA di  $\Omega$ , e si denoterà con  $\partial\Omega$ .

**NOTA:** Ogni punto interno ad  $\Omega$  vi appartiene, perché è il centro di una sfera tutta contenuta in  $\Omega$ .

Ogni punto esterno non appartiene ad  $\Omega$ , perché è il centro di una sfera che non lo interseca.

Un punto che non è né interno né esterno è di frontiera e nulla può dirsi sul fatto che appartenga a  $\Omega$  o no. Ad esempio, se  $\Omega = [0, 1]$ , la sua frontiera è costituita da 0 e 1, e  $0 \in \Omega$  mentre  $1 \notin \Omega$ .

Poiché i ruoli di  $\Omega$  e del suo complementare sono intercambiabili nella definizione di punto di frontiera, ne segue che

**TEOREMA** I punti di frontiera di  $\Omega$  lo sono anche per il suo complementare, e viceversa.

**DEFINIZIONE**  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  verrà detto CHIUSO se contiene le proprie frontiere, cioè se  $\partial\Omega \subseteq \Omega$ .

Esempio:  $\Omega = [0, 1]$  è chiuso perché contiene le sue frontiere  $\{0, 1\}$ .

Un'interessante proprietà è quella seguente

**TEOREMA** Se  $\Omega$  è aperto, il suo complementare è chiuso. Se  $\Omega$  è chiuso, il suo complementare è aperto

### Dimostrazione

Se  $\Omega$  è aperto, ogni suo punto è interno e dunque ogni punto delle sue frontiere non appartiene ad  $\Omega$  e, dunque, appartiene a  $C\Omega$ .

Di conseguenza, poiché le frontiere di  $\Omega$  coincidono con quelle del complementare  $C\Omega$ , ne segue che ogni punto delle frontiere del complementare non può appartenere ad  $\Omega$ , e dunque è contenuto nel complementare, da cui la tesi. Scambianolo i ruoli di  $\Omega$  e  $C\Omega$ , si provi il viceversa.

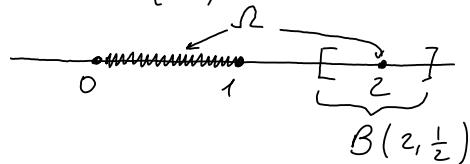
## PUNTI D'ACCUMULAZIONE E PUNTI ISOLATI

**DEFINIZIONE** Dato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  si dice isolato se

$$\exists \rho > 0 : B(x_0, \rho) \cap \Omega = \{x_0\}$$

**NOTA:**  $\{x_0\} = B(x_0, \rho) \cap \Omega \subseteq \Omega$ , e dunque  $x_0 \in \Omega$

**ESEMPIO:**  $\Omega = [0, 1] \cup \{2\}$ . Allora  $x_0 = 2$  è isolato per  $\Omega$  perché  $B(2, \frac{1}{2}) \cap \Omega = \{2\}$



I punti di  $\Omega$  che non sono isolati devono verificare le seguenti

**DEFINIZIONE:** Dato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  sarà detto **PUNTO DI ACCUMULAZIONE** di  $\Omega$  (o per  $\Omega$ ) se

$$\forall \delta > 0 \exists n \in \Omega \cap B(x_0, \delta) \text{ con } n \neq x_0$$

**NOTA:** apparentemente, sembra che le due definizioni siano l'una la negazione dell'altra e, in effetti, lo sono se si parla dei punti  $x_0 \in \Omega$ . Va però notato che, mentre i punti isolati appartengono ad  $\Omega$  per definizione, i punti di accumulazione possono benissimo non appartenere all'insieme. Dunque:

I punti di  $\Omega$  sono o isolati o di accumulazione

**NOTA:** Che legame c'è fra la definizione di punto di frontiera e quella di punto di accumulazione? Poco!

- 1) Tutti i punti interni sono di accumulazione. Infatti, qualunque sfera centrale in  $\Omega$  interseca le sfere tutte contenute in  $\Omega$  che esiste perché il punto è interno, e in tale intersezione ci sono infiniti punti di  $\Omega$ .

2) I punti isolati non sono di accumulazione, ma sono di frontiera

3) Preso  $\Omega = [0, 1]$ ,  $x_0 = 1$  è di accumulazione perché ogni intervallo centrale in esso interseca  $\Omega$  in un intervallo, ed è di frontiera.

4) I punti estremi non sono di accumulazione: tutte le sfere di raggio abbastanza piccolo non intersecano  $\Omega$

In conclusione:

- I punti interni sono di accumulazione
- I punti esterni non sono di accumulazione
- I punti di frontiera possono essere sia di accumulazione sia isolati.

La proprietà più illuminante dei punti di accumulazione, strettamente legata al concetto di limite è

**TEOREMA** Sia  $x_0$  un punto di accumulazione per  $\Omega$ . Allora esistono  $x_n \in \Omega$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  tali che  $x_n \rightarrow x_0$

**IN SOSTANZA** ogni punto di accumulazione può essere approssimato con punti dell'insieme

### DIMOSTRAZIONE

Poiché  $x_0$  è di accumulazione, scelto  $\delta = \frac{1}{n}$ ,  $\exists x_n \neq x_0, x_n \in \Omega$  e  $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ , e cioè  $x_n \in B(x_0, \frac{1}{n})$ .

Per provare che  $\lim x_n = x_0$  basta osservare che, per ogni  $\epsilon > 0$ , per ogni  $n > N > \frac{1}{\epsilon}$ , si ottiene  $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$  c.v.d.

In conclusione, i punti di accumulazione sono esattamente quelli approssimabili coi punti dell'insieme, che vi appartengano o no. Quando bisognerà definire il limite di una funzione sarà meglio ricordarsene.

In realtà, quanto appena detto può essere notevolmente raffinato.  
 In effetti, la proprietà di essere approssimabile con punti dell'insieme non caratterizza i punti di accumulazione. Se, infatti,  $x_0$  è isolato per  $\mathcal{L}$ , e dunque vi appartiene, nulla vieterebbe di approssimarla con la successione costante  $x_n = x_0 \forall n$ , che certamente converge ad  $x_0$ .  
 Cosa hanno in più i punti di accumulazione? La dimostrazione precedente costruisce la successione  $x_n$ , convergente ad  $x_0$ , con la proprietà addizionale che  $x_n \neq x_0$ , cosa impossibile se  $x_0$  è un punto isolato, perché tutti i punti abbastanza vicini ad esso e ad esso distanti non appartengono ad  $\mathcal{L}$ . Concludendo:

Ogni punto di accumulazione di  $\mathcal{L}$  può essere approssimato con altri punti di  $\mathcal{L}$

Concludiamo con due definizioni:

**DEFINIZIONE** Dato  $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^n$ , si denota con  $\mathring{\mathcal{L}}$  l'insieme dei suoi punti interni. Viene anche detto l'INTERNO di  $\mathcal{L}$ .

**DEFINIZIONE** Dato  $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^n$ , si definisce la CHIUSURA di  $\mathcal{L}$ , e si denota con  $\overline{\mathcal{L}}$ , l'unione di  $\mathcal{L}$  e delle sue frontiere.

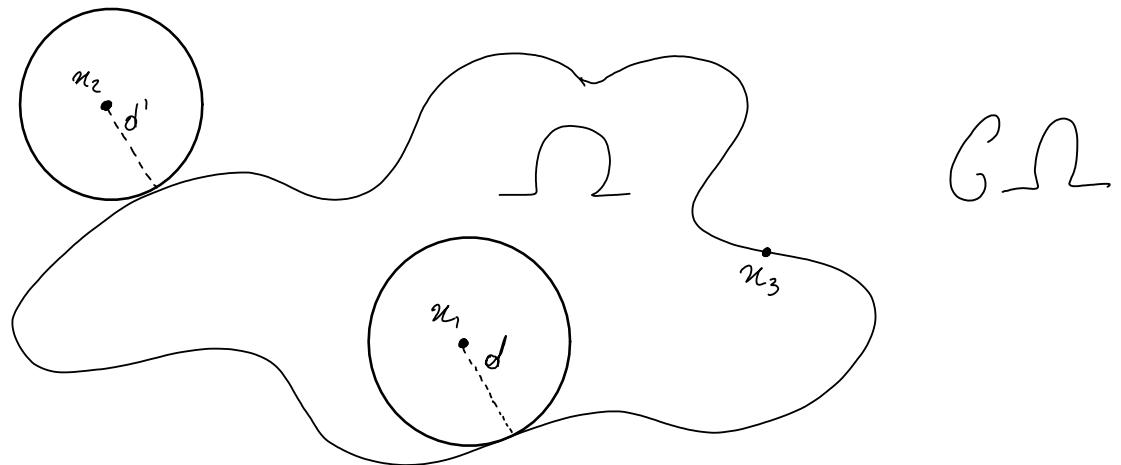
**NOTA:** La chiusura  $\overline{\mathcal{L}}$  di  $\mathcal{L}$  contiene le sue frontiere, che può essere formata tanto da punti isolati, che per definizione sono già punti di  $\mathcal{L}$ , quanto da punti di accumulazione di  $\mathcal{L}$ . Ne segue che un modo alternativo di definire la chiusura di  $\mathcal{L}$  è di definirle come l'unione di  $\mathcal{L}$  e dei suoi punti di accumulazione.

I punti della chiusura di  $\mathcal{L}$  vengono detti anche PUNTI ADERENTI di  $\mathcal{L}$ : sono tutti i punti limite di successioni convergenti di punti di  $\mathcal{L}$ . Può essere di qualche utilità il concetto di DISTANZA di un punto da un insieme. Premesso che non è una distanza nel senso degli spazi metrici, essa può servire a visualizzare i concetti sin qui espressi.

**DEFINIZIONE** Dati  $u_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  si definisce DISTANZA di  $u_0$  da  $\Omega$  come il numero  $d(u_0, \Omega) = \inf_{u \in \Omega} d(u, u_0)$ , ove  $d(u, u_0)$  è l'ordinaria distanza in  $\mathbb{R}^n$

Se  $\Omega$  è non vuoto, e contiene  $\bar{u}$ ,  $d(u_0, \Omega) \leq |\bar{u} - u_0|$  ed è dunque finita. È anche non negativa.

Osserviamo, senza fare tutte le verifiche che  $u_0$  è esterno ad  $\Omega$  se e solo se  $d(u_0, \Omega) > 0$ , è interno ad  $\Omega$  se e solo se  $d(u_0, \partial\Omega) > 0$ , mentre appartiene a  $\bar{\Omega}$  se e solo se  $d(u_0, \Omega) = 0$  e infine appartiene a  $\exists\Omega$  se e solo se  $d(u_0, \Omega) = 0$  e  $d(u_0, \partial\Omega) = 0$ .



$u_1$  è interno:  $d(u_1, \partial\Omega) = d$

$u_2$  è esterno:  $d(u_2, \Omega) = d'$

$u_3$  è di frontiera:  $d(u_3, \Omega) = d(u_3, \partial\Omega) = 0$

Le definizioni stesse di punto interno, esterno e di frontiera sono delle riformulazioni delle tre condizioni precedenti. Ad esempio, se  $u_0$  è interno esiste una sfera  $B(u_0, \delta) \subseteq \Omega$ , sicché in essa non ci sono punti di  $\partial\Omega$  e la distanza di  $u_0$  da essi deve essere almeno  $\delta$ , e dunque l'estremo inferiore di tali distanze dev'essere maggiore o uguale a  $\delta$ .

AN.1.5

## CONTINUITÀ

L'estensione dei concetti e dei risultati della teoria delle funzioni continue al caso del dominio e del codominio vettoriali non presenta nessuna difficoltà, purché si riformulino le definizioni evitando con cure tutte le disuguaglianze-più di senso per i vettori e utilizzando in loro luogo le distanze prime introdotte.

La definizione classica di continuità per funzioni  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  viene spesso posta con

$$\boxed{\begin{aligned} f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ è continua in } x_0 \in \Omega \text{ se e solo se} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom } f \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \end{aligned}}$$

impraticabile se dominio e codominio sono vettoriali. Se, però, utilizziamo la formulazione equivalente

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom } f \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

non c'è più alcuna compatibilità con i vettori, e dobbiamo rimpiazzare i valori assoluti in  $\mathbb{R}$  con le norme corrispondenti.

**DEFINIZIONE:** Una funzione  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , sarà detta continua in  $x_0 \in \Omega$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom } f \quad \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon$$

**NOTA:** Si possono omettere le indicazioni sulle norme da impiegare, in quanto  $|x - x_0|$  usa certamente la norma del dominio, mentre  $\|f(x) - f(x_0)\|$  si riferisce certamente al codominio.

L'intero corpus dei risultati elementari sulle funzioni continue da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  si estende senza alcuna modifica apparente al caso di  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , con l'unica accortezza di utilizzare in ogni spazio, dominio o codominio che sia, le proprie norme: il valore assoluto in  $\mathbb{R}$ , il modulo complesso in  $\mathbb{C}$  e la norma euclidea negli spazi  $\mathbb{R}^n$  ( $\circ \mathbb{C}^n$ ).

A titolo d'esempio, proviamo il teorema della permanenza del segno che, occupandosi di funzioni positive, è limitato alle sole funzioni a valori scalari.

### TEOREMA (della permanenza del segno):

Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f(x_0) > 0$  ed  $f$  è continua in  $x_0$ , allora

$$\exists \delta > 0 : \forall u \in \Omega \cap B(x_0, \delta) \quad f(u) > 0$$

**IN SOSTANZA:** una funzione continua positiva (strettamente) in un punto resta tale in tutti i punti del dominio abbastanza vicini ad esso.

**NOTA:** Se si sostituisce  $f$  con  $-f$  si nota che l'analogo teorema vale se  $f(x_0) < 0$

### Dimostrazione

Dalle continuità di  $x_0$ , scelto  $\bar{\epsilon} = f(x_0)$  segue che

$$\exists \bar{\delta} > 0 : \forall u \in \Omega \quad |u - x_0| < \bar{\delta} \Rightarrow |f(u) - f(x_0)| < \bar{\epsilon}$$

Visto che  $f$  è a valori scalari, l'ultima diseguaglianza può scriversi nel solito modo  $f(x_0) - \bar{\epsilon} < f(u) < f(x_0) + \bar{\epsilon}$

e per come è stato scelto  $\bar{\epsilon}$ , si ha infine

$$\forall u \in \Omega, |u - x_0| < \bar{\delta} \Rightarrow f(u) > 0 \quad \text{c.v.d.}$$

Nessuna differenza con le prove nel caso scalare: sono formalmente identiche, e l'unica differenza sostanziale riguarda le norme da usare nel dominio, che saranno quelle euclidiane.

Un altro esempio, illuminante sul motivo di alcune scelte di assiomi per le norme, è il classico teorema sulle continuità delle somme.

**TEOREMA:** Se  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  e  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , sono continue in  $x_0 \in \Omega$ , allora  $f+g$  è continua in  $x_0$ .

### Dimostrazione

Occorre provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall u \in \Omega |u - u_0| < \delta \Rightarrow |f(u) + g(u) - (f(u_0) + g(u_0))| < \varepsilon$$

Poiché  $|f(u) + g(u) - (f(u_0) + g(u_0))| = |(f(u) - f(u_0)) + (g(u) - g(u_0))|$

dalle diseguaglianze triangolare ne segue che

$$|f(u) + g(u) - (f(u_0) + g(u_0))| \leq |f(u) - f(u_0)| + |g(u) - g(u_0)|$$

Fissato allora  $\varepsilon > 0$  ad arbitrio, e considerato  $\varepsilon/2$ , dalla continuità di  $f$  e di  $g$  in  $u_0$  segue che:

$$\exists \delta_1 > 0 : \forall u \in \Omega |u - u_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(u) - f(u_0)| < \varepsilon/2$$

$$\exists \delta_2 > 0 : \forall u \in \Omega |u - u_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(u) - g(u_0)| < \varepsilon/2$$

Infine, posto  $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$ , dalla diseguaglianza provata prima segue che  $|f(u) + g(u) - (f(u_0) + g(u_0))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$  per tutti gli  $u \in \Omega$  per i quali  $|u - u_0| < \delta$

c.v.d.

La diseguaglianza triangolare per le norme sostituisce l'analoghe diseguaglianze per il valore assoluto, e la dimostrazione è rimasta identica. Vediamo altri due esempi

**TEOREMA** Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a_n, u_0 \in \Omega$ ,  $a_n \rightarrow u_0$ . Allora, se  $f$  è continua in  $u_0$ ,  $f(a_n) \rightarrow f(u_0)$

### Dimostrazione

Occorre provare che  $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu: \forall n > \nu |f(a_n) - f(u_0)| < \varepsilon$ .

Poiché  $f$  è continua in  $u_0$ , scelto lo stesso  $\varepsilon \exists \delta > 0 : \forall u \in \Omega |u - u_0| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(u_0)| < \varepsilon$ . Volendo impiegare tale diseguaglianza con  $u = a_n$ , occorre dunque provare che:

1)  $a_n \in \Omega$  (che vale per ipotesi)

2)  $|a_n - u_0| < \delta$  (che segue dall'ipotesi  $a_n \rightarrow u_0$ , per tutti gli  $n$  maggiori di un opportuno  $\nu$ ).

c.v.d.

L'idea di utilizzare il "s" della funzione più "esterna" come "ε" per quelle più interne funzione ottimamente anche nell'ultimo esempio.

### TEOREMA (continuità delle funzioni composte):

Siano  $f: \Omega \rightarrow \Sigma$  e  $g: \Sigma \rightarrow \mathbb{H}$  ove  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{R}^p$ . Siano inoltre  $f$  continua in  $u_0 \in \Omega$ , e  $g$  continua in  $g(f(u_0)) \in \Sigma$ . Allora, la funzione composta  $h(u) = g(f(u))$  è continua in  $u_0$ .

#### Dimostrazione

Osserviamo che  $h$  è definita in  $\Omega$  perché  $\forall u \in \Omega, f(u) \in \Sigma = \text{dom } g$ .  
Occorre provare che  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall u \in \Omega$

$$|u - u_0| < \delta \Rightarrow |g(f(u)) - g(f(u_0))| < \varepsilon$$

Dato che  $g$  è continua in  $f(u_0)$  ne segue che, scelto lo stesso  $\varepsilon > 0$

$$\exists \sigma > 0 : \forall y \in \Sigma \quad |y - f(u_0)| < \sigma \Rightarrow |g(y) - g(f(u_0))| < \varepsilon \quad (1)$$

Come già visto nel teorema precedente, per utilizzare le diseguaglianze di continuità appena scritte occorre porre  $y = f(u)$ , e dunque occorre verificare che

- 1)  $f(u) \in \text{dom } g = \Sigma$ , vero per ipotesi
- 2)  $|f(u) - f(u_0)| < \sigma$

Dalle continuità di  $f$  in  $u_0$ , scelto tale  $\sigma$ , esistere  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $u \in \Omega$   $|u - u_0| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(u_0)| < \sigma$  e, da (1), per  $y = f(u)$

segue  $|g(f(u)) - g(f(u_0))| < \varepsilon$

c.v.d.

Un risultato sulle funzioni continue vettoriali, che non deriva da quello per le funzioni scalari è il seguente.

**TEOREMA** Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  e siano  $f_1, \dots, f_p$  le funzioni, definite su  $\Omega$  a valori scalari tali che  $f(u) = (f_1(u), f_2(u), \dots, f_p(u))$ . Allora,  $f$  è continua in  $u_0 \in \Omega$  se e solo se le sono tutte le funzioni componenti  $f_i$ .

## Dimostrazioni

La dimostrazione segue immediatamente dalle diseguaglianze, valide per  $q \in \mathbb{R}^p$

$$|q_i| \leq |q| \quad \forall i = 1 \dots p$$

e

$$|q| \leq \sqrt{p} \max_{1 \dots p} |q_i|$$

Infatti

$$|f_i(u) - f_i(u_0)| < |f(u) - f(u_0)|$$

e

$$|f(u) - f(u_0)| \leq \sqrt{p} \max_{1 \dots p} |f_i(u) - f_i(u_0)|$$

da cui:

C.N.  $|f(u) - f(u_0)| < \epsilon \Rightarrow |f_i(u) - f_i(u_0)| < \epsilon$

C.S.  $|f_i(u) - f_i(u_0)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{p}} \quad \forall i \Rightarrow |f(u) - f(u_0)| < \epsilon$

che è lo stesso

c.v.d.

AN\_1.6

## LIMITI: LE DEFINIZIONI

Una teoria completa e unificata di tutto ciò che abbia a che fare coi limiti è possibile, e' stata proposta da Mauro Picone nei primi decenni del secolo scorso ("variabili ordinate"), e poi riproposta con altro nome da altri ("filtri"). Include anche gli integrali, come limiti sulle partizioni, e' molto elegante, ma e' davvero troppo per un corso di 6 crediti.

Gia' i limiti di funzioni e successioni, includendo tutti i casi, sono diverse definizioni (finiti e infiniti, in un punto e all'infinito, destri e sinistri, ... , in tutte le combinazioni possibili).

In questa nota vengono offerti dei suggerimenti per orientarsi nelle notevoli varietà di definizioni di limite che si presentano nell'Analisi e che, spesso, risultano strumenti indispensabili nella teoria.

Ricordando che i limiti, oltre ad essere un modello naturale per tutti i processi di approssimazione, hanno offerto (un secolo dopo) una prospettiva di soluzione alle distinte fra Newton e Berkeley sulla contraddizione presente nella definizione di derivata (dell'epoca): non si puo' - argomentava Berkeley - assumere  $n \neq n_0$  per scrivere il rapporto incrementale, come per la funzione  $n \rightarrow n^u$ ,

$$\frac{n^u - n_0^u}{n - n_0} = \frac{(n - n_0) \sum_{k=0}^{u-1} n_0^k n^{u-1-k}}{n - n_0} = \sum_{k=0}^{u-1} n_0^k n^{u-1-k}$$

e, un istante dopo, porre  $n = n_0$  nell'espressione così ottenuta per ottenere la derivata  $n n_0^{u-1}$ .

L'obiezione di Berkeley era molto solida. Per fortuna Newton non si diede mai per vinto, e così l'Analisi poté svilupparsi.

Le due soluzioni per aggirarla sono state (finora):

- 1) LA TEORIA DEI LIMITI: non si pone  $n = n_0$ , si fa tendere  $n$  a  $n_0$ , mantenendo sempre  $n \neq n_0$
- 2) L'ANALISI NON STANDARD (Robinson): si definiscono gli infinitesimi  $\varepsilon$  e si pone

$$f'(n_0) = \frac{1}{\varepsilon} [f(n_0 + \varepsilon) - f(n_0)]$$

I libri di Analisi di Vieri Benci sono raccomandati per approfondire questo approccio.

Prima di presentare in modo sintetico le varie definizioni di limite, è necessaria qualche considerazione sul caso forse più importante, quello che risolve la controversia Newton - Berkeley: il limite finito al finito (ossia in un punto no).

La questione è: "In quali punti si può definire il limite in un punto di una funzione?" La risposta è che il punto deve essere approssimabile con punti su cui si possa calcolare la funzione, ma tutti distinti dal punto (il punto proibito dell'obiezione di Berkeley in cui si calcola il limite).

Occorre scartare i punti esterni al dominio della funzione, perché non ci si può avvicinare ad essi, ed al di sotto di un certo limite (il raggio delle sfere tutte fuori dal dominio); occorre scartare, però, anche i punti isolati, in quanto tutte le sfere abbastanza piccole intersecano il dominio della funzione solo nel punto proibito, quello che non si vuole considerare.

**DUNQUE** il problema del limite si può porre solo nei punti di accumulazione del dominio.

## GENERATORE DI DEFINIZIONI DI VARI LIMITI

$$\lim_{A} f(u) = B$$

significa

$$\forall \epsilon \exists \delta \forall u \in \text{dom } f \ A' \Rightarrow B'$$

ove  $A, A'$  e  $B, B'$  si ricavano dalle tabelle

$\text{dom } f \subseteq$	$A$	$A'$
$\mathbb{R}^n$ $n \geq 1$	$u \rightarrow u_0$ $u \rightarrow \infty$	$u \neq u_0 \mid u - u_0 \mid < \delta$ $ u  > \delta$
$\mathbb{R}$ (solitario)	$u \rightarrow u_0^+$ $u \rightarrow u_0^-$ $u \rightarrow +\infty$ $u \rightarrow -\infty$	$u_0 < u < u_0 + \delta$ $u_0 - \delta < u < u_0$ $u > \delta$ $u < -\delta$

(notare le diseguaglianze strette  $u > u_0$  e  $u < u_0!$ ) e

Codominio	$B$	$B'$
$\mathbb{R}^p$ $p \geq 1$	$L \in \mathbb{R}^p$ $\infty$	$ f(u) - L  < \epsilon$ $ f(u)  > \epsilon$
$\mathbb{R}$ (solitario)	$+\infty$ $-\infty$	$f(u) > \epsilon$ $f(u) < -\epsilon$

**NOTA:** i limiti  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty$  hanno senso anche per  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ : ad esempio,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  in quanto  $|\frac{1}{n}| < \varepsilon \Leftrightarrow |n| < \frac{1}{\varepsilon}, n \neq 0$ . Le definizioni precedenti includono, nella sostanza, anche i limiti di successioni, se si pone  $a_n = f(n)$ ,  $\mathbb{N} = \text{dom } f \subseteq \mathbb{R}$ , e se si considera il  $\lim a_n$  come se fosse  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ , in tutti i casi di convergenza e divergenza, a valori scalari o vettoriali.

**NOTA:**  $C = \mathbb{R}^2$ , per tutti i limiti

**Esempi:**

1) Sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Allora

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = \gamma_0 \in \mathbb{R}^3$$

vuol dire che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall t \in [a, b] \\ |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma_0| < \varepsilon$$

mentre

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \gamma(t) = \infty$$

vuol dire

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in [a, b] \\ t_0 - \delta < t < t_0 + \delta \Rightarrow |\gamma(t)| > \varepsilon$$

2)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow C$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty$$

vuol dire che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall u \in \text{dom } f : |u| > \delta \Rightarrow |f(u)| > \varepsilon$$

(la prima norma è in  $\mathbb{R}^3$ , mentre la seconda è il modulo nei complessi)

mentre

$$\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = L \in \mathbb{C}$$

vuo dire che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall u \in \text{dom } f, u \neq u_0, |u - u_0| < \delta \Rightarrow |f(u) - L| < \varepsilon$$

3)  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$$

significa

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad |z| > \delta \Rightarrow |f(z)| > \varepsilon$$

4)  $a_n = (n, \sin n)$

$$\lim a_n = \infty$$

significa

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > \delta \Rightarrow |a_n| > \varepsilon$$

e, infatti, poiché

$$|a_n| = \sqrt{n^2 + \sin^2 n} \geq \sqrt{n^2} = n$$

basta scegliere  $\delta = \varepsilon$ .

# CRITERI DI CONVERGENZA E DIVERGENZA PER FUNZIONI FRA SPAZI EUCLIDI

Le definizioni presentate in precedenza permettono formulazioni alternative, talora più comode nelle applicazioni.

## TEOREMA

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |f(n) - L| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |f(n)| = +\infty$$

## Dimostrazione

Immediata, dalle quattro definizioni coinvolte.

Visto il notevole patrimonio di tecniche per lo studio dei limiti di funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ , è utile studiare il legame fra il comportamento di una funzione a valori vettoriali e quello delle sue componenti.

Ecco un primo risultato

**TEOREMA** Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  e siano  $f_1, \dots, f_p$  le funzioni definite dalle sue componenti, tali che, cioè,  $f(u) = (f_1(u), f_2(u), \dots, f_p(u))$ . Allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_i(n) = L_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, p$$

Per provare il teorema ricordiamo il

**LEMMA** Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}^p$  si ha:

$$1) |\alpha_i| \leq |\alpha| \quad \forall i = 1, \dots, p$$

$$2) |\alpha| \leq \sqrt{p} \max_{i=1, \dots, p} |\alpha_i|$$

## Dimostrazione

Basta osservare che  $|\alpha_i|^2 \leq \sum_{j=1}^p \alpha_j^2 = |\alpha|^2$ , da cui segue ①. Inoltre  $|\alpha|^2 = \sum_{j=1}^p \alpha_j^2 \leq p \max_{i=1, \dots, p} \alpha_i^2$

Detto  $i : \max_{i=1, \dots, p} \alpha_i^2 = \alpha_i^2$  si ha  $|\alpha| \leq \sqrt{p} \cdot \sqrt{\max_{i=1, \dots, p} \alpha_i^2} \leq \sqrt{p} |\alpha_i|$

## Dimostrazione del teorema

Dal lemma precedente:

$$1) |f_i(u) - L_i| \leq |f(u) - L|$$

$$2) |f(u) - L| \leq \sqrt{p} \max_{1 \dots p} |f_i(u) - L_i|$$

e, per il teorema del confronto, da 1) segue la condizione necessaria  
 $f(u) \rightarrow L \Rightarrow f_i(u) \rightarrow L_i$ , mentre, da 2), se  $f_i(u) \rightarrow L_i \quad \forall i = 1 \dots p$  allora  $f(u) \rightarrow L$ .  
c.v.d.

Dunque, lo studio dei limiti di funzioni vettoriali è ridotto allo studio delle sue componenti. Tuttavia, nulla di simile vale per il dominio ma non va disprezzata la semplificazione ottenuta nel calcolo vettoriale. Per le curve parametriche, ad esempio, e cioè le funzioni  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , le convergenze sono completamente ridotte a quelle delle componenti scalari, per le quali sono disponibili il teorema di De l'Hopital e le formule di Taylor, molto utili nel calcolo dei limiti.

## TEOREMI SUI LIMITI: UNA SELEZIONE BREVE

Iniziamo con le forme che assume il teorema delle permanenze del segno, per funzioni a valori scalari.

### TEOREMA (permanenza del segno)

Sia  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\lim_{n \rightarrow n_0} f(n) = L > 0$ , oppure  $\lim_{n \rightarrow n_0} f(n) = +\infty$ .

Allora  $\exists \delta > 0: \forall n \in \mathbb{N}, n \neq n_0$  tale che  $f(n) > 0$

#### Dimostrazione

Proviamo prima il caso di  $f$  convergente ad un limite strettamente positivo. Così come si è fatto nel caso delle funzioni continue, si sceglie  $\bar{\epsilon} = L - \epsilon$ , dall'ipotesi di convergenza, segue che:

$\exists \delta > 0: \forall n \in \text{dom } f \quad |n - n_0| < \delta, n \neq n_0$  si ha  $|f(n) - L| < \bar{\epsilon}$  e cioè  $0 = L - \bar{\epsilon} < f(n) < L + \bar{\epsilon}$

che è la tesi. L'unica differenza nel caso delle divergenze è la diseguaglianza finale  $f(n) > \epsilon$  che nell'opportuna sfera  $B(n_0, \delta)$ , PRIVATA DEL PUNTO  $n_0$ , è la tesi.

c.v.d.

**ATTENZIONE:** non è vero che una funzione convergente ad un limite strettamente positivo conserva il segno in un intorno! Lo conserva in un intorno "buco"! Per i limiti per  $n \rightarrow n_0$ , il punto  $n_0$  non esiste!

È proprio per questo che la questione Newton-Berkeley è stata risolta

**ESEMPIO** sia  $f(n) = \frac{1}{n^2} \quad n \neq 0$  e  $f(0) = -7$ . Si ha subito

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n^2} = +\infty$$

Eppure,  $f(0) = -7$ , e dunque non esistono sfere centrate in 0 in OGNI punto delle quali  $f(n) > 0$ .

Il prossimo risultato è un teorema di limitatezza locale, e cioè in un intorno.

**TEOREMA** Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L$ , con  $L \in \mathbb{R}^p$  (finito). Allora  $\exists k \exists \delta > 0 : \forall n \in \text{dom } f, |n - n_0| < \delta \Rightarrow |f(n)| < k$

**NOTA:** manca la condizione  $n \neq n_0$ , perché non accade, come si vedrà subito.

**NOTA** In sostanza: una funzione convergente è localmente (cioè, in un opportuno intorno) limitata.

### Dimostrazione

Dall'ipotesi di convergenza, scelto  $\bar{\epsilon} = 1$  ne segue che

$$\exists \delta > 0 : \forall n \in \text{dom } f : |n - n_0| < \delta, n \neq n_0 \Rightarrow |f(n) - L| < \bar{\epsilon} = 1$$

Dalle diseguaglianze triangolare

$$|f(n)| = |f(n) - L + L| \leq |f(n) - L| + |L| \leq 1 + |L| \quad \forall n \in B(n_0, \delta) \cap \text{dom } f, \quad n \neq n_0$$

Ne segue che, in  $B(n_0, \delta) \cap \text{dom } f$  si ha

$$|f(n)| < \max \{ 1 + |L|, |f(n_0)| \} \equiv k \quad \text{c.v.d.}$$

Si vede bene come sia necessario includere  $|f(n_0)|$  nella costante  $k$ , perché le stime fornite dalla definizione di limite non riguarda il valore assunto nel punto  $n_0$  nel quale il limite viene calcolato.

Nonostante i debili adattamenti, queste dimostrazioni (e tutte le altre) sono formalmente identiche a quelle scalari, con la sola accortezza di usare le norme appropriate. Tale stretta analogia si estende ben oltre:

ad esempio, se  $f(n) \rightarrow L$  e  $g(n) \rightarrow M$ , allora  $f(n)g(n) \rightarrow LM$  ove, se  $f, g, L$  ed  $M$  sono in  $\mathbb{R}^p$ , i due prodotti  $f(n)g(n)$  e  $LM$  sono prodotti scalari. Nella dimostrazione, invece dell'identità  $|ab| = |a||b|$ , si deve usare le diseguaglianze di Schwartz  $|ab| \leq |a||b|$ .

Un ultimo risultato, già presentato in un altro contributo, è il teorema del cambio di variabile nei limiti, indispensabile nello studio dei limiti di funzioni composte; anche in questo caso, le prove seguono da vicino quelle nel caso scalare.

## Criteri di convergenza e di divergenza

La semplice ispezione delle definizioni e le stime  $|z_i| \leq |x_i| < \sqrt{p} \max_{1 \dots p} |x_i|$  evidenziano che, per funzioni a valori vettoriali in  $\mathbb{R}^p$ , i criteri di convergenza e di divergenza sono analoghi a quelli scalari.

$$\lim ? f(x) = L \Leftrightarrow \lim ? |f(x) - L|_{\mathbb{R}^p} = 0$$

Ove il punto interrogativo indica una qualunque situazione nel dominio (o, al finito, all'infinito e, nel caso scalare, de destra, de sinistra,  $\infty$  e  $-\infty$ ), ovviamente uguale nei due limiti. Analogamente

$$\lim ? f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim ? |f(x)|_{\mathbb{R}^p} = +\infty$$

Si può talvolta risparmiare un po' di fatica studiando separatamente le componenti

$$\lim ? f(x) = L \Leftrightarrow \lim ? f_i(x) = L_i \quad \forall i$$

mentre, per le divergenze, vale solo una condizione sufficiente. Infatti:

- 1) Se una delle componenti  $f_i$  diverge, allora  $f$  diverge. Infatti la norma di  $f$  maggiore il modulo di qualunque componente. Dal teorema del confronto, la divergenza di qualunque componente implica la divergenza a  $+\infty$  della norma delle  $f$ .
- 2) Il viceversa è falso, già per le successioni. Infatti, se si considera

$$a_n = \begin{cases} (n, 0) & \text{se } n \text{ è pari} \\ (0, n) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

si ha subito che né  $(a_n)_1 = 0, 2, 0, 4, 0, 6, \dots$  né  $(a_n)_2 = 1, 0, 3, 0, 5, \dots$  sono convergenti, ma  $|a_n| = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

diverge a  $+\infty$ , e dunque  $a_n \rightarrow \infty$ . Dunque le componenti possono oscillare mentre la norma, che registra cumulativamente l'apporto di tutte le componenti, può benissimo divergere.

## ALCUNE SGRADEVOLI SORPRESE SULLA DIVERGENZA

Per le funzioni di più variabili, anche a valori scalari, non valgono, purtroppo, parecchi dei risultati che sembrerebbero evidenti per funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ .

i) **NON TUTTI I POLINOMI NON COSTANTI SONO DIVERGENTI ALL'INFINITO**, come accade in  $\mathbb{R}^1$

Basta considerare  $f(x,y) = x$ . Se divergesse all'infinito, si avrebbe che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |(x,y)| > \delta \Rightarrow |f(x,y)| > \varepsilon$$

e dunque dovrebbe esistere una sfera centrale nell'origine fuori delle quale

$$|x| > \varepsilon > 0$$

Cioè è certamente falso, perché sull'asse  $y$ ,  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0\}$ , che interseca qualunque sfera centrale in  $(0,0)$ , la  $f$  vale identicamente 0. Dunque  $f(x,y) = x$ , oppure  $f(x,y) = y$  o ancora  $f(x,y) = xy$  non divergono all'infinito.

Ci sono le dovute eccezioni! Ad esempio, il polinomio  $f(x,y) = |(x,y)|^2 = x^2 + y^2$  diverge certamente all'infinito perché, scelto  $\varepsilon > 0$ , la diseguaglianza di divergenza  $|f(x,y)| > \varepsilon$  equivale a  $x^2 + y^2 > \varepsilon$ , che è vero se  $|(x,y)| > \sqrt{\varepsilon}$ , e dunque basta porre  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ .

Dagli esempi meno evoluti sono offerti delle forme quadriche definite, che sono tutte divergenti all'infinito (con il segno appropriato). Ricordando che, dalla teoria delle forme quadriche

$$\lambda |(x,y)|^2 \leq f(x,y) \leq \Lambda |(x,y)|^2 \quad \forall (x,y)$$

ove  $\lambda$  è il minimo autovalore e  $\Lambda$  il massimo, dal teorema del confronto e delle divergenze delle norme al quadrato, appena osservato, si ha che,

da  $\lambda |(u,y)|^2 \leq f(u,y)$ , se  $\lambda > 0$   $f$  diverge a  $+\infty$  mentre, se  $\lambda < 0$ , da  $f(u,y) \leq \lambda |(u,y)|^2$  segue che  $f \rightarrow -\infty$ .

In tutti gli altri casi (forme semidefinite o indefinite) il limite non esiste (se non sono identicamente nulle) in quanto ci sono gli spazi di  $O$  nel caso semidefinito, e nette opportunità nel caso indefinito, sui quali  $f = 0$  mentre su altre nette divergeranno.

Ad esempio,  $f(u,y) = u^2$  si comporta così come  $f(u,y) = u$ : è zero a tappeto sull'asse  $y$  e, per la stessa ragione oscilla (ad esempio, diverge sull'asse  $u$ , a  $+\infty$ ). Analogamente  $f(u,y) = u^2 - y^2$  che ha autovalori 1 e -1, divergerebbe a  $+\infty$ , a guardare l'asse  $u$ , ma a  $-\infty$  guardando l'asse  $y$ , e si annulla su  $y = \pm u$ .

In sostanza l'essenza è che convergenze e divergenze sono merce piuttosto rara per le funzioni di più variabili!

Il concetto di funzione omogenea, che generalizza quello di polinomio omogeneo, fornisce qualche aiuto per estendere, in qualche modo e con molte precauzioni, il concetto di ordine di infinitesimo ed il suo impiego nei limiti alle funzioni di più variabili. È reperibile in altri contributi.

AN\_2.1

# IL CALCOLO DIFFERENZIALE (I)

## Le derivate direzionali ed il teorema di Fermat

Il primo tentativo di estendere alle funzioni di più variabili il concetto di derivata è quello diretto: definire in modo sensato il rapporto incrementale e porre il limite al tendere a zero dell'incremento.

Anche se, a ben vedere, il tentativo risulterà per molti versi inconcludente, esso permette di estendere uno dei più antichi ed importanti fra i "grandi risultati" dell'Analisi: la condizione di Fermat sulle derivate nei punti di estremo (massimo o minimo) interni. L'idea che seguiamo, adoperata molto di frequente in Analisi in più variabili, è di ridurre il problema ad una sola variabile, restringendo il dominio della funzione ad una retta uscente dal punto da studiare.

**DEFINIZIONE** Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Sia  $u_0 \in \Omega$ . Si dice che  $f$  È DERIVABILE NELLA DIREZIONE DI  $v$ ,  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , SE ESISTE FINITO IL LIMITE

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(u_0 + hv) - f(u_0)]$$

Esso verrà chiamato DERIVATA (DIREZIONALE) DI  $f$  NELLA DIREZIONE DI  $v$  in  $u_0$ , e denotato con uno qualunque dei simboli

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u_0), \quad \frac{\partial f(u_0)}{\partial v}, \quad f_v(u_0), \quad \partial_v f(u_0)$$

La derivata nella direzione dei versi delle base canonica e... in si chiamano (da sempre) DERIVATE PARZIALI, e si denotano con i simboli speciali  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(u_0)$ , o  $f_{x_i}(u_0)$ , oppure  $\partial_{x_i} f(u_0)$ .

**NOTA:** Se si pone  $h(t) = f(u_0 + tv)$ , allora  $h$  è una funzione scalare di variabile scalare per tutti i  $t$  per i quali  $u_0 + tv \in \text{dom } f$  e la derivata direzionale appena definita coincide con  $h'(0)$ .

**NOTA:** Fissiamo il vettore  $e_i$ , primo della base canonica, e calcoliamo le derivate parziale rispetto ad  $x_i$ ,  $f_{x_i}(u_0)$ , indicando esplicitamente tutte

le componenti scalari di tutti i vettori in giro. Dunque:

$$e_i = (1, 0, 0, \dots, 0) \quad u_0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0) \quad f(u) = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

da cui

$$u_0 + h \cdot e_i = (u_1^0 + h \cdot 1, u_2^0 + h \cdot 0, \dots, u_n^0 + h \cdot 0)$$

$$\text{ed infine } f_{u_i}(u_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(u_0 + h \cdot e_i) - f(u_0)]$$

Si osserva subito che, per calcolare una derivata parziale (nel nostro caso, quella rispetto a  $u_i$ , e cioè  $e_i$ ) basta tenere fisse tutte le componenti tranne  $u_i$  e calcolare l'ordinario limite del rapporto incrementale rispetto all'unica variabile superstite, che è la derivata ordinaria di una funzione di una sola variabile.

$$t \rightarrow f(t, u_2^0, u_3^0, \dots, u_n^0)$$

Tutto ciò, oltre a spiegare abbastanza chiaramente il perché del nome "DERIVATA PARZIALE" fornisce una regola pratica per il calcolo:  
**LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE RISPETTO AD  $u_i$  SI CALCOLA COME PER LE FUNZIONI DELLA SOLA VARIABILE  $u_i$ , TRATTANDO LE ALTRE COME DELLE COSTANTI**

**ESEMPIO** Sia  $f(u, y) = u^2 y$ . Allora, per calcolare  $f_x(u, y)$  occorre riguardare  $y$  come se fosse una costante, e derivare  $u^2 y$  rispetto a  $u$ .

Dunque

$$\partial_u(u^2 y) = y \quad \partial_x(u^2) = 2u y$$

Analogamente  $\partial_y(u^2 y) = u^2 \quad \partial_y(y) = 1$

Non occorre imparare niente di nuovo: basta solo ricordare che per le derivate parziali occorre pensare a tutte le altre variabili come a delle costanti che, nell'esempio precedente, "escano" dal simbolo di derivazione.

**ESEMPIO**  $f(x,y) = \operatorname{arctan} \frac{y}{x}$   $x \neq 0$

Allora : ( $y$  "costante")  $f_x = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot y \left( -\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$

( $x$  "costante")  $f_y = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$

derivate delle funzione "esterne"      derivate dell'argomento  
come funzione di  $y$

QUESTO È TUTTO...

... O QUASI! Quando non funziona la derivazione in una variabile, non funzionano nemmeno le derivate parziali!

**ESEMPIO:**  $f(x,y) = |\ln y|$  Esistono  $f_x(0,0)$  e  $f_y(0,0)$ ?

Non si può studiare la derivabilità mediante la derivazione di funzioni composte, perché  $t \rightarrow |t|$  NON è derivabile in  $t=0$ , che è esattamente il punto coinvolto nel calcolo in  $(0,0)$ : infatti, posto  $g(t) = |t|$ ,  $f(u) = ug$  ( $y$  costante = 0, è cioè l'ordinata di  $(0,0)$ ) e  $h(u) = g(f(u))$  si dovrebbe avere  $h'(0) = g'(f(0)) f'(0)$ , ma  $f(0)=0$  e  $g'(0)$  non esiste ed il teorema sulle derivazioni di funzioni composte non è applicabile.

In questi casi si rinuncia all'agilità delle regole di derivazione e si utilizza la definizione che è un comune rapporto di infinitesimi in una sola variabile, "trattabile" con il teorema di de l'Hopital, con le formule di Taylor o, al caso, con qualche limite notevole.

Il nostro esempio è più semplice!

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(h,0) - f(0,0)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [|h| - |0|] = 0$$

Un altro esempio meno immediato è il seguente:

**ESEMPIO**

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{in } (0,0) \\ \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

In tal caso, non ci sono problemi fuori dall'origine, perché  $f$  è, nell'intorno di tali punti, un rapporto di (composizione) funzioni derivabili, mentre l'origine è più delicata.

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(h,0) - f(0,0)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \frac{\sin h^2}{h^2} - 1 \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h^2 - h^2}{h^3}$$

$\uparrow$   
 $(h,0) \neq (0,0)$

Ricordando che  $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$  ne segue che  $\sin t - t = \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$  e ponendo  $t = h^2$ , ed essendo  $\frac{\sin t - t}{t}$  non definita in 0, dal teorema sul cambio di variabile segue

$$\sin h^2 - h^2 = \frac{h^6}{3!} + o(h^6)$$

da cui, infine

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h^2 - h^2}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h^2 - h^2}{h^6} \cdot \frac{h^6}{h^3} = 0$$

$\downarrow$   
 $1/3!$        $\downarrow$   
0

Con lo stesso calcolo (simmetrico) si prova che

$$f_y(0,0) = 0$$

Il calcolo delle derivate direzionali per un'importante classe di funzioni, le funzioni differenziabili (che non vuol dire derivabili come in  $\mathbb{R}$ , dove le classi coincidono), si riduce a calcolare un prodotto scalare fra il vettore delle derivate parziali (il GRADIENTE, vedi più avanti) ed il vettore  $v$ . Ciò non è però valido in generale. Si può comunque adoperare la definizione.

**ESEMPIO**  $f(u,y,z) = uyz^2$ ,  $v = (-1, 1, 2) \neq 0$ ,  $u_0 = (2, 3, 1)$   
Esiste  $f_v(2, 3, 1)$ ?

Si ha

$$f_v(2, 3, 1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(u_0 + tv) - f(u_0)] = h'(0)$$

ove

$$h(t) = f(z + (-1)t, 3 + (1)t, 1 + (2)t) = \underbrace{(z-t)}_x \underbrace{(3+t)}_y \underbrace{(1+2t)^2}_z$$

da cui

$$\begin{aligned} h'(t) &= (z-t)'(3+t)(1+2t)^2 + (z-t)(3+t)'(1+2t)^2 + (z-t)(3+t)(1+2t)^2 \\ &= -(3+t)(1+2t)^2 + (z-t)(1+2t)^2 + (z-t)(3+t)2(1+2t) - z \end{aligned}$$

e, facendo  $t=0$ , si ha infine  $f_v(z_{3,1}) = h'(0) = -3 + z + 24 = 23$

## IL TEOREMA DI FERMAT

La condizione seguente, nota già a Fermat, che lo impiego per provare che la legge di rifrazione della luce potesse essere spiegata assumendo che la traiettoria della luce è quella che rende MINIMO il TEMPO di viaggio fra due qualunque punti, è fra le più importanti dell'analisi.

**TEOREMA (Fermat)** Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Sia  $x_0 \in \Omega$  verificante:

1)  $x_0$  è interno ad  $\Omega$

2)  $x_0$  è di minimo locale per  $f$ , e cioè

$$\exists \delta > 0 : f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in \text{dom } f \cap B_\delta(x_0)$$

3) Esiste, finita,  $f_v(x_0)$

Allora:

$$f_v(x_0) = 0$$

Primo di esporre la dimostrazione, osserviamo che il teorema esprime una condizione necessaria, ma non sufficiente, esattamente come in una variabile: nei massimi locali eccade esattamente le stesse cose (basta considerare  $-f$ ), e non basta! La funzione  $f(u,y) = uy$  è costante sugli assi coordinati, ed ha quindi entrambe le derivate parziali nulle in  $(0,0)$ , ma non ha ivi né massimo né minimo locale, perché cambia segno in ogni intorno dell'origine (negativo sul I e sul IV quadrante). Nessuna sostanziale sorpresa in più variabili! Inoltre, il teorema vale per ogni derivata direzionale, indipendentemente dalle altre: ad esempio

$$f(u,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } uy=0 \\ 1 & \text{se } uy \neq 0 \end{cases}$$

ha in  $(0,0)$  un minimo (globale) intorno al dominio (tutto  $\mathbb{R}^2$ ), ha solo le derivate parziali che sono nulle in accordo col teorema, ma non ha alcun'altra derivata direzionale: infatti, per  $v = (\alpha, \beta)$ ,  $\alpha, \beta \neq 0$  si ha:

$$f_v(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \underbrace{f(0+\alpha h, 0+\beta h)}_{\substack{\text{"perché" } \alpha h \neq 0 \\ \text{oppure } \beta h \neq 0}} - f(0,0) \right] \quad \text{NON ESISTE!}$$

### Dimostrazione

Poiché  $u_0$  è interno ad  $\Omega$ ,  $\exists r > 0 : B_r(u_0) \subseteq \Omega$

Poiché  $u_0$  è un minimo locale di  $f$ ,  $\exists \delta > 0 : f(u_0) < f(u) \quad \forall u \in \text{dom } f \cap B_\delta(u_0)$

Posto allora  $\eta = \min(\delta, r)$  ne segue che

$$1) B_\eta(u_0) \subseteq B_r(u_0) \subseteq \Omega = \text{dom } f$$

$$2) f(u_0) \leq f(u) \quad \forall u \in B_\eta \quad \text{ma poiché, da 1), } B_\eta \subseteq \Omega, \text{ ma anche}$$

$$B_\eta \subseteq B_\delta, \text{ da cui } B_\eta \subseteq \Omega \cap B_\delta$$

Si consideri ora il seguente notevole e si osservi che

$$|u_0 + tv - u_0| = |tv| = |t||v| < \eta \quad \text{se (e solo se) } |t| < |v|^{-1}\eta$$

$$\text{da cui } u_0 + tv \in B_\eta(u_0) \quad \text{se e solo se } t \in \left]-\frac{\eta}{|v|}, \frac{\eta}{|v|}\right[$$

Dunque, posto  $h(t) = f(u_0 + tv)$ , si ha che  $h(t)$  è definita in  $\left]-\frac{1}{\|v\|}\eta, \frac{1}{\|v\|}\eta\right[$  e che, inoltre,  $h(0) = f(u_0) \leq f(u_0 + tv) \quad \forall t \in \left]-\frac{1}{\|v\|}\eta, \frac{1}{\|v\|}\eta\right[$

perché

$$u_0 + tv \in B_\eta(u_0) \subseteq \cap_{\nu} B_\nu(u_0)$$

Si può dunque applicare il teorema di Fermat in una variabile alla funzione  $h$ , perché  $t=0$  è un punto di minimo locale interno, ovvero  $h$  è derivabile ( $h'(0) = f_v(u_0)$ ) e dunque

$$h'(0) = 0$$

c.v.d.

In definitiva, in un punto di minimo locale interno, qualunque derivata direzionale esiste è nulla. Il risultato non è molto incoraggiante: se, ad esempio,  $f$  avesse tutte le derivate direzionali, gli eventuali punti di estremo interno dovrebbero verificare le infinite condizioni:

$$f_v(u_0) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

La situazione è di molto semplificata se  $f$  è differenziabile (vedi più avanti): in tal caso, le infinite condizioni si riducono alle  $n$  equazioni:

$$f(u_i) = 0 \quad i = 1 \dots n$$

un sistema (non lineare, in generale)  $n \times n$ : un'eccellente generalizzazione a  $n$  variabili della condizione  $f'(u_0) = 0$ . Vedremo che essa può ancora venire scritta come  $f'(u_0) = 0$

purché ci si ricordi che, per una funzione scalare di  $n$  variabili, col simbolo  $f'(u_0)$  si intende il suo gradiente (così come per una funzione vettoriale di  $n$  variabili, si intenderebbe le jacobiane).

I dettagli seguiranno tra breve!

AN 2022

## IL CALCOLO DIFFERENZIALE (II)

### Introduzione al differenziale di funzioni scalari.

La derivata direzionale consente già notevoli estensioni di alcuni concetti sviluppati per le funzioni in  $\mathbb{R}$  alle funzioni di variabili vettoriali  $f(u)$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$ . L'esempio migliore è fornito dalla condizione necessaria per gli estremi locali (Fermat), che vale in più variabili così come vale in una variabile, ed è stata usata da Eulero persino in spazi di dimensione infinita, gettando così le basi dello studio degli estremi in spazi di funzioni, detto all'epoca "Calcolo delle variazioni".

Pionerostante, la derivata direzionale presenta gravi lacune dal punto di vista teorico: una funzione può avere tutte le derivate direzionali nulle in un punto e non essere neppure continua in esso, come accade in (90) alla funzione

$$f(u,y) = \begin{cases} \left(\frac{uy}{u^2+y^2}\right)^2 & \text{se } (u,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

Si ha infatti, per  $v = (\alpha, \beta)$  con  $\alpha$  e  $\beta$  non entrambi nulli,

$$\begin{aligned} f_v(0,0) &= (f(0+\alpha t, 0+\beta t))'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha h, \beta h) - f(0,0)}{h} = \\ &(h \neq 0 \Rightarrow (\alpha h, \beta h) \neq (0,0), \text{ perché } \alpha \text{ e } \beta \text{ non sono entrambi nulli}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{(\alpha^2 h^2 \beta h)^2}{(\alpha^4 h^4 + \beta^2 h^2)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{h}}_0 \frac{h^6}{h^4} \left( \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^4 h^2 + \beta^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Ove l'ultimo termine vale identicamente 0 per  $\beta=0$ , e tende al limite finito  $\frac{\alpha^4 \beta^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^4}{\beta^2}$  se  $\beta \neq 0$ , ed è dunque limitato. Ne segue infine che la funzione è infinitesima, perché prodotto di  $\frac{1}{h} \frac{h^6}{h^4} = h$ , infinitesima, e  $\frac{\alpha^4 \beta^2}{(\alpha^4 h^2 + \beta^2)^2}$ , convergente e quindi limitata.

Dunque, OGNI DERIVATA DIREZIONALE DI  $f$  ESISTE E VALE 0.

Per vedere che, ciononostante, essa è discontinua, osserviamo che vale 0 in (0,0) mentre, sulla parabola  $y = kx^2$ , risulta (per  $x \neq 0$ )

$$f(x, kx^2) = \left( \frac{x^2(kx^2)}{x^4 + k^2 x^4} \right)^2 \stackrel{x \neq 0}{=} \left( \frac{k}{1+k^2} \right)^2$$

Considerando, ad esempio,  $k=0$  e  $k=1$ , ne segue che, sulla "parabola"  $y=0 \cdot x$ , e cioè l'asse  $x$  ( $y=0$ ) si ha  $f \equiv 0$ , mentre sulla parabola  $y=x^2$  la funzione assume il valore costante  $\left(\frac{1}{1+1}\right)^2 = \frac{1}{4}$ .

Poiché in ogni intorno dell'origine (0,0) cadono punti dell'asse  $x$  e della parabola  $y=x^2$  (che ha vertice in (0,0)) vorre dico che, in ogni intorno di (0,0), cadono punti sui quali  $f$  vale 0 ed altri sui quali vale  $1/4$ , contro la condizione di Cauchy per la convergenza di  $f$  in (0,0): basta porre  $\bar{\epsilon}=1/4$  per far sì che  $|f(x_1) - f(x_2)| < \bar{\epsilon}$  non sia realizzabile su nessun intorno di (0,0) per ogni coppia di punti  $x_1, x_2$  in quell'intorno: due punti sulla stessa "parabola" diverse verificano  $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{4}$  e quindi violano la condizione richiesta.

Le vie per estendere il concetto di derivata alle funzioni di più variabili in modo da conservare (almeno) le proprietà che se  $f$  è derivabile allora è continua richiede un cambio totale di prospettiva e, in certo senso, un ritorno al passato, alla geometria ed alla retta tangente. Ciò sarà oggetto delle prossime sezioni.

## LE FUNZIONI SU $\mathbb{R}^1$

Uno dei problemi iniziali del calcolo infinitesimale, poi divenuto Analisi Matematica, è stato di caratterizzazione il concetto di retta tangente per le curve per le quali una definizione geometrica intuitiva ad una algebrica basata sulle molteplicità delle soluzioni di un'equazione algebrica, non sono possibili. Se  $f$  derivabile in  $x_0$ . Una qualunque retta (non verticale) per il punto del grafico  $(x_0, f(x_0))$  ha equazione

$$y = f(x_0) + \alpha(x - x_0)$$

che definisce il grafico della funzione  $g(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0)$ .

L'ipotesi di derivabilità implica che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow x_0} \frac{f(n) - g(n)}{n - x_0} &= \lim_{n \rightarrow x_0} \frac{f(n) - f(x_0) - \alpha(n - x_0)}{n - x_0} = \\ &= \lim_{n \rightarrow x_0} \frac{f(n) - f(x_0)}{n - x_0} - \alpha = f'(x_0) - \alpha \quad \begin{cases} \neq 0 \text{ per } \alpha \neq f'(x_0) \\ = 0 \text{ per } \alpha = f'(x_0) \end{cases} \end{aligned}$$

Si osserva subito che l'infinitesimo  $f(n) - g(n)$ , per  $n \rightarrow x_0$ , è "normalmente" dello stesso ordine di  $n - x_0$ , mentre è di ordine superiore solo se  $\alpha = f'(x_0)$ : in tal caso, e solo in tal caso, il limite è nullo. Ne segue che il caso  $\alpha = f'(x_0)$  è "privilegiato" ed espone il fatto che la retta grafico di  $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  approssima "meglio di tutte le altre", relative ad  $\alpha$  diversi, la funzione  $f(x)$  "in vicinanza" di  $x_0$ .

Prima di scrivere la versione "a più dimensioni" del limite oggetto di queste ultime riflessione (il che non è immediato: basta riflettere a che  $n - x_0$  è un vettore e non si può DIVIDERE per un vettore) riflettiamo sulle strutture di  $g$ . Tenendo da parte  $f(x_0)$ , che dipende solo dal punto scelto per definirvi la retta tangente, avanza il termine  $f'(x_0)(n - x_0)$ , e cioè una funzione lineare, nel senso dei matematici (o dell'algebra lineare, se preferite), dell'incremento  $(n - x_0)$ . L'algebra stessa ci dice che ogni funzione lineare su  $\mathbb{R}$  è del tipo  $f(w) = \alpha w$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ma l' $\alpha$  "giusto" per la retta tangente è  $\alpha = f'(x_0)$ . È tempo di passare a più variabili.

## IL DIFFERENZIALE PER LE FUNZIONI SCALARI DI PIÙ VARIABILI

Un'osservazione utile per quanto segue è che, per  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(x_0+w) - f(x_0) - f'(x_0)w}{w} = 0$$

Allora vale anche

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - f'(x_0)w|}{|w|} = 0$$

con il vantaggio decisivo che, anche se  $w$  fosse un vettore, quest'ultimo limite avrebbe senso, purché si interpreti  $|w|$  come la norma di  $w$ .

Ne segue la fondamentale

### DEFINIZIONE

Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , e sia  $x_0 \in \Omega$ . Allora si dice DIFFERENZIABILE IN  $x_0$ , se esiste  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , LINEARE, tale che

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|} = 0$$

La funzione  $A$  verrà detta DIFFERENZIALE di  $f$  in  $x_0$  e verrà denotato anche con

$$df(x_0, w) \equiv A(w)$$

La funzione  $f$  verrà detta differenziabile in  $\Omega$  se è differenziabile in ogni punto di  $\Omega$ .

Osserviamo che  $df: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è lineare nella seconda variabile (l'incremento  $w$ ). Osserviamo inoltre che, se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , si ha  $df(x_0, w) = f'(x_0)w$ , ed  $f$  è differenziabile se e solo se è derivabile, ma differenziale e derivata sono cose differenti anche se strettamente legate. I prossimi risultati ci dicono che queste sono le scelte giuste per estendere le derivate a più variabili.

**TEOREMA** Se  $f$  è lineare da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$ , allora è differenziabile in ogni punto, ed inoltre  $Df(u_0, w) = f(w)$

Osserviamo che il differenziale non dipende dal punto  $u_0$  (cioè è costante in  $u_0$ ), esattamente come accade alle funzioni derivabili in  $\mathbb{R}$  ove, se  $f(u) = \varphi u$ , segue  $f'(u_0) = \varphi$   $\forall u_0 \in \mathbb{R}$  (costante rispetto a  $u_0$ , appunto!)

### Dimostrazione

Poiché  $f$  è lineare in  $w$ , basta verificare che

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(u_0 + w) - f(u_0) - f(w)|}{|w|} = 0 \quad (1)$$

Ciò è evidente perché, essendo  $f$  lineare, il numeratore è identicamente nullo in  $w$ .  
c.v.o.l.

Il prossimo risultato realizza quanto preannunciato:

**TEOREMA Z:** Se  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile in  $u_0$ , allora è continua in  $u_0$ .

### Dimostrazione

Sia  $A$  il differenziale di  $f$  in  $u_0$ . Allora

$$\begin{aligned} |f(u_0 + w) - f(u_0)| &= |f(u_0 + w) - f(u_0) - A(w) + A(w)| \leq (\text{d.o. triangolare}) \\ &\leq |f(u_0 + w) - f(u_0) - A(w)| + |A(w)| = \underbrace{|w|}_{\text{o}} \underbrace{\frac{|f(u_0 + w) - f(u_0) - A(w)|}{|w|}}_{\text{o}} + |A(w)| \end{aligned}$$

Il primo addendo delle somme è prodotto di  $|w|$ , che tende a zero se  $w \rightarrow 0$ , e della funzione che tende a zero per l'ipotesi di differenziabilità. Basta dunque provare che  $\lim_{w \rightarrow 0} |A(w)| = 0$ .

Ciò segue immediatamente dalla struttura delle applicazioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$ : detta  $e_1, \dots, e_n$  la base canonica in  $\mathbb{R}^n$ , si ha

$$A(w) = f\left(\sum_i^n w_i e_i\right) = \sum_i^n w_i \underbrace{A(e_i)}_{\varphi_i} = \sum_i^n w_i \varphi_i$$

e poiché  $w \rightarrow 0$  equivale a  $w_i \rightarrow 0 \quad \forall i = 1 \dots n$ , ne segue subito  $\lim_{w \rightarrow 0} A(w) = 0$  e dunque  $\lim_{w \rightarrow 0} |A(w)| = 0$ .

Dalle stime iniziali segue infine

$$\lim_{w \rightarrow 0} |f(x_0 + w) - f(x_0)| = 0$$

e dunque

$$\lim_{w \rightarrow 0} f(x_0 + w) = f(x_0)$$

dai cui la continuità di  $f$  in  $x_0$ .

c.v.d.

Sinora ci siamo accontentati del "minimo sindacale". La prossima sezione ci fornisce risultati più utili e, soprattutto, ci indicherà come fare a calcolare, in pratica, il differenziale.

AN\_2.3

## IL CALCOLO DIFFERENZIALE (III)

### Il differenziale ed il gradiente

Le due proprietà appena provate non sono le uniche interessanti del differenziali. In questa sezione verrà dimostrata una delle proprietà fondamentali del differenziale, che lo lega alle derivate parziali e ne permette il calcolo, anche in pratica, con la sola fatica di calcolare n derivate: una cosa per tutti!

**TEOREMA** Sia  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Allora  $f$  possiede derivate in ogni direzione  $v \neq 0$ , ed inoltre

$$f'_v(x_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0, v) \equiv A(v)$$

*Dimostrazione*

Si ha

$$\left| \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - A(v) \right| = \frac{|f(x_0 + tv) - f(x_0) - tA(v)|}{|t|} =$$

(A lineare ed  
omogeneità  
della norma)
  $|v| \frac{|f(x_0 + tv) - f(x_0) - tA(v)|}{|tv|}$

Ne segue che:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - A(v) \right| = |v| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + tv) - f(x_0) - tA(v)|}{|tv|}$$

La funzione nell'ultimo limite è composta da  $t \rightarrow tv = w$  e da

$$\frac{|f(x_0 + w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|},$$

che non è definita per  $w=0$ . Ne segue che si può cambiare variabile e, dunque, il limite della funzione composta è uguale a quello della funzione

$$\frac{1}{|w|} |f(x_0 + w) - f(x_0) - A(w)|,$$

che è 0 per l'ipotesi di differenziabilità. Ne segue

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - A(v) \right| = 0$$

e cioè

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + tv) - f(u_0)}{t} = A(v)$$

c.v.d.

Dunque, ogni funzione differenziabile ha tutte le derivate direzionali, che possono essere calcolate semplicemente calcolando il differenziale sulla direzione  $v$ . Quest'ultimo risultato ha una conseguenza immediata di importanza fondamentale. Si ha, infatti:

$$A(v) = A\left(\sum_i^n v_i e_i\right) = \sum_i^n v_i A(e_i)$$

e, per il teorema precedente,  $A(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(u_0) = \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0)$

Ne segue subito la

**FORMULA (DI RAPPRESENTAZIONE) DEL DIFFERENZIALE:** Sia  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  è differenziabile in  $u_0 \in \mathbb{R}^n$ , allora

$$df(u_0, w) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0) w_i$$

Se si definisce il vettore, detto GRADIENTE di  $f$  in  $u_0$ , ponendo

$$\nabla f(u_0) = (f_{x_1}(u_0), f_{x_2}(u_0), \dots, f_{x_n}(u_0))$$

Si può scrivere le formule in forma vettoriale

$$df(u_0, w) = \nabla f(u_0) \cdot w$$

ove il prodotto fra  $\nabla f$  e  $w$  è il prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$ .

Il modo tradizionale di scrivere il differenziale è leggermente diverso.

Si considerino le funzioni

$$\pi_i(w) = w_i$$

che proiettano il vettore  $w$  su  $e_i$ , e cioè che associano a  $w$  le sue  $i$ -esima coordinate. Poiché ogni  $\pi_i$  è lineare, dal teorema sui differenziali di funzioni lineari segue

$$d\pi_i(u_0, w) = w_i$$

e dunque

$$df(u_0, w) = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_0) d\pi_i(u_0, w)$$

Anche così siamo lontani dalle consuetudine antiche: ciò che si fa correntemente, in tutte le scienze applicate, è di scrivere  $du_i$  invece di  $d\pi_i(u_0, w)$  e di eliminare del tutto  $u_0$  e  $w$ , ottenendo l'effetto di rendere oscure le nature del differenziale, ma anche di ottenere le formule

$$df = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial u_i} du_i$$

moltò simile a quelle  $dy = \frac{dy}{dx} dx$ , che si usa per cambiare variabile negli integrali.

Alcune note di colore. Il gradiente non è solo un modo per scrivere più alle ovetto le formule del differenziale. Proviene dalle teorie dei campi vettoriali, e viene denotato anche con  $\text{grad } f$  (niente sorprese!), ma anche con  $f'(u_0)$ : in queste forme, le formule del differenziale dicono  $df(u_0, w) = f'(u_0) w$ , formalmente identiche a quelle delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ .

In realtà nel nostro caso  $f'(u_0)$  e  $w$  sono in  $\mathbb{R}^n$  e il prodotto è un prodotto scalare, e non un prodotto fra numeri. La nota conclusiva al teorema di Fermat è ora più chiara. Il potente teorema precedente sull'esistenza delle derivate direzionali fornisce anche un'utile formula per calcolarle:

Sé  $f$  è differenziabile, allora  $f_v(u_0) = df(u_0, v) = \nabla f(u_0) \cdot v$

Dunque, basta calcolare le  $n$  derivate parziali per poter calcolare subito, eseguendo un prodotto scalare, qualunque derivata direzionale.

**ATTENZIONE:** la formula è falsa se  $f$  non è differenziabile. Ad esempio, basta considerare

$$f(u, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } uy = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Poiché  $f$  è costante sugli assi,  $f$  ha derivate parziali nulle in  $(0,0)$ , ma

non è derivabile in nessun'altra direzione, come è già stato provato nelle sezioni riguardante il teorema di Fermat.  
Un'importante conseguenza dei teoremi precedenti riguarda la possibilità di studiare la differenziabilità di una funzione usando direttamente la definizione: infatti, ogni applicazione lineare  $A(w)$  per cui il limite si annulla, verifica di necessità  $A(w) = \nabla f(w)$ . Ne segue il

**COROLLARIO (di unicità)** Il differenziale, se esiste, è unico e verifica

$$df(w_0, v) = \nabla f(w_0) v$$

L'utilità è meglio illustrata da un esempio:

**ESEMPIO** Studiare la differenziabilità in  $(0,0)$  di  $f(x,y) = |xy|$

Passo 1 C'è il gradiente?

Le derivate parziali non possono essere calcolate usando la derivazione delle funzioni composte, perché  $|t|$  non è derivabile per  $t=0$  e in  $(0,0)$  in effetti  $t=xy$  vale 0.

Nelle viene, però, di usare la definizione

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

e cioè

$$f_y(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

Dunque ci sono tutte le derivate parziali in  $(0,0)$ , e ne segue che il "candidato differenziale" non può essere che

$$\nabla f(0,0)(h,k) = 0 \cdot h + 0 \cdot k = 0$$

Passo 2  $\nabla f(w)$  è realmente il differenziale?

$$\lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - \nabla f(0,0)(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{hk \rightarrow 0} \frac{|hk - 0 - 0|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$f(h,k) = f(0,0) + A(\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix})$

$\frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}$  è 1-omogenea e continua su tutta la sfera unitaria (compatte) e dunque il limite è zero, il che permette di concludere che  $f$  è differenziabile, e  $df(0,0; h, k) = 0$

Osserviamo che lo stesso problema per  $f(x,y) = |x,y|^{1/2}$  conduce allo stesso gradiente ( $f$  è nulla, e quindi costante, sugli assi, come prima) ma ad un diverso limite

$$\lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{|h,k|^{1/2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Poiché la funzione è 0-omogenea e non costante (vale zero sugli assi, e  $1/2$  sulla bisettrice  $h=k$ ) essa NON ha limite in  $(0,0)$ , da cui  $|x,y|^{1/2}$  non è differenziabile in  $(0,0)$ , pur avendo ivi gradiente.

Una notevole conseguenza della rappresentazione del differenziale con prodotto scalare è la possibilità di semplificare significativamente le condizioni necessarie di Fermat per i punti di estremo interno. Infatti, in ogni punto  $x_0$  di massimo o di minimo interno in cui la funzione  $f$  sia differenziabile (e quindi dotata di tutte le derivate direzionali), si deve verificare:

$$f_v(x_0) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

il che sembra comportare infinite verifiche, ma solo in apparenza! Se  $f$  è differenziabile  $f_v(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$ , e dunque basta verificare che  $\nabla f(x_0) = 0$  per ottenere automaticamente le condizioni di Fermat  $f_v(x_0) = 0$  per tutte le derivate direzionali.

Dunque, massimi e minimi locali interni vanno ricercati fra i punti in cui il gradiente si annulla, e cioè fra le soluzioni del sistema  $n \times n$ , in generale non lineare

$$f_{x_1}(x_0) = 0; f_{x_2}(x_0) = 0; \dots; f_{x_n}(x_0) = 0$$

almeno se  $f$  è differenziabile.

I punti nei quali il gradiente si annulla vengono detti CIRICI, oppure STAZIONARI, o anche SINGOLARI. Fra di essi ci sono i massimi e minimi locali interni, ma non ci sono, di regola, i punti di minimo e massimo sulla frontiera o in punti nei quali le derivate direzionali non esistono. Ad esempio,  $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$  ha in  $(0,0)$  un minimo globale interno al dominio  $(\mathbb{R}^2)$  in cui però non è derivabile, e dunque  $(0,0)$  non può appartenere all'insieme di soluzioni di  $\nabla f(x,y) = 0$ .

Ci possono essere altri punti critici (selle) che non sono né di massimo né di minimo, come per  $f(x,y) = x^2 - y^2$ , che è positiva sull'asse  $x$ , negativa sull'asse  $y$ , e vale 0 in  $(0,0)$  (che comunque non è né di massimo né di minimo); comunque,  $(0,0)$  è critico per  $f$  perché

$$\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$$

da cui

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

AN 24

## IL CALCOLO DIFFERENZIALE (IV)

Criterio di differenziabilità - Funzioni e valori vettoriali.

C'è un fondamentale risultato che permette di riassumere la differenziabilità di  $f$  dalla continuità delle sue derivate parziali.

**DEFINIZIONE** Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dice che  $f \in C^1(\Omega)$  se tutte le derivate parziali  $f_{x_i}$  esistono e sono continue in  $\Omega$ .

Vale il seguente:

**TEOREMA (del differenziale, o del differenziale totale):** Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1(\Omega)$ ,  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Allora  $f$  è differenziabile in ogni punto di  $\Omega$ .

**Dimostrazione**

Sia  $B$  un intorno di  $(x_0, y_0)$  contenuto in  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} &\text{Si ha } f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \\ &= f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Le funzioni

$$s \mapsto f(s, y_0) \quad \text{e} \quad t \mapsto f(x_0+h, t)$$

sono continue e derivabili in ogni punto degli intervalli

$[x_0, x_0+h]$  e  $[y_0, y_0+k]$ , rispettivamente, e dunque,

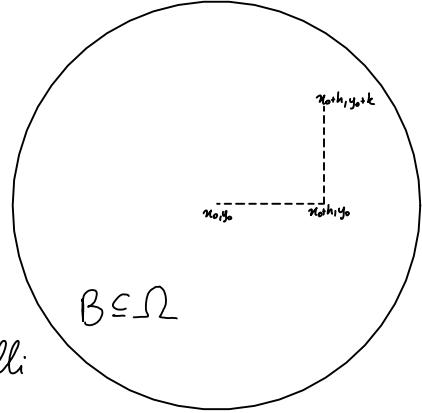
dal teorema di Lagrange applicato su tali intervalli, segue

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = k f_y(x_0+h, \xi) + h f_x(y_0+k, y_0)$$

per opportuni  $\xi$ , compreso fra  $y_0$  e  $y_0+k$ , ed  $\eta$ , compreso fra  $x_0$  e  $x_0+h$ .

Sostituendo nel limite del differenziale, segue che:

$$\begin{aligned} &\lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \\ &= \lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{|h[f_x(\eta, y_0) - f_x(x_0, y_0)] + k[f_y(x_0+h, \xi) - f_y(x_0, y_0)]|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \\ &\leq \lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} |f_x(\eta, y_0) - f_x(x_0, y_0)| + \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} |f_y(x_0+h, \xi) - f_y(x_0, y_0)| \end{aligned}$$



Ora,  $\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}$  e  $\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$  sono minori o uguali a 1 mentre, quando  $h, k \rightarrow 0$ ,  $\eta \in [u_0, u_0+h]$  tende a  $u_0$ , e  $\xi \in [y_0, y_0+k]$  tende a  $y_0$ . (per il teorema del confronto) da cui, essendo  $f_x$  ed  $f_y$  continue in  $(u_0, y_0)$  segue infine che

$$|f_x(\eta, y_0) - f_x(u_0, y_0)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ e } |f_y(u_0 + h, \xi) - f_y(u_0, y_0)| \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$$

In definitiva, l'ultimo membro delle precedenti diseguaglianze, somme di prodotti di funzioni limitate per funzioni infinitesime, è infinitesimo, da cui la differenziabilità.

c.v.d.

Se le dimensioni fossero più di due, basta incrementare una variabile alle volte, applicare il teorema di Lagrange, e stimare come prime battute termini.

Il teorema è molto utile quando è facile verificare che le derivate parziali di  $f$  sono continue. Ad esempio  $f(u, y) = \sin(uy)$  è comunque differenziabile perché le due derivate parziali  $y \cos(uy)$  e  $u \cos(uy)$  sono continue in quanto prodotti di composizione di funzioni continue.

La teoria finora svolta ha riguardato le funzioni scalari di variabili vettoriali. Il prossimo passo sarà di estendere il concetto di differenziale al caso generale di funzioni da  $\mathbb{R}^n$  ad  $\mathbb{R}^m$ : abbiamo già chiarito la situazione per le funzioni scalari,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ed  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ , mentre resta da studiare e calcolare il differenziale di funzioni vettoriali.

## IL DIFFERENZIALE DI FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

Inizieremo con le "curve parametriche", e cioè con le funzioni di una sola variabile scalare  $t$ , a valori in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ . La definizione di differenziale che adopereremo non richiederà ulteriori fatiche: è quella che abbiamo già introdotto nel caso delle funzioni scalari.

Dunque,  $f: J_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}^n$  sarà detta DIFFERENZIABILE in  $x_0$  se

$$\exists A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ lineare tale che } \lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|} = 0$$

Osserviamo che mentre la norma che appare al denominatore è un semplice valore assoluto in  $\mathbb{R}$ , quella al numeratore è la norma al quadrato, e quindi in  $\mathbb{R}^n$ . Osserviamo inoltre che ogni funzione lineare  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , come è noto dall'Algebra Lineare, è del tipo  $A(w) = \alpha w$ , ove  $w$  è scalare ed  $\alpha = A(1)$  è un vettore di  $\mathbb{R}^n$  (basta osservare che  $A(w) = A(w \cdot 1) = w A(1)$ ). Per determinare le componenti di  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  a partire dalla funzione  $f$  osserviamo che, scritto in forma scalare, il limite del differenziale diventa

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{|w|} \begin{pmatrix} f_1(x_0+w) \\ f_2(x_0+w) \\ \vdots \\ f_n(x_0+w) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ f_2(x_0) \\ \vdots \\ f_n(x_0) \end{pmatrix} - w \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

e portando dentro le norme in  $\mathbb{R}^n$  e ricordando che un vettore tende a zero se e solo se tendono a zero tutte le sue componenti scalari, ne segue che il limite precedente è zero se e solo se

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0+w) - f_i(x_0) - w\alpha_i}{w} = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$$

Cioè accade se e solo se  $f_i$  è derivabile in  $x_0$  e

$$\alpha_i = f'_i(x_0)$$

Dunque, per le funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}^n$ , il differenziale si rappresenta mediante le formule

$$df(x_0, w) = f'(x_0) w$$

L'utilizzo della lettera  $\gamma$  è tipico per le curve parametriche, ma occorre notare che le formule del differenziale è "ancora" del tipo già incontrato più volte  $f'(x_0)w$ , con l'importante differenza che, stavolta,  $w$  è scalare,  $f'(x_0)$  è un vettore in  $\mathbb{R}^n$ , ed il prodotto indicato è un prodotto scalare per vettore, ancora diverso dal prodotto di numeri  $f'(x_0)w$  che ricorre se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , o dal prodotto scalare di vettori  $f(x_0)w$ , che si adopera quando  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Non è ancora finita: come si rappresenta (e cioè come si calcola) il differenziale di funzioni da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^m$ , quando  $n, m > 1$ ? Com'è il gradiente in tal caso?

Si dice che  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , è differenziabile in  $x_0$  se esiste  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  lineare tale che

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + w) - f(x_0) - A(w)|}{\|w\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

Stavolta, lo nominatore denominatore è in  $\mathbb{R}^n$  (dominio) e quello a numeratore è in  $\mathbb{R}^m$  (codominio). Portando dentro la norma al numeratore lo scalare  $\frac{1}{\|w\|_{\mathbb{R}^n}}$  (stavolta non si può eliminare la  $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^n}$ , perché  $w$  è un vettore), e ricordando di nuovo l'equivalenza fra la convergenza dei vettori e quella delle loro componenti, ne segue che la differenziabilità equivale a

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f_i(x_0 + w) - f_i(x_0) - A_i(w)|}{\|w\|} = 0 \quad \forall i = 1 \dots m$$

ove  $A_i(w)$  è l' $i$ -esima componente scalare di  $A(w)$ .

Dunque, ciascuna delle  $m$  componenti scalari  $f_i(u)$  del vettore  $f(u)$  deve essere differenziabile con differenziale  $A_i(w)$ , da cui

$$A_i(w) = \nabla f_i(x_0) w = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j} w_j$$

e infine

$$df(x_0, w) = A(w) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n (f_1)_{x_j}(x_0) w_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n (f_m)_{x_j}(x_0) w_j \end{pmatrix}$$

Posto allora

$$f'(u_0) = \begin{pmatrix} (f_1)_{x_1} & (f_1)_{x_2} & \dots & (f_1)_{x_n} \\ \vdots & & & \\ (f_m)_{x_1} & (f_m)_{x_2} & \dots & (f_m)_{x_n} \end{pmatrix} (u_0)$$

ne segue subito che  $f'(u_0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e che

$$df(u_0, w) = f'(u_0) w$$

Cioè non sorprende più, ma stavolta  $f'(u_0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $w \in \mathbb{R}^n$ , ed il prodotto indicato è quello delle matrice  $f'(u_0)$  per il vettore  $w$ . La matrice  $f'(u_0)$ , più su definita, si chiama anche DERIVATA o GRADIENTE (nessuna novità) ma, più frequentemente nelle scienze sperimentali, ma anche MATRICE JACOBIANA di  $f$  in onore del matematico Carl Gustav Jacob JACOBI.

In conclusione

$$df(u_0, w) = f'(u_0) w$$

sempre e comunque: si tratta solo di sapere che oggetti sono  $f'(u_0)$  e  $w$  (due scalari, uno scalare e l'altro vettore, due vettori, o una matrice ed un vettore), e di moltiplicarli nel modo appropriato.

Sempre a proposito di fisica ed affini, per le curve  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  il vettore  $\dot{\gamma}(t_0)$  è la velocità nel punto  $\gamma(t_0)$  della traiettoria, ed è legato alla tangente alla traiettoria come si vedrà tra breve.  
Poché note conclusive.

La teoria generale del concetto di derivata e differenziale è più tardi recente (secolo scorso). Talvolta la derivata direzionale è detta anche DERIVATA (ovvero differenziale, nome che sconsiglio di impiegare)

DI GATEAUX, mentre il differenziale è detto DIFFERENZIALE DI FRECHÉT.

Dico che usare derivata (per la derivata di Gateaux) e differenziale (per il differenziale di Fréchet) sia sufficiente.

Un punto più delicato riguarda le formule di rappresentazione del differenziale. Negli spazi di dimensione infinita non sempre esistono teoremi che descrivano le strutture delle applicazioni lineari con prodotti

OPPORTUNI dell'incremento "per qualcosa". Quando ciò accade, il differenziale si potrà rappresentare con un "prodotto" dell'incremento per un "qualcosa", che verrà allora definito come il gradiente (o le derivate, o le jacobiane) della funzione nel punto. I teoremi di struttura delle applicazioni lineari diventano uno strumento cruciale, e sono purtroppo ben lunghi dall'essere semplici (o banali) osservazioni, come in  $\mathbb{R}^n$ .

AN\_2.5

## L'CALCOLO DIFFERENZIALE (II)

### Rette e piani tangenti

In questa sezione venzemo tratti alcuni aspetti geometrici dei concetti appena introdotti sulla scia di quanto detto proprio all'inizio, riguardanti rette, piani o spazi tangenti.

L'idea centrale, comune a tutti i casi, è che la funzione

$$g(u) = f(u_0) + A(u-u_0) \quad A(w) = df(u_0, w)$$

ha per grafico, secondo del dominio e del codominio di  $f$ , ore una retta cartesiana o parametrica, ore un piano (o iper-piano) cartesiano o parametrico, quello che "meglio approssima" il grafico o l'immagine di  $f$ .

Il caso  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è già noto, e ci ha ispirato nell'introdurre la definizione di differenziale. Consideriamo  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ed osserviamo che  $g(t) = \gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0)(t-t_0)$  è una retta parametrica passante per  $\gamma(t_0)$  e con gli spostamenti su di essa tutti paralleli a  $\dot{\gamma}(t_0)$ .

La differenziabilità di  $f$  assicura (posto  $w=t-t_0$ ) che

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|\gamma(t) - g(t)|}{|w|} = 0$$

e dunque che  $g(u)$  è la funzione del tipo  $\gamma(t_0) + \omega w$  che meglio "approssima" la traiettoria  $\gamma(t)$ . Ha dunque senso dire

Dati  $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $t_0 \in [a,b]$  si definisce RETTA TANGENTE al sostegno (ossia all'immagine) di  $\gamma$  nel suo punto  $\gamma(t_0)$  la retta parametrica

$$\sigma(t) = \gamma(t_0) + (t-t_0) \dot{\gamma}(t_0)$$

Il vettore  $\dot{\gamma}(t_0)$  (oltre che derivate) si dice VELOCITÀ di  $\gamma$  in  $\gamma(t_0)$ .

Se  $\dot{\gamma}(t_0) = 0$ , la retta tangente non viene così definita.

Il caso  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è diverso. Esamineremo in dettaglio il caso  $n=2$ .  
In tal caso, ricordiamo che graph  $f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$   
ne segue che, posto come prima  $w = (x-x_0, y-y_0)$ ,

$$g(x, y) = f(x_0, y_0) + \underbrace{f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0)}_{df((x_0, y_0); w)}$$

ha per grafico il piano (esplicito)

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0)$$

e, ancora una volta,  $g$  è la funzione affine ("lineare più una costante") che meglio approssima  $f$  vicino a  $(x_0, y_0)$ .

Dunque

Il PIANO TANGENTE al grafico cartesiano  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$  della funzione  $f$ , differenziabile in  $(x_0, y_0)$ , nel suo punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  è il piano di equazione implicita

$$z - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x-x_0) - f_y(x_0, y_0)(y-y_0) = 0$$

La direzione normale a tale piano è dunque quella del vettore

$$v = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1)$$

Si osservi che  $v$  punta in direzione delle  $z$  crescenti. La generalizzazione ad  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è immediata.

Il PIANO TANGENTE AL GRAFICO di  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nel punto  $(x_0, f(x_0))$  e  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  è  $z - f(x_0) - \nabla f(x_0)(x-x_0) = 0 \quad z \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$

e la relativa direzione normale è

$$v = (-\nabla f(x_0), 1) \equiv (-f_{x_1}(x_0), \dots, -f_{x_n}(x_0), 1)$$

**ATTENZIONE:** Il gradiente non indica la direzione normale al grafico di una funzione differenziabile, ma solo le sue proiezioni sullo spazio del dominio. È un elemento conto da buone massime: il vettore normale ad un piano in  $\mathbb{R}^3$  (tangente al grafico di  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ) ha tre componenti, mentre  $\nabla f = (f_x, f_y)$  solo due! È chiaro che non possono essere le stesse cose! Ci manca, però, davvero poco:

$$v = (-f_x, -f_y, 1) \quad \text{oppure} \quad -v = (f_x, f_y, -1)$$

forniscono i due orientamenti possibili per la direzione normale, delle z crescenti o delle z decrescenti!

L'ultimo caso è quello generale  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Tratteremo prima il caso  $n=2$  ed  $m=3$ , che corrisponde alle cosiddette "superficie parametriche".

Due importanti esempi sono:

- il piano parametrico in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\Psi(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} u_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \Psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

- la sfera unitaria, in coordinate polari sferiche:

$$\phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \theta \in ]0, \pi[ \text{ col latitudine} \\ \varphi \in ]0, 2\pi[ \text{ longitudine} \end{array}$$

Sia dunque  $\phi(u, v) = \begin{pmatrix} \phi_1(u, v) \\ \phi_2(u, v) \\ \phi_3(u, v) \end{pmatrix}$ , differenziabile.

La "funzione affine tangente" in  $(u_0, v_0)$  è

$$\psi(u, v) = \underbrace{\phi(u_0, v_0)}_{\text{punto di tangenza}} + \underbrace{\phi'(u_0, v_0)}_{\substack{\text{jacobiana} \\ \text{differenziale in } (u_0, v_0)}} \underbrace{\begin{pmatrix} u-u_0 \\ v-v_0 \end{pmatrix}}_w$$

Ricordando che, se  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $A_i$  sono le colonne di  $A$ , per ogni  $w \in \mathbb{R}^n$  si ha allora  $Aw = \sum_i w_i A_i$  ne segue che la funzione precedente si può scrivere anche.

$$\psi(u, v) = \phi(u_0, v_0) + \phi_u(u_0, v_0)(u-u_0) + \phi_v(u_0, v_0)(v-v_0)$$

ove  $\Phi_u$  e  $\Phi_v$  sono le due colonne della matrice jacobiana

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} (\Phi_1)_u \\ (\Phi_2)_u \\ (\Phi_3)_u \end{pmatrix}, \quad \Phi_v = \begin{pmatrix} (\Phi_1)_v \\ (\Phi_2)_v \\ (\Phi_3)_v \end{pmatrix}$$

L'equazione così ottenuta mostra che, se  $\Phi_u(u_0, v_0)$  e  $\Phi_v(u_0, v_0)$  sono indipendenti, e cioè se  $\Phi_u \wedge \Phi_v(u_0, v_0) \neq 0$ , allora essi generano gli spostamenti sul piano tangente. Osserviamo che  $\Phi_u(u_0, v_0)$  è il vettore veloce della curva  $u \rightarrow \phi(u, v_0)$ , che giace tutta sulla superficie, e  $\Phi_v(u_0, v_0)$  è la velocità di  $v \rightarrow (u_0, v)$ , anch'essa con sostegno interamente contenuto in quello della superficie  $\phi$ . Dunque, gli spostamenti sul piano (affine) tangente all'immagine di  $\phi$  sono generati dai vettori tangenti alle due curve precedenti, se risultano indipendenti. Le condizioni  $f'(t_0) \neq 0$ , per le curve, e  $\Phi_u \wedge \Phi_v(u_0, v_0) \neq 0$  per la superficie, sono il requisito più importante per definirli "REGOLARI", indipendentemente dalla regolarità, e cioè dalla continuità delle derivate, delle loro componenti scalari.

Non resta che di completare la definizione di piano tangente nel caso generale  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , sulle false nile di quanto già fatto per le superfici parametriche.

Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Fissato  $x_0 \in \Omega$  si definisce SPAZIO TANGENTE ad  $f$  in  $x_0$  lo spazio  $T$  generato dalle colonne  $T_i$  di  $f'(x_0)$  (la sua matrice jacobiana in  $x_0$ )

L'equazione parametrica dello SPAZIO AFFINE TANGENTE sarà invece

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(x_0) + \sum_i^n \alpha_i T_i$$

Non è detto, a priori, che  $T$  abbia dimensione  $n$ , perché le colonne di  $f'(x_0)$  potrebbero non essere indipendenti. È bene notare che, mentre lo spazio tangente è lo spazio vettoriale di  $f(x_0)$  tangenti al

sostegno di  $f$ , lo spazio affine è più simile a ciò che, nel caso delle  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , abbiamo chiamato retta tangente

$$y(t_0) + (t-t_0) j(t_0)$$

In tal caso,  $\langle j(t_0) \rangle = \{\alpha j(t_0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$  è lo spazio tangente, mentre  $y(t_0) + \langle j(t_0) \rangle$  è lo spazio affine tangente.

Studieremo un po' più a fondo il caso delle sfere unitarie.

Osserviamo subito che

$$(\sin \theta \cos \varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi)^2 + (\cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

e dunque il sostegno di

$$\Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\theta, \varphi) \\ y(\theta, \varphi) \\ z(\theta, \varphi) \end{pmatrix}$$

è tutto contenuto nella sfera unitaria  $u^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Sappiamo dalla geometria classica che il piano tangente ad una sfera in un punto è perpendicolare al raggio per quel punto.

Determiniamo

$$\Phi'(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} u_\theta & u_\varphi \\ y_\theta & y_\varphi \\ z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

la direzione normale allo spazio generato dalle colonne  $\Phi_\theta$  e  $\Phi_\varphi$  e  $\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi$ . Si ha

$$\begin{aligned} \Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi &= (\sin^2 \theta \cos \varphi, \sin^2 \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \theta) = \\ &= \sin \theta (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \end{aligned}$$

che è un vettore che ha la stessa direzione (è un multiplo) di  $(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ , che è la direzione del raggio dell'origine al punto di tangenza sulla sfera. Nessuna sorpresa, dunque!

Concludiamo con un esempio.

Sia  $\phi(u, v) = (u^3, v^3, u^2v^2)$ ,  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\phi'(u, v) = (\phi_u \quad \phi_v) = \begin{pmatrix} 3u^2 & 0 \\ 0 & 3v^2 \\ 2uv^2 & 2u^2v \end{pmatrix}$$

Osserviamo che  $\phi'(0,0)$  ha rango 0 perché vale  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e dunque l'equazione del "piano" tangente in  $\phi(0,0)$  sarebbe

$$\Psi(\alpha, \beta) = \phi(0,0) + \alpha \phi_u(0,0) + \beta \phi_v(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

È abbastanza evidente che  $\Psi(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , una superficie parametrica costante, NON definisce un piano in  $\mathbb{R}^3$  (ma, forse, un punto in  $\mathbb{R}^3$ :  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ).

Così come la condizione  $f'(t_0) \neq 0$  garantisce che

$$\sigma(t) = f(t_0) + (t-t_0) f'(t_0)$$

sia effettivamente una retta, e la condizione  $\phi_u \wedge \phi_v(u_0, v_0) \neq 0$  garantisce che  $\phi_u(u_0, v_0)$  e  $\phi_v(u_0, v_0)$  siano indipendenti e quindi che

$$\Psi(\alpha, \beta) = \phi(u_0, v_0) + \alpha \phi_u(u_0, v_0) + \phi_v(u_0, v_0)$$

sia effettivamente un piano parametrico in  $\mathbb{R}^3$ , si deve immaginare un'ipotesi di "REGOLARITÀ GEOMETRICA" per le funzioni da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^m$ .

Se  $m \geq n$ , un'ipotesi che assicuri l'indipendenza delle colonne della jacobiana  $f'(u_0)$  è di richiedere che il rango di  $f'(u_0) = n$ . Ne segue che

$$g(w) = f(u_0) + f'(u_0)w$$

sia un piano affine tangente con uno spazio di spostamenti di dimensione (massima)  $n$ . Il problema non si pone se  $m < n$ , come si vede bene nel caso scalare  $n > m = 1$ , dove  $z = f(u_0) + f'(u_0)(u-u_0)$ , nel caso singolare  $f'(u_0) = 0$ , che corrisponderebbe al caso in cui il rango di  $f'(u_0)$  è nullo, diventando  $z - f(u_0) = 0$ , e fornisce comunque l'equazione di un piano tangente ma in forme implicite (o esplicita:  $z = f(u_0)$ ) e NON parametrica.

Cose si intende da queste poche osservazioni, i tre punti di vista implicito ( $\equiv$  studiare i luoghi di zeri) esplicito ( $\equiv$  studiare i grafici di funzioni) e parametrico ( $\equiv$  studiare le immagini di funzioni) sono e restano molto diversi fra loro, pur essendo legati e, tutti e tre, indispensabili in alcuni contesti.

AN\_2.6

## L'CALCOLO DIFFERENZIALE (VI)

Un altro interessante aspetto "geometrico" dei concetti di differenziale e gradiente riguarda la possibilità di determinare la direzione (nel dominio) nella quale spostarsi per trovare la massima pendenza. Ricordiamo che, se  $f$  è differenziabile in  $u_0$ , allora ha in tutte le derivate direzionali e che, inoltre

$$f_v(u_0) = df(u_0, v) = \nabla f(u_0) \cdot v$$

Dalla diseguaglianza di Schwartz, segue dunque che

$$|f_v(u_0)| \leq \|\nabla f(u_0)\| |v|$$

e che se  $v$  è multiplo di  $\nabla f(u_0)$  vale in realtà

$$|f_v(u_0)| = \|\nabla f(u_0)\| |v|$$

Ne segue subito che

$$-\|\nabla f(u_0)\| |v| \leq f_v(u_0) \leq \|\nabla f(u_0)\| |v|$$

e dunque, fra tutte le direzioni  $v$  di assegnate norme non nulle (per esempio  $|v|=1$ )  $f_v(u_0)$  è massima se  $v = \alpha \nabla f(u_0)$   $\alpha > 0$ , ed è minima se  $v = -\alpha \nabla f(u_0)$   $\alpha > 0$ . Dunque, il gradiente indica la direzione nella quale spostarsi, nel dominio, per far crescere più rapidamente la funzione, mentre il suo opposto  $-\nabla f(u_0)$  indica la direzione di massima decrescenza.

Vedremo tra breve che la direzione di  $\nabla f(u_0)$  è ORTOGONALE alle curve di livello  $\{u \in \mathbb{R}^n : f(u) = f(u_0)\}$ , ma la prova richiede il prossimo risultato, molto importante.

## LA DERIVAZIONE DI FUNZIONI COMPOSTE

Il risultato al cuore del problema è il seguente:

**TEOREMA** (differenziazione di funzioni composte):

Sia  $f: \Omega \rightarrow \Sigma$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  e  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ , e  $g: \Sigma \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{R}^p$ .

Sia poi  $h(u) = g(f(u))$  e sia  $u_0$  interno ad  $\Omega = \text{dom}(h)$ . Allora

$$d(u_0, w) = dg(f(u_0), df(u_0, w))$$

Inoltre, rappresentando i differenziali con

derivate - velocità - gradienti - jacobiane

si ha anche

$$h'(u_0)w = g'(f(u_0)) f'(u_0)w \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$$

ed infine

$$h'(u_0) = g'(f(u_0)) f'(u_0)$$

**Dimostrazione** (vedi Appendice):

Si osservi che le solite regole di derivazione delle funzioni composte da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ , ove però i termini possono essere scalari, vettori o matrici ed il prodotto va inteso nel senso opportuno.

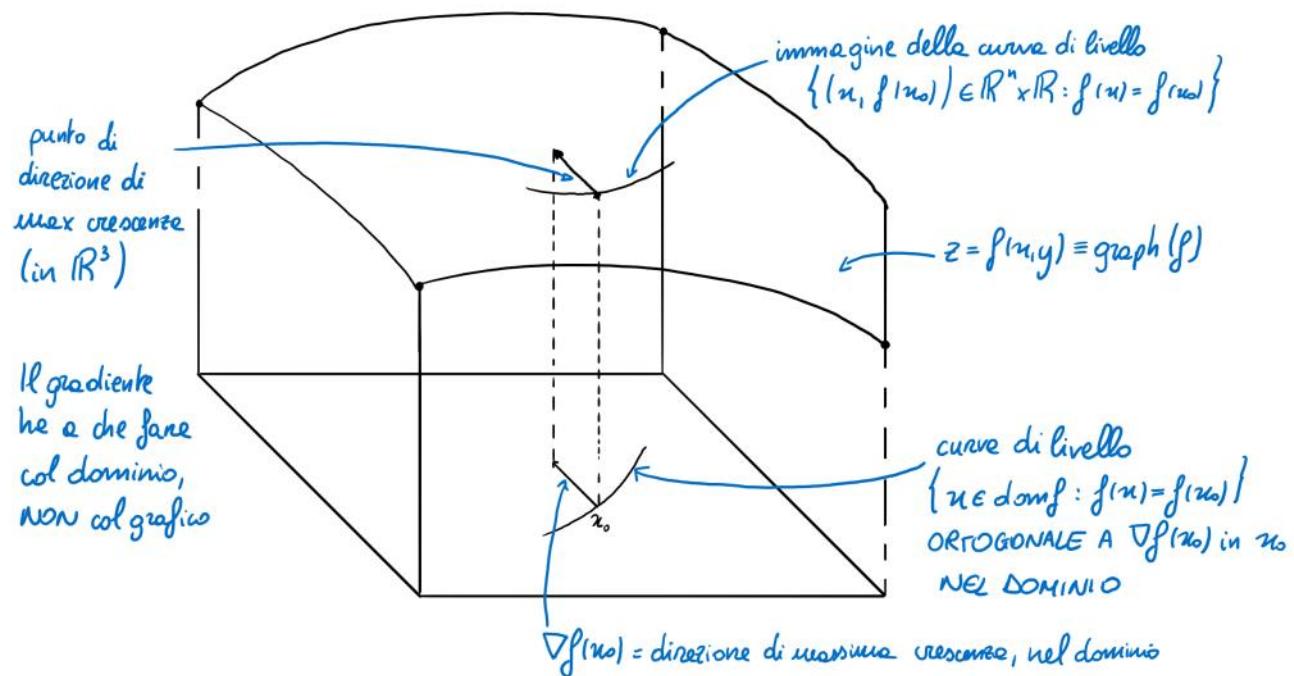
**ESEMPIO:** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

Allora, posto  $h(t) = f(g(t))$  si ha

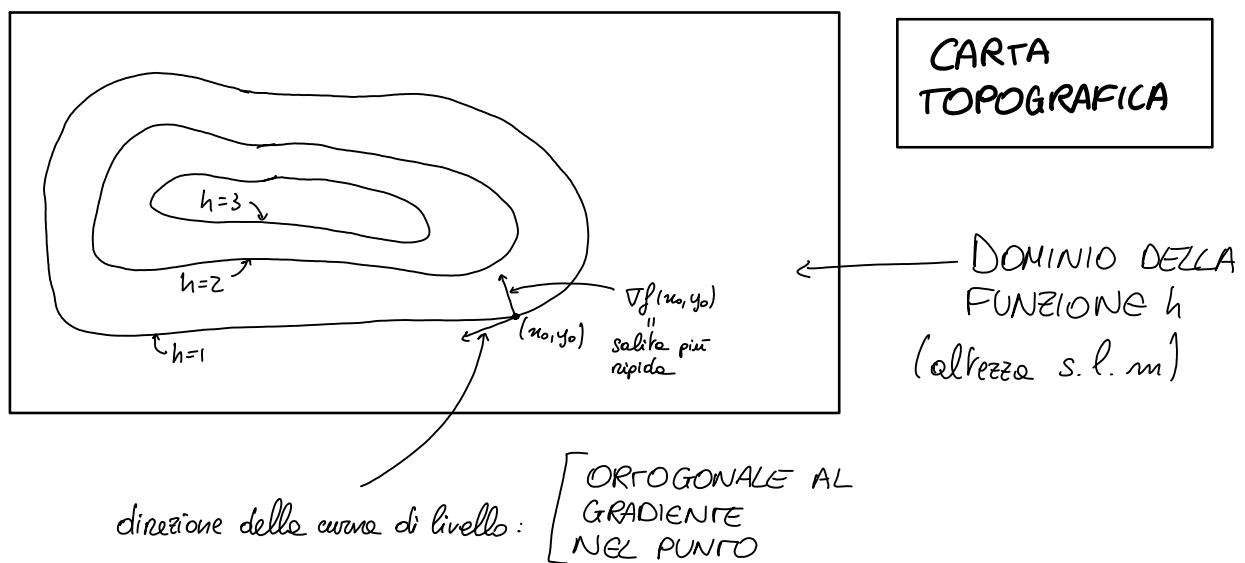
$$h'(t) = f'(g(t)) \overbrace{g'(t)}^{\text{PRODOTTO SCALARE}} = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t)$$

Questa formula è al cuore della teoria dei campi, e le sue applicazioni più importanti sono da ricercarsi lì. Per ora, proviamo che ogni curva di livello di una funzione differentiabile è ortogonale al gradiente in quel punto. Se  $g(t)$ ,  $t \in [\alpha, b]$  è una curva parametrica tutta giacente sull'insieme di livello  $k$ ,  $\{u \in \mathbb{R}^n : f(u) = k\}$ , si ha  $f(g(t)) = k \quad \forall t \in [\alpha, b]$ .

Allora  $h(t) = f(j(t))$  è costante in  $[a, b]$  e dunque  $0 \equiv h'(t) = \nabla f(j(t)) j'(t)$ . Ne segue che, nel punto  $j(t)$ , immagine di qualsiasi  $t \in [a, b]$ , il vettore  $\nabla f(j(t))$  (il gradiente di  $f$  in quel punto) ha prodotto scalare nullo con  $j'(t)$  (la direzione della curva, o del moto, in quel punto). Dunque: il gradiente di una funzione (scalare) indica la proiezione sul piano orizzontale delle direzioni nelle quali muoversi per trovare le massime pendenze (in inglese, GRADIENT vuol dire PENDENZA, dal latino gradior) ma indica anche la direzione normale alla curva di livello in quel punto.



## CURVE DI LIVELLO



Un'osservazione meteorologica: le curve di livello delle pressioni atmosferiche (isobare) danno importanti indicazioni sulla velocità del vento: più sono fitte, più rapidamente varia la pressione, il che sottopone le masse d'aria comprese ad una maggiore differenza di spinte che le accelerano. Il fatto che poi devi in senso antiorario (qui, orario in Argentina, o in Sud-Africa, o in Australia), dipende dalla rotazione della terra, ma queste... è un'altra storia!

Un'osservazione: il teorema di derivazione di funzioni composte in più variabili non riveste, nella pratica, l'importanza vitale che appare chiaramente in una sola variabile. In effetti, mentre ci sono numerosi esempi di funzioni in una variabile c'è un numero estremamente ridotto di funzioni "nella" di più variabili (in realtà: due): somme, differenze, moltiplicazione, divisione, potenze, per le quali esistono "regole di derivazione". Ad esempio, la funzione composta da  $t \rightarrow (\cos t, \sin t)$  e dalla funzione di due variabili  $(u, v) \rightarrow u^v$  è "semplicemente"

$$t \rightarrow (\cos t)^{\sin t} = e^{\sin(t) \log(\cos(t))}$$

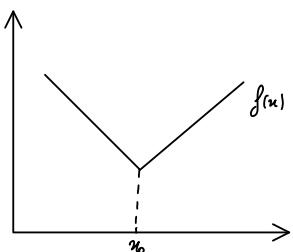
per derivare la quale non è necessario scomodare la rappresentazione del differenziale di  $(u, v) \rightarrow u^v$ : è una funzione di una sola variabile, e come tale si può derivare!

L'importanza delle formule  $(f(g(t)))' = \nabla f(g(t)) g'(t)$  è fondamentale in teoria (ad esempio, permette di definire la differenza di potenziale!) ma è del tutto invisibile in pratica, se si manipolano solo funzioni elementari.

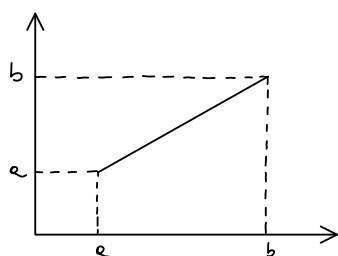
AN\_2.7

## BREVI NOTE PRATICHE SUGLI ESTREMI VINCOLATI

La condizione, forse impiegata per la prima volta da Fermat nel suo lavoro sulla rifrazione della luce nel quale utilizzava l'ipotesi che la luce dovesse scegliere il cammino che le consentisse di impiegare il tempo mimimo per andare da un punto ad un altro - tenendo conto delle diverse velocità nei vari mezzi (aria, acqua, vetro...) - che riguarda l'enunciazione delle derivate è, purtroppo, molto obsoleta: la sua validità è soggetta a varie ipotesi (come tutti i teoremi) ed è FALSA se esse non sono verificate:



$x_0$  non è uno zero di  $f'(u)$   
ma è minimo interno e dom  $f$



$a$  e  $b$  sono estremi nei quali  $f'(u)$  è  
(rispettivamente) definita, ma  $f'$  è non 0

Le cose non migliorano affatto in più variabili (... e quando mai!).  
Un enunciato ragionevole è

**TEOREMA (Fermat)** Se:

- $x_0$  è INTERNO a  $\text{dom } f$
- $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$  esiste (finita)
- $x_0$  è un estremo (max o min) locale

allora  $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$

La direzione  $v$  delle derivate è arbitraria. Ricordiamo che  $x_0$  è di minimo globale per  $f$  se  $\exists B(x_0)$ , intorno di  $x_0$ , tale che

$$f(x_0) \leq f(u) \quad \forall u \in \text{dom } f \cap B(x_0)$$

e dunque  $u$  è un minimo solo se si considerano i punti del dominio della funzione ed esso sufficientemente vicini.

Il problema oggetto di queste note è di fornire un qualche lume su cose fare quando viene a mancare l'ipotesi che  $u$  sia interno al dom  $f$ .

Esso è, in generale, molto complesso, ma è possibile affracciarlo in qualche modo in alcuni casi particolari.

Per andare al sodo, consideriamo quelli più semplici.

Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , una funzione di due variabili.

Sia  $\Gamma \subseteq \Omega$  un sottoinsieme del dominio di  $f$ , che chiameremo il **VINCOLO**, e considereremo il problema di determinare

$$\max_{\Gamma} f \text{ e/o } \min_{\Gamma} f$$

quando  $\Gamma$  non è aperto, (il che renderebbe tutti i punti interni), non è neanche del tutto arbitrario, ma è invece:

1) il grafico di una funzione  $\varphi$ , e cioè

$$\Gamma = \{(u, y) \in \Omega : y = \varphi(u), u \in [a, b]\} \text{ ovvero } \{(u, y) \in \Omega : u = \varphi(y) : y \in [a, b]\}$$

OPPURE

2) il sostegno di una curva parametrica  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$

$$\Gamma = \{(u, y) \in \Omega : u = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \quad t \in [a, b]\}$$

O ANCORA

3) il luogo degli zeri di una funzione di due variabili  $g$ , e cioè

$$\Gamma = \{(u, y) \in \Omega : g(u, y) = 0\}$$

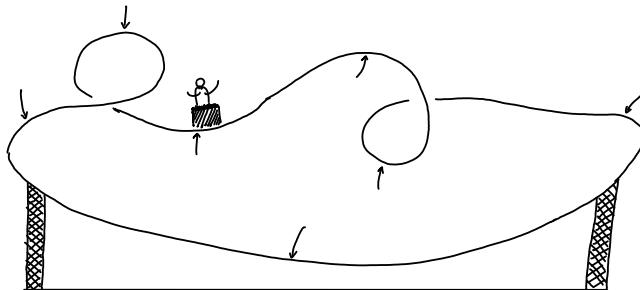
Per maggiore brevità chiameremo il caso 1) **VINCOLO CARTESIANO**, il caso 2) **VINCOLO PARAMETRICO** e il caso 3) **VINCOLO IMPLICATO**.

Non è una terminologia standard, ma riccheggia quelle dell'equazione delle rette e può aiutare a ricordare.

Prima di procedere accenniamo il celebre metodo dei

**MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE** riguarda il caso dei vincoli impliciti, e fu scoperto avendo in mente il problema meccanico del moto di una morsa su una curva

In sostanza, un ottovolante!



In nessun punto il gradiente del potenziale (e cioè le forze di gravità) è nullo, ma nei punti segnati esso è perpendicolare al binario, che assorbe del tutto le spinte deformandosi poco (si spieghi!) e dunque se si pone il carrello (fermo) in uno di essi, resterà fermo: ecco i punti di equilibrio!

Il problema statico è facile: il potenziale è proporzionale all'altezza rispetto al livello di riferimento (nel quale si definisce nullo) e dunque i punti di equilibrio (non necessariamente stabili) del carrello sull'ottovolante sono

$$\min_{\text{ottovolante}} \text{altezza} \quad \text{e} \quad \max_{\text{ottovolante}} \text{altezza}$$

e ciò conduce al problema di determinare massimi e minimi di funzioni su curve. Un'osservazione al resto: un grafico di funzione non può essere un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^2$  perché su ogni retta verticale (od orizzontale, nell'altro caso) ci può essere solo un punto del grafico: un intorno circolare non è fatto così!

Siamo dunque costretti a prendere in considerazione i casi ai quali prima abbiamo accennato e vedere se se ne può ricavare qualcosa di buono: il teorema di Fermat "nativo" non funziona!

### VINCOLO CARTESIANO

Supponiamo prima che  $\Gamma = \{(u, y) \in \mathcal{L} : u \in [\alpha, b], y = \varphi(u)\}$ , e che  $(u_0, \varphi(u_0))$  sia un punto di estremo (per esempio: minimo) globale.

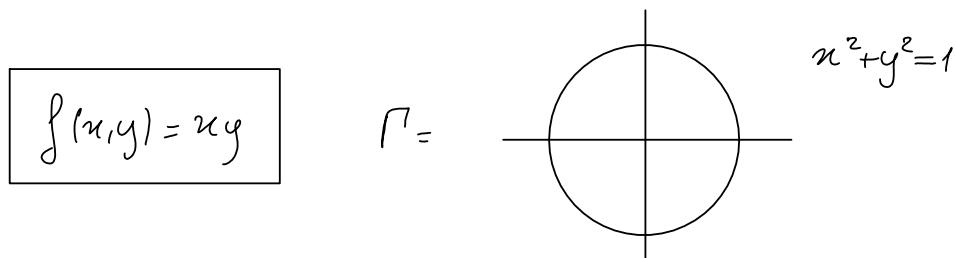
Se consideriamo allora  $h(u) = f(u, \varphi(u))$ , essa assume, al variare di  $u$  in  $[\alpha, b]$ , tutti i valori che  $f$  assume su  $\Gamma$  perché, al variare di  $u$  in  $[\alpha, b]$ , il punto  $(u, \varphi(u))$  descrive tutto il grafico di  $\varphi$ ,  $\Gamma$ .

Gli estremi globali di  $\Gamma$  si potranno ottenere ricorrendo con le tecniche standard per le funzioni di una variabile, gli estremi globali di  $h$  su  $[a,b]$ . Se  $f$  è di classe  $C^1(\Omega)$  e  $\varphi \in C^1[a,b]$ , per il teorema delle derivate totali e delle continuità delle funzioni composte, segue che  $h \in C^1[a,b]$  e dunque, a parte i casi  $a=\varphi$  ed  $b=\varphi$ , i suoi estremi assoluti si troveranno in punti dove  $h'=0$ .

Possoché identico è il caso del

### VINCOLO PARAMETRICO

Basta porre  $h(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$   $t \in [a,b]$  per ricongdurci esattamente allo stesso ordine d'idee. Un esempio perhè più chiaro!



La circonferenza unitaria si presta ad essere studiata, con vari ordinii d'impicci, con entrambi i "metodi" precedenti.

**CARTESIANO**  $y = \sqrt{1-x^2}$  e  $y = -\sqrt{1-x^2}$   $x \in [-1,1]$

In tal caso gli estremi vincolati (da confrontare fra loro per determinare i "vincitori") si potranno determinare studiando

$$\min_{\substack{\max \\ x \in [-1,1]}} u \sqrt{1-x^2} \quad \text{e} \quad \min_{\substack{\max \\ [-1,1]}} x (-\sqrt{1-x^2})$$

Le due funzioni di una variabile così ottenute sono l'una l'opposto all'altra (per puro caso!) e dunque basta studiarne una sola (i massimi dell'una sono minimi dell'altra!): un affatto mirabolante delle simmetrie di vincolo e funzione.

**PARAMETRICO** ha circonferenza (intere) è sostegno delle curve  
 $r(t) = (\cos t, \sin t)$   $t \in [0, 2\pi]$

de cui

$$h(t) = \begin{matrix} x \\ \downarrow \\ \cos t \end{matrix} \quad \begin{matrix} y \\ \downarrow \\ \sin t \end{matrix} = \frac{1}{2} \sin 2t$$

Occorre studiare

$$\max_{\substack{\min \\ [0, 2\pi]}} \frac{1}{2} \sin 2t$$

ed i massimi e minimi globali si determinano "ad occhio".

$$\text{MAX} \quad 2t = \frac{\pi}{2} \quad \circ \quad 2t = \frac{\pi}{2} + 2\pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \quad \circ \quad t = \frac{5}{4}\pi$$

$$\text{MIN} \quad 2t = \frac{3}{2}\pi \quad \circ \quad 2t = \frac{3}{2}\pi + 2\pi \Rightarrow t = \frac{3}{4}\pi \quad \circ \quad t = \frac{7}{4}\pi$$

Ad evitare errori grossolani,  $f$  non è l'area del rettangolo avente sulle diagonali l'origine e  $(u, y)$ : lo è solo se  $uy > 0$ , e cioè nel I e nel III quadrante! Negli altri due quadranti è l'opposto dell'area.

Esiste una "terza via" per affrontare questo problema: quelle di Lagrange (che, ad onta del nome, era torinese!). Prima di esaminare in cosa consista, chriariamo bene cosa cambia se si parla di estremi globali: ad estremi locali: nulla!

**CARTESIANO** Se  $(u_0, \varphi(u_0))$  è un minimo locale di  $f$  ristretta a graph( $\varphi$ ) ci sarà un intorno  $B_\delta$  di  $(u_0, \varphi(u_0))$  tale che

$$f(u_0, \varphi(u_0)) \leq f(u, \varphi(u)) \quad \forall (u, \varphi(u)) \in B_\delta$$

Ora  $(u, \varphi(u)) \in B_\delta$  se  $|f(u, \varphi(u)) - f(u_0, \varphi(u_0))| < \delta$  e cioè se

$$\sqrt{(u-u_0)^2 + (\varphi(u) - \varphi(u_0))^2} < \delta$$

Insisto ora  $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ , dalla continuità di  $\varphi$  segue che

$\exists \eta : |\varphi(u) - \varphi(u_0)| < \varepsilon = \frac{\delta}{2}$  se  $|u - u_0| < \eta$  e dunque, posto

$$\sigma = \min \left\{ \frac{\delta}{2}, \eta \right\} \Rightarrow |(u, \varphi(u)) - (u_0, \varphi(u_0))| < \delta \text{ se } |u - u_0| < \sigma$$

Dunque  $u$  è di minimo locale per  $h$ .

Dunque, gli estremi locali di  $u \rightarrow h(u, \varphi(u))$  sono candidati ad essere estremi locali per  $f$  su  $\Gamma$ . Un po' più delicato è il caso

### PARAMETRICO

Infatti una curva parametrica non è necessariamente semplice, e dunque può passare per lo stesso punto in diversi istanti.

Pur monodimensionale, con ragionamento identico a quello precedente si vede subito che ad un estremo locale  $(u_0, y_0)$  di  $f$  su  $\Gamma$ ,  $u_0 = \varphi(t_0)$   $y_0 = \psi(t_0)$ , corrisponde un estremo locale  $t_0$  per  $h(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ . Di tali  $t$  ce ne possono essere diversi, se la curva non è semplice e si sceglie per  $(u_0, y_0)$  una delle autointersezioni.

Ai fini "pratici" non cambia nulla, come si diceva:

- gli estremi di  $f$  su vincoli di tipo grafico cartesiano di  $\varphi, \psi$  derivabile dapprima, sono FRA gli estremi "liberi" di

$$h(u) = f(u, \varphi(u))$$

o, se il grafico è riferito all'asse  $y$ ,

$$h(y) = f(\varphi(y), y)$$

- gli estremi di  $f$  su vincoli di tipo sostegno delle curve parametriche  $f(t) = (\varphi(t), \psi(t))$  sono fra gli estremi "liberi" (vedi appendice 1) di

$$h(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$$

### VINCOLO IMPLICITO

Alle base di tutto c'è il teorema di U. Dini sulle funzioni implicite.

L'insieme  $\Gamma = \{(u, y) \in \mathbb{R}^2 : g(u, y) = 0\}$ , sotto opportune ipotesi, è un grafico cartesiano di una opportuna funzione  $\varphi$ , definita nell'intorno di ogni punto di  $\Gamma$ . Il problema è costituito dalle ipotesi che, come è noto, consistono sostanzialmente nell'assumere  $\nabla g(u_0, y_0) \neq 0$ .

Dunque, non tutti i luoghi di zeri di funzioni (anche  $C^\infty$  o polinomi) sono "adatti" ad essere studiati col metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ma solo quelli che verificano la precedente condizione sul gradiente.

Il metodo di Lagrange è espresso nel seguente teorema, che riportiamo senza dimostrazione.

**TEOREMA (Lagrange):** Siano  $f, g \in C^1(\Omega)$ . Sia  $(x_0, y_0) \in \Omega$  tale che:

- $g(x_0, y_0) = 0$  (il punto sta sul vincolo).
- $(x_0, y_0)$  è di estremo locale per  $f$  su  $\Gamma = \{(x, y) \in \Omega : g(x, y) = 0\}$
- $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$

Allora, definita  $h(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$  esiste  $\lambda_0$ , il "moltiplicatore di Lagrange" (la "reazione vincolare" in meccanica) tale che  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  verifica  $\nabla h(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$  e cioè

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ 0 = \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 0 = \frac{\partial h}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) = g(x_0, y_0) \end{cases}$$

Supponendo di trovare tutte le soluzioni di questo sistema (in generale, è una pura illusione!), l'ultima equazione assicura che le prime due componenti  $(x_0, y_0)$  rappresentano un punto di vincolo, mentre le altre esprimono il fatto che  $\nabla f(x_0, y_0)$  e  $\nabla g(x_0, y_0)$  sono paralleli. Ricordando che, se non nullo,  $\nabla g(x_0, y_0)$  è perpendicolare alla curva di livello passante per  $(x_0, y_0)$  ciò garantisce che la forza (il gradiente del potenziale  $f$ ) è perpendicolare al vincolo e dunque non può accelerare una massa che possa muoversi solo in quelle direzioni, perché la sua proiezione lungo il vincolo è nulla. Tornando all'esempio:

**IMPLICITO**

$$f(x, y) = xy \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \text{ mai nullo su } x^2 + y^2 = 1 \text{ perché}$$

$$\nabla g(x, y) = 0 \Rightarrow 2x=0, 2y=0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0) \Rightarrow g(x, y) = -1 \neq 0$$

Dunque, gli estremi vincolati vanno ricercati fra le soluzioni di

$$f_x + \lambda g_x = 0; f_y + \lambda g_y = 0, g = 0$$

e cioè

$$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \Rightarrow x = -2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y - 4\lambda^2 y = 0 \Rightarrow y(1 - 4\lambda^2) = 0$$

$\swarrow \searrow$

$y=0$  oppure  $1 - 4\lambda^2 = 0$

Dalle seconde equazione  $y=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow x^2 + y^2 \neq 1$  e dunque non ci sono soluzioni del sistema verificanti  $y=0$ .

Invece, se  $1 = 4\lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}$  da cui:

- se  $\lambda = \frac{1}{2}$ , la prima equazione diventa  $x = -y$ , e sostituendo nella terza si ha  $2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ , il che fornisce le due soluzioni  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  e  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
- se  $\lambda = -\frac{1}{2}$ , la prima equazione diventa  $x = y$ , da cui, come più su,  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ , da cui infine  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  e  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

I quattro punti verificante le condizioni di estremo locale sono

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ e } (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), \text{ sui quali } f = \frac{1}{2}$$

e

$$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ e } (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), \text{ sui quali } f = -\frac{1}{2}$$

I primi due sono massimi e gli altri sono minimi di  $f$  sul vincolo.

## I MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Perche' al plurale, mentre  $\lambda$  e' uno solo? Accenniamo al teorema nel caso generale

**TEOREMA (Lagrange):** Sia  $f(x_1, \dots, x_n)$  una funzione di classe  $C^1(\Omega)$ ,  $\Omega$  aperto in  $\mathbb{R}^n$ , e siano  $g_1, g_2, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$  tali che la matrice jacobiana  $\frac{\partial(g_1, \dots, g_k)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$  abbia rango  $k$  in ogni punto.

Allora, dato un estremo  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  di  $f$  su  $\Gamma$

$$\Gamma = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \Omega : \begin{array}{l} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\}$$

esistono  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  (MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE) tali che

$$\begin{cases} 0 = \nabla f(x_1^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(x_1^*, \dots, x_n^*) \\ 0 = g_i(x_1^*, \dots, x_n^*) \quad \forall i=1 \dots k \end{cases}$$
■

Ogni superficie  $g_i(x)=0$  ha il suo moltiplicatore  $\lambda_i$ . Anche qui, le ultime  $k$  equazioni esprimono l'appartenenza al vincolo, mentre le  $n$  che contengono  $\nabla f$  impongono che esso appartenga al complemento ortogonale dello spazio di tutti gli spostamenti sul vincolo.

Una volta di più, la forza  $\nabla f$  e' bilanciata completamente dai vincoli e non ha componenti lungo di essi.

## NOTA CONCLUSIVA

Non esiste modo di decidere, a priori, quale sia il metodo più conveniente. Ciascuno può esserlo, a seconda dei casi. Le difficoltà sono non dissimili da quelle presentate dalla condizione di Fermat

$$\nabla f = 0 \quad (\text{n equazioni, n incognite})$$

che è comunque un sistema (in generale) solo di poco "meno" non lineare di

$$g=0; \quad \nabla f + \lambda \nabla g = 0 \quad (\text{n+k equazioni, n+k incognite})$$

La risoluzione esplicita è, in generale, proibitiva, come lo è persino nel caso più semplice (1 variabile):  $f'(m)=0$ .

Comunque, i tre metodi hanno il loro spazio e le loro opportunità di applicazione, oltre al loro valore teorico straordinario.

Un'altra nota: così come la condizione di Fermat originale  $f'(m_0)=0$ , i "metodi" elencati forniscono condizioni necessarie, in generale NON sufficienti, il che vuol dire che la ricerca degli estremi comporterà indagini ulteriori, come accade in una variabile per distinguere gli estremi dai flessi, o in più variabili per discriminare fra estremi, selle e punti critici di ordine superiore. Davvero non banale!

## APPENDICE : ESTREMI "LIBERI" E "VINCOLATI"

RiconSIDeriamo brevemente i vincoli cartesiani e parametrici, in casi più generali, attraverso qualche esempio.

La rappresentazione cartesiana e parametrica del vincolo si basa sulle sostituzione di  $f$  con un'opportuna funzione composta di parametri opportuni, per la quale non occorre considerare vincoli, perché sono già "inglobati", per così dire, nella definizione della funzione stessa.

Se volessi studiare gli estremi di  $f(x,y,z) = x^2yz^3$  sulla sfera unitaria  $|(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| = 1$  e decidessi di adoperare la sua rappresentazione parametrica standard.

$$x = \cos \theta \sin \varphi \quad y = \sin \theta \sin \varphi \quad z = \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

posso ricercare gli estremi richiesti considerando

$$h(\varphi, \theta) = (\underset{x}{\cos \theta \sin \varphi})^2 (\underset{y}{\sin \theta \sin \varphi}) (\underset{z}{\cos \varphi})^3$$

All variare di  $\varphi$  in  $[0, \pi]$  e  $\theta$  in  $[0, 2\pi]$ , il punto

$$\boxed{H}(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$$

percorre tutti e soli i punti del vincolo e dunque, se c'è un estremo per  $f$  sul vincolo, deve esserci lo stesso punto di estremo per  $H$  in tutti i punti  $(\theta, \varphi)$  del dominio di  $\boxed{H}$  che hanno per immagine l'estremo considerato, per effetto della continuità di  $\boxed{H}$ , che si presuppone.

Il problema è diventato "libero", non "vincolato",

$$\max_{\substack{\varphi \in [0, \pi] \\ \theta \in [0, 2\pi]}} \underbrace{f(\boxed{H}(\theta, \varphi))}_{H(\theta, \varphi)}$$

In modo del tutto simile si ragiona nel caso cartesiano.

La complessità del procedimento è fortemente influenzata dalla complessità delle rappresentazione, cartesiane o parametriche, del vincolo. Le coordinate polari sferiche non sono sempre incognienti! In questo caso, molto semplice all'aspetto, ci si può ricordare che l'equazione implicita della sfera unitaria è semplice

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

il che induce a tenere le vie dei moltiplicatori... anzi: DEL moltiplicatore (ogni equazione introduce UN moltiplicatore)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = f_x + \lambda g_x = 2xyz^3 + 2\lambda x \\ 0 = f_y + \lambda g_y = x^2z^3 + 2\lambda y \\ 0 = f_z + \lambda g_z = 3x^2yz^2 + 2\lambda z \\ 0 = g = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{array} \right.$$

4 equazioni nelle  
4 incognite  $x, y, z, \lambda$   
PIUTTOSTO NON LINEARE!

Non è semplice per niente, ma è profondamente diverso dallo studiare  $\mathbb{H}(0, \varphi)$  su  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ : ci sono casi molto fortunati nei quali un problema è abbozzabile e l'altro no.

Un'ultima domanda, giusto per ripassare un po' d'algebra.

### "DI CHE GRADO È IL SISTEMA PRECEDENTE?"

Può essere utile calcolarlo perché ha a che fare col numero delle soluzioni del sistema (teorema di BÉZOUT).

La risoluzione dei sistemi lineari per via numerica è altro ed è ancora oggetto di studio: il riferimento di obbligo è costituito dai libri di Analisi Numerica.

Per una raccolta di programmi "pratici", corredati di presentazione e commenti sensati, si può consultare il solito Press - Teukolsky - Vetterling - Flannery

"Numerical Recipes in C"

nelle varie versioni (si può sostituire a C C++ oppure FORTRAN) a seconda del linguaggio preferito.

AN 2018

## LA FORMULA DI TAYLOR PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

L'arsenale degli artifici per estendere a più variabili risultati stabiliti per funzioni di una sola variabile reale riserva un posto d'onore a quello, semplicissimo, di considerare la restrizione delle funzione  $f$  da studiare ad un segmento contenuto nel dominio  $f(t) = x_0 + t v$ , il che ne trasforma lo studio in quello di  $h(t) = f(f(t))$ , funzione di una sola variabile  $t$ . La condizione necessaria per un estremo (di Fermat) stabilita direttamente in una variabile, viene così estesa alle funzioni tenute su  $\mathbb{R}^n$ , quanto negli spazi di dimensione infinita (Equazione di Euler, o di Euler-Lagrange per i meccanici razionali).

Lo stesso "trucco" svolge un ottimo lavoro per generalizzare a più variabili il risultato di Taylor, che verrà qui esposto, per semplicità, col resto nelle forme "di Lagrange".

Ricordiamone brevemente l'enunciato.

**Se  $f \in C^{N+1}[x_0, x]$ . Allora, esiste  $\xi \in ]x_0, x[$  tale che**

$$f(x) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x-x_0)^k + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x-x_0)^{N+1}$$

Si ricordi che esistono enunciati più raffinati con ipotesi meno restrittive (reperibili, ad esempio, su G. PRODI Analisi Matematica ed. BORINGHIERI). È bene ricordare anche che  $f \in C^{N+1}[a, b]$  vuol dire che  $f$  ha tutte le derivate continue fino all'ordine  $N+1$  non solo nei punti interni  $]a, b[$ , ma anche in  $a$  e in  $b$ ! Naturalmente le derivate in  $a$  saranno destra e quelle in  $b$  sinistra. Un modo rapido di verificare tali ipotesi è di stabilire che  $f \in C^{N+1}[a', b'][$  con  $]a', b'[ \supset [a, b]$ . Inoltre, ricordiamo che  $0! = 1$ ,  $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ , e che la sommatoria è un POLINOMIO, detto DI TAYLOR DI GRADO  $N$ , di  $f$  in  $x_0$ . Nel caso  $N=0$ , il teorema di Taylor produce un risultato altrettanto ben noto:  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ , il che giustifica la denominazione "resto di Lagrange" per l'ultimo termine delle formule nell'enunciato precedente.

Verranno presentate due diverse espressioni del polinomio di Taylor in più variabili: la prima deriva direttamente da quella in una variabile, mediante l'artificio descritto più su, mentre l'altra comporta un numero minore di calcoli di derivate, perché tiene conto del teorema di Schwartz.

Sia dunque  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

**TEOREMA** Sia  $f \in C^{N+1}(B_S(x_0))$ . Allora, per ogni  $w$  verificante  $|w| < \delta$  esiste  $\xi \in [0, 1]$  tale che

$$f(x_0 + w) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \dots i_k=1}^m f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}(x_0) w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_k} + \frac{1}{(N+1)!} \sum_{i_1 \dots i_{N+1}=1}^n f_{x_{i_1} \dots x_{i_{N+1}}}(x_0 + \xi w) w_{i_1} \dots w_{i_{N+1}}$$

Il primo addendo e secondo membro, con le due somme annidate, è il POLINOMIO DI TAYLOR. Nell'enunciato precedente si è posto  $w = u - x_0$  per ottenere maggiore semplicità nell'espressione a secondo membro.

### Dimostrazione

Fissato ad arbitrio  $u \in B_S(x_0)$ , e posto  $w = u - x_0$  si ha  $|w| < \delta$ . Si pone, allora,  $h(t) = f(x_0 + tw)$  e si osserva che  $h(0) = f(x_0)$  e  $h(1) = f(u)$ . Verre' brevemente verificato che  $h \in C^{N+1}[0, 1]$  sicché, dal teorema in una variabile, ne segue che  $\exists \xi \in ]0, 1[$  tale che

$$\begin{aligned} h(1) &= h(0) + h'(0) \cdot 1 + \dots + \frac{1}{N!} h^{(N)}(0) \cdot 1^N + \frac{1}{(N+1)!} h^{(N+1)}(\xi) 1^{N+1} = \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} h^{(k)}(0) + \frac{1}{(N+1)!} h^{(N+1)}(\xi) \end{aligned}$$

Ora dunque calcolare le derivate successive  $h^{(0)}(t), h^{(1)}(t), \dots, h^{(N+1)}(t)$ . Osserviamo che  $h(t)$  è definita su  $[-1, 1]$ . Si ha subito

$$h^{(0)}(t) = h(t) = f(x_0 + tw) \Big|_{t=0} = f(x_0)$$

Per calcolare  $h^{(1)}(t) = \frac{d}{dt} [f(x_0 + tw)]$  si può utilizzare il teorema di derivazione delle funzioni composte, perché  $f$  è (molto più che)  $C^1$  in un intorno di 0 ed è quindi differenziabile, così come lo è  $t \mapsto x_0 + tw$ .

Ne segue

$$h'(t) = \frac{d}{dt} [f(x_0 + tw)] = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_0 + tw) w_i,$$

da cui

$$h'(0) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_0) w_i,$$

Si puo' calcolare  $h''(t)$  riapplicando il teorema di derivazione delle funzioni composte a ciascuno dei termini  $f_{x_i}(x_0 + tw) w_i$ , e, finche' le derivate considerate hanno a loro volta derivate continue, esse saranno differenziabili e il teorema puo' essere applicato. Ne segue che

$$h''(t) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n f_{x_{i_1} x_{i_2}}(x_0 + tw) w_{i_1} w_{i_2}$$

$$h'''(t) = \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^n f_{x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}}(x_0 + tw) w_{i_1} w_{i_2} w_{i_3}$$

; ; ;

$$h^{(N)}(t) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N=1}^n f_{x_{i_1} \dots x_{i_N}}(x_0 + tw) w_{i_1} \dots w_{i_N}$$

Ponendo lo  $t=0$ , si ottengono i coefficienti delle formule di Taylor per  $h$

$$h(0) = f(x_0)$$

$$h'(0) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_0) w_i$$

$$h''(0) = \sum_{i_1, i_2=1}^n f_{x_{i_1} x_{i_2}}(x_0) w_{i_1} w_{i_2}$$

; ;

$$h^{(N)}(0) = \sum_{i_1, \dots, i_N=1}^n f_{x_{i_1} \dots x_{i_N}}(x_0) w_{i_1} \dots w_{i_N}$$

da cui infine, per un opportuno  $\xi \in ]0, 1[$

$$\begin{aligned} f(x) &= h(1) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} h^{(k)}(0) + \frac{1}{(N+1)!} h^{(N+1)}(\xi) = \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(x_0) w_{i_1} \dots w_{i_k} + \frac{1}{(N+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{N+1}=1}^n f_{x_{i_1} \dots x_{i_{N+1}}}(x_0 + \xi w) w_{i_1} \dots w_{i_{N+1}} \end{aligned}$$

c.v.d.

È utile osservare che il teorema appena provato, seppure con ipotesi leggermente più restrittive, ( $f \in C^{N+1}$ ), fornisce anche una stima del resto di tipo "Peano". Infatti il modulo del resto

$$\frac{1}{(N+1)!} \left| \sum_{i_1 \dots i_{N+1}=1}^n f_{x_{i_1} \dots x_{i_{N+1}}} (x_0 + \xi w) w_{i_1} \dots w_{i_{N+1}} \right| = |R_N(w)|$$

può essere stimato per la diseguaglianza triangolare, con

$$|R_N(w)| \leq \sum_{i_1 \dots i_{N+1}=1}^n \max_{x \in B_{\delta}(x_0)} |f_{x_{i_1} \dots x_{i_{N+1}}}(x)| |w_{i_1} \dots w_{i_{N+1}}| \equiv S_N(w)$$

da cui, essendo  $S_N(w)$  una funzione  $(N+1)$ -omogenea, ne segue subito che

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{S_N(w)}{|w|^N} = 0 \quad (\text{PEANO})$$

in quanto  $S_N(w)/|w|^N$  è 1-omogenea e limitata sulla sfera unitaria  $|w|=1$ , essendo ivi continua.

Utilizzando tale stima "punktendo" sull'ordine di infinitesimo del resto (tipico del resto di Peano), si possono estendere a più variabili le condizioni sufficienti per un estremo locale per le funzioni di una variabile, basate sullo derivata seconde. Verrà provato il:

**TEOREMA:** Sia  $f \in C^3(B_\delta(x_0))$  e sia  $x_0$  tale che  $\nabla f(x_0) = 0$ . Allora, il segno di  $f(u) - f(x_0)$  coincide col segno della forma quadratica, detta Hessiano,  $H(u-x_0) = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x_0) (u-x_0)_i (u-x_0)_j$ , purché  $|u-x_0|$  sia sufficientemente piccole.

È bene notare che la condizione  $\nabla f(x_0) = 0$  è quella necessaria (di Fermat) per i massimi e i minimi, mentre le condizioni sufficienti si possono ricavare dallo studio del segno delle forme quadratiche  $H$ , e sono legate al segno dei suoi autovalori: più complicato che in una variabile, ma non di molto!

### Dimostrazione

Sia  $w \in B_\delta(x_0)$  e si ponga, per semplicità,  $w = u - x_0$ . Poiché  $f \in C^3$  si può scrivere le formule di Taylor arrestandosi al grado  $N=2$ , con il resto

di tipo "Peano", infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $|w|^2$ .

$$f(x_0+w) = f(x_0) + \nabla f(x_0)w + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j + R_2(w)$$

ove

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{R_2(w)}{|w|^2} = 0$$

Poiché  $\nabla f(x_0) = 0$ , si ha

$$f(x_0+w) - f(x_0) = |w|^2 \left[ \frac{1}{2} \frac{\sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j}{|w|^2} + \frac{R_2(w)}{|w|^2} \right] \quad (1)$$

Dunque, il segno di  $f(x_0+w) - f(x_0)$  è concorde a quello dell'espressione in parentesi quadre ( $|w|^2 \geq 0$ ).

Osserviamo ora che il primo addendo è una funzione g 0-omogenea (rapporto di funzioni 2-omogenee), ovunque definita sulla sfera unitaria  $|w|=1$ , ed ha quindi su di essa minimo e massimo  $\lambda$  (globali).

Poiché è 0-omogenea, tali valori sono estremi anche in tutto  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , perché per ogni  $u \neq 0$  si ha

$$g(u) = g\left(|u| \frac{u}{|u|}\right) = |u|^0 g\left(\frac{u}{|u|}\right) = g\left(\frac{u}{|u|}\right)$$

e dunque

$$\lambda \leq g(u) \leq \Lambda \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

e poiché tali valori sono assunti su  $\{|u|=1\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  essi sono estremi globali in tutto  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

L'Algebra lineare offre un quadro completo del segno di  $\sum f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j$ , che risulta

- 1) Strettamente positiva in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  se e solo se tutti gli autovalori sono (tutti) strettamente positivi.
- 2) Strettamente negativa se e solo se tutti gli autovalori sono strettamente negativi.

(CASO 1) La forma  $\sum f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j$ , i cui coefficienti formano la matrice Hessione di  $f$ , ha tutti gli autovalori strettamente positivi, e quindi è strettamente positiva sulla sfera unitaria, da cui  $\boxed{\lambda > 0}$

Allora, scelto  $\varepsilon = \lambda/2$   $\exists p$ : se  $w \in B_p(0)$  si ha

$$\left| \frac{R_2(w)}{|w|^2} \right| < \frac{\lambda}{2}$$

da cui se  $0 < |w| < p$

$$\frac{1}{2} \frac{\sum f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j}{|w|^2} + \frac{R_2(w)}{|w|^2} > 0$$

$\geq \lambda > 0$

e, di conseguenza,  $f(x_0 + w) - f(x_0) \geq 0$  se  $|w| < p$ , e dunque  $x_0$  è di minimo locale.

Analogamente, si ragiona nel caso 2), quando tutti gli autovalori della matrice Hessione siano negativi.

**CASO 2)** Stavolta  $\lambda < 0$ , e scelto  $\varepsilon = |\lambda|$  si otterrà un intorno  $B_p(0)$  nel quale  $\left| \frac{R_2(w)}{|w|^2} \right| < \frac{|\lambda|}{2}$ , da cui

$$\frac{1}{2} \frac{\sum f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j}{|w|^2} + \frac{R_2(w)}{|w|^2} < 0$$

$\leq \lambda < 0$

e, infine,  $f(x_0 + w) - f(x_0) \leq 0$  su  $B_p(0)$ .

Ne seguono dunque le due condizioni sufficienti:

(Un punto critico  $x_0 (\nabla f(x_0) = 0)$ , in cui la forma Hessione è definita positiva è un minimo locale  
Se è definita negativa è un massimo locale)

La forma Hessione può presentare, come è noto dall'Algebra, altri tre casi:

- un autovalore nullo e tutti gli altri positivi
- un autovalore nullo e tutti gli altri negativi
- due autovalori discordi (non nulli).

I primi due casi sono estremamente ostici: infatti, è vero che il complesso dei termini di secondo grado, quando non si annulla, ha segno costante; il problema è che nelle direzioni nelle quali si annulla il segno dipendere dal resto, che non è più trascurabile. Tutto diventa chiarissimo con un esempio (anzi: due!)

$$f(u, y) = u^2 + y^4 \quad g(u, y) = u^2 - y^4$$

Si vede subito che  $(0,0)$  è di minimo globale per  $f$  mentre non lo è per  $g$ , che è negativa sull'asse  $y$  e positiva sull'asse  $x$ , e 0 in  $(0,0)$ . Già notante

$$H(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{diagonali} \\ \text{autovalori} \\ 2 \text{ e } 0 \end{array} \right\}$$

mentre

$$H(g) = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque, se l'Hessiano è semidefinito, NULLA può dirsi senza ulteriori indagini sui termini di grado superiore del polinomio di Taylor.

Rimane ancora fuori il caso dell'Hessiano indefinito.

In tal caso  $\sum f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j$  cambia segno e dunque esistono  $u, v$ , con  $|u|=|v|=1$ , tali che  $g(u)>0$  e  $g(v)<0$ .

Ragionando come prima, scegliendo rispettivamente  $\epsilon = g(u)/2$  o  $\epsilon = |g(v)|/2$  si ottiene  $f(x_0 + tu) - f(x_0) > 0$  e  $f(x_0 + sv) - f(x_0) < 0$  per ogni  $t, s$  di modulo abbastanza piccolo. Ne segue che  $x_0$  non può essere né di massimo né di minimo locale perché in ogni sfera comunque piccole cadranno punti del tipo  $x_0 + tu$ , sui quali  $f$  assume valori maggiori di  $f(x_0)$ , ma anche punti del tipo  $x_0 + sv$ , sui quali  $f$  assume valori minori.

Un punto  $x_0$  critico ( $\nabla f(x_0) = 0$ ) con Hessiana indefinita non è né di massimo né di minimo ed è detto DI SELLA (non degenero)

RIASSUMENDO: Se  $\nabla f(x_0) = 0$ , allora:

- Hessiana definita positiva  $\Rightarrow x_0$  minimo locale
- Hessiana definita negativa  $\Rightarrow x_0$  massimo locale
- Hessiana indefinita  $\Rightarrow x_0$  di sella (né di max, né di min)
- Hessiana semidefinita  $\Rightarrow$  NULLA PUÒ DIRSI

Si nota subito che il quarto caso, l'Hessiana semidefinita, corrisponde in più variabili al caso critico  $f''(x_0) = 0$  in una variabile, e per le stesse ragioni. Infatti,

$$f(u) - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0) (u - x_0)^2 + R_2(u - x_0)$$

e, se  $f''(x_0) = 0$ , il segno di  $f(u) - f(x_0)$  è determinato unicamente dal segno del resto  $R_2(u - x_0)$ , imprevedibile senza ulteriori indagini sui termini di ordine superiore.

Cioè è esattamente quello che succede nelle direzioni  $w$  del nucleo dell'Hessiana, lungo le quali il complesso dei termini di secondo grado si annulla, lasciando il campo a quelli di ordine superiore, così come accade in una variabile

**NOTA** Se  $(\alpha_{ij})$  è una matrice simmetrica, si può provare che gli estremi di  $\sum \alpha_{ij} w_i w_j / \|w\|^2$  sono esattamente il massimo ed il minimo autovalore  $\lambda$  e  $\lambda$  di  $(\alpha_{ij})$  e, dunque

$$\lambda \|w\|^2 \leq \sum \alpha_{ij} w_i w_j \leq \Lambda \|w\|^2 \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$$

Grazie al teorema di Schwartz, l'Hessiana  $(f_{x_i x_j}(x_0))$  è di fatto simmetrica nelle ipotesi prime introdotte ( $f \in C^3$ ).

AN 2019

## L'POLINOMIO DI TAYLOR "OTTIMIZZATO"

L'espressione ottenuta in precedenza per il termine di grado  $k$  è cioè

$$\frac{1}{k!} \sum_{i_1 \dots i_k=1}^n f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(x_0) w_{i_1} \dots w_{i_k}$$

è (notevolmente) ridondante. Esaminiamo per semplicità il complesso dei termini di grado 2 in due sole variabili, che risulta come:

$$\frac{1}{2!} \left[ f_{x_1 x_1}(x_0) w_1 w_1 + f_{x_1 x_2}(x_0) w_1 w_2 + f_{x_2 x_1}(x_0) w_2 w_1 + f_{x_2 x_2}(x_0) w_2 w_2 \right]$$

Ora, non solo  $w_1 w_2 = w_2 w_1$ , ma anche  $f_{x_1 x_2}(x_0) = f_{x_2 x_1}(x_0)$ , per effetto del teorema di Schwartz sulle derivate miste, in quanto  $f \in C^2$ . Dunque, la somma può essere abbreviata così

$$\frac{1}{2!} \left[ f_{x_1^2}(x_0) w_1^2 + 2 f_{x_1 x_2}(x_0) w_1 w_2 + f_{x_2^2}(x_0) w_2^2 \right]$$

con il non spregiato risparmio di una (qualunque) delle derivate  $f_{x_1 x_2}$  o  $f_{x_2 x_1}$ . Il vantaggio è assai più invitante al crescere del grado e del numero delle variabili. Ad esempio, per  $n=3$ , sempre nel caso  $k=2$ , invece di calcolare

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} & \left[ f_{x_1 x_1} w_1^2 + f_{x_1 x_2} w_1 w_2 + f_{x_1 x_3} w_1 w_3 + f_{x_2 x_1} w_2 w_1 + f_{x_2 x_2} w_2^2 + \right. \\ & \left. + f_{x_2 x_3} w_2 w_3 + f_{x_3 x_1} w_3 w_1 + f_{x_3 x_2} w_3 w_2 + f_{x_3 x_3} w_3^2 \right] \end{aligned}$$

basta osservare che

$$f_{x_1 x_2} w_1 w_2 = f_{x_2 x_1} w_2 w_1, \quad f_{x_1 x_3} w_1 w_3 = f_{x_3 x_1} w_3 w_1 \quad \text{e} \quad f_{x_2 x_3} w_2 w_3 = f_{x_3 x_2} w_3 w_2$$

da cui si ottiene infine, per il complesso dei termini di II grado:

$$\frac{1}{2!} \left[ f_{x_1 x_1} w_1^2 + f_{x_2 x_2} w_2^2 + f_{x_3 x_3} w_3^2 + 2 f_{x_1 x_2} w_1 w_2 + 2 f_{x_1 x_3} w_1 w_3 + 2 f_{x_2 x_3} w_2 w_3 \right]$$

Stavolta il risparmio è di ben tre derivate seconde (tutte quelle con gli indici in ordine diverso), pari ad un terzo della felice totale: davvero interessante!

Per affrontare in modo efficiente il caso generale, supponiamo di aver calcolato un singolo termine:

$$f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}^{(n)}(x_0) w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_k}$$

e stabiliamo quanti sono gli altri termini della somma uguali ad esso. Poiché tutte le derivate delle  $f$  sono continue, per il teorema di Schwartz possiamo cambiare a nostro piacimento l'ordine delle derivazioni  $\partial^{(k)} f / \partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}$

in modo da raggruppare per prime tutte le derivate rispetto a  $x_1$  (eventualmente assenti), e poi quelle rispetto a  $x_2, x_3$  e così via fino a  $x_n$ , ove  $n$  è la dimensione dello spazio.

Denotato con  $\mu_i$ ,  $i=1\dots n$ , il numero di derivate rispetto a  $x_i$ , osserviamo che

- Per ogni  $i=1\dots n$   $0 \leq \mu_i \leq k$  ( $\mu_i=0$  se non ci sono derivate rispetto a  $x_i$ )
- $\sum_{i=1}^n \mu_i = k$  (In tutto,  $k$  derivate!)
- Tutti i termini che comportano lo stesso numero di derivate rispetto alle stesse variabili sono uguali.

Dunque, il termine generale di ordine  $k$  sarà

$$\frac{1}{k!} \sum_{\substack{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \geq 0 \\ \sum \mu_i = k}} \binom{k}{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n} \frac{\partial^{(k)} f(x_0)}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \dots \partial x_n^{\mu_n}} w_1^{\mu_1} w_2^{\mu_2} \dots w_n^{\mu_n}$$

ove  $\binom{k}{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n}$  è il numero (per ora sconosciuto) dei termini che comportano, in qualsiasi ordine,  $\mu_1$  derivate rispetto a  $x_1, \mu_2$  rispetto a  $x_2, \dots, \mu_n$  rispetto a  $x_n$ .

Per contare il loro numero osserviamo che ci sono  $\binom{k}{\mu_1} = \frac{k!}{\mu_1! (k-\mu_1)!}$  modi di scegliere le posizioni delle  $\mu_1$  derivate rispetto ad  $x_1$ , e, per ognuno di essi, altri  $\binom{k-\mu_1}{\mu_2}$  modi di "piazzare" le derivate rispetto ad  $x_2$  nei  $K-\mu_1$  posti rimasti disponibili dopo aver sistemato le derivate rispetto ad  $x_1$ , e, per ogni configurazione delle derivate in  $x_1$  e  $x_2$  altri  $\binom{k-\mu_1-\mu_2}{\mu_3}$  modi per piazzare le derivate in  $x_3$  e così via fino ad ottenere il numero

totale

$$\binom{k}{\mu_1} \binom{k-\mu_1}{\mu_2} \binom{k-\mu_1-\mu_2}{\mu_3} \dots \binom{k-\mu_1-\mu_2-\dots-\mu_n}{\mu_n}$$

Ricordenolo che  $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ , ne segue subito che

$$\binom{k}{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{k!}{\mu_1! (k-\mu_1)!} \frac{(k-\mu_1)!}{\mu_2! (k-\mu_1-\mu_2)!} \dots \frac{(k-\mu_1-\dots-\mu_{n-1})!}{\mu_n! (k-\sum_{i=1}^n \mu_i)!} = \frac{k!}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_n!}$$

che, forse, non sarà sempre semplice da calcolare, ma è certamente ragionevolmente semplice da ricordare.

Le forme "rapide" del polinomio di Taylor è dunque

$$\boxed{\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \geq 0 \\ \sum \mu_i = k}} \frac{k!}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_n!} \int_{x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}}^{(x_0)} w_1^{\mu_1} w_2^{\mu_2} \dots w_n^{\mu_n}}$$

ove

$$\binom{k}{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{k!}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_n!} \quad \text{è il COEFFICIENTE POLINOMIALE DI LEIBNIZ}$$

È abbastanza evidente che, in pratica, la formula è efficiente perché minimizza il calcolo di derivate, ma richiede di determinare gli "esponenti"  $\mu_1, \dots, \mu_n$  in modo efficiente.

Sia  $n=3$  e  $k=9$ . Occorre determinare tutti i modi possibili di scegliere  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  ( $n=3$ ), da 0 a 9 ( $k=9$ ) in modo da avere  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 9$ . Un efficiente metodo è di elencarli in ordine lessicografico (quello del "dizionario": 0, 1, 2, 3, 4)

$\mu_1 \ \mu_2 \ \mu_3$

(notare che  $\mu_3 = 9 - \mu_1 - \mu_2$ )

0	0	9
0	1	3
0	2	2
0	3	1
0	9	0

tutte le "parole" che iniziano per 0, e in cui il secondo è scelto ad arbitrio, mentre il terzo è conseguente

1	0	3
1	1	2
1	2	1
1	3	0

*Casi che iniziano per 1, in ordine  
"alfabetico" (0 prime di 1, 1 prima di 2, ...)*

2	0	2
2	1	1
2	2	0

*Casi che iniziano per 2*

3	0	1
3	1	0

*etc.*

4	0	0
---	---	---

Una volta completato l'elenco delle terne  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  utili si può applicare le formule: ad esempio, le terne  $\mu_1=2, \mu_2=1, \mu_3=1$  dà luogo al coefficiente di Leibnitz

$$\binom{4}{211} \int_{x_1^2 x_2 x_3}^{(4)} (x_0) w_1^2 w_2 w_3 = \frac{4!}{2! 1! 1!} \int_{x_1^2 x_2 x_3} (x_0) w_1^2 w_2 w_3 = 12 \int_{x_1^2 x_2 x_3} (x_0) w_1^2 w_2 w_3$$

ci sono dunque 12 termini che includono due derivate rispetto a  $x_1$ , una rispetto ad  $x_2$  ed una rispetto a  $x_3$ , e cioè

$x_1$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_1$	$x_3$
$x_1$	$x_1$	$x_3$	$x_2$	$x_2$	$x_1$	$x_3$	$x_1$
$x_1$	$x_2$	$x_1$	$x_3$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_1$
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_3$	$x_1$	$x_1$	$x_2$
$x_1$	$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_1$
$x_1$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_1$

*Ordine lessicografico  
rispetto all'alfabeto  $x_1, x_2, x_3$*

L'impiego pratico delle formule di Taylor si complica e dissimile al crescere del grado e del numero delle variabili. Anche il calcolo dei coefficienti polinomiali di Leibnitz  $\binom{k}{\mu_1 \dots \mu_n}$  ha le sue difficoltà, ma

certamente inferiori a quelle del calcolo di tutte le derivate nelle forme originali, e meno che non si tratti di gradi e dimensioni estremamente basse.

Un modo per collegare le formule del polinomio di Taylor a quelle delle potenze di un polinomio (il cosiddetto polinomio di Leibnitz, che generalizza ai polinomi le formule note del binomio di Newton) è di scrivere il complesso dei termini di ordine  $k$  così:

$$\frac{1}{k!} \left[ \left( w_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + w_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f \right]_{(x_0)}$$

e ricordare che

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^k = \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0 \\ \sum \mu_i = k}} \binom{k}{\mu_1, \dots, \mu_n} a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} \dots a_n^{\mu_n}$$

Polinomio di Leibnitz  
(originale!)

La complessità è purtroppo inerente ai problemi combinatori e c'è un settore intero della Matematica, l'Analisi Combinatoria, che si occupa di come contare in modo efficiente il numero degli elementi di un insieme finito: un problema che si risolve insospettabilmente complesso ed estremamente ostico anche per un computer... il fattoriale cresce più alle orelle di quanto qualunque elaboratore di dati, ad oggi, possa riuscire a gestire!

AN\_3.1

## LE FUNZIONI IMPLICITE

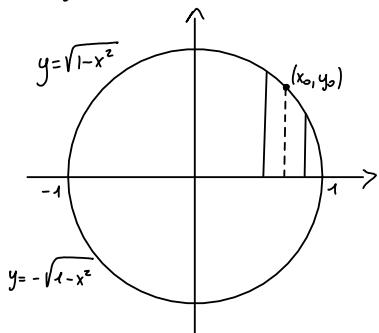
Queste note contiene un'introduzione ed alcuni risultati elementari su un classico problema, con importanti risultati geometrici: esamineremo il caso più semplice. Si consideri  $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$  e si osservi che la "curva di livello 0", ossia l'insieme dei punti  $(x,y)$  del piano per i quali  $f(x,y) = 0$ , è ben nota: è la circonferenza unitaria centrale nell'origine. Si consideri ora "l'equazione" della curva di livello  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , e ci si ponga la domanda se esse sia o no il grafico di una funzione.

La risposta è semplicissima: NO! Per ogni  $x \in [-1,1]$  esistono due valori di  $y$ ,  $-\sqrt{1-x^2}$  e  $\sqrt{1-x^2}$ , per i quali  $f(x,y) = 0$ , e dunque non c'è modo di associare univocamente una (sola)  $y$  ad ogni  $x$  del dominio (che, ragionevolmente, sarebbe  $[-1,1]$ ). Scegliendo  $y$  come variabile indipendente, nulla si conclude: la situazione è identica, e identica resterebbe anche se si operasse una rotazione del sistema di assi. Dunque: gli insiemi di zeri di funzioni di più variabili NON sono, in generale, grafici di una funzione. Può capitare che lo siano:  $y^3 + x^2 - 1 = 0$  si può risolvere univocamente rispetto ad  $y$  (e non rispetto ad  $x$ ) ottenendo la "formula risolutiva"  $y = (1-x^2)^{1/3}$  definita per ogni  $x \in \mathbb{R}$  (se si definisce la radice cubica come la funzione inversa della funzione  $t \rightarrow t^3$ , continua e strettamente crescente su  $\mathbb{R}$ ), i punti del grafico delle quali,  $(x, (1-x^2)^{1/3})$  sono tutte e sole le soluzioni di  $y^3 + x^2 - 1 = 0$  (infatti:  $[(1-x^2)^{1/3}]^3 + x^2 - 1 \equiv 0$  su  $\mathbb{R}$  e, se vale  $\bar{y}^3 + \bar{x}^2 - 1 = 0$  allora vale anche  $\bar{y} = \sqrt[3]{1-\bar{x}^2}$ ).

In un linguaggio antico, ma ancora utilizzato, la funzione  $x \rightarrow (1-x^2)^{1/3}$  si dice definita "IMPLICITAMENTE" dall'equazione  $y^3 + x^2 - 1 = 0$ .

Prima di entrare nel vivo del principale risultato di questa nota, il celebre teorema delle funzioni implicite di Ulisse Dini, occorre approfondire ancora un po' il discorso sull'esempio iniziale. È vero che non può esistere nessuna funzione il grafico delle quale coincide con la circonferenza unitaria ma, se ci si accontenta solo di una porzione di una circonferenza, la situazione muta radicalmente.

Infatti, da  $x^2+y^2-1=0$  segue  $y^2=1-x^2$  che, per ogni  $x \in [-1,1]$  ha le due soluzioni (formule risolutive)  $y = \pm \sqrt{1-x^2}$  ma è del tutto evidente che, in vicinanze di un qualunque punto delle circonferenze  $(x,y)$  con  $y > 0$  si troveranno altre soluzioni appartenenti solo al grafico di  $y = \sqrt{1-x^2}$ , mentre si DOVRA' scegliere  $-\sqrt{1-x^2}$  per le soluzioni  $(x,y)$  vicine ad un punto  $(x_0, y_0)$  con  $y_0 < 0$ .



Considerato un intorno di  $(x_0, y_0)$ ,  $y_0 > 0$ , tutto contenuto nel semipiano  $\{y > 0\}$ , le uniche soluzioni del tipo  $(x, \sqrt{1-x^2})$ , grafico di  $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ , e analogamente si potrebbe ragionare in un intorno abbastanza piccolo di  $(x_0, y_0)$  se  $y_0 < 0$ .

Osserviamo invece che, se  $y_0 = 0$ , non c'è modo di evitare il doppio segno nelle radici, per quanto piccolo si possa scegliere l'intorno: si può invece considerare la  $y$  come variabile indipendente e, ad esempio vicino a  $(-1,0)$ , osservare che,  $(-\sqrt{1-y^2}, y)$  descrive tutte le soluzioni di  $x^2+y^2-1=0$  abbastanza vicine a  $(-1,0)$ .

Ci sono più "espliiazioni" impossibili in  $(0,0)$ , l'insieme degli zeri di  $f(x,y) = x^2 - y^2$  non può in nessun modo essere rappresentato come un grafico, in quanto coincide con le due bisettrici dei quadranti,  $y = \pm x$ , ASSIEME. Nessuna scelta del raggio dell'intorno migliora menomamente la situazione! Alcune conclusioni preliminari:

- Non c'è motivo di attendersi che l'insieme di tutti gli zeri di una funzione  $f(x,y)$  debba essere il grafico di un'unica funzione  $y = \varphi(x)$ , oppure  $x = \psi(y)$
- È possibile che, anche se globalmente il luogo geometrico degli zeri di  $f(x,y)$  non sia un grafico, la sua intersezione con un intorno abbastanza piccolo di una soluzione nota  $(x_0, y_0)$  lo sia.
- È possibile che  $f(x,y)=0$  sia risolubile in uno solo delle forme  $y = \varphi(x)$  oppure  $x = \psi(y)$ , ma non in entrambe (come accade nell'intorno di  $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$  per  $x^2+y^2-1=0$ ).
- Sotto quali condizioni su  $f$  almeno una delle due formule risolutive  $y = \varphi(x)$  o  $x = \psi(y)$  è valida, "vicino" a  $x_0$  o a  $y_0$ , rispettivamente?

Una risposta soddisfacente è fornita dal teorema di Dini, che proviamo prima in ipotesi meno restrittive, ma di poco agevole verifica, e poi con altre più "pratiche". Chiariamo subito, però, che il teorema di Dini non è un teorema sull'esistenza degli zeri di  $f(u, y)$ , ma sulla struttura dell'insieme degli zeri vicino ad uno zero  $(u_0, y_0)$  già noto, che risulta essere quello di un grafico di una funzione.

**TEOREMA (Dini):** Siano  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $(u_0, y_0) \in \Omega$  verificanti:

- 1)  $(u_0, y_0)$  è interno ad  $\Omega$
- 2)  $f(u_0, y_0) = 0$
- 3)  $f$  continua in  $\Omega$
- 4)  $t \mapsto f(u, t)$  è strettamente crescente (in  $t$ ) per ogni fissato  $u$  per cui  $(u, t) \in \Omega$

Allora, esistono  $\delta > 0$  e  $\varphi: [u_0 - \delta, u_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$  tali che:

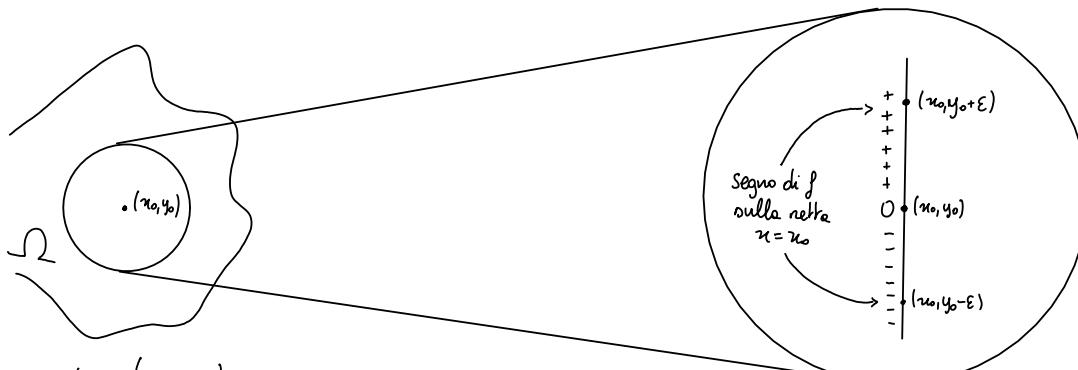
- 5)  $\varphi(u_0) = y_0$ .
- 6)  $f(u, \varphi(u)) = 0 \quad \forall u \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta]$
- 7)  $\varphi$  è continua in  $[u_0 - \delta, u_0 + \delta]$

Piùne di dimostrarlo osserviamo che la 2) dice che  $(u_0, y_0)$  è lo zero (in  $\mathbb{R}^2$ ) di partenza, mentre 1) garantisce che ci sia spazio attorno ad esso nel dominio, il che è necessario nelle prove. La continuità è il "minimo sindacale": ponendo  $(u_0, y_0) = 0$ ,  $f(0, 0) = 0$  e  $f(u, y) = 1$  per  $(u, y) \neq (0, 0)$  il teorema è certamente falso. L'ultima ipotesi è più specifica: in (1), ad esempio  $y = x^2 + y^2 - 1$  non è strettamente crescente, in quanto ha un minimo (ogni punto di  $(1, y)$   $y \neq 0$  ha distanza da  $(0, 0)$  maggiore di 1: cateto-ipotenusa).

La tesi mostra chiaramente il carattere LOCALE delle "formule risolutive"  $y = \varphi(u)$ , valide solo in  $[u_0 - \delta, u_0 + \delta]$  per  $\delta$  opportuno, e non scelto da noi a priori, come sarebbe stato in un teorema globale.

Che  $\varphi$  sia la "formula risolutiva" dell'equazione  $f(u, y) = 0$  risulta dalla 6), mentre 5) dice che il punto iniziale  $(u_0, y_0)$  è parte del grafico di  $\varphi$ . La 7) sarà molto importante nelle prove del teorema per le funzioni di classe  $C^1$ .

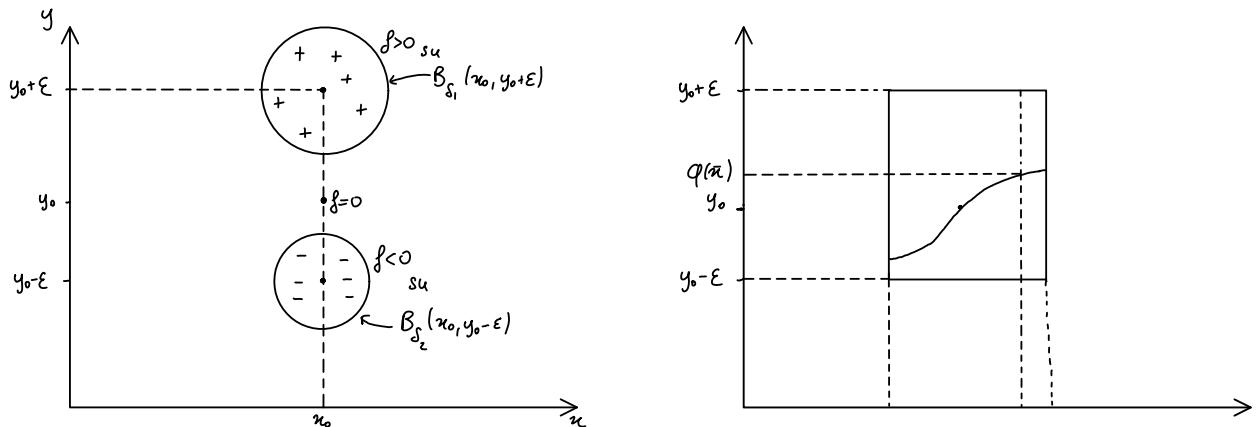
Premettiamo alla vera dimostrazione una specie di piano di viaggio.



poiché  $(x_0, y_0)$  è  
interno ad  $\Omega$

poiché  $t \rightarrow f(x_0, t)$  è strettamente crescente

$$f(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0 \quad \text{e} \quad f(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$$



il segno di  $f$  si mantiene costante,  
per permanenza di segno (continuità),  
in opportuni intorni di  $(x_0, y_0 + \varepsilon)$  e  
 $(x_0, y_0 - \varepsilon)$  di raggi  $\delta_1$  e  $\delta_2$

scelto  $\delta < \min(\delta_1, \delta_2)$  per ogni  
 $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  si considera  $t \rightarrow f(x, t)$   
che è continua su  $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ ,  
assume valori discosti agli estremi (e  
quindi ha zeri) ed è strettamente  
crescente, e quindi lo zero è unico e  
compresso fra  $y_0 - \varepsilon$  e  $y_0 + \varepsilon$ .  
Tale zero è  $q(x)$ .

Vediamo che la continuità richiederebbe qualche estensione supplementare, ma come "road map" può bastare. Passiamo alle prove.

**Dimostrazione** Poiché  $(x_0, y_0)$  è interno a  $\Omega$  esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(x_0, y_0) \subseteq \Omega$ . Sia  $\varepsilon = r/2$ . Poiché  $y \rightarrow f(x_0, y)$  è strettamente crescente e vale 0 per  $y = y_0$ , essa è strettamente positiva per  $y > y_0$  e

strettamente per  $y < y_0$ , purché  $(u_0, y) \in \Omega = \text{dom } f$ . Ne segue che

$$f(u_0, y_0 - \varepsilon) < 0 \quad \text{e} \quad f(u_0, y_0 + \varepsilon) > 0$$

Essendo  $f$  continua in  $\Omega$ , e quindi in  $(u_0, y_0 - \varepsilon)$  e in  $(u_0, y_0 + \varepsilon)$ , esistono  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tali che (permanenza di segno):

$$f(u, y) > 0 \quad \text{se} \quad (u, y) \in B_{\delta_1}(u_0, y_0 + \varepsilon)$$

(ed, in particolare,  $f(u, y_0 + \varepsilon) > 0$  se  $|u - u_0| < \delta_1$ ) mentre

$$f(u, y) < 0 \quad \text{se} \quad (u, y) \in B_{\delta_2}(u_0, y_0 - \varepsilon)$$

(e, dunque,  $f(u, y_0 - \varepsilon) < 0$  se  $|u - u_0| < \delta_2$ )

Si fissi ora  $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , e sia  $\bar{u} \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta]$ .

La funzione  $t \mapsto f(\bar{u}, t)$  è

- definita in  $y_0 - \varepsilon$  e in  $y_0 + \varepsilon$ , ed assume in essi valori di segno discordi.
- essendo  $(\bar{u}, y_0 - \varepsilon)$  e  $(\bar{u}, y_0 + \varepsilon)$  due punti di  $B_\delta(u_0, y_0) \subseteq \Omega$ , ed essendo le sfere  $B_\delta$  convesse,  $t \mapsto f(\bar{u}, t)$  è definita sull'intervallo  $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ .
- è continua su tutti i punti per i quali  $(\bar{u}, t) \in \Omega$ , e quindi in particolare in  $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ .

Ne segue che, per il teorema degli zeri di Weinstross per le funzioni di una variabile, esse ha zeri in  $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ .

Per la stretta monotonia di  $t \mapsto f(\bar{u}, t)$  lo zero è unico per ogni  $\bar{u} \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta]$  prefissato, e definisce dunque univocamente una funzione di  $\bar{u}$  che denotereemo con  $\varphi(\bar{u})$ . Inoltre, per costruzione, lo zero  $\varphi(\bar{u})$  così ottenuto è compreso nell'intervallo  $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$  ma, dato che negli estremi non si annulla perché assume i valori di segno discordi, ne segue

$$\varphi(\bar{u}) \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \quad \text{e cioè} \quad |\varphi(\bar{u}) - y_0| < \varepsilon$$

Osserviamo ora che per  $u = u_0$ , essendo  $\varphi(u_0)$  l'unico zero di  $t \mapsto f(u_0, t)$  per  $(u_0, t)$  in  $\Omega$ , ed essendo per ipotesi  $f(u_0, y_0) = 0$ , ne segue  $\varphi(u_0) = y_0$ , che è la 5).

La 6) è immediata dalla costruzione:  $\varphi(\bar{u})$  è lo zero (unico) di  $f(\bar{u}, t)$ , almeno per tutti gli  $\bar{u}$  in  $[u_0 - \delta, u_0 + \delta]$  e dunque, per essi,  $f(\bar{u}, \varphi(\bar{u})) = 0$ .

La continuità, oggetto delle 7) è più delicata. Iniziamo col provarla in  $u_0$ . Dalla costruzione risulta che per  $|u-u_0| < \delta$ , ossia in  $[u_0-\delta, u_0+\delta]$  si ha  $|\varphi(u) - \varphi(u_0)| = |\varphi(u) - y_0| < \varepsilon$  il che sembra chiudere la questione, ma non è così (purtroppo!). Fissare, infatti, un valore di  $\varepsilon'$  più piccolo del precedente richiede obbligatoriamente di considerare punti  $(u_0, y_0 - \varepsilon')$  e  $(u_0, y_0 + \varepsilon')$  diversi dai precedenti ai quali applicare le permanenze del segno, ottenendo intorni di raggi  $\delta'_1$  e  $\delta'_2$  in generale diversi, il che conduce ad un raggio  $\delta$ , e ad una funzione  $\varphi$  a priori differenti. Così ci garantisce che le due funzioni coincidono sui punti comuni dei rispettivi domini? Semplificando! Se  $\bar{u}$  appartiene ad entrambi i domini il valore che entrambe le funzioni " $\varphi$ " associano ad esso non può che essere l'unico zero di  $t \mapsto f(\bar{u}, t)$  e dunque esse coincidono in  $\bar{u}$ .

Analogamente si prova la continuità in un punto  $u$  di  $[u_0-\delta, u_0+\delta]$  diverso da  $u_0$ : basta riapplicare il teorema fino ad ora dimostrato (continuità in  $u_0$  inclusa) ma scegliendo come punto iniziale  $(\bar{u}, \varphi(\bar{u}))$  invece di  $(u_0, y_0)$ . Le due funzioni ottenute dalle due costruzioni diverse coincidono sull'intersezione dei rispettivi domini, che contiene  $\bar{u}$ , che è dunque un punto di continuità per le " $\varphi$ " costruite partendo dallo zero "centrale"  $(\bar{u}, \varphi(\bar{u}))$ , e dunque anche per l'altra, ad esse coincidenti ovunque siano entrambe definite.

c.v.d.

Il teorema, con minimi aggiustamenti, può essere applicato alle funzioni strettamente decrescenti rispetto alle  $y$ , ma anche altrettanto bene alle funzioni strettamente monotone (di ogni tipo) rispetto alle  $u$ : in tal caso si otterrebbe una "formula risolutiva locale"  $u = \varphi(y)$ , verificante  $f(\varphi(y), y) = 0$   $\forall y \in [y_0-\delta, y_0+\delta]$ .

Una nota conclusiva "pratica": la verifica diretta della stessa monotonia di una funzione  $t \mapsto g(t)$  richiede lo studio delle disequazioni  $g(u) < g(y)$  e le prove che l'insieme delle soluzioni contiene tutte le coppie  $u, y$ , nel dominio di  $g$  verificanti  $u \neq y$ , il che è tutt'altro che elementare, in generale.

Dato che le strette monotonie è più facile di ottenere mediante ipotesi sulle derivate, e dato che il teorema offre comunque un risultato locale, in un intorno il cui neggio non può essere fornito a priori, è conveniente un enunciato di tipo differente, che utilizzi le derivate e le loro regolarità: è il teorema effettivamente dimostrato da Ulisse Dini, oggetto della sezione seguente.

AN\_3.2

## IL TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE PER LE FUNZIONI DI CLASSE $C^1$

Se  $f$  verifica tutte le condizioni 1), 2), 3) del teorema precedente, ma è di classe  $C^1(\Omega)$ , e facile soddisfare la condizione 4) richiedendo solo che  $f_y(u_0, y_0) > 0$ . Infatti, poiché  $f_y$  è continua in  $\Omega$  ( $f$  è  $C^1$ ), dal teorema delle permanenze del segno segue che, in un opportuno intorno  $B = B_\varrho(u_0, y_0)$  si ha  $f_y(u, y) > 0$  e quindi, per la convergibilità delle opere e per il teorema di Lagrange applicato a  $t \rightarrow f(u, t)$  sull'intervallo per il quale  $(u, t) \in \Omega$  ne segue che  $t \rightarrow f(u, t)$  è strettamente crescente. In  $B$ , si può dunque applicare il teorema precedente, al costo invisorio di verificare che  $f_y(u_0, y_0) > 0$ , e al costo, meno invvisorio ma non dissimile da quello da pagare per ottenere la tesi nel teorema precedente, di avere per dominio di  $q$  un intervallo di raggio del tutto sconosciuto che ora, oltre che dipendere dalla distanza di  $(u_0, y_0)$  dal bordo (raggio  $\varphi$ ), e dai raggi  $\delta_1$  e  $\delta_2$  che risultano dall'applicare le permanenze del segno in  $(u_0, y_0 - \varepsilon)$  e  $(u_0, y_0 + \varepsilon)$ , dipenderà anche dal raggio  $\vartheta$  dell'intorno nel quale vale la permanenza di segno per  $f_y(u, y)$ : solo una quarta buona ragione per non poter sapere quanto valga il raggio  $\delta$  presente nella tesi!

In realtà, però, se  $f$  è di classe  $C^1$  la funzione  $q$  non è solo continua, come risulta dalla 7) del teorema precedente, ma anche derivabile, come vedremo nel teorema seguente. Permetteremo però un Lemma che, in qualche modo, estende a più variabili il teorema di Lagrange.

**LEMMA** Sia  $B = B_p(u_0, y_0)$  la sfera di centro  $(u_0, y_0)$  e raggio  $p$ , e sia  $(u, y) \in B$ . Allora esiste  $\xi \in ]0, 1[$  tale che

$$f(u, y) - f(u_0, y_0) = f_x(u_0 + \xi(u - u_0), y_0 + \xi(y - y_0))(u - u_0) + f_y(u_0 + \xi(u - u_0), y_0 + \xi(y - y_0))(y - y_0)$$

## Dimostrazione

Posto  $h(t) = f(u_0 + t(n-u_0), y_0 + t(y-y_0))$ , segue dalle convessità di  $B$  che, poiché  $(u, y), (u_0, y_0) \in B$  anche il segmento da essi definito è tutto contenuto in  $B$ , da cui  $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Inoltre, essendo  $f \in C^1$  differenziabile, per la derivazione delle funzioni composte anche  $h$  lo è in  $[0, 1]$ , ed inoltre

$$h'(t) = \begin{pmatrix} f_x(u_0 + t(n-u_0), y_0 + t(y-y_0)) \\ f_y(u_0 + t(n-u_0), y_0 + t(y-y_0)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n-u_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$h(0) = f(u_0, y_0) \quad \text{e} \quad h_1 = f(u, y)$$

e dal teorema di Lagrange (in una variabile) applicato ad  $h$ , definita e continua sull'intervallo  $[0, 1]$  e derivabile in  $[0, 1]$ , segue

$$h(1) - h(0) = h'(\xi)$$

che è la tesi.

c.v.d.

Possiamo ora enunciare e provare il

## TEOREMA (delle funzioni implicate per funzioni $C^1$ ):

Siano  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ed  $(u_0, y_0) \in \Omega$  verificanti:

1)  $(u_0, y_0)$  interno ad  $\Omega$

2)  $f(u_0, y_0) = 0$

3)  $f \in C^1(\Omega)$

4)  $f_y(u_0, y_0) > 0$

Allora, esistono  $\delta > 0$  e  $\varphi: [u_0 - \delta, u_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

5)  $\varphi(u_0) = y_0$

6)  $f(u, \varphi(u)) = 0 \quad \forall u \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta]$

7)  $\varphi$  è derivabile in  $[u_0 - \delta, u_0 + \delta]$  ed inoltre

$$\varphi'(u) = -\frac{f_x(u, \varphi(u))}{f_y(u, \varphi(u))} \quad \forall u \in [u_0 - \delta, u_0 + \delta]$$

## Dimostrazione

Poiché  $(x_0, y_0)$  è interno ad  $\Omega$ , esiste  $\theta > 0$  tale che  $B_\theta(x_0, y_0) \subseteq \Omega$ . Per il teorema delle permutazioni del segno, applicato alle funzione continue  $f_y$ , positive strettamente in  $(x_0, y_0)$ , segue che  $\exists \delta : f_y(u, y) > 0$  in  $\Omega \cap B_\theta(x_0, y_0)$ . Scelto  $\rho = \min(\theta, \delta)$  ne segue che  $f_y(u, y) > 0$  in  $B_\rho(x_0, y_0)$ . Poiché, fissato  $\bar{u}$ , l'insieme  $\{y \in \mathbb{R} : (\bar{u}, y) \in B_\rho(x_0, y_0)\}$  (se non vuoto) è un intervallo, applicando il teorema di Lagrange alla funzione  $t \mapsto f(u, t)$  in tale intervallo ne segue che  $t \mapsto f(u, t)$  è strettamente crescente per ogni  $(u, t) \in B_\rho(x_0, y_0)$ . Dal teorema precedente segue che esistono  $\delta, \varphi$  verificanti  $S_1$  e  $S_2$ .

Come nel teorema precedente, proveremo  $S_1$  in  $x_0$ , e poi otterremo il teorema generale spostando il punto "centrale"  $(x_0, y_0)$  nel punto  $(\bar{u}, \varphi(\bar{u}))$ . Dal Lemma precedente, applicato a  $(u, \varphi(u))$  e  $(x_0, \varphi(x_0))$   $u \neq x_0$ , e alle sfere  $B_\rho(x_0, y_0)$  segue che

$$f(u, \varphi(u)) - f(x_0, \varphi(x_0)) = f_x(x_0 + \xi(u-x_0), \varphi(x_0) + \xi(y-y_0)) (u-x_0) + f_y(x_0 + \xi(u-x_0), y_0 + \xi(\varphi(u)-\varphi(x_0))) / (\varphi(u)-\varphi(x_0))$$

Poiché  $f(u, \varphi(u)) = f(x_0, \varphi(x_0)) = 0$  per ogni  $u \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ , dal fatto che  $f_y > 0$  su  $B_\rho$  e che il segmento che congiunge  $(x_0, \varphi(x_0))$  con  $(u, \varphi(u))$  è in  $B_\rho$ , ne segue che, dividendo per  $u-x_0 \neq 0$  e per  $f_y (> 0)$  si ottiene

$$\frac{\varphi(u) - \varphi(x_0)}{u - x_0} = - \frac{f_x(x_0 + \xi(u-x_0), \varphi(x_0) + \xi(\varphi(u)-\varphi(x_0)))}{f_y(x_0 + \xi(u-x_0), \varphi(x_0) + \xi(\varphi(u)-\varphi(x_0)))}$$

Ora, per  $u \rightarrow x_0$ , si ha  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(x_0)$  per il teorema precedente (continuità di  $\varphi$ ,  $S_1$ ), da cui, essendo  $0 < \xi < 1$ , segue

$$x_0 + \xi(u-x_0) \rightarrow x_0 \quad \varphi(x_0) + \xi(\varphi(u)-\varphi(x_0)) \rightarrow \varphi(x_0)$$

Dalle continuità di  $f_x$  ed  $f_y$  si ha infine che

$$\varphi'(x_0) = \lim_{u \rightarrow x_0} \frac{\varphi(u) - \varphi(x_0)}{u - x_0} = - \frac{f_x(x_0, \varphi(x_0))}{f_y(x_0, \varphi(x_0))} = - \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$$

c.v.d.

Naturalmente, valgono i tre teoremi gemelli se  $f_y(x_0, y_0) < 0$ , se  $f_x(x_0, y_0) > 0$  e se  $f_x(x_0, y_0) < 0$ .

Studiamo in dettaglio l'esempio iniziale  $f(u, y) = u^2 + y^2 - 1$ . Il gradiente di  $f$  vale  $\begin{pmatrix} 2u \\ 2y \end{pmatrix}$  e dunque i punti nei quali non si può applicare il teorema di Dini per esplicitare la  $y$  in funzione di  $u$  sono quelli nei quali  $f_y = 2y = 0$ , e dunque i punti  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ . Quelli nei quali il teorema non consente di esplicitare la  $u$  in funzione di  $y$  sono  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$ . In tutti gli altri si può risolvere univocamente l'equazione  $u^2 + y^2 - 1 = 0$  indifferentemente rispetto ad  $u$  o rispetto ad  $y$ .

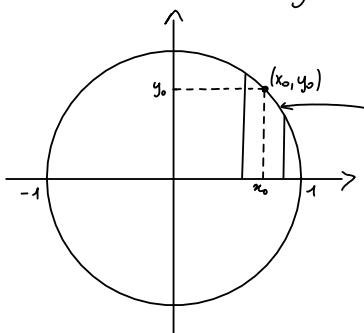


grafico di una funzione di  $u$  (o di  $y$ , indifferentemente), definita in un intorno opportuno di  $x_0$  (o  $y_0$ ).

Osserviamo che  $\nabla f(u, y) = \begin{pmatrix} 2u \\ 2y \end{pmatrix}$  solo se  $\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  e che tale punto NON appartiene all'insieme delle soluzioni di  $u^2 + y^2 - 1 = 0$  ( $0 \neq 1$  ?!). Dunque, per ogni punto delle "curve di livello 0" di  $f(u, y) = u^2 + y^2 - 1$  esiste un intorno nel quale essa è il grafico di una funzione derivabile ( $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ), rispetto ad una delle variabili, scelte opportunamente.

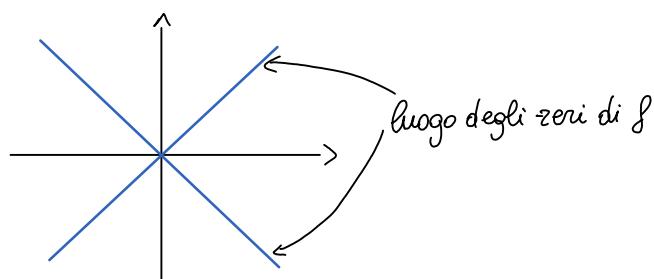
Cioè non accade, per esempio, per  $f(u, y) = u^2 - y^2$  in  $(0, 0)$ .

Infatti,

$$\nabla f(u, y) = \begin{pmatrix} 2u \\ -2y \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } f(0, 0) = 0,$$

e dunque non c'è modo di applicare il teorema di DINI per risolvere  $u^2 - y^2 = 0$  univocamente rispetto ad una delle due variabili, nell'intorno di  $(0, 0)$ , zero di  $f$ .

$$u^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow u = \pm y$$



Al contrario, in un qualsiasi punto distinto dall'origine, una (almeno) delle due componenti del gradiente non si annulla e permette di applicare il teorema di Dimi.

Per maggiore semplicità il teorema è stato enunciato e provato in  $\mathbb{R}^2$ , ma la prova può essere trasposta senza modifiche alle  $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , con l'unica avvertenza di interpretare  $x_0, u$  come vettori in  $\mathbb{R}^n$ , mentre  $y_0, y$  restano scalari.

Nella prossima sezione verrà enunciata, senza dimostrazione, una versione vettoriale del teorema precedente ed una sua applicazione al problema dell'inversione (locale) delle funzioni da  $\mathbb{R}^n$  in se.

## IL TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE PER LE FUNZIONI VETTORIALI

**TEOREMA** Siano  $f: \Omega \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $u_0 \in \Omega$  e  $y_0 \in \Sigma$  verificanti:

- 1)  $(u_0, y_0)$  è interno a  $\Omega \times \Sigma$
- 2)  $f(u_0, y_0) = 0$
- 3)  $f \in C^1(\Omega \times \Sigma)$
- 4)  $\det f_y(u_0, y_0) \neq 0$

Allora, esistono  $\delta > 0$  e  $\varphi: B_\delta(u_0) \rightarrow \mathbb{R}^m$  tali che

- 5)  $\varphi(u_0) = y_0$
- 6)  $f(u, \varphi(u)) = 0 \quad \forall u \in B_\delta(u_0)$
- 7) La funzione vettoriale  $\varphi$  è differenziabile e la sua matrice jacobiana verifica

$$Q_x(u) = - [f_y(u, \varphi(u))]^{-1} f_x(u, \varphi(u))$$

La strettissima somiglianza col teorema per le funzioni scalari non traege in inganno! Chiariamo innanzitutto cosa siano  $f_x$  ed  $f_y$ . In componenti scalari:

$$f(u, y) = \begin{pmatrix} f_1(u_1, \dots, u_n, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ f_m(u_1, \dots, u_n, y_1, \dots, y_m) \end{pmatrix}$$

Notare che il numero delle equazioni  $f_i(u, y) = 0$  è pari al numero delle incognite  $y_i$  che vanno esplicitate, e cioè  $m$ .

Con  $f_x$  va intesa la matrice jacobiana della funzione vettoriale  $f$  rispetto alle variabili  $u_1, \dots, u_n$  e cioè:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} & \\ \vdots & & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial u_n} & \end{array} \right) \quad m \times n$$

mentre con  $f_y$  si intende:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \quad m \times m$$

L'ipotesi 4) assicura che tale matrice è invertibile nell'intorno (permutazione di segno del determinante) di

$$(u_0, y_0) = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$$

ed è tale inversa che appare nelle formule 7) che esprime le jacobiane delle  $\varphi$  rispetto alle sue variabili.

$$\varphi_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad m \times n$$

Essa, correttamente, risulta il prodotto dell'inverso di  $f_y$ , che è  $m \times m$  come le  $f_y$  con le  $f_x$ , che è  $m \times n$ . Le due matrici non possono essere moltiplicate se non così. Un'interessante applicazione è il

**TEOREMA (di inversione locale):** Sia  $T: \Omega \rightarrow \Sigma$ ,  $\Omega, \Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $u_0 \in \Omega$  verificante:

1)  $u_0$  interno a  $\Omega$

2)  $\det T'(u_0) \neq 0$

Allora, esistono  $\delta > 0$  e  $S: B_\delta(T(u_0)) \rightarrow \Sigma$  tali che:

3)  $T(S(y)) = y \quad \forall y \in B_\delta(T(u_0))$

4)  $S \in C^1(B_\delta(T(u_0)))$

Ci limiteremo a costruire  $\delta$  e  $S$  utilizzando il teorema precedente.

Posto  $f(u, y) = T(u) - y$  ( $u, y \in \mathbb{R}^n$ ) dal teorema precedente, poiché  $\det T'(u_0) \neq 0$ , e posto  $y = T(u_0)$ , segue che esistono  $\delta > 0$  ed  $S: B_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  tali che:

- $u_0 = S(y_0)$
- $f(S(u), y) = 0 \Rightarrow T(S(u)) = u \Rightarrow S = T^{-1}$

Dunque, l'inversa di  $T$ ,  $S$ , è garantita esistere solo in un intorno di  $T(u_0)$ : un'inverse locale.

Cioè si rivelerà molto utile nei cambiamenti di variabile negli integrali multipli, ove la condizione

$$\det(T') \neq 0$$

consente di effettuare il cambio di variabile, almeno negli insiemii aperti. La versione scalare è

$$\begin{cases} y_1 = T_1(u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ y_n = T_n(u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

è risolubile univocamente rispetto alle  $u_1, \dots, u_n$  (e cioè invertibile) nelle vicinanze di una soluzione  $(y_1^0, \dots, y_n^0) = T(u_1^0, \dots, u_n^0)$  se e solo se

$\det \left[ \frac{\partial T_i}{\partial x_j} \right] (u_1^0, \dots, u_n^0) \neq 0$

Ragionevolmente agevole!

Un ultimo suggerimento: nell'applicare i vari teoremi presentati occorre ricordare che le derivate, e le jacobiane, che devono risultare non nulli sono quelli calcolati rispetto alle variabili, scalare o vettoriale, che si vuole esplicitare.

Se si vuole risolvere  $f(u, y) = 0$  rispetto ad  $u$ , in vicinanza di  $u_0$  occorre verificare che  $f_x(u_0, y_0) \neq 0$  (o che  $\det f_x(u_0, y_0) \neq 0$ , nel caso  $f$  ed  $x$  siano vettori), ottenendo così le funzioni esplicitate  $u = \varphi(y)$  verificanti identicamente, in un intorno opportuno di  $y_0$ ,  $f(\varphi(y), y) = 0$ .

Si considererà invece  $f_y$  se si vuole risolvere  $f(u, y) = 0$  rispetto a  $y$ .

**ATTENZIONE:** I "sistemi di funzioni implicite" conservano le buone abitudini dei sistemi lineari con soluzione unica sempre esistente: hanno un numero di righe, o di equazioni,  $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_m = 0$  pari al numero di incognite rispetto alle quali risolvere il sistema,  $y_1, y_2, \dots, y_m$ : il determinante della condizione 9) lo dice chiaramente ( $f_y \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ).

In conclusione: pur essendo le condizioni di Dirni solo sufficienti, sono abbastanza flessibili per molte applicazioni e, visti i controesempi via via incontrati, non troppo lontane da quelle necessarie!

AN4M

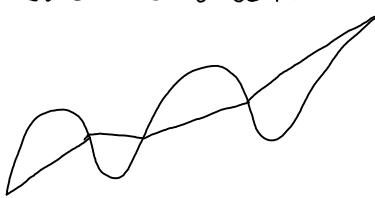
## RETTIFICABILITÀ E LUNGHEZZA

Queste sono dedicate ad una rapida esposizione di uno dei concetti fondamentali, e più antichi, di tutta l'Analisi Matematica. Osserviamo che, volendo introdurre le funzioni seno e coseno, nulla vieterebbe di definirle come rapporto fra il cateto opposto, o quello adiacente, all'angolo che ci interessa e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo. Perché, allora, preoccuparsi di misurare gli angoli e, avendo deciso di farlo, perché ostinarsi a misurarli in radienti, il che coinvolge la necessità di meneggiare  $\pi$  - uno dei numeri meno meneggiati della storia - e non tenersi i gradi, come fanno da secoli navigatori e geometrici (i vecchi agrimensori).

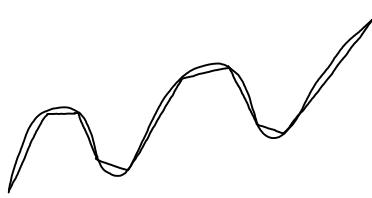
Il fatto è che le misure in radienti fornisce immediatamente le lunghezze dell'arco di circonferenza unitarie corrispondente (o CAPACE, come si diceva un tempo) all'angolo in questione. Solo se si misurano gli angoli in radienti (e la velocità angolare in rad/s) la legge che lega velocità angolare e velocità lineare è semplicemente  $v = \omega r$ , ove  $r$  è il raggio.

Il vero problema è: "Come misurare la lunghezza di un arco di circonferenza o, più in generale, di una curva?"

La soluzione del problema, dovuta (essenzialmente) ad Archimede, è basata su una semplice osservazione: fra tutte le curve che congiungono due punti, il segmento è quella più corta. Dunque si possono trovare approssimazioni PER DIFETTO delle lunghezze inscrivendo una poligonale nella curva e valutandone le lunghezze misurandone i lati.



approssimazione grossolana



approssimazione migliore

ed è sensato e ragionevole (anche se falso!) pensare che debba migliorare utilizzando lati più piccoli. È tempo di pensare alle vie di fatto

**DEFINIZIONE** Si definisce CURVA PARAMETRICA in  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  una funzione  $\gamma: [\alpha, b] \rightarrow \Omega$ , con  $[\alpha, b]$  intervallo arbitrario. La variabile  $t \in [\alpha, b]$  verrà detta PARAMETRO della curva. L'immagine  $\gamma: [\alpha, b] \rightarrow \Omega$  verrà detta SOSTEGNO. La curva verrà detta di classe  $C^0, C^1, \dots, C^\infty$  se è tale la funzione  $\gamma$  che la definisce, e dunque se sono tali le sue COMPONENTI  $\gamma_i: [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definite da  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$

### ESEMPI:

1) La curva  $\gamma(t) = u + tv$ ,  $t \in [0, 1]$  e  $u, v \in \mathbb{R}^n$  ha per sostegno il segmento che congiunge  $u_0$  e  $u_0 + u$ . Se  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  le componenti  $\gamma_i$  verificano

$$\gamma_i(t) = u_i + t v_i$$

2) La curva  $\gamma(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , ha per sostegno la circonferenza unitaria.

Sono entrambe curve  $C^\infty$ , la prima a valori in  $\mathbb{R}^n$ , la seconda in  $\mathbb{R}^2$ .

Utilizzare la rappresentazione parametrica delle curve rende molto facile iscrivere le poligonalì e misurarle.

Più di farlo, però, osserviamo che una funzione  $\gamma: [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , più che definire una curva - o meglio oltre a definire le curve - definisce anche le "leggi orarie" con le quali la traiettoria viene descritta.

Basta pensare al parametro  $t$  come al tempo che scorre, e al vettore  $\gamma(t)$  come alla posizione del punto in movimento all'istante  $t$ . I due esempi presentati corrispondono a due MOTI fondamentali: quello rettilineo uniforme e quello circolare uniforme. In realtà, è il sostegno a rappresentare meglio le nostre intuizioni di curve. Consideriamo i due esempi:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

I due sostegni sono uguali (la circonferenza unitaria) ma  $\sigma(t)$  gira a velocità doppia e percorre l'intera circonferenza se il

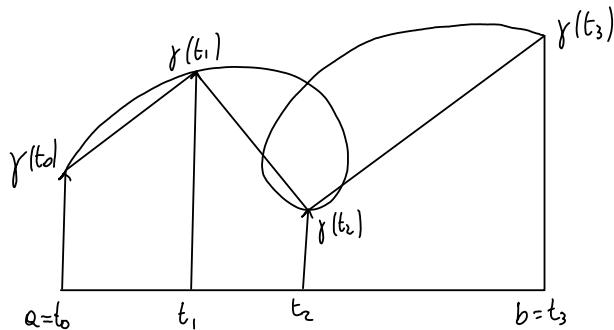
parametro (tempo) va da  $0$  a  $\pi$ , e poi la ripercorre quando varia da  $\pi$  a  $2\pi$ . Stessa "curva" (sostegno) nei due casi, ma modo di percorrerla diverso.

**DEFINIZIONE:** Dato un intervallo arbitrario  $[a,b]$ , si definisce **PARTIZIONE** di  $[a,b]$  ogni sequenza finita di punti  $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  tali che

$$a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = b$$

**NOTA:** Ogni punto di  $[a,b]$  appartiene a un solo intervallo  $[t_i, t_{i+1}]$  salvo i punti  $t_1, \dots, t_{n-1}$ , che appartengono ai due intervalli contigui.

L'idea per iscrivere una poligonale nella curva  $\gamma$  è di fissare una partizione dell'intervallo dei parametri e di considerare le loro immagini come vertici delle spezzate.



Scrivere per esteso l'"equazione parametrica" delle spezzate è (inutilmente) noioso. È invece facile (e importante) scrivere le lunghezze: ogni segmento ha lunghezza pari alla distanza dei propri estremi e, dunque si può introdurre la seguente

**DEFINIZIONE** Data una curva  $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ed una partizione  $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ , si definisce la **LUNGHEZZA DELLA POLIGONALE INSCRITTA**  $\lambda(\pi)$  come il numero

$$\lambda(\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))$$

A causa delle proprietà del segmento di essere il commesso più breve fra gli estremi, tale numero deve risultare minore della lunghezza

di  $\gamma$ , comunque lo si voglia definire. È però vero - e già osservato da Antifonte e Brisone (critici oltranzamente di Aristotele) - che la poligonale tende a "confondersi" con la curva al crescere del numero dei suoi lati e al diminuire delle loro lunghezze. È dunque sensato porre la

**DEFINIZIONE** Una curva parametrica verrà detta RETTIFICABILE se esiste finito il numero

$$\Lambda(\gamma) = \sup_n \Lambda(\pi)$$

al variare di tutte le sue possibili partizioni dell'intervallo dei parametri. Il numero  $\Lambda(\gamma)$  verrà detto LUNGHEZZA della curva.

**NOTA** esistono curve continue di lunghezza infinita e cioè NON rettificabili, per le quali  $\Lambda(\gamma) = +\infty$ .

Il resto della nota è dedicato ad individuare delle classi di curve rettificabili sufficientemente semplici da coprire: così più frequenti nelle applicazioni. Premettiamo però qualche osservazione sugli integrali di funzioni vettoriali.

### IL TEOREMA DI TORRICELLI E LA "DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE" PER GLI INTEGRALI

È stato già visto che l'operazione di derivazione delle curve si effettua componente per componente, indipendentemente

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t))$$

Una conseguenza immediata di ciò è che, se si definisce l'integrale di una curva ponendo  $\int_a^b \gamma(t) dt = \left( \int_a^b \gamma_1(t) dt, \dots, \int_a^b \gamma_n(t) dt \right)$ ,

si ottiene subito la seguente formula di Torricelli nel caso vettoriale

$$\gamma(d) - \gamma(c) = \int_c^d \gamma'(t) dt$$

Piùno di forme buon uso nello studio della rettificabilità, che richiede di stimare  $|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$ , occorre presentare il seguente lemma, che generalizza agli integrali la diseguaglianza triangolare, nota per i vettori e le loro norme,

$$|\sum_i^n a_i| \leq \sum_i^n |a_i|$$

**LEMMA** Sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua. Allora

$$\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt$$

**NOTA** La doppio sbarra verticale qui denota la NORMA in  $\mathbb{R}^n$ . La prova del risultato analogo per gli integrali scalari è più semplice, in quanto esiste valgono  $\gamma \leq |\gamma|$  e  $-\gamma \leq |\gamma|$

**DIM.** Vedi appendice

Siamo ora in grado di provare un risultato di rettificabilità di eccellente applicabilità pratica.

**TEOREMA** Sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva parametrica di classe  $C^1$ . Allora  $\gamma$  è rettificabile e molte

$$A(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

**NOTA:** La funzione scalare  $t \mapsto |\dot{\gamma}(t)|$  è continua su  $[a, b]$  e quindi ivi integrabile.

**NOTA:** Con un ragionamento più raffinato si può provare che, in realtà,

$$A(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

e dunque la formula precedente permette di calcolare le lunghezze. La prova è molto delicata, per un risultato così intuitivo, visto che  $|\dot{\gamma}|$  è il modulo delle velocità e  $A(\gamma)$  è la strada percorsa nell'intervallo di tempo  $[a, b]$ .

## Dimostrazione del teorema

Fissate ad arbitrio una partizione  $\pi = \{a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b\}$   
 si osservi che, per il teorema di Torricelli,

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\gamma}(t)| dt$$

da cui, per le proprietà additiva dell'integrale

$$\Lambda(\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

La stima precedente non dipende dalla partizione scelta, sicché il numero  $\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$  è un maggiorante per l'insieme

$$\{\Lambda(\pi) : \pi \text{ partizione di } [a,b]\}$$

Poiché  $\Lambda(\gamma) = \sup_{\pi} \Lambda(\pi)$  è il minimo di tali maggioranti segue subito

$$\Lambda(\gamma) \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

c.v.d

**NOTA** L'essere derivata (velocità) continua non è condizione necessaria per la rettificabilità: se si parametrizza una spezzata (certamente rettificabile) usando moti uniformi sulle singole porzioni rettilinee, le velocità "salti" nei vertici della spezzata. D'altra parte, essere continua non è sufficiente per la rettificabilità, in generale, come è stato provato in un altro contributo.

Esiste una condizione sulle componenti necessarie e sufficienti per la rettificabilità di una curva, l'essere a "variazione limitata" ("bounded variation"), ma tali approfondimenti esulano dall'ambito elementare di queste note. L'estensione di tali concetti alle superficie comportano un mare di guai. Alle loro messe a fuoco hanno dato fondamentali contributi numerosi matematici italiani, fra i quali va uno citato Leonida Tonelli, fra le due guerre mondiali, ed Ennio De Giorgi, negli anni '60 del secolo scorso.

Una notte di calore: i primi a scontrarsi con le curve non rettificabili furono i matematici, ma i geografi. Nel tentativo di misurare le coste frastagliatissime della Scozia, scoprirono che utilizzare segmenti sempre più corti non stabilizzava le misure, che invece cresceva a "dismisure". Così nacquero i frattali!

## APPENDICE

Viene qui presentata l'idea di una dimostrazione del lemma precedente sulle "disegualanze triangolare" per gli integrali. Se si utilizza la definizione di integrale nella versione di Mengoli e Cauchy si ricorderà che un'approssimazione dell'integrale è offerta dalle somme

$$\sum = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(\xi_i)$$

ove  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$  è una partizione del dominio  $[a, b]$  e  $\xi_i$  è un punto arbitrario in  $[t_i, t_{i+1}]$ .

Allora  $|\sum| = |\sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(\xi_i)|$  e, per l'ordinaria disegualanza triangolare, ne segue

$$|\sum| \leq \left| \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(\xi_i) \right| = \sum_0^{n-1} |(t_{i+1} - t_i)| |f(\xi_i)|$$

Al tendere a zero di  $\max |t_{i+1} - t_i|$  il primo membro tende a  $\left| \int_a^b f(t) dt \right|$ , mentre l'ultimo tende a  $\int_a^b |f(t)| dt$ , e la tesi è provata  
c.v.d.

**NOTA** È necessario prestare lo stesso attenzione richiesta per le funzioni scalari se si intende applicare lo stesso ad intervalli i cui estremi  $a$  e  $b$  non verificano  $a \leq b$ .

Se, infatti,  $a > b$  lo stesso è falso, in quanto il primo membro è positivo e il secondo negativo, salvo che siano nulli.

La stima valida sempre è:

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

ove il valore assoluto al secondo membro, all'esterno dell'integrale, fa sì che il valore non dipenda dall'ordine di  $a$  e  $b$ .

AN\_4.2

## ESEMPIO DI UNA CURVA PARAMETRICA CONTINUA, MA NON RETTIFICABILE

Si consideri la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t=0 \\ t \operatorname{sen} t & t \neq 0 \end{cases}$$

Essa è definita su tutto  $\mathbb{R}$  ed è continua (fuori di 0, in quanto prodotto di funzioni continue  $t$  e  $\operatorname{sen} \frac{1}{t}$ , ma anche in 0, in quanto  $f(0)=0 = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ : infatti, fuori di 0,  $f$  è prodotto della funzione infinitesimale  $t$  per quella limitata  $\operatorname{sen} \frac{1}{t}$ , ed è dunque infinitesima). Si può allora definire una curva parametrica ponendo

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

che è la parametrizzazione standard del grafico cartesiano della funzione  $f$ . Poiché entrambe le componenti di  $\gamma$ , e cioè  $t$  ed  $f(t)$  sono continue,  $\gamma$  stessa è continua su  $\mathbb{R}$ .

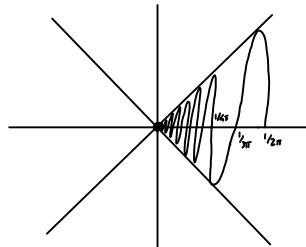
Mostriremo ora che la porzione di curva  $\gamma$  relativa all'intervallo dei parametri  $[0, \frac{1}{2}\pi]$  NON è rettificabile.

Ricordiamo che  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  (nel nostro caso  $n=2$ ) è rettificabile se  $\Lambda(\gamma) = \sup_{\pi} \Lambda(\pi) < +\infty$ . Dunque, per provare che la curva  $\gamma$  definita prima non è rettificabile si dovrà verificare che

$$\sup_{\pi} \Lambda(\pi) = +\infty$$

e cioè che l'insieme (numerico) delle lunghezze delle poligonalì inscritte in  $\gamma$  NON è superiormente limitato: in definitiva, occorre dimostrare che esistono poligonalì inscritte di lunghezze arbitrariamente alte.

Osserviamo che  $f(\frac{1}{k\pi})=0$ . Il grafico di  $f$  relativo a  $[0, \frac{1}{2}\pi]$  è



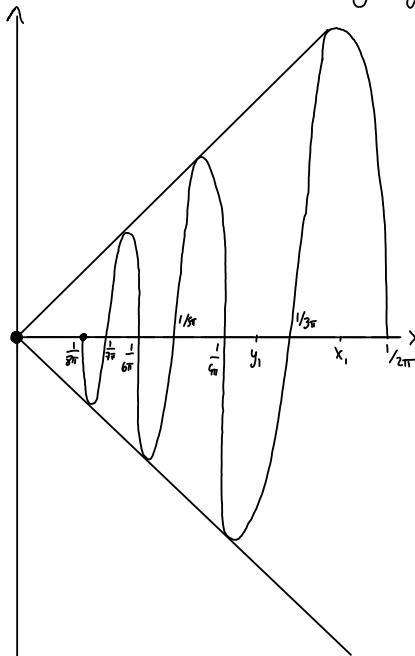
Gli zeri di  $f$  in  $[0, \frac{1}{2}\pi]$  sono, oltre a 0, tutti i punti del tipo  $\frac{1}{k\pi}$ , con  $k \geq 2$

Inoltre i punti  $x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$  e  $y_k = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}$  sono punti sui quali  $\sin(\frac{1}{t})$  vale rispettivamente 1 e -1, e dunque sono esattamente i punti nei quali il grafico interseca rispettivamente le prime bisettrice  $y=x$ , e le seconde  $y=-x$ .

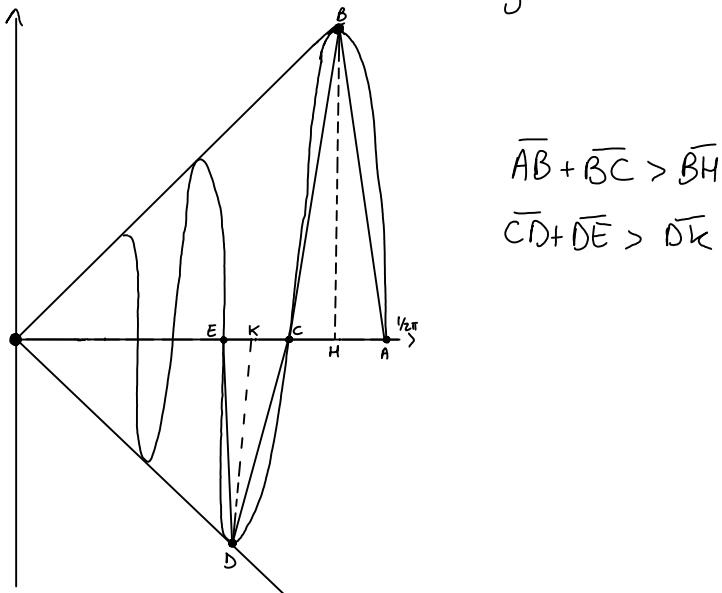
Fissato ora  $k \in \mathbb{N}$ , consideriamo la partizione definita dai punti:

$$0, \frac{1}{2k\pi}, \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2(k-1)\pi}, \frac{1}{(2k-1)\pi}, \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2(k-1)\pi}, \dots, \frac{1}{4\pi}, \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi}, \frac{1}{2\pi}$$

Le immagini dei quali (nel caso  $k=3$ ) sul grafico seguente sono in grosso



Per stimare molto dal basso le lunghezze delle poligonalate definite da tali punti sarà sufficiente minorare le lunghezze di due lati consecutivi delle spezzate con l'altezza del triangolo da essi formato.



Osservando che  $BH = f(x_1) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi}$  e  $DH = f(y_1) = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}$ , ripetendo

queste stime per ogni "semionda", e trascurandolo (ossia moltiplicando con 0) le lunghezze del primo lato  $\overline{(0,0)(1/2k\pi, 0)}$ , si ottiene per le lunghezze dello poligonale la stima

$$\Lambda(\pi) \geq \sum_{m=1}^k \left[ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2m\pi} + \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2m\pi} \right] = S_k$$

Il secondo membro è la somma parziale di una serie confrontabile con la serie armonica  $\sum t_m$ , che diverge. Ne segue che essa stessa è divergente e di conseguenza, per  $k$  (numero d'onde complete) sufficientemente alto, si possono ottenere poligoni di lunghezza arbitrariamente grande. ■

Una nota finale: abbiamo appena provato che la continuità non implica la rettificabilità. Altrettanto può dirsi per il viceversa: si consideri la funzione  $f(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$ , che è discontinua in  $t=0$ . Giacché la parametrizzazione standard del grafico di  $f$  su  $[-1, 1]$ ,  $\gamma(t) = \begin{cases} t \\ f(t) \end{cases}$  per  $t \in [-1, 1]$ , è rettificabile.

Infatti, sia  $-1 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  una qualunque partizione di  $[-1, 1]$  e sia  $i$  tale che  $0 \in [t_i, t_{i+1}]$ . Si ha, allora

mentre  $|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| = t_{j+1} - t_j$  se  $j < i$  oppure  $j > i+1$

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \sqrt{\binom{t_{i+1}}{1} - \binom{t_i}{-1}} = \sqrt{\binom{t_{i+1} - t_i}{2}} = \sqrt{\binom{2}{2}} = 2\sqrt{2}$$

sicché

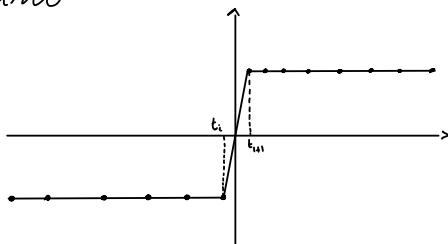
$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| &\leq \sum_{j=0}^i |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| + 2\sqrt{2} + \sum_{j=i+1}^n |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| = \\ &= t_i - a + 2\sqrt{2} + b - t_{i+1} \leq b - a + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Essendo l'ultimo membro un maggiorante per le lunghezza di qualunque poligono inscritto in  $\gamma$ , ne segue che

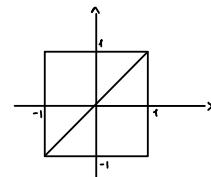
$$\Lambda(\gamma) \leq b - a + 2\sqrt{2}$$

Tale stima ci garantisce la rettificabilità delle curve  $y$ , ma è molto grossolana: in realtà, con un po' più di pazienza si può provare che  $\Lambda(y) = b - a + \gamma$

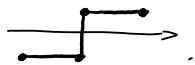
Cioè che abbiamo fatto è stato di stimare le lunghezze dell'ultimo "scalino"



con il lato di spezzata più lungo possibile  
(situazione che si verifica solo usando una partizione con due soli punti  $\{-1, 1\}$ .)



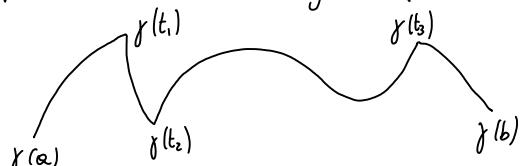
In realtà, se si utilizzano  $N$  punti equispaziati si ottiene la stima migliore per il lato obliquo  $\left| \left( \frac{t_{i+1} - t_i}{z} \right) \right| = \sqrt{\left( \frac{b-a}{N} \right)^2 + \gamma}$  che, al divergere del numero di punti, produce la stima "ottimale"  $\Lambda(y) = \gamma$ , quasi esattamente rappresentata da



Esiste un'ipotesi di regolarità sulle componenti, molto studiata qui a Pisa da L. Tonelli e dalle sue scuole, che è EQUIVALENTE alla rettificabilità: l'essere a "VARIAZIONE LIMITATA".

Tale concetto fornisce un quadro organico della problemistica delle rettificabilità, e costituisce un solido trampolino per ulteriori sviluppi.

È bene inserire qui un'ultima nota: anche se la continuità non basta per la rettificabilità, e l'essere a variazione limitata è ottimale dal punto di vista teorico, ma discretamente macchinoso da quelli pratici, ci sono ipotesi (di facile verifica) che sono sufficienti per garantirla. La più semplice è  $y \in C^1[a, b]$ . Una ancora più flessibile è di richiedere che esistano  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  tali che  $y \in C^1[t_i, t_{i+1}]$ : in sostanza, una "spezzata" come ogni "pezzo" di classe  $C^1$ , mentre nei punti di "saldatura"  $t_i$  ci possono essere "spigoli".



Tale ipotesi si rivelò adeguata per le ingenze "delle vite di tutti i giorni" e permette di ottenere le formule di calcolo delle lunghezze che costituisce l'equivalente del teorema di Torricelli per il calcolo degli integrali: infatti:

$$\lambda(f) = \int_a^b |f(t)| dt$$

I fisici non si stupiscono particolarmente: se un punto materiale si muove a 100 km/h, anche su traiettorie curve, per un'ora, quanto sarebbe strada percorsa? Se invece il modulo della velocità non è costante, si usa il solito "trucco" di riempire il prodotto  $v \cdot t$  con l'integrale di  $v \cdot dt$ ... Nullo di nuovo!

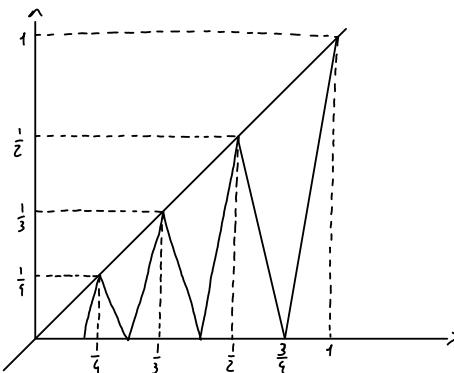
AN\_4.3

## UNA CURVA CONTINUA NON RETTIFICABILE

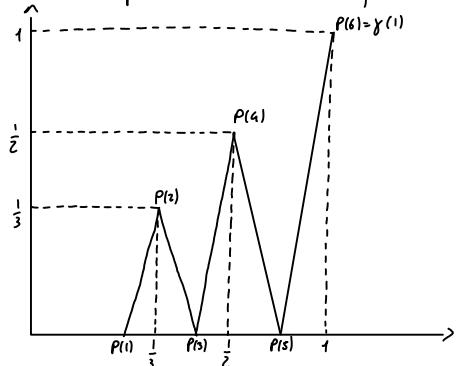
L'esempio seguente riprende quello classico  $y(t) = (t, t \operatorname{sen} \frac{1}{t})$  per  $t \in [0, 2/\pi]$  prolungato con  $y(0) = (0, 0)$ , semplificandone alquanto alcuni aspetti.

Si consideri  $[0, 1]$  e, in esso, la successione  $a_n = \frac{1}{n}$ , che è decrescente e tende a zero. Fra ogni coppia di punti consecutivi  $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}$  intercaliamo ad arbitrio un punto come, ad esempio, il loro punto medio  $\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{2} \frac{2n+1}{n(n+1)}$

Per definire la curva dell'esempio congiungeremo con un segmento ogni punto  $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  con i punti sull'asse  $x$  che hanno come ascisse i punti medi degli intervalli che hanno  $\frac{1}{n}$  per estremo. Si ottiene



Per scrivere esplicitamente la funzione il cui grafico è quello illustrato occorrebbe scrivere le equazioni parametriche dei segmenti. Ad esempio, quello fra  $(1, 1)$  e  $(3/4, 0)$ ,  $f(t) = (3/4, 0) + t(1/4, 1)$ , definisce la  $f$  sull'intervallo  $[3/4, 1]$ , e così via per gli altri intervalli, ponendo infine  $f(0) = 0$ . Non occorre, però, darsi tanto pena. Infatti, i vertici delle "spazzata" così definite sono noti ed è facile stimarne le lunghezze. Basta solo considerare lo zero assieme agli  $n$  punti più grandi sopra costruiti, ottenendo, ad esempio, le spazzata (vere) inscritte:



che include  $(0,0)$ , i punti  $(1,1), (1/2, 1/2)$  e  $(1/3, 1/3)$ , e i corrispondenti punti intercalati sull'asse  $x$ .

La stima delle lunghezze è immediata: i due lati della spezzata incidenti in  $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  sono entrambi più lunghi dell'altezza del triangolo,  $\frac{1}{n}$  e, dunque il contributo dei primi  $n$  triangoli è strettamente maggiore di  $\sum_1^n \frac{1}{k}$ , avendo pure ignorato il tratto iniziale orizzontale uscente da  $(0,0)$ .

Dalle proprietà della serie armonica segue subito che

$$\sup_n \sum_1^n \frac{1}{k} = +\infty$$

e dunque

$$\Lambda(\gamma) = +\infty$$

D'altronde, poiché  $0 \leq f(n) \leq n$  ne segue subito che  $\lim f = 0 = f(0)$ , e dunque la funzione definita all'inizio è continua, e la curva  $\gamma(t) = (t, f(t))$  fornisce il controesempio cercato.

**NOTA:** La  $f$  NON definisce una spezzata, perché i suoi vertici sono infiniti, mentre dovrebbero essere le immagini del numero finito di punti  $t_0, t_1, \dots, t_n$ . Le poligonalini inscritte usate per le stime utilizzano solo la parte destra del tracciato, completandole con il tratto orizzontale (o sinistro) che elimina tutte le code della successione  $V_n$ .

L'esempio classico esposto in un altro contributo,  $\gamma(t) = (t, t \operatorname{sen} \frac{1}{t})$  e  $\gamma(0) = (0,0)$ , si presta ad interessanti osservazioni.

Ad esempio, se si considera

$$\begin{cases} \sigma(t) = (t, t^2 \operatorname{sen} \frac{1}{t}) \\ \sigma(0) = (0,0) \end{cases}$$

la curva, molto simile, è rettificabile perché per effetto del fattore  $t^2$  è di classe  $C^1$ . Non è caso la serie, stavolta, sarebbe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  che converge ma, essendo una stima dal basso, ciò non implicherebbe nulla sulla rettificabilità.

Le condizioni caratteristiche per le rettificabilità di una curva sono state stabilite all'inizio del XX secolo e conducono alla teoria delle funzioni a variazione limitata (BV o Bounded Variation) alla quale le matematiche italiane hanno dato contributi importanti.

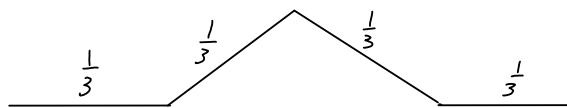
## CURVA DI KOCH (fiocco di neve)

$N=0$



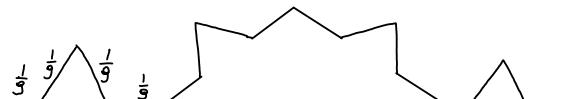
sostituendo al tratto centrale una spezzata equivalente

$N=1$



Operando allo stesso modo con ogni lato

$N=2$



e così via all'infinito

Ad ogni passo, la lunghezza della spezzata viene moltiplicata per  $4/3$  e, dunque, al divergere di  $N$ , la lunghezza diverge.

Le teorie della convergenza uniforme delle serie di funzioni totalmente convergenti assicurano che le spezzate costruite più su convergono ad una curva continua. Le spezzate usate per definirla sono tutte inscritte, e dunque la sua lunghezza è infinita.

AN\_5.1

## CAMPPI VETTORIALI E FORME DIFFERENZIALI

Per le funzioni di più variabili due sono i concetti, diversi ma strettamente correlati che sostituiscono il concetto di derivata: il gradiente - il vettore delle derivate parziali nel gruppo - e il differenziale - la funzione lineare nell'incremento, associata al punto, l'incremento delle quale approssima meglio quella della funzione.

I campi di vettori (o campi vettoriali o, più semplicemente: campi) e le forme differenziali sono gli oggetti astratti delle stesse nature, rispettivamente, del gradiente e del differenziale.

**DEFINIZIONE** Dato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , si definisce campo (di vettori) in  $\Omega$ , di classe  $C^k$ , una funzione  $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , le cui componenti scalari ( $A \equiv (A_1, A_2, \dots, A_n)$ ) sono tutte funzioni da  $\Omega$  in  $\mathbb{R}$  continue con le loro derivate fino all'ordine  $k$ .

**NOTA:** Il vettore "di arrivo"  $A(u)$  ha lo stesso numero di componenti scalari del vettore di partenza  $u$ .

**ESEMPI:** La forza di gravità associa ad ogni punto dello spazio una forza (che si può misurare con una massa di prova, piccole da poter trascurare il campo di essa generato rispetto a quello sotto misura) che è un vettore a tre componenti, tante quante quelle dello spazio nel quale il campo è immerso.

Analogamente, in un fiume, che occupa una regione dello spazio, è possibile associare ad ogni punto la velocità del flusso in quel punto, che ha tre componenti come la regione occupata dalla massa d'acqua.

**ESEMPI (matematici):** un campo piano (ovvero definito in  $\mathbb{R}^2$  o un suo sottosinsieme) si definisce fissando una coppia di funzioni  $(a(u,y), b(u,y))$  che, assieme, individuano il vettore di  $\mathbb{R}^2$  associato al punto  $(u,y)$ , anch'esso in  $\mathbb{R}^2$ .

Il campo  $(|u|^{1/2}, \operatorname{sen} u)$  è un campo pieno di classe  $C^0(\mathbb{R}^2)$ , perché entrambe le funzioni  $(u, y) \rightarrow |u|^{1/2}$  e  $(u, y) \rightarrow \operatorname{sen} u$  sono continue, ma non di classe  $C^1(\mathbb{R}^2)$ , perché la funzione  $(u, y) \rightarrow |u|^{1/2}$  non è derivabile rispetto ad  $u$  in tutti i punti nei quali  $u=0$ , e cioè sull'asse  $y$ .

Il campo è invece di classe  $C^\infty([-\infty; 0] \times [0; +\infty[)$  perché sul quadrante  $u > 0, y > 0$   $|u| = u$  e dunque entrambe le componenti del campo sono funzioni con derivate di tutti gli ordini continue.

Come ultimo esempio, consideriamo il campo della gravità generato da una massa  $M$  puntiforme o anche - grazie a Newton - da una massa generica che si può pensare come se fosse concentrata nel suo centro di massa, e che supponiamo posizionata nell'origine. In tal caso, posta una massa piccola  $m$  nel punto di coordinate  $u = (u_1, u_2, u_3)$  la forza di gravità ha modulo  $|F| = GmM/|u|^2$ , è diretta come il vettore  $u$ , che dà la retta  $Ou$ , ed è attrattiva, e quindi ha il verso del vettore  $-u$ , perché  $u$  è diretto dall'origine verso l'esterno. Per ottenere un vettore di modulo, direzione e verso fissati, basta moltiplicare il modulo per il versore individuato da direzione e verso, e dunque

$$F(u) = G \frac{mM}{|u|^2} \cdot \underbrace{\left( -\frac{u}{|u|} \right)}_{\text{versore di } -u} = - \frac{GmM}{|u|^3} u$$

ovvero, in componenti scalari:

$$\left( F_1(u_1, u_2, u_3), F_2(u_1, u_2, u_3), F_3(u_1, u_2, u_3) \right) = - \frac{GmM}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^3}} (u_1, u_2, u_3)$$

Il vettore della forza di gravità nel punto  $(u_1, u_2, u_3)$  ha tre componenti  $(F_1, F_2, F_3)$ , non è definito in  $(0, 0, 0)$  (le stelle a neutroni o i buchi neri ci danno un'idea di cose ecco ad andare troppo vicino a tante masse, anche trascurando gli effetti relativistici) ed è un campo di classe  $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ , perché tali sono le sue componenti scalari.

Altrettanto rilevante, dal punto di vista teorico e pratico, è il concetto di forme.

**DEFINIZIONE** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Si definisce forma differenziale lineare (o, più brevemente, forma differenziale, o addirittura solo forma), una funzione  $\alpha: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tale che, per ogni  $\bar{u} \in \Omega$ , la funzione  $t \mapsto \alpha(\bar{u}, t)$  sia lineare in  $t$ .

**NOTA:** Poiché ogni funzione lineare da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$  è uguale al prodotto scalare del suo argomento per il vettore formato dalle immagini dei vettori della base canonica in  $\mathbb{R}^n$ , dato una qualunque forma  $\alpha(u, w)$ , per la quale dunque  $w \mapsto \alpha(u, w)$  è lineare per ogni  $u$  fissato, si può definire un campo di vettori  $A(u)$  tale che

$$\alpha(u, w) = A(u) \cdot w \quad (1)$$

Infatti, fissato  $u$ ,  $\alpha(u, w) = \alpha(u, \sum_i^n w_i e_i) = \sum_i^n w_i \alpha(u, e_i)$  e, posto  $A(u) = \alpha(u, e_i)$  ne segue immediatamente (1).

Il campo di vettori  $A(u)$  verrà detto campo associato alla forma  $\alpha$ , e  $\alpha$  verrà detta di classe  $C^k$  se e solo se  $A$  è di classe  $C^k$ .

Analogamente, dato un campo  $A$ , si definisce le forme associate ad  $A$  ponendo

$$\alpha(u, w) = A(u) \cdot w$$

### NOTAZIONE ED ESEMPI:

L'espressione generale di una forma  $\alpha: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , mediante l'equazione (1) precedente è

$$\alpha(u, w) = A(u) \cdot w = \sum_{i=1}^n A_i(u) w_i$$

e dunque, in  $\mathbb{R}^2$ , l'espressione generale di una forma sarà

$$\alpha(u_1, u_2; w_1, w_2) = A_1(u_1, u_2) w_1 + A_2(u_1, u_2) w_2$$

o, in  $\mathbb{R}^3$ ,  $\alpha(u, w) = \alpha(u_1, u_2, u_3; w_1, w_2, w_3)$  sarà

$$A_1(u_1, u_2, u_3) w_1 + A_2(u_1, u_2, u_3) w_2 + A_3(u_1, u_2, u_3) w_3$$

A parte la consuetudine di indicare con  $u, y, z$  le variabili  $u_1, u_2, u_3$ , ce n'è un'altra degna di nota, derivante dalle storie di questi concetti. Se si considera il differenziale della funzione lineare

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \xrightarrow{\nabla_i} u_i$$

che associa ad ogni vettore la sua componente  $i$ -esima esso, nel punto  $u_0$  e sull'incremento  $w$ , risulta uguale al suo valore su  $w$ ,  $\nabla_i(u_1, u_2, \dots, u_n) = w_i$ , e cioè

$$d\nabla_i(u_0, w) = w_i \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$$

Tradizionalmente, si denota con  $du_i$  il differenziale  $d\nabla_i$  e si omeltono i suoi argomenti, sicché l'espressione generale di una forma differenziale in  $\mathbb{R}^n$  diventa

$$\alpha = \sum_i^n A_i(u_1, \dots, u_n) du_i$$

Così vengono rappresentate in fisica, ed anche nella stragrande maggioranza delle opere matematiche, le forme differenziali. Per gli antichi,  $(du_1, du_2, \dots, du_n)$  era uno spostamento infinitesimo e, ad esempio, il prodotto scalare  $A dx$  delle forze per lo spostamento, era il lavoro (infinitesimo) compiuto dal campo durante lo spostamento (infinitesimo)  $dx$ .

Poiché i matematici (eccetto i pochi che studiano l'"Analisi non standard") non amano più il concetto di infinitesimo "in sé" - come il piccolo intervallo di tempo o il piccolo spostamento - ma solo "in potenze" - una funzione che tende a zero - avrebbe forse più senso cambiare notazione.

Ciò non è però accaduto, ad oggi, e dunque gli esempi precedenti di forme in  $\mathbb{R}^2$  ed  $\mathbb{R}^3$  vengono di solito denotati con

$$A(u, y) dx + B(u, y) dy$$

e

$$A(u, y, z) dx + B(u, y, z) dy + C(u, y, z) dz$$

Osserviamo che è immediato, dall'espressione di una forma

$$\alpha(u, dx) = \sum A_i(u) du_i$$

dedurre quella del campo associato  $A(u)$ , che è

$$A(u) = (A_1(u), A_2(u), \dots, A_n(u))$$

e viceversa.

## L'INTEGRALE DI UN CAMPO O DI UNA FORMA

Iniziamo subito col dire che l'integrale di una forma coincide con l'integrale del campo associato. Per i campi, invece:

**DEFINIZIONE** Sia  $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo di classe  $C^0(\Omega)$ . Per ogni curva parametrica  $\gamma: [\alpha, b] \rightarrow \Omega$ , si definisce l'integrale di  $A$  esteso a  $\gamma$  ponendo

$$\int_{\gamma} A = \int_{\alpha}^b A(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

↑ prodotto scalare

**ESEMPIO:** Sia  $A = \left( \frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2} \right)$  e sia  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  definita da

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{e dunque } \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Allora,

$$A(\gamma(t)) = \left( \frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, -\frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right) = (\sin t, -\cos t)$$

e infine

$$\int_{\gamma} A = \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t) (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = -2\pi$$

**NOTA:** L'integrale  $\int_{\alpha}^b A(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$  ha un profondo significato fisico. Nel caso  $A$  sia un campo di forze, e  $\gamma(t)$  descrive un moto immerso nel campo,  $\dot{\gamma}(t)$  è la velocità nel punto  $\gamma(t)$  e dunque  $\dot{\gamma}(t) dt$  è il prodotto delle velocità per il tempo, e quindi lo spostamento. Dunque  $\int_{\gamma} A$  rappresenta il lavoro compiuto dal campo  $A$  sulle particelle che descrive la curva  $\gamma(t)$  (il lavoro "elementare"  $A(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$  è il prodotto scalare delle forze  $A(\gamma(t))$  nel punto  $\gamma(t)$  per lo spostamento "elementare"  $\dot{\gamma}(t) dt$ , e l'integrale "somma" tutti i lavori elementari).

## IL PROBLEMA DELLA PRIMITIVA

È stato già osservato che, dato  $f$  olifunzionabile in  $\Omega$  e valori reali,  $\nabla f(u)$  è un campo di vettori e  $d f(u, w)$  è una forma differenziale. Per le funzioni di una sola variabile, il teorema di Torricelli risolve brillantemente il problema

"Dato uno  $f$ , esiste  $F$  tale che  $F' = f$ ?"

Esso ha risposta affermativa se  $f$  è continua, mentre da luogo ad un guazzabuglio se  $f$  è discontinua, chiarito solo all'inizio del secolo scorso. I due problemi corrispondenti al problema delle primitive, nel caso delle funzioni di più variabili, sono:

"Dato un campo  $A$ , esiste  $f$  tale che  $\nabla f = A$ ?"

ovvero, per le forme,

"Dato una forma  $\alpha$ , esiste  $f$  tale che  $df = \alpha$ ?"

I due problemi sono strettamente correlati. Infatti rappresentando  $df$  e  $\alpha$  con i loro campi associati si ottiene

$$\nabla f(u)w = df(u, w) = \alpha(u, w) = A(u)w$$

da cui

$$(\nabla f(u) - A(u))w \equiv 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$$

e, in particolare, per  $w = \nabla f(u) - A(u)$ , segue

$$|\nabla f(u) - A(u)|^2 = (\nabla f(u) - A(u))(\nabla f(u) - A(u)) = 0$$

e dunque

$$\nabla f(u) - A(u) = 0$$

In sostanza risolvere il secondo problema, relativo alle forme  $\alpha$ , comporta esattamente la risoluzione del primo problema per il campo associato  $A(u)$ .

Viceversa, se  $A$  è di classe  $C^0$  l'eventuale soluzione  $f$  del primo problema  $\nabla f = A$  è una funzione le cui derivate sono le componenti di  $A$  e sono quindi continue. Ne segue che  $f$ , avendo derivate continue, è differenziabile e inoltre

$$\partial f(u, \omega) = \nabla f(u) \omega$$

da cui infine ne segue che  $f$  risolve il secondo problema per le forme differenziali  $\alpha$  associate ad  $A$ .

Dunque, limiteremo lo studio al problema delle primitive di un campo di classe  $C^0$ , e introduciamo la seguente

**DEFINIZIONE:** Un campo di vettori  $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice integrabile (o anche campo potenziale) se esiste  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\nabla f(u) = A(u) \quad \forall u \in \Omega$$

Ogni funzione  $f$  verificante l'identità precedente si dice primitiva (o potenziale) del campo.

Le definizioni corrispondenti per le forme utilizzano una terminologia differente, o almeno è tale quella più diffusa.

**DEFINIZIONE:** Una forma  $\alpha: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  verrà detta integrabile (o esatta, o un differenziale esatto) se esiste  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $df \equiv \alpha$  su  $\Omega \times \mathbb{R}^n$ . Ogni funzione verificante tale identità verrà detta primitiva (o potenziale) della forma  $\alpha$  in  $\Omega$ .

Dunque, si può usare la terminologia asettica dei matematici, e parlare di integrità e primitive, oppure quelle classiche: i campi sono campi potenziali e hanno potenziali; le forme sono esatte e hanno potenziali. I campi potenziali sono poi detti anche CONSERVATIVI.

## CONDIZIONI NECESSARIE DI INTEGRABILITÀ

La situazione in più variabili è considerevolmente diversa da quella in una variabile, dove la continuità basta ad assicurare l'esistenza di primitive. Per illustrare i problemi nei quali si inceppa, è indispensabile il seguente:

**TEOREMA (fondamentale)** Condizione necessaria e sufficiente perché un campo  $A$  sia integrabile è che  $\int_y A$  sia indipendente dal cammino  $y$ , ma dipende solo dalla coppia (ordine!) dei punti  $y(a)$  e  $y(b)$ .

Dimostrazione La prova della condizione sufficiente verrà svolta nella prossima sezione. Per la condizione necessaria assumiamo che  $A$  sia integrabile e proviamo che l'integrale non varia tenendo fissi gli estremi e facendo variare ad arbitrio il cammino che li congiunge.

Poiché  $A$  è integrabile, esiste  $f: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $Df = A$ . Allora, per ogni curva  $y: [a, b] \rightarrow \mathcal{L}$  di classe  $C^1$  si avrà

$$\int_y A = \int_a^b A(y(t)) \dot{y}(t) dt = \int_a^b Df(y(t)) \dot{y}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} [f(y(t))] dt = f(y(b)) - f(y(a))$$

(ancora Torricelli!)

Dunque, qualunque cammino percorre la curva parametrica  $y$ , l'integrale alla fine sarà uguale alla differenza fra i valori che il potenziale  $f$  assume nel punto finale  $y(b)$  e nel punto iniziale  $y(a)$ , e dunque dipende solo dai punti iniziale e finale della curva e non dalle vie percorse per congiungerli. In fisica il conto precedente è piuttosto noto: "Il lavoro compiuto da un campo potenziale è la differenza di potenziale fra il punto finale ed il punto iniziale".

Un'altra forma delle condizioni precedente riguarda le curve chiuse.

**DEFINIZIONE** Una curva  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice chiusa se  $y(a) = y(b)$

**TEOREMA** Se  $A$  è integrabile  $\int_A = 0$  per ogni curva  $\gamma \in C^1$  chiusa.

**Dimostrazione**  $\gamma(b) = \gamma(a) \Rightarrow f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$

**NOTA:** Osserviamo che il campo dell'esempio precedente ha integrale sulla circonferenza unitaria (cost, sent)  $t \in [0, 2\pi]$  uguale a  $-2\pi$ . Poiché  $(\cos 0, \operatorname{sen} 0) = (\cos 2\pi, \operatorname{sen} 2\pi)$ , la curva è chiusa e, poiché l'integrale su una curva chiusa non è nullo, ne segue che il campo NON è integrabile su  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  pur avendo componenti  $\frac{y}{x^2+y^2}$  e  $\frac{-x}{x^2+y^2}$  che sono  $C^\infty(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ .

La pessima notizia è che, diversamente da quanto accade per le funzioni di una variabile, non basta che un campo sia continuo, o anche  $C^\infty$ , affinché sia integrabile.

Il prossimo teorema getta un'ulteriore luce sulla questione.

**TEOREMA** Condizione necessaria perché un campo  $A$  di classe  $C^1$  sia integrabile è che

$$(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i} \quad \forall i \neq j$$

**Dimostrazione**

Infatti, se  $A$  è integrabile, esiste  $f$  tale che

$$\nabla f = A$$

e cioè

$$f_{x_i} = A_i \quad i = 1 \dots n$$

Ne segue che

$$(A_i)_{x_j} = (f_{x_i})_{x_j} = f_{x_i x_j}$$

e inoltre

$$(A_j)_{x_i} = (f_{x_j})_{x_i} = f_{x_i x_j}$$

Poiché il campo  $A$  è di classe  $C^1$  e le sue componenti sono le derivate di  $f$  ne segue che  $f$  è di classe  $C^2$  e la tesi segue immediatamente dal teorema di Schwarz sull'uguaglianza delle derivate miste.

**ESEMPIO:** Il maledetto esempio precedente verifica la condizione del teorema. Infatti

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2+y^2} \right) = \frac{x^2+y^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) = - \frac{x^2+y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1}$$

e le due derivate sono UGUALI! Ne segue l'ulteriore pessima notizia

**TEOREMA** La condizione del teorema precedente NON è, in generale, sufficiente.

È un vero peccato, perché una condizione sulle derivate avrebbe richiesto poco fatiche per la verifica! In una delle prossime sezioni verranno esaminate condizioni sul dominio sotto le quali la condizione diventa anche sufficiente, ma in generale NON è così: l'esempio parla chiaro! La condizione precedente ricorda vagamente quello  $\epsilon \rightarrow 0$  per il termine generale di una serie: necessaria, ma non sufficiente!

È comunque così importante da meritare una definizione

**DEFINIZIONE:** Un campo  $A$  di classe  $C^1$  è detto innotazionale se  $(A_i)_{x_i} = (A_j)_{x_i} \quad \forall i \neq j$ . Una forma differenziale  $\alpha(n, w) = A(n)w$  è detta chiusa se è verificata la stessa condizione per il suo campo associato  $A$ .

Anche qui c'è lo solito Babbo!

La condizione necessaria precedente si può esprimere dicendo che un campo  $C^1$  potenziale (o integrabile) è innotazionale, ovvero una forma esatta è anche chiusa. Il seguente esempio dà un'idea piuttosto precisa su quanto sia difficile assegnare "a caso" due funzioni scalari ed ottenere un campo integrabile, o anche solo innotazionale.

**ESERCIZIO:** "Determiniamo  $b(x,y)$  in modo che il campo  $(u_x, b(x,y))$  sia inotazionale".

Naturalmente, che il campo sia inotazionale non dice nulla sulla sua integrabilità, ma di certo se il campo non è inotazionale non è, "a posteriori", nemmeno integrabile!

$$A_x(u_x, y) = u_y \quad A_z(u_x, y) = b(u_x, y)$$

$$(A_x)_y = (A_z)_x$$

$$\text{e cioè} \quad x = b_x(u_x, y)$$

Integrando ambo i membri rispetto ad  $x$  si ottiene

$$b(u_x, y) = \frac{1}{2} x^2 + \varphi(y)$$

e dunque  $(u_y, \frac{1}{2} x^2 + \varphi(y))$  è inotazionale per ogni funzione arbitraria  $\varphi(y)$ .

Si vede bene che  $b$  è ben lungi da poter esser fissata ad arbitrario: deve essere delle forme  $\frac{1}{2} x^2$  più una funzione arbitraria delle sole  $y$ . L'eventuale potenziale dovrà verificare

$$\begin{cases} f_x = u_y \\ f_y = \frac{1}{2} x^2 + \varphi(y) \end{cases}$$

e dunque, integrando la prima rispetto ad  $x$  si ottiene

$$f(u_x, y) = \frac{1}{2} x^2 y + c(y)$$

e, derivando rispetto ad  $y$  e uguagliando le due espressioni per  $f_y$  si ha infine

$$\frac{1}{2} x^2 + \varphi(y) = f_y(u_x, y) = \frac{1}{2} x^2 + c'(y)$$

da cui infine  $c'(y) = \varphi(y)$  e dunque

$$f(u_x, y) = \frac{1}{2} x^2 y + \varphi(y)$$

ove  $\phi$  è una qualunque primitiva di  $q$  (per essere certo che esiste è sufficiente scegliere  $q$  almeno continua!).

Ad ogni buon conto, se  $f$  così trovata è o non è un potenziale del campo  $(xy, \frac{1}{2}x^2 + q(y))$ ? Non abbiamo teoremi che ci lo assicurino, ma da  $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y + \phi(y)$  segue subito  $f_x = xy$  e  $f_y = \frac{1}{2}x^2 + \phi'(y) = \frac{1}{2}x^2 + q(y)$ , e dunque  $f$  è un potenziale del campo

**NORA** Il modo più semplice per fornire un esempio di campo innatozionale è di considerare il gradiente di una funzione: la condizione necessaria fa il resto!

AN\_5.2

## PROVA DEL TEOREMA FONDAMENTALE

In questa sezione verrà stabilito, in due forme equivalenti, la più importante condizione sufficiente per l'integrabilità di un campo (o delle forme associate), di uso pratico assai maleolare, ma importantissima come strumento per provare la validità di quelle di uso più comodo.

Sarà in seguito necessario un risultato ausiliario, che generalizza all'integrale dei campi la proprietà additiva dell'integrale ordinario.

**DEFINIZIONE:** Date due curve  $\gamma_1 : [\alpha, b] \rightarrow \Omega$  e  $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \Omega$  si definisce la congiunzione  $\gamma_1 \oplus \gamma_2$  delle due curve come quella definita ponendo

$$\gamma_1 \oplus \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [\alpha, b] \\ \gamma_2(t) & \text{se } t \in [b, c] \end{cases}$$

Risulta anche  $\gamma_1 \oplus \gamma_2 : [\alpha, c] \rightarrow \Omega$

Si definisce inoltre curva opposta a  $\gamma : [\alpha, b] \rightarrow \Omega$  la curva  $\ominus \gamma : [\alpha, b] \rightarrow \Omega$  definita ponendo

$$\ominus \gamma(t) = \gamma(b - t + \alpha)$$

Osserviamo che la congiunzione fra due curve è la curva parametrica che prima percorre il sostegno di  $\gamma_1$  e poi, in sequenza, quello di  $\gamma_2$ . La curva opposta, invece, poiché quando  $t$  cresce da ' $\alpha$ ' a ' $b$ ' ( $b - t + \alpha$ ) decresce da  $b$  ad  $\alpha$ , percorre lo stesso sostegno da  $b$  ad  $\alpha$ , percorre lo stesso sostegno di  $\gamma$ , ma in verso opposto, dal punto finale a quello iniziale.

Le curve così introdotte godono di proprietà notevoli, rispetto all'integrazione

**LEMMA** Siano  $\gamma_1 : [\alpha, b] \rightarrow \Omega$  e  $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \Omega$ . Allora, per ogni campo  $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , di classe  $C^1$  risulta

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} A = \int_{\gamma_1} A + \int_{\gamma_2} A \quad \text{e} \quad \int_{-\gamma_1} A = - \int_{\gamma_1} A$$

**Dimostrazione**

$$\Delta (\gamma_1 \oplus \gamma_2) = \begin{cases} \gamma_1 & \text{su } [\alpha, b] \\ \gamma_2 & \text{su } [b, c] \end{cases}$$

segue che

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} A = \int_a^c A(\gamma_1 \oplus \gamma_2(t)) (\gamma_1 \oplus \gamma_2)'(t) dt =$$

(per la proprietà additiva dell'integrale ordinario)

$$= \int_a^b A(\gamma_1(t)) \dot{\gamma}_1(t) dt + \int_b^c A(\gamma_2(t)) \dot{\gamma}_2(t) dt = \int_{\gamma_1} A + \int_{\gamma_2} A$$

Notiamo che tale ragionamento è valido anche se non esiste  $j(b)$ , ma solo  $j_-(b)$  e  $j_+(b)$ . Le curve per cui ciò accade solo per un numero finito di punti si dicono  $C^1$  a tratti. Inoltre:

$$\int_{-\gamma_1(t)} A = \int_a^b A(-\gamma_1(t)) (-\dot{\gamma}_1(t))(t) dt =$$

(poiché  $-\gamma_1(t) = \gamma_1(b+\alpha-t)$  e  $(-\dot{\gamma}_1)(t) = -\dot{\gamma}_1(b+\alpha-t)$ )

$$= \int_a^b A(\gamma_1(b+\alpha-t)) [-\dot{\gamma}_1(b+\alpha-t)] dt =$$

(con il cambio di variabile  $b+\alpha-t = s$ )

$$= \int_b^\alpha A(\gamma_1(s)) \dot{\gamma}_1(s) ds = - \int_a^b A(\gamma_1(s)) \dot{\gamma}_1(s) ds$$

c.v.d.

Siamo ora in grado di ripercorrere, passo passo, la dimostrazione del teorema di Torricelli e costruire una primitiva per ogni campo continuo il cui integrale non dipende dal cammino, ma solo dagli estremi.

### Dimostrazione della condizione sufficiente del teorema fondamentale

Fissiamo  $x_0 \in \Omega$  e denotiamo con  $\gamma_{x_0 x}$  una qualunque curva avente per primo estremo  $x_0$  e per secondo  $x$ . Per l'ipotesi

si può porre

$$f(u) = \int_{\gamma_{x_0 x}} A$$

perché l'integrale non dipende da  $x_0$ , che verrà tenuto fisso al variare delle  $u$ , e non dipende neppure dalla particolare curva scelta per l'ipotesi di invarianza del cammino, dato che gli estremi sono in ogni caso  $x_0$  e  $x$ , ma dipende solo da  $x$ .

Proviamo ora che  $f$  è un potenziale per  $A$ , ossia che

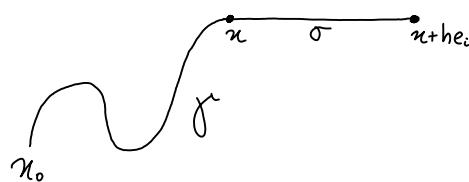
$$\int_{X_i} (u) = A_i (u) \quad i=1 \dots n$$

Per calcolare le derivate parziali al primo membro supponiamo  $h > 0$  e consideriamo il relativo rapporto incrementale

$$\frac{f(u+he_i) - f(u)}{h} = \frac{1}{h} \left[ \int_{\gamma(x_0(u+he_i))} - \int_{\gamma_{x_0 x}} \right]$$

ove le curve per i due integrali sono scelte ad arbitrio col solo vincolo sui punti esterni, che sono quelli indicati.

Si sceglie allora, come  $\gamma_{x_0 x}$  una qualunque curva  $\gamma: [\alpha, b] \rightarrow \Omega$  con  $\gamma(\alpha) = x_0$  e  $\gamma(b) = x$ , e



come  $\gamma_{x_0(u+he_i)}$  la congiunzione fra  $\gamma$  e il segmento di estremi  $u$  e  $u+he_i$ , con valori del parametro fra  $b$  e  $b+h$ , e cioè  $\sigma(t) = u + (t-b)$  e (verifica  $\sigma(b) = x$  e  $\sigma(b+h) = x+he_i$ ).

Posto allora  $\gamma_{x_0(x+he_i)} = \gamma \oplus \sigma$ , dal lemma precedente segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left[ \int_{\gamma_{x_0(x+he_i)}} A - \int_{\gamma_{x_0}} A \right] &= \frac{1}{h} \left[ \int_{\gamma} A + \int_{\sigma} A - \int_{\gamma} A \right] = \frac{1}{h} \int_{\sigma} A = \\ &= \frac{1}{h} \int_b^{b+h} A(\sigma(t)) \dot{\sigma}(t) dt = (\text{poiché } [\pi + (t-b)e_i] \dot{=} e_i) \\ &= \frac{1}{h} \int_b^{b+h} A(\pi + (t-b)e_i) e_i dt \stackrel{\substack{\text{ponendo} \\ t-b=s}}{=} \frac{1}{h} \int_0^h A_i(\pi + se_i) ds = \end{aligned}$$

(per il teorema della media integrale per gli integrandi scalari continui)

$$= A_i(\pi + \xi e_i) \text{ ove } \xi \in [0, h]$$

Dunque, per ogni  $h > 0$ , esiste  $\xi(h) \in [0, h]$  tale che

$$\frac{f(\pi + he_i) - f(\pi)}{h} = A_i(\pi + \xi(h)e_i)$$

Dal teorema del confronto, poiché  $0 \leq \xi(h) \leq h$  ne segue che quando  $h \rightarrow 0$  anche  $\xi(h) \rightarrow 0$ , e poiché  $A_i$  è continua per ipotesi, il secondo membro converge per  $h \rightarrow 0$ , e inoltre

$$\lim_h A_i(\pi + \xi(h)e_i) = A_i(\pi)$$

Dunque, il limite per  $h \rightarrow 0^+$  del rapporto incrementale esiste e vale  $A_i(\pi)$ . In modo analogo viene trattato il caso  $h < 0$ , da cui le resi

c.v.d.

ha verificata la condizione è gravissima: occorrerebbe verificare l'indipendenza dell'integrale dal cammino scelto, una volta fissati gli estremi e il loro ordine. Ciò verrà fatto sviluppando condizioni alternative che lo implicano. Una nota positiva, invece, è che il teorema appena provato è costruttivo e permette di costruire il potenziale a partire dal campo, calcolandone l'integrale su curve opportune.

**ESEMPIO** Calcolare un potenziale di  $ndx + ydy$ . Il campo associato è  $\begin{pmatrix} n \\ y \end{pmatrix}$  che verifica la condizione  $\frac{\partial A_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial A_2}{\partial x}$ , e dunque nulla ostacola che possa essere integrabile. Supposto che lo sia, un potenziale sarebbe:

$$f(x, y) = \int_A_{\gamma(0,0)(x,y)} A$$

Un cammino facile per andare da  $(0,0)$ , tenuto fisso, a  $(x,y)$ , senza mai uscire dal dominio del campo  $(\mathbb{R}^2)$  è il seguente

$$\gamma(t) = t \begin{pmatrix} n \\ y \end{pmatrix} \quad t \in [0,1] \text{ da cui } \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} n \\ y \end{pmatrix} \text{ in } [0,1]$$

e dunque un (candidato) potenziale

$$\int_A = \int_0^1 A(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^1 t \begin{pmatrix} n \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ y \end{pmatrix} = (n^2 + y^2) \int_0^1 t = (n^2 + y^2) \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (n^2 + y^2)$$

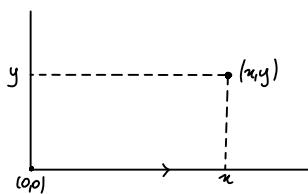
Non abbiamo (per ora) strumenti per decidere se questo valore dell'integrale non dipende dalle curve scelte, ma possiamo, come nell'esempio precedente, usare le forze brute, talvolta efficacissime: se  $f$  è un potenziale, il suo gradiente deve coincidere col campo, e infatti

$$\nabla \left( \frac{1}{2} (n^2 + y^2) \right) = \begin{pmatrix} n \\ y \end{pmatrix} = A(x, y)$$

e dunque  $f(x, y) = \frac{1}{2} (n^2 + y^2)$  è un potenziale del campo  $A(x, y) = \begin{pmatrix} n \\ y \end{pmatrix}$  su tutto il dominio  $(\mathbb{R}^2)$ .

Più avanti vedremo come si possano trovare tutti i potenziali una volta noto uno di essi, ma per ora accontentiamoci di quello costruito, versione in più variabili della primitiva  $\int_a^x f(s) ds$  costruita nel teorema di Torricelli.

Una scelta (a torto o a ragione) preferibile al segmento diretto fra  $(0,0)$  e  $(x, y)$  può essere la spezzata con cui



ci si sposta prima parallelamente all'asse  $x$  e poi all'asse  $y$ .

le spezzate è la congiunzione di segmenti paralleli agli assi, sicché la derivata  $\gamma$  corrispondente ha una sola componente non nulla (il che elimina dal calcolo tutte le altre componenti del calcolo). Lo stesso accade invertendo il ruolo degli assi. In pratica.

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ ty \end{pmatrix} \quad t \in [0,1] \quad \dot{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} (t-1)x \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [1,2] \quad \dot{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} A = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ ty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} dt + \int_1^2 \begin{pmatrix} (t-1)x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} dt =$$

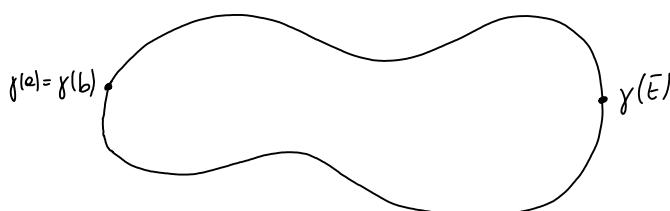
$$= \int_0^1 ty^2 dt + \int_1^2 (t-1)x^2 dt = \frac{1}{2} y^2 + x^2 \frac{1}{2} (t-1) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

Con gli "incrementi ortogonali" si può essere sicuri che tutte le componenti del prodotto scalare meno uno sono nulle; è però anche vero che invece di un solo integrale ce ne sono da calcolare  $n$ , ed ogni componente del campo, facile o difficile che possa essere da integrare, apparirà in uno degli addendi. Non pare evidente il vantaggio offerto dalle spezzate, salvo che nel caso in cui il segmento diretto esca dal dominio, mentre le spezzate no!

**TEOREMA (versione alternativa del teorema fondamentale):**  
Condizione necessaria e sufficiente perché  $A$  di classe  $C^1$  sia integrabile è che  $\int_\gamma A = 0$  per ogni curva  $\gamma$  chiusa.

**Dimostrazione**

Basta osservare che, per ogni curva chiusa, fissato ad arbitrio  $\bar{t} \in ]a, b[$ ,



esse può essere pensata come congiunzione fra

$$y_1(t) = y(t) \quad t \in [\alpha, \bar{E}]$$

e

$$y_2(t) = y(t) \quad t \in [\bar{E}, b]$$

e dall'additività segue che  $\int_{Y_1} A + \int_{Y_2} A = 0$  e dunque  $\int_{Y_1} A = -\int_{Y_2} A$ .

Supponendo ora di sapere che  $\int_Y A$  non dipende dal cammino si ha che  $y_1$  e  $\ominus y_2$  sono due curve fra gli stessi estremi  $y(\alpha) = y(b)$  e  $y(\bar{E})$  e dunque da

$$\int_{Y_1} A = \int_{\ominus Y_2} A = -\int_{Y_2} A \quad \text{segue} \quad \int_{Y_1 \oplus Y_2} A = 0$$

mentre, viceversa, se pongo che  $\int_{Y_1 \oplus Y_2} A = 0$  ne segue che  $\int_{Y_1} A + \int_{Y_2} A = 0$  da cui

$$\int_{\ominus Y_2} A = -\int_{Y_2} A = \int_{Y_1} A$$

e dunque gli integrali su  $y_1$  e  $\ominus y_2$  sono uguali.

c.v.d.

Questa condizione non è più facile da verificare della precedente, in quanto richiede in ogni caso una verifica sul valore dell'integrale su infinite curve.

Osserviamo comunque che, nelle condizioni del primo esempio, il semplice fatto che l'integrale su una circonferenza valga  $-2\pi$  (e non 0) è sufficiente per escludere l'integrabilità (come già visto nella sezione precedente).

Come il test  $a_n \rightarrow 0$  sul termine generale di una serie, il test sull'integrale su una singola curva chiusa (scelta con giudizio o per fortuna) che fallisce ( $S \neq 0$ ), può essere utile per NEGARE l'integrabilità, mentre non consente di trarre alcuna conclusione nel caso "positivo"  $S=0$ .

## I CAMPI IRROTATORIALI: INVARIANZA PER DEFORMAZIONE DELL'INTEGRALE

In questa sezione verrà offerto un (parziale) rimedio alle sfortunate circostanze che vuole che l'essere innotazionale sia condizione solo necessaria, ed in genere non sufficiente, per l'integrabilità, e verrà introdotto un'ipotesi sul dominio sotto la quale la condizione è anche sufficiente.

L'idea principale è simile a quella suggerita dal teorema fondamentale: nonostante i cammini siano infiniti, alcuni integrali di campi assumono valori indipendenti dai diversi cammini percorsi. Per esporre il risultato principale è necessario lo seguente

**DEFINIZIONE** Due curve  $\gamma: [0,1] \rightarrow \Omega$  e  $\sigma: [0,1] \rightarrow \Omega$  si dicono deformabili (ad omotope) in  $\Omega$  se esiste

$$h: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \Omega$$

continua e tale che

$$h(0,t) = \gamma(t) \quad \text{e} \quad h(1,t) = \sigma(t)$$

**NOTA:** al variare di  $\lambda \in [0,1]$  la famiglia di curve  $t \mapsto h(\lambda, t)$  rappresenta una deformazione continua dalle curve iniziale  $t \mapsto h(0,t) = \gamma(t)$  a quelle finale  $t \mapsto h(1,t) = \sigma(t)$ , che non esce mai fuori da  $\Omega$ .

Il primo teorema, riportato senza dimostrazione (G. PRODI: Analisi Matematica II Boinghieri) afferma l'invarianza per deformazione dell'integrale dei campi innotazionali.

**TEOREMA:** Siano  $\gamma_1(t)$  e  $\gamma_2(t)$  due curve di estremi coincidenti. Sia un campo innotazionale in  $\Omega$  e siano  $\gamma_1(t)$  e  $\gamma_2(t)$  omotope in  $\Omega$ .

Allora

$$\int_{\gamma_1} A = \int_{\gamma_2} A$$

Le stesse conclusioni si ottiene considerando curve chiuse,  $\gamma_1(0) = \gamma_1(1)$  e  $\gamma_2(0) = \gamma_2(1)$  (anche senza punti comuni) invece di curve con estremi uguali.

Dunque, se il campo è inndirizionale e si deforma una curva senza uscire mai dalla regione dove il campo verifica tale ipotesi, l'integrale non varia, esattamente come accadrebbe per l'integrale di un campo potenziale.

Questo teorema offre possibilità sorprendenti. Ad esempio:

$$\text{Calcolare } \int_{\gamma} \left( \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2} \right)$$

$$\text{ove } \gamma(t) = \left( e^{\sin \arctan t} \cos t, e^{\cos 2 \arctan \frac{xt}{y}} \sin t \right) \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Il campo inndirizionale su  $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ ; il percorso ha un aspetto piuttosto inquietante, ma è tuttavia contenuto nel primo quadrante, a causa del segno degli esponenziali, e dell'intervallo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Dunque si può sostituire alla curva  $\gamma$  un'altra con gli stessi estremi tutte contenute nel primo quadrante, come vedremo fra un momento. Gli estremi sono:

$$\gamma(0) = (1, 0) \quad \text{e} \quad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$$

Sia allora:

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Le due curve hanno gli stessi estremi e sono omotope nel primo quadrante perché, ponendo

$$h(\lambda, t) = (1-\lambda)\gamma(t) + \lambda\sigma(t) \quad \lambda \in [0, 1]$$

dal fatto che il primo quadrante è convesso, esso contiene tutte le combinazioni convesse dei suoi punti  $\gamma(t)$  e  $\sigma(t)$  e dunque

$$h: [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \{x > 0; y > 0\}$$

Dal teorema segue subito  $\int_A = \int_0 A$  e quest'ultimo si calcola immediatamente, come abbiamo già visto in precedenza, e vale  $-\frac{\pi}{2}$ , risultato insospettabile se si pensa al fatto che il calcolo diretto dell'integrale coinvolgerebbe  $A(j(t))$  e  $j'(t)$ , entrambi assai intricati.

Per le sue caratteristiche, il teorema precedente verrà detto **TEOREMA DI INVARIANZA OMOTOPICA** (i più scrupolosi aggiungeranno anche: **DELL'INTEGRALE DEI CAMPI IRRAZIONALI**).

## INSIEMI SEMPLICEMENTE CONNESSI ED INTEGRABILITÀ DEI CAMPI IRROTAZIONALI

Una conseguenza pressoché immediata del teorema di invarianza omotopica, molto utile in pratica, si ottiene introducendo un concetto nuovo.

**DEFINIZIONE** Un insieme  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice semplicemente connesso se ogni curva chiusa  $\gamma: [0,1] \rightarrow \Omega$  è omotope in  $\Omega$  ad una curva costante  $\sigma(t) = \mathbf{z}_0 \quad \forall t \in [0,1]$ .

Il teorema, che è proprio quello ragheggiato nelle pagine precedenti e del quale abbiamo già preso le condizioni necessarie, è il seguente

**TEOREMA:** Sia  $\Omega$  semplicemente connesso. Allora, condizione necessaria e sufficiente perché un campo in  $\Omega$  sia integrabile è che sia irrotazionale.

### Dimostrazione

Sia  $\gamma$  una qualunque curva chiusa in  $\Omega$ . Per l'ipotesi,  $\gamma$  è omotope in  $\Omega$  ad una curva costante  $\sigma$  ed essendo il campo irrotazionale, dal teorema d'invarianza omotopica segue che

$$\int_{\gamma} A = \int_{\sigma} A$$

D'altronde, poiché  $\sigma$  è costante, ne segue che  $\dot{\sigma} = 0$  e dunque

$$\int_{\sigma} A = \int_0^1 A(\sigma(t)) \dot{\sigma}(t) dt = 0$$

Poiché  $\int_{\gamma} A = \int_{\sigma} A$  ne segue infine che l'integrale su ogni curva chiusa è nullo, il che è (necessario e) sufficiente perché  $A$  sia integrabile c.v.d.

Il problema si è spostato: come stabilire se  $\Omega$  è semplicemente connesso? Alcuni casi importanti sono facili da affrontare.

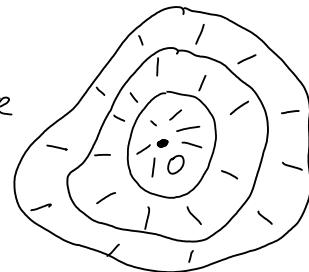
Ad esempio, se  $\Omega$  è convesso e  $n_0 \in \Omega$  allora, per ogni  $n \in \Omega$  tutto il segmento  $\overrightarrow{n_0 n} \subseteq \Omega$  e dunque, per definire l'omotope fra  $\gamma$  ed una curva costante basta porre

$$h(\lambda, t) = n_0 + (1-\lambda) [\gamma(t) - n_0]$$

Per meglio capire il meccanismo sia  $n_0 = 0$ . In tal caso

$$h(\lambda, t) = n_0 + (1-\lambda) \gamma(t)$$

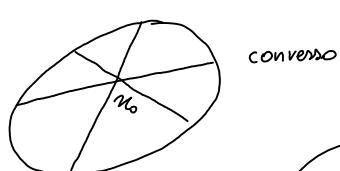
All crescere di  $\lambda$  verso 1,  $(1-\lambda)$  tende a 0, e dunque ogni vettore  $\gamma(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , si muove lungo le semirette definite da  $\gamma(t)$  verso l'origine.



Le stesse idee può essere utilizzata anche sotto ipotesi considerabilmente più generali su  $\Omega$ .

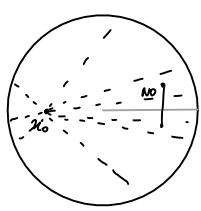
**DEFINIZIONE:**  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  verrà detto STELLA se esiste  $n_0 \in \Omega$  tale che il segmento  $\overrightarrow{n_0 n} \subseteq \Omega$  per ogni  $n \in \Omega$ .

In sostanza,  $\Omega$  è stella (o anche "stellato", ma non lo sopporto!) se esiste un suo punto che vede tutti gli altri. In tempi passati gli insiemi stelle venivano chiamati "convessi rispetto ad un punto ( $n_0$ )", nome molto espressivo, ma un po' inequivocabile. I convessi prima trattati sono stelle, qualunque punto si sceglie in essi come  $n_0$ .



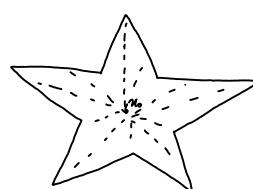
convesso

NON  
convesso



$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{y=0; x > 0\}$$

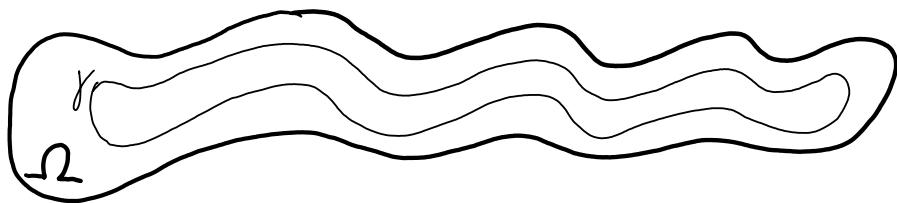
ma convesso rispetto ai punti:  $y=0; x<0$



NON convesso,  
ma "convesso rispetto a  $n_0$ "

Gli insiemi stelle sono semplicemente connessi: la dimostrazione è identica, ma invece di scegliere a caso  $\gamma$ , si deve scegliere quello che appare nelle loro definizioni.

Per meglio chiarire come stanno le cose, ecco due esempi:



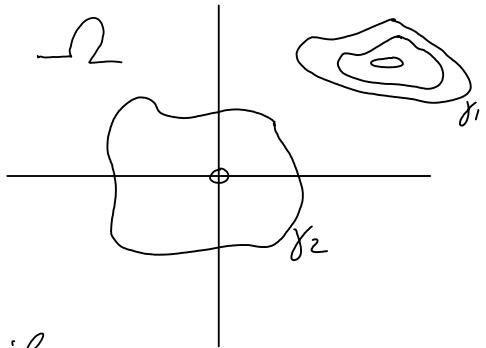
La regione  $\Omega$  non è né connesso né stella, ma è semplicemente connesso: qualunque curva chiusa può deformarsi lungo le orse di  $\Omega$ , fino a farla collassare in un punto.

La regione  $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ , invece, NON è semplicemente connesso: ci sono curve chiuse che si possono agevolmente deformare in una costante, come  $\gamma_1$ ; ce ne sono altre, come  $\gamma_2$ , per cui ciò non è possibile:

qualsiasi deformazione di  $\gamma_2$  in un punto non potrà evitare che  $\gamma_2$  passi per l'origine, che non sta in  $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ , e dunque la deformazione corrispondente NON è un'omotopia in  $\Omega$ : non

DIMENTICARE CHE IL CONDIZIONE DI UN'OMOTOPIA IN  $\Omega$  È  $\Omega$ .

Se si potesse uscire da  $\Omega$  ogni curva si potrebbe deformare nella curva costante  $\sigma(t) = 0$ , semplicemente ponendo  $h(\lambda, t) = (\lambda - 1) \gamma(t)$ , come abbiamo già fatto prima trattando di  $\Omega$  convessi e contenenti l'origine



AN\_5.3

## CAMPI DEFINITI IN $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Senza entrare nei dettagli è possibile utilizzare il teorema di invarianza omotopica anche se il dominio non è semplicemente connesso. Se  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . In tal caso ogni curva chiusa può essere deformata in un punto se non circonda  $(0,0)$ , ed il campo avrà integrale nullo su tali curve per invarianza omotopica, oppure potrà essere deformata in una qualunque curva (su quale è comodo fare il calcolo!) che circonde  $(0,0)$ , eventualmente percorse più volte o a ritroso, se altrettanto facendo le curve iniziali. In ogni caso, se l'integrale sulle curve deformate vale 0, altrettanto varrà quello della curva iniziale (che varrà un multiplo o l'opposto di un multiplo di 0).

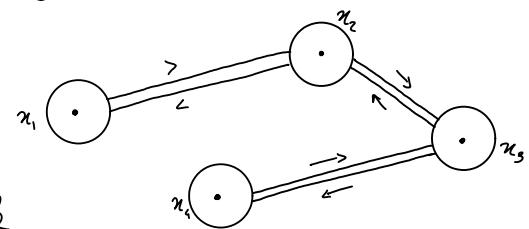
Ne segue che tutto può essere deciso calcolando un unico integrale esteso ad una curva che circonde la "singularità"  $(0,0)$ .

Analogamente si può procedere se le singolarità sono un numero finito.

Ogni curva chiusa potrà essere deformata in una costituita da singole curve chiuse attorno ad ogni singolarità racchiuse dalle curve, congiunti da tagli percorsi due volte, per l'andata e per il ritorno, che non contribuiscono dunque all'integrale. Dunque l'integrale esteso alle curve originali è uguale alla somma degli integrali estesi alle curve che circondano ognuna delle singolarità circondate dalla curva originale.

Ne segue un criterio generale: Se l'integrale del campo (innanzitutto) esteso ad  $n$  curve chiuse ognuna delle quali circonde una (sola) singolarità  $x_i$ , è nullo per ogni singolarità, allora il campo è integrabile.

Non verrà data una dimostrazione rigorosa: le condizioni precedenti possono offrire qualche spunto di riflessione. In ogni caso, il teorema di invarianza omotopica, valido (solo) per i campi



irrotazionali, offre qualche appiglio per affrontare il problema dell'integrabilità, anche quando il dominio non sia affatto semplicemente connesso: in fondo, le curve costanti possono non essere le uniche sulle quali il calcolo dell'integrale riesce agevole!

## TUTTE LE SOLUZIONI DEL PROBLEMA DELLA PRIMITIVA

In Fisica, la questione non è così importante: di solito, si sceglie ad arbitrio il valore 0 del potenziale in un qualche punto significativo, e a partire da quello si definisce in ogni altro punto utilizzando la differenza di potenziale. Magari il potenziale 0 è al livello del mare, oppure è quello di un caro di nome collegato ad una barra confitta nel terreno umido.

In Matematica il problema è piuttosto nudo: si pensi a tutte le soluzioni  $(u, y, z)$  di

$$au + by + cz = d \quad (\text{piano cartesiano in } \mathbb{R}^3)$$

o quelle

$$\ddot{u} + \frac{k}{m} u = f(t) \quad (\text{oscillatore armonico forzato})$$

La tecnica per studiare la totalità delle soluzioni è lo stesso, ed utilizza la linearità del primo membro: si considerano due soluzioni e se ne studia la differenza. Da  $au + by + cz = d$  e  $a u' + b y' + c z' = d$ , sottraendo membro a membro si ottiene  $a(u-u') + b(y-y') + c(z-z') = 0$ . Nel caso dell'oscillatore armonico da  $\ddot{u} + \frac{k}{m} u = f$  e  $\ddot{y} + \frac{k}{m} y = f$  sottraendo si ottiene  $(\ddot{u}-\ddot{y}) + \frac{k}{m}(u-y) = 0$

Analogamente, sia  $A$  un campo vettoriale definito su un insieme arbitrario  $\Omega$  e siano  $f$  e  $g$  due potenziali di  $A$ , verificanti quindi

$$\nabla f \equiv A \text{ su } \Omega \quad \text{e} \quad \nabla g \equiv A \text{ su } \Omega$$

Sottraendo membro a membro e ricordando le regole di derivazione, ne segue

$$\nabla(f-g) = 0 \text{ su } \Omega$$

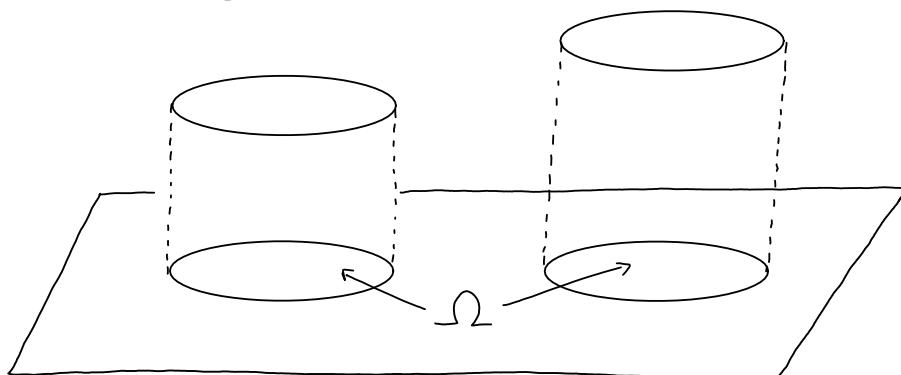
Dunque, una volta nota una primitiva  $g$ , ogni altra ( $f$ ) differisce da  $g$  per una funzione  $\varphi = f - g$  verificante

$$\nabla\varphi = 0 \text{ su } \Omega$$

La tentazione di pensare che una  $\varphi$  siffatta sia costante va combattuta energicamente: infatti se  $\Omega = \{(u,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$  la funzione

$$\varphi(u,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y > 0 \\ -1 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

verifica  $\nabla\varphi = 0$  in  $\Omega$  ma non è costante. Più banalmente, la funzione avere il grafico seguente NON è costante ma ha gradiente identicamente nullo in  $\Omega$ .



In definitivo occorre studiare tutte le soluzioni del problema "omogeneo associato"  $\nabla\varphi = 0$  in  $\Omega$ .

Per chiarire e sufficienze il problema occorre la seguente

**DEFINIZIONE** Un insieme  $\Omega$  si dice connesso se, per ogni  $u_1, u_2 \in \Omega$ , esiste  $\gamma: [0,1] \rightarrow \Omega$ , continua e tale che

$$\gamma(0) = u_1 \quad \text{e} \quad \gamma(1) = u_2$$

In sostanza, ogni punto di  $\Omega$  può essere raggiunto da ogni altro, SENZA MAI USCIRE DA  $\Omega$  ( $\gamma: [0,1] \rightarrow \Omega$ ).

Il concetto di insieme connesso permette di estendere a più variabili alcuni classici teoremi importanti che richiedono fra le ipotesi "non negoziabili" quella che il dominio sia un intervallo.

Come primo risultato, proviamo il teorema degli zeri:

**TEOREMA (degli zeri)** Sia  $\Omega$  un insieme connesso e sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , continua in  $\Omega$ , e tale che esistano  $u_1$  e  $u_2$  in  $\Omega$  per i quali

$$f(u_1) f(u_2) < 0$$

Allora esiste  $u^* \in \Omega$  tale che  $f(u^*) = 0$

### Dimostrazione

Dalla connessione di  $\Omega$  segue che esiste  $\gamma: [0,1] \rightarrow \Omega$  continua tale che  $\gamma(0) = u_1$  e  $\gamma(1) = u_2$ . Si consideri allora  $h(t) = f(\gamma(t))$ . Si ha:

- $h(0) h(1) = f(\gamma(0)) f(\gamma(1)) = f(u_1) f(u_2) < 0$
- $h$  è continua, perché composta di funzioni continue ( $\gamma$  ed  $f$ )
- $h$  è definita sull'intervallo  $[0,1]$ , perché  $\gamma[0,1] \subseteq \Omega$  e dunque  $f(\gamma(t))$  è definita per ogni  $t \in [0,1]$ .

Per il teorema degli zeri (Weinstass), esiste  $t^* \in [0,1]$  tale che  $h(t^*) = 0$  e dunque

$$h(t^*) = f(\gamma(t^*)) = 0$$

La tesi segue allora ponendo  $u^* = \gamma(t^*) \in \Omega$ .

c.v.d.

Un altro risultato valido solo per gli intervalli, conseguenza del teorema di Lagrange, è il teorema che riguarda le funzioni con derivata identicamente nulla.

Più si risolve il problema sotto condizioni più generali, è utile stabilirlo per la sfere, come avviene il seguente

**LEMMA** Sia  $f: B_\varepsilon(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ , di classe  $C^1$ , tale che  $\nabla f = 0$  su  $B_\varepsilon(x_0)$ . Allora  $f$  è costante in  $B_\varepsilon(x_0)$  (e vale dappertutto  $f(x_0)$ ).

### Dimostrazione

Dalle formule di Taylor con resto di Lagrange di ordine 1, segue da  $|w| < \varepsilon$  che

$$f(u_0 + w) = f(u_0) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(u_0 + \xi w) w_i$$

ove  $\xi \in [0,1]$ . Poiché le derivate parziali nelle somme sono identicamente nulle in  $B_\varepsilon(u_0)$  e  $|u_0 + \xi w - u_0| = |\xi w| \leq |w| < \varepsilon$ , ne segue che le somme è nulla e dunque

$$f(u_0 + w) = f(u_0) \quad \forall w : |w| < \varepsilon$$

c.v.o

Il prossimo risultato chiarisce completamente la questione, almeno nel caso degli insiemi  $\Omega$  aperti.

**TEOREMA:** Sia  $\Omega$  un aperto connesso. Sia  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\nabla \varphi \equiv 0$  su  $\Omega$ . Allora  $\varphi$  è costante in  $\Omega$ .

### Dimostrazione

Sia  $u_0 \in \Omega$ , fissato ad arbitrio. Verremo provato che, per ogni  $u \in \Omega$ ,  $\varphi(u) = \varphi(u_0)$ . Sia  $\gamma(t)$  una curva parametrica continua,  $\gamma: [0,1] \rightarrow \Omega$ , tale che  $\gamma(0) = u_0$  e  $\gamma(1) = u$ , che esiste certamente perché  $\Omega$  è connesso.

Si pone allora  $\Delta = \{t \in [0,1] : f(\gamma(t)) = f(u_0)\}$  e indire sia

$$\bar{T} = \sup \Delta$$

Poiché  $\gamma(0) = u_0$  ne segue  $f(\gamma(0)) = f(u_0)$ , e dunque  $0 \in \Delta$ . D'altronde  $\Delta \subseteq [0,1]$  e dunque  $\bar{T} \leq 1$ .

Dal fatto che  $\sup \Delta$  è finito, segue dalla proprietà che caratterizza il sup (l'essere il minimo dei maggioranti), che

$$\forall \varepsilon = \frac{1}{n} \quad \exists t_n \in \Delta : \bar{T} - \frac{1}{n} < t_n \leq \bar{T}$$

da cui, per il teorema del confronto,  $\lim t_n = \bar{T}$

Poiché  $t \mapsto f(\gamma(t))$ , essendo composta di funzioni continue, è continua, ne segue che  $f(\gamma(\bar{T})) = \lim f(\gamma(t_n))$

e poiché  $t_n \in \Delta$  si ha che  $f(\gamma(t_n)) = f(u_0)$  e dunque

$$f(\gamma(T)) = f(u_0)$$

Se dunque  $T=1$ , ne segue  $f(u) = f(\gamma(1)) = f(u_0)$ , che è la tesi.

Completiamo la dimostrazione provando che assumere  $T < 1$  conduce ad un assurdo.

Infatti, se fosse  $T < 1$ , ne seguirebbe che  $f(\gamma(t)) \neq f(u_0)$  per ogni  $t \in ]T, 1]$ , e ciò è falso in un intorno destro di  $T$ .

Dal lemma precedente, applicato al punto  $\gamma(T)$ , che è interno ad  $\Omega$  perché  $\Omega$  è aperto, segue che  $\gamma(T)$  è centro di una sfera sulla quale  $\nabla f \equiv 0$  e dunque  $f$  è costante ed uguale ad  $f(\gamma(T)) = f(u_0)$ .  
Sia  $B_\varepsilon(\gamma(T))$  tale sfera.

Dalla continuità di  $\gamma$  in  $T$ , ne segue che, fissato il numero  $\varepsilon$  (il raggio della sfera appena introdotta), esiste  $\delta > 0$  tale che, se  $|t - T| < \delta$  allora  $|\gamma(t) - \gamma(T)| < \varepsilon$ , da cui  $\gamma(t) \in B_\varepsilon(\gamma(T))$  se  $T - \delta < t < T + \delta$ .

Dunque, essendo  $f$  costante e uguale a  $f(u_0)$  in  $B_\varepsilon(\gamma(T))$ , ne segue  $f(\gamma(t)) = f(u_0)$  per ogni  $t \in ]T - \delta, T + \delta[$  e ciò è assurdo per tutti:  $t \in ]T, T + \delta[$ , che sono strettamente maggiori di  $T = \sup \{t : f(\gamma(t)) = f(u_0)\}$ .

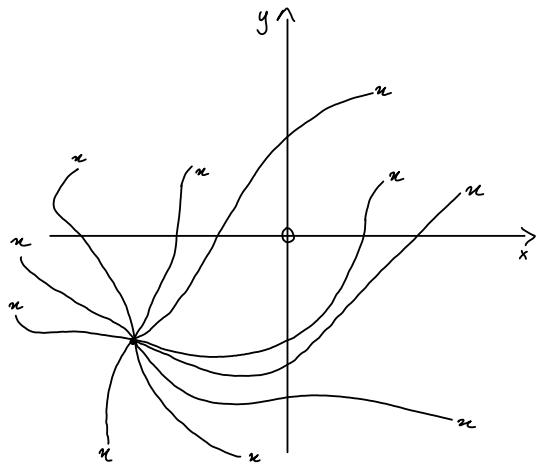
c.v.d.

In conclusione, se  $\nabla f \equiv 0$  su  $\Omega$ , e  $\Omega$  è aperto e连通的, allora  $f$  è costante

Un insieme non连通的 si dice sconnesso. Se  $\Omega$  è sconnesso si può decomporlo in parti (o componenti) connesse: in sostanza, la componente连通的 contenente un punto  $u_0$  è il sottoinsieme dei punti di  $\Omega$  che possono essere raggiunti da  $u_0$ , senza uscire da  $\Omega$ . In modo più astratto: "Dato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $u_0 \in \Omega$ , si definisce componente连通的 contenente  $u_0$  come

$$\Omega(u_0) = \{u \in \Omega : \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega : \gamma(0) = u_0 \text{ e } \gamma(1) = u\}$$

Ad esempio, il dominio della funzione  $\frac{1}{x^2+y^2}$  è  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  che ha una sola componente连通的.



Per una situazione differente, ecco un altro esempio.

La funzione  $g(x,y) = \frac{1}{xy}$  è un potenziale del campo

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{xy}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{xy} \right) = \left( -\frac{y}{x^2 y^2}, -\frac{x}{x^2 y^2} \right) = -\left( \frac{1}{x^2 y}, \frac{1}{x y^2} \right)$$

Tutti gli altri potenziali si ottengono dalle formule

$$f(x,y) = \frac{1}{xy} + \varphi(x,y)$$

ove  $\varphi(x,y)$  ha gradiente identicamente nullo sul dominio del campo, ossia

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq 0\} = \\ &= \{x>0, y>0\} \cup \{x>0, y<0\} \cup \{x<0, y>0\} \cup \{x<0, y<0\} \end{aligned}$$

Ognuno dei quattro quadranti è连通的 e dunque

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} C_1 & \text{su } x>0, y>0 \\ C_2 & \text{su } x>0, y<0 \\ C_3 & \text{su } x<0, y>0 \\ C_4 & \text{su } x<0, y<0 \end{cases}$$

ma nulla obbliga le quattro costanti ad essere uguali!

Al variare di  $c_1, c_2, c_3, c_4$  si ottengono tutte le possibili soluzioni di  $\nabla \phi = 0$  sull'unione dei quattro quadranti, e dunque tutti i possibili potenziali di  $-\left(\frac{1}{|x|y}, \frac{1}{|y|x}\right)$ , che sono dunque

$$f(x,y) = \frac{1}{xy} + \begin{cases} c_1 \text{ sul I quadrante} \\ c_2 \text{ sul II quadrante} \\ c_3 \text{ sul III quadrante} \\ c_4 \text{ sul IV quadrante} \end{cases}$$

Gli assi non fanno parte di  $\Omega$  e sconnettono i quadranti

Facendo  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c$  si ottengono i potenziali

$$\frac{1}{xy} + c$$

che imperversano inutilmente su alcuni libri!

Si ricordi che, se occorre calcolare un integrale definito, basta UNA primitiva (una sola, qualsiasi!), mentre se il problema è trovarle TUTTE, aggiungere pigramente e automaticamente un "+c" può non bastare: si pensi all'esempio (in una sola variabile)

$$\left( \ln|x| + \frac{x}{|x|} \right)' = \frac{1}{x} \quad (\text{provare per credere!})$$

In questo caso il dominio è scomposto  $\{x > 0\} \cup \{x < 0\}$  e dunque per trovare TUTTE le primitive occorrono due costanti, indipendenti l'una dall'altra, una su  $\{x > 0\}$  e una su  $\{x < 0\}$ , da aggiungere a  $\log|x|$ . Altro che  $\log|x| + c$ !!!

## NOTE CONCLUSIVE

Forme e campi integrabili non sono gli unici interessanti nelle applicazioni. Fra gli esempi più illustri di campi o forme non integrabili ci sono il campo magnetico e molte forme ricorrenti in termodinamica, ed è una vera fortuna che siano non integrabili, perché altrimenti un motore, elettrico o a combustione interna, non potrebbe compiere alcun lavoro utile all'esterno, perché nella sua attività lo stato descrive curve chiuse.

R campo gravitazionale è conservativo solo se si trascura l'attrito, e ancora una volta un mondo senza attriti ci costringerebbe agli stessi numeri da clown ai quali siamo costretti camminando sul ghiaccio.

Diversa è la situazione nei muti planetari, che sono ben approssimabili da muti in un campo centrale conservativo, e parte vento solare ed altri eventi di collisione imprevisti, o altri effetti di dissipazione d'energie nei muti interni al pianeta (che non è un punto materiale!): la continua deformazione delle lune per effetto dell'attrazione della terra - l'effetto simile a quello delle maree, nel mare come nella crosta - ha fatto sì che l'energia di rotazione delle lune sul suo asse venisse pieno pieno dissipata sino a che, rivolgendo sempre la stessa faccia verso la terra, le perdite fossero ridotte a zero. Accadre lo stesso alla terra, fra un altro po' perché c'è molto più energia di rotazione da smaltire: rallentare la terra da un giro al giorno a (circa) un giro al mese sul suo asse ! Chissé... forse qualche miliardo di anni dovrebbe bastare !

Un'altra nota di colore. La condizione

$$(A_i)_{u_j} = (A_j)_{u_i}$$

è correlata ad un concetto comodo nello studio dei campi (soprattutto quelli non irrotazionali, detti anche rotazionali) in  $\mathbb{R}^3$ : il rotore di un campo.

Dato  $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ , si definisce

$$\text{rot } A \equiv \left( (A_2)_{x_3} - (A_3)_{x_2}, -[(A_1)_{x_3} - (A_3)_{x_1}], (A_1)_{x_2} - (A_2)_{x_1} \right)$$

Molti, e tra essi Richard Feynman, usano il simbolo

$$\nabla \wedge A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

(Per la verità, Feynman usa il simbolo  $\nabla \times A$  e non  $\nabla \wedge A$  per indicare il prodotto vettore fra il "vettore"  $\nabla$  e l'altro,  $A$ ).

La condizione necessaria di integrabilità (sufficiente negli insiemii semplicemente connessi), diventa allora

$$\text{rot } A = 0 \quad (1)$$

il che spiega il perché del nome "innanzitutto" per i campi che verificano (1).

In Fisica, un campo integrabile si dice anche potenziale o conservativo, come si è già detto prima. Attenzione, però, perché non si usano solo i potenziali scalari ma anche il potenziale vettore: invece d'essere il cui gradiente è fisso, è un oggetto il cui rotore è fisso.

Ciò ci condurrebbe dritto alla derivazione esterna di forme differenziali, che esula dall'ambito di questa nota. Per un'introduzione si può, ad esempio, consultare l'ultimo capitolo del corso di Analisi Matematica (secondo volume) di G. Prodi, che è ora disponibile in tutta Italia, per i tipi di Boringhieri, già citato.

La Termodinamica è uno dei regni incontrastati delle forme differenziali, e neopiane forme riguardanti le grandezze di interesse - la pressione, il volume, le temperature, le masse nei gas, per fare dei cambiamenti di fase o delle reazioni chimiche - che siano integrabili e siano luogo a potenziali termodinamici è stata un'ossessione per gli studiosi.

I loro sforzi hanno prodotto soluzioni diverse, ciascuna appropriata per il particolare problema studiato: un libro di Termodinamica o di Chimica generale sono riferimenti obbligati per gli approfondimenti.

Un'ultima nota di colore: molti campi in Fisica, per i quali non sia evidente la non integrabilità, sono centrali - ossia la sorgente del campo è in un punto - e sono in  $\mathbb{R}^3$ .

Diversamente da quanto accade in  $\mathbb{R}^2$ , l'insieme  $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0)$  è semplicemente connesso: qualunque curva chiusa che include l'origine al suo interno può essere traslata "da un'altra parte" e poi fatta collassare in un punto. Una conseguenza da tenere nel debito conto è che nelle stregende maggioranza dei casi i campi della Fisica o sono rotazionali, come il campo magnetico o il campo di velocità di un fluido viscoso, oppure ad essi si può applicare il teorema di invarianza omotopico e dunque, oltre ad essere irrotazionali essi sono anche integrabili.

Ne segue (un altro mottoe sulle forze di Babel) che in Fisica e in Ingegneria si usa il termine "esette" per indicare una forma chiusa (verificante solo la condizione del rotore nullo).

Occorre prestare attenzione, dunque: il termine "forma chiusa", di uso corrente nelle teorie dell'Omologia e delle Coomologie, è di solito ignorato e sostituito con il termine "forma esette" (il che non è in generale corretto), ma che lo è nel contesto nel quale questo "abuso matematico" viene di solito perpetrato.

## APPENDICE :

### ALCUNI CAMPI NON INTEGRABILI INTERESSANTI

No, non è il campo magnetico! Il primo esempio può essere espresso in tre modi:

$$xdy \quad -ydx \quad \frac{1}{2} (xdy - ydx)$$

Le formule di Gauss-Green-Ostrogradskij.... permettono di dimostrare che il loro integrale esteso ad una curva chiusa  $\gamma$  è l'area racchiusa dalle curve, se viene percorso in senso antiorario e il suo opposto, se percorso in senso orario.

Ad esempio  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$   $t \in [0, 2\pi]$ ,  $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{2} (xdy - ydx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos \cos t - (\sin t)(-\sin t)] dt = \pi$$

Come si vede dall'esempio, non sempre è più vantaggioso adoperare  $xdy$  oppure  $-ydx$ , rispetto a  $\frac{1}{2} (xdy - ydx)$ .

Le tre forme considerate NON sono chiuse

$$xdy = 0dx + xdy \quad \frac{\partial}{\partial y}(0) \neq \frac{\partial}{\partial x}(x)$$

ma ciò non toglie che possono tornare utili!

Un altro esempio, che forse apparirà assurdo, è quello già strettamente noto:

$$-\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

(Sí, sí... è l'opposto delle forme già studiate), che sappiamo già essere chiuse, non globalmente esatte, ma esatte su ogni sottoinsieme semplicemente connesso del dominio  $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$  (come un quadrante ed un semipiano aperto, ad esempio).

Per calcolare l'integrale su una curva generica si può seguire una via traversa: il metodo "forze bruto".

Esiste  $f$  tale che.

$$\begin{cases} f_x = -\frac{y}{x^2+y^2} \\ f_y = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

?

La risposta è NO in  $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ ,  
ma è sì sui sottoinsiemi  
semplicemente connessi.

Il calcolo non è difficile

$$\int \frac{u}{u^2+y^2} dy = \frac{u}{u^2} \int \frac{1}{1+\left(\frac{y}{u}\right)^2} dy = \int \frac{1}{1+\left(\frac{y}{u}\right)^2} d\left(\frac{y}{u}\right) = \operatorname{arctan}\left(\frac{y}{u}\right)$$

$u \neq 0!$

da cui

$$f(u, y) = \operatorname{arctan}\left(\frac{y}{u}\right) + C(u)$$

e, derivando rispetto ad  $u$  ed uguagliando all'altra componente del gradiente, si ha

$$-\frac{y}{u^2+y^2} = f_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{u^2}} \cdot \left(-\frac{y}{u^2}\right) + C'(u)$$

da cui ancora

$$C'(u) = 0$$

e dunque  $C$  è costante su ciascuno dei semipiani  $u > 0$  e  $u < 0$ , potendo avere però costanti diverse sui due semipiani. Si sono dunque trovati i potenziali

$$\operatorname{arctan}\frac{y}{u} + \begin{cases} C_1 & \text{se } u > 0 \\ C_2 & \text{se } u < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Alcune osservazioni. **Primo**: nessuna violazione dell'ordine delle cose.

I potenziali trovati NON sono definiti su  $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$  tutto intero, ma solo su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{u=0\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ . **Secondo**: la funzione  $\operatorname{arctan}\left(\frac{y}{u}\right)$ , sul semipiano  $u > 0$ , è l'angolo che il raggio vettore  $(u, y)$  forma col semiasse positivo delle  $u$ . Dunque, la differenza di potenziale nel semipiano  $u > 0$ , dove il campo è integrabile, è la differenza fra gli angoli formati con il semiasse delle  $u$  positive da  $f(b)$  a  $f(a)$ .

**Terzo:** Nel semipiano  $\{x < 0\}$ , anche  $\arctan(y/x)$  NON rappresenta l'angolo formato da  $(x,y)$  con l'origine degli archi (il semiese positivo delle  $x$ ), ma quello formato dal vettore  $(-x, -y)$ , ad esso opposto. Ne segue che l'angolo fra  $(x,y)$  e  $\vec{x}^+$  è

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$$

Poiché l'integrale su una curva  $\gamma$  tutta contenuta in  $x < 0$  è la differenza (di potenziale) fra i valori delle funzione precedente fra il punto iniziale e finale, la costante additiva  $\pi$  si semplifica e dunque, anche nel semipiano  $x < 0$ , l'integrale risulta uguale alla differenza degli angoli formati da  $\gamma(b)$  e  $\gamma(a)$  con il semiese positivo delle  $x$ .

**Quarto:** cosa si può fare se la curva  $\gamma$  attraversa l'asse  $y$  ( $x=0$ )?  
 Dipende! Sappiamo già le inconvenienze unitarie (che attraversare due volte l'asse  $y$ ) NON consente di calcolare l'integrale per differenze di potenziale, perché è chiusa e dovrebbe avere differenza di potenziale 0, mentre l'integrale è  $2\pi$ . Si può comunque abbordare la difficoltà imposto dalla condizione  $x \neq 0$  in due modi: si può integrare il sistema del gradiente a rovescio integrando prima le  $f_x$  in  $dx$  invece delle  $f_y$  in  $dy$ , e così si dovrà mettere in evidenza al denominatore  $y^2$ , invece di  $x^2$  e la condizione diventerà  $y \neq 0$  invece di  $x \neq 0$ ; oppure si può osservare che:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(y/x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan(y/x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } y > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

e dunque, scelta la costante  $c_1$  nel potenziale (1) uguale a 0 e  $c_2$  uguale a  $\pi$  si ottiene

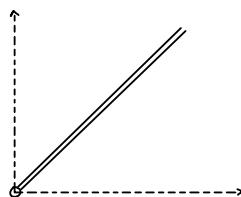
$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan(y/x) + \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \pi & x < 0 \end{cases} & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \text{ e } y > 0 \end{cases}$$

che non è un potenziale su  $\{u=0, y<0\}$  perché i limiti destro e sinistro differiscono ivi per  $2\pi$ . La funzione  $f$  così definita è però continua sul semiasse positivo delle  $y$ . Inoltre

$$\begin{aligned} f_x(0, \alpha) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctan} \frac{\alpha}{h} - \frac{\pi}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{h^2}} \cdot \left(-\frac{\alpha}{h^2}\right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{\alpha}{h^2 + \alpha^2} = -\frac{1}{\alpha} = \left(-\frac{y}{u^2 + y^2}\right)_{\substack{u=0 \\ y=\alpha}} \end{aligned}$$

Lo stesso accade per la  $f_y(0, \alpha) = 0$ . Dunque  $f$  non è soltanto costituita da una coppia di potenziali saldati per continuità lungo  $\vec{y}^+$ , ma è essa stessa un potenziale lungo  $\vec{y}^+$ , ossia il suo gradiente coincide col campo non solo per  $u \neq 0$ , ma anche per  $u=0$ , ma con  $y>0$ . In ogni caso la coperta è (e deve essere) CORTA: "salrendo" i potenziali lungo  $\vec{y}^+$  si vede un salto di  $2\pi$  lungo  $\vec{y}^-$ . Sottraendo  $\pi$  nelle regione  $u<0$  e  $\operatorname{arctan}(y/u)$ , invece, si scalderebbero lungo  $\vec{y}^-$  ma il salto di  $2\pi$  si avrebbe lungo  $\vec{y}^+$ .

NULLA DI MALE: un potenziale globale NON ESISTE! Si possono però costruire potenziali locali dentro ogni regione semplicemente connesse. Consideriamo il piano tagliato lungo una semiretta per l'origine.



Per ottenere un potenziale nel complementare di  $\{u>0; u=y\}$  si può osservare che

$$f(u, y) = \begin{cases} \operatorname{arctan}(y/u) & u>0 \\ \operatorname{arctan}(y/u) + \pi & u<0 \\ \pi/2 & u=0, y>0 \end{cases}$$

è un potenziale definito fuori di  $\{u=0, y<0\}$ , mentre

$$f(u, y) = \begin{cases} \operatorname{arctan}(y/u) & u>0 \\ \operatorname{arctan}(y/u) + \pi & u<0 \\ -\pi/2 & u=0, y<0 \end{cases}$$

è un potenziale definito fuori di  $\{u=0; y>0\}$ .

Poiché si ha

$$f(\alpha, \alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha > 0 \\ 1 + \pi & \alpha < 0 \end{cases}$$

e

$$g(\alpha, \alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha > 0 \\ 1 - \pi & \alpha < 0 \end{cases}$$

ne segue infine che, posto

$$F(u, y) = \begin{cases} f(u, y) & \text{per } y > u \\ g(u, y) & \text{per } y < u \end{cases}$$

risulta come prima che  $F$  è un potenziale su  $\{u < 0; y = u\}$  mentre ha un salto di  $2\pi$  su  $\{u > 0; y = u\}$ .

Si vede benissimo quanto possa riuscire intollerabilmente grossolanamente aggiungere il "+c" in fondo alle primitive. Si aggiunge cioè che va aggiunto, con giudizio, a seconda del dominio in esame. Basta scrivere al posto di  $f$  e  $g$  le loro espressione complete per comprendere quanto possa essere articolata l'aggiunta di costanti ai potenziali!

Un'altra nota (l'ULTIMA!): costruire primitive globali a partire da quelle locali: in particolar modo per i problemi della radice e del logaritmo nel campo complesso, è stato il motore per la definizione dei concetti e lo sviluppo delle tecniche delle teorie moderne delle "varietà": Riemann introdusse a tale scopo il concetto di "superficie di Riemann" che, in breve tempo, condusse i matematici a sviluppare le teorie delle varietà differenziabili, unificando tutto ciò che riguardava curve, superfici, piani tangenti, curvature, distanze su una superficie ed ogni sorta di roba "curva".

In otto di ossequio a Bernhard Riemann, morto giovanissimo, assumiamo e dimostriamo un teorema di prolungamento dei potenziali.

**TEOREMA:** Sia  $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo e siano  $\Omega', \Omega'' \subseteq \Omega$ , con  $\Omega' \cap \Omega''$  aperto e connesso. Se  $f: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$  è un potenziale di  $A$  in  $\Omega'$  e  $g: \Omega'' \rightarrow \mathbb{R}$  è un potenziale di  $A$  in  $\Omega''$  allora  $A$  è integrabile su  $\Omega' \cup \Omega''$ .

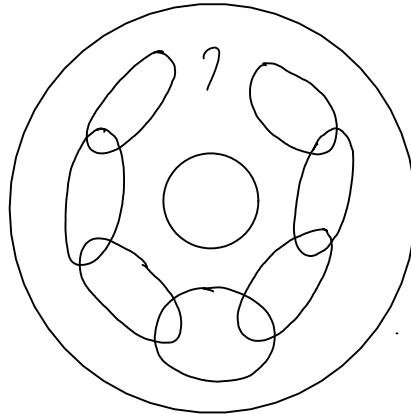
## Dimostrazione

Sia  $\Omega''' = \Omega' \cap \Omega''$ , che per ipotesi è aperto e connesso. Allora esiste  $k \in \mathbb{R}$  tale che  $f = g + k$  su  $\Omega'''$ , perché  $f$  e  $g$  sono due diversi potenziali su un aperto connesso. Se si pone

$$h(u) = \begin{cases} f(u) & \text{su } \Omega' \\ g(u) + k & \text{su } \Omega'' \end{cases}$$

si ha che  $h$  è una funzione definita su  $\Omega' \cup \Omega''$ , perché nella parte comune  $\Omega''' = \Omega' \cap \Omega''$   $f$  e  $g+k$  coincidono e inoltre  $\nabla h = \nabla f = A$  su  $\Omega'$  e  $\nabla h = \nabla(g+k) = \nabla g = A$  su  $\Omega''$ . c.v.d.

Dunque i potenziali locali si possono "saldare" fra loro per "ampliarne" il dominio. È però possibile che, prolungando il potenziale lungo due percorsi differenti si raggiunga lo stesso punto con valori diversi: è esattamente quello che accade con i campi non integrabili globalmente, ma integrabili localmente (sulle sfere, ad esempio) quando il prolungamento avviene in regioni non semplicemente connesse ... e connessione multiple!

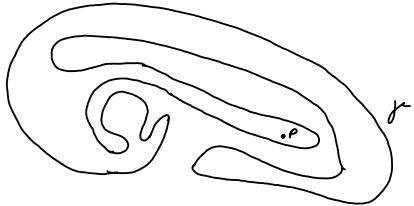


Lungo le "catene" di regioni semplicemente connesse i potenziali locali possono essere "saldati" per il teorema precedente per formarne uno globale. Non è però, in generale, possibile aggiungere un'altra regione in altro che abbia punti interni comuni ad entrambi: "lati" delle regione sui quali è stato prolungato il potenziale, perché nessuno garantisce, salvo che il campo non sia globalmente integrabile, che i valori trovati per il potenziale prolungato lungo i due comuni

(NON OMOROPI) "a destra" e "a sinistra" del "buco" siano fra loro compatibili (il salto di  $2\pi$  nel "potenziale" del "differenziale dell'angolo" docet...).

Dunque l'ipotesi che  $\Omega' \cap \Omega$  sia connesso nel teorema di prolungamento NON è accessoria: è indispensabile!

Per concludere... un problema da "Settimana Enigmistica"!



Il punto  $P$  è dentro o fuori la regione delimitata da  $\gamma$ ?

Facile! Se  $P \equiv (x_0, y_0)$ , allora  $\gamma$  non circonda  $P$  se

$$I = \int_{\gamma} \frac{y - y_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} dx - \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

mentre, se  $\gamma$  circonda  $P$ , allora  $I = 2k\pi$ , con  $k$  intero relativo non nullo (pari al numero di giri che il punto lungo  $\gamma$  compie attorno a  $P$  al variare del parametro nel dominio della curva. Perché? Questo criterio si presta ad una verifica al computer, perché essendo discreto l'insieme dei valori che l'integrale può assumere, non occorre calcolarlo esattamente, ma basta approssimarla con un errore di  $\pi$  per poter stabilire se faccia 0 o  $2\pi$  (o  $-2\pi$ , peggio!). Un altro problemino! Come fanno arctan( $x/y$ ) e arctan( $y/x$ ) ad essere entrambi potenziali del solito stramaledetto campo?

Se si sta per annegare è opportuno studiare la funzione di una variabile definita da

$$h(t) = \operatorname{arctan} t + \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{t}\right)$$

Naturalmente... chi dice che è costante paga la cena a tutti!

AN\_6.1

## LA MISURA DI LEBESGUE: UN'INTRODUZIONE BREVE

In questo ndo viene presentata la teoria delle misure, sviluppata da H. Lebesgue agli inizi del secolo scorso, senza dimostrazioni. Il concetto di misura unifica i concetti di lunghezza di un intervallo, di area di una figura piana, di volume di un solido.

Le idee che seguivano nella costruzione hanno origine babilonese: le inondazioni del Nilo portavano sì del nuovo fertile lato sulle pianure d'Egitto, ma cancellavano completamente i confini delle proprietà: in assenza di moderni teodoliti o GPS, erano difficilissimi da tracciare di nuovo. Era però possibile e persino facile ottenere un appezzamento di terra da seminare grande tanto quanto quello precedente, anche se da un'altra parte - davvero un forte stimolo a sviluppare un modo per misurare la terra: in una parola una Geo (terra) metrica (misure).

Nella Geometria euclidea classica ci sono teoremi sull'equivalenza (ossia ugualanze di aree): i celebri teoremi di Pitagora e di Euclide, ma anche le regole per l'area delle figure piane imparate a scuola; ci sono anche le prime applicazioni del calcolo per approssimazione, con errore ineliminabile (critica di Aristotele alle "quadture del cerchio" di Antifonte e Brisone, che ha anche introdotto l'idea di approssimazione delle aree per difetto ed eccesso, che stanno per colperare), ma arbitrariamente piccolo (metodo di esaurizione di Eudosso e quadture della parabola di Archimede, oltre allo studio del valore di  $\pi$ , tramite i poligoni regolari, e al calcolo delle aree delle sfere, il suo capolavoro).

La costruzione di Lebesgue inizia con gli intervalli.

## INTERVALLI IN $\mathbb{R}^n$ E LORO MISURA

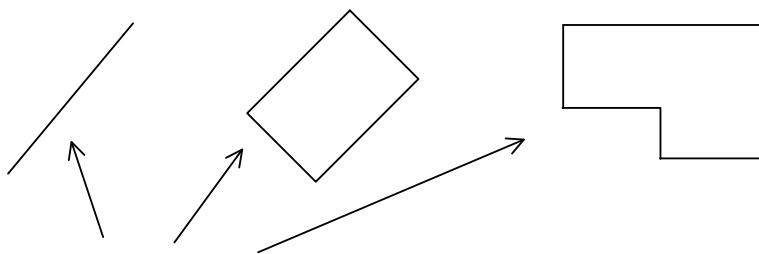
Un intervallo in  $\mathbb{R}^n$  è definito come il prodotto cartesiano di intervalli in  $\mathbb{R}$

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [a_i, b_i]\}$$

Per gli intervalli si pone

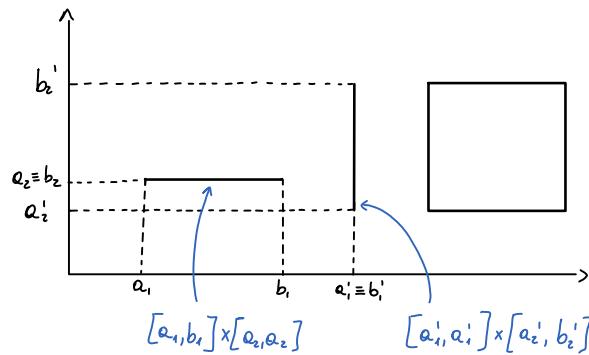
$$|I| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

Esempi di intervalli sono... gli intervalli in  $\mathbb{R}$ , i rettangoli coi lati paralleli agli assi o i parallelepipedi con gli spigoli paralleli agli assi. Non sono intervalli i seguenti insiemi in  $\mathbb{R}^2$



non sono prodotti cartesiani di intervalli

mentre lo sono



Gli intervalli "degeneri"  $[a_2, a_2]$  e  $[a'_1, a'_1]$  sono ammessi, e danno luogo ad insiemi di misura nulla, essendo esse il prodotto delle ampiezze degli intervalli, ed una è nulla.

Si userà anche il simbolo  $m(I)$  per la misura di  $I$ .

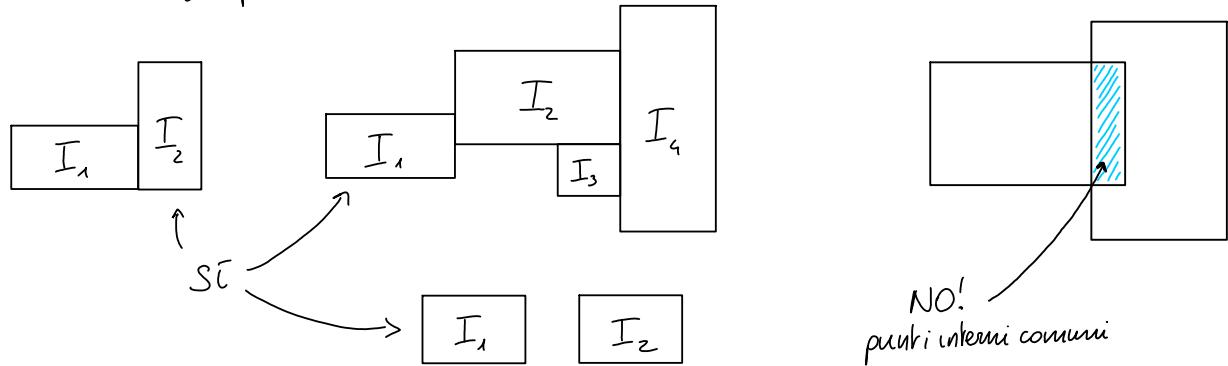
## MISURA DEI PLURINTERVALLI

Il passo successivo, alle base delle regole dell'area per le regioni poligonali, è quello di estendere la definizione ad una famiglia speciale di esse: i plurintervalli (o plurirettangoli).

**DEFINIZIONE:** Un plurintervalllo  $P$  è un insieme tale che esistano un numero finito di intervalli  $I_i, i=1 \dots n$ , PRIVI DI PUNTI INTERNI COMUNI, verificanti

$$P = \bigcup_{i=1}^n I_i.$$

Dunque un plurintervalllo è unione finita di intervalli, che possono "toccarsi" (punti di frontiera comuni) ma non "sovraporsi" (punti interni comuni). Ad esempio



**ATTENZIONE:** nulla vieta di ottenere la stessa regione in più modi. Se però si evitano le sovraposizioni si può dimostrare che la regione è la somma delle aree degli intervalli che la compongono in qualunque modo essa sia stata decomposta.

**DEFINIZIONE:** Dato un plurintervalllo  $P$ , unione degli intervalli  $I_1, I_2, \dots, I_n$  si pone

$$|P| = \sum_{i=1}^n |I_i|$$

Come è stato già detto più su, questa definizione non ha senso sino a che non si dimostri che il numero  $|P|$  così definito sia sempre lo stesso qualunque sia il modo scelto di decomporre  $P$  come unione di  $I_i, i=1 \dots n$ .

Ad esempio, non è affatto evidente, a priori, che

$I_1$	$I_2$
$I_3$	$I_4$

dà lo stesso risultato di

$I'_1$	$I'_2$
$I'_3$	$I'_4$

Non faremo la dimostrazione di ciò: chi voglie approfondire può utilizzare un qualunque libro di teoria delle misure.

Le proprietà fondamentali delle misure ora introdotte sono oggetto dei prossimi teoremi.

### TEOREMA (finita additività della misura):

Se  $P, P'$  sono due plurintervalli disgiunti, allora

$$|P \cup P'| = |P| + |P'|$$

NOTA: le proprietà precedente continua a valere se  $P \cap P' \neq \emptyset$ , purché  $P \cap P' \subseteq \exists P \cup \exists P'$ .

Cio' accade se  $P$  e  $P'$  non hanno punti interni comuni, pur potendo condividere punti di frontiera.

### TEOREMA (monotonie della misura):

Se  $P, P'$  sono plurintervalli e  $P \supseteq P'$ , allora  $|P| \geq |P'|$

Sono tutte proprietà intuitive dell'area o del volume e formano il modello per quelle analoghe più generali per la misura di Lebesgue.

La teoria così sviluppata è (ancora) inferiore a quella greca: un triangolo  $\triangle$  non è un plurintervalle e non ha ancora un'area.

I passi successivi consistono nel definire la misura per gli insiemi aperti, e per quelli chiusi e limitati (compatti).

## MISURA DEGLI INSIEMI APERTI

Un insieme aperto è un insieme costituito solo da punti interni, e cioè contenente un intorno di ogni suo punto. Gli aperti non vuoti, contenendo spazi, contengono intervalli in essi contenuti. Si può dunque porre la

**DEFINIZIONE:** Per ogni insieme  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto si pone

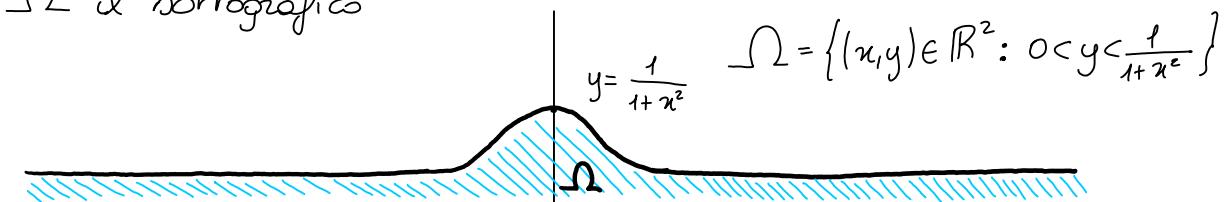
$$|\Omega| = \sup_{\substack{P \subseteq \Omega \\ P \text{ plurintervalli}}} |P|$$

Si pone anche

$$|\emptyset| = 0$$

**ATTENZIONE:** Ci sono aperti di misura infinita:  $\mathbb{R}^n$ , il quadrante  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$  o la striscia  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1] \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$  sono di misura infinita perché fra i plurintervalli in essi contenuti c'è l'intervallelo  $[-k, k]^n$  per il quale la misura vale  $(2k)^n$  il cui sup è  $+\infty$ , o l'intervallelo  $[1, k]^n$ , di misura  $(k-1)^n$  non limitata in  $k$  anch'esso, o l'intervallelo  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times [-k, k]$ , di misura  $\frac{1}{3} \times 2k$ , anch'esso non limitata al divergere di  $k$ .

Esistono pure insiemni non limitati, ma di misura finita. Si consideri la funzione (la "versiera" di Maria Gaetana Agnesi) e sia  $\Omega$  il sottografico



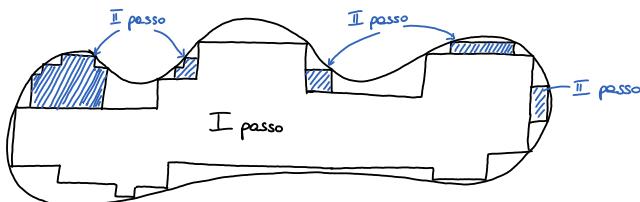
Per ogni intervallo  $I_i$  contenuto in  $\Omega$  si consideri la striscia  $I'_i$  di uguale base e di altezza che parte da 0 e giunge fino a "toccare" il grafico di  $f(x) = 1/(1+x^2)$ . Poiché  $I'_i \geq I_i$  ne segue che  $|P| \leq \sum_i |I'_i|$  e poiché tale valore coincide con la somma inferiore dell'integrale di  $\frac{1}{1+x^2}$  esteso all'unione delle proiezioni di  $I_1, I_2, \dots, I_n$  sull'asse  $x$ , esso è minore o uguale all'integrale su tale insieme.

Infine, poiché  $f \geq 0$ , l'integrale su qualunque insieme è minore o uguale a  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du = \pi$  e dunque qualunque plurintervallo

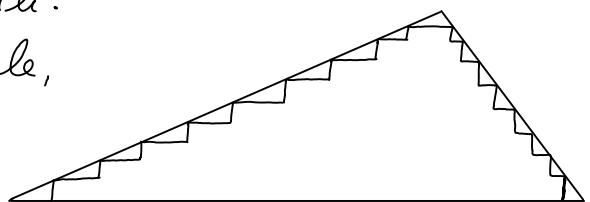
contenuto in  $\Omega$  avrà misura non superiore a  $\pi$ . Ne segue che

$$\sup |P| \leq \pi.$$

Dunque, tutti gli spazi sono misurabili, anche se le loro misure non puo' essere calcolata "algoritmamente", con un numero finito di operazioni, ma richiede "un'estrapolazione", un "limite", costituito dal sup. L'estremo superiore è un concetto recentissimo nell'Analisi Matematica, ma l'idea segnata è quella di Eudosso: il "metodo di esaurizione" consisteva nell'inscrivere un poligono (nel nostro caso un plurintervallo) nella figura delle quale si vuole determinare l'area, e poi inscrivere un altro nelle lumette rimaste fuori, e via così fino alla fine ... fino ad "esaurire" l'area.



Con questo "modifico" alla definizione tutte le "figure piane" della geometria greca risultano misurabili: è chiarissimo il legame con l'integrale, già osservato nell'esempio sul sottografico di  $y = \frac{1}{1+x^2}$ .



Sono misurabili anche oggetti molto più complessi, del tutto ignoti o non in grado di interessare i greci. Ad esempio sia  $q_n$  una successione che assume tutti i valori razionali di  $[0,1]$ , che si può definire così:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

ottenuta esaurendo tutti i numeratori possibili senza ripetere frazioni già considerate (es.  $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}$  oppure  $\frac{1}{2}, \frac{4}{4}, \frac{3}{6}, \dots$ ) prima di aumentare il denominatore:

consideriamo ora l'insieme

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{2^{n+2}}} (q_n)$$

ove  $B_{\delta}(q_n)$  è la sfera aperta di centro  $q_n$  e raggio  $\delta$ , e cioè l'intervallo  $[q_n - \delta, q_n + \delta]$ . È aperto perché è unione di aperti. Potrebbe sembrare che coincida con  $[0,1]$ , perché ogni reale di  $[0,1]$  si può approssimare con razionali, ma non è così, come proveremo più avanti: in sostanza, è vero che arbitrariamente vicino ad ogni reale ci sono razionali, ma i raggi delle sfere decrescono esponenzialmente con il crescere del denominatore (e quindi della "finezza" dell'approssimazione) e non è quindi affatto evidente che ogni punto di  $[0,1]$  sto in  $\Omega$ , ed infatti è falso! Un simile insieme è misurabile, in quanto aperto, anche se non si può neppure disegnare.

## LA MISURA DEGLI INSIEMI COMPATTI

Le prossime categorie di insiemi misurabili sono gli insiemi chiusi e limitati, ossia i compatti. Poiché i compatti sono limitati esiste una sfera, e quindi anche un intervallo che li contiene. Si pone allora

**DEFINIZIONE** Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  compatto. Si definisce

$$|K| = \inf_{\substack{P \supseteq K \\ P \text{ plurintervallo}}} |P|$$

**NOTA:** Poiché ogni compatto è contenuto in un intervallo ne segue subito  $|K| < +\infty$ ; diversamente da quanto accade per gli aperti, tutti i compatti sono di misura finita.

L'idea di Brissone, di approssimare dall'interno e dall'esterno con poligoni, verrà utilizzata per il prossimo passo.

## GLI INSIEMI MISURABILI SECONDO LEBESGUE

In questa sezione verrà definita la misura nella condizione di massima generalità (limitatezza a parte).

**DEFINIZIONE:** Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , limitato. Si pone allora

$$m_*(E) = \sup_{\substack{K \subseteq E \\ K \text{ compatto}}} |K|$$

$$m^*(E) = \inf_{\substack{\Omega \subseteq E \\ \Omega \text{ aperto}}} |\Omega|$$

I valori  $m_*(E)$  ed  $m^*(E)$  sono detti rispettivamente MISURA INTERNA ed ESTERNA di  $E$ . Se poi

$$m_*(E) = m^*(E)$$

$E$  si dicono MISURABILE SECONDO LEBESGUE ed il valore comune di  $m_*(E)$  ed  $m^*(E)$  verrà detto MISURA DI LEBESGUE di  $E$ , e denotarlo con  $|E|$  o con  $m(E)$ .

Le misure interne ed esterne sono ben definite, perché ci sono sempre aperti contenenti qualunque  $E$ , come ad esempio  $\mathbb{R}^n$  stesso, e ci sono sempre compatti contenuti in ogni  $E$ , come ad esempio i suoi singoli punti.

**NOTA:** esistono insiemi non misurabili secondo Lebesgue. Per un esempio, consultare un libro di teorie della misura (come Royden: "Real Analysis" Collier Mac Millen o W. Rudin: "Analisi Reale o Complessa" Boringhieri).

La misura di Lebesgue gode delle seguenti proprietà:

**TEOREMA:**

1)  $E, F$  misurabili con  $E \subseteq F \Rightarrow E \leq F$

2)  $E, F$  misurabili,  $E \cap F = \emptyset$ , allora  $E \cup F$  è misurabile e  
 $|E \cup F| = |E| + |F|$

3)  $E, F$  misurabili allora  $E \cup F$  è misurabile e  $|E \cup F| \leq |E| + |F|$

4)  $E, F$  misurabili  $\Rightarrow E \cap F, E - F$  sono misurabili

5)  $E, F$  misurabili e  $F \subseteq E \Rightarrow |E \setminus F| = |E| - |F|$

6) Siano  $E_i, i \in \mathbb{N}$ , misurabili. Allora

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \text{ è misurabile e } \left| \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|$$

7) Siano  $E_i, i \in \mathbb{N}$ , misurabili, con  $E_i \cap E_j = \emptyset$  se  $i \neq j$ . Allora  $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$  è misurabile e  $\left| \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right| = \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|$

8) Siano  $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq \dots$  misurabili. Allora  $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$  è misurabile e  $\left| \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right| = \sup_{\mathbb{N}} |E_i|$

9) Siano  $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots \supseteq E_n \supseteq \dots$  misurabili, e sia  $|E_1|$  finita. Allora,  $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$  è misurabile e inoltre

$$\left| \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \right| = \inf_{\mathbb{N}} |E_i|$$

10) Per ogni misurabile  $E$ ,  $|E| \geq 0$ .

Potrebbe sembrare che tutte le proprietà descendano dalle 7) e dalle 9) (e questo è il punto di vista di Rudin), ma in realtà la costruzione è complessa e la 7), la più importante delle proprietà della misura di Lebesgue che le differenzia da tutte quelle introdotte in precedenza, si prova per ultimo utilizzando le altre.

La 1) è la MONOTONIA, la 2) è l'ADDITIVITÀ FINITA. La 3) è la SUBADDITIVITÀ FINITA. La 6) è la SUBADDITIVITÀ NUMERABILE.

La 7) è l'ADDITIVITÀ NUMERABILE. La 8) e la 9) sono LE CONTINUITÀ VERSO L'ALTO E VERSO IL BASSO.

La 3), la 4), la 7) e  $|\emptyset| = 0$  sono le proprietà che individuano la σ-algebra degli insiemi misurabili: se  $E_i$  sono insiemi misurabili lo sono anche l'unione  $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ , l'intersezione, la differenza, il complementare.

Occorre fare molta attenzione alle ipotesi delle 8) e delle 9): la differenza consiste nell'ipotesi che  $|E_1| < \infty$  presente solo nelle 9), che è essenziale. Infatti sia

$$E_i = \{n \in \mathbb{R}, n \geq i\}$$

Allora  $\bigcap E_i = \emptyset, |E_i| = +\infty$ , ma  $0 = |\emptyset| \neq \inf_N |E_i| = +\infty$ .

### MISURABILITÀ DI INSIEMI NON LIMITATI

**DEFINIZIONE:** Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  arbitrario. Allora  $E$  si dice misurabile se lo sono tutti gli insiem  $E_k = E \cap [-k, k]^n$ , e si porre  $|E| = \sup_N |E_k|$

La misura, così estesa agli insiem non limitati, continua a godere di tutte le proprietà elencate nell'ultimo teorema. Altrettanto accade per le proprietà degli insiem misurabili.

## NOTE CONCLUSIVE

La numerabile additività è una proprietà cruciale delle misure. Ad esempio  $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ , che non è né aperto né chiuso, è comunque misurabile e di misura nulla, perché basta porre  $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}$ , ove  $q_n$  è la successione biiettiva su  $\mathbb{Q}$  prima introdotta, per osservare che dal fatto che ogni punto ha misura 0 (è chiuso e limitato e può essere racchiuso dentro un intervallo di lunghezze comunque piccole e dunque l'inf delle misure è 0), ne segue che

$$|\mathbb{Q} \cap [0,1]| = \sum_{i=1}^{\infty} |q_i| = 0$$

Con le numerale subadditività si prova facilmente che  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ q_n - \frac{1}{2^{n+2}}, q_n + \frac{1}{2^{n+2}} \right]$  è strettamente contenuta in  $[0,1]$ , poiché la sua misura è minore o uguale a  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( q_n + \frac{1}{2^{n+2}} - q_n + \frac{1}{2^{n+2}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

Dunque  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ q_n - \frac{1}{2^{n+2}}, q_n + \frac{1}{2^{n+2}} \right]$  non può coincidere o contenere  $[0,1]$  perché ha misura minore di  $1/2$ , mentre  $[0,1]$  ha misura 1.

Un problema piuttosto fastidioso della teoria delle misure è che un insieme piuttosto "semplice", come ad esempio un intervallo chiuso  $[0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$  ha diritto a QUATTRO, e priori diverse, definizioni di misura: quelle in qualità di intervallo, quelle come plurintervallo (costituito da un unico intervallo), quelle come compatto (è chiuso e limitato), e quelle come misurabile. È a carico di chi sviluppa la teoria provare che sono coincidenti, come è ovvio che debba essere.

Una costruzione organica, de maestro, delle teorie delle misure è reperibile sul libro di Kolmogorov (il maestro) e Fomin "Teoria delle funzioni e Analisi Funzionale" Editori Riuniti. Una più semplice si può trovare su E. Giusti Analisi Matematica II, molto vicini alla teoria "all'italiana".

La nascita della moderna teoria dell'integrazione è legata, per qualche verso, alla teoria per la convergenza delle serie di Fourier: mentre le serie di potenze convergono per definire ad una funzione analitica (cioè  $C^\infty$ , con in più un controllo sul massimo modulo delle derivate), per le serie di Fourier, è "normale" la convergenza a funzioni persino discontinue: ciò fu chiaro sin dalle prime lettere scambiate fra Eulero (il maestro dei maestri) e Fourier sull'argomento. La teoria delle misure sin qui presentata consente di estendere la teoria dell'integrazione a funzioni estremamente discontinue.

Ad esempio, la funzione di Dirichlet è definita da

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{su } \mathbb{Q} \\ 0 & \text{su } \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

L'insieme  $\mathbb{Q}$  è di misura nulla, perché è numerabile.

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{1} \xrightarrow{\quad} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \xrightarrow{\quad} \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & \dots \\ \frac{2}{1} \downarrow \quad \frac{2}{2} \xrightarrow{\quad} & \frac{2}{3} \xrightarrow{\quad} \frac{2}{9} & \frac{2}{5} & \dots \\ \frac{3}{1} \xrightarrow{\quad} \frac{3}{2} \xrightarrow{\quad} \frac{3}{3} & \frac{3}{9} & \frac{3}{5} & \dots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Il quadro contiene tutte le frazioni positive, comprese quelle apparenti come  $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{6}{9} \dots$ , e moltissime equivalenti come  $\frac{1}{2}, \frac{3}{9}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8} \dots$

Per numerare i razionali positivi, seguendo Cantor, attraversiamo il quadro seguendo le frecce, e cioè seguendo le diagonali (tutte finite), scartando le frazioni equivalenti ad altre già considerate; otteriamo la successione  $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1} \dots$ . Numerati poi i razionali positivi, si possono numerarli tutti usando la sequenza  $0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, q_3, -q_3, \dots$

Dunque i razionali sono unione numerabile di punti (di misura 0) e dunque essi stessi hanno misura 0: per l'integrazione sono "integre" con i singoli punti per l'integrale di Riemann.

Per la teoria dell'integrazione di Lebesgue, che utilizza il concetto di misura sin qui introdotto, la funzione di Dirichlet non è molto diversa da una funzione sempre nulla salvo un numero finito di punti: per l'integrale di Riemann. È bene ricordare che la funzione di Dirichlet è il classico esempio di funzione non integrabile secondo Riemann.

L'integrale di Lebesgue, infine, consente di introdurre, con qualche fatica, lo spazio  $L^2$ , che consente lo sviluppo di una teoria organica delle serie di Fourier, perché contiene i limiti, rispetto alle norme associate al prodotto scalare

$$fg = \int_{\Omega} f(u) g(u) du$$

e cioè

$$\|f\|_{L^2} = \left( \int_{\Omega} f^2(u) du \right)^{1/2}$$

di tutte le serie trigonometriche.

Per i dettagli, non banali, occorre approfondire su un buon libro di Analisi Funzionale, come quelli già citati: Royden, Rudin o Kolmogorov, o molti altri...

AN\_6.2

# L'INTEGRALE DI LEBESGUE

La definizione qui presentata, nelle fasi iniziali, segue da vicino quella di Riemann per le funzioni di una variabile, che 'e bene aver in mente: basta sostituire agli intervalli i misurabili. Presuppone la conoscenza di cosa siano un insieme misurabile secondo Lebesgue (pronuncia: leb`eg) e la sua misura. Gli integrali "impropri", sia al finito sia all'infinito, sono invece sostanzialmente differenti dall'integrale di Lebesgue, almeno per quanto riguarda le funzioni integrabili, ma non assolutamente integrabili. Per l'integrale di Lebesgue, integrabilità e assoluta integrabilità coincidono.

## Funzioni limitate

Inizialmente si definisce l'integrale per le funzioni limitate. Sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale su  $E$ , insieme misurabile di misura finita. Sia  $\pi = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  una partizione misurabile di  $E$ , ossia una famiglia finita di sottoinsiemi misurabili (secondo Lebesgue) di  $E$  verificante:

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1..n} E_i &= E \\ i \neq j \Rightarrow E_i \bigcap E_j &= \emptyset\end{aligned}$$

Per ogni fissata partizione  $\pi$ , si definiscono la somma inferiore  $\sigma_\pi$  e la somma superiore  $\Sigma_\pi$  ponendo

$$\sigma_\pi = \sum_1^n m(E_i) \inf_{E_i} f$$

e

$$\Sigma_\pi = \sum_1^n m(E_i) \sup_{E_i} f$$

ove  $m$  denota la misura di Lebesgue, che sono ben definite perché, essendo  $f$  limitata, tutti gli estremi superiori e inferiori sono finiti, e tali sono pure le misure degli insiemi  $E_i$ , che sono sottoinsiemi di  $E$ , di misura finita. Si definiscono poi l'*integrale inferiore*

$$\underline{\int}_E f$$

e l'*integrale superiore*

$$\overline{\int}_E f$$

ponendo

$$\underline{\int}_E f \equiv \sup_\pi \sigma_\pi$$

e

$$\overline{\int}_E f \equiv \inf_\pi \Sigma_\pi$$

al variare di  $\pi$  nell'insieme di tutte le partizioni misurabili.

**Definizione 1** Si dice che  $f$  è integrabile secondo Lebesgue se e solo se gli integrali superiore e inferiore su  $E$  coincidono. Il loro comune valore è detto integrale di Lebesgue di  $f$  su  $E$ .

## Le funzioni positive su insiemi di misura finita

Sia ora  $f$  una funzione positiva, non necessariamente limitata. Per definirne l'integrale poniamo, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ :

$$f_n(x) = \min(f, n)$$

La funzione  $f_n$  coincide con  $f$  sui punti dove  $f \leq n$ , mentre è uguale ad  $n$  nei punti sui quali  $f$  supera  $n$ ; in sostanza, passare da  $f$  a  $f_n$  equivale a troncare la  $f$  ad altezza  $n$ . E immediato verificare che, per ogni  $x \in E$ ,  $f$  è compresa fra 0 e  $n$  ed inoltre  $f_n(x)$  cresce al crescere di  $n$ , per ogni  $x$ . Si pone allora

$$\int_E f \equiv \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_E f_n$$

ove gli integrali di  $f_n$  sono ben definiti perché sono funzioni limitate. La  $f$  si dirà integrabile su  $E$  se l'estremo superiore precedente è finito.

## Le funzioni positive su insiemi misurabili arbitrari

Dato un qualunque insieme misurabile  $E$  poniamo  $E_n = E \cap B(0, n)$ , ottenuto intersecando  $E$  con la sfera di centro l'origine e raggio  $n$ . Ogni  $E_n$  ha misura finita, minore o eguale a quella della sfera. Si pone, per ogni funzione positiva,

$$\int_E f \equiv \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{E_n} f$$

dove gli integrali a secondo membro sono relativi ad insiemi di misura finita e quindi già definiti in precedenza. Come prima,  $f$  si dirà integrabile se e solo se il secondo membro precedente è finito.

## Le funzioni arbitrarie su insiemi arbitrari

Data una qualunque funzione  $f$  si pone:

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad f^-(x) = \max(0, -f(x))$$

Le funzioni così definite sono dette la *parte positiva e negativa di  $f$* . Sono entrambe funzioni positive, per le quali l'integrale è già stato definito più su. Esse verificano

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

e

$$f^+(x) = \frac{1}{2} [|f(x)| + f(x)] \quad f^-(x) = \frac{1}{2} [|f(x)| - f(x)]$$

Si pone allora

$$\int_E f \equiv \int_E f^+ - \int_E f^-$$

ed  $f$  sarà detta integrabile se e solo se lo sono (separatamente) la sua parte positiva e la sua parte negativa. Una conseguenza delle relazioni precedenti e delle proprietà degli integrali, qui non presentate, è che  $f$  è integrabile se e solo se lo è anche  $|f|$ .

AN\_6.3

## ESEMPI DI CAMBI DI VARIABILE

$$\int_T \frac{du dy}{xy} \quad T = \left\{ (u, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < y < 2u, 1 < u+y < 3 \right\}$$

Il dominio può scriversi anche

$$\left\{ u > 0; \ 1 < \frac{y}{u} < 2; \ 1 < u+y < 3 \right\}$$

il che suggerisce il cambio di variabile

$$u = y/x \quad v = u+y$$

che rende il dominio dato immagine dell'intervallo  $[1, 2] \times [1, 3]$ .

Occorre dunque esprimere  $u$  e  $y$  in funzione di  $u$  e  $v$ , le nuove variabili, buone per il dominio. Si ha, dalla prima equazione  $y = ux$  e, sostituendo nella seconda  $v = u+ux$  da cui, risolvendo rispetto a  $u$ ,  $u = \frac{v}{1+v}$  ( $0 < u < y \Rightarrow u > 0$ )

da cui infine si ricava la trasformazione inversa

$$u = \frac{v}{1+v} \quad y = ux = \frac{uv}{1+v}$$

Il determinante jacobiano  $\frac{\partial(u, y)}{\partial(u, v)}$  è

$$\begin{vmatrix} u_u & u_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \text{ e cioè}$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{v}{(1+v)^2} & \frac{1}{1+v} \\ \frac{v(1+u)-uv}{(1+u)^2} & \frac{u}{1+u} \end{vmatrix} = -\frac{uv}{(1+u)^3} - \frac{v}{(1+u)^3} = -\frac{v}{(1+u)^2}$$

e, poiché nel dominio di interesse  $u$  e  $v$  sono positivi ne segue che l'elemento di volume (il modulo dello jacobiano) è

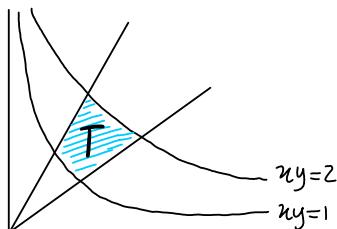
$$\frac{v}{1+u^2}$$

Si puo' dunque cambiare variabile, ottenendo

$$\begin{aligned} \int_T \frac{du dy}{ny} &= \int_1^2 du \int_{1/v}^3 \underbrace{\frac{1+u}{v}}_{\frac{1}{u}} \underbrace{\frac{1+u}{uv}}_{\frac{1}{y}} \underbrace{\frac{v}{(1+u)^2}}_{\text{jacobiano}} = \\ &= \int_1^2 \frac{1}{u} du \int_{1/v}^3 \frac{1}{v} dv = \ln|2| - \ln|1| + \ln|3| - \ln|1| = \ln 6 \end{aligned}$$



Un altro esempio: calcolare l'area della regione



e cioè

$$\int_T du dy \text{ ove } T = \{(u, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < y < 2u \quad 1 < ny < 2\}$$

Di nuovo il dominio è determinato dalle diseguaglianze

$$u > 0 \quad 1 < \frac{y}{u} < 2 \quad \text{e} \quad 1 < ny < 2$$

ed è dunque naturale porre

$$u = \frac{y}{n} \quad \text{e} \quad v = ny$$

da cui, moltiplicando membro a membro, segue  $uv = y^2$  e dunque, essendo  $y, u$  e  $v$  positivi,  $y = \sqrt{uv}$ . Dividendo, invece, membro a membro ( $u > 0$ ), si ha  $\sqrt{u} = u^{1/2}$  e, per le stesse regioni precedenti, si ha infine

$$u = \sqrt{\frac{v}{n}} \quad y = \sqrt{uv}$$

$$\begin{vmatrix} u_u & u_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\frac{v}{n}}} \left(-\frac{v}{u^2}\right) & \frac{1}{2\sqrt{\frac{v}{n}}} \cdot \frac{1}{u} \\ \frac{v}{2\sqrt{uv}} & \frac{u}{2\sqrt{uv}} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -\sqrt{\frac{u}{v}} \frac{v}{u^2} & \sqrt{\frac{u}{v}} \frac{1}{u} \\ \sqrt{\frac{v}{u}} & \sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \left( -\frac{u}{v} \frac{v}{u^2} - \frac{1}{u} \right) = -4 \left( \frac{2}{u} \right) = -\frac{2}{u}$$

Essendo nel rettangolo  $u \in [1,2]$ ,  $v \in [1,2]$ ,  $u > 0$  ne segue che il modulo dello jacobiano è  $2/u$ , e dunque l'area ricercata sarà

$$\int_1^2 du \int_1^2 dv \frac{1}{u} = 1 \cdot \log|2| = \log|2| \quad \blacksquare$$

Gli esempi presentati suggeriscono fortemente che non sempre (e non solo) è la struttura geometrica del dominio a suggerire la sostituzione da tentare: talvolta si può trarre ispirazione direttamente dalle disequazioni che lo definiscono, indipendentemente dal fatto di essere in grado di interpretarle geometricamente.

Ad esempio:

Calcolare l'area di  $T = \{(u,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, u+y > 0, u^2+y^2 < 3\sqrt{u^2+y^2 - 3u}\}$

Non occorre affatto impegnarsi a fondo per capire che mezzo di "figura" possa venir fuori dalle disequazioni, e non ci vuole molto per capire che passare a coordinate polari può eliminare il problema costituito dalla radice ed un costo abbordabile. Infatti, introducendo le coordinate polari (piane)  $u = \rho \cos \theta$  e  $y = \rho \sin \theta$  si ha

$$\begin{cases} \rho \sin \theta > 0 \\ \rho \cos \theta + \rho \sin \theta > 0 \\ \rho^2 < 3\rho - 3\rho \cos \theta \end{cases}$$

Dalla prima si ha  $(\rho > 0) \sin \theta > 0 \quad \theta \in ]0, \pi[$ .

Dalla seconda  $(\rho > 0)$ ,  $\cos \theta + \sin \theta > 0 \quad \cos \theta > -\sin \theta$  e cioè  $\theta \in ]0, \frac{3}{4}\pi[$  (in effetti  $u+y > 0$  è il semipiano sopra la bisettrice del II quadrante: un po' di geometria non guasta mai, se è un mezzo e non un fine!).

Dall'ultima si ha infine  $(\rho > 0) \rho < 3(1-\cos \theta)$  e, in definitiva, il dominio dato è immagine di quello, in coordinate polari,

$$\theta \in [0, \frac{3}{4}\pi] \quad 0 < \rho < 3(1-\cos \theta)$$

di aspetto considerabilmente meno repellente di quello iniziale.

Si ha dunque:

$$\begin{aligned}
 \text{Area } (T) &= \int_0^1 dx dy = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} d\theta \int_0^{3(1-\cos\theta)} \rho d\rho = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} d\theta \cdot \frac{9}{2} (1-\cos\theta)^2 = \frac{9}{2} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta d\theta = \\
 &= \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{4}\pi - \frac{9}{2} \left( \sin \frac{3}{4}\pi \right) + \frac{9}{2} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \\
 &= \frac{27}{8}\pi + \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{4}\pi + \frac{9}{8} \sin 2 \cdot \frac{3}{4}\pi = \\
 &= \frac{27}{8}\pi + \frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{27}{16}\pi - \frac{9}{8} = \frac{81}{16}\pi + \frac{36\sqrt{2}-9}{8}
 \end{aligned}$$

È bene ripetere che ogni informazione geometrica è di gran valore se consente di abbreviare i calcoli e verifiche, mentre diventa funzionale se diventa un fine: determinare l'area di una regione è perfettamente possibile anche in molti casi nei quali non si è in grado di disegnarla.