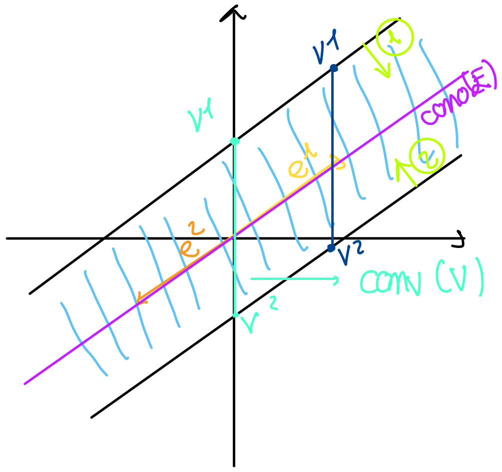
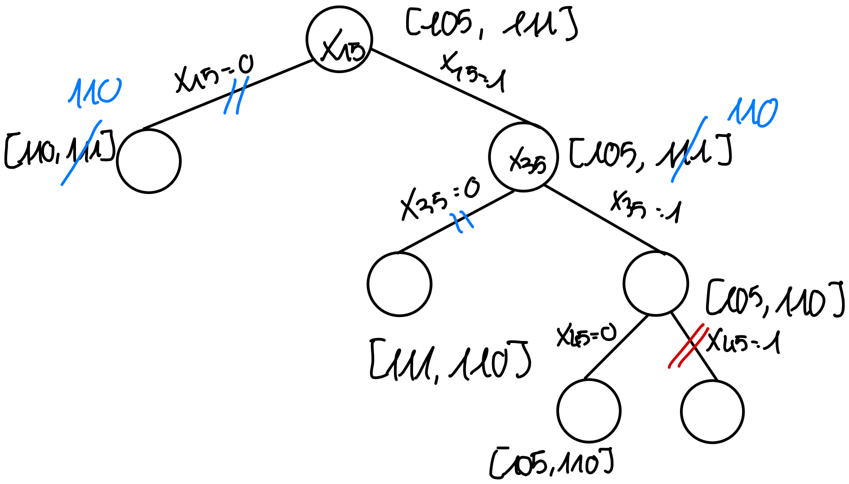
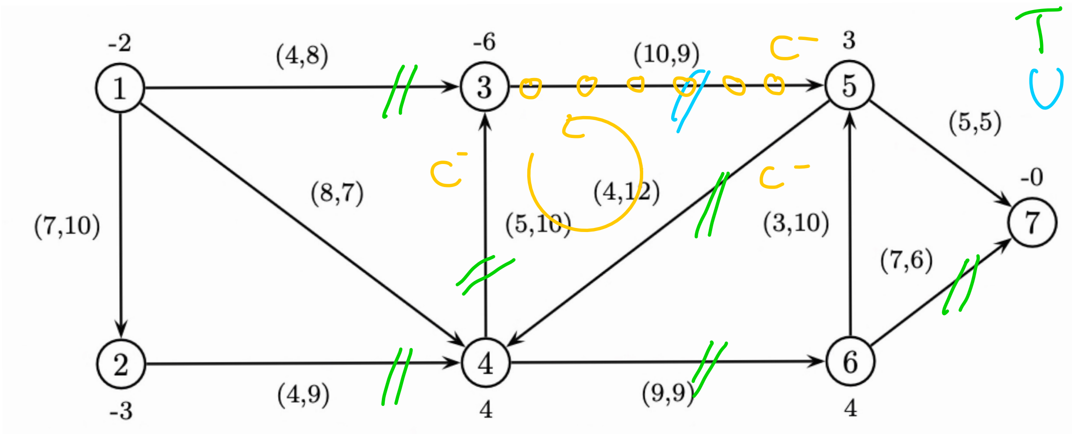






RICERCA OPERATIVA

Donazioni sempre ben accette ❤️

https://www.paypal.me/mgiannini01

Per qualsiasi cosa, IG: @matteogianninii

Programmazione lineare

- INTRODUZIONE e PROBLEMI STANDARD

Problemi decisionali ⟶ dobbiamo scegliere tra varie opzioni costruendo un modello matematico per risolverlo

↓

MODELLIZZAZIONE

PROBLEMA ⟶ MODELLO ⟶ TEORIA ⟶ METODI ed ALGORITMI

- PROBLEMA: raccolta dati
- MODELLO: variabili, vincoli, funzione obiettivo
- TEORIA: esistenza/unicità soluzione, proprietà modello
- METODI ed ALGORITMI: esatti / euristici

feedback

ESEMPIO ↘

Un contadino ha 12 ettari di terra per coltivare pomodori e patate. Ha anche 70 kg di semi di pomodoro, 18 t di tuberi e 160 t di letame. Il guadagno per ettaro è 3000 € per i pomodori e 5000 € per le patate. I pomodori necessitano di 7 kg di semi e 10 t di letame per ettaro, mentre le patate richiedono 3 t di tuberi e 20 t di letame per ettaro ⟶ problema di **produzione**

↓

Per massimizzare il guadagno, come dividere la terra tra pomodori e patate?

↓

Quante variabili decisionali abbiamo? 2 variabili x_1 ed x_2

La soluzione ottima è data da un vettore di $\mathbb{R}^2$

↓

Risultato: **ettari di terreno** dedicati a pomodori e patate

Può non avere soluzione? ⚠ NO: è legato ai vincoli

SOLUZIONE AMMISSIBILE: Soluzione compatibile con i vincoli

SOLUZIONE OTTIMA: Soluzione migliore tra le soluzioni ammissibili

↓

Funzione obiettivo: PRODOTTO SCALARE di 2 variabili ⟶ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

↳ funzione LINEARE: $3000\,x_1 + 5000\,x_2$

↓

Se la soluzione è il vettore $(2,3)$, è ammissibile? Sì, si guardano gli ettari disponibili

↓

VINCOLI di $\underbrace{<=}_{\text{non più di}}$, $\overbrace{>=}^{\text{almeno}}$, $\underbrace{=}_{\text{esattamente}}$ ⟶ In questo caso non è specificato, quindi possiamo utilizzare $<=$. Il vincolo con $=$ avrebbe potuto portare ad un problema con nessuna soluzione

↓

Oltre al vincolo degli ettari abbiamo anche altri 3 vincoli: semi, tuberi e letame ⟶ $(2,3)$ è ancora una soluzione ammissibile

↓

Dobbiamo infine avere che x_1 ed $x_2 \geq 0$

REGIONE AMMISSIBILE: insieme delle soluzioni ammissibili

↳ in questo caso sono SEMIPIANI $(\mathbb{R}^2)$

Donazion

MODELLO MATEMATICO: problema di programmazione lineare primale standard

pensato a un

tutte funzioni lineari

$$\begin{cases} \max & c^T x \\ Ax & \boxed{\leq} \; b \end{cases}$$

→ Tutte le funzioni lineari possono essere rappresentate da un **vettore**

solo vincoli di $<=$

vincoli

$$\max \; 3x_T + 5x_P$$
$$\begin{aligned} x_T + x_P &\leq 12 \\ x_T &\leq 10 \\ x_P &\leq 6 \\ x_T + 2x_P &\leq 16 \\ -x_T &\leq 0 \\ -x_P &\leq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 6 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

↓

Problema di minimo / massimo con funzione obiettivo lineare soggetta a vincoli lineari di $<=$, $>=$, $=$

↓

m = numero di vincoli
n = numero di variabile
} A è $m \times n$, b ha m componenti e c ha n componenti

↓

In un problema lineare i vincoli sono rette

→ tutti rispettati

POLIEDRO: intersezione di un numero finito di semispazi chiusi lineari con $<=$ o $>=$

chiusi → include il bordo

finito → un cerchio non è un poliedro

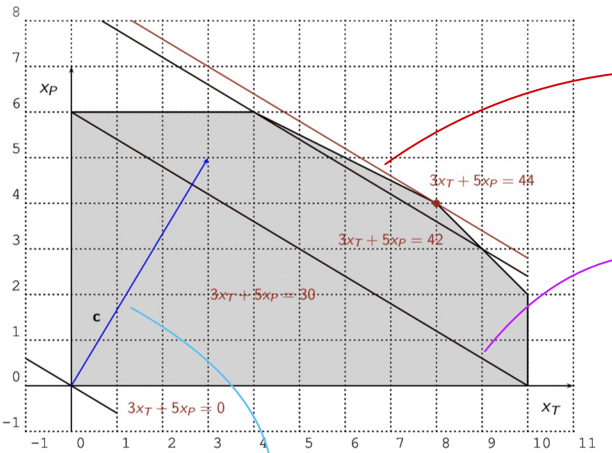
↓

Sono le soluzioni di $Ax \leq b$: un problema PL è un problema di massimo / minimo su un poliedro

↓

Se avessi che il guadagno con le patate è 0€, le soluzioni ottime sarebbero state $(\alpha, 6)$ con α compreso tra 0 e 4

LINEE di ISOCOSTO o ISOGUADAGNO: insieme di punti di $\mathbb{R}^n$ ove la funzione obiettivo $c^T x$ vale K → $\mathcal{L}(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = v\}$



Soluzione OTTIMALE: mi sposto il più possibile lungo il gradiente → Massima crescita fino alla regione ammissibile

Linea di isoguadagno: vale sempre 30

Vettore gradiente: tutte ortogonali al gradiente (vettore c)

↳ Teorema di Fermat: il gradiente è 0 in un punto di massimo interno → Qua però il gradiente (vettore (3,5)) non si annulla mai

↓ generalizzando

In un problema di programmazione lineare la soluzione, se esiste, è SUL BORDO → Non utilizziamo vincoli di < in quanto riducono di molto il bordo e gli insiemi ottenuti NON sono chiusi

↓

La soluzione ottima NON è unica

↓

Si dicono STANDARD tutti i modelli particolari di PL che sono invece "generali": ogni problema di programmazione lineare può essere ricondotto ad un problema standard → mi permette di risolvere tutti i problemi PL

↓

Utile per risolvere i problemi utilizzando Matlab con Toolbox Optimization

↳ Il modello primale visto prima è standard in quanto permette anche di trovare il minimo semplicemente trovando il massimo della funzione obiettivo. Per avere tutti i vincoli di <= basta inoltre invertire il segno dei vincoli >=. Per quelli di = utilizziamo un esempio

$$x_1 + x_2 = 10 \xrightarrow{\text{diventa}} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ \boxed{x_1 + x_2 \geq 10} \end{cases}$$

sufficiente invertire il segno

ESEMPI

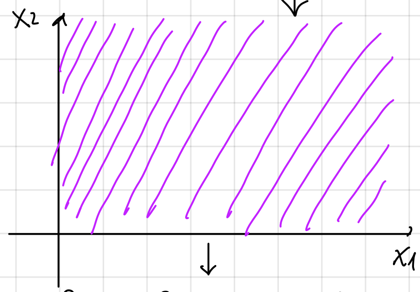
1. SOLUZIONE OTTIMA (0,0)

$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ⟶ $-x_1 \leq 0$

$-x_2 \leq 0$

$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\max \; C^T x = \max \; x_1 + x_2$



Non ha soluzione: il guadagno sarebbe $+\infty$ (impossibile)

↓

⚠ ATT: potrei aver dimenticato un vincolo nel modello

TEOREMA FONDAMENTALE della PL

Vogliamo arrivare a dire che le soluzioni ottime sono nei vertici

Così non è sempre vero per 3 casi:

a. La soluzione non esiste nel caso in cui essa è illimitata
b. La soluzione non esiste perché i vincoli danno un insieme vuoto (vincoli incompatibili)
c. Il poliedro non ha vertici

Combinazioni convesse: Un punto x di $\mathbb{R}^n$ si dice combinazione convessa di $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono i coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tali che $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i$, $\lambda_i \in [0,1]$ per ogni i e $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$

Il segmento è una combinazione convessa di 2 punti (basta vedere l'equazione parametrica). Avendo 3 punti la combinazione convessa è il triangolo $\longrightarrow$ In generale, l'insieme delle combinazioni convesse è dato dal più piccolo insieme convesso contenente i punti

Involucro convesso: L'involucro convesso di un insieme K, denotato da $\text{conv}(K)$, è l'insieme di tutte le possibili combinazioni convesse di elementi di K

Si può dimostrare che $\text{conv}(K)$ è il più piccolo (nel senso della inclusione) insieme convesso che contiene K e quindi un insieme convesso coincide con il suo involucro convesso

Cono: Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ si dice cono se per ogni punto $x \in K$ e per ogni $\lambda \geq 0$ si ha $\lambda x \in K$.

Combinazioni coniche: Un punto x di $\mathbb{R}^n$ si dice combinazione conica di $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tali che $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i$, $\lambda_i \geq 0 \ \forall i$

Involucro conico: L'involucro conico di un insieme K, denotato da $\text{cono}(K)$, è l'insieme di tutte le possibili combinazioni coniche di elementi di K

ESEMPIO

$x^1 = (2,3)$ $\quad x^2 = (3,1) \longrightarrow x = (3, 13/6)$ è una loro combinazione conica?

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 3 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 13/6 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Basta risolvere il sistema e verificare la correttezza dei λ

Quando i λ possono variare senza condizioni abbiamo le combinazioni lineari.

Teorema di rappresentazione dei poliedri (di Weil): Dato un poliedro P, esistono un sottoinsieme finito $V = \{v^1, \dots, v^m\}$ di P ed un insieme finito $\mathcal{E} = \{e^1, \dots, e^p\}$ (non necessariamente di P) eventualmente anche vuoti, tali che $P = \text{conv}(V) + \text{cono}(\mathcal{E})$

↓ insieme delle possibili combinazioni convesse

Note: ricordiamo che un poliedro è un sistema di disequazioni lineari ed in particolare l'insieme delle sue soluzioni.

↓

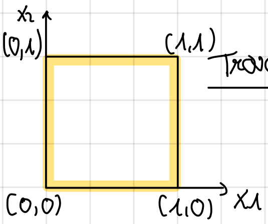
Anche l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari è un poliedro → Ho quindi ottenuto un modello più generale in quanto un sistema di equazioni lineari può diventare un sistema di disequazioni lineari.

Ma cosa rappresenta il + ?

Insieme delle possibili somme di ciascun elemento di $\text{conv}(V)$ e $\text{cono}(\mathcal{E})$ come vettori di $\mathbb{R}^n$

Inoltre, dato un insieme $V = (v^1, \dots v^m)$ ed $\mathcal{E} = (e^1, \dots, e^p)$ è un poliedro → Abbiamo quindi ottenuto che il teorema è un teorema di **se e solo se**

ESEMPIO



$\xrightarrow{\text{Trovo } A \text{ e } b}$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Interseco i 4 semipiani $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{Trovo } V \text{ ed } \mathcal{E}}$ $\left.\begin{matrix} V_1 = (0,0) \\ V_2 = (0,1) \\ V_3 = (1,1) \\ V_4 = (1,0) \end{matrix}\right\}$ 4 vertici

↓

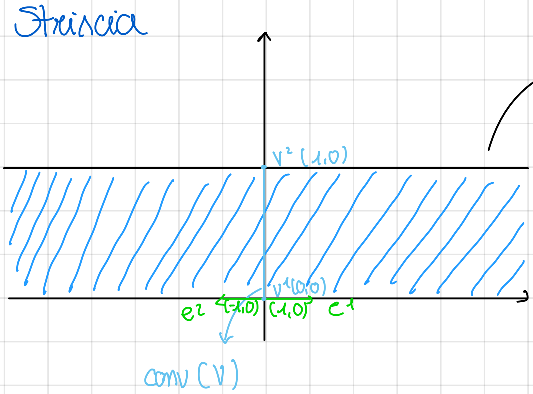
$\text{Con}(V)$ è quindi il quadrato

e quindi, dati i 4 vertici, $\text{cono}(\mathcal{E})$ contiene solo l'origine.
Il cono $\mathcal{E}$ quindi contiene solo $(0,0)$ e questo ⚠ vale per tutti i poliedri limitati. Abbiamo inoltre che la rappresentazione NON è unica in quanto aggiungendo ad esempio $(1/2, 1/2)$ non cambia nulla. Togliendo $(0,0)$ e sostituendolo con $(0, 1/10)$ abbiamo sempre un poliedro ma differente da quello iniziale (trapezio)

I punti insostituibili si chiamano **vertici** e sono sufficienti per costruire il poliedro. Se vengono utilizzati solo questi punti la rappresentazione è **minimale** → V non può non esserci

ESEMPI

Striscia

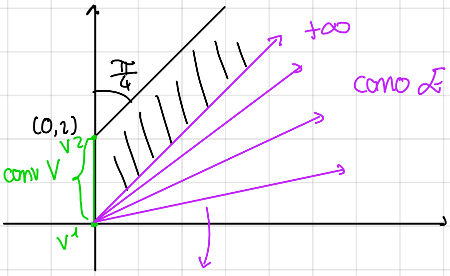


$\mathcal{E}$ un poliedro in quanto è intersezione di semispazi finiti

↓

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow -x_2 \le 0 \wedge x_2 \le 1$

Poliedro 2



poliedro: Disegno
↕
A, b
↕ ↓ : indispensabile
V, E

Elementi di E: direzioni di recessione (poliedro va ad ∞)
↳ se la applico in un punto del poliedro contiene tutta la semiretta

$e^1 = (1,0)$ $e^2 = (1,1)$ $v^1 = (0,0)$ $v^2 = (0,2)$

↳ **somma**: viene preso il cono e viene messo su tutti i punti di conv (V) ed infine ne viene fatta l'unione

Vertice: Punto del poliedro che non si può esprimere come combinazione convessa propria di punti del poliedro

$\boxed{\text{Nessuno dei } \lambda = 1}$

↓

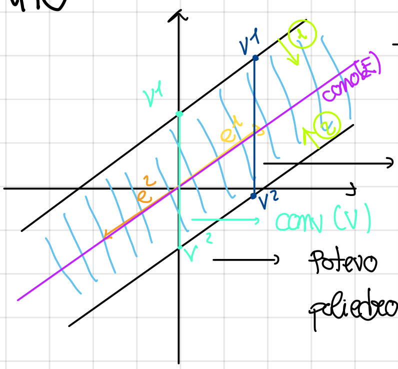
Punto che non sta all'interno di nessun segmento di P

corollario 1: Se il poliedro ha vertici, V è l'insieme dei vertici

corollario 2: Se il poliedro è limitato, esso ha vertici

corollario 3: cono E è vuoto se e solo se il poliedro è limitato

ESEMPIO



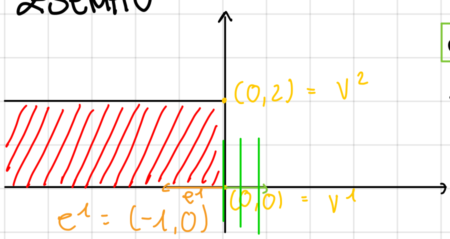
→ Matrice A 2x2: intersezione di 2 semipiani

⚠ ATT: le direzioni sono diverse perché siamo passati dalle combinazioni lineari a quelle coniche / convesse

→ Potevo però spostare v^1 e v^2 in v^1 e v^2 in quanto questo poliedro non ha vertici

Per il **teorema fondamentale della PL**, la soluzione ottima sta su un vertice e quindi andremo a calcolare $cv_i \ \forall i$

ESEMPIO



$\boxed{c = (1,0)}$ → **soluzione ottima**: $c \cdot v_1 = 0$, $c \cdot v_2 = 0$ → coerente con le linee di isocosto

Conto utile

$x \in P \longrightarrow \bar{x} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v^i}_{\text{base convessa}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{p} \mu_j e^j}_{\text{base conica}}$ ove $\lambda_i \in [0,1]$, $\mu_j \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$

perché ho scelto un punto

ho m+p coordinate → **valido per ciascun poliedro**

voglio vedere quanto vale la funzione obiettivo in $\bar{x}$ espresso come in precedenza

$$c\bar{x} = c\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v^i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j e^j\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (c \cdot v^i) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \boxed{(c \cdot e^j)}$$

dato che $\sum \lambda_i = 1$ non può condurre a $+\infty$

≥ 0 per ipotesi

un problema PL fa $+\infty$ se e solo se **uno** dei prodotti scalari $c \cdot e^j$ è positivo. Allora, **in generale poniamo** $c \cdot e^j \leq 0$ → Massimo per $\mu_j = 0$

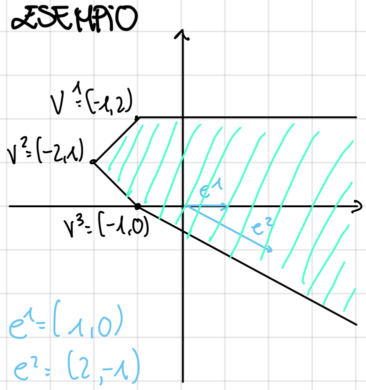
Il massimo dei λ può essere trovato indipendentemente dai μ → funzione separabile

Scriverò quindi il problema come: $\begin{cases} \max \sum \lambda_i (cv^i) \\ \lambda_i \in [0,1] \\ \sum \lambda_i = 1 \end{cases}$ valore più alto tra i cv^i

Avremo quindi $\lambda_1 cv^1 + \lambda_2 cv^2 + \ldots + \lambda_m cv^m \leq \lambda_1 \boxed{cv^k} + \lambda_2 cv^k + \ldots + \lambda_m cv^k = cv^k (\underbrace{\sum \lambda_i}_{1}) = cv^k$

$cv^k \boxed{\leq} \max_{x \in P} \sum \lambda_i cv^i$ → v^k punto del poliedro e quindi la funzione obiettivo è sempre $\leq$ massimo $\Longrightarrow \max_{x \in P} cx = cv^k$ → TEOREMA fondamentale della PL

ESEMPIO



$e^1 = (1,0)$
$e^2 = (2,-1)$

$c = (7,-4)$: Fa $+\infty$ perché $c \cdot e^1 = 7$

$c = (-7,-4)$: L'ottimo in questo caso esiste finito perché $c \cdot e^j \leq 0$

Trovando ↓

$cv^1 = 0$ $\quad \underline{cv^2 = 10}$ $\quad cv^3 = 8$

soluzione ottima $(-2,1)$ con valore ottimo 10

- **FORME STANDARD di PL**

Formato a cui si possono ricondurre **tutti** i problemi di PL

a. Formato primale standard : $\begin{cases} \max \; cx \\ Ax \leq b \end{cases}$

b. Formato duale standard : $\begin{cases} \min \; cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ → I poliedri senza vertici contengono rette. I poliedri in questa forma hanno quindi tutti vertici

5 trucchi ↓

1. Minimo e massimo sono indifferenti tra di loro
2. Posso trasformare $\leq$ in $\geq$ e viceversa
3. Gli $=$ possono diventare $\leq$
4. $2x_1 + 5x_2 \leq 7$ → $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 7 \\ \boxed{x_3 \geq 0} \end{cases}$ → utilizzo una **variabile di scarto**

   fornisce anche indicazioni sull'ammissibilità

   ↓

   Il $\leq$ passa quindi in $=$ aggiungendo uno scarto
5. Dobbiamo imporre la positività alle variabili

↓

$\begin{cases} \max \; x_1 + x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 = 7 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 0 \end{cases}$ ⟶ $\begin{cases} \min \; -x_1 - x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_3 \geq 0 \\ x_1 \leq 0 \end{cases}$ ⟶ ⚠ ATT: Ogni numero è la differenza di 2 positivi

↓

$a = b - c$

⟶ $\begin{cases} \min \; x_1 - (x_4 - x_5) \\ -4x_1 + 5(x_4 - x_5) = 7 \\ -3x_1 + 2(x_4 - x_5) + x_3 = 8 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

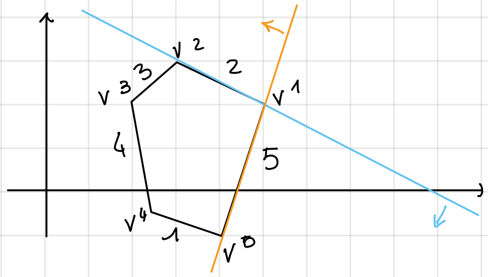
$c = (1, 0, -1, 1)$ in quanto x_2 non esiste

$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

↓

Non importa porre $x_3 \geq 0$: in automatico

- CALCOLO dei VERTICI



$m = 5$
$n = 2$
$p = 0 \longrightarrow$ numero di direzioni di Weil
$k = 5 \longrightarrow$ numero di elementi di V

↓

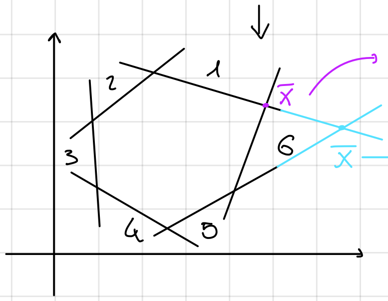
Vertici di un **poliedro primale standard**

↓

Chiamiamo I l'insieme degli indici di riga : $I = \{1, \dots, m\}$
↳ $B \subseteq I$ $|B| = n$: **sottoinsieme di I**
↓ otteniamo
A_B : **sottomatrice** di A ottenuta selezionando gli indici $i \in B$, detta
↓ matrice di base $\longrightarrow$ **det $A_B \neq 0$** : vincoli non paralleli
Dobbiamo risolvere il sistema lineare $A_B \overline{x} = b_B$ e quindi $\boxed{\overline{x} = A_B^{-1} \cdot b_B}$

soluzione di BASE

↓



$B = \{1, 6\}$

$B = \{1, 5\}$: **non ammissibile**
↓
Verifica ammissibilità : si prendono N non di base $(m-n)$, in questo caso $N = \{2, 3, 4, 6\}$, e verifico per questi $A_N \overline{x} \le b_N$

L'**ammissibilità** di una soluzione di base è data da $b_N - A_N(A_B^{-1} b_B) \geq 0$

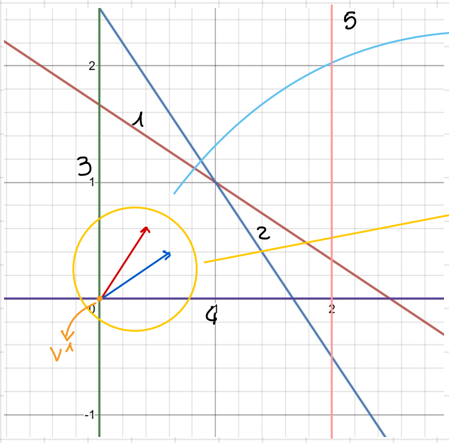
TEOREMA caratterizzazione vertici: Un punto x appartenente al poliedro è un vertice se e solo se esso è una soluzione di base ammissibile

ESEMPIO:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$
$\longrightarrow$ $\boxed{\le}$ 6 soluzioni di base
↳ 2 vincoli non danno sempre una soluzione di base perché il determinante deve essere diverso da 0

↓

Dobbiamo sempre arrivare fino a $\boxed{4}$ perché abbiamo 4 vincoli
↳ $B = \{3, 4\}$ $N = \{1, 2\}$: soluzione di base che genera $\boxed{\overline{x} = (0,0)}$
↓ Più chiaramente

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 5 & 1 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 5 & 2 \\ -x_1 \le 0 & 3 \\ -x_2 \le 0 & 4 \end{cases}$$
$\longrightarrow$ Sono gli **indici della matrice**



Area interna : poliedro

ATT: il gradiente è **sempre ortogonale**

$\longrightarrow$ Una soluzione non ammissibile è $(0, \frac{5}{2})$ generata dalla base $B = \{2, 3\}$

Vincolo aggiunto: soluzione di base $B = \{2, 5\} \longrightarrow \bar{x} = (\frac{5}{3}, 0)$
soluzione di base $B = \{2, 4\} \longrightarrow \bar{x} = (\frac{5}{3}, 0)$

↓ Quindi

Ciascuna soluzione di base può essere generata da più basi differenti

↓

Le soluzioni generate da una sola base sono dette non degeneri, altrimenti sono dette degeneri → Una soluzione ottima potrebbe non essere un vertice.

↓

Per verificarlo basta sostituire il punto nella funzione obiettivo

- **MATLAB: LINPROG**

problemi vincolati →

$$\begin{cases} \min \quad c \cdot x \\ Ax \leq b \\ A_{eq}\, x = b_{eq} \\ \boxed{LB} \leq x \leq \boxed{UB} \end{cases}$$

$c \in \mathbb{R}^n \quad x \in \mathbb{R}^n \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad b \in \mathbb{R}^m$

$A_{eq} \in \mathbb{R}^{p \times n} \quad b_{eq} \in \mathbb{R}^p \quad LB \in \mathbb{R}^m \quad UB \in \mathbb{R}^m$

→ Vincoli di uguaglianza

Lower bound Upper bound → variabili

$$\begin{cases} \min \quad 4x_1 + 5x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 8 \\ 5x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \leq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{inserisco}}$$

$c = [4 \; 0 \; 5]$

$LB = [0 \; ; \underbrace{\;\;}_{-\infty} ; \;]$

$UB = [\underbrace{\;\;}_{+\infty} ; 8 ; \;]$

$b_{eq} = [7]$

$A_{eq} = [5 ; 1]$

$A = [-2 \; -4 \; 0 ; 1 \; 1 \; -1]$

infine: $[x, v] = \text{linprog}(c, A, b, A_{eq}, b_{eq}, LB, UB)$

↓

risultato: soluzione ottima e valore ottimo

- **COME OPERARE IN PRATICA → TEOREMA FONDAMENTALE della PL**

1. $P = \emptyset$? → troppi vincoli
2. $(P) = +\infty$? → Ho dimenticato vincoli $\xrightarrow{\text{verifica}}$ se $c e_j \leq 0$ non accade
3. P ha vertici? → se $x \geq 0$ ho vertici perché per non avere vertici dovrebbe contenere una retta

↓

enunciato: Se sono verificate queste 3 ipotesi, uno dei vertici di P è ottimo

↓ Ma quanti sono i vertici?

$$\begin{array}{cc} & n \\ m & \left(\boxed{A} \right) \end{array} \quad m > n$$

A_B → ho $\binom{m}{n}$ possibilità di creare tale matrice → $\dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}$

↓

L'enumerazione totale è impossibile

TEST di OTTIMALITÀ

↓

teoria della dualità: $(P) \begin{cases} \max \quad cx \\ Ax \leq b \end{cases} \xrightarrow{\text{associo}} (D) \begin{cases} \min \quad y^T \cdot b \\ y \cdot A = c \\ y \geq 0 \end{cases}$ il suo duale

↓ Ad ogni problema di PL primale standard

↓ Ogni problema di PL ha il suo duale

ESEMPIO

$$\begin{cases} \max \quad x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 8 \\ -4x_1 + 5x_2 \leq 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \min \quad 7y_1 + 8y_2 + 3y_3 \\ 3y_1 + 5y_2 - 4y_3 = 1 \\ 2y_1 - 6y_2 + 5y_3 = 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow (y_1 \; y_2 \; y_3) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \max & 4x_1 + 5x_3 \\ 2x_1 + 6x_2 \le 8 \\ 3x_1 + 5x_2 \le -7 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 1 \\ x_3 \le 6 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \min & 8y_1 - 7y_2 + y_3 + 6y_4 \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 = 4 \\ 6y_1 + 5y_2 + 2y_3 = 0 \\ 3y_3 + y_4 = 5 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

⚠ $c = (4 \ 0 \ 5)$ +

$$\underbrace{(y_1 y_2 y_3 y_4)}_{y} \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}^{A}$$

TEOREMA 4 $\longrightarrow$ dualità:

$cx^1 \quad cx^4 \quad cx^2 \quad cx^3 \quad c\bar{x} \quad \bar{y}b \quad y^2b \quad y^1b \quad y^3b$

soluzioni primale — soluzioni duale

Sia $\underbrace{P \ne \emptyset}_{\text{poliedro del primale}}$ e $\underbrace{D \ne \emptyset}_{\text{poliedro del duale}}$ allora

$$\boxed{\max_{x \in P} cx = \min_{y \in D} yb}$$

coincidono i valori

metodo diretto per il calcolo dei vertici di D

$I = \{1, \dots, m\} \longrightarrow$ indici di riga della matrice A

$|B| = n$, $B \subset I$ $\xrightarrow[\text{come}]{A \text{ è partizionata}}$ $A \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ \} m-n \end{matrix}$ (sotto: m) $\Longrightarrow yA \longrightarrow (\boxed{y_B} | \boxed{y_N}) \begin{pmatrix} A_B \\ A_N \end{pmatrix}$ (base / non base)

$y_B A_B + y_N A_N = c$

Cerchiamo i vertici: poniamo $y_N = 0$ e risolviamo $\longrightarrow y_B = cA_B^{-1}$

$\bar{y} = (cA_B^{-1}, 0) \xrightarrow{\text{definizione}}$ Soluzione di **base duale**

TEOREMA:
Un punto $y \in D$ è un vertice se e solo se è una **soluzione di base duale ammissibile**

↓ Esempio

Poliedro duale: $\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 5y_3 + y_4 = 9 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 + 3y_4 = 4 \\ y_i \ge 0 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{forma generale}}$ $\begin{matrix} yA = c \\ y \ge 0 \end{matrix}$

$$(y_1 y_2 y_3 y_4) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \ A_N \longrightarrow \boxed{B = \{2,3\}} \quad N = \{1,4\}$$

↓ Soluzione di base del duale

$\bar{y} = (0, 1, 1, 0)$

Definizione: Se una delle componenti di y_B è 0 la soluzione si dice **degenere**

↓ Esempio

$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + y_3 + 4y_4 = 1 \\ 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 + 7y_4 = 5 \\ y_i \ge 0 \end{cases}$ $\quad B = (1, 4)$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3 \ 2} \\ 1 \ 3 \\ 1 \ 5 \\ \boxed{4 \ 7} \end{pmatrix} \longrightarrow (y_1, 0, 0, y_4) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3y_1 + 4y_4 = 1 \\ 2y_1 + 7y_4 = 5 \end{cases}$$

$y = (-1, 0, 0, 1)$

La soluzione deve avere almeno $m-n$ zeri

↓

Test di ottimalità PRATICO

coppia di problemi primale-duale

$$\begin{cases} \max & cx \\ Ax \le b \end{cases} \qquad \begin{cases} \min & yb \\ yA = c \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Prendo B base $\longrightarrow$

$(cA_B^{-1}, 0) = (y_B, y_N) = \bar{y}$
$A_B^{-1} b_B = \bar{x}$ $\Big\}$ complementari

Conto: calcolo la funzione obiettivo in tali punti

$c \cdot \bar{x} = c A_B^{-1} b_B$ $\qquad$ $\bar{y} \cdot b = (\bar{y}_B, \bar{y}_N)\begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix} = \bar{y}_B b_B + \bar{y}_N b_N = cA_B^{-1} b_B + \cancel{0 b_N} = cA_B^{-1} b_B$

poste a 0: duale complementare

Dato un vertice del poliedro primale, prendo la soluzione complementare, calcolo la funzione obiettivo e mi accorgo che ottengo lo stesso risultato

Se cA_B^{-1} è positivo allora ho l'ottimo: ammissibile

Se abbiamo lo stesso valore e l'ammissibilità allora siamo all'ottimo

Test di ottimalità vertice duale standard

vertice $\in D$, ho B, N : $(y_B, y_N) = (cA_B^{-1}, 0) \geq 0$

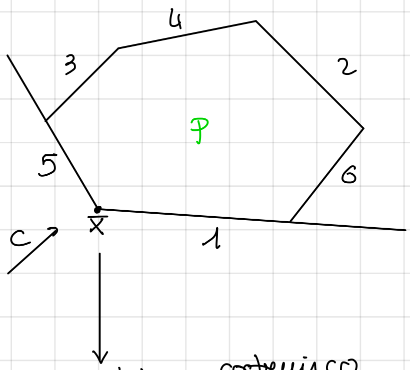
Costruisco la complementare nel primale

$x = A_B^{-1} b_B$, quindi il test diventa $\boxed{A\bar{x} \le b : \begin{cases} A_B \bar{x} \le b_B & 1. \\ A_N \bar{x} \le b_N & 2. \end{cases}}$

1. Vera perché $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ e quindi $\underbrace{A_B \cdot A_B^{-1}}_{I} b_B \le b_B \longrightarrow I b_B \le b_B$: sempre verificato

2. Lo scriviamo come $b_N - A_N(A_B^{-1} b_B) \geq 0$: vincoli non di base devono essere rispettati

- ALGORITMO del SIMPLESSO PRIMALE



$\boxed{\begin{cases} \max \ cx \\ Ax \le b \end{cases}}$

Prendo $\bar{x}$ soluzione di base ammissibile (vertice)

Prendo un poliedro limitato che quindi ha vertici: per il teorema fondamentale della PL almeno uno è soluzione ottima

$\bar{x} = A_B^{-1} b_B \xrightarrow[\text{la complementare}]{\text{costruisco}} \bar{y} = (cA_B^{-1}, 0) \longrightarrow$ Se $cA_B^{-1} \geq 0$ esci in quanto hai trovato una soluzione ottima (test di ottimalità)

caso precedente $B = \{1, 5\}$ $\qquad$ $\bar{y} = (?, 0, 0, 0, ?)$

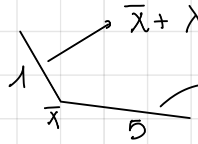
Ma se la soluzione non fosse ottima? Posso muovermi lungo uno spigolo (in numero cc ai vertici) ed arrivare al vertice adiacente: Ma un indice che esce ed uno che entra dalla base $\longrightarrow$ Dal punto di vista computazionale, invertire una matrice cambiando una riga è banale in quanto basta cambiare quella riga anche nell'inversa $\longrightarrow$ Per scegliere lo spigolo si utilizza la direzione ove il gradiente cresce

Definiamo $W = -A_B^{-1}$ $\longrightarrow$ $\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} & [W^1, W^5] \end{array}$: la matrice ha 2 righe e 2 colonne: Facciamo sì che abbia lo stesso nome della base trattata

Equazione dello spigolo: $x(\lambda) = \bar{x} + \lambda W^i$, $\lambda \geq 0$, $i \in B$

$\bar{x} + \lambda W^5$: abbandono il vincolo 1

$\bar{x} + \lambda W^1$: abbandono il vincolo 5



$c \cdot x(\lambda) = c \cdot (\bar{x} + \lambda w^i) = c\bar{x} + \lambda \boxed{c w^i}$ $\longrightarrow$ $c w^i \geq 0$: spigolo in cui scendo ; $c w^i \leq 0$: spigolo in cui salgo } n prodotti scalari

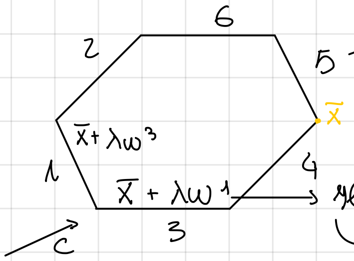
valore funzione obiettivo nel vertice corrente

w^i: una delle colonne dell'opposta dell'inversa e quindi $c w^i = -cA_B^{-1} = -\bar{y}_i$

Dato che non siamo all'ottimo avrò qualche y_i negativa e quindi il prodotto scalare in questi casi sarà positivo

Mi conviene abbandonare tali spigoli: prendo $h = \min\{i \in B : \bar{y}_i < 0\}$ ⚠ minimo indice che sarà l'**indice uscente** della base: $(0, 5, 0, 0, -3)$ → lo tolgo in quanto la funzione qua decresce

ESEMPIO



Qual è il segno di y^5? Abbandonando il vincolo 5 decresce e quindi y^5 è positivo. Ugualmente per y^4 → Siamo all'ottimo

Il segno di y^1 ci dice se la funzione cresce o decresce
↳ deduco che qua è negativo e quindi cresce

Per ottenere l'**indice entrante**: $A x \overset{?}{\leq} b$ $\qquad$ $3\bar{\tau} + \lambda(4)$ $\longrightarrow$ f cresce e devo fermarmi per non uscire dal poliedro

$c\bar{x}$ $\quad$ $\lambda > 0$ $\quad$ $c w^h > 0$

$A_i(\bar{x} + \lambda w^h) \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m$

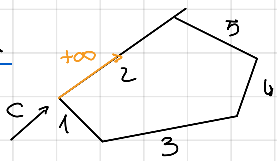
Partiamo da quelle di **base**: $i \in B \rightarrow \boxed{A_i \bar{x}} + \boxed{\lambda A_i w^h} \overset{?}{\leq} \boxed{b_i}$

voglio trovare i λ

sono uguali e quindi il secondo termine deve essere < 0. Ma $A_i w^h$ può fare solo 0 o -1 (prodotto di una riga della matrice per l'opposta dell'inversa). → **Verificata** $\forall \lambda$

Vediamo ora quelli **non di base**: $A_i \bar{x} \leq b_i \quad , i \in N$
↳ il vincolo deve essere verificato per i vincoli non di base

Se $A_i w^h \leq 0 \quad \forall i \in N$ andrà a $+\infty$ e quindi **uscita**:

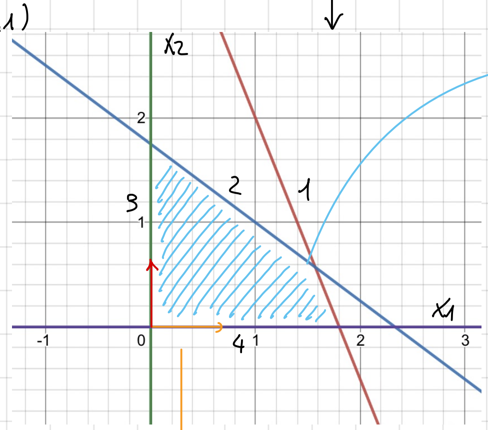


Se $A_i w^h > 0$ $\xrightarrow{\text{esempio}}$ $22 + \lambda \cdot 2 \overset{?}{\leq} 25$ $\longrightarrow$ trovo λ
↳ Massimo: $\frac{3}{2}$

Rapporti del simplesso primale: $r_i = \dfrac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i w^h}$ $\qquad$ $i \in N$, $A_i w^h > 0$: vanno calcolati tutti

Al massimo mi posso spostare di $\min r_i : K$, che quindi costituirà l'**indice entrante**

$$\begin{cases} \max & x_1+x_2 \\ & 5x_1+2x_2 \le 9 \\ & 3x_1+4x_2 \le 7 \\ & -x_1 \le 0 \\ & -x_2 \le 0 \end{cases}$$



$B = \{3,4\} \longrightarrow \bar{x} = (0,0) : A_B^{-1} b_B$

$A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\bar{y} = (cA_B^{-1}, 0) \longrightarrow \bar{y} = (0, 0, \boxed{-1}, \boxed{-1})$

Non siamo all'ottimo perché escono in entrambi gli spigoli

↳ $h=3$

$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow W^h = W^3 = (1,0)$

Abbandono 3 e seguo questa freccia: Devo fare $A_i W^3$ per gli indici non di base e quindi $A_1 W^3$ e $A_2 W^3$

$$A_1W^3 = (5\ 2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 5 \qquad A_2W^3 = (3\ 4)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 3 \longrightarrow r_1 = \frac{b_1 - A_1\bar{x}}{5} = \frac{9}{5} \qquad r_2 = \frac{b_2 - A_2\bar{x}}{3} = \frac{7}{3}$$

$K=1$: minimo dei rapporti

Proviamo con $B = \{1,4\}$ $\qquad \bar{x} = \left(\frac{9}{5}, 0\right)$

$$A_B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{y} = \left(\frac{1}{5}, 0, 0, -\frac{3}{5}\right) \longrightarrow h=4$$

$$W = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow W^4 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2W^4 = (3\ 4)\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\1\end{pmatrix} = \frac{14}{5} \qquad A_3W^4 = (-1\ 0)\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\1\end{pmatrix} = \frac{2}{5}$$

$$r_2 = \frac{b_2 - A_2\bar{x}}{\frac{14}{5}} = \frac{8}{14} \qquad r_3 = \frac{b_3 - A_3\bar{x}}{\frac{2}{5}} = \frac{9}{2}$$

$K=2$: entrante

- **SIMPLESSO DUALE**

Sia $\bar{y} \in D$ soluzione di base ammissibile $\longrightarrow$ Poliedro Duale: $\begin{cases} \min\ yb \\ yA = c \\ y \ge 0 \end{cases}$ generato da B: $A_B \longrightarrow \bar{y} = (cA_B^{-1}, 0)$

Passo 1: Calcoliamo la complementare $\longrightarrow \bar{x} = A_B^{-1} b_B$, se $A_N(A_B^{-1}b_B) \le b_N$ allora esci perché ottimo

Altrimenti $\exists\, j \in N : A_j(A_B^{-1}b_B) > b_j$ $\left(b_j - A_j(A_B^{-1}b_B) < 0\right)$. Sia $k \in N$ la prima riga violata (regola anticiclo di Bland), scegliamo questo come **indice entrante**.

Passo 2 (indice uscente): Sia $W = -A_B^{-1}$ ed A_k la riga di A individuata al passo sopra.
Costruiamo adesso i **rapporti**: calcoliamo i prodotti scalari $A_k W^i$, $i \in B$ e prendiamo quelli negativi ($A_k W^i < 0$) perché se $A_k W^i \ge 0$ $\forall i \in B$ allora $\min = -\infty$.
I rapporti saranno dati da $r_i = \frac{-\bar{y}_i}{A_k W^i} \longrightarrow$ se 0: caso degenere e sia h l'indice in cui tale minimo è raggiunto $\longrightarrow$ **h è l'indice uscente**: $\min_{\substack{A_k W^i < 0 \\ i \in B}} \left\{ r_i = \frac{-\bar{y}_i}{A_k W^i} \right\}$: 2 rapporti possono essere uguali

Farò quindi m prodotti scalari (cardinalità di B) ed al più m rapporti perché qualche $A_k W^i$ potrebbe essere ≥ 0

- **REGOLE ANTICICLO di BLEND**

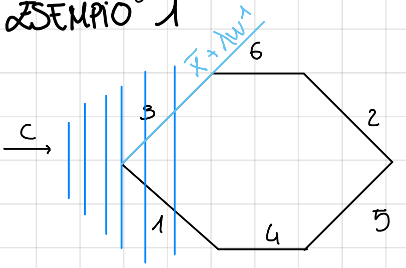
simplesso primale

1. Fra tutti gli indici i per cui y_i è negativo, prendo il primo
2. Fra tutti i rapporti prendo il minimo ma in caso di parità di minimo dei rapporti prendo il primo degli indici per cui viene raggiunto il minimo

simplesso duale

1. Si prende un indice per cui la primale non è ammissibile (indice di riga violata). Questo è l'indice entrante. Se ve ne è più di uno, si prende il primo.
2. Si calcolano i rapporti del simplesso duale, si prende il minimo di tali rapporti e se è raggiunto in più indici diversi si prende il primo.

ESEMPIO 1



Basi di partenza possibili (alcune): $\{2,6\}$, $\boxed{\{1,3\}}$ È ottima?

Per vedere il segno tracciamo le linee di isocosto. Esse cercano lungo entrambi gli spigoli e quindi sia y_1 che y_3 sono negative

Passo successivo: scelta la base $\{3,6\}$ per le regole anticiclo di Bland il simplesso primale calcola 4 prodotti scalari: $A_2W^1, A_4W^1, A_5W^1, A_6W^1$ avendo $h=1$ e gli altri indici non di base. Avrò al massimo 4 rapporti perché scarto quelli negativi. Ci spostiamo lungo la semiretta. Questa non esce a causa dei vincoli 3, 1, 4, 5 e quindi i rapporti saranno negativi. Può uscire invece a causa dei vincoli 2 e 6 ed avrò quindi 2 rapporti e $K=6$

ESEMPIO 2

$$\begin{cases} \min\ 3y_1+4y_2+y_3+2y_4+5y_5 \\ 2y_1+3y_2+4y_3+2y_4+y_5=4 \\ 5y_1+y_2+3y_3+y_4+2y_5=3 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

$\boxed{B=\{2,5\}} \longrightarrow$ Base perché $\det \neq 0$

$c=(4\ \ 3)$

$$b=\begin{pmatrix}3\\4\\1\\2\\5\end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix}2&5\\ \boxed{3\ \ 1}\\4&3\\2&1\\ \boxed{1\ \ 2}\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases}3y_2+y_5=4\\ y_2+2y_5=3\end{cases}$$

$\downarrow$

$\bar{y}=(0,1,0,0,1) \rightarrow f.o.=9$

Calcoliamo $\bar{X}$: $\begin{cases}3x_1+x_2=4\\ x_1+2x_2=5\end{cases}$ $\quad A_B=\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}$ $\quad A_B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{11}{5}\end{pmatrix}=\bar{X}$

Avrò poi $A_N=\begin{pmatrix}2&5\\4&3\\3&1\end{pmatrix}$ $\quad b_N=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}2&5\\4&3\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{11}{5}\end{pmatrix} \overset{?}{\leq} \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \longrightarrow \frac{6}{5}+11 \leq 3$? NO

$\downarrow$

$K=1$ (indice entrante)

$A_1=(2\ \ 5)$ $\quad W=\begin{array}{c|cc} & W^2 & W^5 \\ \hline 2 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 5 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\end{array} \longrightarrow A_1W^1=\frac{1}{5}$

$A_1W^5=-\frac{13}{5} \longrightarrow h=5 \longrightarrow B_{new}=\{1,2\}$

Passo 2 con Bnew

$A=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases}2y_1+3y_2=4\\5y_1+y_2=3\end{cases} \longrightarrow$ Calcolo di $\bar{X}$: $\begin{cases}2x_1+5x_2=3\\3x_1+x_2=4\end{cases}$

A_B^{-1}: $\det(A)=2-15=-13 \longrightarrow A_B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{13}&\frac{5}{13}\\\frac{3}{13}&-\frac{2}{13}\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}-\frac{1}{13}&\frac{5}{13}\\\frac{3}{13}&-\frac{2}{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{17}{13}\\\frac{1}{13}\end{pmatrix}=\bar{X}$

$$A_N = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{17}{13} \\ \frac{1}{13} \end{pmatrix} \overset{?}{\leq} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. $4 \cdot \frac{17}{13} + 3 \cdot \frac{1}{13} \not\leq 1 \longrightarrow$ indice entrante: 1

$$A_1 = (2\ 5) \quad W = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{-3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow A_1 W^1 = \frac{2}{13} - \frac{15}{13} = -1$$: indice uscente: 1 ?

ESEMPIO 3

$$\begin{cases} \max\ 7x_1 + 2x_2 \\ 12x_1 + 5x_2 \leq 48 \\ x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \quad \bar{x} = (4,0) \longrightarrow \begin{cases} \max\ 7x_1 + 2x_2 \\ 12x_1 + 5x_2 \leq 48 \ = \\ x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \ = \end{cases}$$

$B = \{1,4\}$

$$A_B = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{y} = CA_B^{-1} = (7\ 2)\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(\frac{7}{12}, \frac{11}{12}\right) \longrightarrow \bar{y} = \left(\frac{7}{12}, 0, 0, \frac{11}{12}\right)$$

Quella di la soluzione è ammissibile e quindi siamo all'ottimo

Nopica

$$\begin{cases} \min\ -7x_1 - 2x_2 \\ 12x_1 + 5x_2 + x_3 = 48 \\ x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \bar{x} = (4,0,0,11)$$

: In questo modo è lo stesso problema di prima

Per verificare l'ottimalità

$B = \{1,4\}$, $N = \{2,3\}$

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 5 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_B = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b_B = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} \frac{-7}{12} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2\bar{x} \leq b_2 ? \longrightarrow (5\ 5)\begin{pmatrix} \frac{-7}{12} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-35}{12} \leq 2 \ \checkmark$$

$$(1\ 0)\begin{pmatrix} \frac{-7}{12} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-7}{12} \leq 0 \ \checkmark$$

- **PROBLEMA AUSILIARIO RICERCA PRIMO VERTICE**

Riguarda sia i poliedri primali che duali e risolve il problema della verifica di poliedro vuoto

caso duale

$$D \begin{cases} y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4 + 2y_5 = 6 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 + 3y_4 + 5y_5 = 6 \\ y_i \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{variabili fittizie}} (DA) \begin{cases} \min\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4 + 2y_5 + \varepsilon_1 = 6 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 + 3y_4 + 5y_5 + \varepsilon_2 = 6 \\ y_i \geq 0,\ \varepsilon_i \geq 0 \end{cases}$$

tante quante sono le equazioni

VDA: valore ottimo duale aux.

TEOREMA 7: Se VDA $= 0$, allora D è non vuoto, se VDA è strettamente positivo allora D è vuoto. $\longrightarrow$ Non può essere < 0 perché somma di variabili positive. Inoltre il duale ausiliario è sempre non vuoto perché ha sempre una soluzione ammissibile (nel caso precedente, $y_i = 0$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 6$). Nel caso in cui avessi avuto un'equazione con termine noto negativo è sufficiente moltiplicare per -1. $\longrightarrow$ Ho soddisfatto tutti i casi, ma come faccio a trovare il vertice di partenza? $\longrightarrow$ Risolvo il duale ausiliario con il **simplesso duale** utilizzando la soluzione di base detta precedentemente ($y_i = 0$, $\varepsilon_i > 0$). Questa è di base perché ha il giusto numero di zeri, i restanti termini positivi e la matrice che individua ε_i è non singolare

$\downarrow$ caso precedente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ continuo enunciato

In più la soluzione ottima di DA ("depurata" dalle ε, ottenuta togliendole) è il vertice di partenza del duale D. $\longrightarrow$ Le ε all'ottimo valgono 0 e quindi possono essere tolte. La prima base comprende le ε e poi devono uscire tutte fino eventualmente ad avere il poliedro non vuoto

modello

$$D \begin{cases} yA = C \\ y \geq 0 \end{cases} \longrightarrow (DA) \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \\ yA + \varepsilon \cdot I = C \\ y, \varepsilon \geq 0 \end{cases} \longleftrightarrow (y, \varepsilon) \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} = C$$

$\downarrow$

La soluzione di base ha m zeri

Risoluzione del problema precedente

$$\begin{cases} \min \ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4 + 2y_5 + \varepsilon_1 = 6 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 + 3y_4 + 5y_5 + \varepsilon_2 = 6 \\ y_i \geq 0, \ \varepsilon_i \geq 0 \end{cases}$$

$(y, \varepsilon) = (0,0,0,0,0,6,6)$

Soluzione di base di partenza: $(\underbrace{0}_{m}, \underbrace{C}_{n}) = (\bar{y}, \bar{\varepsilon})$

Simplesso duale: $B = \{6, 7\}$

indice entrante $\longrightarrow$ primale associato

$$\begin{cases} \max \ 6x_1 + 6x_2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 0 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 0 \\ 4x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 + 3x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 0 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \end{cases} \longrightarrow \bar{x} = (1, 1)$$

$\downarrow$ Sostituisco nella 1

$1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \leq 0$: Violata, quindi $K = 1$

indice uscente $\longrightarrow A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e quindi $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, da cui $W = \begin{array}{c} \begin{matrix} w^6 & w^7 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$

n prodotti scalari: $A_1 w_6 = (1 \ 3) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \longrightarrow r_6 = 6$

$A_1 w_7 \ (1 \ 3) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -3 \longrightarrow r_7 = 2$

$\downarrow$

$h = 7$

Ho quindi ottenuto $B_{new} = \{1, 6\}$

$\downarrow$ Passo successivo

$\bar{x} = \left(1 \ -\frac{1}{3}\right) \longrightarrow K = 2$

$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow W = \begin{array}{c} \begin{matrix} w^1 & w^6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}$

$A_2 w^1 = -\frac{2}{3}$

$A_2 w^6 = -\frac{7}{3}$

$r_1 = \frac{-2}{-\frac{2}{3}} = 3 \longrightarrow B_{new} = \{1, 2\}$

$r_6 = \frac{-4}{-\frac{7}{3}} = \frac{12}{7}$

$\downarrow$

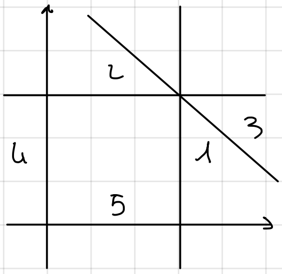
$(\bar{y}, \bar{\varepsilon}) = (2, 0, 0, 0, 0, 4, 0)$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 = 6 \\ 3y_1 + 2y_2 = 6 \end{cases} \longrightarrow \bar{y} = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}\right)$$, che è la soluzione ottima di (DA)

in quanto $(\bar{y}, \bar{\varepsilon}) = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, 0,0,0,0,0\right) \xrightarrow{\text{depurando}} \underbrace{\bar{y} = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, 0,0,0\right)}$

soluzione di base ammissibile di D (da cui parto col simplesso)

caso degenere



$$\begin{cases} \max\ x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{duale}} \begin{cases} \min\ y_1 + y_2 + 2y_3 \\ y_1 + y_3 - y_4 = 1 \\ y_2 + y_3 - y_5 = 2 \\ y_i \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \bar{y} = (1\ 1\ 0\ 0)$$

$B = \{1, 2\} \longrightarrow \bar{x} = (1, 1)$

Scegliamo adesso $B = \{1\ 3\} \xrightarrow{\text{da cui avrò}} \bar{x} = (1, 1)$ e $\bar{y} = (-1, 0, 2, 0, 0)$

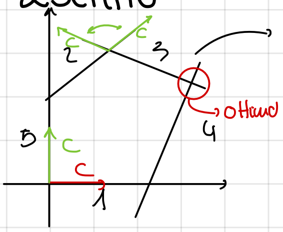
se $B = \{2, 3\} \xrightarrow{\text{da cui}} \bar{x} = (1\ 1)$ e $y = (0\ 1\ 1\ 0\ 0) \longrightarrow$ stesso valore della f.o. ma **non ammissibile**

degenere: è generato da più di una base $\longrightarrow$ Partendo dalla base $\{1\ 3\}$ il simplesso **non si accorge che è all'ottimo** $\longrightarrow$ **Passo degenere**: nuova base $\{2\ 3\}$ e si ferma perché base duale positiva: ottimo

non è necessario per ottimalità ma condizione di STOP: Bland

TEOREMA 6: L'algoritmo del simplesso è corretto e termina in un numero finito di passi $\longrightarrow$ Nel caso degenere è vero per Bland e nell'altro caso non cicla tra vertici perché la funzione obiettivo aumenta sempre: $cx(\lambda) = c\bar{x} + \lambda c w^h = c\bar{x} - \lambda \bar{y}_h$ $\longrightarrow$ aumenta di $|\lambda \bar{y}_h|$ ove $\lambda = \min r_i$. La correttezza inoltre è garantita dal teorema della dualità e dal conto di quando contiene le rette. Infine abbiamo che il simplesso si sposta di base ammissibile in base ammissibile.

ESEMPIO



La base $\{2\ 3\}$ può essere duale ammissibile? Se fosse duale ammissibile e quindi se c fosse messo in questo modo saremmo all'ottimo. Si ha quindi non ammissibilità

↓

Sono quindi ammissibili quelli del cono verde.

- MODELLI di PROBLEMI

1. PROBLEMA di PRODUZIONE

Un'azienda deve produrre 2 tipi di tessuto. Per produrre un quintale del primo tessuto servono 28 kg di lana e 7 kg di cotone. Per il secondo tipo servono 7 kg di lana e 14 kg di cotone. Per produrre i tessuti servono 3 ore di lavoro di un operaio specializzato per ogni quintale da produrre. Ogni settimana sono disponibili 168 kg di lana, 84 kg di cotone e 42 ore di lavoro. Siano 20 e 10 euro i guadagni (per quintale) per il tessuto 1 e per il tessuto 2.

x_1 = primo tessuto
x_2 = secondo tessuto $\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{cases} \max\ 20x_1 + 10x_2 \\ 28x_1 + 7x_2 \leq 168 \\ 7x_1 + 14x_2 \leq 84 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 42 \\ x_1, x_2 \geq 0 \longrightarrow -x_1, -x_2 \leq 0 \end{cases}}$$

Soluzione ottima (Matlab): $(36/7, 24/7)$ con un guadagno di 137,14 €

Se avessi prodotto vestiti, non avrei potuto avere frazioni $\longrightarrow$ programmazione lineare intera

2. PROBLEMA di ASSEGNAMENTO

Date n persone ed n lavori. Ogni lavoro deve essere fatto da esattamente una persona. Ogni persona può fare al più un lavoro. Il costo della persona $J = 1, \dots, n$ che fa il lavoro $i = 1, \dots, n$ è c_{iJ}. Vogliamo trovare un assegnamento di costo minimo. Possiamo associare una variabile 0-1 x_{iJ} ad ogni possibile assegnamento (1 se il lavoro i è svolto dalla persona J, 0 altrimenti).

Tabella di costi: ↓ Dati

1	2	3
4	5	6
7	8	9

$\longrightarrow$ Soluzione ammissibile: do il lavoro 1 alla persona 1, il lavoro 2 alla persona 2 ed il lavoro 3 alla persona 3 $\longrightarrow$ Spendo 15.000€

Posso fare $n!$ assegnamenti: qualunque permutazione di numeri da 1 a 10 è un assegnamento

Variabile x_{iJ}: rende ogni assegnamento una sequenza di 0 ed 1

Posso vedere la matrice iniziale come un vettore e fare il prodotto scalare della variabile x ottenendo di nuovo la funzione cx

Sospendiamo questa ipotesi e consideriamo un **assegnamento cooperativo** in cui ciascuna persona può eseguire anche soltanto parti di un lavoro.

Vincoli: faccio $x_{11} + x_{12} + x_{13}$, quindi fisso il lavoro e lo faccio svolgere a tutte le persone $\longrightarrow$ la somma deve fare 1

Ugualmente anche per x_{2i} e x_{3J}

Dobbiamo inoltre **aggiungere** altri vincoli perché ciascuna persona deve fare al più un lavoro

$$\begin{cases} \min(x_{11}+2x_{12}+3x_{13}+4x_{21}+5x_{22}+6x_{23}+7x_{31}+8x_{32}+9x_{33}) \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}=1 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=1 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=1 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=1 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=1 \\ 0 \le x_{ij} \le 1 \end{cases}$$

↓ Dopo averlo trasformato in primale standard

$c = (-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9)$: Ho dovuto cambiare il problema da minimo a massimo

A ha 30 righe : Ho dovuto sdoppiare tutte le equazioni $(6 \to 12)$, ho 9 disequazioni $x \geq 0$ e 9 disequazioni $x \leq 1$. Sommando ho ottenuto 30 disequazioni

↓

Matrice 30x9

IN GENERALE

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$+$

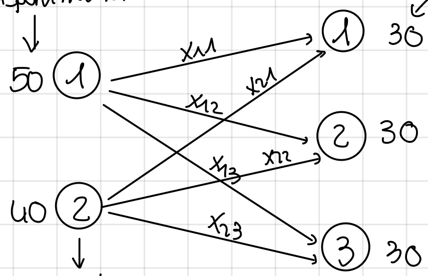
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1$$

NON COOPERATIVO: $+\ x_{ij} \in \{0,1\}$ oppure COOPERATIVO: $x_{ij} \in [0,1]$

↳ $4n+2n^2$ vincoli

3. PROBLEMA di TRASPORTO

Disponibilità



Richieste → Se disponibilità < richieste: vuoto
Se disponibilità > richieste : stoccaggio

Depositi

Luoghi di "destinazione" / "raccolta"

Caso di disponibilità = richiesta

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 5 & 7 & 12 \end{array}$$ → Tabella di costi per unità di prodotto

↓

x_{ij} = dal deposito i al luogo di raccolta j

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{matrix}$$ → Soluzione ammissibile : $x = (30, 20, 0, 0, 10, 30)$

↓

Spesa : $30 \cdot 6 + 20 \cdot 9 + 10 \cdot 7 + 30 \cdot 12$

$$\begin{cases} \min\ 6x_{11}+8x_{12}+4x_{13}+5x_{21}+9x_{22}+7x_{23} \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}=50 & (\leq) \text{: altro problema} \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=40 & (\leq) \\ x_{11}+x_{21}=30 & (\geq) \\ x_{12}+x_{22}=30 & (\geq) \\ x_{13}+x_{23}=30 & (\geq) \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

```
Optimal solution found.

x =

     0
    20
    30
    30
    10
     0


v =

   520
```

Nel formato duale: $(x_{11}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{21}\ x_{22}\ x_{23})$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ Qua scelgo indici di riga

↓

X di Gianmaria $= (30\ 0\ 20\ 10\ 0\ 30)$ $\longrightarrow$ $m-n$ zeri : $6-5=1$, quindi è degenere ed essendo >0 è ammissibile : vertice

↓

$B = \{1\ 2\ 3\ 4\ 6\}$ $\quad N = \{5\}$

Ma se non avessi avuto Matlab?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad x = (30\ 0\ 20\ 10\ 0\ 30)$, $B = \{1\ 2\ 3\ 4\ 6\}$, $N = \{5\}$

↓ Troviamo la complementare

$\bar{x} = A_B^{-1} b_B \longrightarrow A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e dovevo avere $A_N \bar{x} \leq b_N$

4 casi possibile $\longrightarrow$ data B:

↓

A_B

$(cA_B^{-1}, 0)$ $\quad$ $(A_B^{-1} b_B)$

$\bar{y}$ $\quad$ $\bar{x}$

Verifico sempre questo

a.	$\bar{x}, \bar{y}$	$\longrightarrow$ A A	: Ho l'ottimo
b.	$\bar{x}, \bar{y}$	$\longrightarrow$ NA NA	: Base inutile
c.	$\bar{x}, \bar{y}$	$\longrightarrow$ A NA	Devo cambiare vertice perché non posso testarlo nel formato opposto
d.	$\bar{x}, \bar{y}$	$\longrightarrow$ NA A	

⚠ ATTENZIONE

$$\begin{cases} \min & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ & 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ & x_i \geq 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{standard}]{\text{primale}} \begin{cases} \max & -3x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ & -4x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -8 \\ & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ & -3x_1 - x_2 - 3x_3 \leq -9 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \\ & -x_3 \leq 0 \end{cases}$$

↓ Duale di

$$\begin{cases} \max & 8x_1 + 9x_2 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 4 \end{cases}$$

↓

Stesso problema del precedente

↓ Dualizzando

$$\begin{cases} \min & 8y_1 - 8y_2 + 9y_3 - 9y_4 \\ & 4y_1 - 4y_2 + 3y_3 - 3y_4 - y_5 = -3 \\ & 2y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 - y_6 = -5 \\ & y_1 - y_2 + 3y_3 - 3y_4 - y_7 = -4 \\ & y_i \geq 0 \end{cases}$$

↓

Possiamo vedere che diventa il primale di cui blu è il duale

MODELLO GENERALE

m luoghi di produzione collegati con n luoghi di raccolta. Sono note le capacità produttive O_i, $i=1,\dots,m$, le domande d_J, $J=1,\dots,n$ ed il costo di trasporto da ogni luogo di produzione ad ogni luogo di destinazione: C_{iJ}.
Si indica con X_{iJ} la quantità di merce da trasportare da i a J. Fissando J, sommando X_{iJ} si ottiene la merce che arriva al luogo J. Fissando i si ottiene invece la quantità di merce spedita dal luogo di produzione i.

↓ **MODELLO MATEMATICO**

$$\boxed{\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{J=1}^{n} C_{iJ} X_{iJ} \\ \sum_{i=1}^{m} X_{iJ} \geq d_J & J=1,\dots,n \\ \sum_{J=1}^{n} X_{iJ} \leq O_i & i=1,\dots,m \\ X_{iJ} \geq 0 \end{cases}}$$

⟶ Se mettiamo l'uguale al posto di $\leq$ / $\geq$, la soluzione non cambia qualitativamente
↓
Inserisco infatti un deposito fittizio a cui dare le eccedenze a **costo zero**

TEOREMA 5: Siano O_i e d_i interi (richieste e disponibilità). Il poliedro del trasporto ed il poliedro dell'assegnamento hanno vertici a componenti intere
↓
Esiste almeno una soluzione ottima a componenti intere
↳ Trasporto di beni indivisibili e assegnamento non cooperativo sono problemi di PL
↓
Il determinante della matrice di base è 1 o −1

ESEMPIO

	A	B
1	4	3
2	4	3

$X = (1\,0\,0\,1) = 7$

$X = \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right) = 7$ ⟶ Soluzione ottima ma non intera
↓
⚠ Il segmento che congiunge 2 ottimi è ottimo
↓
x^1 ottimo, x^2 ottimo : $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ ottimo $\forall \lambda \in [0,1]$

Programmazione lineare intera

- RELAZIONI TRA PLI e PL

Consideriamo un problema di PLI in formato standard:
$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ Ax \le b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \quad (P)$$

Il problema di PL $\begin{cases} \max\ c^T x \\ Ax \le b \end{cases}$ è detto **rilassamento continuo** del problema (P)
↳ allargo la regione ammissibile

TEOREMA: a. Il valore ottimo di (RC) è una valutazione superiore per il valore ottimo di (P)

b. Se una soluzione ottima di (RC) è ammissibile per (P), quindi è intera, allora è ottima anche per (P) → costituisce anche una valutazione inferiore e quindi chiude il gap
↓
Già visto nel problema dell'assegnamento perché i vertici del poliedro sono interi

↓
Per risolvere (P), è sufficiente risolvere (RC) ed arrotondare la soluzione? NO

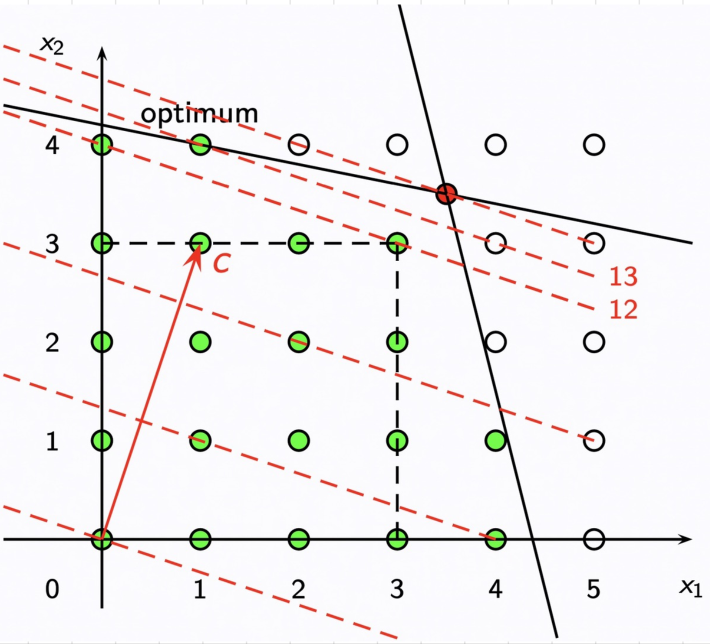
$$\begin{cases} \max\ x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 5x_2 \le 21 \\ 8x_1 + 2x_2 \le 35 \\ x \ge 0 \\ x \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

$\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ ottima per (RC)

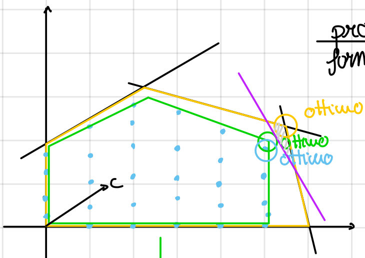
arrotondamento → (3, 3)

(3, 3) non é ottima per ($\mathcal{P}$)

(1, 4) é ottima per ($\mathcal{P}$)



- ALGORITMO di RIDUZIONE del GAP



problema PLI formato standard → $\begin{cases} \max\ cx \\ Ax \le b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \xrightarrow[\text{continuo}]{\text{rilassato}} \begin{cases} \max\ cx \\ Ax \le b \end{cases}$

$V_{PLI} \le V_{PL}$

Reg. ammissibile: $\{Ax \le b : x \in \mathbb{Z}^n\}$ oppure $S = P \cap \mathbb{Z}^n$ $\qquad P = \{Ax \le b\}$

Voglio trovare il più piccolo poliedro che contiene S ⟶ è conv (S) assumendo S limitato ⟶ $\begin{cases} \max\ cx \\ x \in \text{conv}\, S \end{cases}$ ⟶ $V_{\text{conv}S}$ che soddisfa $V_S \le V_{\text{conv}\,S} \le V_P$

Abbiamo fatto un rilassamento e quindi abbiamo allargato la regione

TEOREMA a: (di equivalenza tra PL e PLI) Dato P intero e A, b interi (razionali). Abbiamo che $\underbrace{V_S}_{PLI} = \underbrace{V_{\text{conv}\,S}}_{PL}$
↓
La difficoltà consiste nel trovare il poliedro conv S (esponenziale)

Per ridurre il gap si inseriscono vincoli nel problema di PL in modo da far abbassare la valutazione superiore $\longrightarrow \gamma \cdot x \leq \gamma_0$. Un vincolo aggiuntivo, per essere corretto, deve soddisfare $\gamma x \leq \gamma_0 \ \forall x \in S$ perché **non deve togliere punti di S** $\longrightarrow$ **Disuguaglianza valida**. Inoltre, sarebbe ottimo se il vincolo escludesse l'ottimo del rilassato continuo abbassando quindi la valutazione superiore $\longrightarrow \boxed{\gamma \cdot x_{RC} > \gamma_0}$

Le disuguaglianze valide che soddisfano questa proprietà si chiamano piani di taglio

Costruzione dei piani di taglio **di Gomory** $\longrightarrow$ STOP quando $x_{RC\,NEW}$ è a comp. intere

$\begin{cases} \min\ cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$

Sia x_{RC} l'ottimo del rilassato continuo
Sia A_B la base ottima
Sia $(x_{RC})_r$ una componente frazionaria di $x_{RC} \longrightarrow$ ce n'è sicuramente una perché se fossero tutte intere sarebbe la soluzione ottima

parte frazionaria: $\{a\} \stackrel{\Delta}{=} a - \lfloor a \rfloor \longrightarrow$ distanza da intero minore più vicino

Costruiamo $\tilde{A} = A_B^{-1} A_N$

TEOREMA 10: $\boxed{\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\}\, x_j \geq \{(x_{RC})_r\}}$ è il piano di taglio di Gomory

termine noto: parte frazionaria componente r-esima dell'ottimo del rilassato continuo ove se era la componente frazionaria

ESEMPIO

$x_{RC} = (0, 3, 0, \frac{7}{3}, 0, 0) \longrightarrow \{(x_{RC})_r\} = \frac{1}{3}$

${}_{4}^{2}[\ A_B^{-1}\ ]\quad [\ A_N\ ] \longrightarrow \tilde{A} = {}_{4}^{2}[\ \tilde{a}_{ij}\ ] : 2 \times 4$

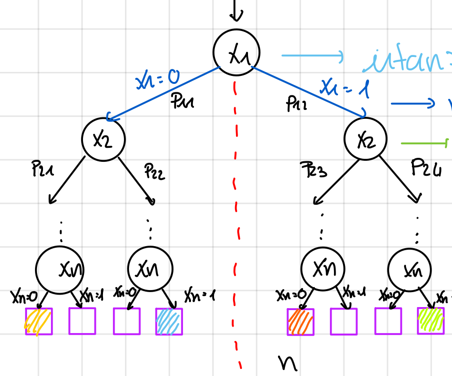
Piano di taglio: $\{\tilde{a}_{41}\} \cdot x_1 + \{\tilde{a}_{43}\} \cdot x_3 + \{\tilde{a}_{45}\} \cdot x_5 + \{\tilde{a}_{46}\} \cdot x_6 \geq \frac{1}{3}$

- **ALGORITMO BRANCH AND BOUND**

$\boxed{\begin{cases} \min\ cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \{0,1\} \end{cases}}_a \longrightarrow$ Abbiamo a disposizione $[V_I, V_S]$

Rilassamento sol. ammissibile con metodi greedy

L'algoritmo si basa sull'esplorazione dell'albero di enumerazione totale



$\longrightarrow$ istanziamo la prima variabile (casuale)
$\longrightarrow$ valori che può assumere x_1
$\longrightarrow$ seconda variabile istanziata

$\longrightarrow$ foglie: 2^n

Quadrati: vettori in $\mathbb{R}^n \xrightarrow{es} (0\ 0 \dots 0)$
Una delle foglie è la soluzione ottima del problema: è possibile che ce ne sia più di una
Altre possono essere soluzioni ammissibili
Altre possono essere soluzioni non ammissibili
Bound: ho a disposizione $[V_I, V_S]$
Branch: significa "potare" l'albero $\longrightarrow$ l'algoritmo costruisce una forbice: mi dice che ad un certo punto posso tagliare, ovvero non c'è, nel sottoalbero, una soluzione migliore di quella corrente: è l'attuale **valutazione superiore**

Chiamiamo ogni ramo P_{ij} → componente j-esima piano: in totale in un piano ci sono 2^i componenti
(numero piano)

P_{ij} rappresenta un problema di P_{1i} ed in particolare il problema a. ove alcune variabili sono state fissate con un certo valore → l'albero va visitato tutto per trovare l'ottimo in quanto le foglie rappresentano il valore della funzione obiettivo corrispondente al vettore x dato. → voglio tagliare per non fare tutta l'enumerazione

↓ esempio

se taglio P_{11} tolgo (visito implicitamente) 2^{n-1} casi di enumerazione

REGOLE di TAGLIO

notazione

VI (P) : valutatore inferiore di a.

VS (P) : valutazione superiore di a.

VI (P_{ij}) : valutatore inferiore problema con i variabili fissate

↓

VI (P_{11}): numero, precisamente il valore del K-albero di costo minimo in cui non posso prendere l'arco P_{12}

VI (P_{12}): K-albero di costo minimo in cui sono obbligato a prendere l'arco P_{12}

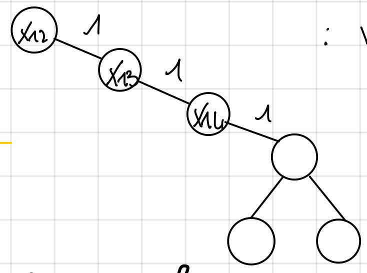
↓

Il calcolo di VI(P_{ij}) è *facile*

regole

1° Supponiamo di aver istanziato nel TSP le variabili in modo da essere in fondo a destra. Abbiamo le variabili (12, 13, 14) che identificano P_{30}. Allora posso tagliare perché sono tutte e 3 ad 1 e quindi tutti i figli sono non ammissibili

↓

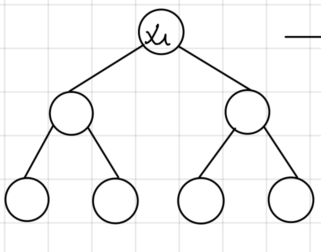
P_{ij} - ∅ : vuoto → 

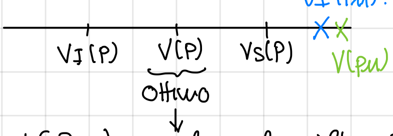
: vettore (1, 1, 1, ...) violato vincolo di grado perché maggiore di 2

↓

inammissibilità ineliminabile perché ho violato un vincolo

2ª Se VI (P_{ij}) ≥ VS(P) allora taglio →



→ 

VI (P_{11}): quando istanzio la variabile e ricalcolo il K-albero dovendo togliere un arco ho dovuto restringere regione ammissibile e quindi i minimi crescono

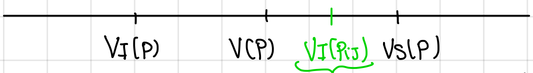
V (P_{11}): ciclo hamiltoniano di costo minimo in cui non posso prendere l'arco 12

↓

Continuando ad istanziare ancora variabili VI continua a spostarsi a destra e quindi peggiora sempre

3ª Se VI (P_{ij}) < VS(P) MA VI (P_{ij}) è "ammissibile" allora aggiorno e taglio.

La regola serve per far terminare l'algoritmo quando non vi sono ulteriori foglie da tagliare. Si dice che VI (P_{ij}) è ammissibile se è generata da un ciclo hamiltoniano:



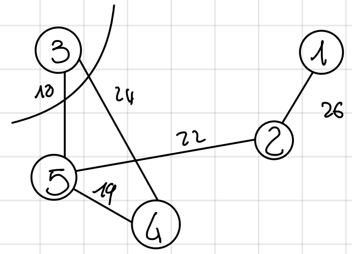
Aggiorno perché diventa una VS(P) in quanto è migliore della VI precedente

ESEMPIO

	2	3	4	5
1	26	20	32	36
2		31	27	22
3			24	18
4				19

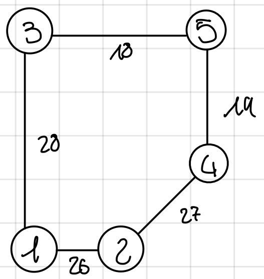
1. 3-albero
2. nodo più vicino da 3
3. Algoritmo branch and bound istanziando x_{35}

1.

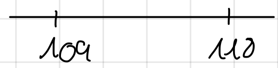


$V_I(P) = 109$

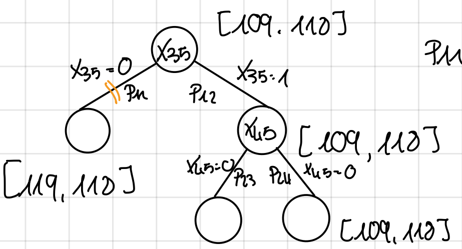
2.



$V_S(P) = 118$

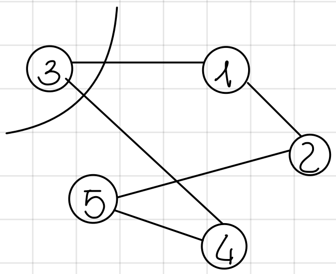


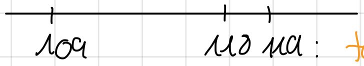
3.



P_{11}: $\underbrace{V_I(P_{11})}$?

NON posso prendere l'arco (35)





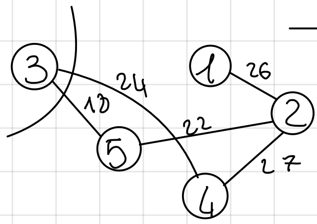
: taglio

P_{12}: $\underbrace{V_I(P_{12})}$? $= 109$

DEVO prendere l'arco (35)

P_{13}: $\underbrace{V_I(P_{13})}$?

NO arco 45



→ $V_I = 117$

↓

NON taglio

problemi di massimo

$$\begin{cases} \max cx \\ Ax \le b \\ x \in \{0,1\}^n \end{cases}$$

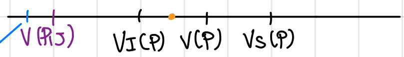
di cui abbiamo $\underbrace{V_I}_{\text{sol. ammissibile}}$, $\underbrace{V_S}_{\text{rilassamento}}$ e consideriamo problemi P_{ij}

↓

a. $P_{ij} = \emptyset$ ⟶ Guardiamo i vincoli di grado come nel caso del minimo

ESEMPIO $x_{12} \overset{=1}{—} x_{13} \overset{=1}{—} x_{13} \overset{=1}{—}$ ✗ : Si è creato un ciclo quindi taglio

b. Se $V_S(P_{ij}) \le V_I(P)$ allora taglio



valore delle foglie "sotto" P_{ij}: ogni volta che si istanzia, la regione ammissibile diminuisce e quindi i massimi calano

C. Se $\boxed{VS(P_{ij}) \geq VI(P)}$ ma è generata da una sol. ammissibile allora aggiorno e taglio

Potrei cambiare questo in $\geq$ e in $<$ il precedente cambiando l'algoritmo:

$>$ ⟶ aggiorno
$=$ ⟶ affianco

in questo modo trovo **tutte** le soluzioni ottime anche se l'algoritmo viene rallentato di molto ⟶ vantaggio: posso valutare in un secondo momento tutte le soluzioni ottime

⚠ ATT: il branch & bound può essere applicato anche al bin packing avendo una VI (ril. continuo)

ESEMPIO: zaino

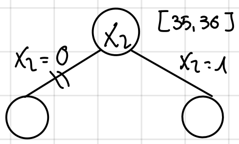
$$\begin{cases} \max \; 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 11x_5 \\ 11x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 19x_5 \leq 37 \end{cases}$$

$$r = \left(\frac{5}{11}, \frac{7}{13}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{11}{19}\right) = (\overset{4}{0.45} \quad \overset{3}{0.53} \quad \overset{5}{0.44} \quad \overset{2}{0.56} \quad \overset{1}{0.57})$$

$V_I = 20 \qquad x = (0,0,0,1,1)$

$V_S = 21 \qquad x = (0, \frac{2}{13}, 0, 1, 1)$

Branch and bound istanziando variabili frazionarie (rilassato continuo)



P_{11} : $VS(P_{11}) \leq 20$? ⟶ È sicuramente ≤ 21 poiché stiamo istanziando una variabile e quindi la reg. ammissibile (ed i massimi) diminuiscono

$$\left\lfloor 20 + \frac{2}{11} \cdot 5 \right\rfloor = 20 \quad : \text{ taglio}$$

P_{12} : $VS(P_{12}) \longrightarrow (0, 1, 0, \frac{5}{16}, 1)$

$VS(P_{12}) = 7 + 11 + \frac{5}{16} \cdot 9 = 20.81$

Soluzione ottima: $x = (0,0,0,1,1)$ di valore 20

○ MODELLI di PROBLEMI

4. PROBLEMA di CARICAMENTO ⟶ problema dello zaino / knapsack

Abbiamo degli oggetti ognuno con un suo valore (tipicamente in **ordine crescente**) e peso

valore	7	9	11	12	16	20
peso	2	4	6	8	10	15

P = 63 ⟶ capacità del contenitore

↓

Voglio massimizzare ciò che metto dentro al contenitore

4 tipologie di problema di caricamento:

a. intero divisibile

x_i è la quantità dell'oggetto i-esimo

$$\begin{cases} \max\ 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 12x_4 + 16x_5 + 20x_6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5 + 15x_6 \le 63 \\ x_i \ge 0 \longrightarrow \text{Divisibile} \end{cases}$$

⟶ Problema esponenziale nelle sue soluzioni ammissibili con un solo vincolo

⟶ Problema di PL risolvibile con linprog

↓ Problema primale

$$\begin{cases} \max\ 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 12x_4 + 16x_5 + 20x_6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5 + 15x_6 \le 63 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \\ -x_3 \le 0 \\ -x_4 \le 0 \\ -x_5 \le 0 \\ -x_6 \le 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Duale}} \begin{cases} \min\ 63y_1 \\ 2y_1 - y_2 = 7 \\ 2y_1 - y_3 = 9 \\ 6y_1 - y_4 = 11 \\ 8y_1 - y_5 = 12 \\ 10y_1 - y_6 = 16 \\ 15y_1 - y_7 = 20 \\ y_i \ge 0 \end{cases}$$

⟶ y_2 compare in un solo vincolo, è positiva e non compare nella funzione obiettivo ⟶ variabile di scarto

↓

Matrice A 7x6 con matrici di base 6x6

↓ Avendo le variabili di scarto

$$\begin{cases} \min\ 63y_1 \\ 2y_1 \ge 7 \longrightarrow y_1 \ge \frac{7}{2} = 3.5 \\ 4y_1 \ge 9 \longrightarrow y_1 \ge \frac{9}{4} = 2.25 \\ 6y_1 \ge 11 \longrightarrow y_1 \ge \frac{11}{6} = 1.83 \\ 8y_1 \ge 12 \longrightarrow y_1 \ge \frac{12}{8} = 1.5 \\ 10y_1 \ge 16 \longrightarrow y_1 \ge \frac{16}{10} = 1.6 \\ 15y_1 \ge 20 \longrightarrow y_1 \ge \frac{20}{15} = 1.\overline{3} \\ y_1 \ge 0 \end{cases}$$

⟶ comanda il **massimo**

Avremo quindi $\boxed{\bar{y}_1 = \frac{7}{2}}$ da cui $\boxed{V_{OTT} = 63 \cdot \frac{7}{2}}$ $\xrightarrow{\text{soluzione ottima}}$ $\boxed{\bar{X} = \left(\frac{63}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right)}$

soluzione ottima — valore ottimo (anche del primale) — soluzione ottima primale

DEFINIZIONE: **Vettore dei rendimenti** ⟶ $r = (3.5 \mid 2.25 \mid 1.83 \mid 1.5 \mid 1.6 \mid 1.\overline{3})$

TEOREMA 8: Conviene saturare lo zaino con il bene di massimo rendimento.

↓

Vale per lo zaino **intero divisibile**

b. intero non divisibile

In questo caso lo zaino vale meno perché si aggiunge un vincolo e quindi la regione ammissibile si restringe. ⟶ **Valutazione superiore per rilassamento continuo**: nello zaino indivisibile intero se carico tutto con il bene di massimo rendimento o l'ottimo del $\boxed{\text{rilassato continuo}}$ ottengo una limitazione superiore

rilassando vincolo di interezza

↓

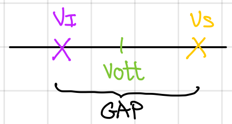
$V_{zaino-intero} \le V_{zaino-divisibile}$

Algoritmo: Metto tanto bene di massimo valore quanto possibile e poi ripeto l'operazione anche con i beni di valore inferiore andando in ordine decrescente.
↓ Costruita la soluzione
$\bar{X} = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 4)$ che vale meno dello zaino divisibile
$\boxed{87} \leq V \leq \boxed{220}$
valutazione inferiore — valutazione superiore
↓
I problemi di programmazione lineare intera si risolvono attraverso una stima inferiore e superiore. Se sono problemi di massimo una valutazione inferiore si ottiene attraverso una soluzione ammissibile trovata con un metodo greedy euristico perché il valore della funzione obiettivo in una soluzione vale meno del massimo. La valutazione superiore si ottiene invece per la soluzione del rilassato continuo.
↓

$$\begin{cases} \max \; cx \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

$\max cx$ ⟶ Problema di PLI in forma primale standard
$Ax \leq b$ ⟶ Valore ottimo Vott
$x \in \mathbb{Z}^n$ ⟶ Genero $\bar{x}$ ammissibile di cui calcolo $c\bar{x}$

↳ $\begin{cases} \max \; cx \\ Ax \leq b \end{cases}$ viene detto rilassato continuo: vengono eliminati i vincoli di interezza
↳ Valore ottimo Vs ⟹ Avremo quindi $\boxed{V_{ott} \leq V_s}$
↓
$\boxed{c\bar{x}} \leq V_{ott} \leq V_s$:



valutazione inferiore
↓
Viene considerato come **ottimo** al primo passo prima di ridurre il gap ⟶ Il guadagno è sicuro in quanto ammissibile ⟶ ottimo se uguale alla valutazione superiore
↓
Errore commesso: $\left(\frac{GAP}{VI} \cdot 100\right)\%$

Zaino binario

c. binario divisibile

$$\begin{cases} \max \; 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 \leq 9 \\ x_i \in [0,1] : \text{divisibile} \end{cases}$$

$\longrightarrow r = \left(\boxed{\frac{4}{2}} \; \frac{5}{3} \; \frac{7}{5} \; \frac{8}{6} \; \frac{9}{7}\right) \simeq (\boxed{2} \; 1.66 \; 1.4 \; 1.33 \; 1.28)$

↳ capienza dello zaino — Bene di massimo rendimento
↓
Risolvibile con linprog ⚠ATT: ricorda che esistono LB e UB per i vincoli $x_i \in [0,1]$
↓
TEOREMA 8 (bis): Si prende il bene di massimo rendimento e si mette ad 1. Quindi poi guardo quanto spazio rimane e metto il bene di secondo rendimento. Se non ci sta saturo lo zaino in frazione. Se ci sta lo metto e poi passo al terzo bene. Proseguo fino a saturazione
↓ caso precedente
inserisco bene di massimo rendimento: capienza passa da 9 a 7. $x_1 = 1$
inserisco secondo bene: capienza passa da 7 a 4: $x_2 = 1$
inserisco terzo bene: saturo in frazione: $x_3 = \frac{4}{5}$
↓ Soluzione ottima rilassato continuo
$\bar{X} = (1 \; 1 \; \frac{4}{5} \; 0 \; 0) \longrightarrow 9 + \frac{28}{5} = \frac{73}{5}$: valore ottimo

d. binario indivisibile

Il valore ottimo di prima diventa valutazione superiore

$$\begin{cases} \max \; 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 \leq 9 \\ x_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

⟶ $V_{ott} \leq 14 = V_s$
VI data dall'algoritmo greedy: differisce dal teorema 8 bis solo perché in questo caso non

posso inserire i beni in frazione ma sono costretto a saltarli

$\downarrow$ in questo caso

$x = (1,1,0,0,0) \longrightarrow VI = 9$

$$VI = 9 \leq V_{OTT} \leq 14 = VS$$

modello

variabili: $\boxed{x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ viene inserito} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}}$

$$\boxed{\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} v_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq C \\ x_j \in \{0,1\} \quad \forall j = 1,\dots,n \end{cases}}$$

metodi greedy

a. Esamino gli oggetti in ordine di valore decrescente. Ogni oggetto viene inserito purché sia rispettato il vincolo di capacità

b. Esamino gli oggetti in ordine di peso crescente. Ogni oggetto viene inserito purché sia rispettato il vincolo di capacità

c. Esamino gli oggetti in ordine di rendimento (valore/peso) decrescente. Ogni oggetto viene inserito purché sia rispettato il vincolo di capacità. $\longrightarrow$ Posso ricorrerlo per tutti gli algoritmi già visti

ESEMPIO

$$\begin{cases} \max \; 10x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 24x_4 \longrightarrow \text{valori} \\ \quad\; 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 \leq 7 \longrightarrow \text{pesi} \\ x_j \in \{0,1\} \end{cases}$$

$x_j \in [0,1]$

$r = (5, 4.\overline{3}, 4.5, 4) \longrightarrow$ riordinando:

1	3	2	4
5	4,5	4,33	4

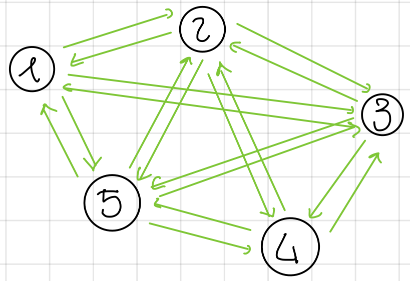
$c = (10, 13, 18, 24)$

Val. inferiore: $V_I = (1, 0, 1, 0) \longrightarrow V_I = 28$

$\boxed{\text{Val. superiore}}$: $V_S = \left(1, \frac{1}{3}, 1, 0\right) \longrightarrow V_S = 10 + 18 + \frac{13}{3} = 32$

⚠ ATT: il bene di massimo rendimento della PLi può non comparire nella soluzione ottima

5. PROBLEMA T.S.P. (travelling salesman problem)



Si suppone che ogni arco (i,j) abbia il suo costo C_{ij}. Vogliamo ricercare il ciclo hamiltoniano di costo minimo: devo visitare tutte le città tornando in quella di partenza

↓ esempio

1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1

5.a TSP asimmetrico: $C_{ij} \neq C_{ji} \longrightarrow$ Modello più comune

completo: esistono tutti gli archi $ij \longrightarrow n\cdot(n-1)$ archi (escludendo quello diretto verso se stesso)

$$\begin{bmatrix} * & 7 & 5 & 3 & 4 \\ 8 & * & 4 & 9 & 3 \\ 6 & 4 & * & 5 & 7 \\ 5 & 8 & 9 & * & 10 \\ 3 & 7 & 5 & 10 & * \end{bmatrix} \longrightarrow C_{ij} \xrightarrow{\text{esempio di prima}}$$

costo = 29

Altro ciclo: 1 - 3 - 5 - 4 - 2 - 1

↓

Ho fatto una permutazione: $(n-1)!$ cicli hamiltoniani possibili

modello

$$\boxed{x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}}$$

non prendo l'arco
prendo l'arco

$\xrightarrow{\text{esempio di prima}}$ $x = (01000\,|\,00100\,|\,00010\,|\,00001\,|\,10000)$

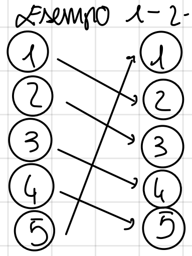
$x \in \mathbb{R}^{25}$

↓

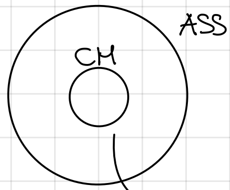
$$\begin{cases} \min \; cx \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1 \\ \vdots \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1 \\ \vdots \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1 \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases}$$

⟶ posso vederlo come un **assegnamento**

esempio 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1



⟶



⟶ Sottoinsieme proprio: gli assegnamenti in generale sono unioni di cicli disgiunti

↓ Nuovo vincolo

Sia $S \underset{\neq}{\subset} N$ (nodi) $\longrightarrow \sum_{\substack{i \in S \\ j \notin S}} x_{ij} \geq 1$: **vincoli di connessione** $\forall S$

↳ archi che vanno da S a non S

modello compatto

$$\begin{cases} \min \; cx \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ \sum_{\substack{i \in S \\ j \notin S}} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \underset{\neq}{\subseteq} N : |S| > 1 \;\wedge\; |S| < n-1 \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases}$$

vincoli di assegnamento

vincoli di connessione

sottoinsieme dei nodi

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se arco } (i,j) \in \text{ciclo hamiltoniano} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

⟶ Deve esserci almeno un arco tra S ed il suo complementare (entrambi con cardinalità > 1)

2^n vincoli di connessione da cui tolgo $2n$ vincoli ed altri 2 vincoli perché tra tutti i vincoli tolgo il vuoto e la cardinalità pari ad N ed 1. ⟶ vincoli esponenziali

↓ ESEMPIO VINCOLO DI CONNESSIONE

$x_{13} + x_{15} + x_{23} + x_{25} + x_{43} + x_{45} \geq 1$

valutazione inferiore

$V_I \longrightarrow$ Faccio il rilassamento continuo

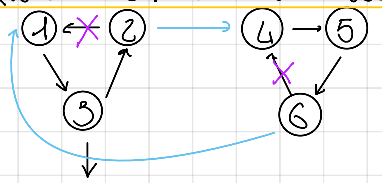
$V_S \longrightarrow$ Soluzione ammissibile (come in precedenza)

Ma quale metodo greedy scelgo? Devo sceglierne uno semplice e veloce. Dovrebbe poi avere buono e quindi basso di valore

Ma in genere **non abbiamo il rilassamento continuo** togliendo i vincoli di interezza perché troppo difficile ⟶ **Eliminiamo i vincoli di connessione** (2^n). Avremo quindi soltanto $2n$ vincoli

Per la **valutazione superiore** utilizziamo l'**algoritmo delle toppe**: si parte dalla soluzione ottima della valutazione inferiore (assegnamento di costo minimo)

ESEMPIO ⟶



: unione di cicli disgiunti ⟶ se sono non disgiunti siamo già all'ottimo

Si elimina un arco del primo ciclo e del secondo ciclo e si connettono i cicli formando un unico ciclo formando un ciclo Hamiltoniano

↓ Regola di sostituzione

Archi iniziali

i, j
k, l

Archi sostituiti

i, l
k, j

⟶ unire i due cicli in un ciclo **orientato**

↓

Per più cicli agire due cicli per volta e proseguendo in avanti unendo un ciclo per volta

↓

Nello scegliere gli archi da togliere si scelgono sempre gli archi che hanno un **costo maggiore** ⟶ $V_S = V_I - C_{ij} - C_{kj} + \underbrace{C_{il} + C_{kj}}_{\text{somma più grande}}$

↓

A coppie di 2 sono necessarie n^2 prove, numero uguale al numero di coppie possibili: un arco da entrambe le parti può essere tolto in n modi possibili

↓ ⚠

Ma nell'esempio sopra **non** vengono rispettati i vincoli del TSP in quanto abbiamo cicli disgiunti ⟶ Vincolo violato: $x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{34} + x_{35} + x_{36} \geq 1$

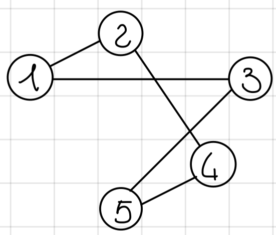
↳ Sono quelli che provengono dai cicli disgiunti ($S = \{1,2,3\}$ v $S = \{4,5,6\}$)

5.b TSP simmetrico completo

: $C_{ij} = C_{ji}$, consideriamo x_{ij} tali che $i < j$ in quanto, ad esempio, $x_{23} = x_{32}$ ⟶ Disegno **senza frecce**

↓

Il TSP simmetrico ad n nodi ha $\frac{n^2 - n}{2}$ variabili

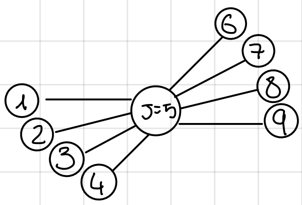


: $x_{12}\, x_{13}\, x_{14}\, x_{15}\, x_{23}\, x_{24}\, x_{25}\, x_{34}\, x_{35}\, x_{45}$

modello

$$\begin{cases} \min Cx \\ \boxed{\sum_{i<j} x_{ij} + \sum_{k>j} x_{jk} = 2 \quad \forall j} \\ \text{vincoli di grado: } n \text{ vincoli} \\ \boxed{\sum_{\substack{i<j \\ i \in S, j \notin S}} x_{ij} + \sum_{\substack{i>j \\ i \notin S, j \in S}} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S} \\ \text{vincoli di connessione} \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases}$$

⟶ fissato j:



⟶ Sommo tutti gli archi che incidono nel nodo j

↓

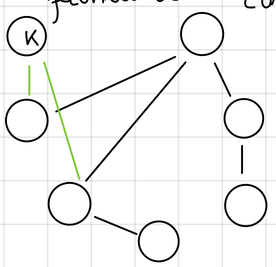
Devono essere 2

Valutazione inferiore

Rilassamento (eliminazione di vincoli) → eliminiamo tutti i vincoli di grado tranne 1 (relativo, per esempio, al nodo k)

↓

Avremo quindi un problema con tutti i vincoli di connessione ed uno solo di grado →



: **Albero di copertura**: struttura che connette n nodi con n-1 archi che non contiene cicli

K-albero della rete: struttura ottenuta rilassando tutti i vincoli di grado tranne 1

↓

Analogo degli assegnamenti nel TSP asimmetrico:

→ Tutti i cicli hamilt. sono k-alberi

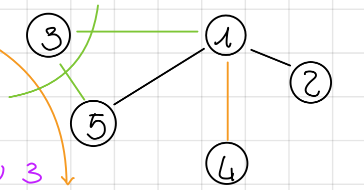
↓

Lo troviamo con l'algoritmo di Kruskal + 2 archi

ESEMPIO

	2	3	4	5
1	26	20	18	19
2		31	32	36
3			27	24
4				28

VI 3-albero



→ $V_I = 97$

$x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15} = 2$: nodo 1

$x_{12}+x_{23}+x_{24}+x_{25} = 2$: nodo 2

→ Non è un ciclo hamiltoniano perché viola 3 vincoli: viola i vincoli di grado 1, 2, 4 mentre rispetta 5 perché ha grado 2

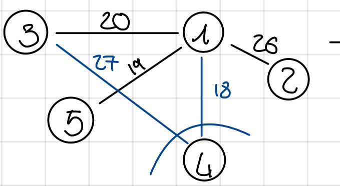
tolgo: legati al nodo 3

Parto da quello che costa meno e lo inserisco. Li inserisco poi in ordine di costo crescente controllando però che non si vengano a creare cicli

↓

Una volta costruito l'albero di copertura si costruisce il k-albero con 2 archi scelti tra quelli di costo minore

4-albero



→ $V_I = 110$: valutazione migliore di 97 → Sono migliori quelle più alte

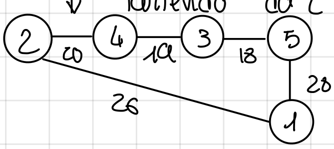
Valutazione superiore

Algoritmo greedy del **nodo più vicino**

	2	3	4	5
1	26	22	25	28
2		24	20	27
3			19	18
4				26

→ Si sceglie il nodo che dista meno in senso generalizzato (quindi in base al costo scritto in tabella)

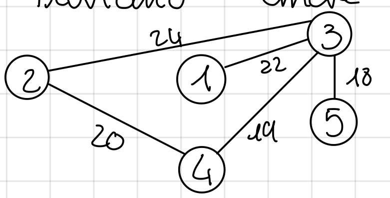
↓ Partendo da 2



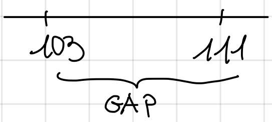
$V_S = 111$

⚠ ATT: non vanno reinseriti i nodi già inseriti precedentemente

Troviamo anche VI facendo il 2-albero



→ $V_I = 103$ →



→ totale cicli hamiltoniani $\frac{(n-1)!}{2}$

6. PROBLEMA DI "BIN PACKING"

Supponiamo di avere 10.000 file di lunghezza variabile di cui si conosce la lunghezza, in quanti dischi di 1TB entrano? (vanno memorizzati **tutti**)

p 7 9 11 12 14 16 19 , 36 è la dimensione del contenitore

$\hookrightarrow$ 88

vincoli: a. in ogni disco devo mettere i file in modo che non eccedano la dimensione del disco

b. dobbiamo memorizzare tutti i file

F.O.: Minimo numero di dischi necessari

variabili: $\boxed{y_i = \begin{cases} 0 & \text{non prendo il contenitore} \\ 1 & \text{prendo il contenitore} \end{cases} \quad i \in \text{numero contenitori}}$

min $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7$

$\boxed{x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è inserito nel contenitore } i \end{cases}}$

modello: min $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7$

$\sum_{i=1}^{7} x_{ij} = 1$ fissato j $\longrightarrow$ l'oggetto deve essere presente in un solo contenitore

$p_1x_{11} + p_2x_{12} + p_3x_{13} + p_4x_{14} + \ldots + p_7x_{17} \leq 36y_1$ fissato i (contenitore), ho sommato tutti gli oggetti con il loro peso

esteso

$$\begin{cases} \min\ y_1+y_2+y_3 \\ 7x_{11}+9x_{12}+\ldots+19x_{17} \leq 36y_1 \\ 7x_{21}+9x_{22}+\ldots+19x_{27} \leq 36y_2 \\ 7x_{31}+9x_{32}+\ldots+19x_{37} \leq 36y_3 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31} = 1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} = 1 \\ \vdots \\ x_{17}+x_{27}+x_{37} = 1 \\ x_{ij} \in \{0,1\} \\ y_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

: sicuramente ce la faccio con 3 contenitori. il 3 l'ho ottenuto cercando una sol. ammissibile (VS)

$\longrightarrow$ VS = 3

$VI = \left\lceil \frac{88}{36} \right\rceil = 3$

ho trovato l'ottimo. se avessi tolto la $\lceil\ \rceil$ avrei avuto $2,\overline{4}$ che è la soluzione del rilassato continuo

A (riga 1) = [7 9 11 12 14 16 19 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -36 0 0]

$\hookrightarrow$ matrice 3 x 24

$c = [\underbrace{0 \_\_\_\_ 0}_{21 \text{ volte}}\ 1\ 1\ 1]$: le x_{ij} non compaiono nella funzione obiettivo

$Aeq \in \mathbb{R}^{7\times 24}$

$b \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow b = [0;0;0]$

$beq \in \mathbb{R}^7 \longrightarrow beq = [1;1;\ldots;1]$

$I = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \ldots\ 24]$

$LB = [\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{24}]$ $\quad UB = [\underbrace{1\ 1 \ldots 1}_{24}]$

$\downarrow$ Soluzione linprog

V = 3 , x = [1110000 | 0001100 | 0000011 | 111]

VI : ottimo del rilassato continuo $\longrightarrow \left\lceil \frac{\sum p_i}{P} \right\rceil = 3$

VS : soluzione ammissibile

modello astratto

$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{oggetto } j \text{ inserito in contenitore } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è usato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} y_i & \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 & \forall j = 1, \ldots, n \; : \text{ ogni oggetto in un contenitore} \\ \sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} \leq C y_i & \forall i = 1, \ldots, m \; : \text{ capacità contenitori} \\ x_{ij} \in \{0,1\} & \forall i, j \\ y_i \in \{0,1\} & \forall i \end{cases}$$

$m \rightarrow$ numero contenitori

Algoritmi greedy soluzioni ammissibili

1. Next-Fit Decreasing (NFD)

Esamina gli oggetti in ordine di peso decrescente. Il primo contenitore è il contenitore corrente. Se possibile, assegna un oggetto al contenitore corrente, altrimenti assegnalo ad un nuovo contenitore, che diventa quello corrente.

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
p_j	70	60	50	33	33	33	11	7	3	$C = 100$

$\longrightarrow$ Valutazione superiore

Contenitori	Oggetti	Capacitá residua
1	1	30
2	2	40
3	3 4	17
4	5 6 7 8 9	23

Soluzione come vettore

$x = (1\underbrace{0\ldots0}_{8} \mid 01\underbrace{0\ldots0}_{7} \mid 00110000000011111)$

2. First-Fit Decreasing (FFD)

Esamina gli oggetti in ordine di peso decrescente. Assegna ogni oggetto al primo contenitore usato che può contenerlo. Se nessuno di essi può contenerlo, assegna l'oggetto al prossimo contenitore.

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
p_j	70	60	50	33	33	33	11	7	3	$C = 100$

Contenitori	Oggetti	Capacitá residua
1	1 7 8 9	9
2	2 4	7
3	3 5	17
4	6	67

3. Best-Fit Decreasing (BFD)

Esamina gli oggetti in ordine di peso decrescente. Tra tutti i contenitori usati che possono contenere un oggetto, sceglie quello con la **minima capacità residua**. Se nessuno di essi può contenerlo, assegna l'oggetto ad un nuovo contenitore.

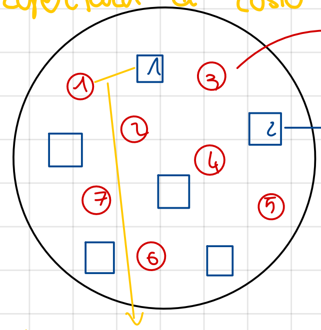
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
p_j	70	60	50	33	33	33	11	7	3	$C = 100$

Contenitori	Oggetti	Capacitá residua
1	1	30
2	2 4 8	0
3	3 5 7 9	3
4	6	67

67 $\longrightarrow$ Consente di avere molto spazio in un disco non riempito

7. PROBLEMI di LOCALIZZAZIONE

a. copertura di costo minimo



utenti che richiedono il servizio

luoghi dove localizzare il servizio

Obiettivo: ad esempio, l'utente deve essere servito in meno di 15 minuti
↓
Voglio attivare il minor numero di luoghi possibile tali da poter raggiungere questo obiettivo
↓

	1	2	3	4	5
1	18'	16'	10'	9'	20'
2	14'	21'	...		
3	7'	9'	10'	12'	14'
4					
5					
6					
7					
8					
9					

TEMPI

→ tempi impiegati dell'utente i per raggiungere il luogo di erogazione J

↓ Nel caso dei 15 minuti

L'ASL deve mettere l'ambulanza nei luoghi 3 e 4 in modo da poter servire il quartiere 1

Posso cancellarlo perché è sempre servito
↓
L'obiettivo è un vincolo: devo servire tutti i quartieri in meno di 15 minuti
↓
Non è rilevante quanto ci mette, basta che sia soddisfatto il vincolo

cambio matrice

	1	2	3	4	5
1	1	1	0	1	0
2	0	1	1	0	1
3	1	0	0	1	1
4	1	1	1	0	0
5	0	0	0	1	1
6	1	1	1	0	1
7	0	0	0	0	1
8	1	0	0	1	1
9	0	0	0	1	0

TEMPI

→ **Dati**:
i = quartieri da servire
J = luoghi servizio
↓
variabili $a_{iJ} \in \{0, 1\}$
↓
Problema di **copertura**: vogliamo avere il minimo numero di luoghi possibile

Tecniche di riduzione della matrice A. matrice di copertura

1. Una riga di tutti zeri indica che il problema è **vuoto** perché il quartiere non è mai servito: aggiungo luogo
2. Una riga di tutti 1 può essere **eliminata**
3. Una riga con un solo 1 nel luogo x implica che il luogo x debba per forza essere inserito ⟶ la riga interessata e la colonna x vengono eliminate e come conseguenza vengono eliminate tutte le righe con 1 nella colonna x

4. **Riduzione per dominanza**: Si tratta di osservare che due righe sono correlate da una relazione di dominanza: gli 1 di una riga sono un sottoinsieme di 1 dell'altra: righe 4 e 6 della matrice A precedente. → la riga 4 domina 6 perché il quartiere 4 è più esigente del quartiere 6. Il quartiere 6 viene perciò eliminato
↓
Le coppie da controllare sono $\boxed{\binom{n}{2}} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2 \cdot \cancel{(n-2)!}} = \frac{n^2-n}{2}$

modello

$$\boxed{x_j = \begin{cases} 0 & \text{non metto il servizio nel luogo } j \\ 1 & \text{metto il servizio nel luogo } j \end{cases}}$$

$j \in \#$ luoghi

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} x_j \\ (1)\; x_1 + x_2 + x_4 \geq 1 \\ \quad \vdots \\ (6)\; x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \geq 1 \\ x \in \{0,1\}^n \end{cases} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}\right\} 9 \text{ vincoli} \xrightarrow{\text{in astratto}} \boxed{\begin{cases} \min \; \boxed{e} \cdot x \\ A \cdot x \geq e \\ x \in \{0,1\}^n \end{cases}}$$

$e = (1, 1, \dots, 1)$

VI: ottenuta dal **rilassamento continuo**. L'ottimo può essere inammissibile per il problema se frazionario

VS: ottenuta arrotondando il vettore x della soluzione. L'arrotondamento per eccesso è ammissibile in quanto i vincoli sono somme con coefficienti positivi e quindi rimangono soddisfatti.
↓
Se avessi dei costi:

siti	1	2	3	4	5
costo	6	9	10	8	7

$\xrightarrow[\text{F.O.}]{\text{Nuova}}$ $\min\ 6x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 7x_5$

Oppure **Chvatal**: l'algoritmo è lo stesso della massima copertura ed in questo caso partendo dalla posizione che copre più quartieri. Se abbiamo anche il costo dobbiamo calcolare il **costo unitario**: $\boxed{\frac{c_i}{\text{nr. quartieri coperti}}}$ → partiamo dal **minimo**. Termina quando sono coperti **tutti**

b. massima copertura

		1	2	3	4	5
3000	1	1	0	1	1	0
2000	2	0	1	1	1	0
1500	3	0	1	1	0	0
4000	4	1	0	0	0	1
2700	5	0	1	1	0	1
3300	6	1	1	1	1	1
2600	7	0	0	0	1	0
1600	8	0	0	0	1	0
1900	9	0	1	0	0	0

popolazione di ciascun quartiere → problema di servizio non di prima necessità, ad esempio nel caso di super-mercati → posso attivare solo un certo numero p di supermercati (ad esempio p=2)

Per aprire p servizi avendo n luoghi ho $\binom{n}{p}$ possibilità $= \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

$$x_i = \begin{cases} 0 \\ 1 & \text{servizio aperto in } i \end{cases}$$

Chiamiamo **h il vettore della popolazione**
Introduciamo inoltre la variabile binaria $z_i = \begin{cases} 0 & \text{quartiere non coperto} \\ 1 & \text{quartiere coperto} \end{cases}$

modello

$$\begin{cases} \max\ h \cdot z \quad (h_1 z_1 + h_2 z_2 + \ldots + h_n z_n) \\ A \cdot x \geq z \\ e \cdot x = p \\ x \in \{0,1\}^n \\ z \in \{0,1\}^m \end{cases}$$

→ Numero di vincoli: $m+1$

$A = [-1\ 0\ -1\ -1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots\ ;\ J: -x_1 - x_3 - x_4 + z_1 \leq 0$

caso di prova →

$$\begin{cases} \max\ 3000 z_1 + 2000 z_2 + 1500 z_3 + \ldots + 1900 z_9 \\ x_1 + x_3 + x_4 \geq z_1 \\ x_2 + x_3 + x_4 \geq z_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x \in \{0,1\}^5 \\ z \in \{0,1\}^9 \end{cases}$$

↓ sol ammissibile

$(x, z) = (0,1,0,1,0 \mid 1,1,1,0,1,1,1,1,1)$

Valutazione superiore: Rilassato continuo (si può usare a patto che i vincoli non siano esponenziali)

Valutazione inferiore: Algoritmo di **Chvatal**

↓

Prendo una prima decisione di dove aprire il servizio. Prendiamo il luogo che copre il maggior numero di abitanti. La matrice viene poi aggiornata di conseguenza

	1	2	3
2000	1	0	1
3000	0	1	0
4000	1	1	0
1500	0	0	1
1700	1	0	0
↑	7700	700	3500

→

	2	3
3000	1	0
1500	0	1

→ $[X; V] = \text{intlinprog}()$
$\begin{cases} x = (1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1) \\ V = 10700 \end{cases}$

Stop quando ho aperto p servizi

ESEMPIO

		1	2	3	4	5
1500	1	1	1	0	0	0
3000	2	1	0	1	0	0
1000	3	1	0	1	0	1
1200	4	0	1	1	0	1
2500	5	0	1	0	1	0
2100	6	0	0	1	1	0
1900	7	0	0	1	0	1
1700	8	0	0	0	0	1
2200	9	0	1	1	1	1
2700	10	1	0	1	1	0
	↑	8200	8000	14700	9500	8600

→

	1	2	4	5
1	1	1	0	0
5	0	1	1	0
8	0	0	0	1
↑	1500	4000	2500	1700

→ Scegliamo i siti 3 e 2 dato che $p=2$

VARIANTI di PROBLEMI

Zaino

Zaino binario

5	7	8	9	12	
3	4	5	6	9	volume 11

Supponiamo di non poter trasportare il bene 2 ed il bene 3 insieme

$$\begin{cases} \max \; 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 12x_5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 \leq 11 \\ x_i \in \{0,1\} \\ \boxed{x_2 + x_3 \leq 1} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Non posso portare insieme i due beni

VS: rilassamento continuo

VI: algoritmo dei rendimenti tenendo conto del nuovo vincolo inserito $\longrightarrow$ in pratica: se inserisco 2 devo necessariamente eliminare 3

Supponiamo che gli oggetti abbiano anche un peso

Zaino binario

5	7	8	9	12	
3	4	5	6	9	volume 11
7	10	12	14	18	peso 34

$$\begin{cases} \max \; 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 12x_5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 \leq 11 \\ x_i \in \{0,1\} \\ 7x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 14x_4 + 18x_5 \leq 34 \end{cases}$$

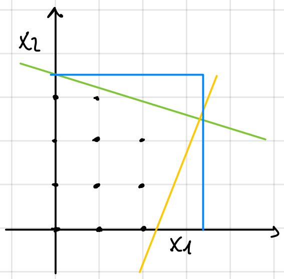
VS: rilassamento continuo con nuovo vincolo nella matrice A

VI: normalizzo i rendimenti

Assegnamento

Supponiamo che io ponga $c_{31} = 10^7$ e quindi non voglia svolgere il lavoro. Supponiamo che il caso si ripeta per molti c_{ij}. Il problema non viene vuoto perché inserisco una piccola parte del bene. Il valore della funzione obiettivo esce molto grande nel caso in cui il problema sia vuoto.

Branch and bound per problemi di PLI



$\longrightarrow$ Un problema può diventare binario aumentando di molto le variabili in quanto si passa dalla base 10 alla base 2. Per fare questo il poliedro deve essere limitato.

Ma quante variabili mi servono?

$$\begin{cases} \max \; 5x_1 + 7x_2 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 58 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 67 \\ x_i \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

: È fondamentale sapere il massimo valore delle variabili (box che contiene il poliedro)

↓ devo fare

$$\boxed{\begin{cases} \max \; x_1 \\ Ax \leq b \end{cases}}$$

: La soluzione linprog mi da una soglia che il problema non può scavalcare: U_1 (upper bound 1), che nel problema precedente si trova ponendo $x_2 = 0$

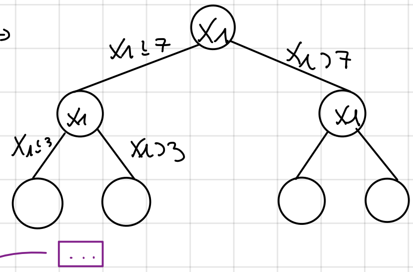
↓

Ho una stima facendo in questo modo: $\min\left(\left\lfloor \frac{58}{4} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{67}{3} \right\rfloor\right)$: $U_1 \leq \bar{U}_1$

ripeto per tutti i vincoli

Secondo metodo

Supponiamo $x_1 \le 14$ →



Partiziono la regione ammissibile conservando tutte le soluzioni

↓

Applico poi le stesse regole di taglio:

$\boxed{V_I(P_{ij})} \ge V_S(P)$

$V_S(P_{ij}) \le V_I(P)$

Una volta che x_1 diventa binario si istanzia x_1

Rilassato continuo

ESERCITAZIONI
23/03

$$\begin{cases} \min \; 12x_1 + 7x_2 \\ 8x_1 + 7x_2 \geq 52 \\ 6x_1 + 8x_2 \geq 41 \\ x_i \geq 0 \\ x_i \in \mathbb{Z} \end{cases} \longrightarrow \text{intlinprog}\,(c, I, A, b, Aeq, beq, LB, UB) \quad I \to \text{int}$$

$$\begin{cases} \min \; Cx \\ Ax \leq b \\ Aeq\, x = beq \\ LB \leq x \leq UB \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

Nel caso del problema precedente int = [1 2] : specifica quali variabili devono essere intere $\longrightarrow$ Gli sono gli indici

La soluzione $x = \left(\frac{41}{6}, 0\right)$ è ottima per il rilassato continuo? È ammissibile perché rispetta i vincoli ma non so se è ottima perché devo verificarlo.
La soluzione $x = (0,0)$ non è ottima ma è un vertice? No perché non è ammissibile. Non posso dire se è di base nel formato duale perché non è standard. Prima quindi andrebbe portato in uno di tali formati

$\bar{x} = \left(0, \frac{52}{7}\right)$, mostrare che è la soluzione ottima del rilassato continuo

$\downarrow$

Portiamo il problema in formato duale standard:

$$\begin{cases} \min \; 12x_1 + 7x_2 \\ 8x_1 + 7x_2 - x_3 = 52 \\ 6x_1 + 8x_2 - x_4 = 41 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\boxed{\bar{x} = \left(0, \frac{52}{7}, 0, \frac{129}{7}\right)} : \text{Soluzione in } \mathbb{R}^4$$

$B = \{2, 4\}$ — Se fosse stato $\emptyset$: **degenere**

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 8 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \{2, 4\} \qquad N = \{1, 3\}$$

$$\begin{cases} 7z_1 + 8z_2 = 7 \\ -z_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow z = (1, 0) : \text{complementare del primale associato}$$

$\downarrow$ Vincoli di N

$$\begin{cases} 8z_1 + 6z_2 \leq 12 \\ -z_1 \leq 0 \end{cases} \longrightarrow$$ Avendo che la soluzione $\bar{x}$ soddisfa questi vincoli si può dire che la soluzione è ottima

$$\begin{cases} \min \; 12x_1 + 7x_2 \\ 8x_1 + 7x_2 - x_3 = 52 \\ 6x_1 + 8x_2 - x_4 = 41 \\ x_i \geq 0, \; x_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Voglio applicare l'algoritmo di **riduzione del gap**
$V_I = 52$: data dalla soluzione $\bar{x}$ di prima
$V_S = ?$ $\longrightarrow$ Possiamo arrotondare per eccesso
$\hookrightarrow V_S = 56$ ottenuta da $(0, 8)$

$\downarrow$

Vogliamo trovare i piani di Gomory

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 7 & -1 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A_B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_N = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ 8/7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/7 & -1/7 \\ \boxed{x \quad x} \end{pmatrix}$$

Posso fare $r = 2$ e $r = 4$ perché sono le componenti dell'ottimo del rilassato continuo

Facciamo il taglio per $r=2$: $\sum_{j\in N} \{\tilde{a}_{rj}\}\, x_j \geq \{(x_{B})_r\} \longrightarrow \{8/7\}x_1 + \{-\frac{1}{7}\}x_3 \geq \{\frac{52}{7}\}$

Concludiamo: $\frac{1}{7}x_1 + \frac{6}{7}x_3 \geq \frac{3}{7}$ ovvero $\boxed{x_1 + 6x_3 \geq 3}$

Lo inserisco nel problema di PL

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \min & 12x_1 + 7x_2 \\ & 8x_1 + 7x_2 - x_3 = 52 \\ & 6x_1 + 8x_2 - x_4 = 41 \\ & x_1 + 6x_3 \geq 3 \\ & x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

Spererei adesso che l'ottimo di tale problema valesse più di 52 per ridurre il gap

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} \max & 10x_1 + 5x_2 \\ & 8x_1 + 5x_2 \leq 43 \\ & 5x_1 + 12x_2 \leq 51 \\ & x_i \geq 0 \end{cases} \qquad x = \left(\frac{43}{8}, 0\right)$$

: mostrare che la soluzione è ottima

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \max & 10x_1 + 5x_2 \\ & 8x_1 + 5x_2 \leq 43 \\ & 5x_1 + 12x_2 \leq 51 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad B = \{1,4\} \quad N = \{2,3\} \longrightarrow \begin{cases} \min & 43y_1 + 51y_2 \\ & 8y_1 + 5y_2 - y_3 = 10 \\ & 5y_1 + 12y_2 - y_4 = 5 \\ & y_i \geq 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$y = \left(\frac{10}{8}, 0, 0, \frac{10}{8}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \min & -10x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ & 8x_1 + 5x_2 + x_3 = 43 \\ & 5x_1 + 12x_2 + x_4 = 51 \\ & x_i \geq 0 \end{cases} \longrightarrow x = \left(\frac{43}{8}, 0, 0, 51 - 5\cdot\frac{43}{8}\right).$$

Devo testare $B=\{1,4\}$ e $N=\{2,3\}$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} 8z_1 + 5z_2 \leq -10 \\ 5z_1 + 12z_2 \leq -5 \\ z_1 \leq 0 \\ z_2 \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 8z_1 + 5z_2 &= -10 \\ z_2 &= 0 \end{aligned} \;:\; z = \left(-\frac{5}{4}, 0\right)$$

$$\downarrow$$

z è ammissibile e quindi siamo all'ottimo

$$\begin{cases} \min & -10x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ & 8x_1 + 5x_2 + x_3 = 43 \\ & 5x_1 + 12x_2 + x_4 = 51 \\ & x_i \geq 0, \; x_i \in \mathbb{Z} \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} V_I &= 50 \\ V_S &= 53 \end{aligned}$$

: arrotondamento per difetto

Taglio di Gomory

$\tilde{A} = A_B^{-1} A_N$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 12 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \det A_B = 8 \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{5}{8} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{5}{8} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ X & X \end{pmatrix}$$

$$r = 1 \longrightarrow \left\{\frac{5}{8}\right\} x_2 + \left\{\frac{1}{8}\right\} x_3 \geq \left\{\frac{43}{8}\right\}$$

$$\frac{5}{\cancel{8}} x_2 + \frac{1}{\cancel{8}} x_3 \geq \frac{3}{\cancel{8}} \longrightarrow \boxed{5x_1 + x_3 \geq 3}$$

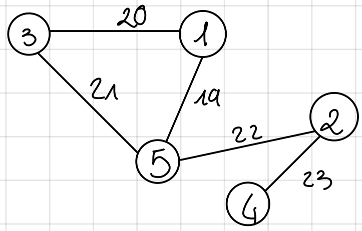
piano di taglio di Gomory

29/03

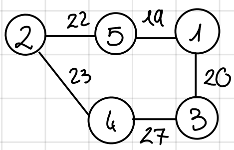
1.

	2	3	4	5
1	26	20	24	19
2		34	23	22
3			27	21
4				32

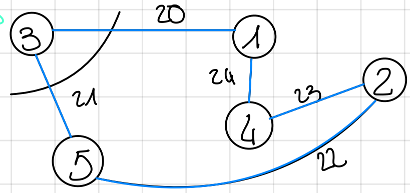
3 albero
nodo 2
x_{13}, x_{35}, x_{45}



$V_I = 105$

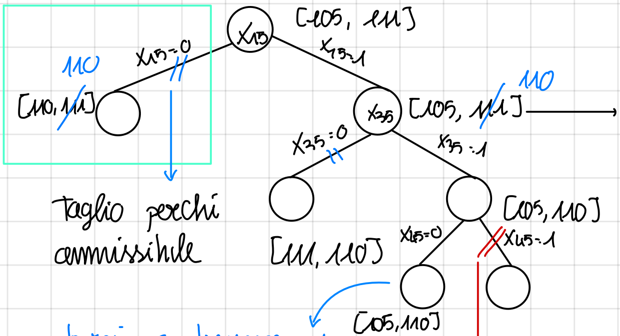


$V_S = 111$



$\longrightarrow V_I = 110$

Ciclo hamiltoniano: ammissibile



Taglio perchè ammissibile

dovrei continuare in questo albero

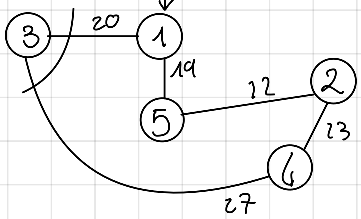
violato vincolo di grado

Non taglio perché non sono soddisfatte le prime due regole

Visita per ampiezza: $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{24}, P_{31}, P_{32}, P_{33}, P_{34}, P_{35}, P_{36}, P_{37}, P_{38}$ e così via

↳ variando la visita cambiano anche gli aggiornamenti

P_{13}: $V_I(P_{13}) \geq 110$?



$\therefore V_I = 111 \longrightarrow$ taglio

2.

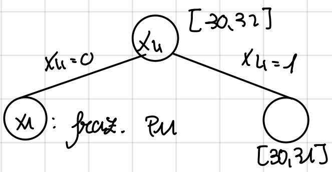
valori	7	8	11	14	19
volumi	6	7	8	11	12
rend.	1.16	1.14	1.37	1.27	1.58
	4	5	2	3	1

Capacità: 22

$V_I: x = (0, 0, 1, 0, 1) \qquad V_I = 30$

$V_S: x = (0, 0, 1, \frac{2}{11}, 1) \qquad V_S = 30 + \frac{2}{11} \cdot 14 = \left\lfloor 30 + \frac{28}{11} \right\rfloor = 32$

Branch and bound



$V_S(P_{11}) \leq 30$?

$(\frac{2}{6}, 0, 1, 0, 1) \longrightarrow V_S(P_{11}) = \lfloor 30 + 7 \cdot \frac{2}{6} \rfloor = 32$: non taglio

$V_S(P_{12})$: $(0, 0, 0, 1, \frac{11}{12}) \longrightarrow x = 31.41$

PL su reti

- SIMPLESSO su RETI

$$\begin{cases} \min & c^T x \\ x^T E^T = b \\ x \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \underset{\text{archi}}{} \overset{\text{nodi}}{(\mathcal{E}^T)} \quad m \times (n-1)$$

↳ in base: $n-1$, non in base: $m-n+1$

DEFINIZIONE (matrici unimodulari): Una matrice $m \times n$, $m \geq n$, dice unimodulare se è di rango massimo n e le sottomatrici quadrate $n \times n$ invertibili hanno determinante uguale a 1 o -1.

TEOREMA 12: Le soluzioni di base di problemi di PL con matrice A unimodulare sono a componenti intere

↓ Importante perché

In una rete la matrice di incidenza è sempre unimodulare

Applichiamo il **simplesso duale**:

Passo 1: Sia T un albero di copertura ammissibile e calcolo (x_T, x_L) con una visita posticipata per foglie

Passo 2: Problema di **potenziali della rete**

↓

$$\begin{cases} \min & c^T \cdot x \\ x^T E^T = b \\ x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{associato}]{\text{primale}} \begin{cases} \max & b \cdot \pi \\ \mathcal{E}^T \cdot \pi \leq c \end{cases}$$

↓

$$\text{archi di } T \quad \overset{\text{nodi } n}{\left(\begin{array}{c} i \quad j \\ \mathcal{E}^T \\ \boxed{-1 \quad 1} \end{array} \right)} \rightarrow \text{arco } ij$$
$(n-1) \times n$

sto calcolando la complementare

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n) \longrightarrow \boxed{(\mathcal{E}^T) \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix}}$$

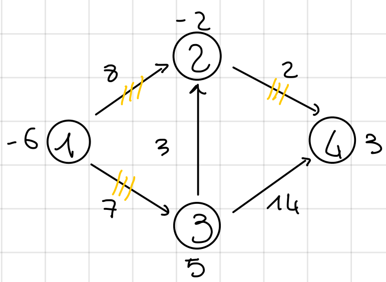
↓ potenziale π di base

$n-1$ equazioni in n incognite $\longrightarrow$ parametrico

↓ per la costruzione della matrice

$-\pi_i + \pi_j = c_{ij}$ ed in più pongo $\pi_1 = 0$

ESEMPIO



$$x = \begin{array}{ccccc} 12 & 13 & 24 & 32 & 34 \\ (1 & 5 & 3 & 0 & 0) \end{array}$$

Per calcolare π si fa una **visita anticipata** dell'albero

$\pi = (\boxed{0}, 8, 7, 10)$: complementare di x

π_1 fissato

↓

Per verificare l'ammissibilità devono essere verificati i vincoli non di base (quelli con $\leq$)

↓

$-\pi_3 + \pi_2 \leq c_{32}$: $-7+8 \leq 3$ ✓ $\longrightarrow$ ammissibile: ho trovato subito l'albero ottimo

$-\pi_3 + \pi_4 \leq c_{34}$: $-7+10 \leq 14$ ✓

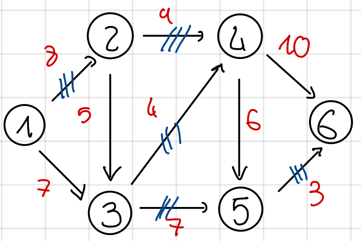
↓

Se una di queste è verificata con $=$ allora la soluzione è **degenere**

Ma se avessi messo $\pi_1 = 5 \longrightarrow x = (5, 13, 12, 15)$: traslo tutto di 5.

Non conta quindi il potenziale ma la differenza di potenziale e questo rimane ammissibile in ogni caso. $\longrightarrow$ **Per convenzione** scegliamo sempre $\pi_1 = 0$

ESERCIZIO:



$$\pi = \overset{1}{(0}, \overset{2}{8}, \overset{3}{13}, \overset{4}{17}, \overset{5}{20}, \overset{6}{23})$$

$-8 + \pi_4 = 9$
$-\pi_3 + 17 = 4 \longrightarrow \pi_3 = 13$
$-13 + \pi_5 = 7 \longrightarrow \pi_5 = 20$
$-20 + \pi_6 = 3 \longrightarrow \pi_6 = 23$

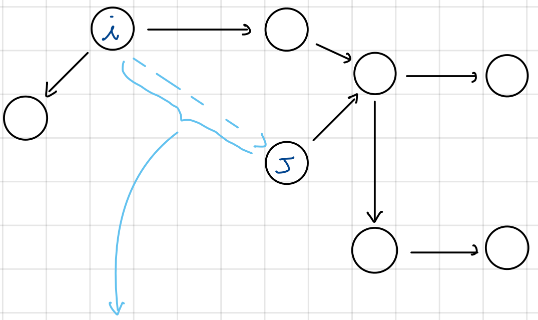
⚠ ATT: in questo caso l'orientazione degli archi è importante

Verifico ammissibilità: $-\pi_1 + \pi_3 \le 7 \longrightarrow$ Non è verificato e quindi non è ammissibile
$-\pi_2 + \pi_3 \le 5$
$-\pi_4 + \pi_5 \le 6$
$-\pi_4 + \pi_6 \le 10$

DEFINIZIONE: Dato un potenziale di base $\overline{c_{ij}}^{\pi} \triangleq c_{ij} + \pi_i - \pi_j$ si chiama costo ridotto dell'arco (i,j)
↓
Per gli archi di base è $\cancel{0}$, mentre se è 0 per un arco non di base abbiamo un potenziale degenere. La condizione di ammissibilità è data da $\boxed{-\pi_i + \pi_j \le c_{ij} \quad \forall (i,j) \in L} \longrightarrow \boxed{c_{ij}^{\pi} \ge 0 \quad \forall (i,j) \in L}$

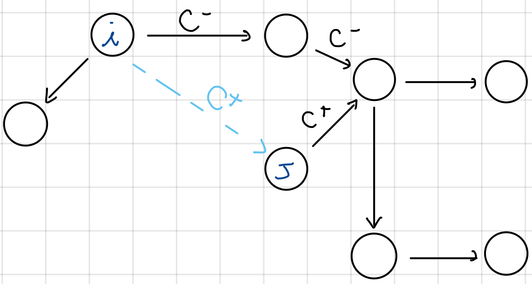
TEOREMA 13 (Bellman): Sia T un albero di copertura che genera un flusso (x_T, x_L) **ammissibile** (cioè: $x_T \ge 0$) se $c_{ij}^{\pi} \ge 0 \ \forall (i,j) \in L$ allora siamo all'ottimo $\longrightarrow$ Sia il vertice che la base sono ottimi (base implica vertice, stop con base ottima)

Passo 3. Cambio di base



$\longrightarrow$ Sia T la base di partenza, ovvero $(x_T, x_L) \ge 0$, e supponiamo che T sia "non ammissibile" per il potenziale cioè $\boxed{\exists (i,j) \in L : c_{ij}^{\pi} < 0}$

arco che viola Bellman: arco **entrante in T**
↓
L'arco entrante crea un ciclo che devo rompere per poter andare di albero in albero (di base ammissibile in base ammissibile, in questo caso duale)
↓
Tecnica della "**rottura**" **del ciclo:** L'arco entrante ha creato un ciclo C a cui do il verso concorde all'arco entrante. Divido poi il ciclo in C^+ e C^- ove C^+ contiene gli archi concordi al verso del ciclo e C^- contiene gli archi discordi: $C = C^+ \cup C^-$



$\longrightarrow$ **Aggiorno il flusso**

$$x^{NEW} = x(\theta) = \begin{cases} x_{ij} + \theta & (i,j) \in C^+ \\ x_{ij} - \theta & (i,j) \in C^- \\ \boxed{x_{ij}} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

flusso attuale

⚠ $\theta \in \mathbb{N}$

Mando θ unità di flusso in più negli archi di C^+ e θ unità di flusso in meno negli archi di C^-

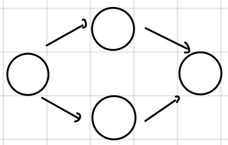
1° conto: $Cx(\theta) = C\bar{x} + \theta \bar{C}_{ij}^{\pi}$ → La funzione obiettivo corrente nel nuovo flusso viene modificata θ volte il costo ridotto dell'arco entrante, che è sempre negativo violando Bellman → Si ha una variazione negativa della f.o. in quanto $\theta \geq 0$

↓

Dobbiamo controllare adesso per quali θ è ammissibile $x(\theta)$ (quando $x \geq 0$ e rispetta i bilanci)

↓

1. Condizione sui **bilanci**: controlliamo nodo per nodo i bilanci del ciclo



tipologie di nodi

C^+ → : direzione del verso (Legenda: e = entrante; u = uscente)

1. →○→ : e = θ unità in più; u = θ unità in più → **compensato**
2. ←○→ : u_1 = θ in meno perché C^-; u_2 = θ in più perché C^+ → **compensato**
3. →○← : e_1 = θ in più perché C^+; e_2 = θ in meno perché C^- → **compensato**
4. ←○← : u = θ in meno perché C^-; e = θ in meno perché C^- → **compensato**

Ammissibile $\forall\theta$ ←

↓ Mi rimane

2. Condizione sulla **positività**: $x \geq 0$?

↓

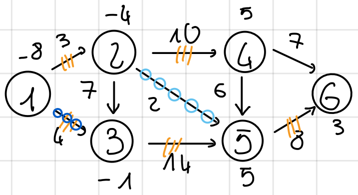
Dobbiamo controllare gli archi di C^- in quanto, sottraendo θ, questi archi potrebbero diventare < 0 $\xrightarrow{\text{condizione}}$ $\boxed{\theta = \min_{(i,j)\in C^-} \{\bar{x}_{ij}\}}$

L'arco individuato diventa 0 in quanto scegliamo l'uguale e quindi **esce**. Non si va in loop perché l'arco entrante è in C^+ mentre quello uscente sta in C^-. Inoltre, si va di soluzione ammissibile in soluzione ammissibile che vale di meno → adiacente

⚠ È possibile che tutti gli archi siano in C^+ (C^- vuoto): X_{new} è ammissibile per tutti i θ e quindi lo mando a $+\infty$ avendo come conseguenza che la F.O. va a $-\infty$. Nella PL questo era il caso in cui i prodotti scalari erano tutti positivi (simplesso duale)

⚠ θ potrebbe fare 0? Solo se ci fosse un arco a flusso nullo e questo può essere possibile → di nuovo **caso degenere** del Simplesso

ESERCIZIO



TL

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 12 & 13 & 23 & 24 & 25 & 35 & 45 & 46 & 56 \\ x = (& 1 & 7 & 0 & 5 & 0 & 8 & 0 & 0 & 3 \;) \end{array}$$

$\pi = (0, 3, 4, 13, 18, 26)$

costo : $3+28+50+112+24 = 217$

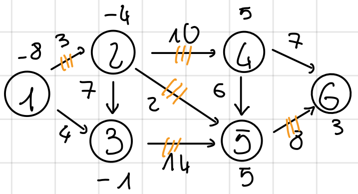
Bellman : $C^{\pi}_{23} = C_{23} + \pi_2 - \pi_3 = 7 + 3 - 4 = 6$ ✓

↓

Me lo aspettavo in quanto se fosse entrato in base si sarebbe creato il ciclo 12, 13, 23 ed 13 sarebbe diventato l'arco uscente e la funzione obiettivo sarebbe cresciuta dato che per andare da 1 a 3 si sarebbe dovuto percorrere l'arco 23

$C^{\pi}_{25} = 2 + 3 - 18 = -13$: arco entrante

↓



Ciclo: 12, 25, 53, 31

arco uscente $\boxed{(1,3)}$ (3,5)

$C^+ = \{(1,2), (2,5)\}$

$C^- = \{(1,3), (3,5)\} \longrightarrow \min_{C^-} \overline{x_{ij}} = \min\{7, 8\} \longrightarrow \theta = 7$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 12 & 13 & 23 & 24 & 25 & 35 & 45 & 46 & 56 \\ x_{NEW} = (& 8 & 0 & 0 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 3 \;) \end{array}$$

$\longrightarrow$ Nuovo costo = 126 : sottraggo $7 \cdot 13$

$\pi = (0, 3, -9, 13, 5, 13)$

$-\pi_1 + \pi_2 = 3$

$-\pi_2 + \pi_4 = 10$

$-\pi_2 + \pi_5 = 2$

$-\pi_3 + \pi_5 = 14$

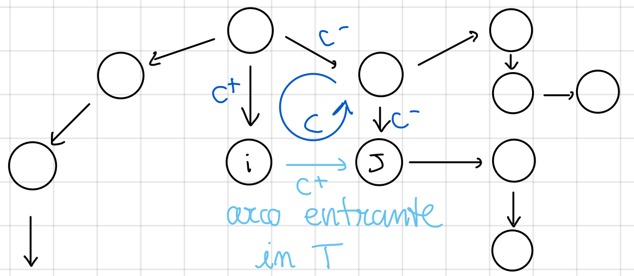
$-\pi_5 + \pi_6 = 8$

$\left.\begin{array}{l} C^{\pi}_{13} = 4 + 0 + 9 = 13 \\ C^{\pi}_{23} = 7 + 3 + 9 = 19 \\ C^{\pi}_{45} = 6 + 13 - 5 = 14 \\ C^{\pi}_{46} = 7 + 13 - 13 = 7 \end{array}\right\}$ Ammissibilità potenziali

- SIMPLESSO SU RETI CAPACITATE

$\exists (i,j) \in A$ che viola Bellman.

1° CASO: $\exists (i,j) \in L$ che viola Bellman, cioè $C_{ij}^{\pi} < 0$.



Si crea un ciclo C. Si dà verso concorde all'arco entrante e si ottiene $C = C^+ \cup C^-$. A questo punto si opera l'aggiornamento del flusso ponendo

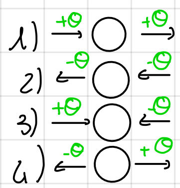
$$\boxed{x(\theta) = \begin{cases} \bar{x}_{ij} + \theta & (i,j) \in C^+ \\ \bar{x}_{ij} - \theta & (i,j) \in C^- \\ \bar{x}_{ij} & \text{altrimenti} \end{cases}}$$

$\theta \geq 0$ intero

↓ TEOREMA (analogo al teorema per reti non capacitate)

$Cx(\theta) = C\bar{x} + \theta\, C_{ij}^{\pi}$: funzione obiettivo decresce

ammissibilità: $\xrightarrow{C^+}$



} i bilanci sono rispettati $\forall \theta \geq 0$

altre condizioni:

$\boxed{\begin{array}{l} Ex = b \\ 0 \leq x \leq u \end{array}}$ poliedro del flusso

bilanci

a. $x(\theta) \geq 0$? Dobbiamo preoccuparci quando sottraiamo θ e quindi degli archi di C^-

↓

$\boxed{\theta^- \leq \min_{(i,j) \in C^-} \{\bar{x}_{ij}\}}$ ⟶ ci conviene scegliere quello con =

b. $x(\theta) \leq u$? Dobbiamo preoccuparci quando si somma θ e quindi degli archi di C^+

↓

$\boxed{\theta^+ \leq \min_{(i,j) \in C^+} \{u_{ij} - \bar{x}_{ij}\}}$

↓ unendo le condizioni

$\boxed{\theta = \min\{\theta^+, \theta^-\}}$

↓

Supponiamo che $\theta = \theta^-$. Uno degli archi di C^- si è svuotato e quindi entra in L. Esso costituisce quindi l'arco uscente. L'arco entrato in T è quello che violava Bellman e costituisce l'arco entrante.

$\boxed{T \underset{\text{entr.}\ \circledast}{\overset{\otimes\circledast\ \text{usc.}}{\rightleftarrows}} L \qquad U}$ $\in C^-$, $\in C^+$

Se invece $\theta = \theta^+$ questo implica che uno degli archi di C^+ si sia saturato. Questo è l'arco uscente e va in U. L'arco che viola Bellman è sempre quello entrante ed appartiente a C^+. Non si crea comunque loop in quanto la base cambia anche se è lo stesso arco ad entrare ed uscire.

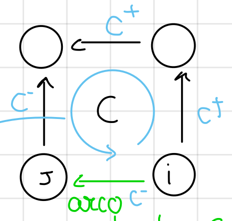
$\boxed{T \quad L \quad U}$ $\otimes\circledast \in C^+$, $\circledast \in C^+$

Sottocaso: arco che entra ed arco che esce coincidono. T non viene modificato ma cambia il flusso e la base. Il potenziale non cambia in quanto l'albero non cambia ed inoltre l'arco in U non viola più Bellman

⚠ θ può essere 0: caso degenere ⟶ uno degli archi di T è nullo, vale sia per θ^+ che per θ^-

⚠ Regole anticiclo: dobbiamo guardare l'ordinamento degli archi

2° caso: arco che viola Bellman ∈ U :



$$x(\theta) = \begin{cases} \bar{x}_{ij} + \theta & \in C^+ \\ \bar{x}_{ij} - \theta & \in C^- \\ \bar{x}_{ij} & \text{altri} \end{cases}$$

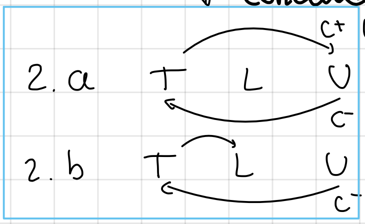
entrante ∈ U : saturo

Viene orientato in maniera inversa all'arco entrante

TEOREMA: $\boxed{c\,x(\theta) = c\bar{x} - \theta\, C_{ij}^{\pi}}$: Di nuovo, la funzione obiettivo decresce

ammissibilità: stesse condizioni del caso 1

↓ concludendo



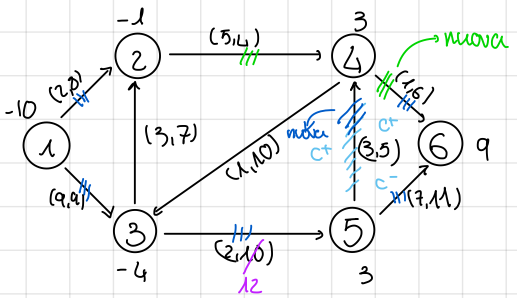
(perché viene da θ^+)

θ^+ : non può essere lo stesso arco che entra ed esce

θ^-

2.b.1 **sottocaso**: l'arco che entra e l'arco che esce coincidono. Di nuovo, la base ed il flusso cambiano mentre non cambiano il potenziale e l'albero. Non si entra in loop in quanto l'arco uscente è entrato in L e quindi non viola più Bellman

ESERCIZIO



T U L

	12	13	24	32	35	43	46	54	56
x = (	3	7	4	0	11	0	1	0	8)

: non ammissibile e quindi nessun passo possibile : cambio

$\pi = (0, 2, 9, 17, 11, 18)$

$C_{24}^{\pi} = 5 + 2 - 17 = -10$

$C_{32}^{\pi} = 3 + 9 - 2 = 10$

$C_{43}^{\pi} = 1 + 17 - 9 = 9$

$C_{54}^{\pi} = 3 + 11 - 7 = -3$ NO : $\boxed{\text{arco entrante}}$

$\theta^+ = \{\underset{(5,4)}{5}, \underset{(4,6)}{5}\}$ ⟶ $\theta = 5$ prodotto da arco (4,6) per Bland

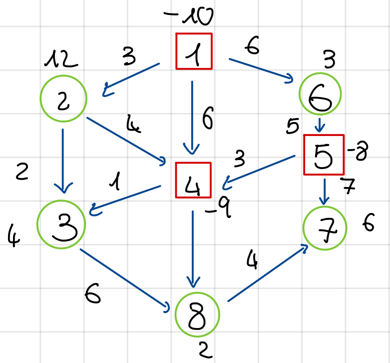
$\theta^- = \{\underset{5,6}{8}\}$

↓

$x_{NEW} = (3\ 7\ 4\ 0\ 11\ 0\ 6\ 5\ 3)$

- MODELLI di PROBLEMI

8. FLUSSO di COSTO MINIMO su RETI BILANCIATE

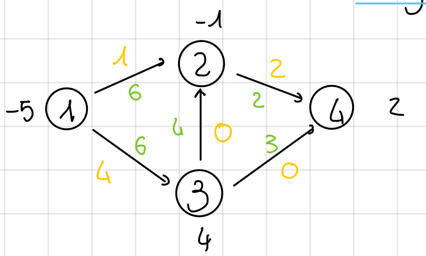


insieme dei nodi $N = \{nodi\} = \{1, 2, 3, \dots, 7, 8\}$
insieme degli archi $A = \{archi\} \subseteq N \times N \to m$
Nodi rossi: producono il servizio
Nodi verdi: usufruiscono del servizio (lo **richiedono**)
Si definisce il vettore $b = (b_1, \dots, b_n)$ → bilanci ai nodi, che fornisce i numeri di richiesta o produzione. I numeri che rappresentano la produzione sono negativi

Definiamo poi i costi sugli archi C_{ij} ove $(i, j) \in A$ e $i \in N$, $j \in N$.
Se la somma dei bilanci è pari a 0, la rete si dice **bilanciata** (produzione = richiesta). Se la somma dei bilanci fosse positiva il problema sarebbe vuoto (se non si aggiungono nodi di produzioni). Viceversa deve essere aggiunto un nodo per depositare le eccedente

modello

Analizziamo una maglia della rete



Soluzione ammissibile (flusso) + Costi
variabile decisionale: flusso sulla rete (vettore X_{ij})

$X_{ij} = (0, 5, 2, 1, 0)$ oppure $= (1, 4, 2, 0, 0)$
$C_{ij} = (6, 6, 2, 4, 3)$
archi: 12 13 24 32 34

$\underbrace{\quad}_{38}$ $\qquad$ $\underbrace{\quad}_{34}$

$$\begin{cases} \min \; CX \text{ (il costo deve essere proporzionale)} \\ \boxed{?} \\ X_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min \; 6X_{12} + 6X_{13} + 2X_{24} + 4X_{32} + 3X_{34} \\ 1) \; -X_{12} - X_{13} = -5 \\ 2) \; X_{12} + X_{32} - X_{24} = -1 \\ 3) \; X_{13} - X_{32} - X_{34} = 4 \\ 4) \; X_{24} + X_{34} = 2 \\ X_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

→ **Segno**:
ricezione = +
invio = −

Costruiamo la **matrice di incidenza** della rete $(n \times m)$
↓ come precedente

$$E = \begin{array}{c|ccccc|} & 12 & 13 & 24 & 32 & 34 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{13} \\ X_{24} \\ X_{32} \\ X_{34} \end{pmatrix}$$

Metto −1 se l'arco parte da quel nodo, metto 1 se l'arco arriva in quel nodo oppure metto 0 se il nodo non c'entra nulla con l'arco

$$= \begin{array}{l} -X_{12} - X_{13} = -5 \\ X_{12} - X_{24} + X_{32} = -1 \\ X_{13} - X_{32} - X_{34} = 4 \\ X_{24} + X_{34} = 2 \end{array}$$

quindi →

$$\boxed{\begin{cases} \min \; CX \\ EX = b \\ X_{ij} \geq 0 \end{cases}}$$

$C \in \mathbb{R}^m$ $\quad$ $X \in \mathbb{R}^m$ $\quad$ $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$
$b \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ n nodi
m archi

↓
Problema di PL: flusso divisibile
PLI: flusso non divisibile

Per trovare la matrice A: $x^T E^T = b$ ove E nodi x archi
E^T archi x nodi

$$\begin{cases} \min\ cx \\ x^T E^T = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (\min\ yb) \\ (yA = c) \\ (y \geq 0) \end{matrix}$$

duale standard

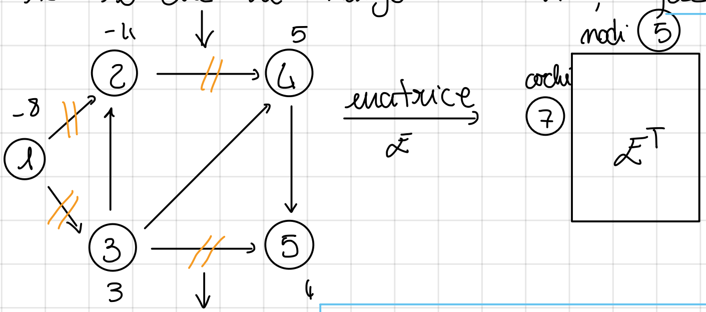
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 12 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 24 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 32 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 34 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

Su ogni riga ci sono un solo 1, un solo -1 ed i restanti sono tutti zeri

$(x_{12}\ x_{13}\ x_{24}\ x_{32}\ x_{34}) \cdot E^T$

La somma di tutti i vettori colonna della matrice restituisce tutti $\emptyset$

Per la PL dovrei estrarre matrici di base 4x4 ma le colonne, essendo che la somma fa 0, sono linearmente dipendenti e quindi il rango è < 4 e perciò non è possibile estrarre una matrice 4x4 invertibile. Abbiamo quindi un poliedro in cui **non esiste il concetto di vertice**. A questo tipo di poliedri non è quindi possibile applicare il simplesso. Abbiamo m equazioni lineari di cui almeno una superflua data la dipendenza lineare di esse. Cancello quindi una colonna e, se so che il rango è n-1, posso adesso applicare la PL.



Creiamo un albero di copertura T

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 12 & & & & \\ 13 & & E^T_T & & \\ 24 & & & & \\ 35 & & & & \end{array}$$

Visita posticipata per foglie:

$$\begin{array}{c|cccc} & 5 & 3 & 4 & 2 \\ \hline 35 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

→ matrice **triangolare superiore** con elementi diagonali tutti diversi da 0 in quanto vedo sempre la foglia con il suo arco

La matrice di incidenza di un albero di copertura sono **non singolari**

TEOREMA: La matrice di incidenza di un albero di copertura è invertibile e quindi il rango di E (o di E^T) è n-1 ed in più ogni sottomatrice $(n-1) \times (n-1)$ invertibile è relativa ad un albero di copertura.

Le soluzioni di base sono tutte e sole quelle generate dagli alberi di copertura → Inoltre, dato che il determinante è 1 o -1, per la regola di Cramer (det al denominatore), tutte le soluzioni sono intere

↓ Calcoliamo una soluzione di base

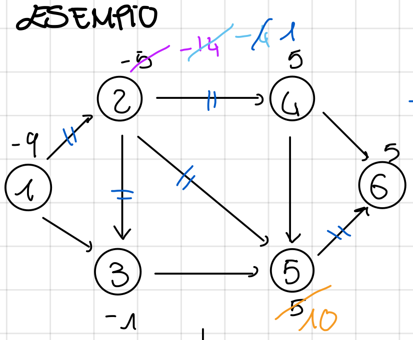
12 13 24 32 34 35 54 → indici: quelli non di base sono a 0

$x = (3\ 5\ 6\ 0\ 0\ 6\ 0) = (x_T,\ x_L)$

$(y_B,\ y_N)$

Per trovarle devo risolvere un sistema 4 x 4 oppure fare una visita posticipata per foglie → la soluzione trovata è un vertice del poliedro dei flussi in quanto è una soluzione di base ammissibile ed inoltre è non degenere. In questo caso non abbiamo controllato l'equazione di bilancio al nodo 4 ma la condizione rimane ancora verificata perché sappiamo che un'equazione è sovrabbondante.

ESEMPIO



12 13 23 24 25 35 45 46 56

→ $x = (9\ 0\ -1\ 5\ 10\ 0\ 0\ 0\ 5)$

↓

Soluzione di base non ammissibile

↓ modello più comodo

$$\begin{cases} \min\ cx \\ x^T E^T = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

→ archi (E^T) nodi, $m \times (n-1)$ ← rango $n-1$

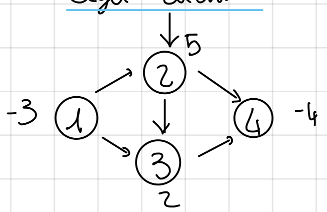
↓

Abbiamo $(n-1) \times (n-1)$ soluzioni di base ed applichiamo la PL duale standard ponendo (T, L)

↓ albero di copertura / archi vuoti

Se $\exists\ c_J < 0$, mi pongo il problema che il problema possa fare $-\infty$? In tal caso il costo sarebbe un guadagno

Il problema inoltre potrebbe essere vuoto →
1. $\sum b_i = 0$: se non è bilanciato è vuoto
2. Se la rete non è connessa
3. Dipende dalla disposizione degli archi

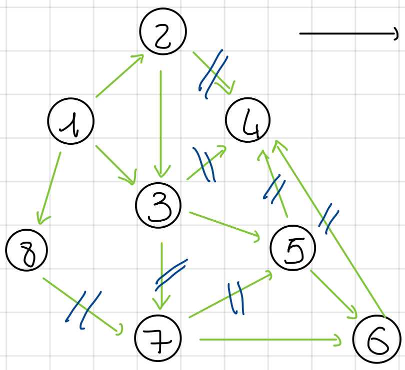


: Vuoto

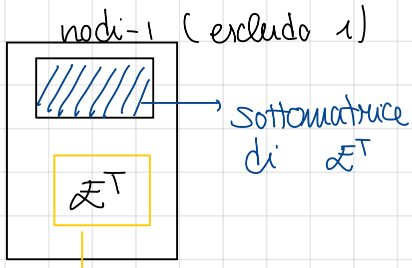
In particolare, perché il problema non sia vuoto, le sorgenti devono avere almeno un arco uscente mentre i pozzi devono avere almeno un arco entrante → Per verificare che un problema sia vuoto utilizziamo il duale ausiliario

Ricordiamo inoltre che le soluzioni di base sono alberi di copertura ammissibili → Questo è comodo in quanto possiamo caratterizzare facilmente la matrice → TEOREMA: albero di copertura $\Longleftrightarrow$ $\det \neq 0$

Voglio far vedere perchè accade la freccia verso destra:



⟶ Matrice blu: 7 x 7 ⟶ archi



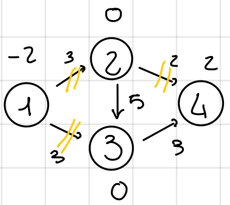
Posso metterli in ordine lessicografico

In totale la matrice $\mathcal{E}^T$ è 16 x 7

Il determinante della matrice blu in questo caso è 0 in quanto si ha un ciclo (non orientato)

Conseguenza pratica teorema: i vertici sono liberi e quindi il flusso di distribuzione ottima avviene su un numero base di archi in quanto gli altri possono essere posti a 0. Non è detto che non esistano soluzioni ottime su più archi ma non saranno soluzioni di base dato il teorema 11.

ESEMPIO:



$X = (\overset{12}{2}\ \overset{13}{0}\ \overset{23}{0}\ \overset{24}{2}\ \overset{34}{0})$ ⟶ Flusso di distribuzione ottimo

⟶ 3 possibilità di basi: 12 24 13

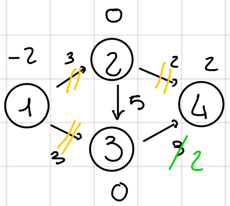
(soluzione degenere) 12 24 23

12 24 34

↓ spesa 10

archi in base: 3 ⟶ matrice di base 3x3 in cui 12 e 24 devono stare per forza in T

Seconda alternativa



⟶ Rimane ottima la soluzione $X = (2\ 0\ 0\ 2\ 0)$ ed in più trovo $X = (0\ 2\ 0\ 0\ 2)$

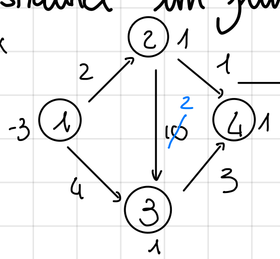
$X = (1\ 1\ 0\ 1\ 1)$: anche questa è ottima ma NON è di base ⟶ può esserci una soluzione ottima non di base

In generale: se ho due soluzioni ottime allora ne ho infinite perchè la funzione lineare su tutto il segmento è ottima.

DOMANDE ORALE

mi costruisci un flusso ottimo? (Implica scrivere bilanci e costi)

$$\begin{cases} \min\ cx \\ \mathcal{E}x = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$



⟶ Per trovare questi numeri abbiamo fatto il problema del cammino di costo minimo: più semplice

↓

$X = (2, 1, 0, 1, 0)$

	A/NA	D/ND	O/NO	B/NB	O/NO	
Flusso	0	1	1	0	0	⟶ Non esiste

Potenziale ottimo $\pi = (0, 2, 4, 3)$

$C_{23}^{\pi} = 10 + 2 - 4 = 8$ voglio trovare quello

$C_{34}^{\pi} = 3 + 4 - 3 = 4$ degenere: $C_{23}^{\pi} = \cancel{10}^{2} + 2 - 4 = \cancel{8}^{0}$

Applicazione: problema di assegnamento

	5	6	7	8
	~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~
1	8	6	4	5
2	7	9	2	3
3	3	6	5	1
4	4	7	7	6

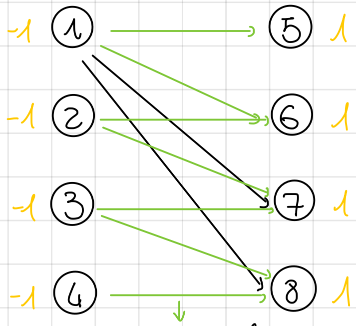
→ è una matrice di incidenza

$x = (1000|0100|0010|0001)$

Costo = 28

↓

$-x_{15} - x_{16} - x_{17} - x_{18} = -1$: equazione di bilancio nodo 1



Flusso 1: per forza in T

→ Nel duale ho 8 equazioni e 16 incognite che si scambiano nel primale → ne estraggo 8 per trovare la base

↓

Semplifico risolvendolo come flusso di costo minimo su reti

↓

La base diventa 7x7 perché un'equazione è linearmente dipendente

Voglio creare un albero di copertura: base ammissibile scelta senza creare cicli.

↓

Tutti i vertici dell'assegnamento sono **degeneri**: basi possibili $\binom{12}{3} = 220$

che saranno però di meno in quanto non possono essere creati cicli.

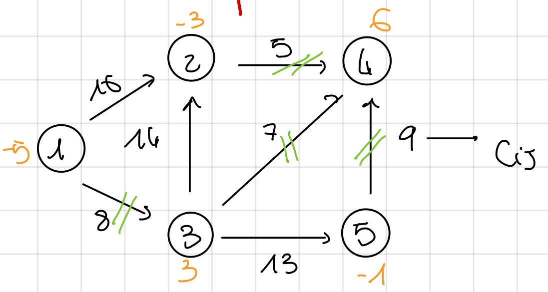
Per vedere se la soluzione è ottima calcoliamo $\pi = (0, -3, -6, -11, 8, 6, -1, -5)$

$C^{\pi}_{17} = 4+0+1 = 5$ ✓

$C^{\pi}_{18} = 5+0-(-5) = 10$ ✓

$C^{\pi}_{25} = 7+(-3)-8 = -4$ ✗ → La base non è ottima perché genera un potenziale non ammissibile → per verificare l'ottimalità si fa il simplesso su reti.

⚠ NOTA: potenziali non di base



a. $\pi = (0, 10, 8, 15, 6)$ è ottimo? Non posso farlo se non ho i bilanci

Trovo T con $c_{ij}^\pi = 0$ e poi si verifica ammissibilità ($c_{ij} \geq 0$)

$c_{12}^\pi = 6$

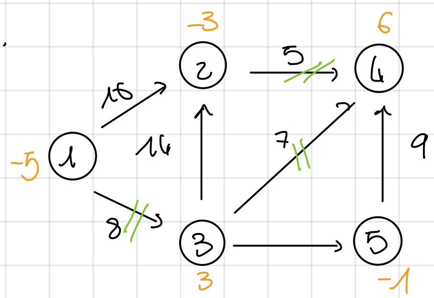
$c_{32}^\pi = 12$ ⟶ Ammissibile

$c_{35}^\pi = 15$

Quali bilanci scelgo per renderlo ottimo? Scelgo bilanci arancioni

$$\begin{array}{cccccccc} & 12 & 13 & 24 & 32 & 34 & 35 & 54 \\ x = (& 0 & 5 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \;) \end{array}$$

b.



$\pi = (0, 10, 8, 15, 7)$

$c_{54}^\pi = 1$

$c_{12}^\pi = 6$

$c_{35}^\pi = 14$

⟶ Ammissibile e non di base: potrebbe comunque essere ottimo

↓

Devo trovare l'ottimo e il valore della fo in π deve coincidere con quella del minimo trovato

Calcolo del costo: $\begin{cases} \max \pi b \\ \pi E \leq c \end{cases}$ ⟶ $\pi_1 b_1 + \pi_2 b_2 + \pi_3 b_3 + \pi_4 b_4 + \pi_5 b_5 =$

$= 0 - 30 + 24 + 90 - 7 = 77$

RETI CAPACITATE

Possono avere una **portata**: $x_{ij} \leq u_{ij}$, $u \in \mathbb{R}^m$: dato del problema

$\downarrow$ upper bound flusso su quel ramo

modello

$$\begin{cases} \min & cx \\ \mathcal{E}x = b \\ 0 \leq x \leq u \end{cases}$$

$\longrightarrow$ cosa cambia rispetto alle reti senza capacità?

$\downarrow$ cambiamo innanzitutto il modello: portiamolo in formato duale standard aggiungendo le variabili di scarto

$$\begin{cases} \min & cx \\ \mathcal{E}x = b & \longrightarrow \in \mathbb{R}^{n-1} \\ x + w = u \\ x, w \geq 0 \end{cases}$$

$x + w = Ix + Iu$

$w \in \mathbb{R}^m$: $x_{ij} + w_{ij} = u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A$

$\downarrow$

$2m$ variabili e $\boxed{m+n-1}$ vincoli di uguaglianza

$\downarrow$ Possiamo scriverlo anche come

$$\begin{cases} \min & cx \\ (x^T, w^T) \begin{pmatrix} \mathcal{E}^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ u \end{pmatrix} \\ x, w \geq 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ risoluzione del sistema lineare a blocchi

matrice del poliedro dei flussi

$\longrightarrow$ Matrice di dimensione $2m \times (m+n-1)$

TEOREMA 11 bis: (caratterizzazione delle basi) Il rango della matrice $2m \times (m+n-1)$ è **massimo**, quindi pari a $m+n-1$ ed il determinante delle matrici di rango massimo "fa" 1 o -1

$\downarrow$ Conseguenza

Anche questa matrice è totalmente unimodulare: anche il caso dei beni indivisibili è un problema di PL risolvibile con linprog (u = UB). Ovviamente la considerazione di prima vale se b e u sono interi e non frazionari, altrimenti si avrebbe un problema di PL con risultato frazionario.

tecnica della tripartizione degli archi

Dividiamo gli archi della rete

$\downarrow$ $\longrightarrow$ ne consegue una tripartizione delle variabili di scarto: T', L', U'

T $\quad L \quad U \longrightarrow T \cup L \cup U = A$, $T \cap L = \emptyset$, $T \cap U = \emptyset$, $L \cap U = \emptyset$

deve essere presente un albero di copertura **esattamente**

L, U possono essere vuoti

$\hookrightarrow$ Se L è vuoto metto $m-n+1$ archi in U

$\longrightarrow$ in realtà **esapartiziono**: (matrice poliedro dei flussi)

$$\begin{array}{cc} & m+n-1 \\ m \begin{cases} T \\ L \\ U \end{cases} & \\ m \begin{cases} T' \\ L' \\ U' \end{cases} & \end{array} \left(\text{matrice dei vincoli} \right)$$

TEOREMA 11: bis (II) Data una qualunque tripartizione la scelta $T \cup T' L'$ forma una **base** $\longrightarrow$ scelta di indici di riga: $m+n-1$, che ho fatto sempre scegliendo $T \cup T' L'$. Vale anche il **viceversa**

$\#T = n-1$, $\#U T' L' = \# U' T' L' = m$

TEOREMA 11 (in generale):

a) rango $= n-1$ / det $= \pm 1$ non capacitate

b) basi $\Longleftrightarrow$ alberi di copertura non capacitate

c) rango $= m+n-1$ / det $= \pm 1$ capacitate

d) basi $\Longleftrightarrow$ (T, L, U) capacitate

Calcolo del flusso di base (data una tripartizione)

$$\begin{array}{cccccc} T & L & U & T' & L' & U' \end{array}$$
$$(x, w) = (x_T \ \ 0 \ \ u_U \mid u_T - x_T \ \ u_L \ \ 0)$$
$$x_T \mid x_L \mid x_U \ \ w_T \mid w_L \mid w_U$$

flusso scarto: $x + w = u$

$2m - \underbrace{(m+n-1)}_{\text{elementi in base}} = m - n + 1$ zeri → nulli perché non in base

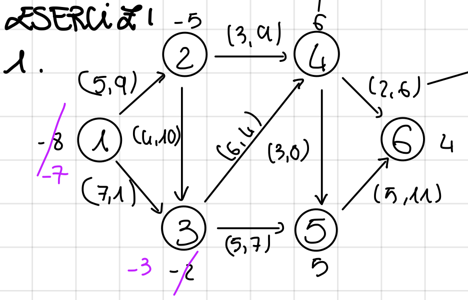
$\boxed{\text{base } \ T \cup T' \cup L'}$

unico da calcolare: nessuna inversione necessaria ↓

Gli archi non in T possono essere vuoti o saturi → quelli già saturati alterano i bilanci che quindi vanno aggiustati.

ESERCIZI

1.



→ (c, u) costo capacità ↓

A questo scopo non servono

	12	13	23	24	34	35	45	46	56	12	13	23	24	34	35	45	46	56
	U	L					L		L		U'	L'				L'		L'
$(x,w) =$	7	1	0	12	-2	5	0	4	0	2	0	10	-3	6	2	8	2	11

$\in \mathbb{R}^{18}$ → vettore **unico**

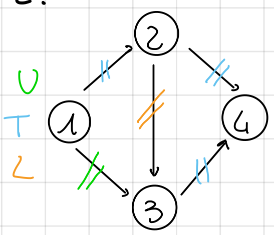
1 ↓ saturo

AMMISSIBILITÀ: un flusso di base è ammissibile se i valori di T sono positivi ed inferiori alla capacità superiore → arco saturo

DEGENERE: un arco di T, U, T', L' è 0

- T: però a reti capacitate ↓ il flusso è degenere se un arco di T è vuoto o saturo ($x_{ij} = 0 / x_{ij} = u_{ij}$)
- U: non può accadere perché saturo
- L': non accade perché se il flusso x_i è 0, L' è pari alla capacità superiore

2.



$$\begin{array}{ccccc} 12 & 13 & 23 & 24 & 34 \end{array}$$
$$x = (5 \ \ 3 \ \ 0 \ \ 7 \ \ -2) \longrightarrow \text{flusso di base non ammissibile non degenere}$$

$$w = u - x$$

potenziali su reti capacitate

$$\begin{cases} \max \ b\pi + u\mu \\ \begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \mu \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \in \mathbb{R}^m \\ \to \in \mathbb{R}^m \end{matrix} \end{cases}$$

↓

$\pi \in \mathbb{R}^{n-1}$
$\mu \in \mathbb{R}^m$

↓

Calcolo del potenziale di base

Sia data una tripartizione T, L, U di cui $T \cup T' \cup L'$ sono i blocchi in base ed i restanti non in base.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} n-1 & m \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ L \\ U \\ T' \\ L' \\ U' \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} E_T^T & \\ E_L^T & I \\ E_U^T & \\ \hline & \\ 0 & I \\ & \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ m \\ \\ \\ m \\ \\ \end{array} \\ & \begin{array}{cc} n-1 & m \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} \pi^T \\ \mu^T \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_T^T \pi^T + \cancel{\mu_T^T} = C_T \\ \mathcal{E}_U^T \pi^T + \mu_U^T = C_U \\ \mu_T^T = 0 \\ \cancel{\mu_L^T = 0} \end{cases}$$

→ Si risolviamo con = in quanto sono in base

↓

$(m+n-1) \times (m+n-1)$ con una sola soluzione in quanto il determinante della matrice di base è $\neq 0$: in particolare è 1 o -1 e quindi la soluzione ha componenti intere

risolvendo il sistema:

$$(\pi, \mu) = (\text{"idem"} \mid \overset{\mu_T}{0}\ \overset{\mu_L}{0}\ \overset{\mu_U}{\square}) \qquad \square \to C_U - \mathcal{E}_U^T \pi$$

TEOREMA 11: Il potenziale su reti capacitate si calcola allo stesso modo di quello su reti non capacitate

Quando è che la soluzione di base è ammissibile? Quando le disequazioni non di base sono soddisfatte con $\leq$ (PL)

Blocco di L → $\begin{cases} \mathcal{E}_L^T \pi^T \leq C_L \\ \mu_U \leq 0 \end{cases}$ → $\begin{cases} \mathcal{E}_L^T \pi^T \leq C_L \\ C_U - \mathcal{E}_U^T \pi^T \leq 0 \end{cases}$

Blocco di U →

Bellman

→ $\begin{cases} \mathcal{E}_L^T \pi^T \leq C_L \to -\pi_i + \pi_j \leq c_{ij} \quad \forall (i,j) \in L \\ \mathcal{E}_U^T \pi^T \geq C_U \to -\pi_i + \pi_j \geq c_{ij} \quad \forall (i,j) \in U \end{cases}$

condizioni di ammissibilità

↓

Il potenziale è ammissibile quando la differenza di potenziale tra gli archi di L è inferiore ai costi e la differenza di potenziale tra gli archi di U è superiore ai costi

↓ in termini di costi ridotti

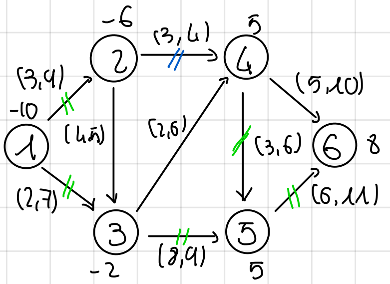
$c_{ij}^\pi = c_{ij} + \pi_i - \pi_j$ → $\boxed{\begin{cases} c_{ij}^\pi \geq 0 & \forall (i,j) \in L \\ c_{ij}^\pi \leq 0 & \forall (i,j) \in U \end{cases}}$

TEOREMA 13bis (Bellman): Data una tripartizione T, L, U che genera un flusso ammissibile. Se valgono le $\boxed{\text{condizioni di Bellman}}$, allora **siamo all'ottimo**

↓

Condizione necessaria. Diventa necessaria e sufficiente nel caso non degenere

ESERCIZIO



$\pi = (0, 3, 2, 7, 10, 16)$

↓ Ammissibile?

$-\pi_2 + \pi_3 \leq 4 \to -3 + 2 \leq 4$ ✓

$-\pi_2 + \pi_4 \geq 3 \to -3 + 7 \geq 3$ ✓

$-\pi_3 + \pi_4 \leq 2 \to -2 + 7 \leq 2$ ✗ → potenziale non ammissibile

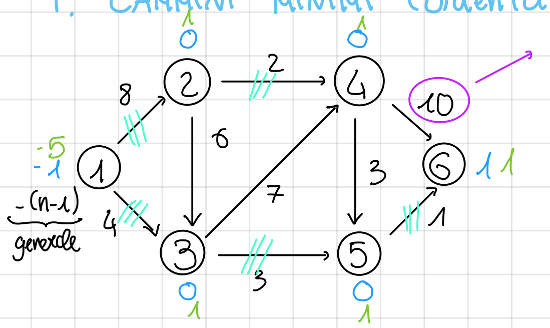
Degenere? Un potenziale è degenere se uno degli archi di L o U ha costo ridotto 0 → $c_{46}^\pi = 5 + 7 - 16 = -4$: non degenere (vedi anche quelli sopra)

Soluzione di base completa $\underbrace{(\pi, \mu)}_{\in \mathbb{R}^{13}} = (0,3,2,7,10,16,0,0,0,-1,0,0,0,0,0)$

($\mathbb{R}^{14}$ se pongo a 0 variabile di troppo)

$c_{24}^{\pi} = c_{24} + \pi_2 - \pi_4 = 3+3-7 = -1$

9. CAMMINI MINIMI (orientati)



cammini da generico nodo i a generico nodo j supponendo che da un nodo si possano raggiungere tutti gli altri: n^n

Bilanci: -1: una persona che parte da quel nodo → Nel caso di numeri $\neq -1$: più persone vogliono muoversi → cammini minimi di radice $r = 1$ → generale: $-(n-1)$

1: una persona che arriva a quel nodo

0: nodi di "transizione"

Modello

$$\begin{cases} \min \ Cx \\ Ex = \boxed{b} \\ x \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -(n-1) & i = r \\ 1 & i \neq r \end{cases}$$

Albero dei cammini minimi: le soluzioni ottime sono vertici e quindi alberi → orientato perchè tutti i nodi hanno bilancio 1 ↴

problema dell'albero dei cammini orientati di costo minimo

Comandi linprog: $C = [8; 4; 6; 2; 7; 3; 3; 10]$

$LB = [\underbrace{0 \dots 0}_{9}]$

$UB = [\ ]$

$beq = [-5; 1; 1; 1; 1; 1]$ ↴

Supponiamo di eliminare il vincolo relativo al nodo 1: $beq = [1; 1; 1; 1; 1]$

Aeq: $\underbrace{\text{nodi}}_{5} \times \underbrace{\text{archi}}_{9}$ $(Ex = b)$

↓

$x_{12} - x_{23} - x_{24} = 1$ Bil. nodo 2

$Aeq = [1 \ 0 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \dots]$

Simplesso per cammini

1. Non servono le regole di Bland: se sono sicuro che tutti i vertici sono non degeneri posso toglierlo → Non può succedere perchè gli archi non possono avere flusso 0 perchè i bilanci sono tutti 1. L'albero ottimo inoltre non può avere più di un arco entrante a ciascun nodo perchè ci sarebbe ambiguità ed inoltre ad un nodo mancherebbe un arco entrante

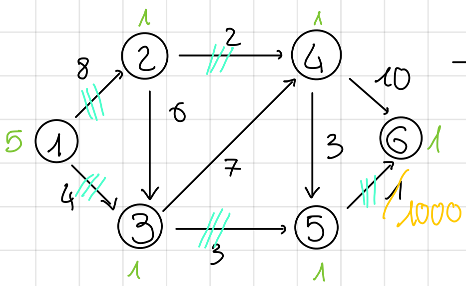
↓ Vantaggi

Prendo il più negativo dei costi ridotti $(Cx(\theta) = C\bar{x} + \theta c_{ij}^{\pi})$

↓

Linprog restituisce $x = (2, 3, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 1)$: soluzione di base ammissibile, vertice ottimo. Per ottenerla viene fatta una visita posticipata per foglie. L'albero dei cammini minimi costa 37 → costo pagato dal gestore della rete $(8 + 4 + 10 + 7 + 8)$

Supponiamo di fare un cambio



→ L'albero non è ottimo ed il simplesso se ne accorge in quanto viene violato Bellman che è CNS sui cammini minimi perchè → CS: test di ottimalità è CS

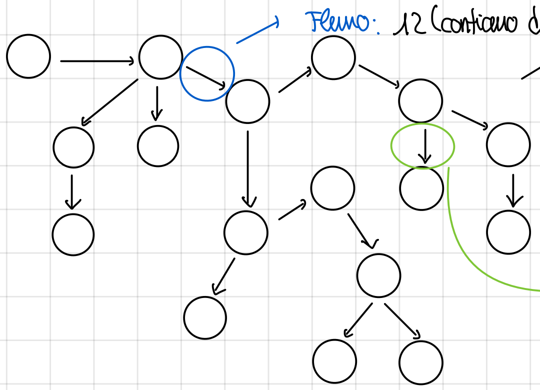
CN: se non viene verificato Bellman non sono all'ottimo

↓

Arco violato (scelto da quelli non in base): $(4,6)$

Candidati archi uscenti (C^-): $(1,3)$, $(3,5)$, $\underbrace{(5,6)}_{\text{flusso minimo}}$

OSSERVAZIONE

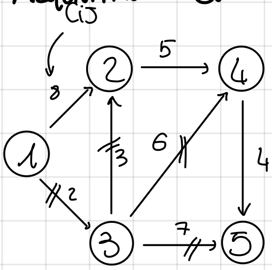


Flusso: 12 (contiamo discendenti)

Flusso: 1

È un albero camminabile? Sì, perché dalla radice posso raggiungere tutti gli altri nodi con cammini orientati

ALGORITMO di DIJKSTRA



iniziali

Vettore delle etichette $\in \mathbb{R}^n$: $\pi = (0, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty)$
Vettore dei predecessori $\in \mathbb{R}^n$: $p = (1, -1, -1, -1, -1)$

p_i: nodo che precede i nell'albero

↓

Dijkstra termina in n passi aggiornando π e p

↓ vettori finali

$p = (1, 3, 1, 2, 3)$
$\pi = (\boxed{0}, 5, 2, 10, 9)$

Accade sempre alla fine

1. ESTRAZIONE $\underset{\text{da visitare}}{N} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: si estrae da N il nodo con etichetta minima

$\underset{\text{visitati}}{\check{N}} = \{\emptyset\}$

2. AGGIORNAMENTO: si calcola la stella uscente del nodo estratto (nodi raggiunti con archi diretti da i) $FS(i)$

↓ caso precedente

$FS(1) = \{2, 3\}$

↓

$\forall j \in FS(i) \longrightarrow$ Regola di aggiornamento : $\pi_j > \pi_i + c_{ij}$? Se sì, aggiorno, altrimenti non aggiorno

↓ Aggiornamento

$\pi_j = \pi_i + c_{ij}, \quad p_j = i$

caso precedente : $j = 2 \quad \pi_2 > \pi_1 + c_{12}$? $+\infty > 0+8$? Sì $\longrightarrow \pi_2 = 8, \ p_2 = 1$
$j = 3 \quad \pi_3 > \pi_1 + c_{13}$? $+\infty > 0+2$? Sì $\longrightarrow \pi_3 = 2, \ p_3 = 1$

↓ PASSO 1

$\pi = (0, 8, 2, +\infty, +\infty)$
$p = (1, 1, 1, -1, -1)$

Passo 2
Nodo estratto : 3 $\longrightarrow FS(3) = \{2, 4, 5\}$

$\pi_2 > \pi_3 + c_{32}$? $8 > 2+3$? Sì $\longrightarrow \pi_2 = 5, \ p_2 = 3$
$\pi_4 > \pi_3 + c_{34}$? $+\infty > 2+6$? Sì $\longrightarrow \pi_4 = 8, \ p_4 = 3$
$\pi_5 > \pi_3 + c_{35}$? $+\infty > 2+7$? Sì $\longrightarrow \pi_5 = 9, \ p_5 = 3$

↓

$\pi = (0, 5, 2, 8, 9) \quad p = (1, 3, 1, 3, 3)$
$N = \{2, 4, 5\}$

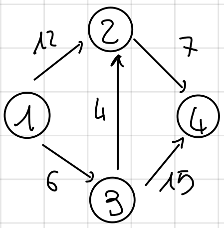
Passo 2
Nodo estratto: 2 $\longrightarrow FS(2) \ \{4\}$
$\pi_4 > \pi_2 + c_{24}$? $8 > 5+5$? No: non faccio niente
$N = \{4, 5\}$

Passo 3
Nodo estratto : 4 $\longrightarrow FS(4) = \{5\}$
$\pi_5 > \pi_4 + c_{45}$? $9 > 8+4 = 12$? NO: non aggiorno
$N = \{5\}$

Passo 4
Nodo estratto : 5 $\longrightarrow FS(5) = \emptyset$: non faccio niente

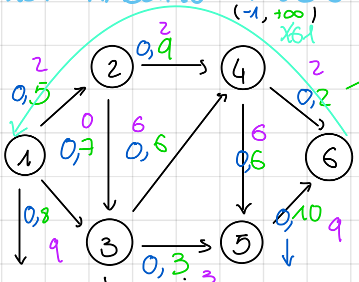
⚠ ATT: Dijkstra funziona solo con costi ≥ 0

ESEMPIO



	passo 1		passo 2		passo 3		passo 4	
	π	p	π	p	π	p	π	p
1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	12	1	10	3	10	3	10	3
3	6	1	6	1	6	1	6	1
4	+∞	−1	21	3	17	2	17	2
Nodo	1		3		2		4	

10. MASSIMO FLUSSO



Sorgente i costi

u_{ij} : portata

Destinazione s → Vogliamo sapere il flusso massimo da i a s

modello

$$\begin{cases} \max\ v \\ Ex = \boxed{b} \\ 0 \le x \le u \end{cases}$$

bilanci : incognita

$$\begin{cases} -v & i = \text{origine} \\ 0 & \text{altrove} \\ v & i = \text{destinazione} \end{cases}$$

⟶ 1^a eq : $-x_{12} - x_{13} = -v$ ⟶ $-x_{12} - x_{13} + v = 0$

⚠ v sempre a dx

Soluzione ottima data da

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 12 & 13 & 23 & 24 & 34 & 35 & 45 & 46 & 56 & v \\ (x, v) = (& 2 & 9 & 0 & 2 & 6 & 3 & 6 & 2 & 9 & 11 \ ) \end{array}$$

↳ valore ottimo

In linprog : c in questo caso ha 10 componenti : passo (x, v)

$c = [\underbrace{0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0}_{0 \cdot x}\ \underbrace{-1}_{-1 \cdot v}]$ perché problema di massimo

UB = [5; 8; 7; 9; 6; 3; 6; 2; 10; spazio] → $+\infty$
oppure 13 → Massima capacità (non importa)

LB = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]

A = [ ]

b = [ ]

beq = [0; 0; 0; 0; 0; 0]

$$Aeq = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} -x_{12} - x_{13} + v = 0 \\ x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0 \\ x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} = 0 \\ x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} = 0 \\ x_{35} + x_{45} - x_{56} = 0 \\ x_{46} + x_{56} - v = 0 \end{cases}$$

Inseriamo un arco fittizio per semplificare (vedo meglio v) ⟶ Adesso è un flusso su reti "standard" se inseriamo anche i costi tutti nulli

↓

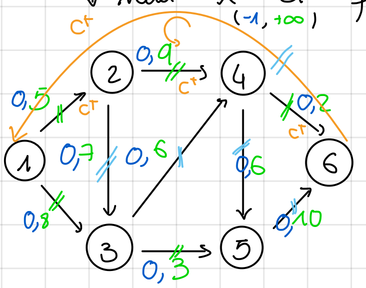
prima riga modello : min $0 \cdot x - x_{61}$

simplesso

Partiamo da una soluzione di base : $x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^{10}$

In generale: un flusso è ammissibile se le componenti sono positive e sono rispettate le capacità massime ed i bilanci. Per verificare che sia di base essa deve verificare n vincoli con = e la matrice deve essere non singolare. Nelle reti per essere di base deve nascere da una tripartizione

↓ Nella x di prima



T

L

U = ∅ ⟶ π = (0, 0, 0, 0, 0, 0)

$C_{23}^{\pi} = 0+0-0 = 0 \geq 0$ ✓

$\vdots$

$C_{61}^{\pi} = -1$ ✗ : Bellman non soddisfatto : arco entrante

$C^{+} = \{(6,1)(1,2)(2,4)(4,6)\}$

$C^{-} = \{\} \longrightarrow \theta^{-} = +\infty$

$\theta^{+} = \min\{5, 9, 2, +\infty\} \longrightarrow \theta = 2$

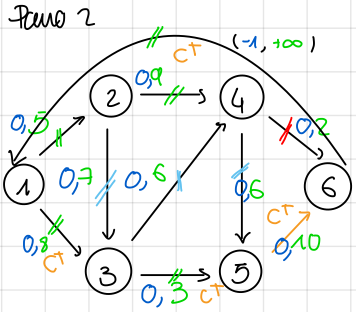
$\theta^{-} = +\infty$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 12 & 13 & 23 & 24 & 34 & 35 & 45 & 46 & 56 & 61 \\ x_{NEW} = (& 2, & 0, & 0, & 2, & 0, & 0, & 0, & \boxed{2} & 0, & 2) \end{array} \longrightarrow f.o. = 2$$

esce e va in U

che aumenta perché max $v = -\min(-v)$

Passo 2



$\pi = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$

$C_{23}^{\pi} = 0$

$C_{34}^{\pi} = 0$

$C_{45}^{\pi}\ 0$

$C_{46}^{\pi} = 0+0-1 = -1$ ✓

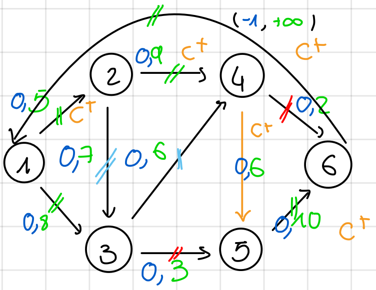
$C_{56}^{\pi} = 0+0-1 = -1$ ✗

$\theta^{-} = +\infty$

$\theta^{+} = 3 \longrightarrow$ arco $(3,5)$ uscente

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 12 & 13 & 23 & 24 & 34 & 35 & 45 & 46 & 56 & 61 \\ x_{NEW} = (& 2, & 3, & 0, & 2, & 0, & \boxed{3} & 0, & 2, & 3, & 5) \end{array} \longrightarrow f.o. = 5$$

va in U : uscente



$\pi = (0, 0, 0, 0, 1, 1)$

$C_{23}^{\pi} = 0$ ✓

$C_{34}^{\pi} = 0$ ✓

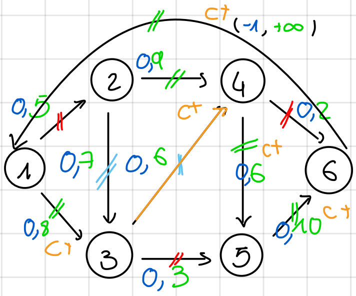
$C_{35}^{\pi} = 0+0-1 \leq 0$ ✓

$C_{45}^{\pi} = 0+0-1 = -1 \leq 0$ ✗ : entrante

$\theta^{-} = +\infty$

$\theta^{+} = 3 \longrightarrow$ generato da arco $(1,2)$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 12 & 13 & 23 & 24 & 34 & 35 & 45 & 46 & 56 & 61 \\ x_{NEW} = (& 5 & 3 & 0 & 5 & 0 & 3 & 3 & 2 & 3 & 8\ ) \end{array} \longrightarrow f.o. = 8$$



$\pi = (0, 1, 0, 1, 1, 1)$

$C_{12}^{\pi} = -1$ ✓

$C_{23}^{\pi} = 1$ ✓

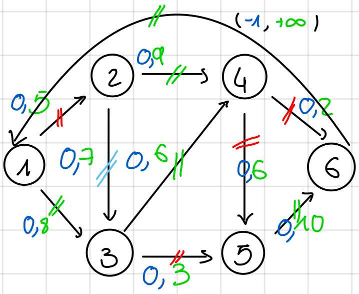
$C_{34}^{\pi} = -1$ ✗ : arco entrante

$\theta^{+} = 3$

$\theta^{-} = +\infty$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccccccccccc} & 12 & 13 & 23 & 24 & 34 & 35 & 45 & 46 & 56 & 61 \\ x_{NEW} = (& 5 & 6 & 0 & 5 & 3 & 3 & \boxed{6} & 2 & 6 & 11) \end{array} \longrightarrow f.o. = 11$$

uscente



$\pi = [0, 0, 0, 0, 1, 1]$

$C_{23}^{\pi} = 0$ √
$C_{12}^{\pi} = 0$ √
$C_{35}^{\pi} = -1$ √
$C_{45}^{\pi} = -1$ √
$C_{46}^{\pi} = -1$ √ ⟶ Siamo all'ottimo

- **ALGORITMO di FORD - FULKERSON**

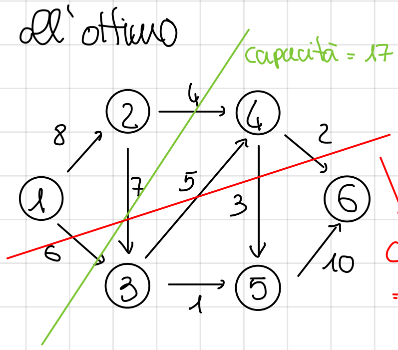
Taglio: partizione $\underbrace{N_s}_{\text{sorgente}} \cup \underbrace{N_t}_{\text{destinazione}} = N$

↓

capacità: $\boxed{u(N_s, N_t) \triangleq \sum_{\substack{i \in N_s \\ j \in N_t}} u_{ij}}$

↓

Confine superiore flusso



Esempio
$N_s = \{1, 2\}$
$N_t = \{3, 4, 5, 6\}$

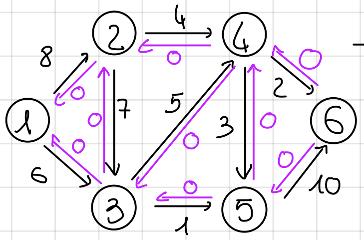
Capacità ($N_s = 1,2,4$) = 18

enunciato: Il problema del taglio di capacità minima è il duale del flusso massimo

↓

Conta il taglio di capacità minima: collo di bottiglia della rete

Algoritmo



⟶ Dobbiamo costruire il grafo residuo: dato un flusso ammissi-hile, si raddoppiano gli archi dotandoli di una capacità residua $r_{ij} \triangleq \underbrace{u_{ij} - x_{ij} + x_{ji}}_{\text{inizialmente entrambi } 0}$

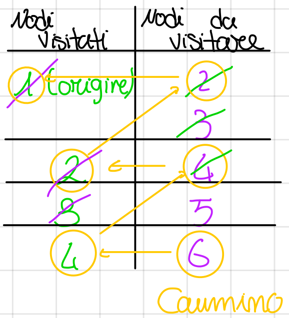
Cammino aumentante: cammino orientato da s a t sul grafo residuo formato da archi con $r_{ij} > 0$

Passo 1: cerca Caum, calcola $\boxed{\delta = \min_{(i,j) \in \text{Caum}} x_{ij}}$ aggiorna $\boxed{x = \begin{cases} x_{ij} + \delta_{ij} & (i,j) \in \text{Caum} \\ x_{ij} & \text{altrove} \end{cases}}$

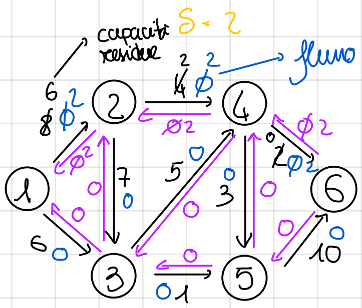
e aggiorna x_{ij}. Se non trovi il cammino aumentante sei all'ottimo

TEOREMA 16: L'algoritmo di Ford - Fulkerson è corretto quindi la terminazione è corretta, ovvero l'aumentare di Caum è un test di ottimalità.

procedura (Edmonds - Karp) per la ricerca di un cammino aumentante



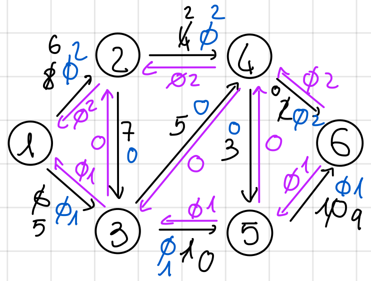
⟶ Si estrae il primo inserito in nodi visitati e si mette in nodi da visitare la stella uscente: insieme di nodi raggiungibile da nodo estratto con archi orientati. Si estrae il primo tra i nodi appena inseriti, si mette in visitati e si ripete proseguendo poi in ordine nell'insieme dei nodi da visitare. Quando compare in questo insieme la destinazione l'algoritmo si ferma. Il cammino è orientato seguendo la provenienza dei nodi. I nodi vengono messi solo se $r_{ij} > 0$ nella stella uscente.



Passo 2

Nodi visitati	Nodi da visitare
~~1~~	~~2~~ ~~3~~
~~2~~	~~4~~
~~3~~	~~5~~
~~4~~	—
5	6

⟶ 1356 : $\delta = 1$



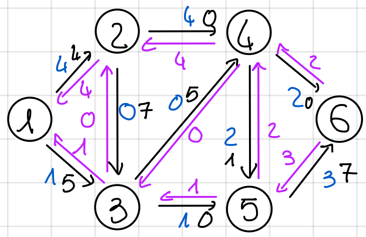
Passo 3

Nodi visitati	Nodi da visitare
1	2 ~~3~~
2	4
3	—
4	5
5	6

: 12456 ⟶ $\delta = 2$

	12	13	23	24	34	35	45	46	56	V
$(x,v) =$	4	1	0	4	0	1	2	2	3	5

↓

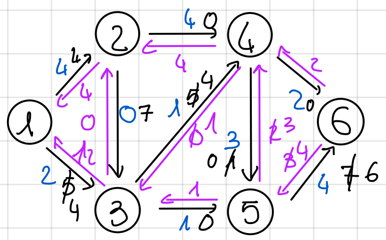


Passo 4

Nodi visitati	Nodi da visitare
~~1~~	~~2~~ 3
~~2~~	—
~~3~~	~~4~~
4	~~5~~
5	6

13456 $\delta = 1$

$(x,v) = (4\ 2\ 0\ 4\ 1\ 1\ 3\ 2\ 4\ 6)$



Passo 5

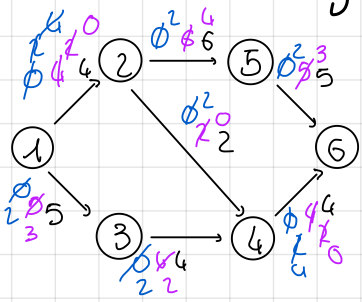
Nodi visitati	Nodi da visitare
~~1~~	~~2~~ ~~3~~
2	—
~~3~~	~~4~~
~~4~~	//

⟶ termina: non ho più nodi da visitare

taglio di capacità minima : $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$

↓

$u_{N_s N_t} = u_{35} + u_{45} + v_{46} = 6$: valore ottimo utilizzo archi fittizi



portate
flusso
residui

cosa succede se non inseriamo gli archi fittizi?

Passo 1

Visitati	Non visitati
1	2
	3
2	4
	5
3	/
4	6

1246 $\delta = 2$

	12	13	24	25	34	46	56	V
X:	2	0	2	0	0	2	0	2

Passo 2

Visitati	Non visitati
1	2
	3
2	5
3	4
5	6

1256 $\delta = 2$

X: 4 0 2 2 0 2 2 4

Passo 3

Visitati	Non visitati
1	3
3	4
4	6

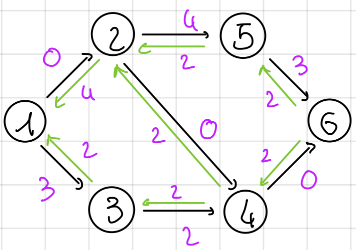
1346 $\delta = 2$

X:(4 2 2 2 2 4 2 6)
↓
Parto da questo (ammissibile) ad inserire archi fittizi

Passo 4

Visitati	Non visitati
1	3
3	4
4	//

⟶ ottimo



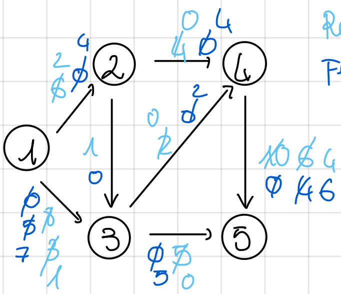
portate
flusso
residui

Visitati	Non visitati
1	3
3	4
4	2
2	5
5	6

134256 $\delta = 2$

X = (4 4 0 4 4 4 4 8)
↓
flusso ottimo

ESERCIZIO



Residui
Flusso

Visitati	Non visitati
1	~~2~~
	~~3~~
2	4
3	5

135 $\delta = 5$

	12	13	23	24	34	35	45
X =	0	5	0	0	0	5	0

V = 5

Visitati	Non visitati
1	~~2~~
	~~3~~
2	~~4~~
3	/
4	5

1245 $\delta = 4$

	12	13	23	24	34	35	45
X =	4	5	0	4	0	5	4

V = 9

visitati	non visitati
1	~~2~~ ~~3~~
2	/
3	~~4~~
4	5

1345 $\quad \delta = 2 \quad x = \begin{array}{ccccccc} 12 & 13 & 23 & 24 & 34 & 35 & 45 \end{array}$

$$x = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

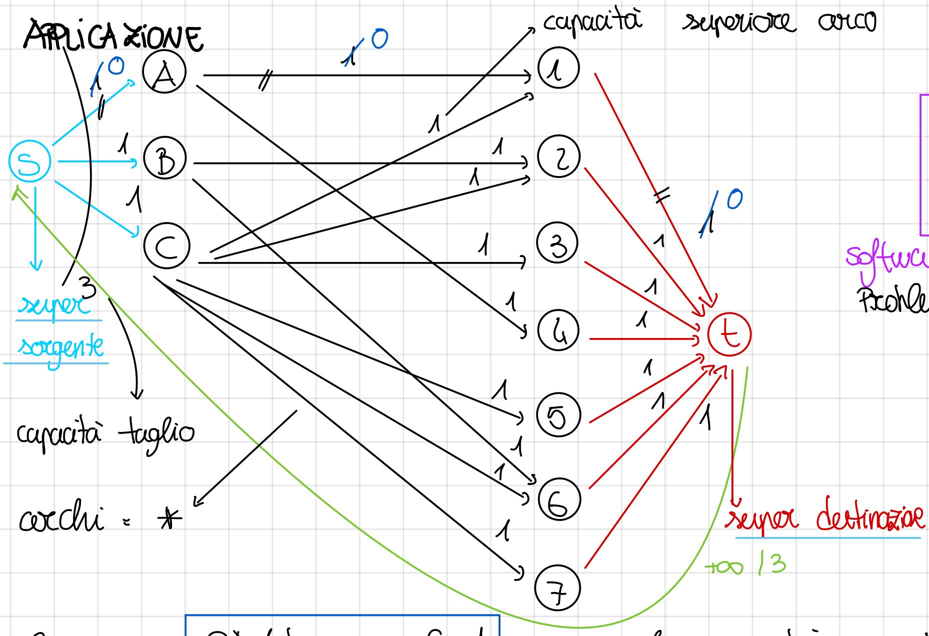
$v = 11$

$N_s = \{1, 2, 3\}$

$N_t = \{4, 5\}$

$u(N_s, N_t) = 11$: essendo uguale a quella trovata, non c'è bisogno degli archi fittizi

APPLICAZIONE



progetti realizzabili con tali software

	1	2	3	4	5	6	7
A	*		*			*	
B	*	*	*	*			
C			*		*	*	*

→ *: sw che può svolgere progetto

software

↓

Problema: massimo numero di progetti eseguibili. La soluzione ottima potrebbe non essere 3

↓ esempio

	1	2	3	4	5	6	7
A	*						
B	*						
C	*	*	*	*	*	*	*

Cammini:

$\boxed{SA1t \quad \delta=1}$
SB2t $\delta=1$
SC3t $\delta=1$

→ le capacità residue sono sempre 0 o 1 e δ è sempre $=1$

↓

$v=3$: più di 3 non può fare e quindi ho trovato l'ottimo

↓

(x,v) ha 21 componenti (20 archi + v)

$$(x,v) = (\underset{SA}{1}\ \underset{SB}{1}\ \underset{SC}{1} \mid \underset{A1}{1}\ \underset{A4}{0} \mid \underset{B2}{1}\ \underset{B5}{0} \mid \underset{C1}{1}\ \underset{C2}{0}\ \underset{C3}{0}\ \underset{C5}{0}\ \underset{C6}{0}\ \underset{C7}{0} \mid \underset{1t}{1}\ \underset{2t}{1}\ \underset{3t}{1}\ \underset{4t}{0}\ \underset{5t}{0}\ \underset{6t}{0}\ \underset{7t}{0} \mid \underset{v}{3})$$

: sol. ottima problema di PL

↓

La soluzione è un vertice? Deve essere di base ammissibile

↓ controllo se è ≥ 0 e rispetta capacità e bilanci

Matrice di incidenza 12×21

↓ nodi ↓ archi

Soluzione ammissibile non ottima: tutti 0 oppure (100 1000000000 1000000 1)

Per essere di base devo poter fare una tripartizione T, L, U. In T nel caso precedente metto 11 archi scelti a caso mentre gli altri vanno in L ed U perché sono tutti vuoti o saturi → Base degenere: tutti vuoti o saturi

↓

$|T| = 11$ (n-1 archi)

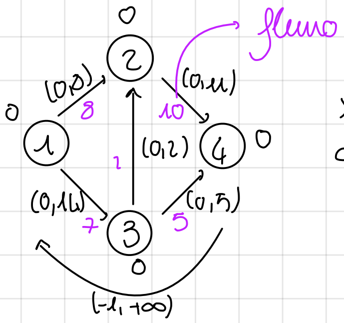
CONCLUSIONI

SIMPLESSO DUALE → SIMPLESSO SU RETI → SIMPLESSO PER CAMMINI → DIJKSTRA

Non inverto matrici, non calcolo rapporti né prodotti scalari ma faccio rottura ciclo

Perde il ciclo e Bland perché sono certo che non ci sono soluzioni di base degeneri: Tra gli archi che violano Bellman si sceglie quello che ha costo ridotto più negativo e l'arco uscente è quello che ha terminazione j (arco entrante i, j)

NOTA



$$x = \begin{array}{ccccc} 12 & 13 & 24 & 32 & 34 \\ \end{array}$$
$$x = (8 \; 7 \; 10 \; 2 \; 5)$$

come problema di PL: $(x, v) = (8 \; 7 \; 10 \; 2 \; 5 \; 15)$

12	13	24	32	34	v
8	7	10	2	5	15
T/U	T	T	T/U	T/U	T
U	T	T	U	U	T

→ Di base e quindi vertice

ESERCITAZIONE 02/05

1.

	1	2	3	
A	6	5	3	60
B	4	7	8	20
	30	35	15	

→ tabella costi unitari

disponibilità

richiesta

a. Scrivi una soluzione ammissibile

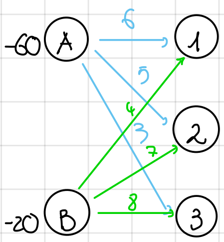
$$\begin{array}{c} \\ X = \end{array}\begin{array}{cccccc} A1 & A2 & A3 & B1 & B2 & B3 \\ (30 & 30 & 0 & 0 & 5 & 15) \end{array}$$

⟶ Di base? scrivi il modello e vedi se c'è il numero giusto di zeri

↓

b. La soluzione è ottima?

trasformo il problema:

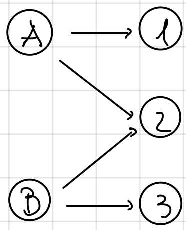


$$\begin{array}{c} \\ X = \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccc} A1 & A2 & A3 & B1 & B2 & B3 \\ (30 & 30 & 0 & 0 & 5 & 15) \\ T & T & L & L & T & T \end{array}$$

↓

Non degenere: una delle equazioni del trasporto è eliminabile in quanto A è di rango non massimo

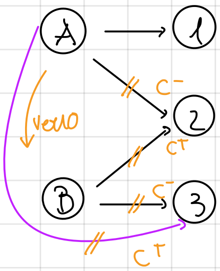
↓ Albero di copertura



$$\begin{array}{c} \\ \pi = \end{array}\begin{array}{ccccc} A & B & 1 & 2 & 3 \\ (0 & -2 & 6 & 5 & 6) \end{array}$$

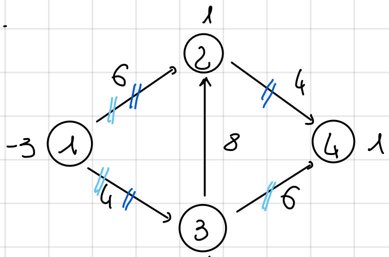
$C^{\pi}_{A3} = 3 + 0 - 6 = -3$ NO: Non sono all'ottimo perché è il caso non degenere (Bellman è CNS)

c. Passo del simplesso



$\theta = 15$: (B,3) arco uscente

2.



a. Qual è la soluzione ottima dell'albero dei cammini minimi visto come flusso?

$$\begin{array}{c} \\ \boxed{x^1 = (} \\ \boxed{x^2 = (} \end{array}\begin{array}{ccccc} 12 & 13 & 24 & 32 & 34 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0) \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1) \end{array}$$

costo: 20

} Se ne ha 2 allora ne ha ∞ non di base

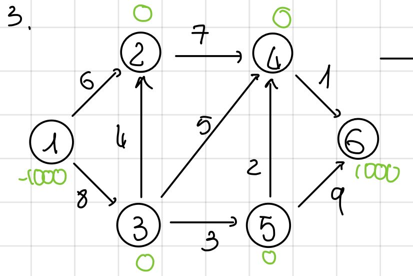
↓

$$x = \underbrace{\left(\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}\right)}$$: Non ammissibile

$$\begin{cases} \min cx \\ \mathcal{E}x = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$ ⟶ Possono esserci anche soluzioni non intere perché non sono vertici

Per trovare tutte le soluzioni ottime: segmento $\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2$

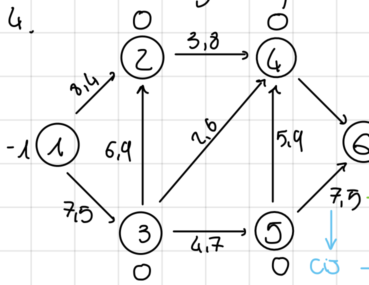
3.



$\longrightarrow$ Problema di flusso minimo

Potrebbe essere irrisolvibile? In generale, su una rete non capacitata deve esistere un cammino orientato da 1 a 6 altrimenti è irrisolvibile. Per reti capacitate è sufficiente verificare le capacità. Per vedere se è vuoto faccio il flusso massimo da 1 a 6 e vedo se può essere 1000.
Per risolvere il problema è possibile utilizzare Dijkstra se la rete non è capacitata. Se fosse capacitata, la capacità superiore degli archi dovrebbe essere almeno 1000.
Se ce ne fosse qualcuno di capacità inferiore deve essere iterato sugli archi saturati.

4.



$\longrightarrow$ lij

co $\longrightarrow$ Budget totale C

a. Voglio andare da 1 a 6 con percorso di lunghezza minima: scrivi

b. Voglio fare la stessa cosa avendo un vincolo di budget
$\downarrow$ modello

$$\begin{cases} \min \ \ell \cdot x \\ \mathcal{E}x = b \longrightarrow \begin{cases} -1 & i=1 \\ 1 & i=6 \\ 0 & \text{altri} \end{cases} \\ x \geq 0 \\ cx \leq C \xrightarrow{\text{Nel duale}} \left.\begin{matrix} cx + w = C \\ w \geq 0 \end{matrix}\right\} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Può essere vuoto? Si fa Dijkstra con i costi e si vede se rientra nel budget

La matrice non è unimodulare

$x \in \{0,1\}^n \longrightarrow$ deve essere inserito per forza altrimenti il modello è sbagliato

$$Aeq = \begin{array}{c|cccccccccc} & 12 & 13 & 24 & 32 & 34 & 35 & 16 & 54 & 56 & w \\ \hline \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 7 & 3 & 6 & 2 & 4 & 3 & 5 & 7 & 1 \end{array}$$

6x10: non avrei determinante 1 0 -1 e quindi non è unimodulare. Il problema è quindi un problema di PLI in cui possono essere utilizzati Branch & Bound e tagli di Gomory
Inventa VI e VS

$\downarrow$ modello

$$\begin{cases} \min \ \ell x + 0w \\ \begin{bmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ C \end{pmatrix} \\ x, w \geq 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ vettore c intlinprog: (4, 5, 8, 9, 6, 7, 10, 9, 5)

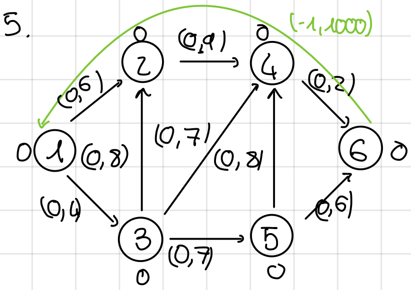
$$beq = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 15 \end{bmatrix}$$

↓

VI: linprog eliminando vincoli di interezza o vincoli di budget: diventa l'applicazione di Dijkstra

VS: Dijkstra con costi ⟶ soluzione ammissibile

5.



	12	13	24	32	34	~~35~~ 46	54	56
$x = ($	2	4	2	0	0	4 2	0	4$)$

costo: 6

$\bar{x}$ ottimo? (flusso massimo)

Posso farlo al modo solito oppure usare Ford-Fulkerson: ottimo se non ci sono più cammini aumentanti.

Programmazione non lineare

- CLASSI di FUNZIONI

CLASSE 1: **funzioni quadratiche**

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f(x_1, \dots, x_n)$

$\downarrow n=2$

$f(x_1, x_2)$: funzioni quadratiche $\to$ grado massimo $=2$

$\downarrow$ definizione formale

$\underbrace{\langle x, Ax \rangle}_{2° \text{ grado}} + \underbrace{\langle c, x \rangle}_{\text{lineare}}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ $\quad (x^T A x + cx)$

$\downarrow$ Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$x^T \cdot Ax = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 = \boxed{1}x_1^2 + \boxed{5}x_1x_2 + \boxed{2}x_2^2$$

sommati

Esempio di utilizzo quadprog

$4x_1^2 - 2x_1x_2 - 5x_2^2 - 6x_1 \longrightarrow A = \boxed{\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}}$ oppure $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

$c = [-6\ 0]$: parte lineare

trascurando il termine

$\nabla f = (8x_1 - 2x_2, -2x_1 - 10x_2)$

$$Hf = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & -10 \end{bmatrix} = 2\boxed{\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}} \longrightarrow ⚠ \; Hf = 2A$$

La matrice A di riferimento è quella simmetrica

$\downarrow$

Unica matrice per ciascuna forma quadratica

Esempio

$Q(x) = 5x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{bmatrix} \qquad HQ = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = 2A$

$\downarrow$

Permette di catalogare i punti stazionari

$\downarrow$

Punto che soddisfa condizione necessaria di ottimalità: $\nabla f(\bar{x}) = 0 \to$ ci sono tutti i minimi/massimi assoluti/locali e le selle — sistema di equazioni (lineare se f quadratica)

$\downarrow$ Hessiana

Vedi lezione di ripasso

⚠ Nota: Per trovare il minimo globale basta trovare tutti i minimi locali e scegliere quello che vale meno di tutti

CLASSE 2: **funzioni coercive**

$\downarrow$ Definizione

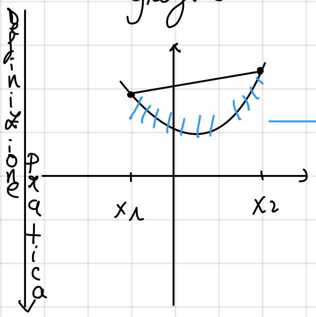
$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

teorema: Le funzioni coercive continue hanno sempre minimo assoluto. Se $-f$ è coerciva esiste massimo assoluto

Esempio: $x_1^3 + x_1x_2 + x_2^2$ non è coerciva perché non va a +/- ∞ in tutte le direzioni. $x_1^2 + 5x_2^2$ è invece coerciva. Non lo è invece $x_1^2 - 3x_2^2$

CLASSE 3: **funzioni convesse**

$$f(\underbrace{\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2}_{\text{grafico}}) \le \underbrace{\lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)}_{\text{corda}} \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad \forall x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$$



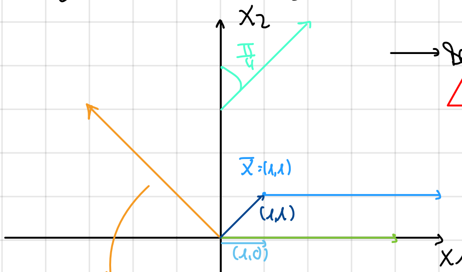
→ il grafico sta sempre sotto ogni corda

$Hf(x) \ge 0 \quad \forall x$: non è risolutivo perché dovrei calcolare tutte le hessiane. È risolutivo solo se f è quadratica perché H è costante

teorema: i punti stazionari di una funzione convessa, se esistono, sono tutti minimi assoluti

- RESTRIZIONE a semirette

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2)$



$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = +t \end{cases}$ $t \ge 0$

→ dominio: $\mathbb{R}^2$

⚠⚠ Equazioni semirette forma parametrica

$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $t \ge 0$ → Si utilizza il versore e poi si trasla

$\begin{cases} x_1 = 1+t \\ x_2 = 1 \end{cases}$ $t \ge 0$

$\begin{cases} x_1 = 0+t \\ x_2 = 3+t \end{cases}$ $t \ge 0$

$f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2 \xrightarrow{\text{restringo}} \varphi(t) = t^2 - (3+t)^2 = t^2 - 9 - 6t - t^2 = -9 - 6t$

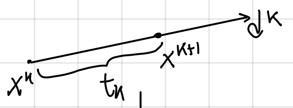
$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 \longrightarrow \varphi(t) = 2t^2 + 6t + 9$

↓

Diventano funzioni in una sola variabile

ALGORITMI iterativi: Dato un punto x^0 qualunque, costruiscono la successione $\underbrace{x^{k+1}}_{\mathbb{R}^n} = \underbrace{x^k}_{\mathbb{R}^n} + t_k \underbrace{d^k}_{\mathbb{R}^n}$

$t_k \in \mathbb{R}$: step size (passo)



Se mi sposto in una direzione ho una semiretta → $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

posso minimizzare le restrizioni: le quadratiche ristrette a semirette sono parabole che sono quindi facili da minimizzare

Scritture equivalenti

$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = 1+t \\ x_4 = 5-t \end{cases} \longleftrightarrow x^k + t d^k$: $x^k = (0,0,1,5)$: punto di partenza

$t_k = t$: passo

$d^k = (1,1,1,-1)$: direzione

ESEMPIO

$f(x_1, x_2) = 5x_1 x_2 - 2x_2^2$

$x_k^k = (3, -2)$
$t_k = 1/4$
$d^k = (1, 0) \longrightarrow x_{k+1} = \left(\frac{13}{4}, -2\right)$

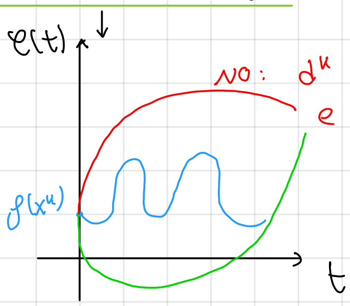
$\varphi(t) = f(x^k + td^k) =$
$= f\left((3,-2) + \frac{1}{4}(1,0)\right) =$
$= f\left(\frac{13}{4}, -2\right)$

Se non lo sapessi: $f((3,-2) + t(1,0)) =$
$= f(3+t, -2) = 5(3+t) \cdot (-2) - 2 \cdot 4 = -10t - 38$

Logica di utilizzo

Siamo in grado di sapere una buona direzione e la funzione ristretta a tale retta è una funzione in una variabile

$\varphi(t) \triangleq f(x^k + td^k)$, $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$



NO: d^k è una buona direzione in cui spostarsi e quindi deve essere di discesa

metodi di discesa: la funzione obiettivo vale di meno: $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ (anche il simplesso era di discesa: $\bar{x} + \lambda w^h$)

Per sapere se la funzione scende calcoliamo $\varphi'(0)$ e verifichiamo che sia < 0.

$$t \xrightarrow{g} x^k + td^k \xrightarrow{f} f(x^k + td^k) : \text{composizione di funzioni}$$
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$\varphi(t)$

dobbiamo sapere derivare le funzioni composte

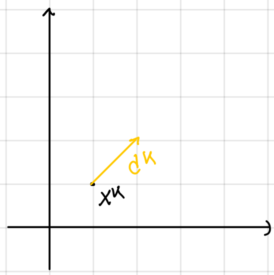
$\varphi'(t) = \nabla f(x^k + td^k) \boxed{\cdot} d^k$ prodotto scalare

$\varphi'(0) = \nabla f(x^k) \cdot d^k$ e devo verificare che sia < 0: **direzione di discesa**

ESEMPIO

$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + 3x_2^2$ voglio sapere se scende

$x^k = (1, 1)$
$d^k = (1, 2)$



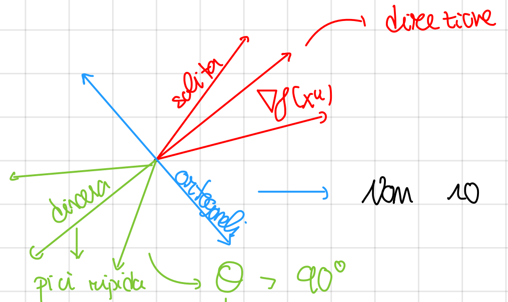
$\nabla f = (2x_1 - x_2, -x_1 + 6x_2)$
$\nabla f(1,1) = (1, 5)$
prodotto scalare
$\nabla f(1,1) \cdot (1,2) = 11$ ∴ sale

è sicuramente negativo se $d = (-1, -5) \longrightarrow$ In generale utilizziamo l'opposto del gradiente $\longrightarrow \varphi'(0) = \nabla f(x^k) \cdot (-\nabla f(x^k)) = \underbrace{-\|\nabla f(x^k)\|^2}$ sempre < 0 eccetto quando il gradiente è nullo: trova i punti stazionari

correttezza — terminazione

a cosa e **dopo quanto** convergono i metodi? Convergono a punti stazionari $\xrightarrow{\text{etichette}}$ tutte tranne quelle dei massimi: convergono a minimi locali, globali oppure selle. Il numero di passi nel caso non lineare può essere infinito $\longrightarrow$ Servono regole di STOP

Il teorema afferma che il limite è un punto stazionario, tuttavia non potendolo calcolare inserisco altre regole:
1. Dopo 10^5 step
2. Dopo un certo tempo → l'algoritmo produce un miglioramento rispetto all'inizio ma non posso sapere se è l'ottimo
3. $|f(x^{k+1}) - f(x^k)|$: studio la decrescita e vedo se diventa troppo bassa. In tal caso mi fermo
4. $\|\nabla f(x^k)\| < 10^{-4}$



→ Non ho nessuna proprietà e quindi non le sceglierò

$\nabla f(x^k)\cdot d^k = \|\nabla f(x^k)\|\cdot\|d^k\|\cdot\cos\theta^k$ → massimo quando $\theta = 0$

$\varphi'(0) = \nabla f(x^k)\cdot d^k$: più è negativa e più si scende

metodo del gradiente con ricerca esatta del passo

$x^{k+1} = x^k + t d^k$, $d^k = -\nabla f(x^k)$: steepest descent

$t^k = \arg\min_{t\geq 0} \varphi(t)$: mi fermo al minimo della φ

⚠ Ad ogni passo calcolo il minimo della φ: semplice perché è di una variabile → possono essere utilizzati tutti i metodi già visti per trovare gli zeri di una funzione (in questo caso la derivata prima). Se la funzione fosse convessa e trovassi un punto stazionario questo sarebbe un minimo assoluto. Se fosse anche coerciva avrei certezza anche dell'esistenza.

TEOREMA 1 (metodo del gradiente): Sia f coerciva. La successione del gradiente con ricerca esatta $\{x^k\}$ o termina in un numero finito di passi in un punto stazionario o i suoi punti di accumulazione sono punti stazionari
↓
Se non è coerciva non è detto che questo teorema sia applicabile.

ESEMPIO

$f = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1$ MIN $x^k = (1,0)$ $f(x^k) = 3$

$\nabla f = (4x_1 - 2x_2 + 1, -2x_1 + 6x_2) \xrightarrow{x^k} \nabla f(1,0) = (4-0+1, -2+0) = (5,-2)$

↓ discesa più ripida $d^k = (-5,2)$

calcolo la restrizione: $\varphi(t) \triangleq f(x^k + t d^k) = f((1,0) + t(-5,2)) = f(1-5t, 2t) =$

$= 2(1-5t)^2 - 2\cdot 2t\cdot(1-5t) + 12t^2 + 1 - 5t =$

$= 2(1 + 25t^2 - 10t) - 4t + 20t^2 + 12t^2 + 1 - 5t =$

$= 82t^2 - 29t + 3$

argmin $\varphi(t)$: parabola con $x_v = \frac{29}{164}$ (pt. minimo): ⚠ argmin $= t_k$

$$x^{k+1} = (1,0) + t_k(-5,2) = (1,0) + \frac{29}{164}(-5,2) = \left(1 - \frac{145}{164}, \frac{58}{164}\right) = \left(\frac{19}{164}, \frac{58}{164}\right)$$

2.

$f = -x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$ MAX $x^k = (1,0)$

$\nabla f = (-2x_1 + x_2,\ x_1 - 2x_2)$ $\nabla f(1,0) = (-2,1)$

$\varphi(t) = f((1,0) + t(-2,1)) = f(1-2t, t) = -(1-2t)^2 + (1-2t)t - t^2 =$
$= -(4t^2 - 4t + 1) + t - 2t^2 - t^2 = -4t^2 + 4t - 1 + t - 2t^2 - t^2 =$
$= -7t^2 + 5t - 1$

↓

$x_V = \dfrac{5}{14} = t^k \longrightarrow$ ⚠ Nei problemi di massimo si prende argmax

$x^{k+1} = (1,0) + \dfrac{5}{14}(-2,1) = \left(\dfrac{4}{14}, \dfrac{5}{14}\right)$

- REGIONE AMMISSIBILE della PNL (vincoli)

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (funzione obiettivo)

m vincoli di disuguaglianza; p vincoli di uguaglianza

$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \boxed{g_1(x) \le 0, \dots g_m(x) \le 0}, \boxed{h_1(x) = 0, \dots, h_p(x) = 0}\}$

↓ forma compatta

$g: \mathbb{R}^{\boxed{n}} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\quad g = (g_1, \dots, g_m)$

$h: \mathbb{R}^{\boxed{n}} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ $\quad h = (h_1, \dots, h_p)$

numero di variabili

esempio $\longrightarrow$

$$\begin{cases} \max\ 3x_1 + 5x_2 \\ 4x_1 + 6x_2 \le 7 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 = 9 \\ x_1 \le 0 \\ x_1^2 + x_2^2 \le 5 \end{cases}$$

PL. caso particolare della PNL

↓

$Ax \le b$: $p = 0$

m = numero righe di A

$p = 2,\ m = 9$

$g_1(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2 - 7$
$g_3(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 5$

Altro esempio:

$$\begin{cases} \min\ x_1^2 - x_2^2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 8 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 9 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 10 \end{cases}$$

fondamentale per il corso

Ipotesi: $f, g_i, h_j \in C^2$

Ricordiamo: f.o: 1. minimi $\boxed{\text{coercive}}$ / massimi $\boxed{\text{anti-coercive}}$ $\longrightarrow$ per regioni illimitate

2. convesse / $\boxed{\text{concave}}$ ∄ min, selle, max locali

3. quadratiche

+

condizioni necessarie = target
condizioni sufficienti = test

} per $\bar{x}$ non vincolato e per i **punti interni**, tutti i vincoli di < stretto

Regione ammissibile: proprietà che ci interessano

1. Chiuso o no $\longrightarrow$ per noi sono sempre chiuse perché i vincoli sono di $\le$
2. Limitato o no (dominio) $\longrightarrow$ non lo so a priori. Lo è se $0 \le x \le M$
3. Convesso o no
4. Regolare o no

INSIEME CONVESSO: $\forall x, y \in D$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in D$ $\forall \lambda \in [0,1]$

↓ Condizione sufficiente

g_i sono convesse, h_j sono lineari allora D è convesso

INSIEME REGOLARE: 3 casi $\longrightarrow$ 1. g, h lineari

2. $\boxed{g \text{ convesse}, h \text{ lineari}}$ (termini convessi), $\boxed{\exists\ \bar{x} : g(\bar{x}) < 0}$ (esiste un punto interno): condizione di slater

3. $\nabla g_i(\bar{x}), \nabla h_j(\bar{x})$ $\forall i, \cancel{j}$ attivi in $\bar{x}$ siano linearmente indipendenti

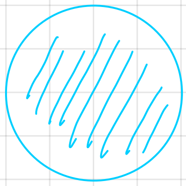
$\forall \bar{x}$ ammissibile (Mangasarian) $\quad$ vincoli resi con uguale (sempre verificati i j)

↓

Lo erano già i poliedri

ESEMPI

1.

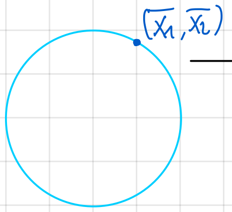


$\longrightarrow x_1^2+x_2^2 \le 1$: Chiuso, limitato

Convessità: $g_1(x_1,x_2) = x_1^2+x_2^2-1 \xrightarrow{Hg} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: Definita positiva e quindi convessa

Regolare: Classe 2 con punto interno

2.



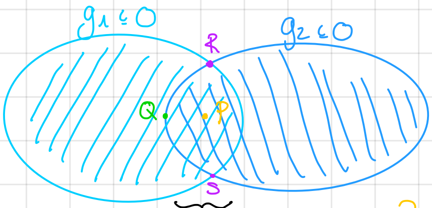
$\longrightarrow x_1^2+x_2^2 = 1$: chiuso, limitato ma non convesso

Regolare? $\nabla h = (2\bar{x}_1, 2\bar{x}_2)$

$\downarrow$

Linearmente indipendente (c'è solo questo e $\neq (0,0)$ perché non ammissibile)

3



Regione Ammissibile $\longrightarrow$ P è regolare in quanto è interno e quindi non ci sono vincoli attivi $\longrightarrow$ Condizione di Mangasarian sempre verificata

Q ha 1 solo gradiente e quindi verificata

R, S sono gli unici da verificare

4.

$h = x_1 x_2 - 1$

$\longrightarrow$ Non limitato, non convesso

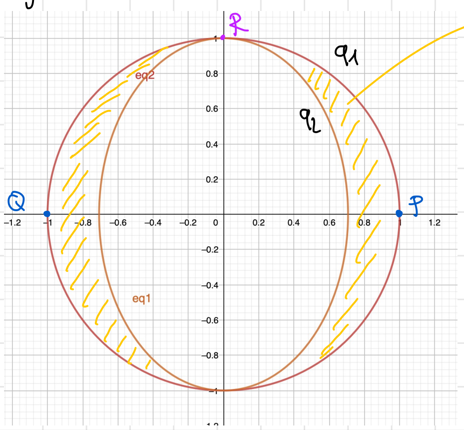
Regolarità: $\nabla h = (x_2, x_1)$: sempre attivo

Sempre indipendente perché fa 0 solo nell'origine che è inammissibile

5.

$g_1 = x_1^2 + x_2^2 - 1$

$g_2 = 1 - 2x_1^2 - x_2^2$



Chiuso, limitato, non convesso

Regolarità: OK punti interni e P, Q : $\nabla g_1 = (2x_1, 2x_2)$

$\nabla g_2 = (-4x_1, -2x_2)$

$R = (0,1) \longrightarrow (0,2), (0,-2)$: **Dipendenti** e quindi dominio irregolare

- ANALISI PUNTI di MAX / MIN / SELLA

$$(P)\begin{cases} \min / \max & f(x) \\ g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(x) \leq 0 \\ h_1(x) = 0 \\ \vdots \\ h_p(x) = 0 \end{cases}$$

$f, g_1, g_2, \dots, g_m, h_1, \dots, h_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tutte di classe C^2

$D = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, \ h(x) = 0\}$ (dove $g = (g_1, \dots, g_m)$ e $h = (h_1, \dots, h_p)$) è un insieme regolare

moltiplicatori di Karush

TEOREMA 2: Lagrange-Karush Kuhn-Tucker

1. Sia $\bar{x}$ minimo locale per (P). Allora $\exists\ \bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m) \in \mathbb{R}^m_+$ e $\exists\ \bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_p)$ tali che

moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0 & n \text{ equazioni} \\ \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle = 0 & \bar{\lambda}_1 g_1(\bar{x}) + \lambda_2 g_2(\bar{x}) + \dots + \lambda_m g_m(\bar{x}) = 0 \\ h(\bar{x}) = 0 & p \text{ equazioni} \\ (e \ \ g(\bar{x}) \leq 0) \end{cases}$$

$\downarrow$ avendo tutti addendi ≤ 0

$$\begin{cases} \lambda_1 g_1(\bar{x}) = 0 \\ \vdots \\ \lambda_m g_m(\bar{x}) = 0 \end{cases} \quad : m \text{ equazioni}$$

ESCLUSO: $\bar{x}$ è un dominio e quindi ammissibile

SISTEMA LKKT

I minimi locali sono soluzioni del sistema LKKT: variabili $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$.
Il sistema è la **condizione necessaria di ottimalità**. Il sistema è quadrato in $n+m+p$ equazioni in $n+m+p$ incognite. Il sistema è inoltre non lineare. Questo diventa lineare nel caso di funzioni quadratiche su poliedri

2. Sia $\bar{x}$ massimo locale per (P). Allora $\exists\ \bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m_-$ e $\exists\ \bar{\mu}(\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_p)$ tali che

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0 \\ \langle \bar{\lambda}, g(\bar{x}) \rangle = 0 \\ h(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

ESEMPIO

$n = 2$ $\longrightarrow$ Scrivo il sistema e lo risolvo trovando le soluzioni

2 vincoli ≤ 0

1 vincolo $= 0$

(2, 0, 3, 1, -5)

(3 1 5 -2 4) $\longrightarrow$ Dobbiamo **etichettare** le soluzioni

(4 0 -3 -2 0)

$(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1)$

1. Non è massimo perché non rispetta 2.: minimo o sella
2. Ha λ discordi: è sicuramente una sella
3. Non è un minimo ($\lambda < 0$) ma non è sicuramente massimo (C.N): può essere un massimo o una sella

$\downarrow$ se la regione fosse limitata

1. Minimo assoluto
2. Sella
3. Massimo assoluto ⚠ Weierstrass
4. Dobbiamo sostituirlo nella funzione obiettivo per vedere se è un nuovo max. assoluto

Aggiungo (1, 1, -1, -2, 3) $\longrightarrow$ 4.

RISOLUZIONE PROBLEMI

D regione ammissibile

D regolare? $\xrightarrow{\text{NO}}$ Aggiungere i punti irregolari come potenziali stazionari anche se non risolvono LKKT

SI ↓

D limitato? $\xrightarrow{\text{NO}}$ f coerciva? $\xrightarrow{\text{SI}}$ ∃ min assoluto ⟶ $\boxed{\text{f convessa? D convesso?}}$ $\xrightarrow{\text{SI}}$ Non ci sono selle né minimi locali

NO ↓

f anticoerciva? $\xrightarrow{\text{SI}}$ ∃ max. assoluto ⟶ $\boxed{\text{f concava? D convesso?}}$ $\xrightarrow{\text{SI}}$ Non ci sono selle né massimi locali

SI ↓

∃ min, max assoluti

↓

$\boxed{\text{f convessa? D convesso?}}$

SI ↓

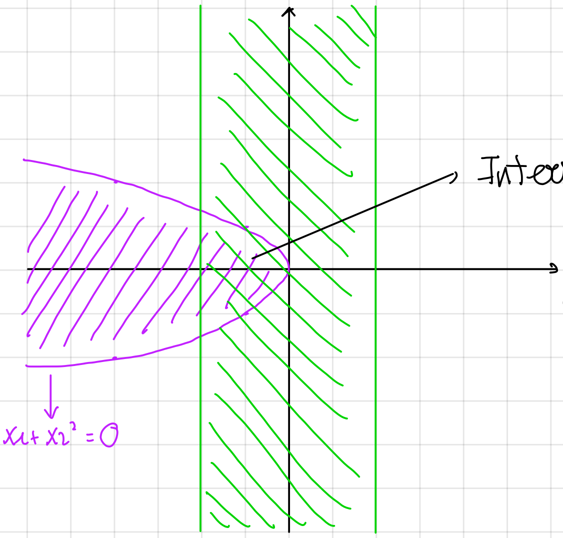
Non ci sono selle né massimi locali (eccetto quello assoluto)

ESEMPIO

$$\begin{cases} f = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2x_2 \\ g_1 = x_1 + x_2^2 \\ g_2 = x_1^2 - 4 \end{cases}$$

↓

$-2 \le x_1 \le 2$



Intersezione: regione ammissibile ↓ limitata e convessa con punto interno, quindi regolare

Se volessi fare Mangasarian: OK per punti interni

per 1 vincolo: $\nabla g_1 (1, 2x_2) \neq (0,0) \ \forall x_1, x_2$

$\nabla g_2 (2x_1, 0) = (0,0)$ per $x_1 = 0$ e quindi $(0,0)$. Questo vincolo non è però attivo in tale punto

per 2 vincoli: punti $(-2, \sqrt{2})$; $(-2, -\sqrt{2})$ quindi punti di intersezione P_1 e P_2

↓

$P_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{matrix}$: linearmente indipendenti ($\det \neq 0$)

$P_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{2} \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$: linearmente indipendenti

↓

dominio regolare

LKKT

$\nabla f = (2x_1+2,\ 2x_2+2)$ $\quad \nabla g_1 = (1, 2x_2)$ $\quad \nabla g_2 = (2x_1, 0)$

$$\begin{cases} (2x_1+2,\ 2x_2+2) + \lambda_1(1, 2x_2) + \lambda_2(2x_1, 0) = 0 \\ \lambda_1(x_1+x_2^2) = 0 \\ \lambda_2(x_1^2-4) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1+2+\lambda_1+2\lambda_2 x_1 = 0 \\ 2x_2+2+\lambda_1 2x_2 = 0 \\ \lambda_1(x_1+x_2^2) = 0 \\ \lambda_2(x_1^2-4) = 0 \end{cases}$$

x	λ	mL	mG	ML	MG	S	f.o.	
$(-1,-1)$	$(0,0)$	Si	Si	NO	NO	NO	-2	1.
$(-2,-1)$	$(0,-\frac{1}{2})$	NO	NO		NO		-1	2.
$(-2,-\sqrt{2})$	$\left(\frac{2\sqrt{2}-2}{-2\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}-2}{-2\sqrt{2}}\cdot 2\right)$	NO	NO		NO		$2-2\sqrt{2}$	3.
$(-2,\sqrt{2})$	$\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, \frac{\lambda_1-2}{2}\right)$	NO	NO	Si	SI	0	$2+2\sqrt{2}$	4.

1. $\begin{cases} 2x_1+2=0 \\ 2x_2+2=0 \end{cases} \longrightarrow (-1,-1)$

2. $\begin{cases} 2x_1+2-x_1=0 \\ 2x_2+2=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -4+2+\lambda_1-4\lambda_2=0 \\ -2\sqrt{2}+2+\lambda_1(-2\sqrt{2})=0 \\ \lambda_1(0)=0 \\ \lambda_2(0)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1-4\lambda_2=2 \\ -2\sqrt{2}\lambda_1 = 2\sqrt{2}-2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -4+2+\lambda_1+2\lambda_2(-2)=0 \\ 2\sqrt{2}+2+\lambda_1(2\sqrt{2})=0 \end{cases}$

- **TEOREMA 3** ($D = \{x : g(x) \le 0,\ h(x)=0\}$ D regolare $f, g, h \in C^2$)

funzioni convesse: Sia f convessa e D convesso e sia $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ una soluzione del sistema LKKT (punto stazionario) Allora se $\bar{\lambda} \geq 0$ (ha tutte le componenti positive), $\bar{x}$ è minimo globale (condizione **sufficiente**)

funzioni concave: Sia f concava e D convesso e sia $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ una soluzione del sistema LKKT. Allora se $\bar{\lambda} \le 0$ (tutte le componenti ≤ 0), $\bar{x}$ è massimo globale

↓

una funzione concava può non avere massimo assoluto ($-e^{-x}$ nel caso di dominio non limitato) soltanto in un dominio non limitato. nel dominio limitato deve esserci almeno una soluzione

ESEMPIO

$f = x_2 - x_1^2$

$g_1 = x_1^2 + x_2^2 - 4$

$g_2 = x_2 - 1$

x	λ	mL	mG	ML	MG	S	FO
$(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2})$	$(1,0)$	Si	Si	NO	NO	NO	$-\frac{17}{4}$
$(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2})$	$(1,0)$	Si	Si	NO	NO	NO	$-\frac{17}{4}$
$(0,-2)$	$(1/4, 0)$	?	NO	NO	NO	?	-2
$(\sqrt{3}, 1)$	$(1,-3)$	NO	NO	NO	NO	Si	-2
$(-\sqrt{3}, 1)$	$(1,-3)$	NO	NO	NO	NO	Si	-2
$(0,1)$	$(0,-1)$	NO	NO	Si	Si	NO	1

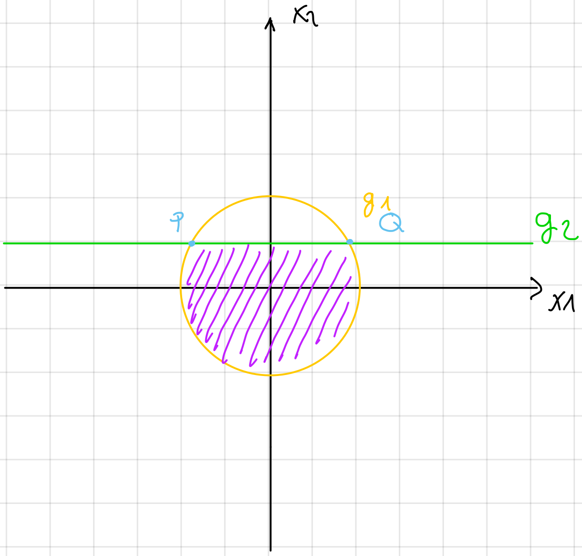
moltiplicatori positivi

a. D è regolare?

b. Trovare i moltiplicatori di Lagrange (LKKT)

c. Classificare i punti dati

a.



$$\nabla g_1 = (2x_1, 2x_2) \longrightarrow 0 \text{ solo in } (0,0)$$
$$\nabla g_2 = (0, 1)$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^2 + 1 - 4 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \pm\sqrt{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$P = (-\sqrt{3}, 1) \qquad Q = (\sqrt{3}, 1)$

$$P \longrightarrow \begin{vmatrix} -2\sqrt{3} & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\sqrt{3} \longrightarrow \text{Regolare}$$

$$Q \rightarrow \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\sqrt{3}$$

b. $\nabla f = (-2x_1, 1)$

$\downarrow$ LKKT

$$\begin{cases} (-2x_1, 1) + \lambda_1 (2x_1, 2x_2) + \lambda_2 (0,1) = 0 \\ \lambda_1 (x_1^2 + x_2^2 - 4) = 0 \\ \lambda_2 (x_2 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \\ 1 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2 - 4\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 x_2 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Punto 1: $\begin{cases} -\cancel{\sqrt{15}}^{1} + \cancel{\sqrt{15}}^{1} \lambda_1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 1 \\ 1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \longrightarrow \lambda_2 = 0 \end{cases}$

Punto 2: $\begin{cases} \cancel{\sqrt{15}}^{1} - \cancel{\sqrt{15}} \lambda_1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$

Punto 3: $\begin{cases} 1 - 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{4} \\ -2\lambda_2 - \lambda_2 = 0 \longrightarrow \lambda_2 = 0 \end{cases}$

Punto 4: $\begin{cases} -\cancel{2\sqrt{5}} + \cancel{2\sqrt{3}} \lambda_1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 1 \\ 1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \longrightarrow 1 + 2 + \lambda_2 = 0 \longrightarrow \lambda_2 = -3 \end{cases}$

Punto 5: $\begin{cases} \cancel{2\sqrt{3}} - \cancel{2\sqrt{3}} \lambda_1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 1 \\ 1 + 2 + \lambda_2 = 0 \longrightarrow \lambda_2 = -3 \end{cases}$

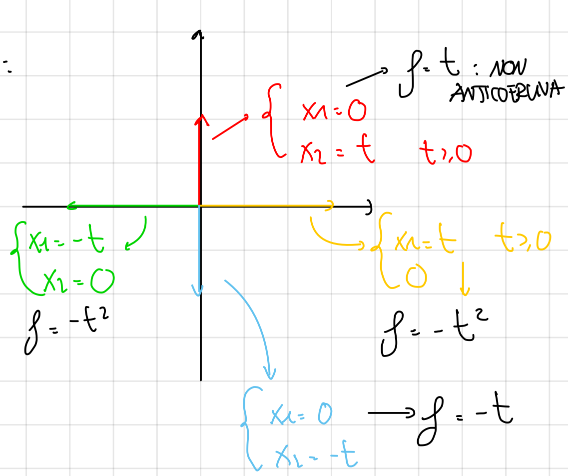
Punto 6: $\begin{cases} 1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \longrightarrow \lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 - 4\lambda_1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 0 \end{cases}$

c. Il punto $(0,-2)$ è un minimo locale o una sella? Posso dirlo solo se f è convessa in quanto S è convesso e quindi posso usare il teorema 3.

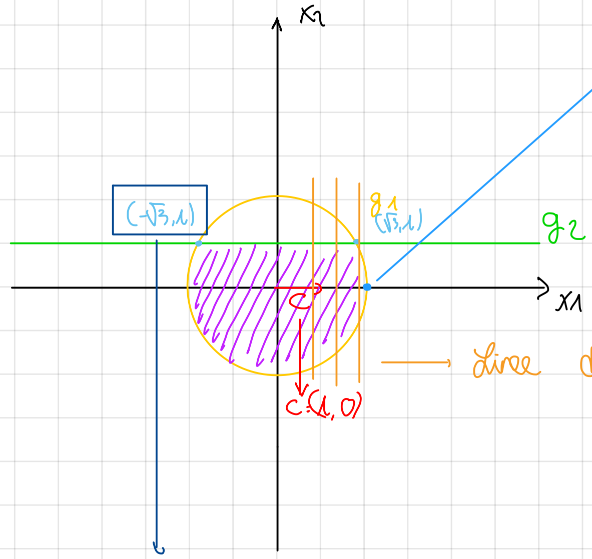
$\downarrow$

$\nabla f = (-2x_1, 1) \qquad Hf = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ semidefinita negativa e quindi concava: può essere anticoercitiva

$f(x_1,x_2) = x_2 - x_1^2$:



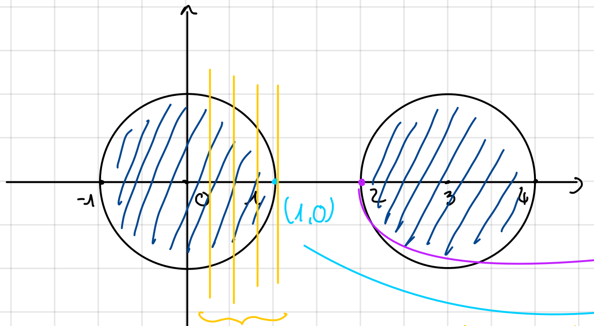
- RISOLUZIONE GEOMETRICA



voglio trovare f.o. che abbia MG in quel punto $\longrightarrow f(x_1,x_2) = x_1$

$\longrightarrow$ linee di isoguadagno ortogonali a c per funzioni lineari

voglio trovare f.o che abbia mG qua $\longrightarrow$ NON unico: $f(x_1,x_2) = x_1 - x_2$



$f(x_1,x_2) = x_1$
min assoluto $(-1,0)$
max assoluto $(4,0)$

$(2,0)$: minimo locale

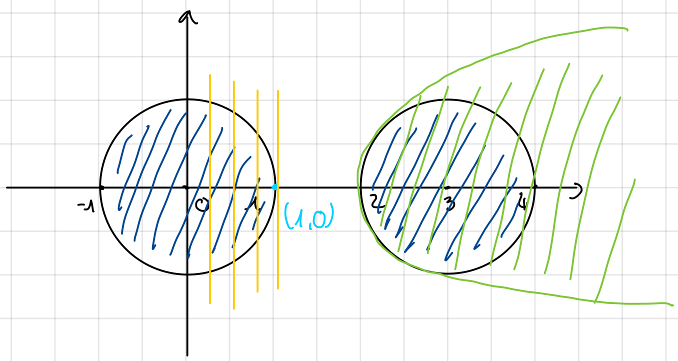
$\bar{x}$ soluzione di KKT?

linee di isocosto tutte a sinistra e quindi tutte più basse e quindi si ha un minimo locale e quindi è una soluzione del sistema KKT

Disegnare regione ammissibile che abbia mG e non MG su un dominio

$\rightarrow f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

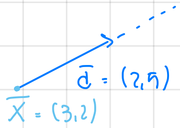
Disegnare regione ammissibile che abbia mG e mL ma non MG



RESTRIZIONI

modo 1: parametrica

$$\begin{cases} x_1 = 3+2t \\ x_2 = 2+5t \end{cases} \quad t \geq 0$$



↓ Generale

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 + t\bar{d}_1 \\ x_2 = \bar{x}_2 + t\bar{d}_2 \end{cases}}$$

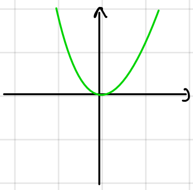
$t \geq 0$: dobbiamo massimizzare o minimizzare e quindi non la senso avere una retta

Se volessimo restringerci ad una circonferenza di raggio uni tario dovremmo scrivere $\boxed{\begin{cases} x_1 = \cos t \\ x_2 = \operatorname{sen} t \end{cases}}$ $t \in [0, 2\pi]$ $\xrightarrow{\text{se non mi fosse venuto in mente}}$ eq: $x_1^2 + x_2^2 = 1$ $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$ $t \in [-1, 1]$

Ci interessano le restrizioni ad **un parametro**: $e(t) = f(\text{restrizione}) \longrightarrow$ Diventa funzione di una sola variabile

↓ Esempi

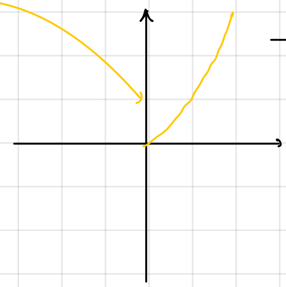
Restrizione a parabola



$x_2 = x_1^2 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t^2 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

$x_1^2 + x_2^2 = 1 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{1-t} \\ x_2 = t \end{cases}$: il parametro non deve per forza essere in x_1

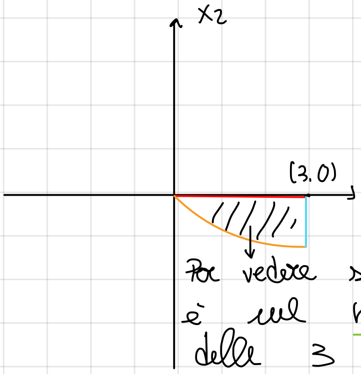
$x_2 = x_1^2 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \pm\sqrt{t} \\ x_2 = t \end{cases}$ $t \in [0, +\infty[$



$\longrightarrow$ ⚠ Evitiamo sempre 2 parametrizzazioni

↓ Stessa

$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t^2 \end{cases}$ $t \geq 0$ $\longrightarrow$ Migliore per fare i conti



$x_1 = x_2^2$

↓ voglio parametrizzare il bordo

$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $t \in [0, 3]$ $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -t \end{cases}$ $t \in [0, -\sqrt{3}]$ ⚠ segmento generale $t \in [0, a]$ $\begin{cases} x_1 = t^2 \\ x_2 = t \end{cases}$ $t \in [-\sqrt{3}, 0]$

Per vedere se c'è minimo interno devo verificare $\nabla f = 0$. Se non c'è è sul bordo $\longrightarrow$ Mi restringo ed il minimo è il più piccolo delle 3 restrizioni

⚠ OSSERVAZIONE: Se $\bar{x}$ è mL di f su $\boxed{D \subset \mathbb{R}^n}$ $\{g_i(x) \leq 0, h_j(x) = 0\}$ allora $\bar{t}$ è mL di e sulla restrizione

↓

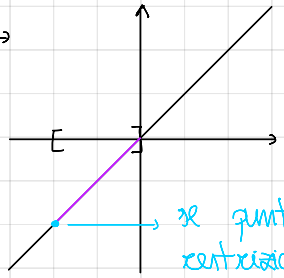
Se ho un dubbio tra mL e sella calcolo la restrizione e, se ML nella restrizione è una sella.

CONTINUO ESERCIZIO PAGINA 83

Le restrizioni sul bordo mi danno informazioni utili

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \end{cases}$ $t \in [-2, 0]$ $\longrightarrow$ Studio $\bar{t}$ vicino a -2 $(\bar{x})$, è minimo locale o massimo locale?

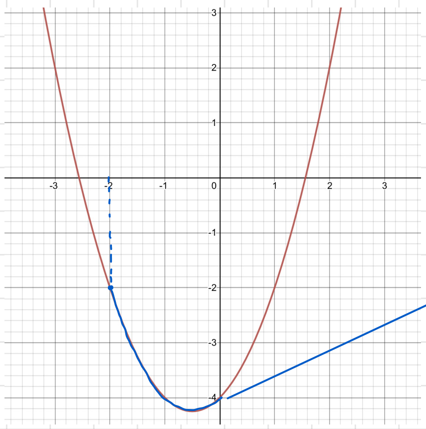
$\varphi(t) = t \longrightarrow$



se punto è un minimo locale e quindi devo cambiare restrizione

cambio restrizione: $x_1^2+x_2^2=4 \longrightarrow x_1^2 = 4 - x_2^2 \longrightarrow f: x_2-(4-x_2^2) = \varphi(t)$

$t-(4-t^2) = t^2+t-4$



$\longrightarrow \bar{t} = -2$ perché $x_2 = t$

Lo studio qua perché nel problema iniziale i punti intorno a -2 hanno ordinata maggiore del punto

CONTINUO ESERCIZIO PAGINA 82

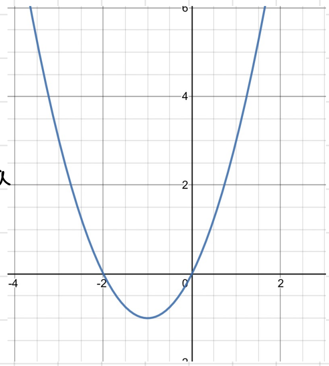
vincolo $\quad x_1^2-4 \le 0$

$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = t \end{cases} \quad t \in [-\sqrt{2}, 0] \longrightarrow \varphi(t) = \cancel{4}-\cancel{4}+t^2+2t$

$\bar{t} = -\sqrt{2}$

$\downarrow$

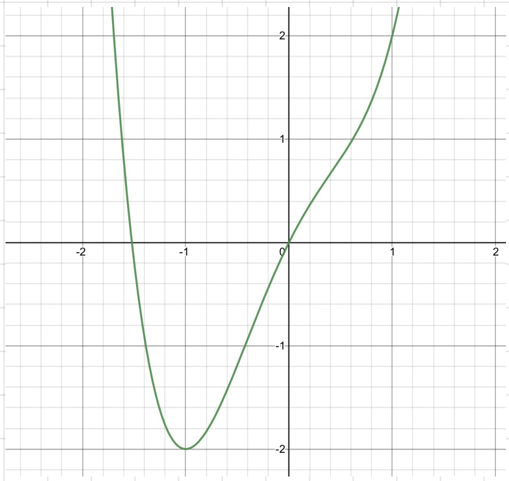
max. locale quindi nessuna informazione



vincolo $\quad x_1 + x_2^2 \le 0$

$\begin{cases} x_1 = -t^2 \\ x_2 = t \end{cases} \quad \bar{t} = -\sqrt{2}, \quad t \in [-\sqrt{2}, 0]$

$\varphi(t) = t^4 - t^2 + 2t$



- ALGORITMI RISOLUTIVI

Metodo di Frank-Wolfe

Successione iterativa $\boxed{x^{k+1} = x^k + t_k d^k}$ di direzione: ad ogni passo f.o. migliora (posso fermarmi) + iterazioni + teorema di convergenza

TEOREMA (convergenza ideale): La successione $\{x^k\}$ (con d^k e t_k scelti) $\boxed{\text{converge}}$? in un $\boxed{\text{numero}}$ $\boxed{\text{finito}}$? di passi al $\boxed{\text{minimo globale}}$?

↓ sostituiamo ↓ sostituiamo ↓ sostituiamo con

la punti di accumulaz. $\lim_{k\to+\infty} x^k = x^*$ punto stazionario

soluzione del sistema LKKT

↓

Problemi convessi: La successione converge al limite al minimo globale

+ quadratico: si ha anche il numero finito di passi

problemi di minimo

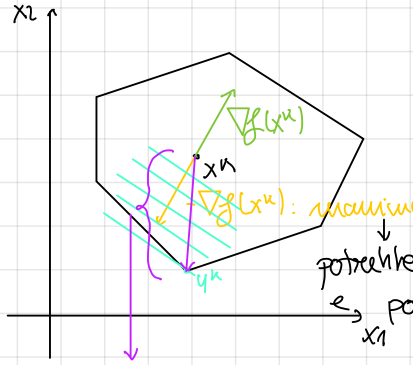
$$\boxed{\begin{cases} \min f(x) \\ Ax \le b \end{cases} \quad Hp: \text{ poliedro limitato}}$$

↓ costruzione problema linearizzato in x^k

$$\boxed{PL(x^k) \begin{cases} \min \nabla f(x^k)\, x \\ Ax \le b \end{cases}}$$

↓ soluzione ottima

y^k



potrebbe uscire fuori dal poliedro e potrei non trovare il punto

segmento $x^k y^k$ interno al poliedro: posso utilizzare argmin

$t_k \in \underset{t\in[0,1]}{\operatorname{argmin}} \boxed{f(x^k + t(y^k - x^k))}$ $\varphi(t)$

equazione segmento $[x^k, y^k] \to ty^k + (1-t)x^k$

⚠ $x^{k+1} = x^k + t_k d_k$

$d_k = y^k - x^k$

ESEMPIO

$$\begin{cases} f = 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 6x_1 + 5x_2 \\ V = (-3,-4)\ (-3,1)\ (3,-4)\ (3,2) \\ MAX \\ x^k = \left(0, \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

$\max_{x\in P} f(x)$

$\nabla f(x) = (4x_1 - 2x_2 - 6, -2x_1 + 5)$

$\boxed{\nabla f(0, 3/2) = (-9, 5)}$

↓ Problema linearizzato

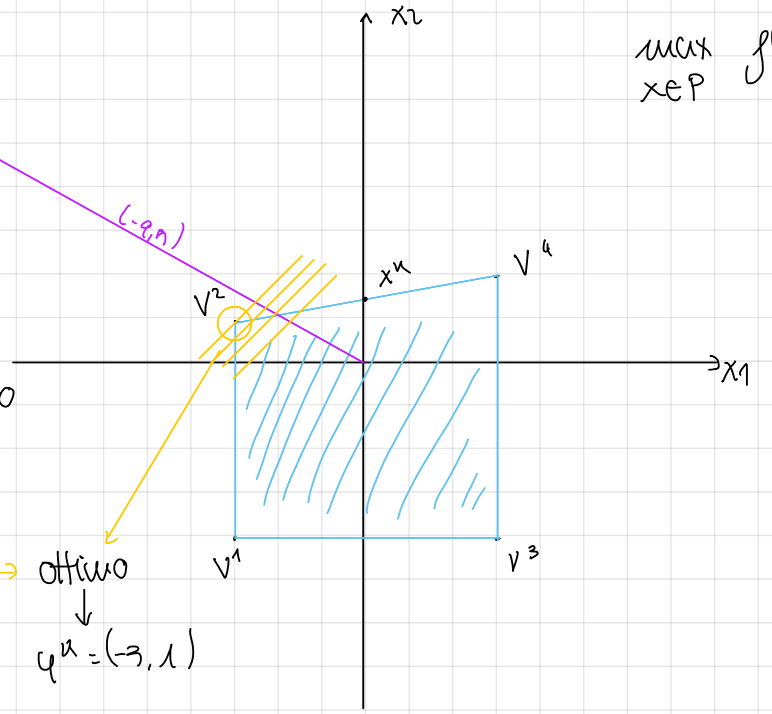
$$PL(x^k) = \begin{cases} \max -9x_1 + 5x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

↓ devo trovare

y^k ⟶ ottimo

↓

$y^k = (-3, 1)$



$$\varphi(t) = f\Big(\underbrace{(0,\tfrac{3}{2})}_{x^k} + t\big(\underbrace{(-3,1)}_{y^k} - \underbrace{(0,\tfrac{3}{2})}_{x^k}\big)\Big) = f\left((0,\tfrac{3}{2}) + (-3t, -\tfrac{t}{2})\right) = f\left(-3t, \tfrac{3}{2} - \tfrac{t}{2}\right)$$

$$\varphi(t) = 2(-3t)^2 - 2(-3t)\left(\frac{3}{2} - \frac{t}{2}\right) - 6(-3t) + 5\left(\frac{3}{2} - \frac{t}{2}\right) = 15t^2 + \frac{49}{2}t$$

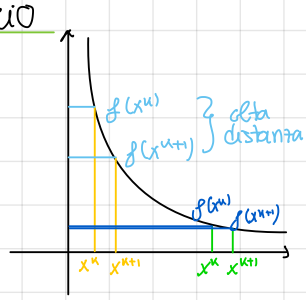
$t_k = \operatorname{argmax} = 1 \longrightarrow x^{k+1} = (-3, 1)$

TEOREMA 5 (di convergenza): La successione $\{x^k\}$ dell'algoritmo di Frank-Wolfe converge ad un punto stazionario $\xrightarrow{\text{ipotesi}}$ $\begin{cases} \min / \max f(x) \\ Ax \le b \\ \text{limitato} \end{cases}$

↓ significato

$\exists \lim_{k \to +\infty} x^k = x^*$

CRITERI di STOP:
a. Se $y^k = x^k$? x^k è un punto stazionario
b. Se $t^k = 0$? x^k è un punto stazionario
c. Criteri classici:
I. Numero passi
II. Tempo
III. $\|x^{k-1} - x^k\| < \varepsilon$ ⟶
IV. $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon$

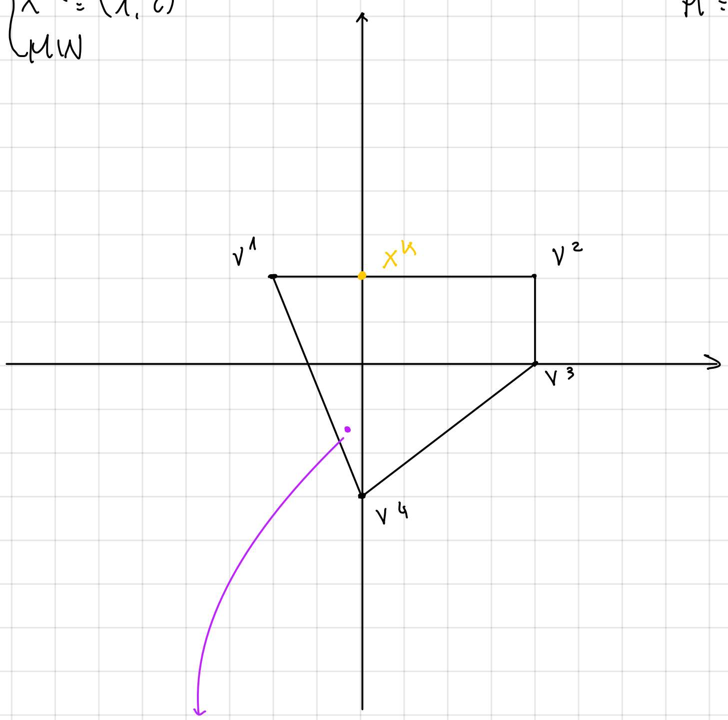


Per problemi convessi la successione converge al minimo globale in quanto non hanno minimi locali o selle nei punti interni. Se invece cerchiamo il minimo di una funzione concava il metodo potrebbe convergere ad un minimo locale e bisogna inoltre analizzare la frontiera del poliedro.

Come troviamo il punto iniziale?
Il punto iniziale deve essere ammissibile ed essendo che appartiene al poliedro uso il duale ausiliario con f.o. qualunque (anche 0,0)

ESERCIZIO

$$\begin{cases} f = -2x_1^2 - 6x_1x_2 - 10x_1 - 3x_2 \\ V = \{(-2,2)(4,2)(4,0)(0,-3)\} \\ x^k = (1,2) \\ \text{MIN} \end{cases}$$



È dentro: Teorema di Fermat (punto stazionario) e quindi soluzione di LKKT.
↓
Per etichettarlo usiamo l'hessiana ed essendo indefinita è una sella
↓
Il minimo globale è sul bordo. Se il punto fosse stato sul bordo $\nabla f = 0$ non avrebbe significato nella

$\nabla f = (-4x_1 - 6x_2 - 10,\ -6x_1 - 3) \xrightarrow{=0} \boxed{x_1 = -\frac{1}{2} \quad x_2 = -\frac{4}{3}}$

$H = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow (-4-\lambda)(-\lambda) - 36 = 0$

$\lambda^2 + 4\lambda - 36 = 0$

$\lambda = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+144}}{2} = -2 \pm \sqrt{40}$ indefinita, né concava né convessa

$\nabla f(x^k) = (-26, -9)$

$PL(x^k) = \begin{cases} \min -26x_1 - 9x_2 \\ x \in P \end{cases}$

↓ sostituisco vertici

v^1: 34
v^2: -122 ⟶ minimo: scelgo questo $y^k = (4,2)$
v^3: -104
v^4: 27

$\varphi(t) = f((1,2) + t((4,2) - (1,2))) =$
$= f((1,2) + t(3,0)) =$
$= f(1+3t, 2) =$
$= -2(1+3t)^2 - 6(1+3t) \cdot 2 - 10(1+3t) - 6 =$
$= -18t^2 - 12t - 2 - 12 - 36t - 10 - 30t - 6 =$
$= -18t^2 - 78t - 30$

$t_k = \arg\min_{[0,1]} \varphi(t) = 1$

$x^{k+1} = (4,2)$: mi sposto del massimo possibile curiosità

$$\begin{cases} \min / \max \ f(x) \\ g_1(x) \le 0 \\ \vdots \\ g_m(x) \le 0 \\ h_1(x) = 0 \\ \vdots \\ h_p(x) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(\underset{\mathbb{R}^n}{x}, \underset{\mathbb{R}^m}{\lambda}, \underset{\mathbb{R}^p}{\mu}) \triangleq f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_m g_m(x) + \mu_1 h_1(x) + \dots + \mu_p h_p(x)$$

$$\nabla_x L = \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(x) + \mu_1 \nabla h_1(x) + \dots + \mu_p \nabla h_p(x)$$

↓ cond. minimo

$\nabla_x L = 0$: sistema LKKT

ESERCIZIO

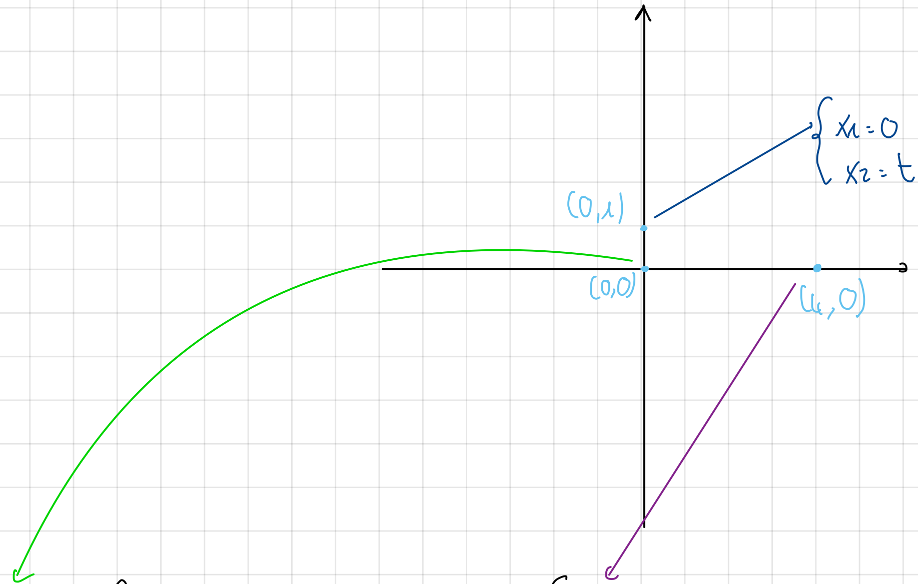
$$\begin{cases} f = (x_1 - 4)^2 + 2(x_2 - 1)^2 \\ g_1 = -x_1 \\ g_2 = -x_2 \end{cases}$$

Regione ammissibile = primo quadrante (regione illimitata)
↓
funzione coerciva: ha minimo assoluto

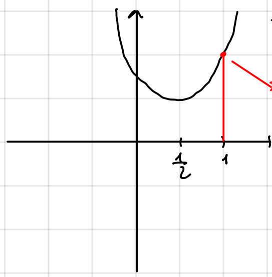
X	λ	mL	ML	mG	MG	S	f.O
4, 1	(0, 0)	SI	NO	SI	NO	NO	0
4, 0	(0, -4)	NO	NO	NO	NO	SI	2
0, 1	(-8, 0)	NO	NO	NO	NO	SI	16
0, 0	(-8, -4)	NO	SI	NO	NO	NO	18

Sistema LKKT

$$\begin{cases} 2x_1 - 8 - \lambda_1 = 0 \\ 4x_2 - 4 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(-x_1) = 0 \\ \lambda_2(-x_2) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{In ordine}} \begin{matrix} (0,0) \\ (0,-4) \\ (-8,0) \\ (-8,-4) \end{matrix}$$



$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \end{cases}$ $t \in [0, 2]$
↓
$\varphi_1(t) = 4t^2 - 6t + 15$



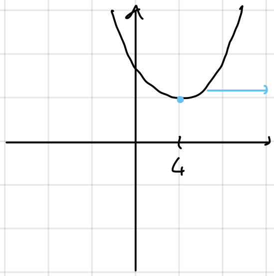
$\bar{t} = 1$ sella

$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $t \in [0, 1]$
↓
$\varphi_2(t)$: MAX. LOC

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \end{cases}$ $t \in [0, 1]$
↓
$\varphi_1(t)$: MAX. LOC

$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $t \in [3, 5]$ ⟶ $\varphi_2(t) = t^2 - 8t + 18$

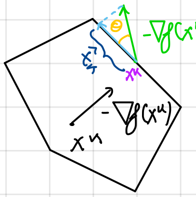
$\bar{t} = 4$



minimo

Metodo del gradiente proiettato

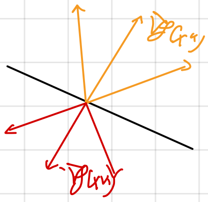
$$\begin{cases} \min f(x) \\ Ax \le b \quad \text{limitato} \end{cases}$$



$-\nabla f(x^k)$: non possiamo farlo sul bordo

↓

Ne facciamo la proiezione ortogonale. È una direzione di discesa? L'angolo θ è compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$



direzioni di salita: $\varphi'(t) > 0$

direzioni di discesa: $\varphi'(t) < 0$

Come proietto?

1. Calcolo il massimo spostamento possibile sul poliedro: $\hat{t}_k$

↓

2. Mi sposto del **passo ideale**: $t_k \in \arg\min_{t \in [0, \hat{t}_k]} f(x^k + t\boxed{d^k})$ → proiezione del gradiente

↓ **Passi**

I. Poni $k=0$ e scegli un punto x^0 ammissibile ($Ax^0 \le b$) → Duale ausiliario

II. Costruire l'insieme J dei vincoli attivi in x^k, cioè $J = \{i : A_i x^k = b_i\}$. Se sono 0 è un punto interno, se è 1 siamo su uno spigolo, se sono 2 siamo su un vertice. Definisci la matrice M, avente per righe le righe A_i della matrice A per ogni $i \in J$. $\xrightarrow{\text{Dimensioni}}$

- 0: punto interno
- 1×2: punto dello spigolo
- 2×2: vertice

III. Costruisci la matrice di proiezione $H = \begin{cases} I & \text{se } J = \emptyset \\ I - M^T(MM^T)^{-1}M & \text{se } J \ne \emptyset \end{cases}$

e calcola la direzione $d^k = -H\nabla f(x^k)$

Analizziamo le dimensioni: Nessun vincolo attivo: $\underbrace{I = 2\times 2}$

Se M è 2×2 torna

Moltiplicata per la trasposta $\det(MM^T) \ne 0$ sempre

Se M è 1×2: $\underbrace{\underbrace{M^T}_{2\times1}\underbrace{\underbrace{\boxed{(MM^T)^{-1}}}_{\underbrace{1\times2 \cdot 2\times1}_{1\times1}}\underbrace{M}_{1\times2}}_{1\times2}}_{2\times2}$ ✓

IV. Se $d_k = 0$: il gradiente è perpendicolare quindi vai al punto V. Altrimenti indica con $\hat{t}_k$ la soluzione del problema $\begin{cases} \max t \\ A(x^k + td^k) \le b \end{cases}$ Massimo spostamento

t^k e d^k dati e quindi diseq. lineari in t con f.o. lineare. Abbiamo quindi un problema di PL in una variabile: facile.

Calcola $t^k \in \arg\min_{[0, \hat{t}_k]} \underbrace{f(x^k + td^k)}_{\varphi(t)}$ e poni $x^{k+1} = x^k + t^k d^k$, $k = k+1$ e torna a II

V. Calcola $\lambda = -(MM^T)^{-1} M \nabla f(x^k)$

$M = 2\times2$ → $\underbrace{2\times2}_{(MM^T)^{-1}} \cdot \underbrace{2\times2}_{M} \underbrace{2\times1}_{\nabla f(x^k)} = 2\times1$

$M = 1\times2$ → $1\times1 \cdot 1\times2 \cdot 2\times1 = \underbrace{1\times1 \cdot 1\times1 = 1\times1}$

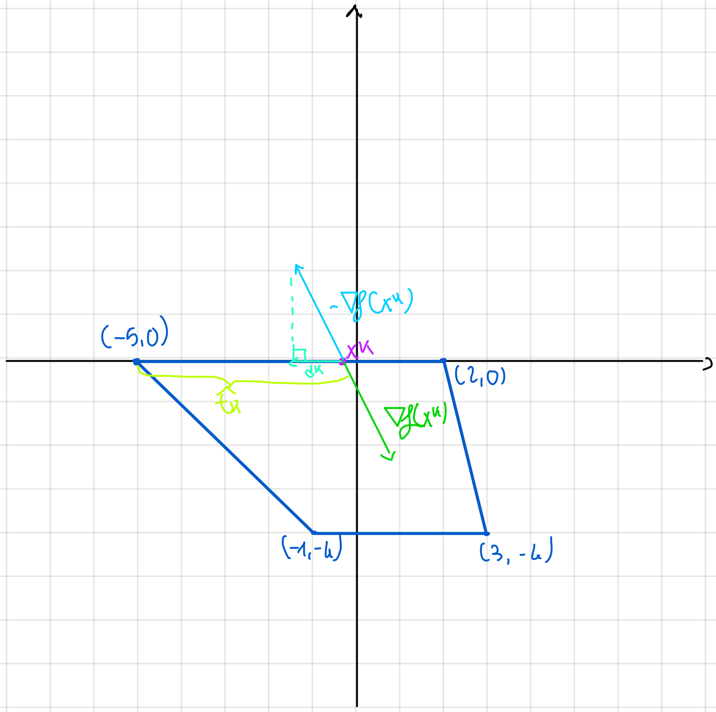
nr. componenti = nr. vincoli attivi

Se $\lambda \ge 0$ allora stop (x^k soddisfa LKKT). Altrimenti scegli $\lambda_j = \min\{\lambda_i, i \in J\}$, togli da M la riga A_j e torna a III.

ESERCIZIO

$$\begin{cases} \text{MIN} \\ f = 2x_1^2 + 8x_1x_2 - 4x_2^2 + 5x_1 - 6x_2 \\ V = \{(3,-4)\ (5,0)\ (-1,-4)\ (2,0)\} \\ x^k = \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \end{cases}$$

$$I - M^T(MM^T)^{-1}M$$



$M = (0,1)$

$$\boxed{I - \boxed{M^T(\boxed{MM^T})^{-1}M}}$$

$$(0,1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1)(0,1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0,1) = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\nabla f = (4x_1 + 8x_2 + 5,\ 8x_1 - 8x_2 - 6)$$

$$d^k = -H\nabla f(x^k)$$

$$\nabla f(x^k) = \left(-\frac{4}{3} + 5,\ -\frac{8}{3} - 6\right) = \left(\frac{11}{3}, -\frac{26}{3}\right)$$

$$d^k = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{11}{3}\\ \frac{20}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{11}{3}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\hat{t}_k \longrightarrow -\frac{1}{3} + \hat{t}_k\left(-\frac{11}{3}\right) = -5 \Longrightarrow \hat{t}_k = \frac{14}{11}$$

$$t_k \longrightarrow f\left(\left(-\frac{1}{3}, 0\right) + t\left(-\frac{11}{3}, 0\right)\right) = \varphi(t) \longrightarrow \varphi(t) = f\left(-\frac{1}{3} - \frac{11}{3}t, 0\right)$$

$$\varphi(t) = 2\left(\frac{1}{9} + \frac{121}{9}t^2 + \frac{22}{9}t\right) + 5\left(-\frac{1}{3} - \frac{11}{3}t\right) = \underbrace{\frac{242}{9}t^2 - \frac{121}{9}t}_{\downarrow\ \varphi'(t) = 0}$$

$$t = \frac{\frac{121}{9}}{\frac{484}{9}} = \frac{1}{4} = t_k \text{ perché argmin}$$

$$x^{k+1} = \left(\frac{5}{4}, 0\right)$$

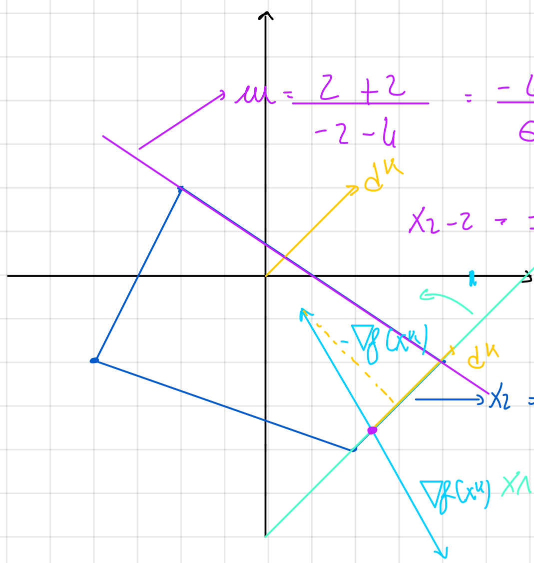
2.

$$\begin{cases} \text{MIN} \\ -4x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_2^2 + 6x_1 - 6x_2 \\ V = \{(-4,-2), (4,-2), (2,-4), (-2,2)\} \\ x^k = \left(\frac{8}{3}, -\frac{10}{3}\right) \end{cases}$$

$$m = \frac{2+2}{-2-4} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$x_2 - 2 = -\frac{2}{3}(x_1 + 2)$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}$$



$$x_2 = x_1 - 6$$

$$\nabla f(x^k) \quad x_1 - x_2 \leq 6$$

$$M = (1, -1)$$

$$H = \boxed{I - \boxed{M^T(\boxed{MM^T})^{-1} M}}$$

$$(1\ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} (1\ -1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(1\ -1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$d^k = -H \nabla f(x^k)$$

$$\nabla f = (-8x_1 - 6x_2 + 6,\ -4x_2 - 6x_1 - 6) \longrightarrow \nabla f(x^k) = \left(-8 \cdot \frac{8}{3} - 6 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) + 6,\ -4 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) - 6 \cdot \frac{8}{3} - 6\right) =$$

$$= \left(\frac{14}{3},\ -\frac{26}{3}\right)$$

$$d^k = -\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ -\frac{26}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x^k + \hat{t}_k d^k) \longrightarrow x_2 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\varphi\left(\left(\frac{8}{3}, -\frac{10}{3}\right) + \hat{t}_k(2, 2)\right) = \varphi\left(\frac{8}{3} + 2\hat{t}_k,\ -\frac{10}{3} + 2\hat{t}_k\right)$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{10}{3} + 2\hat{t}_k + \frac{16}{9} + \frac{4}{3}\hat{t}_k - \frac{2}{3} = 0$$

$$\frac{10}{3}\hat{t}_k = \frac{20}{9} \longrightarrow \hat{t}_k = \frac{20}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{2}{3}$$

$$t_k \in \underset{[0, \hat{t}_k]}{\arg\min}\ \varphi(t) \longrightarrow \varphi\left(\frac{8}{3} + 2t,\ -\frac{10}{3} + 2t\right) = -4\left(\frac{8}{3} + 2t\right)^2 - 6\left(\frac{8}{3} + 2t\right)\left(-\frac{10}{3} + 2t\right)$$

$$-2\left(-\frac{10}{3} + 2t\right)^2 + 6\left(\frac{8}{3} + 2t\right) - 6\left(-\frac{10}{3} + 2t\right) =$$

$$= -\frac{256}{9} - \frac{128t}{3} - 16t^2 + \frac{160}{3} + 8t - 24t^2 - \frac{200}{9} + \frac{80}{3}t - 8t^2$$

$$+ \frac{48}{3} + \cancel{12t} + \frac{60}{3} - \cancel{12t} =$$

$$= -48t^2 - 8t + \frac{116}{3}$$

$$\varphi'(t) = -96t - 8 = 0 \longrightarrow t = -\frac{8}{96} = -\frac{1}{12} : \text{estremo dx } \hat{t}_k$$

$$t_k = \frac{2}{3}$$

$$x^{k+1} = x^k + t^k d^k = \left(\frac{8}{3},\ -\frac{10}{3}\right) + \frac{2}{3}(2, 2) = (4, -2)$$

TEOREMA: La successione $\{x^k\}$ costruita con il metodo del gradiente proiettato converge ad un punto stazionario. Se f è convessa, $\{x^k\}$ converge a x^* e x^* è minimo globale. Se f è quadratica e convessa allora $x^k \longrightarrow x^*$ in G in un numero finito di passi

Differenza tra minimi e massimi

Frank-Wolfe

minimo

PL $(x^k) \longrightarrow$ MIN

con $c = \nabla f(x^k)$

passo "ideale"/"esatto"

$$\boxed{t_k \in \arg\min_{t \in [0,1]} \varphi(t)}$$

massimo

PL $(x^k) \longrightarrow$ MAX

con $c = \nabla f(x^k)$

$$\boxed{t_k \in \arg\max_{t \in [0,1]} \varphi(t)}$$

Gradiente Proiettato

minimo

$d_k = H(-\nabla f(x^k))$

$$\hat{t}_k \longrightarrow \begin{cases} \max t \\ A(x^k + t d^k) \leq b \end{cases}$$

$$t_k \in \arg\min_{t \in [0, \hat{t}_k]} \varphi(t)$$

massimo

$d_k = H(\nabla f(x^k))$

$$t_k \in \arg\max_{t \in [0, \hat{t}_k]} \varphi(t)$$

- **MATLAB**

quadprog $(\boxed{H}, c, A, b, Aeq, beq, LB, UB)$

Hessiana

$$\longrightarrow \begin{cases} \min \frac{1}{2} x H x + c x \\ A x \leq b \\ Aeq\, x = beq \\ LB \leq x \leq UB \end{cases}$$

Esempio

$4x_1^2 - x_1 x_2 + 5x_2$

$\nabla f = (8x_1 - x_2, -x_1 + 5)$

$$H = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

fmincon $(\boxed{fun}, \boxed{x^0}, A, b, Aeq, beq, LB, UB)$

espressione di f in Matlab

punto iniziale

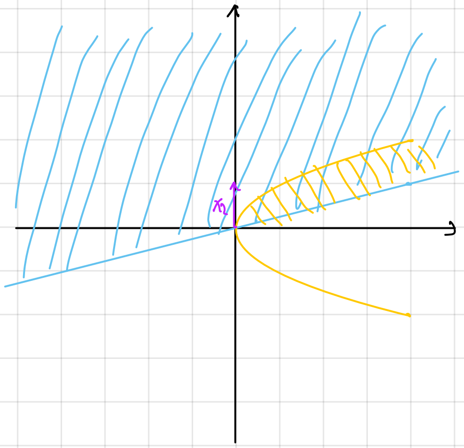
$$\longrightarrow \begin{cases} \min f(x) \\ Ax \leq b \\ Aeq\, x = beq \\ LB \leq x \leq UB \end{cases}$$

ESERCIZIO

$$\begin{cases} f = x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 - 2x_2 \\ g_1 = -x_1 + x_2^2 \\ g_2 = x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

$\downarrow$

Dominio chiuso: parabola e retta si intersecano in $x = (16, 4)$



$y = \sqrt{x}$

Condizione di Mangasarian

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 2x_2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \det(J) = 4 - 2x_2$$

$\downarrow$

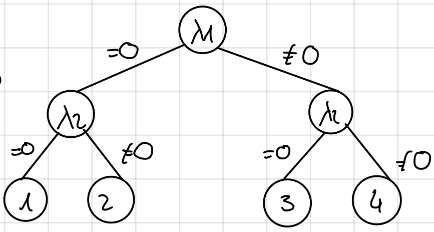
$\neq 0$ in $(0,0)$ e $(16,4)$: ok Mangasarian

SISTEMA LKKT

$\nabla f = (2x_1 - 8, \; 2x_2 - 2)$

$$\begin{cases} 2x_1 - 8 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2x_2 - 2 + 2\lambda_1 x_2 - 4\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(-x_1 + x_2^2) = 0 \\ \lambda_2(x_1 - 4x_2) = 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{Metodo Breve}}$



4.

$x_1 - 4x_2 = 0 \longrightarrow x_1 = 4x_2$ $\nearrow 0$, $\searrow 16$

$-x_1 + x_2^2 = 0 \longrightarrow -4x_2 + x_2^2 = 0 \longrightarrow x_2(x_2 - 4) = 0$ $\nearrow x_2 = 0$, $\searrow x_2 = 4$

$x = (0,0)$

$x = (16, 4)$

$$\begin{cases} 0 - 8 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2 - 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 - 8 - \lambda_1 - \frac{1}{2} = 0 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{17}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32 - 8 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 8 - 2 + 8\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 24 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 6 + 8\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_2 = \lambda_1 - 24 \longrightarrow \lambda_2 = -\frac{99}{2} \\ 6 + 8\lambda_1 - 4\lambda_1 + 96 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = -\frac{51}{2} \end{cases}$$

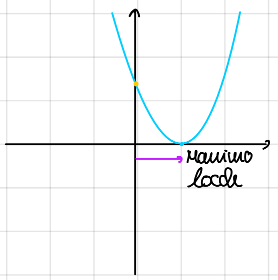
1.

$$\begin{cases} 2x_1 - 8 = 0 \\ 2x_2 - 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad x = (4, 1)$$

2, 3. $\emptyset$: nessuna soluzione

x	λ	mL	mG	ML	MG	S
(0,0)	$(-\frac{17}{2}, -\frac{1}{2})$	NO	NO	$\boxed{\text{SI}}$	NO	$\boxed{\text{NO}}$
(4,1)	(0,0)	NO	$\boxed{\text{SI}}$	NO	NO	NO
(16,4)	$(-\frac{51}{2}, -\frac{99}{2})$	NO	NO	SI	SI	NO

unico che esiste per Weierstrass



$\downarrow$ Restrizione

$$x_1 = 4x_2 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 4t \\ x_2 = t \end{cases} : \varphi(t) = 17t^2 - 34t$$

$$\begin{cases} x_1 = t^2 \\ x_2 = t \end{cases} \longrightarrow \varphi(t) = t^4 - 7t^2 - 2t$$

$\downarrow$

$\varphi'(t) = 4t^3 - 14t - 2 \longrightarrow \varphi'(0) = -2$: decresce $\longrightarrow$ Max locale

- MODELLI di PROBLEMI

1.

In una nuova linea di produzione robotizzata sono integrati 6 robot, ciascuno dei quali può ruotare a 360° attorno ad un asse verticale. Le aree di lavoro non devono sovrapporsi per evitare collisioni tra di loro. Il coordinamento tra i robot impone che ciascuno sia collegato con gli altri mediante cavi in fibra ottica. Si vuole minimizzare la lunghezza totale di fibre ottiche impiegate

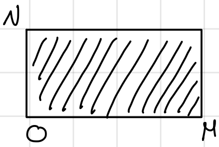
Robot	Raggio di azione (cm)
1	120
2	80
3	100
4	70
5	65
6	120

$m = 3$

$p = 2$

⟶ utilizza la **funzione distanza**

variabili: $(x_1, y_1)(x_2, y_2) \dots (x_6, y_6)$: coordinate nel piano



$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

modello

$$\begin{cases} \min \; d_{12} + d_{13} + \dots + d_{16} + d_{23} + d_{24} + \dots + d_{26} + d_{34} + d_{35} + d_{36} + \dots + d_{56} \\ 0 \le x_i \le M \\ 0 \le y_i \le N \\ d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \\ d_{ij} \ge r_i + r_j \; : \text{le aree di intervento non devono sovrapporsi} \end{cases}$$

↳ Nel problema attuale: 54 vincoli (lasciando d_{ij})

ESERCITAZIONI FINALI
23-05

1.

	1	2	3	4	5	6
valori	21	22	8	6	11	17
volumi	88	211	15	227	153	141

capacità totale: 229

$$r = \begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 1 & 6 & 5 & 3 \\ (0{,}24 & 0.10 & 0.05 & 0.03 & 0.07 & 0.12) \end{array}$$

Zaino binario

$V_S(P)$: $x = (1, 0, 1, 0, 0, \frac{126}{141})$ valore = 44

$V_I(P)$: $x = (1, 0, 1, 0, 0, 0)$ valore = 29

Zaino intero

$V_S(P)$: $x = (0, 0, \frac{229}{15}, 0, 0, 0)$ valore = 122

$V_I(P)$: $x = (0, 0, 15, 0, 0, 0)$ valore = 120 $\longrightarrow$ errore $= \frac{2}{120} = \frac{1}{60} = 0.017\%$

modello

$\max \; 21x_1 + 22x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 11x_5 + 17x_6$

$88x_1 + 211x_2 + 15x_3 + 227x_4 + 153x_5 + 141x_6 \leq 229$

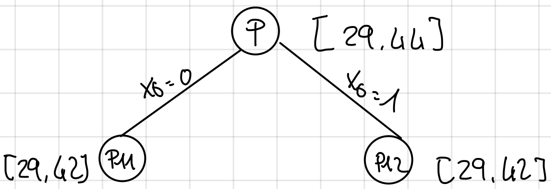
$x_i \geq 0$ $\qquad$ $x_i \geq 0$

$x_i \leq 1$

V_S: Base $\{1, 3, 5, 6, 8, 10\}$

V_S: Base $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

Fare un passo completo del Branch and Bound binario



$V_S(P_{11})$: $x = (1, \frac{126}{211}, 1, 0, 0, 0)$ valore = 42

$V_S(P_{12})$: $x = (\frac{73}{88}, 0, 1, 0, 0, 1)$ valore = 42

Piano di taglio per caso **intero**

$$\begin{cases} \min -(21x_1 + 22x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 11x_5 + 17x_6) \\ 88x_1 + 211x_2 + 15x_3 + 227x_4 + 153x_5 + 141x_6 + x_7 = 229 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$x = (0, 0, \frac{229}{15}, 0, 0, 0, 0)$ $\qquad A_B = (15)$ $\qquad A_B^{-1} = \frac{1}{15}$ $\qquad \tilde{A} = \frac{1}{15}\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ (88 & 211 & 227 & 153 & 141 & 1) \end{array}$

$$r = 3: \left\{\frac{88}{15}\right\}x_1 + \left\{\frac{211}{15}\right\}x_2 + \left\{\frac{227}{15}\right\}x_4 + \left\{\frac{153}{15}\right\}x_5 + \left\{\frac{141}{15}\right\}x_6 + \left\{\frac{1}{15}\right\}x_7 \geq \left\{\frac{229}{15}\right\}$$

$$\frac{13}{15}x_1 + \frac{1}{15}x_2 + \frac{2}{15}x_4 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{2}{5}x_6 + \frac{1}{15}x_7 \geq \frac{4}{15}$$

$$\begin{cases} \max\ 21x_1 + 22x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 11x_5 + 17x_6 \\ 88x_1 + 211x_2 + 15x_3 + 227x_4 + 153x_5 + 141x_6 \leq 229 \\ 5x_1 + 14x_2 + x_3 + 15x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leq 15 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

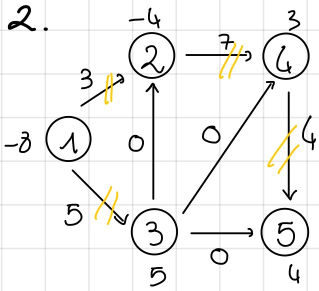
$\downarrow$

$V_S(P) = (0, 0, 15, 0, 0, 0)$ valore $= 120$ gap: $\emptyset$: ottimo

$\downarrow$

miglioramento dello 0.017%

2.



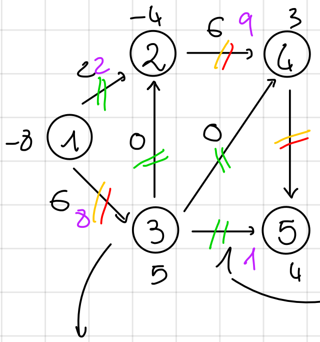
$x = (3\ 5\ 7\ 0\ 0\ 0\ 4)$

$\downarrow$

Nella rete non capacitata è un vertice perché è una soluzione di base ammissibile (T = adc)

Se fosse stato $u_{12} = 2$ non sarebbe stato un vertice

Può esistere un set di u che lo lasciano ammissibile ma non di base?



$\rightarrow$ Non è un vertice perché devo mettere 12, 24, 45, 13, 35 in T e quindi non è ADC

$\downarrow$

Può diventare vertice scegliendo una $u_{ij} = x_{ij}$ di modo da spostare l'arco in U

$\rightarrow$ # flusso

Inserendo le capacità, qual è la base? Gli archi // sono obbligatoriamente in T, quelli saturi o quelli vuoti possono essere messi in T. Ottengo una sh. degenere $\rightarrow$ 4 basi generanti. Se però si fossero generati dei cicli le basi possibili sarebbero potuto essere di meno.

24-05

1.

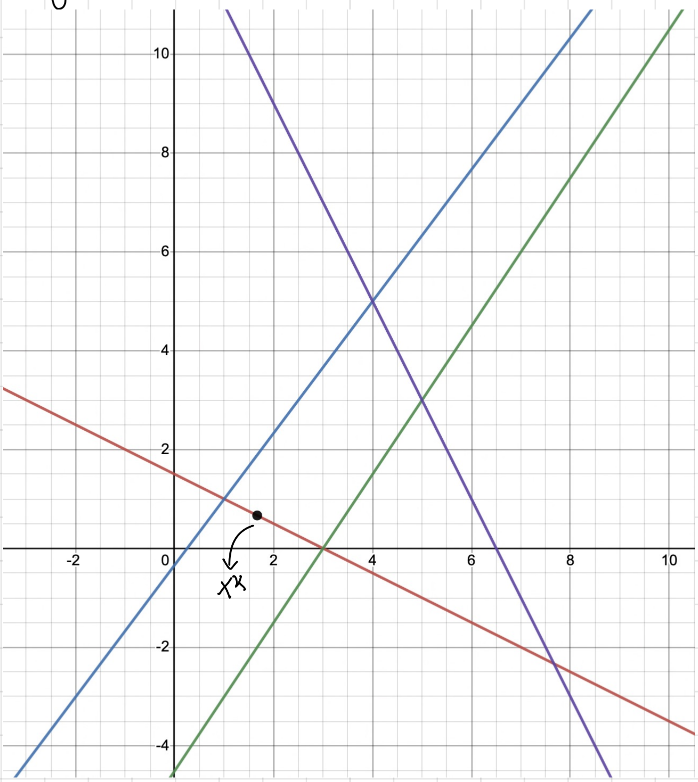
$$\begin{cases} f = -2x_1^2 - 10x_1x_2 + 4x_1 + 10x_2 \\ \boxed{-x_1 - 2x_2 \le -3} \\ \boxed{-4x_1 + 3x_2 \le -1} \\ \boxed{3x_1 - 2x_2 \le 9} \\ \boxed{2x_1 + x_2 \le 13} \end{cases}$$

MIN $\qquad x^k = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

1. Si migliora di più con un passo di FW o con uno di
2. GP?

3. $(4,5)$ è l'ottimo?

Algoritmo di FW



$\nabla f = (-4x_1 - 10x_2 + 4, -10x_1 + 10)$

$\nabla f(x^k) = \left(-\frac{28}{3}, -\frac{20}{3}\right)$

$-\nabla f(x^k) = \left(\frac{28}{3}, \frac{20}{3}\right)$

$y^k = (4,5)$

$d^k = \left(\frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right)$

$$\varphi(t) = f\left(\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) + t\left(\frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right)\right) = f\left(\frac{5}{3} + \frac{7}{3}t, \frac{2}{3} + \frac{13}{3}t\right) =$$

$$= -2\left(\frac{5}{3} + \frac{7}{3}t\right)^2 - 10\left(\frac{5}{3} + \frac{7}{3}t\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{13}{3}t\right) + 4\left(\frac{5}{3} + \frac{7}{3}t\right) + 10\left(\frac{2}{3} + \frac{13}{3}t\right) =$$

$$= -\frac{98}{9}t^2 - \frac{70}{9}t - \frac{50}{9} - \frac{910}{9}t^2 - \frac{790}{9}t - \frac{100}{9} + \frac{20}{3} + \frac{28}{3}t + \frac{20}{3} + \frac{130}{3}t =$$

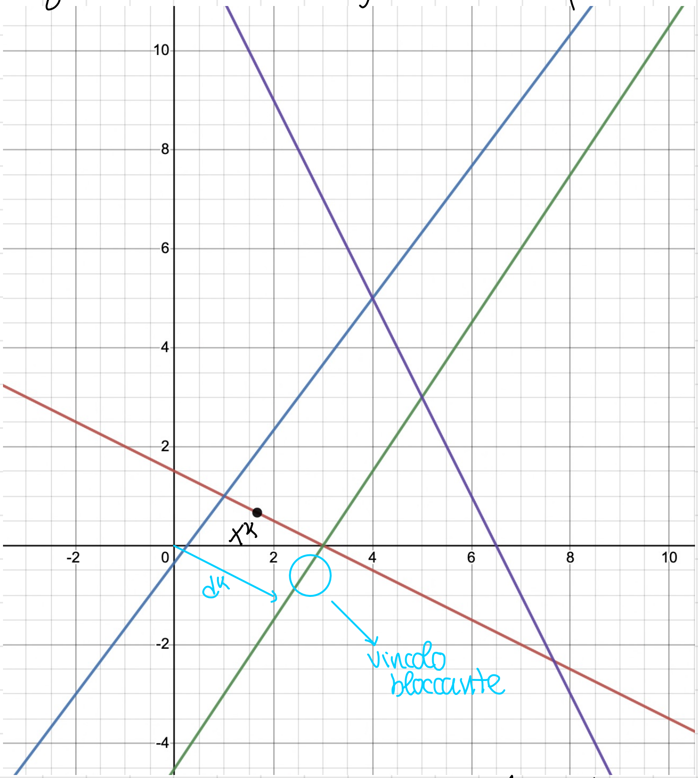
$$= -112t^2 - \frac{386}{9}t - \frac{10}{3}$$

$$\varphi'(t) = -224t - \frac{386}{9} \longrightarrow t = -\frac{193}{1008}$$

$t_k \in \underset{[0,1]}{\arg\min}\ e(t) = 1$

$$x^{k+1} = \left(\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right)\right) = (4,5) \longrightarrow f.O = -166$$

Algoritmo del gradiente proiettato



$M = (-1\ -2)$

$H = I - M^T(MM^T)^{-1}M$

$$MM^T = (-1\ -2)\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} = 5 \xrightarrow{-1} \frac{1}{5}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}(-1\ -2) = \begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

$$I - Ans = \begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{2}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$d^k = -H\nabla f(x^k) = -\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{2}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{28}{3}\\ -\frac{20}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{24}{5}\\ -\frac{12}{5}\end{pmatrix}$$

Per fare $e(t)$ posso usare $(2,-1)$

Voglio trovare $\hat{t}_k \longrightarrow g_3(x^k + \hat{t}_k d^k) = g_3\left(\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) + \hat{t}_k(2,-1)\right) = g_3\left(\frac{5}{3} + 2\hat{t}_k, \frac{2}{3} - \hat{t}_k\right) =$

$$= 3\left(\frac{5}{3} + 2\hat{t}_k\right) - 2\left(\frac{2}{3} - \hat{t}_k\right) = \frac{11}{3} + 8\hat{t}_k = 9$$

$$\downarrow$$

$$\hat{t}_k = \frac{2}{3}$$

$$x_{k+1} \in \underset{[0,\frac{2}{3}]}{\arg\min}\ f\left(\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) + t(2,-1)\right) = f\left(\frac{5}{3}+2t, \frac{2}{3}-t\right) =$$

$$= -2\left(\frac{5}{3}+2t\right)^2 - 10\left(\frac{5}{3}+2t\right)\left(\frac{2}{3}-t\right) + 4\left(\frac{5}{3}+2t\right) + 10\left(\frac{2}{3}-t\right) =$$

$$= -8t^2 - \frac{20}{3}t - \frac{50}{9} - \frac{100}{9} - \frac{10}{3}t + 20t^2 + \frac{20}{3} + 8t + \frac{20}{3} - 10t =$$

$$= 12t^2 - 12t + X$$

$e'(t) = 24t - 12 \longrightarrow t = \frac{1}{2}$: t^k perché argmin

$$x^{k+1} = \left(\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}(2,-1)\right) = \left(\frac{5}{3}+1, \frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

$$\downarrow$$

$f.O. = -\frac{19}{3}$: fa un passo molto migliore

3. Se fosse interno calcolo gradiente ed hessiana. Nel caso che non lo è, calcolo dHd^T e vedo se è sella. Altrimenti, proseguo con TW e vedo se cambia il punto x^{k+1}. Se rimane costante è min!

$\nabla g_1 = (-1, -2)$
$\boxed{\nabla g_2 = (-4, 3)}$
$\nabla g_3 = (3, -2)$
$\boxed{\nabla g_4 = (2, 1)}$

Base del vertice: Solo i λ relativi a questi vincoli sono $\neq 0$ mentre gli altri posso già metterli $= 0$ $\longrightarrow$ Considero solo i vincoli attivi.

$$\begin{cases} -4x_1 - 10x_2 + 4 - \lambda_1 - 4\lambda_2 + 3\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ -10x_1 + 10 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 (-x_1 - 2x_2 + 3) = 0 \\ \lambda_2 (-4x_1 + 3x_2 + 1) = 0 \\ \lambda_3 (3x_1 - 2x_2 - 9) = 0 \\ \lambda_4 (2x_1 + x_2 - 13) = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$ $x = (4, 5)$

$-16 - 50 + 4 - 4\lambda_2 + 2\lambda_4 = 0 \longrightarrow -62 - 4\lambda_2 + 60 - 6\lambda_2 = 0 \longrightarrow \lambda_2 = -\frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{10}\,5}$

$-40 + 10 + 3\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \longrightarrow \lambda_4 = 30 - 3\lambda_2 \longrightarrow \lambda_4 = \frac{147}{5}$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_3 = 0$

$\downarrow$

Dato che sono discordi: sella

27 - 03

1.

Esercizio 2. Un'azienda produce 4 tipi di TV (32, 40, 50 e 55 pollici) ed è divisa in 2 stabilimenti (A e B). L'azienda dispone di 40 operai in A e 50 in B ognuno dei quali lavora 8 ore al giorno per 5 giorni alla settimana. Le ore necessarie per produrre i TV e le richieste minime da soddisfare sono indicate nella seguente tabella:

TV	32"	40"	50"	55"
Stabilimento A	1.2	1.5	1.7	2
Stabilimento B	1.5	1.6	1.8	2.1
Richiesta	~~1000~~ 100	700	600	400

Sapendo che i 4 tipi di TV vengono venduti rispettivamente a 400, 600, 1000, e 1500 euro, l'azienda vuole determinare quanti TV di ogni tipo produrre nei due stabilimenti in modo da massimizzare il profitto.

1. Scrivere il modello
2. $x = (\underbrace{100}_{\text{TV in A di } 32''}, \underbrace{0}_{\text{TV in B di } 32''}, 0, 700, 600, 0, 0, 400)$ è ammissibile? È di base? È un vertice?

   Se sì, è degenere? È ottima?
3. Calcolare VI e VS

1.

variabili decisionali: x_{ij} ove i = tipo TV
j = stabilimento

$$\begin{cases} \max\ 400(x_{1A}+x_{1B}) + 600(x_{2A}+x_{2B}) + 1000(x_{3A}+x_{3B}) + 1500(x_{4A}+x_{4B}) \\ 1.2\,x_{1A} + 1.5\,x_{2A} + 1.7\,x_{3A} + 2\,x_{4A} \le 1600 \\ 1.5\,x_{1B} + 1.6\,x_{2B} + 1.8\,x_{3B} + 2.1\,x_{4B} \le 2000 \\ -x_{1A} - x_{1B} \le -100 \quad = \\ -x_{2A} - x_{2B} \le -700 \quad = \\ -x_{3A} - x_{3B} \le -600 \quad = \\ -x_{4A} - x_{4B} \le -400 \quad = \\ x_{ij} \ge 0 \longrightarrow =: 2, 3, 6, 7 \\ x_{ij} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\downarrow$

Ammissibile $\longrightarrow B = \{3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13\} \longrightarrow$ vertice e non degenere

f.o = 1.660.000 $\longrightarrow$ non ottimo

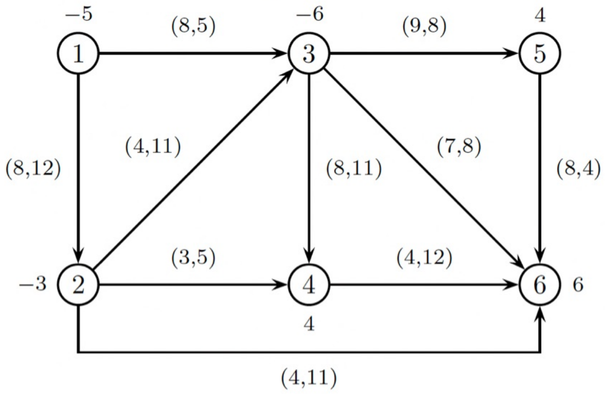
Ottimo Matlab: 2.042.000

3. VS: $x = (100, 0, 700, 0, \frac{4300}{17}, \frac{5900}{17}, 0, \frac{33600}{51}) \longrightarrow$ valore: 2042000

   VI: $x = (100, 0, 0, 700, 600, 0, 0, 400)$

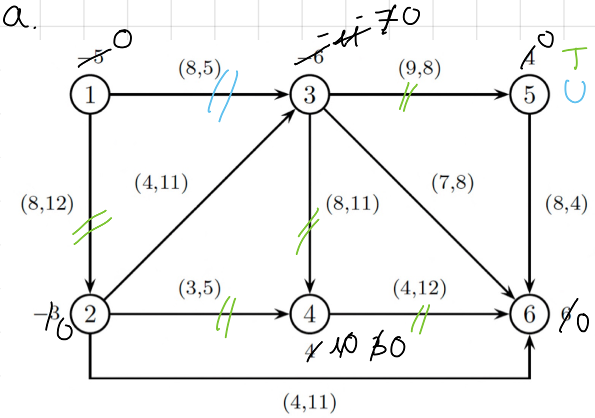
2.

Esercizio 3. Su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,2), (2,4), (3,4), (3,5) e (4,6), l'arco (1,3) come arco saturo e gli archi rimanenti in L, il flusso ottenuto é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso su reti. Determinare poi l'albero dei cammini minimi di radice 2. Cosa si puó dire se venisse applicato l'algoritmo del simplesso? Fare un passo dell'algoritmo del simplesso per trovare il flusso massimo 1 a 6 partendo dalla soluzione $x = 0$.

a.

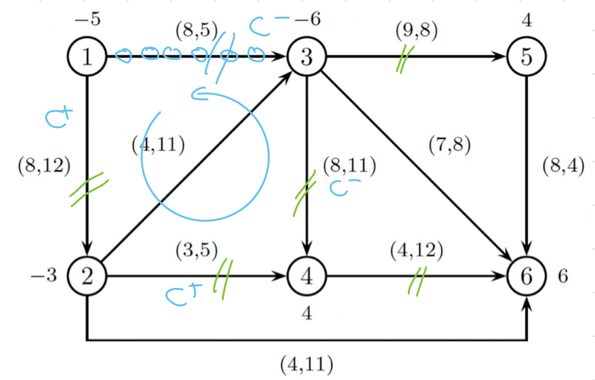


$$\begin{array}{cccccccccccc} & 12 & 13 & 23 & 24 & 26 & 34 & 35 & 36 & 46 & 56 \\ x = (& 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 7 & 4 & 0 & 6 & 0 \ ) \end{array}$$

degenere

$\pi = (0, 8, 3, 11, 12, 15)$

$c_{13}^{\pi} = 5 > 0$ X : arco entrante



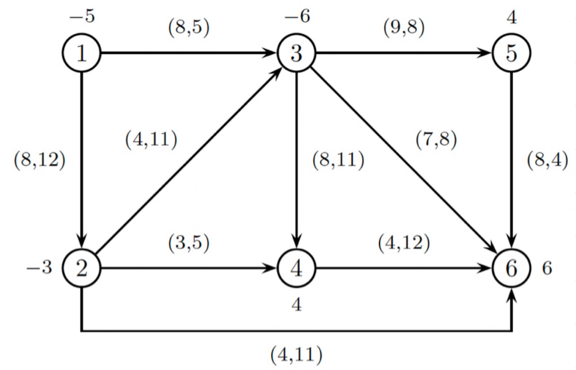
$\theta^+ = 2 \longrightarrow \theta = 2$

$\theta^- = 5$

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 12 & 13 & 23 & 24 & 26 & 34 & 35 & 36 & 46 & 56 \\ x_{new} = (& 2 & 3 & 0 & 5 & 0 & 5 & 4 & 0 & 6 & 0 \ ) \end{array}$$

uscente

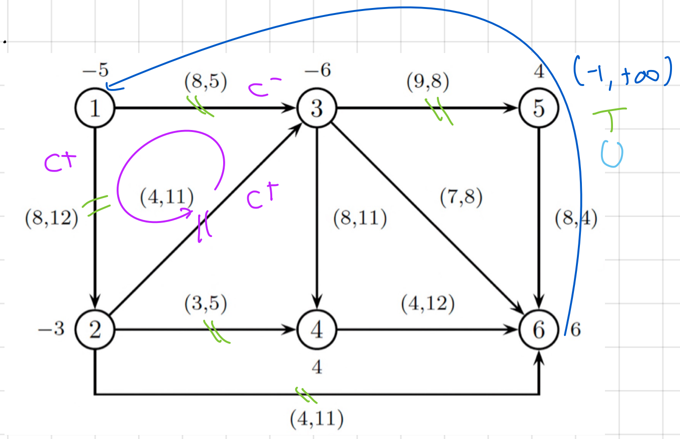
b.



Cammini minimi di radice 2: 1 non è raggiungibile ⟶ trovo un sottoalbero dei cammini minimi

↓

Con il simplesso su reti si avrebbe un problema vuoto (linprog) c.



$$\begin{array}{ccccccccccccc} & 12 & 13 & 23 & 24 & 26 & 34 & 35 & 36 & 46 & 56 & 61 \\ X = (& 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \,) \end{array}$$

$\pi = (0, 8, 8, 11, 7, 12)$

$c_{23}^{\pi} = -4 < 0$ $\quad X$: arco entrante

$\downarrow$

$\theta^+ = 11 \longrightarrow \theta = 0$

$\theta^- = 0$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & 12 & 13 & 23 & 24 & 26 & 34 & 35 & 36 & 46 & 56 & 61 \\ X = (& \underset{\text{uscente}}{\underline{0}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \,) \end{array}$$