ESERCIZI SVOLTI E CONSIGLI, ANALISI 1

INGEGNERIA INFORMATICA

ANNO 2019/2020

OGNI esercizio presente è tratto da un esame di Berselli o da una sua esercitazione in classe.
E' presente una breve spiegazione prima di ogni tipologia d'esercizio, ed a seguire gli esercizi veri e propri.

PER LE PARTI B

Infondo sono presenti alcuni esempi su come svolgere gli esercizi 1,2,3 della parte B dell'esame, ma ho preferito non approfondire questa parte (ma mettere soltanto un possibile indirizzamento passo-passo per lo svolgimento) in quanto reputo molto più propedeutico svolgere direttamente le parti B che il professore mette a disposizione sul proprio sito (in quanto carica anche la spiegazione e lo svolgimento). In quest'ultima parte si tratta infatti di cenni brevi, fugaci, e brevi consigli su come poter svolgere l'esercizio, diversamente dall'approccio maggiormente analitico delle prime 76 pagine.

GABRIELE M.

COSE $\boxed{\text{DA SAPERE}}$ PER PASSARE ANALISI (PREREQUISITI)

- N.A. = nessuna delle altre (ne mette tante)
- N.E. = non esiste
- ln = logaritmo in base 10 (viene usata quasi sempre questa dicitura)
- $a^b = e^{b \ln a} \longrightarrow x^3 = e^{3\ln(x)}$
- $\ln(x) = a \longleftrightarrow x = e^a \longrightarrow \ln(y) = 5 \longleftrightarrow y = e^5$
- $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
- $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Proprietà delle potenze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m / a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$

$a^n b^n = (ab)^n$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

$a^n / b^n = (a/b)^n$

In ogni esame appaiono cose come:

$\frac{3\sqrt{3}}{12} = \frac{3\sqrt{3}}{3\cdot 4} = \frac{3}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Proprietà logaritmi:

$\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$\ln a + \ln b = \ln(ab)$

$\ln(a^b) = b\ln(a)$

Quindi, ad esempio:

$\ln\left(\frac{3}{2}\right) \neq \frac{\ln(3)}{2}$

perché:

$\frac{\ln(3)}{2} = \frac{1}{2}\ln(3) = \ln(\sqrt{3})$

$\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln 3 - \ln(2)$

Fattoriale $\longrightarrow n!$

~~[illegible]~~

$n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$

Quindi: $0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2\cdot 1 = 2$

$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$

$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$

$5! = 5\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$

$\vdots$

Altro:

$a^{-1/2} = \frac{1}{a^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

$n\cdot\ln(n) = \frac{\ln(n)}{1/n}$

$\lim_{n\to+\infty} \arctan(n) = \pi/2$

$\lim_{n\to-\infty} \arctan(n) = -\pi/2$

$\lim_{n\to+\infty} \sin(n) = N.E.$

$\lim_{n\to+\infty} \cos(n) = N.E.$

$\ln(1) = 0$

$\ln(e) = 1$

$\ln(1/e) = -1$

$\ln(e^2) = 2$, $\ln(e^3) = 3 \dots$

$\ln(0) = N.E.$

$\ln(0^+) = -\infty$ (limite)

$\sum_{i=1}^{n} u_i = u_1, u_2 \dots u_n$

tipo $\sum_{n=1}^{5} n^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 =$
$= 1+4+9+16+25 = 55$

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

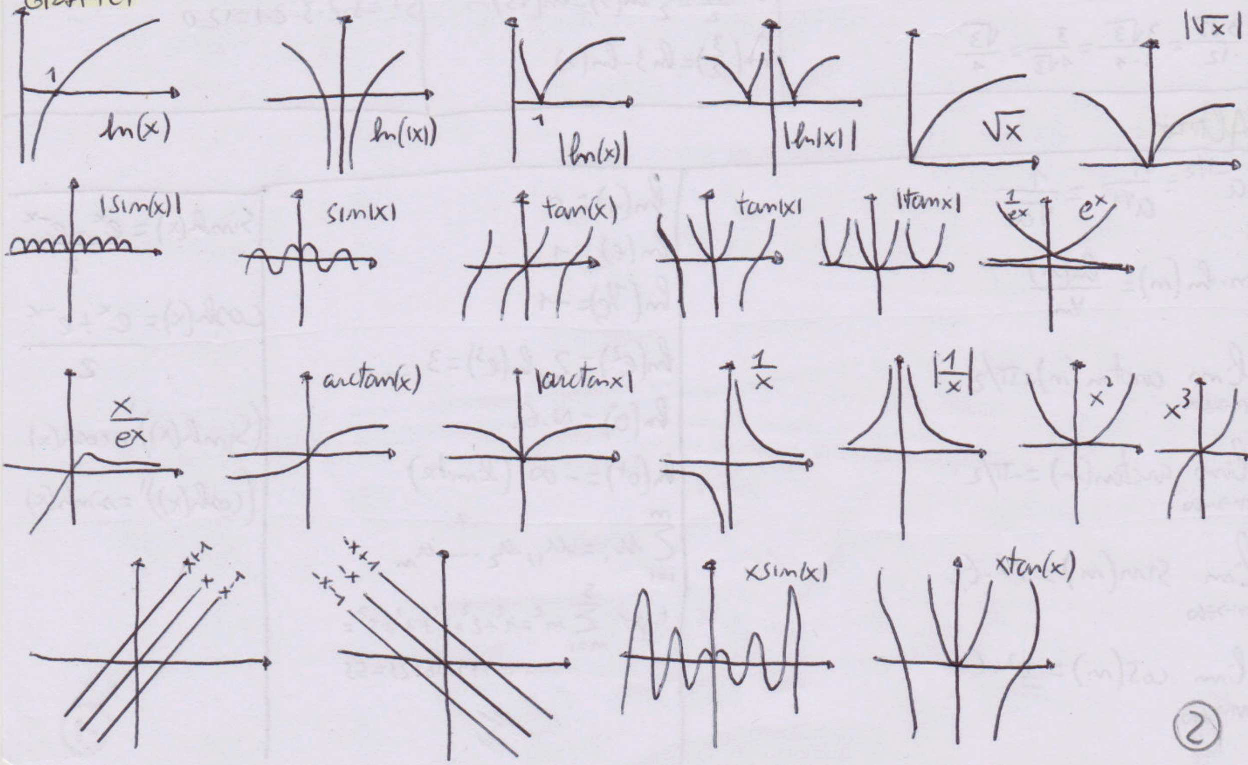
$(\sinh(x))' = \cosh(x)$

$(\cosh(x))' = \sinh(x)$

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0	1	0	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	1	N.E.
$\frac{2}{3}\pi$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}$
$3/4\,\pi$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
$5/6\,\pi$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}/3$
π	-1	0	0
$7/6\,\pi$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}/3$
$5/4\,\pi$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1
$4/3\,\pi$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$3/2\,\pi$	0	-1	N.E.
$5/3\,\pi$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}$
$7/4\,\pi$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
$11/6\,\pi$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/3$
2π	1	0	0

DA SAPERE COME UNA PREGHIERA

GRAFICI



Derivate

f = funzione , f' = derivata di f , f'' = derivata seconda di f ... ecc...

Quelle immediate sono:

f	f'
COSTANTE	0
$ax+b$	a
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$1/x$	$-1/x^2$
a^x	$a^x \ln(a)$
e^x	e^x
$tg(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
arctan	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(x)$	$f'(x)/f(x)$
$\sqrt{x}$	$1/2\sqrt{x}$
arcsin	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

IMPORTANTE:

• $f(x)=\sin(x)$ $f'=\cos(x)$ $f''=-\sin(x)$ $f'''=-\cos(x)$ $f^{IV}=\sin(x)$ e così via	$(\sin^3(x))'=3\sin^2(x)\cos(x)$ così come: $(\sin^4(x))'=4\sin^3(x)\cos(x)$	$(\ln^3(x))'=3\ln^2(x)\cdot\frac{1}{x}$	• Se f è derivabile è anche continua, ma NON viceversa

Regole di derivazione:

$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$ ⟶ esempio $(3x\cdot\sin(x))'=3\sin(x)+3x\cos(x)$

$(f/g)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ ⟶ esempio $\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'=\dfrac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$

$f(x)^{g(x)}=e^{\ln(f)\cdot g}\left[g'(x)\ln(f)+g\frac{f'}{f}\right]$ ⟶ esempio $\left(\sin(x)^{\ln(x)}\right)'=e^{\ln(x)\ln(\sin(x))}\left[\frac{\ln(\sin x)}{x}+\ln x\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right.$

$|f(x)|'=\begin{cases}f'(x) & \text{per } f(x)>0\\ -f'(x) & \text{per } f(x)<0\end{cases}$. Per vedere in $x=0$ faccio $\lim\limits_{x\to0^\pm}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ e deve tornare lo stesso risultato in 0^- e 0^+

ESERCIZI

① Data $f(x)=x^{e^x}$ calcola $f'(1)$.

Faccio la derivata: caso $f^g \to e^{e^x \ln(x)}\left[e^x \ln(x)+e^x\cdot\frac{1}{x}\right]$. Ora sostituisco $x=1$

$= e^{e^1 \ln(1)}\left[e^1\ln(1)+e^1\cdot\frac{1}{1}\right]$. Siccome $\ln(1)=0 \to e^0[0+e]=\boxed{e}$

② Data $f(x)=3(\ln(3x))$ calcola $f'(e)$

Faccio la derivata: caso $f\cdot g \to (3)'\cdot\ln(3x)+3\cdot(\ln(3x))'=0+3\cdot\frac{1}{3x}\cdot 3=\frac{3}{x}$. Questo perché 3 è una costante, derivato fa 0. Sostituisco $x=e \to \boxed{\frac{3}{e}}$

③ Data $f(x)=5^{x/5}$ calcola $f'(5)$

È una derivata immediata: caso a^x dove a è una costante. $\to 5^{x/5}\cdot\ln(5)\cdot\frac{1}{5}$, dove $1/5$ è la derivata dell'esponente $\frac{x}{5}$. Sostituisco $x=5 \to 5^{5/5}\ln(5)\cdot\frac{1}{5}=\boxed{\ln(5)}$

④ Data $f(x)=\sin(\pi x)$ calcola $f'(\frac{2}{3})$

È immediata $\to \cos(\pi x)\cdot\pi$ dove π è la derivata dell'argomento del seno (πx)

in $x=\frac{2}{3}$ ho $\pi\cos(\frac{2}{3}\pi)=\pi\cdot(-\frac{1}{2})=\boxed{-\frac{\pi}{2}}$

⑤ Data $f=\ln(\pi x)-\ln(x)$ calcola $f'(\pi)$

È la differenza di due derivate immediate. La prima: $(\ln(\pi x))'=\frac{1}{\pi x}\cdot\pi$ dove il secondo π è la derivata di πx. Il secondo: $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$.

Le metto insieme $\to \frac{1}{\pi x}\cdot\pi-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=\boxed{0}$

⑥ Data $f(x)=\cos(x^2)$ calcola $f^{IV}(0)$

$f=\cos(x^2)$, $f'=\underbrace{-\sin(x^2)}_{\text{DERIVATA }\cos(x^2)}\cdot\underbrace{2x}_{\text{DERIVATA }x^2}$, $f''=\underbrace{-2\sin(x^2)-4x^2\cos(x^2)}_{\text{caso } f\cdot g}$

$f'''=-2\cos(x^2)\cdot 2x+4x^2\sin(x^2)\cdot 2x-8x\cos(x^2)=-4x\cos(x^2)+8x^3\sin(x^2)-8x\cos(x^2)$

$f^{IV}=8x^2\sin(x^2)-4\cos(x^2)+24x^2\sin(x^2)+8x^3\cos(x^2)2x-8\cos(x^2)+8x\sin(x^2)2x$

Sostituisco $x=0 \to \cancel{8\cdot 0\cdot\sin(0)}-4\cos(0)+\cancel{24\cdot 0\cdot\sin(0)}+\cancel{8\cdot 0\cdot\cos(0)}-8\cos(0)+\cancel{8\cdot 0\cdot\sin(0)\cdot 2\cdot 0}=-4-8=\boxed{-12}$

⑦ Data $f(x)=[\ln(x)]^{\ln(x)}$ calcola $f'(e)$

Caso $f^g \to e^{\ln(x)\ln(\ln(x))}\left[\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln(x))+\ln(x)\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln(x)}\right]$ Sostituisco $x=e$, ricordando $\ln(e)=1$, e ad esempio $\ln(\ln(e))=\ln(1)=0$. $\to e^0\left[\frac{1}{e}\cdot 0+1\cdot\frac{1}{e}\cdot 1\right]=\boxed{\frac{1}{e}}$

⑧ Data $(e^x)^x$ calcola $f'(1)$

~~$(e^x)^x=e^{x^2}$, caso $f^g \to e^{x^2}\left[2x\cdot\ln(e)+x^2\cdot\frac{e}{e}\right]$ con $x=1$ ho $e[2+1]=$~~

Caso $f^g \to (e^x)^x\left[1\cdot\ln(e^x)+x\frac{e^x}{e^x}\right]$. Sostituisco $x=1 \to e[1+1]=\boxed{2e}$

9) Data $f(x)=\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ calcola $f'\left(\frac{1}{2}\right)$

È immediata $\rightarrow \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\cdot\frac{\pi}{2}$, dove $\frac{\pi}{2}$ è la derivata dell'argomento della tangente $\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Sostituisco $x=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\frac{2}{4}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}} = \boxed{\pi}$

10) Data $f(x)=\log(\log(3x))$ calcola $f'(e)$

Basta usare la formula di $(\log(x))'$ per due volte. Prima per $\log(\log(3x))$ poi per $\log(3x)$. Ottengo: $\frac{1}{\log(x)}\cdot\frac{1}{3x}\cdot 3$, con $x=e$ ho $\boxed{\frac{1}{\log(3e)e}}$

11) Data $f(x)=\ln(x)^{2^x}$ calcola $f'(e)$

Caso $f^g \rightarrow e^{2^x\ln(\ln(x))}\left[2^x\ln(2)\cdot\ln(\ln(x))+2^x\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}\right]$, ho $x=e$, sostituisco

$e^{2^e\ln(1)}\left[2^e\ln(2)\cdot\ln(1)+2^e\cdot\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{1}\right]=1\left[0+\frac{2^e}{e}\right]=\boxed{\frac{2^e}{e}}$

12) Data $f(x)=\sin(\tan(x))$ calcola $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

È immediata $\rightarrow \cos(\tan(x))\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$, visto che $(\tan(x))'=\frac{1}{\cos^2(x)}$. Sostituisco $x=\frac{\pi}{4}$

$=\cos\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\cos(1)\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\cos(1)}{\frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{4}\,2}}=\boxed{2\cos(1)}$

13) Data $f(x)=\ln(\sqrt{x+1})$ calcola $f'\left(\frac{3}{2}\right)$

La derivata di $\ln(x)$ è $\frac{1}{x}$, la derivata di $\sqrt{x}$ è $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, la derivata di x è 1.

Allora: $(\ln(\sqrt{x+1}))'=\frac{1}{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot 1=\frac{1}{2x+2}$. Con $x=\frac{3}{2}$ ho $\frac{1}{\cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}+2}=\boxed{\frac{1}{5}}$

14) Data $\log(\sin^3(x))$ calcola $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Faccio $(\log(x))'=\frac{1}{x}$ allora $(\log(\sin^3(x)))'=\frac{1}{\sin^3(x)}\cdot 3\sin^2(x)\cos(x)$, dove la seconda parte è la derivata di $\sin^3(x)$. Con $x=\frac{\pi}{4}$ ho $\frac{3\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{3\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}}=\boxed{3}$

15) Data $f(x)=\sqrt{e^{\cos(x)}}$ calcola $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

So che $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Allora $\left(\sqrt{e^{\cos(x)}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{e^{\cos(x)}}}\cdot\underbrace{e^{\cos(x)}\left[-\sin(x)\cdot\ln(e)+\cos(x)\cdot\frac{e}{e}\right]}_{\text{derivata di } e^{\cos(x)}}$

$=\frac{-\sin(x)+\cos(x)}{2}$ Con $x=+\frac{\pi}{2}$ ho $\frac{-1+0}{2}=\boxed{-\frac{1}{2}}$

16) Dato $\alpha>0$ ed $f_\alpha(x)=3(\log(\alpha x))$, allora $f'_\alpha(e)$.

Caso $f\cdot g \rightarrow (3)'\log(\alpha x)+3\cdot(\log(\alpha x))'=0+3\cdot\frac{1}{\alpha x}\cdot\alpha=\frac{3}{x}$

Sostituisco $x=e \longrightarrow \boxed{\frac{3}{e}}$

(17) Data $f(x)=(\sin(x^3))^{x^2}$ calcola $f'\left(\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right)$

Caso $f^g \to e^{x^2\ln(\sin(x^3))}\left[2x\cdot\ln(\sin(x^3))+x^2\cdot\frac{\cos(x^3)\cdot 3x^2}{\sin(x^3)}\right]$.

Sostituisco $x=\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \to e^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}\ln(1)}\left[2\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\cdot\ln(1)+\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}\frac{\cos(\pi/2)}{\sin(\pi/2)}\right]=e^0\cdot[0+0]=\boxed{0}$

---

(18) Data $x^2 3^{\sin(x)}$ calcola $f'(0)$

Caso $f\cdot g \to 2x\cdot 3^{\sin(x)}+x^2\cdot 3^{\sin(x)}\cdot\ln(3)\cdot\cos(x)$

Sostituisco $x=0 \to 2\cdot 0\cdot 3^0+0\cdot 3^0\cdot\ln(3)\cdot 1=\boxed{0}$

---

(19) Data $f(x)=(\ln(2x^3))^2$ calcola $f'(1)$

Riscrivo $(\ln(2x^3))^2=\ln^2(2x^3)=\ln(2x^3)\cdot\ln(2x^3)$.

Caso $f\cdot g \to \frac{1}{2x^3}\cdot 6x^2\cdot\ln(2x^3)+\frac{1}{2x^3}\cdot 6x^2\cdot\ln(2x^3)$

Sostituisco $x=1 \to \frac{1}{2}\cdot 6\cdot\ln(2)+\frac{1}{2}\cdot 6+\ln(2)=3\ln(2)+3\ln(2)=6\ln(2)=\ln(2^6)=\boxed{\ln 64}$

---

(20) Data $f(x)=x^{\tan(x)}$ calcola $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Caso $f^g \to x^{\tan(x)}\left[\frac{1}{\cos^2(x)}\cdot\ln(x)+\tan(x)\cdot\frac{1}{x}\right]$

Sostituisco $x=\frac{\pi}{4} \to \left(\frac{\pi}{4}\right)^1\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\ln\left(\frac{\pi}{4}\right)+1\cdot\frac{1}{\pi/4}\right]=\boxed{\frac{1}{4}\pi\left[2\ln\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{4}{\pi}\right]}$

PER CONCLUDERE:

Ricordati di derivare "a strati". Esempio:

$2x\cdot\sin(\pi x^x)+\cos(5x)$ derivato:

(1) Se c'è una somma, fai un addendo alla volta: prima $(2x\cdot\sin(\pi x^x))'$ poi $(\cos(5x))'$

(2) $(2x\cdot\sin(\pi x^x))'$ è un caso $f\cdot g$. Faccio $(2x)'\sin(\pi x^x)+2x\cdot(\sin(\pi x^x))'$.
A sua volta $\sin(\pi x^x)$ contiene x^x che è un caso f^g.
Bisogna quindi procedere per strati.

Svolgimento:

$$2\sin(\pi x^x)+2x\cos(\pi x^x)\cdot\pi x^x\left[1\cdot\ln(\pi x^x)+x\cdot\frac{\pi}{\pi x}\right]+(-\sin(5x))\cdot 5$$

Se volessi calcolarlo per $x=1$:

$$=2\sin(\pi)+2\cos(\pi)\cdot\pi[1\cdot\ln(\pi)+1]-\sin(5)\cdot 5=$$

$$=-2\pi\ln(\pi)-2\pi-5\sin(5)$$

SVILUPPI DI TAYLOR

Se esiste, permette di esprimere una funzione nell'intorno del punto scelto come un polinomio con infiniti termini. Ovvero, se ho qualcosa di difficile da trattare lo trasformo nel suo sviluppo. Ometto: discorsi sui resti, o piccoli, ecc...

In generale $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} \dots$

Per gli esami basta sapere l'inizio dei seguenti sviluppi:

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{6} \dots$

$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} \dots$

$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} \dots$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots$

$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} \dots$

$\sqrt[2]{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ così come $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} \dots$

$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} \dots$

Come continuano o il perché degli O grandi e piccoli è ininfluente per passare l'esame nel 99% dei casi (tranne per una possibile domanda 4 della parte b)

RETTA TANGENTE

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{UNICO PARAMETRO}}}{}$$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

UNICO PARAMETRO

ESEMPIO $\longrightarrow$ retta con $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$ $\longrightarrow$ $\sin(x_0) + \cos(x_0)(x - x_0) = 0 + 1(x - 0) = x$

① Retta tangente a $\sin(2x)$ in $x_0 = \pi/4$

$$\sin(2x_0) + \cos(2x_0)\cdot 2(x - x_0) = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 0\cdot 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{1}$$

② Polinomio di Taylor di grado 1 della funzione $\sin(x^2)$ in $x_0 = \sqrt{\pi}$

$$\sin(x_0^2) + 2x_0\cos(x_0^2)(x - x_0) = \sin(\sqrt{\pi}^2) + 2\sqrt{\pi}\cos(\sqrt{\pi}^2)(x - \sqrt{\pi}) = 0 + 2\sqrt{\pi}(-1)(x - \sqrt{\pi}) = \boxed{-2\sqrt{\pi}x + 2\pi}$$

③ Polinomio di Taylor di grado 1 della funzione e^{x^2} in $x_0 = e$

$$e^{x_0^2} + 2x_0\cdot e^{x_0^2}(x - x_0) = e^{e^2} + 2e\cdot e^{e^2}(x - e) = \boxed{e^{e^2} + 2e^{1+e^2}(x - e)}$$

Ricordando che $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

④ Retta tangente a $\cos(3x)$ in $\pi/6$

$$\cos(3x) + (-\sin(3x))\cdot 3(x - x_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)3(x - \pi/6) = \boxed{-3(x - \pi/6)}$$

⑤ Retta tangente a $\sqrt{k + x^2}$ in $x_0 = 0$

$$\sqrt{k + x^2} + \frac{1}{2}(k + x^2)^{-1/2}\cdot 2x(x - x_0) = \sqrt{k} + \frac{1}{2\sqrt{k}}\cdot 2\cdot 0(x - 0) = \boxed{\sqrt{k}}$$

⑥ Polinomio di Taylor di grado 2 della funzione $\log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$ in $x_0 = 0$

$$\log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\cdot\frac{\pi}{2}(x - x_0) = \log(\cos(0)) + \frac{1}{\cos(0)}(-\sin(0))\cdot\frac{\pi}{2}(x - 0) = \log(1) = 0$$

... ERRATO! Il testo dice di grado 2, ovvero fino alla derivata seconda

$$\log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\cdot\frac{\pi}{2}(x - x_0) + \left(\frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2(\pi/2\,x)}\right)\cdot\frac{\pi}{2}\frac{(x - x_0)^2}{2}$$

$$= 0 + 0 + \left(\frac{-1\cdot 1 + 0\cdot 0}{1^2}\right)\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}^2\frac{(x - 0)^2}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}^2\cdot\frac{x^2}{2} = \boxed{-\frac{(\pi x)^2}{8}}$$

⑦ Retta tangente a $\sin^2(3x)$ in $x_0 = \pi/12$

$$\sin^2(3x) + \cos^2(3x)\cdot 3(x - x_0) = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot 3\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 3\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$$

.... ERRATO! Bisogna immaginare $\sin^2(x) = \sin(x)\sin(x)$, ovvero derivata di rapporto

$$\sin^2(3x) + [\cos(3x)\cdot 3\sin(3x) + \sin(3x)\cos(3x)\cdot 3](x - x_0) = \frac{1}{2} + \left[\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right]\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{1}{2} + 3x - \frac{\pi}{4}}$$

⑧ Polinomio di Taylor di grado 2 di $\log(x^2)$ in $x_0 = 1$

$$\log(x^2) + \frac{1}{x^2}\cdot 2x(x - x_0) + \left(-\frac{2}{x^2}\right)\frac{(x - x_0)^2}{2} = 0 + \frac{1}{1}\cdot 2(x - 1) + \left(-\frac{2}{1}\right)\frac{(x - 1)^2}{2} = \boxed{2(x - 1) - (x - 1)^2}$$

⑨ Polinomio di Taylor di grado 5 di $\sin(x^2)$ in $x_0 = 0$

Osservo $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ ... Derivo fino a 5 $\sin(x^2)$ e sostituisco $x = 0$

$f' = \cos(x^2)2x = 0$

$f'' = -\sin(x^2)2x + \cos(x^2)2 = 2 \longrightarrow 2\frac{(x - x_0)^2}{2} = \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} = \boxed{x^2}$

$f''' = -4x\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2) - 2\sin(x^2) = 0$

$f^{IV} = -4\sin(x^2) - 8x^2\cos(x^2) - 8x\cos(x^2) + 8x^3\sin(x^2) - 4x\cos(x^2) = 0$

$f^{V} = -4\cos(x^2)2x - 16x\cos(x^2) + 8x^2\sin(x^2)2x - 8\cos(x^2) + 8x\sin(x^2)2x + 24x^2\sin(x^2) + 8x^3\cos(x^2)2x - 4\cos(x^2) + 4x\sin(x^2)2x = \cancel{0}$

(10) Retta tangente a $\sin(\ln(x))$ in $x_0=1$

$$\sin(\ln(1)) + \cos(\ln(x))\cdot\frac{1}{x}(x-1) = 0+1(x-1) = \boxed{x-1}$$

(11) Retta tangente a $\tan(2x)$ in $x_0=\pi/12$

$$\tan(2x) + \frac{1}{\cos^2(2x)}\cdot 2(x-x_0) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot 2\left(x-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4\cdot 2}{3}\left(x-\frac{\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{12}\right)}$$

Ricordando $\frac{a^x}{a^y} = \frac{1}{a^{y-x}}$, in questo caso $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3^{1/2}}{3^1} = \frac{1}{3^{1-1/2}} = \frac{1}{3^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(12) Polinomio di taylor di grado 2 della funzione $\ln(1+x)$ in $x_0=1$

$$\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}(x-x_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2}\frac{(x-x_0)^2}{2} = \boxed{\ln(2) + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8}}$$

(13) Retta tangente a $\sin(\pi\ln(ex))$ in $x_0=1$

$$\sin(\pi\ln(ex)) + \cos(\pi\ln(ex))\cdot\frac{\pi}{ex}\cdot e(x-x_0) = \sin(\pi\ln(e)) + \cos(\pi\ln(e))\pi(x-1)$$

$$= \sin(\pi) + \cos(\pi)\pi(x-1) = \boxed{-\pi(x-1)}$$

(14) Retta tangente a $x\ln(x)$ in $x_0=1/e$

$$x\ln(x) + \left[\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x}\right](x-x_0) = \frac{1}{e}(-1) + [-1+1]\left(x-\frac{1}{e}\right) = \boxed{-\frac{1}{e}}$$

(15) Retta tangente a $\sin^2(4x)$ in $x_0=\pi/16$

$$\sin^2(4x) + [\sin(4x)\cos(4x)\cdot 4 + \sin(4x)\cos(4x)4](x-x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4\right]2\left(x-\frac{\pi}{16}\right) =$$

$$\frac{1}{2} + 4\left(x-\frac{\pi}{16}\right) = \boxed{\frac{1}{2} + 4x - \frac{\pi}{4}} \longrightarrow \text{Nel testo è } 4x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

(16) Retta tangente a $\sin(\sin(x))$ in $x_0=0$

$$\sin(\sin(x)) + \cos(\sin(x))\cdot\cos(x)(x-x_0) = 0+1\cdot 1(x-0) = x$$

(17) Polinomio di taylor di grado 1 in $x_0=0$ di $\ln(1+\sin(x))$

$$\ln(1+\sin(x)) + \frac{1}{1+\sin(x)}\cdot\cos(x)(x-x_0) = 0+1\cdot 1(x) = x$$

(18) Polinomio di taylor di grado 2 in $x_0=0$ di e^{x^4}

$$e^{x^4} + e^{x^4}\cdot 4x^3(x-x_0) + \left[e^{x^4}\cdot 4x^3\cdot 4x^3 + e^{x^4}\cdot 12x^2\right]\frac{(x-x_0)^2}{2} = 1+0+0 = \boxed{1}$$

(19) Retta tangente a $e^{\sin(x)}$ in $x_0=\frac{3}{2}\pi$

$$e^{\sin(x)} + e^{\sin(x)}\cos(x)(x-x_0) = e^{-1} + e^{-1}\cdot 0\left(x-\frac{3}{2}\pi\right) = e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}$$

(20) Retta tangente a $\ln(x-x^3)$ in $x_0=\frac{1}{3}$

$$\ln(x-x^3)+\frac{1}{x-x^3}\cdot 1-3x^2(x-x_0)=\ln\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right)+\frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{27}}\left(1-3\cdot\frac{1}{9}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{9-1}{27}\right)+\frac{1}{\frac{8}{27}}\cdot\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)=\ln\left(\frac{8}{27}\right)+\frac{\cancel{27}\,9}{\cancel{8}\,4}\cdot\frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{3}\,1}\left(x-\frac{1}{3}\right)=\boxed{\ln\left(\frac{8}{27}\right)+\frac{9}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)}$$

(21) Retta tangente a $\sqrt{2x}$ in $x_0=1$

$$\sqrt{2x}+\frac{1}{2\sqrt{2x}}\cdot 2(x-x_0)=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)\longrightarrow\boxed{\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}}$$

(22) Retta tangente a $\sin(\arctan(2x))$ in $x_0=0$

$$\sin(\arctan(2x))+\cos(\arctan(2x))\cdot\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2(x-x_0)=0+1\cdot\frac{1}{1+0}\cdot 2(x)=2x$$

(23) Retta tangente a $x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ in $x_0=0$, con $y(0)=0$ se $x=0$, $y(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ se $x\neq 0$

Allora la soluzione sarà proprio 0, perché è semplicemente $y(x_0)$ con $x_0=0$, da definizione $y(0)=\boxed{0}$

(24) Retta tangente a $\sqrt[3]{k+x^2}$ in $x_0=0$

$$\sqrt[3]{k+x^2}+\frac{1}{3}(k+x^2)^{-2/3}(x-x_0)=\sqrt[3]{k}+\frac{1}{3}(k+\cancel{0})^{-2/3}(x-0)=\sqrt[3]{k}+\frac{\sqrt[3]{k^{-2}}}{3}x$$

... ERRATO! $\left(\sqrt[3]{k+x^2}\right)'=\frac{1}{3}(k+x^2)^{\frac{1}{3}-1}\cdot 2x=\frac{1}{3}(k+x^2)^{-2/3}\cdot 2x$

Dunque $\longrightarrow \sqrt[3]{k+x^2}+\frac{1}{3}(k+x^2)^{-2/3}\cdot 2x(x-x_0)=\sqrt[3]{k}$

(25) Lo sviluppo di Taylor di $\sin(x+x^3)$ di terz'ordine è (in $x_0=0$)

$$\sin(x+x^3)+\cos(x+x^3)(1+3x^2)(x-x_0)+\left[(-\sin(x+x^3))(1+3x^2)^2+(\cos(x+x^3)\,6x\right]\frac{(x-x_0)^2}{2}+$$

$$+\left[(-\cos(x+x^3)(1+3x^2)^3)+(-\sin(x+x^3))\,12x(1+3x^2)-\sin(x+x^3)(1+3x^2)6x+\cos(x+x^3)\,6\right]\frac{(x-x_0)^3}{3!}=$$

$$=0+x+0+[-1+0+6]\frac{(x)^3}{3!}=x+5\frac{x^3}{6}\longrightarrow\boxed{x+\frac{5}{6}x^3+o(x^3)}$$

Quell'"$o(x^3)$" è come se "mangiasse" tutte le potenze superiori

FUNZIONE CONTINUA/DERIVABILE

Passo ①:

Si ha davanti na funzione definita a tratti. Si osserva cosa succede nel "confine"

Passo ②:

Se i due tratti danno lo stesso risultato, si deriva e sostituisce di nuovo.

N.B. Se non è continua NON è derivabile

---

① $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi e^x}{2}\right) & \text{per } x \leq 0 \\ x & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

Sostituisco $x=0$ ⟶ $\sin\left(\frac{\pi e^x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi e^0}{2}\right) = \sin(\pi/2) = 1$

⟶ $x = 0$

Siccome $1 \neq 0$, non è continua; siccome non è continua NON è derivabile

---

② $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x<0 \\ \cos(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

Sostituisco $x=0$ ⟶ $1 = 1$

⟶ $\cos(x) = \cos(0) = 1$

Siccome è continua (perché $1=1$), verifico la derivabilità:

$(1)' = 0$ che in $x=0$ fa 0

$(\cos(x))' = -\sin(x)$ che in $x=0$ fa 0. Essendo $0=0$ è anche derivabile

---

③ $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & , x \geq 0 \\ \cos(\pi/2 + x) & , x<0 \end{cases}$

Sostituisco $x=0$ ⟶ $\sin(x) = \sin(0) = 0$

⟶ $\cos(\pi/2 + x) = \cos(\pi/2) = 0$

Essendo $0=0$ è continua, verifico se è derivabile:

$(\sin(x))' = \cos(x)$ con $x=0$ fa 1

$(\cos(\pi/2+x))' = -\sin(\pi/2+x)$ con $x=0$ fa -1. Essendo $1 \neq -1$ non è derivabile

---

④ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1 & \text{per } 0 < x < 1 \\ \ln(x) & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$ definita su $(0, +\infty)$

Con $x = 1$ $\to \frac{1}{1} - 1 = 0$, $\to \ln(1) = 0$. Essendo $0 = 0$ è continua

Derivo: $\left(\frac{1}{x} - 1\right)' = -\frac{1}{x^2} - 0$ con $x = 1$ fa -1

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ con $x = 1$ fa 1. Non è derivabile

---

⑤ Per quali b, c $f(x) = \begin{cases} |x| & x \leq 1 \\ x^2 + bx + c & x > 1 \end{cases}$ è derivabile in $\mathbb{R}$

Osservo che $|x|$ non è derivabile, perché $|x| \begin{cases} x \\ -x \end{cases}$ se x è maggiore o minore di 0. Dunque derivato è -1 o 1, essendo diversi $|x|$ NON è derivabile e dunque nemmeno la nostra $f(x)$.

---

⑥ $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \geq 1 \\ ax + 3 - a, & x < 1 \end{cases}$ è derivabile in $[0, 2]$ per $a = ?$

Con $x = 1$ $\to 3^x = 3$, $\to ax + 3 - a = a + 3 - a = 3$ allora è continua

Derivo: $(3^x)' = 3^x \ln(3)$ con $x = 1 \to 3\ln(3)$

$(ax + 3 - a)' = a$. Per essere derivabile serve $a = 3\ln(3)$

---

⑦ $f(x) = \begin{cases} \sin(ax) & x < 0 \\ x^2 + x & x \geq 0 \end{cases}$ è derivabile per:

Con $x = 0$ $\to \sin(ax) = \sin(0) = 0$, $\to x^2 + x = 0 + 0 = 0$. È continua

Derivo: $(\sin(ax))' = \cos(ax)a$ in $x = 0$ $\cos(0)a = a$

$(x^2 + x)' = 2x + 1$ in $x = 0$ $2 \cdot 0 + 1 = 1$. Serve $a = 1$

---

⑧ $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x < 0 \\ \sin(bx) & x \geq 0 \end{cases}$ è continua e derivabile per:

con $x = 0$ $\to x^2 + ax = 0 + 0 = 0$, $\to \sin(bx) = \sin(0) = 0$. È continua $\forall a, b \in \mathbb{R}$

Derivo: $(x^2 + ax)' = 2x + a$ con $x = 0$ $2x + a = a$. Serve $a = b$

$(\sin(bx))' = \cos(bx)b$ con $x = 0$ $\cos(bx)b = b$

9) $f(x)=\begin{cases} e^x & x<1 \\ ax+b & x\geq 1 \end{cases}$ é derivabile per:

Faccio $x=1$ $\longrightarrow e^x = e$

$\longrightarrow ax+b = a+b$

Derivo $\longrightarrow (e^x)' = e^x$ con $x=1$ fa e

$\longrightarrow (ax+b)' = a$ con $x=1$ fa a

Con $(a,b)=(e,0)$ è continua e derivabile. Con $(a,b)=(0,e)$ NO, perché $0 \neq e$

---

10) $f(x)=|x^2-b^2|$ é derivabile in ogni punto per:

Se $b=0$ ho $|x^2|$ che risulta derivabile sempre (bisogna andare a tentativi con le opzioni).

---

11) $f(x)=\begin{cases} [x] & \text{per } x<1/2 \\ \frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+a & \text{per } x\geq 1/2 \end{cases}$ é derivabile per:

La parte intera di x in $\frac{1}{2}=0.5$ é 0. Dunque per essere continua serve $\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+a=0$.

Sostituisco $x=\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{8}-\frac{1}{4}+a=-\frac{1}{8}+a=0$. É verificata per $\boxed{a=\frac{1}{8}}$

Derivo $\longrightarrow [x]$ in $\frac{1}{2}$ fa 0

$\longrightarrow \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+a\right)' = x-\frac{1}{2}$ con $x=\frac{1}{2}$ fa 0

---

12) $f(x)=\begin{cases} \frac{x\pi}{3.14} & x<0 \\ \sin(x) & x\geq 0 \end{cases}$

Con $x=0$ $\longrightarrow \frac{x\pi}{3.14}=0$

$\longrightarrow \sin(x)=\sin(0)=0$

É continua

Derivo $\longrightarrow \left(\frac{x\pi}{3.14}\right)=\frac{\pi}{3.14}\neq 1$

$\longrightarrow (\sin(x))' = \cos(x)$ con $x=0$ fa 1. NON é derivabile

---

(12) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi+e}{\sqrt{2}}x^2+1 & x<0\\ \cos(x) & x\geq 0\end{cases}$

Con $x=0$ $\longrightarrow$ $\dfrac{\pi+e}{\sqrt{2}}\cdot 0+1=1$

$\longrightarrow$ $\cos(x)=\cos(0)=1$

È continua

Derivo $\longrightarrow$ $\dfrac{\pi+e}{\sqrt{2}}2x$ con $x=0$ fa 0

$\longrightarrow$ $-\sin(x)$ con $x=0$ fa 0

---

(13) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{256}{81\pi} & \text{per } x<0\\ \cos(x) & \text{per } x\geq 0\end{cases}$

Con $x=0$ $\longrightarrow$ $\dfrac{256}{81\pi}=\dfrac{256}{81\cdot 3{,}14\ldots}=\dfrac{256}{255}$ circa (!!!!!) dunque $\neq 1$

$\longrightarrow$ $\cos(x)=\cos(0)=1$

Dunque NON è continua. Non essendo continua, non è derivabile

---

(11)

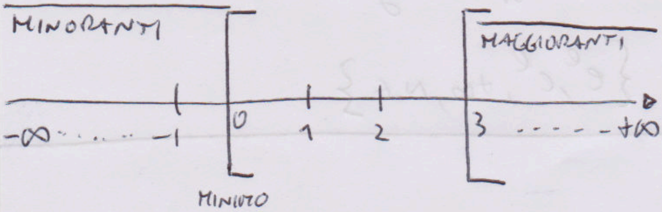
INF/MIN/SUP/MAX

Premessa: se ho, per esempio, l'insieme $[0,3[$, tutti i numeri minori di 0 (incluso) sono MINORANTI dell'insieme, mentre tutti quelli maggiori o uguali a 3 sono MAGGIORANTI. Inoltre:

0 é l'inferiore (INF, il più grande di MINORANTI);

3 é il superiore (SUP, il più piccolo di MAGGIORANTI).

Se l'INF è incluso nell'insieme è anche minimo (MIN). Se il superiore è incluso nell'insieme è massimo (MAX). Ricapitolando:

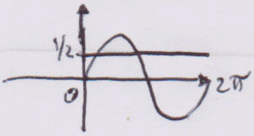


$\exists$ MIN = INF = 0

$\nexists$ MAX, perché $3 \notin$ insieme. SUP = 3

① $A=\left\{x\in[0,2\pi] : \sin(x)<\frac{1}{2}\right\}$

In italiano: chiede le x fra 0 e 2π (inclusi) che fanno venire il seno $<\frac{1}{2}$

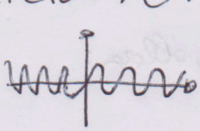


Il punto più a sinistra dell'asse X dove $\sin<\frac{1}{2}$, ovvero sotto quella barra verticale, é 0. Il punto più a destra é 2π. Sono inclusi nell'insieme, allora $\{0, 0, 2\pi, 2\pi\}$

② $A=\{x\in\mathbb{R} : \sin(x)<0\}$

Il seno è <0 fra π e 2π in intervalli infiniti, dunque $\{\pi, \pi, 2\pi, 2\pi\}$

ERRATO!!!! Chiede il punto più estremo dell'asse x dove é verificata.



Si hanno infiniti intervalli; i più lontani a destra e sinistra saranno proprio a $\pm\infty$.

Allora: $\{-\infty, N.E, +\infty, 0\}$

N.B. Se sup/INF $= \pm\infty$, MAX/MIN N.E.

③ $A=\{x\in\mathbb{R} : x^2-3x+2<0\}$

x^2-3x+2 è una parabola rivolta verso l'alto, calcolo $x=0 \rightarrow x=\frac{3\pm1}{2} \lessgtr {}^{2}_{1}$

Ma in 2 e 1 è $=0$, mentre la condizione chiede <0. Dunque sono gli estremi, senza essere inclusi $\rightarrow \{1, N.E., 2, N.E.\}$

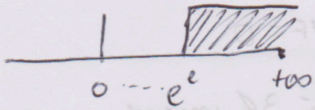
---

④ $A=\{x\in\mathbb{R}: \ln(x)\geq e\}$

Chiede le x, basta ricavare x da $\ln(x)\geq e \rightarrow \ln(x)\geq e$

$x\geq e^e$

Dunque è l'insieme di TUTTE le x maggiori o uguali di e^e



da cui $\{e^e, e^e, +\infty, N.E.\}$

---

⑤ $A=\{e^{-|x|}, x\in\mathbb{R}\}$

Chiede le $y=e^{-|x|}$ con $x\in\mathbb{R}$. Dunque basta sostituire gli estremi.

Si ha con $\pm\infty$ $e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=0$. Con $x=0$ si ha $e^0=1$.

Dunque gli estremi sono questi, la RISPOSTA è N.A.

---

⑥ $A=\{\alpha\in\mathbb{R}: \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha+1}<+\infty\}$

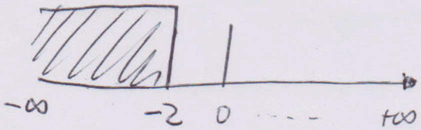
in Italiano: dove quella serie è $<+\infty$? Cioè, per quali α converge?

$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha+1}$ Con $\alpha>0$ non converge di sicuro.

Con $\alpha=0$ ho n^1 che non converge

Invece per avere $\frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha>1$ serve $\alpha<-2$. Con $\alpha=-2$ ho $n^{-2+1}=\frac{1}{n^1}$

Dunque ogni $\alpha<-2$ verifica ciò. Per $\alpha=-2$ non converge, allora:



$\{-\infty, N.E., -2, N.E.\}$

⑦ $A=\{\ln(\ln(x))$ per $x\geq e\}$

Chiede le $y=\ln(\ln(x))$ con $x\,[e,+\infty[$

Sostituisco gli estremi: $\ln(\ln(e))=\ln(1)=0$ INCLUSO, perché $x>$ o UGUALE AD e

$\ln(\ln(+\infty))=\ln(+\infty)=+\infty$

Soluzione: $\{0, 0, +\infty, N.\exists\}$

---

⑧ $A=\{m\in\mathbb{N}: x^m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è convessa$\}$

Osservo che chiede m in x^m, il concetto è simile a quello di $x\in\mathbb{R}: \sin(x)<\frac{1}{2}$. Sapendo:

$x^0=1$ NON CONVESSO

$x^1=$ CONVESSO

$x^2=$ CONVESSO ECC. →

Da 1 (incluso) a $+\infty$ ce ne sono. Allora $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$

---

⑨ $A=\{y=e^{-x^2}, x\in\,]1,2]\}$

Chiede le y. Allora sostituisco gli estremi → $x=1$, $e^{-1^2}=\frac{1}{e}$

→ $x=2$, $e^{-2^2}=\frac{1}{e^4}$

Siccome $\frac{1}{e}>\frac{1}{e^4}$ ed $1\notin$ al dominio → $\left\{\frac{1}{e^4}, \frac{1}{e^4}, \frac{1}{e}, N.E.\right\}$

---

⑩ $A=\{k\in\mathbb{R}: e^{kx}$ è integrabile in senso generalizzato su $[0,+\infty[\}$

Studio convergenza di $\int_0^{+\infty} e^{kx}$ al variare di k.

Sicuramente se porto e^x sotto converge perché $\frac{1}{e^x}\leq\frac{1}{x^2}$. Invece per $x=0$ ho

$\int e^0=\int 1$ che diverge. Allora $\forall k<0$ converge per confronto.

Risultato $\{-\infty, N.E., 0, N.E.\}$

---

⑪ $A=\{x\in\mathbb{Q}: x^2-2\leq 0\}$

Risolvo $x^2-2\leq 0$

$x\leq\pm\sqrt{2}$

Siccome $x\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, non ho $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ma ho $\{-\sqrt{2}, N.E., \sqrt{2}, N.E.\}$

(12) $A=\left\{k\in\mathbb{R} : k^4-2k^2 > -\frac{\pi}{2}\right\}$

Ad occhio sembra strano ho qualcosa alla 4 meno qualcosa alla seconda vada minore di 0. Controlliamo il minimo:

$$y' = 4k^3-4k$$
$$4k(k^2-1) \begin{cases} k=0 \\ k=1 \\ k=-1 \end{cases}$$

Sostituisco: $k=0$ ho $0-0=0$; $k=1$ ho $1-2=-1$; $k=-1$ ho $1-2=-1$

Siccome $-1 > -\pi/2$, non lo tocca MAI, la condizione NON È MAI verificata di $y< -\pi/2$. Dunque $\{-\infty, N.E, +\infty, N.E.\}$

---

(13) $A=\{k\in\mathbb{R}$: la soluzione di $y'(x)=ky(x)$, $y(0)=1$ è integrabile su $[0,+\infty[\ \}$

Risolvo $y'(x)=k\,y(x)$ è a variabili separabili. Faccio

$$\int\frac{1}{y(x)}=\int k \longrightarrow \ln(y)=xk+c$$
$$y=e^{xk+c} \quad \text{con } x(0)=1 \text{ ho } c=0$$

Allora a $\int e^{xk}$ serve $k<0$, 0 non compreso (guarda es. 10) $\longrightarrow \{-\infty, NE, 0, NE\}$

---

(14) $A=\{x\in\mathbb{R} : e^{x^2}<2\}$

Basta ricavare $x \longrightarrow e^{x^2}<2$

$$x^2<\ln(2)$$
$$x<\pm\sqrt{\ln(2)}$$

Siccome $<$ e NON $\le$, ho $\{-\sqrt{\ln(2)}, NE, \sqrt{\ln(2)}, NE\}$

---

(15) $A=\left\{1+\frac{2n}{n^2+1}\ n\in\mathbb{N}, n\ge 1\right\}$

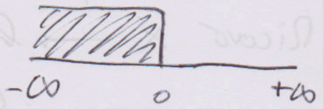
Chiedo le y. Per $n=1$ ho $1+\frac{2}{2}=\boxed{2}$ Siccome ≥ 1 è INCLUSO.

Osservo che $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n^2+1}=\frac{n\cdot 2}{n^2(1+\frac{1}{n^2})}=\frac{2}{n}=0$, allora è decrescente e non può mai essere sopra 1, mentre invece tende a 0.

Dunque $1+\frac{2n}{n^2+1}$ tende a $1+0=\boxed{1}$, senza toccarlo mai.

Soluzione $\{1, NE, 2, 2\}$

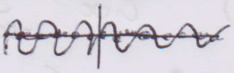
(16) $A=\{x\in\mathbb{R} : e^x-1<0\}$

Come gli scorsi esempi, ricavo $x \longrightarrow e^x-1<0$ Cioè 

$x<\ln(1)=0$

Soluzione ($<$, non $\leq$) $\longrightarrow \{-\infty, NE, 0, NE\}$

---

(17) $A=\{x\in\mathbb{R} : \sin(x)<\frac{\sqrt{3}}{2}\}$ 

Come TUTTI gli altri esercizi con sin o cos ed $x\in\mathbb{R}$, esistono INFINITI intervalli dove si verifica. Dunque $\{-\infty, NE, +\infty, NE\}$

---

(18) $A=\{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} : \ln(x^2)-1<0\}$

Ricavo la $x \longrightarrow \ln(x^2)-1<0$

$x^2<e$

$x<\pm\sqrt{e}$

Siccome ($<$ non $\leq$) ho $\{-\sqrt{e}, NE, \sqrt{e}, NE\}$

---

(19) $A=\{x\in\mathbb{R} : e^{-x^4}>\frac{1}{2}\}$

Ricavo $x \longrightarrow e^{-x^4}>\frac{1}{2}$

$-x^4>\ln(\frac{1}{2})$

$x^4>\pm\sqrt[4]{\ln(\frac{1}{2})} \longrightarrow \pm\sqrt[4]{\ln(1)-\ln(2)}=\pm\sqrt[4]{\ln(2)}$

Il passaggio andrebbe fatto prima, ma vabbè, mica siamo a matematica LOL

Soluzione: $\{-\sqrt[4]{\ln 2}, NE, \sqrt[4]{\ln 2}, NE\}$

---

(20) $A=\{x\in\mathbb{R} : \sin(x)\cos(x)<0\}$

Cioè tutti gli intervalli in cui sin positivo e cos negativo o viceversa.

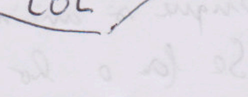
Essendo sull'asse x se ne hanno di infiniti.

Ad esempio con $x=\frac{2}{3}\pi$ si ha $\sin=\sqrt{3}/2$ e $\cos=-1/2$

Se prendiamo $x=\frac{2}{3}\pi+2000000000000\pi$ è ancora vera, dunque si arriva in punto verso $\pm\infty$ dove sarà vero $\longrightarrow \{-\infty, NE, +\infty, NE\}$

---

(21) $A=\{\alpha\in\mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n^{\alpha+1}}<+\infty\}$

Riscrivo $\sum \frac{n}{n^{\alpha+1}}=\frac{1}{n^{\alpha+1-1}}=\frac{1}{n^\alpha}$ che converge per $\alpha>1$, 

Soluzione $\{1, NE, +\infty, NE\}$

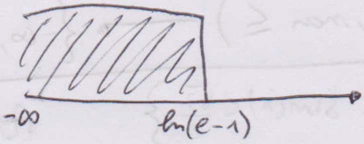
(22) $A=\{x\in\mathbb{R} : \ln(e^x+1)<1\}$

Ricavo $x \longrightarrow \ln(e^x+1)<1$

$e^x+1<e^1$

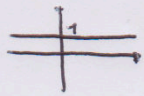
$e^x<e-1$

$x<\ln(e-1)$ cioè



Soluzione (siccome $<$ e NON $\leq$) $\longrightarrow \{-\infty, NE, \ln(e-1), NE\}$

(23) $A=\left\{y=\frac{e^x}{|-e^x|}, x\neq k\frac{\pi}{2} \text{ con } k\in\mathbb{Z}\right\}$

$y=\frac{e^x}{|-e^x|}=\frac{e^x}{e^x}=1$, dunque ho , dicendomi le $y \longrightarrow \{1,1,1,1\}$

(24) $A=\{\ln(x^2), x\leq -1\}$

Con $x=-1$ ho $\ln(-1^2)=\ln(1)=0$

Con $x=-\infty$ ho $\ln(+\infty)=+\infty$

Essendo $\leq$ e non $<$ ho $\longrightarrow \{0,0,+\infty,NE\}$

(25) $A=\left\{y=\frac{1}{|\cos(x)|}, x\neq k\frac{\pi}{2} \text{ con } k\in\mathbb{Z}\right\}$

Siccome $-1\leq\cos\leq 1$, allora $0\leq|\cos(x)|\leq 1$. Vengono escluse x multiple di $\pi/2$

Dunque si avvicina a 0 ed 1 senza toccarli. Se fa 1, ho $\frac{1}{1}=1$.

Se fa 0 ho $\frac{1}{0}=+\infty$. Soluzione $\longrightarrow \{1, NE, +\infty, NE\}$

(26) $A=\{x\in\mathbb{Q} \cap [-10,10] : \sin(\pi x)=0\}$

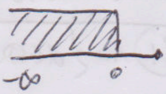
L'intersezione fra $\mathbb{Q}$ e $[-10,10]$ è $[-10,10]$, essendo sottinsieme.

$\sin(\pi x)=0$ se x multiplo di 2. Dunque -10 e 10 rispettano la condizione.

Chiede le x, allora $\longrightarrow \{-10,-10,10,10\}$

(27) $A=\left\{\alpha\in\mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n^2+1)^{1-\alpha}}<+\infty\right\}$

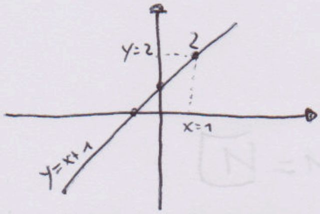
Converge per: $\frac{n}{(n^2)^{1-\alpha}}=\frac{n}{n^{2-2\alpha}}=\frac{1}{n^{2-2\alpha-1}}=\frac{1}{n^{1-2\alpha}}$

Con $\alpha=0$ ho $\frac{1}{n^1}$ che è il primo termine a NON convergere. 

Dunque serve $\alpha<0 \longrightarrow \{-\infty, N.E, 0, NE\}$

LIMITI

Dire $\lim_{x\to 1}(x+1)$ significa dire cosa fa la quantità $x+1$ quando $x=1$, ovvero quando si ha $x+1=1+1=2$.



Dal grafico si vede che sostituendo 1 in x caschiamo nel punto 2.

Un esempio semplice di limite è

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+5}{x^3+x+108}=\frac{\cancel{x^3}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{108}{x^3}\right)}=\frac{1+0+0}{1+0+0}=1$$

perché andando verso $x=+\infty$ ho $\frac{1}{\infty}=\frac{5}{\infty}=\frac{108}{\infty}=0$

Se si ha una forma indeterminata $\left(\frac{0}{0}, \frac{+\infty}{+\infty}, \frac{\infty}{0}, \text{ecc...}\right)$ si può:

1. Usare i limiti notevoli
2. Usare De L'Hopital
3. Usare TAYLOR <u>SOLO</u> se x non va a ∞.

1 LIMITI NOTEVOLI

quelli da sapere sono; con $x\to 0$

$$\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad \frac{\arctan(x)}{x}=1 \qquad \frac{\tan(x)}{x}=1 \qquad \frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\frac{a^x-1}{x}=\ln(a) \qquad \frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2} \qquad \frac{\arcsin(x)}{x}=1$$

Con $x\to+\infty$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \sqrt[n]{n}=1 \qquad (-1)^n=\text{N.E.}$$

2 L'HOPITAL

Se ho $\lim \frac{f}{g}$ INDETERMINATO, faccio $\lim \frac{f'}{g'}$ finché non esce una forma determinata

3 Sostituisco gli sviluppi di TAYLOR (SOLO VICINO A 0!!!!!)

① $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^{x^2})}{\sin^2(x)} = \frac{0}{0}$

Sapendo $\frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\sin^2(x) = \sin(x)\sin(x)$ che fratto x^2 fa 1. Allora:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^{x^2})}{\sin^2(x)} = \frac{\ln(e^{x^2})}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2(x)} = \frac{\ln(e^{x^2})}{x^2}$$

Uso Hopital $\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{x^2}} \cdot e^{x^2} \cdot 2x \cdot \frac{1}{2x} = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}} \cdot \frac{2x}{2x} = 1 \cdot 1 = \boxed{1}$

---

② $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^3+\cos(x))}{3\ln(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

Visto che $x \to +\infty$, nelle somme tengo solo chi va a $+\infty$ più velocemente.

Allora $x^3+\cos(x) \sim x^3$. Riscrivo $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^3+\cos(x))}{3\ln(x)} = \frac{\ln(x^3)}{3\ln(x)} = \frac{3\ln(x)}{3\ln(x)} = \boxed{1}$

---

③ $\lim_{x\to +\infty} x\left(\arctan(x) - \frac{\pi}{2}\right) = \infty \cdot 0$

Sapendo $x \cdot a = \frac{a}{\frac{1}{x}}$, riscrivo $\frac{\arctan(x)-\pi/2}{1/x}$. Uso Hopital, ottengo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\arctan(x)-\pi/2}{1/x} = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-1/x^2} = \frac{1}{1+x^2} \cdot (-x^2) = -\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x^2})} = -\frac{1}{1+0} = \boxed{-1}$$

---

④ $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos(x)} = \frac{0}{0}$

Sapendo $\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ed anche $\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$, faccio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1-\cos(x)} = 1 \cdot \frac{1}{1/2} = \boxed{2}$$

Oppure uso Taylor: $\ln(1+x^2) = x^2$, $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, riscrivo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos(x)} = \frac{x^2}{1-1+\frac{x^2}{2}} = \frac{x^2}{x^2/2} = \frac{1}{1/2} = \boxed{2}$$

---

⑤ $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x^2} e^{\ln(x)}}{e^{x^3}} = \frac{1}{e^{x^3-x^2-\ln(x)}} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0$ usando le proprietà delle potenze

---

⑥ $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(3x)}{e^{4x}-1} = \frac{0}{0}$

Da Taylor, $\sin(3x) = 3x$, $e^{4x} = 1+4x$, ottengo

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x}{1+4x-1} = \frac{3x}{4x} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

7) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{\sin(x^3)} = \dfrac{0}{0}$

Uso taylor: $\sqrt[3]{1+x^2} = 1 + \dfrac{x^2}{3}$, $\sin(x^3) = x^3$, riscrivo

$$\frac{1 + \frac{x^2}{3} - 1}{x^3} = \frac{x^2}{3x^3} = \frac{1}{3x} = \frac{1}{0} = \boxed{+\infty}$$

---

8) $\lim_{x \to +\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \infty \cdot 0$

Ricordando $\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, allora $\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1/x^2} = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(1/x^2)}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x}{x} = \frac{\sin(1/x^2)}{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = \boxed{0}$$

---

9) $\lim_{K \to +\infty} \dfrac{\int_0^{+\infty} e^{-x/k} \, dx}{K}$

Risolvo l'integrale:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x/k} = -k e^{-x/k} \Big|_0^{+\infty} = \frac{-k}{e^{+\infty}} - (-k) = 0 + k = k$$

Riscrivo $\lim_{k \to +\infty} \dfrac{k}{k} = \boxed{1}$

---

10) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x) + \ln(\ln(x))}{\cos(x) + \ln(\ln(x^2))}$

Siccome va a $+\infty$, nelle somme butto via chi cresce meno. Rimane:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(\ln(x^2))} \xrightarrow{\text{HOPITAL}} \frac{1}{\ln(x) \cdot x} \cdot \frac{1}{\frac{2x}{x^2 \ln(x^2)}} = \frac{\ln(x^2) x^2}{\ln(x) 2x^2} = \frac{2\ln(x)}{2\ln(x)} = \boxed{1}$$

---

11) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3^x - x^e}{x^e + xe^x}$

Siccome va a $+\infty$, butto via, nelle somme, chi cresce meno. A $+\infty$, $3^x = 3^\infty > x^e = \infty^e$
$xe^x > x^e$

Rimane $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3^x}{xe^x}$ siccome $e = 2.71\ldots < 3$, $\dfrac{3^x}{e^x} = +\infty$

---

12) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[x]{x} + x}{|x| + 1}$

A $+\infty$ tengo chi va + velocemente.

Rimane $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{|x|} = \boxed{1}$

(13) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\arctan(x))}{x} = \frac{0}{0}$

Siccome $x\to 0$, posso usare taylor. Con taylor, $\sin(x)=x \dots$ dunque $\sin(\arctan(x)) = \arctan(x)$. Rimane $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x} = \boxed{1}$ perché LIMITE NOTEVOLE

---

(14) ~~$e^{x^2}-\cos^2(x)$~~ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos^2(x)}{x^2} = \frac{0}{0}$

Siccome $x\to 0$, posso usare taylor: $e^{x^2} = 1+x^2 \dots$

$\cos^2(x) = (1-x^2/2)(1-x^2/2)$, perché $\cos^2$ e non cos

Riscrivo $\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-(1-x^2/2)^2}{x^2} = \frac{1+x^2-1+x^2-\frac{x^4}{4}}{x^2} = \frac{2x^2-\frac{x^4}{4}}{x^2}$. Siccome è un rapporto $\frac{0}{0}$

Uso Hopital $\longrightarrow \frac{4x-x^3}{2x}$. È ancora $\frac{0}{0}$, USO HOPITAL $\longrightarrow \frac{4-3x^2}{2} \xrightarrow{x\to 0} \frac{4}{2} = \boxed{2}$

---

(15) $\lim_{x\to 0^+}\frac{2(e^{x^2}-1)}{x\ln(x)} =$

Uso Hopital $\frac{2(e^{x^2}\cdot 2x)}{\ln(x)+1}$, lo uso di nuovo $\frac{2(e^{x^2}4x^2+e^{x^2}\cdot 2)x}{1} \xrightarrow{x\to 0} \frac{0}{1} = \boxed{0}$

---

(16) $\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1-\sin(x^3)}{\sin(x)}$

Siccome va a 0, posso usare Taylor: $e^x = 1+x \dots$

$\sin(x^3) = x^3 \dots$

$\sin(x) = x \dots$

Riscrivo: $\frac{1+x-1-x^3}{x} \xrightarrow{\text{HOPITAL}} \frac{1-3x^2}{1\cancel{x}} \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{1} = \boxed{1}$

---

(17) $\lim_{x\to +\infty}(x^2+2)(\ln(x^2+1)-\ln(x^2))$

Riscrivo $(x^2+2)(\ln(x^2+1)-\ln(x^2)) = x^2\cdot\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)+2\cdot\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

Ho usato solo passaggi algebrici e proprietà dei logaritmi.

$\lim_{x\to +\infty} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}+2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

Ricordando $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e$ per $x\to +\infty$, ho

$\lim_{x\to +\infty}\ln(e)+2\ln\left(1+\frac{1}{\infty}\right) = 1+2\ln(1) = 1+0 = \boxed{1}$

(18) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)e^x+e^{-x}}{e^{2x}+e^{-4x}\ln(x)}$

Andando a $+\infty$ $\to$ $\ln(x)e^x > e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$\to$ $e^{2x} > e^{-4x}\ln(x) = \frac{\ln(x)}{e^{4x}}$

Allora rimane $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{\ln(x)}{e^{2x-x}} = \frac{\ln(x)}{e^x} = \boxed{0}$ perché cresce più velocemente e^x rispetto a $\ln(x)$

---

(19) $\lim_{x\to+\infty} x\left(2^{\frac{x}{x-3}}-2\right) = \infty\cdot 0$

Uso Hopital scrivendo $x\left(2^{\frac{x}{x-3}}-2\right) = \frac{2^{\frac{x}{x-3}}-2}{1/x}$

$\to \frac{2^{\frac{x}{x-3}}\cdot\ln(2)\cdot\frac{x-3-x}{(x-3)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2^{\frac{x}{x(1-3/x)}}\cdot\ln(2)\cdot(-3)(-x^2)}{(x-3)^2} = \frac{2\ln(2)3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1-\frac{9}{x^2}-\frac{6}{x})} = 6\ln(2) = \boxed{\ln(64)}$

Ricordando $6\ln(2) = \ln(2^6) = \ln(64)$

$(a^x)' = a^x\cdot\ln(a)\cdot(x)' \to \left(2^{\frac{x}{x-3}}\right)' = 2^{\frac{x}{x-3}}\cdot\ln(2)\cdot\frac{x-3-x}{(x-3)^2}$

---

(20) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{(11!)}e^{2x}}{e^{3x}}$

Ricordando $e^x > x^\alpha$, anche con $\alpha = 11!$, allora

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{(11!)}e^{2x}}{e^{3x}} = \frac{x^{(11)!}}{e^{3x-2x}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{-\infty}} = e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$

---

(21) $\lim_{x\to0} \frac{3^{x^2}-1}{\sin(x)\sin(2x)}$

Siccome $x\to0$, uso Taylor: $\sin(x) = x\ldots$ RISCRIVO:
$\sin(2x) = 2x\ldots$

$\lim_{x\to0} \frac{3^{x^2}-1}{x\cdot2x} \xrightarrow{\text{HOPITAL}} \frac{3^{x^2}\ln(3)\cdot2x}{4x} = \frac{3^{x^2}\ln(3)}{2} \xrightarrow{x\to0} \frac{3^0\ln(3)}{2} = \frac{\ln(3)}{2} = \boxed{\ln(\sqrt{3})}$

---

(22) $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(|\ln(x)|)}{\ln(x)}$

Uso Hopital $\frac{1}{x\ln(x)}\cdot\frac{1}{1/x} = \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{-\infty} = \boxed{0}$

(23) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(x^2)}{\ln|x|} = \frac{2\cancel{\ln(x)}}{\cancel{\ln(x)}} = \boxed{2}$

---

(24) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\sin(x)}-1}{\tan(x)}$

Siccome $x \to 0$, uso taylor: $e^{-\sin(x)} = 1-\sin(x)\ldots$ RISCRIVO
$\tan(x) = x\ldots$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\sin(x)-1}{x} = -\frac{\sin(x)}{x} = \boxed{-1}$ (LIMITE NOTEVOLE)

---

(25) $\lim_{x\to +\infty} \frac{xe^x}{1+x+x^{(10^9)}}$

Andando a $+\infty$ tengo chi cresce di più. Cioè x^{10^9}.

Ricordando $e^x > x^a \ \forall a$, allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{1+x+x^{10^9}} = \frac{xe^x}{x^{10^9}} = \boxed{+\infty}$ perché e^x cresce di più

---

(26) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^3+2\cos(x))}{3\ln(x)}$

Non è una forma indefinita! Sostituisco $0^+ \to \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(0+2)}{-\infty} = \frac{\ln(2)}{\infty} = \boxed{0}$

---

(27) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\arctan(x)}{\sqrt[4]{1+x}-1}$

Siccome $x \to 0$, uso Taylor: $\arctan(x) = x\ldots$ RISCRIVO
$\sqrt[4]{1+x} = 1+\frac{x}{4}\ldots$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{1+\frac{x}{4}-1} = \frac{x}{x/4} = \boxed{4}$ N.B. si sarebbe potuto usare anche Hopital, nel doppio del tempo!

---

(28) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\sin^2(2x)}-1}{\tan(3x^2)}$

Siccome $x\to 0$, uso taylor: $e^{\sin^2(2x)} = 1+\sin^2(2x)$ RISCRIVO
$\tan(3x^2) = 3x^2$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{1}+\sin^2(2x)-\cancel{1}}{3x^2}$

Ricordando $\frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\sin^2(2x) = \sin(2x)\cdot\sin(2x)$, allora:

$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2(2x)}{3x^2} = \frac{\sin^2(2x)}{2x\cdot 2x} \cdot \frac{2x\cdot 2x}{3x^2} = 1 \cdot \frac{4x^2}{3x^2} = \boxed{\frac{4}{3}}$

FUNZIONI → GUARDA I GRAFICI DELLA PRIMA PAGINA, DEVI saperli!!!

Per rispondere bisogna intuire com'è fatto il grafico della funzione ed andare per esclusione (spesso) fra tutte le opzioni. Un esempio:

① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = |x|(x^2+1)$ è:

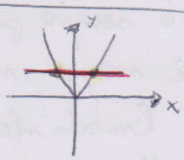
ⓐ Monotona crescente: ogni volta che c'è un valore alla seconda (x^2) o uno fra valore assoluto ($|x|$) non è mai monotona, perché andando da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ prende anche valori negativi, che alla seconda tornano positivi

ⓑ Iniettiva: stesso discorso della monotonia. Prendendo (esempio) 2 e −2, sul grafico cadranno insieme, dunque non è iniettiva.

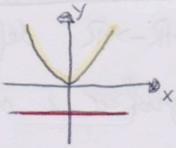
ⓒ Surgettiva: va in $\mathbb{R}$, dunque per essere surgettiva deve toccare tutti i valori di $\mathbb{R}$, ma essendo $|x|, x^2$ non può mai essere negativa.
Tocca valori da $[0, +\infty[$, dunque $(-\infty, 0)$ rimangono esclusi

ⓓ Derivabile ovunque: da escludere, per la presenza di $|x|$

ⓔ RISPOSTA ESATTA: N.A.



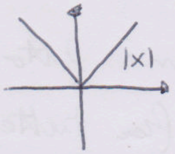
Per essere INIETTIVA, serve che non si verifichi mai questo:
Se disegno una retta orizzontale deve toccare in un solo punto. In questo caso ne tocca due, non lo è (ogni volta che x^2, $|x|$).



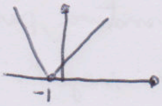
Per essere surgettiva, serve che, disegnando una retta orizzontale in un qualsiasi punto, tocca almeno una volta la funzione.
In questo caso non accade, perché tutte le rette sotto lo 0 non la toccano.
Per essere monotona, dev'essere PER TUTTO IL TEMPO, o crescente o decrescente.
Per essere convessa serve $f'' > 0$, per essere concava serve $f'' < 0$

(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x)=|x+1|$ è:

Sapendo 

, allora 

Se io do $x=0$ alla funzione ho $|x+1|=|1|=1$. Quindi ho le coordinate $(\overset{x}{0},\overset{y}{1})$. Allora il grafico sarà quello di $|x|$ traslato di 1 a sinistra, perché con $x=-1$, $f(x)=|x+1|=|-1+1|=|0|=0$

Dunque 

(A) NON è surgettiva, perché non tocca $(-\infty,0)$ sull'asse y

(B) NON è derivabile ovunque per il valore assoluto

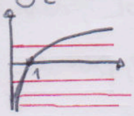
(C) NON è iniettiva, perché in $-1,1$ o $-2,2$ o qualsiasi altra coppia, ho la stessa y.

(D) NON è monotona, perché diminuisce poi cresce

(E) RISPOSTA N.A.

---

(3) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definita da $f(x)=\log_2(x)$ è:

È lo stesso grafico del log, dunque 

(A) Non è sempre positiva, fra $(0,1)$ è negativa

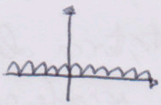
(B) Non è sempre negativa, fra $(1,+\infty)$ è positiva

(C) Non è limitata inferiormente, perché $\lim_{x\to 0^+} \log = -\infty$

(D) È iniettiva, perché qualsiasi retta orizzontale disegno, tocca 1 sola volta la f

---

(4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x)=|\sin(x)|$

Il grafico è nella prima pagina, è qualcosa tipo 

(A) Non è monotona, perché cresce e poi cala e così via

(B) Non è iniettiva, perché una retta orizzontale tocca infinite volte la funzione

(C) Non è surgettiva, perché il codominio è $\mathbb{R}$, ovvero $(-\infty,+\infty)$, mentre $|\sin(x)|$ è compreso fra 0 e 1

(D) È sempre non negativa, perché $0 \le |\sin(x)| \le 1$

⑤ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ è:

Ⓐ NON iniettiva, perché essendo x^4, x^2 sarà una parabola (circa)

Ⓑ NON suriettiva, perché il codominio è $\mathbb{R}$, dunque $(-\infty, +\infty)$, ma essendoci x elevato a un numero pari, non si andrà mai verso valori ~~p~~ negativi, dunque almeno $(-\infty, 0)$ sono esclusi e la f non tocca tutti i punti del codominio

Ⓒ NON monotona crescente. Essendoci x^4, x^2 sarà decrescente poi crescente (circa) ma SICURAMENTE non monotona

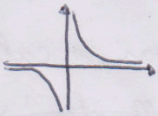
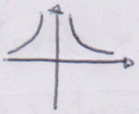
Ⓓ È PARI, perché $f(-x) = f(x)$

$$f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 + 1 = x^4 - x^2 + 1 = f(x)$$

---

⑥ $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{|x|^{\pi}}$

Quel π crea solo confusione, il grafico è essenzialmente uguale a $\frac{1}{|x|}$, solo che il denominatore è più grande e trasla leggermente il grafico.

Se $\frac{1}{x} \longrightarrow$  , allora $\frac{1}{|x|} \longrightarrow$  all'incirca. Dunque:

Ⓐ NON è iniettiva, perché una retta orizzontale può toccare più volte la funzione

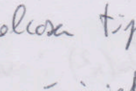
Ⓑ NON è monotona, perché va su poi giù ed è anche staccata

Ⓒ NON è limitata, perché vicino a 0 si ha che $\frac{1}{x} = +\infty$

Ⓓ RISPOSTA N.A.

---

⑦ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{x^2}$ è:

Sappiamo che 

. Abbiamo un x^2, allora la parte a destra sarà circa uguale, quella a sinistra negativa sarà diversa. Con qualche prova (sostituisci $x = -1, -2, -3 \ldots$) viene fuori qualcosa tipo 

Ⓐ NON suriettiva, né iniettiva (rispettivamente, non tocca almeno $(-\infty, 0)$ e $-2, 2$ hanno la stessa

Ⓑ NON monotona, perché scende poi sale

Ⓒ È derivabile in 0, facendo la derivata $e^{x^2} \cdot 2x$ e mettendo $x = 0$ viene 0

Ⓓ RISPOSTA: N.A.

⑧ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x)=e^{2\log(|x|)}$ per $x \neq 0$ e $f(0)=0$ è:

Si nota che f dipende da x, e l'unica x è fra valore assoluto, dunque si avrà una f pari, dunque NON iniettiva e NON monotona.

Va a $+\infty$, dunque NON è limitata. RISPOSTA: N.A

---

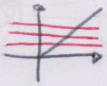
⑨ $f: \mathbb{R}^+/\{1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x)=5^{\log_5(x)}$ è:

L'unica x è in $\log_5(x)$ che è crescente, perché qualcosa tipo 

Dunque 5 è elevato a qualcosa di crescente

Ⓐ NON è monotona decrescente, al massimo crescente

Ⓑ NON è limitata superiormente, perché nel dominio c'è $+\infty$ ed è crescente

Ⓒ È iniettiva, perché cresce sempre più, sarà qualcosa tipo 

Le rette orizzontali toccano 1 solo punto della funzione a testa

---

⑩ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $|x|^{20}\sin(x)$

Essendoci sia $|x|$ che x elevato a una potenza pari, si esclude che sia iniettiva, perché valori negativi e positivi possono cascare sulla stessa y.

Quindi si ha $|x|^{20}$, una quantità sempre positiva, per $\sin(x)$, che ciclicamente passa da negativo a positivo. Quindi esclude la monotonia.

Dunque NON è: iniettiva, monotona crescente/decrescente.

È surgettiva perché a x vengono dati tutti i valori di $\mathbb{R}$, va quindi da $-\infty$ a $+\infty$, essendo $|x|$ va da 0 a $+\infty$, ma è moltiplicato per qualcosa di positivo o negativo, dunque $f(x)$ va a toccare anche tutti i valori $(-\infty,0)$. È SURGETTIVA

---

⑪ $f:]0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $x\ln(x^2)$ è:

Ⓐ NON iniettiva perché c'è x^2 (brevemente)

Ⓑ NON surgettiva perché il CODOMINIO è $\mathbb{R}$, e dando a $x\ln(x^2)$ i valori fra 0 e 1 non può andare verso (esempio) $\pm\infty$.

Ⓒ NON POSITIVA, perché $\ln$ fra 0 e 1 è negativo

Ⓓ CONTINUA, perché l'unico punto incriminato è 0, ma è fuori dal dominio

MASSIMO/MINIMO DELLA FUNZIONE o CONVESSITÀ/CONCAVITÀ, IMMAGINE

① $f(x)=x^4-x^2$ è convessa per:

$f'=4x^3-2x$

$f''=12x^2-2$

Ricavo $x \to 12x^2-2=0,$
$x^2=\frac{1}{6},$
$x^2=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ $\longrightarrow$ Convessa per $f''x \geq 0$, dunque per $\boxed{|x| \geq 6^{-1/2}}$

Ricordando $\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=(\sqrt{6})^{-1}=(6^{1/2})^{-1}=6^{-1/2}$

---

② Calcola l'immagine di $f(x)=e^{x/e}$, con $x\in[0,1]$

Sostituisco gli estremi: se $x=0$, $e^{x/e}=e^{0/e}=1$
se $x=1$, $e^{x/e}=e^{1/e}$

L'immagine sarà $\boxed{[1, e^{1/e}]}$ in quanto e^x è crescente, dunque spostandosi verso destra sull'asse delle x (in questo caso da 0 verso 1) il valore della $f(x)$ crescerà. La risposta $[1, e^{1/e}[$ è giusta con $x\in[0,1[$

---

③ Il minimo di $x\ln(x)$ con $x>0$ è:

$f'(x)=\ln(x)+1$

Ricavo $x \to \ln(x)+1=0$
$x=e^{-1}$ perché $\ln(x)=-1 \leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

Dunque sull'asse x, in corrispondenza di "e^{-1}" si ha il minimo. Per vedere quanto vale, si calcola in $f(x) \longrightarrow x\ln(x)=e^{-1}\ln(e^{-1})=\frac{1}{e}(-1)=\boxed{-1/e}$

Dunque avremo un grafico, in corrispondenza del punto $\frac{1}{e}$ delle x, si avrà $-\frac{1}{e}$ sulle y (MINIMO)

---

④ $f(x)=x^4-x^2$ è concava per:

$f'=4x^3-2x$

$f''=12x^2-2$

Ricavo $x \to x^2=1/6$
$x=\pm 1/\sqrt{6}$ $\longrightarrow$ Concava per $f''\leq 0$, $\boxed{|x|\leq 6^{-1/2}}$

---

⑤ Il massimo di $|\sqrt[3]{|x-1|}|$ per $x\in\mathbb{R}$

N.E. perché $\sqrt{x}$, e in particolare $|\sqrt{x}|$ va a più infinito

---

⑥ Calcola immagine di $(x^2+1)e^{-2x}$ per $x\in[0,+\infty[$

se $x=0 \to f(x)=1$

se $x=+\infty \to f(x)=\frac{x^2}{e^{2x}}=0$ perché $e^x \geq x^2$

Allora l'immagine è $]0,1]$ ~~[illegible]~~

⑦ Se esiste il minimo di $|\sin(x)-1|$ su $A=\{x\in\,]-2\pi,0]\}$ vale:

Osservo che $-1\leq \sin(x)\leq 1$ Il modo più veloce, in questo caso, è andare per tentativi:

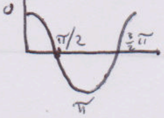
$\sin(x)=0 \rightarrow f(x)=|0-1|=1$
$\sin(x)=-1 \rightarrow f(x)=|-1-1|=2$
$\sin(x)=1 \rightarrow f(x)=|1-1|=0$

Allora il minimo vale 0, osservando che $|x|\geq 0$ per ogni x.

---

⑧ Il massimo di $x-x^2$ su $\{x\in\,]0,2\pi[\; : \cos(x)\leq 0\}$

Prima bisogna capire dove stiamo lavorando. In $0,2\pi$, $\cos(x)$ va da -1 a 1,

ed è 

dunque fra $\pi/2$ e $3/2\,\pi$ è ≤ 0

Se $x=\pi/2 \rightarrow \frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{4}$

Se $x=\frac{3}{2}\pi \rightarrow \frac{3}{2}\pi-\frac{9}{4}\pi^2$

Stiamo cercando il massimo, dunque $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{4}$ è la soluzione

---

⑨ Il massimo di x^3-x, e anche minimo, su $[-2,0]$ sono:

$f'=3x^2-1$

Ricavo $x \rightarrow x^2=\frac{1}{3}$
$x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

Sostituisco in $x^3-x \longrightarrow$ gli estremi: $x=-2$, $-2^3+2=-8+2=-6$
$x=0$, $f(x)=0$
$x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{3^{3/2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1-3}{3\sqrt{3}}=\pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$

Il più piccolo e il più grande, fra $0,-6,\pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$ sono rispettivamente -6 e $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

Soluzione: $\boxed{max=\frac{2}{9}\sqrt{3},\ min=-6}$ ricordando $\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 3}=\frac{2}{9}\sqrt{3}$

---

⑩ Massimo e minimo su $[0,2]$ di x^4-2x^2

$f'=4x^3-4x$
$x(4x^2-4)$ → $x=0$, $x=1$, $x=-1$

Sostituisco:
Se $x=0 \rightarrow 0-0=0$
Se $x=1 \rightarrow 1-2=-1$
Se $x=1 \rightarrow 1-2=-1$
Se $x=2 \rightarrow 16-8=8$

$\longrightarrow \boxed{MAX=8,\ min=-1}$

---

⑪ Se esiste il massimo su $f(x)=|\cos(x)-1|$ nell'insieme $A=[-\pi,\pi/2]$ vale:

$-1\leq\cos(x)\leq 1$, Dunque $f(x)$ → $|0-1|=|-1|=1$
→ $|1-1|=|0|=0$
→ $|-1-1|=|-2|=2$

Dunque vale 2

EQUAZIONI DIFFERENZIALI / PRIMITIVE

È primitiva di $A(x)$ ma $a(x)$ tale che $(a(x))' = A(x)$

Qualcosa che derivato dà la funzione che abbiamo.

---

① Una soluzione di $y'(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

Vado per tentativi con le opzioni:

ⓐ $\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)' = \left(\cos(x)^{-1}\right)' = -1 \cdot (\cos(x))^{-2} \cdot -\sin(x)$ NON VA BENE

ⓑ $(e^x - \sin(x))' = e^x - \cos(x)$ NON VA BENE

ⓒ $\left(\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)' = \frac{1}{\tan(x/2)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x/2)} \cdot \frac{1}{2}$

Riscrivo $\frac{1}{\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(x/2)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sin(x/2)\cos(x/2)\,2}$. So che $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$,

Dunque $\sin(x) = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$. La soluzione è $\frac{1}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \boxed{\frac{1}{\sin(x)}}$ OK

---

② Soluzioni di $x'(T) = \sin(T)$

ⓐ $T + C_1 e^T + C_2 \sin(T)$ derivato fa $C_1 e^T + C_2\cos(T)$ NON VA BENE

ⓑ $\sin(T) + e^T + c$ derivato fa $\cos(T) + e^T$ NON VA BENE

ⓒ $-\cos(T) + c$ derivato fa $\sin(T)$, è la soluzione

---

③ Una primitiva di $\ln(2x)$ è:

ⓐ $(x - x\ln(2x))' = 1 - \ln(2x) - 1 = -\ln(2x)$ NON VA BENE

ⓑ $(x + x^2\ln(2x))' = 1 + 2x\ln(2x) + x^2\frac{1}{x}$ NON VA BENE

ⓒ $\left(\ln(3) + x\ln(x) + (\ln(2) - 1)x\right)' = \ln(x) + \cancel{1} + \ln(2) - \cancel{1} = \ln(x) + \ln(2) = \ln(2x)$, è la soluzione

Perché $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$

---

④ Una primitiva di Te^{2T} è:

ⓐ $\left(e^T(T-1)\right)' = e^T(T-1) + e^T = Te^T - e^T + e^T = Te^T$ NON VA BENE

ⓑ $\left(\frac{T^2}{2}e^{T^2}\right)' = Te^{T^2} + \frac{T^2}{2}e^{T^2} \cdot 2T$ NON VA BENE

ⓒ $\left(\frac{1}{4}e^{2T}(2T-1) - \sqrt{\pi}\right)' = \frac{1}{4}e^{2T} \cdot 2(2T-1) + \frac{1}{4}e^{2T} \cdot 2 = Te^{2T} - \frac{e^{2T}}{4} + \frac{e^{2T}}{4} = Te^{2T}$, è la soluzione

⑤ Una soluzione di $e^x - e^{-x}$ è:

$\left(e^x + e^{-x} + 2^4\right)' = e^x - e^{-x}$, perché $(e^{-x})' = (-x)'(e^{-x})' = (-1)(e^{-x}) = -e^{-x}$

---

⑥ Una primitiva di $T\sin(T)$ è:

ⓐ $\left(\sin(T) + T\cos(T)\right)' = \cos(T) + \cos(T) + T(-\sin T) = 2\cos(T) - T\sin(T)$ NON VA BENE

ⓑ $\left(\sin(T) + \ln(\cos(T)) - 1\right)' = \cos(T) + \frac{1}{\cos(T)}(-\sin(T))$ NON VA BENE

ⓒ $\left(\sin(T) - T\cos(T) + \sqrt{\pi}\right)' = \cos T - \left(T(-\sin(T)) + \cos(T)\right) = T\sin(T)$, è la soluzione

---

⑦ La soluzione del problema di CAUCHY $y'(x) = \frac{y(x)}{x}$ con $y'(1) = 1$ e $y'(2) = ?$

È a variabili separabili, dunque $\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{x}$

Integro $\ln(y) = \ln(x)$

$y = e^{\ln(x) + c}$ Applico $y'(1) = 1$

$1 = e^{\ln(1) + c} = e^c$ Dunque $e^c = 1 \to c = \ln(1) = 0$ ... ERRATO!

Il testo fornisce subito $y'(x) = 1$, da cui $y'(x) = \frac{y(x)}{x} \longrightarrow 1 = y(x)$

---

⑧ Soluzione di $y'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Noto la somiglianza con $\cosh(x)$ e nelle opzioni c'è $\ln(\cosh(x))$

$\left(\ln(\cosh(x))\right)' = \frac{1}{\cosh(x)} \cdot (\cosh(x))' = \frac{1}{\frac{e^x + e^{-x}}{\cancel{2}}} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{\cancel{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, è la soluzione

---

⑨ Soluzione di $y'(x) = x^2 e^{x^3}$

Noto $\frac{e^{x^3} + \ln(\ln(e^{3^3}))}{3}$ risulta simile.

$\left(\frac{e^{x^3} + \ln(\ln(e^{3^3}))}{3}\right)' = \frac{e^{x^3} 3x^2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\ln(e^{3^3})} \cdot \frac{1}{e^{3^3}} \cdot e^{3^3} \cdot 0 = e^{x^3} \cdot x^2$ è la soluzione

---

⑩ Soluzione di $x'(T) = (1 - T^2)^{-1/2}$

Provo $\arcsin(T) + c$, visto che $\frac{d}{dx}(\arcsin(T)) = \frac{1}{\sqrt{1 - T^2}}$

$(\arcsin(T) + c)' = \frac{1}{\sqrt{1 - T^2}} = \left(\sqrt{1 - T^2}\right)^{-1} = (1 - T^2)^{-1/2}$, è la soluzione.

⑪ Soluzione di $y'(x) = \sin(\ln(x))$ con $y(1)=1$ in $y'(1)$:

Ho già $y'(x)$, basta calcolarlo con $x=1 \longrightarrow \sin(\ln(1)) = \sin(0) = 0$

---

⑫ La soluzione di $y'(x)+y(x)=0$ con $y(0)=k$, calcola $\lim_{x\to+\infty} y(x)$:

È un'omogenea, dunque $y'(x)+y(x)=0$

$$\lambda + 1 = 0$$
$$\lambda = -1$$

La soluzione sarà $c_1 e^{-x}$. Con $y(0)=k$ ho $c_1 e^0 = k$

$$c_1 = k$$

Faccio $\lim_{x\to+\infty} k e^{-x} = \frac{k}{e^x} = \frac{k}{\infty} = 0$

---

⑬ Calcola $y''(0)$ sapendo $y''(x) = e^{-x^3}$ con $y(0)=0$ ed $y'(0)=0$

Ho già $y''(x)$, basta calcolarlo in $0 \to y''(0) = e^{-x^3} = e^0 = 1$

---

⑭ Data $y(T) = e^{10T}$, quando è soddisfatta?

Vado a tentativi fra le opzioni:

ⓐ $y''+2y'-25y=0 \longrightarrow \lambda^2+2\lambda-25=0$, $\lambda = \frac{-2\pm\sqrt{104}}{2} \begin{cases} -1+\frac{2}{2}\sqrt{27} \\ -1-\sqrt{27} \end{cases}$ NON VA BENE

ⓑ $y''+y=0 \longrightarrow \lambda^2+1=0$, $\lambda = \pm\sqrt{-1} \begin{cases} \to \cos(T)c_1 \\ \to \sin(T)c_2 \end{cases}$ NON VA BENE

ⓒ $y'+y=0 \longrightarrow \lambda+1=0$, $\lambda=-1 \longrightarrow c_1 e^{-x}$ NON VA BENE.

Risposta N.A.

---

⑮ La soluzione di $y'(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{y(x)}$ con $y(\pi/4)=1$ e $y'(\pi/4)=?$

Basta sostituire $x=\pi/4 \longrightarrow \frac{\sin(\pi/4)\cos(\pi/4)}{y(\pi/4)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

---

⑯ La soluzione di $y'(x) = \sin(\ln(y(x)))$ con $y(1)=1$ e $y'(1)=?$

Basta sostituire $y'(x) = \sin(\ln(1)) = 0$

---

⑰ La derivata di $\int_0^{T^2+1} \sin(z)$ vale:

$\int_0^{T^2+1} \sin(z) = -\cos(z)\Big|_0^{T^2+1} = (-\cos(T^2+1)+1)' \longrightarrow \sin(T^2+1)\cdot 2T$

(18) Sia $y''-y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, Allora $y'(1)$ vale:

Risolvo l'omogenea: $y''-y=0$

$\lambda^2-1=0 \rightarrow \lambda=\pm 1$

Ho $C_1e^x+C_2e^{-x}$, in $y(0)=1$ ottengo $C_1+C_2=1$

Derivo $C_1e^x-C_2e^{-x}$, in $y'(0)=0$ ottengo $C_1-C_2=0$

Metto a sistema $\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ C_1-C_2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} C_1=C_2 \\ 2C_1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} C_1=\frac{1}{2} \\ C_2=1/2 \end{cases}$

Riscrivo $\frac{e^x}{2}-\frac{e^{-x}}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Osservo $e^{-x}=\frac{1}{e^x} \longrightarrow \dfrac{e^x-\frac{1}{e^x}=\frac{e^{x2}-1}{e^x}}{2}=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}$ in $y'(1)$ vale $\boxed{\frac{e^2-1}{2e}}$

---

(19) La soluzione di $y''(T)=T^2$, $y(0)=0=y'(0)$ è:

$y''(T)=T^2$

$y'(T)=\int T^2=\frac{T^3}{3}+C_1 \longrightarrow y'(0)=0$, allora $C_1=0$

$y(T)=\int\frac{T^3}{3}+C_1=\frac{T^4}{4}\cdot\frac{1}{3}+C_1x+C_2 \longrightarrow y(0)=0$, allora $C_2=0$

Soluzione $\frac{T^4}{4}\cdot\frac{1}{3}+C_1\cdot 0+0=\frac{T^4}{12}$

---

(20) $y'(T)=T\cos(T)$, allora $y(T)$:

(a) $\left(-T\cos(T)+\sin(T)+\frac{\sqrt{\pi}}{9!e}\right)'=-\cancel{\cos(T)}+T\sin(T)+\cancel{\cos(T)}$ NON VA BENE

(b) $\left(\frac{(T^2+\pi)}{2}+\cos(T)\right)'=\frac{2T}{2}-\sin(T)=T-\sin(T)$ NON VA BENE

(c) $\left(T\sin(T)+\cos(T)+\frac{\sqrt{\pi}}{5!e}\right)'=\sin(T)+T\cos T-\sin(T)=T\cos(T)$

Ricordando che $\frac{\sqrt{\pi}}{5!e}$ è una costante, dunque derivata è 0

NUMERI COMPLESSI

$\boxed{i \cdot i = -1}$

Possono essere scritti in **FORMA ALGEBRICA**: $z = a + ib$ (PARTE REALE: a; PARTE IMMAGINARIA: b)

FORMA TRIGONOMETRICA: $\rho(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)) = z$

FORMA ESPONENZIALE: $z = \rho e^{i\vartheta}$

Il CONIUGATO è il cambio di segno della parte immaginaria

$z = a + ib$ $\qquad \bar{z} = a - ib$ ← CONIUGATO

Il MODULO si calcola facendo

$z = a + ib$ $\qquad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ ← MODULO

Per passare da TRIGONOMETRICA a ALGEBRICA e viceversa:

$a = \rho\cos(\vartheta)$ $\qquad b = \rho\sin(\vartheta)$;

$\rho = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

$\vartheta = arg(z)$:
- $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ se $a > 0$
- $\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$ se $a < 0$
- se $a = 0$, $\pi/2$ se $b > 0$, $\frac{3}{2}\pi$ se $b < 0$

Se ho $z^n = \rho^n(\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta))$ $\qquad$ $\boxed{\rho = \text{MODULO}}$ $\boxed{\vartheta = \text{ARGOMENTO}}$

Se ho $w = \sqrt[n]{z}^{\,\mathbb{C}}$: $\quad w^n = z$

$\rho_1 = \sqrt[n]{\rho}^{\,\mathbb{R}}$

$\vartheta_1 = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2}{n}k\pi$

Potenze di i

Sapendo
$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$

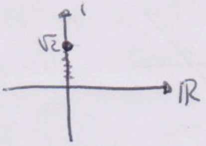
da $i^4 = 1$ in poi, si inizia

① Modulo e argomento di $\boxed{z=(\sqrt{2}\,i)^{13}}$

$\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ quindi $\sqrt{0+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$. Siccome è elevato alla 13, $\rho=(\sqrt{2})^{13}=2^{13/2}=\underset{2^6}{\underset{\shortparallel}{64}}\sqrt{2}$

$\vartheta=\frac{\pi}{2}$ perché $a=0$ e $b>0$

Basta anche pensare al disegnare il numero



La parte reale è 0, dunque l'angolo è per forza $\pi/2$, dunque $\vartheta=\frac{\pi}{2}\cdot 13$

---

② Mod e arg di $z=i^{43}$

$\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ quindi $\sqrt{0+1}=\sqrt{1}=1$. Quindi $1^{43}=1$

$\vartheta=\pi/2$ perché $a=0$ e $b>0$. Quindi $\vartheta=\frac{\pi}{2}\cdot 43=\frac{43}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi$ perché

è ciclico ogni 2π, dunque ogni $4/2\,\pi$. Nel nostro caso $\frac{43}{2}\pi$ posso togliere multipli di 4 finché rimane ≥ 0

---

③ La parte reale di $z=\frac{2-i}{3+i}$ è:

in casi come questi, SEMPRE si deve moltiplicare e dividere per il coniugato del denominatore, col fine di far sparire le i del denominatore:

$z=\frac{2-i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}=\frac{6-2i-3i-1}{9+1}=\frac{5-5i}{10}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ Parte reale $=\boxed{\frac{1}{2}}$

---

④ Mod e arg di $\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})=\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$ sono:

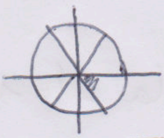
$\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ quindi $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$ → MODULO

$\vartheta=?$ Siccome $a=\frac{1}{2}>0$, l'argomento si trova con $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)=$

$=\arctan\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right)=\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\right) \begin{cases} 2\pi/3 \\ 5/3\,\pi \end{cases}$

Per capire quale dei due, vedo dove $\sin(\alpha)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$? $\cos(\alpha)=\frac{1}{2}$?

Accade in $\alpha=\frac{5}{3}\pi$, dunque



che è anche uguale a $\alpha=-\frac{\pi}{3}$

Facendo il giro orario. Soluzione $\boxed{1,-\pi/3}$

(5) L'argomento di $\sqrt[3]{\pi^2 i}$ è:

$\vartheta = \pi/2$ perché $a=0$ ~~[illegible]~~, $b>0$

Nelle radici, l'argomento è dato da $\frac{\vartheta}{3}+\frac{2k\pi}{3}$, nel caso di radice cubica.

Allora $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}k\pi = \boxed{\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}}$

---

(6) Mod e arg di $z=\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sono:

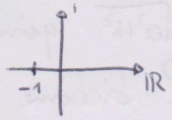
$\vartheta=$? Dov'è che $\cos(\alpha)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin(\alpha)=\frac{1}{2}$? Accade in $5/6\,\pi$

$\vartheta=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$ Soluzione $\boxed{\left(1,\frac{5}{6}\pi\right)}$

---

(7) Gli argomenti di $z=\sqrt[3]{i^2}$

Siccome $i^2=-1$, avrò $\sqrt[3]{-1}$. Non c'è la i, allora si avrà



Dunque $\vartheta=\pi\cdot\frac{1}{3}=\frac{\pi}{3}$

$\vartheta_0=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi$ con $k=0\longrightarrow\frac{\pi}{3}$

$\vartheta_1=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi$ con $k=1\longrightarrow\pi$

$\vartheta_2=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi$ con $k=2\longrightarrow\frac{5}{3}\pi$

$\boxed{\left\{\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5}{3}\pi\right\}}$

---

(8) Mod e arg di $z=\left(\frac{2}{i}\right)^8$ sono:

Levo la i dal denominatore $\longrightarrow\left(\frac{2}{i}\cdot\frac{i}{i}\right)^8=(-2i)^8$

Siccome $a=0, b<0$, allora $\vartheta=\frac{3}{2}\pi\cdot 8=\frac{24}{2}\pi=12\pi=0$ o $2k\pi$

$\rho=\sqrt{0+(-2)^2}=(2)^8=256$

---

(9) Mod e arg di $z=\left(\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^8$

Levo i dal denominatore $\longrightarrow\left(\frac{\sqrt{3}}{i}\,\frac{i}{i}\right)^8=(-\sqrt{3}i)^8$

Siccome $a=0, b<0$, allora $\vartheta=\frac{3}{2}\pi\cdot 8=\frac{24}{2}\pi=\frac{12}{\cancel{[illegible]}}\pi=0$

$\rho=\sqrt{0+(\sqrt{3})^2}=(\sqrt{3})^8=3^{8/2}=3^4=(3^2)^2=9^2$ SOLUZIONE $\boxed{9^2,0}$

---

(10) $z^4=-16$, allora l'argomento di z è:

$z^4=-16$, allora $z=\sqrt[4]{-16}=-2i$ perché $2^4=16$ $\longrightarrow$ 

Dunque $\vartheta=\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}$. Essendo una radice trovo:

$\vartheta_0=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{4}k\pi$ con $k=0$ $\frac{\pi}{4}$

$\vartheta_1=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{4}k\pi$ con $k=1$ $\frac{\pi}{4}+\frac{2}{4}\pi=\frac{3}{4}\pi$

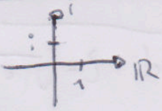
$\vartheta_2=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{4}k\pi$ con $k=2$ $\frac{\pi}{4}+\frac{4}{4}\pi=\frac{5}{4}\pi$

$\vartheta_3=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{4}k\pi$ con $k=3$ $\frac{\pi}{4}+\frac{6}{4}\pi=\frac{7}{4}\pi$

$\boxed{\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi\right\}}$

---

(11) Mod e arg di $z=(1+i)^4$ sono:



$\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ quindi $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}^{\,4}=2^{4/2}=4$

$\vartheta=?$ Siccome $a>0$, $\vartheta=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)=\arctan(1)=\frac{\pi}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4}=\pi$ $\longrightarrow$ $\boxed{4,\pi}$

---

(12) Mod e arg di $z=\left(\frac{2}{i}\right)^{-7}$ sono:

Levo i $\longrightarrow\left(\frac{2}{i}\cdot\frac{i}{i}\right)^{-7}=(-2i)^{-7}$

Dunque $a=0, b<0$, allora $\vartheta=\frac{3}{2}\pi\cdot(-7)=-\frac{21}{2}\pi$ Siccome è periodico per $2\pi=\frac{4}{2}\pi$

Allora levo multipli di 4, $\vartheta=-\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$

$\rho=\sqrt{0+(-2)^2}=2^{-7}=\frac{1}{2^7}=\frac{1}{128}$ $\boxed{1/128,-\pi/2}$

---

(13) Mod e arg di $z=i^{2011}$ sono:

$\rho=\sqrt{0+1^2}=1^{2011}=1$

$\vartheta=?$ Siccome $a=0, b>0$, $\vartheta=\frac{\pi}{2}\cdot2011=\frac{2011}{2}\pi$

Levo multipli di 4, cioè i primi $\frac{2008}{2}$, rimane $\frac{3}{2}\pi=-\frac{\pi}{2}$ $\boxed{1,-\pi/2}$

---

(14) Mod e arg di $z=(1+i)^{-4}$

$\rho=\sqrt{1^2+1^2}=\left(\sqrt{2}\right)^{-4}=\frac{1}{2^{4/2}}=\frac{1}{4}$

$\vartheta=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)=\arctan\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{\cancel{4}}\cdot-\cancel{4}=-\pi=\pi$ $\boxed{1/4,\pi}$

(15) Mod e arg di $z=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{34}$

$\rho=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1^{34}=1$

$\vartheta=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)=\arctan\left(\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}\right)=\arctan\left(\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)=\frac{\pi}{4}\cdot 34=\frac{17}{2}\pi$

Levo multipli di 4, ovvero i primi $\frac{16}{2}$, rimane $\frac{\pi}{2}$ $\boxed{1, \pi/2}$

---

(16) Gli argomenti delle soluzioni di $z^2+z+1=0$ sono:

È un'equazione di 2° grado $\longrightarrow \Delta=b^2-4ac=1-4=-3$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

In pratica $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$, quindi $\sqrt{-3}=\sqrt{3}\,i$

Devo trovare α: $\cos(\alpha)=-1/2$ e $\sin(\alpha)=\pm\sqrt{3}/2$ ovvero $\boxed{\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi}$

---

(17) La parte reale di $\ln(\|i\|)(i+1)^4$ vale:

So che $\|i\|=1$ perché è il modulo. Dunque $\ln(1)=0$, quel numero è $=0$

---

(18) Sia $z=-i$, allora la parte reale di $(z^2\cdot\bar{z}^*)^4$ vale:

$(z^2\cdot\bar{z}^*)^4=\left[(-i)^2\cdot(+i)\right]^4=\left[1\cdot i\right]^4=i^4$

Allora $\vartheta=\frac{\pi}{2}\cdot 4=2\pi=0$ mentre $\rho=\sqrt{0+1^2}=1^4=1$

Riscrivo $1\cdot(\cos(0)+i\sin(0))=\boxed{1}$

---

(19) Il numero $z^2\|z\|$ se $z=e^{2+i}$ vale?

$z=e^{2+i}=e^2e^i=e^2(\cos(1)+i\sin(1))$

Quindi $z^2=e^4(\cos(2\cdot 1)+i\sin(2\cdot 1))=e^4(\cos(2)+i\sin(2))$ mentre $\|z\|=e^2$

Allora $z^2\|z\|=e^4(\cos(2)+i\sin(2))\cdot e^2=e^6(\cos(2)+i\sin(2))$

---

(20) Dato $w=1+i\pi$, allora mod e Arg di e^w:

$e^w=e^{1+i\pi}=e^1\cdot e^{i\pi}=e\cdot e^{i\pi}$. Dalla definizione di forma esponenziale, $\rho=e$ $\vartheta=\pi$

21) Quanto vale $z = \overline{1+i}\; e^{-i\pi/2}$?

$\overline{1+i} = 1-i$ per definizione di coniugato

$e^{-i\pi/2} = e^{i(-\pi/2)} = 1 \cdot \left(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -i$

Allora $z = \overline{1+i}\, e^{-i\pi/2} = (1-i)(-i) = -i + i^2 = \boxed{-i-1}$

---

22) Mod e Arg di $z = 1 + i^{2015}$

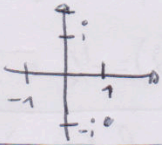
Trasformo prima i^{2015} $\to$ $\rho = \sqrt{0+1} = 1^{2015} = 1$

$\to$ $\vartheta = \frac{\pi}{2} \cdot 2015 = \frac{2015}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi$

Dunque $i^{2015} = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = -1$

Allora $z = 1 - i$ $\to$ $\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\to$ $\vartheta = \frac{7}{4}\pi = -\frac{\pi}{4}$ perché



$\boxed{\sqrt{2},\ -\pi/4}$

---

23) Mod e arg di $z = i^{44}$ sono:

$\rho = \sqrt{0+1^2} = 1^{44} = 1$

$\vartheta = \frac{\pi}{2}$ perché $a=0, b>0$, allora $\frac{\pi}{2} \cdot 44 = 22\pi = 0$. Però anche $44\pi = 0$, allora

è solo un modo diverso di chiamare lo stesso valore $\boxed{1,\ 44\pi}$

---

24) Quanto vale $\left(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)\right)^{2015}$?

$\left(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)\right) = (0 + i) = i$

Dunque i^{2015} che sappiamo fare $-i$ (esercizio 22)

---

25) L'argomento di $i\,\frac{e^{i27\pi}}{e^{i54\pi}}$ vale:

$e^{i27\pi} = 1 \cdot \left(\cos(27\pi) + i\sin(27\pi)\right) = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$

$e^{i54\pi} = 1 \cdot \left(\cos(54\pi) + i\sin(54\pi)\right) = \cos(0) + i\sin(0) = 1$

Allora $i\,\frac{e^{i27\pi}}{e^{i54\pi}} = i \cdot \frac{-1}{1} = -i$

Siccome $a=0, b=-1$, $\vartheta = \frac{3}{2}\pi = -\frac{\pi}{2}$

(26) L'insieme definito da $\{x \in \mathbb{R},\ x < |4i-3|\}$ è:

Chiede $|4i-3| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

Dunque l'insieme delle $x<5$, ovvero $-\infty < x < 5$

---

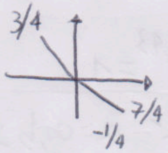
(27) L'argomento di z con $z^2 = \frac{1}{i}$ è:

Trasformo $\frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = -i$ che ha come $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ perché è

Allora $z^2 = -i$, $z = \pm\sqrt{-i}$. Gli argomenti saranno

$\vartheta_0 = \frac{\frac{3}{2}\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}$ con $k=0 \Rightarrow \frac{3}{4}\pi$

$\vartheta_1 = \frac{\frac{3}{2}\pi}{2} + \frac{2k\pi}{2}$ con $k=1 \Rightarrow \frac{7}{4}\pi = -\frac{\pi}{4}$ perché



---

(28) Soluzioni di $16z^2 - z^6 = 0$ con parte immaginaria negativa

Riscrivo $16z^2 - z^6 = z^2(16 - z^4)$ che ha soluzioni $0, 2i, -2i$

Solo $-2i$ ha parte immaginaria negativa

---

(29) La disequazione $|x| \leq |z|$ è vera con: $(z \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R})$

(a) $z = 2i^3 = 2(-i) = -2i \longrightarrow |z| = \sqrt{0+(-2)^2} = 2$
$x = 3 \longrightarrow |x| = |3| = 3$ FALSA $3 \geq 2$

(b) $z = 1+i \longrightarrow |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
$x = -3 \longrightarrow |x| = |-3| = 3$ FALSA $3 \geq \sqrt{2}$

(c) $z = \frac{3}{i} - 2i \longrightarrow |z| = \frac{3}{i} \cdot \frac{i}{i} - 2i = -3i - 2i = -5i = \sqrt{0+(-5)^2} = 5$
$x = \pi \longrightarrow |x| = \pi$ Vera $5 \geq \pi$

---

(30) Il numero $e^{(\pi e^{i\pi/2})}$ vale:

Trasformo $\pi e^{i\pi/2} = \pi(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)) = \pi(0+i) = i\pi$

Quindi $e^{(\pi e^{i\pi/2})} = e^{i\pi} = 1 \cdot (\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 1 \cdot (-1+0) = \boxed{-1}$

(31) Le soluzioni di $\bar{z} \cdot z = |z|$ sono:

$$\bar{z} \cdot z = |z| \longrightarrow (a-ib)(a+ib) = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$a^2+b^2 = \sqrt{a^2+b^2}$$

Che è vera ogni volta che ho qualcosa di uguale alla sua radice, quindi ogni volta che $a^2+b^2=0$ o 1

---

(32) Mod e Arg di $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{43}$

Trasformo $\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i+i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = (i)^{43}$

$\rho = \sqrt{0+1} = 1^{43} = 1$

$\vartheta = \frac{\pi}{2}$ perché $a=0, b>0$. Allora $\frac{\pi}{2} \cdot 43 = \frac{43}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi$

$\boxed{1, 3/2\,\pi}$

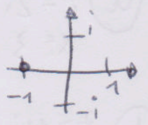
---

(33) Mod e Arg di $\frac{(e^{i\pi/2})^2}{|e^{i\pi}|}$

Trasformo $(e^{i\pi/2})^2 = e^{i\pi/2 \cdot 2} = e^{i\pi} \longrightarrow 1(\cos(\pi)+i\sin(\pi)) = 1(-1+0) = -1$

Potevo anche fare $(e^{i\pi/2}) = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1(0+i) = (i)^2 = -1$

Il denominatore è modulo di $e^{i\pi} = 1(\cos(\pi)+i\sin(\pi)) = |-1| = 1$



Dunque ho $\frac{-1}{1} = -1$ che ha modulo $=1$ e argomento $=\pi$

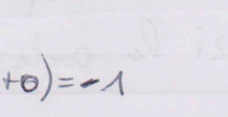
Dire $\pi = 43\pi$ perché levo $2k\pi$ da 43 (ovvero 42π) e rimane $1 \cdot \pi = \pi$

---

(34) Mod e arg di $z = (\ln|i| + i\ln|2i|)^2$

Osservo $|i| = \sqrt{0+1^2} = 1$ e anche $|2i| = \sqrt{0+2^2} = \sqrt{4} = 2$

Riscrivo $z = (\ln(1)+i\ln(2))^2 = (i\ln(2))^2$



Ancora, $i^2 = -1$, allora ottengo $(i\ln(2))^2 = -\ln^2(2)$

Dunque l'angolo è π, e il modulo $\sqrt{\ln^4(2)+0} = \ln^2(2)$

$\boxed{\ln^2(2), \pi}$

(35) Dati gli insiemi $A=\{w\in\mathbb{C} : Re(w)=0\}$, $B=\{z\in\mathbb{C} : z=\sqrt{w}, w\in A\}$

il minimo per $|z|$, $z\in B$ è:

Le z che cerco sono nella forma $\sqrt{w}$ con $Re(w)=0$, dunque cerco il minimo in un valore assoluto, $|z|$, dove non può essere <0 in quanto ogni valore negativo, dentro $|z|$, diventa positivo. Allora, ignorando il consolo, si può concludere che il minimo vale 0, essendo $\sqrt{w}$ un generico numero complesso. Se invece si intendeva $w=0$, allora $\sqrt{w}$ è sempre $=0$.

---

(36) Le intersezioni fra

$$A=\{z\in\mathbb{C} : z(\bar{z}+1)=1\} \qquad B=\{z\in\mathbb{C} : z(\bar{z}+i)=1\}$$

Ricavo z da entrambi

$$\longrightarrow z(\bar{z}+1)=1 \longrightarrow z=\frac{1}{\bar{z}+1}$$

$$\longrightarrow z(\bar{z}+i)=1 \longrightarrow z=\frac{1}{\bar{z}+i}$$

Allora $\frac{1}{\bar{z}+1}=\frac{1}{\bar{z}+i}$ da cui $\cancel{\bar{z}}+1=\cancel{\bar{z}}+i$, $1=i$ che è un assurdo.

Dunque le condizioni date dei due insiemi NON possono coesistere, e non si possono avere intersezioni. RISPOSTA: 0

---

(37) Quanto vale $28|i|+i+i^{2020}$

Il modulo di i è 1, allora $28|i|=28\cdot 1=28$

i^{2020} è $\rho=\sqrt{0+1^2}=1^{2020}=1$

$$\vartheta=\frac{\pi}{2}\cdot 2020=1010\pi=0$$

Allora $i^{2020}=1\cdot(\cos(0)+i\sin(0))=1$, ottengo $28+i+1=29+i$

---

(38) Numero intersezioni fra $A=\{z\in\mathbb{C} : z\bar{z}=4\} \cap B=\{z\in\mathbb{C} : Re(z)=\pi/2\}$

Osservo $z\bar{z}=4 \longrightarrow (a+ib)(a-ib)=a^2+b^2=4$

La condizione affinché ci siano intersezioni è $Re(z)=\pi/2$, ovvero

$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+b^2=4$, da cui $b=\pm\sqrt{4-\frac{\pi^2}{4}}$

ovvero 2 punti in comune, quindi 2 intersezioni

(39) L'insieme definito da $\{x \in \mathbb{R}, x > |2i-2|\}$ è

Basta fare modulo di $2i-2 \rightarrow \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Allora è l'insieme dato dalle $x > 2\sqrt{2}$

---

(40) Elementi di $\{z \in \mathbb{C} : || z^3-1 || < 1\}$

Ovvero, sapendo $|x| < 1 \rightarrow -1 < x < 1$, allora

$-1 < z^3 - 1 < 1$

$0 < z^3 < 2$, ovvero $0 < z < \sqrt[3]{2}$

---

(41) Il numero complesso $i/(1+i) + (2i)^{-1}$ vale:

$$\frac{i}{1+i} + (2i)^{-1} = \frac{i}{1+i} + \frac{1}{2i} = \frac{-2+1+i}{(1+i)2i} = \frac{-1+i}{2i-2}$$

Uso il trucco di moltiplicare e dividere per il coniugato:

$$\frac{-1+i}{2i-2} \cdot \left(\frac{-2i-2}{-2i-2}\right) = \frac{-2i+2+2+2i}{8} = \frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

INTEGRALI

Bisogna fare moltissimi esercizi. Il concetto è di trovare una primitiva e calcolarla in due valori. Esempio:

Sapendo $(x^2)' = 2x$, se ho $\int 2x = x^2$, quindi basta andare a ritroso.

Questo nei casi semplici. Per quelli più schifosi esistono alcuni metodi:

PER PARTI: $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$, per esempio

$$\int_0^1 xe^x = xe^x\Big|_0^1 - \int e^x \cdot 1 = xe^x - e^x\Big|_0^1$$

E adesso? Si calcola in 1, poi si sottrae quello in 0

Cioè $xe^x - e^x\Big|_0^1 = \cancel{e^1} - \cancel{e^1} - (0 \cdot e^0 - e^0) = 1$

PER SOSTITUZIONE:

$$\int_1^2 \frac{1}{(3+2x)^3}\,dx$$

Chiamo $T = 3+2x$, la cui derivata $dT = 2$

Allora devo sostituire T e dividere per 2.

I nuovi valori sono → Con $x=1$, $3+2x = 5$
→ Con $x=2$, $3+2x=7$

Riscrivo: $\frac{1}{2}\int_5^7 \frac{1}{T^3}\,dT = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-3}T^{1-3}\Big|_5^7 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{T^2}\Big|_5^7 = -\frac{1}{196}+\frac{1}{100}$

☹ Ho scelto un esempio brutto, ma basta capire il concetto...

Infine → Trovo una primitiva, tipo $\int_0^1 \sin(x)$, la primitiva è $-\cos(x)$ e la calcolo in 1, poi ci sottraggo quella in 0:

$$\int_0^1 \sin(x) = \cos(x)\Big|_0^1 = \cos(1) - \cos(0) = \cos(1) - 1$$

① $\int_{-1}^{1} |x|e^x \, dx$

Devo dividere l'integrale dove si divide il valore assoluto. Per avere $|x|=0$ serve $x=0$, dunque quel termine sarà $>$ o $<$ di 0 spostandosi da quest'ultimo.

Riscrivo: $-\int_{-1}^{0} xe^x + \int_{0}^{1} xe^x$ che risolvo per parti

$$= -\left(xe^x\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^x\right) + xe^x\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} e^x = -xe^x + e^x\Big|_{-1}^{0} + xe^x - e^x\Big|_{0}^{1} =$$

$$= 1 - \frac{2}{e} + 0 - (-1) = 2 - \frac{2}{e} \longrightarrow \frac{2e-2}{e} = \boxed{\frac{2(e-1)}{e}}$$

② $\int_{-1}^{2} |x| \, dx$

Ancora, $|x|=0$ se $x=0$, divido in 0

$$-\int_{-1}^{0} x + \int_{0}^{2} x = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} = 0 + \frac{1}{2} + 2 - 0 = \boxed{\frac{5}{2}}$$

③ $\left|\int_{-1}^{1} e^{|x|} \, dx\right|$ ancora negativa se <0

$$= \left|\int_{-1}^{0} e^{-x}\right| + \left|\int_{0}^{1} e^x\right| = -e^{-x}\Big|_{-1}^{0} + e^x\Big|_{0}^{1} = -1-(-e)+e-1 = 2e-2 = \boxed{2(e-1)}$$

④ $\int_{-1}^{2} |-x^3| \, dx$, ancora negativa se <0

$$= \int_{-1}^{0} -x^3 + \int_{0}^{2} x^3 = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2} = 0 - \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{16}{4} + 0 = \boxed{\frac{17}{4}}$$

⑤ $\int_{-1}^{3} |x^3| \, dx$ come sopra

$$-\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{3} = 0 + \frac{1}{4} + \frac{81}{4} - 0 = \frac{82}{4} = \boxed{\frac{41}{2}}$$

⑤ Sia $f(x) = \frac{x}{|x|}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ allora

$\int_{-1}^{2} f(x)$ vale:

Dunque $|x|>0$ o <0 come per i precedenti esercizi

Si divide in $\frac{x}{x}$ ed $\frac{x}{-x}$ ovvero 1 ed -1

Riscrivo $-\int_{-1}^{0} 1 + \int_{0}^{2} 1 = -x\Big|_{-1}^{0} + x\Big|_{0}^{2} = 0-1+2-0 = \boxed{1}$

---

⑥ $\int_{1}^{0} \frac{x}{x^2+1} \, dx$

$1>0$, dunque riscrivo $-\int_{0}^{1} \frac{x}{x^2+1} \, dx$

Per sostituzione, $T = x^2$, $dT = 2x$ dunque divido per $\frac{1}{2x}$

$-\int_{0}^{1} \frac{x}{(T+1)2x} = -\frac{1}{2}\int_{0}^{1} \frac{1}{T+1} \, dT$. Si osserva che con $x=1$ ed $x=0$, x^2 rimane 1 e 0, dunque gli estremi di integrazione rimangono uguali.

$-\frac{1}{2}\int_{0}^{1} \frac{1}{T+1} \, dT = -\frac{1}{2}\ln(T+1) \Big|_{0}^{1} = -\frac{1}{2}\ln(2) - \left(-\frac{1}{2}\ln(1)\right) = -\frac{1}{2}\ln(2) + 0 = \boxed{-\frac{\ln(2)}{2}}$

---

⑦ $\int_{1}^{e} \log(x^2) \cdot \frac{1}{x} \, dx$

Per sostituzione: $T = x^2$, $dT = 2x$, dunque divido per $\frac{1}{2x}$

Osservo che in "e" ed 1, T fa "e" ed 1, dunque gli estremi rimangono uguali $\longrightarrow \int_{1}^{e} \log(T) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2x}$ ..... ed ora? Senza scoraggiarsi, ripartire da capo:

Provo $T = \log(x^2)$, $dT = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$, dunque divido per $\frac{x}{2}$ (cioè, moltiplico, ma ci siamo capiti dai):

$\int_{0}^{2} T \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{\cancel{x}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{T^2}{2}\Big|_{0}^{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{4}{4} - 0 = \boxed{1}$

Gli estremi sono 2 e 0 perché calcolo e,1 in $\log(x^2)$

(8) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(3x)\,dx$

Se $(\cos(3x))' = -\sin(3x)\cdot 3$, allora basta dividere per tre e metterci un meno davanti. Cioè calcolo

$$-\frac{\cos(3x)}{3}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{-\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)}{3} - \left(\frac{-\cos(0)}{3}\right) = 0 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

(9) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} T\cos(T)\,dT$

Vado per parti: osservo che $(T)' = 1$, dunque lo uso come u.
Assegno $u = T$ e $dv = \cos(T)$, applico la formula:

$$T\sin(T)\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} - \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(T)\cdot 1 = T\sin(T) + \cos(T)\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = \pi/2 + 0 - \left(\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}}$$

(10) $\displaystyle\int_2^{e} \frac{1}{\ln(x)\,x}\,dx$

Per sostituzione, $T = \ln(x)$ da cui $dT = \frac{1}{x}$ dunque moltiplico per x
In $e, 2$ $\ln(x)$ fa 1 e $\ln(2)$. Scrivo:

$$\int_{\ln(2)}^{1} \frac{1}{Tx}\cdot x = \ln(T)\Big|_{\ln(2)}^{1} = \ln(1) - \ln(\ln(2)) = \boxed{-\ln(\ln(2))}$$

(11) $\displaystyle\int_{-2}^{1} |x+1|\,dx$

Divido rispetto a dove si annulla. In questo caso $x+1=0$ se $x=-1$

Allora $$-\int_{-2}^{-1} x+1 + \int_{-1}^{1} x+1 = -\frac{x^2}{2} - x\Big|_{-2}^{-1} + \frac{x^2}{2} + x\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2} + 1 - (-2+2) + \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

(12) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\, dx$

Sapendo $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}\cdot(x)'$, allora $\left(\ln(\sin(x))\right)' = \frac{1}{\sin(x)}\cdot\cos(x)$

Calcolo $\ln(\sin(x))\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \ln(1) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\left(\ln(1) - \ln(\sqrt{2})\right) = \ln(\sqrt{2}) = \boxed{\frac{1}{2}\ln(2)}$

Ricordando: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2^{1/2}}{2^1} = \frac{1}{2^{1-1/2}} = \frac{1}{2^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ed anche

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

---

(13) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{x+1}\, dx$

Faccio $+1-1$ al numeratore. Ho $\frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

Riscrivo $\int_0^3 1 - \int_0^3 \frac{1}{x+1} = x\Big|_0^3 - \ln(x+1)\Big|_0^3 = 3 - 0 - \left(\ln(4) - \ln(1)\right) = \boxed{3 - \ln(4)}$

---

(14) $\displaystyle\int_1^e x\ln(x)\, dx$

Si può fare sia per parti che per sostituzione? Con $T = \ln(x)$, $dT = \frac{1}{x}$ non va bene.

Vado per parti $\longrightarrow \ln(x)\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x} = \ln(x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \left(0 - \frac{1}{4}\right) =$

$= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{e^2+1}{4}}$

---

(15) $\displaystyle\int_0^e \ln(x)\, dx$

Immagino $\int_0^e 1\cdot\ln(x)$ e per parti $\longrightarrow \ln(x)\cdot x\Big|_0^e - \int_0^e x\cdot\frac{1}{x} = x\ln x - x\Big|_0^e = \boxed{0}$

(16) $\int_0^2 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$

Sapendo $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, allora ci la $\sqrt{x^3}$ per avere la formula?

Purtroppo bisogna ricordarsi $(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, allora:

$$\int_0^2 \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}} = \int_0^2 x^2 + \int_0^2 x + \int_0^2 1 = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\Big|_0^2 = \frac{8}{3}+2+2-(0+0+0) = \boxed{20/3}$$

(17) $\int_{-1}^{1} \sin^3(x)\,dx$

Bisogna ricordarsi che $(\sin^4(x))' = 4\sin^3(x)\cos(x)$. Allora basta dividere per $4\cos(x)$ e si ha il nostro elemento cercato. Cos'è che derivato dà $\sin^3(x)$!

$$+\frac{\sin^4(x)}{4\cos(x)}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\sin^4(1)}{4\cos(1)} - \left(\frac{-\sin^4(1)}{4\cos(1)}\right) = \frac{\sin^4(1)}{2\cos(1)} \ldots$$ ERRATO! Nel derivare $\frac{\sin^4(x)}{4\cos(x)}$ non potrei ignorare il denominatore.

Allora tento un'altra strada. Provo per sostituzione

$T=\cos(x)$, $dT=-\sin(x)$, posso riscrivere $\int \sin^2(x)\cdot\sin(x)\cdot\left(\frac{-1}{\sin(x)}\right) = -\int \sin^2(x)$

Adesso uso la formula $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ per ricavare $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)$.

Riscrivo $-\int 1-\cos^2(x)$. Ma io avevo sostituito $T=\cos(x)$, dunque ho trovato

$-\int 1-T^2 = -T+\frac{T^3}{3}$. Torno a $T=\cos(x)$, risolvo

$$-\cos(x)+\frac{\cos^3(x)}{3}\Big|_{-1}^{1} = -\cos(1)+\frac{\cos^3(1)}{3} - \left(-\cos(1)+\frac{\cos^3(1)}{3}\right) = \boxed{0}$$

(18) $\int_{1/e}^{e} |\ln(x)|\,dx$ RICORDA: $\ln(x)$ per parti!

C'è un valore assoluto. Osservo che $\ln(x)=0$ se $x=1$. Allora lo divido in

$$-\int_{1/e}^{1}\ln(x) + \int_1^e \ln(x) = -\left(x\ln(x)\Big|_{1/e}^{1} - \int_{1/e}^{1} x\cdot\frac{1}{x}\right) + x\ln(x)\Big|_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x} = -x\ln(x)+x\Big|_{1/e}^{1} + x\ln(x)-x\Big|_1^e =$$

$$= 1-\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\right)+e-e-(0-1) = \boxed{2-2/e}$$

(19) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{(x+1)^2}\, dx$

Ricorda che $\sqrt{x^2} \neq x$, $\sqrt{x^2} = |x|$

Dunque $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{(x+1)^2} = \int_{-2}^{2} |x+1|$ che si annulla per $\begin{matrix} x+1=0 \\ x=-1 \end{matrix}$, allora divido

$$-\int_{-2}^{-1} x+1 + \int_{-1}^{2} x+1 = -\frac{x^2}{2} - x\Big|_{-2}^{-1} + \frac{x^2}{2} + x\Big|_{-1}^{2} = -\frac{1}{2}+1-(-2+2)+2+2-\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{2}+4+\frac{1}{2} = \boxed{5}$$

---

(20) $\displaystyle 3\int_{1}^{e} \ln^2(x)\cdot\frac{1}{x}\, dx$

Sostituisco $T = \ln(x)$, $dT = \frac{1}{x}$ dunque devo moltiplicare per x.

Scrivo $\displaystyle 3\int_{1}^{e} T^2\cdot\frac{1}{x}\cdot x = 3\int_{1}^{e} T^2$ Calcolo gli estremi $\begin{cases} x=e\,,\ \ln(x)=1 \\ x=1\,,\ \ln(x)=0 \end{cases}$

Risolvo $\displaystyle 3\int_{0}^{1} T^2 = \frac{T^3}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}\Big|_{0}^{1} = 1-0 = \boxed{1}$

---

(21) $\displaystyle\int_{2}^{0} \frac{x}{x^2+1}\, dx$

Siccome $0<2$, riscrivo $\displaystyle -\int_{0}^{2} \frac{x}{x^2+1}$.

Il metodo più veloce è sostituire $T = x^2$, $dT = 2x$, dunque moltiplico per $\frac{1}{2x}$

Riscrivo $\displaystyle -\int_{0}^{2} \frac{x}{T+1}\cdot\frac{1}{2x} = -\int_{0}^{2} \frac{1}{2(T+1)}$.

Gli estremi diventano $\begin{cases} x=2\,,\ x^2=4 \\ x=0\,,\ x^2=0 \end{cases}$

Risolvo $\displaystyle -\frac{1}{2}\int_{0}^{4} \frac{1}{T+1} = -\frac{1}{2}\ln(T+1)\Big|_{0}^{4} = -\frac{1}{2}\ln(5) - \left(-\frac{1}{2}\ln(1)\right) = \boxed{\frac{-\ln(5)}{2}}$

RICORDA: $\frac{1}{2}\ln(5) = \frac{\ln(5)}{2} = \ln(5^{1/2}) = \ln(\sqrt{5})$

DIVERSO DA $\ln\left(\frac{5}{2}\right) = \ln(5) - \ln(2)$

(22) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{(x+2)^2}\,dx$

Sostituisco $T=x+2$. Da ciò ricavo: (1) $dT=1$ (2) $x=T-2$ e gli estremi $\to x=2,\ 2+2=4$; $x=1,\ 1+2=3$

Posso riscrivere $\displaystyle\int_1^2 \frac{T-2-1}{T^2} = \int_3^4 \frac{T-3}{T^2} = \int_3^4 \frac{\cancel{T}}{T^{\cancel{2}}} - \int_3^4 +\frac{3}{T^2} = \ln(T) - \frac{3}{T}\Big|_3^4 = \ln(4) - \frac{3}{4} -$

$-(\ln(3)-1) = \boxed{\ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{4}}$

---

(23) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{3x}-1}{e^{3x}-3x}\,dx$

Provo per sostituzione, con $T=e^{3x}$, $dT=e^{3x}\cdot 3$

Riscrivo $\displaystyle\int \frac{T-1}{T-3x}\cdot\frac{1}{3T}$. Non va bene perché rimangono sia T che x.

Provo con $T=e^{3x}-3x$, $dT=e^{3x}\cdot 3-3$

Riscrivo $\displaystyle\int \frac{T-1+3x}{T}\cdot\frac{1}{e^{3x}\cdot 3-3}$, osservo che $3e^x-3=3(e^x-1)$ che è ciò che ho al denominatore. Dunque rimane $\displaystyle\int \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\int\frac{1}{T}$

I nuovi estremi sono $\to x=0,\ e^{3x}=1$; $x=1,\ e^{3x}=e^3-3$

Allora $\displaystyle\frac{1}{3}\int_1^{e^3-3}\frac{1}{T} = \frac{1}{3}\ln(T)\Big|_1^{e^3-3} = \frac{1}{3}\ln(e^3-3) - \underbrace{\frac{1}{3}\ln(1)}_{0} = \boxed{\ln\left((e^3-3)^{1/3}\right)}$

---

(24) $\displaystyle\int_0^\pi (x-\pi)\sin(x)\,dx$

Procedo per parti, con $u=(x-\pi)$, perché derivato fa 1

$\displaystyle\int_0^\pi (x-\pi)\sin(x) = (x-\pi)(-\cos(x))\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x) = -(x-\pi)\cos(x)+\sin(x)\Big|_0^\pi = 0-(\pi) = \boxed{-\pi}$

---

(25) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x) = -\cos(x)\Big|_0^{+\infty}$ NON è integrabile in senso generalizzato in $[0,+\infty[$ perché N.E. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\cos(x)$

54

(26) $\int_0^1 xe^{-x^2+2}\,dx$

Provo per sostituzione, $T=e^{-x^2+2}$, $dT=e^{-x^2+2}(-2x)$

Scrivo $\int_0^1 xe^{-x^2+2}\cdot\frac{1}{e^{-x^2+2}(-2x)} = \int_0^1 -\frac{1}{2}$

I nuovi estremi di integrazione sono $\rightarrow x=1,\ e^{-x^2+2}=e$; $x=0,\ e^{-x^2+2}=e^2$

$\int_e^{e^2}\frac{1}{2} = \frac{x}{2}\Big|_e^{e^2} = \frac{e^2}{2}-\frac{e}{2} = \boxed{\frac{e^2-e}{2}}$

---

(27) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$

Vado per parti, con $u=x$

$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} = -xe^{-x}-e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 0-(0-1)=\boxed{1}$

Com'é stato possibile? Prima di tutto $\frac{x}{e^x}$ non ha MAI 0 al denominatore.
Poi $\frac{x}{e^x}$ é asintoticamente $\le \frac{1}{x^2}$, che converge a $+\infty$. Dunque si ha un integrale in un intervallo che risulta convergente.
Poi, non si deve sostituire $+\infty$ in x, ma fare $\lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x}-e^{-x}) = -\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}$ e siccome e^x cresce più velocemente di x, fa 0.

---

(28) $\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

Osservo $x\sqrt{x} = x^1\cdot x^{1/2} = x^{1+1/2}=x^{3/2}$. Dunque cos'è che derivato dà $x^{-3/2}$?
$x^{-3/2+1}=x^{-1/2}$. Allora $(x^{-1/2})' = -\frac{1}{2} x^{-3/2}$. Se moltiplico per (-2) ho quello che cerco.

$\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = -2x^{-1/2}\Big|_2^3 = -6^{-1/2} - \left(-4^{-1/2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{2} = \frac{-2+\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}$ ... ERRORE!!!

$-2x^{-1/2} \ne -2(x^{-1/2})$ Riscrivo $-2(x^{-1/2}) = -\frac{2}{\sqrt{x}}\Big|_2^3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}-\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{-\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}}$

(29) $\int_2^4 \frac{1}{1-x^2}\,dx$

Ricordo $(a^2-b^2)=(a+b)(a-b)$.

Riscrivo $\int_2^4 \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int_2^4 \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \int_2^4 \frac{1}{1-x} + \int_2^4 \frac{1}{1+x} = \ln(1-x)+\ln(1+x)\Big|_2^4 = \ln(3)+\ln(5)-(\ln(1)+\ln(3))$

$= \ln(3)$ ... Errato!!

Perchè ho $\frac{1}{(1-x)(1+x)}$ e non $\frac{1}{(1-x)+(1+x)}$ (anche se neanche così andrebbe bene).

Devo procedere con la scomposizione.

$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$

Ricavo $A \to 1-x$ si annulla per $x=1$, allora $A = -\frac{B\cancel{(1-x)}}{1+x} + \frac{\cancel{(1-x)}}{\cancel{(1-x)}(1+x)} = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$

Ricavo $B \to 1+x$ si annulla per $x=-1$, allora $B = \frac{A\cancel{(1+x)}}{1-x} + \frac{\cancel{(1+x)}}{\cancel{(1+x)}(1-x)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Dunque $\int_2^4 \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int_2^4 -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}\int_2^4 -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}\left(-\ln(1-x)+\ln(1+x)\right)\Big|_2^4 =$

$= \frac{1}{2}\left(-\ln(3)+\ln(5)\right) - \frac{1}{2}\left(-\ln(1)+\ln(3)\right) = -\frac{1}{2}\ln(3) + \frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{2}\ln(3) = \boxed{\ln(\sqrt{5})-\ln(3)}$

---

(30) $\int_{-\infty}^{\sqrt{e}} 4xe^{-x^2}\,dx$

Provo per sostituzione, $T=e^{-x^2}$, $dT = e^{-x^2}\cdot(-2x)$, dunque moltiplico per $\frac{1}{e^{-x^2}(-2x)}$

$\int_{-\infty}^{\sqrt{e}} 4xe^{-x^2}\cdot\frac{1}{-2xe^{-x^2}} = \int -2$.

I nuovi estremi sono $\to x=\sqrt{e},\ e^{-x^2} = e^{-e}$

$\to x=-\infty,\ e^{-x^2} = e^{-\infty} = 0$

$-\int_0^{e^{-e}} 2 = -2x\Big|_0^{e^{-e}} = -2e^{-e} - (-2\cdot 0) = \boxed{-2e^{-e}}$

31) $\int_0^2 \sqrt{1+|x|}\, dx$

$|x|$ non é rilevante, perché $x=0$ in 0, e l'intervallo é $[0,2]$. Dunque

Scrivo $\int_0^2 \sqrt{1+x} = \int_0^2 (1+x)^{1/2} = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}(3^{3/2}) - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3^3} - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{\cancel{3}}\cancel{3}\sqrt{3} - \frac{2}{3}}$

32) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x^2)}\, dx$

Sostituisco $T=\ln(x^2)$, $dT = \frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{x}$, dunque moltiplico per $\frac{x}{2}$

$\int_e^{e^2} \frac{1}{xT}\cdot\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{T}$

I nuovi estremi sono $\to x=e^2, \ln(x^2)=4$
$\to x=e, \ln(x^2)=2$

$\frac{1}{2}\int_2^4 \frac{1}{T} = \frac{1}{2}\ln(T)\Big|_2^4 = \frac{1}{2}\ln(4) - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{\cancel{2}}\ln(2^{\cancel{2}}) - \ln(\sqrt{2}) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \ln(\sqrt{2})$

Ricordando $\frac{1}{2}\ln(4) = \frac{1}{2}\ln(2^2) = \frac{1}{2}\cdot 2\ln(2) = \ln(2)$

33) $\int_{-1}^{\infty} e^{-|x|}\, dx$

C'é un valore assoluto. $|x|=0$ se $x=0$, allora divido in

$\int_{-1}^0 e^{-(-x)} + \int_0^{+\infty} e^{-(+x)} = e^x\Big|_{-1}^0 + (-e^{-x})\Big|_0^{+\infty} = 1 - \frac{1}{e} + (0) - (-1) = 2 - \frac{1}{e} = \boxed{\frac{2e-1}{e}}$

34) $\int_0^1 (1-x)^{1/\pi}\, dx$

So che $(a^x)' = xa^{x-1}$. Vado a ritroso, $(1-x)^{1/\pi}$ é la primitiva di $\left(\frac{1}{\pi}+1\right)(1-x)^{1/\pi+1}$

$\int_0^1 (1-x)^{1/\pi} = \left(-\frac{1}{\pi}+1\right)(1-x)^{1/\pi+1}\Big|_0^1 = 0 - \left(-\frac{1}{\pi}+1\right)(1)^{1/\pi+1} = \frac{1}{\pi}+1$ ... NO

C'é un piccolo ma importantissimo errore. GIRA la pagina per scoprirlo.

Nel momento in cui ho $(x^5)' = 5x^4$, per esempio, nel cercare la primitiva non mi serve quel 5, ma una x tale che $5 \cdot x = 1$, dunque $1/5$ in questo caso. Nel nostro caso, non serve $\frac{1}{\pi}+1$, ma $\frac{1}{\pi}+1 = \frac{1+\pi}{\pi}$ reciproco, quindi $\frac{-\pi}{1+\pi}$

Risolvo $\int_0^1 (1-x)^{1/\pi} dx = \frac{-\pi}{1+\pi}(1-x)^{1/\pi+1}\Big|_0^1 = 0 - \left(\frac{-\pi}{1+\pi}(1)^{1/\pi+1}\right) = \boxed{\frac{\pi}{1+\pi}}$

---

(35) $\int_1^2 \frac{x-1}{x^2-1} dx$ Ricordo $(a^2-b^2) = (a-b)(a+b)$

Allora $\int_1^2 \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{1}{x+1} \Rightarrow \ln(x+1)\Big|_1^2 = \ln(3)-\ln(2) = \boxed{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} \neq \frac{\ln(3)}{2}$

---

(36) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x(\ln(x)+1)}$

Per sostituzione $\to T = \ln(x)$, $dT = \frac{1}{x}$, allora moltiplico per x

$\int \frac{T}{x(T+1)} \cdot x = \int \frac{T}{T+1}$

Per sostituzione $\to z = T+1$, $dz = 1$ e dunque $T = z-1$

$\int \frac{z-1}{z} = \int \frac{z}{z} - \int \frac{1}{z} = z - \ln(z)$.

Quali sono gli estremi? $x = e \to \ln(x) = 1$, $x = 1 \to \ln(x) = 0$ Poi $x = 1 \to x+1 = 2$, $x = 0 \to x+1 = 1$

Calcolo $z - \ln(z)\Big|_1^2 = 2 - \ln(2) - (1 - \ln(1)) = \boxed{1 - \ln(2)}$

---

(37) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}$

Una primitiva è $\text{arctg}(x)$, ~~[illegible]~~

Ricordando $\lim_{x \to \pm\infty} \arctan(x) = \pm \pi/2$

Faccio $\text{arctg}(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ cioè $\left(\lim_{b\to+\infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}\right) - \left(\lim_{a\to-\infty} \arctan(a) = -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

Potevo anche fare $2\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 2\arctan(x)\Big|_0^{+\infty} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \cdot 0 = \boxed{\pi}$

(38)

(38) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+4x+5}{x^2-1}$

Sopra e sotto hanno lo stesso grado, sicché tento la divisione:

$$\begin{array}{l|l} x^2+4x+5 & x^2-1 \\ \hline -x^2 \qquad +1 & 1 \\ \hline \qquad 4x+6 & \end{array}$$

Seguo la regola che facendo $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$. Nel mio caso $\frac{x^2+4x+5}{x^2-1} = 1 + \frac{4x+6}{x^2-1}$

Ho $\displaystyle\int_2^3 1 + \frac{4x+6}{x^2-1} = \int_2^3 1 + \int_2^3 \frac{4x+6}{x^2-1}$

Devo scomporre la seconda parte:

$$\frac{4x+6}{x^2-1} = \frac{4x+6}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

Ricavo $A \longrightarrow A = -\frac{B(x+1)}{x-1} + \frac{4x+6}{x-1} \xrightarrow{x=-1} A = 0 + \frac{2}{-2} = -1$

$B \longrightarrow B = -\frac{A(x-1)}{x+1} + \frac{4x+6}{x+1} \xrightarrow{x=1} B = 0 + \frac{10}{2} = 5$

Ho: $\displaystyle\int_2^3 1 + \int_2^3 \frac{-1}{x+1} + \int_2^3 \frac{5}{x-1} = x - \ln(x+1) + 5\ln(x-1) \Big|_2^3 = 3 - \ln(4) + 5\ln(2) - (2 - \ln(3) + 3\ln(1)$

$= 3 - \ln(4) + 5\ln(2) - 2 + \ln(3) - 5 \cdot 0 = 1 + \ln(3) + 3\ln(2)$

(39)

39 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+3x^2}$

È simile a $\frac{1}{1+x^2}$ che è l'arcotangente. Per fortuna esiste una formula!

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+3x^2} = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\frac{4}{3}+x^2}$$ ora che ho isolato x^2, applico la formula

$$\boxed{\frac{1}{k}\arctan\left(\frac{x}{k}\right) + C}$$ Allora:

$$\frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\frac{4}{3}+x^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{3}}{3\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi\sqrt{3}}{4\cdot 3} =$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{4\sqrt{3}}}$$ ricordando $$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3^{1/2}}{3^1} = \frac{1}{3^{1-1/2}} = \frac{1}{3^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

---

40 $\displaystyle\int_{-1}^{1} |1-x|$

$1-x=0$ se $x=1$. Allora nell'intervallo $[-1,1)$ è negativo. Riscrivo:

$$-\int_{-1}^{1} 1-x = \frac{x^2}{2} - x\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - 1 - \left(\frac{1}{2}+1\right) = \boxed{-2}$$

---

41 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-1}$ $\longrightarrow$ Sostituisco $T=e^x$, $dT=e^x$ allora divido per e^x

$$\longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{T}{T(T^2-1)} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{T^2-1} = \frac{1}{(T+1)(T-1)} = \frac{A}{T+1} + \frac{B}{T-1}$$

RICAVO A $\longrightarrow A = \frac{-B(T+1)}{T-1} + \frac{1}{T-1} \xrightarrow{x\to -1} A = 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

RICAVO B $\longrightarrow B = \frac{-A(T-1)}{T+1} + \frac{1}{T+1} \xrightarrow{x\to 1} B = 0 + \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\int_e^{+\infty} \frac{1}{T-1} - \frac{1}{2}\int_e^{+\infty} \frac{1}{T+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{T-1}{T+1}\right)\Bigg|_e^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln(1) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)}$$

SERIE

Cosa vuol dire $\sum$?

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m}$$ si legge "SOMMATORIA PER i CHE VA DA 1 A m di $\frac{1}{m}$"

$i=1 \rightarrow$ INDICE

$\frac{1}{m} \rightarrow$ SUCCESSIONE

Quella serie inizia con $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}...+\frac{1}{m}$.

In pratica si prende una successione, in questo caso $\frac{1}{m}$ e si sommano le sue componenti scegliendo un n dentro un certo intervallo, in questo caso da 1 a m.

Prendiamo $m=4 \longrightarrow \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{m} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{25}{12}$

Le SERIE sono sommatorie a $+\infty$. Per esempio $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

Negli esami di analisi si deve (99% dei casi) studiare il "carattere" della serie. Entriamo nello specifico.

Una serie può essere a termini non negativi, a segni alterni oppure una serie di potenze. Si usano metodi DIVERSI a seconda del tipo di serie.

SERIE A TERMINI NON NEGATIVI:

per stabilire se CONVERGE bisogna vedere prima di tutto se, data (per esempio) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, il suo limite a $+\infty$ fa 0.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$, dunque potrebbe convergere.

 Se fosse venuto $\neq 0$, sicuramente NON convergeva.

Verificato ciò, bisogna usare uno dei criteri esistenti:

· Criterio del confronto: date due successioni a_n, b_n, tali che

$$0 \leq a_n \leq b_n \text{, allora:}$$

$$\cdot \text{ Se } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \leq +\infty \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq +\infty$$

$$\cdot \text{ Se } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$$

· Criterio del confronto asintotico: date due successioni $a_n, b_n \geq 0$ tali che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0 \quad \text{allora}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \text{ se e solo se } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$$

· Criterio della radice: dato $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in \mathbb{R}$, allora

· Se $L < 1$ converge
· Se $L > 1$ · Diverge
· Se $L = 1$ BOH ☹

P.S. scrivere "converge" o $< +\infty$ è la stessa cosa. Così come "diverge" e $= +\infty$.

<u>IMPORTANTISSIMO</u>: esistono serie notevoli, da poter confrontare con serie più complicate. Basta conoscere:

① SERIE ARMONICA GENERALIZZATA: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $\begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge se } \alpha \leq 1 \end{cases}$

② SERIE GEOMETRICA: $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ $\begin{cases} \text{converge se } |q| < 1 \text{ e vale } \frac{1}{1-q} \\ \text{diverge se } |q| \geq 1 \end{cases}$

ⓡ

Quanto detto finora NON vale per le $\boxed{\text{SERIE A SEGNI ALTERNI}}$

Se capitano, con Berselli, devi sempre usare il CRITERIO DI LEIBNIZ:

① data una serie a segni alterni del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$

verifico che sia effettivamente a segni alterni

② Verifico che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

③ Verifico che $a_{n+1} \leq a_n$, cioè è decrescente.

Se ①, ②, ③ sono vere, la serie CONVERGE

---

3 ESEMPI IMPORTANTI, PRIMA DI INIZIARE CON SERIE PRESE DAGLI ESAMI:

① data $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ stabilire se converge. (TERMINI NON NEGATIVI)

ⓐ $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = 0 \longrightarrow$ OK

ⓑ So che $\frac{\sin x}{x} = 1$ dal limite notevole. Allora ho trovato una successione che si comporta come la mia:

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}{\frac{1}{n^{3/2}}} = 1$. Sostituisco $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ che è nella forma $\frac{1}{n^\alpha}$ con

$\alpha = 3/2 > 1$. Dunque converge, per confronto con la serie armonica generalizzata.

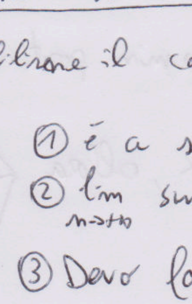
---

② $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ stabilirne il carattere (è a segni alterni).

USO LEIBNIZ: ① è a segni alterni, per la presenza di $(-1)^n$

② $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \longrightarrow$ OK

③ Devo far vedere che $\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right)$



perché $\sin(x)$ è crescente fra $(0, 2\pi)$

Dunque converge.

$$③ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(n^3+\log(n)-\operatorname{arctg}(n)\right)\sin\left(\frac{2}{n^4}\right)}{e^{1/n}\left(\log(n)\right)^2}$$ ..... che roba è???

Noto che è a termini non negativi. Cerco allora un b_n che si comporti come la nostra a_n.

Ricorda: andando a $+\infty$, all'interno delle somme tengo SOLO ciò che cresce più velocemente.

Allora: $(n^3+\log(n)-\operatorname{arctg}(n))=n^3$, perché $\log(n)$ cresce meno velocemente di n, mentre $\operatorname{arctg}(n) \xrightarrow{+\infty} \frac{\pi}{2}$.

Noto anche che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{n^4}\right)}{\frac{2}{n^4}} = 1$.

Il numeratore diventa $n^3 \cdot \frac{2}{n^4}$. Il denominatore va bene così.

Riscrivo $\frac{n^3 \cdot \frac{2}{n^4}}{e^{1/n} \cdot \log^2(n)} = \frac{2}{n \cdot e^{1/n} \cdot \log^2 n}$. Andando a $+\infty$, $e^{1/n} = \sqrt[n]{e} = 1$.

Il due è una costante, dunque a $+\infty$ non conta. Rimane $2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ che converge per confronto a

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} \begin{cases} \text{converge se } \begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \end{cases} \\ \text{diverge se } \begin{cases} \alpha < 1 \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta \leq 1 \end{cases} \end{cases}}$$

ULTIMA NOTA: esiste anche il CRITERIO DEL RAPPORTO:

• data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a termini positivi, se

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}, \text{ allora } \begin{cases} \text{Se } L<1 \text{ converge} \\ \text{Se } L>1 \text{ diverge} \\ \text{Se } L=1 \text{ BOH...} \end{cases}$$

☹

Questo criterio l'ho trovato soltanto in 1 esercizio su 10 anni di esami, quindi tienine di conto, ma non troppo.

SERIE DI POTENZE:

Sono nella forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$. Devi trovare l'INSIEME DI CONVERGENZA, facendo $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 \to \text{RAGGIO} = +\infty \\ L \to \text{RAGGIO} = 1/L \\ +\infty \to \text{RAGGIO} = 0 \end{cases}$

PARTIAMO CON GLI ESAMI:

- consigli: · NON CONSIDERARE GLI INDICI. GLI METTO APPOSTA
  · NELLE SERIE DI POTENZE NON GUARDARE LE COSE FRA PARENTESI $(x-x_0)^n$

---

① $\sum^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ DOVE CONVERGONO?

So che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, allora sostituisco $\sum^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ che converge se e solo se $\boxed{\alpha>1}$

---

② $\sum^{+\infty} \frac{\arctan(n)}{n^\alpha}$.

Viene la tentazione di usare taylor, dove $\arctan(n)=n \to \frac{n}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ che converge per $\alpha>2$. SBAGLIATO. Taylor si può usare solo vicino a 0. Bisogna ricordare $\lim_{n\to+\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{2}$, cioè una costante e non conta niente. Rimane $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ a cui serve $\boxed{\alpha>1}$

---

③ $\sum^{+\infty} \frac{n+3}{(n+4)^\alpha}$

Andando a $+\infty$, nelle somme tengo solo chi cresce più velocemente. Dunque $\frac{n}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ a cui serve $\alpha-1>1$, $\boxed{\alpha>2}$

---

④ $\sum^{+\infty} \frac{1+\alpha^2 n}{n^2}$

Andando a $+\infty$, elimino 1. Rimane $\frac{\alpha^2 n}{n^2} = \frac{\alpha^2}{n^{2-1}} = \frac{\alpha^2}{n}$

Dato un qualsiasi $\alpha>0$ o $\alpha<0$ ottengo una costante (che è inutile a $+\infty$) sopra n, dunque $\frac{1}{n}$ che non converge.

Serve allora $\boxed{\alpha=0}$, di modo che $\frac{\alpha^2}{n} = 0$, $\boxed{\sum^{+\infty} 0 \text{ converge}}$

⑤ $\sum^{+\infty} \frac{1+n^2}{n} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$

Nella somma $1+n^2$ rimane n^2 perché cresce più velocemente.

Osservo $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+n)}{n} = 1$, allora sostituisco $\ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ con $\frac{1}{n^\alpha}$.

Riscrivo $\frac{n^2}{n} \cdot \frac{1}{n^\alpha} = n \cdot \frac{1}{n^\alpha} = \frac{n}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Serve $\alpha-1>1$, $\boxed{\alpha>2}$

---

⑥ $\sum^{+\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)^\alpha}$

Nelle somme tengo solo chi cresce più velocemente. Rimane $\frac{1}{n \cdot n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha+1}}$

a cui serve $\alpha+1>1$, $\boxed{\alpha>0}$

---

⑦ $\sum^{+\infty} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^n$

É una serie GEOMETRICA di ragione $\frac{x-1}{x+2}$. Ovvero é q^n con $q=\frac{x-1}{x+2}$

Dunque serve $\left|\frac{x-1}{x+2}\right|<1 \longrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x+2}<1 \\ \frac{x-1}{x+2}>-1 \end{cases} \begin{cases} \cancel{-3<0} \\ 2x+1>0 \end{cases} \begin{cases} x>-\frac{1}{2} \end{cases}$

Converge per $|x|>-\frac{1}{2}$. ATTENZIONE: a volte nelle opzioni mette $|x|\geq-\frac{1}{2}$ e $|x|\geq-\frac{1}{2}$. DIFFIDATE DAL MINORE O UGUALE!!!!!

---

⑧ $\sum^{+\infty} \frac{e^{nx}}{n^2}$

Ricordando che $e^\alpha > n^2$, la serie diverge se e^α rimane al numeratore. Dunque se $x>0$ diverge. Se $x=0$ diventa $\frac{1}{n^2}$ che converge (SERIE ARMONICA). Se $x<0$ diventa $\frac{1}{e^{nx} n^2}$ che converge perché $\frac{1}{e^{nx}} < \frac{1}{n^2}$ e sappiamo che $\frac{1}{n^2}$ converge. Serve $\boxed{x \leq 0}$

---

⑨ $\sum^{+\infty} \frac{\ln(1+nx)}{n}$. Serve $\boxed{x=0}$, così da far accadere $\frac{\ln(1+0)}{n} = \frac{0}{n} = 0$ che converge. Invece per qualsiasi altro x si avrebbe una costante al numeratore (che a $+\infty$ non conta) e si ricondurrebbe alla serie $\sum^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha=1$, che diverge.

(10) $\sum^{+\infty} \frac{\alpha}{\sqrt[3]{n^\alpha+1}}$

Sicuramente con $\alpha=0$ CONVERGE, perché $\frac{0}{\sqrt[3]{1}}=0$ converge.

Altrimenti mando via le ~~cose~~ inutili dalla somma $\rightarrow \frac{\alpha}{\sqrt[3]{n^\alpha}}$

La "α" al numeratore è una costante, dunque va via.

Rimane $\sum^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha/3}}$ a cui serve $\frac{\alpha}{3}>1$ $\boxed{\boxed{\alpha=3} \cup \{\alpha=0\}}$

---

(11) $\sum^{+\infty} \left(\frac{1}{2}+q^3\right)^n$. È una serie geometrica, ed in generale converge per $|q|<1$, ma quella q è il nome di una variabile che cambia ogni volta. Dunque la risposta non è $|q|<1$, ma il risultato di $\left|\frac{1}{2}+q^3\right|<1$, visto che la nostra "$q$" $=\frac{1}{2}+q^3$. $\longrightarrow \left|\frac{1}{2}+q^3\right|<1 = \begin{cases} q^3<1-\frac{1}{2} \\ q^3>-1-\frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} q<\sqrt[3]{1/2}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{2^{1/3}} \\ q>\sqrt[3]{-3/2} \end{cases}$

RISPOSTA: $\boxed{q \in \left]\sqrt[3]{-3/2}, \frac{1}{2^{1/3}}\right[}$

---

(12) $\sum^{+\infty} 3^n \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$

Il 3 NON è una costante, è elevato alla n. Riscrivo $\sum^{+\infty} \left(\frac{3x}{x+1}\right)^n$

È una serie geometrica. Serve $\left|\frac{3x}{x+1}\right|<1 \longrightarrow 3x<x+1 \rightarrow 2x<1 \rightarrow \boxed{x<1/2}$

---

(13) $\sum^{+\infty} \frac{n+\log(n^3)}{n^3+\log(n^\alpha)}$ per $\alpha \geq 0$

C'è una somma, butto via chi è più lento a crescere, dunque rimane $\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ che converge $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}}$, visto che α compare solo come esponente in $\log(n)$.

---

(14) $\sum^{+\infty} \frac{e^n}{e^{\alpha n^2}}$ per $\alpha \geq 0$

Lo riscrivo come $\frac{1}{e^{\alpha n^2-n}}$ dalle proprietà delle potenze (per cui $\frac{n^\alpha}{n^\beta}=\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}$)

Serve $\alpha n^2-n>1$... ERRATO, perché $e^x>n^2$. Dunque, andando a tentativi, con $\alpha=0$ ho $\frac{1}{e^{0n^2-n}}=\frac{1}{e^{-n}}=e^n$ che diverge, perché $\sum^{+\infty}$ COSTANTE converge solo se la costante è uguale a 0. Dunque serve $\boxed{\alpha>0}$, affinché $\sum^{+\infty} \frac{1}{e^{\alpha n^2-n}} \leq \frac{1}{n^2}$

(15) $\sum^{+\infty} \frac{n+\ln(n^3)}{n^\alpha+\ln(n^\alpha)}$ Come la (13) rimane $\frac{n}{n^\alpha}=\frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Serve $\alpha-1>1$, $\boxed{\alpha>2}$

(16) $\sum^{+\infty} n!\sin\left(\frac{1}{n!}\right)$

Ricordo $\frac{\sin x}{x}=1$, allora riscrivo $n!\cdot\frac{1}{n!}=\frac{n!}{n!}=1$ e diverge, perché $\sum^{+\infty} 1$ non è infinitesima

(17) $\sum^{+\infty} \frac{n+\sin(n)}{1+n^2}$

Andando a $+\infty$, nelle somme tengo solo i più veloci a crescere.

Riscrivo $\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$ che diverge perché è nella forma $\frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha=1$

(18) $\sum^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n}{n^e}$ per $\alpha\geq 0$

Ricordo $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n=e^\alpha$. Riscrivo $\sum^{+\infty}\frac{e^\alpha}{n^e}$.

Se $\alpha=0$ ho $\sum^{+\infty}\frac{e^0}{n^e}=\frac{1}{n^e}$, siccome $e>2$ converge.

Se $\alpha<0$ ho $\sum^{+\infty}\frac{e^{-\alpha}}{n^e}=\frac{1}{e^\alpha n^e}$ è convergente. Dunque serve $\boxed{\alpha\leq 0}$

(19) $\sum^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$

Ricordo $\frac{\sin x}{x}=1$. Riscrivo $\sum^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$. Serve $\alpha+1>1$, $\boxed{\alpha\geq 0}$

(20) $\sum^{+\infty}\frac{1}{(n+\sqrt{3})(n+\sqrt{5})^\alpha}$

Va a più infinito, nelle somme rimane solo chi cresce più velocemente.

Dunque $\frac{1}{n\cdot n^\alpha}=\frac{1}{n^{\alpha+1}}$. Serve $\alpha+1>1$, $\boxed{\alpha>0}$

(21) $\sum^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{\lambda^2+\lambda}$

Osservo $\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. Allora riscrivo $\sum^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\lambda^2+\lambda}=\frac{1}{n^{\lambda^2+\lambda}}$

Serve $\lambda^2+\lambda>1 \longrightarrow \lambda^2+\lambda-1>0$, $\boxed{\lambda\in\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$

(22) $\sum^{+\infty} n^{-\ln(1+\alpha)}$

Dalle proprietà delle potenze $n^{-1}=\frac{1}{n}$. Riscrivo $\sum^{+\infty}\frac{1}{n^{\ln(1+\alpha)}}$

Serve $\ln(1+\alpha)>1$

$1+\alpha>e$

$\boxed{\alpha>e-1}$

(23) $\sum^{+\infty} \frac{1+n^\alpha}{1+n^\beta} = \frac{n^\alpha}{n^\beta}$ ... ormai sapreste dire il perché?

Perché andando a $+\infty$ butto via chi va più lentamente. Dunque

$\frac{\cancel{1}+n^\alpha}{\cancel{1}+n^\beta}$ perché $a+\infty <^{1=1}_{n=+\infty}$ ed $+\infty > 1$.

Rimane $\frac{n^\alpha}{n^\beta} = \frac{1}{n^{\beta-\alpha}}$. Serve $\boxed{\beta-\alpha>1}$

(24) $\sum^{+\infty} n^{-\arctan(a)}$

Riscrivo $\frac{1}{n^{\arctan(a)}}$. Serve $\arctan(a)>1$

$\boxed{a>\tan(1)}$

(25) ~~[illegible]~~ FINORA HO OMESSO GLI INDICI... QUAND'É CHE INVECE SERVONO

Se per esempio chiede di calcolare la somma della serie.

$\sum_{n=-2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = ???$ So che $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Dunque $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ é il risultato? Circa, ma l'indice parte da

$n=-2$, dunque manca $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, perché la serie geometrica parte da $n=0$.

Faccio $\frac{3}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3^{-1}} + \frac{1}{3^{-2}} = \frac{3}{2} + 3 + 9 = \boxed{27/2}$ é il risultato

(26) CALCOLA $\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Importante notare che si può calcolare solo se la ragione in valore assoluto è <1

In questo caso $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ e ok. Faccio $\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$, che è da 0 a $+\infty$. Ma a noi

serve da $n=3$. Si fa $3 - \sum_{n=0}^{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3 - \left(\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = 3 - 1 - \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \boxed{\frac{8}{9}}$

(27) CALCOLA $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}} = \frac{2 \cdot 2^{2n}}{3^{2n}}$ dalle proprietà delle potenze.

Riscrivo $2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} = \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Calcolo $2 \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n - \left(\frac{4}{9}\right)^0\right)$ perché parte da

$n=1$. Ottengo: $2 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}} - 1\right) = \boxed{\frac{8}{5}}$

(28) Determina la frazione che genera $0.7\bar{4} = 0.74444....$

Faccio $0.7\bar{4} = \frac{7}{10} + 4 \cdot 0{,}0\bar{1} = \frac{7}{10} + 4 \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{7}{10} + 4\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1 - \frac{1}{10}\right) = \boxed{\frac{67}{90}}$

ORA A SEGNI ALTERNI — nelle parti A non compaiono praticamente mai

(29) $\sum^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

(1) è a segni alterni ok

(2) $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)=0$ ok

(3) È decrescente ok CONVERGE

RAGGIO DI CONVERGENZA

inizialmente ometto le $(x-x_0)^n$ fra parentesi. NON vanno praticamente mai considerate nelle PARTI A

(30) $\sum^{+\infty} \frac{n\ln(n)}{e^n}$

Faccio $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n\ln(n)}{e^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\ln(n)}}{\sqrt[n]{e^n}} = \frac{1\cdot 1}{e} = \frac{1}{e}$

Il raggio è il reciproco del limite, dunque $\boxed{R=e}$

(31) $\sum^{+\infty} \frac{\ln(n)}{4^{n^2}}$

Faccio $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\ln(n)}{4^{n^2}}} = \frac{\sqrt[n]{\ln(n)}}{\sqrt[n]{4^{n^2}}} = \frac{1}{4^{n^2/n}} = \frac{1}{4^n} = 0$

Essendo 0, il raggio è tutto, dunque $\boxed{R=+\infty}$

(32) $\sum^{+\infty} (n^e+e^n)$

Faccio $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^e+e^n} = \sqrt[n]{e^n} = e$, perché nelle somme a $+\infty$ rimane solo chi cresce più velocemente $\boxed{R=1/e}$

(33) $\sum^{+\infty} \frac{n\cdot 3\cdot \ln(n^3)}{e^n}\left(x-\frac{1}{e}\right)^n$

La 30, 31, 32 erano esattamente come questa, ma ho omesso il termine $(x-x_0)^n$ che qua compare con $x_0=\frac{1}{e}$. Devo trattarla come le precedenti, ignorando quello che sta fra parentesi:

$\sum^{+\infty} \frac{n\cdot 3\cdot \ln(n^3)}{e^n}\cancel{\left(x-\frac{1}{e}\right)^n} = \frac{n\cdot 3\cdot \ln(n^3)}{e^n}$. Faccio $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n\cdot 3\cdot \ln(n^3)}{e^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{e^n}} = \frac{1}{e}$ $\boxed{R=e}$

(34) $\frac{n^2+2^n}{n}(x-\pi)^n$

Stessa cosa della (33), riscrivo $\frac{n^2+2^n}{n}\cancel{(x-\pi)^n}$

Faccio $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+2^n}{n}}$. Osservo che $n^2<2^n$, dunque sopra rimane 2^n.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{2^{n/n}}{1} = 2$ Dunque $\boxed{R=\frac{1}{2}}$

(35) $\sum^{+\infty} \frac{n+2+e^{\sin(n)}}{n}(x)^n$. Ignoro $(x)^n$

Visto che ~~f~~ va a $+\infty$, nelle somme tengo solo di cresce più velocemente, quindi $n+2+\cancel{e^{\sin(n)}} \sim n$. Riscrivo $\frac{n}{n}=1$

Dunque $R=\frac{1}{L}=1$. Essendo serie di potenze, è $|x|<1$

(36) $\sum^{+\infty} n^8 (x)^n$. Ignoro $(x)^n$

Faccio $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^8} = n^{8/n} = n^{\frac{8}{\infty}} = n^0 = 1$. Dunque $|x|<1$, non $\leq$.

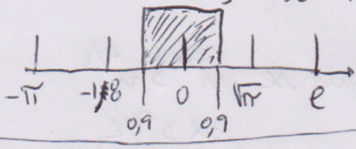
(37) $\sum^{+\infty} \frac{n^2 3^n}{e^n(1+n)}(x)^n$. Ignoro $(x)^n$

$\sum^{+\infty} \frac{n^2 3^n}{e^n(1+n)} = \frac{n^2 3^n}{ne^n+e^n}$. Sotto il denominatore c'è una somma, tengo di cresce più velocemente, cioè ne^n. Riscrivo $\frac{n^{\cancel{2}} 3^n}{\cancel{n} e^n}$.

Faccio $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n 3^n}{e^n}} = \frac{3}{e}$. Dunque il raggio è $\boxed{\frac{e}{3}}$

Siccome $e \sim 2,7$, allora $\frac{e}{3} \sim \frac{2,7}{3} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10} = 0,9$ (CIRCA). E anche $\sqrt{\pi} \sim 1,7$ CIRCA!!!

Le opzioni sono

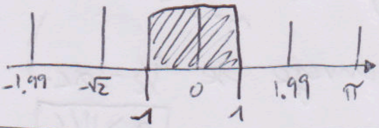


$\boxed{\text{RISPOSTA: N.A.}}$

(38) $\sum^{+\infty} \frac{n^2}{1+n}(x)^n$. Ignoro $(x)^n$

Al denominatore elimino di cresce meno velocemente $\to \cancel{1}+n = n$

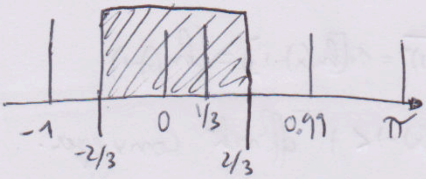
Rimane $\frac{n^2}{n} = n$. Faccio $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$



(39) $\sum^{+\infty} \frac{3^n+\ln(n)}{n^3+2^n}(x)^n$. Ignoro $(x)^n$

Nelle somme tengo il più grande: $3^n > \ln(n)$, $2^n > n^3$ perché $a^n > n^3$

Rimane $\frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$. Faccio $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\cancel{n}/\cancel{n}} = \frac{3}{2}$. Dunque $\boxed{R=\frac{2}{3}}$



$\boxed{\text{RISPOSTA: } 1/3}$

(40) $\sum_{n=100}^{+\infty} \frac{(4n)^{n/2}}{(3n)^n}(x-1)^n$. Non farti confondere da $n=100$. Ignora $(x-1)^n$.

Faccio $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(4n)^{n/2}}{(3n)^n}} = \frac{(4n)^{\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n}}}{(3n)^{n\cdot\frac{1}{n}}} = \frac{(4n)^{1/2}}{3n} = \frac{\sqrt{4n}}{3n} = \frac{2\sqrt{n}}{3n} = \frac{2}{3\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Dunque $\boxed{R=+\infty}$

(41) $\sum^{+\infty} \left(\frac{n^n + n^{\pi}}{(\pi n)^n}\right)(x+e)^n$. Ignoro $(x+e)^n$

Al numeratore ho $n^{+\infty}$ e n^{π}, e siccome $+\infty > \pi$, tengo solo n^n

Faccio $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{(\pi n)^n}} = \frac{n}{\pi n} = \frac{1}{\pi}$. Dunque $\boxed{R = \pi}$

---

(42) $\sum^{+\infty} \lambda^{2+n} (x)^n$. Ignoro $(x)^n$

Faccio $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\lambda^{2+n}} = \sqrt[n]{\lambda^2 \lambda^n} = \lambda^{2/n} \cdot \lambda^{n/n} = \lambda$. Dunque $\boxed{R = \frac{1}{\lambda}}$

N.B. non farti confondere da λ^{-2}. Non chiede la serie armonica λ^{-2}

---

(43) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^{\alpha}\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\sin^3\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}$

La riscrivo $\frac{\sin^{\alpha}\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\sin^3\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)} \sim \frac{\frac{1}{n^{3\alpha}}}{\frac{1}{(n\sqrt{n})^3}} = \frac{n^3 \cdot n^{3/2}}{n^{3\alpha}}$

(1) È infinitesima se $\lim_{n\to+\infty} = +0$, dunque se $n^{3\alpha} > n^{9/2}$

$3\alpha > 9/2$

$\boxed{\alpha > 3/2}$

(2) Converge se $\frac{n^{9/2}}{n^{\alpha \cdot 3}} = n^{9/2 - 3\alpha}$

che converge se $9/2 - 3\alpha < -1$

$\boxed{\alpha > 11/6}$

---

(44) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)(\ln(x)-1)^n$ al variare di $x \in \mathbb{R}$

CASO $x = 1 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)(\ln(x)-1)^n = n \cdot 0 \cdot 1^n = 0$ CONVERGE

CASO $x \neq 1 \longrightarrow$ Faccio $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n(x-1)(\ln(x)-1)^n} = \sqrt[n]{nx-n} \cdot \sqrt[n]{(\ln(x)-1)^n} = 1 \cdot [\ln(x)-1] = (\ln(x)-1)$

Dal criterio della radice, serve $\ln(x)-1 < 1$ affinché converga.

Allora $\ln(x) - 1 < 1$

$\ln(x) < 2$

$x < e^2$, ovvero $0 < x < e^2$, con $0 = \ln(1)$

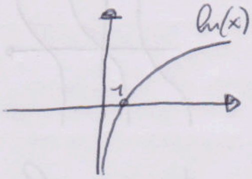
Allora $\boxed{1 \leq x < e^2}$

(2) Sostituisco $x = 1 \longrightarrow$ Converge. Sostituisco $x = e^2 \longrightarrow ne^2$, che diverge

Altri ESERCIZI POSSIBILI

1) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente equazione ha 2 soluzioni distinte:

$$e^{-x^4} = \alpha$$



La riscrivo come $-x^4 = \ln(\alpha)$

Dunque un valore di ln negativo (quindi tra $]0,1[$). Se si pensa al grafico del logaritmo, in 0 non è definito, in 1 fa 0, è negativo per

$\alpha \in]0,1[$

---

2) Il limite $\lim_{n \to +\infty} \int_n^{n+1} \frac{x}{x+1}$ vale:

Prima calcolo l'integrale $\int_n^{n+1} \frac{x}{x+1} = \int_n^{n+1} \frac{x+1-1}{x+1} = \int_n^{n+1} \frac{x+1}{x+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x+1} =$

$$= \int_n^{n+1} 1 - \int_n^{n+1} \frac{1}{x+1} = x - \ln(x+1) \Big|_n^{n+1} = n+1 - \ln(n+1+1) - \left(n - \ln(n+1)\right) =$$

$$= n+1 - \ln(n+2) - n + \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) + 1$$

Faccio $\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) + 1 = \ln\left(\frac{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{2}{n})}\right) + 1 = 0 + 1 = \boxed{1}$

---

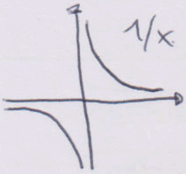
3) La derivata di $x(T) = \int_0^{T^2+1} \sin(z)$ vale:

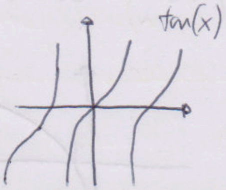
$$\int_0^{T^2+1} \sin(z) = -\cos(z) \Big|_0^{T^2+1} = -\cos(T^2+1) + 1$$

Ora faccio $\left(-\cos(T^2+1) + 1\right)' = \boxed{\sin(T^2+1)\, 2T}$

④ Quante soluzioni ha $\tan(x) = 1/x$ per $x \in]0, 2\pi[$?

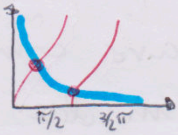
Bisogna disegnare il grafico. Sappiamo





circa 

Allora basta trovare le intersezioni fra $0, 2\pi$



Ovvero 2 intersezioni, 2 soluzioni

---

⑤ Data $f(x) = \ln(x+1)$ e $g(x) = x^2$, allora $g(f(x))$ è definita in:

$g(f(x)) = (\ln(x+1))^2$ che rimane definita con l'argomento del logaritmo maggiore di 0. Allora $x+1>0$

$x > -1$

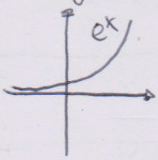
Dunque il dominio dov'è definita è $(-1, +\infty)$

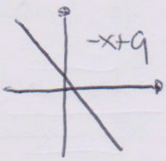
DANGER! LOG È DEFINITA SE STRETTAMENTE >0, quindi $(-1,+\infty)$ e NON $[-1,+\infty)$

---

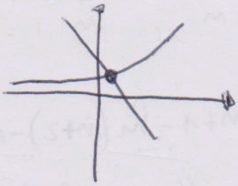
⑥ Numero delle soluzioni al variare di $a \in \mathbb{R}$ di $e^x = -x + a$

Bisogna disegnare il grafico. Sappiamo





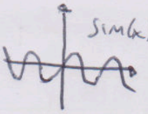
Le intersezioni saranno



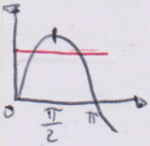
Dunque 1 sola soluzione

---

⑦ La funzione $f: [0,a] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(x^2)$ è iniettiva per:

So che 

, e che per essere iniettiva devo poter disegnare una retta orizzontale che tocca 1 SOLA volta la funzione. Allora valuto



Fino a $\frac{\pi}{2}$, ogni retta orizzontale tocca solo una volta la funzione, dopo no. Dunque serve $\frac{\pi}{2}$.

Ho $\sin(x^2)$, allora serve $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

(8) Data $f(x)=x^2$ e $g(x)=\log(x+1)$, allora $g(f(x))$ dov'è definita?

$g(f(x))=\log(x^2+1)$, che è definita con l'argomento del $\log>0$.

Allora $x^2+1>0$
$x^2>-1$

Che è sempre vero all'interno di $\mathbb{R}$. Dunque lo è sempre, perché qualsiasi valore io dia alla x, rimane per forza maggiore di -1

---

(9) Per quale codominio la funzione $f(x)=\frac{1}{1+xe^x}$ definita su $D=[0,+\infty[$ è bigettiva:

Ovvero, io ho $\frac{1}{1+xe^x}$, e alla x do tutti i valori da 0 a $+\infty$. Voglio trovare tutti i valori toccati dalla funzione in questo modo, e cioè in un intervallo dove ogni valore è toccato SOLO una volta (suriettività e iniettività).

SURRIETTIVITÀ $\longrightarrow$ Se do $x=0$ a $\frac{1}{1+xe^x}=1$

$x=+\infty$ a $\frac{1}{1+xe^x}=\frac{1}{1+\infty}=\frac{1}{\infty}=0$

Ovviamente ∞ non rientrerà strettamente nell'insieme. Comunque, tocca tutti i valori da $]0,1]$. Le parentesi sono così perché $f(x)=1$ se $x=0$ ed $f(x)=0$ se $x=\infty$, e guardando il dominio si ha $[0,+\infty[$.

INIETTIVITÀ $\longrightarrow$ Crescendo sempre più, si avranno valori ogni volta distinti

cioè $\frac{1}{1+0}$, $\frac{1}{1+e}$, $\frac{1}{1+2e^2}$, $\frac{1}{1+3e^3}$, dunque è iniettiva

Allora, siccome in $]0,1)$ è iniettiva e suriettiva, è per definizione bigettiva

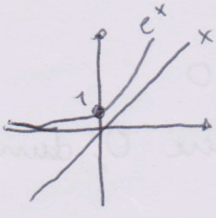
---

(10) Il numero delle soluzioni reali di $xe^{-x}=1$ è:

Cerco di avere un'uguaglianza $\longrightarrow$ $xe^{-x}=1$

$x=\frac{1}{e^{-x}} \longrightarrow x=e^x$

Adesso disegno i grafici



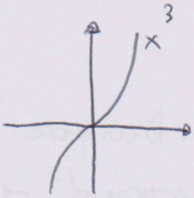
Dunque le due funzioni non si toccano mai. 0 soluzioni

(11) Quante sono le soluzioni di $x^3-3x+1=0$

Cerco di avere una x a destra e una a sinistra

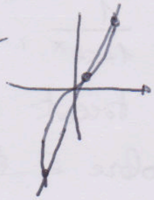
$\longrightarrow x^3 = 3x-1$

Disegno i grafici



Per l'altro, provo a dare dei valori $\to$ se $x=0$, $3x-1=-1$
$x=1$, $3x-1=2$

Allora, essendo così in crescita sarà qualcosa tipo



Dunque incrocia x^3 in 3 punti. Ha 3 SOLUZIONI.

---

(12) $f(x):[0,20[\ \to \mathbb{R}$ definita da $f(x)=xe^{-x/10}$ è

Derivabile almeno 15 volte, perché e^x posso derivarlo quante volte voglio senza che si annulli

---

(13) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log_2 n}{\log_3 n^2}$

Devo usare la formula di cambio di base del logaritmo:

$$\frac{\log_2 n}{\log_3 n^2} = \frac{\frac{\ln n}{\ln 2}}{\frac{\ln n^2}{\ln 3}} = \frac{\cancel{\ln(n)}\cdot\ln(3)}{2\cancel{\ln(n^2)}\cdot\ln(2)} = \frac{\ln(3)}{2\ln(2)} = \frac{\ln(3)}{\ln(2^2)} = \frac{\ln(3)}{\ln(4)}$$

---

(14) $f(x)=\begin{cases} e^{e^x} & x<0 \\ ax^2+1 & x\geq 0 \end{cases}$ è derivabile in $x_0=0$ per:

$(ax^2+1)'=2ax$ che in 0 fa 0

Invece "e" non può MAI essere 0, dunque la risposta è N.E.

STUDIO DI FUNZIONE

I passaggi sono sempre (più o meno) i soliti. Esempio:

$$f(x) = |x^3+x^2+x+1| - x^2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

① Se c'è un valore assoluto, bisogna dividere la funzione, a seconda di dove si annulla. In questo caso bisogna scomporla

$x^3+x^2+x+1 = (x^2+1)(x+1)$ che si annulla, in $\mathbb{R}$, per $x=-1$.

Allora si ottiene $f(x)$ definita a tratti: $f(x) = |(x+1)(x^2+1)| - x^2 = \begin{cases} x^3+x^2+x+1-x^2, & x \geq -1 \\ -x^3-x^2-x-1-x^2, & x < -1 \end{cases}$

② Il dominio, in questo caso, è tutto $\mathbb{R}$. Altrimenti:

- $\sqrt{x}$ serve $x \geq 0$
- $\log(x)$ serve $x > 0$
- $\frac{1}{x}$ serve $x \neq 0$

Faccio il limite agli estremi del dominio (in questo caso è $(-\infty, +\infty)$):

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

③ Faccio la derivata prima, un tratto alla volta

Per $x \geq -1 \longrightarrow f'(x) = 3x^2+1 \geq 1$, dunque è maggiore di 0 ed è crescente

Per $x < -1 \longrightarrow f'(x) = -3x^2-4x-1$, dunque $x = \frac{4 \pm 2}{-6} \begin{cases} -1 \\ -1/3 \end{cases}$

Essendo sempre negativa, in questo tratto la funzione è strettamente decrescente.

Per $x=1$ non è derivabile perché $x \to -1$ in $-3x^2-4x-1=0$

$x \to -1$ in $f_+^{'}=1 \neq 0$

④ Calcolo $f''(x)$:

Per $x>-1$, $f''(x)=6x \geq 0$

$x \geq 0$

Dunque è convessa per $x \geq 0$ e concava altrove, cioè $-1<x\leq 0$

Per $x<-1$, $f''=-6x-4>0$

$x<2/3$

Ma essendo $x<-1$, $f(x)$ è convessa per $x<-1$

⑤ Disegno il grafico

CAUCHY

① Trova la soluzione di

$$\begin{cases} y''(T) - 2y'(T) + y(T) = T + \cos(T) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Passo 1: risolvo l'omogenea $y''(T) - 2y'(T) + y(T) = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2}{2} = 1$$

Essendoci λ^2, ovvero molteplicità 2 ed un unica soluzione, la scrivo nella forma $y = C_1 e^T + C_2 T e^T$

Passo 2: Cerco la forma della soluzione della non omogenea.

Ho $T + \cos(T)$. Per T basta trovare un polinomio generico dello stesso grado, ovvero $y_{p1} = at + b$

Per $\cos(T)$ la forma è sempre $y_{p2} = \alpha\cos(T) + \beta\sin(T)$

Passo 3: Derivo la forma della soluzione:

$$y_{p1} = at + b \qquad y_{p2} = \alpha\cos(T) + \beta\sin(T)$$

$$y_{p1}' = a \qquad y_{p2}' = -\alpha\sin(T) + \beta\cos(T)$$

$$y_{p1}'' = 0 \qquad y_{p2}'' = -\alpha\cos(T) - \beta\sin(T)$$

Riscrivo l'equazione della soluzione

$$y_{p1} \to -2a + at + b = T \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$y_{p2} \to \cancel{-\alpha\cos(T)} \cancel{-\beta\sin(T)} + 2\alpha\sin(T) - 2\beta\cos(T) + \cancel{\alpha\cos(T)} + \cancel{\beta\sin(T)} = \cos(T)$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ -2\beta = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = -1/2 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Passo 4: ottengo la soluzione

$$y_e = C_1 e^T + C_2 T e^T - \frac{1}{2}\sin(T) + T + 2$$

Passo 5: impongo le condizioni iniziali:

$$y(0)=0 \longrightarrow C_1 + C_2 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 + 2 = 0$$

$$C_1 = -2$$

$$y'(0) = 0 \longrightarrow -2e^T + C_2 e^T + C_2 T e^T - \frac{1}{2}\cos(T) + 1 = 0$$

$$-2 + C_2 + 0 - \frac{1}{2} + 1 = 0$$

$$C_2 = \frac{3}{2}$$

Ho la soluzione $\longrightarrow \boxed{-2e^T + \frac{3}{2} T e^T - \frac{1}{2}\sin(T) + T + 2}$

---

② VARIABILI SEPARABILI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)(x^2 - 2x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Si divide $y(x)(x^2-2x) \longrightarrow \frac{1}{y(x)} = x^2 - 2x \longrightarrow \int \frac{dx}{y} = \int x^2 - 2x \; dx$

Dunque $\log(y) = \frac{x^3}{3} - x^2 + c$

Ricavo $y = e^{\frac{x^3}{3} - x^2 + c}$ ricordando che $\log(y) = x \Rightarrow y = e^x$

Impongo $y(0)=1 \longrightarrow 1 = e^{0-0+c} \longrightarrow 1 = e^c$

$$\lg(1) = c$$

$$0 = c$$

Soluzione $\longrightarrow e^{x^3/3 - x^2}$

③ RISONANZA

$$\begin{cases} y''(x)+9y(x)=\cos(wx) \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \qquad w\in\mathbb{R}^+$$

Passo 1: L'omogenea è $\lambda^2+9=0$

$\lambda=\pm\sqrt{-9}=\pm 3i \longrightarrow$ Ricordando $\pm\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,i$

La soluzione è $C_1\cos(3x)+C_2\sin(3x)$

Passo 2: Se $w=3$, nel testo appare "$=\cos(3x)$", che appare anche come risultato dell'omogenea. Si parla, in questo caso, di risonanza. Si deve moltiplicare la forma della soluzione della non omogenea per un ulteriore x.

Senza risonanza $\longrightarrow A\cos(wx)+B\sin(wx)$, $w\neq 3$

Con risonanza $\longrightarrow x(A\cos(3x)+B\sin(3x))$

Passo 3: Cerco la forma della soluzione finale.

CASO SENZA RISONANZA: $y_p=A\cos(wx)+B\sin(wx)$

$y_p'=-Aw\sin(wx)+wB\cos(wx)$

$y_p''=-Aw^2\cos(wx)-Bw^2\sin(wx)$

Dunque $-Aw^2\cos(wx)-Bw^2\sin(wx)+9A\cos(wx)+9B\sin(wx)=\cos(wx)$

$$\begin{cases} -Bw^2+9B=0 \\ -Aw^2+9A=1 \end{cases} \begin{cases} B=0 \\ A=\frac{1}{9-w^2} \end{cases} \longrightarrow \frac{1}{9-w^2}\cos(wx)$$

CASO CON RISONANZA: $y_p=x(A\cos(3x)+B\sin(3x))$

$y_p'=A\cos(3x)+B\sin(3x)+x(-3A\sin(3x)+3B\cos(3x))$

$y_p''=-6A\sin(3x)+6B\cos(3x)-9xA\cos(3x)-9xB\sin(3x)$

Dunque: $-6A\sin(3x)+6B\cos(3x)$

$$\begin{cases} -6A=0 \\ +6B=1 \end{cases} \begin{cases} A=0 \\ B=1/6 \end{cases} \longrightarrow \frac{x}{6}\sin(3x)$$

Passo 4: Impongo le condizioni iniziali

Senza risonanza: $y_p = C_1\cos(wx) + C_2\sin(wx) + \frac{1}{9-w^2}\cos(wx)$

$y(0) = 1 \longrightarrow 1 = C_1 + \frac{1}{9-w^2} = \frac{-8+w^2}{-9+w^2}$

$y'(0) = 0 \longrightarrow -wC_1\sin(wx) + wC_2\cos(wx) - \frac{w}{9-w^2}\sin(xw) =$

$= \cancel{w}C_2 = 0$

SOLUZIONE $= \frac{w^2-8}{w^2-9}\cos(3x) + \frac{1}{9-w^2}\cos(wx)$

Con risonanza: $y(0) = 1 \longrightarrow C_1\cos(0) + C_2\cdot 0 + 0\cdot\sin(0) = 1$

$C_1 = 1$

$y'(0) = 0 \longrightarrow -3C_1\sin(3x) + 3C_2\cos(3x) + \frac{\sin(3x)}{6} + \frac{x\cos(3x)}{2} =$

$= \cancel{3}C_2 = 0$

SOLUZIONE: $\cos(3x) + \frac{x}{6}\sin(3x)$

---

(4) FATTORE INTEGRANTE

$$\begin{cases} y' + \frac{y(x)}{x} = \cos(x^2) \\ y(\sqrt{\pi}) = 1 \end{cases}$$

Passo 1: Noto che c'è una x a sinistra. Dunque una y moltiplicata per $\frac{1}{x}$. Uso $\int\frac{1}{x} = \ln(x)$. Moltiplico tutto per $e^{\lg(x)}$ e ho:

$\int xy = \int\cos(x^2)x$

Passo 2: Integro e ottengo $xy(x) = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$

$y(x) = \frac{1}{2x}\sin(x^2) + \frac{C}{x}$

Passo 3: Impongo la condizione $\longrightarrow 1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot 0 + \frac{C}{\sqrt{\pi}} \longrightarrow C = \sqrt{\pi}$

Soluzione $\longrightarrow \frac{1}{2x}\sin(x^2) + \frac{\sqrt{\pi}}{x}$

CONVERGENZA INTEGRALI

Serve che il lim a $+\infty$ faccia 0 (come nelle serie), che sia continua, e successivamente si possano applicare criteri praticamente identici a quelli delle serie.

---

① $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x}{(x-1)(x^2+9)}\,dx$

$\dfrac{x}{(x-1)(x^2+9)} = \dfrac{x}{x^3+9x-x^2-9}$. Andando a $+\infty$, nelle somme tengo solo le cose che vanno a $+\infty$ più velocemente.

Rimane $\dfrac{x}{x^3} = \dfrac{1}{x^2}$. Come nelle serie, $\dfrac{x}{(x-1)(x^2+9)} = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, quindi converge.

Il denominatore si annulla con $x=1$, ma l'intervallo parte da 2, allora l'integrale converge

---

② $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2-x+1}{x^2(x+1)}\,dx$

$\dfrac{x^2-x+1}{x^2(x+1)} = \dfrac{x^2-x+1}{x^3+x^2}$. Andando a $+\infty$, butto via i più picc. Rimane $\dfrac{x^2}{x^3} = \dfrac{1}{x}$

Come nelle serie, $\dfrac{1}{x}$ NON converge

---

③ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})(\sqrt{\pi}+\sin(x))}{x(1+x^{3/2})}\,dx$

in $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{x})(\sqrt{\pi}+\sin(x))}{x(1+x^{3/2})}$, siccome $\dfrac{\sqrt{\pi}+\sin(x)}{1+x^{3/2}} = 0$ se $x\to 0$, allora considero

$$\frac{\sin(\sqrt{x})}{x} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{x^{1/2}} \text{ che converge perché } \int_0 \frac{1}{x^\alpha} \text{ converge per } \alpha<1$$

In $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})(\sqrt{\pi}+\sin(x))}{x(1+x^{3/2})} \sim \frac{1}{x(x^{3/2})} = \frac{1}{x^{3/2}}$ che converge perché

$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ converge per $\alpha>1$. Allora l'integrale converge.

④ $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-2x-2x^2)e^{-x}\,dx$

Non c'è problema che il denominatore venga 0, perché

$(1-2x-2x^2)e^{-x} = \dfrac{1-2x-2x^2}{e^x}$, ed e^x non si annulla mai. A $+\infty$

rimane $\dfrac{x^2}{e^x}$ e CONVERGE, perché e^x si annulla più velocemente di qualsiasi

potenza di x

---

⑤ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx$

Se $x\to 0$ si ha $\dfrac{1}{0}$ e non va bene. Allora si studia il comportamento $\longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}+x^2} = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ perché $x^2 = o(\sqrt{x})$ con $x\to 0$

Invece per $x\to+\infty$, tengo solo chi cresce più velocemente e $\dfrac{1}{\sqrt{x}+x^2} = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Dunque converge.

---

⑥ Nel caso di parametri, devi valutare tutti i possibili casi:

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{ax}-\cos(x)}{x^a} \quad \text{con } a\geq 0$$

caso $a>0 \to$ andando a $+\infty$, rimane $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{ax}}{x^a}$ che diverge, perché e^x cresce più velocemente di ogni potenza di x

caso $a=0 \to \displaystyle\int_1^{\infty}\frac{e^{ax}-\cos(x)}{x^a} = 1-\cos(x)$ che diverge perché $x\to+\infty$

INVECE $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{e^{ax}-\cos(x)}{x^a}$

CASO $a>0 \to$ uso Taylor $\displaystyle\int\frac{e^{ax}-\cos(x)}{x^a} = \frac{1-ax-1}{x^a} = \frac{ax}{x^a} \sim \frac{1}{x^{a-1}}$

che converge per $a-1>1$, $a>2$

caso $a=0 \to \displaystyle\int_0^{\pi} 1-\cos(x)$ che converge, perché limitata in $(0,\pi)$