Esercizio 1.28 Mazzoldi Saggion ①

Descrivere il moto di un punto materiale le cui leggi orarie in coordinate polari sono

$$\begin{cases} r = r_0 \operatorname{sen} \omega t \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

si assume $r_0 = 5 \times 10^{-2}\, m$

$\omega = 2\pi\ rad/s$

Per capire con che moto abbiamo a che fare ci conviene passare a coordinate cartesiane

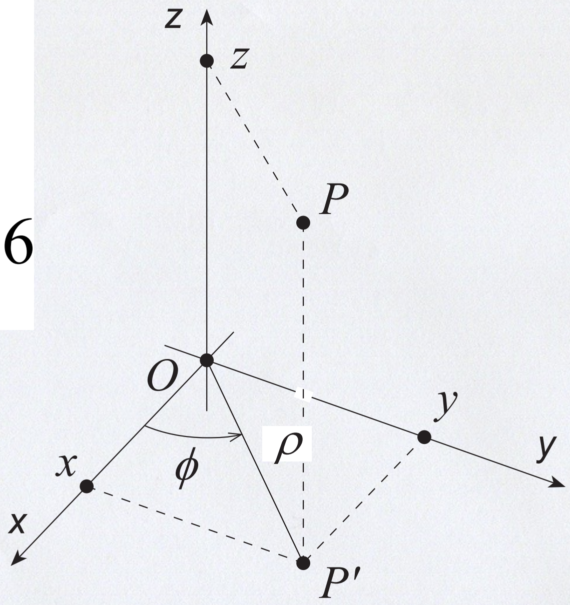
$(r, \phi, z) \longrightarrow x, y, z$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

$$\tan\phi = \frac{y}{x}\,,$$

$$z = z\,;$$

da Lez2 slide 6



viceversa:

$$x = \rho\cos\phi$$

$$y = \rho\sin\phi$$

$$z = z\,.$$

Il moto è nel piano x, y : $z = 0$

nota ϕ lezione $\to \theta$ esercizio!

e ρ lezione $\rightarrow$r esercizio

Nel nostro caso

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{ma } r = r_0 \sin\omega t = r_0 \sin\theta \quad = \begin{cases} x = r_0 \sin\theta\cos\theta \\ y = r_0 \sin\theta \cdot \sin\theta \end{cases}$$

ricordiamo che

$$\left.\begin{array}{l} \{ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \\ \begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \end{cases} \\ \sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{r_0}{2}\sin 2\theta \\ y = \dfrac{r_0}{2}(1-\cos 2\theta) \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{r_0^2}{4}\sin^2 2\theta \\ \quad \oplus \\ \left(y-\dfrac{r_0}{2}\right)^2 = (-\cos 2\theta)^2 \dfrac{r_0^2}{4} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + \left(y - \frac{r_0}{2}\right)^2 = \frac{r_0^2}{4} = \left(\frac{r_0}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow$ Equazione di una circonferenza in x, y con centro in (x_c, y_c) e raggio R

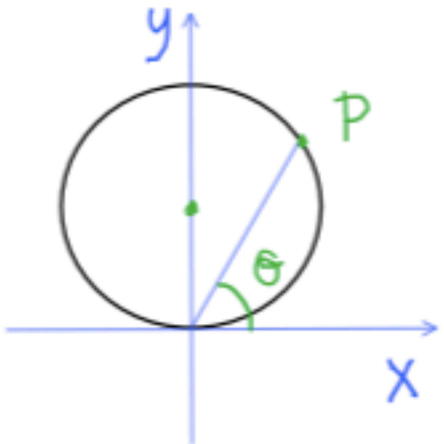
$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = R^2$$

per cui

$$R = \frac{r_0}{2} = 2.5 \times 10^{-2}\, m$$

$$(x_c, y_c) = \left(0, \frac{r_0}{2}\right) = \left(0, 2.5 \times 10^{-2}\right) m$$

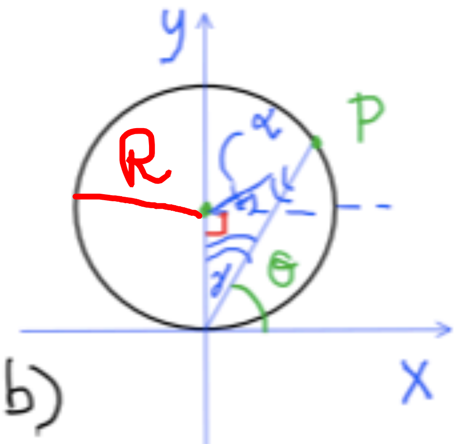
Equazioni della circonferenza



a)

$$x = \frac{r_0}{2} \sin 2\theta$$

$$y = \frac{r_0}{2}(1-\cos 2\theta)$$



b)

$$x = \frac{r_0}{2} \cos\alpha$$

$$y = \frac{r_0}{2} \sin\alpha + y_c$$

$$\alpha + \pi/2 + 2\gamma = \pi$$

$$\gamma = \pi/2 - \theta$$

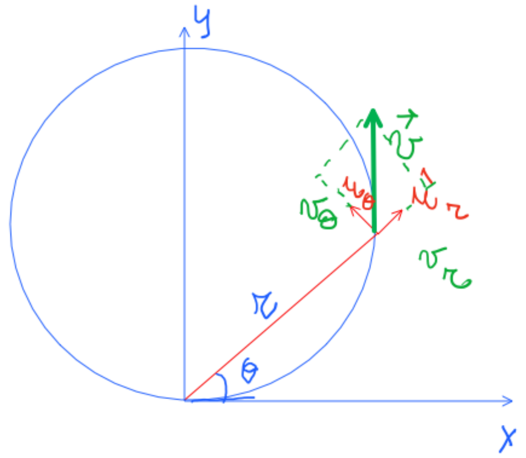
$$\cdot\ 2\gamma = \pi - 2\theta$$

$$\alpha = \pi/2 - 2\gamma$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\theta$$

Per cui deve essere
$$\begin{cases} \sin 2\theta = \cos\alpha \\ -\cos 2\theta = \sin\alpha \end{cases}$$

$\Rightarrow$ poiché $\alpha = (2\theta - \pi/2)$ Questa condizione è verificata!



la velocità è tangente alla traiettoria ma la sto determinando in coordinate polari (r,θ)

In coordinate polari

le componenti della velocità di P sono

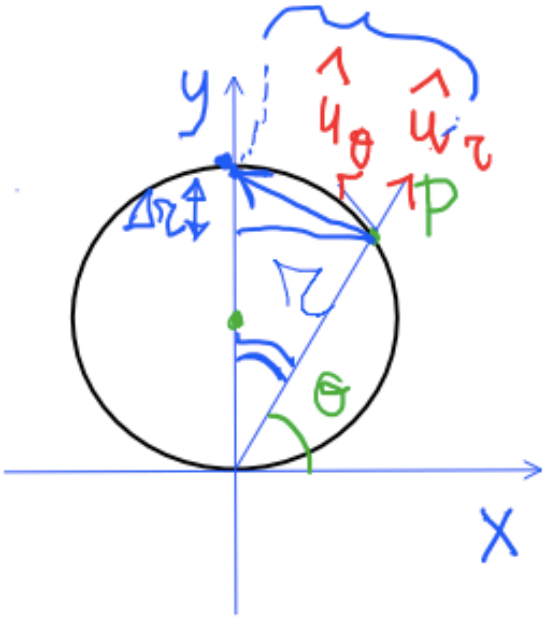
$$\vec{v} = v_r \hat{u}_r + v_\theta \hat{u}_\theta$$

con $v_r = \dfrac{dr}{dt}$

$v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt}$

$v_r = \dfrac{dr}{dt}$: dr è lo spostamento infinitesimo a $\theta = \text{cost}$

$v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt}$: $r\,d\theta$ è lo spostamento infinitesimo a $r = \text{cost}$



$\Delta\theta \Rightarrow$ Spostamento tangenziale

$r\Delta\theta$

Spostamento radiale

Δr

vettore spostamento

$$\Rightarrow \Delta r\, \hat{u}_r + r\Delta\theta\, \hat{u}_\theta$$

per uno spostamento infinitesimo

$$\vec{v}\, dt = dr\, \hat{u}_r + r\, d\theta\, \hat{u}_\theta$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\, \hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\, \hat{u}_\theta$$

per cui $v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(r_0 \sin\omega t) = \omega r_0 \cos\omega t$

$$v_\theta = r\frac{d\theta^*}{dt} = r_0 \sin\omega t \; \omega$$

$^*\theta = \omega t$

per cui $|\vec{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \omega r_0$! $\omega r_0 = 0.31$ m/s

La traiettoria circolare

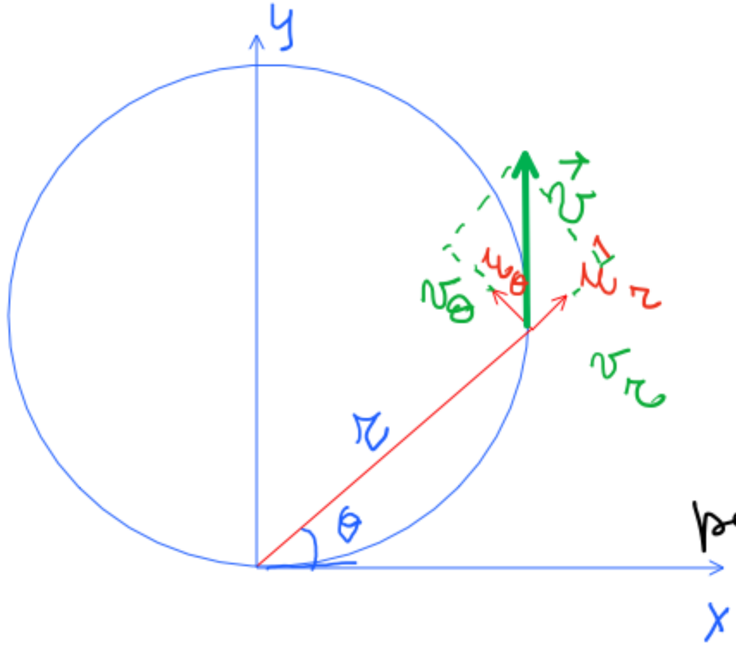
è percorsa con moto uniforme! $|\vec{v}| = cost.$

di conseguenza l'accelerazione è centripeta

e vale $v^2/R = \omega^2 r_0^2 / r_0 \cdot 2$ $= 3.84$ m/s^2 → $R = \frac{r_0}{2}$

per casa verificarlo con a_r e a_θ !

Il periodo del moto è $T = \frac{2\pi}{\omega}$

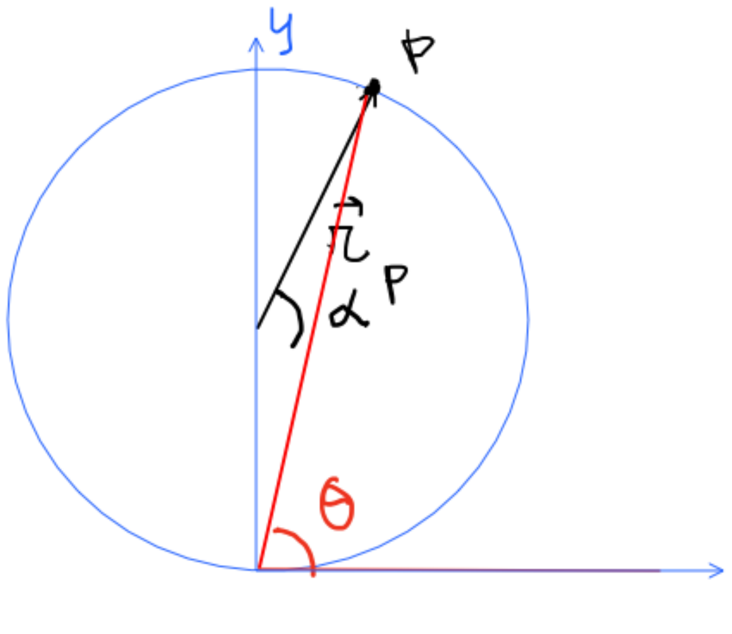


Ma era necessario calcolare $\vec{v}$ in coordinate polari?

NO

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}$$

per cui in coordinate cartesiane



Indicando con $\vec{r}_P$ il vettore posizione di un punto sulla circonferenza

$$\vec{r}_P = \frac{r_0}{2}\cos\alpha\,\hat{i} + \frac{r_0}{2}(1+\sin\alpha)\hat{j}$$

$$\vec{r}_P = \frac{r_0}{2}\cos\alpha\,\hat{i} + \frac{r_0}{2}(1+\sin\alpha)\hat{j}$$

$$\frac{d\vec{r}_P}{dt} = -\frac{r_0}{2}\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}\hat{i} + \frac{r_0}{2}\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}\hat{j}$$

$$\frac{d\vec{r}_P}{dt} = -\frac{r_0}{2}\sin\alpha\,2\omega\,\hat{i} + \frac{r_0}{2}\cos\alpha\,2\omega\,\hat{j}$$

nota $\vec{r}_P$ vettore posizione in coordinate cartesiane

$$\alpha = 2\theta - \pi/2$$

$$\vec{v} = \left(-\frac{r_0}{\cancel{2}}\sin\alpha\,\cancel{2}\cdot\omega\,,\; r_0/\cancel{2}\cos\alpha\cdot\cancel{2}\omega\right)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(\omega r_0)^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}$$

$$v = \omega r_0\,!$$ poichè $\omega = \text{cost}$

$$\vec{v} = \left(-\frac{r_0}{\cancel{2}} \sin\alpha\, \cancel{2}\cdot\omega \,;\; r_0/\cancel{2} \cos\alpha \cdot \cancel{2}\omega\right)$$

derivando $\frac{d\vec{r}_p}{dt}$ rispetto al tempo

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}_p}{dt^2} = \vec{a} = \left(-r_0\, \omega 2\omega \cos\alpha \,,\; -r_0\, \omega 2\omega \sin\alpha\right)$$

$$\vec{a} = \left(-\omega^2 2 r_0 \cos\alpha \,,\; -\omega^2 2 r_0 \sin\alpha\right)$$

$$a = \omega^2 r_0 2$$

ma anche $\frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 r_0^2\; 2}{r_0} = 2\omega^2 r_0$

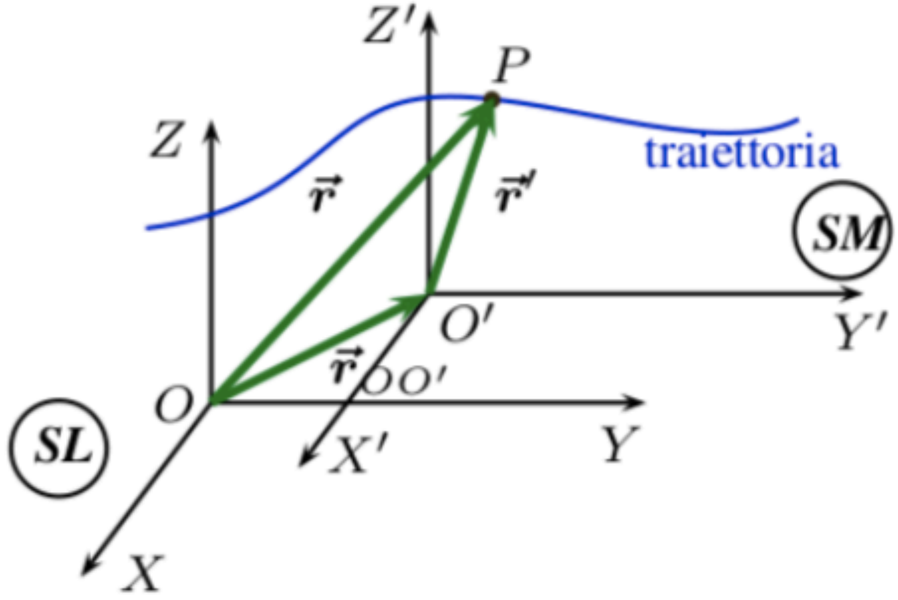
inoltre dall'espressione vettoriale

$$\vec{a} = -2\,\omega^2\, r_0\, \hat{r}$$

con $\hat{r} = +\cos\alpha\, \hat{i} + \sin\alpha\, \hat{j}$

Velocità e accelerazione di trascinamento

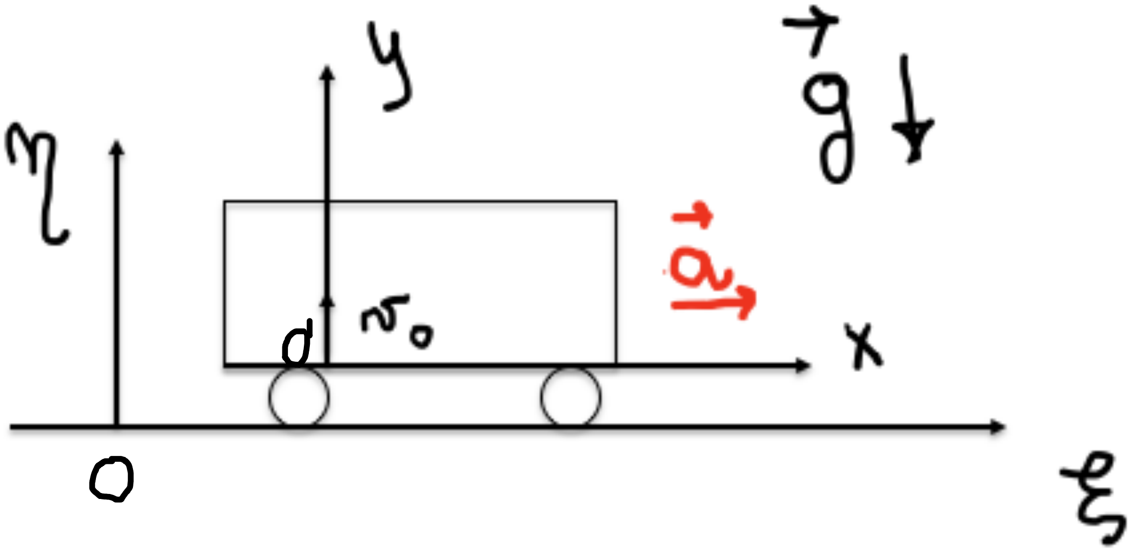
Consideriamo ora il caso in cui il sistema di riferimento $\mathcal{SM}$ (*sistema mobile*) è in moto con velocità $\vec{v}_t$ e accelerazione $\vec{a}_t$ (che assumiamo costante) rispetto al sistema di riferimento $\mathcal{SL}$ del laboratorio



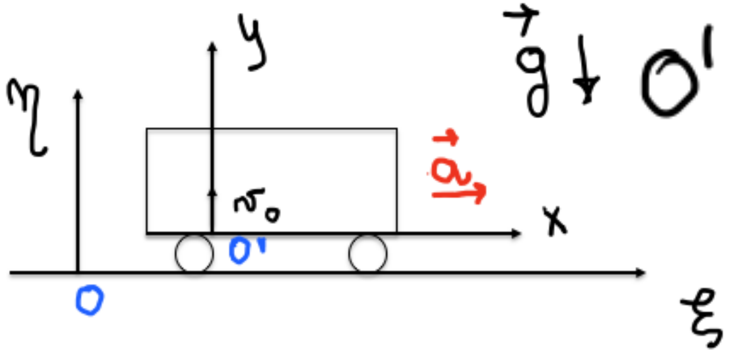
- La relazione fra le posizioni diventa $\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{OO'}(t)}$
- Derivando tale relazione: $\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_t,}$ con $\vec{v}_t = \dfrac{d\vec{r}_{OO'}}{dt}$
- Derivando nuovamente: $\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_t}$ dove $\vec{a}_t = \dfrac{d\vec{v}_t}{dt}$

a_t è detta *accelerazione di trascinamento*. Se $\vec{a} = 0$, $\vec{a}\,' = -\vec{a}_t$.

Su un treno che si muove di moto rettilineo con accelerazione costante a = 0.25 m/ s^2 (rispetto alla terra) un chiodo, che si trova sul pavimento, viene lanciato con velocità v_0 = 6 m/ s diretta verticalmente (rispetto al treno). Calcolare a quale distanza d dal punto di lancio ricadrà il corpo sul pavimento. (14- 7. 77)



Calcolare a quale distanza d dal punto di lancio ricadrà il chiodo sul pavimento del treno



$\vec{g}\downarrow$ O' origine di x, y

nota: v_0 è la velocità di lancio relativa al treno (x, y)

a è l'accelerazione del treno misurata a terra (η, ξ)

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}(OO')$$
$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_t$$
$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_t$$
$$\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_t$$

$\rightarrow$

$$\vec{a}_t = a\hat{\xi}$$
$$\vec{v}\,' = v_0\hat{y}$$
$$\underbrace{\vec{a}\,' = -g\hat{\eta} - a\hat{\xi}}$$
$$a'_x = -a$$
$$a'_y = -g$$
$$v'_y = v_0, \quad v'_x = 0$$

moto unif. acc sia in x che in in y

Quindi in xy

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x} &= -a \\ \ddot{y} &= -g\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned}\dot{x} &= -at + v_0^x \to \emptyset \\ \dot{y} &= -gt + v_0\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}x &= -\frac{1}{2}at^2 \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\end{aligned}$$

dalle quali, poiché quando il corpo arriva a terra, $y=0$

$$0 = t^*\left(v_0 - \frac{gt^*}{2}\right) \begin{cases} t^* = 0 & \text{lancio} \\ t^* = \dfrac{2v_0}{g} & \text{caduta}\end{cases}$$

di conseguenza

$$x(t^*) = -\frac{1}{2}at^{*2} = -18.7\ \text{cm} \to d = 18.7\,\text{cm}$$

Determinare la traiettoria del chiodo come vista dalla terra

nel laboratorio $\eta, \xi)$

il chiodo descrive una parabola!

infatti

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}(OO')$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \xi = x + (\vec{OO'})_\xi = -\frac{1}{2}\cancel{a}t^2 + \xi_{O'}(0) + v_{O'}^{\xi} t + \frac{1}{2}\cancel{a}t^2 \\ \eta = y + (\vec{OO'})_\eta = v_0 t - \frac{g}{2} t^2 + \underbrace{\eta(O')}_{\text{cost!}} \end{cases}$$

$$\xi = \xi_{O'}(0) + v_{O'}^{\xi} t \qquad \text{moto rett. unif}$$

$$\eta = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + \text{cost} \qquad \text{moto unif acc.}$$

di conseguenza anche se non conosciamo

$\xi_{O'}(0)$ $v_{O'}^{\xi}(0)$ e $\eta(O')$

la traiettoria in η, ξ è parabolica!

coincide con la traiettoria di un grave

lanciato con velocità $\vec{v} = v_{O'}^{\xi}(0)\hat{\xi} + v_0\hat{\eta}$

da $\eta_{O'}(0)$ $\xi_{O'}(0)$

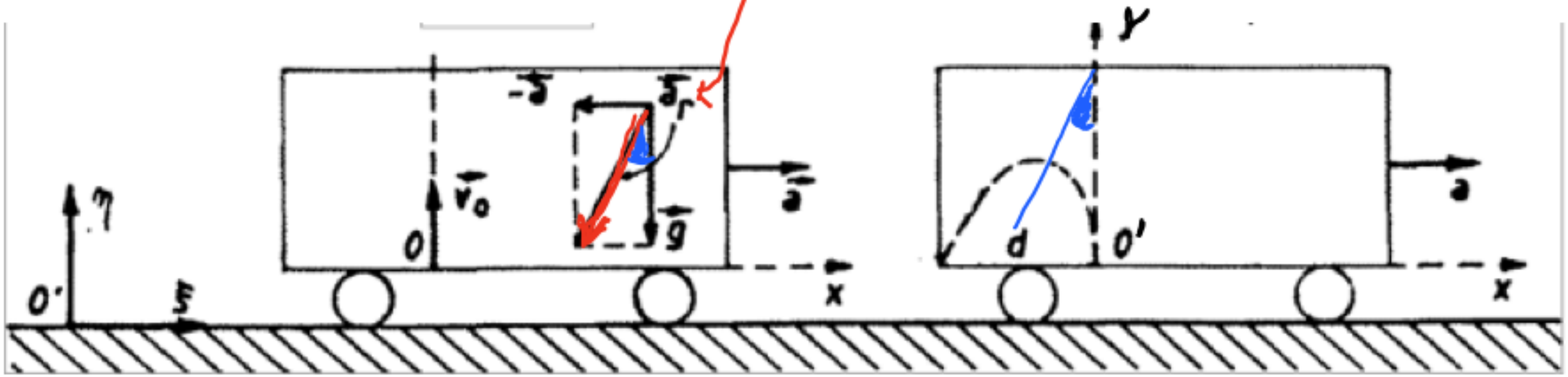
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t$$

nel nostro caso

$$\underset{\text{lab}}{\vec{g}} = \underset{\text{rel al treno}}{\vec{a}'} + \underset{\text{Treno}}{\vec{a}}$$

$$\boxed{\vec{a}' = \vec{g} - \vec{a}}$$

$$\boxed{\vec{a}' = \vec{g} - \vec{a}}$$



Determinare la traiettoria del chiodo come vista sul treno (O’xy)

La traiettoria in O’xy è ancora una parabola ma non è simmetrica rispetto all'asse y. Ciò risulta evidente se si considera che in O’xy (treno in moto accelerato) tutto va come se l'accelerazione di gravità cambi passando da $\vec{g}$ a $\vec{g} - \vec{a}$, di modulo pari a $\sqrt{g^2 + a^2}$ e ruotata di α= arctg(a/g) rispetto a g). La traiettoria parabolica sarà simmetrica rispetto all'asse indicato nella figura sopra a destra

Se il treno fosse in moto con velocità costante, qual'e' la traiettoria vista da un osservatore sul treno?

$$\left.\begin{aligned} \vec r &= \vec r\,' + \vec r(OO') \\ \vec v &= \vec v\,' + \vec v_t \\ \vec a &= \vec a\,' + \vec a_t \\ \vec a\,' &= \vec a - \vec a_t \end{aligned}\right\}$$

$\rightarrow \vec v_t = \text{cost}\,\hat x, \quad \vec a_t = 0$

$\vec v = \vec v\,' + \text{cost}\,\hat x$

$\vec a = \vec a\,' = \vec g$

$$a_x = a'_x = 0$$

$$a_y = a'_y = -g$$

Esaminiamo il moto in $O'x,y$

Chiodo $\vec v\,'(0) = (0, v_0)$ · $\vec r\,'(0) = (0,0)$

da $a'_x = 0$ $\quad v'_x(0) = 0$ $\quad x'(0) = \emptyset$

$a'_y = -g$ $\quad v'_y = v_0 - gt$ $\quad y' = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

Moto rettilineo unif acc in y'

il chiodo sale in verticale

e ricade nel punto di partenza

Se il treno fosse in moto con velocità costante, qual'e' la traiettoria vista da un osservatore a terra?

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}(OO') \\ \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_t \\ \vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_t \\ \vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_t\end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_t = cost\,\hat{x},\ \vec{a}_t = 0$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + cost\,\hat{x}$$

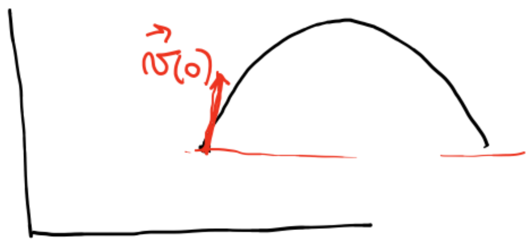
$$\vec{a} = \vec{a}\,' = \vec{g}$$

$$a_x = a'_x = 0$$

$$a_y = a'_y = -g$$

In O ne ξ

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = -g\,\hat{y} \\ \vec{v}(0) = \vec{v}\,'(0) + cost\,\hat{x}\end{array}\right\} \begin{array}{l}a_x = 0 \\ a_y = -g \\ v_x(0) = cost \\ v_y(0) = v_0\end{array}$$



$$|\vec{v}(0)| = \sqrt{cost^2 + v_0^2}$$

Velocita' relativa

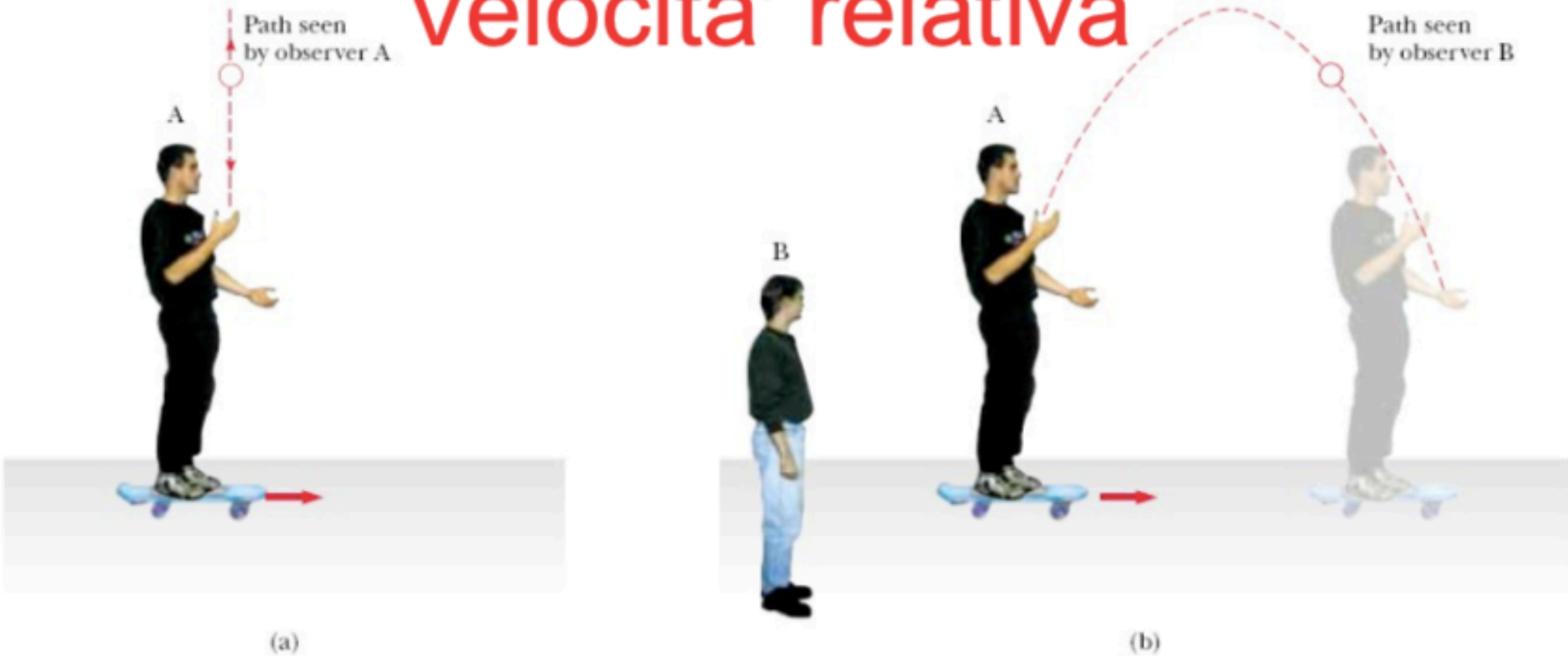


Figure 4.22 (a) Observer A on a moving skateboard throws a ball upward and sees it rise and fall in a straight-line path. (b) Stationary observer B sees a parabolic path for the same ball

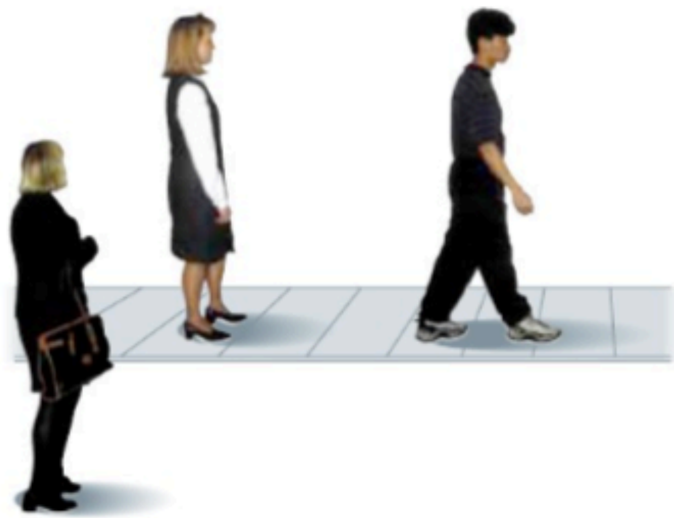


Figure 4.21 Two observers measure the speed of a man walking on a moving beltway. The woman standing on the beltway sees the man moving with a slower speed than the woman observing from the stationary floor.

backup

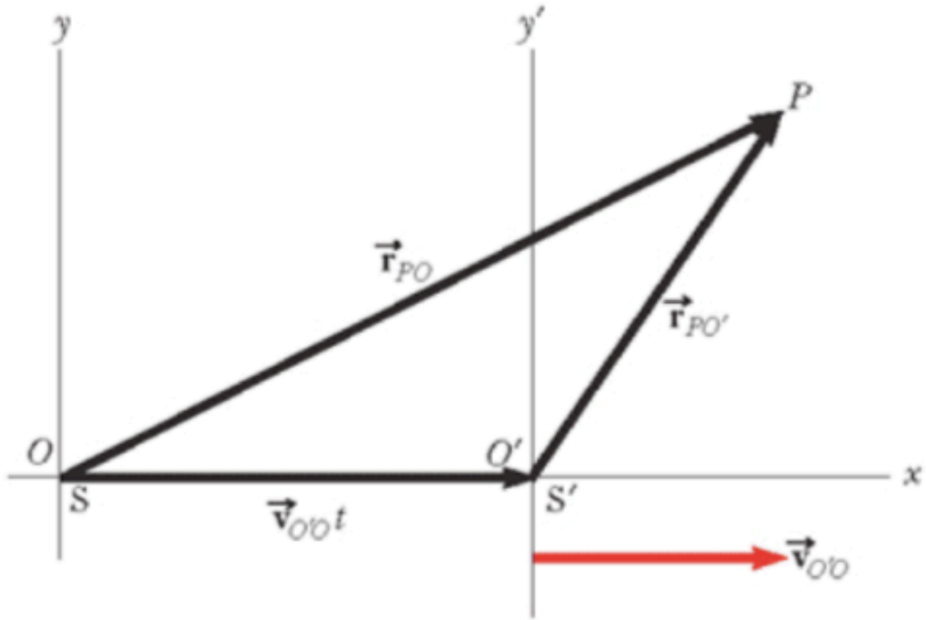
Relatività galileiana

Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma

Velocità relativa 2

- Il sistema di riferimento $\mathcal{S}$ è *stazionario* o *di laboratorio*

- Il sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ è in movimento con velocità (detta *di trascinamento*) $\vec{v}_0$ *costante*



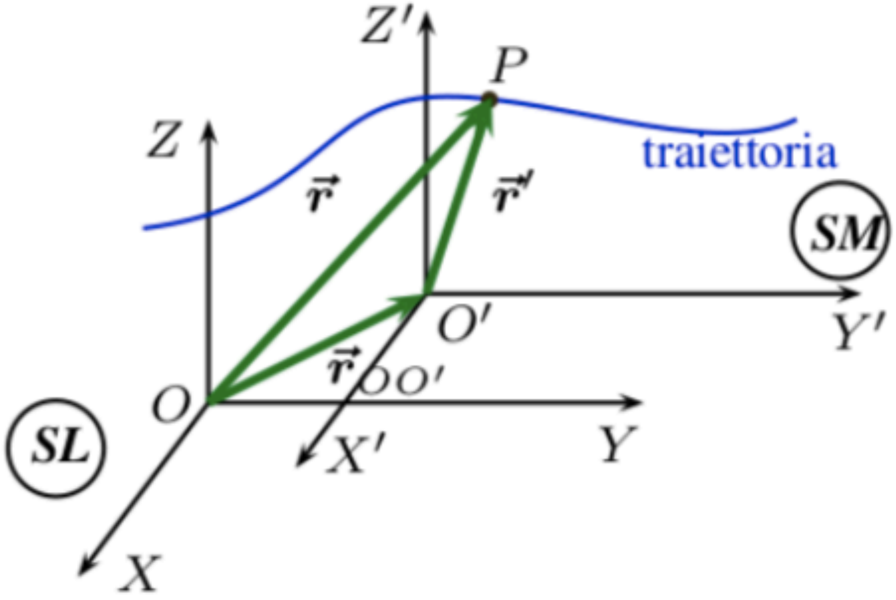
- Al tempo $t = 0$ le origini di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ coincidono. Vale: $\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}_0 t}$

- Derivando tale relazione: $\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0}$ (*trasformazione di Galileo*)

- Derivando nuovamente: $\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,'}$ perché $\vec{v}_0$ è costante

Velocità e accelerazione di trascinamento

Consideriamo ora il caso in cui il sistema di riferimento $\mathcal{SM}$ (*sistema mobile*) è in moto con velocità $\vec{v}_t$ e accelerazione $\vec{a}_t$ (che assumiamo costante) rispetto al sistema di riferimento $\mathcal{SL}$ del laboratorio

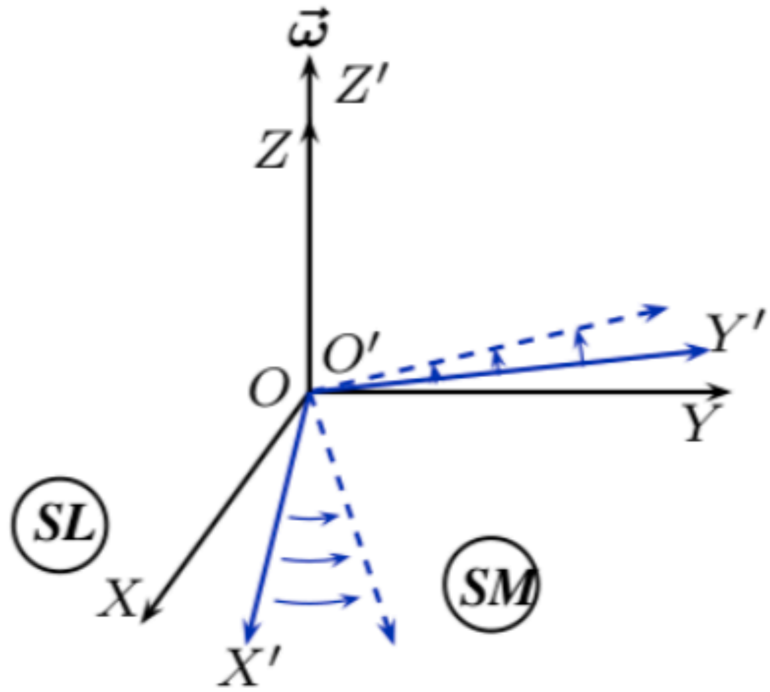


- La relazione fra le posizioni diventa $\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{OO'}(t)}$
- Derivando tale relazione: $\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_t,}$ con $\vec{v}_t = \dfrac{d\vec{r}_{OO'}}{dt}$
- Derivando nuovamente: $\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_t}$ dove $\vec{a}_t = \dfrac{d\vec{v}_t}{dt}$

a_t è detta *accelerazione di trascinamento*. Se $\vec{a} = 0$, $\vec{a}\,' = -\vec{a}_t$.

Sistemi di riferimento rotanti

Consideriamo ora il caso in figura: il sistema mobile $\mathcal{SM}$ (*ruota*) con velocità angolare $\vec{\omega}$ (assunta costante) rispetto al sistema di riferimento $\mathcal{SL}$ del laboratorio



- La rotazione di $\mathcal{SM}$ conferisce ai suoi punti una velocità di trascinamento $\boxed{\vec{v}_t = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$ che dipende dalla posizione

- L'accelerazione di trascinamento $\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}_t}{dt}$ per i punti del $\mathcal{SM}$ diventa

$$\boxed{\vec{a}_t = \vec{\omega} \times \vec{v}_t = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r}_\perp} \quad (*)$$

dove $\vec{r}_\perp$ è la proiezione di $\vec{r}$ sul piano di rotazione
(non è altro che l'accelerazione centripeta del moto rotatorio).

Sistemi di riferimento rotanti (2)

- Relazione fra velocità $\vec{v}$ di un punto materiale nel sistema $\mathcal{SL}$ e $\vec{v}\,'$ nel sistema $\mathcal{SM}$: $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_t$ ovvero $\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}.}$

- La relazione fra accelerazioni richiede un po' di attenzione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r})$$

ma $\vec{v}\,'$ varia nel tempo sia per effetto del moto nel $\mathcal{SM}$ che per effetto della rotazione rispetto al $\mathcal{SL}$. Scrivendo $\vec{v}\,' = \hat{\mathbf{i}}' v'_x + \hat{\mathbf{j}}' v'_y + \hat{\mathbf{k}}' v'_z$ si trova che $\frac{d\vec{v}\,'}{dt} = \vec{a}\,' + \vec{\omega} \times \vec{v}\,'$, con $\vec{a}\,' = \hat{\mathbf{i}}' \frac{dv'_x}{dt} + \hat{\mathbf{j}}' \frac{dv'_y}{dt} + \hat{\mathbf{k}}' \frac{dv'_z}{dt}$, da cui ricordando la (*) si trova infine

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' - \omega^2 \vec{r}_\perp + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'.}$$

Se $\vec{a} = 0$ nel $\mathcal{SL}$, nel $\mathcal{SM}$ $\vec{a}\,' = \omega^2 \vec{r}_\perp - 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$.

Il termine $\omega^2 \vec{r}_\perp$ è detto *accelerazione centrifuga*.
Il termine $-2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$ è noto come *accelerazione di Coriolis*.