Calcolo differenziale
per funzioni di n variabili reali

i) $f : \underset{\text{aperto}}{A} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (scalare)

$x_0 \in A$

$\longrightarrow$ f è differenziabile in x_0, se

(1) $$f(x) = f(x_0) + \overset{\nabla f(x_0)}{\cancel{\ell}} \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|), \text{ se } x \to x_0$$

"formula di Taylor del I ordine"

<u>Conseguenze</u>

1) f differenziabile in x_0 $\Rightarrow$ f continua in x_0

2) il grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ammette il piano tangente di eq

$$x_{n+1} = f(x_0) + \underset{\nabla f(x_0)}{\cancel{\ell}} \cdot (x - x_0)$$

N.B. $n = 1$, $A = (a, b)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$\rightarrow$ f è derivabile in direzione di $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$
in x_0

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \frac{d}{dt} f(x_0 + tv)\Big|_{t=0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon v) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

(N.B. $x = x_0 + tv$, $t \in \mathbb{R}$ - eq. parametrica della retta passante per x_0 in direzione v)

<u>Importante</u>: f differenziabile in x_0 $\cancel{\Leftarrow}\!\Rightarrow$ f è derivabile in x_0 $(\forall v \in \mathbb{R}^n)$

$$\ell = \nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v \qquad v \in \mathbb{R}^n, |v| = 1.$$

Altre notazioni: $\frac{\partial f}{\partial v}$, $D_v f$, $\underline{f'(x_0)v}$

$\frac{\partial f}{\partial x_j}$, f_{x_j}, $f_{\partial x_j}$, $f_{\partial j}$, $\partial_j f$, $\partial_{x_j} f$

Esempi

1) $f(x,y) = e^x y + x\cos y$

$n = 2$

$\nabla f(1,2) = (2e + \cos 2,\ e - \sin 2)$

$\Uparrow$

$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(e^x y + \cos y,\ e^x - x\sin y\right)$

$f(1,2) = 2e + \cos 2$

Il piano tangente al grafico di f in $(1,2)$

$z = 2e + \cos 2 + (2e + \cos 2,\ e - \sin 2)\cdot(x-1, y-2) =$

$= \underline{2e + \cos 2 + (2e + \cos 2)(x-1) + (e - \sin 2)(y-2)}$

$v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = \nabla f(1,2)\cdot v = (2e + \cos 2,\ e - \sin 2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(2e + \cos 2 + e - \sin 2) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(3e + \cos 2 - \sin 2)$

2) $f(x,y) = x^{2/3} y^{1/3}$

$n=2$

$M(0,0)$

∘) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dt} f(0+t,0)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \cancel{\left(t^{2/3}\cdot 0\right)}^{0} = 0.$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dt} f(0, 0+t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\cancel{\left(0\cdot t^{1/3}\right)}^{0} = 0$

$\nabla f(0,0) = (0,0)$

∘) $v \in \mathbb{R}^2,\ |v| = 1$ $\quad \frac{\partial f}{\partial v}(M) = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{d}{dt} f(0+tv_x, 0+tv_y)\Big|_{t=0} =$

$\quad \shortparallel$

(v_x, v_y)

$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (tv_x)^{2/3}(tv_y)^{1/3} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(t\ \underbrace{v_x^{2/3} v_y^{1/3}}\right)$

$= v_x^{2/3} v_y^{1/3}$

Allora, f non è differenziabile in $M(0,0)$

Altrimenti $\dfrac{\partial f}{\partial v}(M) = \nabla f(M)\cdot v = (0,0)\cdot v = 0$

$$\dfrac{\partial f}{\partial v}(M) = v_x^{2/3}\, v_y^{1/3}$$

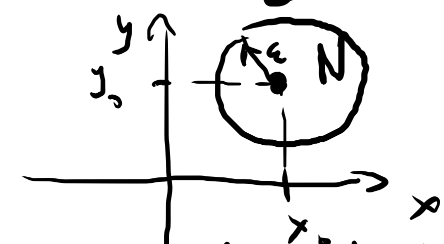
falso se $v_x \neq 0$ e $v_y \neq 0$

Attenzione $N(x_0, y_0)$ $\quad x_0 \neq 0,\ y_0 \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(N) = \frac{2}{3}\, x_0^{-1/3}\, y_0^{1/3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(N) = \frac{1}{3}\, x_0^{2/3}\, y_0^{-2/3}$$

$\Omega := B_\varepsilon(N)$

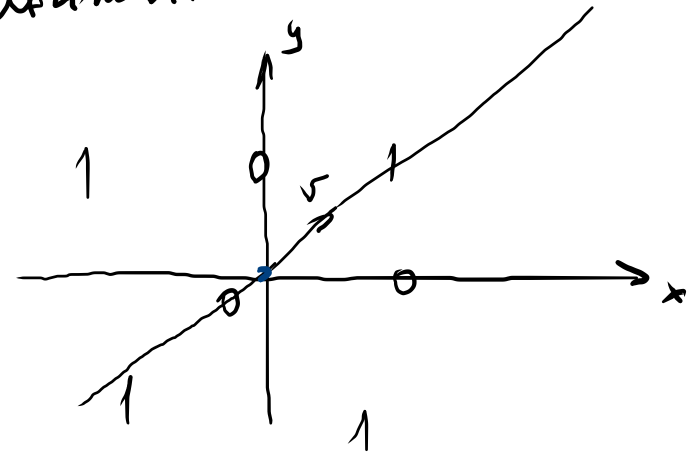


$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ continue in $\Omega \Rightarrow f$ è differenziabile ovunque in Ω (in particolare, in N)

3) $f(x,y) := \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ oppure } y = 0 \\ 1, & \text{altrimenti} \end{cases}$

$n = 2$

$O(0,0)$



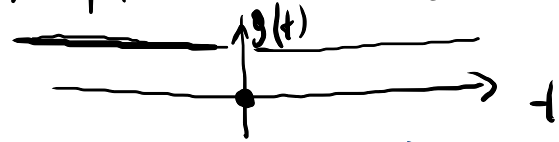
•) $f_x(0,0) = 0$

$f_y(0,y) = 0$

•) $v = (v_x, v_y) \; : \; v_x \neq 0, \; v_y \neq 0$

$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) \neq$ non esiste

$g(t) := f(0 + tv_x, 0 + tv_y) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 1, & t \neq 0 \end{cases}$



f non è continua in O $\Rightarrow$ f non è differenziabile in O

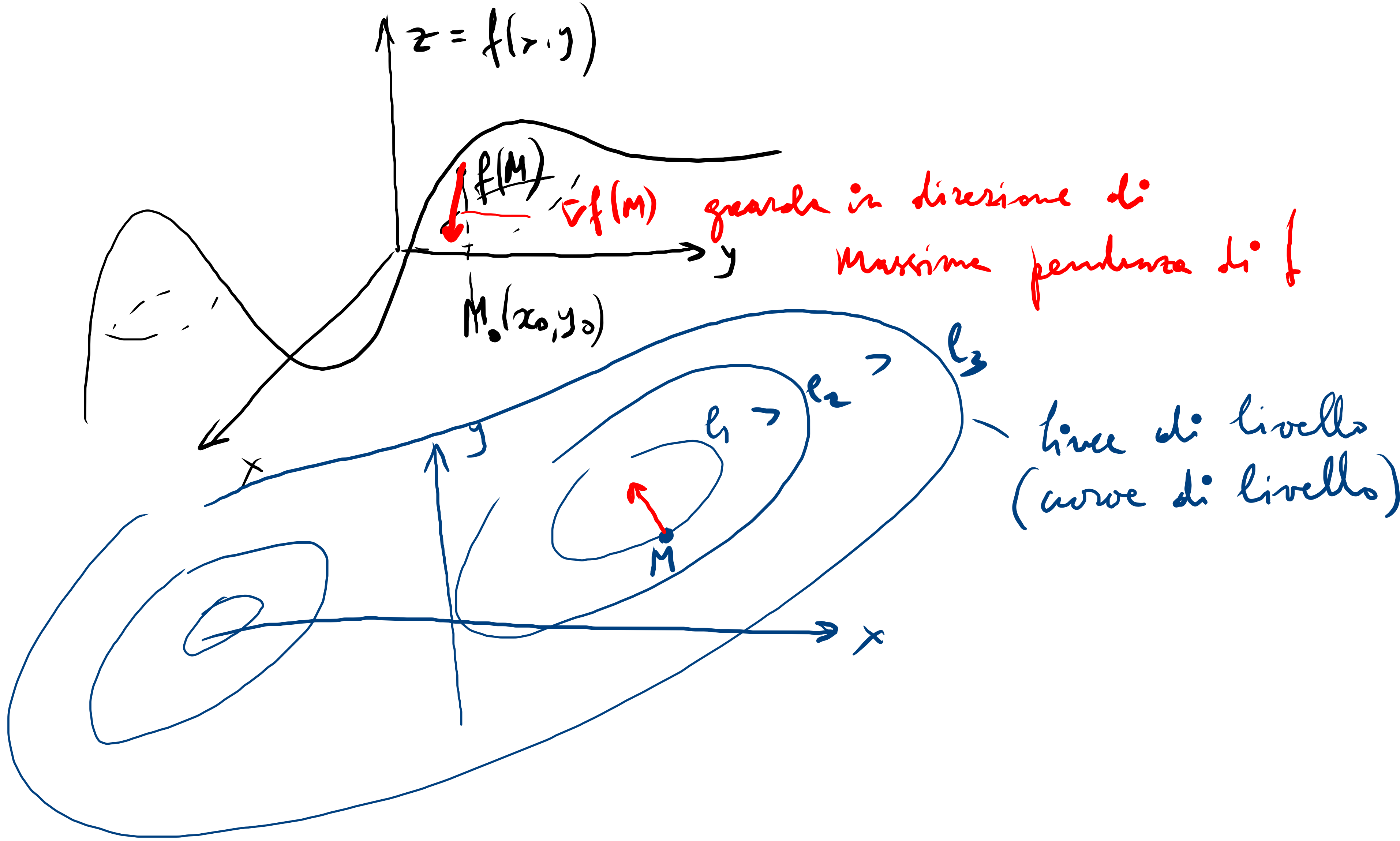
Una osservazione su $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabili in $x_0 \in A$

$v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)\right| = \left|\nabla f(x_0) \cdot v\right| \le \left|\nabla f(x_0)\right| \cdot \overbrace{\cancel{|v|}}^{=1} = \left|\nabla f(x_0)\right|$$

"=" se $v = \dfrac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$

Ovvero, la direzione di $\nabla f(x_0)$ è direzione di massima pendenza del grafico di f in x_0, e $|\nabla f(x_0)|$ è il valore della massima pendenza.



$z = f(x,y)$
$f(M)$
$\nabla f(M)$ guarda in direzione di massima pendenza di f
y
$M_0(x_0,y_0)$
x
ℓ_3
ℓ_2
ℓ_1
y
M
x
linee di livello (curve di livello)

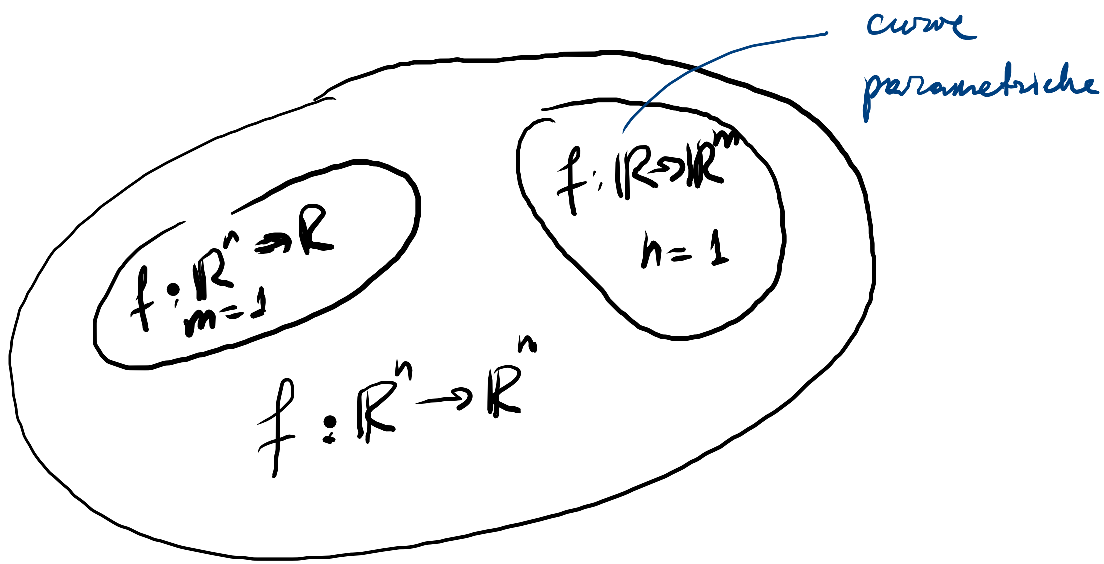
·) Caso vettoriale

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

aperto

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

$$f_j : A \to \mathbb{R}^m$$



$x_0 \in A$

Def. f differenziabile in x_0 se e solo se ogni f_j lo è,

ovvero

$$f_j(x) = f_j(x_0) + \nabla f_j(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad x \to x_0, \quad j = 1, \dots, m$$

(2)
$$\underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{f(x)}} = \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{f(x_0)}} + \underbrace{Df(x_0)}_{\substack{m \times n \\ \text{matrice}}} \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{(x - x_0)}} + o(|x - x_0|) \quad x \to x_0$$

formula di Taylor del I ordine

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \nabla f_2(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix} = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}}_{n \text{ colonne}}\right\} m \text{ righe}$$

Curve parametriche

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad (m \geq 1)$$

I intervallo

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$$

$t_0 \in I$

$$\gamma_j(t) = \gamma_j(t_0) + \dot{\gamma}_j(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|), \quad t \to t_0, \quad j = 1, \dots, m$$

(3) $$\underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{\gamma(t)}} = \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{\gamma(t_0)}} + \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{\dot{\gamma}(t_0)}}(t - t_0) + o(|t - t_0|), \quad t \to t_0$$

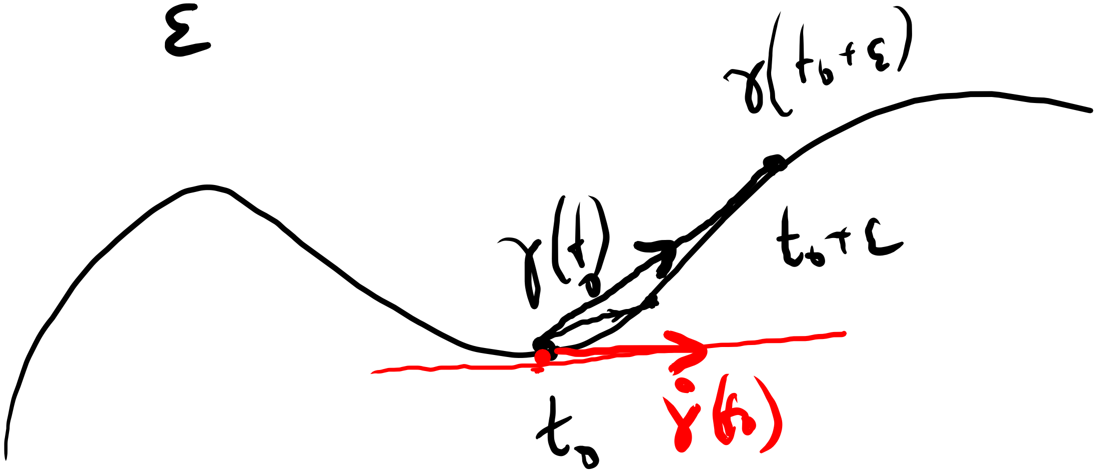
$$\dot{\gamma}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t_0) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_m(t_0) \end{pmatrix}$$

formula di Taylor del 1 ordine

•) $\dot{\gamma}(t_0)$ – vettore velocità nell'istante t_0

("velocità istantanea")

$$\dot{\gamma}(t_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\gamma(t_0+\varepsilon) - \gamma(t)}{\varepsilon}$$



•) $\dot{\gamma}(t_0)$ è tangente alla curva $\gamma(t)$ in $t = t_0$

·) L'eq della retta tandente a $\gamma(\cdot)$ in t_0 è

eq. parametrica

$$x = \gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

$\cap$ $\mathbb{R}^n$

·) $|\dot{\gamma}(t)|$

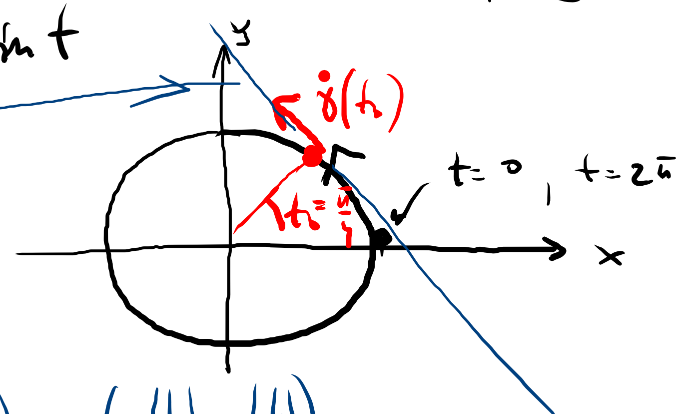
$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$

lunghezza d'arco della curva parametrica γ.

Esempi / esercizi.

1) $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = a\sin t \end{cases}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$ $\quad a > 0.$

N. B.
"curva chiusa"
$\gamma(a) = \gamma(b)$



$t_0 = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \gamma(t) = (x(t), y(t))$

$\dot\gamma(t_0) = (\dot x(t_0), \dot y(t_0)) = (-a\sin t_0, a\cos t_0) =$

$= \frac{a}{\sqrt 2}(-1, 1)$

Retta tangente a γ in t_0

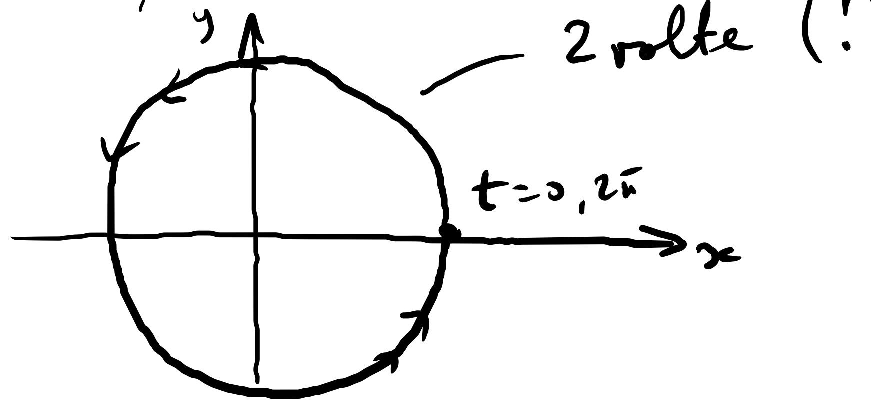
$x(t) = ?$ $\begin{cases} x(t) = \frac{a}{\sqrt 2} - \frac{a}{\sqrt 2}\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \\ y(t) = \frac{a}{\sqrt 2} + \frac{a}{\sqrt 2}\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} a\, dt = 2\pi a$$

$$|\dot{\gamma}(t)| = \left| (-a \sin t,\ a \cos t) \right| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} =$$

$$= a$$

2) $\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = a \sin t \end{cases}$ $a > 0$, $t \in [0, 4\pi]$



$$\ell(\gamma) = \int_0^{4\pi} a = 4\pi a$$

3) $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad a > 0$$

$t \in \mathbb{R}$

-) disegnare $\gamma(\cdot)$ nel piano
-) Calcolare $\dot{\gamma}(t)$ dove esiste
-) $t_0 = \frac{\pi}{2}$ calcolare $\dot{\gamma}(t_0)$ e scrivere l'eq della retta tangente a γ in t_0
-) $\ell(\gamma|_{[0,2\pi]})$