Appunti di Ricerca operativa A.A.2021-2022

Gabriele Frassi (**g.frassi2@studenti.unipi.it**)

25 luglio 2022

Sommario

La dispensa vuole porsi come supporto per il corso di *Ricerca operativa* della triennale di Ingegneria informatica dell'Università di Pisa (prof. Pappalardo). I macroargomenti affrontati sono i seguenti:

- *Programmazione lineare* (PL)
- *Programmazione lineare intera* (PLI)
- *Programmazione lineare su reti*
- *Programmazione non lineare* (PNL)

La dispensa è un mix di appunti scritti con iPad (con l'applicazione *GoodNotes*) e appunti scritti in LaTeX (definizioni e teoremi dei vari macroargomenti, spiegazioni sulle varie tipologie di problemi, PL su Reti).

Alcuni ringraziamenti dovuti: Alex Parri per avermi sopportato nelle mie domande stupide e Alessandro Simonelli per il supporto nella stesura di parte delle definizioni e dei teoremi.

Indice

Parte I

Unimap

1. **Lun 28/02/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Problemi di Ricerca Operativa. Variabili decisionali, funzione obiettivo e vincoli. Modello matematico. La Programmazione Lineare (PL) in formato primale standard. Un problema di produzione ottima. Soluzione ammissibile, soluzione ottima. (MASSIMO PAPPALARDO)
2. **Mar 01/03/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Risoluzione geometrica di un problema di PL in 2 variabili. Curve di isocosto. Distinzione tra PL e PLI (Programmazione Lineare Intera). Definizione di poliedro. Trasformazioni canoniche per forme standard. (MASSIMO PAPPALARDO)
3. **Mer 02/03/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Combinazioni convesse e combinazioni coniche. Involucro convesso e involucro conico. Teorema di rappresentazione dei poliedri. Il problema dell'assegnamento di costo minimo. Caso cooperativo e caso non cooperativo. (MASSIMO PAPPALARDO)
4. **Ven 04/03/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Teorema fondamentale della PL. Esempi ed esercizi. Forma duale standard. Le conversioni ai formati standard. Esempi ed esercizi. (MASSIMO PAPPALARDO)
5. **Lun 07/03/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Verici di un poliedro in formato primale standard. Soluzioni di base ammissibili e non ammissibili. Il caso degenere. La function "linprog" e i suoi parametri. (MASSIMO PAPPALARDO)
6. **Mar 08/03/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Il problema duale standard. La teoria della dualità. Il teorema della dualità. I vertici del poliedro duale standard. Soluzioni di base. Il caso degenere. Esempi ed esercizi. (MASSIMO PAPPALARDO)
7. **Mer 09/03/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Il problema del trasporto ed il suo modello matematico. Il duale del duale. Test di ottimalità per un vertice del duale. Esempi ed esercizi. I vertici del poliedro dell'assegnamento e del poliedro del trasporto. (MASSIMO PAPPALARDO)
8. **Ven 11/03/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: L'algoritmo del simplesso primale. Correttezza e convergenza in un numero finito di passi. Esempi svolti. Interpretazione geometrica del simplesso primale. (MASSIMO PAPPALARDO)
9. **Lun 14/03/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Algoritmo del simplesso duale. Regole anticiclo di Bland. Esercizi svolti in aula. (MASSIMO PAPPALARDO)
10. **Mar 15/03/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Il problema duae ausiliario. Esempio svolto. Il caso degenere. Interpretazione geometrica del simplesso duale. (MASSIMO PAPPALARDO)
11. **Mer 16/03/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Problema del caricamento ("zaino"). Modello matematico: caso intero e caso binario. Il metodo dei rendimenti per le vlutazioni superiori. Algoritmo dei rendimenti per le valutazioni infeirori. Esempio svolto. (MASSIMO PAPPALARDO)
12. **Ven 18/03/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Relazioni tra PL e PLI: valutazioni superiori ed inferiori. Il prblema del T.S:P: asimmetrico. Relazioni tra assegnamenti e cicli hamiltoniani. I vncoli di connessione per l'eliminazione dei cicli disgiunti. (MASSIMO PAPPALARDO)
13. **Lun 21/03/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Problema del TSP simmetrico. I vincoli di grado. I k-alberi. La valutazione inferiore come k-albero di costo minimo. L'algoritmo del nodo più vicino per la valutaione superiore. Esempi ed esercizi. (MASSIMO PAPPALARDO)
14. **Mar 22/03/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Teorema di equivalenza tra PL e PLI. Disuguaglianze valide e piani di taglio. I piani di taglio di Gomory. (MASSIMO PAPPALARDO)

15. **Mer 23/03/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Esercitazione di ricapitolazione di tutti gli argomenti svolti. (MASSIMO PAPPALARDO)
16. **Ven 25/03/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Il problema del "bin-packing". Il modello matematico e i vincoli di semiassegnamento. Valutazione inferiore come problema di PL. Algoritmi "greedy" come valutazioni superiori: First-Fit-Decreasing (FFT), Next-Fit-Decreasing (NFT) e Best-Fit-Decreasing (BFT). (MASSIMO PAPPALARDO)
17. **Lun 28/03/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Il "Branch and Bound". Regole di taglio per problemi di minimo. L'aggiornamento della soluzione ammissibile corrente. Esercizi sul TSP simmetrico. (MASSIMO PAPPALARDO)
18. **Mar 29/03/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Il "Branch and Bound" per problemi di massimo. Modifiche delle regole di taglio. Esercizi sullo zaino binario. (MASSIMO PAPPALARDO)
19. **Mer 30/03/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Problemi di copertura. Riduzione della matrice di copertura. Righe "dominate". Il modello matematico. Valutazioni inferiori e superiori. Gestione di vincoli aggiuntivi nella PLI. (MASSIMO PAPPALARDO)
20. **Ven 01/04/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Il problema di massima copertura. Il modello matematico ed i comandi intlinprog. Algoritmi di Chvatal per soluzioni ammissibili di problemi di copertura e di massima copertura. (MASSIMO PAPPALARDO)
21. **Lun 04/04/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Il problema del flusso di costo minimo su reti bilanciate: modello matematico. La matrice di incidenza della rete e le equazioni di bilancio. Gli alberi di copertura come basi. I flussi di base. Esercizi. (MASSIMO PAPPALARDO)
22. **Mar 05/04/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Problema dei potenziali su reti non capacitate. Potenziali di base. Teorema di Bellman. Esercizi. (MASSIMO PAPPALARDO)
23. **Mer 06/04/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Il simplesso su reti. Arco entrante e ciclo. Orientamento del ciclo. Arco uscente. Il caso degenere. Il caso illimitato. Esercizi. (MASSIMO PAPPALARDO)
24. **Ven 08/04/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Il modello matematico del problema del flusso di costo minimo su reti capacitate. La tecnica della tripartizione degli archi. Caratterizzazioni delle basi. Unimodularità. (MASSIMO PAPPALARDO)
25. **Lun 11/04/2022 10:30-12:30 (2:0 h)** lezione: Il calcolo del flusso di base su reti capacitate. Flussi ammissibili e flussi degeneri. Esercizi. (MASSIMO PAPPALARDO)
26. **Mar 12/04/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Il problema dei potenziali su reti capacitate. Il calcolo del potenziale di base. Il teorema di Bellman su reti capacitate. I potenziali degeneri. Esercizi. Il problema dell'assegnamento di costo minimo come problema di flusso su reti. (MASSIMO PAPPALARDO)
27. **Mer 13/04/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Il simplesso per problemi di flusso di costo minimo su reti capacitate. Il cambio di base. Esercizi. (MASSIMO PAPPALARDO)
28. **Ven 22/04/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Prerequisiti di Analisi Matematica II per la parte di corso relativa alla Programmazione non Lineare (PNL). Gradiente, hessiana, teorema di Fermat. Condizioni necessari e/o sufficienti per minimi locali liberi attraverso il "segno" della matrice hessiana. Autovalori di matrici simmetriche. (MASSIMO PAPPALARDO)
29. **Mar 26/04/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Il problrema del flusso massimo. Il modello matematico di PL. La tecnica dell'arco fittizio per ricondurlo ad un problema di flusso di costo minimo su reti capacitate. Esercizi. (MASSIMO PAPPALARDO)

30. **Mer 27/04/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Il problema del taglio di capacità minima. Il teorema Max-Flow-Min-Cut. L'algoritmo di Ford-Fulkerson. L'algoritmo di Edmonds-Karp. Esercizi svolti. (MASSIMO PAPPALARDO)
31. **Ven 29/04/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: L'algoritmo di Dijkstra per la ricerca dell'albero dei cammini orientti di costo minimo con costi positivi. Esercizi svolti in aula. (MASSIMO PAPPALARDO)
32. **Lun 02/05/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Problemi di ricapitolazione generale su PL, PLI e PLR. Problemi di trasporto come problemi di flusso su reti; problemi di cammini minimi con vincoli di budget; verifiche di ottimalità di soluzioni ammissibili di problemi di flusso massimo; soluzioni ottime non intere di problemi di cammini minimi. (MASSIMO PAPPALARDO)
33. **Mar 03/05/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Funzioni quadratiche e loro rappresentazione, funzioni coercive ed esistenza dei minimi globali, funzioni convesse e proprietà sui minimi locali e globali. Restrizioni a semirette. Equazioni parametriche delle semirette in $\mathbb{R}^n$. Esempi. (MASSIMO PAPPALARDO)
34. **Mer 04/05/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Direzioni di discesa. Condizione sufficiente per stabilire se la direzione sia di discesa. Metodo del gradiente con ricerca esatta. Teorema di convergenza. Esempi ed esercizi. (MASSIMO PAPPALARDO)
35. **Ven 06/05/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Regioni ammissibili della PNL come curve di livello di funzioni di classe $\mathbb{C}^2$. Domini chiusi, domini limitati, domini convessi (condizione sufficiente per la convessità), domini regolri (condizioni sufficienti per a regolarità). Esempi ed esercizi. (MASSIMO PAPPALARDO)
36. **Lun 09/05/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Il teorema di Lagrange-Karush-Kuhn-Tucker (LKKT) per problemi di minimo o massimo vincolati. Esempi ed esercizi. (MASSIMO PAPPALARDO)
37. **Mar 10/05/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Condizioni sufficienti del primo ordine per problemi convessi o concavi. Interpretazione geometrica di minimi o massimi locali. Esempi ed esercizi. (MASSIMO PAPPALARDO)
38. **Mer 11/05/2022 08:30-10:00 (2:0 h)** lezione: Il metodo di Frank-Wolfe per la minimizzazione di funzioni su poliedri limitati. Esempi ed esercizi. (MASSIMO PAPPALARDO)
39. **Ven 13/05/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Studio delle restrizioni per determinare se un punto stazionario è minimo locale o sella. Equazioni parametriche delle curve. Esempi ed esercizi. (MASSIMO PAPPALARDO)
40. **Lun 16/05/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Teorema di convergenza del metodo si Frank-Wolfe. Esercizio svolto. La lagrangiana. Studio di minimi su domini illimitati. Esercizio svolto. (MASSIMO PAPPALARDO)
41. **Mar 17/05/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Il metodo del gradiente proiettato. La matrice di proiezione. Criteri di stop. Esercizi svolti. (MASSIMO PAPPALARDO)
42. **Mer 18/05/2022 08:30-10:30 (2:0 h)** lezione: Teorema di convrgenza del metodo del gradiente proiettato. Cambiamenti nel caso dei problemi di massimo. La funzione "quadprog" di Matlab. Esempi ed esercizi. (MASSIMO PAPPALARDO)

Parte II

Lezioni

Capitolo 1

Lezioni di PL

INTRODUZIONE AL CORSO E ALLA PL

PREREQUISITI

- NECESSARIO SOSTENERE "AL & AN.2"
- PRECISAMENTE:

ALGEBRA LINEARE
(1) OPERAZIONI TRA MATRICI: SOMMA, MOLTIPLICAZIONE, PRODOTTO SCALARE
(2) MATRICE INVERSA
(3) SISTEMI LINEARI
(4) AUTOVALORI DI UNA MATRICE

ATTENZIONE AI TEMPI NELLO SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

ANALISI 2
(5) DERIVATE PARZIALI, DIREZIONALI, GRADIENTE, MATRICE HESSIANA
(6) INSIEME DEL PIANO DEFINITI DA CURVE DI LIVELLO

ASPETTO APPLICATIVO DEL CORSO → SOFTWARE, "OPTIMIZATION TOOL DI MATLAB"

→ IDEA DEL PROF: PORTARE IL PC ALLO SCRITTO

STRUTTURA DEL CORSO

- CORSO DIVISO IN 4 PARTI
- LIBRO DIVISO IN 4 PARTI
- ESAME SCRITTO STRUTTURATO IN 4 ESERCIZI (UNA PER PARTE)

OBIETTIVO DEL CORSO

"FORNIRE CONOSCENZE E METODI PER FORMULAZIONE E RISOLUZIONE DI PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE"

PAROLA CHIAVE → MASSIMIZZARE / MINIMIZZARE

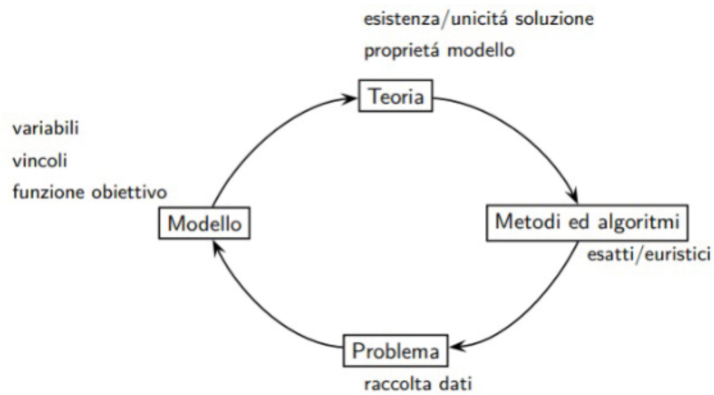
I PROBLEMI CHE RISOLVEREMO SONO PROBLEMI DECISIONALI ⟹ DIVERSI DAI PROBLEMI DELLA FISICA: PRENDERE DECISIONI REALI, NON DESCRIVERE I FENOMENI NATURALI

1) TRASFORMO IL PROBLEMA DECISIONALE IN MODELLO MATEMATICO
LEGGO E RACCOLGO I DATI, DETERMINO
   a) VARIABILI
   b) VINCOLI
   c) FUNZIONI OBIETTIVO

2) ALLA BASE DI UN MODELLO SI HA LA TEORIA (ESISTENZA/UNICITÁ DELLA SOLUZIONE PROPRIETÁ DEL MODELLO)

3) INDIVIDUATO IL MODELLO E LA TEORIA SI RISOLVE CON UN ALGORITMO

4) INFINE FEEDBACK, SI VERIFICA LA VALIDITÁ DELLA SOLUZIONE



CLASSI DI PROBLEMI AFFRONTATE NEL CORSO

OGNI PROBLEMA AFFRONTATO NEL CORSO RIENTRA IN UNA DELLE SEGUENTI CLASSI (OGNI CLASSE HA IN COMUNE LO STESSO MODELLO MATEMATICO)

- Produzione.
- Assegnamento.
- Trasporo.
- Caricamento.
- Localizzazione.
- "Bin packing".
- Commesso viaggiatore.
- Flusso di costo minimo su reti.
- Cammini minimi.
- Flusso massimo.

ESEMPIO DI PROBLEMA

Un contadino ha 12 ettari di terra per coltivare pomodori e patate.

Ha anche 70 kg di semi di pomodoro, 18 t di tuberi e 160 t di letame.

Il guadagno per ettaro é 3000 euro per i pomodori e 5000 euro per le patate. I pomodori necessitano di 7 kg di semi e 10 t di letame per ettaro, mente le patate richiedono 3 t di tuberi e 20 t di letame per ettaro.

Per massimizzare il guadagno come dividere la terra tra pomodori e patate?

L'ASPETTO PIÙ DIFFICILE DEGLI ESERCIZI È INDIVIDUARE I MODELLI MATEMATICI CORRETTI.

- PROBLEMA DI PRODUZIONE, SCRIVO IL RELATIVO MODELLO MATEMATICO

SI PRODUCE QUALCOSA

(a) DUE VARIABILI: x_1 ETTARI DI POMODORO DA LAVORARE
x_2 ETTARI DI PATATE DA LAVORARE

(b) DEVO TENERE CONTO DEI 4 VINCOLI EVIDENZIATI IN ROSSO (PONGO LIMITI SULLE RISORSE EFFETTIVAMENTE DISPONIBILI)

SEMI DI POMODORO SEMI DI PATATE LETAME

(c) VOGLIAMO MASSIMIZZARE IL GUADAGNO, SAPPIAMO QUANTO SI RICAVA PER ETTARO. OTTENIAMO LA FUNZIONE OBIETTIVO

$$\underbrace{\max}_{\text{FUNZIONE OBIETTIVO}} \underbrace{3000\, x_1 + 5000\, x_2}_{\text{GUADAGNO}}$$

OTTENIAMO

$$\begin{cases} \max\ 3x_T + 5x_P \\ x_T + x_P \leq 12 \ (*) \\ x_T \leq 10 \\ x_P \leq 6 \\ x_T + 2x_P \leq 16 \\ -x_T \leq 0 \\ -x_P \leq 0 \end{cases}$$

- DISPONIBILITÀ DI TERRENO: $x_1 + x_2 \leq 12$
- SEMI DI POMODORO DISPONIBILI: $7x_1 \leq 70$
- SEMI DI PATATE DISPONIBILI: $3x_2 \leq 18$
- LETAME DISPONIBILE: $10x_1 + 20x_2 \leq 160$
- CHIARAMENTE GLI ETTARI SONO POSITIVI $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

m = numero di vincoli
n = numero di variabili

(*) PERCHÉ NON $=$? MATLAB RESTITUISCE $\emptyset$ SE NON È POSSIBILE SFRUTTARE TUTTO IL TERRENO

IL PROBLEMA È POSTO NEL COSIDDETTO **"FORMATO PRIMALE STANDARD"**

$$\begin{cases} \max\ c^T x \\ Ax \leq b \end{cases} \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad b \in \mathbb{R}^m \qquad x \in \mathbb{R}^n \quad c \in {}^n \longrightarrow c^T \in {}^{1 \times n}$$

CHE È PROBLEMA DI "PROGRAMMAZIONE LINEARE" PER L'ASSENZA DI VINCOLI DI INTEREZZA (ALTRIMENTI SAREBBE UN PROBLEMA DI PL INTERA). È LINEARE PER LA LINEARITÀ DELLA FUNZIONE OBIETTIVO.

ATTENZIONE A c^T: MINUZIOSITÀ, RICORDARSI CHE PER TRADIZIONE I VETTORI SONO COLONNE. RICORDARSI LE PROPRIETÀ DEL PRODOTTO TRA MATRICI.

NEL PROBLEMA APPENA VISTO ABBIAMO

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{6\times 2}} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 6 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 1} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$$

$m = 6$ (VINCOLI)
$n = 2$ (VARIABILI)

POSSIAMO IMMAGINARE IL PROBLEMA DI PL COME UNA TRIPLETTA: $\langle c, A, b \rangle$
- L'INPUT PASSATO A MATLAB È LA TRIPLETTA $\langle c, A, b \rangle$
- L'OUTPUT È x, VETTORE CON LE VARIABILI

DURANTE IL CORSO VEDREMO ALTRI FORMATI

DEF. SOLUZIONE AMMISSIBILE: SOLUZIONE CHE RISPETTA I VINCOLI
DEF. SOLUZIONE OTTIMA: SOLUZIONE AMMISSIBILE CHE OTTIMIZZA LA FUNZIONE OBIETTIVO.

SOLUZIONE AMMISSIBILE $\neq$ VALORE FUNZIONE OBIETTIVO
(UN PO' COME MAX VS PUNTO DI MASSIMO)

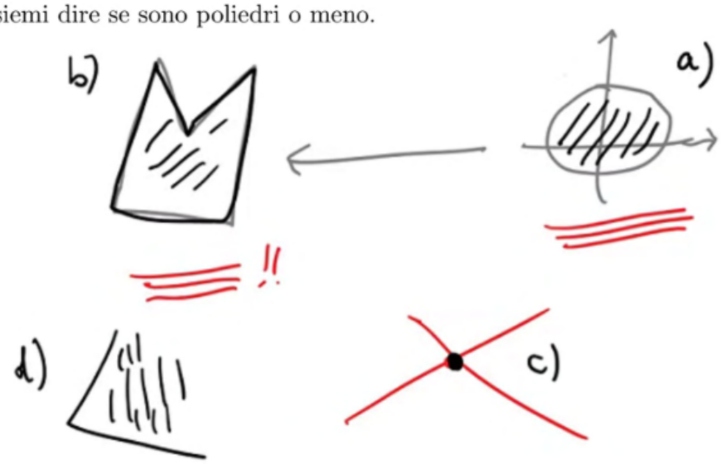
DEF. REGIONE AMMISSIBILE: - INSIEME DELLE SOLUZIONI AMMISSIBILI.
- POLIEDRO DEFINITO A PARTIRE DAI VINCOLI.

DEF. POLIEDRO: INTERSEZIONE DI UN NUMERO FINITO DI SEMISPAZI CHIUSI.

- INTERSEZIONE IN QUANTO TUTTI I VINCOLI DEVONO ESSERE RISPETTATI
- NUMERO FINITO IN QUANTO IL NUMERO DEI VINCOLI DEVE ESSERE FINITO
- SEMISPAZI CHIUSI, CIOÉ VINCOLI DI MINORE (SEMISPAZIO) O UGUALE (SEMISPAZIO CHIUSO, CIOÉ SEMISPAZIO CON FRONTIERA).

Esercizio sui poliedri

Dati i seguenti insiemi dire se sono poliedri o meno.



Per esprimere una risposta dobbiamo esprimerci sulle condizioni poste nella definizione. Se un insieme non è un poliedro significa che una delle condizioni della definizione non è rispettata!

- **Figura a**: non è un poliedro poichè non si rispetta il numero finito di semispazi chiusi. Il cerchio si ottiene attraverso l'intersezione di un numero infinito di semispazi chiusi.
- **Figura b**: il poliedro è per definizione un insieme convesso. L'insieme analizzato è concavo, quindi non può essere un poliedro.
- **Figura c**: il punto è un poliedro. Si ottiene mediante la sovrapposizione di quattro sottospazi, l'unico elemento in comune di tutti e quattro i sottospazi è il punto.
- **Figura d**: è un poliedro in quanto intersezione di due semispazi chiusi (RICORDARSI che insieme chiuso significa insieme che include la sua frontiera, il fatto che il poliedro non sia limitato non è un problema).

RISOLUZIONE GEOMETRICA DI UN PROBLEMA DI PL IN $\mathbb{R}^2$

LA REGIONE AMMISSIBILE, IN PRESENZA DI DUE VARIABILI DECISIONALI, É UN POLIGONO (POLIEDRO) RAPPRESENTABILE GRAFICAMENTE.

$$\begin{cases} \max \ 3x_T + 5x_P \\ x_T + x_P \leq 12 \\ x_T \leq 10 \\ x_P \leq 6 \\ x_T + 2x_P \leq 16 \\ -x_T \leq 0 \\ -x_P \leq 0 \end{cases}$$

CI SERVE UN ULTERIORE CONCETTO PER POTER RISOLVERE GEOMETRICAMENTE IL PROBLEMA

DEF. LINEE DI ISOCOSTO/ISOGUADAGNO

INSIEME DEI P.TI DI $\mathbb{R}^n$ IN CUI LA FUNZIONE OBIETTIVO $c \cdot x$ ASSUME LO STESSO VALORE

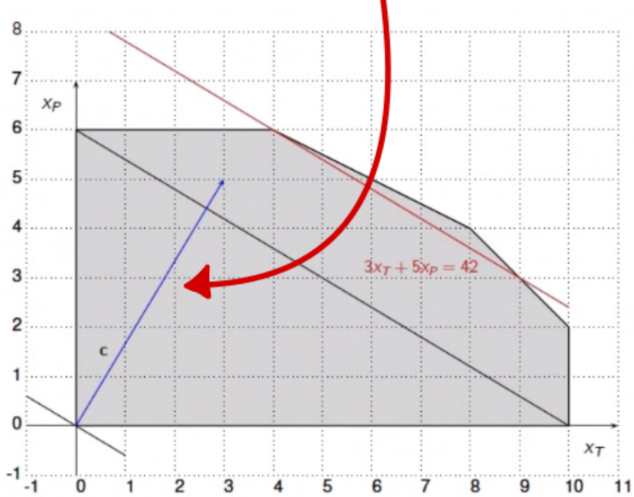
$$L(v) = \{ x \in \mathbb{R}^n : c^T x = v \}$$

$v \in \mathbb{R}$ RAPPRESENTO IL COSTO/GUADAGNO

ATTENZIONE, TUTTE LE RETTE DI ISOCOSTO O ISOGUADAGNO SONO PARALLELE

ALGORITMO DI RISOLUZIONE GEOMETRICA

DATO UN VETTORE c (IL VETTORE GRADIENTE, SE RIPENSIAMO AD ANALISI II) TUTTE LE RETTE DI ISOCOSTO/ISOGUADAGNO SONO AD ESSO ORTOGONALI



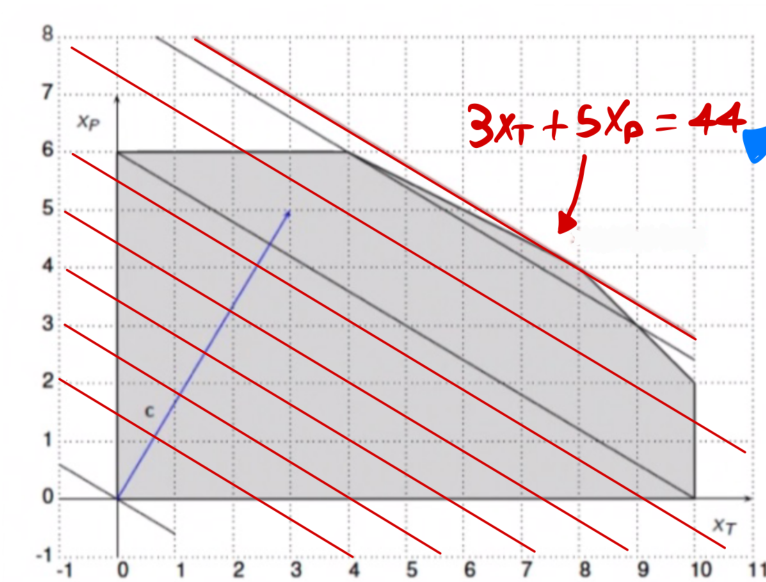
- SIAMO CERTI DI TROVARE MAX/MIN PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS
- I COEFFICIENTI NELL'EQ. DELLA RETTA COSTITUISCONO, RICORDIAMO, VETTORI ORTOGONALI ALLE RETTE STESSE.

$$AX = 0$$

ESEMPIO: RETTA ORTOGONALE A c, E TUTTE LE RETTE DI ISOCOSTO O ISOGUADAGNO

QUINDI:
1) DISEGNO I VINCOLI
2) RAPPRESENTO IL VETTORE c
3) CONSIDERO TUTTE LE RETTE ORTOGONALI A c (LE RETTE DI ~~ISOCOSTO~~ ISOGUADAGNO)

$3x_T + 5x_P = K$, ALTERIAMO K



TROVEREMO "L'ULTIMA RETTA CHE INTERSECA IL POLIEDRO", LÌ AVREMO L'OTTIMO.

[IN QUESTO CASO LA RETTA DI ISOGUADAGNO INTERSECA IL POLIEDRO SOLO NEL VERTICE (8,4)]

Rette e semipiani (PER L'ESERCIZIO)

Siamo in $\mathbb{R}^2$ e vogliamo scrivere l'equazione di una retta in forma implicita.

Retta passante per l'origine Osserviamo che la forma implicita può essere scritta sotto forma di un prodotto scalare tra vettori

$$A = (a, b) \qquad\qquad X = (x, y) \qquad\qquad AX = 0$$

In sostanza la retta è formata da tutti i vettori X ortogonali al vettore A dei coefficienti (prodotto scalare nullo). Col prodotto scalare nullo abbiamo rette passanti per l'origine.

Retta non passante per l'origine Supponiamo che la nostra retta non passi per l'origine. Il ragionamento del prodotto scalare è sempre valido, unica differenza sarà il secondo membro non nullo.

$$AX = c$$

Il vettore A è fisso: per trovare c poniamo il punto X da cui vogliamo che la retta passi.

Esempi Supponiamo di voler trovare una retta avente $A = (1, 1)$, passante per il punto $X = (0, -2)$. Otteniamo:

$$(1, 1) \cdot (0, -2) = 0 - 2 = -2 \Longrightarrow x + y = -2$$

Adesso supponiamo che la retta passi dal punto $X = (-3, 0)$. Otteniamo:

$$(1, 1) \cdot (-3, 0) = -3 + 0 = -3 \Longrightarrow x + y = -3$$

Adesso supponiamo di voler trovare una retta con $B = (2, 3)$, passante per $X = (1, 2)$. Otteniamo

$$(2, 3) \cdot (1, 2) = 2 + 6 = 8 \Longrightarrow 2x + 3y = 8$$

Rappresentazione di semipiani a partire dalle rette precedentemente trovate

Supponiamo di voler costruire la rappresentazione di un poliedro nella forma $< A, b >$. Otteniamo il poliedro dall'unione di un numero limitato di semispazi. I semispazi sono delimitati da rette. Quello che noi facciamo è trovare le disequazioni usando quanto spiegato nella pagina precedente. Nella scelta tra $\geq$ o $\leq$ si agisce come segue:

- si pone $\geq$ se vogliamo il semipiano che include la semiretta definita dal vettore A
- si pone $\leq$ altrimenti.

PREMESSE: SOLUZINE OTTIMA CON INSIEME $\mathbb{R}^n$ e $n \neq 2$?

- Abbiamo visto come sia facile in $\mathbb{R}^2$ risolvere problemi mediante risoluzione geometrica: disegno del poliedro considerando ogni vincolo come retta, rappresentazione del vettore gradiente c e individuazione della retta di isocosto o isoguadagno contenente il valore ottimo (retta nella forma $ax_1 + bx_2 = k$, dove k rappresenta il costo o il guadagno). La retta di isocosto è ortogonale al vettore c ed è "l'ultima retta" (tra quelle ortogonali al vettore c) che interseca il poliedro. Ci accorgiamo come la soluzione ottima sia, in ogni caso, lungo la frontiera.
- I veri problemi di Ricerca operativa, in ambito lavorativo, possono essere insiemi decisamente più grandi: $\mathbb{R}^{20}, \mathbb{R}^{30}, \mathbb{R}^{100} \dots$ A quel punto la risoluzione geometrica, ma anche manuale, diventa impossibile.
- Ci affidiamo al calcolatore, ergo dobbiamo individuare un algoritmo in grado di risolvere in modo algebrico ciò che noi abbiamo precedentemente risolto in modo geometrico
- Per costruire questo algoritmo abbiamo bisogno delle nozioni teoriche.
  - Abbiamo detto che le soluzioni si trovano sicuramente lungo la frontiera. Questo significa che non possiamo applicare il teorema di Fermat (gradiente nullo nei punti di massimo e di minimo, ma si parla solo di punti interni).
  - Si potrebbe pensare che le soluzioni ottime sono solo vertici del poliedro (a quel punto sarebbe semplice, numero finito di elementi da calcolare intersecando le rette): in realtà non è così.
  - Non solo: potrei avere poliedri privi di frontiera (nella direzione indicata dal vettore gradiente c). In quel caso la soluzione è ∞ (significa che i vincoli posti non sono sufficienti, abbiamo sbagliato il modello matematico o dimenticato alcuni vincoli per la strada). Vedremo che in presenza di vertici almeno uno di questi è soluzione ottima.
  - Potrebbe succedere che a causa di un numero fin troppo elevato di vincoli si abbia un insieme vuoto: l'unica cosa che possiamo fare è organizzare un ranking dei vincoli e rimuovere quelli di minore importanza finchè l'insieme delle soluzioni non sarà più vuoto (Esempio: orario delle lezioni, si tiene conto di centinaia di vincoli).

DEF. PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

UN PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE CONSISTE NEL TROVARE IL MASSIMO O IL MINIMO DI UNA FUNZIONE LINEARE DETTA FUNZIONE OBIETTIVO SOGGETTA AD UN INSIEME FINITO DI VINCOLI LINEARI

$$\begin{cases} \max / \min \; c \cdot x \\ A_1 x \leq b_1 \\ A_2 x \geq b_2 \\ A_3 x = b_3 \end{cases}$$

I PROBLEMI DI PL POSSONO ESSERE POSTI IN FORMATI DETTI "STANDARD".

SIGNIFICATO DI "STANDARD" NEL PROBLEMA DI PL

OGNI PROBLEMA DI PL PUÓ ESSERE RICONDOTTO A UN PROBLEMA IN FORMATO STANDARD. QUESTO SIGNIFICA CHE...

RISOLUZIONE DI UN PROBLEMA STANDARD $\Longrightarrow$ RISOLUZIONE DI TUTTI I PROBLEMI POSSIBILI

CI INTERESSANO I SEGUENTI FORMATI:
- PRIMALE STANDARD (GIÁ VISTO)
- DUALE STANDARD
- MATLAB LINPROG

(DA VEDERE)

Dimostrazione. $\min\ c^T x = -\max\ (-c^T x)$

$a^T x \geq b$ é equivalente a $-a^T x \leq -b$

$a^T x = b$ é equivalente a $\begin{cases} a^T x \leq b \\ -a^T x \leq -b \end{cases}$

Passaggio da un formato a un altro: tecniche di trasformazione

Per poter porre qualunque problema di PL nelle forme standard (*primale standard*, *duale standard*, e anche *linprog*) è necessario tenere conto delle seguenti *tecniche di trasformazione*.

1. $\min f(x) = -\max(-f(x))$
   Per capire questa uguaglianza basta disegnare un grafico di una funzione $f \in \mathbb{R}$ e ribaltarla $(-f(x))$: individueremo che il minimo di $f(x)$ è il massimo di $-f(x)$, ma con segno opposto.
2. **Per passare da disuguaglianze con minore o uguale a disuguaglianze con maggiore o uguale** (o viceversa) basta svolgere semplici calcoli matematici appresi alle superiori. Vediamo un esempio
$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 7 \longleftrightarrow -3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_2 \geq -7$$
   le due disuguaglianze sono equivalenti.
3. **Per passare da uguaglianze a disuguaglianze** (sia $\geq$ che $\leq$) dobbiamo pensare a una sovrapposizione di piani dove l'unico spazio comune è una retta. Vediamo un esempio
$$5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = 8 \longrightarrow \begin{cases} 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \leq 8 \\ 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \geq 8 \end{cases}$$
   la disuguaglianza e il sistema di disugaglianze sono equivalenti.
4. **Per passare da disuguaglianze a uguaglianze** dobbiamo introdurre una variabile di scarto vincolata nel segno. Vediamo un esempio
$$6 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \leq 9 \longrightarrow \begin{cases} 6 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + x_3 = 9 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$
   - Ho un valore maggiore di 9: posso rendere l'uguaglianza valida solo con un numero $x_3 < 0$, e ciò non va bene perchè non rispetta la condizione $x_3 \geq 0$.
   - Ho un numero uguale a 9: l'uguaglianza è valida con $x_3 = 0$, e ciò rispetta la condizione $x_3 \geq 0$
   - Ho un valore minore di 9: posso rendere l'uguaglianza valida solo con un numero $x_3 > 0$, e ciò rispetta la condizione $x_3 \geq 0$.

   Si consideri che una variabile di scarto presenta le seguenti proprietà:
   - non è presente nella funzione obiettivo;
   - è presente in un solo vincolo;
   - è ≥ 0.

   Questo ci permette di applicare la trasformazione in senso opposto.
5. **Per porre positiva una variabile non soggetta a particolari condizioni** sfruttiamo il fatto che un qualunque numero si ottiene a partire da una differenza di numeri positivi $a - b$. Consideriamo il seguente esempio (poniamo in duale standard)
$$\begin{cases} -\min(-x_1 - x_2) \\ -4x_1 - 5x_2 = 7 \\ -3x_1 - 2x_3 - x_3 = 8 \\ x_3 \geq 0, x_1 \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -\min(-x_1 - (x_4 - x_5)) \\ -4x_1 - 5(x_4 - x_5) = 7 \\ -3x_1 - 2(x_4 - x_5 + x_3) = 8 \\ x_i \geq 0, \forall i \end{cases}$$

Linprog standard (*Linear programming*)

Introduzione

Questo formato è il formato utilizzato in Matlab per risolvere problemi decisionali di ottimizzazione.

$$\begin{cases} \min\ c \cdot x \\ A \cdot x \leq b \\ A_{eq} \cdot x = b_{eq} \\ LB \leq x \leq UB \end{cases}$$

Si tenga conto delle dimensioni (cosa importante, altrimenti Matlab fa storie):

- $c \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$ (funzione obiettivo e soluzione ottima)
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (m è il numero di vincoli, n il numero di decisioni), $b \in \mathbb{R}^m$
- $A_{eq} \in \mathbb{R}^{p \times m}, b_{eq} \in \mathbb{R}^p$
- $LB \in \mathbb{R}^n$ (*Lower bound*, confini inferiori di ogni singola variabile x_j del problema)
- $UB \in \mathbb{R}^n$ (*Upper bound*, confini superiori di ogni singola variabile x_j del problema)

Osservazione I dati richiesti non sono tutti obbligatori.

Osservazione 2 Si tenga conto che Matlab legge lo spazio vuoto come *infinito* (cosa fondamentale, ad esempio, nell'*Upper bound* che nel *Lower bound*).

Regole da considerare

- In un vettore riga separiamo gli elementi con spazi vuoti.
- In un vettore colonna dividiamo gli elementi con punto e virgola (il punto e virgola equivale all'andare a capo).
- In una matrice separiamo gli elementi di una stessa riga con spazio vuoto (va bene anche con la virgola), e le varie righe con punto e virgola.
- Le variabili vuote sono rappresentate da parentesi quadre senza niente all'interno.

Rendiamo le cose immediate

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

```
>> R = [1; 2]
>> S = [3 4]
>> T = [5 6; 7 8]
>> U = [] <--- variabile vuota
```

Esercizio classico all'esame

Prendiamo il seguente problema di PL e scriviamo i comandi linprog

$$\begin{cases} \min 3 \cdot x_1 + x3 \\ 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 \leq 9 \\ 4 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Variabili Per prima cosa inviamo i seguenti comandi

```
>> c = [3 0 1]
>> A = [5 6 7; -4 5 0]
>> b = [9 ; -6]
>> LB = [0; ; ]  <----->  >> LB = [0;-inf;-inf] // linprog sostituisce spazi vuoti con -inf
>> UP = []
>> Aeq = []
>> beq = []
```

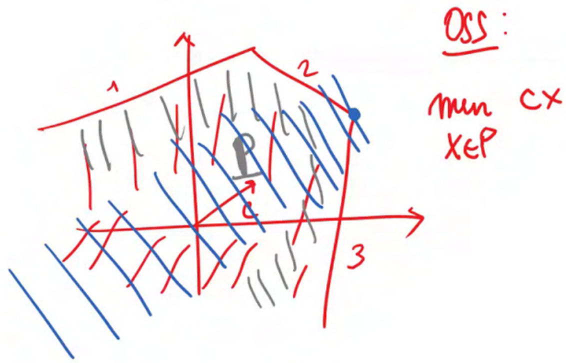
Lancio del linprog Dopo aver inviato i comandi precedenti lanciamo il linprog

```
[x, v] = linprog(c, A, b, Aeq, beq, LB, UB);
```

dove x sarà la soluzione ottima, e v il valore massimo o minimo della funzione obiettivo. Le variabili possono essere definite nell'ordine che ci piace, ma nel lancio del linprog è obbligatorio tenere a mente l'ordine qua sopra.

Problem is unbounded

Matlab potrebbe restituire in certi casi *Problem is unbounded*. Ricevere questo avviso significa che la soluzione è $-\infty$. Facciamoci un'idea col seguente disegno dove vogliamo trovare $\min_{x \in P} c \cdot x$



- La figura rossa sicuramente costituisce un poliedro (ripensiamo alla definizione di ieri).
- Disegnamo le rette di isoguadagno. La cosa che salta all'occhio è che esiste un massimo, ma non un minimo!

TEORIA SUI POLIEDRI

ABBIAMO CAPITO COSA SONO I POLIEDRI, FORMALIZZIAMO ALCUNI CONCETTI CON CUI ARRIVEREMO AI PRIMI TEOREMI DEL CORSO

DEF. COMBINAZIONE CONVESSA

DATO UN INSIEME DI PUNTI $x^1, x^2, \dots, x^k$ APPARTENENTI A $\mathbb{R}^n$ SI DICE COMBINAZIONE CONVESSA DEI PUNTI LA SEGUENTE COMBINAZIONE LINEARE (K È IL NUM. DEI VINCOLI)

$$Y = \sum_{J=1}^{K} \lambda_J x^J \quad \text{DOVE} \quad \lambda_J \in [0,1] \ \forall J \quad \text{E} \quad \sum_{J=1}^{K} \lambda_J = 1$$

OTTENIAMO $Y \in \mathbb{R}^n$.

DEF. INVOLUCRO CONVESSO

RAPPRESENTIAMO LE FIGURE POSTE COME ESEMPI (PUNTO, SEGMENTO, TRIANGOLO) PARLANDO DI INVOLUCRO CONVESSO.

DATO L'INSIEME DI PUNTI $V = \{x^1, \dots, x^k\}$ DEFINIAMO INVOLUCRO CONVESSO L'INSIEME DELLE POSSIBILI COMBINAZIONI CONVESSE. DENOTIAMO L'INVOLUCRO NEL SEGUENTE MODO

$$\text{conv}(V)$$

RAPPRESENTIAMO LA PIÙ PICCOLA FIGURA CONVESSA CONTENENTE I PUNTI DELL'INSIEME V

$\mathbf{k = 1, n = 2}$

$$y = \lambda_1 \cdot x^1 = 1 \cdot x^1 = x^1$$

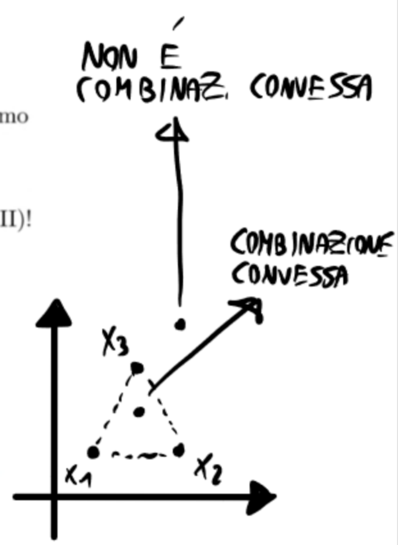
praticamente abbiamo un punto. Se abbiamo un solo punto è inevitabile che $\lambda_1 = 1$

$\mathbf{k = 2, n = 2}$

In questo caso abbiamo due punti, quindi avremo $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ con $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$. Otteniamo

$$y = \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x^2$$

con $\lambda \in [0,1]$. Abbiamo ottenuto un segmento (ricordare definizione di Algebra e Analisi II)!



$\mathbf{k = 3, n = 3}$

Attraverso la combinazione convessa consideriamo non solo i punti della frontiera, ma un qualunque punto interno della figura (in questo caso un triangolo). Il punto $\overline{y}$ non è raggiungibile in quanto la combinazione convessa impone valori λ_j positivi: per raggiungere quel punto dovrei avere dei sottomultipli negativi.

DEF. COMBINAZIONE CONICA

DATO UN INSIEME DI PUNTI $x^1, x^2, \dots, x^k$ APPARTENENTI A $\mathbb{R}^n$ SI DICE COMBINAZIONE CONICA DEI PUNTI LA SEGUENTE COMBINAZIONE LINEARE

$$y = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j \quad \text{DOVE} \quad \lambda_j \geq 0 \quad \forall j$$

OTTENIAMO $y \in \mathbb{R}^n$.

DEF. INVOLUCRO CONICO

RAPPRESENTIAMO LE FIGURE POSTE COME ESEMPI (SEMIRETTA, CONO) PARLANDO DI INVOLUCRO CONICO.

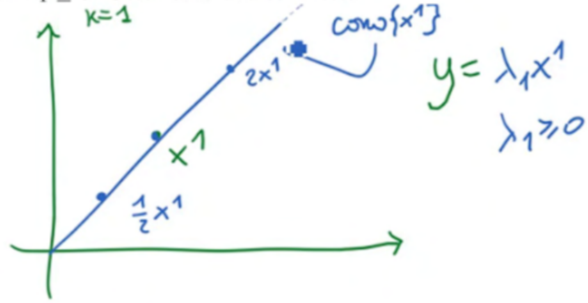
DATO L'INSIEME DI PUNTI $V = \{x^1, \dots, x^k\}$ DEFINIAMO INVOLUCRO CONICO L'INSIEME DELLE POSSIBILI COMBINAZIONI CONICHE. DENOTIAMO L'INVOLUCRO NEL SEGUENTE MODO

$$\text{cono}(V)$$

RAPPRESENTIAMO LA PIÙ PICCOLA FIGURA CONTENENTE I PUNTI DELL'INSIEME V

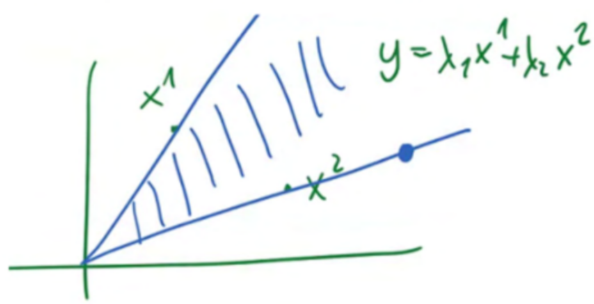
$\mathbf{k = 1, n = 2}$

Abbiamo $y = \lambda_1 x_1$ con $\lambda_1 \geq 0$. Otteniamo una semiretta



$\mathbf{k = 2, n = 2}$

Abbiamo $y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, con $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Otteniamo un cono



TEOREMA DI WEYL PER LA RAPPRESENTAZIONE DEI POLIEDRI

DATO UN QUALUNQUE POLIEDRO P ESISTERÁ SEMPRE UN INSIEME DI PUNTI V E UN INSIEME DI VETTORI E TALI CHE

$$P = \text{conv}(V) + \text{cono}(E)$$

DOVE $V \subseteq P$. VALE ANCHE IL CONTRARIO.

- V É L'INSIEME DEI PUNTI $\{v^1, \dots, v^k\}$, DOVE $v^J \in \mathbb{R}^m \ \forall J$
- E É L'INSIEME DEI VETTORI $\{e^1, \dots, e^k\}$, DOVE $e^J \in \mathbb{R}^m \ \forall J$
- ATTENZIONE!! PUNTI E VETTORI SONO SINONIMI, QUA SERVE A DISTINGUERE:
  - IN V VANNO EFFETTIVAMENTE PUNTI APPARTENENTI AL POLIEDRO
  - IN E NON VANNO PUNTI DEL POLIEDRO, MA VETTORI DIREZIONE (*)

  LA DIFFERENZA É RESA CHIARA DAGLI ESEMPI E DALLE ESERCITAZIONI!!

  (*) SUL LIBRO SI PARLA DI DIREZIONI DI RECESSIONE, DA ESSE DEFINIAMO SEMIRETTE $x + \lambda v^k \quad \forall x \in P, \forall \lambda \geq 0$, UNA DIREZIONE DI RECESSIONE É TALE SE INTERAMENTE CONTENUTA NEL POLIEDRO P

- LA SOMMA + RAPPRESENTA ELEMENTI APPARTENENTI ALL'INSIEME

  $$\{a+b \mid a \in \text{conv}(V),\ b \in \text{cono}(E)\}$$

  L'INSIEME DEGLI EL. OTTENUTI DA SOMME TRA UN EL. DI UN INSIEME E UN ELEMENTO DELL'ALTRO.

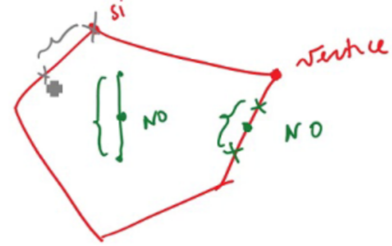
- ABBIAMO DETTO "VALE ANCHE IL CONTRARIO", CIOÉ? DATI V ed E POSSIAMO DETERMINARE IL POLIEDRO $P = \langle A, b \rangle$

  $$\langle A, b \rangle \iff \langle V, E \rangle$$

  $$A + \emptyset \triangleq A$$

- E PUÓ ESSERE VUOTO (AD ESSERE PRECISI NON VUOTO, MA CON L'ORIGINE), MENTRE V DEVE AVERE ALMENO UN PUNTO (NON PUÓ ESSERE VUOTO).

DEF. VERTICE. UN VERTICE $\bar{x}$ É UN PUNTO DEL POLIEDRO CHE NON SI PUÓ ESPRIMERE COME COMBINAZIONE CONVESSA DI DUE PUNTI DEL POLIEDRO DIVERSI DA $\bar{x}$.

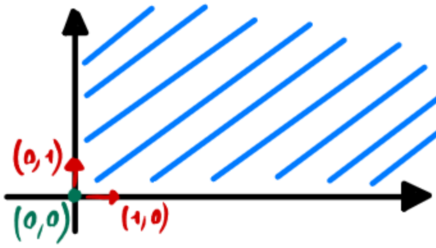


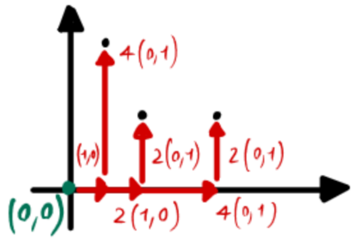
COROLLARIO 1. SE IL POLIEDRO HA VERTICI V É L'INSIEME DEI VERTICI (CE NE SIAMO GIÁ ACCORTI NEGLI ESEMPI)

COROLLARIO 2. SE IL POLIEDRO É LIMITATO QUESTO HA SEMPRE VERTICI

COROLLARIO 3. SE IL POLIEDRO É LIMITATO $E = \{\emptyset\}$ (CE NE SIAMO GIÁ ACCORTI)

ESEMPIO 1





VOGLIAMO RAPPRESENTARE IL I° QUADRANTE CON $<V, E>$

- V: PUNTO INSOSTITUIBILE È L'ORIGINE, SENZA NON POTREI RAPPRESENTARE LA FIGURA. SEGUE $V = \{(0,0)\}$ ⟶ (UNICO VERTICE DEL POLIEDRO)
- E: L'INSIEME NON È LIMITATO, QUINDI $E \neq \{\emptyset\}$
  IN QUALI DIREZIONI POSSIAMO MUOVERCI? QUALI DIREZIONI DI RECESSIONE CI INTERESSANO?

$$E = \{(0,1), (1,0)\}$$ (RICORDARE, VETTORI DIREZIONE)

(0,1): SEMIRETTA VERSO L'ALTO

(1,0): SEMIRETTA VERSO DESTRA

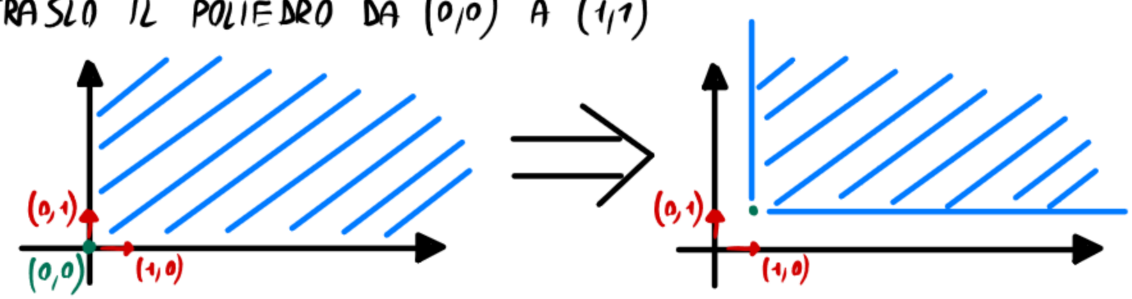
(ENTRAMBE CONTENUTE NEL POLIEDRO)

COMBINAZIONE CONICA SIGNIFICA POTER SOMMARE QUESTI DUE VETTORI, PRECISAMENTE SOMMARE UN MULTIPLO/SOTTOMULTIPLO DEL PRIMO CON UN MULTIPLO/SOTTOMULTIPLO DEL SECONDO (COME NELLA SECONDA FIGURA)

CON QUESTE SOMME CI MUOVIAMO IN TUTTO IL POLIEDRO

E SE PONESSI $V = \{(1,1)\}$ INVECE DI $V = \{(0,0)\}$?

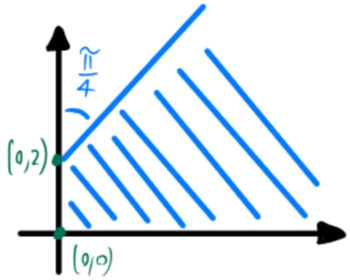
TRASLO IL POLIEDRO DA $(0,0)$ A $(1,1)$



PER QUANTO DETTO IN WEYL AVREMO SEMPRE UNA SOMMA TRA UN ELEMENTO DI conv(V) E cono(E). L'UNICO ELEMENTO DI conv V È (1,1)!!

I VETTORI DIREZIONE DI E LI USIAMO PER SPOSTARCI DA (1,1), PUNTO CHE SARÀ SEMPRE PRESENTE NELLE NOSTRE SOMME.

ESEMPIO 2



ATTENZIONE: ABBIAMO DUE VERTICI DEL POLIEDRO (P.TI INSOSTITUIBILI) CHE APPARTENGONO A V. SEGUE

$$V = \{(0,0), (0,2)\}$$

CON QUESTI DUE PUNTI OTTENIAMO, ~~come~~ V, COMBINAZIONI CONVESSE CON CUI RAGGIUNGIAMO I PUNTI DEL SEGMENTO

$$x = (0,0) + \lambda (0,2) \qquad \lambda \in [0,1]$$

MA PER MUOVERMI NEL RESTO DEL POLIEDRO? IL POLIEDRO NON È LIMITATO, ERGO $E \neq \{\emptyset\}$. QUALI DIREZIONI DI RECESSIONE SONO INDISPENSABILI?

- QUELLA VERSO DESTRA: $(1,0)$
- QUELLA PARALLELA ALLA FRONTIERA SUPERIORE: $(1,1) \longleftarrow$ POICHÉ $d = \frac{\pi}{4}$

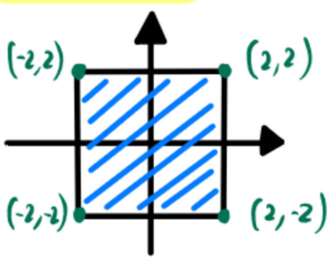
RICORDIAMOCI WEYL: SOMMA DI COMBINAZIONE CONVESSA E COMBINAZIONE CONICA.

(1) PRIMA CI PONIAMO IN UN PUNTO DEL SEGMENTO

(2) DUE POSSIBILITÀ:
- RIMANERE NEL SEGMENTO $\mu_j = 0 \ \forall j$
- MUOVERSI NEL POLIEDRO USANDO LE DIREZIONI DI RECESSIONE

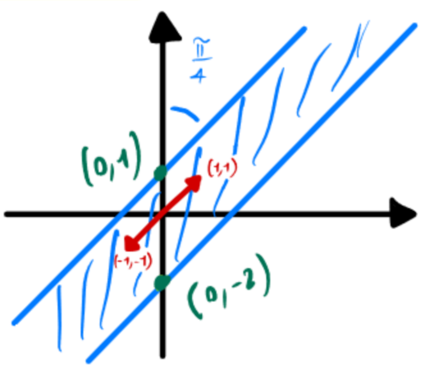
IN CONCLUSIONE: $V = \{(0,0), (0,2)\}$
$E = \{(1,0), (1,1)\}$

ESEMPIO 3.



- PER IL COROLLARIO 3 $E = \{\emptyset\}$
- PER IL COROLLARIO 1 $V = \{(2,2), (-2,2, (-2,-2), (2,-2)\}$

ESEMPIO 4.



L'ESEMPIO È DEGNO DI NOTA PER LA MANCANZA DI VERTICI NEL POLIEDRO. NON HO PUNTI INDISPENSABILI: L'IMPORTANTE È SCEGLIERE UN PUNTO DELLA FRONTIERA SUPERIORE E UNO DI QUELLA INFERIORE.

IL POLIEDRO NON È LIMITATO, ERGO $E \neq \{0\}$. PONGO DUE DIREZIONI DI RECESSIONE, ENTRAMBE PARALLELE ALLE FRONTIERA:

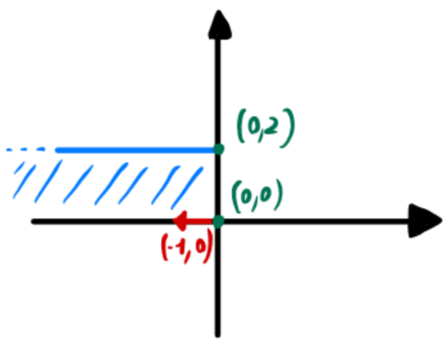
- UNA POSITIVA, $(1,1)$
- UNA NEGATIVA $(-1,-1)$

POICHÉ $d = \frac{\pi}{4}$

IN CONCLUSIONE:

$$\underbrace{V = \{(0,1), (0,-2)\}}_{\text{UNO DEI POSSIBILI ESEMPI}} \qquad E = \{(1,1), (-1,-1)\}$$

ESEMPIO 5.



ABBIAMO DUE VERTICI, SEGUE $V = \{(0,0),(0,2)\}$

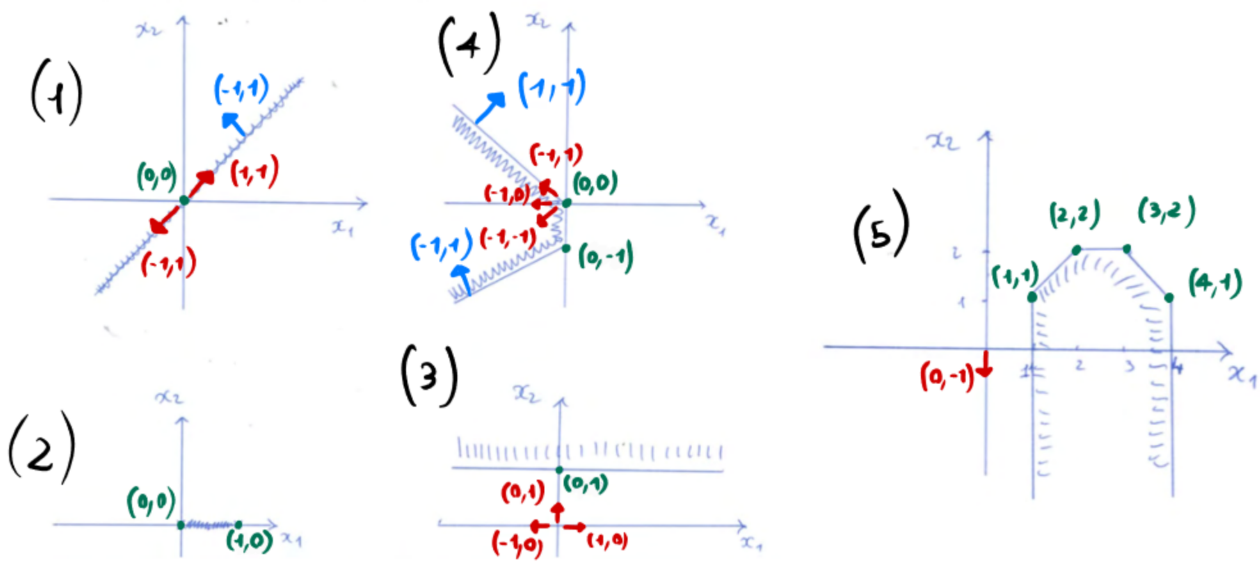
L'UNICA DIREZIONE POSSIBILE DA CUI OTTENERE UNA SEMIRETTA CONTENUTA NEL POLIEDRO È RAPPRESENTATA DAL VETTORE $(-1,0)$

SEGUE $E = \{(-1,0)\}$

ESERCIZIO SULLA RAPPRESENTAZIONE DEI POLIEDRI E SUI VETTORI c

Esercizio 4. Per i seguenti poliedri (vedi allegato) calcolare A,b della rappresentazione algebrica e gli insiemi V,E della rappresentazione di Weyl e, per ognuno di essi, trovare, se esiste, un vettore c tale che:

a) esiste massimo finito;
b) non esiste massimo finito;
c) esiste minimo finito;
d) non esiste minimo finito;
e) la soluzione ottima non e' unica.



PER QUANTO RIGUARDA I VETTORI V, E ABBIAMO DISEGNATO SULLE FIGURE

1) RETTA, QUINDI NON SI HA POLIEDRO LIMITATO $\Longrightarrow E \neq \{\emptyset\}$

RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE $\Longrightarrow V = \{(0,0)\}$

IMMAGINANDO LA RETTA COME UN'UNIONE DI SEMIRETTE OTTENIAMO $E = \{(1,1),(-1,-1)\}$

2) SEMPLICE SEGMENTO, BASTA UNA COMBINAZIONE CONVESSA

$V = \{(0,0),(1,0)\}$

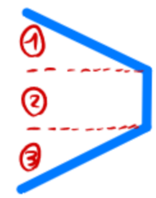
3) SEMIPIANO, POLIEDRO NON LIMITATO $\Longrightarrow E \neq \{\emptyset\}$

SEMIPIANO TRASLATO RISPETTO ALL'ORIGINE $\Longrightarrow V \neq \{(0,0)\}$

" " DA $(0,0)$ A $(0,1)$ $\Longrightarrow V = \{(0,1)\}$

PER POTERCI MUOVERE IN TUTTE LE DIREZIONI SERVONO TRE VETTORI IN E, QUINDI TRE SEMIRETTE. $\Longrightarrow E = \{(0,1), (0,-1), (1,0)\}$

4) POLIEDRO NON LIMITATO $\Longrightarrow E \neq \{\emptyset\}$



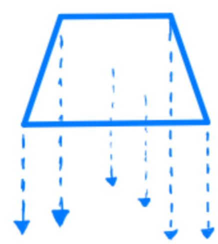
PRESENTI DUE VERTICI $\Longrightarrow V = \{(0,0), (0,-1)\}$

VOGLIAMO MUOVERCI NEL POLIEDRO A PARTIRE DA UNO DEI VERTICI, O UNO DEI PUNTI APPARTENENTE AL SEGMENTO LIMITATO DAI DUE VERTICI.

2 MI MUOVO CON $(-1,0)$
1 MI MUOVO CON $(-1,1)$
3 MI MUOVO CON $(-1,-1)$

$\Longrightarrow E = \{(-1,0), (-1,1), (-1,-1)\}$

5) ABBIAMO 4 VERTICI CHE DELIMITANO UN TRAPEZIO



$V = \{(1,1), (2,2), (3,2), (4,1)\}$

POLIEDRO NON LIMITATO $\Longrightarrow E \neq \{\emptyset\}$

PRENDIAMO UN QUALUNQUE PUNTO DEL VERTICE E DA LI MUOVIAMOCI NEL POLIEDRO. BASTA UN VETTORE $E = \{(0,-1)\}$

PER QUANTO RIGUARDA I VETTORI A, b CONSIDERIAMO I VARI SEMIPIANI CHE COMPONGONO I POLIEDRI

1) OTTENIAMO LA RETTA DALLA SOVRAPPOSIZIONE DI DUE SEMISPAZI AVENTI FRONTIERA COMUNE. RETTA AVENTE COME VETTORE $(1,1)$ E PASSANTE PER L'ORIGINE.

$$x_1 + x_2 = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 \leq 0 \\ -x_1 - x_2 \leq 0 \end{matrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2)
$$x_2 = 0 \longrightarrow \begin{matrix} x_2 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{matrix}$$
$$x_1 \geq 0 \longrightarrow -x_1 \leq 0$$
$$x_1 \leq 1$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3)
$$x_2 \geq 1 \longrightarrow -x_2 \leq -1 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

4) TROVIAMO I SEMIPIANI SFRUTTANDO LE REGOLE DETTE

$x_1 = 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $x_1 = 0$

$A = (1,1) \quad x = (0,0) \implies AX = 0$ $\qquad\qquad$ $x_1 + x_2 = 0$

$A = (-1,1) \quad x = (0,-1) \implies AX = 0 - 1 = -1$ $\qquad$ $-x_1 + x_2 = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & +1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 0 \\ -x_1 &\leq 0 \\ x_1 + x_2 &\leq 0 \\ -x_1 - x_2 &\leq 0 \\ -x_1 + x_2 &\leq -1 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

5) STESSA COSA

$x_2 \leq 2$

$x_1 \geq 1 \longrightarrow -x_1 \leq -1$

$x_1 \leq 4$

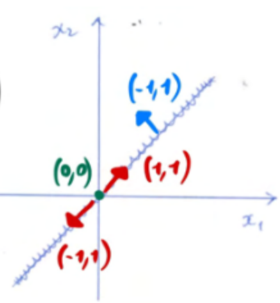
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$A = (-1,1) \quad x = (1,1) \implies -x_1 + x_2 \leq 0$

$A = (1,1) \quad x = (3,2) \implies AX = 3+2 = 5 \longrightarrow x_1 + x_2 \leq 5$

CONCLUDIAMO CON I VETTORI c (SI DISEGNINO LE LINEE DI ISOCOSTO)

(1)



1) $c = (-1, 1)$

2) $c = (1, 1)$

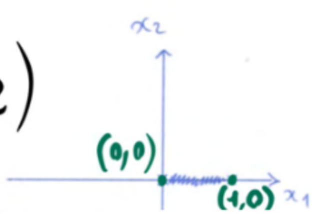
3) $c = (-1, 1)$

4) $c = (1, 1)$

5) $c = (-1, 1)$

a) esiste massimo finito;
b) non esiste massimo finito;
c) esiste minimo finito;
d) non esiste minimo finito;
e) la soluzione ottima non e' unica.

(2)



1) $c = (1, 0)$

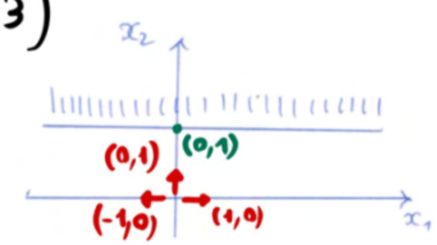
2) $\emptyset$

3) $c = (1, 0)$

4) $\emptyset$

5) $c = (0, 1)$

(3)



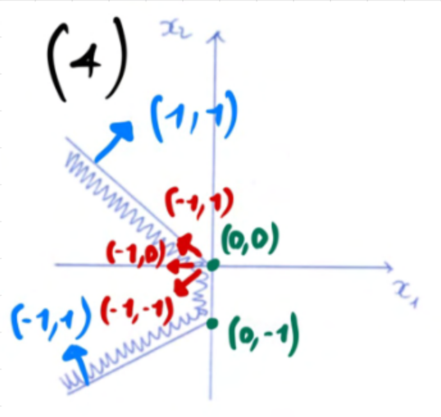
1) $\emptyset$

2) $c = (1, 1)$

3) $c = (0, 1)$

4) $c = (1, 0)$

5) $c = (0, 1)$



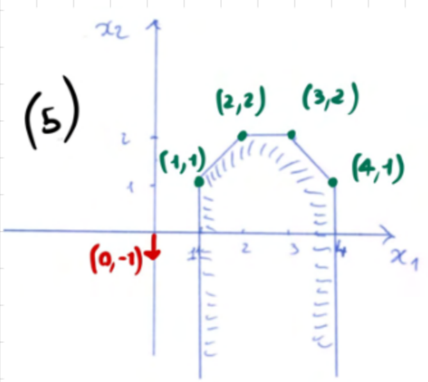
1) $c = (1,1)$

2)

3)

4)

5)



1) $c = (1,1)$

2)

3)

4)

5)

TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PL

DOMANDE A CUI CERCHEREMO DI RISPONDERE

- COME VEDO SE IL POLIEDRO É VUOTO?
- COME TROVO V IN PRESENZA DI VERTICI?
- COME TROVO E (LE DIREZIONI)?
- VA BENE LIMITARSI A CALCOLARE POLIEDRI CON VERTICI?

PREMESSE DIMOSTRATIVE

CONSIDERIAMO UN PUNTO $\bar{x} \in P$ E RAPPRESENTIAMOLO COL TEOREMA DI WEYL

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v^i + \sum_{J=1}^{p} \mu_J e^J$$

SOSTITUIAMO $\bar{x}$ NELLA FUNZIONE OBIETTIVO

$$c \cdot \bar{x} = c\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v^i + \sum_{J=1}^{p} \mu_J e^J\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(c v^i\right) + \sum_{J=1}^{p} \mu_J \left(c e^J\right)$$

$\lambda_i \in [0,1]$
$\sum \lambda_i = 1$

I TERMINI NON VANNO A INFINITO IN NESSUN CASO

$\mu_J \geq 0$

IL TERMINE J-ESIMO PUÓ ANDARE A INFINITO PONENDO $\mu_J \longrightarrow +\infty$ SE $c e^J > 0$ (STIAMO MASSIMIZZANDO)

QUINDI: $\boxed{\text{IL PROBLEMA DI PL FA INFINITO SE } \exists J : c e^J > 0}$

SE $\nexists k$ ALLORA IL PROBLEMA, NON FA INFINITO.
I TERMINI DELLA COMB. CONICA SONO TUTTI NEGATIVI: MASSIMIZZO PONENDO $\mu_J = 0 \ \forall J$

OTTENIAMO IL PROBLEMA $\begin{cases} \max \sum \lambda_i (c v^i) \\ \lambda_i \in [0,1] \\ \sum \lambda_i = 1 \end{cases}$

K : SI HA MASSIMO

PONIAMO $\sum \lambda_i \left(c v^i\right) \leq \sum \lambda_i \left(c v^K\right) = c v^K \left(\sum \lambda_i\right) = c v^K$

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE $\max \sum \lambda_i (c v^i) \leq c v^K$, MA $v^K \in P$, QUINDI $c v^K \leq \max \sum \lambda_i (c v^i)$

$$\boxed{\max_{x \in P} c x = c v^K}$$

■

ENUNCIATO

DATO UN PROBLEMA DI PL, SE:
- IL POLIEDRO É NON VUOTO,
- IL POLIEDRO HA VERTICI, E
- LA FUNZIONE OBIETTIVO NON VA A INFINITO

ALLORA ESISTE UN VALORE K TALE CHE IL VERTICE v^K É SOLUZIONE OTTIMA.

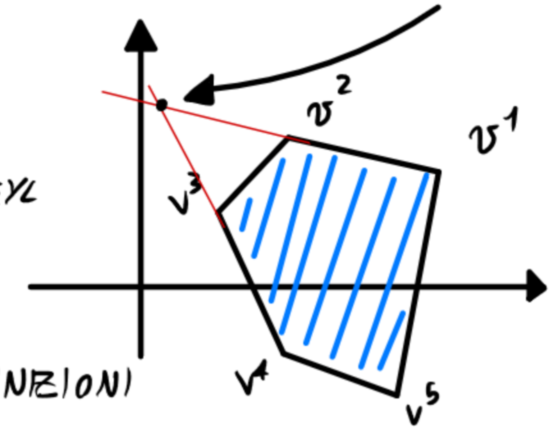
VERTICI DI UN POLIEDRO IN FORMATO PRIMALE STANDARD

DAL TEOREMA APPENA INTRODOTTO, DEDUCIAMO CHE IN PRESENZA DI CERTE CONDIZIONI ALMENO UN VERTICE È SOLUZIONE OTTIMA. IN QUEL CASO BASTA SCORRERE TUTTI I VERTICI PER TROVARE L'OTTIMO!
VOGLIAMO COSTRUIRE UN ALGORITMO DI ENUMERAZIONE DEI VERTICI!

IDEA INIZIALE: RISOLVERE UN SISTEMA LINEARE $n \times n$ (IN $\mathbb{R}^2$ LETTERALMENTE INTERSEZIONE DI RETTE)

NON BASTA! ATTENZIONE ALLE INTERSEZIONI POSSIBILI: NON È DETTO OTTENGA VERTICI. SI CONSIDERI QUESTO ESEMPIO

$m = 5 \longrightarrow$ NUM. VINCOLI
$n = 2 \longrightarrow$ NUM. DECISIONI
$p = 0 \longrightarrow$ DIREZIONI DI WEYL
$K = 5 \longrightarrow$ PUNTI CONV



INTRODUCIAMO ALCUNE DEFINIZIONI

DEF. BASE. DATO L'INSIEME DEGLI INDICI DI RIGA DELLA MATRICE A, $I = \{1, \dots, m\}$ (DOVE m È IL NUMERO DEI VINCOLI) DEFINIAMO BASE UN SOTTOINSIEME DI $I \supseteq B = \{1, \dots, n\}$ (DOVE n È IL NUMERO DI DECISIONI) TALE CHE LA CORRISPONDENTE SOTTOMATRICE A_B ABBIA $\underbrace{\det(A_B) \neq 0}$

- MI ASSICURO DI NON SCEGLIERE VINCOLI PARALLELI
- HO UNICITÀ DELLA SOLUZIONE PER ROUCHÉ-CAPELLI

LA MATRICE OTTENUTA A_B È DETTA **MATRICE DI BASE**, CHE CONSISTE NELLA MATRICE A AVENTE COME RIGHE QUELLE INDICATE IN B. I RIMANENTI INDICI SONO POSTI NELL'INSIEME N ($m - n$ INDICI DI RIGA).

CALCOLIAMO $\bar{x} = A_B^{-1} b$, DETTA **SOLUZIONE DI BASE**. QUESTA PUÒ ESSERE:

- **AMMISSIBILI** (APPARTENGONO AL POLIEDRO)

  $A_i \bar{x} \leq b_i \quad \forall i \in N$ (VINCOLI TUTTI SODDISFATTI)

  FORMULAZIONE ALTERNATIVA
  $b_i - A_i \bar{x} \geq 0$

- **NON AMMISSIBILI** (NON APPARTENGONO AL POLIEDRO)

  $\exists i \in N : A_i \bar{x} > b_i$ (VINCOLI NON TUTTI SODDISFATTI)

- **DEGENERI**

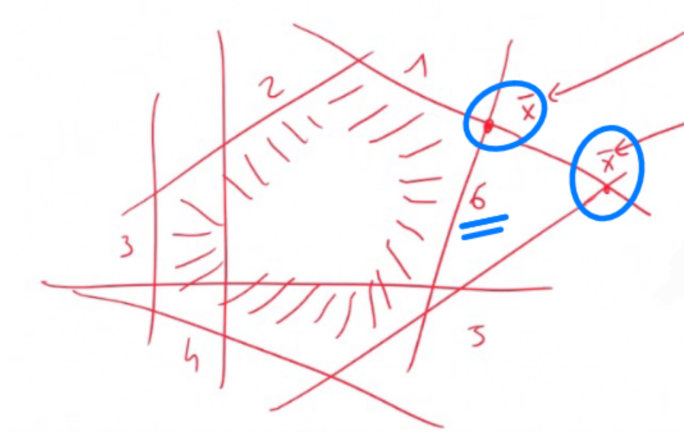
  $\exists i \in N : A_i \bar{x} = b_i$ (SOLUZIONE GENERATA DA PIÙ BASI)

- NON DEGENERI

$A_i \bar{x} \neq b_i \quad \forall i \in N$ (SOLUZIONE GENERATA DA UNA SOLA BASE)

TEOREMA DELLA CARATTERIZZAZIONE DEI VERTICI. UN PUNTO $x \in P$ È UN VERTICE SE E SOLO SE ESSO È UNA SOLUZIONE DI BASE AMMISSIBILE.

ESEMPIO GEOMETRICO. CONSIDERIAMO IL SEGUENTE POLIEDRO E LE BASI SCELTE



$B = \{1,6\}$, $N = \{2,3,4,5\}$ — SOLUZIONE AMMISSIBILE

$B = \{1,5\}$, $N = \{2,3,4,6\}$ — SOLUZIONE NON AMMISSIBILE A CAUSA DEL VINCOLO (6)

PER OGNI BASE

1) CALCOLO LA SOLUZIONE $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$

2) VERIFICO LA CONDIZIONE

$$b_N - A_N (A_B^{-1} b_B) \geq 0$$

IN CASO AFFERMATIVO LA SOLUZIONE DI BASE È AMMISSIBILE

ESEMPIO NON GEOMETRICO. FACCIAMO I CALCOLI SENZA DISEGNO

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

- ABBIAMO $I = \{1,2,3,4\}$ (INDICI DI RIGA)
- CONSIDERO GLI INDICI DI BASE POSSIBILI:

$$\{ (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4) \}$$

AVRÒ AL PIÙ 6 SOLUZIONI DI BASE
(IN REALTÀ MENO, SCARTIAMO LE BASI CON det NULLO)

- PRENDIAMO AD ESEMPIO $B = \{3,4\} \iff N = \{1,2\}$
  - LA MATRICE CONSIDERATA È $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)(-1) - 0 = 1 \neq 0$ ✓

    TROVIAMO L'INVERSA DELLA MATRICE 2x2 COL SEGUENTE CALCOLO

    $$A_B^{-1} = \frac{1}{\det(A_B)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

    IN ALTRI CASI ($\neq 2x2$) SI RICORRE A GAUSS-JORDAN

- CONSIDERANDO IL VETTORE $b_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ CALCOLIAMO LA SOLUZ. DI BASE

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- É AMMISSIBILE? SE SOSTITUISCO NEI VINCOLI NON DI BASE QUESTI RISULTANO TUTTI RISPETTATI!

FACCIAMO IL CALCOLO IN MODO PIÚ FORMALE

$$b_N - A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 5 > 0 \\ 5 > 0 \end{matrix}$$

$\Longrightarrow$ SOLUZIONE AMMISSIBILE

- COSA POSSO DIRE DEL PUNTO $\left(0, \frac{5}{2}\right)$? SOSTITUISCO NEI VINCOLI
  - I VINCOLI RISOLTI CON L'UGUALE VANNO A COSTITUIRE LA BASE: $B = \{2, 3\}$
  - DALL'ESITO DEGLI ALTRI VINCOLI CAPISCO CHE LA SOLUZIONE NON É AMMISSIBILE (PRIMO VINCOLO NON RISPETTATO)

ATTENZIONE! NON C'É BIUNIVOCITÁ TRA BASI E SOLUZIONI DI BASE

BASE $(2,5) \longrightarrow \bar{x} = \left(\frac{5}{3}, 0\right)$

BASE $(2,4) \longrightarrow \bar{x} = \left(\frac{5}{3}, 0\right)$

BASE $(4,5) \longrightarrow \bar{x} = \left(\frac{5}{3}, 0\right)$

SOLUZIONE AMMISSIBILE E DEGENERE (GENERATA DA PIÚ BASI)

Esempio. Consideriamo

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B = \{1, 2\}$ é una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ é invertibile. $\det(A_B) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1 \neq 0$ ✓

La soluzione corrispondente é $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\bar{x}$ é ammissibile perché $A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N$. $(b_N - A_N \bar{x} \geq 0)$

$B = \{1, 3\}$ non é una base perché $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non é invertibile. $\det(A_B) = 1 \cdot 0 - 0(-1) = 0$ ✗

$B = \{2, 4\}$ é una base e la corrispondente soluzione di base é inammissibile:

VINCOLO 2 NON RISPETTATO

$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = b_N$.

IN CONCLUSIONE: ALGORITMO DI ENUMERAZIONE TOTALE DEI VERTICI

DAL TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PL DEDUCIAMO UN ALGORITMO DI ENUMERAZIONE DEI VERTICI PER INDIVIDUARE LA SOLUZIONE OTTIMA.

1. $P = \emptyset$? — SE $\emptyset$ HO TROPPI VINCOLI, NON PARTO NEL CASO
2. $P = +\infty$? — HO "DIMENTICATO" VINCOLI, POLIEDRO NON LIMITATO RISOLTA CALCOLANDO E, RICORDARSI LA PREMESSA AL TEOREMA DELLA PL
3. P HA VERTICI? — DAL TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PL SAPPIAMO COSE INTERESSANTI, MA CI SERVE V. (SOLUZIONI DI BASE AMMISSIBILI)

   POLIEDRO SENZA VERTICI NELLA PRATICA NON ESISTONO.
4. INDIVIDUAZIONE DEL PRIMO VERTICE
5. SCORRIMENTO DI TUTTI I VERTICI

ATTENZIONE! QUANTO TEMPO CI VUOLE PER FARE UN'ENUMERAZIONE?

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}}_{n \text{ COLONNE}} \Big\} m \text{ RIGHE}$$

OVVIAMENTE $m > n$ (SE NO NON AVREI UN SISTEMA RISOLVIBILE)

LE COMBINAZIONI POSSIBILI SONO (CONSIDERO $m = 100$, $n = 10$)

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \frac{100!}{10!\;90!} = \frac{100 \cdot \ldots \cdot 91 \cdot \cancel{90!}}{10!\;\cancel{90!}} \approx 10^{10}$$

OTTENIAMO MILIARDI DI COMBINAZIONI POSSIBILI: COMPLESSITÀ FATTORIALE, AMARA CONCLUSIONE

<u>L'ENUMERAZIONE TOTALE È IMPOSSIBILE</u>

DOBBIAMO INVENTARCI QUALCOS'ALTRO. DOPO AVER INTRODOTTO LA TEORIA DELLA DUALITÀ E IL "POLIEDRO DUALE" INDIVIDUEREMO UN "TEST DI OTTIMALITÀ".

<u>DOVE STA LA DIFFERENZA</u>?

- NELL'ALGORITMO INIZIALE DEVO CALCOLARE <u>TUTTI</u> I VERTICI E TUTTI I VALORI RESTITUITI DALLA FUNZIONE OBIETTIVO.
- COL "TEST DI OTTIMALITÀ" POSSO SAPERE SE HO L'OTTIMO SENZA CALCOLARE GLI ALTRI VERTICI.

TEORIA DELLA DUALITÀ

DEF. FORMATO DUALE STANDARD

UN PROBLEMA NELLA SEGUENTE FORMA È UN PROBLEMA DI PL IN FORMATO DUALE STANDARD.

$$\begin{cases} \min cx \\ Ax = b \\ x_K \geq 0 \quad \forall K \end{cases}$$

FORMA MENO INTUITIVA RISPETTO AL PRIMALE STANDARD (INTERSEZIONE DI VERTICI, E NON POLIEDRO), MA NECESSARIA PER L'ALGORITMO DEL SIMPLESSO.

PASSAGGIO DA PRIMALE AL CORRISPONDENTE DUALE

SI VEDA "LEGAME TRA PRIMALE E DUALE"

$$\begin{cases} \max c^T \cdot x \\ A \cdot x \leq b \end{cases} \iff \begin{cases} \min y^T \cdot b \\ y^T \cdot A = c \\ y_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

(PRIMALE STANDARD) (DUALE STANDARD)

A IN POSIZIONE DIVERSA PER NON CHIAMARE IN CAUSA LA TRASPOSTA

SI CONSIDERI IL SEGUENTE ESEMPIO

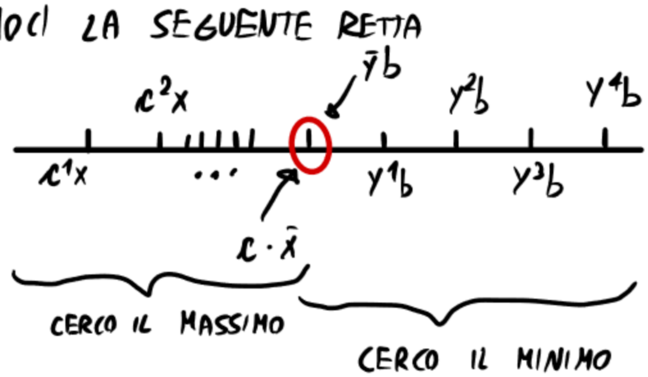
$$\begin{cases} \max x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 8 \\ -4x_1 + 5x_2 \leq 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \min 7y_1 + 8y_2 + 3y_3 \\ 3y_1 + 5y_2 - 4y_3 = 1 \\ 2y_1 - 6y_2 + 5y_3 = 1 \\ y_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max 4x_1 + 5x_3 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 8 \\ -3x_1 - 5x_2 \geq 7 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1 \\ x_3 \leq 6 \end{cases} \iff \begin{cases} \min 8y_1 - 7y_2 + y_3 + 6y_4 \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 = 4 \\ 6y_1 + 5y_2 + 2y_3 = 0 \\ 3y_3 + y_4 = 5 \\ y_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

TEOREMA DELLA DUALITÀ

SIA $P \neq \emptyset$, SIA $D \neq \emptyset$, ALLORA $\max\limits_{x \in P} c \cdot x = \min\limits_{y \in D} y \cdot b$ (IL VALORE OTTENUTO DAI PRODOTTI SCALARI)

IMMAGINIAMOCI LA SEGUENTE RETTA



— VERTICI DI UN POLIEDRO IN FORMATO PRIMALE STANDARD —

- SIA $I=\{1,\dots,m\}$ L'INSIEME DELLE RIGHE DELLA MATRICE A
- PRENDIAMO UN SOTTOINSIEME B $(B\subseteq I)$ TALE CHE $|B|=n$, TALE CHE IL DETERMINANTE DELLA SOTTOMATRICE A_B SIA $\det(A_B)\neq 0$

$$yA \longrightarrow (y_B\,|\,y_N)\left(\frac{A_B}{A_N}\right)=c$$

$$y_B A_B + \cancel{y_N A_N} = c$$

PONGO A 0 y_N ($m-n$ VARIABILI DI y) RIDUCENDO COSÍ A SISTEMA QUADRATO

$$y_B = c\,A_B^{-1}$$
$$y_N = 0$$

ABBIAMO TROVATO LA SOLUZIONE DI BASE DUALE $y=(y_B\,|\,y_N)$

IN LINEA COL POLIEDRO PRIMALE INTRODUCIAMO LE SEGUENTI DEFINIZIONI DI SOLUZIONE, VALIDE PER IL "POLIEDRO DUALE"

- AMMISSIBILI

$y_i\geq 0 \quad \forall i\in B$ (VINCOLI TUTTI SODDISFATTI)

$$\begin{cases} \min\ 7y_1+8y_2+3y_3 \\ 3y_1+5y_2-4y_3=1 \\ 2y_1-6y_2+5y_3=1 \\ \boxed{y_i\geq 0 \quad \forall i} \end{cases}$$

- NON AMMISSIBILI

$\exists i\in B:\ y_i<0$ (VINCOLI NON TUTTI SODDISFATTI)

- DEGENERI

$\exists i\in B:\ y_i=0$ (SI HA ALMENO UNA COMPONENTE NULLA IN y_B)

- NON DEGENERI

$y_i\neq 0 \quad \forall i\in B$ (NON SI HANNO COMPONENTI NULLE IN y_B)

TEOREMA DELLA CARATTERIZZAZIONE DEI VERTICI (BIS). UN PUNTO $\bar{y}\in D$ É UN VERTICE SE E SOLO SE É SOLUZIONE DI BASE DUALE AMMISSIBILE.

ESEMPIO DI RISOLUZIONE. CONSIDERIAMO IL SEGUENTE PROBLEMA DUALE

$$\begin{cases} 3y_1+4y_2+5y_3+y_4=9 \\ 2y_1+3y_2+y_3+3y_4=4 \\ y_i\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} yA=c \\ y\geq 0 \end{cases}$$

PRENDIAMO LA BASE $B=\{2,3\} \longrightarrow N=\{1,4\}$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \boxed{4} & \boxed{3} \\ \boxed{5} & \boxed{1} \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

PONGO NULLI GLI ELEMENTI DELLE RIGHE $i\in N$

- CALCOLO $\bar{y} = (cA_B^{-1}, 0) = (0, 1, 1, 0)$ AMMISSIBILE POICHÉ $y_i \geq 0 \ \forall i$

$\Downarrow$

VERTICE DEL POLIEDRO DUALE

ESEMPIO DI RISOLUZIONE.

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + y_3 + 4y_4 = 1 \\ 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 + 7y_4 = 5 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

PRENDIAMO LA BASE $B = \{1, 4\}$

OTTENIAMO $\bar{y} = (-1, 0, 0, 1)$ NON AMMISSIBILE POICHÉ $\exists i \in B : y_i < 0$

$\Downarrow$

NON È UN VERTICE

SUPPONIAMO IN MODO SVINCOLATO DI AVERE
$\bar{y} = (\frac{1}{3}, 1, 1, 0)$. È VERTICE?

NO, DOVREBBE AVERE ALMENO $n - m$ ZERI

PUÒ ESSERE DEGENERE (RICORDARE DEFINIZIONE)

TEST DI OTTIMALITÀ

DEF. SOLUZIONI COMPLEMENTARI. DATA UNA BASE B DELLA MATRICE A LE CORRISPONDENTI SOLUZIONI PRIMALI E DUALI SONO DETTE SOLUZIONI COMPLEMENTARI (SONO SORELLE, CIT.)

$$A_B^{-1} b_B = \bar{x} \qquad (cA_B^{-1}, 0) = (y_B, y_N) = \bar{y}$$

A QUESTO PUNTO ABBIAMO TUTTO IL NECESSARIO PER IL TEST DI OTTIMALITÀ

SE COSTRUIAMO DUE SOLUZIONI COMPLEMENTARI LA FUNZIONE OBIETTIVO RESTITUISCE LO STESSO VALORE.

$$c \cdot \bar{x} = cA_B^{-1} b_B$$

$$\bar{y} \cdot b = (\bar{y}_B, \bar{y}_N) \begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix} = \bar{y}_B b_B + \bar{y}_N b_N = cA_B^{-1} b_B + 0 b_N = cA_B^{-1} b_B$$

TENENDO CONTO DEL TEOREMA DELLA DUALITÀ E DELLE DEFINIZIONI (PRIMALE E DUALE) DI SOLUZIONE DI BASE AMMISSIBILE AFFERMO CHE:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{x} \in P \text{ È SOLUZ. AMMISSIBILE} \\ \bar{y} \in D \text{ È SOLUZ. AMMISSIBILE} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} \bar{x} \in P \text{ È L'OTTIMO} \\ \bar{y} \in D \text{ È L'OTTIMO} \end{array}}$$

LEGAME TRA DUALE E PRIMALE

SI DISTINGUANO LE SEGUENTI COSE:

- IL PROBLEMA IN FORMATO DUALE STANDARD
- IL DUALE DI UN PROBLEMA PRIMALE.

IL PRIMO È UN QUALUNQUE PROBLEMA POSTO NELLA SEGUENTE FORMA, UTILIZZANDO LE TRASFORMAZIONI ALGEBRICHE

$$\begin{cases} \min cx \\ Ax = b \\ x_K \geq 0 \quad \forall K \end{cases}$$

IL SECONDO SI OTTIENE A PARTIRE DA UN PROBLEMA PRIMALE

$$\underbrace{\begin{cases} \max c^T \cdot x \\ A \cdot x \leq b \end{cases}}_{\text{(PRIMALE STANDARD)}} \iff \underbrace{\begin{cases} \min y^T \cdot b \\ y^T \cdot A = c \\ y_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases}}_{\text{(DUALE STANDARD)}}$$

→ A IN POSIZIONE DIVERSA PER NON CHIAMARE IN CAUSA LA TRASPOSTA

SI CONSIDERI IL SEGUENTE ESEMPIO:

$$(B) \begin{cases} \min 3y_1 + 5y_2 + 4y_3 \\ 4y_1 + 2y_2 + y_3 = 8 \\ 3y_1 + y_2 + 3y_3 = 9 \\ y \geq 0 \end{cases} \iff (A) \begin{cases} \max -3x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ -4x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -8 \\ 3y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 9 \\ -3y_1 - y_2 - 3y_3 \leq -9 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_3 \leq 0 \end{cases}$$

APPLICHIAMO LE TRASFORMAZIONI

SONO LO STESSO PROBLEMA!!!

$\boxed{\text{(B) NON È IL DUALE DI (A)}}$

NOI ABBIAMO VISTO COME SI TROVA IL DUALE DEL PRIMALE IN MODO DIRETTO, E NON COME SI TROVA DIRETTAMENTE IL DUALE DEL DUALE. POSSIAMO PERÒ RICONDURCI AL FORMATO PRIMALE CON LE TRASFORMAZIONI ALGEBRICHE (CIÒ CHE ABBIAMO APPENA FATTO)

SCRIVIAMO IL DUALE DI (A), CHE È ANCHE IL DUALE DI (B).

$$(C) \begin{cases} \min 8y_1 - 8y_2 + 9y_3 - 9y_4 + \cancel{0y_5} + \cancel{0y_6} + \cancel{0y_7} \\ 4y_1 - 4y_2 + 3y_3 - 3y_4 - y_5 + \cancel{0y_6} + \cancel{0y_7} = -3 \\ 2y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 + \cancel{0y_5} - y_6 + \cancel{0y_7} = -5 \\ y_1 - y_2 + 3y_3 - 3y_4 + \cancel{0y_5} + \cancel{0y_6} - y_7 = -4 \\ y_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

IL DUALE OTTENUTO CI SERVE PER IL TEST DI OTTIMALITÀ.
SI OSSERVI CHE CAMBIA IL NUMERO DI VARIABILI NEL DUALE: LA COSA NON È UN PROBLEMA, LA COSA CHE CI INTERESSA È IL VALORE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO

RICAPITOLIAMO

$$(B)\begin{cases} \min\ 3y_1 + 5y_2 + 4y_3 \\ 4y_1 + 2y_2 + y_3 = 8 \\ 3y_1 + y_2 + 3y_3 = 9 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

DUALE DI (D)

STESSO PROBLEMA

$\Downarrow$ TRASFORMAZIONI ALGEBRICHE

$$(A)\begin{cases} \max\ -3x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ -4x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -8 \\ 3y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 9 \\ -3y_1 - y_2 - 3y_3 \leq -9 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_3 \leq 0 \end{cases}$$

DUALE DI (D)

DUALE DI (B)

DUALE DI (A)

$\Downarrow$ CREAZIONE DEL CORRISP. DUALE

$$(C)\begin{cases} \min\ 8y_1 - 8y_2 + 9y_3 - 9y_4 \\ 4y_1 - 4y_2 + 3y_3 - 3y_4 - y_5 = -3 \\ 2y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 - y_6 = -5 \\ y_1 - y_2 + 3y_3 - 3y_4 - y_7 = -4 \\ y_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

E SE CALCOLASSI IL DUALE DEL DUALE?

$$\begin{cases} \min\ 8(y_1 - y_2) + 9(y_3 - y_4) \\ 4(y_1 - y_2) + 3(y_3 - y_4) - y_5 = -3 \\ 2(y_1 - y_2) + (y_3 - y_4) - y_6 = -5 \\ (y_1 - y_2) + 3(y_3 - y_4) - y_7 = -4 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases} \max\ 8x_1' + 9x_2' \\ -4x_1' - 3x_2' \leq 3 \\ -2x_1' - x_2' \leq 5 \\ -x_1' - 3x_2' \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min\ 8x_1' + 9x_2' \\ 4x_1' + 3x_2' - x_3' = -3 \\ 2x_1' + x_2' - x_4' = -5 \\ x_1' + 3x_2' - x_5' = -4 \\ x_3' \geq 0 \quad x_4' \geq 0 \quad x_5' \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \min\ 8x_1' + 9x_2' \\ -4x_1' - 3x_2' + \cancel{x_3'} = +3 \\ -2x_1' - x_2' + \cancel{x_4'} = +5 \\ -x_1' - 3x_2' + \cancel{x_5'} = +4 \\ \cancel{x_3' \geq 0} \quad \cancel{x_4' \geq 0} \quad \cancel{x_5' \geq 0} \end{cases}$$

RIMUOVO LE VARIABILI DI SCARTO $\Uparrow$

IL DUALE DEL DUALE È IL PRIMALE.

ESERCIZI SU VERTICI E TEST DI OTTIMALITÀ

Esercizio 1. Dato il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max \ -7\,x_1 + x_2 \\ -3\,x_1 + 2\,x_2 \le 4 & (1) \\ -x_1 - 3\,x_2 \le -6 & (2) \\ x_2 \le 5 & (3) \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 \le 22 & (4) \\ x_1 \le 6 & (5) \\ 2\,x_1 - x_2 \le 16 & (6) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & +2 \\ -1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \\ 22 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad c = (-7, 1)$$

TROVARE PER, LE SEGUENTI BASI E IL VETTORE INDICATO. INDICARE SE LA SOLUZIONE È AMMISSIBILE, OTTIMA E/O DEGENERE.

$B = \{4, 5\}$ (TROVARE $\bar{x}$)

$$A_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A_B) = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2 \ne 0 \ \checkmark \qquad A_B^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$b_B = \begin{pmatrix} 22 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 22 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 22 + 6 \\ 11 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$ SOLUZIONE DI BASE

$$b_N - A_N\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & +2 \\ -1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -14 \\ -12 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \ge 0 \ \forall i$$

SOLUZ. AMMISSIBILE

$A_i \bar{x} \ne b_i \ \forall i$

SOLUZIONE NON DEGENERE

PER L'AMMISSIBILITÀ SI COSTRUISCE IL DUALE

$$\bar{y} = (y_B, 0) = (c A_B^{-1}, 0) = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \Big(0, 0, 0, \tfrac{1}{2}, 0, \underbrace{-\tfrac{5}{2}}_{\le 0}\Big)$$

NON SI HA L'OTTIMO

$B = \{2, 5\}$ (TROVARE $\bar{y}$)

$$A_B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A_B) = -1 \cdot 0 - 1(-3) = 3 \ne 0 \ \checkmark$$

$$A_B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$b_B = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

NON DEGENERE

$\ne 0$

$$\bar{y} = (y_B, 0) = (c A_B^{-1}, 0) = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \Big(0, -\tfrac{1}{3}, 0, 0, -\tfrac{22}{3}, 0\Big)$$

≤ 0

NON AMMISSIBILE

$\Downarrow$

NON OTTIMO (SE NON È AMMISSIBILE...)

Vettore	Indici di base	Ammissibile (SI/NO)	Degenere (SI/NO)	Ottimo (SI/NO)
$x = (6,\ 2)$	4, 5	SI	NO	NO
$y = \left(0,\ -\frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ -\frac{22}{3},\ 0\right)$	2, 5	NO	NO	NO

Dato il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 8\,x_1 - 9\,x_2 \\ -x_1 \leq 1 \\ x_1 - 3\,x_2 \leq 5 \\ -x_1 + 2\,x_2 \leq 3 \\ x_1 + 3\,x_2 \leq 7 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$c = (8, -9)$$

TROVARE PER LE SEGUENTI BASI E IL VETTORE INDICATO. INDICARE SE LA SOLUZIONE E' AMMISSIBILE, OTTIMA E/O DEGENERE.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = \{2, 5\}$ (TROVARE $\bar{x}$)

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det(A_B) = -1 - (-3)(1) = 2 \neq 0 \ \checkmark \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$b_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$ SOLUZIONI DI BASE

$$b_N - A_N\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \forall i \geq 0$$

SOLUZIONE AMMISSIBILE

$A_i \bar{x} \neq b_i \ \forall i$

SOLUZIONE NON DEGENERE

PER L'AMMISSIBILITÀ SI COSTRUISCE IL DUALE

$$\bar{y} = (y_B, 0) = (cA_B^{-1}, 0) = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{15}{2}, 0\right)$$

SI HA L'OTTIMO!!

$B = \{3, 6\}$ (TROVARE $\bar{y}$)

$$A_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A_B) = -1 - 0 = -1 \ \checkmark \qquad A_B^{-1} = -1\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

NON DEGENERE

$\neq 0$

$$\bar{y} = (y_B, 0) = (cA_B^{-1}, 0) = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, -8, 0, 0, 7)$$

Vettore	Indici di base	Ammissibile (SI/NO)	Degenere (SI/NO)	Ottimo (SI/NO)
$x = (2,\ -1)$	2, 5	SI	NO	SI
$y = (0,\ 0,\ -8,\ 0,\ 0,\ 7)$	3, 6	NO	NO	NO

NON AMMISSIBILE

NON OTTIMO

Dato il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 4\,y_1 + 8\,y_2 + 2\,y_3 + 9\,y_4 + 3\,y_5 + 7\,y_6 \\ -3\,y_1 + y_2 - y_3 + 3\,y_4 + y_5 - 2\,y_6 = -5 \\ y_1 - 5\,y_2 + y_3 + 2\,y_4 + y_6 = 8 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -5 \\ -1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 9 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$c = (-5,\ 8)$$

TROVARE PER LE SEGUENTI BASI E IL VETTORE INDICATO. INDICARE SE LA SOLUZIONE È AMMISSIBILE, OTTIMA E/O DEGENERE.

$B = \{1, 6\}$ (TROVARE $\bar{x}$)

$$-1\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A_B) = -3 - (-2) = -1 \neq 0 \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE DI BASE

$$b_N - A_N \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ -8 \\ -26 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE NON AMMISSIBILE

SOLUZIONE DEGENERE

$$\bar{y} = (y_B \mid y_N) = c\,A_B^{-1} = (-21, 0, 0, 0, 0, 19)$$

NON AMMISSIBILE

$B = \{5, 6\}$ (TROVARE $\bar{y}$)

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A_B) = 1 \cdot 1 - 0(-2) = 1 \neq 0 \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

NON DEGENERE

$\neq 0$

$$\bar{y} = (y_B, 0) = (c\,A_B^{-1}, 0) = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 0, 11, 8)$$

SOLUZIONE AMMISSIBILE

Vettore	Indici di base	Ammissibile (SI/NO)	Degenere (SI/NO)	Ottimo (SI/NO)
$x = (3,\ 13)$	1, 6	NO	SI	NO
$y = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 11,\ 8)$	5, 6	SI	NO	NO

Dato il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 3\,y_1 - 7\,y_2 + 5\,y_3 + 22\,y_4 + 14\,y_5 + 15\,y_6 \\ -y_1 - y_2 + 3\,y_4 + 2\,y_5 + 2\,y_6 = 2 \\ y_1 - 4\,y_2 + y_3 + 2\,y_4 + y_5 - 2\,y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \\ 22 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$c = (2, 1)$$

$B = \{3, 4\}$

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(A_B) = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -3 \ \checkmark \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 22 \end{pmatrix} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE DI BASE

$$b_N - A_N \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -4 \\ 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -24 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix} \geq 0 \ \forall i$$

SOLUZIONE AMMISSIBILE

$A_i \bar{x} \neq b_i \ \forall i$

SOLUZIONE NON DEGENERE

PER L'AMMISSIBILITÁ SI COSTRUISCE IL DUALE

$$\bar{y} = (y_B, 0) = (c A_B^{-1}, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \Big(0, 0, \underbrace{-\tfrac{1}{3}}_{\leq 0}, \tfrac{2}{3}, 0, 0\Big)$$

NON SI HA L'OTTIMO

$B = \{1, 5\}$

$$A_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A_B) = -1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -3 \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$b_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}$$

AMMISSIBILE

$$\bar{y} = (y_B, 0) = (c A_B^{-1}, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

DEGENERE

CALCOLO IL PRIMALE E VERIFICO L'AMMISSIBILITÁ

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$

$$b_N - A_N \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 22 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{70}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ 21 \end{pmatrix}$$

NON OTTIMO, MA SIAMO NEL CASO DEGENERE (CONTINUA)

PROVIAMO LE VARIE BASI POSSIBILI, CAMBIANDO L'INDICE RELATIVO ALLA COMPONENTE NULLA

$\Longrightarrow \{(2,5), (3,5), (4,5), (6,5)\}$

QUINDI:

$B=\{2,5\}$ $\quad A_B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A_B) = -1-2(-4) = 7 \neq 0$

$b_B = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix}$ $\quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 4/7 \\ -2/7 & -1/7 \end{pmatrix}$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1/7 & 4/7 \\ -2/7 & -1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

$b_N - A_N\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 22 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$???

$B=\{3,5\}$ $\quad A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A_B) = 0-2 = -2 \neq 0$

$b_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}$ $\quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$b_N - A_N\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 22 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 35/2 \\ -3/2 \\ 16 \end{pmatrix}$ $\longleftarrow$ NON OTTIMO

$B=\{4,5\}$ $\quad A_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A_B) = 3-4 = -1 \neq 0$

$b_B = \begin{pmatrix} 22 \\ 14 \end{pmatrix}$ $\quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

$b_N - A_N\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ OTTIMO!!!

Vettore	Indici di base	Ammissibile (SI/NO)	Degenere (SI/NO)	Ottimo (SI/NO)
$x = (4,\ 5)$	3, 4	SI	NO	NO
$y = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)$	1, 5	SI	SI	SI

1.13 Algoritmo del simplesso primale

1.13.1 Come siamo arrivati al simplesso?

Abbiamo bisogno di un algoritmo efficiente in grado di risolvere i nostri problemi di PL (e non solo). Nelle pagine precedenti abbiamo costruito, passo dopo passo, la base teorica necessaria per introdurre il noto *algoritmo del simplesso*. Cosa abbiamo visto?

- Il problema di PL.
- L'interpretazione geometrica del problema della PL, in particolare la risoluzione geometrica in $\mathbb{R}^2$. Definizione di direzioni di recessione, vertici, combinazioni convesse e combinazioni coniche. Teorema di Weyl per la rappresentazione dei vertici.
- Le definizioni di base, matrice di base, soluzione di base (che può essere ammissibile o non ammissibile). Costruzione di un algoritmo di enumerazione totale, che in realtà non può essere utilizzato a causa della complessità fattoriale.
- Il passaggio dall'enumerazione totale al test di ottimalità. La teoria duale, necessaria per costruire un test di ottimalità: poliedro duale, i concetti delle basi e delle soluzioni di base applicati ai poliedri duali (in particolare l'ammissibilità di una soluzione di base nel poliedro duale).
- Il teorema fondamentale della PL, che afferma l'esistenza di almeno un vertice come soluzione ottima se le seguenti condizioni sono soddisfatte:
  - il poliedro è non vuoto;
  - il poliedro ha vertici;
  - la funzione obiettivo non va a infinito.

Su questo incorniciamo una questione importante

Col teorema fondamentale della PL noi affermiamo che una delle possibili soluzioni ottime è un vertice, non che la soluzione ottima è il vertice!

La prima cosa che fa l'algoritmo del simplesso è verificare se le condizioni del teorema fondamentale della PL sono soddisfatte: se lo sono e possiamo guardare esclusivamente i vertici, visto che troveremo l'ottimo su almeno uno dei vertici. Si osservi che il simplesso restituisce un primo vertice: questo significa che il poliedro non è vuoto.

Storia

Alcune chicche storiche:

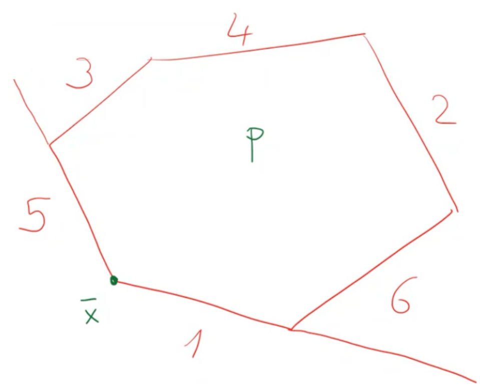
- nasce nel 1947 dall'ingegnere George Dantzig, che vuole risolvere problemi di organizzazione logistica della *USA Army*
- discussione negli anni a venire sulla effettiva complessità computazionale del simplesso, negli anni 60 uno studioso affermò che il caso peggiore del simplesso ha complessità esponenziale;
- negli anni 70 viene dimostrato da un altro studioso che i problemi di PL possono essere risolti con complessità polinomiale (parte la ricerca al primo algoritmo di complessità polinomiale)

- 1985: a un congresso del MIT (presente il prof. Pappalardo, all'epoca ricercatore) Karmarkar presenta alla comunità accademica (e soprattutto davanti allo stesso Dantzig) il primo algoritmo polinomiale per la risoluzione dei problemi di PL.

Dopo 80 anni dalla creazione del simplesso, e dopo 40 anni dalla pubblicazione dell'algoritmo di Karmarkar, il primo continua ad essere il miglior algoritmo per risolvere classi importanti dei problemi di Ricerca operativa. Altra cosa su cui l'algoritmo del simplesso è imbattibile è la sua semplicità.

1.13.2 Algoritmo

Supponiamo di avere il seguente problema di PL in formato primale



$$\begin{cases} \max c \cdot x \\ A \cdot x \leq b \end{cases}$$

- **Vertice di partenza**.

  Suppongo di avere un vertice $\overline{x} \in P$ (ammissibile) a cui è associata una base B

  $$\overline{x} = A_B^{-1} b_B$$

- **Verifica dell'ottimo col test di ottimalità**.

  Costruiamo la soluzione complementare di $\overline{x}$:

  $$\overline{y}_B = cA_B^{-1} \longrightarrow \overline{y} = (y_B, y_N) = (cA_B^{-1}, 0)$$

  Verifico col test di ottimalità se siamo all'ottimo: se $\overline{y}_B \geq 0$ abbiamo finito, altrimenti dobbiamo effettuare un *cambio di base*.

- **Cambio di base (individuazione di un nuovo vertice)**.

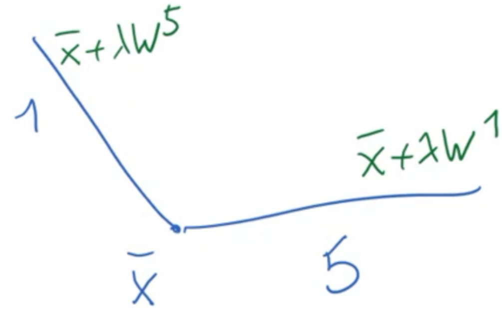
  Definiamo la seguente matrice, l'opposta dell'inversa di A_B

  $$W = -A_B^{-1}$$

  Con la colonna W^h della matrice andiamo a definire la seguente semiretta

  $$\overline{x}(\lambda) = \overline{x} + \lambda W^h$$

  con $\lambda \geq 0$, essa ha origine nel vertice $\overline{x}$. Vogliamo lasciare questo vertice: facciamo ciò passando da uno dei possibili spigoli che hanno come estremo $\overline{x}$. La scelta dello spigolo deve essere tale da farci ottenere un vertice con cui il valore della funzione obiettivo aumenta.



Data la base iniziale A_B vogliamo ottenere una nuova base con $n-1$ indici in comune e un indice diverso. Dobbiamo individuare:

- un **indice uscente** h, quello che vogliamo sostituire;
- un **indice entrante** k, quello che andrà a sostituire il precedente.

Indice uscente Andiamo a sostituire

$$c \cdot \overline{x}(\lambda) = c \cdot \left(\overline{x} + \lambda \cdot W^h\right) = c \cdot \overline{x} + \lambda c \cdot W^h$$

il primo termine è la funzione obiettivo nel vertice corrente $\overline{x}$, il secondo determina la variazione della funzione obiettivo. Se il secondo termine è positivo la funzione obiettivo aumenta in valore! Ricordiamo che $W^i = (-A_B^{-1})^i$ e che $c \cdot A_B^{-1} = \overline{y}$

$$c \cdot W^i = c\left(-A_B^{-1}\right)^i = -c\left(A_B^{-1}\right)^i = -\overline{y}_i$$

Per ottenere la funzione obiettivo è necessario un indice h tale che $c \cdot w^h > 0$, quindi un indice h tale che $\overline{y}_h < 0$. Leggendo la funzione obiettivo l'idea che ci verrebbe è di considerare la componente più piccola tra quelle negative, in modo da massimizzare il più possibile.

$$\theta = \min\{\overline{y}_i < 0, i \in B\} \qquad\qquad h = \min\{i \in B : \overline{y}_i = \theta\}$$

In realtà non faremo questo, ma applicheremo una delle cosiddette *regole anticiclo di Bland* (per gestire i casi degeneri, si veda l'apposita sezione):

$$h = \min\{i \in B : \overline{y}_i < 0\}$$

Poichè $\overline{x}$ non è l'ottimo siamo certi che esiste un valore h tale che $\overline{y}_h < 0$, quello che facciamo è prendere il primo tra i possibili. Prendiamo ad esempio il punto $\overline{y} = (0, 5, 0, 0, -3)$: abbiamo $B = \{2, 5\}$, per la regola porremo $h = 5$. Si osservi che in presenza del vertice ottimo la funzione obiettivo decresce lungo tutti gli spigoli.

Indice entrante Abbiamo una semiretta lungo la quale ci muoviamo: λ aumenta, così come la funzione obiettivo. Ci muoviamo lungo la semiretta non appena emergono vincoli non rispettati: a quel punto ci troveremo su un nuovo vertice.

$$A \cdot x(\lambda) \leq b$$

Facciamo due conti per capire quali λ sono ammissibili

$$A_i(\overline{x} + \lambda W^h) \leq b_i \qquad\qquad \forall i = 1, \ldots, m$$

- Per prima cosa facciamo il conto rispetto agli indici $i \in B$ (**indici di base**).

$$\boxed{A_i \cdot \overline{x}} + \lambda \left(A_i \cdot W^h \right) \leq \boxed{b_i}$$

  - $\overline{x}$ è il punto di intersezione tra più vincoli, quelli indicati dalla base: questo significa che $A_i\overline{x} = b_i$
  - $A_i \cdot w^h$ è il prodotto tra la riga di una matrice e la colonna dell'opposta della sua inversa. Gli unici valori possibili sono 0 e -1.

  La disuguaglianza è valida $\forall i \in B$. Da questo deduciamo che ciò che "fa da barriera" non sono gli indici di base, ma quelli non di base.

- A questo punto facciamo il calcolo per gli **indici non di base**.

$$A_i\overline{x} + \lambda \left(A_i \cdot W^h \right) \leq b_i$$

  Non possiamo più dire con certezza che $A_i\overline{x} = b_i$: la condizione deve essere comunque verificata, quindi

$$A_i\overline{x} \leq b_i$$

  Per quanto riguarda $A_i \cdot W^h$ abbiamo il prodotto tra una riga non di base per una colonna dell'opposta dell'inversa della matrice di base. Anche qua non abbiamo più le stesse certezze di prima. Attenzione al segno dei prodotti scalari

  - Se $A_i \cdot W^h \leq 0$, $\forall i \in N$ allora la semiretta è contenuta per intero nel poliedro anche in presenza di indici non di base

$$(P) = +\infty$$

  - Se $\exists i : A_i \cdot W^h > 0$ allora la semiretta non è contenuta per intera. Vogliamo un valore λ tale che

$$A_i \cdot \overline{x} + \lambda \left(A_i \cdot W^h \right) \leq b_i \Longrightarrow \lambda \leq \frac{b_i - A_i \cdot \overline{x}}{A_i \cdot W^h} = r_i$$

    dove $i \in N$ e $A_i \cdot W^h > 0$.

  L'indice che mi interessa è quello che mi permette di avere il rapporto più piccolo (se prendessi rapporti più grandi alcuni vincoli non sarebbero rispettati). Troviamo che l'indice entrante è

$$\theta = \min \left\{ \frac{b_i - A_i \cdot \overline{x}}{A_i \cdot W^h} : i \in N, A_iW^h > 0 \right\}$$
$$k = \min \left\{ i \in N : A_iW^h > 0, \frac{b_i - A_i \cdot \overline{x}}{A_i \cdot W^h} = \theta \right\}$$

Scaletta da recuperare dopo aver letto le pagine rimanenti.

1. **Il poliedro è vuoto?**

   Verifico risolvendo il problema ausiliario (noi abbiamo visto la versione duale): se il valore ottimo restituito è zero allora il poliedro non è vuoto, altrimenti è vuoto e possiamo già fermarci.

2. **Il poliedro ha vertici?**

   Anche questo si risolve col problema ausiliario: assieme al valore ottimo uguale a zero viene restituito il vertice di partenza. Se ho un vertice di partenza significa che il poliedro ha vertici!

3. **La funzione obiettivo va a infinito?**

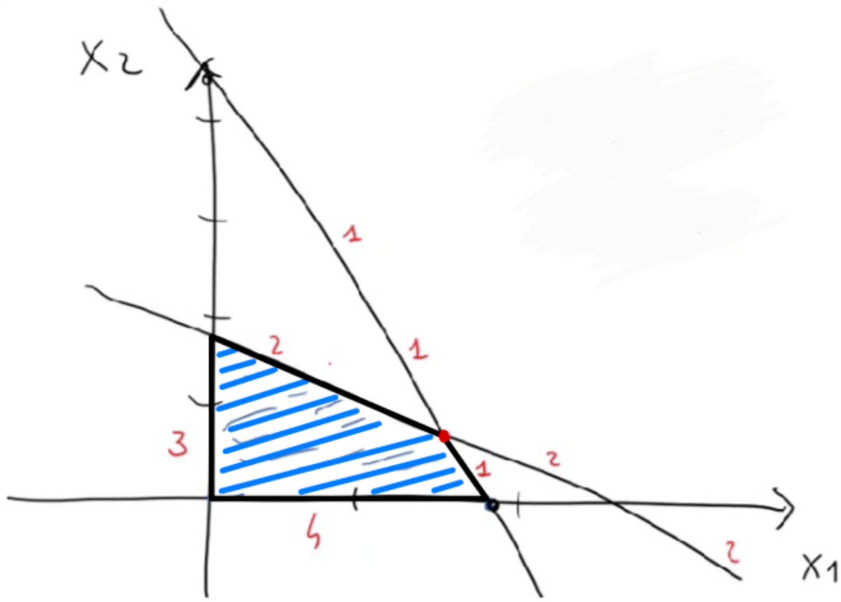
   La questione è risolta internamente all'algoritmo del simplesso. Quando calcoliamo i prodotti scalari, nell'individuazione dell'indice entrante k, verifichiamo se le semirette sono contenute per intero nel poliedro: se lo sono, e quindi tutti i prodotti scalari sono negativi, allora la funzione obiettivo va a infinito.

Avendo risolto questi step possiamo applicare il teorema fondamentale della PL, e quindi ricercare l'ottimo muovendoci solo sui vertici del poliedro!

ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEL SIMPLESSO PRIMALE 1

$c = (1,1)$

$$\begin{cases} \max\ x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 9 & (1) \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 7 & (2) \\ -x_1 \leq 0 & (3) \\ -x_2 \leq 0 & (4) \end{cases}$$



1) PARTIAMO DALLA BASE $B = \{3, 4\}$. LA MATRICE DI BASE È

$$\boxed{\begin{array}{ll} -x_1 \leq 0 & (3) \\ -x_2 \leq 0 & (4) \end{array}} \qquad A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det(A_B) = 1 - 0 = 1$$

LA CORRISPONDENTE INVERSA È $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

LA SOLUZIONE DI BASE È $\bar{x} = (0,0)$, CHE È AMMISSIBILE

2) CALCOLO IL DUALE COMPLEMENTARE

$$\bar{y} = (cA_B^{-1}, 0) = (0, 0, \underbrace{-1, -1}_{})$$

ENTRAMBI < 0, NON SIAMO ALL'OTTIMO

3) LA SOLUZIONE CRESCE LUNGO ENTRAMBI GLI SPIGOLI, VISTO IL SEGNO. PRENDO L'INDICE USCENTE

$$h = \min\{i : y_i < 0\} = 3$$

4) PER TROVARE L'INDICE ENTRANTE DEVO CALCOLARE DEI PRODOTTI SCALARI

CONSIDERO GLI $i \in N$, DOPO AVER SCELTO h

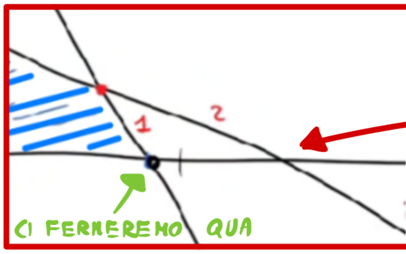
$$W = -A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cc} \underbrace{}_{W^3} & \underbrace{}_{W^4} \end{array}$$

$A_1 W^3 = (5 \ \ 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5$ NON SONO NEGATIVI!

$A_2 W^3 = (3 \ \ 4)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$

RIGHE NON DI BASE PER LA COLONNA DELL'INDICE h (INDICE USCENTE)

SE IL VINCOLO NON TAGLIA LA SEMIRETTA IL PRODOTTO SCALARE RISULTA NEGATIVO. DALLA FIGURA LA COSA È IMMEDIATA.



VOGLIAMO TROVARE IL VALORE λ PIÙ PICCOLO, CHE SODDISFA I VINCOLI

$$r_1 = \frac{b_1 - A_1\bar{x}}{5} = \frac{9}{5} \qquad\qquad r_2 = \frac{b_2 - A_2\bar{x}}{3} = \frac{7}{3}$$

$\Longrightarrow$ INDICE ENTRANTE $K=1$, GENERA IL RAPPORTO MINIMO

CON $K=2$ MI SAREI FERMATO QUA, COL VINCOLO 1 NON RISPETTATO.

5) ADESSO ABBIAMO LA BASE $B=\{1,4\}$. LA MATRICE DI BASE È

$$\boxed{\begin{array}{rl} 5x_1 + 2x_2 \le 9 & (1) \\ -x_2 \le 0 & (4) \end{array}} \qquad A_B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

"LUNGA VITA A CHI CI HA MESSO QUINDICI MINUTI"

LA CORRISPONDENTE INVERSA È $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

LA SOLUZIONE DI BASE È $\bar{x} = \left(\frac{9}{5}, 0\right)$, CHE È AMMISSIBILE

6) CALCOLO IL DUALE COMPLEMENTARE

$$\bar{y} = \left(\frac{1}{5}, 0, 0, \underbrace{-\frac{3}{5}}_{\text{NON SIAMO ANCORA ALL'OTTIMO}}\right)$$

7) CONTRARIAMENTE A PRIMA LA SOLUZIONE CRESCE LUNGO SOLO UNO SPIGOLO. PONIAMO

$$h = \min\{i : y_i < 0\} = 4$$

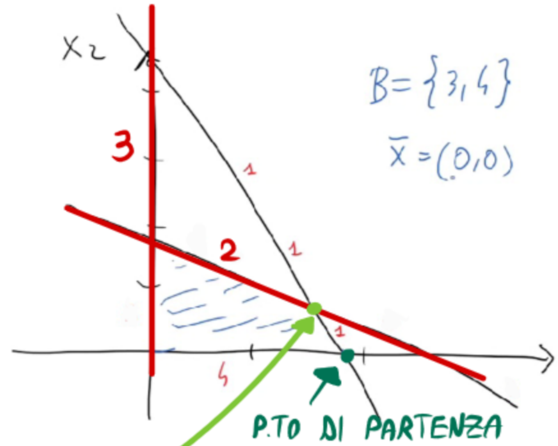
8) CALCOLIAMO I PRODOTTI SCALARI

$$W = -A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \end{matrix}}_{W^1} & \underbrace{\begin{matrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \end{matrix}}_{W^4} \end{pmatrix}$$

$$A_2 W^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{6}{5} + 4 = \frac{14}{5}$$

$$A_3 W^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}$$

ANCHE QUA I SEGNI TORNANO: LA SEMIRETTA È LIMITATA SIA DA (1) CHE DA (2)



$B=\{3,4\}$

$\bar{x}=(0,0)$

CALCOLIAMO I PRODOTTI

$$r_2 = \frac{b_2 - A_2\bar{x}}{\left(\frac{14}{5}\right)} = \frac{\left(\frac{8}{5}\right)}{\left(\frac{14}{5}\right)} = \frac{8}{14}$$

$$r_3 = \frac{b_3 - A_3\bar{x}}{\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{\left(\frac{9}{5}\right)}{\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{9}{2}$$

$\Longrightarrow K = 2$ MI FERMO QUA

9) ADESSO ABBIAMO LA BASE $B=\{1,2\}$. LA MATRICE DI BASE È

$$\boxed{\begin{array}{l} 5x_1 + 2x_2 \le 9 \quad (1) \\ 3x_1 + 4x_2 \le 7 \quad (2) \end{array}}$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det(A_B) = 5\cdot 4 - 2\cdot 3 = 14$$

LA CORRISPONDENTE INVERSA È $A_B^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 \\ -3/14 & 5/14 \end{pmatrix}$

LA SOLUZIONE DI BASE È $\bar{x} = \left(2, -\frac{1}{2}\right)$, CHE È AMMISSIBILE

10) CALCOLO IL DUALE COMPLEMENTARE

$$\bar{y} = (c A_B^{-1}, 0) = (\underbrace{8, 6}, 0, 0)$$

ECCOCI!! ABBIAMO L'OTTIMO $\Longrightarrow \bar{x} = \left(2, -\frac{1}{2}\right)$ SOLUZIONE OTTIMA

ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEL SIMPLESSO PRIMALE 2

Partendo dalla base $\boxed{B = \{3, 4\}}$, risolviamo il problema:

$$\begin{cases} \max\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Iterazione 1. $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é ammissibile.

$\bar{y}_B^T = (2,1)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-2,-1)$, $\boxed{h=3}$, $W^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $A_1W^3 = 1$, $A_2W^3 = 1$,

$\vartheta = \min\{2/1, 3/1\} = 2$, $\boxed{k=1}$.

Iterazione 2. $\boxed{B = \{1, 4\}}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_B^{-1}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\bar{y}_B^T = (2,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (2,-1)$, $\boxed{h=4}$, $W^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $A_2W^4 = 1$, $A_3W^4 = 0$, $\boxed{k=2}$.

Iterazione 3. $\boxed{B = \{1, 2\}}$, $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{y}_B^T = (1,1) \ge 0$ stop $\bar{x}$ é ottima.

$\det(A_B) = 1$, QUINDI ESISTE L'INVERSA A_B^{-1}

$$A_B^{-1} = \frac{1}{\det(A_B)}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

TEST DI OTTIMALITÀ SODDISFATTO, HO L'OTTIMO!!

ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEL SIMPLESSO PRIMALE 3

Dato il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -7\,x_1 + x_2 \\ -3\,x_1 + 2\,x_2 \le 4 \\ -x_1 - 3\,x_2 \le -6 \\ x_2 \le 5 \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 \le 22 \\ x_1 \le 6 \\ 2\,x_1 - x_2 \le 16 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & +2 \\ -1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \\ 22 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Effettuare due passi dell'algoritmo del simplesso primale

	passo 1	passo 2
Indici di base	$B = \{2, 5\}$	$B = \{4, 5\}$
x	$\bar{x} = (6, 0)$	$\bar{x} = (6, 2)$
valore della funzione obiettivo	$-7(6) + 0 = -42$	$-7(6) + 2 = -40$
y	$\bar{y} = (0, -\frac{1}{3}, 0, 0, -\frac{22}{3}, 0)$	$\bar{y} = (0, 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{17}{2}, 0)$
h (indice uscente)	$h = 2$	$h = 5$
rapporti	$6, 15, 33$	$3, 2$
k (indice entrante)	$K = 4$	$K = 3$

PASSO (1)

- TROVO $\bar{x}$ INTERSECANDO I VINCOLI (LA BASE È $B = \{2,5\}$)

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 = -6 \\ x_1 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\bar{x} = (6, 0)$$

- TROVO IL VALORE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO: $-7(6) + 0 = -42$

- TROVO $\bar{y} = (c A_B^{-1}, 0)$

SAPENDO CHE $A_B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(A_B) = 0 - (-3)\,1 = 3 \neq 0$

$$A_B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

QUINDI $c A_B^{-1} = \underset{1\times 2}{(-7 \;\; 1)} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}} = \left(0 - \frac{1}{3},\ -7 - \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3},\ -\frac{22}{3}\right)$

$$\Longrightarrow \bar{y} = \left(0, -\frac{1}{3}, 0, 0, -\frac{22}{3}, 0\right)$$

- TROVO L'INDICE USCENTE h APPLICANDO LA REGOLA ANTICICLO

$$h = \min\{i : \bar{y}_i < 0\} = 2$$

- PER TROVARE L'INDICE ENTRANTE K $\left[\text{CON } W = -A_B^{-1} = \begin{array}{cc} W^2 & W^5 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}} \end{array}\right]$

1) CALCOLO I PRODOTTI SCALARI SEGUENTI $(i \in N)$:

$N = \{1, 3, 4, 6\}$

$A_1 W^2 = (-3 \quad +2)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \Longleftarrow$

$A_3 W^2 = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \Longleftarrow$ VALORI POSITIVI

$A_4 W^2 = (3 \quad 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \Longleftarrow$

$A_6 W^2 = (2 \quad -1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}$

2) CALCOLO I RAPPORTI

$$\boxed{\frac{b_i - A_i \cdot \bar{x}}{A_i \cdot W^h} = r_i}$$

$$r_1 = \frac{b_1 - A_1\bar{x}}{A_1 W^2} = \frac{4 - (-3 \quad +2)\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{2/3} = \frac{22}{\left(\frac{2}{3}\right)} = 33$$

$$r_3 = \frac{b_3 - A_3\bar{x}}{A_3 W^2} = \frac{5 - (0 \quad 1)\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{1/3} = \frac{5}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 15$$

$$r_4 = \frac{b_4 - A_4\bar{x}}{A_4 W^2} = \frac{22 - (3 \quad 2)\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{2/3} = \frac{4}{\left(\frac{2}{3}\right)} = 6$$

IL RAPPORTO MINIMO HA INDICE 4 $\Longrightarrow K = 4$

PASSO (2)

- TROVO $\bar{x}$ INTERSECANDO I VINCOLI (LA BASE È $B = \{4, 5\}$)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 22 \\ x_1 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\bar{x} = (6, 2)$$

- TROVO IL VALORE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO: $-7(6) + 2 = -40$

- TROVO $\bar{y} = (cA_B^{-1}, 0)$

SAPENDO CHE $A_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(A_B) = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$

$$A_B^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

QUINDI $cA_B^{-1} = \underbrace{(-7 \quad 1)}_{1\times 2}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{2\times 2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{17}{2}\right)$

$$\Longrightarrow \bar{y} = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{17}{2}, 0\right)$$

- TROVO L'INDICE USCENTE h APPLICANDO LA REGOLA ANTICICLO

$$h = \min\{ i : \bar{y}_i < 0 \} = 5$$

- PER TROVARE L'INDICE ENTRANTE K $\left[\text{CON } W = -A_B^{-1} = \begin{array}{cc} W^4 & W^5 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right]$

1) CALCOLO I PRODOTTI SCALARI SEGUENTI $(i \in N)$:

$N = \{1, 2, 3, 6\}$

$$A_1 W^5 = \begin{pmatrix} -3 & +2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = 6 \Longleftarrow$$

$$A_2 W^5 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = -\frac{7}{2}$$

VALORI POSITIVI

$$A_3 W^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \Longleftarrow$$

$$A_6 W^5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = -\frac{7}{2}$$

2) CALCOLO I RAPPORTI $r_1 = \dfrac{b_1 - A_1 \bar{x}}{A_1 W^5} = \dfrac{4 - \begin{pmatrix} -3 & +2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}}{6} = 3$

$$\boxed{\frac{b_i - A_i \cdot \overline{x}}{A_i \cdot W^h} = r_i}$$

$$r_3 = \frac{b_3 - A_3 \bar{x}}{A_3 W^5} = \frac{5 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}}{3/2} = 2$$

IL RAPPORTO MINIMO HA INDICE 3 $\Longrightarrow K = 3$

ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEL SIMPLESSO PRIMALE 4

Dato il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 8\,x_1 - 9\,x_2 \\ -x_1 \leq 1 \\ x_1 - 3\,x_2 \leq 5 \\ -x_1 + 2\,x_2 \leq 3 \\ x_1 + 3\,x_2 \leq 7 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \\ -1 & +2 \\ 1 & +3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Effettuare due passi dell'algoritmo del simplesso primale

	passo 1	passo 2
Indici di base	$B=\{1,3\}$	$B=\{3,4\}$
x	$\bar{x} = (-1,1)$	$\bar{x} = (1,2)$
valore della funzione obiettivo	$8(-1)-9(1) = -17$	$8(1)-9(2) = -10$
y	$\bar{y} = (-\frac{7}{2}, 0, -\frac{9}{2}, 0, 0, 0)$	$\bar{y} = (0, 0, -\frac{33}{5}, \frac{7}{5}, 0, 0)$
h (indice uscente)	$h=1$	$h=3$
rapporti	$2,\ 10,\ 10$	$\frac{25}{3},\ 5$
k (indice entrante)	$K=4$	$K=5$

PASSO (1)

- TROVO $\bar{x}$ INTERSECANDO I VINCOLI (LA BASE É $B=\{1,3\}$)

$$\begin{cases} -x_1 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\bar{x} = (-1, 1)$$

- TROVO IL VALORE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO: $8(-1) - 9(1) = -17$
- TROVO $\bar{y} = (c A_B^{-1}, 0)$

SAPENDO CHE $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & +2 \end{pmatrix}$ $\det(A_B) = -1 \cdot 2 - 0 = -2 \neq 0$

$$A_B^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

QUINDI $$\underset{1\times 2}{c A_B^{-1} = (8\ \ -9)} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}} = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \bar{y} = \left(-\frac{7}{2}, 0, -\frac{9}{2}, 0, 0, 0\right)$$

- TROVO L'INDICE USCENTE h APPLICANDO LA REGOLA ANTICICLO

$$h = \min\{ i : \bar{y}_i < 0 \} = 1$$

- PER TROVARE L'INDICE ENTRANTE K $\left[\text{CON } W = -A_B^{-1} = \begin{array}{cc} W^1 & W^3 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}} \end{array}\right]$

1) CALCOLO I PRODOTTI SCALARI SEGUENTI $(i \in N)$:

$N = \{2, 4, 5, 6\}$

$A_2 W^1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$

$A_4 W^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \Longleftarrow$

$A_5 W^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \Longleftarrow$ VALORI POSITIVI

$A_6 W^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \Longleftarrow$

2) CALCOLO I RAPPORTI $r_4 = \dfrac{b_4 - A_4 \bar{x}}{A_4 W^1} = \dfrac{7 - \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\frac{5}{2}} = 2$

$$\boxed{\frac{b_i - A_i \cdot \overline{x}}{A_i \cdot W^h} = r_i}$$

$r_5 = \dfrac{b_5 - A_5 \bar{x}}{A_5 W^1} = \dfrac{3 - \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1/2} = 10$

$r_6 = \dfrac{b_6 - A_6 x}{A_6 W^1} = \dfrac{6 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1/2} = 10$

IL RAPPORTO MINIMO HA INDICE 4 $\Longrightarrow K = 4$

PASSO (2)

- TROVO $\bar{x}$ INTERSECANDO I VINCOLI (LA BASE È $B = \{3, 4\}$) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

$\bar{x} = (1, 2)$

- TROVO IL VALORE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO: $8(1) - 9(2) = -10$

- TROVO $\bar{y} = (c A_B^{-1}, 0)$

SAPENDO CHE $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\det(A_B) = -1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = -5 \neq 0$

$A_B^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

QUINDI $c A_B^{-1} = \underset{1 \times 2}{\begin{pmatrix} 8 & -9 \end{pmatrix}} \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}} = \left(-\frac{33}{5}, \frac{7}{5} \right)$

$\Longrightarrow \bar{y} = \left(0, 0, -\frac{33}{5}, \frac{7}{5}, 0, 0\right)$

- TROVO L'INDICE USCENTE h APPLICANDO LA REGOLA ANTICICLO

$$h = \min\{ i : \bar{y}_i < 0 \} = 3$$

- PER TROVARE L'INDICE ENTRANTE K $\left[\text{CON } W = -A_B^{-1} = \begin{array}{cc} W^3 & W^4 \\ \end{array} \begin{pmatrix} +3/5 & -2/5 \\ -1/5 & -1/5 \end{pmatrix} \right]$

1) CALCOLO I PRODOTTI SCALARI SEGUENTI $(i \in N)$:

$N = \{1, 2, 5, 6\}$

$$A_1 W^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} = -\frac{3}{5}$$

$$A_2 W^3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} = \frac{6}{5} \Longleftarrow$$

$$A_5 W^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \Longleftarrow$$

VALORI POSITIVI

$$A_6 W^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}$$

2) CALCOLO I RAPPORTI $r_2 = \dfrac{b_2 - A_2 \bar{x}}{A_2 W^3} = \dfrac{5 - \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{6/5} = \dfrac{25}{3}$

$$\boxed{\frac{b_i - A_i \cdot \bar{x}}{A_i \cdot W^h} = r_i}$$

$$r_5 = \frac{b_5 - A_5 \bar{x}}{A_5 W^3} = \frac{3 - \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{4/5} = 5$$

IL RAPPORTO MINIMO HA INDICE 5 $\Longrightarrow K = 5$

1.14 Algoritmo del simplesso duale

Supponiamo di avere il seguente problema di PL

$$(D) = \begin{cases} \min y \cdot b \\ y \cdot A = c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Sia $D \ni \overline{y} = (cA_B^{-1}, 0)$ soluzione di base duale e ammissibile (vertice di D).

1. **Verifica dell'ottimo**.

   Calcolo la complementare di $\overline{y}$.

   $$\overline{x} = A_B^{-1} b_B$$

   Se $\overline{x}$ è ammissibile allora sono all'ottimo e mi fermo. Se non siamo all'ottimo dobbiamo fare un *cambio di base*.

   $$b_i - A_i \cdot \left(A_B^{-1} b_B\right) \geq 0 \quad \forall i \in N$$

2. **Cambio di base (individuazione di un nuovo vertice)**.

   - **Indice entrante**.

     Se arriviamo qua significa che $\exists j \in N : b_j - A_j(A_B^{-1} b_B) < 0$. Sia $k \in N$

     $$k = \min \left\{ j \in N : b_j - A_j(A_B^{-1} b_B) < 0 \right\}$$

     cioè prendiamo il <u>primo</u> vincolo violato (anche qua regola anticiclo di Bland). L'indice appena trovato è l'indice entrante $k \in N$: si rovescia la logica rispetto al simplesso primale.

   - **Indice uscente**.

     L'indice uscente si individua, anche in questo caso, mediante dei rapporti. Abbiamo sempre delle semirette, ma hanno verso opposto rispetto alle semirette viste nel primale: maggiore è λ minore sarà il valore della funzione obiettivo. Dato l'indice k, e quindi il vettore riga A_k, vogliamo individuare i seguenti prodotti scalari

     $$A_k \cdot W^i$$

     Come prima: se $A_k W^i \geq 0, \forall i \in B$ allora ci fermiamo poichè

     $$\min = -\infty$$

     altrimenti $\exists i \in B : A_k W^i < 0$. Prendiamo gli indici e calcoliamo i possibili rapporti r_i: come nel primale ci interessa il rapporto minimo

     $$\theta = \min \left\{ \frac{-\overline{y}_i}{A_k W^i} : i \in B, A_k W^i < 0 \right\}$$

     $$h = \min \left\{ i \in B : A_k W^i < 0, \frac{-\overline{y}_i}{A_k W^i} = \theta \right\}$$

     h è il primo degli indici per cui viene raggiunto il minimo (anche qua Bland).

ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEL SIMPLESSO DUALE 1

Esempio. Risolviamo il seguente problema

$$
\begin{cases}
\min\ 13\,y_3 + 9\,y_4 + 7y_5 \\
-y_1 + y_3 + y_4 + y_5 = 3 \\
-y_2 + 2\,y_3 + y_4 = -4 \\
y \geq 0
\end{cases}
\tag{3}
$$

con il simplesso duale partendo dalla base $B = \{2, 3\}$.

Iterazione 1.
La matrice di base e la sua inversa sono

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

la soluzione di base duale é

$$\bar{y}_B^{\mathsf{T}} = (3, -4)A_B^{-1} = (10, 3), \qquad \bar{y} = (0, 10, 3, 0, 0)^{\mathsf{T}},$$

e quella primale é $\bar{x} = (13, 0)^{\mathsf{T}}$ che non é ammissibile perché

$$b_1 - A_1\,\bar{x} = 13, \qquad b_4 - A_4\,\bar{x} = -4, \qquad b_5 - A_5\,\bar{x} = -6,$$

quindi l'indice che entra in base é 4. Calcoliamo i prodotti

$$A_4\,W^2 = -1, \qquad A_4\,W^3 = -1,$$

e i rapporti:

$$\frac{\bar{y}_2}{-A_4\,W^2} = 10, \qquad \frac{\bar{y}_3}{-A_4\,W^3} = 3,$$

quindi l'indice uscente dalla base é 3.

Indici di base	$B = \{2,3\}$
y	$\bar{y} = (0, 10, 3, 0, 0)$
valore della funzione obiettivo	$13 \cdot 3 = 39$
x	$\bar{x} = (13, 0)$
k (indice entrante)	4
rapporti	10, 3
h (indice uscente)	3

Iterazione 2.
La nuova base é $B = \{2, 4\}$, la matrice di base e la sua inversa sono

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la soluzione di base duale é

$$\bar{y} = (0, 7, 0, 3, 0)^{\mathsf{T}},$$

e quella primale é $\bar{x} = (9, 0)^{\mathsf{T}}$ che non é ammissibile perché

$$b_1 - A_1\,\bar{x} = 9, \qquad b_3 - A_3\,\bar{x} = 4, \qquad b_5 - A_5\,\bar{x} = -2,$$

quindi l'indice che entra in base é 5. Calcoliamo i prodotti

$$A_5\,W^2 = -1, \qquad A_5\,W^4 = -1,$$

e i rapporti:

$$\frac{\bar{y}_2}{-A_5\,W^2} = 7, \qquad \frac{\bar{y}_4}{-A_5\,W^4} = 3,$$

quindi l'indice uscente dalla base é 4.

Indici di base	$B = \{2,4\}$
y	$\bar{y} = (0, 7, 0, 3, 0)$
valore della funzione obiettivo	$9 \cdot 3 = 27$
x	$\bar{x} = (9, 0)$
k (indice entrante)	5
rapporti	7, 3
h (indice uscente)	4

Iterazione 3.
La nuova base é $B = \{2, 5\}$, la matrice di base e la sua inversa sono

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la soluzione di base duale é

$$\bar{y} = (0, 4, 0, 0, 3)^{\mathsf{T}},$$

e quella primale é $\bar{x} = (7, 0)^{\mathsf{T}}$ che é ammissibile perché

$$b_1 - A_1\,\bar{x} = 7, \qquad b_3 - A_3\,\bar{x} = 6, \qquad b_4 - A_4\,\bar{x} = 2,$$

quindi $(0, 4, 0, 0, 3)$ é la soluzione ottima del problema.

Indici di base	$B = \{2,5\}$
y	$\bar{y} = (0, 4, 0, 0, 3)$
valore della funzione obiettivo	$7 \cdot 3 = 21$
x	$\bar{x} = (7, 0)$

ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEL SIMPLESSO DUALE 2

Dato il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 3\,y_1 - 7\,y_2 + 5\,y_3 + 22\,y_4 + 14\,y_5 + 15\,y_6 \\ -y_1 - y_2 + 3\,y_4 + 2\,y_5 + 2\,y_6 = 2 \\ y_1 - 4\,y_2 + y_3 + 2\,y_4 + y_5 - 2\,y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \\ 22 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$c = (2 \quad 1)$$

Effettuare due passi dell'algoritmo del simplesso duale

	passo 1	passo 2
Indici di base	$B = \{4, 6\}$	$B = \{5, 6\}$
y	$\bar{y} = (0, 0, 0, \frac{3}{5}, 0, \frac{1}{10})$	$\bar{y} = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$
valore della funzione obiettivo	$22\left(\frac{3}{5}\right) + 15\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{147}{10}$	$14 \cdot 1 = 14$
x	$\bar{x} = \left(\frac{37}{5}, -\frac{1}{10}\right)$	$\bar{x} = \left(\frac{43}{6}, -\frac{1}{3}\right)$
k (indice entrante)	$K = 5$	$K = 2$
rapporti	$1, 1$	0
h (indice uscente)	$h = 4$	$h = 6$

PASSO (1)

- CALCOLIAMO $\bar{y} = (c A_B^{-1}, 0)$ CON $B = \{4, 6\}$

$$A_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det(A_B) = -2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -10 \neq 0$$

$$A_B^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -3/10 \end{pmatrix}$$

$$\bar{y}_B = (2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -3/10 \end{pmatrix} \Longrightarrow \bar{y} = \left(0, 0, 0, \frac{3}{5}, 0, \frac{1}{10}\right)$$

- TROVO IL VALORE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO

$$c\bar{y} = 22\left(\frac{3}{5}\right) + 15\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{147}{10}$$

- CALCOLO $\bar{x}$ INTERSECANDO I VINCOLI

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 22 \\ 2x_1 - 2x_2 = 15 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 37/5 \\ x_2 = -1/10 \end{cases} \qquad \bar{x} = \left(\frac{37}{5}, -\frac{1}{10}\right)$$

VERIFICHIAMO SE LA SOLUZIONE É AMMISSIBILE

$N = \{1, 2, 3, 5\}$

$$b_N - A_N \underbrace{\left(A_B^{-1} b_B\right)}_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{37}{5}, -\frac{1}{10}\right) = \begin{pmatrix} 21/2 \\ 0 \\ 51/10 \\ -7/10 \end{pmatrix}$$

NON AMMISSIBILE

NON SIAMO ALL'OTTIMO

- TROVO L'INDICE ENTRANTE K

$$K = \min\left\{ j \in N : b_j - A_j \left(A_B^{-1} b_B\right) < 0 \right\} = 5$$

- TROVO L'INDICE USCENTE h [CON $W = -A_B^{-1} = \begin{array}{cc} W^4 & W^6 \\ \end{array} \begin{pmatrix} -1/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/10 \end{pmatrix}$]

1) CALCOLO DEI PRODOTTI SCALARI

$B = \{4, 6\}$

$$A_5 W^4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} = -3/5 \Longleftarrow$$

$$A_5 W^6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/10 \end{pmatrix} = -1/10 \Longleftarrow$$

VALORI NEGATIVI

2) CALCOLO I RAPPORTI

$$\boxed{\frac{-\bar{y}_i}{A_k W^i}}$$

$$r_4 = \frac{-y_4}{A_5 W^4} = \frac{-\frac{3}{5}}{\left(-\frac{3}{5}\right)} = 1$$

$$r_6 = \frac{-y_6}{A_5 W^6} = \frac{-\frac{1}{10}}{\left(-\frac{1}{10}\right)} = 1$$

EX AEQUO: PER LA REGOLA ANTICICLO SI PRENDE L'INDICE MINORE, CIOÉ $4 \Longrightarrow \underline{\underline{h = 4}}$

PASSO (2)

- CALCOLIAMO $\bar{y} = \left(c A_B^{-1}, 0\right)$ CON $B = \{5, 6\}$

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det(A_B) = -2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = -6 \neq 0$$

$$A_B^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{y}_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} = (1, 0)$$

$$\Longrightarrow \bar{y} = (0, 0, 0, 0, 1, \underline{\underline{0}})$$ CASO DEGENERE!!

- TROVO IL VALORE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO

$$c\bar{y} = 14\,(1) = 14$$

- CALCOLO $\bar{x}$ INTERSECANDO I VINCOLI

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 14 \\ 2x_1 - 2x_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{43}{6} \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases} \qquad \bar{x} = \left(\frac{43}{6}, -\frac{1}{3}\right)$$

VERIFICHIAMO SE LA SOLUZIONE È AMMISSIBILE

$N = \{1, 2, 3, 4\}$

$$b_N - A_N \underbrace{\left(A_B^{-1} b_B\right)}_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \\ 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \left(\frac{43}{6}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 21/2 \\ -7/6 \\ 16/3 \\ 7/6 \end{pmatrix}$$

NON AMMISSIBILE

NON SIAMO ALL'OTTIMO

- TROVO L'INDICE ENTRANTE K

$$K = \min\{ j \in N : b_j - A_j \left(A_B^{-1} b_B\right) < 0 \} = 2$$

- TROVO L'INDICE USCENTE h $\left[\text{CON } W = -A_B^{-1} = \begin{array}{cc} W^5 & W^6 \\ \end{array} \begin{pmatrix} -1/3 & -1/6 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\right]$

1) CALCOLO DEI PRODOTTI SCALARI

$B = \{5, 6\}$

$$A_2 W^5 = (-1 \ -4) \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = 5/3$$

$$A_2 W^6 = (-1 \ -4) \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/3 \end{pmatrix} = -7/6 \quad \Longleftarrow$$

VALORE NEGATIVO

2) CALCOLO I RAPPORTI

$$\boxed{\frac{-\bar{y}_i}{A_k W^i}}$$

$$r_6 = \frac{-y_6}{A_2 W^6} = \frac{0}{\left(-\frac{7}{6}\right)} = 0$$

OBV $h = 6$

CASO DEGENERE!!

ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEL SIMPLESSO DUALE 3

Dato il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 4\,y_1 + 8\,y_2 + 2\,y_3 + 9\,y_4 + 3\,y_5 + 7\,y_6 \\ -3\,y_1 + y_2 - y_3 + 3\,y_4 + y_5 - 2\,y_6 = -5 \\ y_1 - 5\,y_2 + y_3 + 2\,y_4 + y_6 = 8 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -5 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 9 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} -5 & 8 \end{pmatrix}$$

Effettuare due passi dell'algoritmo del simplesso duale

	passo 1	passo 2
Indici di base	$B = \{4,\ 6\}$	$B = \{1, 4\}$
y	$\bar{y} = \left(0, 0, 0, \frac{11}{7}, 0, \frac{34}{7}\right)$	$\bar{y} = \left(\frac{34}{9}, 0, 0, \frac{19}{9}, 0, 0\right)$
valore della funzione obiettivo	$9\left(\frac{11}{7}\right) + 7\left(\frac{34}{7}\right) = \frac{337}{7}$	$4\left(\frac{34}{9}\right) + 9\left(\frac{19}{9}\right) = \frac{307}{9}$
x	$\bar{x} = \left(-\frac{5}{7}, \frac{39}{7}\right)$	$\bar{x} = \left(\frac{1}{9}, \frac{13}{3}\right)$
k (indice entrante)	$K = 1$	$K = 3$
rapporti	$\frac{34}{9}$	$\frac{34}{5}, \frac{19}{2}$
h (indice uscente)	$h = 6$	$h = 1$

PASSO (1)

- CALCOLIAMO $\bar{y} = (c\, A_B^{-1}, 0)$ CON $B = \{4, 6\}$

$$A_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A_B) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7 \neq 0$$

$$A_B^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & -2/7 \\ 2/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

$$\bar{y}_B = \begin{pmatrix} -5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/7 & -2/7 \\ 2/7 & 3/7 \end{pmatrix} \Longrightarrow \bar{y} = \left(0, 0, 0, \frac{11}{7}, 0, \frac{34}{7}\right)$$

- TROVO IL VALORE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO

$$c\bar{y} = 9\left(\frac{11}{7}\right) + 7\left(\frac{34}{7}\right) = \frac{337}{7}$$

- CALCOLO $\bar{x}$ INTERSECANDO I VINCOLI

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 9 \\ -2x_1 + x_2 = 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -5/7 \\ x_2 = \frac{39}{7} \end{cases} \qquad \bar{x} = \left(-\frac{5}{7}, \frac{39}{7}\right)$$

VERIFICHIAMO SE LA SOLUZIONE È AMMISSIBILE

$N = \{1, 2, 3, 5\}$

$$b_N - A_N \underbrace{(A_B^{-1} b_B)}_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -5 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(-\frac{5}{7}, \frac{39}{7}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{26}{7} \\ \frac{256}{7} \\ -\frac{30}{7} \\ \frac{26}{7} \end{pmatrix}$$

NON AMMISSIBILE

NON SIAMO ALL'OTTIMO

- TROVO L'INDICE ENTRANTE K

$$K = \min\{j \in N : b_j - A_j (A_B^{-1} b_B) < 0\} = 1$$

- TROVO L'INDICE USCENTE h $\left[\text{CON } W = -A_B^{-1} = \begin{array}{cc} W^4 & W^6 \\ \left(\begin{matrix} -1/7 \\ -2/7 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} 2/7 \\ -3/7 \end{matrix}\right) \end{array} \right]$

1) CALCOLO DEI PRODOTTI SCALARI

$B = \{4, 6\}$

$$A_1 W^4 = (-3 \;\; 1) \begin{pmatrix} -1/7 \\ -2/7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}$$

$$A_1 W^6 = (-3 \;\; 1) \begin{pmatrix} 2/7 \\ -3/7 \end{pmatrix} = -\frac{9}{7} \Longleftarrow$$

VALORE NEGATIVO

2) CALCOLO I RAPPORTI

$$\boxed{\frac{-\bar{y}_i}{A_k W^i}}$$

$$r_6 = \frac{-y_6}{A_1 W^6} = \frac{-\frac{34}{7}}{\left(-\frac{9}{7}\right)} = \frac{34}{9}$$

OBV $h = 6$

PASSO (2)

- CALCOLIAMO $\bar{y} = (c A_B^{-1}, 0)$ CON $B = \{1, 4\}$

$$A_B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(A_B) = -3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -9 \neq 0$$

$$A_B^{-1} = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\bar{y}_B = (-5 \;\; 8) \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{34}{9}, \frac{19}{9}\right)$$

$$\Longrightarrow \bar{y} = \left(\frac{34}{9}, 0, 0, \frac{19}{9}, 0, 0\right)$$

- TROVO IL VALORE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO

$$c\bar{y} = 4\left(\frac{34}{9}\right) + 9\left(\frac{19}{9}\right) = \frac{307}{9}$$

- CALCOLO $\bar{x}$ INTERSECANDO I VINCOLI

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1/9 \\ x_2 = 13/3 \end{cases} \qquad \bar{x} = \left(\frac{1}{9} , \frac{13}{3} \right)$$

VERIFICHIAMO SE LA SOLUZIONE È AMMISSIBILE

$N = \{2, 3, 5, 6\}$

$$b_N - A_N \underbrace{\left(A_B^{-1} b_B\right)}_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{9} , \frac{13}{3} \right) = \begin{pmatrix} 266/9 \\ -20/9 \\ -6 \\ 26/9 \end{pmatrix}$$

NON AMMISSIBILE

NON SIAMO ALL'OTTIMO

- TROVO L'INDICE ENTRANTE K

$$K = \min\left\{ j \in N : b_j - A_j \left(A_B^{-1} b_B\right) < 0 \right\} = 3$$

- TROVO L'INDICE USCENTE h [CON $W = -A_B^{-1} = \begin{array}{cc} w^1 & w^4 \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}$]

  1) CALCOLO DEI PRODOTTI SCALARI

  $B = \{1, 4\}$

  $$A_3 W^1 = (-1 \;\; 1) \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{5}{9} \Longleftarrow$$

  $$A_3 W^4 = (-1 \;\; 1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{2}{9} \Longleftarrow$$

  VALORI NEGATIVI

  2) CALCOLO I RAPPORTI

  $$\boxed{\frac{-\bar{y}_i}{A_k W^i}}$$

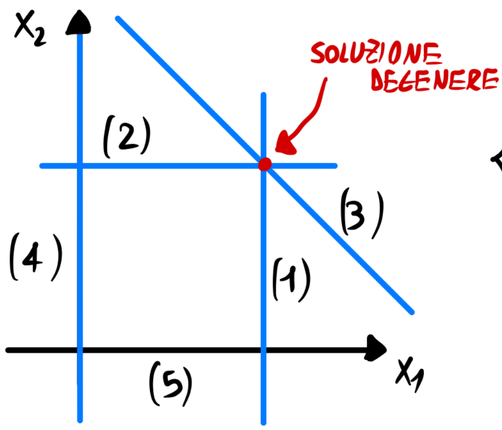
  $$r_1 = \frac{-y_1}{A_3 W^1} = \frac{-\frac{34}{9}}{\left(-\frac{5}{9}\right)} = \frac{34}{5}$$

  $$r_4 = \frac{-y_4}{A_3 W^4} = \frac{-\frac{19}{9}}{\left(-\frac{2}{9}\right)} = \frac{19}{2}$$

  $$\frac{34}{5} < \frac{19}{2} \Longrightarrow h = 1$$

CASO DEGENERE E REGOLE ANTICICLO DI BLAND

ABBIAMO DEFINITO SOLUZIONI DI BASE DEGENERI, SIA NEL POLIEDRO PRIMALE CHE IN QUELLO DUALE. PERCHÉ LA COSA CI INTERESSA TANTO? PRENDIAMO UN ESEMPIO



$$\begin{cases} \max\ x_1 + 2x_2 \\ x_1 \le 1 \\ x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 1 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases}$$

SCRIVIAMO IL DUALE:

$$\begin{cases} \min\ y_1 + y_2 + 2y_3 \\ y_1 + y_3 - y_4 = 1 \\ y_2 + y_3 - y_5 = 2 \\ y_i \ge 0 \quad \forall i \end{cases}$$

CON LA BASE $B = \{1,3\}$ OTTENIAMO $\bar{x} = (1,1)$, MA

$$\begin{cases} y_1 + y_3 = 1 \\ y_3 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \bar{y} = (-1, 0, 2, 0, 0)$$ TEST DI OTTIMALITÀ NON SUPERATO

APPLICANDO IL SIMPLESSO $\bar{x} = (1,1)$ NON VIENE SUBITO VISTO COME OTTIMO: ABBIAMO UN PASSO DEGENERE DOVE ESCE L'INDICE 1 ED ENTRA L'INDICE 2

CON LA BASE $B = \{2,3\}$ OTTENIAMO $\bar{x} = (1,1)$

$$\begin{cases} y_3 = 1 \\ y_2 + y_3 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \bar{y} = (0\ 1\ 1\ 0\ 0)$$ SIAMO ALL'OTTIMO

NEL CASO DEGENERE SIAMO OBBLIGATI A VISITARE TUTTE LE BASI NELLA PEGGIORE DELLE IPOTESI. MI BASTA UN SOLO CASO DI TEST DI OTTIMALITÀ RISPETTATO PER POTERMI FERMARE E DICHIARARE L'OTTIMO.

ADESSO SUPPONIAMO (IN GENERALE) DI AVERE PIÙ SOLUZIONI DOVE $\exists j : \bar{y}_j < 0$, CHI CI GARANTISCE CHE NON ENTREREMO IN UN LOOP?

- DAL SIMPLESSO PRIMALE

$$h = \underline{\min}\{i \in B : \bar{y}_i < 0\}$$ (INDICE USCENTE)

$$\theta = \min\left\{\frac{b_i - A_i \cdot \bar{x}}{A_i \cdot W^h} : i \in N, A_i W^h > 0\right\}$$
$$k = \underline{\min}\left\{i \in N : A_i W^h > 0, \frac{b_i - A_i \cdot \bar{x}}{A_i \cdot W^h} = \theta\right\}$$ (INDICE ENTRANTE)

LE REGOLE ANTICICLO DI BLAND!!!

- DAL SIMPLESSO DUALE

$$k = \underline{\min}\{j \in N : b_j - A_j(A_B^{-1} b_B) < 0\}$$ (INDICE ENTRANTE)

$$\theta = \min\left\{\frac{-\bar{y}_i}{A_k W^i} : i \in B, A_k W^i < 0\right\}$$
$$h = \underline{\min}\left\{i \in B : A_k W^i < 0, \frac{-\bar{y}_i}{A_k W^i} = \theta\right\}$$ (INDICE USCENTE)

SI VEDA A PAG. 83 DEL LIBRO UN ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEL SIMPLESSO DUALE SENZA BLAND NELL'INDICE ENTRANTE.

QUINDI:

- NEL CASO NON DEGENERE NON CI SONO DUBBI
- NEL CASO DEGENERE PIÚ BASI GENERANO UNA SOLUZIONE, E IL TEST DI OTTIMALITÁ PUÓ DARE ESITO DIVERSO A SECONDA DELLA BASE

IN CASO DI ESITO NEGATIVO, OVVIAMENTE, SI FA UN CAMBIO DI BASE. EVITIAMO LOOP GRAZIE ALLE REGOLE ANTICICLO DI BLAND.

TUTTI QUESTI DISCORSI SONO LA DIMOSTRAZIONE DELL'ULTIMO TEOREMA DELLA PL.

TEOREMA SU CORRETTEZZA E NUM. FINITO PASSI

L'ALGORITMO DEL SIMPLESSO É CORRETTO E TERMINA IN UN NUMERO FINITO DI PASSI.

RICORDARSI CHE NEL SIMPLESSO OGNI CAMBIO DI BASE MIGLIORA L'OTTIMIZZAZIONE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO.

$$c\,x(\bar{\lambda}) = c\bar{x} + \lambda\, c\, w^h = c\bar{x} - \bar{\lambda}\,\bar{y}_h \qquad \bar{\lambda} = \min r_i$$

NEL CASO DEGENERE, TUTTAVIA, LA FUNZIONE OBIETTIVO RISULTA INVARIATA IN VALORE

$$\bar{\lambda} = 0$$

PROBLEMA AUSILIARIO PER L'INDIVIDUAZIONE DEL I° VERTICE

ABBIAMO DETTO CHE
- NON TRATTIAMO POLIEDRI SENZA VERTICI
- POSSIAMO TRATTARE ANCHE PROBLEMI CON VARIABILI NEGATIVE (CON LE TRASFORMAZIONI ALGEBRICHE VISTE)

PER INDIVIDUARE IL PRIMO VERTICE DEL POLIEDRO RICORRIAMO AL COSIDDETTO POLIEDRO AUSILIARIO. ABBIAMO
- $\longrightarrow$ PROBLEMA AUSILIARIO PRIMALE
- $\longrightarrow$ PROBLEMA AUSILIARIO DUALE

PER COMODITÀ VEDREMO SOLO IL SECONDO

PROBLEMA AUSILIARIO DUALE

DATO IL PROBLEMA DUALE $(D) = \begin{cases} y \cdot A = c \\ y \geq 0 \end{cases}$ DEFINIAMO AUSILIARIO DUALE IL SEGUENTE PROBLEMA

$$(DA) = \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \\ y \cdot A + \varepsilon I = c \longrightarrow (y, \varepsilon)\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} = c \\ y \geq 0 \,,\ \varepsilon \geq 0 \end{cases}$$

DEFINIAMO v_{DA} IL VALORE OTTIMO DEL DUALE AUSILIARIO.
GIUSTIFICHIAMO L'USO DEL DUALE AUSILIARIO COL SEGUENTE TEOREMA

TEOREMA SU v_{DA} E IL VERTICE DI PARTENZA

DATO IL POLIEDRO DUALE (D), IL CORRISPONDENTE AUSILIARIO (DA) E IL VALORE OTTIMO v_{DA} AFFERMIAMO:

- SE $v_{DA} = 0$ ALLORA (D) É NON VUOTO;
- SE v_{DA} É STRETTAMENTE POSITIVO ALLORA (D) É VUOTO.

(QUANDO $v_{DA} = 0$) LA SOLUZIONE DI (DA) "DEPURATA" DALLE ε É IL VERTICE DI PARTENZA DI (D).

ESEMPIO

PRENDIAMO IL SEGUENTE ESEMPIO. ABBIAMO INTRODOTTO LE VARIABILI ε_1 ED ε_2

$$D \begin{cases} y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4 + 2y_5 = 6 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 + 3y_4 + 5y_5 = 6 \\ y_i \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow (DA) \begin{cases} \min\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4 + 2y_5 + \varepsilon_1 = 6 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 + 3y_4 + 5y_5 + \varepsilon_2 = 6 \\ y_i \geq 0 \,,\ \varepsilon_i \geq 0 \end{cases}$$

v_{DA} $\nearrow$ DA

COL CALCOLO DEL DUALE AUSILIARIO FACCIAMO DUE COSE IN UN COLPO SOLO:
- INDIVIDUIAMO SE IL POLIEDRO È VUOTO O NO;
- INDIVIDUIAMO IL VERTICE DI PARTENZA PER LA RISOLUZIONE DEL DEL PROBLEMA DUALE

SI CONSIDERI CHE v_{DA} NON SARÁ MAI $-\infty$ $v < 0$ POICHÉ $\varepsilon_i \geq 0 \ \forall i$.

PRENDIAMO COME SOLUZIONE DI PARTENZA $(\bar{y}, \bar{\varepsilon}) = (\underbrace{0,0,0,0,0}_{m=5}, \underbrace{6,6}_{n=2})$ OTTENUTA CON LA BASE $B = \{6,7\}$

IN GENERALE $(\bar{y}, \bar{\varepsilon}) = (0, c)$

$\boxed{\text{SI OSSERVI CHE QUESTA SOLUZIONE È SEMPRE VALIDA, IL POLIEDRO AUSILIARIO NON PUÓ ESSERE VUOTO.}}$

1) COSTRUIAMO IL CORRISPONDENTE PRIMALE E CALCOLIAMO LA COMPLEMENTARE (TEST DI OTTIMALITÁ)

$$\begin{cases} \max \ 6x_1 + 6x_2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 0 \\ 3x_2 + 2x_2 \leq 0 \\ 4x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 + 3x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 0 \\ \boxed{\begin{matrix} x_1 & \leq 1 \\ x_2 & \leq 1 \end{matrix}} \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICE IDENTICA

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A_B) \neq 0$$

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OTTENIAMO $\bar{x} = (1,1)$ CON $B = \{6,7\}$, NON SI HA L'OTTIMO POICHÉ

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

NESSUN VINCOLO DI $N = \{1,2,3,4,5\}$ É RISPETTATO!!!

PRIMA ITERAZIONE CON $B = \{6,7\}$

$$\left[W = -A_B^{-1} = \begin{array}{cc} w^6 & w^7 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \end{array} \right]$$

L'INDICE ENTRANTE K É K=1 PER LA REGOLA ANTICICLO

CALCOLO I PRODOTTI SCALARI

$$A_1 w^6 = (1 \ \ 3) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$A_1 w^7 = (1 \ \ 3) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -3$$

ENTRAMBI NEGATIVI
SI CONSIDERANO TUTTI E DUE

CALCOLO I RAPPORTI

$$r_6 = \frac{-y_6}{A_1 W^6} = \frac{-6}{-1} = 6$$

$$r_7 = \frac{-y_7}{A_1 W^7} = \frac{-6}{-3} = 2 \implies$$ MINIMO, QUINDI L'INDICE USCENTE É $h = 7$

$\Longrightarrow$ BASE NUOVA $B_{new} = \{1, 6\}$

2) SECONDA ITERAZIONE CON $B = \{1, 6\}$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A_B) = 0 - 3 = -3 \neq 0$$

$$A_B^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad b_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{y} = (c A_B^{-1}, 0) = (2, 0, 0, 0, 0, 4, 0) \qquad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

NON SI HA L'OTTIMO POICHÉ

$$b_N - A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{11}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$ TRE VINCOLI NON RISPETTATI

L'INDICE ENTRANTE É $k = 2$ PER LA REGOLA ANTICICLO

$$\left[W = -A_B^{-1} = \begin{array}{cc} W^1 & W^6 \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} -1 \\ \frac{1}{3} \end{array}\right) \end{array} \right]$$

CALCOLO I PRODOTTI SCALARI

$$A_2 W^1 = (3 \;\; 2)\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}$$

$$A_2 W^6 = (3 \;\; 2)\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{11}{3}$$

ENTRAMBI NEGATIVI
SI CONSIDERANO TUTTI E DUE

CALCOLO I RAPPORTI

$$r_1 = \frac{-y_1}{A_2 W^1} = \frac{-2}{\left(-\frac{2}{3}\right)} = 3$$

$$r_6 = \frac{-y_6}{A_2 W^6} = \frac{-4}{\left(-\frac{11}{3}\right)} = \frac{12}{11} \implies$$ MINIMO, QUINDI L'INDICE USCENTE É $h = 6$

$\Longrightarrow$ BASE NUOVA $B_{new} = \{1, 2\}$

3) TERZA ITERAZIONE CON $B = \{1, 2\}$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(A_B) = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -7 \neq 0$$

$$A_B^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 & 3/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{pmatrix} \qquad b_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{y} = (e A_B^{-1}, 0) = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, 0, 0, 0, 0, 0\right) \qquad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} -2/7 & 3/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ABBIAMO FINITO! SI HA L'OTTIMO POICHÉ

$$b_N - A_N \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

TUTTI I VINCOLI SONO RISPETTATI

IN CONCLUSIONE:

$$(\bar{y}, \bar{\varepsilon}) = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, 0, 0, 0, \underbrace{0, 0}\right)$$

$$v_{DA} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0 \,!!$$

POLIEDRO NON VUOTO PER IL TEOREMA SU v_{DA}

LA SOLUZIONE DI (DA) "DEPURATA" DALLE ε È IL VERTICE DI PARTENZA DI (D).

$$\bar{y} = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, 0, 0, 0\right)$$

ESEMPIO COMPLETO DI RISOLUZIONE DI UN PROBLEMA DI PL

Esercizio 1. Un'industria di lavorazione del marmo ha due stabilimenti dove produce lastre di marmo di tre diverse qualitá: bassa, media e alta. Per contratto, l'industria deve fornire a una ditta esterna almeno 40, 30 e 50 tonnellate di marmo di bassa, media e alta qualitá, rispettivamente. La seguente tabella riporta le caratteristiche di produzione nei due diversi stabilimenti:

Stabilimento	costo giornaliero (euro)	produzione (tonnellate/giorno)		
		bassa	media	alta
1	300	5	3	2
2	400	1	2	4

Scrivere un modello matematico che minimizzi i costi. Scrivere i comandi linprog. Trovare la soluzione ottima.

1) SCRIVIAMO IL MODELLO MATEMATICO

$$\begin{cases} \min\ 300x_1 + 400x_2 \\ 5x_1 + x_2 \geq 40 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 30 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 50 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

(SI RIMANDA ALLA SEZ. SUI PROBLEMI DI PRODUZIONE PER I RAGIONAMENTI)

2) PONIAMO IL PROBLEMA NEL FORMATO DUALE

$$\begin{cases} \min\ 40y_1 + 30y_2 + 50y_3 \\ 5y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 300 \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 400 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

PROMEMORIA SULL'INVERSA

$$A_B^{-1} = \frac{1}{\det(A_B)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

3) INDIVIDUIAMO IL PRIMO VERTICE RISOLVENDO IL DUALE AUSILIARIO

$$\begin{cases} \min\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ 5y_1 + 3y_2 + 2y_3 + \varepsilon_1 = 300 \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \varepsilon_2 = 400 \\ y_i \geq 0 \quad \forall i \\ \varepsilon_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

LA PRIMA SOLUZIONE CONSIDERATA É

$$\bar{y} = (0, c) = (0, 0, 0, 300, 400) \quad \text{CON } B = \{4, 5\}$$

COSTRUIAMO IL CORRISPONDENTE PRIMALE (CHE USEREMO NEI VARI STEP)

$$\begin{cases} \max\ 300x_1 + 400x_2 \\ 5x_1 + x_2 \leq 0 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 0 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 300 & 400 \end{pmatrix}$$

CALCOLIAMO $\bar{x}$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

CHE NON È OTTIMO POICHÉ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$ VINCOLI NON RISPETTATI

$$N = \{1, 2, 3\}$$

L'INDICE ENTRANTE È $K = 1$ PER LA REGOLA ANTICICLO

CALCOLO I PRODOTTI SCALARI CON $W = -A_B^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ W^4 \; W^5 \end{array}$

$A_1 W^4 = (5 \;\; 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -5$ VALORI ENTRAMBI NEGATIVI

$A_1 W^5 = (5 \;\; 1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$

CALCOLO I RAPPORTI

$\pi_4 = \dfrac{-y_4}{A_1 W^4} = \dfrac{-300}{-5} = 60 \implies$ MINIMO, INDICE USCENTE $h = 4$

$\pi_5 = \dfrac{-y_5}{A_1 W^5} = \dfrac{-400}{-1} = 400$

$\implies B_{new} = \{1, 5\}$

CALCOLIAMO $\bar{y}$ CON $B = \{1, 5\}$

$A_B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A_B^{-1}) = 5 \cdot 1 - 0 = 5 \neq 0$ $A_B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\bar{y} = (c A_B^{-1}, 0) = (60, 0, 0, 0, 340)$

CALCOLIAMO $\bar{x}$

$\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$

CHE NON È OTTIMO POICHÉ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/5 \\ -18/5 \\ 6/5 \end{pmatrix}$ DUE VINCOLI NON RISPETTATI

$$N = \{2, 3, 4\}$$

L'INDICE ENTRANTE È $K = 2$ PER LA REGOLA ANTICICLO

CALCOLO I PRODOTTI SCALARI CON $W = -A_B^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ W^1 \; W^5 \end{array}$

$A_2 W^1 = (3 \;\; 2) \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{3}{5}$ VALORI ENTRAMBI NEGATIVI

$A_2 W^5 = (3 \;\; 2) \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{7}{5}$

CALCOLO I RAPPORTI

$$r_1 = \frac{-y_1}{A_2 w^1} = \frac{-60}{\left(-\frac{3}{5}\right)} = 100 \implies \text{MINIMO, INDICE USCENTE} \quad h = 1$$

$$r_5 = \frac{-y_5}{A_2 w^5} = \frac{-340}{\left(-\frac{7}{5}\right)} = \frac{1700}{7}$$

$$\implies B_{new} = \{2, 5\}$$

CALCOLIAMO $\bar{y}$ CON $B = \{2,5\}$

$$A_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad det(A_B^{-1}) = 3 \cdot 1 - 0 = 3 \neq 0 \quad A_B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{y} = (c A_B^{-1}, 0) = (0, 100, 0, 0, 200)$$

CALCOLIAMO $\bar{x}$

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

CHE NON È OTTIMO POICHÉ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} \leftarrow$ VINCOLO NON RISPETTATO

$$N = \{1, 3, 4\}$$

L'INDICE ENTRANTE È $k = 3$ PER LA REGOLA ANTICICLO

CALCOLO I PRODOTTI SCALARI CON $W = -A_B^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ w^2 \quad w^5 \end{array}$

$$A_3 w^2 = (2 \;\; 4)\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}$$

$$A_3 w^5 = (2 \;\; 4)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{8}{3}$$

VALORI ENTRAMBI NEGATIVI

CALCOLO I RAPPORTI

$$r_2 = \frac{-y_2}{A_3 w^2} = \frac{-100}{\left(-\frac{2}{3}\right)} = 150$$

$$r_5 = \frac{-y_5}{A_3 w^5} = \frac{-200}{\left(-\frac{8}{3}\right)} = 75 \implies \text{MINIMO, INDICE USCENTE} \quad h = 5$$

$$\implies B_{new} = \{2, 3\}$$

CALCOLIAMO $\bar{y}$ CON $B = \{2,3\}$

$$A_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad det(A_B^{-1}) = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 12 - 4 = 8 \neq 0 \quad A_B^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\bar{y} = (c A_B^{-1}, 0) = (0, 50, 75, 0, 0)$$

CALCOLIAMO $\bar{x}$

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} 1/3 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

CHE É OTTIMO POICHÉ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ VINCOLI TUTTI RISPETTATI

$$N = \{1, 4, 5\}$$

IN CONCLUSIONE

$$(\bar{y}, \bar{\varepsilon}) = (0, 50, 75, \underbrace{0, 0})$$

$v_{DA} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$ POLIEDRO NON VUOTO PER IL TEOREMA SU v_{DA}

LA SOLUZIONE DI (DA) "DEPURATA" DALLE ε É IL VERTICE DI PARTENZA DI (D).

$$\bar{y} = (0, 50, 75)$$

4) RISOLUZIONE DEL MODELLO CON BASE DI PARTENZA $B = \{2, 3\}$

RICORDIAMO CHE:

$$\begin{cases} \min\ 300x_1 + 400x_2 \\ 5x_1 + x_2 \geq 40 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 30 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 50 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \min\ 40y_1 + 30y_2 + 50y_3 \\ 5y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 300 \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 400 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \max\ 300x_1 + 400x_2 \\ 5x_1 + x_2 \leq 0 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 0 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c = (300 \quad 400)$$

$\bar{y}$ LO ABBIAMO DI GIÁ: $y = (0, 50, 75)$

VERIFICHIAMO L'AMMISSIBILITÁ

$A_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\det(A_B) = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 8 \neq 0$ $A_B^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$

$b_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

CALCOLIAMO $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

AMMISSIBILE!!!
SIAMO GIÁ ALL' OTTIMO!!

1.18 Problema dei robot e della minimizzazione dei cavi

In una nuova linea di produzione (avente dimensioni $M \times N$) robotizzata sono integrati n robot. Ciascuno può ruotare di 360 gradi attorno a un asse verticale, le aree di lavoro di ciascun robot non devono sovrapporsi in modo da evitare possibili collisioni. Il coordinamento tra i robot impone che ciascun robot sia collegato agli altri mediante cavi in fibra ottica. Indichiamo anche il raggio di azione del robot (r_k è il raggio del robot k-esimo): prendiamo ad esempio la seguente tabella con sei robot e i raggi espressi in cm

Robot	**Raggio di azione (cm)**
1	120
2	80
3	100
4	70
5	45
6	120

Ciò che vogliamo fare è minimizzare i cavi, visto il costo elevato della fibra ottica. Definiamo per prima cosa la *distanza tra due generici punti i e j*

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

Adesso possiamo introdurre il modello matematico, reso più elegante dalla def. precedente

$$\begin{cases} \min d_{12} + d_{13} + \cdots + d_{16} + d_{23} + d_{24} + d_{25} + d_{26} + d_{34} + d_{35} + d_{36} + \cdots + d_{56} & \\ 0 \le x_i \le M & \forall i \\ 0 \le y_i \le N & \forall i \\ d_{ij} \ge r_i + r_j & \forall < i, j > \end{cases}$$

1. **Variabili di decisione**.

   In un'area $M \times N$ vogliamo capire come posizionare i robot. Ciò che dobbiamo decidere è la posizione dei robot. Quindi abbiamo tante coordinate (x_k, y_k) quante i robot da posizionare: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$

2. **Funzione obiettivo**.

   Ciascun robot è collegato a tutti gli altri con un cavo in fibra ottica. Dobbiamo minimizzare il cavo utilizzato, quindi la somma delle lunghezze dei vari cavi (le distanze tra i vari robot)

   $$\min d_{12} + d_{13} + \cdots + d_{16} + d_{23} + d_{24} + d_{25} + d_{26} + d_{34} + d_{35} + d_{36} + \cdots + d_{56}$$

   Non considero le distanze dove $i = j$ oppure i duplicati (se c'è d_{12} non serve d_{21})

3. **Vincoli**.

   - **Variabili positive e rientrati nelle dimensioni**.
     Le coordinate devono riguardare punti all'interno dello spazio dove andremo a collocare i robot, che sappiamo avere dimensione $M \times N$. Imponiamo quanto segue: $0 \le x_i \le M$, $0 \le y_i \le N$.
   - **Nessuna sovrapposizione**.
     La consegna richiede che non vi sia alcuna sovrapposizione tra le aree di lavoro dei robot. L'area in cui lavora il robot k-esimo è una circonferenza avente raggio r_k. A questo punto imponiamo, per ogni coppia $< i, j >$ che la distanza tra i due robot sia minimo la somma dei raggi di azione dei due robot

     $$d_{ij} \ge r_i + r_j$$