Formulario di Fisica Generale

Università di Pisa — Ingegneria Informatica

Alessio Avallone

Data: 13 luglio 2025

Indice

Capitolo 1

MECCANICA

Moto Traslazionale

Concetti principali:
Il moto traslazionale descrive il movimento di un corpo lungo una linea retta, caratterizzato da velocità, accelerazione e lavoro.

Formule principali:

Accelerazione	$a = \dot{v} = \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
Posizione	$x = \frac{1}{2}at^2 + vt + x_0$
Lavoro	$W = \int_{x_i}^{x_f} F dx$
Quantità di moto	$P = mv$
Relazione con energia	$Lavoro = \text{Energia dispersa} = W$

Formule aggiuntive:

Moto accelerato uniformemente	$v = v_0 + at$, $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$
Moto a velocità costante	$v = \text{costante}$, $x = x_0 + vt$

Principali momenti d'inerzia

Corpo rigido	Asse di rotazione	Momento d'inerzia I
Asta sottile $(m,\ l)$	Estremità	$I = \frac{1}{3}ml^2$
Asta sottile $(m,\ l)$	Centro	$I = \frac{1}{12}ml^2$
Disco pieno $(m,\ R)$	Centro, perpendicolare	$I = \frac{1}{2}mR^2$
Disco pieno $(m,\ R)$	Asse lungo R	$I = \frac{1}{4}mR^2$
Anello $(m,\ R)$	Centro, perpendicolare	$I = mR^2$
Cilindro pieno $(m,\ R)$	Asse centrale	$I = \frac{1}{2}mR^2$
Cilindro cava $(m,\ R)$	Asse centrale	$I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$
Cilindro pieno $(m,\ R)$	Asse lungo R	$I = \frac{1}{12}m(3R^2 + h^2)$
Sfera piena $(m,\ R)$	Centro	$I = \frac{2}{5}mR^2$
Sfera cava $(m,\ R)$	Centro	$I = \frac{2}{3}mR^2$
Parallelepipedo $(m,\ a,\ b,\ c)$	Asse lungo a	$I = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$
Cubo $(m,\ a)$	Asse lungo a	$I = \frac{1}{6}ma^2$
Cubo $(m,\ a)$	Asse lungo una diagonale	$I = \frac{1}{3}ma^2$
Lamina Triangolare equilatera $(m,\ a)$	Asse perpendicolare al piano	$I = \frac{1}{12}ma^2$
Lamina Triangolare equilatera $(m,\ a)$	Asse parallelo a un lato	$I = \frac{1}{3}ma^2$

Teorema di Steiner + Tabella Momenti d'inerzia

Il teorema di Steiner permette di calcolare il momento d'inerzia di un corpo rigido rispetto a un asse parallelo a quello passante per il centro di massa. La formula è:

$$\boxed{I = I_{\mathrm{CM}} + md^2}$$

Equazioni cardinali della dinamica

Concetti teorici e quando si usano:

Le equazioni cardinali della dinamica sono le leggi fondamentali che descrivono il moto dei sistemi di punti materiali e dei corpi rigidi. Si applicano in qualsiasi situazione meccanica, sia per il centro di massa che per il moto rotatorio attorno a un asse.

Quando usarle:

- **I equazione (Quantità di moto):** quando vuoi studiare il moto traslatorio del centro di massa di un sistema o corpo rigido sotto l'azione di forze esterne.
- **II equazione (Momento angolare):** quando vuoi analizzare la rotazione di un corpo attorno a un punto o un asse, considerando i momenti delle forze esterne.
- **III equazione (Potenza):** quando vuoi collegare la potenza delle forze esterne con la variazione di energia cinetica (sia traslazionale che rotazionale).

N°	Equazione	Spiegazione
I	$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_G$	*La variazione della quantità di moto totale di un sistema è uguale alla somma delle forze esterne. Descrive il moto traslatorio del centro di massa.*
II	$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O - \vec{V}_O \times \vec{P}$ *con* $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} + I\vec{\omega}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = I\dot{\vec{\omega}}$ **Nota Bene:** $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	*La variazione del momento angolare totale rispetto a un punto O è uguale alla somma dei momenti delle forze esterne rispetto a O meno il termine di trasporto dovuto al moto dell'origine. Si usa per studiare la rotazione di sistemi e corpi rigidi.*
III	$\frac{dW}{dt} = \vec{P}_{\text{ext}} \cdot \vec{V}_G + \vec{\Gamma}_{\text{ext}} \cdot \vec{\omega}_O$	*La potenza totale delle forze esterne è uguale alla variazione dell'energia cinetica totale (traslazionale e rotazionale).*

Moto Rotazionale e Moto di Puro Rotolamento

Moto Rotazionale:

- **Momento angolare:** $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} + I\vec{\omega}$
- **Momento torcente:** $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
- **Accelerazione tangenziale:** $a_{\text{tang}} = \alpha R$
- **Accelerazione centripeta:** $a_{\text{centr}} = \omega^2 R$
- **Lavoro:** $W = \int \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$

Moto di Puro Rotolamento:

- **Energia cinetica totale:** $K = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2$
- **Teorema di Steiner:** $I = I_{\text{CM}} + md^2$ (vedi Tabella dei Momenti d'Inerzia)
- **Condizione di puro rotolamento:** $v_{\text{CM}} = R\omega$, $a_{\text{CM}} = R\alpha$

N°	Equazione	Spiegazione
I	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} + I\vec{\omega}$	*Il momento angolare totale è dato dalla somma del momento angolare traslazionale e rotazionale.*
II	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	*Il momento torcente è dato dal prodotto vettoriale tra il raggio e la forza applicata.*
III	$K = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2$	*L'energia cinetica totale è la somma dell'energia cinetica rotazionale e traslazionale.*
IV	$v_{\text{tan}} = R\omega$	*La velocità tangenziale di un punto su un corpo rotante è data dal prodotto del raggio e della velocità angolare.*
V	$a_{\text{tang}} = \alpha R$	*accelerazione tangenziale*
VI	$a_{\text{centr}} = \omega^2 R$	*accelerazione centripeta*
VII	$a_{\text{tot}} = a_{\text{tang}} + a_{\text{centr}}$	*accelerazione totale*
VIII	$W = \int \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\alpha d\omega = \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \cdot F \sin(\theta) d\theta$	*Il lavoro è dato dall'integrale del momento torcente rispetto all'angolo.*

Moto Armonico

Concetti teorici:

Il moto armonico è un tipo di moto oscillatorio in cui la posizione, la velocità e l'accelerazione variano sinusoidalmente nel tempo. È caratterizzato da una forza restauratrice proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio.

Quando usarlo:

- Quando si studiano oscillazioni meccaniche, come quelle di un pendolo o di una molla.
- Per analizzare fenomeni periodici in fisica, come le onde sonore o le vibrazioni.
- Per risolvere problemi di dinamica che coinvolgono forze restauratrici, come nel caso di un oscillatore armonico semplice.

N°	Equazione	Spiegazione
I	$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$	*La posizione varia sinusoidalmente con ampiezza A, pulsazione ω e fase iniziale ϕ_0.*
II	$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi_0)$	*La velocità è la derivata della posizione rispetto al tempo.*
III	$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi_0)$	*L'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo.*

Pendolo Semplice

Descrizione	Un sistema ideale composto da una massa puntiforme sospesa a un filo inestensibile e senza massa. Oscilla sotto l'azione della forza di gravità.
Equazione	$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Pendolo Fisico

Descrizione	Un corpo rigido che oscilla attorno a un punto di sospensione. La distribuzione della massa e il momento d'inerzia influenzano il suo moto.
Equazione	$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$
Pulsazione	$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$

Piccole Oscillazioni

Concetti teorici:

Le piccole oscillazioni si verificano attorno a un punto di equilibrio stabile. Sono caratterizzate da una forza restauratrice proporzionale allo spostamento.

Passaggi per risolvere:

1. **Tramite l'equazione delle oscillazioni:**
   - Scrivere l'equazione delle oscillazioni: $\sum \tau = I\ddot{\theta} = \frac{dL}{dt}$. $\left[\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} + I\vec{\omega}\right]$.
   - Utilizzare la forma semplificata: $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$, a cui posso arrivare da $\sum \tau = I\ddot{\theta}$. dove $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ per una molla o $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$ per un pendolo fisico.
2. **Tramite l'energia:**
   - Scrivere l'equazione dell'energia del sistema perturbato:

   $$E = K + U = \text{costante}$$

   dove $\frac{d\vec{E}}{d\theta} = \frac{d\vec{E}}{dt} = 0$.
   - Derivare il periodo: $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Funzione	Approssimazione per $\theta \ll 1$
$\sin\theta$	$\sin\theta \approx \theta$
$\cos\theta$	$\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$
$\tan\theta$	$\tan\theta \approx \theta$
$1 - \cos\theta$	$1 - \cos\theta \approx \frac{1}{2}\theta^2$
$\arcsin\theta$	$\arcsin\theta \approx \theta$
$\arctan\theta$	$\arctan\theta \approx \theta$

Molle

Concetti principali: Le molle seguono la legge di Hooke e sono caratterizzate da una forza restauratrice proporzionale allo spostamento.

Formule principali:

Forza restauratrice	$F = -k\Delta x$
Energia potenziale elastica	$U = \frac{1}{2}k\Delta x^2$
Pulsazione	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Ampiezza	$A = \sqrt{x_{\mathrm{eq}}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$

Regole di Conservazione

- **Conservazione dell'Energia**

  L'energia totale di un sistema isolato si conserva se il lavoro delle forze esterne è nullo.

  Formula:

  $$E_i = E_g + L$$

  dove $E = K + U$ è costante se $L = 0$.

  - **Quando si conserva:** Sistemi isolati senza attrito o resistenza, come pendoli ideali, molle senza dissipazione, collisioni elastiche.
  - **Quando non si conserva:** Sistemi con attrito significativo, resistenza dell'aria, o forze esterne che compiono lavoro non conservativo. nel caso di un urto anelastico, **energia cinetica non si conserva**, ma l'energia totale del sistema (inclusa l'energia interna) rimane costante.

- **Conservazione della Quantità di Moto** La quantità di moto totale di un sistema isolato si conserva se la somma delle forze esterne è nulla. **Formula:**

  $$\vec{P}_{\text{tot}} = \sum \vec{P}_i = \text{costante}$$

  Esempi:

  - **Quando si può usare:** Collisioni elastiche e anelastiche, moto di sistemi isolati.
  - **Quando non si può usare:** Sistemi con forze esterne significative, come attrito o resistenza dell'aria.

- **Conservazione del Momento Angolare** Il momento angolare totale di un sistema isolato si conserva se la somma dei momenti delle forze esterne è nulla. **Formula:**

  $$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum \vec{L}_i = \text{costante}$$

  Esempi:

  - **Quando si può usare:** Rotazione di corpi rigidi senza forze esterne, moto orbitale.
  - **Quando non si può usare:** Sistemi con momenti torcenti esterni, come motori o freni.

  Quando usarla:

  - Per studiare la rotazione di corpi rigidi o sistemi di particelle.
  - Per analizzare il moto orbitale e il comportamento di sistemi con simmetria rotazionale.

Moto in più dimensioni

Concetti principali:

- Il moto in più dimensioni richiede l'uso di vettori per descrivere posizione, velocità e accelerazione.
- Le coordinate cartesiane e polari sono i sistemi più comuni per rappresentare il moto.
- Le equazioni del moto possono essere scritte in forma vettoriale o scalare a seconda del sistema di coordinate utilizzato.
- La velocità e l'accelerazione possono essere scomposte in componenti lungo gli assi cartesiani o in direzioni radiali e tangenziali nelle coordinate polari.

Coordinate cartesiane:

- Posizione: $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$
- Velocità: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}$
- Accelerazione: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}$

Coordinate polari:

- Posizione: $\vec{r} = r\hat{r}$
- Velocità: $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$
- Accelerazione: $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$

Formule principali:

Velocità in più dimensioni	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
Accelerazione in più dimensioni	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$
Lavoro in più dimensioni	$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$
Quantità di moto in più dimensioni	$\vec{P} = m\vec{v} = m(\dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k})$
Energia cinetica in più dimensioni	$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$
Conservazione della quantità di moto	$\vec{P}_{\text{tot}} = \sum \vec{P}_i = \sum m_i\vec{v}_i$
Conservazione dell'energia	$E_{\text{tot}} = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r})$

Approfondimenti:

- La velocità angolare ω è definita come $\omega = \dot{\theta}$.
- La velocità tangenziale è data da $v_{\text{tan}} = r\omega$.
- L'accelerazione centripeta è $a_{\text{centr}} = r\omega^2$.

Problemi con più corpi

Concetti principali:

- Analisi del centro di massa di un sistema di più corpi.
- Conservazione della quantità di moto e dell'energia (se applicabile).
- Calcolo delle velocità finali dopo urti elastici e anelastici.
- Applicazione delle leggi di Newton per ogni corpo.

Formule principali:

- **Centro di massa:** $\vec{R}_{\text{CM}} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$
- **Quantità di moto totale:** $\vec{P}_{\text{tot}} = \sum \vec{P}_i$
- **Energia cinetica totale:** $K_{\text{tot}} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$
- **Velocità finale dopo urto anelastico:** $v_f = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

Esempi pratici:

- **Urto anelastico:** Due corpi di massa m_1 e m_2 si muovono con velocità v_1 e v_2. Dopo l'urto, si muovono insieme con velocità v_f. Utilizzare la conservazione della quantità di moto per calcolare v_f.
- **Urto elastico:** Due corpi si urtano elasticamente. Applicare la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica per determinare le velocità finali.
- **Centro di massa:** Calcolare la posizione del centro di massa di un sistema composto da più corpi distribuiti nello spazio.

Procedimento generale:

1. Identificare le forze esterne e verificare se il sistema è isolato.
2. Applicare la conservazione della quantità di moto per il sistema.
3. Utilizzare la conservazione dell'energia, se applicabile.
4. Calcolare il centro di massa e analizzare il moto relativo dei corpi.

Vettore posizione del centro di massa

Per un'asta sottile di lunghezza l incernierata in B, il centro di massa si trova sempre a distanza $l/2$ da B lungo la direzione dell'asta.
Se l'asta forma un angolo θ con l'orizzontale (misurato in senso antiorario a partire dall'orizzontale), il vettore posizione del centro di massa rispetto a B si scrive usando le componenti lungo $\hat{\imath}$ (orizzontale) e $\hat{\jmath}$ (verticale):

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{l}{2} (\cos\alpha\,\hat{\imath} + \sin\alpha\,\hat{\jmath})$$

Nel tuo caso, però, il vettore è scritto con segni negativi:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{l}{2} (-\cos\theta\,\hat{\imath} - \sin\theta\,\hat{\jmath})$$

Questo significa che l'origine degli assi è posta in B e l'asta si trova inizialmente sull'asse x negativo (cioè verso sinistra), e ruota verso il basso (cioè verso $-y$).
Perché i segni sono negativi?

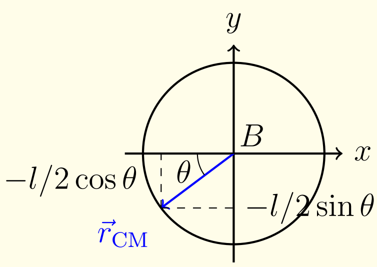
- Il termine $-\cos\theta$ indica che il centro di massa si trova a sinistra di B lungo l'asse x (quindi negativo).
- Il termine $-\sin\theta$ indica che il centro di massa si trova sotto B lungo l'asse y (quindi negativo).

Esempio alternativo: Se l'asta fosse incernierata all'origine e si trovasse nel primo quadrante, il vettore posizione sarebbe:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{l}{2} (\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath})$$

dove entrambi i termini sono positivi.

Cerchio goniometrico e segni di $\sin$ e $\cos$



Nel disegno, il vettore posizione punta nel terzo quadrante, dove sia $\cos\theta$ che $\sin\theta$ sono negativi.
Riassumendo:

- Il vettore posizione del centro di massa è negativo in entrambi gli assi perché l'asta parte da una posizione orizzontale verso sinistra e ruota verso il basso.
- I segni di $\cos\theta$ e $\sin\theta$ dipendono dal quadrante in cui si trova il centro di massa rispetto al punto di incernieramento.

Trigonometria e Calcolo

Trigonometria Applicata ai Triangoli:

- **Teorema di Pitagora:** $a^2 + b^2 = c^2$ (per triangoli rettangoli).
- **Seno:** $\sin\theta = \frac{a}{c}$.
- **Coseno:** $\cos\theta = \frac{b}{c}$.
- **Tangente:** $\tan\theta = \frac{a}{b}$.
- **Legge dei seni:** $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.
- **Legge dei coseni:** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

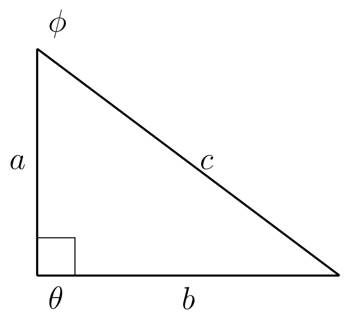


Figura 1.1: Triangolo rettangolo con lati a, b e ipotenusa c.

Formule Trigonometriche Generali:

- **Somma degli angoli:** $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$, $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$.
- **Doppio angolo:** $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$, $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$.
- **Tangente:** $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$.
- **Identità fondamentale:** $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Formule Principali per Integrali e Derivate:

- **Derivata di una potenza:** $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.
- **Derivata del seno:** $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$.
- **Derivata del coseno:** $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$.
- **Derivata della tangente:** $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$.
- **Integrale di una potenza:** $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.
- **Integrale del seno:** $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
- **Integrale del coseno:** $\int \cos x dx = \sin x + C$.
- **Integrale della tangente:** $\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$.

Capitolo 2

ELETTROMAGNETISMO

Legge di Gauss

Concetto:
La legge di Gauss collega il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa alla carica totale racchiusa dalla superficie stessa. È fondamentale per calcolare i campi elettrici generati da distribuzioni di carica con simmetria.
Formula generale:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$$

dove Q_{int} è la carica interna alla superficie $\mathcal{S}$.
Quando si usa:

- Calcolo del campo elettrico in presenza di simmetria (sfera, cilindro, piano).
- Analisi qualitativa del comportamento del campo elettrico vicino a conduttori o isolanti.

Carica interna e densità: tutti i casi

Densità di carica:

Tipo	Definizione
Densità lineare	$\lambda = \frac{dQ}{dl}$
Densità superficiale	$\sigma = \frac{dQ}{dS}$
Densità volumetrica	$\rho = \frac{dQ}{dV}$

Calcolo della carica interna (Q_{int}):

- **Conduttore:**
  - La carica si distribuisce sulla superficie (*non esiste carica libera all'interno di un conduttore in equilibrio elettrostatico*).
  - Q_{int} è la somma delle cariche superficiali eventualmente racchiuse dalla superficie gaussiana.
- **Isolante:**
  - La carica può essere distribuita nel volume (o su una superficie).
  - La carica interna si trova integrando la densità di carica:

$$Q_{\text{int}} = \int_{V_{\text{int}}} \rho(\vec{r})\, dV$$

  - Se la carica è distribuita solo su una superficie:

$$Q_{\text{int}} = \int_{S_{\text{int}}} \sigma(\vec{r})\, dS$$

  - Se la carica è distribuita lungo una linea:

$$Q_{\text{int}} = \int_{l_{\text{int}}} \lambda(\vec{r})\, dl$$

Aree e Volumi delle Principali Figure Geometriche

Figura	Area	Volume
Quadrato (lato a)	$A = a^2$	—
Rettangolo (a, b)	$A = a \cdot b$	—
Cerchio (raggio R)	$A = \pi R^2$	—
Triangolo (b, h)	$A = \frac{1}{2} bh$	—
Parallelogramma (b, h)	$A = b\,h$	—
Trapezio (B, b, h)	$A = \frac{(B+b)h}{2}$	—
Ellisse (a, b)	$A = \pi ab$	—
Cubo (lato a)	$A = 6a^2$	$V = a^3$
Parallelepipedo (a, b, c)	$A = 2(ab + ac + bc)$	$V = abc$
Sfera (raggio R)	$A = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$
Cilindro (raggio R, altezza h)	$A = 2\pi R(R + h)$	$V = \pi R^2 h$
Cilindro cavo (R_1, R_2, h)	$A = 2\pi(R_2 + R_1)h + 2\pi(R_2^2 - R_1^2)$	$V = \pi(R_2^2 - R_1^2)h$
Cono (raggio R, altezza h)	$A = \pi R(R + \sqrt{R^2 + h^2})$	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$
Piramide regolare (A_b, P_b, h)	$A = A_b + \frac{P_b}{2} a$	$V = \frac{1}{3} A_b h$
Guscio sferico (raggio esterno R_2, raggio interno R_1)	$A = 4\pi(R_2^2 - R_1^2)$	$V = \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)$
Toro (raggio grande R, raggio piccolo r; $r < R$)	$A = 4\pi^2 Rr$	$V = 2\pi^2 Rr^2$

Dipolo elettrico: formule principali

Formula	Breve spiegazione
$\vec{P} = Q\vec{d}$	Momento di dipolo elettrico: prodotto tra la carica Q e il vettore distanza $\vec{d}$ che separa le cariche.
$E = \frac{2k}{z^3}P$	Campo elettrico sull'asse di un dipolo, a distanza z dal centro: $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$
$\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E}$	Momento torcente su un dipolo immerso in campo elettrico esterno.

Carica Puntiforme Formule

Formula	Breve spiegazione
Densità di energia $= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$	Energia immagazzinata per unità di volume nel campo elettrico.
$\vec{F}_E = q\vec{E}$	Forza esercitata su una carica q dal campo elettrico $\vec{E}$.
$L = q_0 \int_{x_i}^{x_f} \vec{E} \cdot d\vec{s}$	Lavoro fatto per spostare una carica q_0 nel campo elettrico.
$\Delta V = \int_{x_i}^{x_f} \vec{E} \cdot d\vec{s}$	Differenza di potenziale elettrico tra due punti.
$\Delta U = \Delta V\, q_0$	Variazione di energia potenziale di una carica q_0.
$L = k\frac{q_0 q}{r}$	Energia potenziale elettrica tra due cariche puntiformi poste a distanza r.
$\Delta V = -\frac{kq}{r}$	Potenziale elettrico generato da una carica puntiforme a distanza r.

Energia e potenziale: cariche puntiformi

Formula	Breve spiegazione
$V_q = k\dfrac{q}{r}$	Potenziale elettrico generato da una carica q a distanza r.
$V_{q_0} = k\dfrac{q_0}{r}$	Potenziale elettrico generato da una carica q_0 a distanza r.
$U = V_q q_0 = V_{q_0} q = k\dfrac{qq_0}{r}$	Energia potenziale elettrica di interazione tra due cariche puntiformi.

Energia potenziale elettrica e differenza di potenziale

Energia potenziale:

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\, V(\vec{r})\, dV$$

dove ρ è la densità di carica e V il potenziale elettrico.

Differenza di potenziale (formule generali):

$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

dove $\vec{E}$ è il campo elettrico, a e b sono i punti tra cui si calcola la differenza di potenziale.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dV'$$

Potenziale generato da una distribuzione di carica.

Conduttori vs Dielettrici:

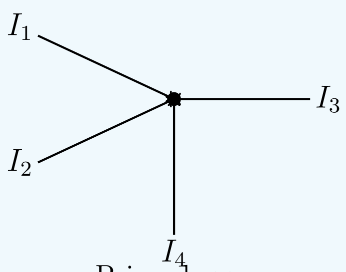
- **Conduttori:** La carica libera si distribuisce sulla superficie, il potenziale è costante all'interno ($V = \text{cost}$). L'energia potenziale si concentra sulle superfici.
- **Dielettrici:** La carica non è libera ma legata alle molecole; si possono formare cariche di polarizzazione volumetriche e superficiali. L'energia potenziale è distribuita nel volume e dipende dalla polarizzazione del materiale.

Formule fondamentali circuiti elettrici e leggi di Kirchoff

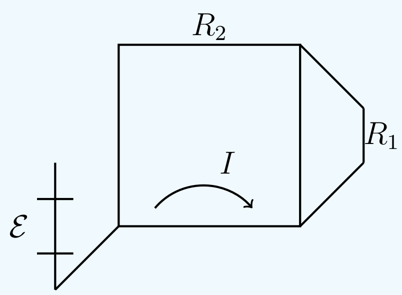
Formula	Breve spiegazione
$I = \frac{dq}{dt} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$	Corrente elettrica come flusso di carica o integrale della densità di corrente.
$J = nqv_d$	Densità di corrente: prodotto tra cariche, densità e velocità di deriva.
$J = \frac{I}{A}$	Densità di corrente come rapporto tra corrente e area.
$R = \rho \frac{L}{A}$	Resistenza: dipende dalle proprietà del materiale, lunghezza e area della sezione.
$\rho = \frac{E}{J}$	Resistività: rapporto tra campo elettrico e densità di corrente.
$\Delta V = RI$	Legge di Ohm: relazione tra tensione, resistenza e corrente.
$P = RI^2$	Potenza dissipata da una resistenza.
$\Delta U = \Delta V \int_0^t I dt = Q\Delta V$	Energia fornita dal generatore o accumulata.
$P = \frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt}\Delta V = I\Delta V$	Potenza elettrica fornita o assorbita.

Leggi di Kirchoff:

- **Prima legge (correnti):** La somma delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti ($\sum I_{\text{in}} = \sum I_{\text{out}}$).
- **Seconda legge (tensioni):** La somma algebrica delle differenze di potenziale in un circuito chiuso è zero ($\sum \Delta V = 0$).



Prima legge:
$\sum I_{in} = \sum I_{out}$



Seconda legge:
$\sum \Delta V = 0$ (circuito chiuso)

Condensatori: formule e comportamento con generatore di tensione

Formule fondamentali:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d}$$

Capacità di un condensatore piano (con dielettrico): A = area delle armature, d = distanza, ε_r = costante dielettrica relativa.

$$Q = CV$$

Carica accumulata: C = capacità, V = tensione applicata.

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

Energia immagazzinata nel condensatore.

Comportamento con generatore di tensione:

- Collegando un condensatore ideale a un generatore, la carica sulle armature cresce fino a raggiungere $Q = CV$.
- In presenza di un dielettrico, la capacità aumenta e il condensatore può immagazzinare più energia.
- Durante la **carica**, la corrente decresce esponenzialmente (in presenza di una resistenza R si ha: $Q(t) = CV(1 - e^{-t/RC})$).
- Durante la **scarica** attraverso una resistenza R, la carica sul condensatore diminuisce esponenzialmente secondo la legge $Q(t) = Q_0 e^{-t/(RC)}$, dove Q_0 è la carica iniziale.
- Il condensatore si oppone alle variazioni rapide di tensione: in regime stazionario, si comporta come un circuito aperto per le correnti continue.
- Quando il condensatore è **completamente carico**, la corrente che passa attraverso di esso è pari a zero, perché agisce come un **ramo aperto**.
- Quando il **condensatore è completamente scarico**, all'avvio della carica si comporta come un **ramo chiuso** e lascia passare la massima corrente possibile nel circuito.

Magnetismo: formule principali e utilizzi

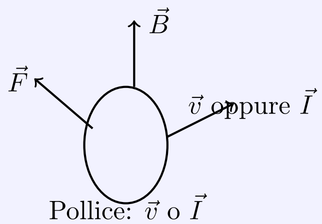
Formule principali:

Forza di Lorentz:	$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ (q = carica, $\vec{v}$ = velocità, $\vec{B}$ = campo magnetico)
Forza su un filo percorso da corrente:	$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$ (I = corrente, $\vec{l}$ = vettore lunghezza)
Momento torcente su una spira:	$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ ($\vec{\mu}$ = momento di dipolo magnetico)
Momento di dipolo magnetico:	$\vec{\mu} = NI\vec{A}$ (N = spire, I = corrente, $\vec{A}$ = area)
Campo magnetico (Biot-Savart) generato da un filo:	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Campo magnetico di un filo piegato ad arco:	$B = \frac{\mu_0 I\theta}{4\pi r}$

Utilizzi:

- Calcolo della forza su cariche e correnti in presenza di campo magnetico (motori, relè, acceleratori).
- Analisi del comportamento di spire e solenoidi (elettromagneti, strumenti di misura).
- Determinazione del campo magnetico generato da fili e bobine (trasformatori, induttori).

Regola della mano destra (visuale):



Pollice: $\vec{v}$ o $\vec{I}$
Indice: $\vec{B}$
Medio: $\vec{F}$

Magnetismo: formule

Legge di Gauss per il magnetismo:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \qquad [\text{Wb}]$$

Il flusso magnetico totale attraverso una superficie chiusa è sempre zero.

Flusso magnetico attraverso una superficie:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = BS\cos\theta$$

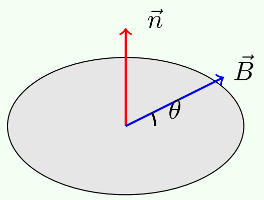
La superficie S deve essere scelta in base al problema:

- Se il campo è uniforme e la superficie è piana, basta prendere S come area geometrica.
- Se la superficie è curva o il campo non è uniforme, si integra su tutta la superficie.
- θ è l'angolo tra il vettore campo $\vec{B}$ e la normale alla superficie.

Casi particolari: spira e bobina

- **Spira piana:** $\Phi_B = BA\cos\theta$, dove A è l'area della spira.
- **Bobina con N spire:** $\Phi_B = NBA\cos\theta$

Disegno esplicativo:



Superficie S

Nota: La superficie da scegliere è quella attraversata dalle linee di campo magnetico di interesse. In una bobina, si usa l'area interna alle spire; per superfici chiuse, il flusso totale è sempre zero (come stabilito dalla legge di Gauss per il magnetismo).

Legge di Faraday e Ampère-Maxwell: formule

Legge di Faraday:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

La forza elettromotrice indotta in un circuito chiuso è uguale all'opposto della variazione del flusso magnetico nel tempo.

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = BA\cos(\alpha)$$

Il flusso magnetico è il prodotto tra campo magnetico $\vec{B}$ e area A proiettata nella direzione di $\vec{B}$.

Nelle bobine:

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Per una bobina con N spire, la forza elettromotrice indotta è moltiplicata per N.

Legge di Ampère-Maxwell:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{conc}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$$

Il circuito integrale del campo magnetico è uguale alla somma della corrente concatenata e della corrente di spostamento.

Iconcatenata (corrente concatenata):

$$I_{\text{conc}} = \sum_{\text{conduttori}} I_k$$

La corrente concatenata è la somma algebrica delle correnti che attraversano la superficie racchiusa dal percorso di integrazione.

Scelta della superficie:

- Nella legge di Faraday, la superficie S è quella delimitata dal circuito su cui calcoli la $\mathcal{E}$. L'area da usare è quella effettivamente racchiusa dalla spira o bobina, e l'orientazione della normale determina il segno del flusso.
- Nella legge di Ampère-Maxwell, la superficie è quella "aperta" racchiusa dal percorso di integrazione (anello di Ampère): devi considerare tutte le correnti che attraversano questa superficie per calcolare I_{conc}.
- In generale, la superficie da considerare è quella attraversata dalle linee di campo (magnetico o elettrico) che contribuiscono al flusso e alle correnti concatenate.

Induttanza

Induttori & Induttanza

$$L = N\frac{\Phi_B}{i} \qquad [H]$$

$$\mathcal{E}_L = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{di}{dt} \qquad [V]$$

L'induttanza L è capacità di opporsi alle variazioni tramite autoinduzione.

Autoinduzione magnetica

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt}$$

La tensione ai capi dell'induttore è proporzionale alla velocità di variazione della corrente.

Circuiti RL

- *Equazione differenziale:* $\mathcal{E}_a = Ri + L\frac{di}{dt}$
- *Carica induttore:* $i(t) = \frac{\mathcal{E}_a}{R}\left(1 - e^{-tR/L}\right)$
- *Scarica induttore:* $i(t) = i_0 e^{-tR/L}$

All'accensione la corrente aumenta gradualmente, allo spegnimento diminuisce esponenzialmente.

Energia nell'induttore

$$U = \frac{1}{2}Li^2$$

L'energia si accumula nel campo magnetico generato dall'induttore.

Densità di energia magnetica

$$u = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Energia per unità di volume nel campo magnetico.

Circuiti LC

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad [Hz]$$

$$V_{\text{tot}} = \frac{1}{2}q^2/C + \frac{1}{2}Li^2$$

$$q(t) = Q\cos(\omega t + \theta)$$

Oscillazioni tra energia elettrica (condensatore) e magnetica (induttore).

Generatore di corrente alternata

$$\Phi_B(t) = BA\cos(\omega t)$$

Il flusso magnetico in una spira varia periodicamente generando tensione alternata.

Trasformatore

$$\frac{\Delta V_1}{N_1} = \frac{\Delta V_2}{N_2}$$

Integrale	**Risultato**	**Strategia**
$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	Immediato
$\int \frac{1}{x} dx$	$\ln\|x\| + C$	Immediato
$\int e^{ax} dx$	$\frac{e^{ax}}{a} + C$	Immediato/Sostituzione
$\int \sin(ax) dx$	$-\frac{1}{a}\cos(ax) + C$	Sostituzione
$\int \cos(ax) dx$	$\frac{1}{a}\sin(ax) + C$	Sostituzione
$\int \frac{1}{1+x^2} dx$	$\arctan(x) + C$	Immediato
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\arcsin(x) + C$	Immediato
$\int f'(x) e^{f(x)} dx$	$e^{f(x)} + C$	Sostituzione
$\int u dv$	$uv - \int v du$	Per Parti
$\int \ln x dx$	$x \ln x - x + C$	Per Parti
$\int x e^{ax} dx$	$\frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$	Per Parti
$\int \frac{dx}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\|ax + b\| + C$	Sostituzione
$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}}$	$\frac{2}{a}\sqrt{ax + b} + C$	Sostituzione

Tabella 2.1: Integrali principali e strategie di calcolo