**Esame di Ricerca Operativa del 12/9/19**

**Esercizio 1.** Un'industria produce A e B che devono passare da entrambi i reparti X e Y. La quantitá prodotta di A deve essere almeno il 50% di quella prodotta di tipo B. I tempi di lavorazione in ore per tonnellata di prodotto e la disponibilitá in ore a settimana dei due reparti sono date dalla seguente tabella. Sapendo che il prodotto A fornisce un guadagno di 250 euro per tonnellata mentre quello B di 300 determinare il piano di produzione settimanale che massimizza il guadagno.

| | A | B | Disponibilitá |
|---|---|---|---|
| Reparto X | 2 | 1.5 | 103 |
| Reparto Y | 0.5 | 1 | 51 |

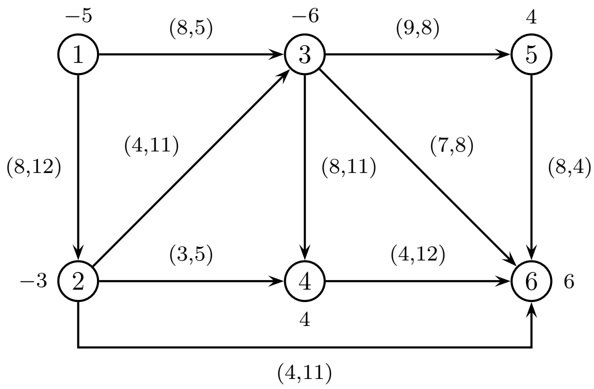
La soluzione $x = (20.4, 40.8)$ é ottima? Se no, effettuare un passo dell'algoritmo del simplesso. Fare una stima inferiore ed una superiore del valore ottimo se l'azienda producesse, negli stessi reparti e con la stessa tabella, non tonnellate di prodotto ma scatole. Calcolare poi un taglio di Gomory.

**Esercizio 2.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 cittá, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **cittá** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 20 | 24 | 31 | 12 |
| **2** | | 29 | 28 | 8 |
| **3** | | | 26 | 22 |
| **4** | | | | 21 |

Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo. Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 4. Il ciclo cosí trovato é l'assegnamento di costo minimo? Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{12}$, $x_{15}$, $x_{25}$. Siamo arrivati all'ottimo?

**Esercizio 3.** Su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.




Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,2), (2,4), (3,4), (3,5) e (4,6), l'arco (1,3) come arco saturo e gli archi rimanenti in $L$, il flusso ottenuto é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso su reti. Determinare poi l'albero dei cammini minimi di radice 2. Cosa si puó dire se venisse applicato l'algoritmo del simplesso? Fare un passo dell'algoritmo del simplesso per trovare il flusso massimo 1 a 6 partendo dalla soluzione $x = 0$.

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 2\ x_1^2 + 10\ x_1 + 5\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(0, 2)$ , $(-3, 0)$ , $(-2, 3)$ e $(-1, -3)$.
E' un problema di ottimizzazione convesso? Eseguire un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe ed un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $x = (-\frac{5}{3}, -2)$. Trovare il minimo globale, se esiste.

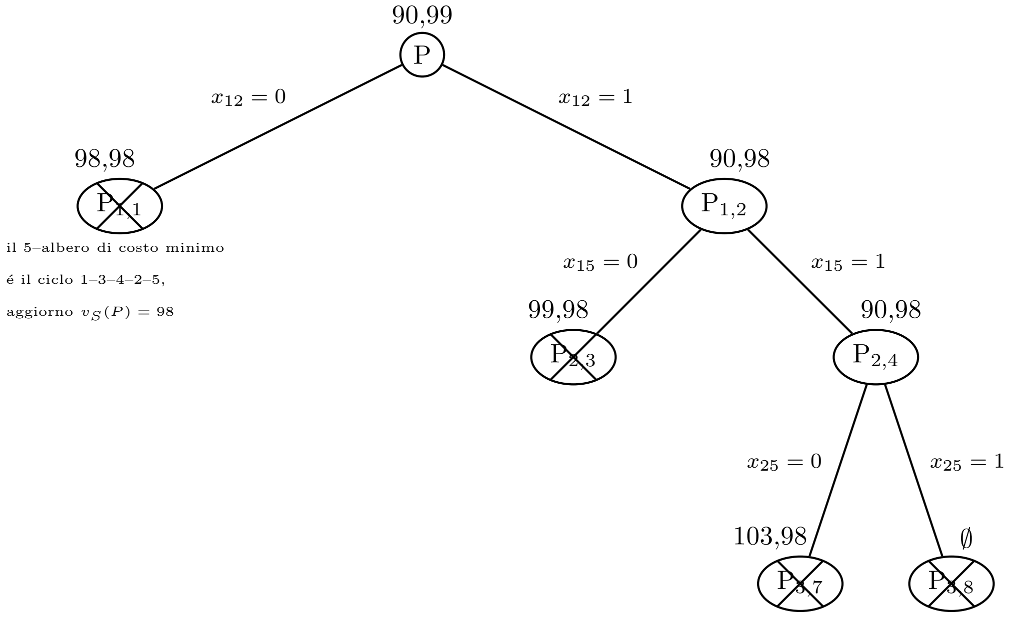
# SOLUZIONI

**Esercizio 1.**

$$\begin{cases} \max 250\,x_A + 300\,x_B \\ 2\,x_A + 1.5\,x_B \le 103 \\ 0.5\,x_A + x_B \le 51 \\ -2\,x_A + x_B \le 0 \\ x_A, x_B \ge 0. \end{cases}$$

La base iniziale é $(2,3)$. L'indice uscente é il 3 mentre l'indice entrante é 1. Il nuovo vertice é $(21.2, 40.4)$ che é anche la soluzione ottima. In caso di scatole va aggiunto il vincolo di interezza e quindi la soluzione ottima appena trovata é una valutazione superiore di valore 17420 mentre $(21, 40)$ é la valutazione inferiore di valore 17250.
Il taglio di Gomory é dato da $2x_1 + 2x_2 \le 123$.

**Esercizio 2.** 5–albero: ( 1 , 2 ) ( 1 , 3 ) ( 1 , 5 ) ( 2 , 5 ) ( 3 , 4 ) con $v_I(P) = 90$; ciclo: 4 – 5 – 2 – 1 – 3 con valore $v_S(P) = 99$.




Il ciclo ottimo é 1–3–4–2–5 di valore 98.

**Esercizio 3.**

| | iterazione 1 | iterazione 2 |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (2,4) (3,4) (3,5) (4,6) | (1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (4,6) |
| Archi di U | (1,3) | (2,4) |
| $x$ | (0, 5, 0, 3, 0, 7, 4, 0, 6, 0) | (2, 3, 0, 5, 0, 5, 4, 0, 6, 0) |
| $\pi$ | (0, 8, 3, 11, 12, 15) | |
| Arco entrante | (1,3) | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 2, 5 | |
| Arco uscente | (2,4) | |

L'albero dei cammini minimi é formato dagli archi (2,3), (2,4), (2,6) e (3,5). Il nodo 1 non é raggiungibile.

**Esercizio 4.**

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{5}{3}, -2\right)$ | $(-3, -2)$ | $\begin{pmatrix} \frac{4}{13} & -\frac{6}{13} \\ -\frac{6}{13} & \frac{9}{13} \end{pmatrix}$ | $\left(\dfrac{2}{3}, -1\right)$ | 1 | 1 | $(-1, -3)$ |

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{5}{3}, -2\right)$ | $\frac{10}{3}\,x_1 + 5\,x_2$ | (-1 ,-3) | $\left(\frac{2}{3}, -1\right)$ | 1 | $(-1, -3)$ |

Il gradiente non si annulla mai e quindi il minimo assoluto, che sicuramente esiste, é $x = (-1, -3)$.

**Esame di Ricerca Operativa del 15/7/19**

**Esercizio 1.** Una fabbrica di detersivi produce due tipi di saponi che passano attraverso 4 fasi di lavorazione: le ore necessarie per ogni fase di lavorazione per ogni quintale di prodotto sono riportate nella tabella che segue, in cui compaiono anche le ore mensili a disposizione per ciascuna fase ed il profitto ottenuto da ogni quintale venduto di sapone. La fabbrica vuole massimizzare il profitto.

| Saponi | Fasi di lavorazione | | | | Profitto |
|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | |
| 1 | 1,5 | 9 | 1,5 | 2,5 | 1100 |
| 2 | 15 | 2 | 2 | 4 | 10600 |
| Ore disponibili | 350 | 240 | 80 | 150 | |

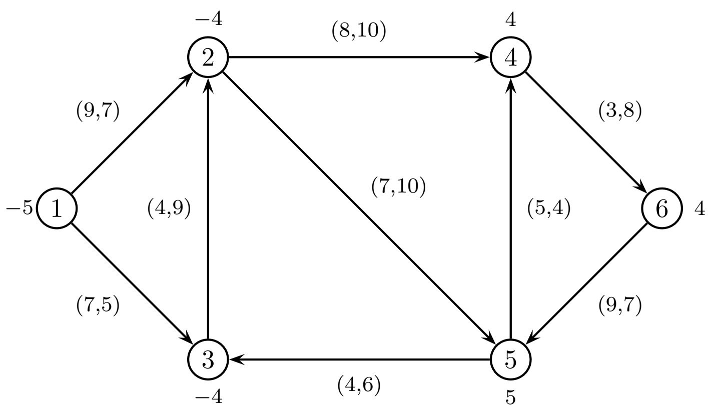
La soluzione $x = (0, 70/3)$ é ottima? Se no, effettuare un passo dell'algoritmo del simplesso. Fare una stima inferiore ed una superiore del valore ottimo se l'azienda producesse, negli stessi reparti e con la stessa tabella, non quintali di detersivo ma scatole di detersivo. Calcolare poi un taglio di Gomory.

**Esercizio 2.** Si consideri il problema di caricare (in modo binario) un camion di portata massima pari a 39 quintali, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti.

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 52 | 27 | 50 | 60 | 31 | 11 |
| Peso | 10 | 6 | 15 | 22 | 17 | 14 |

Calcolare una valutazione superiore considerando il rilassamento $x \geq 0$. La soluzione ottima di tale rilassamento continuo é un vertice? Se sí quale é la base? Scrivere l'equazione di un piano di taglio di Gomory. Calcolare poi una valutazione superiore considerando il rilassamento $0 \leq x \leq 1$. Eseguire l'algoritmo del Branch and Bound istanziando almeno 2 variabili.

**Esercizio 3.** Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.




Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,3), (2,4), (2,5), (4,6) e (5,3), l'arco (3,2) come arco saturo e gli archi rimanenti in $L$, il flusso ottenuto é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso su reti. Determinare poi l'albero dei cammini minimi di radice 1 e scrivere il flusso ad esso associato e dire se é di base e se sí quale é la base. Trovare il taglio da 1 a 6 di capacitá minima ed il flusso massimo.

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 14x_1 - 2x_2 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

E' un problema di ottimizzazione convesso? Eseguire un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe ed un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $x^k = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Trovare il minimo globale, se esiste.

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.**

$$\begin{cases} \max\ 1100\ x_1 + 10600\ x_2 \\ 1.5\ x_1 + 15\ x_2 \leq 350 \\ 9\ x_1 + 2\ x_2 \leq 240 \\ 1.5\ x_1 + 2\ x_2 \leq 80 \\ 2.5\ x_1 + 4\ x_2 \leq 150 \\ x_1 \in \mathbb{Z}_+ \\ x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

La base iniziale é $(1, 5)$. L'indice uscente é il 5 mentre l'indice entrante é il 2. Il nuovo vertice é $(725/33, 465/22)$ che é anche la soluzione ottima. In caso di scatole va aggiunto il vincolo di interezza e quindi la soluzione ottima appena trovata é una valutazione superiore di valore 248212 mentre $(21, 21)$ é la valutazione inferiore di valore 245700. Il taglio di Gomory é dato da $5x_1 + 30x_2 \leq 742$

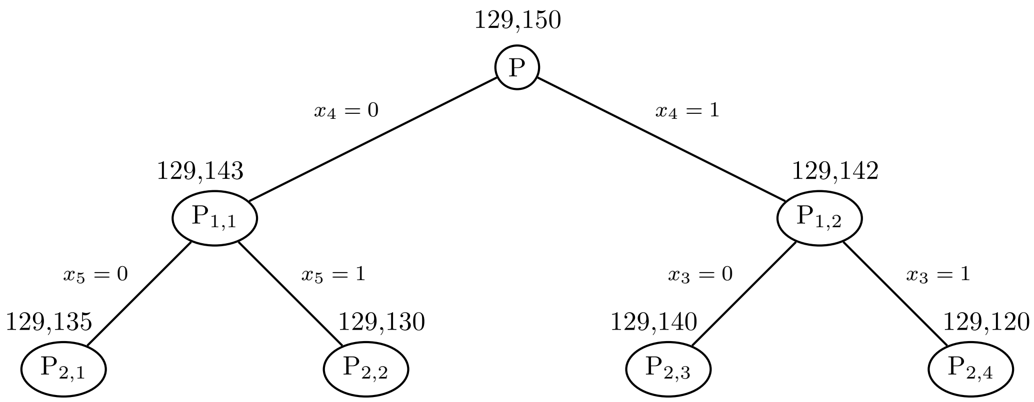
**Esercizio 2.** Dalla soluzione ammissibile $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$ ricaviamo una valutazione inferiore $v_I(P) = 129$. Una valutazione superiore é data $(\frac{39}{10}, 0, 0, 0, 0, 0)$, quindi si ha $v_S(P) = 202$. Per calcolare un taglio di Gomory aggiungiamo una variabile di scarto $s$. La base ottima é $B = \{1\}$, la matrice di base é $A_B = 10$, la matrice non di base é $A_N = (6\ 15\ 22\ 17\ 14\ 1)$ e $\tilde{A} = (\frac{6}{10}, \frac{15}{10}, \frac{22}{10}, \frac{17}{10}, \frac{14}{10}, \frac{1}{10})$.

$$\frac{6}{10}x_2 + \frac{5}{10}x_3 + \frac{2}{10}x_4 + \frac{7}{10}x_5 + \frac{4}{10}x_6 + \frac{1}{10}s \geq \frac{9}{10},$$

ricavando s

$$x_1 + x_3 + 2\,x_4 + x_5 + x_6 \leq 3.$$

La soluzione ottima del rilassamento continuo $0 \leq x \leq 1$ é $(1, 1, 1, \frac{8}{22}, 0, 0)$, con $v_S(P) = 150$.




**Esercizio 3.**

| | iterazione 1 | iterazione 2 |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,4) (2,5) (4,6) (5,3) | (1,3) (2,4) (2,5) (3,2) (4,6) |
| Archi di U | (3,2) | |
| $x$ | (0, 5, 8, 5, 9, 4, 0, 0, 0) | (0, 5, 8, 5, 9, 4, 0, 0, 0) |
| $\pi$ | $(0,\ -4,\ 7,\ 4,\ 3,\ 7)$ | |
| Arco entrante | (3,2) | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | $+\infty$ , 0 | |
| Arco uscente | (5,3) | |

La sequenza dei cammini aumentanti é $1-2-4-6$, $1-3-2-4-6$ con i $\delta$ pari a 7 e 1 rispettivamente, con flusso massimo $x = (7, 1, 8, 0, 1, 8, 0, 0, 0)$ di valore 8. Il taglio é $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. L'albero dei cammini minimi é formato dagli archi (1,2), (1,3), (2,4)(2,5) e (4,6) con flusso $x = (4, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$.

**Esercizio 4.**

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ | $(-1, 0)$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $(0, 1)$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{1}{2}$ | $(0, 1)$ |

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ | $-(29/2)x_1 - x_2$ | (1 ,0) | $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ | 1 | $(1, 0)$ |

Le soluzioni LKT sono $(0, 0)$ con moltiplicatori $(-14, -2, 0)$, $(1, 0)$ con moltiplicatori $(0, 3, 6)$ e $(0, 1)$ con moltiplicatori $(-15, 0, 0)$ quindi il minimo assoluto che sicuramente esiste é $x = (1, 0)$.

## Esame di Ricerca Operativa del 17/2/20

**Esercizio 1.** Un caporeparto di una fabbrica deve decidere la composizione della sua squadra, avendo a disposizione operai e robot. Nel reparto si producono quattro tipi di beni A, B, C e D, e bisogna produrre almeno 50 quintali di bene A, 25 di bene B, 25 di bene C e 55 di bene D. Ciascun operaio o robot puó produrre ogni bene. Nella seguente tabella sono riportati i numeri di operai e robot necessari per produrre singolarmente un quintale di ciascuno dei beni A, B, C e D, i costi di manutenzione (per i robot) ed il salario (per un operaio) da minimizzare tenendo in considerazione che il numero totale di operai deve essere almeno 3 volte piú grande del numero di robot.

| | A | B | C | D | costi |
|---|---|---|---|---|---|
| operai | 8 | 15 | 4 | 4 | 8 |
| robot | 4 | 10 | 2 | 3 | 9 |

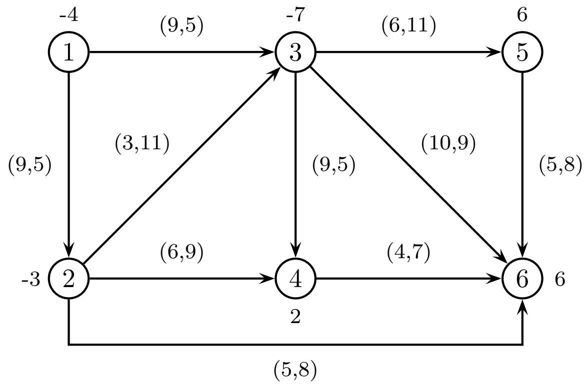
La soluzione 300 operai e 50 robot é ottima per il rilassato continuo? Se no, effettuare un passo dell'algoritmo del simplesso. Fare una stima inferiore ed una superiore del valore ottimo se l'azienda producesse, negli stessi reparti e con la stessa tabella, non quintali di bene ma scatole ognuna contenente un quintale di bene. Calcolare poi un taglio di Gomory.

**Esercizio 2.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 cittá, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **cittá** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 10 | 41 | 62 | 92 |
| **2** | | 27 | 54 | 56 |
| **3** | | | 11 | 13 |
| **4** | | | | 94 |

Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 5. Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{45}$, $x_{35}$ e $x_{15}$. Se ci fosse l'obbligo di passare da uno tra gli archi $(1,2)$ e $(3,5)$ cosa cambierebbe nel modello? Come si potrebbe calcolare una valutazione superiore ed una inferiore?

**Esercizio 3.** Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.




Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,3), (2,3), (2,4), (2,6) e (5,6), l'arco (3,5) come arco saturo e gli archi rimanenti in $L$, il flusso ottenuto é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso su reti. Determinare poi l'albero dei cammini minimi di radice 1 e scrivere il flusso ad esso associato. Trovare il taglio da 1 a 6 di capacitá minima ed il flusso massimo.

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ -2\,x_1\,x_2 + 4\ x_1 + 4\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(1,2)$ , $(-2,-2)$ , $(3,1)$ e $(5,-4)$.
E' un problema di ottimizzazione convesso? Eseguire un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe ed un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ . Il punto (0,0) é il massimo globale? Si puó dire che il minimo globale esiste ed é sul bordo del poliedro?

# SOLUZIONI

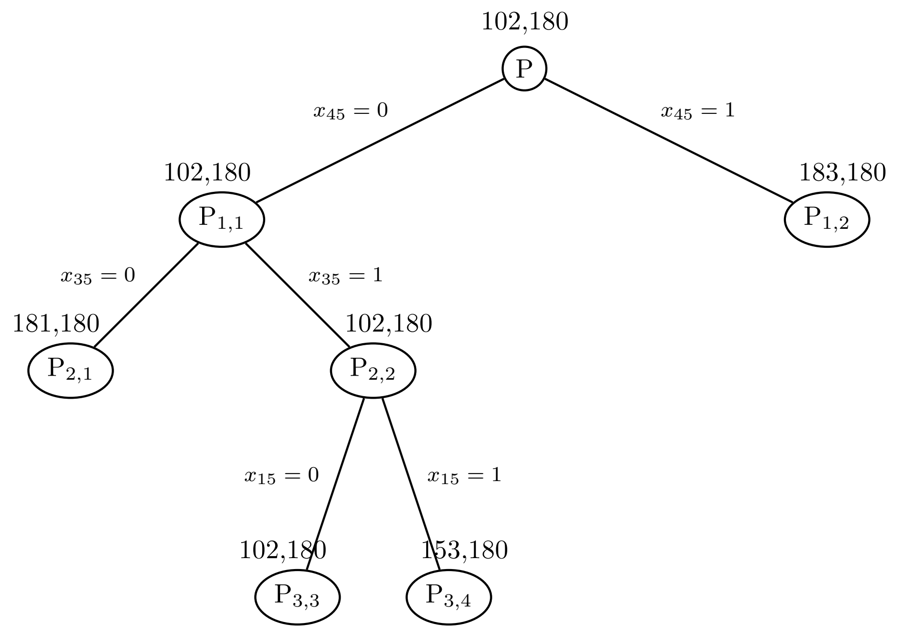
**Esercizio 1.**

COMANDI DI MATLAB

```
c=[ 8 ; 9 ]                                                   int=[ 1 ; 2 ]

A=[-1/8 -1/4 ;-1/15 -1/10 ;-1/4 -1/2 ;-1/4 -1/3 ;-1 3 ]        Aeq=[]

b=[ -50 ; -25 ; -25 ; -55 ; 0]                                beq=[]

lb=[ 0 ; 0 ]                                                  ub=[]
```

La base é $(1,2)$ e la relativa soluzione duale é: $y = (-48, 210, 0, 0, 0, 0, 0)$. L'indice uscente é 1 mentre quello entrante é 5. La nuova base dá la soluzione ottima del rilassato continuo (250, 83.333) che é una valutazione inferiore di valore 2750 mentre $(252, 84)$ é una valutazione inferiore di valore 2772. La soluzione ottima é $(252, 82)$ di valore 2754

**Esercizio 2.** 2–albero: ( 1 , 2 ) ( 1 , 3 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) con $v_I(P) = 102$.
ciclo: 5 – 3 – 4 – 2 – 1 con $v_S(P) = 180$.




Si dovrebbe aggiungere il vincolo $x_{12} + x_{35} = 1$.

**Esercizio 3.**

| | iterazione 1 | iterazione 2 |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,3) (2,4) (2,6) (5,6) | (1,3) (2,4) (2,6) (3,5) (5,6) |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | (0, 4, 0, 2, 1, 0, 11, 0, 0, 5) | (0, 4, 0, 2, 1, 0, 11, 0, 0, 5) |
| $\pi$ | (0, 6, 9, 12, 6, 11) | (0, 15, 9, 21, 15, 20) |
| Arco entrante | (3,5) | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 7 , 0 | |
| Arco uscente | (2,3) | |

L'albero dei cammini minimi é (1,2), (1,3), (2,4), (3,5) e (2,6). Il flusso ottimo é $x = (3, 2, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$. Ci sono due cammini aumentanti 1-2-6 e 1-3-6 entrambi di valore 5. Il flusso massimo ha valore 10 con $N_s = 1$

**Esercizio 4.**

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ | $(1,2)$ | $\begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ | $\left(\dfrac{4}{15}, -\dfrac{2}{15}\right)$ | 5 | 5 | $(3,1)$ |

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ | $2/3x_1 + 2/3x_2$ | (3,1) | (4/3, -2/3) | 1 | (3,1) |

## Esame di Ricerca Operativa del 29/6/19

**Esercizio 1.** Un'azienda produce due tipi di carburanti (A e B) che sono lavorati in 3 diverse fasi. I tempi in ore per produrre una tonnellata di carburante sono dati in tabella insieme alla capacitá produttiva giornaliera dei tre reparti. Ogni tonnellata di carburante A viene venduta a 540 euro mentre quella del carburante B a 590 euro.

| | A | B | Capacitá |
|---|---|---|---|
| R1 | 0.7 | 0.8 | 18 |
| R2 | 1.7 | 1.4 | 16 |
| R3 | 1.9 | 2.1 | 16 |

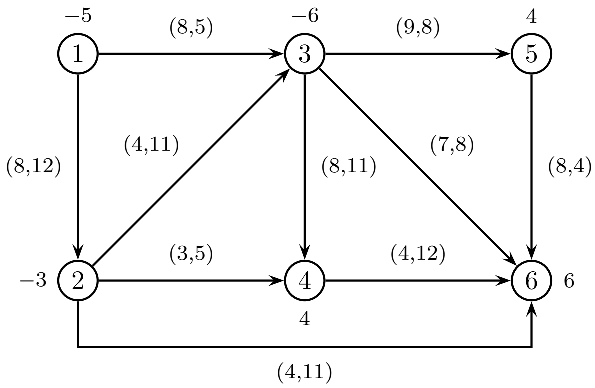
Partendo dalla soluzione $x = (0, 0)$ effettuare un passo dell'algoritmo del simplesso. Fare una stima inferiore ed una superiore del valore ottimo se l'azienda producesse, negli stessi reparti e con la stessa tabella, non carburante ma sylos. Calcolare poi un taglio di Gomory.

**Esercizio 2.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 cittá, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **cittá** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 24 | 4 | 39 | 43 |
| **2** | | 22 | 5 | 17 |
| **3** | | | 34 | 10 |
| **4** | | | | 38 |

Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando l'1–albero di costo minimo. Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 1. Il ciclo cosí trovato é l'assegnamento di costo minimo? Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando l'1–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{13}$, $x_{23}$, $x_{35}$. Siamo arrivati all'ottimo?

**Esercizio 3.** Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.




Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,2), (2,3), (3,4), (3,5) e (4,6), l'arco (1,3) come arco saturo ed gli archi rimanenti in $L$, il flusso ottenuto é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso su reti. Determinare poi il cammino minimo dal nodo 1 al nodo 6. Quanto costa? Trovare il taglio da 1 a 6 di capacitá minima ed il flusso massimo. Dire se il flusso massimo trovato é di base e se sí quale é la base.

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -x_1^2 - 2\,x_2^2 \\ -x_1 + 1 \leq 0 \\ -x_2 + 1 \leq 0 \\ x_1 + x_2 - 6 \leq 0 \end{cases}$$

E' un problema di ottimizzazione convesso? Il minimo globale esiste? I vincoli sono regolari? Eseguire un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe ed un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $x_k = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$. Trovare i minimi globali e locali.

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.**

$$\begin{cases} \max 540\, x_1 + 590\, x_2 \\ 0.7\, x_1 + 0.8\, x_2 \leq 18 \\ 1.7\, x_1 + 1.4\, x_2 \leq 16 \\ 1.9\, x_1 + 2.1\, x_2 \leq 16 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

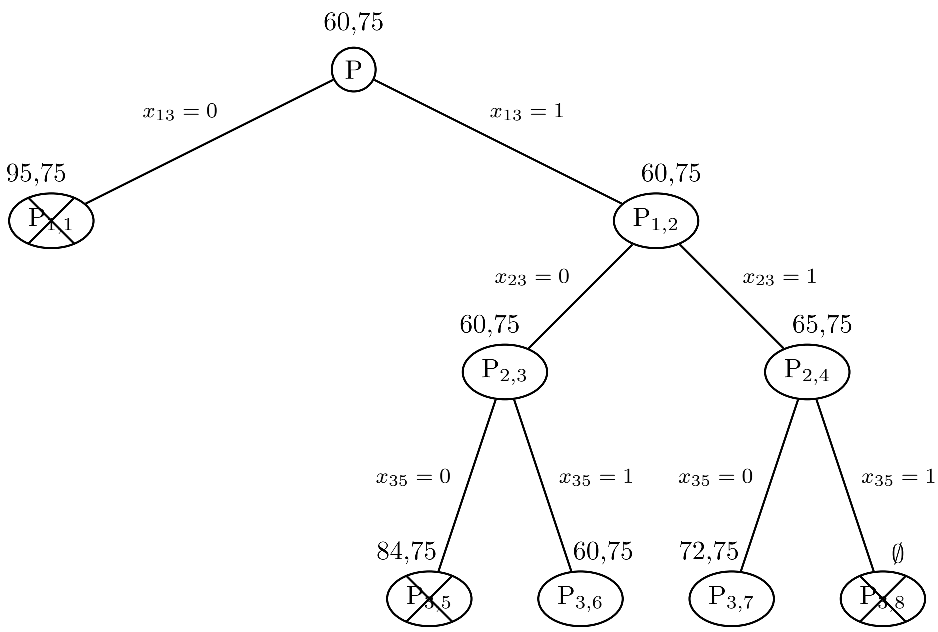
La base iniziale é $(4, 5)$. L'indice uscente é il 4 mentre l'indice entrante é il 3. Il nuovo vertice é $(160/19, 0)$ che é anche la soluzione ottima. In caso di sylos va aggiunto il vincolo di interezza e quindi la soluzione ottima appena trovata é una valutazione superiore di valore 4547 mentre $(8, 0)$ é la valutazione inferiore di valore 4320. Il taglio di Gomory é dato da $x_1 + x_2 \leq 8$

**Esercizio 2.**

a) 1–albero: ( 1 , 2 ) ( 1 , 3 ) ( 2 , 4 ) ( 2 , 5 ) ( 3 , 5 ), $v_I(P) = 60$

b) ciclo: 1 – 3 – 5 – 2 – 4, $v_S(P) = 75$

c)




**Esercizio 3.**

| | iterazione 1 | iterazione 2 |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (2,3) (3,4) (3,5) (4,6) | (1,2) (2,4) (3,4) (3,5) (4,6) |
| Archi di U | (1,3) | (1,3) |
| $x$ | (0, 5, 3, 0, 0, 10, 4, 0, 6, 0) | (0, 5, 0, 3, 0, 7, 4, 0, 6, 0) |
| $\pi$ | (0, 8, 12, 20, 21, 24) | |
| Arco entrante | (2,4) | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 5 , 3 | |
| Arco uscente | (2,3) | |

La sequenza dei cammini aumentanti é $1 - 2 - 6, 1 - 3 - 6, 1 - 2 - 3 - 6$ con i $\delta$ pari a 11, 5 e 1 rispettivamente, con flusso massimo $x = (12, 5, 1, 0, 11, 0, 0, 6, 0, 0)$ di valore 17. Il taglio é $N_s = \{1\}$. Il cammino minimo é 1-2-6 di costo 12.

**Esercizio 4.**

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ | $(0, -1)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $(3, 0)$ | $\frac{7}{6}$ | $\frac{7}{6}$ | $(5, 1)$ |

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ | $-3x_1 - 4x_2$ | (1 ,5) | $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ | 1 | $(1, 5)$ |

Il minimo assoluto é $x = (1, 5)$, mentre $x = (5, 1)$ é minimo locale.

# Esame di Ricerca Operativa del 30/01/20

| NOME | | COGNOME | |
|---|---|---|---|

**Esercizio 1.** Una ditta produce latte liquido e in polvere. Il latte liquido viene venduto in cartocci da un litro, ciascuno dei quali occupa un volume di 0.002 $m^3$. Il profitto ottenuto dalla vendita di un litro di latte è di 1.20 Euro. Il latte in polvere viene venduto in barattoli da 2, 1.5 e 1 kg rispettivamente. Il costo che la ditta sostiene per la produzione di 1 kg di latte in polvere è di 5 Euro. La seguente tabella riporta i prezzi di vendita dei barattoli e i volumi occupati:

| Barattolo | Prezzo (Euro) | Volume occupato ($m^3$) |
|---|---|---|
| 2 kg | 24 | 0.004 |
| 1.5 kg | 16 | 0.003 |
| 1 kg | 12 | 0.002 |

La ditta deve soddisfare la domanda di mercato stimata in almeno 600 litri di latte liquido e almeno 200 kg di latte in polvere. Il latte prodotto sarà trasportato con un veicolo a temperatura controllata di capacità 28.3 $m^3$. Determinare quanto produrre dei diversi tipi di latte per massimizzare il profitto. Scrivere i comandi Matlab e trovare la soluzione ottima. Quale capacità minima deve avere il veicolo per soddisfare le richieste?

**Esercizio 2.** Si consideri una rete di cittá le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 26 | 20 | 24 | 19 |
| **2** | | 34 | 23 | 22 |
| **3** | | | 27 | 21 |
| **4** | | | | 32 |

Scrivere un modello matematico per trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo sulla rete di cittá. Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo ed una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 2. Applicare poi un passo dell'algoritmo di ricerca locale. Scrivere i comandi Matlab e trovare la soluzione ottima.

**Esercizio 3.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 548 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 15 | 7 | 23 | 13 | 21 | 8 | 6 |
| Volumi | 20 | 60 | 342 | 177 | 32 | 298 | 94 |

Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo dei rendimenti. Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo. Calcolare la soluzione ottima. Se la ditta avesse necessitá di caricare il bene 1 o il bene 2 ma non insieme cosa cambierebbe nel modello? E nella soluzione ottima?

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.**

| variabili decisionali | modello |
|---|---|
| $x_1$ = numero di cartocci di latte prodotti<br>$x_2$ = numero di barattoli di latte da 2 kg<br>$x_3$ = numero di barattoli di latte da 1.5 kg<br>$x_4$ = numero di barattoli di latte da 1 kg | $\begin{cases} \max\ 1.2\ x_1 + 24\ x_2 + 16\ x_3 + 12\ x_4 \\ \quad -5\ (2\ x_2 + 1.5\ x_3 + x_4) \\ x_1 \geq 600 \\ 2\ x_2 + 1.5\ x_3 + x_4 \geq 200 \\ 0.002\ x_1 + 0.004\ x_2 + 0.003\ x_3 + 0.002\ x_4 \leq 28.3 \\ x_i \geq 0,\ \ i = 1,2,3,4 \end{cases}$ |

COMANDI DI MATLAB

| | |
|---|---|
| `c = [-1.2; -14; -8.5; -7]` | |
| `A = [0 -2 -1.5 -1;0.002 0.004 0.003 0.002]` | `b = [-200; 28.3]` |
| `Aeq = []` | `beq = []` |
| `lb = [600; 0; 0; 0]` | `ub = []` |

Soluzione ottima $x = (600, 0, 0, 13550)$ di valore 95570.

**Esercizio 2.**
3–albero: ( 1 , 3 ) ( 1 , 5 ) ( 2 , 4 ) ( 2 , 5 ) ( 3 , 5 ) $\qquad v_I(P) = 105$
ciclo: $2 - 5 - 1 - 3 - 4 \qquad v_S(P) = 111$
soluzione ottima $1 - 3 - 5 - 2 - 4 \qquad v(P) = 110$
**Esercizio 3.**
sol. ammissibile $= (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$, $v_I(P) = 62$
sol. ottima del rilassamento $= \left(1, 1, \dfrac{259}{342}, 1, 1, 0, 0\right)$ $v_S(P) = 73$
Nel caso descritto bisogna aggiungere il vincolo $x_1 + x_2 \leq 1$

## Esame di Ricerca Operativa del 3/6/19

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Un'azienda produce 2 tipi di laminati (X e Y) che devono essere lavorati in 4 reparti: Assemblaggio (A), Taglio (T), Rifinitura X (RX), Rifinitura Y (RY). Le ore necessarie in ogni reparto per produrre un quintale di laminato e le disponibilitá in ore di ogni reparto sono indicate nella seguente tabella:

| | A | T | RX | RY |
|---|---|---|---|---|
| Laminato X | 30 | 10 | 20 | 0 |
| Laminato Y | 20 | 20 | 0 | 30 |
| Disponibilitá | 120 | 85 | 62 | 105 |

I 2 tipi di laminati vengono venduti rispettivamente a 8, 11 migliaia di euro al quintale.

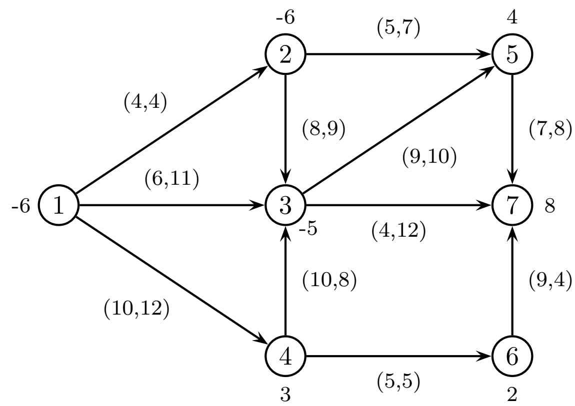
Scrivere un modello matematico per determinare quanti quintali di laminato di ogni tipo produrre in modo da massimizzare il profitto e scrivere i comandi di Matlab. $(3.1, 1.35)$ é la soluzione ottima? Se no, utilizzarla per trovarne una migliore (non graficamente) e dire se é la soluzione ottima.
Supponiamo che la produzione dell'azienda siano fogli di laminato e che il guadagno sia ora inteso a foglio. Trovare una valutazione superiore ed una inferiore. Costruire un piano di taglio di Gomory.

**Esercizio 2.** Un istituto bancario ha la possibilitá di aprire fino ad un massimo di nove nuove filiali nelle province toscane. Nella tabella sono riportati il costo di apertura in migliaia di euro e il numero di potenziali nuovi clienti che si possono acquisire.

| Provincia | FI | LI | LU | GR | FI | SI | AR | SI | PI |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Costo | 50 | 40 | 30 | 25 | 40 | 50 | 60 | 40 | 30 |
| Potenziali clienti | 300 | 100 | 250 | 200 | 400 | 120 | 100 | 100 | 400 |

Avendo a disposizione un budget di 200.000 euro scrivere e risolvere il problema di stabilire dove aprire le nuove filiali per massimizzare il numero di potenziali nuovi clienti da acquisire.
Se l'istituto sa che non puó aprire piú di una filiale nella provincia di Firenze cosa si puó dire con la soluzione ottima appena trovata? In generale la soluzione ottima potrebbe rimanere inalterata? Se sí, fornire un esempio.

**Esercizio 3.** Su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.




Scegliendo come albero di copertura $T = \{(1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (3,5)\ (4,6)\ (5,7)\}$, l'arco $(2,5)$ come arco di $U$ ed i rimanenti in $L$, il flusso é ottimo? Se no, trovarne uno migliore. Determinare poi il cammino minimo dal nodo 1 al nodo 6 ed il taglio da 1 a 7 di capacitá minima della rete.

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 2\, x_1\, x_2 + x_1 + 4\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ é il poliedro di vertici $(0,1)$ , $(-1,-5)$ , $(-3,-5)$ e $(-3,-1)$. Partendo dal punto iniziale $(-3,-11/3)$ fare un passo del metodo del gradiente proiettato ed uno del metodo di Frank-Wolfe e confrontarli. Il punto (-3,-1) é la soluzione ottima del problema?

## SOLUZIONI

**Esercizio 1.** $x_1$ = quintali di laminato $X$; $x_2$ = quintali di laminato $Y$

$$\begin{cases} \max 8\,x_1 + 11\,x_2 \\ 30\,x_1 + 20\,x_2 \leq 120 \\ 10\,x_1 + 20\,x_2 \leq 85 \\ 20\,x_1 \leq 62 \\ 304\,x_2 \leq 105 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

La soluzione $x = (3.1, 1.35)$ é data dalla base 1, 3 e la soluzione duale associata é $y = (11/20, 0, -17/40, 0, 0, 0)$. Indice uscente $h = 3$. La matrice $W$ é: $\begin{pmatrix} 0 & -1/20 \\ -1/20 & 3/40 \end{pmatrix}$ ed i rapporti sono $r_2 = 27$ e $r_4 = 86/3$, indice entrante $k = 2$.

La nuova soluzione di base é: $x = (7/4, 27/8) = (1.75, 3.375)$ che é quella ottima.
Nel caso dei fogli al modello va aggiunto il vincolo di interezza é la soluzione ottima trovata ci dá la valutazione superiore 51. Se arrotondiamo $x = (1, 3)$ otteniamo la valutazione inferiore 41. La matrice $\tilde{A}$ é: $\begin{pmatrix} 1/20 & -1/20 \\ -1/40 & 3/40 \end{pmatrix}$ ed il piano di taglio $r = 1$ é: $11\,x_1 + 20\,x_2 \leq 86$

**Esercizio 2.**
Il modello é quello dello zaino binario. L'algoritmo dei rendimenti $(9, 5, 3, 4, 1, 2, 8, 6, 7)$ fornisce una $v_I = 1550$ data da $x = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1)$ ed una $v_S = 1612$ data da $x = (1, 5/8, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1)$. Poi si effettua il Branch and Bound. Se non si puó aprire piú di una filiale a Firenze bisognerebbe aggiungere il vincolo $x_1 + x_5 \leq 1$.

**Esercizio 3.**

| | iterazione 1 | iterazione 2 |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7) | (1,2) (1,3) (1,4) (3,7) (4,6) (5,7) |
| Archi di U | (2,5) | (2,5) |
| $x$ | (1, 0, 5, 0, 7, 5, 0, 0, 2, 8, 0) | (1, 0, 5, 0, 7, 0, 5, 0, 2, 3, 0) |
| $\pi$ | (0, 4, 6, 10, 15, 15, 22) | (0, 4, 6, 10, 3, 15, 10) |
| Arco entrante | (3,7) | (2,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 12 , 5 | 7 , 1 |
| Arco uscente | (3,5) | (1,2) |

La sequenza dei cammini aumentanti é $1-3-7, 1-2-3-7, 1-2-5-7, 1-4-6-7, 1-4-3-5-7$ con flusso massimo 24. Il taglio é $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

**Esercizio 4.**

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-3, -\frac{11}{3}\right)$ | $(-1, 0)$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $(0, 2)$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $(-3, -1)$ |

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-3, -\frac{11}{3}\right)$ | $-\frac{19}{3}x_1 - 2x_2$ | (0 ,1) | $\left(3, \frac{14}{3}\right)$ | $\frac{85}{168}$ | $\left(-\frac{83}{56}, -\frac{47}{36}\right)$ |

I moltiplicatori sono discordi $\left(-\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$ quindi non é soluzione ottima

**Esame di Ricerca Operativa del 7/1/20**

**Esercizio 1.** Una ditta produce produce yogurt di due tipi: cereali e frutta. Nella produzione sono utilizzati yogurt intero, fiocchi di frumento, fiocchi d'avena, lamponi, fragole e zucchero. Settimanalmente la ditta dispone di 40 kg di fiocchi di frumento, 30 kg di fiocchi d'avena, 50 kg di lamponi, 60 kg di fragole e 100 kg di zucchero. I fabbisogni specifici di materia prima (in gr), per 100 gr di prodotto, sono indicati nella seguente tabella:

| | Yogurt | |
|---|---|---|
| Materia prima | cereali | frutta |
| fiocchi di frumento | 13 | 0 |
| fiocchi d'avena | 8 | 0.2 |
| lamponi | 0 | 15 |
| fragole | 0.5 | 20 |
| zucchero | 9 | 12 |

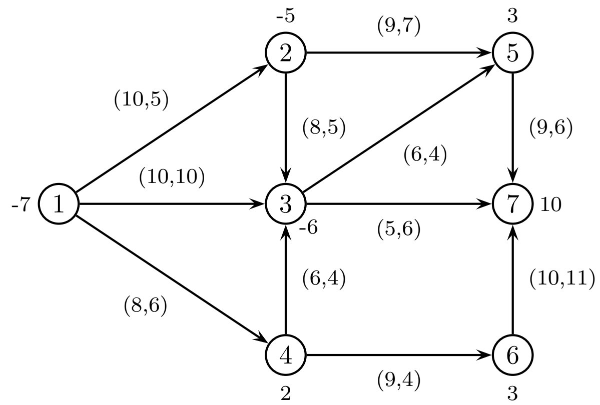
I costi per la produzione di un kg di yogurt ai cereali sono 0.9 Euro mentre per quello alla frutta sono 1.2 Euro. Si vuole determinare quanti Kg di yogurt ai cereali e alla frutta produrre settimanalmente in modo da massimizzare il profitto, tenendo conto che i prezzi di vendita sono di 2.5 Euro e 3.6 Euro al Kg rispettivamente per lo yogurt ai cereali e quello alla frutta.
La soluzione $x = (0, 300)$ é ottima? Se no, effettuare un passo dell'algoritmo del simplesso. Fare una stima inferiore ed una superiore del valore ottimo se l'azienda producesse, negli stessi reparti e con la stessa tabella, non chili di yogurt ma scatole di yogurt. Calcolare poi un taglio di Gomory.

**Esercizio 2.** Si consideri il problema di caricare (in modo binario) un camion di portata massima pari a 250 quintali, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti.

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 9 | 11 | 23 | 12 | 5 | 10 | 21 |
| Volumi | 119 | 129 | 55 | 230 | 43 | 73 | 3 |

Calcolare una valutazione superiore considerando il rilassamento $x \geq 0$. La soluzione ottima di tale rilassamento continuo é un vertice? Se sí quale é la base? Scrivere l'equazione di un piano di taglio di Gomory. Calcolare poi una valutazione superiore ed una inferiore considerando il rilassamento $0 \leq x \leq 1$. Eseguire l'algoritmo del Branch and Bound istanziando almeno 2 variabili.

**Esercizio 3.** Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.




Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,2), (1,4), (2,5), (3,5), (3,7) e (4,6), l'arco (5,7) come arco saturo e gli archi rimanenti in $L$, il flusso ottenuto é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso su reti. Determinare poi l'albero dei cammini minimi di radice 1 e scrivere il flusso ad esso associato e dire se é di base e se sí quale é la base. Trovare il taglio da 1 a 6 di capacitá minima ed il flusso massimo.

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max \ -6\, x_1^2 - 2\, x_1\, x_2 - 4\, x_2^2 + 9\, x_1 - 9\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ é il poliedro di vertici $(3, -4)$ , $(2, -5)$ , $(0, 4)$ e $(-3, 2)$.
E' un problema di ottimizzazione convesso? Eseguire un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe ed un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $x^k = \left(\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}\right)$. Trovare il massimo globale, se esiste.

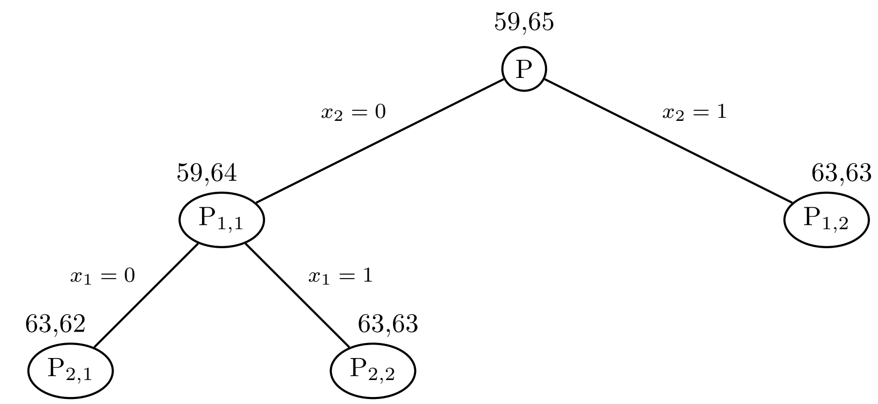
# SOLUZIONI

**Esercizio 1.**

| variabili decisionali | modello |
|---|---|
| $x_1 =$ Kg yogurt ai cereali <br> $x_2 =$ Kg yogurt alla frutta | $\begin{cases} \max\ 2.5\ x_1 + 3.6\ x_2 - 0.9\ x_1 - 1.2\ x_2 \\ 130\ x_1 \leq 40000 \\ 80\ x_1 + 2\ x_2 \leq 30000 \\ 150\ x_2 \leq 50000 \\ 5\ x_1 + 200\ x_2 \leq 60000 \\ 90\ x_1 + 120\ x_2 \leq 100000 \\ x_i \geq 0,\ \ i = 1,2 \end{cases}$ |

La base iniziale é $(4, 6)$ e la relativa soluzione duale é: $y = (0, 0, 0, 3/25, 0, -77/50, 0)$. L'indice uscente é 6 mentre quello entrante é 1. La nuova base dá la soluzione ottima $(307.7, 292.3)$. In caso di scatole va aggiunto il vincolo di interezza e quindi la soluzione trovata é una valutazione superiore di valore 11939 mentre $(307, 292)$ é la valutazione inferiore di valore 11920. Il taglio di Gomory é dato da $x_1 \leq 307$

**Esercizio 2.** Nel caos intero la soluzione del rilassato é $x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 250/3)$ di valore 1750. Una valutazione inferiore del valore ottimo tramite algoritmo dei rendimenti é data da $x = (0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$ con $v_I(P) = 59$. Una valutazione superiore data dal rilassamento continuo. $x = (0, \frac{76}{129}, 1, 0, 1, 1, 1)$ con $v_S(P) = 65$




La soluzione ottima é $x = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$ di valore ottimo $= 63$

**Esercizio 3.**

| | iterazione 1 | |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) | (1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) |
| Archi di U | (5,7) | (5,7) |
| $x$ | (2, 0, 5, 0, 7, 2, 4, 0, 3, 6, 0) | (0, 2, 5, 0, 5, 4, 4, 0, 3, 6, 0) |
| $\pi$ | (0, 10, 13, 8, 19, 17, 18) | |
| Arco entrante | (1,3) | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 2 , 2 | |
| Arco uscente | (1,2) | |

L'albero die cammini minimi é (1,2), (1,3), (1,4), (3,5), (3,7) e (4,6). Il flusso ottimo é $x = (1, 3, 2, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$. Il flusso massimo é di valore 4 con $N_t = 6$

**Esercizio 4.**

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}\right)$ | $(1, -1)$ | $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ | $(7, 7)$ | $\dfrac{2}{21}$ | $\dfrac{1}{12}$ | $\left(\dfrac{35}{12}, -\dfrac{49}{12}\right)$ |

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}\right)$ | $-29/3x_1 + 71/3x_2$ | (0,4) | (-7/3, 26/3) | 683/1756 | (7511/5268,-3413/2634) |

Il massimo assoluto é il vertice della parabola $x = (45/46, -63/46)$ .

**Esame di Ricerca Operativa del 02/09/15**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 8\,x_1 - 9\,x_2 \\ -x_1 - 2\,x_2 \leq 4 \\ -6\,x_1 - x_2 \leq 2 \\ 4\,x_1 + 3\,x_2 \leq 26 \\ -2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 14 \\ 6\,x_1 - x_2 \leq 28 \\ 5\,x_1 + x_2 \leq 27 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {5, 6} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {3,4} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una fabbrica produce scarpe e scarponi. Il costo ed il ricavo sono dati in euro nella seguente tabella.

| | scarpe | scarponi |
|---|---|---|
| costo produzione | 18 | 22 |
| prezzo vendita | 40 | 46 |

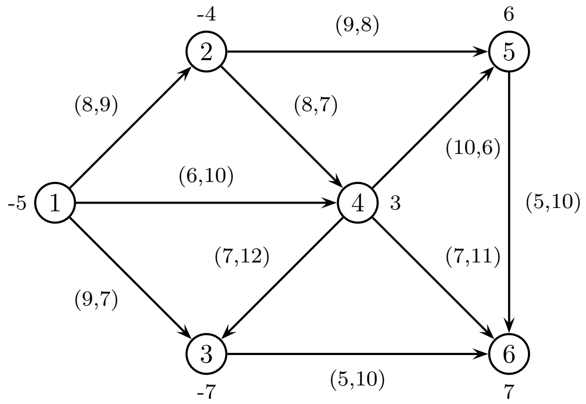
L'azienda dispone di un budget mensile pari a 66.000 euro. La produzione di cento paia (scarpe o scarponi) richiede l'utilizzo dell'impianto per 10 ore. L'impianto è disponibile 12 ore la giorno. Stabilire la produzione mensile che massimizzi il profitto.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

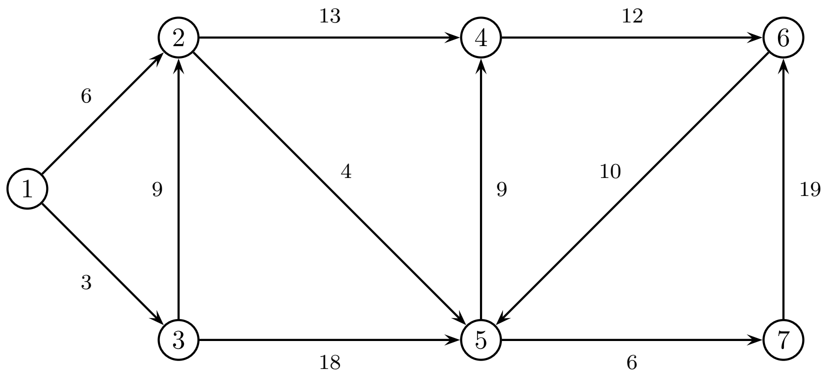



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,4) (3,6) (4,5) (4,6) | (2,5) | $x =$ | | |
| (1,2) (1,4) (2,5) (4,3) (5,6) | (4,5) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

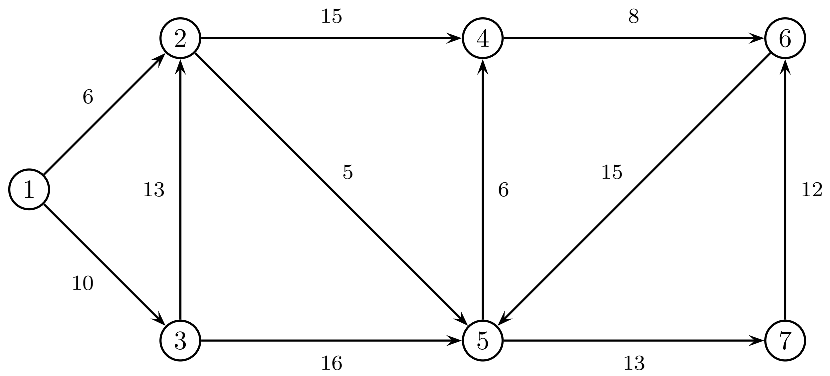
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (2,5) (3,6) (4,3) (4,5) | |
| Archi di U | (2,4) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 14\ x_2 \\ 17\ x_1 + 9\ x_2 \leq 49 \\ 9\ x_1 + 12\ x_2 \leq 64 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 10 | 41 | 62 | 92 |
| **2** | | 27 | 54 | 56 |
| **3** | | | 11 | 13 |
| **4** | | | | 94 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{45}$, $x_{35}$, $x_{15}$.

**Esercizio 9.** Studiare i punti stazionari della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 8x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0, \quad x_1^2 - x_2 - 2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(0,\ -2)$ | | | | | | | |
| $(0,\ -1)$ | | | | | | | |
| $\left(\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{7}{4}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(-\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{7}{4}\right)$ | | | | | | | |
| $(0,\ 1)$ | | | | | | | |
| $(0,\ 2)$ | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -2\ x_1^2 + 10\ x_1 x_2 - 4\ x_2^2 - 5\ x_1 + 4\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(1, -2)$ , $(3, 1)$ , $(-2, 3)$ e $(-3, -2)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{5}{3}, -2\right)$ | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 8\,x_1 - 9\,x_2 \\ -x_1 - 2\,x_2 \leq 4 \\ -6\,x_1 - x_2 \leq 2 \\ 4\,x_1 + 3\,x_2 \leq 26 \\ -2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 14 \\ 6\,x_1 - x_2 \leq 28 \\ 5\,x_1 + x_2 \leq 27 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (0,\ -2)$ | SI | NO |
| $\{5,\ 6\}$ | $y = \left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{53}{11},\ -\frac{46}{11}\right)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

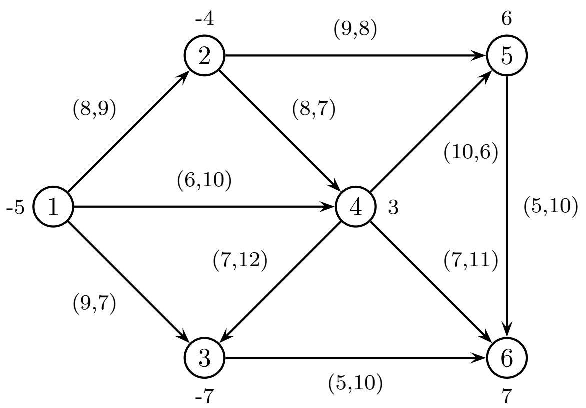
| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{3,\ 4\}$ | $(2,\ 6)$ | $\left(0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ -\frac{10}{3},\ 0,\ 0\right)$ | 4 | $\frac{324}{5},\ 18,\ 18$ | 5 |
| 2° iterazione | $\{3,\ 5\}$ | $(5,\ 2)$ | $\left(0,\ 0,\ -\frac{23}{11},\ 0,\ \frac{30}{11},\ 0\right)$ | 3 | $22,\ \frac{187}{3}$ | 1 |

**Esercizio 3.**

COMANDI DI MATLAB

```
c=[-22;-24]

A=[18 22 ; 1 1 ]            b=[ 66000 ; 3600 ]

Aeq=[]                      beq=[]

lb=[0 ; 0]                  ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

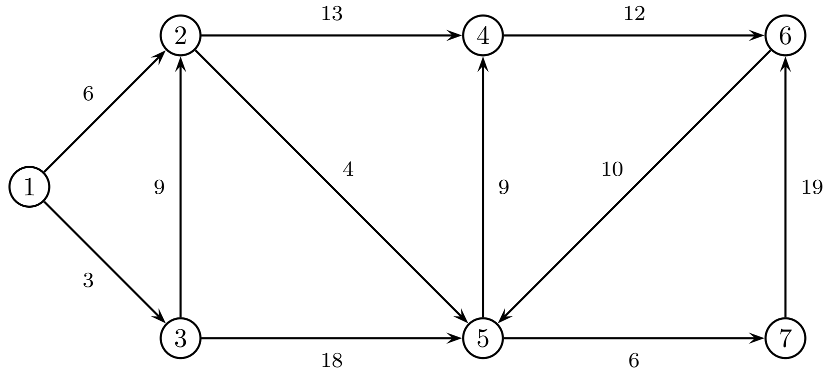



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,4) (3,6) (4,5) (4,6) | (2,5) | $x = (4,\ 0,\ 1,\ 0,\ 8,\ 7,\ 0,\ -2,\ 0,\ 0)$ | NO | SI |
| (1,2) (1,4) (2,5) (4,3) (5,6) | (4,5) | $\pi = (0,\ 8,\ 13,\ 6,\ 17,\ 22)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

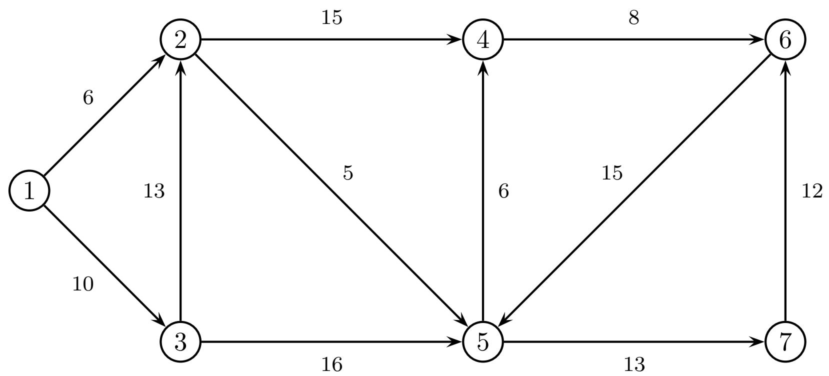
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (2,5) (3,6) (4,3) (4,5) | (1,2) (1,3) (2,5) (3,6) (4,5) |
| Archi di U | (2,4) | (2,4) |
| $x$ | (5, 0, 0, 7, 2, 7, 0, 4, 0, 0) | (5, 0, 0, 7, 2, 7, 0, 4, 0, 0) |
| $\pi$ | (0, 8, 14, 7, 17, 19) | (0, 8, 9, 7, 17, 14) |
| Arco entrante | (1,3) | (1,4) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 2 , 0 | 2 , 2 |
| Arco uscente | (4,3) | (2,5) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 2 | | 5 | | 7 | | 4 | | 6 | |
| nodo 2 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 |
| nodo 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| nodo 4 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 19 | 2 | 19 | 2 | 19 | 2 | 19 | 2 | 19 | 2 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 21 | 3 | 10 | 2 | 10 | 2 | 10 | 2 | 10 | 2 | 10 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 35 | 7 | 31 | 4 | 31 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 16 | 5 | 16 | 5 | 16 | 5 | 16 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3 | | 2, 5 | | 4, 5 | | 4, 7 | | 4, 6 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 2 - 5 - 7 | 5 | (5, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0) | 5 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 8 | (5, 8, 0, 5, 0, 8, 0, 0, 13, 0, 0) | 13 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N_t = \{7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 14\ x_2 \\ 17\ x_1 + 9\ x_2 \leq 49 \\ 9\ x_1 + 12\ x_2 \leq 64 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \frac{16}{3}\right)$ $v_S(P) = 74$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(0, 5)$ $v_I(P) = 70$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $x_2 \leq 5$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 10 | 41 | 62 | 92 |
| **2** | | 27 | 54 | 56 |
| **3** | | | 11 | 13 |
| **4** | | | | 94 |

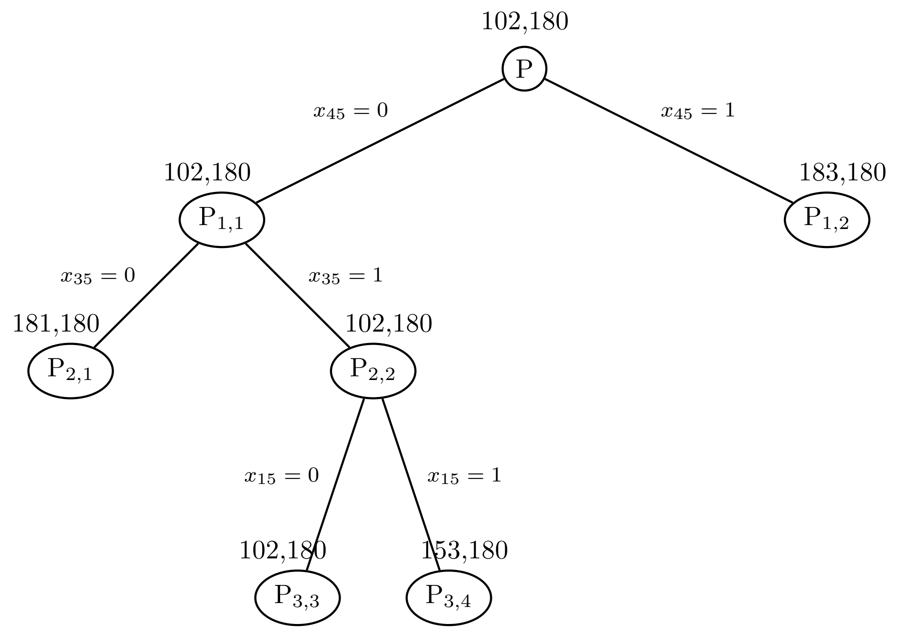
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: ( 1 , 2 ) ( 1 , 3 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) $v_I(P) = 102$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5.

ciclo: 5 – 3 – 4 – 2 – 1 $v_S(P) = 180$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{45}$, $x_{35}$, $x_{15}$.




**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 8x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0, \quad x_1^2 - x_2 - 2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(0,\ -2)$ | $(0,16)$ | | NO | NO | NO | SI | NO |
| $(0,\ -1)$ | $(-6,0)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |
| $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2},\ \dfrac{7}{4}\right)$ | $(0,1)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{2},\ \dfrac{7}{4}\right)$ | $(0,1)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(0,\ 1)$ | $(2,0)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(0,\ 2)$ | $(0,0)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -2\ x_1^2 + 10\ x_1\, x_2 - 4\ x_2^2 - 5\ x_1 + 4\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(1,-2)$ , $(3,1)$ , $(-2,3)$ e $(-3,-2)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{5}{3},-2\right)$ | $-\frac{55}{3}\,x_1 + \frac{10}{3}\,x_2$ | $(3\ ,1)$ | $\left(\frac{14}{3},3\right)$ | $\dfrac{5}{8}$ | $\left(\dfrac{5}{4},-\dfrac{1}{8}\right)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 03/07/18**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema

$$\begin{cases} \min\ 12\ y_1 + 4\ y_2 + 2\ y_3 + 2\ y_4 + 6\ y_5 + 8\ y_6 \\ 3\ y_1 + y_2 - 2\ y_3 - 2\ y_4 - y_5 - 3\ y_6 = 8 \\ y_1 - y_2 + y_3 - 3\ y_4 + 3\ y_5 + 4\ y_6 = 5 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| | Base | $x$ | degenere | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| passo 1 | {2,6} | | | | | | |
| passo 2 | | | | | | | |

**Esercizio 2.** Una cooperativa di taxi deve garantire il servizio 24/24 ore al giorno. Ogni taxi lavora 8 ore consecutive ogni 24 ore. Il numero minimo di taxi in ogni fascia oraria é dato dalla seguente tabella:

| Fascia oraria | Numero minimo | Fascia oraria | Numero minimo |
|---|---|---|---|
| 2-6 | 3 | 14-18 | 7 |
| 6-10 | 8 | 18-22 | 12 |
| 10-14 | 10 | 22-2 | 4 |

Formulare un modello che trovi il numero minimo di taxi necesssari ad espletare il servizio

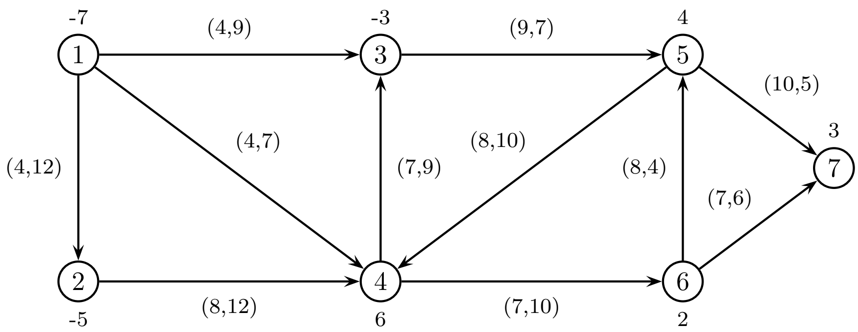
variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                                  intcon=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 3.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti sulla seguente rete (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).




| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,7) (6,5) | |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | | |
| degenere | | |
| $\pi$ | | |
| degenere | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 14\ x_1 + 5\ x_2 \\ 16\ x_1 + 10\ x_2 \leq 43 \\ 13\ x_1 + 15\ x_2 \leq 40 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

| | |
|---|---|
| sol. ottima del rilassamento = | $v_S(P) =$ |

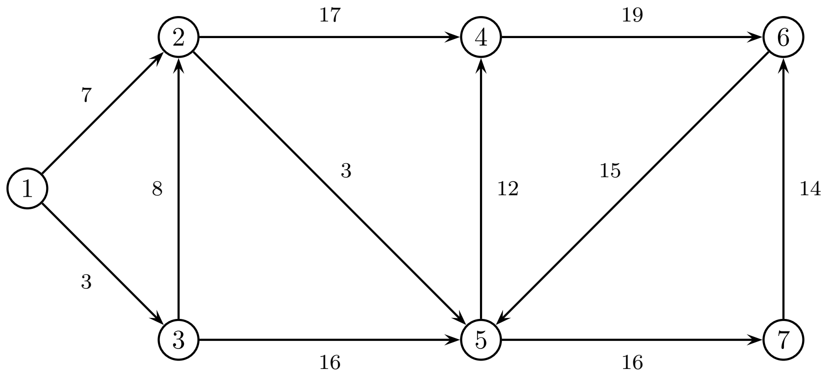
b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo.

| | |
|---|---|
| sol. ammissibile = | $v_I(P) =$ |

c) Calcolare un taglio di Gomory.

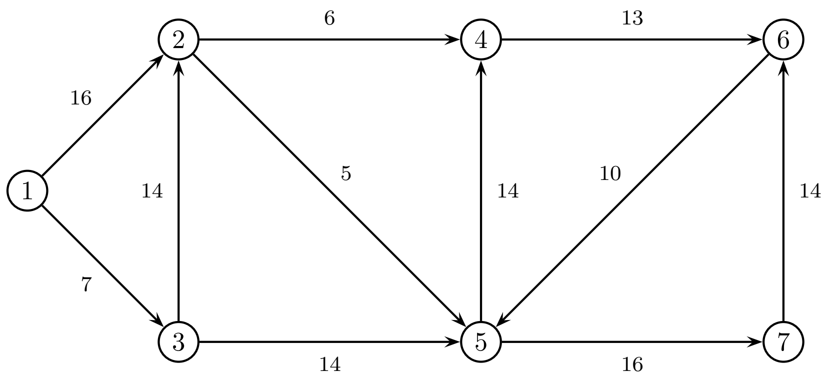
| | |
|---|---|
| $r =$ | taglio: |

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 6.** Si consideri il problema di caricare un contenitore di volume pari a 571 decimetri cubici, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 21 | 17 | 18 | 11 | 8 | 12 | 24 |
| Volumi | 256 | 411 | 447 | 108 | 228 | 26 | 289 |

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1 + 3x_2^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0, \quad x_1 + (0.25)x_2^2 - 1 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

**Esercizio 8.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -4\ x_1^2 - 4\ x_1 x_2 - 4\ x_2^2 - 9\ x_1 + 3\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(1,3)$ , $(3,0)$ , $(4,2)$ e $(-1,-1)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.**

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1^\circ$ iterazione | $\{2,\ 6\}$ | $(24,\ 20)$ | $(0,\ 47,\ 0,\ 0,\ 0,\ 13)$ | 1 | $\frac{47}{15},\ \frac{13}{4}$ | 2 |
| $2^\circ$ iterazione | $\{1,\ 6\}$ | $\left(\frac{8}{3},\ 4\right)$ | $\left(\frac{47}{15},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{7}{15}\right)$ | 5 | $\frac{47}{5},\ \frac{7}{10}$ | 6 |

**Esercizio 2.**

COMANDI DI MATLAB

```
c=[1 1 1 1 1 1]            intcon=[1 2 3 4 5 6]

beq=[]                     b=[-3;-8;-10;-7;-12;-4]

Aeq=[]                     A=[-10000-1;-1-10000;0-1-1000;00-1-100;000-1-10;0000-1-1]

lb=[0 0 0 0 0 0]           ub=[]
```

**Esercizio 3.**

| | $1^\circ$ iterazione | $2^\circ$ iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,7) (6,5) | (1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,7) (6,7) |
| Archi di U | (3,5) | (3,5) |
| $x$ | $(0,\ 4,\ 3,\ 5,\ 7,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0)$ | $(0,\ 4,\ 3,\ 5,\ 7,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0)$ |
| degenere | SI | SI |
| $\pi$ | $(0,\ -4,\ 4,\ 4,\ 19,\ 11,\ 29)$ | $(0,\ -4,\ 4,\ 4,\ 8,\ 11,\ 18)$ |
| degenere | NO | NO |
| Arco entrante | (6,7) | (3,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 6 , 0 | 4 , 3 |
| Arco uscente | (6,5) | (5,7) |

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 14\ x_1 + 5\ x_2 \\ 16\ x_1 + 10\ x_2 \leq 43 \\ 13\ x_1 + 15\ x_2 \leq 40 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{43}{16}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 37$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo.

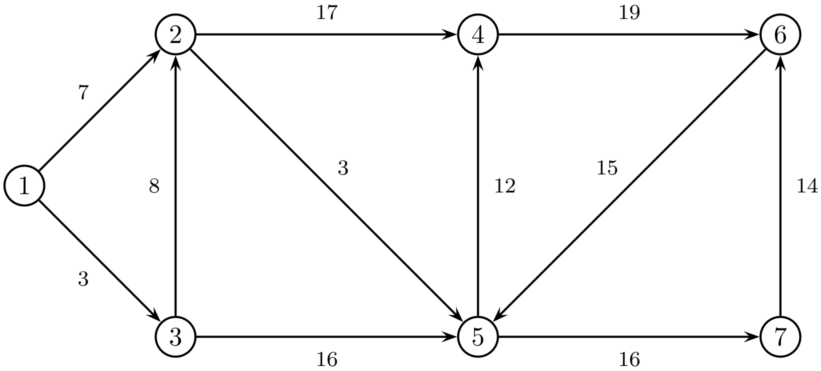
sol. ammissibile $= (2, 0)$ $\qquad v_I(P) = 28$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad x_1 \leq 2$

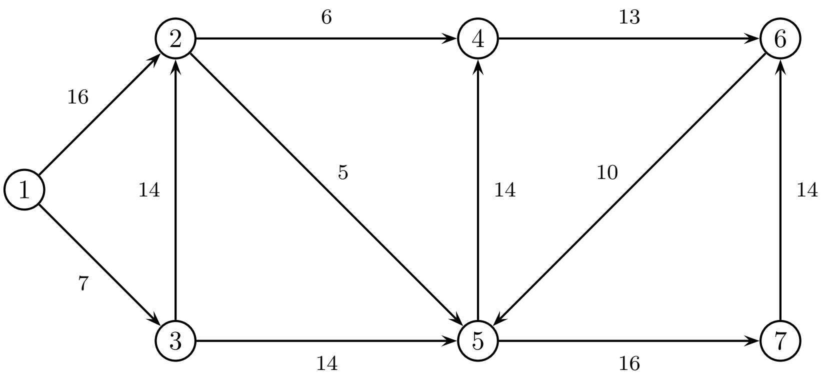
$r = 4$ $\qquad 3\,x_1 + x_2 \leq 8$

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 2 | | 5 | | 4 | | 7 | | 6 | |
| nodo 2 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 |
| nodo 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| nodo 4 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 24 | 2 | 22 | 5 | 22 | 5 | 22 | 5 | 22 | 5 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 19 | 3 | 10 | 2 | 10 | 2 | 10 | 2 | 10 | 2 | 10 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 41 | 4 | 40 | 7 | 40 | 7 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 26 | 5 | 26 | 5 | 26 | 5 | 26 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3 | | 2, 5 | | 4, 5 | | 4, 7 | | 6, 7 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 2 - 5 - 7 | 5 | (5, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0) | 5 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 7 | (5, 7, 0, 5, 0, 7, 0, 0, 12, 0, 0) | 12 |
| 1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7 | 4 | (9, 7, 4, 5, 0, 7, 4, 0, 16, 4, 0) | 16 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N_t = \{7\}$

**Esercizio 6.** Si consideri il problema di caricare un contenitore di volume pari a 571 decimetri cubici, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 21 | 17 | 18 | 11 | 8 | 12 | 24 |
| Volumi | 256 | 411 | 447 | 108 | 228 | 26 | 289 |

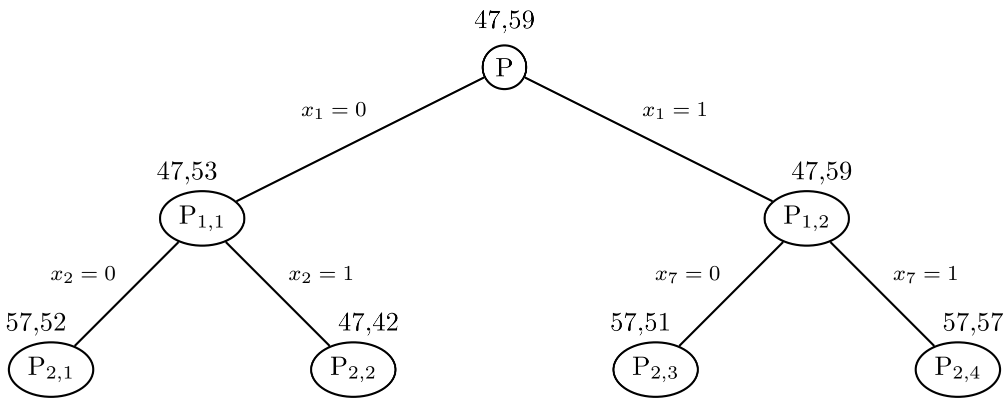
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

| | |
|---|---|
| sol. ammissibile $= (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$ | $v_I(P) = 47$ |

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

| | |
|---|---|
| sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{37}{64}, 0, 0, 1, 0, 1, 1\right)$ | $v_S(P) = 59$ |

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima $= (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$ valore ottimo $= 57$

**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1 + 3x_2^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 - 4 \le 0, \quad x_1 + (0.25)x_2^2 - 1 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(1,\ 0)$ | $(0, 1)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(-2,\ 0)$ | $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(0,\ 2)$ | $\left(-\frac{13}{4}, 1\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(0,\ -2)$ | $\left(-\frac{13}{4}, 1\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(-\frac{1}{6},\ \frac{\sqrt{143}}{6}\right)$ | $(-3, 0)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |
| $\left(-\frac{1}{6},\ -\frac{\sqrt{143}}{6}\right)$ | $(-3, 0)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 8.**

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right)$ | $(2, -1)$ | $\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$ | $\left(\frac{53}{3}, \frac{106}{3}\right)$ ((1, 2) | $\frac{1}{53}$ ($\frac{1}{3}$ ) | $\frac{1}{53}$ ($\frac{1}{3}$) | $(4, 2)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 04/02/16**

| **(Cognome)** | **(Nome)** | **(Corso di laurea)** |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 4\ y_1 + 2\ y_2 + 7\ y_3 + 11\ y_4 + 28\ y_5 + 35\ y_6 \\ -y_1 - 5\ y_2 + y_3 - 2\ y_4 + 5\ y_5 + 6\ y_6 = 1 \\ -2\ y_1 - y_2 + y_3 + 3\ y_4 - 2\ y_5 - y_6 = -3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x =$ | | |
| $\{1, 5\}$ | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {2,6} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una fabbrica produce 4 tipi di lavatrici ed è divisa in 2 stabilimenti A e B. La fabbrica dispone di 65 operai in A e 40 in B ognuno dei quali lavora 8 ore al giorno per 5 giorni la settimana. In tabella abbiamo: tempo di lavorazione in ore e la richiesta minima di mercato da soddisfare

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 1.2 | 1.5 | 1.2 |
| B | 1.5 | 0.8 | 2 | 0.5 |
| Richiesta | 500 | 400 | 200 | 150 |

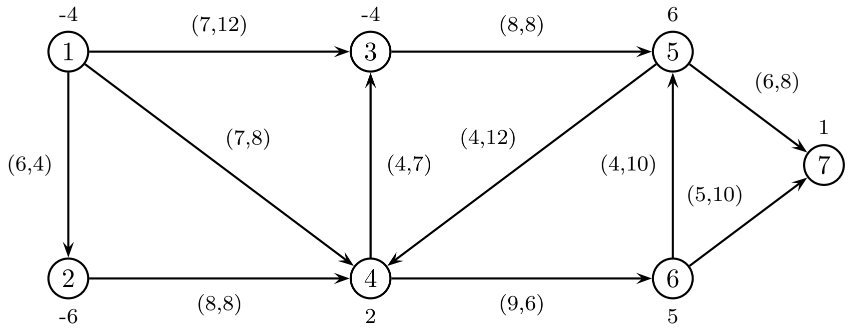
Sapendo che il prezzo di vendita è rispettivamente di 500, 600, 900, e 300 euro per ogni lavatrice, determinare il piano produttivo migliore.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

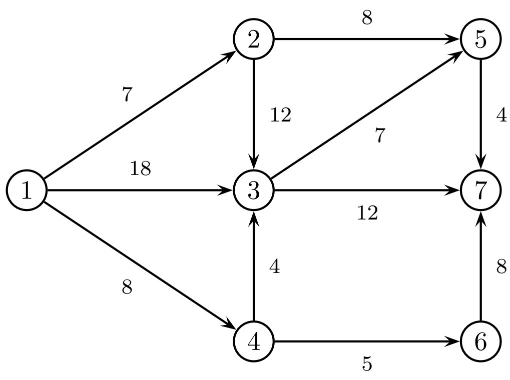



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,3) (1,4)<br>(5,4) (5,7) (6,5) | (3,5) | $x =$ | | |
| (1,3) (2,4) (3,5)<br>(4,3) (4,6) (6,7) | (5,7) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

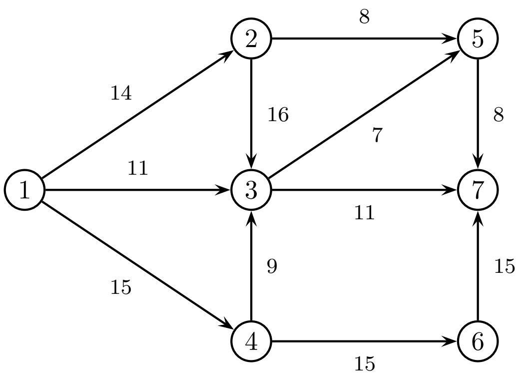
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,3) (2,4) (4,6) (5,4) (5,7) | |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 5\ x_1 + 6\ x_2 \\ 17\ x_1 + 10\ x_2 \geq 50 \\ 11\ x_1 + 16\ x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 10 | 41 | 62 | 52 |
| **2** | | 27 | 54 | 96 |
| **3** | | | 11 | 13 |
| **4** | | | | 94 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

| | |
|---|---|
| 4–albero: | $v_I(P) =$ |

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

| | |
|---|---|
| ciclo: | $v_S(P) =$ |

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{45}$, $x_{35}$, $x_{25}$.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 8x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0, \quad x_1^2 - x_2 - 2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(0, \; -2)$ | | | | | | | |
| $(0, \; -1)$ | | | | | | | |
| $\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{7}{4}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{7}{4}\right)$ | | | | | | | |
| $(0, \; 1)$ | | | | | | | |
| $(0, \; 2)$ | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -2\,x_1^2 - 8\,x_1\,x_2 + 2\,x_2^2 + 3\,x_1 - 9\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(4, -4)$ , $(1, 1)$ , $(-2, 2)$ e $(-4, -2)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 4\, y_1 + 2\, y_2 + 7\, y_3 + 11\, y_4 + 28\, y_5 + 35\, y_6 \\ -y_1 - 5\, y_2 + y_3 - 2\, y_4 + 5\, y_5 + 6\, y_6 = 1 \\ -2\, y_1 - y_2 + y_3 + 3\, y_4 - 2\, y_5 - y_6 = -3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (0,\ -2)$ | SI | NO |
| $\{1,\ 5\}$ | $y = \left(\frac{13}{12},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{5}{12},\ 0\right)$ | SI | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

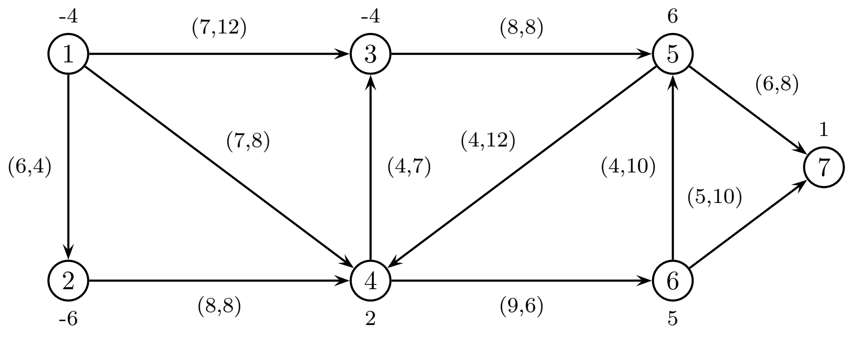
| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{2,\ 6\}$ | $(3,\ -17)$ | $\left(0,\ \frac{17}{11},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{16}{11}\right)$ | 1 | $\frac{17}{13},\ \frac{16}{9}$ | 2 |
| 2° iterazione | $\{1,\ 6\}$ | $\left(\frac{66}{13},\ -\frac{59}{13}\right)$ | $\left(\frac{17}{13},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{5}{13}\right)$ | 5 | $\frac{17}{7},\ \frac{5}{12}$ | 6 |

**Esercizio 3.**

COMANDI DI MATLAB

```
c=-[ 500 ; 600 ; 900 ; 300 ; 500 ; 600 ; 900 ; 300 ]

A=[ 1 1.2 1.5 1.2 0000;000001.5 0.8 2 0.5;-1000-1000; 0-1000-100;00-1000-10;000-1000-1 ]

b=[ 2600 ; 1600 ; -500 ; -400 ; -200 ; -150 ]

Aeq=[]  beq=[]

lb=[0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 , 0 ; 0 ]  ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

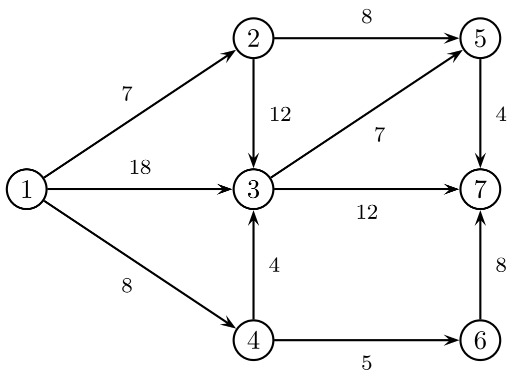



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,3) (1,4) (5,4) (5,7) (6,5) | (3,5) | $x = (-6,\ 4,\ 6,\ 0,\ 8,\ 0,\ 0,\ -4,\ 1,\ -5,\ 0)$ | NO | NO |
| (1,3) (2,4) (3,5) (4,3) (4,6) (6,7) | (5,7) | $\pi = (0,\ -5,\ 7,\ 3,\ 15,\ 12,\ 17)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

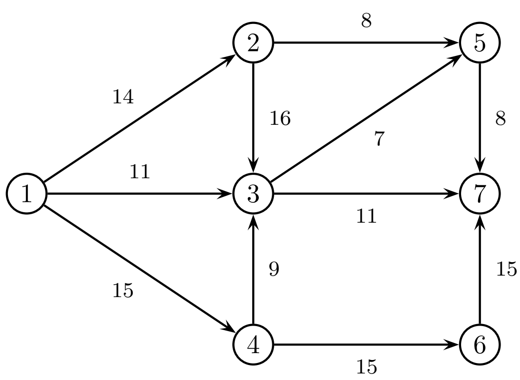
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,3) (2,4) (4,6) (5,4) (5,7) | (1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,4) (5,7) |
| Archi di U | (3,5) | (3,5) |
| $x$ | (0, 4, 0, 6, 8, 0, 5, 1, 1, 0, 0) | (0, 4, 0, 6, 8, 0, 5, 1, 1, 0, 0) |
| $\pi$ | (0, 6, 7, 14, 10, 23, 16) | (0, −1, 7, 7, 3, 16, 9) |
| Arco entrante | (1,4) | (3,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 8 , 0 | 8 , 1 |
| Arco uscente | (1,2) | (5,4) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 2 | | 4 | | 3 | | 6 | | 5 | | 7 | |
| nodo 2 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 |
| nodo 3 | 18 | 1 | 18 | 1 | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 |
| nodo 4 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 15 | 2 | 15 | 2 | 15 | 2 | 15 | 2 | 15 | 2 | 15 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 13 | 4 | 13 | 4 | 13 | 4 | 13 | 4 | 13 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 24 | 3 | 21 | 6 | 19 | 5 | 19 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 3, 4, 5 | | 3, 5, 6 | | 5, 6, 7 | | 5, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 11 | (0, 11, 0, 0, 0, 0, 11, 0, 0, 0, 0) | 11 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 8 | (8, 11, 0, 0, 8, 0, 11, 0, 0, 8, 0) | 19 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 15 | (8, 11, 15, 0, 8, 0, 11, 0, 15, 8, 15) | 34 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 5\ x_1 + 6\ x_2 \\ 17\ x_1 + 10\ x_2 \geq 50 \\ 11\ x_1 + 16\ x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{40}{27}, \frac{67}{27}\right)$ $\qquad v_I(P) = 23$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (2, 3)$ $\qquad v_S(P) = 28$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 16\,x_1 + 10\,x_2 \geq 49$
$r = 2$ $\qquad 11\,x_1 + 15\,x_2 \geq 54$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 10 | 41 | 62 | 52 |
| **2** | | 27 | 54 | 96 |
| **3** | | | 11 | 13 |
| **4** | | | | 94 |

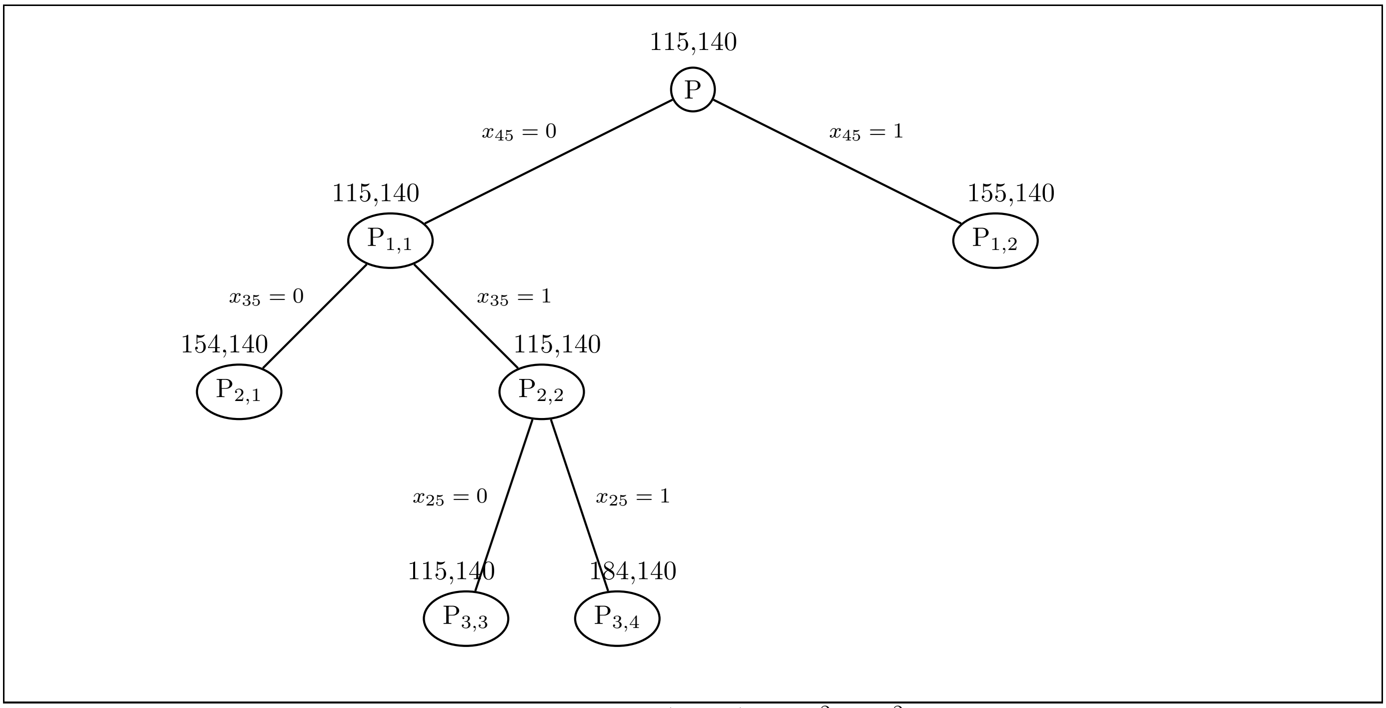
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: ( 1 , 2 ) ( 2 , 3 ) ( 2 , 4 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) $\qquad v_I(P) = 115$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: 3 – 4 – 2 – 1 – 5 $\qquad v_S(P) = 140$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{45}$, $x_{35}$, $x_{25}$.




**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 8x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 - x_2^2 + 1 \le 0, \quad x_1^2 - x_2 - 2 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(0,\ -2)$ | $(0, 16)$ | | NO | NO | NO | SI | NO |
| $(0,\ -1)$ | $(-6, 0)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{7}{4}\right)$ | $(0, 1)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(-\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{7}{4}\right)$ | $(0, 1)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(0,\ 1)$ | $(2, 0)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(0,\ 2)$ | $(0, 0)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -2\ x_1^2 - 8\ x_1 x_2 + 2\ x_2^2 + 3\ x_1 - 9\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(4, -4)$ , $(1, 1)$ , $(-2, 2)$ e $(-4, -2)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}\right)$ | $(-1, -4)$ | $\begin{pmatrix} 16/17 & -4/17 \\ -4/17 & 1/17 \end{pmatrix}$ | $\left(-\frac{92}{3}, \frac{23}{3}\right)$ | $\frac{4}{23}$ | $\frac{4}{23}$ | $(-4, -2)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 04/07/17**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ -5\, y_1 - 7\, y_2 + 12\, y_3 + 6\, y_4 + 5\, y_5 + 4\, y_6 + 9\, y_7 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 - 2\, y_6 - y_7 = -3 \\ 2\, y_1 + y_2 - y_3 - y_4 - y_6 - y_7 = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {2, 4} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {1,7} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una ditta produce vernici in tre diversi stabilimenti (Brescia, Bergamo, Cremona) e le vende a tre imprese edili (A, B, C). Il costo di produzione delle vernici varia a causa della diversa efficienza produttiva degli stabilimenti: la produzione costa 9.5 euro/kg nello stabilimento di Brescia, 11 euro/kg in quello di Bergamo e 10.5 euro/kg in quello di Cremona. Il costo (in euro) per spedire un kg di vernice da uno stabilimento ad un cliente è indicato nella seguente tabella:

| | imprese edili | | |
|---|---|---|---|
| stabilimento | A | B | C |
| Brescia | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| Bergamo | 0.3 | 0.35 | 0.15 |
| Cremona | 0.45 | 0.35 | 0.25 |

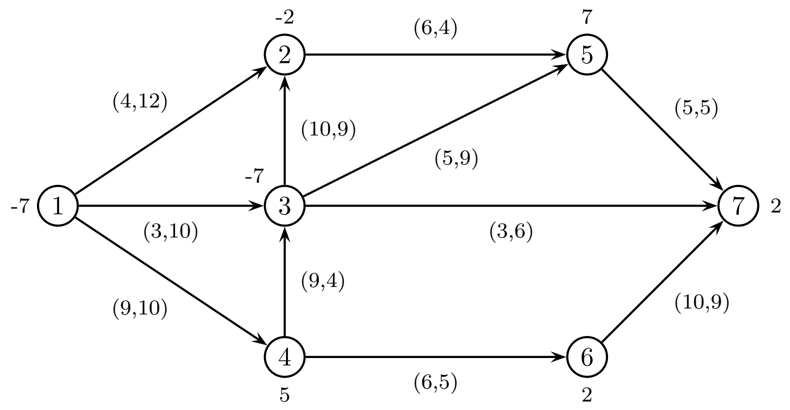
I tre stabilimenti possono produrre al massimo 8700, 9200 e 10900 kg di vernice all'anno. In base alle previsioni sulle vendite, la domanda annuale delle tre imprese edili è pari a 5600, 8100 e 6600 kg di vernice. Per bilanciare la produzione si richiede che la produzione nell'impianto di Brescia sia almeno la metà della produzione nell'impianto di Bergamo ed almeno un terzo della produzione nell'impianto di Cremona. Determinare quanti kg di vernice deve produrre la ditta in ogni stabilimento in modo da minimizzare il costo totale.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                                  intlinprog=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

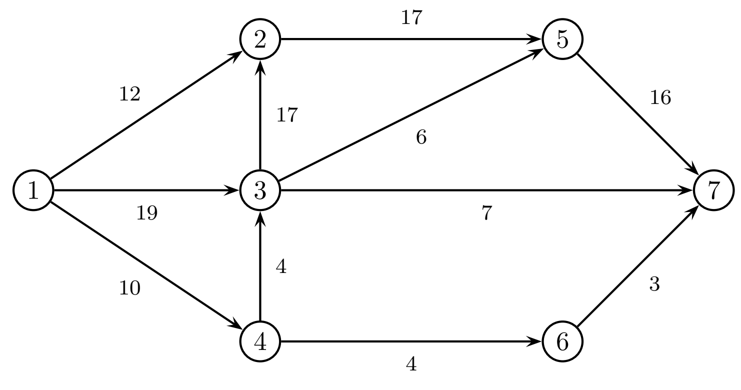


| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (5,7) | (6,7) | $x =$ | | |
| (1,2) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,7) | (3,2) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

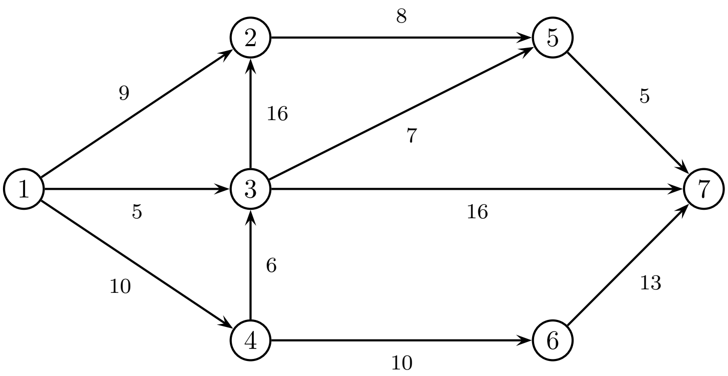
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (3,2) (3,5) (3,7) (4,6) (6,7) | |
| Archi di U | (2,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 6\ x_1 + 11\ x_2 \\ 15\ x_1 + 10\ x_2 \geq 56 \\ 13\ x_1 + 14\ x_2 \geq 55 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 516 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 6 | 21 | 5 | 16 | 11 | 7 | 24 |
| Volumi | 268 | 13 | 10 | 12 | 463 | 352 | 101 |

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ 4x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 4x_2 + 4 \leq 0, \quad x_2 \leq 2\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| (1,0) | | | | | | | |
| (0,2) | | | | | | | |
| (2,2) | | | | | | | |
| (1,2) | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -2\,x_1\,x_2 + x_1 - 8\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(4, -2)$ , $(-3, -4)$ , $(-1, 2)$ e $(0, -5)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{7}{3}, -2\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ -5\ y_1 - 7\ y_2 + 12\ y_3 + 6\ y_4 + 5\ y_5 + 4\ y_6 + 9\ y_7 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 - 2\ y_6 - y_7 = -3 \\ 2\ y_1 + y_2 - y_3 - y_4 - y_6 - y_7 = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (3,\ -4)$ | SI | NO |
| $\{2,\ 4\}$ | $y = (0,\ 1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0)$ | SI | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{1,\ 7\}$ | $(-13,\ 4)$ | $(2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 5)$ | 2 | $1,\ \frac{5}{3}$ | 1 |
| 2° iterazione | $\{2,\ 7\}$ | $(-1,\ -8)$ | $(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2)$ | 4 | 2 | 7 |

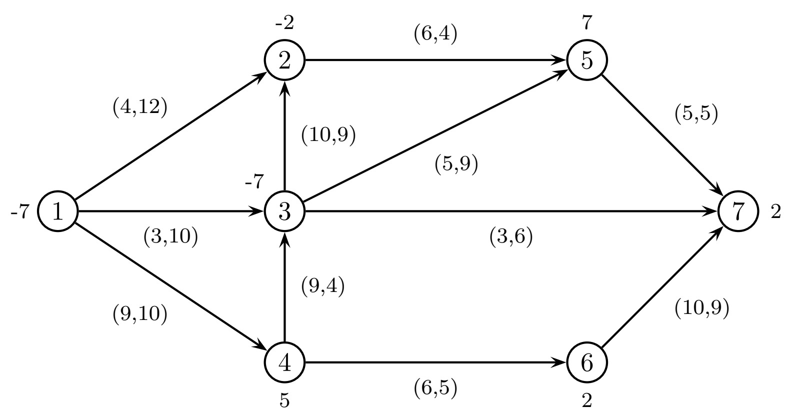
**Esercizio 3.**

Variabili decisionali: numerati con 1, 2 e 3 gli stabilimenti di Brescia, Bergamo e Cremona rispettivamente, e numerati con 1, 2 e 3 i clienti, indichiamo con $x_{ij}$ la quantità di vernice prodotta dall'impianto $i$ per il cliente $j$.

Modello:

$$\begin{cases} \min\ 9.80\ x_{11} + 9.90\ x_{12} + 10\ x_{13} + 11.30\ x_{21} + 11.35\ x_{22} + 11.15\ x_{23} + 10.95\ x_{31} + 10.85\ x_{32} + 10.75\ x_{33} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 8700 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 9200 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 10900 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 5600 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 8100 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 6600 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq (x_{21} + x_{22} + x_{23})/2 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq (x_{31} + x_{32} + x_{33})/3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

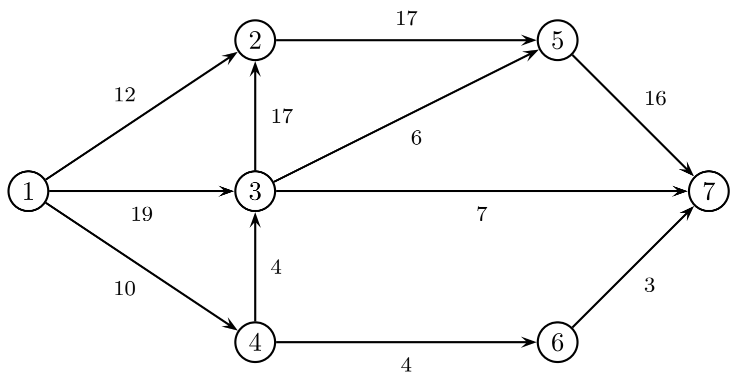



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (5,7) | (6,7) | $x = (-9,\ 0,\ 16,\ -7,\ 0,\ 7,\ 0,\ 0,\ 11,\ -7,\ 9)$ | NO | NO |
| (1,2) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,7) | (3,2) | $\pi = (0,\ 4,\ 15,\ 9,\ 20,\ 15,\ 25)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

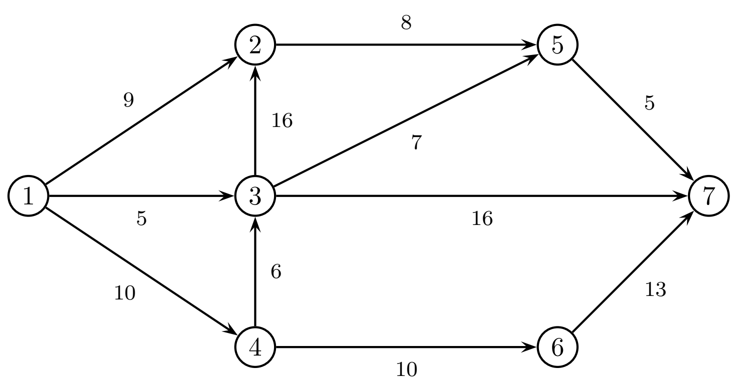
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (3,2) (3,5) (3,7) (4,6) (6,7) | (1,2) (1,4) (3,2) (3,5) (3,7) (4,6) |
| Archi di U | (2,5) | (2,5) |
| $x$ | (0, 0, 7, 4, 2, 3, 2, 0, 2, 0, 0) | (0, 0, 7, 4, 2, 3, 2, 0, 2, 0, 0) |
| $\pi$ | (0, 32, 22, 9, 27, 15, 25) | (0, 4, −6, 9, −1, 15, −3) |
| Arco entrante | (1,2) | (2,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 4 , 0 | 6 , 2 |
| Arco uscente | (6,7) | (3,2) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 4 | | 2 | | 3 | | 6 | | 7 | | 5 | |
| nodo 2 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 |
| nodo 3 | 19 | 1 | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 |
| nodo 4 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 29 | 2 | 20 | 3 | 20 | 3 | 20 | 3 | 20 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 21 | 3 | 17 | 6 | 17 | 6 | 17 | 6 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 3, 6 | | 3, 5, 6 | | 5, 6, 7 | | 5, 7 | | 5 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 5 | (0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0) | 5 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 5 | (5, 5, 0, 5, 0, 0, 5, 0, 0, 5, 0) | 10 |
| 1 - 4 - 3 - 7 | 6 | (5, 5, 6, 5, 0, 0, 11, 6, 0, 5, 0) | 16 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 4 | (5, 5, 10, 5, 0, 0, 11, 6, 4, 5, 4) | 20 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 5\}$ $N_t = \{3, 4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min \ 6\ x_1 + 11\ x_2 \\ 15\ x_1 + 10\ x_2 \geq 56 \\ 13\ x_1 + 14\ x_2 \geq 55 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{55}{13}, 0\right)$ $v_I(P) = 26$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (5, 0)$ $v_S(P) = 30$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $12\, x_1 + 13\, x_2 \geq 51$
$r = 3$ $11\, x_1 + 12\, x_2 \geq 47$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 516 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 6 | 21 | 5 | 16 | 11 | 7 | 24 |
| Volumi | 268 | 13 | 10 | 12 | 463 | 352 | 101 |

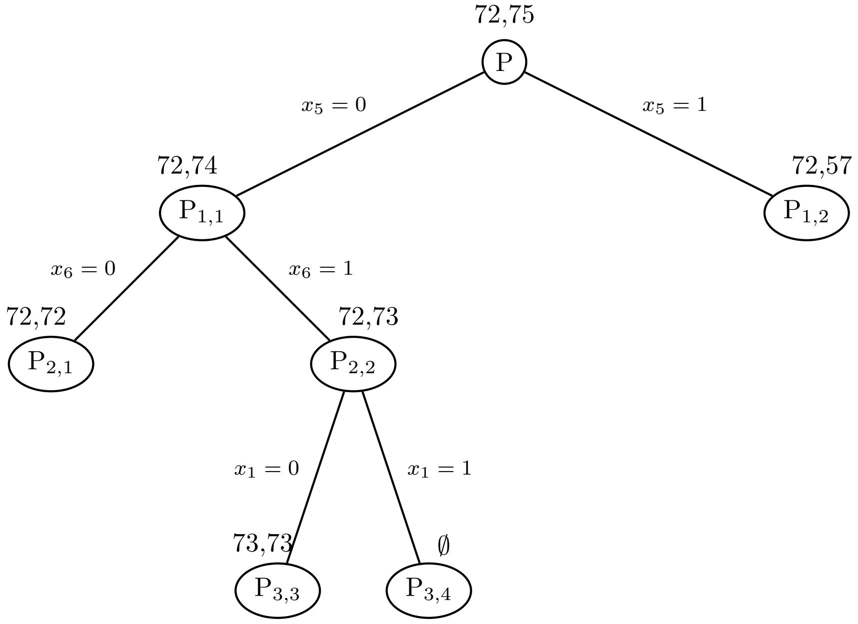
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (1, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$ $v_I(P) = 72$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, 1, 1, 1, \frac{380}{463}, 0, 1\right)$ $v_S(P) = 75$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima $= (0,1,1,1,0,1,1)$ valore ottimo $= 73$

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 4x_2 + 4 \le 0, \quad x_2 \le 2\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| (1,0) | (-1,0) | | SI | SI | NO | NO | NO |
| (0,2) | (-1/4,0) | | NO | NO | NO | NO | SI |
| (2,2) | (-1/4,0) | | NO | NO | NO | NO | SI |
| (1,2) | (0,0) | | NO | N0 | SI | SI | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -2\,x_1\,x_2 + x_1 - 8\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(4,-2)$ , $(-3,-4)$ , $(-1,2)$ e $(0,-5)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{7}{3},-2\right)$ | $(-3,1)$ | $\begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 \\ 3/10 & 9/10 \end{pmatrix}$ | $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ | $\frac{8}{3}$ | $\frac{8}{3}$ | $(-1,2)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 04/07/17**

(Cognome) (Nome) (Numero di Matricola)

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 12\ y_1 + 6\ y_2 - 5\ y_3 - 7\ y_4 + 5\ y_5 + 4\ y_6 + 9\ y_7 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 - 2\ y_6 - y_7 = -3 \\ -y_1 - y_2 + 2\ y_3 + y_4 - y_6 - y_7 = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {2, 4} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {4,7} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una ditta produce vernici in tre diversi stabilimenti (Brescia, Bergamo, Cremona) e le vende a tre imprese edili (A, B, C). Il costo di produzione delle vernici varia a causa della diversa efficienza produttiva degli stabilimenti: la produzione costa 9 euro/kg nello stabilimento di Brescia, 10.5 euro/kg in quello di Bergamo e 10 euro/kg in quello di Cremona. Il costo (in euro) per spedire un kg di vernice da uno stabilimento ad un cliente è indicato nella seguente tabella:

| | imprese edili | | |
|---|---|---|---|
| stabilimento | A | B | C |
| Brescia | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| Bergamo | 0.3 | 0.35 | 0.15 |
| Cremona | 0.45 | 0.35 | 0.25 |

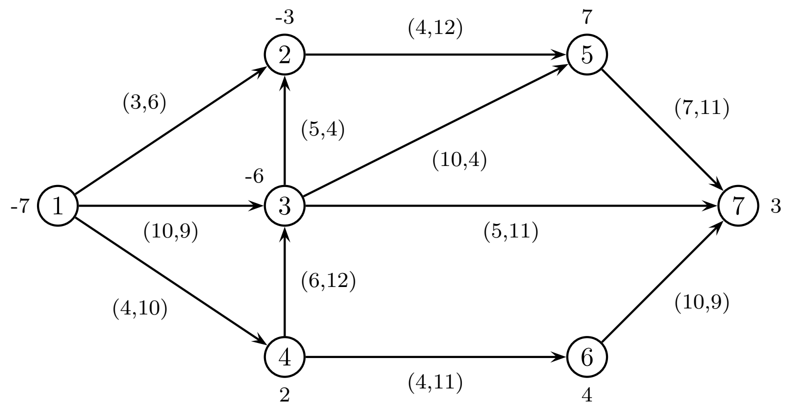
I tre stabilimenti possono produrre al massimo 8600, 9100 e 10800 kg di vernice all'anno. In base alle previsioni sulle vendite, la domanda annuale delle tre imprese edili è pari a 5500, 8000 e 6500 kg di vernice. Per bilanciare la produzione si richiede che la produzione nell'impianto di Brescia sia almeno la metà della produzione nell'impianto di Bergamo ed almeno un terzo della produzione nell'impianto di Cremona. Determinare quanti kg di vernice deve produrre la ditta in ogni stabilimento in modo da minimizzare il costo totale.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                                   intlinprog=

A=                                   b=

Aeq=                                 beq=

lb=                                  ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

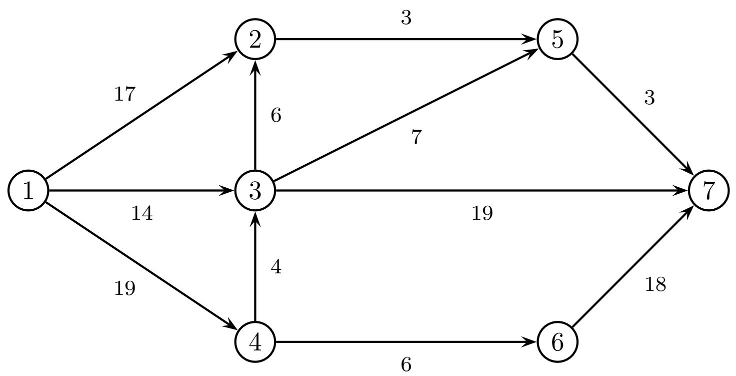



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7) | (3,7) | $x =$ | | |
| (1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (5,7) (6,7) | (3,7) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

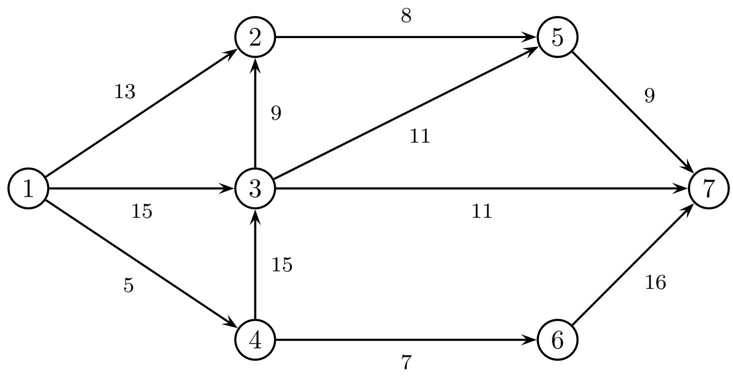
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7) | |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 10\ x_1 + 9\ x_2 \\ 16\ x_1 + 15\ x_2 \geq 67 \\ 10\ x_1 + 13\ x_2 \geq 42 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 516 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 18 | 10 | 17 | 11 | 21 | 5 | 22 |
| Volumi | 296 | 428 | 5 | 80 | 215 | 467 | 429 |

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 + 4 \leq 0, \quad x_1 \leq 2\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| (0,1) | | | | | | | |
| (2,0) | | | | | | | |
| (2,2) | | | | | | | |
| (2,1) | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -2\, x_1^2 + 8\, x_1 + 6\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(0,0)$ , $(-5,-2)$ , $(-3,-5)$ e $(-5,3)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-5, \frac{4}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 12\ y_1 + 6\ y_2 - 5\ y_3 - 7\ y_4 + 5\ y_5 + 4\ y_6 + 9\ y_7 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 - 2\ y_6 - y_7 = -3 \\ -y_1 - y_2 + 2\ y_3 + y_4 - y_6 - y_7 = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x = (3,\ -9)$ | SI | NO |
| $\{2, 4\}$ | $y = (0,\ 2,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$ | SI | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{4, 7\}$ | $(-1,\ -8)$ | $(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 2)$ | 2 | 2 | 7 |
| 2° iterazione | $\{2, 4\}$ | $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{13}{2}\right)$ | $(0,\ 2,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$ | 6 | $\frac{4}{3},\ 2$ | 2 |

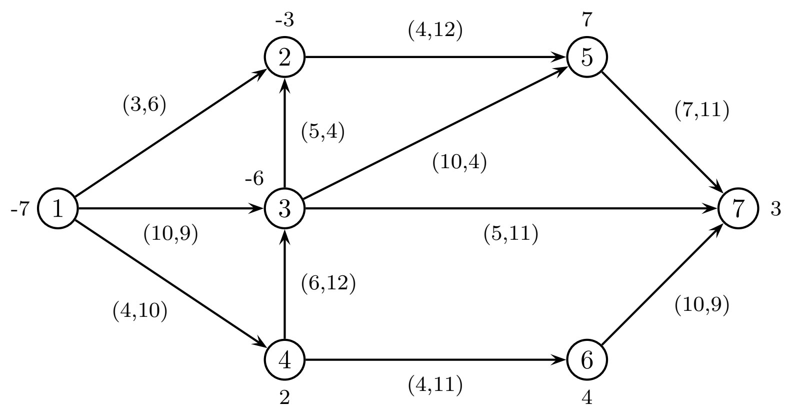
**Esercizio 3.**

Variabili decisionali: numerati con 1, 2 e 3 gli stabilimenti di Brescia, Bergamo e Cremona rispettivamente, e numerati con 1, 2 e 3 i clienti, indichiamo con $x_{ij}$ la quantità di vernice prodotta dall'impianto $i$ per il cliente $j$.

Modello:

$$\begin{cases} \min\ 9.30\ x_{11} + 9.40\ x_{12} + 9.50\ x_{13} + 10.80\ x_{21} + 10.85\ x_{22} + 10.65\ x_{23} + 10.45\ x_{31} + 10.35\ x_{32} + 10.25\ x_{33} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 8600 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 9100 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 10800 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 5500 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 8000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 6500 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq (x_{21} + x_{22} + x_{23})/2 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq (x_{31} + x_{32} + x_{33})/3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

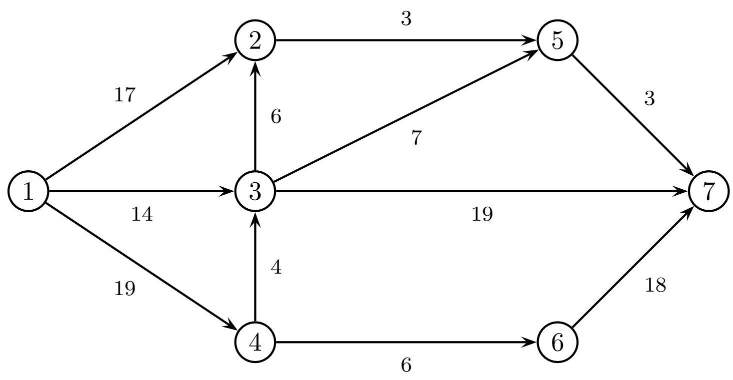



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7) | (3,7) | $x = (0,\ 0,\ 7,\ 3,\ 0,\ 0,\ 11,\ 5,\ 0,\ -4,\ -4)$ | NO | SI |
| (1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (5,7) (6,7) | (3,7) | $\pi = (0,\ 3,\ 10,\ 4,\ 20,\ 17,\ 27)$ | NO | SI |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

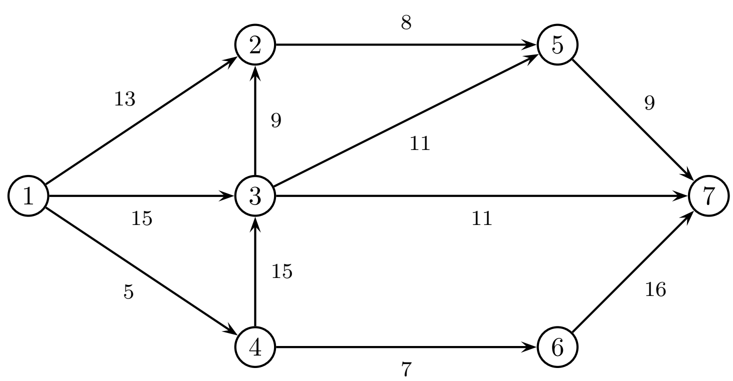
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7) | (1,2) (1,3) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) |
| Archi di U | (3,5) | (3,5) |
| $x$ | (0, 0, 7, 3, 0, 4, 2, 0, 5, 0, 1) | (0, 1, 6, 3, 0, 4, 3, 0, 4, 0, 0) |
| $\pi$ | (0, 3, 13, 4, 7, 8, 18) | (0, 3, 10, 4, 7, 8, 15) |
| Arco entrante | (1,3) | (3,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 9 , 1 | 6 , 1 |
| Arco uscente | (6,7) | (1,3) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 2 | | 4 | | 5 | | 7 | | 6 | |
| nodo 2 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 |
| nodo 3 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 |
| nodo 4 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 21 | 3 | 20 | 2 | 20 | 2 | 20 | 2 | 20 | 2 | 20 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 25 | 4 | 25 | 4 | 25 | 4 | 25 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | 33 | 3 | 33 | 3 | 33 | 3 | 23 | 5 | 23 | 5 | 23 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 4, 5, 7 | | 4, 5, 7 | | 5, 6, 7 | | 6, 7 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 11 | (0, 11, 0, 0, 0, 0, 11, 0, 0, 0, 0) | 11 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 8 | (8, 11, 0, 8, 0, 0, 11, 0, 0, 8, 0) | 19 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 1 | (8, 12, 0, 8, 0, 1, 11, 0, 0, 9, 0) | 20 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 5 | (8, 12, 5, 8, 0, 1, 11, 0, 5, 9, 5) | 25 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 10\ x_1 + 9\ x_2 \\ 16\ x_1 + 15\ x_2 \geq 67 \\ 10\ x_1 + 13\ x_2 \geq 42 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \frac{67}{15}\right)$ $\qquad v_I(P) = 41$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 5)$ $\qquad v_S(P) = 45$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad 15\,x_1 + 14\,x_2 \geq 63$

$r = 4$ $\qquad 3\,x_1 + 2\,x_2 \geq 9$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 516 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 18 | 10 | 17 | 11 | 21 | 5 | 22 |
| Volumi | 296 | 428 | 5 | 80 | 215 | 467 | 429 |

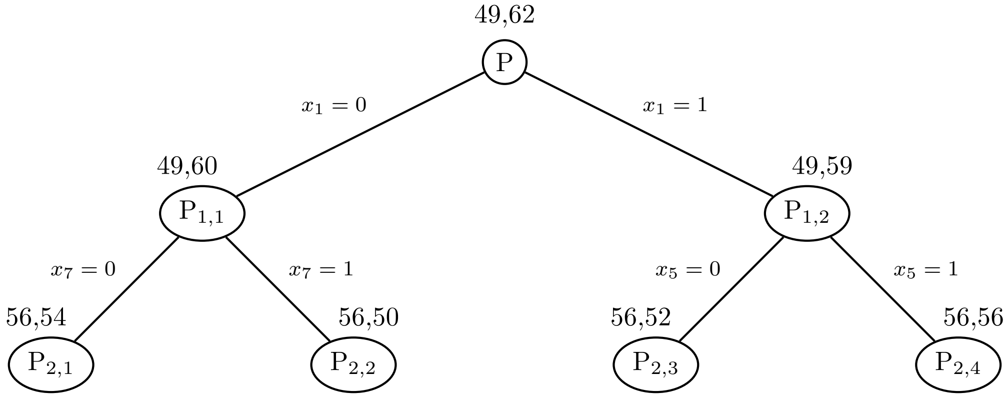
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$ $\qquad v_I(P) = 49$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{27}{37}, 0, 1, 1, 1, 0, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 62$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima = $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$ valore ottimo = 56

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 + 4 \le 0, \quad x_1 \le 2\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| (0,1) | (-1,0) | | SI | SI | NO | NO | NO |
| (2,0) | (-1/4,0) | | NO | NO | NO | NO | SI |
| (2,2) | (-1/4,0) | | NO | NO | NO | NO | SI |
| (2,1) | (0,0) | | NO | N0 | SI | SI | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -2\, x_1^2 + 8\, x_1 + 6\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(0,0)$ , $(-5,-2)$ , $(-3,-5)$ e $(-5,3)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-5, \frac{4}{3}\right)$ | $(-1, 0)$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $(0, -6)$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{5}{9}$ | $(-5, -2)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 05/02/19**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale.

$$\begin{cases} \min\ 17\ y_1 + 28\ y_2 + 16\ y_3 + 3\ y_4 + 3\ y_5 + 19\ y_6 \\ -6\ y_1 + 7\ y_2 + 4\ y_3 - 2\ y_4 - 2\ y_5 + 2\ y_6 = 2 \\ 10\ y_1 + 2\ y_2 - 3\ y_3 - 4\ y_4 + 2\ y_5 - y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| | Base | $x$ | Degenere? | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° passo | {5,6} | | | | | | |
| 2° passo | | | | | | | |

**Esercizio 2.** Un'azienda produce 4 tipi di TV (32, 40, 50 e 55 pollici) ed è divisa in 2 stabilimenti (A e B). L'azienda dispone di 40 operai in A e 50 in B ognuno dei quali lavora 8 ore al giorno per 5 giorni alla settimana. Le ore necessarie per produrre i TV e le richieste minime da soddisfare sono indicate nella seguente tabella:

| TV | 32" | 40" | 50" | 55" |
|---|---|---|---|---|
| Stabilimento A | 1.2 | 1.5 | 1.7 | 2 |
| Stabilimento B | 1.5 | 1.6 | 1.8 | 2.1 |
| Richiesta | 1000 | 700 | 600 | 400 |

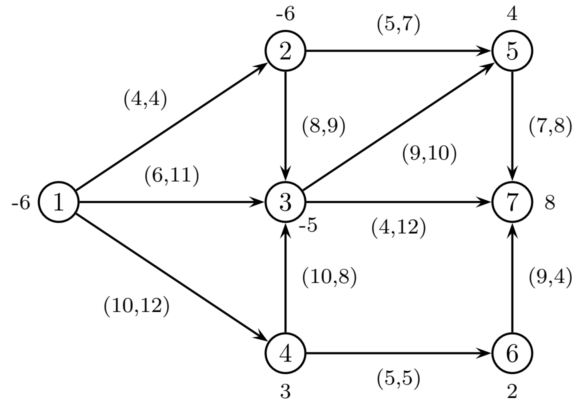
Sapendo che i 4 tipi di TV vengono venduti rispettivamente a 400, 600, 1000, e 1500 euro, l'azienda vuole determinare quanti TV di ogni tipo produrre nei due stabilimenti in modo da massimizzare il profitto.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                                  intcon=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 3.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti sulla seguente rete (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).




| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7) | |
| Archi di U | (2,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 9\ x_1 + 14\ x_2 \\ 15\ x_1 + 6\ x_2 \leq 61 \\ 13\ x_1 + 14\ x_2 \leq 65 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

| | |
|---|---|
| sol. ottima del rilassamento = | $v_S(P) =$ |

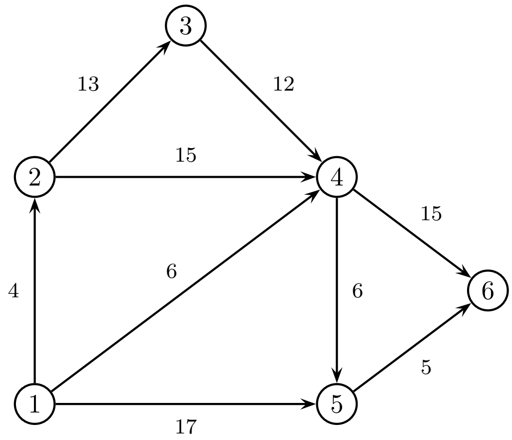
b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

| | |
|---|---|
| sol. ammissibile = | $v_I(P) =$ |

c) Calcolare un taglio di Gomory.

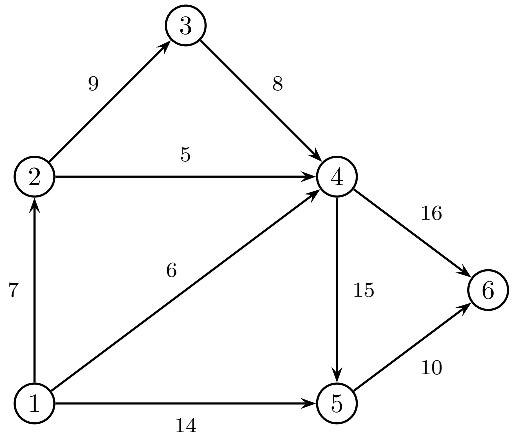
| | |
|---|---|
| $r =$ | taglio: |

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 6.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 30 | 27 | 30 | 49 |
| **2** | | 19 | 95 | 63 |
| **3** | | | 29 | 28 |
| **4** | | | | 61 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{23}$, $x_{24}$, $x_{45}$.

**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 8x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0, \quad x_1^2 - x_2 - 2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(0, \ -2)$ | | | | | | | |
| $(0, \ -1)$ | | | | | | | |
| $\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \ \frac{7}{4}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, \ \frac{7}{4}\right)$ | | | | | | | |
| $(0, \ 1)$ | | | | | | | |
| $(0, \ 2)$ | | | | | | | |

**Esercizio 8.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -4\,x_1\,x_2 - 4\,x_2^2 + 5\,x_1 + 10\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(0, 2)$ , $(2, 2)$ , $(-2, -3)$ e $(2, -3)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.**

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{5,\ 6\}$ | $\left(\frac{41}{2},\ 22\right)$ | $(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 3)$ | 1 | $\frac{2}{7},\ \frac{3}{4}$ | 5 |
| 2° iterazione | $\{1,\ 6\}$ | $\left(\frac{207}{14},\ \frac{74}{7}\right)$ | $\left(\frac{2}{7},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{13}{7}\right)$ | 2 | $\frac{4}{11},\ \frac{13}{41}$ | 6 |

**Esercizio 2.**

$$\begin{cases} \max\ 400\,(x_{1A}+x_{1B})+600\,(x_{2A}+x_{2B})+1000\,(x_{3A}+x_{3B})+1500\,(x_{4A}+x_{4B}) \\ 1.2\,x_{1A}+1.5\,x_{2A}+1.7\,x_{3A}+2\,x_{4A}\le 1600 \\ 1.5\,x_{1B}+1.6\,x_{2B}+1.8\,x_{3B}+2.1\,x_{4B}\le 2000 \\ x_{1A}+x_{1B}\ge 1000 \\ x_{2A}+x_{2B}\ge 700 \\ x_{3A}+x_{3B}\ge 600 \\ x_{4A}+x_{4B}\ge 400 \\ x_{ij}\ge 0 \\ x_{ij}\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

**Esercizio 3.**

| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7) | (1,2) (1,3) (1,4) (3,7) (4,6) (5,7) |
| Archi di U | (2,5) | (2,5) |
| $x$ | $(1,\ 0,\ 5,\ 0,\ 7,\ 5,\ 0,\ 0,\ 2,\ 8,\ 0)$ | $(1,\ 0,\ 5,\ 0,\ 7,\ 0,\ 5,\ 0,\ 2,\ 3,\ 0)$ |
| $\pi$ | $(0,\ 4,\ 6,\ 10,\ 15,\ 15,\ 22)$ | $(0,\ 4,\ 6,\ 10,\ 3,\ 15,\ 10)$ |
| Arco entrante | (3,7) | (2,5) |
| $\vartheta^+,\ \vartheta^-$ | 12 , 5 | 7 , 1 |
| Arco uscente | (3,5) | (1,2) |

**Esercizio 4.**

a)

sol. ottima del rilassamento $=\left(0,\frac{65}{14}\right)$ $v_S(P)=65$

b)

sol. ammissibile $=(0,4)$ $v_I(P)=56$

c)

$r=2$ $x_2\le 4$

$r=3$ $7\,x_1+8\,x_2\le 37$

**Esercizio 5.** a)

| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 2 | | 4 | | 5 | | 3 | | 6 | |
| nodo 2 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 |
| nodo 3 | $+\infty$ | $-1$ | 17 | 2 | 17 | 2 | 17 | 2 | 17 | 2 | 17 | 2 |
| nodo 4 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 |
| nodo 5 | 17 | 1 | 17 | 1 | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 21 | 4 | 17 | 5 | 17 | 5 | 17 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 4, 5 | | 3, 4, 5 | | 3, 5, 6 | | 3, 6 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b)

| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 4 - 6 | 6 | (0, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 6, 0) | 6 |
| 1 - 5 - 6 | 10 | (0, 6, 10, 0, 0, 0, 0, 6, 10) | 16 |
| 1 - 2 - 4 - 6 | 5 | (5, 6, 10, 0, 5, 0, 0, 11, 10) | 21 |
| 1 - 2 - 3 - 4 - 6 | 2 | (7, 6, 10, 2, 5, 2, 0, 13, 10) | 23 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 5\}$ $N_t = \{2, 3, 4, 6\}$

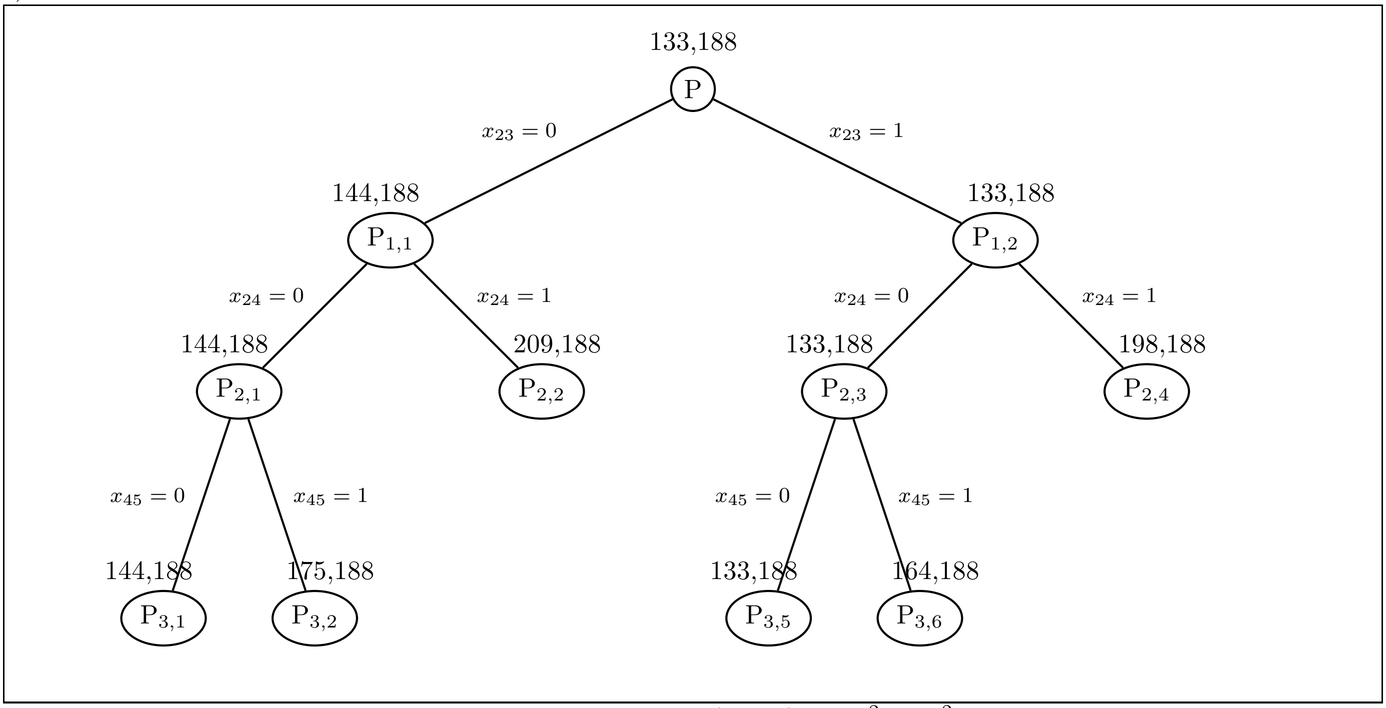
**Esercizio 6.** a)

4–albero: ( 1 , 3 ) ( 1 , 4 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) $v_I(P) = 133$

b)

ciclo: 4 – 3 – 2 – 1 – 5 $v_S(P) = 188$

c)




**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 8x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0, \quad x_1^2 - x_2 - 2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(0, \ -2)$ | $(0, 16)$ | | NO | NO | NO | SI | NO |
| $(0, \ -1)$ | $(-6, 0)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |
| $\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \ \frac{7}{4}\right)$ | $(0, 1)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, \ \frac{7}{4}\right)$ | $(0, 1)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(0, \ 1)$ | $(2, 0)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(0, \ 2)$ | $(0, 0)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 8.**

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ | $10.3333\, x_1 + 26\, x_2$ | (-2 ,-3) | $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ | 1 | $(-2, -3)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 05/07/16**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 8\ y_1 + 40\ y_2 + 4\ y_3 - 8\ y_4 - 20\ y_5 - 8\ y_6 \\ 8\ y_2 - 2\ y_3 - 2\ y_4 - 4\ y_5 - 3\ y_6 = -3 \\ -y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + 3\ y_5 + y_6 = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x =$ | | |
| $\{3,\ 6\}$ | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {1,5} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Un'industria siderurgica produce due laminati A e B da un composto C. L'industria può acquistare al più 180 quintali di composto C, ad un costo di 70 Euro al quintale. Per ottenere A e B è necessario un processo di lavorazione il cui costo per quintale prodotto è rispettivamente di 80 e 70 Euro. Inoltre la massima percentuale di A e B ottenibile da C è rispettivamente di 50 e 60. Sapendo che l'industria rivende sul mercato A e B a 10 e 7 Euro al kg rispettivamente, determinare la produzione che massimizza il profitto.

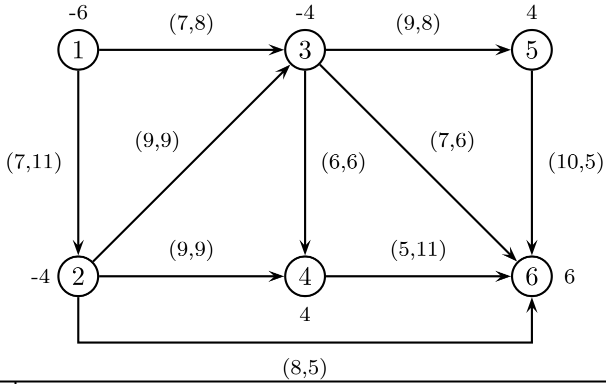
variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c= [-780 ; -515.8]                intlin=

A=[ 2 ; 10/6 ]                    b=[180]

Aeq=                              beq=

lb=                               ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

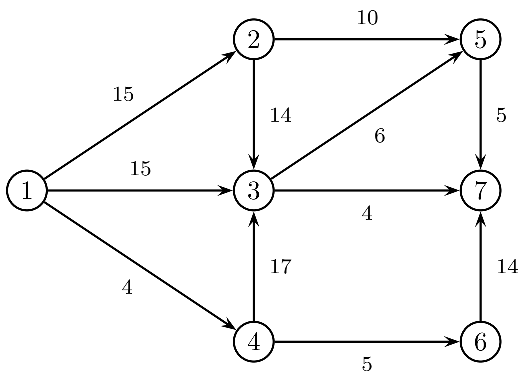



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (2,3) (3,4) (4,6) (5,6) | (2,4) | $x =$ | | |
| (1,3) (2,3) (2,6) (4,6) (5,6) | (1,2) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

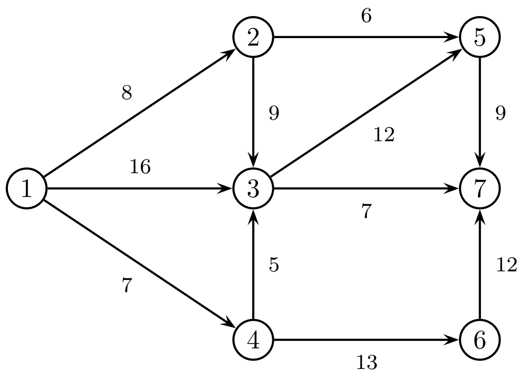
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,6) (3,5) (4,6) (5,6) | |
| Archi di U | (3,4) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 11\ x_1 + 5\ x_2 \\ 7\ x_1 + 6\ x_2 \geq 68 \\ 5\ x_1 + 14\ x_2 \geq 50 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 10 | 93 | 63 | 43 |
| **2** | | 26 | 55 | 57 |
| **3** | | | 11 | 13 |
| **4** | | | | 14 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{34}$, $x_{35}$, $x_{13}$.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; 2x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad -x_1 x_2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| (0,1) | | | | | | | |
| $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ | | | | | | | |
| $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ | | | | | | | |
| (0,-1) | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ -4\,x_1^2 - 6\,x_1\,x_2 + 4\,x_2^2 - 4\,x_1 - 6\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(2, 2)$ , $(2, 0)$ , $(-3, 1)$ e $(-2, -3)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(2, \frac{4}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 8\ y_1 + 40\ y_2 + 4\ y_3 - 8\ y_4 - 20\ y_5 - 8\ y_6 \\ 8\ y_2 - 2\ y_3 - 2\ y_4 - 4\ y_5 - 3\ y_6 = -3 \\ -y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + 3\ y_5 + y_6 = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (4,\ -8)$ | SI | NO |
| $\{3,\ 6\}$ | $y = \left(0,\ 0,\ \frac{6}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{5}\right)$ | SI | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

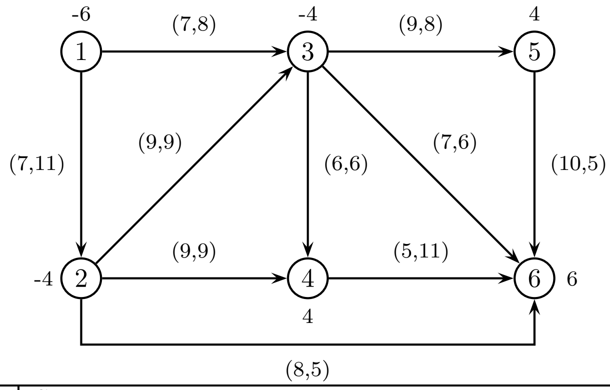
| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{1,\ 5\}$ | $(-1,\ -8)$ | $\left(\frac{13}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0\right)$ | 3 | $\frac{13}{10},\ \frac{3}{2}$ | 1 |
| 2° iterazione | $\{3,\ 5\}$ | $\left(\frac{4}{5},\ -\frac{28}{5}\right)$ | $\left(0,\ 0,\ \frac{13}{10},\ 0,\ \frac{1}{10},\ 0\right)$ | 4 | $\frac{13}{2},\ \frac{1}{4}$ | 5 |

**Esercizio 3.**

COMANDI DI MATLAB

```
c=[ -780 ; -515.8 ]          intlin=

A=[ 2 ; 10/6 ]               b=[180 ]

Aeq=[]                       beq=[]

lb=[0 ; 0]                   ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

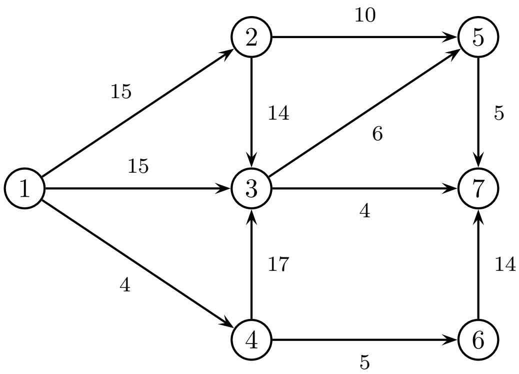



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (2,3) (3,4) (4,6) (5,6) | (2,4) | $x = (0,\ 6,\ -5,\ 9,\ 0,\ 5,\ 0,\ 0,\ 10,\ -4)$ | NO | NO |
| (1,3) (2,3) (2,6) (4,6) (5,6) | (1,2) | $\pi = (0,\ -2,\ 7,\ 1,\ -4,\ 6)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

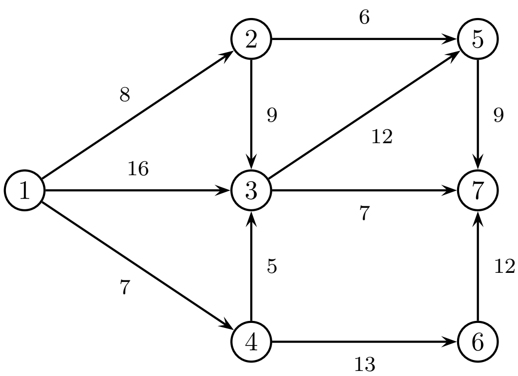
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,6) (3,5) (4,6) (5,6) | (1,2) (1,3) (2,6) (3,5) (4,6) |
| Archi di U | (3,4) | (3,4) |
| $x$ | $(0,\ 6,\ 0,\ 0,\ 4,\ 6,\ 4,\ 0,\ 2,\ 0)$ | $(0,\ 6,\ 0,\ 0,\ 4,\ 6,\ 4,\ 0,\ 2,\ 0)$ |
| $\pi$ | $(0,\ 18,\ 7,\ 21,\ 16,\ 26)$ | $(0,\ 7,\ 7,\ 10,\ 16,\ 15)$ |
| Arco entrante | (1,2) | (3,4) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 1 , 0 | 1 , 2 |
| Arco uscente | (5,6) | (2,6) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 4 | | 6 | | 2 | | 3 | | 7 | | 5 | |
| nodo 2 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 |
| nodo 3 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 |
| nodo 4 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 25 | 2 | 21 | 3 | 21 | 3 | 21 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 9 | 4 | 9 | 4 | 9 | 4 | 9 | 4 | 9 | 4 | 9 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 23 | 6 | 23 | 6 | 19 | 3 | 19 | 3 | 19 | 3 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 3, 6 | | 2, 3, 7 | | 3, 5, 7 | | 5, 7 | | 5 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 7 | (0, 7, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0) | 7 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 6 | (6, 7, 0, 0, 6, 0, 7, 0, 0, 6, 0) | 13 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 3 | (6, 10, 0, 0, 6, 3, 7, 0, 0, 9, 0) | 16 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 7 | (6, 10, 7, 0, 6, 3, 7, 0, 7, 9, 7) | 23 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 11\,x_1 + 5\,x_2 \\ 7\,x_1 + 6\,x_2 \geq 68 \\ 5\,x_1 + 14\,x_2 \geq 50 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{34}{3}\right)$ $\qquad v_I(P) = 57$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 12)$ $\qquad v_S(P) = 60$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2 \qquad 6\,x_1 + 5\,x_2 \geq 57$

$r = 4 \qquad 5\,x_1 + 4\,x_2 \geq 46$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 10 | 93 | 63 | 43 |
| **2** | | 26 | 55 | 57 |
| **3** | | | 11 | 13 |
| **4** | | | | 14 |

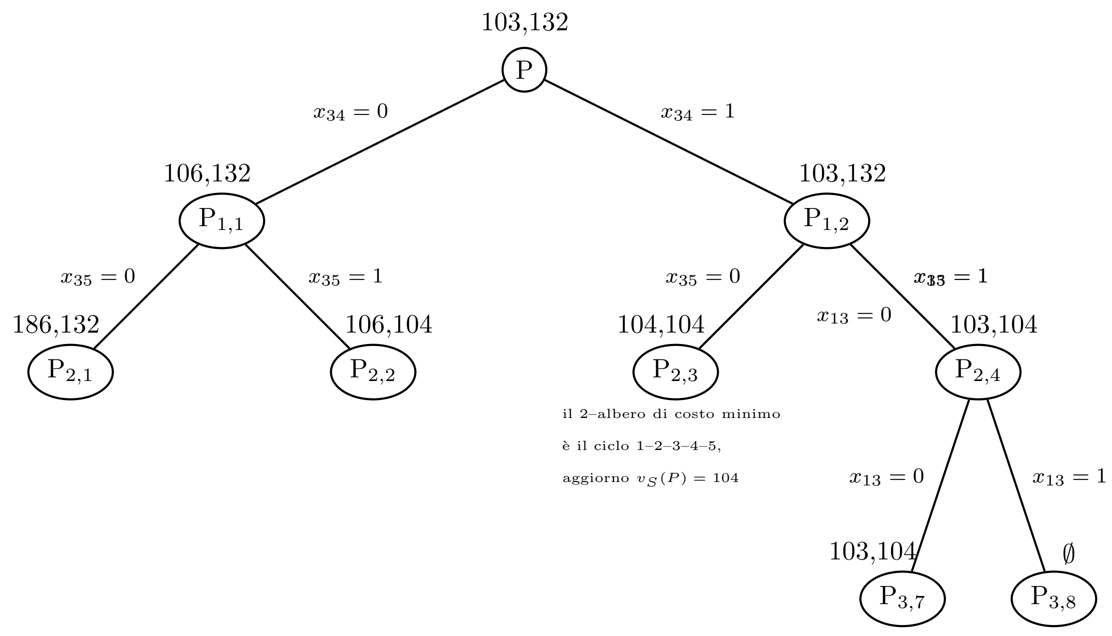
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: ( 1 , 2 ) ( 1 , 5 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) $\qquad v_I(P) = 103$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: 4 – 3 – 5 – 1 – 2 $\qquad v_S(P) = 132$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{34}$, $x_{35}$, $x_{13}$.




**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ 2x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad -x_1 x_2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(0,\ 1)$ | $(1,1)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ | $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}, 2\sqrt{2}\right)$ | | NO | NO | NO | SI | NO |
| $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ | $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}, -2\sqrt{2}\right)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |
| $(0,\ -1)$ | $(-1,-1)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ -4\,x_1^2 - 6\,x_1\,x_2 + 4\,x_2^2 - 4\,x_1 - 6\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(2,2)$ , $(2,0)$ , $(-3,1)$ e $(-2,-3)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(2, \frac{4}{3}\right)$ | $(1,0)$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\left(0, -\dfrac{22}{3}\right)$ | $\dfrac{2}{11}$ | $\dfrac{2}{11}$ | $(2,0)$ |

## Esame di Ricerca Operativa del 06/02/17

| (Cognome) | (Nome) | (Numero d Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 7\,x_1 - 6\,x_2 \\ x_1 - x_2 \le 12 \\ -x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 + 2\,x_2 \le -5 \\ 3\,x_1 - x_2 \le 20 \\ -x_1 + x_2 \le -7 \\ -2\,x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 - 2\,x_2 \le 24 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x =$ | | |
| $\{1, 3\}$ | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {2,6} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Si vuole definire un piano di lavoro settimanale per svolgere i progetti X, Y e Z, massimizzando le ore (h) dedicate compatibilmente con altri impegni giornalieri. Nella seguente tabella sono indicati (con $*$) i progetti a cui dedicarsi ogni giorno, le ore massime di lavoro giornaliero e le ore minime settimanali da dedicare a ciascun progetto. Scrivere un problema di PL o PLI per determinare le ore di lavoro da dedicare giornalmente a ciascun progetto in modo da massimizzare il numero complessivo di ore settimanali di lavoro.

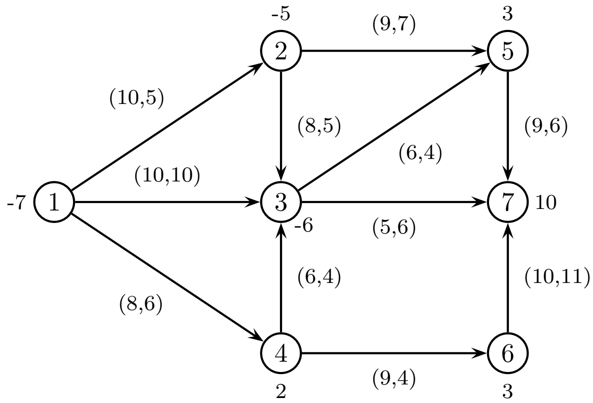
| | Lun | Mar | Mer | Gio | Ven | h min lavoro (sett.) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | * | | * | * | | 4 |
| B | | * | | * | * | 5 |
| C | * | * | * | | * | 6 |
| h max lavoro (giorn.) | 6 | 5 | 4 | 7 | 5 | |

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                   b=

Aeq=                                 beq=

lb=                                  ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

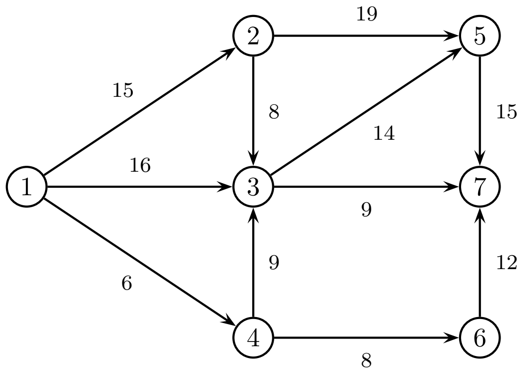



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (1,4) (2,5)<br>(3,5) (4,6) (6,7) | (2,3) | $x =$ | | |
| (1,2) (2,5) (3,7)<br>(4,3) (5,7) (6,7) | (1,4) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

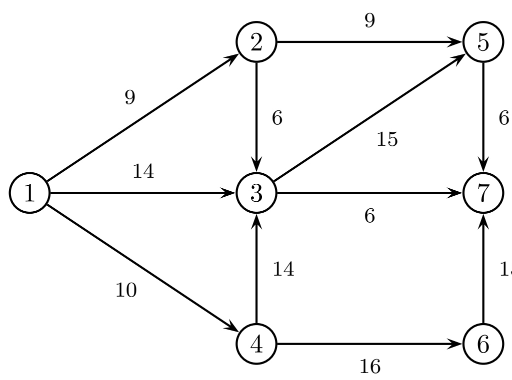
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) | |
| Archi di U | (5,7) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 6\ x_1 + 12\ x_2 \\ 11\ x_1 + 6\ x_2 \leq 63 \\ 7\ x_1 + 17\ x_2 \leq 48 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 15 | 26 | 66 | 47 |
| **2** | | 99 | 58 | 58 |
| **3** | | | 12 | 9 |
| **4** | | | | 15 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

| 5–albero: | $v_I(P) =$ |
|---|---|

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

| ciclo: | $v_S(P) =$ |
|---|---|

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{35}$, $x_{34}$, $x_{23}$.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0, \quad -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \; -\frac{1}{2}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, \; -\frac{1}{2}\right)$ | | | | | | | |
| $(0, \; -2)$ | | | | | | | |
| $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \; -\frac{1}{2}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \; -\frac{1}{2}\right)$ | | | | | | | |
| $(0, \; -1)$ | | | | | | | |
| $(0, \; 1)$ | | | | | | | |
| $(0, \; 2)$ | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -4\, x_1\, x_2 - 4\, x_2^2 + 7\, x_1 + 4\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(-2, 5)$ , $(1, 3)$ , $(-5, 4)$ e $(3, -4)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 7\,x_1 - 6\,x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2\,x_2 \leq -5 \\ 3\,x_1 - x_2 \leq 20 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ -2\,x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2\,x_2 \leq 24 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (3,\ -9)$ | SI | NO |
| $\{1,\ 3\}$ | $y = \left(\frac{20}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right)$ | SI | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{2,\ 6\}$ | $(2,\ -8)$ | $(0,\ 19,\ 0,\ 0,\ 0,\ -13,\ 0)$ | 6 | $1,\ \frac{3}{2},\ 2$ | 1 |
| 2° iterazione | $\{1,\ 2\}$ | $(3,\ -9)$ | $\left(\frac{13}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right)$ | 2 | $\frac{20}{3},\ 2$ | 4 |

**Esercizio 3.**

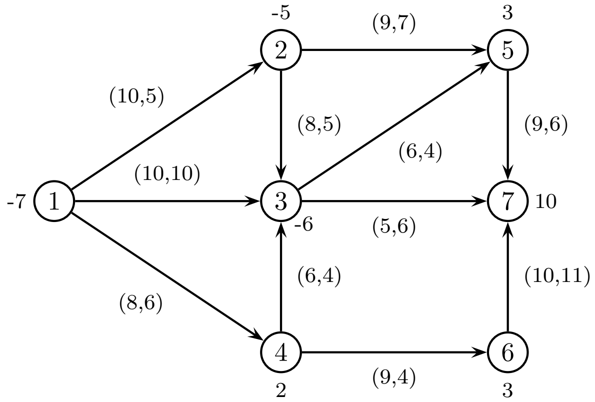
Variabili decisionali:

Indichiamo con $i = 1,2,3$ i progetti X, Y e Z rispettivamente e con $j = 1,2,3,4,5$, i giorni della settimana dal lunedi al venerdi.
Sia $C = \{(1,1),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,5)\}$.
$x_{ij}$ = ore dedicate al progetto $i$ nel giorno $j$, $(i,j) \in C$;

Modello:

$$\begin{cases} \max \displaystyle\sum_{(i,j)\in C} x_{ij} \\ x_{11} + x_{13} + x_{14} \geq 4 \\ x_{22} + x_{24} + x_{25} \geq 5 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{35} \geq 6 \\ x_{11} + x_{31} \leq 6 \\ x_{22} + x_{32} \leq 5 \\ x_{13} + x_{33} \leq 4 \\ x_{14} + x_{24} \leq 7 \\ x_{25} + x_{35} \leq 5 \\ x_{ij} \geq 0,\ (i,j) \in C \end{cases}$$

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

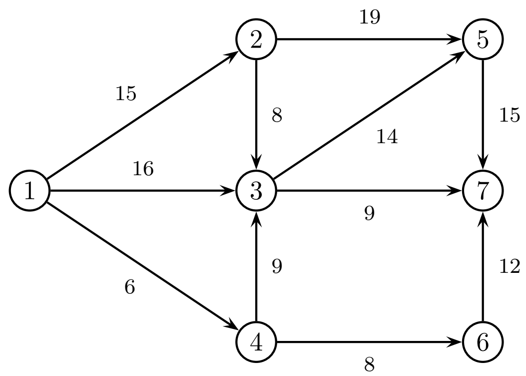



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7) | (2,3) | $x = (0,\ -8,\ 15,\ 5,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 13,\ 0,\ 10)$ | NO | SI |
| (1,2) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7) | (1,4) | $\pi = (0,\ 10,\ 23,\ 17,\ 19,\ 18,\ 28)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

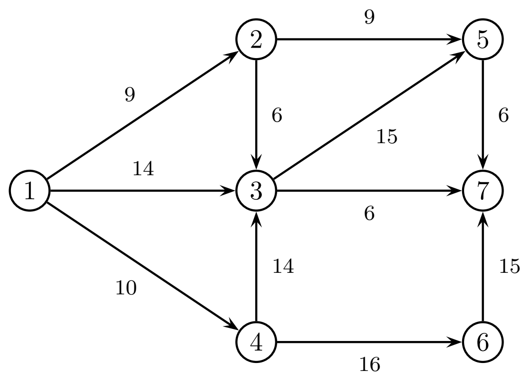
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) | (1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) |
| Archi di U | (5,7) | (5,7) |
| $x$ | $(2,\ 0,\ 5,\ 0,\ 7,\ 2,\ 4,\ 0,\ 3,\ 6,\ 0)$ | $(0,\ 2,\ 5,\ 0,\ 5,\ 4,\ 4,\ 0,\ 3,\ 6,\ 0)$ |
| $\pi$ | $(0,\ 10,\ 13,\ 8,\ 19,\ 17,\ 18)$ | $(0,\ 7,\ 10,\ 8,\ 16,\ 17,\ 15)$ |
| Arco entrante | (1,3) | (5,7) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 2 , 2 | 2 , 4 |
| Arco uscente | (1,2) | (3,7) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 4 | | 6 | | 2 | | 3 | | 7 | | 5 | |
| nodo 2 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 |
| nodo 3 | 16 | 1 | 15 | 4 | 15 | 4 | 15 | 4 | 15 | 4 | 15 | 4 | 15 | 4 |
| nodo 4 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 34 | 2 | 29 | 3 | 29 | 3 | 29 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 26 | 6 | 26 | 6 | 24 | 3 | 24 | 3 | 24 | 3 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 3, 6 | | 2, 3, 7 | | 3, 5, 7 | | 5, 7 | | 5 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 6 | (0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0) | 6 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 6 | (6, 6, 0, 0, 6, 0, 6, 0, 0, 6, 0) | 12 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 10 | (6, 6, 10, 0, 6, 0, 6, 0, 10, 6, 10) | 22 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $N_t = \{4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 6\ x_1 + 12\ x_2 \\ 11\ x_1 + 6\ x_2 \leq 63 \\ 7\ x_1 + 17\ x_2 \leq 48 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{27}{5}, \frac{3}{5}\right)$ $v_S(P) = 39$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (5, 0)$ $v_I(P) = 30$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $8\,x_1 + 17\,x_2 \leq 53$
$r = 2$ $11\,x_1 + 7\,x_2 \leq 63$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 15 | 26 | 66 | 47 |
| **2** | | 99 | 58 | 58 |
| **3** | | | 12 | 9 |
| **4** | | | | 15 |

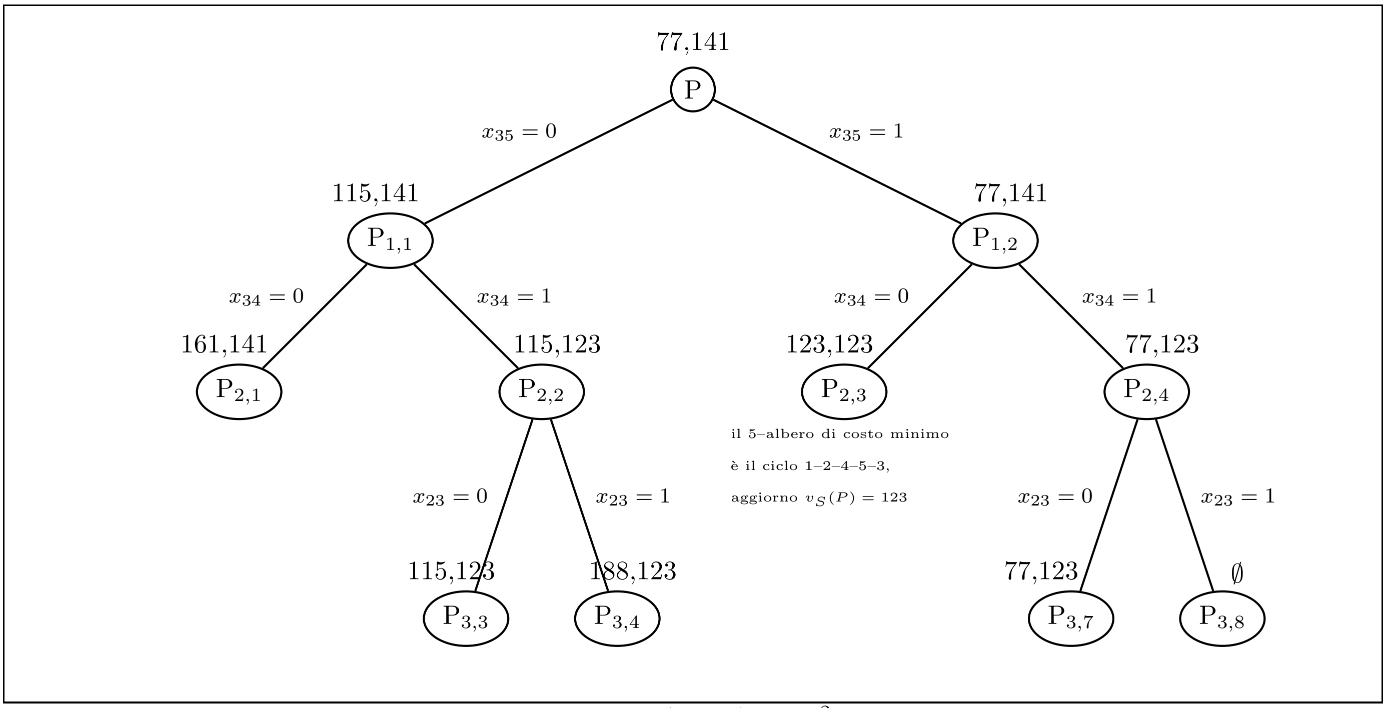
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: ( 1 , 2 ) ( 1 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) ( 4 , 5 ) $v_I(P) = 77$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $1 - 2 - 4 - 3 - 5$ $v_S(P) = 141$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{35}$, $x_{34}$, $x_{23}$.




**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 - 4 \le 0, \quad -x_1^2 - x_2^2 + 1 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ | $(1,0)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ | $(1,0)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(0,\ -2)$ | $\left(\dfrac{1}{4},0\right)$ | | NO | NO | NO | SI | NO |
| $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ | $(0,-1)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ | $(0,-1)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(0,\ -1)$ | $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |
| $(0,\ 1)$ | $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(0,\ 2)$ | $\left(-\dfrac{1}{4},0\right)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -4\,x_1\,x_2 - 4\,x_2^2 + 7\,x_1 + 4\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(-2,5)$ , $(1,3)$ , $(-5,4)$ e $(3,-4)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$ | $(-1,-1)$ | $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ | $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ | $\dfrac{16}{3}$ | $\dfrac{16}{3}$ | $(3,-4)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 6/2/18**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ y_1 + 9\ y_2 + 2\ y_3 + 9\ y_4 + 4\ y_5 + 13\ y_6 \\ -y_1 + 3\ y_2 - 2\ y_3 + 3\ y_4 - y_5 + 2\ y_6 = -2 \\ -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + 2\ y_5 + 3\ y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x =$ | | |
| $\{1, 4\}$ | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {2,3} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una fabbrica produce 4 tipi di TV ed è divisa in 2 stabilimenti A e B. La fabbrica dispone di 60 operai in A e 40 in B ognuno dei quali lavori 8 ore al giorno per 5 giorni la settimana. In tabella abbiamo: tempo di lavorazione in ore e la richiesta minima di mercato da soddisfare

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 1.2 | 1.5 | 1.2 |
| B | 1.5 | 0.8 | 2 | 0.5 |
| Richiesta | 600 | 400 | 200 | 150 |

Sapendo che il prezzo di vendita è rispettivamente di 400, 600, 1000, e 300 euro per ogni TV, determinare il piano produttivo migliore.

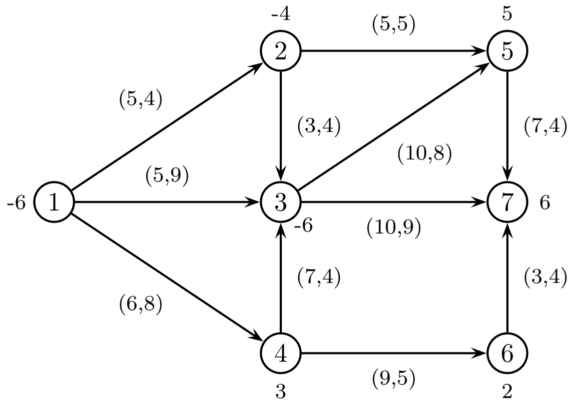
variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                      int=

A=                      b=

Aeq=                    beq=

lb=                     ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).




| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,3) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7) | (3,5) | $x =$ | | |
| (1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,3) (4,6) | (3,5) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) (6,7) | |
| Archi di U | (5,7) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\ x_1 + 14\ x_2 \\ 19\ x_1 + 8\ x_2 \leq 59 \\ 13\ x_1 + 14\ x_2 \leq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

| | |
|---|---|
| sol. ottima del rilassamento = | $v_S(P) =$ |

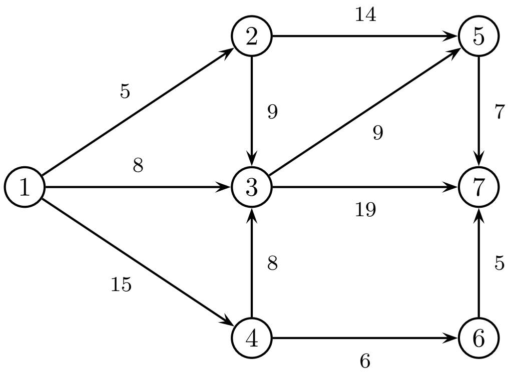
b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

| | |
|---|---|
| sol. ammissibile = | $v_I(P) =$ |

c) Calcolare un taglio di Gomory.

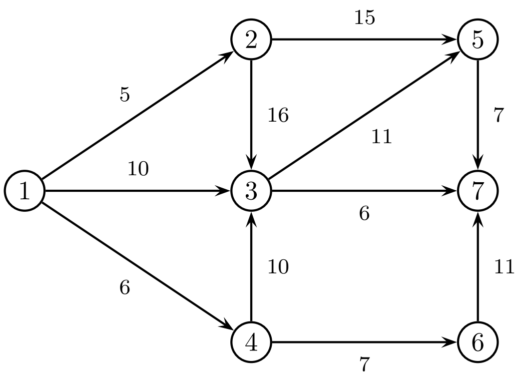
| | |
|---|---|
| $r =$ | taglio: |

**Esercizio 7.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 19 | 24 | 67 | 47 |
| **2** | | 18 | 94 | 61 |
| **3** | | | 13 | 16 |
| **4** | | | | 10 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando l'1–albero di costo minimo.

1–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando l'1–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{34}$, $x_{24}$, $x_{45}$. Dire se l'algoritmo si è concluso.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; -x_1^2 + x_2 + 1 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}, \; \frac{1}{2}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(-\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}, \; \frac{1}{2}\right)$ | | | | | | | |
| $(0, \; -1)$ | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 2\,x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 - 4\,x_1 + 4\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(1, 4)$ , $(-0, -4)$ , $(2, -1)$ e $(-5, 0)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{2}{3}, -3\right)$ | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ y_1 + 9\ y_2 + 2\ y_3 + 9\ y_4 + 4\ y_5 + 13\ y_6 \\ -y_1 + 3\ y_2 - 2\ y_3 + 3\ y_4 - y_5 + 2\ y_6 = -2 \\ -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + 2\ y_5 + 3\ y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (2,\ -3)$ | SI | NO |
| $\{1,\ 4\}$ | $y = \left(-\frac{5}{2},\ 0,\ 0,\ -\frac{3}{2},\ 0,\ 0\right)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

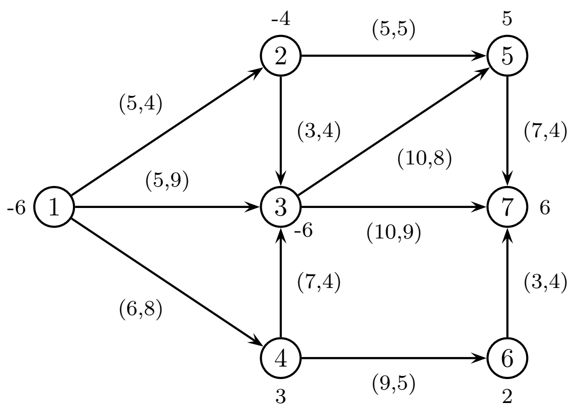
| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{2,\ 3\}$ | $(11,\ 24)$ | $(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$ | 4 | $0,\ \frac{1}{6}$ | 2 |
| 2° iterazione | $\{3,\ 4\}$ | $\left(\frac{7}{5},\ \frac{24}{5}\right)$ | $(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$ | 5 | $\frac{5}{7},\ 0$ | 4 |

**Esercizio 3.**

COMANDI DI MATLAB

```
c=-[ 400 ; 600 ; 1000 ; 300 ; 400 ; 600 ; 1000 ; 300 ]

int=[ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 ]

A=[1 1.2 1.5 1.2 0000;000001.5 0.8 2 0.5;-1000-1000; 0-1000-100;00-1000-10;000-1000-1 ]

b=[ 2400 ; 1600 ; -600 ; -400 ; -200 ; -150 ]

Aeq=[]  beq=[]

lb=[0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 , 0 ; 0 ]  ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

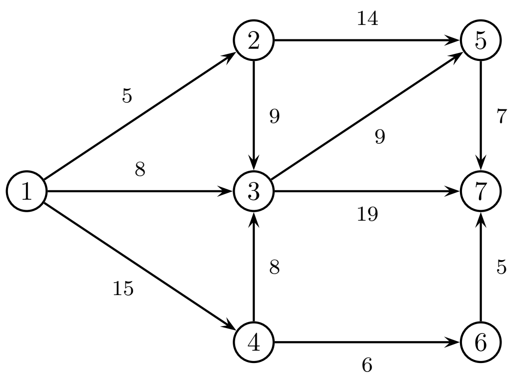



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,3) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7) | (3,5) | $x = (-7,\ 13,\ 0,\ 0,\ -3,\ 8,\ 11,\ 0,\ -3,\ 0,\ -5)$ | NO | NO |
| (1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,3) (4,6) | (3,5) | $\pi = (0,\ 5,\ 13,\ 6,\ 10,\ 15,\ 23)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

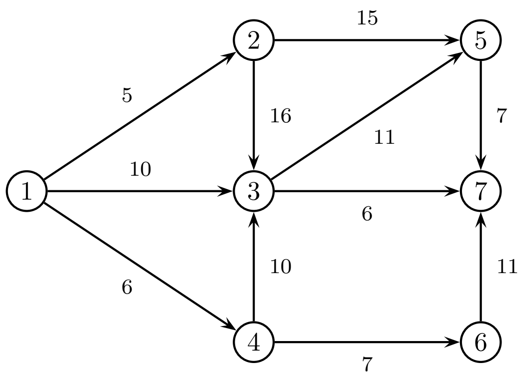
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) (6,7) | (1,2) (1,4) (3,5) (3,7) (4,6) (6,7) |
| Archi di U | (5,7) | (2,5) (5,7) |
| $x$ | (0, 0, 6, 0, 4, 5, 1, 0, 3, 4, 1) | (1, 0, 5, 0, 5, 4, 2, 0, 2, 4, 0) |
| $\pi$ | (0, 13, 8, 6, 18, 15, 18) | (0, 5, 8, 6, 18, 15, 18) |
| Arco entrante | (1,2) | (1,3) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 1 , 1 | 7 , 0 |
| Arco uscente | (2,5) | (6,7) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | |
| nodo 2 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 |
| nodo 3 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 |
| nodo 4 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 19 | 2 | 17 | 3 | 17 | 3 | 17 | 3 | 17 | 3 | 17 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 21 | 4 | 21 | 4 | 21 | 4 | 21 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 27 | 3 | 27 | 3 | 24 | 5 | 24 | 5 | 24 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 3, 4, 5 | | 4, 5, 7 | | 5, 6, 7 | | 6, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 6 | (0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0) | 6 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 5 | (5, 6, 0, 0, 5, 0, 6, 0, 0, 5, 0) | 11 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 2 | (5, 8, 0, 0, 5, 2, 6, 0, 0, 7, 0) | 13 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 6 | (5, 8, 6, 0, 5, 2, 6, 0, 6, 7, 6) | 19 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\ x_1 + 14\ x_2 \\ 19\ x_1 + 8\ x_2 \leq 59 \\ 13\ x_1 + 14\ x_2 \leq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \dfrac{41}{14}\right)$ $\qquad v_S(P) = 41$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(0, 2)$ $\qquad v_I(P) = 28$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad x_2 \leq 2$

$r = 3$ $\qquad 5\,x_1 + 6\,x_2 \leq 17$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 19 | 24 | 67 | 47 |
| **2** | | 18 | 94 | 61 |
| **3** | | | 13 | 16 |
| **4** | | | | 10 |

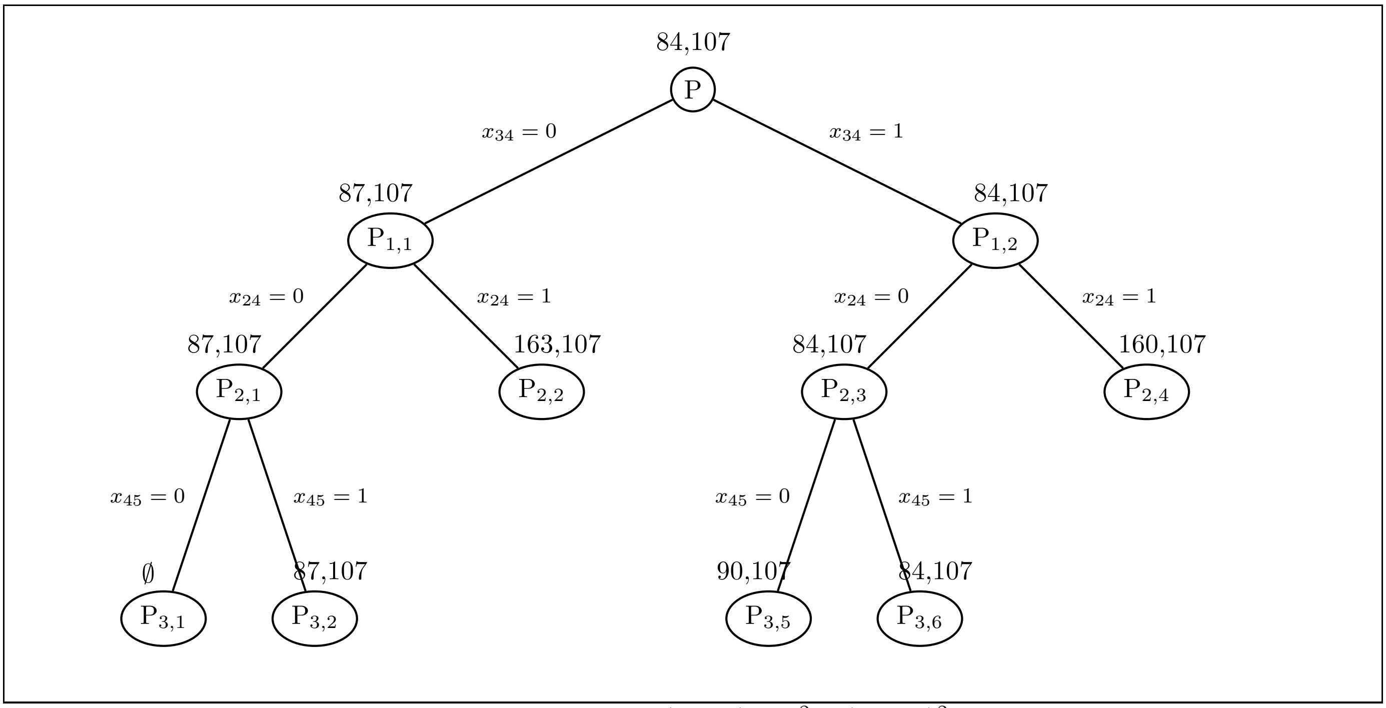
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando l'1–albero di costo minimo.

1–albero: ( 1 , 2 ) ( 1 , 3 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 4 , 5 ) $\qquad v_I(P) = 84$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $1 - 2 - 3 - 4 - 5$ $\qquad v_S(P) = 107$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando l'1–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{34}$, $x_{24}$, $x_{45}$. Dire se l'algoritmo é terminato.




**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 + x_2 + 1 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $\left(\dfrac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ | 1 | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $\left(-\dfrac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ | 1 | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(0,\ -1)$ | 4 | | NO | NO | NO | NO | SI |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 2\ x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 - 4\ x_1 + 4\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(1, 4)$ , $(0, -4)$ , $(2, -1)$ e $(-5, 0)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{2}{3}, -3\right)$ | $-22/3\,x_1 + 16/3\,x_2$ | (0 ,-4) | $\left(-\frac{2}{3}, -1\right)$ | $\dfrac{1}{10}$ | $\left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{31}{10}\right)$ |

## Esame di Ricerca Operativa del 09/01/14

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min \ 3\ y_1 + 12\ y_2 + y_3 + y_4 + 4\ y_5 + 4\ y_6 \\ -y_1 - 4\ y_2 + y_4 + 4\ y_5 = 1 \\ y_1 - 3\ y_2 + y_3 + y_4 - y_5 - y_6 = 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (-3,\ 0)$ | SI | NO |
| $\{3,\ 4\}$ | $y = (0,\ 0,\ 5,\ 1,\ 0,\ 0)$ | SI | NO |

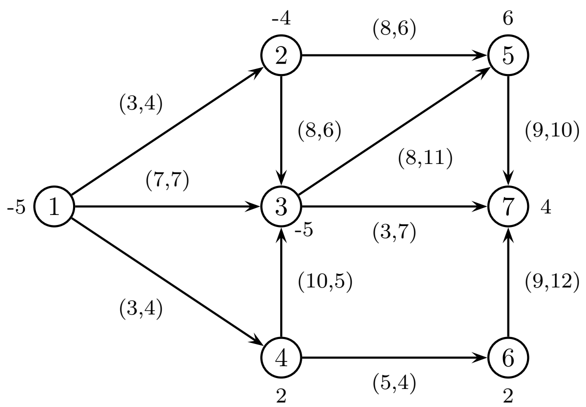
**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{1,\ 5\}$ | $\left(\frac{7}{3},\ \frac{16}{3}\right)$ | $\left(\frac{25}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{7}{3},\ 0\right)$ | 3 | $\frac{25}{4},\ 7$ | 1 |
| 2° iterazione | $\{3,\ 5\}$ | $\left(\frac{5}{4},\ 1\right)$ | $\left(0,\ 0,\ \frac{25}{4},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0\right)$ | 4 | $5,\ 1$ | 5 |

**Esercizio 3.**

| variabili decisionali | modello |
|---|---|
| $x_1$ = milioni di Euro investiti in fondi azionari<br>$x_2$ = milioni di Euro investiti in fondi bilanciati<br>$x_3$ = milioni di Euro investiti in fondi monetari<br>$x_4$ = milioni di Euro investiti in fondi obbligazionari | $\begin{cases} \max \ 0.3\ x_1 + 0.11\ x_2 + 0.2\ x_3 + 0.08\ x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 14 \\ x_2 + x_4 \geq 0.35 * (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x_1 \geq 0.5 * (x_1 + x_3) \\ 0.1\, x_1 + 0.08\, x_2 + 0.15\, x_3 + 0.02\, x_4 \leq \\ \qquad 0.1\, (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x_i \geq 0, \ \ i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$ |

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

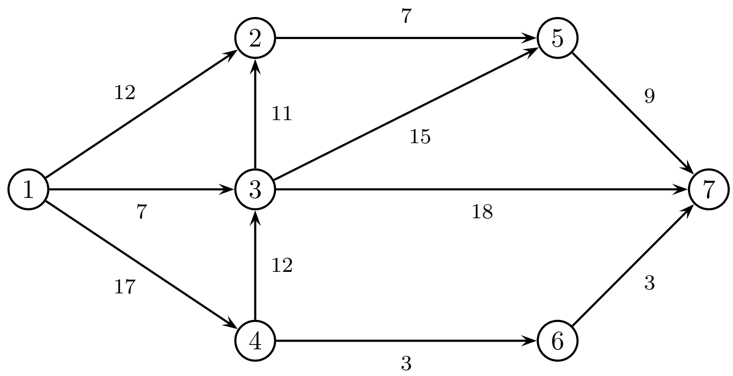



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,4) (2,3) (3,5) (4,3) (5,7) (6,7) | (2,5) | $x = (0,\ 0,\ 5,\ -2,\ 6,\ 6,\ 0,\ 3,\ 0,\ 6,\ -2)$ | NO | NO |
| (1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (6,7) | (5,7) | $\pi = (0,\ 7,\ 7,\ 3,\ 15,\ 1,\ 10)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

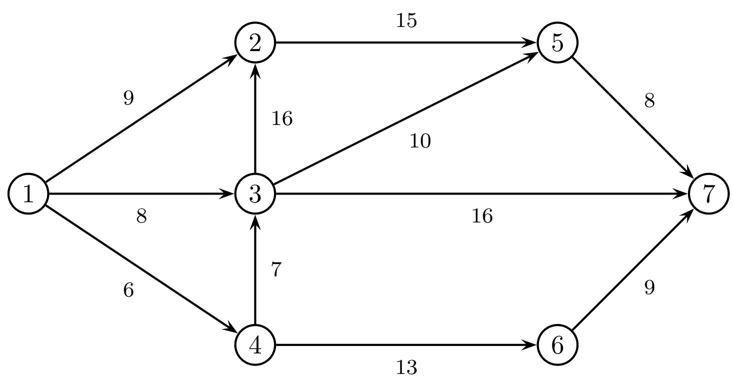
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,5) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7) | (1,2) (2,5) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7) |
| Archi di U | (1,4) | (1,4) |
| $x$ | (0, 1, 4, 0, 4, 6, 0, 0, 2, 4, 0) | (1, 0, 4, 0, 5, 5, 0, 0, 2, 4, 0) |
| $\pi$ | (0, 7, 7, $-3$, 15, 2, 24) | (0, 3, 3, $-7$, 11, $-2$, 20) |
| Arco entrante | (1,2) | (1,4) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 2 , 1 | 1 , 0 |
| Arco uscente | (1,3) | (4,3) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 2 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | |
| nodo 2 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 |
| nodo 3 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 |
| nodo 4 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 22 | 3 | 19 | 2 | 19 | 2 | 19 | 2 | 19 | 2 | 19 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 20 | 4 | 20 | 4 | 20 | 4 | 20 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | 25 | 3 | 25 | 3 | 25 | 3 | 25 | 3 | 23 | 6 | 23 | 6 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 4, 5, 7 | | 4, 5, 7 | | 5, 6, 7 | | 6, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 8 | (0, 8, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0) | 8 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 8 | (8, 8, 0, 8, 0, 0, 8, 0, 0, 8, 0) | 16 |
| 1 - 4 - 3 - 7 | 6 | (8, 8, 6, 8, 0, 0, 14, 6, 0, 8, 0) | 22 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 5\}$ $N_t = \{3, 4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 13\ x_2 \\ 12\ x_1 + 6\ x_2 \leq 41 \\ 11\ x_1 + 15\ x_2 \leq 54 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \frac{18}{5}\right)$ $v_S(P) = 46$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(0, 3)$ $v_I(P) = 39$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $x_2 \leq 3$
$r = 3$ $6\,x_1 + 9\,x_2 \leq 32$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 44 | 22 | 51 | 21 |
| **2** | | 13 | 52 | 25 |
| **3** | | | 10 | 29 |
| **4** | | | | 22 |

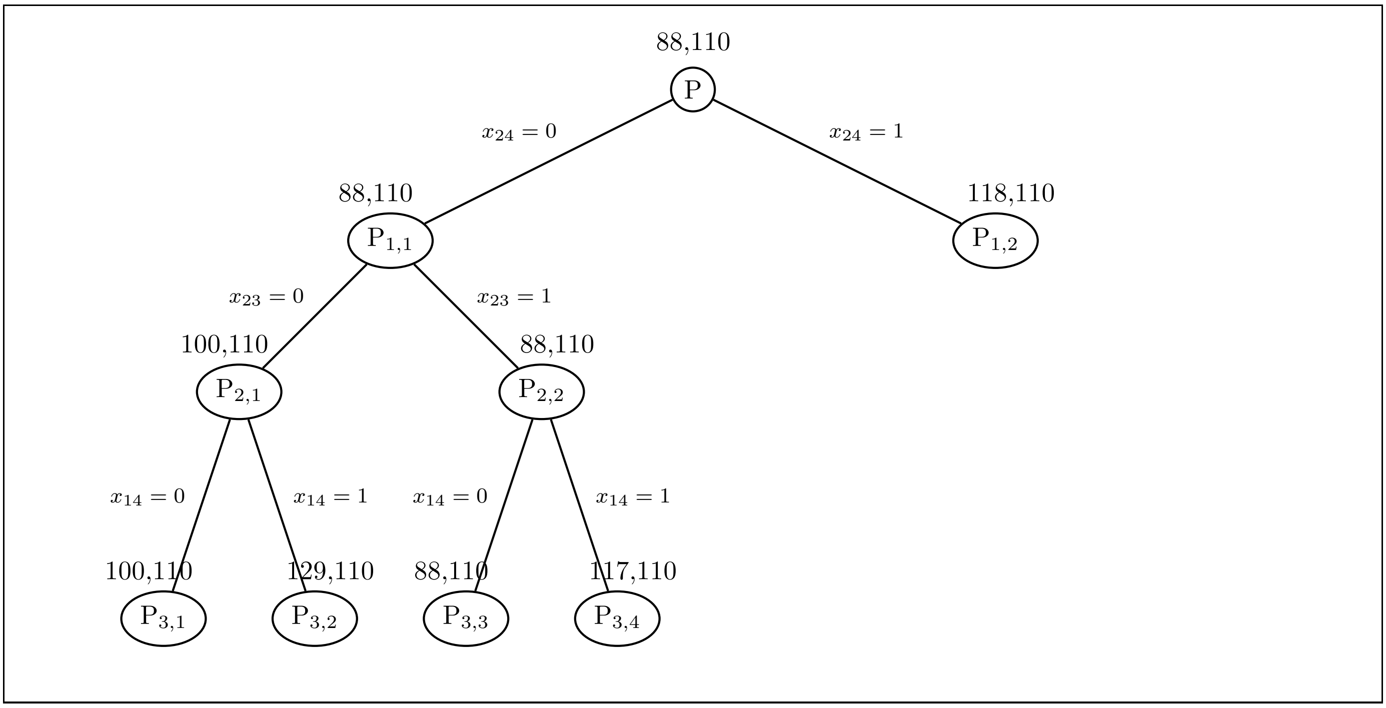
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: ( 1 , 3 ) ( 1 , 5 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 4 , 5 ) $v_I(P) = 88$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $3 - 4 - 5 - 1 - 2$ $v_S(P) = 110$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{24}$, $x_{23}$, $x_{14}$.



88,110
P
$x_{24} = 0$
$x_{24} = 1$
88,110
$P_{1,1}$
118,110
$P_{1,2}$
$x_{23} = 0$
$x_{23} = 1$
100,110
$P_{2,1}$
88,110
$P_{2,2}$
$x_{14} = 0$
$x_{14} = 1$
$x_{14} = 0$
$x_{14} = 1$
100,110
$P_{3,1}$
129,110
$P_{3,2}$
88,110
$P_{3,3}$
117,110
$P_{3,4}$

## Esame di Ricerca Operativa del 09/01/14

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 3\,y_1 + 12\,y_2 + y_3 + y_4 + 4\,y_5 + 5\,y_6 \\ -y_1 - 4\,y_2 + y_4 + 4\,y_5 + 4\,y_6 = 4 \\ y_1 - 3\,y_2 + y_3 + y_4 - y_5 = 5 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (-3,\ 0)$ | SI | NO |
| $\{3,\ 5\}$ | $y = (0,\ 0,\ 6,\ 0,\ 1,\ 0)$ | SI | NO |

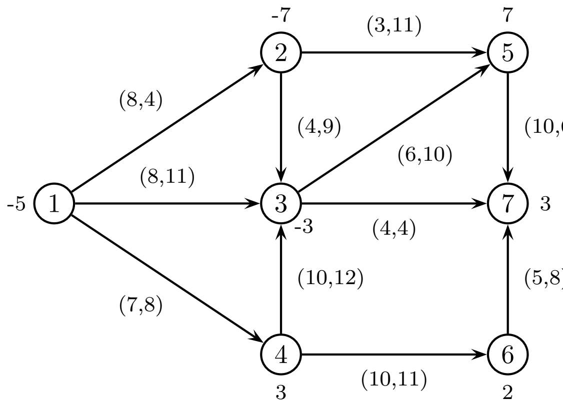
**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{2,\ 4\}$ | $(-15,\ 16)$ | $(0,\ 1,\ 0,\ 8,\ 0,\ 0)$ | 1 | $\frac{1}{2},\ \frac{8}{7}$ | 2 |
| 2° iterazione | $\{1,\ 4\}$ | $(-1,\ 2)$ | $\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{9}{2},\ 0,\ 0\right)$ | 3 | $1,\ 9$ | 1 |

**Esercizio 3.**

vedi esercizio 3 dell'altro compito

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

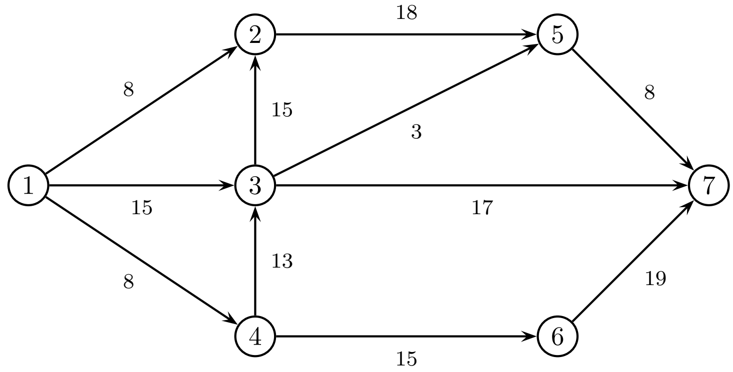



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (6,7) | (1,3) | $x = (0,\ 11,\ -6,\ 0,\ 7,\ 0,\ 0,\ -14,\ 5,\ 0,\ 3)$ | NO | SI |
| (1,2) (1,4) (2,3) (3,7) (5,7) (6,7) | (3,5) | $\pi = (0,\ 8,\ 12,\ 7,\ 6,\ 11,\ 16)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

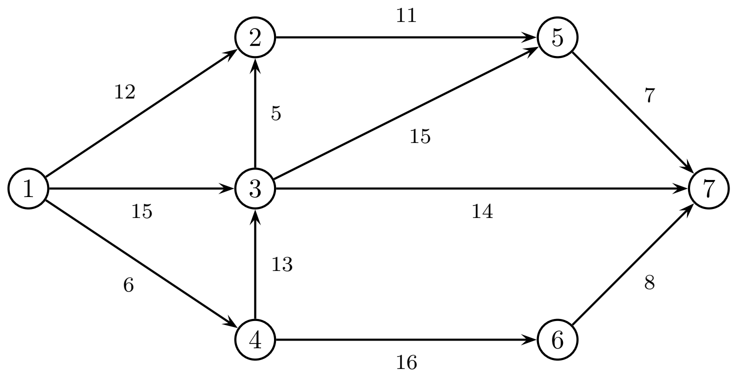
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (1,4) (2,3) (3,7) (4,6) (5,7) | (1,3) (1,4) (2,3) (3,5) (3,7) (4,6) |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | $(0,\ 0,\ 5,\ 7,\ 0,\ 10,\ 0,\ 0,\ 2,\ 3,\ 0)$ | $(0,\ 0,\ 5,\ 7,\ 0,\ 7,\ 3,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0)$ |
| $\pi$ | $(0,\ 4,\ 8,\ 7,\ 2,\ 17,\ 12)$ | $(0,\ 4,\ 8,\ 7,\ 14,\ 17,\ 12)$ |
| Arco entrante | (3,5) | (2,5) |
| $\vartheta^+,\ \vartheta^-$ | 4 , 3 | 11 , 7 |
| Arco uscente | (5,7) | (2,3) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 2 | | 4 | | 3 | | 5 | | 6 | | 7 | |
| nodo 2 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 |
| nodo 3 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 |
| nodo 4 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 26 | 2 | 26 | 2 | 18 | 3 | 18 | 3 | 18 | 3 | 18 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 23 | 4 | 23 | 4 | 23 | 4 | 23 | 4 | 23 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 32 | 3 | 26 | 5 | 26 | 5 | 26 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 3, 4, 5 | | 3, 5, 6 | | 5, 6, 7 | | 6, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 14 | (0, 14, 0, 0, 0, 0, 14, 0, 0, 0, 0) | 14 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 7 | (7, 14, 0, 7, 0, 0, 14, 0, 0, 7, 0) | 21 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 6 | (7, 14, 6, 7, 0, 0, 14, 0, 6, 7, 6) | 27 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $N_t = \{4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 9\,x_1 + 13\,x_2 \\ 15\,x_1 + 6\,x_2 \leq 68 \\ 9\,x_1 + 10\,x_2 \leq 57 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{57}{10}\right)$ $\qquad v_S(P) = 74$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 5)$ $\qquad v_I(P) = 65$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2 \qquad x_2 \leq 5$
$r = 3 \qquad 3\,x_1 + 4\,x_2 \leq 22$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 44 | 22 | 51 | 21 |
| **2** | | 13 | 52 | 25 |
| **3** | | | 10 | 29 |
| **4** | | | | 22 |

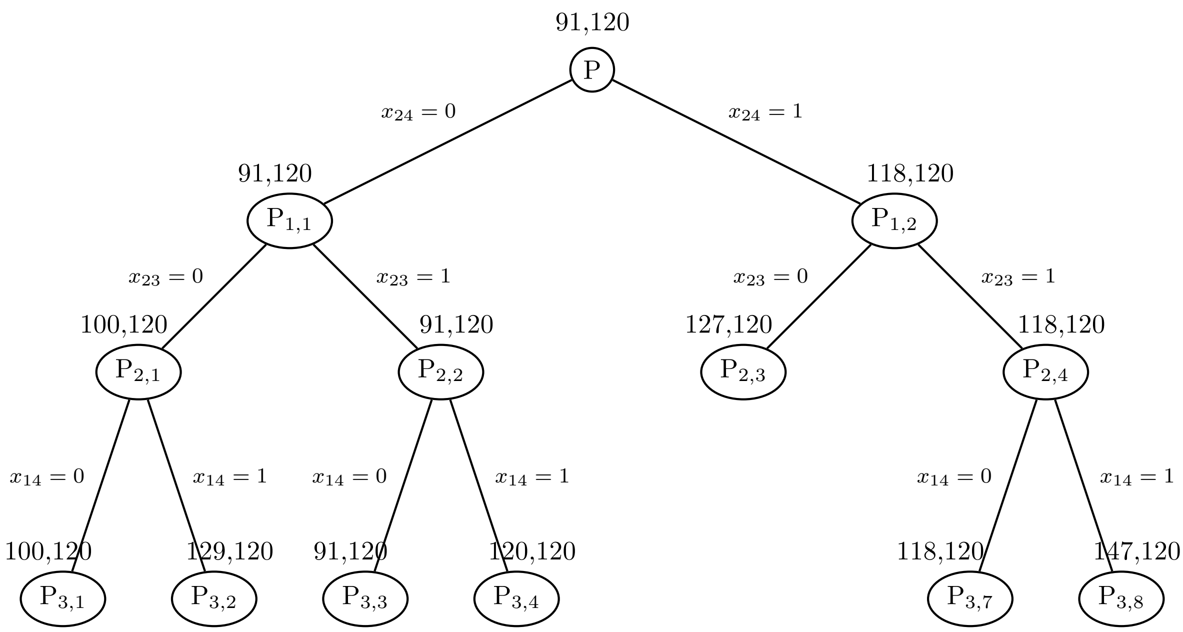
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: ( 1 , 5 ) ( 2 , 3 ) ( 2 , 5 ) ( 3 , 4 ) ( 4 , 5 ) $\qquad v_I(P) = 91$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: 4 – 3 – 2 – 5 – 1 $\qquad v_S(P) = 120$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{24}$, $x_{23}$, $x_{14}$.




**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 + x_2^2 \leq 0, \quad x_1^2 - 4 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(-1,\ -1)$ | $(0,0)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(-2,\ -1)$ | $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(-2,\ -\sqrt{2}\right)$ | $\left(-\frac{26}{90},-\frac{51}{90}\right)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |
| $\left(-2,\ \sqrt{2}\right)$ | $\left(-\frac{38}{22},-\frac{83}{90}\right)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 2\ x_1^2 + 8\ x_1\, x_2 - 4\ x_2^2 + 5\ x_1 - 6\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(3,-4)$ , $(-5,-0)$ , $(-1,-4)$ e $(2,-0)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{1}{3},0\right)$ | $(-0,1)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\left(-\frac{11}{3},0\right)$ | $\frac{14}{11}$ | $\frac{1}{4}$ | $\left(-\frac{5}{4},0\right)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 09/01/15**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 7\ y_1 + y_2 + 6\ y_3 + 4\ y_4 + y_5 + 7\ y_6 \\ 2\ y_1 + y_3 - y_4 - 2\ y_5 - y_6 = -1 \\ -y_1 - y_2 + 2\ y_3 + 3\ y_4 - y_5 + y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x =$ | | |
| $\{1, 4\}$ | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {4,6} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Un'industria di lavorazione del marmo ha due stabilimenti dove produce lastre di marmo di tre diverse qualità: bassa, media e alta. Per contratto, l'industria deve fornire a una ditta esterna almeno 50, 40 e 60 tonnellate di marmo di bassa, media e alta qualità, rispettivamente. La seguente tabella riporta le caratteristiche di produzione nei due diversi stabilimenti:

| Stabilimento | costo giornaliero (euro) | produzione (tonnellate/giorno) | | |
|---|---|---|---|---|
| | | bassa | media | alta |
| 1 | 350 | 6 | 4 | 3 |
| 2 | 400 | 2 | 3 | 5 |

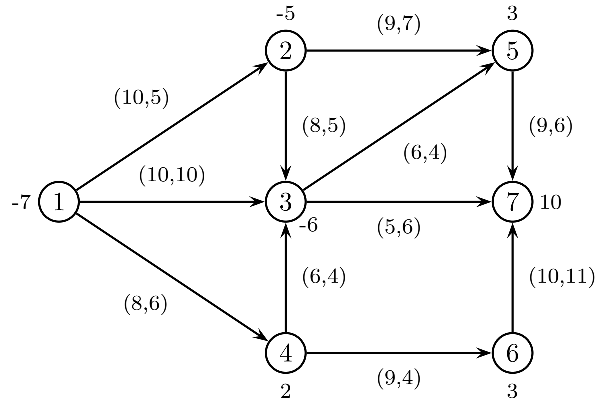
Determinare quanti giorni di lavoro sono necessari nei due stabilimenti per minimizzare i costi.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                         b=

Aeq=                                       beq=

lb=                                        ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

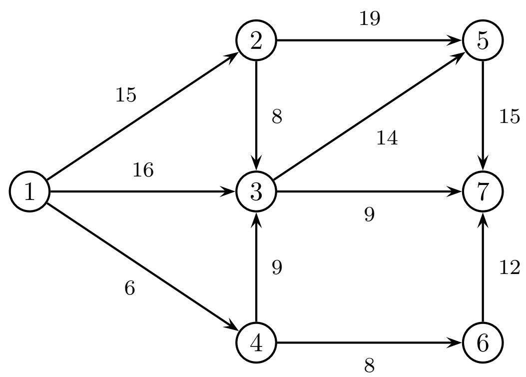



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7) | (2,3) | $x =$ | | |
| (1,2) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7) | (1,4) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

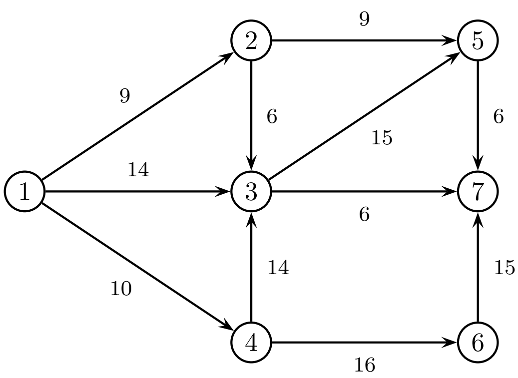
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) | |
| Archi di U | (5,7) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 11\ x_1 + 13\ x_2 \\ 11\ x_1 + 9\ x_2 \geq 60 \\ 9\ x_1 + 15\ x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 9 | 91 | 62 | 42 |
| **2** | | 25 | 54 | 56 |
| **3** | | | 9 | 11 |
| **4** | | | | 13 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

| | |
|---|---|
| 4–albero: | $v_I(P) =$ |

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

| | |
|---|---|
| ciclo: | $v_S(P) =$ |

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{35}$, $x_{34}$, $x_{45}$.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 + x_2^2 \leq 0, \quad -x_1 + x_2 - 1 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max \ -10\, x_1 x_2 - 2\, x_2^2 - 5\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(1,2)$ , $(-4,3)$ , $(4,-4)$ e $(-2,-3)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(3,-2)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 7\,y_1 + y_2 + 6\,y_3 + 4\,y_4 + y_5 + 7\,y_6 \\ 2\,y_1 + y_3 - y_4 - 2\,y_5 - y_6 = -1 \\ -y_1 - y_2 + 2\,y_3 + 3\,y_4 - y_5 + y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (3,\ -1)$ | SI | NO |
| $\{1,\ 4\}$ | $y = \left(-\frac{2}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{5},\ 0,\ 0\right)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{4,\ 6\}$ | $\left(-\frac{17}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$ | $(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$ | 2 | 2 | 6 |
| 2° iterazione | $\{2,\ 4\}$ | $(-7,\ -1)$ | $(0,\ 2,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$ | 5 | $\frac{2}{7},\ \frac{1}{2}$ | 2 |

**Esercizio 3.**

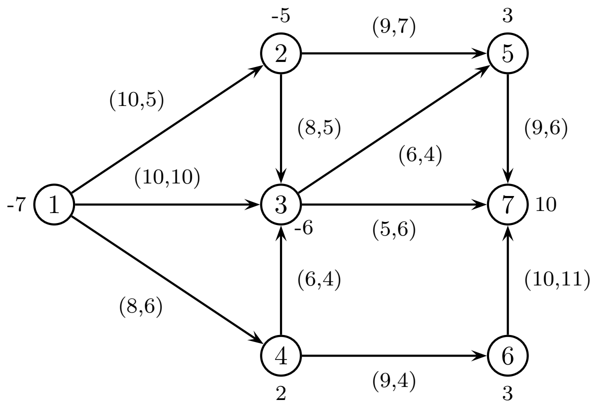
variabili decisionali:
$x_1$ = giorni di lavoro nello stabilimento 1
$x_2$ = giorni di lavoro nello stabilimento 2

modello:
$$\begin{cases} \min 350\,x_1 + 400\,x_2 \\ 6\,x_1 + 2\,x_2 \geq 50 \\ 4\,x_1 + 3\,x_2 \geq 40 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 \geq 60 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

```
c=[ 350 ; 400]

A=[ -6 -2 ; -4 -3 ; -3 -5 ]          b=[ -50 ; -40 ; -60 ]

Aeq=[]                               beq=[]

lb=[0; 0]                            ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

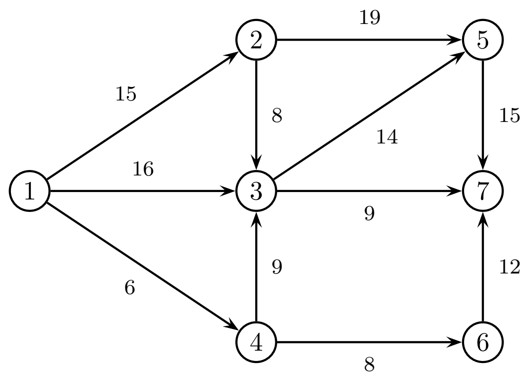



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7) | (2,3) | $x = (0,\ -8,\ 15,\ 5,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 13,\ 0,\ 10)$ | NO | SI |
| (1,2) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7) | (1,4) | $\pi = (0,\ 10,\ 23,\ 17,\ 19,\ 18,\ 28)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

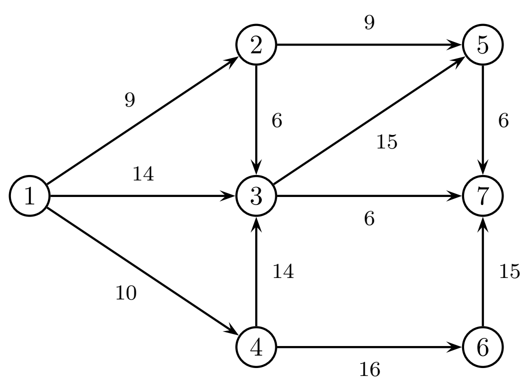
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) | (1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) |
| Archi di U | (5,7) | (5,7) |
| $x$ | (2, 0, 5, 0, 7, 2, 4, 0, 3, 6, 0) | (0, 2, 5, 0, 5, 4, 4, 0, 3, 6, 0) |
| $\pi$ | (0, 10, 13, 8, 19, 17, 18) | (0, 7, 10, 8, 16, 17, 15) |
| Arco entrante | (1,3) | (5,7) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 2 , 2 | 2 , 4 |
| Arco uscente | (1,2) | (3,7) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 $\pi$ | iter 1 $p$ | iter 2 $\pi$ | iter 2 $p$ | iter 3 $\pi$ | iter 3 $p$ | iter 4 $\pi$ | iter 4 $p$ | iter 5 $\pi$ | iter 5 $p$ | iter 6 $\pi$ | iter 6 $p$ | iter 7 $\pi$ | iter 7 $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nodo visitato | 1 | | 4 | | 6 | | 2 | | 3 | | 7 | | 5 | |
| nodo 2 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 |
| nodo 3 | 16 | 1 | 15 | 4 | 15 | 4 | 15 | 4 | 15 | 4 | 15 | 4 | 15 | 4 |
| nodo 4 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 34 | 2 | 29 | 3 | 29 | 3 | 29 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 26 | 6 | 26 | 6 | 24 | 3 | 24 | 3 | 24 | 3 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 3, 6 | | 2, 3, 7 | | 3, 5, 7 | | 5, 7 | | 5 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 6 | (0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0) | 6 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 6 | (6, 6, 0, 0, 6, 0, 6, 0, 0, 6, 0) | 12 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 10 | (6, 6, 10, 0, 6, 0, 6, 0, 10, 6, 10) | 22 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 11\ x_1 + 13\ x_2 \\ 11\ x_1 + 9\ x_2 \geq 60 \\ 9\ x_1 + 15\ x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{33}{7}, \frac{19}{21}\right)$ $\qquad v_I(P) = 64$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (5, 1)$ $\qquad v_S(P) = 68$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 10\, x_1 + 9\, x_2 \geq 56$
$r = 2$ $\qquad 9\, x_1 + 14\, x_2 \geq 56$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 9 | 91 | 62 | 42 |
| **2** | | 25 | 54 | 56 |
| **3** | | | 9 | 11 |
| **4** | | | | 13 |

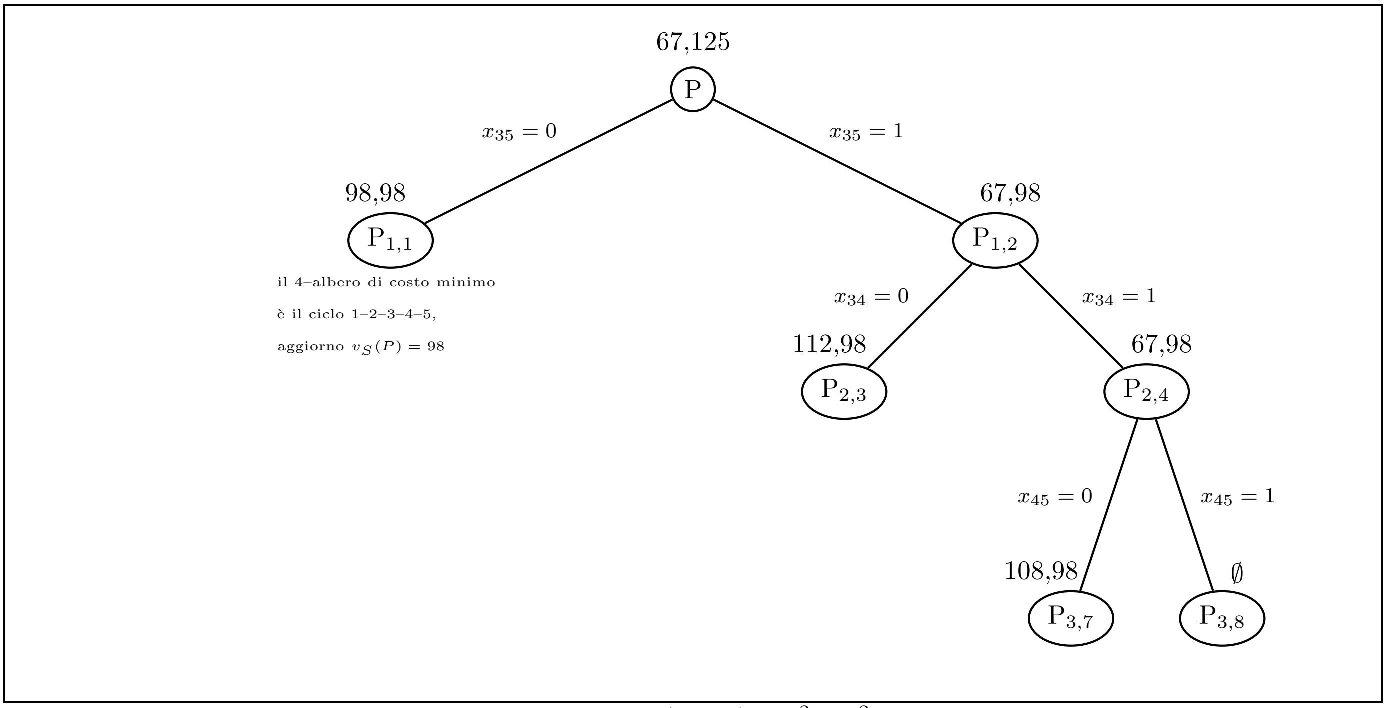
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: ( 1 , 2 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) ( 4 , 5 ) $\qquad v_I(P) = 67$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $2 - 1 - 5 - 3 - 4$ $\qquad v_S(P) = 125$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{35}$, $x_{34}$, $x_{45}$.




**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 + x_2^2 \leq 0, \quad -x_1 + x_2 - 1 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(0,\ 0)$ | $(0,0)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ | $(0,-1)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2},\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ | $(negativo, negativo)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |
| $\left(-\frac{\sqrt{5}+3}{2},\ -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ | $(negativo, negativo)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max \; -10\; x_1\, x_2 - 2\; x_2^2 - 5\; x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(1, 2)$ , $(-4, 3)$ , $(4, -4)$ e $(-2, -3)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(3, -2)$ | $(2, 1)$ | $\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$ | $\left(\frac{74}{5}, -\frac{148}{5}\right)$ | $\frac{5}{74}$ | $\frac{5}{74}$ | $(4, -4)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 09/06/14**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 4\,x_1 - x_2 \\ -x_2 \le 3 \\ -4\,x_1 + x_2 \le 21 \\ 3\,x_1 - 2\,x_2 \le -3 \\ x_1 + x_2 \le -1 \\ -x_1 + 2\,x_2 \le 7 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {4, 6} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {5,6} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una ditta produce due tipi di farinaccio per alimentazione animale (A-B), che si vendono a 39 e 42 euro al quintale rispettivamente, in due reparti (1-2). Di farinaccio di tipo A bisogna produrne tra il 40 ed il 60 per cento del totale. Nella seguente tabella sono indicati i tempi di lavorazione dei farinacci (in ore) , le capacità produttive (in ore) dei reparti ed il costo orario.

| | A | B | Capacità | Costo |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.19 | 0.23 | 90 | 2.81 |
| 2 | 0.21 | 0.18 | 85 | 3.19 |

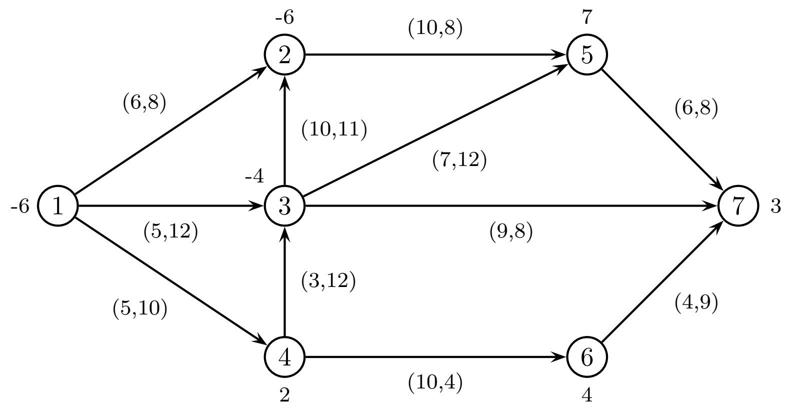
Si cerca la pianificazione della produzione che massimizzi il profitto.

variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB ( DEL PROBLEMA O DEL RILASSATO?)

```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

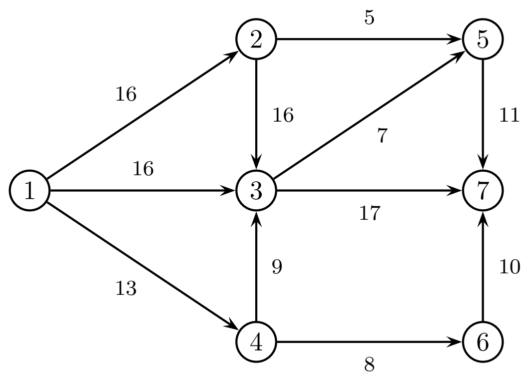


| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (3,2) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7) | (2,5) | $x =$ | | |
| (1,4) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7) | (1,3) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

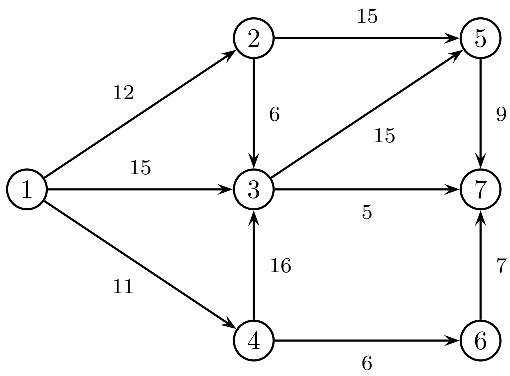
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (3,2) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7) | |
| Archi di U | (2,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 13\ x_1 + 8\ x_2 \\ 12\ x_1 + 11\ x_2 \leq 63 \\ 7\ x_1 + 16\ x_2 \leq 42 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 9 | 87 | 61 | 41 |
| **2** | | 24 | 53 | 55 |
| **3** | | | 8 | 9 |
| **4** | | | | 12 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{35}$, $x_{34}$, $x_{45}$.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_2^2 + 4x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 - 36 \leq 0, \quad x_1 - x_2 + 5 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| | $\left(\frac{3}{2}, -22\right)$ | | | | | | |
| | $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ | | | | | | |
| | $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ | | | | | | |
| | $(0, -4))$ | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 4\ x_1^2 + 4\ x_1\, x_2 + 2\ x_1 + 5\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(-4, -5)$ , $(1, 2)$ , $(1, -5)$ e $(-4, -0)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{7}{3}, -5\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 4\,x_1 - x_2 \\ -x_2 \le 3 \\ -4\,x_1 + x_2 \le 21 \\ 3\,x_1 - 2\,x_2 \le -3 \\ x_1 + x_2 \le -1 \\ -x_1 + 2\,x_2 \le 7 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\,2\}$ | $x = (-6,\ -3)$ | SI | NO |
| $\{4,\,6\}$ | $y = (0,\ 0,\ 0,\ 4,\ 0,\ -5)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

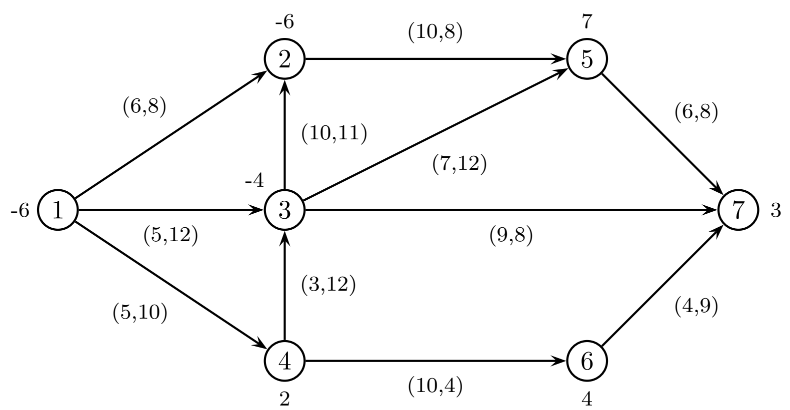
| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{5,\,6\}$ | $(-3,\ 2)$ | $(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -4,\ 7)$ | 5 | $\frac{10}{3},\ 0$ | 4 |
| 2° iterazione | $\{4,\,6\}$ | $(-3,\ 2)$ | $(0,\ 0,\ 0,\ 4,\ 0,\ -5)$ | 6 | $5,\ 2$ | 3 |

**Esercizio 3.**

COMANDI DI MATLAB

```
c=[-38.47; -41.35; -38.27; -41.43]

A=[0.19 0.23 0 0;0 0 0.21 0.18;-0.6 0.4 -0.6 0.4;0.4 -0.6 0.4 -0.6]          b=[90;85;0;0]

Aeq=[ ]                                                                        beq=[ ]

lb=[0 ; 0 ; 0; 0]                                                              ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

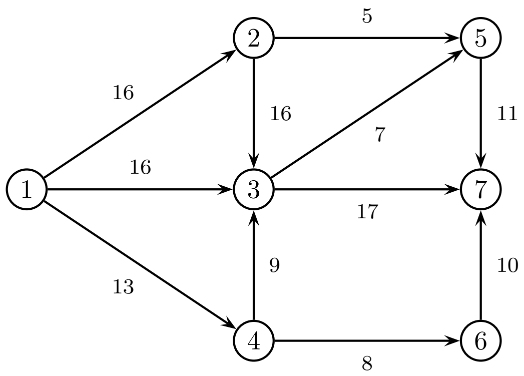



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (3,2) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7) | (2,5) | $x = (6,\ 0,\ 0,\ 8,\ -4,\ 0,\ 0,\ -8,\ 6,\ 1,\ 2)$ | NO | NO |
| (1,4) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7) | (1,3) | $\pi = (0,\ 1,\ 8,\ 5,\ 11,\ 13,\ 17)$ | SI | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

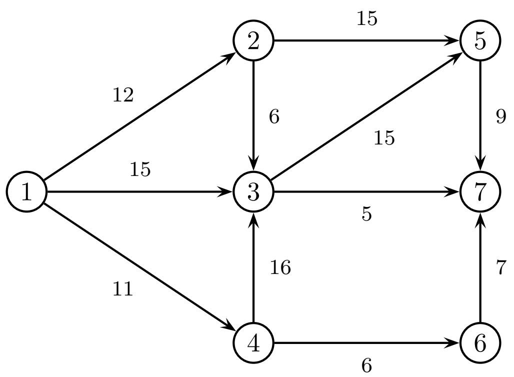
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (3,2) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7) | (1,2) (1,4) (3,2) (3,5) (4,6) (5,7) |
| Archi di U | (2,5) | (2,5) |
| $x$ | (0, 0, 6, 8, 2, 2, 0, 0, 4, 3, 0) | (0, 0, 6, 8, 2, 2, 0, 0, 4, 3, 0) |
| $\pi$ | (0, 18, 8, 5, 15, 15, 21) | (0, 6, −4, 5, 3, 15, 9) |
| Arco entrante | (1,2) | (2,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 8 , 0 | 10 , 2 |
| Arco uscente | (4,3) | (3,2) |

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 4 | | 2 | | 3 | | 5 | | 6 | | 7 | |
| nodo 2 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 |
| nodo 3 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 |
| nodo 4 | 13 | 1 | 13 | 1 | 13 | 1 | 13 | 1 | 13 | 1 | 13 | 1 | 13 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 21 | 2 | 21 | 2 | 21 | 2 | 21 | 2 | 21 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 21 | 4 | 21 | 4 | 21 | 4 | 21 | 4 | 21 | 4 | 21 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 33 | 3 | 32 | 5 | 31 | 6 | 31 | 6 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 3, 6 | | 3, 5, 6 | | 5, 6, 7 | | 6, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 5 | (0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0) | 5 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 9 | (9, 5, 0, 0, 9, 0, 5, 0, 0, 9, 0) | 14 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 6 | (9, 5, 6, 0, 9, 0, 5, 0, 6, 9, 6) | 20 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1,2,3,4,5\}$ $\quad N_t = \{6,7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 13\ x_1 + 8\ x_2 \\ 12\ x_1 + 11\ x_2 \leq 63 \\ 7\ x_1 + 16\ x_2 \leq 42 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{21}{4}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 68$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (5,0)$ $\qquad v_I(P) = 65$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad x_1 \leq 5$

$r = 4$ $\qquad 5\,x_1 + 4\,x_2 \leq 26$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 9 | 87 | 61 | 41 |
| **2** | | 24 | 53 | 55 |
| **3** | | | 8 | 9 |
| **4** | | | | 12 |

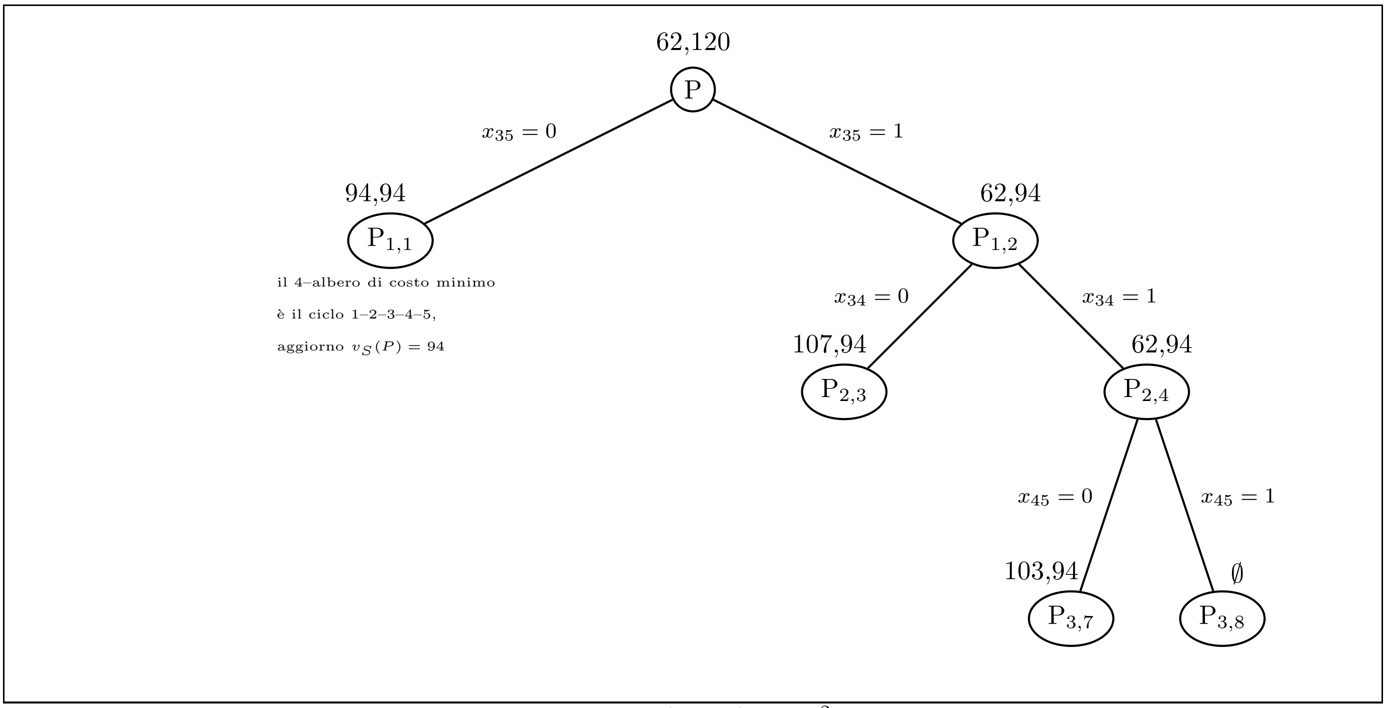
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: ( 1 , 2 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) ( 4 , 5 ) $\qquad v_I(P) = 62$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $2 - 1 - 5 - 3 - 4$ $\qquad v_S(P) = 120$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{35}$, $x_{34}$, $x_{45}$.




**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_2^2 + 4x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 - 36 \leq 0, \quad x_1 - x_2 + 5 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(6,\ 11)$ | $\left(\frac{3}{2}, -22\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(-6,\ -1)$ | $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ | | NO | NO | NO | SI | NO |
| $(-6,\ 0)$ | $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(-3,\ 2)$ | $(0, -4)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 4\, x_1^2 + 4\, x_1\, x_2 + 2\, x_1 + 5\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(-4, -5)$ , $(1, 2)$ , $(1, -5)$ e $(-4, 0)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{7}{3}, -5\right)$ | $(0, -1)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\left(\frac{110}{3}, 0\right)$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $(1, -5)$ |

## Esame di Ricerca Operativa del 09/06/15

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 23\ y_1 + 2\ y_2 + 16\ y_3 + 10\ y_4 + y_5 + 17\ y_6 \\ 5\ y_1 - y_2 + 2\ y_3 - y_4 - 4\ y_5 - 2\ y_6 = -1 \\ -y_1 - 2\ y_2 + 3\ y_3 + 3\ y_4 - y_5 + 2\ y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {1, 4} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {3,6} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Un albergo deve garantire il servizio di portineria 24/24 ore al giorno. Ogni lavoratore lavora 8 ore consecutive ogni 24 ore. Il numero minimo di personale in ogni fascia oraria é dato dalla seguente tabella:

| Fascia oraria | Numero minimo | Fascia oraria | Numero minimo |
|---|---|---|---|
| 2-6 | 4 | 14-18 | 7 |
| 6-10 | 8 | 18-22 | 12 |
| 10-14 | 10 | 22-2 | 4 |

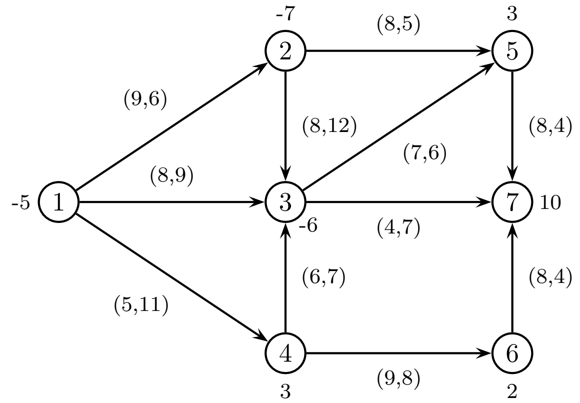
Formulare un modello che trovi il numero minimo di persone necesssarie ad espletare il servizio

significato variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                                  intcon=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

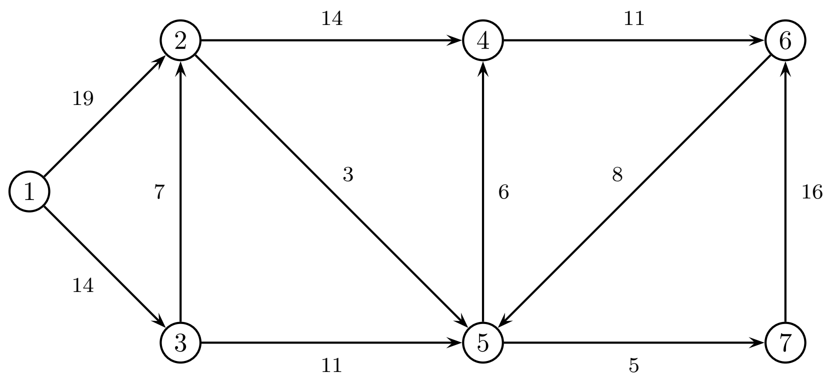



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) | (2,3) | $x =$ | | |
| (1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (3,7) (4,6) | (4,3) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

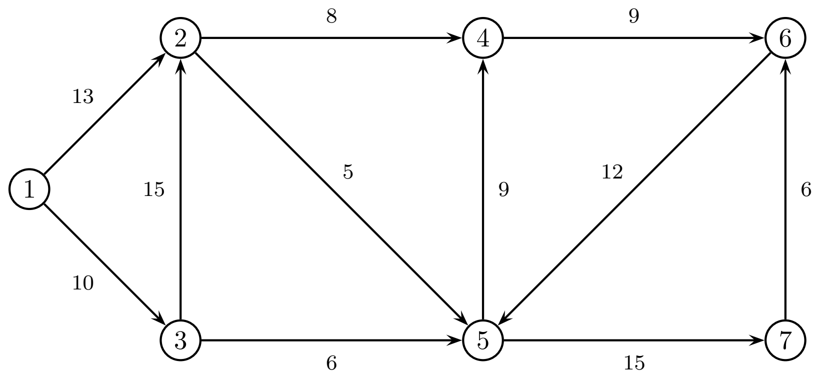
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (2,3) (3,7) (4,3) (4,6) (5,7) | |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 7\ x_1 + 12\ x_2 \\ 15\ x_1 + 12\ x_2 \geq 50 \\ 14\ x_1 + 17\ x_2 \geq 59 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 10 | 41 | 62 | 92 |
| **2** | | 27 | 54 | 56 |
| **3** | | | 11 | 13 |
| **4** | | | | 94 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

| 5–albero: | $v_I(P) =$ |
|---|---|

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

| ciclo: | $v_S(P) =$ |
|---|---|

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{45}$, $x_{35}$, $x_{15}$. Dire se l'algoritmo é terminato.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 36 \leq 0, \quad 1 - x_1x_2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(-1,\ -1)$ | | | | | | | |
| $(1,\ 1)$ | | | | | | | |
| $\left(3+\sqrt{8},\ 3-\sqrt{8}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(3-\sqrt{8},\ 3+\sqrt{8}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(-3+\sqrt{8},\ -3-\sqrt{8}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(-3-\sqrt{8},\ -3+\sqrt{8}\right)$ | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 2\ x_1^2 + 4\ x_2^2 - 2\ x_1 - 9\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(-3, 0)$ , $(4, 1)$ , $(5, -3)$ e $(-4, -2)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 23\ y_1 + 2\ y_2 + 16\ y_3 + 10\ y_4 + y_5 + 17\ y_6 \\ 5\ y_1 - y_2 + 2\ y_3 - y_4 - 4\ y_5 - 2\ y_6 = -1 \\ -y_1 - 2\ y_2 + 3\ y_3 + 3\ y_4 - y_5 + 2\ y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (4,\ -3)$ | SI | NO |
| $\{1,\ 4\}$ | $y = \left(-\frac{1}{7},\ 0,\ 0,\ \frac{2}{7},\ 0,\ 0\right)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

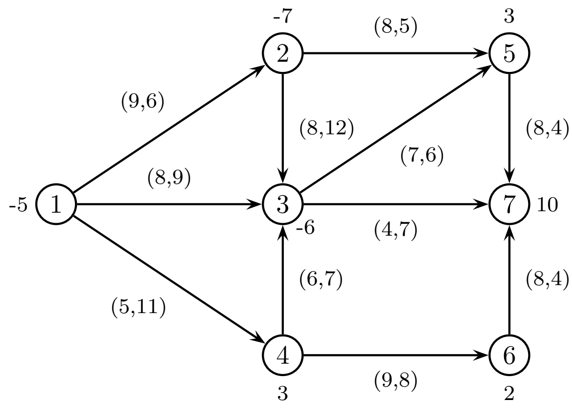
| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{3,\ 6\}$ | $\left(-\frac{19}{10},\ \frac{33}{5}\right)$ | $\left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ | 4 | $0,\ \frac{5}{9}$ | 3 |
| 2° iterazione | $\{4,\ 6\}$ | $\left(-\frac{31}{4},\ \frac{3}{4}\right)$ | $\left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ | 2 | $\frac{2}{5}$ | 6 |

**Esercizio 3.**

COMANDI DI MATLAB

```
c=[1 1 1 1 1 1]              intcon=[1 2 3 4 5 6]

beq=[                        b=[-4;-8;-10;-7;-12;-4]

Aeq=[]                       A=[-10000-1;-1-10000;0-1-1000;00-1-100;000-1-10;0000-1-1]

lb=[0 0 0 0 0 0]             ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

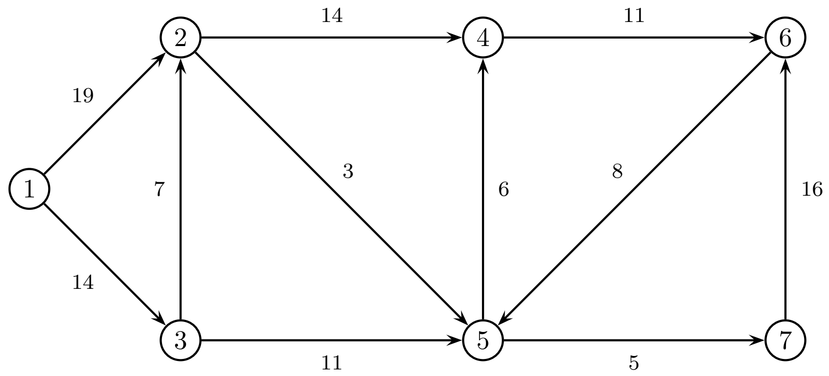



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (1,4) (2,5)<br>(3,5) (3,7) (4,6) | (2,3) | $x = (0,\ 0,\ 5,\ 12,\ -5,\ 8,\ 10,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0)$ | NO | SI |
| (1,2) (1,3) (1,4)<br>(3,5) (3,7) (4,6) | (4,3) | $\pi = (0,\ 9,\ 8,\ 5,\ 15,\ 14,\ 12)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

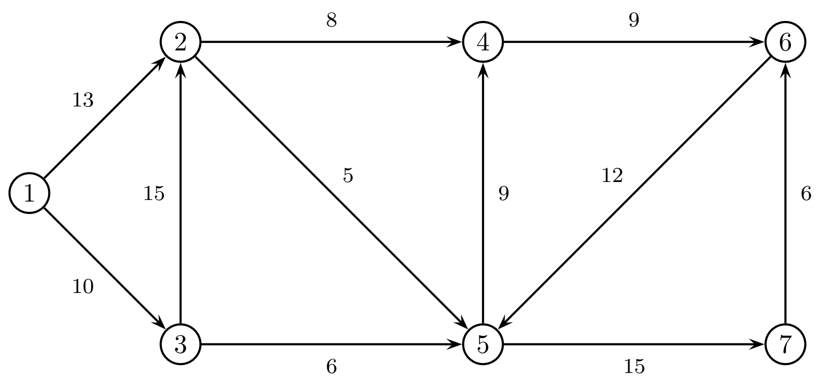
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (2,3) (3,7) (4,3) (4,6) (5,7) | (1,3) (1,4) (2,3) (3,7) (4,6) (5,7) |
| Archi di U | (3,5) | (3,5) |
| $x$ | (0, 0, 5, 7, 0, 6, 7, 0, 2, 3, 0) | (0, 0, 5, 7, 0, 6, 7, 0, 2, 3, 0) |
| $\pi$ | (0, 3, 11, 5, 7, 14, 15) | (0, 0, 8, 5, 4, 14, 12) |
| Arco entrante | (1,3) | (3,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 9 , 0 | 0 , 3 |
| Arco uscente | (4,3) | (3,7) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 2 | | 5 | | 7 | | 4 | | 6 | |
| nodo 2 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 |
| nodo 3 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 |
| nodo 4 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 33 | 2 | 28 | 5 | 28 | 5 | 28 | 5 | 28 | 5 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 25 | 3 | 22 | 2 | 22 | 2 | 22 | 2 | 22 | 2 | 22 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 43 | 7 | 39 | 4 | 39 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 27 | 5 | 27 | 5 | 27 | 5 | 27 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3 | | 2, 5 | | 4, 5 | | 4, 7 | | 4, 6 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 2 - 5 - 7 | 5 | (5, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0) | 5 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 6 | (5, 6, 0, 5, 0, 6, 0, 0, 11, 0, 0) | 11 |
| 1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7 | 4 | (9, 6, 4, 5, 0, 6, 4, 0, 15, 4, 0) | 15 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad N_t = \{7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 7\ x_1 + 12\ x_2 \\ 15\ x_1 + 12\ x_2 \geq 50 \\ 14\ x_1 + 17\ x_2 \geq 59 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{59}{14}, 0\right)$ $\qquad v_I(P) = 30$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(5, 0)$ $\qquad v_S(P) = 35$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 13\, x_1 + 16\, x_2 \geq 55$
$r = 3$ $\qquad 13\, x_1 + 16\, x_2 \geq 55$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 10 | 41 | 62 | 92 |
| **2** | | 27 | 54 | 56 |
| **3** | | | 11 | 13 |
| **4** | | | | 94 |

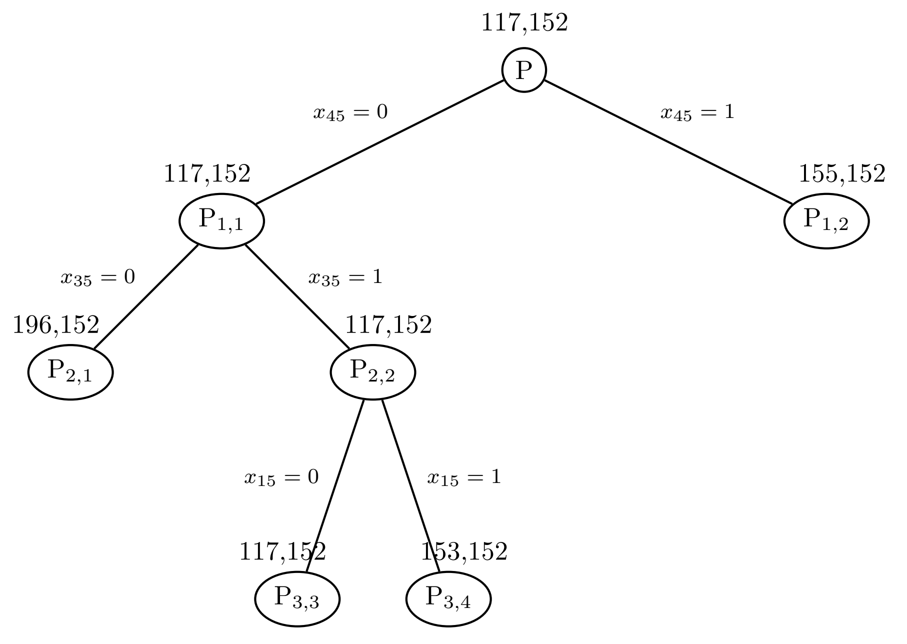
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: ( 1 , 2 ) ( 2 , 3 ) ( 2 , 5 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) $\qquad v_I(P) = 117$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: $4 - 3 - 5 - 2 - 1$ $\qquad v_S(P) = 152$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{45}$, $x_{35}$, $x_{15}$.



**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 36 \leq 0, \quad 1 - x_1x_2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(-1,\ -1)$ | 0 | -1 | NO | SI | NO | NO | NO |
| $(1,\ 1)$ | 0 | 1 | NO | NO | NO | SI | NO |
| $\left(3+\sqrt{8},\ 3-\sqrt{8}\right)$ | -1/12 | 0 | SI | SI | NO | NO | NO |
| $\left(3-\sqrt{8},\ 3+\sqrt{8}\right)$ | -1/12 | 0 | SI | SI | NO | NO | NO |
| $\left(-3+\sqrt{8},\ -3-\sqrt{8}\right)$ | 1/12 | 0 | NO | NO | SI | SI | NO |
| $\left(-3-\sqrt{8},\ -3+\sqrt{8}\right)$ | 1/12 | 0 | NO | NO | SI | SI | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 2\,x_1^2 + 4\,x_2^2 - 2\,x_1 - 9\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(-3,0)$ , $(4,1)$ , $(5,-3)$ e $(-4,-2)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ | $(-2,1)$ | $\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$ | $\left(\dfrac{44}{5}, \dfrac{88}{5}\right)$ | $\dfrac{5}{132}$ | $\dfrac{5}{132}$ | $(-3,0)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 09/06/14**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -3\ x_1 - 7\ x_2 \\ -x_2 \leq 3 \\ -4\ x_1 + x_2 \leq 21 \\ 3\ x_1 - 2\ x_2 \leq -3 \\ x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 + 2\ x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x =$ | | |
| $\{4,\ 5\}$ | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {4,5} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una ditta produce due tipi di farinaccio per alimentazione animale (A-B), che si vendono a 38 e 41 euro al quintale rispettivamente, in due reparti (1-2). Di farinaccio di tipo A bisogna produrne tra il 50 ed il 70 per cento del totale. Nella seguente tabella sono indicati i tempi di lavorazione dei farinacci (in ore) , le capacità produttive (in ore) dei reparti ed il costo orario.

| | A | B | Capacità | Costo |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.19 | 0.23 | 90 | 2.82 |
| 2 | 0.21 | 0.18 | 85 | 3.18 |

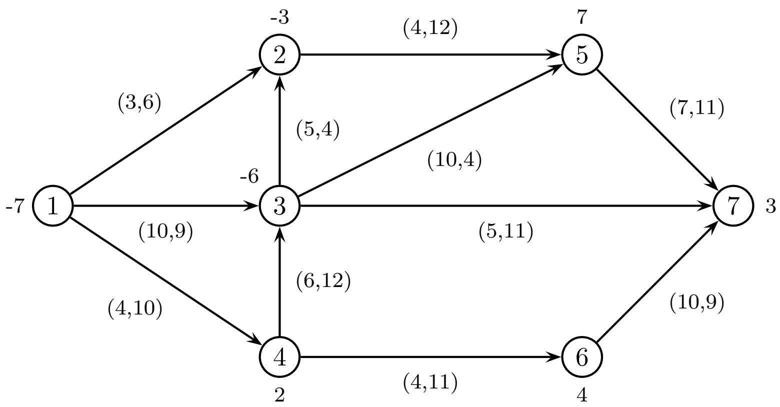
Si cerca la pianificazione della produzione che massimizzi il profitto.

variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB ( DEL PROBLEMA O DEL RILASSATO?)

```
c=

A=                                    b=

Aeq=                                  beq=

lb=                                   ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

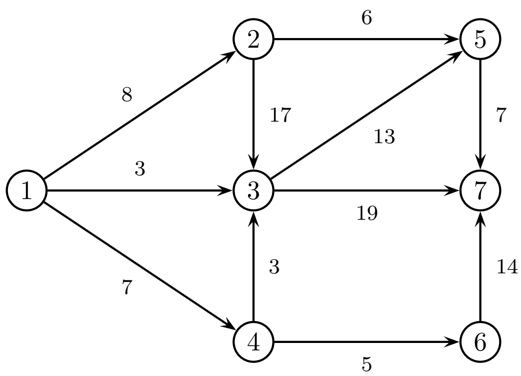



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7) | (3,7) | $x =$ | | |
| (1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (5,7) (6,7) | (3,7) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

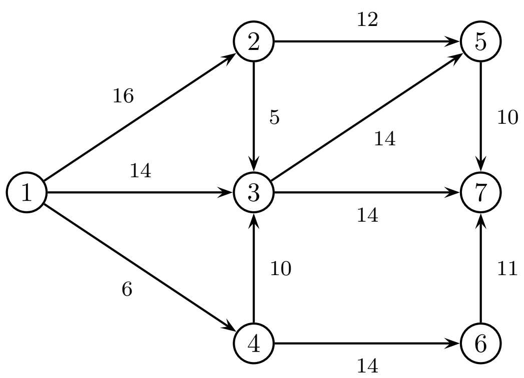
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7) | |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 11\ x_1 + 5\ x_2 \\ 18\ x_1 + 12\ x_2 \leq 53 \\ 11\ x_1 + 13\ x_2 \leq 40 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 9 | 87 | 61 | 41 |
| **2** | | 24 | 53 | 55 |
| **3** | | | 8 | 9 |
| **4** | | | | 12 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

| | |
|---|---|
| 5–albero: | $v_I(P) =$ |

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

| | |
|---|---|
| ciclo: | $v_S(P) =$ |

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{35}$, $x_{34}$, $x_{45}$.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_2^2 + 3x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 - 25 \leq 0, \quad x_1 - x_2 + 4 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| | $\left(\frac{3}{2}, -18\right)$ | | | | | | |
| | $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ | | | | | | |
| | $\left(\frac{3}{10}, 0\right)$ | | | | | | |
| | $(0, -3))$ | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -2\, x_1^2 - 2\, x_1\, x_2 + 4\, x_2^2 + 4\, x_1 - 6\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(4, -1)$ , $(-3, 2)$ , $(-4, 4)$ e $(-1, 5)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-2, \frac{14}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -3\ x_1 - 7\ x_2 \\ -x_2 \leq 3 \\ -4\ x_1 + x_2 \leq 21 \\ 3\ x_1 - 2\ x_2 \leq -3 \\ x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 + 2\ x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x = (-6,\ -3)$ | SI | NO |
| $\{4, 5\}$ | $y = \left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{13}{3},\ -\frac{4}{3},\ 0\right)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

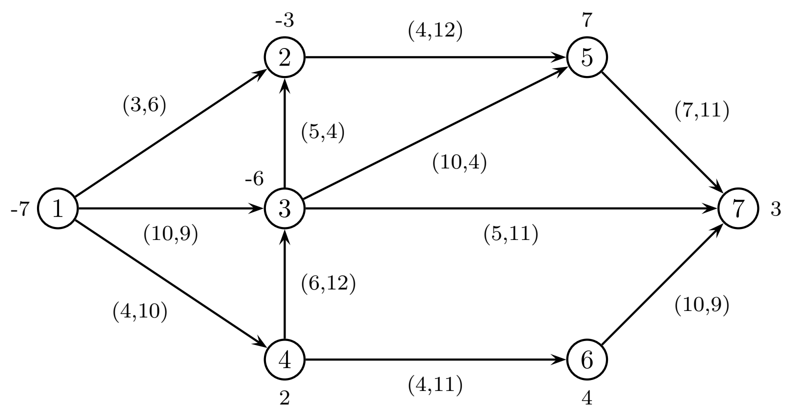
| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{4, 5\}$ | $(-3,\ 2)$ | $\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{13}{3},\ -\frac{4}{3},\ 0\right)$ | 4 | $15,\ 3$ | 2 |
| 2° iterazione | $\{2, 5\}$ | $(-5,\ 1)$ | $\left(0,\ \frac{13}{7},\ 0,\ 0,\ -\frac{31}{7},\ 0\right)$ | 5 | $7,\ \frac{98}{5}$ | 1 |

**Esercizio 3.**

COMANDI DI MATLAB

```
c=[-37.46; -40.35;-37.33;-40.43]

A=[0.19 0.23 0 0;0 0 0.21 0.18;-0.5 0.5 -0.5 0.5;0.3 -0.7 0.3 -0.7]     b=[90;85;0;0]

Aeq=[ ]                                                                  beq=[ ]

lb=[0 ; 0 ; 0; 0]                                                        ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

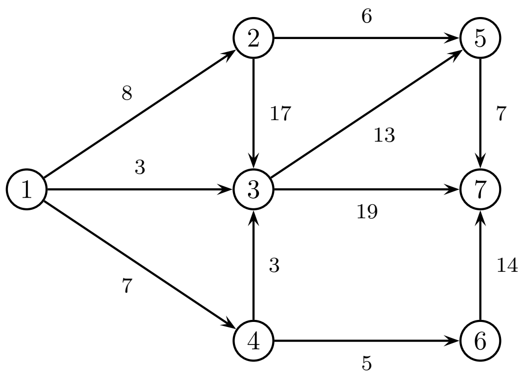



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7) | (3,7) | $x = (0,\ 0,\ 7,\ 3,\ 0,\ 0,\ 11,\ 5,\ 0,\ -4,\ -4)$ | NO | SI |
| (1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (5,7) (6,7) | (3,7) | $\pi = (0,\ 3,\ 10,\ 4,\ 20,\ 17,\ 27)$ | NO | SI |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

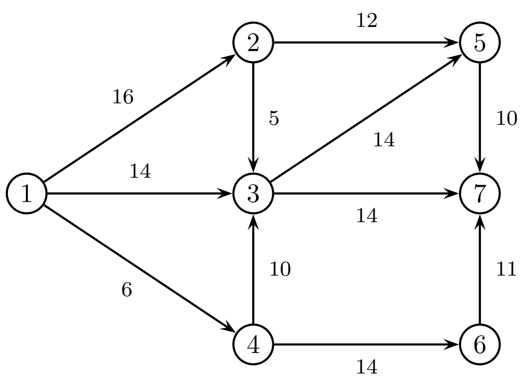
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7) | (1,2) (1,3) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) |
| Archi di U | (3,5) | (3,5) |
| $x$ | (0, 0, 7, 3, 0, 4, 2, 0, 5, 0, 1) | (0, 1, 6, 3, 0, 4, 3, 0, 4, 0, 0) |
| $\pi$ | (0, 3, 13, 4, 7, 8, 18) | (0, 3, 10, 4, 7, 8, 15) |
| Arco entrante | (1,3) | (3,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 9 , 1 | 6 , 1 |
| Arco uscente | (6,7) | (1,3) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 4 | | 2 | | 6 | | 5 | | 7 | |
| nodo 2 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 |
| nodo 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| nodo 4 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 16 | 3 | 16 | 3 | 14 | 2 | 14 | 2 | 14 | 2 | 14 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | 22 | 3 | 22 | 3 | 22 | 3 | 22 | 3 | 21 | 5 | 21 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 4, 5, 7 | | 2, 5, 6, 7 | | 5, 6, 7 | | 5, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 14 | (0, 14, 0, 0, 0, 0, 14, 0, 0, 0, 0) | 14 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 10 | (10, 14, 0, 0, 10, 0, 14, 0, 0, 10, 0) | 24 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 6 | (10, 14, 6, 0, 10, 0, 14, 0, 6, 10, 6) | 30 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 11\ x_1 + 5\ x_2 \\ 18\ x_1 + 12\ x_2 \leq 53 \\ 11\ x_1 + 13\ x_2 \leq 40 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{53}{18}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 32$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(2, 0)$ $\qquad v_I(P) = 22$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad x_1 \leq 2$
$r = 4$ $\qquad 7\,x_1 + 4\,x_2 \leq 20$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 9 | 87 | 61 | 41 |
| **2** | | 24 | 53 | 55 |
| **3** | | | 8 | 9 |
| **4** | | | | 12 |

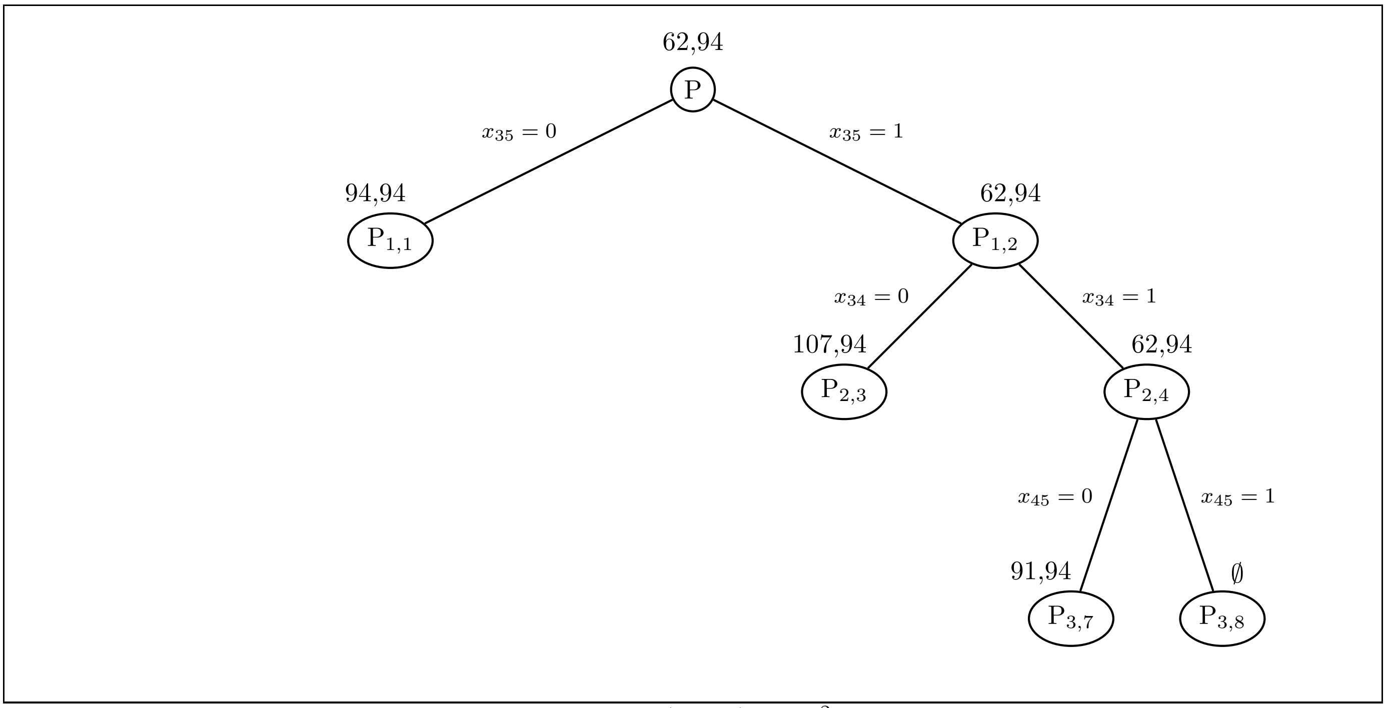
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: ( 1 , 2 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) ( 4 , 5 ) $\qquad v_I(P) = 62$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $1 - 2 - 3 - 4 - 5$ $\qquad v_S(P) = 94$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{35}$, $x_{34}$, $x_{45}$.




**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_2^2 + 3x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 - 25 \le 0, \quad x_1 - x_2 + 4 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(5,\ 9)$ | $\left(\frac{3}{2}, -18\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(-5,\ -1)$ | $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ | | NO | NO | NO | SI | NO |
| $(-5,\ 0)$ | $\left(\frac{3}{10}, 0\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(-\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ | $(0, -3)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -2\ x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + 4\ x_2^2 + 4\ x_1 - 6\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(4, -1)$ , $(-3, 2)$ , $(-4, 4)$ e $(-1, 5)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-2, \frac{14}{3}\right)$ | $(-1, 3)$ | $\begin{pmatrix} 9/10 & 3/10 \\ 3/10 & 1/10 \end{pmatrix}$ | $\left(-13, -\frac{13}{3}\right)$ | $\frac{2}{13}$ | $\frac{2}{13}$ | $(-4, 4)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 12/06/18**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale:

$$\begin{cases} \min\ 2\ y_1 + 2\ y_2 + 6\ y_3 + 12\ y_4 + 4\ y_5 + 5\ y_6 \\ -2\ y_1 - 2\ y_2 - y_3 + 3\ y_4 + y_5 = 7 \\ y_1 - 3\ y_2 + 3\ y_3 + y_4 - y_5 + y_6 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| | Base | $x$ | Degenere? | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° passo | {5,6} | | | | | | |
| 2° passo | | | | | | | |

**Esercizio 2.** Un'azienda produce 4 tipi di smartphone (S1, S2, S3 e S4) ed è divisa in 2 stabilimenti (A e B). L'azienda dispone di 40 tecnici in A e 50 in B ognuno dei quali lavora 7 ore al giorno per 5 giorni alla settimana. Le ore necessarie per produrre gli smartphone e le richieste minime da soddisfare sono indicate nella seguente tabella:

| Smartphone | S1 | S2 | S3 | S4 |
|---|---|---|---|---|
| Stabilimento A | 1.2 | 1.5 | 1.7 | 2 |
| Stabilimento B | 1.5 | 1.6 | 1.8 | 2.2 |
| Richiesta | 200 | 140 | 120 | 80 |

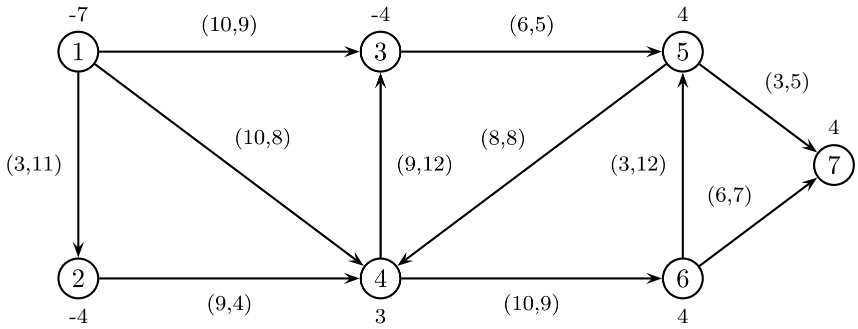
Sapendo che i 4 tipi di smartphone vengono venduti rispettivamente a 400, 600, 1000, e 1500 euro, l'azienda vuole determinare quanti smartphone di ogni tipo produrre nei due stabilimenti in modo da massimizzare il profitto.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                                  intcon=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 3.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso sulla seguente rete (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).




| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,7) | |
| Archi di U | (2,4) | |
| $x$ | | |
| degenere? | | |
| $\pi$ | | |
| degenere? | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 7\ x_1 + 14\ x_2 \\ 11\ x_1 + 6\ x_2 \leq 46 \\ 7\ x_1 + 9\ x_2 \leq 50 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

| | |
|---|---|
| sol. ottima del rilassamento = | $v_S(P) =$ |

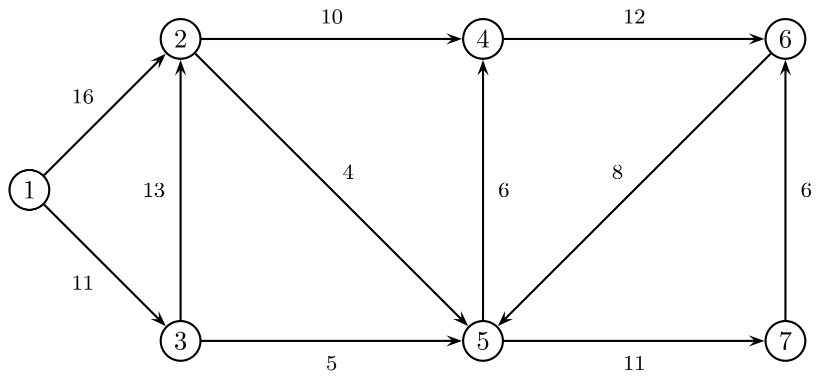
b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo.

| | |
|---|---|
| sol. ammissibile = | $v_I(P) =$ |

c) Calcolare un taglio di Gomory.

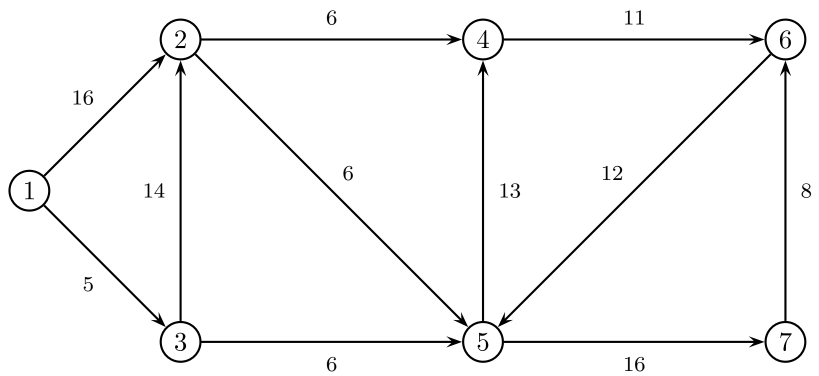
| | |
|---|---|
| $r =$ | taglio: |

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 6.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 29 | 24 | 28 | 47 |
| **2** | | 18 | 94 | 61 |
| **3** | | | 53 | 26 |
| **4** | | | | 20 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

| | |
|---|---|
| 2–albero: | $v_I(P) =$ |

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

| | |
|---|---|
| ciclo: | $v_S(P) =$ |

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{14}$, $x_{24}$, $x_{45}$. Dire se l'algoritmo é terminato.

**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 10x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_2^2 + 8x_2 + 15 \le 0, \quad x_1^2 + 8x_1 + 15 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(-5,\ -3)$ | | | | | | | |
| $(-3,\ -3)$ | | | | | | | |
| $(-5,\ -5)$ | | | | | | | |
| $(-3,\ -5)$ | | | | | | | |

**Esercizio 8.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 6\, x_1^2 - 4\, x_1\, x_2 - 2\, x_2^2 + 5\, x_1 - 2\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(1,5)$ , $(5,0)$ , $(-3,5)$ e $(-1,0)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{5}{3}, 5\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale .

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {5, 6} | (9, 5) (SI) | (0, 0, 0, 0, 7, 11) | 4 | $\frac{7}{3}, \frac{11}{4}$ | 5 |
| 2° iterazione | {4, 6} | $\left(\frac{7}{3}, 5\right)$ (NO) | $\left(0, 0, 0, \frac{7}{3}, 0, \frac{5}{3}\right)$ | 3 | $\frac{1}{2}$ | 6 |

**Esercizio 2.** variabili decisionali: $x_{ij}$ = numero di smartphone di tipo $i$ prodotti nello stabilimento $j$, con $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = A, B$.

modello:

$$\begin{cases} \max\ 400\,(x_{1A} + x_{1B}) + 600\,(x_{2A} + x_{2B}) + 1000\,(x_{3A} + x_{3B}) + 1500\,(x_{4A} + x_{4B}) \\ 1.2\,x_{1A} + 1.5\,x_{2A} + 1.7\,x_{3A} + 2\,x_{4A} \leq 1400 \\ 1.5\,x_{1B} + 1.6\,x_{2B} + 1.8\,x_{3B} + 2.2\,x_{4B} \leq 1750 \\ x_{1A} + x_{1B} \geq 200 \\ x_{2A} + x_{2B} \geq 140 \\ x_{3A} + x_{3B} \geq 120 \\ x_{4A} + x_{4B} \geq 80 \\ x_{ij} \geq 0 \\ x_{ij} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

**Esercizio 3.**

| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,7) | (1,2) (1,3) (1,4) (4,6) (5,7) (6,7) |
| Archi di U | (2,4) | (2,4) (3,5) |
| $x$ | (0, 0, 7, 4, 4, 0, 8, 0, 0, 0, 4) (SI) | (0, 1, 6, 4, 5, 0, 7, 0, 1, 0, 3) (SI) |
| $\pi$ | (0, 3, 17, 10, 23, 20, 26) (SI) | (0, 3, 10, 10, 23, 20, 26) (SI) |
| Arco entrante | (1,3) | (2,4) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 1 , 4 | 2 , 0 |
| Arco uscente | (3,5) | (1,2) |

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 7\ x_1 + 14\ x_2 \\ 11\ x_1 + 6\ x_2 \leq 46 \\ 7\ x_1 + 9\ x_2 \leq 50 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \frac{50}{9}\right)$ $\qquad v_S(P) = 77$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo.

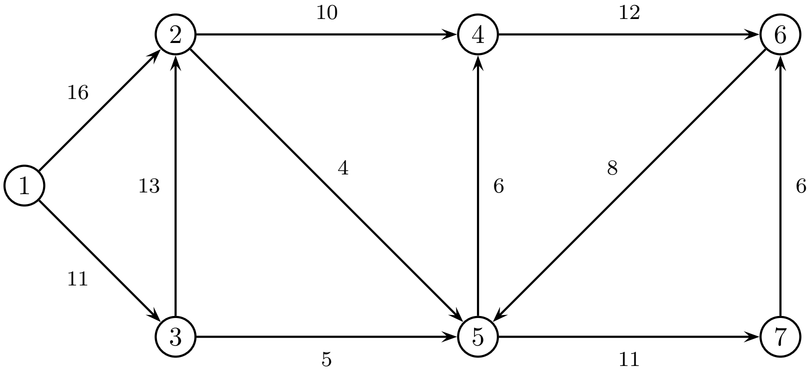
sol. ammissibile = $(0, 5)$ $\qquad v_I(P) = 70$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad x_2 \leq 5$

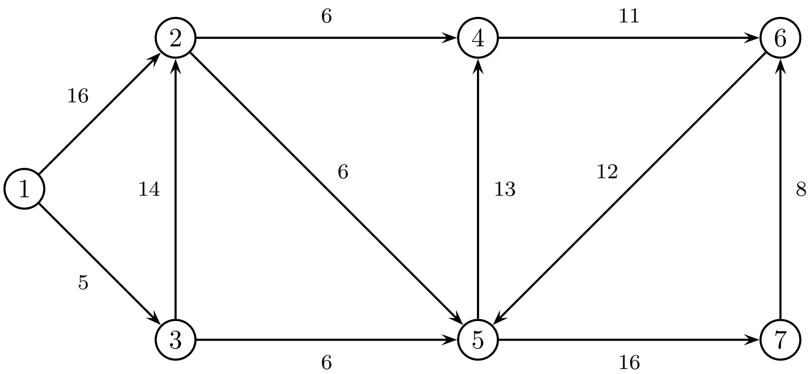
$r = 3$ $\qquad 2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 16$

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 2 | | 5 | | 4 | | 7 | | 6 | |
| nodo 2 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 |
| nodo 3 | 11 | 1 | 11 | 1 | 11 | 1 | 11 | 1 | 11 | 1 | 11 | 1 | 11 | 1 |
| nodo 4 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 26 | 2 | 22 | 5 | 22 | 5 | 22 | 5 | 22 | 5 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 16 | 3 | 16 | 3 | 16 | 3 | 16 | 3 | 16 | 3 | 16 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 34 | 4 | 33 | 7 | 33 | 7 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 27 | 5 | 27 | 5 | 27 | 5 | 27 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3 | | 2, 5 | | 4, 5 | | 4, 7 | | 6, 7 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 2 - 5 - 7 | 6 | (6, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0) | 6 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 5 | (6, 5, 0, 6, 0, 5, 0, 0, 11, 0, 0) | 11 |
| 1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7 | 5 | (11, 5, 5, 6, 0, 5, 5, 0, 16, 5, 0) | 16 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N_t = \{7\}$

**Esercizio 6.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 29 | 24 | 28 | 47 |
| **2** | | 18 | 94 | 61 |
| **3** | | | 53 | 26 |
| **4** | | | | 20 |

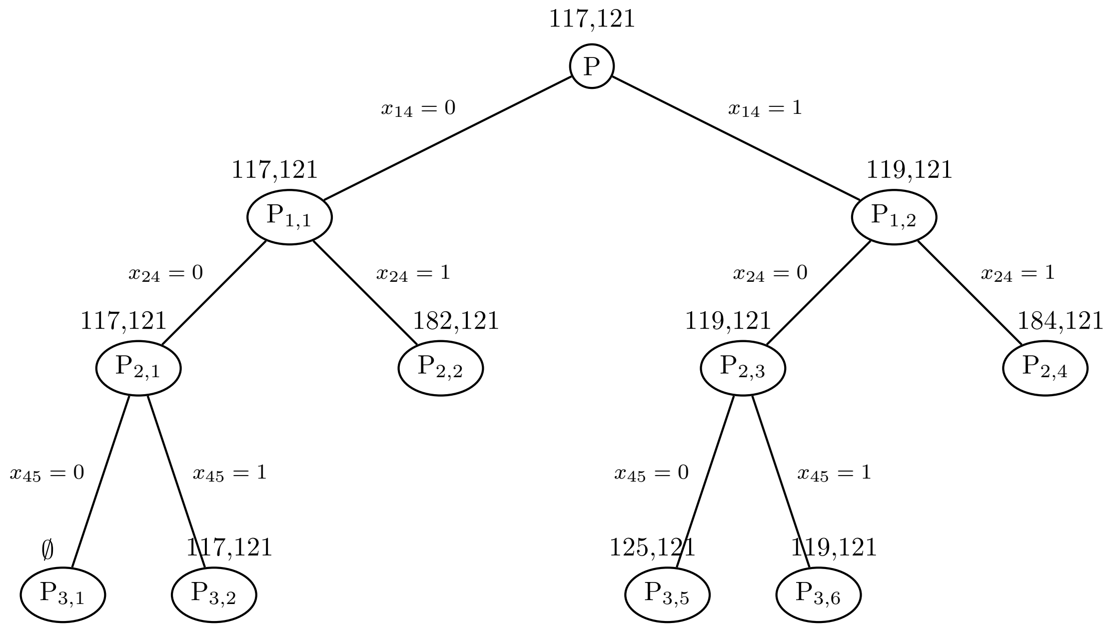
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

| | |
|---|---|
| 2–albero: ( 1 , 2 ) ( 1 , 3 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 5 ) ( 4 , 5 ) | $v_I(P) = 117$ |

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

| | |
|---|---|
| ciclo: 4 – 5 – 3 – 2 – 1 | $v_S(P) = 121$ |

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{14}$, $x_{24}$, $x_{45}$.




**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 10x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_2^2 + 8x_2 + 15 \leq 0, \quad x_1^2 + 8x_1 + 15 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(-5, \; -3)$ | $(3, 0)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(-3, \; -3)$ | $(3, -2)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(-5, \; -5)$ | $(-5, 0)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(-3, \; -5)$ | $(-5, -2)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 8.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 6\, x_1^2 - 4\, x_1\, x_2 - 2\, x_2^2 + 5\, x_1 - 2\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(1, 5)$ , $(5, 0)$ , $(-3, 5)$ e $(-1, 0)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{5}{3}, 5\right)$ | $(0, 1)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $(35, 0)$ | $\dfrac{8}{105}$ $(\frac{8}{3})$ | $\dfrac{8}{105}$ $(\frac{8}{3})$ | $(1, 5)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 12/06/18**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema:

$$\begin{cases} \min\ 6\ y_1 + 2\ y_2 + 12\ y_3 + 4\ y_4 + 2\ y_5 + 14\ y_6 \\ -y_1 - 2\ y_2 + 3\ y_3 + y_4 - 2\ y_5 + y_6 = 9 \\ 3\ y_1 + y_2 + y_3 - y_4 - 3\ y_5 - 2\ y_6 = -5 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| | Base | $x$ | Degenere? | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° passo | {1,6} | | | | | | |
| 2° passo | | | | | | | |

**Esercizio 2.** Un'azienda produce 4 tipi di smartphone (S1, S2, S3 e S4) ed è divisa in 2 stabilimenti (A e B). L'azienda dispone di 40 tecnici in A e 50 in B ognuno dei quali lavora 6 ore al giorno per 6 giorni alla settimana. Le ore necessarie per produrre gli smartphone e le richieste minime da soddisfare sono indicate nella seguente tabella:

| Smartphone | S1 | S2 | S3 | S4 |
|---|---|---|---|---|
| Stabilimento A | 1.2 | 1.5 | 1.7 | 2 |
| Stabilimento B | 1.5 | 1.6 | 1.8 | 2.1 |
| Richiesta | 200 | 140 | 120 | 80 |

Sapendo che i 4 tipi di smartphone vengono venduti rispettivamente a 400, 600, 1000, e 1500 euro, l'azienda vuole determinare quanti smartphone di ogni tipo produrre nei due stabilimenti in modo da massimizzare il profitto.

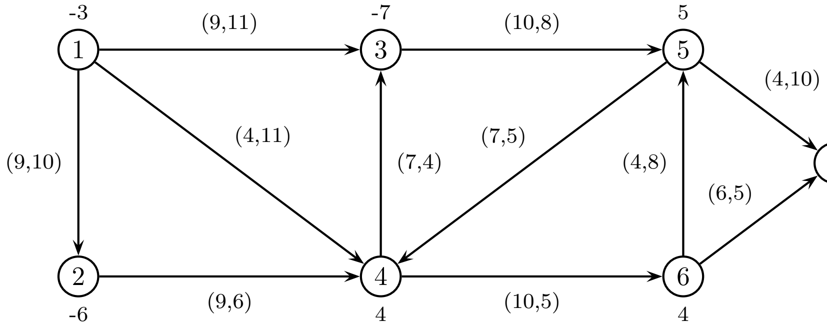
variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                                      intcon=

A=                                      b=

Aeq=                                    beq=

lb=                                     ub=
```

**Esercizio 3.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti sulla seguente rete (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).




| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7) | |
| Archi di U | (2,4) | |
| $x$ | | |
| degenere? | | |
| $\pi$ | | |
| degenere? | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 12\ x_1 + 7\ x_2 \\ 14\ x_1 + 12\ x_2 \leq 67 \\ 6\ x_1 + 17\ x_2 \leq 54 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad$ $v_S(P) =$

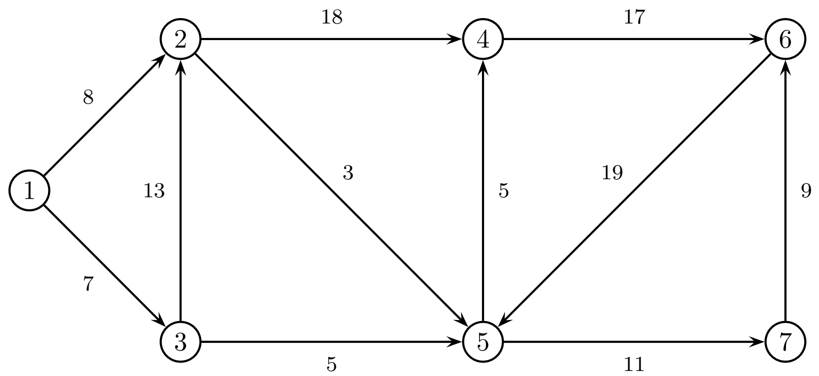
b) Calcolare una valutazione inferiore.

sol. ammissibile = $\qquad$ $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

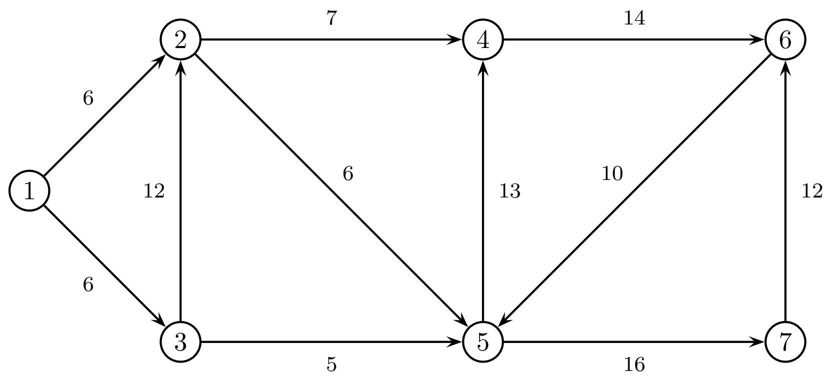
$r =$ $\qquad$ taglio:

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 6.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 29 | 24 | 28 | 47 |
| **2** | | 18 | 94 | 61 |
| **3** | | | 53 | 26 |
| **4** | | | | 20 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando 1–alberi di costo minimo.

1–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando 1–alberi di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{14}$, $x_{24}$, $x_{45}$. Dire se l'algoritmo é terminato.

**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_2^2 + 6x_2 + 8 \leq 0, \quad x_1^2 + 6x_1 + 8 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(-2,\ -2)$ | | | | | | | |
| $(-4,\ -2)$ | | | | | | | |
| $(-2,\ -4)$ | | | | | | | |
| $(-4,\ -4)$ | | | | | | | |

**Esercizio 8.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -4\, x_1\, x_2 - 4\, x_2^2 + 5\, x_1 + x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(-5, 3)$ , $(4, 4)$ , $(-4, -4)$ e $(3, 0)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{13}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.**

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{1,\ 6\}$ | $(54,\ 20)$ (NO) | $(13,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 22)$ | 3 | $\frac{13}{7},\ \frac{11}{5}$ | 1 |
| 2° iterazione | $\{3,\ 6\}$ | $\left(\frac{38}{7},\ -\frac{30}{7}\right)$ (SI) | $\left(0,\ 0,\ \frac{13}{7},\ 0,\ 0,\ \frac{24}{7}\right)$ | 4 | $13,\ 6$ | 6 |

**Esercizio 2.**
variabili decisionali: $x_{ij}$ = numero di smartphone di tipo $i$ prodotti nello stabilimento $j$, con $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = A, B$.

modello:

$$\begin{cases} \max\ 400\,(x_{1A}+x_{1B}) + 600\,(x_{2A}+x_{2B}) + 1000\,(x_{3A}+x_{3B}) + 1500\,(x_{4A}+x_{4B}) \\ 1.2\,x_{1A} + 1.5\,x_{2A} + 1.7\,x_{3A} + 2\,x_{4A} \le 1440 \\ 1.5\,x_{1B} + 1.6\,x_{2B} + 1.8\,x_{3B} + 2.1\,x_{4B} \le 1800 \\ x_{1A} + x_{1B} \ge 200 \\ x_{2A} + x_{2B} \ge 140 \\ x_{3A} + x_{3B} \ge 120 \\ x_{4A} + x_{4B} \ge 80 \\ x_{ij} \ge 0 \\ x_{ij} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

**Esercizio 3.**

| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (3,5) (4,3) (4,6) (5,7) | (1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (4,6) (5,7) |
| Archi di U | (2,4) | (2,4) |
| $x$ | $(0,\ 0,\ 3,\ 6,\ 8,\ 1,\ 4,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0)$ (SI) | $(0,\ 1,\ 2,\ 6,\ 8,\ 0,\ 4,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0)$ (SI) |
| $\pi$ | $(0,\ 9,\ 11,\ 4,\ 21,\ 14,\ 25)$ (NO) | $(0,\ 9,\ 9,\ 4,\ 19,\ 14,\ 23)$ (NO) |
| Arco entrante | (1,3) | (2,4) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 11 , 1 | 9 , 0 |
| Arco uscente | (4,3) | (1,2) |

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 12\ x_1 + 7\ x_2 \\ 14\ x_1 + 12\ x_2 \le 67 \\ 6\ x_1 + 17\ x_2 \le 54 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{67}{14}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 57$

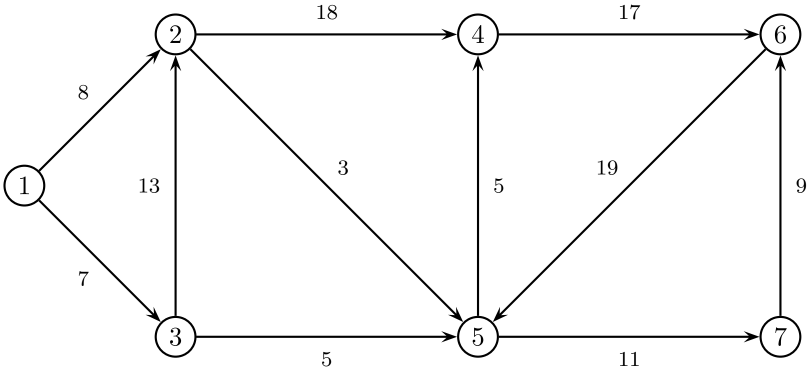
b) Calcolare una valutazione inferiore.

sol. ammissibile = $(4, 0)$ $\qquad v_I(P) = 48$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

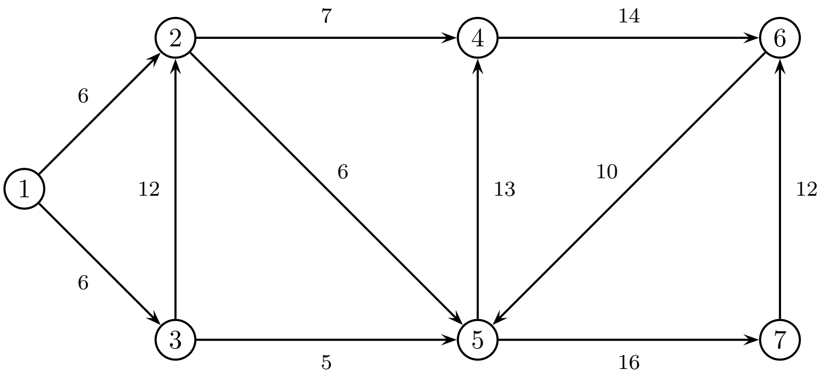
$r = 1$ $\qquad x_1 \le 4$
$r = 4$ $\qquad 4\,x_1 + 3\,x_2 \le 19$

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 2 | | 5 | | 4 | | 7 | | 6 | |
| nodo 2 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 |
| nodo 3 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 |
| nodo 4 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 26 | 2 | 16 | 5 | 16 | 5 | 16 | 5 | 16 | 5 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 12 | 3 | 11 | 2 | 11 | 2 | 11 | 2 | 11 | 2 | 11 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 33 | 4 | 31 | 7 | 31 | 7 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 22 | 5 | 22 | 5 | 22 | 5 | 22 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3 | | 2, 5 | | 4, 5 | | 4, 7 | | 6, 7 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 2 - 5 - 7 | 6 | (6, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0) | 6 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 5 | (6, 5, 0, 6, 0, 5, 0, 0, 11, 0, 0) | 11 |
| 1 - 3 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7 | 1 | (6, 6, 1, 6, 1, 5, 1, 0, 12, 1, 0) | 12 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1\}$ $N_t = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

**Esercizio 6.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 29 | 24 | 28 | 47 |
| **2** | | 18 | 94 | 61 |
| **3** | | | 53 | 26 |
| **4** | | | | 20 |

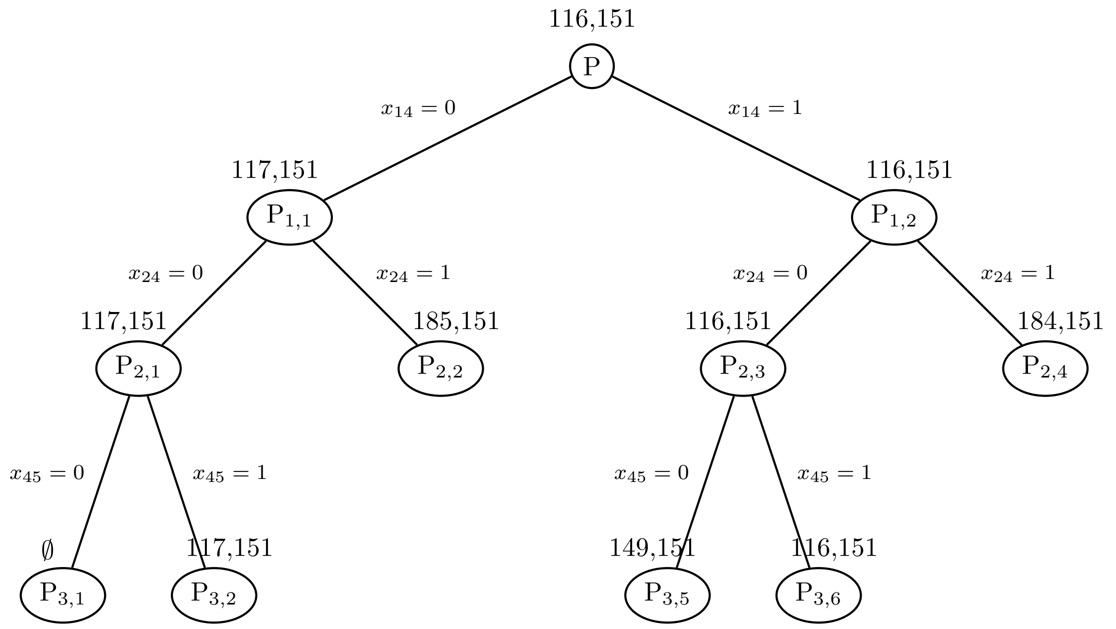
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando 1–alberi di costo minimo.

| | |
|---|---|
| 1–albero: ( 1 , 3 ) ( 1 , 4 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 5 ) ( 4 , 5 ) | $v_I(P) = 116$ |

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5.

| | |
|---|---|
| ciclo: 5 – 4 – 1 – 3 – 2 | $v_S(P) = 151$ |

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando 1–alberi di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{14}$, $x_{24}$, $x_{45}$.




**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_2^2 + 6x_2 + 8 \le 0, \quad x_1^2 + 6x_1 + 8 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(-2,\ -2)$ | $(2, 0)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(-4,\ -2)$ | $(2, -2)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(-2,\ -4)$ | $(-4, 0)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(-4,\ -4)$ | $(-4, -2)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 8.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -4\ x_1\, x_2 - 4\ x_2^2 + 5\ x_1 + x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(-5, 3)$ , $(4, 4)$ , $(-4, -4)$ e $(3, 0)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(-\frac{13}{3}, -\frac{5}{3})$ | $(-7, -1)$ | $\begin{pmatrix} 1/50 & -7/50 \\ -7/50 & 49/50 \end{pmatrix}$ | $\left(\frac{21}{5}, -\frac{147}{5}\right)$ (1,-7) | $\frac{5}{63}$ ($\frac{1}{3}$) | $\frac{5}{63}$ ($\frac{1}{3}$ ) | $(-4, -4)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 13/06/17**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 5\ y_1 - 5\ y_2 + 12\ y_3 + 4\ y_4 + 6\ y_5 - 7\ y_6 + 11\ y_7 \\ y_1 + y_2 + y_3 - 2\ y_4 - y_5 - y_6 = 1 \\ 2\ y_2 - y_3 - y_4 - y_5 + y_6 - y_7 = -6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {2, 4} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {1,7} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Un'industria chimica produce una soluzione per la quale sono utilizzati 3 diversi composti chimici: $C_1$, $C_2$ e $C_3$. La composizione di ciascun composto e il costo unitario (Euro/Kg) sono indicati nella seguente tabella:

| | % silicio | % calcio | % ferro | Costo |
|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | 3 | 5 | 8 | 300 |
| $C_2$ | 6 | 3 | 2 | 350 |
| $C_3$ | 2 | 4 | 6 | 250 |

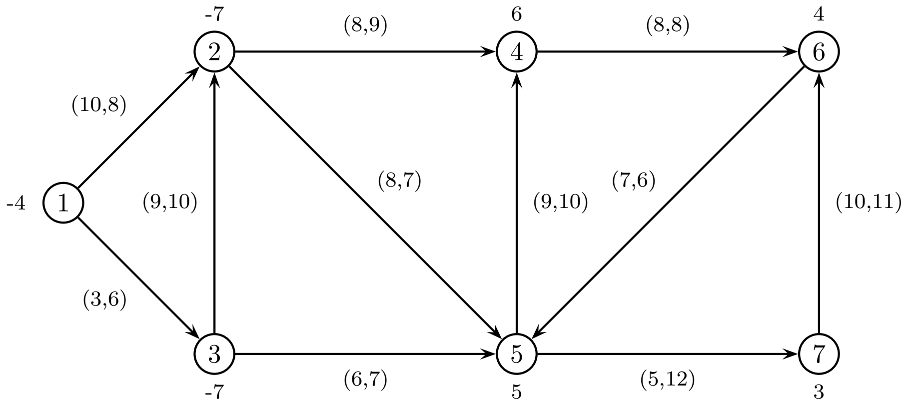
Il prodotto finale deve contenere una percentuale di silicio tra il 3 e l'8 %, una percentuale di calcio tra il 2 e il 7 % ed una percentuale di ferro non inferiore al 5 %. Determinare la composizione della soluzione che minimizza i costi.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                                  intlinprog=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

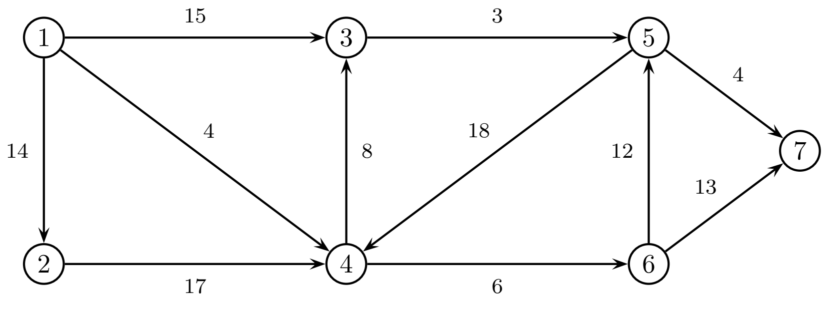



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,3) (2,5) (4,6) (5,7) (7,6) | (2,4) | $x =$ | | |
| (1,2) (2,4) (3,2) (4,6) (5,7) (7,6) | (2,5) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

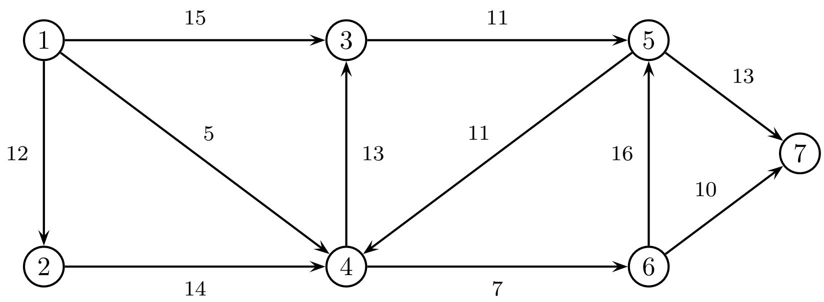
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,4) (2,5) (3,2) (5,7) (7,6) | |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 5\ x_1 + 11\ x_2 \\ 16\ x_1 + 10\ x_2 \geq 55 \\ 15\ x_1 + 19\ x_2 \geq 68 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 16 | 21 | 64 | 46 |
| **2** | | 98 | 59 | 58 |
| **3** | | | 13 | 11 |
| **4** | | | | 16 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{35}$, $x_{34}$, $x_{45}$.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 - 8x_2 \le 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 = 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| (0,0) | | | | | | | |
| (3.2, 6.4) | | | | | | | |
| $(2, 3+\sqrt{13})$ | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -4\, x_1^2 - 4\, x_1\, x_2 + 4\, x_2^2 + 4\, x_1 + 9\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(-4, 3)$ , $(-3, -2)$ , $(3, -3)$ e $(4, 3)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{4}{3}, 3\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 5\ y_1 - 5\ y_2 + 12\ y_3 + 4\ y_4 + 6\ y_5 - 7\ y_6 + 11\ y_7 \\ y_1 + y_2 + y_3 - 2\ y_4 - y_5 - y_6 = 1 \\ 2\ y_2 - y_3 - y_4 - y_5 + y_6 - y_7 = -6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (5,\ -5)$ | SI | NO |
| $\{2,\ 4\}$ | $y = \left(0,\ -\frac{13}{3},\ 0,\ -\frac{8}{3},\ 0,\ 0,\ 0\right)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{1,\ 7\}$ | $(5,\ -11)$ | $(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 6)$ | 3 | $1,\ 6$ | 1 |
| 2° iterazione | $\{3,\ 7\}$ | $(1,\ -11)$ | $(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 5)$ | 4 | $\frac{5}{3}$ | 7 |

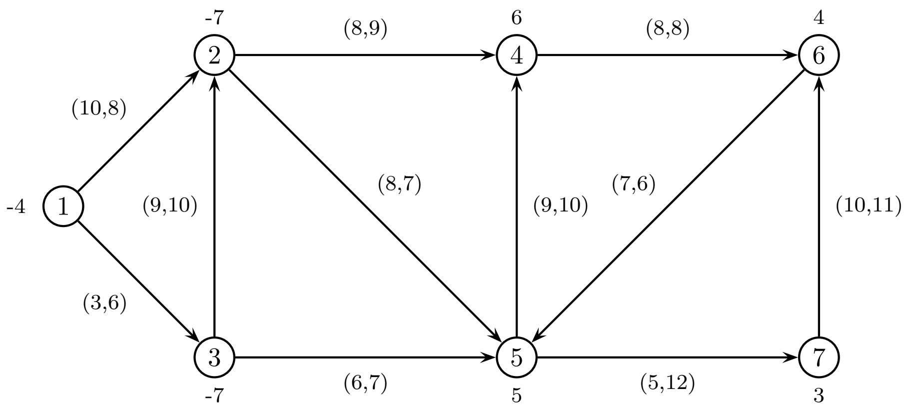
**Esercizio 3.** Indichiamo con $x_1$, $x_2$ ed $x_3$ rispettivamente, le quantità percentuali di composto di tipo 1 2 e 3 da usare nella soluzione. Il modello di programmazione lineare è il seguente:

$$\begin{cases} \min\ 300\ x_1 + 350\ x_2 + 250\ x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0.03 \leq 0.03\ x_1 + 0.06\ x_2 + 0.02\ x_3 \leq 0.08 \\ 0.02 \leq 0.05\ x_1 + 0.03\ x_2 + 0.04\ x_3 \leq 0.07 \\ 0.08\ x_1 + 0.02\ x_2 + 0.06\ x_3 \geq 0.05 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

```
c=[300;350;250]

A=[-3,-6,-2;3,6,2;-5,-3,-4;5,3,4;-8,-2,-6]

b=[-3; 8; -2; 7; -5]

Aeq=[1;1;1]                                   beq=[1]

lb=[0;0;0]                                    ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

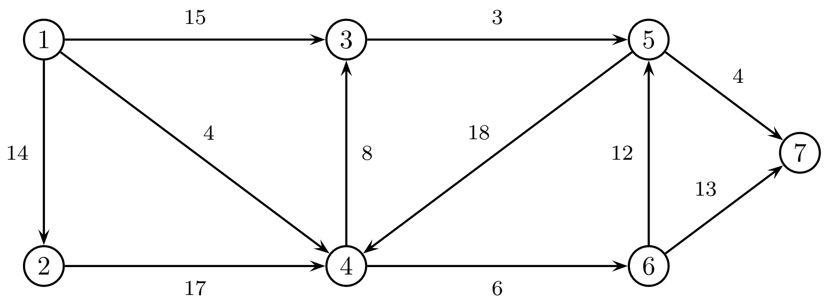


| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,3) (2,5) (4,6) (5,7) (7,6) | (2,4) | $x = (11,\ -7,\ 9,\ 9,\ 0,\ 0,\ 3,\ 0,\ 4,\ 0,\ 1)$ | NO | NO |
| (1,2) (2,4) (3,2) (4,6) (5,7) (7,6) | (2,5) | $\pi = (0,\ 10,\ 1,\ 18,\ 11,\ 26,\ 16)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

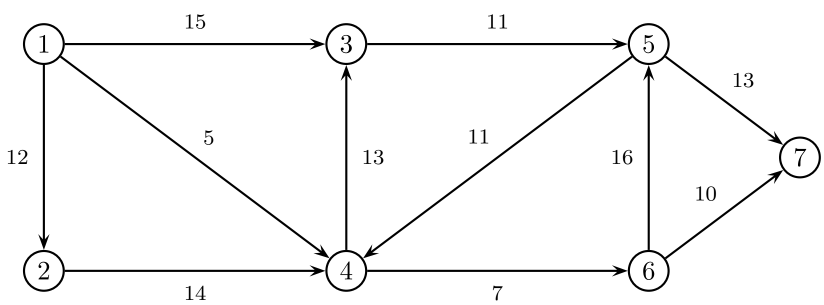
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,4) (2,5) (3,2) (5,7) (7,6) | (1,2) (2,4) (2,5) (3,2) (5,7) (7,6) |
| Archi di U | (3,5) | (3,5) |
| $x$ | (0, 4, 6, 5, 4, 7, 0, 0, 7, 0, 4) | (4, 0, 6, 5, 0, 7, 0, 0, 7, 0, 4) |
| $\pi$ | (0, 12, 3, 20, 20, 35, 25) | (0, 10, 1, 18, 18, 33, 23) |
| Arco entrante | (1,2) | (4,6) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 8 , 4 | 3 , 4 |
| Arco uscente | (1,3) | (2,4) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 4 | | 6 | | 3 | | 2 | | 5 | | 7 | |
| nodo 2 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 |
| nodo 3 | 15 | 1 | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 |
| nodo 4 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 22 | 6 | 15 | 3 | 15 | 3 | 15 | 3 | 15 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 10 | 4 | 10 | 4 | 10 | 4 | 10 | 4 | 10 | 4 | 10 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 23 | 6 | 23 | 6 | 23 | 6 | 19 | 5 | 19 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 3, 6 | | 2, 3, 5, 7 | | 2, 5, 7 | | 5, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 5 - 7 | 11 | (0, 11, 0, 0, 11, 0, 0, 0, 11, 0, 0) | 11 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 5 | (0, 11, 5, 0, 11, 0, 5, 0, 11, 0, 5) | 16 |
| 1 - 2 - 4 - 6 - 7 | 2 | (2, 11, 5, 2, 11, 0, 7, 0, 11, 0, 7) | 18 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$ $N_t = \{5, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 5\ x_1 + 11\ x_2 \\ 16\ x_1 + 10\ x_2 \geq 55 \\ 15\ x_1 + 19\ x_2 \geq 68 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{68}{15}, 0\right)$ $v_I(P) = 23$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(5, 0)$ $v_S(P) = 25$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $7\,x_1 + 9\,x_2 \geq 32$
$r = 3$ $7\,x_1 + 9\,x_2 \geq 32$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 16 | 21 | 64 | 46 |
| **2** | | 98 | 59 | 58 |
| **3** | | | 13 | 11 |
| **4** | | | | 16 |

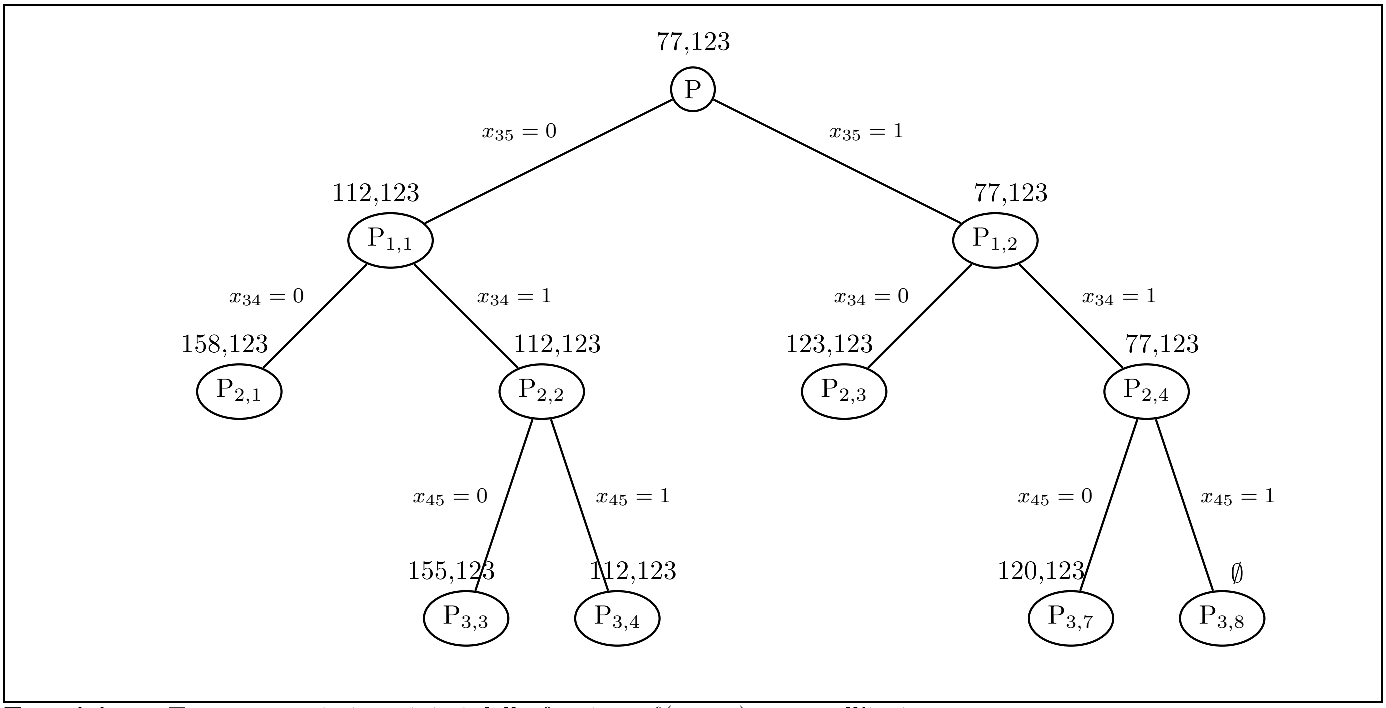
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: ( 1 , 2 ) ( 1 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) ( 4 , 5 ) $v_I(P) = 77$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: 3 − 5 − 4 − 2 − 1 $v_S(P) = 123$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{35}$, $x_{34}$, $x_{45}$. Dire se l'algoritmo è terminato.




**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 - 8x_2 \leq 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 = 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| (0,0) | 1/8 | 0 | NO | NO | SI | SI | NO |
| (3.2 , 6.4) | 3/40 | -1/5 | NO | NO | NO | SI | NO |
| $(2, 3 + \sqrt{13})$ | 0 | $-\sqrt{13}/26$ | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -4\, x_1^2 - 4\, x_1 x_2 + 4\, x_2^2 + 4\, x_1 + 9\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(-4, 3)$ , $(-3, -2)$ , $(3, -3)$ e $(4, 3)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{4}{3}, 3\right)$ | $(0, 1)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\left(\dfrac{56}{3}, 0\right)$ | $\dfrac{1}{7}$ | $\dfrac{1}{7}$ | $(4, 3)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 13/06/17**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 12\ y_1 + 5\ y_2 + 4\ y_3 + 6\ y_4 - 7\ y_5 - 5\ y_6 - y_7 \\ y_1 + y_2 - 2\ y_3 - y_4 - y_5 + y_6 - y_7 = 7 \\ -y_1 - y_3 - y_4 + y_5 + 2\ y_6 + y_7 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {4, 6} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {2,7} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Un'industria chimica produce una soluzione per la quale sono utilizzati 3 diversi composti chimici: $C_1$, $C_2$ e $C_3$. La composizione di ciascun composto e il costo unitario (Euro/Kg) sono indicati nella seguente tabella:

| | % silicio | % calcio | % ferro | Costo |
|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | 3 | 5 | 8 | 300 |
| $C_2$ | 7 | 3 | 2 | 400 |
| $C_3$ | 2 | 4 | 7 | 250 |

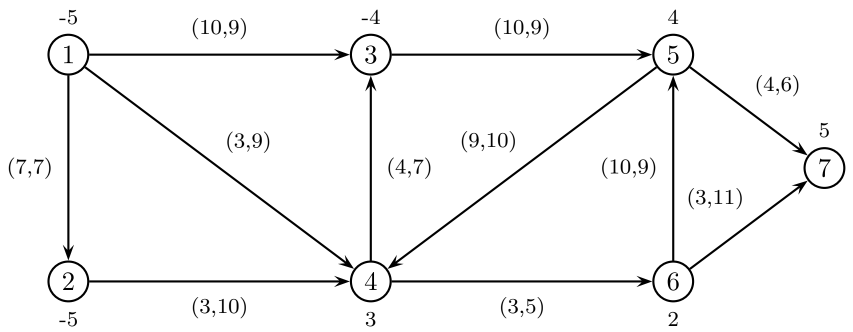
Il prodotto finale deve contenere una percentuale di silicio tra il 3 e l'8 %, una percentuale di calcio tra il 2 e il 7 % ed una percentuale di ferro non inferiore al 5 %. Determinare la composizione della soluzione che minimizza i costi.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                                    intlinprog=

A=                                    b=

Aeq=                                  beq=

lb=                                   ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

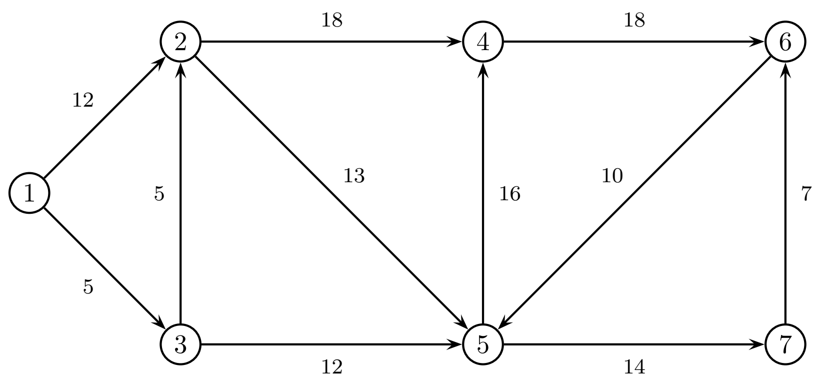



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,4) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7) | (6,5) | $x =$ | | |
| (1,2) (1,4) (4,3) (4,6) (5,4) (5,7) | (6,7) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

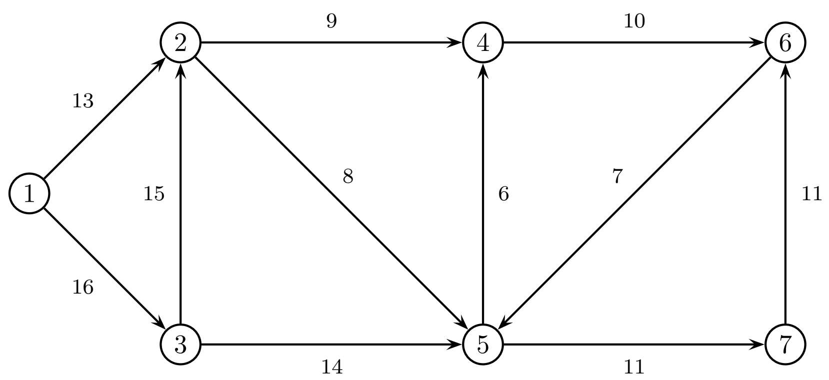
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,7) (6,5) | |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 8\ x_1 + 12\ x_2 \\ 17\ x_1 + 13\ x_2 \geq 60 \\ 11\ x_1 + 13\ x_2 \geq 51 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 15 | 20 | 63 | 45 |
| **2** | | 97 | 58 | 57 |
| **3** | | | 12 | 10 |
| **4** | | | | 15 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{35}$, $x_{34}$, $x_{45}$. Dire se l'algoritmo è terminato.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 \leq 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 = 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| (0,0) | | | | | | | |
| (6.4, 3.2) | | | | | | | |
| $(3+\sqrt{13}, 2)$ | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 4\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 - 5\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(-4,-5)$ , $(0,5)$ , $(-5,2)$ e $(2,4)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 12\ y_1 + 5\ y_2 + 4\ y_3 + 6\ y_4 - 7\ y_5 - 5\ y_6 - y_7 \\ y_1 + y_2 - 2\ y_3 - y_4 - y_5 + y_6 - y_7 = 7 \\ -y_1 - y_3 - y_4 + y_5 + 2\ y_6 + y_7 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (5,\ -7)$ | SI | NO |
| $\{4,\ 6\}$ | $y = (0,\ 0,\ 0,\ -13,\ 0,\ -6,\ 0)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{2,\ 7\}$ | $(5,\ 4)$ | $(0,\ 8,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$ | 5 | 1 | 7 |
| 2° iterazione | $\{2,\ 5\}$ | $(5,\ -2)$ | $(0,\ 8,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$ | 6 | $\frac{8}{3},\ \frac{1}{2}$ | 5 |

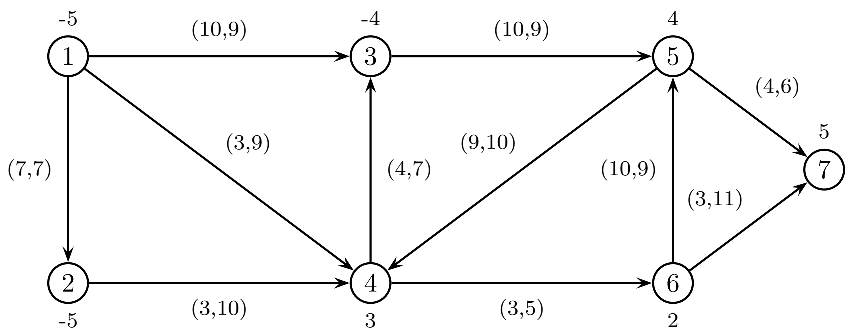
**Esercizio 3.** Indichiamo con $x_1$, $x_2$ ed $x_3$ rispettivamente, le quantità percentuali di composto di tipo 1 2 e 3 da usare nella soluzione. Il modello di programmazione lineare è il seguente:

$$\begin{cases} \min\ 300\ x_1 + 400\ x_2 + 250\ x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0.03 \leq 0.03\ x_1 + 0.07\ x_2 + 0.02\ x_3 \leq 0.08 \\ 0.02 \leq 0.05\ x_1 + 0.03\ x_2 + 0.04\ x_3 \leq 0.07 \\ 0.08\ x_1 + 0.02\ x_2 + 0.07\ x_3 \geq 0.05 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

```
c=[300;400;250]

A=[-3,-7,-2;3,7,2;-5,-3,-4;5,3,4;-8,-2,-7]

b=[-3; 8; -2; 7; -5]

Aeq=[1;1;1]                                   beq=[1]

lb=[0;0;0]                                    ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

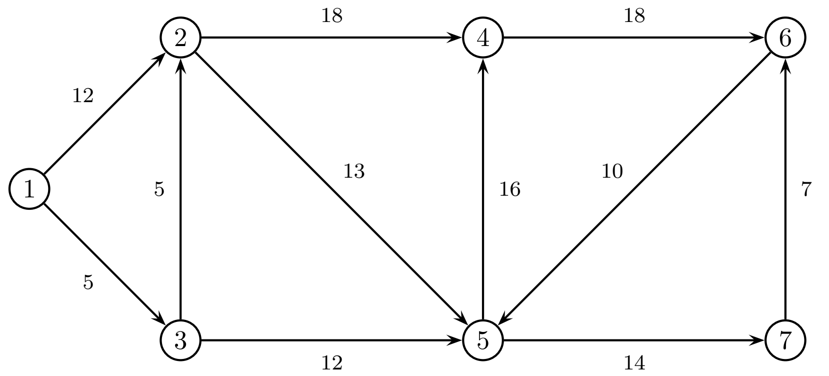



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,4) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7) | (6,5) | $x = (-5,\ 0,\ 10,\ 0,\ 0,\ -4,\ 11,\ 0,\ 5,\ 9,\ 0)$ | NO | SI |
| (1,2) (1,4) (4,3) (4,6) (5,4) (5,7) | (6,7) | $\pi = (0,\ 7,\ 7,\ 3,\ -6,\ 6,\ -2)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

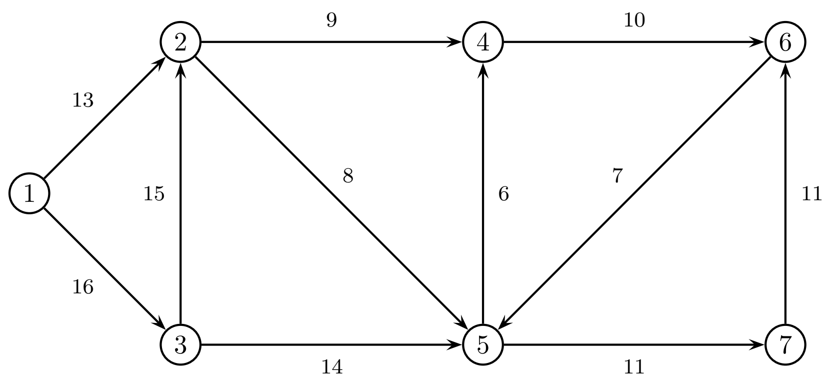
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,7) (6,5) | (1,3) (1,4) (2,4) (3,5) (5,7) (6,5) |
| Archi di U | (3,5) | (4,6) |
| $x$ | (0, 5, 0, 5, 9, 0, 2, 0, 5, 0, 0) | (0, 2, 3, 5, 6, 0, 5, 0, 5, 3, 0) |
| $\pi$ | (0, 0, 10, 3, 16, 6, 20) | (0, 0, 10, 3, 20, 10, 24) |
| Arco entrante | (3,5) | (4,3) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 3 , 5 | 6 , 2 |
| Arco uscente | (4,6) | (1,3) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 2 | | 5 | | 4 | | 7 | | 6 | |
| nodo 2 | 12 | 1 | 10 | 3 | 10 | 3 | 10 | 3 | 10 | 3 | 10 | 3 | 10 | 3 |
| nodo 3 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 |
| nodo 4 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 28 | 2 | 28 | 2 | 28 | 2 | 28 | 2 | 28 | 2 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 17 | 3 | 17 | 3 | 17 | 3 | 17 | 3 | 17 | 3 | 17 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 46 | 4 | 38 | 7 | 38 | 7 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 31 | 5 | 31 | 5 | 31 | 5 | 31 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3 | | 2, 5 | | 4, 5 | | 4, 7 | | 6, 7 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 2 - 5 - 7 | 8 | (8, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0) | 8 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 3 | (8, 3, 0, 8, 0, 3, 0, 0, 11, 0, 0) | 11 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad N_t = \{7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 8\ x_1 + 12\ x_2 \\ 17\ x_1 + 13\ x_2 \geq 60 \\ 11\ x_1 + 13\ x_2 \geq 51 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{51}{11}, 0\right)$ $\qquad v_I(P) = 38$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(5, 0)$ $\qquad v_S(P) = 40$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 10\, x_1 + 12\, x_2 \geq 47$
$r = 3$ $\qquad 5\, x_1 + 6\, x_2 \geq 24$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 15 | 20 | 63 | 45 |
| **2** | | 97 | 58 | 57 |
| **3** | | | 12 | 10 |
| **4** | | | | 15 |

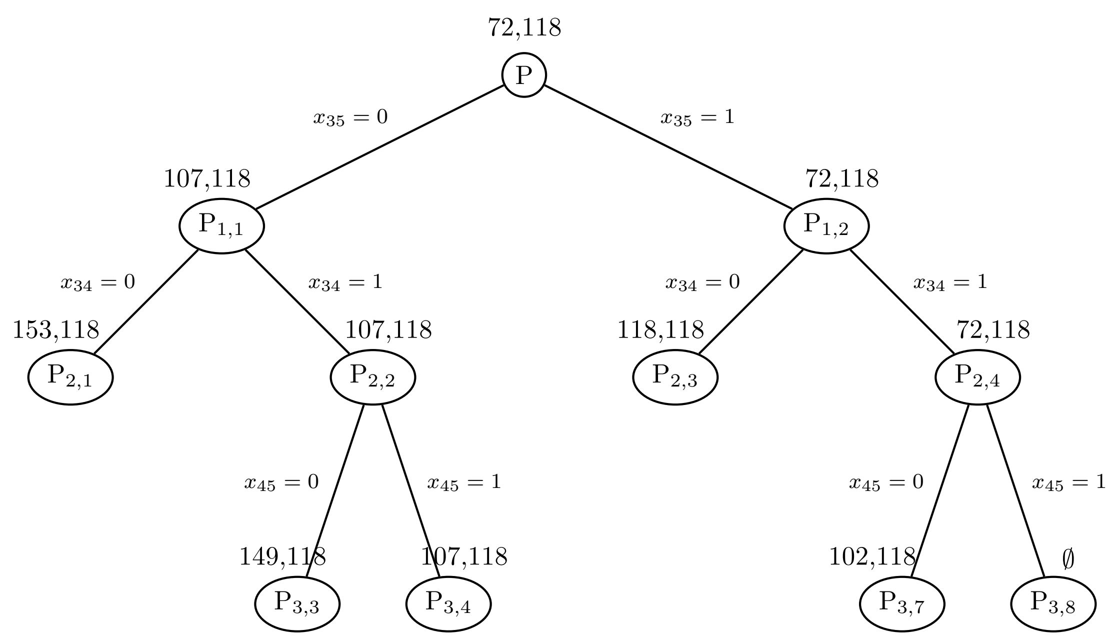
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: ( 1 , 2 ) ( 1 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) ( 4 , 5 ) $\qquad v_I(P) = 72$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $2 - 1 - 3 - 5 - 4$ $\qquad v_S(P) = 118$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{35}$, $x_{34}$, $x_{45}$.



**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 \le 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 = 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| (0,0) | 1/8 | 0 | NO | NO | SI | SI | NO |
| (6.4,3.2) | 3/40 | -1/5 | NO | NO | NO | SI | NO |
| $(3+\sqrt{13}, 2)$ | 0 | $-\sqrt{13}/26$ | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 4\, x_1^2 - 2\, x_1\, x_2 - 5\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(-4, -5)$ , $(0, 5)$ , $(-5, 2)$ e $(2, 4)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right)$ | $(1, 2)$ | $\begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ | $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ | 2 | $\frac{1}{8}$ | $\left(\frac{3}{4}, \frac{37}{8}\right)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 14/06/16**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -3\,x_1 - x_2 \\ -2\,x_1 - x_2 \le 4 \\ -x_1 + 2\,x_2 \le -13 \\ -x_1 - x_2 \le 6 \\ 2\,x_1 - x_2 \le 15 \\ 2\,x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 2 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x =$ | | |
| $\{2, 5\}$ | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {3,4} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Un caporeparto di una fabbrica deve decidere la composizione della sua squadra, avendo a disposizione operai, robot e terne composte da 2 operai + 1 robot. Nel reparto si producono quattro tipi di beni A, B, C e D, e bisogna produrre almeno 55 unitá di bene A, 20 di bene B, 20 di bene C e 50 di bene D. Ciascun operaio, robot o terna puó produrre ogni bene. Nella seguente tabella sono riportati i numeri di operai, robot e terne (2 operai +1 robot), necessari per produrre singolarmente un'unitá di ciascuno dei beni A, B, C e D. Nella tabella sono riportati anche i costi di manutenzione (per i robot), il salario (per un operaio) ed il costo globale di una terna che sono da minimizzare tenendo in considerazione che il numero totale di operai deve essere almeno 3 volte piú grande del numero di robot.

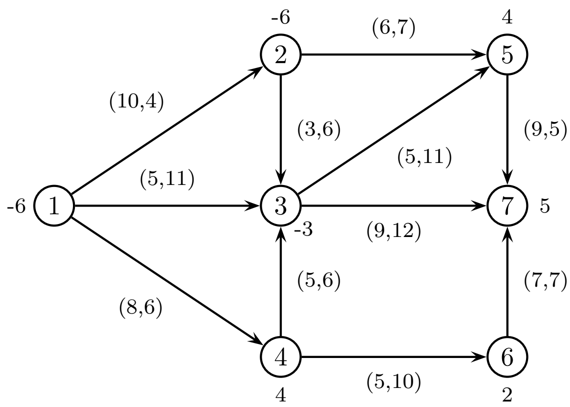
| | operai | robot | terne |
|---|---|---|---|
| A | 8 | 4 | 2 |
| B | 15 | 10 | 6 |
| C | 4 | 2 | 0.5 |
| D | 4 | 3 | 1 |
| costi | 8 | 7 | 20 |

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                          b=

Aeq=                                        beq=

lb=                                         ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

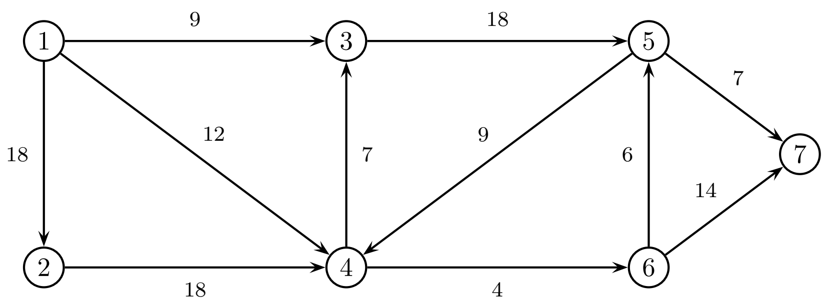



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (2,3) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7) | (1,2) | $x =$ | | |
| (1,2) (1,3) (2,5) (4,3) (5,7) (6,7) | (3,7) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

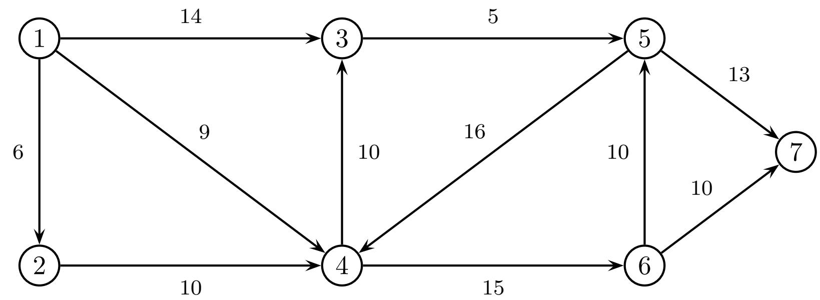
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) (6,7) | |
| Archi di U | (5,7) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 9\ x_1 + 5\ x_2 \\ 12\ x_1 + 7\ x_2 \leq 58 \\ 8\ x_1 + 13\ x_2 \leq 54 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 458 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 15 | 24 | 22 | 23 | 10 | 11 | 18 |
| Volumi | 354 | 315 | 48 | 291 | 31 | 65 | 64 |

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \quad 1 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| (0,-1) | | | | | | | |
| (1,0) | | | | | | | |
| (-1,0) | | | | | | | |
| (0,1) | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max \ -6\ x_1^2 - 6\ x_2^2 - 3\ x_1 - 9\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(4, -4)$ , $(-3, 3)$ , $(-4, 1)$ e $(1, 3)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -3\ x_1 - x_2 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 2\ x_2 \leq -13 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ 2\ x_1 - x_2 \leq 15 \\ 2\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (1,\ -6)$ | SI | NO |
| $\{2,\ 5\}$ | $y = \left(0,\ \frac{1}{5},\ 0,\ 0,\ -\frac{7}{5},\ 0\right)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

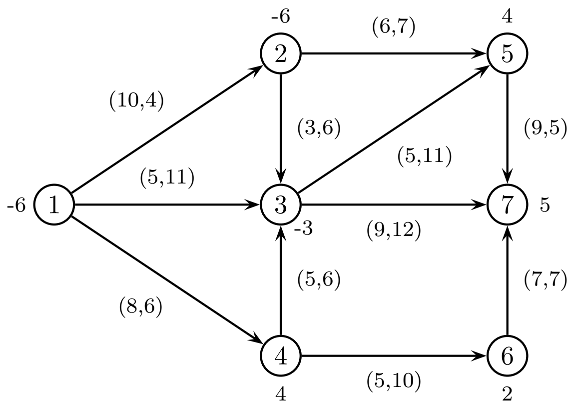
| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{3,\ 4\}$ | $(3,\ -9)$ | $\left(0,\ 0,\ \frac{5}{3},\ -\frac{2}{3},\ 0,\ 0\right)$ | 4 | $3,\ 8$ | 1 |
| 2° iterazione | $\{1,\ 3\}$ | $(2,\ -8)$ | $(2,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0)$ | 3 | $1,\ 8$ | 2 |

**Esercizio 3.**

COMANDI DI MATLAB

```
c=[ 8 ; 7 ; 20 ]                                                    int=[ 1 ; 2 ; 3 ]

A=[-1/8 -1/4 -1/3;-1/15 -1/10 -1/6;-1/4 -1/2 -2;-1/4 -1/3 -1;-1 3 1]  Aeq=[]

b=[ -55 ; -20 ; -20 ; -50 ; 0]                                      beq=[]

lb=[ 0 ; 0 ; 0 ]                                                    ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

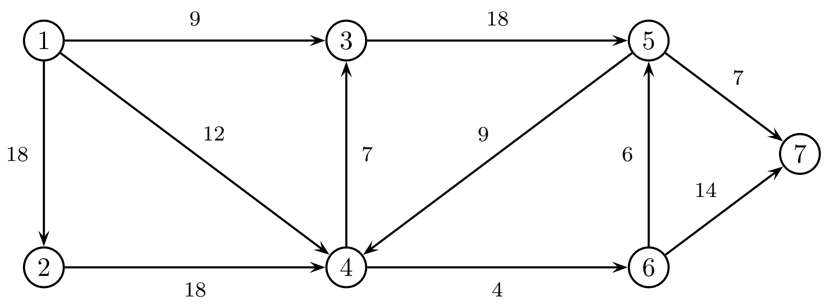



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (2,3) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7) | (1,2) | $x = (4,\ 2,\ 0,\ 10,\ 0,\ 0,\ 11,\ -4,\ 0,\ -4,\ -2)$ | NO | NO |
| (1,2) (1,3) (2,5) (4,3) (5,7) (6,7) | (3,7) | $\pi = (0,\ 10,\ 5,\ 0,\ 16,\ 18,\ 25)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

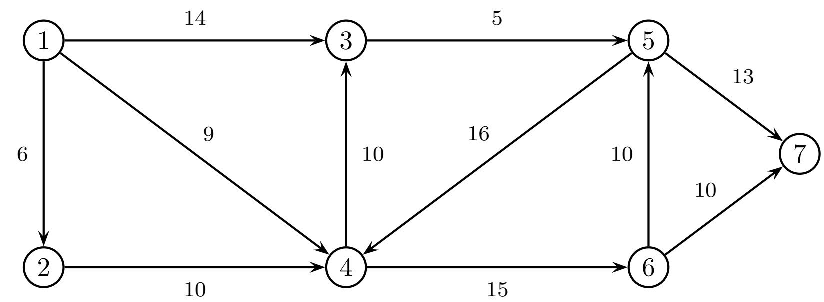
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) (6,7) | (1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) |
| Archi di U | (5,7) | (5,7) |
| $x$ | (0, 0, 6, 0, 6, 3, 0, 0, 2, 5, 0) | (0, 0, 6, 0, 6, 3, 0, 0, 2, 5, 0) |
| $\pi$ | (0, 10, 11, 8, 16, 13, 20) | (0, 4, 5, 8, 10, 13, 14) |
| Arco entrante | (1,3) | (5,7) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 11 , 0 | 12 , 3 |
| Arco uscente | (6,7) | (3,5) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 4 | | 6 | | 2 | | 5 | | 7 | |
| nodo 2 | 18 | 1 | 18 | 1 | 18 | 1 | 18 | 1 | 18 | 1 | 18 | 1 | 18 | 1 |
| nodo 3 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 |
| nodo 4 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 27 | 3 | 27 | 3 | 22 | 6 | 22 | 6 | 22 | 6 | 22 | 6 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 16 | 4 | 16 | 4 | 16 | 4 | 16 | 4 | 16 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 30 | 6 | 30 | 6 | 29 | 5 | 29 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 4, 5 | | 2, 5, 6 | | 2, 5, 7 | | 5, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 5 - 7 | 5 | (0, 5, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 5, 0, 0) | 5 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 9 | (0, 5, 9, 0, 5, 0, 9, 0, 5, 0, 9) | 14 |
| 1 - 2 - 4 - 6 - 7 | 1 | (1, 5, 9, 1, 5, 0, 10, 0, 5, 0, 10) | 15 |
| 1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7 | 5 | (6, 5, 9, 6, 5, 0, 15, 0, 10, 5, 10) | 20 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 3\}$ $\quad N_t = \{2, 4, 5, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 9\,x_1 + 5\,x_2 \\ 12\,x_1 + 7\,x_2 \le 58 \\ 8\,x_1 + 13\,x_2 \le 54 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{29}{6}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 43$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (4, 0)$ $\qquad v_I(P) = 36$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad x_1 \le 4$

$r = 4$ $\qquad 4\,x_1 + 2\,x_2 \le 19$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 458 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 15 | 24 | 22 | 23 | 10 | 11 | 18 |
| Volumi | 354 | 315 | 48 | 291 | 31 | 65 | 64 |

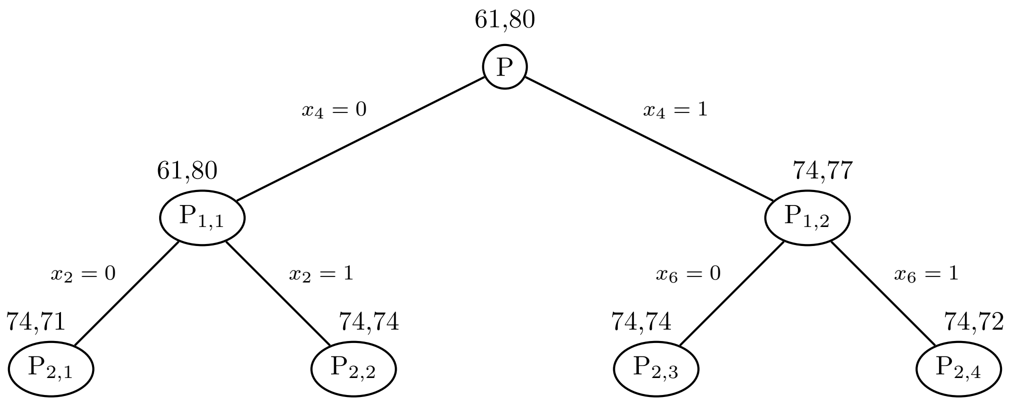
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$ $\qquad v_I(P) = 61$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, 0, 1, \frac{250}{291}, 1, 1, 1\right)$ $\qquad v_S(P) = 80$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima $= (0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$ $\qquad$ valore ottimo $= 74$

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \quad 1 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(0,\ -1)$ | $\left(\frac{1}{2},0\right)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(1,\ 0)$ | $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ | | NO | NO | NO | SI | NO |
| $(-1,\ 0)$ | $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |
| $(0,\ 1)$ | $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ -6\ x_1^2 - 6\ x_2^2 - 3\ x_1 - 9\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(4,-4)$ , $(-3,3)$ , $(-4,1)$ e $(1,3)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{10}{3},\frac{7}{3}\right)$ | $(-2,1)$ | $\begin{pmatrix}1/5 & 2/5\\ 2/5 & 4/5\end{pmatrix}$ | $\left(-\frac{37}{5},-\frac{74}{5}\right)$ | $\frac{10}{111}$ | $\frac{10}{111}$ | $(-4,1)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 14/06/16**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 8\,x_1 - 9\,x_2 \\ -2\,x_1 - x_2 \le 4 \\ -x_1 - x_2 \le 6 \\ -x_1 + 2\,x_2 \le -13 \\ 2\,x_1 - x_2 \le 15 \\ 2\,x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + 3\,x_2 \le -12 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {5, 6} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {3,5} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Un caporeparto di una fabbrica deve decidere la composizione della sua squadra, avendo a disposizione operai, robot e terne composte da 2 operai + 1 robot. Nel reparto si producono quattro tipi di beni A, B, C e D, e bisogna produrre almeno 50 unitá di bene A, 25 di bene B, 25 di bene C e 55 di bene D. Ciascun operaio, robot o terna puó produrre ogni bene. Nella seguente tabella sono riportati i numeri di operai, robot e terne (2 operai +1 robot), necessari per produrre singolarmente un'unitá di ciascuno dei beni A, B, C e D. Nella tabella sono riportati anche i costi di manutenzione (per i robot), il salario (per un operaio) ed il costo globale di una terna, da minimizzare tenendo in considerazione che il numero totale di operai deve essere almeno 3 volte piú grande del numero di robot.

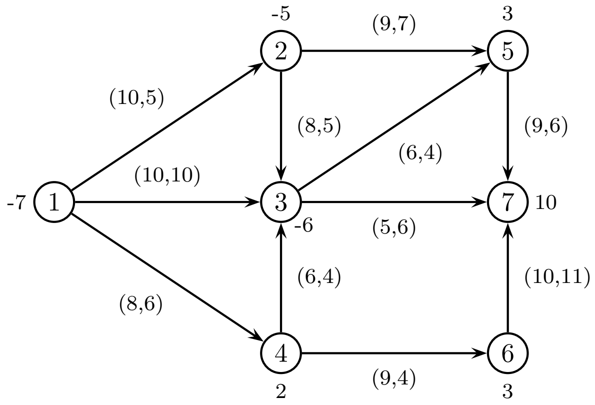
| | A | B | C | D | costi |
|---|---|---|---|---|---|
| operai | 8 | 15 | 4 | 4 | 8 |
| robot | 4 | 10 | 2 | 3 | 7 |
| terne | 3 | 6 | 0.5 | 1 | 20 |

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

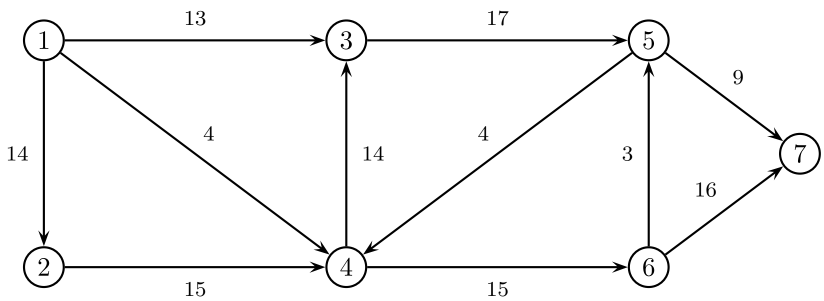



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7) | (2,3) | $x =$ | | |
| (1,2) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7) | (1,4) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

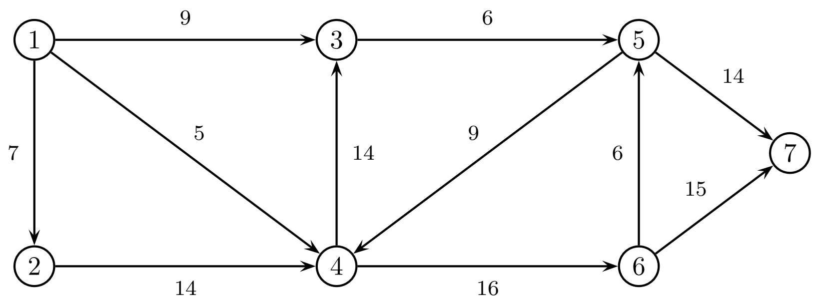
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) | |
| Archi di U | (5,7) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 13\ x_1 + 5\ x_2 \\ 18\ x_1 + 9\ x_2 \leq 53 \\ 13\ x_1 + 18\ x_2 \leq 63 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 503 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 18 | 7 | 6 | 23 | 14 | 5 | 17 |
| Volumi | 125 | 194 | 151 | 74 | 68 | 36 | 403 |

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 1 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| (-1,0) | | | | | | | |
| (0,1) | | | | | | | |
| (0,-1) | | | | | | | |
| (1,0) | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max \; -2\,x_1^2 + 10\,x_1\,x_2 + x_1 + x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(0,4)$ , $(-5,0)$ , $(-4,-1)$ e $(2,3)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-2, \frac{1}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 8\ x_1 - 9\ x_2 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 2\ x_2 \leq -13 \\ 2\ x_1 - x_2 \leq 15 \\ 2\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + 3\ x_2 \leq -12 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (2,\ -8)$ | SI | NO |
| $\{5,\ 6\}$ | $y = \left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{33}{5},\ -\frac{26}{5}\right)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

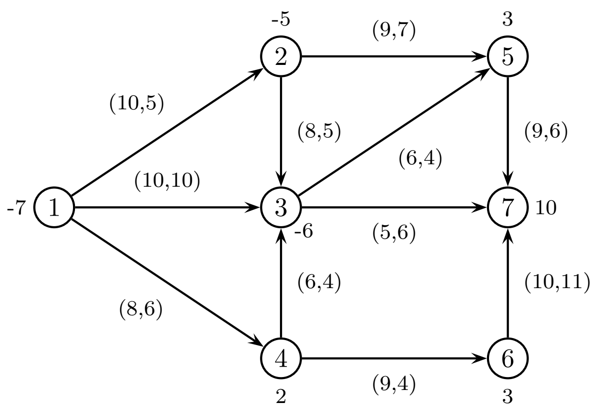
| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{3,\ 5\}$ | $(3,\ -5)$ | $\left(0,\ 0,\ -\frac{26}{5},\ 0,\ \frac{7}{5},\ 0\right)$ | 3 | $20,\ 5$ | 4 |
| 2° iterazione | $\{4,\ 5\}$ | $(4,\ -7)$ | $\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{13}{2},\ -\frac{5}{2},\ 0\right)$ | 5 | $5,\ 4$ | 2 |

**Esercizio 3.**

COMANDI DI MATLAB

```
c=[ 8 ; 7 ; 20 ]                                                    int=[ 1 ; 2 ; 3 ]

A=[-1/8 -1/4 -1/3;-1/15 -1/10 -1/6;-1/4 -1/2 -2;-1/4 -1/3 -1;-1 3 1]   Aeq=[]

b=[ -50 ; -25 ; -25 ; -55 ; 0]                                      beq=[]

lb=[ 0 ; 0 ; 0 ]                                                    ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

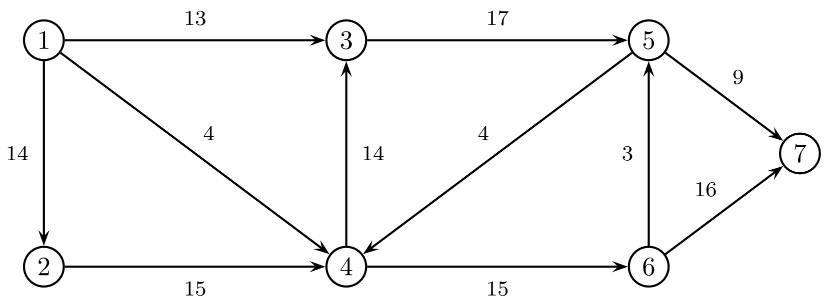



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7) | (2,3) | $x = (0,\ -8,\ 15,\ 5,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 13,\ 0,\ 10)$ | NO | SI |
| (1,2) (2,5) (3,7) (4,3) (5,7) (6,7) | (1,4) | $\pi = (0,\ 10,\ 23,\ 17,\ 19,\ 18,\ 28)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

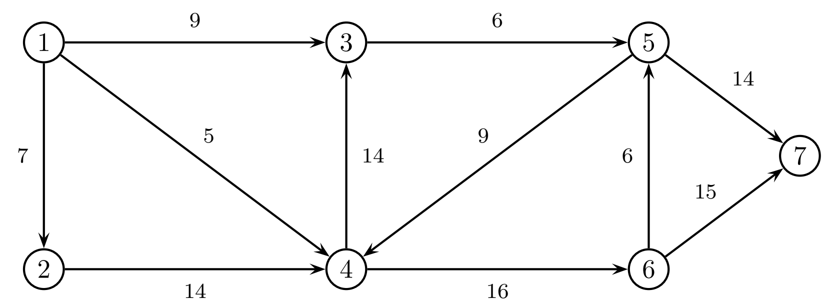
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) | (1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) |
| Archi di U | (5,7) | (5,7) |
| $x$ | (2, 0, 5, 0, 7, 2, 4, 0, 3, 6, 0) | (0, 2, 5, 0, 5, 4, 4, 0, 3, 6, 0) |
| $\pi$ | (0, 10, 13, 8, 19, 17, 18) | (0, 7, 10, 8, 16, 17, 15) |
| Arco entrante | (1,3) | (5,7) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 2 , 2 | 2 , 4 |
| Arco uscente | (1,2) | (3,7) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 4 | | 3 | | 2 | | 6 | | 5 | | 7 | |
| nodo 2 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 |
| nodo 3 | 13 | 1 | 13 | 1 | 13 | 1 | 13 | 1 | 13 | 1 | 13 | 1 | 13 | 1 |
| nodo 4 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 30 | 3 | 30 | 3 | 22 | 6 | 22 | 6 | 22 | 6 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 19 | 4 | 19 | 4 | 19 | 4 | 19 | 4 | 19 | 4 | 19 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 35 | 6 | 31 | 5 | 31 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 3, 6 | | 2, 5, 6 | | 5, 6 | | 5, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 5 - 7 | 6 | (0, 6, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 6, 0, 0) | 6 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 5 | (0, 6, 5, 0, 6, 0, 5, 0, 6, 0, 5) | 11 |
| 1 - 2 - 4 - 6 - 7 | 7 | (7, 6, 5, 7, 6, 0, 12, 0, 6, 0, 12) | 18 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 3\}$ $\quad N_t = \{2, 4, 5, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 13\ x_1 + 5\ x_2 \\ 18\ x_1 + 9\ x_2 \le 53 \\ 13\ x_1 + 18\ x_2 \le 63 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{53}{18}, 0\right)$ $\quad v_S(P) = 38$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (2, 0)$ $\quad v_I(P) = 26$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad x_1 \le 2$

$r = 4$ $\qquad 5\,x_1 + 2\,x_2 \le 14$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 503 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 18 | 7 | 6 | 23 | 14 | 5 | 17 |
| Volumi | 125 | 194 | 151 | 74 | 68 | 36 | 403 |

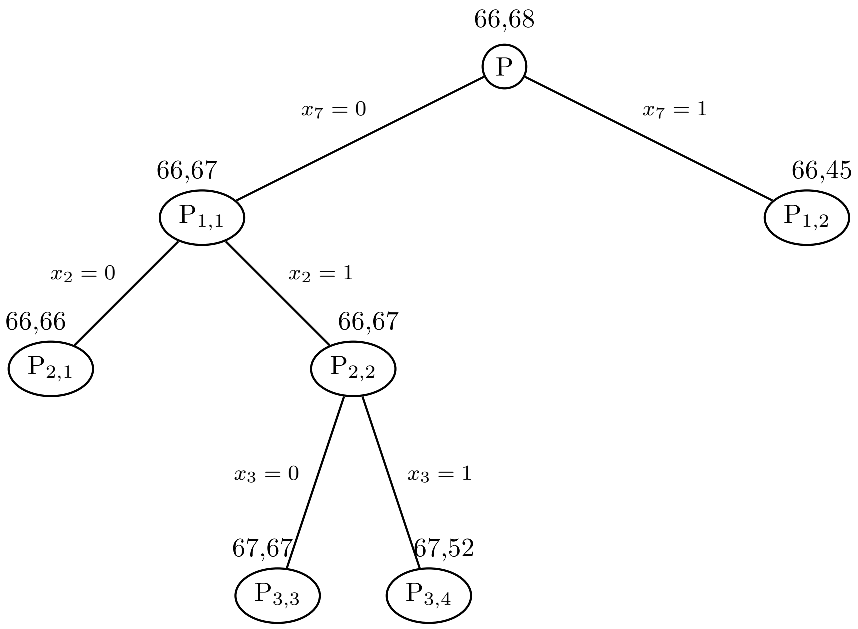
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (1, 0, 1, 1, 1, 1, 0)$ $\quad v_I(P) = 66$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(1, 0, 0, 1, 1, 1, \frac{200}{403}\right)$ $\quad v_S(P) = 68$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima $= (1, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$ $\quad$ valore ottimo $= 67$

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 1 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(-1,\ 0)$ | $\left(\frac{1}{2},0\right)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(0,\ 1)$ | $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(0,\ -1)$ | $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(1,\ 0)$ | $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ -2\,x_1^2 + 10\,x_1\,x_2 + x_1 + x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(0,4)$ , $(-5,0)$ , $(-4,-1)$ e $(2,3)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-2,\frac{1}{3}\right)$ | $(2,-3)$ | $\begin{pmatrix} 9/13 & 6/13 \\ 6/13 & 4/13 \end{pmatrix}$ | $\left(-\frac{3}{13},-\frac{2}{13}\right)$ | $\frac{26}{3}$ | $\frac{26}{3}$ | $(-4,-1)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 15/01/16**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -3\ x_1 - 7\ x_2 \\ -3\ x_1 - 4\ x_2 \leq 4 \\ -5\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ 3\ x_1 + 4\ x_2 \leq 26 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 13 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 16 \\ -3\ x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x =$ | | |
| $\{1, 6\}$ | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {4,6} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Un'impresa produce un bene in due stabilimenti situati a Milano e a Brescia. La produzione viene immagazzinata in tre depositi a Cremona, a Pavia e a Monza e poi distribuita alla vendita al dettaglio. La tabella mostra il costo unitario di trasporto, la capacità produttiva massima degli stabilimenti e le quantità di vendita al dettaglio di ogni deposito.

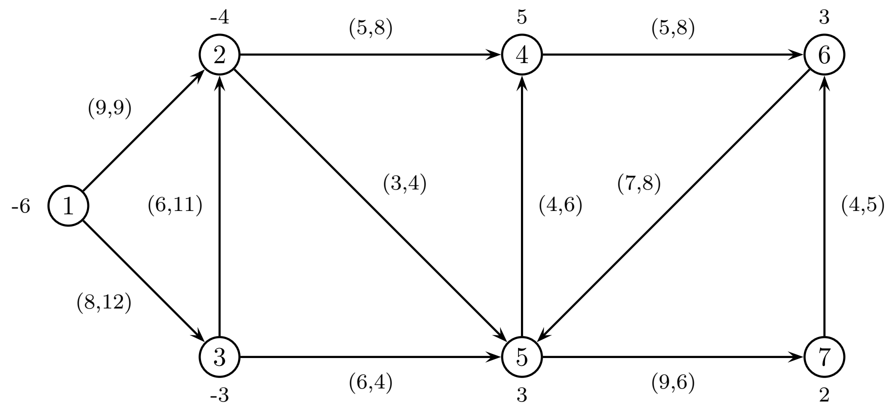
| | Cremona | Pavia | Monza | Capacità |
|---|---|---|---|---|
| Milano | 15 | 14 | 13 | 300 |
| Brescia | 18 | 19 | 20 | 200 |
| Vendita | 210 | 130 | 150 | |

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                    b=

Aeq=                  beq=

lb=                   ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

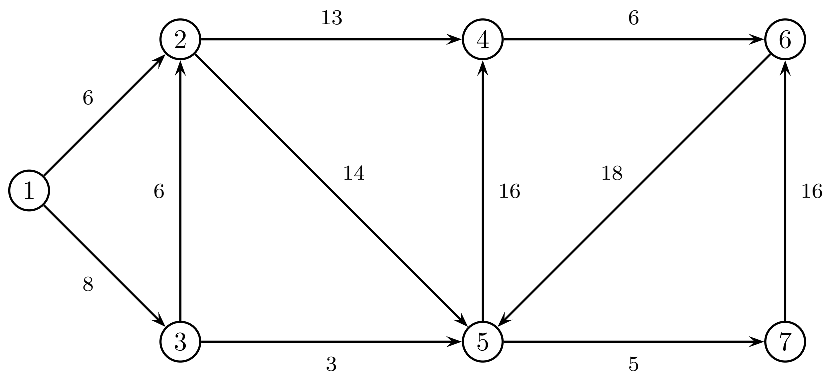



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (2,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,5) | (3,2) | $x =$ | | |
| (1,3) (2,5) (3,2) (5,4) (6,5) (7,6) | (5,7) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

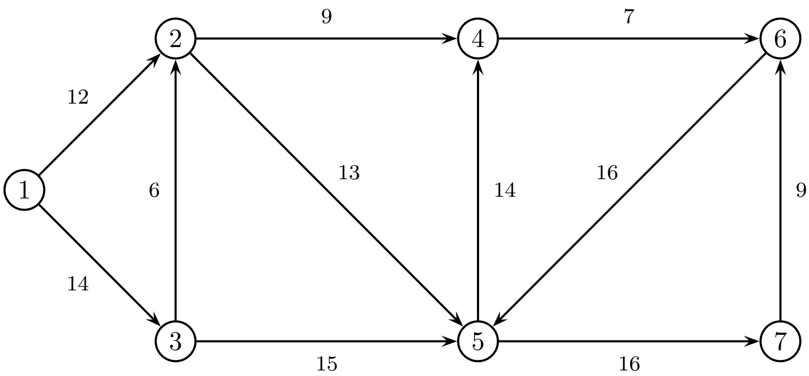
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (2,4) (3,5) (4,6) (5,7) (7,6) | |
| Archi di U | (2,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min \ 11\ x_1 + 10\ x_2 \\ 15\ x_1 + 11\ x_2 \geq 65 \\ 8\ x_1 + 14\ x_2 \geq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 10 | 41 | 62 | 92 |
| **2** | | 27 | 54 | 56 |
| **3** | | | 11 | 13 |
| **4** | | | | 94 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

| | |
|---|---|
| 3–albero: | $v_I(P) =$ |

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

| | |
|---|---|
| ciclo: | $v_S(P) =$ |

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{45}$, $x_{35}$, $x_{15}$.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -3x_1 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 - 2 \le 0, \quad 2x_1 - x_2 - 1 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(1,\ 1)$ | | | | | | | |
| $\left(-\frac{1}{5},\ -\frac{7}{5}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5},\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 2\ x_1^2 + 8\ x_1 x_2 + 4\ x_2^2 - 3\ x_1 + 8\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(-5, 0)$ , $(-5, -4)$ , $(4, 3)$ e $(-3, 3)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{11}{3}, 2\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max \ -3\ x_1 - 7\ x_2 \\ -3\ x_1 - 4\ x_2 \le 4 \\ -5\ x_1 - x_2 \le 1 \\ 3\ x_1 + 4\ x_2 \le 26 \\ -x_1 + 3\ x_2 \le 13 \\ 3\ x_1 - x_2 \le 16 \\ -3\ x_1 + x_2 \le 7 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x = (0,\ -1)$ | SI | NO |
| $\{1, 6\}$ | $y = \left(\frac{8}{5},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -\frac{3}{5}\right)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

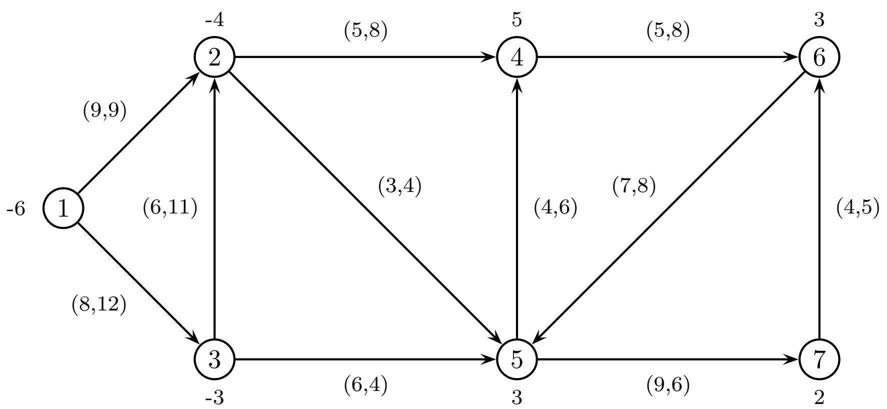
| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{4, 6\}$ | $(-1,\ 4)$ | $(0,\ 0,\ 0,\ -3,\ 0,\ 2)$ | 4 | $\frac{136}{15},\ 0$ | 2 |
| 2° iterazione | $\{2, 6\}$ | $(-1,\ 4)$ | $(0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 0,\ -4)$ | 6 | $8,\ 23$ | 1 |

**Esercizio 3.**

COMANDI DI MATLAB

```
c=[ 15 ; 14 ; 13 ; 18 ; 19 ; 20 ]

A=[111000; 000111 ]                    b=[ 300 ; 200 ]

Aeq=[100100; 010010 ; 001001 ]         beq=[ 210 ; 130 ; 150]

lb=[ 0; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0]             ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

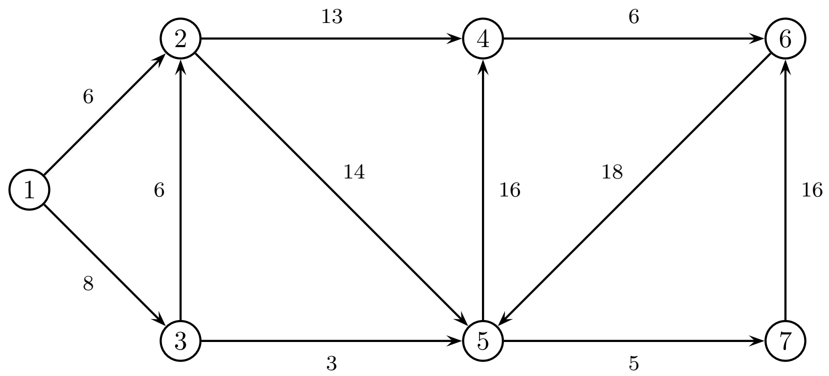



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (2,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,5) | (3,2) | $x = (6,\ 0,\ 21,\ 0,\ 11,\ -8,\ 16,\ 0,\ 2,\ 13,\ 0)$ | NO | NO |
| (1,3) (2,5) (3,2) (5,4) (6,5) (7,6) | (5,7) | $\pi = (0,\ 14,\ 8,\ 21,\ 17,\ 10,\ 6)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

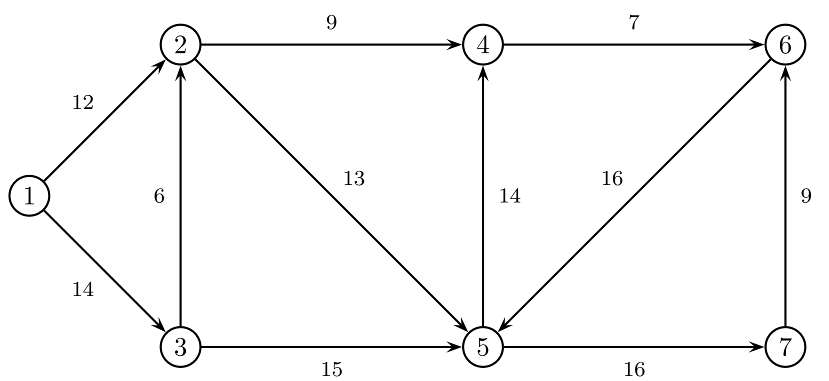
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (2,4) (3,5) (4,6) (5,7) (7,6) | (1,2) (2,5) (3,5) (4,6) (5,7) (7,6) |
| Archi di U | (2,5) | (2,4) |
| $x$ | (6, 0, 6, 4, 0, 3, 1, 0, 4, 0, 2) | (6, 0, 8, 2, 0, 3, 3, 0, 2, 0, 0) |
| $\pi$ | (0, 9, 0, 14, 6, 19, 15) | (0, 9, 6, 20, 12, 25, 21) |
| Arco entrante | (2,5) | (5,4) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 2 , 2 | 5 , 0 |
| Arco uscente | (2,4) | (7,6) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 2 | | 3 | | 5 | | 7 | | 4 | | 6 | |
| nodo 2 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 |
| nodo 3 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 |
| nodo 4 | $+\infty$ | $-1$ | 19 | 2 | 19 | 2 | 19 | 2 | 19 | 2 | 19 | 2 | 19 | 2 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 20 | 2 | 11 | 3 | 11 | 3 | 11 | 3 | 11 | 3 | 11 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 32 | 7 | 25 | 4 | 25 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 16 | 5 | 16 | 5 | 16 | 5 | 16 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3 | | 3, 4, 5 | | 4, 5 | | 4, 7 | | 4, 6 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 2 - 5 - 7 | 12 | (12, 0, 0, 12, 0, 0, 0, 0, 12, 0, 0) | 12 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 4 | (12, 4, 0, 12, 0, 4, 0, 0, 16, 0, 0) | 16 |

| Taglio di capacità minima: $N_s = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad N_t = \{7\}$ |
|---|

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 11\ x_1 + 10\ x_2 \\ 15\ x_1 + 11\ x_2 \geq 65 \\ 8\ x_1 + 14\ x_2 \geq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

| sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{459}{122}, \frac{95}{122}\right)$ | $v_I(P) = 50$ |
|---|---|

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

| sol. ammissibile $= (4,1)$ | $v_S(P) = 54$ |
|---|---|

c) Calcolare un taglio di Gomory.

| | |
|---|---|
| $r = 1$ | $14\,x_1 + 11\,x_2 \geq 62$ |
| $r = 2$ | $8\,x_1 + 13\,x_2 \geq 41$ |

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 10 | 41 | 62 | 92 |
| **2** | | 27 | 54 | 56 |
| **3** | | | 11 | 13 |
| **4** | | | | 94 |

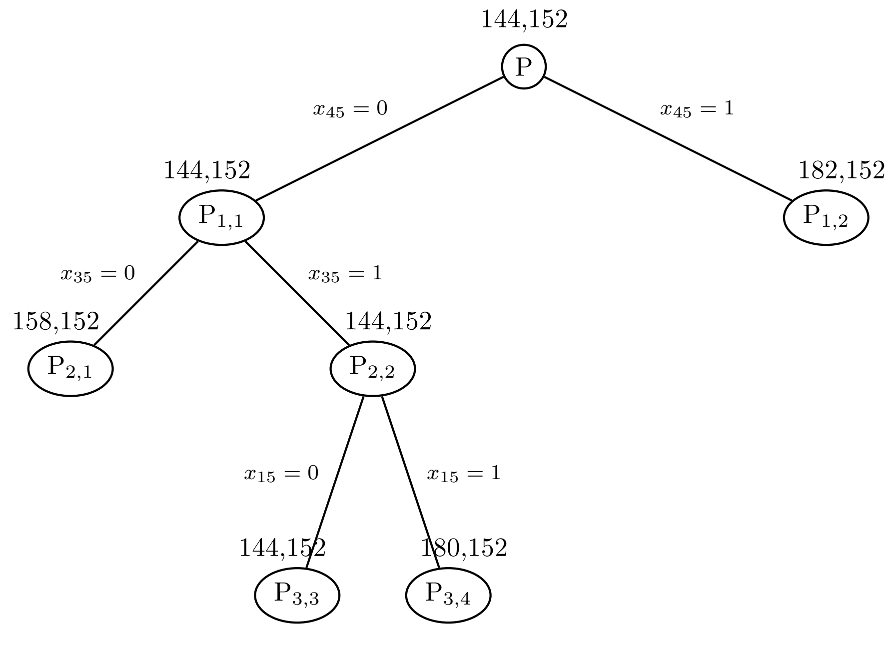
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

| 3–albero: ( 1 , 2 ) ( 2 , 4 ) ( 2 , 5 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) | $v_I(P) = 144$ |
|---|---|

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

| ciclo: $4 - 3 - 5 - 2 - 1$ | $v_S(P) = 152$ |
|---|---|

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{45}$, $x_{35}$, $x_{15}$.




**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -3x_1 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0, \quad 2x_1 - x_2 - 1 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(1,\ 1)$ | $\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $\left(-\frac{1}{5},\ -\frac{7}{5}\right)$ | $\left(-\frac{1}{6}, \frac{22}{15}\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5},\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ | $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 2\ x_1^2 + 8\ x_1\, x_2 + 4\ x_2^2 - 3\ x_1 + 8\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(-5, 0)$ , $(-5, -4)$ , $(4, 3)$ e $(-3, 3)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{11}{3}, 2\right)$ | $(-3, 2)$ | $\begin{pmatrix} 4/13 & 6/13 \\ 6/13 & 9/13 \end{pmatrix}$ | $\left(\frac{116}{39}, \frac{58}{13}\right)$ | $\frac{13}{58}$ | $\frac{13}{184}$ | $\left(-\frac{159}{46}, \frac{213}{92}\right)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 15/01/19**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale:

$$\begin{cases} \max\ 6\ x_1 - x_2 \\ -6\ x_1 + 10\ x_2 \leq 17 \\ 7\ x_1 + 2\ x_2 \leq 28 \\ 4\ x_1 - 3\ x_2 \leq 16 \\ -2\ x_1 - 4\ x_2 \leq 3 \\ -2\ x_1 + 2\ x_2 \leq 3 \\ 2\ x_1 - x_2 \leq 19 \end{cases}$$

| | Base | $x$ | Degenere? | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° passo | {4,5} | | | | | | |
| 2° passo | | | | | | | |

**Esercizio 2.** Una ditta produce tre tipi di giubbotti A, B e C. Per due di essi utilizza un materiale tecnico che puó acquistare al prezzo di 50 euro al Kg. Il fornitore puó al massimo fornire 1000 kg di tale materiale al mese. La quantitá di materiale richiesta per produrre 1 giubbotto, i costi di manodopera (per giubbotto) ed i prezzi di vendita al pubblico (per giubbotto) sono indicati nella seguente tabella.

| | Materiale | manodopera | prezzo |
|---|---|---|---|
| A | - | 30 | 80 |
| B | 0.3 | 18 | 50 |
| C | 0.4 | 10 | 40 |

Esigenze di mercato impongono che i giubbotti di tipo A prodotti devono essere almeno il doppio di quelli di tipo B e non superiori a quelli di tipo C. Scrivere un modello che determini un piano produttivo che massimizzi i guadagni.

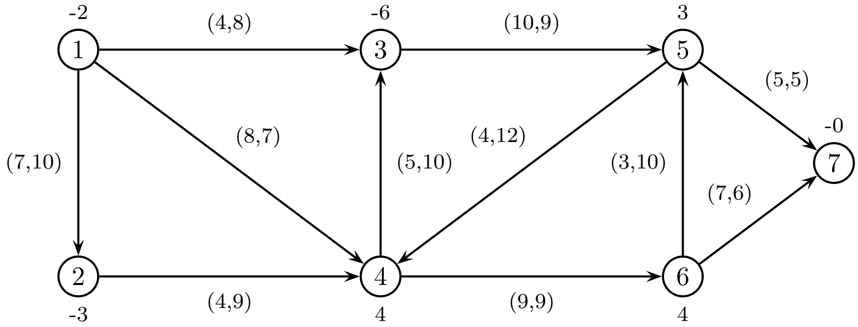
variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                                  intcon=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 3.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti sulla seguente rete (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).




| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,4) (4,3) (4,6) (5,4) (6,7) | |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | | |
| degenere? | | |
| $\pi$ | | |
| degenere? | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 13\ x_1 + 7\ x_2 \\ 14\ x_1 + 13\ x_2 \geq 61 \\ 9\ x_1 + 19\ x_2 \geq 60 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

| | |
|---|---|
| sol. ottima del rilassamento = | $v_I(P) =$ |

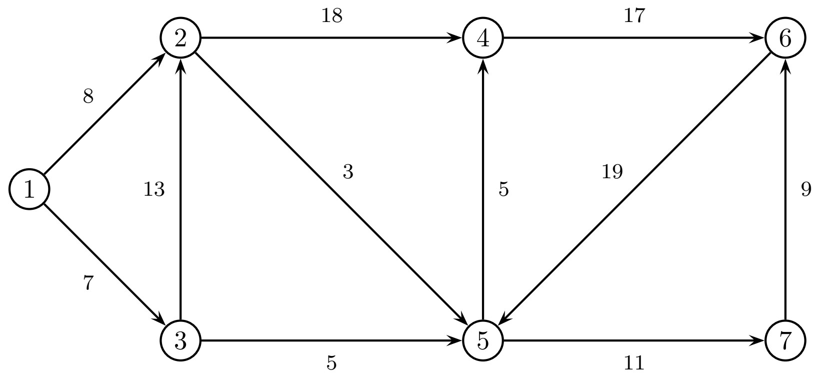
b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

| | |
|---|---|
| sol. ammissibile = | $v_S(P) =$ |

c) Calcolare un taglio di Gomory.

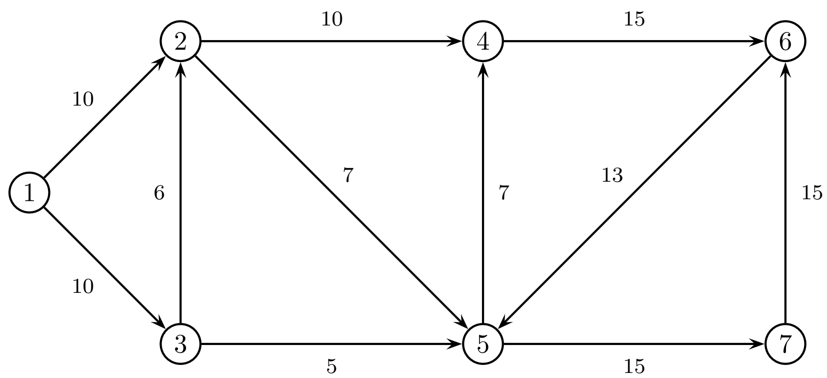
| | |
|---|---|
| $r =$ | taglio: |

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 6.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 511 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 5 | 15 | 10 | 8 | 20 | 13 | 23 |
| Volumi | 120 | 4 | 114 | 25 | 37 | 156 | 307 |

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ 16 - x_1^2 - x_2^2 \leq 0, \quad -x_1 + 2x_2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $\left(-\frac{8\sqrt{13}}{13}, -\frac{12\sqrt{13}}{13}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ | | | | | | | |

**Esercizio 8.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 2\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 - 10\,x_1 - 3\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(-2, 1)$ , $(0, 4)$ , $(-2, -4)$ e $(5, -4)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{1}{3}, -4\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.**

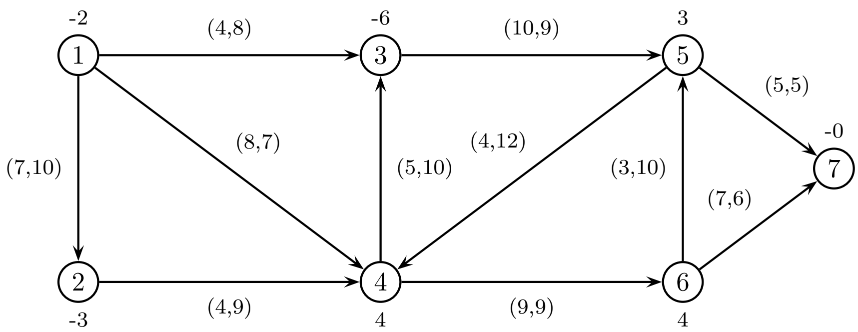
| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{4,\ 5\}$ | $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$ | $\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{5}{6},\ -\frac{13}{6},\ 0\right)$ | 4 | $12,\ \frac{77}{3},\ 132,\ 132$ | 1 |
| 2° iterazione | $\{1,\ 5\}$ | $\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$ | $\left(\frac{5}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ -\frac{27}{4},\ 0\right)$ | 5 | $2,\ \frac{80}{11},\ \frac{80}{7}$ | 2 |

**Esercizio 2.**

COMANDI DI MATLAB

```
c=[-50; -17; -10]                      intcon=[1 2 3]

A=[0 0.3 0.4; -1 2 0; 1 0 -1           b=[1000; 0; 0]

Aeq=[]                                 beq=[]

lb=[0; 0; 0]                           ub=[]
```

**Esercizio 3.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).




| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,4) (4,3) (4,6) (5,4) (6,7) | (1,3) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4) (6,7) |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | $(0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 9,\ 1,\ 4,\ 6,\ 0,\ 0,\ 0)$ | $(0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 8,\ 0,\ 4,\ 5,\ 0,\ 0,\ 0)$ |
| $\pi$ | $(0,\ -5,\ 4,\ -1,\ -5,\ 8,\ 15)$ | $(0,\ 14,\ 4,\ 18,\ 14,\ 27,\ 34)$ |
| Arco entrante | (3,5) | (1,2) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | Inf , 1 | 6 , 2 |
| Arco uscente | (4,3) | (1,3) |

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 13\ x_1 + 7\ x_2 \\ 14\ x_1 + 13\ x_2 \geq 61 \\ 9\ x_1 + 19\ x_2 \geq 60 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \frac{61}{13}\right)$ $v_I(P) = 33$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

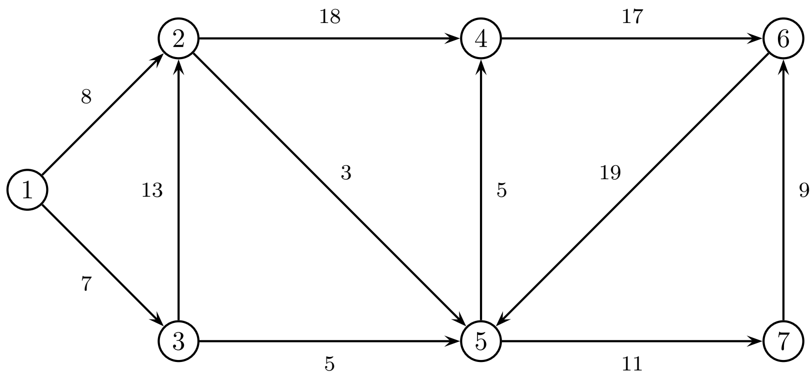
sol. ammissibile $= (0, 5)$ $v_S(P) = 35$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $13\,x_1 + 12\,x_2 \geq 57$

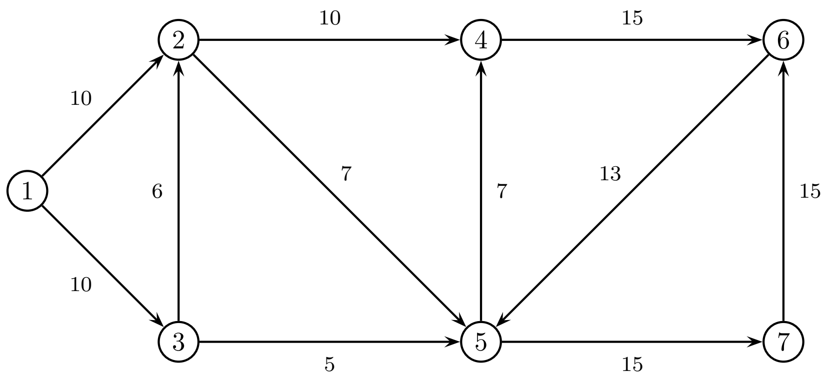
$r = 4$ $8\,x_1 + 7\,x_2 \geq 33$

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 2 | | 5 | | 4 | | 7 | | 6 | |
| nodo 2 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 |
| nodo 3 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 |
| nodo 4 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 26 | 2 | 16 | 5 | 16 | 5 | 16 | 5 | 16 | 5 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 12 | 3 | 11 | 2 | 11 | 2 | 11 | 2 | 11 | 2 | 11 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 33 | 4 | 31 | 7 | 31 | 7 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 22 | 5 | 22 | 5 | 22 | 5 | 22 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3 | | 2, 5 | | 4, 5 | | 4, 7 | | 6, 7 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 2 - 5 - 7 | 7 | (7, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0) | 7 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 5 | (7, 5, 0, 7, 0, 5, 0, 0, 12, 0, 0) | 12 |
| 1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7 | 3 | (10, 5, 3, 7, 0, 5, 3, 0, 15, 3, 0) | 15 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad N_t = \{7\}$

**Esercizio 6.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 511 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 5 | 15 | 10 | 8 | 20 | 13 | 23 |
| Volumi | 120 | 4 | 114 | 25 | 37 | 156 | 307 |

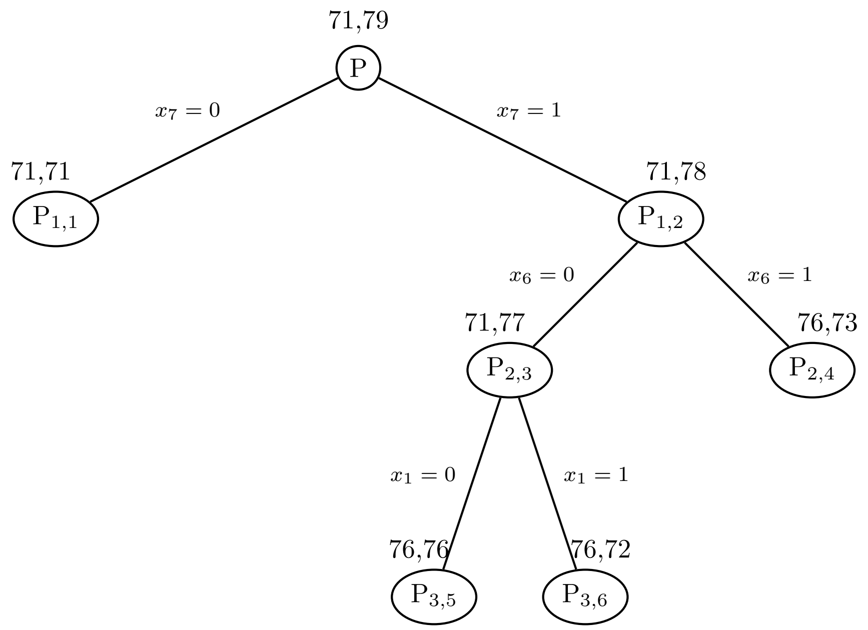
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $(1,1,1,1,1,1,0)$ $\qquad v_I(P) = 71$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(0,1,1,1,1,1,\frac{175}{307}\right)$ $\qquad v_S(P) = 79$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima = $(0,1,1,1,1,0,1)$ $\qquad$ valore ottimo = 76

**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ 16 - x_1^2 - x_2^2 \le 0, \quad -x_1 + 2x_2 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $\left(-\frac{8\sqrt{13}}{13}, -\frac{12\sqrt{13}}{13}\right)$ | $\left(-\frac{\sqrt{13}}{8}, 0\right)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |
| $\left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ | $\left(-\frac{7\sqrt{5}}{40}, -\frac{4}{5}\right)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |
| $\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ | $\left(\frac{7\sqrt{5}}{40}, -\frac{4}{5}\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |

**Esercizio 8.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 2\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 - 10\,x_1 - 3\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(-2,1)$ , $(0,4)$ , $(-2,-4)$ e $(5,-4)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{1}{3},-4\right)$ | $(0,-1)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\left(\frac{74}{3},0\right)$ | $\frac{7}{37}$ | $\frac{7}{37}$ | $(5,-4)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 15/09/14**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ x_1 - x_2 \\ -x_1 - 2\ x_2 \leq -6 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq -6 \\ x_1 \leq 4 \\ 4\ x_1 + x_2 \leq 19 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 18 \\ 5\ x_1 + x_2 \leq 23 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {3, 4} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {2,5} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una ditta produce due beni $P_1$ e $P_2$ o nell'impianto A o in quello B utilizzando due macchine, una per la levigatura ed una per la pulitura. Nella tabella le ore necessarie per la produzione. L'impianto A ha a disposizione 80 ore per la levigatura e 60 per la pulitura mentre il B ne ha 60 e 75 ore. Ciascuna unità di prodotto utilizza 4 kg. di materiale grezzo e la ditta ne ha in totale 120 Kg. Il profitto, da massimizzare in totale, é 10 euro per ogni unità di $P_1$ e 15 per $P_2$.

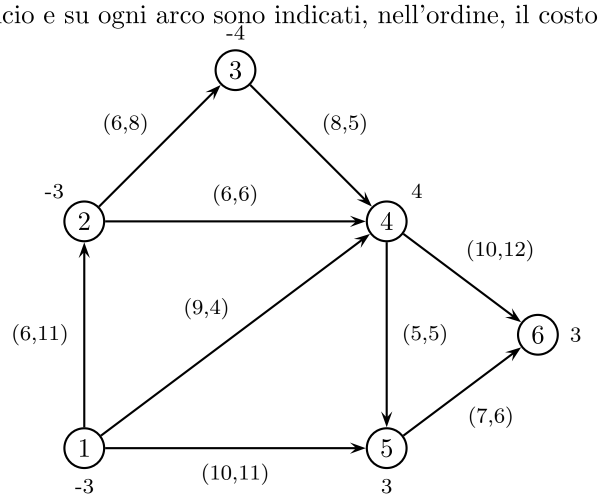
| Impianto | A | A | B | B |
|---|---|---|---|---|
| Beni | P1 | P2 | P1 | P2 |
| Levigatura | 4 | 2 | 5 | 3 |
| Pulitura | 2 | 5 | 5 | 6 |

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                          b=

Aeq=                                        beq=

lb=                                         ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

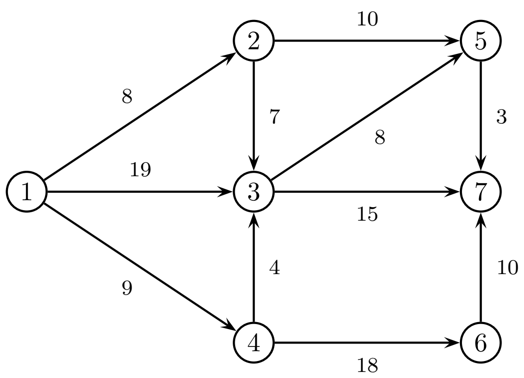



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,5) (2,3) (3,4) (5,6) | (2,4) | $x =$ | | |
| (1,2) (2,3) (3,4) (4,5) (5,6) | (1,5) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

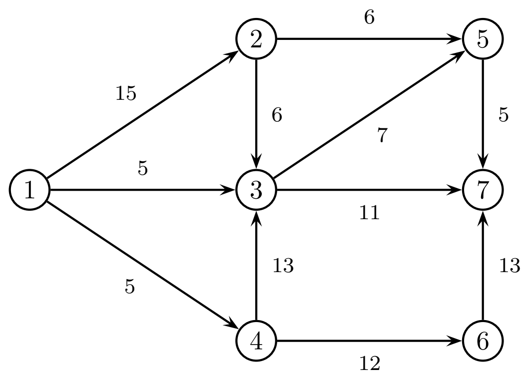
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (3,4) (4,5) (4,6) | |
| Archi di U | (2,4) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 6\ x_1 + 13\ x_2 \\ 14\ x_1 + 11\ x_2 \geq 51 \\ 7\ x_1 + 14\ x_2 \geq 51 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 498 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 21 | 5 | 13 | 24 | 18 | 22 | 9 |
| Volumi | 233 | 28 | 149 | 81 | 184 | 447 | 492 |

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 + x_2^2 \leq 0, \quad x_1^2 + 3x_1 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| (-1,1) | | | | | | | |
| (-3,1) | | | | | | | |
| $\left(-3, \sqrt{3}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(-3, -\sqrt{3}\right)$ | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 2\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 - 4\,x_2^2 + 9\,x_1 - 2\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(-3, 4)$ , $(-1, 2)$ , $(0, -4)$ e $(-2, -5)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{13}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ x_1 - x_2 \\ -x_1 - 2\,x_2 \le -6 \\ -2\,x_1 - x_2 \le -6 \\ x_1 \le 4 \\ 4\,x_1 + x_2 \le 19 \\ -x_1 + 3\,x_2 \le 18 \\ 5\,x_1 + x_2 \le 23 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\,2\}$ | $x = (2,\ 2)$ | SI | NO |
| $\{3,\,4\}$ | $y = (0,\ 0,\ 5,\ -1,\ 0,\ 0)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

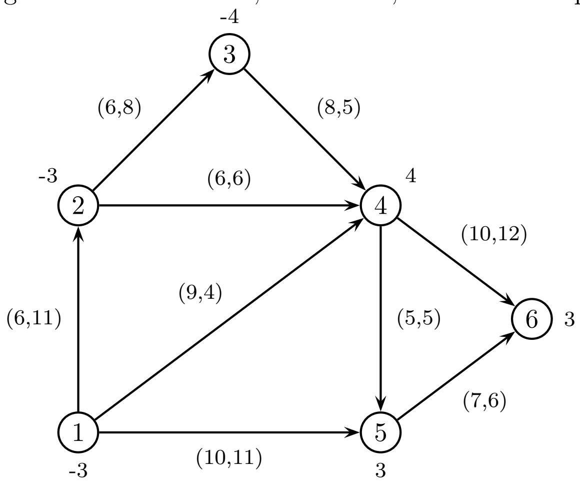
| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{2,\,5\}$ | $(0,\ 6)$ | $\left(0,\ -\frac{2}{7},\ 0,\ 0,\ -\frac{3}{7},\ 0\right)$ | 2 | $\frac{28}{3},\ 7,\ \frac{119}{16}$ | 4 |
| 2° iterazione | $\{4,\,5\}$ | $(3,\ 7)$ | $\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{2}{13},\ -\frac{5}{13},\ 0\right)$ | 5 | $\frac{143}{7},\ \frac{91}{2},\ 13,\ 13$ | 3 |

**Esercizio 3.**

COMANDI DI MATLAB

```
c=[-10;-15;-10;-15]

A=[4 4 4 4; 4 2 0 0; 2 5 0 0; 0 0 5 3; 0 0 5 6]        b=[ 120 ; 80; 60; 60; 75]

Aeq=[]                                                  beq=[]

lb=[0 ; 0 ; 0; 0]                                       ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

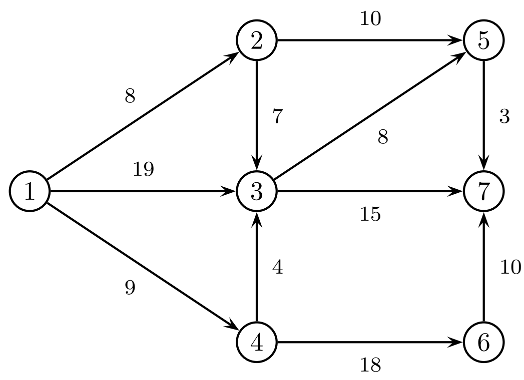



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,5) (2,3) (3,4) (5,6) | (2,4) | $x = (-3,\ 0,\ 6,\ -6,\ 6,\ -2,\ 0,\ 0,\ 3)$ | NO | NO |
| (1,2) (2,3) (3,4) (4,5) (5,6) | (1,5) | $\pi = (0,\ 6,\ 12,\ 20,\ 25,\ 32)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

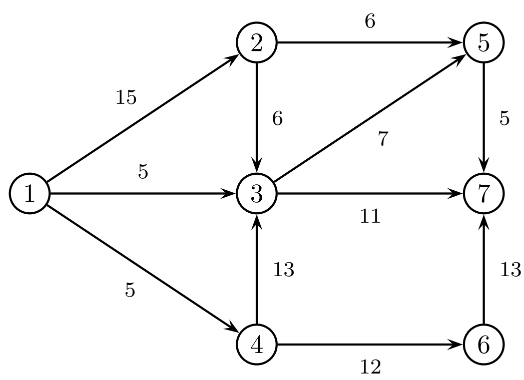
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (3,4) (4,5) (4,6) | (1,2) (1,5) (3,4) (4,5) (4,6) |
| Archi di U | (2,4) | (2,4) |
| $x$ | (3, 0, 0, 0, 6, 4, 3, 3, 0) | (3, 0, 0, 0, 6, 4, 3, 3, 0) |
| $\pi$ | (0, 6, 1, 9, 14, 19) | (0, 6, −3, 5, 10, 15) |
| Arco entrante | (1,5) | (2,4) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 11 , 0 | 11 , 3 |
| Arco uscente | (1,4) | (1,2) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 2 | | 4 | | 3 | | 5 | | 7 | | 6 | |
| nodo 2 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 |
| nodo 3 | 19 | 1 | 15 | 2 | 13 | 4 | 13 | 4 | 13 | 4 | 13 | 4 | 13 | 4 |
| nodo 4 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 18 | 2 | 18 | 2 | 18 | 2 | 18 | 2 | 18 | 2 | 18 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 27 | 4 | 27 | 4 | 27 | 4 | 27 | 4 | 27 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 28 | 3 | 21 | 5 | 21 | 5 | 21 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 3, 4, 5 | | 3, 5, 6 | | 5, 6, 7 | | 6, 7 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 5 | (0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0) | 5 |
| 1 - 2 - 3 - 7 | 6 | (6, 5, 0, 6, 0, 0, 11, 0, 0, 0, 0) | 11 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 5 | (11, 5, 0, 6, 5, 0, 11, 0, 0, 5, 0) | 16 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 5 | (11, 5, 5, 6, 5, 0, 11, 0, 5, 5, 5) | 21 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 5\}$ $\quad N_t = \{3, 4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 6\ x_1 + 13\ x_2 \\ 14\ x_1 + 11\ x_2 \geq 51 \\ 7\ x_1 + 14\ x_2 \geq 51 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{51}{7}, 0\right)$ $\qquad v_I(P) = 44$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (8, 0)$ $\qquad v_S(P) = 48$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 3\,x_1 + 6\,x_2 \geq 22$ ovvero anche $\qquad x_1 + 2\,x_2 \geq 8$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 498 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 21 | 5 | 13 | 24 | 18 | 22 | 9 |
| Volumi | 233 | 28 | 149 | 81 | 184 | 447 | 492 |

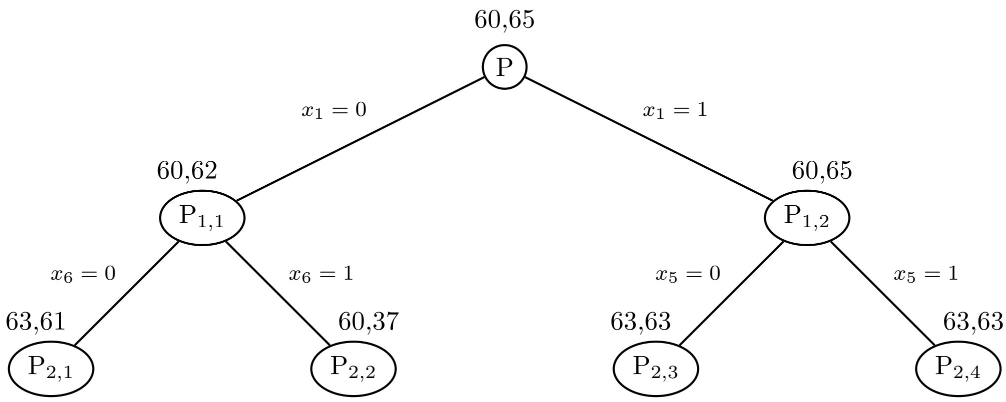
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (0, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$ $\qquad v_I(P) = 60$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{205}{233}, 1, 0, 1, 1, 0, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 65$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima $= (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$ valore ottimo $= 63$

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 + x_2^2 \leq 0, \quad x_1^2 + 3x_1 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(-1,\ 1)$ | $(0, 0)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(-3,\ 1)$ | $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(-3,\ \sqrt{3}\right)$ | | | NO | SI | NO | NO | NO |
| $\left(-3,\ -\sqrt{3}\right)$ | | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 2\,x_1^2 + 4\,x_1\,x_2 - 4\,x_2^2 + 9\,x_1 - 2\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(-3, 4)$ , $(-1, 2)$ , $(-0, -4)$ e $(-2, -5)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{13}{3}\right)$ | $(1, -2)$ | $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ | $\left(-\frac{16}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{5}{24}$ | $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{14}{3}\right)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 15/09/17**

(Cognome) (Nome) (Numero di Matricola)

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 3\ x_1 + x_2 \\ x_1 + 3\ x_2 \leq -10 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq -8 \\ 2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 31 \\ -3\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 5 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 8 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x =$ | | |
| $\{1, 5\}$ | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {2,4} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una ditta deve prendere in affitto il seguente numero di macchine in ogni trimestre dell'anno

| GEN-MAR | APR-GIU | LUG-SET | OTT-DIC |
|---|---|---|---|
| 9 | 5 | 7 | 8 |

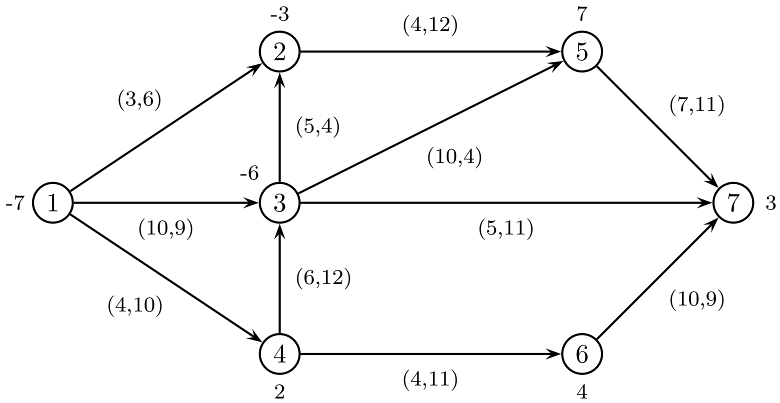
Le macchine possono essere prese in affitto per un trimestre al costo di 4000 euro, per due trimestri al costo di 7000 euro o per tre trimestri al costo di 9000 euro. Si vuole minimizzare il costo complessivo di affitto pianificando un anno.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

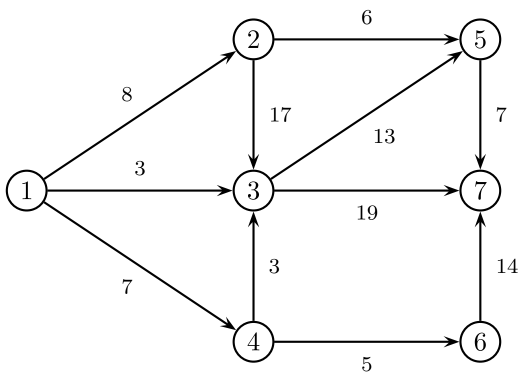



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7) | (3,7) | $x =$ | | |
| (1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (5,7) (6,7) | (3,7) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

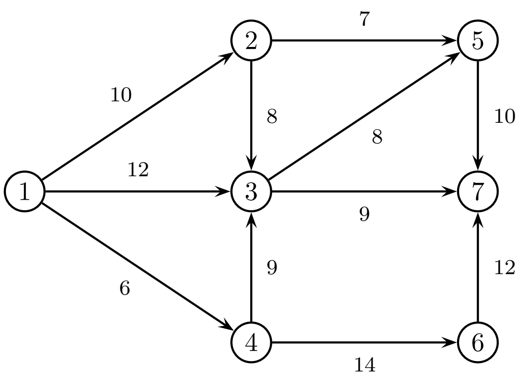
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7) | |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max \ 12\ x_1 + 6\ x_2 \\ 13\ x_1 + 8\ x_2 \leq 49 \\ 7\ x_1 + 16\ x_2 \leq 66 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 16 | 21 | 64 | 46 |
| **2** | | 16 | 91 | 58 |
| **3** | | | 8 | 11 |
| **4** | | | | 7 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{24}$, $x_{45}$, $x_{34}$.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0, \quad x_2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(0, \; -2)$ | | | | | | | |
| $(0, \; 0)$ | | | | | | | |
| $(2, \; 0)$ | | | | | | | |
| $(-2, \; 0)$ | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -4\,x_1^2 - 6\,x_1\,x_2 + 4\,x_2^2 + 3\,x_1 + 10\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(2, 5)$ , $(-4, -3)$ , $(0, -1)$ e $(-3, -4)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-2, -\frac{1}{3}\right)$ | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 3\ x_1 + x_2 \\ x_1 + 3\ x_2 \leq -10 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq -8 \\ 2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 31 \\ -3\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 5 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 8 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (2,\ -4)$ | SI | NO |
| $\{1,\ 5\}$ | $y = \left(\frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{8}{3},\ 0\right)$ | SI | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{2,\ 4\}$ | $(1,\ -6)$ | $(0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0)$ | 4 | $5,\ 20$ | 1 |
| 2° iterazione | $\{1,\ 2\}$ | $(2,\ -4)$ | $\left(\frac{5}{7},\ -\frac{8}{7},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right)$ | 2 | $\frac{35}{3},\ 7$ | 5 |

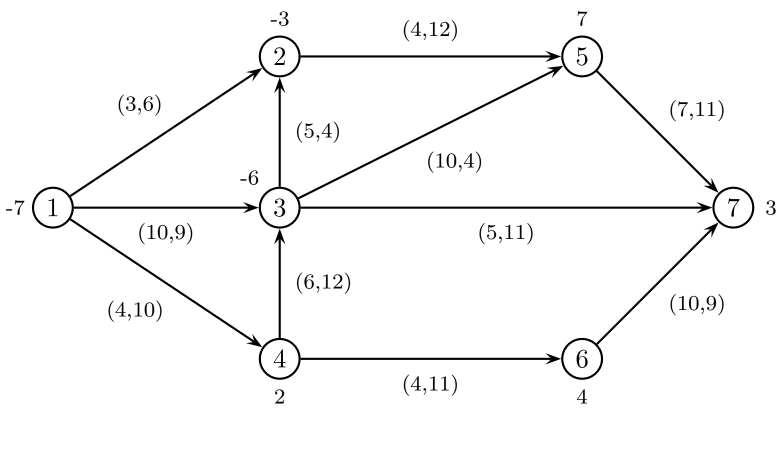
**Esercizio 3.**

variabili decisionali: x1=numero di macchine a gennaio per un trimestre, x2=numero di macchine a gennaio per due trimestri, x3=numero di macchine a gennaio per tre trimestri, x4=numero di macchine ad aprile per un trimestre, x5=numero di macchine ad aprile per due trimestri, x6=numero di macchine ad aprile per tre trimestri, x7=numero di macchine a luglio per un trimestre, x8=numero di macchine a luglio per due trimestri, x9=numero di macchine ad ottobre per un trimestre,

COMANDI DI MATLAB

```
c=[ 4000 ; 7000 ; 9000 ; 4000 ; 7000 ; 9000 ; 4000 ; 7000 ; 4000 ]

A=[-1 -1 -1 0 0 0 0 0 0; 0 -1 -1 -1 -1 -1 0 0 0; 0 0 -1 0 -1 -1 -1 -1; 0 0 0 0 0 -1 0 -1 -1]

b=[-9 ; -5 ; -7 ; -8]

intcon = [1 2 3 4 5 6 7 8 9]

lb=[0 ; 0 ; 0; 0; 0 ;0 ;0 ;0 ; 0]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

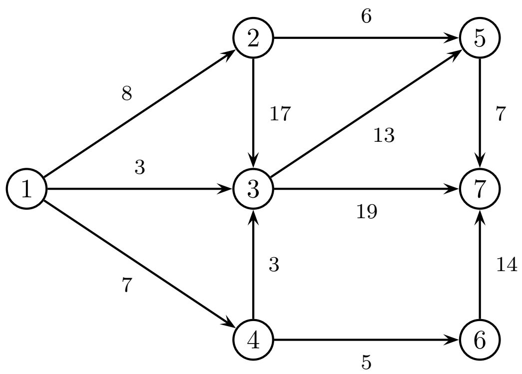


| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7) | (3,7) | $x = (0,\ 0,\ 7,\ 3,\ 0,\ 0,\ 11,\ 5,\ 0,\ -4,\ -4)$ | NO | SI |
| (1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (5,7) (6,7) | (3,7) | $\pi = (0,\ 3,\ 10,\ 4,\ 20,\ 17,\ 27)$ | NO | SI |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

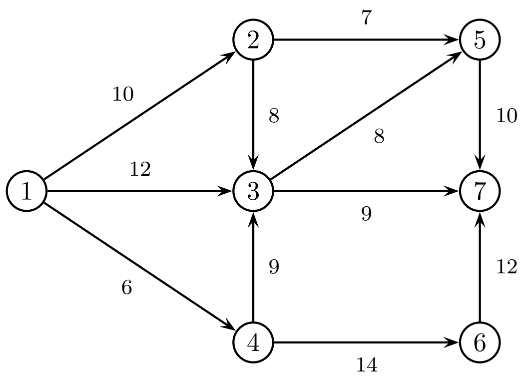
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7) | (1,2) (1,3) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) |
| Archi di U | (3,5) | (3,5) |
| $x$ | (0, 0, 7, 3, 0, 4, 2, 0, 5, 0, 1) | (0, 1, 6, 3, 0, 4, 3, 0, 4, 0, 0) |
| $\pi$ | (0, 3, 13, 4, 7, 8, 18) | (0, 3, 10, 4, 7, 8, 15) |
| Arco entrante | (1,3) | (3,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 9 , 1 | 6 , 1 |
| Arco uscente | (6,7) | (1,3) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 4 | | 2 | | 6 | | 5 | | 7 | |
| nodo 2 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 |
| nodo 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| nodo 4 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 | 7 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 16 | 3 | 16 | 3 | 14 | 2 | 14 | 2 | 14 | 2 | 14 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | 22 | 3 | 22 | 3 | 22 | 3 | 22 | 3 | 21 | 5 | 21 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 4, 5, 7 | | 2, 5, 6, 7 | | 5, 6, 7 | | 5, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 9 | (0, 9, 0, 0, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0) | 9 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 7 | (7, 9, 0, 0, 7, 0, 9, 0, 0, 7, 0) | 16 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 3 | (7, 12, 0, 0, 7, 3, 9, 0, 0, 10, 0) | 19 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 6 | (7, 12, 6, 0, 7, 3, 9, 0, 6, 10, 6) | 25 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$  $N_t = \{4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 12\ x_1 + 6\ x_2 \\ 13\ x_1 + 8\ x_2 \leq 49 \\ 7\ x_1 + 16\ x_2 \leq 66 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{49}{13}, 0\right)$ $v_S(P) = 45$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (3, 0)$ $v_I(P) = 36$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$  $x_1 \leq 3$
$r = 4$  $6\,x_1 + 3\,x_2 \leq 22$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 16 | 21 | 64 | 46 |
| **2** | | 16 | 91 | 58 |
| **3** | | | 8 | 11 |
| **4** | | | | 7 |

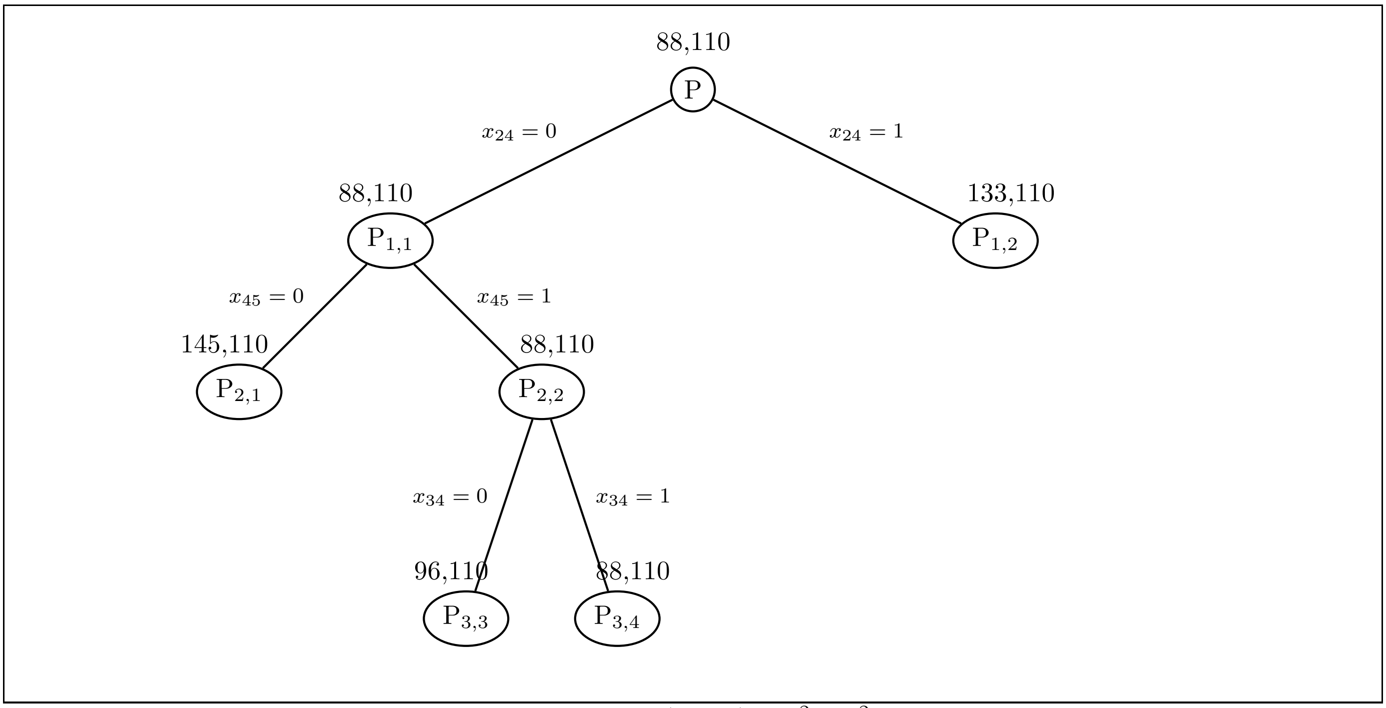
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: ( 1 , 2 ) ( 1 , 5 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) ( 4 , 5 ) $v_I(P) = 88$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: 2 − 1 − 3 − 4 − 5 $v_S(P) = 110$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{24}$, $x_{45}$, $x_{34}$.




**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0, \quad x_2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(0, \; -2)$ | $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(0, \; 0)$ | $(0, -6)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(2, \; 0)$ | $(-1, -6)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |
| $(-2, \; 0)$ | $(-1, -6)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -4\, x_1^2 - 6\, x_1 x_2 + 4\, x_2^2 + 3\, x_1 + 10\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(2, 5)$ , $(-4, -3)$ , $(0, -1)$ e $(-3, -4)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-2, -\frac{1}{3}\right)$ | $21\, x_1 + \frac{58}{3}\, x_2$ | (-4 ,-3) | $\left(-2, -\frac{8}{3}\right)$ | 1 | $(-4, -3)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 16/02/15**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 4\ y_1 + 4\ y_2 + 10\ y_3 + 10\ y_4 + y_5 + 11\ y_6 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 - 4\ y_5 - 3\ y_6 = -1 \\ -4\ y_2 + 2\ y_3 + 3\ y_4 - y_5 + y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {1, 4} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {3,6} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.**

Un'azienda produce 4 tipi di TV (32, 40, 50 e 55 pollici) ed è divisa in 2 stabilimenti (A e B). L'azienda dispone di 40 operai in A e 50 in B ognuno dei quali lavora 8 ore al giorno per 5 giorni alla settimana. Le ore necessarie per produrre i TV e le richieste minime da soddisfare sono indicate nella seguente tabella:

| TV | 32" | 40" | 50" | 55" |
|---|---|---|---|---|
| Stabilimento A | 1.2 | 1.5 | 1.7 | 2 |
| Stabilimento B | 1.5 | 1.6 | 1.8 | 2.1 |
| Richiesta | 1000 | 700 | 600 | 400 |

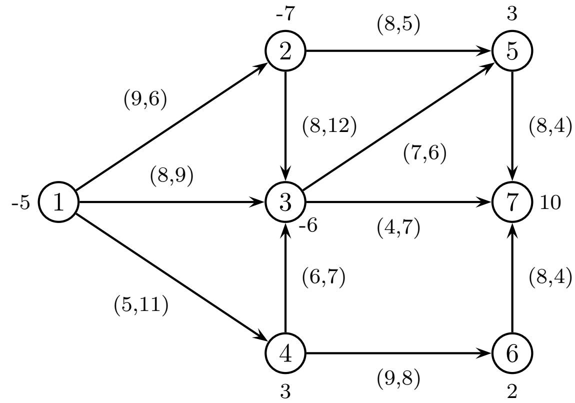
Sapendo che i 4 tipi di TV vengono venduti rispettivamente a 400, 600, 1000, e 1500 euro, l'azienda vuole determinare quanti TV di ogni tipo produrre nei due stabilimenti in modo da massimizzare il profitto.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB (specificare se sono per il rilassato)

```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

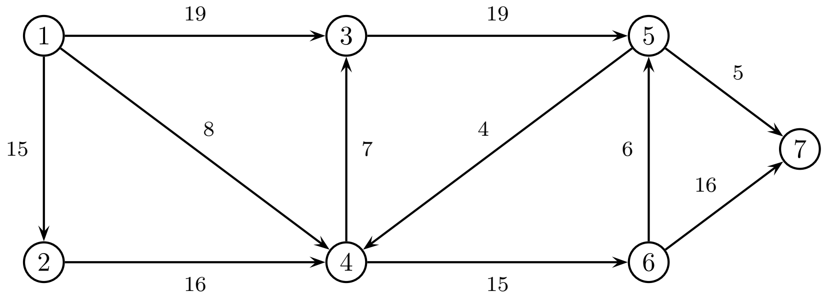


| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) | (2,3) | $x =$ | | |
| (1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (3,7) (4,6) | (4,3) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

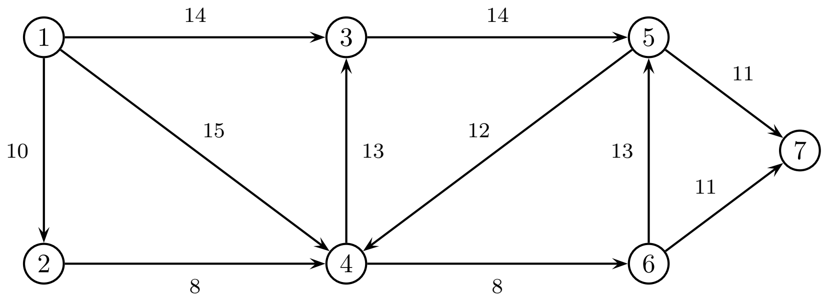
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (2,3) (3,7) (4,3) (4,6) (5,7) | |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\ x_1 + 5\ x_2 \\ 14\ x_1 + 9\ x_2 \leq 47 \\ 16\ x_1 + 19\ x_2 \leq 63 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 418 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 9 | 5 | 20 | 10 | 24 | 21 | 8 |
| Volumi | 267 | 176 | 352 | 145 | 393 | 340 | 25 |

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad x_1 * x_2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(-1,\ 0)$ | | | | | | | |
| $(0,\ -1)$ | | | | | | | |
| $(1,\ 0)$ | | | | | | | |
| $(0,\ 1)$ | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 4\,x_1^2 - 6\,x_1\,x_2 + 8\,x_1 + x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(4,-4)$ , $(0,4)$ , $(2,3)$ e $(-1,-2)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 4\ y_1 + 4\ y_2 + 10\ y_3 + 10\ y_4 + y_5 + 11\ y_6 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 - 4\ y_5 - 3\ y_6 = -1 \\ -4\ y_2 + 2\ y_3 + 3\ y_4 - y_5 + y_6 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (4,\ -2)$ | SI | NO |
| $\{1,\ 4\}$ | $y = \left(-\frac{2}{3},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{3,\ 6\}$ | $\left(-\frac{12}{7},\ \frac{41}{7}\right)$ | $\left(0,\ 0,\ \frac{2}{7},\ 0,\ 0,\ \frac{3}{7}\right)$ | 4 | $\frac{1}{4},\ \frac{3}{5}$ | 3 |
| 2° iterazione | $\{4,\ 6\}$ | $\left(-\frac{23}{8},\ \frac{19}{8}\right)$ | $\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{4}\right)$ | 5 | $\frac{2}{13}$ | 6 |

**Esercizio 3.**

variabili decisionali: $x_{ij}$ = numero di TV di tipo $i$ prodotti nello stabilimento $j$, con $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = A, B$.

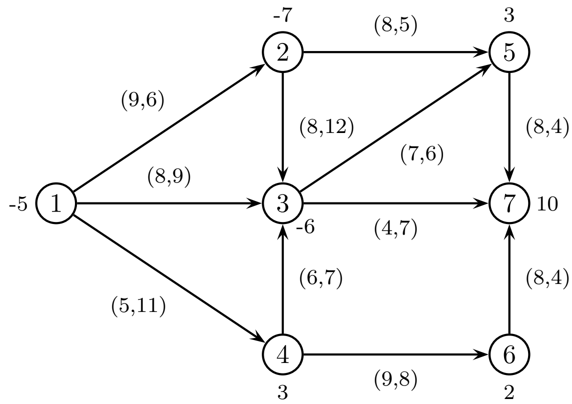
modello:

$$\begin{cases} \max\ 400\,(x_{1A} + x_{1B}) + 600\,(x_{2A} + x_{2B}) + 1000\,(x_{3A} + x_{3B}) + 1500\,(x_{4A} + x_{4B}) \\ 1.2\,x_{1A} + 1.5\,x_{2A} + 1.7\,x_{3A} + 2\,x_{4A} \leq 1600 \\ 1.5\,x_{1B} + 1.6\,x_{2B} + 1.8\,x_{3B} + 2.1\,x_{4B} \leq 2000 \\ x_{1A} + x_{1B} \geq 1000 \\ x_{2A} + x_{2B} \geq 700 \\ x_{3A} + x_{3B} \geq 600 \\ x_{4A} + x_{4B} \geq 400 \\ x_{ij} \geq 0 \\ x_{ij} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

```
c= - [ 400 ; 400 ; 600; 600 ; 1000 ; 1000 ; 1500 ; 1500 ]

A=[1.2 0 1.5 0 1.7 0 2 0;1.5 0 1.6 0 1.8 0 2.1 0; -1-1000000;00-1-10000;0000-1-100;000000-1-1]

b=[ 1600 ; 2000 ; -1000 ; -700 ; -600 ; -400 ]

Aeq=[]  beq=[]

lb=[0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ]  ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

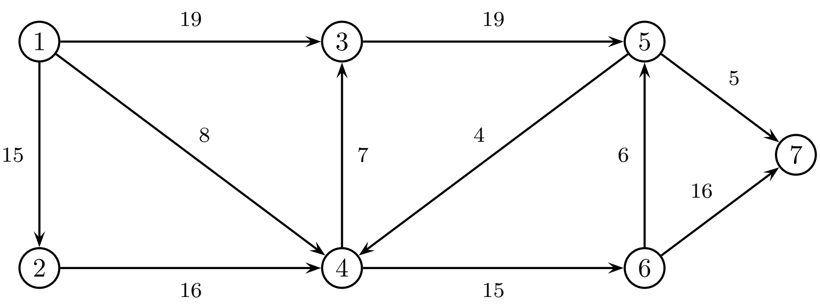


| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) | (2,3) | $x = (0,\ 0,\ 5,\ 12,\ -5,\ 8,\ 10,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0)$ | NO | SI |
| (1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (3,7) (4,6) | (4,3) | $\pi = (0,\ 9,\ 8,\ 5,\ 15,\ 14,\ 12)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

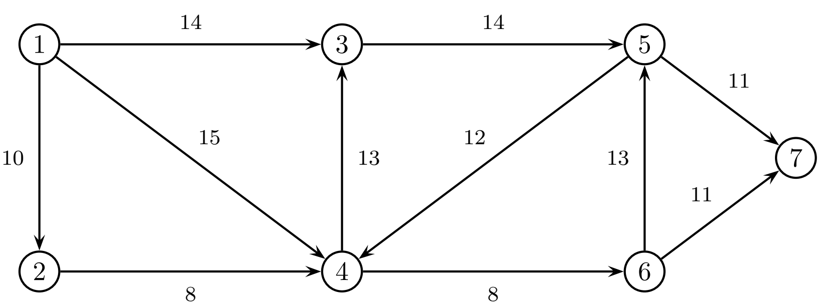
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (2,3) (3,7) (4,3) (4,6) (5,7) | (1,3) (1,4) (2,3) (3,7) (4,6) (5,7) |
| Archi di U | (3,5) | (3,5) |
| $x$ | (0, 0, 5, 7, 0, 6, 7, 0, 2, 3, 0) | (0, 0, 5, 7, 0, 6, 7, 0, 2, 3, 0) |
| $\pi$ | (0, 3, 11, 5, 7, 14, 15) | (0, 0, 8, 5, 4, 14, 12) |
| Arco entrante | (1,3) | (3,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 9 , 0 | 0 , 3 |
| Arco uscente | (4,3) | (3,7) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 4 | | 2 | | 3 | | 6 | | 5 | | 7 | |
| nodo 2 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 |
| nodo 3 | 19 | 1 | 15 | 4 | 15 | 4 | 15 | 4 | 15 | 4 | 15 | 4 | 15 | 4 |
| nodo 4 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 34 | 3 | 29 | 6 | 29 | 6 | 29 | 6 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 23 | 4 | 23 | 4 | 23 | 4 | 23 | 4 | 23 | 4 | 23 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 39 | 6 | 34 | 5 | 34 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 3, 6 | | 3, 6 | | 5, 6 | | 5, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 5 - 7 | 11 | (0, 11, 0, 0, 11, 0, 0, 0, 11, 0, 0) | 11 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 8 | (0, 11, 8, 0, 11, 0, 8, 0, 11, 0, 8) | 19 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $N_t = \{6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\ x_1 + 5\ x_2 \\ 14\ x_1 + 9\ x_2 \leq 47 \\ 16\ x_1 + 19\ x_2 \leq 63 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{47}{14}, 0\right)$ $v_S(P) = 33$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(3, 0)$ $v_I(P) = 30$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $x_1 \leq 3$
$r = 4$ $12\, x_1 + 7\, x_2 \leq 40$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 418 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 9 | 5 | 20 | 10 | 24 | 21 | 8 |
| Volumi | 267 | 176 | 352 | 145 | 393 | 340 | 25 |

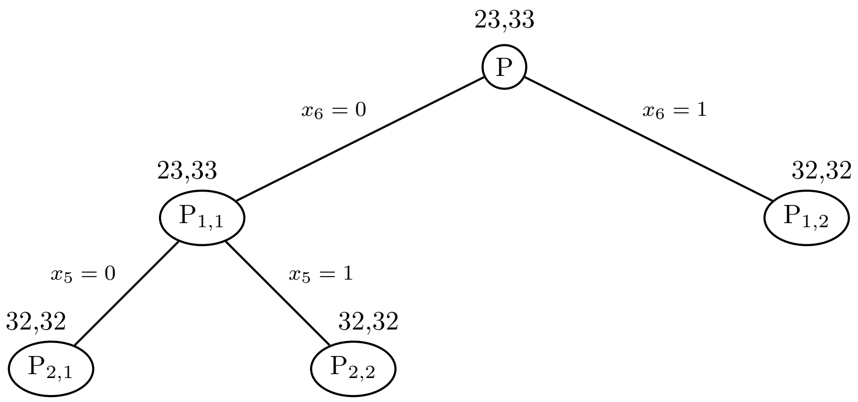
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $(0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$ $v_I(P) = 23$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(0, 0, 0, 1, 0, \frac{62}{85}, 1\right)$ $v_S(P) = 33$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound.* Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima = $(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$ valore ottimo = 32

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad x_1 * x_2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(-1,\ 0)$ | $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(0,\ -1)$ | $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(1,\ 0)$ | $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |
| $(0,\ 1)$ | $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 4\ x_1^2 - 6\ x_1\, x_2 + 8\ x_1 + x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(4, -4)$ , $(0, 4)$ , $(2, 3)$ e $(-1, -2)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ | $\frac{88}{3}\, x_1 - 3\, x_2$ | (-1 ,-2) | $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$ | 1 | $(-1, -2)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 16/01/18**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 3\ y_1 + 9\ y_2 + 9\ y_3 + 7\ y_4 + y_5 + 10\ y_6 \\ -3\ y_1 + 3\ y_2 + 3\ y_3 - y_4 - y_5 + 2\ y_6 = 7 \\ -2\ y_1 - 2\ y_2 + y_3 + 3\ y_4 + y_6 = 8 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x =$ | | |
| $\{1,\ 5\}$ | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {5,6} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Un'azienda vinicola produce due tipi di vino (A e B) i cui prezzi di vendita al litro sono rispettivamente di 2.30 euro e di 4.20 euro. La produzione dei vini richiede due tipi di uve (Cabernet e Sangiovese) che l'azienda acquista rispettivamente al costo di 0.45 euro/kg e 0.30 euro/kg. La manodopera è disponibile in al più 700 ore-uomo con un costo di 15 euro/ora. La tabella seguente indica i kg di uva e le ore di manodopera necessarie per la produzione di un litro di ciascun tipo di vino.

| | vino A | vino B |
|---|---|---|
| Cabernet | 0.8 | 0.7 |
| Sangiovese | 0.5 | 0.4 |
| manodopera | 0.03 | 0.06 |

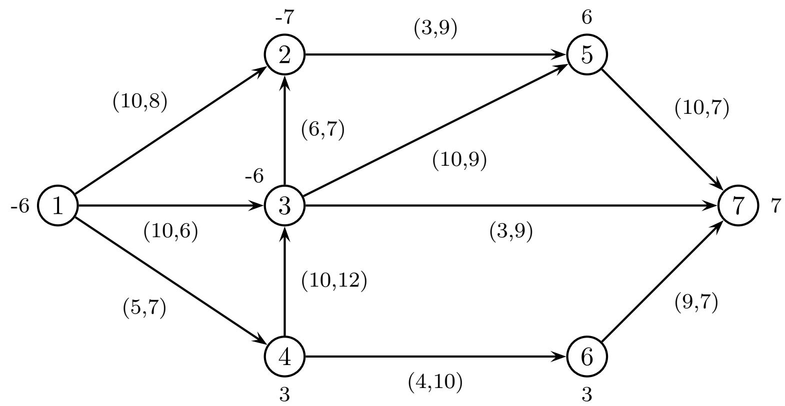
Sapendo che il budget disponibile per l'acquisto delle uve e della manodopera è pari a 140000 euro e supponendo che tutto il vino prodotto sia venduto, si determini la produzione di vino A e di vino B che massimizzi il profitto dell'azienda. (Usare un'equivalenza 1kg=1L)

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                                   intlinprog=

A=                                   b=

Aeq=                                 beq=

lb=                                  ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).




| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7) | (4,3) | $x =$ | | |
| (1,2) (3,2) (3,5) (3,7) (4,3) (6,7) | (2,5) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (3,2) (3,5) (4,6) (5,7) (6,7) | |
| Archi di U | (2,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 13\ x_1 + 5\ x_2 \\ 13\ x_1 + 11\ x_2 \leq 68 \\ 11\ x_1 + 18\ x_2 \leq 61 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

| | |
|---|---|
| sol. ottima del rilassamento = | $v_S(P) =$ |

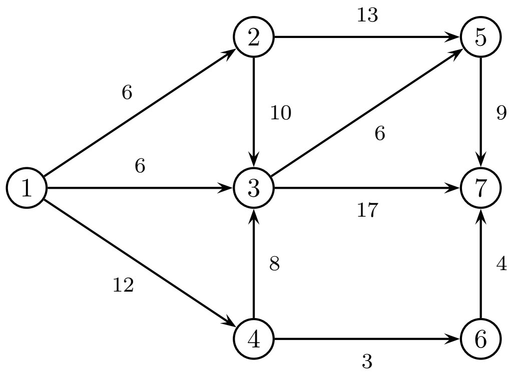
b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

| | |
|---|---|
| sol. ammissibile = | $v_I(P) =$ |

c) Calcolare un taglio di Gomory.

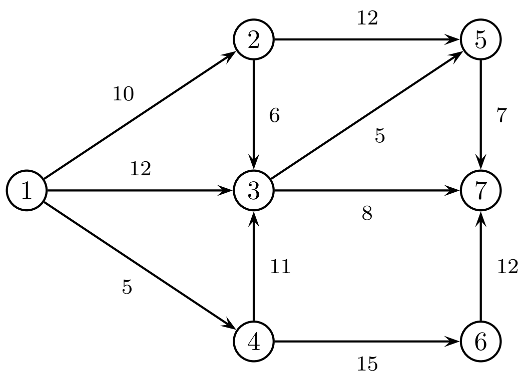
| | |
|---|---|
| $r =$ | taglio: |

**Esercizio 7.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

| |
|---|
| Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$ |

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 503 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 14 | 15 | 6 | 5 | 8 | 7 | 22 |
| Volumi | 136 | 105 | 47 | 49 | 456 | 439 | 262 |

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 \cdot x_2 \leq 0, \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 1 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| (-1,0) | | | | | | | |
| (0,1) | | | | | | | |
| (0,-1) | | | | | | | |
| (1,0) | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -2\,x_1\,x_2 - 9\,x_1 + x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(1, -2)$ , $(-2, 4)$ , $(1, 4)$ e $(-4, -1)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(1, 2)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 3\ y_1 + 9\ y_2 + 9\ y_3 + 7\ y_4 + y_5 + 10\ y_6 \\ -3\ y_1 + 3\ y_2 + 3\ y_3 - y_4 - y_5 + 2\ y_6 = 7 \\ -2\ y_1 - 2\ y_2 + y_3 + 3\ y_4 + y_6 = 8 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (1,\ -3)$ | SI | NO |
| $\{1,\ 5\}$ | $y = (-4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 5,\ 0)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{5,\ 6\}$ | $(-1,\ 12)$ | $(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 9,\ 8)$ | 4 | $\frac{9}{7},\ \frac{8}{3}$ | 5 |
| 2° iterazione | $\{4,\ 6\}$ | $\left(\frac{23}{7},\ \frac{24}{7}\right)$ | $\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{9}{7},\ 0,\ \frac{29}{7}\right)$ | 3 | $\frac{29}{10}$ | 6 |

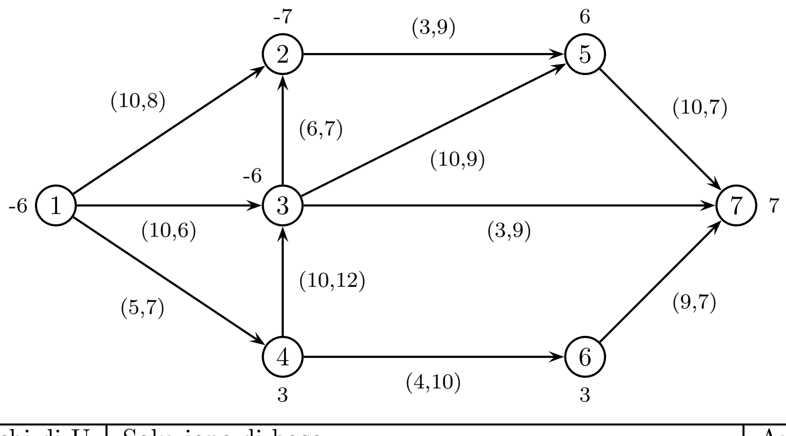
**Esercizio 3.**

$$\begin{cases} \max\ (2.3x_A + 4.2x_B) - (0.45x_A + 0.9x_B) - (0.36x_A + 0.315x_B) - (0.15x_A + 0.12x_B) \\ 0.03x_A + 0.06x_B \leq 700 \\ (0.45x_A + 0.9x_B) + (0.36x_A + 0.315x_B) + (0.15x_A + 0.12x_B) \leq 140000 \end{cases}$$

Le spese sono: $(0.45x_A + 0.9x_B)$ (manodopera) $(0.36x_A + 0.315x_B)$ (cabernet) $(0.15x_A + 0.12x_B)$ (sangiovese)

0.8X0.45=0.36, 0.7X0.45=0.315 (cabernet) 0.5X0.3=0.15, 0.4X0.3=0.12 (sangiovese)

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).




| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,4) (2,5) (3,5) (4,6) (6,7) | (4,3) | $x = (-19,\ 0,\ 25,\ -12,\ 0,\ 18,\ 0,\ 12,\ 10,\ 0,\ 7)$ | NO | SI |
| (1,2) (3,2) (3,5) (3,7) (4,3) (6,7) | (2,5) | $\pi = (0,\ 10,\ 4,\ -6,\ 14,\ -2,\ 7)$ | SI | SI |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (3,2) (3,5) (4,6) (5,7) (6,7) | (1,4) (3,2) (3,7) (4,6) (5,7) (6,7) |
| Archi di U | (2,5) | (2,5) |
| $x$ | (0, 0, 6, 9, 2, 4, 0, 0, 3, 7, 0) | (0, 0, 6, 9, 2, 0, 4, 0, 3, 3, 0) |
| $\pi$ | (0, 4, −2, 5, 8, 9, 18) | (0, 21, 15, 5, 8, 9, 18) |
| Arco entrante | (3,7) | (1,2) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 9 , 4 | 5 , 0 |
| Arco uscente | (3,5) | (6,7) |

**Esercizio 6.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max \ 13\, x_1 + 5\, x_2 \\ 13\, x_1 + 11\, x_2 \leq 68 \\ 11\, x_1 + 18\, x_2 \leq 61 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{68}{13}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 68$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

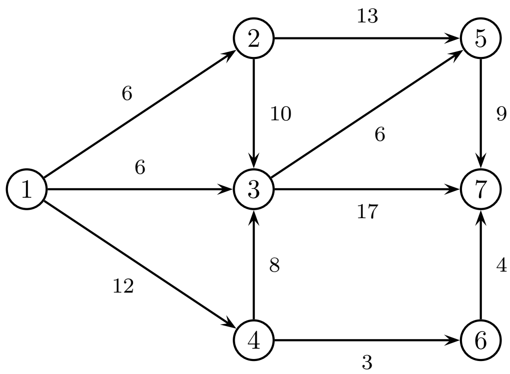
sol. ammissibile $= (5, 0)$ $\qquad v_I(P) = 65$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad x_1 \leq 5$

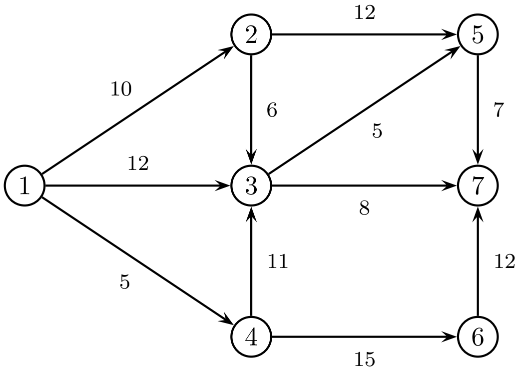
$r = 4$ $\qquad 2\, x_1 + x_2 \leq 10$

**Esercizio 7.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | |
| nodo 2 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 |
| nodo 3 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 |
| nodo 4 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 19 | 2 | 12 | 3 | 12 | 3 | 12 | 3 | 12 | 3 | 12 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 15 | 4 | 15 | 4 | 15 | 4 | 15 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 23 | 3 | 23 | 3 | 21 | 5 | 19 | 6 | 19 | 6 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 3, 4, 5 | | 4, 5, 7 | | 5, 6, 7 | | 6, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 8 | (0, 8, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0) | 8 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 7 | (7, 8, 0, 0, 7, 0, 8, 0, 0, 7, 0) | 15 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 5 | (7, 8, 5, 0, 7, 0, 8, 0, 5, 7, 5) | 20 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 503 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 14 | 15 | 6 | 5 | 8 | 7 | 22 |
| Volumi | 136 | 105 | 47 | 49 | 456 | 439 | 262 |

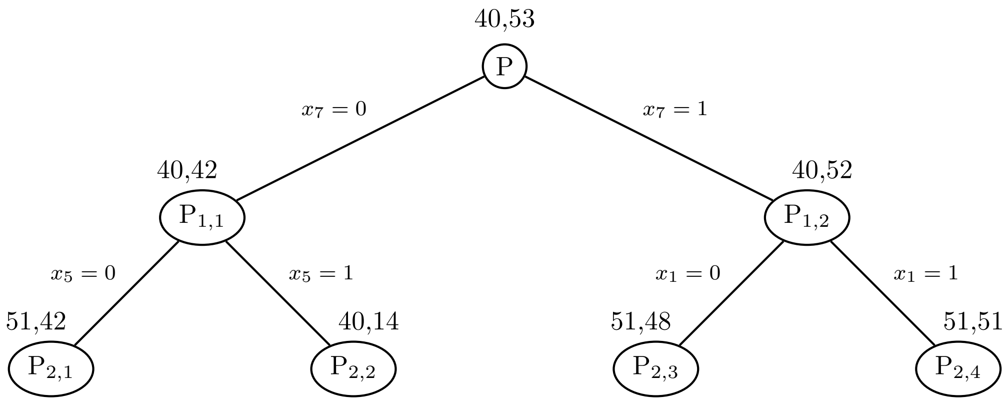
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$ $\qquad v_I(P) = 40$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(1, 1, 1, 1, 0, 0, \frac{83}{131}\right)$ $\qquad v_S(P) = 53$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima $= (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$ $\qquad$ valore ottimo $= 51$

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 x_2 \leq 0, \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 1 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(-1,\ 0)$ | $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(0,\ 1)$ | $(-1, 0)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |
| $(0,\ -1)$ | $(1, 0)$ | | NO | NO | NO | SI | NO |
| $(1,\ 0)$ | $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -2\,x_1\,x_2 - 9\ x_1 + x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(1, -2)$ , $(-2, 4)$ , $(1, 4)$ e $(-4, -1)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(1, 2)$ | $(1, 0)$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $(0, 1)$ | 2 | 2 | $(1, 4)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 17/01/17**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ -8\ y_1 - 6\ y_2 + 4\ y_3 + 12\ y_4 + 4\ y_5 + 6\ y_6 + 10\ y_7 \\ -2\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 2\ y_5 - y_6 = -3 \\ y_1 + 2\ y_2 - y_4 - y_5 - y_6 - y_7 = -4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x =$ | | |
| $\{2, 3\}$ | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {1,7} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una ditta deve spedire $d_j$ automobili in 3 città diverse (dette 1-2-3) attingendo a tre depositi dislocati nel territorio nazionale (detti A-B-C) che hanno $s_i$ automobili ciascuno e minimizzando i suoi costi di trasporto. Non è possibile tecnicamente spedire frigoriferi dal deposito B alla località 3.

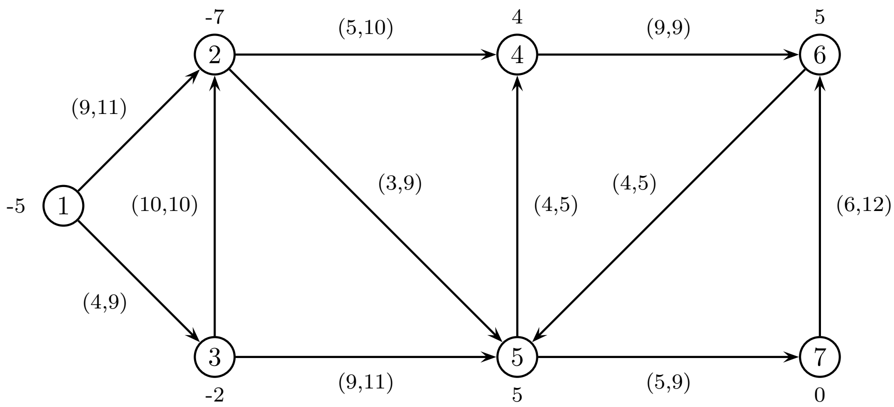
| | 1 | 2 | 3 | $s_i$ |
|---|---|---|---|---|
| A | 20 | 21 | 31 | 90 |
| B | 23 | 19 | | 55 |
| C | 34 | 27 | 24 | 50 |
| $d_j$ | 80 | 55 | 75 | |

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                          b=

Aeq=                                        beq=

lb=                                         ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

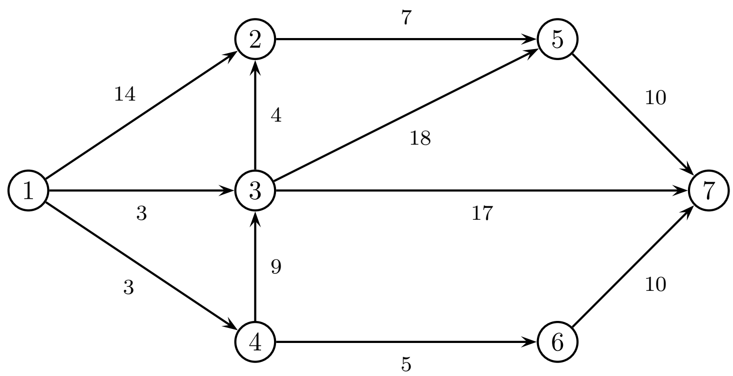


| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (2,4) (2,5) (3,2) (4,6) (5,7) | (1,2) | $x =$ | | |
| (1,2) (2,5) (3,2) (5,4) (5,7) (7,6) | (6,5) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

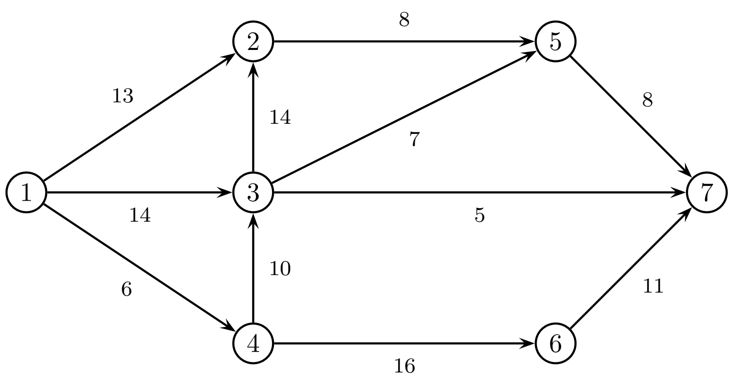
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (3,2) (3,5) (4,6) (6,5) (7,6) | |
| Archi di U | (2,4) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 5\ x_1 + 10\ x_2 \\ 16\ x_1 + 12\ x_2 \geq 57 \\ 9\ x_1 + 17\ x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 551 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 5 | 7 | 16 | 8 | 18 | 10 | 13 |
| Volumi | 335 | 128 | 298 | 95 | 254 | 146 | 151 |

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + x_2^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1 + x_2^2 + 1 \leq 0, \quad x_1 - 4 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(3,\ 0)$ | | | | | | | |
| $(4,\ 0)$ | | | | | | | |
| $\left(\frac{5}{2},\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(4,\ \sqrt{3}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(4,\ -\sqrt{3}\right)$ | | | | | | | |
| $(1,\ 0)$ | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 4\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + 4\,x_2^2 + 9\,x_1 - 7\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(-2, -4)$ , $(-2, -1)$ , $(5, 0)$ e $(5, -2)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(5, -\frac{2}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ -8\ y_1 - 6\ y_2 + 4\ y_3 + 12\ y_4 + 4\ y_5 + 6\ y_6 + 10\ y_7 \\ -2\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 2\ y_5 - y_6 = -3 \\ y_1 + 2\ y_2 - y_4 - y_5 - y_6 - y_7 = -4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (2,\ -4)$ | SI | NO |
| $\{2,\ 3\}$ | $y = (0,\ -2,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

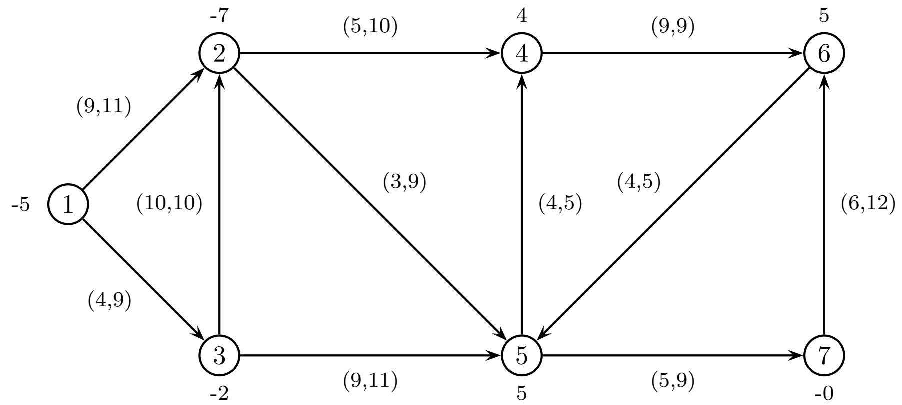
| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{1,\ 7\}$ | $(-1,\ -10)$ | $\left(\frac{3}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{11}{2}\right)$ | 5 | $\frac{3}{2},\ \frac{11}{4}$ | 1 |
| 2° iterazione | $\{5,\ 7\}$ | $(3,\ -10)$ | $\left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{3}{2},\ 0,\ \frac{5}{2}\right)$ | 4 | $\frac{5}{3}$ | 7 |

**Esercizio 3.**

COMANDI DI MATLAB

```
c=[20;21;31;23;19;1000;34;27;24]

A=[1 1 1 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 1 1 1 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 1 1 1 ]          b=[ 90 ; 55 ; 50]

Aeq=[1 0 0 1 0 0 1 0 0;0 1 0 0 1 0 0 1 0; 0 0 1 0 0 1 0 0 1]          beq=[80; 55; 75]

lb=[0 ; 0 ; 0; 0; 0 ; 0; 0; 0; 0]                                     ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

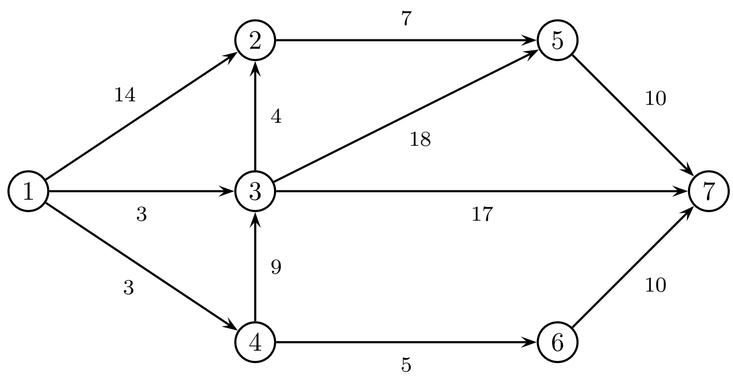



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (2,4) (2,5) (3,2) (4,6) (5,7) | (1,2) | $x = (11,\ -6,\ 9,\ 5,\ -4,\ 0,\ 5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ | NO | SI |
| (1,2) (2,5) (3,2) (5,4) (5,7) (7,6) | (6,5) | $\pi = (0,\ 9,\ -1,\ 16,\ 12,\ 23,\ 17)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

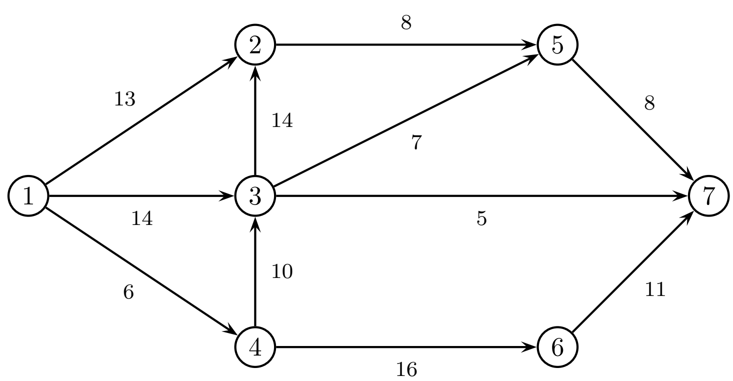
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (3,2) (3,5) (4,6) (6,5) (7,6) | (1,2) (1,3) (3,5) (4,6) (6,5) (7,6) |
| Archi di U | (2,4) | (2,4) |
| $x$ | (0, 5, 10, 0, 3, 4, 6, 0, 0, 1, 0) | (3, 2, 10, 0, 0, 4, 6, 0, 0, 1, 0) |
| $\pi$ | (0, 14, 4, 0, 13, 9, 3) | (0, 9, 4, 0, 13, 9, 3) |
| Arco entrante | (1,2) | (2,4) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 11 , 3 | 7 , 1 |
| Arco uscente | (3,2) | (6,5) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 4 | | 2 | | 6 | | 5 | | 7 | |
| nodo 2 | 14 | 1 | 7 | 3 | 7 | 3 | 7 | 3 | 7 | 3 | 7 | 3 | 7 | 3 |
| nodo 3 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| nodo 4 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 21 | 3 | 21 | 3 | 14 | 2 | 14 | 2 | 14 | 2 | 14 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 8 | 4 | 8 | 4 | 8 | 4 | 8 | 4 | 8 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | 20 | 3 | 20 | 3 | 20 | 3 | 18 | 6 | 18 | 6 | 18 | 6 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 4, 5, 7 | | 2, 5, 6, 7 | | 5, 6, 7 | | 5, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 5 | (0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0) | 5 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 8 | (8, 5, 0, 8, 0, 0, 5, 0, 0, 8, 0) | 13 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 6 | (8, 5, 6, 8, 0, 0, 5, 0, 6, 8, 6) | 19 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 5\ x_1 + 10\ x_2 \\ 16\ x_1 + 12\ x_2 \geq 57 \\ 9\ x_1 + 17\ x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{56}{9}, 0\right)$ $\qquad v_I(P) = 32$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (7, 0)$ $\qquad v_S(P) = 35$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 4\,x_1 + 8\,x_2 \geq 25$
$r = 3$ $\qquad 2\,x_1 + 4\,x_2 \geq 13$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 551 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 5 | 7 | 16 | 8 | 18 | 10 | 13 |
| Volumi | 335 | 128 | 298 | 95 | 254 | 146 | 151 |

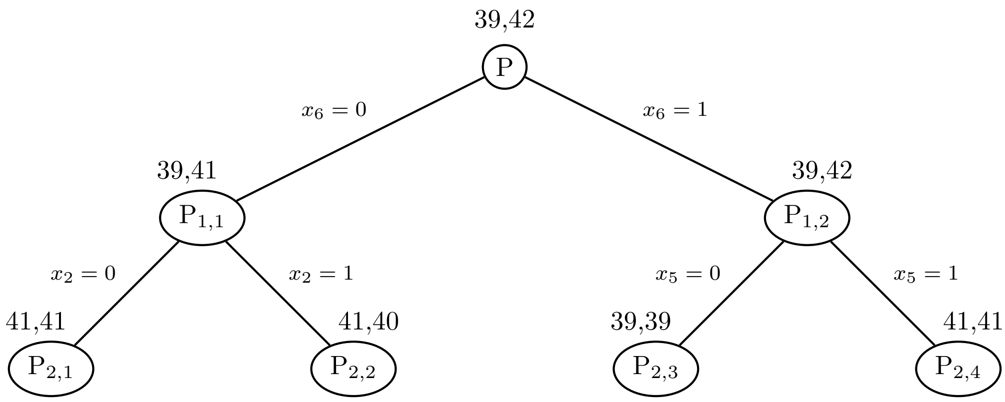
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1)$ $\qquad v_I(P) = 39$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, 0, 0, 1, 1, \frac{51}{146}, 1\right)$ $\qquad v_S(P) = 42$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima = $(0,0,0,0,1,1,1)$ valore ottimo = 41

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1,x_2) = (x_1-3)^2 + x_2^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; -x_1 + x_2^2 + 1 \le 0, \quad x_1 - 4 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(3,\ 0)$ | $(0,0)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(4,\ 0)$ | $(0,-2)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(\frac{5}{2},\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}\right)$ | $(-1,0)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}\right)$ | $(-1,0)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(4,\ \sqrt{3}\right)$ | $(-1,-3)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |
| $\left(4,\ -\sqrt{3}\right)$ | $(-1,-3)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |
| $(1,\ 0)$ | $(-4,0)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 4\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + 4\,x_2^2 + 9\,x_1 - 7\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(-2,-4)$ , $(-2,-1)$ , $(5,0)$ e $(5,-2)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(5,-\frac{2}{3}\right)$ | $(1,0)$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\left(0, \frac{67}{3}\right)$ | $\frac{2}{67}$ | $\frac{2}{67}$ | $(5,0)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 17/02/14**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 8\,x_1 - 9\,x_2 \\ -2\,x_1 + x_2 \le 8 \\ -x_1 - x_2 \le 4 \\ -x_1 + 3\,x_2 \le 9 \\ 4\,x_1 + x_2 \le 3 \\ 3\,x_1 - x_2 \le 4 \\ 2\,x_1 + 2\,x_2 \le 13 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x =$ | | |
| $\{5, 6\}$ | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {3,4} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una ditta produce tre tipi di piastrelle (P1, P2, P3) utilizzando tre diversi materiali (M1, M2, M3). La seguente tabella riporta le quantità (in Kg) di ciascuna materia prima richiesta per produrre una piastrella e la quantità massima (in Kg) di ciascuna materia prima che si può acquistare mensilmente:

| | M1 | M2 | M3 |
|---|---|---|---|
| P1 | 0.3 | 0.7 | 0.4 |
| P2 | 0.4 | 0.2 | 0.3 |
| P3 | 0.3 | 0.1 | 0.2 |
| quantità massima | 3000 | 1800 | 4000 |

Nella tabella sono riportate le ore necessarie per la produzione, i prezzi di vendita e le quantità minime da produrre:

| | P1 | P2 | P3 |
|---|---|---|---|
| ore lavorative | 1 | 0.8 | 0.5 |
| prezzo di vendita | 26 | 20 | 14 |
| quantità minime | 1100 | 2000 | 1200 |

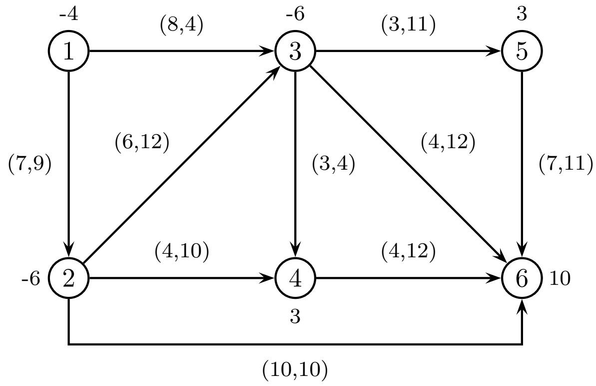
Determinare la produzione mensile in modo da massimizzare il ricavo, tenendo conto che il numero di ore impiegate per la lavorazione della piastrella P1 non deve superare il 35% del totale delle ore necessarie per la lavorazione di tutte le piastrelle fabbricate.

modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                                       b=

Aeq=                                                     beq=

lb=                                                      ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

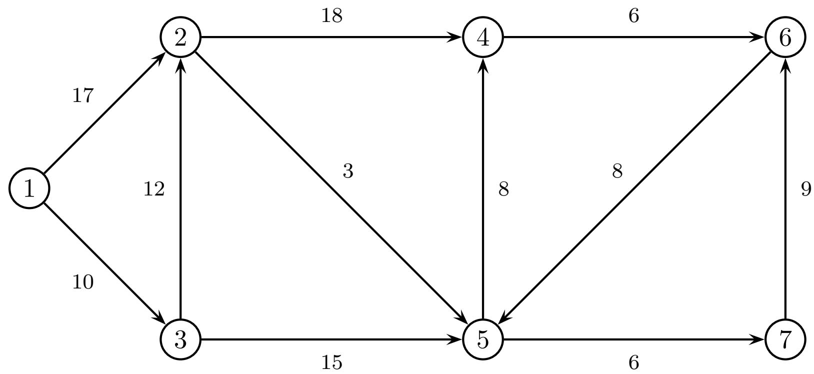



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (2,4) (3,4) (4,6) (5,6) | (1,2) | $x =$ | | |
| (1,2) (2,4) (3,4) (4,6) (5,6) | (2,3) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

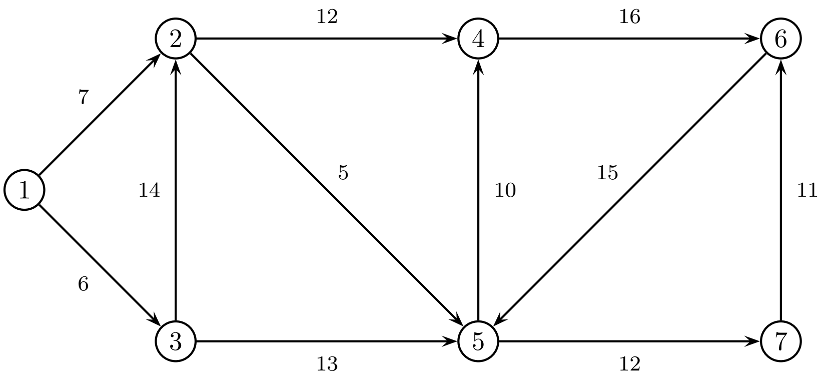
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (3,6) | |
| Archi di U | (2,6) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 14\ x_1 + 5\ x_2 \\ 17\ x_1 + 13\ x_2 \geq 41 \\ 8\ x_1 + 19\ x_2 \geq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 54 | 6 | 57 | 21 |
| **2** | | 13 | 58 | 55 |
| **3** | | | 14 | 29 |
| **4** | | | | 22 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{12}$, $x_{13}$, $x_{14}$.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 16 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -4\, x_1^2 - 4\, x_2^2 - 5\, x_1 - 8\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(-5, 3)$ , $(2, 1)$ , $(1, -4)$ e $(-4, -4)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$ | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 8\ x_1 - 9\ x_2 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 9 \\ 4\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ 2\ x_1 + 2\ x_2 \leq 13 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (-4,\ 0)$ | SI | NO |
| $\{5,\ 6\}$ | $y = \left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{17}{4},\ -\frac{19}{8}\right)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{3,\ 4\}$ | $(0,\ 3)$ | $\left(0,\ 0,\ -\frac{44}{13},\ \frac{15}{13},\ 0,\ 0\right)$ | 3 | $\frac{91}{3},\ 13$ | 5 |
| 2° iterazione | $\{4,\ 5\}$ | $(1,\ -1)$ | $\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{19}{7},\ \frac{44}{7},\ 0\right)$ | 4 | 7 | 2 |

**Esercizio 3.**

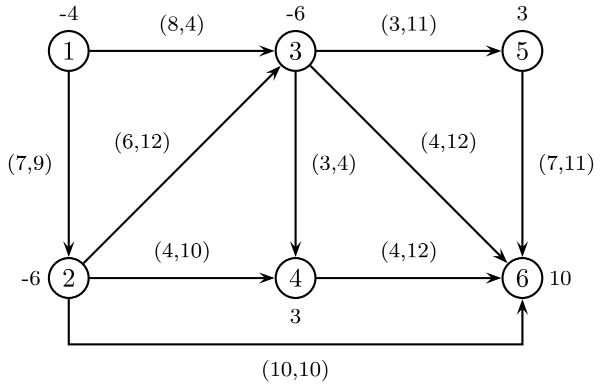
variabili decisionali: $x_i$ = numero di piastrelle di tipo $i$ prodotte, con $i = 1, 2, 3$.

modello:
$$\begin{cases} \max\ 26\ x_1 + 20\ x_2 + 14\ x_3 \\ 0.3\ x_1 + 0.4\ x_2 + 0.3\ x_3 \leq 3000 \\ 0.7\ x_1 + 0.2\ x_2 + 0.1\ x_3 \leq 1800 \\ 0.4\ x_1 + 0.3\ x_2 + 0.2\ x_3 \leq 4000 \\ x_1 \leq 0.3\ (x_1 + 0.8\ x_2 + 0.5\ x_3) \\ x_1 \geq 1100 \\ x_2 \geq 2000 \\ x_3 \geq 1200 \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

```
c=-[24;20;12]

A=[0.3 0.4 0.3;0.7 0.2 0.1;0.4 0.3 0.2; 0.65 -0.28 -0.175]      b=[3000;1800;4000;0]

Aeq=[]                                                          beq=[]

lb=[1100; 2000; 1200]                                           ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

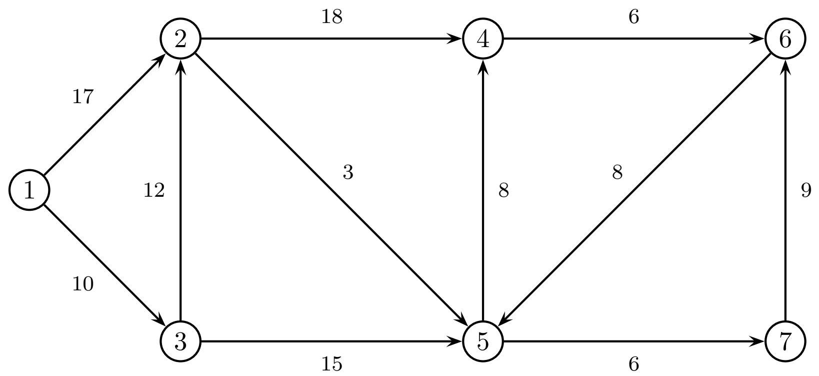



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (2,4) (3,4) (4,6) (5,6) | (1,2) | $x = (9,\ -5,\ 0,\ 15,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 13,\ -3)$ | NO | NO |
| (1,2) (2,4) (3,4) (4,6) (5,6) | (2,3) | $\pi = (0,\ 7,\ 8,\ 11,\ 8,\ 15)$ | NO | SI |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

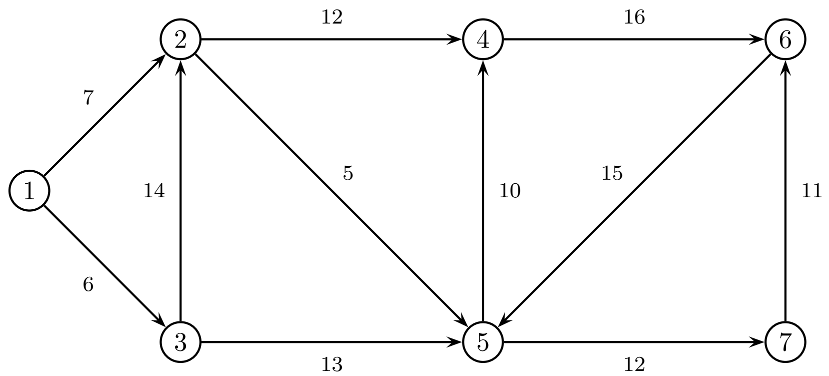
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (3,6) | (1,3) (2,6) (3,4) (3,5) (3,6) |
| Archi di U | (2,6) | |
| $x$ | (4, 0, 0, 0, 10, 3, 3, 0, 0, 0) | (0, 4, 0, 0, 6, 3, 3, 4, 0, 0) |
| $\pi$ | (0, 7, 8, 11, 11, 12) | (0, 2, 8, 11, 11, 12) |
| Arco entrante | (2,6) | (2,4) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 4 , 4 | 8 , 3 |
| Arco uscente | (1,2) | (3,4) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 2 | | 5 | | 7 | | 4 | | 6 | |
| nodo 2 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 |
| nodo 3 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 |
| nodo 4 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 35 | 2 | 28 | 5 | 28 | 5 | 28 | 5 | 28 | 5 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 25 | 3 | 20 | 2 | 20 | 2 | 20 | 2 | 20 | 2 | 20 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 35 | 7 | 34 | 4 | 34 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 26 | 5 | 26 | 5 | 26 | 5 | 26 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3 | | 2, 5 | | 4, 5 | | 4, 7 | | 4, 6 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 2 - 5 - 7 | 5 | (5, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0) | 5 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 6 | (5, 6, 0, 5, 0, 6, 0, 0, 11, 0, 0) | 11 |
| 1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7 | 1 | (6, 6, 1, 5, 0, 6, 1, 0, 12, 1, 0) | 12 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad N_t = \{7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 14\ x_1 + 5\ x_2 \\ 17\ x_1 + 13\ x_2 \geq 41 \\ 8\ x_1 + 19\ x_2 \geq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{41}{13}\right)$ $\quad v_I(P) = 16$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 4)$ $\quad v_S(P) = 20$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\quad 8\,x_1 + 6\,x_2 \geq 19$
$r = 4$ $\quad 10\,x_1 + 7\,x_2 \geq 23$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 54 | 6 | 57 | 21 |
| **2** | | 13 | 58 | 55 |
| **3** | | | 14 | 29 |
| **4** | | | | 22 |

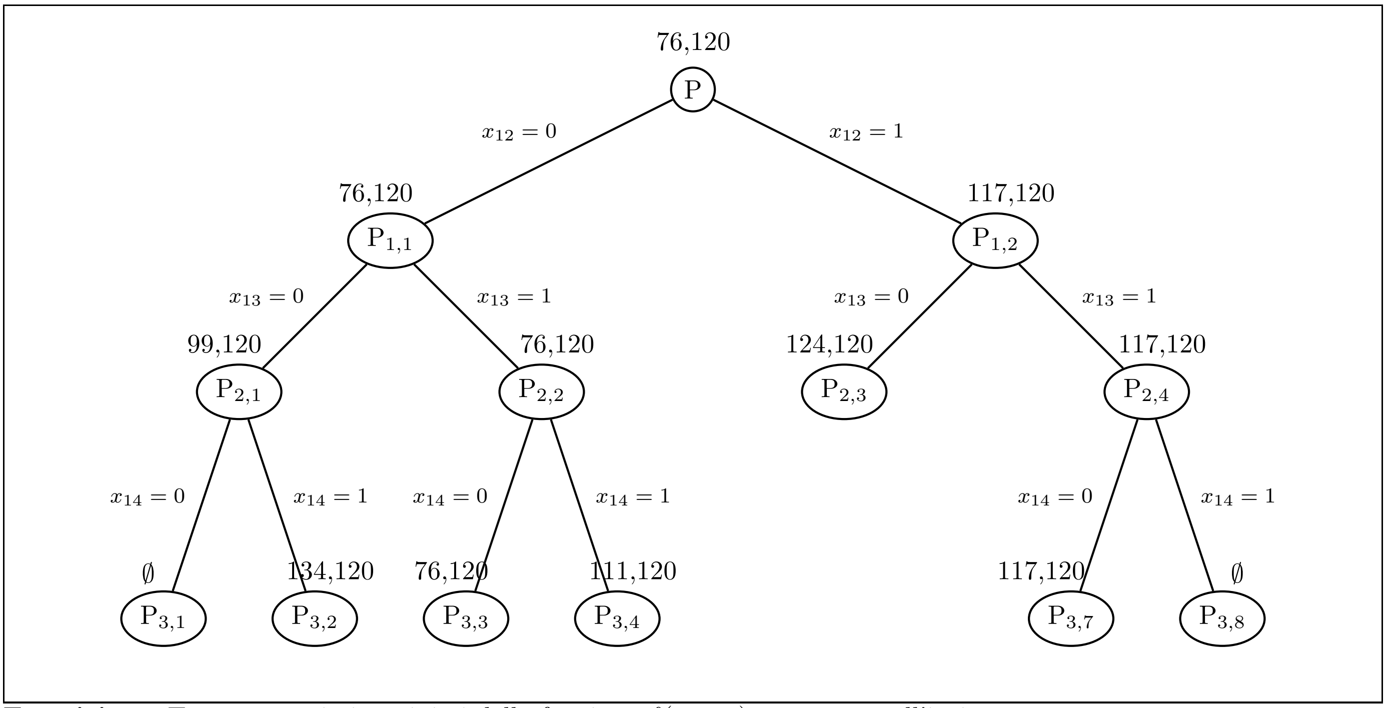
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: ( 1 , 3 ) ( 1 , 5 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 4 , 5 ) $\quad v_I(P) = 76$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $3 - 1 - 5 - 4 - 2$ $\quad v_S(P) = 120$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{12}$, $x_{13}$, $x_{14}$.




**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 16 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $\left(-2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}\right)$ | $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{8}\right)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $\left(-\frac{\sqrt{2}\sqrt{15}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{17}}{2}\right)$ | *cerchio* $\cap$ *iperbole* | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{15}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}\sqrt{17}}{2}\right)$ | *cerchio* $\cap$ *iperbole* | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(-\frac{\sqrt{2}\sqrt{15}}{2},\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{17}}{2}\right)$ | *cerchio* $\cap$ *iperbole* | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{15}}{2},\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{17}}{2}\right)$ | *cerchio* $\cap$ *iperbole* | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$ | $\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -4\, x_1^2 - 4\, x_2^2 - 5\, x_1 - 8\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(-5, 3)$ , $(2, 1)$ , $(1, -4)$ e $(-4, -4)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$ | $\frac{49}{3}\, x_1 - \frac{80}{3}\, x_2$ | (-5 ,3) | $\left(-\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$ | 1 | $(-5, 3)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 17/02/14**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -9\ x_1 + x_2 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 9 \\ 4\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ 2\ x_1 + 2\ x_2 \leq 13 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {5, 6} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {4,5} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una ditta produce tre tipi di piastrelle (P1, P2, P3) utilizzando tre diversi materiali (M1, M2, M3). La seguente tabella riporta le quantità (in Kg) di ciascuna materia prima richiesta per produrre una piastrella e la quantità massima (in Kg) di ciascuna materia prima che si può acquistare mensilmente:

| | M1 | M2 | M3 |
|---|---|---|---|
| P1 | 0.2 | 0.8 | 0.4 |
| P2 | 0.4 | 0.2 | 0.3 |
| P3 | 0.3 | 0.1 | 0.2 |
| quantità massima | 3000 | 1500 | 4000 |

Nella tabella sono riportate le ore necessarie per la produzione, i prezzi di vendita e le quantità minime da produrre:

| | P1 | P2 | P3 |
|---|---|---|---|
| ore lavorative | 1 | 0.8 | 0.5 |
| prezzo di vendita | 24 | 20 | 12 |
| quantità minime | 1000 | 2000 | 1200 |

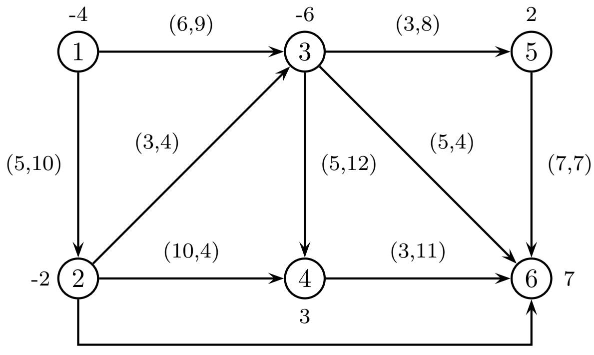
Determinare la produzione mensile in modo da massimizzare il ricavo, tenendo conto che il numero di ore impiegate per la lavorazione della piastrella P1 non deve superare il 30% del totale delle ore necessarie per la lavorazione di tutte le piastrelle fabbricate.

modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                                                  b=

Aeq=                                                                beq=

lb=                                                                 ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

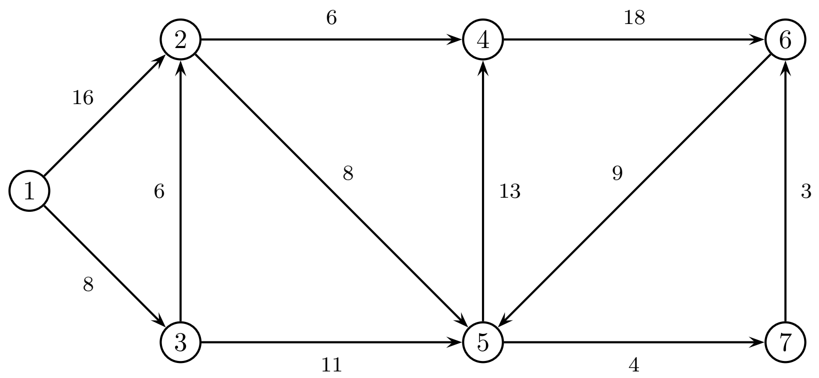



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (2,4) (2,6) (3,5) (5,6) | (2,3) | $x =$ | | |
| (1,2) (2,3) (3,5) (3,6) (4,6) | (1,3) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

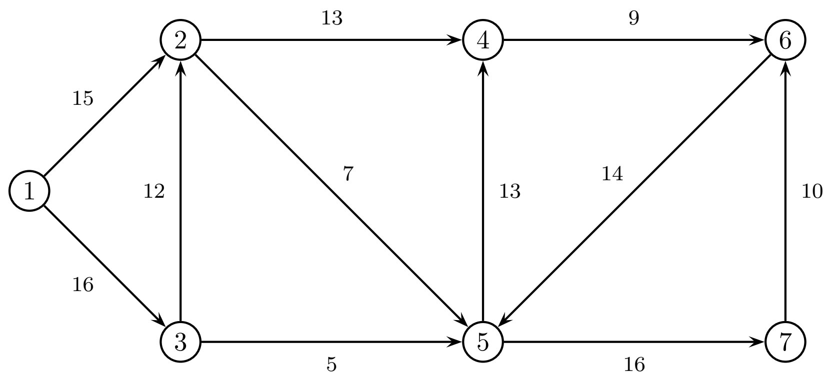
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,3) (2,4) (3,6) (5,6) | |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 10\ x_1 + 14\ x_2 \\ 13\ x_1 + 12\ x_2 \geq 69 \\ 7\ x_1 + 12\ x_2 \geq 65 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

| | |
|---|---|
| sol. ottima del rilassamento = | $v_I(P) =$ |

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

| | |
|---|---|
| sol. ammissibile = | $v_S(P) =$ |

c) Calcolare un taglio di Gomory.

| | |
|---|---|
| $r =$ | taglio: |

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 8 | 56 | 57 | 21 |
| **2** | | 13 | 58 | 55 |
| **3** | | | 14 | 9 |
| **4** | | | | 22 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

| | |
|---|---|
| 5–albero: | $v_I(P) =$ |

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

| | |
|---|---|
| ciclo: | $v_S(P) =$ |

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{12}$, $x_{13}$, $x_{14}$.

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -9\ x_1 + x_2 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 9 \\ 4\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ 2\ x_1 + 2\ x_2 \leq 13 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (-4,\ 0)$ | SI | NO |
| $\{5,\ 6\}$ | $y = \left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -\frac{5}{2},\ -\frac{3}{4}\right)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{4,\ 5\}$ | $(1,\ -1)$ | $\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{6}{7},\ -\frac{13}{7},\ 0\right)$ | 4 | 7 | 2 |
| 2° iterazione | $\{2,\ 5\}$ | $(0,\ -4)$ | $\left(0,\ \frac{3}{2},\ 0,\ 0,\ -\frac{5}{2},\ 0\right)$ | 5 | $16,\ 21$ | 1 |

**Esercizio 3.**

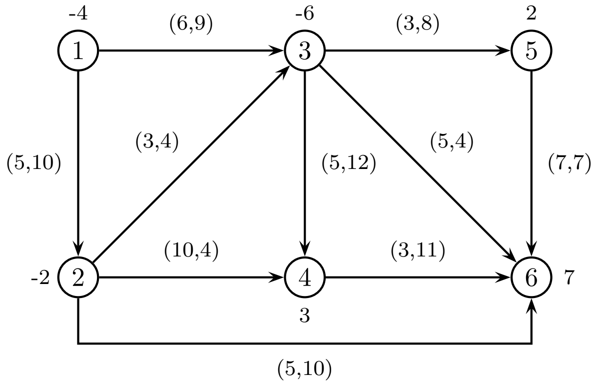
variabili decisionali: $x_i$ = numero di piastrelle di tipo $i$ prodotte, con $i = 1, 2, 3$.

modello:
$$\begin{cases} \max\ 24\ x_1 + 20\ x_2 + 12\ x_3 \\ 0.2\ x_1 + 0.4\ x_2 + 0.3\ x_3 \leq 3000 \\ 0.8\ x_1 + 0.2\ x_2 + 0.1\ x_3 \leq 1500 \\ 0.4\ x_1 + 0.3\ x_2 + 0.2\ x_3 \leq 4000 \\ x_1 \leq 0.3\ (x_1 + 0.8\ x_2 + 0.5\ x_3) \\ x_A \geq 1000 \\ x_B \geq 2000 \\ x_C \geq 1200 \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

```
c=-[24;20;12]

A=[0.2 0.4 0.3;0.8 0.2 0.1;0.4 0.3 0.2; 0.7 -0.24 -0.15]      b=[3000;1500;4000;0]

Aeq=[]                                                         beq=[]

lb=[1000; 2000; 1200]                                          ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

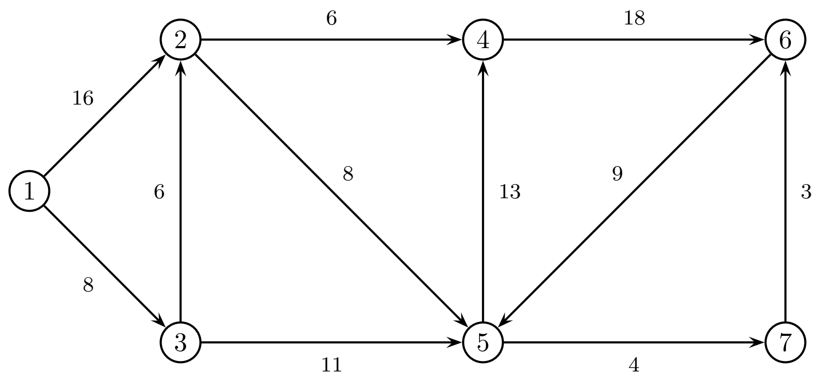



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (2,4) (2,6) (3,5) (5,6) | (2,3) | $x = (4,\ 0,\ 4,\ 3,\ -1,\ 0,\ 10,\ 0,\ 0,\ 8)$ | NO | NO |
| (1,2) (2,3) (3,5) (3,6) (4,6) | (1,3) | $\pi = (0,\ 5,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

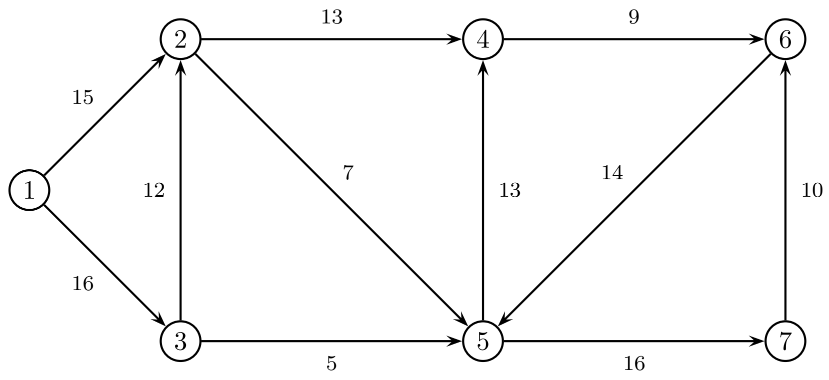
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,3) (2,4) (3,6) (5,6) | (1,2) (1,3) (2,4) (2,6) (5,6) |
| Archi di U | (3,5) | (3,5) |
| $x$ | (1, 3, 0, 3, 0, 0, 8, 1, 0, 6) | (2, 2, 0, 3, 1, 0, 8, 0, 0, 6) |
| $\pi$ | (0, 5, 6, 15, 4, 11) | (0, 5, 6, 15, 3, 10) |
| Arco entrante | (2,6) | (3,4) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 9 , 1 | 7 , 2 |
| Arco uscente | (3,6) | (1,2) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 2 | | 5 | | 4 | | 7 | | 6 | |
| nodo 2 | 16 | 1 | 14 | 3 | 14 | 3 | 14 | 3 | 14 | 3 | 14 | 3 | 14 | 3 |
| nodo 3 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 |
| nodo 4 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 20 | 2 | 20 | 2 | 20 | 2 | 20 | 2 | 20 | 2 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 19 | 3 | 19 | 3 | 19 | 3 | 19 | 3 | 19 | 3 | 19 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 38 | 4 | 26 | 7 | 26 | 7 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 23 | 5 | 23 | 5 | 23 | 5 | 23 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3 | | 2, 5 | | 4, 5 | | 4, 7 | | 6, 7 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 2 - 5 - 7 | 7 | (7, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0) | 7 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 5 | (7, 5, 0, 7, 0, 5, 0, 0, 12, 0, 0) | 12 |
| 1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7 | 4 | (11, 5, 4, 7, 0, 5, 4, 0, 16, 4, 0) | 16 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad N_t = \{7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 10\ x_1 + 14\ x_2 \\ 13\ x_1 + 12\ x_2 \geq 69 \\ 7\ x_1 + 12\ x_2 \geq 65 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{2}{3}, \frac{181}{36}\right)$ $\qquad v_I(P) = 78$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (1, 6)$ $\qquad v_S(P) = 94$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 4\,x_1 + 4\,x_2 \geq 23$
$r = 2$ $\qquad 7\,x_1 + 11\,x_2 \geq 60$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 8 | 56 | 57 | 21 |
| **2** | | 13 | 58 | 55 |
| **3** | | | 14 | 9 |
| **4** | | | | 22 |

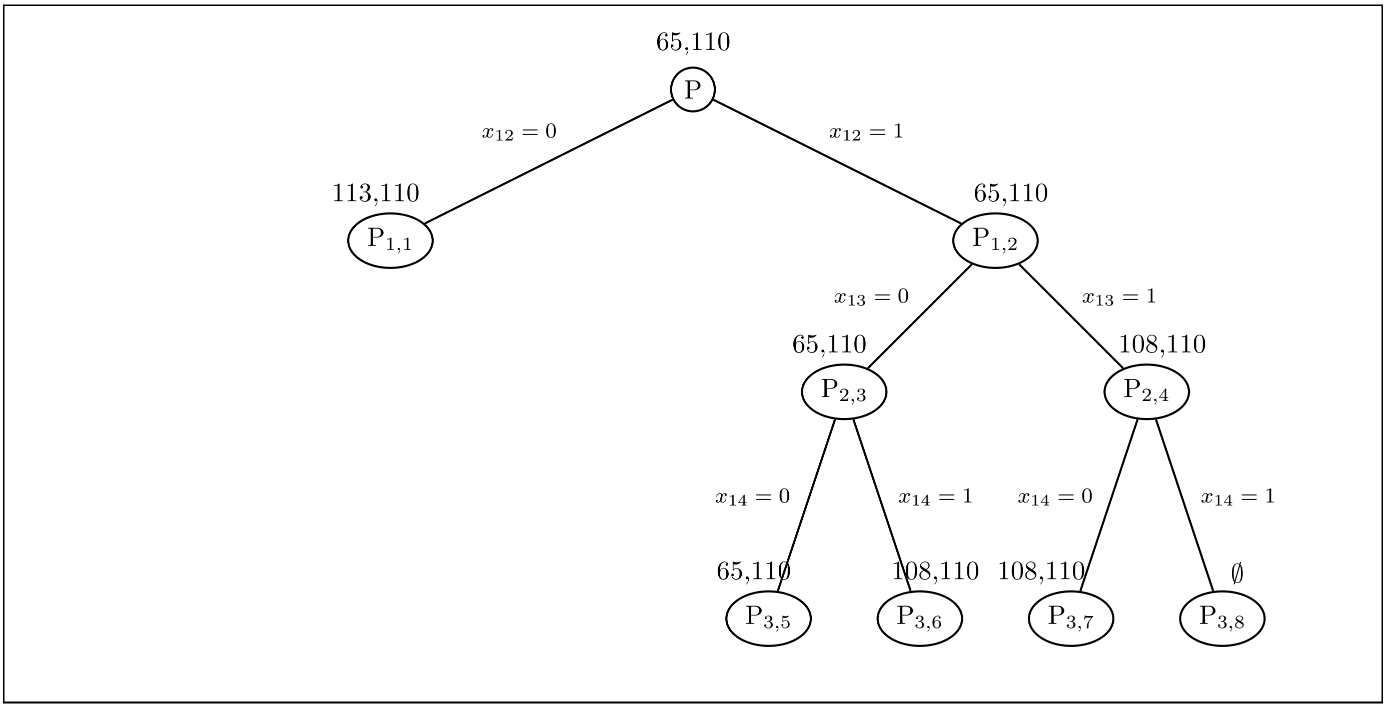
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: ( 1 , 2 ) ( 1 , 5 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) $\qquad v_I(P) = 65$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: $4 - 3 - 5 - 1 - 2$ $\qquad v_S(P) = 110$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{12}$, $x_{13}$, $x_{14}$.


65,110
P
$x_{12} = 0$
$x_{12} = 1$
113,110
$P_{1,1}$
65,110
$P_{1,2}$
$x_{13} = 0$
$x_{13} = 1$
65,110
$P_{2,3}$
108,110
$P_{2,4}$
$x_{14} = 0$
$x_{14} = 1$
$x_{14} = 0$
$x_{14} = 1$
65,110
$P_{3,5}$
108,110
$P_{3,6}$
108,110
$P_{3,7}$
$\emptyset$
$P_{3,8}$

**Esame di Ricerca Operativa del 18/09/18**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema:

$$\begin{cases} \min\ 17\ y_1 + 3\ y_2 + 28\ y_3 + 16\ y_4 + 3\ y_5 + 5\ y_6 \\ -6\ y_1 - 2\ y_2 + 7\ y_3 + 4\ y_4 - 2\ y_5 - 2\ y_6 = 2 \\ 10\ y_1 + 2\ y_2 + 2\ y_3 - 3\ y_4 - 4\ y_5 + 3\ y_6 = -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| | Base | $x$ | degenere | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| passo 1 | {2,4} | | | | | | |
| passo 2 | | | | | | | |

**Esercizio 2.** Un'azienda produce tre tipi di prodotti, A, B e C, utilizzando tra le diverse materie prime anche l'alluminio. Di quest'ultima materia prima, per il prossimo mese sono disponibili dal fornitore 400 kg. Un chilogrammo di alluminio costa all'azienda 7 euro. La seguente tabella mostra i kg di alluminio richiesti per produrre un kg di A, B e C, i costi di produzione (in euro per kg di prodotto) al netto delle materie prime, e i ricavi (in euro per kg di prodotto) di vendita per ognuno dei prodotti A, B e C:

| prodotti | alluminio (kg) | costo (euro/kg) | ricavo (euro/kg) |
|---|---|---|---|
| A | 0.3 | 12 | 26 |
| B | 0.6 | 6 | 31 |
| C | 0.9 | 7 | 39 |

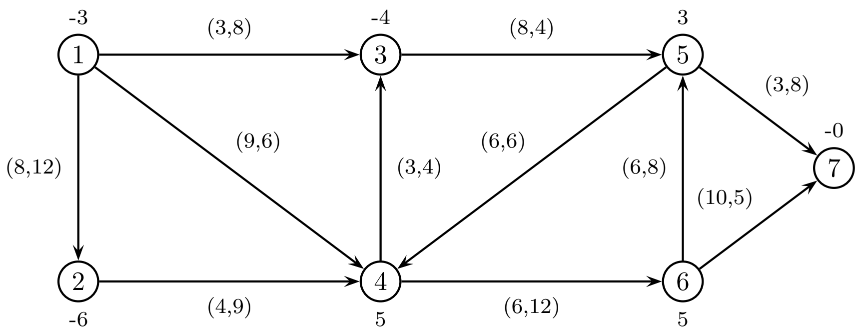
Determinare la produzione mensile che massimizza i profitti sapendo che per produrre A non si deve utilizzare più di 1/3 dell'alluminio utilizzato in totale.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                                                   intcon=

A=                                                   b=

Aeq=                                                 beq=

lb=                                                  ub=
```

**Esercizio 3.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).




| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (2,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,5) | |
| Archi di U | (5,4) | |
| $x$ | | |
| degenere | | |
| $\pi$ | | |
| degenere | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 14\ x_1 + 5\ x_2 \\ 17\ x_1 + 12\ x_2 \leq 66 \\ 7\ x_1 + 19\ x_2 \leq 45 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

| | |
|---|---|
| sol. ottima del rilassamento = | $v_S(P) =$ |

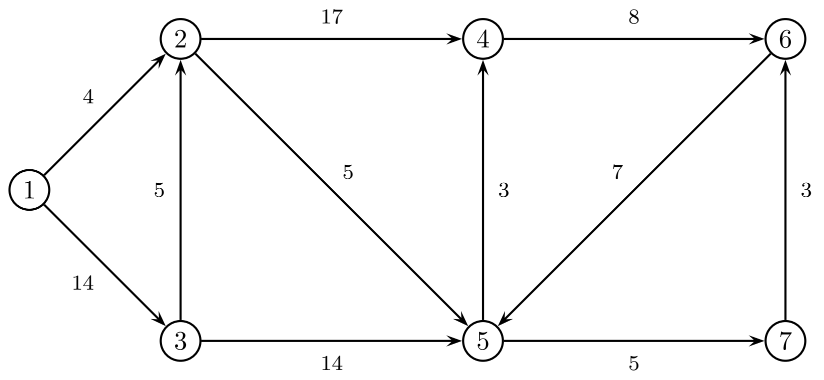
b) Calcolare una valutazione inferiore.

| | |
|---|---|
| sol. ammissibile = | $v_I(P) =$ |

c) Calcolare un taglio di Gomory.

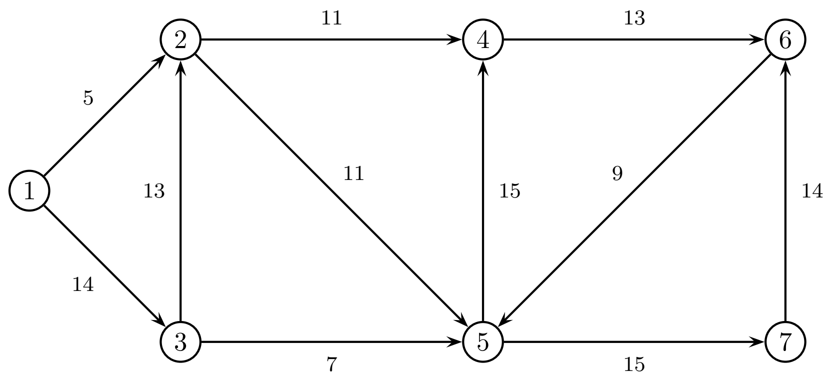
| | |
|---|---|
| $r =$ | taglio: |

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 6.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 30 | 25 | 29 | 47 |
| **2** | | 18 | 94 | 61 |
| **3** | | | 54 | 26 |
| **4** | | | | 20 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{23}$, $x_{14}$, $x_{34}$ dicendo se l'algoritmo si é concluso o dovrebbe continuare.

**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ 9 - x_1^2 - x_2^2 \leq 0, \quad x_1 - x_2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(\frac{6\sqrt{13}}{13}, \frac{9\sqrt{13}}{13}\right)$ | | | | | | | |

**Esercizio 8.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -2\,x_1^2 - 12\,x_1\,x_2 - 6\,x_2^2 + 5\,x_1 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(-3, -1)$ , $(-4, 2)$ , $(1, -2)$ e $(5, 2)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{10}{3}, 0\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.**

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{2,\ 4\}$ | $\left(\frac{41}{2},\ 22\right)$ | $(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$ | 1 | $\frac{1}{11},\ \frac{1}{4}$ | 2 |
| 2° iterazione | $\{1,\ 4\}$ | $\left(\frac{211}{22},\ \frac{82}{11}\right)$ | $\left(\frac{1}{11},\ 0,\ 0,\ \frac{7}{11},\ 0,\ 0\right)$ | 3 | $\frac{2}{29},\ \frac{7}{41}$ | 1 |

**Esercizio 2.**

variabili decisionali: $x_A$ = kg prodotti di A, $x_B$ = kg prodotti di B, $x_C$ = kg prodotti di C

modello:
$$\begin{cases} \max\ (26-12-2.1)\ x_A + (31-6-4.2)\ x_B + (39-7-6.3)\ x_C \\ 0.3\ x_A + 0.6\ x_B + 0.9\ x_C \le 400 \\ 0.3\ x_A \le (0.3\ x_A + 0.6\ x_B + 0.9\ x_C)/3 \\ x_A \ge 0 \\ x_B \ge 0 \\ x_C \ge 0 \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

```
c = [-11.9; -20.8; -25.7]

A = [0.3 0.6 0.9; 0.2 -0.2 -0.3]                    b=[400; 0]

Aeq=[]                                               beq=[]

lb=[0;0;0]                                           ub=[]
```

**Esercizio 3.**

| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (2,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,5) | (1,2) (1,3) (2,4) (4,6) (5,7) (6,5) |
| Archi di U | (5,4) | (3,5) (5,4) |
| $x$ | $(3,\ 0,\ 0,\ 9,\ 4,\ 0,\ 10,\ 6,\ 0,\ 5,\ 0)$ | $(3,\ 0,\ 0,\ 9,\ 4,\ 0,\ 10,\ 6,\ 0,\ 5,\ 0)$ |
| $\pi$ | $(0,\ 8,\ 16,\ 12,\ 24,\ 18,\ 27)$ | $(0,\ 8,\ 3,\ 12,\ 24,\ 18,\ 27)$ |
| Arco entrante | (1,3) | (1,4) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 0 , 3 | 6 , 3 |
| Arco uscente | (3,5) | (1,2) |

**Esercizio 4.**

$$\begin{cases} \max\ 14\ x_1 + 5\ x_2 \\ 17\ x_1 + 12\ x_2 \le 66 \\ 7\ x_1 + 19\ x_2 \le 45 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{66}{17}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 54$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

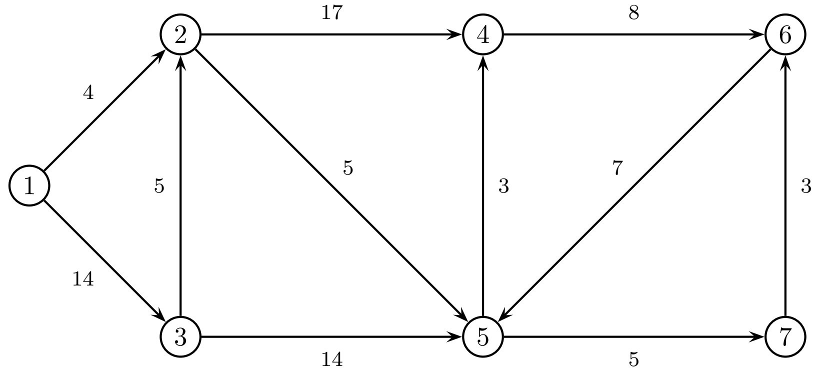
sol. ammissibile = $(3, 0)$ $\qquad v_I(P) = 42$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad x_1 \le 3$

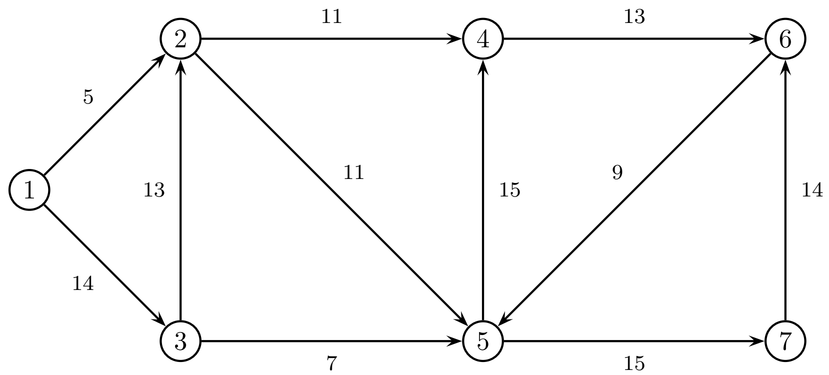
$r = 4$ $\qquad 10\,x_1 + 7\,x_2 \le 38$

**Esercizio 5.**




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 2 | | 5 | | 4 | | 3 | | 7 | | 6 | |
| nodo 2 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 |
| nodo 3 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 | 14 | 1 |
| nodo 4 | $+\infty$ | $-1$ | 21 | 2 | 12 | 5 | 12 | 5 | 12 | 5 | 12 | 5 | 12 | 5 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 9 | 2 | 9 | 2 | 9 | 2 | 9 | 2 | 9 | 2 | 9 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 20 | 4 | 20 | 4 | 17 | 7 | 17 | 7 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 14 | 5 | 14 | 5 | 14 | 5 | 14 | 5 | 14 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3 | | 3, 4, 5 | | 3, 4, 7 | | 3, 6, 7 | | 6, 7 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 2 - 5 - 7 | 5 | (5, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0) | 5 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 7 | (5, 7, 0, 5, 0, 7, 0, 0, 12, 0, 0) | 12 |
| 1 - 3 - 2 - 5 - 7 | 3 | (5, 10, 0, 8, 3, 7, 0, 0, 15, 0, 0) | 15 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N_t = \{7\}$

**Esercizio 6.**

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 30 | 25 | 29 | 47 |
| **2** | | 18 | 94 | 61 |
| **3** | | | 54 | 26 |
| **4** | | | | 20 |

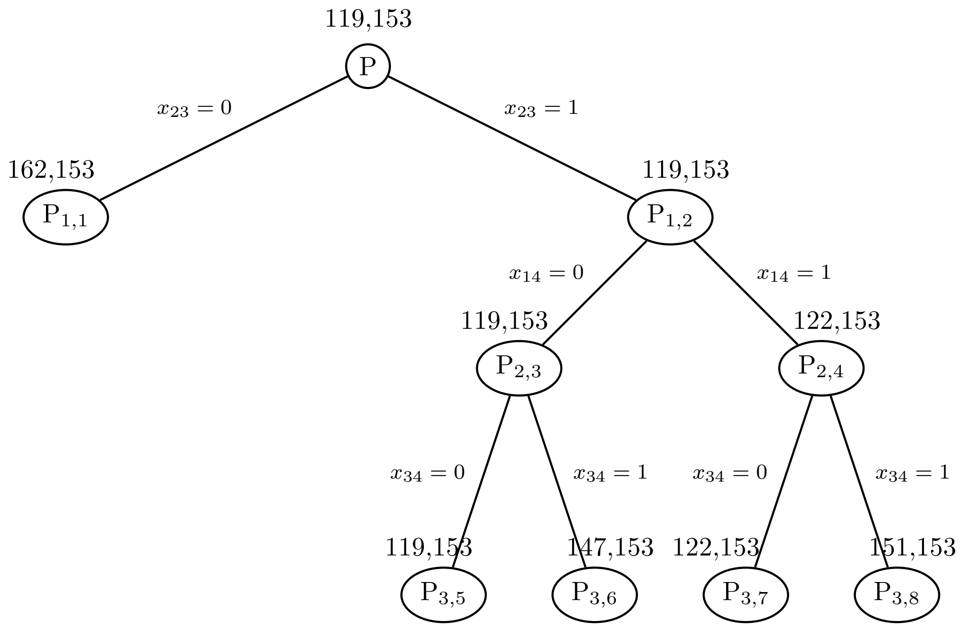
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

| | |
|---|---|
| 2–albero: ( 1 , 2 ) ( 1 , 3 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 5 ) ( 4 , 5 ) | $v_I(P) = 119$ |

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

| | |
|---|---|
| ciclo: 1 − 3 − 2 − 5 − 4 | $v_S(P) = 153$ |

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{23}$, $x_{14}$, $x_{34}$.




**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ 9 - x_1^2 - x_2^2 \le 0, \quad x_1 - x_2 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ | $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{12}, \frac{1}{2}\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ | $\left(\frac{5\sqrt{2}}{12}, \frac{1}{2}\right)$ | | NO | NO | NO | SI | NO |
| $\left(\frac{6\sqrt{13}}{13}, \frac{9\sqrt{13}}{13}\right)$ | $\left(\frac{\sqrt{13}}{6}, 0\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |

**Esercizio 8.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -2\,x_1^2 - 12\,x_1\,x_2 - 6\,x_2^2 + 5\,x_1 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(-3,-1)$ , $(-4,2)$ , $(1,-2)$ e $(5,2)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(-\frac{10}{3}, 0)$ | $(-3,-1)$ | $\begin{pmatrix} 1/10 & -3/10 \\ -3/10 & 9/10 \end{pmatrix}$ | $\left(\frac{61}{6}, -\frac{61}{2}\right)$ | $\frac{2}{61}$ | $\frac{2}{61}$ | $(-3,-1)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 20/12/13**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 9\,x_1 + 4\,x_2 \\ -3\,x_1 + 5\,x_2 \leq 12 \\ 3\,x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 - 2\,x_2 \leq 12 \\ 3\,x_1 - x_2 \leq 6 \\ -5\,x_1 - 2\,x_2 \leq 20 \\ -2\,x_1 - 3\,x_2 \leq 26 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x =$ | | |
| $\{1, 6\}$ | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {3,5} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una ditta utilizza un cargo per il trasporto di 3 prodotti P1, P2 e P3. Il cargo ha tre scompartimenti per il carico: A,B,C. La seguente tabella mostra i limiti in peso e spazio degli scompartimenti.

| | capacità di peso (tonn) | capacità di spazio ($m^3$) |
|---|---|---|
| A | 23 | 5000 |
| B | 15 | 8000 |
| C | 12 | 5000 |

La seguente tabella mostra per ogni prodotto la quantità massima (in tonn) di merce da caricare e il volume occupato.

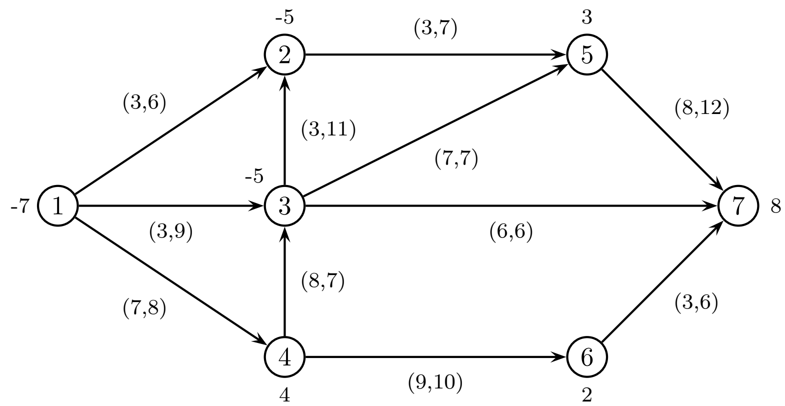
| | peso (tonn) | volume occupato ($m^3/tonn$) |
|---|---|---|
| P1 | 20 | 200 |
| P2 | 14 | 280 |
| P3 | 12 | 250 |

Sapendo che il profitto ottenuto dal trasporto di una tonnellata di merce è di 300 Euro/tonn per P1, 340 Euro/tonn per P2 e 250 Euro/tonn per P3, determinare come distribuire la merce negli scompartimenti per massimizzare il profitto.

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                   b=

Aeq=                                 beq=

lb=                                  ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

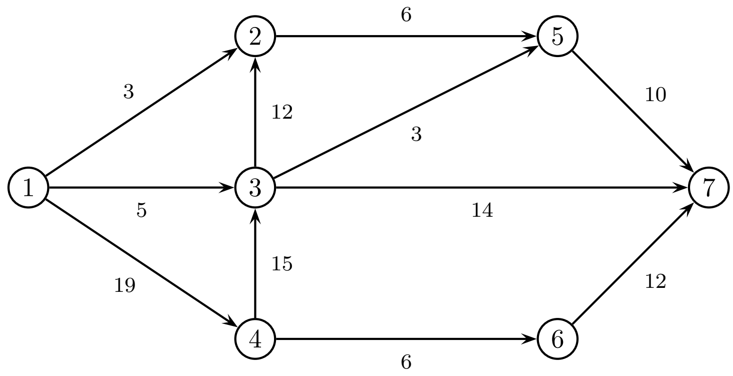



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (3,2) (3,5) (3,7) (4,3) (6,7) | (4,6) | $x =$ | | |
| (1,2) (2,5) (3,2) (4,3) (5,7) (6,7) | (1,4) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

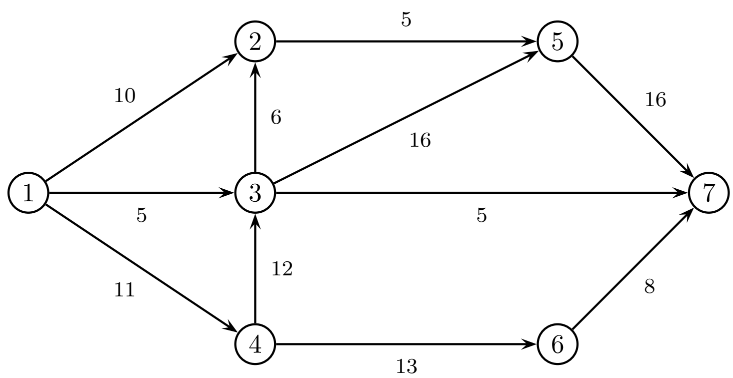
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (1,4) (3,2) (3,7) (4,6) (5,7) | |
| Archi di U | (2,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 9\ x_1 + 6\ x_2 \\ 13\ x_1 + 11\ x_2 \geq 69 \\ 9\ x_1 + 17\ x_2 \geq 49 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

| | |
|---|---|
| sol. ottima del rilassamento = | $v_I(P) =$ |

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

| | |
|---|---|
| sol. ammissibile = | $v_S(P) =$ |

c) Calcolare un taglio di Gomory.

| | |
|---|---|
| $r =$ | taglio: |

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 44 | 21 | 50 | 21 |
| **2** | | 12 | 51 | 25 |
| **3** | | | 9 | 29 |
| **4** | | | | 21 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

| | |
|---|---|
| 4–albero: | $v_I(P) =$ |

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

| | |
|---|---|
| ciclo: | $v_S(P) =$ |

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{24}$, $x_{23}$, $x_{34}$.

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 9\ x_1 + 4\ x_2 \\ -3\ x_1 + 5\ x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 - 2\ x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ -5\ x_1 - 2\ x_2 \leq 20 \\ -2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 26 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x = (1,\ 3)$ | SI | NO |
| $\{1, 6\}$ | $y = (-1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -3)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{3, 5\}$ | $(-2,\ -5)$ | $\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{4},\ 0,\ -\frac{7}{4},\ 0\right)$ | 3 | 8 | 1 |
| 2° iterazione | $\{1, 5\}$ | $(-4,\ 0)$ | $\left(\frac{2}{31},\ 0,\ 0,\ 0,\ -\frac{57}{31},\ 0\right)$ | 5 | $31,\ \frac{93}{2}$ | 2 |

**Esercizio 3.**

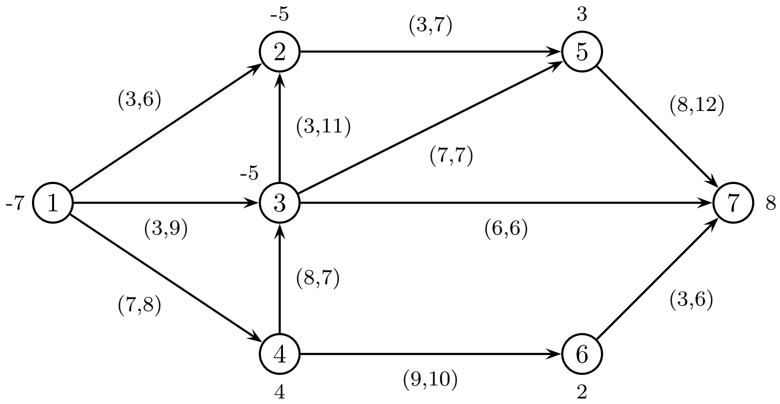
| `variabili decisionali` | `modello` |
|---|---|
| $x_{i,j}$ `= tonnellate di prodotto i immagazzinato nello scompartimento j; i= 1,2,3; j=A,B,C` | $\begin{cases} \max\ 300\ (x_{1A} + x_{1B} + x_{1C}) \\ \quad +340\ (x_{2A} + x_{2B} + x_{2C}) \\ \quad +250\ (x_{3A} + x_{3B} + x_{3C}) \\ x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 20 \\ x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 14 \\ x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 12 \\ x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \leq 23 \\ x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} \leq 15 \\ x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} \leq 12 \\ 200\ x_{1A} + 280\ x_{2A} + 250\ x_{3A} \leq 6000 \\ 200\ x_{1B} + 280\ x_{2B} + 250\ x_{3B} \leq 8500 \\ 200\ x_{1C} + 280\ x_{2C} + 250\ x_{3C} \leq 5000 \\ x_{i,j} \geq 0 \end{cases}$ |

```
c = -[ 300; 300; 300; 340; 340; 340; 250; 250; 250]
```

```
A = [ 1 1 1 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 1 1 1 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 1 1 1;
    1 0 0 1 0 0 1 0 0;
    0 1 0 0 1 0 0 1 0;
    0 0 1 0 0 1 0 0 1 ;
    200 0 0 280 0 0 250 0 0;
    0 200 0 0 280 0 0 250 0;
    0 0 200 0 0 280 0 0 250]

Aeq = []

lb = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]
```

```
b = [ 20; 14; 12; 23; 15; 12; 5000; 8000; 5000]

beq = []

ub = []
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

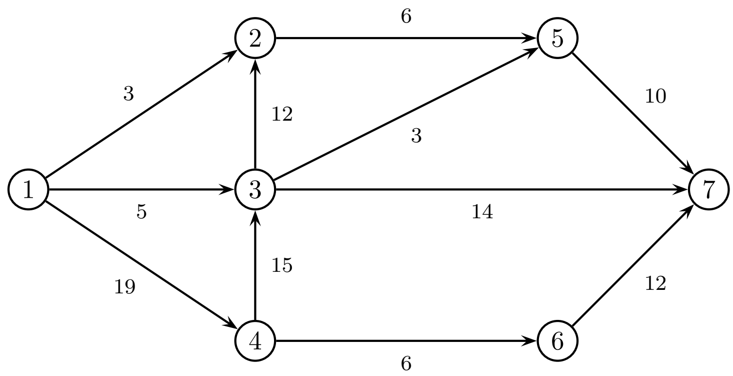



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (3,2) (3,5) (3,7) (4,3) (6,7) | (4,6) | $x = (7,\ 0,\ 0,\ 0,\ -12,\ 3,\ 0,\ -14,\ 10,\ 0,\ 8)$ | NO | SI |
| (1,2) (2,5) (3,2) (4,3) (5,7) (6,7) | (1,4) | $\pi = (0,\ 3,\ 0,\ -8,\ 6,\ 11,\ 14)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

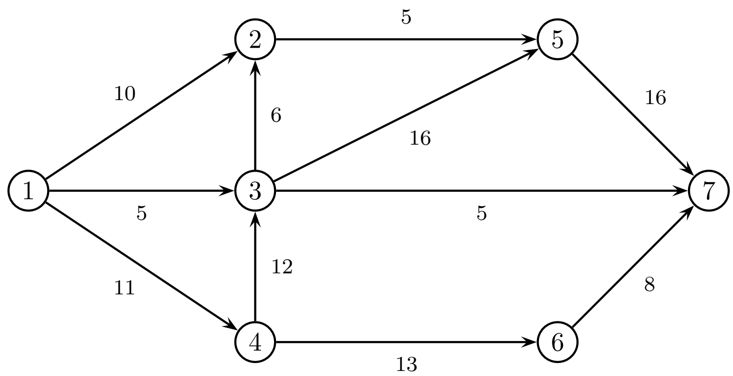
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (1,4) (3,2) (3,7) (4,6) (5,7) | (1,2) (1,4) (3,2) (3,7) (4,6) (5,7) |
| Archi di U | (2,5) | (2,5) |
| $x$ | $(0,\ 1,\ 6,\ 7,\ 2,\ 0,\ 4,\ 0,\ 2,\ 4,\ 0)$ | $(1,\ 0,\ 6,\ 7,\ 1,\ 0,\ 4,\ 0,\ 2,\ 4,\ 0)$ |
| $\pi$ | $(0,\ 6,\ 3,\ 7,\ 1,\ 16,\ 9)$ | $(0,\ 3,\ 0,\ 7,\ -2,\ 16,\ 6)$ |
| Arco entrante | (1,2) | (2,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 6 , 1 | 2 , 1 |
| Arco uscente | (1,3) | (3,2) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 2 | | 3 | | 5 | | 7 | | 4 | | 6 | |
| nodo 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| nodo 3 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 |
| nodo 4 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 9 | 2 | 8 | 3 | 8 | 3 | 8 | 3 | 8 | 3 | 8 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 25 | 4 | 25 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 19 | 3 | 18 | 5 | 18 | 5 | 18 | 5 | 18 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 3, 4, 5 | | 4, 5, 7 | | 4, 7 | | 4 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 5 | (0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0) | 5 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 5 | (5, 5, 0, 5, 0, 0, 5, 0, 0, 5, 0) | 10 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 8 | (5, 5, 8, 5, 0, 0, 5, 0, 8, 5, 8) | 18 |
| 1 - 4 - 3 - 5 - 7 | 3 | (5, 5, 11, 5, 0, 3, 5, 3, 8, 8, 8) | 21 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2\}$ $N_t = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 9\,x_1 + 6\,x_2 \\ 13\,x_1 + 11\,x_2 \geq 69 \\ 9\,x_1 + 17\,x_2 \geq 49 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \frac{69}{11}\right)$ $v_I(P) = 38$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 7)$ $v_S(P) = 42$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $12\,x_1 + 10\,x_2 \geq 63$
$r = 4$ $6\,x_1 + 5\,x_2 \geq 32$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 44 | 21 | 50 | 21 |
| **2** | | 12 | 51 | 25 |
| **3** | | | 9 | 29 |
| **4** | | | | 21 |

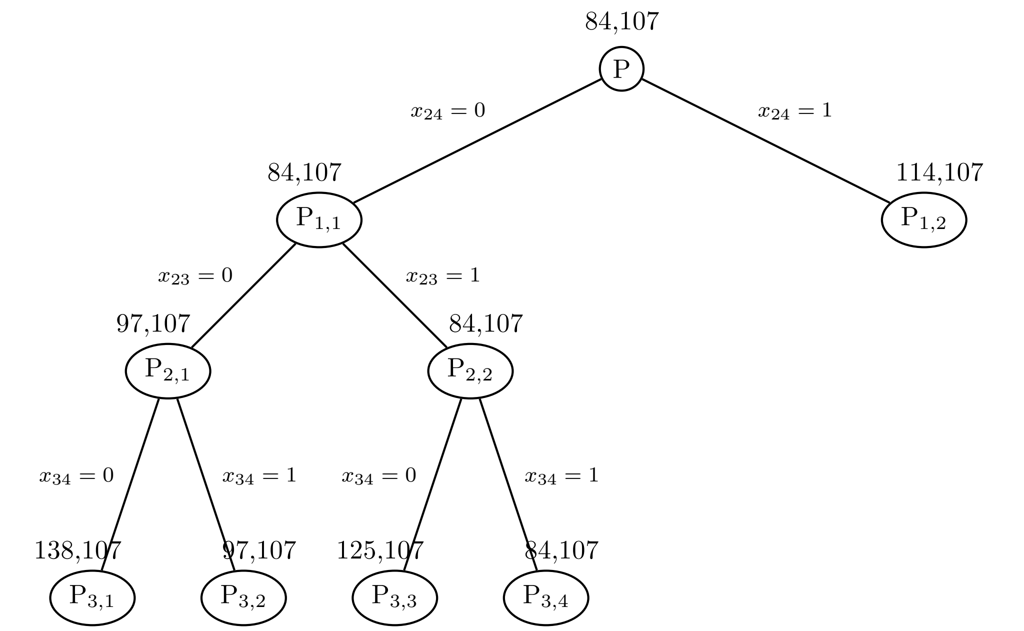
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: ( 1 , 3 ) ( 1 , 5 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 4 , 5 ) $v_I(P) = 84$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: 2 – 3 – 4 – 5 – 1 $v_S(P) = 107$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{24}$, $x_{23}$, $x_{34}$.



**Esame di Ricerca Operativa del 20/12/13**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max \ -4\ x_1 - x_2 \\ -3\ x_1 + 5\ x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 - 2\ x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ -5\ x_1 - 2\ x_2 \leq 20 \\ -2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 26 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {3, 5} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {3,4} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una ditta utilizza un cargo per il trasporto di 3 prodotti P1, P2 e P3. Il cargo ha tre scompartimenti per il carico: A,B,C. La seguente tabella mostra i limiti in peso e spazio degli scompartimenti.

| | capacità di peso (tonn) | capacità di spazio ($m^3$) |
|---|---|---|
| A | 22 | 6000 |
| B | 16 | 8500 |
| C | 12 | 5000 |

La seguente tabella mostra per ogni prodotto la quantità massima (in tonn) di merce da caricare e il volume occupato.

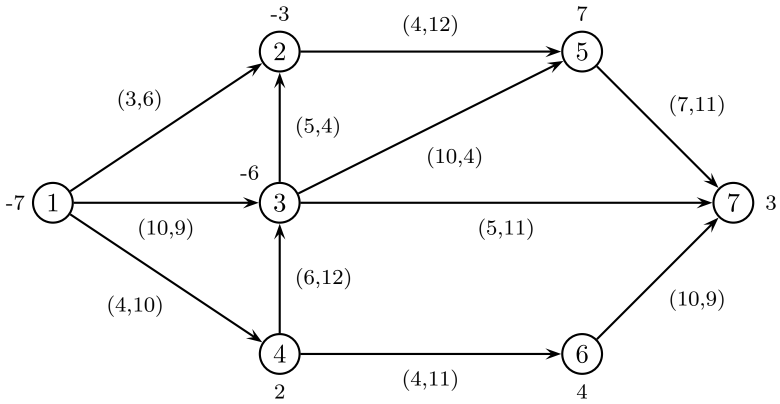
| | peso (tonn) | volume occupato ($m^3/tonn$) |
|---|---|---|
| P1 | 20 | 200 |
| P2 | 15 | 300 |
| P3 | 12 | 250 |

Sapendo che il profitto ottenuto dal trasporto di una tonnellata di merce è di 300 Euro/tonn per P1, 350 Euro/tonn per P2 e 250 Euro/tonn per P3, determinare come distribuire la merce negli scompartimenti per massimizzare il profitto.

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                          b=

Aeq=                                        beq=

lb=                                         ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

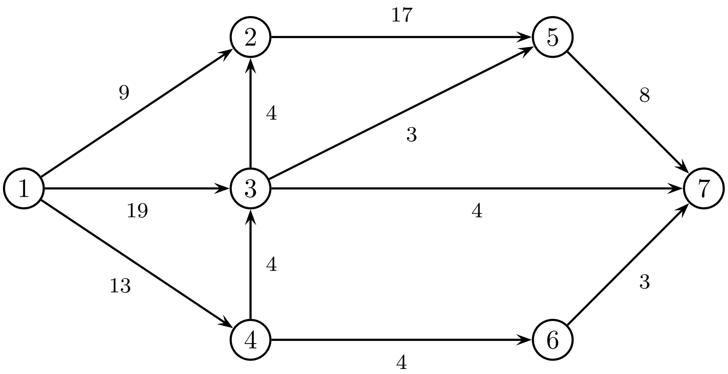



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7) | (3,7) | $x =$ | | |
| (1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (5,7) (6,7) | (3,7) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

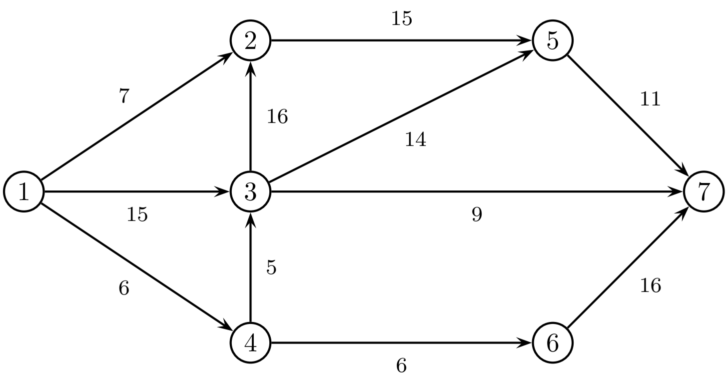
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7) | |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 14\ x_2 \\ 17\ x_1 + 6\ x_2 \leq 60 \\ 7\ x_1 + 14\ x_2 \leq 51 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 44 | 21 | 50 | 21 |
| **2** | | 11 | 50 | 25 |
| **3** | | | 8 | 29 |
| **4** | | | | 21 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{24}$, $x_{23}$, $x_{34}$.

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -4\ x_1 - x_2 \\ -3\ x_1 + 5\ x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 - 2\ x_2 \leq 12 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ -5\ x_1 - 2\ x_2 \leq 20 \\ -2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 26 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x = (1,\ 3)$ | SI | NO |
| $\{3, 5\}$ | $y = \left(0,\ 0,\ -\frac{3}{8},\ 0,\ \frac{7}{8},\ 0\right)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{3, 4\}$ | $(0,\ -6)$ | $(0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0)$ | 4 | $\frac{294}{11},\ 7,\ 56$ | 5 |
| 2° iterazione | $\{3, 5\}$ | $(-2,\ -5)$ | $\left(0,\ 0,\ -\frac{3}{8},\ 0,\ \frac{7}{8},\ 0\right)$ | 3 | 8 | 1 |

**Esercizio 3.**

| variabili decisionali | modello |
|---|---|
| $x_{i,j}$ = tonnellate di prodotto i immagazzinato nello scompartimento j; i= 1,2,3; j=A,B,C | $\begin{cases} \max\ 300\ (x_{1A} + x_{1B} + x_{1C}) \\ \quad +350\ (x_{2A} + x_{2B} + x_{2C}) \\ \quad +250\ (x_{3A} + x_{3B} + x_{3C}) \\ x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 20 \\ x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 15 \\ x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 12 \\ x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \leq 22 \\ x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} \leq 16 \\ x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} \leq 12 \\ 200\ x_{1A} + 300\ x_{2A} + 250\ x_{3A} \leq 6000 \\ 200\ x_{1B} + 300\ x_{2B} + 250\ x_{3B} \leq 8500 \\ 200\ x_{1C} + 300\ x_{2C} + 250\ x_{3C} \leq 5000 \\ x_{i,j} \geq 0 \end{cases}$ |

```
c = -[ 300; 300; 300;350; 350; 350; 250; 250; 250]
```

```
A = [ 1 1 1 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 1 1 1 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 1 1 1;
    1 0 0 1 0 0 1 0 0;
    0 1 0 0 1 0 0 1 0;
    0 0 1 0 0 1 0 0 1 ;
    200 0 0 300 0 0 250 0 0;
    0 200 0 0 300 0 0 250 0;
    0 0 200 0 0 300 0 0 250]
```

```
b = [ 20; 15; 12; 22; 16; 12;6000; 8500; 5000]
```

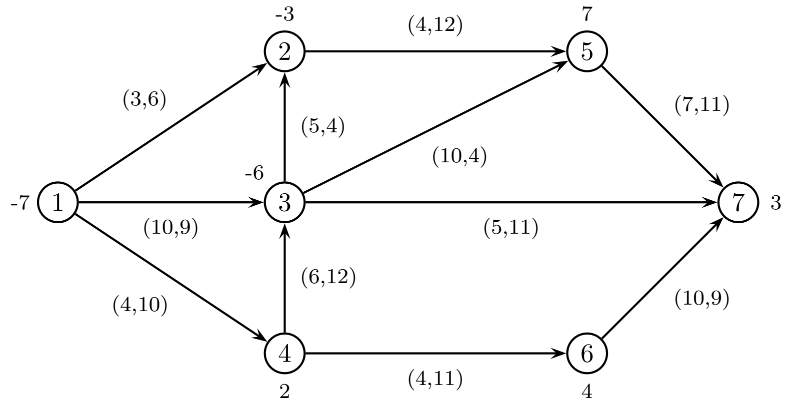
```
Aeq = []
```

```
beq = []
```

```
lb = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]
```

```
ub = []
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

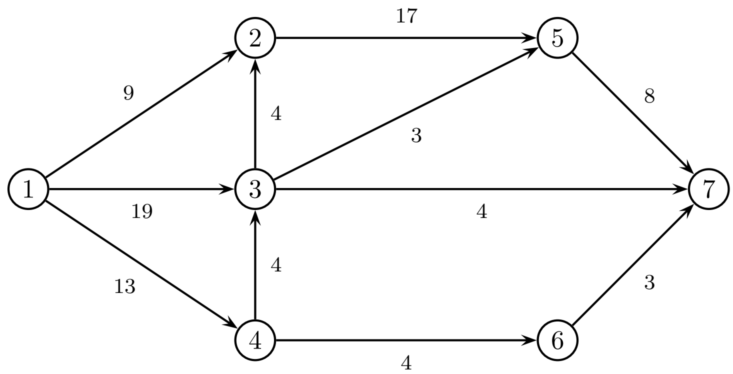



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (5,7) (6,7) | (3,7) | $x = (0,\ 0,\ 7,\ 3,\ 0,\ 0,\ 11,\ 5,\ 0,\ -4,\ -4)$ | NO | SI |
| (1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (5,7) (6,7) | (3,7) | $\pi = (0,\ 3,\ 10,\ 4,\ 20,\ 17,\ 27)$ | NO | SI |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

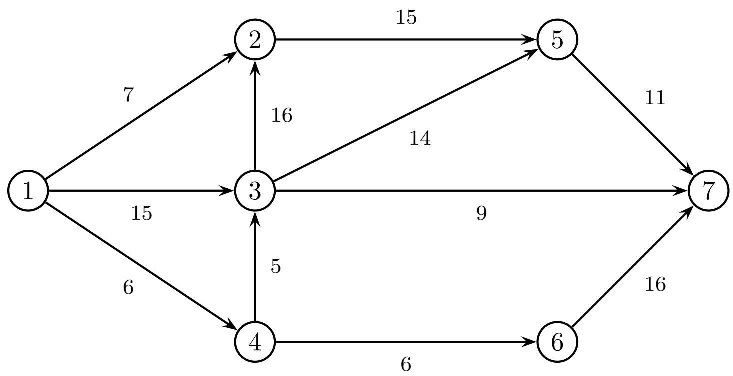
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7) | (1,2) (1,3) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) |
| Archi di U | (3,5) | (3,5) |
| $x$ | (0, 0, 7, 3, 0, 4, 2, 0, 5, 0, 1) | (0, 1, 6, 3, 0, 4, 3, 0, 4, 0, 0) |
| $\pi$ | (0, 3, 13, 4, 7, 8, 18) | (0, 3, 10, 4, 7, 8, 15) |
| Arco entrante | (1,3) | (3,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 9 , 1 | 6 , 1 |
| Arco uscente | (6,7) | (1,3) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 2 | | 4 | | 3 | | 6 | | 5 | | 7 | |
| nodo 2 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 |
| nodo 3 | 19 | 1 | 19 | 1 | 17 | 4 | 17 | 4 | 17 | 4 | 17 | 4 | 17 | 4 |
| nodo 4 | 13 | 1 | 13 | 1 | 13 | 1 | 13 | 1 | 13 | 1 | 13 | 1 | 13 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 26 | 2 | 26 | 2 | 20 | 3 | 20 | 3 | 20 | 3 | 20 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 17 | 4 | 17 | 4 | 17 | 4 | 17 | 4 | 17 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 21 | 3 | 20 | 6 | 20 | 6 | 20 | 6 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 3, 4, 5 | | 3, 5, 6 | | 5, 6, 7 | | 5, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 9 | (0, 9, 0, 0, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0) | 9 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 7 | (7, 9, 0, 7, 0, 0, 9, 0, 0, 7, 0) | 16 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 4 | (7, 13, 0, 7, 0, 4, 9, 0, 0, 11, 0) | 20 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 6 | (7, 13, 6, 7, 0, 4, 9, 0, 6, 11, 6) | 26 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $N_t = \{4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\,x_1 + 14\,x_2 \\ 17\,x_1 + 6\,x_2 \le 60 \\ 7\,x_1 + 14\,x_2 \le 51 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{51}{14}\right)$ $v_S(P) = 51$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 3)$ $v_I(P) = 42$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $x_2 \le 3$
$r = 3$ $4\,x_1 + 8\,x_2 \le 29$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 44 | 21 | 50 | 21 |
| **2** | | 11 | 50 | 25 |
| **3** | | | 8 | 29 |
| **4** | | | | 21 |

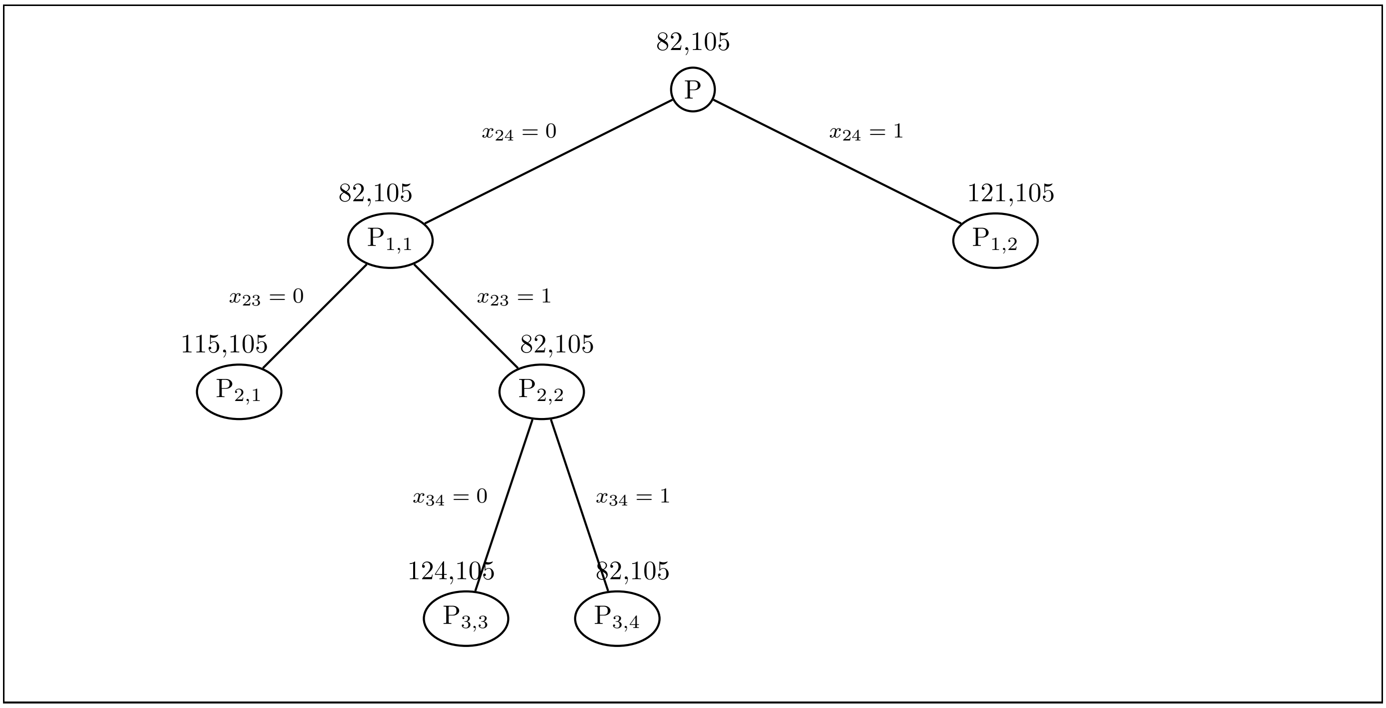
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: ( 1 , 3 ) ( 1 , 5 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 4 , 5 ) $v_I(P) = 82$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 3.

ciclo: $3 - 4 - 5 - 1 - 2$ $v_S(P) = 105$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{24}$, $x_{23}$, $x_{34}$.


82,105
P
$x_{24} = 0$
$x_{24} = 1$
82,105
$P_{1,1}$
121,105
$P_{1,2}$
$x_{23} = 0$
$x_{23} = 1$
115,105
$P_{2,1}$
82,105
$P_{2,2}$
$x_{34} = 0$
$x_{34} = 1$
124,105
$P_{3,3}$
82,105
$P_{3,4}$

**Esame di Ricerca Operativa del 20/12/13**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -9\,x_1 + 8\,x_2 \\ -3\,x_1 + 5\,x_2 \leq 12 \\ 3\,x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 - 2\,x_2 \leq 12 \\ 3\,x_1 - x_2 \leq 6 \\ -5\,x_1 - 2\,x_2 \leq 20 \\ -2\,x_1 - 3\,x_2 \leq 26 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {3, 6} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {2,4} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una ditta utilizza un cargo per il trasporto di 3 prodotti P1, P2 e P3. Il cargo ha tre scompartimenti per il carico: A,B,C. La seguente tabella mostra i limiti in peso e spazio degli scompartimenti.

| | capacità di peso (tonn) | capacità di spazio ($m^3$) |
|---|---|---|
| A | 22 | 6000 |
| B | 16 | 8500 |
| C | 12 | 5000 |

La seguente tabella mostra per ogni prodotto la quantità massima (in tonn) di merce da caricare e il volume occupato.

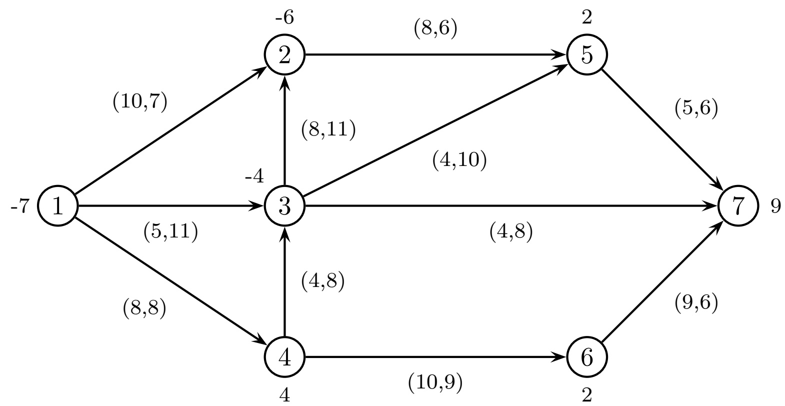
| | peso (tonn) | volume occupato ($m^3/tonn$) |
|---|---|---|
| P1 | 20 | 200 |
| P2 | 15 | 300 |
| P3 | 12 | 250 |

Sapendo che il profitto ottenuto dal trasporto di una tonnellata di merce è di 300 Euro/tonn per P1, 350 Euro/tonn per P2 e 250 Euro/tonn per P3, determinare come distribuire la merce negli scompartimenti per massimizzare il profitto.

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                        b=

Aeq=                                      beq=

lb=                                       ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

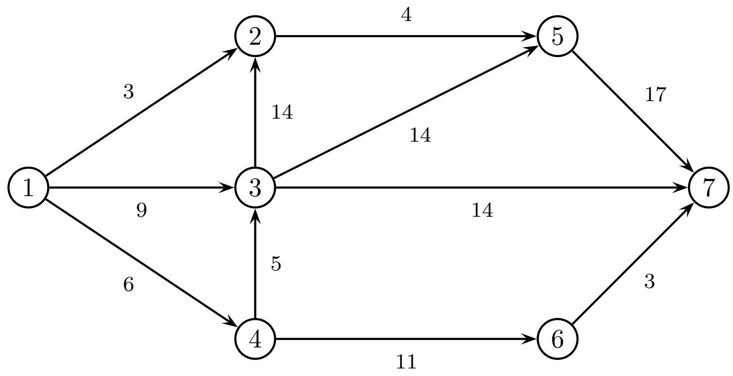



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (2,5) (3,5) (4,3) (5,7) (6,7) | (1,3) | $x =$ | | |
| (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (5,7) (6,7) | (1,3) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

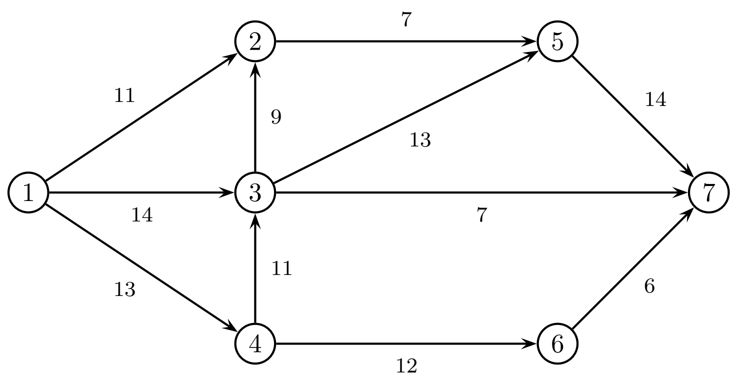
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,3) (4,6) | |
| Archi di U | (5,7) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 7\ x_1 + 6\ x_2 \\ 15\ x_1 + 14\ x_2 \geq 63 \\ 6\ x_1 + 11\ x_2 \geq 44 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

| | |
|---|---|
| sol. ottima del rilassamento = | $v_I(P) =$ |

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

| | |
|---|---|
| sol. ammissibile = | $v_S(P) =$ |

c) Calcolare un taglio di Gomory.

| | |
|---|---|
| $r =$ | taglio: |

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 44 | 22 | 51 | 21 |
| **2** | | 13 | 52 | 25 |
| **3** | | | 10 | 29 |
| **4** | | | | 22 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

| | |
|---|---|
| 2–albero: | $v_I(P) =$ |

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

| | |
|---|---|
| ciclo: | $v_S(P) =$ |

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{24}$, $x_{23}$, $x_{34}$.

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -9\ x_1 + 8\ x_2 \\ -3\ x_1 + 5\ x_2 \le 12 \\ 3\ x_1 + x_2 \le 6 \\ -x_1 - 2\ x_2 \le 12 \\ 3\ x_1 - x_2 \le 6 \\ -5\ x_1 - 2\ x_2 \le 20 \\ -2\ x_1 - 3\ x_2 \le 26 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x = (1,\ 3)$ | SI | NO |
| $\{3, 6\}$ | $y = (0,\ 0,\ -43,\ 0,\ 0,\ 26)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{2, 4\}$ | $(2,\ 0)$ | $\left(0,\ \frac{5}{2},\ 0,\ -\frac{11}{2},\ 0,\ 0\right)$ | 4 | 6 | 1 |
| 2° iterazione | $\{1, 2\}$ | $(1,\ 3)$ | $\left(\frac{11}{6},\ -\frac{7}{6},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right)$ | 2 | $\frac{342}{11},\ 18,\ \frac{666}{19}$ | 5 |

**Esercizio 3.**

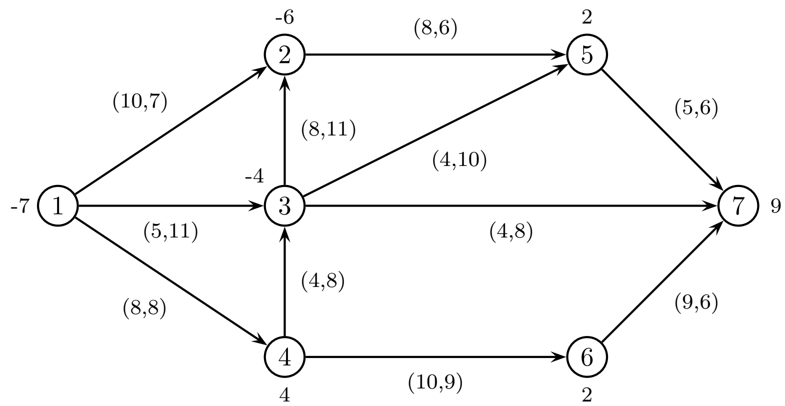
| variabili decisionali | modello |
|---|---|
| $x_{i,j}$ = tonnellate di prodotto i immagazzinato nello scompartimento j; i= 1,2,3; j=A,B,C | $\begin{cases} \max\ 300\ (x_{1A} + x_{1B} + x_{1C}) \\ \quad +350\ (x_{2A} + x_{2B} + x_{2C}) \\ \quad +250\ (x_{3A} + x_{3B} + x_{3C}) \\ x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \le 20 \\ x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \le 15 \\ x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \le 12 \\ x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \le 22 \\ x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} \le 16 \\ x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} \le 12 \\ 200\ x_{1A} + 300\ x_{2A} + 250\ x_{3A} \le 6000 \\ 200\ x_{1B} + 300\ x_{2B} + 250\ x_{3B} \le 8500 \\ 200\ x_{1C} + 300\ x_{2C} + 250\ x_{3C} \le 5000 \\ x_{i,j} \ge 0 \end{cases}$ |

```
c = -[ 300; 300; 300;350; 350; 350; 250; 250; 250]
```

```
A = [ 1 1 1 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 1 1 1 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 1 1 1;
    1 0 0 1 0 0 1 0 0;
    0 1 0 0 1 0 0 1 0;
    0 0 1 0 0 1 0 0 1 ;
    200 0 0 300 0 0 250 0 0;
    0 200 0 0 300 0 0 250 0;
    0 0 200 0 0 300 0 0 250]

Aeq = []

lb = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]
```

```
b = [ 20; 15; 12; 22; 16; 12;6000; 8500; 5000]

beq = []

ub = []
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

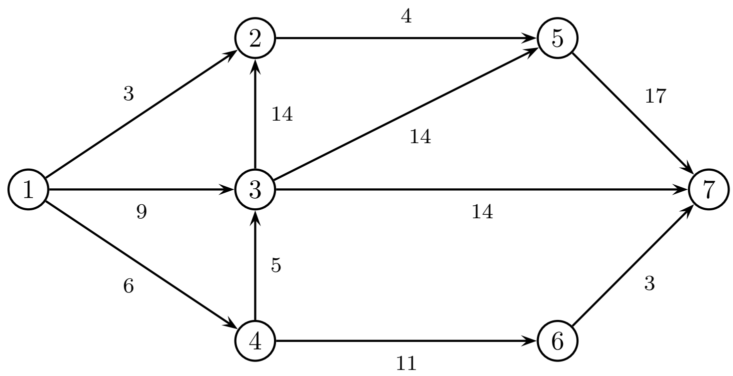



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (2,5) (3,5) (4,3) (5,7) (6,7) | (1,3) | $x = (-4,\ 11,\ 0,\ 2,\ 0,\ 11,\ 0,\ -4,\ 0,\ 11,\ -2)$ | NO | NO |
| (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (5,7) (6,7) | (1,3) | $\pi = (0,\ 14,\ 23,\ 8,\ 22,\ 18,\ 27)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

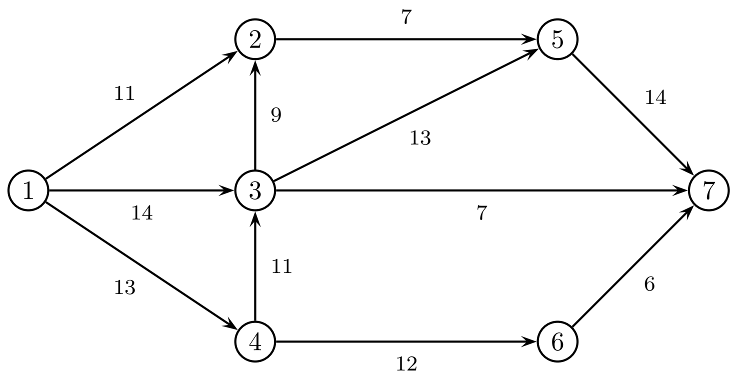
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,3) (4,6) | (1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) |
| Archi di U | (5,7) | (5,7) |
| $x$ | (0, 0, 7, 6, 0, 2, 3, 1, 2, 6, 0) | (0, 1, 6, 6, 0, 2, 3, 0, 2, 6, 0) |
| $\pi$ | (0, 8, 12, 8, 16, 18, 16) | (0, 1, 5, 8, 9, 18, 9) |
| Arco entrante | (1,3) | (5,7) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 11 , 1 | 5 , 2 |
| Arco uscente | (4,3) | (3,5) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 2 | | 4 | | 5 | | 3 | | 6 | | 7 | |
| nodo 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| nodo 3 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 |
| nodo 4 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 7 | 2 | 7 | 2 | 7 | 2 | 7 | 2 | 7 | 2 | 7 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 17 | 4 | 17 | 4 | 17 | 4 | 17 | 4 | 17 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 24 | 5 | 23 | 3 | 20 | 6 | 20 | 6 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 3, 4, 5 | | 3, 5, 6 | | 3, 6, 7 | | 6, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 7 | (0, 7, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0) | 7 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 7 | (7, 7, 0, 7, 0, 0, 7, 0, 0, 7, 0) | 14 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 7 | (7, 14, 0, 7, 0, 7, 7, 0, 0, 14, 0) | 21 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 6 | (7, 14, 6, 7, 0, 7, 7, 0, 6, 14, 6) | 27 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad N_t = \{7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 7\ x_1 + 6\ x_2 \\ 15\ x_1 + 14\ x_2 \geq 63 \\ 6\ x_1 + 11\ x_2 \geq 44 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \frac{9}{2}\right)$ $\qquad v_I(P) = 27$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(0, 5)$ $\qquad v_S(P) = 30$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad 14\, x_1 + 13\, x_2 \geq 59$

$r = 4$ $\qquad 4\, x_1 + 3\, x_2 \geq 14$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 44 | 22 | 51 | 21 |
| **2** | | 13 | 52 | 25 |
| **3** | | | 10 | 29 |
| **4** | | | | 22 |

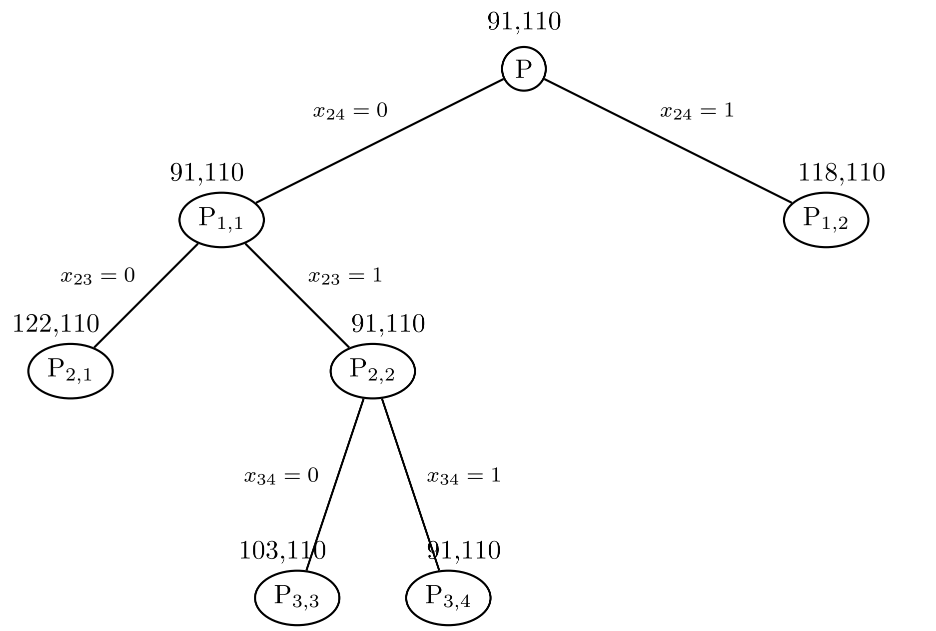
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: ( 1 , 3 ) ( 1 , 5 ) ( 2 , 3 ) ( 2 , 5 ) ( 3 , 4 ) $\qquad v_I(P) = 91$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: 1 – 5 – 4 – 3 – 2 $\qquad v_S(P) = 110$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{24}$, $x_{23}$, $x_{34}$.



**Esame di Ricerca Operativa del 21/02/19**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale.

$$\begin{cases} \max\ 3\ x_1 + x_2 \\ -6\ x_1 + 10\ x_2 \leq 17 \\ 7\ x_1 + 2\ x_2 \leq 28 \\ 4\ x_1 - 3\ x_2 \leq 16 \\ -2\ x_1 - 4\ x_2 \leq 3 \\ -2\ x_1 + 2\ x_2 \leq 3 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 3 \end{cases}$$

| | Base | $x$ | Degenere? | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° passo | {3,4} | | | | | | |
| 2° passo | | | | | | | |

**Esercizio 2.** Una raffineria di petrolio miscela 4 tipi di greggio per ottenere 3 tipi di carburante: senza piombo, diesel e blu diesel. La tabella seguente mostra la quantità disponibile ed il costo di ogni tipo di greggio:

| Tipo di greggio | Barili disponibili | Costo (euro/barile) |
|---|---|---|
| 1 | 5000 | 45 |
| 2 | 2400 | 35 |
| 3 | 4000 | 60 |
| 4 | 1500 | 30 |

Il prezzo di vendita ed i requisiti tecnici di ogni carburante, in termini di minima e massima percentuale di ogni tipo di greggio, sono i seguenti:

| Tipo di carburante | Greggio richiesto | Prezzo (euro/barile) |
|---|---|---|
| senza piombo | almeno 20% di tipo 2<br>al più 30% di tipo 4 | 75 |
| diesel | almeno 40% di tipo 3 | 68 |
| blu diesel | al più 50% di tipo 1 | 72 |

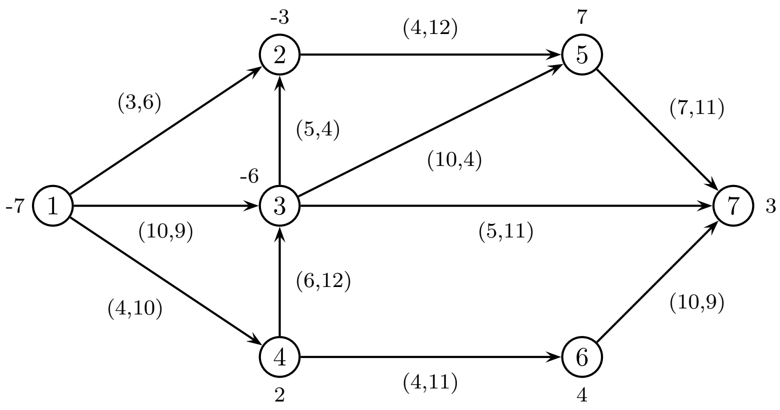
La raffineria vuole trovare la composizione dei carburanti in modo da massimizzare il profitto.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                                  intcon=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 3.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti sulla seguente rete (su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).




| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7) | |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 9\ x_2 \\ 11\ x_1 + 6\ x_2 \leq 64 \\ 9\ x_1 + 15\ x_2 \leq 59 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

| | |
|---|---|
| sol. ottima del rilassamento = | $v_S(P) =$ |

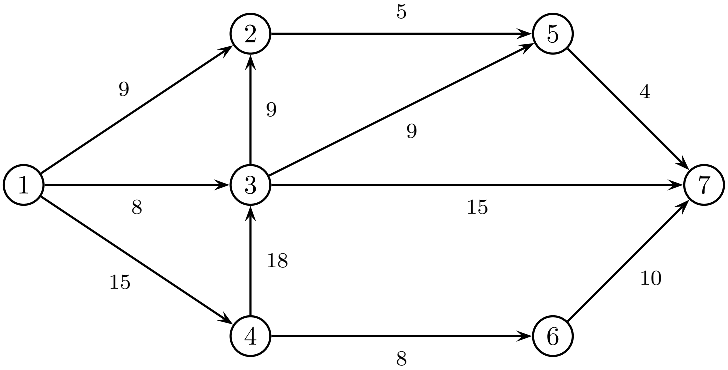
b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

| | |
|---|---|
| sol. ammissibile = | $v_I(P) =$ |

c) Calcolare un taglio di Gomory.

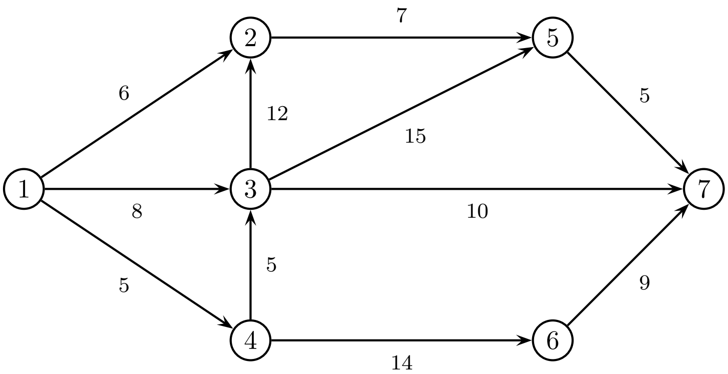
| | |
|---|---|
| $r =$ | taglio: |

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 6.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 555 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 11 | 12 | 16 | 17 | 21 | 22 | 6 |
| Volumi | 12 | 55 | 417 | 69 | 426 | 48 | 349 |

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1\, x_2 \le 0, \quad x_1^2 - 2\, x_1\, x_2 + x_2^2 - 1 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| (-1,0) | | | | | | | |
| (0,1) | | | | | | | |
| (0,-1) | | | | | | | |
| (1,0) | | | | | | | |

**Esercizio 8.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -2\, x_1^2 + 2\, x_1\, x_2 + 4\, x_1 + 10\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(5, -1)$ , $(-3, -1)$ , $(-1, -4)$ e $(1, 5)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $(1, -3)$ | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.**

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{3,\ 4\}$ | $\left(\frac{5}{2},\ -2\right)$ | $\left(0,\ 0,\ \frac{5}{11},\ -\frac{13}{22},\ 0,\ 0\right)$ | 4 | $52,\ 11,\ 132$ | 2 |
| 2° iterazione | $\{2,\ 3\}$ | $(4,\ 0)$ | $\left(0,\ \frac{13}{29},\ -\frac{1}{29},\ 0,\ 0,\ 0\right)$ | 3 | $\frac{29}{2},\ \frac{319}{18}$ | 1 |

**Esercizio 2.** Variabili decisionali: $x_{ij}$ = barili di greggio di tipo $i$ usati per produrre il carburante $j$
Modello:

$$\begin{cases} \max\ 75\,(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+68\,(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42})+72\,(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}) \\ \qquad -45\,(x_{11}+x_{12}+x_{13})-35\,(x_{21}+x_{22}+x_{23})-60\,(x_{31}+x_{32}+x_{33})-30\,(x_{41}+x_{42}+x_{43}) \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 5000 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 2400 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}\le 4000 \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}\le 1500 \\ x_{21}\ge 0.2\,(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}) \\ x_{41}\le 0.3\,(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}) \\ x_{32}\ge 0.4\,(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}) \\ x_{13}\le 0.5\,(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}) \\ x_{ij}\ge 0 \end{cases}$$

**Esercizio 3.**

| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) (6,7) | (1,2) (1,3) (1,4) (2,5) (3,7) (4,6) |
| Archi di U | (3,5) | (3,5) |
| $x$ | (0, 0, 7, 3, 0, 4, 2, 0, 5, 0, 1) | (0, 1, 6, 3, 0, 4, 3, 0, 4, 0, 0) |
| $\pi$ | (0, 3, 13, 4, 7, 8, 18) | (0, 3, 10, 4, 7, 8, 15) |
| Arco entrante | (1,3) | (3,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 9 , 1 | 6 , 1 |
| Arco uscente | (6,7) | (1,3) |

**Esercizio 4.**

sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \frac{59}{15}\right)$ $\qquad v_S(P) = 35$

sol. ammissibile = $(0,3)$ $\qquad v_I(P) = 27$

$r = 2$ $\qquad x_2 \le 3$
$r = 3$ $\qquad 5\,x_1 + 9\,x_2 \le 35$

**Esercizio 5.**

| | iter 1 $\pi$ | iter 1 $p$ | iter 2 $\pi$ | iter 2 $p$ | iter 3 $\pi$ | iter 3 $p$ | iter 4 $\pi$ | iter 4 $p$ | iter 5 $\pi$ | iter 5 $p$ | iter 6 $\pi$ | iter 6 $p$ | iter 7 $\pi$ | iter 7 $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 2 | | 5 | | 4 | | 7 | | 6 | |
| nodo 2 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 |
| nodo 3 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 |
| nodo 4 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 17 | 3 | 14 | 2 | 14 | 2 | 14 | 2 | 14 | 2 | 14 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 23 | 4 | 23 | 4 | 23 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | 23 | 3 | 23 | 3 | 18 | 5 | 18 | 5 | 18 | 5 | 18 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 4, 5, 7 | | 4, 5, 7 | | 4, 7 | | 6, 7 | | 6 | | $\emptyset$ | |

| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 8 | (0, 8, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0) | 8 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 5 | (5, 8, 0, 5, 0, 0, 8, 0, 0, 5, 0) | 13 |
| 1 - 4 - 3 - 7 | 2 | (5, 8, 2, 5, 0, 0, 10, 2, 0, 5, 0) | 15 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 3 | (5, 8, 5, 5, 0, 0, 10, 2, 3, 5, 3) | 18 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 5\}$ $\quad N_t = \{3, 4, 6, 7\}$

**Esercizio 6.**

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 11 | 12 | 16 | 17 | 21 | 22 | 6 |
| Volumi | 12 | 55 | 417 | 69 | 426 | 48 | 349 |

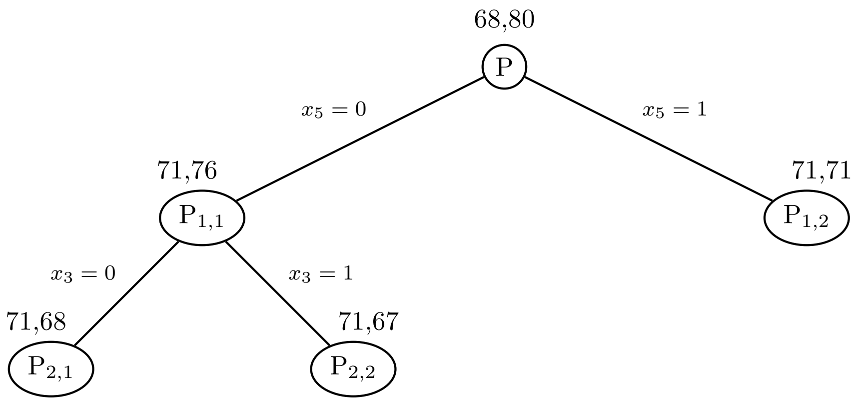
a)

sol. ammissibile = $(1, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$ $\quad v_I(P) = 68$

b)

sol. ottima del rilassamento = $\left(1, 1, 0, 1, \dfrac{371}{426}, 1, 0\right)$ $\quad v_S(P) = 80$

c)




soluzione ottima = $(1, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$ $\quad$ valore ottimo = 71

**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 * x_2 \le 0, \quad x_1^2 - 2 * x_1 * x_2 + x_2^2 - 1 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(-1,\ 0)$ | $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(0,\ 1)$ | $(-1, 0)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |
| $(0,\ -1)$ | $(1, 0)$ | | NO | NO | NO | SI | NO |
| $(1,\ 0)$ | $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 8.**

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| (1,-3) | $-6x_1 + 12x_2$ | (-1,-4) | (-2,1) | 1 | (-1,-4) |

**Esame di Ricerca Operativa del 21/07/14**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min \ 2\ y_1 - 7\ y_2 + 4\ y_3 + 15\ y_4 + 21\ y_5 + 6\ y_6 \\ y_1 - 2\ y_2 + y_3 + 3\ y_4 + y_5 + 2\ y_6 = 7 \\ -y_1 - y_2 + y_4 + 3\ y_5 - y_6 = 8 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x =$ | | |
| $\{2, 4\}$ | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {5,6} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una ditta di trasporti sta considerando l'acquisto di nuovi veicoli commerciali per trasporto merci, di capacità piccola, media e grande. Il prezzo d'acquisto è di 8700 Euro per ogni veicolo di capacità piccola, 13200 Euro per ogni veicolo di capacità media e 25600 Euro per ogni veicolo di capacità grande. La ditta ha a disposizione 325000 Euro per tali acquisti. E' stato valutato che il profitto annuale netto dovrebbe essere di 2000 Euro, 2800 Euro e 5600 Euro, per i veicoli di capacità piccola, media e grande, rispettivamente. E' stato inoltre previsto che vi sarà personale sufficiente per guidare 30 nuovi veicoli, ma solo 3 tra questi hanno la patente per guidare i veicoli di capacità grande. Determinare quanti veicoli commerciali di ciascun tipo si dovrebbero acquistare per massimizzare il profitto.

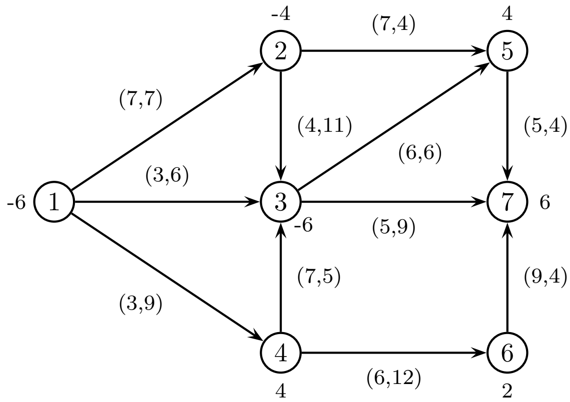
variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB

(per il problema o per il rilassato?)

```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

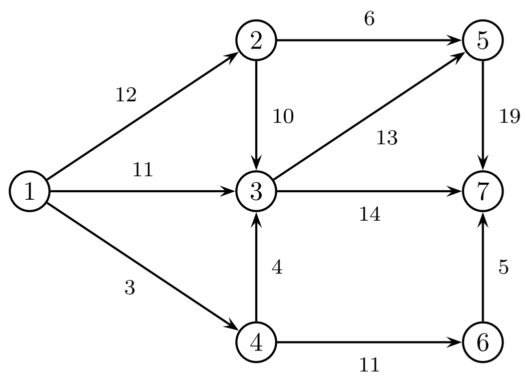



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (2,3) (2,5) (4,6) (5,7) (6,7) | (3,7) | $x =$ | | |
| (1,2) (1,4) (2,3) (2,5) (3,7) (4,6) | (3,5) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

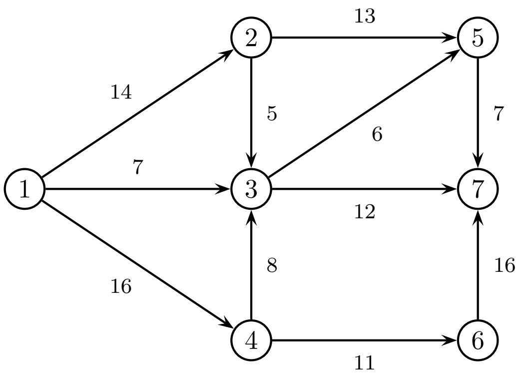
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (2,3) (3,5) (3,7) (4,6) (6,7) | |
| Archi di U | (2,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\ x_1 + 8\ x_2 \\ 8\ x_1 + 7\ x_2 \leq 45 \\ 8\ x_1 + 18\ x_2 \leq 47 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 548 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 15 | 6 | 14 | 21 | 8 | 9 | 22 |
| Volumi | 38 | 134 | 199 | 465 | 191 | 120 | 544 |

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = 4x_1^3 - 3x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1 + x_2^2 \leq 0, \quad -x_1 - x_2 + 2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| (1,1) | | | | | | | |
| (4, -2) | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 4\, x_1\, x_2 - 2\, x_2^2 - 3\, x_1 - 5\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(-1, 1)$ , $(-5, -1)$ , $(-2, 5)$ e $(2, 5)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{2}{3}, 5\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 2\ y_1 - 7\ y_2 + 4\ y_3 + 15\ y_4 + 21\ y_5 + 6\ y_6 \\ y_1 - 2\ y_2 + y_3 + 3\ y_4 + y_5 + 2\ y_6 = 7 \\ -y_1 - y_2 + y_4 + 3\ y_5 - y_6 = 8 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x = (3,\ 1)$ | SI | NO |
| $\{2, 4\}$ | $y = (0,\ -17,\ 0,\ -9,\ 0,\ 0)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

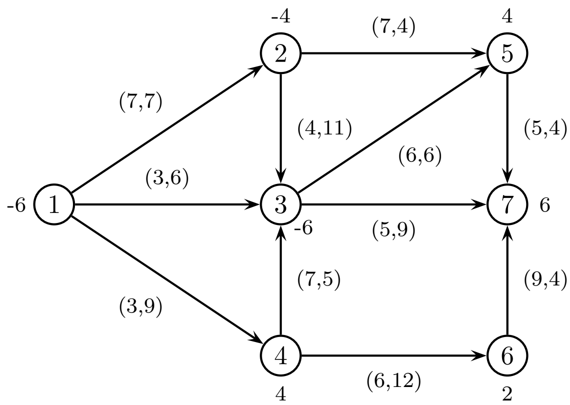
| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{5, 6\}$ | $\left(\frac{39}{7},\ \frac{36}{7}\right)$ | $\left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{23}{7},\ \frac{13}{7}\right)$ | 3 | $23,\ \frac{13}{3}$ | 6 |
| 2° iterazione | $\{3, 5\}$ | $\left(4,\ \frac{17}{3}\right)$ | $\left(0,\ 0,\ \frac{13}{3},\ 0,\ \frac{8}{3},\ 0\right)$ | 4 | $\frac{13}{8},\ 8$ | 3 |

**Esercizio 3.** Indichiamo con $x_P$, $x_M$ ed $x_G$ rispettivamente il numero di veicoli commerciali di capacità piccola, media e grande da acquistare.

COMANDI DI MATLAB

```
c=[ -2000 ; -2800 ; -5600 ]

A=[8700 13200 25600; 1 1 1 ]          b=[ 325000 ; 30 ]

Aeq=[]                                beq=[]

lb=[0; 0; 0]                          ub=[ ; ; 3]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

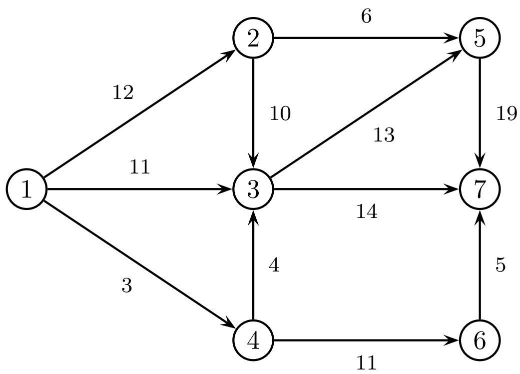



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (2,3) (2,5) (4,6) (5,7) (6,7) | (3,7) | $x = (0,\ 6,\ 0,\ -3,\ 7,\ 0,\ 9,\ 0,\ -4,\ 3,\ -6)$ | NO | SI |
| (1,2) (1,4) (2,3) (2,5) (3,7) (4,6) | (3,5) | $\pi = (0,\ 7,\ 11,\ 3,\ 14,\ 9,\ 16)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

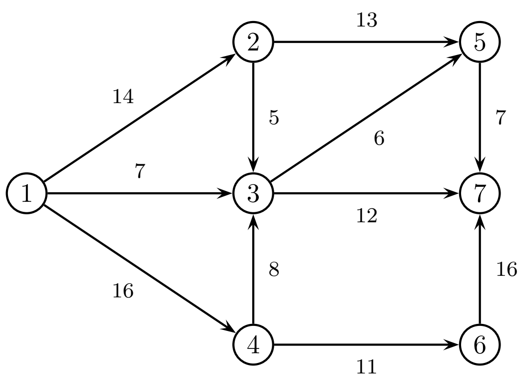
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (2,3) (3,5) (3,7) (4,6) (6,7) | (1,2) (1,4) (2,3) (3,5) (3,7) (4,6) |
| Archi di U | (2,5) | (2,5) |
| $x$ | (0, 0, 6, 0, 4, 0, 6, 0, 2, 0, 0) | (0, 0, 6, 0, 4, 0, 6, 0, 2, 0, 0) |
| $\pi$ | (0, 9, 13, 3, 19, 9, 18) | (0, 7, 11, 3, 17, 9, 16) |
| Arco entrante | (1,2) | (1,3) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 3 , 0 | 6 , 0 |
| Arco uscente | (6,7) | (1,2) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 4 | | 3 | | 2 | | 6 | | 5 | | 7 | |
| nodo 2 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 |
| nodo 3 | 11 | 1 | 7 | 4 | 7 | 4 | 7 | 4 | 7 | 4 | 7 | 4 | 7 | 4 |
| nodo 4 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 20 | 3 | 18 | 2 | 18 | 2 | 18 | 2 | 18 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 | 14 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 21 | 3 | 21 | 3 | 19 | 6 | 19 | 6 | 19 | 6 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 3, 6 | | 2, 5, 6, 7 | | 5, 6, 7 | | 5, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 7 | (0, 7, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0) | 7 |
| 1 - 2 - 3 - 7 | 5 | (5, 7, 0, 5, 0, 0, 12, 0, 0, 0, 0) | 12 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 7 | (12, 7, 0, 5, 7, 0, 12, 0, 0, 7, 0) | 19 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 11 | (12, 7, 11, 5, 7, 0, 12, 0, 11, 7, 11) | 30 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $N_t = \{6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\ x_1 + 8\ x_2 \\ 8\ x_1 + 7\ x_2 \leq 45 \\ 8\ x_1 + 18\ x_2 \leq 47 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{45}{8}, 0\right)$ $v_S(P) = 56$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (5, 0)$ $v_I(P) = 50$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $x_1 \leq 5$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 548 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 15 | 6 | 14 | 21 | 8 | 9 | 22 |
| Volumi | 38 | 134 | 199 | 465 | 191 | 120 | 544 |

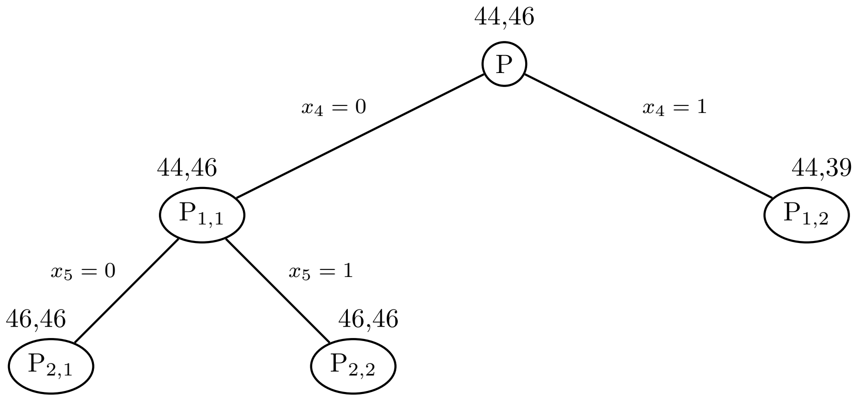
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (1, 1, 1, 0, 0, 1, 0)$ $v_I(P) = 44$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(1, 0, 1, \frac{191}{465}, 0, 1, 0\right)$ $v_S(P) = 46$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima $= (1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$ valore ottimo $= 46$

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = 4x_1^3 - 3x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1 + x_2^2 \leq 0, \quad -x_1 - x_2 + 2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(1, \ 1)$ | $(5, 7)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(4, \ -2)$ | $(-65, 257)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 4\, x_1 \, x_2 - 2\, x_2^2 - 3\, x_1 - 5\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(-1, 1)$ , $(-5, -1)$ , $(-2, 5)$ e $(2, 5)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{2}{3}, 5\right)$ | $(0, 1)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $(-17, 0)$ | $\dfrac{4}{51}$ | $\dfrac{4}{51}$ | $(-2, 5)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 21/07/15**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 4\ y_1 + y_2 + 26\ y_3 + 13\ y_4 + 16\ y_5 + 17\ y_6 \\ -3\ y_1 - 5\ y_2 + 3\ y_3 - y_4 + 3\ y_5 - 2\ y_6 = -1 \\ -4\ y_1 - y_2 + 4\ y_3 + 3\ y_4 - y_5 - 2\ y_6 = 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {2, 4} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {3,6} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Un'azienda produce olio extravergine (E) e olio di oliva (O) i cui prezzi di vendita al chilo sono rispettivamente di 5.30 euro e di 3.95 euro. La produzione di olio richiede due tipi di olive (O1 e O2) che l'azienda acquista rispettivamente al costo di 2.40 euro/kg e 2.20 euro/kg. La manodopera è disponibile in al più 600 ore-uomo con un costo di 15 euro/ora. La tabella seguente indica i kg di olive e le ore di manodopera necessarie per la produzione di un litro di ciascun tipo di olio.

| | O1 | O2 | manodopera |
|---|---|---|---|
| E | 0.8 | 0.5 | 0.08 |
| O | 0.7 | 0.4 | 0.04 |

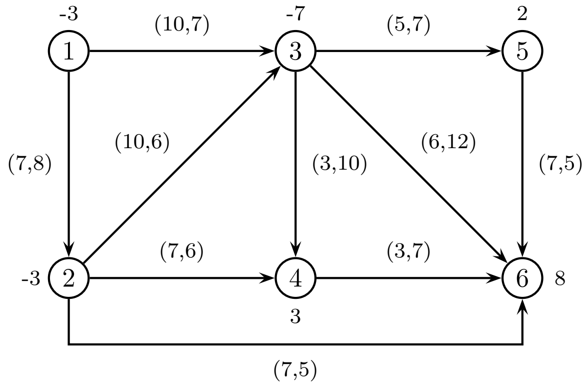
Sapendo che il budget disponibile per l'acquisto delle olive e della manodopera è pari a 110000 euro e supponendo che tutto l'olio prodotto sia venduto, si determini la produzione di olio EV e di olio OO che massimizzi il profitto dell'azienda.

variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                                  intcon=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

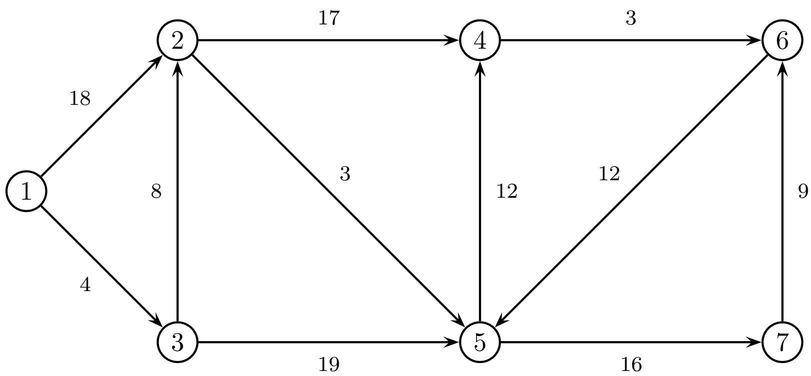



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,3) (3,6) (4,6) (5,6) | (3,5) | $x =$ | | |
| (1,3) (2,3) (2,4) (3,5) (4,6) | (3,4) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

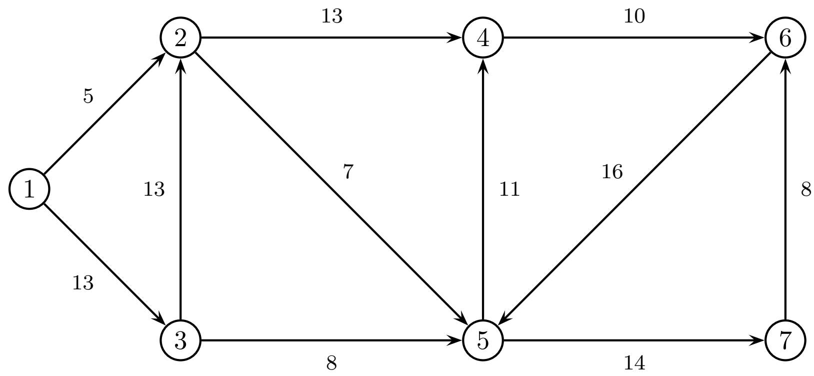
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (2,3) (2,6) (3,4) (3,5) | |
| Archi di U | (5,6) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 12\ x_1 + 8\ x_2 \\ 19\ x_1 + 14\ x_2 \leq 69 \\ 12\ x_1 + 18\ x_2 \leq 59 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 10 | 41 | 62 | 92 |
| **2** | | 27 | 54 | 56 |
| **3** | | | 11 | 13 |
| **4** | | | | 94 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

| | |
|---|---|
| 3–albero: | $v_I(P) =$ |

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

| | |
|---|---|
| ciclo: | $v_S(P) =$ |

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{15}$, $x_{35}$, $x_{45}$.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 + x_2^2 - 9 \leq 0, \quad -x_1 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -2\, x_1^2 - 6\, x_1\, x_2 - 4\, x_2^2 - 6\, x_1 - x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(1, 3)$ , $(5, 3)$ , $(2, -3)$ e $(-2, 1)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{11}{3}, 3\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 4\ y_1 + y_2 + 26\ y_3 + 13\ y_4 + 16\ y_5 + 17\ y_6 \\ -3\ y_1 - 5\ y_2 + 3\ y_3 - y_4 + 3\ y_5 - 2\ y_6 = -1 \\ -4\ y_1 - y_2 + 4\ y_3 + 3\ y_4 - y_5 - 2\ y_6 = 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (0,\ -1)$ | SI | NO |
| $\{2,\ 4\}$ | $y = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$ | SI | SI |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

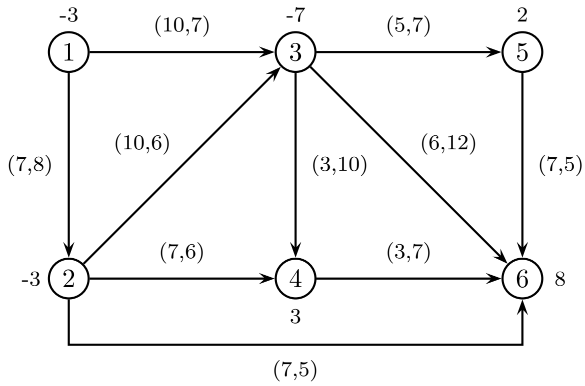
| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{3,\ 6\}$ | $\left(-60,\ \frac{103}{2}\right)$ | $\left(0,\ 0,\ 4,\ 0,\ 0,\ \frac{13}{2}\right)$ | 2 | $1,\ \frac{13}{17}$ | 6 |
| 2° iterazione | $\{2,\ 3\}$ | $\left(-\frac{30}{17},\ \frac{133}{17}\right)$ | $\left(0,\ \frac{13}{17},\ \frac{16}{17},\ 0,\ 0,\ 0\right)$ | 4 | $1,\ 1$ | 2 |

**Esercizio 3.**

$$\begin{cases} \max\ (5.3x_E + 3.95x_O) - (1.2x_E + 0.6x_O) - (1.92x_E + 1.68x_O) - (1.10x_E + 0.88x_O) \\ 0.08x_E + 0.04x_O \leq 600 \\ (1.2x_E + 0.6x_O) + (1.92x_E + 1.68x_O) + (1.10x_E + 0.88x_O) \leq 110000 \end{cases}$$

Il primo addendo dell'ultimo vincolo é il costo della manodopera.

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

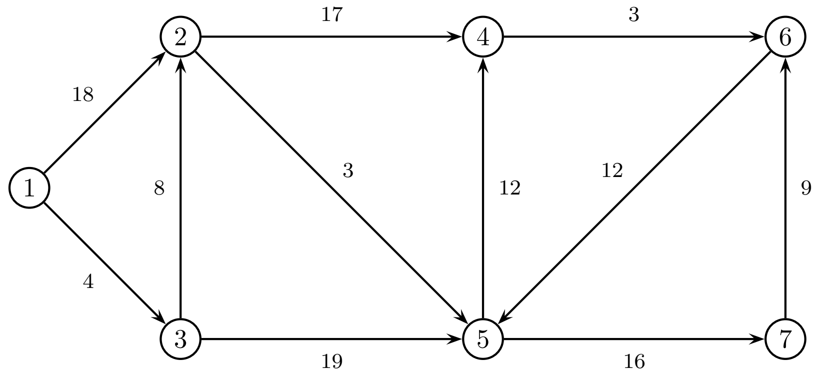



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,3) (3,6) (4,6) (5,6) | (3,5) | $x = (-3,\ 6,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 7,\ 6,\ -3,\ 5)$ | NO | SI |
| (1,3) (2,3) (2,4) (3,5) (4,6) | (3,4) | $\pi = (0,\ 0,\ 10,\ 7,\ 15,\ 10)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

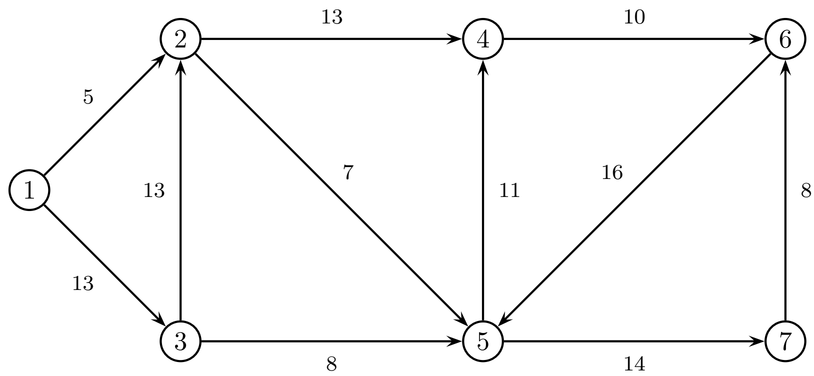
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (2,3) (2,6) (3,4) (3,5) | (1,3) (2,3) (2,6) (3,4) (3,5) |
| Archi di U | (5,6) | (5,6) |
| $x$ | $(3,\ 0,\ 3,\ 0,\ 3,\ 3,\ 7,\ 0,\ 0,\ 5)$ | $(0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 3,\ 3,\ 7,\ 0,\ 0,\ 5)$ |
| $\pi$ | $(0,\ 7,\ 17,\ 20,\ 22,\ 14)$ | $(0,\ 0,\ 10,\ 13,\ 15,\ 7)$ |
| Arco entrante | (1,3) | (2,4) |
| $\vartheta^+,\ \vartheta^-$ | 7 , 3 | 6 , 0 |
| Arco uscente | (1,2) | (2,3) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 2 | | 5 | | 4 | | 6 | | 7 | |
| nodo 2 | 18 | 1 | 12 | 3 | 12 | 3 | 12 | 3 | 12 | 3 | 12 | 3 | 12 | 3 |
| nodo 3 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 |
| nodo 4 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 29 | 2 | 27 | 5 | 27 | 5 | 27 | 5 | 27 | 5 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 23 | 3 | 15 | 2 | 15 | 2 | 15 | 2 | 15 | 2 | 15 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 30 | 4 | 30 | 4 | 30 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 31 | 5 | 31 | 5 | 31 | 5 | 31 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3 | | 2, 5 | | 4, 5 | | 4, 7 | | 6, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 2 - 5 - 7 | 5 | (5, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0) | 5 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 8 | (5, 8, 0, 5, 0, 8, 0, 0, 13, 0, 0) | 13 |
| 1 - 3 - 2 - 5 - 7 | 1 | (5, 9, 0, 6, 1, 8, 0, 0, 14, 0, 0) | 14 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N_t = \{7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 12\,x_1 + 8\,x_2 \\ 19\,x_1 + 14\,x_2 \leq 69 \\ 12\,x_1 + 18\,x_2 \leq 59 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{69}{19}, 0\right)$ $v_S(P) = 43$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (3, 0)$ $v_I(P) = 36$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $x_1 \leq 3$

$r = 4$ $7\,x_1 + 5\,x_2 \leq 25$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 10 | 41 | 62 | 92 |
| **2** | | 27 | 54 | 56 |
| **3** | | | 11 | 13 |
| **4** | | | | 94 |

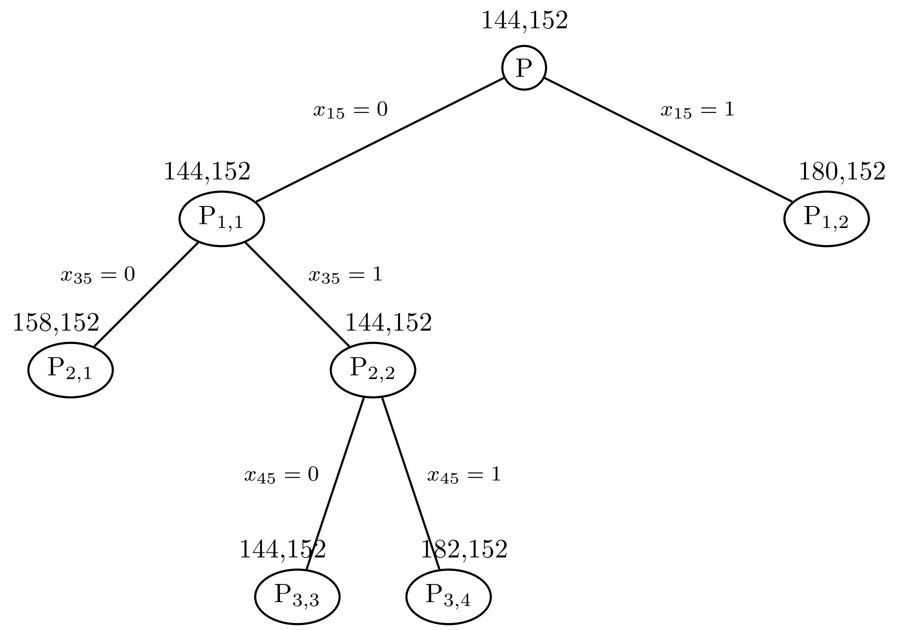
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: ( 1 , 2 ) ( 2 , 4 ) ( 2 , 5 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) $v_I(P) = 144$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

ciclo: 4 – 3 – 5 – 2 – 1 $v_S(P) = 152$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{15}$, $x_{35}$, $x_{45}$.



**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 + x_2^2 - 9 \leq 0, \quad -x_1 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| (0, 1) | $(0, 2)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| (-0.0526,8.99) | (-2.1052,0) | | SI | SI | NO | NO | NO |
| (0, 3) | $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| (0, −3) | $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -2\, x_1^2 - 6\, x_1\, x_2 - 4\, x_2^2 - 6\, x_1 - x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(1, 3)$ , $(5, 3)$ , $(2, -3)$ e $(-2, 1)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{11}{3}, 3\right)$ | $(0, 1)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\left(\frac{116}{3}, 0\right)$ | $\frac{1}{29}$ | $\frac{1}{29}$ | $(5, 3)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 22/02/18**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 9\ y_1 + 9\ y_2 + y_3 + 2\ y_4 + 4\ y_5 + 5\ y_6 \\ 3\ y_1 + 3\ y_2 - y_3 - 2\ y_4 - y_5 - 2\ y_6 = -4 \\ -y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + 2\ y_5 + y_6 = 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {1, 3} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {2,6} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Un'azienda produce olio extravergine (E) e olio di oliva (O) i cui prezzi di vendita al chilo sono rispettivamente di 5.30 euro e di 3.95 euro. La produzione di olio richiede due tipi di olive (O1 e O2) che l'azienda acquista rispettivamente al costo di 2.40 euro/kg e 2.20 euro/kg. La manodopera è disponibile in al più 600 ore-uomo con un costo di 15 euro/ora. La tabella seguente indica i kg di olive e le ore di manodopera necessarie per la produzione di un litro di ciascun tipo di olio.

| | O1 | O2 | manodopera |
|---|---|---|---|
| E | 0.8 | 0.5 | 0.08 |
| O | 0.7 | 0.4 | 0.04 |

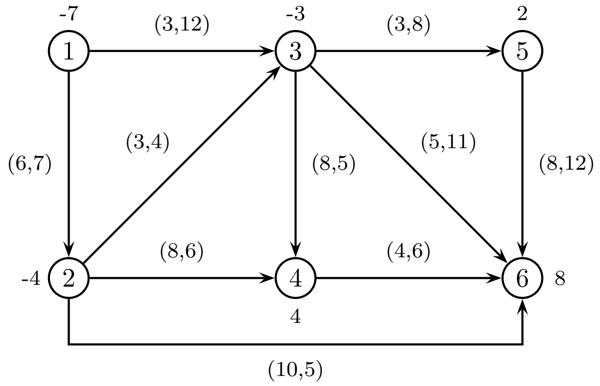
Sapendo che il budget disponibile per l'acquisto delle olive e della manodopera è pari a 110000 euro, si determini la produzione di olio E e di olio O che massimizzi il profitto dell'azienda.

variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                                    intcon=

A=                                    b=

Aeq=                                  beq=

lb=                                   ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

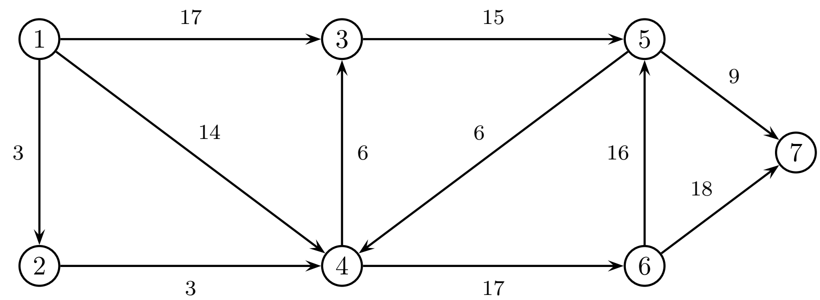



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (2,4) (3,4) (3,6) (5,6) | (2,6) | $x =$ | | |
| (1,3) (2,3) (2,4) (4,6) (5,6) | (3,4) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

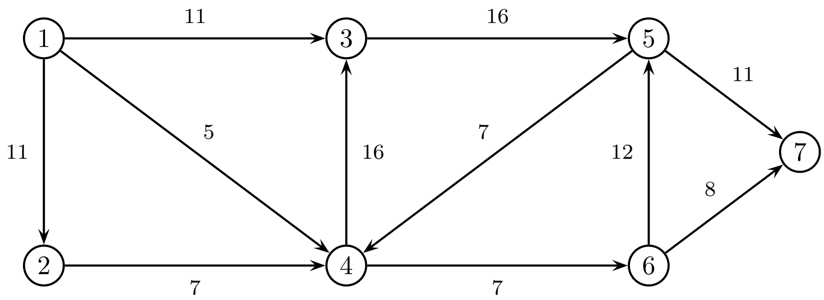
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (3,6) | |
| Archi di U | (2,3) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max \ 6\, x_1 + 14\, x_2 \\ 17\, x_1 + 9\, x_2 \leq 56 \\ 6\, x_1 + 11\, x_2 \leq 50 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 29 | 34 | 77 | 57 |
| **2** | | 28 | 104 | 71 |
| **3** | | | 23 | 26 |
| **4** | | | | 20 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

| | |
|---|---|
| 4–albero: | $v_I(P) =$ |

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

| | |
|---|---|
| ciclo: | $v_S(P) =$ |

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{34}$, $x_{24}$, $x_{45}$.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_2^2 + 4x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 - 36 \leq 0, \quad x_1 - x_2 + 5 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| | $\left(\frac{3}{2}, -22\right)$ | | | | | | |
| | $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ | | | | | | |
| | $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ | | | | | | |
| | $(0, -4))$ | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -2\ x_1^2 + 4\ x_2^2 + x_1 - 7\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(-3, -2)$ , $(-2, 1)$ , $(3, -3)$ e $(3, 4)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(3, -\frac{2}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ 9\ y_1 + 9\ y_2 + y_3 + 2\ y_4 + 4\ y_5 + 5\ y_6 \\ 3\ y_1 + 3\ y_2 - y_3 - 2\ y_4 - y_5 - 2\ y_6 = -4 \\ -y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + 2\ y_5 + y_6 = 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (3,\ 0)$ | SI | NO |
| $\{1,\ 3\}$ | $y = \left(-\frac{7}{4},\ 0,\ -\frac{5}{4},\ 0,\ 0,\ 0\right)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

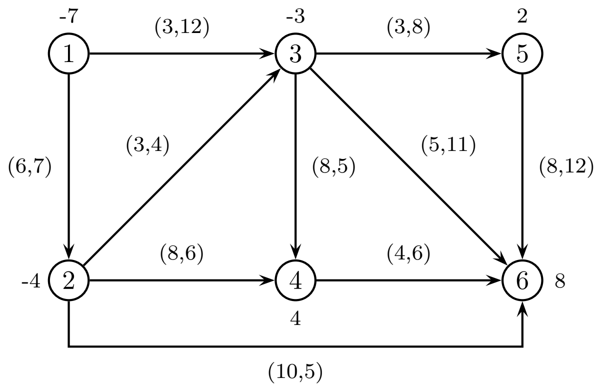
| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{2,\ 6\}$ | $\left(\frac{4}{5},\ \frac{33}{5}\right)$ | $\left(0,\ \frac{2}{5},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{13}{5}\right)$ | 4 | $\frac{13}{5}$ | 6 |
| 2° iterazione | $\{2,\ 4\}$ | $\left(\frac{7}{5},\ \frac{24}{5}\right)$ | $\left(0,\ \frac{2}{5},\ 0,\ \frac{13}{5},\ 0,\ 0\right)$ | 5 | $\frac{2}{3},\ \frac{13}{7}$ | 2 |

**Esercizio 3.**

$$\begin{cases} \max\ (5.3x_E + 3.95x_O) - (1.2x_E + 0.6x_O) - (1.92x_E + 1.68x_O) - (1.10x_E + 0.88x_O) \\ 0.08x_E + 0.04x_O \leq 600 \\ (1.2x_E + 0.6x_O) + (1.92x_E + 1.68x_O) + (1.10x_E + 0.88x_O) \leq 110000 \end{cases}$$

Il primo addendo dell'ultimo vincolo é il costo della manodopera.

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

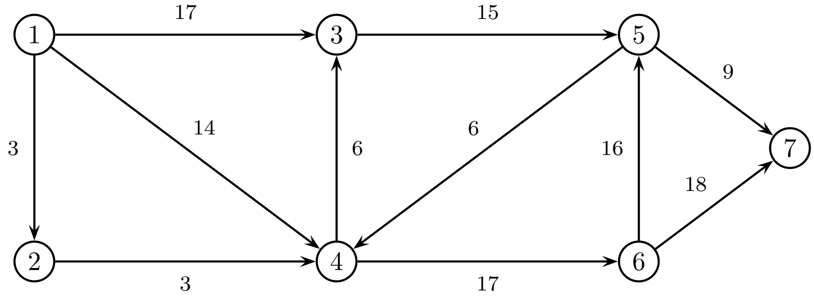



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (2,4) (3,4) (3,6) (5,6) | (2,6) | $x = (7,\ 0,\ 0,\ 6,\ 5,\ -2,\ 0,\ 5,\ 0,\ -2)$ | NO | SI |
| (1,3) (2,3) (2,4) (4,6) (5,6) | (3,4) | $\pi = (0,\ 0,\ 3,\ 8,\ 4,\ 12)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

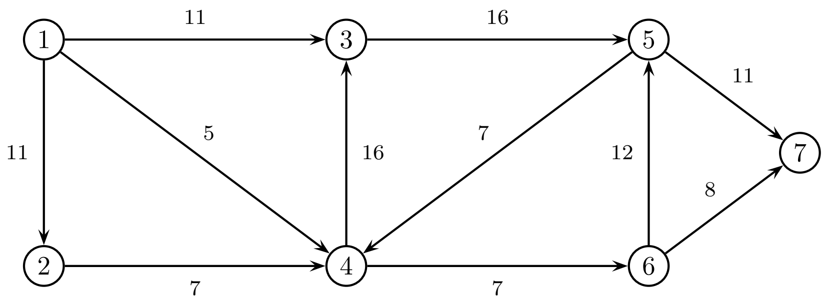
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (3,6) | (1,3) (2,3) (3,4) (3,5) (3,6) |
| Archi di U | (2,3) | |
| $x$ | $(0,\ 7,\ 4,\ 0,\ 0,\ 4,\ 2,\ 8,\ 0,\ 0)$ | $(0,\ 7,\ 4,\ 0,\ 0,\ 4,\ 2,\ 8,\ 0,\ 0)$ |
| $\pi$ | $(0,\ 6,\ 3,\ 11,\ 6,\ 8)$ | $(0,\ 0,\ 3,\ 11,\ 6,\ 8)$ |
| Arco entrante | (2,3) | (2,4) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 5 , 0 | 6 , 4 |
| Arco uscente | (1,2) | (2,3) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 2 | | 4 | | 3 | | 6 | | 5 | | 7 | |
| nodo 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| nodo 3 | 17 | 1 | 17 | 1 | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 |
| nodo 4 | 14 | 1 | 6 | 2 | 6 | 2 | 6 | 2 | 6 | 2 | 6 | 2 | 6 | 2 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 27 | 3 | 27 | 3 | 27 | 3 | 27 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 23 | 4 | 23 | 4 | 23 | 4 | 23 | 4 | 23 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 41 | 6 | 36 | 5 | 36 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 3, 4 | | 3, 6 | | 5, 6 | | 5, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 5 - 7 | 11 | (0, 11, 0, 0, 11, 0, 0, 0, 11, 0, 0) | 11 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 5 | (0, 11, 5, 0, 11, 0, 5, 0, 11, 0, 5) | 16 |
| 1 - 2 - 4 - 6 - 7 | 2 | (2, 11, 5, 2, 11, 0, 7, 0, 11, 0, 7) | 18 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad N_t = \{6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 6\ x_1 + 14\ x_2 \\ 17\ x_1 + 9\ x_2 \leq 56 \\ 6\ x_1 + 11\ x_2 \leq 50 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

| | |
|---|---|
| sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \frac{50}{11}\right)$ | $v_S(P) = 63$ |

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

| | |
|---|---|
| sol. ammissibile = $(0, 4)$ | $v_I(P) = 56$ |

c) Calcolare un taglio di Gomory.

| | |
|---|---|
| $r = 2$ | $x_2 \leq 4$ |
| $r = 3$ | $x_1 + 2\,x_2 \leq 9$ |

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 29 | 34 | 77 | 57 |
| **2** | | 28 | 104 | 71 |
| **3** | | | 23 | 26 |
| **4** | | | | 20 |

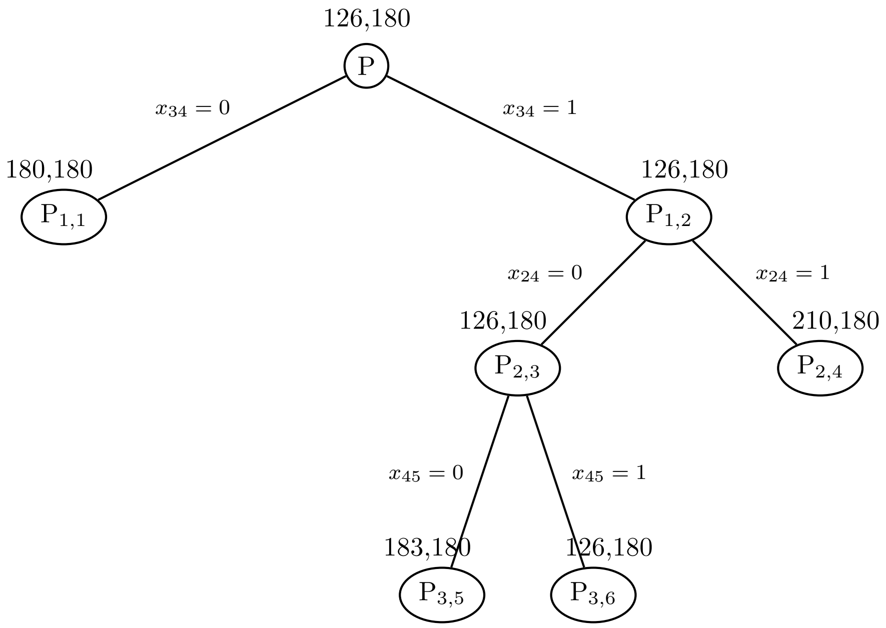
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

| | |
|---|---|
| 4–albero: ( 1 , 2 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) ( 4 , 5 ) | $v_I(P) = 126$ |

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4.

| | |
|---|---|
| ciclo: 4 − 5 − 3 − 2 − 1 | $v_S(P) = 180$ |

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{34}$, $x_{24}$, $x_{45}$.




**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_2^2 + 4x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 - 36 \leq 0, \quad x_1 - x_2 + 5 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(6,\ 11)$ | $\left(\frac{3}{2}, -22\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(-6,\ -1)$ | $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ | | NO | NO | NO | SI | NO |
| $(-6,\ 0)$ | $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(-3,\ 2)$ | $(0, -4)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -2\ x_1^2 + 4\ x_2^2 + x_1 - 7\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(-3,-2)$ , $(-2,1)$ , $(3,-3)$ e $(3,4)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(3,-\frac{2}{3}\right)$ | $(1,0)$ | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\left(0,\dfrac{37}{3}\right)$ | $\dfrac{14}{37}$ | $\dfrac{1}{8}$ | $\left(3,\dfrac{7}{8}\right)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 22/09/16**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ -8\, y_1 - 20\, y_2 + 8\, y_3 + 40\, y_4 + 4\, y_5 - y_6 \\ -2\, y_1 - 4\, y_2 + 8\, y_4 - 2\, y_5 - y_6 = -2 \\ y_1 + 3\, y_2 - y_3 - y_4 - y_5 = -3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {1, 6} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {2,3} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una ditta produce tre tipi di finestre (P1, P2, P3) utilizzando tre diversi materiali (M1, M2, M3). La seguente tabella riporta le quantità (in Kg) di ciascun materiale richiesta per produrre una finestra e la quantità massima (in Kg) di ciascun materiale che si può acquistare mensilmente:

| | M1 | M2 | M3 |
|---|---|---|---|
| P1 | 0.2 | 0.8 | 0.4 |
| P2 | 0.4 | 0.2 | 0.3 |
| P3 | 0.3 | 0.1 | 0.2 |
| quantità massima | 3000 | 1500 | 4000 |

Nella seguente tabella sono riportate, per ogni finestra, le ore necessarie per la produzione, i prezzi di vendita (in Euro) e le quantità minime da produrre:

| | P1 | P2 | P3 |
|---|---|---|---|
| ore lavorative | 1 | 0.8 | 0.5 |
| prezzo di vendita | 24 | 20 | 12 |
| quantità minime | 1000 | 2000 | 1200 |

Determinare la produzione mensile in modo da massimizzare il ricavo, tenendo conto che il numero di ore impiegate per la lavorazione della finestra P1 non deve superare il 30% del totale delle ore necessarie per la lavorazione di tutte le finestre fabbricate.

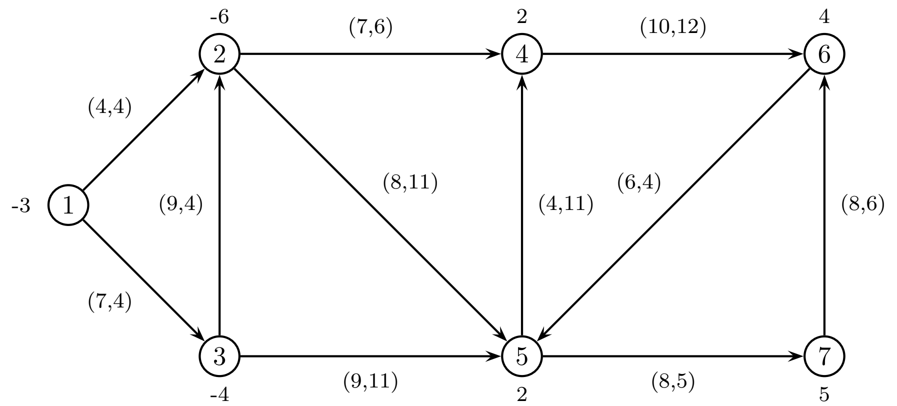
variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                     b=

Aeq=                                   beq=

lb=                                    ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

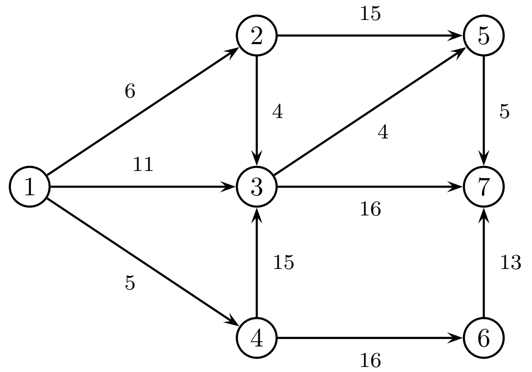



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (2,4) (2,5) (3,2) (5,7) (7,6) | (3,5) | $x =$ | | |
| (1,2) (2,4) (3,2) (3,5) (5,7) (7,6) | (4,6) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

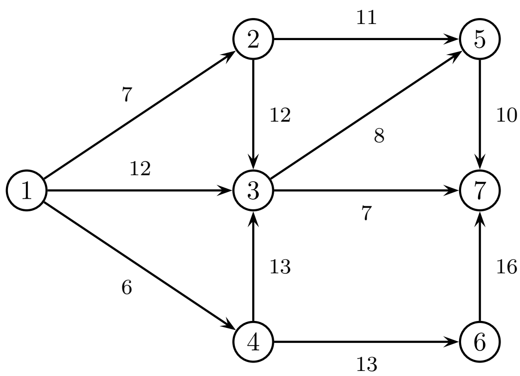
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (2,5) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6) | |
| Archi di U | (5,7) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 8\ x_1 + 6\ x_2 \\ 17\ x_1 + 16\ x_2 \leq 67 \\ 8\ x_1 + 19\ x_2 \leq 61 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 701 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 12 | 18 | 19 | 22 | 6 | 15 | 14 |
| Volumi | 686 | 375 | 243 | 83 | 534 | 516 | 200 |

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 + x_2 + 1 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(-\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ | | | | | | | |
| (0,-1) | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -4\ x_1^2 - 2\ x_2^2 - 9\ x_1 - 3\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(4, -2)$ , $(3, 4)$ , $(0, -2)$ e $(-4, 2)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ -8\ y_1 - 20\ y_2 + 8\ y_3 + 40\ y_4 + 4\ y_5 - y_6 \\ -2\ y_1 - 4\ y_2 + 8\ y_4 - 2\ y_5 - y_6 = -2 \\ y_1 + 3\ y_2 - y_3 - y_4 - y_5 = -3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (2,\ -4)$ | SI | NO |
| $\{1,\ 6\}$ | $y = (-3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 8)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

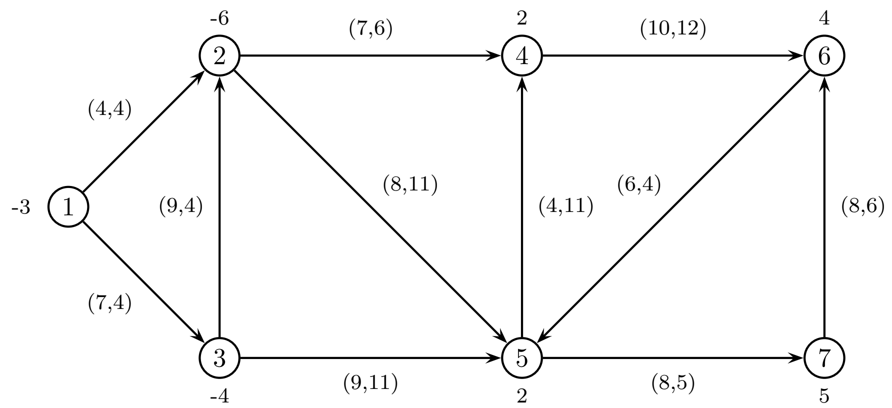
| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{2,\ 3\}$ | $(-1,\ -8)$ | $\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{9}{2},\ 0,\ 0,\ 0\right)$ | 1 | $1,\ 9$ | 2 |
| 2° iterazione | $\{1,\ 3\}$ | $(0,\ -8)$ | $(1,\ 0,\ 4,\ 0,\ 0,\ 0)$ | 5 | $1,\ 2$ | 1 |

**Esercizio 3.**

COMANDI DI MATLAB

```
c=-[24;20;12]

A=[0.2 0.4 0.3;0.8 0.2 0.1;0.4 0.3 0.2; 0.7 -0.24 -0.15]        b=[3000;1500;4000;0]

Aeq=[]                                                          beq=[]

lb=[1000; 2000; 1200]                                           ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

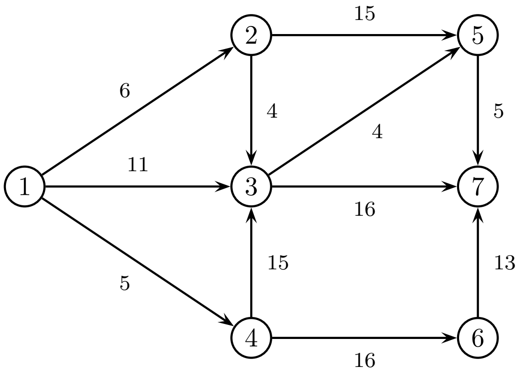



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (2,4) (2,5) (3,2) (5,7) (7,6) | (3,5) | $x = (3,\ 0,\ 2,\ 0,\ -7,\ 11,\ 0,\ 0,\ 9,\ 0,\ 4)$ | NO | SI |
| (1,2) (2,4) (3,2) (3,5) (5,7) (7,6) | (4,6) | $\pi = (0,\ 4,\ -5,\ 11,\ 4,\ 20,\ 12)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

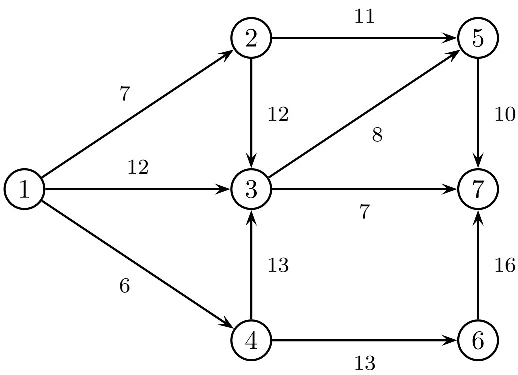
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (2,5) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6) | (1,2) (2,5) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6) |
| Archi di U | (5,7) | (2,4) (5,7) |
| $x$ | $(3,\ 0,\ 0,\ 9,\ 0,\ 4,\ 4,\ 6,\ 5,\ 0,\ 0)$ | $(3,\ 0,\ 6,\ 3,\ 0,\ 4,\ 4,\ 0,\ 5,\ 0,\ 0)$ |
| $\pi$ | $(0,\ 4,\ 3,\ 16,\ 12,\ 26,\ 18)$ | $(0,\ 4,\ 3,\ 16,\ 12,\ 26,\ 18)$ |
| Arco entrante | (2,4) | (5,7) |
| $\vartheta^+,\ \vartheta^-$ | 6 , 6 | 8 , 0 |
| Arco uscente | (2,4) | (7,6) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 4 | | 2 | | 3 | | 5 | | 7 | | 6 | |
| nodo 2 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 |
| nodo 3 | 11 | 1 | 11 | 1 | 10 | 2 | 10 | 2 | 10 | 2 | 10 | 2 | 10 | 2 |
| nodo 4 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 21 | 2 | 14 | 3 | 14 | 3 | 14 | 3 | 14 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 21 | 4 | 21 | 4 | 21 | 4 | 21 | 4 | 21 | 4 | 21 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 26 | 3 | 19 | 5 | 19 | 5 | 19 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 3, 6 | | 3, 5, 6 | | 5, 6, 7 | | 6, 7 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 7 | (0, 7, 0, 0, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0) | 7 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 7 | (7, 7, 0, 0, 7, 0, 7, 0, 0, 7, 0) | 14 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 3 | (7, 10, 0, 0, 7, 3, 7, 0, 0, 10, 0) | 17 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 6 | (7, 10, 6, 0, 7, 3, 7, 0, 6, 10, 6) | 23 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max \ 8\ x_1 + 6\ x_2 \\ 17\ x_1 + 16\ x_2 \le 67 \\ 8\ x_1 + 19\ x_2 \le 61 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\frac{67}{17}, 0\right)$ $\qquad$ $v_S(P) = 31$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $(3, 0)$ $\qquad$ $v_I(P) = 24$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad$ $x_1 \le 3$

$r = 4$ $\qquad$ $9\,x_1 + 8\,x_2 \le 35$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 701 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 12 | 18 | 19 | 22 | 6 | 15 | 14 |
| Volumi | 686 | 375 | 243 | 83 | 534 | 516 | 200 |

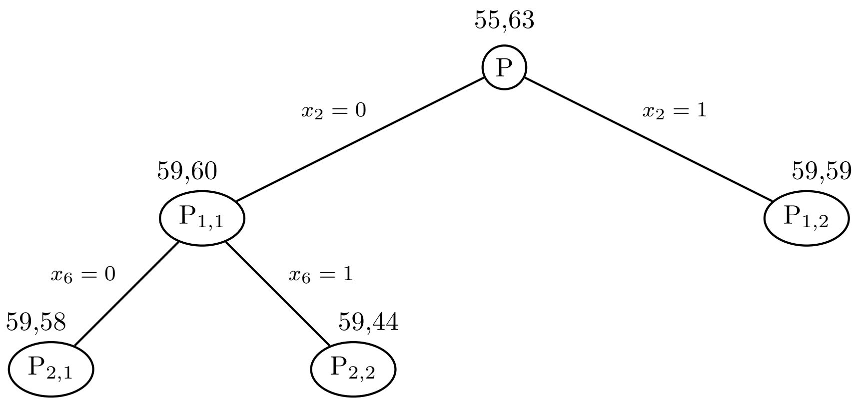
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $(0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ $\qquad$ $v_I(P) = 55$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(0, \frac{7}{15}, 1, 1, 0, 0, 1\right)$ $\qquad$ $v_S(P) = 63$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima = $(0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$ $\qquad$ valore ottimo = 59

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 + x_2 + 1 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $\left(\dfrac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ | 1 | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $\left(-\dfrac{\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ | 1 | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(0,\ -1)$ | 4 | | NO | NO | NO | NO | SI |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -4\ x_1^2 - 2\ x_2^2 - 9\ x_1 - 3\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(4,-2)$ , $(3,4)$ , $(0,-2)$ e $(-4,2)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$ | $(-1,-1)$ | $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ | $(-9,9)$ | $\dfrac{4}{27}$ | $\dfrac{4}{27}$ | $(-4,2)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 23/02/16**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -3\ x_1 - 2\ x_2 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 - 2\ x_2 \leq -13 \\ -x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ 2\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq 21 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\,2\}$ | $x =$ | | |
| $\{2,\,3\}$ | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {4,5} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

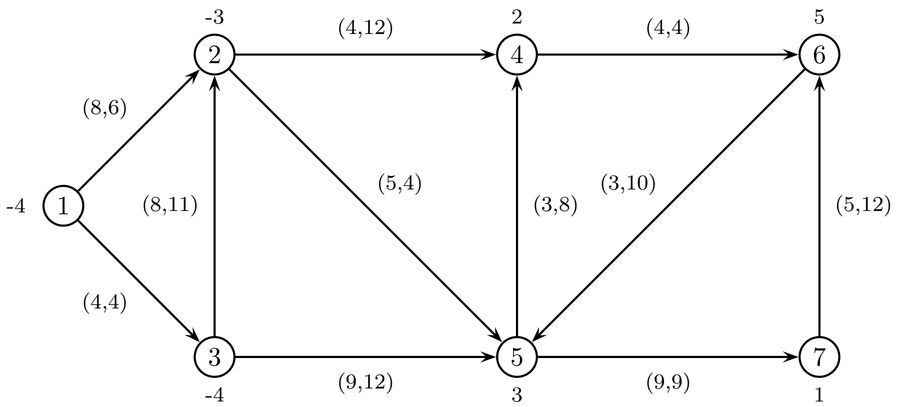
**Esercizio 3.** Una ditta produce 3 tipi di composti chimici A,B e C. Per comporre B e C utilizza un solvente, 0.25 kg per ogni chilo prodotto di B e 0.50 kg. per ogni chilo di C, che può acquistare al prezzo di 5 euro al kg fino ad un massimo di 1000 kg. I costi di manodopera ed il prezzo di vendita sono rispettivamente 12 e 25 per A, 5 e 20 per B, 4 e 30 per C. Determinare la produzione ottima sapendo che di A bisogna produrne almeno il doppio di B e non più di C

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                      b=

Aeq=                                    beq=

lb=                                     ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

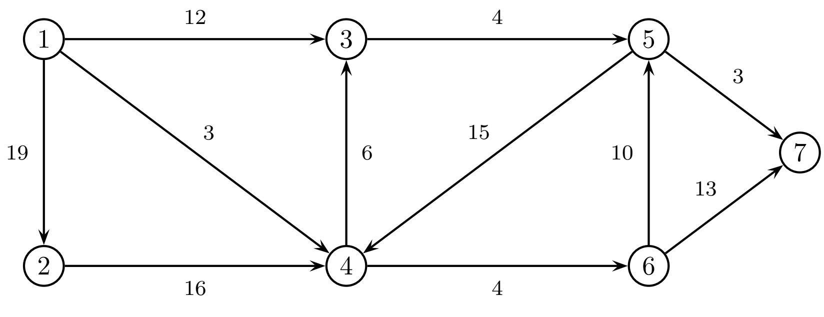



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (3,2) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6) | (1,2) | $x =$ | | |
| (1,2) (2,4) (3,5) (5,4) (6,5) (7,6) | (4,6) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

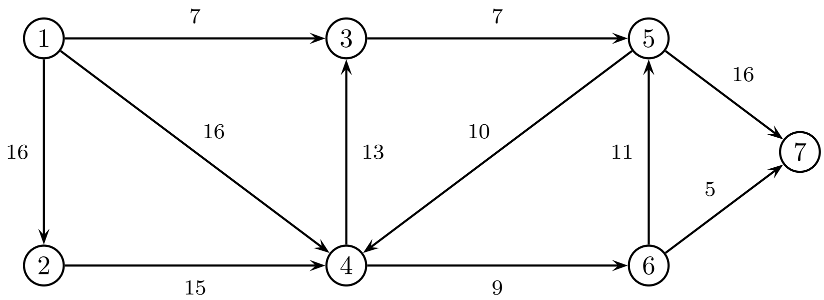
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,5) (3,5) (5,4) (5,7) (7,6) | |
| Archi di U | (4,6) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\,x_1 + 12\,x_2 \\ 16\,x_1 + 12\,x_2 \le 63 \\ 10\,x_1 + 13\,x_2 \le 44 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 518 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 15 | 10 | 17 | 7 | 22 | 18 | 24 |
| Volumi | 142 | 52 | 246 | 357 | 200 | 447 | 20 |

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0, \quad -x_1 - x_2 + 2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(0,\ 2)$ | | | | | | | |
| $(2,\ 0)$ | | | | | | | |
| $\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$ | | | | | | | |
| $(1,\ 1)$ | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ 4\, x_1^2 - 4\, x_1\, x_2 - 2\, x_2^2 + 5\, x_1 + 3\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(3,2)$ , $(3,-4)$ , $(1,-5)$ e $(-1,-2)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $(3,0)$ | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -3\ x_1 - 2\ x_2 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 - 2\ x_2 \leq -13 \\ -x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ 2\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq 21 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x = (1,\ 6)$ | SI | NO |
| $\{2, 3\}$ | $y = \left(0,\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{3},\ 0,\ 0,\ 0\right)$ | SI | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

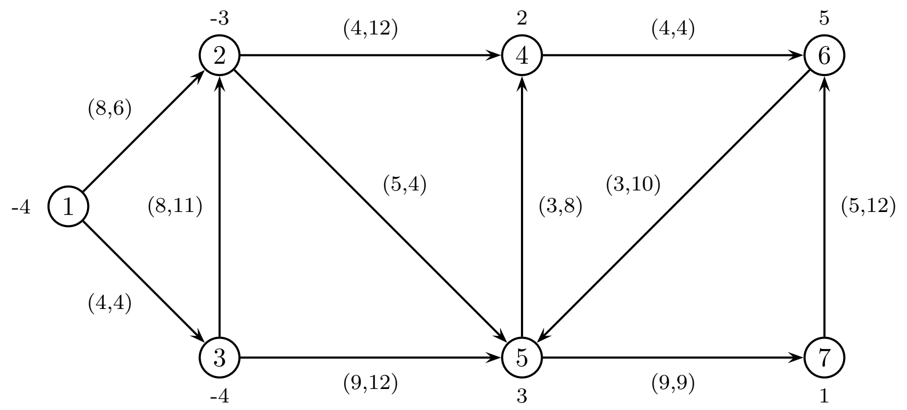
| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{4, 5\}$ | $(4,\ 7)$ | $\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{7}{4},\ \frac{1}{4},\ 0\right)$ | 4 | 4 | 2 |
| 2° iterazione | $\{2, 5\}$ | $(3,\ 5)$ | $\left(0,\ \frac{7}{5},\ 0,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0\right)$ | 5 | $5,\ \frac{20}{3}$ | 1 |

**Esercizio 3.**

COMANDI DI MATLAB

```
c=[ -13 ; -13.75 ; -23.5 ]

A=[ 0 0.25 0.5 ; -1 2 0 ; 1 0 -1 ]        b=[ 1000 ; 0 ; 0 ]

Aeq=[]                                      beq=[]

lb=[0 ; 0 ; 0]                              ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

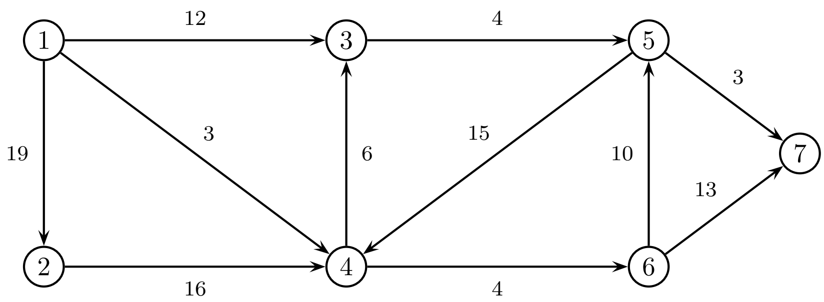



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (3,2) (3,5) (4,6) (5,4) (7,6) | (1,2) | $x = (6,\ -2,\ 0,\ 0,\ -9,\ 11,\ 6,\ 8,\ 0,\ 0,\ -1)$ | NO | SI |
| (1,2) (2,4) (3,5) (5,4) (6,5) (7,6) | (4,6) | $\pi = (0,\ 8,\ 0,\ 12,\ 9,\ 6,\ 1)$ | NO | SI |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

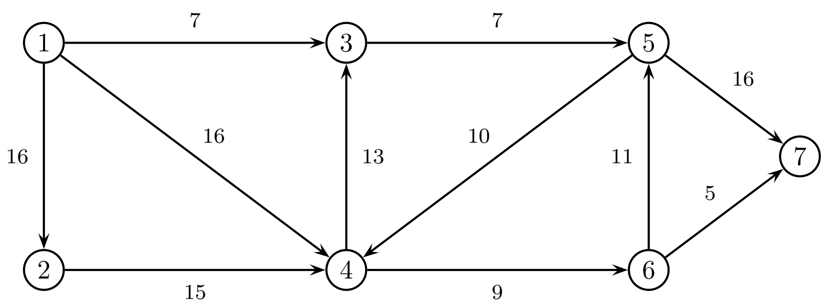
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,5) (3,5) (5,4) (5,7) (7,6) | (1,3) (2,4) (3,5) (5,4) (5,7) (7,6) |
| Archi di U | (4,6) | (4,6) |
| $x$ | (0, 4, 0, 3, 0, 8, 4, 6, 2, 0, 1) | (0, 4, 3, 0, 0, 8, 4, 3, 2, 0, 1) |
| $\pi$ | (0, 8, 4, 16, 13, 27, 22) | (0, 12, 4, 16, 13, 27, 22) |
| Arco entrante | (2,4) | (1,2) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 12 , 3 | 6 , 3 |
| Arco uscente | (2,5) | (5,4) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 4 | | 6 | | 3 | | 5 | | 7 | | 2 | |
| nodo 2 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 |
| nodo 3 | 12 | 1 | 9 | 4 | 9 | 4 | 9 | 4 | 9 | 4 | 9 | 4 | 9 | 4 |
| nodo 4 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 17 | 6 | 13 | 3 | 13 | 3 | 13 | 3 | 13 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 7 | 4 | 7 | 4 | 7 | 4 | 7 | 4 | 7 | 4 | 7 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 20 | 6 | 20 | 6 | 16 | 5 | 16 | 5 | 16 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 3, 6 | | 2, 3, 5, 7 | | 2, 5, 7 | | 2, 7 | | 2 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 5 - 7 | 7 | (0, 7, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 7, 0, 0) | 7 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 5 | (0, 7, 5, 0, 7, 0, 5, 0, 7, 0, 5) | 12 |
| 1 - 4 - 6 - 5 - 7 | 4 | (0, 7, 9, 0, 7, 0, 9, 0, 11, 4, 5) | 16 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad N_t = \{5, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 5\ x_1 + 12\ x_2 \\ 16\ x_1 + 12\ x_2 \le 63 \\ 10\ x_1 + 13\ x_2 \le 44 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{44}{13}\right)$ $\quad v_S(P) = 40$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 3)$ $\quad v_I(P) = 36$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

| | |
|---|---|
| $r = 2$ | $x_2 \le 3$ |
| $r = 3$ | $x_2 \le 3$ |

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 518 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 15 | 10 | 17 | 7 | 22 | 18 | 24 |
| Volumi | 142 | 52 | 246 | 357 | 200 | 447 | 20 |

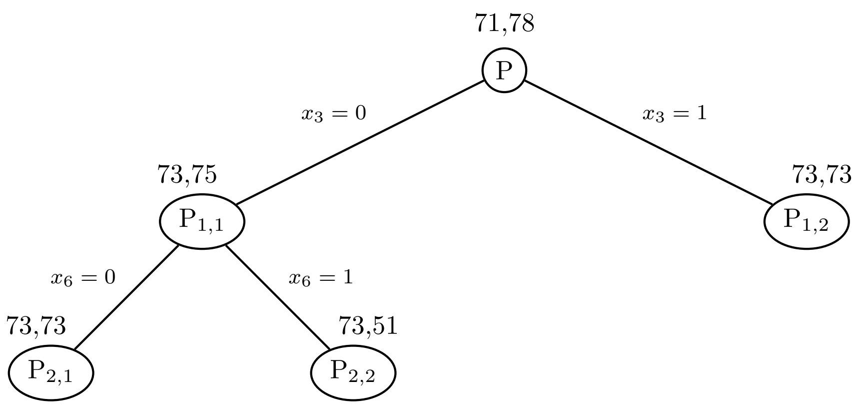
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (1, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$ $\quad v_I(P) = 71$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(1, 1, \dfrac{52}{123}, 0, 1, 0, 1\right)$ $\quad v_S(P) = 78$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima $= (0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$ $\quad$ valore ottimo $= 73$

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 - 4 \le 0, \quad -x_1 - x_2 + 2 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(0,\ 2)$ | $(5,8)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(2,\ 0)$ | $(5,8)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$ | $(1,0)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(1,\ 1)$ | $(0,-2)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ 4\ x_1^2 - 4\ x_1\, x_2 - 2\ x_2^2 + 5\ x_1 + 3\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(3,2)$ , $(3,-4)$ , $(1,-5)$ e $(-1,-2)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $(3,0)$ | $29\,x_1 - 9\,x_2$ | (3 ,-4) | $(0,-4)$ | $\frac{9}{16}$ | $\left(3,-\frac{9}{4}\right)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 23/02/17**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ -7\,y_1 + 4\,y_2 + 12\,y_3 + 6\,y_4 - 5\,y_5 + 20\,y_6 + 13\,y_7 \\ -y_1 - 2\,y_2 + y_3 - y_4 + y_5 + 3\,y_6 + 2\,y_7 = -9 \\ y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + 2\,y_5 - y_6 = -7 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {3, 4} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {2,6} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una ditta produce mattonelle in tre diversi stabilimenti (Pisa, Livorno, Pontedera) e li vende a tre imprese edili (A, B, C). Il costo di produzione delle mattonelle varia: la produzione costa 9 euro/kg nello stabilimento di Pisa, 10.5 euro/kg in quello di Livorno e 10 euro/kg in quello di Pontedera. Il costo (in euro) per spedire un kg di mattonelle da uno stabilimento ad un cliente è indicato nella seguente tabella:

| | imprese edili | | |
|---|---|---|---|
| stabilimento | A | B | C |
| Pisa | 0.25 | 0.5 | 0.6 |
| Livorno | 0.3 | 0.2 | 0.1 |
| Pontedera | 0.5 | 0.3 | 0.2 |

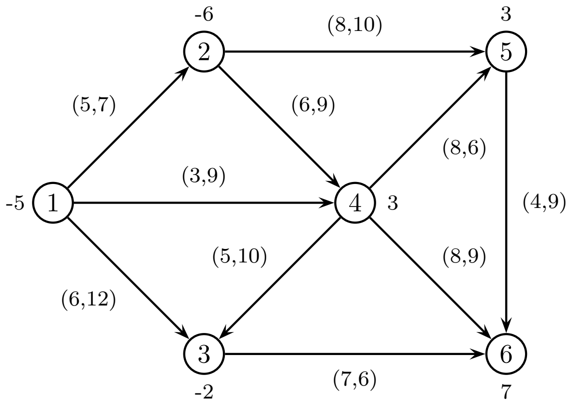
I tre stabilimenti possono produrre al massimo 8500, 9200 e 11000 kg di mattonelle al mese. In base alle previsioni sulle vendite, la domanda mensile delle tre imprese edili è pari a 5000, 8300 e 6300 kg di mattonelle. Per bilanciare la produzione si richiede che la produzione nell'impianto con costo maggiore (quello di Livorno) sia almeno la metà della produzione nell'impianto di Pisa ed almeno un terzo della produzione nell'impianto di Pontedera. Determinare quanti kg di mattonelle deve produrre la ditta in ogni stabilimento in modo da minimizzare il costo totale.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

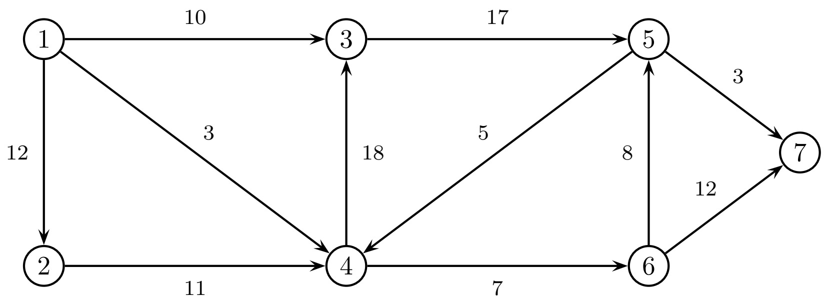



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,3) (2,4) (4,5) (4,6) | (2,5) | $x =$ | | |
| (1,2) (2,5) (3,6) (4,5) (4,6) | (1,4) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

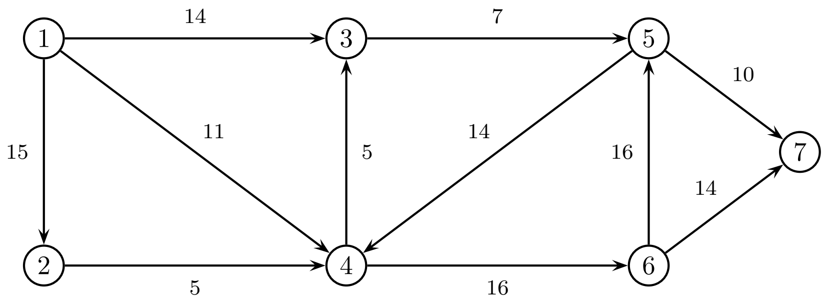
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (2,4) (2,5) (4,3) (5,6) | |
| Archi di U | (3,6) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\ x_1 + 12\ x_2 \\ 18\ x_1 + 11\ x_2 \le 49 \\ 14\ x_1 + 17\ x_2 \le 51 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 589 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 12 | 13 | 11 | 7 | 9 | 17 | 20 |
| Volumi | 138 | 16 | 347 | 93 | 80 | 355 | 424 |

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 4x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(1,\ 0)$ | | | | | | | |
| $(-1,\ 0)$ | | | | | | | |
| $(0,\ 0)$ | | | | | | | |
| $(0,\ 1)$ | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -4\ x_1 x_2 - 3\ x_1 + 6\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(4, -5)$ , $(1, -4)$ , $(0, 2)$ e $(3, 0)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(2, \frac{2}{3}\right)$ | | | | | |

## SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \min\ -7\ y_1 + 4\ y_2 + 12\ y_3 + 6\ y_4 - 5\ y_5 + 20\ y_6 + 13\ y_7 \\ -y_1 - 2\ y_2 + y_3 - y_4 + y_5 + 3\ y_6 + 2\ y_7 = -9 \\ y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + 2\ y_5 - y_6 = -7 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (1,\ -6)$ | SI | NO |
| $\{3,\ 4\}$ | $y = (0,\ 0,\ -1,\ 8,\ 0,\ 0,\ 0)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso duale per il problema dell'esercizio 1.

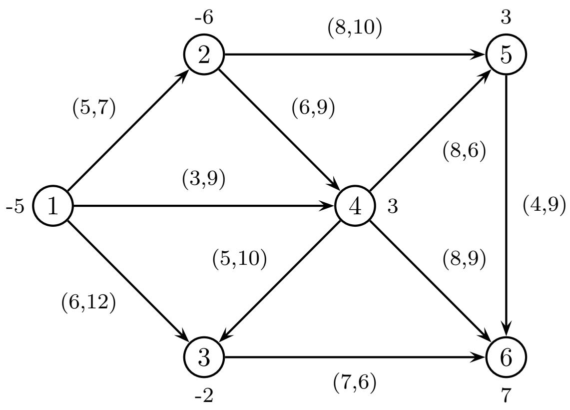
| | Base | $x$ | $y$ | Indice entrante | Rapporti | Indice uscente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{2,\ 6\}$ | $\left(\frac{16}{5},\ -\frac{52}{5}\right)$ | $(0,\ 6,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)$ | 3 | $15,\ \frac{5}{3}$ | 6 |
| 2° iterazione | $\{2,\ 3\}$ | $\left(\frac{8}{3},\ -\frac{28}{3}\right)$ | $\left(0,\ \frac{16}{3},\ \frac{5}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right)$ | 4 | $8,\ 5$ | 3 |

**Esercizio 3.** Variabili decisionali: numerati con 1, 2 e 3 gli stabilimenti, e numerati con 1, 2 e 3 i clienti, indichiamo con $x_{ij}$ la quantità di vernice prodotta dall'impianto $i$ per il cliente $j$.

Modello:

$$\begin{cases} \min\ 9.25\ x_{11} + 9.5\ x_{12} + 9.6\ x_{13} + 10.8\ x_{21} + 10.7\ x_{22} + 10.6\ x_{23} + 10.5\ x_{31} + 10.3\ x_{32} + 10.2\ x_{33} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 8500 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 9200 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 11000 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 5000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 8300 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 6300 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq (x_{11} + x_{12} + x_{13})/2 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq (x_{31} + x_{32} + x_{33})/3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

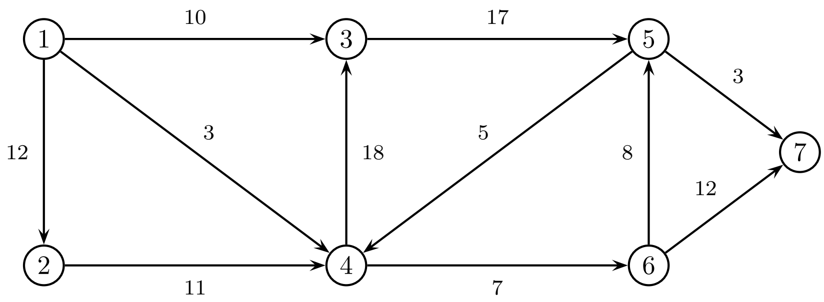



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,3) (2,4) (4,5) (4,6) | (2,5) | $x = (7,\ -2,\ 0,\ 3,\ 10,\ 0,\ 0,\ -7,\ 7,\ 0)$ | NO | SI |
| (1,2) (2,5) (3,6) (4,5) (4,6) | (1,4) | $\pi = (0,\ 5,\ 6,\ 5,\ 13,\ 13)$ | SI | SI |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

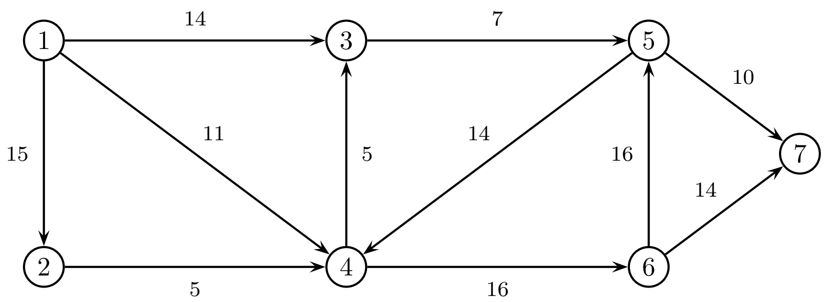
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (2,4) (2,5) (4,3) (5,6) | (1,2) (1,3) (2,4) (2,5) (5,6) |
| Archi di U | (3,6) | (3,6) |
| $x$ | (5, 0, 0, 7, 4, 6, 4, 0, 0, 1) | (1, 4, 0, 3, 4, 6, 0, 0, 0, 1) |
| $\pi$ | (0, 5, 16, 11, 13, 17) | (0, 5, 6, 11, 13, 17) |
| Arco entrante | (1,3) | (1,4) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 12 , 4 | 9 , 1 |
| Arco uscente | (4,3) | (1,2) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 4 | | 3 | | 6 | | 2 | | 5 | | 7 | |
| nodo 2 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 |
| nodo 3 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 | 10 | 1 |
| nodo 4 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 27 | 3 | 18 | 6 | 18 | 6 | 18 | 6 | 18 | 6 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 10 | 4 | 10 | 4 | 10 | 4 | 10 | 4 | 10 | 4 | 10 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 22 | 6 | 22 | 6 | 21 | 5 | 21 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 3, 6 | | 2, 5, 6 | | 2, 5, 7 | | 5, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 5 - 7 | 7 | (0, 7, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 7, 0, 0) | 7 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 11 | (0, 7, 11, 0, 7, 0, 11, 0, 7, 0, 11) | 18 |
| 1 - 2 - 4 - 6 - 7 | 3 | (3, 7, 11, 3, 7, 0, 14, 0, 7, 0, 14) | 21 |
| 1 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7 | 2 | (5, 7, 11, 5, 7, 0, 16, 0, 9, 2, 14) | 23 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3\}$ $N_t = \{4, 5, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 10\ x_1 + 12\ x_2 \\ 18\ x_1 + 11\ x_2 \leq 49 \\ 14\ x_1 + 17\ x_2 \leq 51 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{34}{19}, \frac{29}{19}\right)$ $v_S(P) = 36$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (1, 1)$ $v_I(P) = 22$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $15\, x_1 + 17\, x_2 \leq 52$
$r = 2$ $9\, x_1 + 6\, x_2 \leq 25$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 589 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 12 | 13 | 11 | 7 | 9 | 17 | 20 |
| Volumi | 138 | 16 | 347 | 93 | 80 | 355 | 424 |

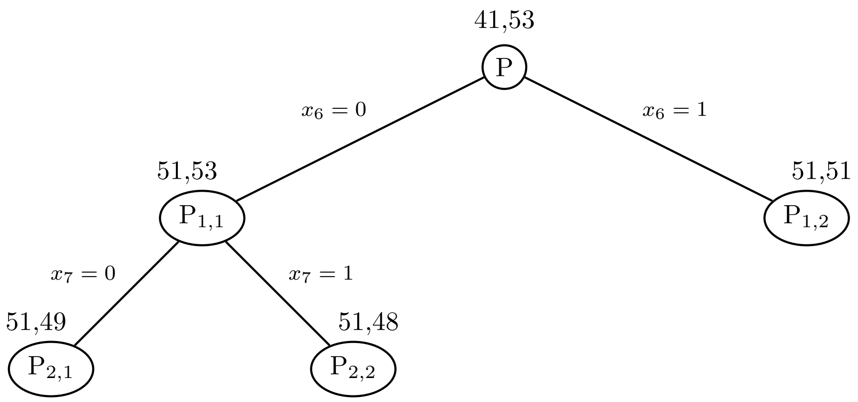
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0)$ $v_I(P) = 41$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(1, 1, 0, 1, 1, \frac{262}{355}, 0\right)$ $v_S(P) = 53$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound.* Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima $= (1, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$ valore ottimo $= 51$

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 4x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(1,\ 0)$ | $(1,4)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(-1,\ 0)$ | $(1,4)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(0,\ 0)$ | $(0,4)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(0,\ 1)$ | $(-1,0)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -4\ x_1\, x_2 - 3\ x_1 + 6\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(4,-5)$ , $(1,-4)$ , $(0,2)$ e $(3,0)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(2,\frac{2}{3}\right)$ | $\frac{-17}{3}x_1 - 2\,x_2$ | (3 ,0) | $\left(1,-\frac{2}{3}\right)$ | $\dfrac{13}{16}$ | $\left(\dfrac{45}{16},\dfrac{1}{8}\right)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 24/07/18**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema

$$\begin{cases} \max\ 7\ x_1 + 4\ x_2 \\ -x_1 + 3\ x_2 \leq 6 \\ -2\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3\ x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -2\ x_1 - 3\ x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2\ x_2 \leq 14 \end{cases}$$

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {2,5} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 2.** Una ditta produce travi in ferro del peso ciascuno di un chilogrammo. Il ferro con cui tali pezzi sono fatti deve contenere manganese e silicio: in particolare deve contenere più dello 0.45% di manganese, e tra il 3% e il 5.5% di silicio. Sono disponibili tre tipi di materiale ferroso con le seguenti caratteristiche:

| Materiale ferroso | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Silicio (%) | 4.00 | 1.00 | 0.60 |
| Manganese (%) | 0.45 | 0.50 | 0.40 |
| Costo (Euro / Kg) | 0.025 | 0.03 | 0.018 |

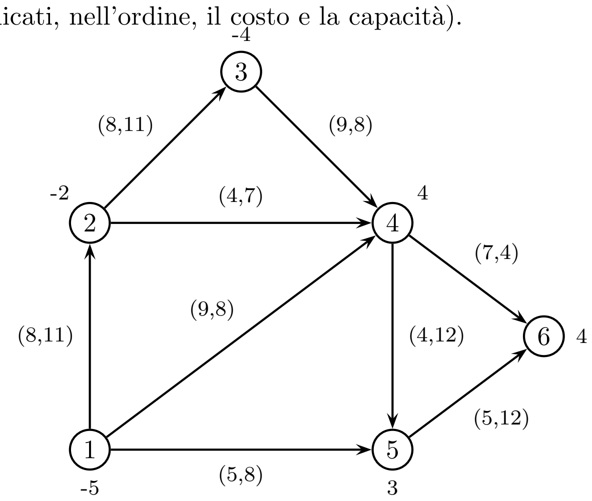
Determinare la percentuale di materiale da utilizzare per produrre una trave, in modo da minimizzare il costo del materiale usato.

variabili decisionali:
modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=                                  intcon=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 3.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).




| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,5) (2,3) (4,5) (4,6) | |
| Archi di U | (3,4) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 4.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 8\ x_1 + 12\ x_2 \\ 17\ x_1 + 13\ x_2 \geq 60 \\ 11\ x_1 + 13\ x_2 \geq 51 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

| | |
|---|---|
| sol. ottima del rilassamento = | $v_I(P) =$ |

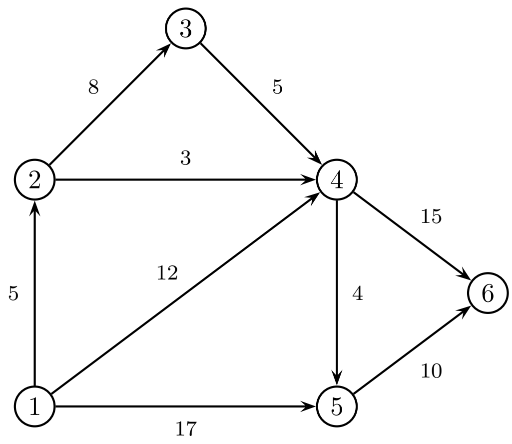
b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

| | |
|---|---|
| sol. ammissibile = | $v_S(P) =$ |

c) Calcolare un taglio di Gomory.

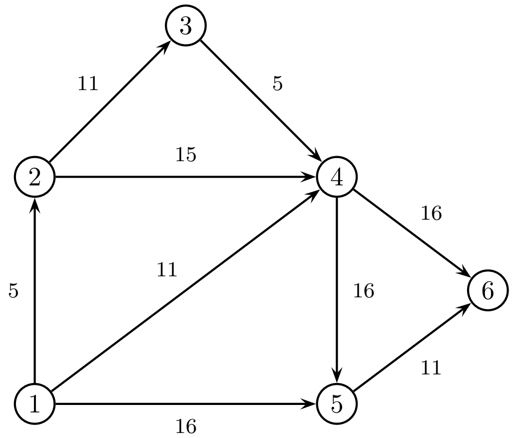
| | |
|---|---|
| $r =$ | taglio: |

**Esercizio 5.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 6.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 30 | 25 | 29 | 47 |
| **2** | | 18 | 94 | 61 |
| **3** | | | 54 | 26 |
| **4** | | | | 20 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema, istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{24}$, $x_{14}$, $x_{23}$ e dicendo se a questo punto é stato trovato l'ottimo o si dovrebbe proseguire.

**Esercizio 7.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 - x_2^2 + 4 \leq 0, \quad -x_1 + x_2 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $\left(-\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}}{5},\ -\frac{3\,\sqrt{2}\,\sqrt{5}}{5}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$ | | | | | | | |

**Esercizio 8.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 2\,x_1^2 - 6\,x_1\,x_2 + 3\,x_1 - 7\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(-4,-5)$ , $(0,5)$ , $(-5,2)$ e $(2,4)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(-2,-2)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.**

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{2,\ 5\}$ | $(-1,\ 0)$ | $\left(0,\ -\dfrac{13}{8},\ 0,\ 0,\ -\dfrac{15}{8},\ 0\right)$ | 2 | $\dfrac{120}{7},\ 8,\ \dfrac{120}{7}$ | 4 |
| 2° iterazione | $\{4,\ 5\}$ | $(2,\ -2)$ | $\left(0,\ 0,\ 0,\ \dfrac{13}{5},\ -\dfrac{11}{5},\ 0\right)$ | 5 | $35,\ 10$ | 3 |

**Esercizio 2.**

$x_A$ = percentuale di materiale A
$x_B$ = percentuale di materiale B
$x_C$ = percentuale di materiale C
$\min\ 0.025\, x_A + 0.03\, x_B + 0.018\, x_C$
$x_A + x_B + x_C = 1$
$0.04\, x_A + 0.01\, x_B + 0.006\, x_C \leq 0.055$
$0.04\, x_A + 0.01\, x_B + 0.006\, x_C \geq 0.03$
$0.0045\, x_A + 0.005\, x_B + 0.004\, x_C \geq 0.0045$
$x_A \geq 0$
$x_B \geq 0$
$x_C \geq 0$

**Esercizio 3.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti.

| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,2) (1,5) (2,3) (4,5) (4,6) | (1,2) (1,5) (2,3) (3,4) (4,6) |
| Archi di U | (3,4) | |
| $x$ | (2, 0, 3, 4, 0, 8, 0, 4, 0) | (2, 0, 3, 4, 0, 8, 0, 4, 0) |
| $\pi$ | (0, 8, 16, 1, 5, 8) | (0, 8, 16, 25, 5, 32) |
| Arco entrante | (3,4) | (1,4) |
| $\vartheta^+,\ \vartheta^-$ | 5 , 0 | 8 , 2 |
| Arco uscente | (4,5) | (1,2) |

**Esercizio 4.**

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\left(\dfrac{51}{11}, 0\right)$ $\qquad v_I(P) = 38$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo.

sol. ammissibile = $(5, 0)$ $\qquad v_S(P) = 40$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 10\, x_1 + 12\, x_2 \geq 47$
$r = 3$ $\qquad 5\, x_1 + 6\, x_2 \geq 24$

**Esercizio 5.**

| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 2 | | 4 | | 5 | | 3 | | 6 | |
| nodo 2 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 |
| nodo 3 | $+\infty$ | $-1$ | 13 | 2 | 13 | 2 | 13 | 2 | 13 | 2 | 13 | 2 |
| nodo 4 | 12 | 1 | 8 | 2 | 8 | 2 | 8 | 2 | 8 | 2 | 8 | 2 |
| nodo 5 | 17 | 1 | 17 | 1 | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 | 12 | 4 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 23 | 4 | 22 | 5 | 22 | 5 | 22 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 4, 5 | | 3, 4, 5 | | 3, 5, 6 | | 3, 6 | | 6 | | $\emptyset$ | |

| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 4 - 6 | 11 | (0, 11, 0, 0, 0, 0, 0, 11, 0) | 11 |
| 1 - 5 - 6 | 11 | (0, 11, 11, 0, 0, 0, 0, 11, 11) | 22 |
| 1 - 2 - 4 - 6 | 5 | (5, 11, 11, 0, 5, 0, 0, 16, 11) | 27 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 5\}$ $\quad N_t = \{2, 3, 4, 6\}$

**Esercizio 6.**

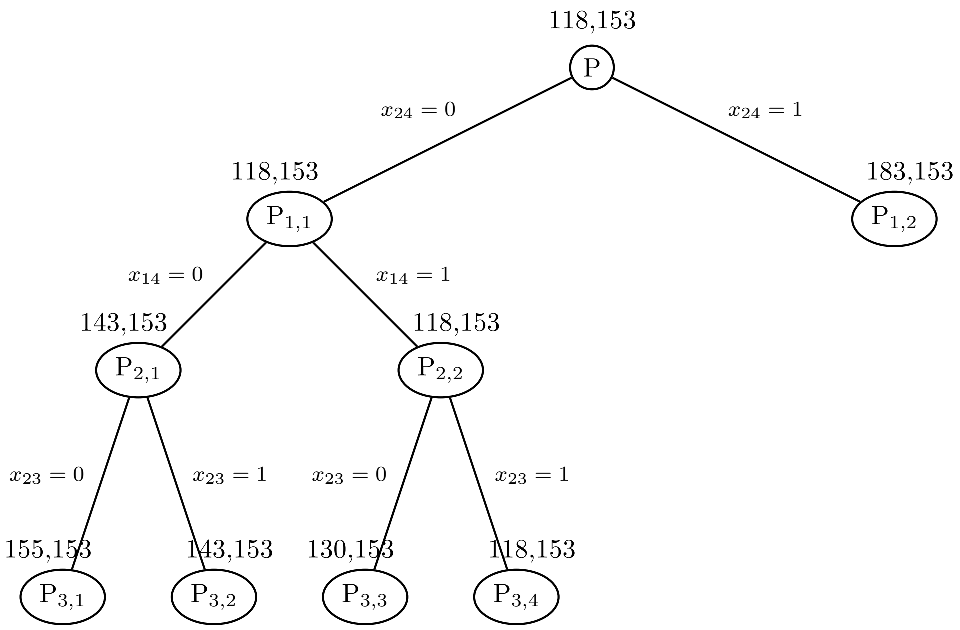
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo.

5–albero: ( 1 , 3 ) ( 1 , 4 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 5 ) ( 4 , 5 ) $\quad v_I(P) = 118$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5.

ciclo: 5 – 4 – 1 – 3 – 2 $\quad v_S(P) = 153$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{24}$, $x_{14}$, $x_{23}$ e dicendo se a questo punto é stato trovato l'ottimo o si dovrebbe proseguire.




**Esercizio 7.**

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $\left(-\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5},\ -\frac{3\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\right)$ | $\left(-\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{4}, 0\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)$ | $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |
| $\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$ | $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |

**Esercizio 8.**

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(-2, -2)$ | $(3, -2)$ | $\begin{pmatrix} 4/13 & 6/13 \\ 6/13 & 9/13 \end{pmatrix}$ | $\left(-\frac{58}{13}, -\frac{87}{13}\right)$ | $\frac{13}{29}$ | $\frac{13}{29}$ | $(-4, -5)$ |

## Esame di Ricerca Operativa del 28/01/14

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 8\,x_1 - 9\,x_2 \\ -x_1 + x_2 \le 4 \\ -5\,x_1 - 4\,x_2 \le 20 \\ x_1 + 2\,x_2 \le 2 \\ 2\,x_1 + x_2 \le 1 \\ 4\,x_1 - x_2 \le 5 \\ 5\,x_1 + x_2 \le 7 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (-4,\ 0)$ | SI | NO |
| $\{5,\ 6\}$ | $y = \left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{53}{9},\ -\frac{28}{9}\right)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{3,\ 4\}$ | $(0,\ 1)$ | $\left(0,\ 0,\ -\frac{26}{3},\ \frac{25}{3},\ 0,\ 0\right)$ | 3 | $24,\ 3,\ 6$ | 5 |
| 2° iterazione | $\{4,\ 5\}$ | $(1,\ -1)$ | $\left(0,\ 0,\ 0,\ -\frac{14}{3},\ \frac{13}{3},\ 0\right)$ | 4 | 6 | 2 |

**Esercizio 3.** Un'azienda produce tre tipi di prodotti, A, B e C, utilizzando tra le diverse materie prime anche l'alluminio. Di quest'ultima materia prima, per il prossimo mese sono disponibili dal fornitore 400 kg. Un chilogrammo di alluminio costa all'azienda 7 euro. La seguente tabella mostra i kg di alluminio richiesti per produrre un kg di A, B e C, i costi di produzione (in euro per kg di prodotto) al netto delle materie prime, e i ricavi (in euro per kg di prodotto) di vendita per ognuno dei prodotti A, B e C:

| prodotti | alluminio (kg) | costo (euro/kg) | ricavo (euro/kg) |
|---|---|---|---|
| A | 0.3 | 12 | 25 |
| B | 0.6 | 6 | 30 |
| C | 0.9 | 7 | 38 |

Determinare la produzione mensile che massimizza i profitti sapendo che per produrre A non si deve utilizzare più di 1/3 dell'alluminio utilizzato in totale.

variabili decisionali: $x_A$ = kg prodotti di A, $x_B$ = kg prodotti di B, $x_C$ = kg prodotti di C

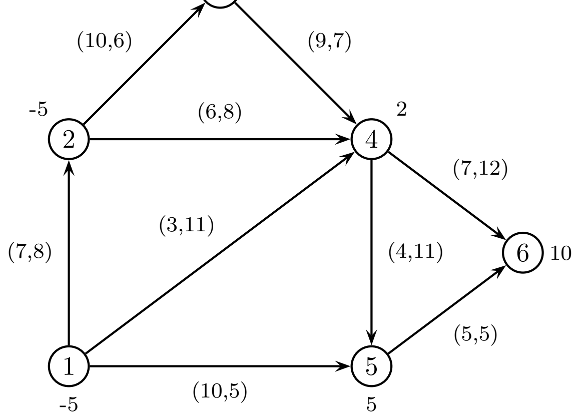
modello:

$$\begin{cases} \max\ (25-12-2.1)\,x_A + (30-6-4.2)\,x_B + (38-7-6.3)\,x_C \\ 0.3\,x_A + 0.6\,x_B + 0.9\,x_C \le 400 \\ 0.3\,x_A \le (0.3\,x_A + 0.6\,x_B + 0.9\,x_C)/3 \\ x_A \ge 0 \\ x_B \ge 0 \\ x_C \ge 0 \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

```
c = [-10.9; -19.8; -24.7]

A = [0.3 0.6 0.9; 0.2 -0.2 -0.3]                b=[400; 0]

Aeq=[]                                          beq=[]

lb=[0;0;0]                                      ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

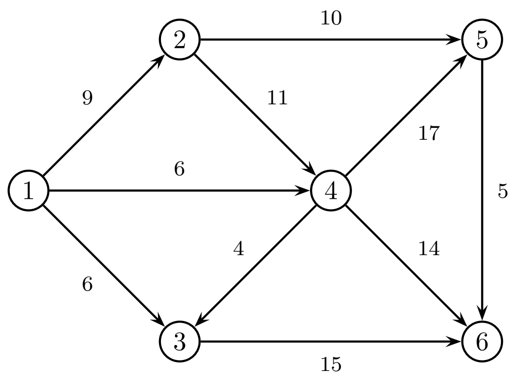



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,5) (3,4) (4,6) (5,6) | (1,4) | $x = (-5,\ 11,\ -1,\ 0,\ 0,\ 7,\ 0,\ 16,\ -6)$ | NO | SI |
| (1,4) (2,4) (3,4) (4,6) (5,6) | (2,3) | $\pi = (0,\ -3,\ -6,\ 3,\ 5,\ 10)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

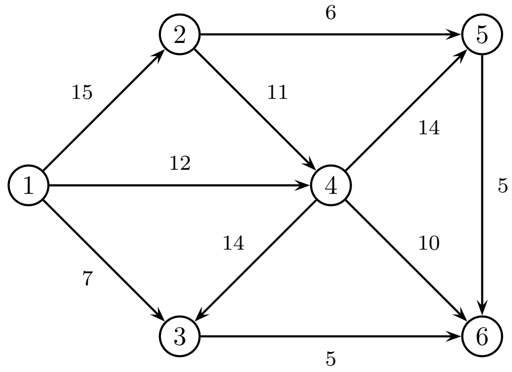
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (2,4) (3,4) (4,6) (5,6) | (1,4) (1,5) (2,4) (3,4) (4,6) |
| Archi di U | (1,5) | |
| $x$ | $(0,\ 0,\ 5,\ 0,\ 5,\ 7,\ 0,\ 10,\ 0)$ | $(0,\ 0,\ 5,\ 0,\ 5,\ 7,\ 0,\ 10,\ 0)$ |
| $\pi$ | $(0,\ -3,\ -6,\ 3,\ 5,\ 10)$ | $(0,\ -3,\ -6,\ 3,\ 10,\ 10)$ |
| Arco entrante | (1,5) | (4,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 2 , 0 | 11 , 5 |
| Arco uscente | (5,6) | (1,5) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 4 | | 2 | | 5 | | 6 | |
| nodo 2 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 |
| nodo 3 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 |
| nodo 4 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 23 | 4 | 19 | 2 | 19 | 2 | 19 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 21 | 3 | 20 | 4 | 20 | 4 | 20 | 4 | 20 | 4 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 4, 6 | | 2, 5, 6 | | 5, 6 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 6 | 5 | (0, 5, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0) | 5 |
| 1 - 4 - 6 | 10 | (0, 5, 10, 0, 0, 5, 0, 0, 10, 0) | 15 |
| 1 - 2 - 5 - 6 | 5 | (5, 5, 10, 0, 5, 5, 0, 0, 10, 5) | 20 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  $N_t = \{6\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 9\ x_1 + 9\ x_2 \\ 18\ x_1 + 5\ x_2 \geq 44 \\ 8\ x_1 + 17\ x_2 \geq 66 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{11}{7}, \frac{22}{7}\right)$  $v_I(P) = 43$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (2, 4)$  $v_S(P) = 54$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$  $17\,x_1 + 5\,x_2 \geq 43$
$r = 2$  $8\,x_1 + 16\,x_2 \geq 63$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 487 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 14 | 15 | 8 | 5 | 9 | 13 | 16 |
| Volumi | 122 | 270 | 48 | 12 | 58 | 69 | 20 |

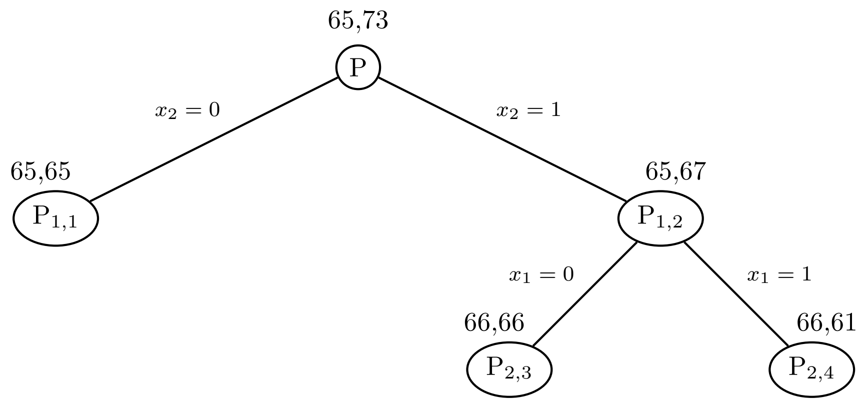
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (1, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$ $v_I(P) = 65$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(1, \frac{79}{135}, 1, 1, 1, 1, 1\right)$ $v_S(P) = 73$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima $= (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ valore ottimo $= 66$

**Esame di Ricerca Operativa del 28/01/14**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 4\ x_1 + 5\ x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ -5\ x_1 - 4\ x_2 \leq 20 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq 2 \\ 2\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ 4\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ 5\ x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (-4,\ 0)$ | SI | NO |
| $\{3,\ 5\}$ | $y = \left(0,\ 0,\ \frac{8}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0\right)$ | SI | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{2,\ 5\}$ | $(0,\ -5)$ | $\left(0,\ -\frac{8}{7},\ 0,\ 0,\ -\frac{3}{7},\ 0\right)$ | 2 | $63,\ 28,\ 21,\ 28$ | 4 |
| 2° iterazione | $\{4,\ 5\}$ | $(1,\ -1)$ | $(0,\ 0,\ 0,\ 4,\ -1,\ 0)$ | 5 | $12,\ 6$ | 3 |

**Esercizio 3.** Un'azienda produce tre tipi di prodotti, A, B e C, utilizzando tra le diverse materie prime anche l'alluminio. Di quest'ultima materia prima, per il prossimo mese sono disponibili dal fornitore 400 kg. Un chilogrammo di alluminio costa all'azienda 7 euro. La seguente tabella mostra i kg di alluminio richiesti per produrre un kg di A, B e C, i costi di produzione (in euro per kg di prodotto) al netto delle materie prime, e i ricavi (in euro per kg di prodotto) di vendita per ognuno dei prodotti A, B e C:

| prodotti | alluminio (kg) | costo (euro/kg) | ricavo (euro/kg) |
|---|---|---|---|
| A | 0.3 | 12 | 25 |
| B | 0.6 | 6 | 30 |
| C | 0.9 | 7 | 38 |

Determinare la produzione mensile che massimizza i profitti sapendo che per produrre A non si deve utilizzare più di 1/3 dell'alluminio utilizzato in totale.

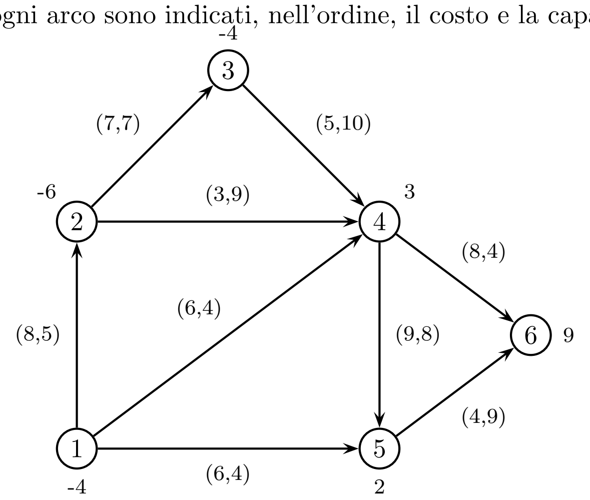
variabili decisionali: $x_A$ = kg prodotti di A, $x_B$ = kg prodotti di B, $x_C$ = kg prodotti di C

modello:
$$\begin{cases} \max\ (25-12-2.1)\ x_A + (30-6-4.2)\ x_B + (38-7-6.3)\ x_C \\ 0.3\ x_A + 0.6\ x_B + 0.9\ x_C \leq 400 \\ 0.3\ x_A \leq (0.3\ x_A + 0.6\ x_B + 0.9\ x_C)/3 \\ x_A \geq 0 \\ x_B \geq 0 \\ x_C \geq 0 \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

```
c = [-10.9; -19.8; -24.7]

A = [0.3 0.6 0.9; 0.2 -0.2 -0.3]                                b=[400; 0]

Aeq=[]                                                          beq=[]

lb=[0;0;0]                                                      ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

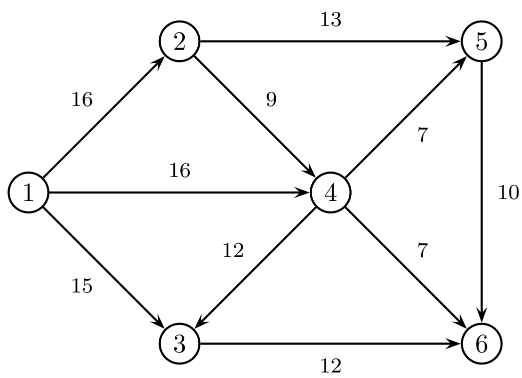



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,4) (2,3) (3,4) (4,5) (4,6) | (2,4) | $x = (0,\ 4,\ 0,\ -3,\ 9,\ 1,\ 2,\ 9,\ 0)$ | NO | SI |
| (1,4) (2,3) (2,4) (4,6) (5,6) | (4,5) | $\pi = (0,\ 3,\ 10,\ 6,\ 10,\ 14)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

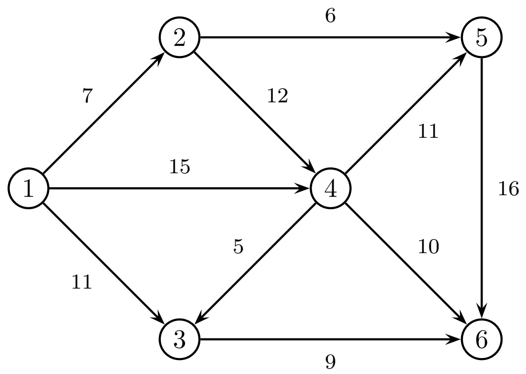
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,5) (2,3) (2,4) (4,5) (5,6) | (1,5) (2,4) (3,4) (4,5) (5,6) |
| Archi di U | (3,4) | |
| $x$ | $(0,\ 0,\ 4,\ 6,\ 0,\ 10,\ 7,\ 0,\ 9)$ | $(0,\ 0,\ 4,\ 0,\ 6,\ 4,\ 7,\ 0,\ 9)$ |
| $\pi$ | $(0,\ -6,\ 1,\ -3,\ 6,\ 10)$ | $(0,\ -6,\ -8,\ -3,\ 6,\ 10)$ |
| Arco entrante | (3,4) | (4,6) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 9 , 6 | 4 , 7 |
| Arco uscente | (2,3) | (4,6) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 3 | | 2 | | 4 | | 5 | | 6 | |
| nodo 2 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 |
| nodo 3 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 |
| nodo 4 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 29 | 2 | 23 | 4 | 23 | 4 | 23 | 4 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 27 | 3 | 27 | 3 | 23 | 4 | 23 | 4 | 23 | 4 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 4, 6 | | 4, 5, 6 | | 5, 6 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 6 | 9 | (0, 9, 0, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0) | 9 |
| 1 - 4 - 6 | 10 | (0, 9, 10, 0, 0, 9, 0, 0, 10, 0) | 19 |
| 1 - 2 - 5 - 6 | 6 | (6, 9, 10, 0, 6, 9, 0, 0, 10, 6) | 25 |
| 1 - 4 - 5 - 6 | 5 | (6, 9, 15, 0, 6, 9, 0, 5, 10, 11) | 30 |
| 1 - 2 - 4 - 5 - 6 | 1 | (7, 9, 15, 1, 6, 9, 0, 6, 10, 12) | 31 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 3\}$ $\quad N_t = \{2, 4, 5, 6\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 6\,x_1 + 6\,x_2 \\ 18\,x_1 + 17\,x_2 \le 67 \\ 6\,x_1 + 17\,x_2 \le 44 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{23}{12}, \frac{65}{34}\right)$ $\qquad v_S(P) = 22$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (1, 1)$ $\qquad v_I(P) = 12$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 7\,x_1 + 17\,x_2 \le 45$
$r = 2$ $\qquad 9\,x_1 + 9\,x_2 \le 34$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 487 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 7 | 8 | 23 | 24 | 16 | 9 | 15 |
| Volumi | 465 | 106 | 11 | 433 | 43 | 210 | 259 |

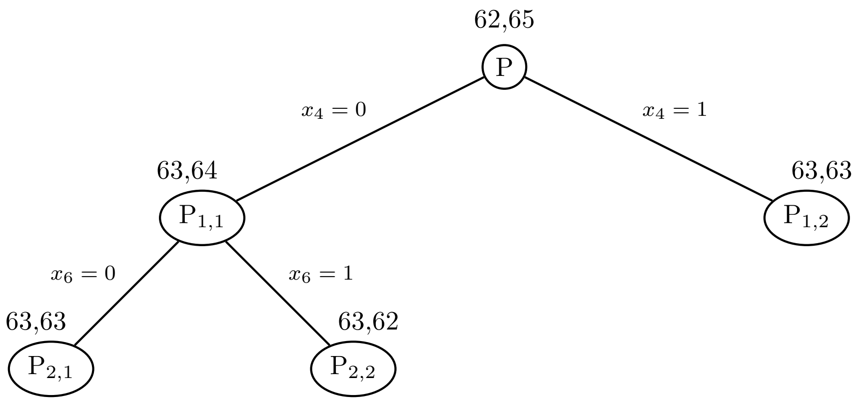
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$ $\qquad v_I(P) = 62$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, 1, 1, \frac{68}{433}, 1, 0, 1\right)$ $\qquad v_S(P) = 65$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima = $(0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$ valore ottimo = 63

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 - x_2^2 - 1 \leq 0, \quad x_2^2 - 4 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(0,\ 1)$ | $(0,0)$ | | NO | ? | SI | SI | NO |
| $(0,\ 2)$ | $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ | $(-1,0)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ | $(-1,0)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(\sqrt{5},\ 2\right)$ | $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |
| $\left(-\sqrt{5},\ 2\right)$ | $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |
| $(0,\ -2)$ | $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(\sqrt{5},\ -2\right)$ | $\left(-1, -\frac{5}{2}\right)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |
| $\left(-\sqrt{5},\ -2\right)$ | $\left(-1, -\frac{5}{2}\right)$ | | SI | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ 2\ x_1^2 + 10\ x_1 + 5\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(-0, 2)$ , $(-3, -0)$ , $(-2, 3)$ e $(-1, -3)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{5}{3}, -2\right)$ | $3.33333\, x_1 + 5\, x_2$ | (-1 ,-3) | $\left(\frac{2}{3}, -1\right)$ | 1 | $(-1, -3)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 28/05/14**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 4\,x_1 - 7\,x_2 \\ -x_2 \le 1 \\ -5\,x_1 + x_2 \le 4 \\ 3\,x_1 - x_2 \le 7 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_2 \le 4 \\ 3\,x_1 \le 11 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {2, 3} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {2,5} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una ditta deve aprire nuove agenzie in un territorio. Le città candidate ad ospitare le nuove sedi sono A,B,C,D mentre il territorio è diviso in 5 zone (1-2-3-4-5). I tempi di percorrenza medi da ciascuna zona alle città sono espresse dalla seguente tabella

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 30 | 80 | 40 | 50 | 55 |
| B | 60 | 35 | 20 | 70 | 40 |
| C | 20 | 55 | 70 | 55 | 30 |
| D | 60 | 35 | 60 | 20 | 60 |

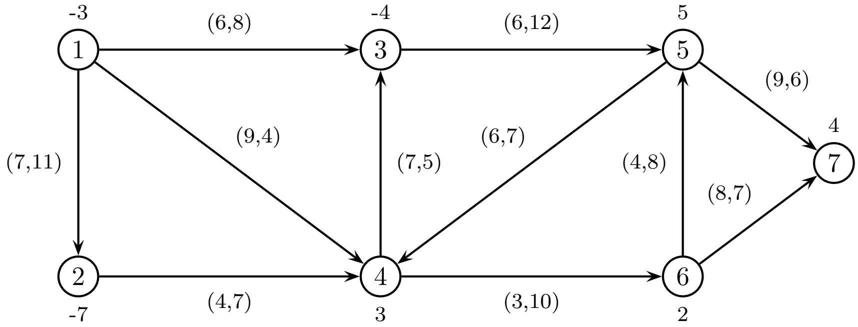
Si cerca il minor numero di localizzazioni tali che ogni zona abbia almeno un'agenzia a non più di 50 minuti.

variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB ( DEL PROBLEMA O DEL RILASSATO?)

```
c=

A=                                      b=

Aeq=                                    beq=

lb=                                     ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

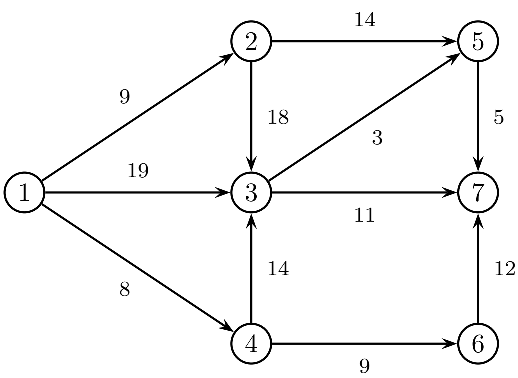



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (1,4) (2,4) (3,5) (6,5) (6,7) | (4,6) | $x =$ | | |
| (1,2) (1,4) (3,5) (4,6) (5,4) (6,7) | (2,4) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

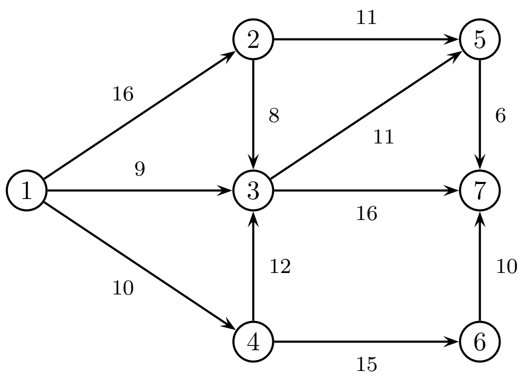
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (2,4) (3,5) (5,4) (5,7) (6,5) | |
| Archi di U | (4,6) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 12\ x_1 + 7\ x_2 \\ 12\ x_1 + 8\ x_2 \geq 57 \\ 9\ x_1 + 16\ x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 9 | 67 | 68 | 32 |
| **2** | | 24 | 52 | 52 |
| **3** | | | 8 | 9 |
| **4** | | | | 22 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

| | |
|---|---|
| 4–albero: | $v_I(P) =$ |

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

| | |
|---|---|
| ciclo: | $v_S(P) =$ |

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{35}$, $x_{13}$, $x_{34}$.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2^2 + 3x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 - 16 \leq 0, \quad x_1 - x_2 - 4 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| | $\left(\frac{3}{8}, 0\right)$ | | | | | | |
| | $(0, -3)$ | | | | | | |
| | $\left(-\frac{3}{8}, 0\right)$ | | | | | | |
| | $\left(-\frac{13}{8}, -16\right)$ | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; -2\,x_1^2 - 4\,x_1\,x_2 - 2\,x_2^2 + 5\,x_1 + 5\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(5, 0)$ , $(3, -4)$ , $(1, -0)$ e $(3, 3)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{13}{3}, 1\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ 4\,x_1 - 7\,x_2 \\ -x_2 \le 1 \\ -5\,x_1 + x_2 \le 4 \\ 3\,x_1 - x_2 \le 7 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_2 \le 4 \\ 3\,x_1 \le 11 \end{cases}$$

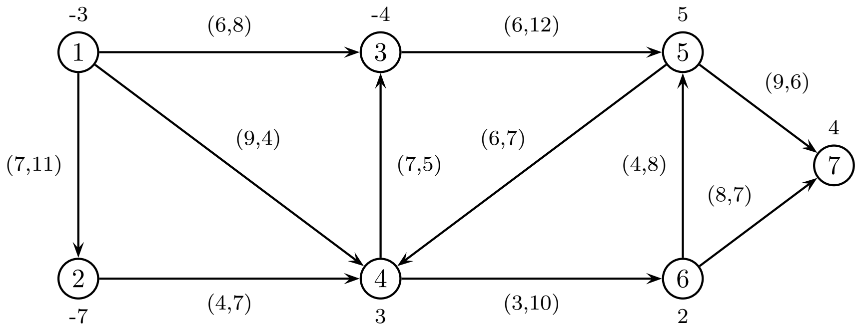
| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x = (-1,\ -1)$ | SI | NO |
| {2, 3} | $y = \left(0,\ \frac{17}{2},\ \frac{31}{2},\ 0,\ 0,\ 0\right)$ | SI | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {2, 5} | (0, 4) | $\left(0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ -\frac{31}{5},\ 0\right)$ | 2 | $\frac{55}{3},\ 5,\ \frac{55}{3}$ | 4 |
| 2° iterazione | {4, 5} | (1, 4) | $(0,\ 0,\ 0,\ 4,\ -11,\ 0)$ | 5 | $5,\ 2,\ \frac{8}{3}$ | 3 |

**Esercizio 3.**
VEDI SOLUZIONI ALTRO COMPITO

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

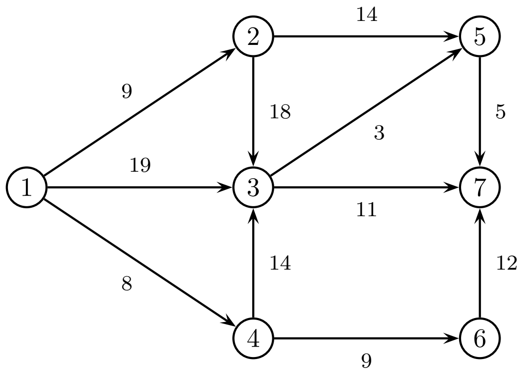



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (1,4) (2,4) (3,5) (6,5) (6,7) | (4,6) | $x = (0,\ -3,\ 6,\ 7,\ 1,\ 0,\ 10,\ 0,\ 0,\ 4,\ 4)$ | NO | SI |
| (1,2) (1,4) (3,5) (4,6) (5,4) (6,7) | (2,4) | $\pi = (0,\ 7,\ -3,\ 9,\ 3,\ 12,\ 20)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

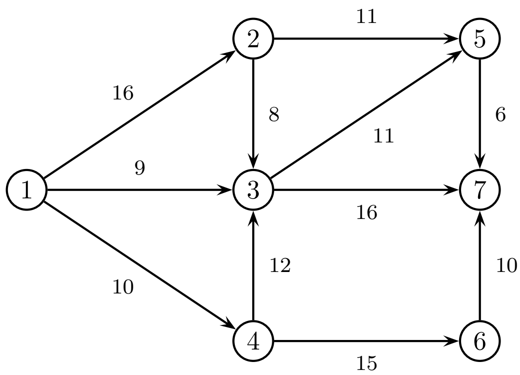
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (2,4) (3,5) (5,4) (5,7) (6,5) | (1,4) (2,4) (3,5) (4,6) (5,7) (6,5) |
| Archi di U | (4,6) | |
| $x$ | $(0,\ 0,\ 3,\ 7,\ 4,\ 0,\ 10,\ 3,\ 4,\ 8,\ 0)$ | $(0,\ 0,\ 3,\ 7,\ 4,\ 0,\ 7,\ 0,\ 4,\ 5,\ 0)$ |
| $\pi$ | $(0,\ 5,\ -3,\ 9,\ 3,\ -1,\ 12)$ | $(0,\ 5,\ 10,\ 9,\ 16,\ 12,\ 25)$ |
| Arco entrante | (4,6) | (1,3) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | Inf , 3 | 8 , 3 |
| Arco uscente | (5,4) | (1,4) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 4 | | 2 | | 6 | | 3 | | 5 | | 7 | |
| nodo 2 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 |
| nodo 3 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 |
| nodo 4 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 23 | 2 | 23 | 2 | 22 | 3 | 22 | 3 | 22 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 17 | 4 | 17 | 4 | 17 | 4 | 17 | 4 | 17 | 4 | 17 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 29 | 6 | 29 | 6 | 27 | 5 | 27 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 3, 6 | | 3, 5, 6 | | 3, 5, 7 | | 5, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 9 | (0, 9, 0, 0, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0) | 9 |
| 1 - 2 - 3 - 7 | 7 | (7, 9, 0, 7, 0, 0, 16, 0, 0, 0, 0) | 16 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 6 | (13, 9, 0, 7, 6, 0, 16, 0, 0, 6, 0) | 22 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 10 | (13, 9, 10, 7, 6, 0, 16, 0, 10, 6, 10) | 32 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 12\ x_1 + 7\ x_2 \\ 12\ x_1 + 8\ x_2 \geq 57 \\ 9\ x_1 + 16\ x_2 \geq 56 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{57}{8}\right)$ $\qquad v_I(P) = 50$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 8)$ $\qquad v_S(P) = 56$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad 11\,x_1 + 7\,x_2 \geq 50$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 9 | 67 | 68 | 32 |
| **2** | | 24 | 52 | 52 |
| **3** | | | 8 | 9 |
| **4** | | | | 22 |

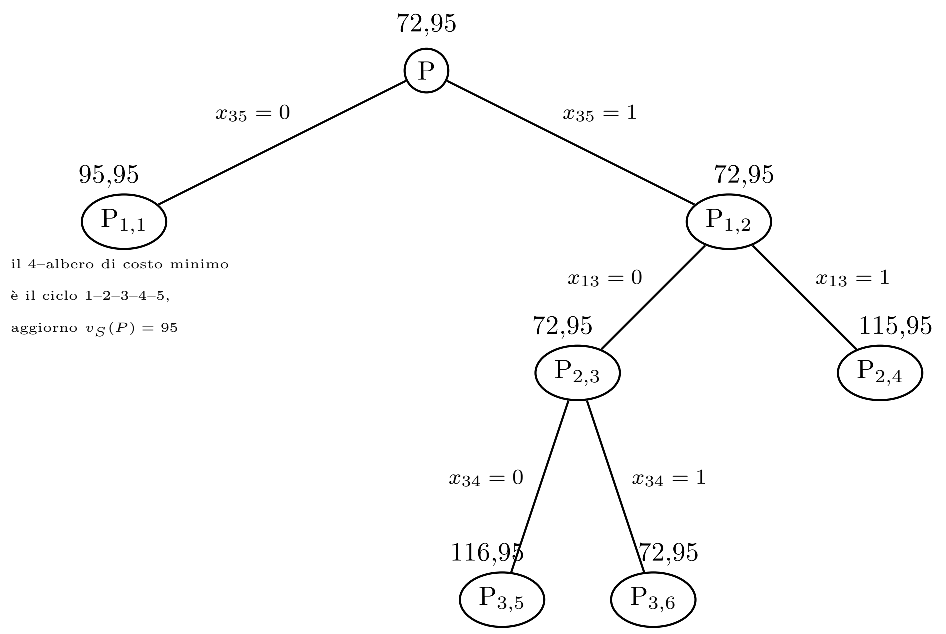
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 4–albero di costo minimo.

4–albero: ( 1 , 2 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) ( 4 , 5 ) $\qquad v_I(P) = 72$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 2.

ciclo: $2 - 1 - 5 - 3 - 4$ $\qquad v_S(P) = 110$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 4–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{35}$, $x_{13}$, $x_{34}$.




**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2^2 + 3x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 - 16 \leq 0, \quad x_1 - x_2 - 4 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(-4,\ 0)$ | $\left(\frac{3}{8}, 0\right)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$ | $(0, -3)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(4,\ 0)$ | $\left(-\frac{3}{8}, 0\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(-4,\ -8)$ | $\left(-\frac{13}{8}, -16\right)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -2\ x_1^2 - 4\ x_1\, x_2 - 2\ x_2^2 + 5\ x_1 + 5\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(5,0)$ , $(3,-4)$ , $(1,0)$ e $(3,3)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{13}{3}, 1\right)$ | $(3,2)$ | $\begin{pmatrix} 4/13 & -6/13 \\ -6/13 & 9/13 \end{pmatrix}$ | $\left(-\frac{98}{39}, \frac{49}{13}\right)$ | $\frac{26}{49}$ | $\frac{26}{49}$ | $(3,3)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 28/05/14**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -4\ x_1 - 7\ x_2 \\ -x_2 \leq 1 \\ -5\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 7 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_2 \leq 4 \\ 3\ x_1 \leq 11 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {2, 3} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {4,5} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una ditta deve aprire nuove agenzie in un territorio. Le città candidate ad ospitare le nuove sedi sono A,B,C,D mentre il territorio è diviso in 5 zone (1-2-3-4-5). I tempi di percorrenza medi da ciascuna zona alle città sono espresse dalla seguente tabella

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 30 | 40 | 80 | 50 | 55 |
| B | 20 | 70 | 55 | 55 | 30 |
| C | 60 | 20 | 35 | 70 | 40 |
| D | 60 | 60 | 35 | 20 | 60 |

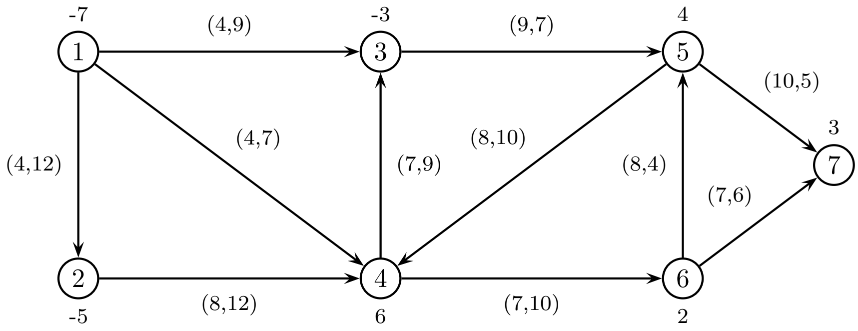
Si cerca il minor numero di localizzazioni tali che ogni zona abbia almeno un'agenzia a non più di 50 minuti.

variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB ( DEL PROBLEMA O DEL RILASSATO?)

```
c=

A=                                  b=

Aeq=                                beq=

lb=                                 ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

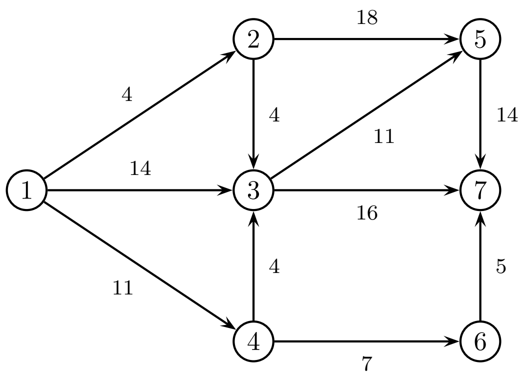



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,4) (3,5)<br>(4,6) (5,4) (6,7) | (5,7) | $x =$ | | |
| (1,2) (2,4) (3,5)<br>(4,6) (5,4) (5,7) | (4,3) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 3.

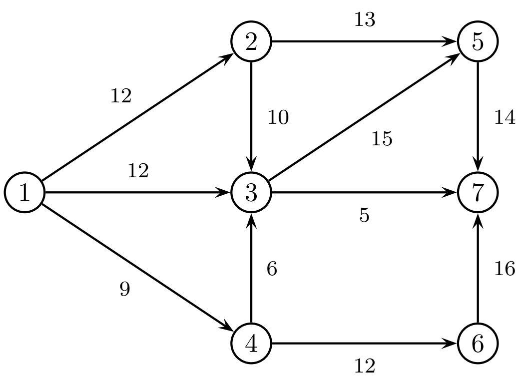
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,7) (6,5) | |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 14\ x_1 + 9\ x_2 \\ 10\ x_1 + 7\ x_2 \leq 49 \\ 9\ x_1 + 14\ x_2 \leq 68 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_S(P) =$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_I(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 8 | 66 | 67 | 31 |
| **2** | | 23 | 51 | 53 |
| **3** | | | 7 | 8 |
| **4** | | | | 21 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: $v_I(P) =$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $v_S(P) =$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{35}$, $x_{13}$, $x_{34}$.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2^2 + 2x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1^2 - 9 \leq 0, \quad x_1 - x_2 - 3 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| | $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ | | | | | | |
| | $(0, -2))$ | | | | | | |
| | $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ | | | | | | |
| | $\left(-\frac{5}{3}, -12\right)$ | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 4\, x_1^2 - 2\, x_1\, x_2 - 6\, x_2^2 + 3\, x_1 - 10\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(0, 1)$ , $(2, 3)$ , $(-5, 2)$ e $(1, 4)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -4\ x_1 - 7\ x_2 \\ -x_2 \leq 1 \\ -5\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3\ x_1 - x_2 \leq 7 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_2 \leq 4 \\ 3\ x_1 \leq 11 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (-1,\ -1)$ | SI | NO |
| $\{2,\ 3\}$ | $y = \left(0,\ \frac{25}{2},\ \frac{39}{2},\ 0,\ 0,\ 0\right)$ | SI | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

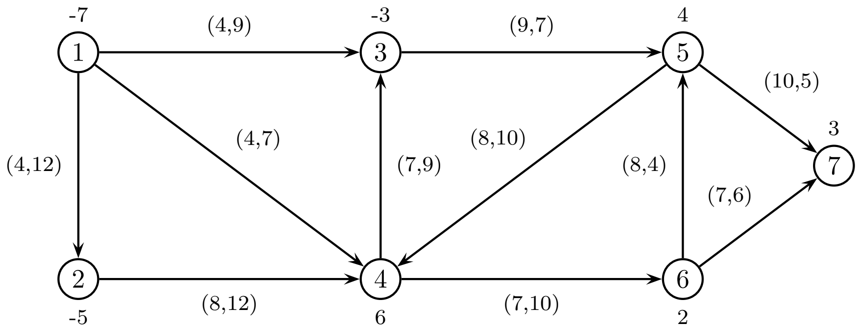
| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{4,\ 5\}$ | $(1,\ 4)$ | $(0,\ 0,\ 0,\ -4,\ -3,\ 0)$ | 4 | 1 | 2 |
| 2° iterazione | $\{2,\ 5\}$ | $(0,\ 4)$ | $\left(0,\ \frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ -\frac{39}{5},\ 0\right)$ | 5 | $5,\ \frac{55}{2}$ | 1 |

**Esercizio 3.**

COMANDI DI MATLAB DEL RILASSATO

```
c=[ 1 ; 1 ; 1 ; 1]

A=[ -1 -1 0 0 ; -1 0 -1 0; 0 0 -1 -1; -1 0 0 -1; 0 -1 -1 0]        b=[ -1;-1;-1;-1;-1 ]

Aeq=[]                                                              beq=[]

lb=[0 ; 0 ; 0; 0]                                                   ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

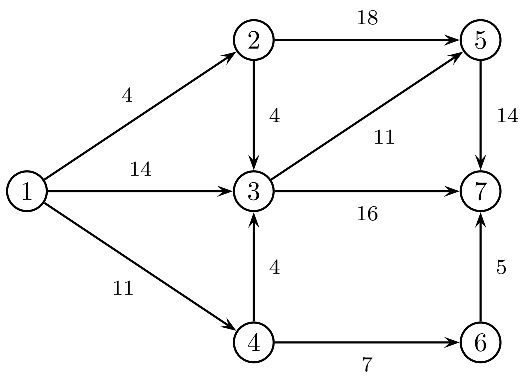



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,4) (3,5) (4,6) (5,4) (6,7) | (5,7) | $x = (-5,\ 0,\ 12,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0,\ -6,\ 5,\ 0,\ -2)$ | NO | SI |
| (1,2) (2,4) (3,5) (4,6) (5,4) (5,7) | (4,3) | $\pi = (0,\ 4,\ -5,\ 12,\ 4,\ 19,\ 14)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

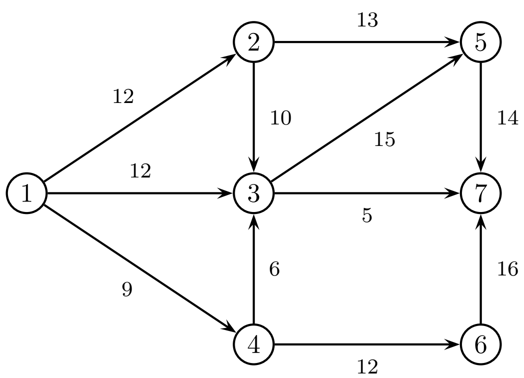
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,7) (6,5) | (1,3) (1,4) (2,4) (4,6) (5,7) (6,7) |
| Archi di U | (3,5) | (3,5) |
| $x$ | (0, 4, 3, 5, 7, 0, 2, 0, 3, 0, 0) | (0, 4, 3, 5, 7, 0, 2, 0, 3, 0, 0) |
| $\pi$ | (0, −4, 4, 4, 19, 11, 29) | (0, −4, 4, 4, 8, 11, 18) |
| Arco entrante | (6,7) | (3,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 6 , 0 | 4 , 3 |
| Arco uscente | (6,5) | (5,7) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 6 | | 5 | | 7 | |
| nodo 2 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 |
| nodo 3 | 14 | 1 | 8 | 2 | 8 | 2 | 8 | 2 | 8 | 2 | 8 | 2 | 8 | 2 |
| nodo 4 | 11 | 1 | 11 | 1 | 11 | 1 | 11 | 1 | 11 | 1 | 11 | 1 | 11 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 22 | 2 | 19 | 3 | 19 | 3 | 19 | 3 | 19 | 3 | 19 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 18 | 4 | 18 | 4 | 18 | 4 | 18 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 24 | 3 | 24 | 3 | 23 | 6 | 23 | 6 | 23 | 6 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 3, 4, 5 | | 4, 5, 7 | | 5, 6, 7 | | 5, 7 | | 7 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 5 | (0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0) | 5 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 12 | (12, 5, 0, 0, 12, 0, 5, 0, 0, 12, 0) | 17 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 2 | (12, 7, 0, 0, 12, 2, 5, 0, 0, 14, 0) | 19 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 9 | (12, 7, 9, 0, 12, 2, 5, 0, 9, 14, 9) | 28 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \max\ 14\ x_1 + 9\ x_2 \\ 10\ x_1 + 7\ x_2 \leq 49 \\ 9\ x_1 + 14\ x_2 \leq 68 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{49}{10}, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 68$

b) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (4, 0)$ $\qquad v_I(P) = 56$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad x_1 \leq 4$
$r = 4$ $\qquad x_1 \leq 4$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 8 | 66 | 67 | 31 |
| **2** | | 23 | 51 | 53 |
| **3** | | | 7 | 8 |
| **4** | | | | 21 |

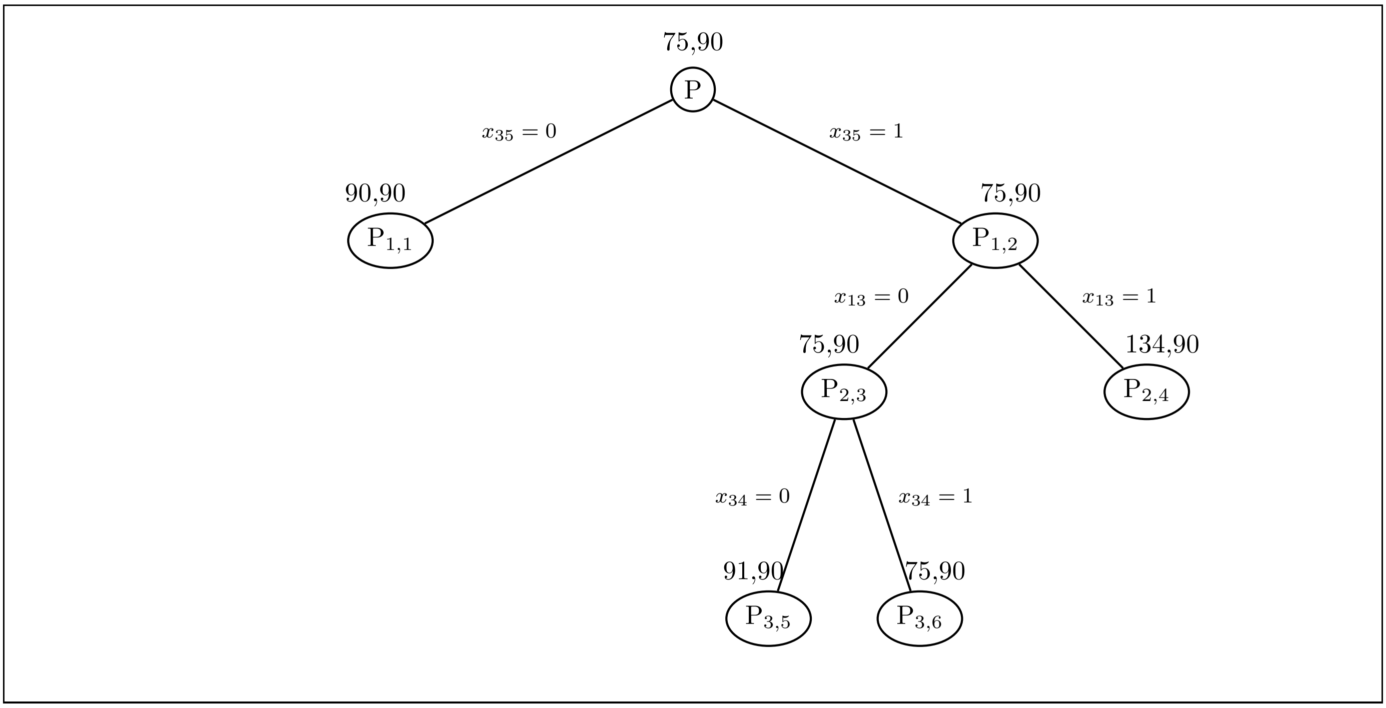
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 3–albero di costo minimo.

3–albero: ( 1 , 2 ) ( 1 , 5 ) ( 3 , 4 ) ( 3 , 5 ) ( 4 , 5 ) $\qquad v_I(P) = 75$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $1 - 2 - 3 - 4 - 5$ $\qquad v_S(P) = 90$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 3–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{35}$, $x_{13}$, $x_{34}$.




**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2^2 + 2x_1$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 - 9 \le 0, \quad x_1 - x_2 - 3 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(-3,\ 0)$ | $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(2,\ -1)$ | $(0, -2)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(3,\ 0)$ | $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(-3,\ -6)$ | $\left(-\frac{5}{3}, -12\right)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 4\, x_1^2 - 2\, x_1\, x_2 - 6\, x_2^2 + 3\, x_1 - 10\, x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(0,1)$ , $(2,3)$ , $(-5,2)$ e $(1,4)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$ | $(1, -1)$ | $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ | $\left(\frac{95}{6}, \frac{95}{6}\right)$ | $\frac{4}{95}$ | $\frac{4}{95}$ | $(2, 3)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 30/06/14**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -9\,x_1 + x_2 \\ -x_1 + 7\,x_2 \leq 7 \\ -x_1 - 4\,x_2 \leq 7 \\ x_1 + 5\,x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ -x_2 \leq 1 \\ x_1 + 4\,x_2 \leq 6 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x =$ | | |
| $\{5, 6\}$ | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {4,5} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Un'industria di lavorazione del marmo ha due stabilimenti dove produce lastre di marmo di tre diverse qualità: bassa, media e alta. Per contratto, l'industria deve fornire a una ditta esterna almeno 50, 38 e 55 tonnellate di marmo di bassa, media e alta qualità, rispettivamente. La seguente tabella riporta le caratteristiche di produzione nei due diversi stabilimenti:

| Stabilimento | costo giornaliero (euro) | produzione (tonnellate/giorno) | | |
|---|---|---|---|---|
| | | bassa | media | alta |
| 1 | 380 | 5 | 3 | 2 |
| 2 | 440 | 1 | 2 | 4 |

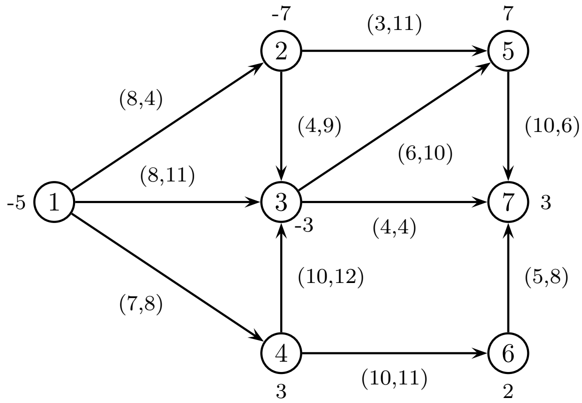
Determinare quanti giorni di lavoro sono necessari nei due stabilimenti per minimizzare i costi.

variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                    b=

Aeq=                                  beq=

lb=                                   ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

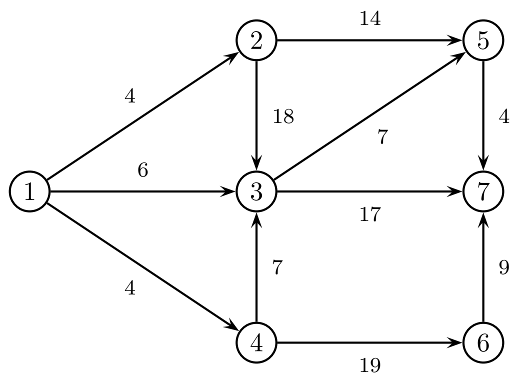



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (6,7) | (1,3) | $x =$ | | |
| (1,2) (1,4) (2,3) (3,7) (5,7) (6,7) | (3,5) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

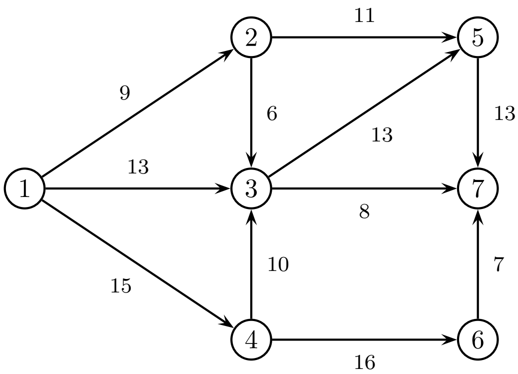
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (1,4) (2,3) (3,7) (4,6) (5,7) | |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 10\ x_1 + 6\ x_2 \\ 17\ x_1 + 14\ x_2 \geq 63 \\ 11\ x_1 + 19\ x_2 \geq 43 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 548 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 15 | 7 | 23 | 13 | 21 | 8 | 6 |
| Volumi | 20 | 60 | 342 | 177 | 32 | 298 | 94 |

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 6)^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 - x_2^2 \leq 0, \quad x_1 - 5 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| | (0,0) | | | | | | |
| | ( ,0) | | | | | | |
| | (0,-10) | | | | | | |
| $\left(5, \sqrt{5}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(5, -\sqrt{5}\right)$ | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -6\ x_1^2 - 4\ x_2^2 + 5\ x_1 - 8\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(5, 1)$ , $(-2, 3)$ , $(-1, 4)$ e $(1, -4)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -9\ x_1 + x_2 \\ -x_1 + 7\ x_2 \leq 7 \\ -x_1 - 4\ x_2 \leq 7 \\ x_1 + 5\ x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ -x_2 \leq 1 \\ x_1 + 4\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

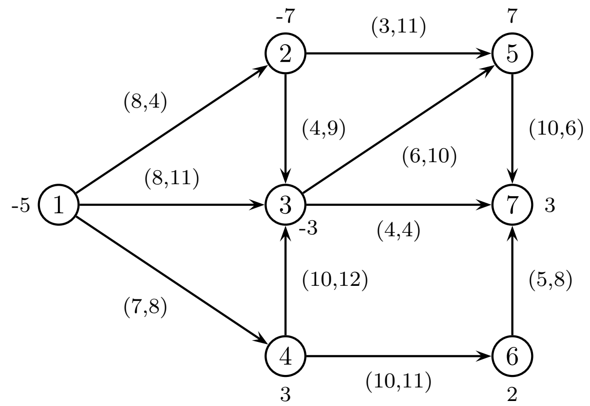
| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (-7,\ 0)$ | SI | NO |
| $\{5,\ 6\}$ | $y = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -37,\ -9)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{4,\ 5\}$ | $(4,\ -1)$ | $(0,\ 0,\ 0,\ -9,\ 8,\ 0)$ | 4 | $18,\ 7$ | 2 |
| 2° iterazione | $\{2,\ 5\}$ | $(-3,\ -1)$ | $(0,\ 9,\ 0,\ 0,\ -37,\ 0)$ | 5 | $1,\ 13$ | 1 |

**Esercizio 3.** Vedi altro compito

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

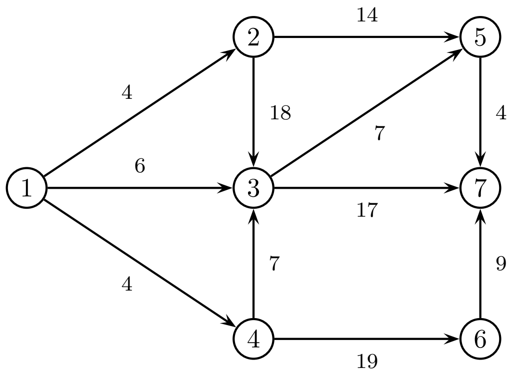



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,4) (2,5) (4,3) (4,6) (6,7) | (1,3) | $x = (0,\ 11,\ -6,\ 0,\ 7,\ 0,\ 0,\ -14,\ 5,\ 0,\ 3)$ | NO | SI |
| (1,2) (1,4) (2,3) (3,7) (5,7) (6,7) | (3,5) | $\pi = (0,\ 8,\ 12,\ 7,\ 6,\ 11,\ 16)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

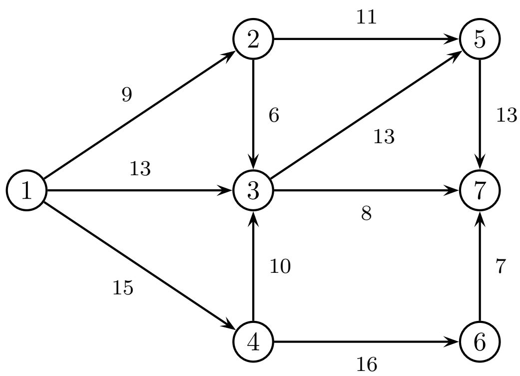
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (1,4) (2,3) (3,7) (4,6) (5,7) | (1,3) (1,4) (2,3) (3,5) (3,7) (4,6) |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | $(0,\ 0,\ 5,\ 7,\ 0,\ 10,\ 0,\ 0,\ 2,\ 3,\ 0)$ | $(0,\ 0,\ 5,\ 7,\ 0,\ 7,\ 3,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0)$ |
| $\pi$ | $(0,\ 4,\ 8,\ 7,\ 2,\ 17,\ 12)$ | $(0,\ 4,\ 8,\ 7,\ 14,\ 17,\ 12)$ |
| Arco entrante | (3,5) | (2,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 4 , 3 | 11 , 7 |
| Arco uscente | (5,7) | (2,3) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 2 | | 4 | | 3 | | 5 | | 7 | | 6 | |
| nodo 2 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 |
| nodo 3 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 | 6 | 1 |
| nodo 4 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 18 | 2 | 18 | 2 | 13 | 3 | 13 | 3 | 13 | 3 | 13 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 23 | 4 | 23 | 4 | 23 | 4 | 23 | 4 | 23 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 23 | 3 | 17 | 5 | 17 | 5 | 17 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 3, 4, 5 | | 3, 5, 6 | | 5, 6, 7 | | 6, 7 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 8 | (0, 8, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0) | 8 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 9 | (9, 8, 0, 0, 9, 0, 8, 0, 0, 9, 0) | 17 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 4 | (9, 12, 0, 0, 9, 4, 8, 0, 0, 13, 0) | 21 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 7 | (9, 12, 7, 0, 9, 4, 8, 0, 7, 13, 7) | 28 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $N_t = \{7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 10\ x_1 + 6\ x_2 \\ 17\ x_1 + 14\ x_2 \geq 63 \\ 11\ x_1 + 19\ x_2 \geq 43 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(0, \dfrac{9}{2}\right)$ $\qquad v_I(P) = 27$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (0, 5)$ $\qquad v_S(P) = 30$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 2$ $\qquad 16\,x_1 + 13\,x_2 \geq 59$
$r = 4$ $\qquad 11\,x_1 + 9\,x_2 \geq 41$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 548 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 15 | 7 | 23 | 13 | 21 | 8 | 6 |
| Volumi | 20 | 60 | 342 | 177 | 32 | 298 | 94 |

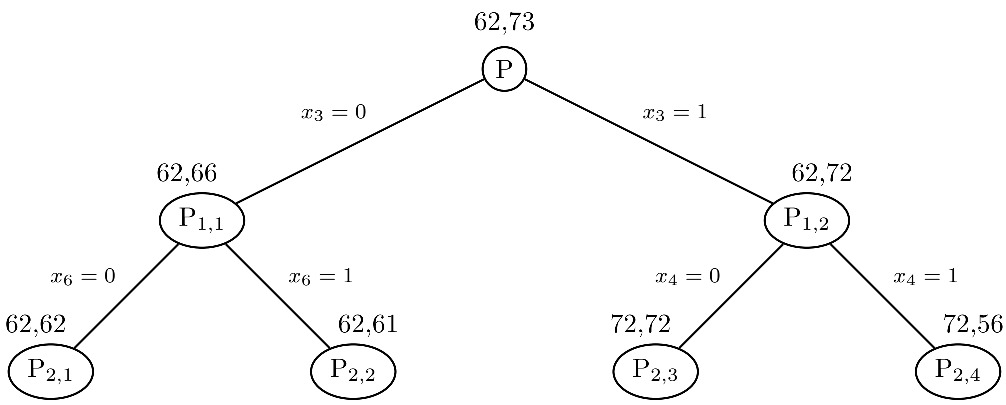
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$ $\qquad v_I(P) = 62$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(1, 1, \dfrac{259}{342}, 1, 1, 0, 0\right)$ $\qquad v_S(P) = 73$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima $= (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$ $\qquad$ valore ottimo $= 72$

**Esercizio 9.** vedi altro compito

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -6\ x_1^2 - 4\ x_2^2 + 5\ x_1 - 8\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(5, 1)$ , $(-2, 3)$ , $(-1, 4)$ e $(1, -4)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$ | $(-1, 1)$ | $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ | $\left(\dfrac{49}{6}, \dfrac{49}{6}\right)$ | $\dfrac{2}{49}$ | $\dfrac{2}{49}$ | $(-1, 4)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 30/06/14**

| (Cognome) | (Nome) | (Corso di laurea) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -4\ x_1 - 7\ x_2 \\ -x_1 + 7\ x_2 \leq 7 \\ -x_1 - 4\ x_2 \leq 7 \\ x_1 + 5\ x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ -x_2 \leq 1 \\ x_1 + 4\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | $x =$ | | |
| $\{2, 3\}$ | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {4,5} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Un'industria di lavorazione del marmo ha due stabilimenti dove produce lastre di marmo di tre diverse qualità: bassa, media e alta. Per contratto, l'industria deve fornire a una ditta esterna almeno 45, 35 e 50 tonnellate di marmo di bassa, media e alta qualità, rispettivamente. La seguente tabella riporta le caratteristiche di produzione nei due diversi stabilimenti:

| Stabilimento | costo giornaliero (euro) | produzione (tonnellate/giorno) | | |
|---|---|---|---|---|
| | | bassa | media | alta |
| 1 | 350 | 5 | 3 | 2 |
| 2 | 450 | 1 | 2 | 4 |

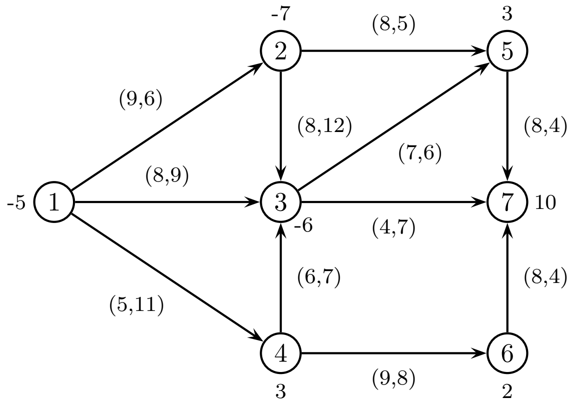
Determinare quanti giorni di lavoro sono necessari nei due stabilimenti per minimizzare i costi.

variabili decisionali e modello:

COMANDI DI MATLAB

```
c=

A=                                          b=

Aeq=                                        beq=

lb=                                         ub=
```

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

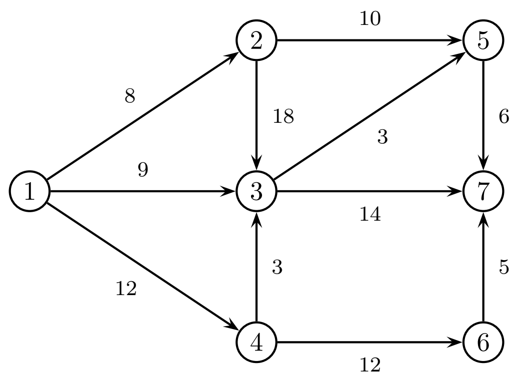



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) | (2,3) | $x =$ | | |
| (1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (3,7) (4,6) | (4,3) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

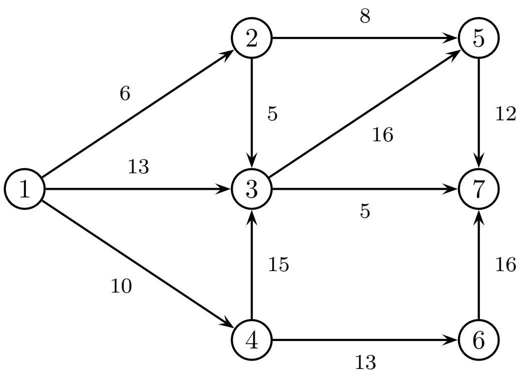
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (2,3) (3,7) (4,3) (4,6) (5,7) | |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | | | |
| nodo 7 | | | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 13\ x_1 + 14\ x_2 \\ 14\ x_1 + 11\ x_2 \geq 42 \\ 8\ x_1 + 15\ x_2 \geq 40 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 548 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 19 | 5 | 9 | 14 | 15 | 23 | 20 |
| Volumi | 105 | 10 | 163 | 333 | 369 | 34 | 30 |

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile = $\qquad\qquad$ $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $\qquad\qquad$ $v_S(P) =$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound.* Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 6)^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 - x_2^2 \leq 0, \quad x_1 - 5 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| | (0,0) | | | | | | |
| | ( ,0) | | | | | | |
| | (0,-10) | | | | | | |
| $\left(5, \sqrt{5}\right)$ | | | | | | | |
| $\left(5, -\sqrt{5}\right)$ | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ 2\ x_1^2 - 4\ x_2^2 + 4\ x_1 - x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(1, 4)$ , $(-2, -5)$ , $(3, 3)$ e $(-4, -2)$. Fare un passo del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)$ | | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -4\,x_1 - 7\,x_2 \\ -x_1 + 7\,x_2 \le 7 \\ -x_1 - 4\,x_2 \le 7 \\ x_1 + 5\,x_2 \le 5 \\ x_1 - x_2 \le 5 \\ -x_2 \le 1 \\ x_1 + 4\,x_2 \le 6 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (-7,\ 0)$ | SI | NO |
| $\{2,\ 3\}$ | $y = (0,\ 13,\ 9,\ 0,\ 0,\ 0)$ | SI | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{4,\ 5\}$ | $(4,\ -1)$ | $(0,\ 0,\ 0,\ -4,\ 11,\ 0)$ | 4 | $18,\ 7$ | 2 |
| 2° iterazione | $\{2,\ 5\}$ | $(-3,\ -1)$ | $(0,\ 4,\ 0,\ 0,\ -9,\ 0)$ | 5 | $1,\ 13$ | 1 |

**Esercizio 3.**

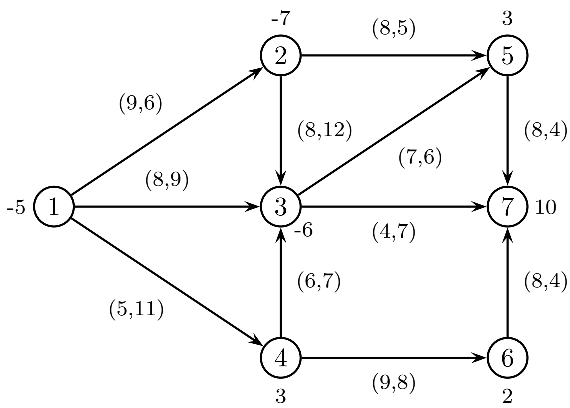
variabili decisionali:
$x_1$ = giorni di lavoro nello stabilimento 1
$x_2$ = giorni di lavoro nello stabilimento 2

modello: $$\begin{cases} \min 350\,x_1 + 450\,x_2 \\ 5\,x_1 + x_2 \ge 45 \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 \ge 35 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 \ge 50 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

```
c=[ 350 ; 450]

A=[ -5 -1 ; -3 -2 ; -2 -4 ]          b=[ -45 ; -35 ; -50 ]

Aeq=[]                               beq=[]

lb=[0; 0]                            ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

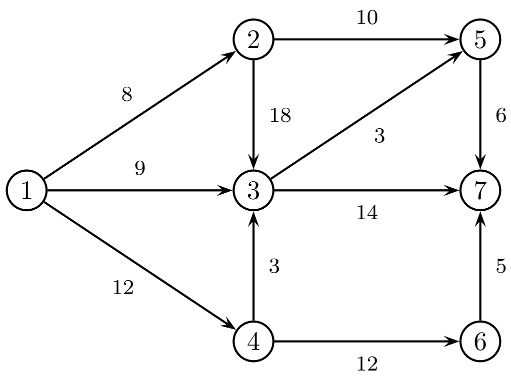



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,3) (1,4) (2,5) (3,5) (3,7) (4,6) | (2,3) | $x = (0,\ 0,\ 5,\ 12,\ -5,\ 8,\ 10,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0)$ | NO | SI |
| (1,2) (1,3) (1,4) (3,5) (3,7) (4,6) | (4,3) | $\pi = (0,\ 9,\ 8,\ 5,\ 15,\ 14,\ 12)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

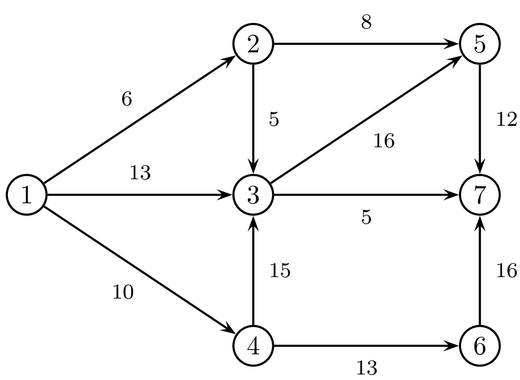
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,4) (2,3) (3,7) (4,3) (4,6) (5,7) | (1,3) (1,4) (2,3) (3,7) (4,6) (5,7) |
| Archi di U | (3,5) | (3,5) |
| $x$ | (0, 0, 5, 7, 0, 6, 7, 0, 2, 3, 0) | (0, 0, 5, 7, 0, 6, 7, 0, 2, 3, 0) |
| $\pi$ | (0, 3, 11, 5, 7, 14, 15) | (0, 0, 8, 5, 4, 14, 12) |
| Arco entrante | (1,3) | (3,5) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 9 , 0 | 0 , 3 |
| Arco uscente | (4,3) | (3,7) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | | iter 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 7 | | 6 | |
| nodo 2 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 | 8 | 1 |
| nodo 3 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 1 |
| nodo 4 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 18 | 2 | 12 | 3 | 12 | 3 | 12 | 3 | 12 | 3 | 12 | 3 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 24 | 4 | 24 | 4 | 24 | 4 | 24 | 4 |
| nodo 7 | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $-1$ | 23 | 3 | 23 | 3 | 18 | 5 | 18 | 5 | 18 | 5 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 3, 4, 5 | | 4, 5, 7 | | 5, 6, 7 | | 6, 7 | | 6 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 7 sulla seguente rete.



| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 7 | 5 | (0, 5, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0) | 5 |
| 1 - 2 - 5 - 7 | 6 | (6, 5, 0, 0, 6, 0, 5, 0, 0, 6, 0) | 11 |
| 1 - 3 - 5 - 7 | 6 | (6, 11, 0, 0, 6, 6, 5, 0, 0, 12, 0) | 17 |
| 1 - 4 - 6 - 7 | 10 | (6, 11, 10, 0, 6, 6, 5, 0, 10, 12, 10) | 27 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 2, 3, 5\}$ $\quad N_t = \{4, 6, 7\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 13\ x_1 + 14\ x_2 \\ 14\ x_1 + 11\ x_2 \geq 42 \\ 8\ x_1 + 15\ x_2 \geq 40 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{95}{61}, \frac{112}{61}\right)$ $\qquad v_I(P) = 46$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (2, 2)$ $\qquad v_S(P) = 54$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 13\,x_1 + 11\,x_2 \geq 41$
$r = 2$ $\qquad 8\,x_1 + 14\,x_2 \geq 39$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di caricare un container di volume pari a 548 metri cubi, cercando di massimizzare il valore dei beni inseriti (ogni bene può essere inserito al massimo una volta).

| Beni | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valori | 19 | 5 | 9 | 14 | 15 | 23 | 20 |
| Volumi | 105 | 10 | 163 | 333 | 369 | 34 | 30 |

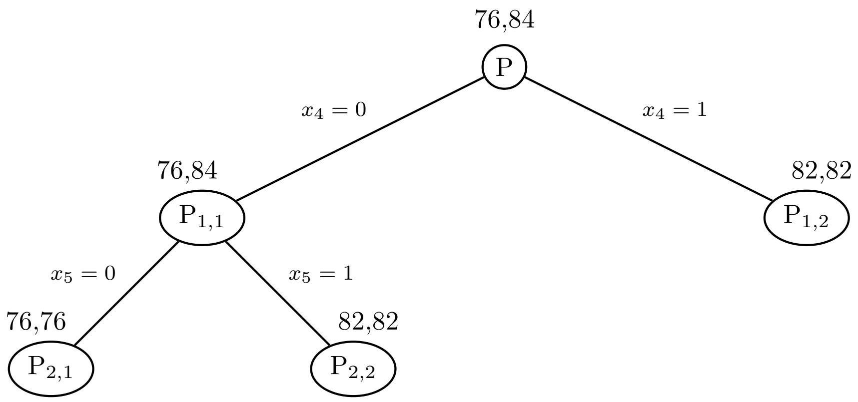
a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy.

sol. ammissibile $= (1, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$ $\qquad v_I(P) = 76$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(1, 1, 1, \frac{206}{333}, 0, 1, 1\right)$ $\qquad v_S(P) = 84$

c) Risolvere il problema applicando il metodo del *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.




soluzione ottima $= (1, 1, 0, 0, 1, 1, 1)$ valore ottimo $= 82$

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 6)^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 - x_2^2 \leq 0, \quad x_1 - 5 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $(0,\ 6)$ | $(0, 0)$ | | NO | NO | SI | SI | NO |
| $(1.76,\ 1.32)$ | $(-3.52, 0)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $(5,\ 6)$ | $(0, -10)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |
| $\left(5,\ \sqrt{5}\right)$ | $\left(1 - \dfrac{6\sqrt{5}}{5}, -11 + \dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |
| $\left(5,\ -\sqrt{5}\right)$ | $\left(1 + \dfrac{6\sqrt{5}}{5}, -11 - \dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \; 2\, x_1^2 - 4\, x_2^2 + 4\, x_1 - x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(1, 4)$ , $(-2, -5)$ , $(3, 3)$ e $(-4, -2)$. Fare una iterazione del metodo del gradiente proiettato.

| Punto | Matrice $M$ | Matrice $H$ | Direzione | Max spostamento possibile | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)$ | $(1, 2)$ | $\begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ | $\left(-\dfrac{62}{3}, \dfrac{31}{3}\right)$ | $\dfrac{1}{31}$ | $\dfrac{1}{31}$ | $(1, 4)$ |

**Esame di Ricerca Operativa del 17/07/17**

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di Matricola) |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -x_1 + x_2 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq -5 \\ x_1 \leq 5 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ -x_2 \leq 9 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| {1, 2} | $x =$ | | |
| {4, 7} | $y =$ | | |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | {3,7} | | | | | |
| 2° iterazione | | | | | | |

**Esercizio 3.** Una ditta produce latte liquido e in polvere. Il latte liquido viene venduto in cartocci da 1 l, ciascuno dei quali occupa un volume di 0.002 $m^3$. Il profitto ottenuto dalla vendita di 1 l di latte è di 1.20 Euro. Il latte in polvere viene venduto in barattoli da 2, 1.5 e 1 kg rispettivamente. Il costo che la ditta sostiene per la produzione di 1 kg di latte in polvere è di 5 Euro. La seguente tabella riporta i prezzi di vendita dei barattoli e i volumi occupati:

| Barattolo | Prezzo (Euro) | Volume occupato ($m^3$) |
|---|---|---|
| 2 kg | 24 | 0.004 |
| 1.5 kg | 16 | 0.003 |
| 1 kg | 12 | 0.002 |

La ditta deve soddisfare la domanda di mercato stimata in 600 l di latte liquido e 200 kg di latte in polvere. Il latte prodotto sarà trasportato con un veicolo a temperatura controllata di capacità 28.3 $m^3$. Determinare quante unità dei diversi tipi di latte la ditta deve produrre per massimizzare il profitto e soddisfare le richieste di mercato.

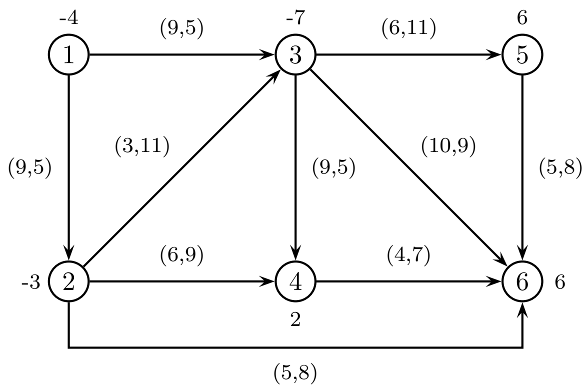
variabili decisionali:

modello:

COMANDI DI MATLAB

| | |
|---|---|
| `c=` | `int=` |
| `A=` | `b=` |
| `Aeq=` | `beq=` |
| `lb=` | `ub=` |

**Esercizio 4.** Completare la seguente tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

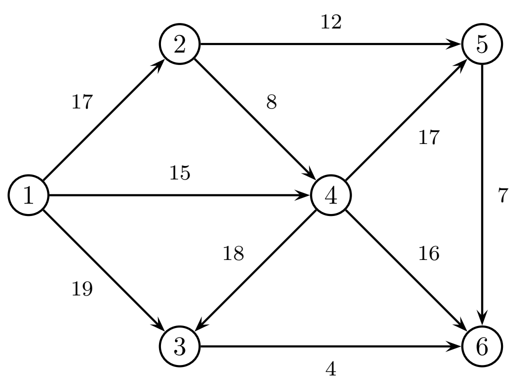



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (5,6) | (3,6) | $x =$ | | |
| (1,2) (1,3) (3,4) (3,6) (5,6) | (3,5) | $\pi = (0,$ | | |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

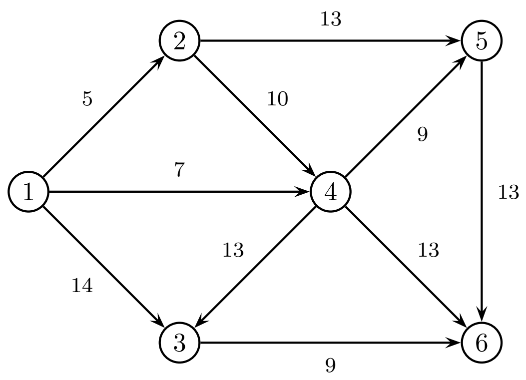
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,3) (2,4) (2,6) (5,6) | |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | | |
| $\pi$ | | |
| Arco entrante | | |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | | |
| Arco uscente | | |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.



| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | | | | | | | | | | | | |
| nodo 2 | | | | | | | | | | | | |
| nodo 3 | | | | | | | | | | | | |
| nodo 4 | | | | | | | | | | | | |
| nodo 5 | | | | | | | | | | | | |
| nodo 6 | | | | | | | | | | | | |
| insieme $Q$ | | | | | | | | | | | | |

b) Applicare l'algoritmo FFEK per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Taglio di capacità minima: $N_s =$ $N_t =$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 14\ x_1 + 12\ x_2 \\ 13\ x_1 + 8\ x_2 \geq 46 \\ 11\ x_1 + 16\ x_2 \geq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento = $v_I(P) =$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile = $v_S(P) =$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r =$ taglio:

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| città | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 16 | 21 | 64 | 46 |
| **2** | | 16 | 99 | 58 |
| **3** | | | 98 | 11 |
| **4** | | | | 10 |

a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

| 2–albero: | $v_I(P) =$ |
|---|---|

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

| ciclo: | $v_S(P) =$ |
|---|---|

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{24}$, $x_{45}$, $x_{34}$. Dire se l'algoritmo é terminato.

**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 - (x_2 - 1)^2 + 1 \leq 0, \quad -x_1 \leq 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{1}{2}\right)$ | | | | | | | |
| $(0, \ 0)$ | | | | | | | |
| $(0, \ 2)$ | | | | | | | |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min \ -4\,x_1^2 - 4\,x_1\,x_2 + 5\,x_1 + 9\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

e i vertici di $P$ sono $(-2, 3)$ , $(1, 1)$ , $(0, -4)$ e $(-2, -2)$. Fare un passo del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-1, \frac{7}{3}\right)$ | | | | | |

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** Completare la seguente tabella considerando il problema di programmazione lineare:

$$\begin{cases} \max\ -x_1 + x_2 \\ x_1 + 2\ x_2 \leq -5 \\ x_1 \leq 5 \\ -x_1 - x_2 \leq 6 \\ -2\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq -7 \\ x_1 - x_2 \leq 12 \\ -x_2 \leq 9 \end{cases}$$

| Base | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|
| $\{1,\ 2\}$ | $x = (5,\ -5)$ | SI | NO |
| $\{4,\ 7\}$ | $y = \left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ -\frac{3}{2}\right)$ | NO | NO |

**Esercizio 2.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso primale per il problema dell'esercizio 1.

| | Base | $x$ | $y$ | Indice uscente | Rapporti | Indice entrante |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° iterazione | $\{3,\ 7\}$ | $(3,\ -9)$ | $(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ -2)$ | 7 | $10,\ 1,\ \frac{5}{2}$ | 4 |
| 2° iterazione | $\{3,\ 4\}$ | $(2,\ -8)$ | $(0,\ 0,\ -3,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0)$ | 3 | $3,\ 1$ | 5 |

**Esercizio 3.** Una ditta produce latte liquido e in polvere. Il latte liquido viene venduto in cartocci da 1 l, ciascuno dei quali occupa un volume di 0.002 $m^3$. Il profitto ottenuto dalla vendita di 1 l di latte è di 1.20 Euro. Il latte in polvere viene venduto in barattoli da 2, 1.5 e 1 kg rispettivamente. Il costo che la ditta sostiene per la produzione di 1 kg di latte in polvere è di 5 Euro. La seguente tabella riporta i prezzi di vendita dei barattoli e i volumi occupati:

| Barattolo | Prezzo (Euro) | Volume occupato ($m^3$) |
|---|---|---|
| 2 kg | 24 | 0.004 |
| 1.5 kg | 16 | 0.003 |
| 1 kg | 12 | 0.002 |

La ditta deve soddisfare la domanda di mercato stimata in 600 l di latte liquido e 200 kg di latte in polvere. Il latte prodotto sarà trasportato con un veicolo a temperatura controllata di capacità 28.3 $m^3$. Determinare quante unità dei diversi tipi di latte la ditta deve produrre per massimizzare il profitto e soddisfare le richieste di mercato (ignorare il vincolo di interezza).

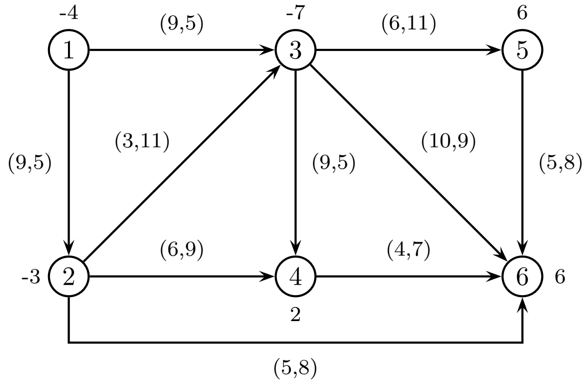
variabili decisionali: $x_1$ = numero di cartocci di latte prodotti
$x_2$ = numero di barattoli di latte da 2 kg
$x_3$ = numero di barattoli di latte da 1.5 kg
$x_4$ = numero di barattoli di latte da 1 kg

modello:
$$\begin{cases} \max\ 1.2\ x_1 + 24\ x_2 + 16\ x_3 + 12\ x_4 - 5\ (2\ x_2 + 1.5\ x_3 + x_4) \\ x_1 \geq 600 \\ 2\ x_2 + 1.5\ x_3 + x_4 \geq 200 \\ 0.002\ x_1 + 0.004\ x_2 + 0.003\ x_3 + 0.002\ x_4 \leq 28.3 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

COMANDI DI MATLAB

```
c=[-1.2; -14; -8.5; -7]

A=[0 -2 -1.5 -1; 0.002 0.004 0.003 0.002]          b=[-200; 28.3]

Aeq=[]                                              beq=[]

lb=[600; 0; 0; 0]                                   ub=[]
```

**Esercizio 4.** Completare la tabella considerando il problema di flusso di costo minimo sulla seguente rete (su ogni nodo è indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacità).

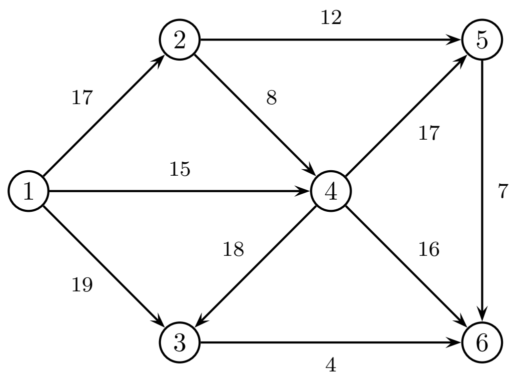



| Archi di T | Archi di U | Soluzione di base | Ammissibile (si/no) | Degenere (si/no) |
|---|---|---|---|---|
| (1,2) (1,3) (3,4) (3,5) (5,6) | (3,6) | $x = (-3,\ 7,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 3,\ 9,\ 0,\ -3)$ | NO | NO |
| (1,2) (1,3) (3,4) (3,6) (5,6) | (3,5) | $\pi = (0,\ 9,\ 9,\ 18,\ 14,\ 19)$ | NO | NO |

**Esercizio 5.** Effettuare due iterazioni dell'algoritmo del simplesso su reti per il problema dell'esercizio 4.

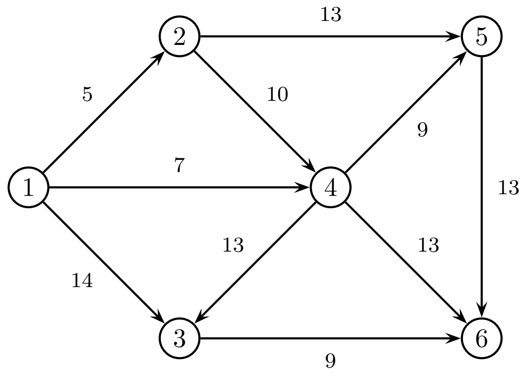
| | 1° iterazione | 2° iterazione |
|---|---|---|
| Archi di T | (1,3) (2,3) (2,4) (2,6) (5,6) | (1,3) (2,4) (2,6) (3,5) (5,6) |
| Archi di U | (3,5) | |
| $x$ | (0, 4, 0, 2, 1, 0, 11, 0, 0, 5) | (0, 4, 0, 2, 1, 0, 11, 0, 0, 5) |
| $\pi$ | (0, 6, 9, 12, 6, 11) | (0, 15, 9, 21, 15, 20) |
| Arco entrante | (3,5) | (1,2) |
| $\vartheta^+$, $\vartheta^-$ | 7 , 0 | 5 , 4 |
| Arco uscente | (2,3) | (1,3) |

**Esercizio 6.** a) Applicare l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi di radice 1 sulla seguente rete.




| | iter 1 | | iter 2 | | iter 3 | | iter 4 | | iter 5 | | iter 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ | $\pi$ | $p$ |
| nodo visitato | 1 | | 4 | | 2 | | 3 | | 6 | | 5 | |
| nodo 2 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 | 17 | 1 |
| nodo 3 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 | 19 | 1 |
| nodo 4 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 | 15 | 1 |
| nodo 5 | $+\infty$ | $-1$ | 32 | 4 | 29 | 2 | 29 | 2 | 29 | 2 | 29 | 2 |
| nodo 6 | $+\infty$ | $-1$ | 31 | 4 | 31 | 4 | 23 | 3 | 23 | 3 | 23 | 3 |
| insieme $Q$ | 2, 3, 4 | | 2, 3, 5, 6 | | 3, 5, 6 | | 5, 6 | | 5 | | $\emptyset$ | |

b) Applicare l'algoritmo di Ford-Fulkerson (con la procedura di Edmonds-Karp per la ricerca del cammino aumentante) per trovare il flusso massimo tra il nodo 1 ed il nodo 6 sulla seguente rete.




| cammino aumentante | $\delta$ | $x$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 - 3 - 6 | 9 | (0, 9, 0, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0) | 9 |
| 1 - 4 - 6 | 7 | (0, 9, 7, 0, 0, 9, 0, 0, 7, 0) | 16 |
| 1 - 2 - 4 - 6 | 5 | (5, 9, 7, 5, 0, 9, 0, 0, 12, 0) | 21 |

Taglio di capacità minima: $N_s = \{1, 3\}$ $\quad N_t = \{2, 4, 5, 6\}$

**Esercizio 7.** Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 14\ x_1 + 12\ x_2 \\ 13\ x_1 + 8\ x_2 \geq 46 \\ 11\ x_1 + 16\ x_2 \geq 41 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

sol. ottima del rilassamento $= \left(\frac{17}{5}, \frac{9}{40}\right)$ $\qquad v_I(P) = 51$

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo arrotondando la soluzione ottima del rilassamento.

sol. ammissibile $= (4, 1)$ $\qquad v_S(P) = 68$

c) Calcolare un taglio di Gomory.

$r = 1$ $\qquad 12\,x_1 + 8\,x_2 \geq 43$
$r = 2$ $\qquad 11\,x_1 + 15\,x_2 \geq 41$

**Esercizio 8.** Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 città, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

| **città** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 16 | 21 | 64 | 46 |
| **2** | | 16 | 99 | 58 |
| **3** | | | 98 | 11 |
| **4** | | | | 10 |

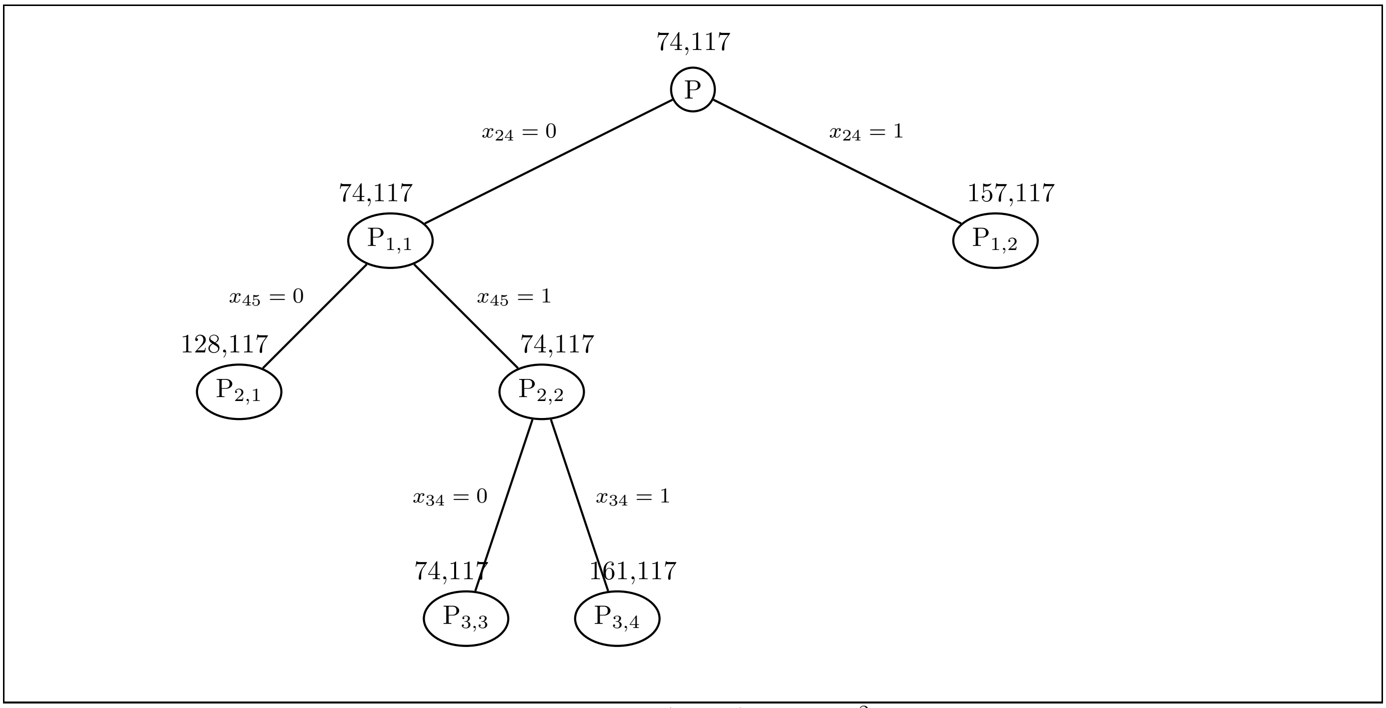
a) Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 2–albero di costo minimo.

2–albero: ( 1 , 2 ) ( 1 , 3 ) ( 2 , 3 ) ( 3 , 5 ) ( 4 , 5 ) $\qquad v_I(P) = 74$

b) Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1.

ciclo: $1 - 2 - 3 - 5 - 4$ $\qquad v_S(P) = 117$

c) Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 2–albero di costo minimo come rilassamento di ogni sottoproblema ed istanziando, nell'ordine, le variabili $x_{24}$, $x_{45}$, $x_{34}$.




**Esercizio 9.** Trovare massimi e minimi della funzione $f(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$ sull'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1^2 - (x_2 - 1)^2 + 1 \le 0, \quad -x_1 \le 0\}.$$

| Soluzioni del sistema LKT | | | Massimo | | Minimo | | Sella |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\lambda$ | $\mu$ | globale | locale | globale | locale | |
| $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ | $(-1, 0)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |
| $(0,\ 0)$ | $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ | | NO | SI | NO | NO | NO |
| $(0,\ 2)$ | $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ | | NO | NO | NO | NO | SI |

**Esercizio 10.** Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -4\ x_1^2 - 4\ x_1\, x_2 + 5\ x_1 + 9\ x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove $P$ è il poliedro di vertici $(-2, 3)$ , $(1, 1)$ , $(0, -4)$ e $(-2, -2)$. Fare una iterazione del metodo di Frank-Wolfe.

| Punto | Funzione obiettivo problema linearizzato | Sol. ottima problema linearizzato | Direzione | Passo | Nuovo punto |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(-1, \frac{7}{3}\right)$ | $\frac{11}{3}\, x_1 + 13\, x_2$ | (0 ,-4) | $\left(1, -\frac{19}{3}\right)$ | 1 | $(0, -4)$ |