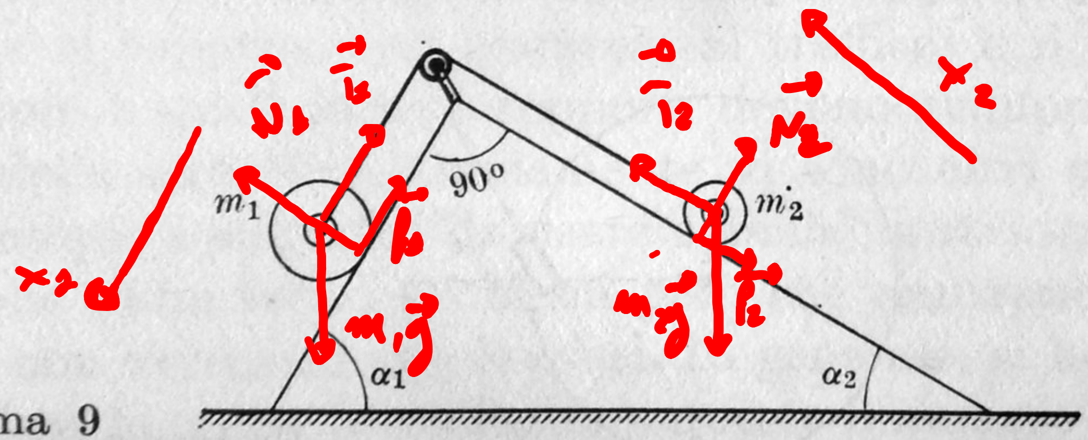
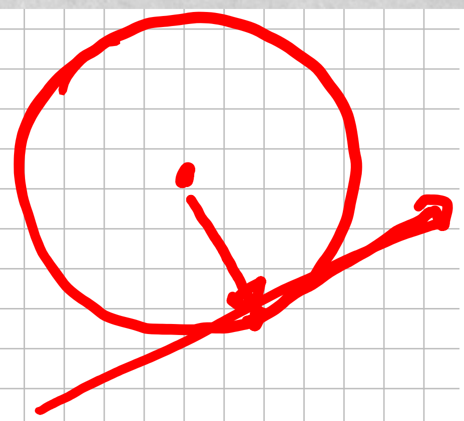
Esercizio

12.9 Due cilindri C_1 e C_2 (di masse m_1, m_2 e raggi r_1, r_2) rotolano senza strisciare su due piani inclinati e sono collegati da un filo inestensibile come è mostrato in figura; C_1 scende mentre C_2 sale. Le masse del filo e della carrucola sono trascurabili. Quanto vale l'accelerazione di un punto dell'asse C_1?



Problema 9

$$I \dot{\omega} = \tau$$



PIANI INCLINATI DUE DISCHI

I CARDINALE

$$m_1 a_1 = m_1 g \sin \alpha_1 - f_1 - T \qquad \text{(PER 1)}$$

$$m_2 a_2 = T - m_2 g \sin \alpha_2 - f_2 \qquad \text{(PER 2)}$$

$$a_1 = a_2 = a$$

II CARDINALE

$$f_1 r_1 = I_1 \dot{\omega}_1 \qquad \text{(PER 2)}$$

$$f_2 r_2 = I_2 \dot{\omega}_2$$

$$v = \omega R \qquad a = \dot{\omega} R$$

$$a_1 = r_1 \dot{\omega}_1 \qquad a = r_1 \dot{\omega}_1$$

$$a_2 = r_2 \dot{\omega}_2 \qquad a = r_2 \dot{\omega}_2$$

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \qquad I_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2$$

$$f_1 = \frac{I_1}{r_1} \dot{\omega}_1 = \frac{I_1}{r_1^2} a = \frac{1}{2} m_1 a$$

$$f_2 = \frac{I_2}{r_2^2} a = \frac{1}{2} m_2 a$$

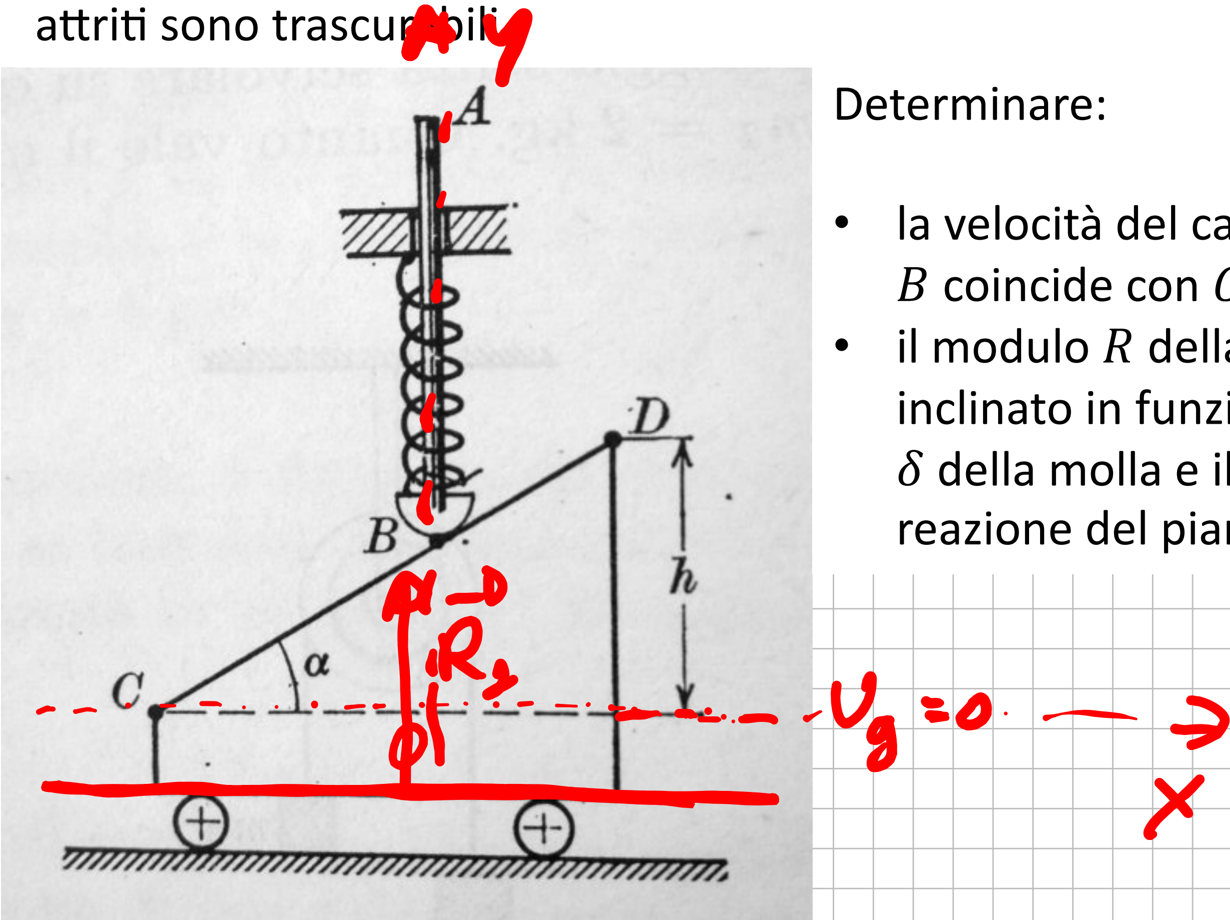
$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g \sin \alpha_1 - \frac{1}{2} m_1 a - T \\ m_2 a = -m_2 g \sin \alpha_2 - \frac{1}{2} m_2 a + T \end{cases}$$

$$(m_1 + m_2) a = (m_1 g \sin\alpha_1 - m_2 g \sin\alpha_2) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) a$$

$$a = \frac{2}{3} \frac{(m_1 \sin\alpha_1 - m_2 \sin\alpha_2) g}{m_1 + m_2}$$

Esercizio

Un’asta AB di massa m viene premuta da una molla sopra il piano inclinato di un carrello di massa M che può scorrere su un piano orizzontale. La molla ha costante elastica k e, quando l’estremo B coincide con il punto C, è a riposo. All’istante $t = 0$ l’estremo B coincide con D, le velocità sono nulle e il sistema è lasciato libero di muoversi. Tutti gli attriti sono trascurabili.



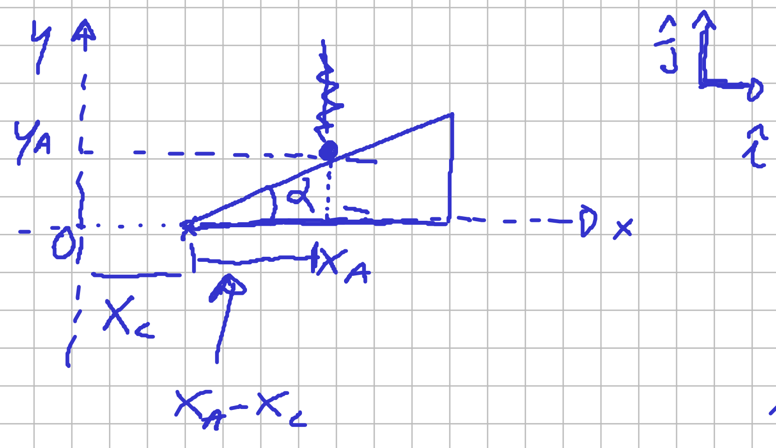
Determinare:

- la velocità del carrello nell’istante in cui B coincide con C;
- il modulo R della reazione del piano inclinato in funzione della compressione δ della molla e il modulo R_1 della reazione del piano orizzontale.

CARRELLO + ASTA

$$E_i = mgh + \frac{1}{2} k h^2$$

$$E_f = \frac{1}{2} m \dot{y}_A^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_c^2$$



$$\frac{y_A}{x_A - x_c} = Tg\alpha$$

$$y_A = Tg\alpha \left[x_A - x_c \right]$$

$$\dot{x}_A = 0$$

$$\dot{y}_A = Tg\alpha\, \dot{x}_A - Tg\alpha\, \dot{x}_c = -Tg\alpha\, \dot{x}_c$$

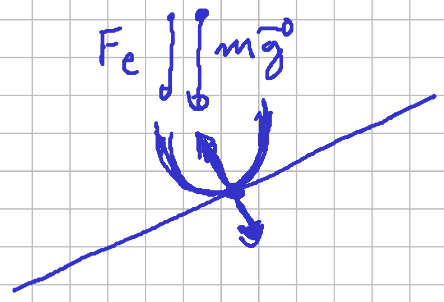
$$\ddot{y}_A = -Tg\alpha\, \ddot{x}_c$$

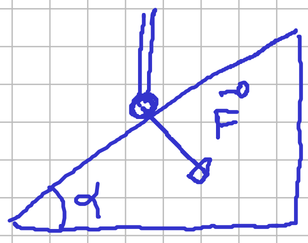
$$\dot{x}_{c,f} \qquad \dot{y}_{A,f}$$

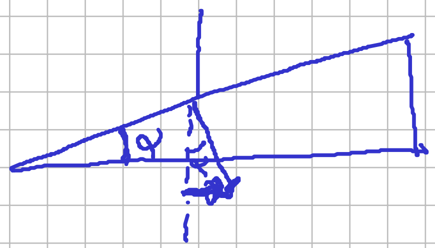
$$mgh + \frac{1}{2} k h^2 = \frac{1}{2} m \dot{y}_{A,f}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_{c,f}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m Tg^2\alpha\, x_{c,f}^2 + \frac{1}{2} M x_{c,f}^2$$

$$\dot{x}_{cp} = \sqrt{\frac{2gh + kh^2}{M + m\,Tg^2\alpha}}$$







$$F_x = F\sin\alpha$$

$$F_x = M a_c = M\ddot{x}_c$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{y}_A^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_c^2 + \underline{\underline{\frac{1}{2} k y_A^2}} + \underline{\underline{mg y_A}}$$

ELASTICA

$$\frac{dE}{dt} = mg\dot{y}_A + k y_A \dot{y}_A + m\dot{y}_A\ddot{y}_A + M\dot{x}_c\ddot{x}_c = 0$$

$$y_A = -Tg\alpha\,\dot{x}_c \qquad \ddot{y}_A = -Tg\alpha\,\ddot{x}_c$$

$$-mg\,Tg\alpha\,\dot{x}_c - k y_A Tg\alpha\,\dot{x}_c + m\,tg^2\alpha\,\dot{x}_c\ddot{x}_c + M\dot{x}_c\ddot{x}_c = 0$$

$$K y_A = K\delta$$

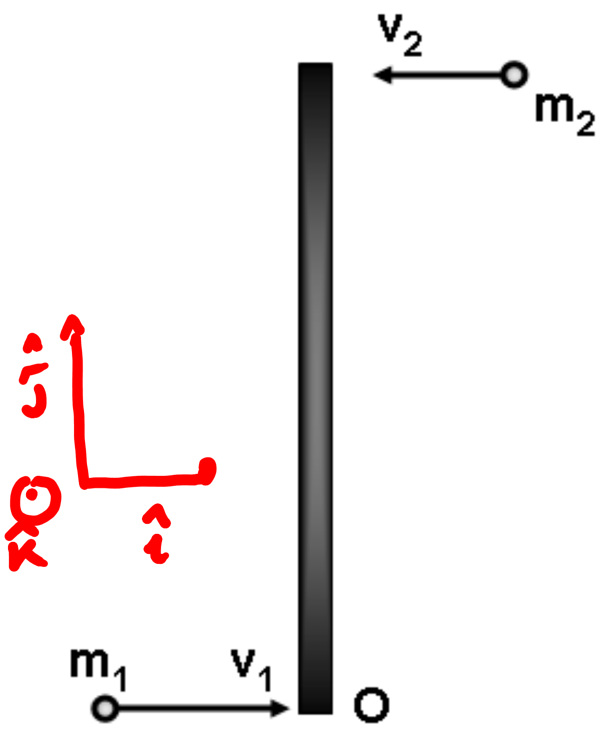
$$\ddot{x}_c \left(M + m \, tg^2\alpha \right) = \left(mg + K\delta \right) tg\alpha$$

$$\ddot{x}_c = \frac{\left(mg + K\delta \right) tg\alpha}{M + m \, tg^2\alpha}$$

$$F_x = M \ddot{x}_c \qquad F = \frac{F_x}{\sin\alpha}$$

$$F = \frac{\left(mg + K\delta \right) \cos\alpha}{\cos^2\alpha + \frac{m}{M} \sin^2\alpha}$$

Esercizio



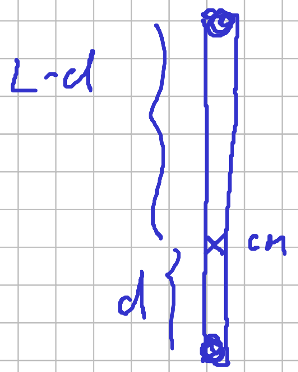
Due masse puntiformi $m_1 = 4.0\ kg$ e $m_2 = 1.5\ kg$ urtano da versi opposti un'asta di lunghezza $L = 4.2\ m$ e massa $M = 1.7\ kg$. Le due masse si muovono con velocità di modulo, rispettivamente, $v_1 = 4.2\ ms^{-2}$ e $v_2 = 1.6\ ms^{-2}$. L'urto (agli estremi dell'asta) è perfettamente anelastico e avviene nello stesso istante per entrambe le masse. Calcolare:

- la distanza del centro di massa del sistema dal punto O (estremo dell'asta);
- la velocità del centro di massa subito dopo l'urto;
- il modulo della velocità angolare del sistema subito dopo l'urto;
- l'energia meccanica dissipata nell'urto.

ASTA + 2 PUNTI MATERIALI

$$y_{cm} = \frac{M\frac{L}{2} + m_2 L}{m_1 + M + m_2} = \frac{L\left(m_2 + \frac{M}{2}\right)}{m_1 + m_2 + M} = 1.37\ m$$

$d = 1.37\ m$



CONSERVAZIONE QUANTITÀ DI MOTO

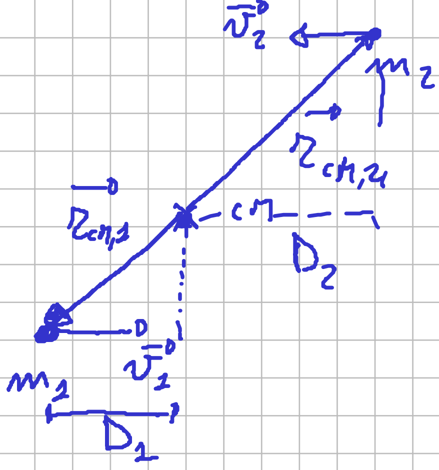
$$\vec{v}_1 = v_1\,\hat{i}$$

$$\vec{v}_2 = -v_2\,\hat{i}$$

$$\vec{P}_{sis,i} = m_1 v_1\,\hat{i} - m_2 v_2\,\hat{i} = (m_1 v_1 - m_2 v_2)\,\hat{i}$$

$$\vec{P}_{sis,f} = m_{TOT}\,\vec{v}_{cm} = (m_1 + m_2 + M)\,v_{cm}\,\hat{i}$$

$v_{cm} = 2\ m\ s^{-1}$



$$\vec{r}_{cm,1} = -D_1 \hat{i} - d\hat{j}$$

$$\vec{r}_{cm,2} = D_2 \hat{i} + (L-d)\hat{j}$$

$$\vec{v}_1 = v_1 \hat{i}$$

$$\vec{v}_2 = -v_2 \hat{i}$$

$$\vec{L}_{cm,i} = \vec{r}_{cm,1} \times (m_1 \vec{v}_1) + \vec{r}_{cm,2} \times (m_2 \vec{v}_2) =$$

$$= m_1 d v_1 \hat{k} + m_2 (L-d) v_2 \hat{k}$$

$$\vec{L}_{cm,f} = I_{cm} \omega \hat{k}$$

$$\vec{L}_{cm,f} = \vec{L}_{cm,i}$$

$$\Rightarrow \quad I_{cm} \omega = m_1 d v_1 + m_2 (L-d) v_2$$

$$\omega = \frac{m_1 d v_1 + m_2 (L-d) v_2}{I_{cm}}$$

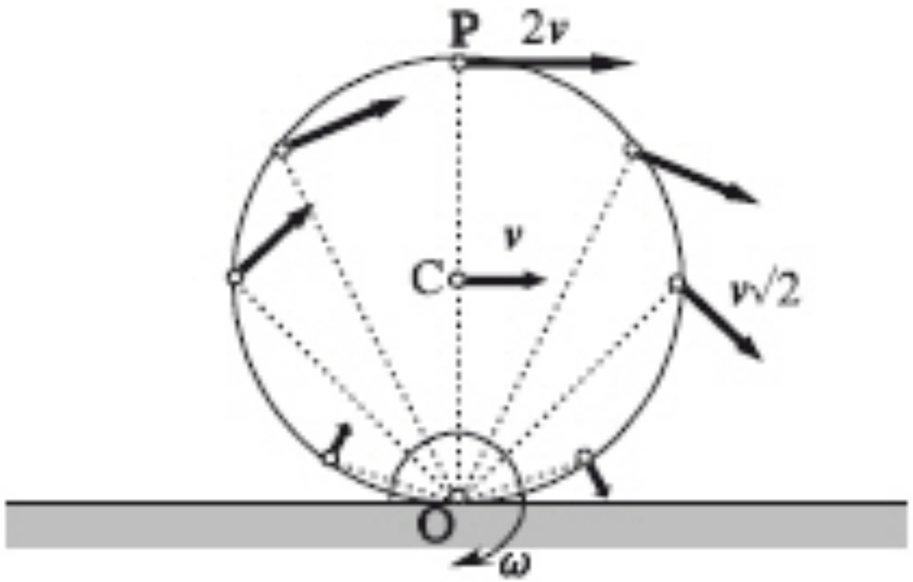
$$\underline{I_{cm} = \frac{M L^2}{12} + \left(\frac{L}{2} - d\right)^2 M + m_1 d^2 + m_2 (L-d)^2}$$

$$\omega = 1.4 \quad rad\ s^{-1}$$

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$E_f = \frac{1}{2} m_{Tot} v_{cm}^2 + \frac{I_{cm}}{2} \omega^2$$

Energia cinetica, momento angolare e punto di contatto nel rotolamento



Nel moto di rotolamento il punto di contatto P ha velocità nulla e può essere considerato come un asse (fisso) istantaneo di rotazione. Abbiamo:

$$K = \frac{I_P}{2}\omega^2$$

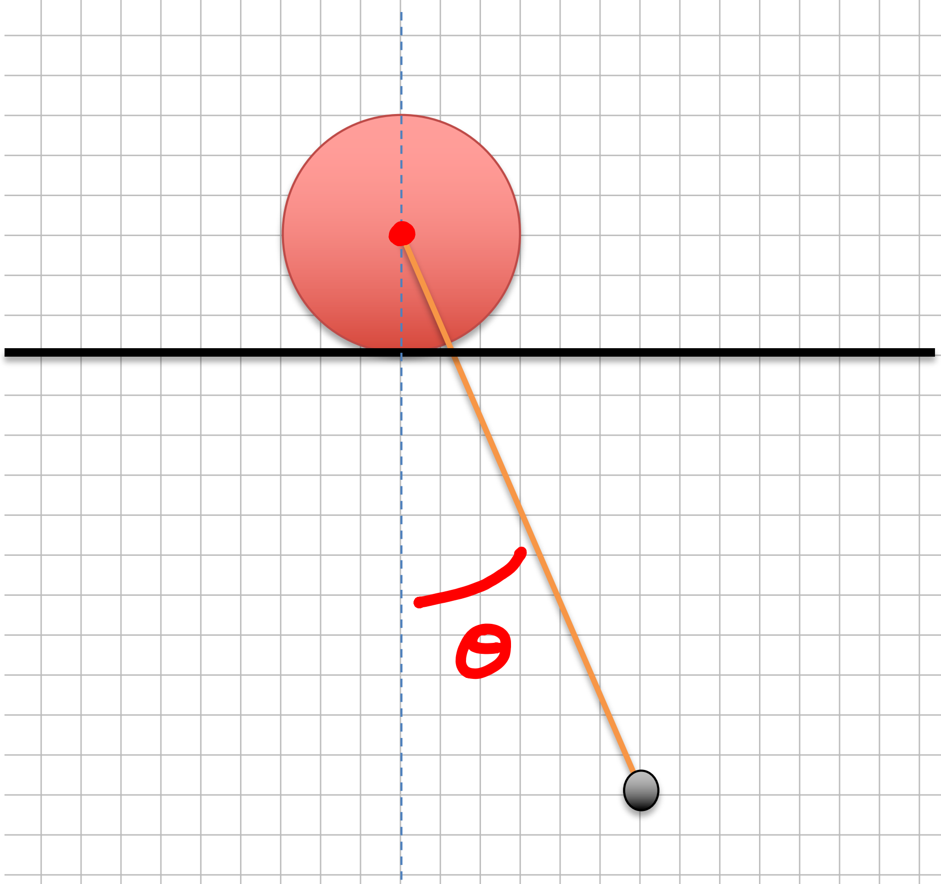
$$\vec{L}_P = I_P\vec{\omega}$$

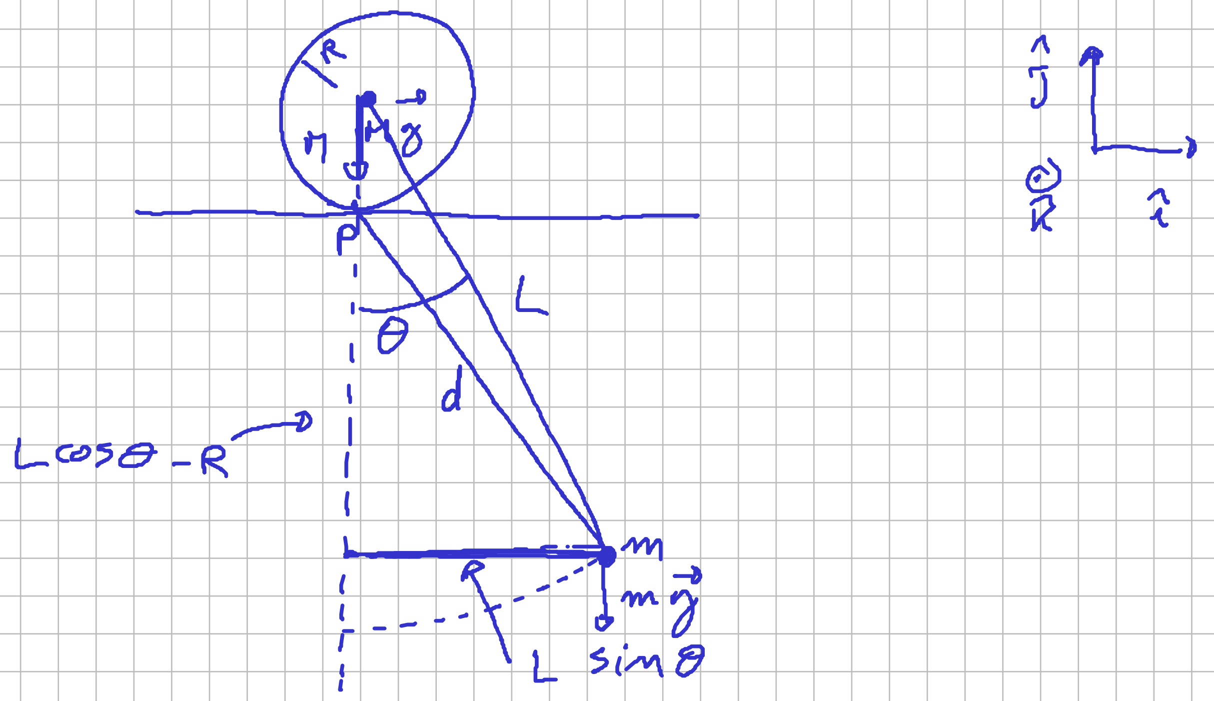
Esercizio

Un cilindro omogeneo di massa M e raggio R può rotolare senza strisciare su un piano orizzontale. Al centro del cilindro è fissata un'asta rigida e priva di massa, lunga L, alla cui estremità è vincolata una massa puntiforme di massa m. L'asta viene spostata in modo da formare un angolo θ con la verticale.

Determinare:

- l'accelerazione angolare $\ddot{\theta}$ in funzione di θ,
- il periodo delle piccole oscillazioni.





$$I_P = I_{P,DISCO} + I_{P,PUNTO}$$

$$I_{DISCO} = \frac{1}{2} M R^2 \qquad I_{P,DISCO} = I_{DISCO} + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2$$

$$I_{P,PUNTO} = m\, d^2$$

$$d^2 = (L\cos\theta - R)^2 + L^2 \sin^2\theta =$$

$$= L^2\cos^2\theta + R^2 - 2RL\cos\theta + L^2\sin^2\theta =$$

$$= L^2 + R^2 - 2RL\cos\theta$$

$$\underline{I_P = \frac{3}{2} MR^2 + m\left[L^2 + R^2 - 2RL\cos\theta\right]}$$

$$L_P = I_P(\theta)\,\dot{\theta}$$

$$\frac{dL_p}{dt} = \dot{I}_p(\theta)\,\underline{\underline{\dot{\theta}}} + I_p(\theta)\,\ddot{\theta}$$

$$\dot{I}_p = 2mRL\sin\theta\,\underline{\underline{\dot{\theta}}}$$

$$\frac{dL_p}{dt} = 2mRL\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + I_p(\theta)\,\ddot{\theta}$$

$$\tau_p = -mgL\sin\theta$$

$$\underline{I_p(\theta)\,\ddot{\theta} + 2mRL\sin\theta\,\dot{\theta}^2 = -mgL\sin\theta}$$

$\theta \to 0$ $\qquad \sin\theta \simeq \theta \qquad \cos\theta \simeq 1$

$$\sin\theta\,\dot{\theta}^2 \to 0$$

$$I_p(\theta)\,\ddot{\theta} + mgL\theta = 0$$

$$I_p = \frac{3}{2}MR^2 + m(L-R)^2$$

(NEL CASO DI PICCOLI ANGOLI)

$$\ddot{\theta} + \frac{mgL}{I_p}\theta = 0$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{mgL}{I_P}} = \sqrt{\frac{mgL}{\frac{3}{2}MR^2 + m(L-R)^2}}$$ (PULSAZIONE?)

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}MR^2 + m(L-R)^2}{mgL}}$$

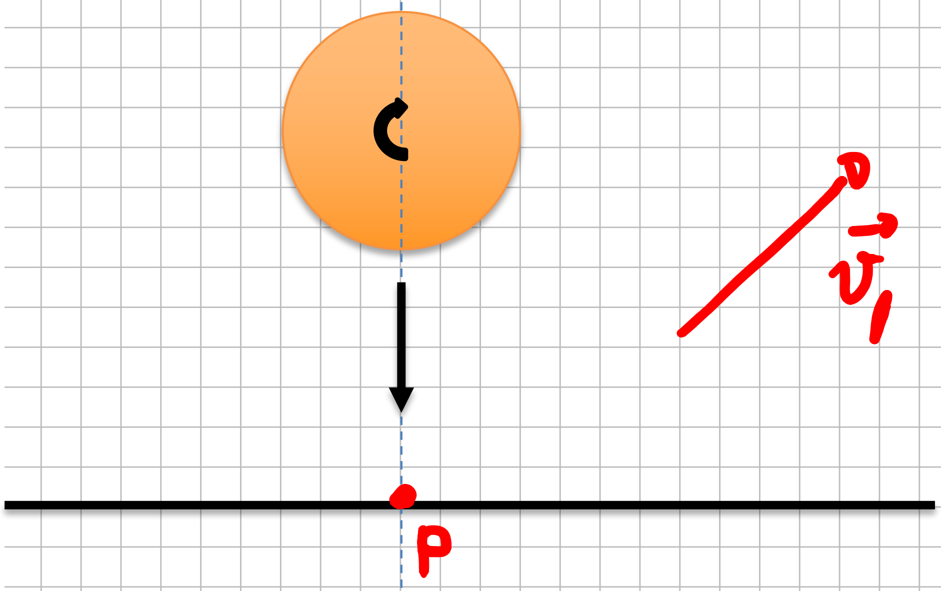
Esercizio

Un disco di raggio R e massa M ruota attorno all'asse passante dal centro di massa con velocità angolare di modulo ω_i e trasla con velocità $v_{CM,i}$. Al tempo $t = 0$ il disco urta una parete. La velocità iniziale del disco è normale alla parete. Supponendo che:

- l'urto sia istantaneo;
- l'urto sia elastico;
- durante l'urto ci sia attrito statico tra disco e parete.

Determinare:

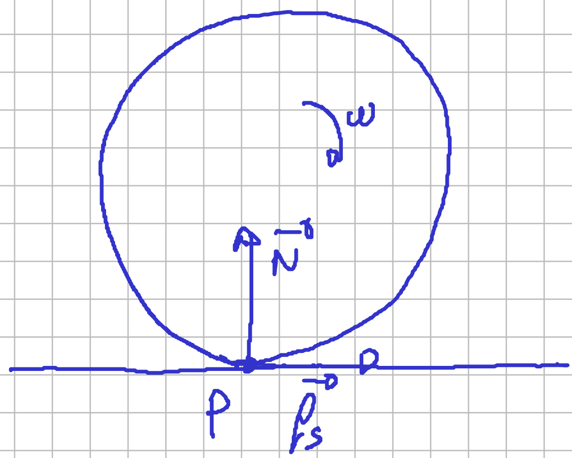
- La velocità angolare finale del disco.
- La velocità finale del centro di massa.
- L'angolo di riflessione.

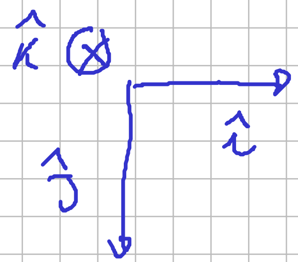


$$E_i = \frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{I_{cm}}{2} \omega_i^2$$

$$E_f = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{I_{cm}}{2} \omega_f^2$$

DISCO ROTANTE





$$\vec{N} = -N\hat{j}$$

$$I_N = -I_N\hat{j}$$

(IMPULSO DELLA FORZA NORMALE)

$$v_{f,y}^2 = v_i^2$$

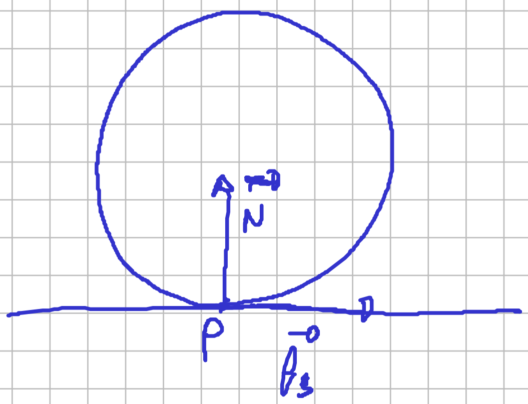
$$E_i = \frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\, \omega_i^2 = \frac{1}{2} m v_{fx}^2 + \frac{1}{2} m v_{fy}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\, \omega_f^2$$

$$= \frac{1}{2} m v_{fx}^2 + \frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\, \omega_f^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{I_{cm}}{2} \omega_i^2 = \frac{1}{2} m v_{fx}^2 + \frac{I_{cm}}{2} \omega_f^2$$

$$v_{f,x} = \omega_f R$$

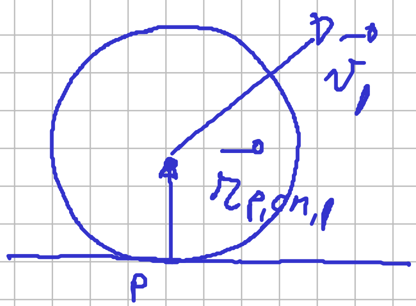
$$\omega_f = \frac{\omega_i}{3} \qquad v_{fx} = \frac{\omega_i}{3} R$$



$$\vec{\tau}_P = 0 \Rightarrow$$ MOMENTO ANGOLARE RISPETTO A P SÍ CONSERVA

$$\vec{L}_{P_i} = I_{cm}\,\vec{\omega}_i$$

$$\vec{L}_{P,f} = I_{cm}\,\vec{\omega}_f + \underline{\vec{r}_{P,cm,f} \times m\vec{v}_f}$$



$$\vec{r}_{P,cm} = -R\,\hat{J}$$

$$\vec{v}_f = v_{fx}\,\hat{i} + v_{fy}\,\hat{J} =$$

$$= v_{fx}\,\hat{i} + v_i\,\hat{J}$$

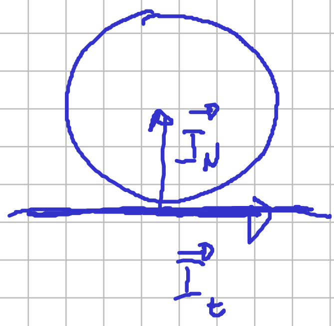
$$\vec{r}_{P,cm} \times (m\vec{v}_f) = mR\,v_{f,x}\,\hat{K}$$

$$I_{cm}\,\omega_i = I_{cm}\,\omega_f + mR\,v_{f,x}$$

$$v_{f x} = \omega_f R$$

$$\omega_f = \frac{\omega_i}{3}$$

$$\Delta \vec{P} = \vec{I}_N + \vec{I}_t$$



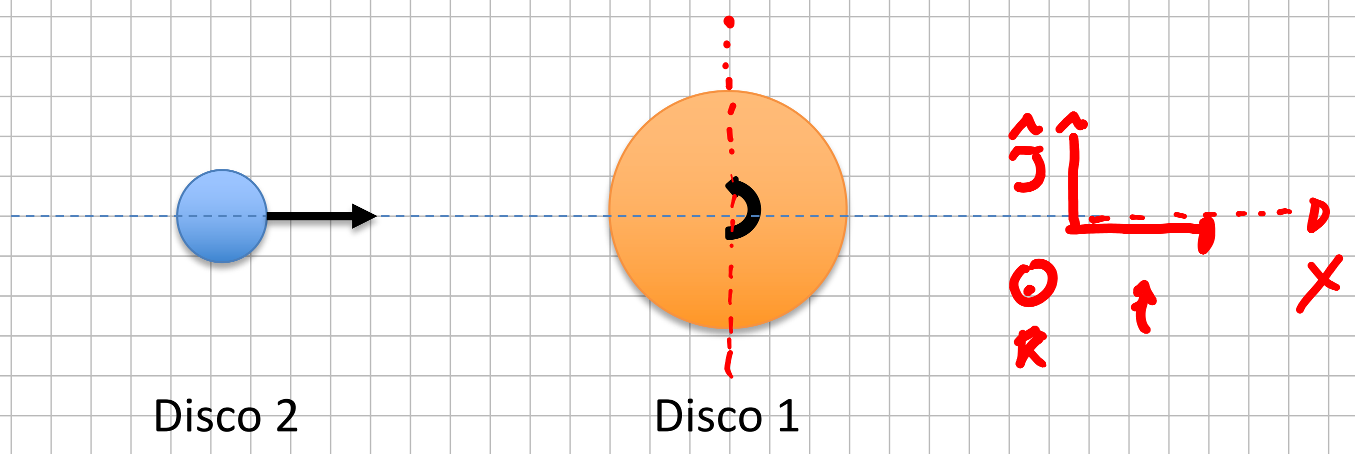
$$\Delta \vec{L} = \vec{J}_t$$

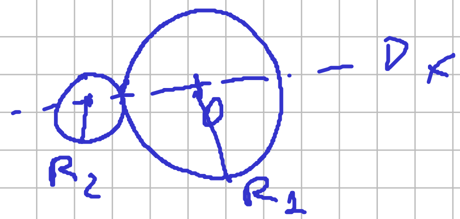
Esercizio

Siano dati due dischi omogenei:

- **Disco 1:** massa M_1, raggio R_1, che ruota attorno al proprio centro di massa con velocità angolare ω_1. Il suo centro di massa è inizialmente a riposo.
- **Disco 2:** massa M_2, raggio R_2, che trasla, senza ruotare, con velocità v_2 diretta lungo la congiungente i centri dei dischi.

I due dischi collidono (urto centrale istantaneo) rimando "incollati", formando cioè un unico corpo rigido. Determinare, per questo nuovo corpo rigido, la velocità finale del centro di massa e la velocità angolare rispetto al centro di massa.





$y_{cm} = 0$ $\qquad$ $x_{cm} = -\dfrac{(R_1+R_2)M_2}{M_1+M_2}$

$$(M_1+M_2)\, v_{cm,x} = M_2 v_2$$

$$v_{cm,x} = \frac{M_2}{M_1+M_2} v_2 \qquad v_{cm,y} = 0$$

MOMENTO ANGOLARE INIZIALE

DISCO 1 :

$$\vec{L}_{1,\,SPIN} = I_1 \vec{\omega}_1 \qquad I_1 = \frac{1}{2} M_1 R_1^2$$

$$\vec{L}_{1,\,ORBITALE} = 0$$

DISCO 2 :

$$\vec{L}_{2,\,SPIN} = 0$$

$$\vec{L}_{2,\,ORBITALE} = 0$$

$$I_p = I_1 + I_2 + M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2$$

$$I_1 = \frac{1}{2} M_1 R_1^2 \qquad I_2 = \frac{1}{2} M_2 R_2^2$$

$$r_1 = \frac{(R_1 + R_2) M_2}{M_1 + M_2} \qquad r_2 = (R_1 + R_2) - \frac{(R_1 + R_2)}{M_1 + M_2} M_2$$

$$I_p = \frac{1}{2} M_1 R_1^2 + \frac{1}{2} M_2 R_2^2 + \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (R_1 + R_2)^2$$

$$\vec{L}_p = I_p \vec{\Omega} = \vec{L}_i = I_1 \vec{\omega}_1$$

$$\Omega = \frac{I_1 \omega}{I_p} = \frac{\frac{1}{2} M_1 R_1^2 \omega_1}{\frac{1}{2} M_1 R_1^2 + \frac{1}{2} M_2 R_2^2 + \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (R_1 + R_2)^2}$$

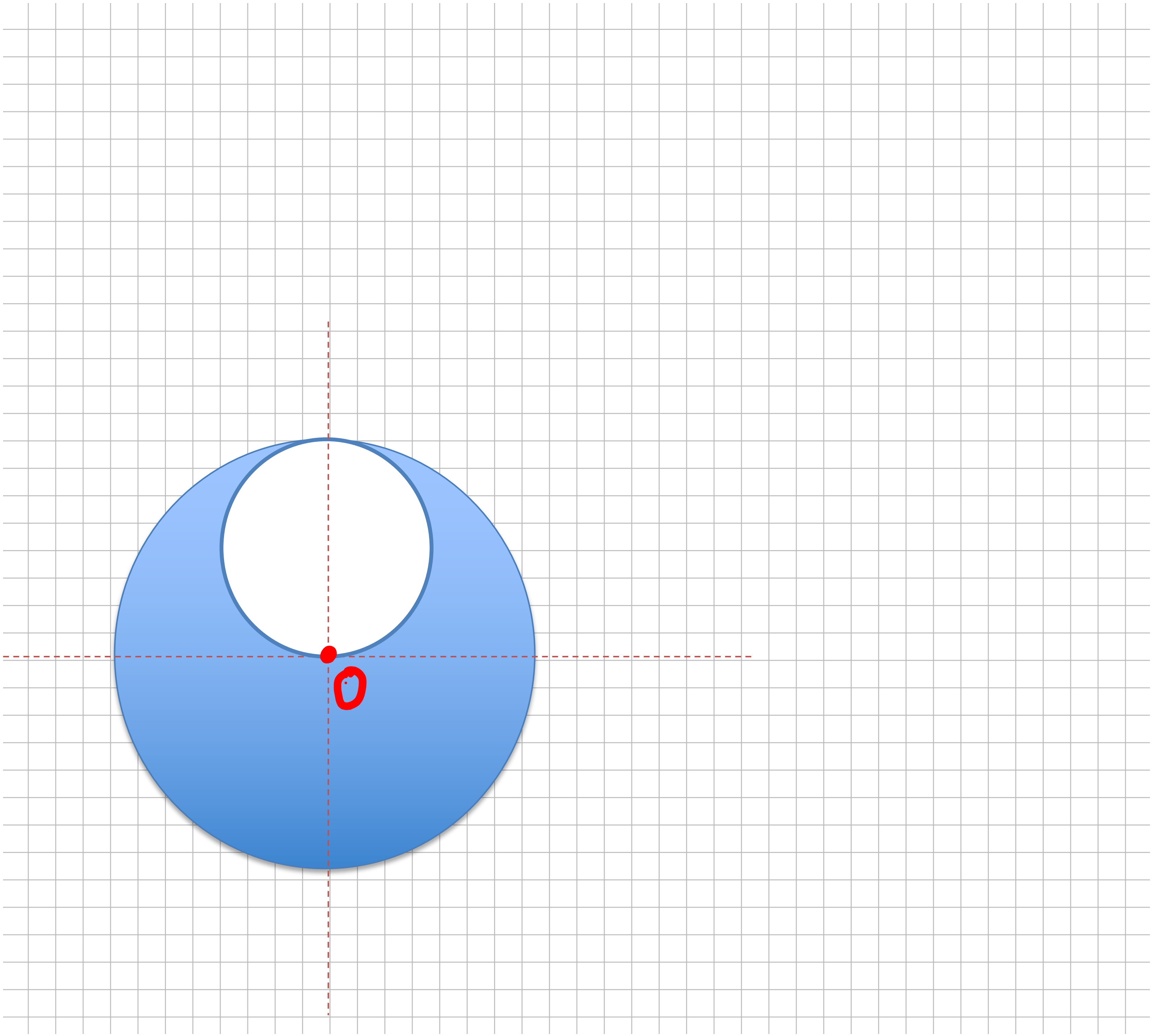
Esercizio

Consideriamo un disco omogeneo di raggio R e massa M. Dal disco viene rimosso del materiale, praticando un foro circolare avente:

- raggio $r_{\mathrm{foro}} = \frac{R}{2}$,
- centro posto lungo una direzione passante per il centro del disco e a distanza $d = \frac{R}{2}$ dal centro.

Determinare:

1. il momento di inerzia del disco forato rispetto all'asse perpendicolare al piano passante per il centro geometrico O);
2. la posizione del centro di massa del disco forato rispetto a O;
3. il momento di inerzia del disco forato rispetto al suo centro di massa.


O

1. Calcolo del Momento di Inerzia rispetto al Centro Geometrico O

1.1 Disco Intero

Il momento di inerzia di un disco omogeneo, di massa M e raggio R, rispetto ad un asse perpendicolare al piano passante per il centro è

$$I_{\text{disco}} = \frac{1}{2}\, M\, R^2.$$

1.2 Materiale Rimosso (Foro)

L'area del disco intero è

$$A_{\text{disco}} = \pi R^2,$$

mentre l'area del foro è

$$A_{\text{foro}} = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}.$$

La densità superficiale (massa per unità di superficie) è dunque

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}\,,$$

e la massa rimossa è

$$m_{\text{foro}} = \sigma\, A_{\text{foro}} = \frac{M}{4}\,.$$

Il momento di inerzia di un disco (di massa m e raggio r) rispetto ad un asse perpendicolare al piano passante per il suo centro è

$$I_{\text{centro}} = \frac{1}{2}\, m\, r^2.$$

Applicando questo al foro, si ottiene

$$I_{\text{foro,centro}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{4} \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{4} \cdot \frac{R^2}{4} = \frac{M\, R^2}{32}\,.$$

Poiché il centro del foro è distante $d = \frac{R}{2}$ dal centro O del disco, per il teorema degli assi paralleli il contributo aggiuntivo è

$$m_{\text{foro}}\, d^2 = \frac{M}{4} \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{M\, R^2}{16}\,.$$

Pertanto il momento di inerzia del materiale rimosso rispetto a O è

$$I_{\text{foro}} = I_{\text{foro,centro}} + m_{\text{foro}}\, d^2 = \frac{M\, R^2}{32} + \frac{M\, R^2}{16} = \frac{M\, R^2}{32} + \frac{2\, M\, R^2}{32} = \frac{3\, M\, R^2}{32}\,.$$

1.3 Disco Forato

Utilizzando il principio di sottrazione, il momento di inerzia del disco forato rispetto all'asse perpendicolare che passa per O è

$$I_O = I_{\text{disco}} - I_{\text{foro}} = \frac{1}{2}\, M\, R^2 - \frac{3\, M\, R^2}{32} = \frac{13\, M\, R^2}{32}\,.$$

2. Posizione del Centro di Massa

Per il disco intero la massa è M e il centro di massa è in O. Dopo aver rimosso la massa di materiale

$$m_{\text{foro}} = \frac{M}{4}\,,$$

la massa totale del disco forato diventa

$$M_{\text{forato}} = M - \frac{M}{4} = \frac{3M}{4}\,.$$

Poniamo:

- O: centro geometrico del disco originale (massa M), origine del sistema di coordinate,
- l'asse x passante da O e dal centro del foro,
- $d = \frac{R}{2}$, la coordinata del centro del foro.

La coordinata x del centro di massa C del disco forato (considerando il contributo negativo del materiale rimosso) è data da

$$x_{\text{CM}} = \frac{M \cdot 0 - m_{\text{foro}} \cdot d}{M_{\text{forato}}} = -\frac{\frac{M}{4} \cdot \frac{R}{2}}{\frac{3M}{4}} = -\frac{M\,R}{8} \cdot \frac{4}{3M} = -\frac{R}{6}\,.$$

Il segno negativo indica che il nuovo centro di massa si trova nel verso opposto a quello in cui è posizionato il centro del foro. La distanza tra il nuovo centro di massa e il punto O è

$$e = \frac{R}{6}\,.$$

3. Momento d'Inerzia Rispetto al Centro di Massa

Vogliamo ora determinare il momento di inerzia del disco forato rispetto al suo centro di massa. Indichiamo con e la distanza tra il centro geometrico O e il centro di massa CM, trovata precedentemente come:

$$e = \frac{R}{6}.$$

La massa totale del disco forato è:

$$M_{\text{tot}} = \frac{3M}{4}.$$

Applichiamo il teorema degli assi paralleli per passare dal momento di inerzia rispetto a O, già calcolato:

$$I_O = \frac{13}{32}MR^2,$$

a quello rispetto al centro di massa:

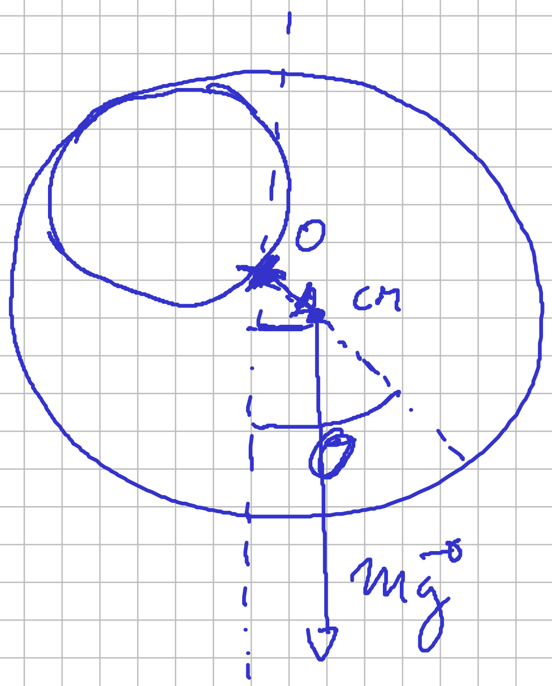
$$I_{\text{CM}} = I_O - M_{\text{tot}} \cdot e^2.$$

Sostituendo i valori:

$$I_{\text{CM}} = \frac{13}{32}MR^2 - \frac{3M}{4} \cdot \left(\frac{R}{6}\right)^2 = \frac{13}{32}MR^2 - \frac{3M}{4} \cdot \frac{R^2}{36} = \frac{37}{96}MR^2.$$

Esercizio

Il corpo rigido del problema precedente oscilla rispetto all'asse passante dal centro geometrico. In assenza di ulteriori forze dissipative, determinare il periodo delle piccole oscillazioni.



$$I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\frac{R}{5}\sin\theta \quad * \qquad \sin\theta \simeq \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{24\cancel{m}gR}{13\cancel{m}R^{\cancel{2}}6}\theta = 0 \quad **$$

$$\uparrow$$

$$\frac{4}{13}\frac{g}{R}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt} + \frac{4}{13}\frac{g}{R}\theta = 0$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{4}{13}\frac{g}{R}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{13R}{4g}}$$

Esercizio

Giri della morte

$r_{CILINDRO} << R$ ROTOLAMENTO PURO

$I_{CILINDR} = \frac{1}{2} M r^2$

$K_{TOT} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_{CIL.} \omega^2$

$v = \omega r$

$\omega = \frac{v}{R}$

$K_{TOT} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{4} M v^2 = \frac{3}{4} M v^2$

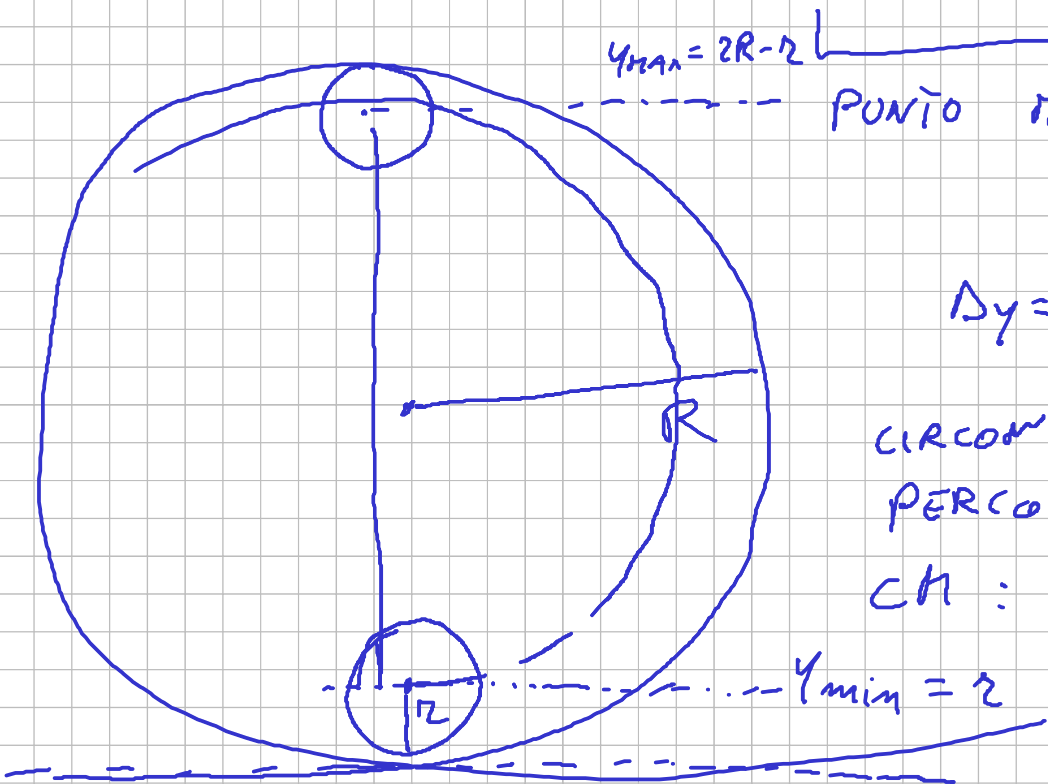
$\frac{v_{APICE}^2}{R} = g$

$K_{APICE} = \frac{3}{4} MgR$ $U_{APICE} = 2 MgR$

$E = Mgh$

$Mgh = 2MgR + \frac{3}{4} MgR = \frac{11}{4} MgR$

$h = \frac{11}{4} R$ $\qquad$ $h = \frac{5}{2} R$



PUNTO MATERIALE

$\Delta y = 2(R - r)$

CIRCONFERENZA PERCORSA DAL CM : $R - r$

$$\boxed{v^2 = g\,(R - r)}$$

(CONDIZIONE CONTATTO)

$$K = \frac{3}{4} M v^2$$

$$K_{APICE} = \frac{3}{4} M g\,(R - r)$$

$$U_{APICE} = M g\, 2(R - r)$$

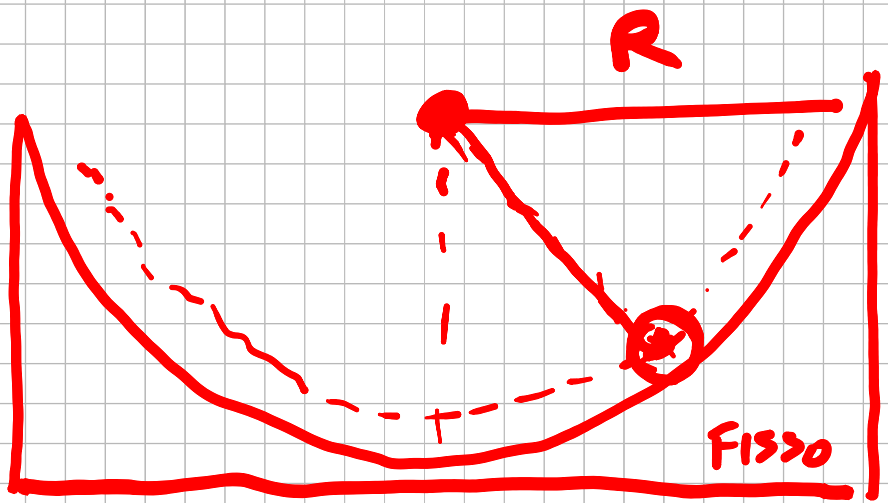
$$U_{INIZ.} = M g h$$

$\mu_s = 0.1$

$$h = \frac{11}{4}(R - r)$$

esercizio

Una sfera solida di massa m e raggio r oscilla, rotolando senza slittare, lungo un profilo cilindrico fisso di raggio R. Non agiscono ulteriori forze dissipative. Determinare il periodo T delle piccole oscillazioni.



$$R_{EFF} = R - r$$

$$v = (R-r)\dot\theta$$

$$K_{TRAS} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (R-r)\dot\theta^2$$

$$K_{ROT} = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad I = \frac{2}{5} m r^2$$

$$v = r\omega = (R-r)\dot\theta$$

$$K_{ROT} = \frac{1}{5} m v^2 = \frac{1}{5} m (R-r)^2 \dot\theta^2$$

$$K = K_{TRAS} + K_{ROT} = \frac{7}{10} m (R-r)^2 \dot\theta^2$$

$$U = mg(R-r)(1-\cos\theta)$$

$$E = K+U = \frac{7}{10} m (R-r)^2 \dot\theta^2 + mg(R-r) \times$$
$$\times (1-\cos\theta)$$

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{7}{5} m (R-r)^2 \dot\theta \ddot\theta + mg(R-r)\sin\theta\,\dot\theta = 0$$

$$\frac{7}{5}(R-r)\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R-r)}\sin\theta = 0$$

$\sin\theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R-r)}\theta = 0$$

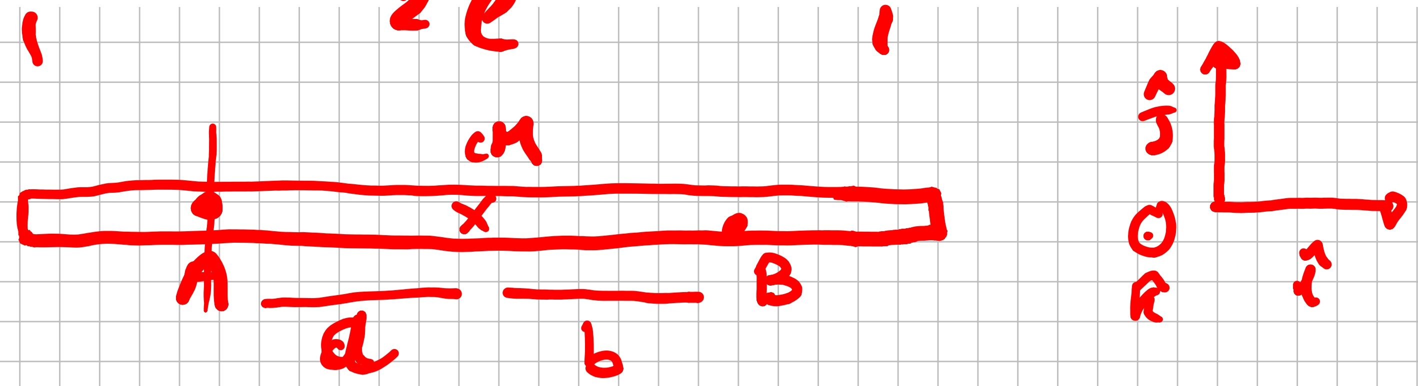
$$\Omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}} \qquad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

esercizio

IN ORIZZONTALE

Una sbarra omogenea di lunghezza $2l$ e massa m giace ~~su un piano orizzontale privo di attrito~~. La sbarra è incernierata in un punto A (fisso) che dista a dal centro di massa CM. La sbarra viene colpita da un impulso P in direzione perpendicolare alla sua lunghezza in un punto B che dista b da CM e, di conseguenza, $a + b$ da A. Determinare:

1. la velocità angolare ω impartita alla sbarra,
2. l'impulso trasmesso alla cerniera (cioè l'impulso della reazione al punto A),
3. il valore di a affinché l'impulso alla cerniera risulti nullo.



$$I_{CM} = \frac{1}{12} m (4)(\ell)^2 = \frac{m\ell^2}{3}$$

$$I_A = I_{CM} + ma^2 = \frac{m\ell^2}{3} + ma^2$$

SBARRA

$C.M = (a, 0)$

$B = (a+b, 0)$

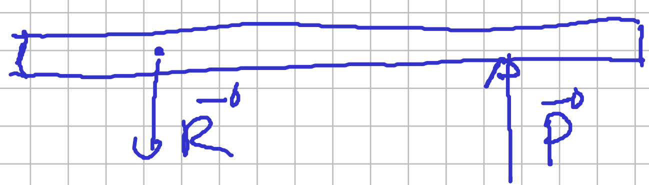
P IMPULSO

$J = P(a+b)$ IMPULSO ANGOLARE

$\Delta L_A = P(a+b)$ VAR. DEL MOMENTO ANGOLARE RISPETTO AD A

$I_A \omega = P(a+b)$

$$\omega = \frac{P(a+b)}{\frac{m\ell^2}{3} + ma^2} = \frac{3P(a+b)}{m(\ell^2 + 3a^2)}$$



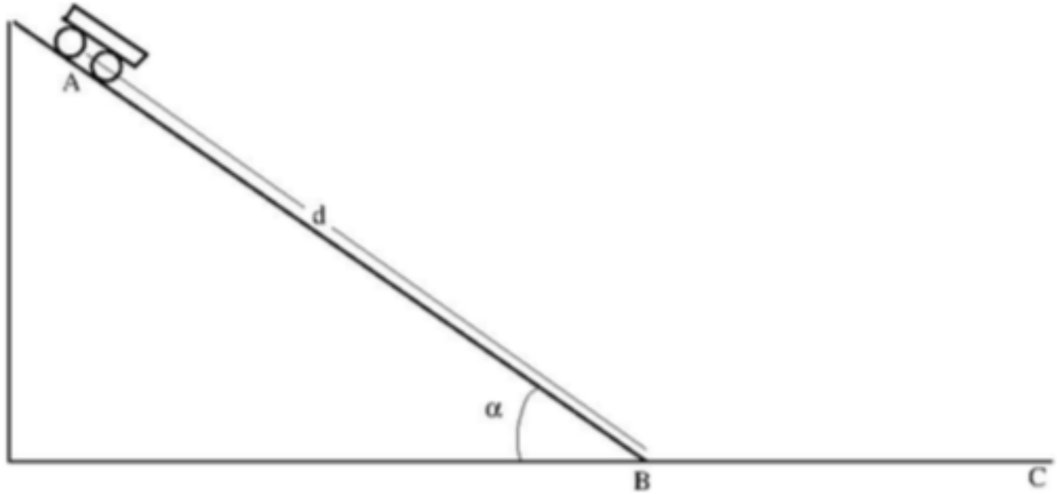
$$m\, \dot{v}_{cm} = P - R$$

$$\dot{v}_{cm} = \dot{\omega}\, a$$

$$R = P - m \dot{\omega} a = \frac{P\,(\ell^2 - 3ab)}{\ell^2 + 3a^2}$$

$$R = 0 \Rightarrow \qquad a = \frac{\ell^2}{3b}$$

Esercizio



Un carrello può essere schematizzato da 4 ruote, ciascuna di massa $m/4$ e raggio R, e da un pianale di massa m. Tale carrello, partendo da fermo nel punto A (in figura) scende lungo un piano inclinato scabro lungo d (con angolo α) con moto di puro rotolamento (supporre d molto maggiore della distanza tra le due ruote).

1.Calcolare la velocità, v e l'accelerazione a con cui il carrello arriva alla base del piano inclinato (punto B) e l'accelerazione che avrebbe avuto lo stesso carrello in assenza di attrito.
2.Giunto nel tratto orizzontale (punto B), il carrello viene fermato in un tempo Δt (nel punto C) per mezzo di un momento frenante di modulo M_f costante. Determinare M_f assumendo che, fino all'arresto, il moto sia sempre di puro rotolamento.
3.Calcolare il lavoro compiuto dalla forza frenante nel tratto BC per fermare il carrello.