INDICE - RISOLUTORE ESERCIZI

PAG. 1	- Equazione nella matrice del tipo AX=B
	- Coordinate Vettore rispetto ad una base
	- Dimensione di una base / Lo spazio generato da una base ha dimensione
PAG. 2	- Distanza fra Rette in *R3* (Presente anche Prodotto Vettore)
	- Area di un Parallelogramma dati 3 vertici
PAG. 3	- Area di un Triangolo dati 3 vertici (*R4*)
	- Equazione implicita del Piano Perpendicolare ad una Retta
PAG. 4	- Matrice Cambio di Base
	- Nucleo di un applicazione definita su *R3* da una matrice
PAG. 5	- Diagonalizzabilita' su *C3* CASO"AUTOVALORI REALI SEMPLICI"
	- Metodi per il calcolo del Determinante 3x3 (Sarrus e Laplace)
PAG. 6	- Forma Quadratica *H* (x,y,z)
PAG. 7	- Inversa di una matrice
	- Sottospazi di *R3* definiti da X e Y (basi)
PAG. 8	- Determinante 4x4 (risoluzione con I metodi di Sarrus e Gauss)
PAG. 9	- Proiezione di un vettore su uno span (R*n* /C*n*)
PAG. 10	- Equazione implicita del Piano Parametrico *Ψ(α,β)*
	- Equazione parametrica della Bisettrice di un Angolo
PAG. 11	- Rette nello spazio (INCIDENTI/COINCIDENTI/PARALLELE/SGHEMBE)
PAG. 12	- Dimensione di *Nucleo/Rango/Immagine* di un' Applicazione Lineare
	- Applicazione definita dalla Matrice (INIETTIVA/SURIETTIVA/BIETTIVA)
PAG. 13	- Soluzioni del sistema linerare del tipo ( )(x,y,z)=( )
	- Complemento Ortogonale
PAG. 14	- DIAGONALIZZAZIONE (Regole per la Diagonalizzabilita')
	- *C2* -> Diagonalizzabilita' solo su *C*
PAG. 15	- *R3* -> Diagonalizzabilita' su *R (3 radici reali distinte)*
	- *R3* -> Diagonalizzabilita' su *R (* μ Algebrica = μ Geometrica*)*
PAG. 16	- *R4* -> NON Diagonalizzabilita' su *R* (μ Algebrica ≠ μ Geometrica)
	- *R3* -> Diagonalizzabilita' su *C* (Autovalori con radici complesse)
PAG. 17	- *R3* -> NON Diagonalizzabilita' su *R* (μ Algebrica ≠ μ Geometrica)
	- *R3* -> Calcolo Dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore(con μ Algebrica >1)
PAG. 18	- Rette nello spazio(Posizione) del tipo: t(x,y,z) e {x+y+z=0 ; x+y+z=0}
	- Date due matrici A=( ) e B( )* si calcola il prodotto AB,BA
PAG. 19	- Trovare per quali valori di *α(Variabile)* una matrice A non puo' essere Invertibile
PAG. 20	- Distanza Punto dal Piano
	- Metodo alternativo Complemento Ortogonale
PAG. 21	- Retta rispetto al Piano
PAG. 22	- Retta per Un Punto e Perpendicolare ad un'altra Retta
PAG. 23	- Completamento ad una base di un sistema di vettori/generatori
	- Data una matrice A(3x3) trovare una matrice X in modo che AX=(2x3)
PAG. 24	- Proiezione di un vettore nella direzione di un altro vettore (*C3*)

- EQUAZIONE NELLA MATRICE

$AX = B \rightarrow \begin{array}{c|c} X & B \\ \hline A_{11} \dots A_{1n} & B_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_{m1} \quad A_{mn} & B_p \end{array}$

DATE $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

DETERMINARE, SE ESISTE, $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ TALE CHE

$AX = B$

ES 4 - 05/02/2018

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{I+II} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{II-\frac{2}{3}I} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & +1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[II(-(-1))]{I/3} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ +1 & 0 & -1 & -1/3 \end{array}\right)$$

$\rightarrow$ PERMUTO LE RIGHE $\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \end{array}\right)$ SOLUZIONE

COORDINATE VETTORE RISPETTO AD UNA BASE

$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\text{vettore}} \rightarrow \underbrace{\langle (\lambda_1 x_1 \dots \lambda_n x_n), (\gamma_1 x_1, \dots \gamma_n x_n) \rangle}_{\text{base}}$

LE COORDINATE DEL VETTORE $(2, 0, -2, 4)$ RISPETTO ALLA BASE $\{(2,4,2,2), (4,2,2,2), (0,2,0,2), (2,2,2,2)\}$ SONO:

es 9 - 22/02/2017

base ↓ vettore ↓

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[2]{(I/II/III/IV)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[I-III]{II-IV} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{IV-III} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III-I} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{PERMUTAZIONI}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{IV-I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

SOLUZIONE

DIMENSIONE DI UNA BASE / SPAZIO GENERATO DA UNA BASE HA DIMENSIONE:

ES 3 - 28/09/2017

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{array} \xrightarrow{I-III} \begin{array}{ccc} 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{array} \xrightarrow{IV-V} \begin{array}{ccc} 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 7 \end{array} \xrightarrow{I-IV} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 7 \end{array} \xrightarrow[IV-I]{V-II} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}$$

LA DIMENSIONE DI $\langle (1,2,-1), (0,1,2), (1,0,-5), (1,3,1), (1,2,7) \rangle$ È:

(OPPURE IL TITOLO PUÒ ESSERE → "LO SPAZIO GENERATO DA UNA BASE ( )( )( ) HA DIMENSIONE ...")

$$\xrightarrow[II-I]{V-I+III} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{III-V} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow[IV(-6)]{II/2,\ III/(-5)} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{SUPERFLUI}} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \Bigg] \text{ DIMENSIONE } 3$$

N. DI RIGHE

DISTANZA FRA RETTE IN $\mathbb{R}^3$

ES 6 - 15/01/2018

LA DISTANZA FRA LE RETTE IN $\mathbb{R}^3$ $(1,1,0)+\langle(1,-2,-1)\rangle$ e $\langle(1,-1,1)\rangle$ è:

- FORMULA DELLA DISTANZA

$$\boxed{d = \frac{|(x_0 - y_0)\cdot u \times v|}{\|u \times v\|}}$$

- NELL'ESERCIZIO ABBIAMO
  - $x_0\,(1,1,0)$
  - $u\,(1,-2,-1)$
  - $v\,(1,-1,1)$

  $-y_0$ MANCA!

- RETTE $r(u) = (1,1,0) + \langle(1,-2,-1)\rangle$ • $s(v) = \langle(1,-1,1)\rangle$

- FACCIO IL PRODOTTO VETTORE IN $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{u \wedge v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \\ -\det\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \\ \det\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}$$

$$\rightarrow u \times v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

det

NORMA

$\rightarrow \|u \times v\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$ → HO TROVATO IL DENOMINATORE PER LA FORMULA DELLA DISTANZA

→ APPLICO LA DISTANZA MA TENIAMO CONTO CHE y_0 MANCA → NON POSSIAMO SOTTRARLO QUINDI NELLA FORMULA A x_0

$$d = \frac{|(-3\cdot 1) + (-2\cdot 1) + (1\cdot 0)|}{\sqrt{14}} = \frac{|-5|}{\sqrt{14}}$$

$$\rightarrow \frac{5}{\sqrt{14}} \text{ SOLUZIONE.}$$

AREA DI UN PARALLELOGRAMMA DATI 3 VERTICI

- È UGUALE A QUELLA DEL TRIANGOLO, SOLAMENTE NON SI DIVIDE PER 2

$$\boxed{\sqrt{|\alpha|^2 |\beta|^2 - \underbrace{(\alpha\beta)}_{\text{Prodotto scalare}}{}^2}}$$

AREA DI UN TRIANGOLO DATI 3 VERTICI ($\mathbb{R}^4$)

OSS VALE ANCHE IN $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^5 \ldots$!

ES 9 - 15/01/2018

L'AREA DEL TRIANGOLO DI VERTICI
- $(1,1,0,0)$
- $(1,0,0,1)$
- $(1,1,1,2)$

È:

- FORMULA DELL'AREA DEL TRIANGOLO

$$\boxed{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{|\alpha|^2|\beta|^2-(\alpha\beta)^2}}$$

$(\alpha\beta)$ → PRODOTTO SCALARE

OSS [SE VOGLIO SEMPLIFICARE IL VALORE DELLA RADICE PORTO $\frac{1}{2}$ DENTRO ELEVANDOLO ALLA 2° E DIVENTA → $\frac{1}{4}$]

TROVARE α e β

⊖ $\alpha = A - B$ // A e B SONO IL PRIMO E IL SECONDO VERTICE DEL TRIANGOLO

⊖ $\beta = A - C$ // A e C SONO IL PRIMO E L'ULTIMO VERTICE DEL TRIANGOLO

$$A = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} \rightarrow \alpha = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

→ APPLICO LA FORMULA → $\frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{(1^2+(-1)^2)}_{|\alpha|^2}\underbrace{((-1)^2+(-2)^2)}_{|\beta^2|}-\underbrace{((-1)(+2))^2}_{(\alpha\beta)}} \rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{(2)(5)-4}$

→ $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ PORTO DENTRO ELEVANDOLO ALLA 2° → $\sqrt{\cancel{6}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}}$ → $\sqrt{\frac{3}{2}}$ Soluzione

---

EQUAZIONE IMPLICITA DEL PIANO PERPENDICOLARE AD UNA RETTA

ES 4 - 02/02/2017

SCRIVERE L'EQUAZIONE IMPLICITA DEL PIANO PER $(1,0,1)$ PERPENDICOLARE ALLA RETTA:
- $x+y+z=0$, $x+y=0$

- FACCIO IL PRODOTTO VETTORE DELLA RETTA

$$\begin{cases} x+y+z=0 \longrightarrow (1,1,1) \\ x+y=0 \longrightarrow (1,1,0) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{// SBARRO LA 1°} \rightarrow (1\cdot 0)-(1\cdot 1) = -1 \\ \text{// SBARRO LA 2° E METTO ⊖} \rightarrow (1\cdot 0)-(1\cdot 1) = -[-1] = +1 \\ \text{// SBARRO LA 3°} \rightarrow (1\cdot 1)-(1\cdot 1) = 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

→ HO TROVATO LA DIREZIONE NORMALE ORTOGONALE A $(-1,1,0)$ → HO QUINDI IL PIANO PER $(\overset{x_0}{1},\overset{y_0}{0},\overset{z_0}{1})$

→ TROVO ORA L'EQUAZIONE → $-1(x-\overset{//x_0}{1})+1(y-\overset{//y_0}{0})+0(z-\overset{//z_0}{1})=0$

→ $-x+1+y=0$

→ $y-x=-1$ Soluzione

MATRICE CAMBIO DI BASE

ES 1 - 24/07/2017

LA MATRICE DI CAMBIO DI BASE DA $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ A $\{(1,-1,0),(1,1,2),(1,1,-1)\}$ BASE DI $\mathbb{R}^3$ È:

PASSAGGI:

METTO LA MATRICE DI PARTENZA A 1° MEMBRO POI LA MATRICE DI ARRIVO A 2° MEMBRO CON I VETTORI IN COLONNA E POI FACCIO → GAUSS - JORDAN

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{I-II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{II-III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluzione

// MATRICE DI PARTENZA

MATRICE CAMBIO DI BASE IN $\mathbb{R}^3$

NUCLEO DI UN'APPLICAZIONE DEFINITA DA MATRICE

ES 5 - 24/07/2017

IL NUCLEO DELL'APPLICAZIONE DEFINITA SU $\mathbb{R}^3$ DALLA MATRICE $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ È

PASSAGGI

PRENDIAMO LA MATRICE E FACCIAMO LE GIRATE DI GAUSS - JORDAN FINCHÉ NON TROVIAMO UN NUCLEO

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{array} \xrightarrow{II+I} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{array} \xrightarrow{I-II} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{array} \xrightarrow{III+I} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \xrightarrow{II/2} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}$$

→ CANCELLIAMO LA 3° RIGA POICHÉ È UGUALE ALLA SECONDA E DOBBIAMO TENERE CONTO DI TROVARE UNA DELLE COMPONENTI DEL VETTORE, IN QUESTO CASO z AL VARIARE DI UN DETERMINATO TEMPO, t (IN QUESTO CASO

$$\rightarrow \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = +z \\ z = t \end{cases} \rightarrow$$ RISOLVO IL SISTEMA IN FORMA CLASSICA

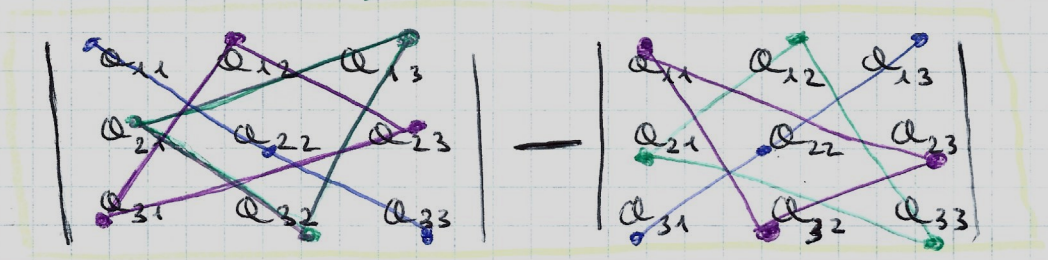
$$\rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$ → AL VARIARE DI t TROVO IL NUCLEO PER L'APPLICAZIONE DEFINITA DALLA MATRICE $\rightarrow t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Soluzione

DIAGONALIZZABILITÀ SU $\mathbb{C}^3$

- PER LA DIAGONALIZZABILITÀ DOVREMMO TROVARE → $|A - I\lambda| = 0$
- AVENDO UNA MATRICE SU $\mathbb{C}^3$ DOVREMMO CALCOLARNE IL DETERMINANTE 3×3 → $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

→ CALCOLO DEL DETERMINANTE 3×3 (SARRUS)

PASSAGGI: 1 2 3



$$\left[(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}) + (a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}) + (a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13})\right]$$
$$-$$
$$\left[(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}) + (a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}) + (a_{21}\cdot a_{33}\cdot a_{12})\right]$$

→ FORMULA COMPLETA DEL CALCOLO DEL DETERMINANTE DI UNA MATRICE 3×3

OSS OPPURE (METODO DI LAPLACE)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a' & b' \\ d' & e' \\ g' & h' \end{matrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\left[(aei + bfg' + cd'h') - (b'd'i + a'fh + ceg)\right]}$$

ES 9 - 24/07/2017

L'APPLICAZIONE SU $\mathbb{C}^3$ DEFINITA DALLA MATRICE

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(DIAGONALIZZABILE SU $\mathbb{R}^3$ → 3 RADICI REALI DI SPAZIO)

$$|A - I\lambda| = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 4 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

→ CALCOLO IL DETERMINANTE

→ $(1-\lambda)^2(-1-\lambda) + 4 + 4 - [-2 - 2\lambda + 1 - \lambda + 8 - 8\lambda] = 0$

→ $-\lambda^3 + \lambda^2 + 12\lambda = 0$

→ $\lambda^3 - \lambda^2 - 12\lambda = 0$

→ $\lambda(\lambda^2 - \lambda - 12) = 0$ → 1 AUTOVALORE $\lambda_1 = 0$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \begin{cases} 4 \rightarrow \lambda_2 = 4 \\ -3 \rightarrow \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

→ DIAGONALIZZABILE 3 AUTOVALORI $\in \mathbb{R}$ SEMPLICI

Soluzione.

FORMA QUADRATICA

- DOPO AVERE UNA FORMA QUADRATICA $H(x,y,z)$ → SI DEVE PORRE SOTTO UNA MATRICE DEL TIPO:

$$A = \begin{pmatrix} x^2 & \frac{1}{2}xy & \frac{1}{2}xz \\ \frac{1}{2}xy & y^2 & \frac{1}{2}yz \\ \frac{1}{2}xz & \frac{1}{2}yz & z^2 \end{pmatrix}$$

→ POI TROVO I MINORI $|A_1|$ $|A_2|$ $|A_3|$ E NE CONSIDERO IL SEGNO, CHE RAPPRESENTERANNO IL SEGNO DEGLI AUTOVALORI

→ $\det|x^2|$ // $|A_1|$

→ $\det\begin{vmatrix} x^2 & \frac{1}{2}xy \\ \frac{1}{2}xy & y^2 \end{vmatrix} = (x^2y^2) - (\frac{1}{2}xy \cdot \frac{1}{2}xy)$ // $|A_2|$

→ $\det|A|$ CON SARRUS O LAPLACE // $|A_3|$

- DOPO AVER TROVATO GLI AUTOVALORI POSSO STABILIRE COME LA FORMA QUADRATICA:

- **DEFINITA POSITIVA** ↔ [OGNI AUTOVALORE DI A È STRETTAMENTE POSITIVO (NON PUÒ ESSERE = 0)] > 0
- **DEFINITA NEGATIVA** ↔ [OGNI AUTOVALORE DI A È STRETTAMENTE NEGATIVO (NON PUÒ ESSERE = 0)] < 0
- **SEMIDEFINITA POSITIVA** ↔ [OGNI AUTOVALORE DI A È NON NEGATIVO ED ALMENO UNO DI ESSI È 0] ≥ 0
- **SEMIDEFINITA NEGATIVA** ↔ [OGNI AUTOVALORE DI A È NON POSITIVO ED ALMENO UNO DI ESSI È 0] ≤ 0
- **INDEFINITA** → [SE A POSSIEDE AUTOVALORI SIA POSITIVI CHE NEGATIVI] $< >$

ES 6 - 05/02/2018

LA FORMA QUADRATICA $H(x,y,z)$ $2x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy$ È:

- FORMA QUADRATICA

$2x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy$ → MATRICE A $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $\det|A_1| = \det|2| = 2$ > 0 SEGNO 1° AUTOVALORE
- $\det|A_2| = \det\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2 \cdot 2) - (1 \cdot 1) = 3$ > 0 SEGNO 2° AUTOVALORE
- $\det|A_3| = \det|A| = \det\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}$

$= [(2 \cdot 2 \cdot (-1)) + (1 \cdot 0 \cdot 0) + (0 \cdot 1 \cdot 0)] - [(1 \cdot 1 \cdot (-1)) + (2 \cdot 0 \cdot 0) + (0 \cdot 2 \cdot 0)]$

$= [-4] - [-1] = -3$ < 0 SEGNO 3° AUTOVALORE

→ AUTOVALORI 2 SEGNI POSITIVI e 1 NEGATIVO → FORMA QUADRATICA INDEFINITA

INVERSA DI UNA MATRICE

- PASSAGGI → SI PONE $\left(\quad\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ → FAI GAUSS-JORDAN E IL RISULTATO È A DESTRA DELL'UGUALE.

// MATRICE — MATRICE BASE CANONICA

ES (2) - 21/02/2018

L'INVERSA DI $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ È:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II+I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

→ CI DIMOSTRA CHE NON ESISTE INVERSA INESISTENTE Soluzione

SOTTOSPAZI DEFINITI DA X e Y // $\mathbb{R}^3$; X, Y BASI

PASSAGGI

→ SI PONGONO LE X DA UNA PARTE e LE Y DALL'ALTRA PARTE DELL'(=)

→ GAUSS JORDAN E POI SI VERIFICANO:

1 $X \subset Y$ // X DIPENDE DA Y
2 $X \supset Y$ // Y DIPENDE DA X

OSS: ANCHE $\mathbb{R}^4$ / $\mathbb{R}^5$ ...

- Se $X \subset Y$ VERA e $X \supset Y$ VERA → RISULTATO → $\boxed{X = Y}$
- Se $X \subset Y$ VERA e $X \supset Y$ FALSA → RISULTATO → $\boxed{X \subset Y}$
- Se $X \subset Y$ FALSA e $X \supset Y$ VERA → RISULTATO → $\boxed{X \supset Y}$
- Se $X \subset Y$ FALSA e $X \supset Y$ FALSA → RISULTATO → $\boxed{X \cap Y = \{0\}}$
- ALTRIMENTI N.A.

ES (5) - 05/02/2018

I SOTTOSPAZI DI $\mathbb{R}^3$ DEFINITI DA $X = \langle (1,1,2), (2,1,1) \rangle$ e $Y = \langle (0,1,3), (-1,0,1) \rangle$ VERIFICANO:

// X — // Y

$$\begin{array}{cc|cc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \xrightarrow[III-2I]{II-I} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{3} & \cancel{3} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I+2II} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II/(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

→ ORA VERIFICO LE DIPENDENZE $X \subset Y$ e $X \supset Y$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2\alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 - \alpha_4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2(-\alpha_2 - \alpha_4) + \alpha_4 \\ \alpha_3 = -\alpha_2 - \alpha_4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_2 - \alpha_4 \\ \alpha_3 = -2\alpha_2 - \alpha_4 \end{cases}$$

→ α_1 e α_2 DIPENDONO DA α_3 e α_4 → $X \subset Y$ 1°

$$\rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 - 2\alpha_2 = \alpha_4 \\ \alpha_3 = -2\alpha_2 - \alpha_4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_4 = -\alpha_1 - 2\alpha_2 \\ \alpha_3 = -2\alpha_2 + \alpha_1 + 2\alpha_2 \end{cases}$$

→ α_3 e α_4 DIPENDONO DA α_1 e α_2 → $X \supset Y$ 2°

→ $X \subset Y$ e $X \supset Y$ vere esiste → $X = Y$ Soluzione

DETERMINANTE DI UNA MATRICE 4X4

PROCEDIMENTO

- [SCAMBIANDO TRA LORO 2 RIGHE O 2 COLONNE DELLA MATRICE → IL DETERMINANTE CAMBIA SEGNO]
- [SE AD UNA RIGA/COLONNA SI AGGIUNGE UNA COMBINAZIONE LINEARE DELLE ALTRE → IL DETERMINANTE NON CAMBIA]
- [SE LA MATRICE È TRIANGOLARE (IN PARTICOLARE DIAGONALE) → IL DETERMINANTE È UGUALE AL PRODOTTO DEGLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE]

2 METODI NEL CALCOLO DEL DETERMINANTE

1 - SE CI SONO RIGHE O COLONNE DI ZERI SI USA LAPLACE

ES 1 - 12/06/2017

IL DETERMINANTE $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ VALE

$\boxed{+ \; - \; + \; -}$ → [SERVIRÀ PER LA SOMMA NEL CALCOLO FINALE DEL DETERMINANTE]

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ → [APPLICO LAPLACE E POI SARRUS SULLE 3X3]

$$+1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{VA VIA}} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow + [(1+0+1)-(0+0+1)] + [(1+0+1)-(1+0+0)] - [(1+0+0)-(1+1+0)] = 5$$

Soluzione

2 - SI USA GAUSS FINCHÉ NON TROVO LA MATRICE TRIANGOLARE E POI SI MOLTIPLICANO GLI LUNGO LA DIAGONALE PRINCIPALE TRA LORO

ES 1 - 03/07/2017

IL DETERMINANTE $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ VALE

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{matrix} \xrightarrow[-IV]{II-III} \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{matrix} \xrightarrow[IV-I]{III-II} \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{IV-II} \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{IV+3III} \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{matrix} = [(1)(-1)(-1)(5)] = 5$$

Soluzione

OSSERVAZIONE

SE NEL DET A UN'EQUAZIONE È NULLA (CIOÈ SPARISCE UNA RIGA O COLONNA) → $\det A = 0$

PROIEZIONE DI UN VETTORE SU UNO SPAN ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$)

PROCEDIMENTO

- $\underset{u}{(\ )}$ // VETTORE
- $\langle \underset{e_1}{(\ )}, \underset{e_2}{(\ )} \rangle$ // SPAN

$$\begin{cases} u_{e_1} = \bar{\alpha}_1 e_1 e_1 + \bar{\alpha}_2 e_2 e_1 \\ u_{e_2} = \bar{\alpha}_1 e_1 e_2 + \bar{\alpha}_2 e_2 e_2 \end{cases}$$

// Se per caso ci fosse (e3)

$$\begin{cases} u_{e_1} = \bar{\alpha}_1 e_1 e_1 + \bar{\alpha}_2 e_2 e_1 + \bar{\alpha}_3 e_3 e_1 \\ u_{e_2} = \bar{\alpha}_1 e_2 e_1 + \bar{\alpha}_2 e_2 e_2 + \bar{\alpha}_3 e_3 e_2 \\ u_{e_3} = \bar{\alpha}_1 e_3 e_1 + \bar{\alpha}_2 e_3 e_2 + \bar{\alpha}_3 e_3 e_3 \end{cases}$$

- SI TROVANO GLI $\boxed{\alpha}$ DOPO AVER RISOLTO IL SISTEMA E SI METTE

$$\alpha_1 \underset{e_1}{(\ )} + \alpha_2 \underset{e_2}{(\ )} = \boxed{(\ )}$$ Vettore proiezione

---

ES (10) - 28/09/2017 LA PROIEZIONE DI (1,1,2) SU $\langle (1,-2,1), (1,1,1) \rangle$ $\boxed{\mathbb{R}^3}$

$$\underset{u}{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}} \quad \underset{e_1}{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}} \quad \underset{e_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$$

$$\begin{cases} (1)(1)+(1)(-2)+(2)(1) = \alpha_1[(1)(1)+(-2)(-2)+(1)(1)] + \alpha_2[(1)(1)+(-2)(1)+(1)(1)] \\ (1)(1)+(1)(1)+(2)(1) = \alpha_1[(1)(1)+(-2)(1)+(1)(1)] + \alpha_2[(1)(1)+(1)(1)+(1)(1)] \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 = 6\alpha_1 + 0\alpha_2 \\ 4 = 0\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1/6 \\ \alpha_2 = 4/3 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{6}\underset{e_1}{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}} + \frac{4}{3}\underset{e_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}9/6\\3/3\\9/6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\1\\3/2\end{pmatrix}$$ Soluzione

---

ES (1) - 21/02/2018 LA PROIEZIONE DI (i, i) SU $\langle (1,i), (1,-i) \rangle$ $\boxed{\mathbb{C}^2}$ **OSS** $i^2 = -1$

$$\underset{u}{\begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix}} \quad \underset{e_1}{\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}} \quad \underset{e_2}{\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}}$$

QUI NON SI USA IL CONIUGATO

OSS → CONIUGATO DI $i \rightarrow \bar{i} = -i$

$$\begin{cases} u_{e_1} \rightarrow u_{\bar{e}_1} = \bar{\alpha}_1 e_1 \bar{e}_1 + \bar{\alpha}_2 e_1 \bar{e}_2 \\ u_{e_2} \rightarrow u_{\bar{e}_2} = \bar{\alpha}_1 e_2 \bar{e}_1 + \bar{\alpha}_2 e_2 \bar{e}_2 \end{cases} \rightarrow \text{TROVATI } \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 \underset{e_1}{(\ )} + \alpha_2 \underset{e_2}{(\ )} = (\ )$$

$$\begin{cases} (i)(\bar{1}) + (i)(\bar{i}) = \alpha_1[(1)(\bar{1}) + (i)(\bar{i})] + \alpha_2[(1)(\bar{1}) + (i)(-\bar{i})] \\ (i)(1) + (i)(-\bar{i}) = \alpha_1[(1)(\bar{1}) + (-i)(\bar{i})] + \alpha_2[(1)(\bar{1}) + (-i)(-\bar{i})] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i+1 = 2\alpha_1 \\ i-1 = 2\alpha_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{i+1}{2} \\ \alpha_2 = \frac{i-1}{2} \end{cases} \rightarrow \text{NO CONIUGATO QUI} \rightarrow \frac{i+1}{2}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} + \frac{i-1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{i+\cancel{1}}{2} + \frac{i-\cancel{1}}{2} = \frac{2i}{2} \\ \frac{-\cancel{1}+i}{2} + \frac{i+\cancel{1}}{2} = \frac{2i}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix}$$ Soluzione

---

ES (2) - 15/01-2018 LA PROIEZIONE DI (1,-1,2,1) SU $\langle (1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0) \rangle$ $\boxed{\mathbb{R}^4}$

- TROVO IL SISTEMA

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \end{cases} \rightarrow \text{USO GAUSS-JORDAN} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\1&2&2&0\\1&2&3&2\end{array}\right) \xrightarrow{III-II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\1&2&2&0\\0&0&1&2\end{array}\right) \xrightarrow{II-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\0&1&1&-1\\0&0&1&2\end{array}\right)$$

(1) VA VIA

$$\xrightarrow{I-II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&2\\0&1&1&-1\\0&0&1&2\end{array}\right) \xrightarrow{II-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&2\\0&1&0&-3\\0&0&1&2\end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow \alpha_1 \\ \rightarrow \alpha_2 \\ \rightarrow \alpha_3 \end{array} \rightarrow 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$$ Soluzione

EQUAZIONE IMPLICITA DEL PIANO PARAMETRICO

- AVENDO UNA FORMA VETTORIALE DELL'EQUAZIONE DEL PIANO

$$\overset{X_0}{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}} + t\overset{u}{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}} + s\overset{v}{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}} \rightarrow \text{SI FA IL PRODOTTO VETTORE } \underline{|u \times v|}$$

→ SI TROVANO α, β, γ E SI VANNO A SOSTITUIRE ALL'EQUAZIONE

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0)$$

ES 3 - 21/02/2018

UN'EQUAZIONE IMPLICITA DEL PIANO PARAMETRICO $\psi(\alpha, \beta) = (1, 2, -1) + \alpha(1, 1, 1) + \beta(2, -1, 0)$

$$\cdot \overset{x}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}} \cdot \overset{u}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \cdot \overset{v}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$u \times v \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix} \rightarrow 1(x-1) + 2(y-2) - 3(z+1)$$

$$= x + 2y - 3z - 8$$

$$\rightarrow x + 2y - 3z = 8$$ Soluzione

EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA BISETTRICE DI UN ANGOLO

$\cdot\, u(\quad) \quad \cdot\, v(\quad) \quad \cdot\, x_0(\quad)$

- SI TROVANO I VERSORI DI u E v → $\tilde{u} = \frac{u}{|u|}$, $\tilde{v} = \frac{v}{|v|}$

E SI APPLICANO ALLA FORMULA DELL'EQUAZIONE PARAMETRICA

$$\rightarrow \boxed{X = X_0 + \frac{t}{2}(\tilde{u} + \tilde{v})} \quad t \in \mathbb{R} \text{ (ARBITRARIO)}$$

ES 6 - 12/06/2017

L'EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA BISETTRICE DELL'ANGOLO FORMATO DA $(0, 2, 2, 0)$ e $(1, 1, 1, 1)$ È:

$\cdot\, u\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\, v\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot$ X0 MANCA

$$\tilde{u} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{2\sqrt{2}} \quad \tilde{v} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} \rightarrow X = \frac{t}{2}\left(\underset{a}{0 + \tfrac{1}{2}}; \underset{b}{\frac{2}{2\sqrt{2}} + \tfrac{1}{2}}; \underset{c}{\frac{2}{2\sqrt{2}} + \tfrac{1}{2}}; \underset{d}{0 + \tfrac{1}{2}}\right)$$

$$\rightarrow a = \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} = t\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$b, c \rightarrow \frac{t}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) = t\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \rightarrow t\left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) \rightarrow \frac{t + t\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow t(1 + \sqrt{2}) \rightarrow \text{OTTENGO } t(1, 1+\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}, 1)$$ Soluzione

POSIZIONE RETTE NELLO SPAZIO

DATE 2 RETTE
- $X_0 + tu$
- $Y_0 + sv$

→ SI METTONO A CONFRONTO (SISTEMA) E SI GUARDANO LE SOLUZIONI

- 1 SOLUZIONE = RETTE INCIDENTI ×
- ∞ SOLUZIONI = RETTE COINCIDENTI —
- 0 SOLUZIONI

DA $\boxed{u \neq \lambda v}$ SGHEMBE ≠ ← → PARALLELE = DA $\boxed{u = \lambda v}$

ES 11 - 24/07/2017

LE DUE RETTE
$(1,1,2) + s(0,-1,2)$ $s \in \mathbb{R}$
$t(2,-1,2)$ $t \in \mathbb{R}$ SONO:

$\cdot \underset{Y_0}{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}} + s \underset{v}{\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}}$ $\cdot\ t \underset{u}{\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}$

→ PONGO IL SISTEMA → $\begin{cases} 1 = 2t \\ 1 - s = -t \\ 2 + 2s = 2t \end{cases}$ → $\begin{cases} t = 1/2 \\ 1 - s = -1/2 \\ 2 + 2s = 2(1/2) \end{cases}$

$\begin{cases} t = 1/2 \\ s = 3/2 \\ s = 1 \end{cases}$ → IMPOSSIBILE → CONTROLLO LE VELOCITÀ → $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ → SGHEMBE Soluzione

---

CASO - RETTE INCIDENTI

$\cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

→ $\begin{cases} 2t - s = 1 \\ t - s = 1 \end{cases}$ → $\begin{cases} t = 0 \\ s = -1 \end{cases}$ Unica soluzione → RETTE INCIDENTI ×

CASO - RETTE PARALLELE

$\cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$

→ $\begin{cases} 1 + s = 2t \\ 0 = 1 \\ 1 + 2s = 1 + 4t \end{cases}$ → IMPOSSIBILE (0 SOLUZIONI) → CONTROLLO LE VELOCITÀ → $\underbrace{\overset{v}{\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}} = \overset{\lambda u}{2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}}}$

RETTE PARALLELE //

CASO - RETTE COINCIDENTI

$\cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\cdot \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\-4\\-2\end{pmatrix}$

→ $\begin{cases} 1 + s = 2 - 2t \\ 1 + 2s = 3 - 4t \\ 2 + s = 3 - 2t \end{cases}$ → $\begin{cases} s = -2t + 1 \\ 2s = 2 - 4t \\ \boxed{s = -2t + 1} \end{cases}$ → va via poiché sovra determinato

→ $\begin{cases} s = -2t + 1 \\ \frac{2s}{2} = \frac{2 - 4t}{2} \end{cases}$ → $\begin{cases} s = -2t + 1 \\ s = -2t + 1 \end{cases}$ → AL VARIARE DI t ARBITRARIO INFINITE RETTE

→ INFINITE SOLUZIONI → RETTE COINCIDENTI /

DIMENSIONE DI NUCLEO, RANGO (IMMAGINE) DI UN' APPLICAZIONE LINEARE

- DATA LA MATRICE DI RAPPRESENTAZIONE DI UN' APPLICAZIONE LINEARE → SI RIDUCE A SCALA FINO A DOVE SI PUÒ E SI TROVANO:

$\boxed{\text{RANGO}}$ (e DIMENSIONE DELL' IMMAGINE) → $\boxed{\text{COLONNE PIVOT}}$

$\boxed{\text{DIMENSIONE DEL NUCLEO}}$ → $\boxed{\text{COLONNE NON PIVOT}}$

$\boxed{\text{ES 2 - 12/06/2017}}$

DATA L'APPLICAZIONE LINEARE DEFINITA DA $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ LA DIMENSIONE DEL SUO NUCLEO E IL SUO RANGO SONO:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \end{matrix} \xrightarrow{I-II} \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \end{matrix} \xrightarrow{II+2I}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \end{matrix} \xrightarrow{I-II/3} \begin{matrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4/3 \end{matrix}$$

NON PIVOT

PIVOT

→ NON SI PUÒ RIDURRE PIÙ

- 2 COLONNE PIVOT = Dim Ker (A) = 2 Soluzione
- 2 COLONNE NON PIVOT = RANK = 2

APPLICAZIONE DEFINITA DALLA MATRICE: INIETTIVA / SURIETTIVA / BIETTIVA

PRESA LA MATRICE SI RIDUCE A SCALA IL SISTEMA FINO A DOVE SI PUÒ E SI CONTROLLA:

1. INIETTIVA → DIMENSIONE DEL RANGO = N. COLONNE (INIZIALI)
   → DIMENSIONE NUCLEO = Ker A = 0
2. SURIETTIVA → DIMENSIONE RANGO = N. RIGHE (INIZIALI)
3. BIETTIVA → Se 1 e 2 SONO ENTRAMBE VERE

$\boxed{\text{ES 6 - 21/02/2018}}$

L'APPLICAZIONE DEFINITA DALLA MATRICE $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{III-I} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{II+I} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

0 → RANGO = 2 ≠ 3 (COLONNE) = NO INIETTIVA e NO SURIETTIVA 2 ≠ 3 (RIGHE)

1 → NUCLEO = 1 = NO INIETTIVA → Né iniettiva e né suriettiva

Dim NUCLEO = 1 soluzione

SOLUZIONI DEL SISTEMA LINEARE DEL TIPO

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

- PROCEDIMENTO
  - SI PONE GAUSS JORDAN
  - UTILIZZO METODO CLASSICO

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

soluzioni

E SI CONTROLLANO LE soluzioni

ES 7 - 02/02/2017

IL SISTEMA LINEARE

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ '' \\ '' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} '' \\ '' \\ 2(2-y) + y = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} '' \\ '' \\ 4 - 2y + y = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} '' \\ '' \\ +y = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2-(-2) \\ '' \\ '' \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ '' \\ '' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} '' \\ 4 + 2(-2) + 2z = 0 \\ '' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} '' \\ z = 0 \\ '' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ z = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

unica soluzione

Soluzione

COMPLEMENTO ORTOGONALE

PROCEDIMENTO

- SI PRENDE IL NOSTRO SPAZIO CHE SERVE A GENERARE IL COMPLEMENTO ORTOGONALE E SI EGUAGLIA A 0 CON LE VARIABILI $x, y, w, \ldots$
- DOPO AVER TIRATO FUORI LE EQUAZIONI A SISTEMA NEL CASO NON CI FOSSE UN'EQUAZIONE, ALLA VARIABILE/VARIABILI MANCANTE/I SI AGGIUNGONO VALORI ARBITRARI $\in \mathbb{R}$

ES 9 - 12/06/2017

OSS → IL VALORE ARBITRARIO PER COMODITÀ DI RISULTATO PUÒ ESSERE SCELTO ANCHE NEGATIVO

IL COMPLEMENTO ORTOGONALE IN $\mathbb{R}^4$ DELLO SPAZIO GENERATO DA $(1,1,1,1)$ e $(-1,1,1,1)$ è:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1,1,1,1 \\ -1,1,1,1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + y + w + z = 0 \\ -x + y + w + z = 0 \\ w = s \in \mathbb{R} \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -y - s - t \\ y + y + s + t \\ '' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} '' \\ \frac{2y}{2} = -\frac{2s}{2} - \frac{2t}{2} \\ '' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \cancel{s} + \cancel{t} \cancel{-s} \cancel{-t} \\ y = -s - t \\ w = s \\ z = t \end{cases} \rightarrow s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione complemento ortogonale.

DIAGONALIZZAZIONE

REGOLE PER DIAGONALIZZABILITÀ

1- $\mathbb{R}^n$ → SE CI SONO $\underline{n}$ AUTOVALORI DISTINTI
$\mathbb{C}^n$ ↗

$\in \mathbb{R}^n$ → REALI
$\in \mathbb{C}^n$ → COMPLESSI

• DIAGONALIZZABILE NEI •

2 - SE GLI AUTOVALORI NON SONO DISTINTI, CI POSSONO ESSERE DOPPI (μ ALG. = 2) TRIPLI (μ ALG. = 3), QUADRUPLI (μ ALG. = 4) ecc...

- DOPO AVER TROVATO L'AUTOVALORE DOPPIO ecc... SI VA A SOSTITUIRE AL POLINOMIO CARATTERISTICO,
→ SI TROVA L'AUTOVETTORE E SE NE CALCOLANO LE DIMENSIONI → QUINDI μ GEOMETRICA

→ SE μ ALGEBRICA = μ GEOMETRICA → DIAGONALIZZABILE

→ SE μ ALGEBRICA ≠ μ GEOMETRICA → NON È DIAGONALIZZABILE

$\mathbb{C}^2$ → DIAGONALIZZABILITÀ SOLO SU $\mathbb{C}$

ES (11) - 03/07/2017

L'OPERATORE DEFINITO SU $\mathbb{C}^2$ DA $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & i \\ -i & i-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (-\lambda)(i-\lambda) - (i)(-i)$$

$$\rightarrow -\lambda i + \lambda^2 - 1 \rightarrow$$ eq 2° GRADO NON CI SONO AUTOVALORI RIPETUTI

$$\lambda_{1,2} = \frac{i \pm \sqrt{-1+4}}{2} \rightarrow \frac{i+\sqrt{3}}{2}, \frac{i-\sqrt{3}}{2}$$ → 2 AUTOVALORI COMPLESSI DISTINTI → DIAGONALIZZABILE SOLO IN $\mathbb{C}$ NON SU $\mathbb{R}$

Soluzione

$\mathbb{R}^3 \to$ DIAGONALIZZABILITÀ SU $\mathbb{R}$ (3 RADICI REALI DISTINTE)

ES (11) - 15/01/2018

L'OPERATORE (ENDOMORFISMO) DEFINITO SU $\mathbb{R}^3$ DALLA MATRICE $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{matrix}$$

$$1-\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} \to 1-\lambda\left[-3+\lambda^2-\lambda+3\lambda-1\right] - 2\left[-3-\lambda+1\right]$$

$$\to 1-\lambda\left[+\lambda^2+2\lambda-4\right] +4+2\lambda \to \lambda^2+2\lambda-\cancel{4}-\lambda^3-2\lambda^2+4\lambda+\cancel{4}+2\lambda$$

$$\to -\lambda^3-\lambda^2+8\lambda \to \lambda(-\lambda^2-\lambda+8) \text{ // equazione 2° grado}$$

1° AUTOVALORE = $\underline{\lambda_1 = 0}$ $\quad \underline{\lambda_{2,3}} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+32}}{-2} \to -\frac{1}{2}+\sqrt{33}$, $-\frac{1}{2}-\sqrt{33}$

3 AUTOVALORI REALI DISTINTI $\to$ Diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ — Soluzione

$\mathbb{R}^3 \to$ DIAGONALIZZABILITÀ SU $\mathbb{R}$ ($\mathcal{N}$ ALGEBRICA = $\mathcal{N}$ GEOMETRICA)

ES (9) - 21/02/2018

L'OPERATORE (ENDOMORFISMO) DEFINITO SU $\mathbb{R}^3$ DALLA MATRICE $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{matrix}$$

$$\to -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\to -\lambda(1-\lambda)(1-\lambda) \to -\lambda(1-2\lambda+\lambda^2) \to \text{1° AUTOVALORE } \underline{\lambda_1 = 0}$$

$\to$ risolviamo eq 2° grado $\lambda_{2,3} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = 1$

$\underline{\lambda_{2,3} = 1}$ $\to$ AUTOVALORE DOPPIO CON ($\mathcal{N}$ ALGEBRICA = 2)

$\to$ CALCOLO AUTOVETTORE e AUTOSPAZIO, METTENDO L'AUTOVALORE $\underline{1}$ AL POSTO DI λ, E RISOLVO CON GAUSS

$$\begin{matrix} x & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{matrix} \to \begin{matrix} x & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{matrix} \to \text{TROVO AUTOVETTORE } \begin{cases} -x+y=0 \\ y=s \\ z=t \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x=y \\ y=s \\ z=t \end{cases} \to \text{AUTOVETTORE} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

($\mathcal{N}$ GEOMETRICA = 2)

$\Rightarrow$ ($\mathcal{N}$ ALGEBRICA = $\mathcal{N}$ GEOMETRICA) DIAGONALIZZABILE SU $\mathbb{R}$ — Soluzione + "AUTOSPAZIO DI QUELLO DOPPIO HA DIM = 2"

$\mathbb{R}^4$ → NON DIAGONALIZZABILITÀ SU $\mathbb{R}$ (μ ALGEBRICA $\neq$ μ GEOMETRICA)

ES 7 - 24/07/2017

L'OPERATORE (ENDOMORFISMO) DEFINITO SU $\mathbb{R}^4$ DALLA MATRICE

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{matrix}$$

$$\rightarrow -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \\ 0 & 0 \end{matrix} + 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}}_{=0} \begin{matrix} 0 & -\lambda \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\rightarrow -\lambda(-\lambda^3) \rightarrow \lambda^4 = 0$$

$\rightarrow \underline{\lambda_{1,2,3,4} = 0}$ AUTOVALORE CON μ ALGEBRICA $= \underline{4}$, CONTROLLO AUTOSPAZIO e μ GEOMETRICA

$$\begin{matrix} x & y & w & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \\ y = \tau \end{cases} \rightarrow \text{AUTOVETTORE } \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mu \text{ GEOMETRICA} = 1$$

$\rightarrow$ μ ALGEBRICA $\neq$ μ GEOMETRICA NON È DIAGONALIZZABILE SU $\mathbb{R}$

Soluzione + "AUTOVALORE QUADRUPLO e DIM AUTOSPAZIO = 1"

$\mathbb{R}^3$ → DIAGONALIZZABILITÀ SU $\mathbb{C}$ (AUTOVALORI CON RADICI COMPLESSE)

ES 6 - 02/02/2017

LA MATRICE $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{matrix}$$

$$1-\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$1-\lambda\left[1 - 2\lambda + \lambda^2\right] - 1[+1]$$

$$-2\lambda + \lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 - \lambda \cancel{+1} \cancel{-1}$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda \rightarrow \lambda(-\lambda^2 + 3\lambda - 3) \rightarrow \underline{\lambda_1 = 0} \quad 1° \text{ AUTOVALORE}$$

→ RISOLVO L'EQ DI 2° GRADO $\lambda_{2,3} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{-2}$

$$\left.\begin{matrix} \rightarrow \frac{3}{2} + \sqrt{-3} \\ \rightarrow \frac{3}{2} - \sqrt{-3} \end{matrix}\right\} \text{RADICI COMPLESSE} \rightarrow \begin{matrix} 3/2 + \sqrt{3}i \\ 3/2 - \sqrt{3}i \end{matrix} \rightarrow$$

DIAGONALIZZABILE SU $\mathbb{C}$ MA NON SU $\mathbb{R}$

Soluzione

$\mathbb{R}^3 \rightarrow$ NON DIAGONALIZZABILITÀ SU $\mathbb{R}$ (μ ALGEBRICA $\neq$ μ GEOMETRICA)

ES (2) - 05/02/2018

L'OPERATORE (ENDOMORFISMO) DEFINITO DALLA MATRICE $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$1-\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$1-\lambda\left[-\lambda+\lambda^2-1\right]-1\left[-1\right] \rightarrow \cancel{-\lambda}+\lambda^2\cancel{-1}+\lambda^2-\lambda^3\cancel{+\lambda}\cancel{+1}$$

$$\rightarrow -\lambda^3+2\lambda^2 \rightarrow \lambda^2(-\lambda+2) \rightarrow 1^\circ \text{ AUTOVALORE } \underline{\lambda_1 = 2}$$

$\underline{\lambda_{2,3} = 0} \rightarrow$ AUTOVALORE CON $\underline{\mu \text{ ALGEBRICA} = 2}$, CONTROLLO AUTOSPAZIO e μ GEOMETRICA

$$\begin{matrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z=\tau \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-y \\ y=-z \\ z=\tau \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\tau \\ y=-\tau \\ z=\tau \end{cases} \rightarrow \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ μ ALGEBRICA $\neq$ μ GEOMETRICA
NON DIAGONALIZZABILE SU $\mathbb{R}$

Soluzione + " AUTOSPAZIO " DI QUELLO DOPPIO MA DIMENSIONE = 1 " μ GEOMETRICA = 1

$\mathbb{R}^3 \rightarrow$ CALCOLO DIMENSIONE DELL'AUTOSPAZIO RELATIVO ALL'AUTOVALORE (CON μ ALGEBRICA > 1)

ES (11) - 02/02/2017

DATA LA MATRICE $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{matrix}$$

$$\rightarrow 1-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow 1-\lambda\left[-\lambda+\lambda^2-2\right]-1\left[1-\lambda-4\right]-1\left[1+2\lambda\right]$$

$$\rightarrow \cancel{-\lambda}+\lambda^2\cancel{-2}+\lambda^2-\lambda^3\cancel{+2}\cancel{+3}\cancel{+\lambda}\cancel{-1}\cancel{-2\lambda} \rightarrow -\lambda^3+2\lambda^2 \rightarrow \lambda^2(-\lambda+2)$$

(1) AUTOVALORE $\underline{\lambda_1 = 2} \rightarrow \underline{\lambda_{2,3} = 0} \rightarrow$ AUTOVALORE CON $\underline{\mu \text{ ALGEBRICA} = 2}$

$\rightarrow$ CONTROLLO AUTOSPAZIO e μ GEOMETRICA (DIM AUTOSPAZIO)

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{III-II} \begin{matrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+z=0 \\ z=\tau \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-x+z \\ x=-z \\ z=\tau \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2z \\ x=-z \\ z=\tau \end{cases} \rightarrow z \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione + " RELATIVO ALL'AUTOVALORE DOPPIO " DIM AUTOSPAZIO = 1

POSIZIONE RETTE NELLO SPAZIO DEL TIPO $r(x,y,z)$ e $\{x+y+z=0;\ x+y+z=0\}$

- VALGONO LE STESSE REGOLE PER LA POSIZIONE DELLE RETTE NELLO SPAZIO (VEDI PAG 11) SOLO CHE DOBBIAMO TROVARCI $\boxed{Y_0 + SV}$

ES 8 - 19/02/2016

LE RETTE IN $\mathbb{R}^3$ DEFINITE DA $r(2,1,1)$ $(r \in \mathbb{R})$ e $\{x+2y+z=0;\ x-2z=1\}$ SONO:

- MANCA Y_0
- MANCA SV
- $r\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ CE L'HO

- PONGO IL SISTEMA

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-2z=0 \\ z=s \quad s\in\mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1-2s+s+y=0 \\ x=1-2s \\ // \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-1+s \\ // \\ // \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-1+s \\ x=1-2s \\ z=s \end{cases} \rightarrow$$

HO TROVATO $Y_0 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

HO TROVATO ANCHE $s\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ LO PONGO A SISTEMA CON L'ALTRA RETTA

$$\rightarrow \begin{cases} -1+s=2r \\ 1-2s=r \\ s=r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1+r=2r \\ // \\ // \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r=-1 \\ 1+2=-1 \\ s=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} // \\ \boxed{3=-1} \\ // \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

CONTROLLO VELOCITÀ $\rightarrow \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \rightarrow$ SGHEMBE

Soluzione

DATE DUE MATRICI A( ) B( ), * SI CALCOLA IL PRODOTTO AB, BA

ES 8 - 25/07/2016

- DATI $A(4,2,0,0)$ $B=(1,1,2,4)$

DATE LE DUE MATRICI: $A=(4\ 2\ 0\ 0)$ $B=(1\ 1\ 2\ 4)^*$ (L'ASTERISCO INDICA LA TRASPOSIZIONE), I PRODOTTI AB e BA VALGONO:

$\rightarrow$ SI FA LA TRASPOSTA DI $B \rightarrow B^* = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\4\end{pmatrix}$

$$\boxed{AB} = (4\ 2\ 0\ 0)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\\4\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (4\cdot1+2\cdot1+0\cdot2+0\cdot4) = 6$$

Soluzione

$$\boxed{BA} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\4\end{pmatrix}(4\ 2\ 0\ 0) = \begin{pmatrix} 1\cdot4 & 1\cdot2 & 1\cdot0 & 1\cdot0 \\ 1\cdot4 & 1\cdot2 & 1\cdot0 & 1\cdot0 \\ 2\cdot4 & 2\cdot2 & 2\cdot0 & 2\cdot0 \\ 4\cdot4 & 4\cdot2 & 4\cdot0 & 4\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 0 \\ 16 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

TROVARE PER QUALI VALORI DI α (UNA VARIABILE) UNA MATRICE A NON PUÒ ESSERE INVERTIBILE

- PROCEDIMENTO -

1- SI GUARDANO LE SOLUZIONI E SI PROCEDE PER TENTATIVI: SOSTITUENDO AL POSTO DI α I VALORI PRESENTI NELLE SOLUZIONI (SUGGERIMENTO: INSERIRE VALORI CHE SI TROVANO SU PIÙ SOLUZIONI, IN MODO DA TENERE O ESCLUDERE I RISULTATI).

2- SI FA L'INVERSA E SI CONTROLLA SE È POSSIBILE FARLA.

$\boxed{\text{ES } 10 - 02/02/2016}$

PER QUALI VALORI DI α LA MATRICE $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 2 & -2 & \alpha \end{pmatrix}$ NON È INVERTIBILE?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 2 & -2 & \alpha \end{pmatrix}$$

- LE SOLUZIONI SONO

$\boxed{1}$ • $(0;-1)$ $\boxed{2}$ • $(1,-1)$ $\boxed{3}$ • $(0,-2)$ $\boxed{4}$ • N.A

$\boxed{5}$ • SEMPRE INVERTIBILE $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

- (PROVO $\alpha = -1$)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}+\text{I}]{\text{III}-2\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 0 & 1/5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2/5 & 0 & 1/5 \end{array}\right)$$

UNA RIGA SCOMPARE E MI ACCORGO CHE PER $\alpha = -1$ NON È INVERTIBILE POICHÉ A^{-1} DEVE AVERE RIGHE E COLONNE DI A

(ESCLUDO LE RISPOSTE $\boxed{3, 4}$
PROVO $\alpha = 1$)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+2\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}+\text{I}-\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}/2]{\text{II}/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{I}-\text{II}-2\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -5/6 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right) \rightarrow$$

È INVERTIBILE → POSSO ESCLUDERE LA RISPOSTA 2, PROVO CON LA RISPOSTA 1, SE COSÌ NON FOSSE → LA RISPOSTA CORRETTA È LA 4.

(PROVO $\alpha = 0$)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+2\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

SCOMPARE RIGA, NON È INVERTIBILE PER $\alpha = 0$ → ESCLUDO LA RISPOSTA 4, E LA SOLUZIONE È LA RISPOSTA 1 → $(0,-1)$ Soluzione

DISTANZA PUNTO DAL PIANO

PROCEDIMENTO: NOI ABBIAMO $\underbrace{X}_{\text{PUNTO}}\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}$ $\underbrace{X_0\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}+\langle s\underset{u}{\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}}+t\underset{v}{\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}}\rangle}_{\text{PIANO}}$

1. SI FA $\underset{(\ )-(\ )}{X-X_0}$ E SI TROVA $\underset{X-X_0}{\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}}$

2. SI PONE IN UN DETERMINANTE TRA VAL ASSOLUTO 3x3

$$\left|\det\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}\right| \quad \left.\begin{matrix}\leftarrow X-X_0\\ \leftarrow u\\ \leftarrow v\end{matrix}\right\}$$ CIASCUNO PER OGNI RIGA

3. POI IL PRODOTTO VETTORE NORMATO $|u\times v| = \sqrt{|X|^2+|X|^2+|X|^2}$
$u \wedge v$

4. SI APPLICA IL TUTTO NELLA FORMULA FINALE $\dfrac{\left|\det\begin{pmatrix}X-X_0\\ u\\ v\end{pmatrix}\right|}{\underbrace{\sqrt{|\ |^2+|\ |^2+|\ |^2}}_{|u\times v|}}$

FORMA DET 3x3

ES 1 - 13/06/2016

LA DISTANZA DI $(1,1,2)$ DAL PIANO (AFFINE) $(1,0,1)+\langle(1,1,1),(0,0,1)\rangle$ È:

$X\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $X_0\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $u\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $v\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\rightarrow \underset{1^\circ\text{ PASSO}}{X-X_0}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \rightarrow \underset{2^\circ\text{ PASSO}}{\left|\det\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}0&1\\1&1\\0&0\end{matrix}\right|} = |-1| = \underline{1}$

$\rightarrow \underbrace{\sqrt{\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}^2+\left(-\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\right)^2+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}^2}}_{|u\times v|} = \underline{\sqrt{2}}$ 3° PASSO

4° PASSO $\rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ Soluzione

METODO ALTERNATIVO COMPLEMENTO ORTOGONALE

PROCEDIMENTO = SI PROCEDE PER TENTATIVI, PRENDENDO LE SOLUZIONI E CIASCUN VETTORE DELLA SOLUZIONE LO MOLTIPLICO SCALARMENTE CON I VETTORI DELLO SPAN

$\rightarrow$ SE RISULTA TUTTO $=0$ $\rightarrow$ HO TROVATO IL COMPLEMENTO ORTOGONALE

ESERCIZIO - CONSIDERO PER ESEMPIO LA SOLUZIONE $\rightarrow \langle(0,1,0,0),(-4,0,1,2)\rangle$

IL COMPLEMENTO ORTOGONALE DI $\langle(1,0,2,1),(1,0,0,2)\rangle$ È:

1. $(1,0,2,1)\times(0,1,0,0) = 1\cdot0+0\cdot1+2\cdot0+1\cdot0 = 0$
2. $(1,0,2,1)\times(-4,0,1,2) = 1\cdot(-4)+0\cdot0+2\cdot1+1\cdot2 = 0$
3. $(1,0,0,2)\times(0,1,0,0) = 1\cdot0+0\cdot1+0\cdot0+2\cdot0 = 0$
4. $(1,0,0,2)\times(-4,0,1,2) = 1\cdot(-4)+0\cdot0+0\cdot1+2\cdot2 = 0$

20 TUTTE $=0$ $\rightarrow$ IL COMPLEMENTO ORTOGONALE È QUINDI $\langle(0,1,0,0),(-4,0,1,2)\rangle$

RETTA RISPETTO AL PIANO

PROCEDIMENTO: SI METTONO A SISTEMA L'EQ DELLA RETTA E DEL PIANO.

- EQ RETTA → $\tau\begin{pmatrix} q \\ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ \\ \end{pmatrix}$
- EQ PIANO → $s\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} v\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ (u, w)

SISTEMA:

// A SINISTRA PIANO

$$\begin{cases} s + v = \tau + x_0 \\ s + v = \tau + x_0 \\ s + v = \tau + x_0 \end{cases}$$

// A DESTRA RETTA

→ SI GUARDANO LE SOLUZIONI

- 1 SOLUZIONE: RETTA INCIDENTE AL PIANO
- ∞ SOLUZIONI: RETTA GIACENTE SUL PIANO
- 0 SOLUZIONI

RETTA PARALLELA AL PIANO SE

1° VERIFICA → $\underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{u} \pm \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{w} = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{Q}$ (SPAZIO; MULTIPLO RETTA)

2° VERIFICA → $Q\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}_u$ // $\lambda\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}_w$ | 0 UNA 0 L'ALTRA

BASTA CHE SIA VERA 1 DELLE DUE VERIFICHE

RETTA SGHEMBA AL PIANO SE

1° verifica → $\underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{u} \pm \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{w} \neq \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{Q}$ (SPAZIO; MULTIPLO RETTA)

2° verifica → $Q\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}_u$ // $\neq \lambda\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}_v$ | ENTRAMBE

DEVONO ESSERE VERE ENTRAMBE LE VERIFICHE

CASO RETTA INCIDENTE AL PIANO

ES 6 - 16/09/2016

LA RETTA $(1,0,0,0)+\tau(1,2,-1,0)$ RISPETTO AL PIANO $\langle(1,1,1,1),(0,1,1,1)\rangle$ È:

$$s\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{cases} s = \tau + 1 \\ s + v = 2\tau \\ s + v = -\tau \\ s + v = 0 \end{cases} \to \begin{cases} // \\ // \\ // \\ s = -v \end{cases} \to \begin{cases} // \\ // \\ -v + v = -\tau \\ // \end{cases} \to \begin{cases} // \\ // \\ \tau = 0 \\ // \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} s = 1 \\ // \\ \tau = 0 \\ // \end{cases} \to \begin{cases} s = 1 \\ // \\ \tau = 0 \\ -1 = v \end{cases} \to \begin{cases} s = 1 \\ \cancel{\text{Anche}} \\ \tau = 0 \\ -1 = v \end{cases} \to \begin{cases} s = 1 \\ \tau = 0 \\ v = -1 \end{cases} \to$$

UNICA SOLUZIONE → RETTE INCIDENTI

CASO RETTA PARALLELA AL PIANO

ES 10 - 25/07/2016

LA RETTA $(1,1,1)+\tau(0,1,1)$ RISPETTO AL PIANO $\langle(1,2,3),(-1,2,1)\rangle$

$$s\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \to \begin{cases} s - v = 1 \\ 2s + 2v = 1 + \tau \\ 3s + v = 1 + \tau \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} s = 1 + v \\ 2 + 2v + 2v = 1 + \tau \\ // \end{cases} \to \begin{cases} // \\ \cancel{4}v = \frac{-1+\tau}{4} \\ // \end{cases} \to \begin{cases} // \\ // \\ \cancel{3}s = \left(\frac{1}{4} - \frac{\tau}{4} + \tau\right)\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} // \\ s = \frac{1}{12} + \frac{1}{4}\tau \end{cases} \to \begin{cases} -\frac{1}{4} + \frac{\tau}{4} = 1 + \frac{1}{12} + \frac{\tau}{4} \\ // \\ // \end{cases} \to \left(-\frac{3}{12} = \frac{13}{12}\right)$$ 0 Soluzioni

→ FACCIO LA 1° VERIFICA CON + (CONTROLLO VERCIÒ) → $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{u} + \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}}_{w} = \begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ → PARALLELA

Soluzione

RETTA PER 1 PUNTO PERPENDICOLARE AD UN'ALTRA RETTA.

- PROCEDIMENTO → ABBIAMO

$x\,(\quad)$	PUNTO PER CUI PASSA LA RETTA
$x_0\,(\quad)$	PARTENZA DELLA RETTA
$\tau\,(\quad)$	VELOCITÀ IN DIREZIONE DELLA RETTA

1° PASSO → $x - x_0 = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_x - \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{x_0}$

2° PASSO → $(x-x_0)_u = \dfrac{(x-x_0)(u)}{|u|^2}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_u$ ← SCALARE

3° PASSO → $(x-x_0) - (x-x_0)_u = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ ✓ TROVIAMO UN NUOVO VETTORE

PASSO FINALE → $y(\tau) = x + \tau v = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_x + \tau\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_v$ TROVO LA RETTA PASSANTE PER x e $\perp$ ALLA SECONDA RETTA.

ES 9 - 13/06/2016

LA RETTA PER $(1,1,1)$ PERPENDICOLARE A $(0,-2,0)$-$C(1,2,1)$ È:

- $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}_x$ • $\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}_{x_0}$ • $-C\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}_u$ → CAMBIO SEGNO A τ u PER CONVENIENZA → $\tau\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

1° PASSO → $x - x_0 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$

2° PASSO → $(x-x_0)_u = \dfrac{\overbrace{(1\ 3\ 1)(-1\ -2\ -1)}^{\text{SCALARE}}}{|u|^2 \to |1^2+2^2+1^2|}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}_u = \dfrac{-8}{6} = -\dfrac{4}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/3\\8/3\\4/3\end{pmatrix}$

3° PASSO → $(x-x_0) - (x-x_0)_u = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4/3\\8/3\\4/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3\\1/3\\-1/3\end{pmatrix}$ ← HO TROVATO VETTORE v

PASSO FINALE → $x + \tau v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}-1/3\\1/3\\-1/3\end{pmatrix}$

→ PONGO τ PER COMODITÀ DI RISULTATO $= 1/3$

e TROVO LA RETTA $= y(\tau) = x + \tau v$ → $y(1/3) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

Soluzione.

COMPLETAMENTO AD UNA BASE DI UN SISTEMA DI VETTORI / GENERATORI

PROCEDIMENTO = DEVO PROCEDERE PER TENTATIVI, GUARDANDO (TRA LE RISPOSTE) SE QUELLO CHE AGGIUNGO LASCIA LE COLONNE INDIPENDENTI

ES (2) - 03/07/2017

IL SISTEMA DI VETTORI $\{(2,1,3),(1,1,3)\}$ PUÒ ESSERE COMPLETATO AD UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$

RISPOSTE:

A = N.A

B = (1,0,0) MA NON (0,1,0) OPPURE (0,0,1)

C = SOLTANTO (0,1,0)

D = (0,1,0) OPPURE (0,0,1) MA NON (1,0,0)

E = (1,0,0) OPPURE (0,1,0) MA NON (0,0,1)

TENTATIVO 1) PROVO (1,0,0)

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{matrix}$$ → DIPENDENTI ESCLUDO B ED E

TENTATIVO 2) PROVO (0,1,0)

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{matrix}$$ INDIPENDENTI CONSIDERO C (TEMPORANEAMENTE) COME CORRETTA

TENTATIVO 3) PROVO (0,0,1)

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{matrix}$$ INDIPENDENTI → ESCLUDO C, A → RISPOSTA CORRETTA (D) Soluzione

---

DATA UNA MATRICE A (3x3) TROVARE UNA MATRICE X IN MODO CHE AX = (2x3)

PROCEDIMENTO = [SI USA GAUSS-JORDAN CON A SINISTRA DELL'UGUALE METTO LA MATRICE (A) E A DESTRA DELL'UGUALE LA MATRICE (AX) → RISOLVO IL SISTEMA E A DESTRA DELL'UGUALE TROVO LA MATRICE (X) CHE CERCO]

ES (4) - 24/07/2017

DATA $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, DETERMINARE UNA MATRICE X IN MODO CHE $AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}\right) \rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right) \xrightarrow[-I]{III-II} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{matrix}\right) \xrightarrow[II-I]{III/-2}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1/2 & 0 \end{matrix}\right) \xrightarrow{III-II} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1/2 & -3 \end{matrix}\right) \xrightarrow{III/2} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1/4 & -3/2 \end{matrix}\right) \xrightarrow{II+III}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1/4 & 3/2 \\ 1/4 & -3/2 \end{matrix}\right) \xrightarrow[-2III]{I-II} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 3/2 \\ 1/4 & -3/2 \end{matrix}\right)$$ Soluzione

PROIEZIONE DI UN VETTORE NELLA DIREZIONE DI UN ALTRO VETTORE ($\mathbb{C}^n$)

FORMULA DELLA PROIEZIONE

$$\boxed{P(u,v) = \frac{\overbrace{uv}^{\text{SCALARE}}}{\|v\|^2}\,(\;v\;)}$$

1) PRIMO PASSO

$$uv = u\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

CONIUGATO

2° PASSO

$$\|v\|^2 = \cancel{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \bar{v}_i\right)^2}} = \sum_{i=1}^{n} v_i \bar{v}_i$$

3° PASSO

APPLICO LA FORMULA

RICORDO

$i^2 = -1$

$i \cdot (-i) = 1$

ES 7 16/09/2016

LA PROIEZIONE IN $\mathbb{C}^3$ DI $(1,1,1)$ SU $\langle (i,-i,i) \rangle$ È:

$$\cdot\, u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \cdot\, v \begin{pmatrix} i \\ -i \\ i \end{pmatrix}$$

FACCIO IL CONIUGATO DI $v \rightarrow \bar{v} \begin{pmatrix} -i \\ i \\ -i \end{pmatrix}$

1°

$$uv = u\bar{v} = [(1)(-i) + (1)(i) + (1)(-i)] = \cancel{-i} \cancel{+i} - i = -i$$

2°

$$\|v\|^2 = [(i)(-i) + (i)(i) + (i)(-i)] = 1 + 1 + 1 = 3$$

3°

$$\frac{-i}{3} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione