QUIZ

SIMULAZIONE:

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione almeno 2 dotato di prodotto scalare (u, v) e norma $|w| = +\sqrt{(w, w)}$. Siano u e v elementi di V. Quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) Esistono vettori u e v tali che $(u, v) = 4$, $|u| = 1$, $|v| = 3$, $|u + v| = 2$.
(b) Esistono vettori u e v tali che $(u, v) = 2$, $|u| = 3$, $|v| = 1$, $|u + v| = 5$.
(c) Esistono vettori u e v tali che $(u, v) = 2$, $|u| = 2$, $|v| = 3$, $|u + v| = 4$.
(d) Le affermazioni (a), (b) e (c) sono false per ogni coppia di vettori in V.

- La risposta corretta è (a)
- La risposta corretta è (b)
- La risposta corretta è (c)
- La risposta corretta è (d)

Soluzione:

C, uso la disuguaglianza di cauchy-schwarz e quella triangolare per scartare le soluzioni errate

Problema 2. 3 punti

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

quale delle seguenti affermazioni è vera riguardo al kernel e all'immagine di A.

(a) Le prime due colonne di A sono una base dell'immagine di A, e i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano una base del kernel di A.

(b) Le prime tre colonne di A sono una base dell'immagine di A e il vettore v_1 della parte (a) è una base di $\ker(A)$.

(c) Le colonne (1), (2) e (4) di A sono una base dell'immagine di A e i vettori v_1 e v_2 formano una base di $\ker(A)$.

(d) L'immagine e il kernel di A non soddisfano nessuno degli insiemi di condizioni elencate nelle parti (a)–(c).

- La risposta corretta è (a)
- La risposta corretta è (b)
- La risposta corretta è (c)

Soluzione:

D, riduco la matrice in forma echelon ridotta e mi accorgo che le colonne non pivot solo una soltanto, quindi dim ker=1 e ciò invalida tutte le altre risposte.

Problema 3

3 punti

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) A e B sono equivalenti per righe.
(b) A ha rango 3 e il kernel di B ha dimensione 1.
(c) A ha il kernel di dimensione 2 e B ha rango 2.
(d) Le affermazioni (a), (b) e (c) sono false.

- La risposta corretta è (a)
- La risposta corretta è (b)
- La risposta corretta è (c)
- La risposta corretta è (d)

Soluzione:

B, riduco entrambe le matrici a delle matrici a scalini con Gauss e poi per calcolare la dimensione del kernel conto le colonne che non presentano pivot mentre per il rango conto le righe che presentano pivot

Problema 4

3 punti

Sia A una matrice 4×4. Sia I l'immagine di A e K il kernel di A. Quale delle seguenti affermazioni è potenzialmente vera:

(a) $\dim K = 2$, $\dim I = 3$, $\dim(K+I) = 4$, $\dim(K \cap I) = 1$
(b) $\dim K = 2$, $\dim I = 2$, $\dim(K+I) = 4$, $\dim(K \cap I) = 1$
(c) $\dim K = 1$, $\dim I = 3$, $\dim(K+I) = 2$, $\dim(K \cap I) = 2$
(d) $\dim K = 2$, $\dim I = 2$, $\dim(K+I) = 3$, $\dim(K \cap I) = 1$

- ○ La risposta corretta è (a)
- ○ La risposta corretta è (b)
- ○ La risposta corretta è (c)
- ○ La risposta corretta è (d)

Soluzione:

c, uso la formula di grassmann ed il teorema del rango per scartare le soluzioni errate

Problema 5

3 punti

Il polinomio $x^3 + x + 2$ ha una radice ripetuta?

(a) No.
(b) Sì.

- ○ La risposta corretta è (a)
- ○ La risposta corretta è (b)

Soluzione:
No, faccio la risultante tra il polinomio e la sua derivata prima, e verifico che risulti diversa da 0, in questo caso i due polinomi non hanno radice comuni,ma visto che sono uno la derivata dell’altro significa che il polinomio non ha radici comuni.

Problema 6

3 punti

Consideriamo le seguenti mappe lineari $P_2[x] \to P_2[x]$:

$$L_1(f) = f(x-1), \qquad L_2(f) = f(2x+1)$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) Né L_1 né L_2 sono diagonalizzabili.
(b) L_1 è diagonalizzabile, ma L_2 non è diagonalizzabile.
(c) L_2 è diagonalizzabile ma L_1 non è diagonalizzabile.
(d) Sia L_1 che L_2 sono diagonalizzabili.

- ◯ La risposta corretta è (a)
- ◯ La risposta corretta è (b)
- ◯ La risposta corretta è (c)
- ◯ La risposta corretta è (d)

Soluzione: C, rappresento le due mappe lineari come matrici usando l'algoritmo nelle slide, e poi verifico che le radici del polinomio caratteristico delle suddette matrici siano tutte diverse (il loro numero deve essere pari alla dimensione della matrice), se lo sono allora lla matrice è diagonalizzabile.

Problemi 7-10

Per i prossimi quattro problemi siano

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Usa ciascuna matrice esattamente una volta:

Problema 7

3 punti

La matrice A

(a) Ha autovalori reali.
(b) Ha autovalori immaginari.
(c) È una matrice definita positiva.
(d) È una matrice normale con autovalori interi.

- La risposta corretta è (a)
- La risposta corretta è (b)
- La risposta corretta è (c)
- La risposta corretta è (d)

Soluzione:

A, calcolo gli autovalori come radici del polinomio caratteristico della matrice.

Problema 8

3 punti

La matrice B

(a) Ha autovalori reali.
(b) Ha autovalori immaginari.
(c) È una matrice definita positiva.
(d) È una matrice normale con autovalori interi.

- La risposta corretta è (a)
- La risposta corretta è (b)
- La risposta corretta è (c)
- La risposta corretta è (d)

Soluzione: a, procedimento come sopra

Problema 9

3 punti

La matrice C

(a) Ha autovalori reali.
(b) Ha autovalori immaginari.
(c) È una matrice definita positiva.
(d) È una matrice normale con autovalori interi.

- La risposta corretta è (a)
- La risposta corretta è (b)
- La risposta corretta è (c)
- La risposta corretta è (d)

Soluzione:

B procedimento come sopra

Problema 10

3 punti

La matrice D

(a) Ha autovalori reali.
(b) Ha autovalori immaginari.
(c) È una matrice definita positiva.
(d) È una matrice normale con autovalori interi.

- La risposta corretta è (a)
- La risposta corretta è (b)
- La risposta corretta è (c)
- La risposta corretta è (d)

Soluzione:
B , procedimento come sopra

PRIMO APPELLO: **2** file **B** e **C** con solite domande, però le risposte erano rigirate

1 punto

Problema 1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione almeno 2 dotato di prodotto scalare (u, v) e norma $|w| = +\sqrt{(w, w)}$. Siano u e v elementi di V. Supponiamo che

$$(u, v) = 3, \qquad |u| = 2, \qquad |v| = 3$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) L'angolo tra u e v è $\pi/6$ e $|u - v|^2 = 5$
(b) L'angolo tra u e v è $\pi/3$ e $|u - v|^2 = 7$
(c) L'angolo tra u e v è $\pi/3$ e $|u - v|^2 = 19$
(d) Le affermazioni (a), (b) e (c) sono false.

- La risposta corretta è (a)
- La risposta corretta è (b)
- La risposta corretta è (c)
- La risposta corretta è (d)

1)La risposta corretta è la (b)

Spiegazione:

l'angolo è arccos(3 / (2*3)) = pi/3
ho imposto una direzione per v --> v(3,0)
u = (1, √3)
trovo la norma di v-u e veniva 7

1 punto

Problema 2. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) Le matrici A e C sono equivalenti per righe e le prime tre colonne di A sono linearmente dipendenti.

(b) Le matrici A e C non sono equivalenti per righe e la prima le tre colonne di B formano una base dell'immagine di B.

(c) Le matrici A e C sono equivalenti per righe e la quarta colonna di C è una combinazione lineare delle prime tre colonne di C.

(d) Le affermazioni (a), (b) e (c) sono false

- ○ La risposta corretta è (a)
- ○ La risposta corretta è (b)
- ○ La risposta corretta è (c)
- ○ La risposta corretta è (d)

2)La risposta corretta è la (a)

<u>Spiegazione:</u>

eliminazione gaussiana su A e C dà in entrambi i casi

1 0 2 0

0 1 1 0

0 0 0 1

1 punto

Problema 3. Siano

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allora,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

(a) $(3^{10}+1)e_1 + (3^{10}+1)e_2$
(b) $(3^{10}-1)e_1 + (3^{10}+1)e_2$
(c) $(3^{10}+1)e_1 + (3^{10}-1)e_2$
(d) La risposta corretta non è (a), (b) o (c).

(Ti è permesso usare autovalori e autovettori per risolvere questo problema)

- La risposta corretta è (a)
- La risposta corretta è (b)
- La risposta corretta è (c)
- La risposta corretta è (d)

3) La risposta corretta è la (b)

Spiegazione:

l'ho lamierato perché mi sono incartato nel diagonalizzare la matrice, ma ho notato che ogni potenza di M era

x+1 x

x x+1

se la moltiplichi per 0, 2 allora ottieni 2x, 2x+2

quindi ho chiamato la b e ci ho preso

1 punto

Problema 4. Sia A una matrice 3×3 con autovalori $\lambda = 1$, $\lambda = 0$ e $\lambda = -1$. Quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) La matrice è diagonalizzabile. L'informazione data è insufficiente per calcolare $\det(A)$.
(b) Il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = t(t+1)(t-1)$ e il determinante di A è 0. L'informazione data è insufficiente per determinare se A è diagonalizzabile.
(c) La matrice è diagonalizzabile e il determinante di A è 0.
(d) Le informazioni date non sono sufficienti per verificare alcuna delle affermazioni (a), (b), (c).

- La risposta corretta è (a)
- La risposta corretta è (b)
- La risposta corretta è (c)
- La risposta corretta è (d)

4) La risposta corretta è la (c)

Spiegazione:

ho 3 autovalori in una matrice 3x3, quindi è diagonalizzabile; uno di questi è 0, quindi il polinomio caratteristico ha 0 tra le radici --> det(A - 0i) = 0 --> la matrice ha già det 0

1 punto

Problema 5. Quale delle seguenti affermazioni è falsa? Se le affermazioni (a)-(e) sono vere, scegli (f).

(a) L'algoritmo di eliminazione gaussiana può essere adattato per calcolare il determinante di una matrice.
(b) Ogni base di uno spazio vettoriale di dimensione finita ha lo stesso numero di elementi
(c) Se S è un sottoinsieme dello spazio vettoriale V allora span(S) il pi piccolo sottospazio di V che contiene S.
(d) Ogni spazio vettoriale di dimensione finita ha una base.
(e) Una matrice normale è diagonalizzabile.
(f) Tutte le affermazioni di cui sopra sono vere.

- La risposta corretta è (a)
- La risposta corretta è (b)
- La risposta corretta è (c)
- La risposta corretta è (d)
- La risposta corretta è (e)
- La risposta corretta è (f)

5) La risposta corretta è la (f)

1 punto

Problema 6. Quale delle seguenti affermazioni è falsa? Se le affermazioni (a)-(e) sono vere, scegli (f).

(a) L'intersezione di due sottospazi di V è un sottospazio di V.
(b) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $L : V \to V$ una mappe lineare. Allora, L ha un base di autovettori se e sole se $a_\lambda = m_\lambda$ per ogni autovalore di L. (Ricordiamo che a_λ denota la molteplicità algebrica di λ e m_λ denota la molteplicità geometrica di λ).
(c) Il sistema lineare $Ax = b$ ha soluzione se e solo se b è un elemento dello spazio righe di A.
(d) Sia $f : U \to V$ una mappa lineare. Allora, il kernel di f è un sottospazio di U e l'immagine di f è un sottospazio di V.
(e) Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una mappa lineare iniettiva allora anche T è suriettiva.
(f) Tutte le affermazioni di cui sopra sono vere.

- La risposta corretta è (a)
- La risposta corretta è (b)
- La risposta corretta è (c)
- La risposta corretta è (d)
- La risposta corretta è (e)
- La risposta corretta è (f)

6) La risposta corretta è la (c)

Spiegazione:

se e solo se b appartiene allo spazio delle colonne, non quello delle righe

DOMANDE PRIMA PARTE

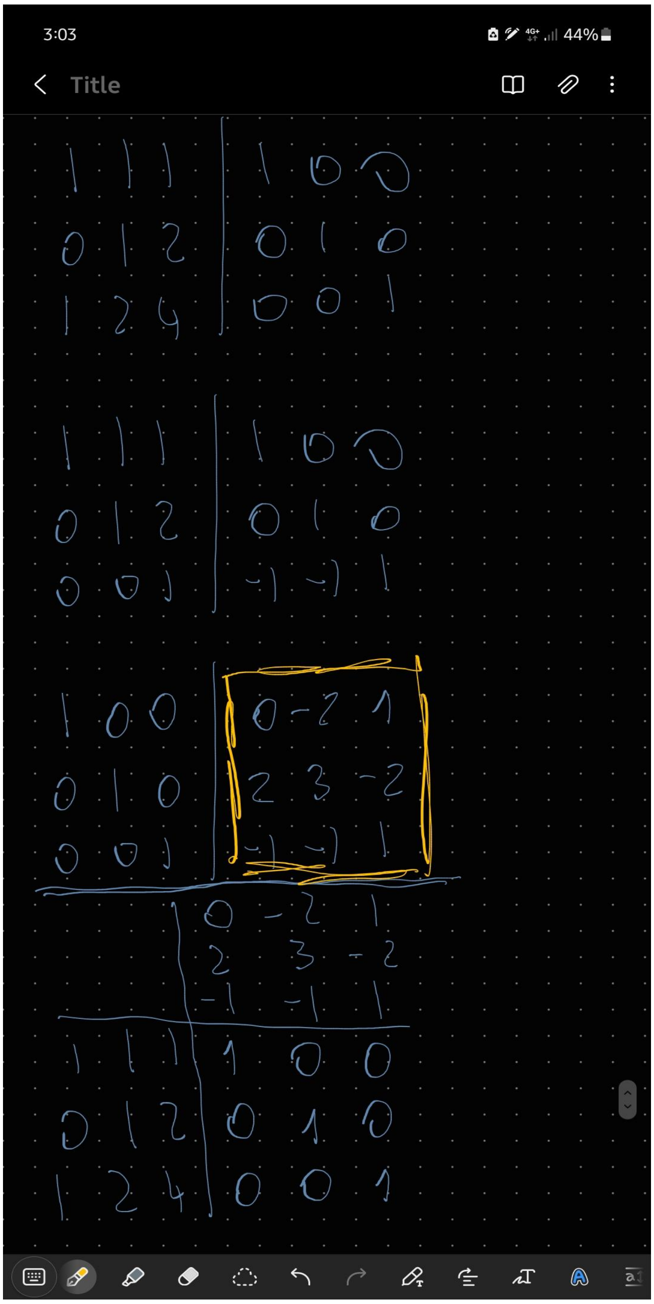
1)

2 591AA 21/22 – ESAMI 19 GENNAIO

Trova l'inverso della matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Soluzione:



2)

Numero di esame generato casualmente: 24

Sia S un insieme e $V = \mathbb{R}^S$ denota lo spazio delle funzioni da S a $\mathbb{R}$. Dimostrare che se a, b e c sono punti di S allora la valutazione $f \mapsto (f(a), f(b), f(c))$ dà una mappa lineare $\mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^3$.

<u>**Soluzione:**</u>

3 punti di S

$f \mapsto (f(a), f(b), f(c))$ mappa lineare $R^S \to R^3$

$L(f+g) = L(f) + L(g)$

$L(\alpha f) = \alpha L(f)$

reale

$f+g \mapsto (f+g)(a), (f+g)(b), (f+g)(c)$

$f(a)+g(a) \quad f(b)+g(b) \quad f(c)+g(c)$

$(f(a), f(b), f(c)) + (g(a), g(b), g(c))$

3)

591AA 21/22 – ESAMI 19 GENNAIO

Numero di esame generato casualmente: 8

Trova una base per l'immagine della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & -6 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

<u>Soluzione:</u>
Lavorare alla Gauss, le colonne che presentano i pivot saranno quelle che nella matrice originale compongono la base dell'immagine.

4)

591AA 21/22 – ESAMI 19 GENNAIO

Numero di esame generato casualmente: 7

Trova un polinomio $p(x)$ di grado 2 tale che $p(1) = 0$, $p(2) = 3$, $p(3) = 8$.

<u>Soluzione:</u>
Usare l'interpolazione di Lagrange

5)

2 591AA 21/22 – ESAMI 19 GENNAIO

Trova le soluzioni, se presenti, del seguente sistema lineare:

$$\begin{aligned} -x + 3y - 2z &= 1 \\ -x + 4y - 3z &= 0 \\ -x + 5y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

<u>Soluzione:</u>
Costruire la matrice rappresentativa del sistema ed applicare l'eliminazione Gaussiana (sistema impossibile)

6)

591AA 21/22 – ESAMI 19 GENNAIO

Numero di esame generato casualmente: 1

Determina se i seguenti insiemi di vettori sono linearmente indipendenti

(a) $\{(2,3,5),(3,5,6)\}$

(b) $\{(1,1,0),(1,3,2),(4,9,5)\}$

Soluzione:

Creare una matrice cha abbia quei vettori come vettori riga ed applicare l’eliminazione gaussiana, se ci sono righe di vettori nulli, allora sono linearmente dipendenti

7)

Numero di esame generato casualmente: 15

Trova una base per l'immagine della seguente matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

8)

Numero di esame generato casualmente: 17

Sia $(-,-)$ il prodotto scalare sui polinomi dato dalla formula:

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

Dimostrare che $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ è ortogonale a $x^3 - x$ se e solo se $a_1 = 0$.

Soluzione:
Moltiplicare i due polinomi in questione e poi eseguire l'integrale definito tra 1 e -1 del risultato, che corrisponde ad eseguire il prodotto scalare tra di essi. Si pone il risultato uguale a 0 e si risolve nelle incognite a2 e a0.

9)

2 591AA 21/22 – ESAMI 19 GENNAIO

Trova la risultante dei polinomi $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$.

Soluzione:
Costruire la matrice di Sylvester e poi calcolarne il determinante (metodo di Laplace o attraverso le mosse 1 e 3 di Gauss)

10)

591AA 21/22 – ESAMI 19 GENNAIO

Numero di esame generato casualmente: 22

Trova un polinomio $p(x)$ di grado 2 tale che $p(1) = 0$, $p(2) = 3$, $p(3) = 8$.

Soluzione:

11)

591AA 21/22 – ESAMI 19 GENNAIO

Numero di esame generato casualmente: 2

Trova la matrice delle mappe lineare

$$L : P_3[x] \to P_3[x], \qquad L(p) = (1 + x^2)p''(x) - 2p(x)$$

rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$. Ricordiamo che $p''(x) = \frac{d}{dx}(\frac{dp}{dx})$.

<u>**Soluzione:**</u>

Applicare L a tutti i vettori della base dello spazio di partenza e scrivere i risultati come combinazioni lineari dei vettori della base di arrivo, i vettori coordinata così ottenuti sono le colonne della matrice rappresentativa di L)

12)

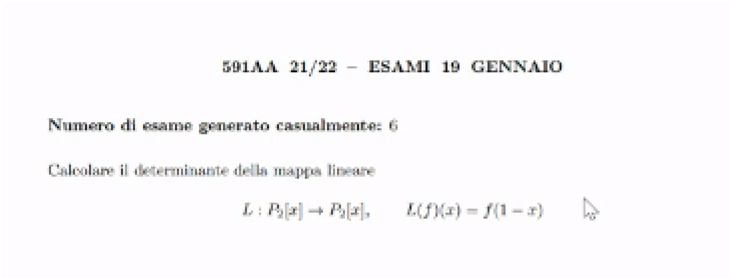
Numero di esame generato casualmente: 3

Trova l'inverso della matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>**Soluzione:**</u>

13)



591AA 21/22 – ESAMI 19 GENNAIO

Numero di esame generato casualmente: 6

Calcolare il determinante della mappa lineare

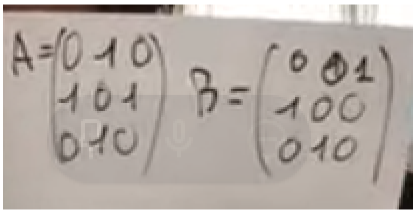
$$L : P_2[x] \to P_2[x], \qquad L(f)(x) = f(1-x)$$

<u>Soluzione:</u>

Stesso algoritmo utilizzato prima per ottenere la matrice rappresentativa di L e poi calcolo il determinante della matrice così ottenuta.

14)

Siano 2 matrici A e B



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sono simili? SI'/NO, perché?

<u>Soluzione:</u>

No. Una condizione necessaria perché le due matrici siano simili è che abbiano lo stesso determinante; la prima matrice ha due righe uguali, quindi il suo det è zero, mentre l'altra ha rango n=3, quindi ha un det non nullo.

15)

591AA 21/22 – ESAMI 19 GENNAIO

Numero di esame generato casualmente: 9

Trova una base per lo spazio delle righe della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & -6 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

<u>Soluzione:</u>
Applicare l’eliminazione Gaussiana, le righe non zero rimaste a seguito dell’eliminazione sono una base per lo spazio delle righe.

16)

591AA 21/22 – ESAMI 19 GENNAIO

Numero di esame generato casualmente: 16

(a) Trova la distanza tra i vettori $(4, 6, 15)$ e $(1, 2, 3)$.
(b) Trova la proiezione di $y = (1, 1, 1)$ sul direzione di $x = (0, 1, 2)$.

<u>Soluzione:</u>

a) la norma del vettore differenza è la soluzione
b) (y,x)/(x,x) * x è la formula del vettore proiezione

17)

591AA 21/22 – ESAMI 19 GENNAIO

Numero di esame generato casualmente: 18

Trova una base per lo spazio delle righe della seguente matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>Soluzione:</u>

SPAZIO RIGHE

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{26} = A^{24} \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nella seconda metà del foglio c'é la soluzione di una seconda domanda breve: data la matrice A si vuole calcolare A^26, si osserva che A^2 sono tutti zeri, per la propietà associativa A^26 = A^24 * A^2 e quindi è una matrice con tutti zero (come per ogni potenza superiore a 2).

18)

2 591AA 21/22 – ESAMI 19 GENNAIO

Trova una fattorizzazione $A = LU$ della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

dove L è una matrice triangolare inferiore e U è una matrice triangolare superiore.
Usa l'eliminazione gaussiana.

Soluzione:

Applicare l'algoritmo di decomposizione LU alla matrice A (consiglio di cercarsi un video tutorial, dalle dispense è poco comprensibile, i video che si trovano in rete sono abbastanza buoni)

19)

Numero di esame generato casualmente: 10

Le seguenti matrici sono simili?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

20)

Numero di esame generato casualmente: 12

Sia $(-,-)$ il prodotto scalare sui polinomi dato dalla formula:

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

(a) Trova la distanza tra 1 e x.
(b) Verificare la disuguaglianza triangolare per 1 e x.

Soluzione:
La distanza tra due vettori è uguale alla norma del vettore differenza, dunque sottraggo i polinomi e poi calcolo la radice quadrata dell'integrale definito
Per verificare la disuguaglianza triangolare occorre calcolare le norme di 1+x, 1 , x attraverso l'integrale definito e poi sostituirle nella disuguaglianza.

21)

591AA 21/22 – ESAMI 19 GENNAIO

Numero di esame generato casualmente: 14

Trova la risultante dei polinomi $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$.

Soluzione:

DOMANDE SECONDA PARTE

1) Voto 23 -> 28

Problema: Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funzioni. Sia $h = g \circ f : X \to Z$ (i.e. $h(x) = g(f(x))$).
(a) Definire: f è iniettivo.
(b) Dimostrare che: f, g iniettive $\implies$ h iniettiva.

Definizione sottospazio vettoriale
Prendi f: R-> R, f(0) = 1, allora questo è un sottospazio vettoriale ?

Problema: Sia A una matrice 2×2. Scrivi il polinomio caratteristico di A in termini di determinante e traccia di A. (Ricordate: la traccia di A è la somma dei suoi elementi diagonali).

Soluzioni
1a. f iniettiva: f(x) == f(y) → x = y
1b. f(g(x)) == f(g(y)) → g(x) == g(y) → x = y → anche f.g è iniettiva

sottospazio conserva molte proprietà dello spazio “intero”
dobbiamo verificare che se a, b in S e k reale, allora a+b e k*a in S

polinomio caratteristico di una 2x2 = (a-k)(d-k)-bc = k^2 - (a+d)k + ad - bc
= k^2 - tr(A)k + det(A)

2) Voto 24 -> 30
Definire matrice simmetrica, antisimmetrica e normale.
Enunciare il teorema spettrale.
Dimostra che la trasposta del prodotto è il prodotto delle trasposte invertito

Problema: Sia $U = \{p(x) \in P_3[x] \mid p(0) = p(1) = 0\}$. Determinare la dimensione di U.

3) Voto x → 19 (rifiutato)

Problema: Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funzioni. Sia $h = g \circ f : X \to Z$ (i.e. $h(x) = g(f(x))$).

(a) Definire: f è suriettiva.

(b) Dimostrare che: f, g suriettive $\implies$ h suriettiva.

Il sistema Ax = b ammette soluzione solo se b appartiene allo spazio delle colonne. Dimostralo

Problema: Nei casi (a) e (b) seguenti, determinare se esiste una funzione lineare L con le proprietà indicate.

(a) $L(1,0,0) = 1$, $L(1,1,0) = 2$, $L(1,1,1) = 3$, $L(1,0,1) = 2$.

(b) $L(1,1,0) = 1$, $L(1,0,1) = 2$, $L(0,1,1) = 3$, $L(1,1,1) = 4$.

Soluzioni

4) Voto 24 -> 26

1. Enuncia il teorema di Hamilton-Cayley, poi illustralo utilizzando matrici 2x2 non nulle

2. è data la matrice A = ((1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 1))
sono dati due vettori u, v
uv = vt * A * u, è un prodotto scalare? Dimostralo

3. enuncia uno dei teoremi visti in classe sulle matrici definite positive

Soluzioni

1. la matrice è una radice del suo polinomio caratteristico, l'allievo lo mostra provando con la matrice ((1, 2), (1, 3)) no boh mi sa che l'ho letta male

2. no, perché A non è simmetrica (si può mostrare un controesempio u = (1, 0, 0), v = (0, 1, 0), oppure trasponi la roba mi pare)

3. se una matrice è dominante diagonalmente per righe , allora è definita positiva
(la condizione è sufficiente ma non necessaria)

5) Voto (24?->28)

Problema:

(a) Definire: Dischi di Gershgorin.

(b) Enuncia il Teorema sui dischi di Gershgorin.

2. Se L : X -> Y allora ker(L) è un sottospazio di X. Dimostralo
3. Se una funzione il ker è uno spazio vettoriale allora la funzione è lineare?

Problema:
(a) Qual è lo span lineare dell'insieme vuoto?
(b) L'insieme vuoto è linearmente indipendente?
Spiega la tua risposta.

<u>Soluzioni</u>

6) Voto (?->/)

Problema: Definisci i seguenti concetti:
(a) Base.
(b) Dimensione di uno spazio vettoriale a dimensione finita.
Dato un esempio di una base di $\mathbb{R}^2$ che non è la base standard.

(Cosa dice il teorema di rouché capelli) Anzi no, la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz dimostralo, anzi no, anzi fallo comunque (XD)
Proiezione di u su v

<u>Soluzioni</u>

7) Voto (?->/)

1.

Problema: Spiega usando l'eliminazione gaussiana perché il seguente risultato, chiamato Teorema di Rouché-Capelli, è vero:

Teorema. *Un sistema di equazioni lineari con n variabili ha soluzione se e solo se il rango della sua matrice di coefficienti A è uguale al rango della sua matrice aumentata* $[A \mid b]$

2.

1 1 1
0 1 1
0 0 0
Per quali b il sistema non è risolubile, in quali casi sì?

3. Spazio delle matrici nxn simmetriche, calcolare la dimensione di questo **spazio**

<u>Soluzioni</u>
3. Vedi punto 2 del 9)

8) Voto (23->20) (rifiutato)
1. Ho missato la prima domanda

1 1 2
0 1 1
applicazione lineare da dove a dove? È surgettiva?

Problema: Nei casi (a) e (b) seguenti, determinare se esiste una funzione lineare L con le proprietà indicate.
(a) $L(1,0,0) = 1$, $L(1,1,0) = 2$, $L(1,1,1) = 3$, $L(1,0,1) = 2$.
(b) $L(1,1,0) = 1$, $L(1,0,1) = 2$, $L(0,1,1) = 3$, $L(1,1,1) = 4$.

Soluzioni

9) Voto (24->30)

1.

Problema: Enuncia la disuguaglianza triangolare, poi illustrarli utilizzando vettori non nulli in $\mathbb{R}^2$.

2. Spazio delle matrici nxn simmetriche, calcolare la dimensione di questo spazio

3.

Problema:
(a) Definire autovalore e autovettore.
(b) Definire molteplicità algebrica e geometrica.
(c) Enuncia il teorema che caratterizza la diagonalizzabilità in termini di molteplicitá geometrica e algebrica.

(d) Come si può trovare la molteplicità geometrica senza calcolare gli autovettori?

Soluzioni

1.
|u + w| <= |u| + |w|
Ad esempio u = (1, 0) e (1, 1). Si osserva | (1, 0) + (1, 1) | = |(2, 1)| = sqrt(5)
|(1, 0)| + |(1, 1)| = 1 + sqrt(2). Si osserva facilmente che sqrt(5) <= 1 + sqrt(2) (ad esempio elevando al quadrato e poi facendo i conti)

2.
Si osserva che tutte una base di questo spazio è l'insieme delle matrici che hanno solo un 1 sulla diagonale, oppure un 1 non sulla diagonale e nel suo simmetrico e 0 altrove.
Esempio nel caso 2x2

1 0	0 1	0 0
0 0	1 0	0 1

Questo genera lo spazio delle matrici nxn simmetriche (basta scegliere i coefficienti opportuni) e sono linearmente indipendenti (un 1 in una certa posizione compare solo in un elemento della base e quindi il coefficiente è zero, analogamente per tutti)
Quindi la dimensione è data dalle possibili scelte della posizione dell'1 nella parte "triangolare superiore" della matrice che sono 1 + 2 + .. + n = n(n+1)/2

3.

a. Au = cu allora c è un autovalore e u è un autovettore rispetto a c.
b. La molteplicità algebrica di c è la molteplicità della radice c del polinomio caratteristico di A. La molteplicità geometrica è la dimensione dell'autospazio generato dagli autovettori relativi a c ed è quindi pari al numero di autovettori relativi a c
c. Una matrice è diagonalizzabile se e solo se la molteplicità geometrica e algebrica sono uguali per ogni autovalore
d. Si calcola la dimensione di ker(A-c*Id), ovvero il numero di colonne non pivot (con c autovalore in questione e Id matrice identità)