Teorema dell’energia cinetica rotazionale

Consideriamo un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso S e supponiamo che agisca un momento torcente totale $\vec{\tau}_S = \tau_S \hat{k}$. Abbiamo:

$$\vec{\tau}_S = I_S \vec{\alpha} = I_S \frac{d\omega}{dt} \hat{k}$$

Sia $[t_1, t_2]$ un intervallo di tempo. Allora:

$$\frac{1}{2} I_S (\omega_2^2 - \omega_1^2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_S \, d\,\theta$$

Questo integrale rappresenta il lavoro del momento torcente.

TEOR. EN. CIN.

$$\vec{\tau}_s = I_s \vec{\alpha} \qquad [t_1, t_2]$$

$$K_{rot}(t_1) = \frac{1}{2} I_s \omega_1^2 \qquad K_{rot}(t_2) = \frac{1}{2} I_s \omega_2^2$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} \hat{k} \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$

$$\tau_s = I_s \alpha = I_s \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_s \, d\theta = I_s \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega \, d\omega$$

$$\underbrace{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_s \, d\theta}_{\text{LAVORO MOMENTO TORCENTE}} = \underbrace{\frac{1}{2} I_s \left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)}_{\text{VAR. EN. CIN. ROT}}$$

Impulso angolare

Consideriamo un momento torcente $\vec{\tau}_S$ rispetto a un polo S e consideriamo un intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$. L'impulso angolare rispetto a S è:

$$\vec{J}_S = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\tau}_S \; dt$$

Poiché $\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \vec{\tau}_S$, abbiamo:

$$\vec{J}_S = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{L}_S}{dt} \, dt = \Delta\vec{L}_S = \vec{L}_{S,f} - \vec{L}_{S,i}$$

Per un sistema di punti materiali o un corpo rigido, se $\vec{\tau}_{S,ext}$ è il momento torcente totale delle forze esterne applicate rispetto a un polo S:

$$\vec{J}_{S,ext} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\tau}_{S,ext} \; dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{L}_{S,sis}}{dt} \, dt = \Delta\vec{L}_{S,sis} = \vec{L}_{S,sis,f} - \vec{L}_{S,sis,i}$$

Osservazione

Consideriamo una forza $\vec{F}(t)$ applicata per un intervallo di tempo Δt. L'**impulso lineare** è

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt$$

Se la forza è applicata in un punto in posizione $\vec{r}$ rispetto al polo S, il **momento torcente** è:

$$\vec{\tau_S}(t) = \vec{r} \times \vec{F}(t)$$

L'**impulso angolare** corrispondente è:

$$\vec{J}_S = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\tau}(t)\, dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{r} \times \vec{F}(t)\, dt$$

Se il punto di applicazione della forza $\vec{r}$ è **costante** durante Δt, allora si può portare $\vec{r}$ fuori dall'integrale:

$$\vec{J}_S = \vec{r} \times \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt = \vec{r} \times \vec{I}$$

In questo caso, è:

Impulso angolare = momento dell'impulso

Conservazione del momento angolare

Se la risultante dei momenti torcenti esterni agenti su un sistema è nulla, allora il momento angolare totale del sistema si conserva:

$$\Delta\vec{L}_{S,sis} = \vec{L}_{S,sis,f} - \vec{L}_{S,sis,i} = \vec{0}$$

Cioè il momento angolare del sistema è costante:

$$\vec{L}_{S,sis}(t_f) = \vec{L}_{S,sis}(t_i)$$

Esercizio

Un oggetto puntiforme di massa m_1, in moto con velocità costante v_i, urta una **sbarra rigida e uniforme** di lunghezza l e massa m_2, sospesa al soffitto tramite un perno privo di attrito. Immediatamente dopo l'urto, l'oggetto prosegue in avanti, ma la sua velocità si riduce a $\frac{v_i}{2}$. Il **momento d'inerzia** della sbarra rispetto al suo centro di massa è:

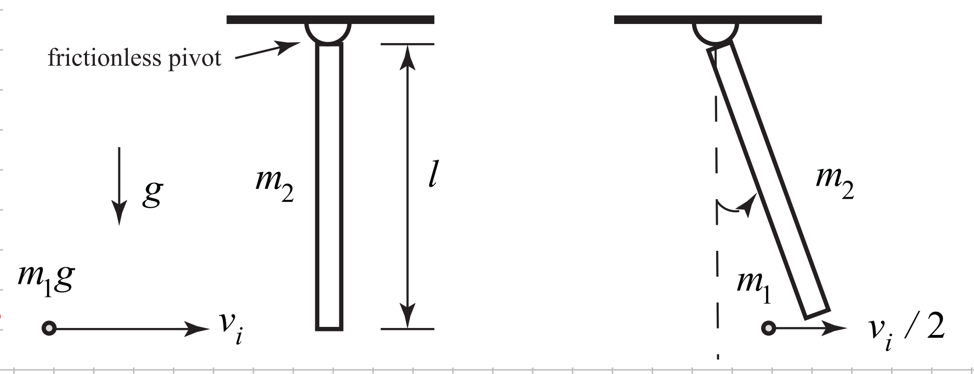
$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} m_2 l^2$$

La forza peso agisce verso il basso con accelerazione g.

(a) Per quale valore di v_i la sbarra arriva a sfiorare il soffitto al suo primo passaggio?

(b) Per quale rapporto $\frac{m_2}{m_1}$ l'urto è elastico?

Nota: si consideri che il perno è privo di attrito e che la sbarra può ruotare liberamente attorno al punto di sospensione.



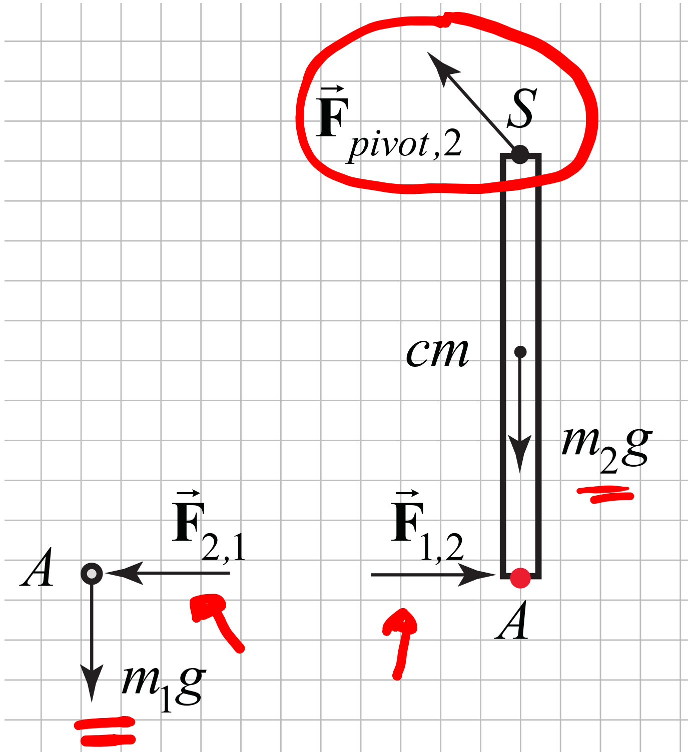
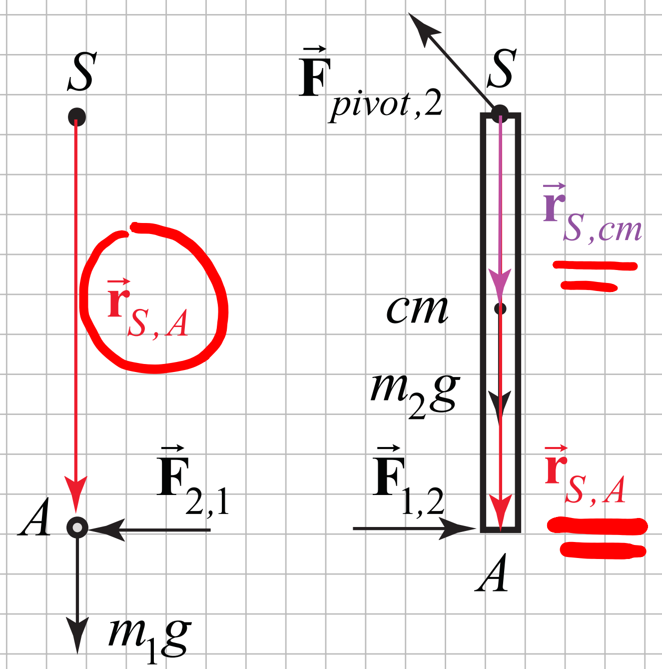


Diagramma delle forze durante l'urto

$\frac{d}{dt}\vec{P}_{sis} \neq 0$



Vettori posizione dei punti di applicazione delle forze.

Diagramma del momento angolare, prima e subito dopo l'urto.

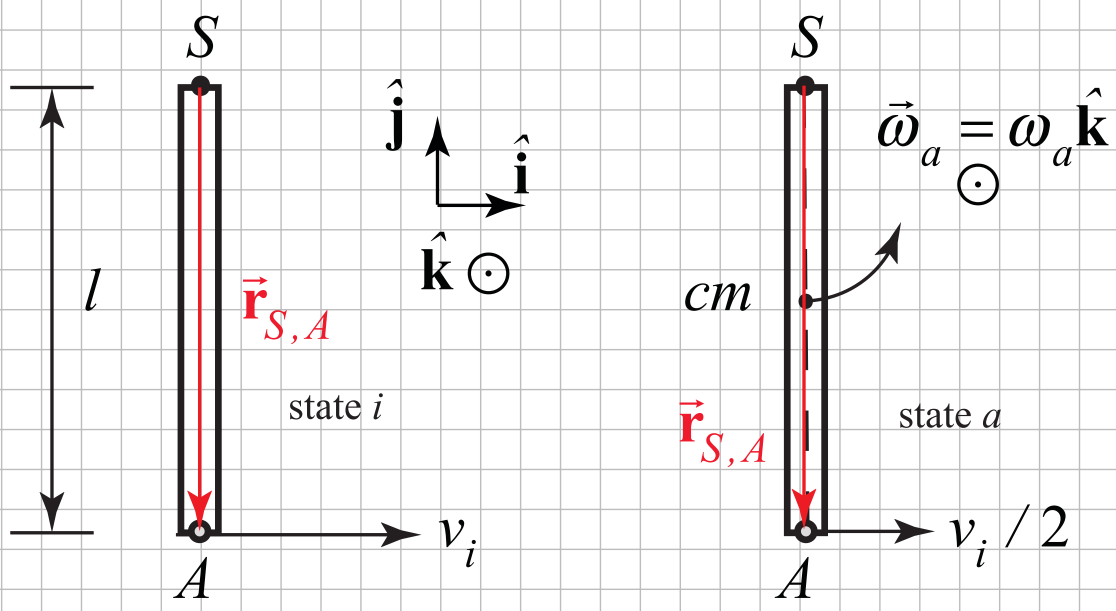
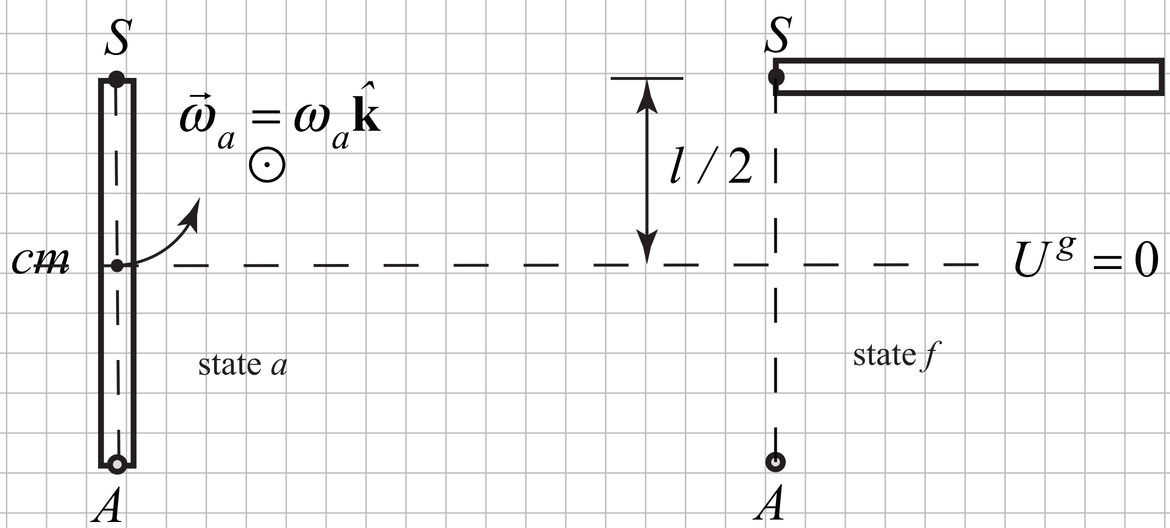


Diagramma per l'energia

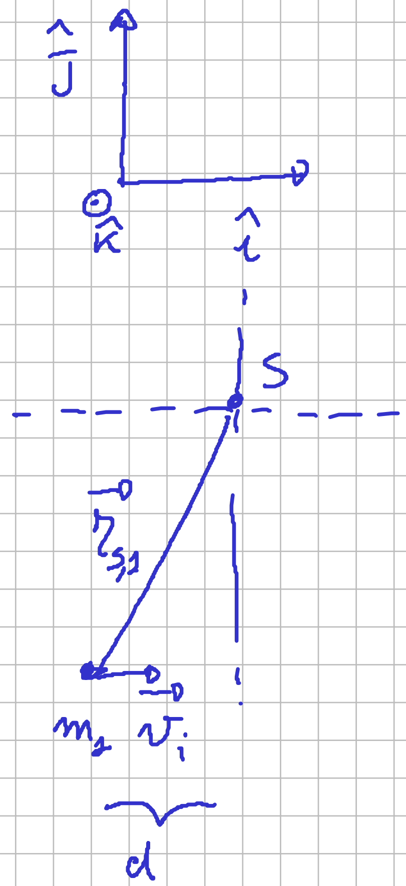


SBARRA & PUNTO MATERIALE

$$\vec{\tau}_s = \underset{0}{\underset{\|}{\vec{\tau}_{REAZ}}} + \underbrace{\vec{r}_{s,A} \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_{sA} \times \vec{F}_{12}}_{\overset{\|}{0}} + \underset{0}{\underset{\|}{\vec{r}_{sA} \times m_1 \vec{g}}} + \underset{0}{\underset{\|}{\vec{r}_{s,m} \times m_2 \vec{g}}}$$

DURANTE L'URTO $\vec{\tau}_s = 0$

$$\frac{d\vec{L}_{sist}}{dt} = 0$$



$$\vec{L}_{s,i} = \vec{L}_{s,a}$$

$$\vec{L}_{s,i} = \vec{r}_{s,1} \times m_2 \vec{v}_i$$

$$\vec{r}_{s,1} = -d\,\hat{i} - \ell\,\hat{j}$$

$$\vec{v}_i = v_i\,\hat{i}$$

$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$

$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$

$$\vec{L}_{s_i} = m_1(-d\,\hat{i} - \ell\,\hat{j}) \times (v_i\,\hat{i}) =$$

$$= m_1(-v_i\,\hat{i} \times \hat{i} - \ell v_i\,\hat{j} \times \hat{i}) =$$

$$= m_1 \ell v_i\,\hat{k}$$

$$\vec{L}_{sa} = \vec{r}_{s,1} \times m_1 \frac{\vec{v}_i}{2} + I_s \vec{\omega}_a = -\ell\,\hat{j} \times \left(\frac{m_1 v_i}{2}\right)\hat{i} +$$

$$+ I_s \omega_a\,\hat{k}$$

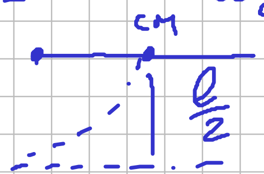
$$= \frac{\ell}{2} m_2 v_i \hat{k} + I_s \omega_a \hat{k}$$

$$\ell m_2 v_i = \frac{\ell}{2} m_2 v_i + I_s \omega_a$$

$$\omega_a = \frac{\ell m_2 v_i}{2 I_s}$$

VELOCITÀ ANGOLARE SUBITO DOPO L'URTO

$$I_s = \frac{m_2 \ell^2}{3} \Rightarrow \omega_a = \frac{3}{2} \frac{m_2}{m_2} \frac{v_i}{\ell}$$



$$E_a = \frac{1}{2} I_s \omega_a^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{v_i}{2}\right)^2 - m_2 g \frac{\ell}{2}$$

$$E_f = m_2 g \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{v_i}{2}\right)^2 - m_2 g \frac{\ell}{2}$$

$$\frac{1}{2} I_s \omega_a^2 = m_2 g \frac{\ell}{2} \qquad \omega_a = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$$

$$\omega_a = \frac{3}{2} \frac{m_2}{m_2 \ell} v_i$$

SOSTITUENDO

$$v_i = \frac{m_2}{m_2} \sqrt{\frac{4}{3} g \ell}$$

URTO ELASTICO SE

$$E_a = E_i$$

$$K_a = K_i$$

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_i^2$$

$$K_f = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{v_i}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} I_s \left(\frac{3}{2} \frac{m_1}{m_2 \ell} v_i \right)^2$$

$$I_s = \frac{m_2 \ell^2}{3}$$ SOSTITUENDO

$$\frac{3}{4} \frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = 1$$

Esercizio

Una rondella di acciaio è montata sull'albero di un piccolo motore. Il **momento d'inerzia complessivo** del sistema motore + rondella è indicato con I_0. La rondella viene messa in rotazione, e quando raggiunge una velocità angolare iniziale ω_0, al tempo $t = 0$, l'alimentazione del motore viene interrotta. Da quel momento, la rondella inizia a rallentare fino a raggiungere una velocità angolare ω_a al tempo t_a.

In quell'istante viene lasciata cadere una seconda rondella di acciaio, avente momento d'inerzia I_w, che va a posizionarsi sopra la prima. Si assume che la seconda rondella entri in contatto esclusivamente con la prima (non tocca l'albero). L'urto tra le due avviene in un intervallo di tempo $\Delta t = t_b - t_a$.

Si assume che la **coppia resistente per attrito sull'albero** sia indipendente dalla velocità e resti costante anche dopo che la seconda rondella viene aggiunta. Le due rondelle continuano a rallentare nel tempo $\Delta t_2 = t_f - t_b$ fino a fermarsi al tempo finale $t = t_f$.

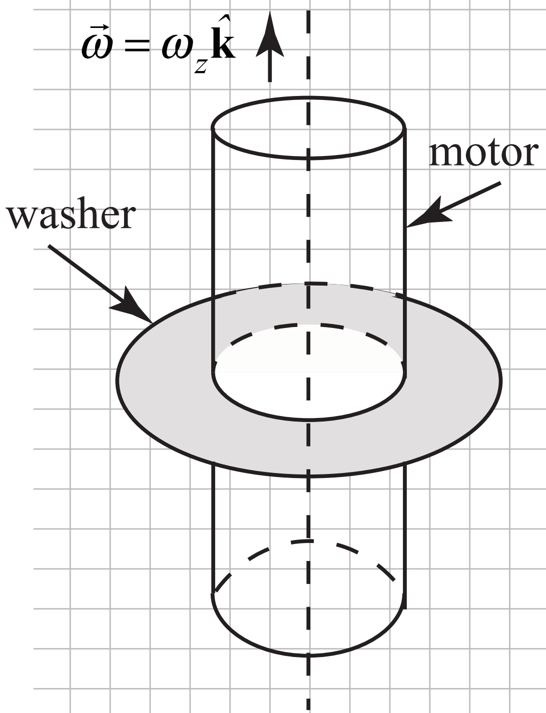
(a) Qual è l'accelerazione angolare durante la fase di rallentamento iniziale, ovvero nell'intervallo $\Delta t_1 = t_a$?

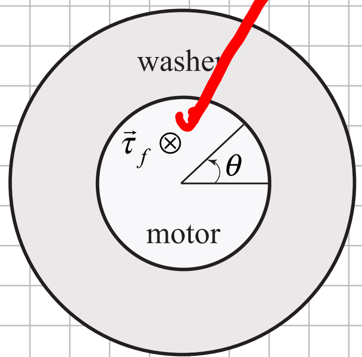
(b) Supponendo che l'urto tra le rondelle sia praticamente istantaneo, cioè $\Delta t = t_b - t_a \approx 0$, qual è la **velocità angolare** ω_b delle due rondelle immediatamente dopo la fine dell'urto, quando ruotano solidalmente?

(c) Supponendo ora che l'urto non sia istantaneo, ma che la coppia resistente sia comunque indipendente dalla velocità, qual è l'**impulso angolare** durante l'urto?

(d) Qual è la **velocità angolare** ω_b delle due rondelle immediatamente dopo l'urto (quando ruotano solidalmente), tenendo conto della durata finita dell'urto?

(e) Qual è la **decelerazione angolare** α_2 del sistema dopo l'urto?





overhead view

$$\alpha_1 = \frac{\omega_a - \omega_0}{\Delta t_1} < 0$$

RONDELLE

$$\alpha_2 = \frac{\omega_a - \omega_0}{\Delta t_2} < 0$$

COLL. ISTANTANEA $\Rightarrow$ IMPULSO ANGOLARE

ATTRITO TRASCURABILE

$\Rightarrow$ SI CONSERVA LA COMPONENTE DEL MOMENTO ANGOLARE

$$0 = \Delta L_z = L_{b,z} - L_{a,z} = 0$$

$$L_{b,z} = (I_0 + I_w)\,\omega_b$$

$$L_{a,z} = I_0 \quad \omega_a$$

$$(I_0 + I_w)\,\omega_b = I_0\,\omega_a$$

$$\omega_b = \frac{I_0}{I_0 + I_w}\,\omega_a$$

$$\vec{\tau}_{ATT} = -\tau_{ATT}\ \hat{k}$$

$$-\tau_{ATT} = I_0\ \alpha_1 = I_0 \frac{(\omega_a - \omega_0)}{\Delta t_1}$$

COLLISIONE AVVIENE $[t_a, t_b]$

$$J_z = -\int_{t_a}^{t_b} \tau_{ATT}\ dt =$$

$$-\tau_{ATT} \int_{t_a}^{t_b} dt = \frac{I_0 (\omega_a - \omega_0)(t_b - t_a)}{\Delta t_1} =$$

$$= \frac{I_0 (\omega_a - \omega_0)\ \Delta t_{INTERAZ.}}{\Delta t_1}$$

DURANTE LA COLLISIONE:

$$\Delta L_z = L_{b,z} - L_{0,z} = (I_0 + I_w)\,\omega_b - I_0\ \omega_a = J_z$$

$$I_0 (\omega_a - \omega_0) \frac{\Delta t_{INT}}{\Delta t_2} = (I_0 + I_w)\,\omega_b - I_0\ \omega_0$$

$$\omega_b = \frac{I_0}{I_0 + I_w} \left((\omega_a - \omega_0) \left(\frac{\Delta t_{INT}}{\Delta t_1} \right) + \omega_a \right)$$

$$\alpha_2 = \frac{0 - \omega_b}{\Delta \tau_2} = \frac{-I_0}{(I_0 + I_w)\,\Delta \tau_2}\left[(\omega_a - \omega_0)\left(\frac{\Delta \tau_{INT}}{\Delta \tau_1}\right) + \omega_a\right]$$

Momento angolare di un sistema che ruota e trasla

Per un sistema che trasla e ruota attorno ad un asse fisso passante per il centro di massa, il momento angolare rispetto a un polo S è:

$$\vec{L}_S = \vec{L}_{S,orbitale} + \vec{L}_{spin}$$

con:

$$\vec{L}_{S,orbitale} = \underline{\vec{R}_{S,CM} \times \left(M\vec{V}_{CM}\right)}$$

e

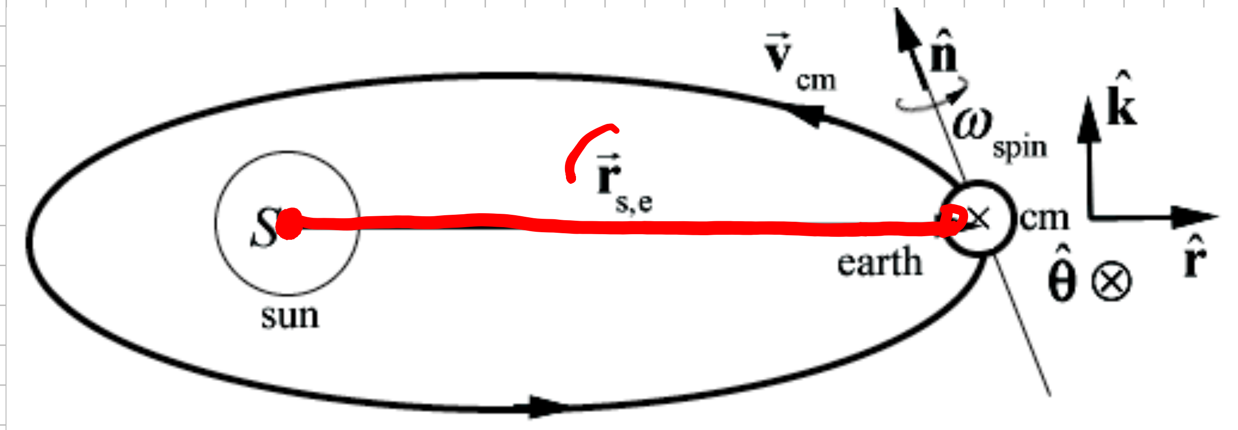
$$\underline{\vec{L}_{spin} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i^{\,\prime} \times (m_i \vec{v}_i^{\,\prime})}$$

$\vec{L}_{spin}$ è il momento angolare rispetto al centro di massa. Nella formula, $\vec{r}_i^{\,\prime}$ sono le posizioni relative al centro di massa e $\vec{v}_i^{\,\prime}$ le velocità relative al centro di massa.

→ KOENIG MOMENTO ANGOLARE

$$\vec{L}_S = \vec{L}_{S,CM} + \vec{L}_{REL}$$

Esempio: terra intorno al sole



$$\vec{\mathbf{L}}_S^{\text{orbital}} = \vec{\mathbf{r}}_{S,\text{cm}} \times \vec{\mathbf{p}}_{\text{sys}} = r_{\text{s,e}}\,\hat{\mathbf{r}} \times m_{\text{e}} v_{\text{cm}}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = r_{\text{s,e}} m_{\text{e}} v_{\text{cm}}\,\hat{\mathbf{k}}\,.$$

$$\vec{\mathbf{L}}_{\text{cm}}^{\text{spin}} = I_{\text{cm}}\,\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\text{spin}} = \frac{2}{5} m_{\text{e}} R_{\text{e}}^2\,\omega_{\text{spin}}\,\hat{\mathbf{n}}$$

$$\vec{\mathbf{L}}_S^{\text{total}} = m_{\text{e}}\, r_{\text{s,e}}^2\,\omega_{\text{orbit}}\,\hat{\mathbf{k}} + \frac{2}{5} m_{\text{e}} R_{\text{e}}^2 \omega_{\text{spin}}\,\hat{\mathbf{n}}\,.$$

Decomposizione del momento torcente

Per un sistema che trasla e ruota attorno ad un asse fisso passante per il centro di massa, la derivata rispetto al tempo del momento angolare rispetto a un polo S è:

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \frac{d\vec{L}_{S,orbitale}}{dt} + \frac{d\vec{L}_{spin}}{dt}$$

con:

$$\frac{d\vec{L}_{S,orbitale}}{dt} = \vec{R}_{S,CM} \times \vec{F}_{S,ext}$$

e

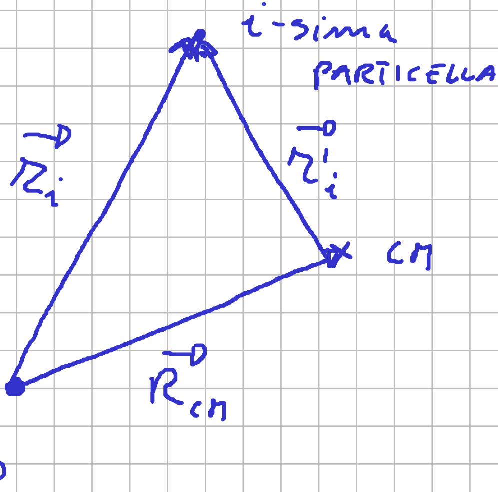
$$\frac{d\vec{L}_{spin}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i$$

DECOMPOSIZIONE DEL MOMENTO TORCENTE

$$\vec{F}_{EXT} = \frac{d\vec{P}_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(M\vec{v}_{CM}\right) \qquad \text{I CARDINALE}$$

MOMENTO TORCENTE RISPETTO A POLO S:

$$\vec{\tau}_{S,EXT} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$



$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}\,'_i$$

$$\vec{\tau}_{S,EXT} = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{R}_{CM} + \vec{r}\,'_i\right)\times\vec{F}_i = \vec{R}_{CM}\times\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i + \sum_{i=1}^{N}\vec{r}\,'_i\times\vec{F}_i$$

$$= \underbrace{\vec{R}_{CM}\times\vec{F}_{EXT}} + \sum_{i=1}^{N}\vec{r}\,'_i\times\vec{F}_i$$

II CARDINALE $\qquad \dfrac{d\vec{L}_S}{dt} = \vec{\tau}_{S,EXT}$

$$\vec{L}_S = \vec{L}_{S,ORBITALE} + \vec{L}_{SPIN}$$

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{L}_{S,ORBITALE} + \frac{d}{dt}\vec{L}_{SPIN} = \vec{\tau}_{S,EXT}$$

$$= \vec{R}_{cm} \times \vec{F}_{EXT} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i$$

$$\frac{d\vec{L}_{S,ORBITALE}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{R}_{cm} \times \vec{P}_{sis}\right)$$

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} \right]$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{S,ORBITALE} = \frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} \times \vec{P}_{sis} + \vec{R}_{cm} \times \frac{d\vec{P}_{sis}}{dt} =$$

$$= \vec{v}_{cm} \times M\vec{v}_{cm} + \vec{R}_{cm} \times \vec{F}_{EXT} =$$

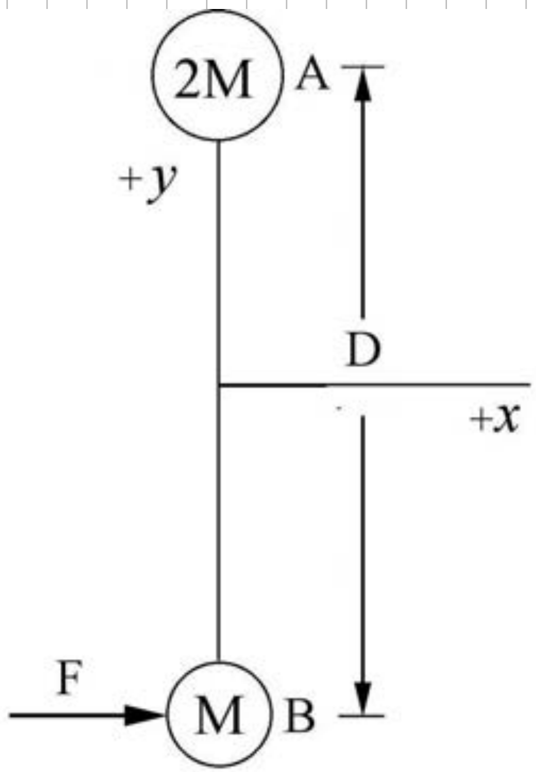
$$= \vec{R}_{cm} \times \vec{F}_{EXT}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{SPIN} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i$$

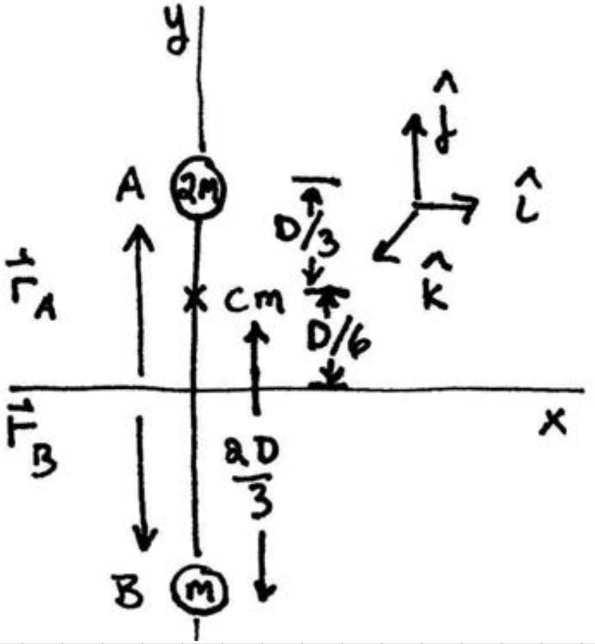
Esercizio

Due oggetti puntiformi si trovano nei punti A e B, con masse rispettive $M_A = 2M$ e $M_B = M$, come mostrato nella figura sottostante. I due oggetti sono inizialmente disposti lungo l'asse y e collegati da un'asta di massa trascurabile e lunghezza D, formando un corpo rigido. Una forza di modulo $F = |\vec{F}|$, diretta lungo l'asse x, viene applicata all'oggetto in B all'istante $t = 0$ per un breve intervallo di tempo Δt. Si trascuri la gravità.

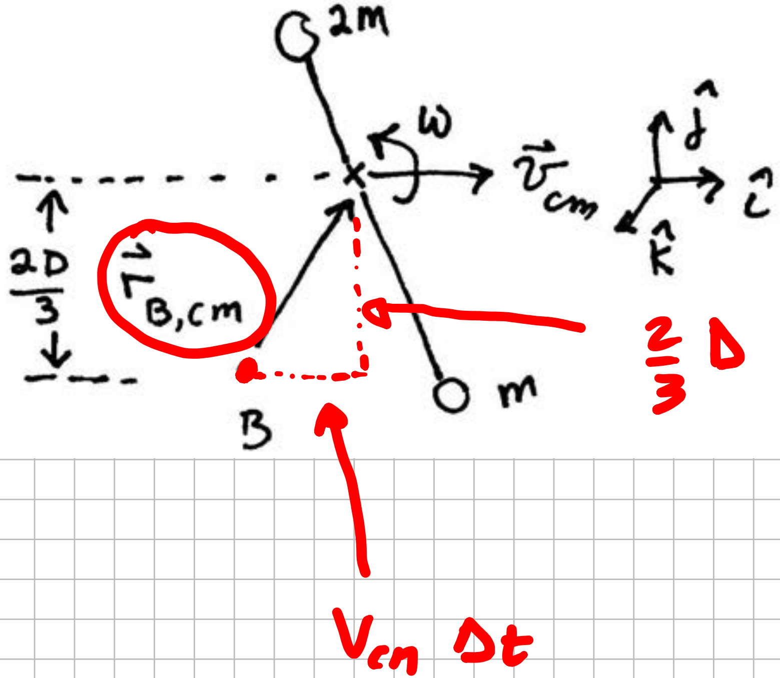
- Qual è il valore del modulo della velocità angolare del sistema dopo Δt?



Posizioni iniziali



Posizioni finali



2 MASSE

$$\vec{R}_{cm} = \frac{M_A \vec{r}_A + M_B \vec{r}_B}{M_A + M_B}$$

$$\vec{R}_{cm}(0) = \frac{2\frac{MD}{2}\hat{J} - M\frac{D}{2}\hat{J}}{3M} = \underline{\underline{\frac{D}{6}\hat{J}}}$$

IL CM. DISTA $\frac{2}{3}D$ DA B e $\frac{1}{3}D$ da A

IMPULSO DELLA FORZA

$$\vec{I} = \int_0^{\Delta t} \vec{F}\, dt = \vec{F}\Delta t = \Delta \vec{P}_{sis} = \vec{P}_{sis,f} - \vec{P}_{sis,i}$$

$$F\Delta t\, \hat{i} = 3M\, \vec{V}_{cm}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{F\Delta t}{3M}\hat{i}$$

MOMENTO ANGOLARE FINALE RISPETTO AL POLO B

$$\vec{L}_{Bf} = \vec{r}_{B,cm,f} \times (3M\, \vec{V}_{cm}) + \vec{L}_{SPIN}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{F\Delta t}{3M}\hat{i}$$

$$\vec{r}_{B,cm,f} = V_{cm}\,\Delta t\ \hat{i} + \frac{2D}{3}\hat{j}$$

$$\vec{L}_{Bf} = \frac{2D\ F\Delta t}{3}(-\hat{k}) + \vec{L}_{spin}$$

$$\Delta \vec{L}_B = 0 \qquad \vec{L}_{B,i} = 0$$

$$\vec{L}_{B,f} = 0 \qquad \vec{L}_{spin} = \frac{2D\,F\Delta t}{3}\hat{k}$$

$$\vec{L}_{spin} = I_{cm}\ \omega\ \hat{k}$$

$$I_{cm} = 2M\left(\frac{D}{3}\right)^2 + M\left(\frac{2D}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}MD^2$$

$$\vec{L}_{spin} = \frac{2}{3}MD^2\,\omega\,\hat{k}$$

$$\omega = \frac{F\Delta t}{MD}$$

Esercizio

Una persona di massa M è in piedi su un vagone ferroviario che sta percorrendo una curva non sopraelevata di raggio R con velocità di modulo v. Il suo centro di massa si trova ad un'altezza L sopra il pavimento del vagone, esattamente a metà strada tra i suoi piedi, che sono separati da una distanza d. La persona è rivolta nella direzione del moto.

- Qual è il valore del modulo della forza normale su ciascun piede?

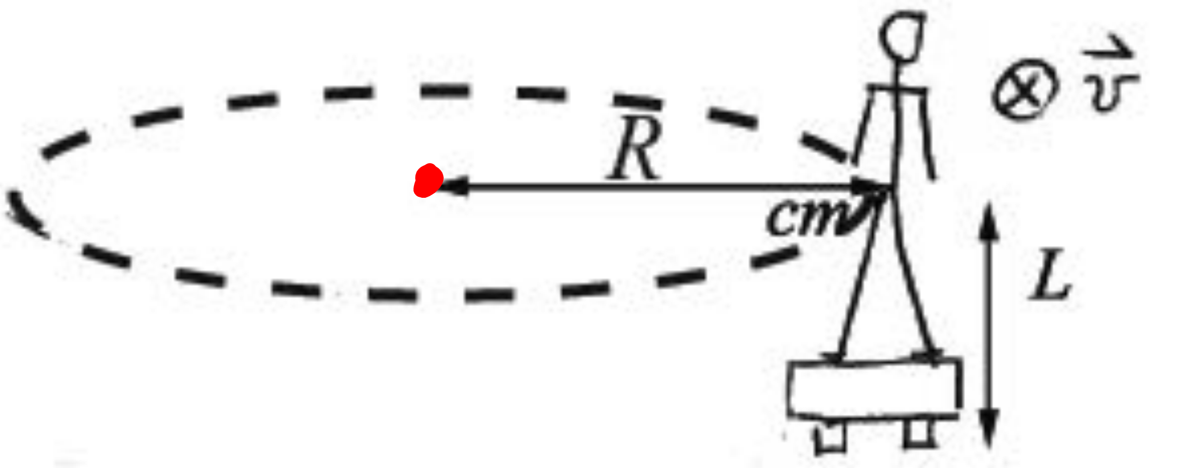


Diagramma delle forze

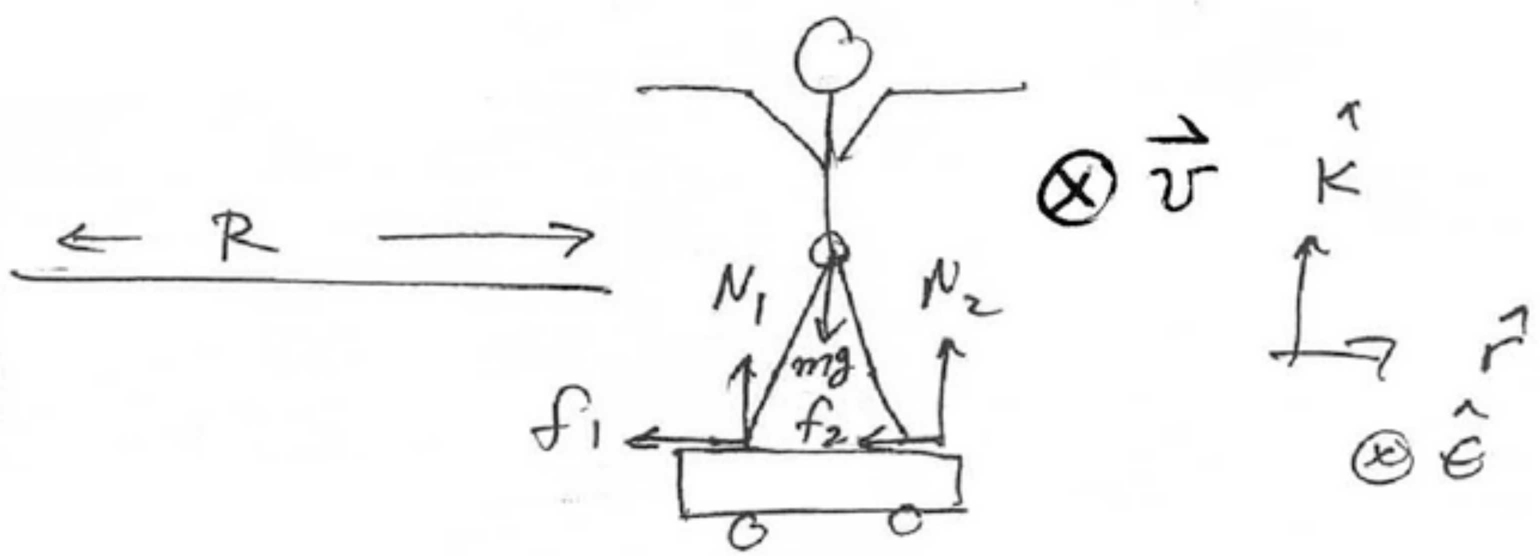
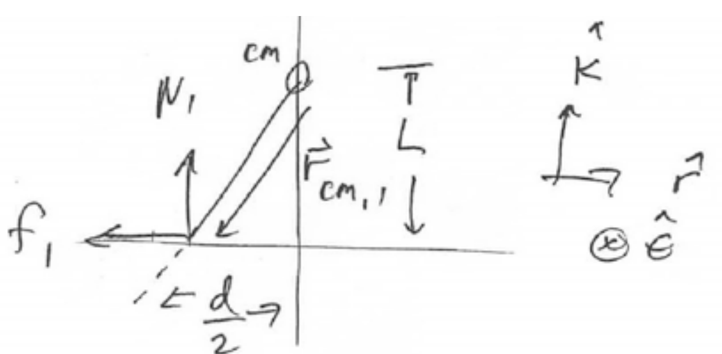
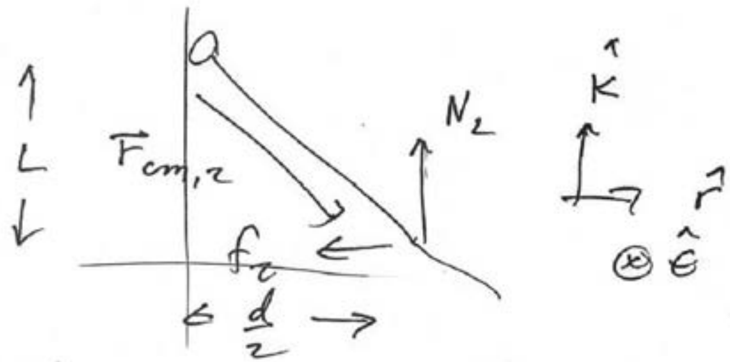


Diagramma per il calcolo dei momenti rispetto al CM (asse orientato come $\hat{\theta}$)





Piede 1

Piede 2

$$\vec{F}_{EXT} = m\,\vec{a}_{cm}$$

$\hat{r}$: $$-f_1 - f_2 = -m\frac{v^2}{R}$$

$\hat{k}$: $$N_1 + N_2 - mg = 0$$

$$\vec{\tau}_{cm} = I_{cm}\,\vec{\alpha}$$

$$\hat{k}\times\hat{r} = \hat{\theta}$$
$$\hat{r}\times\hat{k} = -\hat{\theta}$$

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_{cm,1} \times (\vec{f}_1 + \vec{N}_1)$$

$$\vec{r}_{cm,1} = -\frac{d}{2}\hat{r} - L\hat{k}$$
$$\vec{f}_1 = -f_1\,\hat{r} \qquad \vec{N}_1 = N_1\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_1 = -\frac{d}{2}\,\hat{r}\times\left[(-f_1)\hat{r}\right] - k\,\hat{k}\times\left[(-f_1)\hat{r}\right] - \frac{d}{2}\hat{r}\times(N_1\hat{k}) - L\hat{k}\times(N_1\hat{k})$$

$$= L\,f_1\,\hat{\theta} + \frac{d}{2}N_1\hat{\theta} = \left(Lf_1 + \frac{d}{2}N_1\right)\hat{\theta}$$

$$\vec{\tau}_2 = \left(L\,f_2 - \frac{d}{2}N_2\right)\hat{\theta}$$

$$\vec{r}_{cm,2} = \frac{d}{2}\hat{r} - L\hat{k}$$
$$\vec{f}_2 = -f_2\,\hat{r} \qquad \vec{N}_2 = N_2\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = 0$$

$$\frac{d}{2} N_1 + L f_1 - \frac{d}{2} N_2 + L f_2 = 0$$

$$\frac{d}{2} (N_1 - N_2) + L (f_1 + f_2) = 0$$

$$f_1 + f_2 = \frac{m v^2}{R}$$

$$\frac{d}{2} (N_1 - N_2) + \frac{m L v^2}{R} = 0$$

$$\begin{cases} N_2 - N_1 = 2 \dfrac{m L v^2}{d R} \\ N_2 + N_1 = m g \end{cases}$$

$$N_2 = \frac{1}{2} \left(m g + \frac{2 m L}{d R} v^2 \right)$$

$$N_1 = \frac{1}{2} \left(m g - \frac{2 m L}{d R} v^2 \right)$$

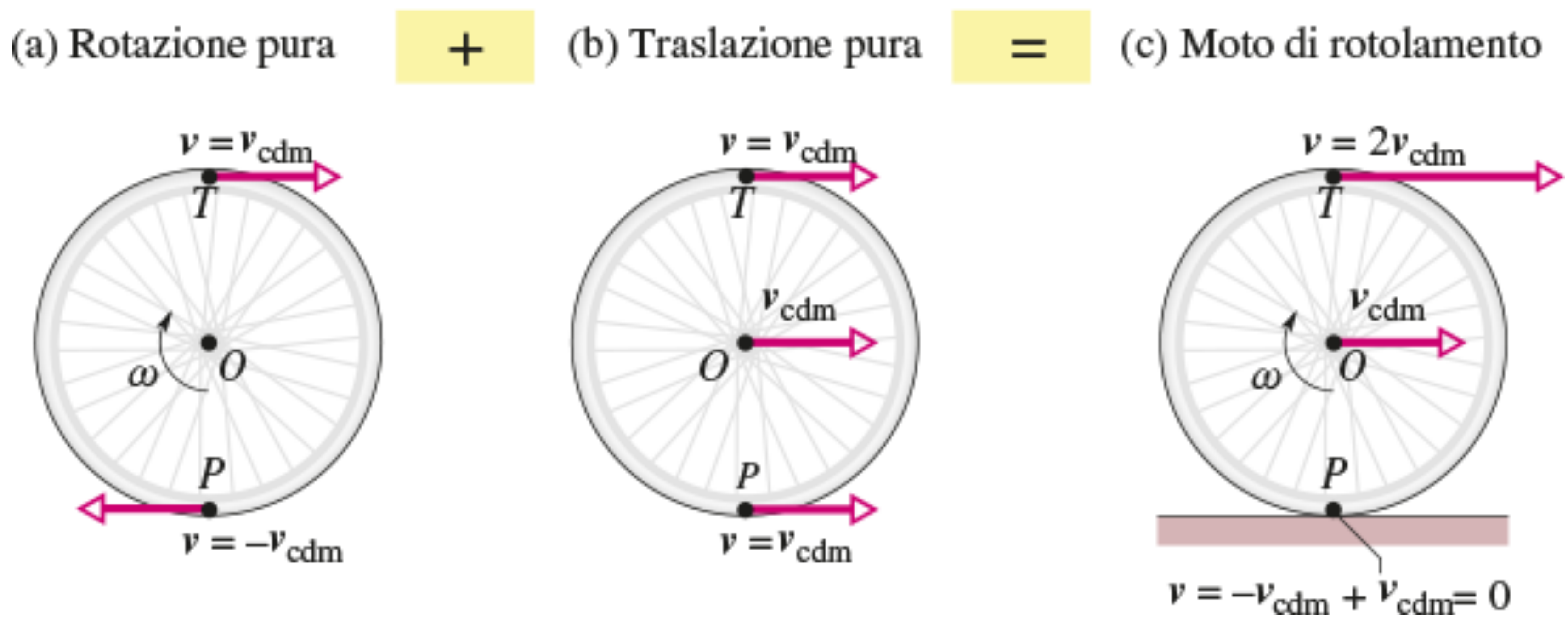
$$N_1 = 0 \Rightarrow m g = \frac{2 m L}{d R} v^2$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{d R g}{2 L}} \qquad d_{min} = 2 \frac{L v^2}{g R}$$

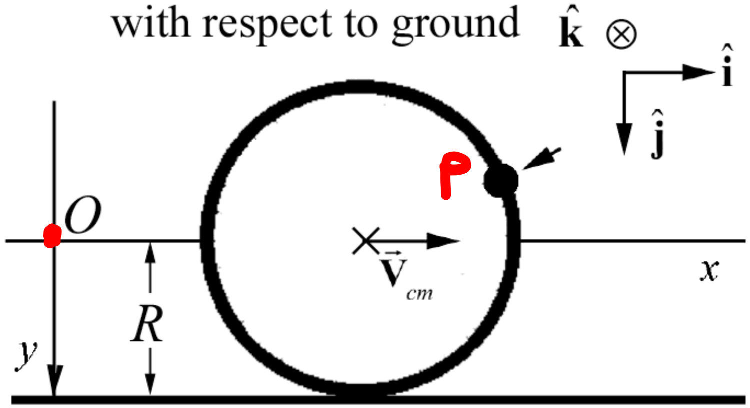
Rotolamento

Per un corpo rigido a simmetria cilindrica di raggio R in puro rotolamento rispetto a un piano, il punto di contatto ha velocità nulla. La relazione tra velocità del centro di massa (che si trova in corrispondenza dell'asse) e velocità angolare rispetto all'asse è:

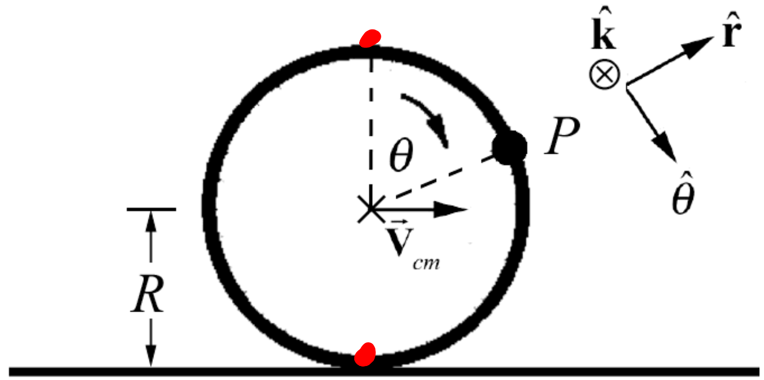
$$V_{CM} = R\omega_{CM}$$



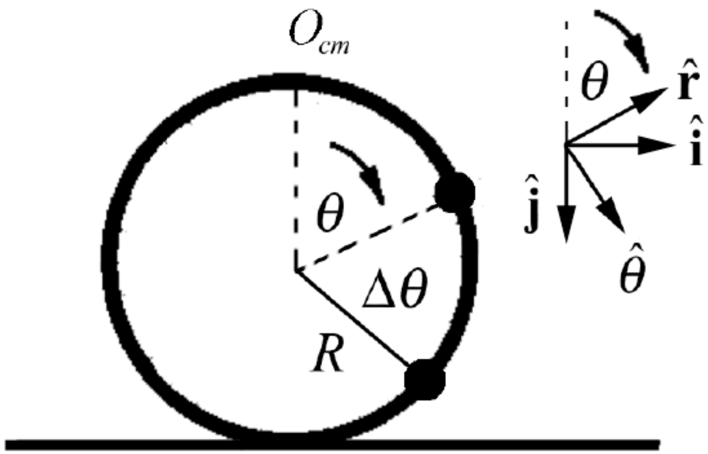
reference frame at rest with respect to ground



center of mass reference frame



center of mass reference frame



Relazione tra i versori:

$$\hat{r} = \sin\theta\,\hat{\imath} - \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}$$

ROTOLAMENTO

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P{}' + \vec{v}_{cm}$$

$$\vec{v}_{cm} = v_{cm}\,\hat{i}$$

$$\vec{R}_{cm}(t) = (x_{cm,0} + v_{cm}\,t)\,\hat{i}$$

$$\vec{v}_P{}' = R\,\omega_{cm}\,\hat{\theta}$$

$$\vec{v}_P{}' = R\,\omega_{cm}\,(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j})$$

$$\vec{v}_P = v_{cm}\,i + R\,\omega_{cm}\cos\theta\,i + R\,\omega_{cm}\sin\theta\,\hat{j} =$$

$$= (v_{cm} + R\,\omega_{cm}\cos\theta)\,\hat{i} + R\,c_m\sin\theta\,\hat{j}$$

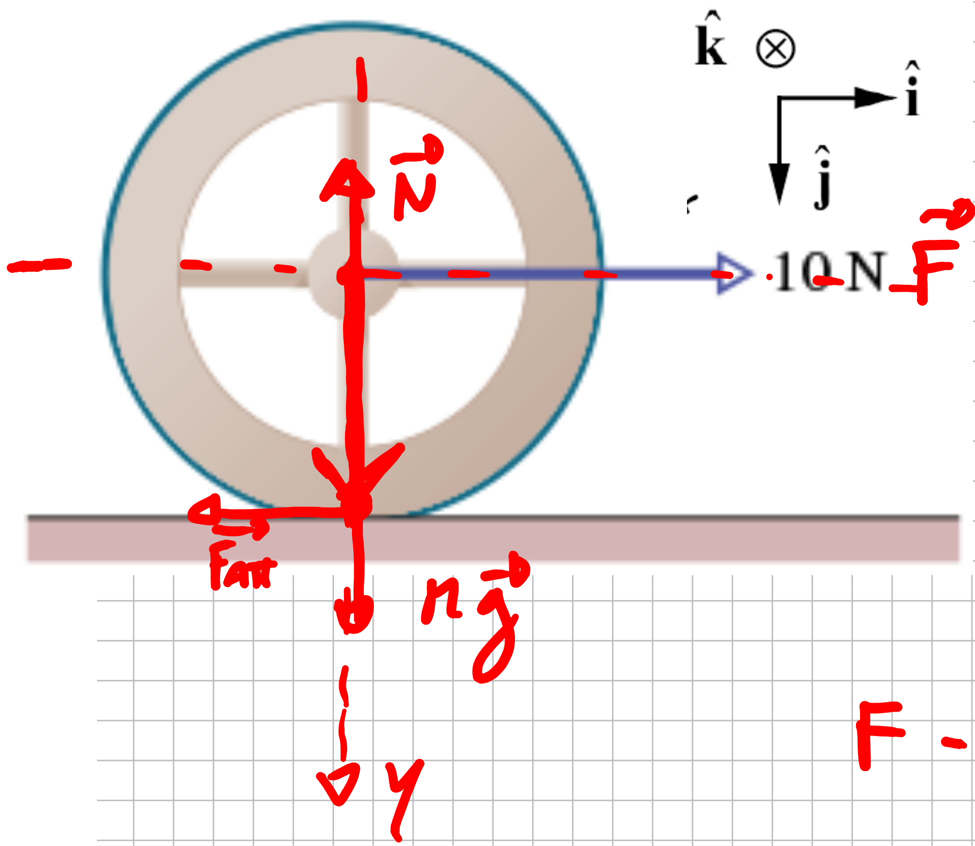
$$\vec{v}_P\,(\theta = \pi) = (v_{cm} - R\,\omega_{cm})\,\hat{i}$$

$$v_{cm} = R\,\omega_{cm}$$

$$\vec{v}_P\,(\theta = 0) = (v_{cm} + R\,\omega_{cm})\,i = 2\,v_{cm}$$

$$v_{cm} = R\,\omega_{cm} \qquad a_{cm} = R\,\alpha$$

Esempio 1: forza costante



$$\vec{F} \rightarrow x \qquad M\,\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{EXT}$$

$$\vec{F}_{EXT} = \vec{N} + M\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_{ATT}$$

$$F - F_{ATT} = M\,a_{cm}$$

$$I\,\vec{\alpha} = \vec{\tau}$$

$$\vec{R} = R\,\hat{j}$$

$$\vec{F}_{ATT} = -F_{ATT}\,\hat{i}$$

$$I\vec{\alpha} = \vec{\tau} = R\,F_{\alpha\tau\tau}\,\hat{k}$$

$$\alpha_z = \frac{R\,F_{\alpha\tau\tau}}{I} \qquad F_{\alpha\tau\tau} = \frac{I\alpha}{R}$$

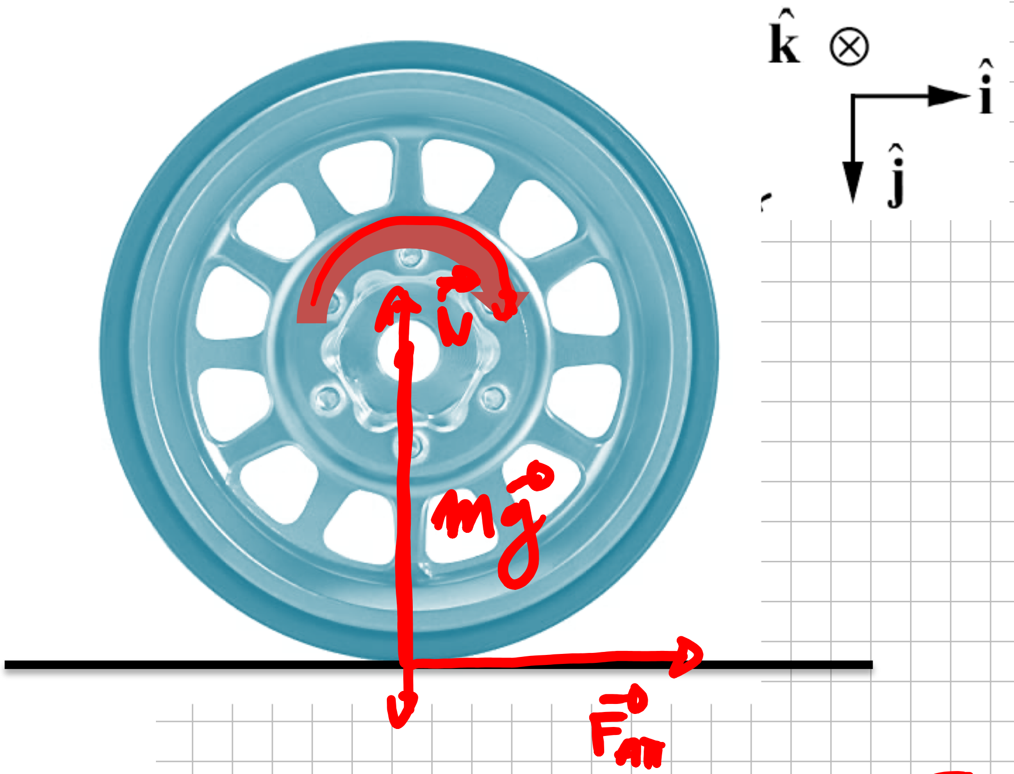
$$v_{cm} = \omega R \qquad a_{cm} = \alpha R$$

$$\alpha = \frac{a_{cm}}{R}$$

$$F - \frac{I}{R}\frac{a_{cm}}{R} = M a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{F}{M + \frac{I}{R^2}}$$

$$a_{cm} = \frac{R^2 F}{MR^2 + I}$$

Esempio 2: momento torcente costante



APPLICHIAMO UN MOMENTO TORCENTE τ

$$m\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{EXT} = \vec{F}_{ATT}$$

$$F_{ATT} = M a_{cm}$$

$$I\vec{\alpha} = \vec{\tau} \qquad \vec{\tau} = \vec{\tau}_{APPL} + \vec{\tau}_{ATT}$$

$$\vec{\tau}_{ATT} = R\hat{j} \times (F_{ATT}\hat{i}) = -R F_{ATT}\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_{TOT} = \vec{\tau}_{APP} + \vec{\tau}_{ATT} = \tau_{APP}\,\hat{k} - R F_{ATT}\,\hat{k}$$

$$I \alpha_z = \tau_{APP} - R F_{ATT}$$

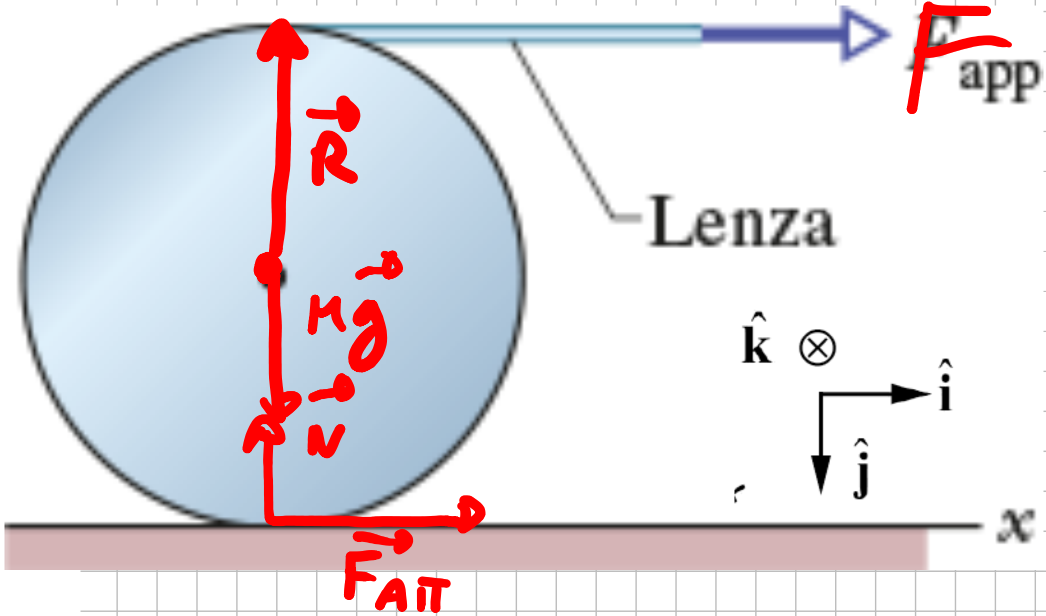
$$a = \alpha R \qquad \alpha = \frac{a}{R}$$

$$I \frac{a}{R} = \tau - R F_{ATT} = \tau - R M a$$

$$a \left(\frac{I}{R} + R M \right) = \tau$$

$$a = \frac{R \tau}{I + M R^2}$$

Esempio 3: altra forza costante



$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

$$F + F_{ATT} = M a$$

$$F R - F_{ATT} R = I \alpha$$

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

$$F R - F_{ATT} R = I \frac{a}{R}$$

$$F - F_{ATT} = \frac{I}{R^2} a$$

$$\begin{cases} F - F_{ATT} = \dfrac{I}{R^2}\, a \\[2em] F + F_{ATT} = M\, a \end{cases}$$

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{I}{R^2} + M\right) a \qquad\qquad a = \frac{2 F R^2}{I + M R^2}$$

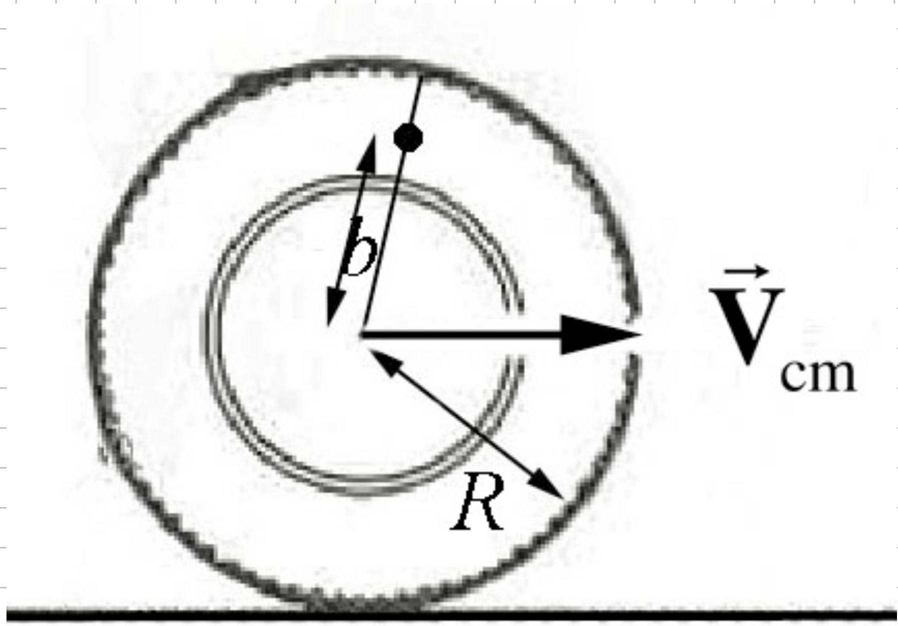
$$F_{ATT} = \frac{1}{2}\left(M - \frac{I}{R^2}\right) a = \frac{1}{2}\, \frac{M R^2 - I}{R^2} \; \frac{2 F R^2}{M R^2 + I}$$

$$F_{ATT} = \frac{1}{3} F$$

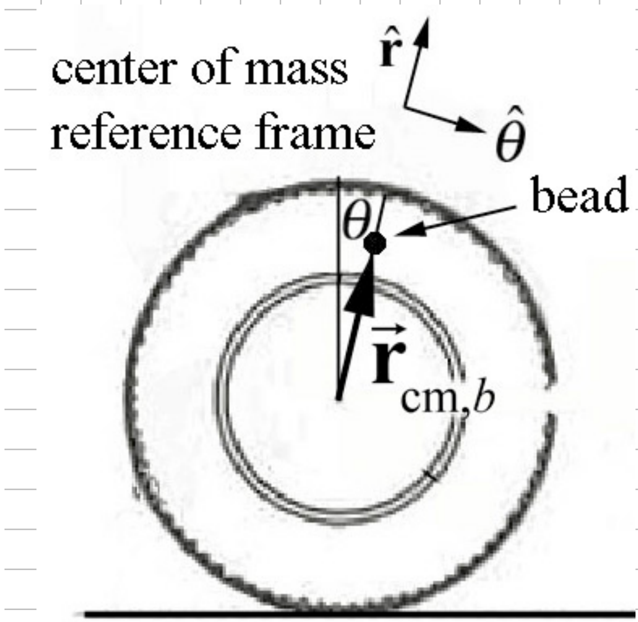
Esercizio

Consideriamo una ruota di bicicletta di raggio R che rotola in linea retta senza strisciare. La velocità del centro di massa, in un sistema di riferimento solidale con il suolo, è indicata con $\vec{V}_{CM}$. Una piccola massa (una perlina) è fissata a un raggio della ruota, a una distanza b dal centro della ruota. Determinare la posizione, la velocità e l'accelerazione della perlina in funzione del tempo:

- nel sistema di riferimento solidale con il centro di massa della ruota.
- nel sistema di riferimento solidale con il suolo.

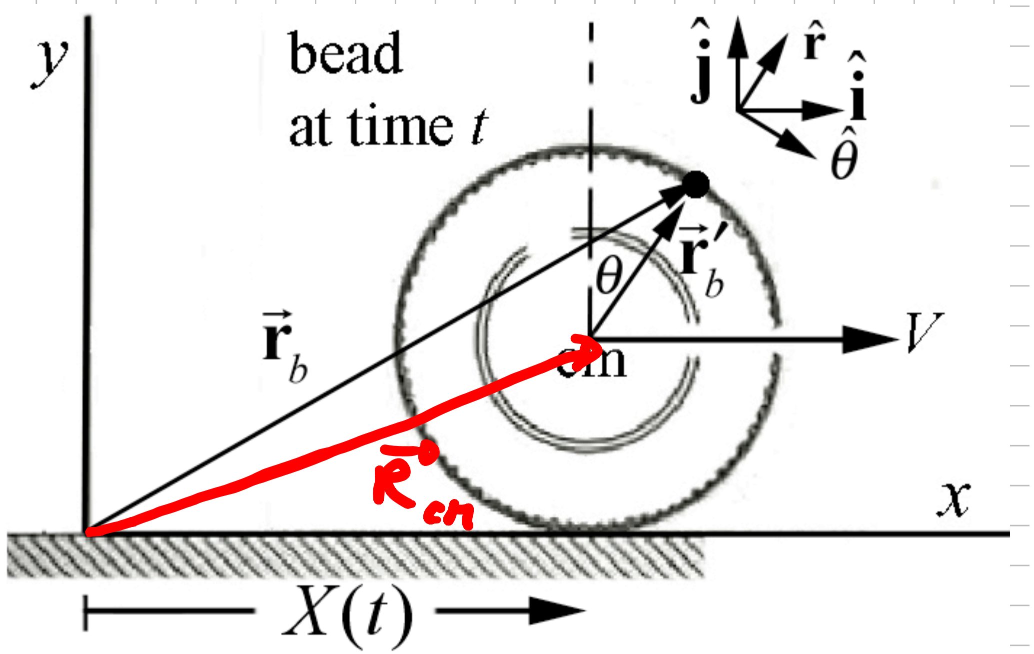


Sistema di riferimento del centro di massa



$\vec{r} = b\,\hat{r}$

Sistema di riferimento solidale con il suolo



Relazione tra i versori:

$$\hat{r} = \sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta\,\hat{\imath} - \sin\theta\,\hat{\jmath}$$

PERLINA

$$\omega_{cm} = \frac{d\theta}{dt} > 0$$

POSIZIONE $\vec{r}'(t) = b\,\hat{r}(t)$

VELOCITÀ $\vec{v}'(t) = b\,\omega_{cm}\,\hat{\theta}(t) = b\,\frac{V_{cm}}{R}\,\hat{\theta}$

ACCELERAZIONE $\vec{a}'(t) = -b\,\omega_{cm}^2\,\hat{r}(t) = -b\,\frac{V_{cm}^2}{R^2}\,\hat{r}$

$$V_{cm} = R\,\omega_{cm} \qquad \omega_{cm} = \frac{V_{cm}}{R}$$

$$\theta(t) = \omega_{cm}\,t = \frac{V_{cm}}{R}\,t$$

$$\vec{R}_{cm} = x_{cm}\,\hat{i} + R\,\hat{j} = V_{cm}t\,\hat{i} + R\,\hat{j}$$

$$\vec{V}_{cm} = V_{cm}\,\hat{i}$$

$$\vec{A}_{cm} = 0$$

$$\vec{r}_b(t) = x_b\,\hat{i} + y_b\,\hat{j}$$

$$\vec{v}_b(t) = v_{bx}\,\hat{i} + v_{by}\,\hat{j}$$

$$\vec{a}_b'(t) = a_{bx}\,\hat{i} + a_{by}\,\hat{j}$$

$$\vec{r}_b = \vec{R}_{cm} + \vec{r}_b'$$

$$\vec{r}_b' = b\,\hat{r} = b\sin\theta\,\hat{i} + b\cos\theta\,\hat{j}$$

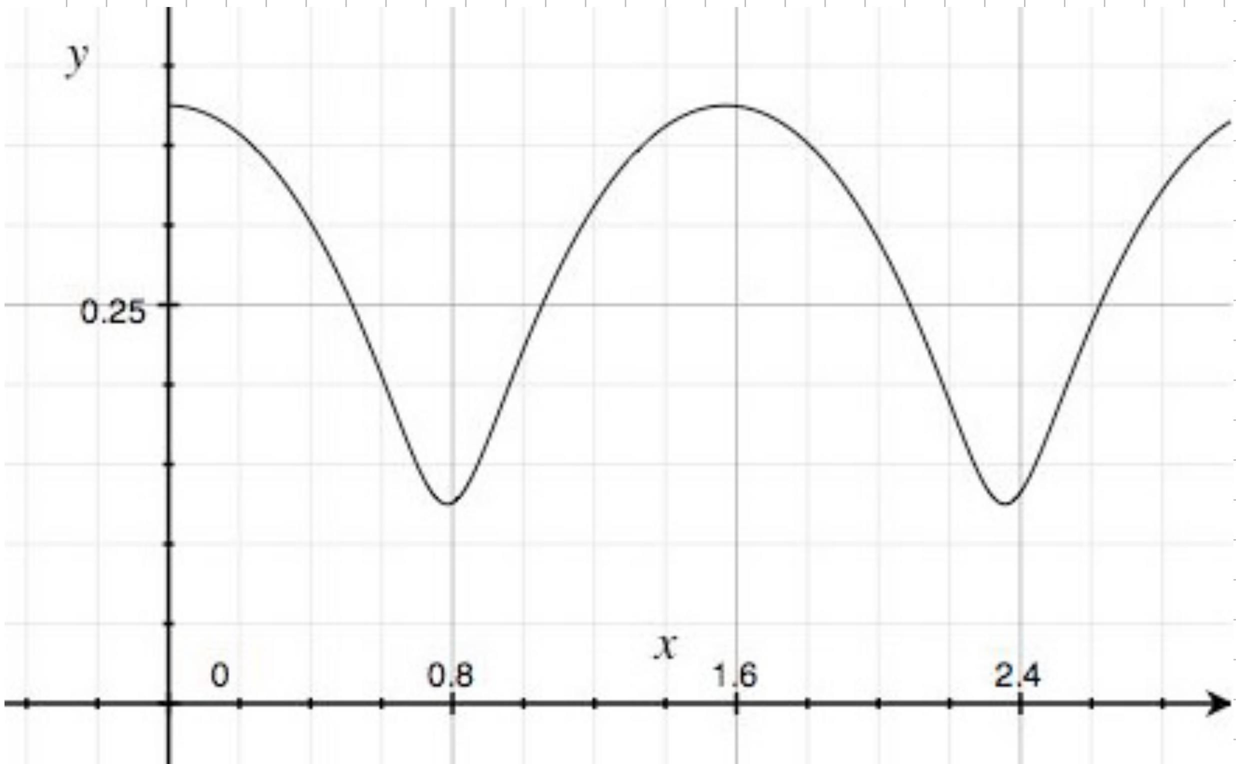
$$\vec{r}_b = V_{cm}t\,\hat{i} + R\,\hat{j} + b\sin\theta\,\hat{i} + b\cos\theta\,\hat{j}$$

$$\theta = \frac{V_{cm}}{R}t$$

$$\vec{r}_b(t) = \underbrace{\left[V_{cm}t + b\sin\left(\frac{V_{cm}t}{R}\right)\right]}_{x(t)}\hat{i} + \underbrace{\left[R + b\cos\left(\frac{V_{cm}t}{R}\right)\right]}_{y(t)}\hat{j}$$

$$\vec{v}_b(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}_b(t) \qquad \text{(I MODO)}$$

$$\vec{v}_b' = b\,\omega_{cm}\,\hat{\theta} \qquad \vec{v}_b = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_b'$$

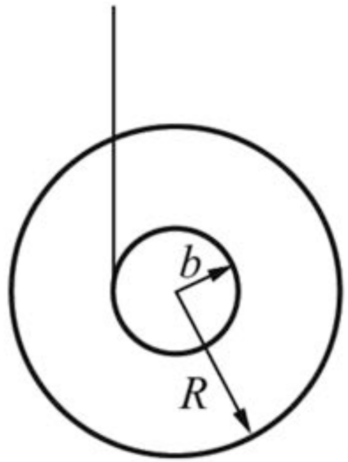


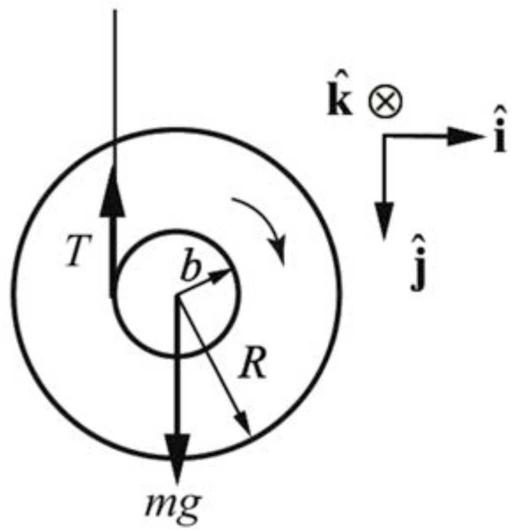
Plot of the y-component vs. the x-component of the position of the bead

Esercizio

Uno Yo-Yo di massa m ha un albero di raggio b e una bobina di raggio R. Il suo momento d'inerzia rispetto al centro di massa può essere considerato $I_{CM} = 1/2(mR^2)$ (si può trascurare lo spessore della corda). Lo Yo-Yo viene rilasciato da fermo. Si assuma che il centro di massa dello Yo-Yo scenda verticalmente e che la cordicella resti verticale mentre si svolge.

- Qual è la relazione tra l'accelerazione angolare rispetto al centro di massa e l'accelerazione lineare del centro di massa?
- Qual è la tensione nella cordicella mentre lo Yo-Yo scende?
- Qual è il valore del modulo dell'accelerazione angolare e quello dell'accelerazione lineare mentre lo Yo-Yo scende?
- Determinare il modulo della velocità angolare dello Yo-Yo quando una lunghezza l della cordicella si è svolta.





yo-yo

$$v_{cm,y} = b\,\omega_{cm}$$

$$a_{cm} = b\,\alpha_{cm}$$

$$\vec{r}_{cm,T} = -b\,\hat{i} \qquad \vec{T} = -T\,\hat{j}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{cm,T} \times \vec{T} = bT\,\hat{k}$$

$$\vec{F}_{EXT} = m\,\vec{a}_{cm}$$

① $mg - T = ma$

$$\vec{\tau} = I\,\vec{\alpha}$$

② $bT = I\,\alpha$

③ $a = b\,\alpha$

$$T = \frac{I}{b}\,\alpha \qquad mg - \frac{I}{b}\,\alpha = mb\alpha$$

$$\alpha\left[\frac{I}{b}+mb\right]=mg \qquad I=\frac{1}{2}mR^2$$

$$\alpha=\frac{mg}{\frac{I}{b}+mb}=\frac{2bg}{(R^2+2b^2)}$$

$$T=\frac{I}{b}\alpha=\frac{R^2}{R^2+2b^2}mg$$

$$a=b\alpha=\frac{g}{1+\frac{R^2}{2b^2}}<g$$

$y=\ell$ (POSIZIONE FINALE)

$U(0)=0$

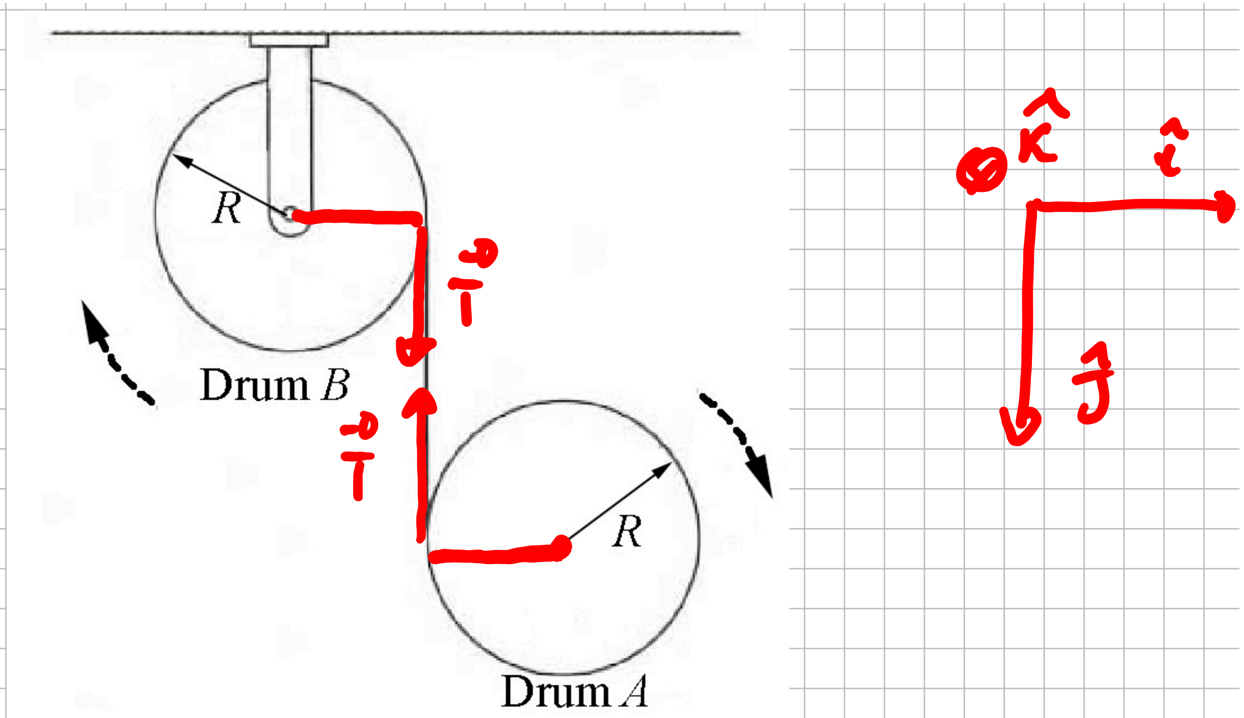
$E_i=0$

$$E_f=\frac{1}{2}mv_{CM}^2+\frac{I}{2}\omega^2-mg\ell=0$$

Esercizio

Il tamburo A, di massa m e raggio R, è sospeso a un tamburo B, anch'esso di massa m e raggio R, che è libero di ruotare attorno al suo asse. La sospensione è costituita da un nastro metallico privo di massa avvolto intorno all'esterno di ciascun tamburo, libero di srotolarsi. La gravità agisce verso il basso con accelerazione g. Entrambi i tamburi sono inizialmente fermi.

- Determinare la relazione tra l'accelerazione del tamburo A, assumendo che si muova in verticale verso il basso e le accelerazioni angolari di A e B.
- Determinare la tensione del nastro e la velocità di A in funzione del tempo.



TAMBURI

Δt

Δy SPOSTAMENTO DEL C.M. DI A in Δt

$\Delta l_A = R\Delta\theta_A$ NASTRO SVOLTO DA A

$\Delta l_B = R\Delta\theta_B$ " " " " " " " B

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(R\frac{\Delta\theta_A}{\Delta t} + R\frac{\Delta\theta_B}{\Delta t} \right) =$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = R\frac{d\theta_A}{dt} + R\frac{d\theta_B}{dt} = R\omega_A + R\omega_B$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = R\alpha_a + R\alpha_B$$

DINAMICA (PER IL TAMBURO A)

I CARDINALE

$$mg - T = ma$$

II CARDINALE

$$I\alpha_A = TR$$

PER IL TAMBURO B (II CARDINALE)

$$I \alpha_B = TR$$

$$\alpha = \alpha_A = \alpha_B = \frac{TR}{I}$$

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ \alpha = \frac{TR}{I} \\ a = 2R\alpha \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{a}{2R}$$

$$\frac{a}{2R} = \frac{TR}{I}$$

$$T = \frac{I}{2R^2} a$$

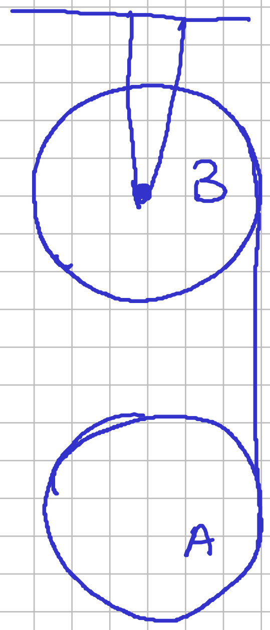
$$mg - \frac{I}{2R^2} a = ma$$

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

$$a = \frac{4}{5} g$$

$$T = \frac{mg}{5}$$

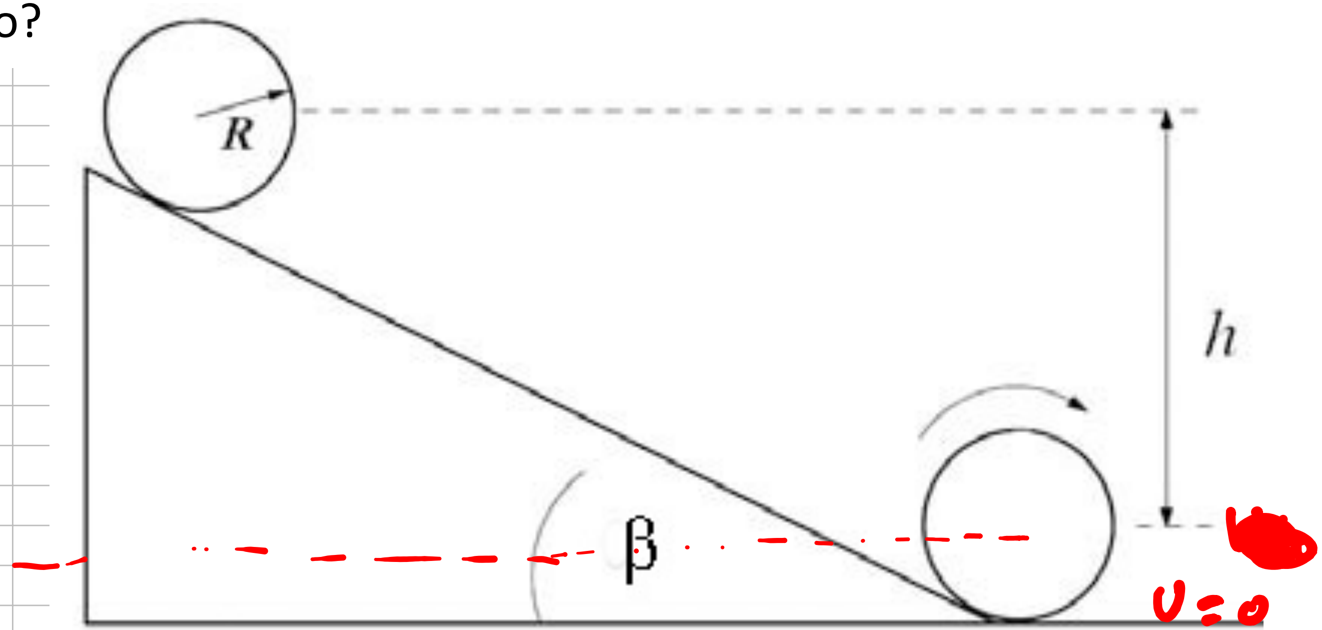
$$v_{CM}(t) = \frac{4}{5} g t$$


B
A

Esercizio

Un cilindro uniforme di raggio R e massa M, con momento d'inerzia rispetto al centro di massa dato da $I_{CM} = 1/2(MR^2)$ parte da fermo e rotola senza slittamento lungo un piano inclinato, con angolo β rispetto all'orizzontale. Il centro di massa del cilindro ha percorso una distanza verticale h quando raggiunge il fondo del piano inclinato. Indichiamo con g la costante di gravità. Il coefficiente di attrito statico tra il cilindro e la superficie è μ_s.

- Qual è la relazione tra la componente dell'accelerazione del centro di massa nella direzione lungo il piano inclinato e la componente dell'accelerazione angolare nel piano della figura?
- Qual è il modulo della velocità del centro di massa del cilindro quando raggiunge il fondo del piano inclinato?



$U_f = 0$ $\qquad$ $U_i = Mgh$

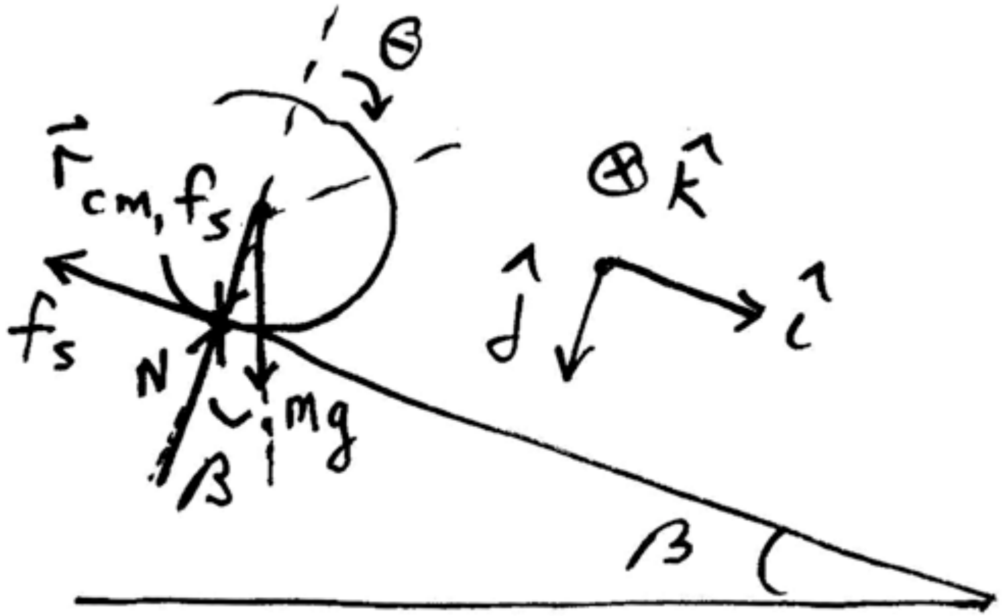
$K_i = 0$ $\qquad$ $K_f = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{I}{2} \omega^2$

$$\frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{I}{2} \omega^2 = Mgh$$

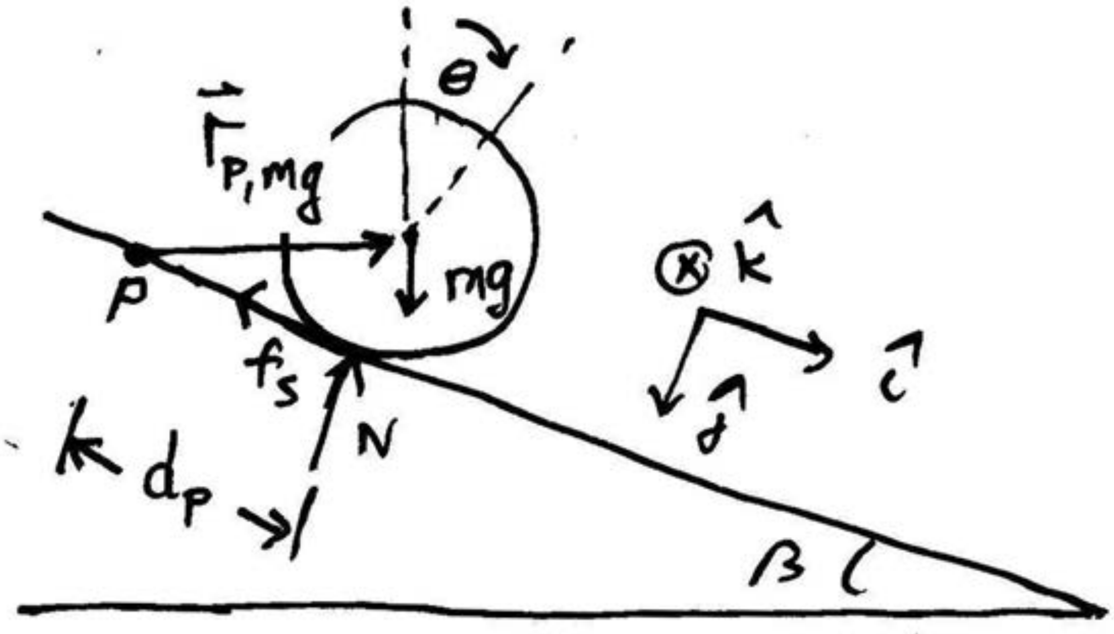
$R\omega = v_{cm}$ $\qquad$ $\omega^2 = \frac{v_{cm}^2}{R^2}$ $\qquad$ $I = \frac{1}{2} M R^2$

$$\frac{3}{4} M v_{cm}^2 = Mgh$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3} g h}$$



Sistema di coordinate e diagramma delle forze per il calcolo del momento torcente rispetto al CM



Sistema di coordinate e diagramma delle forze per il calcolo del momento torcente rispetto al punto fisso P.