TESTI D'ESAME CON SOLUZIONE

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

N.B.: NON MI PRENDO ASSOLUTAMENTE NESSUNA RESPONSABILITÀ SULLA CORRETTEZZA DEGLI ESERCIZI. LE UNICHE COSE CHE INVECE POSSO AFFERMARE SONO:

- TUTTI SONO STATI RICONTROLLATI SU MATLAB (COMANDI UTILI:
  - RLOCUS (SYS)
  - SISOTOOL
  - LTI VIEW
  - SYS = TF([1 --- 4], [2, --, 17]),) COEFF. NUM COEFF. DEN.
- TUTTI SONO STATI EFFETTIVAMENTE UTILIZZATI COME COMPITI DI ESAME NEGLI ANNI PASSATI

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480980509

1. CONTROLLARE LE PROPRIETÀ STRUTTURALI
2. PROGETTARE UN CONTROLLORE CHE STABILIZZI IL SISTEMA CON $\varepsilon_{\%} < 0.1$
3. BODE E NYQUIST

$$\mathcal{B} = [B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathcal{B}) = 0 \Longrightarrow \text{rank}(\mathcal{B}) < 3 \Longrightarrow$ NON CONTROLLABILE

$\text{rank}(\mathcal{B}) = 2 \Longrightarrow$ 2 STATI CONTROLLABILI

HO STABILIZZABILITÀ POICHÉ LO STATO INFLUENZATO DALL'AUTOVALORE NULLO HA FDT : $\frac{2u}{s}$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(\mathcal{O}) = 0 \Longrightarrow \text{rank}(\mathcal{O}) < 3 \Longrightarrow$ NON OSSERVABILE

IN COMPENSO RISULTA RILEVABILE

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

1. CONTROLLARE LE PROPRIETÀ STRUTTURALI
2. PROGETTARE UN CONTROLLORE CHE STABILIZZI IL SISTEMA CON $\varepsilon_{\infty} < 0.1$
3. BODE E NYQUIST

$$\mathcal{B} = [B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathcal{B}) = 0 \Longrightarrow \text{rank}(\mathcal{B}) < 3 \Longrightarrow$ NON CONTROLLABILE

$\text{rank}(\mathcal{B}) = 2 \Longrightarrow$ 2 STATI CONTROLLABILI

HO STABILIZZABILITÀ POICHÉ LO STATO INFLUENZATO DALL'AUTOVALORE NULLO HA FDT : $\frac{2u}{s}$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(\mathcal{C}) = 0 \Longrightarrow \text{rank}(\mathcal{C}) < 3 \Longrightarrow$ NON OSSERVABILE

IN COMPENSO RISULTA RILEVABILE

LA FDT QUINDI È:

$$C(sI-A)^{-1}B = C\begin{pmatrix} s+2 & -1 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}^{-1} B =$$

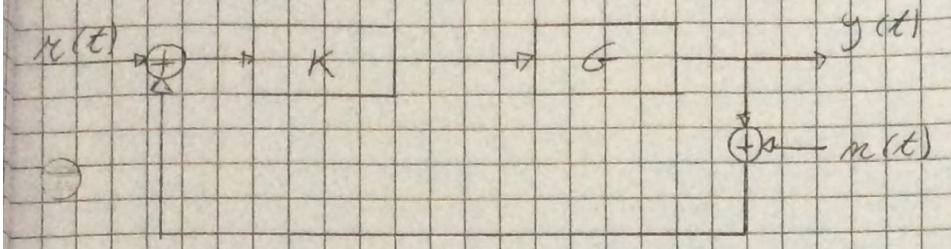
$$= C\begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} \\ 0 \\ \frac{2}{s} \end{pmatrix} = \frac{2}{s}$$

PER STABILIZZARE OVVIAMENTE BASTA UN CONTROLLORE PROPORZIONALE. PER L'ERRORE:

$$\varepsilon_* = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{2K} < 0.1 \Rightarrow K > \frac{1}{0.2} = 5$$

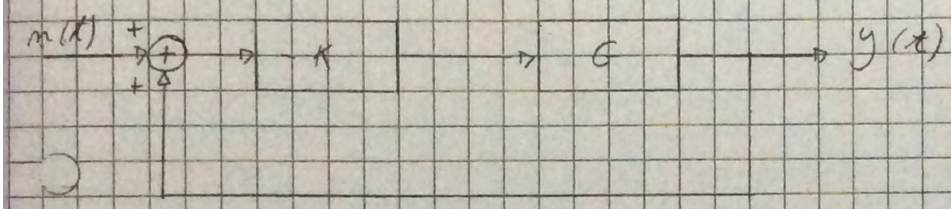
BODE E NYQUIST SONO BANALI ENTRO IL DISEGNO.



$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

È POSSIBILE REIETTARE COMPLETAMENTE L'ERRORE DEI SENSORI SENZA DESTABILIZZARE IL SISTEMA?

PER LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI, POSSO STUDIARE SEPARATAMENTE $n(t)\,[r(t) = 0]$:



$$y = \frac{KG}{1+KG}\, n$$

SI SUPPONE CHE L'ERRORE DA REIETTARE SIA A GRADINO (SIMILE SAREBBE PER GLI ALTRI SEGNALI CANONICI DI INGRESSO)

$$\frac{KG}{1+KG} = \frac{N N_K}{\cancel{D D_K}} \frac{1}{\frac{N N_K + D D_K}{\cancel{D D_K}}} = \frac{N N_K}{N N_K + D D_K}$$

UTILIZZANDO, SUPPOSTA LA STABILITÀ, IL VALORE FINALE:

$$\lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{N N_K}{N N_K + D D_K} \frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s \to 0} \frac{N N_K}{N N_K + D D_K}$$

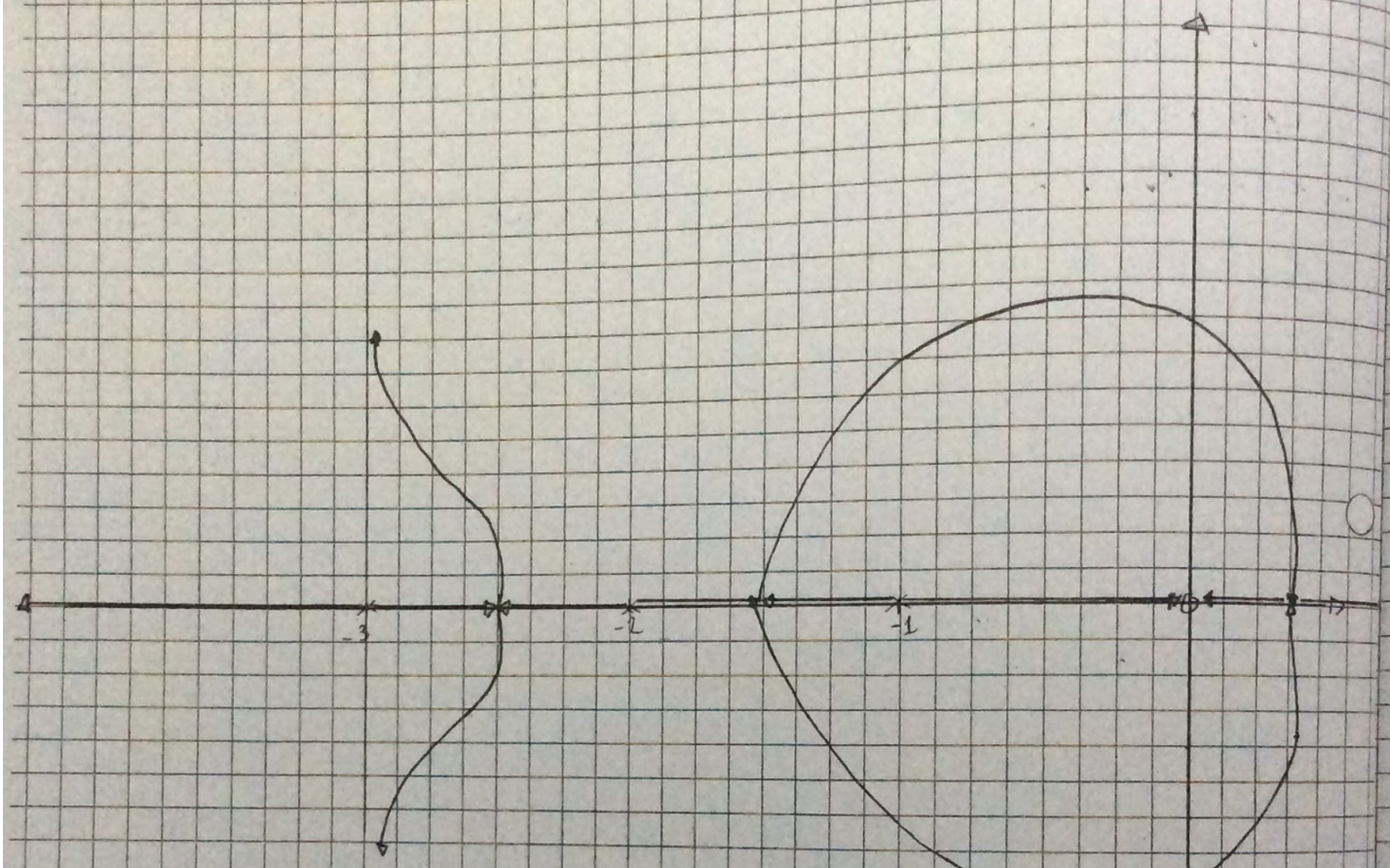
AL FINE DI REIETTARE COMPLETAMENTE L'ERRORE QUINDI DEVO AVERE ALMENO UNO <u>ZERO</u> ALL'ORIGINE

SIA AD ESEMPIO IL CONTROLLORE:

$$K(s) = \frac{K \cdot s}{s+3}$$

$$G_K = \frac{K\,s}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$K>0$
$K<0$



INTERSEZIONE ASINTOTI $= \frac{-3-2-1}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

SICCOME ε_{ss} NON POTRÀ MAI ESSERE NULLO CONVIENE SCEGLIERE LA SOLUZIONE CHE MI DIMINUISCA L'ERRORE IL PIÙ POSSIBILE.

USO ROUTH

$$D_{CL} = K\cdot s + (s^2+s+2s+2)(s+3) =$$
$$= K\cdot s + (s^3+3s^2+2s+3s^2+9s+6) =$$
$$= s^3+6s^2+[11+K]s+6$$

$K > -11$

s^3	1	$11+K$	0
s^2	6	6	0
s	$K+10$	0	
1	6	0	

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

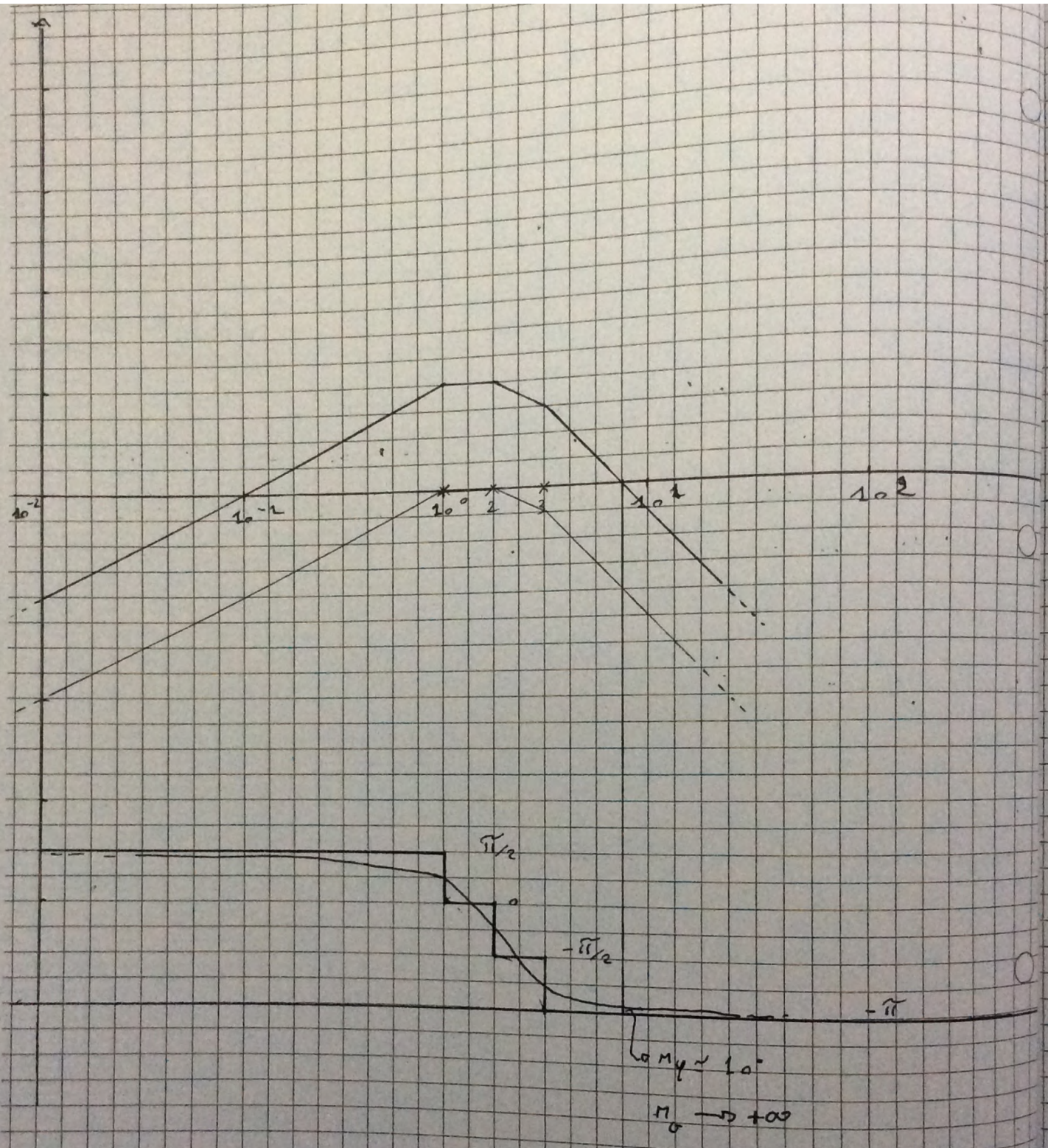
QUINDI $K > -10$

SONO COMUNQUE DA EVITARE K ECCESSIVAMENTE GRANDI POICHÈ IL POLO CHE STA A -1 SI AVVICINERÀ SEMPRE DI PIÙ ALLO ZERO FACENDOMI PERDERE ALL'INFINITO LA SUA STABILITÀ

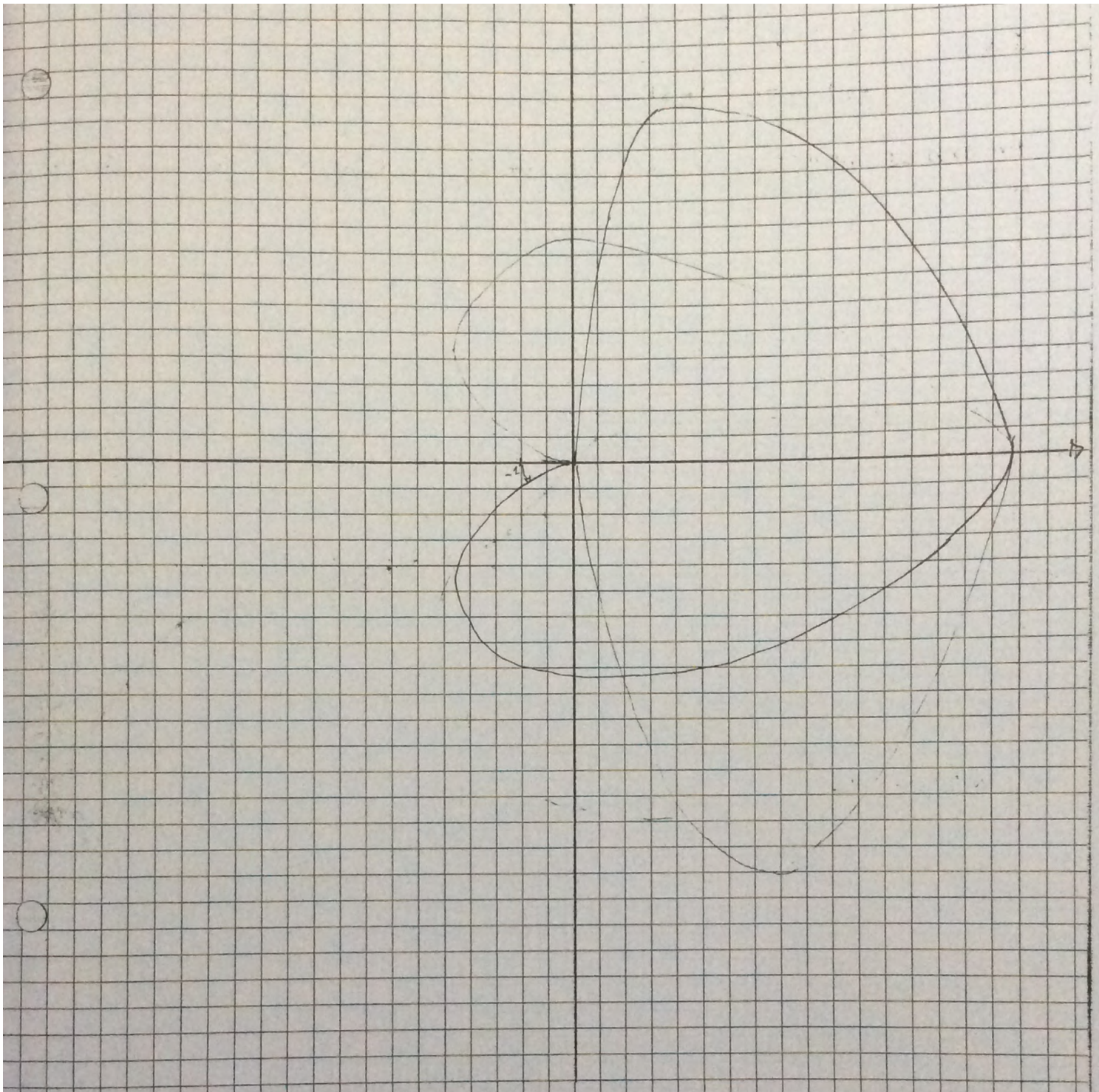
$$GK = \frac{K}{6} \frac{s}{(1+s)\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(1+\frac{s}{3}\right)}$$

SCELGO $K = 60 \Rightarrow K_p = 10 \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{11} \simeq 0.09$

GIÀ CHE CI SONO TRACCIO ANCHE BODE E NYQUIST



SG



A QUESTO PUNTO È INTERESSANTE CALCOLARE IL RITARDO MASSIMO INTRODUCIBILE AFFINCHÈ IL SISTEMA NON SI DESTABILIZZI.

UN RITARDO INTRODUCE UNO SFASAMENTO IN GRADI PARI:

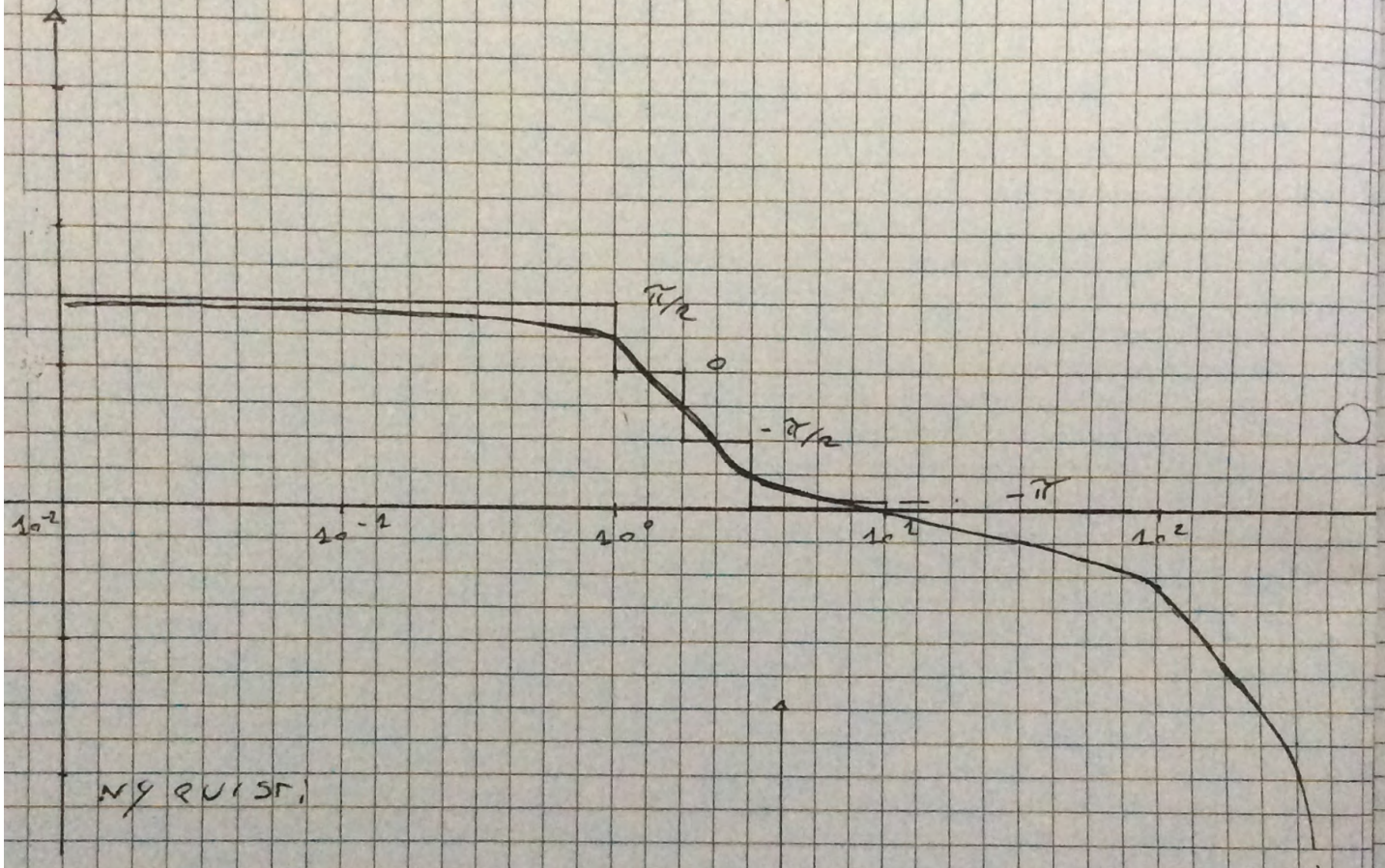
$$x = \frac{180}{\pi} T\omega \Big|_{\omega \cong \delta} \leq 10^\circ$$

DA CUI IL $T_{CRITICO} = T = \frac{10}{\delta} \frac{\pi}{180} \cong 0.02$

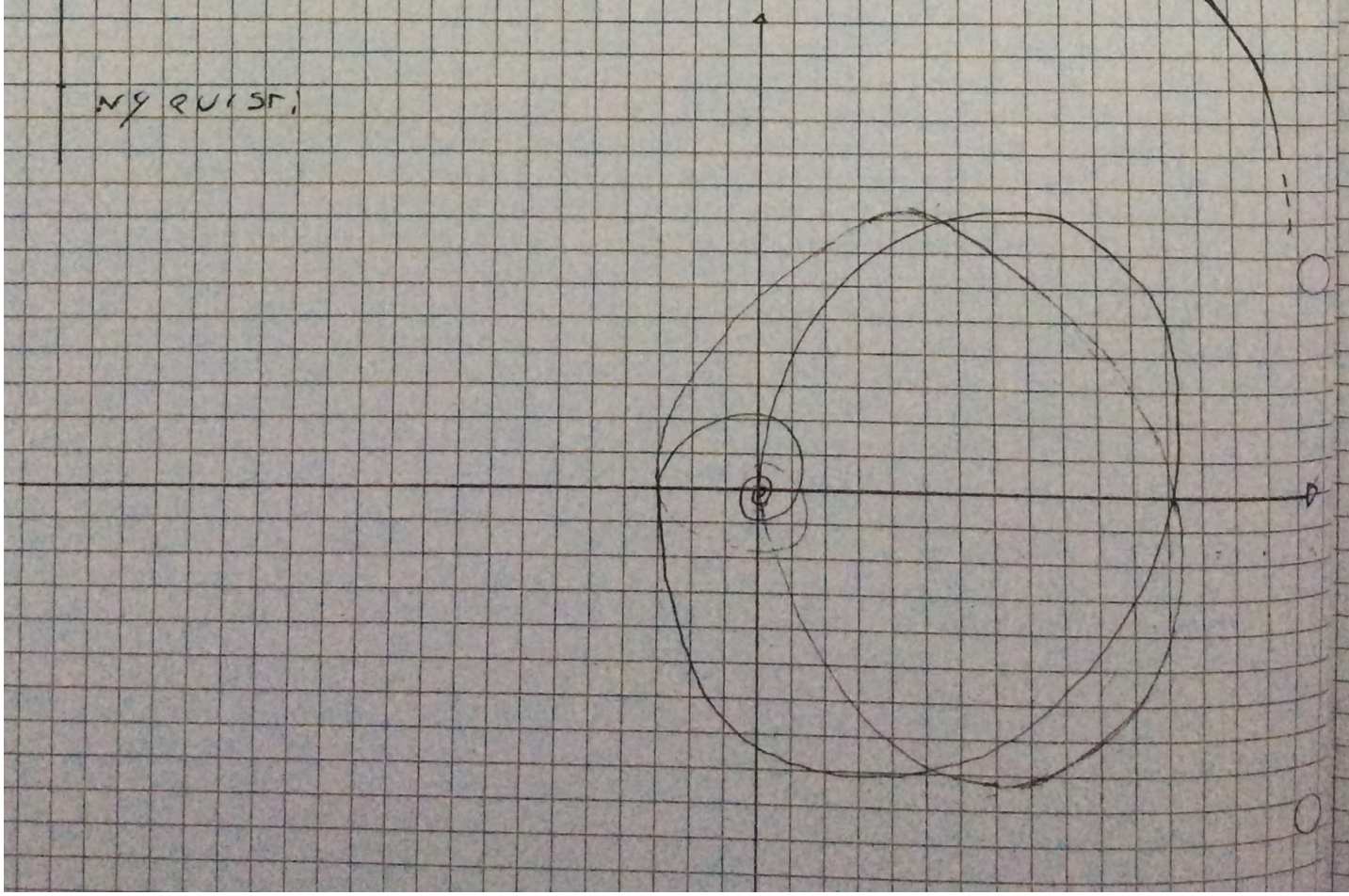
DISEGNO QUINDI BODE E NYQUIST DI

$$GK = \frac{K\,s\,e^{-0.02s}}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

DI BODE RIDISEGNO SOLO LA FASE, IL MODULO È IL MEDESIMO



NYQUIST

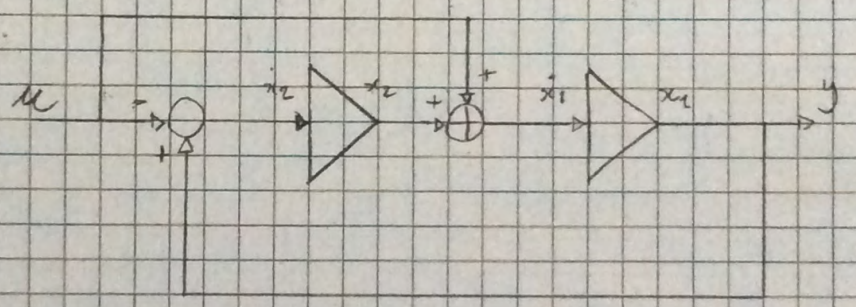


$$\ddot{y} - y = \dot{u} - u$$

1. TROVARE A, B, C, D
2. PROPRIETÀ STRUTTURALI
3. STABILIZZARE

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480980509

$$s^2 Y - Y = sU - U$$
$$\Downarrow$$
$$s^2 Y = Y + sU - U \Rightarrow Y = \frac{Y}{s^2} + \frac{U}{s} - \frac{U}{s^2} = \frac{1}{s}\left[U + \frac{1}{s}\left[Y - U\right]\right]$$



$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - u \end{aligned} \Rightarrow \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathcal{C}) \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(\mathcal{C}) = 2 \Rightarrow \text{OSSERVABILE}$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathcal{B}) = 0 \Rightarrow \text{rank}(\mathcal{B}) < 2 \Rightarrow \text{NON CONTROLLABILE}$$

POSSO PENSARE, TRAMITE UN CAMBIAMENTO DI BASE, DI PORTARMI IN FORMA DIAGONALE (O AL LIMITE JACOBIANA) PER VERIFICARE LA STABILIZZABILITÀ

CALCOLO AUTOVALORI

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \quad \begin{cases} \lambda_1 = +1 \Rightarrow x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = -1 \Rightarrow x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$T = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$CT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

QUINDI IL SISTEMA NON È STABILIZZABILE.

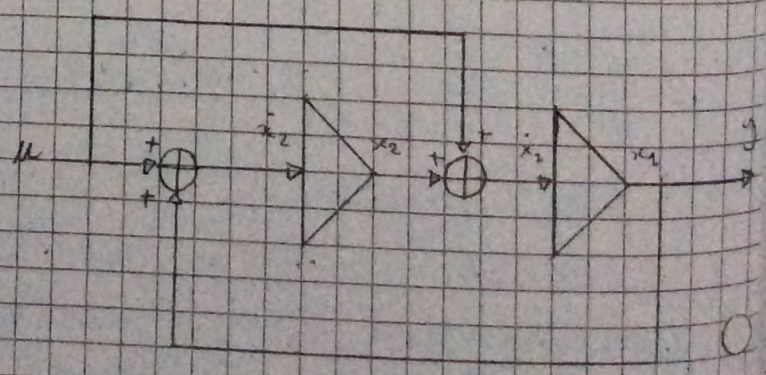
VEDIAMO COSA POSSIAMO DIRE INVECE DI

$\ddot{y} - y = \dot{u} + u$

$$s^2 Y - Y = sU + U \Rightarrow Y = \frac{Y}{s^2} + \frac{U}{s} + \frac{U}{s^2} = \frac{1}{s}\left[+U + \frac{1}{s}\left[Y + U\right]\right]$$

$\dot{x}_1 = x_2 + u$

$\dot{x}_2 = x_1 + u$



$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

DAL CASO PRECEDENTE PRENDO TUTTI RISULTANDO

$$T^{-1} B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

CONTINUO A NON AVERE CONTROLLABILITÀ $\left(\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

MA QUANTO MENO HO OSSERVABILITÀ (CON PRIMA) E STABILIZZABILITÀ. PROCEDO COL CALCOLARMI L'FDT:

$$C(sI - A)^{-1} B = C \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

$$= \frac{1}{s-1}$$

CHE SI STABILIZZA CON UN BANALE CONTROLLORE PROPORZIONALE.

USO ROUTH PER TROVARE IL RANGE DI VALORI CHE POSSO SCEGLIERE K.

$$D_{CL} = K + s - 1 = s + [K - 1]$$
$$K > 1$$

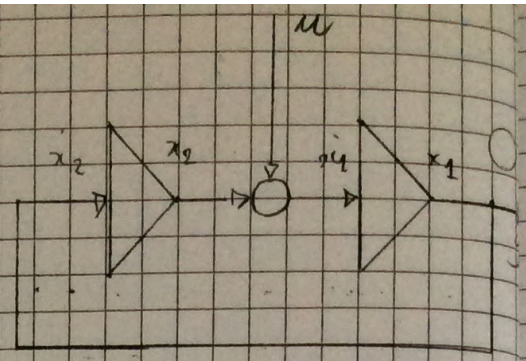
SCELGO $K = 1$ (CHE MI OFFRE UN ERRORE DI $\frac{1}{1+K_s} = \frac{1}{2} \simeq 0.1$)

VEDIAMO INVECE COSA SI PUÒ DIRE DI

$$\dot{y} - y = u$$

$$s^2 Y - Y = s U \Rightarrow Y = \frac{Y}{s^2} + \frac{U}{s} = \frac{1}{s}\left[U + \frac{1}{s}\left[Y\right]\right]$$

$$\dot{x}_1 = x_2 + u$$
$$\dot{x}_2 = x_1$$
$$\Rightarrow \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$



$$y = (1 \quad 0)\, x$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(\mathcal{B}) \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(\mathcal{B}) = 2 \Rightarrow \text{CONTROLLABILE}$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(\mathcal{C}) \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(\mathcal{C}) = 2 \Rightarrow \text{OSSERVABILE}$$

POSSO ALLORA PROCEDERE CON LA RETROAZIONE DELLO STATO IL VETTORE K È

$$K = [1 - (1),\ 0 - (-2)] = [0,\ +2]$$

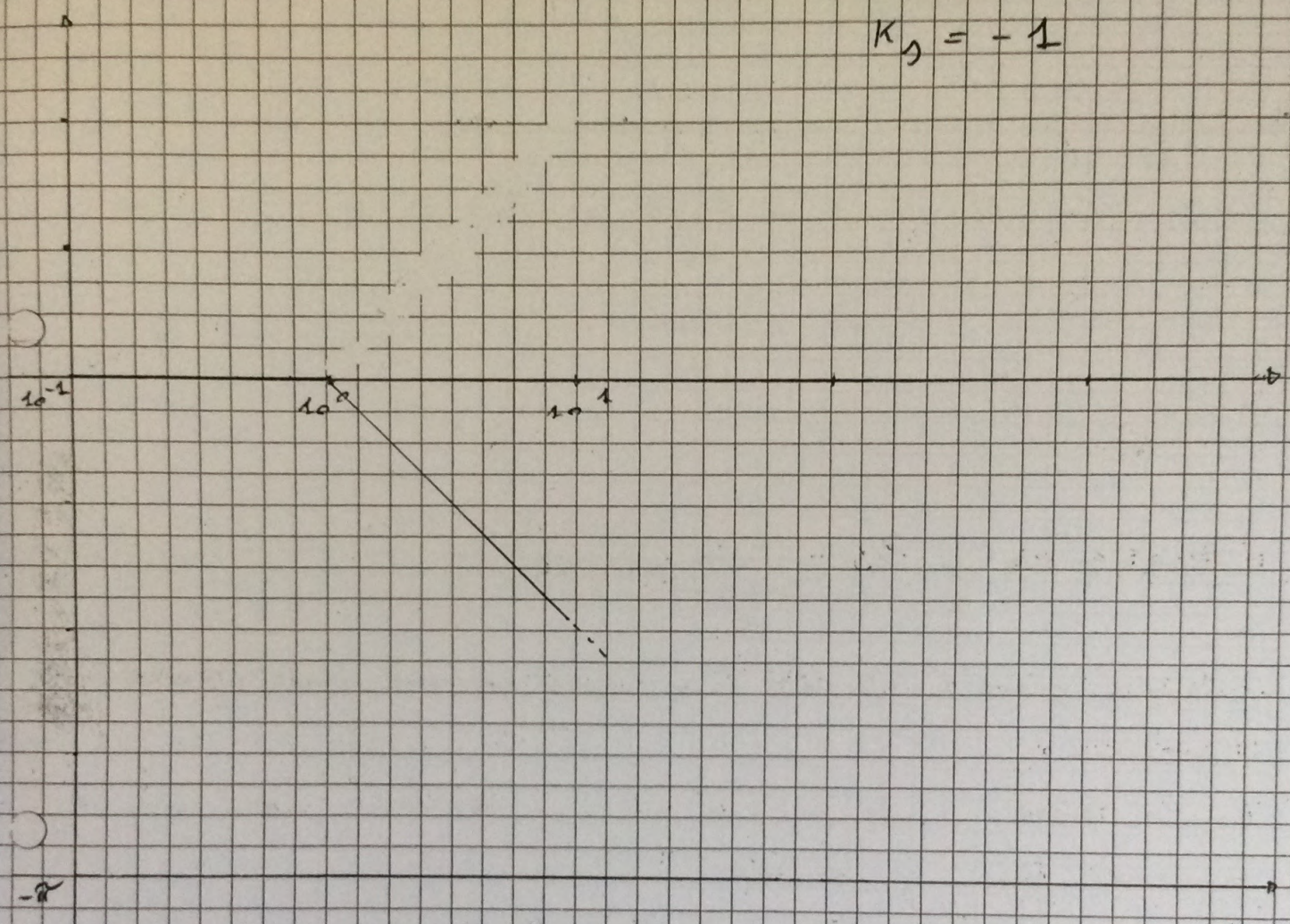
DA CUI HO $F = A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)}$$

(1) TRACCIARE IL DIAGRAMMA DI BODE

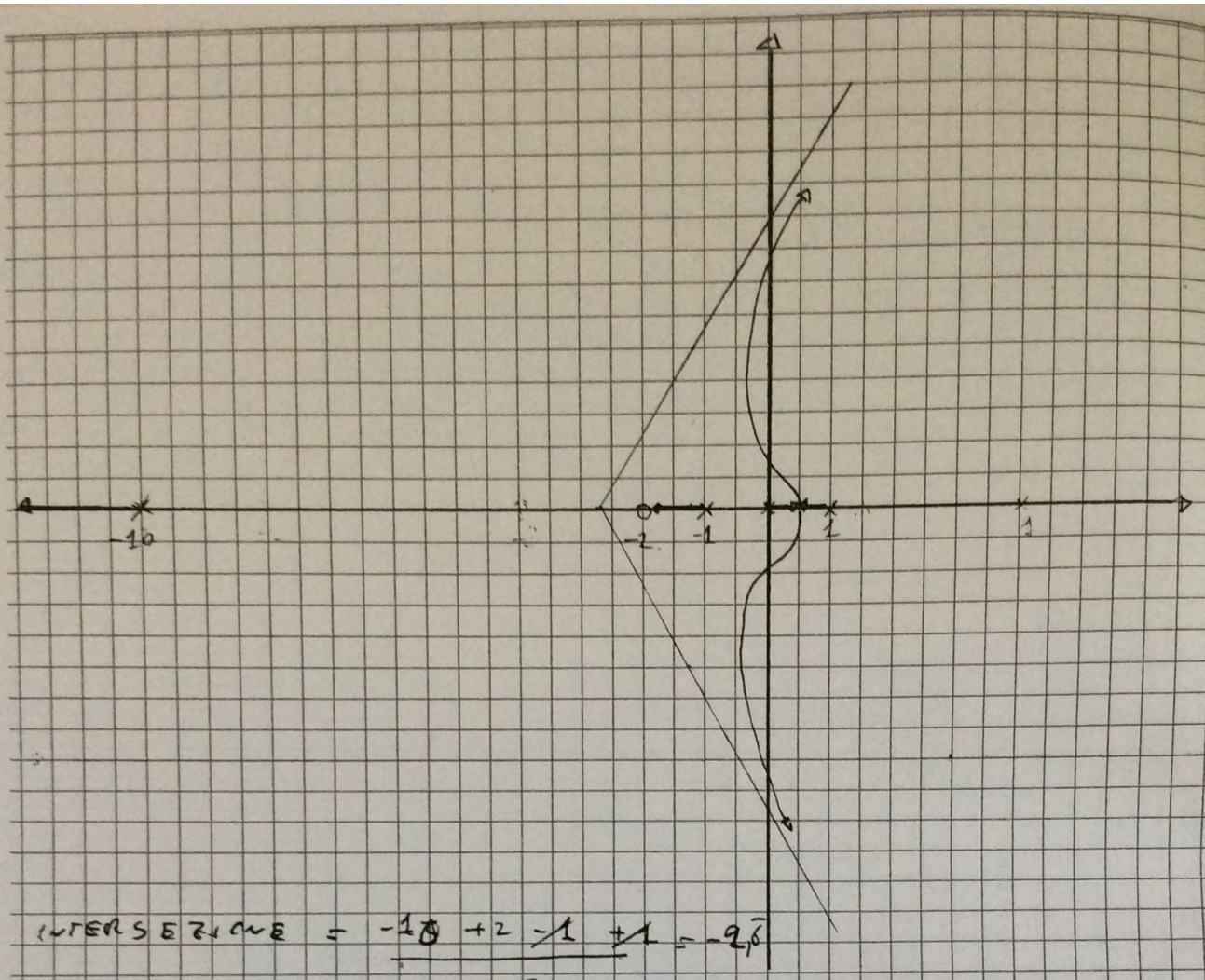
(2) PROGETTARE UNA CONTROLLORE t.c. $\varepsilon_r = 0$

$K_s = -1$



PER AVERE UN ERRORE NULLO AL GRADINO DEVO PORRE ALMENO UN POLO ALL'ORIGINE

CONVERRÀ ANCHE PORRE UNO ZERO DI MODO DA PORTARE L'INTERSEZIONE DEGLI ASINTOTI NELLA PARTE NEGATIVA.



INTERSEZIONE $= \dfrac{-10 + 2 - 1 + 1}{3} = -2{,}\bar{6}$

INVECE DI STARE A TROVARE IL K CRITICO CONVIENE USARE L'EQUAZIONE DIOFANTINA.

VOGLIO PORRE I TRE POLI A -1. PER FARLO USO UN ULTERIORE POLO E 2 ZERI

$$D_{CL} = (s+1)^4 = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1$$

$$N_K = \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

$$D_K = b_2 s^2 + b_1 s$$

$$s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 = \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 + (s^2-1)(b_2 s^2 + b_1 s)$$

$$= \cancel{\alpha_2 s^2} + \alpha_1 s + \alpha_0 + \cancel{b_2 s^4} + b_1 s^3 - \cancel{b_2 s^2} - b_1 s =$$

$$= b_2 s^4 + b_1 s^3 + [\alpha_2 - b_2] s^2 + [\alpha_1 - b_1] s + \alpha_0$$

$$\begin{cases} b_2 = 1 \\ b_1 = 4 \\ a_2 - b_1 = 6 \Rightarrow a_2 = 7 \\ a_1 - b_1 = 4 \Rightarrow a_1 = 8 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480980509

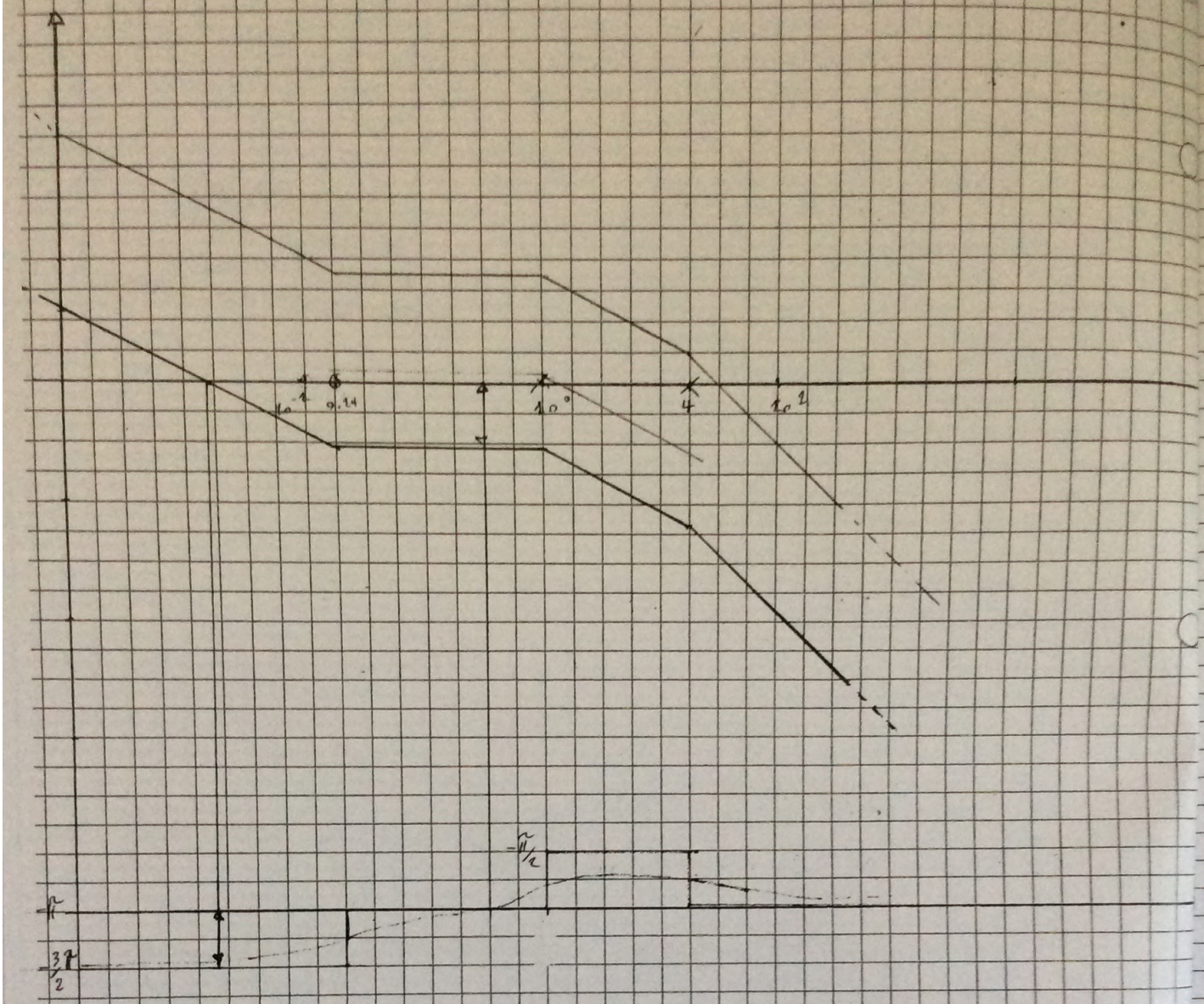
$$K(s) = \frac{7s^2 + 8s + 1}{s^2 + 4s}$$

GIÀ CHE CI SONO TRACCIO BODE E NYQUIST

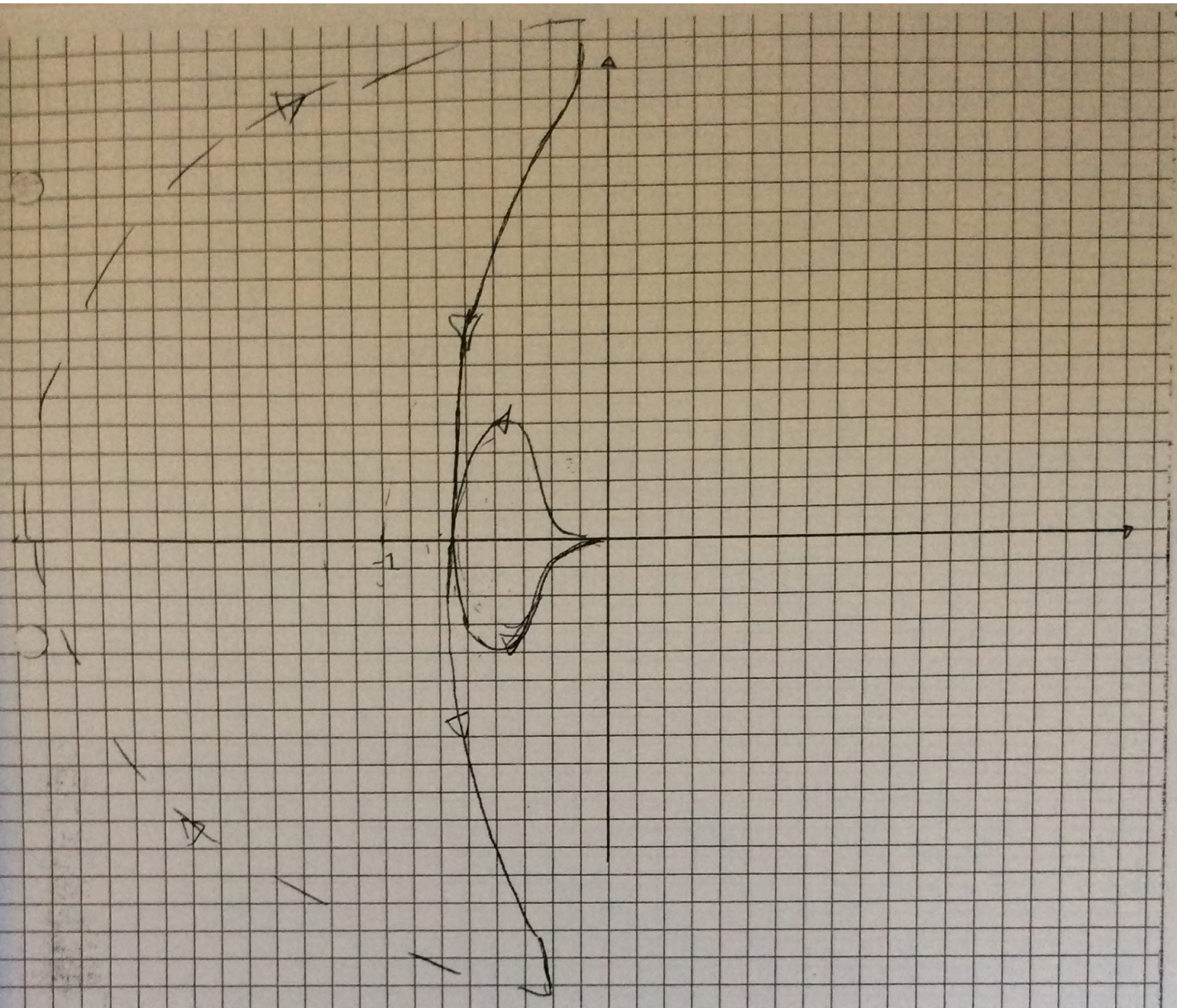
$$\frac{-8 \pm \sqrt{64 - 28}}{14} = \frac{-8 \pm 6}{14} \begin{cases} -1 \\ -1/7 \end{cases}$$

$$G\,K = \frac{-1}{7 \cdot 4} \cdot \frac{\cancel{(1+s)}(7s+1)}{s\left(\frac{s}{4}+1\right)(1-s)\cancel{(1+s)}}$$

$$K_s = -\frac{1}{28}$$

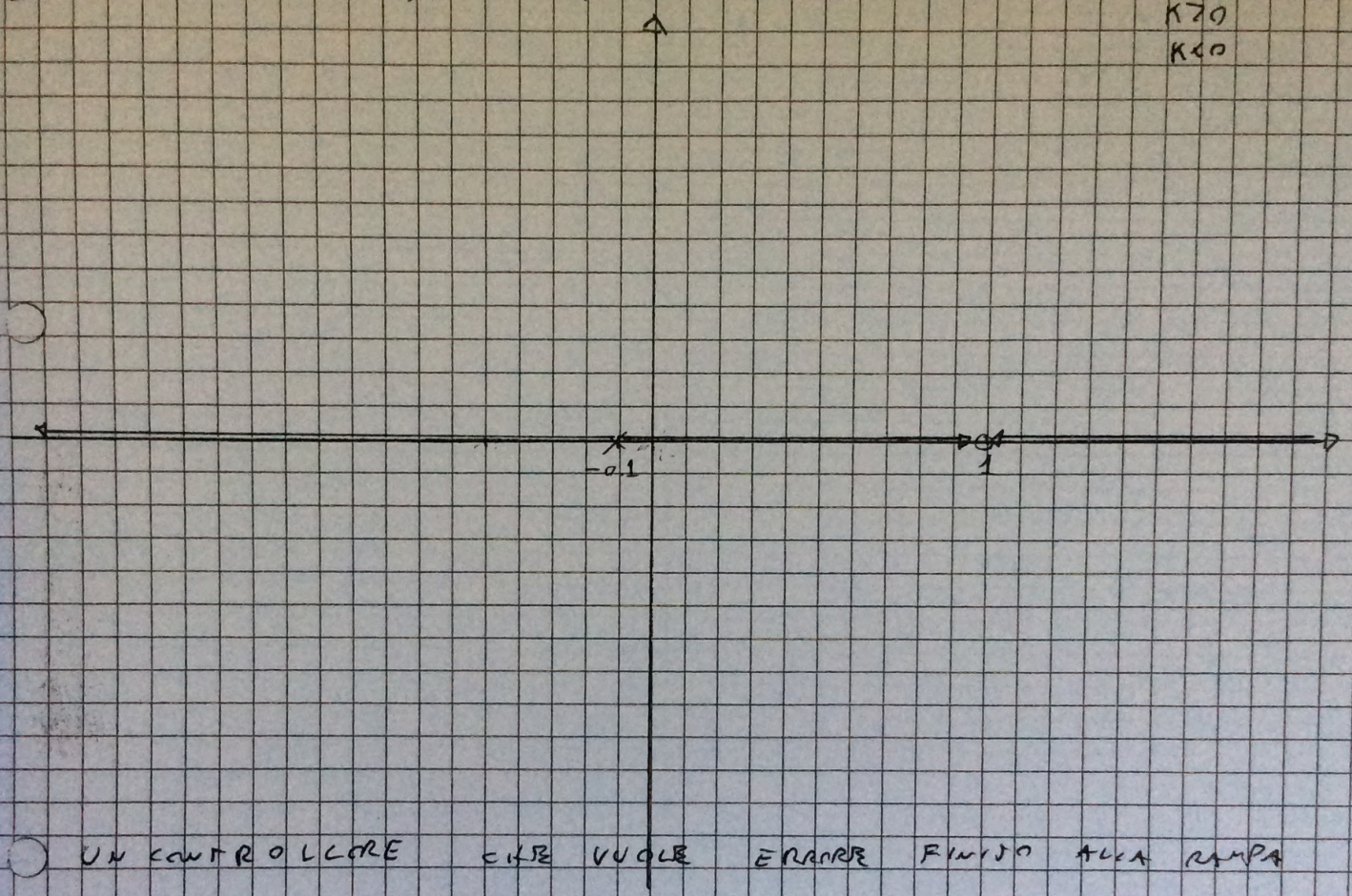


IL MARGINE DI FASE NEGATIVO NON DEVE STUPIRE INFATTI IN CL IO AVEVO UN POLO INSTABILE QUINDI ADESSO NYQUIST DOVRA' GIRARE UNA VOLTA INTORNO A -1.

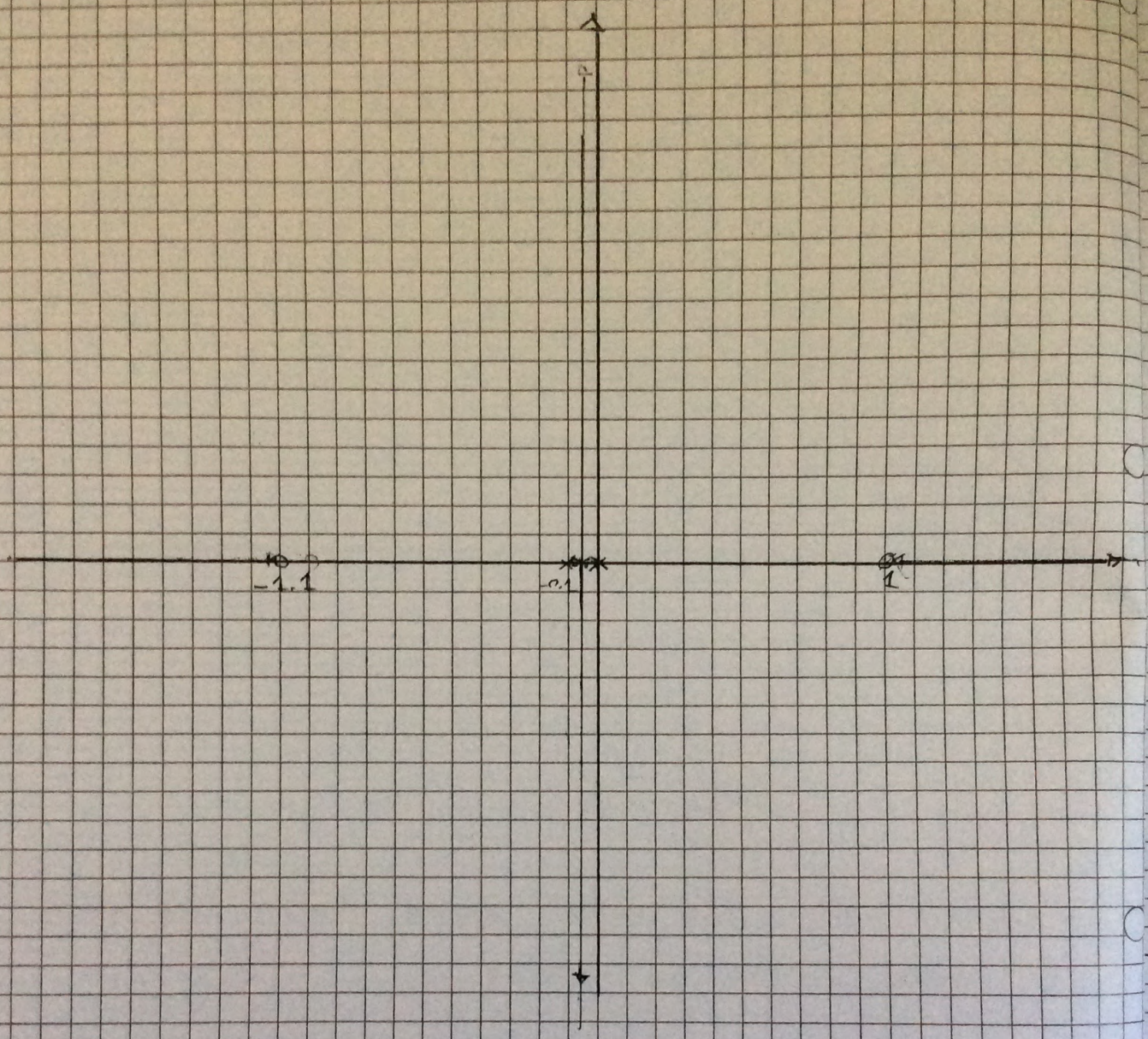

-1

$$G(s) = \frac{s-1}{s+0.1}$$

1. TRACCIARE IL LUOGO DELLE RADICI PER $K>0$ E $K<0$
2. PROGETTARE UN CONTROLLORE t.c. $\varepsilon_\infty < 0.001$
3. VALUTARE I MARGINI DI STABILITÀ



UN CONTROLLORE CHE VUOLE ERRORE FINITO ALLA RAMPA DEVE AVERE UN POLO ALL'ORIGINE



$$KG = K\,\frac{(s+1.1)(s-1)}{s(s+0.1)} = \frac{-1.1\cdot K}{0.1}\;\frac{\left(\frac{s}{1.1}+1\right)(1-s)}{\left(\frac{s}{0.1}+1\right)s}$$

$$K_s = -11\cdot K$$

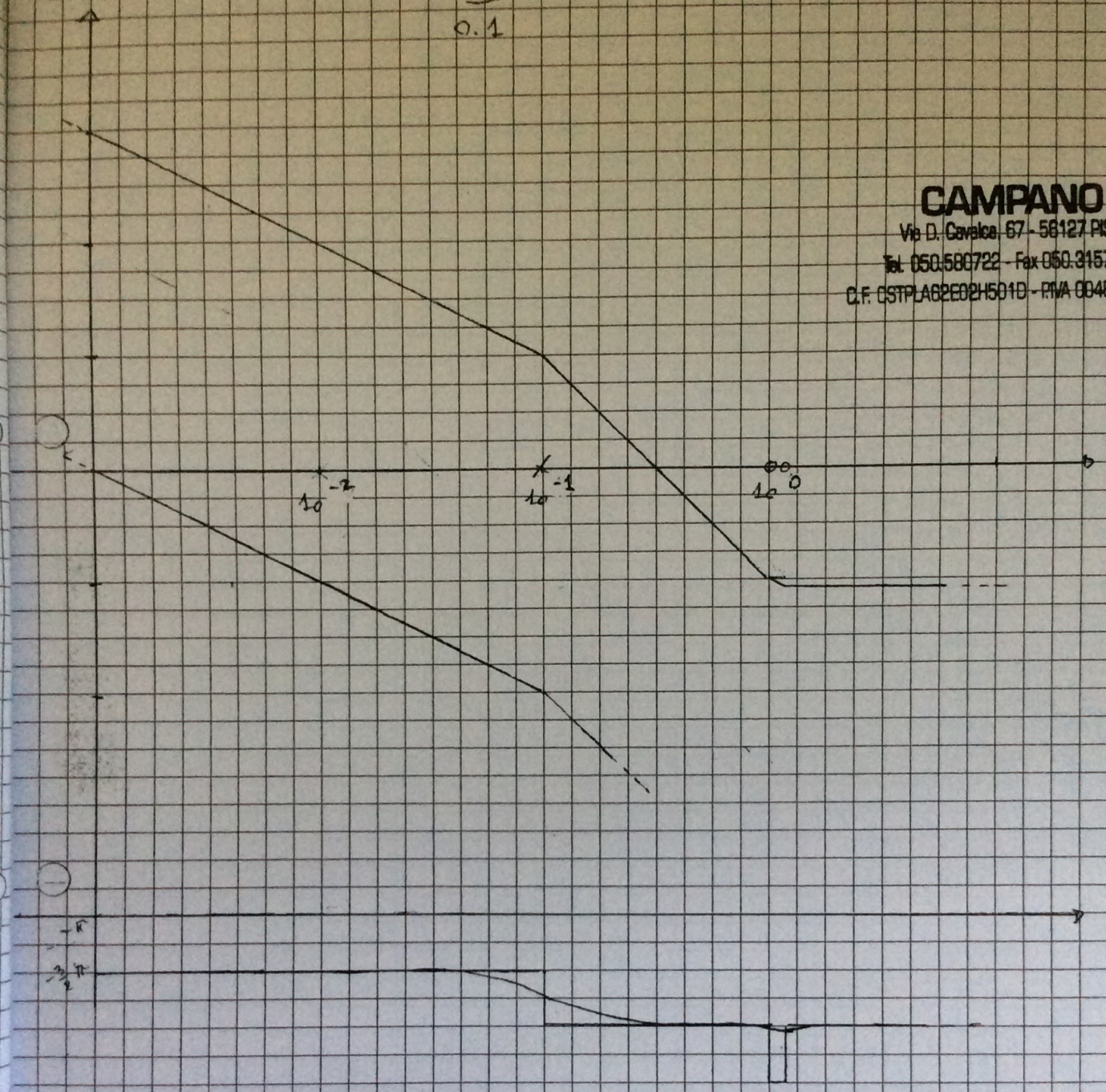
QUINDI, L'ERRORE (TIPO 1):

$$|\varepsilon_1| = \frac{1}{|K_s|} = \frac{1}{11K} < 0.001 = \frac{1}{1000} \Rightarrow K > \frac{1000}{11} \simeq 91$$

SCELGO $K = 92$

QUINDI HO:

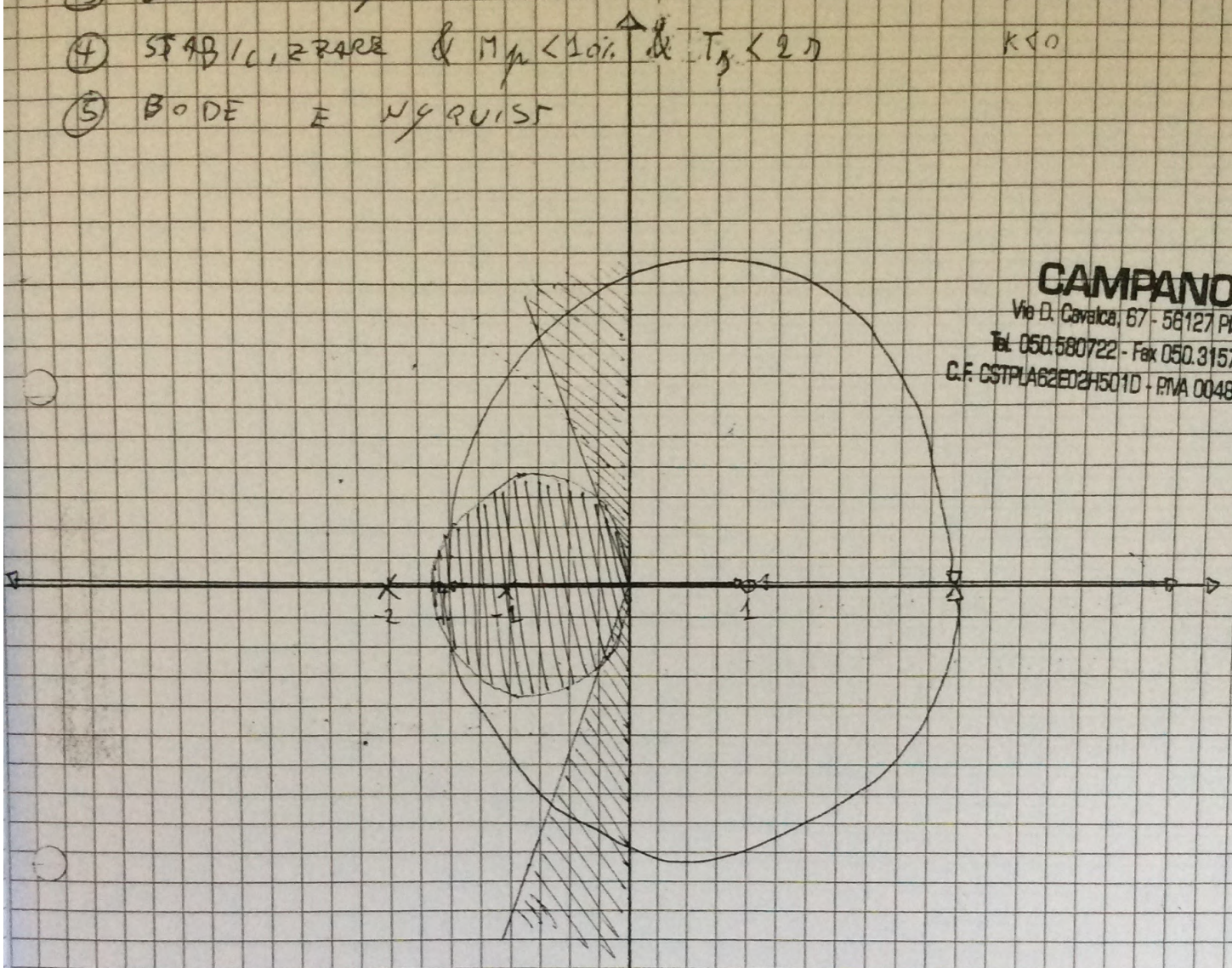
$$K\,G = -1001\,\frac{\left(\frac{s}{1.1}+1\right)(1-s)}{\left(\frac{s}{0.1}+1\right)s}$$



CAMPANO
Via D. Cavalca 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

$$G(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

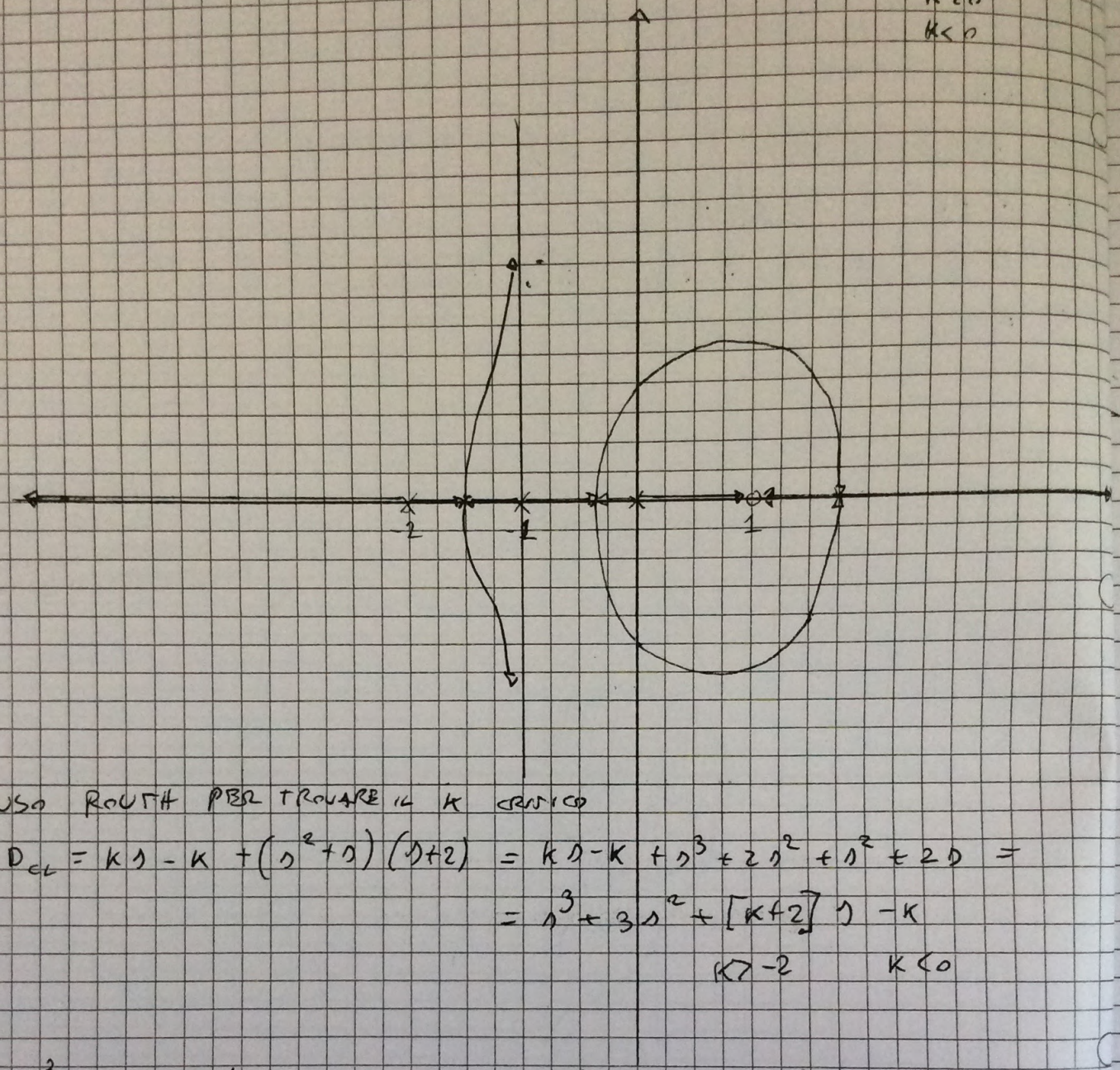
1. LDR
2. STABILIZZARE & $\varepsilon_r = 0$
3. BODE E NYQUIST $K > 0$
4. STABILIZZARE & $M_p < 10\%$ & $T_s < 2s$ $K < 0$
5. BODE E NYQUIST



CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.315765
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480996

AFFINCHÈ L'ERRORE SIA NULLO AL GRADINO DEBBO AGGIUNGERE UN INTEGRATORE K/s. RIDISEGNO IL LUOGO DELLE RADICI

$K > 0$
$K < 0$



USO ROUTH PER TROVARE IL K CRITICO

$$D_{CL} = Ks - K + (s^2+s)(s+2) = Ks - K + s^3 + 2s^2 + s^2 + 2s =$$

$$= s^3 + 3s^2 + [K+2]\,s - K$$

$K > -2 \qquad K < 0$

s^3	1	$K+2$	0
s^2	3	$-K$	0
s	$\frac{4K+6}{3}$	0	
s	$-K$	0	
	0		

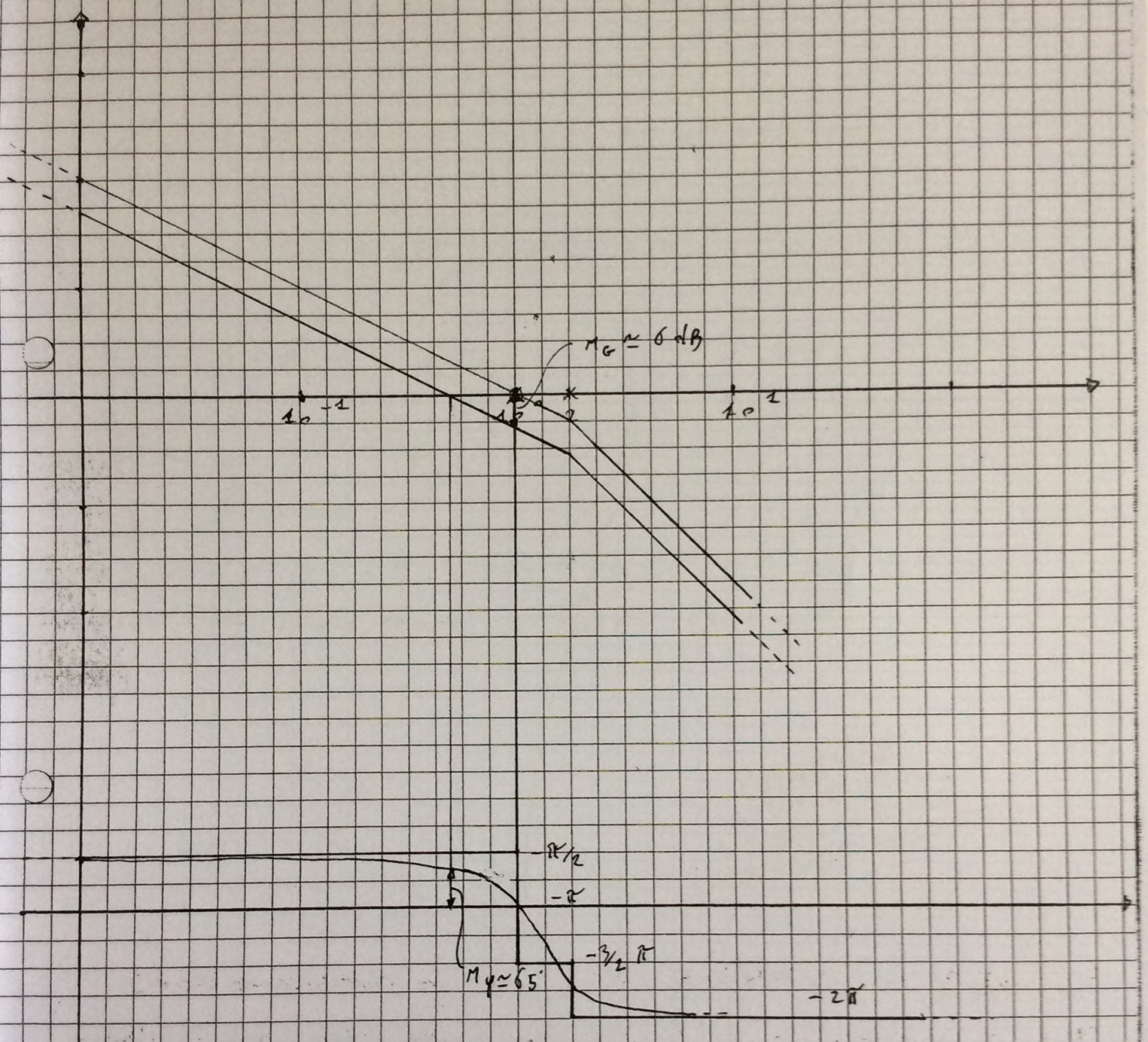
$4K + 6 > 0 \qquad K > -\frac{3}{2}$

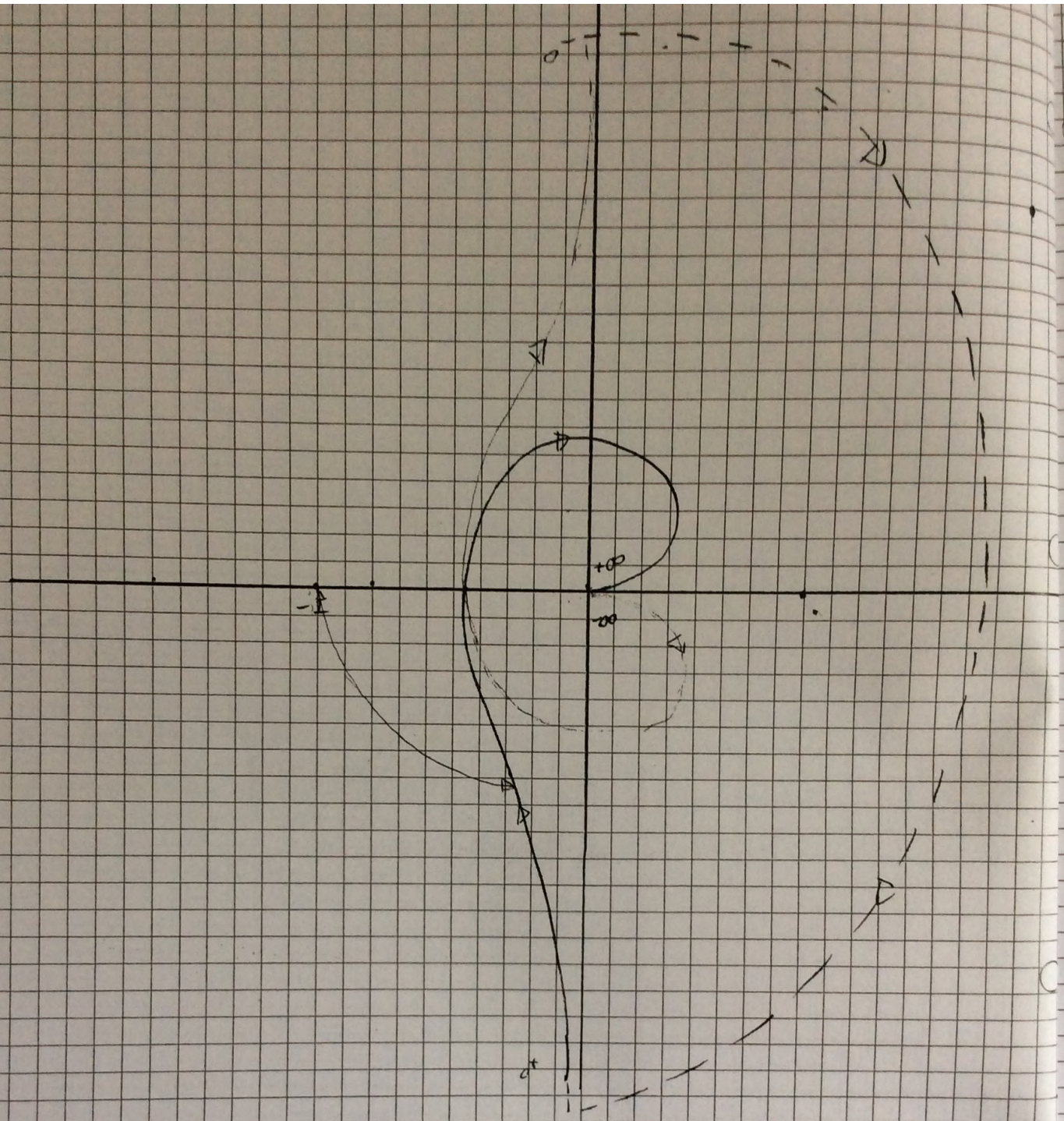
SCELGO $K = -1$

$s^3 + 3s^2 + s + 1$

TRACCIO BODE:

$$GK = \frac{1}{2} \frac{1 - s}{s(1+s)(1+s/2)}$$





SE INVECE MI INTERESSA SOLO CHE LA SOVRAELONGAZIONE MASSIMA PERCENTUALE NON SIA MAGGIORE DEL 10%. POSSO ACCONTENTARMI DI UN CONTROLLORE PROPORZIONALE.

$$100 \cdot e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} < 10 \Rightarrow \ln\frac{1}{10} > -\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} > 2.3$$

QUINDI:

$$\xi^2\pi^2 > 5.3 - 5.3\xi^2 \Rightarrow \xi^2 > \frac{5.3}{5.3+\pi^2} \simeq 0.35$$

IL MARGINE DI FASE PUÒ ESSERE PRESO IN OGNI PUNTO STABILE NON NELLA REGIONE GIALLA.

POI HO CHE

$$\tau_d \cong \frac{0.8 + 2.5\xi}{\omega_n} < 2 \Rightarrow \omega_n > \frac{0.8}{2} + \frac{2.5\xi}{2}$$

IN ARANCIONE NEL DISEGNO LA ZONA APPROSSIMATA IN CUI NON PUÒ STARE K POS.

UN PUNTO IN CUI AD ESEMPIO PUÒ STARE È A CIRCA $-1 \pm 1.75i$

QUINDI

$$P_{cl} = Ks - K + s^2 + s + 2s + 2 = s^2 + [3+K]s + [2-K]$$

$3 + K \cong 2$

$2 - K \cong 4$

↳ VERREI

SCEGLIO $K = -1.5$ CHE MI DÀ $s^2 + 1.5s + 3.5$

LE RADICI SONO DOVREBBERO ESSERE VERIFICATE

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

$$\dddot{y} - y = \ddot{u} - u$$

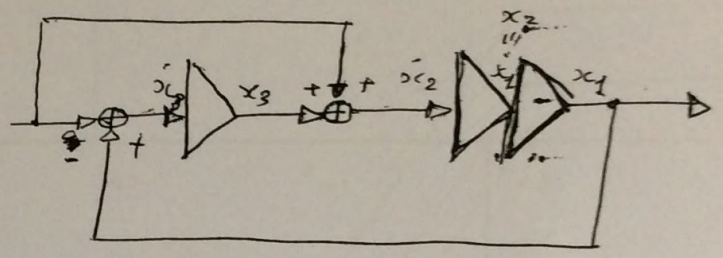
VOGLIO VEDERE SE È OSSERVABILE E SE È CONTROLLABILE

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

$$s^3 Y - Y = s^2 U - U$$

$$\Downarrow$$

$$Y = \frac{Y}{s^3} + \frac{U}{s^2} - \frac{U}{s^3} = \frac{1}{s^2}\left[U + \frac{1}{s}\left[Y - U\right]\right]$$



$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + u \\ \dot{x}_3 &= x_1 - u \end{aligned} \implies A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left[B, AB, A^2B\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{DET}(\mathcal{B}) \neq 0$$

$$C_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{DET}(C_o) \neq 0$$

LA FDT È:

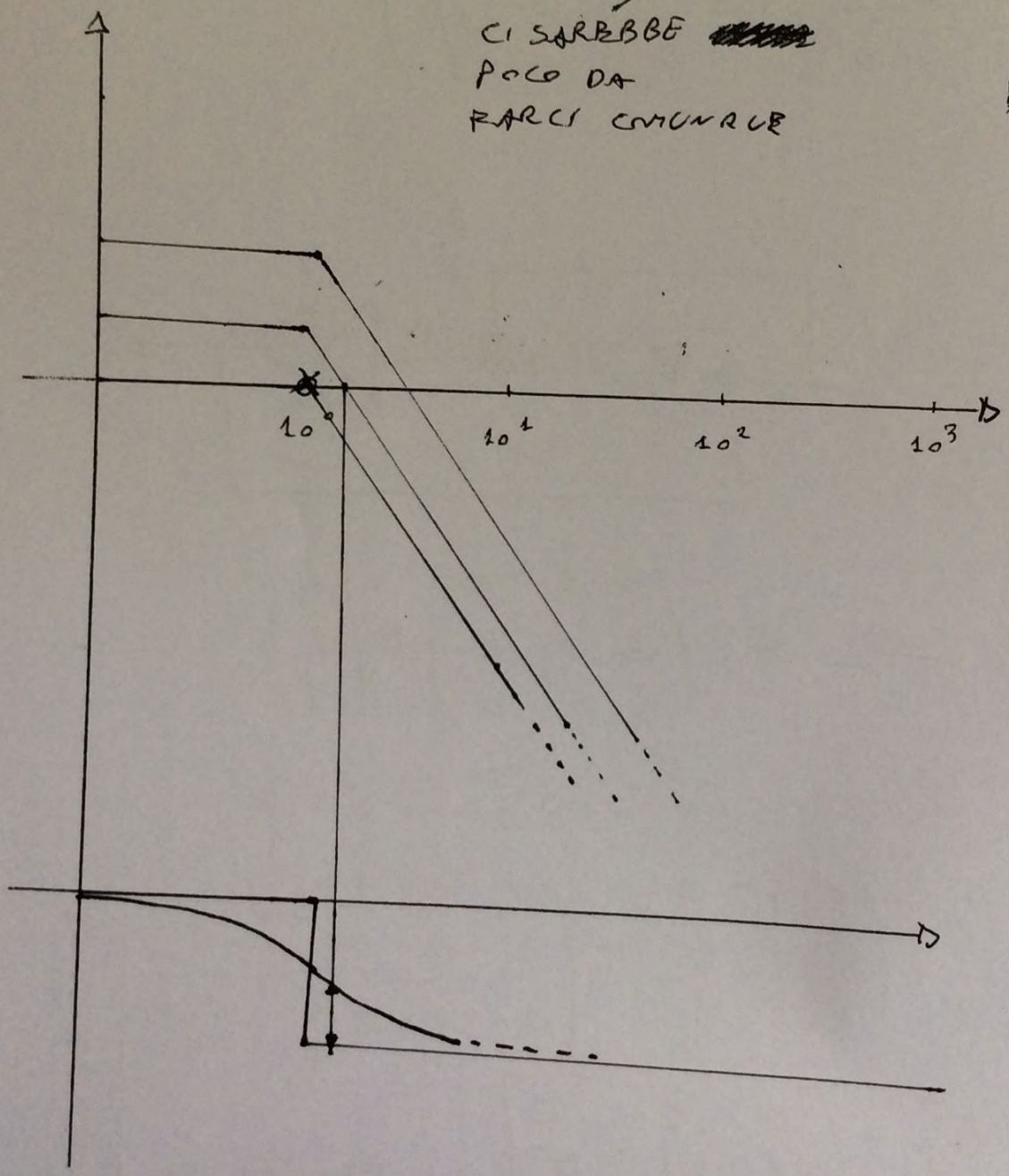
$$\frac{s-1}{\underbrace{s^3-1}} = \frac{s-1}{\underbrace{(s-1)}(s^2+s+1)}$$

NON STABILE ?

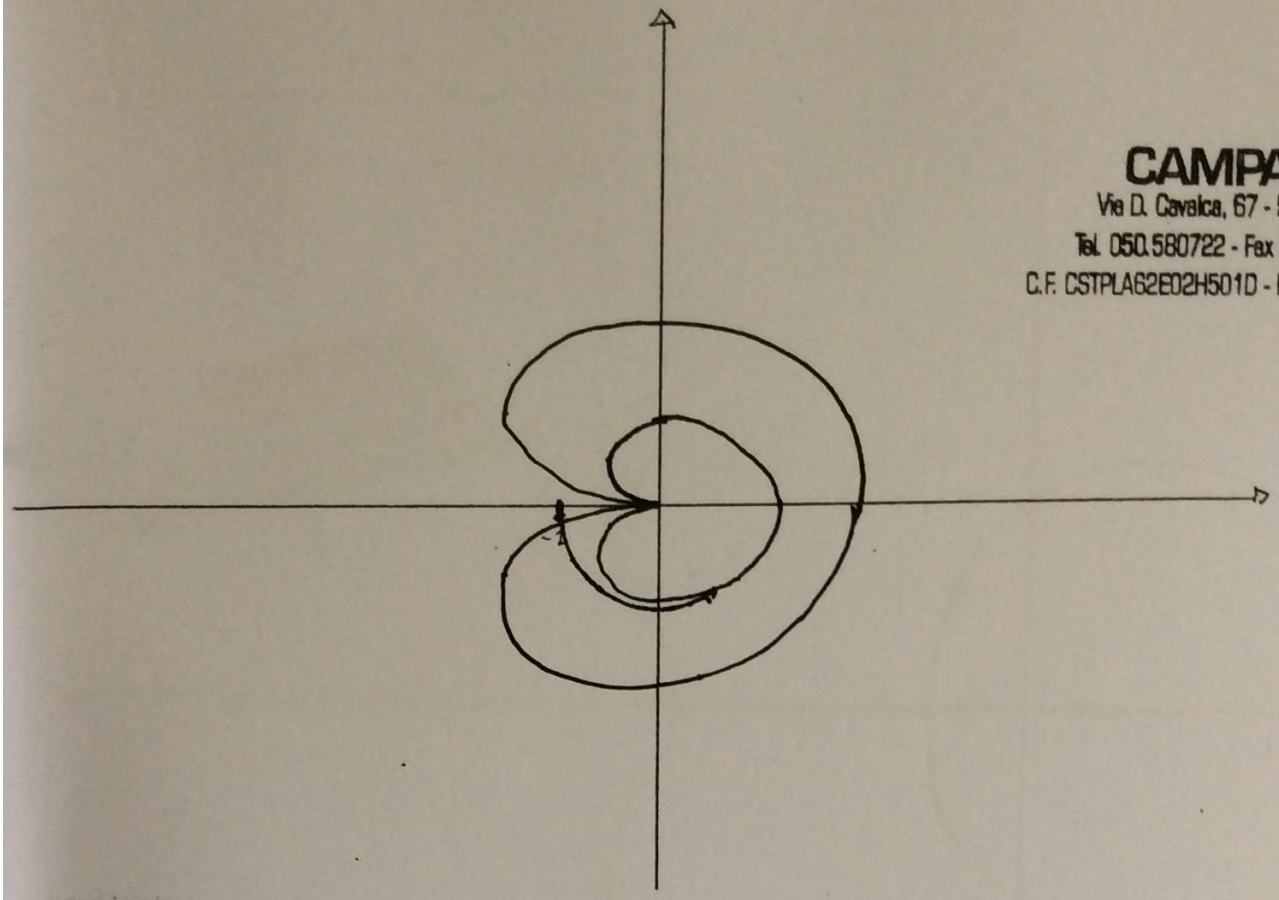
IO SOPPONGO SIA STABILE

CI SAREBBE POCO DA FARCI COMUNQUE

$K = 3$



CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

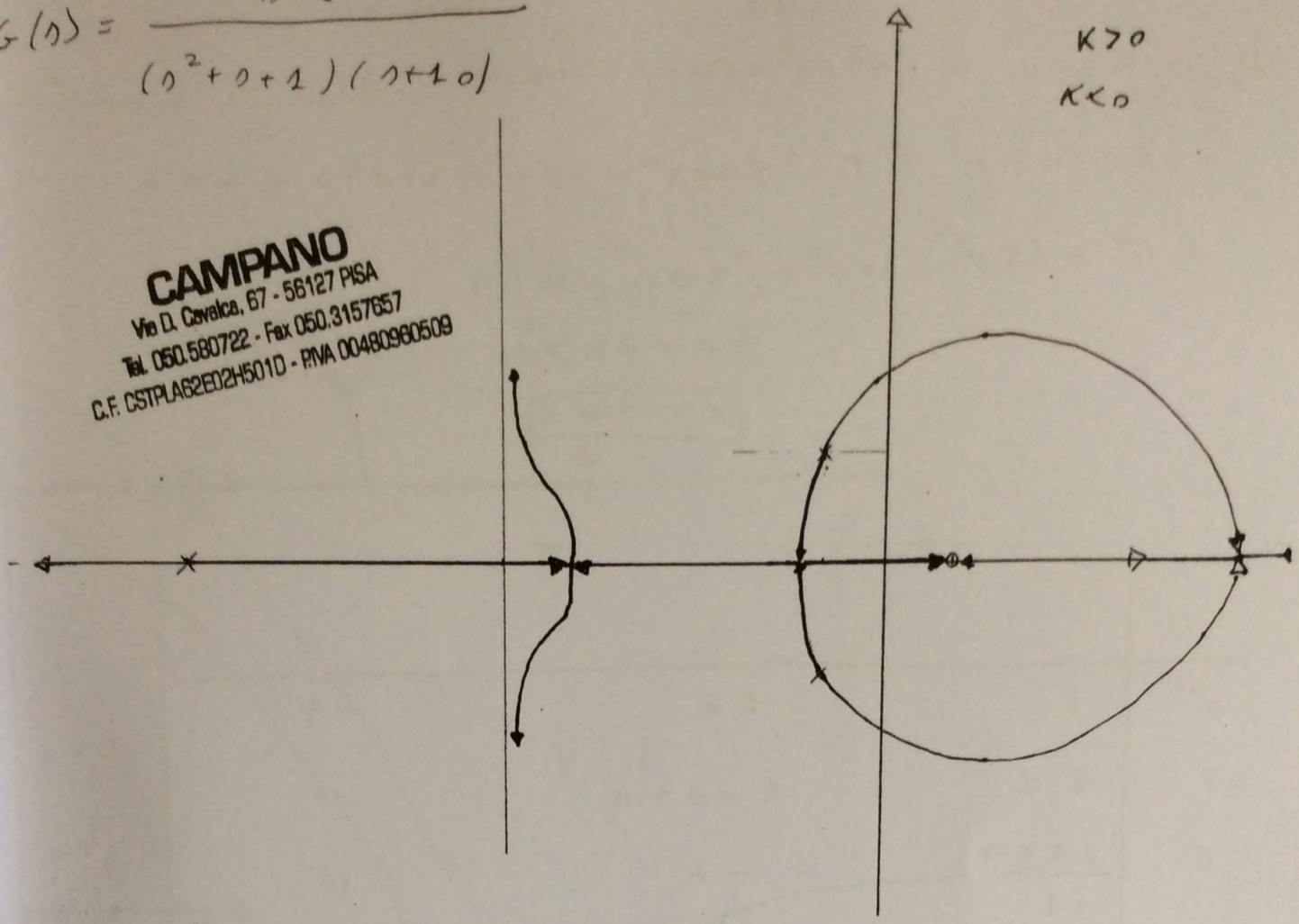


$$G(s) = \frac{s-1}{(s^2+s+1)(s+10)}$$

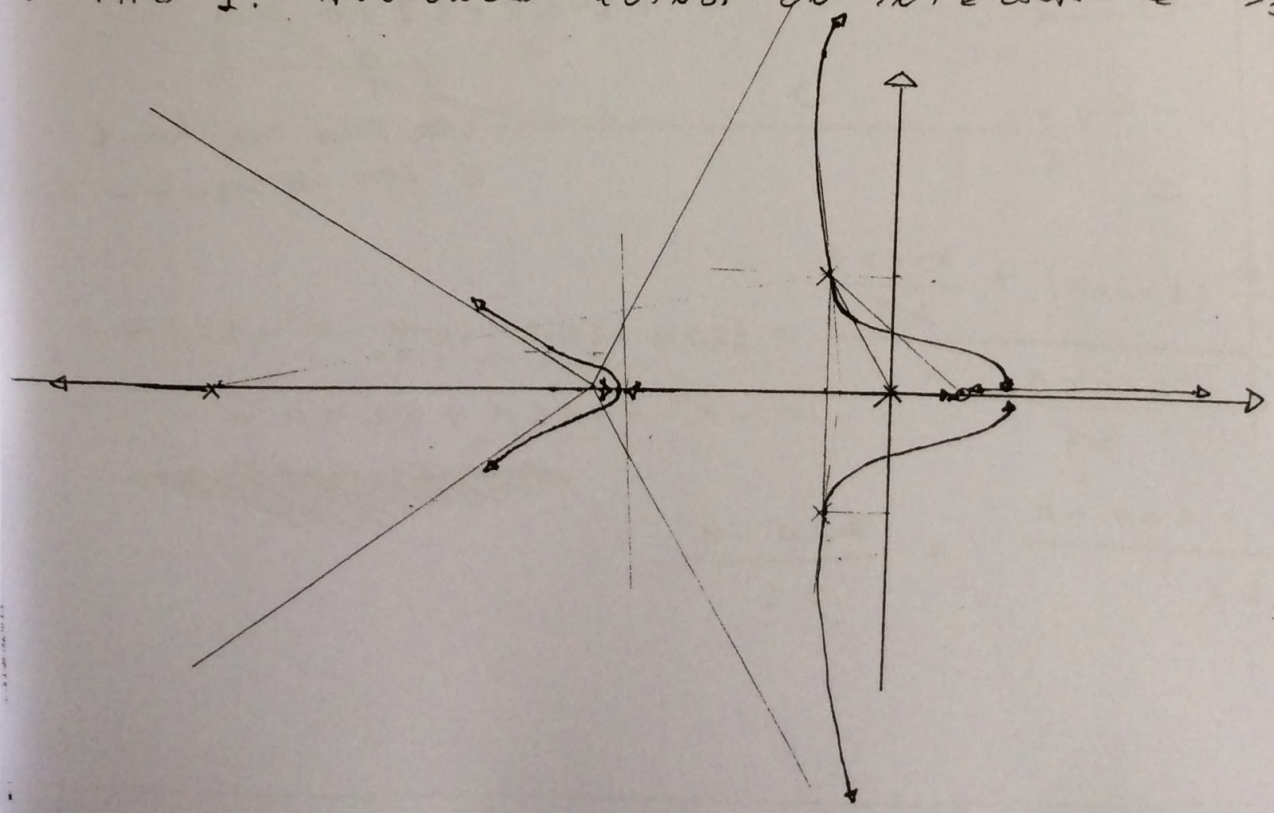
$K>0$

$K<0$

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509



AFFINCHÉ L'ERRORE AL GRADINO SIA NULLO DEVE ESSERE DI TIPO 1. AGGIUNGO QUINDI UN INTEGRATORE K/s



UTILIZZO IL CRITERIO DI ROUTH PER TROVARE DOVE PUÒ STARE IL K.

$$D_{CL} = Ks - K + (s^3 + s^2 + 10s)(s+10) =$$

$$= Ks - K + s^4 + s^3 + 10s^2 + 10s^3 + 10s^2 + 100s =$$

$$= s^4 + 11s^3 + 20s^2 + [100 + K]s - K$$

$100 + K > 0$ $\boxed{K < 0}$

$\boxed{K > -100}$

DALLA CN

s^4	1	20	$-K$
s^3	11	$100+K$	0
s^2	$\frac{120-K}{11}$	$-K$	0
s	$\frac{-K^2+141K+1200}{120-K}$	0	
1	$-K$	0	
	0		

$\rightarrow -K > -120$ S.V.

$-K^2 + 141K + 1200 > 0$

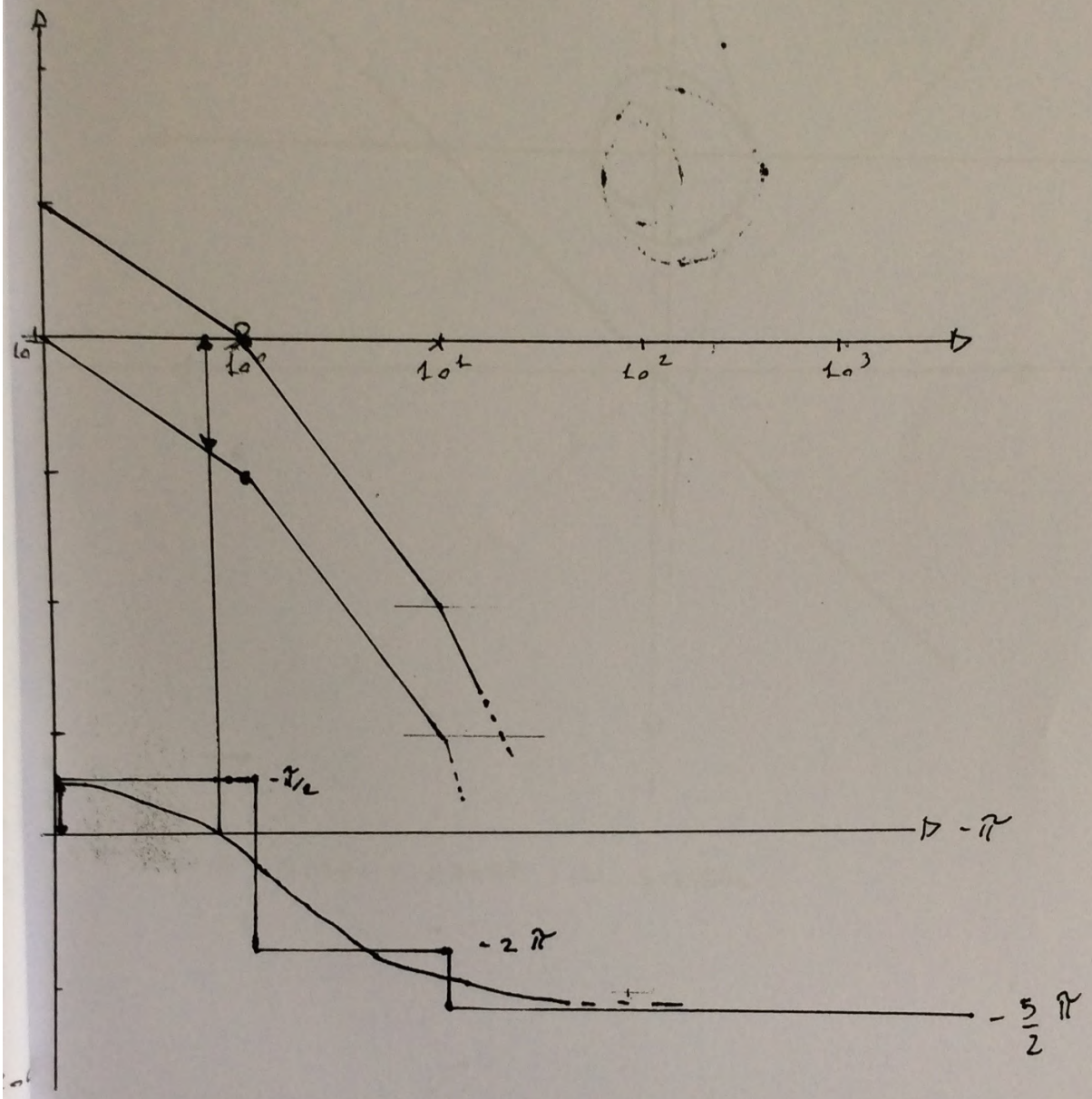
VERIFICO CHE $K = -1$ È FRA LE SOLUZIONI ECC.

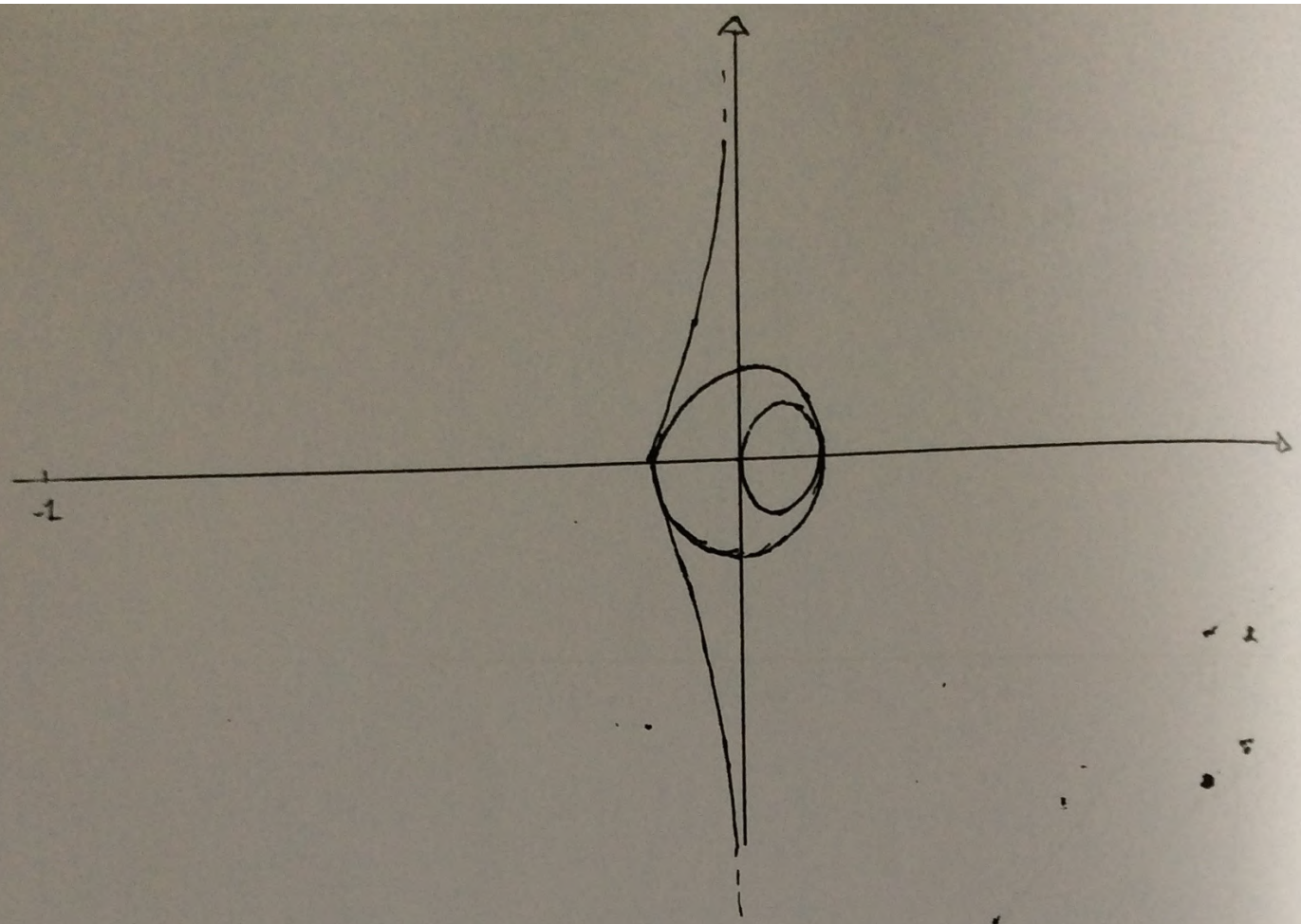
$$\frac{\frac{120-K}{11}(100+K) + \frac{K \cdot 121}{11}}{\frac{120-K}{11}} = 1200 + 120K - 100K - K^2 + 121K =$$

$$= -K^2 + 141K + 1200 =$$

$$\frac{220 - 100 - K}{11} = \frac{120 - K}{11}$$

$$\frac{1-p}{10(p^2+p+1)\left(\frac{p}{10}+1\right)p} = G(p) \qquad K_p = \frac{1}{10}$$

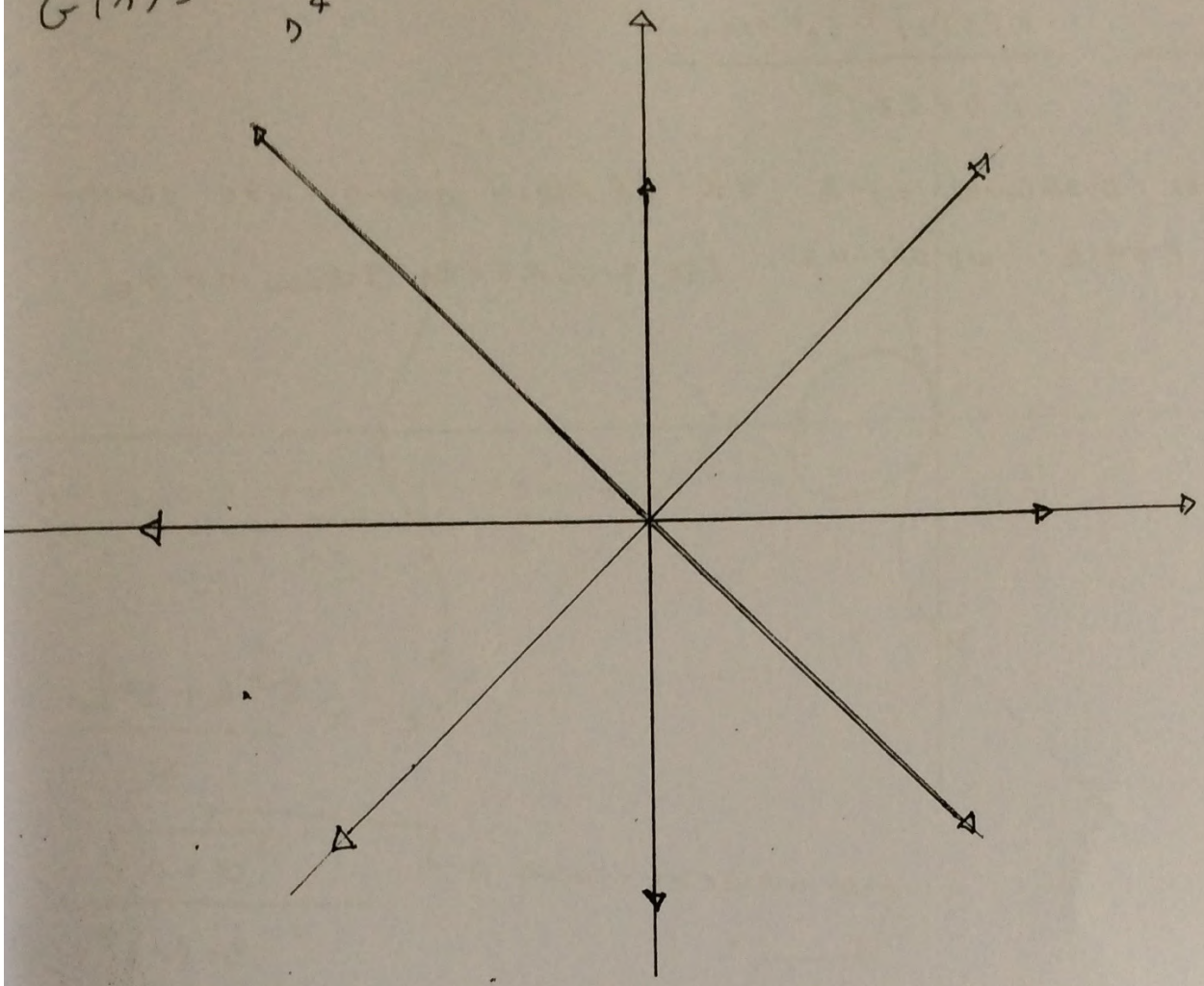



-1

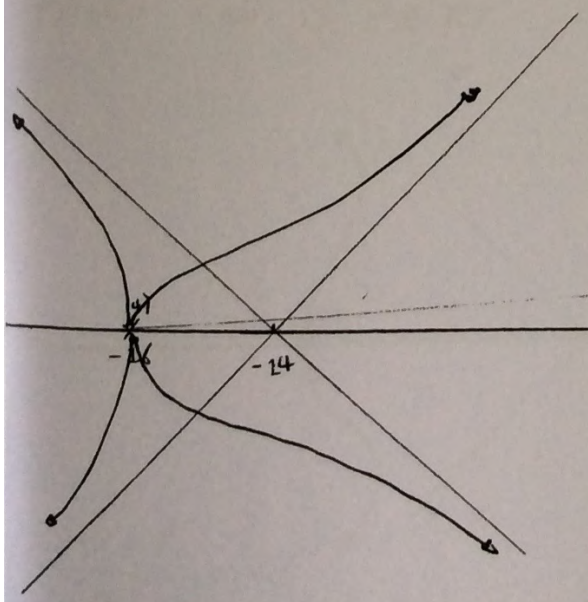
$$G(s) = \frac{1}{s^4}$$

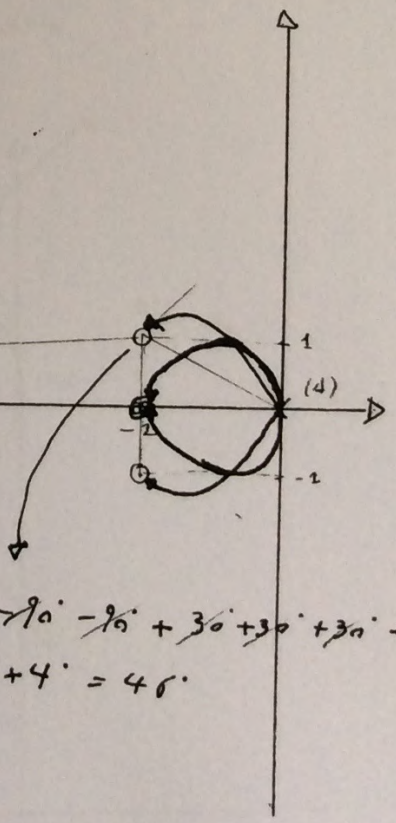
$K > 0$

$K < 0$



SI VUOLE STABILIZZARE IL SISTEMA





$$180° - 90° - 90° - 90° + 30° + 30° + 30° + 30° + 4° + 4° + 4° + 4° = 46°$$

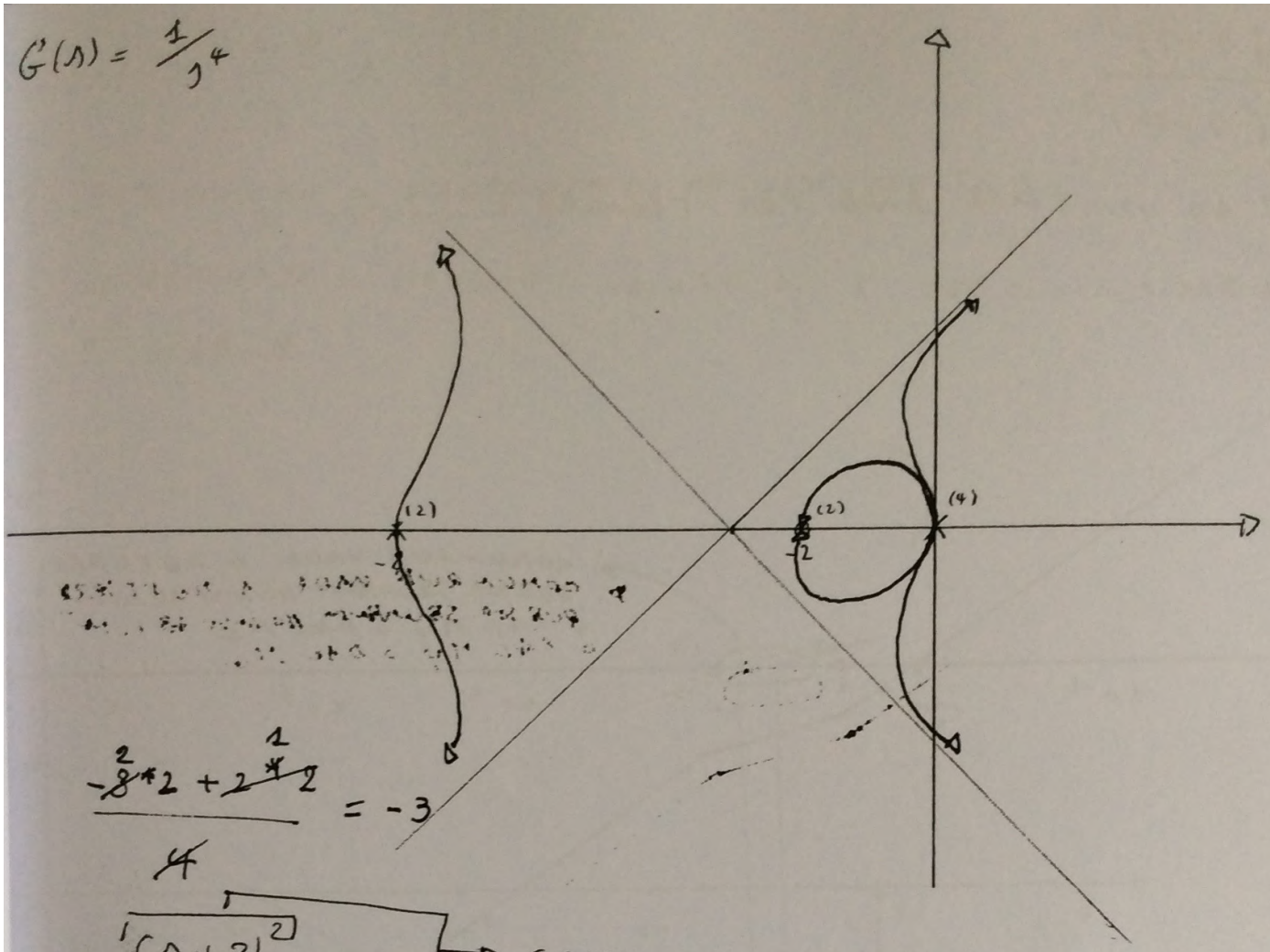
$$\frac{-16 \times 4 + 2 \times 4}{4} = -14$$

QUINDI HO

$$\frac{1}{s^4} \quad \frac{k(s+2)^2(s^2+2s+2)}{(s+10)^4}$$

SI NOTA DAL DISEGNO CHE $\forall k$ LE RADICI STANNO NEL SEMIPIANO A PARTE REALE NEGATIVA. PER SICUREZZA SCELGO $k=3$.

$G(s) = \frac{1}{s^4}$



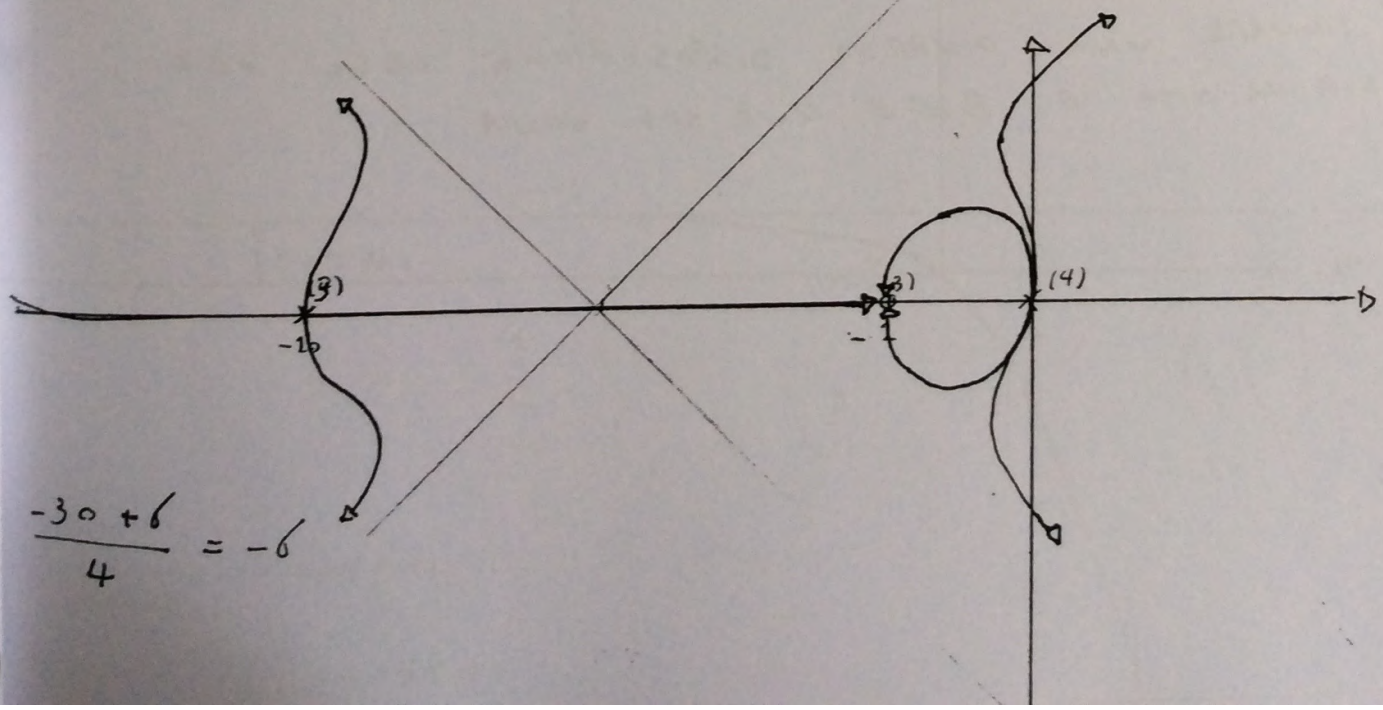
$$\frac{-\cancel{8}^{2} * 2 + \cancel{2}^{1} * 2}{\cancel{4}} = -3$$

$$\frac{(s+2)^2}{s^4(s+8)^2}$$

GRADO MASSIMO 2

GRADO MINIMO 4 → CI MANCANO TERMINI DI 3° GRADO, LA CN DI ROUTH È VIOLATA

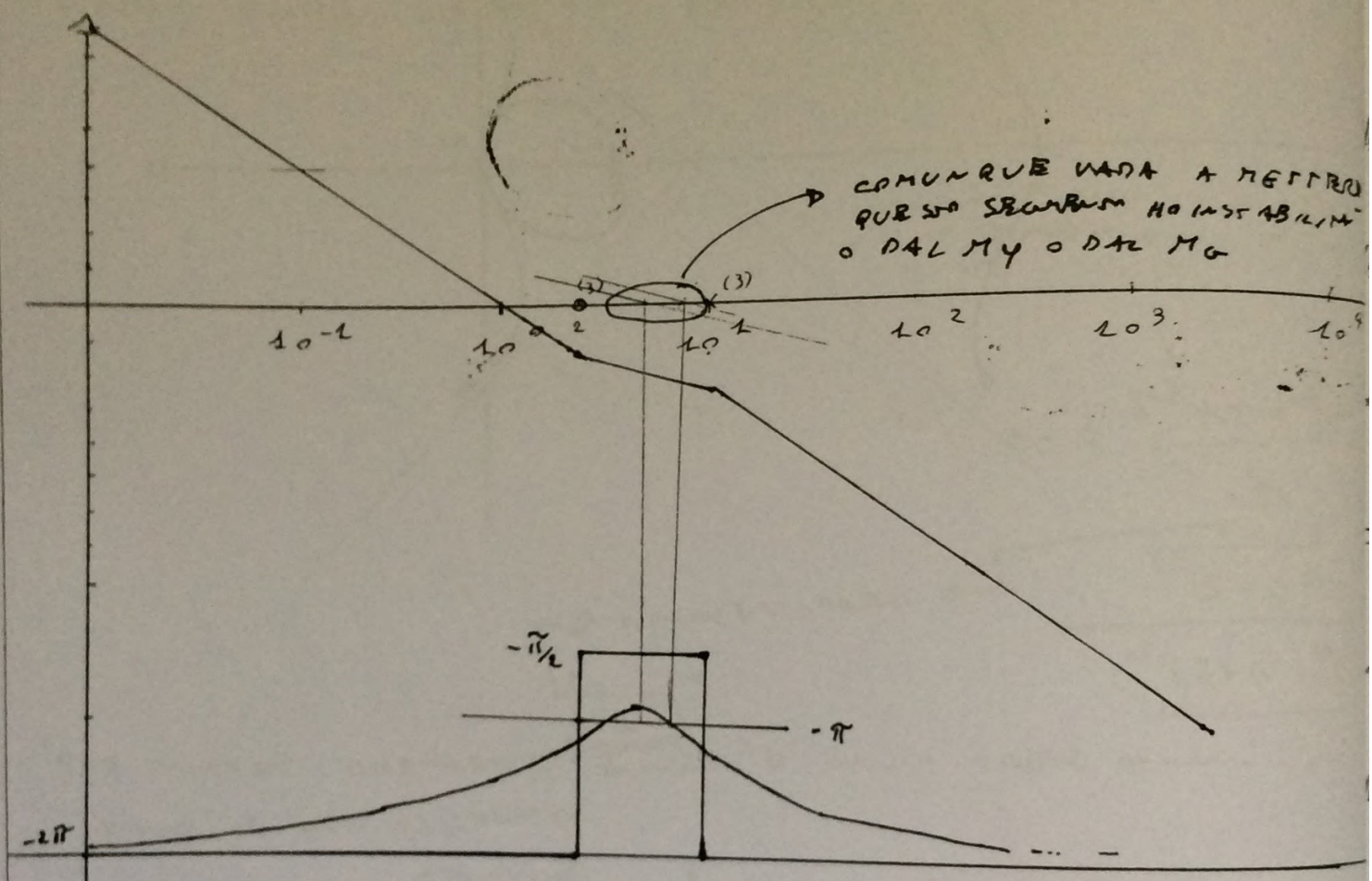
PROVO CON 3 ZERI



$$\frac{-30+6}{4} = -6$$

$$\frac{K(s+2)^3}{s^4(s+10)^3}$$

PROVO AD UTILIZZARE BODE PER TROVARE IL GIUSTO K



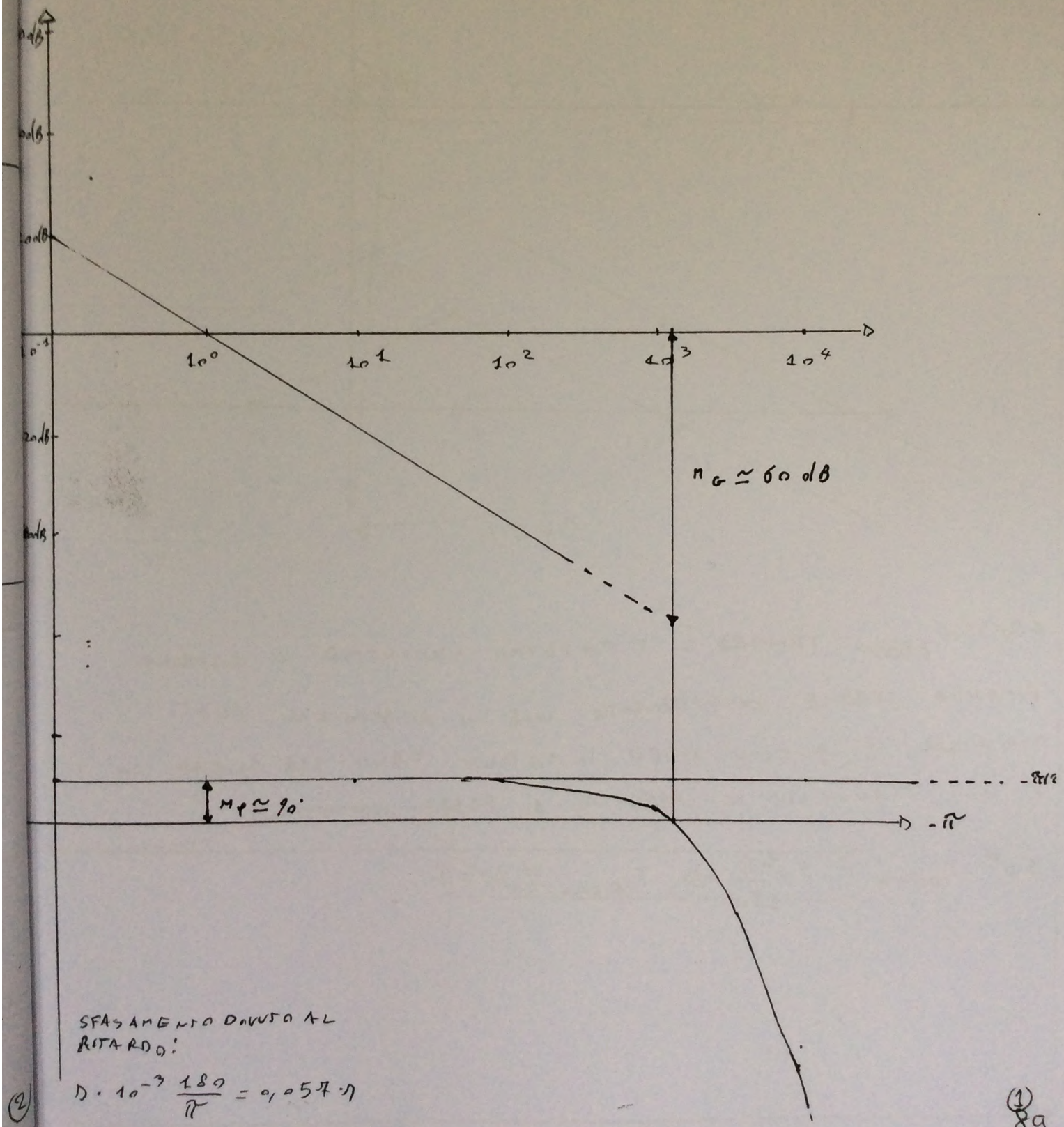
DEVO PROVARE UNA DIVERSA DISPOSIZIONE DEGLI ZERI, SUL DIAGRAMMA DI BODE QUESTA VOLTA.

DA FINIRE

$$G(s) = \frac{1}{s} e^{-sT}$$

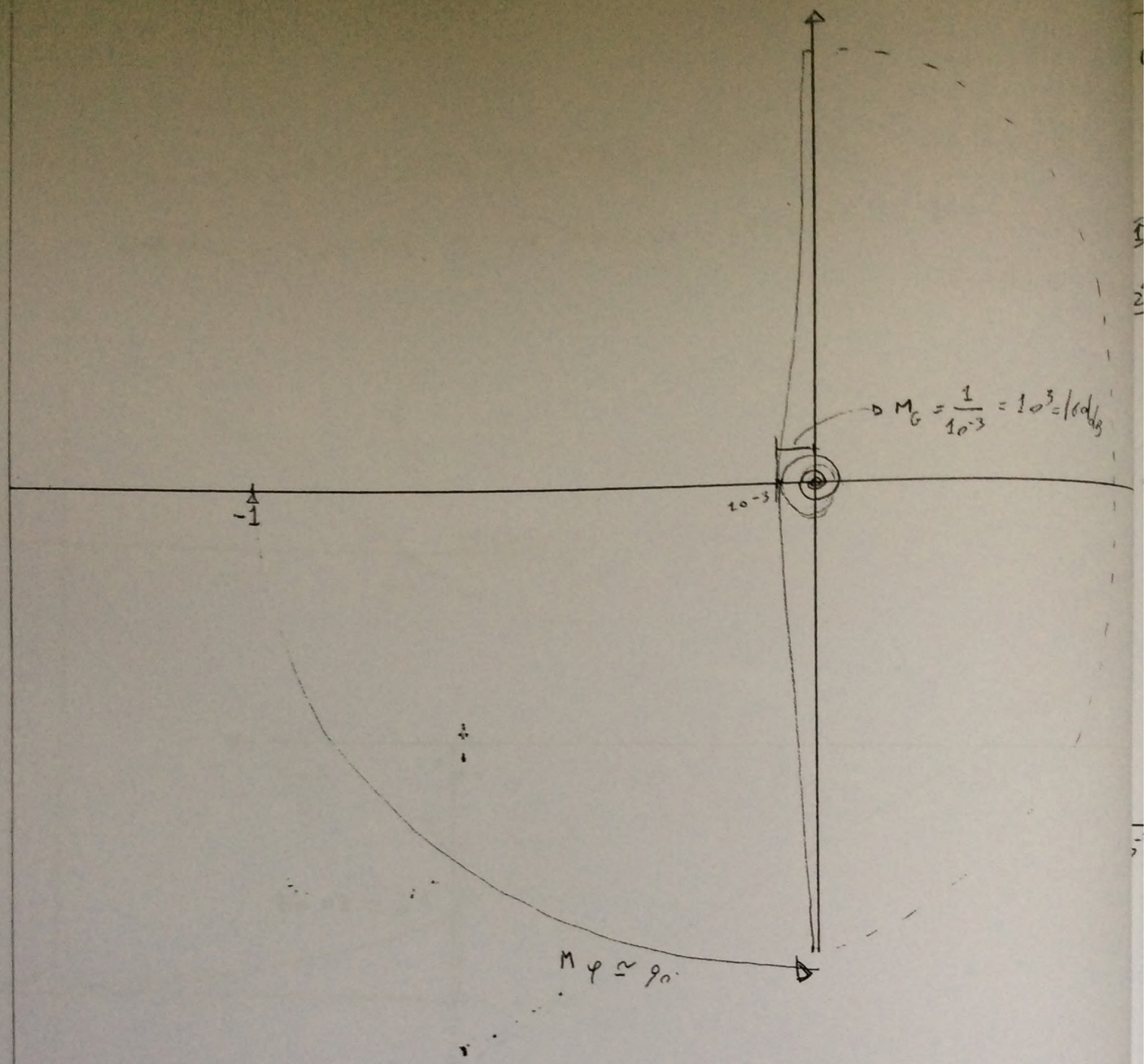
(1) DISEGNARE IL DIAGRAMMA DI NYQUIST CON $T = 10^{-3}$

(2) DETERMINARE IL MASSIMO VALORE DI T PER CUI IL SISTEMA È STABILE



SFASAMENTO DOVUTO AL RITARDO:

(2) $s \cdot 10^{-3} \frac{180}{\pi} = 0{,}057 \cdot s$



ADESSO DEBBO TROVARE IL T MASSIMO AFFINCHÈ IL SISTEMA RIMANGA STABILE. CONSIDERANDO CHE IL RITARDO NON PUÒ MODIFICARE IN ALCUN MODO IL MODULO DEVO SCEGLIERE LA T t.c. MANNULLI IL MARGINE DI FASE:

$$10^{\cancel{0}} \cdot T_{CRITICA} = 90° \frac{\pi}{180°} \Rightarrow T_{CRITICA} \simeq 1,57$$

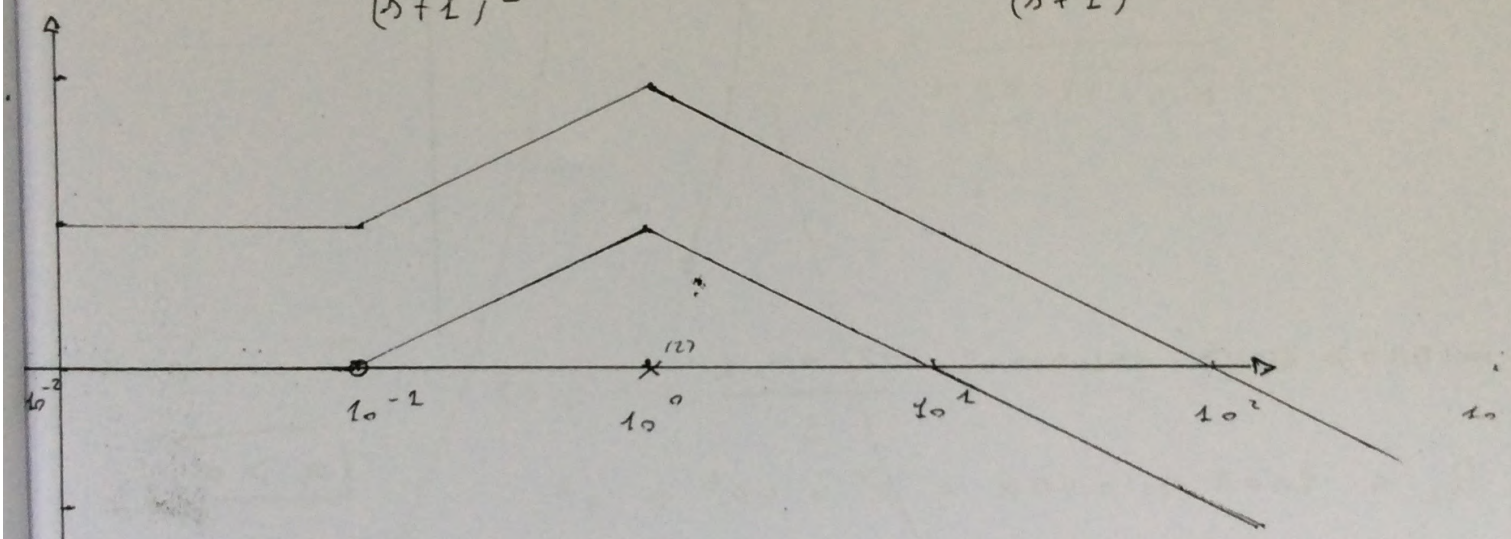
$$G(s) = \frac{100(s+0,1)}{(s+1)^2}$$

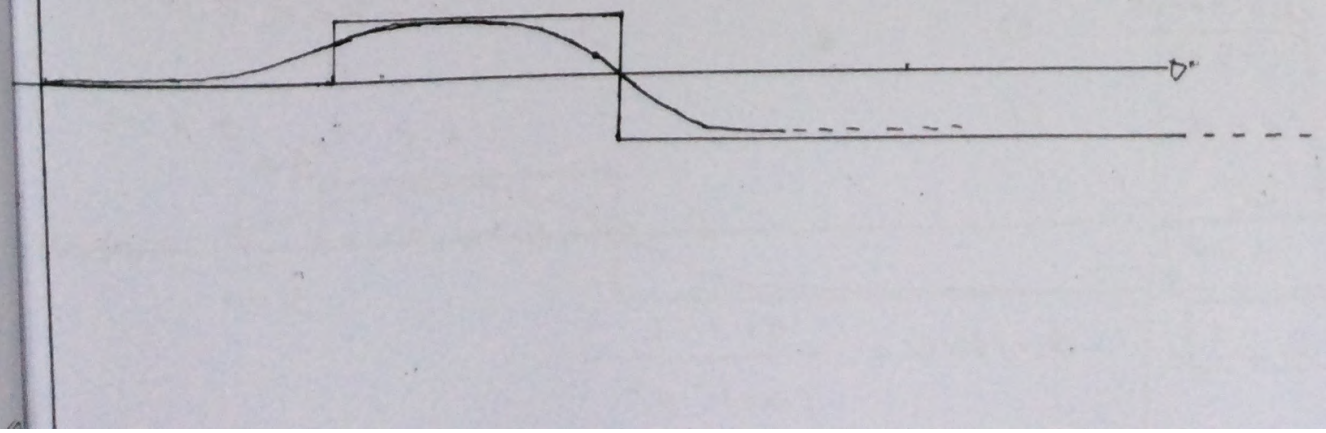
CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

① TRACCIARE IL DIAGRAMMA DI BODE

② PROGETTARE UN CONTROLLORE t.c.: $\varepsilon_\infty = 0$

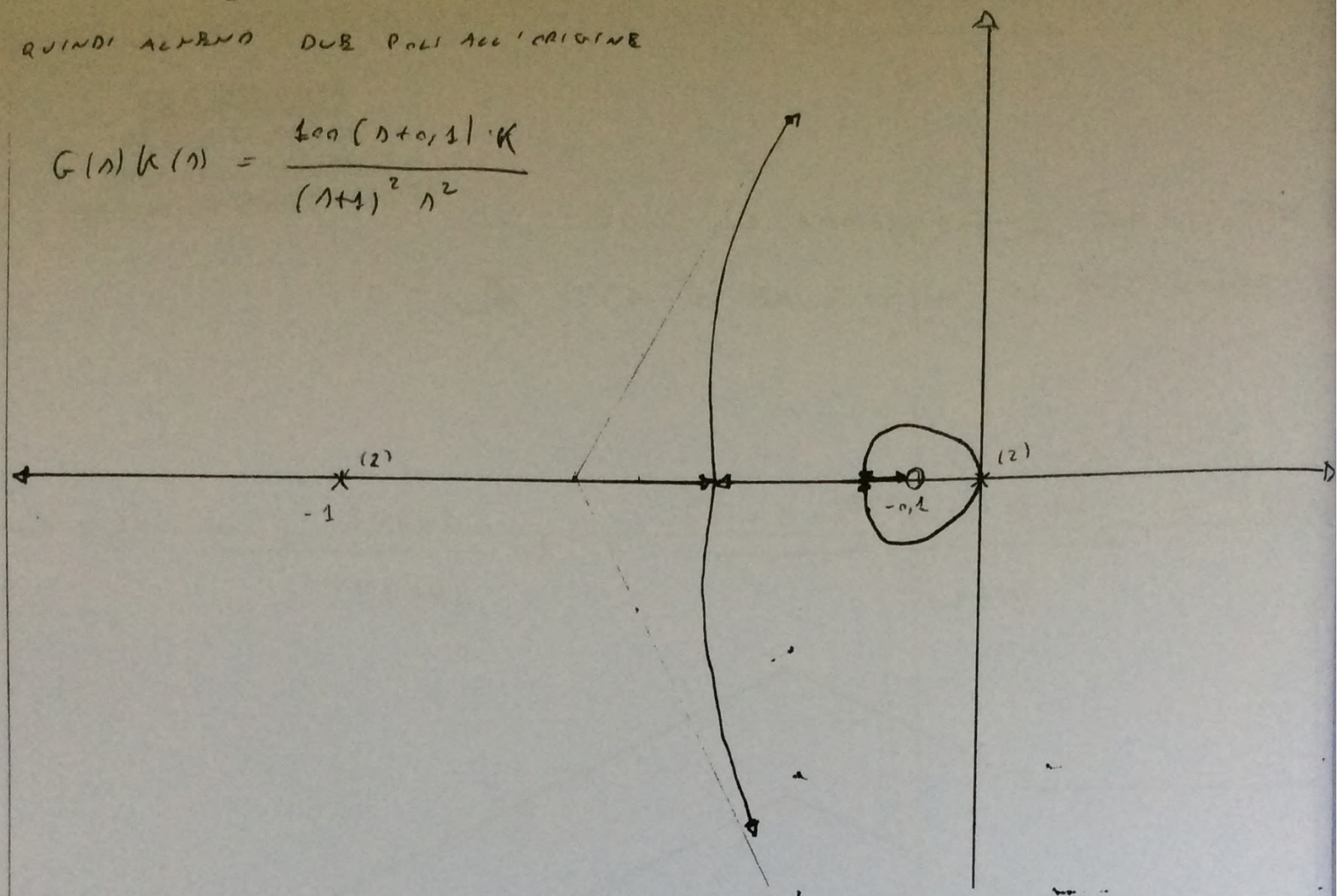
$$G(s) = \frac{100 \cdot 0,1 \cdot (10s+1)}{(s+1)^2} = 10 \frac{10s+1}{(s+1)^2} \qquad K_s = 10$$





AFFINCHÉ $\varepsilon_s = 0$ KG DOVRÀ ESSERE DI TIPO 2. SI AGGIUNGONO QUINDI ALTRI DUE POLI ALL'ORIGINE

$$G(s)K(s) = \frac{100(s+0,1)\cdot K}{(s+1)^2 s^2}$$



INTERSEZIONE ASINTOTI: $\frac{-2+0,1}{3} = -0,6\overline{3}$

$$D_{CL} = 100Ks + 10K + s^4 + 2s^3 + s^2$$

$\boxed{K > 0}$

s^4	1	1	10K	0
s^3	2	100K	0	
s^2	$1-50K$	10K	0	
s	$\frac{80K-5000K^2}{1-50K}$	0		
1	10K	0		
	0			

$1-50K > 0$

$\Downarrow$

$K < 1/50 = 0.02$

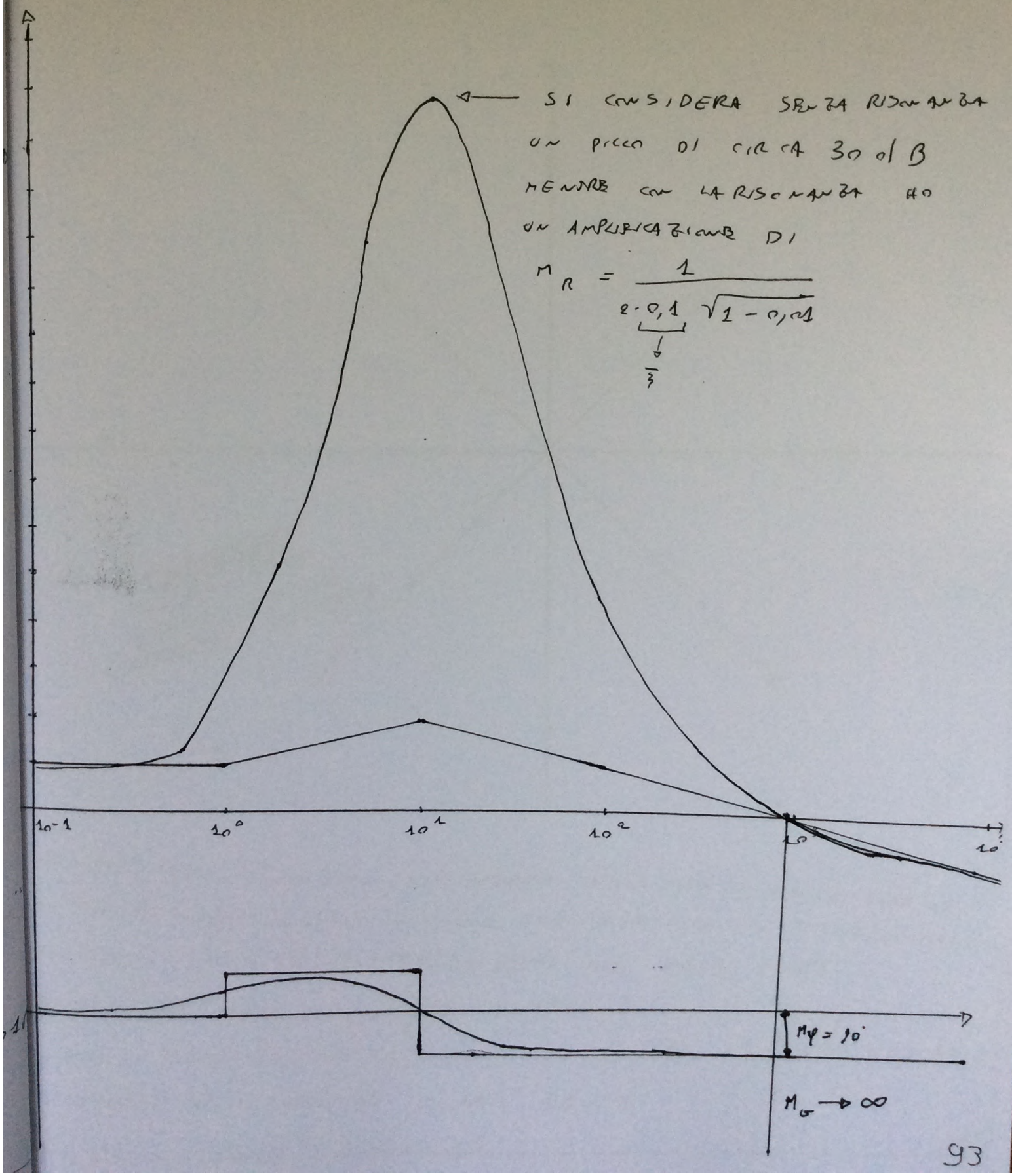
$8-500K > 0 \Rightarrow K < \frac{8}{500} = 0.016$

$\boxed{K = 0,01}$ $\quad G(s)K(s) = \frac{s+0.1}{(s+1)^2 s^2}$

$$G(s) = \frac{10\,(s+1)}{0{,}01 \cdot s^2 + 0{,}02\,s + 1}$$

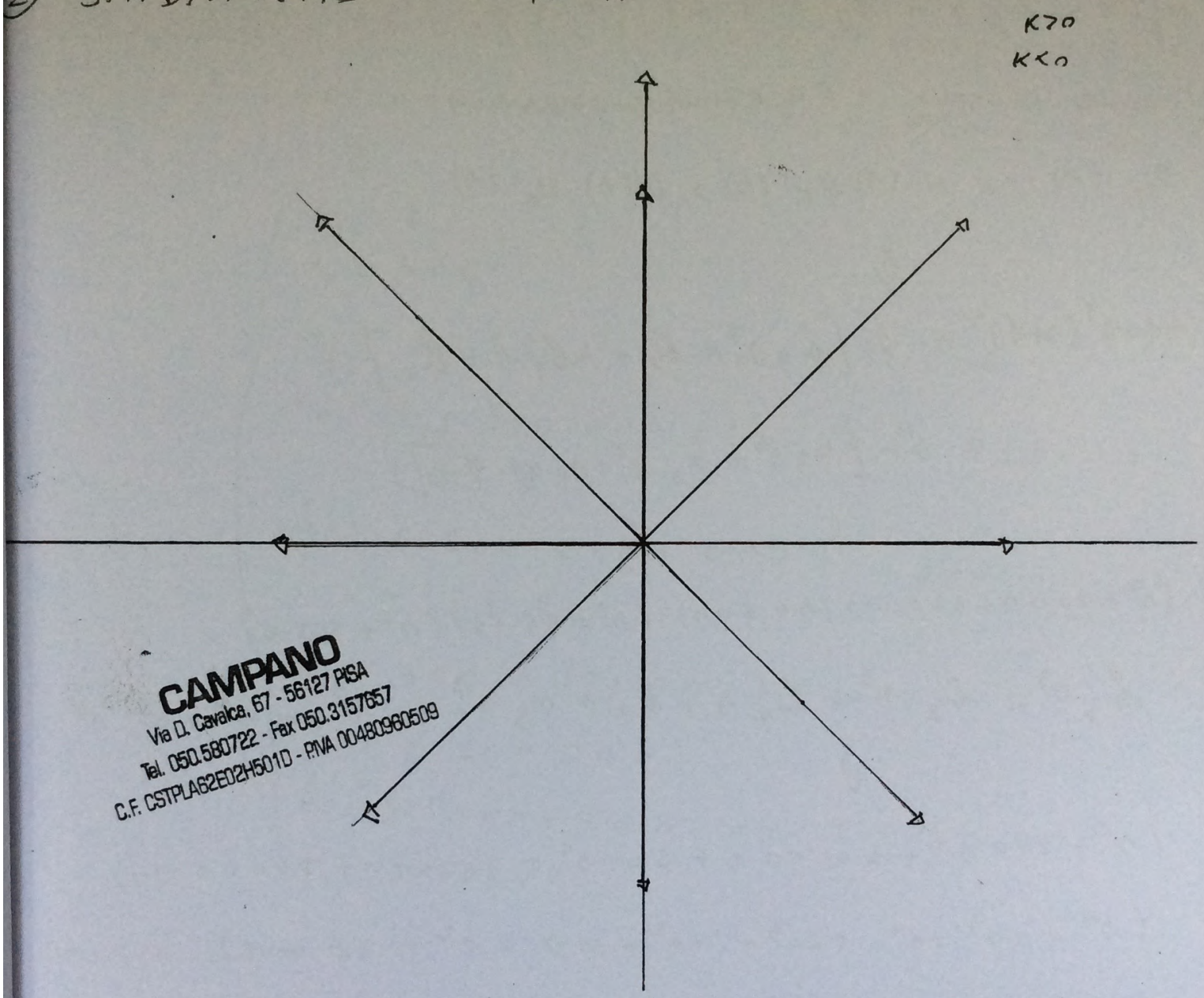
① TRACCIARE IL DIAGRAMMA DI BODE

② VALUTARE M_A, M_φ



$$G(s) = \frac{1}{s^4}$$

1. TRACCIARE IL LUOGO DELLE RADICI PER $K>0$, $K<0$
2. STABILIZZARE IL SISTEMA



CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480980509

IN OGNI CASO IL SISTEMA NON RISULTA ASINTOTICAMENTE STABILE.
AL FINE DI STABILIZZARE IL SISTEMA USO LA TECNICA DI ASSEGNAMENTO DEI POLI. PROBABILMENTE GLI ZERI CHE DEVE AVERE IL CONTROLLORE DEVONO ESSERE ALMENO 3.
VOGLIO PORRE TUTTI E 4 GLI ZERI IN -1 E 3 ZERI CHE SONO COSTRETTO AD INSERIRE FUORI BANDA

$$D_{cl}(s) = (s+1)^4 (s+100)^3$$

IL DENOMINATORE DEL COMPENSATORE HA LA FORMA:

$$D_K(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

IL NUMERATORE SIMILMENTE

$$N_K(s) = b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

QUINDI CALCOLO L'EQUAZIONE DIOFANTINA

$$P_{CL}(s) = N(s) N_K(s) + D(s) D_K(s)$$

$$\Downarrow$$

$$(s+100)^3 (s+1)^4 = 1 \cdot [b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0] +$$

$$+ s^4 \cdot [a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0]$$

$$\Downarrow$$

$$(s^2 + 200s + 10000)(s + 100)(s^2 + 2s + 1)(s^2 + 2s + 1) =$$

$$= b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 + a_3 s^7 + a_2 s^6 + a_1 s^5 + a_0 s^4$$

$$\Downarrow$$

$$(s^3 + 200 s^2 + 10000 s + 100 s^2 + 20000 s + 1000000)$$

$$(s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + s^2 + 2s + 1) =$$

$$= a_3 s^7 + a_2 s^6 + a_1 s^5 + a_0 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b$$

$$\Downarrow$$

$$(s^3 + 300 s^2 + 30000 s + 1000000)$$

$$(s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1) = a_3 s^7 + \dots + b_0$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$n^7 + 4n^6 + 6n^5 + 4n^4 + n^3 + 300n^6 + 1200n^5 + 1800n^4 + 1200n^3 + 300n^2 + 30000n^5 + 120000n^4 + 180000n^3 + 120000n^2 + 30000n + 1000000n^4 + 4000000n^3 + 6000000n^2 + 4000000n + 1000000 = \alpha_3 n^7 + \dots + b_0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 = 304 \\ \alpha_1 = 6 + 1200 + 30000 = 31206 \\ \alpha_0 = 4 + 120000 + 1000000 + 1800 = \\ \quad = 1121804 \\ b_3 = 1200 + 180000 + 4000000 = \\ \quad = 4181200 \\ b_2 = 300 + 120000 + 6000000 = \\ \quad = 6120300 \\ b_1 = 30000 + 4000000 = 4030000 \\ b_0 = 1000000 \end{cases}$$

DA CUI QUINDI AO:

$$K(n) = \frac{4181200 \cdot n^3 + 6120300 n^2 + 4030000 n + 10^6}{n^3 + 304 n^2 + 31206 n + 1121804}$$

HO DECISAMENTE ESAGERATO. IN EFFETTI È DEL TUTTO INUTILE POSIZIONARE 3 POLI A -100, ANDAVA BENE PURE ANCHE CON A -1.

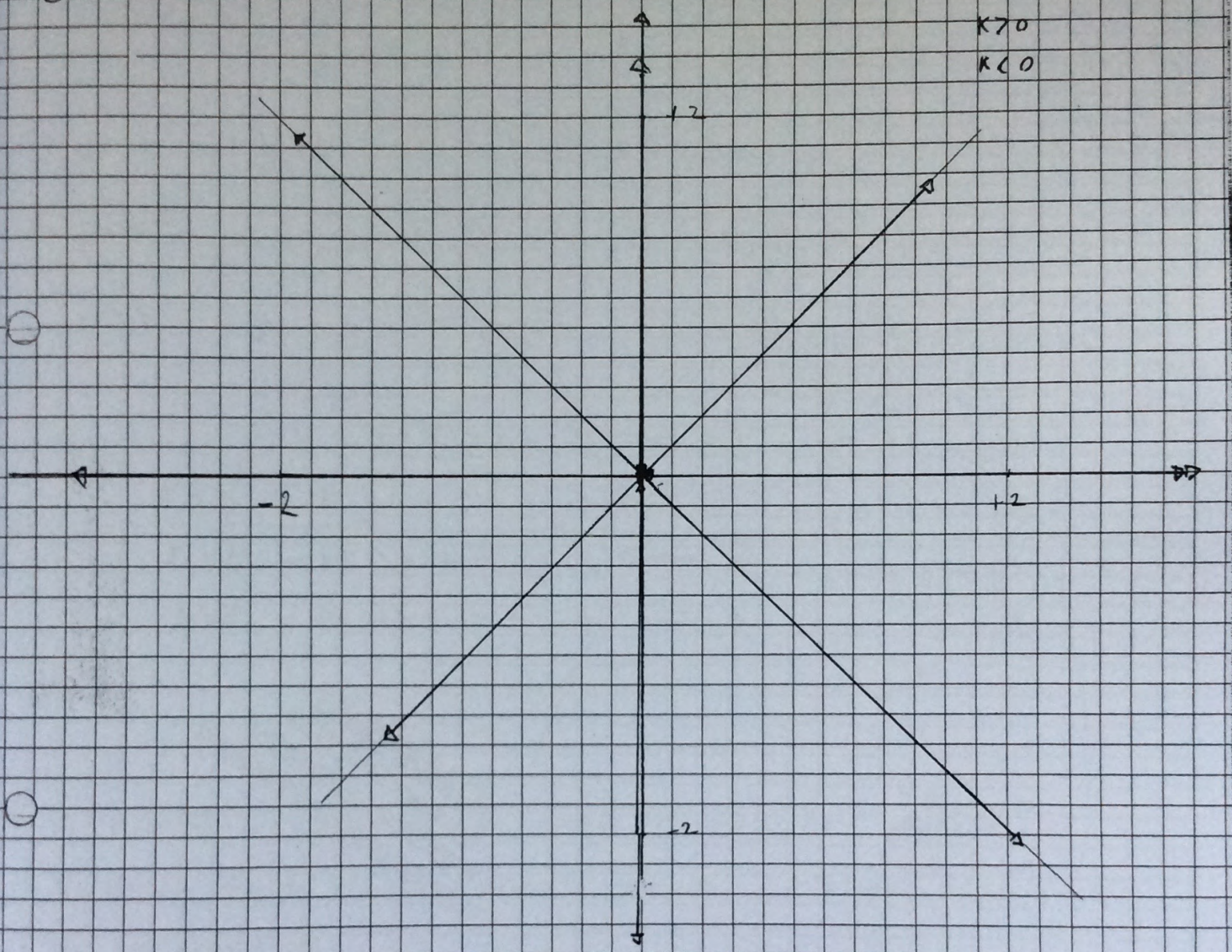
CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

DATO IL SISTEMA

$$G(s) = \frac{1}{(s^2+4)(s^2-4)}$$

① DISEGNARE IL LUOGO DELLE RADICI

② SE INSTABILE STABILIZZARE IL SISTEMA



AL FINE DI STABILIZZARE IL SISTEMA AVRÒ BISOGNO DI ALMENO TRE ZERI. VOGLIO PORRE TUTTI E 7 I POLI A -1.

$$D_{CL}(s) = (s+1)^7 = s^7 + 7s^6 + 21s^5 + 35s^4 + 35s^3 + 21s^2 + 7s + 1$$

IL DENOMINATORE DEL CONTROLLORE HA LA FORMA

$$D_K(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

E SIMILMENTE IL NUMERATORE

$$N_K(s) = b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

CALCOLO L'EQUAZIONE DIOFANTINA:

$$D_{CL}(s) = N(s) N_K(s) + D(s) D_K(s)$$

$$\Downarrow$$

$$s^7 + 7s^6 + 21s^5 + 35s^4 + 35s^3 + 21s^2 + 7s + 1 =$$

$$= 1 \cdot [b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0] + (s^4 - 16)[\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 +$$

$$+ \alpha_1 s + \alpha_0] = b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 + \alpha_3 s^7 + \alpha_2 s^6 +$$

$$\alpha_1 s^5 + \alpha_0 s^4 - 16\alpha_3 s^3 - 16\alpha_2 s^2 - 16\alpha_1 s - 16\alpha_0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} b_3 - 16\alpha_3 = 35 \Longrightarrow b_3 = 35 + 16 = 51 \\ b_2 - 16\alpha_2 = 21 \Longrightarrow b_2 = 21 + 16 \cdot 7 = 133 \\ b_1 - 16\alpha_1 = 7 \Longrightarrow b_1 = 7 + 16 \cdot 21 = 343 \\ b_0 - 16\alpha_0 = 1 \Longrightarrow b_0 = 1 + 16 \cdot 35 = 561 \\ \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 = 7 \\ \alpha_1 = 21 \\ \alpha_0 = 35 \end{cases}$$

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157557
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480980509

QUINDI:

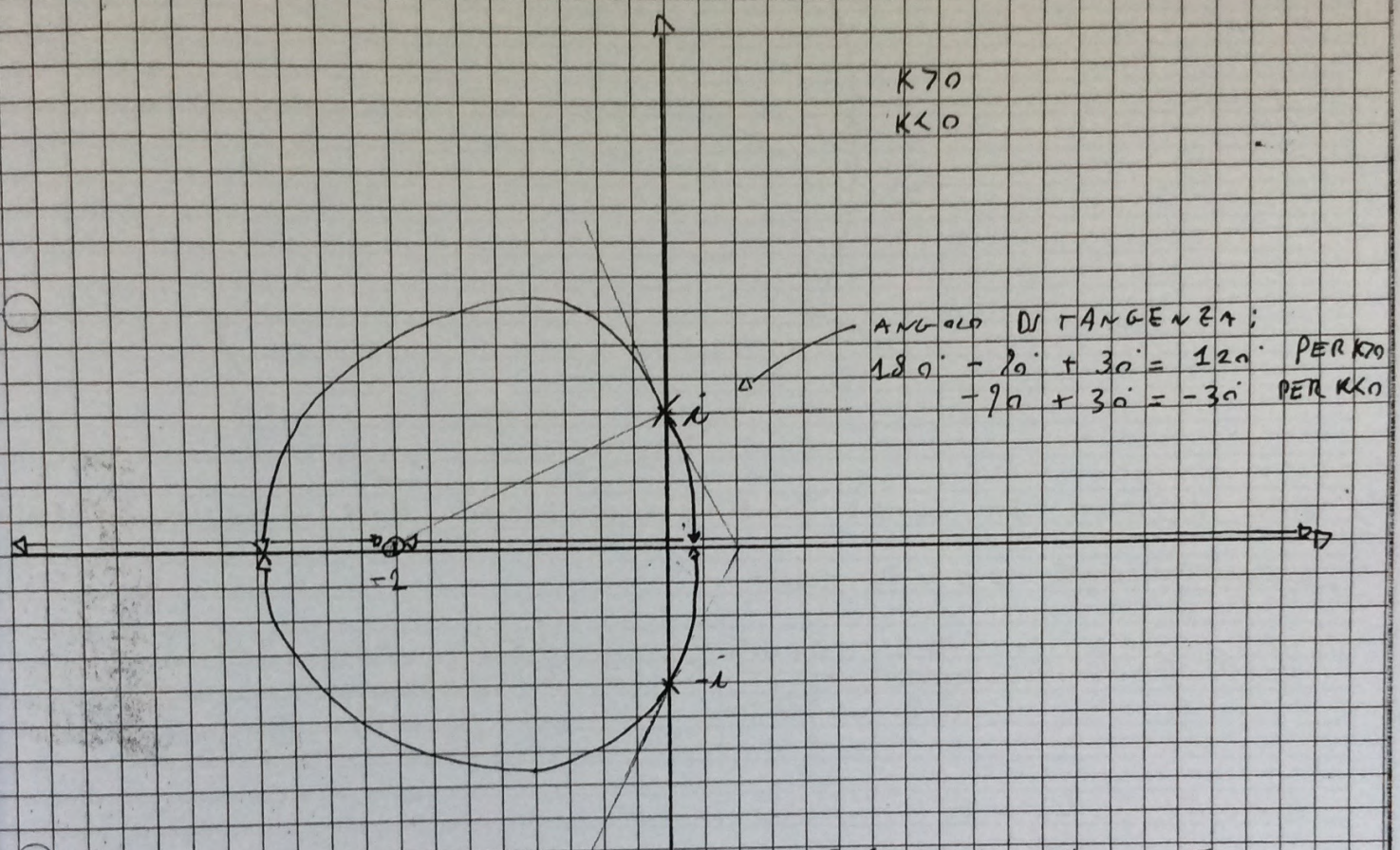
$$K(s) = \frac{51 \cdot s^3 + 133 \cdot s^2 + 343 \cdot s + 561}{s^3 + 7s^2 + 21s + 35}$$

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+1}$$

(1) DISEGNARE IL LUOGO DELLE RADICI PER $K > 0$ E $K < 0$

(2) PROGETTARE UN CONTROLLORE t.c.: $e_\infty < 0,1$

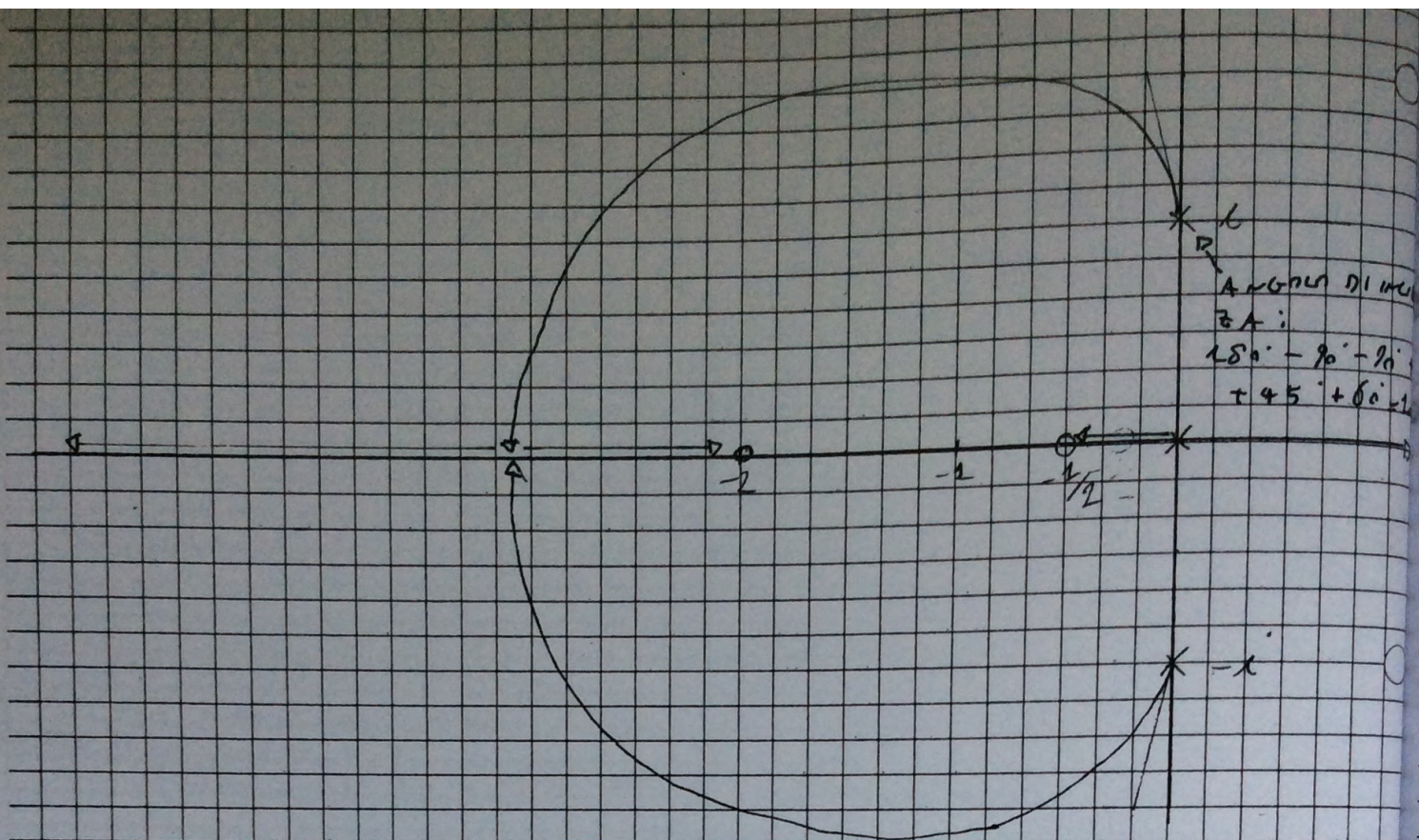
(3) DETERMINARE M_φ E M_G



AFFINCHÉ L'ERRORE AL GRADINO RISULTI NULLO E QUELLO ALLA RAMPA FINITO DOVRÀ ESSERE AGGIUNTO UN INTEGRATORE.

PER ASSICURARE LA STABILITÀ UTILIZZO ANCHE UNO ZERO POSTO A $-0,5$.

IL LUOGO DELLE RADICI VIENE COSÌ A DESSERE:



DAL LUOGO SI NOTA COME LA STABILITÀ SIA ASSICURATA

IL CONTROLLORE QUINDI SARÀ

$$G(s)\,K(s) = \frac{s+2}{s^2+1}\,\frac{s+0.5}{s}\,K = \frac{\frac{1}{2}\,2\left(s/2+1\right)\left(2s+1\right)}{+1\cdot\left(1+s^2\right)\;s}\,K$$

QUINDI $K_s = K$

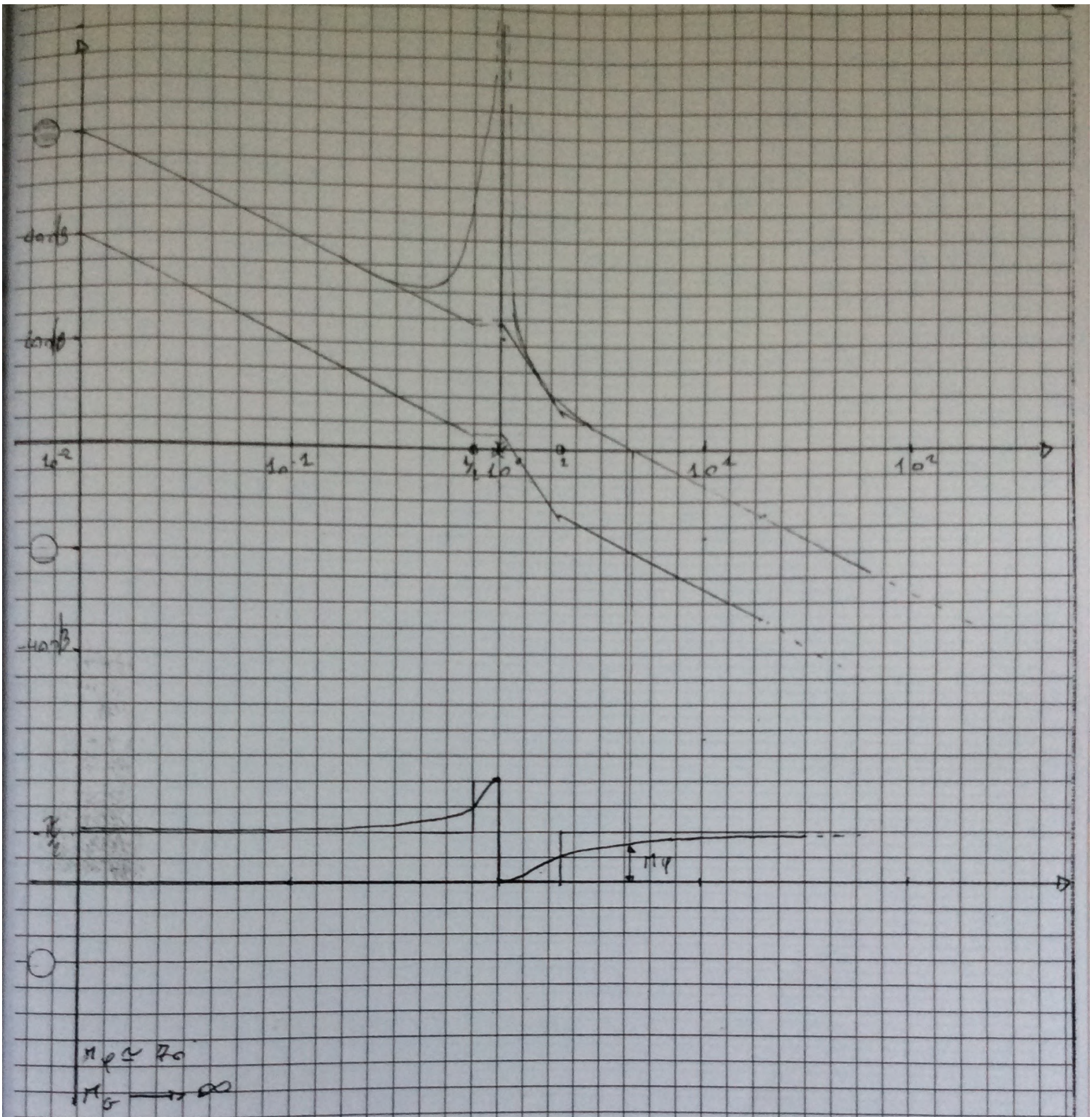
PASSO A TRACCIARE BODE

SICCOME VOGLIO $\varepsilon_\infty < 0{,}1$ E SICCOME GK DISTA 1

AVRÒ

$$\frac{1}{1+K_s} < \frac{1}{10} \overset{K_s>0}{\iff} 10 < 1+K_s \Rightarrow K_s > 9$$

SCELGO $K_s = 10$

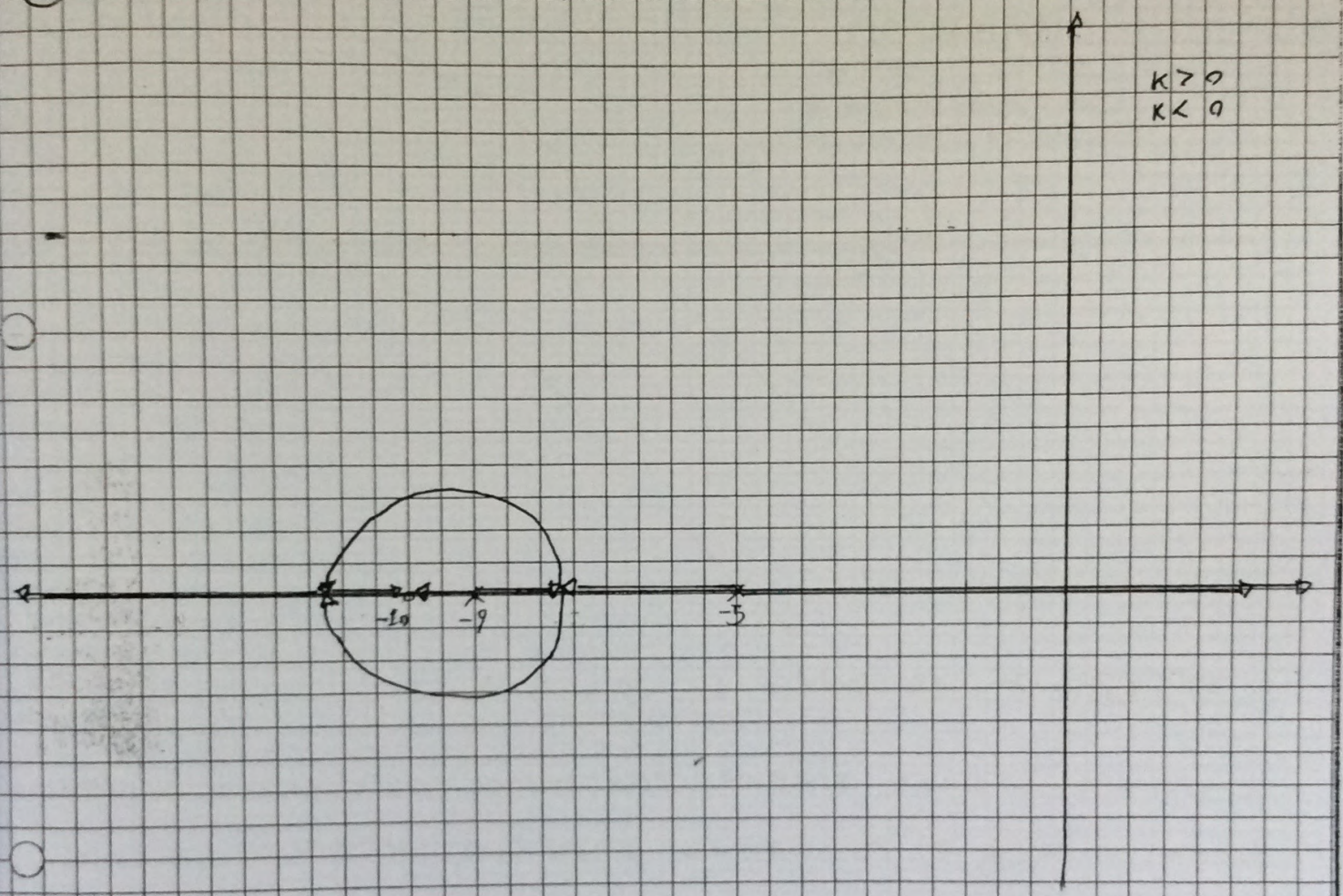


$M_\varphi \simeq 70°$

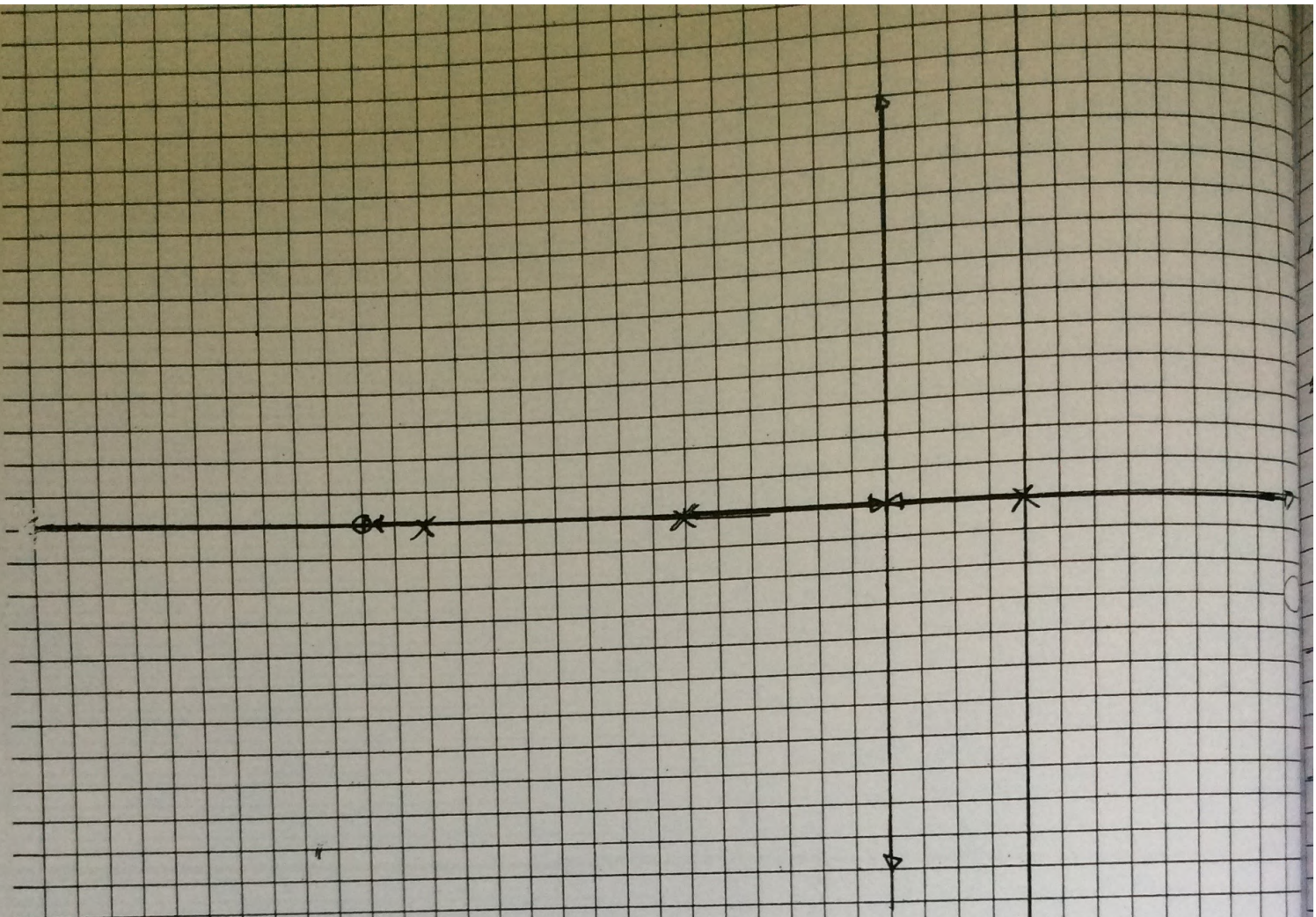
$M_G \longrightarrow \infty$

$$G(s) = \frac{s+10}{(s+9)(s+5)}$$

1. DISEGNARE IL LUOGO DELLE RADICI DIRETTO E INVERSO
2. PROGETTARE UN CONTROLLORE C.-C.: $\varepsilon_\infty \leq 0.01$
3. VALUTARE MARGINE DI FASE E DI GUADAGNO



AL FINE DI RENDERE L'ERRORE ALLA RAMPA NULLO AGGIUNGO UN INTEGRATORE



INTERSEZIONE ASINTOTI $= \frac{10-9-5}{2} = -2$

IL SISTEMA RISULTA STABILE PER OGNI GUADAGNO. SCELGO ALLORA IL K CHE MI RENDA L'ERRORE INFERIORE A 0.01

$$G(s)K(s) = \frac{K(s+10)}{s(s+9)(s+5)} = \underbrace{\frac{K\cdot \cancel{10}^{2}}{9\,\cancel{5}}}_{\to K_g} \frac{(1+s/10)}{s(1+\frac{s}{9})(1+\frac{s}{5})}$$

$$\frac{1}{1+K_g} = \frac{1}{1+\frac{K\cdot 2}{9}} \leq 0.01 = \frac{1}{100} \Rightarrow 100 \leq 1 + \frac{K\cdot 2}{9}$$

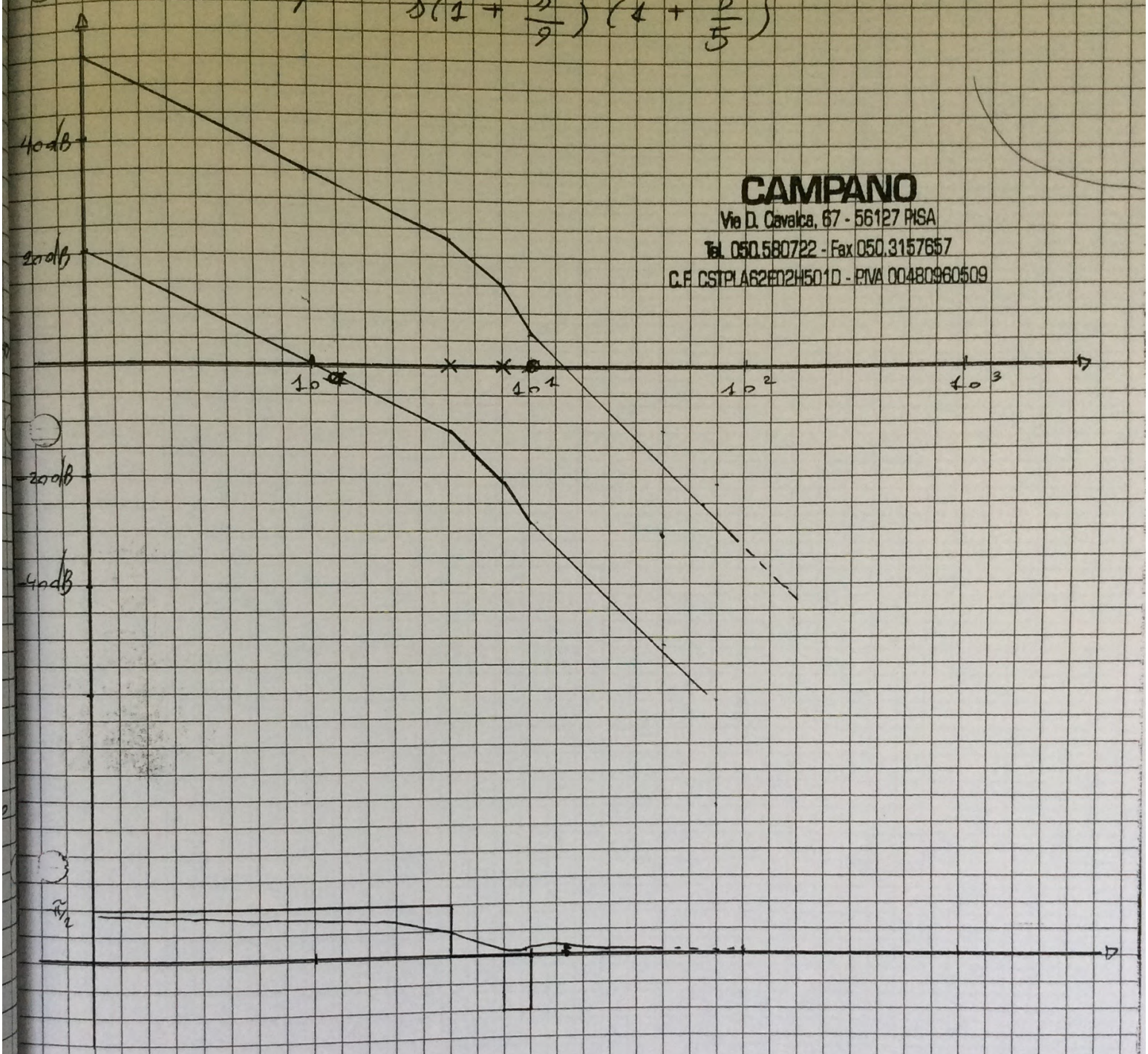
$$\Downarrow$$

$$4455 = \frac{99\cdot 9}{2} \leq K$$

SCELGO $\boxed{K = 450}$

PASSO 4: TRACCIAMENTO DI BODE

$$GK = \frac{500}{9} \frac{1 + \frac{s}{10}}{s\left(1 + \frac{s}{9}\right)\left(1 + \frac{s}{5}\right)}$$



CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

$M_\varphi \simeq 20°$

$M_G \longrightarrow \infty$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

DETERMINARE:
- CONTROLLABILITÀ
- OSSERVABILITÀ
- STABILIZZABILITÀ
- RILEVABILITÀ

SE RISULTA STABILIZZABILE PROGETTARE UN CONTROLLORE CHE LO STABILIZZI

OVVIAMENTE GLI AUTOVALORI SONO $-5, -5, 2$ E QUINDI IL SISTEMA NON È STABILE

$$\beta = [B, AB, A^2 B] = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 50 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -10 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det(\beta) = 0 \Rightarrow \text{rango}(\beta) < 3$ NON CONTROLLABILE

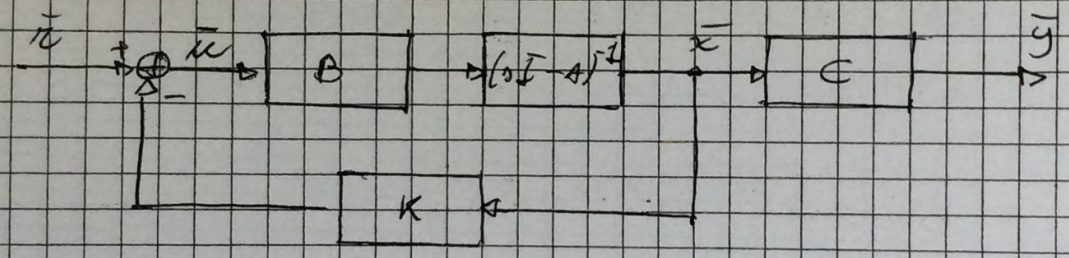
$$C_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 25 & 15 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det(C_o) \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(C_o) = 3 \Rightarrow$ OSSERVABILE

IL SISTEMA È PERÒ STABILIZZABILE VISTO CHE IL SUO STATO INSTABILE [DIVERGE ALL'AUMENTARE t] È CONTROLLABILE.

IN QUANTO OSSERVABILE IL SISTEMA È PURE RILEVABILE.

AL FINE DI STABILIZZARE UNICIZZO LA RETROAZIONE DELLO STATO. SUPPONGO DI ESSERE ABBASTANZA "RICCO" PER AVERE LA SEGUENTE STRUTTURA



$$A - BK = \begin{bmatrix} -5-2k_1 & 1-2k_2 & 0-2k_3 \\ 0 & -5 & 0 \\ -3k_1 & -3k_2 & 2-3k_3 \end{bmatrix}$$

$$sI - A + BK = \begin{bmatrix} s+5+2k_1 & 2k_2-1 & 2k_3 \\ 0 & s+5 & 0 \\ 3k_1 & 3k_2 & s-2+3k_3 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A + BK| = (s+5)\begin{vmatrix} s+5+2k_1 & 2k_3 \\ 3k_1 & s-2+3k_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (s+5)\left[(s+5+2k_1)(s-2+3k_3) - 6k_1k_3\right] =$$

$$= (s+5)\left[s^2 - \cancel{2s} + \cancel{3k_3 s} + \cancel{5s} - 10 + 15k_3 + \cancel{2k_1 s} + \right.$$

$$\left. - 4k_1 + \cancel{6k_1k_3} - \cancel{6k_1k_3}\right] =$$

$$= (s+5)\left[s^2 + s\left[-2 + 3k_3 + 5 + 2k_1\right] + \left[15k_3 - 4k_1\right]\right] =$$

$$= s^3 + s^2\left[3k_3 + 2k_1 + 3\right] + s\left[15k_3 - 4k_1\right] +$$

$$+ 5s^2 + s\left[15k_3 + 10k_1 + 15\right] + \left[75k_3 - 20k_1\right] =$$

$$= s^3 + s^2\left[3k_3 + 2k_1 + 8\right] + s\left[30k_3 + 6k_1 + 15\right] + \left[75k_3 - 20k_1\right]$$

VOGLIO PORRE TUTTI E TRE I POLI IN -5 QUINDI

$$(s+5)^3 = s^3 + 15s^2 + 75s + 125$$

DA CUI

$$3k_3 + 2k_1 + 8 = 15 \Rightarrow 3k_3 + 2k_1 = 7$$

$$30k_3 + 6k_1 + 15 = 75 \Rightarrow \cancel{30}^{5}k_3 + \cancel{6}k_1 = \cancel{60}^{10}$$

$$75k_3 - 20k_1 = 125 \Rightarrow 15k_3 - 4k_1 = 25$$

$$k_3 = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}k_1$$

$$\frac{35}{3} - \frac{10}{3}k_1 + k_1 = 10 \Rightarrow 35 - 7k_1 = 30 \Rightarrow k_1 = 5/7$$

$$k_3 = \frac{7}{3} - \frac{10}{21} = \frac{49-10}{21} = \frac{39}{21}$$

$$75 \cdot \frac{39}{21} - 4\frac{5}{7} \neq 25$$

QUESTO DIMOSTRA CHE LA RETROAZIONE DELLO STATO NON SI PUÒ USARE!

IL SISTEMA INFATTI È NON CONTROLLABILE RAGGIUNGIBILE

VADO QUINDI A SCRIVERE L'FDT

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+5 & -1 & 0 \\ 0 & s+5 & 0 \\ 0 & 0 & s-2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+5} & \frac{1}{(s+5)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

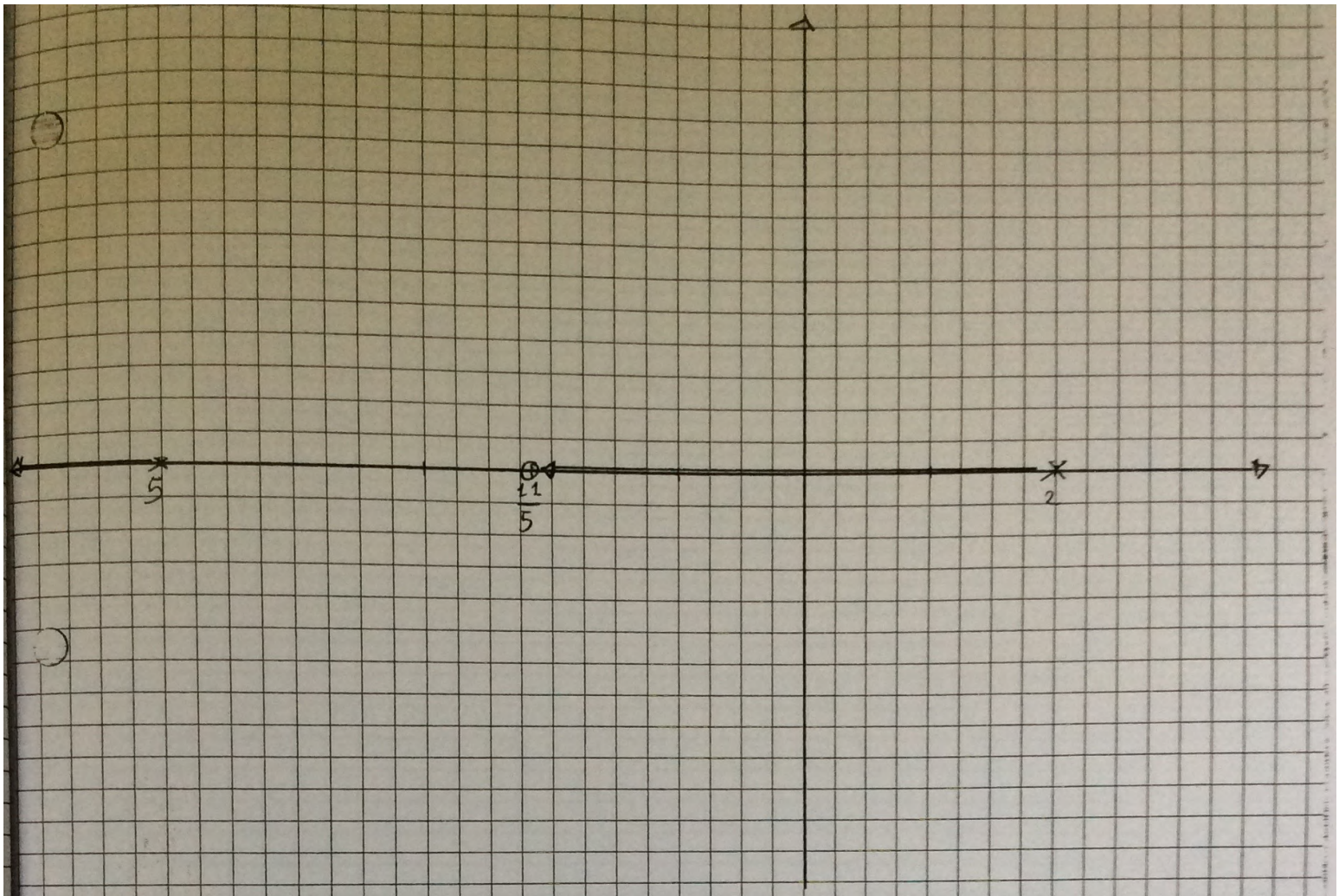
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{s+5} \\ 0 \\ \frac{3}{s-2} \end{bmatrix} =$$

← IN QUESTO CASO PARTICOLARE ASPETTARSI UN POLO È SPARITO

$$= \frac{2}{s+5} + \frac{3}{s-2} = \frac{2s-4+3s+15}{(s+5)(s-2)} =$$

$$= \frac{5s+11}{(s+5)(s-2)} = 5\,\frac{s+\frac{11}{5}}{(s+5)(s-2)}$$

DISEGNO IL LUOGO DELLE RADICI:



BASTA UN CONTROLLORE PROPORZIONALE

USO IL CRITERIO DI ROUTH

$$D_{CL} = 5Ks + 11K + s^2 + 5s - 2s - 10 =$$

$$= s^2 + s\,[5K + 3] + [11K - 10]$$

$$5K + 3 > 0 \qquad 11K - 10 > 0$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$K > -\frac{3}{5} \qquad K > \frac{10}{11}$$

SCELGO $K = 2$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \ 0 \ 1)\, x$$

① DETERMINARE LE PROPRIETÀ STRUTTURALI

② PROGETTARE SE NECESSARIO E SE POSSIBILE UN CONTROLLORE STABILIZZANTE

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

CONTROLLABILITÀ:

$$\mathcal{B} = [B, AB, A^2B] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathcal{B}) = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\mathcal{B}) < 3 \Longrightarrow$ NON CONTROLLABILE

OSSERVABILITÀ:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(\mathcal{O}) \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\mathcal{O}) = 3 \Longrightarrow$ OSSERVABILE

CONTROLLO SE ALMENO FOSSE STABILIZZABILE:

LA È POSSIBILE LO STATO INSTABILE (A CAUSA DELL'AUTOVALORE 1) È CONTROLLABILE.

CERCO QUINDI LA FDT:

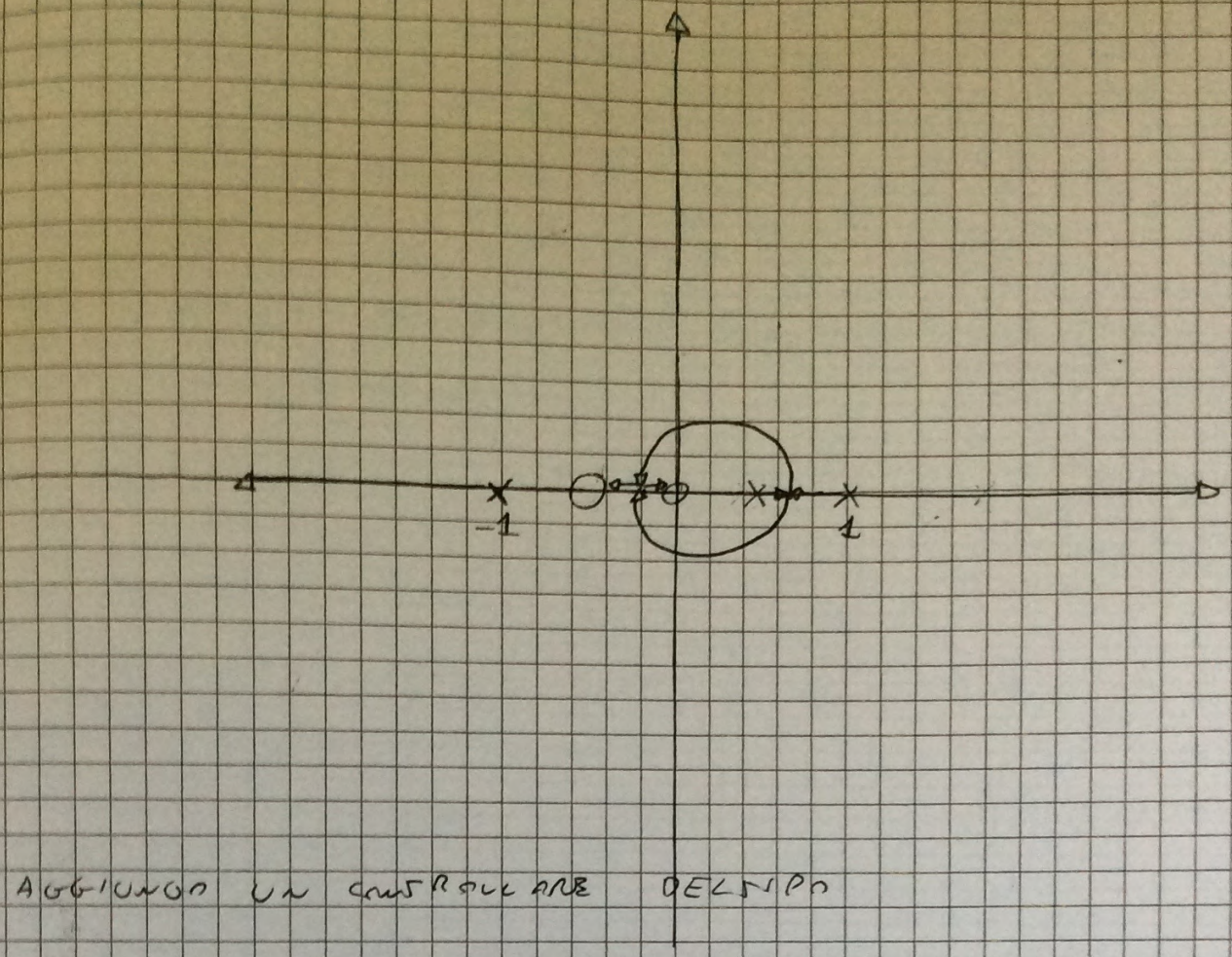
$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \\ \frac{1}{s-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1} = \frac{s \cancel{-1} + s \cancel{+1}}{(s+1)(s-1)}$$

$$G(s) = \frac{2s}{(s+1)(s-1)}$$

DISEGNO IL LUOGO DELLE RADICI:



AGGIUNGO UN CONTROLLORE DEL TIPO

$$K(s) = K \frac{s + 1/2}{s - 1/2}$$

QUINDI HO

$$G(s)\,K(s) = \frac{K \cdot 2s\,(s + 1/2)}{(s - 1/2)(s+1)(s-1)}$$

USO ROUTH

$$D_{CL} = 2Ks^2 + Ks + s^3 - \frac{s^2}{2} - s + \frac{1}{2} =$$

$$= s^3 + s^2\left[2K - \frac{1}{2}\right] + s\left[K - 1\right] + \frac{1}{2}$$

$$2K > \frac{1}{2} \Rightarrow K > \frac{1}{4}$$

$$K - 1 > 0 \Rightarrow K > 1$$

s^3	1	$k-1$	0
s^2	$2k-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
s	$\frac{4k^2-\frac{3}{2}k}{2k-\frac{1}{2}}$	0	
1	$\frac{1}{2}$	0	
	0		

$$4k^2-\frac{3}{2}k>0 \overset{k>0}{\Longrightarrow} 4k>\frac{3}{2} \Rightarrow k>\frac{3}{4}$$

QUANDO $k>1$

SCELGO $k=2$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

VOGLIO TROVARE LE PROPRIETÀ STRUTTURALI:

- NON STABILIZZABILE (AUTOVALORE 4 - 1)
- OSSERVABILE

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 16 \end{bmatrix}$$

CAMPANO
Via D. Cavalca, 87 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157857
C.F. CSTPLA62E02H501D - PIVA 00480960509

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathcal{O}) \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(\mathcal{O}) = 3 \Rightarrow \text{OSSERVABILE}$$

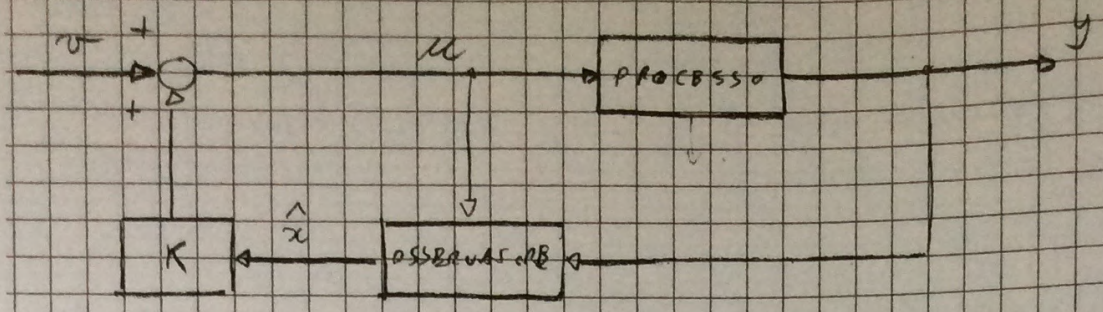
- CONTROLLABILE

$$\mathcal{R} = [B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathcal{R}) \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(\mathcal{R}) = 3 \Rightarrow \text{CONTROLLABILE}$$

- DI CONSEGUENZA È ANCHE STABILIZZABILE E RILEVABILE

ADESSO DEVO DI STABILIZZARE UTILIZZANDO LA RETROAZIONE DELLO STATO



VOGLIO PORRE TUTTI GLI AUTOVALORI A -1.

$$K = \hat{K}\,\hat{M}_r\,M_r^{-1}$$

$$M_r = \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$M_r^{-1} = \begin{bmatrix} -11/7 & 44/35 & 11/35 \\ -3/7 & 1/7 & 19/35 \\ 1/7 & -4/35 & -1/35 \end{bmatrix}$$

ESSENDO IL POLINOMIO CARATTERISTICO

$$(s+1)^2(s-4) = (s^2+2s+1)(s-4) = s^3+2s^2+s-4s^2-8s-4$$

$$= s^3-2s^2-7s-4$$

ALLORA

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 8 & 18 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\hat{M}_r = \left[\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \hat{A}^2\hat{B}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

IL POLINOMIO CARATTERISTICO DESIDERATO IN ANELLO CHIUSO

È $(D+1)^3 = D^3 + 3D^2 + 3D + 1$

QUINDI

$\beta_2 = 3 \quad \beta_1 = 3 \quad \beta_0 = 1$

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

E ANCORA

$\alpha_2 = -2 \quad \alpha_1 = -7 \quad \alpha_0 = -4$

QUINDI

$$\hat{K} = \left[\alpha_0 - \beta_0, \alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2\right] = \left[-5, -10, -5\right]$$

INFINE

$$K = \left[-5, -10, -5\right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11/7 & 44/35 & 11/35 \\ -3/7 & 1/7 & 10/35 \\ 1/7 & -4/35 & -1/35 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[-5, -10, -5\right] \begin{bmatrix} 1/7 & -4/35 & -1/35 \\ -1/7 & -3/35 & 8/35 \\ -6/7 & 10/35 & 20/35 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

ADESSO SI DEVE PROGETTARE L'OSSERVATORE A SINISTRA

$$M_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/16 \end{bmatrix}$$

VOGLIAMO UNA DINAMICA MOLTO PIÙ VELOCE DEL SISTEMA

SCEGLIAMO POLI, TRE ALLA MASSA A -10.

$$(s+10)^3 = (s^2 + 20s + 100)(s+10) = s^3 + 30s^2 + 300s + 1000$$

LA MATRICE IN FORMA CANONICA DI OSSERVABILITÀ È

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{M}_o = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{A} \\ \hat{C}\hat{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & 18 \\ 1 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} -4 - 1000 \\ -7 - 300 \\ -2 - 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1004 \\ -307 \\ -32 \end{bmatrix}$$

$$H = \left(\tilde{H} \cdot \tilde{M}_0 \cdot M_0^{-1} \right) =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -1004 & -307 & -32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -1004 & -307 & -32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & 1 & \frac{2}{16} \\ 1 & 2 & \frac{11}{16} \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} -32 & -371 & \frac{-1970}{16} \end{bmatrix}$$

← ISPANN SONO PROBABILMENTE SBAGLIATI

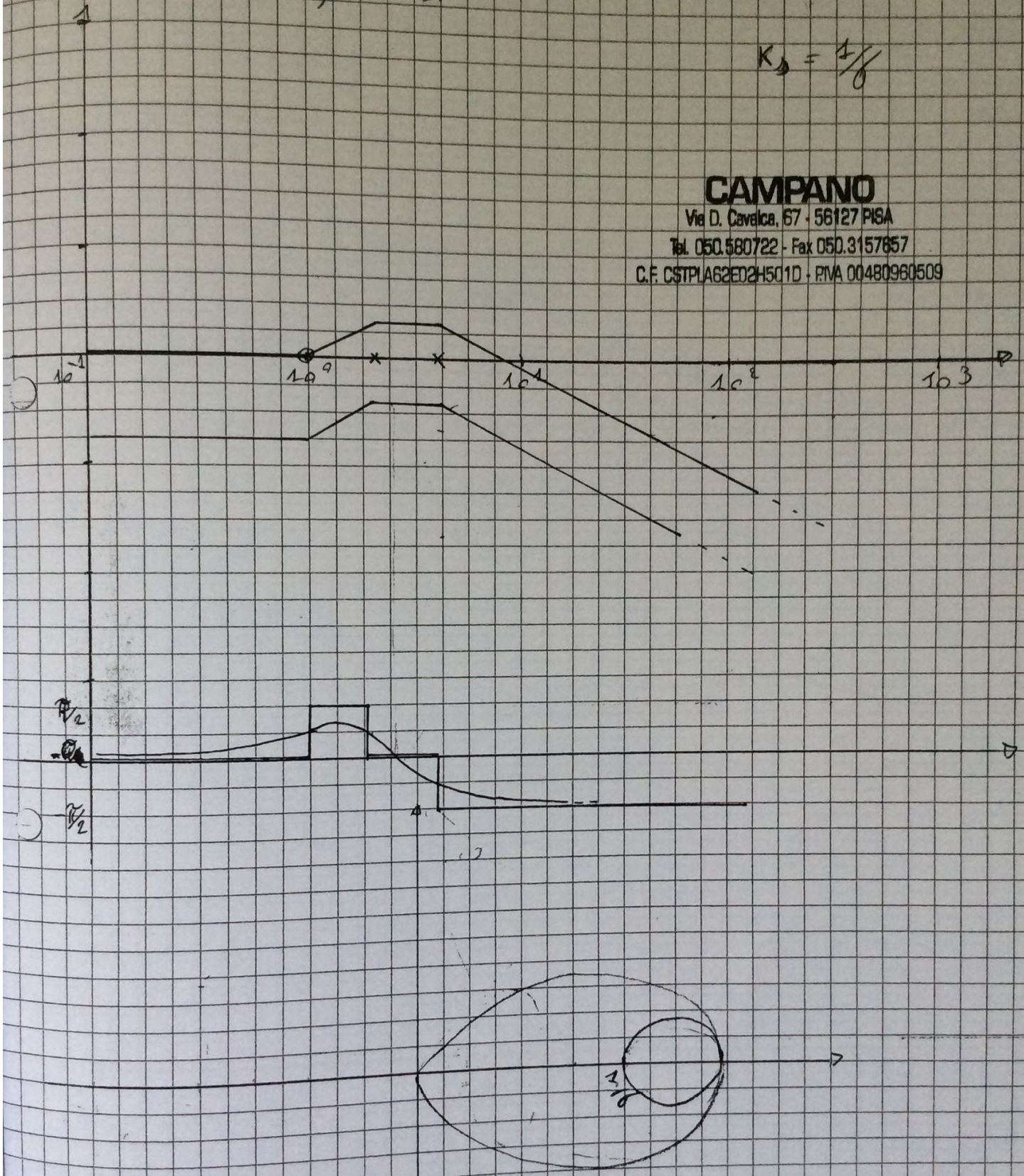
CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480980509

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{s+1}{6\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(1+\frac{s}{3}\right)}$$

DISEGNARE N/ QUIST

$K_s = 1/6$

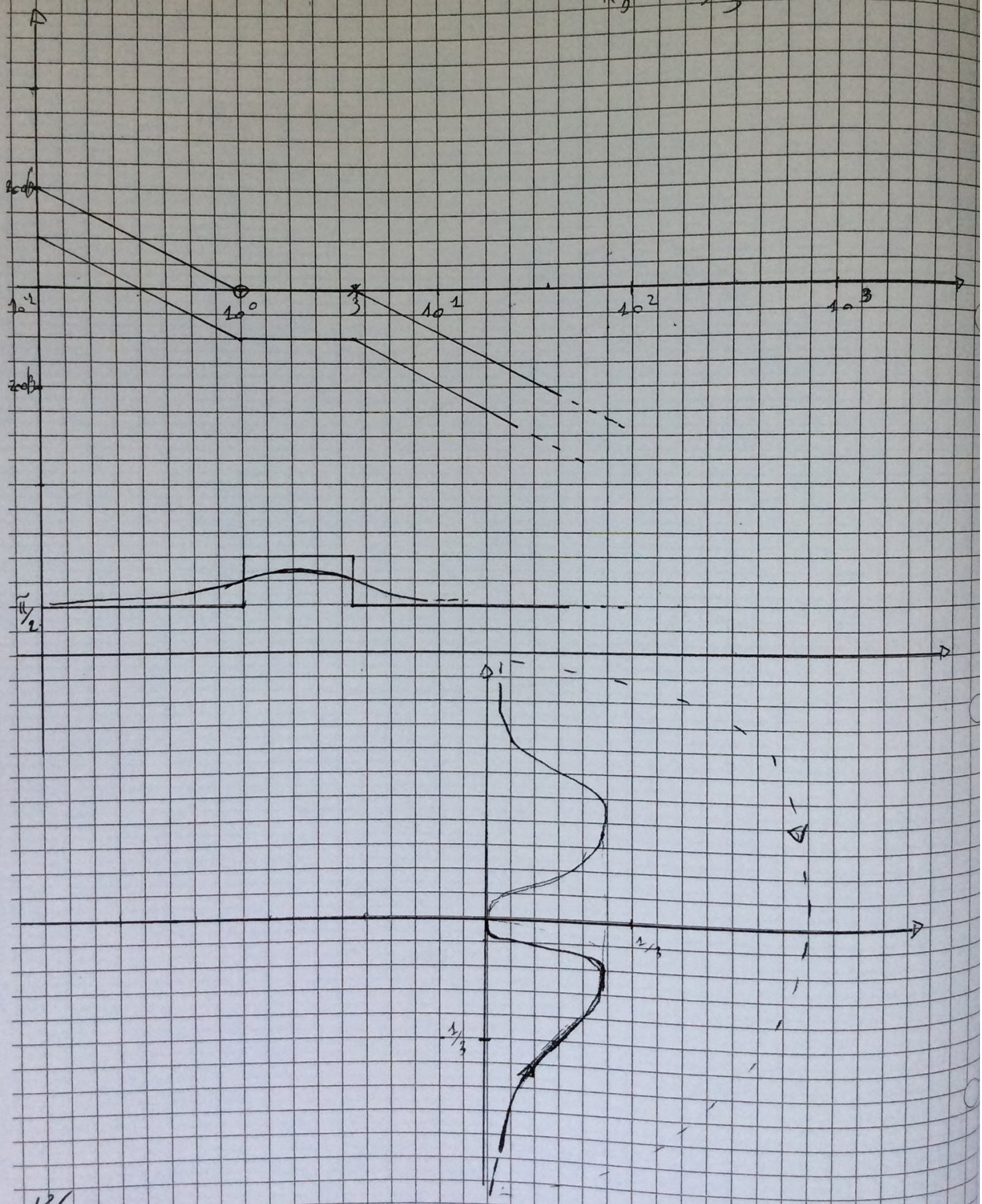
CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157857
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

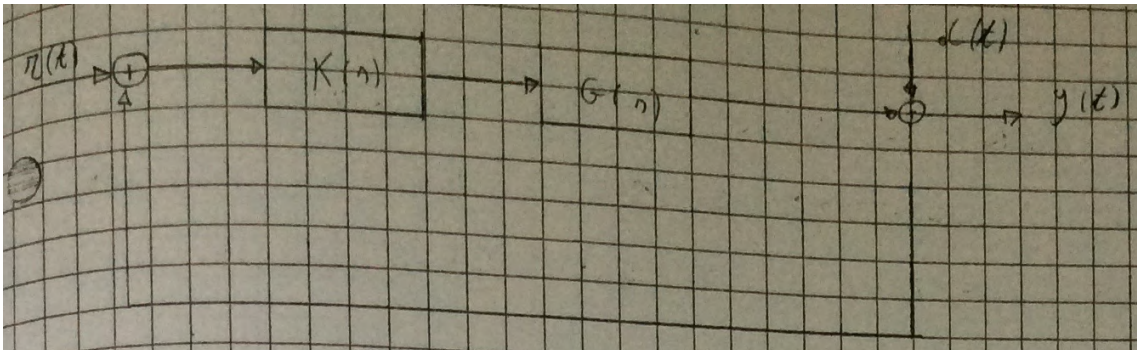


$$G(p) = \frac{(p+1)}{p\,(p+3)} = \frac{1+p}{3\,p\left(1+\frac{p}{3}\right)}$$

DISEGNARE NYQUIST :

$K_0 = 1/3$

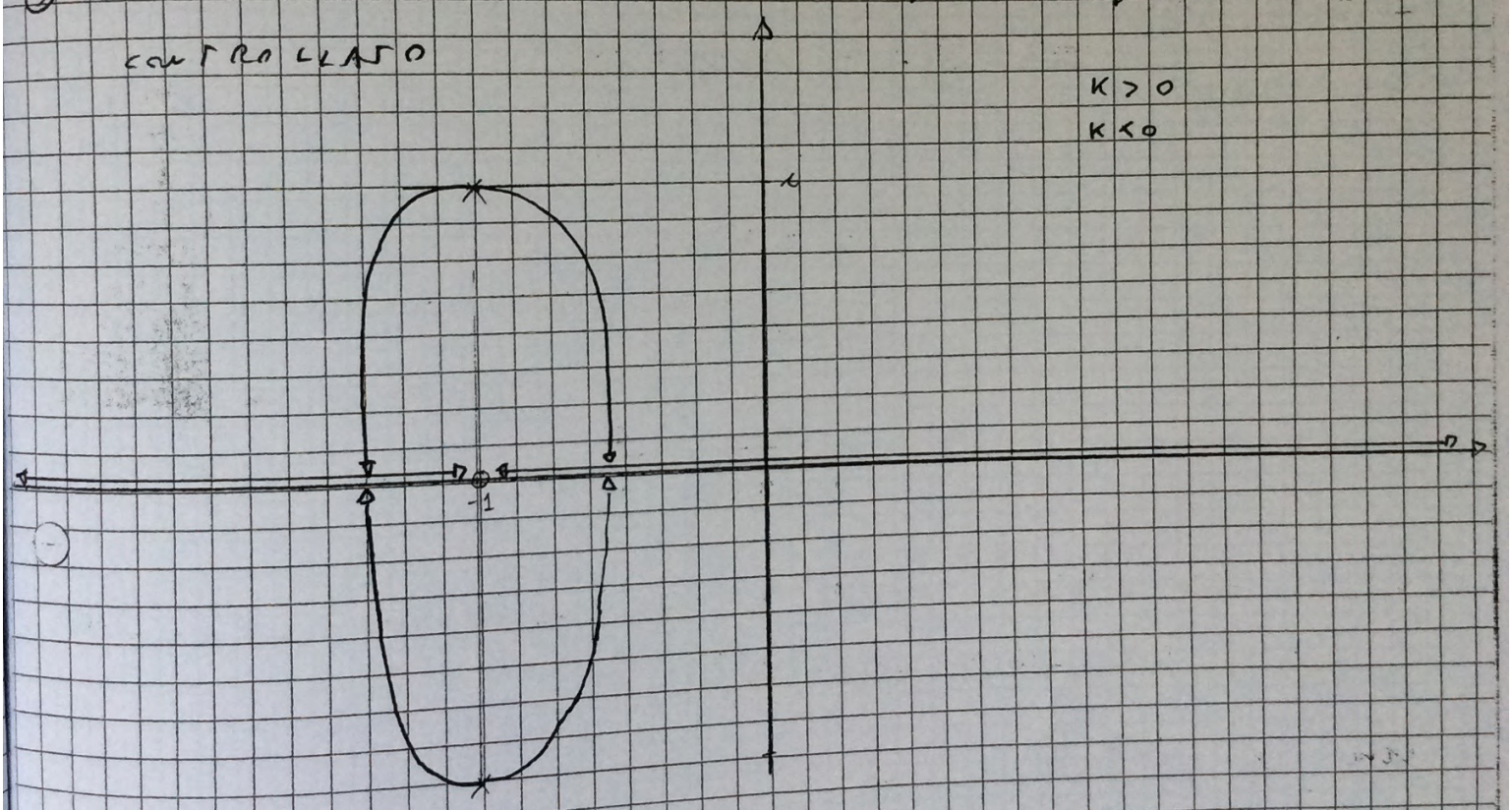




CAMPANO
Via D. Cavalca, 87 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

$$G(s) = 10 \frac{s+1}{s^2+2s+2} \qquad d(t) = \Gamma$$

1. TRACCIARE IL LUOGO DELLE RADICI DIRETTO E INVERSO
2. PROGETTARE UN CONTROLLORE t.c. RESTI COMPLETAMENTE IL DISTURBO $d(t)$ E CHE $m_\varphi \geq \pi/2$
3. DISEGNARE IL DIAGRAMMA DI NYQUIST DEL SISTEMA CONTROLLATO

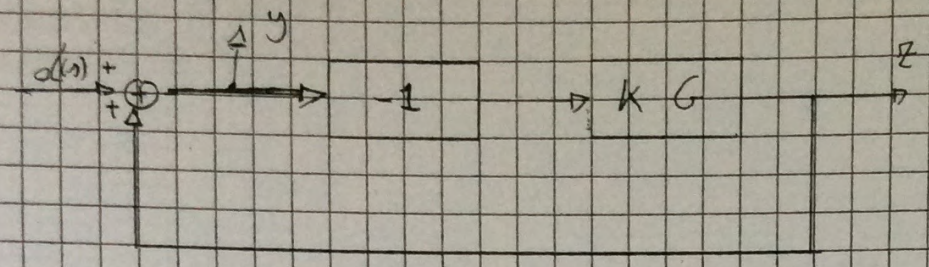


$$s^2+2s+2 \rightarrow \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

ANGOLO DI TANGENZA: $180° - 90° + 90° = 180°$

PER REIETTARE IL DISTURBO:

SUPPONENDO, PER IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE, DI PORRE NULLO L'INGRESSO $r(t)$. AVRÒ ALLORA (RIMANEGGIANDO UN PO' LO SCHEMA) LA SEGUENTE SITUAZIONE:



IL NOSTRO SCOPO È, DATO UN INGRESSO PARI AD $1/s$, AVERE UNA y NULLA. POSSO QUINDI UTILIZZARE L'ESPRESSIONE DELL'ERRORE DI UN NORMALE SISTEMA RETROAZIONATO.

$$\begin{cases} z = -yKG \\ y = z + d \end{cases} \Rightarrow y = -yKG + d$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{d}{1+KG}$$

$\Downarrow$ ← INGRESSO A GRADINO

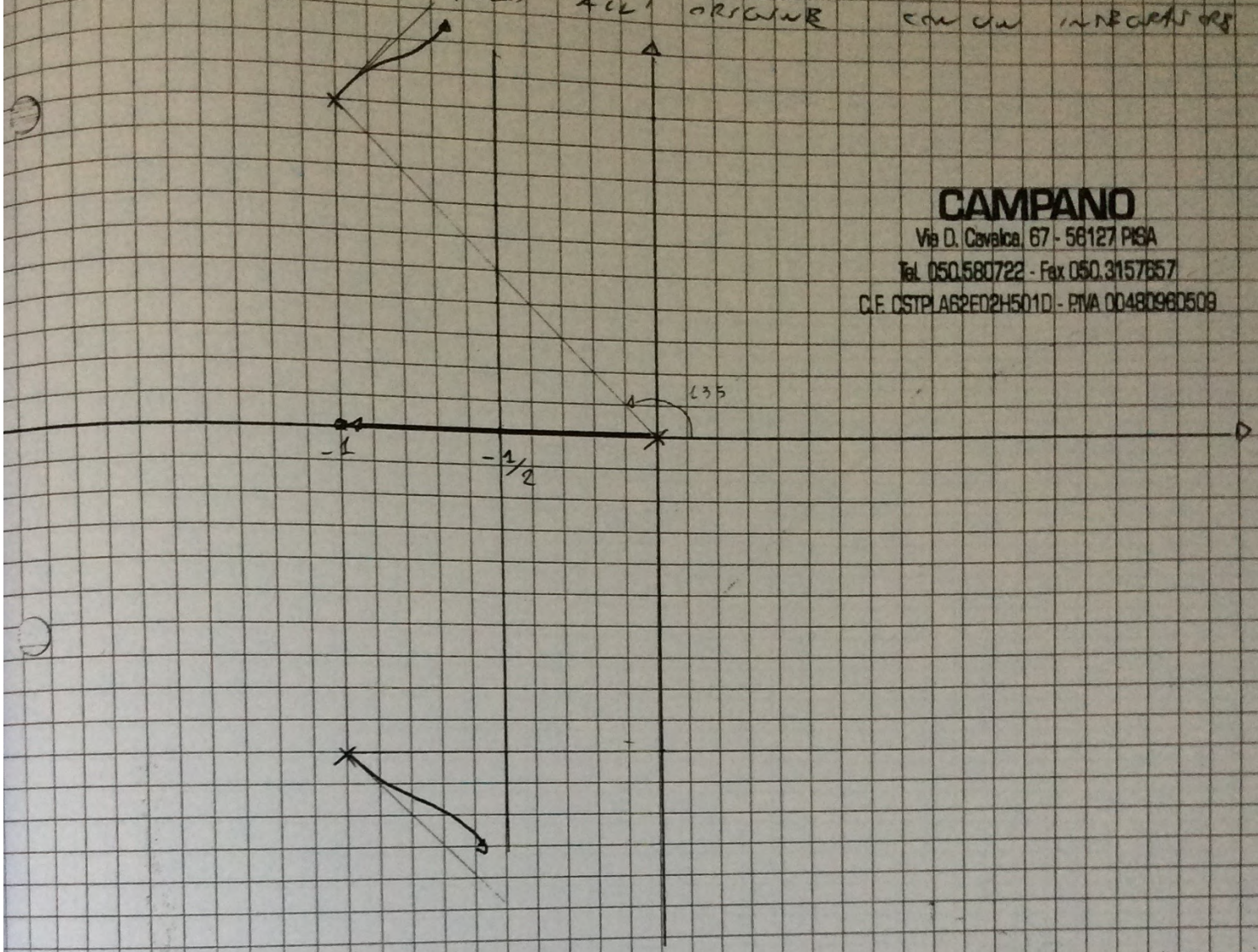
$$y = \frac{1}{1+KG}\,\frac{1}{s}$$

VOGLIO CHE QUESTO TENDA A ZERO (SUPPONENDO CHE IL LIMITE ESISTA FINITO PER LA STABILITÀ):

$$\lim_{s \to 0^+} s\,\frac{D_K D}{N_K N + P_K D}\,\frac{1}{s}$$

QUINDI DEVO AVERE UN POLO ALL'ORIGINE.

PONGO QUINDI UN POLO ALL'ORIGINE CON UN INTEGRATORE

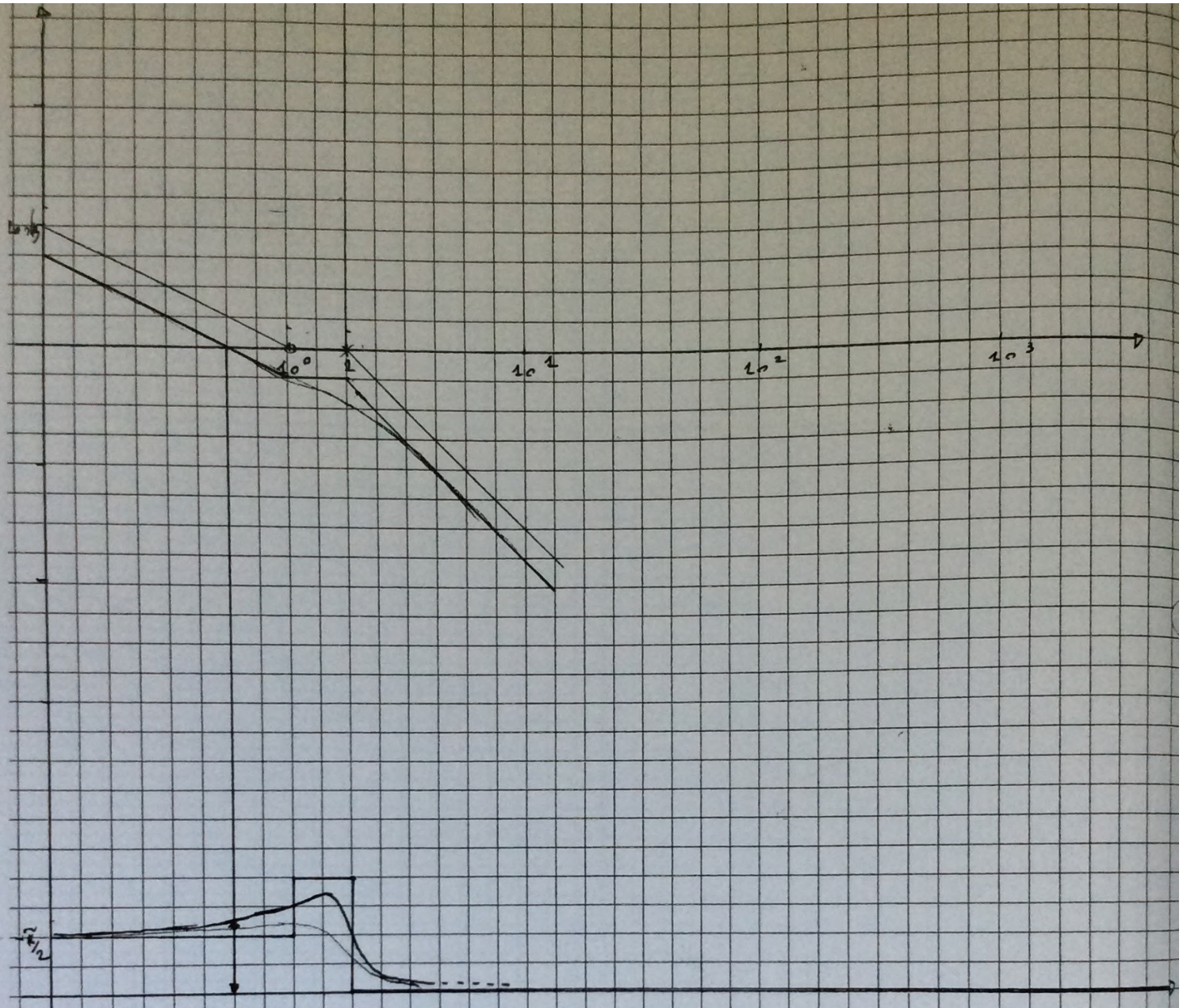


CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

QUINDI HO STABILITÀ $\forall K$

ADESSO VADO A TRACCIARE BODE.

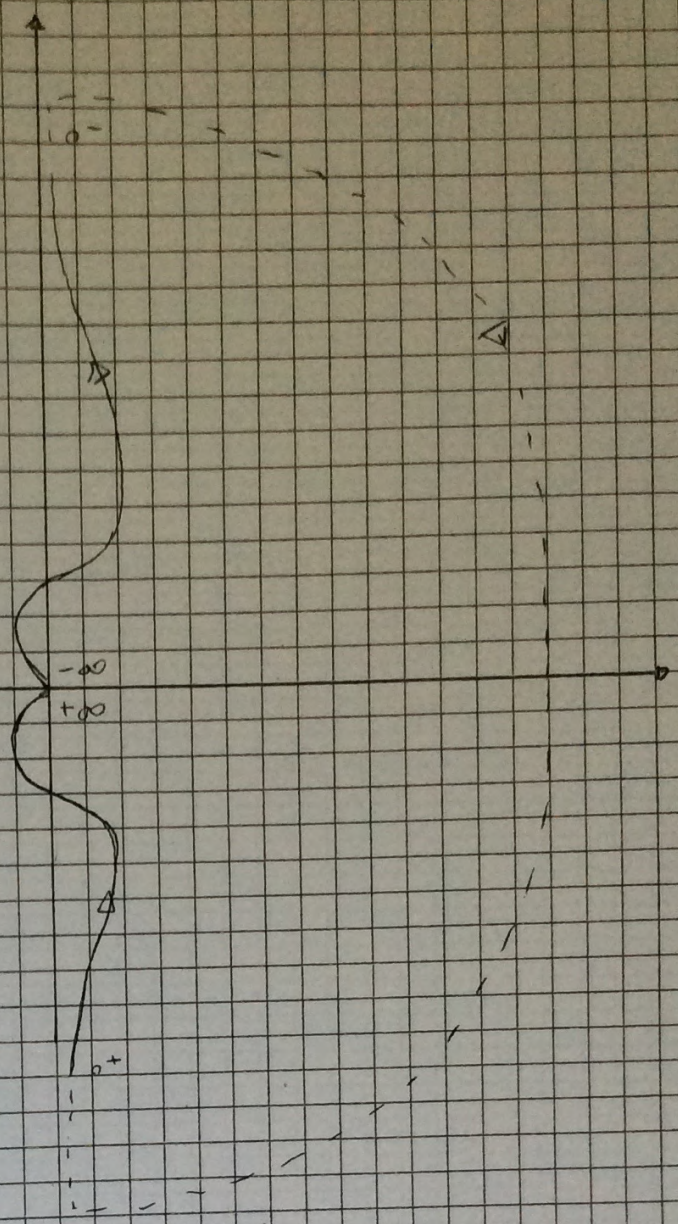
$$G(s) = \frac{\cancel{10}\,5\,K\,(s+1)}{\cancel{2}\left(\frac{s^2}{2}+s+1\right)s} \qquad K_g = 5K$$



$M_\varphi \simeq 100° > 90°$

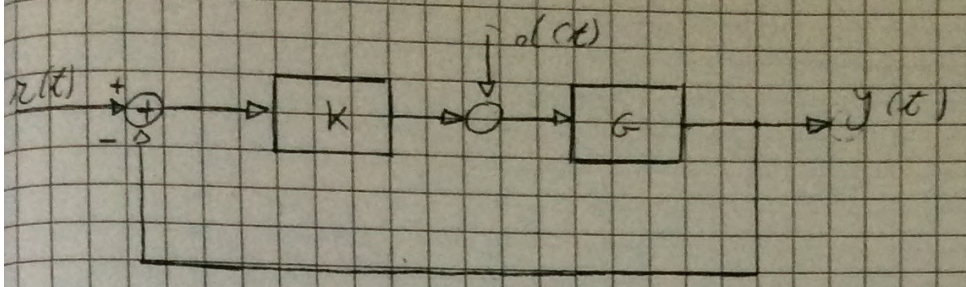
$K_1 \simeq 1,8 \Rightarrow K \simeq 0,36$

ED ORA TRACCIO N/ RUISS

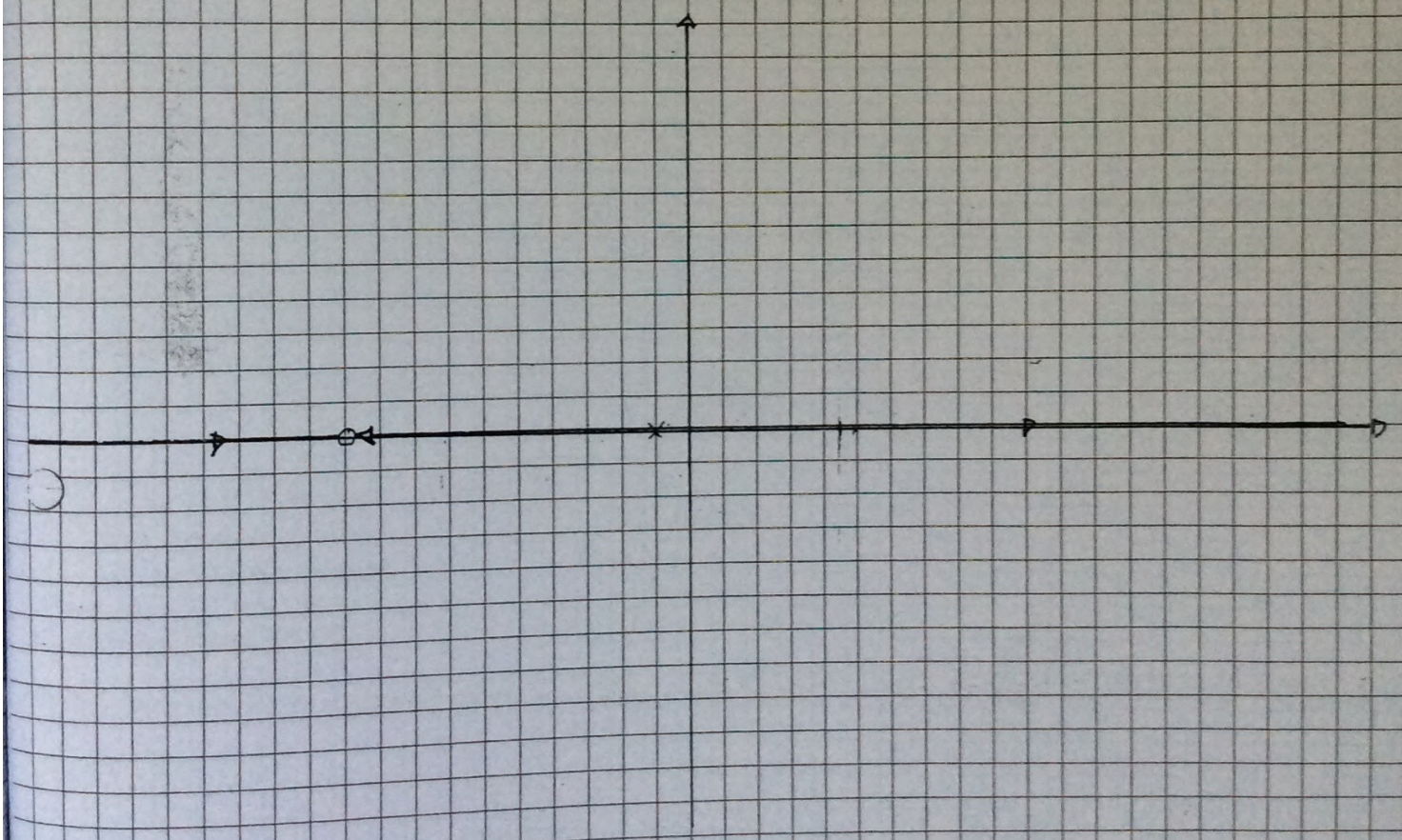


CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

$$G(s) = \frac{10(s+10)}{s+1} \qquad d(t) = \sqcap$$

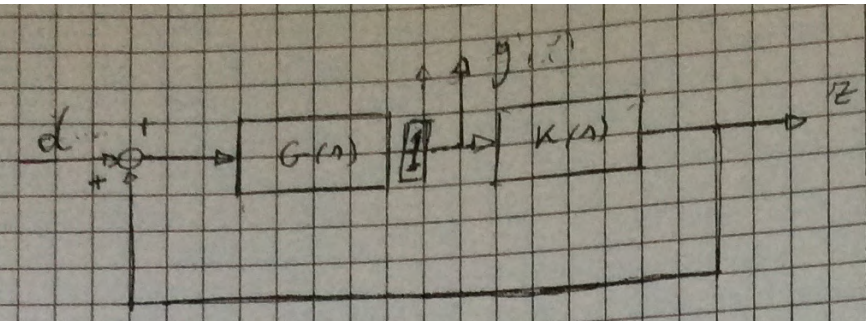


1. DISEGNARE IL LUOGO DELLE RADICI DIRETTO E INVERSO
2. PROGETTARE UN CONTROLLORE TALE CHE $\varepsilon_K < 0,01$ E CHE IL DISTURBO $d(t)$ SIA COMPLETAMENTE REIETTATO
3. VERIFICARE MARGINI DI FASE E DI AMPIEZZA



UTILIZZANDO LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI STUDIO IL CASO DI $r(t) = 0$ E $d(t) = \sqcap$

RIDISPONGO LO SCHEMA A BLOCCHI NEL SEGUENTE MODO:



$$\begin{cases} z = [d + z]\,(-G(s)K(s)) \Rightarrow z = \dfrac{-GK}{1+GK}\,d \\ y = (d+z)(-G(s)) \Rightarrow y = \left[1 - \dfrac{GK}{1+GK}\right] d\,(-G) = \end{cases}$$

$$= \frac{1+\cancel{GK}-\cancel{GK}}{1+GK}\,d\,(-G) =$$

$$= \frac{-G}{1+GK}\,d$$

VOGLIO $y = 0$ QUINDI IL SEGNO È INININFLUENTE

$$\frac{G}{1+GK}\,d = \frac{G}{1+GK}\,\frac{1}{s} = 0$$

$$\lim_{s \to 0^+} \cancel{s}\,\frac{G}{1+GK}\,\frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s \to 0^+} G\,\frac{1}{1+GK}$$

TENDERÀ AD UN'A COSTANTE (100)

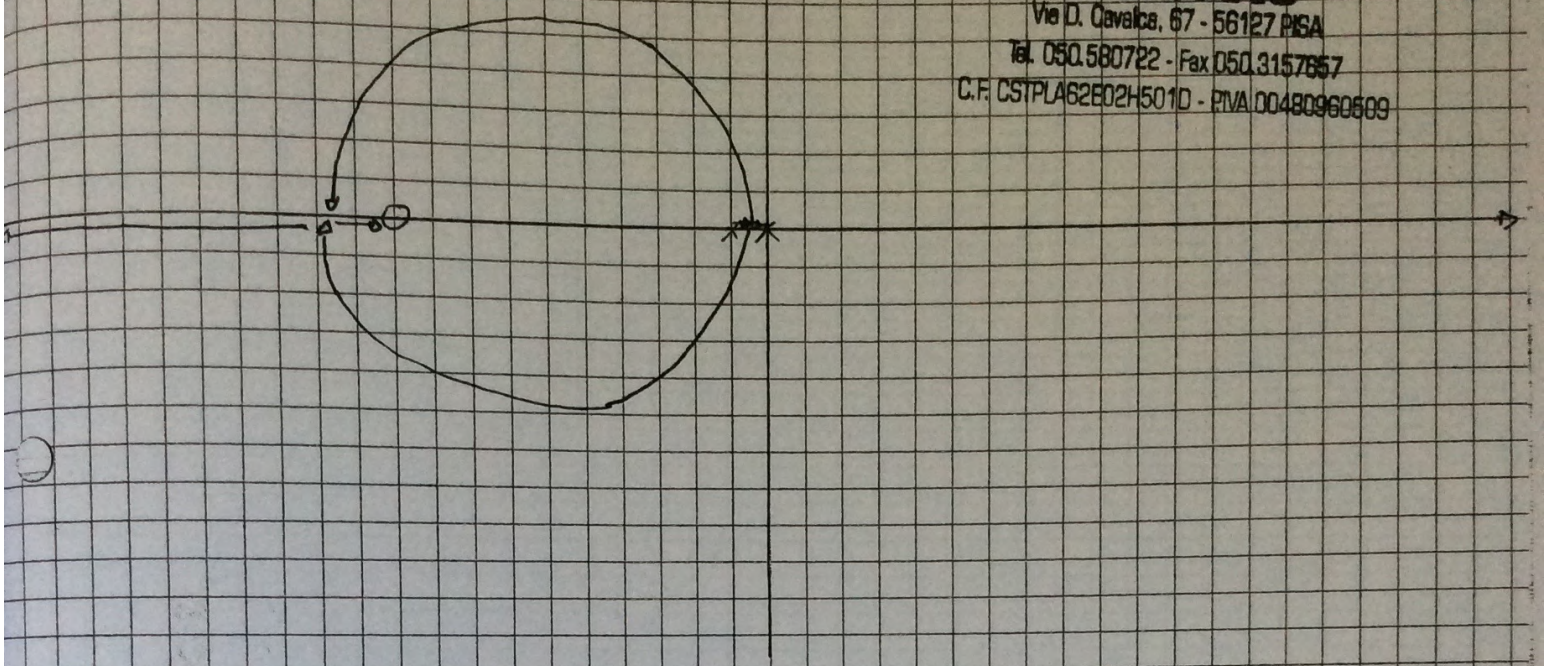
PROBLEMA È L'ESPRESSIONE DELL'ERRORE E COME È NATO UN A $\cancel{0}$ SEGNO DI TIPO 1

DOVRÒ QUINDI INSERIRE UN CONTROLLORE INTEGRATORE!

$$KG = \frac{K}{s}\,\frac{10(s+10)}{s+1} = 100K\,\frac{1+s/10}{s(1+s)}$$

PER ASSICURARMI DELLA STABILITÀ DISEGNO IL LUOGO DELLE RADICI

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509



QUINDI PER K POSITIVI NON HO MAI L'INSTABILITÀ.

ESSENDO $K_p = 100K$, IO VOGLIO $\varepsilon_* < 0.01$ CHE CON GK DI TIPO 1:

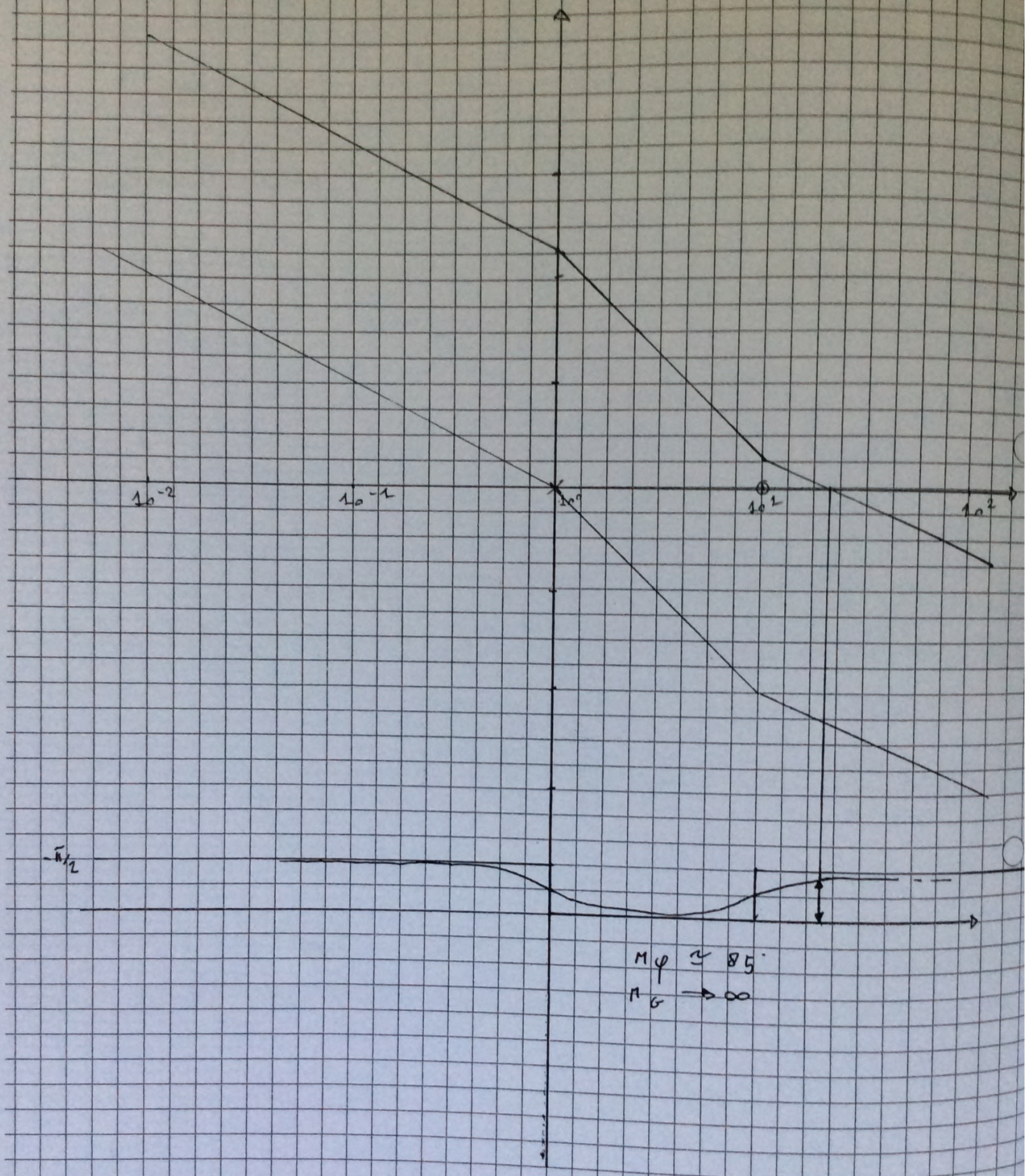
$$\varepsilon_* = \frac{1}{K_p} \Longrightarrow \varepsilon_* = \frac{1}{100K} < 0{,}01$$

$$\Downarrow$$

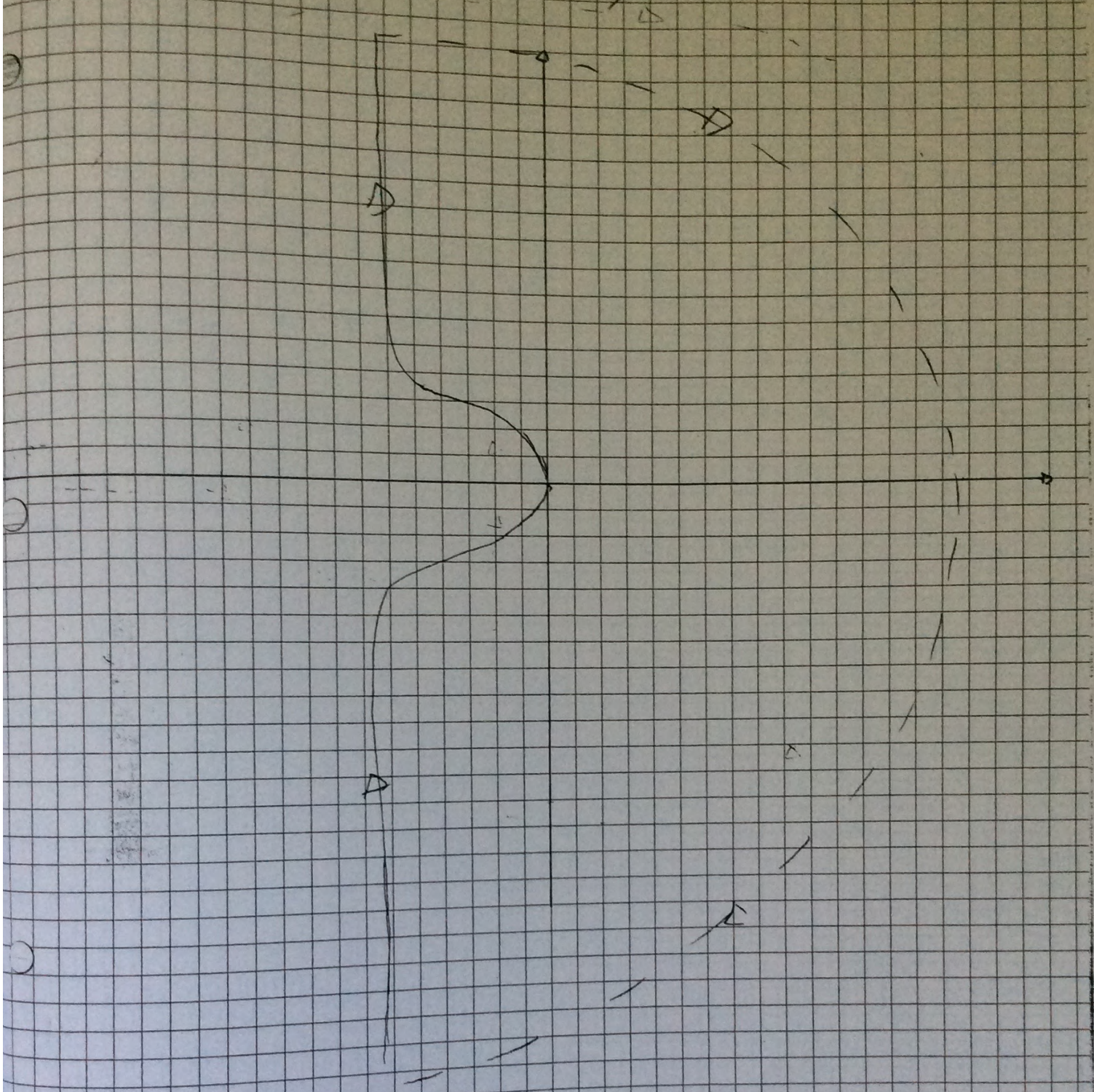
$$K > 1$$

SCELGO $K = 2$ CHE MI DÀ UN ERRORE DI $\varepsilon_* = 0{,}005$

ADESSO DISEGNO BODE PER CALCOLARE MARGINI DI FASE E DI AMPIEZZA


10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
$-\pi/2$
$M_\varphi \simeq 85°$
$M_G \to \infty$

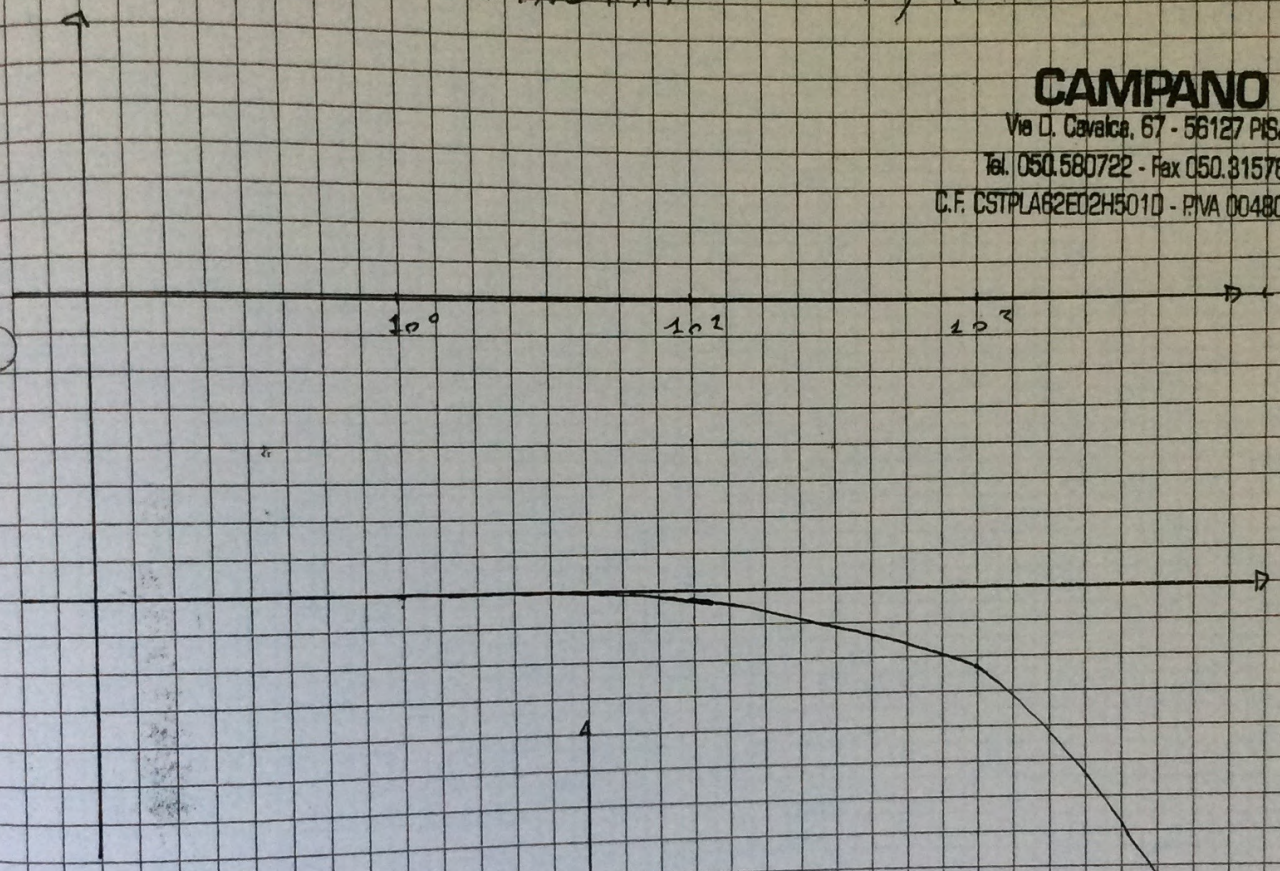
GIÀ CHE CI SONO DISEGNO ANCHE NYQUIST

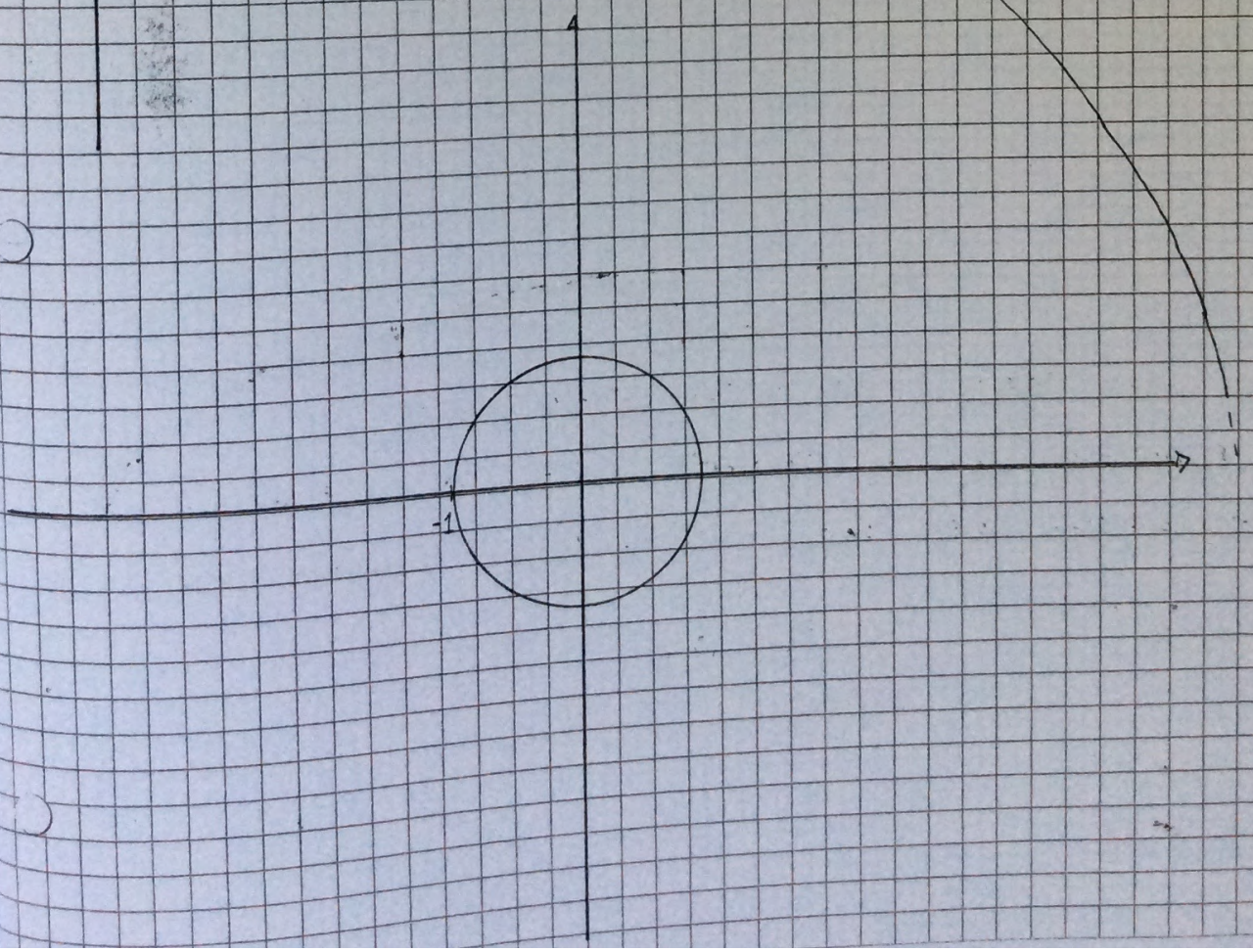


$G(s) = e^{-0,02 \cdot s}$

1. DISEGNARE I DIAGRAMMI DI BODE E DI NYQUIST
2. PROGETTARE UN CONTROLLORE t.c. $e_\infty < 0.01$ E CON $M_\varphi \geq 30°$ E $M_G \geq 30dB$
3. DISEGNARE IL DIAGRAMMA DI NYQUIST

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509



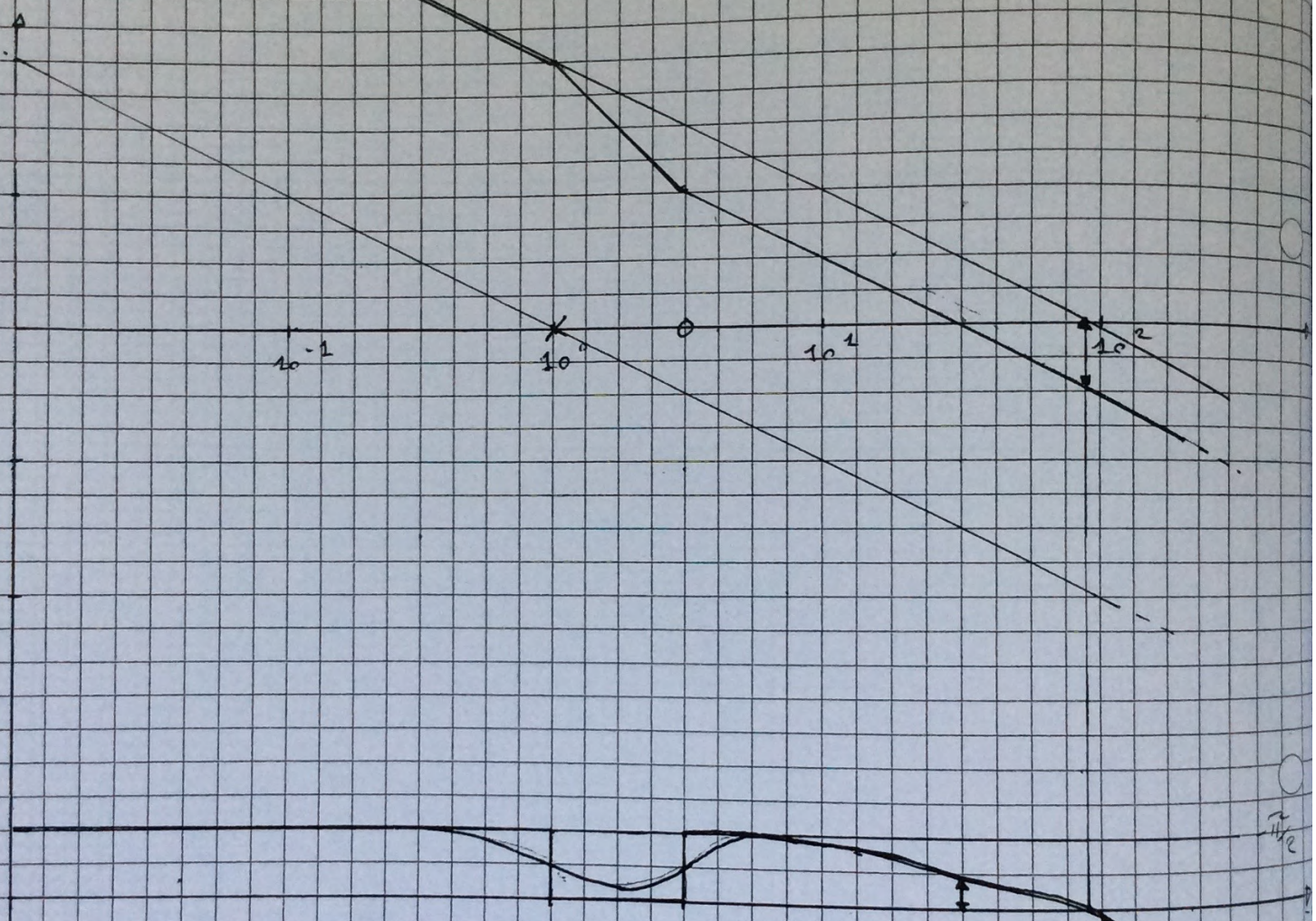


PER COSTRUIRE UN CONTROLLORE DEL GENERE SI DEVE UTILIZZARE UN INTEGRATORE K/s

$K_s = K$

$$\varepsilon_K = \frac{1}{K_s} < 0.01 \Rightarrow K > 100$$

VEDIAMO CON BODE SE UN CONTROLLORE DEL GENERE È ACCETTABILE PER I MARGINI



COME SI VEDE DALLE PARTI IN BLU ED IN VERDE IL INTEGRATORE NON ERA SUFFICIENTE. HO ALLORA PIAZZATO UN POLO ED UNO ZERO DA CUI HO OTTENUTO I GRAFICI ROSA.

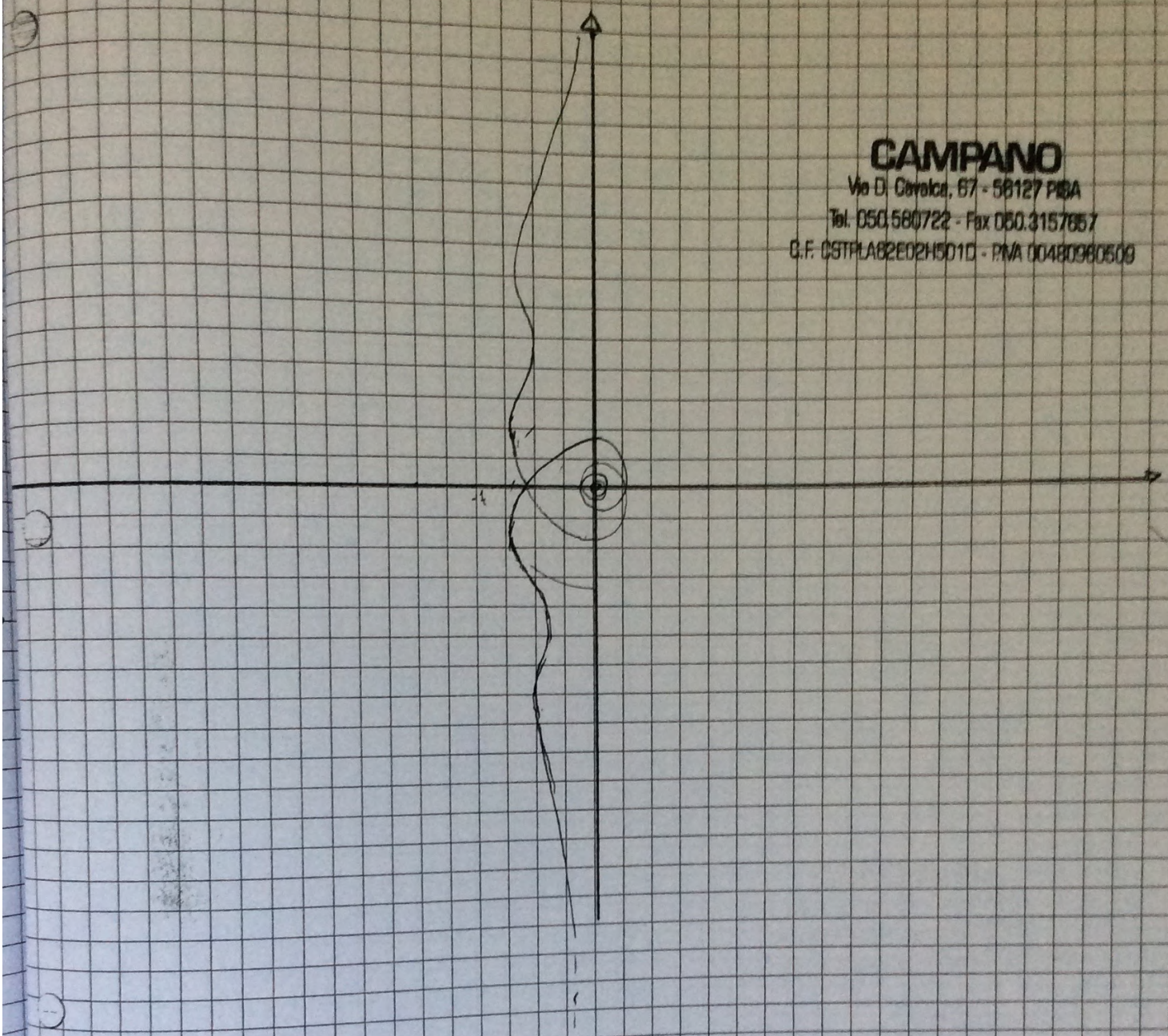
$$GK = e^{-0.02s} \frac{s+3}{s(s+1)} 33$$

$M_\varphi \simeq 40°$

$M_G \simeq 9\,dB$

140

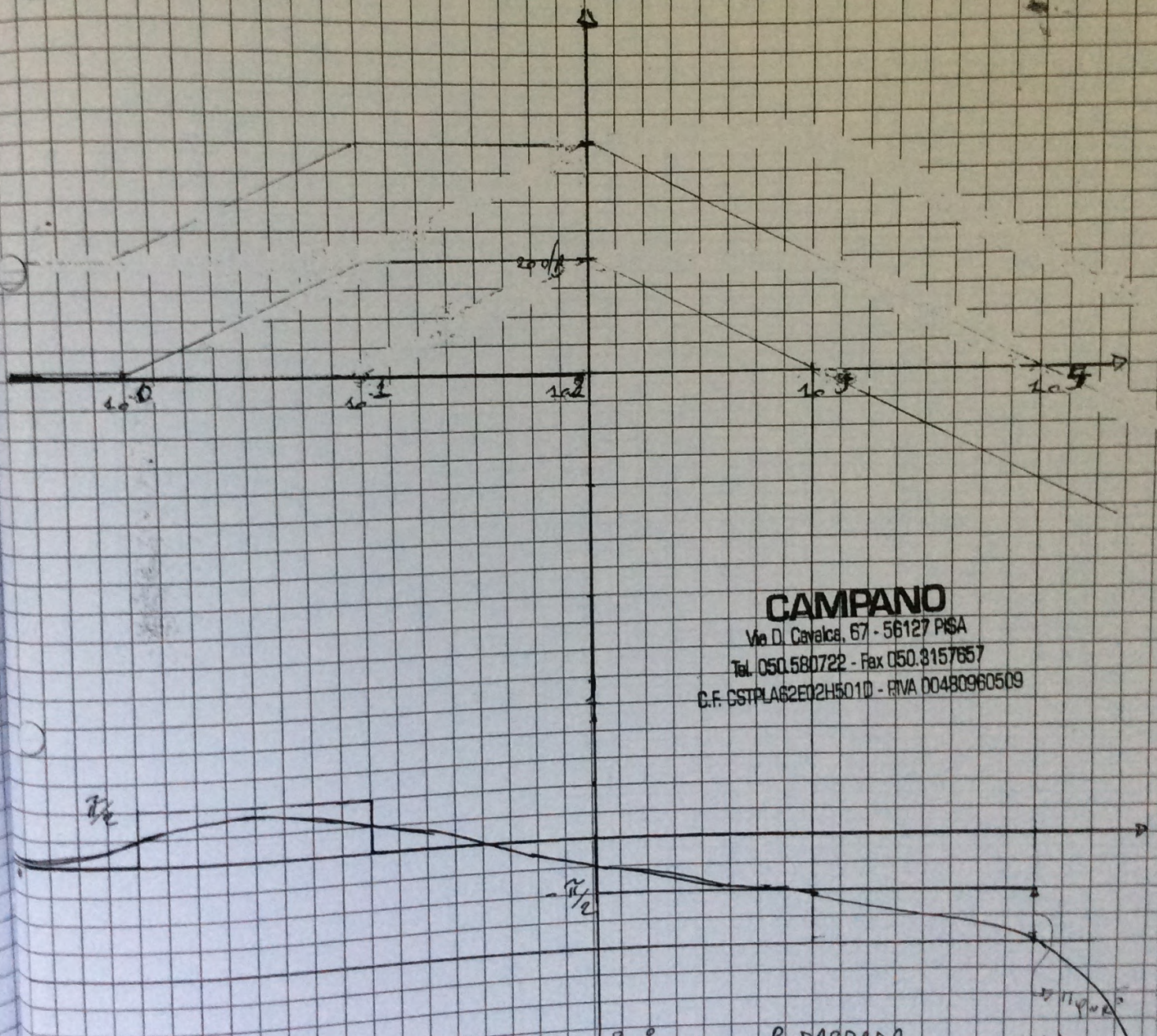
ORA DISEGNO NYQUIST



CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA82E02H501D - P.IVA 00480960509

$$G(s) = \frac{10^4 (s+1)\, e^{-\tau s}}{(s+10)(s+100)} = 10\, \frac{(1+s)\, e^{-\tau s}}{\left(1+\frac{s}{10}\right)\left(1+\frac{s}{100}\right)}$$

1. DETERMINARE IL τ_{MAX} PER IL QUALE IL SISTEMA RIMANE STABILE.
2. PER $\tau = \tau_{MAX}$ DISEGNARE I DIAGRAMMI DI BODE
3. PER $\tau = \tau_{MAX}$ DISEGNARE IL DIAGRAMMA DI NYQUIST



CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - PIVA 00480960509

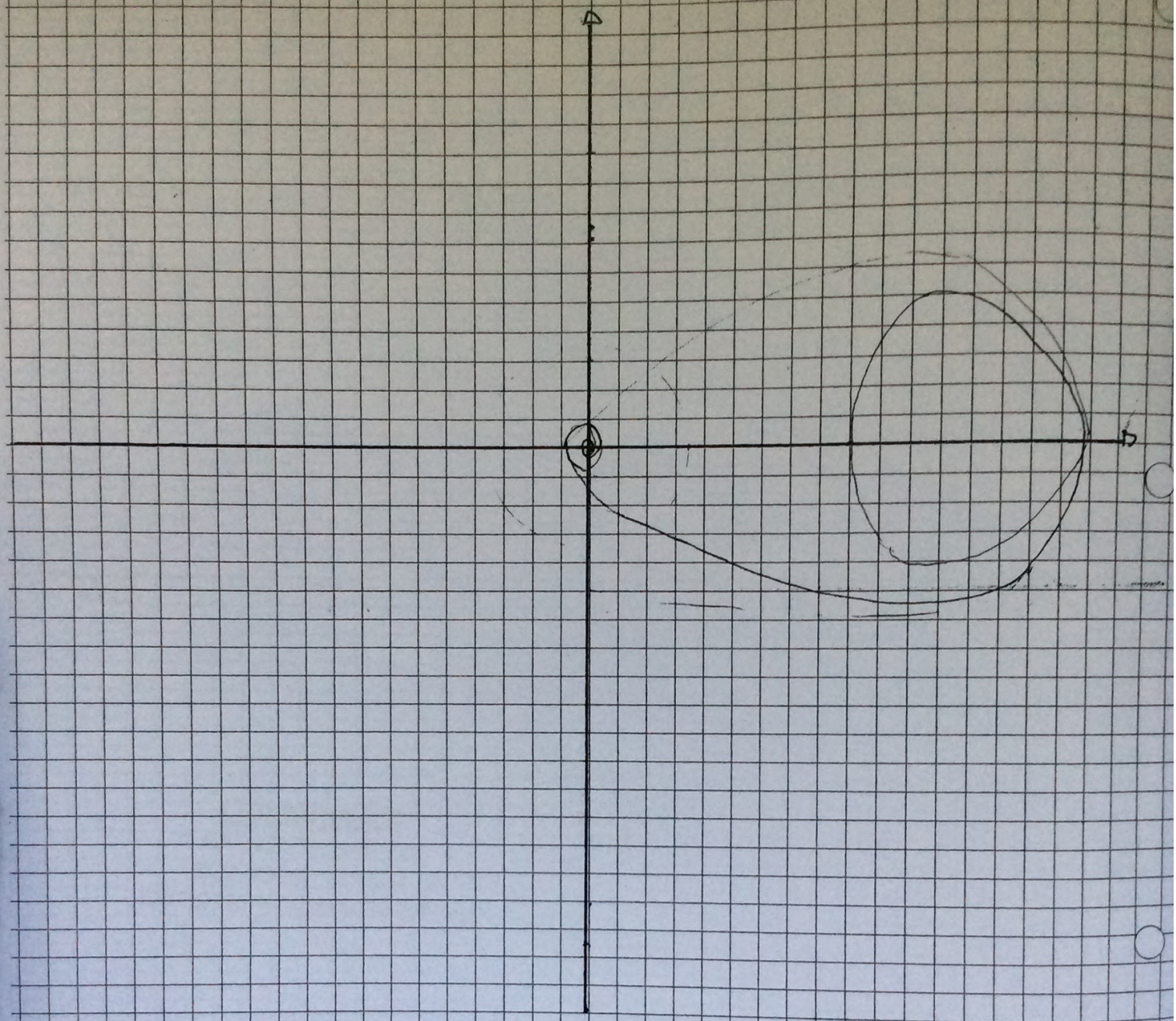
ESSENDO IL MARGINE DI FASE 90° NON RITARDANTE

E POSIZIONANDO A $\omega = 10^4$ rad/sec

$$\tau_{MAX} \cdot 10000 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{\pi}{20000} \simeq 0{,}00016$$

TALE RITARDO È UTILIZZATO PER LA FASE ROSSA

DISEGNO NYQUIST PER $\tau = \tau_{-48}$



$$G(s) = \frac{s-1}{(s+5)^2}$$

① TRACCIARE LDR DIRETTO E INVERSO

② PROGETTARE UN CONTROLLORE t.c.:

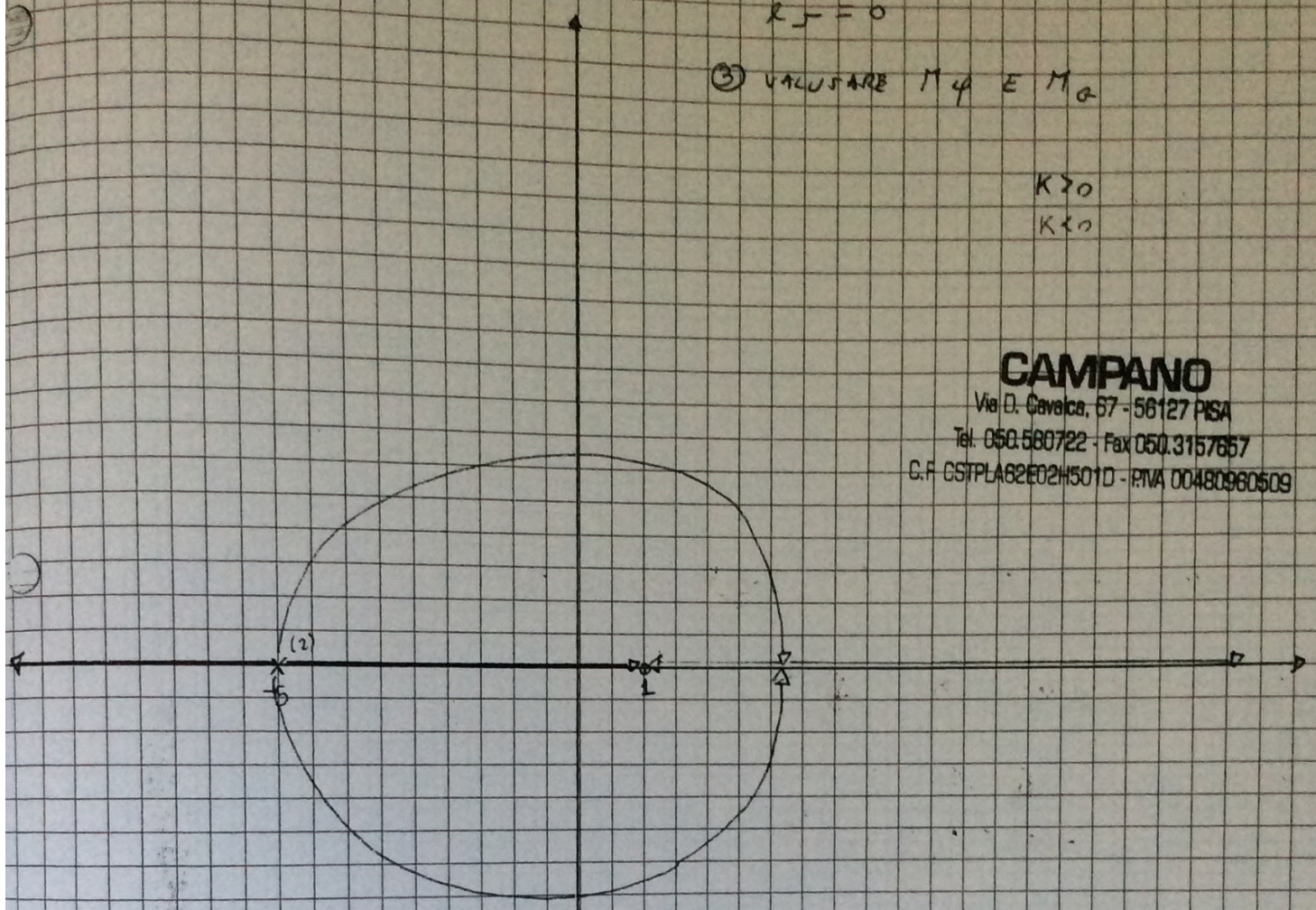
$e_\infty = 0$

③ VALUTARE M_φ E M_G

$K > 0$

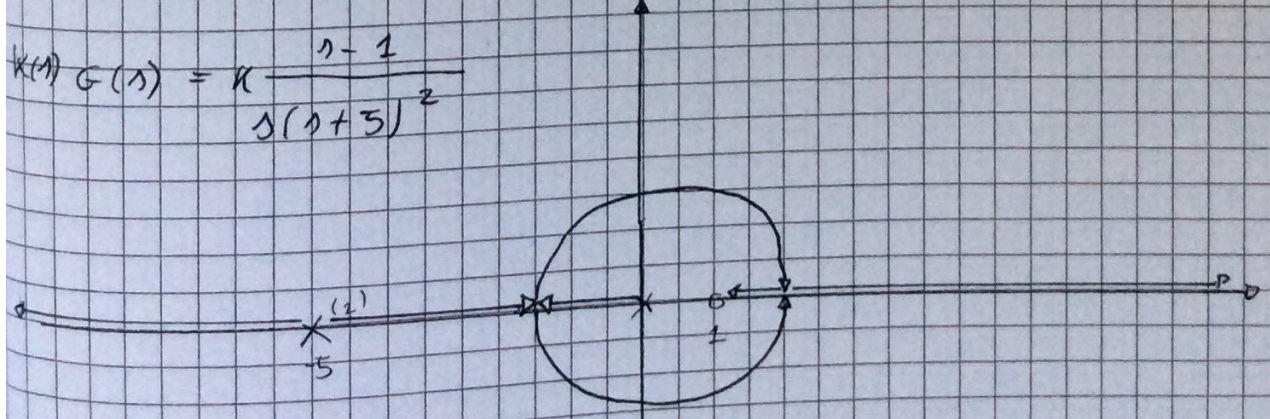
$K < 0$

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509



AFFINCHÉ $\varepsilon_\infty = 0$ DEVO INTRODURRE ALMENO UN POLO ALL'ORIGINE. RIDISEGNO IL LUOGO DEGLI ZERI PER $K<0$

$$K(s)\,G(s) = K\frac{s-1}{s(s+5)^2}$$



UTILIZZO IL CRITERIO DI ROUTH PER TROVARE IL K CRITICO

$$D_{CL} = Ks - K + s^3 + 10s^2 + 25s = s^3 + 10s^2 + [25+K]s - K$$

$K > -25 \qquad K < 0$

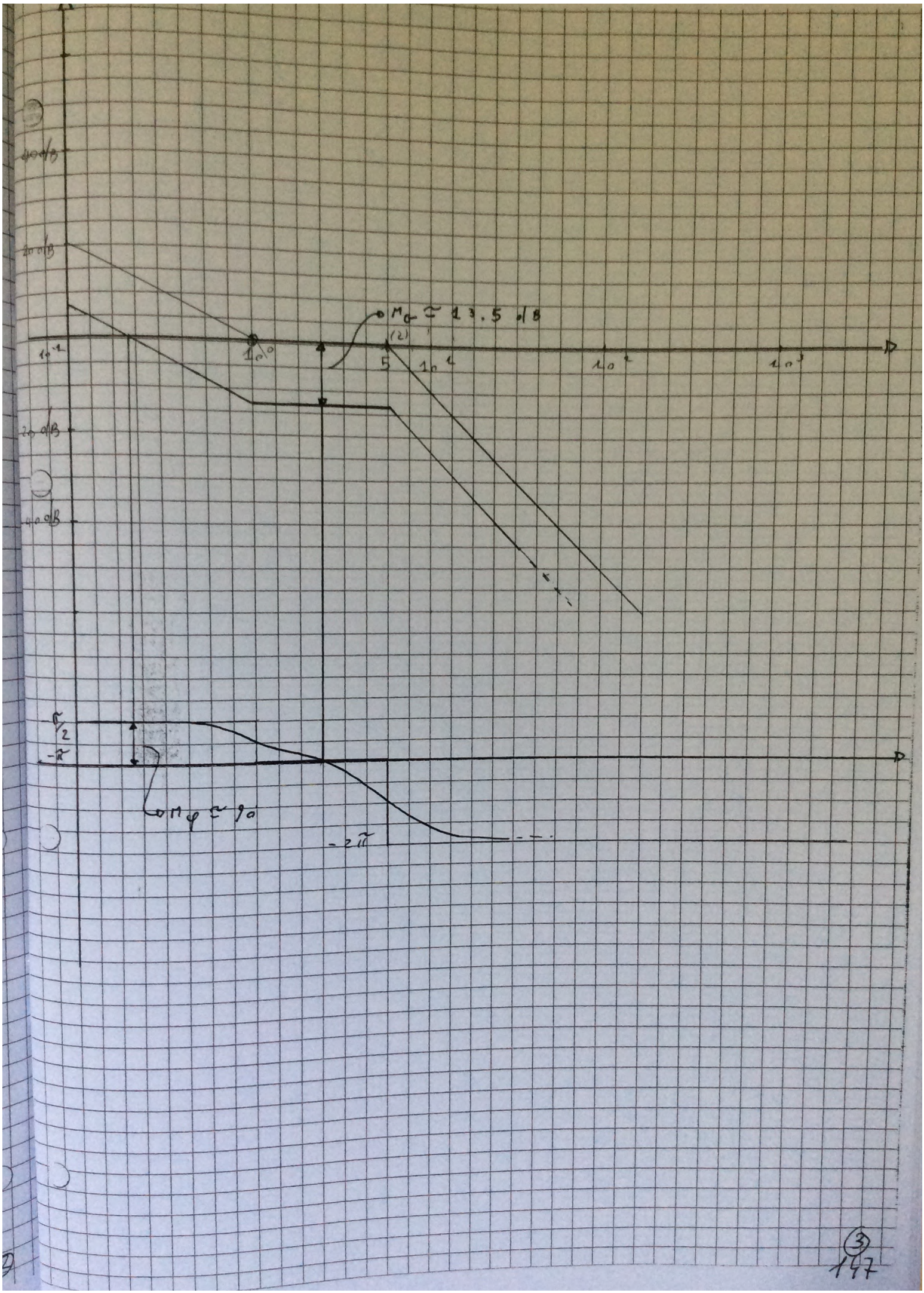
s^3	1	$25+K$	0
s^2	10	$-K$	0
s	$\frac{250+11K}{10}$	0	
1	$-K$	0	
	0		

$$250+11K>0 \Rightarrow K>-\frac{250}{11}>-22.7$$

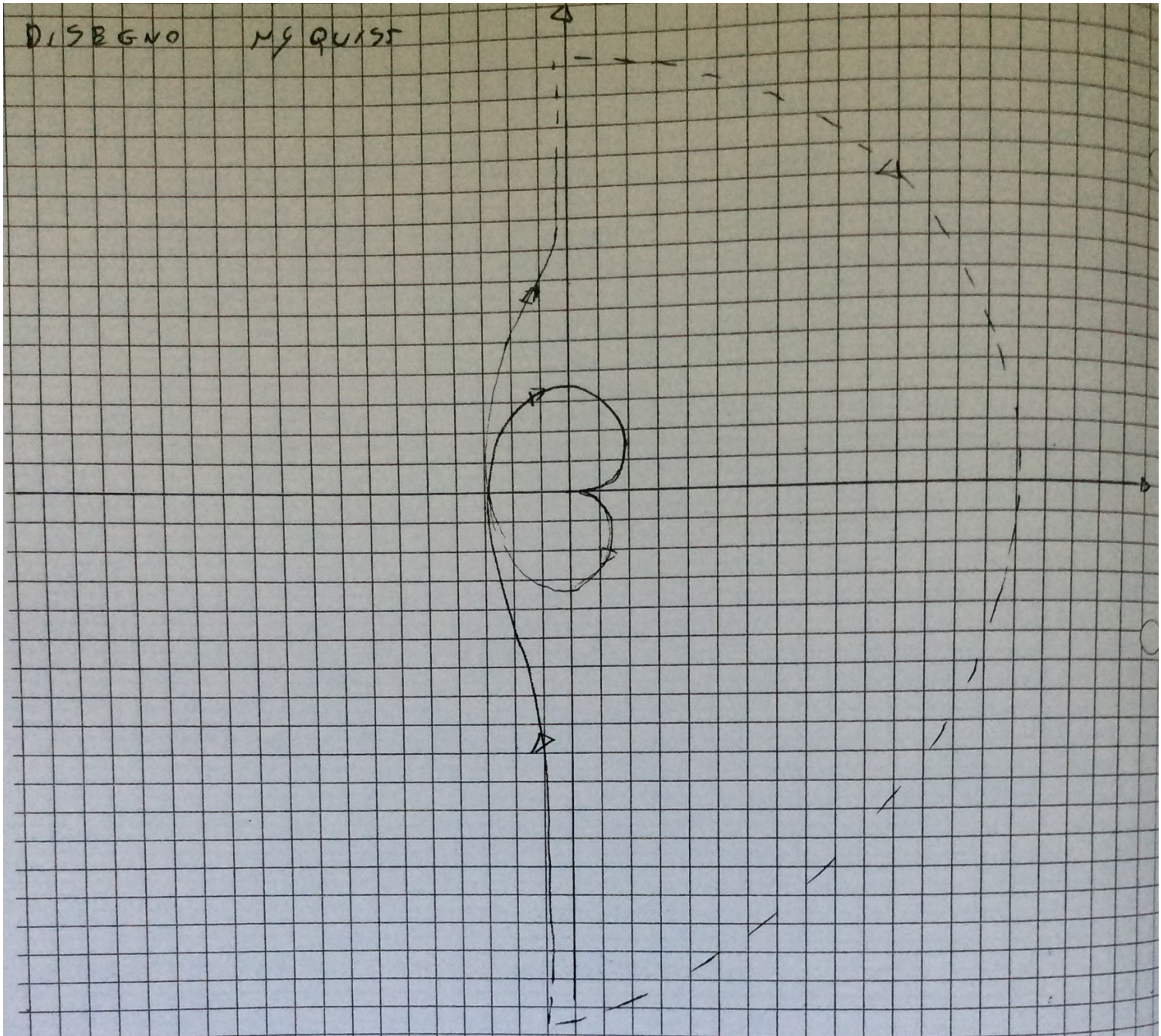
QUINDI SCELGO $K=-5$

$$K(s)\,G(s)=-\frac{1}{5}\,\frac{1-s}{25\cdot s\left(\frac{s}{5}+1\right)^2}$$

DISEGNO BODE


40 dB
20 dB
-20 dB
-40 dB
10^{-1}
10^{0}
5
10^{1}
10^{2}
10^{3}
(2)
$M_G \simeq 13.5$ dB
$\pi/2$
$-\pi$
-2π
$m_\varphi \simeq 90$

DISEGNO MC QUIST



$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{(s+1)(s+2)}$$

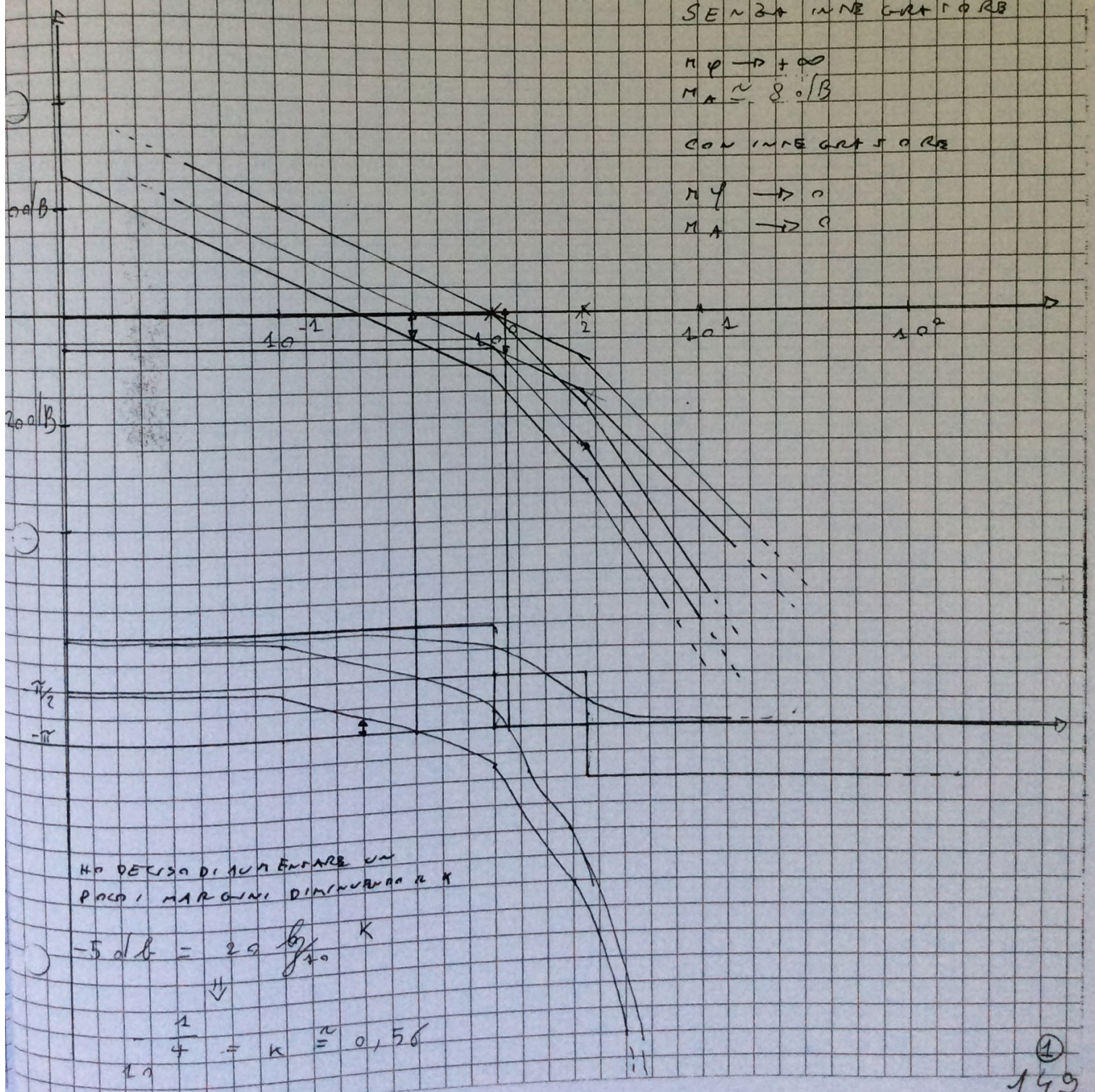
) CONTROLLARE LA STABILITÀ DEL SISTEMA

) STABILIZZARE IL SISTEMA t.c. $\varepsilon_r = 0$ E DISEGNARE NYQUIST

ER CONTROLLARE LA STABILITÀ USO BODE.

N QUESTO CASO PER PORRE $\varepsilon_r = 0$ SI DOVRÀ PORRE

N INTEGRATORE, $K_1 = 1/2$



HO DECISO DI AUMENTARE UN POCO I MARGINI DIMINUENDO IL K

$$-5\,dB = 20 \log_{10} K$$

$$\Downarrow$$

$$10^{-\frac{1}{4}} = K \simeq 0{,}56$$

QUINDI HO

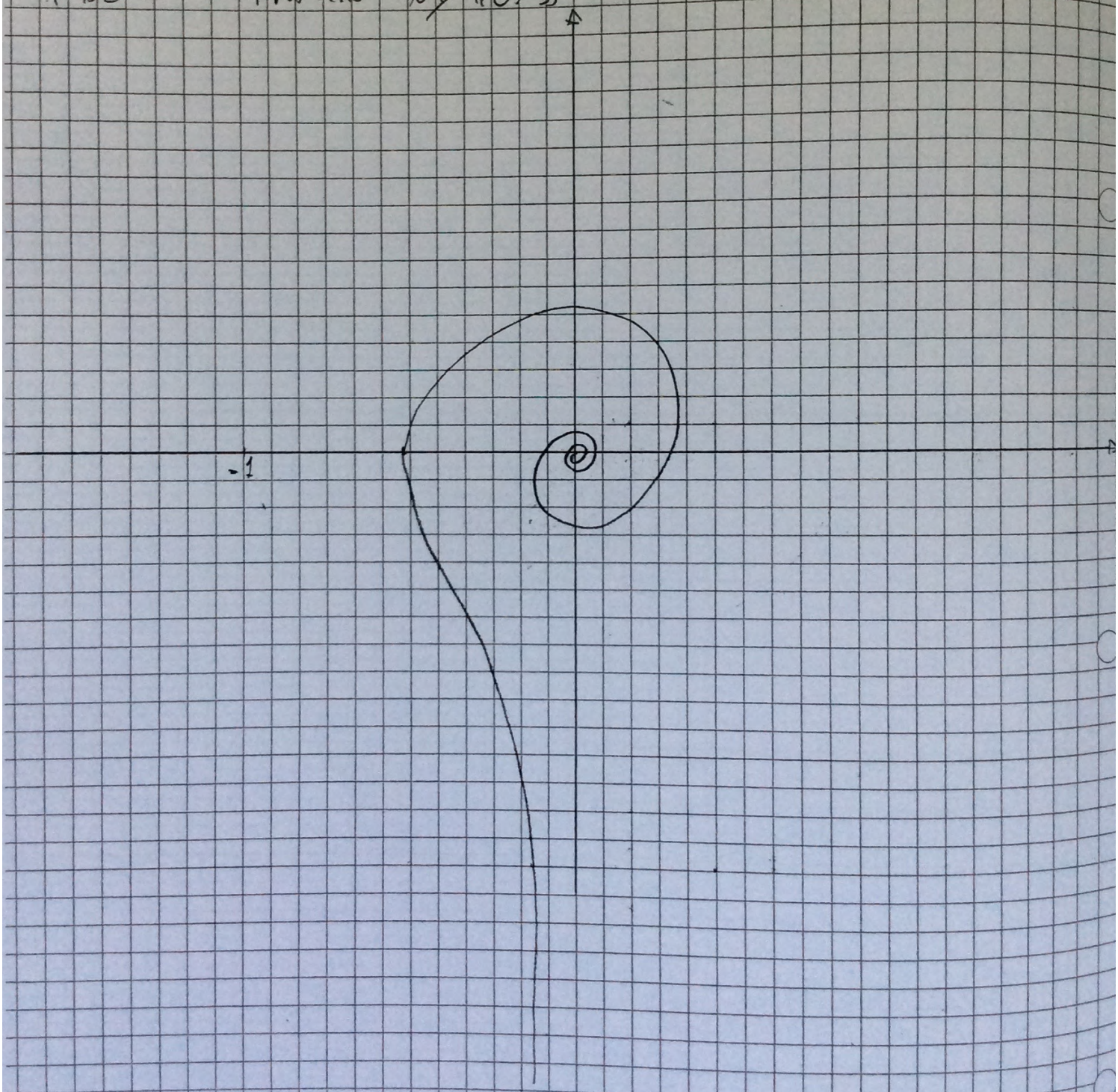
$$G(s)\,K(s) = \frac{0.56\, e^{2s}}{s\,(s+1)\,(s+2)}$$

CON MARGINI

$M_\varphi \simeq 30°$

$M_A \simeq 50\,dB$

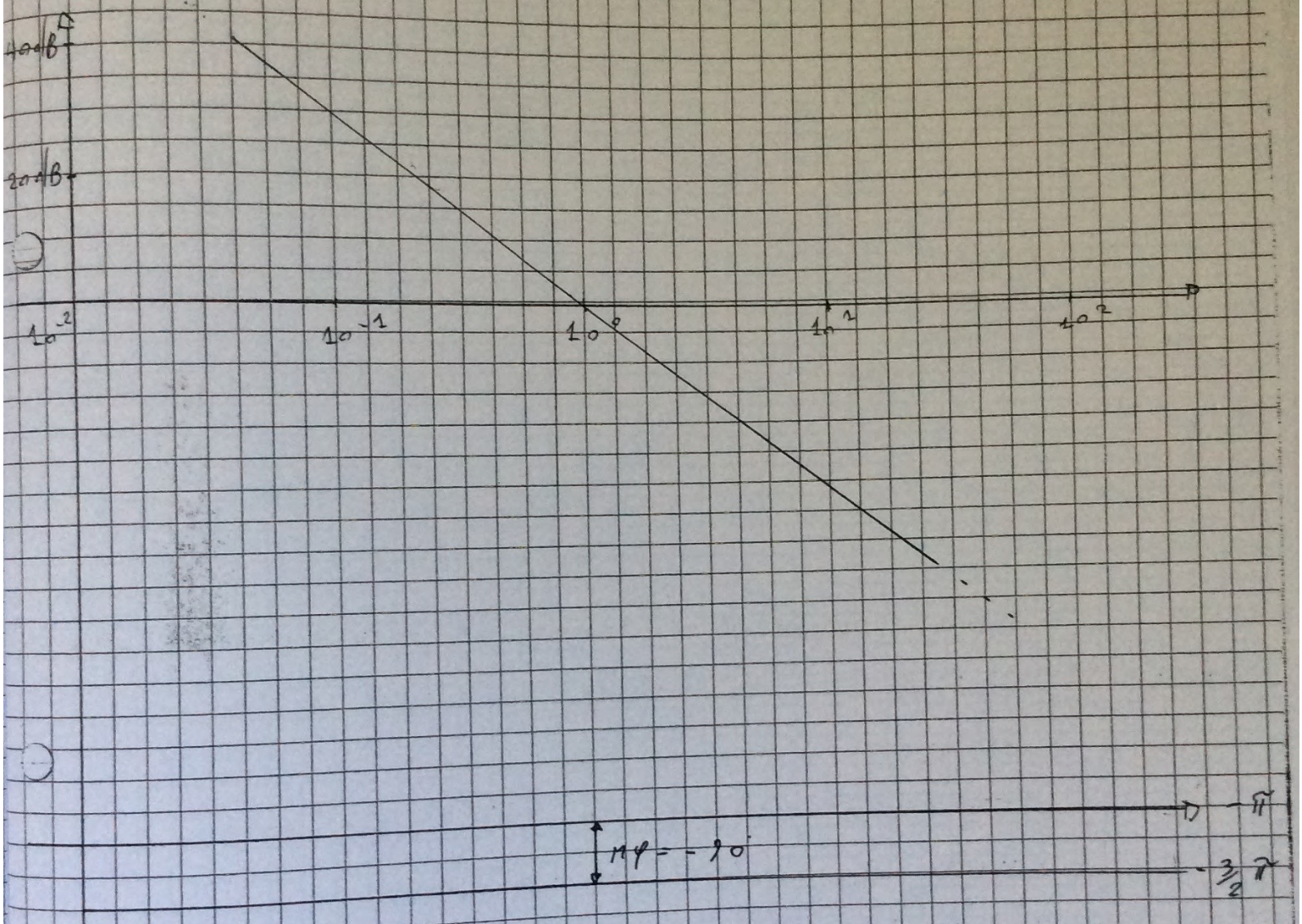
A DESSO TRACCIO NYQUIST



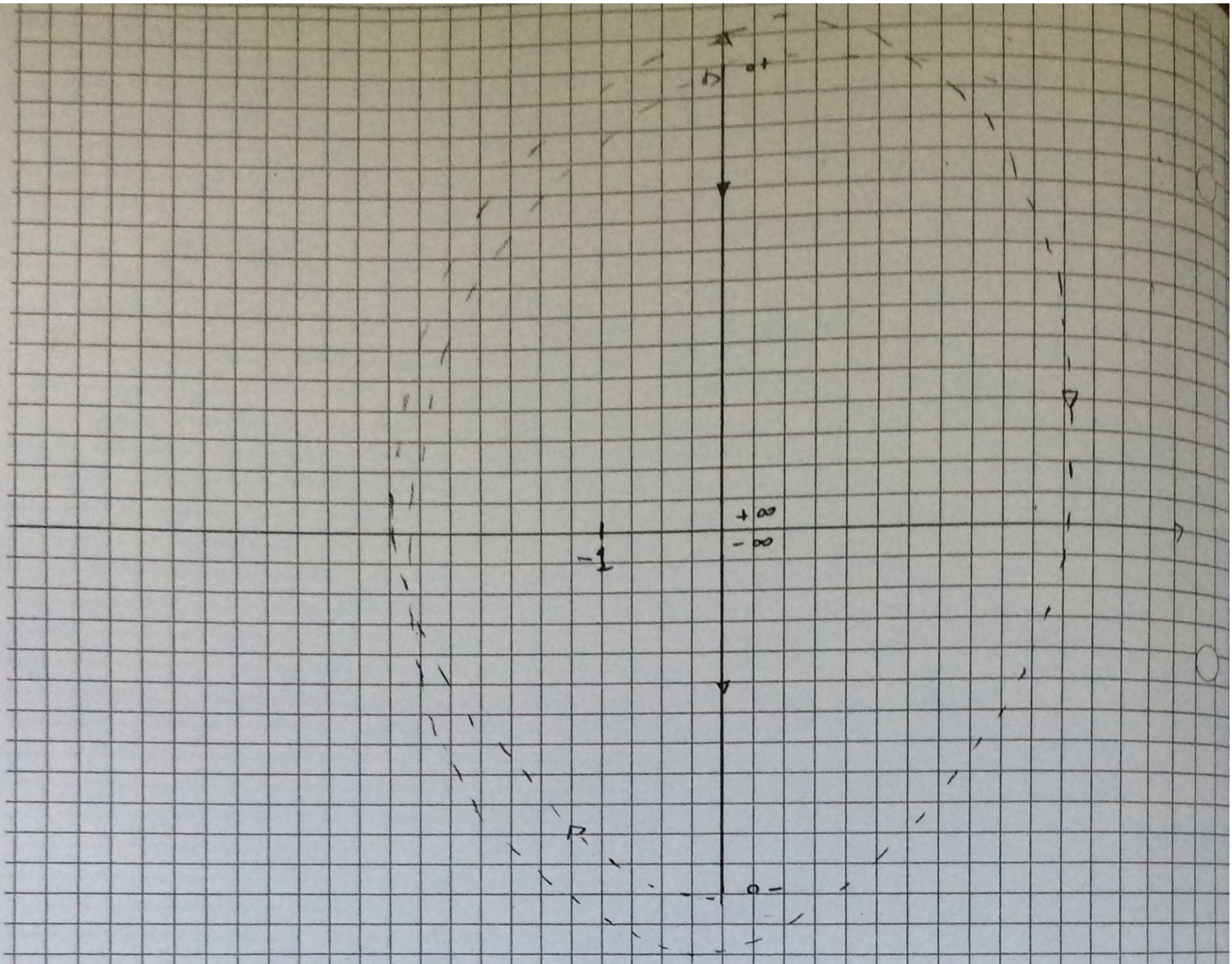
$$G(s) = \frac{1}{s^3}$$

1. TRACCIARE BODE
2. TRACCIARE NYQUIST
3. STABILIZZARE

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509



IN CICLO CHIUSO $\frac{1}{s^3}$ DIVIENE INSTABILE



DECIDO DI STABILIZZARE UTILIZZANDO L'EQUAZIONE DIOFANTINA.
AVRÒ BISOGNO DI UN CONTROLLORE AD ALMENO 3 POLI ..
VOGLIO PORRE TUTTI I POLI IN -1 QUINDI HO

$$D_{CL} = (s+1)^6 = s^6 + 6s^5 + 15s^4 + 20s^3 + 15s^2 + 6s + 1$$

IL DENOMINATORE DEL CONTROLLORE HA LA FORMA:

$$D_K(s) = \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

E IL NUMERATORE

$$N_K(s) = b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

SCRIVO L'EQUAZIONE DIOFANTINA:

$$D_{CL}(s) = N(s) N_K(s) + D(s) D_K(s)$$

$$\Downarrow$$

$$s^6 + 6s^5 + 15s^4 + 20s^3 + 15s^2 + 6s + 1 =$$

$$1[b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0] + s^3[\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0]$$

$$\Downarrow$$

$$s^6 + 6s^5 + 15s^4 + 20s^3 + 15s^2 + 6s + 1 =$$

$$b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0 + a_3 s^6 + a_2 s^5 + a_1 s^4 + a_0 s^3$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a_3 = 1 \\ a_2 = 6 \\ a_1 = 15 \\ a_0 + b_3 = 20 \overset{\text{scelgo}}{\Longrightarrow} a_0 = 10 \wedge b_3 = 10 \\ b_2 = 15 \\ b_1 = 6 \\ b_0 = 1 \end{cases}$$

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480980509

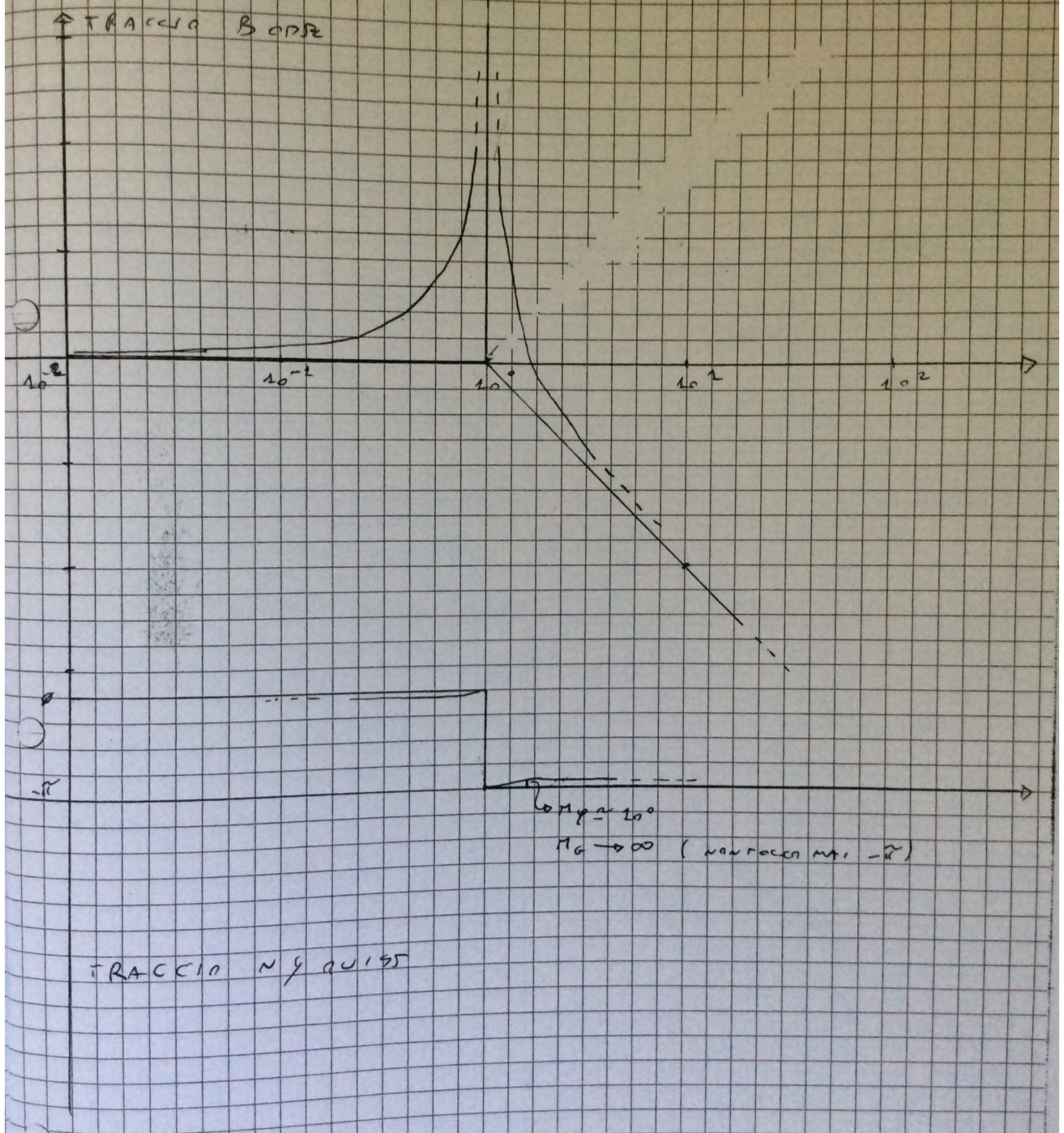
QUINDI LA CARATTERISTICA È:

$$K(s) = \frac{10s^3 + 15s^2 + 6s + 1}{s^3 + 6s^2 + 15s + 10}$$

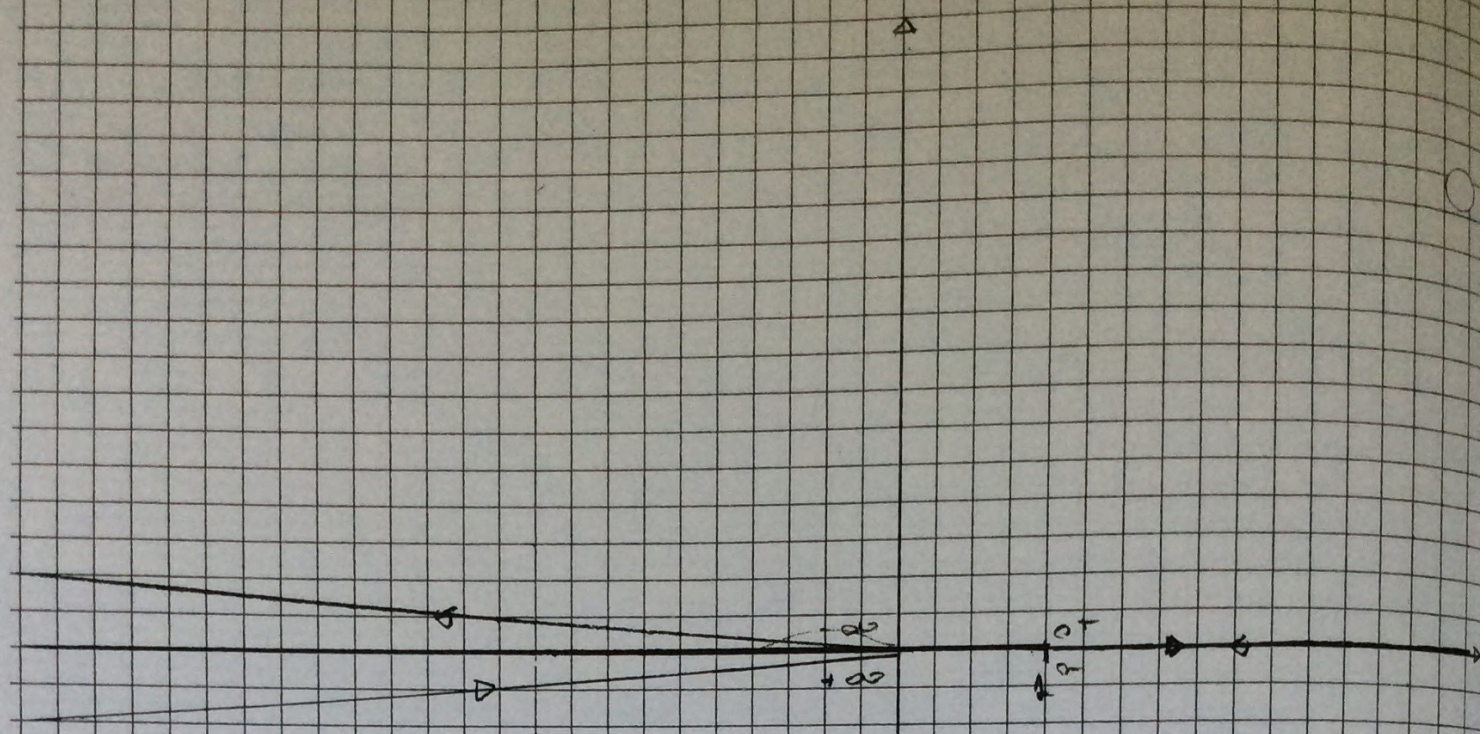
$$G(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480960509

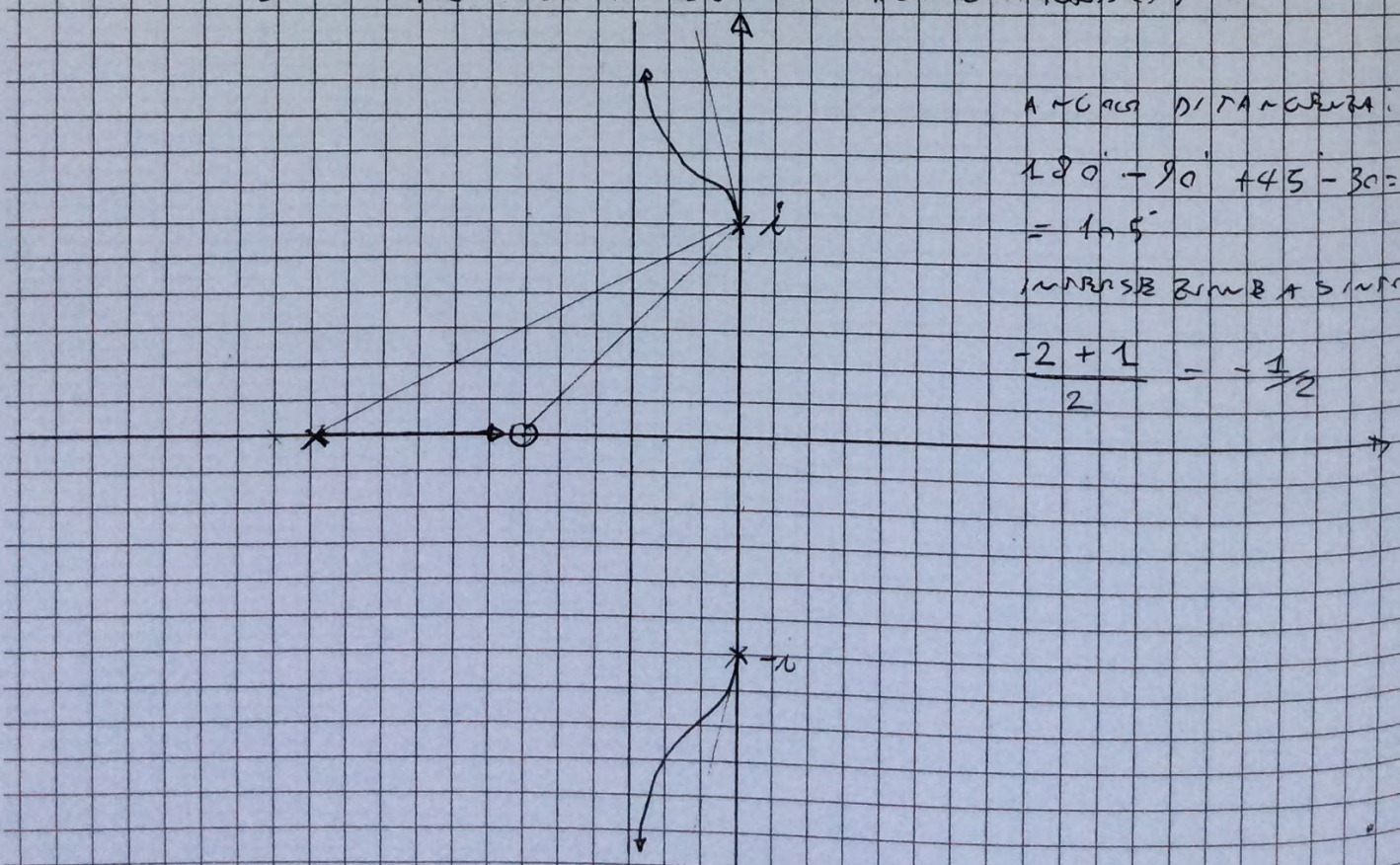
1. TRACCIARE N/ QUIST
2. STABILIZZARE



TRACCIO N/ QUIST



PER SIMBOLIZZARE USO IL LUOGO DELLE RADICI



ANGOLO DI TANGENZA:

$180° - 90° + 45° - 30° =$

$= 105°$

INTERSEZIONE ASINTOTI:

$$\frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$$

USO IL CRITERIO DI ROUTH PER SCEGLIERE IL K.

$$G(s)K(s) = \frac{K(s+1)}{(s+2)(s^2+1)}$$

$$D_{CL} = Ks + K + s^3 + s + 2s^2 + 2 =$$

$$= s^3 + 2s^2 + [K+1]s + [K+2]$$

$K > -1$ $\quad$ $K > -2$

s^3	1	$K+1$	0
s^2	2	$K+2$	0
s	$K/2$	0	
1	$K+2$	0	
	0		

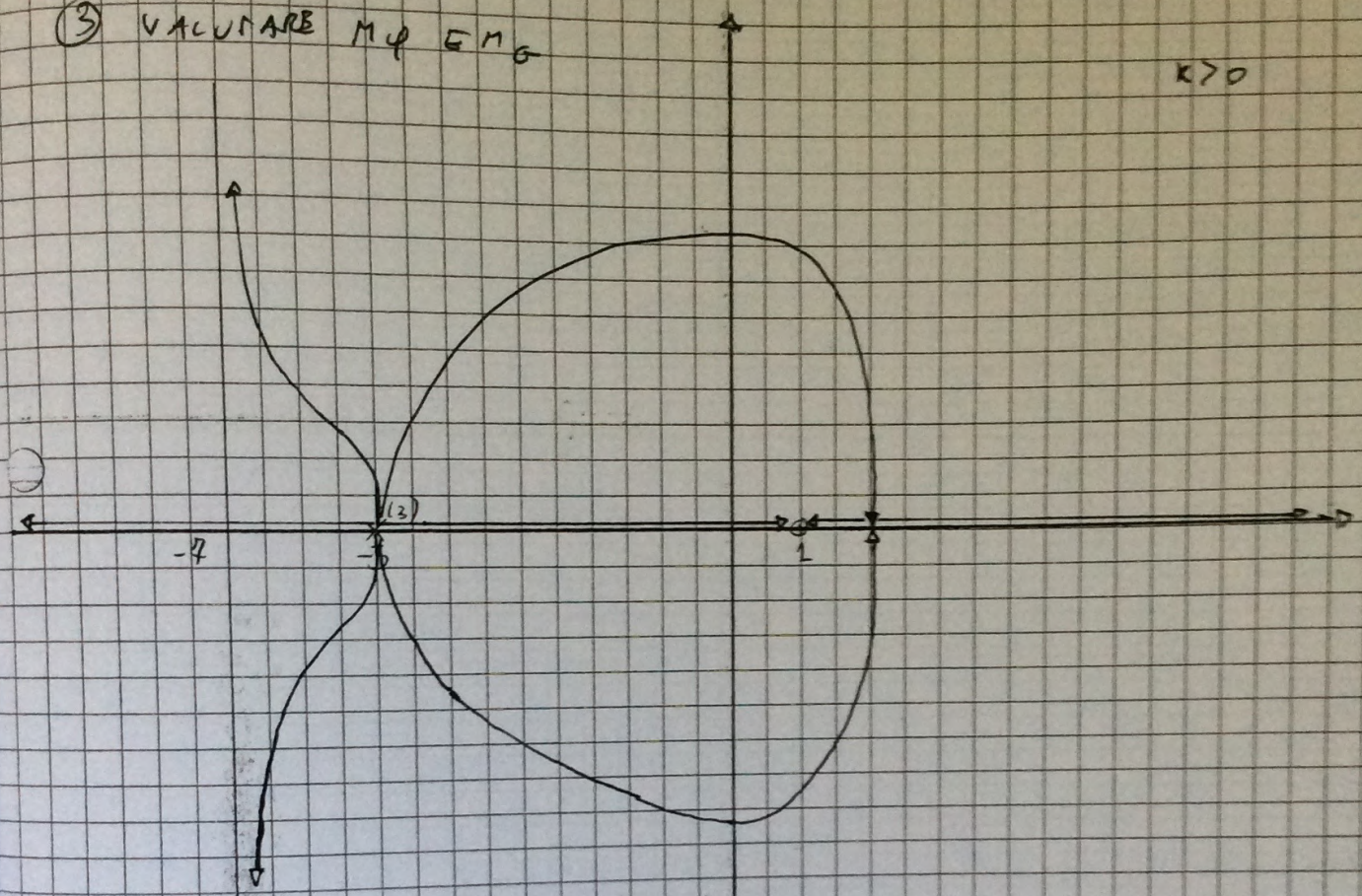
QUINDI $\boxed{K > 0}$

SCELGO $K = 1$

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157857
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480980509

$$G(s) = \frac{s-1}{(s+5)^3}$$

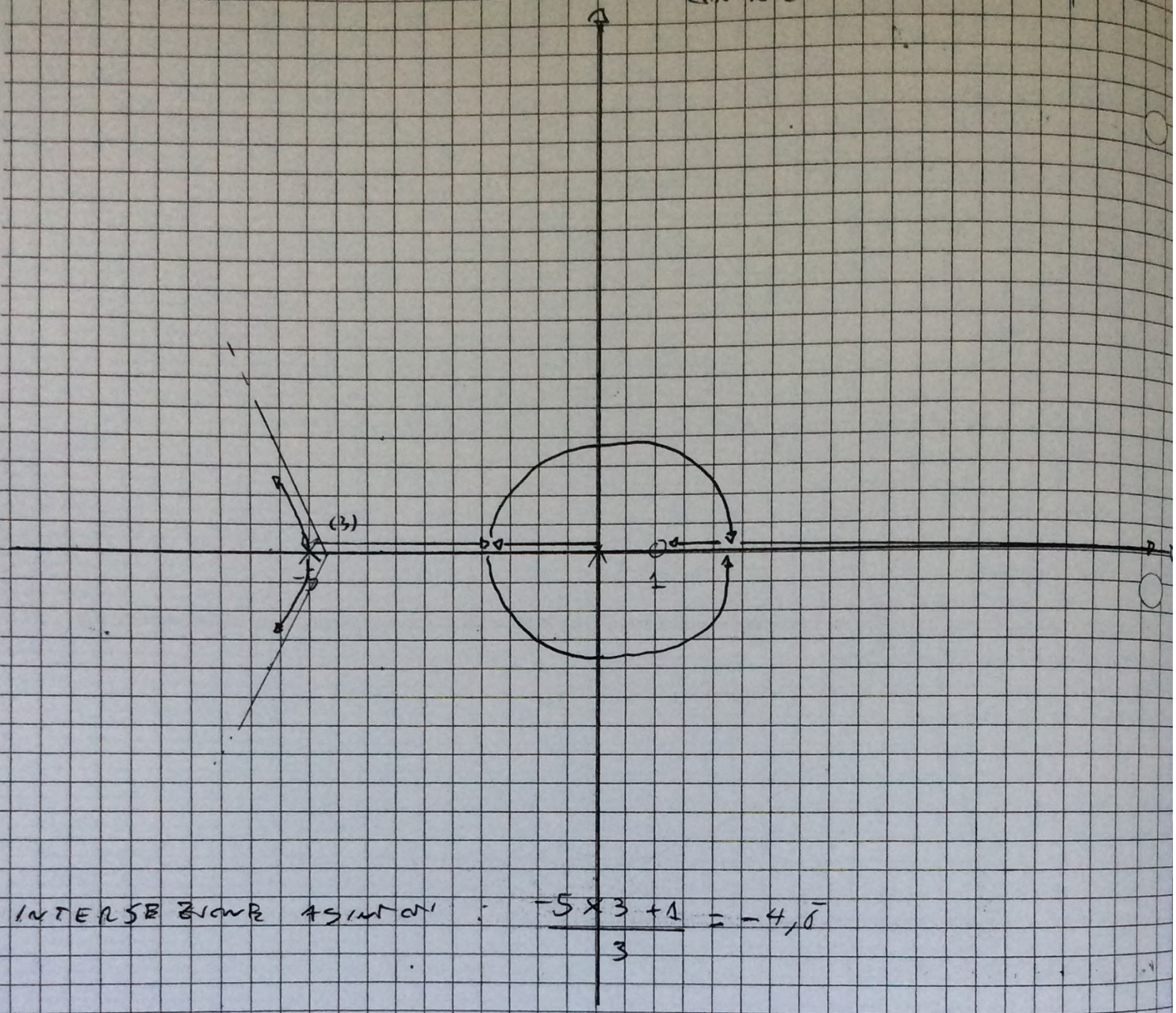
1. TRACCIARE IL LUOGO DELLE RADICI DIRETTO E INVERSO
2. PROGETTARE UN CONTROLLORE C t.c. $e_s = 0$
3. VALUTARE M_φ E M_G



INTERSEZIONE ASINTOTO: $\frac{-5 \times 3 + 1}{2} = -7$

AFFINCHÈ L'ERRORE AL GRADINO SIA NULLO POSSO INSERIRE UN INTEGRATORE. DISEGNO DI NUOVO IL LUOGO DELLE RADICI:

CON $K<0$



INTERSEZIONE ASINTOTI: $\frac{-5\times 3+1}{3} = -4,\bar{6}$

CERCO IL K CRITICO COL METODO DI ROUTH:

$$D_{CL} = Ks - K + s^4 + 15s^3 + 75s^2 + 125s =$$
$$= s^4 + 15s^3 + 75s^2 + [125+K]s - K$$

$125+K>0$ $\qquad K<0$

$\Downarrow$

$K > -125$

USO LA TABELLA DI ROUTH:

s^4	1	75	$-K$	0
s^3	15	$125+K$	0	
s^2	$\frac{1000-K}{15}$	$-K$	0	
s^1	$\frac{124900-125K-K^2}{1000-K}$	0		
1	0			

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - PIVA 00430980509

$K < 1000$

$K^2 + 125K - 124900 < 0$

$$\frac{-125 \pm \sqrt{499725}}{2} \simeq \frac{-125 \pm 706.7}{2}$$

$\Downarrow$

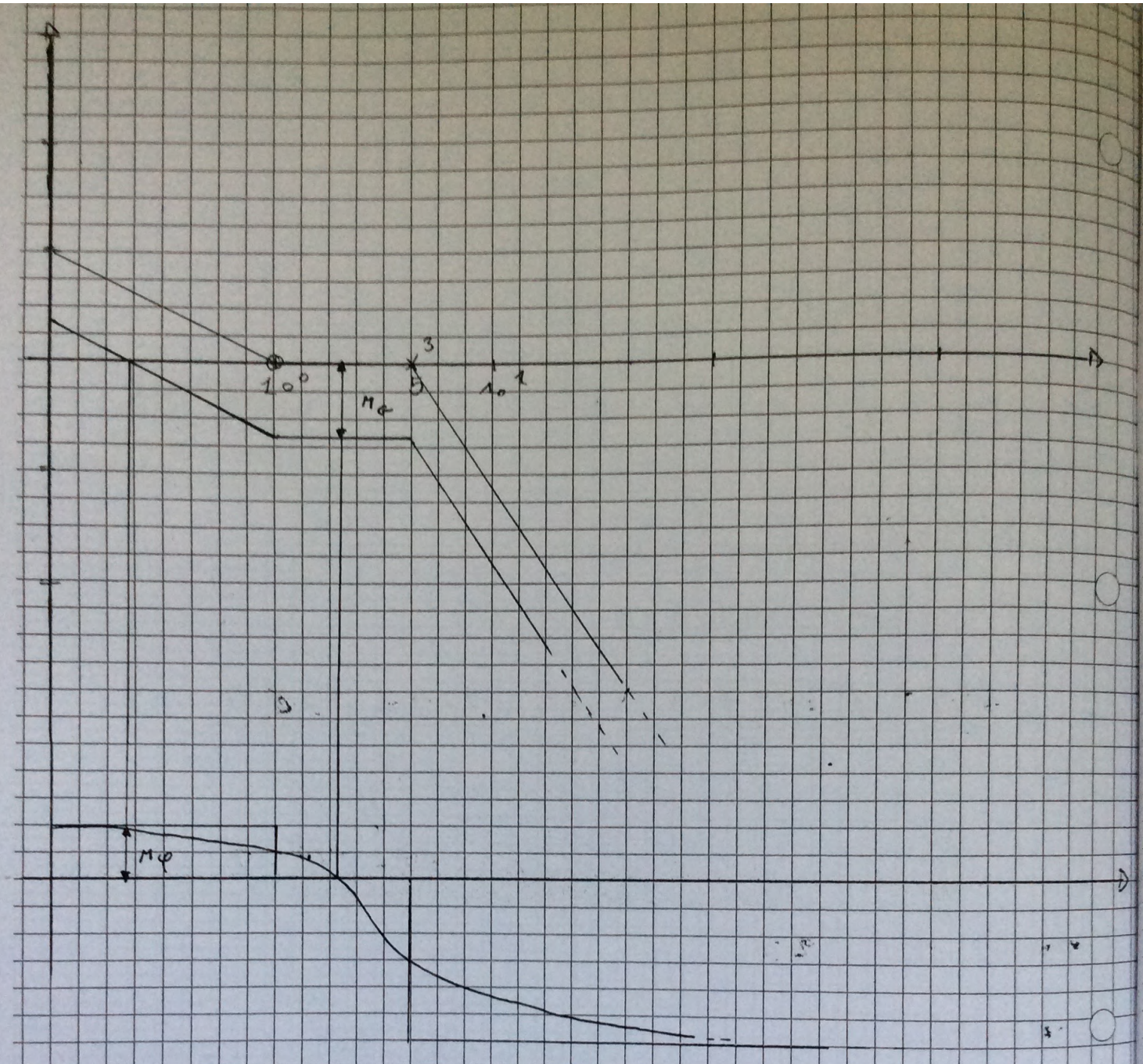
$K > -478.45$

SCELGO $K = -25$

QUINDI

$$KG = \frac{-s+1}{s\left(1+\frac{s}{5}\right)^3} \cdot \frac{\cancel{25}}{\cancel{125}\ 5}$$

TRACCIO BODE



$M_G \simeq 13.5$ dB

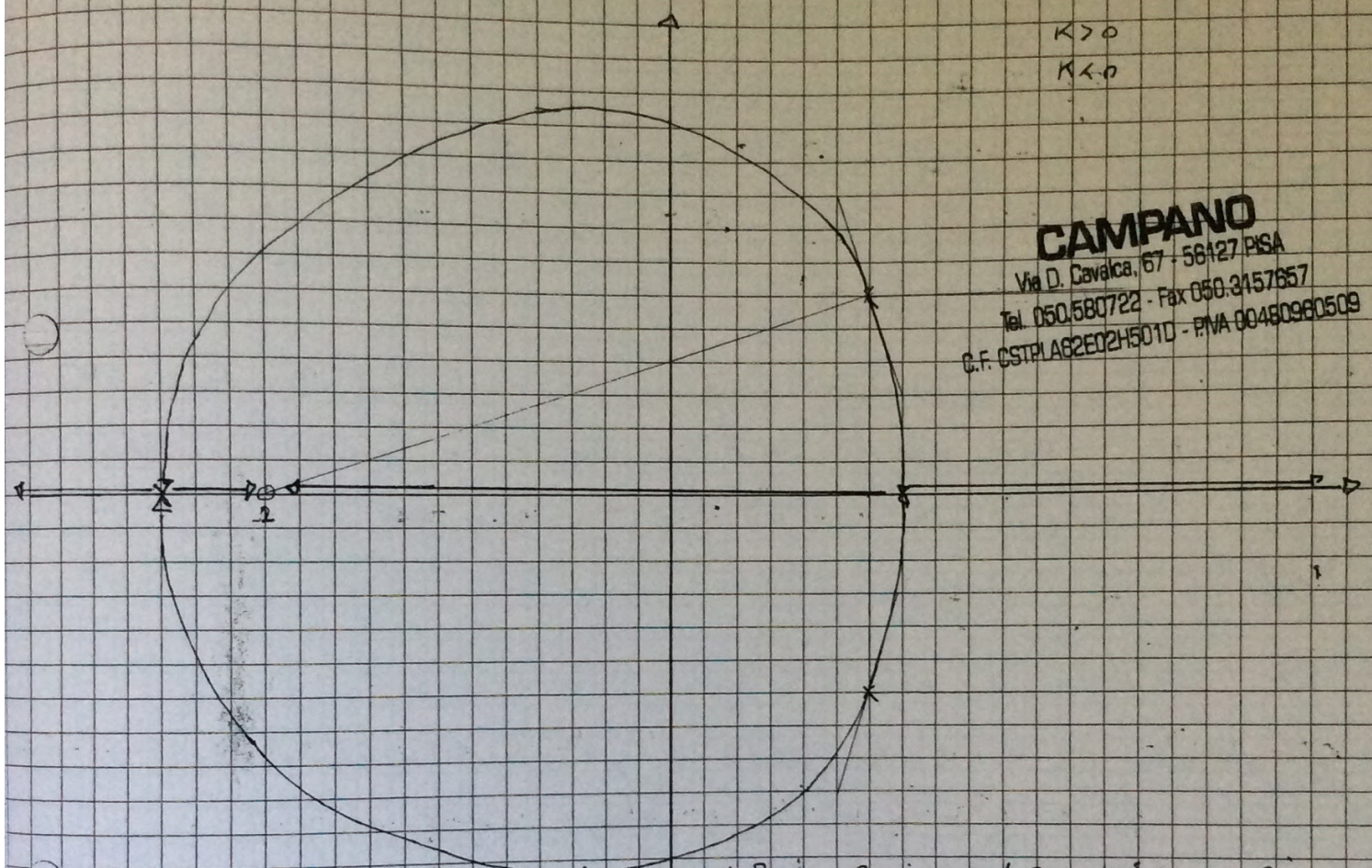
$M_\varphi \simeq 80°$

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2 - 2s + 2}$$

① DISEGNARE IL LUOGO DELLE RADICI PER $K > 0$ E $K < 0$

② PROGETTARE IL CONTROLLORE t.c. $\varepsilon_\infty < 0.1$

③ VALUTARE I MARGINI DI STABILITÀ



CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480980509

ANGOLO DI TANGENZA POLI: $180 - 90 + 18.4 = 108.4$

UN CONTROLLORE CHE MI PERMETTA DI AVERE UN ERRORE FINITO ALLA RAMPA DEVE AVERE ALMENO UN POLO ALL'ORIGINE. UTILIZZO L'EQUAZIONE DIOFANTINA PER PORRE TUTTI E 3 I POLI 4 - 1. PROVO A FARLO UTILIZZANDO UN SOLO POLO (ALL'ORIGINE) E DUE SOLO ZERI AGGIUNTI

$$D_{CL} = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

$$N_K = b_1 s + b_0$$

$$D_K = a_1 s$$ ← PERCHÈ IL POLO DEVE STARE ALL'ORIGINE

QUINDI IMPONGO L'EQUAZIONE DIOFANTEA:

$$D_{CL} = N N_K + D D_K$$

$$\Downarrow$$

$$s^3+3s^2+3s+1 = (s+2)(b_1 s+b_0) + (s^2-2s+2)(\alpha_1 s) =$$

$$= b_1 s^2 + b_0 s + 2b_1 s + 2b_0 + \alpha_1 s^3 - 2\alpha_1 s^2 + 2\alpha_1 s$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 = 1$$

$$b_1 - 2\alpha_1 = 3 \Rightarrow b_1 = 5$$

$$b_0 + 2b_1 + 2\alpha_1 = 3 \Rightarrow b_0 + 10 + 2 = 3 \Rightarrow b_0 = -9$$

$$2b_0 = 1 \neq -18$$

DEVO QUINDI SUPPORRE CHE UN CONTROLLORE DI ROBUSTO TIPO NON È SUFFICIENTE. ASSUMENDO TUTTO DI UN GRADO

$$D_{CL} = (s+1)^4 = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1$$

$$D_K = \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s$$

$$N_K = b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

$$s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 = (s+2)(b_2 s^2 + b_1 s + b_0) + (s^2-2s+2)(\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s) =$$

$$= b_2 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + 2b_2 s^2 + 2b_1 s + 2b_0 +$$

$$+ \alpha_2 s^4 - 2\alpha_2 s^3 + 2\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s^3 - 2\alpha_1 s^2 + 2\alpha_1 s =$$

$$= \alpha_2 s^4 + [b_2 - 2\alpha_2 + \alpha_1] s^3 + [b_1 + 2b_2 + 2\alpha_2 - 2\alpha_1] s^2 +$$

$$+ [b_0 + 2b_1 + 2\alpha_1] s + 2b_0$$

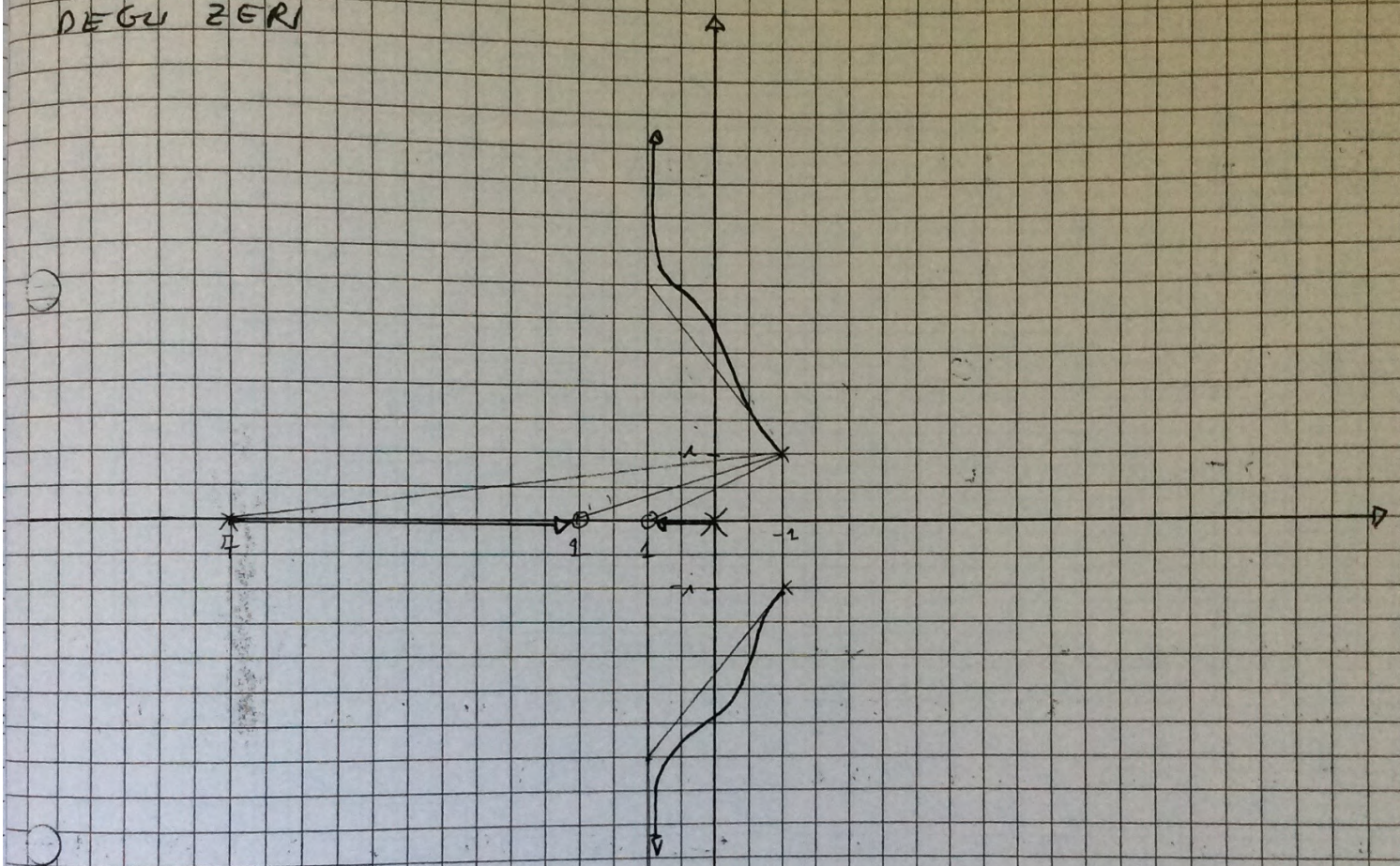
$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = 1 \\ b_2 - 2\alpha_2 + \alpha_1 = 4 \\ b_1 + 2b_2 + 2\alpha_2 - 2\alpha_1 = 6 \\ b_0 + 2b_1 + 2\alpha_1 = 4 \\ 2b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 2.05 \\ b_1 = 0.2 \\ b_2 = 3.95 \end{cases}$$

IL RISULTANO QUINDI È:

$$K(s) = \frac{3.95 s^2 + 0.2 s + 0.5}{s^2 + 2.05 s}$$

SOLO CHE A QUESTO PUNTO NON È VERIFICATA $\varepsilon_1 < 0.1$ PROVO QUINDI AD AGIRE DIRETTAMENTE DAL LUOGO DEGLI ZERI



ANGOLO DI TANGENZA: $180° - 90° - 7 + 26.56 + 18.43 \simeq 128°$

VOLENDO IO UN ERRORE ALLA RAMPA PARI A 0.1 (COME MASSIMO) ED ESSENDO KG DI TIPO 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\frac{K}{7}} = \frac{7}{K} < \frac{1}{10} \Rightarrow \boxed{K > 70}$$

$$KG = K \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+7)(s^2-2s+2)} = \frac{K \cdot 2}{7 \cdot 2} \frac{(1+s)(1+s/2)}{s(1+s/7)(\frac{s^2}{2}-s+1)}$$

ATTRAVERSO IL CRITERIO DI ROUTH VEDIAMO SE 70 È UN VALORE CHE MASSICCIA LA STABILITÀ:

$$D_{CL} = 70(s+1)(s+2) + (s+7)(s^2-2s+2)s =$$

$$= 70(s^2+s+2s+2) + (s^3-2s^2+2s^2+7s^3-14s^2+14s) =$$

$$= 70s^2+210s+140+s^4+5s^3-12s^2+14s =$$

$$= s^4+5s^3+68s^2+224s+140$$

LA CN È VERIFICATA

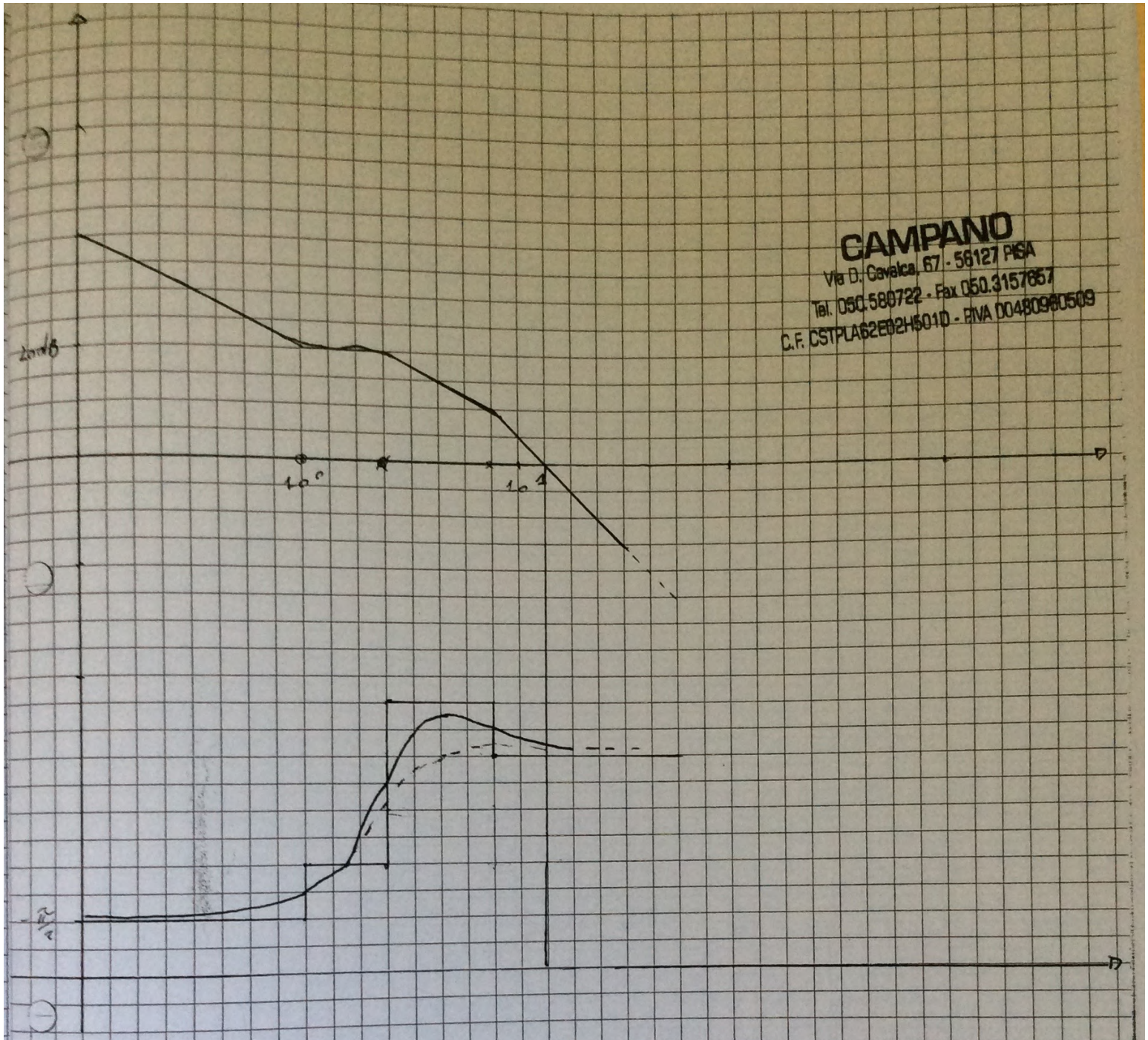
VEDIAMO LA CS:

s^4	1	68	140	0
s^3	5	224	0	
s^2	23.2	140	0	
s	193.8	0		
1	140	0		
	0			

QUINDI $K = 70$ MI ASSICURA LA STABILITÀ

A QUESTO PUNTO SI VUOLE VALUTARE I MARGINI DI STABILITÀ

QUINDI SI RICORRE A BODE:



CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157857
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480980509

$G(s) = e^{-0.02s}$

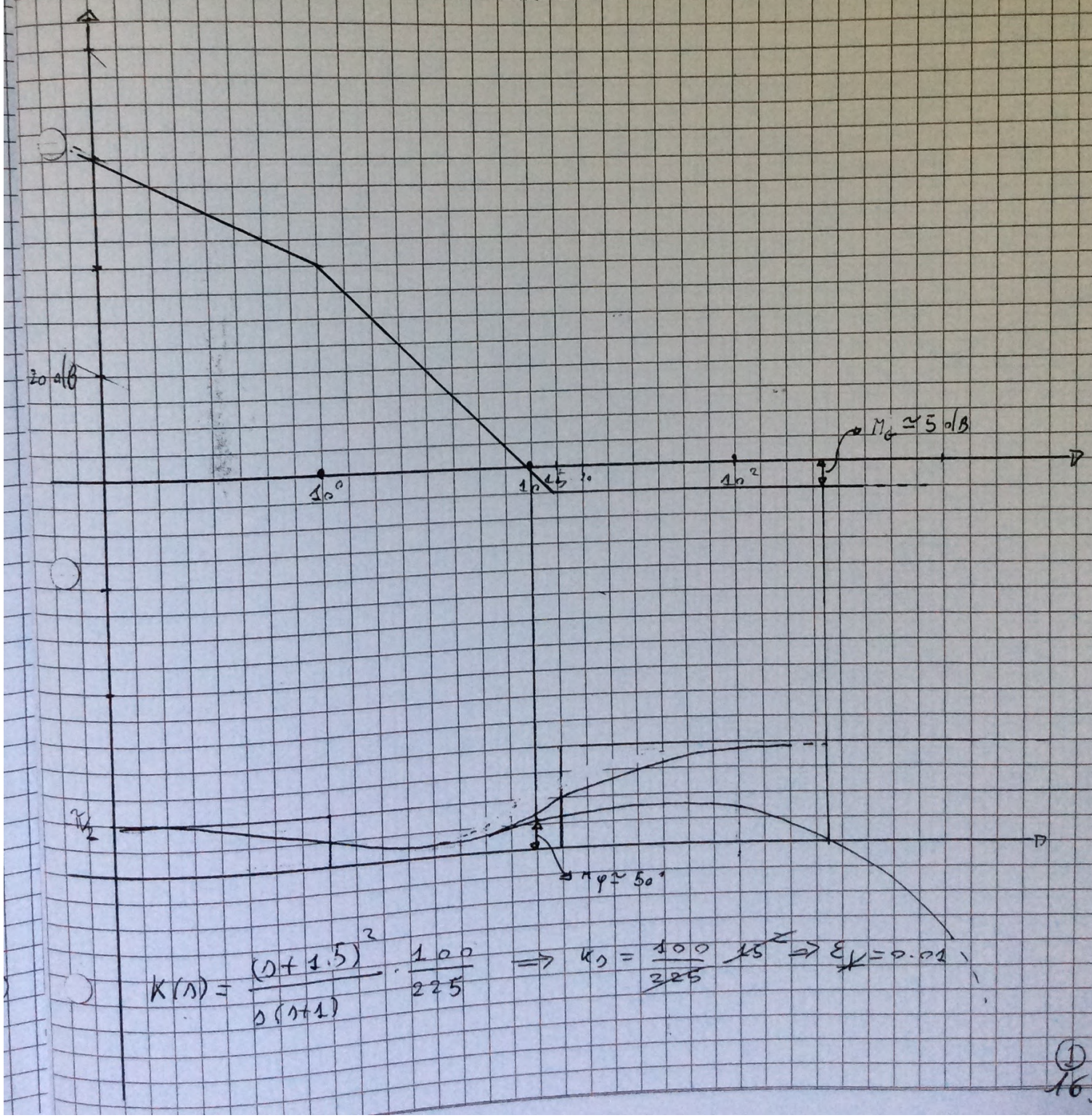
PROGETTARE UN CONTROLLORE t.c.:

- $\varepsilon_\infty < 1\%$
- $M_G \geq 30\,dB$
- $M_\varphi \geq 30°$

HO BISOGNO SICURAMENTE DI UN INTEGRATORE, INCLUSO (ESSENDO $K_p = K$):

$\frac{1}{K_p} \leq 0.01 = \frac{1}{100} \Rightarrow K \geq 100$

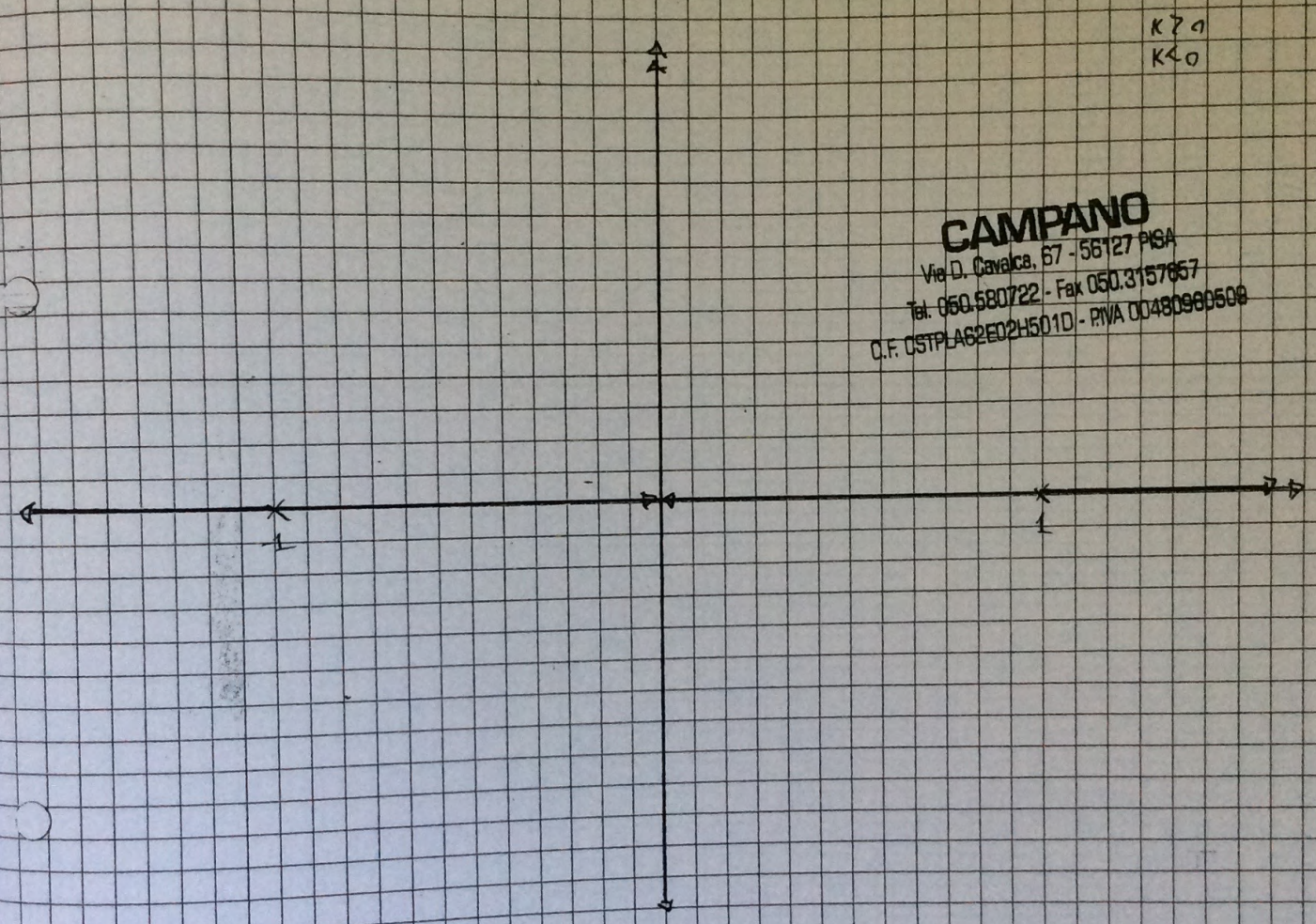
BODE EVIDENZIA COME TALE CONTROLLORE NON BASTI, ALMENO POSTO.



$K(s) = \frac{(s+1.5)^2}{s(s+1)} \cdot \frac{100}{225} \Rightarrow K_p = \frac{100}{225} \cdot 15^2 \Rightarrow \varepsilon_\infty = 0.01$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{(s+1)(s-1)}$$

1. DISEGNARE IL LGR PER $K>0$ E $K<0$
2. PROGETTARE UN CONTROLLORE t.c. $M_p < 10\%$ E CHE $T_{a1} < 1$ sec
3. VALUTARE I MARGINI DI STABILITÀ DEL SISTEMA



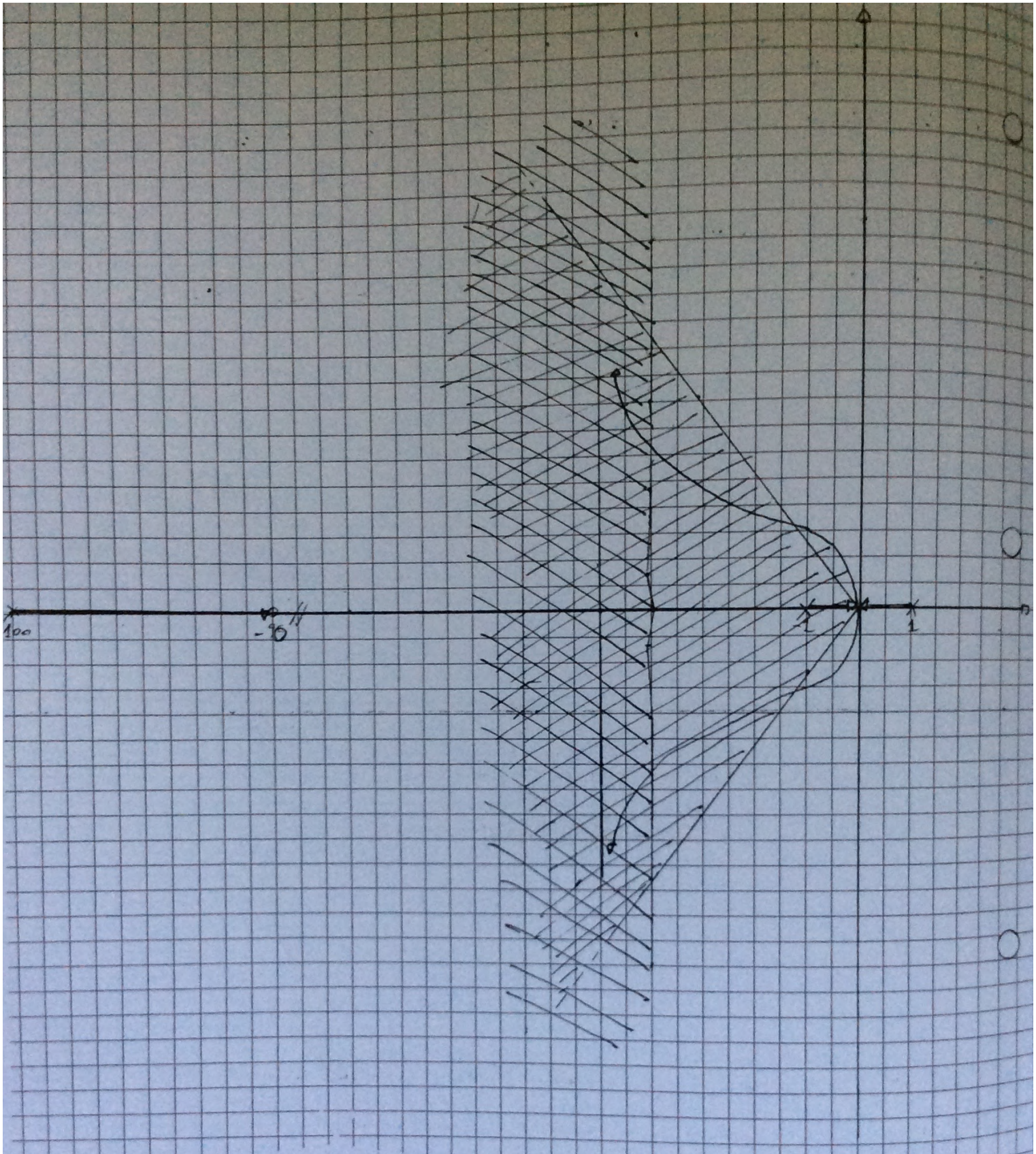
CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480980509

RIPRESENTO IL LUOGO DELLE RADICI COLORANDO LE REGIONI DOVE È ACCETTABILE SI TROVINO I MIEI POLI

$$M_p = 100 \cdot e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} < 10 \Rightarrow \xi^2 > 0.35$$

$$T_{a1} = \frac{4}{\xi \omega_n} < 1 \Rightarrow \omega_n > \frac{4}{\xi}$$

È QUINDI OPPORTUNO SPOSTARE L'ASINTOTO



USO CRITERIO ROUTH PER TROVARE IL K CRITICO

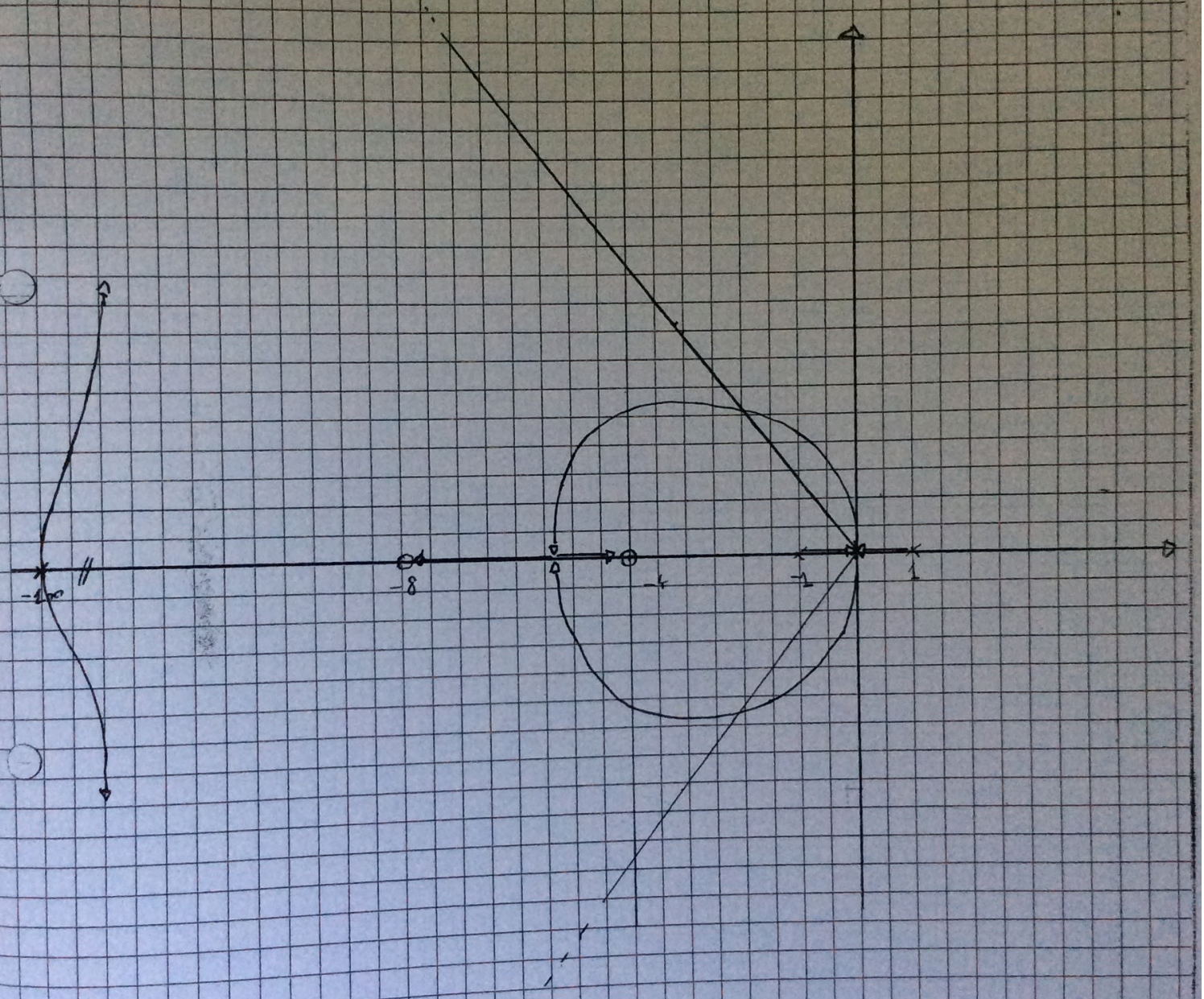
$$D_{CL} = Ks + K98 + (s+100)(s^2-1) = Ks + K98 + s^3 + 100s^2 - s - 100 =$$

$$= s^3 + 100s^2 + s[K-1] + [K98 - 100]$$

$$K > 1 \qquad K > \frac{100}{98} = \frac{10}{9} \simeq 1.05$$

DOPO MOLTISSIMI CONTI FATTI SU UN FOGLIO A PARTE GIUNGO ALLA CONCLUSIONE CHE PER FAR RIMANERE I 2 POLI NELLA ZONA GIUSTA LO ZERO LO DEVO METTERE PRESSO -1, SOLUZIONE IMPRATICABILE.

A QUESTO PUNTO CONSIDERO UNA DIVERSA DISPOSIZIONE

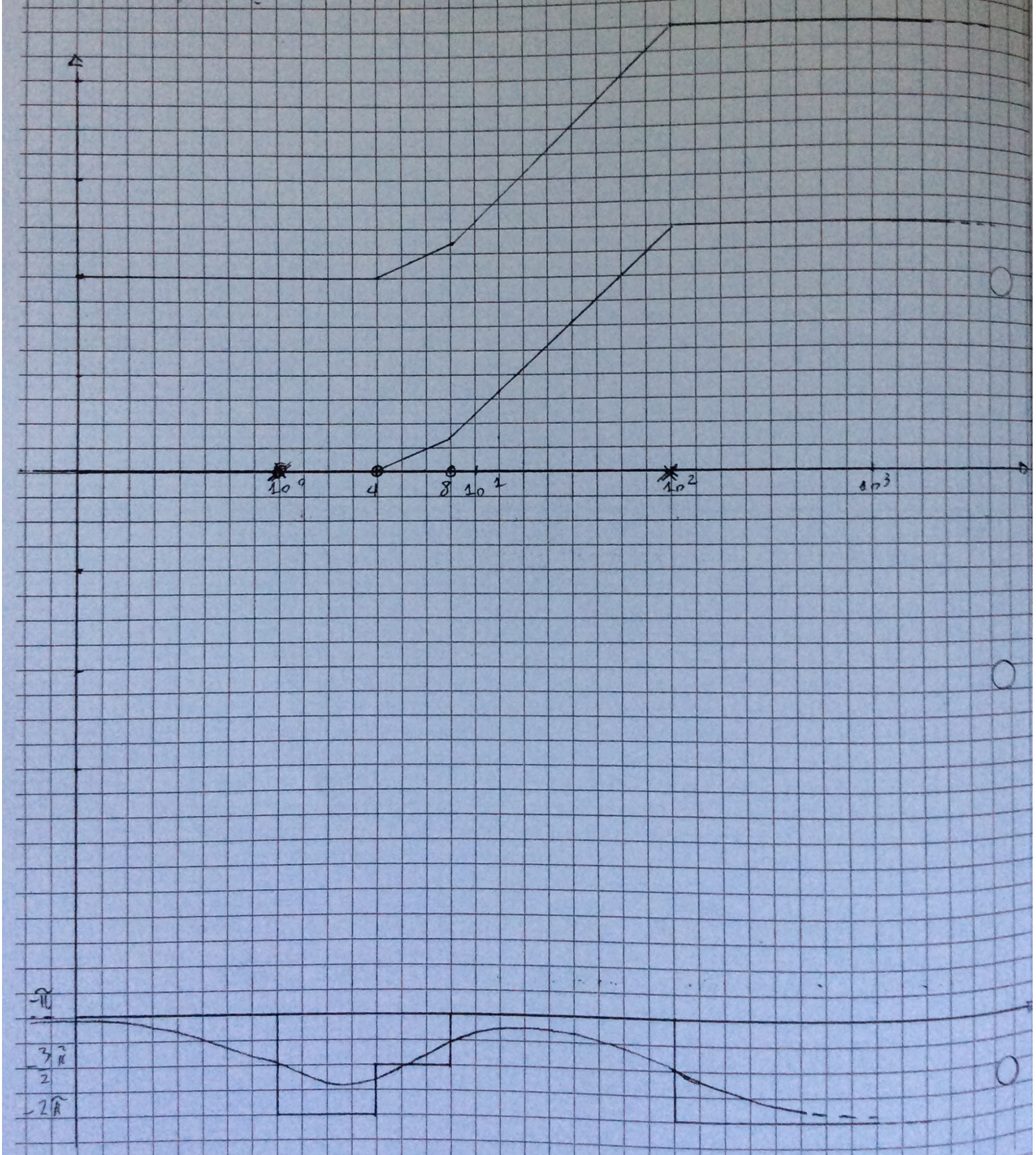


SI PUÒ DIMOSTRARE CHE PER $k = 310000$ I DUE POLI SI TROVANO SULL'ASSE REALE FRA I DUE ZERI.

QUINDI

$$GK = \frac{31000\,(s+4)(s+8)}{(s+100)^2\,(s^2-1)} = \frac{31\cancel{000}\cdot 4\cdot 8}{\cancel{10000}\cdot -1\left(1+\frac{s}{100}\right)^2(1+s)(1-s)}\left(1+\frac{s}{4}\right)\left(1+\frac{s}{8}\right)$$

$K_s = -992$



$$G(s) = \frac{s+5}{(s+10)(s+100)} e^{-0.1s}$$

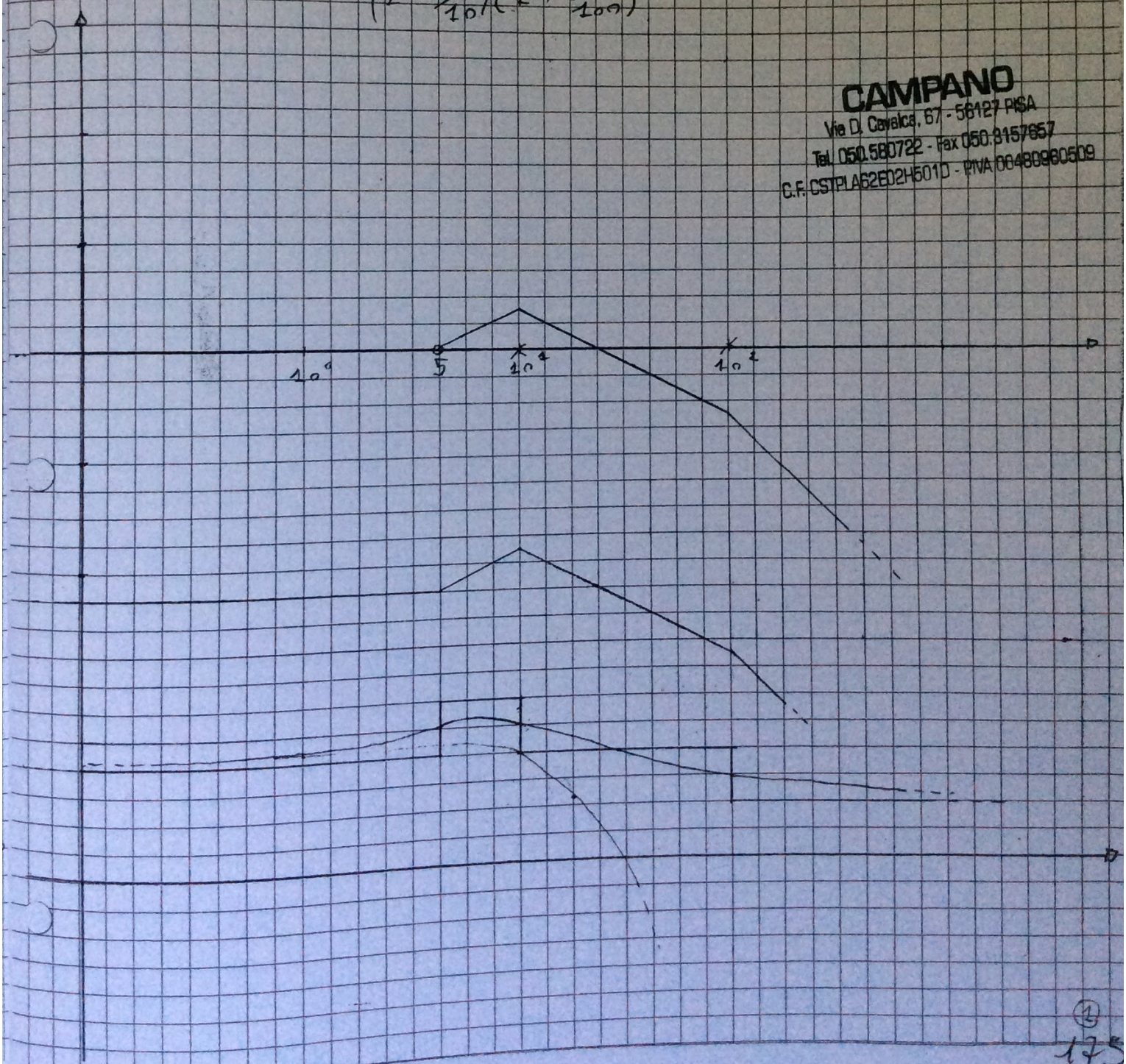
(1) DIAGRAMMI DI BODE

(2) PROGETTARE UN CONTROLLORE t.c.:

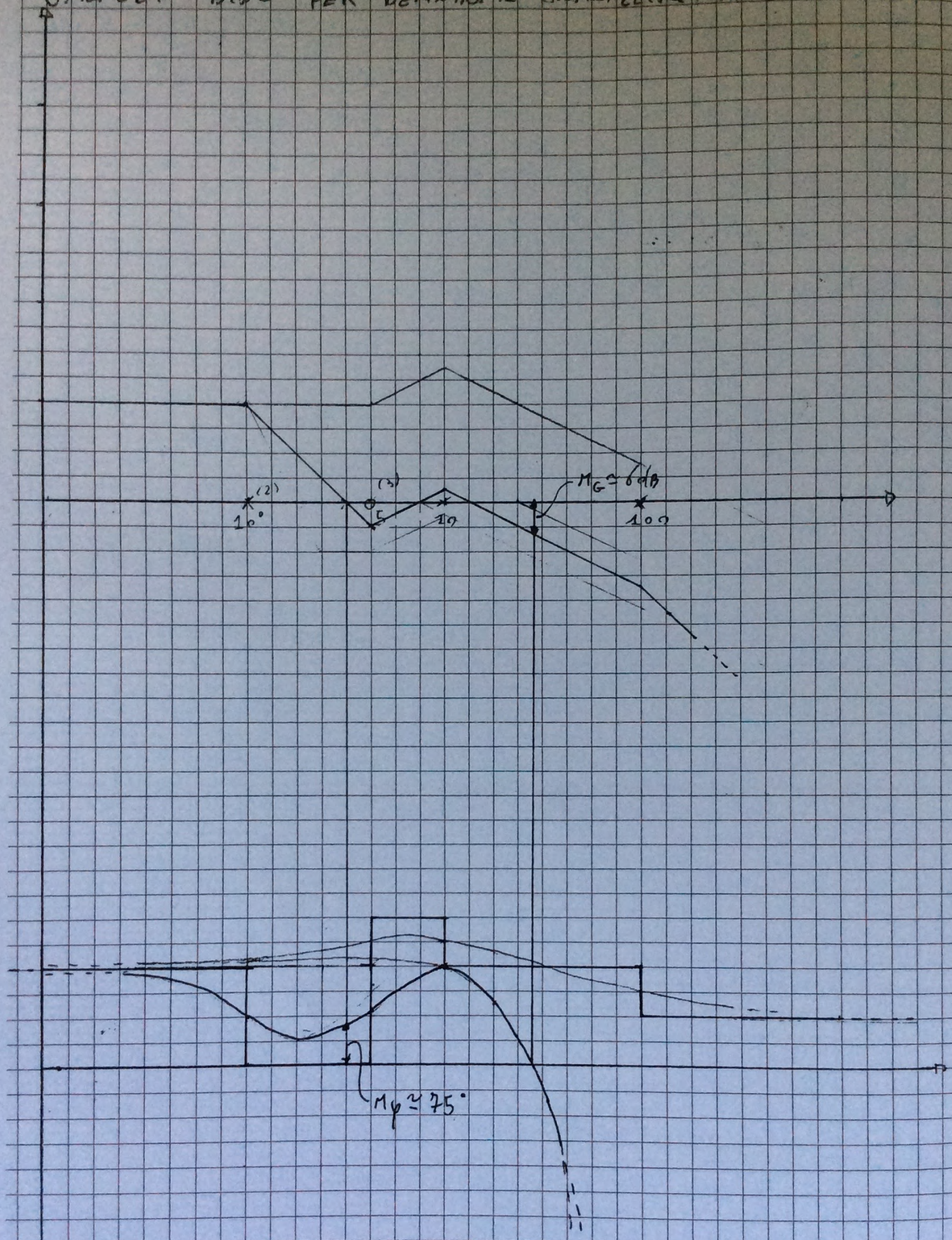
- $\varepsilon_\infty \leq 0.1$
- $M_\varphi \geq 30°$
- $M_G \geq 30\,dB$

$$G(s) = \frac{5}{1000} \frac{1 + s/5}{(1 + s/10)(1 + s/100)} e^{-0.1s} \qquad k_s = 0.005$$

CAMPANO
Via D. Cavalca, 67 - 56127 PISA
Tel. 050.580722 - Fax 050.3157657
C.F. CSTPLA62E02H501D - P.IVA 00480980509



UTILIZZO BODE PER DEFINIRE IL CONTROLLORE RICHIESTO



QUESTO CONTROLLORE SARÀ SI FATTO:

$$K(s) = 80 \frac{(s+5)^2}{(s+1)^2}$$

CONCLUDO INFINE CON L'ESERCIZIO DEL MIO ESAME DI CUI VI CASCI LA RISOLUZIONE

SUGGERIMENTO: SE LO RISOLVERE CON L'AN RISULTO IO AVRÒ UNA "SORPRESA" SUI MARGINI

$$G(s) = \frac{100}{s^2}$$

1. LOR DIREMO ED INVERSO
2. PROGETTARE UN CONTROLLORE STABILIZZANTE $t.c.$: $\varepsilon_{\infty} = 0$
3. DEFINIRE IL RITARDO MASSIMO CHE NON DESTABILIZZA IL SISTEMA

CIAO ED IN BOCCA AL LUPO!