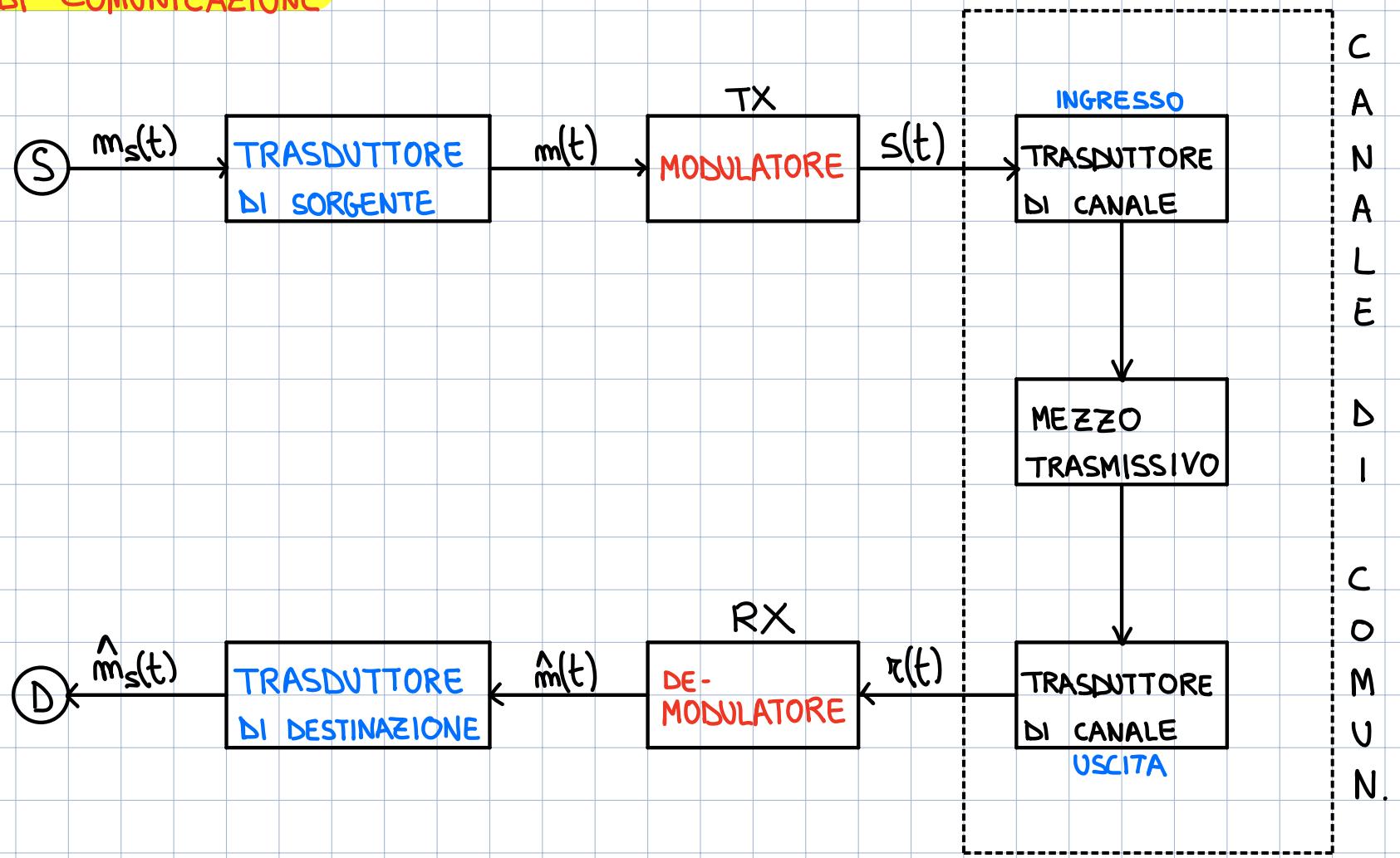


Sistemi di comunicazione per Comunicazioni Numeriche

Ad opera di Federico Casu

SISTEMI DI COMUNICAZIONE

Schema:



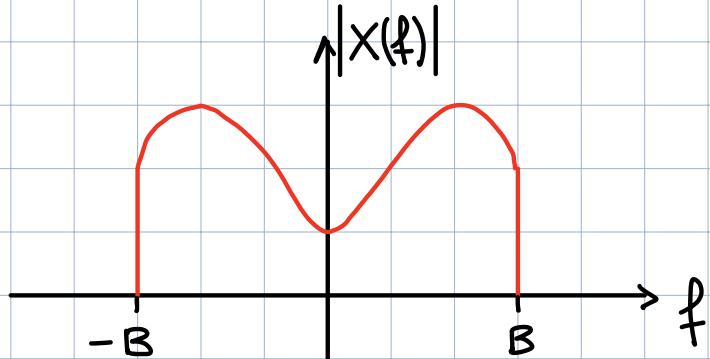
Proprietà:

- $m_s(t)$, $\hat{m}_s(t)$ sono **segnali analogici** oppure **segnali numerici**.
- $m(t)$, $\hat{m}(t)$ sono entrambi **segnali elettrici**.
- Il compito del trasduttore di sorgente è quello di convertire un **segnale analogico / digitale** in un **segnale elettrico**.

Se il segnale $m_s(t)$ è ANALOGICO allora un esempio di trasduttore di sorgente può essere il microfono. Nel caso in cui $m_s(t)$ sia un segnale digitale il compito del trasduttore è svolto dal DAC.

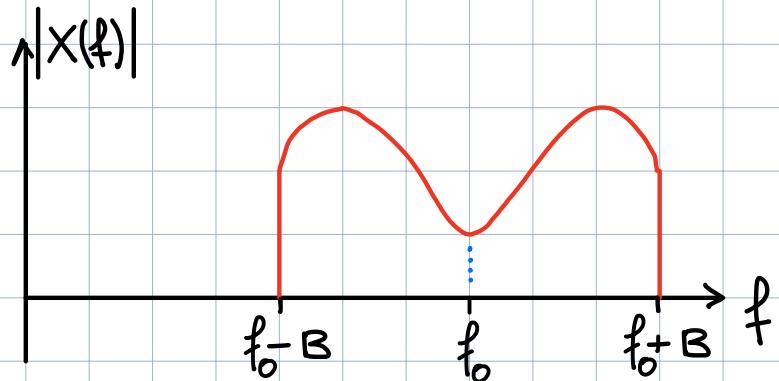
Per parlare di MODULATORE/DEMODULATORE è necessario introdurre i concetti di segnale in banda base e segnale in banda passante:

SEGNALE IN BANDA BASE



Un segnale si dice in BANDA BASE se lo spettro del segnale è CENTRATO nell'origine delle frequenze.

SEGNALE IN BANDA PASSANTE



Un segnale si dice in BANDA PASSANTE quando lo spettro è centrato ad una frequenza $f_0 \neq 0$.

Se il sistema di comunicazione è di tipo BANDA PASSANTE allora il **MODULATORE** si occupa di traslare lo spettro di $m(t)$ intorno una frequenza $f_0 \neq 0$. Al contrario di quanto accade nei sistemi di comunicazione in banda base, il segnale elettrico prodotto dal TRASMETTITORE di un sistema di comunicazione in banda passante è traslato intorno alle frequenze f_0 e $-f_0$. Ciò è dovuto al fatto che una MODULAZIONE nel dominio del tempo si traduce in:

$$x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) \xrightleftharpoons{\text{TCF}} \frac{e^{j\theta}}{2} \times (f + f_0) + \frac{e^{j\theta}}{2} \times (f - f_0)$$

Il **DEMODULATORE** riporta in BANDA BASE il segnale proveniente dal canale.

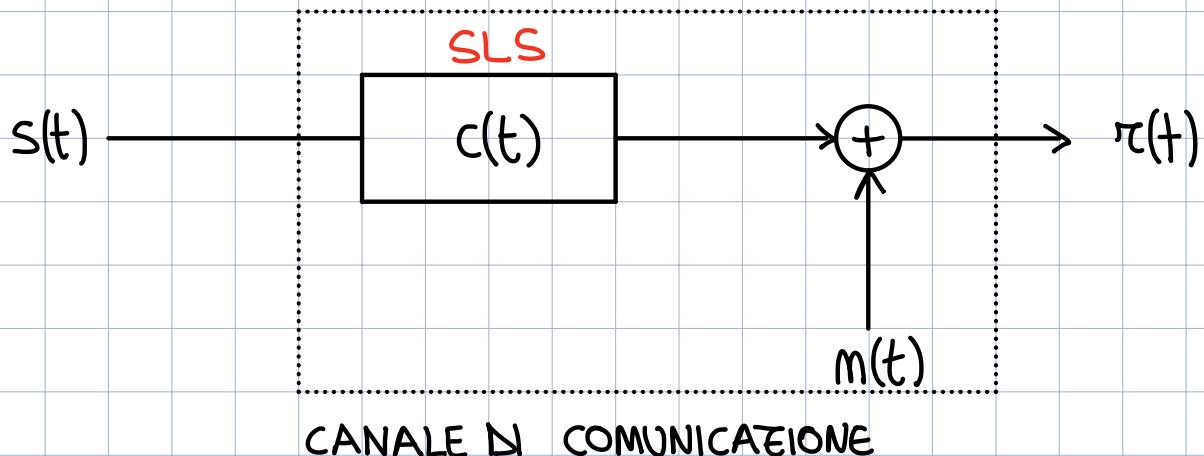
BANDA LARGA e BANDA STRETTA

Un segnale si dice a **BANDA LARGA** se $f_0 \leq 2B$ ovvero se la frequenza f_0 su cui è centrato lo spettro del segnale è minore o al più uguale a due volte la sua banda.

Un segnale si dice a **BANDA STRETTA** se $f_0 \gg 2B$.

→ Banda larga e banda stretta sono due concetti RELATIVI!

MODELLO CONCETTUALE DI CANALE DI COMUNICAZIONE



Come è facile intuire, il canale di comunicazione non è un modello IDEALE.
In particolare, noi consideriamo canali di comunicazione che INTRODUONO:

- Distorsioni lineari.
- Rumore (solo di tipo additivo).

$$\Rightarrow r(t) = s(t) \otimes c(t) + m(t)$$

Annotations below the equation:

- A red arrow points from the term $s(t)$ to the text "Segnale in uscita dal CDC".
- A blue arrow points from the term $c(t)$ to the text "Risposta IMPULSIVA del CDC (introduce DISTORSIONE LINEARE)".
- A pink arrow points from the term $m(t)$ to the text "Rumore".
- A blue arrow points from the term $s(t)$ to the text "Segnale in ingresso al CDC".

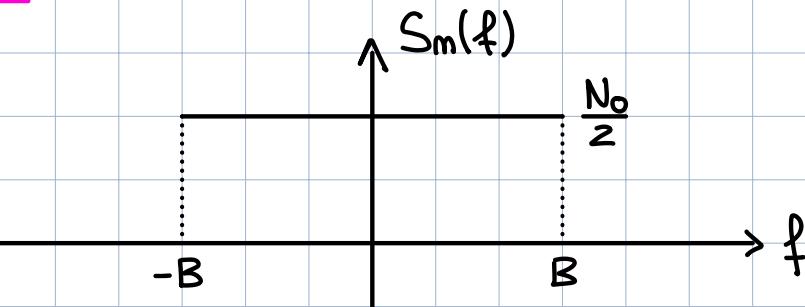
Noi consideriamo solamente RUMORE BIANCO GAUSSIANO:

$m(t)$ RUMORE BIANCO GAUSSIANO :

$$\begin{cases} m_m = 0 \\ S_m = \frac{N_0}{2} \\ R_m(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \\ P_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} df = R_m(0) = +\infty \end{cases}$$

RUMORE BIANCO GAUSSIANO IN BANDA BASE

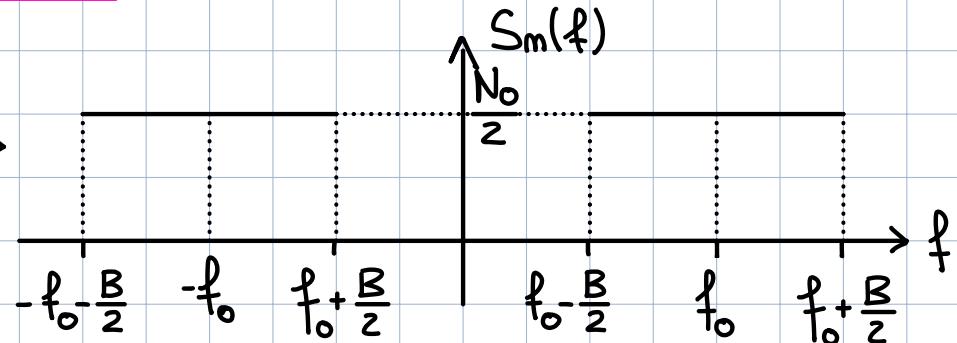
$$S_m(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ B \triangleq \text{banda del rumore} \end{array} \right\} \Rightarrow$$



RUMORE BIANCO GAUSSIANO IN BANDA PASSANTE

$$S_m(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}\left(\frac{f+f_0}{B}\right) + \frac{N_0}{2} \text{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ B \triangleq \text{banda del rumore} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$B \triangleq$ banda del rumore



Definizione di CANALE IDEALE :

$$\begin{cases} m(t) = \emptyset \\ c(t) = \delta(t) \end{cases} \Rightarrow$$

Se il canale è IDEALE
allora $r(t) = \underbrace{s(t) \otimes c(t)}_{\tilde{s}(t)} + m(t) = s(t)$

SISTEMI DI COMUNICAZIONE ANALOGICI E NUMERICI

Analogico : $m_s(t)$ e $\hat{m}_s(t)$ sono segnali ANALOGICI.

Numerico : $m_s(t)$ e $\hat{m}_s(t)$ sono NUMERI.

In questo corso ci occuperemo di SISTEMI DI COMUNICAZIONE NUMERICI

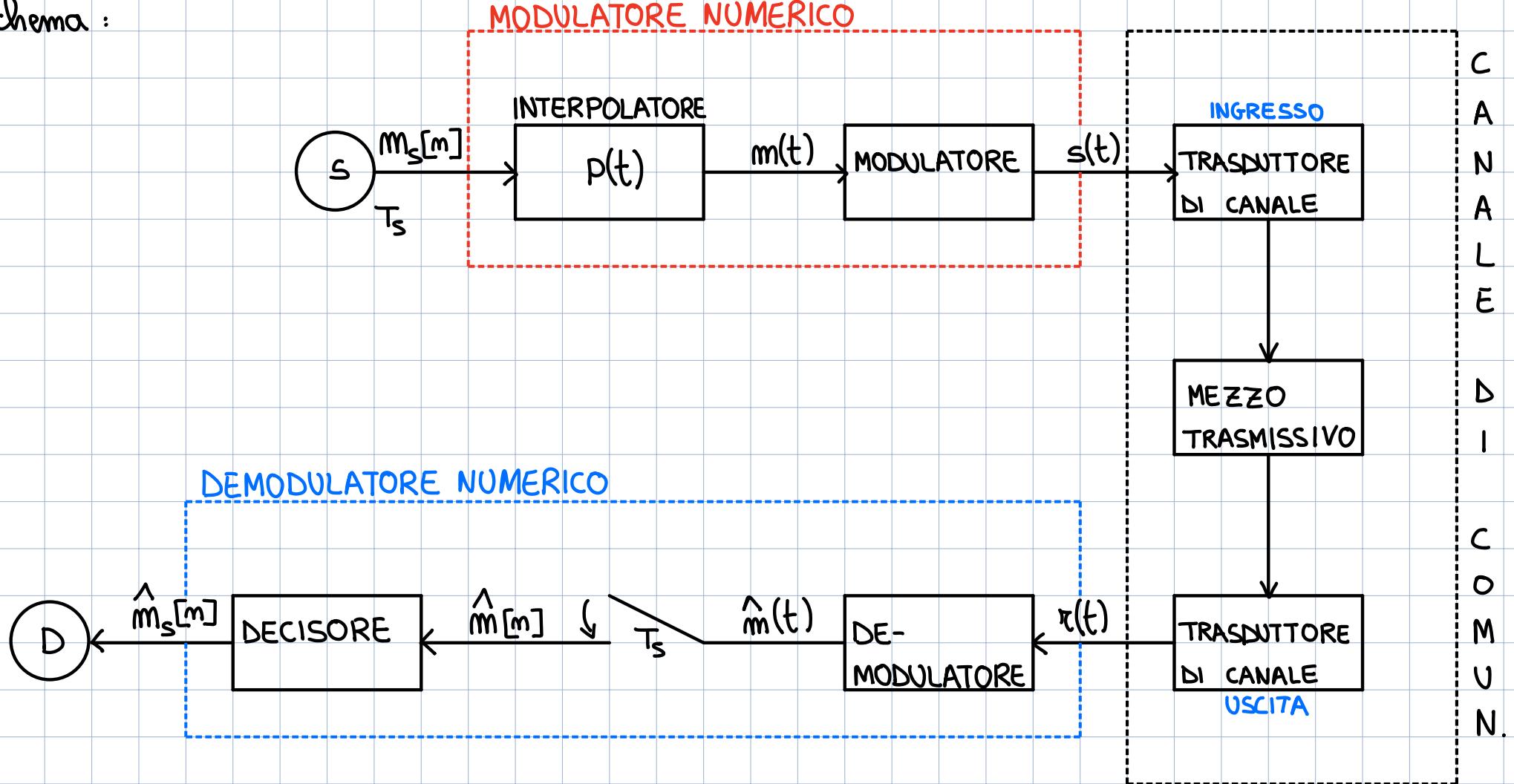


$m_s(t)$ diventa $m_s[m]$, ovvero una sequenza
di numeri!

Lo stesso accade per $\hat{m}_s(t)$, che diventa
 $\hat{m}_s[m]$.

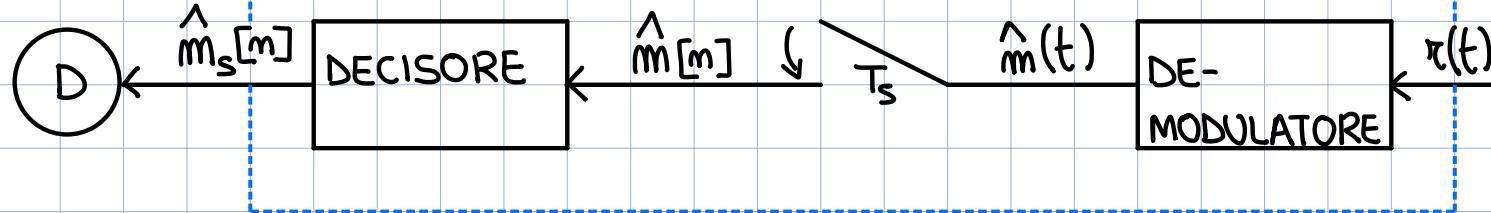
Andiamo a studiare da quali parti è composto un sistema di comunicazione
NUMERICO.

Schema :



C
A
N
A
L
E
D
I
C
O
M
U
N.

DEMODULATORE NUMERICO



MEZZO
TRASMISSIVO

TRASDUTTORE
DI CANALE
USCITA

Analizzeremo le caratteristiche dei segnali e delle parti che compongono il sistema di comunicazione numerico :

$T_s \triangleq$ tempo di **SEGNALAZIONE**. Indica il periodo con il quale la sorgente produce un **SIMBOLO** da trasmettere.

•) $m_s[m] \in A_s = \{a_1, \dots, a_M\}$; $\#A_s = M$ ($A_s \triangleq$ alfabeto di simboli)

•) $m_s[m]$, dal punto di vista del RICEVITORE, è una VARIABILE ALEATORIA!
Possiamo pensare $m_s[m]$ come il campionamento di un processo aleatorio.

•) $m(t) = \sum_m m_s[m] p(t - mT_s)$

•) $R_s \triangleq \frac{1}{T_s}$, TASSO DI EROGAZIONE dei SIMBOLI

PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE

$$P\{i|j\} = P\{\hat{m}_s = a_i \mid m_s = a_j\}, \quad a_i, a_j \in A_s$$

Un sistema di comunicazione numerico è caratterizzato COMPLETAMENTE dal punto di vista statistico quando sono note tutte le $P\{i|j\} \forall i, j$.

PROBABILITÀ DI ERRORE SUL SIMBOLO

$$P_E(m) \triangleq P[m_s[m] \neq \hat{m}_s[m]]$$

Supponiamo di avere l'alfabeto $A_s = \{a_1, a_2\}$ avendo due simboli. Supponiamo di conoscere tutte le probabilità di transizione, ovvero:

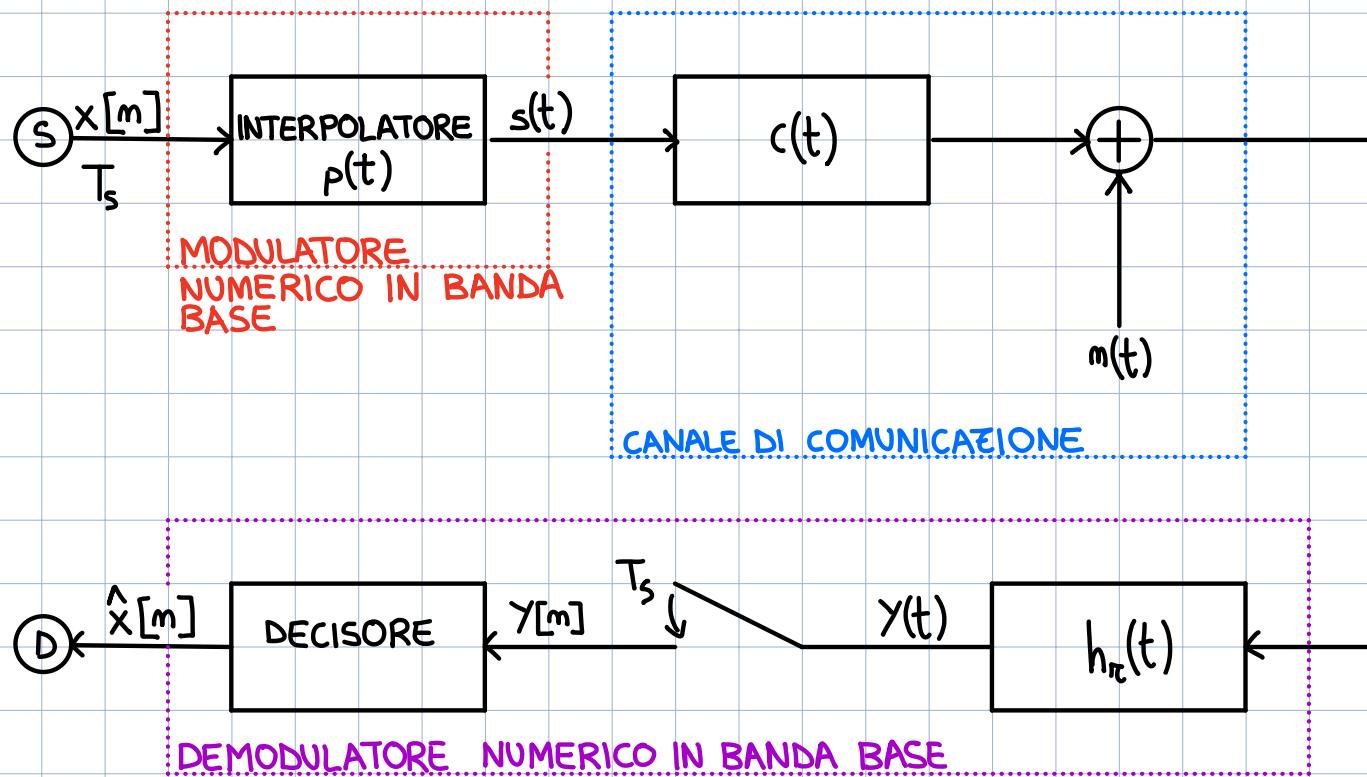
$$P(1,1) = P(\hat{m}_s = a_1 \mid m_s = a_1)$$
$$P(1,2) \quad P(\hat{m}_s = a_1 \mid m_s = a_2)$$

$$P(2,1) = P(\hat{m}_s = a_2 \mid m_s = a_1)$$
$$P(2,2) \quad P(\hat{m}_s = a_2 \mid m_s = a_2)$$

Quanto vale $P_E(m)$? Facile: Th. della probabilità TOTALE!

$$P_E(m) = P[\hat{m}_s[m] \neq m_s[m]] = P(1|2)P(2) + P(2|1)P(1)$$

SISTEMI DI COMUNICAZIONE NUMERICI IN BANDA BASE



Lo schema di sopra descrive la struttura generale di un sistema di comunicazione numerico in banda base.

La **SORGENTE** trasmette i simboli $x[m] \in A_s = \{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$ ($\#A_s = M$). Tali simboli sono trasmessi ogni T_s secondi. T_s è detto **TEMPO DI SEGNALAZIONE**.

La frequenza di trasmissione dei simboli è data da $R_s = \frac{1}{T_s}$.

Il segnale $s(t)$ inviato mediante il canale di comunicazione è ANALOGICO! L'informazione me da trasmettere, ovvero i simboli $x[m]$, è DIGITALE!

⇒ Ecco perchè è necessario un INTERPOLATORE! $p(t)$ è detto IMPULSO SAGOMATORE.

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] p(t - mT_s)$$

Come ben sappiamo, il canale di comunicazione può introdurre DISTORSIONI e RUMORE.

$$r(t) = s(t) \otimes c(t) + m(t)$$



Per semplificare la trattazione assumiamo che:

① IL CANALE introduca DISTORSIONI LINEARI e sia STAZIONARIO ($c(t)$ è SLS).

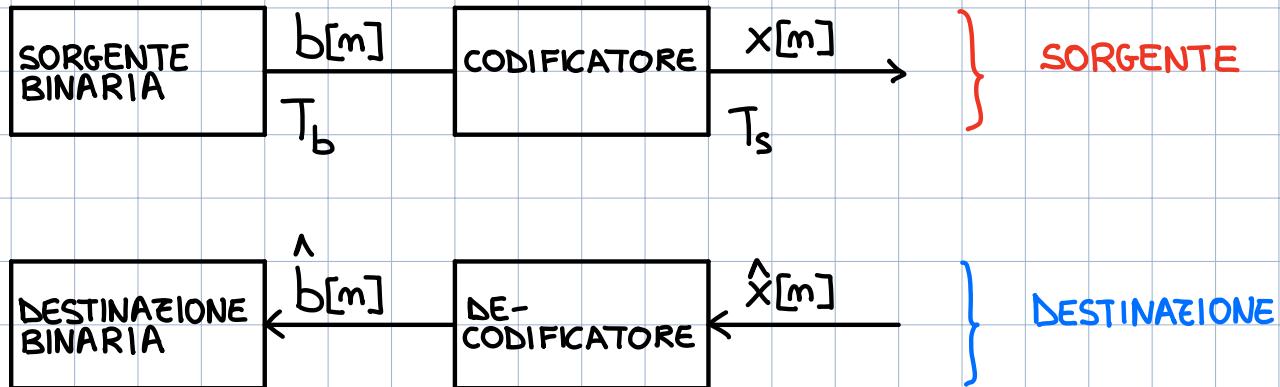
② $m(t)$ sia un RUMORE BIANCO GAUSSIANO, ovvero:

a) $E[m(t)] = 0$

b) $S_m(t) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow R_N(t_1, t_2) = R_N(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \Rightarrow P_N = \infty$

$h_r(t)$ è un FILTRO DI RICEZIONE LINEARE e STAZIONARIO.

Nel caso di SISTEMA di COMUNICAZIONE BINARIO abbiamo alcune differenze tra lato SORGENTE e lato DESTINAZIONE:



Se $x[m] \in A_s = \{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$ dove $M = z^k$ con $k \in \mathbb{N}$, allora $T_s = T_b \log_2 M$.

PROBABILITÀ DI ERRORE SUL BIT $\triangleq P(\hat{b}[m] \neq b[m])$

PROBABILITÀ DI ERRORE SUL SIMBOLO $\triangleq P(\hat{x}[m] \neq x[m])$

$$\text{BER} \triangleq \text{BIT ERROR RATE} \Rightarrow \text{BER} = P_E(b) \cdot R_b = P_E(b) \cdot \frac{1}{T_b}$$

Andiamo a focalizzare l'attenzione sul segnale trasmesso $s(t)$:

$$s(t) = \sum_m x[m] p(t - mT_s)$$

Dal punto di vista del RX, $x[m]$ È UNA VARIABILE ALEATORIA!

→ $s(t)$ è un SEGNALE ALEATORIO e per questo motivo va studiato mediante INDICI STATISTICI!

RISULTATO: si può DEMONSTRARE che $s(t)$ è un processo SSL!

Visto che $s(t)$ ha, teoricamente, una DURATA INFINITA, ne segue che $s(t)$ ha ENERGIA INFINITA! Possiamo comunque studiare solamente con quanta POTENZA si propaga $s(t)$:

$S_s(f)$ = Densità Spettrale di Potenza

$$P_s = \text{POTENZA di } s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_s(f) df$$

Se sull'energia di $s(t)$ c'è poco da dire, possiamo studiare l'**ENERGIA PER SIMBOLI TRASMESSO**:

$$E_{s_i} = E_s \Big|_{X[m]=\alpha_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_i(t)|^2 dt$$

FORMATO DI MODULAZIONE EQUIENERGIA $\Rightarrow E_{S_i} = E_{S_j} = K \quad \forall i, j$

PERFORMANCE DI UN SISTEMA DI COMUNICAZIONE

- ① PROBABILITÀ D'ERRORE: a) sul bit (relativo a sorgenti/destinazioni binarie)
b) sul simbolo

Come possiamo calcolare la $P(\hat{x}[n] \neq x[n])$? Dobbiamo essere a conoscenza delle seguenti probabilità:

- 1) Tutte le probabilità di TRANSISSIONE, ovvero $P(\hat{x}[n] = \alpha_i \mid x[n] = \alpha_j) \quad \forall i, j$
- 2) Le probabilità a priori di trasmissione, ovvero $P(x[n] = \alpha_j)$.

\Rightarrow Applichiamo th. della probabilità totale:

$$P(\hat{x}[n] = x[n]) = \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M P(\hat{x}[n] = \alpha_i \mid x[n] = \alpha_j) P(x[n] = \alpha_j)$$

Nel caso di SIMBOLI EQUIPROBABILI, ovvero $P(x[n] = \alpha_j) = \frac{1}{M} \quad \forall j$, si ottiene:

$$P(\hat{x}[n] = x[n]) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M P(\hat{x}[n] = \alpha_i \mid x[n] = \alpha_j)$$

② EFFICIENZA ENERGETICA

$$\eta_{\text{P}} \triangleq \frac{1}{\text{SNR}}$$

dove $\text{SNR} = \text{SIGNAL TO NOISE RATIO}$, definito come $\text{SNR} \triangleq \frac{P_s}{P_N}$

NOTA: l'efficienza energetica viene calcolata fissando $P_E(b)$.

POTENZA DEL
SEGNALE UTILE

POTENZA DEL
RUMORE

③ EFFICIENZA SPECTRALE

$$\eta_B \triangleq \frac{R_b}{B_T}$$

NOTA: l'efficienza spettrale viene calcolata fissando $P_E(b)$.

PULSE AMPLITUDE MODULATION

(PAM)

La modulazione PAM è un formato di modulazione in banda base. Analizziamo le caratteristiche:

(PREMESSA: NOI SUPPONIAMO CHE I SIMBOLI SONO INDEPENDENTI!)

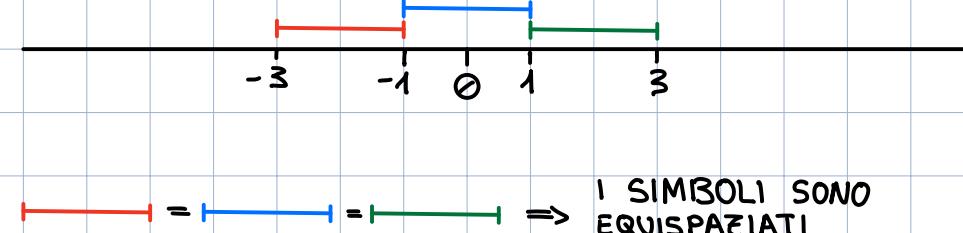
$$\textcircled{1} \quad x[m] \in A_s = \{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}, \#A_s = M \geq 2,$$

Inoltre, si dice PAM STANDARD se i simboli sono EQUIPROBABILI e assumono la seguente forma:

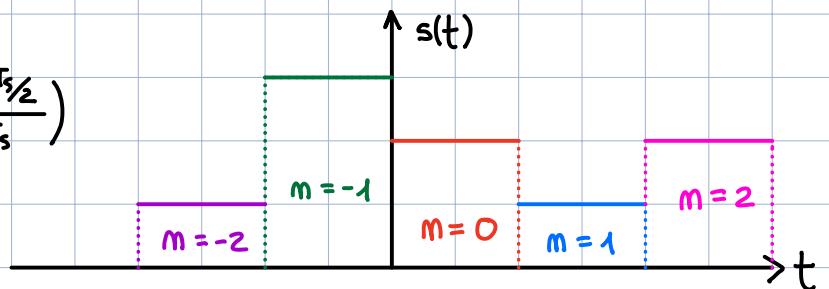
$$\alpha_i = 2i - 1 - M$$

Facciamo un esempio di un possibile alfabeto standard:

$$M = 4 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 - 1 - 4 = -3 \\ \alpha_2 = 4 - 1 - 4 = -1 \\ \alpha_3 = 6 - 1 - 4 = 1 \\ \alpha_4 = 8 - 1 - 4 = 3 \end{cases}$$



$$\textcircled{2} \quad s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] p(t - mT_s) \Rightarrow \text{Esempio: } p(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$$



③ Se si tratta di una PAM standard, $E[s(t)] = 0$

DIM:

$$E[s(t)] = E\left[\sum_m x[m] p(t - mT_s)\right] = \sum_m E[x[m]] p(t - mT_s) = \sum_m \underbrace{E[x[m]]}_{\text{i è un segnale deterministico}} p(t - mT_s)$$

$$E[x[m]] = \text{valor medio di una V.A. DISCRETA} = \sum_{i=1}^M P(x[m] = \alpha_i) \alpha_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \alpha_i$$

$\Rightarrow \frac{1}{M} \quad \forall i = 1, \dots, M$

$\sum_{i=1}^M \alpha_i = 0$ perché i SIMBOLI di una PAM STANDARD sono equispaziati!

$$\Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \alpha_i \right] p(t - mT_s) = 0$$

$\Rightarrow 0$

C.V.d.

Nel caso di PAM STANDARD, $s(t)$ è un segnale aleatorio a VALOR MEDIO NULLO !

$$④ S_s(f) = \text{DSP}[s(t)] = \frac{1}{T_s} \bar{S}_x(f) |P(f)|^2$$

dove $P(f) = \text{TCF}[p(t)]$ e $\bar{S}_x(f) = \text{TFS}[R_x[m]]$

Nota: DSP è la Densità Spettrale di Potenza

Ricorda: la relazione $C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - \eta_{v,x}(t_1)\eta_{v,x}(t_2)$ è VALIDA anche per le V.A. DISCRETE (ovviamente si devono apportare alcune modifiche).

$$\Rightarrow C_x[m] = R_x[m] - \eta_{v,x}^2$$

RISULTATO: I SIMBOLI SONO INDEPENDENTI \Rightarrow I SIMBOLI SONO INCORRELATI $\Rightarrow C_x[m] = \sigma_x^2 \delta[m]$

Per una MODULAZIONE PAM otterremo un risultato più forte:

$$\eta_{v,s} = \emptyset \Rightarrow C_x[m] = R_x[m] \Rightarrow S_x(f) = \text{TFS}[R_x[m]] = \text{TFS}[C_x[m]] = \text{TFS}[\sigma_x^2 \delta[m]] = \sigma_x^2$$

$$\Rightarrow S_s(f) = \frac{\sigma_x^2}{T_s} |P(f)|^2$$

Analizziamo alcune caratteristiche di una 2-PAM STANDARD:

- $E[s(t)] \triangleq E\left[\sum_m x[m] p(t - mT_s)\right] = \sum_m E[x[m]] p(t - mT_s)$

$E[x[m]] = \emptyset$ visto che si tratta di una PAM STANDARD e quindi i simboli sono EQUISPAZIATI.

$E[s(t)] = \emptyset$

- E_{S_1} e E_{S_2} :

$$E_{S_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha_1 p(t - mT_s)|^2 dt = \alpha_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t - mT_s)|^2 dt = \text{cambio di variabile } T' = t - mT_s =$$

$$\left| \alpha_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t')|^2 dt' = \alpha_1^2 E_p \right.$$

Possiamo usare il risultato appena ottenuto anche per α_2 : $E_{S_2} = \alpha_2^2 E_p$

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1 \Rightarrow E_{S_1} = E_{S_2} = E_p \Rightarrow \text{2-PAM È UN FORMATO EQUIENERGIA}$$

- $S_s(f) = \frac{1}{T_s} \bar{S}_x(f) |P(f)|^2$

Visto che si tratta di una PAM STANDARD $\Rightarrow \bar{S}_x(f) = \text{TFS}[R_x[m]] = \text{TFS}[C_x[m]] = \sigma_x^2$

$$\sigma_x^2 = E[(x[m])^2] \Rightarrow \text{visto che } x[m] \text{ è una V.A. DISCRETA} \Rightarrow E[(x[m])^2] = \sum_{i=1}^2 P[x[m] = x_i] \alpha_i^2$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2} (-1)^2 + \frac{1}{2} (1)^2 = 1$$

$S_s(f) = \frac{1}{T_s} |P(f)|^2$ inoltre $T_s = T_b \log_2 2 = T_b \Rightarrow S_s(f) = \frac{1}{T_b} |P(f)|^2$

$$\bullet P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_s} |P(f)|^2 df = \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = \frac{E_p}{T_s}$$

ENERGIA MEDIA PER SIMBOLO TRASMESSO

$$E_s = E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x[m]^2 p^z(t - mT_s) dt \right] = E[x[m]^2] \int_{-\infty}^{+\infty} p^z(t - mT_s) dt = E[x[m]^2] E_p$$

SI TRATTA DI UNA MEDIA STATISTICA

CALCOLATA PER OGNI SIMBOLO TRASMESSO

$$E[x[m]^2] = \text{valore quadratico medio di una V.A. DISCRETA} = \sum_{i=1}^M P(x[m]=\alpha_i) \alpha_i^2$$

Ora possiamo calcolare l'energia media per simbolo trasmesso nel caso di una 2-PAM standard:

$$E_s = \left[\frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{1}{2}(1)^2 \right] E_p = E_p$$

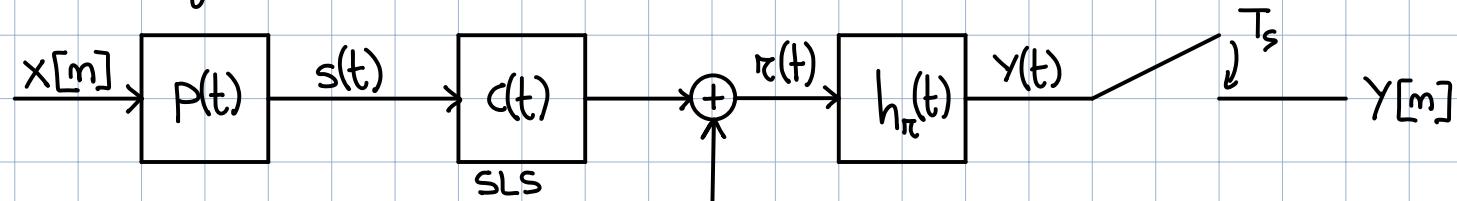
ELEMENTI CHE INFICIANO LE PRESTAZIONI DI UN SISTEMA DI COMUNICAZIONE

- INTERFERENZA INTERSIMBOLICA

- RUMORE

Analizzeremo l'interferenza intersimbolica.

In riferimento al seguente sistema:



$m(t) \Rightarrow$ Per ora non lo consideriamo

Se $y[n] = f(x[n])$

\Rightarrow ASSENZA DI ISI

Se $y[n] = f(\dots, x[n-1], x[n], x[n+1])$

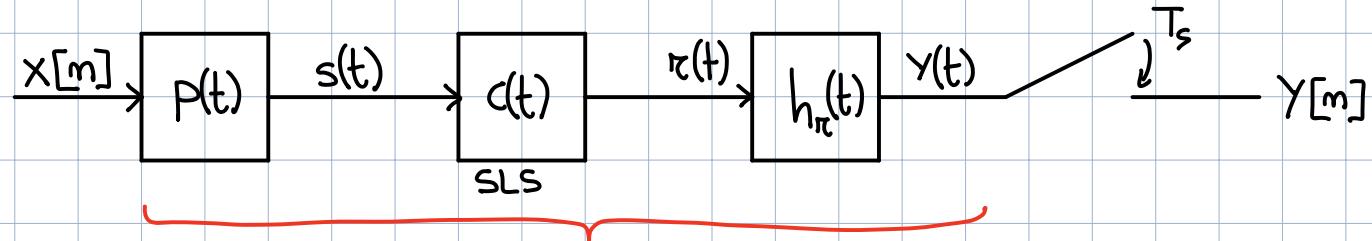
\Rightarrow PRESENZA DI ISI

Da quali fattori dipende l'interferenza intersimbolica?

- ① L'impulso sagomatore ($p(t)$);
- ② Risposta impulsiva del canale ($c(t)$);

③ Risposta impulsiva del filtro di ricezione ($h_r(t)$)

Dimostriamo la dipendenza dell' ISI dai fattori ①, ②, ③. Per semplificare i calcoli definiamo l'**INTERPOLATORE EQUIVALENTE**:



$$\text{INTERPOLATORE EQUIVALENTE } h(t) = p(t) \otimes c(t) \otimes h_r(t)$$

Dimostriamo se è lecito assumere $h(t) = p(t) \otimes c(t) \otimes h_r(t)$:

Partiamo dal segnale $y(t) \Rightarrow Y(f) = \text{TCF}[y(t)]$

$$Y(f) = R(f) H_r(f) = S(f) C(f) H_r(f) = \bar{X}(f) P(f) C(f) H_r(f)$$

$$\text{Definiamo } H(f) = P(f) C(f) H_r(f) \Rightarrow Y(f) = \bar{X}(f) H(f) \Rightarrow h(t) = \text{ATCF}[H(f)]$$

$$\Rightarrow h(t) = \text{ATCF}[P(f)] \otimes \text{ATCF}[C(f)] \otimes \text{ATCF}[H_r(f)] = p(t) \otimes c(t) \otimes h_r(t)$$

c.v.d.

Ora possiamo dire qualcosa sull' ISI :

$$y[k] = y(kT_s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] h(kT_s - mT_s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] h([k-m]T_s) =$$
$$= x[k]h(0) + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq k}}^{+\infty} x[m] h([k-m]T_s)$$

COMPONENTE SENZA ISI COMPONENTE CON ISI

CONDIZIONE DI NYQUIST PER VERIFICARE L' ISI

- Nel DOMINIO del TEMPO :

$$h(kT_s) = C \delta[k]$$

$$\begin{aligned} \text{In queste condizioni si ottiene} \Rightarrow y[k] &= x[k]h(0) + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq k}}^{+\infty} x[m] h([k-m]T_s) \\ &= x[k]h(0) = C \cdot x[k] \end{aligned}$$

RISULTATO : $y[k]$ DIPENDE solamente da $x[k] \Rightarrow$ ASSENZA DI ISI

• Nel DOMINIO della FREQUENZA : $\bar{H}(f) = TFS[h[k]] = \frac{1}{T_s} \sum_k H(f - \frac{k}{T_s})$

Affinché mom si obbia isi deve valer $h[k] = c s[k]$ e di conseguenza

$$\bar{H}(f) = TFS[h[k]] = TFS[c \cdot s[k]] = c \Rightarrow \sum_k H(f - \frac{k}{T_s}) = COSTANTE \quad \forall f$$

CONDIZIONI LIMITE PER L' ASSENZA DI ISI

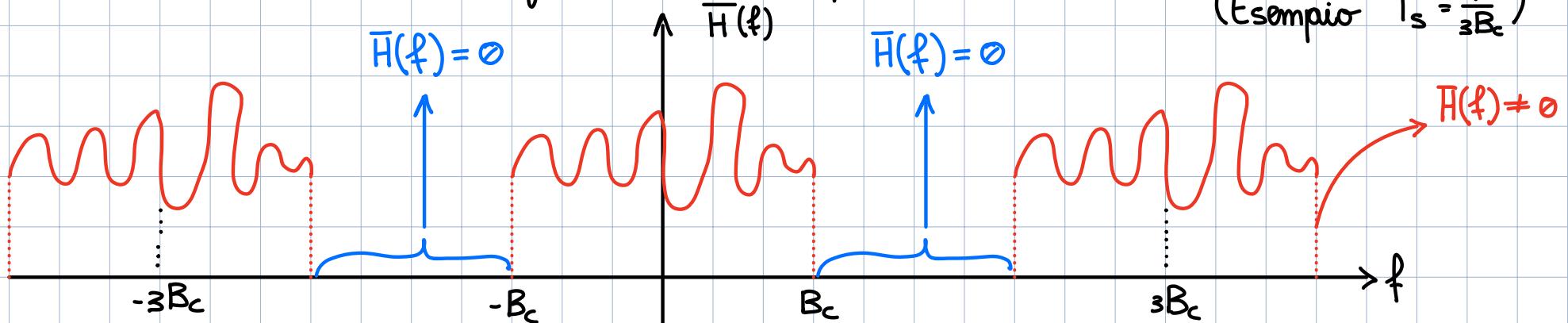
Sia B_c la BANDA DEL CANALE. Per avere le MASSIME PRESTAZIONI si utilizza tutta la banda disponibile, ovvero $B_c = B_T$!

Condizione per cui non è possibile eliminare l' ISI:

$$T_s < \frac{1}{2B_c}$$

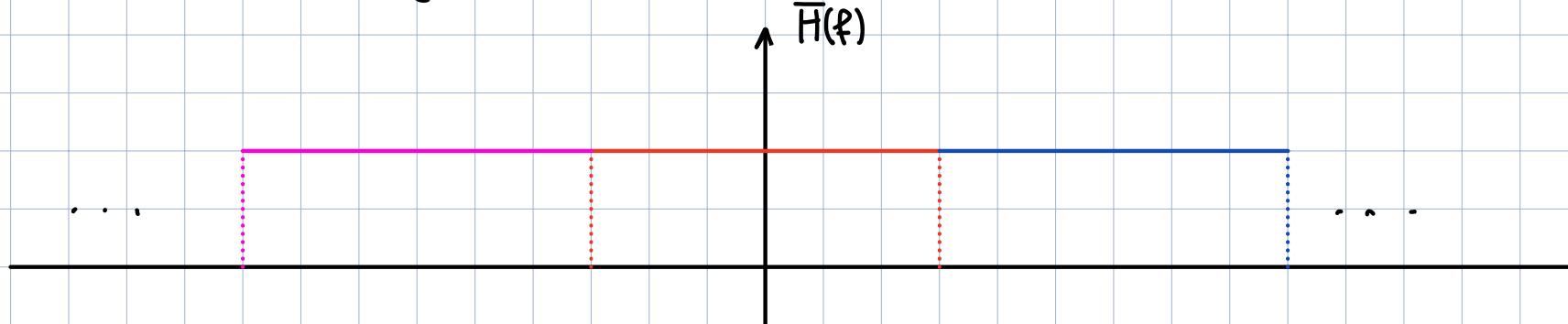
Diamo una dimostrazione grafica di questo risultato:

(Esempio $T_s = \frac{1}{3B_c}$)



$\Rightarrow \bar{H}(f)$ NON È COSTANTE $\forall f$

Cosa succede se $T_s = \frac{1}{2B_c}$? Si ha una soluzione che assicura ASSENZA di ISI:



$$H(f) = K \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B_c}\right) \Rightarrow \bar{H}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_m H\left(f - \frac{m}{T_s}\right) = \frac{K}{T_s} \sum_m \operatorname{rect}\left(\frac{f - mT_s}{2B_c}\right) = \frac{K}{T_s}$$

$$h(t) = \text{ATCF}[H(f)] = zB_c K \operatorname{sinc}(zB_c t) \Rightarrow h(mT_s) = zB_c K \operatorname{sinc}\left(zB_c m \frac{1}{zB_c}\right) = zB_c K \delta[m]$$
OK

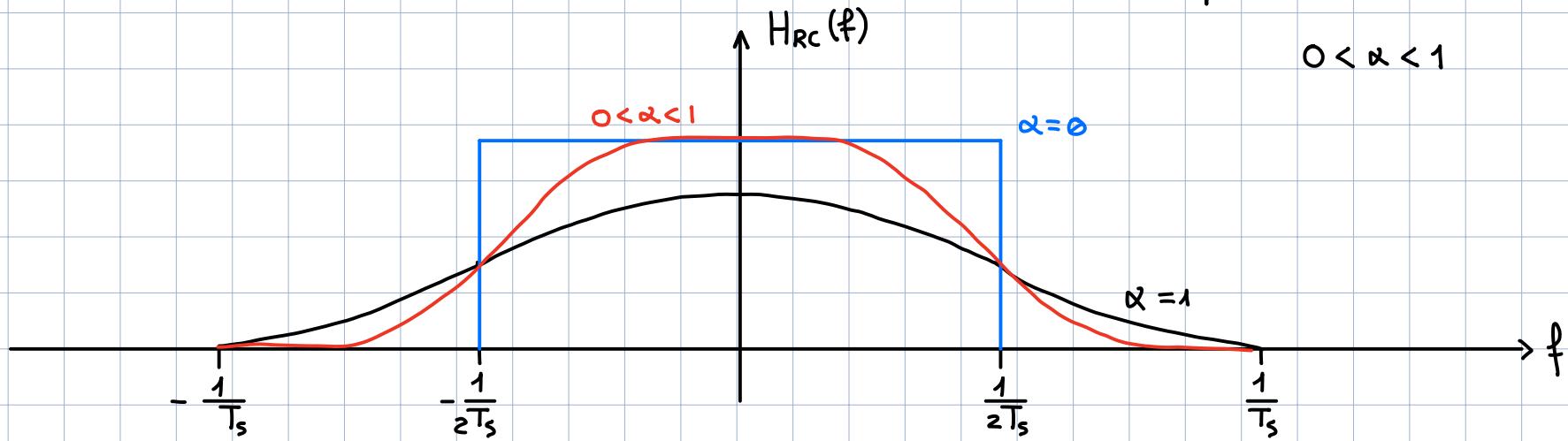
Purtroppo questa non è un'ottima soluzione per la presenza del sonoro cardinale!

COSENO RIALZATO

formula complicata \Rightarrow NON MI INTERESSA

\Rightarrow Il coseno rialzato mi assicura sempre ASSENZA di ISI

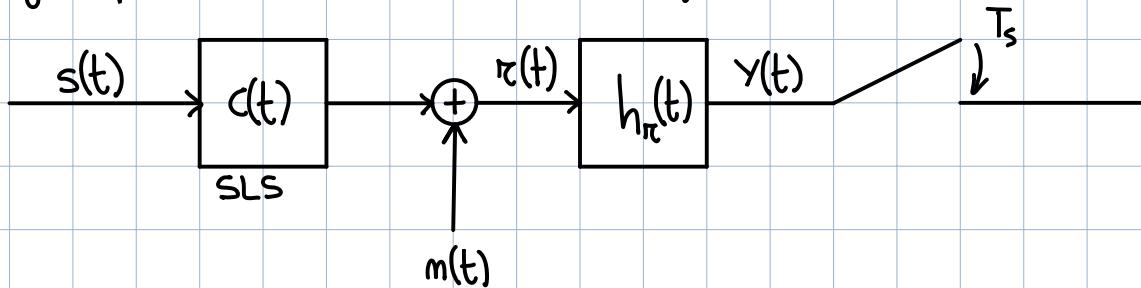
$$0 < \alpha < 1$$



Si può dimostrare che $\bar{H}_{RC}(f) = \frac{1}{T_s} \sum H_{RC}(f - \frac{m}{T_s}) = C$ $\forall \alpha$ (C COSTANTE $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$).
 Inoltre, $h_{RC}(t) \rightarrow 0$ come $\frac{1}{t^3}$

PRESenza DI RUMORE

Vediamo quali sono gli effetti del rumore sul segnale ricevuto:



Noi tratteremo solamente RUMORI GAUSSIANI BIANCHI:

$$\begin{cases} E[m(t)] = 0 \\ S_m(f) = \frac{N_0}{2} \end{cases}$$

$$r(t) = s(t) \otimes c(t) + m(t) = \sum_m x[m] \tilde{p}(t - mT_s) + m(t) \quad \text{dove } \tilde{p}(t) = p(t) \otimes c(t)$$

$$\text{Dim: } r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) c(t - \tau) d\tau + m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_m x[m] p(\tau - mT_s) c(t - \tau) d\tau + m(t) =$$

$$= \sum_m x[m] \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau - mT_s) c(t - \tau) d\tau + m(t) = \text{cambio di variabile } \tau' = \tau - mT_s =$$

$$= \sum_m x[m] \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau') c(t - \tau' - mT_s) d\tau' + m(t) = \sum_m x[m] \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau') c(t - mT_s - \tau') d\tau' + m(t) =$$

$$r(t) = \sum_m x[m] \tilde{p}(t') + m(t) \quad |_{t'=t-mT_s} \quad r(t) = \sum_m x[m] \tilde{p}(t - mT_s) + m(t)$$

c.v.d.

$$r(t) = \sum_m x[m] \tilde{p}(t - mT_s) + m(t)$$

COMPONENTE UTILE ↗ RUMORE

In entrata al filtro di ricezione abbiamo il segnale composto da una componente utile e da una componente di rumore \Rightarrow Il filtro deve essere tale da eliminare la componente di rumore.

FILTRO ADATTATO \triangleq filtro che MINIMIZZA gli effetti del rumore.



filtro che MASSIMIZZA il rapporto SNR in un determinato istante di tempo quando:

- È nato il segnale UTILE in ingresso al filtro.
- È presente RUMORE BIANCO.

$$\text{SNR} \triangleq \frac{P_s}{P_n}$$

↓
signal to noise ratio

$$\tilde{p}(t) = p(t) \otimes c(t)$$

Epressione di un filtro adattato $\Rightarrow h_{FA}(t) = K \tilde{p}(T_s - t)$

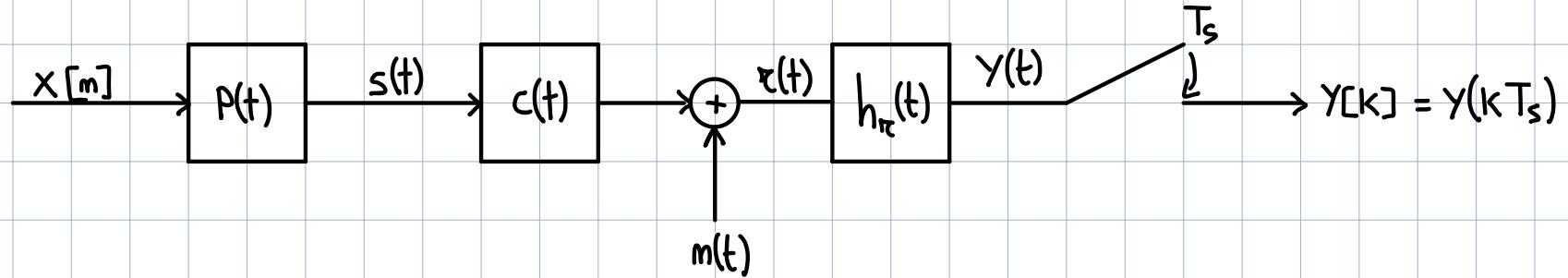


K COSTANTE ARBITRARIA

$$H_{FA}(f) = TCF[h_{FA}(t)] = K \tilde{P}^*(f) e^{-j2\pi f T_s}$$

Dimostriamo che MAX SNR \Rightarrow MIN P_E :

Ipotesi : ASSENZA DI ISI



Visto l'ipotesi assunta sappiamo che : $y[k] = x[k]h(0) + m_u[k]$

In assenza di ISI il decisore determina il simbolo in funzione solo del campione corrente.

\Rightarrow DECISORE SINGLE SHOOT: Decisore che determina il simbolo $\hat{x}[k]$ in funzione del solo campione $y[k]$.

Vogliamo implementare un decisore che MINIMIZZA la probabilità di errore!

RISULTATO DALLA TEORIA:

CRITERIO A MINIMA P_E



CRITERIO MAP: MAXIMUM A POSTERIORI PROBABILITY

Questo risultato teorico ci dice che MINIMIZZARE $P(\hat{x}[m] \neq x[m])$ equivale a MASSIMIZZARE la probabilità di scegliere $\hat{x}[m] = \alpha_i$ avendo osservato y .

$$\text{MIN } P(\hat{x}[m] \neq x[m]) \iff \hat{x} = \underset{i=1, \dots, M}{\text{MAX}} P(x = \alpha_i | y)$$

Se i simboli fossero equiprobabili? RISULTATO: CRITERIO MAX VEROLOGIANZA

$$\hat{x} = \underset{i=1, \dots, M}{\text{MAX}} f_y(y | x = \alpha_i)$$

Stiamo per completare il puzzle:

$f_y(y|x=\alpha_i)$ è la DENSITÀ DI PROBABILITÀ del CAMPIONE, mentre V.A., $y[k]$ condizionata da $x = \alpha_i$. Cosa sappiamo di $y[k|x=\alpha_i]$?

$$\Rightarrow y[k] = x[k]h(\theta) + m_u[k] \implies y[k|x=\alpha_i] = \underbrace{\alpha_i h(\theta)}_{\text{ENTRAMBI NOTI}} + \underbrace{m_u[k]}_{\text{DETERMINISTICI}}$$

$$m_u[k] \in \mathcal{N}(0, \sigma_{m_u}^2)$$

entrambi NOTI
e DETERMINISTICI

RISULTATO: $y[k|x=\alpha_i]$ È UNA V.A. GAUSSIANA! Di fatto è una trasformazione LINEARE di $m_u[k]$.

Calcoliamo VALOR MEDIO e VARIANZA di $y[k|x=\alpha_i]$:

$$E[y[k|x=\alpha_i]] = E[\alpha_i h(\theta) + m_u[k]] = E[\alpha_i h(\theta)] + E[m_u[k]]$$

$E[m_u[k]]$ è il campionamento di un processo aleatorio Gaussiano Bianco, $m(t)$, inserita da un filtro SLS. Da ciò possiamo ricavare:

$$E[m(t) \otimes h_r(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[m(\tau)] h_r(t-\tau) d\tau = 0 \implies E[m_u[k]] = 0$$

$$E[y[k|x=\alpha_i]] = \alpha_i h(\theta)$$

Prima di calcolare σ_y^2 è importante calcolare $\sigma_{m_u}^2$:

$m(t)$ è un RUMORE BIANCO GAUSSIANO

$$m = \emptyset$$

$$\sigma_m^2 = P_m = \int_{-\infty}^{+\infty} S_m(f) df$$

La densità spettrale di potenza del segnale in uscita dal filtro è data da:

$$S_{m_u}(f) = S_m(f) |H_r(f)|^2 \Rightarrow P_{m_u} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_m(f) |H_r(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} E_{h_r}$$

$$S_m(f) = \frac{N_0}{2}$$

RISULTATO $\Rightarrow \sigma_y^2 = \sigma_{m_u}^2 = \frac{N_0}{2} E_{h_r}$

$$y[k|x=\alpha_i] \in \mathcal{N}\left(\alpha_i h(0), \sqrt{\frac{N_0}{2} E_{h_r}}\right) \Rightarrow f_y(y|x=\alpha_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{N_0}{2} E_{h_r}}} e^{-\frac{(y-\alpha_i h(0))^2}{N_0 E_{h_r}}}$$

Ma dopo tutto questo sforzo ancora non abbiamo capito quale strategia di decisione deve implementare il decisore single shoot! Ormai abbiamo a disposizione tutti gli strumenti necessari:

CRITERIO MIN $P_E = P(\hat{x}[m] \neq x[m])$ \iff CRITERIO MAX VEROLOGIAZIONA
 SIMBOLI EQUIPROBABILI

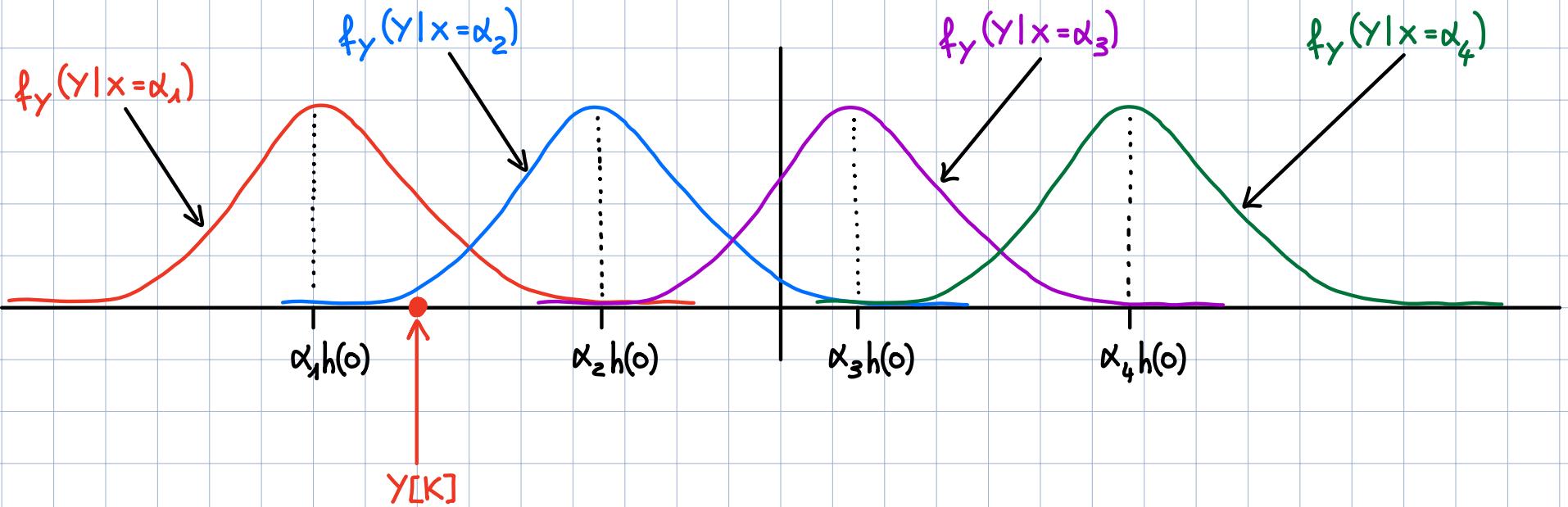
CRITERIO MAX VEROLOGIAZIONA : $\hat{x} = \max_{i=1,\dots,M} f_Y(y|x=x_i)$

$$\hat{x} = \max_{i=1,\dots,M} f_Y(y|x=x_i) \Rightarrow \hat{x} = \arg \max_{\alpha_i} \left\{ e^{-\frac{(y-\alpha_i h(o))^2}{N_0 E_{hrc}}} \right\}$$

$\text{È UNA COSTANTE} \Rightarrow \text{NON RILEVANTE}$
 AI FINI DEL NOSTRO SCOPO

$$\hat{x} = \arg \max_{\alpha_i} \left\{ e^{-\frac{(y-\alpha_i h(o))^2}{N_0 E_{hrc}}} \right\} \Rightarrow \hat{x} = \arg \min_{\alpha_i} \left\{ -\frac{(y-\alpha_i h(o))^2}{N_0 E_{hrc}} \right\}$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \arg \min_{\alpha_i} \left\{ |y - \alpha_i h(o)| \right\}$$



Se $y[k]$ assume il valore ROSSO il CRITERIO MAX VEROLOGIANZA mi dice che MINIMIZZO la probabilità di errore se scelgo $\hat{x}[k] = \alpha_i$; dove α_i è tale che la distanza $|y - \alpha_i h(0)|$ è MINIMA! In questo caso scelgo $\hat{x}[k] = \alpha_1$!

CALCOLO DELLA PROBABILITÀ D'ERRORE PER SISTEMI DI COMUNICAZIONE BINARI

Attenzione: il metodo che stiamo per studiare è valido SE E SOLO SE le seguenti ipotesi siano verificate

- Assenza di ISI
- Rumore additivo Gaussiano bianco
- Decisore SINGLE SHOT con soglia λ NOTA
- Modello del canale, $c(t)$, NOTO

Sotto queste ipotesi allora possiamo dire che $P_E(M) = P_{EB}$.
In realtà sappiamo già calcolare $P(\hat{X}[m] \neq X[m])$:

$$P(\hat{X}[m] \neq X[m]) = \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M P(\hat{X}[m] = \alpha_i \mid X[m] = \alpha_j) P(X[m] = \alpha_j)$$

Se $M = 2$ il discorso si semplifica:

$$P_{EB} = P(\hat{X}[m] = \alpha_1 \mid X[m] = \alpha_2) P(X[m] = \alpha_2) + P(\hat{X}[m] = \alpha_2 \mid X[m] = \alpha_1) P(X[m] = \alpha_1)$$

Supposto che si conoscano le probabilità di trasmissione, ci rimane ora capire come sono fatte le probabilità di transizione.

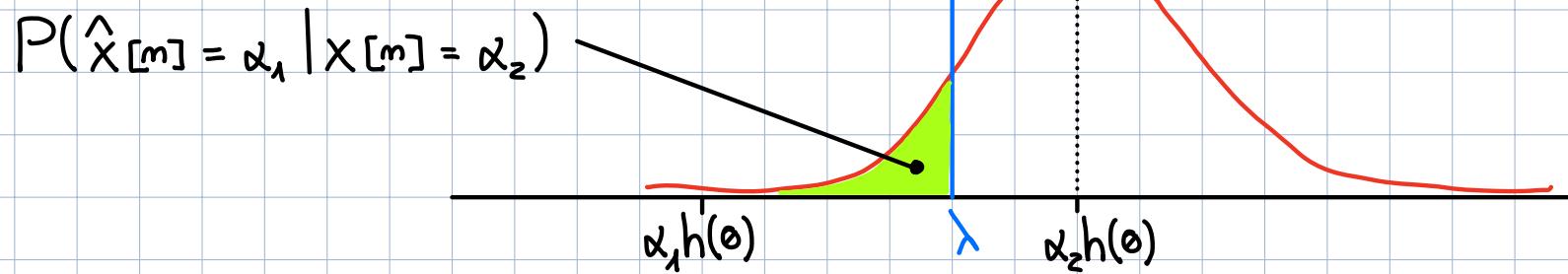
Analizziamo $f_y(y|x=\alpha_2)$. Le ipotesi sono tali da poter affermare le seguenti

$$1) \text{ ASSENZA DI ISI} \Rightarrow y[k|x=\alpha_2] = \alpha_2 h(0) + m_u[k]$$

$$2) \text{ Rumore additivo Gaussiano bianco} \Rightarrow y[k|x=\alpha_2] \in \mathcal{N}(\alpha_2 h(0), \frac{N_0}{2} E_{h_R})$$

(Interpretiamo $y[k|x=\alpha_1]$ come trasformazione lineare di $m_u[k]$)

$$f_y(y|x=\alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E_{h_R}}} e^{-\frac{(y - \alpha_2 h(0))^2}{N_0 E_{h_R}}}$$

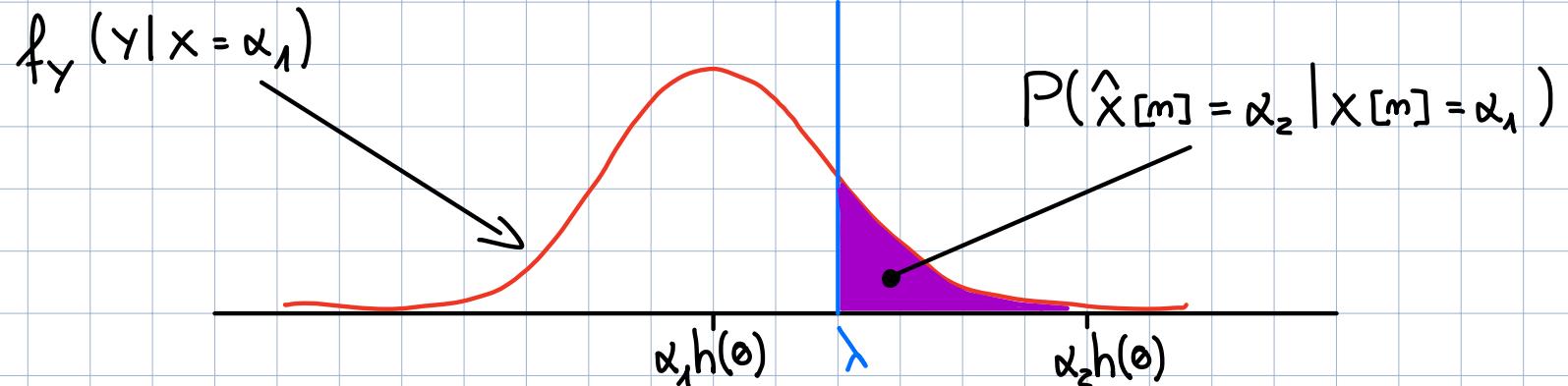


Come posso interpretare $P(\hat{X}[m] = \alpha_1 | X[m] = \alpha_2)$: sapendo di aver trasmesso α_2 , qual'è la probabilità che il decisore abbia deciso $\hat{X}[m] = \alpha_1$ invece che $\hat{X}[m] = \alpha_2$?

$$\Rightarrow P(\hat{X}[m] = \alpha_1 | X[m] = \alpha_2) = F_{Y|X=\alpha_2}(\lambda) = P(Y|X=\alpha_2 \leq \lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f_y(y|x=\alpha_2) dy$$

$$F_{Y|X=\alpha_2}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f_y(y|x=\alpha_2) dy$$

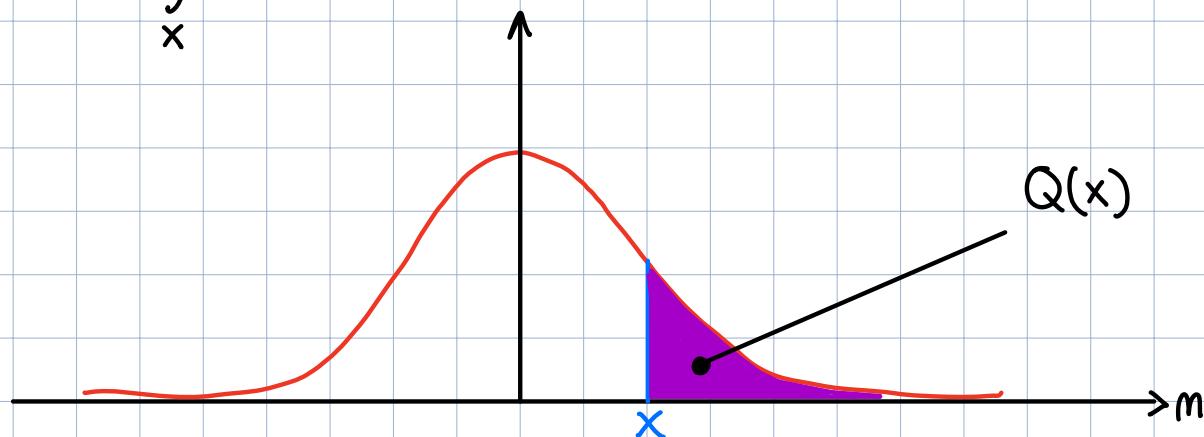
Facciamo lo stesso discorso per $P(\hat{x} = \alpha_2 | x = \alpha_1)$:



Generalizziamo l'espressione di PEB mediante una funzione $Q(x)$:

Sia $N \in \mathcal{N}(0, 1)$ ovvero N è una V.A. Gaussiana Standard.

Definiamo $Q(x) = \int_x^{+\infty} f_N(m) dm$.



Supponiamo di definire la V.A. $V = Y | X = \alpha_i$ come una trasformazione lineare di N , ovvero:

$$Y | X = \alpha_i = \delta_{Y|X=\alpha_i} \cdot N + \eta_{Y|X=\alpha_i} = \delta_Y \cdot N + \alpha_i h(\theta)$$

Per il teorema fondamentale per trasformazioni di variabili aleatorie otteniamo il seguente risultato:

$$f_Y(y | X = \alpha_i) = \frac{f_N(m)}{|g'_f(m)|} \Big|_{m = \frac{V - \alpha_i h(\theta)}{\delta_Y}} = f_N\left(\frac{V - \alpha_i h(\theta)}{\delta_Y}\right)$$

NOTA: $V = Y | X = \alpha_i$

$$\Rightarrow P(\hat{X}[m] = \alpha_1 | X[m] = \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\lambda} f_Y(y | X = \alpha_2) dy = 1 - \int_{\lambda}^{+\infty} f_Y(y | X = \alpha_2) dy =$$

$$= 1 - \int_{\lambda}^{+\infty} f_N\left(\frac{V - \alpha_2 h(\theta)}{\delta_Y}\right) dm = \boxed{1 - Q\left(\frac{\lambda - \alpha_2 h(\theta)}{\delta_Y}\right)} = Q\left(\frac{\alpha_2 h(\theta) - \lambda}{\delta_Y}\right)$$

\uparrow
 $1 - Q(x) = Q(-x)$

SISTEMI DI COMUNICAZIONE IN BANDA PASSANTE

SEGNALE PASSA BANDA : è un segnale il cui spettro d'ampiezza (BANDA) è concentrato nell' intorno di una frequenza $f_0 \neq 0$.

Diamo un po' di nomenclatura :

$$s(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$$

INVILUPPO REALE FASE

Si dimostra che $s(t) = \operatorname{Re} \left\{ a(t) e^{j(2\pi f_0 t + \phi(t))} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ a(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi(t)) + j a(t) \sin(2\pi f_0 t + \phi(t)) \right\} =$

$$= a(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$$

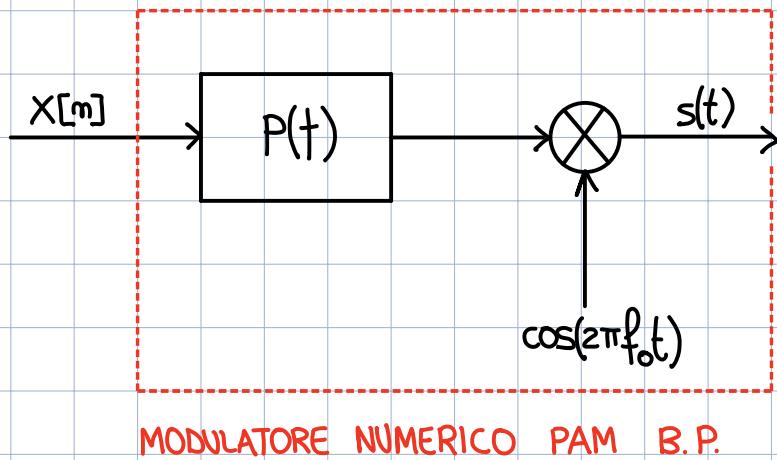
Inoltre, se definiamo $\tilde{s}(t) = a(t) e^{j\phi(t)}$, si può dimostrare che $s(t) = \operatorname{Re} \{ \tilde{s}(t) e^{j\phi(t)} \}$.

$\tilde{s}(t) \triangleq$ INVILUPPO COMPLESSO DI $s(t)$.

MODULAZIONI NUMERICHE IN BANDA PASSANTE

① PAM IN BANDA PASSANTE

$$s(t) = \sum x[m] p(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t)$$



$$\left. \begin{aligned} s(t) &= \alpha_i p(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t) \\ \tilde{s}_i(t) &= \alpha_i p(t - mT_s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} s(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \tilde{s}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \alpha_i p(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t) + \right. \\ &\quad \left. + j \sin(2\pi f_0 t) \alpha_i p(t - mT_s) \right\} = \underline{\alpha_i p(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t)} \end{aligned}$$

DIM

ENERGIA MEDIA PER SIMBOLI TRASMESSO

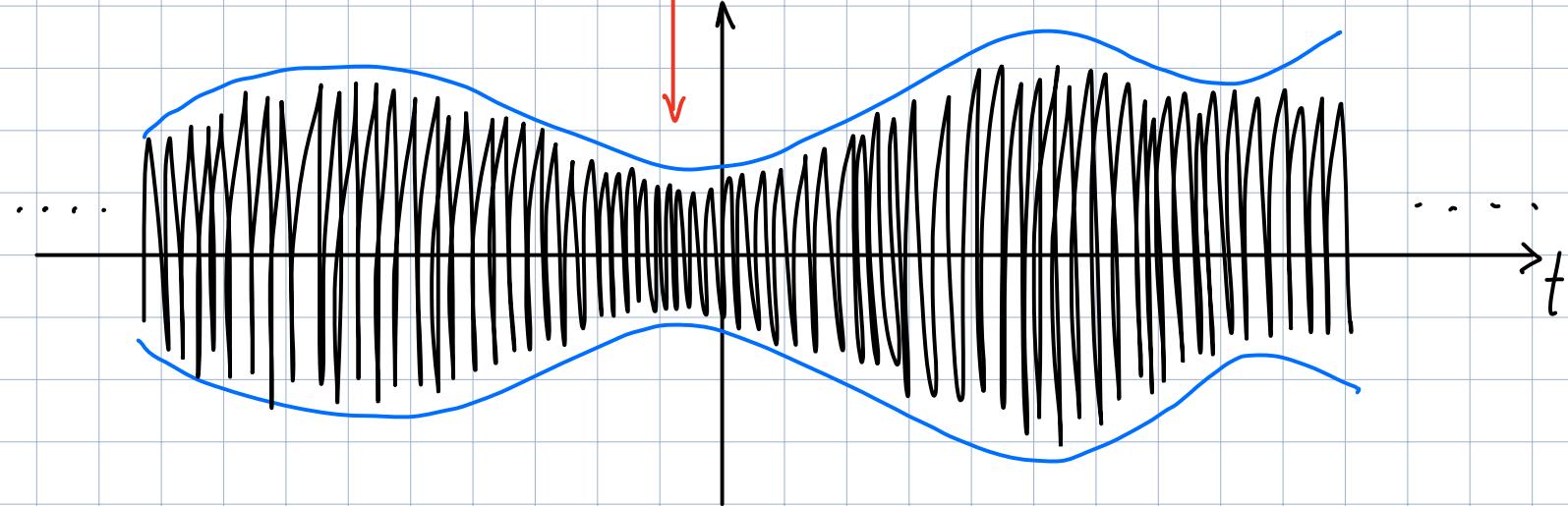
$$\begin{aligned} E_s &= E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |s_m(t)|^2 dt \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E \left[|x[m] p(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t)|^2 \right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} E \left[x[m]^2 \right] |p(t - mT_s)|^2 \cos^2(2\pi f_0 t) dt = \\ &= E \left[x[m]^2 \right] \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t - mT_s)|^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t) \right) dt = \end{aligned}$$

- $p(t)$ definita da un segnale NOTO.

- $x[m] \in A_S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i = 2i - 1 - M$

$$= \frac{1}{2} E[x[m]^2] \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t - mT_s)|^2 dt + \frac{1}{2} E[x[m]^2] \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t - mT_s)|^2 \cos(4\pi f_o t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} E[x[m]^2] E_p + \frac{1}{2} E[x[m]^2] \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t - mT_s)|^2 \cos(4\pi f_o t) dt$$



Se $B_p \ll f_o$ allora l'inviluppo di $p(t - mT_s)$ produce un grafico come quello riportato sopra. Da ciò segue che è leato assumere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |p(t - mT_s)|^2 \cos(4\pi f_o t) dt \approx 0$$

$$\Rightarrow E_s = \frac{1}{2} E[x[m]^2] E_p$$

② PSK

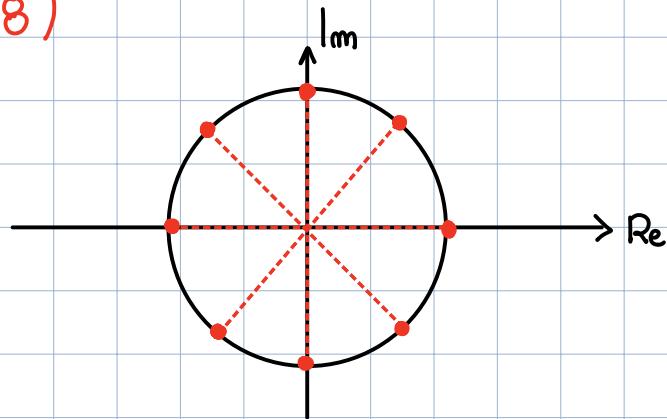
$$s(t) = \sum' p(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t + \theta[m])$$

$$\theta[m] \in A_s = \{ \theta_1, \dots, \theta_M \}, \quad \theta_i = \frac{2\pi}{M}(i-1)$$

$$s_i(t) = p(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t + \theta_i) \Rightarrow \tilde{s}_i(t) = p(t - mT_s) e^{j\theta_i}$$

è un simbolo complesso!

SPAZIO DEI SIMBOLI: ($M=8$)



③ QAM

$$s(t) = \sum_m x_c[m] p(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t) - \sum_m x_s[m] p(t - mT_s) \sin(2\pi f_0 t)$$

Abbiamo 2 simboli!

$$s_i(t) = x_c[i] p(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t) - x_s[i] p(t - mT_s) \sin(2\pi f_0 t)$$

$$\tilde{s}(t) = (x_c[m] + j x_s[m]) p(t - mT_s)$$

$$M_c = 2, M_s = 4$$

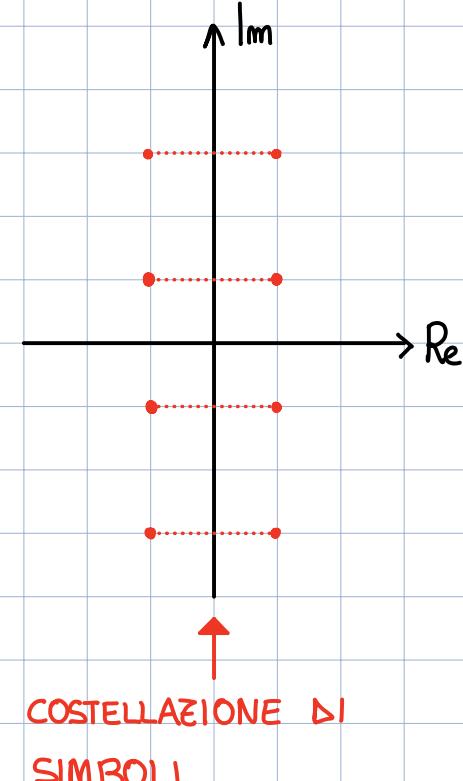
$x_c[m]$ e $x_s[m]$ sono simboli REALI tali che:

$$x_c[m] \in A_c^{(c)} = \{ \alpha_1^{(c)}, \dots, \alpha_{M_c}^{(c)} \}$$

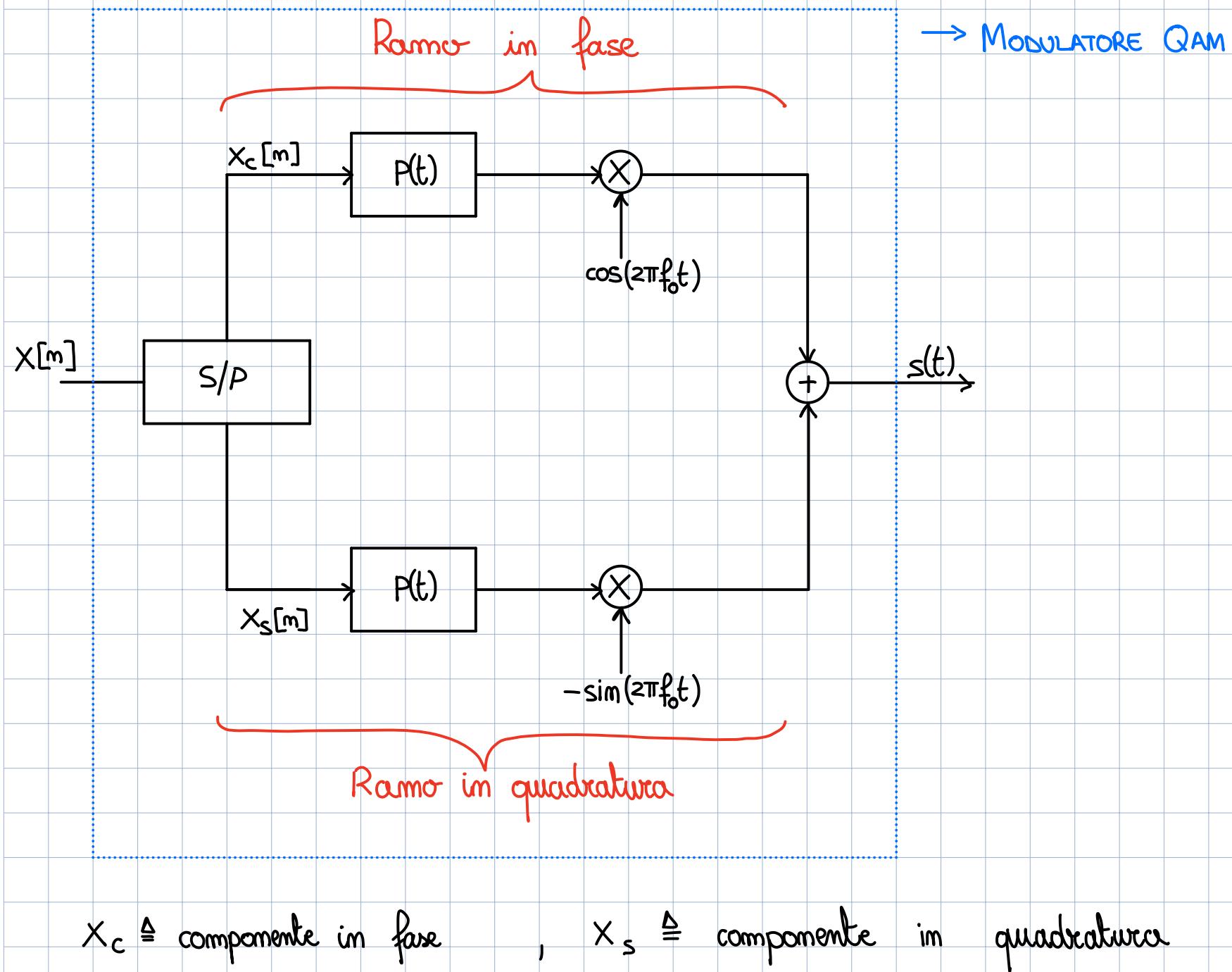
$$x_s[m] \in A_s^{(s)} = \{ \alpha_1^{(s)}, \dots, \alpha_{M_s}^{(s)} \}$$

Per una QAM standard: $\alpha_i^{(c)} = 2i - 1 - M_c$, $\alpha_i^{(s)} = 2i - 1 - M_s$

In generale $M_c \neq M_s$!



Schema a blocchi di un modulatore QAM



ENERGIA MEDIA PER SIMBOLO TRASMESSO

$$E_s = E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |s_m(t)|^2 dt \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E [|s_m(t)|^2] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} E [x_c^2[m] p^2(t-mT_s) \cos^2(2\pi f_0 t) + x_s^2[m] p^2(t-mT_s) \sin^2(2\pi f_0 t) + \\ + 2x_c[m]x_s[m] p^2(t-mT_s)^2 \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t)] dt =$$

Studiamo i tre integrali separatamente:

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} E [x_c^2[m] p^2(t-mT_s) \cos^2(2\pi f_0 t)] dt = E[x_c^2[m]] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} p^2(t-mT_s) dt + E[x_c^2[m]] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} p^2(t-mT_s) \cos(4\pi f_0 t) dt \approx \\ \approx \frac{1}{2} E[x_c^2[m]] E_p$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} E [x_s^2[m] p^2(t-mT_s) \sin^2(2\pi f_0 t)] dt = E[x_s^2[m]] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} p^2(t-mT_s) dt - E[x_s^2[m]] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} p^2(t-mT_s) \cos(4\pi f_0 t) dt \approx \\ \approx \frac{1}{2} E[x_s^2[m]] E_p$$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} E[2x_c[m]x_s[n] p(t - mT_s)^2 \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t)] dt =$ visto che l'operatore $E[\cdot]$ è lineare allora si dimostra che si ottiene $E[x_c[m]x_s[n]]$

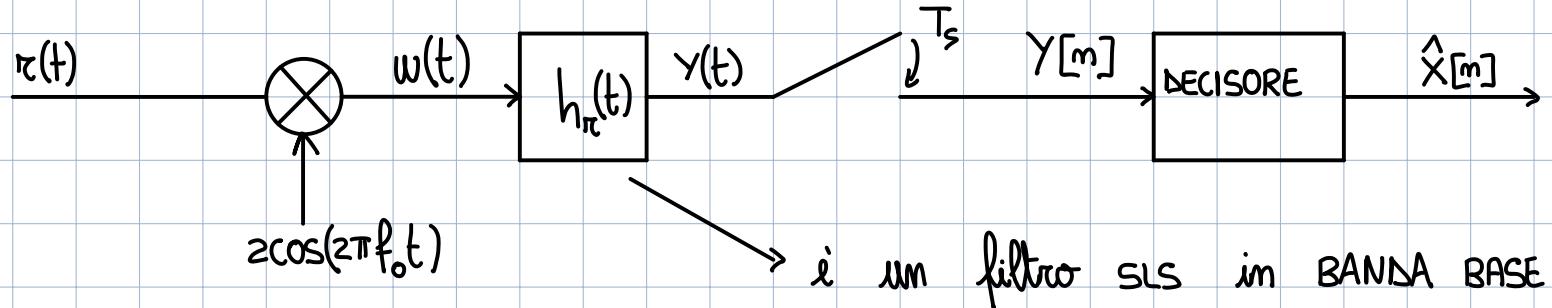
$$E[x_c[m]x_s[n]] = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} E[2x_c[m]x_s[n] p(t - mT_s)^2 \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t)] dt = 0$$

$$E_s = \frac{1}{2} E[x_c^2[n]] E_p + \frac{1}{2} E[x_s^2[n]] E_p$$

Densità spettrale di potenza (VALIDA sia per PAM IN BANDA PASSANTE sia per QAM)

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \frac{\bar{S}_x(f)}{2} [P^2(f - f_0) + P^2(f + f_0)]$$

RICEVITORE DI UNA PAM IN BANDA PASSANTE



Studiamo $r(t)$:

$$r(t) = s(t) \otimes c(t) + m(t)$$

1° CASO : ASSENZA DI RUMORE

Sia $\tilde{c}(t)$ la risposta impulsiva del canale in BANDA BASE.

$$\text{Sia } c(t) = 2 \tilde{c}(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\tilde{s}(t) = s(t) \otimes c(t) \Rightarrow \text{in assenza di rumore } r(t) = \tilde{s}(t)$$

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= s(t) \otimes c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) c(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) 2 \tilde{c}(t-\tau) \cos(2\pi f_0 [t-\tau]) d\tau = \\ &= \sum_m \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) p(\tau - mT_s) \cos(2\pi f_0 \tau) 2 \tilde{c}(t-\tau) \cos(2\pi f_0 [t-\tau]) d\tau = \end{aligned}$$

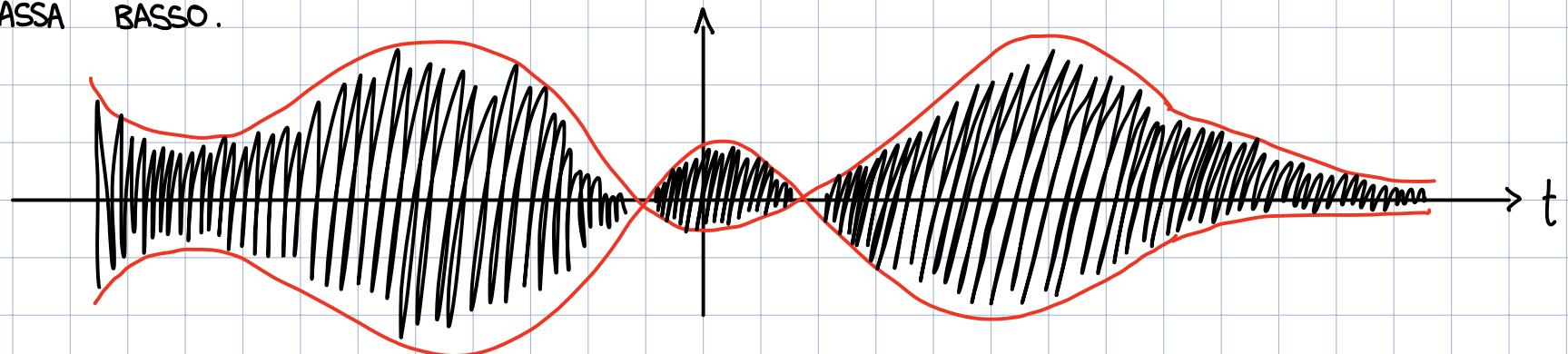
$$\text{NOTA: } \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

$$= \sum_m x[m] \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau - mT_s) \tilde{c}(\tau - \tau) [\cos(2\pi f_0 \tau + 2\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0 \tau - 2\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau)] d\tau =$$

$$= \sum_m x[m] \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau - mT_s) \tilde{c}(\tau - \tau) \cos(2\pi f_0 \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau - mT_s) \tilde{c}(\tau - \tau) \cos(4\pi f_0 \tau + K) d\tau \right\} =$$

$$= \sum_m x[m] \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau - mT_s) \tilde{c}(\tau - \tau) \cos(2\pi f_0 \tau) d\tau + \emptyset$$

Supposto che $p(t)$ e $\tilde{c}(t)$ abbiano entrambi banda $B_p \ll f_0$ allora $p(t) \tilde{c}(t)$ è un segnale PASSA BASSO.



L'inviluppo $p(t - mT_s) \tilde{c}(t - t') \cos(4\pi f_0 t + k)$, se integrato, da sostanzialmente un'area NULLA!

$$\Rightarrow \tilde{s}(t) = s(t) \otimes c(t) = \sum_m x[m] p(t') \otimes \tilde{c}(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

$t' = t - mT_s$

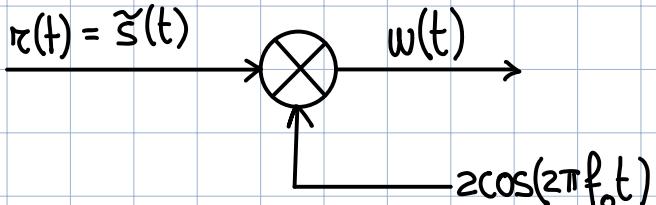
Definiamo $\tilde{p}(t - mT_s) = p(t - mT_s) \otimes \tilde{c}(t)$. Da ciò si ricava il seguente risultato:

$$\tilde{s}(t) = s(t) \otimes c(t) = \sum_m x[m] \tilde{p}(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t)$$

Possiamo fare due considerazioni:

- $\tilde{p}(t)$ è una versione di $p(t)$ distorta dal canale.
- $\tilde{s}(t)$ è ancora un segnale PASSA BANDA.

Proseguiamo lo studio andando ad analizzare il segnale $w(t)$:



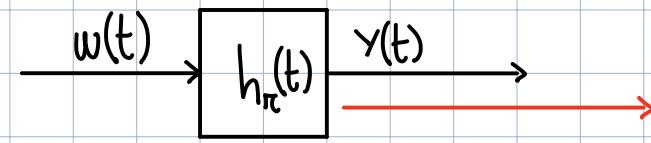
In assenza di rumore \Rightarrow

$$w(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \tilde{p}(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t) \cdot \underbrace{2 \cos(2\pi f_0 t)}_{\text{DEMODULAZIONE}} =$$

NOTA: $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\alpha)$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \tilde{p}(t - mT_s) [1 + \cos(4\pi f_0 t)] = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \tilde{p}(t - mT_s)}_{\text{COMPONENTE IN B.B.}} + \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \tilde{p}(t - mT_s) \cos(4\pi f_0 t)}_{\text{COMPONENTE A } z_f}$$

Vediamo cosa succede a $w(t)$ dopo il filtraggio:



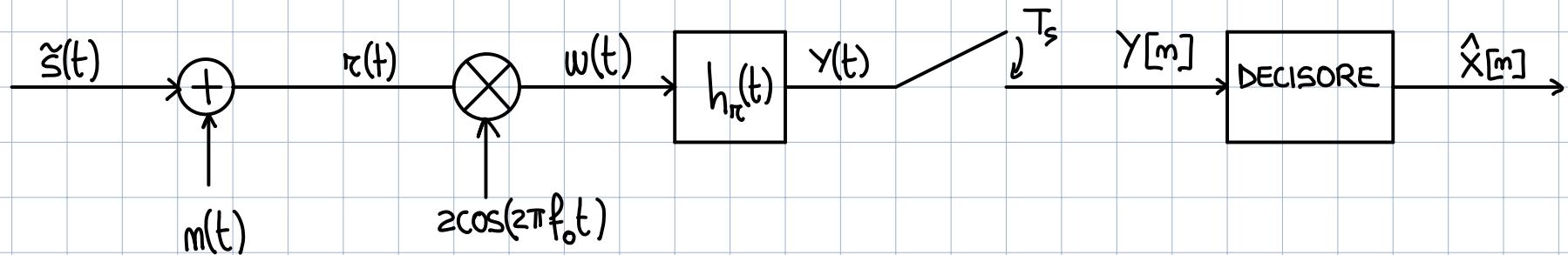
è un filtro SLS in BANDA BASE

$$y(t) = w(t) \otimes h_\pi(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \tilde{p}(t - mT_s) \otimes h_\pi(t) \Rightarrow \text{SONO SPARITE LE COMPONENTI A } z_f \text{ PERCHÉ TAGLIATE DAL FILTRO IN BANDA BASE!}$$

RISULTATO: in assenza di RUMORE il segnale im ingresso al campionatore è identico al caso studiato in BANDA BASE con l'unica differenza in $\tilde{p}(t) = p(t) \otimes c(t)$
 { in BANDA BASE avremo $p(t) = p(t) \otimes c(t)$. }

PRESenza DI RUMORE IN BANDA PASSANTE

Cosa succede al segnale $y(t)$ (segnale in uscita dal filtro di ricezione ed in ingresso al campionatore) in presenza di rumore?



$$\text{Sappiamo che: } w(t) = \sum_m x[m] \tilde{p}(t - mT_s) + m(t)$$

Definiamo $h(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t) \otimes h_r(t) \Rightarrow$ INTERPOLATORE EQUIVALENTE (uguale al caso in B.B. con l'unica differenza in $\tilde{c}(t)$).

$$y(t) \xrightarrow{T_s} Y[m] \Rightarrow y[k] = y(kT_s) = \sum_m x[m] h(kT_s - mT_s) + m_u[k] =$$

$$= \underbrace{x[k] h(0)}_{\text{NO ISI}} + \sum_{m \neq k} x[m] h(T_s [k-m]) + \underbrace{m_u[k]}_{\text{RUMORE}}$$

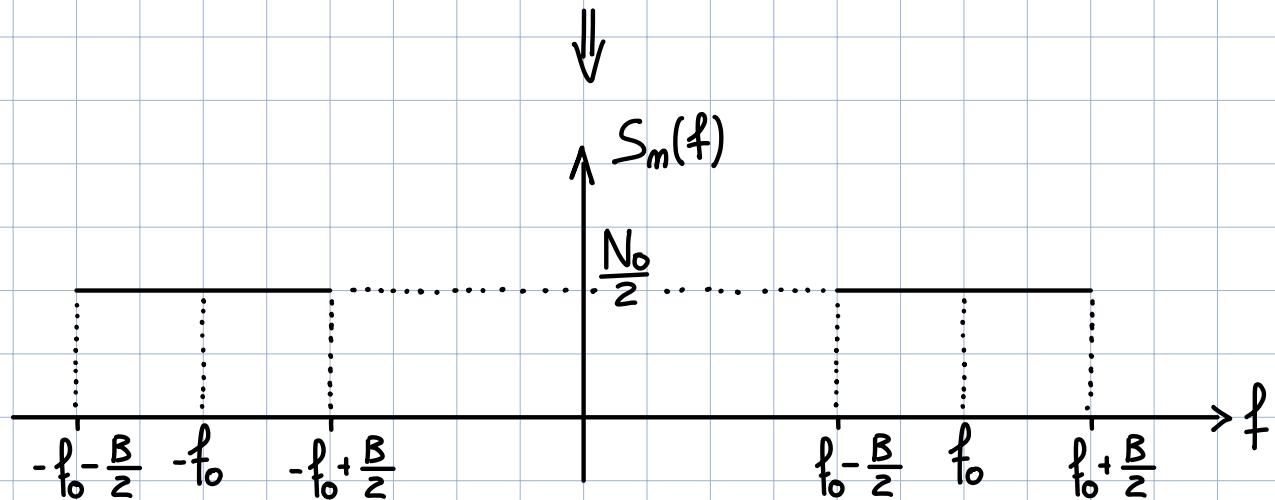
COMPONENTE INICIATA DALL' ISI

RISULTATO: La condizione di Nyquist per verificare l'assenza di ISI continua ad essere **VALIDA**!

Non ci rimane che caratterizzare l'aspetto del rumore in ingresso al DECISORE!

Ipotesi: noi tratteremo RUMORI GAUSSIANI BIANCHI IN BANDA!

$$m(t) \Rightarrow \begin{cases} E[m(t)] = 0 \\ S_m(f) = \frac{N_0}{2} \operatorname{rect}\left(\frac{f - f_0}{B}\right) + \frac{N_0}{2} \operatorname{rect}\left(\frac{f + f_0}{B}\right) \end{cases}$$

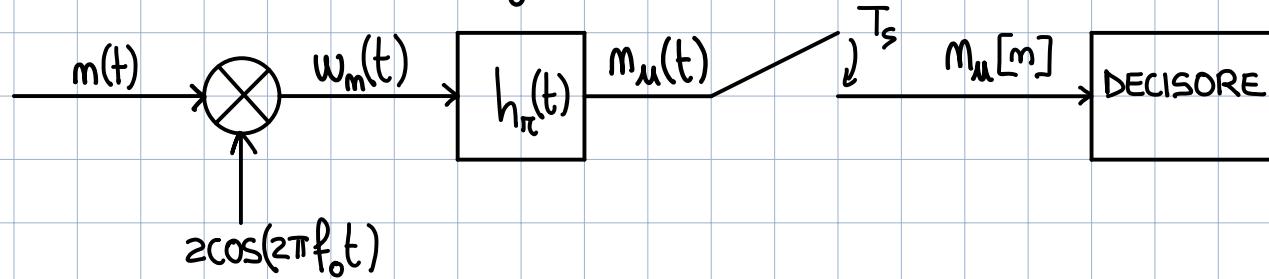


Visto che conosciamo $S_m(f)$ e che il processo di rumore Gaussiano bianco in banda è un processo SSL, dal th. di Wiener possiamo calcolare $R_m[\tau]$:

$$R_m(\tau) = \text{ATCF}[S_m(t)] = \frac{N_0}{2} B \operatorname{sinc}(B\tau) e^{j2\pi f_0 \tau} + \frac{N_0}{2} B \operatorname{sinc}(B\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} =$$

$= N_0 B \operatorname{sinc}(B\tau) \cos(2\pi f_0 \tau)$

Bene, ora consideriamo seguente schema:



$$\begin{aligned}
 R_{w_m}(t_1, t_2) &= E[W_m(t_1) W_m(t_2)] = E[m(t_1) z \cos(2\pi f_0 t_1) m(t_2) z \cos(2\pi f_0 t_2)] = \\
 &= 4 E[m(t_1) m(t_2) \cos(2\pi f_0 t_1) \cos(2\pi f_0 t_2)] = \\
 &= 2 E[m(t_1) m(t_2) \{ \cos(2\pi f_0 [t_1 + t_2]) + \cos(2\pi f_0 [t_1 - t_2]) \}] = \\
 &= 2 \underbrace{E[m(t_1) m(t_2)]}_{R_m(t_1, t_2) = R_m(\tau)} \cos(2\pi f_0 [t_1 + t_2]) + 2 E[m(t_1) m(t_2)] \cos(2\pi f_0 [t_1 - t_2])
 \end{aligned}$$

$$= N_0 B \operatorname{sinc}(B\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) z \cos(2\pi f_0 [t_1 + t_2]) + N_0 B \operatorname{sinc}(B\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) z \cos(2\pi f_0 [t_1 - t_2]) =$$

NOTA: $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$

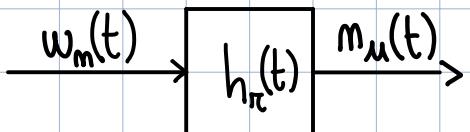
$$= N_0 B \operatorname{sinc}(BT) \cos(2\pi f_0 [t_1 - t_2]) z \cos(2\pi f_0 [t_1 + t_2]) + N_0 B \operatorname{sinc}(BT) \cos(2\pi f_0 [t_1 - t_2]) z \cos(2\pi f_0 [t_1 - t_2]) =$$

<span style="color: red; border-bottom: 1

$$-\cos(4\pi f_0 t_1) \cos(4\pi f_0 t_2) = \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t_1) + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t_2)$$

Dopo una paginata di calcoli abbiamo trovato il seguente risultato:

$$R_{w_m}(t_1, t_2) = 2N_0B \operatorname{sinc}(BT) \left[\frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t_1) + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t_2) \right] + 2N_0B \operatorname{sinc}(BT) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 T) \right]$$



Il filtro elimina le componenti a zf₀



$$R_{m_u}(t_1, t_2) = R_{m_u}(\tau) = N_0B \operatorname{sinc}(BT) \otimes h_n(\tau) \otimes h_n(-\tau)$$



essendo stacionario

$$S_{m_u}(f) = \operatorname{TCF}[R_{m_u}(\tau)] = N_0 \operatorname{rect}\left(\frac{f}{B}\right) |H_n(f)|^2$$

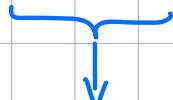
Diamo un risultato generale:

IL PASSAGGIO DA BANDA BASE A BANDA PASSANTE PROVOCÀ IL RADDOPPIO DELLA BANDA!
QUESTO SI RIPERCUOTE SULLA POTENZA DEL RUMORE!

$$S_{m_u}(f) = \text{TCF}[R_{m_u}(\tau)] = S_{\tilde{m}}(f) |H_r(f)|^2$$

$$S_{\tilde{m}}(f) = N_0 \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$P_{m_u} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{m_u}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\tilde{m}}(f) |H_r(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} N_0 \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) |H_r(f)|^2 df = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(f)|^2 df = N_0 E_{h_r}$$



HA BANDA B

RISULTATI:

$$m_{m_u} = E[m_u(t)] = 0 \Rightarrow m_u[k] \in \mathcal{N}(0, N_0 E_{h_r})$$

L'ultimo, ma non meno importante, risultato riguarda la PROBABILITÀ D'ERRORE.

CALCOLO DELLA PROBABILITÀ D'ERRORE IN UNA PAM IN BANDA PASSANTE

Ipotesi:

- ① ASSENZA DI ISI
- ② RUMORE ADDITIVO GAUSSIANO BIANCO IN BANDA
- ③ $A_S = \{\alpha_1, \alpha_2\}$
- ④ $P(X = \alpha_1)$ e $P(X = \alpha_2)$ SONO NOTE

Sotto queste ipotesi possiamo scrivere la V.A. $y[k]$ mediante la seguente espressione:

$$y[k] = x[k]h(\theta) + m_u[k]$$

Supponiamo di considerare le due V.A. $y[k|x = \alpha_1]$ e $y[k|x = \alpha_2]$.

Come abbiamo già visto nel caso della BANDA BASE, le due V.A. definite sopra descrivono il campione visto dal DECISORE condizionato da $x = \alpha_i$.

$$y[k|x = \alpha_1] = \alpha_1 h(\theta) + m_u[k] ; \quad y[k|x = \alpha_2] = \alpha_2 h(\theta) + m_u[k]$$

$\Rightarrow y[k|x = \alpha_1]$ e $y[k|x = \alpha_2]$ SONO DUE TRASFORMAZIONI DI $m_u[k]$!

$$\Rightarrow y[k|x = \alpha_1] \in \mathcal{N}(\alpha_1 h(\theta), N_o E_{h\pi})$$

$$\Rightarrow y[k|x = \alpha_2] \in \mathcal{N}(\alpha_2 h(\theta), N_o E_{h\pi})$$

$$P(\hat{x} \neq x) = P(\hat{x} = \alpha_1 | x = \alpha_2) P(x = \alpha_2) + P(\hat{x} = \alpha_2 | x = \alpha_1) P(x = \alpha_1)$$

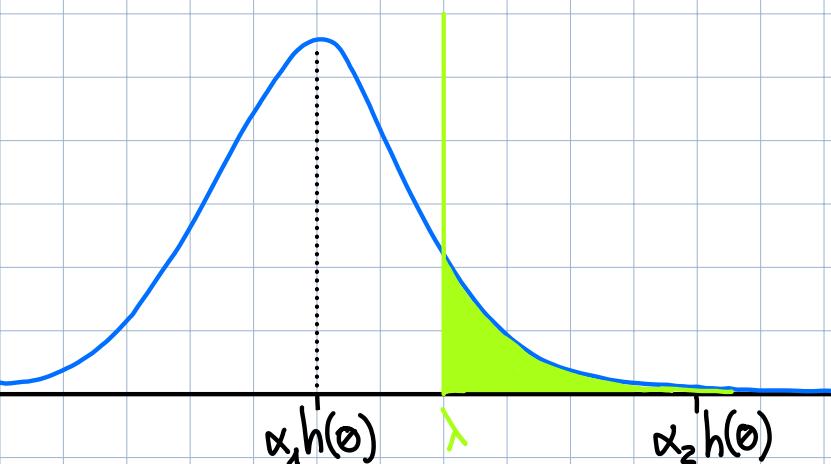
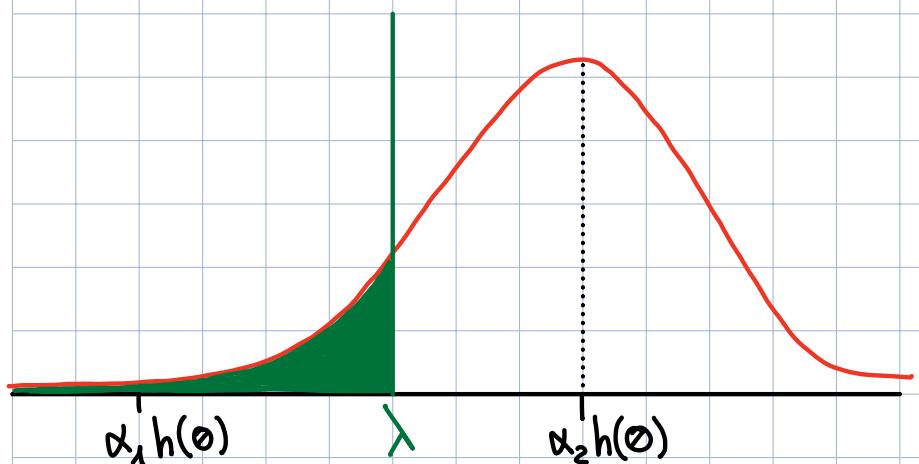
\downarrow

$$P(y \leq \lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f_y(y | x = \alpha_2) dy$$

\downarrow

$$P(y > \lambda) = \int_{\lambda}^{+\infty} f_y(y | x = \alpha_1) dy$$

NOTA: λ è la SOGLIA del decisore SINGLE SHOOT.



Ricordiamo $Q(x) = \int_x^{+\infty} f_N(m) dm$ dove $N \in \mathcal{U}(0,1)$

$$y[K|x=\alpha_i] = \delta_y \cdot N + m_y \Rightarrow N = \frac{y[K|x=\alpha_i] - m_y}{\delta_y}$$

Dal teorema fondamentale per trasformazioni si ottiene:

$$f_y(y|x=\alpha_i) = \frac{f_N(m_i)}{|g'(m_i)|} \quad | \quad m_i = \frac{y[k|x=\alpha_i] - m_{y_i}}{\delta_y}$$

$$= f_N\left(\frac{y[k|x=\alpha_i] - m_{y_i}}{\delta_y}\right) \cdot \frac{1}{\delta_y}$$

dove $g'(m) = \frac{d}{dm}(6y_m + m_{y_i}) = 6y$

Dall'applicazione del teorema si passa alla pratica:

$$P(\hat{x} = \alpha_1 | x = \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\lambda} f_y(y|x=\alpha_2) dy = 1 - \int_{\lambda}^{+\infty} f_y(y|x=\alpha_2) dy = \text{cambio di variabile}$$

$$y = 6y_2 m + m_{y_2}$$

$$= 1 - \int_{\lambda - m_{y_2}}^{+\infty} f_N\left(\frac{y[k|x=\alpha_2] - m_{y_2}}{\delta_{y_2}}\right) \cdot \frac{1}{\delta_{y_2}} (6y_2 dm) =$$

$$= 1 - Q\left(\frac{\lambda - m_{y_2}}{\delta_{y_2}}\right) = Q\left(\frac{\alpha_2 h(\theta) - \lambda}{\sqrt{N_o E_{hc}}}\right)$$

$$P(\hat{X} = \alpha_2 | X = \alpha_1) = \int_{\lambda}^{+\infty} f_Y(y | X = \alpha_1) dy = \text{cambio di variabile} =$$

$$y = \delta_{Y_1} m + \eta_{Y_1}$$

$$= \int_{\frac{\lambda - \eta_{Y_1}}{\delta_{Y_1}}}^{+\infty} f_N\left(\frac{y - \eta_{Y_1}}{\delta_{Y_1}}\right) \cdot \frac{1}{\delta_{Y_1}} (\delta_{Y_1} dm) =$$

$$= Q\left(\frac{\lambda - \alpha_1 h(\theta)}{\sqrt{N_0 E_{hc}}}\right)$$

Es. 1 - Nel sistema di comunicazione numerico in banda passante rappresentato in Fig.1, il segnale trasmesso è $s(t) = \sum_k x[k] p(t - kT) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$, dove i simboli $x[k] \in A_s = \{-1, 2\}$ sono indipendenti e con probabilità a priori $P(x = -1) = 3/5$ e $P(x = 2) = 2/5$. L'impulso sagomatore è $p(t) = 2Bsinc(2Bt) + Bsinc(2B(t - \frac{1}{2B})) + Bsinc(2B(t + \frac{1}{2B}))$, $f_0 \gg B$, $T = \frac{1}{B}$. Il canale di propagazione è ideale, quindi $c(t) = \delta(t)$ e la DSP del rumore in ingresso al ricevitore è $S_n(f) = \frac{N_0}{2} \left[rect\left(\frac{f-f_0}{2B}\right) + rect\left(\frac{f+f_0}{2B}\right) \right]$. Il filtro in ricezione $h_R(t)$ è un filtro passa basso ideale di banda B . La soglia di decisione è $\lambda = 0$. Calcolare: 1) L'energia media per intervallo di segnalazione del segnale trasmesso, E_s , 2) Calcolare la potenza di rumore in uscita al filtro in ricezione, P_{n_u} , 3) Dire se il campione $y[k]$ ha il massimo SNR possibile e giustificare la risposta e 4) Calcolare la probabilità di errore sul bit, $P_E(b)$.

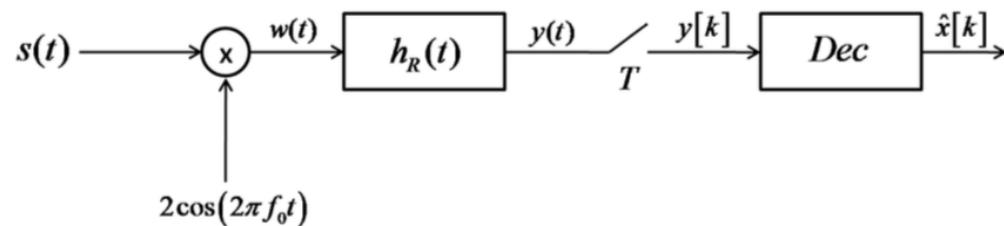


Fig.1

SOLUZIONE :

Punto ① : ENERGIA MEDIA PER SIMBOLO TRASMESSO

$$E_s = \frac{1}{2} E[x^2] E_p$$

$$E[x^2] = \sum_{i=1}^2 P(x=\alpha_i) (\alpha_i)^2 = \frac{3}{5}(-1)^2 + \frac{2}{5}(2)^2 = \frac{3}{5} + \frac{8}{5} = \frac{11}{5}$$

$$p(t) = 2Bsinc(2Bt) + Bsinc(2B(t + \frac{1}{2B})) + Bsinc(2B(t - \frac{1}{2B}))$$

$$P(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) + \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) e^{j2\pi f \cdot \frac{1}{2B}} + \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) e^{-j2\pi f \cdot \frac{1}{2B}} =$$

$$= \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \left[1 + \cos\left(2\pi f \frac{1}{2B}\right) \right]$$

$$E_P = \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = \int_{-B}^B \left[1 + \cos\left(2\pi f \frac{1}{2B}\right) \right]^2 df =$$

th. Parseval

$$= \int_{-B}^B 1 \cdot df + \int_{-B}^B \cos^2\left(2\pi f \frac{1}{2B}\right) df + \int_{-B}^B 2\cos\left(2\pi f \frac{1}{2B}\right) df =$$

$\text{IL PERIODO DI } \cos(2\pi f \frac{1}{2B}) \text{ È } T=2B.$
 $\text{L' INTEGRALE DEL COSENO NEL SUO PERIODO È NULLO!}$

$$= 2B + \int_{-B}^B \frac{1}{2} \cdot df + \int_{-B}^B \frac{1}{2} \cos\left(2\pi f \frac{1}{2B}\right) df = 3B$$

$\text{IL PERIODO DI } \cos(2\pi f \frac{1}{2B}) \text{ È } T=B.$
 $\text{L' INTEGRALE DEL COSENO IN UN MULTIPLO DEL SUO PERIODO È NULLO!}$

$$E_s = \frac{1}{2} E[x^2] E_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{5} \cdot 3B = \frac{33}{10} B$$

Punto ②: P_{m_u}

$$P_{m_u} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{m_u}(f) df = N_0 E_{h_r} = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)|^2 df = 2N_0 B$$

Punto ③ = MAX SNR?

Affinché $y[k]$ abbia MAX SNR allora $h_r(t) = h_{FA}(t)$. Scopriamolo:

$h_{FA}(t) = K \tilde{p}(T_s - t)$ dove K è una costante arbitraria e $\tilde{p}(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t)$

$$\Rightarrow h_{FA}(t) = \tilde{p}(-t) = p(-t) \quad \Rightarrow h_r(t) = ?$$

$$h_r(t) = \text{ATCF} \left[\text{rect}\left(\frac{t}{2B}\right) \right] = 2B \text{sinc}(2Bt)$$

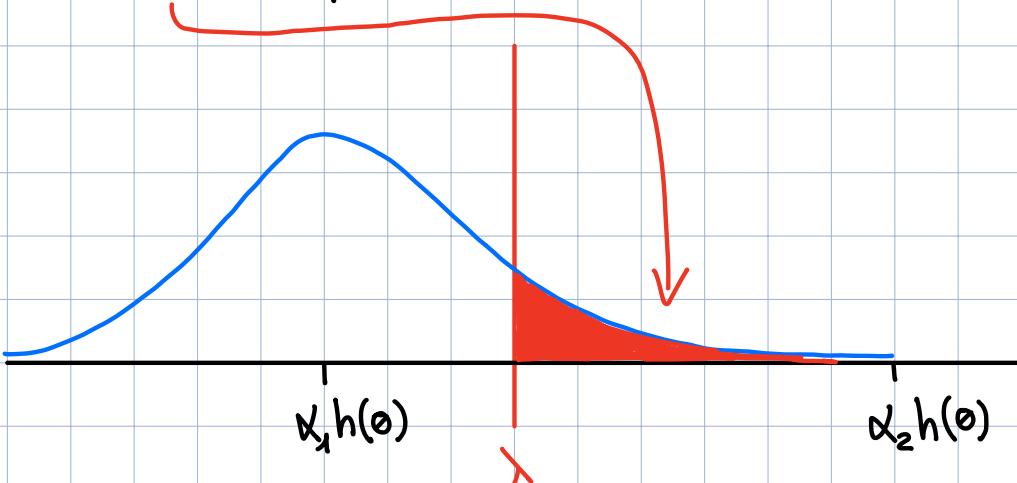
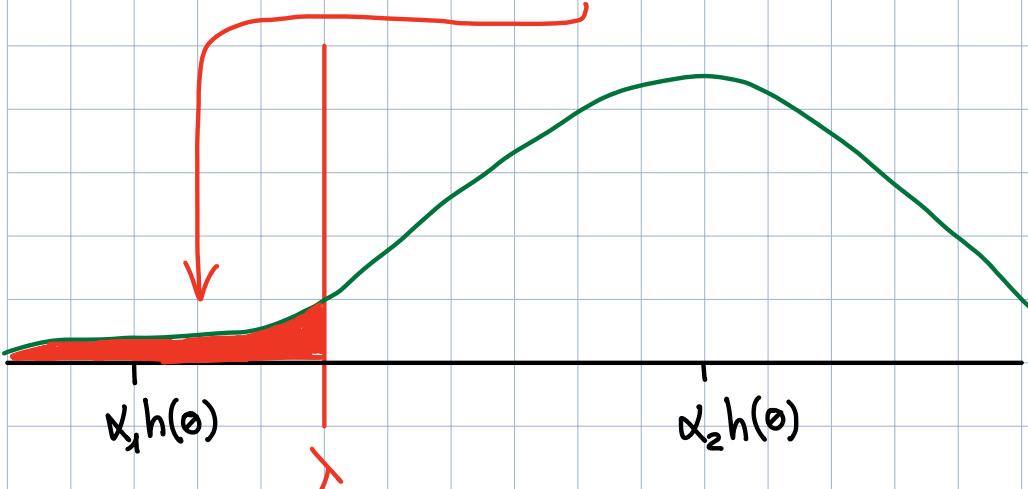
$$2B \text{sinc}(2Bt) \neq \underbrace{2B \text{sinc}(-2Bt)}_{h_r(t)} + B \text{sinc}\left(-2B\left(t + \frac{1}{2B}\right)\right) + B \text{sinc}\left(-2B\left(t - \frac{1}{2B}\right)\right)$$

$$\tilde{p}(-t)$$

$\Rightarrow y[k]$ non ha MAX SNR!

Punto ④ : PROBABILITA' DI ERRORE SUL BIT :

$$P(\hat{x} \neq x) = P(\hat{x} = \alpha_1 | x = \alpha_2) P(x = \alpha_2) + P(\hat{x} = \alpha_2 | x = \alpha_1) P(x = \alpha_1)$$



$$P(\hat{x} = \alpha_1 | x = \alpha_2) = Q\left(\frac{\alpha_2 h(\theta) - \lambda}{\sqrt{N_0 E_{hc}}}\right)$$

$$P(\hat{x} = \alpha_2 | x = \alpha_1) = Q\left(\frac{\lambda - \alpha_1 h(\theta)}{\sqrt{N_0 E_{hc}}}\right)$$

Affinché si possa calcolare la $P_E(b)$ in questo modo è necessario verificare la seguente ipotesi:

1. ASSENZA DI ISI $\Rightarrow h(kT_s) = c \delta(k)$

Dimostriamolo nel tempo:

$$h(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t) \otimes h_r(t) = p(t) \otimes h_r(t) \quad \text{essendo } \tilde{c}(t) = \delta(t)$$

$$H(f) = P(f) H_t(f)$$

$$H_r(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$P(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \left[1 + \cos\left(2\pi f \frac{1}{2B}\right) \right]$$

$$\Rightarrow H(f) = P(f)$$

$$\Rightarrow h(t) = p(t)$$

$$\Rightarrow h(kT_s) = p(kT_s) = 2B \text{sinc}(2B \frac{k}{B}) + B \text{sinc}(2B(\frac{k}{B} + \frac{1}{2B})) + B \text{sinc}(2B(\frac{k}{B} - \frac{1}{2B}))$$

$$= 2B \delta[k] + B \text{sinc}(2k+1) + B \text{sinc}(2k-1) = 2B \delta[k]$$

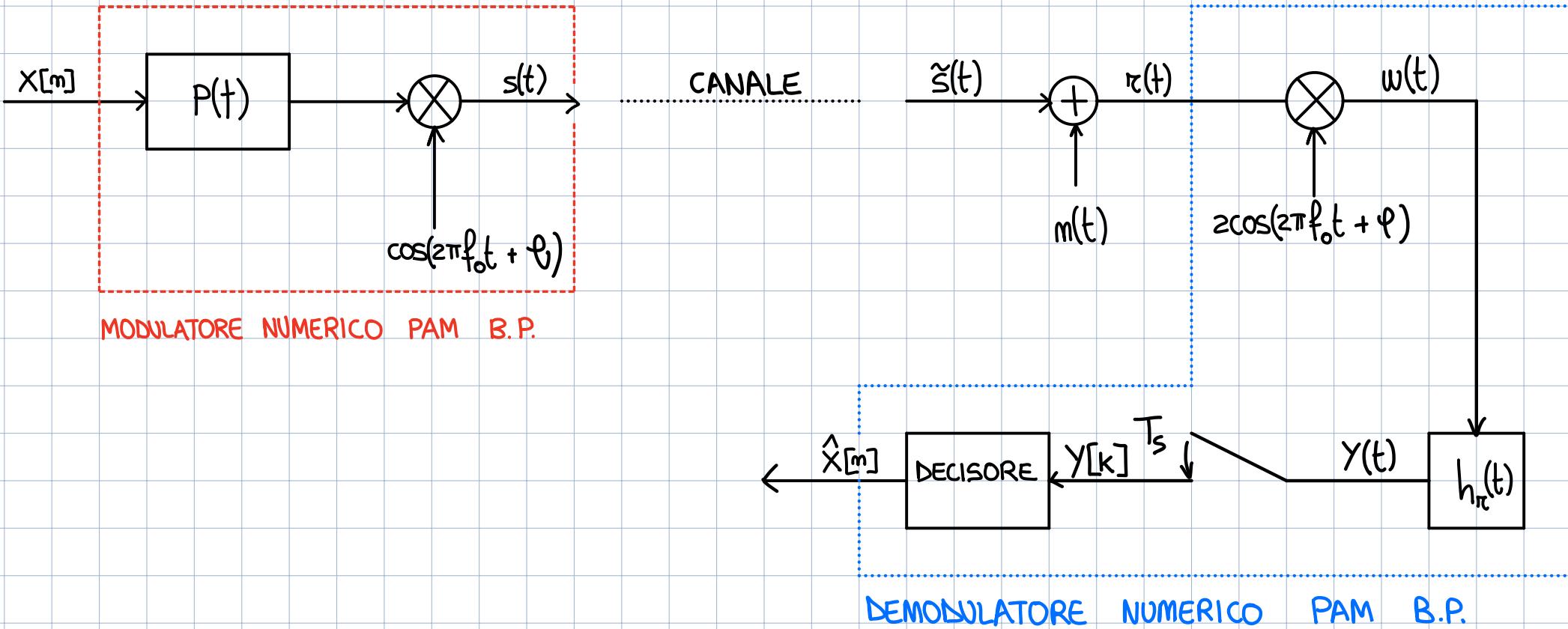
$\stackrel{\circ}{\circ} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \stackrel{\circ}{\circ}$

\Rightarrow CONDIZIONE DI NYQUIST RISPETTATA \Rightarrow ASSENZA DI ISI !

$$h(0) = 2B$$

$$\begin{aligned} P(\hat{x} \neq x) &= P(\hat{x} = \alpha_1 \mid x = \alpha_2) P(x = \alpha_2) + P(\hat{x} = \alpha_2 \mid x = \alpha_1) P(x = \alpha_1) = \\ &= \frac{2}{5} Q\left(\frac{4B}{\sqrt{2N_0B}}\right) + \frac{3}{5} Q\left(\frac{2B}{\sqrt{2N_0B}}\right) \end{aligned}$$

SINCRONISMO DI FASE



In generale $f_i \neq f$. La componente modulante è generata da due DISPOSITIVI che difficilmente sono IN FASE.

Vediamo quali sono gli effetti dello SFASAMENTO:

$$s(t) = \sum_m X[m] p(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

$$\tilde{s}(t) = s(t) \otimes c(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] p(t - mT_s) \cos(2\pi f_o T + \theta) c(t - T) dT =$$

$$= \sum_m x[m] \int_{-\infty}^{+\infty} p(t - mT_s) \cos(2\pi f_o T + \theta) c(t - T) dT =$$

$$c(t) \triangleq \text{Risposta imp. del canale im banda passante} \Rightarrow c(t) = z \tilde{c}(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

$\tilde{c}(t) \triangleq$ Risposta imp. del canale in banda base

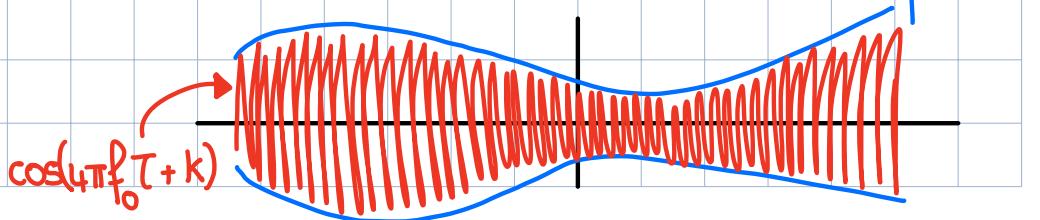
$$= \sum_m x[m] \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau - mT_s) \cos(2\pi f_0 \tau + \phi) z \cos(2\pi f_0 [t - \tau]) \tilde{z}(\tau - \tau) d\tau = \text{NOTA : } \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

$$= \sum_m x[m] \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau - mT_s) \underbrace{\cos(2\pi f_0 \tau + \phi)}_{\text{Red bracket}} \tilde{x}(\tau - \tau) d\tau + \sum_m x[m] \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau - mT_s) \cos(4\pi f_0 \tau + \phi - \downarrow) \tilde{x}(\tau - \tau) d\tau =$$

$$= \sum_m x[m] p(t-mT_s) \otimes \tilde{e}(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

L' INTEGRALE $\rightarrow 0$ visto che $p(\dots)c(\dots)$



Se definiamo $\tilde{p}(t - mT_s) = p(t - mT_s) \otimes \tilde{c}(t)$ allora :

$$\tilde{s}(t) = s(t) \otimes c(t) = \sum_m x[m] \tilde{p}(t - mT_s) \cos(z\pi f_0 t + \phi)$$

Ora studiamo $w(t)$, ovvero il segnale in ingresso al filtro di ricezione :

Ipotesi: ASSENZA DI RUMORE

$$w(t) = \tilde{s}(t) z \cos(z\pi f_0 t + \phi) = \sum_m x[m] p(t - mT_s) \otimes \tilde{c}(t) \cos(z\pi f_0 t + \phi) z \cos(z\pi f_0 t + \phi)$$

Filtriamo il segnale mediante $h_r(t)$:

$$w(t) = \tilde{s}(t) [\cos(4\pi f_0 t + \phi + \frac{\pi}{2}) + \cos(\phi - \frac{\pi}{2})]$$

$$w(t) = \underbrace{\tilde{s}(t) \cos(4\pi f_0 t + \phi + \frac{\pi}{2})}_{\text{COMPONENTE A } 2f_0} + \underbrace{\tilde{s}(t) \cos(\phi - \frac{\pi}{2})}_{\text{COMPONENTE IN B.B.}}$$

COMPONENTE A $2f_0$

COMPONENTE IN B.B.

$h_r(t)$ TAGLIA LE COMPONENTI DI $w(t)$ A $2f_0$ ($h_r(t)$ è un FILTRO LOW PASS)

$$y(t) = w(t) \otimes h_r(t) = \tilde{s}(t) \otimes h_r(t) \cos(\phi - \frac{\pi}{2}) = \sum_m x[m] \tilde{p}(t - mT_s) \otimes h_r(t) \cos(\phi - \frac{\pi}{2})$$

Come già visto in assenza di sfasamento, $h(t) \triangleq$ INTERPOLATORE EQUIVALENTE

$$h(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t) \otimes h_{\pi}(t)$$

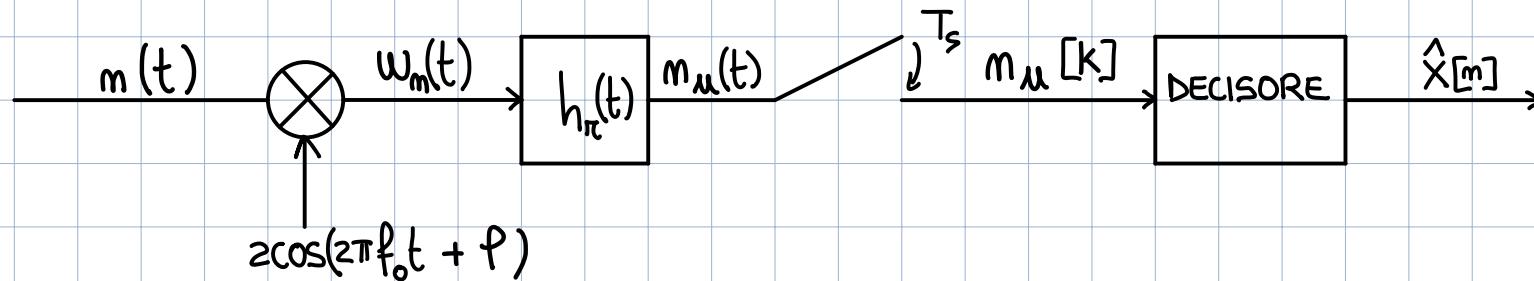
$$\Rightarrow y(t) = \sum_m x[m] h(t - mT_s) \cos(\phi - \phi)$$

$$\Rightarrow y[k] = y[KT_s] = x[k]h(0)\cos(\phi - \phi) + \sum_{m \neq k} x[m] h([k-m]T_s) \cos(\phi - \phi)$$

COMPONENTE SENZA ISI

COMPONENTE CON ISI

Studiamo cosa succede al rumore:



$$w_m(t) = z m(t) \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

$$P_m = \int_{-\infty}^{+\infty} S_m(f) df$$

$$m_u(t) = w_m(t) \otimes h_r(t)$$

$$P_{m_u} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{m_u}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(f) |H_r(f)|^2 df$$

Dobbiamo trovare $S_w(f)$; si parte dal calcolo di $R_w(t_1, t_2)$:

$$\begin{aligned}
 R_w(t_1, t_2) &= E[w(t_1)w(t_2)] = E[z_m(t_1)\cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi) z_m(t_2)\cos(2\pi f_0 t_2 + \varphi)] = \\
 &= 2E[m(t_1)m(t_2) \{ \cos(2\pi f_0 t_1 + 2\pi f_0 t_2 + 2\varphi) + \cos(2\pi f_0 [t_1 - t_2]) \}] = \\
 &= 2E[m(t_1)m(t_2)\cos(2\pi f_0 t_1 + 2\pi f_0 t_2 + 2\varphi)] + 2E[m(t_1)m(t_2)\cos(2\pi f_0 [t_1 - t_2])] = \\
 &= 2E[m(t_1)m(t_2)]\cos(2\pi f_0 [t_1 - t_2]) + 2E[m(t_1)m(t_2)]\cos(2\pi f_0 [t_1 + t_2] + 2\varphi) \\
 &= 2R_m(t_1 - t_2)\cos(2\pi f_0 [t_1 - t_2]) + 2R_m(t_1 - t_2)\cos(2\pi f_0 [t_1 + t_2] + 2\varphi) = \\
 &= 2N_0 B \operatorname{sinc}(B[t_1 - t_2]) \cos(2\pi f_0 [t_1 - t_2]) \cos(2\pi f_0 [t_1 - t_2]) + \\
 &\quad 2N_0 B \operatorname{sinc}(B[t_1 - t_2]) \cos(2\pi f_0 [t_1 - t_2]) \cos(2\pi f_0 [t_1 + t_2] + 2\varphi) =
 \end{aligned}$$

$$2N_0B \operatorname{sinc}(B[t_1 - t_2]) \cos(2\pi f_0 [t_1 - t_2]) \cos(2\pi f_0 [t_1 - t_2]) \Rightarrow R_m(\tau) [1 + \cos(4\pi f_0 \tau)]$$

$$2N_0B \operatorname{sinc}(B[t_1 - t_2]) \cos(2\pi f_0 [t_1 - t_2]) \cos(2\pi f_0 [t_1 + t_2] + 2f) \Rightarrow R_m(\tau) \begin{cases} \cos(4\pi f_0 t_1 + 2f) \\ \cos(4\pi f_0 t_2 + 2f) \end{cases}$$

Abbiamo appena visto che $R_w(t_1, t_2)$ è dato da 4 componenti:

$$1) R_m(\tau)$$

$$2) R_m(\tau) \cos(4\pi f_0 \tau)$$

\Rightarrow TAGLIATA DAL FILTRO PERCHÈ SI TROVA A zf_b

$$3) R_m(\tau) \cos(4\pi f_0 t_1 + 2f)$$

\Rightarrow TAGLIATA DAL FILTRO PERCHÈ SI TROVA A zf_b

$$4) R_m(\tau) \cos(4\pi f_0 t_2 + 2f)$$

\Rightarrow TAGLIATA DAL FILTRO PERCHÈ SI TROVA A zf_b

$$\Rightarrow R_{m_u}(\tau) = N_0 B \operatorname{sinc}(B[t_1 - t_2]) \otimes h_r(\tau) \otimes h_r(-\tau)$$

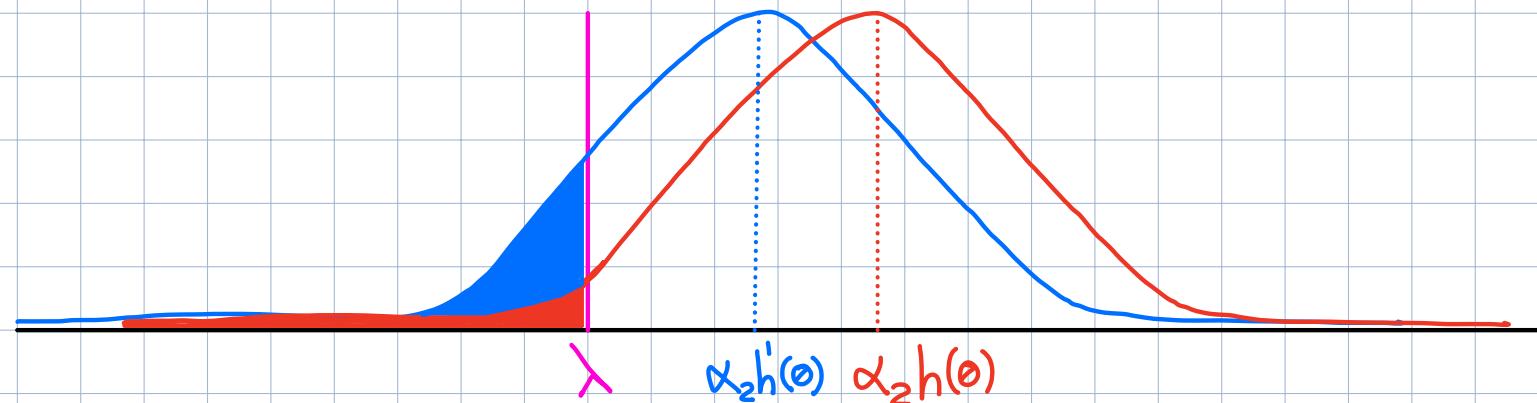
$$P_{m_u} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_m(f) |H_r(f)|^2 df = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{B}\right) |H_r(f)|^2 df = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(f)|^2 df = N_0 E_{h_r}$$

HANNO LA STESSA BANDA

La potenza di rumore in uscita dal filtro è INDIPENDENTE da θ e f !

\Rightarrow RISULTATO (ASSENZA DI ISI) : $y[k] = y[KT_s] = \underbrace{x[k]h(\theta)\cos(\theta - f)}_{\text{COMPONENTE UTILE}} + \underbrace{m_u[k]}_{\text{RUMORE}}$

Notiamo che $\cos(\theta - f) \leq 1 \Rightarrow$ Lo SFASAMENTO DIMINUISCE l'AMPIEZZA della COMPONENTE UTILE!



dove abbiamo definito $h'(t) = h(t)\cos(\theta - f)$

$$Q \left(\frac{\alpha_z h'(\theta) - \lambda}{\sqrt{N_o E_{hrc}}} \right) \Rightarrow Q \left(\frac{\alpha_z h(\theta) - \lambda}{\sqrt{N_o E_{hrc}}} \right)$$

Es. 2 - In un sistema di comunicazione numerico in banda passante il segnale trasmesso è $s(t) = \sum_k x[k] p(t - kT) \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$, con $f_0 \gg \frac{1}{T}$, dove i simboli $x[k]$ appartengono all'alfabeto $A = \{-1, +3\}$ e hanno probabilità a priori $P(-1) = \frac{2}{3}$ e $P(+3) = \frac{1}{3}$, e $p(t) = 2B \operatorname{sinc}^2(Bt) \cos(\pi Bt)$. La risposta impulsiva del canale è $c(t) = \delta(t)$. Il canale introduce anche rumore $w(t)$ Gaussiano additivo bianco in banda la cui densità spettrale di potenza è $S_W(f) = \frac{N_0}{2} \left[\operatorname{rect}\left(\frac{f-f_0}{2/T}\right) + \operatorname{rect}\left(\frac{f+f_0}{2/T}\right) \right]$. Il segnale ricevuto $r(t)$ è in ingresso al ricevitore in Figura 1. La risposta impulsiva del filtro in ricezione è quella di un passa basso ideale di banda $\frac{3}{2}B$. Il segnale in uscita al filtro in ricezione è campionato con passo di campionamento $T = \frac{1}{B}$ e i campioni costituiscono l'ingresso del decisore che ha soglia di decisione pari a $\lambda=0$. Determinare:

- 1) L'energia media per simbolo trasmesso,
- 2) Determinare il valore di θ per cui si ha assenza di cross-talk,
- 3) Verificare se è soddisfatta la condizione di Nyquist,
- 4) Calcolare la potenza di rumore in uscita al filtro in ricezione P_{nu} ,
- 5) Calcolare la probabilità di errore sul bit, $P_E(b)$.

17 Gennaio 2019

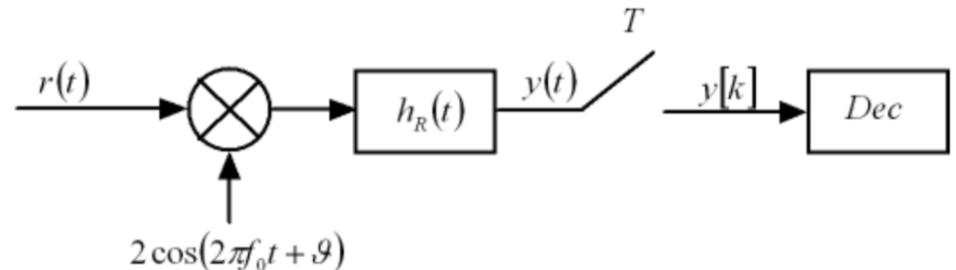


Fig. 1

Soluzione :

1º PUNTO : ENERGIA MEDIA PER SIMBOLO TRASMESSO .

$$E_s = \frac{1}{2} E[x^2] E_p$$

$$E[x^2] = P(x=\alpha_1)(\alpha_1)^2 + P(x=\alpha_2)(\alpha_2)^2 = \frac{2}{3}(-1)^2 + \frac{1}{3}(3)^2 = \frac{2}{3} + 3 = \frac{11}{3}$$

$$P(f) = TCF [p(t)] = TCF [2B \operatorname{sinc}^2(Bt) \cos(2\pi \frac{B}{2} t)]$$

Sia $x_o(t) = 2B \operatorname{sinc}^2(Bt)$, allora, dat teorema della MODULAZIONE, sappiamo che :

$$X(f) = TCF [x(t)] = TCF [x_o(t) \cos(z\pi f_0 t)] = \frac{1}{2} X_o(f + f_0) + \frac{1}{2} X_o(f - f_0) \text{ dove}$$

$$X_o(f) = TCF [x_o(t)]$$

Per fare un ripasso dimostriamo il teorema della MODULAZIONE COSINUSOIDALE :

Ipotesi : 1) $x(t) = x_o(t) \cos(z\pi f_0 t)$

2) $x_o(t) \xrightarrow{TCF} X_o(f)$

Tesi : $X(f) = \frac{1}{2} X_o(f + f_0) + \frac{1}{2} X_o(f - f_0)$

DIMOSTRAZIONE :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t) \cos(z\pi f_0 t) e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t) \left[\frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t} \right] e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t) e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t) e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t) e^{-j2\pi(f - f_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t) e^{-j2\pi(f + f_0)t} dt =$$

DEFINIAMO $\tilde{f} = f - f_0$

DEFINIAMO $\bar{f} = f + f_0$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t) e^{-j2\pi \tilde{f} t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t) e^{-j2\pi \bar{f} t} dt =$$

$X_o(\tilde{f})$

$X_o(\bar{f})$

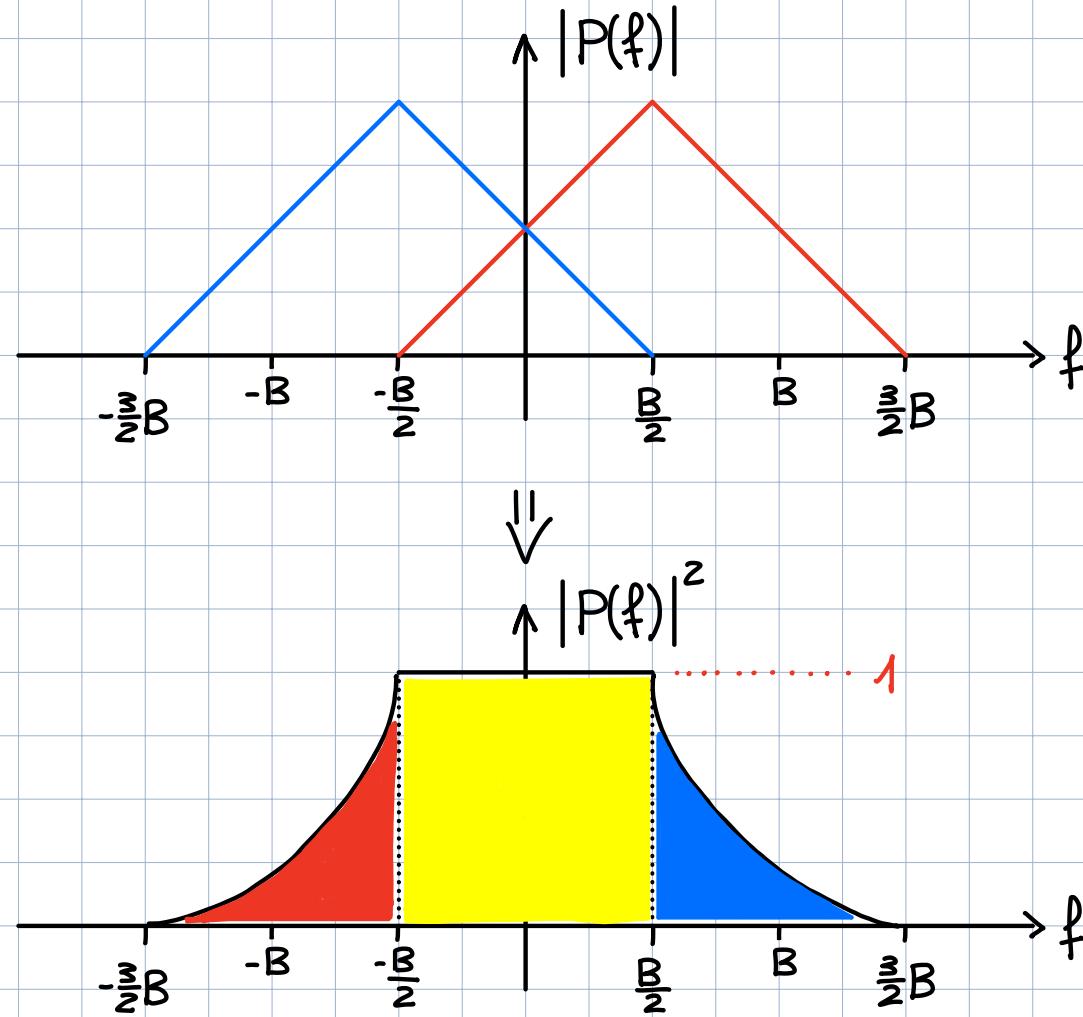
$$= \frac{1}{2} X_o(\tilde{f}) + \frac{1}{2} X_o(\bar{f}) = \frac{1}{2} X_o(f - f_0) + \frac{1}{2} X_o(f + f_0)$$

c.v.d.

Ora possiamo scrivere $P(f) = \frac{1}{2} X_o(f - \frac{B}{2}) + \frac{1}{2} X_o(f + \frac{B}{2})$

$$X_o(f) = 2 \left[1 - \frac{|f|}{B} \right] \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$\Rightarrow P(f) = \left[1 - \frac{|f - B/2|}{B} \right] \text{rect}\left(\frac{f - B/2}{2B}\right) + \left[1 - \frac{|f + B/2|}{B} \right] \text{rect}\left(\frac{f + B/2}{2B}\right)$$



$$\begin{aligned} \text{AREA ROSSA} = \text{AREA BLU} &= \int_{-B}^0 \left(\frac{1}{B} f + 1 \right)^2 df = \int_{-B}^0 \frac{1}{B^2} f^2 df + \int_{-B}^0 df + \int_{-B}^0 \frac{2}{B} f df = \\ &= \left. \frac{1}{3B^2} f^3 \right|_{-B}^0 + B + \left. \frac{1}{B} f^2 \right|_{-B}^0 = 0 + \frac{B}{3} + B + -B = B/3 \end{aligned}$$

AREA GIALLA = B

$$\Rightarrow E_p = \text{AREA ROSSA} + \text{AREA BLU} + \text{AREA GIALLA} = \frac{2}{3}B + B = \frac{5}{3}B$$

$$\Rightarrow E_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} B \cdot \frac{11}{3} = \frac{55}{18} B$$

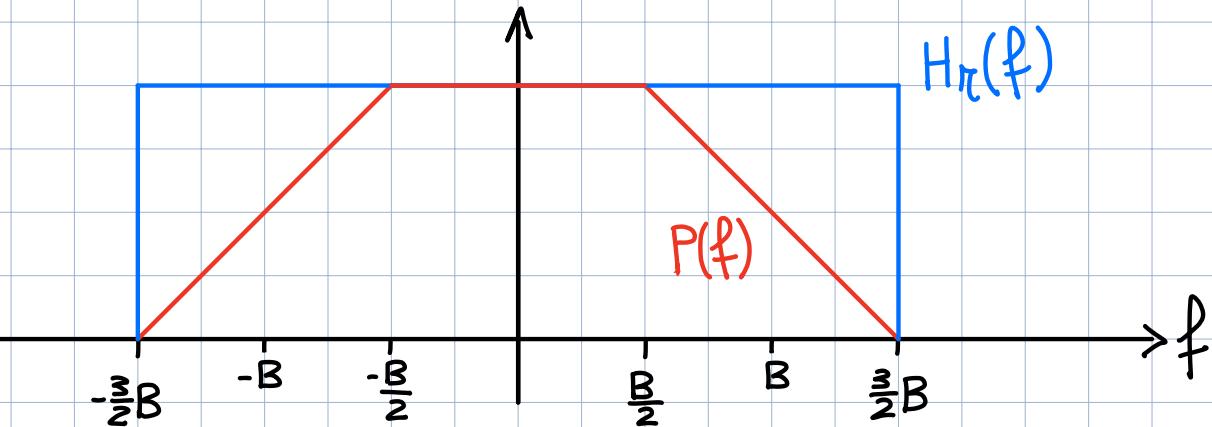
2° PUNTO : In una PAM in BANDA PASSANTE non sono presenti componenti di CROSS-TALK.

3° PUNTO : Verificare la CONDIZIONE di Nyquist.

$$h(t) = p(t) \otimes c(t) \otimes h_r(t) = p(t) \otimes h_r(t)$$

" "
 $\delta(t)$

$$H(f) = P(f) H_r(f) \Rightarrow$$



$H(f) = P(f)$

$$\begin{aligned}
 h(t) = p(t) \Rightarrow h(kT_s) = p(kT_s) &= 2B \operatorname{sinc}^2(BkT_s) \cos(2\pi \frac{B}{2} k T_s) = \\
 &= 2B \operatorname{sinc}(Bk \frac{1}{B}) \operatorname{sinc}(Bk \frac{1}{B}) \cos(2\pi \frac{B}{2} k \frac{1}{B}) = \\
 &= 2B \underbrace{\operatorname{sinc}(k)}_{\delta(k)} \underbrace{\operatorname{sinc}(k)}_{\delta(k)} \underbrace{\cos(\pi k)}_{=1} = 2B \delta(k)
 \end{aligned}$$

Condizione di Nyquist verificata.

4° PUNTO : P_{m_u}

Per una PAM in BANDA PASSANTE Sappiamo che $P_{m_u} = N_0 E_{h_r}$

$$E_{h_r} = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_r(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{\frac{3}{2}B}\right)^2 df = \int_{-\frac{3}{2}B}^{\frac{3}{2}B} df = 3B$$

$$P_{m_u} = 3N_0 B$$

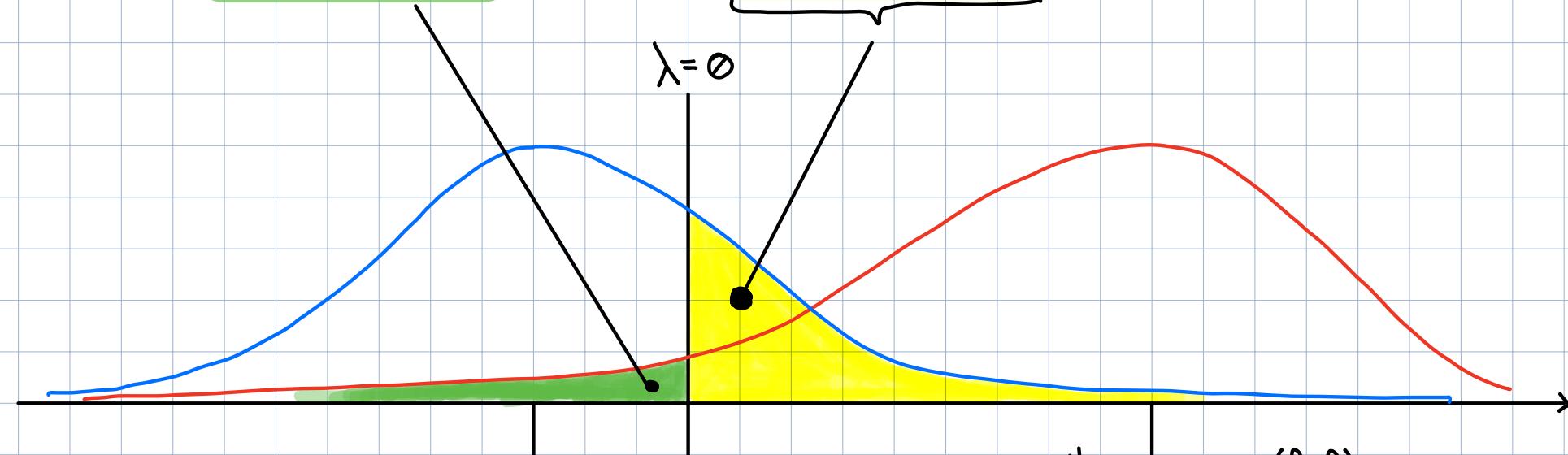
5° PUNTO: $P_E(b)$

Sui moti che siamo in presenza di sfasamento!

1) La CONDIZIONE DI NYQUIST È VERIFICATA \Rightarrow ASSENZA DI ISI

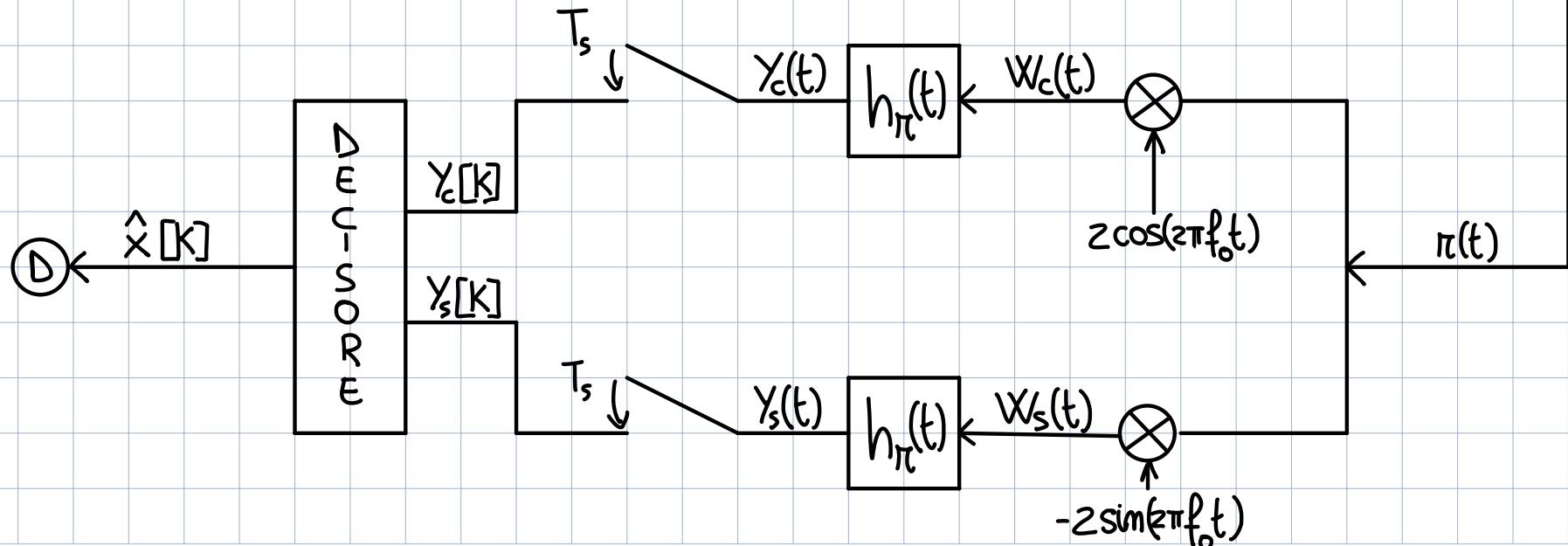
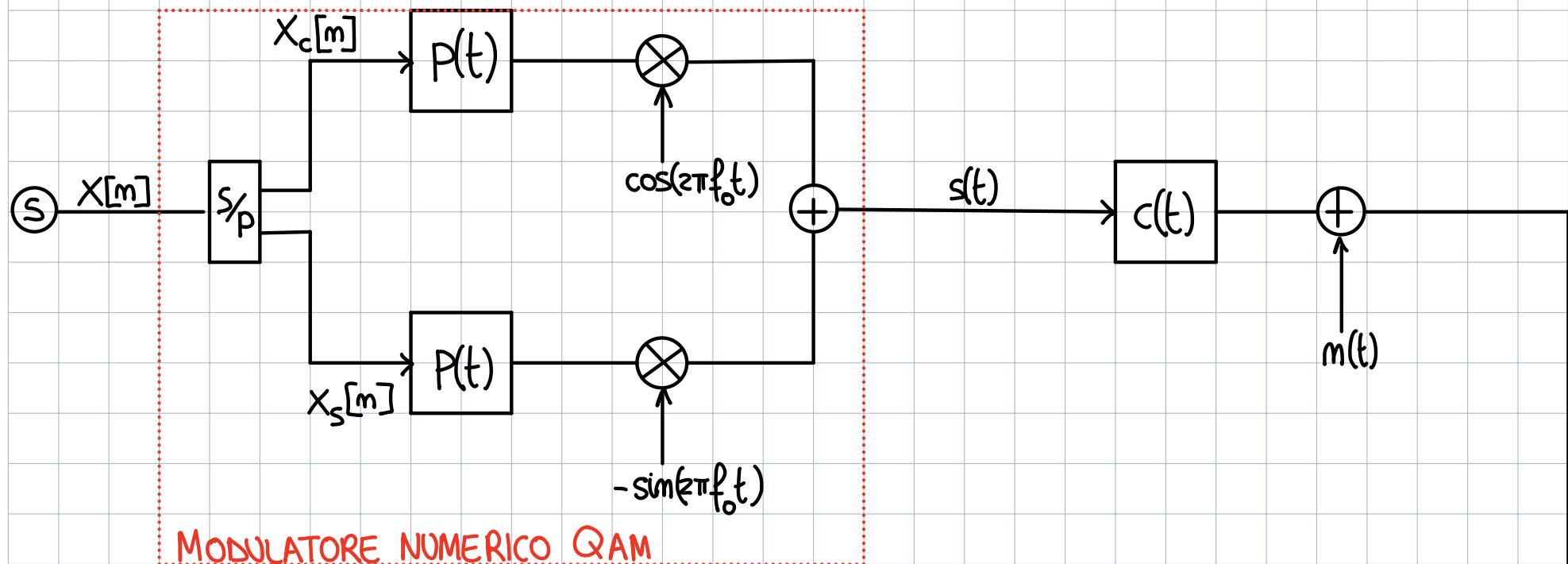
$$2) h'(0) = h(0) \cos(\varphi - \varphi_0) = p(0) \cos(\varphi - \varphi_0) = 2B \cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$\Rightarrow P_E(b) = P(\hat{x} = -1 | x = 3) P(x = 3) + P(\hat{x} = 3 | x = -1) P(x = -1)$$



$$P_E(b) = \frac{1}{3} Q\left(\frac{6B \cos(\varphi - \varphi_0)}{\sqrt{3N_0 B}}\right) + \frac{2}{3} Q\left(\frac{2B \cos(\varphi - \varphi_0)}{\sqrt{3N_0 B}}\right)$$

Studiamo cosa succede in un sistema di comunicazione QAM:



$$s(t) = \sum_m X_c[m] p(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t) - \sum_m X_s[m] p(t - mT_s) \sin(2\pi f_0 t)$$

COMPONENTE OTTENUTA DAL RAMO IN FASE
COMPONENTE OTTENUTA DAL RAMO IN QUADRATURA

Supponiamo di essere in ASSENZA di RUMORE:

$$r(t) = s(t) \otimes c(t) + m(t) = s(t) \otimes c(t)$$

$$c(t) = z \tilde{c}(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{dove } \tilde{c}(t) \triangleq \text{RISPOSTA IMPULSIVA IN BANDA BASE DEL CANALE}$$

Come si presenta il segnale in ingresso al ricevitore?

$$r(t) = s(t) \otimes c(t) = \tilde{s}(t) = \sum_m X_c[m] \tilde{p}(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t) - \sum_m X_s[m] \tilde{p}(t - mT_s) \sin(2\pi f_0 t)$$

dove abbiamo definito $\tilde{p}(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t)$

In modo molto simile a quanto visto per i precedenti sistemi in BANDA PASSANTE, il segnale in INGRESSO viene DEMODULATO.

RAMO IN FASE $\Rightarrow W_c(t) = \tilde{s}(t) z \cos(2\pi f_0 t)$

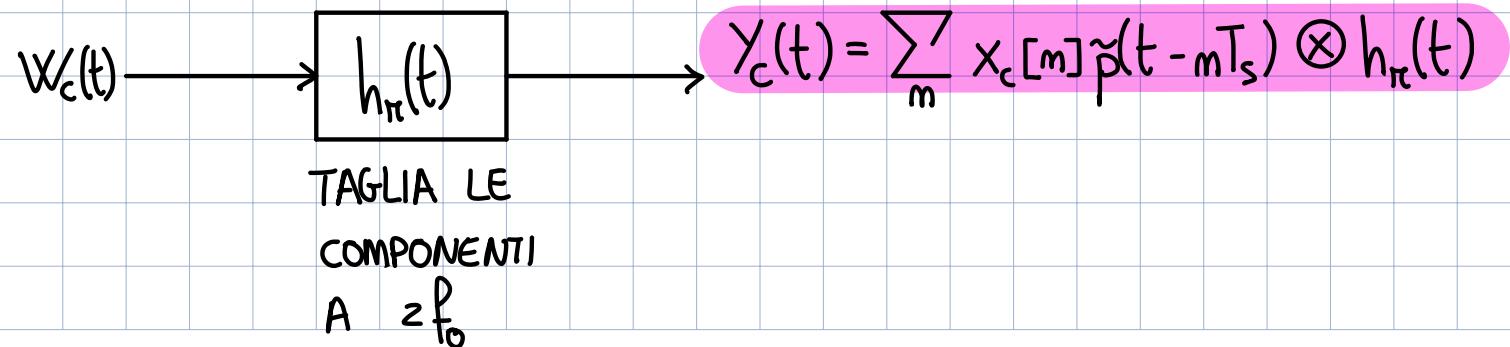
RAMO IN QUADRATURA $\Rightarrow W_s(t) = \tilde{s}(t) z [-\sin(2\pi f_0 t)]$

RAMO IN FASE :

$$W_c(t) = \tilde{s}(t) z \cos(z\pi f_0 t) = \left\{ \sum_m x_c[m] \tilde{p}(t - mT_s) \cos(z\pi f_0 t) - \sum_m x_s[m] \tilde{p}(t - mT_s) \sin(z\pi f_0 t) \right\} z \cos(z\pi f_0 t)$$

$$W_c(t) = \begin{cases} 2 \sum_m x_c[m] \tilde{p}(t - mT_s) \cos^2(z\pi f_0 t) = \sum_m x_c[m] \tilde{p}(t - mT_s) + \sum_m x_c[m] \tilde{p}(t - mT_s) \cos(4\pi f_0 t) \\ 2 \sum_m x_s[m] \tilde{p}(t - mT_s) \sin(z\pi f_0 t) \cos(z\pi f_0 t) = \sum_m x_s[m] \tilde{p}(t - mT_s) \sin(4\pi f_0 t) + \\ + \sum_m x_s[m] \tilde{p}(t - mT_s) \sin(\theta) \end{cases}$$

$$W_c(t) = \sum_m x_c[m] \tilde{p}(t - mT_s) + \underbrace{\sum_m x_c[m] \tilde{p}(t - mT_s) \cos(4\pi f_0 t)}_{\text{Compomento a } zf_0} + \underbrace{\sum_m x_s[m] \tilde{p}(t - mT_s) \sin(4\pi f_0 t)}_{\text{Compomento a } zf_0}$$



$$y_c(t) = \sum_m x_c[m] h(t - mT_s)$$

done $h(t)$ = INTERPOLATORE EQUIVALENTE

$$h(t) = p(t) \otimes z(t) \otimes h_\pi(t)$$

Il segnale $y_c(t)$ viene campionato $\Rightarrow y_c[k] = y_c(kT_s) = \sum_m x_c[m] h(kT_s - mT_s)$

$$y_c[k] = \sum_m x_c[m] h([k-m]T_s) = x_c[0]h(0) + \sum_{m \neq k} x_c[m] h([k-m]T_s)$$

NO ISI
ISI

RAMO IN QUADRATURA:

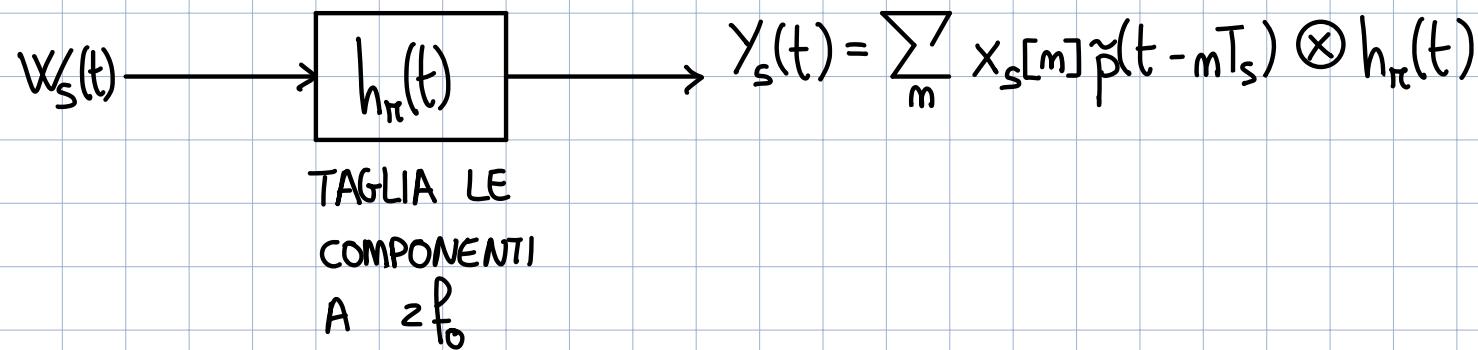
$$W_s(t) = \tilde{s}(t) e^{-j\sin(z\pi f_o t)} \quad |$$

$$= -2 \sin(2\pi f_0 t) \cdot \left\{ \sum_m x_c[m] \tilde{p}(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t) - \sum_m x_s[m] \tilde{p}(t - mT_s) \sin(2\pi f_0 t) \right\}$$

$$W_S(t) = \begin{cases} -2 \sum_m X_c[m] \tilde{p}(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t) = - \sum_m X_c[m] \tilde{p}(t - mT_s) \sin(4\pi f_0 t) - \\ \quad - \sum_m X_c[m] \tilde{p}(t - mT_s) \sin(\theta) \\ 2 \sum_m X_s[m] \tilde{p}(t - mT_s) \sin(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t) = \sum_m X_s[m] \tilde{p}(t - mT_s) \cos(\theta) - \\ \quad - \sum_m X_s[m] \tilde{p}(t - mT_s) \cos(4\pi f_0 t) \end{cases}$$

RICORDA : $\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$

$$W_S(t) = \sum_m X_s[m] \tilde{p}(t - mT_s) \cos(\theta) - \underbrace{\sum_m X_s[m] \tilde{p}(t - mT_s) \cos(4\pi f_0 t)}_{\text{Compomento a } zf_0} - \underbrace{\sum_m X_c[m] \tilde{p}(t - mT_s) \sin(4\pi f_0 t)}_{\text{Compomento a } zf_0}$$



$$Y_s(t) = \sum_m X_s[m] h(t - mT_s)$$

$$h(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t) \otimes h_n(t)$$

Il segnale $y_s(t)$ viene campionato $\Rightarrow y_s[k] = y_s(kT_s) = \sum_m x_s[m] h(kT_s - mT_s)$

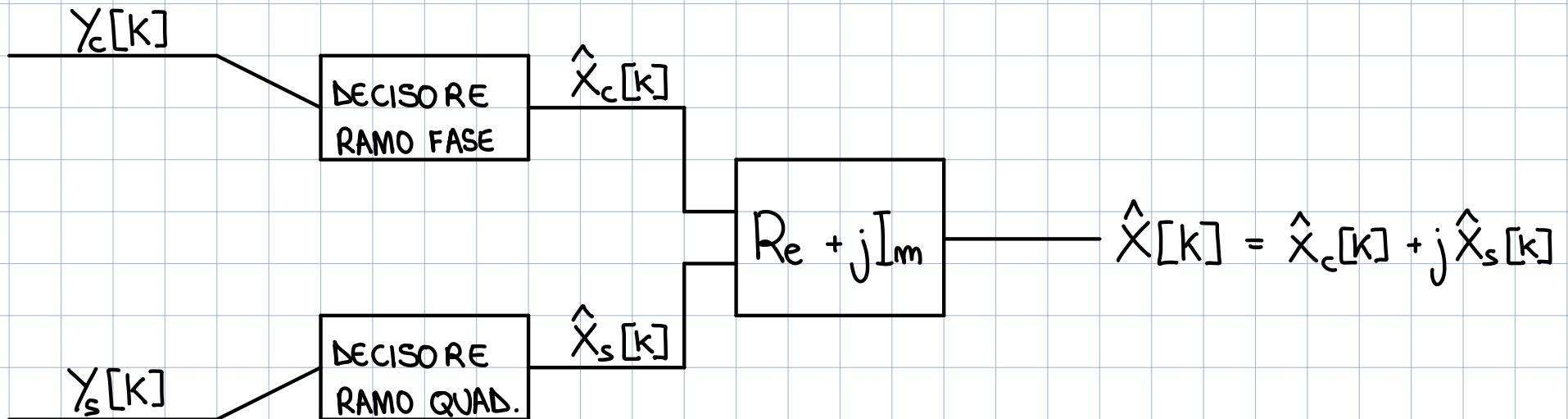
$$y_s[k] = \sum_m x_s[m] h([k-m]T_s) = \underbrace{x_s[m] h(0)}_{\text{NO ISI}} + \underbrace{\sum_{m \neq k} x_s[m] h([k-m]T_s)}_{\text{ISI}}$$

$x_c[m]$ CANALE VIRTUALE IN FASE $\Rightarrow y_c[k] = \sum_m x_c[m] h([k-m]T_s)$

$x_s[m]$ CANALE VIRTUALE IN QUADRATURA $\Rightarrow y_s[k] = \sum_m x_s[m] h([k-m]T_s)$

QAM ha un'efficienza spettrale DOPPIA rispetto alla PAM in B.P.
 \Rightarrow Riesco ad INVIARE il DOPPIO dei simboli a parità di BANDA!

DECISORE QAM



PROBABILITA' D'ERRORE (CASO 4-QAM)

$$x_c[m] \in A_c \left\{ \alpha_1^{(c)}, \alpha_2^{(c)} \right\}, \quad x_s[m] \in A_s \left\{ \alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)} \right\}$$

$$P_E^c = P(\hat{x}_c \neq x_c) = P(\hat{x}_c = \alpha_1^c | x_c = \alpha_2^c) P(x_c = \alpha_2^c) + P(\hat{x}_c = \alpha_2^c | x_c = \alpha_1^c) P(x_c = \alpha_1^c)$$

$$P_E^s = P(\hat{x}_s \neq x_s) = P(\hat{x}_s = \alpha_1^s | x_s = \alpha_2^s) P(x_s = \alpha_2^s) + P(\hat{x}_s = \alpha_2^s | x_s = \alpha_1^s) P(x_s = \alpha_1^s)$$

$P_E^C \triangleq$ PROBABILITÀ DI ERRORE SUL RAMO IN FASE

$P_E^S \triangleq$ PROBABILITÀ DI ERRORE SUL RAMO IN QUADRATURA

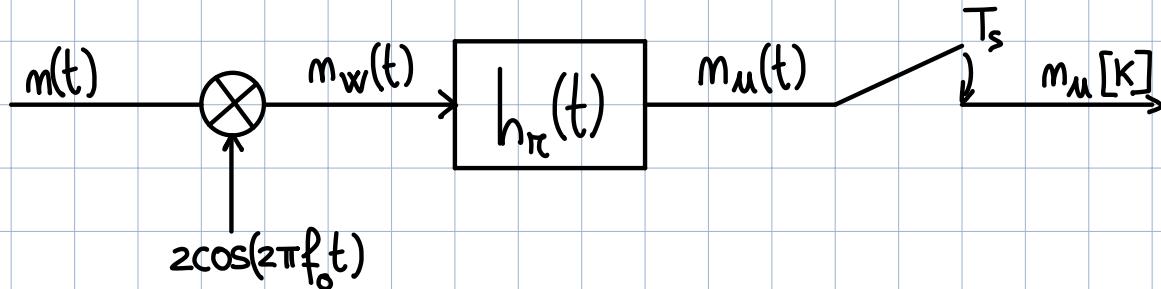
$$P_E = \underbrace{P_E^C(1 - P_E^S)}_{\text{PROBABILITÀ CHE SBAGLI NEL RAMO IN FASE MA CHE NON SBAGLI NEL RAMO IN QUAD.}} + \underbrace{P_E^S(1 - P_E^C)}_{\text{PROBABILITÀ CHE SBAGLI NEL RAMO IN QUAD. MA CHE NON SBAGLI NEL RAMO IN FASE}} + \underbrace{P_E^C \cdot P_E^S}_{\text{PROBABILITÀ CHE SBAGLIA SU ENTRAMBI I RAMI}}$$

$$P_E = 1 - (1 - P_E^C)(1 - P_E^S)$$

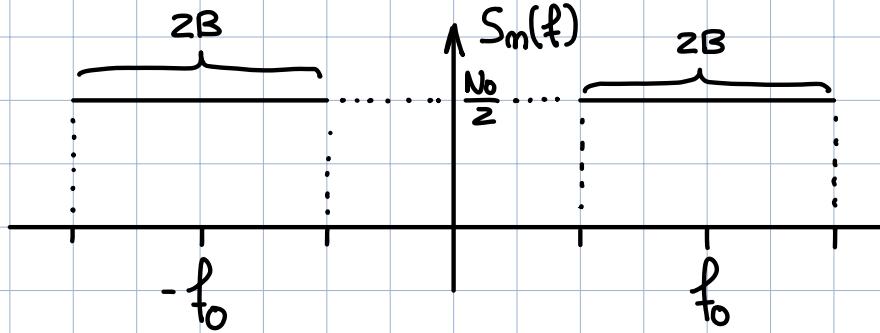
EFFETTI DEL RUMORE

Ipotesi: BANDA CANALE = BANDA $H_\pi(f)$

RAMO IN FASE:



Noi consideriamo solamente RUMORE ADDITIVO GAUSSIANO BIANCO:



$$S_m(f) = \frac{N_0}{2} \operatorname{rect}\left(\frac{f - f_0}{2B}\right) + \frac{N_0}{2} \operatorname{rect}\left(\frac{f + f_0}{2B}\right)$$

$$\tilde{S}_m(f) = N_0 \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$R_m(\tau) = \text{ATCF}[S_m(f)] = \text{ATCF}\left[\frac{N_0}{2} \operatorname{rect}\left(\frac{f - f_0}{2B}\right) + \frac{N_0}{2} \operatorname{rect}\left(\frac{f + f_0}{2B}\right)\right] =$$

$$= \text{ATCF}\left[\frac{1}{2} \tilde{S}_m(f - f_0) + \frac{1}{2} \tilde{S}_m(f + f_0)\right] = \text{ATCF}[\tilde{S}_m(f)] \cos(2\pi f_0 \tau) = N_0 2B \sin(2\pi f_0 \tau) \cos(2\pi f_0 \tau)$$

$$\begin{aligned}
 E[m_w(t_1) m_w(t_2)] &= E[m(t_1) z \cos(2\pi f_o t_1) m(t_2) z \cos(2\pi f_o t_2)] = E[4m(t_1) m(t_2)] \cos(2\pi f_o t_1) \cos(2\pi f_o t_2) = \\
 &= z E[4m(t_1) m(t_2)] (\cos(2\pi f_o [t_1 + t_2]) + \cos(2\pi f_o [t_1 - t_2])) = \\
 &= 2R_m(t_1, t_2) \cos(2\pi f_o [t_1 + t_2]) + 2R_m(t_1, t_2) \cos(2\pi f_o [t_1 - t_2]) =
 \end{aligned}$$

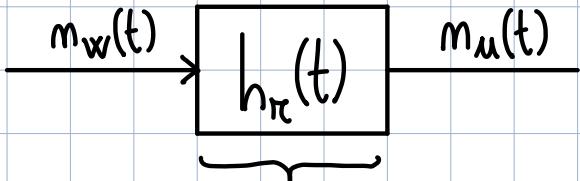
$$\Rightarrow 2R_m(t_1, t_2) \cos(2\pi f_o [t_1 + t_2]) = z N_0 2B \text{sinc}(zB\bar{T}) \cos(2\pi f_o [t_1 - t_2]) \cos(2\pi f_o [t_1 + t_2])$$

$$\quad \quad \quad = N_0 2B \text{sinc}(zB\bar{T}) (\cos(4\pi f_o t_1) + \cos(4\pi f_o t_2))$$

$$\Rightarrow 2R_m(t_1, t_2) \cos(2\pi f_o [t_1 - t_2]) = z N_0 2B \text{sinc}(zB\bar{T}) \cos(2\pi f_o [t_1 - t_2]) \cos(2\pi f_o [t_1 - t_2]) =$$

$$\quad \quad \quad = N_0 2B \text{sinc}(zB\bar{T}) (1 + \cos(4\pi f_o [t_1 - t_2]))$$

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 E[m_w(t_1) m_w(t_2)] &= N_0 2B \text{sinc}(zB\bar{T}) (\cos(4\pi f_o t_1) + \cos(4\pi f_o t_2)) + \\
 &\quad + N_0 2B \text{sinc}(zB\bar{T}) (1 + \cos(4\pi f_o [t_1 - t_2]))
 \end{aligned}}$$



TAGLIA LE COMPONENTI
A $2f_0$

$$\Rightarrow R_{m_u}(t_1, t_2) = E[m_w(t_1) \otimes h_n(t_1) \cdot m_w(t_2) \otimes h_n(t_2)]$$

$$E[m_w(t_1) m_w(t_2)] = N_0 2B \text{sinc}(2B\tau) (\cos(4\pi f_0 t_1) + \cos(4\pi f_0 t_2)) + N_0 2B \text{sinc}(2B\tau) (1 + \cos(4\pi f_0 [t_1 - t_2]))$$

TAGLIATE DAL FILTRO!

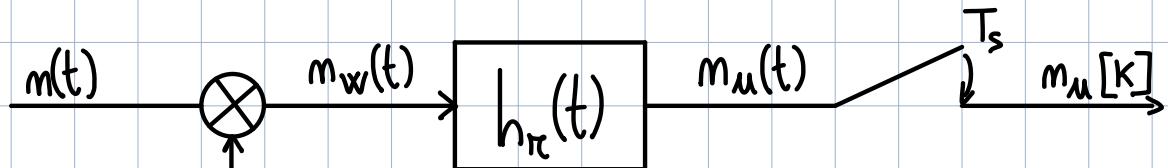
$$\Rightarrow R_{m_u}(t_1, t_2) = R_{m_u}(\tau) = N_0 2B \text{sinc}(2B\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

\Rightarrow lecito perché l'azione del filtro ha lasciato solo componenti in funzione di $\tau = t_1 - t_2$.

$$\Rightarrow S_{m_u}(f) = \tilde{S}_m(f) |H_n(f)|^2 = N_0 \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) |H_n(f)|^2 = N_0 |H_n(f)|^2$$

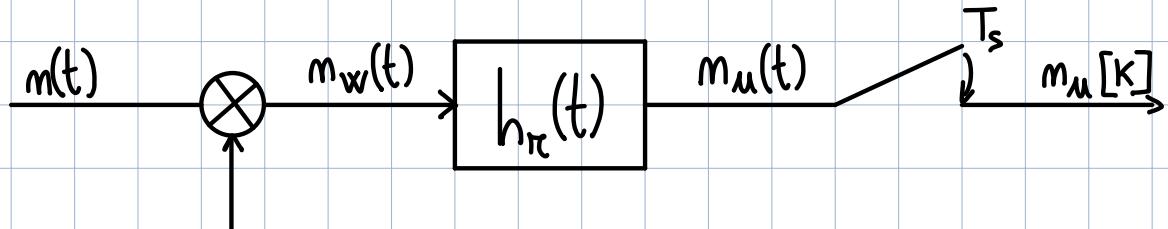
$$\Rightarrow P_{m_u}^c = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{m_u}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} N_0 |H_r(f)|^2 df = N_0 E_{h_r}$$

RAMO IN QUADRATURA :



$$-2\sin(2\pi f_o t) = -2\cos(2\pi f_o t + \frac{\pi}{2}) = 2\cos(2\pi f_o t + \frac{\pi}{2})$$

Abbiamo già studiato questa situazione: SINCRONISMO DI FASE !



$$2\cos(2\pi f_o t + \beta), \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow P_{m_u}^c = P_{m_u}^s = N_0 E_{h_r}$$

LA POTENZA DI RUMORE IN USCITA DAL FILTRO È INDIPENDENTE DA β !