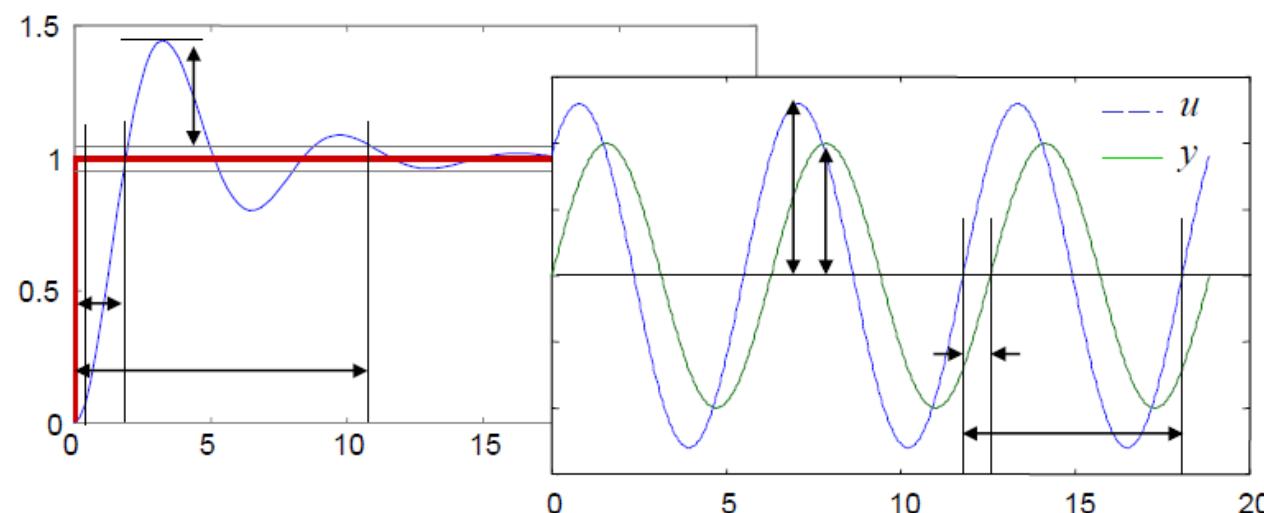
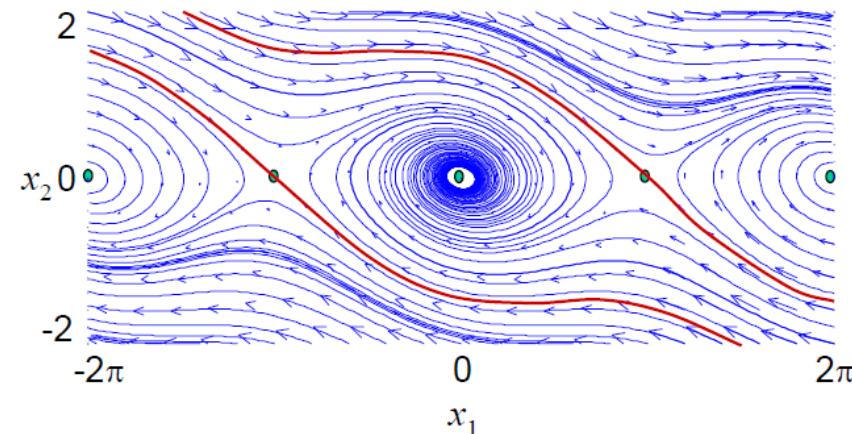




MODELLISTICA E SISTEMI

- Definizioni
- Classificazione
- Esempi
- Tipologie di Controllo





Riferimenti

- Capitolo 2 Testo di Bolzern
- Capitoli 2 e 5 testo di Murray
(download)
- Appunti prof. Canale
(POLITO)



Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.

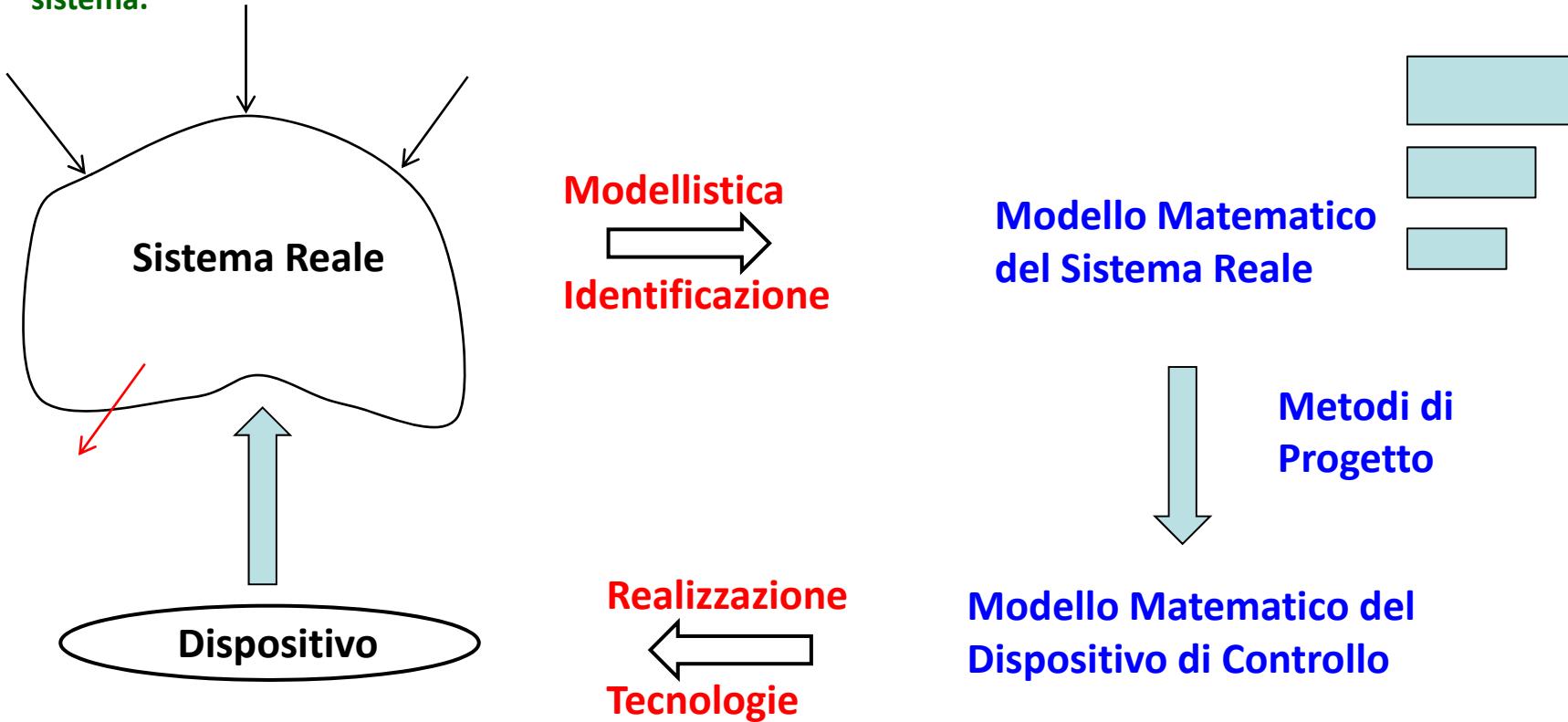
Con. Avanzati

Con. Standard



Definizioni

- L'area tecnologica dell'automazione riguarda una grande varietà di processi e di applicazioni.
- Il corso descrive alcune metodologie e procedure applicabili in generale e non vincolati al particolare sistema.

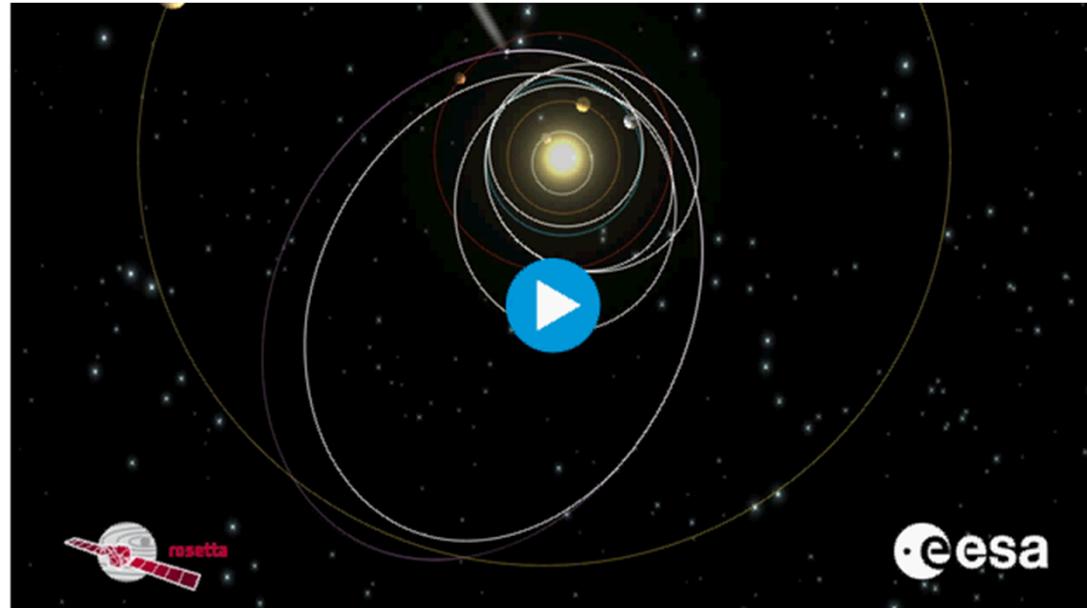
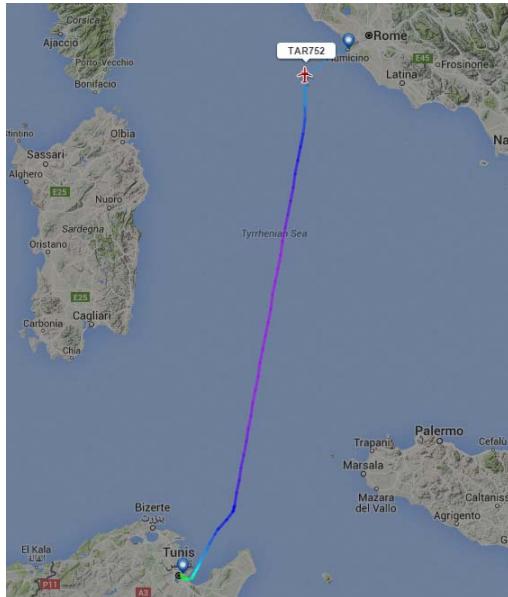


- L'elemento base della catena è quindi il sistema che deve essere descritto matematicamente e di cui devono esserne studiate ed analizzate le proprietà: (Sistema, Impianto, Processo) = (System, Plant, Process)

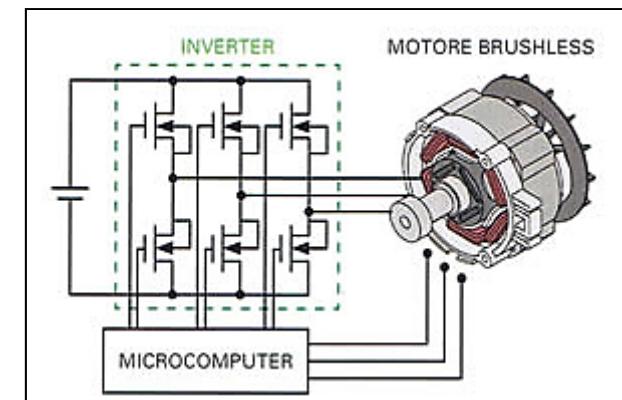
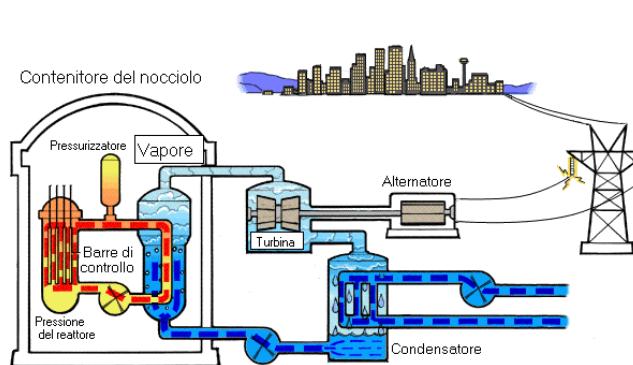


Definizioni

- Un sistema può essere un singolo set di elementi di interesse per il controllo



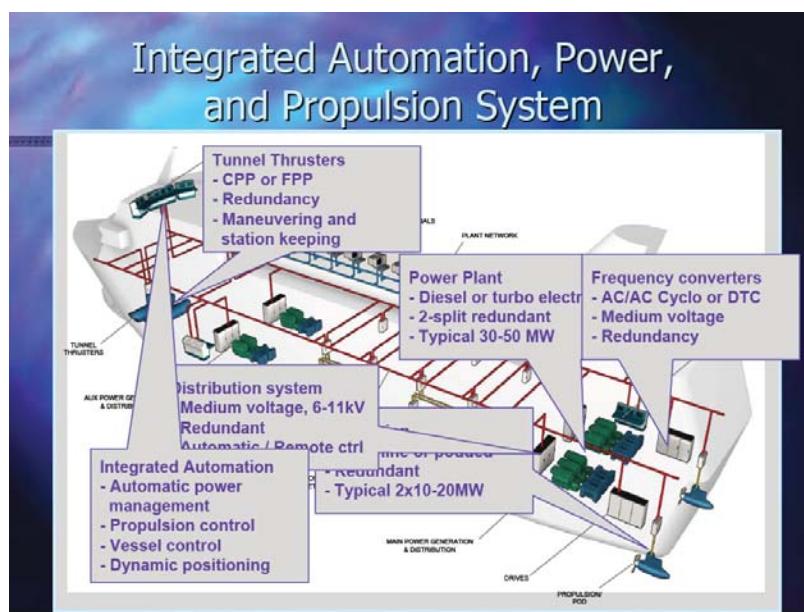
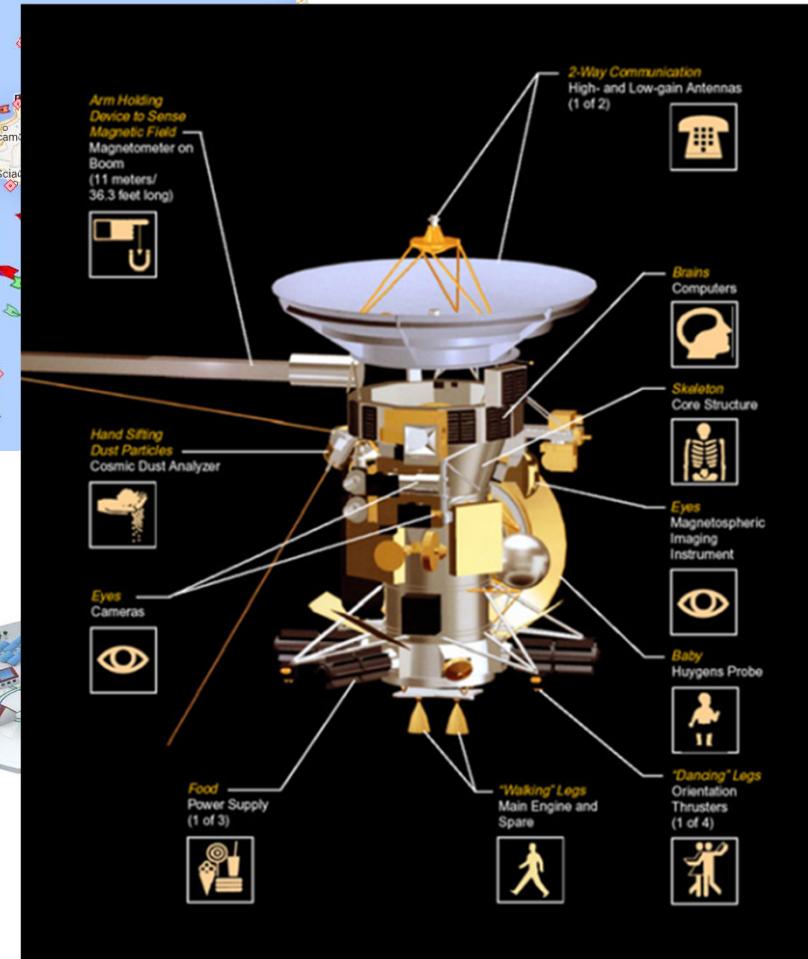
Cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko





Definizioni

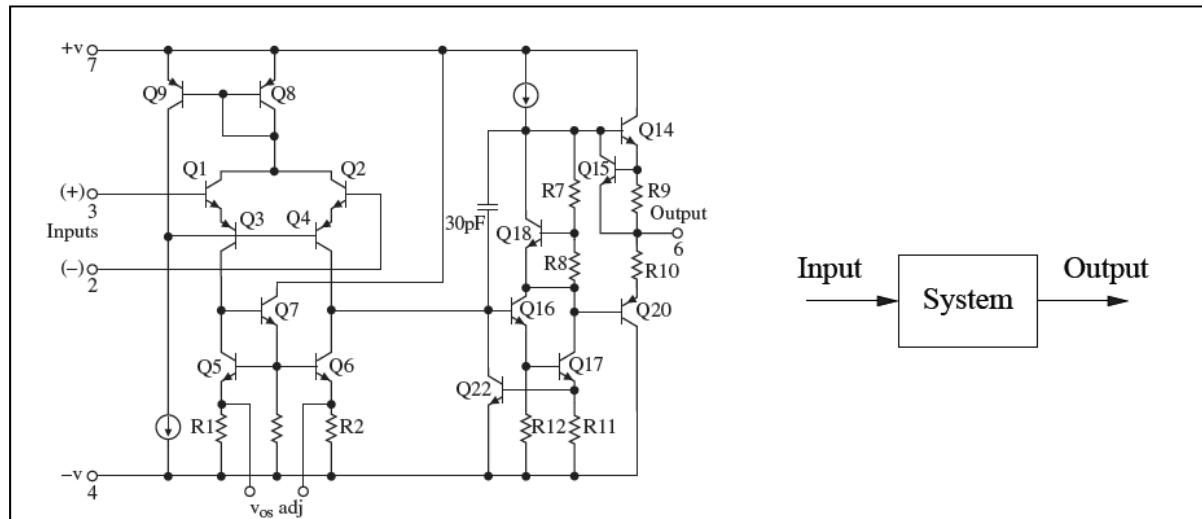
- Oppure un insieme di sottosistemi anch'esso soggetto al controllo





Definizioni

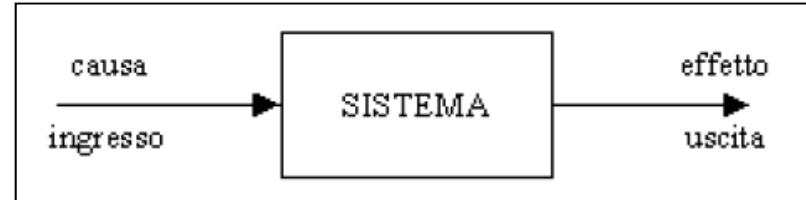
- **Definizione:** si definisce sistema (impianto, processo) un insieme di oggetti e/o eventi interconnessi legati tra loro mediante una relazione causa-effetto basata su leggi scientifiche, economiche, sociali, ecc.
- **Proprietà:** le proprietà di un sistema dipendono dalle caratteristiche **interne** al sistema stesso e non da elementi esterni (**stato del sistema**)
- **Evoluzione:** l'evoluzione di un sistema ne descrive il proprio comportamento dinamico e gli elementi necessari a descrivere tale evoluzione si dicono **variabili di stato del sistema**.



Amplificatore
Analogico



Definizioni



□ **Variabili di Ingresso** (segnali, funzioni, cause): agiscono sul sistema fisico dall'esterno influenzandone il comportamento. Si dividono in due gruppi:

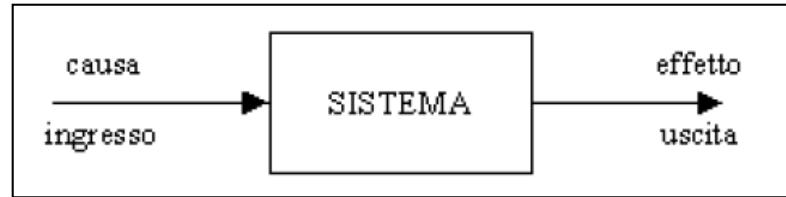
- Disturbi e/o variabili non manipolabili imposte dall'esterno e non controllabili (ingressi esogeni)
- Controlli o variabili manipolabili, il cui andamento può essere imposto dal progettista (ingressi endogeni)

□ **Variabili di Uscita** (segnali, funzioni, effetti): costituiscono l'effetto sul sistema fisico e descrivono la sua evoluzione. Si dividono in due gruppi:

- Variabili da regolare e controllare
- Misure necessarie alla descrizione del sistema ed al controllore

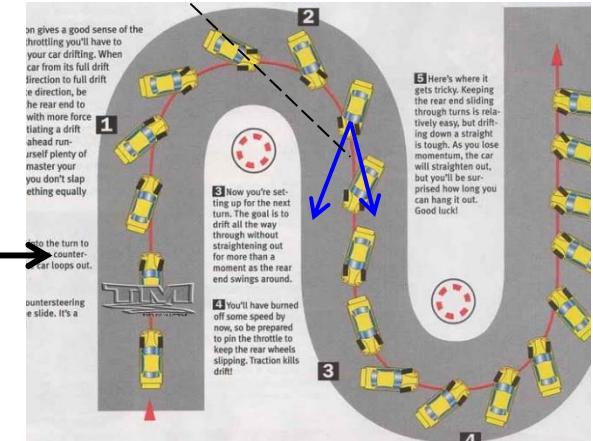
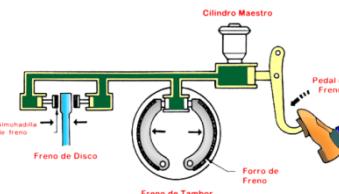
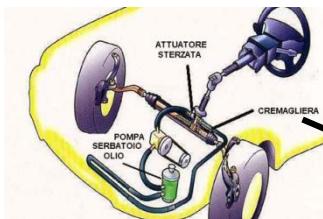


Definizioni



□ La conoscenza delle variabili di ingresso in un certo istante non è in generale sufficiente a determinare il valore delle variabili di uscita allo stesso istante.

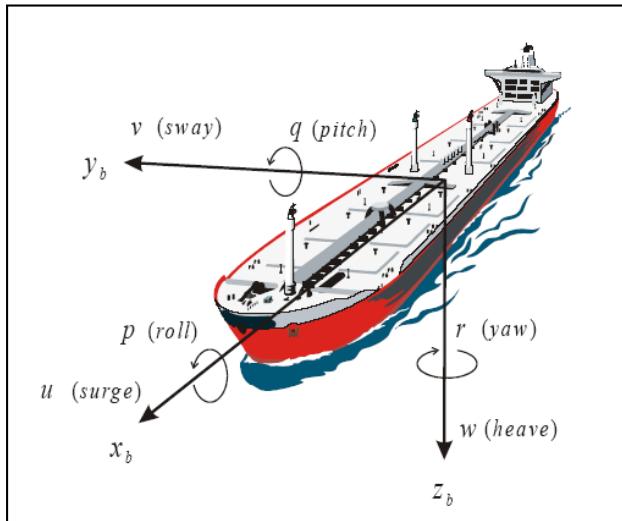
□ Esempio: Dato un angolo di sterzo, un valore di freno ed di acceleratore ad un istante t generico, è possibile ricavare il valore dell'angolo di derapata β allo stesso istante?





Definizioni

□ **Variabili di Stato:** descrivono l'evoluzione interna del sistema fisico permettendo di calcolarne le variabili di uscita, una volta note le condizioni iniziali e gli ingressi a partire dal tempo corrente. Costituiscono il **set necessario** per la descrizione matematica dell'andamento del processo.



□ Input (Esempio):

- Ingressi Esogeni: vento, corrente,...
- Ingressi Endogeni: propulsione, timone di direzione,...

□ Output (Esempio):

- Variabili da Controllare: Angolo di Rollio, Velocità nella direzione del moto,...
- Misure: Velocità angolare di rollio, Angolo di Rollio, Componente di velocità nella direzione del moto,...

□ Variabili di Stato (Esempio, veicolo rigido):

- Posizione del centro di massa (3 componenti: x , y , z)
- Velocità del centro di massa (3 componenti: u , v , w)
- Rotazione intorno al centro di massa (3 componenti: Φ , Θ , Ψ)
- Velocità angolare rispetto al centro di massa (3 componenti: p , q , r)



Definizioni



□ Rappresentazione matematica generica del modello di un sistema fisico

- **Rappresentazione ingresso – uscita (esterna):** L'uscita del sistema viene determinata senza la necessità di utilizzare o anche solo di definire le variabili di stato (**solo per sistemi lineari**)

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_{t_0}^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau \Leftrightarrow Y(s) = G(s)U(s)$$

- **Rappresentazione ingresso – stato - uscita (interna):** Le variabili di stato sono espresse esplicitamente nelle equazioni che legano ingresso ed uscita

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f[x(t), u(t), t] \\ y(t) &= g[x(t), u(t), t]\end{aligned}$$

Nota: Le funzioni di cui sopra possono essere date da segnali vettoriali

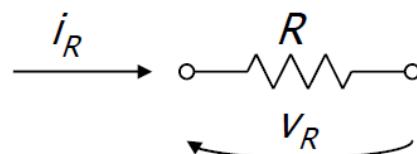
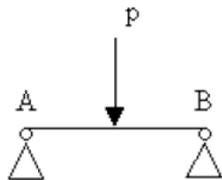


Classificazione



- I sistemi possono essere classificati in base alla descrizione fisica, alla rappresentazione matematica, ecc.
- **Definizione – Sistema Statico:** un sistema statico è un sistema a riposo oppure in moto uniforme (se meccanico, tutte le accelerazioni sono nulle). Le equazioni costitutive sono algebriche e non differenziali.

$$R_A = R_B = p/2$$

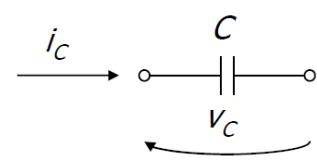


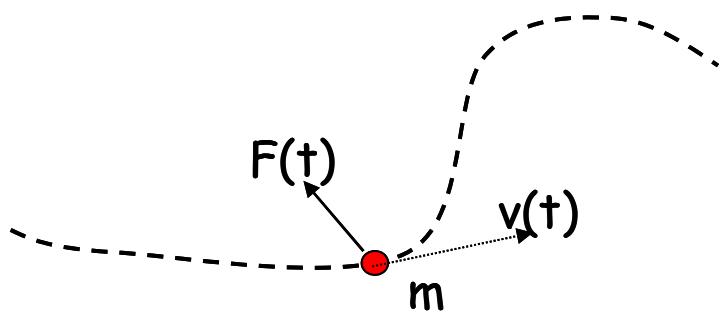
$$\begin{aligned} u(t) &= i_R(t) \\ y(t) &= v_R(t) = R i_R(t) = g(u(t)), \forall t \end{aligned}$$



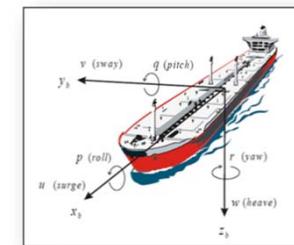
Classificazione

- **Definizione – Sistema dinamico:** un sistema dinamico è caratterizzato da una relazione causa-effetto tempo variante rappresentabile mediante un'equazione differenziale


$$u(t) = i_C(t) = C dv_C(t)/dt$$
$$y(t) = v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\sigma) d\sigma =$$
$$= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t u(\sigma) d\sigma = g(u([-\infty, t])), \forall t$$



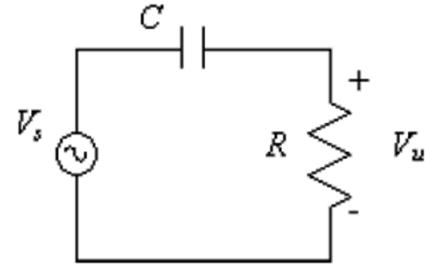
$$m(t) \frac{dv(t)}{dt} + \frac{dm(t)}{dt} v(t) = F(t)$$



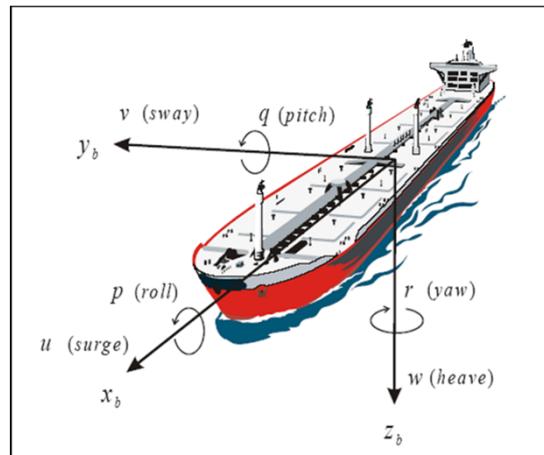


Classificazione

- **Definizione – Sistema Monovariabile (SISO):** un sistema per cui vi è un solo ingresso ed una sola uscita.



- **Definizione – Sistema Multivariabile (MIMO):** un sistema in cui la dinamica causa-effetto lega m ingressi con p uscite.





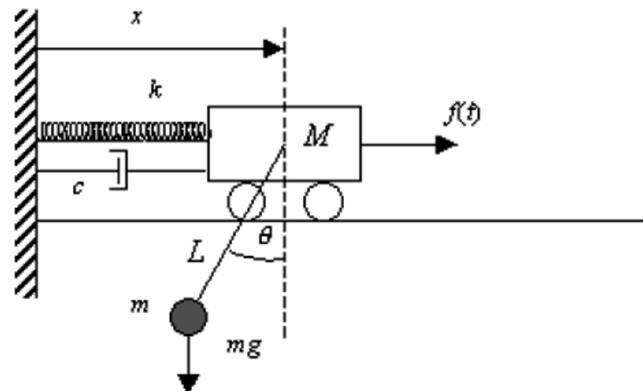
Classificazione



- **Definizione – Sistema Lineare:** un sistema la cui dinamica causa-effetto è descritta da equazioni differenziali (algebriche) per cui vale il principio di sovrapposizione degli effetti.

- **Definizione – Sistema Non Lineare:** un sistema per cui non valgono le ipotesi di linearità.

Modello carro-ponte



Sistema non lineare

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} - mL\ddot{\theta} + c\dot{x} + (k_1x + k_2x^3) = f(t) \\ mL^2\ddot{\theta} - mL\ddot{x} + mgL \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

Sistema lineare

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} - mL\ddot{\theta} + c\dot{x} + kx = f(t) \\ mL^2\ddot{\theta} - mL\ddot{x} + mLg\theta = 0 \end{cases}$$



Classificazione



- **Definizione – Sistema Tempo invariante o Stazionario:** un sistema i cui parametri non variano nel tempo.

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} - mL\ddot{\theta} + c\dot{x} + kx = f(t) \\ mL^2\ddot{\theta} - mL\ddot{x} + mLg\theta = 0 \end{cases}$$

- **Definizione – Sistema Tempo variante o non Stazionario:** un sistema i cui parametri variano nel tempo.

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} - mL(t)\ddot{\theta} + c\dot{x} + k(t)x = f(t) \\ mL(t)^2\ddot{\theta} - mL(t)\ddot{x} + mL(t)g\theta = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{dL(t)}{dt} = \neq 0 \\ \frac{dk(t)}{dt} = \neq 0 \end{cases}$$

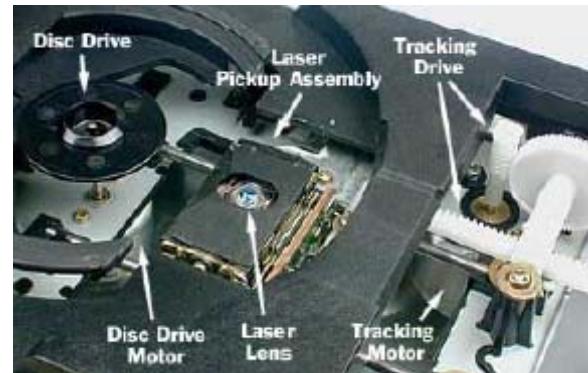


Classificazione



- **Definizione – Funzionalità temporale:** un sistema si dice continuo se la variabile temporale appartiene ai reali, discreto se appartiene agli interi.

- **Definizione – Sistema ad Eventi Discreti:** un sistema in cui lo spazio di stato è discreto e non necessariamente numerico. Il comportamento dinamico è guidato da eventi discreti che possono cambiare istantaneamente lo stato del sistema stesso



Example: Traffic light logic





Classificazione

- **Definizione – Sistema strettamente proprio:** un sistema le cui variabili di uscita non dipendono da quelle di ingresso se non attraverso le variabili di stato.
- **Definizione – Sistema proprio:** sistema in cui le variabili (almeno una) di uscita dipendono direttamente da quelle di ingresso. Un sistema statico è un sistema proprio in quanto non è necessaria la presenza del vettore di stato.
- **I sistemi fisici basati sul principio di causa-effetto sono tutti propri o strettamente propri in quanto, altrimenti, richiederebbero informazioni sullo stato del sistema a tempi antecedenti la causa (anche detti SISTEMI CAUSALI).**
- **Definizione – Sistema Deterministico:** un sistema in cui nessuna variabile del sistema (ingresso, stato, uscita) ha natura aleatoria.
- **Definizione – Sistema Stocastico:** sistema per cui non è possibile usare la definizione di sistema deterministico.



$$\frac{d^n y}{dt^n} + \dots = \frac{d^m u}{dt^m} + \dots$$

$n > m$



$$\frac{d^n y}{dt^n} + \dots = \frac{d^m u}{dt^m} + \dots$$

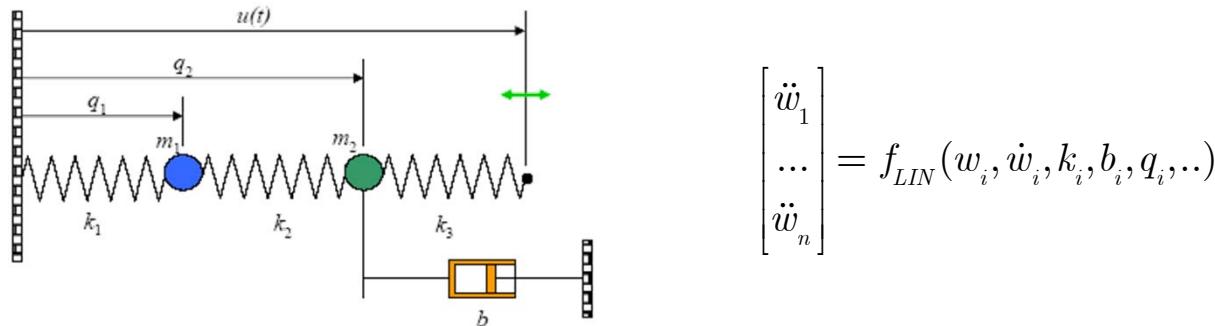
$n = m$



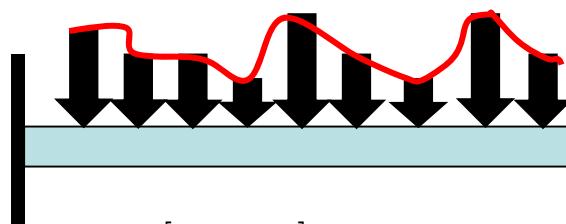


Classificazione

- **Definizione – Sistema a parametri concentrati (dim. finita):** un sistema che può essere descritto da un numero finito di variabili interne (vettore di stato). Le equazioni costitutive sono differenziali ordinarie.



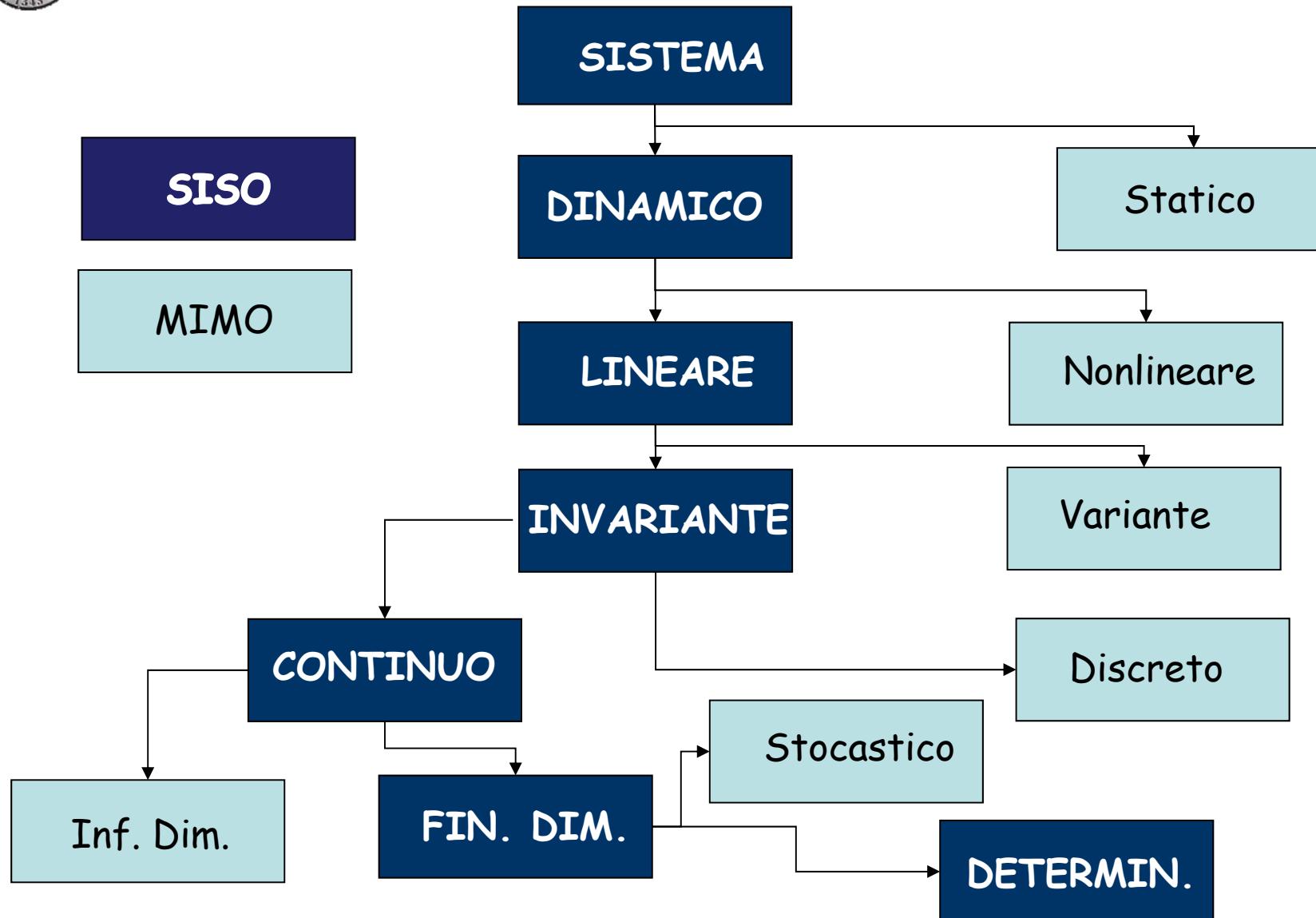
- **Definizione – Sistema a parametri distribuiti (dim. Infinita):** sistema in cui lo stato è una funzione continua di più variabili (oltre alla variabile tempo. Le equazioni costitutive sono differenziali alle derivate parziali..



$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x)$$



Classificazione



Equazioni Differenziali Lineari a Coefficienti Costanti



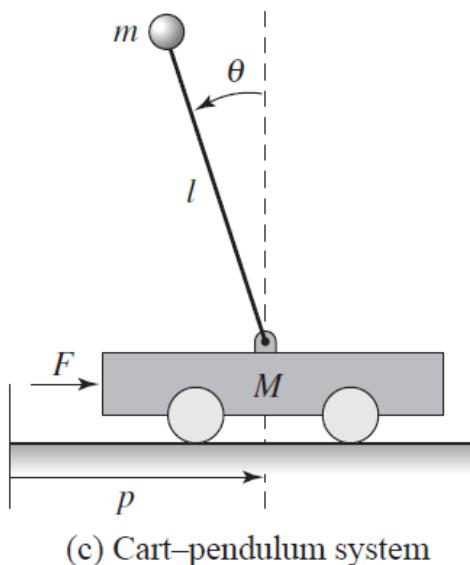
Esempio 1

□ Modello di Pendolo Invertito

Consideriamo il caso in cui sia di interesse anche la posizione della Cerniera.



(a) Segway



(c) Cart-pendulum system

- Equilibrio dinamico alla Cerniera.
Traslazione verticale soddisfatta dal vincolo. Traslazione orizzontale e rotazione rispetto alla cerniera dalla seconda legge di Newton.
- Il comportamento dinamico del sistema è univocamente determinato dall'andamento temporale di 4 variabili (variabili di stato):

$$p(t), \dot{p}(t), \theta(t), \dot{\theta}(t)$$

$$\begin{bmatrix} (M+m) & -ml \cos \theta \\ -ml \cos \theta & (J+ml^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\dot{p} + ml \sin \theta \dot{\theta}^2 \\ \gamma \dot{\theta} - mgl \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$



Esempio 1



□ Modello di Pendolo Invertito (WIKI)

Inverted pendulum on a cart [edit]

An inverted pendulum on a cart consists of having a horizontally moving base as shown in the image to the right. The cart is restricted to linear motion and is subject to forces resulting in or hindering motion. The equations of motion can be derived using Lagrange's equations. We refer to the drawing to the right where $\theta(t)$ is the angle of the pendulum of length l with respect to the vertical direction and the acting forces are gravity and an external force F in the x -direction. Define $x(t)$ to be the position of the cart. The Lagrangian $L = T - V$ of the system is:

$$L = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 - mgl\cos\theta$$

where v_1 is the velocity of the cart and v_2 is the velocity of the point mass m . v_1 and v_2 can be expressed in terms of x and θ by writing the velocity as the first derivative of the position:

$$v_1^2 = \dot{x}^2$$

$$v_2^2 = \left(\frac{d}{dt}(x - l\sin\theta)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}(l\cos\theta)\right)^2$$

Simplifying the expression for v_2 leads to:

$$v_2^2 = \dot{x}^2 - 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \ell^2\dot{\theta}^2$$

The Lagrangian is now given by:

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - m\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$$

and the equations of motion are:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F$$

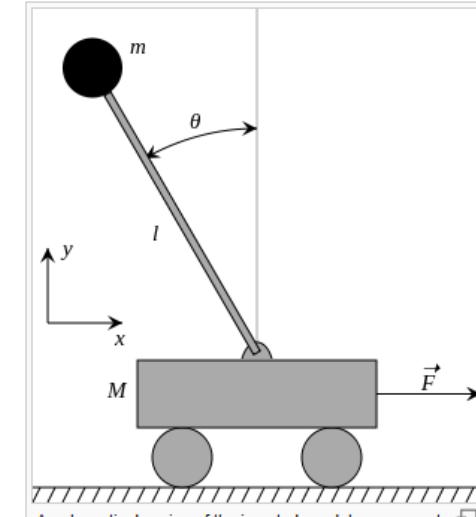
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

substituting L in these equations and simplifying leads to the equations that describe the motion of the inverted pendulum:

$$(M+m)\ddot{x} - m\ell\ddot{\theta}\cos\theta + m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta = F$$

$$\ell\ddot{\theta} - g\sin\theta = \ddot{x}\cos\theta$$

These equations are nonlinear, but since the goal of a control system would be to keep the pendulum upright the equations can be linearized around $\theta \approx 0$.



A schematic drawing of the inverted pendulum on a cart. The rod is considered massless. The mass of the cart and the point mass at the end of the rod are denoted by M and m . The rod has a length l .



Esempio 1



$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ \theta \\ \dot{p} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\theta} \\ -mls_{\theta}\dot{\theta}^2 + mg(ml^2/J_t)s_{\theta}c_{\theta} - c\dot{p} - \gamma lm c_{\theta}\dot{\theta} + u \\ M_t - m(ml^2/J_t)c_{\theta}^2 \\ -ml^2s_{\theta}c_{\theta}\dot{\theta}^2 + M_t g l s_{\theta} - cl c_{\theta}\dot{p} - \gamma(M_t/m)\dot{\theta} + lc_{\theta}u \\ J_t(M_t/m) - m(lc_{\theta})^2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} p \\ \theta \\ \dot{p} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} p \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{cases} M_t = M + m \\ J_t = J + ml^2 \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} p \\ \theta \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} x_e = 0 \\ u_e = 0 \\ \mu = M_t J_t - m^2 l^2 \end{cases}$$

□ Condizione di Equilibrio intorno alla quale eseguire la linearizzazione

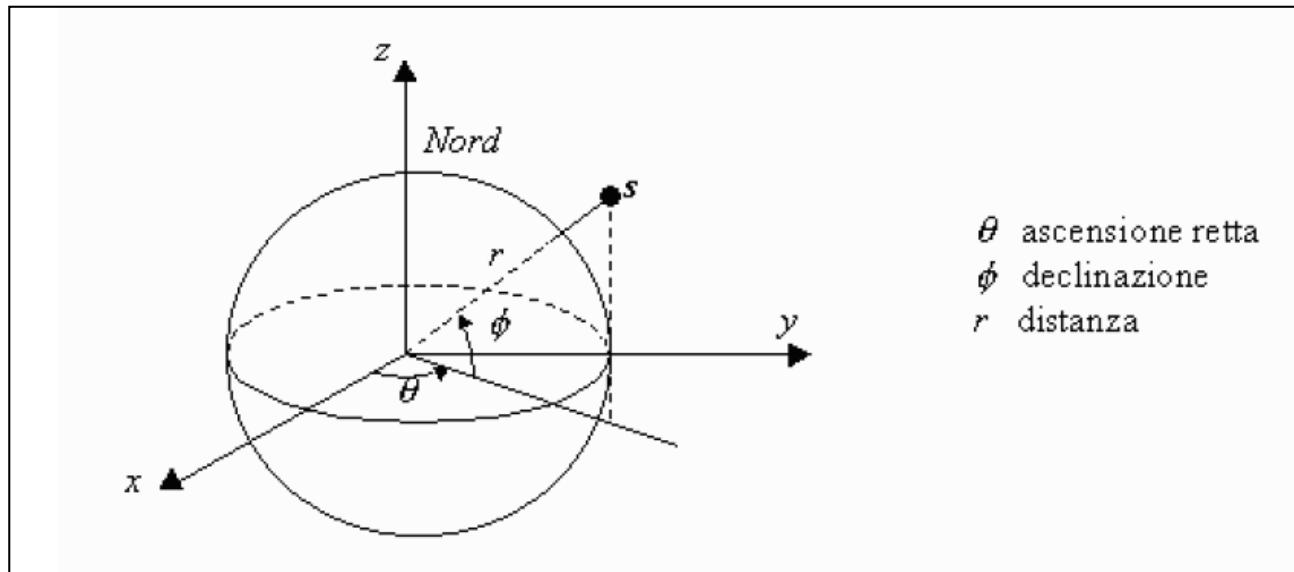
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ \theta \\ \dot{p} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m^2 l^2 g / \mu & -c J_t / \mu & -\gamma J_t l m / \mu \\ 0 & M_t m g l / \mu & -c l m / \mu & -\gamma M_t / \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \theta \\ \dot{p} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_t / \mu \\ l m / \mu \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x,$$



Esempio 2

□ Moto Orbitale di un Satellite in Coordinate Polari



Ipotesi semplificative sul sistema:

- La Terra si considera perfettamente sferica e con densità uniforme
- Il veicolo è approssimato da un punto materiale con massa m
- L'attrazione gravitazionale è costante
- Non vi sono altri corpi che esercitano una attrazione sul satellite.



Esempio 2



- Equazioni descrittive basate sul bilancio Energetico (Eq. di Eulero-Lagrange)

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2 + (r\dot{\theta}\cos\phi)^2]$$

$$V = -\frac{km}{r} = -\frac{gMm}{r}$$

$$\begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 \cos^2 \phi + r\dot{\phi}^2 - \frac{k}{r^2} + \frac{u_r}{m} \\ \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\phi}}{r} + \frac{2\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi}{\cos\phi} + \frac{u_\theta}{mr\cos^2\phi} \\ \ddot{\phi} = -\dot{\theta}^2 \cos\phi \sin\phi - \frac{2\dot{r}\dot{\phi}}{r} + \frac{u_\phi}{mr} \end{cases}$$

- Lo «stato» del sistema è descritto da 6 variabili corrispondenti a posizione e velocità dei 3 Gradi di Libertà

$$\boldsymbol{x} = [r \quad \dot{r} \quad \theta \quad \dot{\theta} \quad \phi \quad \dot{\phi}]^T$$

- Per ipotesi, si assume che esistano ingressi che agiscono sui 3 gradi di libertà.

$$\boldsymbol{u} = [u_r \quad u_\theta \quad u_\phi]^T$$



$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$$

Non esiste soluzione analitica, ma soltanto numerica.

- Scelta del linguaggio (basso livello, alto livello, ...)
- Algoritmo di integrazione appropriato (Newton-Rapshon, Runge-Kutta, Predittore-Correttore, ecc.)
- Scelta del passo di integrazione appropriato all'evoluzione prevista del sistema
- Soluzione dipendente dalle condizioni iniziali, che richiede estensiva simulazione



Esempio 2

- Equazioni del moto esplicitate in forma compatta, usando le variabili di stato

$$\dot{x}^{6 \times 1}(t) = f^{6 \times 1}(x^{6 \times 1}, u^{3 \times 1})$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_4^2 \cos^2 x_5 + x_1 x_6^2 - \frac{k}{x_1^2} + \frac{u_r}{m} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\frac{2x_2 x_4}{x_1} + \frac{2x_4 x_6 \sin x_5}{\cos x_5} + \frac{u_\theta}{m x_1 \cos^2 x_5} \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = -x_4^2 \cos x_5 \sin x_5 - \frac{2x_2 x_6}{x_1} + \frac{u_\phi}{m x_1} \end{cases}$$

- Il primo passo è quello di calcolare le condizioni di equilibrio e poi sceglierne una su cui eseguire la linearizzazione.

$$f^{6 \times 1}(x^{6 \times 1}, u^{3 \times 1}) = 0 \Rightarrow x_0^{6 \times 1}, u_0^{3 \times 1}$$

- Il calcolo può essere molto complesso in quanto richiede la soluzione di un sistema algebrico non lineare a 6 dimensioni.



Esempio 2

- La meccanica celeste permette di identificare una tra le possibili condizioni di equilibrio corrispondente ad un moto Kepleriano dato da **un'orbita circolare equatoriale** con raggio r_0 e velocità angolare ω_0 , in modo da uguagliare forza centrifuga e centripeta, in assenza di ingressi.

$$m\omega_0^2 r_0 = \frac{km}{r_0^2}$$
$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} r_0 & 0 & \omega_0 t & \omega_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

- Linearizzazione intorno alla condizione di equilibrio, mediante la serie di Taylor:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = A \delta \mathbf{x} + B \delta \mathbf{u}$$

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x_0, u_0} \quad B = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{x_0, u_0}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\omega_0 r_0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega_0/r_0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/mr_0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1/mr_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_{\dot{r}} \\ u_{\theta} \\ u_{\dot{\theta}} \\ u_{\phi} \\ u_{\dot{\phi}} \end{bmatrix}$$



Esempio 2



□ Analisi qualitativa basata sulle equazioni linearizzate.

Il moto linearizzato intorno all'orbita circolare equatoriale nominale risulta disaccoppiato in due moti separati:

- Perturbazione sul piano equatoriale (le prime 4 equazioni)
- Perturbazione fuori dal piano equatoriale (Azimuth/Ascensione retta, le ultime due equazioni)

- Partendo dalle condizioni equilibrio, consideriamo il moto in risposta a condizioni iniziali diverse da 0. Quindi studiamo il sistema omogeneo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\omega_0 r_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\omega_0}{r_0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} x$$



Esempio 2



- Il moto in Azimuth è descritto dalla partizione A_{22} della matrice A

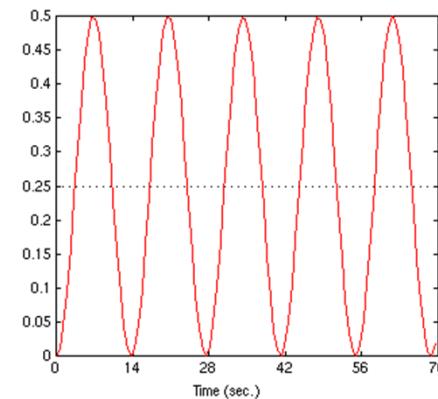
$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad \ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0$$

- Gli autovalori della partizione A_{22} e le radici dell'algebrica associata all'equazione differenziale coincidono e sono pari a:

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 j$$

- Il moto in Azimuth in funzione delle condizioni iniziali è un moto armonico con frequenza $2\pi\omega_0$ intorno alla condizione di equilibrio:

$$\phi_0 = 0^{rad}, \dot{\phi}_0 = 0^{rad/sec}$$



- Il moto totale è quindi: $\phi(t) = \phi_0 + c_1 \sin(\omega_0 t + c_2)$



Esempio 2

- Il moto sul piano Equatoriale è descritto dalla partizione A_{11} della matrice A, il suo studio è apparentemente più complesso, in quanto il sistema è del quarto ordine e lega i moti radiale e di elevazione.

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\omega_0 r_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\omega_0}{r_0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \ddot{r} + 3\omega_0^2 r + 2\omega_0 r_0 \dot{\theta} = 0 \\ \ddot{\theta} - \frac{2\omega_0}{r_0} \dot{r} = 0 \end{cases}$$

- La soluzione generale (sistema omogeneo con forzante nulla) è data dalla somma di 4 esponenziali corrispondenti alle radici dell'algebrica associata ed uguali agli autovalori della partizione A_{11}
- Algebrica associata e rispettive radici (Autovalori di A_{11}):

$$\lambda^2(\lambda^2 + \omega_0^2) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = +\omega_0 j \\ \lambda_4 = -\omega_0 j \end{cases}$$

- Mediante l'uso della trasformazione di similitudine **modale**, potremo assegnare univocamente gli autovalori ai due moti radiale ed elevazione (declinazione)



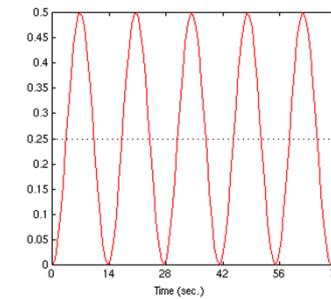
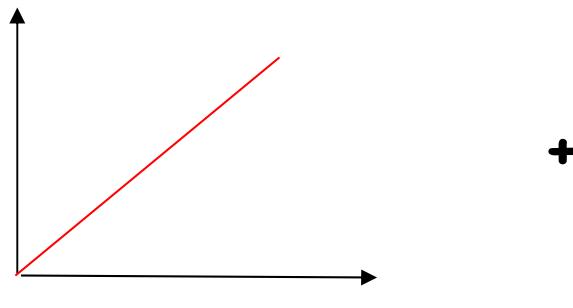
Esempio 2

- Più precisamente, le due radici all'origine sono associate al moto perturbato in $\theta(t)$ e la coppia di radici immaginarie pure al moto perturbato radiale

$$\delta \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + c_3 e^{\lambda_3 t} + c_4 e^{\lambda_3^* t}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \delta\theta(t) = c_{13} + c_{14}t = \omega_0 t$$

$$r(t) = r_0 + \delta r(t) = \sqrt{c_{31}^2 + c_{41}^2} \sin(\omega_0 t + \tan^{-1} \frac{c_{41}}{c_{31}})$$





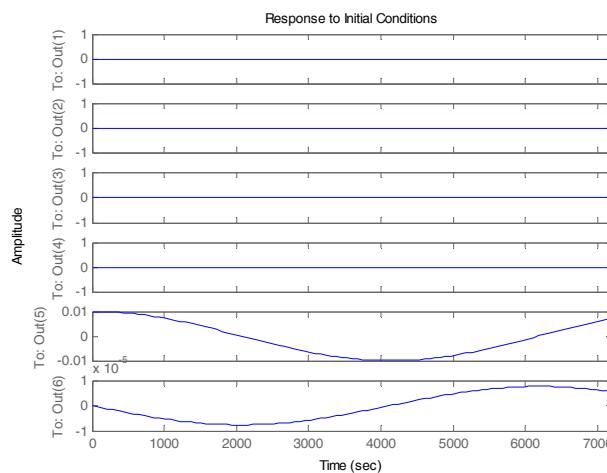
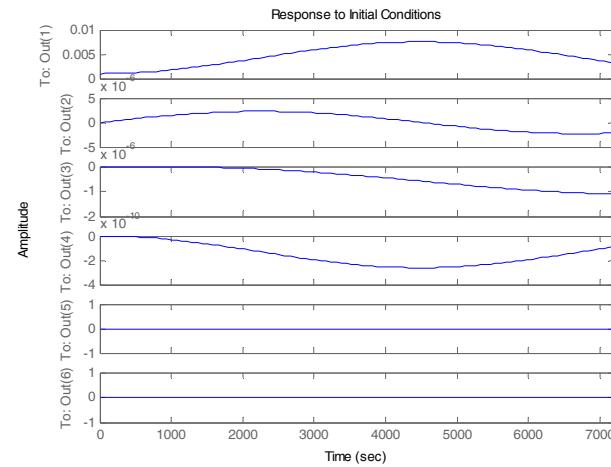
Esempio 2: Satellite TLC in Orbita Geosincrona

a =

$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1.6e-006 & 0 & 0 & 0 & 52.23 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & -4e-008 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5.8e-007 & 0 \end{matrix}$$

b =

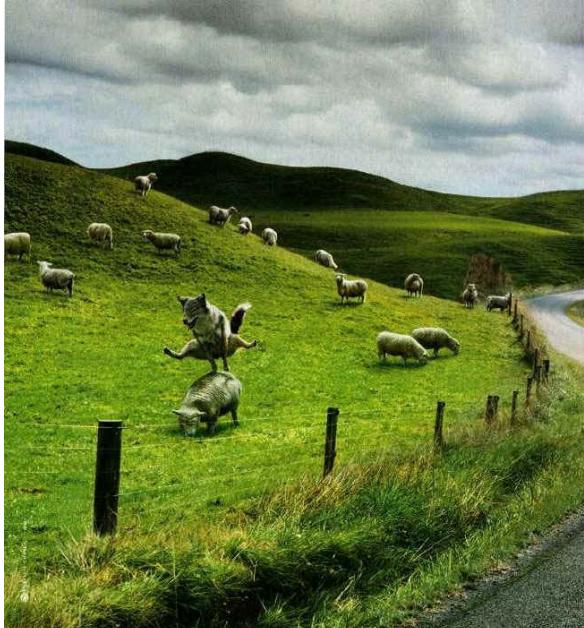
$$\begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0.0007 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 1.85e-008 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 1.85e-008 \end{matrix}$$





Esempio 3

□ Modelli biologici per la dinamica Preda – Predatore:



- Studio e Monitoraggio di ecosistemi biologici per il mantenimento di specie in pericolo di estinzione, riduzione di specie dannose, ecc.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= rx_1 - sx_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= fsx_1x_2 - qx_2\end{aligned}$$

- Il modello base si rifa alle equazioni di Lotka-Volterra, dove \mathbf{x}_1 rappresenta la popolazione preda e \mathbf{x}_2 la popolazione predatore. Questo modello assume:
 - Riserva illimitata di cibo per la preda
 - Riproduzione continua nel tempo

□ Parametri (non negativi)

- r = rateo riproduzione preda (fraz.)
- s = efficacia/rateo attacco predatore
- q = rateo morte predatore (fraz.)
- f = Efficienza conversione cibo-riproduzione predatore



Esempio 3



□ Analisi del Modello (Preda)

- La popolazione PREDA può trovare cibo in ogni momento.
- La catena di cibo della popolazione PREDATORE dipende unicamente dalla popolazione preda
- La variazione della popolazione è proporzionale alle dimensioni.
- Non vi sono variazioni nell'ambiente e l'adattamento genetico varia più lentamente del processo di interesse.

$$\dot{x}_1 = rx_1 - sx_1x_2$$

$$\dot{x}_1 = rx_1 - sx_1x_2$$

$$\dot{x}_2 = fsx_1x_2 - qx_2$$

1. Crescita esponenziale del numero di prede in assenza di predatori
2. Il rateo di diminuzione del numero di prede dipende dall'incontro preda-predatore

$$x_2 = 0$$

$$\dot{x}_1 = rx_1 \Rightarrow x_1(t) = x_{10}(0)e^{rt} \rightarrow \infty$$

$$-sx_1x_2$$

□ Analisi del Modello (Predatore)

$$\dot{x}_2 = fsx_1x_2 - qx_2$$

1. Diminuzione esponenziale del numero di predatori in assenza di preda
2. Il rateo di aumento del numero di predatori dipende dall'incontro preda-predatore e dalla capacità del predatore di trasformare cibo in riproduzione

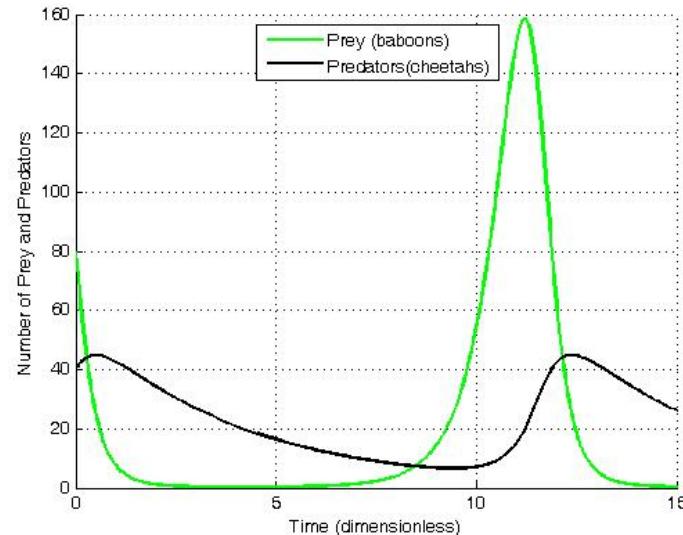
$$x_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = qx_2 \Rightarrow x_2(t) = x_{20}(0)e^{-qt} \rightarrow 0$$

$$fsx_1x_2$$



Esempio 3



□ Linearizzazione

Calcolo dei punti di equilibrio

$$\begin{aligned} rx_1 - sx_1x_2 &= 0 \\ fsx_1x_2 - qx_2 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x_{1E} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_{2E} = \begin{bmatrix} \frac{q}{r} \\ \frac{g}{s} \end{bmatrix}; g = fs \end{aligned}$$

Il primo punto rappresenta l'evoluzione indipendente delle due specie; il secondo rappresenta il mantenimento dei numeri definiti dai parametri del problema

□ Linearizzazione

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} r - sx_2 & -sx_1 \\ gx_2 & -q + gx_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{x}(t) = Ax(t)$$

$$A_{1E} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -q \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= rx_1 \Rightarrow x_1(t) = x_{10}e^{rt} \rightarrow \infty \\ \dot{x}_2 &= qx_2 \Rightarrow x_2(t) = x_{20}e^{-qt} \rightarrow 0 \end{aligned}$$



Esempio 3

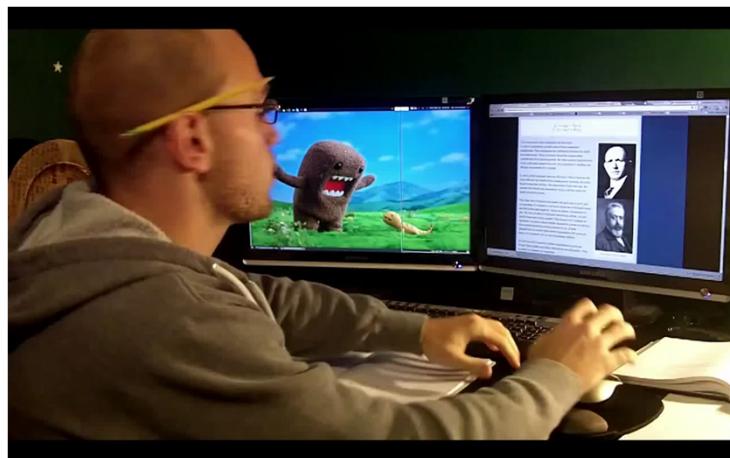
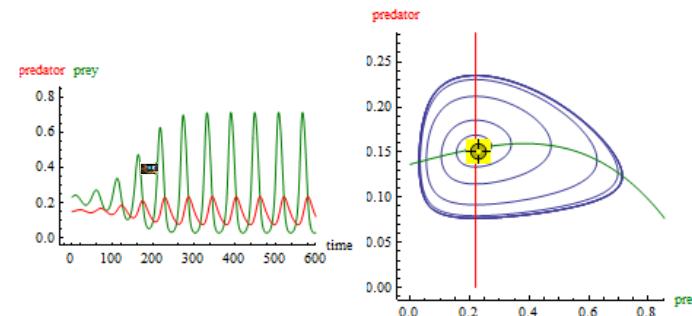
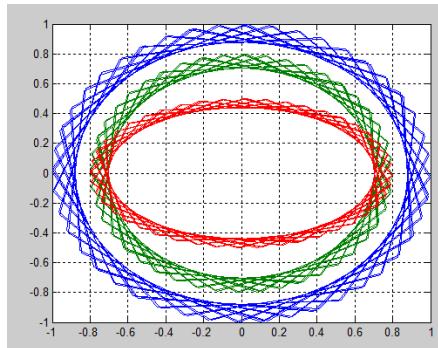
$$A_{2E} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{sq}{g} \\ \frac{gr}{s} & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow$$

□ Gli autovalori della matrice A sono:

$$\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{qr}$$

□ L'andamento nel tempo del numero di prede e predatori è puramente armonico con frequenza $2\pi(qr)^{1/2}$.

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + rqx_1 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + rqx_2 &= 0\end{aligned}$$



https://www.youtube.com/watch?v=qp4i_Br8-dE



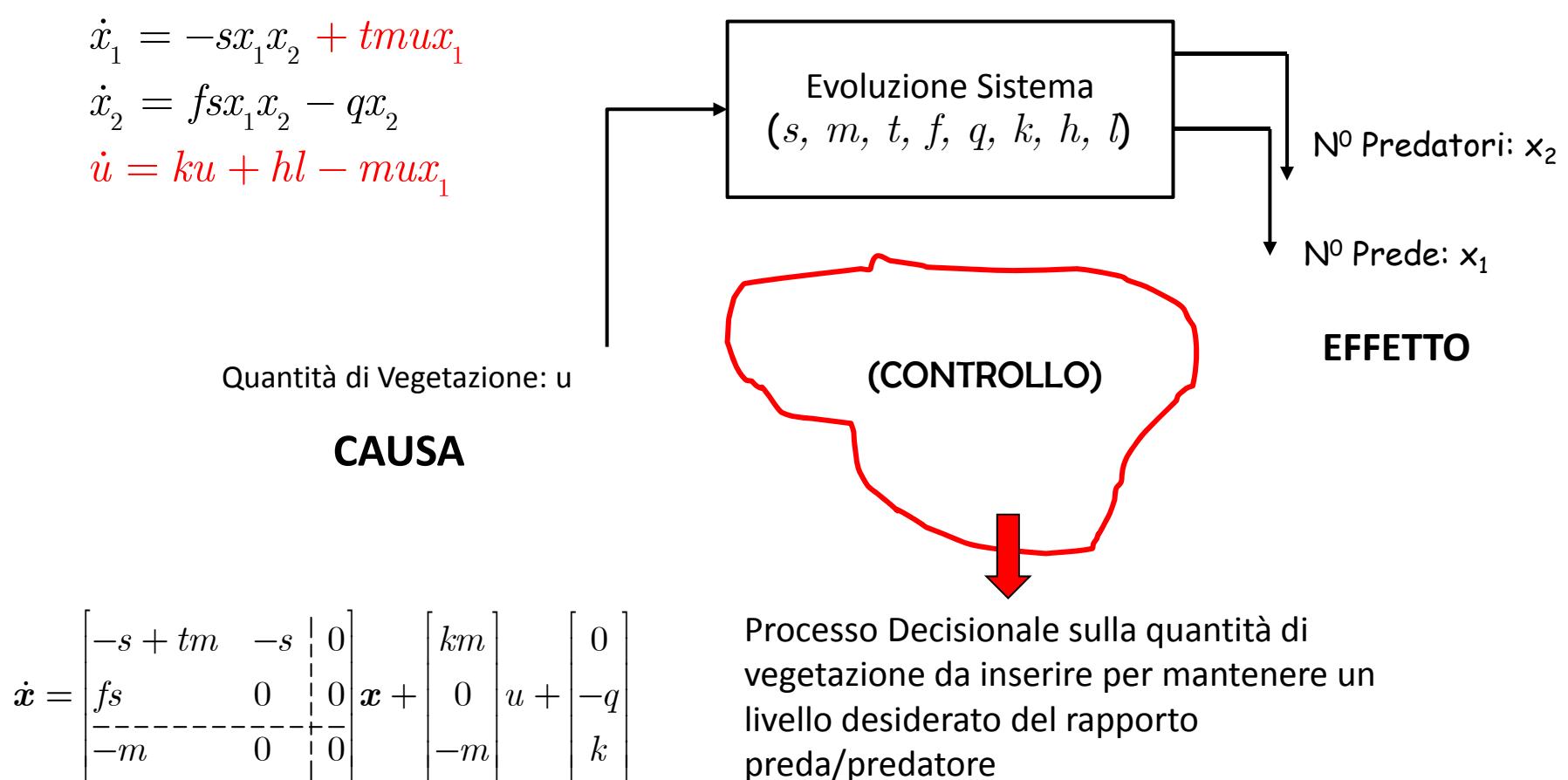
Esempio 3

- Comportamento Controllato con l'introduzione di una variabile addizionale, per esempio la presenza di vegetazione $u(t)$ che controlla il foraggiamento della preda.

$$\dot{x}_1 = -sx_1x_2 + tmux_1$$

$$\dot{x}_2 = fsx_1x_2 - qx_2$$

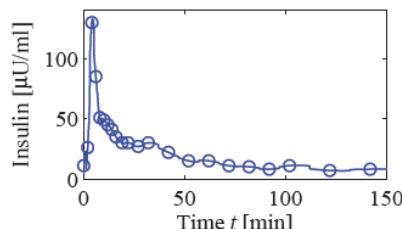
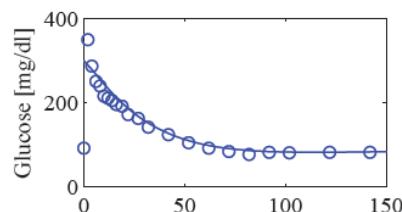
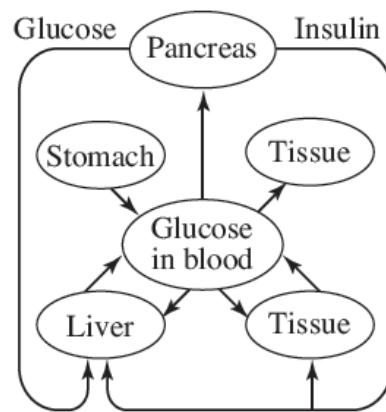
$$\dot{u} = ku + hl - mux_1$$





Esempio 4

□ Modello Glucosio - Insulina



(c) Intravenous injection

- Intervallo di concentrazione molto ristretto (0.7 – 1.1 g/L)
- Elevato Rischio Diabete
- Ereditarietà, Dieta, Esercizio fisico, ecc.

Durante la digestione, il pancreas rilascia glucagone, l'ormone che serve a scomporre i glucidi in uno zucchero semplice, il **glucosio**, e a rilasciarlo nel sangue. L'altro ormone, l'insulina, serve ad **abbassare la glicemia** (la quantità di zuccheri nel sangue), permettendo al glucosio di penetrare le cellule del fegato, dei muscoli e di altri tessuti per venirvi immagazzinato e produrre energia nel momento del bisogno. Il *surplus* viene immagazzinato, sotto forma di grasso e di proteine, nel fegato e nei muscoli. In ogni secondo le cellule hanno bisogno di glucosio per produrre l'energia necessaria al loro funzionamento, e questo è il solo zucchero che il cervello è in grado di utilizzare. Il **tasso di glucosio nel sangue deve essere costante** perché l'organismo possa funzionare normalmente: se il corpo non produce abbastanza insulina o non è in grado di utilizzare quella disponibile, il **glucosio si accumula nel sangue o passa nell'urina (glicosuria), senza poter svolgere il suo ruolo**. L'iperglycemia cronica come nel caso del diabete, o poco controllata, può causare complicazioni acute e croniche molto gravi.



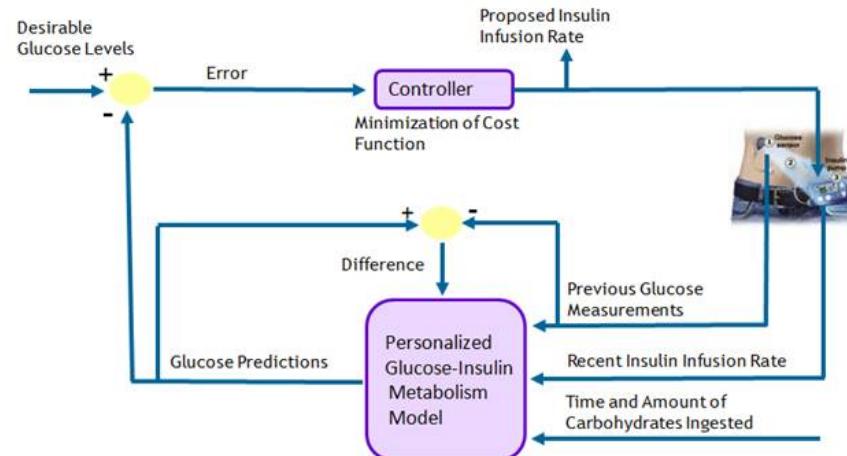
Esempio 4

Types of mathematical models:

- ▶ Ordinary differential equation (ODE) models
- ▶ Delay differential equation (DDE) models
- ▶ Partial differential equation (PDE) models
- ▶ Fredholm integral equation (FIE) models
- ▶ Stochastic differential equation (PDE) models
- ▶ Integro-differential equation (IDE) models

Dinamica nonlineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(p_1 + x_2)x_1 + p_1 g_E \\ \dot{x}_2 = -p_2 x_2 + p_3(u - i_E) \end{cases}$$



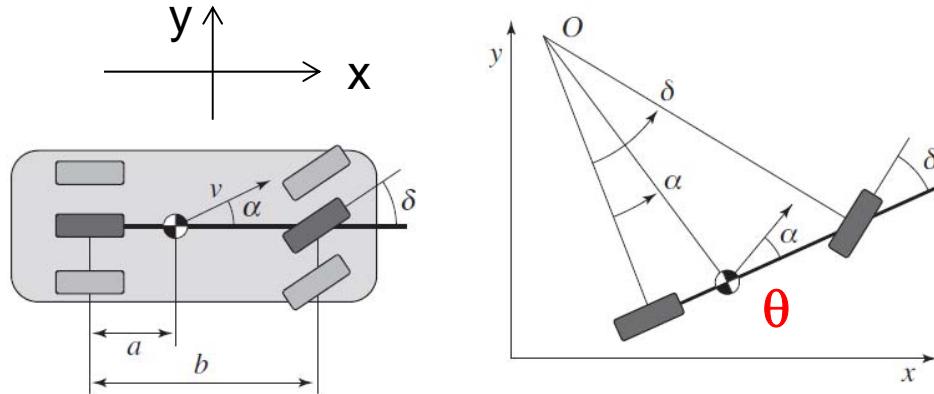
□ Modello “minimo” [Bergman 1989]

- Analisi della dinamica del glucosio ed Insulina durante il test IVGTT
- Determinazione dei parametri: sensitività Insulina e Efficacia Glucosio a livello di individuo
- Parametri del modello generati sperimentalmente mediante il metodo dei minimi quadrati

- g_E, i_E : valori di equilibrio di glucosio ed insulina.
- x_1 : Concentrazione di Glucosio.
- x_2 : Valore proporzionale alla concentrazione di Insulina nel fluido interstiziale.
- u : Insulina nel sangue (ingresso).



Esempio 5: Modello di Autoveicolo Dinamica di Steering



$$\alpha(\delta) = \tan^{-1}\left(\frac{a \tan \delta}{b}\right), v = \frac{v_0}{\cos \alpha}$$

v_0 = velocità ruote posteriori

v = velocità c.m. veicolo

$$\frac{dx}{dt} = v \cos(\alpha + \theta) = v_0 \frac{\cos(\alpha + \theta)}{\cos \alpha},$$

$$\frac{dy}{dt} = v \sin(\alpha + \theta) = v_0 \frac{\sin(\alpha + \theta)}{\cos \alpha}.$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{r_a} = \frac{v_0}{b} \tan \delta.$$

Relazione dinamica tra velocità v del veicolo ed angolo di sterzata δ

Il modello usato è quello del biciclo
Con i pneumatici che ruotano senza scivolamento.

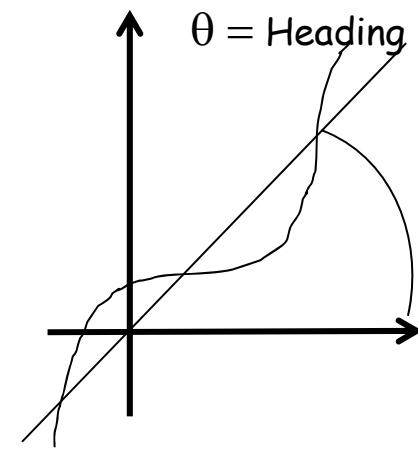
La linearizzazione è eseguita
Partendo da una condizione di
Equilibrio di moto rettilineo lungo x,
Considerando il moto perturbato rispetto
All'asse x.

Condizioni di Equilibrio:

$$\theta = \theta_e = 0$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix} = 0$$

$$u = \delta = 0$$





Esempio 5



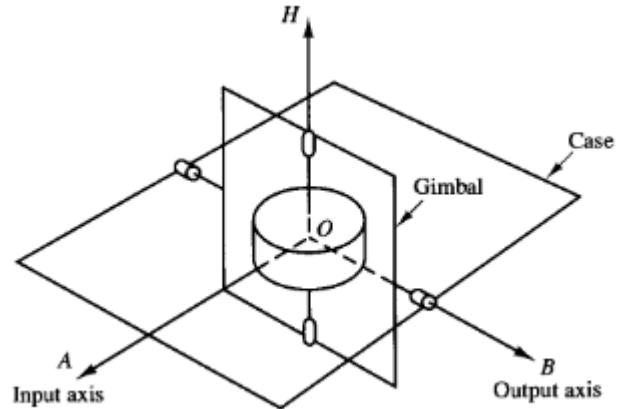
$$f(x, u) = \begin{bmatrix} v \sin(\alpha(u) + x_2) \\ \frac{v_0}{b} \tan u \end{bmatrix}, \quad \alpha(u) = \arctan\left(\frac{a \tan u}{b}\right), \quad h(x, u) = x_1.$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ u=0}} = \begin{bmatrix} 0 & v_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{x=0 \\ u=0}} = \begin{bmatrix} av_0/b \\ v_0/b \end{bmatrix},$$
$$C = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ u=0}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \frac{\partial h}{\partial u} \Big|_{\substack{x=0 \\ u=0}} = 0,$$

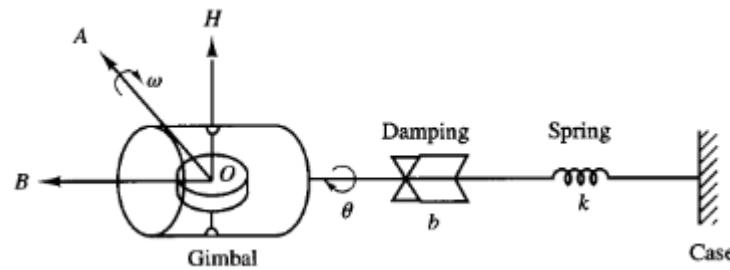
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{av_0}{b} \\ \frac{v_0}{b} \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$



Esempio 6: Giroscopio ad 1 Grado di Libertà



Il disco ruota ad alta velocità intorno all'asse **H** è ed montato su un supporto (**Gimbal**) ruotante intorno all'asse **B**, a sua volta montato nella struttura (**Case**). L'asse di ingresso **A** misura la velocità angolare (oppure l'angolo) a cui è soggetta la struttura. Tale misura è ottenuta in funzione della rotazione dell'asse **B** per effetto giroscopico di accoppiamento tra asse **A** ed asse **H**.



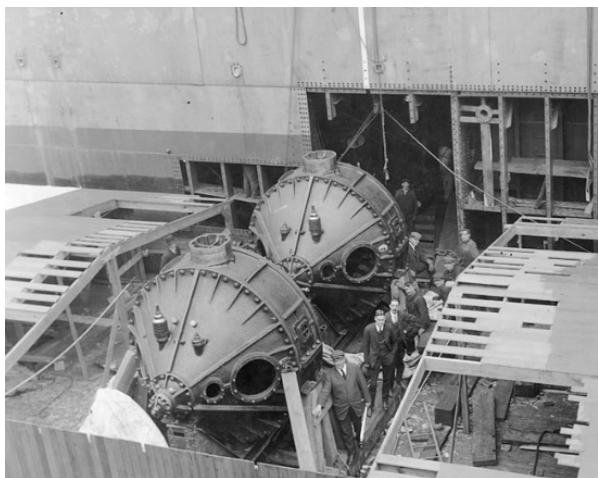
$$\begin{cases} I\ddot{\theta} - H\omega \cos \theta = -b\dot{\theta} - k\theta \\ |\theta| \leq \pm 2.5^\circ - 3.0^\circ \end{cases}$$



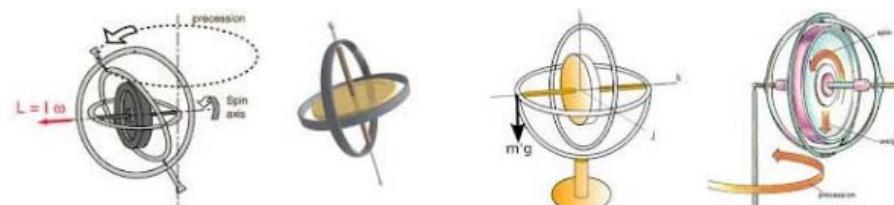
$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = H\omega$$



Esempio 6: Giroscopio ad 1 Grado di Libertà



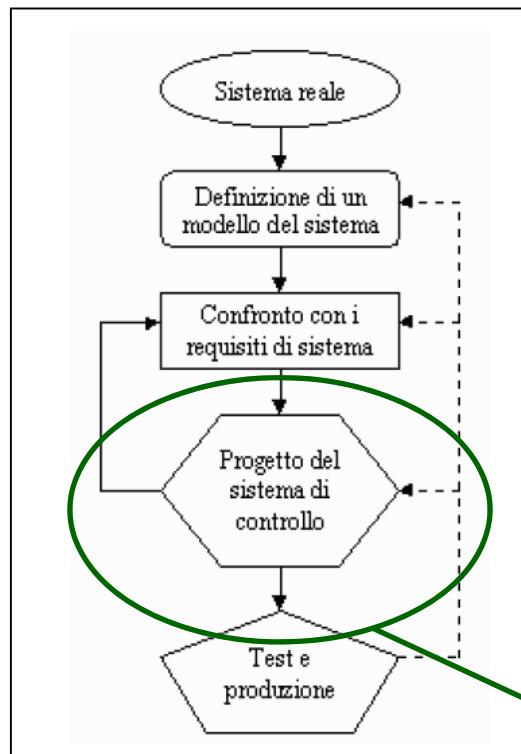
La [Robbe](#) ci segnala la disponibilità dell'ultima evoluzione nel campo dei giroscopi il **Futaba GY-520**. Questo Gyro comprende un'avanzata tecnologia di sensori denominata MEMS (Micro-Electro-Mechanical Systems). Il vantaggio di questi sensori è di poter essere integrati in un unico Chip insieme ad un regolatore PID ad alta velocità: conseguentemente è stato possibile racchiudere tutti i dispositivi in un unico giroscopio di piccole dimensioni, soltanto $20 \times 20 \times 10$ mm. L'altro vantaggio dei sensori MEMS risiede nell'elevata velocità di elaborazione dei segnali, che consente ai piloti di compiere al meglio le rapide evoluzioni acrobatiche 3D e F3N.





Tipologie di Controllo

Nello studio dei sistemi di controllo vi sono essenzialmente Problemi di Sintesi e Problemi di Analisi.



Modellistica: Creazione di Un modello del sistema reale (sintesi), Verifica della bontà del modello e studio delle prestazioni (analisi).

Controllo: Formalizzazione specifiche Del sistema, progetto del controllore (sintesi) e studio delle prestazioni (analisi).

Strategie qualitative di un sistema di controllo

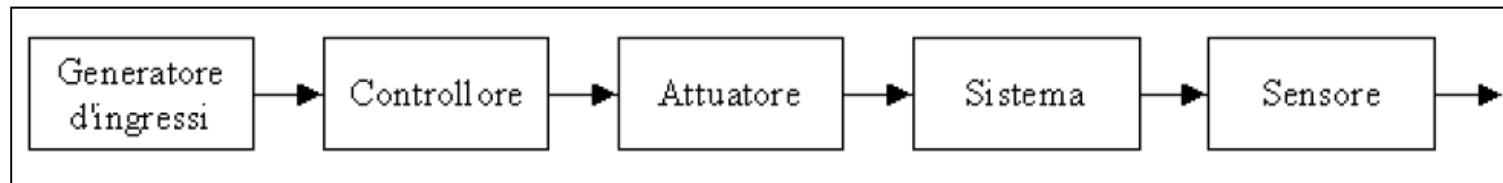
l'**analisi** del sistema è un processo di "previsione", il progetto di controllo è un processo di "decisione".



Tipologie di Controllo



1) Anello aperto, open loop



Esempi tipici di sistemi controllati ad anello aperto sono:

- lavatrice, tostapane, forno a microonde
- sistemi di navigazione aeronautici
- processi automatizzati di saldatura
- impianti di assemblaggio
- sistemi di orientazione di sonde spaziali
- sistemi robotizzati



Strutturalmente più semplice, non richiede modifiche

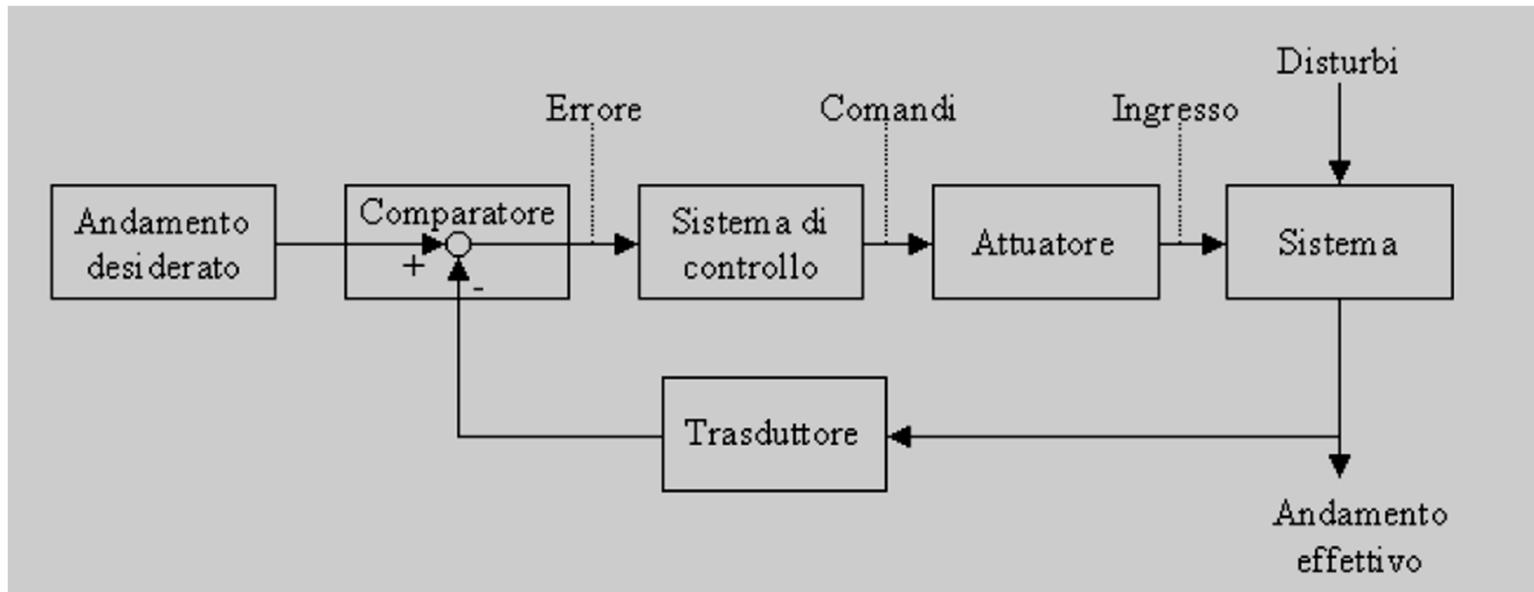


Richiede un modello matematico molto fedele al processo reale



Tipologie di Controllo

2) Anello chiuso, Closed Loop, Feedback



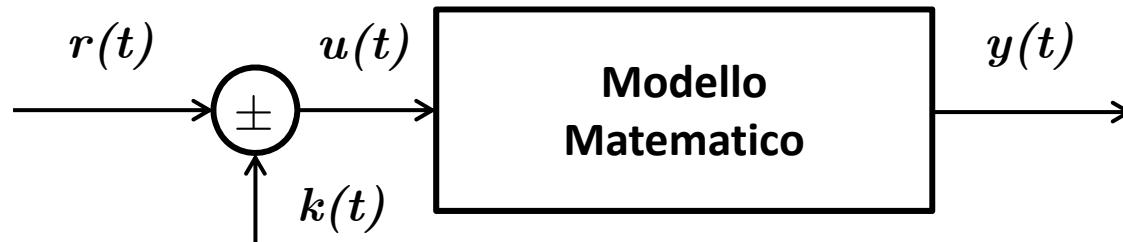
Non richiede un modello molto accurato, compensazione errori



Struttura più complessa, più componenti soggetti a rottura



Esempio



$$\ddot{y} + 5\dot{y} - \dot{y} - 5y = 4u$$

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -5$$

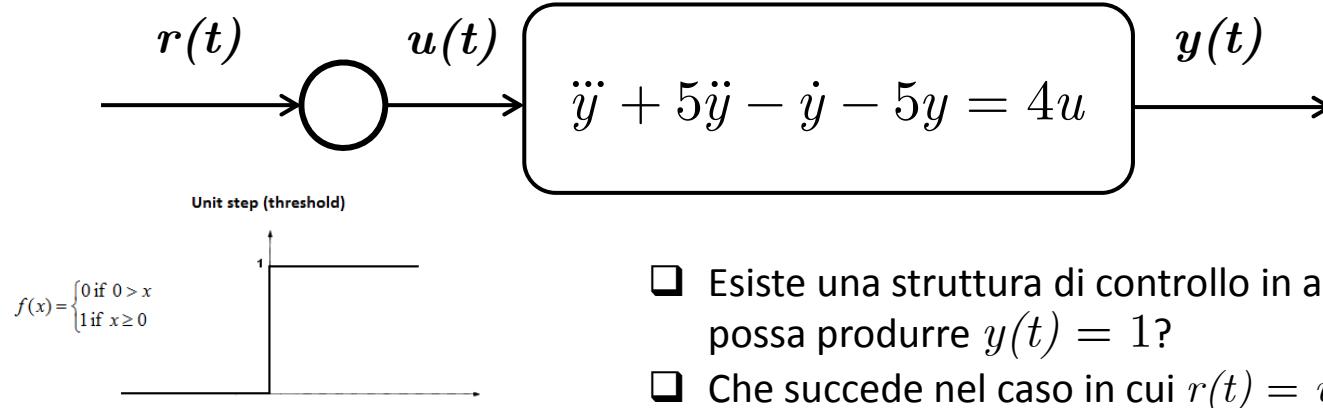
$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-5t} + y_P(t) \quad \boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty}$$

□ **Requisito:** L'uscita del sistema non deve discostarsi molto dal segnale $r(t)$

1. Si deve evitare che l'uscita cresca nel tempo in modo illimitato
2. Si deve fare in modo che l'errore tra $y(t)$ e $r(t)$ sia inferiore ai requisiti richiesti di errore $e(t) = r(t) - y(t)$

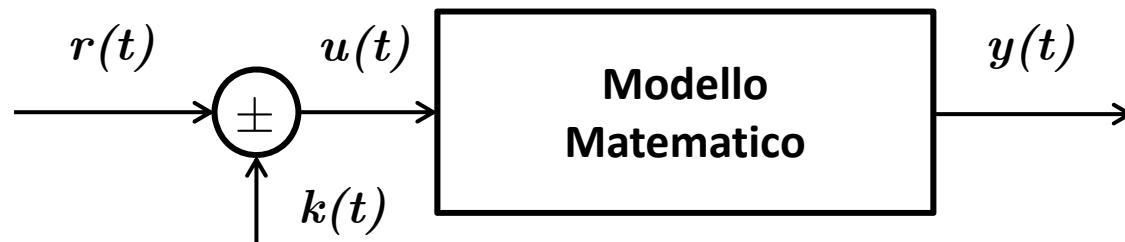


Esempi



- Esiste una struttura di controllo in anello aperto che possa produrre $y(t) = 1$?
- Che succede nel caso in cui $r(t) = u(t)$ sia arbitraria?

- Uscita limitata nel tempo (assumendo un ingresso limitato, la componente omogenea deve tendere a zero)

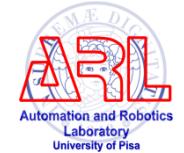


$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) - \dot{y}(t) - 5y(t) = 4u(t) = 4[r(t) - k(t)]$$

$$k(t) = ??$$



Esempio



- Scelta di progetto della funzione $k(t)$ (per adesso non giustificata)

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{3}{4}\ddot{y}(t) + \frac{9}{2}\dot{y}(t) + \frac{15}{4}y(t) \\ u(t) &= r(t) - k(t) \end{aligned}$$

→ $\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 17y(t) + 10r(t) = 0$

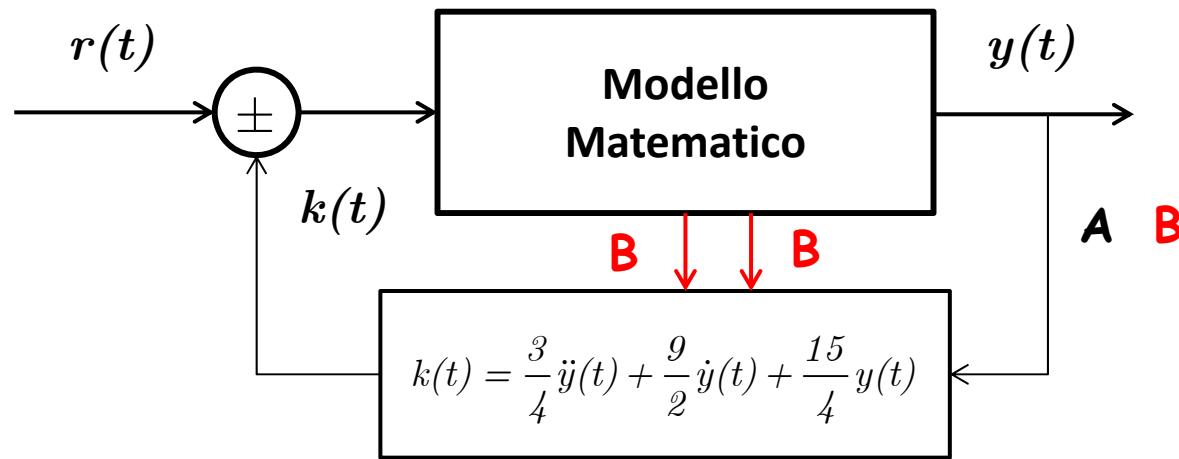
$$\lambda^3 + 8\lambda^2 + 17\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -5$$

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-5t} + y_P(t) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_P(t)$$

- **Nota:** Nel caso di $r(t) = \text{costante}$, $y_P(t) = \text{costante}$. Se $r(t) = 1$, quanto vale $y_P(t)$?



Esempio



Implementazione A

- Misura uscita
- Calcolo delle derivate
- Combinazione lineare

Implementazione B

- Misura uscita
- Misura Derivate
- Combinazione lineare