A.A. 2013/2014
Corso di Analisi Matematica 2

Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Indice

ANALISI 2 — LEZIONE 01

Titolo nota 06/03/2014

$\boxed{\text{ANALISI 2}}$

- → PRECORSO 30% Diseq., Ris. sist. algebrici, insiemi del piano
- → ANALISI 1 40% studi di funzioni, Taylor, integrali
- → ALGEBRA LINEARE 10% prod. scalare, appl. lin., forme quadratiche
- → ANALISI 2 20%

$\boxed{\text{Analisi 2}}$ Funzioni di più variabili

Analisi 1: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f: A \to \mathbb{R}$
$A \subseteq \mathbb{R}$

Analisi 2: $\boxed{f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}}$
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ opp. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$

n variabili in partenza

① Calcolo Differenziale: limiti, continuità, derivabilità, studio di funzioni, max e min (20+)

② Calcolo Integrale: integrali propri ed impropri (20−)

③ Curve, Superfici, Forme Diff., calcolo vettoriale (divergenze, rotori) (20)

— o — o —

$\boxed{\text{Struttura Euclidea su } \mathbb{R}^n}$

$\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale $x \in \mathbb{R}^n$ $\underset{\text{vettore}}{x} = (\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{componenti}})$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ $x \in \mathbb{R}^3$

Prodotto scalare $x = (x_1, \dots, x_n)$

$y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$ (prod. scalare)

$$|x| = \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$ (norma di x)

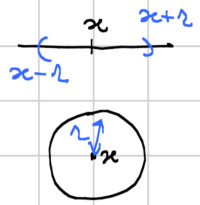
$$\text{dist}(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

distanza tra x e y

Dato $x \in \mathbb{R}^n$ e dato $r > 0$ (raggio) definiamo

$$B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, y) < r \}$$

BALL (palla con centro in x e raggio r)



Analisi 1: $\{ y \in \mathbb{R} : |y - x| < r \}$ val. assol.

Analisi 2: $\{ y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r \}$ norma

Funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x, y) = x^2 - y + xy$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x, y, z) = xy + z^2 + \cos(y)$

$f(x, y, z) = x + z$

Analisi 1 $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad$ Grafico $= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x) \}$

↳ linea nel piano

Analisi 2 $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad$ Grafico $= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, z = \underbrace{f(x, y)} \}$

↳ superficie nello spazio

vive nel piano xy

quota del p.to della sup. che sta sopra (x, y)

Più in generale: data $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha

$$\text{Grafico} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A,\ y = f(x)\}$$

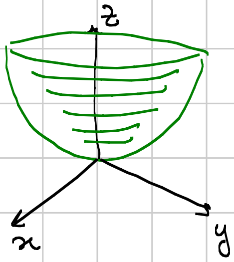
vettore di $\mathbb{R}^n$ numero

— o — o —

$\boxed{\text{LINEE DI LIVELLO}}$ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ (pensato come quota) la linea di livello corrispondente è

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \lambda\}$$ ← sottoinsieme dello spazio di partenza

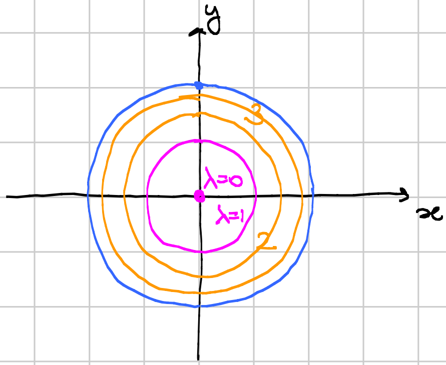


Esempio 1 $f(x,y) = x^2 + y^2$

Chi sono le linee di livello?

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \lambda\}$ → interseco il grafico con il piano $z = \lambda$ (parallelo al piano xy ad altezza λ) e poi proietto il risultato sul piano xy

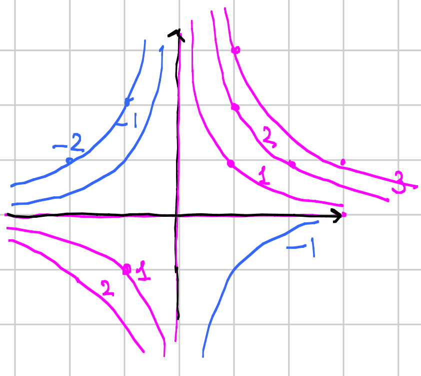
- Se $\lambda < 0$, viene $\emptyset$
- Se $\lambda = 0$, viene l'origine $(0,0)$
- Se $\lambda > 0$, viene la circ. con centro in $(0,0)$ e raggio $\sqrt{\lambda}$



Esempio 2 $f(x,y) = xy$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \lambda\}$

- se $\lambda = 0$, vengono i 2 assi
- se $\lambda > 0$, sono iperboli equilatere
- se $\lambda < 0$, sono iperboli nel 2° e 4° quadr.

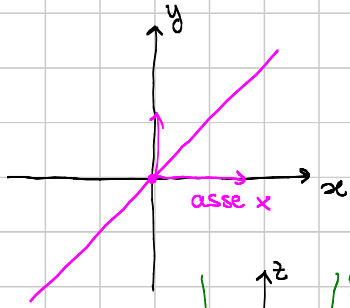


ANALISI 2 — LEZIONE 02

Titolo nota 06/03/2014

$\boxed{\text{Percorsi di omini}}$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

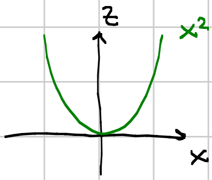
Penso ad un tragitto disegnato nel piano xy e vedo la corrispondente quota dell'omino.

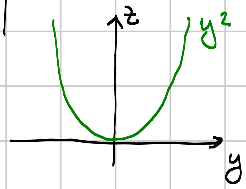


$f(x,y) = x^2+y^2$

percorrere l'asse x = porre $y=0$, quindi considerare

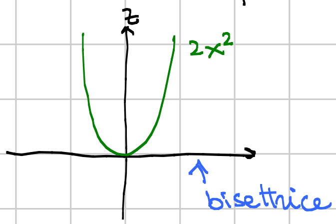
$f(x,0) = x^2$





L'omino che percorre l'asse y vede $f(0,y) = y^2$

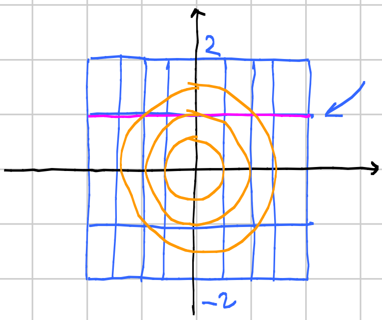
Un omino che percorre la bisettrice $y=x$ vede $f(x,x) = 2x^2$



Asse x : $(0,0) + t\,(1,0)$
Asse y : $(0,0) + t\,(0,1)$ velocità di norma 1
$x=y$: $(0,0) + t\,(1,1)$ velocità di norma $\sqrt{2}$

$x=y$: $(0,0) + t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

così vedo $f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} = t^2$



retta $(0,1) + t\,(1,0)$
$= (t,1)$

$f(t,1) = t^2+1$

LIMITI PER FUNZIONI DI 2 O PIÙ VARIABILI

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \quad$ o $\quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

vettori

Ci sono 4 possibilità:

① esiste $\ell \in \mathbb{R}$

② $+\infty$

③ $-\infty$

④ N.E. (nessuno dei precedenti)

Def. di ② Dico che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists \delta > 0$ tale che

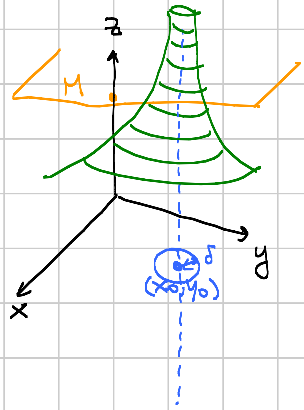
$$f(x) \geq M \quad \forall x \in \underbrace{B_\delta(x_0)}_{\text{palla con centro in } x_0 \text{ e raggio } \delta} \setminus \{x_0\}$$

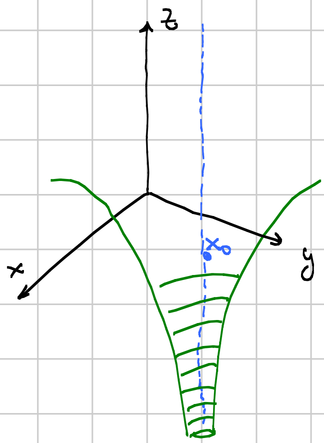
Def. di ③ Dico che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)

$\exists \delta > 0$ tale che

$$f(x) \leq M \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$$





Def. di ① Dico che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

$\exists \delta > 0$ tale che

$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$$

valore assoluto

<u>Def.</u> Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice continua in un pto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$\boxed{\text{METATEOREMA}}$ Ogni funzione ottenuta a partire dalle funzioni elementari usando operazioni algebriche e/o composizioni è continua dove non presenta problemi burocratici (denominatori che si annullano, radici di robg < 0, logaritmi di roba ≤ 0)

<u>Esempio 1</u>

$$\lim_{(x,y) \to (1,0)} \frac{\log(1 + xy + \sin(x^2 y))}{x + y + \arctan x} = 0$$

<u>Soluzione</u>: basta sostituire e vedere che viene

$$\frac{\overbrace{\log(1)}^{=0}}{\underbrace{\boxed{1 + \arctan 1}}_{\frac{\pi}{4} \neq 0}} = 0$$

— o — o —

Gli strumenti standard per il calcolo dei limiti (confronto, carabinieri, teo. algebrici) funzionano come ad Analisi 1.

<u>Esempio 2</u>

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y^{42}}{x^2 + y^2}$$

È del tipo $\frac{0}{0}$, quindi è una forma indeterminata

$$0 \leq \frac{x^2 y^{42}}{x^2 + y^2} = y^{42} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}}_{\leq 1 \text{ perché denom} \geq \text{num.}} \leq y^{42}$$

$$\underset{\downarrow\\ 0}{0} \leq \underset{\downarrow\\ 0}{\frac{x^2 y^{42}}{x^2 + y^2}} \leq \underset{\downarrow\\ 0}{y^{42}}$$

← segue dal metateorema (posso sostituire)

per il teorema dei carabinieri

ANALISI 2 — LEZIONE 03

Titolo nota 06/03/2014

Calcolo di limiti per funzioni di 2 o più variabili

Esempio 1 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ [$\frac{0}{0}$: forma indeterminata]

Uso un cambio di variabili : pongo $t = x^2+y^2$.
Quando $(x,y)\to(0,0)$, ho che $t\to 0$, quindi il limite diventa

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Esempio 2 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \boxed{\frac{x^2 y}{x^2+y^2}}$ $f(x,y)$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Come alla lezione prec., ma non posso dire che $f(x,y)\geq 0$

Trucco del valore assoluto : se $|f(x,y)|\to 0$, allora $f(x,y)\to 0$

(valendo perchè $-|f(x,y)| \leq f(x,y) \leq |f(x,y)|$)

Quindi mi basta dimostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = 0$$

Ora $$0 \leq \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = |y| \underbrace{\boxed{\frac{x^2}{x^2+y^2}}}_{\leq 1} \leq |y|$$

Finale con i carabinieri come prima.

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Usare le coordinate polari $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$

$\boxed{\text{Vantaggio: la condizione } (x,y) \to (0,0) \text{ diventa } \rho \to 0}$

$$\frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \frac{\cancel{\rho^2}\cos^2\theta \cdot \rho\sin\theta}{\cancel{\rho^2}} = \rho\cos^2\theta \cdot \sin\theta$$

Devo fare $\lim\limits_{\rho \to 0^+} \rho\cos^2\theta \cdot \sin\theta$

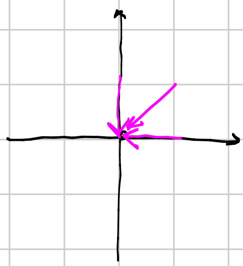
$$\underbrace{-\rho}_{\downarrow\, 0} \le \underbrace{\rho\cos^2\theta \cdot \sin\theta}_{\downarrow\, 0} \le \underbrace{\rho}_{\downarrow\, 0}$$

— o — o —

<u>Esempio 3</u> $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

$\boxed{\text{LEGGE FONDAMENTALE: I LIMITI IN PIÙ VARIABILI NON HANNO NESSUNA VOGLIA DI ESISTERE}}$

Se il limite esistesse, sarebbe lo stesso su tutte le direzioni di avvicinamento.

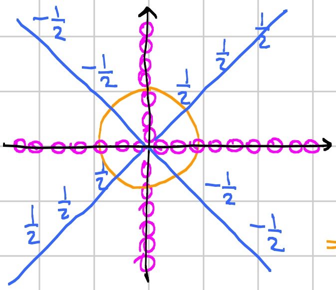


Lungo asse x: $f(t,0) = 0$, quindi $\lim\limits_{t\to 0} f(t,0) = 0$

Lungo asse y: $f(0,t) = 0$, quindi $\lim\limits_{t\to 0} f(0,t) = 0$

Lungo bisettrice $y = x$: $f(t,t) = \frac{1}{2}$, quindi $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \frac{1}{2}$

Ho trovato 2 direzioni di avvicinamento con limite diverso, quindi il limite non esiste.



In ogni intorno di 0 trovo p.ti in cui vale 0 e p.ti in cui vale $\frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ il lim. non può esistere

Come dimostro che un limite non esiste?
Trovo due direzioni di avvicinamento su cui il limite è diverso.

$\boxed{\text{2° modo}}$ Coordinate polari $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $\qquad \dfrac{\cancel{\rho^2}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{\rho^2}} = \cos\theta\sin\theta$

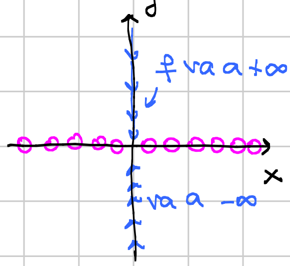
quindi il limite per $\rho \to 0^+$ è "$\cos\theta\sin\theta$" quindi dipende da θ

— o — o —

Esempio 4 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x^2+y^2}$

Lungo asse x ho $f(t,0) = 0$, quindi $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(t,0) = 0$

(volendo: l'asse x, meno l'origine, è la linea di livello di $f(x,y)$ con $\lambda = 0$)



Lungo asse y ho $f(0,t) = \dfrac{t}{t^2} = \dfrac{1}{t}$

quindi $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f(0,t) = +\infty$

$\displaystyle\lim_{t\to 0^-} f(0,t) = -\infty$

bastano questi per avere che non esiste

Esempio 5 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

Lungo asse x: $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(t,0) = 0$

Lungo asse y: $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(0,t) = 0$

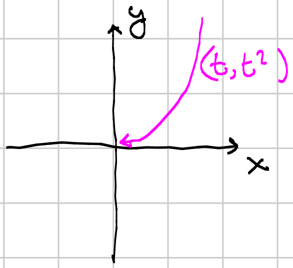
Lungo $y = x$: $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t^4+t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{1+t^2} = 0$

Lungo $y = mx$ $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(t,mt) = \lim_{t\to 0}\frac{mt^3}{t^4+m^2t^2}$

$\displaystyle = \lim_{t\to 0}\frac{mt}{t^2+m^2} = 0$ qualunque sia $m \in \mathbb{R}$

Quindi il limite è 0 lungo tutte le direzioni di avvicinamento

NON BASTA PER DIRE CHE IL LIMITE ESISTE



Se vado a 0 lungo una parabola (t, t^2) ottengo

$$\lim_{t \to 0} f(t, t^2) = \lim_{t \to 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}$$

<u>Osservazione</u>: provare sulla generica parabola (t, mt^2)

<u>Esempio 6</u> $\displaystyle \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2}$

$$0 \leq |f(x,y)| = |x| \cdot \underbrace{\boxed{\frac{y^2}{x^4+y^2}}}_{\leq 1} \leq |x|$$

Quindi per i carabinieri + trucco valore assoluto esiste e fa 0.

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 04

Titolo nota 07/03/2014

Calcolo differenziale per funzioni di più variabili

ANALISI 1 $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

Def 1 Si dice che f è derivabile in x_0 se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad \text{esiste ed è reale}$$

Def. 2 Si dice che f è differenziabile in x_0 se esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \to 0$$

Teorema $\boxed{f \text{ è derivabile in } x_0} \Longleftrightarrow \boxed{f \text{ è differenziabile in } x_0}$ $\boxed{\text{inoltre } \alpha = f'(x_0)}$

$\Downarrow$

$\boxed{f \text{ è continua in } x_0}$

— o — o —

Sia ora $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Def (Derivate parziali) Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto alla variabile x nel punto (x_0, y_0) se il

$$\lim_{t \to 0} \boxed{\frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}}$$

Rapporto incrementale sulla sola variabile x.

esiste ed è reale.

Notazione: tale limite, se esiste ed è reale, si dice derivata parziale di f in (x_0, y_0) rispetto alla variabile x, e si indica con (a scelta):

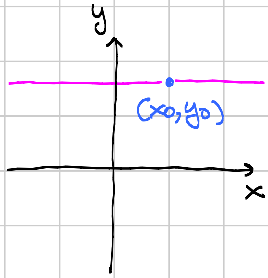
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad f_x(x_0, y_0) \qquad D_x f(x_0, y_0)$$

Analogamente

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0,y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0)$$

se esiste ed è reale.

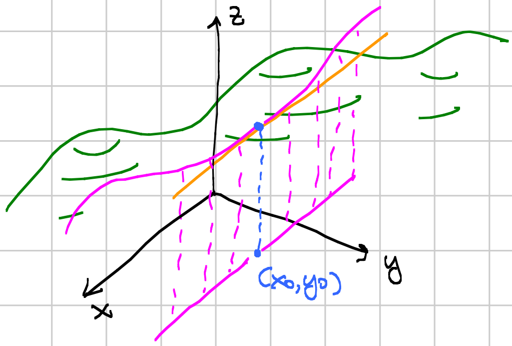
<u>Osservazione</u> I limiti nella definizione sono limiti in $\mathbb{R}$, cioè $t \to 0$ sulla retta reale (limite in una variabile)



<u>Interpretazione geometrica</u> Prendiamo $f_x(x_0,y_0)$.
Consideriamo la retta // asse x passante per (x_0,y_0).
Ha eq. parametrica $(x_0,y_0) + t(1,0) = (x_0+t, y_0)$.
Un omino che percorre la retta si trova ad altezza

$$g(t) = f(x_0+t, y_0)$$

Geometricamente, $g(t)$ è l'intersezione tra il grafico di $f(x,y)$ ed il piano $\perp$ al piano xy che contiene la retta (x_0+t, y_0).
La derivata di $g(t)$ per $t \to 0$ è proprio $f_x(x_0,y_0)$.



Stessa cosa per la derivata parziale $f_y(x_0,y_0)$

<u>Più in generale</u>. Se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, allora la derivata parziale k-esima sarà

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_k}}_{\text{k-esima variabile}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\underbrace{\boxed{x_0 + t e_k}}_{\text{aggiunge } t \text{ solo sulla k-esima variabile.}}) - f(x_0)}{t}$$

dove e_k è il k-esimo vettore della base canonica.

<u>Oss.</u> Una funzione di n variabili ha n derivate parziali.

Def. (Derivata direzionale) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Sia $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ un vettore non nullo $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$.
Allora il limite

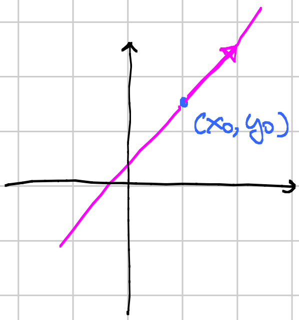
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

se esiste ed è reale, si dice derivata direzionale in (x_0, y_0) rispetto alla direzione v, e si indica

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0).$$

Geometricamente corrisponde a muoversi lungo la retta di eq. parametrica

$$(x_0, y_0) + t(\alpha, \beta) = (x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$$



e derivare la funzione di una variabile che si ottiene intersecando il grafico con il piano $\perp$ al piano xy che contiene la retta.

In n variabili, quindi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ $v \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

se esiste ed è reale.

Oss. Anche le derivate direzionali coinvolgono limiti in una variabile.

Def. Si dice GRADIENTE di $f(x,y)$ in (x_0, y_0) il vettore che ha come componenti le derivate parziali in (x_0, y_0)

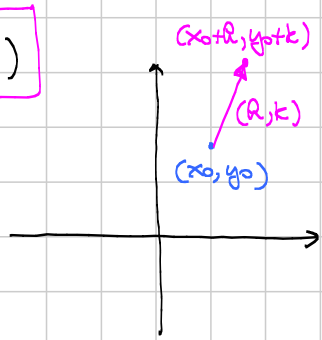
NABLA

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

<u>Def</u>. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Si dice che $f(x,y)$ è <u>differenziabile</u> nel p.to (x_0,y_0) se esistono due numeri reali α e β tali che

$$\boxed{f(x_0+h,\, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \alpha h + \beta k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)}$$



Il vettore (h,k) indica lo spostamento rispetto al punto (x_0,y_0).
$\sqrt{h^2+k^2}$ rappresenta la lunghezza dello spostamento

<u>Oss</u>. Quando scrivo $o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$ questo ha sotto il fatto che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

quindi c'è sotto un <u>limite in due variabili</u>.

<u>Def</u>. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è diff. nel p.to $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se esiste un vettore $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha \cdot h + o(|h|)} \quad \text{per} \quad \boxed{h \to 0}$$

vettori di $\mathbb{R}^n$ — prodotto scalare tra vettori di $\mathbb{R}^n$ — norma del vettore — LIMITE IN n VARIABILI

<u>Oss</u>. È come se avessi n incrementi indipendenti.

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 05

Titolo nota 07/03/2014

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha \cdot h + o(|h|) \quad \text{per } h \to 0}$$

$\boxed{\text{Teorema}}$ Supponiamo che $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sia differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
Allora valgono i seguenti fatti

(1) f è continua in x_0

(2) Esistono le derivate parziali di f in x_0 e sono le componenti del vettore α (che quindi è il gradiente di f in x_0)

(3) Esistono tutte le derivate direzionali di f in x_0 e sono date dalla seguente formula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \alpha \cdot v$$

Achtung! Non vale il viceversa, cioè può accadere che in x_0 esistano tutte le derivate parziali (che vengono tutte $=0$) e la funzione non è neppure continua in x_0.

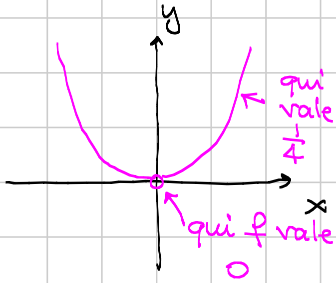
Esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Verifichiamo che nel p.to $(x_0,y_0) = (0,0)$ esistono tutte le derivate direzionali, e sono nulle, ma f non è nemmeno continua.

Non è continua: basta muoversi lungo le parabole, ad esempio (t,t^2)

$$\lim_{t\to 0} f(t,t^2) = \left(\frac{t^4}{2t^4}\right)^2 = \frac{1}{4} \neq f(0,0)$$



Calcolo le derivate direzionali: fisso $v = (\alpha, \beta)$ e calcolo

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t\alpha, t\beta) - 0}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\frac{t^2 \alpha^2 t\beta}{t^4 \alpha^4 + t^2 \beta^2} \right)^2 = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\frac{t \alpha^2 \beta}{t^2 \alpha^4 + \beta^2} \right)^2 = t \left(\frac{\alpha^2 \beta}{t^2 \alpha^4 + \beta^2} \right)^2 = 0$$

quindi per ogni direzione il limite viene 0.

— o — o —

Dim. formula per le derivate direzionali

Supponiamo che f sia diff: $f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha \cdot h + o(|h|)$ per $h \to 0$.
Prendo una direzione v

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

(uso formula per differenziale con $h = tv$)

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + \overbrace{\alpha \cdot (tv)}^{t(\alpha \cdot v)} + o(|tv|) - \cancel{f(x_0)}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t(\alpha \cdot v) + o(t|v|)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \alpha \cdot v + \underbrace{\boxed{\frac{o(t|v|)}{t|v|}}}_{\to 0} |v| = \alpha \cdot v$$

— o — o —

<u>Osservazione</u> Le derivate parziali sono particolari derivate direzionali corrispondenti a $v = e_k$ (vettori della base canonica)

La dimostrazione di sopra mostra quindi anche l'esistenza delle derivate parziali ed il fatto che

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = \alpha \cdot e_k = \alpha_k$$

k-esima componente di α.

Una volta che so che f è diff. in x_0, posso quindi scrivere

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + o(|h|) \quad \text{per } h \to 0$$

Inoltre le derivate direzionali sono date dalla formula

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v}$$

<u>Oss.</u> Nel definire le derivate direzionali posso limitarmi alle direzioni v con $|v|=1$ (norma 1) perché tanto così si descrivono comunque tutte le rette.

<u>Domanda</u>: in quale direzione la derivata direzionale è max / min.

Basta usare l'algebra lineare

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \underbrace{|\nabla f(x_0)|}_{\substack{\text{non dipende} \\ \text{da } v}} \cdot \underbrace{|v|}_{=1} \cdot \cos\theta$$

angolo tra ∇f e v

- Se voglio derivata direzionale max, prendo $\cos\theta = 1$, cioè $\theta = 0$, cioè mi muovo nella direzione del gradiente
- Se voglio ... min, prendo $\cos\theta = -1$, cioè $\theta = \pi$, cioè mi muovo nella direzione opposta
- quando $\theta = \pm 90°$, la derivata direzionale è nulla.

<u>Significato geometrico del gradiente</u> Il GRADIENTE rappresenta la direzione di massima pendenza della funzione, cioè la direzione in cui muoversi per salire più in fretta possibile.

Analisi 1

$$f(\underbrace{x_0+h}_{x}) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + o(h)$$

$$f(x) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0)} + o(x-x_0)$$

retta tangente al grafico nel p.to $(x_0, f(x_0))$

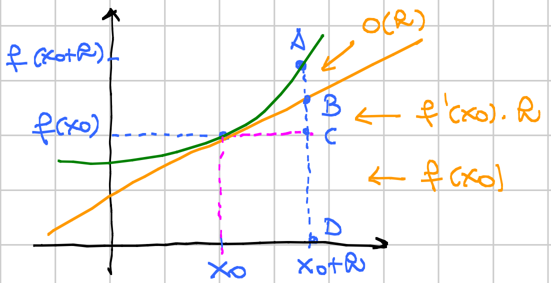
Analisi 2

$$f(\underbrace{x_0+h}_{x}, \underbrace{y_0+k}_{y}) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot h + f_y(x_0,y_0)\cdot k + o(\dots)$$

$$f(x,y) = \boxed{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)} + o(\dots)$$

piano tangente al grafico di f nel p.to $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

Significato geometrico



ANALISI 2 – LEZIONE 06

Titolo nota 08/03/2014

① Come calcolo le derivate parziali?
② Come dimostro che $f(x,y)$ è differenziabile in (x_0,y_0)?
③ Come calcolo le derivate direzionali?
④ Come calcolo il vettore α che compare nella def. di differenziale?

$\boxed{\text{Teorema}}$ (lez. precedente)

$$\begin{array}{ccc} \boxed{f \text{ diff. in } (x_0,y_0)} & \Longrightarrow & \boxed{f \text{ continua in } (x_0,y_0)} \\ \Downarrow & \searrow & \\ \boxed{\text{Esistono derivate parziali}} & \Longleftarrow & \boxed{\text{Esistono derivate direzionali}} \end{array}$$

Tutte le altre implicazioni sono abusive

$\boxed{\text{Risposta a ④}}$ Se so fare ① e ②, allora α è il gradiente $\alpha = \nabla f(x_0,y_0)$
cioè il vettore che ha come componenti le derivate parziali

$\boxed{\text{Risposta a ③}}$ Se so fare ① e ②, allora

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f \cdot v$$

Achtung! Se f non è differenziabile, allora le derivate direzionali possono esistere ma non essere date dalla formula.

$\boxed{\text{Risposta a ①}}$ Esattamente come ad analisi 1, derivando solo rispetto alla variabile che interessa.
Le altre variabili le tratto come fossero costanti.

<u>Esempi</u> $f(x,y) = x^2 + y^3$

$f_x(x,y) \underset{\uparrow}{=} 2x + 0 = 2x$ $\qquad f_y(x,y) = 3y^2$

y^3 è una costante

$f(x,y) = \underset{x^2 b^3}{x^2 y^3}$ $\qquad f_x(x,y) = \underset{b^3 \cdot 2x}{2xy^3}$ $\qquad f_y(x,y) = x^2 \cdot 3y^2 = 3x^2y^2$

$f(x,y) = \sin(xy^2)$ $\qquad f_x(x,y) = \cos(xy^2)\, y^2$ $\qquad f_y(x,y) = \cos(xy^2)\, 2xy$

$\sin(b^2 x) \rightsquigarrow b^2 \cos(b^2 x)$ $\qquad \sin(ay^2) \rightsquigarrow \cos(ay^2) \cdot 2ay$

$f(x,y,z) = x e^{yz^2}$

$f_x(x,y,z) = e^{yz^2}$ $\qquad f_y(x,y,z) = x e^{yz^2} \cdot z^2 = x z^2 e^{yz^2}$

$f_z(x,y,z) = x e^{yz^2} \cdot 2yz = 2xyz\, e^{yz^2}$

$f(x,y) = e^{xy} \cos y$

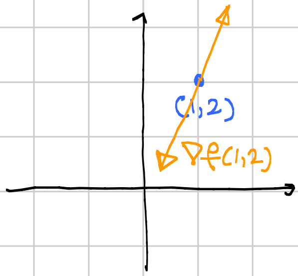
$f_x(x,y) = e^{xy} \cdot y \cos y$ $\qquad f_y(x,y) = x e^{xy} \cos y - e^{xy} \sin y$

$f(x,y) = \log(1 + x^2 + y^4)$, $\quad f_x(x,y) = \dfrac{2x}{1+x^2+y^4}$, $\quad f_y(x,y) = \dfrac{4y^3}{1+x^2+y^4}$

$f(x,y) = x^y$, $\quad f_x(x,y) \underset{\uparrow}{=} y\, x^{y-1}$ $\qquad f_y(x,y) \underset{\uparrow}{=} x^y \log x$

è come se fosse x^{20} $\qquad$ è come se fosse 20^y

<u>Esercizio</u> $f(x,y) = x^2 - xy^3$. Lascio cadere una pallina nel punto corrispondente a $(1,2)$. Dove va la pallina?



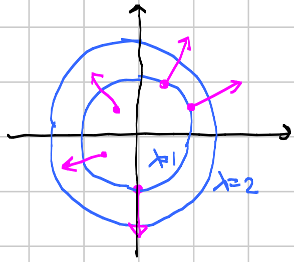
Andrà in direzione opposta al gradiente.

$\nabla f(x,y) = (2x - y^3, -3xy^2)$, $\quad \nabla f(1,2) = (-6, -12)$

La pallina va verso NE

Osservazione geometrica Gradiente e linee di livello.

Prendiamo $f(x,y) = x^2+y^2$. Le linee di livello sono circ. concentriche con centro nell'origine.



$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = 2(x,y)$$

Geometricamente il gradiente si rappresenta come "campo di vettori": in ogni punto dell'insieme di partenza disegno un vettore (il gradiente) che mi dice in che direzione andare per salire con la max pendenza.

Il gradiente è sempre perpendicolare alle linee di livello e punta verso i "λ crescenti".

Esercizio $f(x,y) = x^2 - xy$ $\quad v = (1,3)$

Calcolare

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-1,2)$$

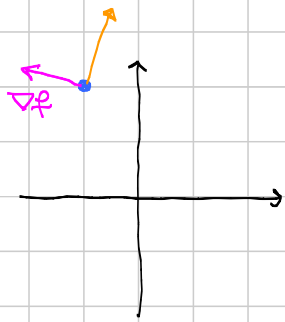
Soluzione Calcolo $\nabla f(-1,2)$ e faccio il prod. scalare con v

$$\nabla f(x,y) = (2x-y, -x) \qquad \nabla f(-1,2) = (-4,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-1,2) = (-4,1)\cdot(1,3) = -4+3 = -1$$

Geometricamente: un omino che si trovi sul grafico nel pto corrispondente a $(-1,2)$ (il punto sul grafico è $(-1,2,3)$) e si muove nella direzione

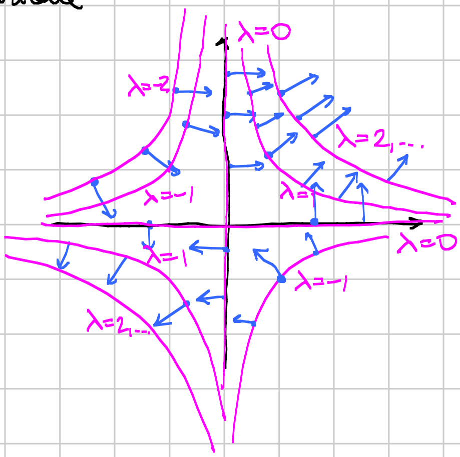
ho sostituito $(-1,2)$ in $f(x,y)$



$(1,3)$ si trova a scendere.

Se volesse salire al max dovrebbe andare in direzione $(-4,1)$

<u>Esercizio</u> Disegnare il gradiente della funzione $f(x,y) = xy$

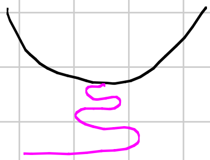


$\nabla f(x,y) = (y, x)$

Nell'origine $\nabla f(0,0) = (0,0)$

$\Rightarrow$ piano tangente orizzontale

(in questo caso è un p.to di sella o "mountain pass")



ANALISI 2 — LEZIONE 07

Titolo nota 08/03/2014

Back to

② Come dim. che $f(x,y)$ è diff. in (x_0,y_0)?

Due modi:

1 – usando la definizione (sconsigliato se possibile)

2 – usando il seguente

Teorema (del differenziale totale) Se le derivate parziali esistono e sono continue, allora f è differenziabile.

Conseguenza: dove non ci sono particolari problemi burocratici le funzioni sono differenziabili.

— o — o —

MAX e MIN PER FUNZIONI DI 2 O PIÙ VARIABILI

ANALISI 1 Teorema di Weierstrass Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora esistono sicuramente

importante che ci siano gli estremi

$$\max\{f(x) : x \in [a,b]\}$$
$$\min\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

sono dei valori assunti dalla funzione, cioè "delle y"

Le x corrispondenti sono i punti di max / min e si cercano nelle seguenti 3 categorie:

senza estremi

① stazionari interni: p.ti $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$

② singolari interni: p.ti $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0)$ non esiste

③ bordo: p.ti $x_0 = a$ e $x_0 = b$.

Operativamente:

→ si trovano i p.ti di tipo ①, ②, ③

→ si sostituiscono tutti in $f(x)$ e si vede dove vale di + o di −.

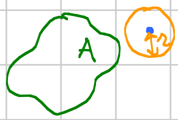
Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice limitato se esiste $R > 0$ tale che

$$A \subseteq B_R(0)$$ (A è contenuto nella palla con centro nell'origine e raggio R)

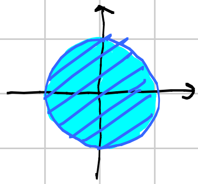
Esempi Un quadrato, ovunque sia, è limitato
Il primo quadrante NON è limitato
Una retta NON è limitata.

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se
(brutalmente: contiene tutto il suo bordo)
rigorosamente: per ogni $x \notin A$ $\exists\, r > 0$ t.c. $A \cap B_r(x) = \emptyset$

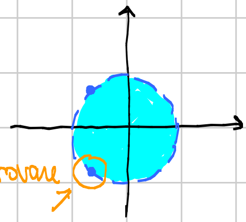
(Detto altrimenti: per ogni punto x che non sta in A esiste una palla con centro in x e raggio a scelta che non interseca A)



Esempi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} = A$ è chiuso
(cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 2, bordo compreso)



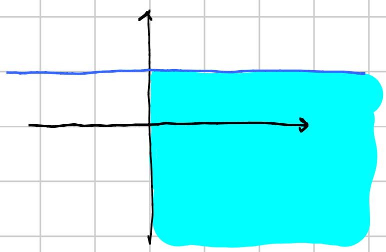
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4\} = B$ NON è chiuso



$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\} = C$ è chiuso

non riesco a trovare un cerchio che non interseca B

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \leq 1\} = D$ è chiuso
e il suo bordo sono due semirette



Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice COMPATTO se è LIMITATO + CHIUSO.

<u>Teorema</u> (WEIERSTRASS) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme compatto
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua

Allora esistono per forza

$$\max\{f(x) : x \in A\}$$
$$\min\{f(x) : x \in A\}$$

<u>Achtung!</u> Se non sono verificate le ipotesi, allora max e min potrebbero comunque esistere, ma non sono obbligati a farlo. In ogni caso, inf e sup esistono sempre.

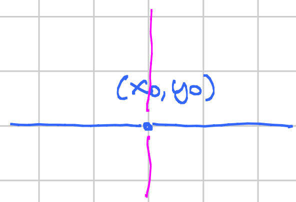
I p.ti di max / min vanno ricercati nelle seguenti 3 categorie

① <u>p.ti stazionari interni</u>: p.ti interni all'insieme (non sul bordo) in cui $\nabla f = 0$

② <u>p.ti singolari interni</u>: p.ti interni all'insieme in cui f non è differenziabile

③ <u>bordo</u>: p.ti del bordo dell'insieme, che però ora sono infiniti.

<u>Dim.</u> (che nei p.ti di max / min interni, se esistono le derivate parziali, queste sono nulle)



Sia (x_0, y_0) un p.to di minimo interno.
Se considero la funzione

$$g(t) = f(x_0 + t, y_0)$$ (quota a cui si trova l'omino che percorre la retta (x_0+t, y_0))

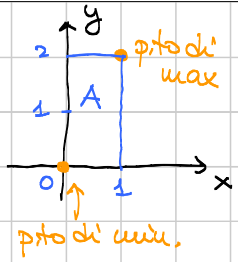
Allora $g(t)$ ha un minimo per $t = 0$, quindi

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t_0) = 0$$

Stesso discorso per la funzione $g(t) = f(x_0, y_0 + t)$.

Stesso discorso se invece del min. ho un p.to di max.

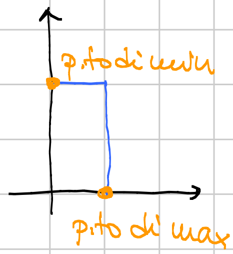
— o — o —



Esempio 1 $f(x,y) = 2x+3y$ $A = [0,1]\times[0,2]$

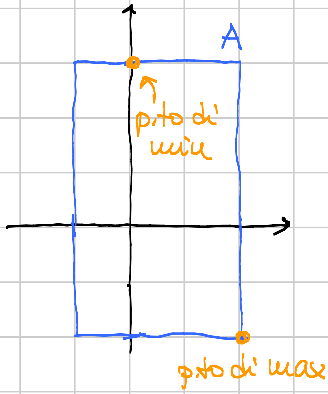
f è continua, A è compatto
W $\Rightarrow$ max e min esistono

Si vede ad occhio che
- p.to di max $= (1,2)$ e max $= 8$ (prendo x e y il massimo possibile)
- p.to di min $= (0,0)$ e min $= 0$ (" " " " minimo ")



Esempio 2 $f(x,y) = 2x-3y$ $A = [0,1]\times[0,2]$

W come sopra
- p.to di max $= (1,0)$ e max $= 2$ (x max e y min)
- p.to di min $= (0,2)$ e min $= -6$ (x min e y max)



Esempio 3 $f(x,y) = x^2-y$ $A = [-1,2]\times[-2,3]$

W come sopra

- p.to di max $= (2,-2)$ e max $= 6$

- p.to di min $= (0,3)$ e min $= -3$

rende x^2 minimo possibile

ANALISI 2 — LEZIONE 08

Titolo nota 08/03/2014

Come determino max/min di f su un insieme compatto A?

1. A occhio (solo casi molto semplici)
2. Metodo delle linee di livello (solo casi semplici)
3. Metodo classico: p.ti staz. int., sing. int., bordo
   Ma come gestisco il bordo?
   - 3.1 Parametrizzazione
   - 3.2 Moltiplicatori di LAGRANGE.

Esempio 1 $f(x,y,z) = x^2 - y^4 + 2z$ $\qquad A = [-1,1] \times [-2,1] \times [0,1]$

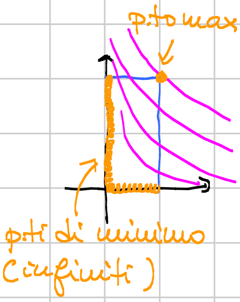
W funziona

- p.ti di max: $(1,0,1)$ e $(-1,0,1)$; $\max = 3$
- p.ti di min: $(0,-2,0)$; $\min = -16$.

Esempio 2 $f(x,y) = xy$ $\qquad A = [0,1] \times [0,2]$

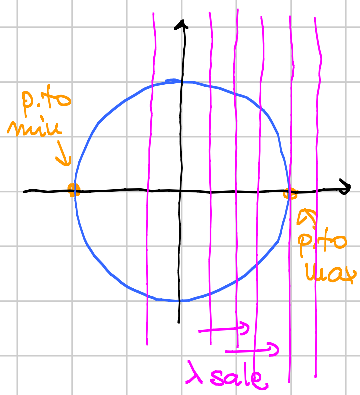
W come sempre

- p.ti di max: $(1,2)$; $\max = 2$;
- p.ti di min: lati L; $\min = 0$.



Esempio 3 $f(x,y) = x$ $\qquad A =$ cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 2 $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\}$

- p.to di max: $(2,0)$, $\max = 2$
- p.to di min: $(-2,0)$, $\min = -2$



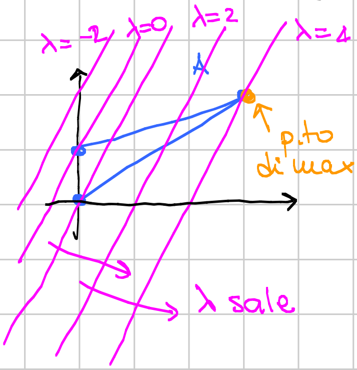
Le linee di livello di $f(x,y)$ sono $f(x,y) = \lambda$, cioè $x = \lambda$, cioè rette $//$ all'asse y

Max di $f(x,y)$ in A è il più grande λ per cui A interseca la linea di livello $f(x,y) = \lambda$

Il min ... è il più piccolo λ...

<u>Metodo delle linee di livello</u>: cercare + grande e + piccolo λ per cui l'insieme dato A tocca la linea di livello

<u>Esempio 4</u> $f(x,y) = 2x-y$ $\quad A$ = triangolo con vertici in $(0,0)$, $(0,1)$, $(3,2)$



W come sempre.

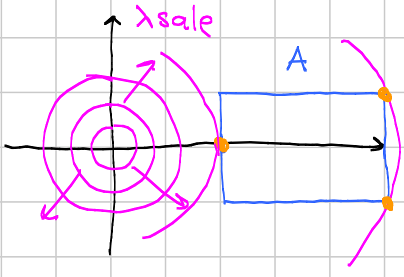
A occhio NON si fa: dovrei prendere, per il max, x grande e y piccolo, ma se prendo x grande sono costretto a prendere y grande

Vedo le linee di livello: $f(x,y) = \lambda$, cioè $2x-y=\lambda$, cioè $y = 2x-\lambda$

Punto di max: $(3,2)$, $\max = 4$

Punto di min: $(0,1)$, $\min = -1$.

<u>Esempio 5</u> $f(x,y) = x^2+y^2$ $\quad A = [2,5]\times[-1,1]$



W come sempre.

Le linee di livello sono circ. con centro nell'origine.

P.to di min: $(2,0)$, $\min = 4$

P.ti di max: $(5,1)$ e $(5,-1)$, $\max = 26$.

Esempio 6 Stessa cosa esempio 5 con metodo classico.

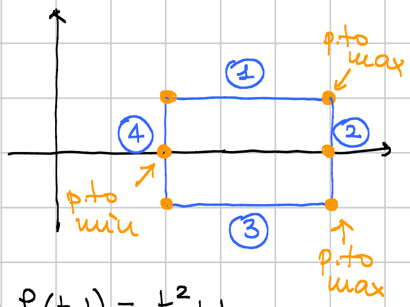
• Stazionari interni : risolvo $\nabla f(x,y)=0$

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \end{cases}$$

$(x,y)=(0,0)$
Lo scarto perchè non è interno

• Singolari interni : $\emptyset$

• bordo ⇝ metodo della parametrizzazione



Scrivo parametrizzazioni dei 4 pezzi del bordo

→ Pezzo ① $=\{(t,1) : t\in[2,5]\}$ $\quad g_1(t)=f(t,1)=t^2+1$

→ Pezzo ② $=\{(5,t) : t\in[-1,1]\}$ $\quad g_2(t)=f(5,t)=t^2+25$

→ Pezzo ③ $=\{(t,-1) : t\in[2,5]\}$ $\quad g_3(t)=f(t,-1)=t^2+1$

→ Pezzo ④ $=\{(2,t) : t\in[-1,1]\}$ $\quad g_4(t)=f(2,t)=t^2+4$

Studio le 4 funzioni e ho max / min su ogni tratto.
Poi prendo il più grande ed il più piccolo.

Pezzo ①: min per $t=2$ e max per $t=5$ → questi producono in A i punti $(2,1)$ e $(5,1)$

Pezzo ②: min per $t=0$ e max per $t=\pm1$ → producono $(5,0)$ e $(5,\pm1)$

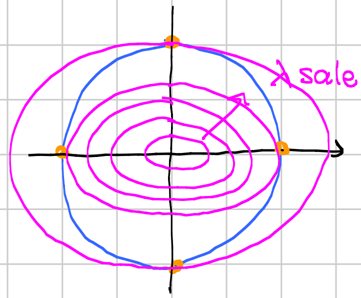
Pezzo ③: min per $t=2$ e max per $t=5$ ⇝ $(2,-1)$ e $(5,-1)$

Pezzo (4): min per $t=0$ e max per $t=\pm1$ → $(2,0)$ e $(2,\pm1)$

Mettendo insieme i vari pezzi ho ottenuto 6 p.ti.
Li sostituisco nella funzione e avrò i p.ti di max / min.

<u>Esempio 7</u> $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$



A = circonferenza (solo bordo)

linee di livello : $2x^2+3y^2 = \lambda$

sono ellissi più larghe che lunghe

minimo in $(\pm 1, 0) \rightsquigarrow 2$

massimo in $(0, \pm 1) \rightsquigarrow 3$

ANALISI 2 – LEZIONE 09

Titolo nota 13/03/2014

Max-min in più variabili su insiemi compatti

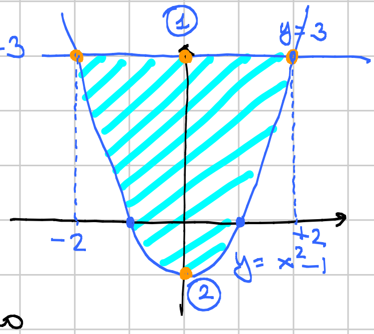
Brutali: → occhio
→ linee di livello

Formali: → ricerca dei p.ti staz. interni ($\nabla f = 0$)
→ " " sing. interni (∇f N.E.)
→ bordo dell'insieme:
1. Parametrizzazione
2. Moltiplicatori di Lagrange
3. Tattiche miste

Esempio max e min di $f(x,y) = 3x^2 - y + 3$ sull'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \le y \le 3\}$$

sopra la parabola   sotto la retta $y=3$



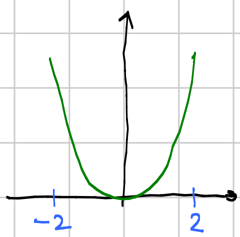
W ⇒ max e min esistono

Staz. interni: $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 6x = 0 \\ -1 = 0 \end{cases}$ Non ce ne sono

Sing. interni: non ce ne sono

Bordo: pezzo 1: segmento $(t,3)$: $t \in [-2,2]$.
Lo sostituisco nella funzione e ottengo

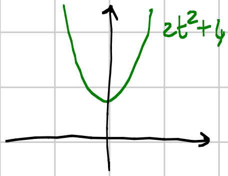
$g_1(t) = f(t,3) = 3t^2$ che studio per $t \in [-2,2]$



Max per $t = \pm 2$ ⇝ produce $\boxed{(-2,3)}$ e $\boxed{(2,3)}$
min per $t = 0$ ⇝ produce $\boxed{(0,3)}$

Pezzo ② (t, t^2-1) : $t \in [-2,2]$ parametrizzazione della parabola

Sostituendo in $f(x,y)$ ottengo



$$g_2(t) = 3t^2 - t^2 + 1 + 3 = 2t^2 + 4$$ che studio in $[-2,2]$

Max per $t = \pm 2$ ⇝ produce $\boxed{(-2,3)}$ e $\boxed{(2,3)}$

min per $t=0$ ⇝ produce $\boxed{(0,-1)}$

Sostituisco i 4 candidati nella funzione e ottengo:

$f(-2,3) = 12$

$f(2,3) = 12$

$f(0,3) = 0$

$f(0,-1) = 4$

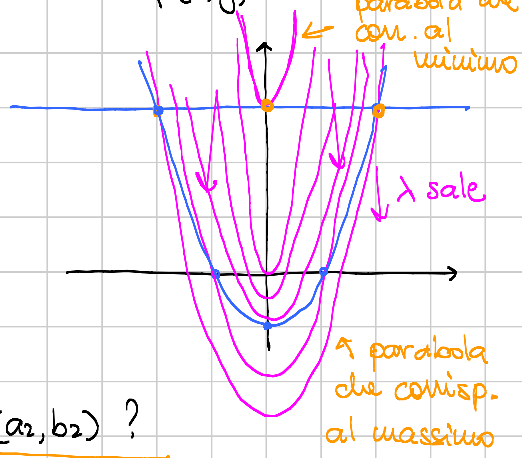
Conclusione: max $= 12$, p.ti di max: $(-2,3)$ e $(2,3)$

min $= 0$, p.to di min: $(0,3)$

Verifico per sicurezza con le linee di livello: $f(x,y) = \lambda$

$3x^2 - y + 3 = \lambda$ ⇝ $y = 3x^2 + 3 - \lambda$

Le linee di livello sono parabole più strette di quella che definisce l'insieme A



— o — o —

COME PARAMETRIZZO ...

① ... il segmento di estremi (a_1,b_1) e (a_2,b_2) ?

$$\boxed{(a_1,b_1) + t(a_2-a_1, b_2-b_1) \qquad t \in [0,1]}$$

② ... il tratto del grafico di $y = \varphi(x)$ con $x \in [a,b]$?

$$\boxed{(t, \varphi(t)) : t \in [a,b]}$$

③ ... la circonferenza con centro in $(0,0)$ e raggio r ?

$$\boxed{(r\cos\theta, r\sin\theta) : \theta \in [0,2\pi]}$$

④ ... la circonferenza con centro in (x_0, y_0) e raggio r ?

$$\boxed{(x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi]}$$

⑤ ... l'ellisse di equazione $ax^2 + by^2 = 1$ $(a>0, b>0)$?

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\theta,\ \frac{1}{\sqrt{b}}\sin\theta\right) : \theta \in [0, 2\pi]}$$

— o — o —

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Def. Sia $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora l'insieme

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Phi(x,y) = 0\}$$

è detto luogo di zeri della funzione Φ.

(È la linea di livello di $\phi(x,y)$ con $\lambda = 0$)

Il metodo dei molt. di Lagrange serve per trovare candidati p.ti di max min quando il bordo dell'insieme è il luogo di zeri di una funzione

Esempi 1. Se l'insieme è $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 3\}$, allora il bordo è la circonferenza $x^2+y^2 = 3$, cioè

$$\underbrace{\boxed{x^2+y^2-3}}_{\phi(x,y)} = 0$$

2. Se il bordo è l'insieme $2x^2+3y^2 = 5$ (ellisse), lo posso scrivere come luogo di zeri ponendo

$$\underbrace{\boxed{2x^2+3y^2-5}}_{\phi(x,y)} = 0$$

Metodo: mettiamo di essere in $\mathbb{R}^2$.
Sia V il luogo di zeri di $\Phi(x,y)$.
Allora i candidati ad essere p.ti di max/min di f in V si trovano in queste due categorie.

① P.ti in cui $\Phi(x,y) = 0$ e $\nabla\Phi(x,y) = 0$
numero — vettore

Questi sono le soluzioni del $\boxed{1° \text{ sistema}}$

$$\boxed{\begin{cases} \Phi_x(x,y) = 0 \\ \Phi_y(x,y) = 0 \\ \Phi(x,y) = 0 \end{cases}}$$

Tre equazioni, due incognite: spesso questo non ha soluzioni

② P.ti in cui $\Phi(x,y) = 0$ (cioè che stanno in V) in cui $\boxed{\nabla f = \lambda \nabla \Phi}$
(cioè il gradiente di f è multiplo del gradiente di Φ)

Questi punti sono le soluzioni del $\boxed{2° \text{ sistema}}$

$$\boxed{\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda\,\Phi_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda\,\Phi_y(x,y) \\ \Phi(x,y) = 0 \end{cases}}$$

Tre equazioni e 3 incognite: x, y, λ.
Di solito questo ha soluzioni e delle soluzioni posso dimenticare il λ e considerare solo le parti (x,y) che producono i candidati richiesti.

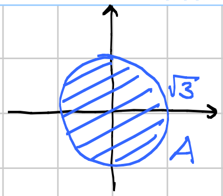
Oss. λ è il MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE.

ANALISI 2 — LEZIONE 10

Titolo nota 13/03/2014

Esempio 1 $f(x,y) = x - 2y$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 3\}$



Staz. interni $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 1 = 0 \\ -2 = 0 \end{cases}$ impossibile : $\emptyset$

Sing. interni : $\emptyset$

Bordo : è il luogo di zeri della funzione $\phi(x,y) = x^2+y^2-3$

1° sistema: $\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = 0 & \to x = 0 \\ 2y = 0 & \to y = 0 \\ x^2+y^2 = 3 \end{cases}$ $\Big\} \to$ incompatibili con la 3ª equazione

2° sistema $\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 3 \end{cases}$ $x = \frac{1}{2\lambda}$ $y = -\frac{1}{\lambda}$ (per $\lambda = 0$ non ci sono soluzioni)

Sostituisco x e y nella 3ª eq.: $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 3$ $\frac{5}{4\lambda^2} = 3$

$\lambda^2 = \frac{5}{12} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$ da cui

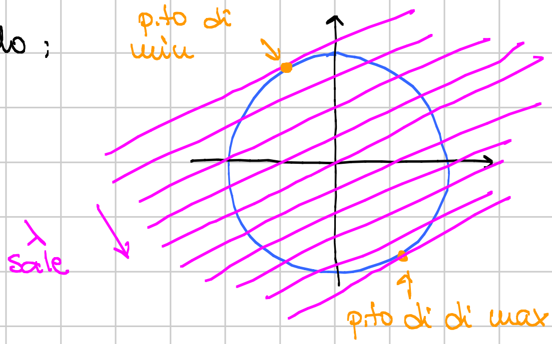
$\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \rightsquigarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \qquad y = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}$ 1° candidato

$\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \rightsquigarrow \boxed{x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \qquad y = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}$ 2° candidato

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{15}$ ← MAX

$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) = \dots = -\sqrt{15}$ ← min

Interpretazione con le linee di livello;



$x-2y=\lambda, \quad x-\lambda=2y,$

$y=\frac{1}{2}x-\frac{\lambda}{2}$

<u>Esercizio</u>: stesso problema parametrizzando il bordo

<u>Oss.</u> Metodo alternativo per risolvere il sistema

$$\begin{cases} 1=2\lambda x \\ -2=2\lambda y \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$$

1ª equazione / 2ª equazione: (MA POSSO?)

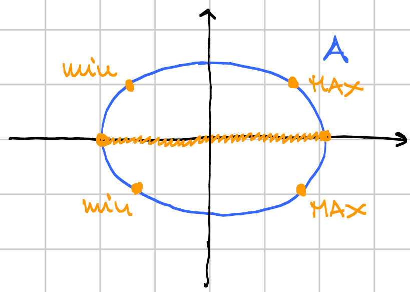
$-\frac{1}{2}=\frac{x}{y} \qquad y=-2x$ ⇝ vado nella 3ª eq!

$x^2+4x^2=3 \qquad 5x^2=3 \qquad x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$

— o — o —

<u>Esempio 2</u> $\quad f(x,y)=xy^2 \qquad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+3y^2\le 5\}$

<u>Staz. interni</u> $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2=0 \to y=0 \\ 2xy=0 \to \text{GRATIS} \end{cases}$



Tutti i p.ti con $y=0$ sono stazionari interni

<u>Sing. interni</u>: $\emptyset$

<u>Bordo</u>: è il luogo di zeri di $x^2+3y^2-5=\phi(x,y)$

<u>1° sistema</u> $\quad \begin{cases} \phi_x=0 \\ \phi_y=0 \\ \phi=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x=0 \\ 6y=0 \\ x^2+3y^2-5=0 \end{cases} \qquad \emptyset$

2° sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 = 2\lambda x \\ 2xy = 6\lambda y \\ x^2+3y^2 = 5 \end{cases}$$

← Non pensare nemmeno di semplificare y

2ª equazione: $xy = 3\lambda y$ $\quad y(x-3\lambda) = 0$

$x = 3\lambda$ $\xrightarrow{\text{1ª eq.}}$ $y^2 = 6\lambda^2$ $\xrightarrow{\text{3ª eq.}}$ $9\lambda^2 + 18\lambda^2 = 5$

$27\lambda^2 = 5$

$\lambda^2 = \frac{5}{27}$ $\qquad \lambda = \frac{\pm\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$

$y = 0$ ← 3ª eq. $\quad x^2 = 5$, $x = \pm\sqrt{5}$ $\quad \boxed{(\sqrt{5}, 0)}$, $\boxed{(-\sqrt{5}, 0)}$

Per $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ $\rightsquigarrow$ $x = 3\lambda = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ $\qquad y^2 = 6\lambda^2 = \frac{30}{27} = \frac{10}{9}$ $\qquad y = \pm\frac{\sqrt{10}}{3}$

Ho 2 p.ti $\boxed{\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{10}}{3}\right)}$ $\boxed{\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{10}}{3}\right)}$

Per $\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ $\rightsquigarrow$ $x = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ $\qquad y = \pm\frac{\sqrt{10}}{3}$

Alla fine ho ottenuto 4 p.ti $\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \pm\frac{\sqrt{10}}{3}\right)$ ← 4 possibilità sui segni.

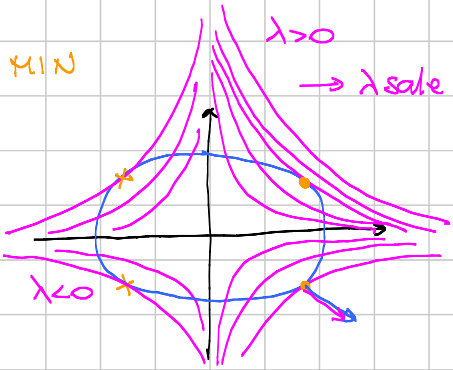
Non mi resta che sostituire gli infiniti p.ti con $y=0$ e ottengo 0 e i 4 p.ti precedenti

$f\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \pm\frac{\sqrt{10}}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \, \frac{10}{9} = \frac{10\sqrt{5}}{9\sqrt{3}}$ ← MAX

$f\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \pm\frac{\sqrt{10}}{3}\right) = \dots = -\frac{10\sqrt{5}}{9\sqrt{3}}$ ← MIN

Le linee di livello sarebbero $xy^2 = \lambda$, cioè

$x = \frac{\lambda}{y^2}$



<u>Oss. geometrica</u> Sia V il bordo, che è luogo di zeri di $\phi(x,y)$

① Nei p.ti di max / min sul bordo le linee di livello di f e di ϕ sono tangenti

② ∇f è $\perp$ alla linea di livello di f
$\nabla \phi$ " " " " " " " ϕ

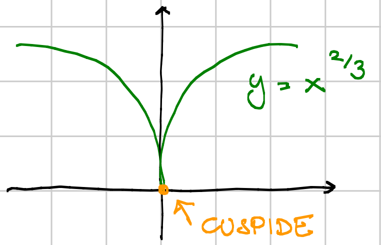
③ Quindi ∇f deve essere multiplo (cioè parallelo) di $\nabla \phi$.

Geometricamente, risolvere il secondo sistema equivale a cercare i p.ti di V in cui le linee di livello di f sono tangenti all'insieme V stesso

<u>Esempio</u> (in cui il 1° sistema ha soluzione)

① $\phi(x,y) = x^2 - y^3$ $\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = 0 \\ -3y = 0 \\ x^2 = y^3 \end{cases}$ $(0,0)$ è soluz.

Come è fatto il luogo di zeri $\phi(x,y) = 0$? $y^3 = x^2$, $y = x^{\frac{2}{3}}$

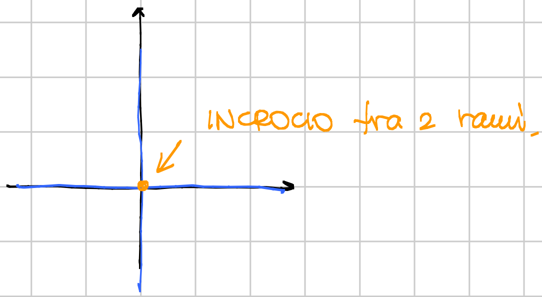


② $\phi(x,y) = xy$

$(0,0)$ è soluzione del 1° sistema

$\phi(x,y) = 0 \iff xy = 0$

Sono i 2 assi



ANALISI 2 — LEZIONE 11

Titolo nota 13/03/2014

Esempio $f(x,y,z) = x^2 - 2y + 3xz$

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+2y^2+3z^2 \leq 7\}$

Staz. interni: $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+3z = 0 \\ -2 = 0 \\ 3x = 0 \end{cases}$ $\emptyset$

Sing. interni: $\emptyset$

Bordo: luogo di zeri di $\phi(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2-7$

1° sistema: $\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi_z = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$ .... Nessuna soluzione

2° sistema: $\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ f_z = \lambda \phi_z \\ \phi = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+3z = 2\lambda x \\ -2 = 4\lambda y \\ 3x = 6\lambda z \\ x^2+2y^2+3z^2 = 7 \end{cases}$ si risolve in funzione di λ (è un sistema lineare) e poi sostituisco nella 4ª equazione.

$y = -\frac{1}{2\lambda}$, $x = 2\lambda z$, $4\lambda z + 3z = 4\lambda^2 z$ $\rightsquigarrow$ ricavo z $\rightsquigarrow$ ricavo x

— o — o —

$\boxed{\text{Caso con più moltiplicatori}}$ Si pone in $\mathbb{R}^3$ (o in dimensione superiore) quando il bordo è intersezione di due (o più luoghi di zeri)

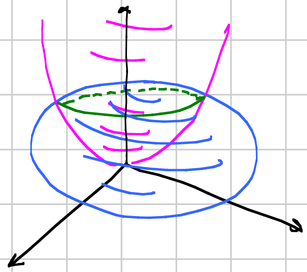
Esempio $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x^2+y^2+2z^2 = 5 \\ z = x^2+3y^2 \end{array} \right\}$

Intersezione tra un ellissoide ed un paraboloide (viene una curva)

L'insieme è descritto da 2 equazioni

$\Phi_1(x,y,z)=0 \qquad x^2+y^2+2z^2-5=0$

$\Phi_2(x,y,z)=0 \qquad z-x^2-3y^2=0$



Voglio fare max / min di f su V.
Come trovo i candidati?

$\boxed{1^\circ \text{ sistema}}$ Cerco i p.ti di V in cui $\nabla\Phi_1$ e $\nabla\Phi_2$ sono LIN. DIPENDENTI

$\boxed{2^\circ \text{ sistema}}$ Cerco i p.ti di V in cui ∇f è combinazione lineare di $\nabla\Phi_1$ e $\nabla\Phi_2$, cioè

$$\boxed{\nabla f = \lambda\nabla\Phi_1 + \mu\nabla\Phi_2} \quad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} f_x = \lambda\Phi_{1x} + \mu\Phi_{2x} \\ f_y = \lambda\Phi_{1y} + \mu\Phi_{2y} \\ f_z = \lambda\Phi_{1z} + \mu\Phi_{2z} \\ \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 0 \end{cases}$$

$\nabla f = \lambda\nabla\Phi_1 + \mu\nabla\Phi_2$

stare in V

5 equazioni in 5 incognite, poi dimentico λ e μ e considero solo (x,y,z)

il 1° sistema diventa invece

$$\begin{cases} \text{rango}\begin{pmatrix} \Phi_{1x} & \Phi_{1y} & \Phi_{1z} \\ \Phi_{2x} & \Phi_{2y} & \Phi_{2z} \end{pmatrix} = 1 \iff 3 \text{ determinanti } = 0 \\ \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 0 \end{cases}$$

5 equazioni in 3 incognite: di solito non ha soluzione.

<u>Esempio</u> Max e min di $f(x,y,z) = x-3z$ sull'insieme V descritto sopra (occhio: V è "solo bordo")

$\boxed{1^\circ \text{ sistema}}$

$$\begin{cases} \text{Rango}\begin{pmatrix} 2x & 2y & 4z \\ -2x & -6y & 1 \end{pmatrix} = 1 \\ x^2+y^2+2z^2=5 \\ z = x^2+3y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy=0 \\ 2y+24yz=0 \\ 2x+8xz=0 \end{cases}$$

$-8xy$

$x^2+y^2+2z^2=5 \;\longrightarrow$

$z = x^2+3y^2 \;\longrightarrow$

$$xy=0 \begin{cases} \nearrow\; x=0 \;\longrightarrow\; y(1+12z)=0 \begin{cases} \nearrow\; y=0 \\ \searrow\; z=-\frac{1}{12} \end{cases} \\ \searrow\; y=0 \;\longrightarrow\; x(1+4z)=0 \end{cases}$$

... con un po' di pazienza si vede (spero) che non ci sono soluzioni.

$\boxed{2^\circ \text{ sistema}}$

$$\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_{1x} + \mu \Phi_{2x} \\ f_y = \lambda \Phi_{1y} + \mu \Phi_{2y} \\ f_z = \lambda \Phi_{1z} + \mu \Phi_{2z} \\ \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = 2\lambda x - 2\mu x \\ 0 = 2\lambda y - 6\mu y \\ -3 = 4\lambda z + \mu \\ x^2+y^2+2z^2=5 \\ z = x^2+3y^2 \end{cases}$$

2ª equazione $\qquad y(\lambda-3\mu)=0$

$\swarrow \qquad \searrow$

$y=0$

$\downarrow$ 1ª eq.

$x = \dfrac{1}{2(\lambda-\mu)}$

$\downarrow$ 3ª eq.

$z = \dfrac{-3-\mu}{4\lambda}$

$\downarrow$

sostituisco nella 4ª e 5ª equazione

$\lambda = 3\mu$

$\downarrow$ 1ª eq.

$x = \dfrac{1}{4\mu}$

$\downarrow$ 3ª eq.

$z = \dfrac{-3-\mu}{12\mu}$

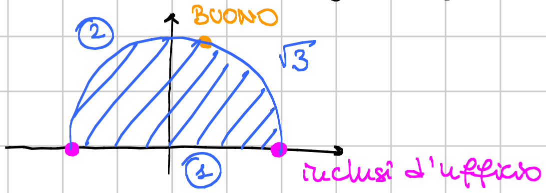
$\downarrow$

sostituisco e faccio i conti.

— o — o —

$\boxed{\text{Utilizzo misto moltiplicatori / parametrizzazione}}$

Esempio $\qquad f(x,y) = x+y^2 \qquad A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 3,\ y \ge 0\}$



Stazionari e singolari interni: $\emptyset$

Bordo: utilizzo i moltiplicatori con $\phi(x,y) = x^2+y^2-3$ $\boxed{MA}$

① escludo gli eventuali candidati con $y<0$
② includo d'ufficio i 2 estremi del tratto di circonferenza considerato, cioè nel nostro caso $(\pm\sqrt{3},0)$
Questi sono i "BORDI DEI BORDI" oppure "PUNTI DI TAGLIO"

Operativamente: pezzo ① con parametrizzazione $(t,0)$ con $t\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$
$g(t) = f(t,0) = x$ e qui è facile...

Pezzo ② con "moltiplicatori MA": 1° sistema senza soluzioni...

2° sistema: $\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 3 \end{cases}$

$y(\lambda-1)=0$

$y=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{3} \rightarrow$ già trovati

$\lambda=1 \rightarrow x=\frac{1}{2} \rightarrow y^2 = 3-\frac{1}{4} = \frac{11}{4}$ $\quad y=\frac{\pm\sqrt{11}}{2}$

$\boxed{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{11}}{2}\right)}$ OK $\quad$ $\cancel{\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{11}}{2}\right)}$ NO BUONO

Confronto i 3 valori e ho finito.

Esercizio: fare lo stesso esercizio con parametrizz. pura e interpretarlo per sicurezza con le linee di livello.

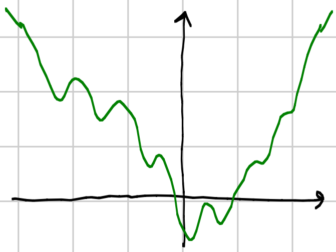
— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 12

Titolo nota 14/03/2014

LIMITI ALL'INFINITO PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

WEIERSTRASS GENERALIZZATO



Analisi 1 (W. gen.) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.
Supponiamo che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora di sicuro esiste $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$.

insieme non compatto

— o — o —

Cosa vuol dire andare all'infinito in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{R}^3$ o in $\mathbb{R}^n$?
Risposta: vuol dire allontanarsi sempre di più dall'origine, cioè quello che va all'infinito non è $x \in \mathbb{R}^n$, ma $|x|$, cioè la norma.
Perde di senso ogni distinzione tra $+\infty$ e $-\infty$.

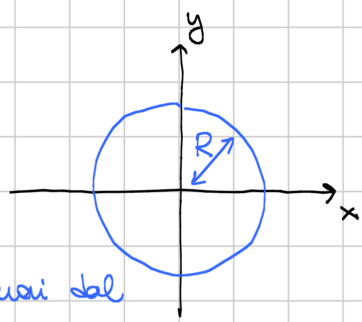
Notazione: $\displaystyle\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y)$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{|x| \to +\infty} f(x)$

vettore

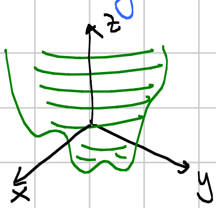
Essendo un limite, ci sono 4 possibilità:
(1) $\ell \in \mathbb{R}$ (2) $+\infty$ (3) $-\infty$ (4) N.E. (nessuno dei precedenti)

Def. di (2) $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)
$\exists R > 0$ tale che
$f(x) \geq M \quad \forall x$ con $|x| \geq R$

(più alto M, più il raggio R è probabile che sia grande)



fuori dal cerchio la funzione vale $\geq M$



Def. di ③ $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)
$\exists R > 0$ tale che
$f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ con $|x| \geq R$

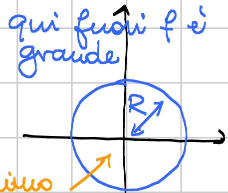
Def. di ① $\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)
$\exists R > 0$ tale che
$\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ con $|x| \geq R$
$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema di W. generalizzato}}$ Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funz. continua.
Supponiamo che
$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$$
Allora necessariamente esiste $\min\{ f(x) : x \in \mathbb{R}^n \}$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Fisso $M = f(0) + 1$. Allora $\exists R > 0$ t.c.
$f(x) \geq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ con $|x| \geq R$.

qui fuori f è grande



il minimo si decide dentro e dentro è compatto.

Per W. classico so che esiste
$$m = \min\{ f(x) : \underbrace{|x| \leq R}_{} \}$$
insieme compatto, quindi il minimo esiste per W. classico

Dico che m è minimo anche su tutto $\mathbb{R}^n$ e non solo su $|x| \leq R$.
Infatti ci sono 2 casi:

- Se $|x| \leq R$, allora $f(x) \geq m$ per come è stato def. m.
- Se $|x| \geq R$, allora $f(x) \geq M = f(0) + 1 \geq f(0) \geq m$

per def. di R

perché 0 sta nel cerchio $|x| \leq R$ quindi ha concorso nella def. di m.

Quindi $f(x) \geq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e c'è almeno un p.to x_0 con $|x_0| \leq R$ in cui $f(x_0) = m$.
Quindi m è il minimo su tutto $\mathbb{R}^n$.

— o — o —

Analogo: se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua e $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = -\infty$, allora di sicuro esiste

$$\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Oss. Ho scelto $M = f(0)+1$ per essere sicuro che esistano valori di $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $f(x) \leq M$. Un valore possibile è ora $x = 0$.

— o — o —

$\boxed{\text{Come calcolo il lim di } f(x) \text{ per } |x| \to +\infty \text{ ?}}$

Un metodo comodo è l'uso delle coordinate polari. In questo modo la condizione $|x| \to +\infty$ diventa $\rho \to +\infty$.

Esempio 1 $\displaystyle\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} x^2+y^2 - 217x$

Brutalmente: ρ^2 contro ρ, quindi vince ρ^2

Formalmente: in coordinate polari diventa

$$\lim_{\rho \to +\infty} (\rho^2 - 217\rho\cos\theta)$$

SLOGAN: LIBERARSI DI θ !!!

$$\rho^2 - 217\rho\cos\theta \geq \boxed{\rho^2 - 217\rho}$$

$\leftarrow$ senza θ

$\rho^2 - 217\rho\cos\theta \to +\infty$ per confronto

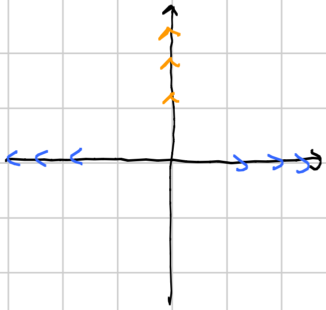
$\rho^2 - 217\rho \to +\infty$ Analisi 1

Fissata una qualunque quota M esiste ρ_0 t.c. $\rho^2 - 217\rho \geq M$ per ogni $\rho \geq \rho_0$ (def. di lim. di Analisi 1)

Di conseguenza questa espressione è $\geq M$ appena sono fuori dal cerchio di raggio ρ_0

<u>Esempio 2</u> $\displaystyle\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} x^2 - y^2 + 217\,x$

Questo limite non esiste. Trovo due modi di andare all'infinito in $\mathbb{R}^2$ che producono limiti diversi.



Se vado lungo l'asse x vuol dire che pongo $y=0$ e faccio andare $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = \lim_{x \to +\infty} x^2 + 217\,x = +\infty$$

$$\lim_{y \to +\infty} f(0,y) = \lim_{y \to +\infty} -y^2 = -\infty$$

Due direzioni con limiti diversi $\Rightarrow$ lim. globale N.E.

$$\sup\{\, x^2 - y^2 + 217\,x \,:\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\} = +\infty$$
$$\inf\{\, \text{''} \,\} = -\infty$$

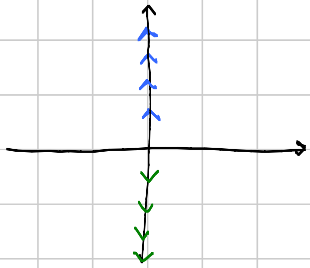
ANALISI 2 — LEZIONE 13

Titolo nota 14/03/2014

<u>Esempio 1</u> $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} (x^2+x^4+y^3+x^6y^2) = $ N.E.

$\lim_{y\to+\infty} f(0,y) = \lim_{y\to+\infty} y^3 = +\infty$

$\lim_{y\to-\infty} f(0,y) = \lim_{y\to-\infty} y^3 = -\infty$



Gratis: $\sup\{f(x,y) : (x,y)\in\mathbb{R}^2\} = +\infty$
$\inf$ " $= -\infty$

<u>Esempio 2</u> $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} (x^2+2y^2-3xy)$

Con $(0,y)$ o con $(x,0)$ ottengo limite $+\infty$

La matrice sarebbe $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$ Det: $2-\frac{9}{4}<0$

Completo i quadrati e ottengo

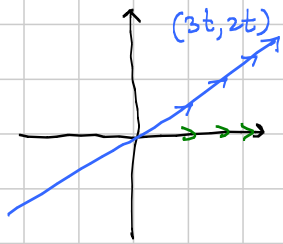
$$x^2+2y^2-3xy = \underbrace{x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}y^2}-\frac{9}{4}y^2+2y^2$$

$$= \left(x-\frac{3}{2}y\right)^2-\frac{1}{4}y^2$$

Idea: andare all'infinito nella direzione $x-\frac{3}{2}y=0$ $\quad 2x-3y=0$

$\lim_{t\to+\infty} f(3t,2t) = \lim_{t\to+\infty} 9t^2+8t^2-18t^2$

$= \lim_{t\to+\infty} -t^2 = -\infty$



$\lim_{t\to+\infty} f(t,0) = \lim_{t\to+\infty} t^2 = +\infty$. Quindi globalmente non esiste.

Esempio 3 $\displaystyle\lim_{x^2+y^2\to+\infty} (x^4+2y^4-5x^2y)$

Coordinate polari: $\rho^4\cos^4\theta + 2\rho^4\sin^4\theta - 5\rho^3\cos^2\theta\sin\theta$

$$= \rho^4 \underbrace{(\cos^4\theta+2\sin^4\theta)}_{\geq c>0} \underbrace{-\,5\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}_{\geq -5\rho^3} \geq c\rho^4 - 5\rho^3$$

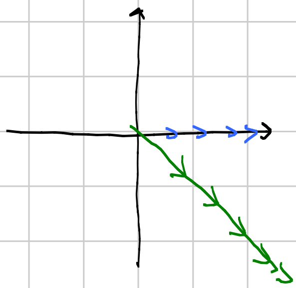
Considero la funzione $g(\theta) = \cos^4\theta + 2\sin^4\theta$. Per $\theta \in [0,2\pi]$ questa funzione ha un minimo per W. di analisi 1. Questo minimo è il valore $g(\theta_0)$ per un qualche θ_0 ed è strettamente positivo perché altrimenti dovrebbe essere contemporaneamente $\cos\theta_0 = \sin\theta_0 = 0$, che è impossibile. Quindi il minimo di $g(\theta)$ è un certo $c>0$.

Conseguenza:

$$\boxed{\text{funzione data}} \geq \boxed{c\rho^4 - 5\rho^3}$$

$\downarrow +\infty$ per confronto. $\qquad \downarrow +\infty$ essendo $c>0$

Esempio 4 $\displaystyle\lim_{x^2+y^2\to+\infty} x^4+2y^4+5x^3y$



Idea: se uso $y=-x$ l'ultimo termine vince

$$\lim_{t\to+\infty} f(t,0) = \lim_{t\to+\infty} t^4 = +\infty$$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t,-t) = \lim_{t\to+\infty} t^4+2t^4-5t^4 = \lim_{t\to+\infty} -2t^4 = -\infty$$

— o — o —

Esempio 5 $\displaystyle\lim_{x^2+y^2\to+\infty} x^4+y^2+3x^2y$

Vediamo in coordinate polari

$\rho^4\cos^4\theta + \rho^2\sin^2\theta + 3\rho^3\cos^2\theta\sin\theta$

Distinguo due casi:

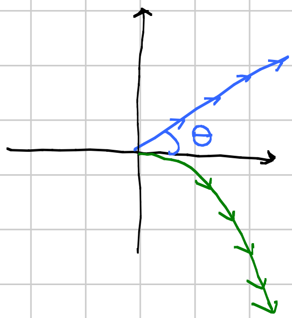
- se $\cos^4\theta > 0$, allora il limite è $+\infty$ (analisi 1)

$$\underset{\substack{\downarrow\\ +\infty}}{\boxed{\rho^4}}\left(\cos^4\theta + \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}}} + 3\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{\rho}}}\right) \to +\infty$$

- se $\cos^4\theta = 0$, allora resta solo $\rho^2 \underset{\substack{\shortparallel\\ 1}}{\sin^2\theta} = \rho^2 \to +\infty$

In ogni caso tende a $+\infty$.

$\boxed{\text{SPAZZATURA !!!}}$ (tutto quanto detto in questa pagina!)



Se io fisso θ, e mando $\rho \to +\infty$, vuol dire che vado all'infinito lungo una retta.
Ho quindi dimostrato che il limite è $+\infty$ lungo le rette, e questo NON BASTA.

E infatti con $(t, -t^2)$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t,-t^2) = \lim_{t\to+\infty} t^4+t^4-3t^4 = -\infty$$

— o — o —

Esempio 6 $\displaystyle\lim_{x^2+y^2\to+\infty} \left(x^4+|y|^\alpha+7x^5y\right)$

Per quali valori di α il limite è $+\infty$ oppure N.E.

Qualunque sia α, esistono direzioni in cui fa $+\infty$: ad esempio $(t,0)$

Una scelta interessante è $\left(t, -t^{\frac{4}{\alpha}}\right)$. Con questa ottengo:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t,-t^{\frac{4}{\alpha}}) = \lim_{t\to+\infty} t^4+t^4-7t^5\cdot t^{\frac{4}{\alpha}}$$
$$= \lim_{t\to+\infty} 2t^4-7t^{5+\frac{4}{\alpha}}$$

Qualunque sia α, il limite fa $-\infty$ in questa "direzione", quindi globalmente non esiste.

<u>Esempio 7</u> Se fosse $f(x,y) = x^4+|y|^\alpha+7xy$

allo stesso modo otterremmo:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t,-t^{\frac{4}{\alpha}}) = \lim_{t\to+\infty} t^4+t^4-7t^{1+\frac{4}{\alpha}}$$

Due casi

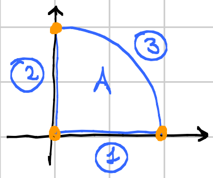
- se $1+\frac{4}{\alpha}\geq 4$, cioè $\frac{4}{\alpha}\geq 3$, cioè $\alpha\leq\frac{4}{3}$, allora il limite fa $-\infty$, quindi globalmente non esiste
- se invece $1+\frac{4}{\alpha}<4$, cioè se $\alpha>\frac{4}{3}$, allora il limite fa $+\infty$ anche in questa direzione, quindi per ora posso solo dire che se esiste fa $+\infty$, ma non ho garanzie dell'esistenza.

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 14

Titolo nota 15/03/2014

Problemi di max e min con valori assoluti



Esempio 1 $f(x,y) = |y-x^2|$

$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2 \le 1}_{\text{cerchio}}, \underbrace{x \ge 0, y \ge 0}_{1^\circ \text{ quadrante}} \}$

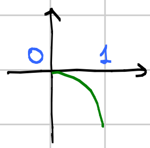
Strategia:

- Studio il pbm. senza valore assoluto → max / min di $g(x,y) = y - x^2$
- Poi traggo le conclusioni

Studio g. → Sing. interni : $\emptyset$

→ Staz. interni $\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$ $\emptyset$

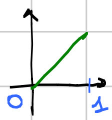
→ Bordo



Pezzo ① : $(t,0) : t \in [0,1]$ $g_1(t) = -t^2$

p.ti di max / min : $t = 0 \rightsquigarrow \boxed{(0,0)}$

$t = 1 \rightsquigarrow \boxed{(1,0)}$



Pezzo ② : $(0,t) : t \in [0,1]$ $g_2(t) = t$

p.ti di max / min : $t = 0 \rightsquigarrow (0,0)$

$t = 1 \rightsquigarrow (0,1)$

Pezzo ③ : volendo con parametrizzazione $(\cos\theta, \sin\theta) : t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

[esercizio]

oppure con i moltiplicatori di Lagrange con $\Phi(x,y) = \underbrace{x^2+y^2-1}_{\text{eq. del bordo}}$

1° sistema $\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases}$ ... non ha soluzioni

<u>2° sistema</u>

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\cancel{2}x = \cancel{2}\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

1ª equazione $\quad x(\lambda+1) = 0$

$x = 0 \xrightarrow{\text{3ª eq.}} y = \pm 1 \rightarrow (0,1)\ \boxed{(0,-1)}$ NO

$\lambda = -1 \xrightarrow{\text{2ª eq.}} y = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{3ª eq.}} x^2 = \frac{3}{4}, \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$ NO $\quad \boxed{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$ NO

Scarto i punti che non stanno nella zona richiesta, resta solo $(0,1)$
Poi inserisco d'ufficio i p.ti di taglio (gli estremi del pezzo ③), che in realtà ci sono già, e ottengo 3 candidati. Ora li confronto:

$(0,0) \rightsquigarrow g(0,0) = 0$

$(0,1) \rightsquigarrow g(0,1) = 1$

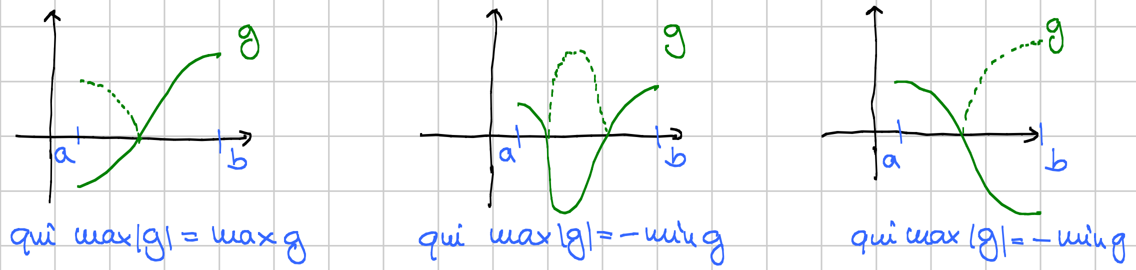
$(1,0) \rightsquigarrow g(1,0) = -1$

$\max\{g(x,y) : (x,y) \in A\} = 1 \qquad$ p.to di max: $(0,1)$

$\min\{\quad \text{"} \quad\} = -1 \qquad$ p.to di min: $(1,0)$

<u>Oss. geometrica</u>: Il grafico di $|g(x,y)|$ si ottiene dal grafico di $g(x,y)$ ribaltando le parti negative, cioè quelle nel semispazio di eq. $z < 0$.
Quindi la gara per il max di $|g(x,y)|$ se la giocano il max di $g(x,y)$ ed il minimo di $g(x,y)$ "ribaltato", cioè cambiato di segno.

In una variabile la situazione è questa



Nell'esempio se la giocano 1 e −1 ribaltato, che viene nuovamente 1

Quindi

$\max\{|y-x^2| : (x,y)\in A\} = 1$, p.ti di max: $(0,1)$ e $(1,0)$

vecchio p.to di max — vecchio p.to di min.

[se fosse stato $\to \max g = 1$, $\min g = -2$, avrei $\max|g| = 2$

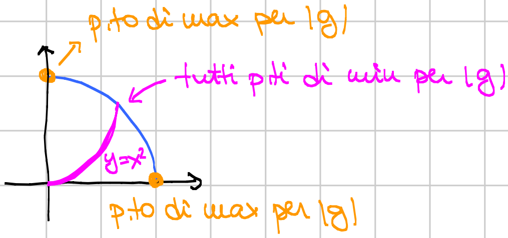
$\to \max g = 3$, $\min g = -2$, avrei $\max|g| = 3$

$\to \max g = 3$, $\min g = 2$, avrei $\max|g| = 3$ e anzi $g = |g|$ perché è sempre ≥ 2, dunque ≥ 0

$\to \max g = -2$, $\min g = -5$, avrei $\max|g| = 5$ e anzi $|g| = -g$ perché è sempre ≤ -2, quindi ≤ 0]

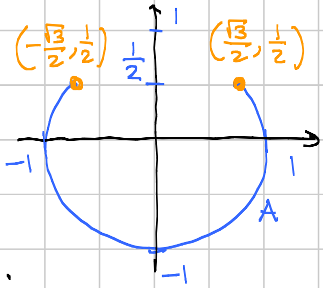
Vediamo il minimo: visto che $\max g > 0$ e $\min g < 0$, da qualche parte deve essere $g = 0$, dunque $\min|g| = 0$ e i p.ti di minimo sono tutti e soli quelli con $g = 0$.

$\min\{|y-x^2| : (x,y)\in A\} = 0$ e i p.ti di minimo sono tutti i p.ti $(x,y)\in A$ t.c. $y = x^2$. Sono dunque infiniti!



Esempio 2 $\quad f(x,y) = |y-x^2|$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1,\ y \le \frac{1}{2}\}$



L'insieme A è solo un arco di circonferenza.
In questo esempio c'è solo bordo che tratto con Lagrange: è il calcolo di prima e ottengo i p.ti

$\boxed{(0,1)}$ NO BUONO $\qquad (0,-1) \downarrow g(0,-1) = -1 \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right) \downarrow -\frac{1}{2}-\frac{3}{4} = -\frac{5}{4} \qquad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right) \downarrow -\frac{1}{2}-\frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$

OCCHIO! Devo includere i p.ti di taglio!!!

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right) \to \frac{1}{2}-\frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \qquad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right) \to -\frac{1}{4}$

Quindi senza valore assoluto:

$\max\{y-x^2 : (x,y)\in A\} = -\frac{1}{4}$ p.ti di max: $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

$\min\{\quad " \quad\} = -\frac{5}{4}$ p.ti di min: $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$

Con il valore assoluto:

$\max\{y-x^2 : (x,y)\in A\} = \frac{5}{4}$, p.ti di max: $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$

$\min\{\quad " \quad\} = \frac{1}{4}$, p.ti di min: $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

Morale: la funzione $y-x^2$ varia in A tra $-\frac{1}{4}$ e $-\frac{5}{4}$, quindi è tutta negativa.
Quando la ribalto diventa tutta positiva e varia tra $\frac{1}{4}$ e $\frac{5}{4}$, con max e min che si scambiano

Oss. Mi sono accorto che il min di $|y-x^2|$ non poteva essere 0 perché A non incontra la parabola $y=x^2$. (Fare linee di livello!).

ANALISI 2 — LEZIONE 15

Titolo nota 15/03/2014

MAX e MIN SU INSIEMI NON COMPATTI

Esempio 1 $f(x,y) = x^4+y^4+xy$ $\quad A = \mathbb{R}^2$

Problema generale: trovare inf / sup (che esistono sempre), dire se sono max / min ed eventualmente trovare pti di max / min.

Banale: $\sup\{f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = +\infty$ (basta prendere $y=0$ e x enorme)

Osservo che $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty$, quindi per W. generalizzato esiste il minimo.

Giustifico il limite in coordinate polari:

$$\rho^4 \underbrace{(\cos^4\theta + \sin^4\theta)}_{\geq c > 0} + \rho^2 \sin\theta\cos\theta \geq \boxed{c\rho^4 - \rho^2} \to +\infty \text{ in quanto } c>0$$

c = min{$\cos^4\theta + \sin^4\theta : \theta \in [0,2\pi]$} e questo esiste per W 1-dim. ed è positivo in quanto... vedi lezioni prec.

Una volta che il minimo esiste sta o sul bordo (che non c'è) o nei sing. interni (che non ci sono) o negli stazionari interni, che trovo

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^3+y=0 \\ 4y^3+x=0 \end{cases} \qquad y = -4x^3 \to \text{sostituisco nella 2a eq.}$$

$$4(-4x^3)^3+x=0 \qquad -4^4x^9+x=0$$

da cui $x=0$ oppure $4^4x^8=1$, cioè $x = \frac{\pm 1}{\sqrt[8]{4^4}} = \pm\frac{1}{2}$

$x=0 \to y=0$ $\qquad x = \pm\frac{1}{2} \to y = \mp\frac{1}{2}$

Quindi ho trovato 3 p.ti stazionari

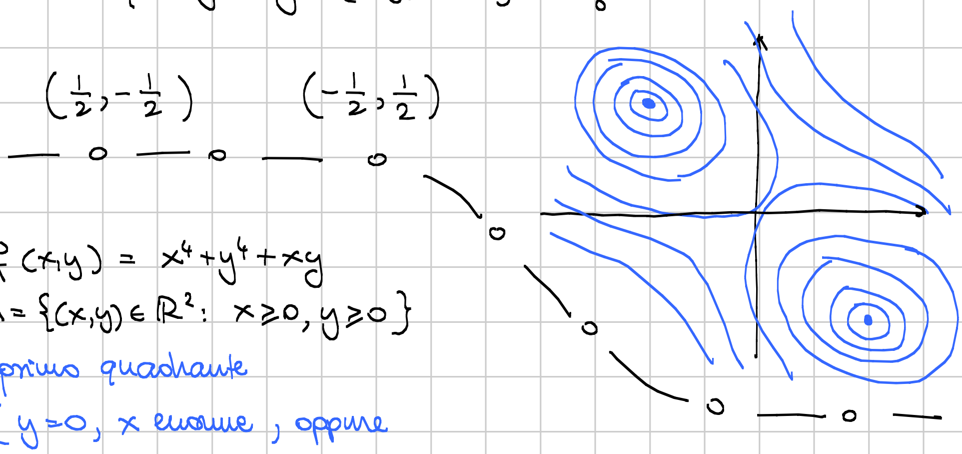
$(0,0)$ $\downarrow$ $f=0$

$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ $\downarrow$ $f=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}$

$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ $\downarrow$ $f=-\frac{1}{8}$

Conclusione: $\min\{x^4+y^4+xy : (x,y)\in\mathbb{R}^2\}=-\frac{1}{8}$

P.ti di min: $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$



Esempio 2 $f(x,y)=x^4+y^4+xy$

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0\}$

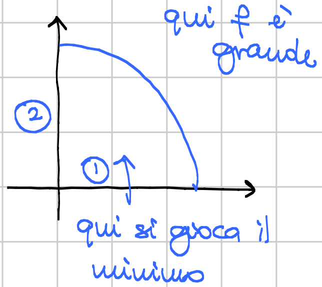
primo quadrante

sup $=+\infty$ ($y=0$, x enorme, oppure x e y enormi)

L'inf. è un minimo perchè ancora una volta esiste il limite per $x^2+y^2\to+\infty$.

Occhio! Ora sto calcolando

$$\lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty \\ (x,y)\in A}} f(x,y)=+\infty$$



A quel p.to i candidati p.ti di min. sono

→ staz. interni: $\varnothing$ (nessuno dei 3 prec. è interno)

→ sing. interni: $\varnothing$

→ bordo, cioè sui 2 semiassi:

1 $\rightsquigarrow (t,0),\ t\geq 0 \rightsquigarrow f(t,0)=t^4$ che ha min per $t=0 \rightsquigarrow (0,0)$

2 $\rightsquigarrow (0,t),\ t\geq 0 \rightsquigarrow f(0,t)=t^4$ " " " " " $\rightsquigarrow (0,0)$

Quindi: $\min\{f(x,y) : (x,y)\in A\}=0$ e p.to di min $=(0,0)$

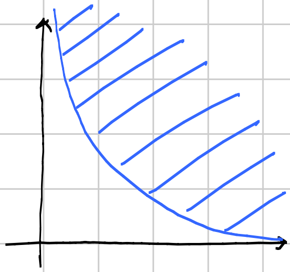
Alternativa: metodo con la disuguaglianza

$\rightarrow f(0,0)=0$

$\rightarrow f(x,y) = x^4+y^4+xy \geq 0$ per ogni $(x,y) \in A$

$\rightarrow f(x,y) > 0$ se $(x,y) \in A$ e $(x,y) \neq 0$

Quindi è l'unico p.to di minimo.



Esempio 3 $\quad f(x,y) = x^2+2y^2$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x \geq 0,\ y \geq 0}_{1^\circ \text{quadrante}},\ \underbrace{xy \geq 1}_{\text{sopra iperbole}}\}$$

Facile: $\sup = +\infty$ (basta prendere x e y grandi)

(non posso prendere $y=0$ e x enorme)

(posso prendere $y=3$ e x enorme)

Ora $\quad \underbrace{f(x,y)}_{\downarrow\, +\infty} \geq x^2+y^2 = \underbrace{\rho^2}_{\downarrow\, +\infty}$

da cui $\displaystyle\lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ (x,y)\in A}} f(x,y) = +\infty$, e quindi per W. generalizzato esiste il minimo.

Può trovarsi $\rightarrow$ staz. interni: $\emptyset$ (l'unico p.to staz. è $(0,0)$ e non è interno)

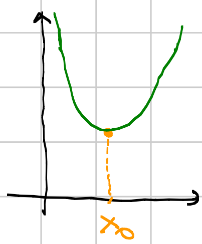
$\rightarrow$ sing. interni: $\emptyset$

$\rightarrow$ bordo: l'iperbole che posso trattare o con i moltiplicatori $\phi(x,y) = \underbrace{xy-1=0}_{\text{eq. iperbole}}$

o con la parametrizzazione: $(t, \frac{1}{t})$: $t>0$.

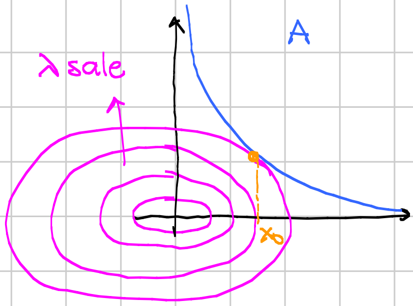
Così mi riduco a studiare la funzione

$$f(t, \tfrac{1}{t}) = t^2 + \frac{2}{t^2}, \text{ ed è analisi 1}$$



Esercizio: controllare che venga lo stesso con i moltiplicatori

Interpretazione con le linee di livello

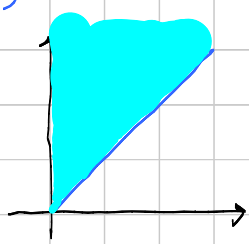


$f(x,y)=\lambda$ cioè $x^2+2y^2=\lambda$

— o — o —

Esempio 4 $f(x,y) = x^2-2y^2$
A = primo quadrante

sup $= +\infty$ ($y=0$, x enorme) inf $= -\infty$ ($x=0$, y enorme)



Esempio 5 $f(x,y) = x^2-2y^2$
$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le x\le y\}$

Facile: inf $= -\infty$ ($x=0$ e y enorme)

Nell'insieme A si ha che $f(x,y) = x^2-2y^2 \le x^2-2x^2 = -x^2$
perché $y\ge x$

Quindi $f(x,y)\le -x^2\le 0$ per ogni $(x,y)\in A$
D'altra parte $f(0,0)=0$.
Quindi

$$\max\{x^2-2y^2:\ (x,y)\in A\}=0$$

e l'unico p.to di max è $(0,0)$. Infatti
- se $x>0$, allora $f(x,y)\le -x^2<0$
- se $x=0$, allora $f(x,y)=-2y^2<0$ a meno che non sia anche $y=0$.

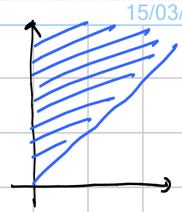
$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} x^2-2y^2 = \text{N.E.}$$

$$\lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty\\(x,y)\in A}} x^2-2y^2 = -\infty$$ (non banalissimo da verificare...)

ANALISI 2 — LEZIONE 16

Titolo nota 15/03/2014

Esercizio 1 Calcolare $\displaystyle\lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty \\ (x,y)\in A}} x^2-2y^2$



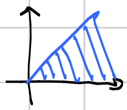
In coordinate polari $x^2-2y^2 = \rho^2(\cos^2\theta - 2\sin^2\theta) \overset{?}{\leq} -c\rho^2$

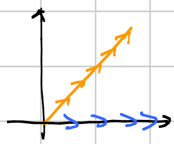
Se fosse vera con un qualche $c>0$ avrei finito.

Nell'insieme A abbiamo $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, quindi

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \leq \cos\theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e quindi } & \cos^2\theta \leq \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\theta \leq 1 \text{ e quindi } & \sin^2\theta \geq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \cos^2\theta - 2\sin^2\theta \leq \frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Abbiamo quindi dimostrato che $x^2-2y^2 \leq -\frac{1}{2}\rho^2$ da cui il limite fa $-\infty$.

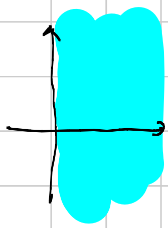
Esercizio 2 Stessa funzione, ma A = 



$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} (x^2-2y^2) = \text{N.E.}$$

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t,0) = \lim_{t\to+\infty} t^2 = +\infty$ $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t,t) = \lim_{t\to+\infty} t^2-2t^2 = -\infty$

Esercizio 3 $f(x,y) = x^2+y^3$ $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0\}$



sup $= +\infty$ ($x = 27$, y enorme)

inf $= -\infty$ ($x = 27$, y enormemente negativo)

$$\lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty \\ (x,y)\in A}} x^2+y^3 = \text{N.E.}$$

Esercizio 4 $f(x,y) = x^2+y^3$ A = 4° quadrante

inf $= -\infty$ come prima

sup $= +\infty$ ($y = -3$, x enorme)

Esercizio 5 $f(x,y) = x^2+y^3$ $A =$ 1° quadrante

$\sup = +\infty$

$\inf = \min = 0$ con p.to di minimo : $(0,0)$

Dim: $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in$ 1° quadrante e vale il segno di uguale se e solo se $x=y=0$.

$$\lim_{\substack{x^2+y^2\to+\infty \\ x\geq 0 \\ y\geq 0}} (x^2+y^3) = +\infty.$$

1° quadrante

Per dimostrarlo basta osservare che $y^3 \geq y^2-1$ per ogni $y\geq 0$.

Data per buona l'osservazione

$$\underbrace{x^2+y^3}_{+\infty} \geq x^2+y^2-1 = \underbrace{\boxed{\rho^2-1}}_{+\infty}$$

Perché è vero che $y^3 \geq y^2-1$ per ogni $y\geq 0$?

Due casi

→ se $y\geq 1$, allora $y^3 \geq y^2 \geq y^2-1$

→ se $y\in[0,1]$, allora $y^3\geq 0$ e $y^2-1\leq 0$, quindi è comunque vero che $\underset{+}{y^3} \geq \underbrace{y^2-1}_{-}$

Esercizio 6 Calcolare $\displaystyle\lim_{x^2+y^2\to+\infty} x^6+y^2-x^2y$

Occhio a non cascare in dimostrazioni in cui si fissa θ...

Anche il pareggiamento degli esponenti (t,t^3) produce un $2t^6-t^5$, che continua ad andare a $+\infty$. Sospetto che il limite sia $+\infty$.

Lo devo dimostrare. Faccio il cambio di variabili $y=z^3$. Il limite diventa

$$\lim_{\boxed{x^2+z^2\to+\infty}} x^6+z^6-x^2z^3$$ e questo lo faccio in coordinate polari

quando il vettore (x,y) si allontana dall'origine, anche il vettore (x,z) si allontana dall'origine

$$x^6+z^6-x^2z^3 = \rho^6(\cos^6\theta+\sin^6\theta)-\rho^5\cos^2\theta\sin^3\theta$$
$$\geq c\rho^6-\rho^5 \longrightarrow +\infty$$

↳ c è il minimo di $\cos^6\theta+\sin^6\theta$ al variare di θ in $[0,2\pi]$, e il minimo è positivo perchè è il valore in un certo θ_0 e non può essere nullo perchè dovrebbe essere $\cos\theta_0=\sin\theta_0=0$

Questo mi dice, tra l'altro che

$$\min\{x^6+y^2-x^2y : (x,y)\in\mathbb{R}^2\} \text{ esiste}$$

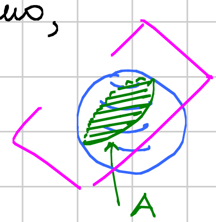
e lo posso trovare cercando i p.ti stazionari $\rightsquigarrow$ sistema algebrico.

— o — o —

<u>Esercizio 7</u> $f(x,y,z) = x^2+y^2-3z$

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2+z^2\leq 4}_{\text{dentro la sfera}},\ \underbrace{x-y+2z=1}_{\text{sul piano}}\}$$

L'insieme A è l'intersezione tra la sfera ed un piano, quindi è un cerchio.



A è compatto $\Rightarrow$ W. dice che max e min esistono.

Possono stare

- → nell' "interno" del cerchio
- → sulla circonferenza che limita il cerchio.

- Per i primi utilizzo i moltiplicatori con $\phi(x,y,z) = x-y+2z-1=0$. Tra i candidati ottenuti, elimino quelli che non stanno nella sfera

- Per i secondi osservo che la circonferenza è data da

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2+z^2-4=0}_{\text{sulla sup. sferica}},\ \underbrace{x-y+2z-1=0}_{\text{sul piano}}\}$$

Quindi utilizzo il metodo a 2 moltiplicatori con

$$\phi_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-4 \qquad \phi_2(x,y,z) = x-y+2z-1$$

Trucco per semplificare i calcoli: SOSTITUZIONE DEL VINCOLO!!

Quando devo fare max/min di $f(x,y,z) = x^2+y^2-3z$ su V
posso osservare che su V ho che $x^2+y^2 = 4-z^2$.
Quindi mi riduco a studiare max/min di

$$g(x,y,z) = 4-z^2-3z$$

che non dipende da 2 variabili, quindi conti più semplici.

<u>Sottoesempio</u> $\max\{ \overbrace{x^2+y^2+3z^2}^{f(x,y,z)} : (x,y,z) \in A \}$
$A =$ sfera $x^2+y^2+z^2 = 5$

Sull'insieme A ho che $f(x,y,z) = 5+2z^2$ e questo è

- minimo quando $z=0$, quindi sull'equatore
- massimo ai 2 poli quando $z = \pm\sqrt{5}$ e il max vale 15.

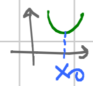
— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 17

Titolo nota 20/03/2014

Derivate successive per funzioni di più variabili

Analisi 1
- Derivata n-esima
- Studio locale di funzioni: se $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)>0$, allora x_0 è un p.to di minimo locale
- Taylor



Derivate successive: Derivate prime ⇝ Derivate parziali prime

Esempio $f(x,y) = x^2+y^3+x^4y^5$

$f_x = 2x+4x^3y^5$

$f_y = 3y^2+5x^4y^4$

Derivate seconde: ho 4 possibilità

f_{xx} = derivo f_x rispetto ad x $= 2+12x^2y^5$

f_{xy} = derivo f_x rispetto ad y $= \boxed{20x^3y^4}$

f_{yx} = derivo f_y rispetto ad x $= \boxed{20x^3y^4}$

f_{yy} = derivo f_y rispetto ad y $= 6y+20x^4y^3$

In generale, per una funzione di n variabili ho n derivate parziali prime, e n^2 derivate parziali seconde.

Le derivate successive si calcolano allo stesso modo:

$f_{xxx} = 24xy^5$ $\qquad f_{yxy} = 80x^3y^3$ e così via

Altra notazione: $f_x(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ $\qquad f_y(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$f_{xx}(x,y) = \boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}}(x,y)$ $\qquad f_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$

derivata parziale di f fatta 2 volte rispetto ad x

$f_{xxy}(x,y) = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y)$

Teorema (di inversione dell'ordine di derivazione)

Se f_{xy} e f_{yx} esistono in un intorno del p.to (x_0, y_0) e sono continue nel p.to (x_0, y_0), allora coincidono, cioè

$$\boxed{f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)}$$

Conseguenza Nel calcolare le derivate parziali successive, non conta l'ordine in cui derivo rispetto alle varie variabili, ma solo quante volte derivo rispetto ad ogni variabile.

Esempio 1 $f(x,y)$

Due derivate prime: f_x f_y $\quad x+y$

Tre derivate seconde: f_{xx} $f_{xy} = f_{yx}$ f_{yy} $\quad x^2+2xy+y^2$

Quattro derivate terze: f_{xxx} $\quad f_{xxy}, f_{yxx}, f_{xyx}$ $\quad f_{xyy}, f_{yxy}, f_{yyx}$ $\quad f_{yyy}$ $\quad x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

2015 derivate (parziali) 2014-esime: quello che conta è quante volte derivo rispetto ad x, e può essere $\underbrace{0, 1, 2, \ldots, 2014}_{2015 \text{ possibilità}}$

Esempio 2 $f(x,y,z)$

Derivate prime: f_x f_y f_z $\quad (x+y+z)$

Derivate seconde: f_{xx} f_{yy} f_{zz} f_{xy} f_{yz} f_{xz}

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz = (x+y+z)^2$$

Derivate terze: f_{xxx} f_{yyy} f_{zzz}

f_{xxy} f_{xyy} f_{yzz} f_{yyz} f_{xxz} f_{xzz}

f_{xyz}

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2)+6xyz$$

Derivate prime $\to$ gradiente $\to$ $\nabla f = (f_x, f_y)$

Derivate seconde $\to$ MATRICE HESSIANA $\to$ $Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

La matrice Hessiana nel caso di $f(x,y,z)$ diventa

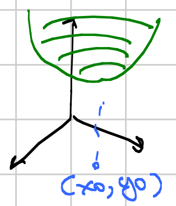
$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

Brutalmente: tutte le condizioni che ad analisi 1 coinvolgono il segno della derivata seconda, ad analisi 2 coinvolgono la segnatura della matrice Hessiana

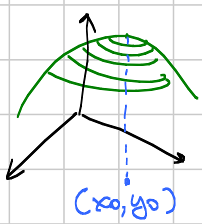
$\boxed{\text{Studio locale nell' intorno di un p.to stazionario}}$

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (ma vale uguale da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) e sia $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $\nabla f(x_0,y_0) = 0$ (cioè (x_0,y_0) è un p.to stazionario)

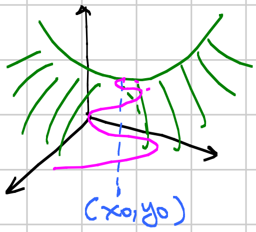
- se Hf è def. pos. $(++)$, allora (x_0,y_0) è un p.to di min. locale
- se Hf è def. neg. $(--)$, " " " " max. locale
- se Hf è indefinito $(+-)$, allora (x_0,y_0) è un p.to di sella, quindi né un max, né un min. locale
- se Hf è degenere (cioè $\det Hf = 0$), allora BOH (nel senso che può succedere qualunque cosa e non si può dedurre nulla).



MIN. LOCALE



MAX. LOCALE



P.TO DI SELLA O MOUNTAIN PASS

Achtung! Non ha senso usare la matrice Hessiana per risolvere un problema di max / min globale.
Infatti l'Hessiana fornisce una informazione LOCALE, cioè vicino al p.to, ma nessuna informazione GLOBALE.

Analisi 1 Se x_0 è un p.to di min. locale, allora
$f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$ (posto che esistano)
e analogo per il max

Analisi 2 Se (x_0, y_0) è un p.to di min. locale, allora
$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettore}}}{\nabla f(x_0,y_0) = 0}$ e $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice semi-definita pos.}}}{Hf(x_0,y_0) \geq 0}$

Quindi: $\nabla f = 0 \;+\; Hf > 0 \implies$ min. locale
min. locale $\implies \nabla f = 0 \;+\; Hf \geq 0$

Ad esempio, se la matrice Hessiana ha autovalori 0,5 posso solo dire che non è un p.to di max (se lo fosse dovrebbe essere $Hf \leq 0$), ma potrebbe essere un p.to di min, oppure altre cose.

ANALISI 2 — LEZIONE 18

Titolo nota 20/03/2014

$\boxed{\text{FORMULA DI TAYLOR IN PIÙ VARIABILI}}$

$\boxed{\text{Analisi 1}}$ Con centro in $x_0 = 0$

Taylor-Peano: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$

Taylor-Lagrange: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$

Con centro in x_0 qualunque è la stessa cosa

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \underset{\text{Peano / Lagrange}}{\text{resto}}$$

$\boxed{\text{Analisi 2}}$ $f(x,y) = f(0,0) +$

$$+ \frac{1}{1!}\left[f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y\right]$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(0,0)\,x^2 + 2 f_{xy}(0,0)\,xy + f_{yy}(0,0)\,y^2\right]$$

$$+ \frac{1}{3!}\left[f_{xxx}(0,0)\,x^3 + 3 f_{xxy}(0,0)\,x^2y + 3 f_{xyy}(0,0)\,xy^2 + f_{yyy}(0,0)\,y^3\right]$$

e così via...

... il termine che ad analisi 1 era $o(x^n)$ ora diventa $o(\|(x,y)\|^n)$, cioè $o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n\right)$ (in polari sarebbe $o(\rho^n)$)

<u>Osservazione</u> Come ad Analisi 1, il calcolo di uno sviluppo di Taylor si semplifica notevolmente usando gli sviluppi elementari.

<u>Esempio 1</u> $\quad f(x,y) = \sin(x+y) \quad$ sviluppo con $n=4$

Partiamo da $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4)$, da cui

$$\sin(x+y) = (x+y) - \frac{1}{6}(x+y)^3 + o\left(\boxed{(x+y)^4}\right)$$

↑ produce potenze quarte

$$= x+y - \frac{1}{6}(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) + o((x^2+y^2)^2)$$

↑ sarebbe $\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^4$

<u>Esempio 2</u> $\quad f(x,y) = \cos x \cdot \sin(xy) \quad$ Sviluppo con $n=5$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$$

$\sin t =$ come sopra

$$\sin xy = xy - \underbrace{\frac{1}{6}x^3y^3}_{} + o(x^4y^4) = xy + o\left((x^2+y^2)^{5/2}\right)$$

è di grado 6, quindi viene mangiato da

Quindi $\quad f(x,y) = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right)(xy + o(\;))$

$$= xy - \frac{1}{2}x^3y + o\left((x^2+y^2)^{5/2}\right)$$

Dallo sviluppo di Taylor vedo che

- $f(0,0) = 0$ (non c'è "termine noto" nello sviluppo)
- $\nabla f(0,0) = (0,0)$ (non ci sono i termini di grado 1)
- i termini di grado 2 sono $\frac{1}{2}$ (forma quadratica associata alla matrice Hessiana),

quindi la forma quadratica è $q(x,y) = 2xy$, $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, quindi autovalori $+ -$, quindi p.to di sella.

—o—o—

<u>Esempio 3</u> $\quad f(x,y) = \arctan x \cdot e^{x^2y} \cdot \cos y \qquad n=5$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5), \quad \cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^5)$$

$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \dots$ $\qquad e^{x^2y} = 1 + x^2y +$ il termine successivo avrebbe $(x^2y)^2$ quindi sarebbe mangiato da $o(\rho^5)$

$$f(x,y) = \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)(1 + x^2y)\left(1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4\right) + o\left((x^2+y^2)^{5/2}\right)$$

$$= \left(x + x^3y - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\left(1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4\right) + o\left((\ )^{5/2}\right)$$

$$= x + \boxed{x^3y} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}x^3y^2 + \frac{1}{24}xy^4 + o\left((\ )^{5/2}\right)$$

Domanda: 1 - quanto vale $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)$? Vale 0: infatti in Taylor compare come coeff. di x^4 che non c'è, quindi il coeff. è 0.

2 - quanto vale $\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0)$? Vale 6!

I termini di grado 4 nello sviluppo di Taylor sono

$$\frac{1}{4!}\left[f_{xxxx}(0,0)\,x^4 + 4 f_{xxxy}(0,0)\,x^3y + \dots\right]$$

(i coefficienti 1, 4, … sono i binomiali, cioè la quarta riga di Tartaglia)

quindi $\frac{4}{4!} f_{xxxy}(0,0)\,x^3y = \frac{1}{6} f_{xxxy}(0,0)\,x^3y$

Visto che nel polinomio x^3y compare con coeff. 1, la f_{xxxy} vale 6.

— o — o —

Achtung! Con Taylor posso calcolare le derivate solo nel centro in cui sviluppo.

Tornando all'esempio, in (0,0) abbiamo

$f_x(0,0) = 1$ e $f_y(0,0) = 0$ (sono i coeff. di x e y), quindi l'origine non è un p.to stazionario

— o — o —

Esempi di studio vicino a $(0,0)$

Esempio 4 $f(x,y) = x^2+y^4$ $\qquad (0,0)$ è stazionario

$f_x = 2x \qquad f_y = 4y^3 \qquad \nabla f = (2x, 4y^3)$

$f_{xx} = 2, \; f_{xy} = 0, \; f_{yy} = 12y^2$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

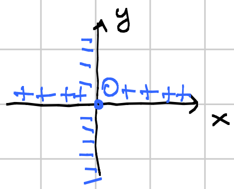
$\nabla f(0,0) = (0,0) \Rightarrow$ stazionario $\qquad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ semidef. pos

Da Hf posso dedurre che $(0,0)$ NON è un p.to di max. locale (se lo fosse dovrebbe essere $Hf \leq 0$).
In questo caso si vede a occhio che $(0,0)$ è un p.to di MIN. GLOB. (quindi anche locale) per $f(x,y)$.
Infatti $f(0,0) = 0$ e $f(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$

Esempio 5 $f(x,y) = x^2 - y^4$ ... facendo i conti trovo

$\nabla f(x,y) = (2x, -4y^3) \qquad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}$

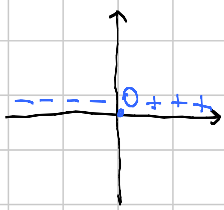
In $(0,0)$ ho $\nabla f = (0,0) \Rightarrow$ stazionari e $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ semidef. pos.
$\Rightarrow$ di sicuro no max. locale. In questo caso non è max e non è min.
Vicino a $(0,0)$ ho p.ti in cui $f(x,y) > 0$
e p.ti in cui $f(x,y) < 0$.



Esempio 3 $f(x,y) = x^3 + x^2y^2 + y^4$

Si vede subito che $\nabla f(0,0) = (0,0)$ e $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ BOH ASSOLUTO
(è un polinomio senza termini di grado 1 e 2)

Non è né max, né min

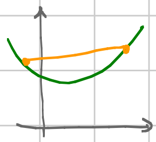


ANALISI 2 — LEZIONE 19

Titolo nota 20/03/2014

Funzioni di più variabili convesse

Analisi 1



"Comunque prendo 2 p.ti sul grafico, il segmento che li congiunge sta "sopra" il grafico"

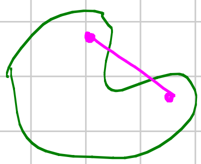
Convessità e derivata 2ª   Valgono 2 fatti (supposto che esista f'')

(1) f convessa in un intervallo $\Rightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in$ intervallo

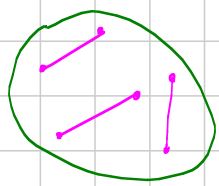
(2) $f''(x) > 0 \quad \forall x \in$ intervallo $\Rightarrow f$ convessa.

Analisi 2   La def. è la stessa "comunque prendo 2 p.ti sul grafico, il segmento congiungente sta sopra".

Oss. L'insieme di definizione di $f(x,y)$ deve a sua volta essere un insieme convesso (comunque prendo 2 p.ti, il segmento che li congiunge è contenuto nell'insieme)



non convesso



convesso

Teorema (Convessità e matrice Hessiana)

Supponiamo che la matrice Hessiana esista. Allora

(1) f convessa in un insieme $\Rightarrow Hf \geq 0$ in tutto l'insieme

semidef. pos

(2) $Hf > 0$ in tutto l'insieme $\Rightarrow f$ convessa nell'insieme.

def. pos.

— o — o —

Esempio 1 $\quad f(x,y) = \frac{1}{2}\log(1+x^2+y^2)$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}x}{1+x^2+y^2} \qquad f_y(x,y) = \frac{y}{1+x^2+y^2}$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{1+x^2+y^2-2x\cdot x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad f_{yy}(x,y) = \frac{1-y^2+x^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

per controllo calcolare anche $f_{yx}(x,y)$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}(x,y)$$

$$Hf(x,y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} 1-x^2+y^2 & -2xy \\ -2xy & 1-y^2+x^2 \end{pmatrix}$$

Domanda: determinare la segnatura di Hf al variare dei parametri x e y. Ora

$\operatorname{Tr} Hf = 2$, quindi almeno un autovalore è $+$

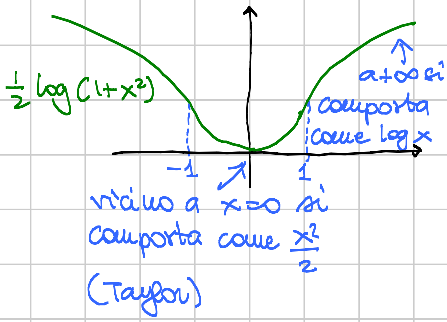
$$\begin{aligned}
\operatorname{Det} Hf &= (1-x^2+y^2)(1-y^2+x^2) - 4x^2y^2 \\
&= [1+(y^2-x^2)][1-(y^2-x^2)] - 4x^2y^2 \\
&= 1-y^4-x^4+2x^2y^2-4x^2y^2 \\
&= 1-y^4-x^4-2x^2y^2 \\
&= 1-(x^2+y^2)^2
\end{aligned}$$

Quindi il determinante dipende da (x^2+y^2). Ci sono 3 casi

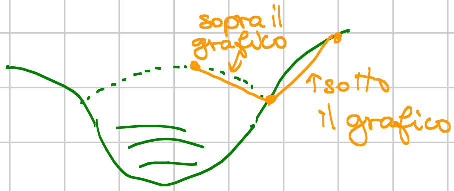
- se $x^2+y^2<1$ si ha $\operatorname{Det}>0$, quindi segnatura $++$, quindi f è convessa nel cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 1.
- se $x^2+y^2=1$ si ha $\operatorname{Det}=0$, quindi segnatura $+0$, quindi GUAI
- se $x^2+y^2>1$ si ha $\operatorname{Det}<0$, quindi segnatura $+-$, quindi f non è né concava (che richiederebbe $--$) né convessa (che richiederebbe almeno semidef. pos).

Come è fatto il grafico?

In una variabile $\frac{1}{2}\log(1+x^2)$



In 2 variabili è lo stesso grafico ruotato intorno all'asse z.
Vicino all'origine c'è un "lago" di raggio 1 (zona convessa con minimo loc. e glob. in $(0,0)$).
Poi tutto intorno sale senza essere né concava, né convessa



Domanda: potevo capire che in $(0,0)$ c'è un minimo usando Taylor? Certo!

$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \dots$ quindi

$$\frac{1}{2}\log(1+\underbrace{x^2+y^2}_{t}) = \frac{1}{2}\underbrace{(x^2+y^2)}_{t} + o((x^2+y^2)^{3/2})$$

da qui deduco che l'origine è un p.to stazionario e la forma quadratica associata a $Hf(0,0)$ è x^2+y^2, quindi def. pos., quindi min. locale.

— o — o —

Esempio 2 $f(x,y) = y^3 + xy$

Domanda: trovare i p.ti staz. e capire cosa sono

$$\nabla f = 0 \quad \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ 3y^2 + x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ l'unico p.to stazionario è } (0,0)$$

Essendo "lo sviluppo di Taylor di se stessa" si ha che la forma associata alla matrice Hessiana è $2xy$, quindi segnatura $+-$, quindi l'origine è un mountain pass.
[in alternativa: calcolo bovino di $Hf(0,0)$]

Esempio 3 $f(x,y) = x^2 + xy + y^3$ Stessa domanda

$\nabla f = 0$ $\quad f_x = 0,\ f_y = 0$ $\quad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 3y^2 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = -2x \\ x + 12x^2 = 0 \end{cases}$ $\quad x(12x+1) = 0$

$\hookrightarrow x = 0 \quad o \quad x = \frac{-1}{12}$

Quindi i p.ti stazionari sono $(0,0)$ e $\left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$

Calcolo Hf: $f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 1 \quad f_{yy} = 6y$

Quindi $Hf = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$ Sostituisco i p.ti

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Det $< 0 \Rightarrow$ segnatura $+-$ $\Rightarrow$ p.to di sella

$Hf\left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Det > 0, Tr > 0 $\Rightarrow$ segnatura $++$
$\Rightarrow$ p.to di min. locale

Ulteriore domanda: cosa possiamo dire di sup/inf di $f(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$

Non posso dire che esiste il minimo e viene raggiunto in $\left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$.
L'Hf dice solo che è p.to di min. locale.
Mi servirebbe un W. generalizzato per dire che il min. esiste !!!

In realtà
- $\sup = +\infty$ $\quad (x = 0,\ y$ enorme$)$
- $\inf = -\infty$ $\quad (x = 0,\ y$ molto negativo$)$.

— o — o —

Hard – Hard Esiste una funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che ha solo 2 p.ti stazionari e sono entrambi p.ti di min. assoluto !!!

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 20

Titolo nota 21/03/2014

<u>Analisi 1</u> $f'(x_0)=0 \quad f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ p.to di min. locale

<u>Dim 1</u> Taylor con centro in x_0: $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \underbrace{r(h)}_{\text{resto}}$

per ipotesi $r(h) = o(h^2)$, cioè

$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0$. Ma allora per h vicino a 0, diciamo per $h \in (-\delta,\delta)$ per un opportuno $\delta>0$ si ha che

$$\frac{r(h)}{h^2} \le \frac{1}{4}f''(x_0) \qquad \forall h \in (-\delta,\delta) \qquad \left(\text{cioè } r(h) \le \frac{1}{4}f''(x_0)h^2\right)$$

$$\frac{r(h)}{h^2} \ge -\frac{1}{4}f''(x_0) \qquad \forall h \in (-\delta,\delta) \qquad \left(\text{cioè } r(h) \ge -\frac{1}{4}f''(x_0)h^2\right)$$

Ma allora per $h \in (-\delta,\delta)$ avremo che

$$\begin{aligned} f(x_0+h) - f(x_0) &= \underbrace{f'(x_0)}_{=0}h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + r(h) \\ &\ge \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{4}f''(x_0)h^2 \\ &= \frac{1}{4}f''(x_0)h^2 > 0 \quad \text{per } h \ne 0 \end{aligned}$$

Ho così dimostrato che $f(x_0+h) > f(x_0)$ per ogni $h \in (-\delta,\delta)$ con $h \neq 0$, il che dice che x_0 è un p.to di min. locale.

(stessa dim. nel caso in cui $f''(x_0)<0$: fare per esercizio).

$\boxed{\text{Analisi 2}}$ Supponiamo che $\nabla f(x_0) = 0 \leftarrow$ vettore nullo

e $Hf(x_0) > 0$

$\uparrow$ matrice Hessiana definita positiva

Allora x_0 è p.to di minimo locale.

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Sia A una matrice definita positiva. Sia $m > 0$ il più piccolo dei suoi autovalori.
Allora $x^t A x \geq m \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Dim. Se A fosse diagonale sarebbe ovvio: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$x^t A x = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \geq m(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = m\|x\|^2$$

sostituisco ogni λ_i con il più piccolo che è proprio m

Se A non è diagonale, la rendo tale! Per il teorema spettrale, esiste M matrice ortogonale ($M^t = M^{-1}$) tale che $M A M^t = D$ ← diagonale cioè $A = M^t D M$. Ma allora

$$x^t A x = x^t M^t D M x = (Mx)^t D (Mx) \geq m \|Mx\|^2 = m\|x\|^2$$

uso che D è diagonale

perché M è una matrice ortogonale

[Volendo: $\|Mx\|^2 = (Mx)^t (Mx)$
$= x^t \underbrace{M^t M}_{Id} x = x^t x = \|x\|^2$]

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. del minimo locale}}$ Con Taylor

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0) \cdot h}_{0} + \frac{1}{2} h^t Hf(x_0) h + \underbrace{o(\|h\|^2)}_{r(h)}$$

Per definizione di o piccolo sappiamo che

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|^2} = 0$$

limite in n variabili

. Detto m il più piccolo autovalore di $Hf(x_0)$ si ha che $\exists \delta > 0$ t.c.

$$\frac{r(h)}{\|h\|^2} \geq -\frac{1}{4} m \quad \text{se } \|h\| \leq \delta, \text{ cioè}$$

$$r(h) \geq -\frac{1}{4} m \|h\|^2$$

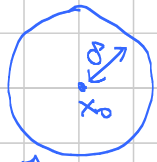
Conclusione come ad Analisi 1:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{2} h^t \, Hf(x_0) \, h + r(h)$$

$\downarrow$ uso fatto ①

$$\geq \frac{1}{2} m \|h\|^2 - \frac{1}{4} m \|h\|^2$$

$$= \frac{1}{4} m \|h\|^2 > 0$$



qui $f(x_0+h) > f(x_0)$

Conclusione: se $\|h\| \leq \delta$ e $h \neq 0$ si ha
$f(x_0+h) > f(x_0)$
quindi x_0 è p.to di min. locale.

—o —o —

<u>Esercizio</u> Rifare la dimostrazione nel caso del max. locale.

—o —o —

$\boxed{\text{Funzioni vettoriali}}$ $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

n variabili in partenza

m componenti in arrivo

<u>Esempio</u> $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad f(x,y) = (\underbrace{x^2-y}_{f_1(x,y)}, \underbrace{e^x y}_{f_2(x,y)}, \underbrace{y}_{f_3(x,y)})$

Morale: dare una funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ vuol dire dare
3 funzioni da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$

Qual è l'equivalente della derivata prima?
È la MATRICE JACOBIANA, ottenuta facendo le derivate parziali delle varie componenti:

$$Jf = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \\ f_{3x} & f_{3y} \end{pmatrix}$$

Le righe di J sono i gradienti delle componenti di f

Nell'esempio: $\qquad Jf = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ e^x y & e^x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{CHAIN RULE}}$ Analisi 1: derivata della funzione composta

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e pongo

$$h(x) = f(g(x))$$

allora $\quad h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Analisi 2 : $\quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, e pongo

$$h(x) = f(g(x)) \qquad h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$$

Allora

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^k \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$$Jh(x) = Jf(g(x)) \cdot Jg(x)$$

prodotto di matrici

(controllare che le dimensioni delle matrici in gioco permettano di fare il prodotto)

<u>Esempio</u> $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y)$

Curva $\quad (x(t), y(t)) \quad t \in [a,b]$ ad esempio la parametrizzazione di una linea nel piano

$g(t) = f(x(t), y(t))$. Problema: calcolare $g'(t)$

$$g'(t) = f_x(x(t),y(t))\, x'(t) + f_y(x(t),y(t))\, y'(t)$$

$$g''(t) = [f_x(x(t),y(t))]'\, x'(t) + f_x(x(t),y(t))\, x''(t) +$$
$$[f_y(\qquad)]'\, y'(t) + f_y(x(t),y(t))\, y''(t)$$

$$= \big(f_{xx}(x(t),y(t))\, x'(t) + f_{xy}(x(t),y(t))\, y'(t)\big)\, x'(t) + f_x(\dots)\, x''(t) +$$
$$\big(f_{yx}(x(t),y(t))\, x'(t) + f_{yy}(x(t),y(t))\, y'(t)\big)\, y'(t) + f_y(\dots)\, y''(t).$$

<u>Esercizio</u> Interpretare il conto per $g'(t)$ in termini di CHAIN RULE, cioè come composizione di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

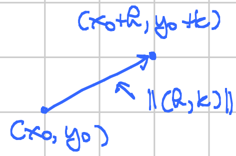
— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 21

Titolo nota 21/03/2014

Formula di Taylor in 2 variabili con centro in (x_0, y_0) e $n = 2$

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) \\
&+ f_x(x_0,y_0)\,h + f_y(x_0,y_0)\,k \\
&+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)\,h^2 + 2 f_{xy}(x_0,y_0)\,hk + f_{yy}(x_0,y_0)\,k^2 \right] \\
&+ o(\underbrace{h^2+k^2}_{\rho^2})
\end{aligned}
$$



Questa si ricava da quella in dimensione.
Considero la funzione

$$g(t) = f(\underbrace{x_0+ht,\ y_0+kt}_{\substack{\text{retta per } (x_0,y_0) \text{ in} \\ \text{direzione } (h,k) \,:\, \text{volendo } (x_0,y_0)+t(h,k)}})$$

Taylor di Analisi 1 dice che

$$g(t) = g(0) + g'(0)\,t + \frac{1}{2} g''(0)\,t^2 + o(t^2)$$

Ora $\boxed{g(0) = f(x_0, y_0)}$

$$g'(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CHAIN RULE}}}{=} f_x(x_0+ht, y_0+kt)\cdot h + f_y(x_0+ht, y_0+kt)\cdot k$$

$$\boxed{g'(0) = f_x(x_0,y_0)\cdot h + f_y(x_0,y_0)\cdot k}$$

Analogamente: $g''(t) = f_{xx}(\dots)\,h^2 + \boxed{f_{xy}(\dots)\,kh} + \boxed{f_{yx}(\dots)\,hk} + f_{yy}(\dots)\,k^3$

$$\boxed{g''(0) = f_{xx}(x_0,y_0)\,h^2 + 2 f_{xy}(x_0,y_0)\,hk + f_{yy}(x_0,y_0)\,k^3}$$

Sostituendo le espressioni di $g(0)$, $g'(0)$ e $g''(0)$ nello sviluppo di Taylor di $g(t)$ ottengo

$$\begin{aligned} f(x_0+ht, y_0+kt) = \; & f(x_0,y_0) && g(0) \\ & + [f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k]\,t && g'(0)t \\ & + \tfrac{1}{2}[f_{xx}(\;)h^2 + 2f_{xy}(\;)hk + f_{yy}(\ldots)k^2]\,t^2 && \tfrac{1}{2}g''(0)t^2 \\ & + o(\ldots) \end{aligned}$$

Basta mettere $t=1$ e si ottiene lo sviluppo di Taylor voluto per f.

— o — o —

Facendo il conto di $g''(t)$ è venuto fuori

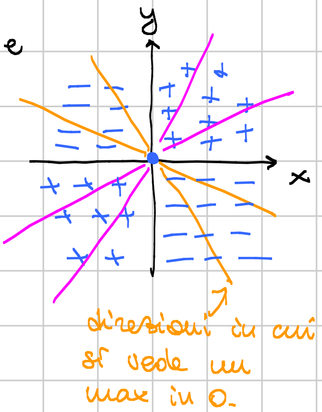
$g''(t)$ = forma quadratica associata a $Hf(x_0,y_0)$ calcolata nel vettore (h,k).

Supponiamo (x_0,y_0) stazionario, cioè $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$.
Allora $g'(0)=0$ ($g(t)$ = quota a cui si trova l'omino che percorre la retta $(x_0,y_0)+t(h,k)$)
Quindi l'omino vede
- un minimo se $g''(0)>0$, cioè se (h,k) è una direzione in cui $Hf(x_0,y_0)$ è positivo
- un massimo se $g''(0)<0$, cioè se (h,k) .... $Hf(x_0,y_0)$ è negativo.

<u>Esempio</u> $f(x,y)=xy$ Qui $(0,0)$ è stazionario e

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le direzioni nel 1° e 3° quadrante fanno vedere un minimo in $(0,0)$ e sono i sottospazi su cui Hf è >0



— o — o —

<u>Esercizio 1</u> $f(x,y) = x^2y^2 + \sin y^5$

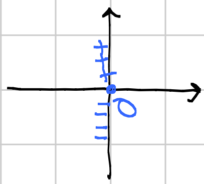
Si vede che l'origine è stazionario: $\nabla f(x,y) = (0,0)$

Si tratta di p.to di max/min?

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ [Bovinamente: calcolare derivate seconde
Astutamente: Taylor in $(0,0)$ non ha termini di grado 2]

Il primo termine di Taylor è sul grado 4 ed è $x^2y^2 \geq 0$ sempre.
L'altro termine è o piccolo e viene mangiato. Quindi
$f(x,y) \geq 0$ vicino all'origine per cui $(0,0)$ è p.to di min. locale.

NO!!! Basta mettere $x=0$ e diventa $f(0,y) = \sin y^5$ che per y negativi piccoli (vicini a 0) è negativa.
Questo dice che $(0,0)$ non è né pto max né pto di min.



Morale: guardare il primo termine di Taylor può essere pericoloso.

<u>Esempio 2</u> $f(x,y) = \cos x + \sin(xy)$

$(0,0)$ è un p.to stazionario

$f_x(x,y) = -\sin x + y\cos(xy)$ $\qquad f_y(x,y) = x\cos(xy)$

$f_{xx}(x,y) = -\cos x - y^2\sin(xy)$ $\qquad f_{yy}(x,y) = -x^2\sin(xy)$

$f_{xy}(x,y) = \cos(xy) - yx\sin(xy)$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ Det $= -1 < 0 \Rightarrow$ segnatura $+\,-$
$\Rightarrow$ p.to di sella

Si vedeva con Taylor? Sì:

$$f(x,y) = \underbrace{1 - \frac{1}{2}x^2}_{\cos x} + \underbrace{xy}_{\sin(xy)} + o(x^2+y^2)$$

La forma quadratica assoc. a $Hf(0,0)$ è

moltiplico per 2

$\boxed{-x^2 + 2xy}$

<u>Esempio 3</u> $f(x,y) = x^2 + \arctan(xy)$ inf / sup su $\mathbb{R}^2$

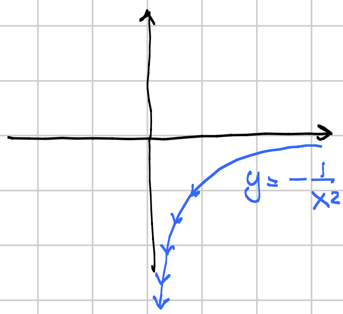
Facile: $\sup = +\infty$ ($y=0$, x enorme)

Se fossimo sul 1° quadrante ($x \geq 0, y \geq 0$) avremmo $\inf = \min = 0$, in quanto $f(x,y) \geq 0$ sempre nel 1° quadrante e $f(x,y) = 0$ se e solo se $x = 0$

Può essere $\inf = \min = 0$ su $\mathbb{R}^2$? L'origine è stazionario e la forma quadratica in $(0,0)$ è $x^2 + xy$
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$
che ha autovalori ++, quindi l'origine è un p.to di min. locale. ↑No è $+-$, quindi è una sella (corretto dopo video)

Se voglio $f(x,y)$ neg, mi serve $x \sim 0$ e xy molto negativo.

Basta prendere $y = -\frac{1}{x^2}$ e $x \sim 0$



Ottengo

$$f\left(x, -\frac{1}{x^2}\right) = x^2 + \arctan\left(-\frac{1}{x}\right)$$

quando $x \to 0^+$, la funzione tende a $-\frac{\pi}{2}$ che è proprio l'inf (sotto non si può andare).

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 22

Titolo nota 27/03/2014

INTEGRALI DOPPI Integrali per funzioni di 2 variabili $f(x,y)$

① Come si indicano ?
② Qual è il significato geometrico ?
③ Come si definiscono ?
④ Come si calcolano ?

[1] NOTAZIONE

$$\iint_{A} \boxed{f(x,y)} \, \boxed{dxdy}$$

integrale doppio

variabili rispetto a cui si integra

integranda : funzione che si integra

zona di integrazione : insieme su cui si integra

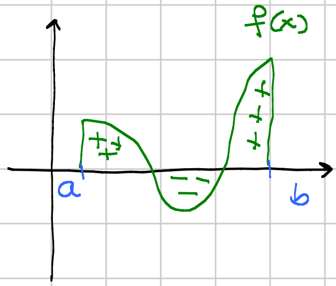
Ingredienti fondamentali :
- insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO (zona di integrazione)
- $f : A \to \mathbb{R}$ funzione LIMITATA ($\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x,y)| \leq M$ per ogni $(x,y) \in A$)

SE ci sono i 2 ingredienti fond, l'integrale si dice PROPRIO, se ne manca almeno uno l'integrale si dice IMPROPRIO.

Notazione più rapida : $\int_A f(x,y)\,dxdy$ (si capisce dal resto che è doppio).

[2] Significato geometrico

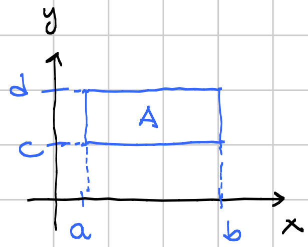
Analisi 1 $\int_a^b f(x)\,dx$ = area con segno della parte di piano compresa tra asse x e grafico di $f(x)$



$\boxed{\text{Analisi 2}}$ $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ = se $f(x,y) \geq 0$ sempre allora è il volume della parte di spazio compresa tra il piano xy ed il grafico di $f(x,y)$ e limitata lateralmente da pareti verticali che si proiettano sul bordo di A.
Se $f(x,y)$ ha segno qualunque le parti sotto il piano xy contano con il segno $-$.

$\boxed{3}$ $\boxed{\text{Come si definirebbero}}$ Tre fasi:
- → caso banale
- → caso semibanale
- → caso generale.

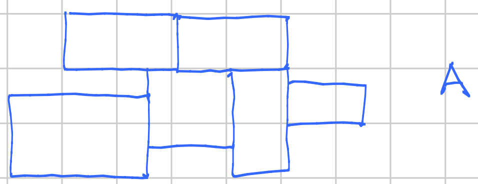
<u>Caso banale</u>: $A = [a,b] \times [c,d]$, cioè un rettangolo con lati // agli assi
$f(x,y) = \lambda$ costante in A



In questo caso $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \lambda \cdot \text{Area}(A)$ = volume con segno del parallelepipedo

$$= \lambda\,(b-a)(d-c)$$

<u>Caso semibanale</u>: A = unione disgiunta di rettangoli come sopra ← nel senso che i rett. possono avere tratti di lato in comune, ma non parti interne



Il grafico di $f(x,y)$ è "un sistema di mattoni" uno vicino all'altro

$f(x,y)$ = costante, eventualmente diversa da rettangolo a rettangolo

Più formalmente $A = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$ ← rettangoli $[a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$

e $f(x,y) = \lambda_i$ per ogni $(x,y) \in R_i$

In questo caso $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \text{Area}(R_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (b_i - a_i)(d_i - c_i)$$

<u>Caso generale</u> Sia ora A un qualunque insieme LIMITATO e sia $f(x,y)$ una qualunque funzione LIMITATA.

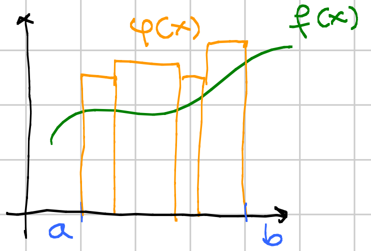
Per prima cosa considero $f(x,y)$ definita per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ponendola uguale a 0 per ogni $(x,y) \notin A$.

Si definisce l' INTEGRALE SUPERIORE

$$I^+(f,A) = \inf \left\{ \iint_A \varphi(x,y)\,dx\,dy : \varphi \text{ è una funzione semibanale e } \varphi(x,y) \geq f(x,y) \text{ per ogni } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

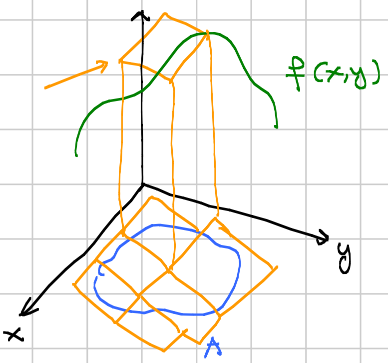
Brutalmente: sto inglobando il volume da calcolare in una unione finita di parallelepipedi come nel caso semibanale e cerco di farlo "sprecando meno possibile" ⇝ inf.

Analisi 1



questi parallelepipedi contengono il volume che interessa

Analisi 2



Analogamente si definisce l'INTEGRALE INFERIORE

$$I^-(f,A) = \sup \left\{ \iint_A \varphi(x,y)\,dx\,dy : \varphi(x,y) \text{ è di tipo semibanale e } \varphi(x,y) \leq f(x,y) \text{ per ogni } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Teorema (abbastanza facile e intuitivo) Per ogni A limitato e per ogni f limitata si ha che

$$\boxed{I^-(f,A) \leq I^+(f,A)}$$

Oss. Esistono esempi di funzioni f "strane" per cui vale il < stretto.

Def. Una funzione $f(x,y)$ si dice integrabile secondo RIEMANN in A se

$$\boxed{I^-(f,A) = I^+(f,A)}$$

Terminologia :

- Somme di Riemann inferiori / superiori : quelle usate nella def. di integrale inferiore / superiore.
- Funzioni a gradino, funzioni semplici, step functions : quelle del caso semibanale.

Teorema Se $f(x,y)$ è continua e limitata in A, allora f è integrabile secondo Riemann in A.

$\boxed{\text{Oss.}}$ Dove ho usato che f ed A sono limitati ?
Serve per essere sicuri che
- esista una step function $\varphi(x,y) \geq f(x,y)$ ovunque
- " " " " $\varphi(x,y) \leq f(x,y)$ "

(ogni funzione f limitata in un insieme A limitato è contenuta in un parallelepipedo enorme).

— o — o —

$\boxed{\text{Proprietà dell'integrale}}$

① Linearità
$$\iint_A [f_1(x,y) + f_2(x,y)]\,dx\,dy = \iint f_1 + \iint f_2$$
$$\iint_A c\, f(x,y)\,dx\,dy = c \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

② Monotonia se $f(x,y) \leq g(x,y)$ per ogni $(x,y) \in A$, allora
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_A g(x,y)\,dx\,dy$$

In particolare, se $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in A$, allora per forza
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \geq 0.$$

③ Additività rispetto alla zona di integrazione

o che si toccano solo sul bordo.

Se $A \cap B = \emptyset$, allora
$$\iint_{A\cup B} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f + \iint_B f$$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 23

Titolo nota 27/03/2014

Calcolo di integrali doppi

SLOGAN: un integrale doppio = 2 integrali singoli (in una variabile)

FORMULE DI RIDUZIONE
1. Caso dei rettangoli
2. Caso degli insiemi NORMALI
3. Caso generale

Formula di riduzione su un rettangolo Sia $A = [a,b] \times [c,d]$

Allora

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx}$$

Esempio 1 $A = [0,1] \times [2,4]$ $\qquad f(x,y) = x + x^2 y$

$$\iint_A (x+x^2y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \underbrace{\int_2^4 dy\,(x+x^2y)}$$

Devo calcolare questo: calcolo la primitiva rispetto alla variabile y e poi sostituire gli estremi di integrazione $y=2$ e $y=4$

$$= \int_0^1 dx \underbrace{\left[xy + \frac{1}{2}x^2y^2 \right]}_{y=2}^{y=4}$$

Derivato rispetto ad y dà $x + x^2y$

$$= \int_0^1 dx\,(4x + 8x^2 - 2x - 2x^2)$$

$$= \int_0^1 (2x + 6x^2)\,dx = \left[x^2 + 2x^3 \right]_0^1 = 1 + 2 = 3$$

In alternativa:

$$\iint_A (x+x^2y)\,dx\,dy = \int_2^4 dy \underbrace{\int_0^1 dx\,(x+x^2y)}_{\text{faccio la primitiva rispetto ad } x}$$

$$= \int_2^4 dy \left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3y\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \int_2^4 dy \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}y-0-0\right] = \int_2^4 \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}y\right) dy$$

$$= \left[\frac{y}{2}+\frac{1}{6}y^2\right]_{y=2}^{y=4}$$

$$= \frac{4}{2}+\frac{16}{6}-\frac{2}{2}-\frac{4}{6} = 2+2-1 = 4-1 = 3.$$

—o —o —

Esempio 2 $\quad \displaystyle\iint_A x^2 \sin y\,dx\,dy \qquad A=[0,3]\times[0,\pi]$

$$= \int_0^3 dx \int_0^\pi dy\, x^2 \sin y = \int_0^3 dx\; x^2 \int_0^\pi \sin y\,dy = \int_0^3 x^2 dx\,[-\cos y]_0^\pi$$

è una costante quando integro rispetto ad y, quindi può andare fuori

$$= 2\int_0^3 x^2 dx = \frac{2}{3}[x^3]_0^3 = 18$$

In alternativa

$$\iint_A x^2 \sin y\,dx\,dy = \int_0^\pi dy \int_0^3 dx\; x^2 \sin y = \int_0^\pi \sin y\,dy \int_0^3 x^2 dx$$

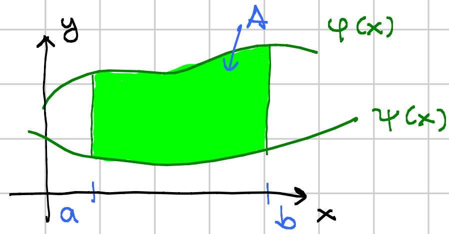
$$= \int_0^\pi \sin y\,dy \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 9\int_0^\pi \sin y\,dy = \dots = 18.$$

—o —o —

INSIEMI NORMALI

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice normale rispetto all'asse x se è del tipo

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ \psi(x) \le y \le \varphi(x)\}$$



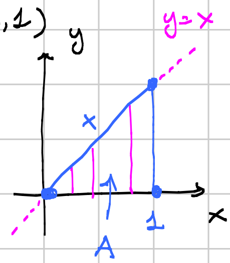
Formula di riduzione:

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \underbrace{\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy}}$$

Quando calcolo questo faccio la primitiva risp. a y e come estremi sostituisco $y = \varphi(x)$ e $y = \psi(x)$

Esempio 3 $\quad A$ = triangolo con vertici in $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$

$f(x,y) = x + x^2 y$



Scrivo A come insieme normale risp. asse x

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ \underbrace{0 \le y \le x}\}$$

fissato x, y varia tra 0 e x

$$\iint_A (x + x^2 y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x dy\,(x + x^2 y)$$

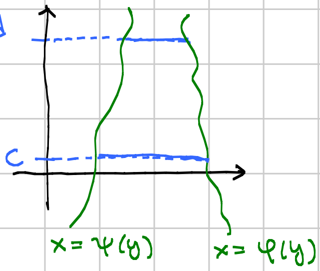
$$= \int_0^1 dx \left[xy + \frac{1}{2}x^2 y^2\right]_{y=0}^{y=x} \quad (\text{sostituisco } y = x \text{ e } y = 0)$$

$$= \int_0^1 dx \left[x^2 + \frac{1}{2}x^4\right] = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{13}{30}.$$

Def. Un insieme si dice normale rispetto all'asse y se è del tipo

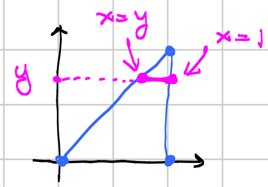
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in [c,d], \ \psi(y) \le x \le \varphi(y)\}$$



Formula di riduzione:

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} dx \ f(x,y)}$$

Esempio 3 (revisited)



Il triangolo, visto come normale rispetto all'asse y diventa

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in [0,1], \ y \le x \le 1\}$$

$$\iint_A (x + x^2 y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_y^1 dx \ (x + x^2 y)$$

$$= \int_0^1 dy \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 y\right]_{x=y}^{x=1}$$

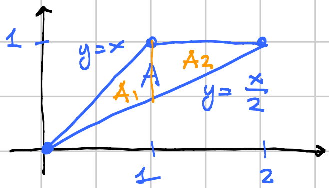
$$= \int_0^1 dy \left(\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}y}_{x=1} \ \underbrace{- \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^4}_{x=y}\right)$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^4\right) dy$$

$$= \left[\frac{1}{2}y + \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{15}y^5\right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{6}} - \cancel{\frac{1}{6}} - \frac{1}{15} = \frac{15-2}{30} = \frac{13}{30}$$

Esempio 4

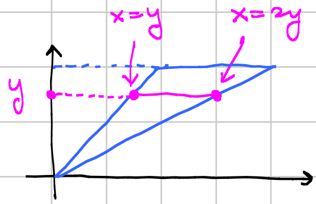


Rispetto asse x:

$$\iint_A f = \iint_{A_1} f + \iint_{A_2} f$$

$$= \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{x} dy\ f(x,y) + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{1} dy\ f(x,y)$$

Rispetto asse y:



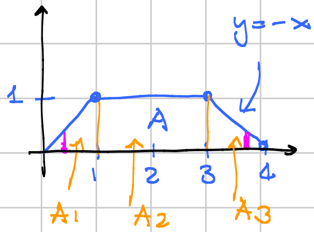
$$\iint_A f = \int_0^1 dy \int_y^{2y} dx\ f(x,y)$$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 24

Titolo nota 27/03/2014

<u>Esempio 1</u> Il trapezio A è l'unione di 3 insiemi normali rispetto all'asse x:



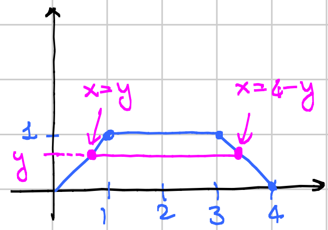
$A_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$

$A_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 1\}$

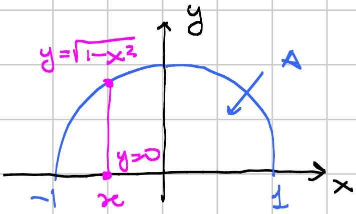
$A_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 4-x\}$

Visto come insieme normale rispetto all'asse y diventa

$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 4-y\}$



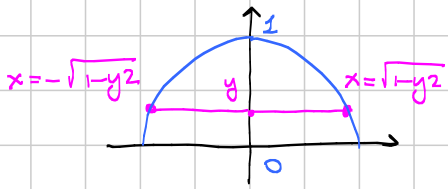
<u>Esempio 2</u> $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \ge 0,\ x^2+y^2 \le 1\}$



Normale rispetto asse x:

$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$

Normale rispetto asse y:

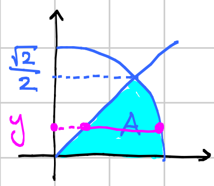


$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}\}$

— o — o —

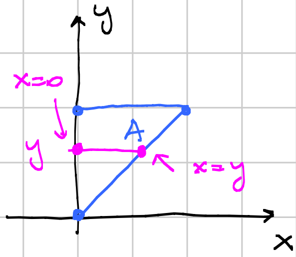
<u>Esempio 3</u> Normale risp. asse x: due pezzi

Normale rispetto asse y:



$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2},\ y \le x \le \sqrt{1-y^2}\}$

Esempio 4 A = triangolo con vertici in $(0,0), (0,1), (1,1)$



$$\iint_A x e^{y^3} \, dx\,dy$$

Normale risp. asse x: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \ x \le y \le 1\}$

Quindi $\displaystyle \iint_A x e^{y^3} dx\,dy = \int_0^1 dx \int_x^1 dy \; x e^{y^3} = \int_0^1 x \, dx \int_x^1 e^{y^3} dy$

... non so fare la primitiva di e^{y^3} ☹

Provo a vedere che succede con normale rispetto asse y

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1, \ 0 \le x \le y\}$$

Quindi $\displaystyle \iint_A x e^{y^3} dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^y dx \; x e^{y^3} = \int_0^1 e^{y^3} dy \int_0^y x \, dx$

$$= \int_0^1 e^{y^3} dy \left[\frac{1}{2} x^2\right]_{x=0}^{x=y} = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{y^3} (y^2 - 0) \, dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy = \frac{1}{6} \left[e^{y^3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}(e-1).$$

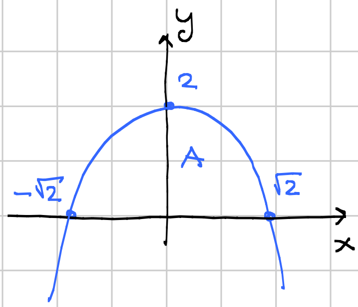
☺

— o — o —

Esempio 5 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2 - x^2\}$

sopra asse x — y sotto parabola

$f(x,y) = x + y^2$



A = normale risp. asse x =
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}, \ 0 \le y \le 2 - x^2\}$

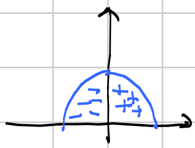
$$\iint_A (x+y^2) \, dx\,dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^{2-x^2} dy \, (x+y^2) = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \left[xy + \frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=2-x^2}$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \left[x(2-x^2) + \frac{1}{3}(2-x^2)^3 \right] = \text{sono conti con polinomi.}$$

Un paio di scorciatoie: USO DELLE SIMMETRIE

① $\iint_A x \, dx\, dy = 0$ (facendo i conti si vede)

Ma si poteva vedere da subito perché



→ l'insieme A è simmetrico risp. asse y

→ se cambio x con $-x$ la funzione cambia segno

② $\iint_A y^2 \, dx\, dy = 2 \iint_{A_1} y^2 \, dx dy$ dove A_1 è la metà destra di A

Questo segue dal fatto che

→ l'insieme A è simmetrico risp. asse y

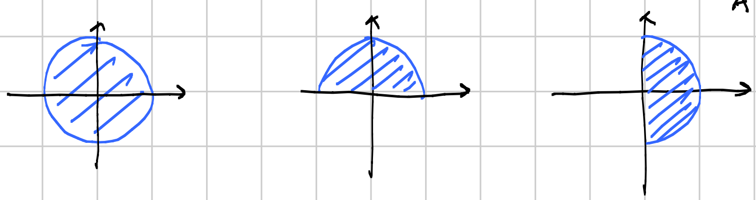
→ se cambio x con $-x$ la funzione resta la stessa.

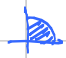
Analisi 1

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \text{ è dispari} \\ 2\int_0^a f(x)\, dx & \text{se } f(x) \text{ è pari} \end{cases}$$

— o — o —

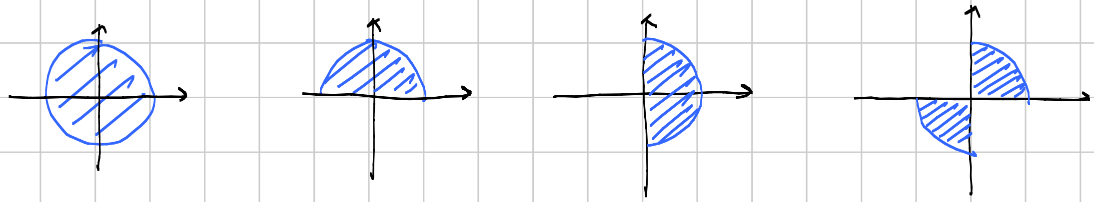
Esempio 6 Su quali insiemi A si ha che $\iint_A x \, dx dy = 0$



SI SI NO qui viene >0 e viene 2 volte quello su 

Stessa cosa se fosse $\iint_A x^3 \, dx dy$ o $\iint_A \arctan x \, dx$. Sono funzioni DISPARI

Esempio 7 $\quad \iint_A xy \, dx \, dy$



$\boxed{\text{SI}}$ $\quad$ $\boxed{\text{SI}}$ $\quad$ $\boxed{\text{SI}}$ $\quad$ $\boxed{\text{NO}}$ viene > 0

- A simm. asse y
- se cambio x con $-x$ la funz. cambia segno

- A simm. asse x
- se cambio y con $-y$ la funz. cambia segno

Stessi insiemi con $\quad \iint_A x^5 y^6 \, dx\, dy$

$\boxed{\text{SI}}$
- A simm. asse y
- se cambio x con $-x$

$\boxed{\text{SI}}$ stesso motivo

$\boxed{\text{NO}}$ viene > 0

$\boxed{\text{SI}}$
- A ha simmetria centrale: $(x,y) \to (-x,-y)$
- se cambio (x,y) con $(-x,-y)$ la funzione cambia segno.

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 25

Titolo nota 28/03/2014

INTEGRALI TRIPLI Integrali di funzioni $f(x,y,z)$.

1. Come si indicano
2. Significato geometrico / fisico
3. Definizione
4. Tecniche di calcolo

1 Notazioni $\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ anche $\int_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

- $A \subseteq \mathbb{R}^3$ insieme limitato
- $f: A \to \mathbb{R}$ funzione limitata

2 Interpretazione Penso $A \subseteq \mathbb{R}^3$ come un corpo solido.
Supponiamo $f(x,y,z) \geq 0$ che rappresenta la densità del materiale di cui è fatto A.

Allora $\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ = massa totale del corpo

3 Definizione

→ Caso banale: A = parallelepipedo con spigoli (lati) // agli assi
$f(x,y,z) = \lambda$ costante in A

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lambda \cdot \text{Volume}(A)$$

"densità" · Volume = massa totale

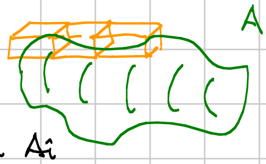
→ Caso semi-banale: A = unione di parallelepipedi come sopra disgiunti
f = costante, eventualmente diversa in ogni parallelepipedo
(step function)

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \text{somma } \lambda_i \cdot \mathrm{Vol}(A_i)$$

costante di f nell'i-esimo parall.

i-esimo parall.

→ Caso generale : A ed f qualunque



Approssimo A con una unione di parallelepipedi A_i e faccio finta che in ogni A_i la f sia costante.

Formalmente

$$I^+(f,A) := \inf \left\{ \iiint_A \varphi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz : \varphi \text{ è step. function e } \varphi(x,y,z) \geq f(x,y,z) \text{ per ogni } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$I^-(f,A) = \sup \{ \ldots \quad \varphi(x,y,z) \leq f(x,y,z) \ldots \}$$

Def. Se $I^+(f,A) = I^-(f,A)$ (in generale vale solo $\geq$), allora si dice che f è integrabile secondo RIEMANN in A

— o — o —

$\boxed{4}$ $\boxed{\text{Tecniche di calcolo}}$ Formule di riduzione:

$\boxed{3 = 1+1+1}$ $\boxed{3 = 2+1}$ $\boxed{3 = 1+2}$

Formula di riduzione su un parallelepipedo

Supponiamo che $A = \underset{x}{[a,b]} \times \underset{y}{[c,d]} \times \underset{z}{[e,f]}$

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz\; f(x,y,z)}$$

Permutando x,y,z si ottengono 6 possibili formule di riduzione

<u>Esempio</u> $A = [0,1]\times[0,2]\times[-1,3]$ $\quad f(x,y,z) = x+y^2z^3$

$$\iiint_A (x+y^2z^3)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_{-1}^3 dz\,(x+y^2z^3)$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 dy\,\underbrace{\left[xz + \frac{1}{4}y^2z^4\right]}_{\text{primitiva risp. a } z}{}_{z=-1}^{z=3}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 dy\,\Big(\underbrace{3x + \frac{81}{4}y^2}_{z=3} \underbrace{+\,x - \frac{1}{4}y^2}_{z=-1}\Big)$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 dy\,(4x+20y^2) = 4\int_0^1 dx \int_0^2 (x+5y^2)\,dy$$

$$= 4\int_0^1 dx\,\underbrace{\left[xy + \frac{5}{3}y^3\right]}_{\text{primitiva rispetto ad } y.}{}_{y=0}^{y=2}$$

$$= 4\int_0^1 dx\left(2x + \frac{40}{3}\right) = 4\left[x^2 + \frac{40}{3}x\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= 4\left(1+\frac{40}{3}\right) = \frac{4\cdot 43}{3} = \frac{172}{3}.$$

Si poteva procedere in altri modi, per esempio

$$\iiint_A (x+y^2z^3)\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^3 dz \int_0^1 dx \int_0^2 dy\,(x+y^2z^3)$$

[Controllare che venga uguale]

— o — o —

$\boxed{\text{Osservazione generale}}$ L'integrale di $f(x,y,z) \equiv 1$

$\boxed{\text{Analisi 1}}$ $\displaystyle\int_a^b 1\,dx = (b-a) =$ lunghezza dell'intervallo di integrazione

È l'area di un rettangolo con altezza 1 e base $(b-a)$, quindi il numero che rappresenta l'area è la lungh. $(b-a)$ della base

Integrale doppio : se $A \subseteq \mathbb{R}^2$, allora

$$\boxed{\iint_A 1 \, dx\,dy = \text{Area}(A)}$$

(sarebbe il volume di un "prisma" con base A ed altezza 1, quindi Vol = Area (base))

Integrale triplo : se $A \subseteq \mathbb{R}^3$, allora

$$\boxed{\iiint_A 1 \, dx\,dy\,dz = \text{Vol}(A)}$$

(sarebbe la massa totale di un solido di densità 1)

Esempio di prima (revisited)

$$\iiint_A (x+y^2z^3)\,dx\,dy\,dz = \iiint_A x\,dx\,dy\,dz + \iiint_A y^2z^3\,dx\,dy\,dz$$

Li calcolo separatamente : $\displaystyle\iiint_A x\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_{-1}^3 dz \; x$

$$= \int_0^1 x\,dx \underbrace{\int_0^2 dy \int_{-1}^3 dz \cdot 1} = 8 \int_0^1 x\,dx = 4$$

integrale doppio di 1 sull' insieme $[0,2] \times [-1,3]$ = Area insieme = $2 \cdot 4 = 8$

$$\iiint_A y^2z^3\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 dy \int_{-1}^3 dz \int_0^1 dx \; y^2 z^3 = \int_0^2 y^2\,dy \int_{-1}^3 z^3\,dz \underbrace{\int_0^1 dx \cdot 1}_{\text{lungh. int} = 1}$$

$$= \int_0^2 y^2\,dy \int_{-1}^3 z^3\,dz = \int_0^2 y^2\,dy \left[\frac{1}{4} z^4\right]_{z=-1}^{z=3} = 20 \int_0^2 y^2\,dy$$

$$= 20 \left[\frac{1}{3} y^3\right]_{y=0}^{y=2} = \frac{160}{3}$$

Risultato finale : $\displaystyle 4 + \frac{160}{3} = \frac{172}{3}.$

— o — o —

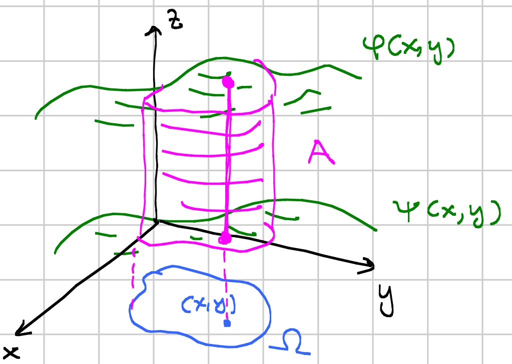
ANALISI 2 — LEZIONE 26

Titolo nota 28/03/2014

Formula di riduzione per colonne $\boxed{3 = 2+1}$

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice <u>normale rispetto al piano xy</u> se è del tipo

$$\boxed{A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega,\ \psi(x,y) \le z \le \varphi(x,y)\}}$$



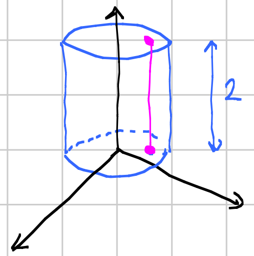
L'insieme A è una specie di cilindro che ha base inferiore e superiore descritte dalle funzioni $\varphi(x,y)$ e $\psi(x,y)$ e la superficie laterale che si proietta sul bordo di Ω.

La formula di riduzione è

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} dz\, f(x,y,z)}$$

Brutalmente:
- (x,y) variano in Ω, che sarebbe la proiezione di A sul piano xy.
- Fissato (x,y) in Ω, z varia tra $\psi(x,y)$ e $\varphi(x,y)$ e questa è la "colonna sopra" il p.to (x,y).

Esempio 1



$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2 \le 1}_{(x,y) \text{ in un cerchio}}, \underbrace{0 \le z \le 2}_{\text{colonna}}\}$

$$\iiint_A x^2 z \, dx\,dy\,dz = \iint_{\Omega} dx\,dy \int_0^2 dz \; x^2 z = \iint_{\Omega} x^2 dx\,dy \int_0^2 z\,dz \ldots$$

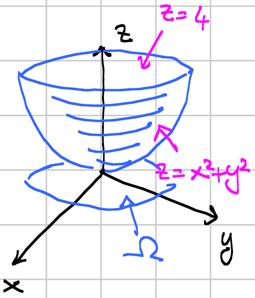
base $x^2+y^2 \le 1$

$z \in [0,2]$ è la colonna su (x,y)

Esempio 2 $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z \le 4\}$

z sopra il grafico di x^2+y^2

z sotto quota 4



$\iiint_A z^2 \, dx\,dy\,dz$

Devo scrivere A come insieme normale rispetto al piano xy. Mi serve Ω, che sarebbe la proiezione di A sul piano xy.

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \; x^2+y^2 \le 4\} = \text{cerchio di raggio } 2$$

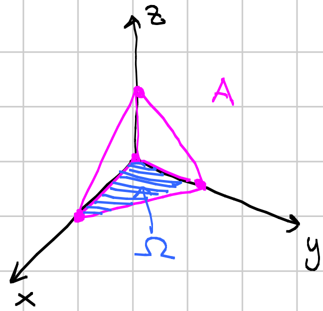
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \; (x,y) \in \Omega, \; \underbrace{x^2+y^2}_{\psi(x,y)} \le z \le \underbrace{4}_{\varphi(x,y)}\}$$

$$\iiint_A z^2 \, dx\,dy\,dz = \underbrace{\iint_{\Omega}}_{\text{Base}} dx\,dy \underbrace{\int_{x^2+y^2}^{4}}_{\text{estremi della colonna}} dz \; z^2$$

$$= \iint_{\Omega} dx\,dy \left[\frac{1}{3} z^3\right]_{z=x^2+y^2}^{z=4} = \frac{1}{3} \iint_{\Omega} [64 - (x^2+y^2)^3] \, dx\,dy$$

primitiva risp. a z

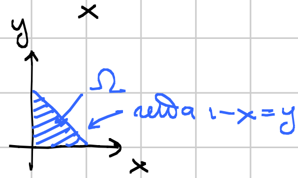
= integrale doppio ...



Esempio 3 (Esercizio della tenda)

A = piramide con vertici in $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

Come descrivo A come insieme normale rispetto al piano xy.



La proiezione Ω è il triangolo in $\mathbb{R}^2$.
La colonna sul pto (x,y) è data da segmento che va da $z=0$ all'eq. del piano $x+y+z=1$, cioè $z = 1-x-y$

In conclusione

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{(x,y) \in \Omega}_{\text{Base}}, \underbrace{0 \le z \le 1-x-y}_{\text{colonna su } (x,y)}\}$$

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \int_0^{1-x-y} dz\; f(x,y,z)$$

a sua volta Ω è normale rispetto asse x in $\mathbb{R}^2$

$$= \underbrace{\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy}_{\text{scrittura di } \Omega \text{ come normale risp. asse } x.} \int_0^{1-x-y} dz\; f(x,y,z)$$

— o — o —

Formula di riduzione per sezioni $\quad$ $3 = 1+2$

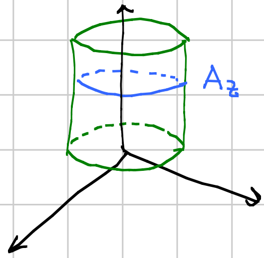
$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dz \iint_{A_z} dx\,dy\; f(x,y,z)}$$

z varia tra a e b

a = minima quota di A
b = massima quota di A

Sezione di A a quota z

$\boxed{\text{Esempio 4}}$ $\iiint_A z^2\,dx\,dy\,dz$



A = cilindro dell'esempio 1

$$= \underbrace{\int_0^2 dz}_{} \iint_{A_z} dx\,dy\; z^2$$

z nell'insieme A varia tra 0 e 2

sezione ad altezza z = intersezione tra A ed il piano a quota z

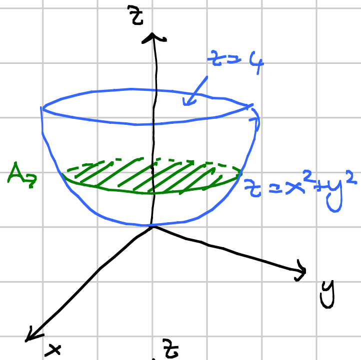
Qualunque sia z la sezione A_z è un cerchio di raggio 1.

Quindi $$= \int_0^2 dz \iint_{A_z} z^2\,dx\,dy = \int_0^2 z^2\,dz \underbrace{\iint_{A_z} dx\,dy}_{\text{Area}(A_z)\,=\,\pi}$$

$$= \pi\int_0^2 z^2\,dz = \pi\left[\frac{1}{3}z^3\right]_{z=0}^{z=2} = \frac{8}{3}\pi$$

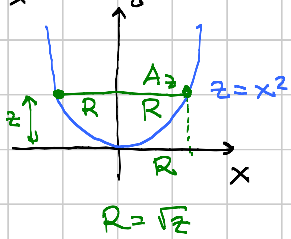
— o — o —

<u>Esempio 5</u> = Esempio 2 fatto per sezioni



$$\iiint_A z^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^4 dz \iint_{A_z} dx\,dy\; z^2$$

$$= \int_0^4 z^2\,dz \iint_{A_z} dx\,dy = \int_0^4 z^2\,dz \cdot \text{Area}(A_z)$$



A_z è un cerchio di raggio $\sqrt{z}$

$$= \int_0^4 z^2 \underbrace{\pi z}_{\text{Area}(A_z)}\,dz = \pi\left[\frac{1}{4}z^4\right]_{z=0}^{z=4} = 64\pi$$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 27

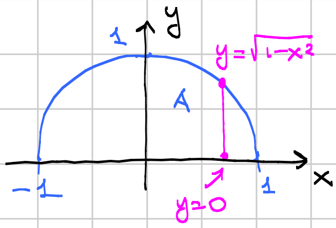
Titolo nota 29/03/2014

INTEGRALI DOPPI IN COORDINATE POLARI

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\boxed{\rho}\,d\rho\,d\theta}$$

B: insieme A descritto in coordinate polari

ρ: pagamento



Esempio 1 $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$

$f(x,y) = x^2$

1° modo: A è normale rispetto all'asse x

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$$

$$\iint_A x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\ x^2 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx \underbrace{\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy}_{\text{lungh. colonna}}$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$ e da qui è analisi 1, un po' seccante perchè c'è la radice.

(Mi aspetto che venga positivo e uguale al doppio di quello in $\cancel{\mathbb{R}}$)

2° modo: A ha una certa simmetria radiale, cioè si descrive bene in coordinate polari, diventando

$$\boxed{0 \le \rho \le 1 \qquad 0 \le \theta \le \pi}$$

Nuovi estremi di integrazione nelle variabili ρ e θ

$$\iint_A x^2\,dx\,dy = \boxed{\int_0^1 d\rho \int_0^{\pi} d\theta}\ \boxed{\rho^2\cos^2\theta}\ \boxed{\rho}$$

ρ: pagamento da aggiungere

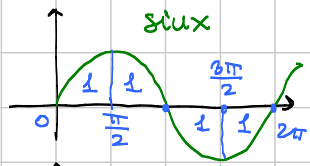
Nuovi estremi (A in coord. polari)

$\rho^2\cos^2\theta$: x^2 in coordinate polari

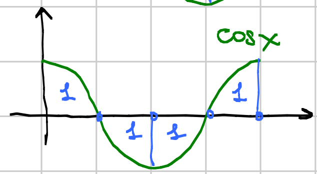
$$= \int_0^1 d\rho \int_0^\pi d\theta \; \rho^3 \cos^2\theta = \int_0^1 \rho^3 d\rho \underbrace{\int_0^\pi \cos^2\theta \, d\theta}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

Fatti noti di Analisi 1

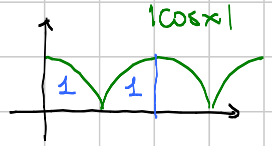


$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1 = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \, dx$$



$$\int_0^\pi \cos x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x \, dx = 0$$

Integrali di $\sin x$ o $\cos x$ con estremi che sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$ si calcolano "a occhio". Analogamente



$$\int_0^\pi |\cos x| dx = 2$$

— o — o —

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = S \qquad \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = C$$

Osservazione: i grafici di $\sin^2 x$ e $\cos^2 x$ in $[0, \frac{\pi}{2}]$ sono l'uno il simmetrico dell'altro, quindi $S = C$. D'altra parte

$$S + C = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Quindi $S = C = \frac{\pi}{4}$ [Volendo si calcola anche con la primitiva]

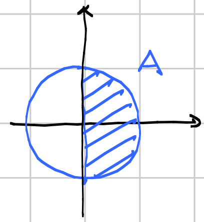
Più in generale, la cosa vale anche in $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$, e così via.

Conclusione da ricordare: l'integrale di $\sin^2 x$ o di $\cos^2 x$ in un intervallo i cui estremi sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$ è uguale a metà della lunghezza dell'intervallo.

Achtung! Vale solo per $\sin^2 x$ e $\cos^2 x$ (non altri esponenti) e solo se gli estremi sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$.

— o — o —

Esempio 2 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x^2+y^2 \le 2,\ x \ge 0\}$



$\iint_A x \, dx\, dy$ [Mi aspetto che venga > 0]

A in coord. polari diventa $0 \le \underbrace{\rho \le \sqrt{2}}_{\text{raggio}}$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

(andrebbe bene anche $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le \frac{5\pi}{2}$) [evitare assurdità tipo $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$]

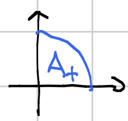
$$= \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \ \underbrace{\rho\cos\theta}_{x} \ \underbrace{\rho}_{\text{pag.}} = \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta}_{2}$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \, d\rho = \frac{2}{3}\left[\rho^3\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

— o — o —

Esempio 3 A come sopra

$\iint_A y \, dx\, dy = 0$ [per simmetria!] [Fare il conto per esercizio]



$$\iint_A |y| \, dx\, dy = 2\iint_{A_+} |y| \, dx\, dy = 2\iint_{A_+} y \, dx\, dy$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \ \underbrace{\rho\sin\theta}_{y} \ \underbrace{\rho}_{\text{pag}}$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \, d\rho \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta}_{1} = 2\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

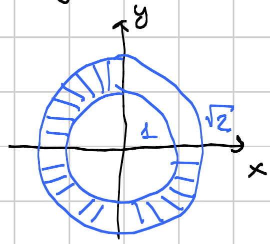
Era prevedibile che fosse lo stesso dell'esempio precedente!! Cioè

$\iint_{A^+} y \, dx\, dy = \iint_{A^+} x \, dx\, dy$

↗ È lo stesso figura ruotata di 90°

↘ La simmetria $(x,y) \to (y,x)$ manda A_+ in se stesso e manda la funzione y nella funzione x

Esempio 4 $\iint_A x^2 \, dx \, dy \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2+y^2 \le 2\}$



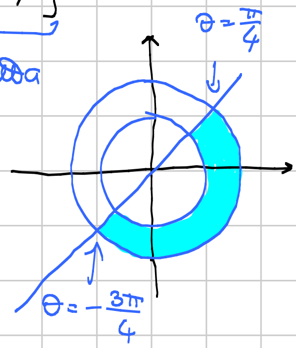
$$= \int_1^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \ \rho^2 \cos^2\theta \ \rho$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \pi \int_1^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[\rho^4\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}[4-1] = \frac{3\pi}{4}$$

— o — o —

Esempio 5 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \underbrace{1 \le x^2+y^2 \le 2}_{\text{corona}}, \ \underbrace{y \le x}_{\text{sotto retta } y = x}\}$



Come insieme normale è orribile !!!

$$\int_1^{\sqrt{2}} d\rho \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \ \rho^2 \cos^2\theta \ \rho$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \underbrace{\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \, d\theta}$$

Questo non si fa
con il trucco !!!
estremi non multipli di $\frac{\pi}{2}$!!!

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

$$\Rightarrow \int \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta)$$

e da qui si fa...

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 28

Titolo nota 29/03/2014

CAMBI DI VARIABILE IN GENERALE (Vale allo stesso modo per integrali doppi e tripli)

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B g(u,v)\,J(u,v)\,du\,dv}$$

u e v sono le nuove variabili

B: insieme A nelle nuove variabili

g(u,v): funzione f nelle nuove variabili

J(u,v): pagamento

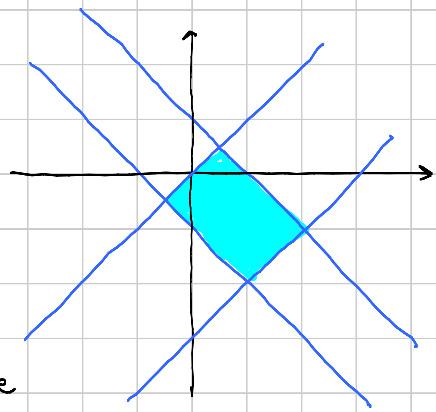
Esempio 1 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x+y \le 1,\ 0 \le x-y \le 3\}$

$f(x,y) = x^2 - y^2$

$-1 \le x+y \le 1 \qquad -x-1 \le y \le 1-x$

$0 \le x-y \le 3 \rightsquigarrow y \le x,\ y \ge x-3$

$x-3 \le y \le x$



Volendo A lo posso scrivere come unione di insiemi normali, ma è scomodo...

$$-1 \le \underbrace{x+y}_{u} \le 1, \qquad 0 \le \underbrace{x-y}_{v} \le 3$$

$$f(x,y) = x^2-y^2 = (x+y)(x-y) = u \cdot v$$

$$\iint_A (x^2-y^2)\,dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{1} du \int_0^3 dv}_{\text{A nelle nuove variabile}} \quad \underbrace{uv}_{\text{f nelle nuove variabili}} \quad \underbrace{J(u,v)}_{\text{Da calcolare}}$$

Come calcolo il pagamento $J(u,v)$?

① Ricavo x e y
② Matrice Jacobiana
③ Determinante

$\boxed{1}$ Ricavo x e y : $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ Voglio trovare x e y in funzione di u e v

Sommo: $2x = u+v$, quindi $x = \frac{u+v}{2}$

Sottraggo: $2y = u-v$, quindi $y = \frac{u-v}{2}$

② Scrivo la jacobiana della trasformazione

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

③ $J(u,v) = |\,\text{Det}(\text{matrice})\,| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$

Quindi l'integrale iniziale è diventato

$$\int_{-1}^{1} du \int_{0}^{3} dv \; uv \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}}}_{J(u,v)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} u\,du \int_{0}^{3} v\,dv = \frac{1}{2}\int_{0}^{3} v\,dv \underbrace{\int_{-1}^{1} u\,du}_{=0} = 0.$$

— o — o —

<u>Osservazione</u> In coordinate polari abbiamo

$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta$ (ricavo x e y)

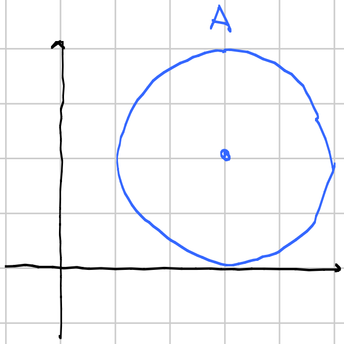
Matrice Jacobiana: $\begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$

$$J(\rho,\theta) = |\,\text{Det}(\text{Matrice})\,| = |\rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta| = \underbrace{\rho}_{J \text{ delle coord. polari}}$$

— o — o —

<u>Esempio 2</u> A = circ. con centro in $(3,2)$ e raggio 2

$$\iint_A x\,dx\,dy \qquad \underbrace{(x-3)}_{u}{}^2 + \underbrace{(y-2)}_{v}{}^2 \le 4$$



Faccio il cambio di variabili $u = x-3$, $v = y-2$ che equivale a spostare il centro nell'origine

$$\iint_A x\,dx\,dy = \iint_{\underbrace{u^2+v^2\le 4}_{\text{A nelle nuove variabili}}} \underbrace{(u+3)}_{\text{x nelle nuove variabili}} \underset{\uparrow\, J(u,v)}{1}\,du\,dv$$

① ricavo x e y in funzione di u e v : $x = u+3$, $y = v+2$

② Matrice

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③ $J(u,v) = |\operatorname{Det}(\text{Matrice})| = 1$

L'integrale è diventato $\displaystyle\iint_{u^2+v^2\le 4} (u+3)\,du\,dv =$

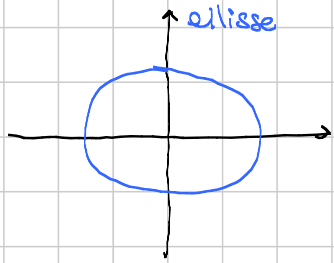
$$= \underbrace{\iint_{u^2+v^2\le 4} u\,du\,dv}_{\overset{\shortparallel}{0}\text{ per simmetria}} + \underbrace{\iint_{u^2+v^2\le 4} 3\,du\,dv}_{3\cdot\text{Area} = 12\pi} = 12\pi.$$

— o — o —

<u>Fatto generale da ricordare</u> : se la trasformazione (cambio di variabili) è una traslazione, allora la matrice è sempre l'identità e quindi $J(u,v) = 1$.

— o — o —

Esempio 3 $\quad A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 2x^2 + 3y^2 \le 4 \}$



$$\iint_A x^2 \, dx \, dy$$

$$2x^2 + 3y^2 \le 4$$

$$(\underbrace{\sqrt{2}\,x}_{u})^2 + (\underbrace{\sqrt{3}\,y}_{v})^2 \le 4$$

così ho $u^2 + v^2 \le 4$

$$\iint_A x^2 dx\,dy = \iint_{u^2+v^2 \le 4} \underbrace{\frac{u^2}{2}}_{} \, J(u,v) \, du\,dv$$

x^2 nelle nuove coordinate

Calcolo $J(u,v)$

① Ricavo x e y : $\quad x = \frac{u}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{v}{\sqrt{3}}$

② Matrice $\quad \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

③ $J(u,v) = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Quindi integrale $= \frac{1}{2\sqrt{6}} \iint_{u^2+v^2 \le 4} u^2 du\,dv \quad$ (questo lo faccio in polari)

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \; \rho^2 \cos^2\theta \cdot \rho$$

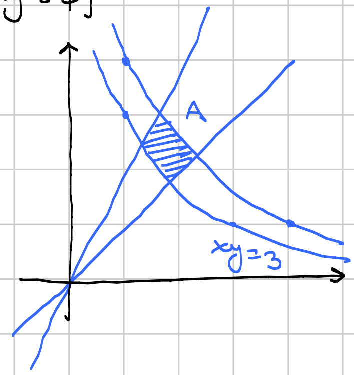
$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \int_0^2 \rho^3 \, d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta}_{\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \int_0^2 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^2 = \frac{2\pi}{\sqrt{6}} .$$

—o —o —

Fatto generale da ricordare: se la trasformazione è una affinità (Esempio 1 e 3) allora J è costante ed è il det. della matrice opportuna.

— o — o —

<u>Esempio 4</u> $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \le y \le 2x, \ 3 \le xy \le 4\}$



Potrei spezzarlo come insieme normale, ...

Voglio fare $\text{Area}(A) = \iint_A 1 \, dx\, dy$

$x \le y \le 2x$ ⇝ posso dividere

$1 \le \underbrace{\frac{y}{x}}_{u} \le 2 \qquad 3 \le \underbrace{xy}_{v} \le 4$

Quindi

$$\iint_A 1 \, dx\, dy = \underbrace{\int_1^2 du \int_3^4 dv}_{A \text{ nelle var. } u \text{ e } v} \ \underbrace{1}_{\text{funzione}} \ J(u,v)$$

① Ricavo x e y $\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = xy \end{cases}$ Moltiplico: $uv = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{uv}$

Divido $\frac{2^a}{1^a}$: $\frac{v}{u} = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{v}{u}}$

② Matrice $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{v}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{u\sqrt{u}}\right) & \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{1}{2\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix}$

③ $J(u,v) = \left| -\frac{1}{4}\frac{1}{u} - \frac{1}{4}\frac{1}{u} \right| = \frac{1}{2u}$

e da qui si conclude ...

[Procedura alternativa] ① $u = \frac{y}{x} \qquad v = xy$

② Faccio l'altra Jacobiana $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{pmatrix}$

③ Faccio l'altro det: $\left| -\frac{y}{x} - \frac{y}{x} \right| = +2\frac{y}{x} = 2u$

Il vero $J(u,v)$ è il reciproco ("det matrice inversa").

ANALISI 2 — LEZIONE 29

Titolo nota 29/03/2014

COORDINATE CILINDRICHE E SFERICHE NELLO SPAZIO

Coord. cilindriche coord. cartesiane : (x, y, z)

" cilindriche : $(\underbrace{\rho, \theta}, \underbrace{z})$ resta la quota

polari corrispondenti a x e y

Esempio 1 L'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x^2+y^2 \le 2, \ 1 \le z \le 3\}$ cilindro sollevato rispetto a terra

diventa

$$0 \le \rho \le \sqrt{2}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 1 \le z \le 3$$

$\iiint_A x^2 z \, dx\,dy\,dz$ ci sono almeno 3 metodi

→ per colonne : la base è il cerchio $x^2+y^2 \le 2$

la colonna è sempre $1 \le z \le 3$

→ per sezioni : $\int_1^3 dz \iint_{S_z} dx\,dy \; x^2 z$

↑ la sezione è sempre un cerchio

provare a fare e vedere che viene lo stesso.

→ in coordinate cilindriche :

$$\underbrace{\int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^3 dz}_{A \text{ in coord. cilindriche}} \quad \underbrace{\rho^2 \cos^2\theta \cdot z}_{x^2 z \text{ in cilindriche}} \quad \underbrace{\rho}_{\text{stesso } J \text{ delle polari nel piano}}$$

$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta \int_1^3 z \, dz = \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta \left[\frac{1}{2} z^2\right]_{z=1}^{z=3}$$

$$= 4 \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta}_{\pi} = 4\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho = \pi \left[\rho^4\right]_0^{\sqrt{2}} = 4\pi.$$

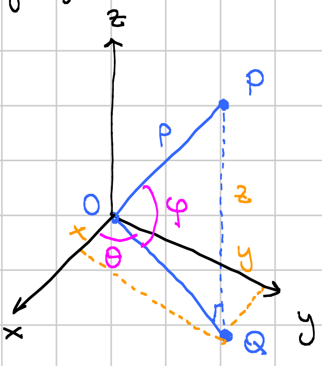
$\boxed{\text{COORDINATE SFERICHE}}$ (in versione "geografi")

(ρ, θ, φ)

raggio

longitudine

latitudine



ρ = lungh. di OP $= \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Sia Q la proiezione di P sul piano xy

θ = angolo che OQ forma con il semiasse positivo delle x
(sarebbe il θ delle polari del p.to Q) (longitudine)

φ = angolo $Q\hat{O}P$, cioè l'angolo che la retta OP forma con il piano xy (latitudine)

Dove variano?
$$\rho \geq 0$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Casi speciali
- Non ha senso parlare di θ e φ dell'origine
- Non ha senso parlare di θ dei p.ti dell'asse z

$\boxed{\text{Formule di passaggio}}$ Voglio x, y, z in funzione di ρ, θ, φ

$$z = PQ = OP \cdot \sin\varphi = \rho \sin\varphi$$
$$OQ = \rho\cos\varphi$$
$$x = OQ\cos\theta = \rho\cos\theta\cos\varphi$$
$$y = OQ\sin\theta = \rho\sin\theta\cos\varphi$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\theta\cos\varphi \\ z &= \rho\sin\varphi \end{aligned}}$$

Calcolo del pagamento:

① Ricavo x, y, z ⇝ fatto sopra

② Matrice

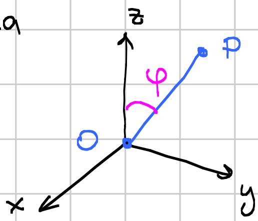
$$\begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta & x_\varphi \\ y_\rho & y_\theta & y_\varphi \\ z_\rho & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix} = \dots$$

③ $J(\rho, \theta, \varphi) = |\operatorname{Det}(\text{Matrice})| = \rho^2 \cos\varphi$

↗ non c'è θ
→ c'è ρ^2 invece di ρ
↘ c'è $\cos\varphi$ che è quello che è sempre ≥ 0 in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

— o — o —

<u>Achtung!</u> Non c'è accordo universale per le sferiche.
Per i fisici, φ non è la latitudine, ma è l'angolo tra OP ed il semiasse positivo delle z.
Cosa cambia?



→ varia da 0 a π, quindi $\varphi \in [0, \pi]$

→ in tutte le formule $\cos\varphi$ e $\sin\varphi$ si scambiano, compreso nel calcolo di J.

Qualcuno scambia pure θ e φ (vedi wiki in varie lingue).

— o — o —

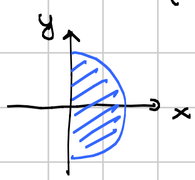
Descrizione di insiemi in coordinate sferiche

$x^2+y^2+z^2 \leq 3$ $\qquad 0 \leq \rho \leq \sqrt{3}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$x^2+y^2+z^2 \leq 4, \ z \geq 0$ $\qquad 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

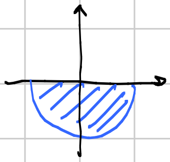
$x^2+y^2+z^2 \leq 5, \ x \geq 0$ $\qquad 0 \leq \rho \leq \sqrt{5}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

↑ Dall'alto è così



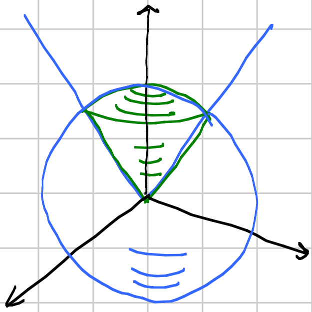
$x^2+y^2+z^2 \leq 4$, $y \leq 0$, $z \geq 0$ $\qquad$ $0 \leq \rho \leq 2$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

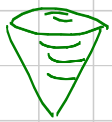
(opp. $-\pi \leq \theta \leq 0$)



$\underbrace{x^2+y^2+z^2 \leq 4}_{\text{dentro la sfera}}$, $\underbrace{z \geq \sqrt{x^2+y^2}}$

cono. La sezione ad altezza z è il cerchio di raggio z

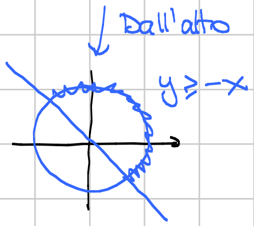




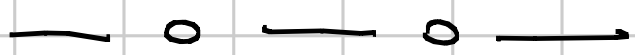
$0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 2$, $z \leq 0$, $x+y \geq 0$ $\qquad$ $1 \leq \rho \leq \sqrt{2}$

$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$ $\qquad$ $z \leq 0$



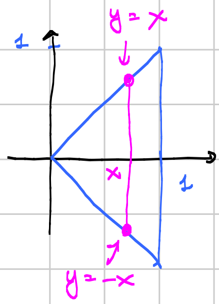
$\longrightarrow$ $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$



ANALISI 2 — LEZIONE 30

Titolo nota 03/04/2014

Integrali di funzioni con valori assoluti

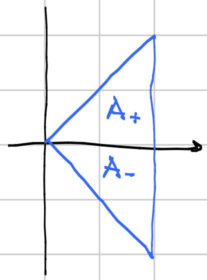


Esempio 1 A = triangolo con vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$

$$\iint_A |x|\,dx\,dy = \iint_A x\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^{x} dy\, x =$$

$x \geq 0$ su A, quindi posso togliere il valore assoluto

$$= \int_0^1 x\,dx \int_{-x}^{x} dy = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$



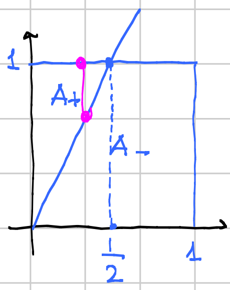
Esempio 2 A come prima

$$\iint_A |y|\,dx\,dy = 2\iint_{A_+} y\,dx\,dy$$

per simmetria: l'integrale su A_+ e su A_- è lo stesso

$$= 2\int_0^1 dx \int_0^x dy\, y = \int_0^1 dx\,\left[y^2\right]_{y=0}^{y=x} = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

— o — o —



Esempio 3 $A = [0,1] \times [0,1]$

$$\iint_A |y-2x|\,dx\,dy$$

Cerco di capire la zona A_+ dove $y - 2x \geq 0$ $\quad y \geq 2x$

e la zona A_- dove $y - 2x \leq 0$ $\quad y \leq 2x$

$$= \iint_{A_+} (y-2x)\,dx\,dy + \iint_{A_-} (2x-y)\,dx\,dy$$

su A_+ il val. assol. è come se non ci fosse

su A_- si ha che $|y-2x| = -(y-2x)$

$$\iint_{A_+} (y-2x)\,dx\,dy = \int_0^{\frac12} dx \int_0^{2x} dy\,(y-2x) = \int_0^{\frac12} dx \left[\frac12 y^2 - 2xy\right]_{y=0}^{y=2x}$$

$$= \int_0^{\frac12} dx\,(2x^2-4x^2) = \int_0^{\frac12}(-2x^2)\,dx$$

viene negativo e non può essere perchè sto integrando una funzione positiva. Quindi qualcosa non va

Ho sbagliato l'insieme!

Correggo:

$$\iint_{A_+} (y-2x)\,dx\,dy = \int_0^{\frac12} dx \int_{2x}^{1} dy\,(y-2x) = \int_0^{\frac12} dx \left[\frac12 y^2 - 2xy\right]_{y=2x}^{y=1}$$

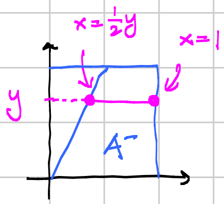
$$= \int_0^{\frac12} dx\,\Big(\underbrace{\frac12 - 2x}_{y=1} - 2x^2 + 4x^2\Big) = \int_0^{\frac12}\Big(2x^2-2x+\frac12\Big)\,dx = \dots$$

Resta da calcolare l'integrale in A_-.

<u>1° modo</u>: triangolo + rettangolo

$$\iint_{A_-} (2x-y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac12} dx \int_0^{2x} dy\,(2x-y) + \int_{\frac12}^{1} dx \int_0^{1} dy\,(2x-y) = \dots$$

<u>2° modo</u>: normale risp. asse y



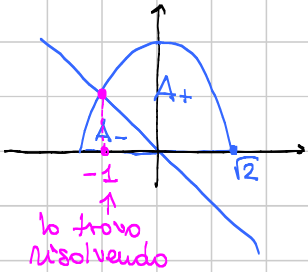
$$\iint_{A_-} (2x-y)\,dx\,dy = \int_0^{1} dy \int_{\frac12 y}^{1} dx\,(2x-y)$$

$$= \int_0^{1} dy\,\left[x^2 - xy\right]_{x=\frac12 y}^{x=1} = \int_0^{1} dy\,\Big(\underbrace{1-y}_{x=1} - \frac14 y^2 + \frac12 y^2\Big)$$

$$= \int_0^{1}\Big(\frac14 y^2 - y + 1\Big)\,dy = \dots$$

Esercizio: controllare che venga lo stesso nei 2 modi

Esempio 4 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2-x^2\}$



$$\iint_A |x+y| \, dx\, dy$$

A_+ = zona dove $x+y \ge 0$, cioè $y \ge -x$

A_- = " " $x+y \le 0$, cioè $y \le -x$

$$\iint_A |x+y|\,dx\,dy = \iint_{A_+} (x+y)\,dx\,dy + \iint_{A_-} (-x-y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{A_+} (x+y)\,dx\,dy - \iint_{A_-} (x+y)\,dx\,dy$$

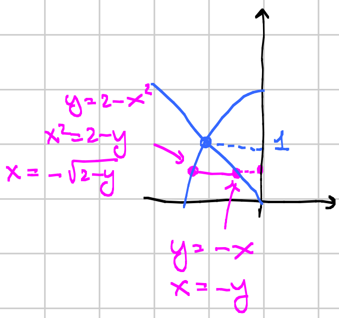
$$\iint_{A_+} (x+y)\,dx\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{2-x^2} dy\,(x+y)}_{\text{parte a sx dell'asse } y} + \underbrace{\int_{0}^{\sqrt{2}} dx \int_{0}^{2-x^2} dy\,(x+y)}_{\text{parte a dx dell'asse } y} = \dots$$

Integrale su A_-, primo modo (normale risp. asse x)

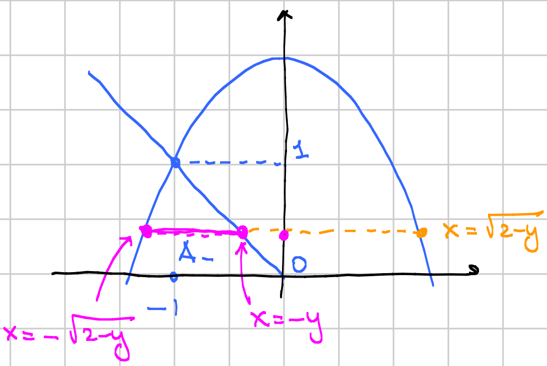
$$\iint_{A_-} (x+y)\,dx\,dy = \underbrace{\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{0}^{2-x^2} dy\,(x+y)} + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{-x} dy\,(x+y) = \dots$$

Integrale su A_-, secondo modo (normale risp. asse y)

$$\iint_{A_-} (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{-y} (x+y)\,dx$$

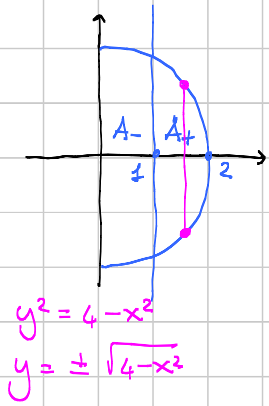


Controllare che vengano uguali



$y = 2-x^2 \qquad x^2 = 2-y$

$x = \pm\sqrt{2-y}$



Esempio 5 $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0\}$

$$\iint_A |x-1|\,dx\,dy = \iint_{A_+} (x-1)\,dx\,dy - \iint_{A_-} (x-1)\,dx\,dy$$

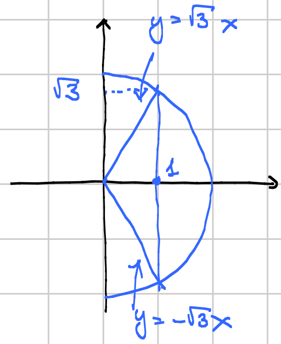
A_+ = zona con $x \ge 1$

A_- = zona con $x \le 1$

$$\iint_{A_+} (x-1)\,dx\,dy = \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\,(x-1)$$

$$= \int_1^2 dx\,(x-1) \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy = 2\int_1^2 (x-1)\sqrt{4-x^2}\,dx$$

= con un po' di lavoro si fa.



S = tutto il settore circolare

T = triangolo

$\iint_{A_+} \dots = \iint_S - \iint_T$ e i due pezzi si calcolano facilmente

$$\iint_T (x-1)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{3}\,x}^{\sqrt{3}\,x} dy\,(x-1) = \text{e questo viene}$$

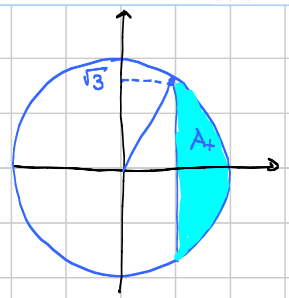
$$\iint_S (x-1)\,dx\,dy \underset{\text{polari}}{=} \underbrace{\int_0^2 d\rho \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta}_{S \text{ in coord. polari}}\ \underbrace{(\rho\cos\theta - 1)}_{x-1 \text{ in coord. polari}}\ \underbrace{\rho}_{J} = \text{e questo viene}$$

Anche l'integrale su A_- si può spezzare.

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 31

Titolo nota 03/04/2014



Esempio 1 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 1\}$

$$\iint_A |y|\,dx\,dy = 2\iint_{A_+} y\,dx\,dy$$

1° modo: normale risp. asse x

$$\iint_{A_+} y\,dx\,dy = \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy\ y = \int_1^2 dx\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \int_1^2 dx\ \frac{1}{2}(4-x^2) = \text{banale}$$

2° modo: normale risp. asse y

$$\iint_{A_+} y\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{3}} dy \int_1^{\sqrt{4-y^2}} dx\ y = \int_0^{\sqrt{3}} y\,dy \int_1^{\sqrt{4-y^2}} dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} dy\ y\left(\sqrt{4-y^2}-1\right) = \int_0^{\sqrt{3}} \left(y\sqrt{4-y^2} - y\right) dy$$

$$= \left[\frac{2}{3}(4-y^2)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{3}} = \text{controllare che venga uguale}$$

Derivare per credere

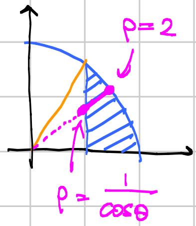
3° modo: settore — triangolo

$$\iint_{\text{Settore}} y\,dx\,dy = \int_0^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta\ \rho\sin\theta\cdot\rho = \int_0^2 \rho^2\,d\rho \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\,d\theta = \text{banale}$$

$$\iint_{\text{triangolo}} y\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{3}x} dy\cdot y = \int_0^1 dx\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{3}x}$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 x^2\,dx$$

Controllare che venga lo stesso



4° modo: coordinate polari secche

$$x^2+y^2 \le 4 \qquad y \ge 0 \qquad x \ge 1$$
$$\rho \le 2 \qquad 0 \le \theta \le \pi \qquad \rho\cos\theta \ge 1 \qquad \rho \ge \frac{1}{\cos\theta}$$

Allora la descrizione di A_+ in coordinate polari è la seguente

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ Fissato θ, dove varia ρ? $\frac{1}{\cos\theta} \le \rho \le 2$

Quindi
$$\iint_{A_+} y\,dx\,dy = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2} d\rho}_{A_+ \text{ in coord. polari}} \ \underbrace{\rho\sin\theta}_{y} \ \underbrace{\rho}_{\text{Jac}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\, d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2} \rho^2 d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\, d\theta \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_{\rho=\frac{1}{\cos\theta}}^{\rho=2}$$

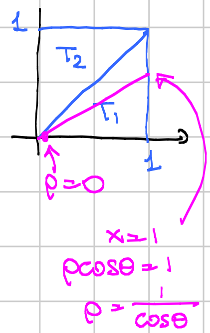
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\left(8 - \frac{1}{\cos^3\theta}\right)d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(8\sin\theta - \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\left[-8\cos\theta - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{3}}$$

Derivare per credere (e per essere sicuri di non aver sbagliato segni o costanti)

Controllare che rivenga lo stesso.

—o—o—



Esempio 2 $A = [0,1]\times[0,1]$

$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

1° modo: in cartesiane diventa

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy\, \sqrt{x^2+y^2}$$ e questo (volendo) si fa con la sostituzione $y = x \sinh t$

<u>2° modo</u>: in polari $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = 2\iint_{T_1} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

Devo descrivere T_1 in polari $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ (questo si vede)

Fissato θ, dove varia ρ? $0 \le \rho \le \frac{1}{\cos\theta}$ Quindi

$$\iint_{T_1} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} d\rho}_{T_1 \text{ in coord. polari}}\ \underbrace{\rho}_{\sqrt{x^2+y^2}}\ \underbrace{\rho}_{J} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_{\rho=0}^{\rho=\frac{1}{\cos\theta}}$$

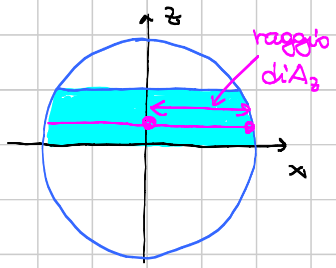
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta$$ Come fare la primitiva di $\frac{1}{\cos^3\theta}$?

$$\int \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}\,d\theta$$

Ponendo $t = \sin\theta$ diventa $\int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$ e questo si sa fare.

— o — o —

<u>Esempio 3</u> $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4,\ 0 \le z \le 1\}$



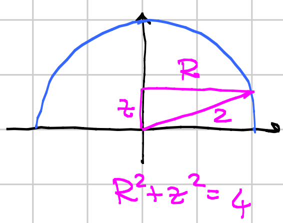
Volume di $A = \iiint_A 1\,dx\,dy\,dz =$

Lo impostо per sezioni

$$= \int_0^1 dz \iint_{\underbrace{A_z}} 1\,dx\,dy = \int_0^1 \text{Area}(A_z)\,dz$$

sezione di A ad altezza z

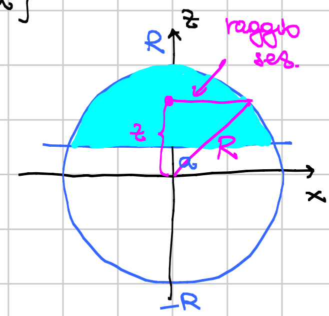
A_z è un cerchio di raggio $\sqrt{4-z^2}$



$$= \int_0^1 \pi\,(4-z^2)\,dz = \pi\left[\left(4z-\frac{1}{3}z^3\right)\right]_0^1$$

$$= \pi\left(4-\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3}\pi.$$

<u>Esempio 4</u> $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ z \ge a\}$
con $a \in [-R, R]$



Volume di $A = \iiint_A 1\, dx\,dy\,dz =$

$$\underset{\text{sezioni}}{=} \int_a^R dz \iint_{A_z} 1\, dx\,dy = \int_a^R \text{Area}(A_z)\, dz$$

Ora come prima A_z è un cerchio di raggio $\sqrt{R^2-z^2}$ (Pitagora)

$$= \int_a^R \pi\,(R^2-z^2)\,dz = \pi\left[R^2 z - \frac{1}{3}z^3\right]_a^R = \pi\left[R^3 - \frac{R^3}{3} - R^2 a + \frac{1}{3}a^3\right]$$

Controllare che per $a = -R$ venga $\frac{4}{3}\pi R^3$ (tutta la sfera)
per $a = 0$ venga $\frac{2}{3}\pi R^3$ (semisfera)

<u>Osservazione</u> Non cambiava nulla se avevo
$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4 \quad x \ge a\}$
oppure --- $y \ge a$

Volendo, pur di cambiare le variabili, si può sempre fare sezioni rispetto all'asse z.

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 32

Titolo nota 03/04/2014

BARICENTRI E MOMENTI DI INERZIA

Sia $F \subseteq \mathbb{R}^2$ una figura piana. Il baricentro di F è il punto G di coordinate

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F x \, dx\, dy \qquad y_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dx\, dy$$

Analogamente, per un solido $S \subseteq \mathbb{R}^3$ il baricentro ha coordinate

$$x_G = \frac{1}{\text{Vol}(S)} \iiint_S x \, dx\, dy\, dz \qquad y_G = \ldots \qquad z_G = \ldots$$

Il momento di inerzia di un solido S rispetto ad una retta r (pensata come asse di rotazione) è, a meno di costanti,

$$\iiint_S \underbrace{\text{dist}^2((x,y,z), r)}_{\substack{\text{dist}^2 \text{ del punto} \\ \text{dall'asse di rotazione}}} \, dx\, dy\, dz$$

Giustificazione rapida della formula per il baricentro.
Dati n punti materiali, tutti della stessa massa, $P_1, \ldots, P_n$ il baricentro è definito da

x_G = media delle coordinate x dei P_i
y_G = " " " y dei P_i

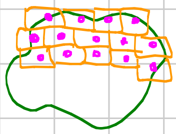
Quindi, se $P_i = (x_i, y_i)$ si ha

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \qquad y_G = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

Se hanno masse m_i diverse, allora $x_G = \dfrac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$

$y_G = \ldots$

Se ho una figura strana F, posso pensare di dividerla in tanti pezzi

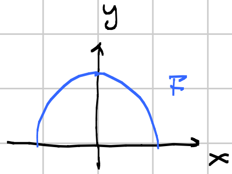


e poi approssimo ogni pezzo con un pto nel quale suppongo di aver concentrato la massa di tutto il pezzettino.

Se calcolo con la formula di sopra il baricentro dei punti approssimanti, trova al denom. l'area della figura, al numeratore delle somme $x(\text{punto}) \cdot$ area del pezzo, ma questa è una somma di Riemann per $\iint_A x\,dx\,dy$. Idem per y_G.

— o — o —

Esempio 1 Baricentro di un semicerchio.



$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq r^2,\ y \geq 0\}$$

$$\text{Area}(F) = \frac{1}{2}\pi r^2 \qquad x_G = 0$$

(per simmetria)

si vede anche dal fatto che $\iint_F x\,dx\,dy = 0$

$$\iint_F y\,dx\,dy = \int_0^r d\rho \int_0^\pi d\theta\ \rho\sin\theta\ \rho = \int_0^r \rho^2 d\rho \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta}_{2}$$

$$= 2\int_0^r \rho^2 d\rho = \frac{2}{3}r^3$$

Quindi $$y_G = \frac{\iint_F y}{\text{Area}\,F} = \frac{2}{3}r^3 \frac{2}{\pi r^2} = \frac{4}{3\pi}r$$

è ragionevole che stia sotto $\frac{r}{2}$ perché il cerchio è più grosso in basso.

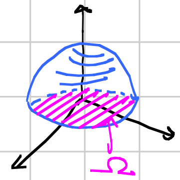
— o — o —

Esempio 2 Semisfera $x^2+y^2+z^2 \leq r^2 \quad z \geq 0$

Intanto per simmetria $x_G = y_G = 0$.

$$\text{Vol}(S) = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$\iiint_S z\,dx\,dy\,dz$. Si può fare in vari modi



1° modo: normale risp. piano xy, cioè per colonne.

La proiezione è Ω = cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio r

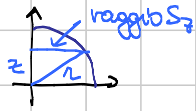
Colonna su (x,y) è $0 \le z \le \sqrt{r^2-x^2-y^2}$. Quindi

$$\iiint_S z\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} z\,dz = \frac{1}{2}\iint_\Omega dx\,dy\,\left[z^2\right]_{z=0}^{z=\sqrt{\cdots}}$$

$$= \frac{1}{2}\iint_\Omega (r^2-x^2-y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\,(r^2-\rho^2)\rho$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^r (r^2\rho-\rho^3)\,d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \pi \int_0^r (r^2\rho-\rho^3)\,d\rho =$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2}r^2\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right]_0^r = \pi\left(\frac{1}{2}r^4-\frac{1}{4}r^4\right) = \frac{\pi}{4}r^4$$



2° modo: per sezioni

$$\iiint_S z\,dx\,dy\,dz = \int_0^r dz \iint_{S_z} z\,dx\,dy = \int_0^r z\cdot \text{Area}(S_z)\,dz =$$

S_z è un cerchio di raggio $\sqrt{r^2-z^2}$, quindi $\text{Area}(S_z) = \pi(r^2-z^2)$

$$= \pi\int_0^r z\,(r^2-z^2)\,dz = \pi\int_0^r (r^2z-z^3)\,dz = \frac{\pi}{4}r^4 \quad (\text{come prima})$$

3° modo: sferiche

$$\iiint_S z\,dx\,dy\,dz = \underbrace{\int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi}_{S \text{ in coord. sferiche}}\ \underbrace{\rho\sin\varphi}_{z}\ \underbrace{\rho^2\cos\varphi}_{J}$$

$$= \int_0^r \rho^3\,d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= \pi\int_0^r \rho^3\,d\rho \int_0^{\pi/2} 2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \pi\int_0^r \rho^3\,d\rho\,\underbrace{\left[\sin^2\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}}_{=1}$$

$$= \pi\int_0^r \rho^3\,d\rho = \frac{\pi}{4}r^4$$

Conclusione: $z_G = \dfrac{\iiint_S z}{\text{Vol}} = \dfrac{\cancel{\pi}}{4} r^4 \cdot \dfrac{3}{2\cancel{\pi} r^3} = \dfrac{3}{8} r$

Nel cerchio: $\dfrac{4}{3\pi} r$ Nella sfera $\dfrac{3}{8} r$

$\dfrac{3}{8} \overset{?}{<} \dfrac{4}{3\pi}$ $\quad 9\pi \overset{?}{<} 32$ $\quad$ sì!

Il baricentro della semisfera è più basso del baricentro del semicerchio (Brutalmente: una semisfera ha + massa in basso di un semicerchio).

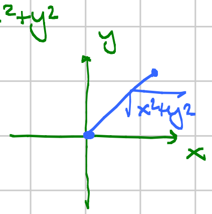
— o — o —

Esempio 3 Calcolare il momento d'inerzia della sfera risp. all'asse z

$\iiint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$

Oss. La distanza di un p.to (x,y,z) dall'asse z è $\sqrt{x^2+y^2}$

Visto dall'alto



1° modo: sferiche

$$\int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \; \underbrace{\rho^2\cos^2\varphi}_{x^2+y^2} \; \underbrace{\rho^2\cos\varphi}_{J}$$

$$= \underbrace{\int_0^r \rho^4\,d\rho}_{\frac{1}{5}r^5} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{2}{5}\pi r^5 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\,d\varphi = \text{si fa}$$

$$\int \cos^3\varphi\,d\varphi = \int \cos^2\varphi \cdot \cos\varphi\,d\varphi = \int (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi$$

2° modo: cilindriche. Una sfera in cilindriche si descrive
$-r \le z \le r, \quad 0 \le \rho \le \sqrt{r^2-z^2}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$$\iiint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_{-r}^{r} dz \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \int_0^{\sqrt{r^2-z^2}} d\rho \; \underbrace{\rho^2}_{x^2+y^2} \; \underbrace{\rho}_{J} =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} dz \int_0^{\sqrt{\cdots}} \rho^3\,d\rho = \frac{\pi}{2}\int_{-r}^{r} dz\,[\rho^4]_0^{\sqrt{\cdots}} = \frac{\pi}{2}\int_{-r}^{r} (r^2-z^2)^2\,dz$$

Questo si fa... controllare che venga lo stesso.

ANALISI 2 - LEZIONE 33

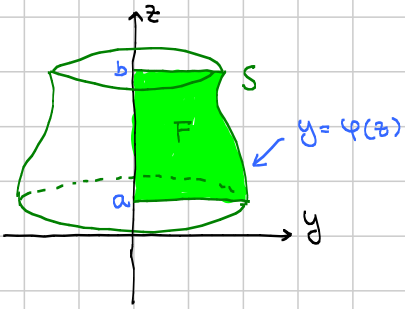
Titolo nota 04/04/2014

SOLIDI DI ROTAZIONE

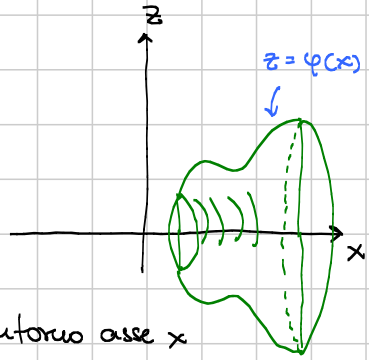
Un solido di rotazione è il solido $S \subseteq \mathbb{R}^3$ che si ottiene ruotando una figura piana F intorno ad un asse.

Di solito l'asse di rotazione è uno dei 3 assi coordinati.

Esempio



Intorno asse z



Intorno asse x

Come descrivo F e come descrivo S. Con riferimento al 1° caso (asse z)

$$F = \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b, \quad 0 \leq y \leq \varphi(z) \}$$

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, \quad \underbrace{x^2 + y^2 \leq \varphi^2(z)} \}$$

cerchio con centro nell'origine e raggio $\varphi(z)$: sarebbe la sezione del solido ad altezza z.

La superficie laterale del solido è descritta da

$$\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, \quad x^2 + y^2 = \varphi^2(z) \}$$

Nel 2° caso (rotazione intorno all'asse x)

$$F = \{ (x,z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad 0 \leq z \leq \varphi(x) \}$$

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \quad y^2 + z^2 \leq \varphi^2(x) \}$$

Data un'equazione, come capisco se descrive un solido di rotazione? Devo guardare se ci sono 2 variabili, ad esempio x e y, che compaiono solo come x^2+y^2 (rot. intorno all'asse z)

<u>Esempi</u>

$x^2+y^2+z=3$ $\qquad x^2+y^2=\underbrace{\boxed{3-z}}_{\varphi^2(z)}$ Sol. Rot. z

$x^4+y^2+z^2=5$ $\qquad y^2+z^2=\underbrace{\boxed{5-x^4}}_{\varphi^2(x)}$ Sol. Rot. x

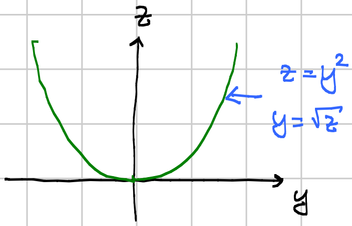
$x^4+y^4+2x^2y^2+z^2=7$ $\qquad (x^2+y^2)^2=7-z^2$

$x^2+y^2=\underbrace{\sqrt{7-z^2}}_{\varphi^2(z)}$ Sol. Rot. z

$\boxed{\text{Oss.}}$ Un solido di rotazione si descrive bene in coordinate cilindriche (se ruoto intorno all'asse z)

$$S: \quad a \le z \le b, \quad \underbrace{0 \le \theta \le 2\pi}_{\text{rot. completa}}, \quad \underbrace{0 \le \rho \le \varphi(z)}_{\text{a } z \text{ fisso descrive il raggio della sezione } S_z}$$

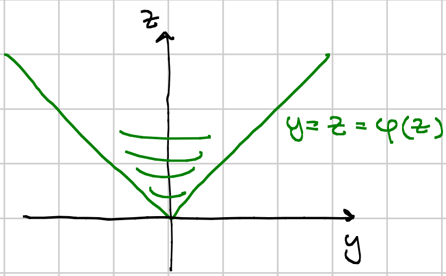
<u>Esempi</u> $\quad z = x^2+y^2$ (paraboloide)



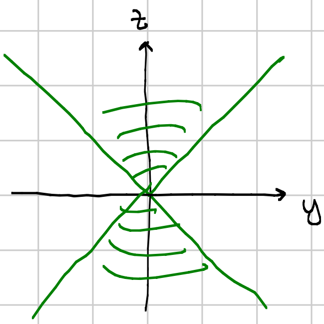
$x^2+y^2 = z \leftarrow \varphi^2(z)$, quindi $\varphi(z)=\sqrt{z}$

<u>Cono</u> $\quad x^2+y^2=\varphi^2(z)$

$\boxed{x^2+y^2=z^2}$



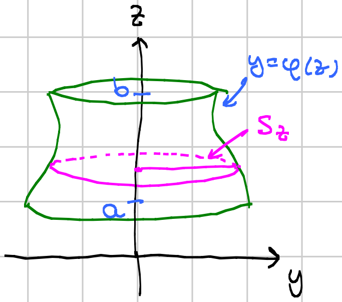
Occhio $x^2+y^2=z^2$ sarebbe la rotazione di $\varphi(z)=|z|$, quindi il "doppio cono"



$\boxed{\text{Volume di un solido di rotazione}}$ → Formula "diretta"
→ Teorema GULDINO 1

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le z \le b,\ 0 \le x^2+y^2 \le \varphi^2(z)\}$$

$$\boxed{\mathrm{Vol}(S) = \pi \int_a^b \varphi^2(z)\,dz}$$ Formula diretta



$\boxed{\text{Dim.:}}$ Calcolo l'integrale per sezioni

$$\iiint_S 1\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} 1\,dy\,dz$$
$$= \int_a^b \text{Area}(S_z)\,dz$$

Ora S_z è un cerchio di raggio $\varphi(z)$, quindi $\text{Area}(S_z) = \pi\varphi^2(z)$

$$= \int_a^b \pi\varphi^2(z)\,dz = \pi \int_a^b \varphi^2(z)\,dz.$$

—o—o—

Achtung! Non confondere nell'equazione $\varphi(z)$ con $\varphi^2(z)$.

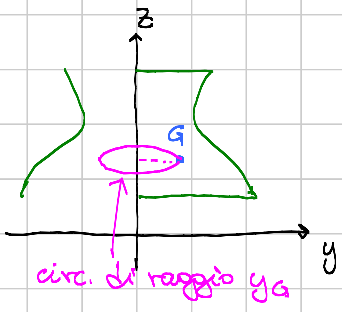
—o—o—

$\boxed{\text{Teorema GULDINO 1}}$

$$\boxed{\mathrm{Vol}(S) = \underbrace{\text{Area}(F)}_{\text{Area della figura F che ruota}} \cdot 2\pi\, y_G}$$

y_G: coordinata y del baricentro della figura F che ruota

Volume Solido = Area figura che ruota ×
× lungh. della circ. descritta dal baricentro della figura durante la rotazione



$\boxed{\text{Dim.}}$ Dalle formule del baricentro

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \cdot \iint_F y \, dy dz$$
$$= \frac{1}{\text{Area}(F)} \int_a^b dz \int_0^{\varphi(z)} y \, dy$$
$$= \frac{1}{\text{Area}(F)} \int_a^b dz \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{y=0}^{y=\varphi(z)} = \frac{1}{\text{Area}(F)} \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$$

Ma allora

$$\text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G = \cancel{\text{Area}(F)} \cdot \cancel{2}\pi \frac{1}{\cancel{\text{Area}(F)}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$$
$$= \pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz \quad \text{che è la formula diretta.}$$

— o — o —

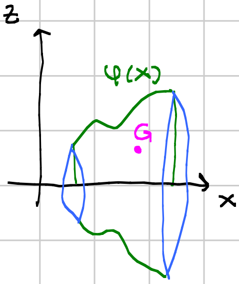
Praticamente:

→ uso formula diretta quando conosco bene $\varphi(z)$

→ uso Guldino quando la figura che ruota è semplice.

— o — o —

Se sto ruotando intorno all'asse x



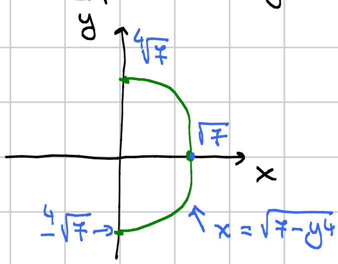
$$\text{Vol}(S) = \pi \int_a^b \varphi^2(x) \, dx$$
$$= \text{Area}(F) \cdot 2\pi z_G$$

— o —

La formula $\text{Area}(F) \cdot 2\pi x_G$ è il volume del solido ottenuto ruotando intorno all'asse z.

— o — o —

<u>Esempio</u> $x^2 + y^4 + z^2 \le 7$ $\qquad x^2 + z^2 \le \underbrace{7 - y^4}_{\varphi^2(y)}$ Solido di rotazione intorno all'asse y



$$\varphi(y) = \sqrt{7 - y^4}$$

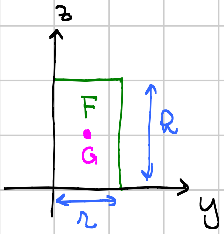
$$\text{Vol}(S) = \pi \int_{-\sqrt[4]{7}}^{\sqrt[4]{7}} (7 - y^4) \, dy.$$

ANALISI 2 — LEZIONE 34

Titolo nota 04/04/2014

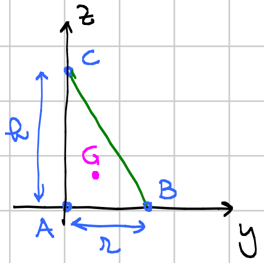
Esempi classici di solidi di rotazione

$\boxed{\text{CILINDRO}}$



$$\text{Vol} = \text{Area}(F)\cdot 2\pi y_G$$
$$= rR \cdot 2\pi \frac{r}{2} = \pi r^2 R$$

$\boxed{\text{CONO}}$



Si verifica (fare per esercizio) che il baricentro del triangolo con vertici in A, B, C è dato da

$$G = \frac{A+B+C}{3}$$

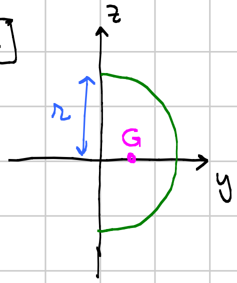
quindi le coord. di G sono la media delle coordinate di A, B, C

Nell'esempio si ha

$$G = \left(\frac{0+r+0}{3}, \frac{0+0+R}{3}\right) = \left(\frac{r}{3}, \frac{R}{3}\right)$$

$$\text{Vol (Cono)} = \text{Area}(F)\cdot 2\pi y_G = \frac{1}{\cancel{2}} rR \cdot \cancel{2}\pi \frac{r}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 R$$

$\boxed{\text{SFERA}}$



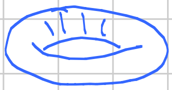
Dal calcolo fatto nella lez. sui baricentri abbiamo che

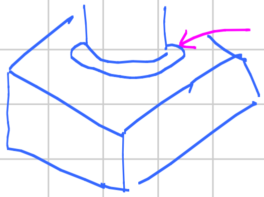
$$G = \left(\frac{4}{3\pi} r, 0\right)$$

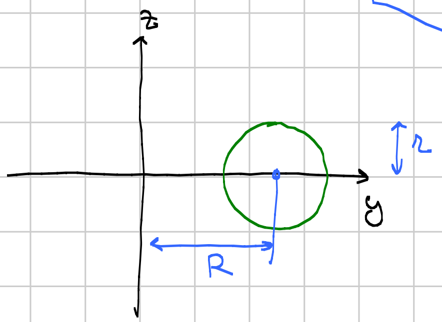
$$\text{Vol} = \text{Area}(F)\cdot 2\pi y_G$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\pi r^2 \cdot \cancel{2\pi} \frac{4}{3\cancel{\pi}} r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Toro



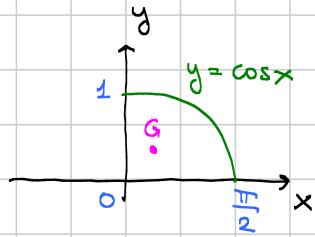




$$\text{Vol} = \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

$$= \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$$

— o — o —



Esempio Volume che si ottiene ruotando intorno asse x o asse y

$$\text{Area}(F) = 1$$

$$\iint_F x\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} dy\; x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx \int_0^{\cos x} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$$

$$= [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1 = x_G \quad \text{(perché Area} = 1)$$

$$\iint_F y\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{8} = y_G$$

Se ruoto intorno asse y: $\text{Vol} = \text{Area} \cdot 2\pi x_G = 2\pi\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

Se ruoto intorno asse x: $\text{Vol} = \text{Area} \cdot 2\pi y_G = 2\pi \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi^2}{4}$

Altra domanda: quando ruoto intorno asse y, chi è il baricentro del solido S?

Bisogna fare il conto

$$(\underset{\substack{\uparrow\\ 0}}{x_G},\; y_G,\; \underset{\substack{\uparrow\\ 0}}{z_G})$$

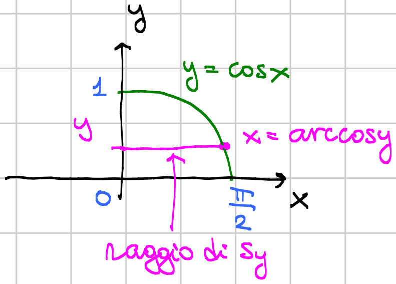
per simmetria

$$y_G = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{già fatto}}}{\frac{1}{Vol(S)}} \iiint_S y\,dx\,dy\,dz$$

$$\iiint_S y\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dy \iint_{S_y} y\,dx\,dz = \int_0^1 y\,\text{Area}(S_y)\,dy$$

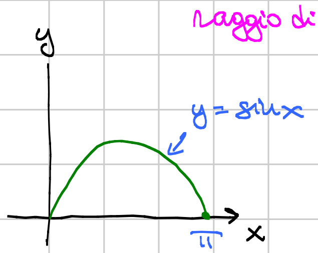
S_y è un cerchio di raggio arccos y

$$= \int_0^1 y\cdot\pi \arccos^2 y\,dy = \text{contoso...}$$



— o — o —

<u>Esempio</u> Ruoto intorno all'asse x di 180°.
Volume e baricentro di S



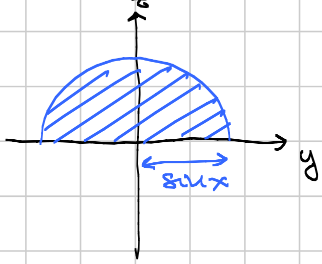
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{formula diretta}}}{Vol =} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{solo mezza rotazione}}}{\frac{1}{2}} \pi \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\pi\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\text{Baricentro di } S = (x_G, \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{y_G}, z_G)$$

$$\iiint_S x\,dx\,dy\,dz = \int_0^\pi dx \iint_{S_x} x\,dy\,dz = \int_0^\pi x\,dx \iint_{S_x} dy\,dz$$

$$= \int_0^\pi x\,\text{Area}(S_x)\,dx = \int_0^\pi x\cdot \underbrace{\frac{1}{2}\pi \sin^2 x}_{\text{semicirc. di raggio } \sin x}\,dx \to \text{SI FA}$$

$$\iiint_S z\,dx\,dy\,dz = \int_0^\pi dx \underbrace{\iint_{S_x} z\,dy\,dz}_{\text{va fatto}}$$



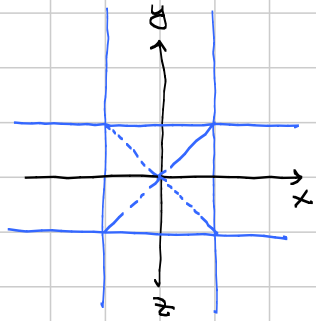
S_x = semicerchio di raggio sin x

Quindi

$$\iint_{S_x} z\,dx\,dy = \int_0^{\sin x} d\rho \int_0^{\pi} d\theta\ \underbrace{\rho\sin\theta}_{z}\ \underbrace{\rho}_{J}$$ e da qui si fa.

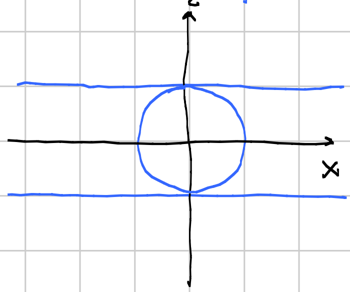
— o — o —

<u>Esercizio</u> Intersezione di 2 cilindri



$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+z^2\le 1}_{\text{cilindro con asse lungo asse } y},\ y^2+z^2\le 1\}$$

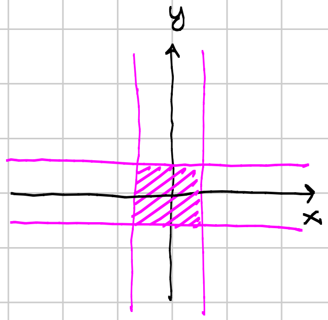
cilindro con asse lungo asse x



Voglio Vol(S). Lo calcolo per sezioni. Devo capire

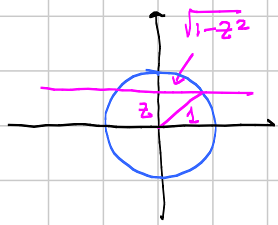
- z_{min} e z_{max} : ± 1
- S_z come è fatto

$$\text{Vol}(S) = \int_{-1}^{1} dz \iint_{S_z} dx\,dy = \int_{-1}^{1} \text{Area}(S_z)\,dz$$



Chi è S_z? Ogni cilindro, sezionato ad altezza z, diventa una striscia di opportuno spessore.
L'intersezione di 2 strisce fa un quadrato.
Serve il lato..., che è $2\sqrt{1-z^2}$.
Quindi

$$\text{Area}(S_z) = 4(1-z^2)$$



da cui

$$\text{Vol}(S) = \int_{-1}^{1} 4(1-z^2)\,dz$$ e questo si fa.

— o — o —

$\boxed{\text{Hard}}$ Cosa succede se aggiungo il terzo cilindro nell'altra direzione?

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 35

Titolo nota 05/04/2014

CURVE

Def. Una curva nel piano è una qualunque funzione $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

" " nello spazio " " " $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$

Esempi $\gamma(t) = (\underset{x(t)}{t^2+1}, \underset{y(t)}{3t-2})$ $\quad t \in \underset{[a,b]}{[0,3]}$

Per ogni $t \in [0,3]$ ottengo un p.to del piano

$\gamma(t) = (t^2, \sin t, e^t)$ $\quad t \in [-1,1]$ curva nello spazio

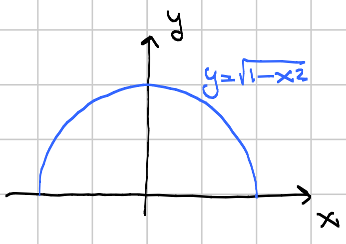
$(x(t), y(t), z(t))$

Brutalmente: una curva rappresenta un p.to che si muove nel piano o nello spazio; $\gamma(t)$ dice dove si trova il p.to al tempo t.

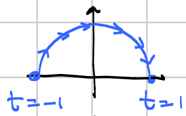
Def. Si dice sostegno della curva l'immagine della curva stessa, cioè la traiettoria percorsa dal p.to.

Achtung! Lo stesso sostegno può essere percorso in vari modi.

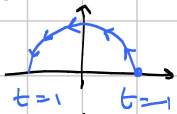
Esempio 1



$\gamma_1(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$: $t \in [-1,1]$

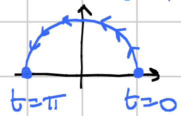


$\gamma_2(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$: $t \in [-1,1]$

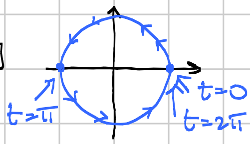


$y = \sqrt{1-x^2}$

$\gamma_3(t) = (\cos t, \sin t)$: $t \in [0,\pi]$



$\gamma_4(t) = (\cos t, \sin t)$: $t \in [0,2\pi]$

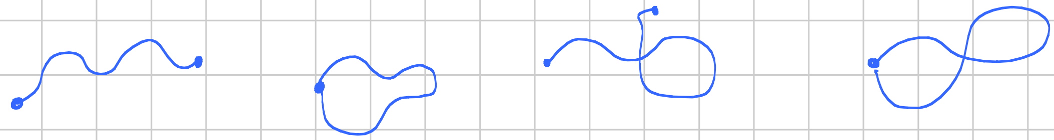


$\gamma_5(t) = (\cos t, \sin t)$ $\quad t \in [0,4\pi]$

circonferenza con 2 giri.

Def. Una curva si dice

- **chiusa** se $\gamma(a) = \gamma(b)$
- **semplice** se non ritorna mai su se stessa, tranne al più il fatto che $\gamma(a) = \gamma(b)$



semplice, NON chiusa — semplice e chiusa — non chiusa non semplice — chiusa, NON semplice

Def. Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ (o in $\mathbb{R}^3$). Si dice vettore tangente il vettore

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

posto che le derivate esistano. [Si intende che $\gamma(t) = (x(t), y(t))$]

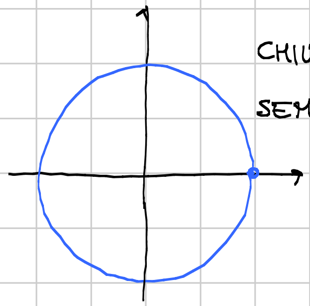
Achtung! Occhio alla differenza tra

- VELOCITY, cioè il $\boxed{\text{vettore}}$ $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$
- SPEED, cioè il $\boxed{\text{numero}}$ dato dalla norma della velocity, cioè

$$\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{\dot x^2(t) + \dot y^2(t)}$$

Def. La retta tangente ad una curva in un p.to è la retta che passa per il punto e ha come direzione la velocity nel p.to stesso.

Esempio 1 $\quad \gamma(t) = (\underbrace{\cos t}_{x(t)}, \underbrace{\sin t}_{y(t)}) \quad t \in [0, 2\pi]$



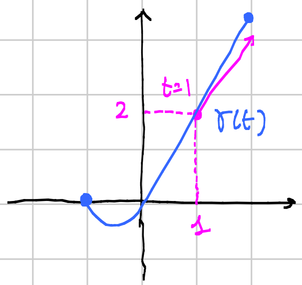
CHIUSA
SEMPLICE

Il sostegno è la circonferenza $x^2+y^2=1$.
La velocity è il vettore
$$\dot\gamma(t) = (\dot x(t), \dot y(t)) = (-\sin t, \cos t)$$
La speed è
$$\|\dot\gamma(t)\| = [\dot x^2 + \dot y^2]^{1/2} = [\sin^2 t + \cos^2 t]^{1/2} = 1$$

SPEED costante
VELOCITY NO

<u>Esempio 2</u> $\gamma(t) = (t, t^2+t)$ $\quad t \in [-1, 2]$

$\qquad\qquad\quad x \quad x^2+x$



La curva percorre il tratto della parabola $y = x^2+x$ con $x \in [-1,2]$

Calcolare la retta tangente nel p.to corrispondente a $t=1$

$\gamma(1) = (1,2)$

$\dot{\gamma}(t) = (1, 2t+1)$ $\quad \dot{\gamma}(1) = (1,3)$

È la retta che passa per $(1,2)$ con direzione $(1,3)$, cioè in parametrica $(1,2) + t\,(1,3)$

La curva NON è chiusa, ma è semplice.

—o —o —

<u>Come capisco se una curva è chiusa o no?</u> Banale, sostituisco gli estremi

<u>Come capisco se una curva è semplice o no?</u>

Ci sono varie strategie.

① Se almeno una delle 2 componenti è iniettiva, allora la curva è per forza semplice.

<u>Esempi</u> $\gamma(t) = (\underbrace{t^3+t}, \arctan t - \cos t)$ $\quad t \in [-100, 100]$

$x(t)$ è INIETTIVA perché è strett. crescente in quanto $\dot{x}(t) = 3t^2+1 > 0$ $\Rightarrow$ curva semplice

$\gamma(t) = (\underbrace{t+\cos t}, t - \sin t + t^2)$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

$x(t)$ è iniettiva

$\dot{x}(t) = 1 - \sin t \geq 0$ con annullamento sporadico

$\Rightarrow x(t)$ è strettamente crescente $\Rightarrow$ iniettiva

② Posso provare ad impostare il sistema $\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases}$

e sperare che abbia come soluzione solo $t=s$ oppure gli estremi.

Esempio $\quad \gamma(t) = (t(t-1), t^2(t-1)) \qquad t \in [0,1]$

È chiusa? $\gamma(0) = (0,0)$, $\gamma(1) = (0,0) \Rightarrow$ sì chiusa

È semplice? Le due componenti non sono iniettive (hanno lo stesso valore agli estremi).
Imposto il sistema

$$\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases} \qquad \begin{cases} t(t-1) = s(s-1) \\ t^2(t-1) = s^2(s-1) \end{cases} \qquad \begin{cases} t^2-t = s^2-s \\ t^3-t^2 = s^3-s^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2-s^2 = t-s \\ t^3-s^3 = t^2-s^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (t-s)(t+s) = t-s \\ (t-s)(t^2+ts+s^2) = (t-s)(t+s) \end{cases}$$

La 1ª eq. la posso scrivere come $(t-s)(t+s-1) = 0$

o $t = s$ $\qquad$ $t+s = 1$

è quello che voglio escludere

Supponiamo che $t \neq s$, allora posso dividere sopra e sotto e resta

$$\begin{cases} t+s = 1 \\ t^2+ts+s^2 = t+s \end{cases} \qquad s = 1-t \qquad \cancel{t^2}+t-\cancel{t^2}+t^2-2t+\cancel{1} = \cancel{1} \qquad t^2-t = 0$$

$t(t-1) = 0 \qquad t = 0, \ s = 1 \qquad$ oppure $\qquad t = 1, \ s = 0$

Quindi partendo dal sistema

$$\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases}$$

abbiamo trovato come soluzioni

- $t = s$
- $t = 0$ e $s = 1$, oppure $t = 1$ e $s = 0$.

Quindi la curva è semplice.

ANALISI 2 - LEZIONE 36

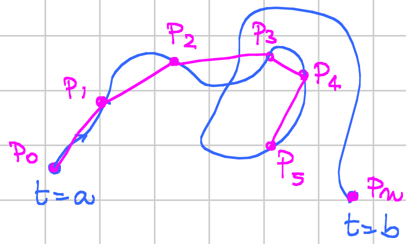
Titolo nota 05/04/2014

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

1. Come si definisce
2. Come si calcola

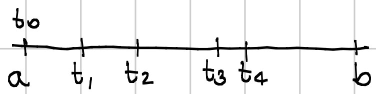
<u>Definizione</u> $\rightsquigarrow$ approssimanti poligonali

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ (o in $\mathbb{R}^3$)



1. Suddivido in $[a,b]$ in tanti intervallini

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$



2. Poi fotografo la curva all'istante t_i. Pongo $P_i = \gamma(t_i)$

3. Approssimo la curva con la spezzata $P_0P_1P_2 \dots P_n$ di cui posso calcolare la lunghezza sommando le lungh. dei segmenti. Intuitivamente la curva è più lunga di tutte le spezzate così costruite

4. Si definisce lunghezza della curva il sup delle lunghezze di tutte le possibili poligonali.

— o — o —

<u>Formula per il calcolo</u> Se le derivate $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$ (ed eventualmente $\dot{z}(t)$) esistono e sono continue, allora

$$\boxed{\text{lunghezza} = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt}$$

Interpretazioni brutali

① Dal p.to di vista fisico abbiamo che lunghezza = integrale della speed rispetto al tempo, che è la versione evoluta di

spazio = velocità · tempo

② Dal punto di vista più matematico, torniamo alla spezzata $P_0P_1P_2\ldots P_n$ con $P_i = \gamma(t_i) = (x(t_i), y(t_i))$. Allora

$$P_iP_{i+1} = \text{dist}(P_{i+1}, P_i) = \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2}$$

$$= \sqrt{(t_{i+1}-t_i)^2\,\dot{x}(c_i)^2 + (t_{i+1}-t_i)^2\,\dot{y}(d_i)^2}$$

Analisi 1: teo. Lagrange

$$= (t_{i+1}-t_i)\sqrt{\dot{x}(c_i)^2 + \dot{y}(d_i)^2}$$

dove c_i e d_i stanno tra t_i e $t_{i+1} > t_i$

Quindi quando sommo le lunghezze

$$\text{lungh. spezzata} = \sum_{i=0}^{n-1} \text{dist}(P_{i+1}, P_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}-t_i)\sqrt{\dot{x}(c_i)^2 + \dot{y}(d_i)^2}$$

$$= \text{Somma di Riemann per } \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$$

— o — o —

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Se due curve hanno lo stesso sostegno non è detto che abbiano la stessa lunghezza (dipende per lo meno da quante volte è stato percorso ogni tratto del sostegno)

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Se due curve percorrono lo stesso sostegno una sola volta, allora hanno la stessa lunghezza.

— o — o —

$\boxed{\text{CURVE CARTESIANE}}$ Sono curve del tipo

$$(t, f(t)) \qquad \text{oppure} \qquad (g(t), t)$$

cioè una delle componenti è uguale a t.

Queste non possono essere chiuse e sono sempre semplici perché almeno una delle componenti è iniettiva.

Il loro sostegno è un tratto del grafico di

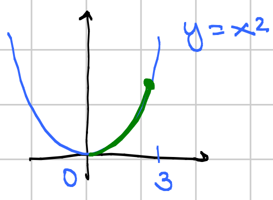
$$y = f(x) \qquad\qquad x = g(y)$$

$$(t, f(t)) \qquad\qquad (g(t), t)$$

La formula per la lunghezza diventa

$$\int_a^b \sqrt{1+\dot{f}^2}\, dt \qquad\qquad \int_a^b \sqrt{1+\dot{g}^2}\, dt$$

<u>Esempio 1</u> Lunghezza del tratto di parabola da $x=0$ a $x=3$.

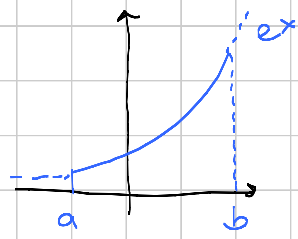


Sarebbe la curva cartesiana

$$(t, t^2) \quad \text{con} \quad t \in [0,3]$$

$$\text{Lungh} = \int_0^3 \sqrt{\underbrace{1^2}_{\dot{x}^2} + \underbrace{(2t)^2}_{\dot{y}^2}}\, dt = \int_0^3 \sqrt{1+4t^2}\, dt = \text{analisi 1}$$

<u>Esempio 2</u> Lungh. di un tratto di esponenziale



$$\gamma(t) = (t, e^t) \qquad t \in [a,b]$$

$$\text{Lungh} = \int_a^b \sqrt{\underbrace{1 + e^{2t}}_{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\, dt$$

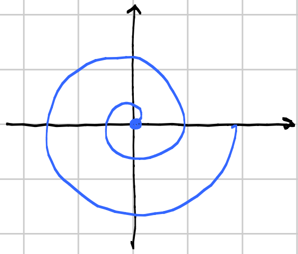
e questo si fa con la sostituzione $e^{2t} = y$ ... analisi 1.

— o — o —

CURVE IN COORDINATE POLARI

Invece di dare $(x(t), y(t))$, si assegnano $\rho(t)$ e $\theta(t)$.

Esempi $\rho(t) = t$ $\quad t \geq 0$
$\theta(t) = t$



spirale "uscente"
La stessa in coordinate cartesiane sarebbe

$$(x(t), y(t)) = (t \cos t, t \sin t)$$
$$\rho \cos\theta, \rho \sin\theta$$

Questa è semplice e la semplicità si vede
- malissimo in cartesiane
- molto bene in polari ($\rho(t)$ è strett. crescente)

Achtung! $\rho(t)$ monotono basta per dedurre la semplicità, $\theta(t)$ monotono non basta!!! Basta pensare a $\rho(t) = 1$, $\theta(t) = t$

Lunghezza in coordinate polari $\quad x = \rho \cos\theta \quad x(t) = \rho(t) \cos\theta(t)$
$y = \rho \sin\theta$

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos\theta + \rho(-\sin\theta)\dot{\theta}$$
$$\dot{y} = \dot{\rho} \sin\theta + \rho \cos\theta \,\dot{\theta}$$

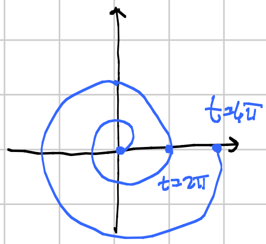
$$\begin{aligned}\dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \dot{\rho}^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2 - 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} \cos\theta \sin\theta \\ &\quad + \dot{\rho}^2 \sin^2\theta + \rho^2 \cos^2\theta\, \dot{\theta}^2 + 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} \cos\theta \sin\theta \\ &= \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\end{aligned}$$

Formula per la lunghezza

$$\boxed{\text{lunghezza} = \int_a^b \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2}\, dt}$$

<u>Esempio 1</u> Spirale $\rho(t) = t$ $t \in [0, 4\pi]$

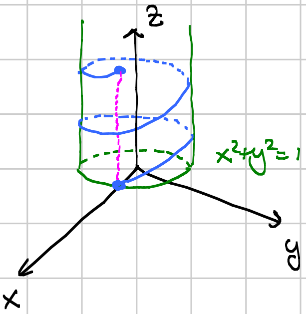
$\theta(t) = t$



$$\text{lungh} = \int_0^{4\pi} \sqrt{\underset{\dot\rho^2}{1} + \underset{\rho^2\dot\theta^2}{t^2}}\, dt = \text{si fa.}$$

<u>Esempio 2</u> Nello spazio $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $t \in [0, 4\pi]$

ELICA CILINDRICA



Chiusa NO, semplice SI

$$\text{lunghezza} = \int_0^{4\pi} \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}\, dt$$

$$= \int_0^{4\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\, dt$$

$$= \int_0^{4\pi} \sqrt{2}\, dt = 4\pi\sqrt{2}$$

Questa stessa curva, in coordinate cilindriche, diventa

$$\underbrace{\rho(t) = 1}_{\text{restare sul cilindro}} \qquad \underbrace{\theta(t) = t}_{\text{girare}} \qquad \underbrace{z(t) = t}_{\text{salire}}$$

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 37

Titolo nota 05/04/2014

$\boxed{\text{INTEGRALI CURVILINEI}}$

1. Come si indicano
2. Significato geometrico
3. Come si definirebbero
4. Come si calcolano

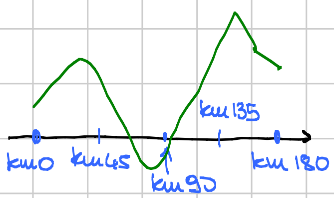
① **Notazioni** $\int_\gamma f(x,y)\,ds$ $\int_\gamma f(x,y,z)\,ds$

Si intende che

- $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ oppure $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ è una curva
- $f(x,y)$ oppure $f(x,y,z)$ è una funzione definita almeno sul sostegno della curva
- ds sta ad indicare che si tratta di un integrale curvilineo

② **Significato geometrico** (ciclistico) Caso di curva nel piano

- γ è una curva nel piano, cioè il percorso della tappa
- $f(x,y)$ rappresenta il grafico che descrive pianura, montagna
- si passa al "profilo altimetrico della tappa"



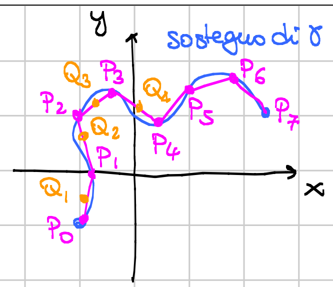
Altezza alla quale si trova il ciclista che percorre la tappa.

Il profilo altimetrico è fatto pensando che la tappa sia percorsa a velocità costante, cioè in ascissa tratti della stessa lungh. rappresentano tratti di curva di lunghezza uguale

L'integrale curvilineo è l'integrale del profilo altimetrico.

Il ds sta ad indicare che sto pensando di percorrere la curva a velocità costante.

③ Idea della definizione



→ approssimo la curva con una spezzata

→ in ogni tratto scelgo un punto e calcolo la funzione in quel p.to

→ calcolo la somma di Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\underbrace{\text{dist}(P_i, P_{i-1})}_{\substack{\text{lungh. tratto} \\ i\text{-esimo}}} \; \underbrace{f(Q_i)}_{\substack{\text{altezza in un punto} \\ \text{del tratto } i\text{-esimo}}}}_{\substack{\text{area di un rettangolo nello spazio che ha} \\ \text{come base il segmento } P_iP_{i-1} \text{ e come altezza} \\ \text{il valore della funzione in } Q_i}}$$

→ "passo al limite" prendendo spezzate sempre più fitte.

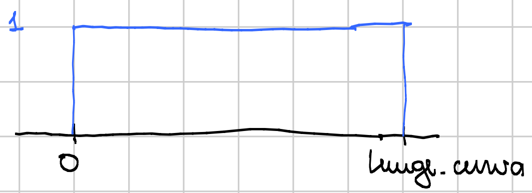
④ Formula per il calcolo

$$\boxed{\int_\gamma f(x,y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt}$$

componenti della curva

<u>Oss.</u> Se $f(x,y) \equiv 1$, cioè vale sempre 1, allora $\int_\gamma 1\, ds = \text{lungh}(\gamma)$.

Brutalmente il profilo altimetrico è un rettangolo di altezza 1 che ha come base la lungh. della curva.



<u>Oss.</u> Se due curve diverse hanno lo stesso sostegno, e lo percorrono una sola volta, allora l'integrale curvilineo (così come la lunghezza) è lo stesso.

<u>Esempio</u> $\gamma(t) = (t^2+1,\ t^3-1) \qquad t \in [0,2]$

$f(x,y) = x^2 - y$

Allora $$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t)) \overbrace{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt}^{ds}$$

$$= \int_0^2 \underbrace{[(t^2+1)^2-(t^3-1)]}_{x^2-y} \sqrt{(2t)^2+(3t^2)^2}\,dt$$

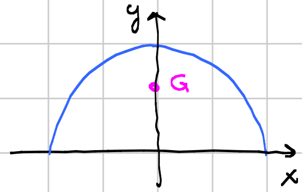
e questo è in una variabile.

— o — o —

$\boxed{\text{Baricentro di una curva}}$ È il punto G di coordinate

$$x_G = \frac{1}{\text{lungh}(\gamma)} \int_\gamma x\,ds \qquad y_G = \frac{1}{\text{lungh}(\gamma)} \int_\gamma y\,ds$$

<u>Esempio 1</u> Baricentro di una semicirc. di raggio r



$\text{lungh}(\gamma) = \pi r \qquad \gamma(t) = (r\cos t,\ r\sin t)$ con $t \in [0,\pi]$

Per ragioni di simmetria è evidente che $x_G = 0$ (verificare con l'integrale). Calcolo

$$\int_\gamma y\,ds = \int_0^\pi \underbrace{r\sin t}_{y} \underbrace{\sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}}_{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\,dt = r^2\int_0^\pi \sin t\,dt = 2r^2$$

Quindi

$$y_G = \frac{\int \dots}{\text{lungh}} = \frac{2r^2}{\pi r} = \frac{2}{\pi} r$$

(ragionevole perché $y \geq \frac{r}{2}$ per $\underbrace{\tfrac{2}{3} \text{ del tempo}}_{60° \text{ su } 180°}$)

<u>Esempio 2</u> Elica $(\cos t, \sin t, t)$ $t \in [0, 5\pi]$ (2.5 giri)

Qui bisogna fare il conto (ved. lez. prec.)

$$\text{lungh} = \int_0^{5\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{speed}}}{\sqrt{2}}\, dt = 5\pi\sqrt{2}$$

Se voglio y_G devo calcolare

$$\int_\gamma y\, ds = \int_0^{5\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ y}}{\sin t}\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{speed}}}{\sqrt{2}}\, dt = \int_{4\pi}^{5\pi} \sin t \cdot \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}$$

Quindi
$$y_G = \frac{\int \dots}{\text{lungh}} = \frac{2\cancel{\sqrt{2}}}{5\pi\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{2}{5\pi}$$

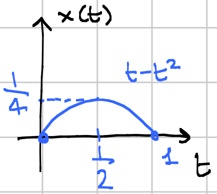
Analogamente calcolo x_G e z_G.

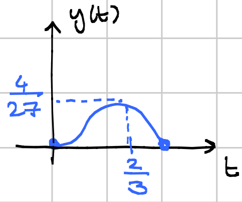
— o — o —

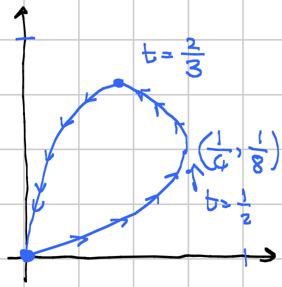
<u>Esempio 3</u> (back to lezione 35) $\gamma(t) = (t(1-t), t^2(1-t))$
$= (t-t^2, t^2-t^3)$ $t \in [0,1]$

Come capire come è fatto il disegno?

Studio le 2 componenti separatamente







$2t - 3t^2 = 0$ $\quad t(2-3t) = 0$

$t = 0$ $\quad t = \frac{2}{3}$

per $t = \frac{2}{3} \rightsquigarrow \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$

- Per t che varia da 0 a $\frac{1}{2}$ $x(t)$ cresce e $y(t)$ cresce, quindi la curva va verso NE
- Per t che varia da $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{3}$ $x(t)$ cala e $y(t)$ cresce, quindi va a NW
- Per t che varia da $\frac{2}{3}$ a 1 $x(t)$ cala e $y(t)$ pure, e torna indietro

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 38

Titolo nota 10/04/2014

FORME DIFFERENZIALI

Una forma differenziale in 2 variabili si presenta nella forma

$$\boxed{\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy}$$

dove $A(x,y)$ e $B(x,y)$ sono funzioni definite su un certo insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

In 3 variabili si presenta nella forma

$$\boxed{\omega = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz}$$

Le funzioni $A(x,y)$ e $B(x,y)$ (o le analoghe in 3 variabili) sono dette coefficienti della forma.
La regolarità di una forma diff. (continuità, derivabilità, ecc.) è quella dei coefficienti.

— o — o —

INTEGRALE DI UNA FORMA DIFF. LUNGO UNA CURVA

① Notazione $\boxed{\int_\gamma \omega}$ Si intende che

- ω è una forma diff. in 2 o 3 variabili
- $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ (o in $\mathbb{R}^3$) è una curva.

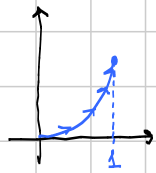
③-④ Definizione e calcolo Se $\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

Allora

$$\boxed{\int_\gamma \omega = \int_a^b A(x(t),y(t))\,\underbrace{x'(t)\,dt}_{dx} + \int_a^b B(x(t),y(t))\,\underbrace{y'(t)\,dt}_{dy}}$$

$\frac{dx}{dt} = x'(t)$

<u>Esempio 1</u> $\omega = \underbrace{x^2y}_{A(x,y)}\,dx + \underbrace{(x+2)}_{B(x,y)}\,dy \qquad \gamma(t) = (t, t^2) \qquad t \in [0,1]$



$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \underset{x^2}{t^2}\ \underset{y}{t^2}\ \underset{x'(t)\,dt}{dt} + \int_0^1 \underset{x+2}{(t+2)}\ \underset{y'(t)\,dt}{2t\,dt}$$

$$= \int_0^1 (t^4 + 2t^2 + 4t)\,dt = \text{continuo.}$$

<u>Esempio 2</u> $\omega = y\,dx + x^2 dy \qquad \gamma(t) = (t^3, t^2 - t) \qquad t \in [0,2]$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^2 [\underset{y}{(t^2 - t)}\ \underset{x'(t)}{3t^2} + \underset{x^2}{t^6}\ \underset{y'(t)}{(2t-1)}]dt = \int_0^2 (3t^4 - 3t^3 + 2t^7 - t^6)\,dt$$

$$= \text{si fa.}$$

— o — o —

<u>Integrali curvilinei di funzioni vs integrali curvilinei di forme</u>

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \text{integrale di una funzione lungo una curva}$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt$$

$$\int_\gamma A\,dx + B\,dy = \text{integrale di una forma lungo una curva}$$

$$= \int_a^b [A(x(t), y(t))\,x'(t) + B(x(t), y(t))\,y'(t)]\,dt$$

Per l'integrale di una <u>funzione</u> lungo una curva

→ se 2 curve percorrono lo stesso sostegno una sola volta, l'integrale diventa lo stesso

→ i pezzi percorsi più volte danno contributi che si sommano

Per l'integrale di una <u>forma</u>

→ se 2 curve percorrono lo stesso sostegno una sola volta e CON LO STESSO VERSO DI PERCORRENZA, allora l'integrale è lo stesso

→ tratti percorsi con verso opposto si cancellano.

$$\int_\gamma A\,dx + B\,dy = \int_a^b \left[A(x(t),y(t))\,\dot{x}(t) + B(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)\right]dt$$

$$= \int_a^b \underbrace{\left[A(x(t),y(t))\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}} + B(x(t),y(t))\frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}}\right]}\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt$$

Ora $\tau(t) = \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}, \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)$ è il VERSORE tangente alla curva

vettore di norma 1

e considero il vettore

$$E(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$$

Quindi l'integrale di sopra è $\int_a^b \underbrace{E \cdot \tau}\, ds$

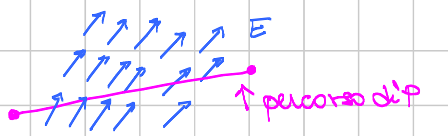
prodotto scalare fra vettore E ed il versore tangente alla curva

— o — o —

$\boxed{\text{INTERPRETAZIONE FISICA}}$

Supponiamo di avere un punto P che si muove di moto uniforme nel piano in cui è definita una forza costante data da un vettore E.

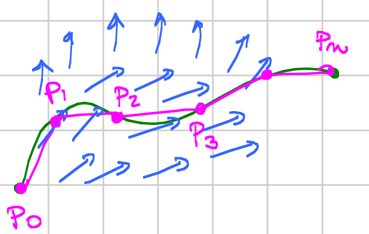
"campo di forze: in ogni p.to del piano assegno un vettore"



Lavoro = Forza $\cdot$ Spostamento

scalare

Cosa succede se il campo E non è costante e il moto non è uniforme?



Spezzo il cammino in tanti tratti e in ogni tratto faccio finta che il moto sia uniforme e il vettore sia costante e uso la formula sul singolo tratto.

Quindi

$$\text{Lavoro} = \sum_{k=1}^{n} E(P_k) \cdot (P_k - P_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} E(P_k) \cdot \frac{P_k - P_{k-1}}{|P_k P_{k-1}|} \underbrace{|P_k P_{k-1}|}_{\text{lungh. del tratto}}$$

Quando la suddivisione diventa fitta si ha che $\frac{P_k - P_{k-1}}{|P_k P_{k-1}|}$ tende al versore velocità e la somma tende all' integrale curvilineo di

$$\int_\gamma \vec{E} \cdot \vec{\tau} \, ds \quad \text{che è anche} \quad \int_\gamma A\,dx + B\,dy$$

Concludendo: se si pensano i coeff. A, B di una forma diff. come componenti di un vettore E, allora

$$\boxed{\int_\gamma A\,dx + B\,dy = \text{Lavoro compiuto dalla forza } E \text{ su un punto che percorre la curva } \gamma.}$$

Da qui è ovvio che invertendo il verso l'integrale cambia di segno.

ANALISI 2 — LEZIONE 39

Titolo nota 10/04/2014

FORME DIFFERENZIALI ESATTE VS CHIUSE

$\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ $\qquad \omega = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz$

Def. Una forma si dice $\boxed{\text{esatta}}$ se è gradiente di un potenziale, cioè se esiste una funzione $F(x,y)$ tale che

$$A(x,y) = F_x(x,y) \qquad B(x,y) = F_y(x,y)$$

Detto $E(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$ il vettore associato alla forma si ha

$$\boxed{E(x,y) = \nabla F(x,y)}$$

[In 3 variabili si richiede che esista $F(x,y,z)$ t.c.

$$A = F_x \qquad B = F_y \qquad C = F_z$$

Def. Una forma in 2 variabili $\omega = A\,dx + B\,dy$ si dice $\boxed{\text{CHIUSA}}$ se

$$\boxed{A_y = B_x} \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial B}{\partial x}(x,y)$$

Una forma in 3 variabili $\omega = A\,dx + B\,dy + C\,dz$ si dice $\boxed{\text{CHIUSA}}$ se

$$\boxed{A_y = B_x \qquad A_z = C_x \qquad B_z = C_y}$$

$\boxed{\text{Teorema}}$ ESATTA $\Rightarrow$ CHIUSA (purché esistano e siano continue le derivate in questione)

$\boxed{\text{Dim.:}}$ $\boxed{\text{Due variabili}}$ Se $\omega = A\,dx + B\,dy$ è esatta, vuol dire che

$$A = F_x \qquad B = F_y$$

Ma allora

$$A_y = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{scambio ordine deriv.}}}{F_{xy} = F_{yx}} = B_x \quad \text{, quindi } \omega \text{ è chiusa}$$

$\boxed{\text{Tre variabili}}$ Se $\omega = A\,dx + B\,dy + C\,dz$ è esatta, vuol dire che

$$A = F_x \qquad B = F_y \qquad C = F_z$$

Ma allora

$$A_y = F_{xy} = F_{yx} = B_x$$
$$A_z = F_{xz} = F_{zx} = C_x$$
$$B_z = F_{yz} = F_{zy} = C_y$$

— o — o —

<u>Conseguenza</u>: se una forma NON è chiusa, allora NON è esatta.
(se fosse esatta, dovrebbe essere chiusa)

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema}}$ Sia ω una forma esatta, e sia F un suo potenziale (talvolta si chiama anche primitiva). Allora per ogni curva γ si ha che

$$\boxed{\int_\gamma \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))}$$

Il lavoro compiuto da un campo conservativo lungo una curva è uguale alla differenza di potenziale tra gli estremi

$\boxed{\text{Dim.:}}$ Per semplicità in 2 variabili, sia

$$\omega = A\,dx + B\,dy$$

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left[A(x(t), y(t))\,\dot{x}(t) + B(x(t), y(t))\,\dot{y}(t)\right] dt \qquad \text{uso che è esatta}$$

$$= \int_a^b \left[F_x(x(t), y(t))\,\dot{x}(t) + F_y(x(t), y(t))\,\dot{y}(t)\right] dt = (\text{CHAIN RULE})$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} F(x(t), y(t)) \, dt$$

$$= F(x(b), y(b)) - F(x(a), y(a))$$

$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

In 3 variabili il discorso è esattamente lo stesso.

— o — o —

Conseguenze

① Se la forma è esatta, per fare l'integrale lungo una curva basta sostituire gli estremi nella primitiva

② Se la forma è esatta, e 2 curve hanno gli stessi estremi, allora l'integrale è lo stesso

③ Se la forma è esatta e la curva è chiusa, allora l'integrale è 0.

Conseguenza ciclistica Se faccio un giro in bici e ho sempre vento contrario, allora il vento non è gradiente di un potenziale.

(Infatti, detto $\vec{E} = (A, B)$ il vento, deve essere $\vec{E} \cdot \vec{\tau} < 0$, ma allora

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \vec{E} \cdot \vec{\tau} \, ds < 0$$

ma essendo γ chiusa se la forma fosse esatta l'integrale dovrebbe venire nullo)

— o — o —

Teorema (caratterizzazione delle forme esatte)

Sono fatti equivalenti

(i) ω è esatta

(ii) $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni curva γ chiusa

(iii) $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ per ogni γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi.

$\boxed{\text{Parti facili}}$ (i) $\Rightarrow$ (ii) già visto

(i) $\Rightarrow$ (iii) già visto

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Prendo una qualunque γ chiusa $\gamma(a) = \gamma(b) = P$

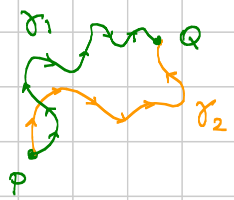
Prendo la curva $\bar{\gamma}$ che sta sempre in P

È chiaro che γ e $\bar{\gamma}$ hanno gli stessi estremi, quindi per la (iii)

$$\int_\gamma \omega = \int_{\bar{\gamma}} \omega = \int_a^b \Big(A(\ldots)\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\dot{x}(t)}} + B(\ldots)\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\dot{y}(t)}}\Big)\,dt = 0$$

perchè $\bar{\gamma}$ sta ferma

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Considero 2 curve γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi



Considero una nuova curva γ che fa γ_1 all'andata e poi γ_2 in senso inverso.

γ è chiusa, quindi

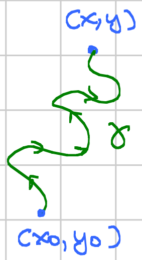
$$0 = \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \underbrace{\int_{\gamma_2^{\text{inv}}} \omega}_{} = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega, \text{ da cui } \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

γ_2 percorsa in senso inverso

Per completare la dimostrazione, resta da far vedere che (iii) $\Rightarrow$ (i).

Devo definire la primitiva $F(x,y)$.

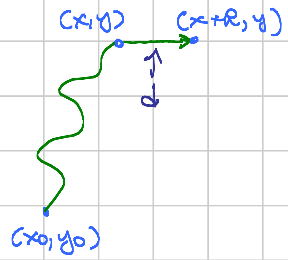
Fisso un pto (x_0, y_0) a caso. Poi definisco



$$F(x,y) = \int_\gamma \omega$$ dove γ è una qualunque curva che va da (x_0,y_0) a (x,y)

(non dipende dalla curva per l'ipotesi (iii))

Ora devo dimostrare che $A = F_x$ $B = F_y$



$$F_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h,y) - F(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_d \omega$$ (perchè l'altro pezzo si cancella)

Ora la curva d (direttissima) si parametrizza come $(x+t, y)$ con $t \in [0, h]$

quindi

$$\int_d \omega = \int_d A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

$$= \int_0^h A(x+t,y) \underset{\dot{x}}{1} + B(x+t,y) \underset{\dot{y}}{0} \, dt = \int_0^h A(x+t,y)\,dt$$

Alla fine

$$F_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h A(x+t,y)\,dt = A(x,y)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_0^h A(x+t,y)\,dt}{h} = \lim_{h\to 0} A(x+h,y)$$

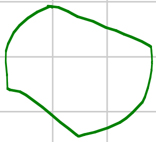
— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 40

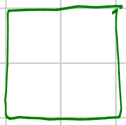
Titolo nota 10/04/2014

<u>Definizioni</u> Un sottoinsieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (o in $\mathbb{R}^3$) si dice

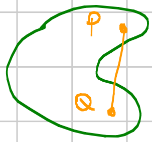
- **CONVESSO** se, comunque prenda due punti P e Q in Ω, si ha che tutto il segmento PQ è contenuto in Ω.



convesso



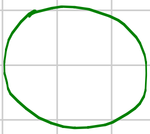
convesso



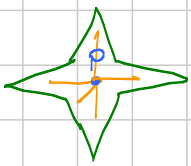
non convesso

- **STELLATO** se esiste $P \in \Omega$ tale che per ogni $Q \in \Omega$ si ha che tutto il segmento PQ è contenuto in Ω.

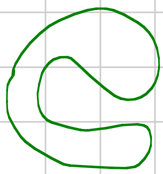
(Brutalmente: esiste un p.to $P \in \Omega$ che vede tutto l'insieme)



stellato

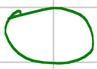


stellato



non stellato

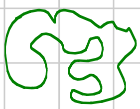
- **CONNESSO** se "è fatto da un pezzo solo"



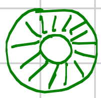
connesso

non connesso

- **SEMPLICEMENTE CONNESSO** in $\mathbb{R}^2$ se "non ha buchi"

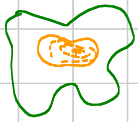


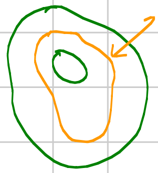
sempl. connesso



NON semplicemente connesso

Brutalmente: ogni curva chiusa in Ω è deformabile con continuità fino a ridurla ad un punto solo.





curva che non si può deformare fino ad un solo punto restando in Ω.

Achtung! Tutto $\mathbb{R}^3$ meno una sfera È semplicemente connesso
Tutto $\mathbb{R}^3$ meno una retta NON è sempl. connesso (una corda intorno alla retta "si incastra".

— o — o —

Relazione fra le definizioni

$$\boxed{\text{CONVESSO} \Rightarrow \text{STELLATO} \Rightarrow \text{SEMP. CONNESSO} \Rightarrow \text{CONNESSO}}$$

Non vale nessuna delle implicazioni inverse, come mostrano gli esempi.

— o — o —

Teorema misterioso: Sia ω una forma diff. CHIUSA definita su un insieme semplicemente connesso.
Allora ω è esatta, cioè ammette una primitiva.

Conseguenza: modo facile per verificare l'esattezza

Achtung! Se è CHIUSA, ma l'insieme non è sempl. connesso, allora BOH, cioè può essere esatta o no a seconda dei casi.

— o — o —

Esempio 1 $\quad \omega = \underbrace{xy}_{A(x,y)}\,dx + \underbrace{y^2}_{B(x,y)}dy \quad$ è esatta ?

Controllo la chiusura, cioè $\quad A_y = B_x$

$$A_y = x \qquad B_x = 0 \quad \Rightarrow \text{no chiusa} \Rightarrow \text{no esatta}$$

<u>Esempio 2</u> $\omega = x\,dx + y^2 dy$

$\gamma(t) = (t^2 + e^t,\ t^3 - t^4)$ $t \in [0,1]$. Calcolare $\int_\gamma \omega$

<u>1º modo</u>: applico la formula

<u>2º modo</u>: provo a vedere se la forma è esatta. Controllo la chiusura:

$A_y = 0$ $B_x = 0$ ☺ è chiusa

Inoltre ω è definita su tutto $\mathbb{R}^2$, che è sempl. connesso ☺

☺ + ☺ $\Rightarrow$ ω è esatta. Mi serve la primitiva, cioè una F t.c.

$F_x = x$ $F_y = y^2$

Chiaramente $F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3$ (verifica derivando)

Trovo gli estremi della curva $\gamma(0) = (1,0)$ $\gamma(1) = (1+e, 0)$

Quindi

$$\int_\gamma \omega = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = -F(1,0) + F(1+e,0)$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}(1+e)^2 = \frac{1}{2}(-1+1+2e+e^2) = +e+\frac{1}{2}e^2$$

[Esercizio: controllare che nel 1º modo venga stesso risultato]

—o —o —

<u>Esempio 3</u> $\omega = (y^2 + x^2)\,dx + (2xy + e^y)\,dy$ è esatta?

Controllo la chiusura: $A_y = 2y$ $B_x = 2y$ ☺

Voglio la primitiva. Iniziamo ad imporre $F_x = y^2 + x^2$. Faccio la primitiva rispetto a x:

$F(x,y) = y^2 x + \frac{1}{3}x^3 + c(y)$ Per trovare $c(y)$ impongo $F_y = 2xy + e^y$

$F_y = \cancel{2xy} + c'(y) = \cancel{2xy} + e^y$, quindi $c'(y) = e^y$, quindi $c(y) = e^y$.

Quindi una primitiva è $F(x,y) = y^2 x + \frac{1}{3}x^3 + e^y$

Esempio 4 $\omega = \underbrace{xy}_{A}\,dx + \underbrace{yz}_{B}\,dy + \underbrace{zx}_{C}\,dz$ è esatta ?

Controllo la chiusura: $A_y = B_x$, $A_z = C_x$, $B_z = C_y$

$A_y = x$ $B_x = 0$ $\Rightarrow$ no chiusa $\Rightarrow$ no esatta.

Esempio 5 $\omega = \underbrace{yz}_{A}\,dx + \underbrace{zx}_{B}\,dy + \underbrace{xy}_{C}\,dz$

$$\left.\begin{array}{lll} A_y = z & B_x = z & 1^\circ \text{ ok} \\ A_z = y & C_x = y & 2^\circ \text{ ok} \\ B_z = x & C_y = x & 3^\circ \text{ ok} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{è chiusa}$$

La zona di definizione è $\mathbb{R}^3$, che è semplicemente connesso, quindi è esatta. La primitiva è

$F(x,y,z) = xyz$ (questa formula da sola mostra l'esattezza)

Esempio 6 $\omega = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{A}\,dx + \underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}_{B}\,dy$

Controllo la chiusura:

$$A_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad B_x = -\frac{y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{Ok.}$$

Quindi ω è chiusa e definita su $\mathbb{R}^2 \setminus$ origine, che NON è semplicemente connesso, quindi BOH. Opzioni:

→ esibire una primitiva (mostrerebbe che è esatta)

→ esibire una curva γ chiusa t.c. $\int_\gamma \omega \neq 0$ (mostrerebbe che non è esatta)

<u>Oss.</u> L'insieme dei p.ti con $x>0$ è sempl. connesso, quindi almeno lì la primitiva ci deve essere

La primitiva è $F(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ e va bene non

solo per $x>0$, ma per ogni $(x,y) \neq (0,0)$.

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 41

Titolo nota 11/04/2014

Forme differenziali

- Integrali di forme lungo curve
- Una forma ω è esatta, cioè ammette primitiva (potenziale)

$$\Leftrightarrow \int_\gamma \omega = 0 \text{ per ogni curva } \gamma \text{ chiusa}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega \text{ per ogni } \gamma_1 \text{ e } \gamma_2 \text{ che hanno gli stessi estremi}$$

(stessa partenza e stesso arrivo)

- Se F è una primitiva di ω, allora $\int_\gamma \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

- Esatta $\Rightarrow$ chiusa (sempre)

  Chiusa $\Rightarrow$ esatta se l'insieme di definizione è semplicemente connesso (ad esempio stellato)

— o — o —

Esempio di forma che è chiusa ma NON esatta

$$\omega = \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{A(x,y)}\,dx + \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{B(x,y)}\,dy$$

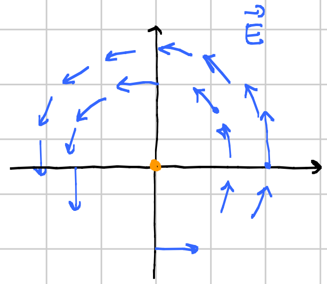
Controllo la chiusura: $A_y = \dfrac{-1\,(x^2+y^2) - 2y\,(-y)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$B_x = \dfrac{1\,(x^2+y^2) - 2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$ O.k. è CHIUSA

Zona di definizione è tutto il piano meno l'origine, che non è semplicemente connesso, quindi BOH.

$$\vec{E} = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x)$$

vettore (x,y) ruotato di $90°$ in verso antiorario



L'idea è che se giro intorno all'origine ho il vento sempre alle spalle (o davanti a seconda del verso) quindi la forma non può essere esatta.

Formalmente, cerco una curva chiusa γ su cui $\int_\gamma \omega \neq 0$.

Ad esempio prendo

$$\gamma(t) = (\underbrace{\cos t}_{x(t)}, \underbrace{\sin t}_{y(t)}) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

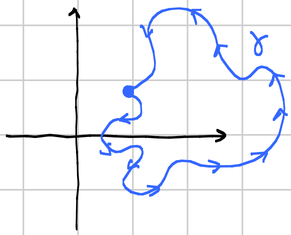
$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} [A(x(t), y(t))\, \dot{x}(t) + B(x(t), y(t))\, \dot{y}(t)]\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [\underbrace{-\sin t}_{\frac{-y}{x^2+y^2}} \cdot \underbrace{(-\sin t)}_{\dot{x}(t)} + \underbrace{\cos t}_{\frac{x}{x^2+y^2}} \cdot \underbrace{\cos t}_{\dot{y}(t)}]\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \neq 0$$

Quindi la forma NON è esatta su tutto il piano meno l'origine.

Oss. Se considero la forma solo (ad esempio) per $x > 0$, allora la zona di def. è sempl. conn. (stellata), quindi essendo chiusa DEVE essere esatta in quella zona.

1ª conseguenza $\quad \int_\gamma \omega = 0 \quad$ perché la curva è contenuta in $x > 0$ dove la forma è esatta



2ª conseguenza: per $x > 0$ esiste la primitiva, che è

$$F(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$$

è una primitiva nella zona $x > 0$

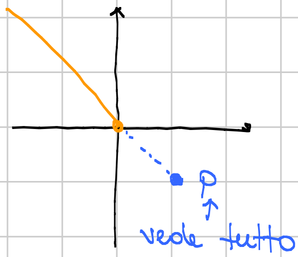
ma anche nella zona $x < 0$

Infatti $\quad F_y = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$$F_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{\cancel{x^2}}{x^2+y^2} \cdot \frac{-y}{\cancel{x^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

Discorso analogo vale nelle zone $y>0$ e $y<0$, dove si verifica che una primitiva è

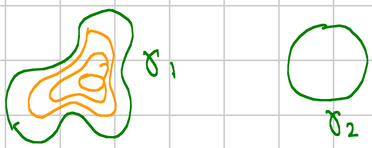
$$F(x,y) = -\arctan \frac{x}{y} \qquad [\text{fare la verifica}]$$



<u>Osservazione</u> Prendo una qualunque semiretta che esce dall'origine.
Allora $\mathbb{R}^2$ – semiretta è stellato, quindi semplicemente connesso, e pertanto esiste una primitiva su tutta quella zona.

— o — o —

<u>Def.</u> Due curve chiuse γ_1 e γ_2 si dicono OMOTOPE se si possono trasformare l'una nell'altra in maniera continua restando in un certo insieme.



← In $\mathbb{R}^2$ sono omotope

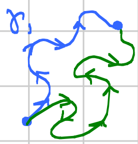
← In $\mathbb{R}^2$ meno punto * non sono omotope

$\boxed{\text{Teorema misterioso}}$ Sia ω una forma diff. CHIUSA

(i) Se γ_1 e γ_2 sono 2 curve chiuse omotope, allora $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$

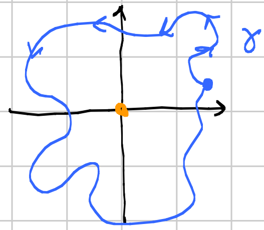
(ii) Se γ_1 e γ_2 sono 2 curve con gli stessi estremi e si possono trasformare l'una nell'altra in maniera continua lasciando gli estremi fissi, allora ancora una volta

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

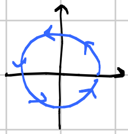


<u>Conseguenza</u> Sia ω la solita (esempio iniziale).
Quanto fa

$$\int_\gamma \omega = 2\pi$$



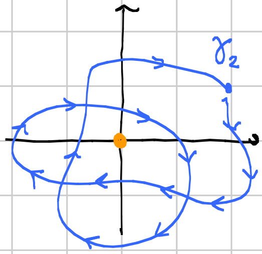
perché γ è omotopa a



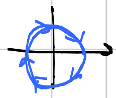
che abbiamo calcolato all'inizio. Il raggio non conta.

$$\int_{\gamma_2} \omega = -4\pi$$

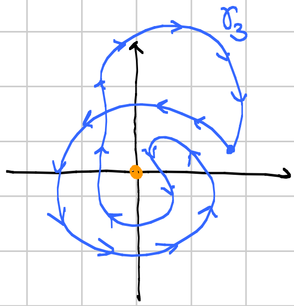
due giri in senso inverso



(γ_2 è omotopa a



percorsa 2 volte)



$$\int_{\gamma_3} \omega = 0$$

perché γ_3 non gira intorno al problema, quindi è omotopa ad un curva costante o tutta contenuta nel 1° quadrante.

[Corretto dopo video: trasformato $\iint_{\gamma_2}$ e $\iint_{\gamma_3}$ in $\int_{\gamma_2}$ e $\int_{\gamma_3}$]

ANALISI 2 — LEZIONE 42

Titolo nota 11/04/2014

Esempio 1
$$\omega = \frac{1}{1+x^2y^2}(y\,dx + x\,dy) = \frac{y}{1+x^2y^2}dx + \frac{x}{1+x^2y^2}dy$$

$\gamma(t) = (\underset{x(t)}{\cos t}, \underset{y(t)}{t^2 \sin t})$ $t \in [0,\pi]$. Calcolare $\int_\gamma \omega$

1° modo: applico la formula

$$\int_\gamma \omega = \int_0^\pi \underbrace{\frac{t^2 \sin t}{1+\cos^2 t \cdot t^4 \sin^2 t}}_{A(x,y)} \underbrace{(-\sin t)}_{\dot{x}} + \underbrace{\frac{\cos t}{1+\cos^2 t \cdot t^4 \sin^2 t}}_{B(x,y)} \underbrace{(2t \sin t + t^2 \cos t)}_{\dot{y}}\, dt$$

= forse si fa.

2° modo: esattezza + primitiva

Provo la chiusura $A_y = \dfrac{(1+x^2y^2) - 2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} = \dfrac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$

$B_x = \dots$ = stessa cosa

È vero per forza perchè è del tipo $C(x,y)\,dx + C(y,x)\,dy$ quindi A_y e B_x vengono la stessa cosa.

Aggiunto dopo video: detto così non è vero come fatto generale

Quindi è chiusa e la zona di def. è $\mathbb{R}^2$, quindi è esatta.
Una primitiva è

$$F(x,y) = \arctan(xy)$$

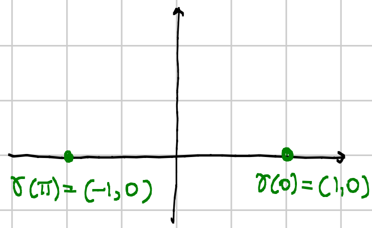
Allora $\int_\gamma \omega = F(\gamma(\pi)) - F(\gamma(0)) = F(-1,0) - F(1,0) = 0 - 0 = 0.$

3° modo : esattezza + niente primitiva ma cambio curva

Intanto dimostro l'esattezza mediante chiusura + sempl. conn.
Sostituisco γ con una curva γ_1 più facile con gli stessi estremi.
Per il noto teorema deve essere

$$\int_{\underset{\text{data}}{\gamma}} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

scelgo io con gli stessi estremi



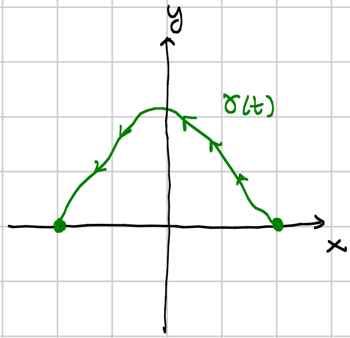
Uso γ_1 = direttissima = $(t,0)$: $t \in [-1,1]$. Questa va quasi bene ma ha il verso opposto. Due modi per rimediare

- cambio il segno alla fine
- considero $(-t,0)$: $t \in [-1,1]$ ← direttissima con verso giusto

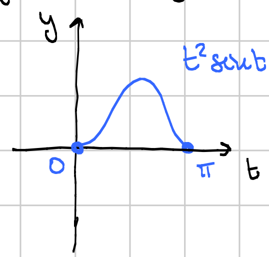
$$\int_\gamma \omega = \underset{\text{verso sbagliato}}{-}\int_{\gamma_1} \omega = -\int_{-1}^{1} \underset{A(t,0)}{0} + \underset{B(t,0)}{t} \cdot \underset{\dot{y}(t)}{0} \, dt = 0$$

— o — o —

Ulteriore esercizio : capire come è fatta
$\gamma(t) = (\cos t, \, t^2 \sin t)$ $\quad t \in [0,\pi]$



Non è chiusa. È semplice? Sì, perché la prima componente è monotona decrescente, quindi $x(t)$ decresce.
Studio la seconda comp., cioè la funzione $y(t) = t^2 \sin t$ per $0 \le t \le \pi$



— o — o —

Esercizio 2 $\omega = e^{2x+3y}\,dx + (a e^{2x+3y} + e^{y^2})\,dy$

Domanda 1: esistono valori di a per cui è esatta?
Essendo definita su tutto $\mathbb{R}^2$: chiusa $\Leftrightarrow$ esatta

$A_y = 3e^{2x+3y}$ $\quad B_x = 2a\,e^{2x+3y}$ $\quad$ Sono uguali $\Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$

Quindi è esatta solo per $a = \frac{3}{2}$

Domanda 2: nel caso $a = \frac{3}{2}$, calcolare $\int_\gamma \omega$ dove

$\gamma(t) = (e^t - t^2,\ t^2 - t) \qquad t \in [0,1]$.

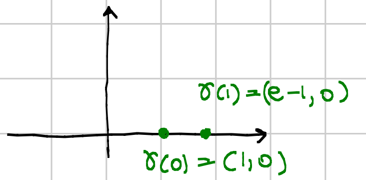
1° modo: meglio di no $\qquad$ 2° modo: mi serve la primitiva

$F_x = e^{2x+3y} \qquad F_y = \frac{3}{2}e^{2x+3y} + e^{y^2}$

$F(x,y) = \frac{1}{2}e^{2x+3y} + c(y)$. Calcolo $c(y)$ imponendo $F_y = \ldots$

$\cancel{\frac{3}{2}e^{2x+3y}} + c'(y) = \cancel{\frac{3}{2}e^{2x+3y}} + e^{y^2} \Rightarrow c'(y) = e^{y^2}$ e sono guai

3° modo: cambio la curva con la direttissima



$\gamma_1(t) = (t,0)$ con $t \in [1, e-1]$ VERSO OK

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega = \int_1^{e-1} \underset{\substack{\uparrow\\ A(t,0)}}{e^{2t}} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \dot{x}}}{1} + \underset{\substack{\uparrow\\ B(t,0)}}{\ldots} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \dot{y}}}{0}\ dt = \int_1^{e-1} e^{2t}\,dt = \text{banale}$$

Back to 2° modo $\quad$ La primitiva è $\frac{1}{2}e^{2x+3y} + c(y)$ dove $c'(y) = e^{y^2}$
Ora

$$\int_\gamma \omega = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(e-1,0) - F(1,0) = \frac{1}{2}e^{2e-2} + \cancel{c(0)} - \frac{1}{2}e^2 - \cancel{c(0)}$$

Esempio 3 $\underbrace{(x^2+y)}_{A}dx + \underbrace{(x+e^y+z^2)}_{B}dy + \underbrace{(2zy+\sin z)}_{C}dz = \omega$

Domanda 1: è esatta? Controllo la chiusura

$$\left.\begin{array}{lll} A_y = 1 & B_x = 1 & \text{ok} \\ A_z = 0 & C_x = 0 & \text{ok} \\ B_z = 2z & C_y = 2z & \text{ok} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{chiusa ed essendo su } \mathbb{R}^3 \Rightarrow \text{esatta}$$

Domanda 2: trovare la primitiva tale che $F(0,0,0) = 5$

Parto dalla condizione $F_x = x^2+y$, da cui

$$F(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + xy + c(y,z).$$

Impongo $F_y = x+e^y+z^2$: $\cancel{x} + c_y(y,z) = \cancel{x} + e^y + z^2$, quindi

$$c_y = e^y + z^2 \quad \text{e quindi} \quad c(y,z) = e^y + z^2y + c(z)$$

primitiva risp. a y

Quindi finora

$$F(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + xy + e^y + z^2y + c(z)$$

Impongo l'ultima condizione

$$F_z = \cancel{2zy} + c_z = \cancel{2yz} + \sin z \Rightarrow c_z = \sin z \Rightarrow c(z) = -\cos z$$

In conclusione $F(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + xy + e^y + z^2y - \cos z + \text{costante}$

scelta in modo che $F(0,0,0) = 5$

Controllare che funzioni.

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 43

Titolo nota 12/04/2014

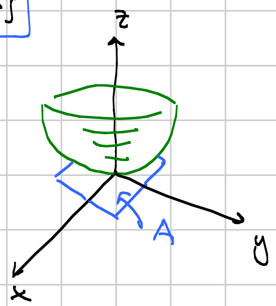
SUPERFICI Superfici in $\mathbb{R}^3$
→ cartesiano
→ implicito
→ parametrico

modi possibili per descrivere una sup.

Superficie cartesiana $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, la sup. è il grafico

$$\boxed{S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = f(x,y), \ (x,y) \in A\}}$$

Esempio $A = [-1,1] \times [-1,1]$ $\quad f(x,y) = x^2+y^2$
Ci stiamo limitando alla parte di paraboloide che si proietta sul quadrato A.



Superficie implicita $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è il luogo di zeri di una funzione di 3 variabili $\Phi(x,y,z)$.

$$\boxed{S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \Phi(x,y,z) = 0\}}$$

Brutalmente : $\Phi(x,y,z) = 0$ è l'equazione della superficie. Implicita vuol dire che non ho ricavato una variabile risp. alle altre

Esempio $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 = 4\}$ sfera
$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^4+z^2 = 4\}$ sup. di rotazione intorno all'asse y.

Superficie parametrica Dato $\underbrace{A \subseteq \mathbb{R}^2}_{\text{dove variano i parametri}}$, date tre funzioni $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ in A

funzioni dei 2 parametri

2 parametri

$$\boxed{S = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \ : \ (u,v) \in A\}}$$

Esempio 1 Un piano in $\mathbb{R}^3$ ha equazione parametrica del tipo

$$(1,2,-1) + t\,(0,1,1) + s\,(2,3,0)$$

$$= (\underbrace{1+2s}_{x(t,s)}, \underbrace{2+t+3s}_{y(t,s)}, \underbrace{-1+t}_{z(t,s)})$$

I parametri posso chiamarli (u,v) oppure (t,s)

Esempio 2 $S = \{ (1+u^2, uv, u^2+v^2) : \underbrace{u^2+v^2 \leq 3}_{(u,v) \text{ stanno in un cerchio}} \}$

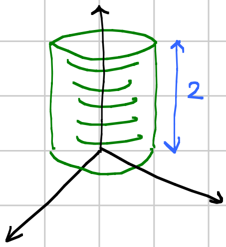
Esempio 3 Tutte le superfici cartesiane sono in realtà sup. parametriche, così come tutte le curve cartesiane sono curve parametriche

$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y),\ (x,y) \in A \}$ ← cartesiana

$= \{ (u,v,f(u,v)) : (u,v) \in A \}$ ← stessa in parametrica

↑ 3ª variabile = f (prime 2)

Esempio 4 Cilindro con asse lungo asse z, raggio di base = 1, altezza = 2, appoggiato sul piano xy (Sup. laterale)



→ Cartesiano non lo è

→ implicito $C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{0 \leq z \leq 2}_{\text{limitaz.}}, \underbrace{x^2+y^2 = 1}_{\text{eq. implicita}} \}$

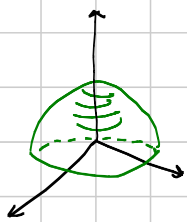
→ parametrica : uso come parametri z e il θ delle coord. polari

$$C = \{ \underbrace{(\cos\theta, \sin\theta, z)}_{\text{parametrizz.}} : \underbrace{0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 2}_{\text{dove variano i parametri}} \}$$

Esempio 5 Semisfera "alta" di raggio 3.

coord. sferiche

$$S = \{ (3\cos\theta\cos\varphi, 3\sin\theta\cos\varphi, 3\sin\varphi) : \overbrace{0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2}}^{\text{dove variano i parametri}} \}$$



PIANO TANGENTE AD UNA SUPERFICIE

VETTORE NORMALE

vettore perpendicolare al piano tangente

Superficie cartesiana

$z = f(x,y)$. Voglio il piano tangente nel punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

Piano tangente al grafico

$$f(x_0+h, y_0+k) = \underbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k}_{\text{eq. del piano tangente}} + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

Se pongo $x_0+h = x$ $\quad h = x-x_0$

$y_0+k = y$ $\quad k = y-y_0$

e sostituendo tro

$$\boxed{z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

equazione del piano tangente

$$z = f_x(x_0,y_0)\,x + f_y(x_0,y_0)\,y + f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)x_0 - f_y(x_0,y_0)y_0$$

Superficie implicita

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \Phi(x,y,z) = 0\}$

Il luogo di zeri, cioè S, è una sup. di livello, quindi è perpendicolare al gradiente di Φ.

Quindi il piano tangente ad S in un p.to (x_0,y_0,z_0) è il piano che passa per il punto ed è $\perp$ al vettore $\nabla\Phi(x_0,y_0,z_0)$.

Quindi è il piano

$$\langle \nabla\Phi(x_0,y_0,z_0), (x,y,z) \rangle = d$$

dove d è scelto in modo che il piano passi per il punto (x_0,y_0,z_0):

$$\boxed{\Phi_x(x_0,y_0,z_0)\,x + \Phi_y(x_0,y_0,z_0)\,y + \Phi_z(x_0,y_0,z_0)\,z = \Phi_x(\,)x_0 + \Phi_y\,y_0 + \Phi_z(\,)z_0}$$

<u>Esempio 1</u> Sfera $x^2+y^2+z^2=5$, punto $(1,0,2) \in$ sfera

$\Phi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-5=0$, $\nabla\Phi(x,y,z) = (2x,2y,2z)$

Il vettore $(2,0,4)$ (ho sostituito $(1,0,2)$ nel $\nabla\Phi$) è il vettore $\perp$ alla sfera nel p.to $(1,0,2)$. Il piano sarà

$$\underbrace{2x+4z}_{(2,0,4) \text{ come coeff.}} = d \quad \Rightarrow \quad 2x+4z = 10$$

$\uparrow$ perché $(1,0,2) \in$ piano

l'eq. è $\boxed{x+2z=5}$

<u>Esempio 2</u> Piano tangente al cilindro $x^2+y^2=2$ nel p.to $(1,1,3)$

$\Phi(x,y,z) = x^2+y^2-2$, $\nabla\Phi(x,y,z) = (2x,2y,0)$

$\nabla\Phi(1,1,3) = (2,2,0)$ ← vettore perpendicolare al cilindro

Faccio il piano per $(1,1,3)$ perpendicolare a $(2,2,0)$

$$2x+2y = 4 \quad , \quad \text{cioè} \quad x+y=2$$

(piano $\perp$ al piano xy).

ANALISI 2 – LEZIONE 44

Titolo nota 12/04/2014

VETTORE NORMALE E PIANO TANGENTE AD UNA SUPERFICIE

Superficie implicita $\Phi(x,y,z)=0$ $(x_0, y_0, z_0) \in S$

Vettore normale $\nabla\Phi(x_0, y_0, z_0)$

Piano tangente: piano per (x_0, y_0, z_0) che ha $\nabla\Phi(x_0,y_0,z_0)$ come vettore normale (coeff. a, b, c)

Superficie parametrica $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $(u,v) \in \ldots$

Voglio il piano tangente nel p.to corr. ad un certo (u_0, v_0), quindi nel punto $(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$.
In forma parametrica l'eq. del piano è

$$\boxed{(x_0,y_0,z_0) + t(x_u, y_u, z_u) + s(x_v, y_v, z_v)}$$ piano tangente

Esempio $(u+v, u^2-v^2, uv^3)$ $(u_0, v_0) = (2,1)$
Il punto corrisp. della sup. è $(3,3,2) = (x_0, y_0, z_0)$

$(x_u, y_u, z_u) = (1, 2u, v^3)$ che nel p.to diventa $(1,4,1)$
$(x_v, y_v, z_v) = (1, -2v, 3uv^2)$ " " " " $(1,-2,6)$

Quindi il piano tangente è $\boxed{(3,3,2) + t(1,4,1) + s(1,-2,6)}$

Se voglio il vettore normale applico la "formula misteriosa"

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (26, -5, -6)$$ vettore normale alla superficie

$\boxed{\text{Back to forma cartesiana}}$

Supponiamo di avere una superficie cartesiana

$$z = x^2 - y^3$$

Voglio piano tangente e vettore normale nel punto $(3, 2, 1) \in S$.

Per il vettore normale, la penso implicita come $\Phi(x,y,z) = z - x^2 + y^3 = 0$.
A quel p.to

vettore normale $= \nabla\Phi = (-2x, 3y^2, 1)$ che nel p.to diventa $\boxed{(-6, 12, 1)}$

Per il piano tangente ho 2 opzioni.

$\boxed{1^a \text{ opzione}}$ lo ottengo dal vettore normale: $\boxed{-6x + 12y + z = 7}$
$-18 + 24 + 1$

$\boxed{2^a \text{ opzione}}$ riscrivo la sup. in parametrica $(u, v, u^2 - v^3)$
ora mi interessa $(u_0, v_0) = (3, 2)$

$(x_u, y_u, z_u) = (1, 0, 2u)$ che nel p.to diventa $(1, 0, 6)$
$(x_v, y_v, z_v) = (0, 1, -3v^2)$ " $(0, 1, -12)$

Quindi il piano è $(3, 2, 1) + t(1, 0, 6) + s(0, 1, -12)$

Saranno lo stesso piano? $(3+t, 2+s, 1+6t-12s)$ sostituisco

$$-18 - \cancel{6t} + 24 + \cancel{12s} + 1 + \cancel{6t} - \cancel{12s} = 7 \qquad \text{ok.}$$

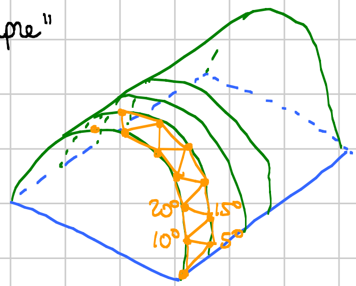
— o — o —

AREA DI UNA SUPERFICIE

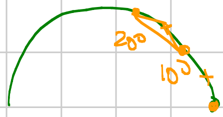
① COME NON SI DEFINISCE
② COME SI DEFINISCE
③ COME SI CALCOLA

① Come non si definisce: approssimando la superficie con dei triangolini

Se in analogia con le curve, definisco l'area come il sup delle aree dei triangolini, quello viene "sempre" uguale a $+\infty$.
Pensiamo ad una tettoia cilindrica

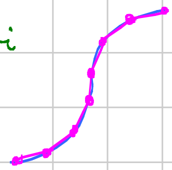


Se prendo le arcate molto vicine tra di loro, continuando sempre a sfasare i punti 10°–20°–30° su una e 5°–15°–25° sull'altra



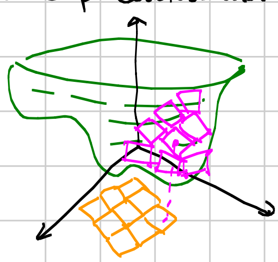
Curve vs Superfici

Su una curva, se prendo p.ti molto ravvicinati, i segmenti congiungenti approssimano la curva e la loro direzione approssima la retta tangente



Su una superficie, se prendo p.ti molto ravvicinati, i triangolini che si formano possono non avere nulla a che fare con il piano tangente alla sup.

② Molto brutalmente, l'area di una sup. si definisce approssimandola con pezzi di piano tangente. Pensiamo ad una sup cartesiana.
Divido la base in tanti rettangolini, ed in ogni rettangolino approx la sup. con un suo piano tangente.
Poi si passa al limite



③ $\boxed{\text{Come si calcola}}$ Formulaccia nel caso di sup. parametrica

$$(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)) \qquad (u,v) \in A$$

Allora $$\text{Area}(S) = \iint_A \sqrt{M_1^2(u,v) + M_2^2(u,v) + M_3^2(u,v)}\, du\, dv$$

dove M_1, M_2, M_3 sono i 3 minori (det) 2×2 della matrice

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} M_1 &= y_u z_v - z_u y_v \\ M_2 &= -x_u z_v + z_u x_v \\ M_3 &= x_u y_v - y_u x_v \end{aligned}$$

Quindi $\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$ è la norma del vettore normale ottenuto dalla formula misteriosa a partire dai 2 vettori (x_u, y_u, z_u) e (x_v, y_v, z_v) che generano il piano tangente.

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 45

Titolo nota 12/04/2014

AREA DI UNA SUPERFICIE

Caso parametrico $\quad \text{Area}(S) = \iint_A \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}\, du\, dv$

Superficie cartesiana $\quad z = f(x,y)$ con $(x,y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$

Passo in parametrica: $(\underset{x}{u}, \underset{y}{v}, \underset{z}{f(u,v)})$

Scrivo la matrice

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_u(u,v) \\ 0 & 1 & f_v(u,v) \end{pmatrix}$$

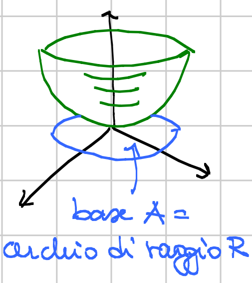
$$(M_1, M_2, M_3) = (-f_u(u,v), -f_v(u,v), 1)$$

$$\text{Area}(S) = \iint_A \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}\, du\, dv$$

(è la formula analoga di $\text{lungh}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(t)}\, dt$ per le curve cartesiane)

Esempio 1 $\quad z = x^2+y^2$. Voglio calcolare l'area della parte che si proietta su $x^2+y^2 \leq R^2$.

Ora $f(x,y) = x^2+y^2$



$$\text{Area}(S) = \iint_A \sqrt{1+ f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy$$

$$= \iint_A \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy$$

Lo calcolo in polari

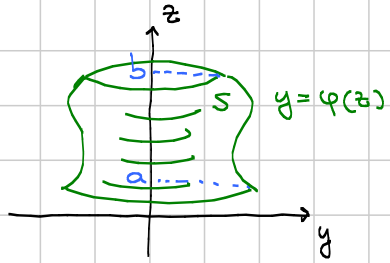
$$= \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \, \sqrt{1+4\rho^2} \cdot \rho \qquad = 2\pi \int_0^R \rho\sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho$$

pag.

$$= 2\pi \left[\left(1+4\rho^2\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \, \frac{1}{8} \right]_0^R = \text{o.k.}$$

— o — o —

SUPERFICI DI ROTAZIONE



Sto ruotando una curva di eq.
$y = \varphi(z)$ con $a \le z \le b$

Descrizione parametrica della superficie con parametri z e θ

$$\underbrace{\left(\varphi(z)\cos\theta \,,\ \varphi(z)\sin\theta ,\ z\right)}_{\text{sono coordinate cilindriche con } \rho = \varphi(z)} \qquad a \le z \le b, \ 0 \le \theta \le 2\pi$$

Calcolo la matrice

$$\begin{pmatrix} x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_z & y_z & z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi(z)\sin\theta & \varphi(z)\cos\theta & 0 \\ \dot\varphi(z)\cos\theta & \dot\varphi(z)\sin\theta & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(M_1, M_2, M_3\right) = \left(\varphi(z)\cos\theta,\ \varphi(z)\sin\theta,\ -\varphi(z)\dot\varphi(z)\sin^2\theta - \varphi(z)\dot\varphi(z)\cos^2\theta\right)$$

$$= \left(\varphi(z)\cos\theta,\ \varphi(z)\sin\theta,\ -\varphi(z)\dot\varphi(z)\right)$$

$$\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2} = \sqrt{\varphi(z)^2\cos^2\theta + \varphi(z)^2\sin^2\theta + \varphi(z)^2\dot\varphi(z)^2}$$

$$= \sqrt{\varphi(z)^2\left(1+\dot\varphi(z)^2\right)} = \varphi(z)\sqrt{1+\dot\varphi(z)^2}$$

Conclusione $\quad \text{Area}(S) = \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \ \varphi(z)\sqrt{1+\dot\varphi(z)^2}$ da cui

$$\boxed{\text{Area}(S) = 2\pi \int_a^b \varphi(z)\sqrt{1+\dot\varphi(z)^2}\, dz}$$

Area di una superficie di rotazione

Teorema (GULDINO 2) L'area di una sup. di rotazione è uguale a

(lungh. curva che ruota)$\cdot$(lungh. del percorso del baricentro della curva)

In formule

$$\text{Area}(S) = \text{lungh}(\gamma)\cdot 2\pi\, y_G$$

y_G coord. y del baricentro della curva.

Dim.: $y_G = \dfrac{1}{\text{lungh}(\gamma)}\cdot \underbrace{\int_\gamma y\, ds}_{\text{integrale curvilineo}}$

In questo caso la curva ha parametrizzazione

$(\underset{y}{\varphi(t)}, \underset{z}{t})$ con $t\in[a,b]$,

quindi

$$\int_\gamma y\,ds = \int_a^b \underset{y}{\varphi(t)}\ \underset{\dot y^2+\dot z^2}{\sqrt{\dot\varphi(t)^2+1}}\,dt$$

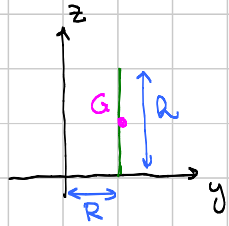
Quindi

$$\text{lungh}(\gamma)\cdot 2\pi\, y_G = \cancel{\text{lungh}(\gamma)}\cdot 2\pi\,\frac{1}{\cancel{\text{lungh}(\gamma)}}\int_a^b \varphi(t)\sqrt{1+\dot\varphi^2(t)}\,dt$$

$$= \text{Area}(S).$$

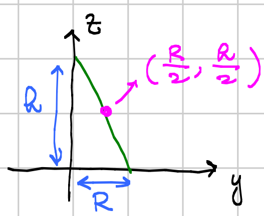
— o — o —

Esempio 1 Sup. laterale cilindro



$$\text{Sup}(S) = \text{lungh}(\gamma)\cdot 2\pi\, y_G = R\cdot 2\pi R$$

Esempio 2 Sup. laterale cono

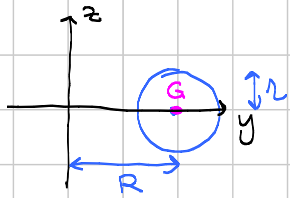


$$\text{Sup}(S) = \text{lungh}(\gamma)\cdot 2\pi\, y_G =$$

$$= \sqrt{R^2+R^2}\cdot 2\pi\,\frac{R}{2}$$

$$= \pi R\sqrt{R^2+R^2}$$

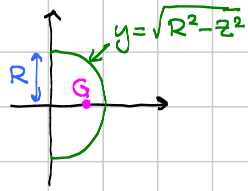
Esempio 3 Toro



$$\text{Sup}(S) = \text{lungh}(\gamma) \cdot 2\pi\, y_G$$

$$= 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R$$

Esempio 4 Sfera



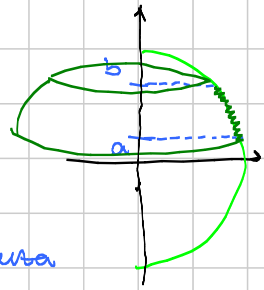
Non è evidente dove si trova il baricentro.
Abbiamo 2 opzioni
→ calcolare G con la formula (vedi lez. con.)
→ usare la formula diretta per l'area

$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_{-R}^{R} \varphi(z)\sqrt{1+\dot\varphi^2(z)}\, dz \qquad \text{con } \varphi(z) = \sqrt{R^2-z^2}$$

$$\dot\varphi(z) = \frac{-2z}{2\sqrt{R^2-z^2}} = \frac{-z}{\sqrt{R^2-z^2}} \qquad 1+\dot\varphi^2(z) = 1+\frac{z^2}{R^2-z^2} = \frac{R^2}{R^2-z^2}$$

$$\text{Area}(S) = 2\pi\int_{-R}^{R} \cancel{\sqrt{R^2-z^2}}\,\frac{R}{\cancel{\sqrt{R^2-z^2}}} = 2\pi R\int_{-R}^{R} 1\, dz = 4\pi R^2$$

$\boxed{\text{Oss. 1}}$ Se volessi la sup. di un segmento sferico.
Ottengo allo stesso modo



$$\text{Area} = 2\pi R\int_a^b 1\, dz = 2\pi R\,\underbrace{(b-a)}_{\text{dipende solo dalla differenza}}$$

$\boxed{\text{Oss. 2}}$ Guldino 2 lo posso riscrivere come

$$\boxed{\text{Area}(S) = 2\pi\int_\gamma y\, ds}$$

← utile perché lo posso calcolare scegliendo per γ una parametrizzazione comoda, che renda semplice il ds

[Esercizio: fare la sfera parametrizzando la circ. con sin e cos]

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 46

Titolo nota 08/05/2014

GRADIENTE, DIVERGENZA, ROTORE, LAPLACIANO

Def. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si definisce $\nabla f = (f_x, f_y)$
" $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ si definisce $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ GRADIENTE DI f
(stessa cosa se f è definita in $A \subseteq \mathbb{R}^2$ o in $A \subseteq \mathbb{R}^3$)

Def. Dato un campo $\vec{E}$ definito in un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, diciamo

$$\vec{E}(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$$

si definisce divergenza di $\vec{E}$ il numero

$$\operatorname{div} \vec{E} = A_x(x,y) + B_y(x,y)$$

Analogamente in $\mathbb{R}^3$, dato $\vec{E}(x,y,z) = (A(x,y,z), B(x,y,z), C(\dots))$ si definisce

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = A_x(x,y,z) + B_y(x,y,z) + C_z(x,y,z)}$$

Def. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si definisce Laplaciano di f il numero

$$\Delta f(x,y) = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$$

Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, allora $\boxed{\Delta f(x,y,z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}}$.

Def. Solo in dimensione 3, dato un campo $\vec{E} = (A,B,C)$, si definisce ROTORE di $\vec{E}$ (CURL in inglese) il vettore ottenuto sviluppando formalmente il determinante

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \qquad \boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)}$$

Oss.

	INPUT	OUTPUT
gradiente	scalare	vettore
divergenza	vettore	scalare
rotore	vettore	vettore
laplaciano	funzione	funzione

Esempi $f(x,y,z) = x^2 + y e^{2z} + x z^2$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(2x + z^2,\ e^{2z},\ 2y e^{2z} + 2xz\right)$$

$$\Delta f(x,y,z) = \underset{\substack{\uparrow \\ f_{xx}}}{2} + \underset{\substack{\uparrow \\ f_{yy}}}{0} + \underbrace{4y e^{2z} + 2x}_{\substack{\uparrow \\ f_{zz}}} = 2 + 2x + 4y e^{2z}$$

$$\vec{E}(x,y,z) = \left(2x + z,\ -3y^2 + xz,\ x^2 - z\right)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \underset{\substack{\uparrow \\ A_x}}{2} \underset{+B_y}{-6y} \underset{+C_z}{-1} = 1 - 6y$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2x+z & -3y^2+xz & x^2-z \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = \Big(\underbrace{-x}_{C_y - B_z},\ \underbrace{1-2x}_{A_z - C_x},\ \underbrace{z}_{B_x - A_y}\Big)$$

— o — o —

Facciamo un po' di composizioni

① $\operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}(f_x, f_y, f_z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f$

② Δf = traccia di Hf (Hf è la matrice Hessiana)

③ $\operatorname{rot}(\nabla f) = \operatorname{rot}(f_x, f_y, f_z) = (f_{zy} - f_{yz},\ f_{xz} - f_{zx},\ f_{yx} - f_{xy})$

$= (0,0,0)$ per l'inversione dell'ordine di derivazione

$$\boxed{\operatorname{rot}(\nabla f) = (0,0,0)}$$

④ $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{E}) = \operatorname{div}(C_y - B_z,\ A_z - C_x,\ B_x - A_y)$

$$= \cancel{C_{yx}} - \cancel{B_{zx}} + \cancel{A_{zy}} - \cancel{C_{xy}} + \cancel{B_{xz}} - \cancel{A_{yz}} = 0$$

$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{E}) = 0.$

⑤ Tante cose non hanno senso! $\nabla(\operatorname{rot}\vec{E})$ non ha senso, perché il gradiente si fa delle funzioni.
$\operatorname{rot}(\Delta f)$, perché il rotore si fa solo dei vettori...

— o — o —

Osservazione Spesso a fisica si fa il rotore di vettori di 2 componenti $\vec{E} = (A, B)$

$$\operatorname{rot}(A,B) = \operatorname{rot}(A,B,0) = (0, 0, B_x - A_y)$$

— o — o —

CRITERI UTILI

① Se $\vec{E} = \nabla f(x,y,z)$, allora $\operatorname{rot}\vec{E} = (0,0,0)$.
Viceversa, se $\vec{E}$ è un campo con $\operatorname{rot}\vec{E} = (0,0,0)$ e l'insieme di definizione è semplicemente connesso, allora $\vec{E}$ è il gradiente di un potenziale, cioè esiste f t.c. $\vec{E} = \operatorname{grad} f$.
(vedi discorsi sulle forme differenziali)

② Come determino se $\vec{E}$ è il rotore di qualcos'altro?

Se fosse un rotore, per il p.to 4 di sopra la divergenza deve fare 0.
Se $\operatorname{div}\vec{E} \neq 0$, allora non ci sono speranze.
Se invece $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, e l'insieme di definizione è STELLATO, allora $\vec{E}$ è un rotore, cioè esistono A, B, C tali che

$$\operatorname{rot}(A,B,C) = 0.$$

③ Se $\nabla f = \vec{0}$, e l'insieme di definizione di f è connesso, allora f è costante. Di conseguenza, se $\nabla f = \nabla g$, allora $\nabla(f-g) = \nabla f - \nabla g = \vec{0}$, quindi $f-g$ è costante.

⑤ se $\operatorname{rot} \vec{E} = (0,0,0)$, allora $\vec{E} = \nabla f$ (se l'insieme di definizione è semplicemente connesso).
Di conseguenza, se $\operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} \vec{F}$, allora $\operatorname{rot}(\vec{E}-\vec{F}) = (0,0,0)$ quindi $\vec{E}-\vec{F}$ è il gradiente di un potenziale.

⑥ Se $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, e l'insieme di definizione è stellato, allora $\vec{E}$ è un rotore, cioè $\vec{E} = \operatorname{rot}(A,B,C)$ per un opportuno (A,B,C).
Di conseguenza, se $\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \vec{F}$, allora $\operatorname{div}(\vec{E}-\vec{F}) = 0$, ma allora

$$\vec{E}-\vec{F} = \operatorname{rot}(A,B,C)$$

—o —o —

<u>Esercizio</u> Data f funzione ed $\vec{E}$ vettore, calcolare $\operatorname{div}(f\vec{E})$.

Indico $\vec{E} = (A,B,C)$. Allora

$$\operatorname{div}(f\vec{E}) = \operatorname{div}(fA, fB, fC) = (fA)_x + (fB)_y + (fC)_z$$

$$= f_x A + f A_x + f_y B + f B_y + f_z C + f C_z$$

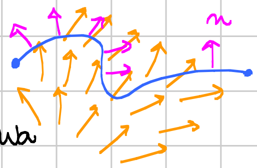
$$= f \operatorname{div} \vec{E} + \nabla f \cdot \vec{E}$$

ANALISI 2 – LEZIONE 47

Titolo nota 08/05/2014

INTEGRALI DI FLUSSO IN $\mathbb{R}^2$

Ingredienti:
- un campo di vettori $\vec{E} = (A, B)$
- una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$
- una scelta del versore normale alla curva



La curva la posso orientare con il versore normale da una parte o dall'altra

Def. Si dice <u>flusso</u> del vettore $\vec{E}$ attraverso la curva γ con versore normale $\vec{n}$ il numero

$$\int_\gamma \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{n}}_{\text{prodotto scalare}} \underbrace{ds}_{\text{integrale curvilineo}}$$

Oss. Se $\vec{E}$ rappresenta la velocità dell'acqua di un fiume, allora l'integrale di flusso rappresenta la quantità di acqua che scorre attraverso la curva per unità di tempo.

<u>Operativamente</u> Sia $\vec{E} = (A(x,y), B(x,y))$
sia $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

Allora il vettore tangente alla curva è $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$. Il vettore normale si ottiene ruotando il tangente di 90° in senso orario o antiorario, a seconda della scelta fatta. Le 2 possibilità sono

$(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$ rot. antioraria

$(\dot{y}(t), -\dot{x}(t))$ rot. oraria

Di conseguenza il versore normale è

$$\vec{n} = \left(\frac{-\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}, \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \right) \qquad \vec{n} = \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{}}, \frac{-\dot{x}}{\sqrt{}} \right)$$

Quando scrivo l'integrale curvilineo le radici se ne vanno, quindi

$$\boxed{\int_\gamma \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds} = \int_a^b \left\langle (A,B), \left(\frac{-\dot{y}}{\cancel{\sqrt{}}}, \frac{\dot{x}}{\cancel{\sqrt{}}} \right) \right\rangle \cancel{\sqrt{}} \, dt$$

$$= \int_a^b (-A\dot{y} + B\dot{x}) \, dt$$

$$\boxed{= \int_a^b \left(-A(x(t),y(t))\,\dot{y}(t) + B(x(t),y(t))\,\dot{x}(t) \right) dt}$$

Achtung! I segni sono quelli opposti se il versore normale prescelto è quello opposto.

Scelta classica — La scelta del versore normale in assenza di specificazioni è quella ruotata di 90° in senso orario rispetto al tangente, cioè con $(\dot{y}, -\dot{x})$ che porta alla formula

$$\boxed{\int_\gamma \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = \int_a^b A\dot{y} - B\dot{x} \, dt}$$

— o — o —

Integrali di flusso vs forme differenziali

Dalla formula precedente si ottiene che

$$\text{Flusso di } \vec{E} \text{ attraverso } \gamma \text{ (con } \vec{n} \text{ orario)} = \int_\gamma \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$= \int_a^b A\dot{y} - B\dot{x} \, dt = \underbrace{\int_\gamma A\,dy - B\,dx}$$

integrale su γ della forma diff. $A\,dy - B\,dx$

— o — o —

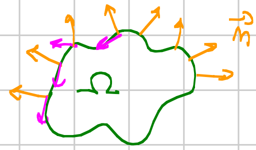
GAUSS – GREEN IN 2 VARIABILI

Ingredienti : $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ insieme di integrazione
$f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ funzione
$\vec{E}$ campo di vettori in Ω $\quad \vec{E} = (A(x,y), B(x,y))$

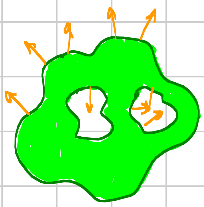
$$\boxed{\int_\Omega f \operatorname{div} \vec{E} \, dx\,dy = \int_{\partial\Omega} f \, \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds - \int_\Omega \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx\,dy}$$

bordo di Ω $\quad$ è il versore normale
a $\partial\Omega$ USCENTE = normale ESTERNA

$\vec{n}$ è il vettore normale orario per un omino che percorre il $\partial\Omega$ tenendo Ω a sinistra.



Esempio



In questo esempio, $\partial\Omega$ è costituito da 3 curve. Se voglio che il versore normale sia quello orario, devo percorrere la curva esterna in senso antiorario e quelle interne in senso orario. Con queste scelte mi tengo Ω a sinistra durante il percorso.

Osservazione La formula di GG è l'equivalente per gli integrali doppi dell'integrazione per parti dell'analisi 1.

$\boxed{\text{Caso speciale 1}}$ Supponiamo che $\vec{E} = \nabla g$. Allora GG diventa

$$\int_\Omega f \, \Delta g \, dx\,dy = \int_{\partial\Omega} f \, \underbrace{\nabla g \cdot \vec{n}}_{} \, ds - \int_\Omega \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, dx\,dy$$

$\frac{\partial g}{\partial n}$ = derivata di g nella direzione $\vec{n}$

$\boxed{\text{Caso speciale 2}}$ Supponiamo che $f(x,y) \equiv 1$ (funzione costante).
Allora GG diventa

$$\boxed{\underbrace{\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E}\, dx\, dy}_{\text{integrale interno della divergenza.}} = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{n}\, ds}_{\text{flusso di } \vec{E} \text{ uscente da } \partial\Omega}}$$

In termini di forme differenziali, se $\vec{E} = (A, B)$, allora si riscrive come

$$\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E}\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} A\, dy - B\, dx}$$

curva che percorre $\partial\Omega$ tenendo Ω a SINISTRA

$\boxed{\text{Casi speciali 3}}$ Cosa succede nella formula sopra se $\vec{E} = (x, 0)$?

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_{\Omega} 1\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} x\, dy \\ &\quad \shortparallel \\ &\text{Area}(\Omega) \end{aligned}}$$

Se invece uso $\vec{E} = (0, y)$ ottengo

$$\boxed{\text{Area}(\Omega) = \int_{\Omega} 1\, dx\, dy = -\int_{\partial\Omega} y\, dx}$$

Se prendo $\vec{E} = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$ ottengo (ma potrei anche $\vec{E} = \left(\frac{1}{3}x, \frac{2}{3}y\right)$)

$$\boxed{\text{Area}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} x\, dy - y\, dx}$$

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 48

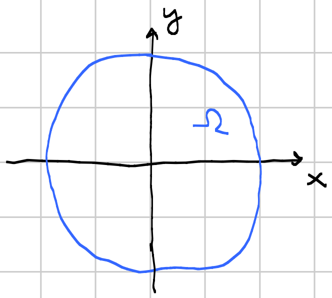
Titolo nota 08/05/2014

$$\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E}\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, ds = \int_{\partial\Omega} A\, dy - B\, dx}$$

Esempio 1 Sia $\vec{E} = (y \arctan y^2,\ \sin x \cdot 3^x)$

Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 \le 1\}$

Calcolare il flusso di $\vec{E}$ uscente da $\partial\Omega$.



1° modo Uso la definizione Flusso $= \int_{\partial\Omega} E \cdot \vec{n}\, ds$

Parametrizzo $\partial\Omega$, calcolo vettore tangente e normale, poi faccio l'integrale curvilineo.

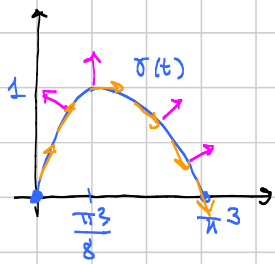
2° modo Uso GG e il flusso richiesto è $\int_{\Omega} \underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{=0}\, dx\, dy$, cioè 0

—o—o—

<u>Osservazione generale</u> Se dobbiamo calcolare il flusso di $\vec{E}$ uscente da un insieme dato, può essere utile ridursi a calcolare l'integrale della divergenza nell'insieme.

<u>Esempio 2</u> Sia $\vec{E} = (y \arctan y^2,\ \sin x \cdot 3^x)$

Sia $\gamma(t) = (t^3, \sin t)$ $t \in [0, \pi]$



$\gamma(t)$ non è chiusa perché $\gamma(0) \ne \gamma(\pi)$.

È una curva semplice perché la prima componente è iniettiva.

Voglio calcolare il flusso di $\vec{E}$ uscente da γ con la normale che punta verso l'alto.

$\boxed{1^o \text{ modo}}$ Formula con le forme differenziali

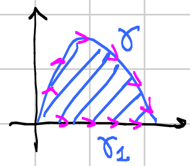
$$\int_\gamma \vec{E}\cdot\vec{n}\,ds = \int_\gamma A\,dy - B\,dx.$$ Quest'ultimo lo calcolo con la definizione e diventa

$$= \int_0^\pi \left(A(x(t),y(t))\,\dot{y}(t) - B(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)\right)dt$$

$$= \int_0^\pi \left\{(\sin t\cdot\arctan\sin^2 t)\cos t - \sin t^3\cdot e^{t^3}\cdot 3t^2\right\}dt = \text{si fa}$$

POI CAMBIO SEGNO PERCHÈ L'ORIENTAZIONE DEVE ESSERE ORARIA

$\boxed{2^o \text{ modo}}$ Considero l'insieme Ω delimitato da γ e dall'asse x. Per GG si ha che



$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}\cdot\vec{n}\rangle\,ds = \int_\Omega \operatorname{div}\vec{E}\,dx\,dy = 0$$

$$\overset{\shortparallel}{} \int_{\partial\Omega} A\,dy - B\,dx \qquad\qquad \gamma_1(t) = (t,0) \quad t\in[0,\pi^3]$$

Ora l'integrale su $\partial\Omega$ è fatto da 2 pezzi: la curva γ che percorre la parte alta di $\partial\Omega$ e il tratto di asse x.

$$0 = \int_{\partial\Omega} A\,dy - B\,dx = -\int_\gamma A\,dy - B\,dx + \int_{\gamma_1} A\,dy - B\,dx$$

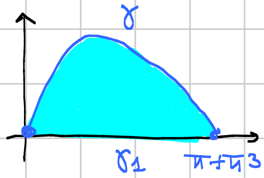
Quindi il flusso che volevo, cioè quello su γ, è dato da

$$\int_{\gamma_1} A\,dy - B\,dx = \int_0^{\pi^3} \underset{\uparrow\, A\,dy}{0} - \underbrace{(\sin t\cdot 3^t)\,1}_{B\,dx}\,dt$$

Aggiunto dopo video: c'è un ulteriore cambio di segno perché a me serve $-\int_\gamma \vec{E}\cdot\vec{n}\,ds$

<u>Osservazione generale</u> Come usare GG quando la curva non è il bordo di un insieme? Basta aggiungere una curva semplice che lo completi rendendolo un bordo.

Esempio 3 $\gamma(t) = (t+t^3, \sin t)$ $\quad t \in [0,\pi]$



Come prima è una curva semplice non chiusa. Voglio calcolare l'area tra la curva e l'asse x.

1º modo Provo a scrivere Ω come insieme normale

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi+\pi^2,\ 0 \le y \le ?\}$$

Per calcolare ? devo risolvere $\begin{cases} x = t+t^3 \\ y = \sin t \end{cases}$ → ricavo t in funz. di x e sostituisco

2º modo Formule alla GG

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} x\,dy = -\int_{\partial\Omega} y\,dx .$$

Da cosa è fatto $\partial\Omega$? Da due pezzi:

- $\gamma_1(t) = (t,0)$ con $t \in [0, \pi+\pi^3]$ percorsa normalmente
- $\gamma_2(t) = \gamma$ data percorsa in senso inverso.

Quindi

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma_1} x\,dy \overset{\text{senso inverso}}{-} \int_{\gamma} x\,dy = \int_0^{\pi+\pi^3} \underset{x}{t} \cdot \underset{dy}{0}\, dt - \int_0^{\pi} \underbrace{(t+t^3)}_{x} \cos t\, dt$$

e questo si fa veramente.

In alternativa

$$\text{Area}(\Omega) = -\int_{\partial\Omega} y\,dx = -\int_{\gamma_1} y\,dx + \int_{\gamma} y\,dx$$

$$= \int_0^{\pi+\pi} \underset{y}{0}\, dt + \int_0^{\pi} \underbrace{\sin t}_{y} \underbrace{(3t^2+1)}_{dx}\, dt$$

Esempio 4 Calcolare $\iint_\Omega xy\,dx\,dy$, dove Ω è quello di prima

Uso GG nella forma $\int_\Omega \operatorname{div}\vec{E}\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\,ds$

$= \int_{\partial\Omega} A\,dy - B\,dx$

Mi serve un campo $\vec{E}$ tale che $\operatorname{div}\vec{E} = xy$, ad esempio

$\vec{E} = (\underbrace{\tfrac{1}{2}x^2y}_{A}, \underbrace{0}_{B})$ oppure $(0, \tfrac{1}{2}xy^2)$

Allora

$$\int_\Omega xy\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} A\,dy - B\,dx = \int_{\gamma_1} A\,dy - B\,dx - \int_{\gamma} A\,dy - B\,dx$$

$$= \int_0^{\pi+\pi^3} A \ldots \underset{\substack{\uparrow \\ dy \text{ su } \gamma_1}}{0}\,dt - \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{B}\,\dot{x}(t)\,dt$$

$$- \int_0^{\pi} \Big[\underbrace{\tfrac{1}{2}(t+t^3)\sin t}_{A}\ \underbrace{\cos t}_{dy} - \underset{\substack{\uparrow \\ B=0}}{0}\Big]\,dt$$

Controllare cosa viene usando $\vec{E} = (0, \tfrac{1}{2}xy^2)$.

—o—o—

ANALISI 2 – LEZIONE 49

Titolo nota 09/05/2014

INTEGRALI SUPERFICIALI

Lunghezza di una curva e integrali curvilinei. Data $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ con $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ si ha

$$\text{lungh.}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt$$

Data $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ si definisce

$$\int_\gamma f(x,y,z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \underbrace{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt}_{ds}$$

<u>Area di una superficie</u> Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e data $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ con

$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, allora

$$\text{Area}(\text{Sup}) = \int_\Omega \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}\, du\, dv$$

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} M_1 = y_u z_v - z_u y_v & M_2 = -x_u z_v + z_u x_v \\ M_3 = x_u y_v - y_u x_v & \end{array}$$

Detto altrimenti, (M_1, M_2, M_3) è il vettore che si ottiene a partire dai vettori (x_u, y_u, z_u) e (x_v, y_v, z_v) applicando la "formula misteriosa", cioè il prodotto vettore. Volendo

$$\underbrace{(M_1, M_2, M_3)}_{\text{vettore normale alla superficie}} = \underbrace{(x_u, y_u, z_u) \wedge (x_v, y_v, z_v)}_{\text{generano il piano tangente alla superficie}} = \Phi_u \wedge \Phi_v$$

Integrali superficiali. Data una superficie $\Phi: \Omega \to \mathbb{R}^3$ e data $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ si definisce l'integrale superficiale

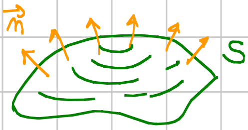
$$\boxed{\int_S f(x,y,z)\, d\sigma = \int_\Omega f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}\, du\, dv}$$

superficie

indica che si tratta di un integrale superficiale

Caso particolare: Integrali superficiali di flusso.

Ingredienti:
- un campo vettoriale $\vec{E} = (A, B, C)$ definito in $\mathbb{R}^3$
- una superficie $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
- una scelta $\vec{n}$ del VERSORE normale alla sup.



Si definisce flusso del vettore $\vec{E}$ attraverso la superficie Φ nella direzione data da $\vec{n}$ l'integrale

$$\boxed{\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, d\sigma}$$

Matematicamente, ho 2 possibilità per $\vec{n}$:

$$\pm \frac{(M_1, M_2, M_3)}{\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}}$$

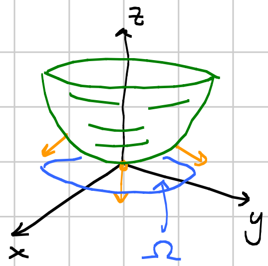
si cancella con la stessa radice presente nel $d\sigma$

quindi

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, d\sigma = \pm \int_\Omega (A M_1 + B M_2 + C M_3)\, du\, dv$$

dipende dalla scelta di $\vec{n}$.

componenti di $\vec{E}$



Esempio Sia S la superficie grafico di $z = x^2+y^2$ con $x^2+y^2 \leq 1$.
Calcolare il flusso di
$\vec{E} = (x, 0, y+z)$
prendendo come normale quella orientata verso il basso

ROAD MAP: → parametrizzare la superficie ①
→ trovare il versore $\vec{n}$ ②
→ calcolare l'integrale ③

① È una sup. cartesiana (vedi 1ª les. sulle sup.), quindi

$$\Phi(u,v) = (u, v, u^2+v^2) \qquad \Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \leq 1\}$$

② Calcolo Φ_u e Φ_v e faccio il prodotto vettore (formula mist.)

$$\begin{array}{c} \Phi_u \to \\ \Phi_v \to \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} \qquad (M_1, M_2, M_3) = \underbrace{(-2u, -2v, 1)}_{\text{vettore normale}}$$

Controllando in $(u,v) = (0,0)$ viene $(0,0,1)$ che è l'opposto di quello che serve a me. Dovrò mettere un segno $-$.

③ $$\text{Flusso} = \underset{\text{orientazione!}}{-} \int_\Omega (AM_1 + BM_2 + CM_3)\, du\, dv$$

$$= -\int_\Omega [x M_1 + 0 \cdot M_2 + (y+z) M_3]\, du\, dv$$

al posto di x, y, z metto le comp. della sup.

$$= -\int_\Omega [u(-2u) + (v + u^2+v^2) 1]\, du\, dv$$

$$= -\int_\Omega (-2u^2 + v + u^2 + v^2)\, du\, dv = \int_\Omega (u^2 - v^2 - v)\, du\, dv$$

e si fa ad esempio in coord. polari e viene 0 per simm.

GAUSS-GREEN IN DIMENSIONE 3

Ingredienti:
- un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$
- un campo vettoriale $\vec{E}$ in $\mathbb{R}^3$
- una funzione $f(x,y,z)$ $\quad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

int. superficiale

$$\boxed{\int_\Omega f \operatorname{div} \vec{E} \, dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma - \int_\Omega \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx\,dy\,dz}$$

bordo di Ω, cioè una superficie

versore normale ESTERNO risp. ad Ω

Caso speciale: $f(x,y,z) \equiv 1$, cioè funzione costante.
La formula diventa

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{div} \vec{E} \, dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma}$$

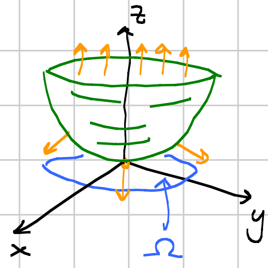
Quindi: il flusso di un vettore $\vec{E}$ uscente da una superficie che è bordo di un insieme Ω, è uguale all'integrale della divergenza di $\vec{E}$ dentro l'insieme Ω.

Achtung! In dimensione 2 l'integrale di flusso si interpreta a sua volta come integrale di una forma differenziale. In dim 3 questo non succede, quindi a destra resta un integrale superficiale.

ANALISI 2 — LEZIONE 50

Titolo nota 09/05/2014

Gauss - Green $\boxed{\int_\Omega \operatorname{div} \vec{E}\, dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, d\sigma}$



Esempio 1 Sia S la superficie grafico di $z = x^2+y^2$ con $x^2+y^2 \le 1$.
Calcolare il flusso di
$\vec{E} = (x, 0, y+z)$
prendendo come normale quella orientata verso il basso

$\boxed{\text{ROAD MAP 2}}$ → Chiudo S aggiungendo il "coperchio" ①
→ Applico GG e ottengo il flusso su $S \cup$ coperchio ②
→ Tolgo il flusso sul coperchio. ③

① Il coperchio è la superficie di parametrizzazione $(u, v, 1)$ con $\Omega = \{(u,v) : u^2+v^2 \le 1\}$

② Per GG abbiamo che, indicato con A l'interno della scodella,

$$\int_{\partial A} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, d\sigma = \int_A \operatorname{div} \vec{E}\, dx\,dy\,dz = \int_A 2\, dx\,dy\,dz$$

$$= 2\, \mathrm{Vol}(A) \underset{\text{per colonne}}{=} 2\int_\Omega dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{1} dz$$

$$= 2\int_\Omega dx\,dy\, (1-x^2-y^2) \underset{\text{polari}}{=} 2\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\, (1-\rho^2)\, \underset{J}{\rho}$$

$$= 4\pi \int_0^1 (\rho-\rho^3)\, d\rho = 4\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \pi$$

③ D'altra parte

$$\Pi = \int_{\partial A} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \underbrace{\int_{S} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma}_{} + \int_{\text{coperchio}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

quello richiesto dall'esercizio: $\vec{n}$ è quella giusta

vettore $(0,0,1)$ normale uscente al coperchio

Di conseguenza Flusso richiesto $= \Pi - \int_{\text{coperchio}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$

$$= \Pi - \int_{\text{coperchio}} (y+z) \, d\sigma = \Pi - \Pi = 0.$$

$$\int_{\text{Cop}} (y+z) \, d\sigma = \int_{\Omega} (v+1) \frac{1}{\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}} \, du\,dv = \int_{\Omega} (v+1) \, du\,dv$$

y, z; $\{$ 0

$= \text{Area}(\Omega) = \Pi$

— o — o —

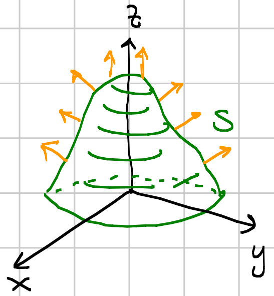
<u>Esempio 2</u> $\vec{E} = (y+z, y, x^2-z)$

S superficie di equazione $x^2+y^2+3z^4 = 1$ con $z \geq 0$

$\vec{n}$ = versore normale verso l'alto.

Calcolare

$$\int_{S} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma \quad \text{(cioè il flusso)}$$



Se uso la definizione ho

$\boxed{\text{ROAD MAP 1}}$: → parametrizzo la sup. ①
→ calcolo M_1, M_2, M_3 ②
→ calcolo l'integrale $\int_{\Omega} (AM_1 + BM_2 + CM_3) \, du\,dv$ ③

① La sup. ha equazione $x^2+y^2+3z^4=1$. Tenendo conto che $z \geq 0$ diventa

$$z = \sqrt[4]{\frac{1}{3}(1-x^2-y^2)} \quad \text{con} \quad x^2+y^2 \leq 1$$

Quindi la param. è con $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \le 1\}$

$$\Phi(u,v) = \left(u, v, \sqrt[4]{\tfrac{1}{3}(1-u^2-v^2)}\right)$$

② Il calcolo di M_1, M_2, M_3 è inquietante ☹

$\boxed{\text{ROAD MAP 2}}$
→ Chiudo la superficie ①
→ Applico GG ②
→ Calcolo il flusso sul coperchio ③

① Basta aggiungere il cerchio di base: $(u,v,0)$ con $\underbrace{\boxed{u^2+v^2 \le 1}}_{\Omega}$

② Detto A l'interno per GG si ha che

$$\int_{\partial A} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_A \operatorname{div} \vec{E} \, dx\,dy\,dz = 0 \quad \text{perché } \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

③ Ora sappiamo che

$$0 = \int_{\partial A} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \underbrace{\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma}_{\text{quello che ci serve con il segno giusto}} + \int_{\text{coperchio}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$(0,0,-1)$ cioè la normale esterna al coperchio

Quindi

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = -\int_{\text{cop.}} \langle (y+z, y, x^2-z), (0,0,-1) \rangle \, d\sigma$$

$$= \int_{\text{Cop}} (x^2 - z) \, d\sigma = \int_\Omega u^2 \cdot \underset{\sqrt{M_1^2+\dots}}{1} \, du\,dv$$

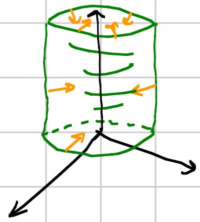
$$= \int_{u^2+v^2 \le 1} u^2 \, du\,dv = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \, \rho^2 \cos^2\theta \, \rho$$

$$= \int_0^1 \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \pi \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{4}.$$

<u>Esempio 3</u> $\vec{E} = (x+y,\ y+z,\ x^2-y^2)$

S = cilindro di eq. $x^2+y^2=4$, $0 \le z \le 3$

$\vec{n}$ = normale entrante



Voglio calcolare $\displaystyle\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$

ROAD MAP 1 $\to$ Parametrizzo S ①

$\to$ M_1, M_2, M_3 ②

$\to$ $\displaystyle\int_\Omega (AM_1 + BM_2 + CM_3)\, du\, dv$ ③

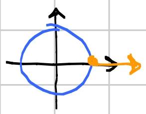
① Uso le coord. cilindriche

$(2\cos\theta,\ 2\sin\theta,\ z)$ $\quad \underbrace{\boxed{0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le z \le 3}}_{\Omega}$

$\rho = 2$ = raggio del cilindro

② $\begin{array}{c} \phi_\theta \\ \phi_z \end{array} \begin{pmatrix} -2\sin\theta & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(M_1, M_2, M_3) = (2\cos\theta,\ 2\sin\theta,\ 0)$



Ma il verso che ci interessa? Basta provare in $\theta = 0$ e viene $(2,0,0)$ che è uscente, quindi serve un segno $-$.

③ $\displaystyle\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = -\int_\Omega (AM_1 + BM_2 + CM_3)\, d\theta\, dz$

$\displaystyle = -\int_\Omega [(x+y)\, 2\cos\theta + (y+z)\, 2\sin\theta]\, d\theta\, dz$

$\displaystyle = -\int_\Omega (2\cos\theta + 2\sin\theta)\, 2\cos\theta + (2\sin\theta + z)\, 2\sin\theta \, d\theta\, dz$

$\displaystyle = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 dz \ldots$ = si fa.

$\boxed{\text{ROAD MAP 2}}$ → Aggiungo i 2 tappi sopra e sotto
→ Applico GG
→ Calcolo il flusso sui 2 tappi

Detto C il cilindro

$$\int_C \operatorname{div} \vec{E} \, dx\,dy\,dz = \int_{\partial C} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$$= -\int_S \text{che serve a noi} + \int_{\substack{\text{tappo}\\ \text{alto}}} \langle \vec{E}, \underbrace{\vec{n}}_{(0,0,1)} \rangle \, d\sigma$$

$$+ \int_{\substack{\text{tappo}\\ \text{basso}}} \langle \vec{E}, \underbrace{\vec{n}}_{(0,0,-1)} \rangle \, d\sigma$$

Esercizio: verificare che i 2 modi danno lo stesso risultato.

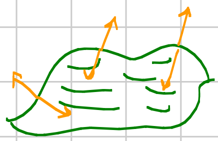
ANALISI 2 — LEZIONE 51

Titolo nota 15/05/2014

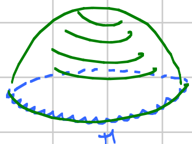
FORMULA DI STOKES

Orientare il bordo di una superficie

Orientare una superficie in $\mathbb{R}^3$: scegliere uno dei 2 possibili versori normali



Orientare il bordo di una superficie: scegliere uno dei due possibili versi di percorrenza del bordo stesso (qui stiamo assumendo che la sup. abbia un bordo)



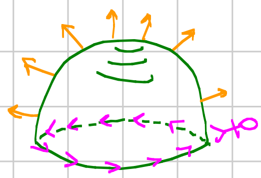
bordo della superficie

Orientazione canonica del bordo di una superficie

Sia S una superficie orientata (cioè in cui ho scelto un versore normale p.to per punto).

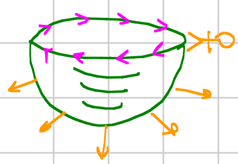
L'orientazione canonica del bordo è quella di un omino che percorre il bordo tenendo la sup. a sinistra e rimanendo in piedi secondo il vettore normale che orienta la superficie.

Esempio 1 Semisfera orientata "verso l'esterno"

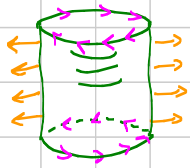


Se l'orientazione della semisfera fosse verso l'interno, l' dovrebbe andare nel verso opposto per avere la sup. a sinistra.

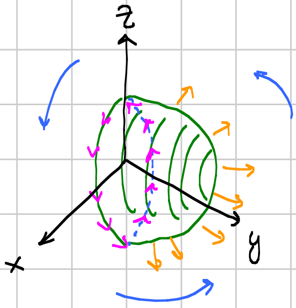
Esempio 2 Se vuole la sup. a sx, deve girare come in figura.



Esempio 3 Sup. laterale del cilindro orientata verso l'esterno.
L'orientazione risulta opposta nei 2 pezzi del bordo.

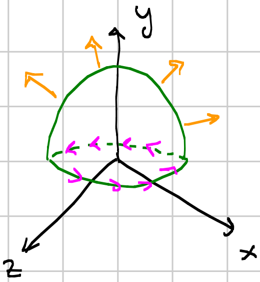


Esempio 4 Semisfera



$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1, \ y \geq 0\}$

orientata verso l'esterno.

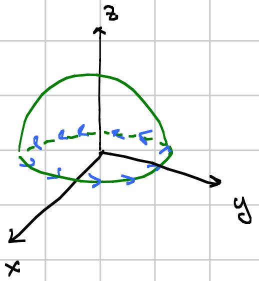


Un modo per vederlo è di ruotare la figura portandola in una posizione più "comoda".
Il metodo è comodo, ma occorre NON INVERTIRE GLI ASSI !!!
Girando in senso orario/antiorario devo trovare i 3 assi nello stesso modo.

— o — o —

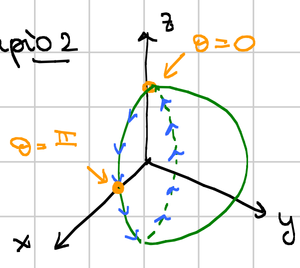
Passo successivo: scrivere l'espressione analitica di una curva che percorre il bordo con il verso dato.

Esempio 1



La curva è $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$
Questa va nel verso giusto.
(Sto supponendo raggio = 1)

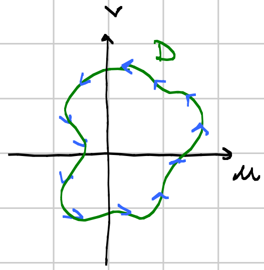
Esempio 2



La curva ha $y = 0$. Le altre 2 coordinate sono $\sin\theta$ e $\cos\theta$, ma in quale ordine?
$(\sin\theta, 0, \cos\theta)$ $\quad \theta \in [0, 2\pi]$
Controllare che succede invertendo !!

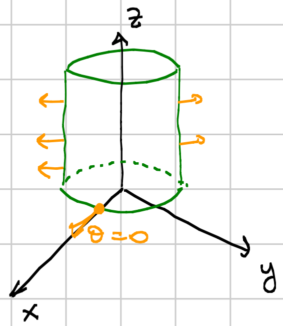
Orientazioni e parametrizzazioni

Consideriamo la param. di una superficie $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$
dove $D \subseteq \mathbb{R}^2$ $\qquad \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$



Supponiamo che il vettore normale che orienta la superficie sia quello dato dalla formula misteriosa, cioè $\Phi_u \wedge \Phi_v$.
Considero poi l'orientazione di ∂D che tiene D a sinistra.
Allora, quando (u,v) percorrono il ∂D con questo verso, l'immagine $\Phi(u,v)$ percorre il bordo della sup. con il verso giusto.

<u>Esempio</u> Cilindro con raggio di base $= 2$ e altezza 3.

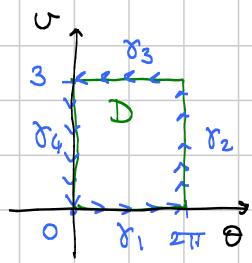


Come equazioni è

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=4, \ 0 \le z \le 3\}$$

Come parametrizzazione potrebbe essere

$$\{ \underbrace{(2\cos\theta, 2\sin\theta, v)}_{\Phi(\theta, v)} : \underbrace{0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le v \le 3}_{\text{Insieme D dove variano i parametri}} \}$$

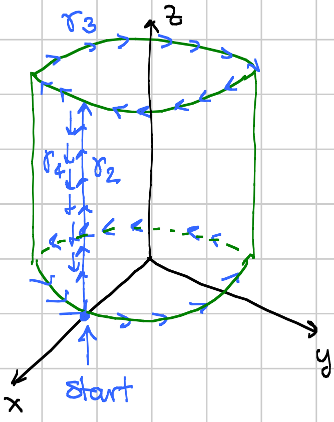


Questa parametrizzazione, quale orientazione induce sulla superficie?
Calcolo $\quad \Phi_\theta = (-2\sin\theta, 2\cos\theta, 0) \qquad \Phi_v = (0, 0, 1)$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ -2\sin\theta & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Phi_\theta \wedge \Phi_v = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)$$

Controllo in $\theta = 0$ e l'orientazione è uscente

Cosa succede quando percorro il ∂D nel verso che mi lascia D a sinistra?



Con γ_4 si torna alla partenza.
Nota bene: le 2 circonferenze delle basi sono orientate come si deve, i 2 pezzi verticali si cancellano.

Morale: l'orientazione del bordo di S è l'orientazione canonica di ∂D riletta sulla superficie.

ANALISI 2 ~ LEZIONE 52

Titolo nota 15/05/2014

$\boxed{\text{FORMULA DI STOKES = TEOREMA DEL ROTORE}}$

Ingredienti: • una superficie S con il relativo bordo ∂S
- una orientazione della superficie S e la corrispondente orientazione del bordo
- un campo di vettori $\vec{E}$ in $\mathbb{R}^3$.

versore normale alla sup. (quello che determina l'orientazione)

$$\boxed{\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle \, ds}$$

int. superf.

integrale curvilineo

versore tangente a ∂S (quello nella direzione che orienta "bene" ∂S)

L'integrale a sinistra è il flusso di $\operatorname{rot} \vec{E}$ uscente dalla superficie nel verso dato da $\vec{n}$.
L'integrale a destra è detto circuitazione di $\vec{E}$ lungo la curva che percorre ∂S nel verso giusto (vedi lez. prec.).

Riassumendo: il flusso del rotore di $\vec{E}$ attraverso una sup. S è uguale alla circuitazione di $\vec{E}$ lungo il bordo di S.

<u>Altro modo di scrivere la circuitazione.</u> Sia $\vec{E} = (A, B, C)$ e sia $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una parametrizzazione di ∂S, ovviamente nel verso giusto.
Il versore tangente $\vec{\tau}$ è dato da

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}} \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t) \right)$$

Ora, se $t \in [a,b]$, la circuitazione diventa

$$\int_\gamma \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds = \int_a^b (A\dot{x} + B\dot{y} + C\dot{z})\, dt$$

Detto altrimenti, la radice al denom. di $\vec{\tau}$ si semplifica con quella di ds. Quindi resta

$$\int_a^b [A(x(t),y(t),z(t))\,\dot{x}(t) + B(x(t),y(t),z(t))\,\dot{y}(t) + C(\ldots)\,\dot{z}(t)]\, dt$$

In termini di forme differenziali, questo è

$$\int_\gamma [A\,dx + B\,dy + C\,dz]$$

per cui Stokes si può riscrivere come

$$\boxed{\int_S \langle \text{rot}\, \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} A\,dx + B\,dy + C\,dz} \qquad \vec{E} = (A,B,C).$$

integrale di flusso integrale di una forma diff.

<u>Esercizio</u> Sia S la semisfera superiore

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 5,\ z \geq 0\}$$

orientata verso l'esterno, e sia $\vec{E} = (x+y, z, x^2)$.
Calcolare

$$\int_S \langle \text{rot}\, \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

1º modo: diretto

ROAD MAP

1. Calcolo rot $\vec{E}$
2. Parametrizzo S
3. Calcolo $\vec{n}$
4. Calcolo l'integrale

① $\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x+y & z & x^2 \end{pmatrix}$ $\text{rot}\,\vec{E} = (-1, -2x, -1)$

② Coordinate sferiche:

$$\{(\sqrt{5}\cos\theta\cos\varphi, \sqrt{5}\sin\theta\cos\varphi, \sqrt{5}\sin\varphi) : 0 \le \theta \le 2\pi, \underbrace{0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2}}_{\text{semisfera}}\}$$

Modo alternativo: rappresentazione cartesiana

$$\{(u, v, \sqrt{5-u^2-v^2}) : u^2+v^2 \le 5\}$$

③ Calcolo $\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi$ e vedo se viene coerente con l'$\vec{n}$ dato oppure opposto

$$\Phi_\theta = (-\sqrt{5}\sin\theta\cos\varphi, \sqrt{5}\cos\theta\cos\varphi, 0)$$
$$\Phi_\varphi = (-\sqrt{5}\cos\theta\sin\varphi, -\sqrt{5}\sin\theta\sin\varphi, \sqrt{5}\cos\varphi)$$

$\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi$ = formula mist. a partire dai 2 vettori precedenti

$$= (5\cos\theta\cos^2\varphi, 5\sin\theta\cos^2\varphi, 5\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + 5\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi)$$

$$= (5\cos\theta\cos^2\varphi, 5\sin\theta\cos^2\varphi, 5\cos\varphi\sin\varphi)$$

Proviamo nel polo nord ($\varphi = \frac{\pi}{2}$): viene $(0,0,5)$, quindi la normale è nel verso giusto, cioè esterna.

④ $$\int_S \langle \text{rot}\,\vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_S \underset{-1}{\underset{\shortparallel}{A}}(5\cos\theta\cos^2\varphi) + \underset{-2x}{\underset{\uparrow}{B}}(5\sin\theta\cos^2\varphi) + \underset{-1}{\underset{\shortparallel}{C}}(5\cos\varphi\sin\varphi)$$

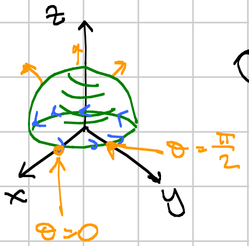
$$= 5\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, (-\cos\theta\cos^2\varphi \underbrace{-2\sqrt{5}\cos\theta\cos\varphi}_{-2x} \sin\theta\cos^2\varphi - \cos\varphi\sin\varphi) \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \text{si fa.}$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Con Stokes.

$\boxed{\text{ROAD MAP}}$
① Capisco il verso giusto su ∂S
② Parametrizzo ∂S
③ Integro la forma diff. $A dx + B dy + C dz$

①



② $(\sqrt{5}\cos\theta,\ \sqrt{5}\sin\theta,\ 0) \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$

Questa gira nel verso giusto!

③ Integro la forma differenziale (Achtung: ora A, B, C sono le componenti di $\vec{E}$

$$\vec{E} = (x+y,\ z,\ x^2).$$

$$\int_\gamma (x+y)\,dx + z\,dy + x^2\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big[(x(t)+y(t))\,\dot{x}(t) + \underbrace{z(t)}_{=0}\,\dot{y}(t) + x(t)^2\,\underbrace{\dot{z}(t)}_{=0} \Big]\,dt \qquad [t = \theta]$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sqrt{5}\cos\theta + \sqrt{5}\sin\theta)\,\sqrt{5}\,(-\sin\theta)\,d\theta = -5 \int_0^{2\pi} (\underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{=0} + \sin^2\theta)\,d\theta$$

$$= -5\pi$$

[Controllare che venga la stessa cosa anche con il 1° metodo].

ANALISI 2 — LEZIONE 53

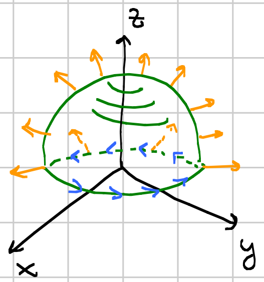
Titolo nota 15/05/2014

Come calcolo il flusso di un vettore attraverso una sup. orientata ?

Esempio $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+2z^4=4,\ z \geq 0\}$

$\vec{n}$ = normale "verso l'alto"

$\vec{E} = (x,\ z-x,\ y^2-z)$



Calcolare $\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$

ROAD MAP 1
① Parametrizzo S
② Calcolo $\vec{n}$
③ Calcolo l'integrale (doppio)

① Parametrizz. cartesiana

$$\left\{ \left(u, v, \sqrt[4]{2 - \frac{u^2+v^2}{2}}\right) : \underbrace{u^2+v^2 \leq 4}_{} \right\}$$

eq. della sup. — insieme D dove variano i parametri u e v

$(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$

② Ci sono calcoli da fare con le radici $\Phi_u \wedge \Phi_v$ ③ pure

ROAD MAP 2 Stokes.
① Spero che $\vec{E} = \text{rot}\, \vec{F}$
② Calcolo $\vec{F}$
③ Calcolo la circuitazione di $\vec{F}$ lungo ∂S che si riduce a integrare $A\,dx + B\,dy + C\,dz$, dove $\vec{F} = (A, B, C)$

① Come determino se $\vec{E}$ è rot. di qualcosa ?
Fatto generale : se div $\vec{E} = 0$, allora esiste $\vec{F}$ tale che $\vec{E} = \text{rot}\, \vec{F}$

(il fatto gen. vale se l'insieme di def. è stellato)

$\operatorname{div} \vec{E} = 1 + 0 - 1 = 0$, quindi $\vec{E}$ è un rotore !!!

② Come determino $\vec{F}$ tale che $\operatorname{rot} \vec{F} = (x, z-x, y^2-z)$.

Prima semplificazione: cerco $\vec{F}$ del tipo $(A, B, 0)$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rot} \vec{F} = (-B_z, A_z, B_x - A_y)$$

Quindi vorrei risolvere

$$B_z = -x \qquad A_z = z - x \qquad B_x - A_y = y^2 - z$$

$$B(x,y,z) = -xz + C_1(x,y) \qquad A(x,y,z) = \frac{1}{2}z^2 - xz + C_2(x,y)$$

Ora cerco C_1 e C_2 in modo da soddisfare la 3ª condizione

$$B_x - A_y = -z + C_{1x} - C_{2y} = y^2 - z$$

Come seconda semplificazione, cerco C_2 che dipenda solo da x, così che l'equazione diventa

$$-\cancel{z} + C_{1x} = y^2 - \cancel{z} \leadsto C_{1x} = y^2 \leadsto C_1 = xy^2$$

Vediamo se funziona con $A(x,y,z) = \frac{1}{2}z^2 - xz$

$$B(x,y,z) = -xz + xy^2$$
$$C(x,y,z) = 0$$

$B_z = -x$ ok $\qquad A_z = z - x$ ok $\qquad B_x - A_y = -z + y^2 - 0$ ok

Conclusione $\vec{E} = \operatorname{rot} \vec{F}$ con $\vec{F} = \left(\frac{1}{2}z^2 - xz, -xz + xy^2, 0\right)$

[Volendo potevo piazzare 0 in 1ª o 2ª posizione]

③ $$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_\gamma A\,dx + B\,dy + C\,dz$$

↑descrive ∂S nel verso giusto

$\gamma(t) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\int_\gamma A\,dx + B\,dy + C\,dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{8\cos\theta \sin^2\theta}_{xy^2} \cdot \underbrace{2\cos\theta}_{\dot{y}} \, d\theta = \text{si fa facile.}$$

$\boxed{\text{ROAD MAP 3}}$ Cambio la superficie a parità di bordo!!

Idea: sappiamo che $\vec{E} = \operatorname{rot} \vec{F}$ perché $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, ma non abbiamo voglia di calcolare $\vec{F}$. Per Stokes

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_S \langle \operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle \, ds$$

uguali perché $\partial S = \partial \hat{S}$

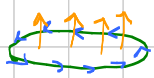
Se prendo una superficie $\hat{S}$ con lo stesso bordo, allora

$$\int_{\hat{S}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{\hat{S}} \langle \operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{\partial \hat{S}} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle \, ds$$

Quindi

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{\hat{S}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

Morale: invece di calcolare il flusso su S, lo calcolo su una $\hat{S}$ più semplice che abbia lo stesso bordo.
Nell'esempio posso usare come $\hat{S}$ il cerchio nel piano xy, con normale $(0,0,1)$



Quindi $$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{\text{cerchio}} \langle \vec{E}, (0,0,1) \rangle \, d\sigma$$

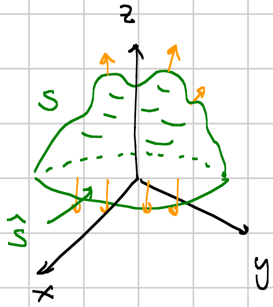
$$= \int_{x^2+y^2 \leq 4} (y^2 - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{z}) \, dx\,dy$$

$$= \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \, \underbrace{\rho^2 \sin^2\theta}_{y^2} \cdot \underbrace{\rho}_{J} = \pi \int_0^2 \rho^3 \, d\rho = 4\pi$$

$\boxed{\text{ROAD MAP 4}}$ Uso il teorema della divergenza (Gauss–Green)

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E}\, dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, d\sigma$$

Quando $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\partial\Omega$ è il suo bordo orientato verso l'esterno.



Per avere un Ω "pieno" devo aggiungere la base, cioè il cerchio nel piano xy, che chiamo $\hat{S}$.
Otteniamo

$$\int_{\Omega} \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{\operatorname{div} \vec{E}}\, dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, d\sigma =$$

$$= \int_{S} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, d\sigma + \int_{\hat{S}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, d\sigma$$

normale che interessa a me

normale verso il basso, cioè $(0,0,-1)$

Quindi

$$\int_{S} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, d\sigma = - \int_{\hat{S}} \langle \vec{E}, (0,0,-1) \rangle\, d\sigma$$

si semplificano e viene lo stesso della ROAD MAP 3.

<u>Oss.</u> Questo funziona anche se $\operatorname{div} \vec{E} \neq 0$, solo che resta l'integrale triplo.

— o — o —

<u>Ripasso</u> Supponiamo che $\operatorname{div} \vec{E} = 0$. Allora $\vec{E} = \operatorname{rot} \vec{F}$.
Basta capire come sono fatte tutti i campi $\vec{F}$ tali che $\operatorname{rot} \vec{F} = (0,0,0)$. Questi sono tutti e soli i gradienti.
Quindi possiamo dire che

$$\vec{E} = \operatorname{rot}(\vec{F} + \nabla f)$$

funzione qualunque

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 54

Titolo nota 16/05/2014

INTEGRALI IMPROPRI IN PIÙ VARIABILI

Integrale proprio : → zona di integrazione limitata
→ funzione integranda limitata

$$\int_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad \int_A f(x,y)\,dx\,dy$$

Se manca una, o entrambe, le richieste l'integrale si dice improprio

Esempi

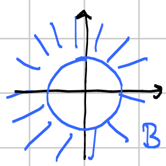
$$\int_A \boxed{\frac{1}{x^2+y^2}}\,dx\,dy \qquad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\}$$

zona di integr. limitata (cerchio)

funzione integranda non limitata in A (tende a $+\infty$ quando $(x,y)\to(0,0)$)

$$\int_B \boxed{\frac{1}{x^2+y^2}}\,dx\,dy \qquad B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\ge 1\}$$

esterno del cerchio, quindi insieme NON limitato



funzione $f(x,y)$ limitata in B :

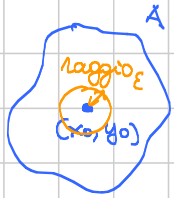
$0\le f(x,y)\le 1 \quad \forall (x,y)\in B$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad \text{Qui va male sia la zona sia la funzione}$$

— o — o —

Come si definiscono? Due casi

① Funzione con problemi in un punto $(x_0,y_0)\in A$



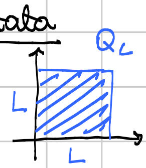
$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{A\setminus C_\varepsilon} f(x,y)\,dx\,dy$$

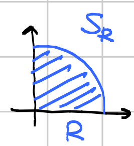
cerchio con centro in (x_0,y_0) e raggio ε

Da buon limite, ha 4 possibilità:
- → convergere ad un numero $l \in \mathbb{R}$
- → divergere a $+\infty$
- → divergere a $-\infty$
- → non convergere

Per semplicità, consideriamo solo funzioni $f(x,y) \geq 0$, per cui rimangono solo 2 comportamenti possibili:
- → convergere
- → divergere a $+\infty$.

② <u>Funzione limitata</u>, <u>ma zona di integrazione illimitata</u>





Supponiamo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0\}$

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{L \to +\infty} \int_{Q_L} f(x,y)\,dx\,dy \qquad Q_L = [0,L] \times [0,L]$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \int_{S_R} f(x,y)\,dx\,dy \qquad S_R = x^2+y^2 \leq R^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

③ Se un integrale ha entrambi i problemi, allora si spezza in sottointegrali, ciascuno con un problema solo.

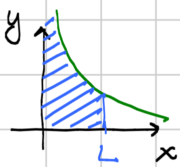
—o—o—

<u>Operativamente</u>: con le formule di riduzione o cambi di variabile ci si riduce ad integrali impropri in dim 1 ⇝ Analisi 1

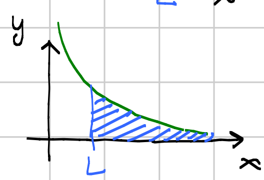
—o—o—

<u>Back to Analisi 1</u>

$$\int_0^L \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } a < 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \geq 1 \end{cases}$$

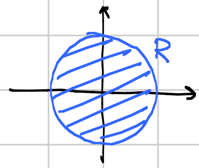


$$\int_L^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge se } a > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \leq 1 \end{cases}$$



$\boxed{\text{Analisi 2}}$

$$\int_{B_R} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a}\,dx\,dy$$



Se passo in coordinate polari diventa

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{1}{\rho^a} \cdot \underset{J}{\rho} = \int_0^R \frac{1}{\rho^{a-1}}\,d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \underbrace{\int_0^R \frac{1}{\rho^{a-1}}\,d\rho}_{\text{int. impr. Analisi 1}}$$

Questo converge $\Leftrightarrow$ $a-1<1$, cioè $\Leftrightarrow$ $a<2$

Tabellina: $\displaystyle\int_{B_R} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a}\,dx\,dy$ $\nearrow$ converge se $a<2$; $\searrow$ div. a $+\infty$ se $a \geq 2$

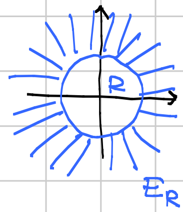
In dimensione 3: $\displaystyle\int_{B_R} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^a}\,dx\,dy\,dz$ = (coord. sferiche)

$$= \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, \frac{1}{\rho^a} \underbrace{\rho^2 \cos\varphi}_{J} = \int_0^R \frac{d\rho}{\rho^{a-2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi}_{2}$$

$$= 4\pi \int_0^R \frac{d\rho}{\rho^{a-2}}$$ e questo converge se e solo se $a-2<1$, cioè $a<3$.

— o — o —

Discorso analogo vale per gli integrali "fuori dal cerchio":
in dimensione 2



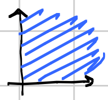
$$\int_{E_R} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a}\,dx\,dy =$$ $\nearrow$ converge se $a>2$; $\searrow$ div. a $+\infty$ se $a \leq 2$

Discorso analogo in dimensione 3 con "spartiacque" $a=3$

— o — o —

<u>Esercizio</u>: verificare l'affermazione precedente passando in coordinate polari o sferiche

Esempio 1 $\displaystyle\int_Q e^{-(x+y)}\,dx\,dy$ $\quad Q = 1^\circ$ quadrante $= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq 0\}$



$$= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy\ e^{-(x+y)} = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \int_0^{+\infty} e^{-y}dy = (\square)$$

e questi sono integrali impropri in una variabile

$$\int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} e^{-y}dy = \lim_{A\to+\infty} \left[-e^{-y}\right]_0^A$$

$$= \lim_{A\to+\infty} (\underbrace{-e^{-A}}_{\to 0} + 1) = 1$$

$$(\square) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \cdot 1 = 1\cdot 1 = 1.$$

Esempio 2 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\ e^{-(x^2+y^2)}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy$$

Da Analisi 1 sappiamo che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy$ converge ad un numero I

quindi l'integrale originario viene I^2.

In alternativa, passo in coordinate polari:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy = \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\ e^{-\rho^2} \cdot \underset{J}{\rho} = 2\pi \underbrace{\int_0^{+\infty} \rho\, e^{-\rho^2} d\rho}_{=\frac{1}{2}} = \pi$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\rho\, d\rho = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} \rho\, e^{-\rho^2} d\rho = \lim_{A\to+\infty} \left[-\tfrac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^A =$$

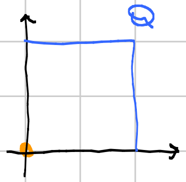
$$\lim_{A\to+\infty} \left(-\tfrac{1}{2}e^{-A^2} + \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}.$$ Ora sappiamo che $I = \sqrt{\pi}$, cioè

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}}$$ Integrale di Analisi 1 calcolato con metodo di Analisi 2.

ANALISI 2 — LEZIONE 55

Titolo nota 16/05/2014

Esempio 1 $\int_Q \frac{1}{x+y}\,dx\,dy$ $\quad Q = [0,1]\times[0,1]$

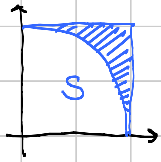


L'integrale è improprio per colpa dell'integranda.
L'unico problema è in $(0,0)$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Formule di riduzione

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{x+y} = \int_0^1 dx \left[\log(x+y)\right]_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 (\log(x+1) - \log x)\,dx$$

e questo si fa stile analisi 1 (si tratta comunque di un int. impr. per colpa del $\log x$)



$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ L'integrale sul quadrato converge se e solo se converge quello sul settore circolare.
La diff. tra i 2 è l'integrale sulla zona tratteggiata, che è un integrale proprio (numero).
Sul settore uso le coordinate polari

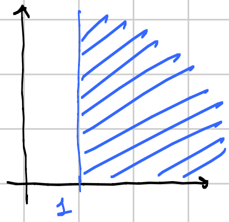
$$\int_S \frac{1}{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cancel{\rho}\cos\theta + \cancel{\rho}\sin\theta}\cdot\cancel{\rho}\,d\theta$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\,d\theta$$

Nell'intervallo $[0,\frac{\pi}{2}]$ la funzione $g(\theta) = \cos\theta + \sin\theta$ ammette minimo (Weierstrass). Tale minimo è >0, perché se fosse nullo vorrebbe dire che $\sin\theta$ e $\cos\theta$ si annullano contemporaneamente, il che è impossibile, Quindi $\cos\theta + \sin\theta \geq m > 0$ per ogni $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$.
Quindi

$$\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} \leq \frac{1}{m},$$ quindi tutto converge.

Esempio 2 $\displaystyle\int_A \frac{1}{x^3+y^3}\,dx\,dy \qquad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\ge 1,\ y\ge 0\}$



L'unico problema è la zona di integrazione

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ $\displaystyle = \int_1^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \boxed{\frac{1}{x^3+y^3}}$

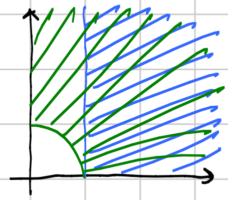
per calcolarlo dovrei fare la primitiva in y e vorrei evitarlo

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $\displaystyle = \int_1^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy\, \frac{1}{x^3+y^3} \le \int_1^{+\infty} dx \underbrace{\int_0^{+\infty} dy\, \frac{1}{\underbrace{1+y^3}_{\text{denom. + piccolo}}}} \le \int_1^{+\infty} I\,dx$

converge perché c'è y^3, sia I il suo valore

Ma $\int_1^{+\infty} I\,dx = +\infty$, quindi ho dim. che l'integrale dato è $\le +\infty$, che non è una grande info.

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ Penso in coordinate polari



$$\to \int_Q \frac{1}{x^3+y^3}\,dx\,dy \le \int_S \frac{1}{x^3+y^3}\,dx\,dy$$

dove $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\ge 1\}$.

Ovviamente se converge su S, converge anche su Q.

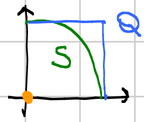
$$\to \int_S \frac{1}{x^3+y^3}\,dx\,dy = \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta\, \frac{1}{\rho^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}\,\underbrace{\rho}_{J}$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^2}\,d\rho \boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}\,d\theta} = \text{numero}\cdot \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^2}\,d\rho < +\infty$$

Integrale tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ di una funzione limitata

(stesso motivo di prima: $\cos^3\theta+\sin^3\theta \ge m > 0$ in $[0,\frac{\pi}{2}]$)

Esempio 3 $\displaystyle\int_Q \frac{1}{x^3+y^3}\,dx\,dy \qquad Q=[0,1]\times[0,1]$

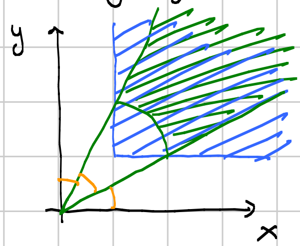


Prendo $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1\}$

$$\int_Q \frac{1}{x^3+y^3}\,dx\,dy \geq \int_S \frac{1}{x^3+y^3}\,dx\,dy = \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta\ \frac{1}{\rho^3}\,\frac{1}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}\,\rho$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\rho^2}\,d\rho \underbrace{\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}\,d\theta}}_{\text{Numero}} = \text{numero}\cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\rho^2}\,d\rho}_{=+\infty} = +\infty$$

Esempio 4 $\displaystyle\int_A \frac{xy}{x^4+y^4}\,dx\,dy \qquad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geq 1,\ y\geq 1\}$



Che aria tira? $f(x,y)\sim \dfrac{\rho^2}{\rho^4}=\dfrac{1}{\rho^2}$

ed è il caso border-line che va male.

$$\int_A \frac{xy}{x^4+y^4}\,dx\,dy \geq \int_{S_R} \frac{xy}{x^4+y^4}\,dx\,dy$$

dove S_R deve essere un settore contenuto dentro A. Posso prendere

$$\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3} \qquad \rho\geq R$$

non serve determinarlo esplicitamente, basta osservare che sta in A per R grande

$$= \int_R^{+\infty} d\rho \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\theta\ \frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}\cdot\rho =$$

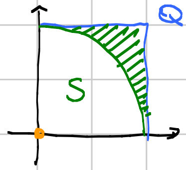
$$= \int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho}\,d\rho\ \boxed{\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}\,d\theta} = \text{numero positivo}\cdot \underbrace{\int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho}\,d\rho}_{+\infty}$$

Integrale su un intervallo di una funzione positiva, quindi è un numero positivo (la funzione è anche limitata per i soliti motivi)

$$= +\infty$$

<u>Esempio 5</u> $\displaystyle\int_Q \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad Q=[0,1]\times[0,1]$

Dall'analisi 1 sappiamo che $\arctan t \le t$ per ogni $t \ge 0$ (sarebbe la stessa cosa se ci fosse $\sin t$).
Quindi



$$\int_Q \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}\,dx\,dy \le \int_Q \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

e questo si comporta come l'integrale sul settore S (la differenza è un integrale proprio, quindi un numero)

$$\int_S \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta\, \frac{\cancel{\rho^2}\sin\theta\cos\theta}{\cancel{\rho^2}}\cdot\rho$$

$$= \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta$$ e volendo si calcola esplicitamente (converge)

<u>Osservazione</u> L'integrale iniziale NON era improprio perché l'integranda è limitata!

$$0 \le \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} \le \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\cancel{\rho^2}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{\rho^2}} = \cos\theta\sin\theta \le 1$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2\theta) \le \frac{1}{2}$$

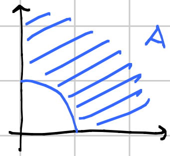
— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 56

Titolo nota 22/05/2014

PAREGGIAMENTO DEGLI ESPONENTI

$$\int_A \frac{1}{x^2+y^4}\,dx\,dy \qquad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\geq 1\}$$



Idea: fare un cambio di variabili che renda uguali gli esponenti.

Poniamo $y^2=z$ così la funzione diventa $\frac{1}{x^2+z^2}$.
Bisogna però trovare il J corrispondente.
Per vederlo meglio, cambiamo entrambe le variabili

$$z=y^2 \qquad w=x$$

Determino J: → ricavo x e y in funzione di z e w ①
→ calcolo la matrice Jacobiana ②
→ ne faccio il $|\det|$ ③

① $x=w \qquad y=\sqrt{z}$

② $\begin{pmatrix} x_w & y_w \\ x_z & y_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{z}} \end{pmatrix}$

③ $J=|\det|=\frac{1}{2\sqrt{z}}$

Quindi riassumendo $\displaystyle\int_A \frac{dx\,dy}{x^2+y^4} = \int_B \frac{1}{w^2+z^2}\cdot J\,dz\,dw$

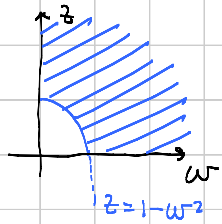
$$= \int_B \frac{1}{w^2+z^2}\,\frac{1}{2\sqrt{z}}\,dz\,dw$$

Chi è l'insieme B? $\quad x\geq 0 \quad y\geq 0 \quad x^2+y^2\geq 1$ ← descriz. di A

$w\geq 0 \quad \sqrt{z}\geq 0 \quad w^2+z\geq 1$

$z\geq 0$

Quindi $B = \{(w,z) \in \mathbb{R}^2 : w \geq 0,\ z \geq 0,\ w^2 + z \geq 1\}$



Studiamo l'integrale su B.
Intanto è equivalente ad integrare su un qualunque insieme del tipo

$$\int \frac{1}{w^2+z^2}\frac{1}{\sqrt{z}}\,dz\,dw = \int_R^{+\infty} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta\, \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{\sqrt{\rho\sin\theta}} \cdot \underset{J}{\rho}$$

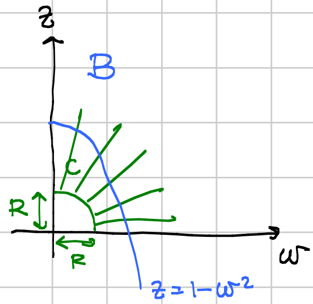
$$= \underbrace{\int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho\sqrt{\rho}}\,d\rho}_{\text{improprio per colpa dell'insieme di integrazione}} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\,d\theta}_{\text{Improprio perché } \sin\theta \to 0 \text{ per } \theta \to 0}$$

Ora $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\,d\theta$ converge

Brutalmente $\sin\theta \sim \theta$ per $\theta \to 0$, quindi
$\int \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}$ con probl. a 0 si comporta come
$\int \frac{1}{\sqrt{\theta}}$ con probl. a 0 e questo converge

$$\int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho\sqrt{\rho}}\,d\rho = \int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho^{3/2}}\,d\rho$$ e questo converge perché $\frac{3}{2} > 1$

Resta da spiegare cos'è R.



$$\int_B \frac{1}{w^2+z^2}\frac{1}{\sqrt{z}}\,dw\,dz \leq \int_C \text{stessa roba}$$

Pur di scegliere R piccolo, l'insieme C contiene l'insieme B.

<u>Osservazione</u> All'inizio era qualcosa del tipo $\dfrac{1}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^4\sin^4\theta}$ però con esponenti diversi al denom.
Alla fine è diventato $\dfrac{1}{\rho^{3/2}}\dfrac{1}{\sqrt{\sin\theta}}$

<u>Metodo alternativo</u> $\dfrac{1}{x^2+y^4}$ Pongo $x = w^2$ $y = z$

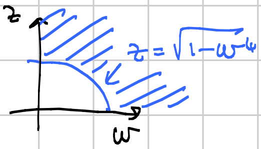
In queste variabili diventa $\dfrac{1}{w^4+z^4}$. Calcolo J

① $x = w^2,\ y = z$ ② $\begin{pmatrix} x_w & x_z \\ y_w & y_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ③ $|\det| = 2w$

Quindi $\displaystyle\int_A \frac{1}{x^2+y^4}\,dx\,dy = \int_B \frac{1}{w^4+z^4}\,2w\,dw\,dz = 2\int_B \frac{w}{w^4+z^4}\,dw\,dz$

$A = \dots\ x^2+y^2 \geq 1$

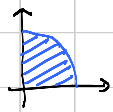
$B = \dots\ w^4+z^2 \geq 1$



Questo converge sui soliti C come sopra perché è del tipo $\dfrac{1}{\rho^3}$.

— o — o —

<u>Esempio 2</u> $\displaystyle\int_A \frac{1}{x^2+y}\,dx\,dy$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$



Pareggio gli esponenti ponendo $x = w,\ y = z^2$

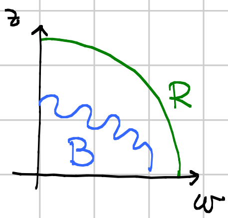
La funzione diventa $\dfrac{1}{w^2+z^2}$. Calcolo J

① $x = w,\ y = z^2$ ② $\begin{pmatrix} x_w & x_z \\ y_w & y_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2z \end{pmatrix}$ ③ $J = 2z$

Quindi $\displaystyle\int_A \frac{1}{x^2+y}\,dx\,dy = \int_B \frac{1}{w^2+z^2}\,2z\,dz\,dw = 2\int_B \frac{z}{w^2+z^2}\,dz\,dw$

B è una specie di A $A : \dots\ x^2+y^2 \leq 1$

$B : \dots\ w^2+z^4 \leq 1$



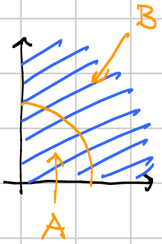
Prendo C = settore di raggio R che contiene B e ottengo

$$\int_B \frac{z}{w^2+z^2}\,dz\,dw \leq \int_C \dots\,dz\,dw = \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta\, \frac{\rho\sin\theta}{\cancel{\rho}^2}\cdot\overset{J}{\cancel{\rho}} \rightsquigarrow \text{converge}$$

Osservazione: L'ultimo conto fatto mostra che la funzione

$\frac{z}{z^2+w^2}$ NON è limitata su tutto $\mathbb{R}^2$, ma lo diventa quando moltiplico per ρ

Esempio 3 $\displaystyle\int_Q \frac{x^2y^3}{x^4+y^{10}}\,dx\,dy$ $\quad Q = 1°$ quadrante



Lo spezzo in 2 zone e faccio i cambi per sistemare SOTTO.

$x = w^5 \quad y = z^2 \quad$ ② $\begin{pmatrix} 5w^4 & 0 \\ 0 & 2z \end{pmatrix}$ ③ $J = 10w^4z$

In queste nuove variabili $\displaystyle\int \frac{w^{10}z^6}{w^{20}+z^{20}} \cdot 10w^4z\,dw\,dz$

$\displaystyle 10\int \frac{w^{14}z^7}{w^{20}+z^{20}}\,dw\,dz$ e questo

- sull'insieme B diverge perché $\sim \frac{\rho^{21}}{\rho^{20}}$
- sull'insieme A converge per lo stesso motivo.

Osservazione 1 All'inizio si poteva sospettare che l'integrale su B convergesse perché gli esponenti al denom. sono grandi rispetto al numeratore.

Osservazione 2 Il conto fatto mostra che la funzione è limitata vicino all'origine (diciamo in A), anzi

$$\boxed{\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in Q}} \frac{x^2y^3}{x^4+y^{10}} = 0}$$

NO!!!

(Domanda: è giusto o è vero solo dopo aver moltiplicato per J?)

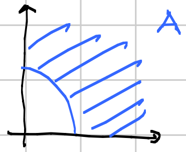
↑La seconda ☺

ANALISI 2 - LEZIONE 57

Titolo nota 22/05/2014

Integrali impropri con parametri

Esempio 1 $\displaystyle\int_A \frac{x^2 y^a}{x^6+y^6}\,dx\,dy$



Domanda: studiare, al variare di a, la convergenza

Brutalmente: $\dfrac{x^2y^a}{x^6+y^6} \sim \dfrac{\rho^{2+a}}{\rho^6} = \dfrac{1}{\rho^{4-a}}$ con problema a $+\infty$

converge $\iff 4-a > \boxed{2}$ dimensione

$\iff a < 2$

Rigorosamente: coordinate polari

$$\int_A \ldots = \int_R^{+\infty} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \, \frac{\rho^2\cos^2\theta\, \rho^a \sin^a\theta}{\rho^6(\cos^6\theta + \sin^6\theta)}\cdot\rho$$

$$= \int_R^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{3-a}} \boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta \sin^a\theta}{\cos^6\theta + \sin^6\theta}\,d\theta} = \underset{\neq 0}{\text{Numero}} \int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho^{3-a}}\,d\rho$$

Questo è un integrale proprio nella variabile θ (l'integranda è continua)

Quindi l'integrale dato si comporta come

$\displaystyle\int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho^{3-a}}\,d\rho$, che converge $\iff 3-a>1$ cioè $\iff a<2$.

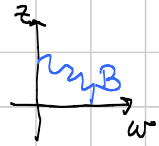
Esempio 2 $\displaystyle\int_A \frac{x^2y^a}{x^4+y^6}\,dx\,dy$ con lo stesso A di prima

Pareggio gli esponenti ponendo $x = w^3$ $\quad y = z^2$

$$\begin{pmatrix} x_w & x_z \\ y_w & y_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3w^2 & 0 \\ 0 & 2z \end{pmatrix} \qquad J = |\det| = 6w^2 z$$

Quindi

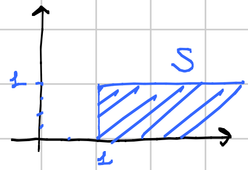
$$\int_A \frac{x^2 y^a}{x^4+y^6}\,dx\,dy = \int_B \frac{w^6 z^{2a}}{w^{12}+z^{12}} \cdot \underbrace{6 w^2 z}_{J}\,dw\,dz$$



Brutalmente: $\dfrac{\rho^6 \cdot \rho^{2a}}{\rho^{12}} \cdot \rho^3 = \dfrac{1}{\rho^{3-2a}}$ $\qquad 3-2a > 2 \qquad a < \frac{1}{2}$

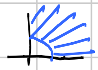
Rigorosamente: cambio in coordinate polari...

<u>Esempio 3</u> $\displaystyle\int_S \frac{x^2 y^a}{x^6+y^6}\,dx\,dy$



$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$

Facciamo per allenamento il caso $a = 2$

$\displaystyle\int_S \frac{x^2y^2}{x^6+y^6}\,dx\,dy$ (se fosse su  divergerebbe $\dfrac{\rho^4}{\rho^6} = \dfrac{1}{\rho^2}$)

Provo a fare delle stime: $\dfrac{x^2y^2}{x^6+y^6} \underset{\text{perché } y \leq 1}{\leq} \dfrac{x^2}{x^6+y^6} \leq \dfrac{x^2}{x^6} = \dfrac{1}{x^4}$

Allora

$$\int_S \frac{x^2y^2}{x^6+y^6}\,dx\,dy = \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy\, \frac{x^2y^2}{x^6+y^6} \leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy\, \frac{1}{x^4}$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx \underbrace{\int_0^1 dy}_{=1} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx \quad \text{che converge}$$

Ora il caso y^a si tratta esattamente allo stesso modo, quindi converge per ogni $a \geq 0$.

<u>Esempio 3</u> $\displaystyle\int_S \frac{x^a y^2}{x^6+y^6}\,dx\,dy$ con S come prima. Con lo stesso discorso

$$\frac{x^a y^2}{x^6+y^6} \leq \frac{x^a}{x^6} = \frac{1}{x^{6-a}} \qquad \text{quindi}$$

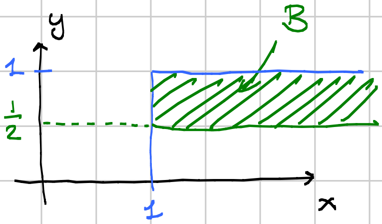
$$\underbrace{\int_S \dots}_{I_1} \leq \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{6-a}}\,dx}_{I_2}$$

e questo converge se e solo se $6-a>1$ cioè se e solo se $a<5$

NON ho finito, o meglio:

- se $a<5$, allora $I_2<+\infty$, quindi anche $I_1<+\infty$
- se $a\geq 5$, allora $I_2=+\infty$, quindi NON posso dire nulla di I_1.

Resta da dimostrare che I_1 diverge per $a\geq 5$.



$$\frac{x^a y^2}{x^6+y^6} \geq \frac{x^a\cdot\frac{1}{4}}{x^6+1}$$

num. + piccolo

denom. + grande

se integro solo sul B

$$= \frac{1}{4}\,\frac{x^a}{x^6+1}$$

Finale: $\displaystyle\int_S \dots \geq \int_B \dots \geq \int_B \frac{1}{4}\,\frac{x^a}{x^6+1}\,dx = \int_1^{+\infty} dx \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy\, \frac{1}{4}\,\frac{x^a}{x^6+1}$

Scelto $y\geq\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{x^a}{1+x^6}\,dx$$

e quest'ultimo (Analisi 1) converge se e solo se $a<5$, quindi per $a\geq 5$ diverge.

<u>Esempio 4</u> $\displaystyle\int_A \frac{x^2y^2z^3}{(x^2+y^2+z^2)^a}\,dx\,dy\,dz$ $\quad A=$ sfera con centro in $(0,0,0)$ e raggio 5

Brutalmente: $\displaystyle\frac{\rho^7}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-7}}$ quindi converge $\Leftrightarrow 2a-7<3$ $\Leftrightarrow 2a<10 \Leftrightarrow a<5$

dimensione

Rigorosamente: coordinate sferiche …

<u>Oss</u> Quando converge, l'integrale fa 0 (dispari nella variabile z)

Esempio 5 $\displaystyle\int_A \frac{x^2y^2z^3}{x^2+y^4+z^a}\,dx\,dy\,dz$ A = solita sfera

$x = u^2$ $y = v$ $z = w^{\frac{4}{a}}$ Devono tutte potenze quante

Matrice: $\begin{pmatrix} 2u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{a} w^{\frac{4}{a}-1} \end{pmatrix}$ $J = \frac{8}{a} u w^{\frac{4}{a}-1}$

Ci ritroviamo $\displaystyle\int_B \frac{u^4 v^2 w^{\frac{12}{a}}}{u^4+v^4+w^4} \cdot \frac{8}{a} u\, w^{\frac{4}{a}-1}\,du\,dv\,dw$

Brutalmente: sotto c'è ρ^4 e sopra c'è molto di più, quindi converge sempre

Questa volta l'integranda è davvero limitata

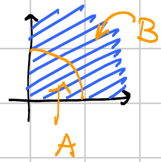
$$\left|\frac{x^2y^2z^3}{x^2+y^4+z^a}\right| \le \frac{\cancel{x^2}\,R^2\cdot R^3}{\cancel{x^2}} = R^5.$$

$$\underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^4+z^a}}_{\le 1}\quad \underbrace{y^2z^3}_{\le R^5}$$

ANALISI 2 — LEZIONE 58

Titolo nota 22/05/2014

Esercizio 1 $\displaystyle\int_Q \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}$ $Q = 1°$ quadrante



Doppio problema: spezzo in A e B

In A converge (Brutalmente $\frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} \sim \frac{xy}{x^2+y^2} \sim \frac{\rho^2}{\rho^2} \sim 1$)

Rigorosamente: utilizzo la disuguaglianza $\arctan t \leq t$ per ogni $t \geq 0$, quindi

$$\int_A \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}\,dx\,dy \leq \int_A \frac{xy}{x^2+y^2}\,dy = \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho^2}\,\rho\,d\theta$$

e converge.

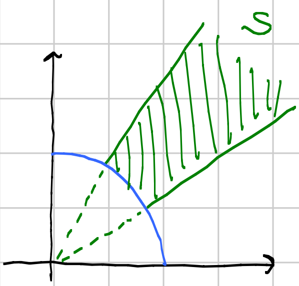
In B potrei dire che $\frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2+y^2}$, quindi

$$\int_B f\,\text{dato} \leq \frac{\pi}{2}\int_B \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = +\infty$$ e quindi BOH.

Vorrei scrivere

f dato $\geq \ldots$ per poter dimostrare che diverge, ma se sono in B i ... possono solo essere 0 (perché xy si annulla sugli assi)

Rimedio: sostituire B con un settore S del tipo
$$\rho \geq R > 0 \qquad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$



Allora

$$\int_B \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}\,dx\,dy \geq \int_S \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int_R^{+\infty} d\rho \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \; \frac{\arctan(\rho^2 \cos\theta \sin\theta)}{\rho^{\cancel{2}}} \cancel{\rho}$$

$$= \int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho} d\rho \underbrace{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \arctan(\rho^2 \cos\theta \sin\theta)\, d\theta}_{\geq \arctan(R^2 \cos\theta \sin\theta)} \geq \int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho} d\rho \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \arctan(R^2 \cos\theta \sin\theta)$$

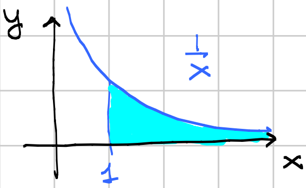
1ª possibilità: dire che $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ldots d\theta$ è un numero > 0 (int. di funz. pos.)

quindi $\int$ iniziale $\geq$ numero $\int_R^{+\infty} \frac{1}{\rho} d\rho$, quindi diverge

2ª possibilità: Dire che $R^2 \cos\theta \sin\theta$ ha un minimo m positivo quando θ varia da $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{3}$. Il min. esiste per W e nell'intervallo dato $\cos\theta$ e $\sin\theta$ sono > 0.
Occhio: in $[0, \frac{\pi}{2}]$ il minimo esiste, ma fa 0.

A questo punto $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \arctan(R^2 \sin\theta \cos\theta)\, d\theta \geq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \arctan(R^2 m)\, d\theta > 0$

Esercizio 2 $\displaystyle\int_A \frac{xy}{x^2+y^2}\, dx\, dy \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$



Puntiamo sulla convergenza

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy \, \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy \, \frac{1}{x^2} =$$

Serve q.c. + grande, quindi $\displaystyle\frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{x \frac{1}{x}}{x^2} = \frac{1}{x^2}$

y in A vale al max $\frac{1}{x}$

$$= \int_1^{+\infty} dx \, \frac{1}{x^2} \int_0^{\frac{1}{x}} dy = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \text{ , quindi converge.}$$

Esercizio 3

$$\int_A \frac{x^a y}{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad A \text{ come prima}$$

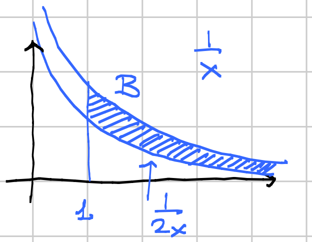
Stesso conto di prima:

$$\int_1^{+\infty} dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy \, \frac{x^a y}{x^2+y^2} \le \int_1^{+\infty} dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy \, \frac{x^a \cdot \frac{1}{x}}{x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3-a}}\,dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{4-a}}\,dx$$ e questo converge se e solo se $4-a>1$, cioè se e solo se $a<3$

Siamo alle solite! Per $a<3$ converge quello + grande, quindi converge quello iniziale; per $a \geq 3$ per ora boh.

Per $a \geq 3$ punto sulla divergenza, quindi voglio scrivere $\geq$, ma per farlo mi devo mettere su una sottozona B.
Ora



$$\int_A \frac{x^a y}{x^2+y^2}\,dx\,dy \geq \int_B \frac{x^a y}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} \frac{x^a y}{x^2+y^2}\,dy \geq \int_1^{+\infty} dx \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{2}\,\frac{x^{a-1}}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x^2+1} \underbrace{\int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} dy}_{\frac{1}{2x}}$$

$$\frac{x^a y}{x^2+y^2} \geq \frac{x^a \cdot \frac{1}{2x}}{x^2+1}$$

ho usato che $y \geq \frac{1}{2x}$ in B

ho usato che $y \leq \frac{1}{x} \leq 1$

$$= \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{x^{a-2}}{x^2+1}\,dx$$

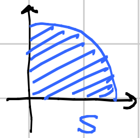
e questo è $= +\infty$ se $a \geq 3$

$$\frac{x^{a-2}}{x^2+1} \sim \frac{x^{a-2}}{x^2} = \frac{1}{x^{4-a}}$$

e $4-a \leq 1$ se $a \geq 3$

Per confronto anche quello iniziale fa $+\infty$ per $a \geq 3$.

Esempio 4 $\quad \displaystyle\int_S \frac{\log(1+y)}{x^2+2y^2}\,dx\,dy$



Analisi 1: $\log(1+y) \sim y$ per $y \to 0$, quindi è come se fosse

$$\int_S \frac{y}{x^2+2y^2}\,dx\,dy$$ e questo converge per i soliti motivi

Rigoroso: volendo ci sarebbe la disuguaglianza $\log(1+y) \leq y \quad \forall y \geq 0$

Analisi 1: sappiamo che $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$, quindi per y vicini a 0

si ha che $\displaystyle\frac{1}{2} \leq \frac{\log(1+y)}{y} \leq 2$, quindi per $y>0$ e vicini a 0

$$\frac{1}{2}y \leq \log(1+y) \leq 2y.$$

Così posso eliminare il log in un verso o nell'altro a seconda della convenienza

Occhio: posso supporre y abbastanza piccolo perchè posso sempre cambiare l'insieme con uno piccolo che contiene lo stesso p.to problematico

Esempio 5 $\quad \displaystyle\int_Q \frac{\log(1+y)}{x^4+y^4+1}$ $\qquad Q =$ 1° quadrante (unico pbm. è la zona di integrazione)

Brutalmente: $\displaystyle\frac{\log(1+y)}{1+x^4+y^4} \sim \frac{\log\rho}{1+\rho^4}$ e $\displaystyle\int_R^{+\infty} \frac{\log\rho}{1+\rho^4}\,d\rho < +\infty$

perchè un $\log\rho$ non riesce ad intaccare un ρ^4.

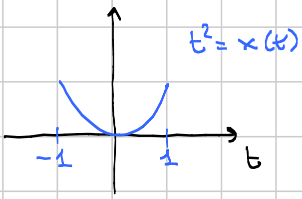
ANALISI 2 — LEZIONE 59

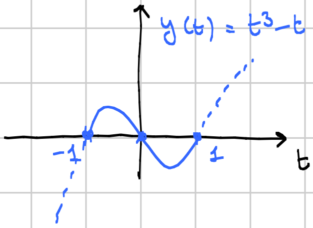
Titolo nota 29/05/2014

Esercizio 1 $\gamma(t) = (t^2, t^3 - t)$ $t \in [-1,1]$

Chiusa? $\gamma(-1) = (1,0)$ $\gamma(1) = (1,0)$ SI!

Semplice? Tentativo da fare: vedere se c'è una componente monotona, quindi iniettiva. Qui fallisce per forza (idem tutte le volte che è chiusa)





Proviamo ad impostare il sistema $\gamma(t) = \gamma(s)$

$$\begin{cases} t^2 = s^2 \\ t^3 - t = s^3 - s \end{cases}$$

Questo deve avere come soluzione solo $\to t = s$
$\to$ i 2 estremi

Dalla 1ª equazione abbiamo 2 casi: ① $t = s$ (e questo è previsto)
② $t = -s$ sostituisco nella 2ª

$-s^3 + s = s^3 - s$ cioè $2s^3 - 2s = 0$, da cui

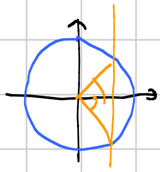
$\boxed{\begin{matrix} s = -1 \\ t = 1 \end{matrix}}$ Due estremi $\boxed{\begin{matrix} s = 0 \\ t = 0 \end{matrix}}$ $s = t$ $\boxed{\begin{matrix} s = 1 \\ t = -1 \end{matrix}}$ Due estremi

Oss. Altre possibili situazioni: $t^4 = s^4$ $(\Rightarrow t = \pm s)$

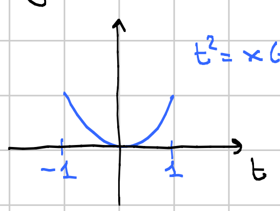
$\sin t = \sin s$ (t ed s in $[0,\pi]$) $(\Rightarrow t = s$ oppure $t = \pi - s)$

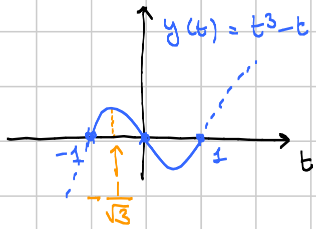
$\cos t = \cos s$ (t ed s in $[0,\pi]$) $(\Rightarrow t = s$ perché $\cos$ è iniettiva in $[0,\pi]$)

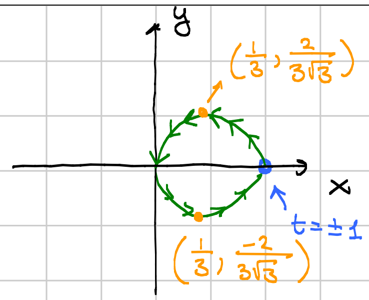
$\cos t = \cos s$ (t ed s in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) $(\Rightarrow t = \pm s)$



Disegno ?







$\gamma(1) = \gamma(-1) = (1,0)$

$\gamma(0) = (0,0)$

Per t da -1 a 0, $x(t)$ scende da 1 a 0

$y(t)$ diventa positiva poi scende di nuovo

Per t da 0 a 1, $x(t)$ risale

$y(t)$ diventa negativa.

Come trovo il p.to più alto e più basso della curva ?

Devo fare max / min di $y(t)$

$y'(t) = 3t^2 - 1 \qquad y'(t) = 0 \iff t^2 = \frac{1}{3} \iff t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Per $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ la curva raggiunge il p.to più alto che è

$$\gamma\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$

Per il p.to più basso devo calcolare $\gamma\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Area racchiusa dalla curva ? $\quad \text{Area} = \int_{\boxed{\gamma}} x\,dy \leftarrow$ se γ percorre il bordo della zona lasciando la zona a sx

$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{t^2}_{x(t)} \underbrace{(3t^2-1)}_{y'(t)}\,dt = \int_{-1}^{1} (3t^4 - t^2)\,dt = \text{viene}$$

Integrale sulla zona $\qquad \int_\Omega x^2 y\,dx\,dy \qquad \int_\Omega x y^2\,dx\,dy$

dove Ω è la zona delimitata dalla curva.

Il 1° viene 0 per simmetria: infatti se cambio $(x,y) \rightsquigarrow (x,-y)$ la funzione cambia segno e Ω va in sè perchè la curva è simmetrica rispetto all'asse x (in quanto $(x(-t),y(-t)) = (x(t),-y(t))$)

Il secondo va fatto con GG (teo. della divergenza)

tangente ruotato di 90° in senso orario

$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{E}\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega^+} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, ds$$

bordo orientato che lascia la zona a sx

Devo trovare un campo $\vec{E}$ che abbia come divergenza xy^2.
Ci sono varie scelte, ad esempio

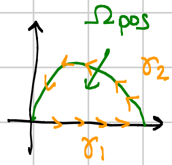
$$\vec{E} = \left(\tfrac{1}{2}x^2y^2, 0\right) \qquad \text{oppure} \qquad \vec{E} = \left(0, \tfrac{1}{3}xy^3\right)$$

Scelto $\vec{E}$, l'integrale a dx si può calcolare o direttamente, oppure con le forme differenziali $\vec{E} = (A, B)$

$$\int_{\partial\Omega^+} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, ds = \int_{\partial\Omega^+} A\, dy - B\, dx$$

(Ripasso: quando voglio l'area sto integrando $1\, dx\, dy$, quindi posso prendere $\vec{E} = (x, 0)$ e ottengo $\int_\gamma x\, dy$)

Occhio sempre all'orientazione !!!



Altro integrale

$$\int_\Omega x^2|y|\, dx\, dy = 2\int_{\Omega_{pos}} x^2|y|\, dx\, dy$$

$$= 2\int_{\Omega_{pos}} x^2 y\, dx\, dy$$

Questo si fa con il teo. della divergenza con $\vec{E} = \left(\tfrac{1}{3}x^3y, 0\right)$
e a dx mi servono delle curve che percorrano $\partial\Omega_{pos}$ con l'orientazione giusta

$\gamma_1(t) = (t, 0)$ con $t \in [0, 1]$

$\gamma_2(t) = (t^2, t^3 - t)$ con $t \in [-1, 0]$

Quindi $2\int_{\Omega pos} x^2 y \, dx\, dy = 2\int_{\Omega pos} \operatorname{div} \vec{E} \, dx\, dy = 2\int_{\underset{\uparrow}{\partial}\Omega pos^+} A\, dy - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{B}\, dx$

dopo video

$= 2\int_{\underset{\uparrow}{\partial}\Omega pos^+} \frac{1}{3} x^3 y \, dy = \underbrace{\frac{2}{3}\int_{\gamma_1} x^3 y\, dy}_{=0 \text{ perché } y=0 \text{ su } \gamma_1} + \frac{2}{3}\int_{\gamma_2} x^3 y \, dy$

dopo video

$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{0} \underset{\overset{\uparrow}{x^3}}{t^6} \underset{\overset{\uparrow}{y}}{(t^3 - t)} \underbrace{(3t^2 - 1)}_{y'(t)} \, dt$ = si fa.

ANALISI 2 – LEZIONE 60

Titolo nota 29/05/2014

Esercizio $f(x,y) = \arctan(xy^2) + y^4 - x^3y^5$

Dim. che l'origine è un p.to stazionario e stabilire di cosa si tratta.

Metodo bovino: faccio il ∇f e vedo che si annulla in $(0,0)$ poi Hessiano per vedere di cosa si tratta (e non funziona perché $Hf(0,0)$ è la matrice nulla)

Taylor $f(x,y) = \underbrace{xy^2 - \frac{1}{3}x^3y^6}_{\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + \dots} + y^4 - x^3y^5 + o((\sqrt{x^2+y^2})^{14})$

il primo termine che non sto mettendo è $t^5 = x^5y^{10}$ che ha grado 15

Da Taylor vedo subito che

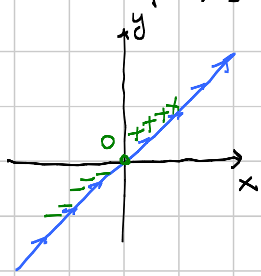
→ $(0,0)$ è un p.to stazionario (non ci sono x e y, o meglio ci sono con coeff. nullo)

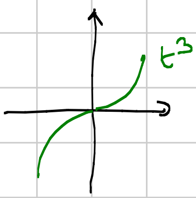
→ $Hf(0,0)$ è la matrice nulla perché $f_{xx}(0,0)$, $f_{yy}(0,0)$, $f_{xy}(0,0)$ sono tutte nulle (sarebbero circa i coeff. di x^2, y^2, xy)

Per capire che $(0,0)$ non è p.to di max/min locale, considero $f(t,t)$

$f(t,t) = \arctan t^3 + t^4 - t^8$
$= t^3 + o(t^3)$

quindi vicino all'origine si comporta come t^3

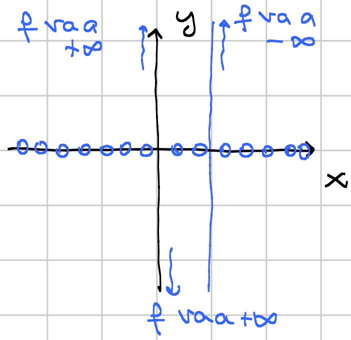




Basta questo per escludere max/min loc. in $(0,0)$

$f(x,y) = \arctan(xy^2) + y^4 - x^3y^5$ Inf / sup su $\mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ $f(0,t) = t^4$ e quindi basta prendere t enorme



$\inf = -\infty$ $f(t,t) = \arctan t^3 + t^4 - t^8$

e

$$\lim_{t\to+\infty} f(t,t) = -\infty$$

In alternativa basta mettere $x = 1$ e quindi

$f(1,t) = \arctan t^2 + t^4 - t^5$ e per per $t \to +\infty$ questo tende a $-\infty$

Inf / sup sul 1° quadrante $x \geq 0,\ y \geq 0$

Sono ancora $+\infty$ e $-\infty$ perchè ho direzioni nel 1° quadrante lungo le quali f tende a $+\infty$ e a $-\infty$

Inf / sup sul 2° quadrante $x \leq 0,\ y \geq 0$

Facile: $\sup = +\infty$ $f(0,t)$ come prima (con $t \to +\infty$)

Per quanto riguarda l'inf, di sicuro non è $-\infty$ perchè

$$f(x,y) = \underbrace{\arctan(xy^2)}_{\substack{\geq -\frac{\pi}{2} \\ \text{sempre}}} + \underbrace{y^4}_{\substack{\geq 0 \\ \text{sempre}}} \underbrace{- x^3y^5}_{\substack{\geq 0 \\ \text{nel 2° quadrante}}} \geq -\frac{\pi}{2} \quad \text{nel 2° quadrante}$$

Se voglio avvicinarmi a $-\frac{\pi}{2}$, mi serve

- xy^2 molto negativo
- $y^4 \sim 0$
- $x^3y^5 \sim 0$

Se prendessi $f\left(-t^2, \frac{1}{t}\right) = \arctan(-1) + \frac{1}{t^4} + \underbrace{t^6 \cdot \frac{1}{t^5}}_{\text{tende a } +\infty} \to +\infty$

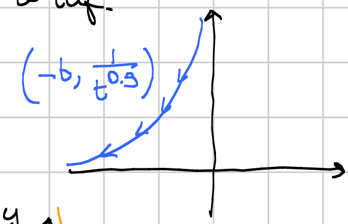
Cambio un attimo esercizio...

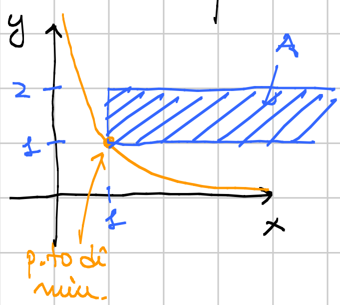
$$f(x,y) = \arctan(xy) + y^4 - x^3y^5 \quad \text{sempre sul } 2^\circ \text{ quadrante}$$

Faccio $f\left(-t, \frac{1}{t}\right) = \arctan(-1) + \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2} \to \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

ora faccio $f\left(-t, \frac{1}{t^{0.9}}\right) = \underset{\downarrow \atop -\frac{\pi}{2}}{\arctan\left(-t^{0.1}\right)} + \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{t^4}} + \underset{\downarrow \atop 0}{t^3 \frac{1}{t^{4.5}}}$

Con questa scelta f va a $-\frac{\pi}{2}$ che quindi è l'inf.





<u>Esercizio</u> $f(x,y) = xy$ inf e sup

sup $= +\infty$ $\quad f(t,1)$ con $t \to +\infty$
$f(t,2)$ con $t \to +\infty$
$f\left(t, \frac{3}{2}\right)$ con $t \to +\infty$

Per l'inf. ho almeno 2 metodi: • linee di livello, visto che f è molto semplice

• dimostro che $\displaystyle\lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ (x,y) \in A}} f(x,y) = +\infty$, a quel p.to il minimo esiste per W. generalizzato e a quel p.to lo trovo con la procedura (ci si riduce a parametrizzare i 3 pezzi del bordo).

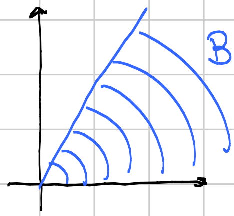
Per il limite basta osservare che

$$f(x,y) \geq x \quad \text{sull' insieme } A$$

Ora se $(x,y) \in A$ e $x^2+y^2 \to +\infty$, allora per forza anche $x \to +\infty$.

Altro modo. Faccio vedere che lim x in B è $+\infty$ dove

$$x = \rho \cos\theta \geq \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{in } B$$



quindi quando $\rho \to +\infty$ anche $x \to +\infty$ se resto in B

Se il limite in B fa $+\infty$, il limite in A, che è + piccolo come insieme, fa $+\infty$ pure.

— o — o —