

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

INGEGNERIA INFORMATICA

Analisi matematica II

Raccolta delle dispense di Placido Longo

A.A 2019-2020 - Aggiornata al primo semestre

File unico delle dispense realizzato da Gabriele Frassi

Indice della raccolta

1 Teorema fondamentale dell'Algebra	2
2 Limiti di funzioni omogenee	14
3 Il cambio di variabile nei limiti	34
4 Calcolo differenziale in più variabili	47
4.1 (31-5-2014) Derivata direzionale e teorema di Fermat. (I)	48
4.2 (31-5-2014) Introduzione al differenziale per funzioni scalari. (II)	59
4.3 (31-5-2014) Il differenziale ed il gradiente. (III)	68
4.4 (31-5-2014) Il teorema del differenziale totale. Funzioni a valori vettoriali. (IV)	78
4.5 (31-5-2014) Rette e piani tangenti. (V)	87
4.6 (31-5-2014) Direzioni di massima pendenza, funzioni composte, e curve di livello. (VI)	97
4.7 Estremi vincolati	103
4.8 (1-6-2015) La formula di Taylor (I): condizioni sufficienti per gli estremi interni	121
4.9 (1-6-2015) La formula di Taylor (II): la forma abbreviata	134
5 Teoremi per le funzioni implicite	143
5.1 (2-6-2014) Introduz. e teorema delle funzioni implicite: il caso continuo. (I)	144
5.2 (2-6-2014) I teoremi delle funzioni implicite regolari, scalari e vettoriali. (II)	155
6 Curve parametriche	167
6.1 Rettificabilità e lunghezza (1-2-2018)	168
6.2 (1-6-2015) Un esempio di curva continua non rettificabile	178
7 Teoria dei campi di vettori e delle forme differenziali lineari	187
7.1 CAMPI E FORME I	188
7.2 CAMPI E FORME II	209
7.3 CAMPI E FORME III	228
8 Misura e Integrazione	255
8.1 La misura di Lebesgue	256
8.2 L'integrale di Lebesgue	276
8.3 Alcuni cambi di variabile negli integrali doppi	278

IL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Pleido Longo (8/7/2010)

Le storie del teorema fondamentale dell'Algebra sarebbe intere
santi d' per sé, ma richiederebbe un impegno ed un'estensione
impegnativa per una dispensa.

Ad ogni modo, in estrema sintesi, la storia è questa.

Leonardo Fibonacci, pisano, accompagnando il padre nei suoi
viaggi d' commercio, soggiornò per qualche tempo in Algeria,
ove prese contatto con l'Algebra, nota in ambienti islamici, e
la importò in Europa. A quell'epoca erano noti i procedi-
menti d' risoluzione delle equazioni d' primo e secondo grado.

In Italia, durante il Rinascimento, si compirono
progressi molto importanti: le formule di Cardano, per le
risoluzione dell'equazione generale d' terzo grado, e quelle di
Ludovico Ferrari, per quelle d' quarto. Ogni tentativo d' estendere
formule simili per l'equazione d' quinto grado fu inutile.
Gli sforzi degl' algebristi italiani condussero anche all'"invenzione"
dei numeri complessi, in origine al solo scopo d' estrarre le radici
di numeri negativi, che si incontravano applicando le formule d'
Cardano, anche quando le soluzioni erano tutte reali.

Due secoli più tardi, fu chiesto il perché non si riusciva a trovare le formule risolutive per le equazioni algebriche dal grado superiore a 4: Galois, lo scienziato più avante di venire nato in un mondo, scrisse la dimostrazione del fatto che tali formule NON ESISTONO nel caso generale (ovviamente $x^5=1$ è solubile!).

Il problema algebrico era definitivamente chiuso: non è sempre possibile trasformare, utilizzando le identità algebriche elementari (permutare ancora addendi, mettere in evidenza, sommare e sottrarre, spostare ad un altro membro...) un'equazione generale d'quinto grado in una d'tipo "speciale" che utilizza solo le "operazioni" $\sqrt[3]{}, \sqrt[4]{}, \sqrt[5]{}$, ossia le soluzioni delle rispettive equazioni "pure" $x^2=k, x^3=k, x^4=k, x^5=k$.

Dove sta allora il problema? Il problema consiste nel fatto che una cosa è che non esiste formula risolutiva, un'altra è che non esistono soluzioni! Il punto d'foto è volzionario, che nei secoli successivi per tutta l'intera Analisi Matematica, è d'immedesimare del tutto a posto il problema della ricerca d'formule risolutive (fra l'altro così complicate da essere di uso assai poco agevole!) ed occuparsi del seguente problema:

"Dato un polinomio, esistono punti su quali si annulla?"

Ciò fu GAUSS, il "princeps mathematicorum".

Una prima osservazione è che i polinomi costanti (non nulli) NON hanno zeri. Prenderemo dunque in considerazione solo polinomi NON costanti. Anche i polinomi non costanti, però,

hanno i loro problemi: $1+x^2$ non ha zeri reali, ma ha zeri complessi $x = \pm i$.

Le risposte furono date da C.F. GAUSS, dopo vent'anni d'impersone e quattro diverse dimostrazioni, fu riuscita e formidabile:

TEOREMA (fundamentali dell'Algebra):

Ogni polinomio non costante a coefficienti in \mathbb{C} ha zeri in \mathbb{C} .

Allora qui è falso che un simile teorema è FALSO IN \mathbb{R} .

Osserviamo anche che il teorema non dice nulla riguardo di come determinare tali soluzioni d' $f(z)=0$, ma solo del fatto che esistono.

Osserviamo infine che se $f(z^*)=0$, allora f è divisibile per $(z-z_0)$ (Ruffini), e quindi, eseguita la divisione, si ottiene

$$f(z) = (z-z^*) q(z)$$

ove q (il quoziente della divisione) è un polinomio d'grado minore di 1. Poiché f è annullo solo in z^* e in tutti i punti fra i quali si annulla q (legge d'annullamento del prodotto) ne segue che, poiché il grado d' q non è zero (q costante) si può riapplicare il teorema d' GAUSS al quoziente e, alla fine, fattorizzare f in fattori d' primo grado (e una costante).

$$f(z) = A (z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)$$

ove alcuni degli zeri $z_1\dots z_n$ possono non considerare. Dunque, ogni polinomio complesso può essere decomposto nel prodotto di

polinomio di grado uno e zero. Le costante A non ha essere il coefficiente del termine d'ordine massimo.

Le dimostrazioni presentate (una delle tante), è basata sulle seguenti linee di ragionamento, e su due risultati:

— Per ogni polinomio complesso $p(z)$ la funzione

$$f(z) = |\rho(z)|$$

ha minimo assoluto in \mathbb{C} .

— Per ogni polinomio complesso non costante,

se $p(z^*) \neq 0$ allora esiste $\bar{z} \in \mathbb{C}$ tale che

$$|\rho(z^*)| > |\rho(\bar{z})|$$

Il teorema di GAUSS segue da questi due risultati: infatti, detto z^* un punto di minimo assoluto di $|\rho(z)|$ in \mathbb{C} deve risultare $|\rho(z^*)| = 0$ (e quindi $\rho(z^*) = 0$): se così non fosse, per il secondo risultato si avrebbe, per qualche \bar{z}

$$|\rho(\bar{z})| < |\rho(z^*)|$$

contro l'ipotesi che z^* sia di minimo assoluto per $|\rho(z)|$.

Le prossime due sezioni sono dedicate a stabilire questi due risultati.

NOTA: secondo altri, fu Niels Abel a provare le non esistenza di formule risolutive. Ma i giornalisti anche egli (di malattia) e patti, come Galois, le angheve di Cauchy.

Se p è un polinomio in \mathbb{C} ,
allora $|p|$ ha minimo in \mathbb{C} .

Il primo risultato da stabilire riguarda il comportamento di polinomi non costanti all'infinito.

LEMMA: Se $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è non costante, allora

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty$$

Dim. Prova $p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$, $\alpha_n \neq 0$
 si ha

$$p(z) = z^n \left(\alpha_n + \frac{\alpha_{n-1}}{z} + \dots + \frac{\alpha_{n-k}}{z^k} + \dots + \frac{\alpha_0}{z^n} \right)$$

Poiché $z \rightarrow \infty \Rightarrow z^k \rightarrow \infty$ per ogni k intero, strettamente positivo
 e $f \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{f} \rightarrow 0$, ne segue che il termine in parentesi
 tende a ∞ , mentre $z^n \rightarrow \infty$, da cui $p(z)$ diverge.

Dimostrazione del teorema.

E' immediato per i polinomi costanti: qui punto è dimostrato.

Fissato ad arbitrio $z_0 \in \mathbb{C}$, se $p(z_0) = 0$ allora già provato
 il teorema (ed anche il teorema di Gauss) perché

$$|p(z)| \geq 0 = |p(z_0)|$$

Se, invece, risulta $p(z_0) \neq 0$, allora segue dalla divergenza
 di p all'infinito che, scelto $\varepsilon = |p(z_0)| > 0$, si ha che

trovi $\delta > 0$ tale che

$$|\rho(z)| > \varepsilon = |\rho(z_0)|$$

per ogni z tale che $|z| > \delta$. A cause delle diseguaglianze precedenti, $|z_0| \leq \delta$.

Fissate $f(z) = |\rho(z)|$ e si considerano le sfere chuse (e limitate) $\overline{B}(0, \delta)$. La funzione f è continua (perché composta di funzioni continue) su un compatto (la sfera $\overline{B}(0, \delta)$) e dunque, per il teorema di Weierstrass, ha massimo e minimo.

Si trovi z^* un punto di minimo di f su $\overline{B}(0, \delta)$.

Si ha subito, per ogni $z \in \overline{B}(0, \delta)$

$$|\rho(z)| = f(z) \geq f(z^*) = |\rho(z^*)|$$

Se invece $z \notin \overline{B}(0, \delta)$, e cioè $|z| > \delta$, ricordando che $z_0 \in \overline{B}(0, \delta)$, si ottiene

$$|\rho(z)| \geq \varepsilon = |\rho(z_0)| \geq |\rho(z^*)|$$

e dunque

$$|\rho(z)| \geq |\rho(z^*)| \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

□

La proprietà d'diseguagliate all'infrutto, che permette di restringere le vicinanze del minimo ad un insieme chiuso e limitato sul quale sono assunte le ipotesi del teorema di Weierstrass, viene (in alto contesto) chiamata di COERCIVITÀ!

Se $p(z)$ è non costante, se $p(z^*) \neq 0$, allora

esiste $\bar{z} \in \mathbb{C}$ tale che $|p(\bar{z})| < |p(z^*)|$

Perché $p(z^*) \neq 0$, si può definire un nuovo polinomio

$$q(w) = \frac{1}{p(z^*)} p(z^* + w)$$

Il polinomio q ha lo stesso grado di p , poiché sviluppando tutti le potenze $(z^* + w)^m$ si ottiene sempre il termine w^m , ed inoltre $q(0) = 1$.

Rordinando q per potenze crescenti di w si ottiene

$$q(w) = 1 + \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \dots + \alpha_m w^m + \dots + \alpha_n w^n$$

Poiché q ha lo stesso grado di p , esso è NON costante, e dunque esiste almeno un coefficiente fra gli $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ non nullo. Sia k il minimo intero (non nullo) per cui $\alpha_k \neq 0$ e dunque, in realtà,

$$q(w) = 1 + \alpha_k w^k + w^{k+1} \tilde{q}(w) \quad (*)$$

ove $\tilde{q}(w)$ è il polinomio che si ottiene ne togliendo w^{k+1} fra tutti i termini di grado strettamente maggiore di k .

In $(*)$, per le diseguaglianze traugolare in \mathbb{C} , segue

$$|q(w)| \leq |1 + \alpha_k w^k| + |w|^{k+1} |\tilde{q}(w)|$$

L'idea della dimostrazione è di scegliere \bar{w} in modo che $\alpha_k w^k$ sia reale, negativo, e di modulo minore di 1.

Pertanto $\alpha_k w^k$ sia reale e negativo dovrà essere

$$\arg(\alpha_k w^k) = \pi$$

e cioè

$$\pi = \arg \alpha_k + \arg w^k = \arg \alpha_k + k \arg w$$

e infine

$$\theta = \arg w = \frac{\pi - \arg \alpha_k}{k}$$

Vedendo per avere $|\alpha_k w^k| \leq 1$, basta scegliere

$$|w| \leq \frac{1}{|\alpha_k|^{1/k}}$$

In definitiva, per ogni $\bar{w} = \rho e^{i\theta}$, con $\rho \leq \frac{1}{|\alpha_k|^{1/k}}$ e $\theta = \frac{\pi - \arg \alpha_k}{k}$, essendo $\alpha_k \bar{w}^k$ reale, negativo e di modulo minore di 1 nonché

$$|1 + \alpha_k \bar{w}^k| = 1 - |\alpha_k| |\bar{w}|^k$$

da cui

$$|q(\bar{w})| \leq 1 - |\bar{w}|^k \left[|\alpha_k| - |\bar{w}| |\tilde{q}(\bar{w})| \right]$$

Facendo ora tendere $|\bar{w}|$ a zero, mantenendone l'argomento costantemente uguale a θ , si ottiene che il termine in parentesi quadra tende a $|\alpha_k| (> 0)$ per come k è stato definito da cui,

per il teorema delle permutazioni del segno, esso mantiene lo stesso segno strettamente positivo del limite $|\alpha_k|$ per tutti i $\bar{w} \neq 0$, di argomento uguale a 0 e modulo, già in partenza minore d' $1/|\alpha_k|^{\frac{1}{k}}$, abbastanza piccolo. Ne segue che, per tale \bar{w}

$$\begin{aligned} |\bar{w}|^k & \underbrace{[|\alpha_k| - |\bar{w}||\tilde{q}(\bar{w})|]}_{>0} > 0 \\ & \Rightarrow |\alpha_k| > 0 \end{aligned}$$

e, di conseguenza,

$$|\tilde{q}(\bar{w})| < 1$$

Ricordando la definizione di \tilde{q} , ne segue

$$|\phi(z^* + \bar{w})| < |\phi(z^*)|$$

e le tesi, segnando

$$\bar{z} = z^* + \bar{w}$$



L'impiego del teorema delle permutazioni del segno consente di concludere che $|q|$ si compone, per w di norme piccole, come

$$1 + \alpha_k w^k$$

e le caratteristiche di \mathbb{C} (non presente in \mathbb{R}) che consente di concludere la prova è quella di poter fare a proprie l'argomento di $\alpha_k w^k$! Per un polinomio reale con le pari e $\alpha_k > 0$ non si può evitare che $\alpha_k w^k$ sia positivo (è esattamente ciò che accade a $p(x) = 1 + x^2$). Su \mathbb{C} , invece, c'è una libertà molt più grande.

NOTE CONCLUSIVE

A che s'arriva, in definitiva, un teorema d'esistenza di soluzioni, sente s'arriva come calcolarle?

Le risposte i massimi omia di questi non posse apparenze e visto le fatiche notevoli che essi richiedono, e solito, per stabilirli, è necessario soffermarsi sulla questione.

I discorsi che stiamo per farci sono comuni anche ad altri calcoli teorici d'esistenza, primo fra tutti quelli per le soluzioni delle equazioni differenziali.

Un approccio non solo realistico, ma anche tecnicamente corretto al problema non può prescindere dal fatto che già le formule riduttive

$$x = -\frac{b}{a} \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

delle equazioni d'I e II giud sono, nella stragrande maggioranza dei casi, almeno altrettanto approssimate — non "esatte" — di quanto non lo sia un procedimento di bisezione, ai fini del calcolo delle radici.

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots 3\dots$$

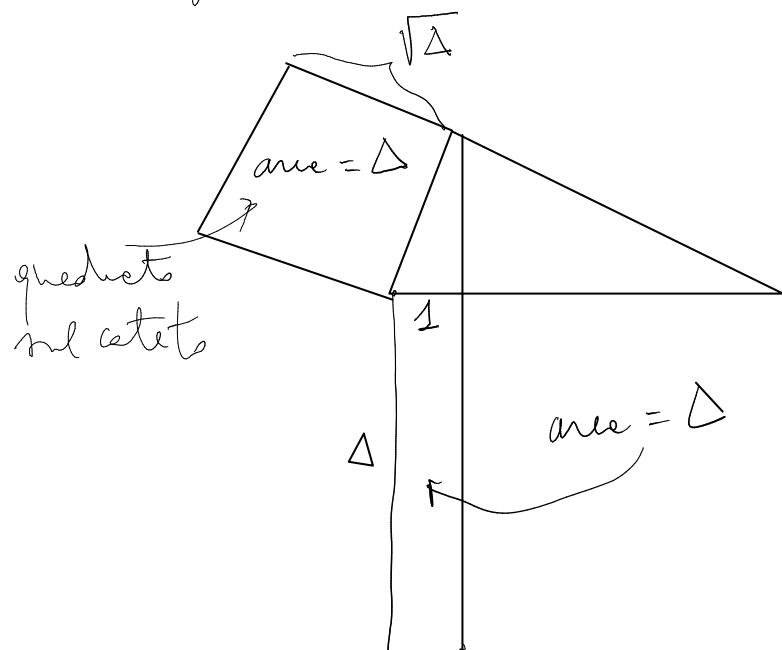
$$1 - \sqrt{2} = -0,4142\dots$$

La parte "esatta" (algebrica) del processo di risoluzione è la riduzione dell'equazione originaria (completa) ad

altri "punti" (\sqrt{k} = soluzioni positive di $x^2 = k$).

Mai volte arrivati a $[-b \pm \sqrt{\Delta}] / 2a$, se Δ non è un quadrato perfetto il simbolo $\sqrt{\Delta}$ non è nullo di "esatto" e nasconde un'approssimazione.

Non a caso i Greci pensavano l'aritmetica a favore della Geometria. Per le radici quadrate, il trattato d'Euclide fornisce le costruzioni:



Anche gli Antichi ebbero i loro problemi: non esiste una simile costruzione per le radici cubiche (come l'orologio di Apollo nascosto in Diana).

Mai volte accettò il principio che "esatto" e "approssimato" sono concetti largamente utilizzabili, i criteri d'esattezza erano puramente intuitivi, offrendo la base teorica sulle quali edificare le costruzioni d'algoritmi di risoluzioni approssimate.

L'esistenza dell'estremo superiore, e cioè le tesse dei numeri reali, fornisce il necessario supporto teorico alla convergenza dell'algoritmo di bisezione per il calcolo degli zeri, ad esempio.

Occorrendo, il fatto viene reso. Mere delle dimostrazioni del teorema d'esistenza (senza ϵ - δ) di Peano per eguali e sistemi differenziali del I ordine si fonda normalmente sulla base sull'algoritmo d'Euler di risoluzione approssimata e su un teorema di compattità (Ascoli-Arzelà) che permette di provare la convergenza di tali approssimazioni, oltre ad un'altro mette dottrina di concetti e risultati: la trasformazione in equazioni integrali, la convergenza uniforme delle propriezà rispetto agli integrali e le contante, il buon comportamento delle funzioni implicite rispetto al teorema d'Ascoli-Arzelà... una dimostrazione, puramente giustificate dalle potete dei risultati.

In altri esempi, purtroppo più banalenti, è costituita delle tesse dei sistemi di eguali differenziali lineari: tesse puramente algebriche, non appena si sapeva provare che un sistema lineare a coefficienti continui su \mathbb{R} ha soluzione unica in \mathbb{R} .

Non è possibile entrare qui nei dettagli, né accennare a tutti gli applicazioni alle geometrie. Altro è all'Algebra lineare del teorema di Gauss (si pensi alle storie molte diverse del teorema spettrale su \mathbb{R} e su \mathbb{C}).

Forse si dice abbastanza dichiarando che è il primo dei teoremi delle Matematiche di oggi ad essere stato dimostrato.

CONVERGENZA DELLE

FUNZIONI OMOGENEE

NELL' ORIGINE

Una delle conseguenze più interessanti della formula di Taylor per le funzioni di una variabile è che, per funzioni sufficientemente regolari nell'intorno di un punto x_0 la differenza $f(x) - f(x_0)$ si comporta come $(x-x_0)^h$ al tendere di x ad x_0 , ore $h \in$ le prime derivate non nulle in x_0 (se esiste).

Ciò permette di studiare il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, supposto che f e g siano in infinitesime, sostituendo ad f e g i loro sviluppi di Taylor con relativi resti, cioè

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-x_0)^h \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!} + o(x-x_0)^h}{(x-x_0)^k \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} + o(x-x_0)^k}$$

e tutti si riduce raggruppando in evidenza $(x-x_0)^h$ a numeratore, $(x-x_0)^k$ a denominatore, ottendendo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-x_0)^h}{(x-x_0)^k} \cdot \frac{\frac{1}{h!} f^{(h)}(x_0) + \frac{o(x-x_0)^h}{(x-x_0)^h}}{\frac{1}{k!} g^{(k)}(x_0) + \frac{o(x-x_0)^k}{(x-x_0)^k}}$$

e, per definizione di o piccolo, la seconda frazione tende a $\frac{k!}{h!} \frac{f^{(h)}(x_0)}{g^{(k)}(x_0)}$, e dunque tutto si decide

confrontando gli ordini h e k delle prime derivate non nulle di f e g . Esattamente lo stesso accadrebbe adoperando il teorema di Bernoulli (detto di de l'Hopital).

Poiché per le funzioni di più variabili non esiste un simile teorema, mentre esiste la formula di Taylor, sarebbe di grandissimo interesse il scoprire come adoperarla per calcolare i limiti. Prima di altre (più dolorose)

considerevamo sì resti $o(\dots)$, cominciamo con l'osservare che, mentre in una variabile i termini polinomiali sono potenti (se a numeratore che a denominatore) direttamente confrontabili e "semplicabili" nulla di simile accade in più variabili.

Infatti supponiamo per semplicità che il punto "fondo" nel quale studiare il limite sia $(0,0)$ e che f e g siano funzioni di due variabili, derivabili quante

ulte si mette a nulle nell'origine. Supponiamo infine che qualcuna delle loro derivate parziali (prima) non si annulli. In tal caso

$$f(x,y) = x f_x(0,0) + y f_y(0,0) + o(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$g(x,y) = x g_x(0,0) + y g_y(0,0) + o(\sqrt{x^2+y^2})$$

Anche se fare vers ($\rightarrow \text{NON LO E'!!}$) che i resti siano trascurabili, ci si troverebbe a studiare il limite

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y}$$

con uno fra i numeri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ non nullo, e non è affatto detto che i due complessi di termini d'ordine greco si possano semplificare: se fanno $f_x = 1 \quad f_y = -1 \quad g_x = 1 \quad g_y = -1$ la frazione sarebbe $\frac{x-y}{x+y}$ che non è in alcun modo semplificabile, e vedremo presto come nessuno riguardo alla convergenza.

L'unica cosa che hanno in comune le forme di una e di più variabili è che, una volta scoperta una delle parti non nulle, viene individuato un polinomio omogeneo costituito con tutte le derivate dello stesso ordine

e dunque, invece di rapporti $\frac{(x-x_0)^k}{(y-y_0)^l}$, sarebbe
occorso studiare i rapporti $\frac{f(x-x_0)}{g(y-y_0)}$ ove f e g
sono due polinomi omogeni di gradi k e l , rispettivamente.

Anche se i resti non esistessero, come nel caso di
 $f(x,y) = x-y$ e $g(x,y) = x+y$ che infatti
 $f(0,0) = g(0,0) = 0$ e $f_x(0,0), f_y(0,0), g_x(0,0), g_y(0,0) \neq 0$,
e per i quali i resti sono nulli, ci sarebbe comunque il
problema di studiare i limiti dei rapporti di polinomi
omogeni, che verrà solto in queste note nel caso più
generale delle funzioni (positivamente) omogenee.

Gli strumenti che vennero sviluppati consentiscono di
riconoscere subito che gli eventuali resti non sono
trascinabili (in generale) rispetto ai termini di ordine
più basso.

Lo studio che segue riguarda il comportamento nelle
origini. Lo studio in (x_0, y_0) può essere svolt sulla
funzione $\tilde{f}(u, v) = f(x-x_0, y-y_0)$, che si comporta in $(0,0)$
come f fa in x_0, y_0 .

FUNZIONI POSITIVAMENTE

OMOGENEE.

Le persone definiscono, inoltre parlando d'insiemi, è
indispensabile nel caso generale.

Definizione. Dato $X \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice che X è
UN CONO (rispetto all'origine 0) se
 $x \in X \Rightarrow tx \in X \quad \forall t > 0$

Dunque se un cono contiene un punto, contiene anche
tutte le semirette per l'origine nella direzione del punto,
ma niente si dice dell'origine (notate le due questioni
strette t>0?).

Definizione Una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, ove X è
un cono, si dice α -omogenea, o anche
omogenea di grado α , ($\alpha \in \mathbb{R}$) se
 $f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \forall x \in X \quad \forall t > 0$

Il dovrà calcolare $f(tx)$ $\forall x \in X \quad \forall t > 0$ rende necessario
che il dominio di f sia un cono. Notiamo subito
che il concetto è più generale di quelli d'insiemi

omogenee. Infatti la funzione $|x|$, definita sul
cono \mathbb{R}^n verifica $|tz| = |t||x| = t|x| \quad \forall t > 0 \quad \forall x$,
ed è dunque una funzione omogenea di grado 1,
senza essere un polinomio mentre, dato un qualsiasi
polinomio omogeneo di grado k

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{i_1 + i_2 + \dots + i_n = k \\ i_1, \dots, i_n \geq 0}} \alpha_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$

si ha, raccogliendo in evidenza t^k in ogni addendo

$$p(tx) = p(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k p(x_1, \dots, x_n) = t^k p(x)$$

e dunque un polinomio omogeneo di grado k è
una funzione k -omogenea.

Un semplicissimo esempio di funzione α -omogenea è
la funzione $x \rightarrow |x|^\alpha$.

Dalle leggi di moltiplicazione, divisione e potenza di
potenze segue subito che

LEMMA: f è α -omogenea e g è β -omogenea,
definite sullo stesso cono X , allora

$$fg \text{ è } (\alpha + \beta)\text{-omogenea}$$

$\frac{f}{g}$ è $(\alpha-\beta)$ -omogenee in $X - \{g=0\}$

f^t è $\alpha\gamma$ -omogenee



Osserviamo. Se f è 0-omogenee, allora ($t^k=1$) e f è costante sui raggi uscenti dall'origine (come per esempio siela a diocia). Un'altra utile osservazione è che, se f è α -omogenee e $x \neq 0$, allora

$$f(x) = f(|x| \frac{x}{|x|}) = |x|^\alpha f\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

e dunque una funzione omogenea è completamente individuata dai valori che assume sulla parte della sfera unitaria che appartiene al proprio dominio X .

Concludiamo con qualche esempio.

La funzione $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ è definita sull'insieme $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -y\}$ che è un cono, perché

$$(x,y) \in X \Rightarrow x \neq -y \Rightarrow tx \neq -ty \quad \forall t > 0 \Rightarrow (tx, ty) \in X$$

ed è omogenee di grado 0, perché rapporto di polinomi omogeni di grado 1.

La funzione $\frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}$ è definita su $X = \{(x,y) \neq (0,0)\}$

che è un cono perché $(x,y) \in X \Leftrightarrow (x,y) \neq (0,0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (tx, ty) \neq t(0,0) = (0,0) \quad \forall t > 0 \Leftrightarrow (tx, ty) \in X,$$

ed è 1-omogenea, perché rapporto di un polinomio 3-omogeneo e uno 2-omogeneo.

La funzione $\sin\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$ è definita sul cono precedente ed è 0-omogenea, perché $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ è 0-omogenea, e dunque costante sui raggi uscenti dall'origine e di conseguenza anche $\sin \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Lo è.

La norma di \mathbb{R}^n , essendo una norma, è 1-omogenea; la cui è riscontrabile anche dal fatto che

$$|x| = \left(\sum x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e poiché $\sum x_i^2$ è un polinomo 2-omogeneo, la sua potenza $\frac{1}{2}$ è di grado $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Infine, le forme quadratiche sono 2-omogenee.

LE FUNZIONI α -OMOGENEE,
 $\alpha > 0$, SONO (PIUTTOSTO SPESO)
INFINITESEME IN \emptyset !

Le proprietà prime osservate, per le quali

$$f(x) = |x|^\alpha f\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

basta introdurre qualsiasi di buons perché, al tendere di x a 0, anche $|x|$ fa altrettanto e dunque anche $|x|^\alpha$ per $\alpha > 0$, per la continuità della composizione di funzioni continue.

L'unico problema, serio, è che non sempre un prodotto uno dei fattori del quale è infinitesimo risulta infinitesimo soprattutto se l'altro fattore fa il doppio a quattro!

TEOREMA Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ α -omogenea, con
 $\alpha > 0$. Se inoltre f limitata su $X \cap \{|x|=1\}$.

Allora $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Dim. Poiché f è limitata sulla porzione di
 sfera unitaria che appartiene ad X , esiste $K > 0$
 tale che $|f(w)| \leq K \quad \forall w \in X \cap \{|x|=1\}$

Allora da

$$0 \leq |f(x)| = |x|^\alpha \left| f\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq (\text{perché } \frac{x}{|x|} \in X \cap \{|w|=1\}) \\ \leq k|x|^\alpha$$

e del teorema del confronto, poiché $k|x|^\alpha \rightarrow 0$ allora anche $|f(x)|$ farà altrettanto.

□

Determinare la costante k , "a meno", vuol dire risolvere la diseguaglianza $|f(x)| \leq K$, con $|x|=1$ e $x \in X$, cose tutt'altra che banale. La seguente versione fuorsia del teorema di Weierstrass per dedurre che k esiste, anche sente celebre.

TEOREMA Sia f come sopra, ma in più sia continua su X , e infine $X \cap \{|w|=1\}$ sia chiuso
Allora f è uniformemente continua.

Dim.

Per ipotesi, l'intersezione $X \cap \{|w|=1\}$ è chiusa, ed è anche limitata, poiché contiene nella sfera unitaria $B(0,1)$.

Dal teorema di Weierstrass, applicato alle funzioni continue $|f|$ ed al chiuso limitato $X \cap \{|w|=1\}$ segue che

$$|f(x)| = |x|^{\alpha} \left| f\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq |x|^{\alpha} \max_{v \in X \cap \{|w|=1\}} |f(v)|$$

e il ragionamento del teorema precedente si può ripetere prendendo

$$k = \max_{v \in X \cap \{|w|=1\}} |f(v)|$$

Esempio

$$\lim_{xy \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

perché $X = \{(x,y) \neq (0,0)\}$ e dunque

$$X \cap \{|w|=1\} = \{|w|=1\}$$

che è chiuso (e limitato).

Tuttavia, cosa accade a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x-y}$, che

è 1-omogenea come la precedente?

Il dominio è $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$ e, intersecando con il cerchio unitario si ottiene l'insieme

$$\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } x \neq y\}, \text{ che non è chiuso!}$$

Dunque il teorema non si può applicare, ma

resta il dubbio che moltissimi meno elementari potrebbero aggredire il problema. Purtroppo, non è così!

Tuttavia, poniamo ad arbitrario un intorno $B(0, \delta)$

si considerino i punti $(\frac{\delta}{2} \cos \theta, \frac{\delta}{2} \sin \theta)$ che stanno sulla circonferenza di raggio diametrale (e dunque appartengono all'intorno) ma per i quali risulta

$$f\left(\frac{\delta}{2} \cos \theta, \frac{\delta}{2} \sin \theta\right) = \frac{\frac{\delta^2}{4} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{\frac{\delta}{2} (\cos \theta - \sin \theta)} = \\ = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}}$$

che diverge in modulo quando $\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}$, con segni discordi delle due parti. Dunque, in ogni intorno (un tempo si sarebbe detto: "sempre piccolo") esistono punti su quali f assume valori arbitrariamente grandi, il che contrasta con la convergenza (le f fanno convergere per $L-\varepsilon$ ed $L+\varepsilon$ in un opportuno intorno).

Il tuo nome, dunque, si raffigura male! Basta che alle sere mitate mandi un punto d'acquisto come, più capace che f diverge (o diverge in modulo) su una successione ad essa convergente e le feste è finita!

UN CRITERIO "PIU' PRATICO"

Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua e α -omogenea, con $\alpha > 0$. Il risultato provato in precedenza assume che il $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ se f è limitata su $X \cap \{|x|=1\}$.

Se tuttavia X è chiuso, essendo anche limitato, permette di ottenere la limitatezza di f mediante il teorema di Weierstrass, ma cosa fare se $X \cap \{|x|=1\}$ NON è chiuso? Il seguente criterio, in apparenza macilento, ma molto utile in alcuni casi "reali", offre una risposta.

TEOREMA Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e α -omogenea, $\alpha > 0$, ed esiste finito il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ per ogni x_0 , punto d'accumulazione di $X \cap \{|x|=1\}$, allora $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Dove. Si può definire \tilde{f} nei punti d'accumulazione di $X \cap \{|x|=1\}$ non appartenenti ad esso ponendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \cap \{|x|=1\} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \text{se } x \in \partial(X \cap \{|x|=1\}) \end{cases}$$

e le continuità di \tilde{f} assicura che le definizioni sono coerenti

sono punti d'accumulazione già appartenenti ad $X \cap \{|x|=1\}$. La funzione \tilde{f} , così definita, è continua sull'insieme chiuso e limitato $X \cap \{|x|=1\} \cup \partial(X \cap \{|x|=1\})$, chiuso perché contiene per definizione i suoi punti di accumulazione e limitato perché sottovolume di $B(0, 1)$.

Ne segue che \tilde{f} è limitata (ed anche f) ed conseguentemente lo è, da cui ha testo segue come nel testo precedente.

ESEMPIO $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$

Posto $x = \cos \theta$ $y = \sin \theta$ si ottiene, sul cerchio unitario,

$$f(\cos \theta, \sin \theta) = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$$

che è una funzione di una sola variabile θ , di modulus divergente se $\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}$ e $\theta \rightarrow \frac{5\pi}{4}$, che sono esattamente i punti di $\{(x, y) \in \mathbb{R} : |(x, y)|=1\}$ NON appartenenti al dominio di f , che è $\{(x, y) \in \mathbb{R} : x \neq y\}$. Dunque f non è limitata.

ATTENZIONE !!! Una funzione può benissimo essere limitata nell'intorno di un punto senza essere in convergenza, come ad esempio $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ intorno a 0.

Dunque, occorre stare attenti: l'esistenza dei limiti

nei punti d'accumulo del danio sulle spese
mitate è una condizione sufficiente, MA NON
NECESSARIA, perché f sia infinito.

LE FUNZIONI O-OLOGENEE

NON CONVERGONO (QUASI MAI...) IN O.

Le cattive notizie non arrivano mai da sole!

TEOREMA Se f o-ologena non
esiste fuori dall'origine.

Allora $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ NON ESISTE!

Dove. Se f è non costante fuori d'0, esistono
 $x_1, x_2 \in X$, non nulli, tali che $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Allora

$$f(tx_1) = f(x_1) \quad \forall t > 0$$
$$f(tx_2) = f(x_2)$$

Scegli allora il punto interno $B = B(0, \delta)$, si osserva
che, essendo $|x_1| \neq 0 \neq |x_2| \neq 0$, segue che

$$tx_1 \in B \quad \text{se} \quad |tx_1| < \delta, \text{ e cioè se} \quad |t| < \frac{\delta}{|x_1|},$$

e che

$$tx_2 \in B \quad \text{se} \quad |t| < \frac{\delta}{|x_2|}$$

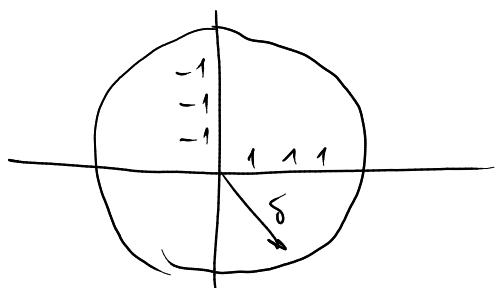
In definitiva, in ogni intorno di θ , esistono punti (quelli dei raggi per l'origine e x_1 e x_2) sui quali f assume i valori $f(x_1) \neq f(x_2)$. Basta allora porre $\varepsilon < |f(x_2) - f(x_1)|$ per vedere violata la condizione massimale sufficiente per la convergenza.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \text{dom } f \quad |x - x_0| < \delta \quad |y - x_0| < \delta$
 $x \neq x_0 \quad y \neq x_0 \quad \text{entall} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

(CONDIZIONE DI CAUCHY)

e dunque f non converge.

Esempio: $\frac{x-y}{x+y}, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ non sono costanti,
☒
e quindi non convergono. Ad esempio, la restrizione
di $\frac{x-y}{x+y}$ all'asse x ($y=0$) vale (intuitivamente) 1, mentre
la restrizione all'asse y ($x=0$) vale -1, da cui



ogni intorno
contiene punti su
quali la f vale 1
e altri su qual' $f = -1$

La condizione di Cauchy è violata scegliendo $\varepsilon < 2$.

... E LE α -OMOGENEE CON
 α NEGATIVO?

... al peggio, non c'è fine!

TEOREMA: Se f è α -omogenea, $\alpha < 0$, non
identicamente nulla fuori dell'origine.

Allora f non converge in 0 .

Dmo Si $x_1 \neq 0$: $f(x_1) \neq 0$. Allora

$$f(tx_1) = t^\alpha f(x_1)$$

Poiché $\alpha < 0$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha = +\infty$ e dunque, essendo
 $f(x_1) \neq 0$, ne segue che f non è limitata in nessun
intorno di 0 .

... IN CONCLUSIONE ?

E' una questione assai delicata! E' abbastanza evidente che se il denominatore si annulla nel punto limite ed il numeratore no, e' insensato sperare nella convergenza, ma cosa dire di $\frac{x^2-y^2}{x+y} \equiv x-y$ su $\mathbb{R}^2 - \{(x+y=0)\}$ che e' certamente infinitesimo in $(0,0)$.

Una prima questione da affrontare, illustrata bene dall'esempio precedente, e' di semplificare tutto il semplificabile, ma le cose e' difficile in piu' reversibili, e ha condotto alla tesi delle "basi di GRÖBNER", davvero troppo per un corso elementare.

Anche se numeratore e denominatore si annullano entrambi nel punto limite, puo capitare che i luoghi degli zeri di f e g abbiano direzioni diverse, come ad esempio

$$\frac{x^2-y^2}{y} \quad \boxed{\text{1-omogenee}}$$

Come fare a farla "scoppiare"? Basta ovviamente che degli endi un comune che, sente tacere mai l'asse x , che e' l'insieme singolare ($y=0$), se puo' ancora ad esempio regolarmente, per esempio lungo la parabola $u(x)$

$y = n^3$ ottengo

$$\frac{x^2 - x^6}{n^3} = \frac{1 - x^4}{x}$$

da cui, facendo tendere x a zero e mantenendo $y = x^3$ si ha che $|f|$ dirige, nonostante f sia 1-omogeneo.

Mentre in una sola variabile i rapporti di infiniti non convergenti sono quelli nei quali il denominatore è infinito di ordine superiore rispetto al numeratore, ciò è (in qualche senso) FALSO, almeno se si pensa d'identificare l'ordine di infinito con il grado di omogeneità.

Comprendendo, non ci sono alternative allo studio degli zeri di numeratore e denominatore, che poi è il problema generale delle Geometrie Algebriche, le matrice erede della Geometria Analitica di Fermat. Come direbbero gli Anglosassoni:

"There is no silver bullet"

IL CAMBIO DI VARIABILE

Titolo nota

25/04/2012

IL CAMBIO DI VARIABILE NEL CALCOLO DEI LIMITI

Una tecnica piuttosto nota, efficace, ed insegnata nelle scuole, per il calcolo dei limiti fa uso del cambio di variabile. Un esempio:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \stackrel{x^2=y}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Tecnica elegante, suggestive, apparentemente efficacissima, in generale, FALSA! Infatti, non

$$g(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y=0 \\ 0 & \text{se } y \neq 0 \end{cases} \quad f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

$$\text{Si ha } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0$$

In tal caso $g(f(x))$, che calcoliamo esplicitamente più giù, dovrebbe avere limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) \stackrel{y=f(x)}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ y \rightarrow 0}} g(y) = 0$$

ma ciò è FALSO! Infatti

$$g(f(y)) = \begin{cases} 1 & se f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = k\pi \Rightarrow x = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Poiché $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k\pi} = 0$, vuol dire che in ogni intorno di zero ci sono infiniti punti su quali $g(f(x)) = 1$, e dunque essa non può essere infinitesima in 0, in quanto viene violata la condizione di Cauchy.

Tutto diventa più chiaro se si cerca di dimostrare il teorema corrispondente:

"TEOREMA" FALSO!!! Lema

$$f: \Omega \rightarrow \Sigma \quad g: \Sigma \rightarrow \mathbb{H}$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{R}^p$, e valgono

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad e \quad \lim_{y \rightarrow L} g(y) = M$$

"ALLORA" (se si dell'esempio che è FALSO!)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow L} g(y) = M$$

DIM.

Per provare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ occorre verificare che

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom } g \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Dall'ipotesi sulla g si ha che, in corrispondenza
allo STESO ε precedente

$\exists \sigma > 0 : \forall y \in \text{dom } g \quad |y - L| < \sigma \implies |g(y) - M| < \varepsilon$

$$|g(y) - M| < \varepsilon$$

e ciò è esattamente quanto richiesto, a patto di
poter sostituire y con $f(x)$ (x cioè comune variabile).

Per fare falso $y = f(x)$ occorre che

- $f(x) \in \text{dom } g$
- $|f(x) - L| < \sigma$
- $f(x) \neq L$

Le ipotesi assunte garantiscono le prime due, perché
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ e $\text{dom } g = \Sigma$ e quindi, dall'ipotesi su
 f , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ e quindi, dato il σ precedente

esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x \text{ damp} , |x - x_0| < \delta, x \neq x_0$
 si ha $|f(x) - L| < \sigma$.

NON GARANTISCONO, INVECE, IN ALCUN
 MODO, LA CONDIZIONE $f(x) \neq L$.

Nel contesempio, infatti, $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

ed $f(x) = 0$ per ogni $x = \frac{1}{k^n}$, ed in ogni intorno
 comunque piccolo di 0 si troveranno tali punti, che sono
 proprio quelli che fanno saltare il teorema.

Il contesempio, per quanto fastidioso, è nella natura
 delle cose. L'ipotesi $\lim_{y \rightarrow L} g(y) = M$ fornisce stime
 su

$$|g(y) - M|$$

solo per i punti vicini ad L , MA DISTINTI DA ESSO!
 NULLA DICE, OPPURE, per $y = L$.

Quanto detto finora indica cheamento il problema
 e le sue possibili soluzioni.

TEOREMA 1 (VERO!) : Sono

$f: \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ referto $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

e

$g : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{H}$ continua in L

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(L)$$

Dim. In tal caso la continuità fornisce la
stessa $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall y \in \text{dom } f \quad |y - L| < \delta \Rightarrow$
 $|g(y) - g(L)| < \varepsilon$

senza alcuna necessità d'escludere il caso $y = L$ e
ciò dimostra il problema alla radice.



Un altro modo draconiano, ma molto utile in
pratica in tutti i casi nei quali il teorema precedente
sia inutilizzabile (come nell'esempio inviato), è il
segmento

TEOREMA 2 (VERO ANCH'ESSO!) Dimo

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ infatti $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

e

$f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$, refinata

$$\lim_{y \rightarrow L} g(y) = M$$

e sic inoltre g sic NON DEFINITA IN L.

Allora, se x_0 è di accumulazione per il dominio

d' $g(f(x))$ si ha,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = M$$

Dim. La condizione $x_0 \in \partial \text{dom } g(f(x))$ serve solo a garantire d' poter considerare il limite delle tesi.

Le prove, in tal caso, i esattamente quelle del teorema FALSO "di rottura" prima, perché in tal caso, per ogni x per cui $f(x) = L$ (quelli "proibiti"), le funzioni composte $g(f(x)) = g(L)$ non è definita, e dunque tali punti non appartengono al $\text{dom } g(f(x))$ e non devono essere considerati nelle diseguaglianze del limite che esprime la tesi.



Questo teorema giustifica il cambio di variabile nell'esempio iniziale di questo testo: la funzione "più esterna" $g(y) = \sin y / y$ non è definita in $L=0$.

Quindi cosa restano esclusi dai due risultati precedenti e devono dunque porre in allarme l'utilizzo oltre finale del cambio di variabili? Si può cambiare variabili se le funzioni "esterne" sono continue, oppure se non sono definite. Resta fuori il caso in cui sono definite "male", nel senso che è definita, ma discontinua in L.

Una soluzione in tal caso, di uso pratico piuttosto farreggioso, è espansione del segmento

TEOREMA 3 (purché limitata, ma VERO!):

Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ ed

esiste $\eta > 0$: $f(x) \neq L \quad \forall x \neq x_0$. sufficiente

$$|x - x_0| < \eta$$

Sia poi

$g: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$, tale che

$$\lim_{y \rightarrow L} g(y) = M \neq g(L)$$

Allora, $\exists x_0 \in \partial \text{dom } g(f(x))$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = M$$

DIM.

In tal caso, i punti "proibiti" nei quali $f(x) = L$ vengono esclusi per ipotesi da tutto l'intorno $B_r(x_0)$, con l'eventuale eccezione del punto x_0 , che viene comunque sottratto dalla definizione stessa di $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x))$.

Dunque, dentro $B_r(x_0)$ non ci sono altri punti, a parte al più x_0 , nei quali $f(x) = L$, e ne segue che i problemi segnalati nel controesempio, e derivati dalla condizione $y \neq L$ per la validità delle stime $|g(y) - M| < \varepsilon$, non hanno ragione d'essere quando si fa $y = f(x)$. □

Questa ipotesi è di impiego assai difficile, in generali. Occorre determinare tutte le soluzioni di $f(x) = L$, e verificare che x_0 è isolato rispetto all'insieme di tali soluzioni.

Di regola provare che g è continua in L , o non definita in L , è invece più facile.

Un'ultima osservazione sul fatto che le condizioni precedenti sono in certo senso anche necessarie a che il limite delle funzioni composte esista.

Supponiamo che non si verifichi nessuna delle ipotesi delle tre teoremi sopra. Allora g è definita e discontinua per $y = L$ ed f assume infinite volte il valore L , ma non vale costantemente L in un intorno (eventualmente "bracciato") di x_0 .

In tal caso si verifica esattamente lo scenario del contro-

esempio: le funzioni composte fanno costantemente $g(L)$ su tali infatti punti in ogni intorno di x_0 , mentre tendono ad $M \neq g(L)$ in tutti gli altri, per effetto del "teorema" iniziale, che è vero se $f(x) \neq L$.

Se invece $f(x) \equiv L$ in $B_\gamma(x_0) - \{x_0\}$ allora $g(f(x)) \equiv g(L)$ in $B_\gamma(x_0) - \{x_0\}$ e dunque in tale "strano" caso $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(L)$, comunque diverso dal valore "pronto" M .

CONCLUSIONE: come per molte proprietà basate sull'Analisi, il cambio di variabile nei limiti non è un diritto cui: è un **TEOREMA** (tre, nel nostro caso) valido solo sotto opportune ipotesi.

In pratica, basta definire con cura le funzioni composte e verificare la continuità di $g \circ f$ fatto che essa non sia definita nel punto nel quale è nato il suo limite.

Come esempio d'applicazione rilevante, dimostriamo il teorema sulle derivate di funzioni composte in \mathbb{R} .

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \begin{cases} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{se } f(x) \neq f(x_0) \\ 0 & \text{se } f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

Consideriamo il limite per $x \rightarrow x_0$ nelle due regioni.

Se $f(x) \neq f(x_0)$, il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

può essere calcolato con il criterio di verificare $y = f(x)$
perché la funzione "può estendersi" a

$$\frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)}, \quad \text{che non è definita in}$$

$y = f(x_0)$ (che è cioè a cui tende $f(x)$ quando $x \rightarrow x_0$),

e dunque

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0)) f'(x_0)$$

Resta il problema di stabilire che accade nell'altro
caso invece del dominio, $\{x : f(x) = f(x_0)\}$: se d'esso il
rapporto incrementale di $g(f(x))$ è identicamente nullo ed ha limite 0.
Osserviamo che, se $f'(x_0) \neq 0$, per la permanenza del
segno il rapporto incrementale $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ è non nullo in
tutto un "intorno" $B_\delta(x_0) - \{x_0\}$, nel quale dunque $f(x) \neq f(x_0)$.

Ne segue che se $f'(x_0) \neq 0$, l'insieme $\{x : f(x) = f(x_0)\}$ dista almeno δ da x_0 ,
ed il comportamento di f su di esso non influisce sul limite in x_0 : si
usa allora il teorema 3.

Se invece $f'(x_0) = 0$, allora $g(f(x_0)) f'(x_0) = 0$ e

dunque i limiti sui due insiemi $\{f(x) \neq f(x_0)\}$ e $\{f(x) = f(x_0)\}$

sono entrambi nulli (e quindi uguali fra loro) da cui risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) f'(x_0) = 0$$

□

Ecco dimostrata la più potente formula del calcolo differenziale! Ci sono prove più dirette (cfr. G. Prodi: Analisi Matematica I Boingher).

Un esempio, meno sottile e più semplice, è il

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$$

che vale $\frac{1}{2}$, perché la funzione è composta da

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \begin{array}{l} \text{che è la norma in } \mathbb{R}^2, \text{ e tende} \\ \text{a } L=0 \text{ se il vettore } (x,y) \text{ tende} \\ \text{a } (0,0) \text{ (per definizione di convergenza),} \end{array}$$

e da

$$g(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2} \quad \begin{array}{l} \text{che non è definita in } L=0 \\ \text{ma che converge in tale punto a } \frac{1}{2}. \end{array}$$

In questo caso è stata adoperata, sente forse, il teorema 2.

Per tornare al "vecchio stile", si potrebbe ragionare così

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \quad \stackrel{\text{?}}{\overbrace{\frac{1 - \cos t}{t^2}}} \quad \lim_{\substack{x,y \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

Il punto interrogativo serve a ricordare che l'ingegneria dei due limiti è di solito FALSA, ma (ed è qualche occasione eccezionale) in tal caso è vera perché la funzione nel limite a secondo membro non è definita (Th. 2) [o è continua (Th 1)] e infine (disastro!) è definita e discontinua, ma quelle punti interni, che definiscono la verità f , non assumono mai il valore possibile! L'anno ad ∞ se non, al punto, in x_0 stessa!

Tutto sommato, per cominciare veritabilmente decentemente ci vuole la stessa fatica che per falso scorrettamente.

Va comunque riconosciuto che gli esempi di falso discontinuo hanno un che di artificiali, di "pensamenti matematici" e "poco pratici": ciò spiega a adeguatamente la regola per le quali tale questione viene di solito ignorata.

I risultati precedenti diversamente completamente la situazione: nessuno decide per sì per il miglior!

Capitolo 4

Calcolo differenziale in più variabili

IL CALCOLO DIFFERENZIALE (I)

La derivate direzionale ed il teorema di Fermat.

Si prova tentativi per estendere alle funzioni di più variabili il concetto d' derivate è quello diretta: definire in modo sensato il rapporto incrementale e fornire il limite al tendere a zero dell' incremento. Andrebbe, a ben vedere, il tentativo risultare per molti versi inconcludente, ma forse permette d' estendere una dei più antichi ed importanti fra i "grandi risultati" dell' Analisi; le condizioni di Fermat sulla derivata nei punti d'estremo (massimo o minimo) interni. L' idea che seguiamo, adoperando molto d' argomenti in Analisi in più variabili, è di ridurre il problema ad una sola variabile, restringendo il dominio delle funzioni ad una retta uscita dal punto da studiare.

DEFINIZIONE Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

sia $x_0 \in \Omega$. Si dice che f E' DERIVABILE NELLA DIREZIONE DI v , $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, SE ESISTE FINITO IL LIMITE

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x_0 + hv) - f(x_0)]$$

- 2 -

Esso verrà chiamato DERIVATA (DIREZIONALE)

D1 f NELLA DIREZIONE DI ν in x_0 , e denotato con uno qualsiasi di simboli

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0), \frac{\partial f(x_0)}{\partial \nu}, f_\nu(x_0), \partial_\nu f(x_0)$$

Le derivate nelle direzioni dei vettori

delle basi canonica $e_1 \dots e_n$ si chiamano (se sempre) DERIVATE PARZIALI, e si denotano con i simboli speciali $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$, o $f_{x_i}(x_0)$, oppure $\partial_i f(x_0)$

NOTA: Se si pone $h(t) = f(x + t\nu)$, allora h è una funzione scalare d'una sola variabile reale per tutti i t per i quali non tratta dom f e le derivate direzionali appena definite coincide con $h'(0)$.

NOTA: Fissiamo il vettore e_1 , primo della base canonica, e calcoliamo la derivate parziale rispetto ad x_i , $f_{x_i}(x_0)$, indicando esplicitamente tutte le componenti scalari di tutti i vettori in gioco. Dunque

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0) \quad x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

—3—

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ deci

$$x_0 + h\vec{v} = (x_1^0 + h \cdot 1, x_2^0 + h \cdot 0, \dots, x_n^0 + h \cdot 0)$$

ed infin

$$f_{x_1}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[f(x_1^0 + h, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \right].$$

Si osserva subito che, per calcolare una derivate parziale (nel nostro caso, quelle rispetto ad x_1 , cioè ϵ_1) basta tenere fisse tutte le coordinate tranne x_1 e calcolare l'ordinario limite del rapporto incrementale rispett all'unica variabile infinita, che è la derivate ordinaria della funzione d'una sola variabile

$$t \rightarrow f(t, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$$

Tutto ciò, oltre a spiegare abbastanza chiaramente il perché del nome "derivate PARZIALE" fornisce un regole pratiche per il calcolo: "LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE RISPETTO AD x_i SI CALCOLA COME PER LE FUNZIONI DELLA SOLA VARIABILE x_i , TRATTANDO LE ALTRE COME DELLE COSTANTI".

- 4 -

ESEMPIO: Sia $f(x,y) = x^2y$. Allora, per calcolare $f_x(x,y)$ occorre riguardare y come se fosse una costante, e derivare x^2y rispetto a x . Dunque

$$\partial_x(x^2y) = y \partial_x(x^2) = 2xy$$

Analogamente

$$\partial_y(x^2y) = x^2 \partial_y(y) = x^2$$

Non occorre imparare niente di nuovo: basta solo ricordare che per le derivate parziali occorre pensare a tutte le altre variabili come a delle costanti che, nell'esempio precedente, "escono" dal simbolo di derivazione.

ESEMPIO: $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x} \quad x \neq 0$

Allora:

$$(y \text{ "costante"}) \quad f_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot y \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$(x \text{ "costante"}) \quad f_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

derivate delle funzioni "esterne"

derivate dell'argomento
come funzione di y

QUESTO E' TUTTO ...

- 5 -

... O QUASI! Quando non funziona la derivazione
in una variabile, non funzionano nemmeno le derivate parziali!

ESEMPIO: $f(x,y) = |xy|$. Esistono $f_x(0,0)$
 $\neq f_y(0,0)$?

Non si può studiare le derivate mediante le derivate
di funzioni composte, perché $t \rightarrow |t|$ NON è derivabile
in $t=0$, che è esattamente il punto comune nel
calcolo in $(0,0)$: infatti, posto $g(t) = |t|$, $f(x) = xy$
(y costante = 0, e cioè l'ordine di $(0,0)$) e $h(x) = g(f(x))$
si dovrebbe avere $h'(0) = g'(f(0)) f'(0)$, ma $f(0)=0$
e $g'(0)$ non esiste ed il teorema sulle derivate di
funzioni composte non è applicabile.

In questi casi si ricorre all'applicazione delle regole
di derivazione e si utilizzano le definizioni che sono
comuni rispetto ad infinitesimi in una sola variabile,
"fratellabili" con il teorema di de l'Hospital, con le
formule di Taylor o, al massimo, con qualche limite notevole.

Il nostro esempio è più semplice!

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(h,0) - f(0,0)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [h \cdot 0 - 0 \cdot 0] = 0$$

- 6 -

Un altro esempio, meno immediato, è il seguente:

ESEMPIO: $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{in } (0,0) \\ \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

In tal caso, non ci sono problemi fuori dell'origine, perché f è, nell'intorno di tali punti, un rapporto di (compostezza) di funzioni derivabili, mentre l'origine è più delicata.

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(h,0) - f(0,0)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{\sin h^2}{h^2} - 1 \right] =$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h^2 - h^2}{h^3} \quad \stackrel{(h,0) \neq (0,0)}{\uparrow}$$

Ricordando che $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ ne segue che $\sin t - t = \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ e ponendo $t = h^2$, ed essendo $\frac{\sin t - t}{t^3}$ non definita in 0, dal teorema del confronto si verifichi segnificativamente

$$\sin h^2 - h^2 = \frac{h^6}{6!} + o(h^6)$$

da cui, infine,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h^2 - h^2}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^6}{6!} + o(h^6)}{h^6} \cdot \frac{h^6}{h^3} \underset{\frac{1}{6!}}{\downarrow} \underset{0}{\downarrow} 0$$

Con lo stesso calcolo (simmetrico) si prova che

$$f_y(0,0) = 0$$

— 7 —

Il calcolo delle derivate direzionali fa un'importante dom
di funzioni, le funzioni differentiabili (che non sono solo
divebbili come in \mathbb{R} , dove le classi coincidono), sarebbe
a calcolare un prodotto scalare fra il vettore delle derivate
particolari (il GRADIENTE, vediparò avanti) ed il vettore v .
Ciò non è più valido in generale. Si può comunque
adottare la definizione

ESEMPIO: $f(x,y,z) = xyz^2$, $v = (-1,1,2) \neq 0$,
 $x_0 = (2,3,1)$. Esiste $f_v(2,3,1)$?

Si ha

$$f_v(2,3,1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(x_0 + tv) - f(x_0)] = h'(0)$$

ove

$$h(t) = f\left(2 + (-1)t, 3 + (1)t, 1 + (2)t\right) = \underbrace{(2-t)}_x \underbrace{(3+t)}_y \underbrace{(1+2t)^2}_z$$

da cui

$$\begin{aligned} h'(t) &= (2-t)'(3+t)(1+2t)^2 + (2-t)(3+t)'(1+2t)^2 + \\ &+ (2-t)(3+t)[(1+2t)^2]' = -(3+t)(1+2t)^2 + \\ &+ (2-t)(1+2t)^2 + (2-t)(3+t) \cdot 2(1+2t) \cdot 2 \end{aligned}$$

e, facendo $t=0$, si ha infine $f_v(2,3,1) = h'(0) = -3 + 2 + 24 = 23$

IL TEOREMA DI FERMAT.

Le condizioni seguenti, note già a Fermat, che le impone per provare che la legge d'rifrazione delle luce potesse essere spiegata ammettendo che la traiettoria delle luce è quella che rende MINIMO il TEMPO di viaggio fra due qualsiasi punti, sono le più importanti dell'Analisi.

TEOREMA (Fermat): Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sia $x_0 \in \Omega$ verificante:

1) x_0 è interno ad Ω

2) x_0 è di minimo locale per f , e cioè

$\exists \delta > 0 : f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \text{dom}f \cap B_\delta(x_0)$

3) Esiste (finito) $f_{vv}(x_0)$

Allora

$$f_{vv}(x_0) = 0$$

Prima di esporre la dimostrazione, osserviamo che il teorema esprime una condizione necessaria, ma non sufficiente, esattamente come in una verità: nei massimi locali accade esattamente lo stesso cose (basta considerare $-f$),

- 9 -

e non basta! La funzione $f(x,y) = xy$ è continua sugli assi coordinate, ed ha quindi entrambe le derivate parziali nulle in $(0,0)$, ma non ha né né massimi né minimi locali, poiché cambia segno in ogni intorno dell'origine (negativo sul II e sul IV quadrante, positivo sul I e III quadrante). Nessuna sostanziale sorpresa in più verdi! Inoltre, il teorema che per ogni derivate finita, i coefficienti delle altre: ad esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \cdot ny = 0 \\ 1 & x \cdot ny \neq 0 \end{cases}$$

ha in $(0,0)$ un minimo (globale) interno al dominio (nella \mathbb{R}^2), ha solo le derivate parziali, chiuse nulle in accordo al teorema, ma non ha alcun'altra derivate direzionale: infatti, per $v = (\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \neq 0$ si ha:

$$f_v(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\underbrace{f(0+\alpha h, 0+\beta h)}_{\substack{\text{"} \\ \text{1 per } \alpha h \neq 0 \\ \beta h \neq 0}} - f(0,0) \right] \quad \text{NON ESISTE!}$$

DIM. Perché x_0 è interno ad Ω , $\exists \rho > 0$!

$$B_p(x_0) \subseteq \Omega.$$

Poiché x_0 è un minimo locale di f , $\exists \delta > 0$:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \text{dom } f \cap B_\delta(x_0)$$

- 10 -

Punto alline $\eta = \min(\delta, \rho)$, ne segue che

1) $B_\eta(x_0) \subseteq B_\rho(x_0) \subseteq \Omega = \text{dom } f$

2) $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in B_\eta(x_0)$ perché, da 1),

$B_\eta \subseteq \Omega$, ma anche $B_\eta \subseteq B_\delta$, da cui $B_\eta \subseteq \Omega \cap B_\delta$

Si consideri ora il segmento $x_0 + tv - x_0$

che $|x_0 + tv - x_0| = |tv| = |t||v| < \eta$ se ($t > 0$)

$|t| < |v|^{-1}\eta$, da cui $x_0 + tv \in B_\eta(x_0)$ se e solo se $t \in \left[-\frac{\eta}{|v|}, \frac{\eta}{|v|}\right]$

Dunque, per $h(t) = f(x_0 + tv)$, si ha che
 $h(t)$ è definita in $\left[-\frac{1}{M}\eta, \frac{1}{M}\eta\right]$ e che, inoltre,

$$h(0) = f(x_0) \leq f(x_0 + tv) \quad \forall t \in \left[-\frac{1}{M}\eta, \frac{1}{M}\eta\right]$$

perciò $x_0 + tv \in B_\eta(x_0) \subseteq \Omega \cap B_\delta(x_0)$.

Si può dunque applicare il teorema di Fermat in una ventola
alla funzione h , perciò $t=0$ è un punto d'mma locale,
intorno, ovvero h è derivabile ($h'(0) = f_v(x_0)$) e dunque

$$h'(0) = 0$$



In definitiva, in un punto d'uno local intimo, qualche derivate d'ordine n esiste è nulla.

Gli risultato non è molto inaspettato: se, ad esempio, f avesse tutte le derivate direzionali, gli eventuali punti d'estremo intimo dovrebbero verificare le infinite condizioni

$$f_v(x_0) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

La sostituzione è di molto semplice se f è differentiabile (vedi più avanti): in tal caso, le infinite condizioni si riducono alle n equazioni

$$f_{x_i}(x_0) = 0 \quad i=1..n$$

un sistema (non lineare, in generale) $n \times n$: un'eccellente generalizzazione a n variabili delle condizioni $f'(x_0) = 0$.

Vediamo che esse può ancora venire scritte come

$$f'(x_0) = 0$$

perché ci si ricorda che, per una funzione scalare d' n variabili, il simbolo $f'(x)$ si intende il suo gradiente (così come per una funzione vettoriale d' n variabili, si intenderebbe la jacobiana). I dettagli seguiremo tra breve.

IL CALCOLO DIFFERENZIALE (II)

Introduzione al differenziale di funzioni scalari

La derivate direzionale consente già notare estremi di alcuni concetti sviluppati per le funzioni \mathbb{R} alle funzioni d'una variabile reale $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. L'esempio migliore è fornito dalle condizioni necessarie per gli estremi locali (Fermat), che vale in più variabili così come vale in una variabile, ed è stata usata da Euler per un spazio di dimensione infinita, gettando così le basi dello studio degli estremi in spazi d'funzioni, detto all'epoca "Calcolo delle Variazioni".

Ciononostante, le derivate direzionali presentano gravi lacune del punto d'interesse: una funzione può avere tutte le derivate direzionali nulle in un punto e non essere neppure continua in esso, come accade in $(0,0)$ alla funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{xy}{x^4+y^2}\right)^2 & se (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & in (0,0) \end{cases}$$

Si ha infatti, per $v = (\alpha, \beta)$ con α, β non entrambi nulli,
$$f_v(0,0) = (f(0+\alpha t, 0+\beta t))'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha h, \beta h) - f(0,0)}{h} =$$

- 2 -

$$(h \neq 0 \Rightarrow (\alpha h, \beta h) \neq (0,0), \text{ poiché } \alpha \text{ e } \beta \text{ non sono entrambi nulli})$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{(\alpha^2 h^2 \beta h)^2}{(\alpha^4 h^4 + \beta^2 h^2)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{h}}_{\downarrow} \underbrace{\frac{h^6}{h^4}}_0 \left(\frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^4 h^2 + \beta^2} \right)^2$$

ove l'ultimo termine vale identicamente 0 per $\beta = 0$, e tende al limite finito $\frac{\alpha^4 \beta^2}{\beta^4} = \frac{\alpha^4}{\beta^2}$ se $\beta \neq 0$, ed è dunque limitato. Ne segue infine che la funzione è infinitamente derivabile di $\frac{h^6}{h^4} = h$, infinito, e $\frac{\alpha^4 \beta^2}{(\alpha^4 h^2 + \beta^2)^2}$, convergente e quindi limitata.

Dunque, OGNI DERIVATA DIREZIONALE DI f ESISTE E VALE 0.

Per vedere che, ci manterrà, essa è discontinua, osserviamo che vale 0 in $(0,0)$ mentre, sulle parabole $y=kx^2$, vale (per $x \neq 0$)

$$f(x, kx^2) = \left(\frac{x^2(kx^2)}{x^4 + k^2 x^4} \right)^2 \stackrel{x \neq 0}{=} \left(\frac{k}{1+k^2} \right)^2$$

Considerando, ad esempio, $k=0$ e $k=1$, ne segue che, sulla "parabola" $y=0 \cdot x$, cioè l'asse x ($y=0$) si ha $f \equiv 0$, mentre sulla parabola $y=x^2$ la funzione assume il valore costante $\left(\frac{1}{1+1}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

— 3 —

Poiché in ogni intorno dell'origine $(0,0)$ cedono punti
dell'asse x e delle parabole $y=x^2$ (che ha vertice in $(0,0)$)
vorrà dire che, in ogni intorno di $(0,0)$, cedono punti
su i quali f vale 0 ed altri su i quali vale $\frac{1}{4}$,
contro la condizione di Cauchy per la convergenza di
 f in $(0,0)$: basta porre $\bar{\varepsilon}=\frac{1}{4}$ per fare sì che
 $|f(x)-f(y)|<\bar{\varepsilon}$ non sia realizzata su nessun intorno
di $(0,0)$ per ogni coppia di punti x,y in quell'intorno:
due punti sulle due "parabol" diverse refuseranno
 $|f(x)-f(y)|=\frac{1}{4}$, e quindi violeranno la condizione - basta.

Le siate per estender il concetto di derivate alle
funzioni di più variabili in modo da conservare (almeno)
la proprietà che se f è derivabile allora è continua
e dunque un combattibile di prospettive e, in altro
senso, un ritorno al passato, alla geometria ed alle
rette tangente.

Ciò sarà oggetto della prossima settimana.

- 4 -

LE FUNZIONI SU \mathbb{R}^1 .

Uno dei problemi iniziali del calcolo infinitesimale, poi diventato Analisi Matematica, è stato di carattere =
fare il concetto di retta tangente per le curve per le
quali una definizione geometrica intuitiva ed una algebrica
basata sulla multiplicità delle soluzioni d'un'equazione al-
gebrica, non sono possibili.

Se f è derivabile in x_0 . Una qualunque retta (non verticale)
per il punto del grafico $(x_0, f(x_0))$ ha equazione

$$y = f(x_0) + \alpha(x - x_0)$$

che definisce il grafico della funzione $g(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0)$

L'ipotesi di derivabilità implica che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{x - x_0} = \\ = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \alpha = f'(x_0) - \alpha \quad \begin{cases} \neq 0 & \text{per } \alpha \neq f'(x_0) \\ = 0 & \text{per } \alpha = f'(x_0) \end{cases}$$

Si osserva subito che l'infinitesimo $f(x) - g(x)$, per
 $x \rightarrow x_0$, è "normalmente" dello stesso ordine d'
 $x - x_0$, mentre è d'ordine superiore solo se $\alpha = f'(x_0)$:

in tal caso, e solo in tal caso, il limite è nullo.

Ne segue che il caso $\alpha = f'(x_0)$ è "preferito" ed esprime il fatto che la retta grafico di $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ approssima "meglio di tutte le altre", relativamente ad α diversi, la funzione $f(x)$ "in vicinanza" di x_0 .

Prima d'averne le "verifiche" a più dimensioni" del limite oggetto di queste ultime riflessioni (il che non è immediato; basti riflettere a che $x-x_0$ è un vettore e non si può dividere per un vettore) riflettiamo sulla struttura di g . Tenendo da parte $f(x_0)$, che dipende solo dal punto scelto per definirvi la retta tangente, avremo il termine $f'(x_0)(x-x_0)$, e così una funzione lineare, nel senso di matematica (o dell'Algebra Lineare, se preferite), dell'incremento $(x-x_0)$. L'Algebra stessa ci dice che ogni funzione lineare su \mathbb{R} è del tipo $f(w) = \alpha w$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, ma l' α "giusto" per la retta tangente è $\alpha = f'(x_0)$.

E' tempo di passare a più verosimili.

IL DIFFERENZIALE PER LE
FUNZIONI SCALARI DI
PIU' VARIABILI.

Un'osservazione utile per quanto segue è che, per $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

se $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(x_0+w) - f(x_0) - f'(x_0)w}{w} = 0$ allora vale anche

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - f'(x_0)w|}{|w|} = 0$$

con il vantaggio di essere che, anche se w forse un vettore, quest'ultimo limite avrebbe senso, poiché si interpreta $|w|$ come la norma di w . Ne segue la fondamentale

DEFINIZIONE

Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$,

e sia $x_0 \in \Omega$.

Allora, f si dice DIFFERENZIABILE

IN x_0 , se esiste $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, LINEARE,

tali che

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|} = 0$$

la funzione A verrà detta DIFFERENZIALE

- 7 -

di f in x_0 è verificata dunque anche con

$$df(x_0, w) \equiv A(w)$$

La funzione f è detta differenziabile in Ω se è differenziabile in ogni punto di Ω .

Osserviamo che $df : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare nella seconda variabile (l'incremento w). Osserviamo inoltre che, se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, se ha $df(x_0, w) = f'(x_0)w$, ed f è differenziabile in x_0 e solo in x_0 è derivabile, ma differenziali e derivate sono comodifferenti anche se strettamente legati. I prossimi risultati ci diranno che queste in le stesse giuste per estendere le derivate a più variabili.

TEOREMA : Se f è lineare da \mathbb{R}^n in \mathbb{R} ,
allora è differenziabile in ogni punto, ed inoltre

$$df(x_0, w) = f(w)$$

Osserviamo che il differenziale non dipende dal punto x_0 (cioè è costante in x_0), esattamente come accade alle funzioni derivate in \mathbb{R} ore, se $f(x) = ax$, segue $f'(x_0) = a \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$ (costante rispetto ad x_0 , appunto!)

DIM. Poiché f è lineare in w , basta verificare che

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - f(w)|}{|w|} = 0 \quad (*)$$

Ciò è evidente poiché, essendo f lineare, il numeratore è identicamente nullo in w .



Il prossimo risultato realizza questo preannuncio:

TEOREMA 2 : Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è differentiabile in x_0 , allora è continua in x_0 .

DIM. Sia A il differenziale di f in x_0 . Allora

$$\begin{aligned} |f(x_0+w) - f(x_0)| &= |f(x_0+w) - f(x_0) - A(w) + A(w)| \leq \\ &\leq |f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)| + |A(w)| = \\ &= |w| \underbrace{\frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|}}_0 + |A(w)| \end{aligned}$$

Il primo addendo della somma è prodotto di $|w|$, che tende a zero se $w \rightarrow 0$, e della frazione che tende a zero per l'ipotesi di differentiabilità. Basta dunque provare che $\lim_{w \rightarrow 0} |A(w)| = 0$.

- 9 -

Cio' segue immediatamente dalla sostituzione delle applicazioni lineari da \mathbb{R}^n in \mathbb{R} : detta e_1, \dots, e_n la base canonica di \mathbb{R}^n , si ha

$$A(w) = A\left(\sum_1^n w_i e_i\right) = \sum_1^n w_i \underbrace{A(e_i)}_{e_i} = \sum_1^n w_i e'_i$$

e poiché $w \rightarrow 0$ equivale a $w_i \rightarrow 0 \quad \forall i=1 \dots n$, ne segue subito $\lim_{w \rightarrow 0} A(w) = 0$ e dunque $\lim_{w \rightarrow 0} |A(w)| = 0$.

Dalla stessa idea seguì infine

$$\lim_{w \rightarrow 0} |f(x_0 + w) - f(x_0)| = 0$$

e dunque

$$\lim_{w \rightarrow 0} f(x_0 + w) = f(x_0)$$

da cui la continuità di f in x_0

□

Se nove ci siamo accontentati del "minimo simbolico".

La prossima sezione ci fornirà risultati più utili e, soprattutto, ci indicherà come far a calcolare, in pratica, il differenziale.

IL CALCOLO DIFFERENZIALE (III)

Il differenziale ed il gradiente.

Le due proprietà appena provate non sono le uniche interessanti del differenziale. In questo sezione verrà dimostrata una delle proprietà fondamentali del differenziale, che lo lega alle derivate parziali e ne permette il calcolo, anche in pratica, con le sole fatte di calcoli su derivate: una cosa fantastica!

TEOREMA Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora f possiede derivate in ogni direzione $v \neq 0$, ed inoltre

$$f_v(x_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0, v) = A(v)$$

DIM. Si ha

$$\left| \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - A(v) \right| = \frac{|f(x_0 + tv) - f(x_0) - tA(v)|}{|t|} =$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{A lineare} \\ \text{ed} \\ \text{omogenea} \\ \text{della norma} \end{array} \right) = |v| \frac{|f(x_0 + tv) - f(x_0) - A(tv)|}{|tv|}$$

-2-

Ne segue che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} - A(v) \right| = |v| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+tv) - f(x_0) - A(tv)|}{|tv|}$$

Le funzioni nell'ultimo limite sono composte da

$$t \rightarrow tv = w \quad \text{e da} \quad \frac{|f(x_0+tv) - f(x_0) - A(w)|}{|w|}, \quad \text{che}$$

non è definita per $w=0$. Ne segue che si può cambiare variabile v , dunque, il limite delle funzioni composte è uguale a quello delle funzioni $\frac{1}{|w|} |f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)|$, che è 0 per l'ipotesi di differentiabilità. Ne segue

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} - A(v) \right| = 0$$

e cioè

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} = A(v)$$



Dunque, ogni funzione differentiabile ha tutte le derivate direzionali, che possono essere calcolate semplicemente calcolando il differenziale sulla direzione v .

Quest'ultimo risultato ha una conseguenza immediata d'importanza fondamentale, la quale, infatti:

- 3 -

$$A(v) = A\left(\sum_i v_i e_i\right) = \sum_i v_i A(e_i)$$

e, per il teorema precedente, $A(e_i) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial e_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$.

Ne segue subito la

FORMULA (DI RAPPRESENTAZIONE) DEL DIFFERENZIALE : Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Se

f è differentiabile in $x_0 \in \Omega$, allora

$$df(x_0, w) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) w_i$$

Si definisce il vettore, detto GRADIENTE di f in x_0 , ponendo

$$\nabla f(x_0) = (f_{x_1}(x_0), f_{x_2}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$$

Si può scrivere la formula in forma vettoriale

$$df(x_0, w) = \nabla f(x_0) w$$

Ove il prodotto fra Df e w è il prodotto scalare in \mathbb{R}^n .

Il modo tradizionale di scrivere il differentiale è leggermente diverso. Si considerino le funzioni

$$\pi_i(w) = w_i$$

- 4 -

che proiettano il vettore w su esso, e cioè che associa a w le sue i -esime coordinate. Poiché ogni π_i è lineare, dal teorema sui differenziali di funzioni lineari segue

$$d\pi_i(x_0, w) = w_i$$

e dunque

$$df(x_0, w) = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) d\pi_i(x_0, w)$$

Anche così siamo lontani dalle cose buone anche: ciò che si fa comodamente, in tutte le scienze applicate, è di scrivere dx_i invece di $d\pi_i(x_0, w)$ e d'eliminare del tutto x_0 e w , ottenendo l'effetto d'rendere oscura la natura del differenziale, ma anche di ottenerne le formule

$$df = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

molti simili a quella $dy = \frac{dy}{dx} dx$, che si usa per cambiare variabili negli integrali.

Alla fine niente di che. Il gradiente non è solo un modo per scrivere junti alle altre le formule dei differenziali. Provare delle teorie dei campi vettoriali, e viene denotato anche con $\text{grad } f$ (niente sorprese!), ma anche con $f'(x_0)$; in queste forme, la formula

- 5 -

dell' differenziale d' un' funzione $df(x_0, w) = f'(x_0)w$, formalmente identica a quelle delle funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} .

In realtà, nel nostro caso $f'(x_0)$ e w sono in \mathbb{R}^n e il prodotto è un prodotto scalare, e non un prodotto fra numeri. La nostra conclusione al termine d' Eremo è ora più chiara.

Il potente teorema precedente sull'esistenza delle derivate direzionali fornisce anche un'altra formula per calcolarle:

Se f è differentiabile, allora

$$f_v(x_0) = df(x_0, v) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

Dunque, basta calcolare le n derivate parziali per poter calcolare anche, eseguendo un prodotto scalare, qualsiasi derivata direzionale.

ATTENZIONE: La formula è falsa se f non è differentiabile. Ad esempio, basta considerare

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } xy=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Poiché f è costante agli assi, f ha derivate parziali

- 6 -

nulle in $(0,0)$, ma non è derivabile in nessun'altra direzione, come è già stato provato nelle forme riguardante il teorema di Fermat.

Una importante conseguenza dei teoremi precedenti riguarda la possibilità di studiare la differentiabilità di una funzione usando direttamente la definizione: infatti, qui applicheremo l'operatore $A(w)$ per cui il limite si annulla, verificando necessariamente $A(w) = \nabla f(x_0)w$. Ne segue il

COROLLARIO (d'unicità) Il differenziale, se esiste, è unico e verifica $d f(x_0, v) = \nabla f(x_0)v$

L'utilità è meglio illustrata da un esempio.

ESEMPIO : Studiare la differentiabilità in $(0,0)$ di $f(x,y) = |xy|$

Punto 1 C'è il gradiente?

Le derivate parziali non possono essere calcolate usando la derivazione delle funzioni composte, perché $|t|$ non è derivabile per $t=0$ e in $(0,0)$ in effetti $t=xy$ vale 0.

- 7 -

Nella osta, però, non usare la definizione

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

e an-

$$f_y(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

Dunque ci sono tutte le derivate parziali in $(0,0)$, e ne
segue che il "candidate differentiable" non può essere

che

$$Df(0,0)(h,k) = 0 \cdot h + 0 \cdot k = 0$$

Passo 2 $Df(x_0)$ w è uguale ai coefficienti differenziali?

$$\begin{aligned} & f((0,0)+(h,k)) = f(x_0+w) \\ & \lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - Df(0,0)(h,k)|}{|(h,k)|} = A\left(\frac{h}{k}\right) = A(w) \\ & = \lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{|h|k - 0 - 0|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} \end{aligned}$$

$\frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}$ è 1-omogenea e continua su tutta la
sfera unitaria (compatta) e dunque il limite è
zero, il che permette di concludere che f è differenziabile,
e $Df(0,0; h, k) = 0$.

— 8 —

Osserviamo che lo stesso problema per $f(x,y) = |xy|^{1/2}$ conduce allo stesso gradiente (f è nulla, e quindi costante, sugli assi, come prima), ma ad un diverso limite

$$\lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{|hk|^{1/2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Poiché la funzione è 0-omogenea e non costante (vale zero sugli assi, e $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sulla bisettrice $h=k$), essa NON ha limite in $(0,0)$, da cui $|xy|^{1/2}$ non è differentiabile in $(0,0)$, pur avendo i gradienti.

Una notevole conseguenza delle rappresentazioni del differenziale come predetto sopra è la possibilità di semplificare significativamente le condizioni necessarie di Fermat per i punti di estremo ottimale. Infatti, in ogni punto x_0 , di massimo o di minimo interno in cui la funzione f sia differentiabile (e quindi dotata di tutte le derivate direzionali), si deve verificare:

$$f_v(x_0) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

- 9 -

il che sembra comportare infiniti verifiche, ma solo in apparenza! Se f è differentiabile $f_v(x_0) = Df(x_0)v$, è dunque basta verificare che $Df(x_0) = 0$ per ottenere automaticamente la condizione d'inerzia $f_v(x_0) = 0$ per tutte le derivate direzionali.

Dunque, massimi e minimi locali intatti vengono raggiunti fra i punti in cui il gradiente si annulla, e cioè fra le soluzioni del sistema $n \times n$, in generale non lineare

$$f_{x_1}(x_0) = 0 ; f_{x_2}(x_0) = 0 ; \dots ; f_{x_n}(x_0) = 0$$

almeno se f è differentiabile.

I punti nei quali il gradiente si annulla vengono detti CRITICI, oppure STAZIONARI, o anche SINGOLARI. Fra di essi ci sono i massimi e minimi locali intatti, ma non ci sono, direi, i punti d'minimo o massimo sulla frontiera o in punti nei quali le derivate direzionali non esistono. Ad

- 10 -

esempio, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ ha in $(0,0)$ un minimo globale intorno al dominio (\mathbb{R}^2) in cui però non è derivabile, e dunque $(0,0)$ non può appartenere all'interno delle soluzioni di $\nabla f(x,y) = 0$.

Ci possono essere altri punti critici (selle) che non sono né di massimo né di minimo, come per $f(x,y) = x^2 - y^2$, che è positiva sull'asse x , negativa nell'asse y , e vale 0 in $(0,0)$ (che dunque non è né di massimo né di minimo); comunque, $(0,0)$ è critico per f , perché $\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$, da cui $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

IL CALCOLO DIFFERENZIALE (IV)

Criterio d'differentiabilità. Funzioni a valori vettoriali.

C'è un fondamentale risultato che permette di dedurre la differentiabilità di f dalle continuità delle sue derivate parziali.

DEFINIZIONE: Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Si dirà che $f \in C^1(\Omega)$ se tutti le derivate parziali f_{x_i} esistono e sono continue in Ω .

Vale il seguente:

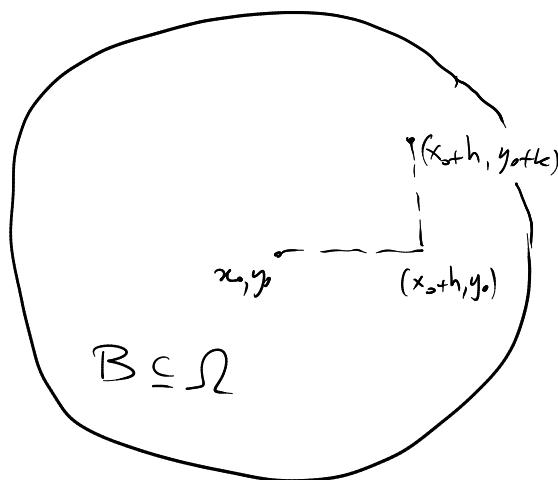
TEOREMA (del differenziale, o del differenziale totale): Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(\Omega)$, Ω aperto di \mathbb{R}^n . Allora f è differentiabile in (ogni punto di) Ω .

DIM. ($n=2$)

Sia B un intorno di (x_0, y_0) continuo in Ω . Si ha

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) =$$

$$= f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)$$



-2-

Le funzioni

$$s \rightarrow f(s, y_0) \quad e \quad t \rightarrow f(x_0 + h, t)$$

sono continue e derivabili in ogni punto degli intervalli $[x_0, x_0 + h]$ e $[y_0, y_0 + k]$; infatti, è dunque del teorema di Lagrange applicato su tali intervalli, si ha

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h f_y(x_0 + h, \xi) + k f_x(\eta, y_0)$$

per opportuni ξ , compreso tra y_0 e $y_0 + k$, ed η , compreso tra x_0 e $x_0 + h$.

Sostituendo nei limiti dei differenziali, si ha che

$$\lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$= \lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{\left| h \left[f_x(\eta, y_0) - f_x(x_0, y_0) \right] + k \left[f_y(x_0 + h, \xi) - f_y(x_0, y_0) \right] \right|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq$$

$$\leq \lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \left| f_x(\eta, y_0) - f_x(x_0, y_0) \right| + \lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \left| f_y(x_0 + h, \xi) - f_y(x_0, y_0) \right|$$

Ora, $\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ e $\frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ sono minor o eguali ad 1 mentre,

quando $h, k \rightarrow 0$, $\eta \in [x_0, x_0 + h]$ tende a x_0 , e $\xi \in [y_0, y_0 + k]$

tende a y_0 (per il teorema del confronto) da cui,

essendo f_x ed f_y continue in (x_0, y_0) si ha infine che

$$\left| f_x(\eta, y_0) - f_x(x_0, y_0) \right| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad e \quad \left| f_y(x_0 + h, \xi) - f_y(x_0, y_0) \right| \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$$

-3-

In definitiva, l'ultimo membro delle precedenti disegnagli anche somme di prodotti d'funzioni lineari per fornire infatti, è infatti, da cui le differenziali.



Se le dimensioni fanno più d'due, basta incrementare una variabile alla volta, applicare il teorema di Lagrange e sommare come prima tutti i termini.

Il teorema è molto utile quando è facile riferirsi che le derivate parziali d'f sono continue. Ad esempio $f(x,y) = \sin(xy)$ è ovunque differentiabile perché le due derivate parziali $y\cos(xy)$ e $x\cos(xy)$ sono continue in quanto prodotti d'composti di funzioni continue.

La teoria finora svolta ha riguardato le funzioni scalari di variabili vettoriali. Il prossimo passo sarà d'estendere il concetto d'differenziale al caso generale d'funzioni da \mathbb{R}^m ad \mathbb{R}^n : abbiamo già diretto lo stesso per le funzioni scalari, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ed $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $n > 1$, mentre resta da studiare e calcolare il differenziale d'funzioni vettoriali.

IL DIFFERENZIALE DI FUNZIONI

A VALORI VETTORIALI

Inizieremo con le "curve parametriche", cioè con le funzioni di una sola variabile scalare t , a valori in $\mathbb{R}^n, n > 1$. Le definizione d' differenziale che adopereremo non ride derà ulteriori fatidici: i quelli che abbiamo già studiato nel caso delle funzioni scalari.

Dunque $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sarà detta DIFFERENZIABILE in x_0 se $\exists A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare tali che

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|\gamma(x_0+w) - \gamma(x_0) - A(w)|}{|w|} = 0$$

Osserviamo che mentre la norma del denominatore è un semplice valore assoluto in \mathbb{R} , quella al numeratore è la norma nel codominio, e quindi in \mathbb{R}^n . Osserviamo inoltre che ogni funzione lineare $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, come è noto dall' Algebra Lineare, è del tipo $A(w) = aw$, ovvero w è scalare ed $a = A(1)$ è un vettore di \mathbb{R}^n (notate ancora che $A(w) = A(w \cdot 1) = w A(1)$). Per determinare le componenti di $a \in \mathbb{R}^n$ a partire dalla funzione γ osserviamo

- 5 -

che, scritto in forme scalare, il limite del differenziale
diventa

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{|w|} \left| \begin{pmatrix} \gamma_1(x_0+w) \\ \gamma_2(x_0+w) \\ \vdots \\ \gamma_n(x_0+w) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1(x_0) \\ \vdots \\ \gamma_n(x_0) \end{pmatrix} - w \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right|_{\mathbb{R}^n}$$

e portando dentro la norma in \mathbb{R}^n $\frac{1}{|w|}$, e ricordando che
un vettore tende a zero se e solo se tendono a zero
tutte le sue componenti scalari, si segue che
il limite precedente è zero se e solo se

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\gamma_i(x_0+w) - \gamma_i(x_0) - w a_i}{w} = 0 \quad \forall i=1..n$$

Ciò accade se e solo se $\dot{\gamma}_i$ è derivabile in x_0 e

$$a_i = \dot{\gamma}_i(x_0)$$

Dunque, per le funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R}^n , il differenziale si rappresenta mediante le formule

$$d\gamma(x_0, w) = \dot{\gamma}(x_0) w$$

L'utilizzo delle lettere γ è tipico per le curve parametri, ma occorre notare che le formule del differenziale
è "ancora" del tipo già incontrato più volte $f'(x_0)w$,

— 6 —

con l'importante di fissare che, stavolta, w è scalare, $f'(x_0)$ è un vettore in \mathbb{R}^n , ed il prodotto scalare è un prodotto scalare fra vettori, ancora diverso dal prodotto d'numeri $f'(x_0)w$ che viene se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o del prodotto scalare di vettori $f(x_0)w$, che si adopera quando $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Non è ancora finita: come si rappresenta (e cioè come si calcola) il differenziale di funzioni da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m , quando $n, m > 1$? Come è il gradiente in tal caso?

Si dovrà che $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è differenziabile in x_0 se esiste $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare tale che

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + w) - f(x_0) - Aw\|_{\mathbb{R}^m}}{\|w\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

Stavolta, le norme a denominatore sono in \mathbb{R}^n (dominio) e quella a numeratore è in \mathbb{R}^m (codominio).

Portando dentro la norma al numeratore lo scalare $\frac{1}{\|w\|_{\mathbb{R}^n}}$ (stavolta non si può eliminare la $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ come in precedente, perché w è un vettore), e andando di mano l'equivalente per la convergenza dei vettori e quelle delle

-7-

low componenti; ne segue che le differenzialità equivalente

a

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f_i(x_0 + w) - f_i(x_0) - A_i(w)|}{|w|} = 0 \quad \forall i=1..m$$

ove $A_i(w)$ è l' i^{a} -esima componente scalare di $A(w)$.

Dunque, ognuna delle m componenti scalari $f_i(x)$ del vettore $f(x)$ deve essere differenziabile con differenziale $A_i(w)$, da cui

$$A_i(w) = \nabla f_i(x_0) w = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j} w_j$$

e infine

$$df(x_0, w) = A(w) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n (f_1)_{x_j}(x_0) w_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n (f_m)_{x_j}(x_0) w_j \end{pmatrix}$$

Posto allora

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} (f_1)_{x_1} & (f_1)_{x_2} & \dots & (f_1)_{x_n} \\ \vdots & & & \\ (f_m)_{x_1} & (f_m)_{x_2} & \dots & (f_m)_{x_n} \end{pmatrix}(x_0)$$

ne segue subito che $f'(x_0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e che

$$df(x_0, w) = f'(x_0) w$$

Ciò non sorprende più, ma stavolta $f'(x_0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $w \in \mathbb{R}^n$, ed il prodotto indicato è quello delle matrici $f'(x_0)$ per il vettore w .

La matrice $f'(x_0)$, più o meno definita, si chiama anche derivata o gradiente (nessuna novità) ma, più frequentemente nelle scienze sperimentali, anche MATRICE JACOBIANA di f , in onore del matematico Carl Gustav Jacob JACOBI.

In conclusione,

$$df(x_0, w) = f'(x_0) w$$

sempre e comunque: si tratta solo d'operare due oggetti: $f'(x_0)$ e w (due scalari, uno scalare e l'altro vettore, due vettori, o una matrice ed un vettore), e di moltiplicarli nel modo appropriato.

Sempre a proposito di forze ed affini, per le curve $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ il vettore $y'(t_0)$ è la velocità nel punto $y(t_0)$ della traiettoria, ed è legato alla tangente alla traiettoria come si vedrà tra breve.

Poche note conclusive.

La teoria generale del concetto d' derivate e differentieli è più tardi venuta (secolo scorso). Talvolta le derivate direzionali si dette anche derivate (ovvero differentieli, nome che sembrava di impiegare) d' GATEAUX, mentre il differentiale si dette differentiale d' FRECHET.

Divenne che usare derivate (per le derivate al Gateaux) e differentieli (per il differentiale di Fréchet) sia sufficiente.

Un punto più delicato riguarda le formule d' rappresentazione del differenziale. Negli spazi d' dimensione finita non sempre esistono teoremi che descrivano la struttura delle applicazioni lineari come prodotti OPPORTUNI dello incrementi "per qualsiasi". Quando ciò accade, il differentiale si potrebbe rappresentare come un "prodotto" dell'incremento per un "qualsiasi", che verrà allora definito come il gradiente (o le derivate, o le jacobiane) delle funzioni nel punto. I teoremi di struttura delle applicazioni lineari diventano uno strumento cruciale, e sono purtroppo ben lungi dall' essere semplici (o banali) osservazioni, come in \mathbb{R}^n .

IL CALCOLO DIFFERENZIALE (IV)

Rette e piani tangentи.

In questo sìme veniamo trattati alcuni oggetti geometrici di concetti appena introdotti sulla scia di quanto detto proprio all'inizio, riguardanti rette, piani o spazi tangentи.

L'idea centrale, comune a tutti i casi, è che la funzione

$$g(x) = f(x_0) + A(x-x_0) \quad A(w) = df(x_0, w)$$

ha per grafico, a seconda del dominio e del codominio di f , una retta cartesiana o parametrica, o un piano (o iper-piano) cartesiano o parametrico, quelli che "meglio approssime" il grafico o l'immagine di f .

Il caso $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è già noto, e si ha risposte nell'introduzione alla definizione di differenziale. Consideriamo $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, ed osserviamo che $\gamma(t) = \gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0)(t-t_0)$ è una retta parametrica passante per $\gamma(t_0)$ e con gli spostamenti su di essa tutti paralleli a $\dot{\gamma}(t_0)$. La differenziabilità di f ammette (punto $w=t-t_0$) che $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|\gamma(t)-\gamma(t_0)|}{|w|} = \infty$ e dunque che $\gamma(x)$ è la funzione del tipo $\gamma(t_0) + aw$ che meglio "approssima" la traiettoria $\gamma(t)$. Ha dunque senso dire

"DATI $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ESISTE $t_0 \in [a,b]$

- 2 -

si definisce RETTA TANGENTE al sostegno
(corrispondente all'immagine) di γ nel punto $\gamma(t_0)$
la retta parametrica

$$\sigma(t) = \gamma(t_0) + (t-t_0) \dot{\gamma}(t_0)$$

Il vettore $\dot{\gamma}(t_0)$ (oltre che deriva) si dice anche
VELOCITA' d' γ in $\gamma(t_0)$.

Se $\dot{\gamma}(t_0) = 0$, la retta tangente non viene definita.

Il caso $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è diverso. Esamineremo in
dettaglio il caso $n=2$. In tal caso, ricordando che
graph $f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$ in seguito,
post come prima $w = (x-x_0, y-y_0)$,

$$g(x, y) = f(x_0, y_0) + \underbrace{f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0)}_{df((x_0, y_0); w)}$$

ha per grafico il piano (esplicito)

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0)$$

e, ancora una volta, g è la funzione affina ("l'onda più
piccola costante") che meglio approssime f verso a (x_0, y_0) .

-3-

Dunque:

Il PIANO TANGENTE al grafico cartesiano =
mo $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$ della funzione f ,
differentiabile in (x_0, y_0) , nel suo punto
 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è il piano di equazione implicita

$$z - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

La direzione normale a tale piano è dunque
quella del vettore

$$v = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1)$$

L'ovvia che \forall punto in direzione delle 2 crescenti.

La generalizzazione ad $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è immediata.

Il PIANO TANGENTE AL GRAFICO DI $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
nel punto $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ è

$$z - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0) = 0 \quad z \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$$

e la relativa direzione normale è

$$v = (-Df(x_0), 1) = (-f_{x_1}(x_0), \dots, -f_{x_n}(x_0), 1)$$

- 4 -

ATTENZIONE: il gradiente non indica la direzione normale al grafico di una funzione differentiabile, ma solo la sua proiezione sull'asse spaziale del dominio.

E' un elemento contro le buone maniere; il vettore normale ad un piano in \mathbb{R}^3 (tangente al grafico di $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$) ha tre componenti, mentre $\nabla f = (f_x, f_y)$ sono due! E' chiaro che non possono essere le stesse cose! Ci manca, però, diverso poco:

$$v = (-f_x, -f_y, 1) \quad \text{oppure} \quad -v = (f_x, f_y, -1)$$

furono i due orientamenti possibili per la direzione normale, delle e crescenti o delle e decrescenti!

L'ultimo caso è quello generale $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Tuttavia consideriamo prima il caso $n=2$ ed $m=3$, che corrisponde alle cosiddette "superficie parametriche". Due importanti esempi sono:

- il piano parametrico in \mathbb{R}^3 :

$$\Psi(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \Psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

- le sfere unitarie, in coordinate polari sferiche,

- 5 -

$$\phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \theta \in [0, \pi] \text{ colatitudine} \\ \varphi \in [0, 2\pi] \text{ longitudine} \end{array}$$

Sia dunque $\phi(u, v) = \begin{pmatrix} \phi_1(u, v) \\ \phi_2(u, v) \\ \phi_3(u, v) \end{pmatrix}$, differenziabile.

La "funzione affine tangente" in (u_0, v_0) è

$$\psi(u, v) = \underbrace{\phi(u_0, v_0)}_{\text{punto di tangente}} + \underbrace{\phi'(u_0, v_0)}_{\text{jacobiana}} \underbrace{\begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}}_{w} \quad \text{differenziale in } (u_0, v_0)$$

Ricordando che, se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e A_i sono le colonne di A , per qui $w \in \mathbb{R}^n$ si ha allora $Aw = \sum w_i A_i$ ne significa che la funzione precedente si può scrivere anche

$$\psi(u, v) = \phi(u_0, v_0) + \phi_u(u_0, v_0)(u - u_0) + \phi_v(u_0, v_0)(v - v_0)$$

ove ϕ_u e ϕ_v sono le due colonne della matrice jacobiana

$$\phi_u = \begin{pmatrix} (\phi_1)_u \\ (\phi_2)_u \\ (\phi_3)_u \end{pmatrix}, \quad \phi_v = \begin{pmatrix} (\phi_1)_v \\ (\phi_2)_v \\ (\phi_3)_v \end{pmatrix}.$$

— 6 —

L'espressione così ottenuta mostra che, se $\phi_u(u_0, v_0)$ e $\phi_v(u_0, v_0)$ sono indipendenti, e cioè se $\phi_u \wedge \phi_v(u_0, v_0) \neq 0$, allora gli spostamenti sul piano tangente.

Osserviamo anche che $\phi_u(u_0, v_0)$ è il vettore velocità delle curve $u \rightarrow \phi(u, v_0)$, che gece tutta sull'onda superficie, e $\phi_v(u_0, v_0)$ è la velocità di $v \rightarrow \phi(u_0, v)$, anch'essa con sostegni interamente contenuti in quella delle superficie ϕ . Dunque gli spostamenti sul piano (affine) tangente all'immagine d' ϕ sono generati dai vettori tangenti alle due curve precedenti, se risultano indipendenti. Le condizioni $j'(t_0) \neq 0$, per le curve, e $\phi_u \wedge \phi_v(u_0, v_0) \neq 0$ per le superficie, sono il requisito più importante per definire "REGOLARI", indipendentemente dalla regolarità, e cioè della continuità delle derivate, delle loro componenti scalari.

Non resta che di completare la definizione di piano tangente nel caso generale $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, nella false riga d' quanto già fatto per le superficie parametrizzate.

- 7 -

Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Fissato $x_0 \in \Omega$ si definisca SPAZIO TANGENTE ad f in x_0 lo spazio T generato dalle colonne T_i di $f'(x_0)$ (la matrice jacobiana in x_0).

L'equazione parametrica dello SPAZIO AFFINE TANGENTE sarà in rea

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_0) + \sum_i \alpha_i T_i$$

Non è detto, a priori, che T abbia dimensione n , poiché le n colonne di $f'(x_0)$ potrebbero non essere indipendenti. È bene notare che, mentre lo spazio tangente è lo spazio vettoriale degli spostamenti da $f(x_0)$ tangentili al sostegno di f , lo spazio affine è più simile a ciò che, nel caso delle $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, abbriamo chiamato rette tangenti.

$$y(t_0) + (t-t_0) \dot{y}(t_0)$$

In tal caso, $\{y(t_0) + \alpha \dot{y}(t_0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ è lo spazio tangente, mentre $y(t_0) + \langle \dot{y}(t_0) \rangle$ è lo spazio affine tangente.

Strettamente un po' più a fondo il caso delle sfere unitarie. Osserviamo subito che

$$(\sin \theta \cos \varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi)^2 + (\cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

-8-

e dunque il sostegno di

$$\phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\theta, \varphi) \\ y(\theta, \varphi) \\ z(\theta, \varphi) \end{pmatrix}$$

è tutto contenuto nella sfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Sappiamo dalla geometria classica che il piano tangente ad una sfera in un punto è perpendicolare al raggio per quel punto. Determiniamo

$$\phi'(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} x_\theta & x_\varphi \\ y_\theta & y_\varphi \\ z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

La direzione normale allo spazio generato dalle colonne ϕ_θ e ϕ_φ è $\phi_\theta \wedge \phi_\varphi$. Si ha

$$\begin{aligned} \phi_\theta \wedge \phi_\varphi &= \left(\sin^2 \theta \cos \varphi, \sin^2 \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \theta \right) = \\ &= \sin \theta \left(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta \right) \end{aligned}$$

che è un vettore che ha la stessa direzione (è un multiplo)

dì $(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, che è la direzione del raggio dell'origine al punto di tangenza sulla sfera.

Nessuna sorpresa, dunque!

Concludiamo con un esempio.

Sia $\phi(u, v) = (u^3, v^3, u^2v^2)$, $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\phi'(u, v) = (\phi_u \ \phi_v) = \begin{pmatrix} 3u^2 & 0 \\ 0 & 3v^2 \\ 2uv^2 & 2u^2v \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $\phi'(0, 0)$ ha rango 0 e quindi vale $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
e dunque l'equazione del "piano" tangente in $\phi(0, 0)$ sarebbe

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \beta) &= \phi(0, 0) + \alpha \phi_u(0, 0) + \beta \phi_v(0, 0) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

E' adottata la condizione che $\psi(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, una
superficie parametrica costante, non difesa un piano in
 \mathbb{R}^3 (ma, forse, un punto in \mathbb{R}^3 : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Così come le condizioni $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$ garantiscono che

$$\sigma(t) = \gamma(t_0) + (t-t_0) \dot{\gamma}(t_0)$$

sia effettivamente una retta, e le condizioni $\phi_u \wedge \phi_v(u_0, v_0) \neq 0$
garantiscono che $\phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0)$ siano indipendenti
e quindi che

$$\psi(\alpha, \beta) = \phi(u_0, v_0) + \alpha \phi_u(u_0, v_0) + \beta \phi_v(u_0, v_0)$$

sia effettivamente un piano parametrico in \mathbb{R}^3 , se deve

immaginare un'ipotesi di "REGOLARITA' GEOMETRICA" per le funzioni da \mathbb{R}^n ad \mathbb{R}^m . Se $m \geq n$, un'ipotesi che assicuri l'indipendenza delle colonne delle Jacobiane $f'(x_0)$ è d'individuare che il rango di $f'(x_0) = n$. In seguito si ha

$$g(w) = f(x_0) + f'(x_0)w$$

se è un piano affine tangente con uno spazio d' spostamenti d' dimensione (massima) n . Il problema non si pone se $m < n$, come si vede bene nel caso scalare $m > m = 1$, dove $z = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, nel caso singolare $f'(x_0) = 0$, che corrisponderebbe al caso in cui il rango di $f'(x_0)$ è nullo, diventa $z - f(x_0) = 0$, e fornire comunque l'espressione di un piano tangente ma in forme implicite (o esplicite: $z = f(x_0)$) e NON parametriche.

Come si intuisce da queste poche osservazioni, i tre punti d'usto implicito (\equiv studiare i luoghi di zeri), esplicito (\equiv studiare i grafici di funzioni) e parametrico (\equiv studiare le immagini di funzioni) sono e restano molto diversi fra loro, pur essendo legati e, tutt'altro, indispensabili in alcuni contesti.

IL CALCOLO DIFFERENZIALE (VI)

Un altro intrecciato aspetto "geometrico" dei concetti di differenziali ed gradienti riguarda la possibilità di determinare la direzione (nel dominio) nella quale spostarsi per trovare la massima pendente.

Ricordiamo che, se f è differenziabile in x_0 , allora ha in tutte le direzioni direzionali e che, inoltre

$$f_v(x_0) = df(x_0, v) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

Dalla diseguaglianza di Schwartz, segue dunque che

$$|f_v(x_0)| \leq |\nabla f(x_0)| |v|$$

e che se v è multiplo di $\nabla f(x_0)$ vale in realtà

$$|f_v(x_0)| = |\nabla f(x_0)| |v|$$

Ne segue subito che

$$-|\nabla f(x_0)| |v| \leq f_v(x_0) \leq |\nabla f(x_0)| |v|$$

e dunque, fra tutte le direzioni v di assegnate norme non nulla (per esempio $|v|=1$) $f_v(x_0)$ è massima se $v = \alpha \nabla f(x_0)$ $\Leftrightarrow \alpha > 0$, ed è minima se $v = -\alpha \nabla f(x_0)$ $\Leftrightarrow \alpha > 0$. Dunque, il gradiente indica

— 2 —

la direzione nella quale spostarsi, nel dominio, per far crescere più rapidamente la funzione, mentre il suo opposto $-Df(x_0)$ indica la direzione di massima decrescenza.

Vedremo tra breve che le direzioni di $Df(x)$ sono ortogonali alle curve di livello $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(x_0)\}$, ma le prove richiedono il prossimo risultato, molto importante.

LA DERIVAZIONE DI FUNZIONI

COMPOSTE

Il risultato al quale del problema è il seguente:

TEOREMA (differenziale di funzioni composte):

Sei $f: \Omega \rightarrow \Sigma$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \subseteq \Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Sigma \subseteq \mathbb{H}$; $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{R}^p$. Lia poi $h(x) = g(f(x))$ e sia x_0 interno ad $\Omega = \text{dom}(h)$. Allora

$$dh(x_0, w) = dg(f(x_0), df(x_0, w))$$

Inoltre, rappresentando i differenziali con derivate - relativi - gradienti - jacobiane

s'ha anche

$$h'(x_0)w = g'(f(x_0)) f'(x_0) w \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$$

ed infine

$$h'(x_0) = f'(f(x_0)) f'(x_0)$$

DIM. (vedi Appendix)

Si osserva che è la solita regola d' derivazione delle funzioni composte delle funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} , ora però i termini possono essere scalari, vettori o matrici ed il prodotto va inteso nel senso opportuno.

Esempio: Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

Allora, posto $h(t) = f(\gamma(t))$ si ha

$$h'(t) = f'(\gamma(t)) \overset{\text{prodotto}}{\overbrace{\gamma'(t)}} = \nabla f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)$$

Questa formula è al cuore delle teorie dei campi, e le sue applicazioni più importanti sono da rilevarsi in:

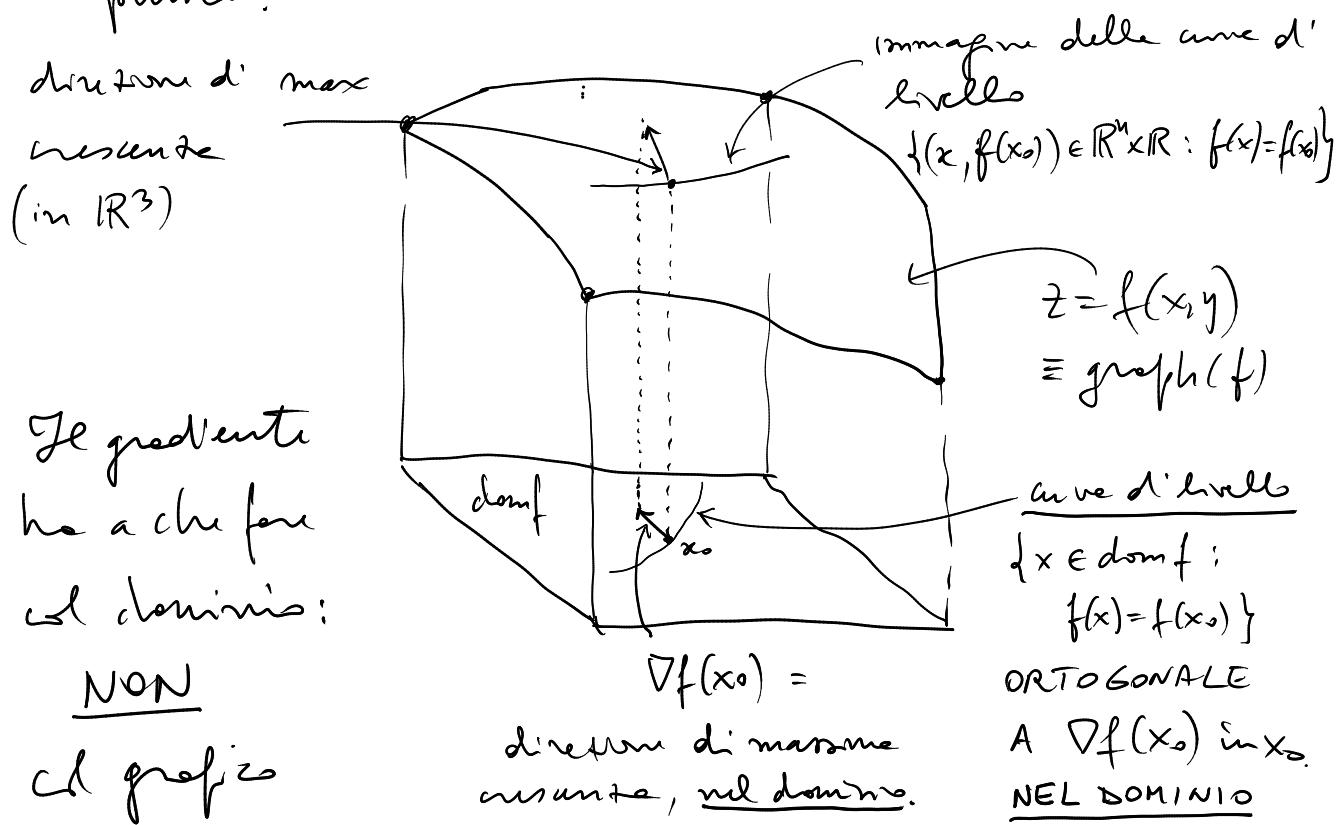
Per ora, proviamo che ogni curva di livello di una funzione differenziabile è ortogonale al gradiente in quel punto.

Se $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, è una curva parametrizzata dalla retta sull'insieme di livello K , $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = k\}$, con $f(\gamma(t)) = k \quad \forall t \in [a, b]$. Allora $h(t) = f(\gamma(t))$ è costante in $[a, b]$ e dunque $0 \equiv h'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)$.

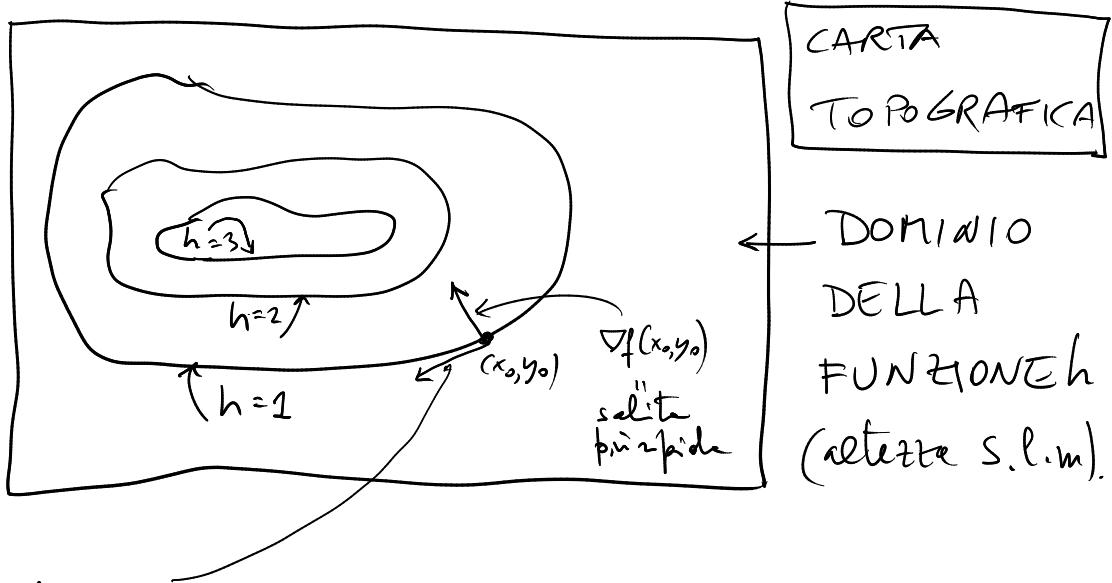
-4-

Ne segue che, nel punto $j(t)$, immagine di qualsiasi $t \in [a, b]$, il vettore $\nabla f(j(t))$ (il gradiente di f in quel punto) ha prodotto scalare nullo con $j(t)$ (la direzione delle curve, o del moto, in quel punto).

Dunque: il gradiente di una funzione (scalare) indica la proiezione sul piano orizzontale delle direzioni nella quale muoversi per trovare la massima tendenza (in inglese, GRADIENT and dire PENDENTA, dal verbo latino gradior) ma indica anche la direzione normale alle curve di livello in quel punto.



CURVE DI LIVELLO



direzione
delle curve
di livello:
[ORTOGONALE AL
GRADIENTE NEL
PUNTO]

Un'osservazione meteorologica: le curve di livello della pressione atmosferica (isobare) danno importanti indizi sui valori del vento: più sono fitti, più rapidamente varia la pressione, il che sottolinea le masse d'aria comprese ad una maggiore differenza d'altitudine che ha accelerato. Il fatto che poi devi in senso antiorario (qui; orario in Argentina, o in Sud-Africa, o in Australia), dipende dalla rotazione della terra ma quale ... è un'altra storia!

Un'osservazione: il teorema d'derivazione d'funzioni composte in più variabili non riveste, nella pratica, l'importanza utile che appena dissero in una verità.

In effetti, mentre ci sono numerosi esempi di funzioni in una variabile c'è un numero estremamente ridotto d'funzioni "naturali" di più variabili (in realtà: due): somme, differenze, moltiplicazioni, divisioni, potenze, per le quali esistono "regole di derivazione". Ad esempio, la funzione composta da $t \rightarrow (\text{cost}, \sin t)$ e delle funzioni di due variabili $(x, y) \rightarrow x^y$ è "semplicemente"

$$t \rightarrow (\text{cost})^{\sin t} \equiv e^{\sin t \ln \text{cost}}$$

per derivare le quali non è necessario considerare la rappresentazione del differenziale di $(x, y) \rightarrow x^y$: è una funzione d'una sola variabile, e come tale si può derivare!

L'importanza delle formule $(f(g(t)))' = Df(g(t))g'(t)$ è fondamentale in tutte (ad esempio, permette di definire la differenza d'potenziale!) ma è del tutto invisibile in pratica, se si manipolano solo funzioni elementari.

ESTREMI VINCOLATI

Titolo nota

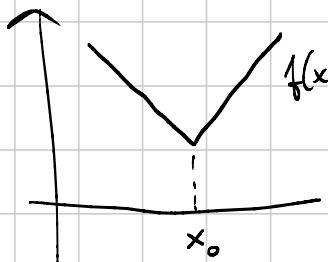
14/12/2012

①

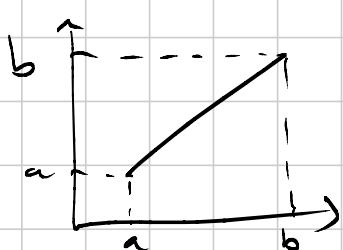
BREVI NOTE PRATICHE

SUGLI ESTREMI VINCOLATI.

La condizione, forse impiegata per la prima volta da Fermat nel suo lavoro sulla rifrazione della luce nel quale utilizzava l'ipotesi che la luce dovesse scegliere il cammino che le consentisse di impiegare il tempo MINIMO per andare da un punto ad un altro - tenendo conto delle differenti velocità nei vari mezzi (aria, acqua, vetro...) — che riguarda l'annullamento delle derivate è, purtroppo, molto abusata: la sua validità è soggetta a varie ipotesi (come tutti i teoremi) ed è FALSA se esse non sono verificate:



x_0 non è uno zero di $f'(x)$
ma è minimo intorno a sé.



a e b sono estremi nei quali
 f' è (regolarmente) definita,
ma $f'_a = 1$ e non \emptyset .

(2)

Le cose non migliorano affatto in più variabili (... e quando mai!). Un enunciato ragionevole è:

TEOREMA (Fermat): Se

- x_0 è INTERNO a $\text{dom } f$
- $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ esiste (finito)
- x_0 è un estremo (max o min) locale

allora $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$

La direzione v delle derivate è arbitraria.

Ricordiamo che x_0 è di minimo locale per f se $\exists B(x_0)$, intorno di x_0 , tale che

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \text{dom } f \cap B(x_0)$$

e dunque se è un minimo solo se si considerano i punti del dominio della funzione ad esso sufficientemente vicini.

Il problema oggetto di queste note è di fornire in qualche linea su cosa fare quando viene a mancare l'ipotesi che x_0 sia interno al $\text{dom } f$. Esso è, in generale, molto complesso, ma è possibile attaccarlo in qualche modo in alcuni casi particolari.

Per andare al sodo, consideriamo quelli più semplici.

(3)

Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ una funzione di 2 variabili.

Sia $\Gamma \subseteq \Omega$ un sottinsieme del dominio di f , che chiameremo il VINCOLO, e considereremo il problema di determinare

$$\max_{\Gamma} f \quad \text{e/o} \quad \min_{\Gamma} f$$

quando Γ non è aperto (il che renderebbe molti punti interni), non è neanche del tutto arbitrario, ma è invece:

1) il grafico di una funzione φ , e cioè

$$\Gamma = \{(x, y) \in \Omega : y = \varphi(x), x \in [a, b]\}$$

ovvero

$$\Gamma = \{(x, y) \in \Omega : x = \varphi(y), y \in [c, d]\}$$

oppure

2) il sostegno di una curva parametrica $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$

$$\Gamma = \{(x, y) \in \Omega : x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [a, b]\}$$

o ancora

3) il luogo degli zeri di una funzione di due variabili g , e cioè

$$\Gamma = \{(x, y) \in \Omega : g(x, y) = 0\}$$

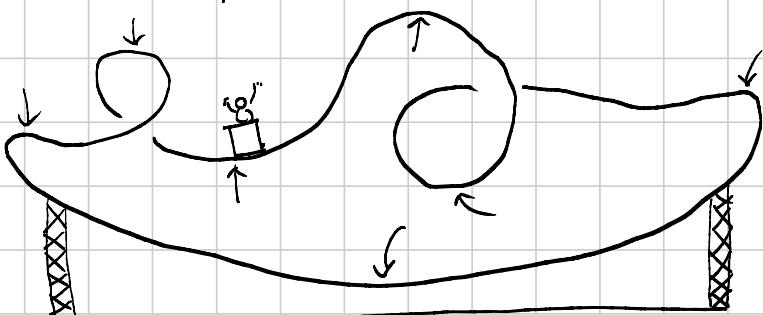
Per maggiore brevità chiameremo il caso 1) vincolo cartesiano

il caso 2) vincolo parametrico e il caso 3) vincolo implicito.

Non è una terminologia standard, ma riccheggia quella dell'equazione delle rette e può aiutare a ricordare.

(4)

Prima di procedere accenniamo che il celebre metodo dei MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE riguarda il caso dei vincoli impliciti, e fu scoperto avendo in mente il problema meccanico del moto di una massa su una curva. In sostanza, un ottovolante!



In nessun punto il gradiente del potenziale (e cioè la forza di gravità) è nullo, ma nei punti segnati esso è perpendicolare al binario, che assorbe del tutto la spinta deformandolo poco (si opera!) e dunque se si pone il carrello (freno) in uno di essi, resta fermo: ecco i punti di equilibrio!

Il problema statico è facile: il potenziale è proporzionale alla altezza rispetto al livello di riferimento (nel quale si definisce nullo) e dunque i punti di equilibrio (non necessariamente stabile) del carrello sull'ottovolante sono

$$\begin{matrix} \text{min altezza} & \text{e} & \text{max altezza} \\ \text{ottovolante} & & \text{ottovolante} \end{matrix}$$

e ciò conduce al problema di determinare massimi e minimi di funzioni su curve. Un'osservazione al volo: un grafico di funzione non può essere un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 perché su ogni retta verticale (od orizzontale, nell'altro caso) ci può essere solo un punto del grafico: un intorno circolare non è fatto così!

(5)

Iremo dunque costretti a prendere in considerazione i casi ai quali prima abbiamo accennato e vedere se se ne può ricavare qualcosa di buono: il teorema di Fermat "naturale" non funziona!

VINCOLO CARTESIANO

Supponiamo prima che $\Gamma = \{(x, y) \in \Omega : x \in [a, b], y = \varphi(x)\}$, e che $(x_0, \varphi(x_0))$ sia un punto di estremo (per esempio: minimo) globale.

Se consideriamo allora $[h(x) = f(x, \varphi(x))]$, essa assume, al variare di x in $[a, b]$, tutti i valori che f assume su Γ perché, al variare di x in $[a, b]$, il punto $(x, \varphi(x))$ descrive tutto il grafico di f , Γ .

Gli estremi globali di f su Γ si potranno ottenere ricorrendo con le tecniche standard per le funzioni di una variabile, gli estremi globali di h su $[a, b]$.

Se f è di classe $C^1(\Omega)$ e $\varphi \in C^1[a, b]$, per il teorema della derivabilità e della continuità delle funzioni composte, siamo che $h \in C^1[a, b]$ e dunque, a parte i casi $x=a$ ed $x=b$, i suoi estremi assoluti si troveranno in punti dove $h'=0$.

Pressoché identico è il caso del

VINCOLO PARAMETRICO

Basta porre $h(t) = f(\varphi(t), \psi(t)) \quad t \in [a, b]$

(6)

per ricordarsi esattamente allo stesso ordine d'idea

Un esempio parlerà più chiaro!

$$f(x,y) = xy$$

$$\Pi = \begin{array}{c} \text{circle} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$

La circonferenza unitaria si presta ad essere studiata, con vari ordini d'impiccio, con entrambi i "metodi" precedenti.

CARTESIANO

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{1-x^2} \quad x \in [-1,1]$$

In tal caso gli estremi vincolati (da confrontare fra di loro per determinare i "vincitori") si potranno determinare studiando

$$\min_{\substack{\max \\ x \in [-1,1]}} x \cdot \sqrt{1-x^2} \quad \text{e} \quad \min_{\substack{\max \\ (-1,1)}} x(-\sqrt{1-x^2})$$

Le due funzioni di una variabile così ottenute sono l'una opposta all'altra (per punto cosa!) e dunque basta studiare una sola (i massimi dell'una sono minimi dell'altra!): un effetto mirabolante della simmetria di vincolo e funzione.

PARAMETRICO

La circonferenza (intera) è insieme delle curve $y(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

da cui

$$h(t) = \frac{x}{\cos t} \frac{y}{\sin t} = \frac{1}{2} \sin 2t$$

(7)

Occorre studiare $\max_{[0, 2\pi]} \frac{1}{2} \sin 2t$

ed i massimi e minimi globali si determinano "ad occhio"

$$\text{MAX } 2t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{5}{4}\pi$$

$$\text{MIN } 2t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow t = \frac{7}{4}\pi$$

Ad entrambi errori grossolani, f NON è l'area del rettangolo avente sulle diagonali l'origine e (x, y) : lo è solo se $xy > 0$, e cioè nel I e nel III quadrante! Negli altri due quadranti è l'opposto dell'area.

Ecco una "terza via" per affrontare questo problema:

quelle di L'Hopital (che, ad onta del nome, era torinese!)

Prima d'esaminare in cosa consista, chiaviamo bene cosa cambia se si passa da estremi globali ad estremi locali: nulla!

CARTESIANO

Se $(x_0, \varphi(x_0))$ è un minimo locale di f restritta a $\text{graph}(\varphi)$ ci sono un intorno B_δ di $(x_0, \varphi(x_0))$ tale che

$$f(x_0, \varphi(x_0)) \leq f(x, \varphi(x)) \quad \forall (x, \varphi(x)) \in B_\delta$$

Ora $(x, \varphi(x)) \in B_\delta$ se $| (x, \varphi(x)) - (x_0, \varphi(x_0)) | < \delta$
e cioè se

(8)

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (\varphi(x) - \varphi(x_0))^2} < \delta$$

fissato ora $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, dalla continuità di φ ne segue
che $\exists \eta$:

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon = \frac{\delta}{2}$$

se $|x-x_0| < \eta$ e dunque, posto

$$\sigma = \min \left\{ \frac{\delta}{2}, \eta \right\}$$

ne segue che

$$|(x, \varphi(x)) - (x_0, \varphi(x_0))| < \delta$$

se $|x-x_0| < \sigma$. Dunque x_0 è un
minimo locale per h .

Dunque, gli estremi locali di $x \mapsto h(x, \varphi(x))$ sono
candidati ad essere estremi locali per f su T .

Un po' più delicato è il caso

PARAMETRICO

In realtà una curva parametrica non è necessariamente semplice,
e dunque può passare per lo stesso punto in diversi istanti.

(9)

Pur mantenendo, con ragionamento identico a quello precedente si vede subito che ad un estremo locale (x_0, y_0) di f su Γ , $x_0 = \varphi(t_0)$ $y_0 = \psi(t_0)$, corrisponde un estremo locale t_0 per $h(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$. Di tal modo se ne possono essere diversi, se la curva non è semplice e si sogna per (x_0, y_0) una delle autointersezioni. Ai fini "pratici" non cambia nulla, come si dice:

- gli estremi di f su unici di tipo grafico cartesiano di φ , ψ derivabili dappertutto, sono fra gli estremi "libri" di $h(x) = f(x, \varphi(x))$
o, se il grafico è retto all'arco y ,
 $h(y) = f(\varphi(y), y)$
- gli estremi di f su unici di tipo sostegno delle curve parametriche $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ sono fra gli estremi "libri" (vedi appendice) di $h(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$

VINCOLO IMPLICITO

Alle basi di tutto c'è il teorema di U. Dini sulle funzioni implicite. L'insieme $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; g(x, y) = 0\}$, sotto opportune ipotesi, è un grafico cartesiano di una opportuna funzione φ , definita nell'intorno di quei punti

(10)

d' Π . Il problema è costituito dalle ipotesi che, come è noto, consentono sostanzialmente nell'assumere $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$. Dunque non tutti i luoghi d'zei di funzioni (anche C^∞ o polinomi) sono "adatti" ad essere studiati col metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ma solo quelli che verificano le precedenti condizioni sul gradiente.

Il metodo d'Lagrange è espresso nel seguente teorema, che riferiamo senza dimostrarlo.

TEOREMA (Lagrange): Liammo $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che:

$$- g(x_0, y_0) = 0 \quad (\text{il punto sta sul vincolo})$$

$$- (x_0, y_0) \text{ è di estremo locale per } f \text{ su} \\ \Pi = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0 \}$$

$$- \nabla g(x_0, y_0) \neq 0$$

Allora, definito $h(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$

esiste λ_0 , il "moltiplicatore di Lagrange" (la "razione vincolare" in Meccanica) tal che

$$(x_0, y_0, \lambda_0) \text{ verifica } \nabla H(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$$

e cioè

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial H}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ 0 = \frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 0 = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) = g(x_0, y_0) \end{array} \right.$$

Supponendo di trovare tutti le soluzioni di questo sistema (in generale, è una fata illusione!), l'ultima espressione assicura che le prime due componenti (x_0, y_0) rappresentano un punto del vento, mentre le altre esprimono il fatto che $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ sono paralleli. Ricordando che, se non nullo, $\nabla g(x_0, y_0)$ è perpendicolare alla curva di livello passante per (x_0, y_0) , ciò garantisce che la forza (il gradiente del potenziale f) è perpendicolare al vento e dunque non può accelerare una massa che possa muoversi solo in quella direzione, perché la sua proiezione lungo il vento è nulla. Tornando all'esempio:

IMPLICITO

$$f(x, y) = xy$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \quad \frac{\text{mai nullo su}}{x^2 + y^2 = 1}, \text{ perché}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow 2x=0, 2y=0 \Rightarrow (x,y) = (0,0) \Rightarrow f(x,y) = -1 + \textcircled{B}$$

Dunque gli estremi multipli verso cercati fra le soluzioni di:

$$f_x + \lambda g_x = 0; f_y + \lambda g_y = 0; g = 0$$

e cioè

$$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0 & y - 4\lambda^2 y = 0 \Rightarrow y(1 - 4\lambda^2) = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \Rightarrow x = -2\lambda y & \uparrow \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & \downarrow \\ y = 0 \text{ oppure } 1 - 4\lambda^2 = 0 & \end{cases}$$

Dalle seconde equazioni $y=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow x^2+y^2=1$

e dunque non ci sono soluzioni del sistema verificanti $y=0$.

Tuttavia, $\lambda_1 = 4\lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}$ da cui:

Se $\lambda = \frac{1}{2}$, la prima equazione diventa $x = -y$, e sostituendo nella terza si ha $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, il che fornisce le due soluzioni $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Se invece, è $\lambda = -\frac{1}{2}$, la prima equazione diventa $x=y$, da cui, come prima si ha, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ da cui infine

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(13)

I quattro punti verificanti la condizione d'estremo locale sono

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) e \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{ sim' quel } f = \frac{1}{2}$$

e

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) e \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{ sim' quel } f = -\frac{1}{2}.$$

I primi due sono massimi e gli altri minimi dif
mol' much.

I MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Perché al plurale, mentre λ è un solo?

Accenniamo al teorema nel caso generale

TEOREMA (Lagrange) : se $f(x_1, \dots, x_n)$

una funzione di classe $C^1(\Omega)$, Ω aperto in R^n ,

e zero $g_1, g_2, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$ tal che

la matrice jacobiana $\begin{vmatrix} \frac{\partial(g_1, \dots, g_k)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \end{vmatrix}$ abbia rango

K in ogni punto.

(14)

Allora, dato un estremo $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ di f su Π

$$\Pi = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\}$$

esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE) tal che

$$\begin{cases} 0 = \nabla f(x_1^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(x_1^*, \dots, x_n^*) \\ 0 = g_i(x_1^*, \dots, x_n^*) \quad \forall i = 1 \dots k \end{cases}$$

Ogni superficie $g_i(x) = 0$ ha il suo moltiplicatore λ_i .

Anche qui, le ultime k equazioni esprimono l'appartenenza al vincolo, mentre le n che contengono ∇f impongono che essa appartenga al complemento ortogonale dello spazio di tutti gli spostamenti sul vincolo.

Una volta di più, la forza ∇f è bilanciata completamente dai vincoli e non ha componenti lungo di essi.

NOTA CONCLUSIVA

(15)

Non esiste modo di decidere, a priori, quale sia il metodo più conveniente. Casumo più esserlo, a se conde di costi.

Le difficoltà sono non dissimili da quelle presentate dal la condizione d' Fermat

$$\nabla f = 0 \quad (\text{n equazioni, n incognite})$$

che i comprende un sistema (in generale) solo di poco "meno" non trovare d'

$$g=0; \quad \nabla f + \lambda \nabla g = 0 \quad (\text{n+k equazioni, n+k incognite})$$

La risuzione esplicita \bar{x} , in generale, privativa, come lo è perfino nel caso più semplice (1 variabile): $f'(x)=0$.

Comunque, i tre metodi hanno il loro spazio e le loro opportunità d'applicazione, oltre al loro valore teorico straordinario.

Un'altra nota: così come la condizione d' Fermat originale $f'(x_0)=0$, i "metodi" elencati forniscono condizioni necessarie, in generale non sufficienti, il che vuol dire che la ricerca degli estremi comporta indegni ulteriori come accade in una volta per distinguere gli estremi dei flessi, o in più verosimili per discriminare fra estremi, delle e punti critici d'ordine superiore. D'altro non basta!

APPENDICE : ESTREMI

"LIBERI" E "VINCOLATI"

RiconSIDeriamo brevemente i punti cartesiani e parametrici, in caso più generale, attraverso qualche esempio.

Le rappresentazioni cartesiane e parametriche del vusto si basa sulla sostituzione di f con un'opportuna funzione composta di parametri opportuni, per la quale non occorre considerare vincoli, perché sono già "inglobati" per così dire, nella definizione della funzione stessa.

Se volessi studiare gli estremi di $f(x,y,z) = x^2y^2z^3$ sulla sfera unitaria $|(x,y,z)| = 1$ e decidessi di adoperare la sua rappresentazione parametrica standard

$$x = \cos\theta \sin\varphi \quad y = \sin\theta \sin\varphi \quad z = \cos\varphi$$

$$\varphi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

posserei cercare gli estremi ridotti considerando

$$h(\varphi, \theta) = (\overset{x}{\cos\theta \sin\varphi})^2 (\overset{y}{\sin\theta \sin\varphi}) (\overset{z}{\cos\varphi})^3$$

Al variare di φ in $[0, \pi]$ e θ in $[0, 2\pi]$, il punto

$$\boxed{H}(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)$$

(17)

percorre tutti e soli i punti del nucleo e dunque, se c'è un estremo per f sul nucleo, deve essere lo stesso tipo di estremo per H in tutti i punti (θ, φ) del dominio di \boxed{H} che hanno per immagine l'estremo considerato, per effetto delle continuità di \boxed{H} , che si presuppongono.

Il problema è diventato "libero", non "vincolato",

$$\begin{array}{c} \max \\ \min \end{array} f(\boxed{H_s}(\theta, \varphi))$$

$$\begin{array}{c} \varphi \in [0, \bar{\pi}] \\ \theta \in [0, 2\bar{\pi}] \end{array} \quad H(\theta, \varphi)$$

In modo del tutto simile si ragiona nel caso cartesiano.

La completezza del procedimento è fruttuosa influenzata dalla completezza della rappresentazione, certezza o parametrizzazione, del nucleo. Le coordinate polari sferiche non sono sempre in corrispondenza!

In questo caso, molto semplice all'aspetto, ci si può ricordare che l'equazione implicita delle sfere interseca è semplice

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

il che induce a tentare la rete dei moltiplicatori ... anche:

del moltiplicatore (ogni equazione introduce un moltiplicatore)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = f_x + \lambda g_x = 2xyz^3 + 2\lambda x \\ 0 = f_y + \lambda g_y = xz^3 + 2\lambda y \\ 0 = f_z + \lambda g_z = 3x^2yz^2 + 2\lambda z \\ 0 = g = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{array} \right.$$

4 equazioni nelle 4
incognite x, y, z, λ

PIUTTOSTO NON LINEARE!

Non è semplice per nulla, ma è profondamente diverso dello studio $\boxed{f_1}(0, y)$ su $[0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{4}]$: ci sono casi molti fortunati nei quali un problema è abbordabile e l'altro no.

Un'ultima domanda, giusto per ripassare un po' d'algebra:

"DI CHE GRADO E' IL SISTEMA PRECEDENTE"?

Può essere utile calcolarlo perché ha a che fare col numero delle soluzioni del sistema (teorema di BÉZOUT).

La risoluzione dei sistemi non lineari per via numerica è stata ed è ancora oggetto di studio: il riferimento di obbligo è costituito dai libri di Analisi Numerica.

Per una raccolta di programmi "pratici", corredati di presentazione e commenti sensati, si può consultare il sito
Press-Tewkolsky-Vetterling-Flannery

"Numerical Recipes in C"

nelle varie versioni (si può scaricare a C C++ oppure FORTRAN), a seconda del linguaggio preferito.

LA FORMULA DI TAYLOR

PER FUNZIONI

DI PIÙ VARIABILI

L'arsenale degli artifici per estendere a più variabili risultati stabiliti per funzioni di una sola variabile reale riserva un posto d'onore a quello, semplicissimo, di considerare la restrizione delle funzioni f da studiare ad un segmento contenuto nel dominio $\gamma(t) = x_0 + t\tau$, il che ne trasforma lo studio in quello di $h(t) = f(\gamma(t))$, funzione di una sola variabile t . Le condizioni necessarie per un estremo (di Fermat), stabilite direttamente in una variabile, vengono così estese alle funzioni tenui su \mathbb{R}^n , quando negli spazi di dimensione infinita (Equazione di Euler, o di Euler-Lagrange per i meccanici razionali).

Lo stesso "trucco" svolge un ottimo lavoro per generalizzare a più variabili il notevole risultato di Taylor, che venne qui esposto, per semplicità, col resto nelle forme "di Lagrange". Rivediamo brevemente l'enunciato.

Se $f \in C^{N+1}[x_0, x]$. Allora, esiste $\xi \in]x_0, x[$ tale che

$$f(x) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x-x_0)^{N+1}$$

Si rende che esistono enunciati più raffinati con ipotesi meno restrittive (rispettabili, ad esempio, su G. PRODI Analisi Matematica ed. BORINGHIERI). E' bene vedere anche che $f \in C^{N+1}[a, b]$ vuol dire che f ha tutte le derivate continue fino all'ordine $N+1$ non solo nei punti interni $[a, b]$, ma anche in a e in b ! Naturalmente, le derivate in a saranno destre e quelle in b sinistre. Un modo rapido di verificare tali ipotesi è di stabilire che $f \in C^{N+1}[a', b']$ con $[a', b'] \supset [a, b]$. Inoltre, ricordiamo che $0! = 1$, che $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, e che la sommatoria è un polinomio, detto di Taylor di grado N , di f in x_0 . Nel caso $N=0$, il teorema di Taylor produce un risultato altrettanto ben noto: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, il che giustifica la denominazione "resto di Lagrange" per l'ultimo termine della formula nell'enunciato precedente.

Vengono presentate due diverse espressioni del polinomio di Taylor in più versatili: la prima viene detta direttamente da quelle in una versatilità, mentre l'altra comporta un numero minore d'calcoli.

de' vetti, poiché tiene conto del teorema di Schwarz.

Sia dunque $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

TEOREMA: Sia $f \in C^{N+1}(B_\delta(x_0))$. Allora, per ogni w verificante $|w| < \delta$ esiste $\xi \in]0, 1[$ tale che

$$f(x_0 + w) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n f_{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}}(x_0) w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_k} + \\ + \frac{1}{(N+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{N+1}=1}^n f_{x_{i_1}, \dots, x_{i_{N+1}}}(x_0 + \xi w) w_{i_1} \dots w_{i_{N+1}}$$

Il primo addendo è secondo membro, con le due somme definite anzidetti, è il polinomio di Taylor. Nell'esempio precedente si è posto $w = x - x_0$ per ottenere meglio semplificate nell'espressione a secondo membro.

DIM. Fissato ad arbitrio $x \in B_\delta(x_0)$, e posto $w = x - x_0$ si ha $|w| < \delta$. Si ponni allora $h(t) = f(x_0 + tw)$ e si osservi che $h(0) = f(x_0)$ e $h(1) = f(x)$.

Verso tra leva verifica che $h \in C^{N+1}[0, 1]$ facili, dal teorema in uso verifichi, si segna che $\exists \xi \in]0, 1[$ tale che

$$h(1) = h(0) + h'(0) \cdot 1 + \dots + \frac{1}{N!} h^{(N)}(0) 1^N + \frac{1}{(N+1)!} h^{(N+1)}(\xi) 1^{N+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} h^{(k)}(0) + \frac{1}{(N+1)!} h^{(N+1)}(\xi)$$

Occorre dunque calcolare le derivate successive $h^{(0)}(t), h^{(1)}(t), \dots, h^{(N+1)}(t)$. Osserviamo che $h(t)$ è definita su $[-1, 1]$.

Si ha subito $h^{(0)}(t) = h(t) = f(x_0 + tw) \Big|_{t=0} = f(x_0)$

Per calcolare $h^{(1)}(t) = \frac{d}{dt} [f(x_0 + tw)]$ si può utilizzare il teorema di derivazione delle funzioni composte, poiché f è (molti più che) C^1 in un intorno di 0 ed è quindi differentiabile, così come lo è $t \rightarrow x_0 + tw$. Ne segue

$$h'(t) = \frac{d}{dt} [f(x_0 + tw)] = \sum_{i_1=1}^n f_{x_{i_1}}(x_0 + tw) w_{i_1}$$

da cui

$$h'(0) = \sum_{i_1=1}^n f_{x_{i_1}}(x_0) w_{i_1}$$

Si può calcolare $h''(t)$ raffigurando il teorema di derivazione delle funzioni composite a cascata dei termini $f_{x_{i_1}}(x_0 + tw) w_{i_1}$ e, poiché le derivate considerate hanno a loro volta derivate continue, esse saranno differentiabili e il teorema potrà essere applicato. Ne segue che

$$h''(t) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n f_{x_{i_1} x_{i_2}}(x_0 + tw) w_{i_1} w_{i_2}$$

$$h'''(t) = \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^n f_{x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}}(x_0 + tw) w_{i_1} w_{i_2} w_{i_3}$$

- 5

: : : : :

$$h^{(N)}(t) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N=1}^n f_{x_i x_{i_2} \dots x_{i_N}}(x_0 + t w) w_{i_1} \dots w_{i_N}$$

Ponendosi $t=0$, si ottengono i coefficienti delle formule di Taylor per h

$$h^{(0)}(0) = f(x_0)$$

$$h'(0) = \sum_{i_1=1}^n f_{x_{i_1}}(x_0) w_{i_1}$$

$$h''(0) = \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ \vdots}}^n f_{x_{i_1} x_{i_2}}(x_0) w_{i_1} w_{i_2}$$

$$h^{(N)}(0) = \sum_{i_1, \dots, i_N=1}^n f_{x_{i_1} \dots x_{i_N}}(x_0) w_{i_1} \dots w_{i_N}$$

da cui, infine, per un opportuno $\xi \in]0, 1[$

$$f(x) = h(1) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} h^{(k)}(0) + \frac{1}{(N+1)!} h^{(N+1)}(\xi) =$$

$$= \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \dots i_k=1}^n f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(x_0) w_{i_1} \dots w_{i_k} +$$

$$+ \frac{1}{(N+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{N+1}=1}^n f_{x_{i_1} \dots x_{i_{N+1}}} (x_0 + \xi w) w_{i_1} \dots w_{i_{N+1}}$$



- 6 -

E' utile osservare che il teorema appena provato, seppure con ipotesi leggermente più restrittive ($f \in C^{N+1}$), forse anche una stima del resto di tipo "Peano":

Infatti, il modulo del resto

$$\frac{1}{(N+1)!} \left| \sum_{i_1 \dots i_{N+1}=1}^n f_{x_{i_1} \dots x_{i_{N+1}}} (x_0 + \xi w) w_{i_1} \dots w_{i_{N+1}} \right| = |R_N(w)|$$

può essere stimato per le diseguaglianze triangolari, con

$$|R_N(w)| \leq \sum_{i_1 \dots i_{N+1}=1}^n \max_{x \in B_g(x_0)} |f_{x_{i_1} \dots x_{i_{N+1}}}(x)| |w_{i_1} \dots w_{i_{N+1}}| \equiv S_N(w)$$

de cui, essendo $S_N(w)$ una funzione $(N+1)$ -omogenea, ne segue subito che

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{S_N(w)}{|w|^N} = 0 \quad (\text{PEANO})$$

in quanto $S_N(w)/|w|^N$ è 1-omogenea e limitata sulle sfere interne $|w|=1$, essendo in continua.

Utilizzando tali stime "puntuali" sull'ordine d'infinitesimo del resto (tipico del resto di Peano), si possono estendere a punti verificabili le conclusioni

sufficienti per un estremo locale per le funzioni d'una variabile, basati sulle derivate seconde. Verrete provate il:

TEOREMA Sia $f \in C^3(B_\delta(x_0))$ e sia x_0 tale che $\nabla f(x_0) = 0$. Allora, il segno d' $f(x) - f(x_0)$ coincide col segno delle forme quadratiche, detta Hessiane, $H(x-x_0) = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x_0)(x-x_0)_i (x-x_0)_j$, purché $|x-x_0|$ sia sufficientemente piccola.

E' bene notare che la condizione $\nabla f(x) = 0$ è quella necessaria (di Fermat) per i massimi e minimi, mentre le condizioni sufficienti si possono ricavare dello studio del segno delle forme quadratiche H , e sono legate al segno di suoi autovetori: più compatti che in una variabile, ma non di molto!

DIM. Sia $x \in B_\delta(x_0)$ e si ponga, per semplicità, $w = x-x_0$.
Poiché $f \in C^3$ si può scrivere le formule d' Taylor ammettendosi al grado $N=2$, con il resto di tipo "Peano", infinitesimale d' ordin superiore rispetto a $|w|^2$.

- 8 -

$$f(x_0 + w) = f(x_0) + \nabla f(x_0)w + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j + R_2(w)$$

ove $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{R_2(w)}{|w|^2} = 0$

Poiché $\nabla f(x_0) = 0$, si ha

$$f(x_0 + w) - f(x_0) = |w|^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j}{|w|^2} + \frac{R_2(w)}{|w|^2} \right] \quad (*)$$

Dunque, il segno di $f(x_0 + w) - f(x_0)$ coincide a quello dell'esponente in parentesi quadra ($|w|^2 \geq 0$).

Osserviamo ora che il primo addendo è una funzione 0-omogenea (rispetto di funzioni 2-omogenee), ovunque definita sulla sfera unitaria $|w|=1$, ed ha quindi su di essa minimo e massimo λ (globali). Poiché è 0-omogenea, tali valori sono estremi anche in tutto $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, poiché per ogni $w \neq 0$ si ha

$$g(u) = g(|u| \frac{u}{|u|}) = |u|^0 g\left(\frac{u}{|u|}\right) = g\left(\frac{u}{|u|}\right)$$

e dunque

$$\lambda \leq g(u) \leq \Lambda \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

e poiché tali valori sono assunti su $\{|u|=1\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ essi sono estremi globali in tutto $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

- 9 -

L'algebra lineare offre un quadro completo del segno

d' $\sum f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j$, che risulta

- 1) Strettamente positiva in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se e solo se tutti gli autovalori sono (tutti) strettamente positivi.
- 2) Strettamente negativa se e solo se tutti gli autovalori sono strettamente negativi.

Caso 1) Le forme $\sum f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j$, i cui coefficienti formano la matrice Hessione di f , ha tutti gli autovalori strettamente positivi, e quindi è sempre strettamente positiva sulla sfera unitaria, da cui $\boxed{\lambda > 0}$.

Allora, scelta $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$ $\exists \rho$: se $w \in B_\rho(0)$ si ha

$$\left| \frac{R_2(w)}{|w|^2} \right| < \frac{\lambda}{2}$$

da cui se $0 < |w| < \rho$

$$w \in \left] -\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} \right[$$

$$\frac{1}{2} \frac{\sum f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j}{|w|^2} + \frac{R_2(w)}{|w|^2} \geq \lambda > 0$$

e, di conseguenza, $f(x_0 + w) - f(x_0) \geq 0$ se $|w| < \rho$,
e dunque x_0 è di minimo locale.

- 10 -

Analogamente si ragiona nel caso 2), quindi tutti gli autovalori delle matrice Hessiano siano negativi.

2) Si ha che $\lambda < 0$, e scelti $\varepsilon = \frac{|\lambda|}{2}$ si ottiene un intorno $B_\rho(0)$ nel quale $\left| \frac{R_2(w)}{\|w\|^2} \right| < \frac{|\lambda|}{2}$, da cui

$$\frac{1}{2} \frac{\sum f_{xxj}(x_0) w_i w_j}{\|w\|^2} + \frac{R_2(w)}{\|w\|^2} < 0$$

$\forall \lambda < 0 \quad \in]-\frac{|\lambda|}{2}, \frac{|\lambda|}{2}[$

e, infine, $f(x_0 + w) - f(x_0) \leq 0$ su $B_\rho(0)$.

Ne seguiamo dunque le due condizioni sufficienti.

Un punto critico x_0 ($\nabla f(x_0) = 0$), in cui la forma Hessian è definita positiva è un minimo locale.
Se è definita negativa è un massimo locale.

Le forme Hessian può presentare, come è noto dell'Algebra, altri tre casi:

- un autovalore nullo e tutti gli altri positivi
- un autovalore nullo e tutti gli altri negativi
- due autovalori discordi (non nulli).

— 11 —

I primi due casi sono estremamente estesi; infatti, è vero che il complesso dei termini d'ordine gradi, quando non si annulla, ha segno costante; il problema è che nelle distanze nelle quali si annulla il segno dipenderà del resto, che non è più trascurabile. Tuttavia dobbiamo chiedere un esempio (anzi: due!).

$$f(x,y) = x^2 + y^4 \quad g(x,y) = x^2 - y^4$$

Si vede subito che $(0,0)$ è di minimo (globale) per f mentre non lo è per g , che è negativo sull'asse y e positivo sull'asse x , e 0 in $(0,0)$. (Non costante,

$$H(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mentre

$\left. \begin{array}{l} \text{diagonali} \\ \text{autore} \end{array} \right\} \frac{2+0}{2=0}$

$$H(g) = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque se l'Hessiano è semi-definito, NULLA può dirgli senz'altro i indegni ai termini di grado superiore del polinomio d'Taylor.

Rimane ancora fuori il caso dell'Hessiano indefinito.

- 12 -

Intel con $\sum f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j$ cambia segno e dunque
esistono u, v , con $|u|=|v|=1$, tali che $g(u)>0 & g(v)<0$.

Ragionando come prima, supponendo i coefficienti $\varepsilon = g(u)/2$
 $\circ \varepsilon = |g(v)|/2$ si ottiene $f(x_0 + tu) - f(x_0) > 0 &$
 $f(x_0 + sv) - f(x_0) < 0$ per ogni t, s di modulo abbastanza
piccolo. Ne segue che x_0 non può essere né un punto
né un punto locale perché in ogni sfere comunque piccola
cadono punti del tipo $x_0 + tu$, sui quali f assume valori
maggiori di $f(x_0)$, ma anche punti del tipo $x_0 + sv$, sui quali
 f assume valori minori.

Nel punto x_0 si trova ($\nabla f(x_0) = 0$) con Hesenne
indebolita non è né un minimo né un massimo ed
è detto DI SELLA (non degenero).

RIASSUMENDO: Se $\nabla f(x_0) = 0$, allora:

- 1) Hessenne definita positiva $\Rightarrow x_0$ minimo locale
- 2) Hessenne definita negativa $\Rightarrow x_0$ massimo locale
- 3) Hessenne indefinita $\Rightarrow x_0$ di sella (né max, né min)

4) Hessiana semidefinita \Rightarrow NULLA PUÒ DIRSI

S'nota subito che è il caso 4), l'Hessiana semidefinita, che corrisponde in più veredità al caso critico $f''(x_0) = 0$ in una varietà, e per la stessa ragione. Infatti,

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + R_2(x-x_0)$$

e, se $f''(x_0) = 0$, il segno di $f(x) - f(x_0)$ è determinato unicamente dal segno del resto $R_2(x-x_0)$, impraticabile senza ulteriori indagini sui termini di ordine superiore.

Ciò è esattamente quello che accade nelle distanze w del nucleo dell'Hessiana, lungo le quali il complesso dei termini d'ordine superiore si annulla, lasciando il campo a quelli d'ordine inferiore, come accade in una varietà.

NOTA. Se (a_{ij}) è una matrice simmetrica, si può provare che gli estremi di $\sum a_{ij} w_i w_j / |w|^2$ sono esattamente il massimo ed il minimo autovalore λ di (a_{ij}) e, dunque

$$\lambda |w|^2 \leq \sum a_{ij} w_i w_j \leq \Lambda |w|^2 \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$$

Grazie al teorema di Schurz, l'Hessiana $(f_{x_i x_j}(x_0))$ è di fatto simmetrica nelle ipotesi prime intuistiche ($f \in C^3$).

IL POLINOMIO DI TAYLOR "OTTIMIZZATO".

L'espressione ottenuta in precedente per il termine d'grado k è cioè

$$\frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(x_0) w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_k}$$

è (naturalmente) ridondante. Esamineremo per semplicità il caso di termini d'grado 2 in due sole variabili, che vuol dire

$$\frac{1}{2!} \left[f_{x_1 x_1}(x_0) w_1 w_1 + f_{x_1 x_2}(x_0) w_1 w_2 + f_{x_2 x_1}(x_0) w_2 w_1 + f_{x_2 x_2}(x_0) w_2 w_2 \right]$$

Ora, non solo $w_1 w_2 = w_2 w_1$, ma anche $f_{x_1 x_2}(x_0) = f_{x_2 x_1}(x_0)$,

per effetto del teorema di Schwarz sulle derivate miste, in quanto $f \in C^2$. Dunque, la somma può essere abbreviata così

$$\frac{1}{2!} \left[f_{x_1^2}(x_0) w_1^2 + 2 f_{x_1 x_2}(x_0) w_1 w_2 + f_{x_2^2}(x_0) w_2^2 \right]$$

con il non spregio risparmio d'una (qualsiasi) delle derivate $f_{x_1 x_2} = f_{x_2 x_1}$. Il vantaggio è assai più importante al crescere del grado e del numero delle variabili. Ad esempio, per $n=3$, sempre nel caso $k=2$, invece d'calcolare

$$\frac{1}{2!} \left[f_{x_1 x_1} w_1^2 + f_{x_1 x_2} w_1 w_2 + f_{x_1 x_3} w_1 w_3 + f_{x_2 x_1} w_2 w_1 + f_{x_2 x_2} w_2^2 + \right.$$

$$+ f_{x_2 x_3} w_2 w_3 + f_{x_3 x_1} w_3 w_1 + f_{x_3 x_2} w_3 w_2 + f_{x_3 x_3} w_3^2 \Big]$$

basta osservare che

$$f_{x_1 x_2} w_1 w_2 = f_{x_2 x_1} w_2 w_1, \quad f_{x_1 x_3} w_1 w_3 = f_{x_3 x_1} w_3 w_1.$$

e

$$f_{x_2 x_3} w_2 w_3 = f_{x_3 x_2} w_3 w_2$$

da cui si ottiene infine, per il complesso di termini d'II grado,

$$\frac{1}{2!} \left[f_{x_1 x_1} w_1^2 + f_{x_2 x_2} w_2^2 + f_{x_3 x_3} w_3^2 + 2 f_{x_1 x_2} w_1 w_2 + 2 f_{x_1 x_3} w_1 w_3 + 2 f_{x_2 x_3} w_2 w_3 \right]$$

Stavolta il risparmio è di ben tre derivate seconde

(tutte quelli con gli indici in ordine inverso), pur ad
un terzo delle fatte tutte: davvero interessante!

Per affrontare in modo efficiente il caso generale, supponiamo
di aver calcolato un singolo termine

$$f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}(x) w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_k}$$

e stabiliamo quanti sono gli altri termini della somma
uguale ad esso. Poiché tutte le derivate della f sono continue,
per il teorema di Schwarz possiamo cambiare a nostro piacimento
l'ordine delle derivate $\frac{\partial^{k_1} f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$ in

modo da raggruppare per prime tutte le derivate rispetto a x_1 (eventualmente assenti), e poi quelle rispetto a x_2, x_3 e così via fino a x_n , où n è la dimensione dello spazio.

Denotato con μ_i , $i=1..n$, il numero di derivate rispetto ad x_i , osserviamo che

- Per ogni $i=1..n$ $0 \leq \mu_i \leq k$ ($\mu_i = 0$ se non c'è nessuna derivata rispetto ad x_i)
- $\sum_{i=1}^n \mu_i = k$ (In tutto, k derivate!)
- Tutti i termini che compongono lo stesso numero di derivate rispetto alle stesse variabili sono uguali.

Dunque, il termine generale di ordine k sarà

$$\frac{1}{k!} \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0 \\ \sum_i \mu_i = k}} \binom{k}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \frac{\partial^{(k)} f(x_0)}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \dots \partial x_n^{\mu_n}} w_1^{\mu_1} w_2^{\mu_2} \dots w_n^{\mu_n}$$

ove $\binom{k}{\mu_1 \dots \mu_n}$ è il numero (per ore scassato) di termini che compongono, in qualsiasi ordine, μ_1 derivate rispetto a x_1 , μ_2 rispetto a x_2, \dots, μ_n rispetto a x_n .

Per contare il loro numero osserviamo che ci sono $\binom{k}{\mu_1} = \frac{k!}{\mu_1! (k-\mu_1)!}$ modi di scegliere la posizione delle μ_1 derivate

infatti ad $x_1 = \epsilon$, per ognuna d'esse, altri $\binom{k-\mu_1}{\mu_2}$ modi
di "praticare" le derivate rispett ad x_2 nei $k-\mu_1$ posti
rimasti disponibili dopo aver sistemat le derivate rispetto
ad $x_2 = \epsilon$, per ogni configurazione delle derivate in x_1 e x_2
altri $\binom{k-\mu_1-\mu_2}{\mu_3}$ modi per pessere le derivate in x_3 e così
via fino ad ottenere il numero totale

$$\binom{k}{\mu_1} \binom{k-\mu_1}{\mu_2} \binom{k-\mu_1-\mu_2}{\mu_3} \dots \binom{k-\mu_1-\mu_2-\dots-\mu_n}{\mu_n}$$

Ricordando che $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$, ne segue subito

che

$$\binom{k}{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{k!}{\mu_1! (k-\mu_1)!} \cdot \frac{(k-\mu_1)!}{\mu_2! (k-\mu_1-\mu_2)!} \dots \frac{(k-\mu_1-\dots-\mu_{n-1})!}{\mu_n! (k-\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i)!} = \frac{k!}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_n!}$$

che, forse, non sarà sempre semplice da calcolare, ma è certamente ragionevolmente semplice da ricordare.

Le forme "repolte" dei polinomi d'Euler sono

$$\boxed{\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0 \\ \sum \mu_i = k}} \frac{k!}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_n!} f_{x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}}(x_0) w_1^{\mu_1} w_2^{\mu_2} \dots w_n^{\mu_n}}$$

ove

$$\binom{k}{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{k!}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_n!}$$

è il coefficiente
polinomiale di
Leibniz

E' abbastanza evidente che, in pratica, la formula è inefficiente poiché minimizza il calcolo di devasta, ma anche di determinare gli "esponenti" $\mu_1 \dots \mu_n$ in modo efficiente.

Se $n=3$ e $k=4$. Occorre determinare tutti i modi possibili di scegliere μ_1, μ_2, μ_3 ($n=3$), da 0 a 4 ($k=4$) in modo che siano $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 4$. Un efficiente metodo è di elencare in ordine lexicografico (quelli del "dizionario": 0, 1, 2, 3, 4)

$\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3$ (notare che $\mu_3 = 4 - \mu_1 - \mu_2$)

0 0 4
0 1 3
0 2 2
0 3 1
0 4 0

tutte le "partite" che innanzieranno 0,
 e in cui il secondo è uguale ad
 antistio, mentre il terzo è conseguente.

1 0 3
1 1 2
1 2 1
1 3 0

con che innanzieranno 1, in ordine
"alfabetico" (0 prima di 1, 1 prima di 2 ...)

$$\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \left. \right\} \text{ last due numeri con } 2$$

etc ...

$$\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{array} \left. \right\}$$

Una volta compiuto l'elenco delle terne μ_1, μ_2, μ_3 , utili si puo` applicare le formule: ad esempio, la terna $\mu_1=2, \mu_2=1, \mu_3=1$ dà luogo al coefficiente di Leibniz

$$\binom{4}{2,1,1} f_{x_1^2 x_2 x_3}^{(4)}(x_0) w_1^2 w_2 w_3 = \frac{4!}{2! 1! 1!} f_{x_1^2 x_2 x_3}^{(4)}(x_0) w_1^2 w_2 w_3 =$$

$$= 12 f_{x_1^2 x_2 x_3}^{(4)}(x_0) w_1^2 w_2 w_3$$

C' sono dunque 12 termini che includono due derivate infatti ad x_1 , una rispett ad x_2 e una rispett a x_3 , cioè

$x_1 x_1 x_2 x_3$	$x_2 x_1 x_1 x_3$
$x_1 x_1 x_3 x_2$	$x_2 x_1 x_3 x_1$
$x_1 x_2 x_1 x_3$	$x_2 x_3 x_1 x_1$
$x_1 x_2 x_3 x_1$	$x_3 x_1 x_1 x_2$
$x_1 x_3 x_1 x_2$	$x_3 x_1 x_2 x_1$
$x_1 x_3 x_2 x_1$	$x_3 x_2 x_1 x_1$

Ordine lessicografico
 rispetto all'alfabeto x_1, x_2, x_3

L'impiego pratico delle formule di Taylor si complica a dismisura al crescere del grado e del numero delle variabili. Anche il calcolo dei coefficienti polinomiali di Leibniz $\binom{k}{\mu_1 \dots \mu_n}$ ha le sue difficoltà, ma certamente inferiori a quelle del calcolo di tutte le derivate nelle formule originali, a meno che non si tratti di gradi e dimensioni estremamente basse.

Un modo per collegare le formule del polinomi di Taylor a quelle delle potenze di un polinomio (il cosiddetto polinomio di Leibniz, che generalizza ai polinomi le formule note per il binomio di Newton) è di scrivere il complesso dei termini d'ordine k così:

$$\frac{1}{k!} \left[\left(w_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + w_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f \right] (x_0)$$

e ricordare che

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^k = \sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0 \\ \sum \mu_i = k}} \binom{k}{\mu_1, \dots, \mu_n} a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} \dots a_n^{\mu_n}$$

Polinomio

d'

Leibniz

(originale!)

La complessità è fortunatamente inversa ai problemi combinatori

e c'è un settore intero della Matematica, l'Analisi Combinatoria, che si occupa di come contare in modo efficiente il numero degli elementi d'un insieme finito: un problema che si risolve insospettabilmente complesso ed estremamente ostico anche per un computer.... il fattore decisivo più alle orelte d'quanto qualche elaboratore d'dati, ad oggi, possa arrivare a gestire!

Capitolo 5

Teoremi per le funzioni implicite

LE "FUNZIONI IMPLICITE"

Questa nota contiene un'introduzione ed alcuni risultati elementari su un classico problema, con importanti risultati geometrici: esaminare il caso più semplice. Si consideri $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ e si osservi che la "curva d'livello 0", ovvero l'insieme di punti (x,y) del piano per i quali $f(x,y) = 0$, è ben nota: è la circonferenza unitaria centrale nell'origine. Si consideri ora "l'equazione" della curva d'livello $x^2 + y^2 - 1 = 0$, e ci si ponga la domanda se essa sia o no il grafico di una funzione. Le risposte sono semplicissime: No! Per ogni $x \in [-1,1]$ esistono due valori di y , $-\sqrt{1-x^2}$ e $\sqrt{1-x^2}$, per i quali $f(x,y) = 0$, e dunque non c'è modo di associare univocamente una (solti) y ad ogni x del dominio (che, ragionevolmente, sono $[-1,1]$). Scogliendo y come variabile indipendente nulla si conclude: la situazione è identica, e identica resterebbe anche se si operasse una rotazione del sistema d'assi. Dunque: gli insiem di zeri di funzioni d'più variabili NON sono, in generale, grafici di UNA funzione. Può capitare che lo siano: $y^3 + x^2 - 1 = 0$ si può risolvere univocamente rispetto ad y (e non infatti ad x) ottenendo

- 2 -

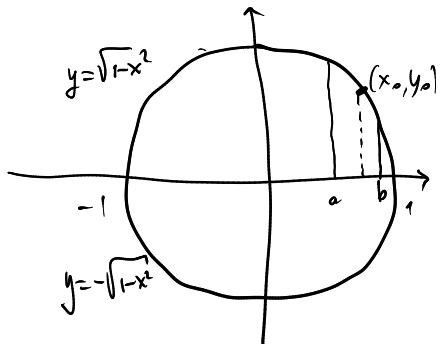
la "formula risolutiva" $y = (1-x^2)^{1/3}$, definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ (se si definisce la radice cubica come la funzione inversa della funzione $t \rightarrow t^3$, continua e strettamente crescente su \mathbb{R}), i punti del grafico delle quali, $(x, (1-x^2)^{1/3})$ sono tutti e solo le soluzioni di $y^3 + x^2 - 1 = 0$ (infatti: $[(1-x^2)^{1/3}]^3 + x^2 - 1 \equiv 0$ su \mathbb{R} e, se vale $\bar{y}^3 + \bar{x}^2 - 1 = 0$ allora vale anche $\bar{y} = \sqrt[3]{1-\bar{x}^2}$

In un linguaggio antico, ma ancora utilizzato, la funzione $x \rightarrow (1-x^2)^{1/3}$ si dice definita "IMPLICATAMENTE" dall'equazione $y^3 + x^2 - 1 = 0$.

Prima di entrare nel vnt del principale risultato di questa note, il celebre teorema delle funzioni implicite di Ulisse Dini, occorre approfondire ancora un po' il discorso sull'esempio iniziale. T'vero che non puo' esistere nessuna funzione il grafico delle quali coincide con la circonferenza unitaria ma, se ci si accontenta solo d'una porzione di circonferenza, le si puo' dare molti realamenti. Infatti, da $x^2 + y^2 - 1 = 0$ segue $y^2 = 1 - x^2$ che, per ogni $x \in [-1, 1]$ ha le due soluzioni (formula risolutiva) $y = \pm \sqrt{1-x^2}$ ma è del tutto evidente che, in vicinanza di un qualunque punto delle circonferenze (x, y) con $y > 0$ si troveranno altre soluzioni appartenenti solo al grafico di $y = \sqrt{1-x^2}$, mentre si DOVRA' scegliere $-\sqrt{1-x^2}$ per

-3-

le soluzioni (x, y) vanno ad un fronte (x_0, y_0) con $y_0 < 0$



Considerato un intorno di (x_0, y_0) , $y_0 > 0$, tutto contenuto nel semipiano $\{y > 0\}$, le uniche soluzioni sono del tipo $(x, \sqrt{1-x^2})$, grafici di $t \rightarrow \sqrt{1-t^2}$, e analogamente si potrebbe ragionare in un intorno abbastanza piccolo di (x_0, y_0) se $y_0 < 0$.

Osserviamo invece che, se $y_0 = 0$, non c'è modo di evitare il doppio segno nella radice, per quanto piccolo si pone scegliere l'intorno: si può invece considerare y come variabile indipendente e, ad esempio vicina a $(-1, 0)$, osservare che $(-\sqrt{1-y^2}, y)$ descrive tutte le soluzioni di $x^2 + y^2 - 1 = 0$ abbastanza vicine a $(-1, 0)$.

C'sono poi "esplicitazioni" impossibili: in $(0, 0)$, l'intorno degli zeri di $f(x, y) = x^2 - y^2$ non può in nessun modo essere rappresentato come un grafico, in quanto coincide con le due bisettrici di quadranti $y = \pm x$, ASSIEME. Nessuna scelta del raggio dell'intorno migliora minimamente la situazione!
Alcune conclusioni preliminari:

- Non c'è motivo d'attendersi che l'insieme di tutti gli zeri di una funzione $f(x, y)$ debba avere il grafico di un'unica funzione $y = \varphi(x)$,

- 4 -

oppure $x = \varphi(y)$

- E' possibile che, anche se globalmente il luogo geometrico degli zeri di $f(x,y)$ non sia un grafico, la sua intersezione con un intervallo abbastanza piccolo d'una soluzione nota (x_0, y_0) lo sia.
- E' possibile che $f(x,y)=0$ sia risolvibile in una sola delle forme $y = \varphi(x)$ oppure $x = \varphi(y)$, ma non in entrambe (come accade nell'intervallo di $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$ per $x^2+y^2-1=0$).
- Sotto quali condizioni su f almeno una delle due formule risolutorie $y = \varphi(x)$ o $x = \varphi(y)$ è valida, "vicino" a x_0 o y_0 , rispettivamente?

Una risposta soddisfacente è fornita dal teorema di Dini, che proviamo prima in ipotesi meno restrittive, ma di poco agendo verificare, e poi con altre più "fistiche".
Chiamiamo subito, però, che il teorema di Dini non è un teorema sull'esistenza degli zeri di $f(x,y)$, ma sulla struttura dell'insieme degli zeri vicino ad uno zero (x_0, y_0) già noto, che nonché essere quella di un grafico d'una funzione.

- 5 -

TEOREMA (Dini): esso $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$,
 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ verificanti:

- 1) (x_0, y_0) è interno ad Ω
- 2) $f(x_0, y_0) = 0$
- 3) f continua in Ω
- 4) $t \rightarrow f(x, t)$ è strettamente crescente (in t)
per ogni fissato x per cui $(x, t) \in \Omega$.

Allora, esiste $\delta > 0$ e $\varphi: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$
tal' che:

- 5) $\varphi(x_0) = y_0$
- 6) $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
- 7) φ è continua in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

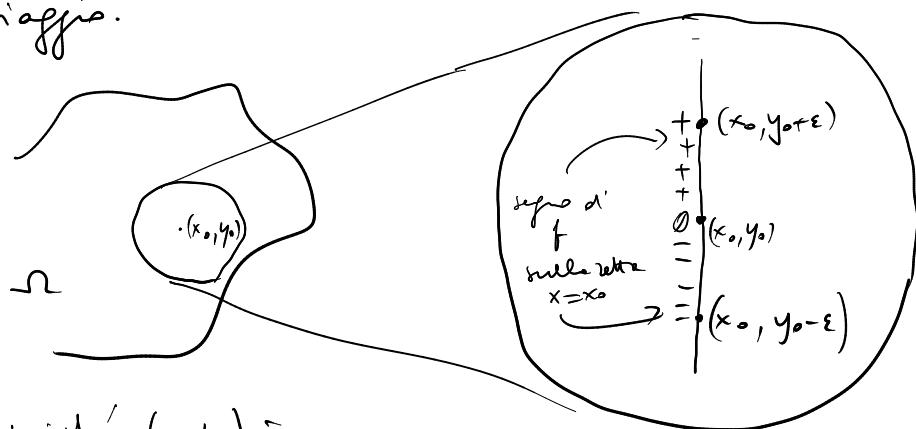
Prima di dimostrarlo osserviamo che la 2) dice che
 (x_0, y_0) è lo zero ($\in \mathbb{R}^2$) d' partente, mentre 1) garantisce che ci
sia spazio attorno ad esso nel dominio, il che è necessario
nella prova. La continuità è il "minimo strascico": ponendo
 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) = 1$ per $(x, y) \neq (0, 0)$

-6-

il teorema è certamente falso. L'ultima ipotesi è più specifica: in $(1, \circ)$, ad esempio $y \rightarrow x^2 + y^2 - 1$ non è strettamente crescente, in quanto ha un minimo (ogni punto di $(1, y)$) $y \neq 0$ ha distanza da $(0, 0)$ maggiore di 1: cotesto - ipotesi.

La tesi mostra dunque il carattere LOCALE delle "formule risolutive" $y = \varphi(x)$, valida solo in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ per δ opportuno, e non scelta da noi a priori, come sarebbe stato in un teorema globale. Che φ sia la "formula risolutiva" dell'equazione $f(x, y) = 0$ è dunque della 6), mentre 5) dice che il punto in $\varphi(x_0)$ è parte del grafico di φ . La 7) sarà molto importante nelle prove del teorema per le funzioni di classe C^1 .

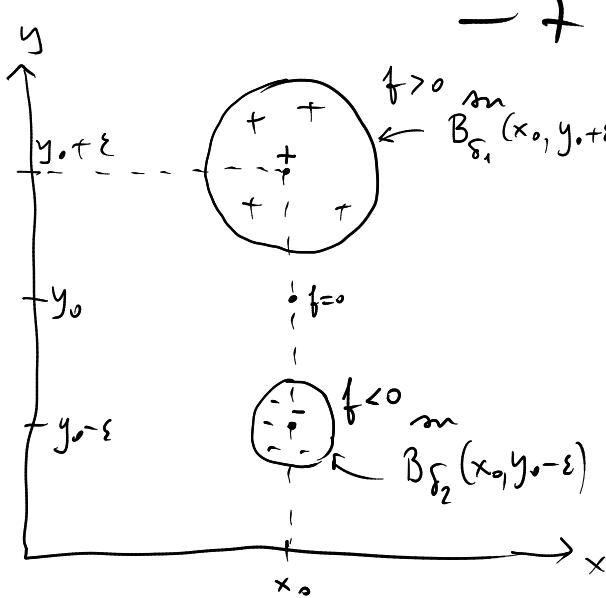
Permettiamo alla vera dimostrazione una sosta di pochi giorni.



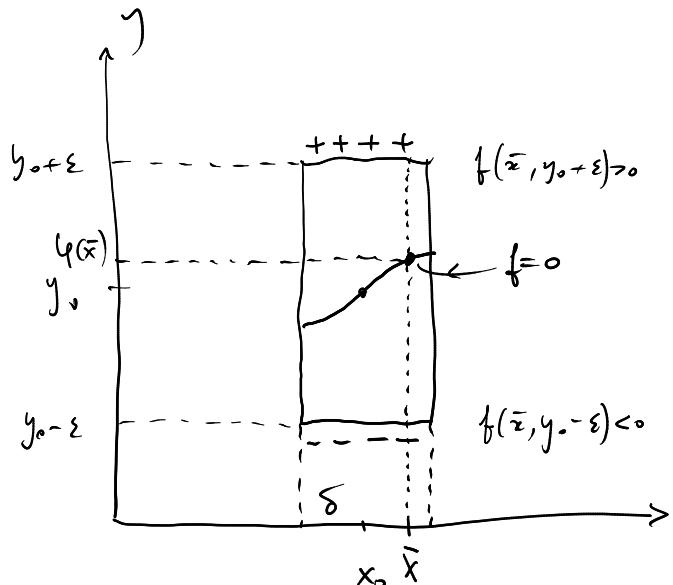
poiché (x_0, y_0) è
interno ad Σ

poiché $t \rightarrow f(x_0, t)$ è strett.
crescente

$$f(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0 \quad \text{e} \quad f(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$$



il segno di f si mantiene costante, per pertinenza di segno (continuità), in opportuni intorni di $(x_0, y_0 + \varepsilon)$ e $(x_0, y_0 - \varepsilon)$ di raggio δ_1 e δ_2 .



scelta $\delta < \min(\delta_1, \delta_2)$
per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
si considera $t \rightarrow f(x, t)$
che è continua su $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$,
assume valori discosti agli
estremi (e quindi l'uno) ed
è strettamente crescente, quindi
lo stesso è unico e compreso
fra $y_0 - \varepsilon$ e $y_0 + \varepsilon$. Tale x
è $\varphi(\bar{x})$.

Vediamo da le continuità richiedere qualche attenzione supplementare come "road map" più bastone. Passiamo alle prove.

DIM. Poiché (x_0, y_0) è interno a Ω esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_0, y_0) \subseteq \Omega$. Sia $\varepsilon = \frac{r}{2}$. Poiché $y \rightarrow f(x_0, y)$ è strettamente crescente e vale 0 per $y = y_0$, essa è strettamente positiva per $y > y_0$ e strettamente negativa per $y < y_0$, poiché $(x_0, y) \in \Omega = \text{dom } f$. Il segno che

- 8 -

$$f(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0 \quad e \quad f(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$$

Essendo f continua in Ω , e quindi in $(x_0, y_0 - \varepsilon)$ e in $(x_0, y_0 + \varepsilon)$, esistono $\delta_1, \delta_2 > 0$ tali che (permanente di segno):

$$f(x, y) > 0 \quad se \quad (x, y) \in B_{\delta_1}(x_0, y_0 + \varepsilon)$$

(ed, in particolare, $f(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \quad se \quad |x - x_0| < \delta_1$)

mentre

$$f(x, y) < 0 \quad se \quad (x, y) \in B_{\delta_2}(x_0, y_0 - \varepsilon)$$

(e, dunque, $f(x, y_0 - \varepsilon) < 0 \quad se \quad |x - x_0| < \delta_2$)

Se fissi ora $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, e sia $\bar{x} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

La funzione $t \rightarrow f(\bar{x}, t)$ è

- definita in $y_0 - \varepsilon$ e in $y_0 + \varepsilon$, ed assume in entrambi i valori di segno discorde.
- essendo $(\bar{x}, y_0 - \varepsilon) \in (\bar{x}, y_0 + \varepsilon)$ due punti di $B_\rho(x_0, y_0) \subseteq \Omega$, ed essendo la sfera B_ρ convessa, $t \rightarrow f(\bar{x}, t)$ è definita sull'intervallo $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$.
- è continua su tutti i punti per i quali $(\bar{x}, t) \in \Omega$, e quindi in particolare in $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$.

Ne segue che, per il teorema degli zeri di Weierstrass per le funzioni di una variabile, essa ha zero in $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$.

Per le stesse monotoniche di $t \rightarrow f(\bar{x}, t)$ lo zero è unico
per ogni $\bar{x} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ prefissato, e dunque
univocamente ha forma di \bar{x} che denotiamo con $\varphi(\bar{x})$.
Inoltre, per costruzione, lo zero $\varphi(\bar{x})$ così ottenuto è compreso
nelli intervalli $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ ma, dato che negli estremi non
si annulla poiché assume ivi valori di segno discordi, ne segue
 $\varphi(x) \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ e cioè $|\varphi(x) - y_0| < \varepsilon$.

Osserviamo ora che per $x = x_0$, essendo $\varphi(x_0)$ l'unico zero di
 $t \rightarrow f(x_0, t)$ per $(x_0, t) \in \Omega$, ed essendo fai ipotesi
 $f(x_0, y_0) = 0$, ne segue $\varphi(x_0) = y_0$, che è la 5).

La 6) è immediata dalla costruzione: $\varphi(\bar{x})$ è lo zero (unico)
di $f(\bar{x}, t)$, almeno per tutti gli $\bar{x} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e dunque,
per essi, $f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0$. La continuità, oggetto delle
7) è più delicata. Possiamo parlare in x_0 . Dalle
costruzioni vanta che per $|x - x_0| < \delta$, ossia in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
si ha $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |\varphi(x) - y_0| < \varepsilon$ il che sembra
chiudere la questione, ma non è così (punto pp-!). Fissare,
infatti, un valore di ε' più piccolo del precedente richiede
obbligatoriamente di considerare punti $(x_0, y_0 - \varepsilon')$ e $(x, y_0 + \varepsilon')$
diversi dai precedenti ai quali applicare le formule del
segno, ottenendo intorni di raggio δ'_1 e δ'_2 in generale

d'essi, il che conduce ad un raggio δ , e ad una funzione φ a priori differenti.

Cosa ci garantisce che le

due funzioni coincidano sui punti comuni dei rispettivi domini?

Semplice: è un'oste! Se \bar{x} appartiene ad entrambi i domini il veloce che entrambe le funzioni " φ " associano ad esso non può che essere l'unico vero di $t \rightarrow f(\bar{x}, t)$ e dunque esse coincidono in \bar{x} .

Analogamente si provi la continuità in un punto \bar{x} di $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ diverso da x_0 : basta riapplicare il teorema fino ad ora dimostrato (continuità in x_0 sicura)

ma scegliendo come punto "interno" $(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))$ invece di (x_0, y_0) . Le due funzioni ottenute dalle due costruzioni diverse coincidono sull'intersezione dei rispettivi domini, che contiene \bar{x} , che è dunque un punto di continuità per la " φ " continua pertanto della vera "centrale" $(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))$, e dunque anche per l'altra, ad esse coincidente ovunque sia esso entrambe definite.

□

Il teorema, con minor approssimazione, può essere applicato alle funzioni strettamente decrescenti rispetto alle y , ma anche altrettanto bene alle funzioni strettamente monotone (di ogni tipo) rispetto alle x : in tal caso si ottiene

una "formula relativa locale" $x = \varphi(y)$, verificante
 $f(\varphi(y), y) = 0$ $\forall y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$.

Altre note conclusive "pratiche": la verifica diretta delle
stesse monotonia di una funzione $t \rightarrow g(t)$ richiede lo
studio delle diseguaglianze $g(x) < g(y)$ e le prove che
l'insieme delle soluzioni contiene tutte le coppie x, y
nel dominio di g verificanti $x < y$, il che è tutt'altro
che elementare, in generale.

Dato che la stessa monotonia è più facile da ottenere mediante
ipotesi sulle derivate, e dato che il teorema offre comunque
un risultato locale, in un intorno il cui raggio non può
essere fornito a priori, è conveniente un enunciato d'
tipo differentiale, che utilizza le derivate e le loro regolarità;
è il teorema effettivamente dimostrato da Ulisse Dini, oggetto
della sezione seguente.

IL TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE PER LE FUNZIONI DI CLASSE C¹.

Se f verifica tutte le condizioni 1), 2) e 3) del teorema precedente, ma è di classe $C^1(\Omega)$, è facile soddisfare la condizione 4) ricordando che che $f_y(x_0, y_0) > 0$.
Infatti, poiché f_y è continua in Ω ($f \in C^1$), dal teorema della permanenza del segno segue che, in un opportuno intorno $B=B_\rho(x_0, y_0)$ si ha $f_y(x, y) > 0$ e quindi, per la convenzione della sfera - per il teorema di Lagrange applicato a $t \rightarrow f(x, t)$ sull'intervallo per il quale $(x, t) \in \Omega$ - si segue che $t \rightarrow f(x, t)$ è strettamente crescente. In B , si può dunque applicare il teorema precedente, al costo iniziale di verificare che $f_y(x_0, y_0) > 0$, e al costo, meno inviso ma non dissimile da quello da pagare per ottenere la tesi nel teorema precedente, di avere per dominio di f un intervallo di raggio del tutto scosceso che ora, oltre che dipendere dalla distanza di (x_0, y_0) dal bordo (raggio ρ), e da' raggio δ_1 e δ_2 che risultano dall'applicare la permanenza del segno in $(x_0, y_0 + \varepsilon) \times (y_0, y_0 + \varepsilon)$, dipendere anche dal raggio θ dell'intorno sul quale vale la permanenza di segno per $f_y(x, y)$: solo una quarta buona ragione per non

-2-

poter sapere quanto valga il raggio δ presente nella tesi!

In realtà, però, se f è di classe C^1 la funzione y non è solo continua, come risulta dalla 7) del teorema precedente, ma anche derivabile, come vedremo nel teorema seguente.

Premettiamo per ora un Lemma che, in qualche modo, estende a più variabili il teorema di Lagrange.

LEMMA : Se $B = B_p(x_0, y_0)$ la sfera d'aperto
 $(x_0, y_0) \in$ raggio ρ , e se $(x, y) \in B$.

Allora esiste $\xi \in]0, 1[$ tale che

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0 + \xi(x-x_0), y_0 + \xi(y-y_0))(x-x_0) + \\ + f_y(x_0 + \xi(x-x_0), y_0 + \xi(y-y_0))(y-y_0)$$

DIM. Posto $h(t) = f(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0))$, segue dalla convenzione d' B che, poiché $(x, y), (x_0, y_0) \in B$ anche il segmento da essi definito è tutto contenuto in B , da cui $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Inoltre, essendo $f \in C^1$ differenziabile, per le derivate delle funzioni composte anche h lo è in $]0, 1[$, ed inoltre

$$h'(t) = \begin{pmatrix} f_x(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0)) \\ f_y(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

- 3 -

$$h(0) = f(x_0, y_0) \quad e \quad h(1) = f(x, y)$$

e dal teorema d' Lagrange (in una variabile) applicato ad h , definita e continua sull' intervallo $[0, 1]$ e derivabile in $]0, 1[$, segue

$$h(1) - h(0) = h'(\xi)$$

che è lo tew.



Possiamo ora enunciare e provare il

TEOREMA (delle funzioni implite per funzioni C^1):

Siano $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ed $(x_0, y_0) \in \Omega$ verificanti:

1) (x_0, y_0) interno ad Ω

2) $f(x_0, y_0) = 0$

3) $f \in C^1(\Omega)$

4) $f_y(x_0, y_0) > 0$

Allora, esiste $\delta > 0$ s.t. $\varphi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. che

5) $\varphi(x_0) = y_0$

6) $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

7) φ è derivabile in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ed inoltre

-4-

$$\varphi'(x) = - \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

DIM. Poiché (x_0, y_0) è interno ad Ω , esisti $\theta > 0$ tali che $B_\theta(x_0, y_0) \subseteq \Omega$. Per il teorema delle permanenze del segno, applicato alla funzione continua f_y , positiva strettamente in (x_0, y_0) , segue che $\exists \sigma : f_y(x, y) > 0$ in $\Omega \cap B_\sigma(x_0, y_0)$. Sulta $\rho = \min(\theta, \sigma)$ ne segue che $f_y(x, y) > 0$ in $B_\rho(x_0, y_0)$. Poiché, fissato \bar{x} , l'insieme $\{y \in \mathbb{R} : (\bar{x}, y) \in B_\rho(x_0, y_0)\}$ (se non vuoto) è un intervallo, applicando il teorema di Lagrange alla funzione $t \mapsto f(x, t)$ in tale intervallo ne segue che $t \mapsto f(x, t)$ è strettamente crescente per ogni $(x, t) \in B_\rho(x_0, y_0)$. Dal teorema precedente segue che esistono δ, φ verificanti 5) e 6). Come nel teorema precedente, proviamo 7) in x_0 , e poi otterremo il teorema generale soportando il punto "centrale" (x_0, y_0) nel punto $(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))$. Dal Lemma precedente, applicato a $(x, \varphi(x))$ e $(x_0, \varphi(x_0))$ $x \neq x_0$, e alla sfera $B_\rho(x_0, y_0)$ segue che

$$f(x, \varphi(x)) - f(x_0, \varphi(x_0)) = f_x(x_0 + \xi(x-x_0), \varphi(x_0) + \xi(\varphi(x)-\varphi(x_0)))(x-x_0) +$$

- 5 -

$$+ f_y(x_0 + \xi(x-x_0), \varphi(x_0) + \xi(\varphi(x) - \varphi(x_0))) (\varphi(x) - \varphi(x_0))$$

Poiché $f(x, \varphi(x)) = f(x_0, \varphi(x_0)) = 0$ per ogni $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$,

dal fatto che $f_y > 0$ su B_ρ e che il segmento
che congiunge $(x_0, \varphi(x_0))$ con $(x, \varphi(x))$ è in B_ρ , ne segue
che, dividendo per $x - x_0 \neq 0$ e per $f_y > 0$ si ottiene

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = - \frac{f_x(x_0 + \xi(x-x_0), \varphi(x_0) + \xi(\varphi(x) - \varphi(x_0)))}{f_y(x_0 + \xi(x-x_0), \varphi(x_0) + \xi(\varphi(x) - \varphi(x_0)))}$$

Ora, per $x \rightarrow x_0$, si ha $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x_0)$ per il teorema precedente
(continuità di φ , 7)), da cui, essendo $0 < \xi < 1$, segue
 $x_0 + \xi(x-x_0) \rightarrow x_0$ $\varphi(x_0) + \xi(\varphi(x) - \varphi(x_0)) \rightarrow \varphi(x_0)$

Dalla continuità di f_x ed f_y si ha infine che

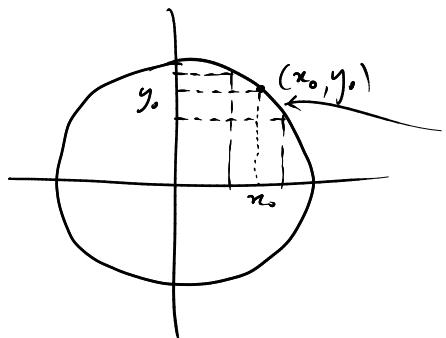
$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = - \frac{f_x(x_0, \varphi(x_0))}{f_y(x_0, \varphi(x_0))} = - \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$$

11

Naturalmente, valgono i tre teoremi generali se
 $f_y(x_0, y_0) < 0$, se $f_x(x_0, y_0) > 0$ e se $f_x(x_0, y_0) < 0$.

- 6 -

Studiamo in dettaglio l'esempio iniziale $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Il gradiente di f vale $\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ e dunque i punti nei quali non si può applicare il teorema di Dini per esplorare y in funzione di x sono quelli nei quali $fy = 2y = 0$, e dunque i punti $(-1,0)$ e $(1,0)$. Quelli nei quali il teorema non consente di esplorare la x in funzione di y sono $(0,1)$ e $(0,-1)$. In tutti gli altri si può esplorare indifferentemente l'equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$ indifferentemente rispetto ad x o rispetto a y .

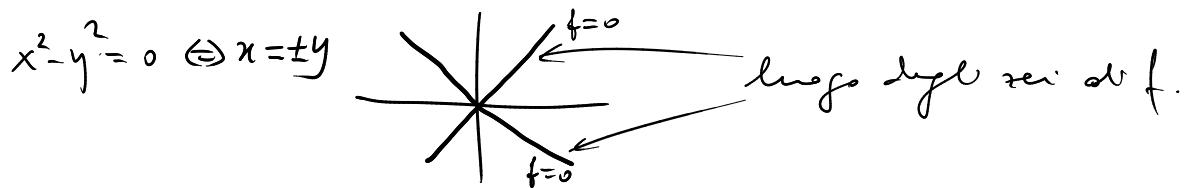


grafa di una funzione di x e di y , indifferentemente), definito in un intorno appena di x_0 e y_0 .

Osserviamo che $Df(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ solo se $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e che tale punto NON appartiene all'insieme delle soluzioni di $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ($0 = 1$??!). Dunque, per ogni punto delle "curve di livello" di $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ esiste un intorno nel quale esiste il grafico di una funzione derivabile ($f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$), rispetto ad una delle variabili, scelte opportunamente. Ciò non accade, per esempio, per $f(x,y) = x^2 - y^2$ in $(0,0)$.

Infatti,

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } f(0,0) = 0,$
e dunque non c'è modo d' applicare il teorema di Dini
per vedere $x^2 - y^2 = 0$ vicinamente rispetto ad una
delle due vettoriali, nell'intorno di $(0,0)$, zero di f .



Al contrario, in un qualsiasi punto distinto dall'origine una (almeno) delle due componenti del gradiente non si annulla e permette
di applicare il teorema di Dini.

Per maggiore semplicità il teorema è stato enunciato e
provato in \mathbb{R}^2 , ma le prove più enunciate sono state
fatte alle $f: \mathcal{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^m$, con l'unica
avvertenza di interpretare x_0, x come vettori in \mathbb{R}^n , mentre
 y, y_0 restano scalari.

Nelle prossime settimane verrà enunciata, senza dimostrazioni,
una versione vettoriale del teorema precedente ed una
sua applicazione al problema dell'inversione (locale) delle
funzioni da \mathbb{R}^m in \mathbb{R}^n .

IL TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLIQUE
PER LE FUNZIONI VETTORIALI

TEOREMA : Siano $f: \Omega \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$,
 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \Omega$ e $y_0 \in \Sigma$ verificanti:

1) (x_0, y_0) è interno a $\Omega \times \Sigma$

2) $f(x_0, y_0) = 0$

3) $f \in C^1(\Omega \times \Sigma)$

4) $\det f_y(x_0, y_0) \neq 0$

Allora, esistono $\delta > 0$ e $\varphi: B_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ tali che

5) $\varphi(x_0) = y_0$

6) $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0)$

7) La funzione vettoriale φ è differentiabile e la
sua matrice jacobiana $\varphi'_x(x)$ verifica

$$\varphi'_x(x) = - \left[f_y(x, \varphi(x)) \right]^{-1} f_x(x, \varphi(x))$$

La stessa somiglia ad teorema per le funzioni scalari
non troppo in inganno! Chiamiamo immesso tutta una
nella f_x ed f_y . In componenti scalari:

- 9 -

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \end{pmatrix}$$

Notare che il numero
delle equazioni
 $f_i(x, y) = 0$

è pari al numero delle
incognite y_i che vanno esplicate, e cioè m .

con f_x si intende la matrice jacobiana delle funzioni
vettoriali f rispetto alle variabili x_1, \dots, x_n e cioè

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad m \times n$$

mentre con f_y si intende

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \quad m \times m.$$

L'ipotesi 4) assicura che tali matrici sono invertibili
nello stesso (permanente di segno del determinante) di

$$(x_0, y_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$$

ed è tale invece che appena nella formula 7) che esprime la jacobiana delle φ infatti alle sue varietà

$$\varphi_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Era, com'è naturale, anche il prodotto dell'inverso di f_y , che è $m \times m$ come la f_y con la f_x , che è $m \times n$. Le due matrici non possono essere moltiplicate se non così.

Un'altra importante applicazione è il

TEOREMA (di inversione locale): Se $T: \Omega \rightarrow \Sigma$, $\Omega, \Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \Omega$ verifichi:

1) x_0 interno a Ω

2) $\det T'(x_0) \neq 0$

Allora, c'è $\delta > 0$ e $S: B_\delta(T(x_0))$ tale che:

3) $T(S(y)) = y \quad \forall y \in B_\delta(T(x_0))$

4) $S \in C^1(B_\delta(T(x_0)))$

Ci limitiamo a scrivere $\delta \in S$ utilizzando il teorema

mentre,

$$\text{Post } f(x, y) = T(x) - y \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

dal teorema precedente, poiché $\det T'(x_0) \neq 0$, e post
 $y_0 = T(x_0)$, significa esistere $\delta > 0$ ed $S : B_f(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$
 tali che

$$x_0 = S(y_0)$$

$$- f(S(x), y) = 0 \Rightarrow T(S(x)) = x \Rightarrow S = T^{-1}$$

Sempre, l'inverse di T , S , è garantita esistere
 solo in un intorno di $T(x_0)$: un'inverse locale.

Ciò avviene molto più nei cambiamenti di varietà
 negli intervoli multipli, ove le condizioni

$$\det(T') \neq 0$$

consente di effettuare il cambio di varietà, almeno
 negli intervalli aperti.

La variazione scalare è

$$\begin{cases} y_1 = T_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = T_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

è risolvibile univocamente rispetto alle
 x_1, \dots, x_n (e così invertibile) nelle
 coordinate di una soluzione $(y_1^0, \dots, y_n^0) = T(x_1^0, \dots, x_n^0)$

se e solo se

$$\det\left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right)(x_1^0, \dots, x_n^0) \neq 0$$

Ragionamenti agili!

Un ultimo suggerimento: nell'applicare i vari teoremi presentati occorre ricordare che le derivate, o lo jacobiano, che devono risultare non nulli sono quelli calcolati rispett alle varietà, se cioè vettoriali, che si vuole esplorare.

Se si vuole risolvere l'equazione $f(x, y) = 0$ rispetto ad x , in vicinanza di x_0 occorre verificare che $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ (o che sia $f_x(x_0, y_0) \neq \infty$, nel caso f ed x siano vettori), ottenend così le funzioni espletate $x = \varphi(y)$ verificanti identicamente, in un intorno opportuno di y_0 , $f(\varphi(y), y) = 0$. Si considera ora f_y se si vuole risolvere $f(x, y) = 0$ rispetto a y .

ATTENZIONE: I "sistemi di funzioni incomplete" conservano le buone abitudini dei sistemi lineari con soluzioni uniche sempre esistenti: hanno un numero d'righe, o d'equazioni, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ..., $f_m = 0$ pari al numero di integrità rispetto alle quali risolvere il sistema, y_1, y_2, \dots, y_m : il determinante delle condizioni 4) lo dice chiaramente ($f_y \in \mathbb{R}^{m \times m}$).

In conclusione: pur essendo le condizioni d'ogni solo sufficienti, sono abbastanza flessibili per molte applicazioni, visto i controsensi via via incontrati, non troppo lontani da quelle necessarie!

Capitolo 6

Curve parametriche

RETTIFICABILITÀ E LUNGHEZZA

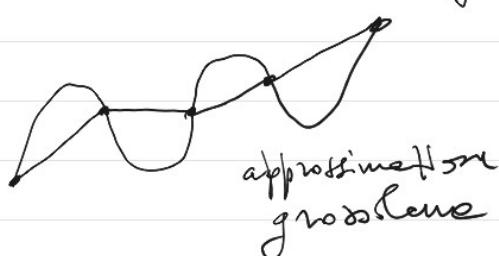
Queste note sono dedicate ad una rapida esposizione di uno dei concetti fondamentali, e più antichi, di tutta l'Analisi Matematica. Osserviamo che, volendo introdurre le funzioni seno e coseno, nulla vieterebbe di definire come rapporto fra il cateto opposto, o quello adiacente, all'angolo che ci interessa e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo. Perché, allora, preoccuparsi di misurare gli angoli e, avendo deciso di farlo, perché ostinarsi a misurarli in radienti, ciò che coinvolge la necessità di maneggiare π - uno dei numeri meno maneggevoli della Storia - e non tenersi i gradi, come fanno da secoli naviganti e geometri (i vecchi approssimatori).

Il fatto è che le misure in radienti forniscano immediatamente le lunghezze dell'arco di circonferenza intere corrispondenti

(o CAPACE, come si diceva un tempo) all'angolo in questione. Solo se si misurano gli angoli in radienti (e le velocità angolari in radienti al secondo) la legge che lega velocità angolare e velocità lineare è semplicemente $v = \omega r$, ove r è il raggio.

Il vero problema è: "Come misurare la lunghezza di un arco di circonferenza o, più in generale, di una curva?"

La soluzione del problema, dovuta (essenzialmente) ad Archimede, è basata su una semplice osservazione: fra tutti le curve che congiungono due punti, il segmento è quello più corto. Dunque si possono trovare approssimazioni PER DIFETTO delle lunghezze inscivendo una poligonal nella curva e valutandone le lunghezze misurando i lati.



1

ed è sensato e ragionevole (anche se falso!) pensare che debba migliorare utilizzando lati più piccoli. È tempo di passare alle re di fatto.

DEFINIZIONE: Si definisce CURVA PARAMETRICA in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ una funzione $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$, con $[a,b]$ intervallo arbitrario.

La variabile $t \in [a,b]$ verrà detta PARAMETRO delle curve. L'immagine $\gamma[a,b]$ verrà detta SOSTEGNO.

Le curve verranno dette di classe $C^0, C^1, \dots, C^\infty$ se è tale la funzione γ che le definisce, e dunque se sono tali le sue COMPONENTI $\gamma_i: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, definite da

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$$

ESEMPI:

1) La curva $\gamma(t) = x + t v$, $t \in [0,1]$ e $x, v \in \mathbb{R}^n$ ha per sostegno il segmento che congiunge x_0 e $x_0 + v$. Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ le componenti γ_i verificherebbero

$$\gamma_i(t) = x_i + t v_i$$

2) La curva $\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, ha per sostegno la circonferenza unitaria.

Sono entrambe curve C^∞ , la prima a valori in \mathbb{R}^n , la seconda a valori in \mathbb{R}^2 .

Utilizzare la rappresentazione parametrica delle curve rende molto facile iscrivere le poligoni, e misurarle.

Prima di farlo, però, osserviamo che una funzione $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, più che definire una curva - o meglio oltre a definire una curva - definisce anche la "legge oraria" con le quale le traiettorie vengono descritte. Basta pensare al parametro t come al tempo che scorre, e al vettore $\gamma(t)$ come alla posizione assunta dal punto in movimento all'istante t . I due esempi presentati corrispondono a due MOTI fondamentali: quelli rettilineo uniforme e quelli circolare uniforme. In realtà, è il sostegno a rappresentare meglio le nostre idee di curva. Consideriamo i due esempi

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi] \qquad \sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \quad t \in [0, \pi]$$

I due sostegni sono uguali (la circonferenza unitaria) ma $\sigma(t)$ gira a velocità doppia e percorre l'intera circonferenza se il parametro (tempo) va da 0 a π , e per la riferzione grande

varie da π a 2π . Stesse "curve" (sostegni) nei due casi, ma modo di percorrerla diverso.

DEFINIZIONE: Dato un intervallo arbitrario $[a,b]$, si definisce **PARTIZIONE** di $[a,b]$ ogni sequente finita di punti $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ tali che

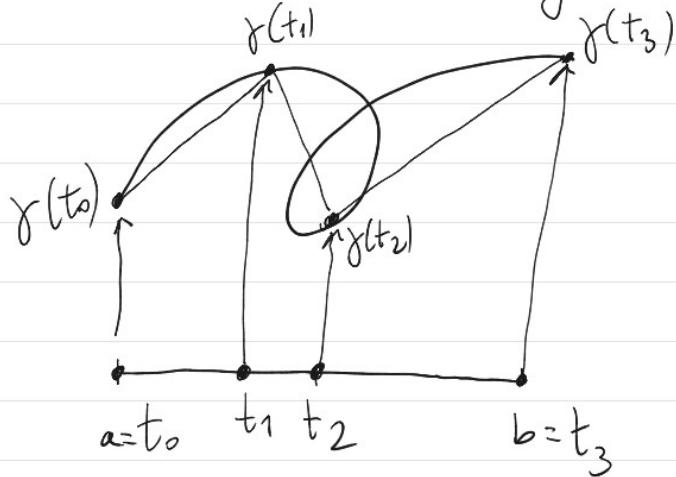
$$a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = b$$

NOTA: ogni punto di $[a,b]$ appartiene a un solo intervallo $[t_i, t_{i+1}]$, salvo i punti t_1, \dots, t_{n-1} , che appartengono ad due intervalli contigui.

L'idea per inscrivere una poligonale nella curva γ è di fissare una partizione dell'intervallo dei parametri e

3

di considerare le loro immagini come vertici delle sprette



Scrivere per esteso l'"equazione parametrica" delle sprette è (impraticabile) noioso. E' invece facile (e importante) scrivere le lunghezze: ogni segmento ha lunghezza pari alle distanze dei propri estremi e, dunque si può introdurre le seguenti

DEFINIZIONE: Date una curva $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ed una partizione $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, si definisce la LUNGHEZZA DELLA POLIGONALE INSCRITTA $\Lambda(\Pi)$, come il numero

$$\Lambda(\Pi) = \sum_0^{n-1} |y(t_{i+1}) - y(t_i)|$$

A causa delle proprietà del segmento di essere il segmento più breve fra gli estremi, tale numero deve risulbare minore delle lunghezze di y , comunque lo si voglia definire.

E' però vero - e già osservato da Antifante e Brisone (criticati duramente da Aristotele) - che la poligonale tende a "confondersi" con la curva al crescere del numero dei suoi lati e al diminuire delle loro lunghezze. E' dunque sensato porre la

DEFINIZIONE: una curva parametrica verrà detta RETTIFICABILE se esiste finito il numero

$$\Lambda(\gamma) \equiv \sup_{\Pi} \Lambda(\Pi)$$

al varire di tutti le possibili partizioni dell'intervallo dei parametri.

Il numero $\Lambda(\gamma)$ verrà detto LUNGHEZZA della curva.

NOTA: esistono curve continue di lunghezza infinita e cioè NON rettificabili, per le quali $\Lambda(\gamma) = +\infty$.

Il resto della note è dedicato ad individuare delle

classi di curve rettificabili sufficientemente ampie da coprire i casi più frequenti nelle applicazioni. Premettiamo però qualche osservazione sugli integrali di funzioni vettoriali:

IL TEOREMA DI TORRICELLI E LA "DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE" PER GLI INTEGRALI

E' stato già visto che l'operazione di derivazione delle curve si effettua componente per componente, indipendentemente.

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t))$$

Una conseguente immediata di ciò è che, se si definisce l'integrale di una curva ponendo

$$\int_a^b \gamma(t) dt = \left(\int_a^b \gamma_1(t) dt, \dots, \int_a^b \gamma_n(t) dt \right),$$

si ottiene subito le seguenti formule di Tonelli nel caso vettoriale

$$\gamma(d) - \gamma(c) = \int_c^d \dot{\gamma}(t) dt$$

Prima di farne buon uso nello studio delle rettificabilità, che richiede di stimare $|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$, occorre presentare il seguente lemma, che generalizza agli integrali le diseguaglianze triangolari, note per i vettori e le loro norme,

$$|\sum_i^n a_i| \leq \sum_i^n |a_i|$$

LEMMA: sia $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora

$$\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt$$

NOTA: le doppie barre verticali qui denotano la NORMA in \mathbb{R}^n . La prova del risultato analogo per gli integrali scalari è più semplice, in quanto $a \leq b$ e valgono $\gamma \leq |\gamma| = -\gamma \leq |\gamma|$.

DIM. Vedi APPENDICE.

Siamo ora in grado di provare un risultato di rettificabilità di eccellente applicabilità pratica.

TEOREMA: Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrica di classe C^1 . Allora γ è rettificabile e inoltre

$$\Lambda(\gamma) \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

NOTA: la funzione scalare $t \mapsto |\dot{\gamma}(t)|$ è continua su $[a, b]$ e quindi integrabile.

NOTA: con un ragionamento più raffinato si può provare che, in realtà,

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

e dunque la formula precedente permette di calcolare la lunghezza. La prova è molto deliziosa, per un resul-

tato così intuitivo, visto che $|\dot{\gamma}|$ è il modulo della velocità e $\Lambda(\gamma)$ è la strada percorsa nell'intervalle di tempo $[a, b]$.

DIM. del teorema.

Fissate ad arbitrio una partizione $\pi = \{a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b\}$. Si osservi che, per il teorema di Torricelli,

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\gamma}(t)| dt$$

da cui, per le proprietà additive dell'integrale

$$\Lambda(\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

La stima precedente non dipende dalla partizione scelta

sicché il numero $\int_a^b |\dot{y}(t)| dt$ è un maggiorante per l'insieme

$$\{\Lambda(\pi) : \pi \text{ partizione di } [a,b]\}$$

Poiché $\Lambda(y) = \sup_{\pi} \Lambda(\pi)$ è il minimo di tali maggioranti segue subito

$$\Lambda(y) \leq \int_a^b |\dot{y}(t)| dt$$



NOTA: L'aver derivate (velocità) continue non è condizione necessaria per la rettificabilità: se si parametrizza una spettata (certamente rettificabile) usando moti uniformi sulle singole porzioni rettilinee, la velocità "salti" nei vertici della spettata. D'altronde, essere continue non è sufficiente per la rettificabilità,

in generale, come è stato provato in un altro contributo.

Esiste una condizione sulle componenti necessaria e sufficiente per la rettificabilità di una curva, l'essere a "variazione limitata" ("bounded variation"), ma tali approfondimenti esulano dall'ambito elementare di queste note.

L'estensione di tali concetti alle superficie comportano un mare di guai. Alla loro metà a fuoco hanno dato fondamentali contributi numerosi matematici italiani, fra i quali va senz'altro citati Leonida Tonelli, fra le due guerre mondiali, ed Ennio De Giorgi, negli anni '60 del secolo scorso.

Una nota di colore: i primi a scontrarsi con le curve non rettificabili non furono i matematici, ma i geografi. Nel tentativo di misurare le coste frastagliatissime delle Scòzie, scoprirono che usare segmenti sempre più corti non stabilizzava la misura, che invece nasceva a "dismisura". Così nacquero i frattali!

APPENDICE

Viene qui presentata l'idea di una dimostrazione del lemma precedente sulla "disegualanza triangolare" per gli integrali. Se si utilizza la definizione di integrale nella versione di Mengoli e Cauchy si ricorderà che una approssimazione dell'integrale è offerta dalle somme

$$\sum = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(\xi_i)$$

ove $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ è una partizione del dominio $[a, b]$ e ξ_i è un punto arbitrario in $[t_i, t_{i+1}]$.

Allora $|\sum| = \left| \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(\xi_i) \right|$ e, per l'ordinaria

disegualanza triangolare, ne segue

$$|\sum| \leq \sum_0^{n-1} |(t_{i+1} - t_i) f(\xi_i)| = \sum_0^{n-1} (t_{i+1} - t_i) |f(\xi_i)|$$

Al tendere a zero di $\max |t_{i+1} - t_i|$ il primo membro tende a $|\int_a^b f(t) dt|$, mentre l'ultimo tende a $\int_a^b |f(t)| dt$, e la tesi è provata. \square

NOTA: È necessario prestare la stessa attenzione riguardante per le funzioni scelte se si intenda applicare la stima ad intervalli i cui estremi a e b non verificano $a \leq b$.

Se, infatti, $a > b$ la stima è falsa, in quanto il primo membro è positivo e il secondo negativo, salvo che siano nulli.

La stima vale sempre se:

$$\left| \int_a^b y(t) dt \right| \leq \left| \int_a^b |y(t)| dt \right|$$

ore il valore assoluto al secondo membro, all'esterno dello integrale, fa sì che il valore non dipenda dall'ordine d'abc.

ESEMPIO DI CURVA PARAMETRICA

CONTINUA, MA NON RETTIFICABILE

Si consideri la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t=0 \\ t \sin \frac{1}{t} & t \neq 0 \end{cases}$$

Essa è definita su tutto \mathbb{R} ed è continua (fuori d'0, in quanto prodotto delle funzioni continue t e $\sin \frac{1}{t}$, ma anche in 0, in quanto $f(0)=0=\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$: infatti, fuori di 0, f è prodotto delle funzioni infinitesime t per quelle limitate $\sin \frac{1}{t}$, ed è dunque infinitesima).

Si può allora definire una curva parametrica ponendo

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

che è la parametrizzazione standard del grafico continuo della funzione f . Poiché entrambe le componenti di γ , e cioè t ed $f(t)$, sono continue, γ stessa è continua su \mathbb{R} .

Mostriremo ora che la porzione d'curva γ relativa all'intervalle di parametria $[0, \frac{1}{2\pi}]$ non è rettificabile.

- 2 -

Ricordiamo che $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (nel nostro caso $n=2$)

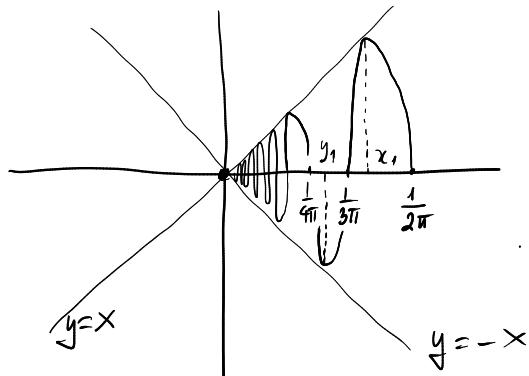
è rettificabile se $\Lambda(\gamma) = \sup_{\Pi} \Lambda(\Pi) < +\infty$. Dunque, per provare che la curva γ definita prima non è rettificabile si dovrà verificare che

$$\sup_{\Pi} \Lambda(\Pi) = +\infty$$

e cioè che l'insieme (numerico) delle lunghezze delle poligoni inscritti in γ non è uppermente limitato: in definitivo, occorre dimostrare che esistono poligoni inscritti di lunghezze arbitrariamente alte.

Osserviamo che $f\left(\frac{1}{2\pi}\right) = 0$. Il grafico di f relativo a

$$\left[0, \frac{1}{2\pi}\right]$$



Gli zeri di f in $[0, \frac{1}{2\pi}]$ sono, oltre a 0, tutti i punti del tipo $\frac{1}{k\pi}$, con $k \geq 2$.

$$\text{D'altra parte: } x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \quad \text{e} \quad y_k = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}$$

sono punti sui quali $\frac{1}{f}$ vale rispettivamente 1 e -1, e dunque sono esattamente i punti nei quali il grafico interseca

- 3 -

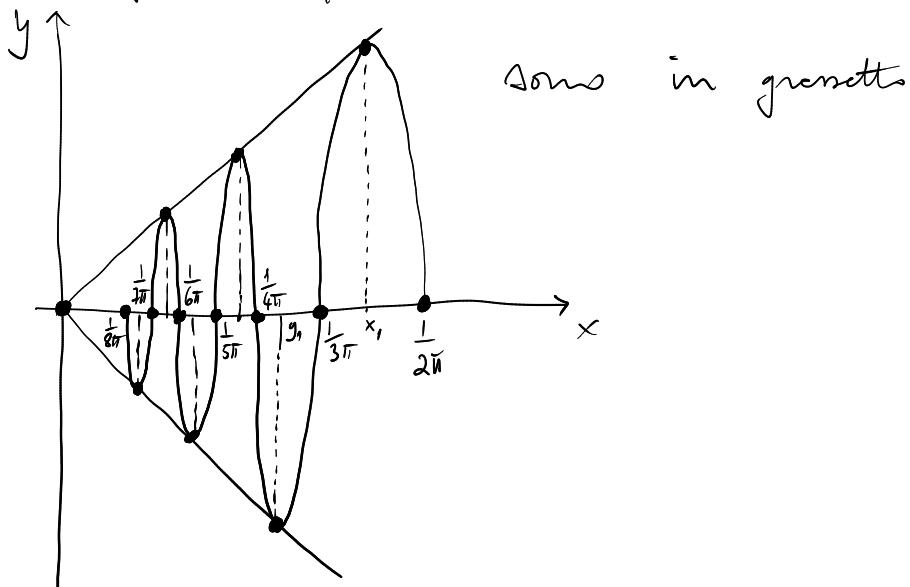
rispettivamente la prima borsellina $y=x$, e la seconda $y=-x$.

Fissato ora $k \in \mathbb{N}$, consideriamo la partitura definita dai punti

$$0, \frac{1}{2k\pi}, \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2(k-1)\pi}, \frac{1}{(2k-1)\pi}, \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2(k-1)\pi}, \dots$$

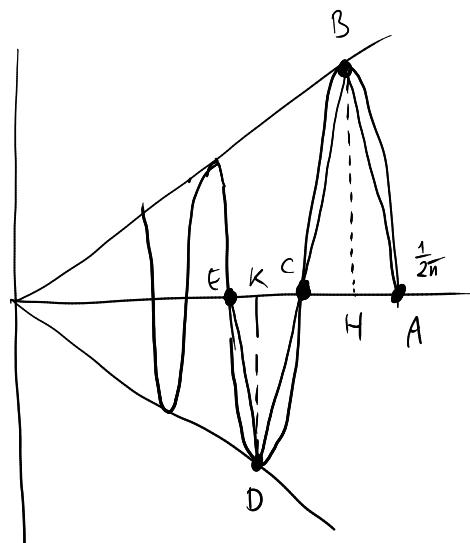
$$\dots, \frac{1}{4\pi}, \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi}, \frac{1}{2\pi}$$

le immagini dei quali (nel caso $k=3$) sul grafico seguente



Per stimare (molto) del basso la lunghezza delle poligonali definite da tali punti sarà sufficiente minorare la lunghezza di due lati consecutivi delle stesse con l'altezza del triangolo da esse formate:

- 4 -



$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{BH}$$

$$\overline{CD} + \overline{DE} > \overline{DK}$$

Osservando che

$$BH = f(x_i) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2ni}$$

e

$$DK = f(y_i) = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2ni},$$

ripetendo queste stime per ogni "semionda", e tenendone (ossia moltiplicando per 2) la lunghezza del primo lato $(0,0)(\frac{1}{2k\pi}, 0)$,

si ottiene per le lunghezze delle poligonalì le stime

$$\Lambda(\pi) \geq \sum_{m=1}^k \left[\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2ni} + \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2ni} \right] = S_k$$

Il secondo membro è la somma parziale di una serie confrontabile con la serie armonica $\sum \frac{1}{m}$, che diverge. Ne segue che essa stessa è divergente e d'conseguente, per k (numero d'onde complete) sufficiente alto, si possono ottenere poligonalì d'lunghezza arbitrariamente grande.



Una nota finale: abbiamo appena provato che la continuità non implica la rettificabilità.

- 5 -

Al lettore può darsi per il warisse; si consideri la funzione $f(t) = \begin{cases} 1 & se t \geq 0 \\ -1 & se t < 0 \end{cases}$, che è discontinua in $t=0$. L'onestante, le parametrizzazioni standard del grafico di f su $[-1, 1]$; $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, t \in [-1, 1]$, è rettificabile.

Sia $-1 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ una qualsiasi partizione di $[-1, 1]$ e sia i tale che $0 \in [t_i, t_{i+1}]$. Se ha, allora

$$|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| = t_{j+1} - t_j \quad \text{se } j < i \text{ oppure } j > i+1$$

mentre

$$\begin{aligned} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| &= \sqrt{\left(\frac{t_{i+1}}{1}\right)^2 - \left(\frac{t_i}{-1}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2}\right)^2} \leq \sqrt{\binom{2}{2}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

s'ha

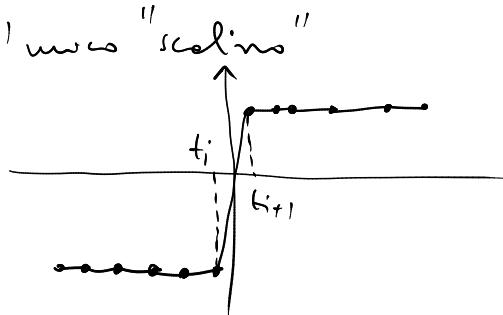
$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| &\leq \sum_{j=0}^i |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| + 2\sqrt{2} + \sum_{j=i+1}^n |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| = \\ &= t_i - a + 2\sqrt{2} + b - t_{i+1} \leq b - a + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Essendo l'ultimo membro un maggiorante per la lunghezza di qualsiasi poligono inscritto in γ , si segue che

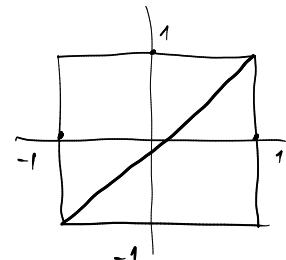
$$\Lambda(\gamma) \leq b - a + 2\sqrt{2}$$

Tali stime ci garantisce la rettificabilità delle curve y , ma è molti grandissime: in realtà, con un po' più d'occhio si può provare che $\Lambda(y) = b-a+2$.

Ciò che abbiamo fatto è stato di stimare le lunghezze dell'unica "scalinis"



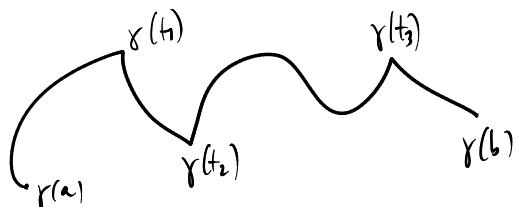
con il lato d'intervallo più lungo possibile
(è chiaro che si verifica solo quando una pertinente in due soli punti $f(-1), f(1)$).



In realtà, se si utilizzano N punti sperimentati si ottiene la stima migliore per il lato del passo $\left\lceil \frac{t_{i+1}-t_i}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{(b-a)}{N} \right\rceil + 4$, che, al di regno del numero di punti, produce la stima "ottimale" $\Lambda(y) = 4$, "questi esattamente" rappresentata da \int_a^b

Esiste un'ipotesi d'completezza sulle componenti; molti studiosi qui a Pisa da L.Tanelli e delle sue scuole, che è EQUIVALENTE alla rettificabilità: l'essere a "VARIAZIONE UNITATA". Tale concetto fornisce un quadro organico molto soddisfacente della problematica delle rettificabilità, e costituisce un solido trampolino per ulteriori ricerche.

E' bene infine qui un'ultima nota: anche se la continuità non basta per la rettificabilità, e l'essere a variazioni limitate è ottimale dal punto d' vista teorico, ma discretamente ragionevole da qualsiasi punto di vista, ci sono ipotesi (d' fatti vere) che sono sufficienti per garantire la rettificabilità. La più semplice è $\gamma \in C^1[a, b]$. Una ancora più flessibile è d' indicare che esistono $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ tali che $\gamma \in C^1[t_i, t_{i+1}]$: in sostanza, una "spaccata" con ogni "fatto" di classe C^1 , mentre nei punti d'"saldeggia" si possono



essere "spigliati".

Tale ipotesi si vede adeguata per le ingenze "della vita d' tutti i giorni" e permette di ottenere le formule di calcolo della lunghezza che costituisce l'equivalente del teorema di Tonelli per il calcolo degli integrali: infatti

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

I fisici non si sovrapposono pertanto: se un punto matriciale si muove a 100 km/h, anche tra fra le curve, per un'ora, quanto sarà la stessa distanza? Se invece il modulo della velocità non è costante, si usa il simbolo "traces" di rappresentare il prodotto $v \cdot t$ con l'integrale di $v \cdot dt \dots$ Nelle ab
moto!

Capitolo 7

Teoria dei campi di vettori e delle forme differenziali lineari

CAMPI VETTORIALI E FORME DIFFERENZIALI

Per le funzioni di più variabili d' dove sono i concetti diversi ma strettamente connessi, che sostituiscono il concetto di derivata: il gradiente - il vettore delle derivate parziali nel punto - e il differenziale - la funzione lineare nell'incremento, associata al punto, l'incremento della quale approssima meglio quello della funzione.

I campi di vettori (o campi vettoriali o, più semplicemente: campi) e le forme differenziali sono gli oggetti astratti delle stesse nature, rispettivamente, del gradiente e del differenziale.

DEFINIZIONE: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce campo (di vettori) in Ω , di classe C^K , una funzione $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, le cui componenti scalari ($A = (A_1, A_2, \dots, A^n)$) siano tutte funzioni che Ω in \mathbb{R} continue con le loro derivate fino all'ordine K .

NOTA : Il vettore "d' arrivo" $A(x)$ ha lo stesso numero di componenti scalari del vettore di partenza x .

ESEMPI : la forza di gravità associa ad ogni punto dello spazio una forza (che si può misurare con una massa d'probe, piccole da poter trascurare il campo di una generata rispetto a quello sotto mano) che è un vettore a tre componenti, tante quante quelle dello spazio nel quale il campo è immesso.

Analogamente, in un fiume, che occupa una regione dello spazio, è possibile associare ad ogni punto la velocità del flusso in quel punto, che ha tre componenti come la regione occupata dalla massa d'acqua.

Esempio (matematico) : un campo piano (ovvero definito in \mathbb{R}^2 o in uno sottospazio) si definisce fissando una coppia di funzioni $(a(x,y), b(x,y))$ che, assieme, individuano il vettore di \mathbb{R}^2 associato al punto (x,y) , anch'esso in \mathbb{R}^2 .

Il campo $(|x|+y, \sin xy)$ è un campo piano di classe

$C^0(\mathbb{R}^2)$, perché entrambe le funzioni $(x,y) \rightarrow |x|+y$ e $(x,y) \rightarrow \sin xy$ sono continue, ma non dicono $C^1(\mathbb{R}^2)$, perché la funzione $(x,y) \rightarrow |x|+y$ non è derivabile rispetto ad x in tutti i punti in quali $x=0$, e cioè sull'asse y .

Il campo è invece dicono $C^\infty([0,+\infty[\times]0,+\infty[)$, perché nel quadrante $x > 0, y > 0$ $|x|=x$ e dunque entrambe le componenti del campo sono funzioni con derivate di tutti gli ordini continue.

Come ulteriore esempio, consideriamo il campo delle gravi generata da una massa M puntiforme o anche - grava a Newton - da una massa generica che si può pensare come se fosse concentrate nel suo centro di massa, e che supponiamo posta nell'origine. In tal caso, posta una massa piccola m nel punto di coordinate $x = (x_1, x_2, x_3)$ la forza di gravità ha modulo $|F| = GmM/|x|^2$, è diretta come il vettore x , che dà la retta ∂x , ed è attrattiva, e quindi ha il verso del vettore $-x$, perché x è diretto dall'origine verso l'esterno.

Per ottenere un vettore di modulo, direzione e verso fissati, basta moltiplicare il modulo per il versore individuato da direzione e verso, e sempre

$$F(x) = G \frac{mM}{|x|^2} \cdot -\frac{x}{|x|} = -G \frac{mM}{|x|^3} x$$

modulo di F
verso di $-x$

ovvero, in componenti scalari,

$$\left(F_1(x_1, x_2, x_3), F_2(x_1, x_2, x_3), F_3(x_1, x_2, x_3) \right) =$$

$$= -\frac{GmM}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}} (x_1, x_2, x_3)$$

Il vettore delle forze d'gravità nel punto (x_1, x_2, x_3) ha tre componenti (F_1, F_2, F_3) , non è definito in $(0, 0, 0)$ (le stelle a neutroni o i buchi neri ci danno un'indica d'area accade ad andare troppo vicino a tante masse, anche trascurando gli effetti relativistici) ed è un campo di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, perché tali sono le sue componenti scalari.

Altre entità rilevanti, nel punto di vista teorico sopra, è il concetto di forma.

DEFINIZIONE: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Si definisce
forma differenziale lineare (o, formi lineari), una
forma differenziale, o additiva solo forme), una
funzione $\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, per ogni $\bar{x} \in \Omega$,
la funzione $t \mapsto \alpha(\bar{x}, t)$ si linea in t.

NOTA: Poiché ogni funzione lineare da \mathbb{R}^n in \mathbb{R} è uguali al prodotto scalare del suo argomento per il vettore formato dalle immagini dei vettori della base canonica in \mathbb{R}^n , date una qualsiasi forma $\alpha(x, w)$, per la quale dunque $W \rightarrow \alpha(x, w)$ è lineare per ogni x fisso, si può definire un campo di vettori $A(x)$ tale che

$$\alpha(x, w) = A(x) w \quad (*)$$

In fatti, poiché x , $\alpha(x, w) = \alpha\left(x, \sum_i^n w_i e_i\right) = \sum_i^n w_i \alpha(x, e_i)$ e, poiché $A(x) = \alpha(x, e_i)$ segue immediatamente $(*)$.

Il campo di vettori $A(x)$ viene detto campo associato alla forma α , e α viene detta di classe C^k se e solo se A è di classe C^k .

Analogamente, dato un campo A , si definisce le forme associate ad A ponendo

$$\alpha(x, w) = A(x) w$$

NOTAZIONI ED ESEMPI:

L'espressione generale di una forma $\alpha: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, mediante l'equazione (*) precedente è

$$\alpha(x, w) = A(x)w = \sum_{i=1}^n A_i(x)w_i$$

e dunque, in \mathbb{R}^2 , l'espressione generale di una forma sarà

$$\alpha(x_1, x_2; w_1, w_2) = A_1(x_1, x_2)w_1 + A_2(x_1, x_2)w_2$$

o, in \mathbb{R}^3 , $\alpha(x, w) = \alpha(x_1, x_2, x_3; w_1, w_2, w_3)$ sarà

$$A_1(x_1, x_2, x_3)w_1 + A_2(x_1, x_2, x_3)w_2 + A_3(x_1, x_2, x_3)w_3$$

A partì le connotazioni d'indicare con x, y, z le variabili x_1, x_2, x_3 , ce n'è un'altra legge d'posta, derivante dalle storie di quelli concetti.

Se si considera il differenziale delle funzioni lineare

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{\Pi_i} x_i$$

che associa ad ogni vettore la sua componente i -esima essendo nel punto x_0 e sull'incremento w , risulta ugual al suo valore su w , $\Pi_i(w_1, w_2, \dots, w_n) = w_i$, così

$$d\Pi_i(x_0, w) = w_i \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Tradizionalmente, si denota con dx_i il differenziale $d\Pi_i$ e si omiscono i suoi argomenti, facendo

l'espressione generale di una forma differenziale in \mathbb{R}^n
d'ordine

$$\alpha = \sum_1^n A_i(x_1, \dots, x_n) dx_i$$

Così vengono rappresentati in fisica, ed anche nelle straordinarie maggioranze delle opere matematiche, le forme differenziali. Per gli antichi, $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ era uno spostamento infinitesimo - e, ad esempio, il prodotto scalare $A dx$ della forza per lo spostamento, era il lavoro (infinitesimo) compiuto dal campo durante lo spostamento (infinitesimo) dx .

Poché i matematici (eccettuati pochi soli) studiano l'"Analisi non standard" non amano più il concetto di infinitesimo "in atto" - come il piccolo intervallo di tempo o il piccolo spostamento - ma solo "in potenza" - una funzione che tende a zero - avrebbe fatto più senso cominciare notazione. Ciò non è però accaduto, ed oggi, e dunque gli esempi precedenti di forme in \mathbb{R}^2 ed \mathbb{R}^3 vengono disolti denotati con

$$A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

$$A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz$$

Osserviamo che è immediato, dall'espressione d'una forma

$$\alpha(x, dx) = \sum A_i(x) dx_i,$$

dedurne quella del campo associato $A(x)$, che è

$$A(x) = (A_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x))$$

e viceversa.

L'INTEGRALE DI UN CARPO

O DI UNA FORMA

Troviamo subito ad dire che l'integrale di una forma coincide con l'integrale del campo associato. Per i campi, invece:

DEFINIZIONE: Sei $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo
di classe $C^0(\Omega)$. Per ogni curva parametrica

$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, si definisce l'integrale
di A esteso a γ ponendo

$$\int_{\gamma} A \equiv \int_a^b A(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

↑ prodotto scalare

Esempio: Sei $A = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2} \right)$

- sia $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ definita da

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{e dunque } \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Allora,

$$A(\gamma(t)) = \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{-\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right) = (\sin t, -\cos t)$$

e infine

$$\int_A \gamma = \int_0^{2\pi} A(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t)(-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = -2\pi$$

NOTA: l'integrale $\int_a^b A(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$ ha un profondo significato fisico. Nel caso A sia un campo di forze, e $\gamma(t)$ descrive un moto immerso nel campo, $\dot{\gamma}(t)$ è la velocità nel punto $\gamma(t)$ e dunque $\dot{\gamma}(t) dt$ è il prodotto della velocità per il tempo, e quindi lo spostamento. Dunque $\int_A \gamma$ rappresenta il lavoro compiuto dal campo A sulle particelle che descrive le curve $\gamma(t)$ (il lavoro "elementare" $A(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$ è il prodotto scalare delle forze $A(\gamma(t))$ nel punto $\gamma(t)$ per lo spostamento "elementare" $\dot{\gamma}(t) dt$, e è l'integrale "sommatoria" di tutti i lavori elementari.)

IL PROBLEMA DELLA PRIMITIVA.

E' stato già osservato che, date f differenziabile in \mathbb{R} a valori reali, $\nabla f(x)$ è un campo di vettori e $d f(x, w)$ è una forma differenziale. Per le forme di una sola variabile, il teorema di Tonelli risolve brillantemente il problema

"Data una f , esiste F tale che $F' = f$ "?

Esso ha imposte affermative se f è continua, mentre dà luogo ad un guazzabuglio se f è discontinua, avendo solo agli inizi del secolo scorso.

I due problemi corrispondenti al problema delle primitive, nel caso delle forme di più variabili, sono:

"Dato un campo A, esiste f tale che $\nabla f = A$ "?

ovvero, per le forme,

"Dato una forma α , esiste f tale che $df = \alpha$ "?

I due problemi sono strutturalmente corretti. Infatti

rappresentando df e α con i loro campi associati si ottiene

$$\nabla f(x)w = df(x, w) = \alpha(z, w) = A(x)w$$

da cui

$$(\nabla f(x) - A(x))w = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^n$$

e, in particolare, per $w = \nabla f(x) - A(x)$, segue

$$|\nabla f(x) - A(x)|^2 = (\nabla f(x) - A(x))(\nabla f(x) - A(x)) = 0$$

e dunque

$$\nabla f(x) - A(x) = 0$$

In sostanza risolvendo il secondo problema, relativo alle forme α , componte esattamente la soluzione del primo problema per il campo associato $A(x)$.

Viceversa se A è di classe C^0 l'eventuale soluzione f del primo problema $\nabla f = A$ è una funzione le cui derivate sono le componenti di A e sono quindi continue. Ne segue che f , avendo derivate continue, è differenziabile e inoltre

$$df(x, w) = \nabla f(x)w$$

da cui si può vedere che f risolve il secondo problema
per le forme di Fermi e associate ad A .

Dunque, limitiamoci allo studio del problema delle
primitive di un campo di classe C^0 , e introduciamo
le seguenti

DEFINIZIONE : Un campo di vettori

$A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dirà integrabile (o anche
campo potenziale) se esiste $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(x) = A(x) \quad \forall x \in \Omega$$

Ogni funzione f verificante l'identità precedente
si dirà primitiva (o potenziale) del campo.

Le definizioni corrispondenti per le forme utilizzano
una terminologia differente, o almeno è tale quella
più diffusa.

DEFINIZIONE : Una forma $\alpha: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
verrà detta integrabile (o esatta, o un
differential esatto) se esiste $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale
che $df = \alpha$ su $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Ogni funzione verificante tale

identità verrà detta primitiva (o potenziale) delle
forme o in Ω .

Dunque, si può usare la terminologia aerea dei matematici e parlare di integrità e primitive, oppure quella classica: i campi sono campi potenziali e hanno potenziali; le forme sono esatte e hanno potenziali.
I campi potenziali sono poi detti anche CONSERVATIVI.

CONDIZIONI NECESSARIE

DI INTEGRABILITÀ'

La stessa funzione è considerata diversa da quella in una variabile, dove la continuità basta ad assicurare l'esistenza di primitive.

Per illustrare i problemi nei quali si incappa, è indispensabile segnare:

TEOREMA (fondamentale) Condizione necessaria e sufficiente perché un campo
A sia integrabile è che \int_A sia indipendente
del cammino γ, ma dipende solo dalle coordinate! dei punti γ(a) e γ(b).

DIM. La prova della condizione sufficiente verrà svolta nella prossima sezione. Per la condizione necessaria assumiamo che A sia integrabile e proviamo che l'integrale non varia tenendo fissi gli estremi e facendo varare ad arbitrio il cammino che li congiunge.

Poiché A è integrabile, esiste $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\Delta f = A$. Allora, per ogni curva $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$ di classe C¹ si avrà

$$\int_{\gamma} A = \int_a^b A(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} [f(\gamma(t))] dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

(ancora Torricelli!)

Dunque, qualunque curva percorso la curva parametrica γ , l'integrale alla fine sarà uguale alla differenza fra i valori che il potenziale f assume nel punto finale $\gamma(b)$ e nel punto iniziale $\gamma(a)$, e dunque dipende solo dai punti iniziali e finali della curva e non dalle vie percorse per congiungere.

In forza del punto precedente è piuttosto noto: "Il lavoro compiuto da un campo potenziale è la differenza di potenziale fra il punto finale ed il punto iniziale".

Un'altra forma delle condizioni precedenti riguarda le curve chiuse.

DEFINIZIONE: Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

TEOREMA: Se A è integrabile $\int_{\gamma} A = 0$

per ogni curva $\gamma \in C^1$ chiusa.

DIM. $\gamma(b) = \gamma(a) \Rightarrow f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$

NOTA: Osserviamo che il campo dell'esempio precedente ha integrale sulla circonferenza unitaria $(\cos t, \sin t) \in [0, 2\pi]$ uguale a -2π . Poiché $(\cos 0, \sin 0) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi)$, la curva è chiusa e, poiché l'integrale su una curva chiusa non è nullo, ne segue che il campo NON è integrabile su $\mathbb{R}^2 - (0,0)$, pur avendo componenti $\frac{y}{x^2+y^2}$ e $\frac{-x}{x^2+y^2}$ che sono $C^\infty(\mathbb{R}^2 - (0,0))$.

La prossima notizia è che, diversamente da quanto accade per le funzioni di una variabile, non basta che un campo sia continuo, o anche C^∞ , per risultare integrabile.

Il prossimo teorema getta un'ulteriore luce sulla questione.

TEOREMA Condizione necessaria perché un campo A di classe C^1 sia integrabile è che

$$(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i} \quad \forall i \neq j$$

Dmo Infatti, se A è integrabile, esiste f tale che

$$\nabla f = A$$

e così

$$f_{x_i} = A_i \quad i=1..n$$

Ne segue che

$$(A_i)_{x_j} = (f_{x_i})_{x_j} = f_{x_j x_i}$$

e inoltre

$$(A_j)_{x_i} = (f_{x_j})_{x_i} = f_{x_i x_j}$$

Poiché il campo A è di classe C^1 e le sue componenti sono le derivate di f ne segue che f è di classe C^2 e la tesi segue immediatamente dal teorema di Schwarz sull'uguaglianza delle derivate miste.

ESEMPIO : Il maledetto esempio precedente
verifica la condizione del teorema. Infatti

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{x^2+y^2} \right) = -\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1}$$

e le due derivate sono UGUALI!

Ne segue l'ultima pessima notizia :

TEOREMA Le condizioni del teorema precedente NON è, in generale, sufficiente

E' un vero peccato, perché una condizione sulle derivate sarebbe riduttiva poche fatte per la verifica! In una delle prossime scuole verremo esaminate condizioni sul dominio sotto le quali la condizione diventa anche sufficiente, ma in generale NON è così: l'esempio parla chiaro!

La condizione precedente ricorda vagamente quella \Leftrightarrow per il teorema generale di una serie: necessaria, ma non sufficiente!
E' comunque così importante da meritare una definizione.

DEFINIZIONE : Un campo A di dom C' è detto irrotazionale se $(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i}$, $\forall i \neq j$.

Una forma differentiale $\omega(x, w) = A(x)w$ è detta chiusa se è verificata la stessa condizione per il suo campo associato A.

Anche qui c'è la solita Babala!

Le condizioni necessarie precedenti dicono esprimere direttamente che un campo C' potenziale (o intigrabile) è irrotazionale, ovvero una forma esatta è anche chiusa.

Il seguente esempio dà un'idea piuttosto grossa su quanto sia difficile assegnare "a caso" due funzioni scalari ed ottenere un campo intigrabile, o anche solo irrotazionale.

Esercizio: "Determinare $b(x,y)$ in modo che il campo $(xy, b(x,y))$ sia inotornale."

Naturalmente, che il campo sia inotornale non dice nulla sulla sua integrabilità, ma d'altro se il campo non è inotornale non è, "a fortiori", nemmeno integrabile!

$$A_1(x,y) = xy \quad A_2(x,y) = L(x,y)$$

$$(A_1)_y = (A_2)_x$$

$$\rightarrow \text{cioè} \quad x = b_x(x,y)$$

Integrando ambo i membri rispetto ad x si ottiene

$$b(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y)$$

e dunque $(xy, \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y))$ è inotornale per ogni funzione arbitraria $\varphi(y)$.

Si vede bene che b è ben lungi da poter essere fissata ad arbitrio; deve essere delle forme $\frac{1}{2}x^2$ più una funzione arbitraria delle sole y . L'eventuale potenziale dovrà verificare

$$\begin{cases} f_x = xy \\ f_y = \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y) \end{cases}$$

e dunque, integrando la prima rispetto ad x si ottiene

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y + c(y)$$

e, derivando rispetto ad y e uguagliando le due espressioni per f_y si ha infine

$$\frac{1}{2}x^2 + \varphi(y) = f_y(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + c'(y)$$

da cui infine $c'(y) = \varphi(y)$ e dunque

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y + \phi(y)$$

ove ϕ è una qualunque primitiva di φ (per essere certi che questo è sufficiente supponiamo almeno continua!).

Ad ogni buon conto, se f così trovata è o non è un potenziale del campo $(xy, \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y))$? Non abbiamo trovato che le assicurazioni, ma da $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y + \phi(y)$ segue subito $f_x = xy$ e $f_y = \frac{1}{2}x^2 + \phi'(y) = \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y)$, e dunque f è un potenziale del campo.

NOTA:

Il modo più semplice per fornire un esempio di campo inotterraneo è di considerare il gradiente di una funzione: la condizione necessaria fa il resto!

CAMPI E FORME II

Titolo nota

13/05/2012

PROVA DEL TEOREMA FONDAMENTALE.

In questa sezione verrà stabilita, in due forme equivalenti, la più importante condizione sufficiente per l'integrabilità di un campo (o delle forme associate), di uso pratico assai mal agevole, ma importantissima come strumento per provare la validità di quelle di uso più comodo.

Sarà in seguito necessario un risultato ausiliario, che giustifica all'integrale di campi le proprietà additive dell'integrale ordinario.

DEFINIZIONE : Dette due curve $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$

e $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \Omega$ si definisce la congiuntione

$\gamma_1 \oplus \gamma_2$ delle due curve come quelle definite ponendo

$$\gamma_1 \oplus \gamma_2 (t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & t \in [b, c] \end{cases}$$

Risulta anche $\gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a, c] \rightarrow \Omega$

Si definisce inoltre curve opposte a $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$
la curva $\Theta\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$ definite per

$$\Theta\gamma(t) = \gamma(b-t+a)$$

Osserviamo che la congiunzione fra due curve è la curva parametrica che prima percorre il sostegno di γ_1 e poi, in seguito, quello di γ_2 . Le curve opposte, invece, poiché quando t varia da a a b , $(b-t+a)$ varia da b ad a , percorre lo stesso sostegno di γ , ma in verso opposto, dal punto finale a quello iniziale.

Le curve così intese godono di proprietà notanti, rispetto all'integrazione.

LEMMA Se $\gamma_1: [a,b] \rightarrow \Omega \subseteq \gamma_2: [b,c] \rightarrow \Omega$

Allora, per ogni campo $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, d'insieme C
risulta

$$\int A = \int A + \int A \quad \text{e} \quad \int A = - \int A$$

$$\gamma_1 \oplus \gamma_2 \quad \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \Theta\gamma_1 \quad \gamma_1$$

DIM. Da $(\gamma_1 \oplus \gamma_2) = \begin{cases} \gamma_1 & \text{su } [a,b] \\ \gamma_2 & \text{su } [b,c] \end{cases}$
 segue che

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2}^c A(\gamma_1 \oplus \gamma_2(t)) (\dot{\gamma}_1 \oplus \dot{\gamma}_2)(t) dt =$$

(per le proprietà additive dell'integrale ordinario)

$$= \int_a^b A(\gamma_1(t)) \dot{\gamma}_1(t) dt + \int_b^c A(\gamma_2(t)) \dot{\gamma}_2(t) dt =$$

$$= \int_{\gamma_1} A + \int_{\gamma_2} A$$

Notiamo che tale ragionamento è valido anche se non esiste $\dot{\gamma}(b)$, ma solo $\dot{\gamma}_-(b) = \dot{\gamma}_+(b)$. Le curve per cui ciò accade solo per un numero finito d' punti si dicono C' a tratti.

Inoltre

$$\int_{\Theta \gamma_1(t)}^b A(\Theta \gamma_1(t)) (\Theta \dot{\gamma}_1)(t) dt =$$

(poiché $\Theta \gamma_1(t) = \gamma_1(b+a-t) \quad e \quad (\Theta \dot{\gamma}_1)(t) = -\dot{\gamma}_1(b+a-t)$)

$$= \int_a^b A(\gamma_1(b+a-t)) [-\dot{\gamma}_1(b+a-t)] dt =$$

(con il cambio di variabile $b+a-t=s$)

$$= \int_b^a A(\gamma_1(s)) \dot{\gamma}_1(s) ds = - \int_a^b A(\gamma_1(s)) \dot{\gamma}_1(s) ds$$



Siamo ora in grado di riferirci, passo passo, la dimostrazione del teorema di Tonelli e costruire una primitiva per ogni campo continuo di cui integrale non

dipende dal cammino, ma solo degli estremi.

DIMOSTRAZIONE DELLA CONDIZIONE SUFFICIENTE DEL TEOREMA FONDAMENTALE

Fissiamo $x_0 \in \Omega$ e dimostriamo con γ una
qualsiasi curva avente per primo estremo x_0 e per secondo
 x . Per l'ipotesi si può pone

$$f(x) = \int_{\gamma_{x_0 x}} A$$

perché l'integrale non dipende da x_0 , che venrà tenuto fijo al
variaz di x , e non dipende neppure dalle particolare curve
sulha per l'ipotesi di invarianza del cammino, dato che
gli estremi sono in ogni caso x_0 e x , ma dipende solo da x .

Proviamo ora che f è un potenziale per A , ossia che

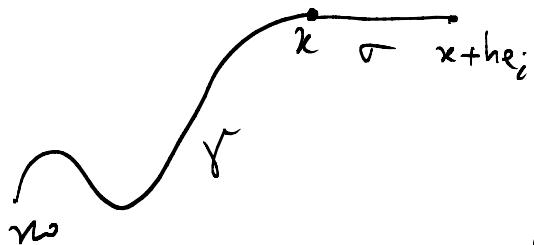
$$f_{x_i}(x) = A_i(x) \quad i=1..n$$

Per calcolare le derivate parziali al primo membro supponiamo
 $h > 0$ e consideriamo il relativo rapporto incrementale

$$\frac{f(x+h e_i) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_{\gamma(x_0, x+h e_i)} - \int_{\gamma(x_0, x)} \right]$$

avrà la curva fra i due integrali sono salte ad un tratto al solo vicino ai punti estremi, che sono quelli indicati.

Si supponga allora, come $\gamma_{x_0, x}$ una qualunque curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ con $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$, e



com'è $\gamma_{x_0, (x+he_i)}$ la congiunzione fra γ e il segmento di estremi x e $x+he_i$, con valori del parametro fra b e $b+h$, e cioè $\sigma(t) = x + (t-b)e_i$ (verifica $\sigma(b) = x$ e $\sigma(b+h) = x+he_i$)

Posto allora $\gamma_{x_0, (x+he_i)} = \gamma \oplus \sigma$, dal lemma precedente segue

$$\frac{1}{h} \left[\int_A \gamma_{x_0, (x+he_i)} - \int_A \gamma_{x_0, x} \right] = \frac{1}{h} \left[\int_\gamma A + \int_\sigma A - \int_A \right] = \frac{1}{h} \int_\sigma A =$$

$$= \frac{1}{h} \int_b^{b+h} A(\sigma(t)) \dot{\sigma}(t) dt =$$

$$(poiché \left[x + (t-b)e_i \right]' = e_i)$$

$$= \frac{1}{h} \int_b^{b+h} A(x + (t-b)e_i) \cdot e_i dt = \underset{\text{ponendo } t-b=s}{=} \frac{1}{h} \int_0^h A(x + se_i) ds =$$

(per il teorema delle medie integrali per gli integrali
sugli intervalli continui)

$$= A_i(x + \xi e_i) \quad \text{ove } \xi \in [0, h]$$

Dunque, per ogni $h > 0$, esiste $\xi(h) \in [0, h]$ tale che

$$\frac{f(x+he_i) - f(x)}{h} = A_i(x + \xi(h)e_i)$$

Dal teorema del confronto, poiché $0 \leq \xi(h) \leq h$ ne segue che quando $h \rightarrow 0$ anche $\xi(h) \rightarrow 0$, e poiché A_i è continua per ipotesi, il secondo membro converge per $h \rightarrow 0$, e inoltre

$$\lim_h A_i(x + \xi(h)e_i) = A_i(x)$$

Dunque, il limite per $h \rightarrow 0^+$ del rapporto incrementale esiste e vale $A_i(x)$. In modo analogo viene trattato il caso $h < 0$, da cui la tesi.

□

La verifica delle condizioni sufficienti è gravosissima; occorrerebbe verificare l'indipendenza dell'integrale dal cammino scelto, una volta fatti gli estremi e il loro ordine. Ciò viene fatto svolgendo condizioni alternative che la impediscono. Una nota positiva, invece, è

che il teorema appena presentato è costruttivo e permette di calcolare il potenziale a partire dal campo, calcolandone gli integrali su curve opportune.

ESEMPIO : Calcolare un potenziale di $x dx + y dy$.

Il campo associato è $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ che verifica le condizioni $\frac{\partial A_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial A_2}{\partial x}$, e dunque nulla ostacola che possa essere interpretato. Supposto che lo sia, un potenziale sarà

$$f(x, y) = \int A$$

$$\gamma(0,0) f(x, y)$$

Un cammino favole per andare da $(0,0)$, punto fisso, a (x,y) , sente nei vicini del dominio del campo (\mathbb{R}^2) è il segmento

$$\gamma(t) = t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad t \in [0,1] \quad \text{da cui} \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{in } [0,1]$$

e dunque un (candidate) potenziale è

$$\begin{aligned} \int_A = \int_0^1 A(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt &= \int_0^1 t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dt = \\ &= (x^2 + y^2) \int_0^1 t = (x^2 + y^2) \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Non abbiamo (per ora) strumenti per decidere se questi valori dell'integrale non dipende dalle curve sulle, ma

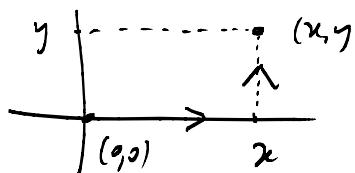
possiamo, come nell'esempio precedente, usare la forte buona, talvolta efficacissima; se f è un potenziale, il suo gradiente deve cominciare al campo, e infatti

$$\nabla \left(\frac{1}{2}(x^2+y^2) \right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A(x,y)$$

e dunque $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ è un potenziale del campo $A(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ su tutto il suo dominio (\mathbb{R}^2).

Più avanti vedremo come si possano trovare tutti i potenziali una volta noto uno di essi, ma per ora accontentiamoci di quello esatto, risorse in più versatile delle primitive $\int_a^x f(s) ds$ esatte nel teorema di Tonelli.

Una sulta (a torta o a regime) parallela al segmento diretto fra $(0,0)$ e (x,y) può essere la sputata con cui



ci si sposta prima parallelamente all'asse x e poi all'asse y . La sputata è la congruenza di segmenti paralleli agli assi, sicché le derivate y' corrispondenti hanno la componente non nulla (il che elimina dal calcolo tutte le altre componenti del campo). Lo stesso accade invertendo il ruolo degli assi. In pratica

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ ty \end{pmatrix} \quad t \in [0,1] \quad \dot{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} (t-1)x \\ y \end{pmatrix} \quad t \in [1,2] \quad \dot{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

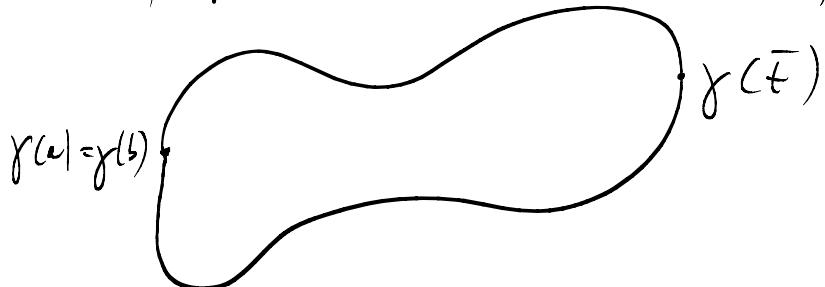
e dunque

$$\begin{aligned} S A &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ ty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} dt + \int_1^2 \begin{pmatrix} (t-1)x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_0^1 ty^2 dt + \int_1^2 (t-1)x^2 dt = \\ &= \frac{1}{2} y^2 + x^2 \frac{1}{2} (t-1)^2 \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Con gli "incrementi ortogonali" si può avere sicure che tutte le componenti del prodotto scalare meno una sono nulle; è però anche vero che invece di un solo integrale ci sono da calcolare n , ed ogni componente del campo, facile o difficile che possa essere da integrare, appena è in uno degli addendi. Non pare evidente il vantaggio offerto dalla spettata, salvo che nel caso in cui il segmento diretto esca dal dominio, mentre la spettata no!

TEOREMA (versone alternativa del teorema fondamentale). Condizione necessaria e sufficiente perché A di classe C^0 sia integrabile è che $\int A = 0$ per ogni curva γ chiusa.

DIM. Basta osservare che, per ogni curva chiusa, fatta ad arco in $\bar{t} \in]a, b[$,



essa può essere pensata come sommazione fra

$$y_1(t) = y(t) \quad t \in [a, \bar{t}]$$

$$y_2(t) = y(t) \quad t \in [\bar{t}, b]$$

e dall'additività segue che $\int_{\gamma_1} A + \int_{\gamma_2} A = 0$ e
dunque $\int_{\gamma_2} A = - \int_{\gamma_1} A$

Supponendo ora di sapere che \int_A non dipende dal
comunno γ ha che $y_1 \circ \theta y_2$ sono due curve fra gli
stessi estremi $y(a) = y(b)$ e $y(\bar{t})$ e dunque che

$$\int_{\gamma_1} A = \int_{\theta y_2} A = - \int_{\gamma_2} A \text{ segue } \int_{y_1 \circ \theta y_2} A = 0$$

mentre, viceversa, sapendo che $\int_{y_1 \circ \theta y_2} A = 0$ ne segue che
 $\int_{\gamma_1} A + \int_{\gamma_2} A = 0$ da cui

$$\int_{\theta y_2} A = - \int_{\gamma_2} A = \int_{\gamma_1} A$$

e dunque gli integrali su γ_1 e γ_2 sono uguali

□

Queste condizioni non sono i punti fondamentali delle precedenti, in quanto richiede in ogni caso una verifica sul valore dell'integrale su infinite curve.

Osserviamo comunque che, nelle condizioni del primo esempio, il semplice fatto che l'integrale su una curva chiusa valga -2π (e non 0) è sufficiente per escludere l'integrabilità (come già visto nelle sezioni precedenti). Come il test anziano sul termine generale di una serie, il test sull'integrale su una singola curva chiusa (salvo un giudizio a priori fortunato) che fallisce ($\int \neq 0$), non è mai utile per NEGARE l'integrabilità, mentre non consente di trarre alcuna conclusione nel caso "positivo" $\int = 0$.

I CAMPI IRROTATORIALI:

INVARIANZA PER DEFORMAZIONE

DELL' INTEGRALE

In questo scritto verrà effettuato (parziale) e mediato alle sfortunate circostanze che vuole che l'essere irrotazionale sia condizione solo necessaria, ed in genere non sufficiente, per l'integrabilità, e verrà introdotta un'ipotesi sul dominio sotto la quale la condizione è anche sufficiente.

L'idea principale è simile a quelle suggerite dal teorema fondamentale: nonostante i cammini stiano infatti, al di fuori integrali di campi assumono valori indipendenti dai diversi cammini percorsi.

Per esporre il risultato principale è necessarie le seguenti

DEFINIZIONE: Due curve $\gamma : [0,1] \rightarrow \Omega$
e $\sigma : [0,1] \rightarrow \Omega$ si dicono deformabili
(od omotopie) in Ω se esiste

$$h : [0,1] \times [0,1] \rightarrow \Omega$$

CONTINUA e teliche

$$h(0,t) = \gamma(t) \quad e \quad h(1,t) = \sigma(t)$$

NOTA: al varire d' $\lambda \in [0,1]$ le funzio-

ni di curve $t \rightarrow h(\lambda, t)$ rappresenta una deformazione
continua delle curve iniziali $t \rightarrow h(0, t) = \gamma(t)$ a quella
finale $t \rightarrow h(1, t) = \sigma(t)$, che non esca mai fuori da Ω .

Il teorema, riportat sotto dimostraz.
(G.PRODI: Analisi Matematica II Boingheri) assicura l'invarianza per
deformazioni dell'integrale dei campi instazionali.

TEOREMA: diano $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ due curve
d'estremi coincidenti. Se A un campo instazionale
integrale in Ω e siano $\gamma_1(t) \subseteq \gamma_2(t)$ omotopie
in Ω . Allora

$$\int_{\gamma_1} A = \int_{\gamma_2} A$$

La stessa conclusione si ottiene considerando
curve chiuse, $\gamma_1(0) = \gamma_1(1) \subseteq \gamma_2(0) = \gamma_2(1)$ (anche
senza punti comuni) invece di curve con estremi uguali.

Dunque, se il campo è inoturnale e si definisce una curva senta usce mai dalle regione don il campo verifico
tali ipotesi, l'integrale non varia, esattamente come accadebbe per l'integrale di un campo potenziale.

Questo teorema offre possibilità sorprendenti. Ad esempio:

"Calcolare $\int \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2} \right)$

ove $y(t) = \left(e^{\sin \operatorname{arctg} t} \cos t, e^{\cos \operatorname{arctg} \frac{2t}{\pi}} \sin t \right)$

$$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

1)

Il campo è inoturnale in $\mathbb{R}^2 - (0,0)$; il percorso ha un aspetto piuttosto inquietante, ma è tuttavia contenuto nel primo quadrante, a causa del segno degli esponenti, e dell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Dunque si può sostituire alla curva y un'altra con gli stessi estremi fatta contenuta nel primo quadrante, come vedremo fra un momento. Gli estremi sono

$$y(0) = (1, 0) \quad \text{e} \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$$

che allora

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Le due curve hanno gli stessi estremi e sono omotopie nel primo quadrante perché, ponendo

$$h(\lambda, t) = (1-\lambda)\gamma(t) + \lambda\sigma(t) \quad \lambda \in [0, 1]$$

ad fatto che il primo quadrante è convexo, esso contiene tutte le combinazioni convesse dei suoi punti $\gamma(t) < \sigma(t)$ e dunque $h : [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \{x > 0; y > 0\}$

Inoltre h è continua e si ha immediatamente

$$h(0, t) = \gamma(t) \quad \text{e} \quad h(1, t) = \sigma(t)$$

Dal teorema segno della $\int_A = \int_{\gamma} A - \int_{\sigma} A$ - quest'ultimo si calcola immediatamente, come abbiamo visto in precedenza, e vale $-\frac{\pi}{2}$, risultato insospettabile se si pensa al fatto che il calcolo diretto dell'integrale cohodigenetico $A(\gamma(t))$ e $\gamma(t)$, entrambi assai intricati.

Per le sue caratteristiche, il teorema precedente viene detto TEOREMA DI INVARIANZA OMOTOPICA (i più scapigliati aggiungeranno anche: DELL' INTEGRALE DEI CAMPI IRROTATORIALI).

INSIEMI SEMPLICEMENTE CONNESSI ED INTEGRABILITÀ DEI CAMPI IRROTATORIALI

Le conseguenze piuttosto immediate del teorema di invarianza omotopica, molto utile in pratica, si ottiene introducendo un concetto nuovo.

DEFINIZIONE Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice semplicemente connesso se ogni curva chiusa $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ è omotopica in Ω ad una curva costante $\sigma(t) \equiv x_0 \quad \forall t \in [0, 1]$

Il teorema, che è proprio quello vagheggiato nello paragrafo precedenti e del quale abbiamo già provato la condizione necessaria, è il seguente.

TEOREMA: Sia Ω semplicemente connesso. Allora, condizione necessaria e sufficiente per che un campo in Ω sia integrabile è che sia inototopico.

DIM. Sia γ una qualunque curva chiusa in Ω . Per l'ipotesi, γ è omotopica in Ω ad una curva costante σ ed essendo il campo irrotazionale, dal teorema di invarianza omotopica segue che $\int_{\gamma} A = \int_{\sigma} A$.

Se σ è costante, ne segue che $\int \sigma \cdot d\gamma = 0$

$$\int_{\sigma} A = \int_{\sigma}^{\gamma} A(\sigma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = 0$$

Poiché $\int_{\gamma} A = \int_{\sigma} A$ ne segue infine che l'integrale su ogni curva chiusa è nullo, il che è (necessario e) sufficiente perché A sia integrabile.

□

Il problema si è più spostato: come stabilire se Ω è semplicemente connesso? Alcuni casi importanti sono facili da affrontare.

Ad esempio, se Ω è convesso e $x_0 \in \Omega$ allora, per ogni $x \in \Omega$ tutto il segmento $\overrightarrow{x_0 x} \subseteq \Omega$ e dunque, per definizione di omotopia fra γ ed una curva costituita solo da

$$h(\lambda, t) = x_0 + (1-\lambda) [\gamma(t) - x_0]$$

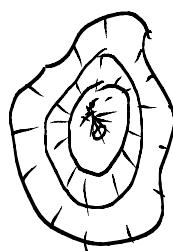
Per meglio capire il meccanismo sia $x_0 = \gamma(0)$. In tal caso

$$h(\lambda, t) = (1-\lambda) \gamma(t)$$

Al crescere di λ verso 1, $(1-\lambda)$ tende a 0,

e dunque ogni vettore $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, si muove

lungo la semiretta definita da $\gamma(t)$ verso l'origine.

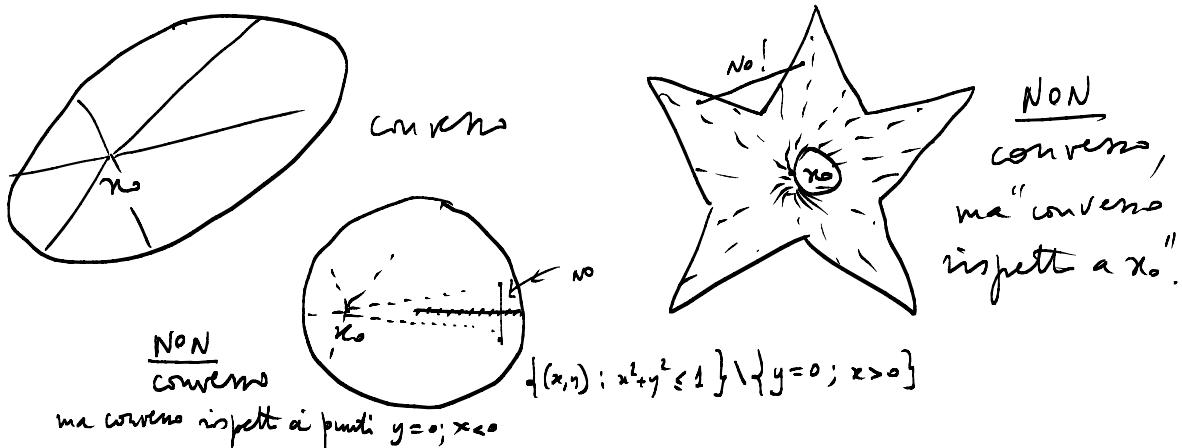


La stessa idea può essere utilizzata anche sotto ipotesi

consideramenti più generali su Ω .

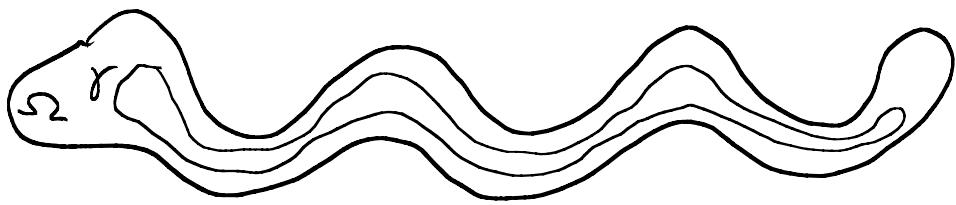
DEFINIZIONE $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ venrà detto
stelle se esiste $x_0 \in \Omega$ tele che il
segmento $\overline{x_0 x} \subseteq \Omega$ per ogni $x \in \Omega$.

In sostanza, Ω è stelle (o anche "stellato", meno lo soffrirete!) se esiste un suo punto che "vede" tutti gli altri. In tempi passati gli insiemis stelle venivano chiamati "convessi rispetto ad un punto (x_0) ", nome molto espressivo, ma un po' magnologante. I convessi prime trattati sono stelle, qualunque punto sarà in esse come x_0 .



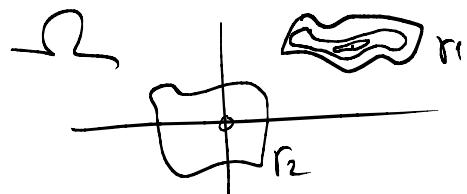
Gli insiemis stelle sono semplicemente convessi: la dimensione è identica, ma invece di scegliere a caso x_0 , Ω deve scegliere quello da appena nella loro definizione.

Per miglior chiarire cosa stanno le cose, ecco due esempi:



La regione Ω non è né convessa né stella, ma è semplicemente连通的: qualunque curva chiusa può deformarsi lungo "le anse" di Ω , fino a farla collassare in un punto.

La regione $\Omega = \mathbb{R}^2 - (0,0)$, invece,



NON è semplicemente连通的: c'sono curve chiuse che si possono agevolmente deformare in una costante, come γ_1 ; e ne sono altre, come γ_2 , per cui ciò non è possibile: qualsiasi deformazione di γ_2 in un punto non potrà evitare che γ_2 passi per l'origine, che NON sta in $\Omega = \mathbb{R}^2 - (0,0)$, e dunque la deformazione costante
NON è un'omotopia in Ω : NON DIMENTICARE CHE IL CODOMINIO DI UN'OMOTOPIA IN Ω È Ω .

Se si potesse uscire da Ω ogni curva si potrebbe deformare nelle curve costanti $\sigma(t) = \sigma$, semplicemente ponendo $h(x,t) = (1-\lambda)\sigma(t)$, come abbiamo già fatto prima trattando di Ω convessa e contenuta nell'origine.

CAMPI E FORME III

Titolo nota

14/05/2012

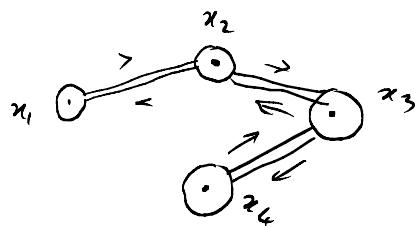
CAMPI DEFINITI IN $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Sarà esteso nei dettagli è possibile utilizzare il teorema di invarianza omotopica anche se il dominio non è semplicemente connesso.

Se $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. In tal caso ogni curva chiusa può essere deformata in un punto se non crosta $(0,0)$, ed il campo avrà integrale nullo su tali curve per invarianza omotopica, oppure potrà essere deformata in una qualsiasi curva (sulla quale è comodo fare il calcolo) che crosta $(0,0)$, eventualmente percorsa più volte o a ritroso, se altrettanto facendo la curva inversa. In ogni caso, se l'integrale sulle curve deformate vale 0, altrettanto verrà quello della curva inversa (che verrà un multiplo o l'opposto di un multiplo di 0).

Ne segue che tutto può essere deciso calcolando un unico integrale esteso ad una curva che crosta la "singularità" $(0,0)$. Analogamente si può procedere se le singolarità sono un numero finito.

Ora curve chiusse potranno essere deformate in una costituita da singole curve chiusse attorno ad ogni



similità recuse delle curve, congiunte da tagli
passati due volte, per l'andata e per il ritorno, che non
contribuiscono dunque all'integrale. Dunque l'integrale
esteso alle curve orfane è uguale alla somma degli
integrali estesi alle curve che erano date ognuna delle singole
parti cedute dalle curve orfane.

Vi segue un criterio generale: "Se l'integrale del campo
(rotazionale) esteso ad n curve chiuse ognuna delle quali
circonde una (sola) similità x_i , è nullo per
ogni similità, allora il campo è integrabile".

Non verrà data una dimostrazione rigorosa: le considera-
zioni precedenti possono offrire qualche spunto di riflessione.
In ogni caso, il teorema di invenzione omotopica, valido
(sia) per i campi rotazionali, offre qualche appoggio
per attaccare il problema dell'integrabilità, anche quando
il domini non sia affatto semplicemente connesso: in fondo,
le curve costanti possono non essere le uniche sulle quali il
calcolo dell'integrale riesce agevole!

TUTTE LE SOLUZIONI DEL PROBLEMA DELLA PRIMITIVA

In Fisica, la questione non è così importante; di solito, si sceglie ad arbitrio il valore 0 del potenziale in un qualche punto significativo, e a partire da quell'0 si definisce in ogni altro punto utilizzando la differenza di potenziale. Magari il potenziale 0 è al livello del mare, oppure è quello di un coro d'rame collegato ad una barra confitta nel terreno saldo.

In Matematica il problema è prett'altro: si pensa a tutte le soluzioni (x, y, z) di

$$ax + by + cz = d \quad (\text{punto cartesiano in } \mathbb{R}^3)$$

o quelle di

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = f(t) \quad (\text{oscillazione armonica forzata})$$

La tecnica per studiare la totalità delle soluzioni è la stessa, ed utilizza la linearità del primo membro: si considerano due soluzioni e se ne studia la differenza. Da $ax + by + cz = d$ e $a x' + b y' + c z' = d$, sottraendo membri a membri si ottiene $a(x-x') + b(y-y') + c(z-z') = 0$. Nel caso dell'oscillatore armonico da $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = f$ e $\ddot{y} + \frac{k}{m} y = f$ sottraendo si ottiene $(x-y)'' + \frac{k}{m}(x-y) = 0$.

Analogamente, sia A un campo vettoriale definito

su un insieme arbitrario Ω e si sia f, g due potenziali di A , si fa così quindi

$$\nabla f \equiv A \text{ su } \Omega \quad e \quad \nabla g \equiv A \text{ su } \Omega$$

Sottraendo membro a membro e ricordando le regole di derivazione, si segna

$$\nabla(f-g) \equiv 0 \text{ su } \Omega$$

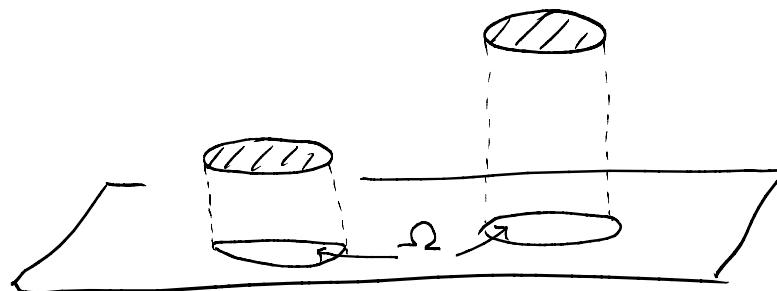
Dunque, una volta note le primitive g, g' di un'altra (f) differente da g per una funzione $\varphi = f - g$ verifcate

$$\nabla \varphi \equiv 0 \text{ su } \Omega$$

La tentazione di pensare che la funzione φ sia costante o combattuta enganuscamente: infatti se $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ la funzione

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y > 0 \\ -1 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

verifica $\nabla \varphi \equiv 0$ in Ω ma NON è costante. Più banalmente, la funzione avente il grafico seguente



NON è costante
ma ha
gradienti
identicamente
nulli in Ω .

In definitiva occorre studiare tutti i soluzioni del problema
"omogeneo associato" $\nabla \varphi = 0$ in Ω .

Per chiarire a sufficienza il problema occorre la seguente

DEFINIZIONE: Un insieme Ω si dice connesso se, per ogni $x_1, x_2 \in \Omega$, esiste $\gamma : [0,1] \rightarrow \Omega$, continua e tali che

$$\gamma(0) = x_1 \quad e \quad \gamma(1) = x_2$$

In sostanza, ogni punto di Ω può essere raggiunto da ogni altro, senza mai uscire da Ω ($\gamma : [0,1] \rightarrow \underline{\underline{\Omega}}$)

Il concetto di insieme connesso permette di estendere a più variabili alcuni classici teoremi importanti che richiedono fra le ipotesi "non negoziabili" quella che il dominio sia un intervallo.

Come primo risultato, proviamo il teorema degli zeri.

TEOREMA (degli zeri). Sia Ω un insieme connesso e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, continua in Ω , e tali che esistano $x_1, x_2 \in \Omega$ per i quali

$$f(x_1) f(x_2) < 0$$

Allora esiste $x^* \in \Omega$ tale che $f(x^*) = 0$.

DIM. Dalla connessione di Ω segue che esiste
 $\gamma : [0,1] \rightarrow \Omega$ continua tali che $\gamma(0) = x_1$, e $\gamma(1) = x_2$.

Si consideri allora $h(t) = f(\gamma(t))$. Si ha:

- $h(0)h(1) = f(\gamma(0))f(\gamma(1)) = f(x_1)f(x_2) < 0$
- h è continua, perché composta di funzioni continue (γ ed f)
- h è definita sull'intervallo $[0,1]$, perché $\gamma[0,1] \subseteq \Omega$ e dunque $f(\gamma(t))$ è definita per ogni $t \in [0,1]$

Per il teorema degli zeri (di Weierstrass), esiste $t^* \in [0,1]$ tali che $h(t^*) = 0$ e dunque

$$h(t^*) = f(\gamma(t^*)) = 0$$

La tesi segue allora ponendo $x^* = \gamma(t^*) \in \Omega$.

□

Un altro risultato valido solo per gli intervalli, conseguente del teorema di Lagrange, è il teorema che riguarda le funzioni con derivate identicamente nulle.

Prima di risolvere il problema sotto ipotesi più generali, è utile stabilirlo per le sferze, come avviene nel seguente

LEMMA: Sia $f : B_\varepsilon(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, di classe C¹,

tali che $\nabla f \equiv 0$ sul $B_\varepsilon(x_0)$. Allora f è costante in $B_\varepsilon(x_0)$ (e vale dapprima $f(x_0)$).

DIM. Dalle formula di Taylor con resto di Lagrange d'ordine 1, siamo da $|w| < \varepsilon$ che

$$f(x_0 + w) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x_0 + \xi w) w_i;$$

ore $\xi \in [0,1]$. Poiché le derivate parziali nella somma sono identicamente nulle in $B_\varepsilon(x_0)$ e $|x_0 + \xi w - x_0| = |\xi w| \leq |w| < \varepsilon$, ne segue che la somma è nulla e

dunque

$$f(x_0 + w) = f(x_0) \quad \forall w : |w| < \varepsilon$$

□

Il prossimo risultato chiude completamente la questione, almeno nel caso degli insiemi Ω aperti:

TEOREMA: Sia Ω un aperto connesso.

Sia $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\nabla \varphi \equiv 0$ sul Ω .

Allora φ è costante in Ω .

DIM. Sia $x_0 \in \Omega$, fissato ad arbitrio. Verrà provato che, per ogni $x \in \Omega$, $\varphi(x) = \varphi(x_0)$.

Sia $\gamma(t)$ una curva parametrica continua, $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, tali che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x$, che esiste certamente poiché Ω è connesso.

Si pone allora $\Delta = \{t \in [0, 1] : f(\gamma(t)) = f(x_0)\}$
e insieme sia

$$T = \sup \Delta$$

Poiché $\gamma(0) = x_0$ ne segue $f(\gamma(0)) = f(x_0)$, e dunque $0 \in \Delta$.

Salvo dunque $\Delta \subseteq [0, 1]$ e dunque $T \leq 1$.

Del fatto che $\sup \Delta$ è finito, segue dalla proprietà di caratterica il \sup (l'è esso il minimo dei maggiori), che

$$\forall \varepsilon = \frac{1}{n} \quad \exists t_n \in \Delta : \quad T - \frac{1}{n} < t_n \leq T$$

da cui, per il teorema del confronto $\lim t_n = T$

Poiché $t \mapsto f(\gamma(t))$, quando composto di funzioni continue, è continua, ne segue che

$$f(\gamma(T)) = \lim f(\gamma(t_n))$$

e poiché $t_n \in \Delta$ si ha che $f(\gamma(t_n)) = f(x_0)$ e dunque

$$f(\gamma(T)) = f(x_0)$$

Se dunque $T = 1$, ne segue $f(x) = f(\gamma(1)) = f(x_0)$, che è lo tsrl.

Completiamo la dimostrazione prendendo che assumere $T < 1$ condurre ad un assurdo.

Infatti, se fosse $T < 1$, ne seguirebbe che $f(\gamma(t)) \neq f(x)$ per ogni $t \in [\bar{T}, 1]$, e ciò è falso in un intorno destro di \bar{T} .

Dal lemma precedente, applicato al punto $\gamma(T)$, che è interno ad Ω perché Ω è aperto, si può dire che $\gamma(T)$ è centro di una sfera sulla quale $\nabla f \equiv 0$ e dunque f è costante ed uguale ad $f(\gamma(T)) = f(x_0)$. Sia $B_\varepsilon(\gamma(T))$ tale sfera.

Dalla continuità di γ in T , ne segue che, fissato il numero ε (il raggio della sfera appena introdotta), esiste $\delta > 0$ tale che, se $|t - T| < \delta$ allora $|\gamma(t) - \gamma(T)| < \varepsilon$, da cui $\gamma(t) \in B_\varepsilon(\gamma(T))$ se $T - \delta < t < T + \delta$.

Dunque, essendo f costante e uguale a $f(x_0)$ in $B_\varepsilon(\gamma(T))$, ne segue $f(\gamma(t)) = f(x_0)$ per ogni $t \in [T - \delta, T + \delta]$ e ciò è assurdo per tutti i $t \in [\bar{T}, T + \delta]$, che sono strettamente maggiori di $\bar{T} = \sup\{t : f(\gamma(t)) = f(x_0)\}$.



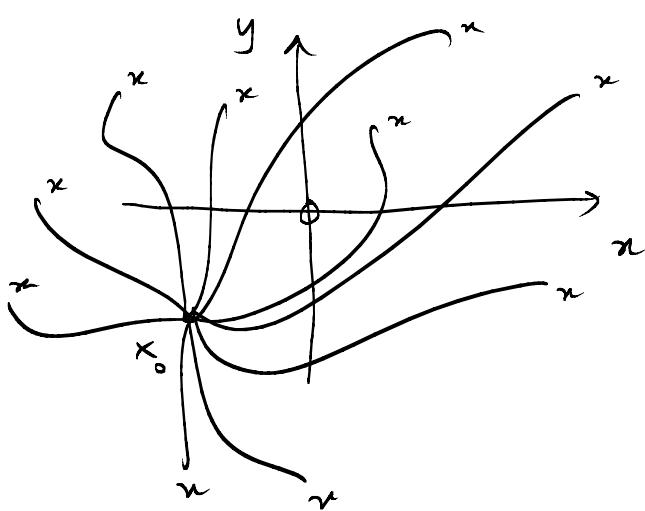
In conclusione, se $\nabla \varphi \equiv 0$ su Ω , e Ω è aperto e连通的, allora φ è costante.

Un insieme non连通 si dirà sconnesso.
 Se Ω è sconnesso si può decomporlo in parti (o componenti) connesse: in sostanza, la componente connessa contenente un punto x_0 è il sottinsieme dei punti di Ω che possono essere raggiunti da x_0 , stante uscire da Ω .

In modo un po' più asettico: "Data $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \Omega$, si definisca componente connessa contenente x_0 come

$$\Omega(x_0) = \left\{ x \in \Omega : \exists \gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega : \gamma(0) = x_0 \text{ e } \gamma(1) = x \right\}$$

Ad esempio, il dominio delle funzione $\frac{1}{x^2+y^2} = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ che ha una sola componente connessa



Per una struttura differente, ecco un altro esempio.

La funzione $g(x,y) = \frac{1}{xy}$ è un potenziale del campo

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{xy}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{xy} \right) = \\ = \left(-\frac{y}{x^2 y^2}, -\frac{x}{x^2 y^2} \right) = -\left(\frac{1}{x^2 y}, \frac{1}{x y^2} \right)$$

Tutti gli altri potenziali si ottengono dalle formule

$$f(x,y) = \frac{1}{xy} + \varphi(x,y)$$

ove $\varphi(x,y)$ ha gradiente identicamente nullo
nel dominio del campo, ossia

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\} =$$

$$= \{x > 0, y > 0\} \cup \{x > 0, y < 0\} \cup \{x < 0, y < 0\} \cup \{x < 0, y > 0\}$$

Ognuno dei quattro quadranti è connesso e dunque

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} c_1 & \text{su } x > 0, y > 0 \\ c_2 & \text{su } x < 0, y > 0 \\ c_3 & \text{su } x < 0, y < 0 \\ c_4 & \text{su } x > 0, y < 0 \end{cases}$$

ma nulla obbliga le quattro costanti ad essere uguali!

Al variare di c_1, c_2, c_3, c_4 si ottengono tutte le possibili soluzioni di $D\varphi \equiv 0$ sull'unione dei quattro quadranti, e dunque tutti i possibili potenziali di $-\left(\frac{1}{xy}, \frac{1}{xy}\right)$, che sono dunque

$$f(x,y) = \frac{1}{xy} + \begin{cases} c_1 \text{ nel I quadrante} \\ c_2 \text{ nel II} \\ c_3 \text{ nel III} \\ c_4 \text{ nel IV} \end{cases}$$

Gli assi
non fanno
parte di Ω
e connettono
i quadranti.

Facendo $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = C$ si ottengono i potenziali

$$\frac{1}{xy} + C$$

che imperversano inutilmente su al anni libri!

Si ricordi che, se occorre calcolare un integrale definito, basta UNA primitiva (una sola, qualsiasi!), mentre se il problema è trovarle TUTTE, oggi impiegherei automaticamente un " $+ C$ " per non bostoni: si pensi all'esempio (in una sola variabile)

$$\left(\lg|x| + \frac{c}{|x|}\right)' = \frac{1}{x} \quad (\text{prova per credere!})$$

In questo caso il dominio è sconnesso $\{x > 0\} \cup \{x < 0\}$ e dunque per trovarne TUTTE le primitive occorrono due costanti, indipendenti l'una dall'altra, una in $\{x > 0\}$ e una in $\{x < 0\}$, da aggiungere a $\lg|x|$. Altro che $\lg|x| + C$!!!

NOTE CONCLUSIVE

Forme e campi integrabili non sono gli unici interessanti nelle applicazioni. Fra gli esempi più illustri di campi o forme non integrabili ci sono il campo magnetico e molte forme ricorrenti in termodinamica, ed è una vera fortuna che siano non integrabili, perché altrimenti un motore, elettrico o a combustione interna, non potrebbe compiere alcun lavoro utile all'esterno, perché nella sua attività lo stato descrive curve chiuse.

Il campo gravitazionale è conservativo solo se tra le due l'attrito, e anche una volta in mondo senza attrito ci contingerebbe agli stessi numeri da dover ai quali siamo costretti comunque sul ghiaccio. Diverse è la situazione nei nostri pianeti, che sono ben approssimabili da molti in un campo gravitazionale, a parte venti solari ed altri eventi di collisione impensati, o altri effetti d' dissipazione di energia nei moti intorno al pianeta (che non è un punto materiale!): la continua deformazione delle lune per effetto dell'attrazione della terra - l'effetto simile a quello delle maree, nel mare come nelle croste - ha fatto sì che il energia di rotazione delle lune nel suo corso venisse poco piano dissipata sino a che, rinvigendo sempre lo stesso facendo verso la terra, le perdite formano ridotti a zero. Accadrebbe lo stesso alla terra, fra un

altro po' perdi dà molta più energia di rotazione da
smaltire: rallentare la terra da un giro al giorno a
(circa) un giro al mese sul suo asse! Chissà... forse qualche
miliardo di anni dovrebbe bastare!

Un'altra notte d'allora. Le continue

$$(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i}$$

è connessa ad un concetto comodo nello studio dei
campi (soprattutto quelli non isotropici), detti anche
rotazionali) in \mathbb{R}^3 : il rotore di un campo.

Dato $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, si definisce

$$\text{rot } A = \left((A_2)_{x_3} - (A_3)_{x_2}, -\left[(A_1)_{x_3} - (A_3)_{x_1} \right], (A_1)_{x_2} - (A_2)_{x_1} \right)$$

Molti, e tra essi Richard Feynman, usano il simbolo

$$\nabla \wedge A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

(Per la verità, Feynman usa il simbolo $\nabla \times A$ e non $\nabla \wedge A$
per indicare il prodotto vettore fra il "vettore" ∇ e
l'altro, A).

Le condizioni necessarie di interpretate (affascinate
negli intrecci semplicemente comuni), diventa
allora

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (*)$$

il che spiega il perché del nome "irrotazionale" per i campi che verificano (*).

In Fisica, un campo integrabile si dice anche potenziale o conservativo, come si è già detto prima.

Attentate, però, poiché in Fisica non si usano solo i potenziali scalari ma anche il potenziale vettore: invece di essere un oggetto il cui gradiente è fisso, è un oggetto il cui rotore è fisso.

Ciò ci consiglierebbe di tornare alla definizione esterna di forme differenziali, che esula dell'ambito di queste note. Per un'introduzione si può, ad esempio, consultare l'ultimo capitolo del corso d'Analisi Matematica (secondo volume) di G. Prodi, che è ora disponibile in tutta Italia per i tipi di Bonnighieri, già citato.

La Termodinamica è uno dei regni incontestati delle forme differenziali, e reperire forme riguardanti le grandezze di interesse — la pressione, il volume, la temperatura, la massa nei gas, per tacere di cambiamenti di fase o delle reazioni chimiche — che siano integrabili e diano luogo a potenziali termodinamici è stata un'ossessione per gli studiosi.

I loro sforzi hanno prodotto soluzioni diverse, ciascuna appropriata per il particolare problema studiato: un libro di Termodinamica o di Chimica Generale sono riferimenti obbligati per gli approfondimenti.

Un'ultima nota d'altra: molti campi in Fisica, per i quali non sia evidente la loro integrità, sono centrali - ossia la sorgente del campo è in un punto - e sono in \mathbb{R}^3 . Di sicuro questo accade in \mathbb{R}^2 , l'insieme $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ è semplicemente connesso: qualsiasi curva chiusa che include l'origine al suo interno può essere traslata "da un'altra parte" e poi fatta collidere in un punto. Una conseguenza da tenere nel debito conto è che nella stragrande maggioranza dei casi i campi della Fisica sono rotazionali come il campo magnetico o il campo di velocità di un fluido viscoso, oppure ad essi si può applicare il teorema di conservazione omotopica e dunque, oltre ad esse instanziali essi sono anche integrali. Ne segue (un altro mattone sulla torre di Babele) che in Fisica e in Ingegneria si usa il termine "esatta" per indicare una forma chiusa (refronti solo la condizione del vettore nullo). Occorre prestare attenzione, dunque: il termine "forma chiusa", di uso corrente nelle teorie dell'Analisi e della Coomologia, è di solito ignorato e sostituito con il termine "forma esatta" (il che non è in genere corretto), ma che lo è nel contesto nel quale questo "abuso matematico" viene di solito perpetrato.

APPENDICE

ALCUNI CAMPI NON INTEGRABILI INTERESSANTI

No, non è il campo magnetico! Gli unici esempi più comuni esposti in modo

$$x \, dy - y \, dx \quad \frac{1}{2} (x \, dy - y \, dx)$$

Le formule di Gauss-Green-Ostrogradskij,... permettono di dimostrare che il loro integrale esteso ad una curva chiusa è l'area racchiusa dalla curva, se viene percorsa in senso antiorario e il suo opposto, se percorsa in senso orario.

Ad esempio $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $t \in [0, 2\pi]$, $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{2} (x \, dy - y \, dx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos t \cos t - (\sin t)(-\sin t)] dt = \pi$$

Come si vede dall'esempio, non sempre è più vantaggioso adottare $x \, dy$ oppure $-y \, dx$, meglio a $\frac{1}{2} (x \, dy - y \, dx)$.

Le tre forme considerate NON sono chiuse

$$x \, dy = 0 \, dx + x \, dy \quad \frac{\partial}{\partial y}(0) \neq \frac{\partial}{\partial x}(x)$$

ma ciò non toglie che possono tornare utili!

Un altro esempio, che forse appare più oséoso, è quello già trattato nei notes:

$$-\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

(lì, si... è l'opposta delle forme già studiate), che sappiamo già essere chiuse, non globalmente esatte, ma esatta su ogni sottrazione semplicemente connesso del dominio $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ (come un quadrante ed un semipiano aperto, ad esempio).

Per calcolarne l'integrale su una curva generica si può seguire una via triviale: il metodo "falsa bontà", "Esiste f tale che

$$\begin{cases} fx = -\frac{y}{x^2+y^2} \\ fy = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \quad \text{Le rapporte sono NO}$$

in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, ma è
sì se si sottraggono
semplicemente connesse

Il calcolo non è difficile.

$$\int \frac{x}{x^2+y^2} dy = \frac{x}{x^2} \int \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} dy = \int \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} d\left(\frac{y}{x}\right) =$$

$x \neq 0!$

$$= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

da cui

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c(x)$$

e, dividendo rispetto ad x e neggligendo all'altro componente del gradiente, si ha

$$-\frac{y}{x^2+y^2} = f_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) + c'(x)$$

da cui anche

$$c'(x) = 0$$

e dunque c è costante su ciascuno dei semipiani $x > 0$ e $x < 0$, potendo avere però costanti diverse sui due semipiani. Si sono dunque trovati i potenziali

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \begin{cases} c_1 & x > 0 \\ c_2 & x < 0 \end{cases} \quad (*)$$

Alcune osservazioni. Prima: nessuna relazione dell'ordine delle cose. I potenziali trovati NON sono definiti su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ tutto intero, ma solo su $\mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$
Seconda: la funzione $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, sul semipiano $x > 0$, è l'angolo che il raggio vettore (x,y) forma col semiasse positivo dell' x . Dunque, la differenza di potenziale sul semipiano $x > 0$, dove il campo è integrabile, è la differenza fra gli angoli formati con il semiasse delle x positive da $y(b) - y(a)$.

Terza. Nel semipiano $\{x < 0\}$, $\arctg \frac{y}{x}$ NON rappresenta l'angolo formato da (xy) dell'origine degli assi (il senso positivo delle x), ma quello formato dal vettore $(-x, -y)$, ad uno opposto. Ne segue che l'angolo fra $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è

$$\arctg \frac{y}{x} + \pi$$

Poiché l'integrale su una curva γ tutta contenuta in $x < 0$ è la differenza (di potenziale) fra i valori delle funzioni precedenti fra il punto iniziale e finale, la costante additiva π si cancella e dunque, anche nel semipiano $x < 0$, l'integrale risulta uguale alle differenze fra gli angoli formati da $\gamma(b)$ e $\gamma(a)$ con il senso positivo delle x .

Quarta. Cosa si può fare se la curva γ attraversa l'asse y ($x = 0$)? Dipende! Sappiamo già che la circonferenza unitaria (che attraversa due volte l'asse y) NON consente di calcolare l'integrale per differenze di potenziale, perché è chiusa e dovrebbe avere differenze di potenziale 0, mentre l'integrale è 2π . Si può comunque abbordare le difficoltà imposte dalla condizione $x \neq 0$ in due modi: si può integrare il sistema del gradiente a rovescio integrando prima la f_x in dx invece della f_y in dy , e così si dovrà mettere in evidenza al denominatore y^2 , invece di x^2 e la condizione d'entrata $y \neq 0$ invece $x \neq 0$; oppure si può osservare che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctg \frac{y}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctg \frac{y}{x} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } y > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

e dunque, scelta le costanti c_1 nel potenziale (\mathbf{x}) uguale a 0 e c_2 uguale a π si ottiene

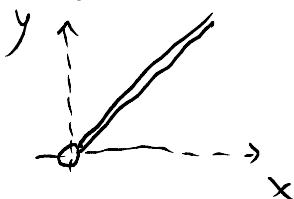
$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \pi & x < 0 \end{cases} \\ \frac{\pi}{2} \quad \text{se } x=0 \text{ e } y > 0 \end{cases}$$

che non è un potenziale su $\{x=0, y < 0\}$ perché i limiti destro e sinistro differiscono inv per 2π . La funzione f così definita è però continua sul semiasse positivo delle y . Inoltre

$$\begin{aligned} f_x(0,\alpha) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{h} - \frac{\pi}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{h^2}} \cdot -\frac{\alpha}{h^2} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{\alpha}{h^2 + \alpha^2} = -\frac{1}{\alpha} = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right)_{\substack{x=0 \\ y=\alpha}} \end{aligned}$$

Lo stesso accade per la $f_y(0,\alpha) \equiv 0$. Dunque f non è soltanto costituita da una coppia di potenziali saldati per continuità lungo \vec{y}^+ , ma è essa stessa un potenziale lungo \vec{y}^+ , ossia il suo gradiente coincide col campo non solo per $x \neq 0$, ma anche per $x=0$, ma con $y > 0$. In ogni caso la coperta è (e deve essere) CORTA: "saldando" i potenziali lungo \vec{y}^+ si crea un salto di 2π lungo \vec{y}^- . Sottraendo π nella regione $x < 0$ a $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, invece, si salderebbero lungo \vec{y}^- ma il salto di 2π sarebbe lungo \vec{y}^+ . NULLA DI MALE: un potenziale globale non

ESISTE! Ci possono farci costare potenziali locali
dentro ogni regione semplicemente connesse. Consideriamo il
potenziale tagliato lungo una semiretta per l'origine.



Per ottenere un potenziale nel complementare di $\{x > 0; x = y\}$
se può essere che

$$f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & x > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \end{cases}$$

è un potenziale definito fuori di $\{x > 0; y < 0\}$, mentre

$$g(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & x > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & x < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

è un potenziale definito fuori di $\{x = 0; y > 0\}$.

Poiché se ha

$$f(\alpha, \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{per } \alpha > 0 \\ 1 + \pi & \text{per } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$g(\alpha, \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{per } \alpha > 0 \\ 1 - \pi & \text{per } \alpha < 0 \end{cases}$$

ne segue infine che, perciò

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{per } y > x \\ g(x,y) + 2\pi & \text{per } y < x \end{cases}$$

risulta come prima che F è un potenziale su $\{x < 0; y = x\}$ mentre ha un salto di 2π su $\{x > 0; y = x\}$.

Si vede benissimo quanto possa essere intelligenzialmente grossolano aggiungere il "+ C" in fondo alle primitive. Si aggiunge ciò che va aggiunto, con grande segno, a seconda del dominio in esame. Basta scrivere al posto di f e g le loro espressioni complete per comprendere quanto forme esser articolate l'aggiunta di costanti aipostivoli!

Un'altra nota (e l'ULTIMA!): costruire primitive globali a partire da quelle locali, in particolar modo per i problemi della radice e del logaritmo nel campo complesso, è stato il motore per la definizione dei concetti e lo sviluppo delle tecniche delle teorie moderne delle "varietà". Riemann introdusse a talo scopo il concetto di "superficie di Riemann" che, in buon tempo, condusse i matematici a sviluppare la teoria delle varietà differenziali, informando tutto ciò che riguardava curve, superficie, piani tangenti, curvatura, distanze su una superficie ed ogni sorta di noiose "curve".

In atto d' ormai a Bernhard Riemann, molto giovinissimo, enunciamo e dimostriamo un teorema di prolungamento dei potenziali.

TEOREMA Se $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un campo e siano $\Omega', \Omega'' \subseteq \Omega$, con $\Omega' \cap \Omega''$ aperto connesso.

Se $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ è un potenziale di A in Ω' e $g : \Omega'' \rightarrow \mathbb{R}$ è un potenziale di A in Ω'' allora A è integrabile in $\Omega' \cup \Omega''$.

Dim. Sia $\Omega''' = \Omega' \cap \Omega''$, che per ipotesi è aperto e connesso. Allora esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $f = g + k$ su Ω''' , poiché f e g sono due diversi potenziali su un aperto connesso. Se si definisce

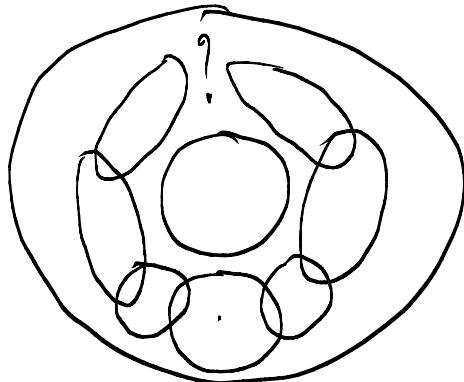
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{su } \Omega' \\ g(x) + k & \text{su } \Omega'' \end{cases}$$

si ha che h è una funzione definita su $\Omega' \cup \Omega''$, poiché nelle parti comuni $\Omega''' = \Omega' \cap \Omega''$ f e $g+k$ coincidono, e inoltre $\nabla h = \nabla f = A$ su Ω' e $\nabla h = \nabla(g+k) = \nabla g = A$ su Ω'' .



Dunque i potenziali locali si possono "saldare" fra loro per "ampliarne" il dominio. E' però possibile che, prolungando il potenziale lungo due percorsi differenti si raggiunga lo stesso punto con valori diversi: è esattamente quello che accade con i campi non integrabili globalmente, ma integrabili localmente (sulle sfere, ad esempio).

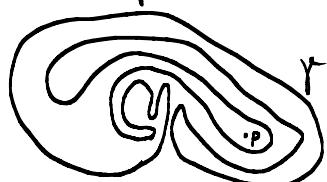
quando il prolungamento avviene in regioni non semplicemente connesse --- a connessioni multiple!



Lungo le "catene" di regioni semplicemente connesse i potenziali locali possono essere "saldati" per il teorema precedente per formarne uno globale. Non è più, in generale, possibile aggiungere un'altra regione in alto che abbia punti interni comuni ad entrambi i "lati" delle regioni fra quali è stato prolungato il potenziale, poiché nessuno garantisce, salvo che il campo non sia globalmente integrabile, che i valori trovati per il potenziale prolungato lungo i due cammini (NON ORTOPI) "a destra" e "a sinistra" del "bucato" siano fra loro compatibili (il salto di 2π nel "potenziale" del "differenziile dell'angolo" docet...).

Dunque l'ipotesi che $\Omega \cap \Omega'$ sia connesso nel teorema di prolungamento NON è accessoria: è indispensabile!

Per concludere... un problema da "Settimana Enigmistica"!



Il punto P è dentro o fuori la regione delimitata da γ ?

Facile! se $P = (x_0, y_0)$, allora γ non crocchia

$$\text{P se } I = \int_{\gamma} \frac{y - y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} dx - \frac{x - x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

mentre, se γ incrocia P , allora $I = 2k\pi$, con k intero relativo non nullo (pari al numero di giri che il punto lungo γ compie attorno a P al revero del parametro nel dominio della curva). Perché?

Questo criterio si presta ad una verifica al computer, perché essendo discreto l'insieme dei valori che l'integrale può assumere, non occorre calcolarlo esattamente, ma basta approssimarselo un errore come d' π per poter stabilire se faccia 0 o 2π ($0 - 2\pi$, a pagina!).

Un altro problemino! Come fanno $\operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ e $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ ad essere entrambi potenziali del solito stramaledetto campo? Se si sta per annegare è opportuno studiare la funzione di una variabile definita da

$$h(t) = \operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} \frac{1}{t}$$

Naturalmente... di dove che è costante frega la cosa a tutti!

Capitolo 8

Misura e Integrazione

MISURA DI LEBESGUE

Titolo nota

06/06/2012

LA MISURA DI LEBESGUE: UN'INTRODUZIONE BREVE.

In questa nota viene presentata la teoria della misura, sviluppata da H. Lebesgue agli inizi del secolo scorso, senza dimostrazioni.

Il concetto di misura unifica i concetti di lunghezza di un intervallo, di area di una figura piana, di volume di un solido.

Le idee che seguiremo nella costruzione hanno origine lontana: le inondazioni del Nilo portavano sì del riso e frumento lungo sulle piante d'Egitto, ma cancellavano completamente i confini delle proprietà: in assenza di moderni tessalati o GPS, erano difficilissimi da tracciare di nuovo. Era però possibile e persino facile ottenere un approssimato di terra da seminare grande quanto quello precedente, anche se da un'altra parte - davano un forte stimolo a sviluppare un modo per misurare le terre: in una parola una Geos (terra) metra (misura).

Nelle Geometrie euclidiene classica ci sono teoremi sulla equivalenza (ovvero ugualanza d'aree): i celebri teoremi di Pitagora e di Euclide, ma anche le regole per l'area delle figure piane imposte a scuola; ci sono anche le prime

applicazione del calcolo per approssimazione, con curve inclinate (critica di Aristotle alle "quadrature del cerchio" di Antifonte e Eudosso, che ha anche introdotto l'idea di approssimare le aree per difetto e per eccoso, che stesso fu adottato), ma articolamenti finiti (metodo d'esaurimento di Eudosso e quadratura delle parallele di Archimede, oltre alle stime del valore di π , tramite i poligoni regolari, e al calcolo del volume della sfera, il tutto capillare).

La costruzione di Lebesgue inizia con gli intervalli.

INTERVALLI IN \mathbb{R}^n E LORO MISURA

Un intervallo in \mathbb{R}^n è definito come il prodotto cartesiano di intervalli in \mathbb{R}

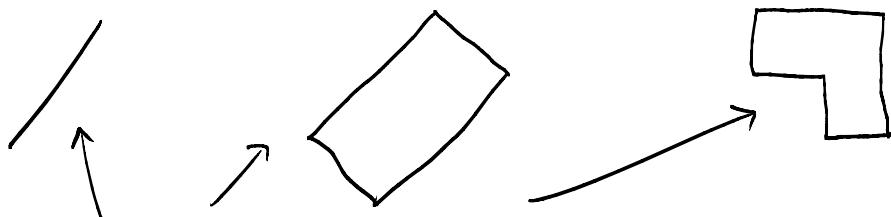
$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] = \\ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [a_i, b_i]\}$$

Per gli intervalli si pone

$$|I| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

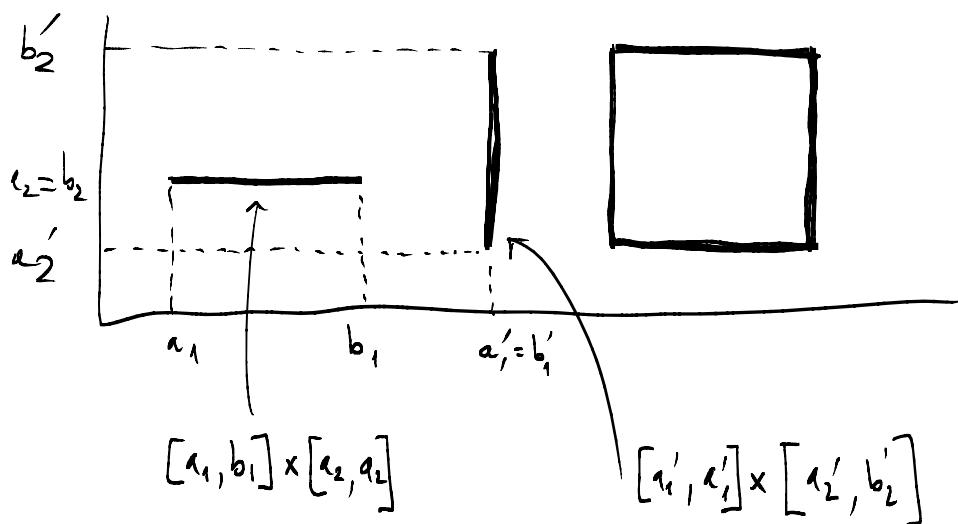
Esempi d'intervallo sono... gli intervalli in \mathbb{R} ,
 i rettangoli coi lati paralleli agli assi o
 i parallelepipedi coi spigoli paralleli agli assi.

Non sono intervalli i segmenti insiem in \mathbb{R}^2



non sono prodotti cartesiani di intervalli

mentre lo sono



Gli intervalli "degeneri" $[a_2, a_2]$ e $[a'_1, a'_1]$ sono ammessi, e
 danno luogo ad insiemi di misura nulla, quando come
 il prodotto delle misure degli intervalli, ed una è nulla.

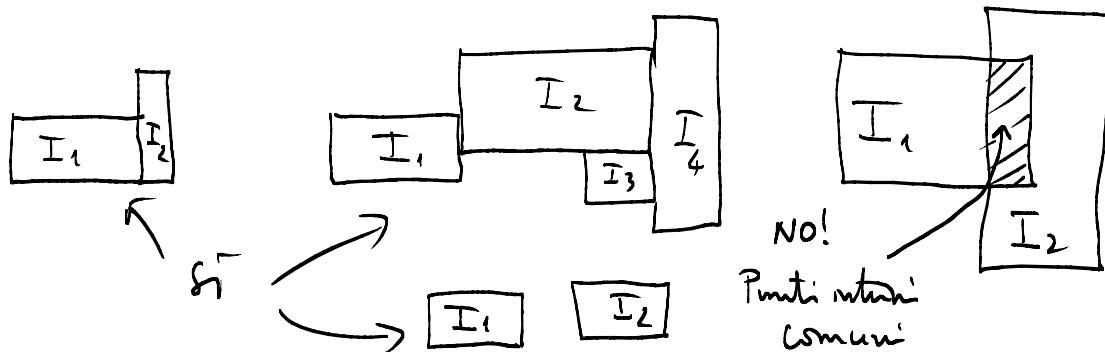
Si userà anche il simbolo $m(I)$ per la misura di I .

MISURA DEI PLURINTERVALLI

Il passo successivo, alla base delle regole dell'area per le regioni poligonali, è quello di estendere la definizione ad una famiglia > perché dicono: i plurintervalli (o plurirettangoli).

DEFINIZIONE: Un plurintervalllo P è un insieme tale che esistano un numero finito d'intervalli I_i , $i=1..n$, PRIVI DI PUNTI INTERNI COMUNI, verificanti $P = \bigcup_{i=1}^n I_i$.

Dunque un plurintervalllo è un insieme finito di intervalli, che possono "toccarsi" (punti di frontiera comuni) ma non "sovrapporsi" (punti interni comuni). Ad esempio:



Attenzione: nulla veta d' ottenere le stesse
regole in più modi. Se però si entra le sono approssimazioni
si può dimostrare che l'area delle regioni è la somma
delle aree degli intervalli che le compongono in qualche
modo esse si siano decomposte.

DEFINIZIONE: Dati un piano cartesiano P,

unione degli intervalli I_1, I_2, \dots, I_n , si pone

$$|P| = \sum_{i=1}^n |I_i|$$

Come è stato già detto prima, queste definizioni non hanno
senso finché non si dimostri che il numero $|P|$ così definito
risulta sia sempre lo stesso qualunque sia il modo scelto di
decomporre P come unione di $I_i, i=1..n$. Ad esempio, non
è affatto evidente, a priori, che

I_1	I_2
I_3	I_4

dà lo stesso risultato.

I'_1	I'_2
I'_3	I'_4

Non faremo la dimostrazione di ciò: chi voglia approfondire
può utilizzare un qualsiasi libro di teoria delle misure.

La proprietà fondamentale delle misure ora introdotte

sono oggetto dei prossimi teoremi.

TEOREMA (finita additività della misura):

Se P, P' sono due plurintervalli disgiunti; allora

$$|P \cup P'| = |P| + |P'|$$

NOTA: la proprietà precedente continua a valere se

$$P \cap P' \neq \emptyset, \text{ poiché } P \cap P' \subseteq \mathcal{F}P \cup \mathcal{F}P'$$

Ciò accade se P e P' non hanno punti interni comuni,
pur potendo condividere parti di frontiera.

TEOREMA (monotonia della misura):

Se P, P' sono plurintervalli e $P \geq P'$, allora

$$|P| \geq |P'|$$

Sono tutte proprietà iniziali dell'area o del volume e formano il modello per quelle analoghe più generali per le misure d'Lebesgue.

La teoria così sviluppata è (ancora) inferiore a quella greca:
un triangolo  non è un plurintervalllo e non ha ancora un'area.

I passi successivi costituiscono nel definire la misura per gli
insiemi aperti, e per quelli chiusi e limitati (compatti).

MISURA DEGLI INSIEMI APERTI

Un insiem apert è un insiem costituito solo da punti interni, e cioè contenente un intorno di ogni suo punto.

Gli aperti non vuoti, contiene sfera, contengono intervalli in essi contenuti. Si può dunque porre la

DEFINIZIONE: Per ogni insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
aperto si pone

$$|\Omega| = \sup_{\substack{P \subseteq \Omega \\ P \text{ plurintervalle}}} |P|$$

Si pone anche

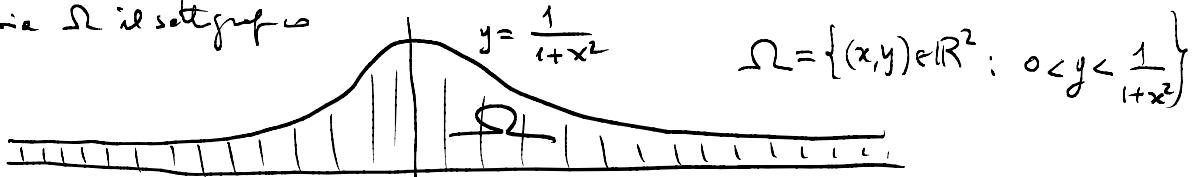
$$|\emptyset| = 0$$

Attenzione! Ci sono aperti di misura infinita: \mathbb{R}^n , il quadrante $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. le stesse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in \mathbb{R}\}$ sono di misura infinita perché per i plurintervalli in essi contenuti che l'intervalle $(-k, k]^n$ per quel la misura vale $(2k)^n$ il cui sup è $+\infty$,

o l'intervallo $[1, k]^n$, di misura $(k-1)^n$ non limitato in k anch'esso, o l'intervallo $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times [-k, k]$, d'area $\frac{1}{3} \times 2k$, anch'esso non limitato al disegno di k .

Esistono pure misure non limitate, ma d'area finita.
Si consideri la funzione (la "versiera" di Maria Gaetana Agnesi)

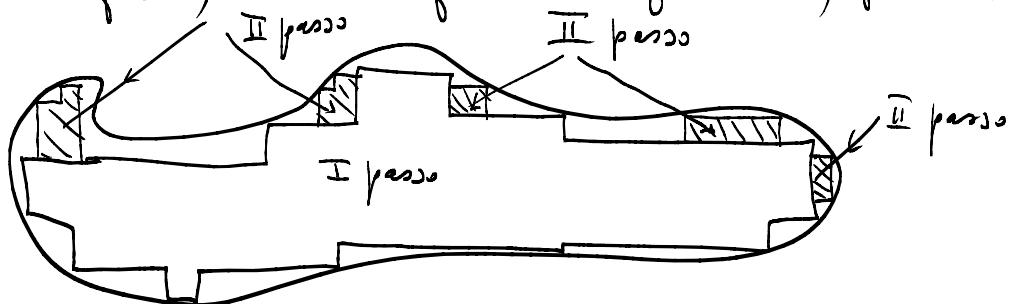
e sia Ω il sottoinsieme



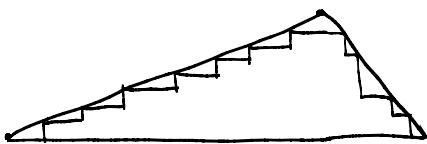
Per ogni intervallo I_i contenuto in Ω si consideri la striscia I'_i di uguali base e di altezza che parte da 0 e giunge fino a "toccare" il grafico di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Poiché $I'_i \supseteq I_i$ ne segue che $|P| \leq \sum_i |I'_i|$ e poiché tali valori corrispondono alla somma inferiore dell'integrale di $\frac{1}{1+x^2}$ esteso all'unione delle proiezioni di I_1, I_2, \dots, I_n sull'asse x , esso è minore o uguale all'integrale su tali insiemini. Infine, poiché $f \geq 0$, l' integrale su qualunque insiemino è minore o uguale a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$ e dunque qualunque plurintervallo contenuto in Ω ha area minore non superiore a π . Ne segue che $\sup |P| \leq \pi$.

Dunque tutti gli appunti sono massimi, anche se le loro misure non più essere calcolate "al portamento", con un numero finito di operazioni, ma solo "in interpolazione".

un "limite", costituito dal sott. L'estremo superiore è un concetto recentissimo nell'Analisi Matematica, ma l'idea seguita è quella di Endosso: il "metodo di esaurizione" consisteva nell'inservire un poligono (nel nostro caso un polintervalllo) nelle figure delle quali si vole determinare l'area, e poi inservire un altro nelle lunette rimaste fuori, e via così fino alla fine ---, fino ad



"esaurire" l'area. Con quanto "modifica" alle definizioni tutte le "figure piane" delle geometrie greche mantengono i risultati



= chiarissimo il legame con l'integrale, già osservato nello esempio sul sottopiano di $\Gamma = \frac{1}{1+x^2}$.

Sono mondani anche oggetti molto più complessi, del tutto ignoti o non in grado di interessare i Greci. Ad esempio sic in una successione che assume tutti i valori razionali di $[0,1]$, che si può definire co-

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5} \dots$$

ottenuta escludendo tutti i numeratori possibili senza ripetere frazioni già considerate (es $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}$ oppure $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6} \dots$) prima di aumentare il denominatore; consideriamo
l'insieme

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{2^{n+2}}}(q_n)$$

ove $B_g(x_0)$ è la sfera aperta di centro x_0 e raggio δ ,
e così l'intervalle $]x_0-\delta, x_0+\delta[$. E' aperto perché
è unione di aperti. Potrebbe sembrare che coincida con $[0,1]$,
perché ogni $x \in [0,1]$ si può approssimare con razionali, ma non è
così, come proviamo più avanti: in sostanza, è vero che arbitrariamente
vicino ad ogni reale ci sono razionali, ma i raggi delle sfera aperte
sono esponenzialmente con il numero del denominatore (e quindi
della "finestra" dell'approssimazione) e non è quindi affatto evidente
che ogni punto di $[0,1]$ stia in Ω , ed infatti è falso!

Un simile insieme è invidiabile, in quanto aperto, anche se non
si può neppure disegnare.

LA MISURA DEGLI INSIEMI COMPATTI

Le prossime categorie di insiemim misurabili sono gli insiemid chiusi e limitati, ovvero i compatti.

Poiché i compatti sono limitati entro una sfera, e quindi anche un intervallo che li contiene. Si può allora

DEFINIZIONE: Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto.

Si definisce

$$|K| = \inf_{\substack{P \supseteq K \\ P \text{ plurintervalle}}} |P|$$

NOTA: Poiché ogni compatto è contenuto in un intervallo ne segue subito $|K| < +\infty$; diversamente da quanto accade per gli aperti, tutti i compatti sono di misura finita.

L'idea di Borel, di approssimare dall'interno e dall'esterno con poligoni, viene utilizzata per il prossimo paragrafo.

GLI INSIEMI MISURABILI

SECONDO LEBESGUE

In queste note verrà definita la misura nelle condizioni di massima generalità (limitatezza a parte).

DEFINIZIONE: Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$, limitato.

Si pone allora

$$m_*(E) = \sup_{\substack{K \subseteq E \\ K \text{ compatto}}} |K|$$

$$m^*(E) = \inf_{\substack{\Omega \supseteq E \\ \Omega \text{ aperto}}} |\Omega|$$

I valori $m_*(E)$ ed $m^*(E)$ sono detti rispettivamente

MISURA INTERNA ed ESTERNA di E .

Se poi

$$m_*(E) = m^*(E)$$

E si dice MISURABILE SECONDO LEBESGUE

ed il valore comune di $m_*(E)$ ed $m^*(E)$
venne detto MISURA DI LEBESGUE
d' E , e denotato con $|E|$ o con $m(E)$.

Le misure interne ed esterne sono ben definite, perché ci sono sempre algebre contenenti qualunque E , come ad esempio \mathbb{R}^n stesso, e ci sono sempre compatti contenuti in ogni E , come ad esempio i suoi singoli punti.

NOTA : esistono misure non misurabili secondo Lebesgue. Per un esempio, consultare un elenco di teorie delle misure (come Royden: "Real Analysis" Collier MacMillan o W. Rudin: "Analisi Reale e Complessa" Boringhieri).

La misura di Lebesgue gode delle seguenti proprietà:

TEOREMA :

$$1) E, F \text{ misurabili con } E \subseteq F \Rightarrow |E| \leq |F|$$

$$2) E, F \text{ misurabili, } E \cap F = \emptyset, \text{ allora}$$

$$E \cup F \text{ è misurabile e } |E \cup F| = |E| + |F|$$

3) E, F misurabili allora

$$E \cup F \text{ è misurabile} \Leftrightarrow |E \cup F| \leq |E| + |F|$$

4) E, F misurabili $\Rightarrow E \cap F, E - F$ sono misurabili.

5) E, F misurabili e $F \subseteq E \Rightarrow |E \setminus F| = |E| - |F|$

6) Siano $E_i, i \in \mathbb{N}$, misurabili. Allora

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \text{ è misurabile} \Leftrightarrow \left| \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|$$

7) Siano $E_i, i \in \mathbb{N}$, misurabili, con $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Allora $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ è misurabile e

$$\left| \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right| = \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|$$

8) Sono $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq \dots$ misurabili.

Allora $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ è misurabile e

$$\left| \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right| = \sup_{\mathbb{N}} |E_i|$$

9) Sono $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots \supseteq E_n \supseteq \dots$ misurabili, se e solo se $|E_i|$ finita.

Allora, $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ è misurabile e inoltre

$$|\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i| = \inf_N |\bigcap_{i=1}^N E_i|$$

g) Per ogni misurabile E , $|E| \geq 0$.

Potrebbe sembrare che tutte le proprietà discendano dalla 7) e dalla 9) (e queste sono il punto d'arrivo di Rudin), ma in realtà la costruzione è complessa e la 7), la più importante delle proprietà delle misure di Lebesgue che la differenzia da tutti quelle introdotte in precedenza, si pone per ultime utilizzando le altre.

Le 1) è la MONOTONIA. La 2) è l'ADDITIVITÀ FINITA. La 3) è la SUBADDITIVITÀ FINITA. La 6) è la SUBADDITIVITÀ NUMERABILE. La 7) è l'ADDITIVITÀ NUMERABILE. La 8) e la 9) sono LE CONTINUITÀ VERSO L'ALTO E VERSO IL BASSO.

Le 3), le 4), le 7) e $|\emptyset|=0$ sono le proprietà che individuano la σ -algebra degli insiemi misurabili: se E , sono insiem

misurabili lo sono anche l'unione $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, l'intersezione, la differenza, il complementare.

Occorre fare molta attenzione alle ipotesi delle 8) e delle g): le diverse ipotesi nell'ipotesi che $|E_1| < \infty$ presenti solo nella g), che è assurda. In fatti si ha

$$E_i = \{x \in \mathbb{R}, x \geq i\}$$

Allora $\bigcap E_i = \emptyset$, $|E_i| = +\infty$, ma $0 = |\emptyset| + \inf_N |E_i| = +\infty$.

MISURABILITÀ DI INSIEMI NON LIMITATI

DEFINIZIONE Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ arbitrario. Allora
 E si dice misurabile se lo sono tutti gli insiem
 $E_k = E \cap [-k, k]^n$, si ponrà $|E| = \sup_N |E_k|$

Le nozioni, così estese agli insiem non limitati, continuano a godere di tutte le proprietà elencate nell'ultimo teorema.

Altro punto accade per le proprietà degli insiem misurabili.

NOTE CONCLUSIVE.

La numerabilità additività è una proprietà cruciale delle misure.

Ad esempio $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, che non è né aperto né chiuso, è comunque numerabile e di misura nulla, poiché basta porre

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}, \text{ ove } q_n \text{ è la successione biiettiva}$$

sui \mathbb{Q} prima introdotta, per ovviare che del fatto che ogni punto ha misura 0 (è chiuso e limitato e può essere raggiunto dentro un intervallo di lunghezza comunque piccola e dunque l'inf delle misure è 0), si segna che

$$|\mathbb{Q} \cap [0,1]| = \sum_{i=1}^{\infty} |q_i| = 0$$

Con la numerabilità additività si prova facilmente che

$\bigcup_{n=1}^{\infty} [q_n - \frac{1}{2^{n+2}}, q_n + \frac{1}{2^{n+2}}]$ è strettamente contenuto in $[0,1]$, poiché

$$\text{la sua misura è minore o eguale a } \sum_{n=1}^{\infty} \left(q_n + \frac{1}{2^{n+2}} - q_n - \frac{1}{2^{n+2}} \right) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Dunque $\bigcup_{n=1}^{\infty} [q_n - \frac{1}{2^{n+2}}, q_n + \frac{1}{2^{n+2}}]$ non può coincidere o

contenere $[0,1]$ poiché ha misura minore di $\frac{1}{2}$, mentre $[0,1]$ ha misura 1.

Un problema particolarmente fastidioso delle teorie delle

osserva e che un insieme possa essere "semplice", come ad esempio un intervallo chiuso $[0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ ha detto a QUATROS, a priori diverse, definizioni
 ma che: quella in qualità di intervallo, quelle come plurintervalli (costituiti da un unico intervallo), quelle come compatte (cioè chiuse e limitate), e quelle come misurabili. E' a carico di di sviluppa le teorie prover che sono coincidenti, come è ovvio che debba essere.

Una costruzione organica, da maestro, delle teorie delle mesure è reperibile sul libro di Kolmogorov (il maestro) e Fomin "Teoria delle funzioni e Analisi Funzionale" Editrice Riuniti.
 Una più semplice si può trovare su E. Giusti "Analisi Matematica", molto vicina alle teorie "all'italiana".

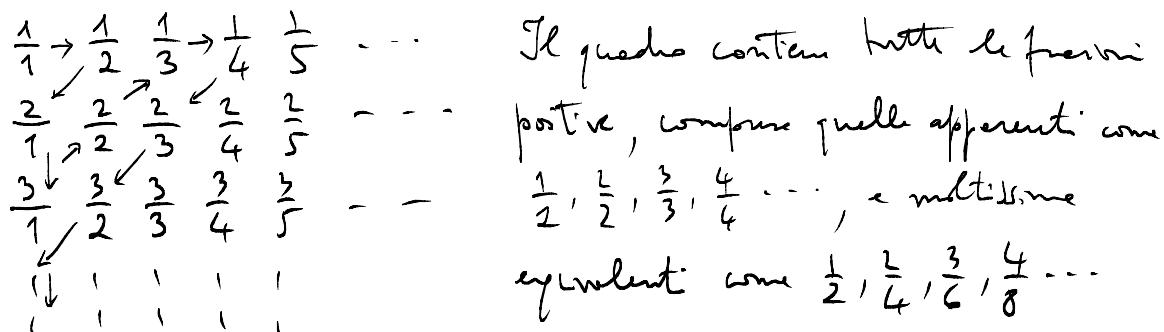
La nascita delle moderne teorie dell'interpretazione è legata, per qualche verso, alla teoria per la convergenza delle serie di Fourier; mentre le noie di potenze convergono per definire ad una funzione analitica (cioè C^∞ , con in più un controllo sul massimo modulo delle derivate), per le serie di Fourier, è "normale" la convergenza a funzioni pensate discutibilmente: ciò fu dicensi in dalle prime lettere scambiate fra Euler (il maestro dei maestri) e Fourier sull'argomento.

Le teoremi delle misure si qui presentano consentono di estendere le teoremi dell'integrazione a funzioni estremamente discontinue.

Ad esempio, la funzione d'Dirichlet è definita da

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{su } \mathbb{Q} \\ 0 & \text{su } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

L'insieme \mathbb{Q} è di misura nulla, quindi è numerabile.



Per numerare i razionali positivi, seguendo Cantor, attraversiamo il quadro segnando le frecce, e cioè segnando le diagonali (tutti fratti), scendendo le frazioni equivalenti ad altre già considerate; otteniamo la successione $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cancel{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \dots$. Numerati poi i razionali positivi, si possono numerare tutti usando la sequenza $0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, q_3, -q_3, \dots$

Dunque i razionali sono unione numerabile di punti (al massimo 0) e dunque costituiscono insieme \mathbb{Q} : per l'integrazione sono "trascinabili" come i singoli punti per l'integrale di Riemann.

Per la teoria dell'integrazione di Lebesgue, che utilizza il concetto di misura fin qui introdotto, le funzioni di Dirichlet non sono molto diverse da una funzione sempre nulla salvo un numero finito di punti per l'integrale di Riemann. E' bene ricordare che le funzioni di Dirichlet è il classico esempio di funzione non integrabile secondo Riemann.

L'integrale di Lebesgue, infine, consente di introdurre, con qualche fatica, lo spazio L^2 , che consente lo sviluppo di una teoria organica delle serie di Fourier, perché contiene i limiti, rispetto alle norme associate al prodotto scalare

$$fg = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}$$

di tutte le serie trigonometriche.

Per i dettagli, non banali, occorre approfondire su un buon libro di Analisi Funzionale, come quelli già citati: Royden, Rudin o Kolmogorov, e molti altri ...

L'INTEGRALE DI LEBESGUE

Placido Longo

La definizione qui presentata, nelle fasi iniziali, segue da vicino quella di Riemann per le funzioni di una variabile, che è bene aver in mente: basta sostituire agli intervalli i misurabili. Presuppone la conoscenza di cosa siano un insieme misurabile secondo Lebesgue (pronuncia: lebèg) e la sua misura. Gli integrali "impropri", sia al finito sia all'infinito, sono invece sostanzialmente differenti dall'integrale di Lebesgue, almeno per quanto riguarda le funzioni integrabili, ma non assolutamente integrabili. Per l'integrale di Lebesgue, integrabilità e assoluta integrabilità coincidono.

Funzioni limitate

Inizialmente si definisce l'integrale per le funzioni limitate.

Sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale su E , insieme misurabile di misura finita. Sia $\pi = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ una *partizione misurabile di E* , ossia una famiglia finita di sottinsiemi *misurabili* (secondo Lebesgue) di E verificante:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1..n} E_i &= E \\ i \neq j \Rightarrow E_i \bigcap E_j &= \emptyset \end{aligned}$$

Per ogni fissata partizione π , si definiscono la *somma inferiore* σ_π e la *somma superiore* Σ_π ponendo

$$\sigma_\pi = \sum_1^n m(E_i) \inf_{E_i} f$$

e

$$\Sigma_\pi = \sum_1^n m(E_i) \sup_{E_i} f$$

ove m denota la misura di Lebesgue, che sono ben definite perché, essendo f limitata, tutti gli estremi superiori e inferiori sono finiti, e tali sono pure le misure degli insiemi E_i , che sono sottinsiemi di E , di misura finita. Si definiscono poi l'*integrale inferiore* $\underline{\int}_E f$ e l'*integrale superiore* $\overline{\int}_E f$ ponendo

$$\underline{\int}_E f \equiv \sup_\pi \sigma_\pi$$

e

$$\overline{\int}_E f \equiv \inf_\pi \Sigma_\pi$$

al variare di π nell'insieme di tutte le partizioni misurabili.

Definizione 1 Si dice che f è integrabile secondo Lebesgue se e solo se gli integrali superiore e inferiore su E coincidono. Il loro comune valore è detto integrale di Lebesgue di f su E .

Le funzioni positive su insiemi di misura finita

Sia ora f una funzione positiva, non necessariamente limitata. Per definirne l'integrale poniamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \min(f, n)$$

La funzione f_n coincide con f sui punti dove $f \leq n$, mentre è uguale ad n nei punti sui quali f supera n ; in sostanza, passare da f a f_n equivale a troncare la f ad altezza n . È immediato verificare che, per ogni $x \in E$, f è compresa fra 0 e n ed inoltre $f_n(x)$ cresce al crescere di n , per ogni x . Si pone allora

$$\int_E f \equiv \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_E f_n$$

ove gli integrali di f_n sono ben definiti perché sono funzioni limitate.

La f si dirà integrabile su E se l'estremo superiore precedente è finito.

Le funzioni positive su insiemi misurabili arbitrari

Dato un qualunque insieme misurabile E poniamo $E_n = E \cap B(0, n)$, ottenuto intersecando E con la sfera di centro l'origine e raggio n . Ogni E_n ha misura finita, minore o eguale a quella della sfera. Si pone, per ogni funzione positiva,

$$\int_E f \equiv \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{E_n} f$$

dove gli integrali a secondo membro sono relativi ad insiemi di misura finita e quindi già definiti in precedenza.

Come prima, f si dirà integrabile se e solo se il secondo membro precedente è finito.

Le funzioni arbitrarie su insiemi arbitrari

Data una qualunque funzione f si pone:

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad f^-(x) = \max(0, -f(x))$$

Le funzioni così definite sono dette la *parte positiva e negativa di f* . Sono entrambe funzioni positive, per le quali l'integrale è già stato definito più su. Esse verificano

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

e

$$f^+(x) = \frac{1}{2} [|f(x)| + f(x)] \quad f^-(x) = \frac{1}{2} [|f(x)| - f(x)]$$

Si pone allora

$$\int_E f \equiv \int_E f^+ - \int_E f^-$$

ed f sarà detta integrabile se e solo se lo sono (separatamente) la sua parte positiva e la sua parte negativa.

Una conseguenza delle relazioni precedenti e delle proprietà degli integrali, qui non presentate, è che f è integrabile se e solo se lo è anche $|f|$.

ESEMPI DI CAMBI DI VARIABILE

$$\int_T \frac{dxdy}{xy}$$

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 2x, 1 < x+y < 3\}$$

Il dominio può sembrare anche

$$\left\{ x > 0 ; 1 < \frac{y}{x} < 2 ; 1 < x+y < 3 \right\}$$

che sorprende il cambio di variabili

$$u = \frac{y}{x} \quad v = x+y$$

che rende il dominio dato immagine dell'intervallo $[1,2] \times [1,3]$. Occorre dunque esprimere x e y in funzione di u e v , le nuove variabili, buone per il dominio. Si ha, dalla prima equazione $y = ux$ e, sostituendo nella seconda $v = x + ux$ da cui, risolvendo infatti ad x $x = \frac{v}{1+u}$ ($0 < x < y \Rightarrow u > 0$)

da cui infine si ricava la terza funzione inversa

$$x = \frac{v}{1+u} \quad y = ux = \frac{uv}{1+u}$$

Il determinante Jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ è

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \text{cost}$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{v}{(1+u)^2} & \frac{1}{1+u} \\ \frac{v(1+u)-uv}{(1+u)^2} & \frac{u}{1+u} \end{vmatrix} = -\frac{uv}{(1+u)^3} - \frac{v}{(1+u)^3} = -\frac{v}{(1+u)^2}$$

e, poiché nel dominio di interesse u e v sono positivi
ne segue che l'elemento di volume (il modulo dell'
Jacobiano) è

$$\frac{v}{(1+u)^2}$$

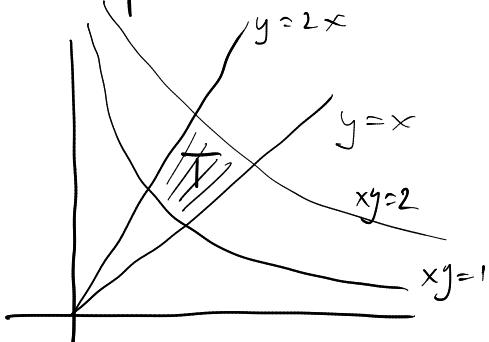
Si può dunque cambiare variabili, otteneendo

$$\int_T \frac{dx dy}{xy} = \int_1^2 du \int_1^3 dv \frac{1+u}{v} \frac{1+u}{uv} \frac{v}{(1+u)^2} = |\text{Jacobiano}|$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{u} du \int_1^3 \frac{1}{v} dv = \lg|2| - \lg|1| + \lg|3| - \lg|1| = \lg 6$$



Un altro esempio: calcolare l'area della regione



e cioè

$$\int_T dx dy \quad \text{ore } T = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} 0 < x < y < 2x \\ 1 < xy < 2 \end{array} \right\}$$

Di nuovo il dominio è determinato dalle diseguaglianze

$$x > 0 \quad 1 < \frac{y}{x} < 2 \quad e \quad 1 < xy < 2$$

ed è dunque naturale porre

$$u = \frac{y}{x} \quad e \quad v = xy$$

da cui, moltiplicando membri a membri, si ha

$$uv = y^2 \quad \text{e dunque, essendo } y, u \text{ e } v \text{ positivi, } y = \sqrt{uv}.$$

Dividendo, invece, membri a membri ($u > 0$), si ha

$$\frac{v}{u} = x^2 \quad e, \text{ per le stime rigorose precedenti, si ha infine}$$

$$x = \sqrt{\frac{v}{u}} \quad y = \sqrt{uv}$$

Invertire delle trasformazioni originali.

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\frac{v}{u}}} \left(-\frac{v}{u^2}\right) & \frac{1}{2\sqrt{\frac{v}{u}}} \cdot \frac{1}{u} \\ \frac{v}{2\sqrt{uv}} & \frac{u}{2\sqrt{uv}} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -\sqrt{\frac{u}{v}} \frac{v}{u^2} & \sqrt{\frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{u} \\ \sqrt{\frac{v}{u}} & \sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \left(-\frac{u}{v} \cdot \frac{v}{u^2} - \frac{1}{u} \right) = -4 \left(\frac{2}{u} \right) = -\frac{8}{u}$$

Essendo, nel rettangolo $u \in [1,2]$, $v \in [1,2]$, $u > 0$ ne segue che il modulo del Jacobiano è $\frac{2}{u}$, e dunque l'area ricavata sarà

$$\int_1^2 du \int_1^2 dv \frac{1}{u} = 1 \cdot \log|2| = \log 2$$



Gli esempi presentati suggeriscono fortemente che non sempre (e non solo) è la struttura geometrica del dominio a suggerire la soluzione da tentare: talvolta si può trarre informazioni direttamente dalle diseguaglianze che lo definiscono, indipendentemente dal fatto d'essere in grado di interpretarle geometricamente. Ad esempio:

Calcolare l'area di

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, x+y > 0, x^2+y^2 < 3\sqrt{x^2+y^2} - 3x\}$$

Non occorre affatto ingannarsi: fondamentalmente la retta

di "figure" possa venir fuori dalle disegnare, e non ci vuole molto per capire che passare a coordinate polari può diminuire il problema costituito dalle radici ad un coto abbastanza. Infatti, introducendo le coordinate polari (pren) $x = p \cos \theta$ e $y = p \sin \theta$ si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} p \sin \theta > 0 \\ p \cos \theta + p \sin \theta > 0 \\ p^2 < 3p - 3p \cos \theta \end{array} \right.$$

Della prima si ha ($p > 0$) $\sin \theta > 0 \quad \theta \in]0, \pi[$.

Della seconda ($p > 0$), $\cos \theta + \sin \theta > 0 \quad \cos \theta > -\sin \theta$

e cioè $\theta \in]0, \frac{3}{4}\pi[$ (in effetti $x+y>0$ è il terzo quadrante la bisezione del II quadrante; un po' di geometria non fa male mai, se è un motto e non un falso!)

Dell'ultima si ha infine ($p > 0$) $p < 3(1 - \cos \theta)$ e, in definitiva, il dominio dato è immagine di quelli, in coordinate polari,

$$\theta \in [0, \frac{3}{4}\pi] \quad 0 < p < 3(1 - \cos \theta)$$

Si aspetta consideramenti meno repulsivi di quelli iniziali. Si ha dunque:

$$\begin{aligned}
 \text{Area}(T) &= \int_T 1 \, dx dy = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} d\theta \int_0^{3(1-\cos\theta)} \rho \, d\rho = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} d\theta \cdot g(1-\cos\theta)^2 = \frac{g}{2} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta \, d\theta = \\
 &= \frac{g}{2} \cdot \frac{3}{4}\pi - g \left(\sin \frac{3}{4}\pi \right) + \frac{g}{2} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, d\theta =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{27}{8}\pi + g \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{g}{4} \frac{3}{4}\pi + \frac{g}{8} \sin 2 \cdot \frac{3}{4}\pi = \\
 &= \frac{27}{8}\pi - \frac{g\sqrt{2}}{2} + \frac{27}{16}\pi - \frac{g}{8} = \frac{81}{16}\pi - \frac{3g\sqrt{2} + g}{8}
 \end{aligned}$$

E' bene ripetere che ogni informazione geometrica è di gran valore se consente di abbreviare calcoli e verifiche, mentre d'altro funziona se serve un fine: determinare l'area di una regione è perfettamente possibile anche in molti casi nei quali non si è in grado di distinguere.