Quantità di moto

Quantità di moto di un punto materiale

La quantità di moto di un punto materiale è il vettore:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

con m la massa e $\vec{v}$ la velocità.

Dato che la massa è sempre positiva, $\vec{p}$ e $\vec{v}$ hanno stesso verso. L'unità di misura è:

$$kg\ m\ s^{-1}$$

II principio della dinamica:

Consideriamo un punto materiale di massa m al quale è applicata un forza risultante $\vec{F}$. Poiché la massa del punto materiale non cambia nel tempo:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{md\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Impulso

L'azione della forza, nell'intervallo infinitesimo di tempo dt determina una variazione infinitesima di quantità di moto:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

Si definisce impulso, l'integrale sull'intervallo di tempo finito $\left[t_i, t_f\right]$:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt$$

Con unità di misura $N \cdot s = kg \cdot m/s$. Consideriamo la variazione della quantità di moto nello stesso intervallo di tempo:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

Il teorema dell'impulso stabilisce che:

$$\Delta\vec{p} = \vec{I}$$

e collega la variazione della quantità di moto all'impulso della forza applicata.

Caso di forza costante

Se la forza $\vec{F}$ è costante nel tempo, l'impulso si esprime come:

$$\vec{I} = \vec{F}\,\Delta t,$$

dove

$$\Delta t = t_f - t_i$$

è l'intervallo di tempo. Il teorema diventa:

$$\Delta \vec{p} = \vec{F}\,\Delta t.$$

Caso di forza variabile

Se la forza $\vec{F}(t)$ varia nel tempo, l'impulso si calcola come:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt.$$

Introduciamo la forza media $\vec{F}_{\text{med}}$, definita come:

$$\vec{F}_{\text{med}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt.$$

L'impulso può quindi essere espresso come:

$$\vec{I} = \vec{F}_{\text{med}}\, \Delta t,$$

e il teorema dell'impulso diventa:

$$\Delta \vec{p} = \vec{F}_{\text{med}}\, \Delta t.$$

Componenti

Scomponiamo i vettori lungo gli assi x, y, z. Siano:

$$\vec{F} = (F_x,\, F_y,\, F_z), \quad \vec{p} = (p_x,\, p_y,\, p_z).$$

Allora, l'equazione $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, si traduce in tre equazioni scalari, una per ciascuna componente.

$$F_x = \frac{dp_x}{dt}, \quad F_y = \frac{dp_y}{dt}, \quad F_z = \frac{dp_z}{dt}.$$

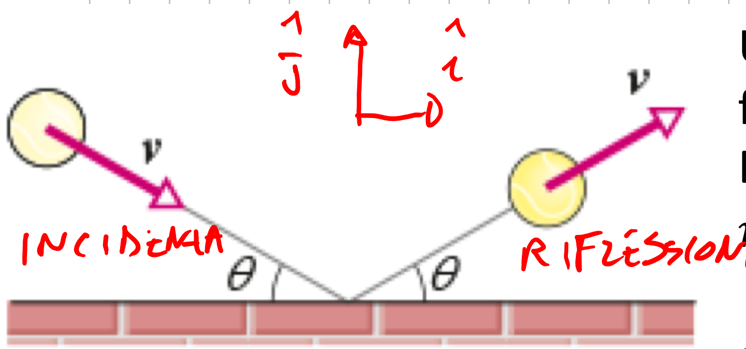
Analogamente, per ciascuna componente della quantità di moto p_x, p_y, p_z, l'impulso corrispondente è:

$$I_x = \Delta p_x = p_{x,f} - p_{x,i}, \quad I_y = \Delta p_y = p_{y,f} - p_{y,i}, \quad I_z = \Delta p_z = p_{z,f} - p_{z,i}.$$

Se la forza $\vec{F}$ agisce in un intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$, le componenti dell'impulso sono:

$$I_x = \int_{t_i}^{t_f} F_x(t)\, dt, \quad I_y = \int_{t_i}^{t_f} F_y(t)\, dt, \quad I_z = \int_{t_i}^{t_f} F_z(t)\, dt.$$

esercizio

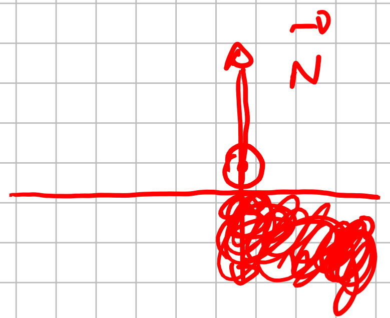


Una pallina urta contro una parete. La velocità finale è uguale in modulo alla velocità iniziale.
Dati:
$m_{pallina} = 1\ kg\ ;\ v = 1\ m\ s^{-1}\ ;\ \theta = 30°$

- Dimostrare che l'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza.

Se la durata dell'interazione è $\Delta t = 10^{-3}\ s$, calcolare

- la forza media esercitata dalla parete sulla pallina.



$\vec{F} = F_y\ \hat{j}$

$$\vec{v_i} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} \qquad \vec{P_i} = m v_{ix} \hat{i} + m v_{iy} \hat{j}$$

$$v_{ix} = v \cos\theta \qquad v_{iy} = -v \sin\theta$$

$$v_i^2 = v_{ix}^2 + v_{iy}^2 = v^2$$

$$\frac{dP_x}{dt} = 0 \qquad P_{fx} = P_{ix} \Rightarrow v_{fx} = v_{ix}$$

$$v_f^2 = v_{fx}^2 + v_{fy}^2 = v$$

$$v_{fy}^2 = v_f^2 - v_{fx}^2 = v_f^2 - v_{ix}^2 = v^2 - v_{ix}^2 = v_{iy}^2$$

$$v_{fy} = \pm v_{iy} \qquad v_{fy} = -v_{iy}$$

$$\vec{v_f} = v_{ix} \hat{i} - v_{iy} \hat{j}$$

$$\Delta \vec{P} = \vec{P_f} - \vec{P_i} = m \left[v_{fx} \hat{i} + v_{fy} \hat{j} - v_{ix} \hat{i} - v_{iy} \hat{j} \right] =$$

$$= m \left[v_{ix} \hat{i} - v_{iy} \hat{j} - v_{ix} \hat{i} - v_{iy} \hat{j} \right] =$$

$$= -2 m v_{iy} \hat{j}$$

$$v_{iy} = -v \sin\theta$$

$$\Delta P = 2 m v \sin\theta \, \hat{j} = 1 \frac{kg\, m}{s} \hat{j}$$

$$\vec{F}_{MEDIA} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = 1000 \ N \ \hat{j}$$

esercizio

Una palla, assimilabile a un punto materiale, di massa $m = 2\ kg$ viene lasciata cadere da ferma da un'altezza $h_0 = 10\ m$. Nell'urto con il pavimento, l'energia cinetica della palla si dimezza. Trascurando la resistenza dell'aria e assumendo $g = 10\ m/s^2$, calcolare:

- il tempo di caduta della palla;
- la velocità della palla subito prima dell'impatto col pavimento;
- la massima altezza raggiunta dalla palla dopo il rimbalzo;
- la forza media esercitata dal pavimento sulla palla, se la durata dell'urto è $\Delta t = 10^{-1}\ s$;
- la forza media esercitata dal pavimento sulla palla, se la durata dell'urto è $\Delta t = 10^{-4}\ s$.

$$t_{caduta} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \simeq 1.41 \text{ s}$$

$$\underline{v = \sqrt{2gh_0}} \simeq \underline{14.14 \text{ ms}^{-1}}$$

$$E_i = mgh_0 \qquad E_f = mgh_1$$

$$E_f = \frac{1}{2} E_i \Rightarrow h_1 = \frac{h_0}{2} = 5 \text{ m}$$

ENERGIA CINETICA SI DIMEZZA:

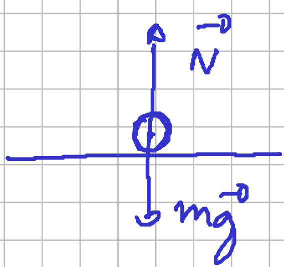
$$\frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} m v^2\right] \Rightarrow v'^2 = \frac{v^2}{2} \qquad v' = \frac{v}{\sqrt{2}} \simeq 10 \text{ ms}^{-1}$$

$$\vec{v}_i = -v\,\hat{j} \qquad \vec{v}_f = v'\,\hat{j}$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i = (v' + v)\,\hat{j}$$

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = m(v' + v)\,\hat{j}$$

$$\Delta p = m(v' + v) = 48.28 \ \frac{\text{Kg m}}{\text{s}} \qquad \text{MODULO}$$



$$\vec{F}_{ris} = \vec{N} + m\vec{g} = (N - mg)\,\hat{j}$$

$$F_{ris,y} = N - mg$$

$$\Delta P_y = \int_0^{\Delta t} F_{RIS,y}\, dt = \int_0^{\Delta t} N\, dt - \int_0^{\Delta t} mg\, dt$$

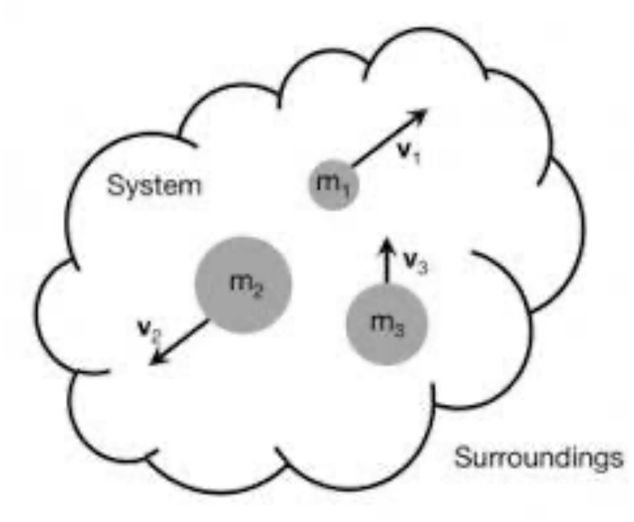
$$= N_{MEDIA}\, \Delta t - mg\, \Delta t$$

$$N_{MEDIA} = \frac{\Delta P_y}{\Delta t} + mg = \frac{m(v' + v)}{\Delta t} + mg$$

$$\Delta t = 10^{-1}\ s \Rightarrow \underline{N_{MEDIA} \simeq 503\ N}$$

$$\Delta t = 10^{-4}\ s \Rightarrow N_{MEDIA} = 4.828 \times 10^{5}\ N$$

Sistema di particelle: quantità di moto



Consideriamo un sistema composto da N punti materiali che interagisco tra loro. La quantità di moto del sistema è:

$$\vec{p}_{sis} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

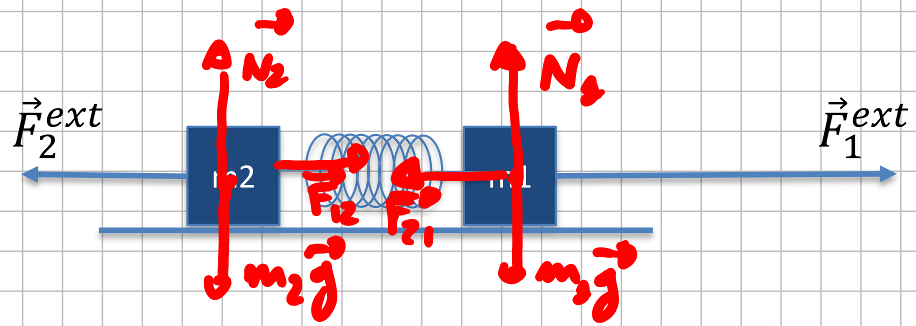
Se $\vec{F}_{ext}$ è la risultante delle forze esterne che agiscono sul sistema, abbiamo:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_{sis}}{dt}$$

In termini di impulso:

$$\Delta\vec{p}_{sis} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{ext} dt = \vec{I}_{ext}$$

Dimostrazione



Per il sistema di questi due blocchi è:

$$\vec{p}_{sis} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\vec{P}_{sis} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_{sis} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt}$$

$$* \quad \frac{d\vec{P}_1}{dt} = \vec{F}_{1EXT} + \vec{F}_{21} \qquad ** \quad \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{F}_{2EXT} + \vec{F}_{12}$$

$$\boxed{\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_{sis} = \vec{F}_{1EXT} + \vec{F}_{2EXT} + \underbrace{\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}}_{=0} = \vec{F}_{Ris,EXT}$$

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt$$

$$\vec{I}_{Ris,EXT} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{Ris,EXT}(t)\,dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d P_{sis}}{dt}\,dt =$$

$$= \vec{P}_{sis}(t_f) - \vec{P}_{sis}(t_i) = \Delta\vec{P}_{sis}$$

N PARTICELLE

$$\vec{P}_{sis} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i \qquad \frac{d}{dt}\vec{P}_{sis} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\vec{P}_i$$

$$\frac{dP_i}{dt} = \vec{F}_{i\,EXT} + \sum_{j=1,\ j\neq i}^{N} \vec{F}_{ji}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_{sis} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\,EXT} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N} \vec{F}_{ji} \qquad \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$\frac{d}{dt} P_{sis} = \vec{F}_{Ris,EXT}$$

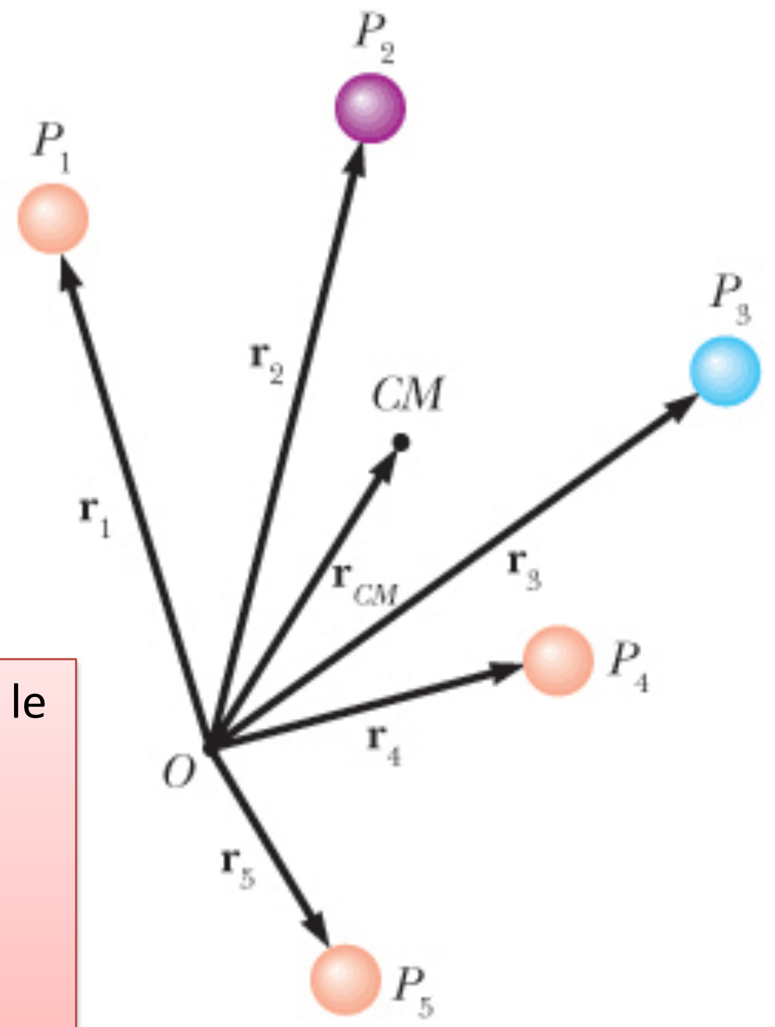
$$\Delta \vec{P}_{sis} = \vec{I}_{Ris\,EXT}$$

Sistema di particelle: centro di massa

Consideriamo un sistema di N particelle. Il centro di massa è un punto identificato dal vettore posizione:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i}$$

dove $\vec{r_i}$ e m_i sono la posizione e la massa della $i-esima$ particella. $M_{tot} = \sum_{i=1}^{N} m_i$ è la massa totale del sistema.



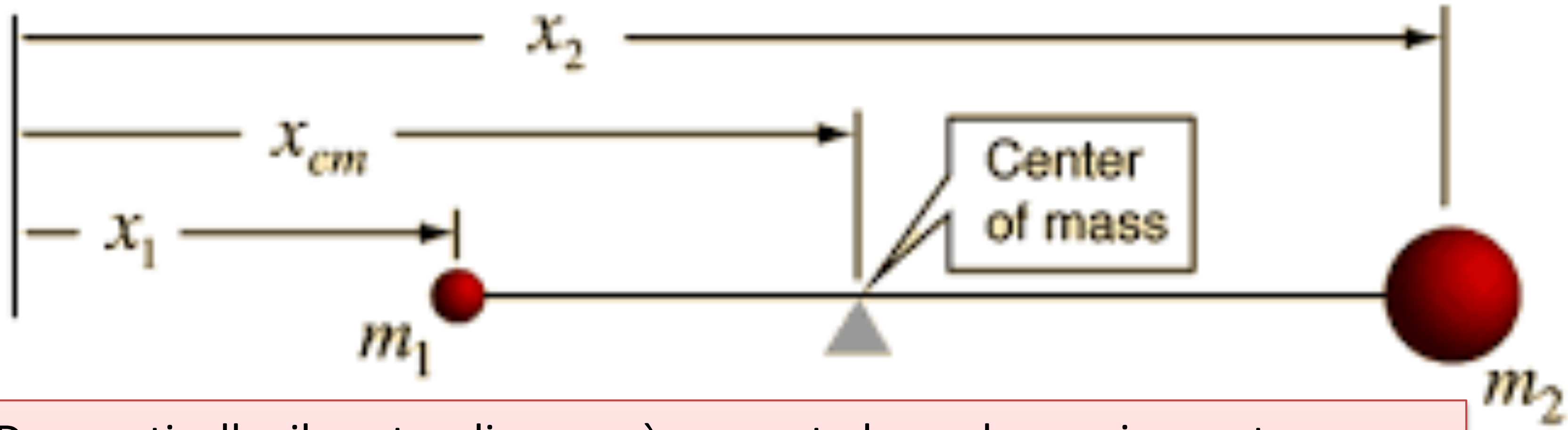
Se introduciamo un sistema di coordinate cartesiane, le coordinate del centro di massa sono:

$$x_{CM} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_{i=1}^{N} m_i x_i$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_{i=1}^{N} m_i y_i$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

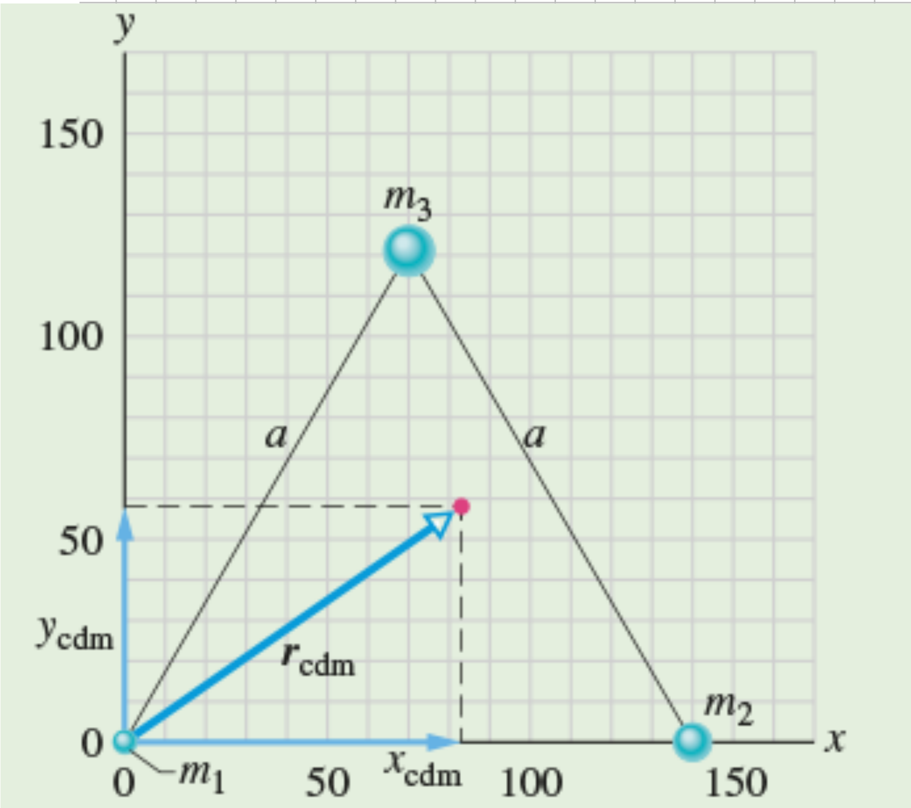
Esempio: 2 particelle



Due particelle: il centro di massa è un punto lungo la congiungente e compreso tra le due particelle. La coordinata del centro di massa è la somma “pesata” delle coordinate delle due particelle:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M_{tot}}(m_1 x_1 + m_2 x_2) = \frac{m_1}{M_{tot}} x_1 + \frac{m_2}{M_{tot}} x_2$$

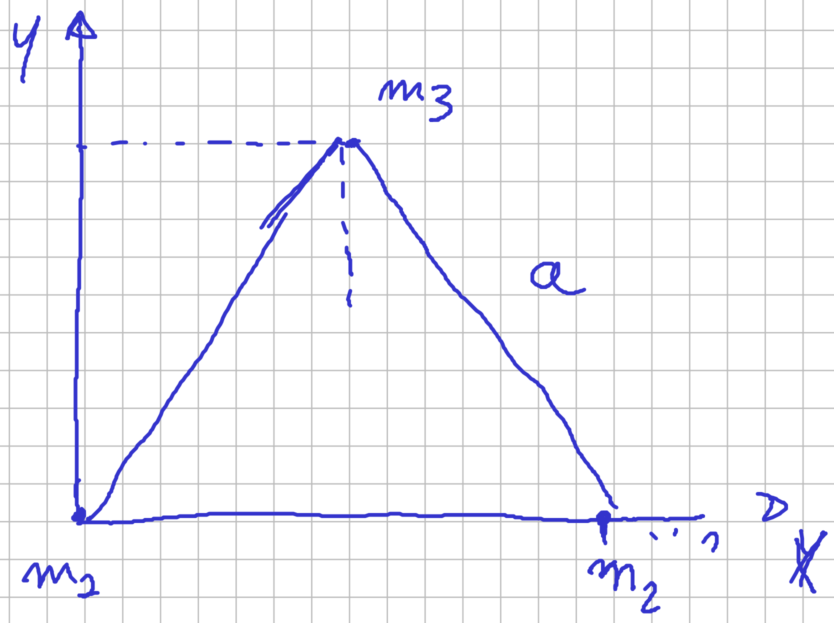
esercizio



Il sistema in figura è costituito da tre masse ai vertici di un triangolo equilatero. La massa totale del sistema è $M_{tot} = 5\ kg$. Le coordinate del centro di massa sono:

$$(80,60)\ cm$$

- Determinare le masse m_1, m_2 ed m_3



$(80, 60)$

$$H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$X_{cm} = (80, 60)$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 & x_2 = a & x_3 = \frac{a}{2} \\ y_1 = 0 & y_2 = 0 & y_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$X_{cm} = \frac{1}{M_{TOT}} \left[m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 \right]$$

$$Y_{cm} = \frac{1}{M_{TOT}} \left[m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 \right]$$

$$M_{TOT}\, Y_{CM} = m_3 \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m_3 = \frac{2 M_{TOT}}{a\sqrt{3}} Y_{CM}$$

$$M_{TOT}\, X_{CM} = m_2 a + m_3 \frac{a}{2}$$

$$m_2 a = -\frac{M_{TOT}}{\sqrt{3}} Y_{CM} + M_{TOT} X_{CM}$$

$$m_2 = -\frac{M_{TOT}}{a\sqrt{3}} Y_{CM} + \frac{M_{TOT}}{a} X_{CM}$$

Corpo continuo: centro di massa

Definizione continua per un corpo esteso

Nel caso di un corpo continuo, la somma si sostituisce con un integrale. Indichiamo con $\vec{r}$ la posizione di un elemento infinitesimo di massa dm. Allora la definizione diventa:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \int_{\text{corpo}} \vec{r}\, dm,$$

dove

$$M_{\text{tot}} = \int_{\text{corpo}} dm$$

è la massa totale del corpo.

Relazione con la densità

Se la massa è distribuita in un volume V con densità $\rho(\vec{r})$ (in kg/m^3), allora

$$dm = \rho(\vec{r})\, dV,$$

e la massa totale

$$M_{\text{tot}} = \int_V \rho(\vec{r})\, dV.$$

Il centro di massa diventa:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \int_V \vec{r}\, \rho(\vec{r})\, dV.$$

Corpo continuo: osservazioni

Componenti cartesiane

Scrivendo $\vec{r} = (x,\, y,\, z)$, il centro di massa $\vec{r}_{CM} = (x_{CM},\, y_{CM},\, z_{CM})$ ha componenti:

$$x_{CM} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \int_V x\, \rho(x,y,z)\, dV, \quad y_{CM} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \int_V y\, \rho(x,y,z)\, dV, \quad z_{CM} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \int_V z\, \rho(x,y,z)\, dV.$$

Caso di densità costante

Se $\rho(\vec{r}) = \rho_0$ (costante), allora

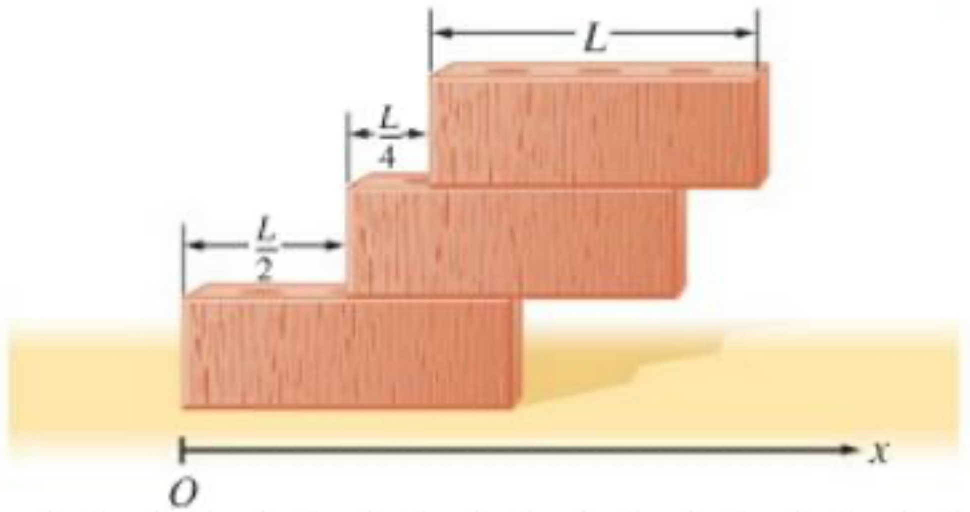
$$M_{\text{tot}} = \rho_0\, V,$$

e

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{\rho_0\, V} \int_V \vec{r}\, \rho_0\, dV = \frac{1}{V} \int_V \vec{r}\, dV.$$

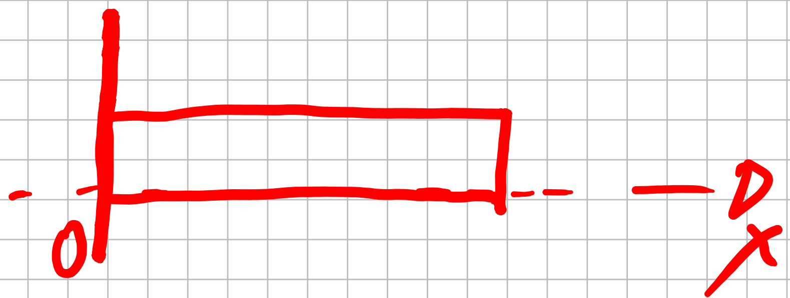
In tal caso, ciascuna componente del centro di massa è la media geometrica della rispettiva coordinata nello spazio occupato dal corpo.

esercizio



Assumendo che i tre mattoni in figura abbiano densità uniforme,

- calcolare x_{CM}.



$x_{cm,1} = \frac{L}{2}$ MATTONE 1

$x_{cm,2} = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} = L$ MATTONE 2

$$x_{cm3} = \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{2} = \frac{5}{4} L$$

$$X_{cm} = \frac{1}{M_{TOT}} \left[M_1 X_{cm1} + M_2 X_{cm2} + M_3 X_{cm3} \right]$$

$$M_1 = M_2 = M_3 = m$$

$$X_{cm} = \frac{1}{3m} \left[m\, x_{cm1} + m\, x_{cm2} + m\, x_{cm3} \right] =$$

$$= \frac{x_{cm1} + x_{cm2} + x_{cm}}{3} = \frac{L}{3} \left[\frac{1}{2} + 1 + \frac{5}{4} \right] = L \frac{11}{12}$$

esercizio

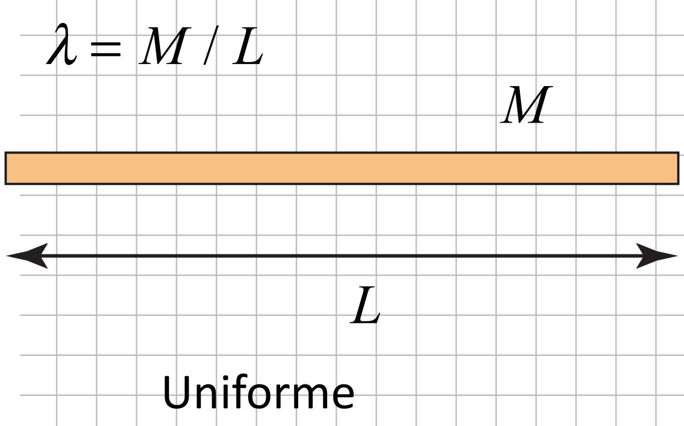
Si consideri una asta sottile di lunghezza L e massa M.

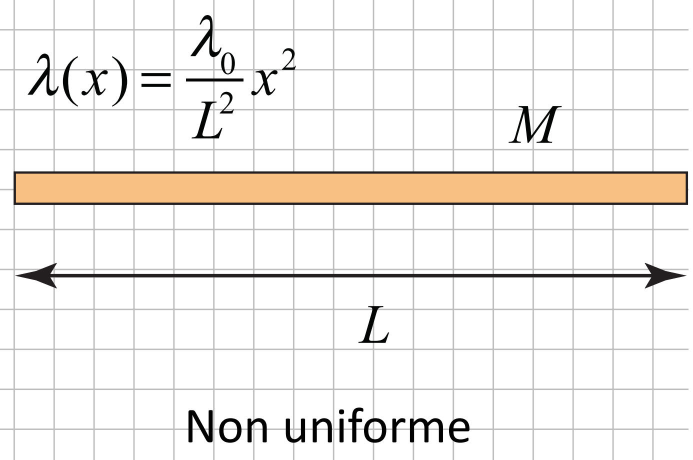
(a) Supponiamo che l'asta sia uniforme. Trovare la posizione del centro di massa rispetto all'estremità sinistra dell'asta.

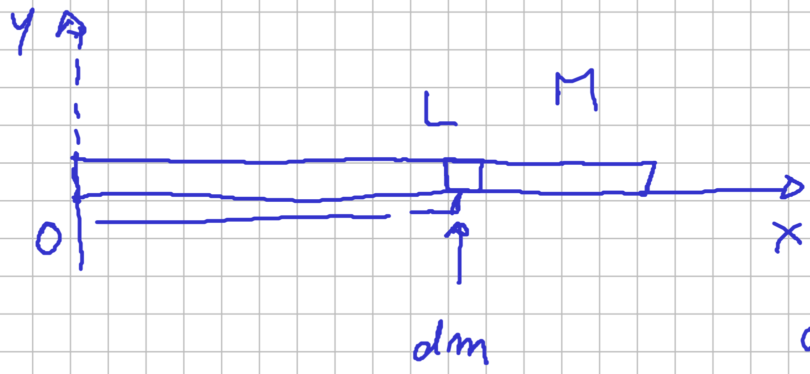
(b) Supponiamo ora che l'asta non sia uniforme, con una densità lineare di massa che varia con la distanza x dall'estremità sinistra secondo

$$\lambda(x) = \lambda_0 \frac{x^2}{L^2},$$

dove λ_0 è una costante avente unità SI [kg/m]. Trovare il valore di λ_0 (in funzione di M e L) e la posizione del centro di massa rispetto all'estremità sinistra dell'asta.







$$\lambda(x) = \lambda_0 \frac{x^2}{L^2}$$

$$dm = \lambda(x)\,dx$$

$$M = \int_{\text{CORPO}} dm = \int_{x=0}^{x=L} \lambda(x)\,dx = \frac{\lambda_0}{L^2}\int_0^L x^2\,dx =$$

$$= \frac{\lambda_0}{L^2}\,\frac{1}{3}\,x^3\Big|_0^L = \frac{\lambda_0 L}{3}$$

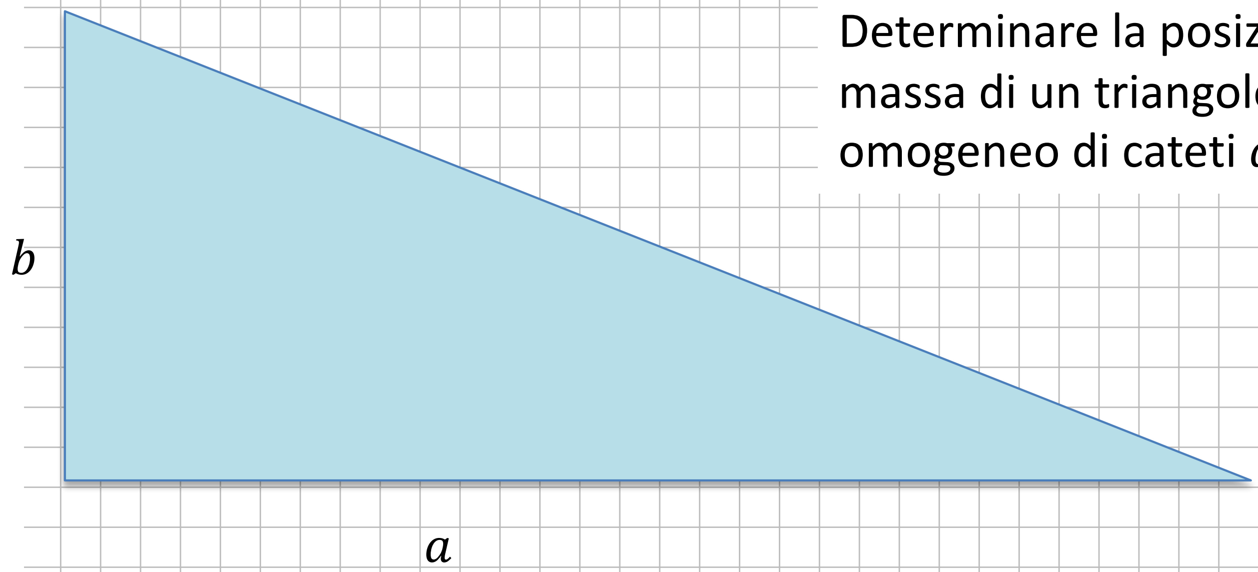
$$\lambda_0 = \frac{3M}{L}$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^L \lambda(x)\,x\,dx = \frac{1}{M}\,\frac{\lambda_0}{L^2}\int_0^L x^3\,dx$$

$$= \frac{1}{M}\,\frac{1}{L^2}\cdot\frac{3M}{L}\int_0^L x^3\,dx =$$

$$= \frac{3}{L^3}\cdot\frac{1}{4}\,x^4\Big|_0^L = \frac{3}{4}L$$

esercizio

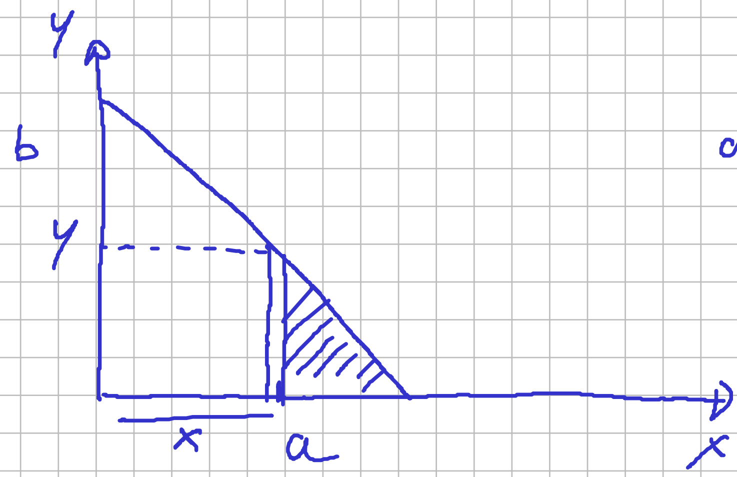


Determinare la posizione del centro di massa di un triangolo rettangolo omogeneo di cateti a e b.

σ = MASSA PER UNITÀ DI SUPERFICIE

$$M_{TOT} = \sigma S = \sigma \frac{ab}{2}$$

$$X_{CM} = \frac{1}{M_{TOT}} \int_{TRIANGOLO} x \sigma \, ds \qquad Y_{CM} = \frac{1}{M_{TOT}} \int_{TRIANGOLO} y \sigma \, ds$$



$$ds = y \, dx$$

TRIANGOLI SIMILI

$$\frac{y}{a-x} = \frac{b}{a}$$

$$y = \frac{b}{a}(a-x)$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M_{TOT}} \int_{TRIANGOLO} \frac{b}{a}(a-x) x \sigma \, dx = \frac{\sigma}{M_{TOT}} \frac{b}{a} \int (a x - x^2) \, dx$$

$$= \frac{\sigma}{M_{TOT}} \frac{b}{a} \left[\frac{1}{2} a x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right] \Bigg|_0^a = \frac{\sigma}{M_{TOT}} \frac{b}{a} \left[\frac{1}{2} a^3 - \frac{1}{3} a^3 \right]$$

$$X_{CM} = \frac{2 \cancel{\sigma}}{\cancel{\sigma} a \cancel{b}} \frac{\cancel{b}}{\cancel{a}} a^{\cancel{3}} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = \frac{2a}{6} = \frac{a}{3}$$

$$Y_{CM} = \frac{b}{3}$$

Dinamica del centro di massa

Partendo dalla definizione di centro di massa:

$$M_{tot}\,\vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

Derivando rispetto al tempo, otteniamo:

$$M_{tot}\,\vec{v}_{CM} = M_{tot}\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \vec{p}_{sis}$$

Quindi la quantità di moto del sistema è uguale alla massa totale per la velocità del centro di massa. Derivando ancora rispetto al tempo:

$$M_{tot}\,\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{sis}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

Quindi, per quanto riguarda il moto traslatorio del sistema, la somma delle forze esterne può essere considerata come se agisse sul centro di massa.

Accelerazione del centro di massa: componenti

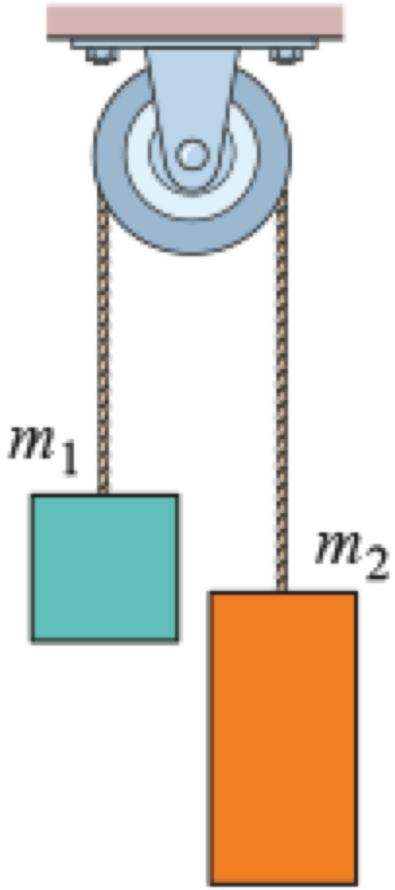
Se introduciamo un sistema di coordinate cartesiane, le componenti dell'accelerazione del centro di massa sono:

$$a_{CM,x} = \frac{1}{M_{tot}} F_{ext,x}$$

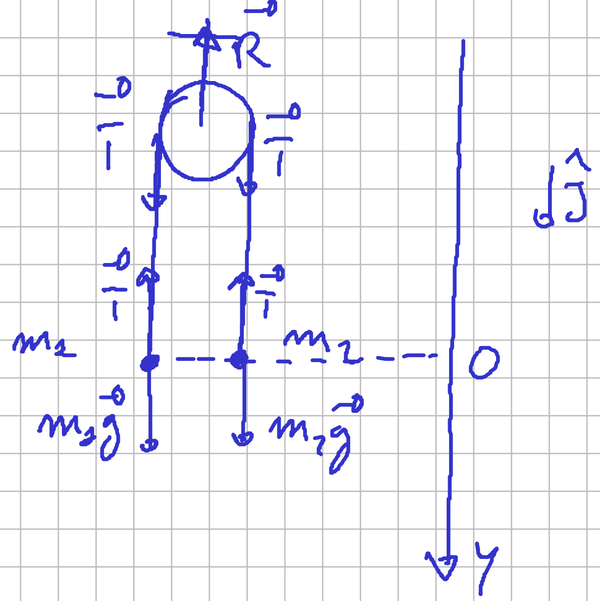
$$a_{CM,y} = \frac{1}{M_{tot}} F_{ext,y}$$

$$a_{CM,z} = \frac{1}{M_{tot}} F_{ext,z}$$

esercizio



Determinare le equazioni per le componenti dell'accelerazione, della velocità e della posizione del centro di massa della macchina di Atwood composta dalle masse m_1 e m_2 che inizialmente si trovano alla stessa altezza.
Assumere assenza di attrito e massa della puleggia e della corda trascurabili.



$$y_1(0) = y_2(0) = 0$$

$$y_{cm}(0) = 0$$

$$y_1(t) + y_2(t) = \text{COSTANTE}$$

$$y_1(t) = -y_2(t)$$

$$\begin{cases} m_1 g - T = -m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{cases}$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g = \ddot{y}_2 = -\ddot{y}_1$$

$$-2T + (m_1 + m_2) g = (m_2 - m_1) a$$

$$2T = (m_1 + m_2) g - (m_2 - m_1) \frac{(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} g$$

$$y_1(t) = -y_2(t)$$

$$y_{cm} = \frac{m_2 y_2(t) + m_1 y_1(t)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 y_2(t) - m_1 y_2(t)}{m_1 + m_2}$$

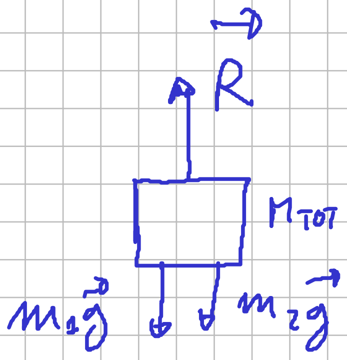
$$= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} y_2(t)$$

$$a_{CM} = \ddot{y}_{CM} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \, \ddot{y}_2 = \frac{(m_2 - m_1)^2}{(m_2 + m_1)^2} \, g$$

$$v_{CM}(t) = \frac{(m_2 - m_1)^2}{(m_2 + m_1)^2} \, g \, t$$

$$y_{CM}(t) = \frac{1}{2} \, \frac{(m_2 - m_1)^2}{(m_2 + m_1)^2} \, g t^2$$

$$M_{TOT} \, \vec{a}_{CM} = \vec{F}_{Ris, EXT}$$



$$\Rightarrow \quad M_{TOT} \, \vec{g}$$

$$\vec{R} + m_1 \vec{g} + m_2 \vec{g} = M_{TOT} \, \vec{a}_{CM}$$

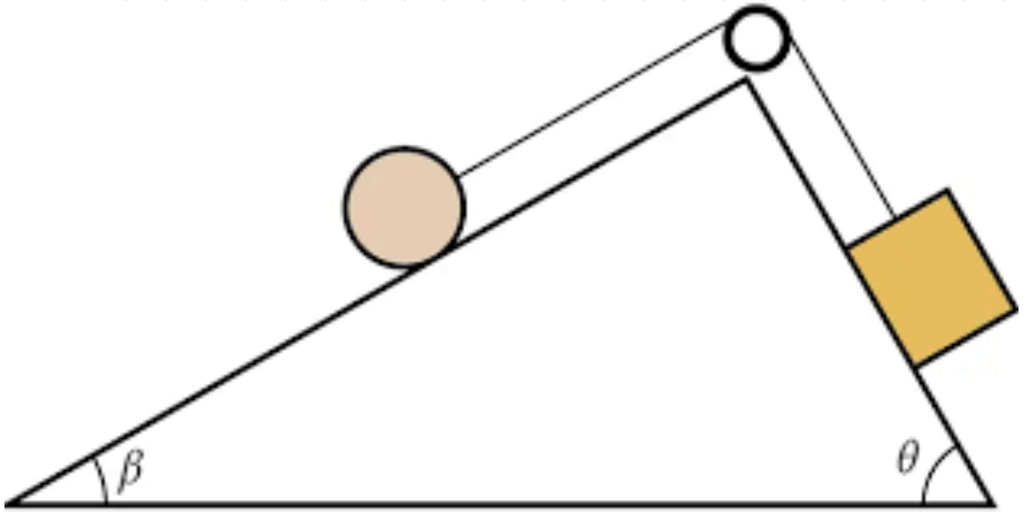
$$-R + m_1 g + m_2 g = (m_1 + m_2) \, a_{CM}$$

$$R = 2T$$

$$-\cancel{(m_2+m_1)g} + \frac{(m_2-m_1)^2}{m_2+m_1} + \cancel{(m_2+m_1)g} = (m_2+m_1)a_{cM}$$

$$a_{cM} = \frac{(m_2-m_1)^2}{(m_2+m_1)^2}\, g$$

esercizio



Determinare le equazioni per le componenti dell'accelerazione, della velocità e della posizione del centro di massa del sistema in figura composto dalle masse m_2 e m_2 che inizialmente si trovano alla stessa altezza. Assumere assenza di attrito e massa della puleggia e della corda trascurabili.

Conservazione della quantità di moto

Consideriamo un sistema per il quale:

$$\vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

Se la somma delle forze esterne è nulla il sistema si dice isolato e la quantità di moto del sistema è costante (ha sempre lo stesso valore):

$$\Delta\vec{p}_{sis} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{p}_{sis} = costante$$

Cioè:

$$\vec{p}_{sis}(t_2) = \vec{p}_{sis}(t_1)$$

per ogni coppia di istanti di tempo t_1 e t_2.

Attenzione: le particelle che compongono il sistema possono interagire tra loro (forze interne al sistema) e la quantità di moto delle singole particelle può variare.

Quantità di moto: componenti

$\vec{p}_{sis}(t_2) = \vec{p}_{sis}(t_1)$ è un'equazione vettoriale. Introducendo un sistema di coordinate cartesiane, possiamo scrivere il sistema di equazioni scalari per le componenti:

$$\begin{cases} p_{sis,x}(t_2) = p_{sis,x}(t_1) \\ p_{sis,y}(t_2) = p_{sis,y}(t_1) \\ p_{sis,z}(t_2) = p_{sis,z}(t_1) \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \sum m_i v_{i,x}(t_2) = \sum m_i v_{i,x}(t_1) \\ \sum m_i v_{i,y}(t_2) = \sum m_i v_{i,y}(t_1) \\ \sum m_i v_{i,z}(t_2) = \sum m_i v_{i,z}(t_1) \end{cases}$$

A seconda delle forze che agiscono sul sistema, la quantità di moto può essere conservata in una o due direzioni. In questo caso, se la componente della forza esterna risultante è nulla lungo un asse, la componente della quantità di moto lungo quell'asse non cambia.

In questo esempio il sistema è il proiettile. La forza esterna è il peso (verticale verso il basso). La componente orizzontale della quantità di moto del proiettile è costante.