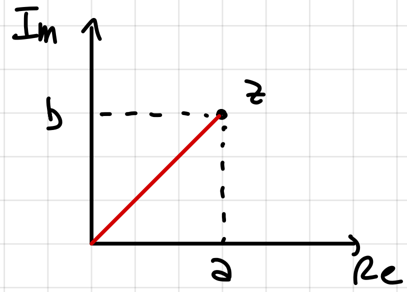
RIPASSO MATEMATICA



COORD. CARTESIANE : $z = a + jb$

COORD. POLARI : $z = \rho e^{j\varphi} = \underset{\text{MODULO}}{\rho}\left(\cos(\underset{\text{FASE}}{\varphi}) + j\sin(\varphi)\right)$

$$\left[\begin{array}{l}\text{CART} \rightarrow \text{POLARI} \\ \varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right), \quad \rho = \sqrt{a^2 + b^2}\end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{l}\text{POLARI} \rightarrow \text{CART} \\ a = \rho\cos(\varphi), \quad b = \rho\sin(\varphi)\end{array}\right]$$

OPERAZIONI NUMERI COMPLESSI

- $\bar{z} = a - jb$ (COMPLESSO CONIUG)
- $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{j\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{j\varphi_2} = (\rho_1\rho_2) e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$ (POLARI)

$$= (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + j(a_1 b_2 + b_1 a_2) \quad \text{(CART)}$$

- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1 e^{j\varphi_1}}{\rho_2 e^{j\varphi_2}} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$ (POLARI)

$$= \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} \cdot \frac{a_2 - jb_2}{a_2 - jb_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + j(a_1 b_2 - b_1 a_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

- $|z|^2 = z\bar{z} = \rho e^{j\varphi} \cdot \rho e^{-j\varphi} = \rho^2$

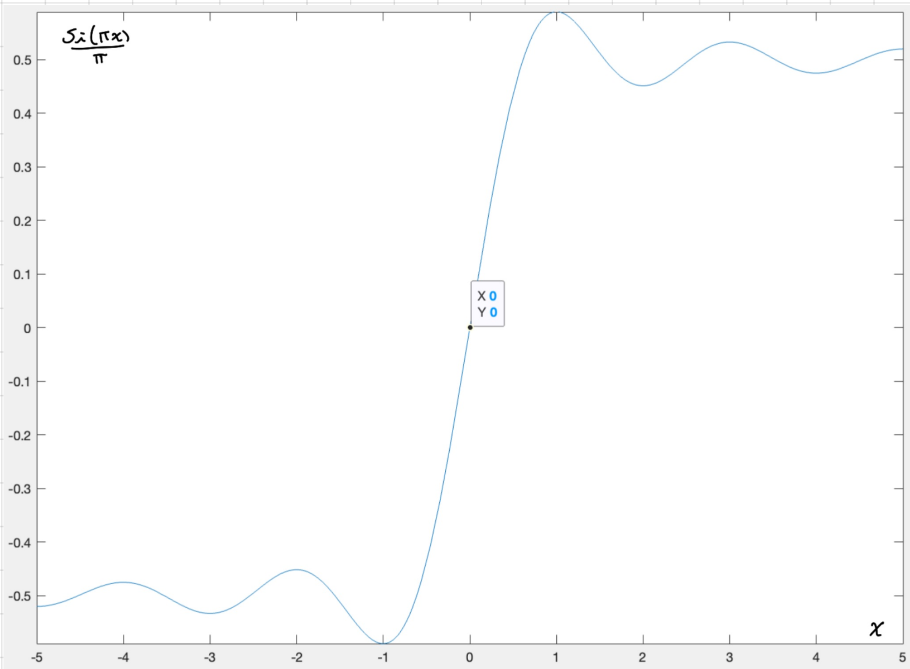
FORMULE TRIGONOMETRICHE

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \\ \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha)) \\ \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)) \\ 2\cos\alpha\sin\alpha = \sin(2\alpha)\end{array}\right.$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad \cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$$\int \frac{\sin(x)}{x}\,dx = Si(x) \rightarrow \int \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \frac{Si(\pi x)}{\pi}$$

FUNZIONE SENO INTEGRALE



$$\int \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right]^2 dx = \frac{2\pi x\, Si(2\pi x) + \cos(2\pi\ ) - 1}{2\pi^2 x}$$

TEORIA DEI SEGNALI DETERMINISTICI

UN SEGNALE È QUALSIASI COSA TRASPORTI INFORMAZIONE, SI DIVIDONO IN:

- <u>DETERMINISTICI</u>: NOTI A PRIORI, SPESSO DESCRITTI COME FUNZIONE DI QUALCHE ALTRA GRANDEZZA FISICA NEL TEMPO
- <u>ALEATORI</u>: SEGNALI SOLO STATISTICAMENTE NOTI

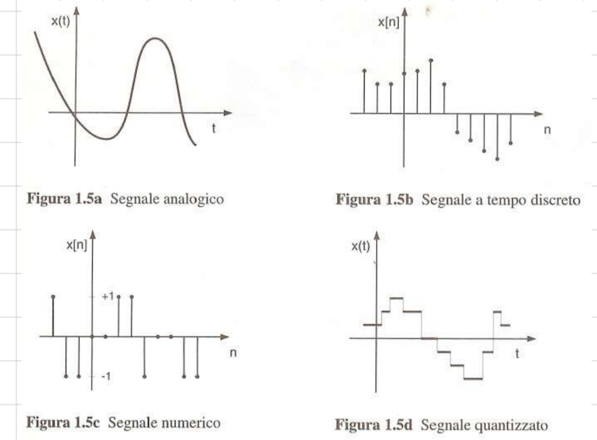


Figura 1.5a Segnale analogico
Figura 1.5b Segnale a tempo discreto
Figura 1.5c Segnale numerico
Figura 1.5d Segnale quantizzato

I SEGNALI SI DIVIDONO INOLTRE IN:

- <u>ANALOGICI</u>: CONTINUI SIA NEL TEMPO CHE IN AMPIEZZA
- <u>SEQUENZE</u>: DISCRETI NEL TEMPO E CONTINUI IN AMPIEZZA
- <u>QUANTIZZATI</u>: CONTINUI NEL TEMPO E DISCRETI IN AMPIEZZA
- <u>DIGITALI</u>: DISCRETI SIA NEL TEMPO CHE IN AMPIEZZA

PER ORA TRATTIAMO SEGNALI <u>DETERMINISTICI ANALOGICI</u> DELLA FORMA $x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, PER TALI SEGNALI VALGONO QUESTE DEFINIZIONI:

POTENZA ISTANTANEA $$P_x(t) = |x(t)|^2 \quad \left(= x^2(t) \text{ SE } x \in \mathbb{R}\right)$$

ENERGIA $$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt$$

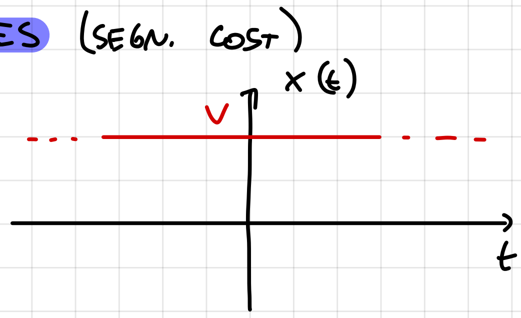
POTENZA MEDIA DEL SEGNALE TRONCATO $$P_{x_T} = \frac{E_{x_T}}{T} \to \text{ENERGIA TRONCATA DA } -\tfrac{T}{2} \text{ A } \tfrac{T}{2}$$

POTENZA MEDIA $$P_x = \lim_{T\to\infty} P_{x_T} = \lim_{T\to\infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\,dt$$

EN. FINITA → SEGN. FISICI

EN. INFINITA → SEGN. IDEALI

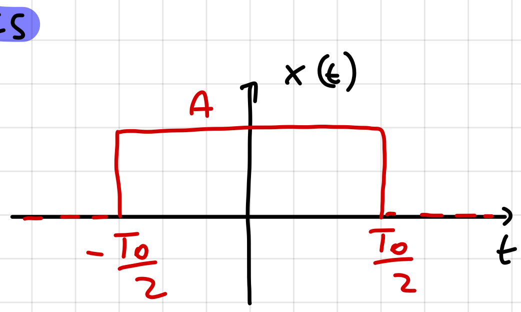
ES (SEGN. COST)



$$P_x(t) = |x(t)|^2 = V^2$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} V^2\,dt = V^2 t\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \infty \quad \text{(EN. INFINITA)}$$

ES

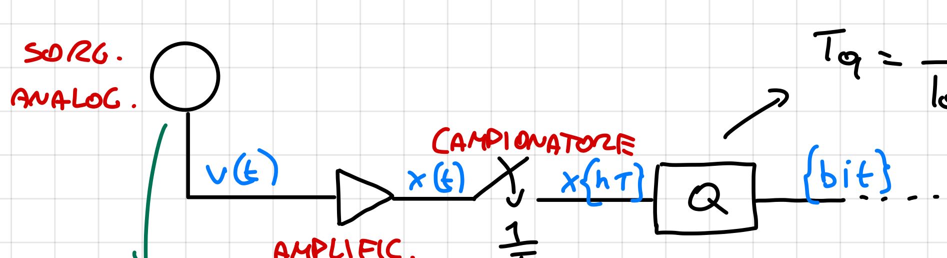


$$P_x(t) = |x(t)|^2 = \begin{cases} 0 & t < -\frac{T_0}{2} \text{ e } t > \frac{T_0}{2} \\ A^2 & -\frac{T_0}{2} \le t \le \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-\frac{T_0}{2}} 0\,dt + \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A^2\,dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{+\infty} 0\,dt = A^2 t\Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} = A^2\left(\frac{T_0}{2} + \frac{T_0}{2}\right) = A^2 T_0$$

POSSIAMO INIZIARE A DISEGNARE LO SCHEMA DI UN <u>SISTEMA DI COMUNICAZIONE</u>, CIOÈ UN SISTEMA CHE ESTRAE INFORMAZIONI DA UN SEGNALE E LO TRASMETTE

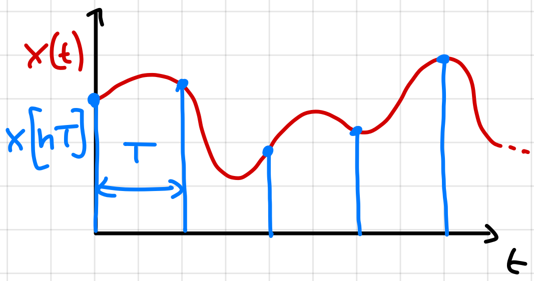
$$T_q = \frac{T}{\log_2(L)}$$



DI SOLITO LA SORGENTE ANALOGICA È UNA TENSIONE CHE VA AMPLIFICATA

CAMPIONATORE

FOTOGRAFA IL SEGNALE CON UNA FREQ. $F = \frac{1}{T}$ [Hz]

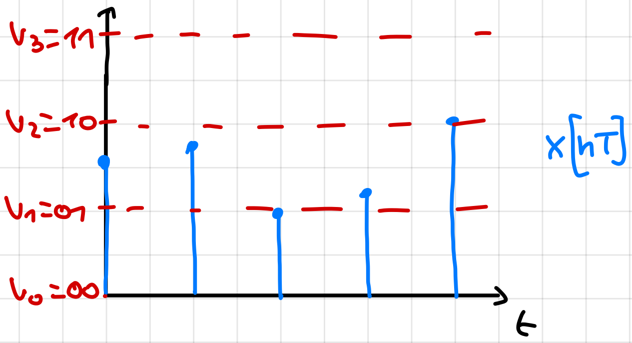


PIÙ T È PICCOLO PIÙ SONO PRECISO.

VEDREMO CHE BASTA SCEGLIERLO PIÙ PICCOLO DI UN CERTO VALORE (TH. CAMPIONAMENTO)

QUANTIZZATORE

CONVERTE IL SEGNALE CAMPIONATO (SEQ. VALORI CONTINUI) IN UN SEGNALE DIGITALE (SEQ. DI VALORI DISCRETI)



DISCRETIZZO IL SEGNALE SU $L = 4$ LIVELLI

RISPETTO A PRIMA QUI INTRODURREMO SEMPRE ERRORI, A MENO DI PRENDERE $L = \infty$

TRASFORMATA CONTINUA DI FOURIER

OPERAZIONE MATEMATICA CHE CONVERTE UN SEGNALE NELLE FREQUENZE CHE LO DESCRIVONO (SPETTRO)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \quad \text{(EQUAZIONE DI ANALISI)}$$

$$\Updownarrow$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df \quad \text{(EQUAZIONE DI SINTESI)}$$

$$x(t) \xrightarrow{TCF} X(f) \qquad X(f) \xrightarrow{ATCF} x(t)$$

INTRODUCO LA FUNZIONE RETTANGOLO

$$\underset{\text{DURATA}}{rect\left(\frac{t}{T}\right)} = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t}\, dt = \frac{1}{-j2\pi f}\, e^{-j2\pi f t}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{-j2\pi f}\left(e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}\right) =$$

$$(2j\sin\alpha = e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \quad (\alpha = -\pi f T)$$

$$= \frac{1}{-\cancel{j2}\pi f}\left(-\cancel{2j}\sin(\pi f T)\right) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = T\,\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

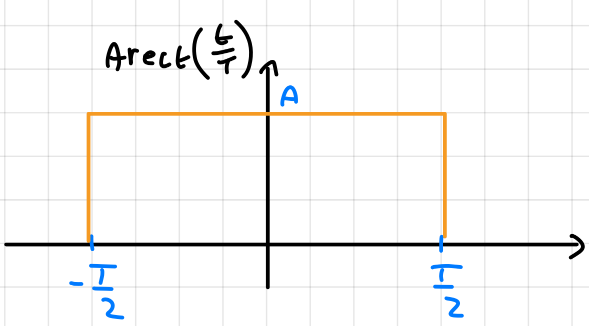
→ RICORRE COSÌ SPESSO CHE È STATA DEFINITA OPPOSTA LA FUNZIONE SENO CARDINALE

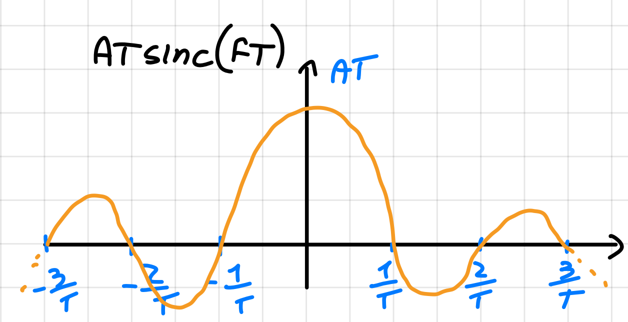
$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

QUINDI IN GENERALE

$$A\,rect\left(\frac{t}{T}\right) \Longleftrightarrow AT\operatorname{sinc}(fT)$$

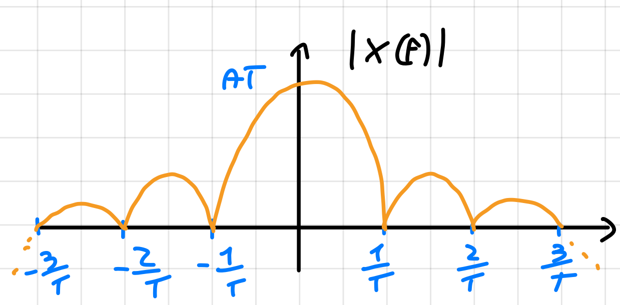
$$A\,rect(x) = \begin{cases} A & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ALTRIM.} \end{cases}$$

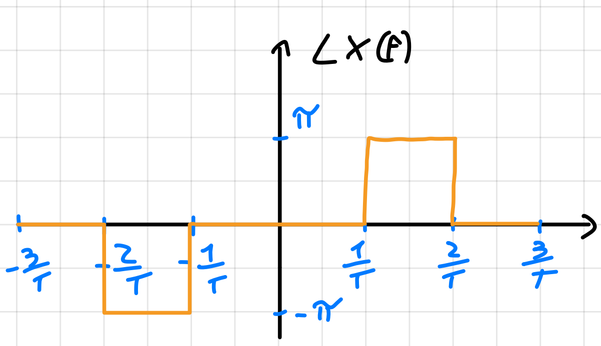




DI SOLITO $X(f)$ È COMPLICATO, QUINDI SI DISEGNANO SEPARATI AMPIEZZA E FASE

NEL NOSTRO CASO:



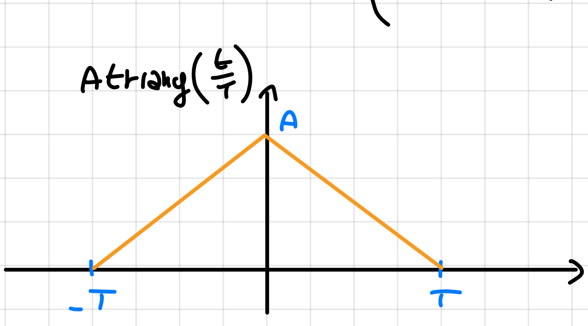


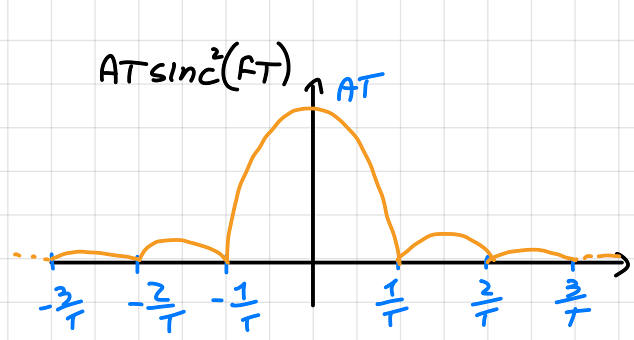
ANALOGAMENTE LA FUNZIONE TRIANGOLARE

$$triang\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{T} & -T \leq t \leq 0 \\ 1 - \frac{t}{T} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{ALTRIM.} \end{cases}$$

HA COME TRASFORMATA sinc^2

$$A\,triang\left(\frac{t}{T}\right) \Longleftrightarrow AT\operatorname{sinc}^2(fT)$$





LE ALTE FREQ. SONO RESPONSABILI DEI CAMBIAMENTI VELOCI DEL SEGNALE, MENTRE LE BASSE DI QUELLI LENTI.
rect e triang in $\pm\frac{T}{2}$ e $\pm T$ VARIANO ISTANTANEAMENTE E INFATTI IL LORO SPETTRO DI AMPIEZZA SI ESTENDE INFINITAMENTE

TEOREMI DELLA TRASFORMATA CONTINUA DI FOURIER

SIMMETRIA HERMITIANA

SUPPONIAMO $x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (SEGNALE REALE) $\left(x(t) = x^*(t)\right)$

ALLORA $$X(-f)^* = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x(t)\, e^{j2\pi f t}\right)^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^*\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = X(f)$$

ANCHE $X^*(f) = X(-f)$

QUINDI $$X(f) = |X(f)|\, e^{j\varphi(f)} = |X(-f)|\, e^{-j\varphi(-f)} = X(-f)^*$$

PER CUI $$\begin{cases} |X(-f)| = |X(f)| \\ -\angle X(-f) = \angle X(f) \end{cases}$$

OGNI SEGNALE REALE HA LO SPETTRO DI AMPIEZZA PARI E SPETTRO DI FASE DISPARI

LINEARITÀ

DATI $x_1(t) \Leftrightarrow X_1(f)$, $x_2(t) \Leftrightarrow X_2(f)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

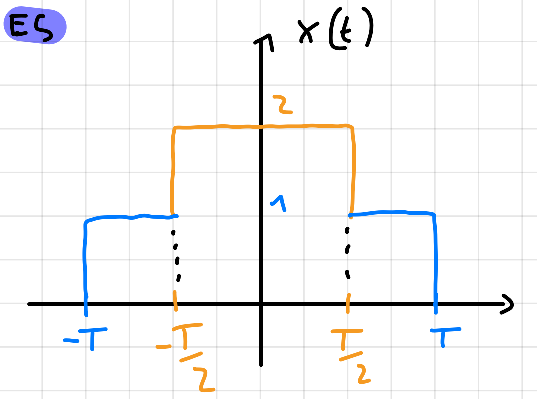
SE $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ ALLORA $X(f) = \alpha_1 X_1(f) + \alpha_2 X_2(f)$

DIM

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\right) e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \alpha_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\, e^{-j2\pi f t} + \alpha_2 \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t)\, e^{-j2\pi f t} = \alpha_1 X_1(f) + \alpha_2 X_2(f)$$

ES



$x_1 = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ $\quad X_1(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)$

$x_2 = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$ $\quad X_2(f) = 2T\,\mathrm{sinc}(2fT)$

$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ $\quad X(f) = 2T\,\mathrm{sinc}(2fT) + T\,\mathrm{sinc}(fT)$

RITARDO

SIA $x(t) \Leftrightarrow X(f)$

ALLORA $x(t - t_0) \Leftrightarrow X(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$

- TRASLANDO UN SEGNALE NON CAMBIO IL SUO ANDARE "LENTO" O "VELOCE", QUINDI LO SPETTRO IN AMPIEZZA NON CAMBIA
- QUANDO DUE SEGNALI COMPLESSI SI MOLTIPLICANO I MODULI SI MOLTIPLICANO E LE FASI SI SOMMANO

DIM

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \overset{*}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, e^{-j2\pi f(\alpha + t_0)}\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, e^{-j2\pi f \alpha}\, e^{-j2\pi f t_0}\, d\alpha =$$

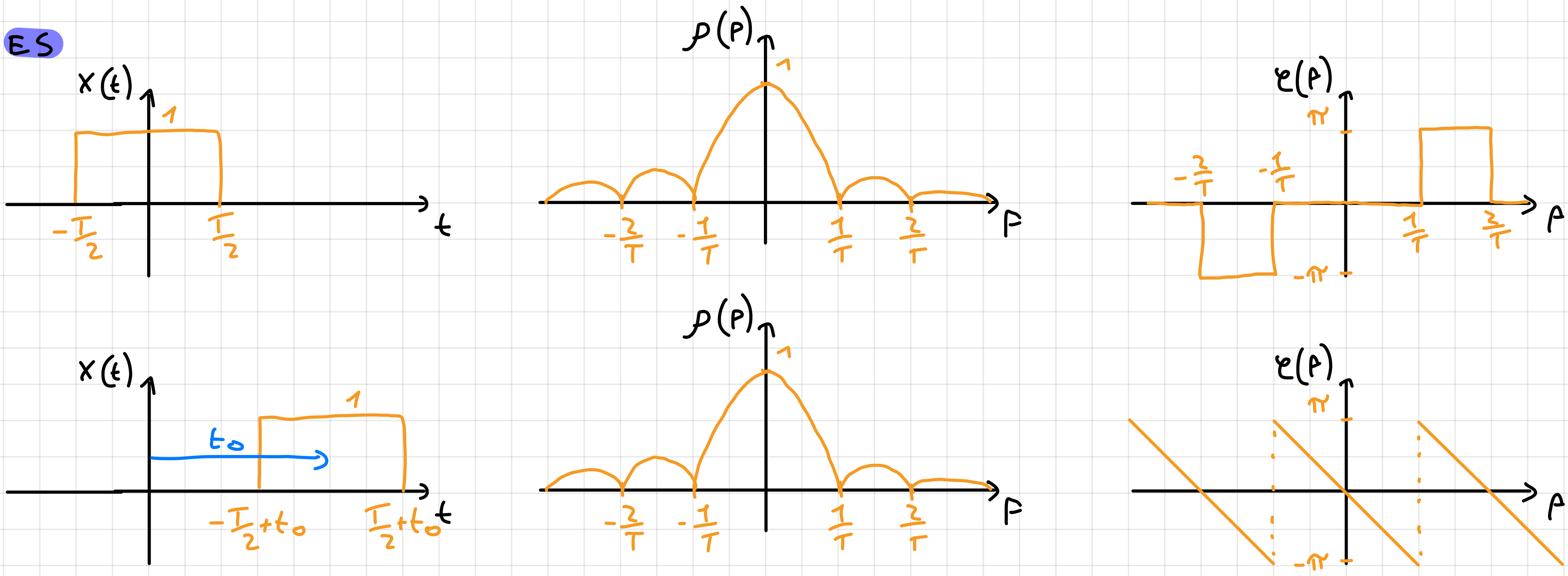
$$= e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, e^{-j2\pi f \alpha}\, d\alpha = X(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$$

* CAMBIO VAR

$\alpha = t - t_0$

$d\alpha = (1)\, dt = dt$

ES



DUALITÀ

SE $x(t) \Leftrightarrow X(f)$

ALLORA $X(t) \Leftrightarrow x(-f)$

DIM

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \qquad x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

ALLORA

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, e^{-j2\pi t \alpha}\, d\alpha \overset{*}{=} -\int_{+\infty}^{-\infty} x(-f)\, e^{j2\pi f t}\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

CAMBIO VAR

$f = -\alpha$

$df = -d\alpha$

QUESTO TEOREMA È UN'ALTRA PROVA DELLA RELAZIONE INVERSA TRA TEMPO E FREQ, INFATTI CI DICE CHE OGNI SEGNALE LIMITATO NEL TEMPO HA UNO SPETTRO ILLIMITATO IN FREQ E VICEVERSA

⇓

QUELLI CHE CI INTERESSANO

ES

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$$T\,\mathrm{sinc}(tT) \Leftrightarrow \mathrm{rect}\left(-\frac{f}{T}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right) \quad (\text{rect È PARI})$$

MODULAZIONE

SIA $x(t) \Leftrightarrow X(f)$

ALLORA $x(t)\cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(f-f_0) + X(f+f_0)\right]$

DIM

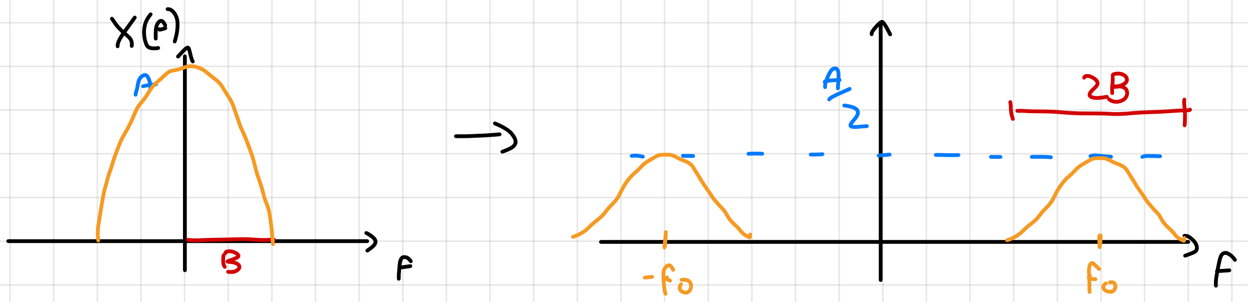
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f_0 t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\frac{1}{2}\left[e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right] e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\, e^{-j2\pi f t}\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f_0 t}\, e^{-j2\pi f t}\, dt\right] =$$

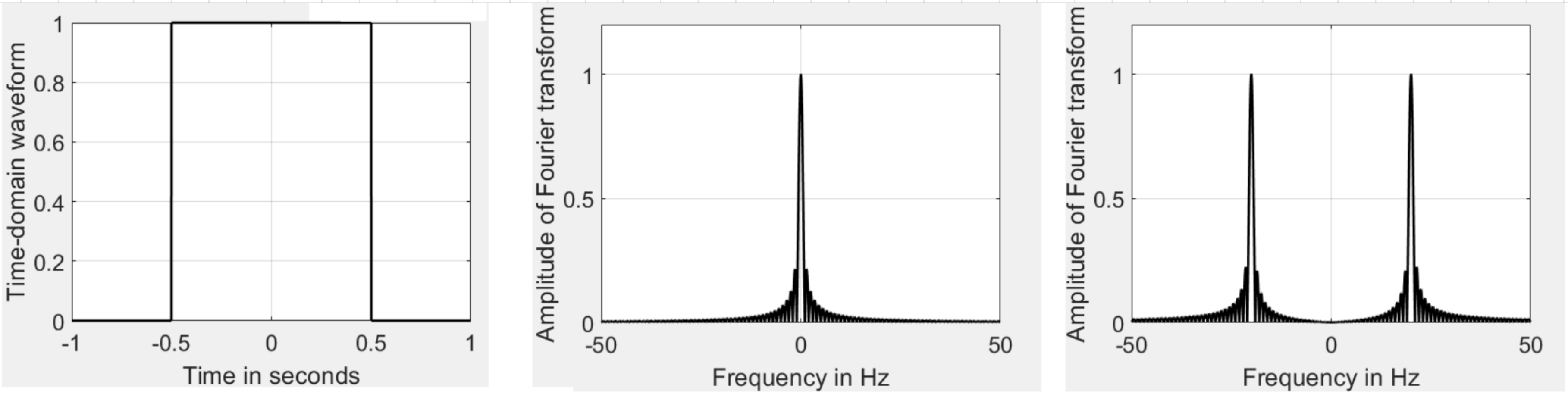
$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi t(f-f_0)}\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi t(f+f_0)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[X(f-f_0) + X(f+f_0)\right]$$

ES



SE DEFINISCO BANDA DI UN SEGNALE L'INTERVALLO POSITIVO DI FREQ. TC $|X(f)| \neq 0$ ALLORA MODULANDO IL SEGNALE LA BANDA RADDOPPIA, QUESTA È DIVERSA DALLA FREQ PORTANTE f_0, SE $f_0 = 0$ UN SEGNALE È DETTO IN BANDA BASE



$x(t)$ (rect) $\qquad X(f) \qquad TCF[x(t)\cos(2\pi f_0 t)]$

IMPLICAZIONI TH:

SUPPONIAMO DI ESSERE IN UNA STAZIONE RADIO E DI VOLER TRASMETTERE UN SEGNALE, DEVO MODULARLO PER FORZA:

- SE TUTTI TRASMETTESSERO IN BANDA BASE NON SI CAPIREBBE NIENTE (TUTTE LE RADIO SI PARLEREBBERO SOPRA)
- UN SEGNALE AUDIO (IN QUESTO CASO) HA UNA BANDA DI CIRCA 20 KHz, SE VOLESSI TRASMETTERLO IN BANDA BASE SERVIREBBERO ANTENNE GROSSE ~ 4 km

VISTO CHE SO CHE PRIMA O POI VA MODULATO POSSO:

- GENERARLO GIÀ MODULATO
- GENERARLO IN BANDA BASE E POI MODULARLO DOPO

DI SOLITO QUESTA PERCHÉ:

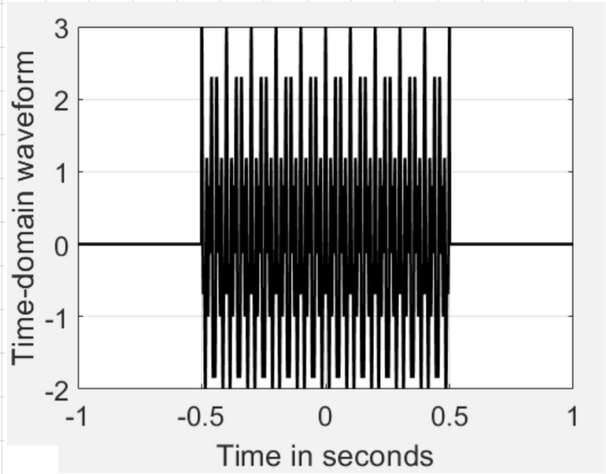
- USO HW INDIPENDENTE DALLA FREQ DI MODULAZIONE PER GENERARLO, QUINDI PIÙ FACILE ANCHE DA COSTRUIRE
- GENERANDO IL SEGNALE GIÀ MODULATO SAREBBE PIÙ DIFFICILE DA MANEGGIARE

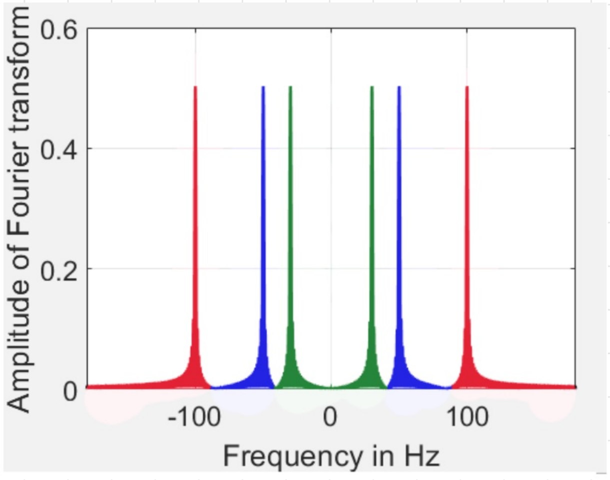
SUPPONGO DI ESSERE UN RICEVITORE RADIO, VEDO VARI SEGNALI E MI VOGLIO SINTONIZZARE SU UNO. SO CHE PRIMA O POI DOVRÒ FILTRARLO PER TOGLIERE FREQ CHE NON MI INTERESSANO E CHE POTREBBERO DISTURBARE I COMPONENTI ELETTRONICI, E DEMODULARLO PERCHÉ VOGLIO RIOTTENERE IL SEGNALE ORIGINALE.
COME ORDINE SCELGO PRIMA DI DEMODULARE E POI FILTRARE.

PERCHÉ

- COSTRUIRE UN FILTRO CHE FACCIA PASSARE UNA PICCOLA FETTA DI BANDA OGNI VOLTA DIVERSA (CON FREQ PORTANTE >> BANDA) È COMPLICATO
- RIPORTARE IL SEGNALE IN BANDA BASE E POI FILTRARLO È PIÙ SEMPLICE.

INFINE, SE MODULANDO UN SEGNALE L'HO MOLTIPLICATO PER UN COSENO, PER DEMODULARLO DEVO DIVIDERE PER UN COSENO. TALE OPERAZIONE È COMPLICATA DA UN PUNTO DI VISTA FISICO.
SI PUÒ DIMOSTRARE CHE BASTA MOLTIPLICARE NUOVAMENTE PER IL LO STESSO COSENO MOLTIPLICATO 2 :





$x_1(t) = g(t)\cos(2\pi F_1 t)$

$x_2(t) = g(t)\cos(2\pi F_2 t)$

$x_3(t) = g(t)\cos(2\pi F_3 t)$

X_{TOT} : 3 SEGNALI NEL TEMPO — 3 SEGNALI MODULATI A 3 FREQ DIVERSE F_1 F_2 F_3

SUPPONIAMO CHE VOGLIA RECUPERARE x_1 (DEVO MOLTIPLICARE X_{TOT} PER $2\cos(2\pi F_1 t)$)

$X_{TOT}(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$

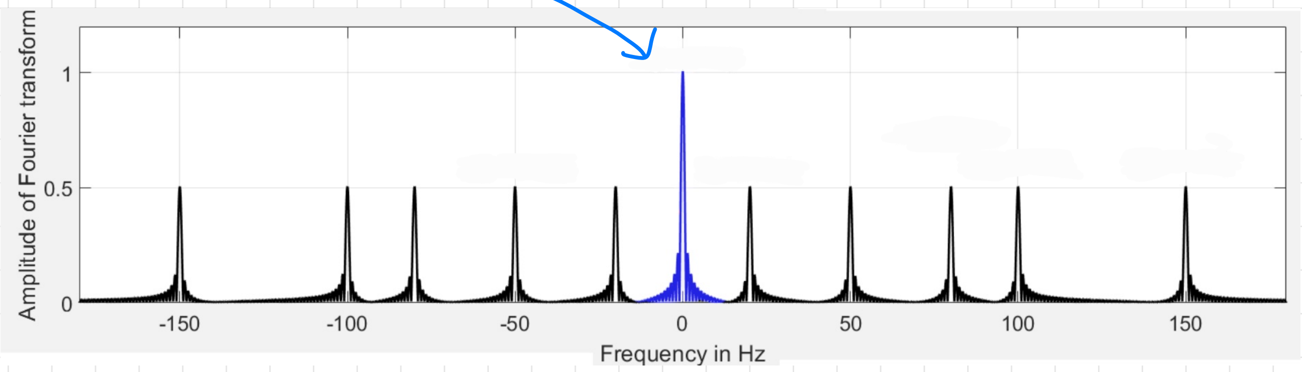
$X_{TOT}(t)\, 2\cos(2\pi F_1 t) = [x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)]\, 2\cos(2\pi F_1 t) =$

$= g(t)\cos(2\pi F_1 t)2\cos(2\pi F_1 t) + g(t)\cos(2\pi F_2 t)2\cos(2\pi F_1 t) + g(t)\cos(2\pi F_3 t)2\cos(2\pi F_1 t) =$

$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

$= g(t)[1 + \cos(4\pi F_1 t)] + g(t)[\cos(2\pi(F_2 - F_1)t) + \cos(2\pi(F_2 + F_1)t)] +$
$+ g(t)[\cos(2\pi(F_3 - F_1)t) + \cos(2\pi(F_3 + F_1)t)] =$

$= g(t) + g(t)\cos(4\pi F_1 t) + \dots$

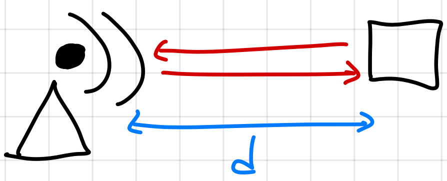


BASTERÀ SOLO FILTRARE TUTTE LE FREQ. FUORI DALLA BANDA BASE DI $g(t)$

RADAR

UN'ALTRA APPLICAZIONE DEL TH È PER I SISTEMI RADAR, CHE RILEVANO LA DISTANZA DI OSTACOLI TRASMETTENDO IMPULSI AD ALTISSIMA FREQ (THz) E GUARDANDO SE E DOPO QUANTO QUESTI TORNANO.

FUNZIONA PERCHÉ LE ONDE AD ALTA FREQ. VENGONO FACILMENTE RIFLESSE DALLE SUPERFICI CON CUI ENTRANO IN CONTATTO, A DIFFERENZA DI QUELLE A BASSA FREQ. CHE RIESCONO NORMALMENTE A PENETRARLE



$$2d = c\tau \qquad \tau = \frac{2d}{c}$$

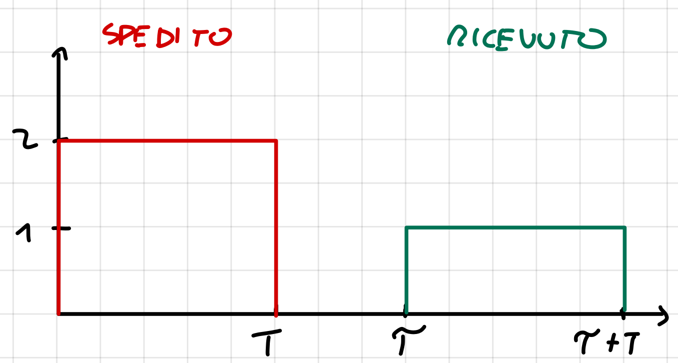
(τ: DELAY CON CUI IL RADAR RICEVE LE ONDE RIFLESSE
c: VELOCITÀ LUCE)

DATO T (PERIODO DELLA LUNGHEZZA D'ONDA DEL SEGNALE) PER FAR SI CHE IL SEGNALE NON SI SOVRAPPONGA CON SE STESSO $\tau >> T$

GENERARE ONDE CON T PICCOLO È QUASI IMPOSSIBILE $\left(F = x \text{ GHz}, \ T = \frac{1}{x} 10^{-9} \text{ s} \right)$

USANDO LA MODULAZIONE, IL RADAR PUÒ GENERARE SEGNALI IN BANDA BASE E POI MODULARE CON F_0 GRANDE A PIACIMENTO.

IL RADAR RIMARRÀ IN ASCOLTO SULLA FREQ F_0, DEMODULANDO MOLTIPLICANDO PER $2\cos(2\pi F_0 t)$, QUANDO DOPO τ RICEVERÀ UN SEGNALE CHE OCCUPA QUELLA FREQ., POTRÀ USARE QUESTO DATO PER RICAVARE d.



→ AMPIEZZA MINORE RISPETTO ALL'ORIGINALE PERCHÉ UN PO' È STATA ASSORBITA DAL MATERIALE E UN PO' L'HA TRAPASSATO.

SE VOLESSI DARE UN RANGE MIN/MAX PER LA d RILEVABILE, BASTA TROVARE τ_{MIN}, τ_{MAX} CHE POSSO ACCETTARE.

$$\tau_{MIN} = \frac{2 d_{min}}{c} \qquad \tau_{MAX} = \frac{2 d_{MAX}}{c}$$

MODULAZIONE CON SENO

SE $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ E $y(t) = x(t)\sin(2\pi f_0 t)$

$$\Rightarrow Y(f) = \frac{1}{2j}\left[X(f-f_0) - X(f+f_0)\right]$$

DIM

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f_0 t)e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}\,e^{-j2\pi f t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f_0)t}\,dt - \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(f+f_0)t}\,dt = \frac{1}{2j}\left[X(f-f_0) - X(f+f_0)\right]$$

TEOREMA DEL CAMBIAMENTO DI SCALA

SE $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ E $y(t) = x(\alpha t)$ $\alpha \neq 0$

$$\Rightarrow Y(f) = \frac{1}{|\alpha|}X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

DIM

SE $\alpha > 0$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha t)e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi f\left(\frac{t'}{\alpha}\right)}\,\frac{dt'}{\alpha} =$$

$t' = \alpha t$

$dt = \frac{dt'}{\alpha}$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi\frac{f}{\alpha}t'}\,dt' = \frac{1}{\alpha}X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

SE $\alpha < 0 \rightarrow \alpha = -|\alpha|$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha t)e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi f\frac{t'}{-|\alpha|}}$$

$t' = -|\alpha| t$

$dt = \frac{-dt'}{|\alpha|}$

$$= \int_{-\infty}^{-\infty} x(t')e^{-j2\pi f\frac{t'}{|\alpha|}}\,\frac{dt'}{-|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi\frac{f}{\alpha}t'}\,dt' = \frac{1}{\alpha}X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

MODULAZIONE CON ESPONENZIALE COMPLESSO

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f-f_0)$$

DIM

$$TCF\left[x(t)e^{j2\pi f_0 t}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi f_0 t}e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f_0)}\,dt = X(f-f_0)$$

TEOREMA DELLA DERIVAZIONE

SE $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ E $y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$

$\Rightarrow Y(f) = j 2\pi f X(f)$

DIM

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \frac{d}{dt}\left[e^{j2\pi f t}\right] df =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) j2\pi f e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{j2\pi f X(f)}_{G(f)} e^{j2\pi f t} df$$

$y(t) = ATCF[G(f)]$ $\quad TCF[y(t)] = TCF[ATCF[G(f)]]$ $\quad Y(f) = G(f)$

TEOREMA DELL'INTEGRAZIONE

SE $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ E $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha) d\alpha$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 0$

$$\Rightarrow Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

DIM

$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha) d\alpha \qquad x(t) = \frac{d}{dt} y(t) \qquad X(f) = j2\pi f\, Y(f)$

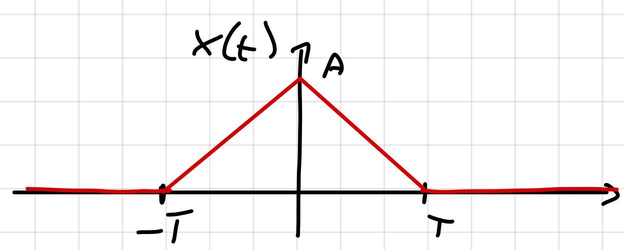
$Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$ POTREBBE DIVERGERE SE $f = 0$

MA HO POSTO COME COND. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 0 \Rightarrow X(f)\big|_{f=0} = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \Big|_{f=0} = X(f)\Big|_{f=0} = X(0) = 0$$

ES DI APPLICAZIONE TH

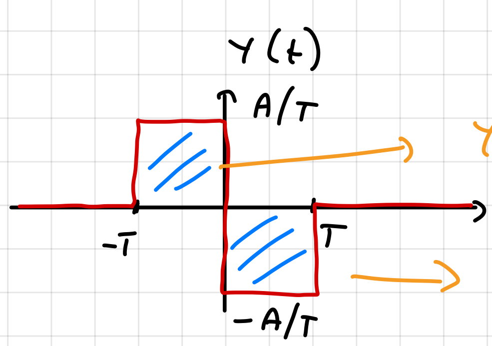
$x(t) = A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right) rect\left(\frac{t}{2T}\right) \qquad X(f)\,?$



$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right) rect\left(\frac{t}{2T}\right) e^{-j2\pi f t} dt$:(

PRENDO UN'ALTRA STRADA

$y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ TC



$y_0\left(t + \frac{T}{2}\right)$

$y_0\left(t - \frac{T}{2}\right)$

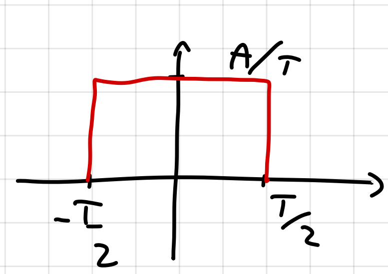
$x(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\alpha) d\alpha \qquad X(f) = \frac{Y(f)}{j2\pi f}$

$X(f)$ LA POSSO CALCOLARE SE $Y(f)$ ESISTE ✓

E SE $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt = 0$ ✓

$X(f) = \frac{Y(f)}{j2\pi f} \qquad X(f)\,?$

$y(t) = y_0\left(t + \frac{T}{2}\right) - y_0\left(t - \frac{T}{2}\right)$



$$Y_0(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$Y(f) = Y_0(f)\,e^{-j2\pi f\left(-\frac{T}{2}\right)} - Y_0(f)\,e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} = Y_0(f)\left[e^{j2\pi f\frac{T}{2}} - e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}\right]$$

$$Y_0(f) = \frac{A}{\cancel{T}}\,\cancel{T}\,\mathrm{sinc}(Tf) = A\,\mathrm{sinc}(Tf)$$

$$Y(f) = A\,\mathrm{sinc}(Tf)\left[e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right] = \frac{A}{\pi f}\,\mathrm{sinc}(Tf)\sin(\pi fT) = AT\,\mathrm{sinc}(Tf)\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} =$$

$$= AT\,\mathrm{sinc}(Tf)\,\mathrm{sinc}(Tf) = AT\,\mathrm{sinc}^2(Tf)$$

$$A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \Longleftrightarrow AT\,\mathrm{sinc}^2(Tf)$$

TEOREMA DELLA DERIVAZIONE IN FREQUENZA

SE $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ E $Y(f) = \frac{d}{dt}X(f)$

$$\Rightarrow y(t) = -j2\pi t\,x(t)$$

DIM

$$Y(f) = \frac{d}{df}X(f) = \frac{d}{df}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j2\pi ft}\,dt\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\frac{d}{df}\left[e^{-j2\pi ft}\right]dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-j2\pi t)\,e^{-j2\pi ft}\,dt = TCF\left[-j2\pi t\,x(t)\right] = TCF\left[y(t)\right] = Y(f)$$

TEOREMA DELL'INTEGRAZIONE IN FREQUENZA

SE $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ $\quad Y(f) = \int_{-\infty}^{f} X(\alpha)\,d\alpha \quad \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)\,d\alpha = 0$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{x(t)}{j2\pi t}$$

DIM

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{f} X(\alpha)\,d\alpha \qquad X(f) = \frac{d}{df}\left[Y(f)\right] \qquad x(t) = -j2\pi t\,y(t)$$

$$y(t) = -\frac{x(t)}{j2\pi t} \qquad \lim_{t\to 0} y(t) = k < +\infty \qquad x(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)\,d\alpha = x(0) = 0$$

TEOREMA DELL'INTEGRAZIONE COMPLETO

SE $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ $\quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,d\alpha$

$$\Rightarrow Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \underline{\frac{X(0)}{2}\delta(f)}$$

COMPARE QUANDO $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt \neq 0$

PRODOTTO

SIA $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ e $y(t) \Leftrightarrow Y(f)$

ALLORA $x(t)\,y(t) \Leftrightarrow Y(f) \otimes X(f)$

DIM

$x(t)\,e^{-j2\pi f t}$ sono k per $d\alpha$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y(t)\,e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\alpha)\,e^{j2\pi\alpha t}\,d\alpha\right) e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,Y(\alpha)\,e^{-j2\pi t(f-\alpha)}\,d\alpha\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,Y(\alpha)\,e^{-j2\pi t(f-\alpha)}\,\underline{d\alpha\,dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\alpha)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j2\pi t(f-\alpha)}\,dt\right) d\alpha$$

SCAMBIO GLI INTEGRALI

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\alpha)\,X(f-\alpha)\,d\alpha = Y(f) \otimes X(f)$$

$\hookrightarrow$ DEF PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

CONVOLUZIONE

SIA $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ e $y(t) \Leftrightarrow Y(f)$

ALLORA $x(t) \otimes y(t) \Leftrightarrow X(f)\,Y(f)$

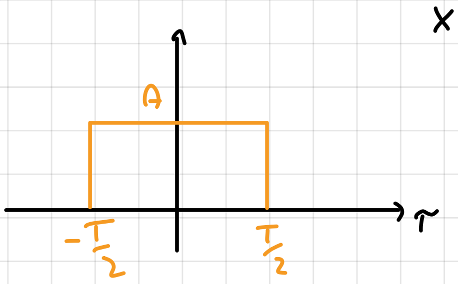
DIM

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \otimes y(t)\,e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau\,e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,y(t-\tau)\,e^{-j2\pi f(t-\tau+\tau)}\,d\tau\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,e^{-j2\pi f\tau}\,y(t-\tau)\,e^{-j2\pi f(t-\tau)}\,d\tau\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)\,e^{-j2\pi f(t-\tau)}\,dt\right) e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,Y(f)\,e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau = Y(f)\,X(f)$$

ES



$x(t) = y(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

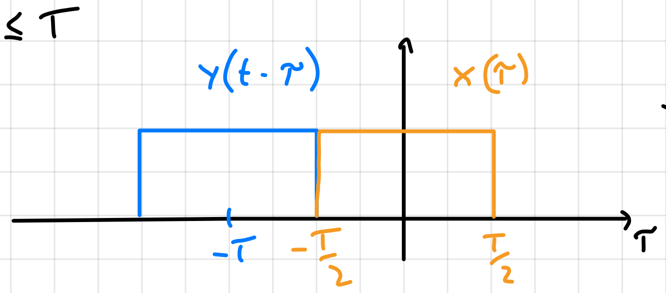
$$h(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau$$

$$= A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t-\tau}{T}\right)d\tau$$

PER $t < T$ e $t > T$ $h(t) = 0$

PER $-T \le t \le T$

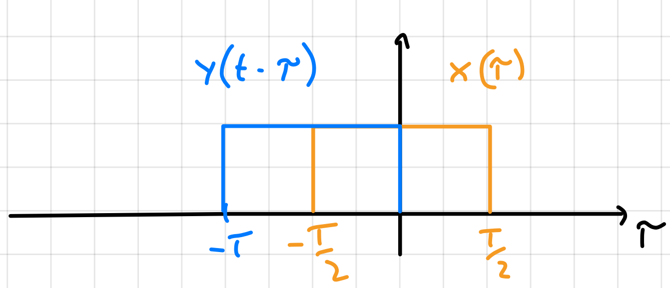
$t = -T$



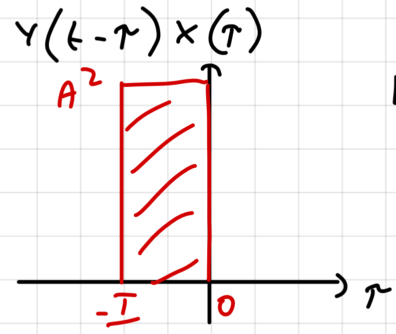
$y(t-\tau)\,x(\tau) = 0$

$h(-T) = 0$

$t = -\frac{T}{2}$

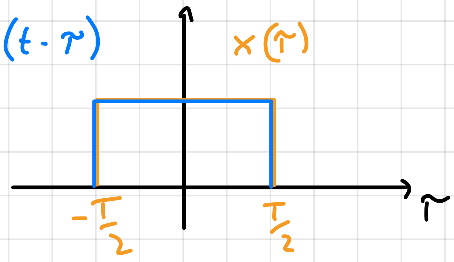


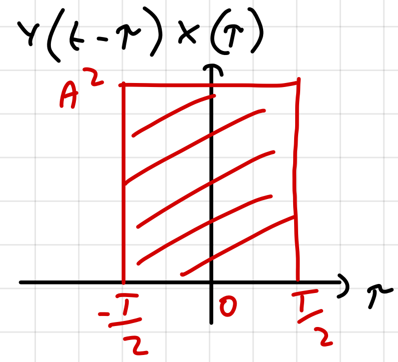
$y(t-\tau)\,x(\tau)$



$h(-T) = A^2\,\frac{T}{2}$

$t = 0$

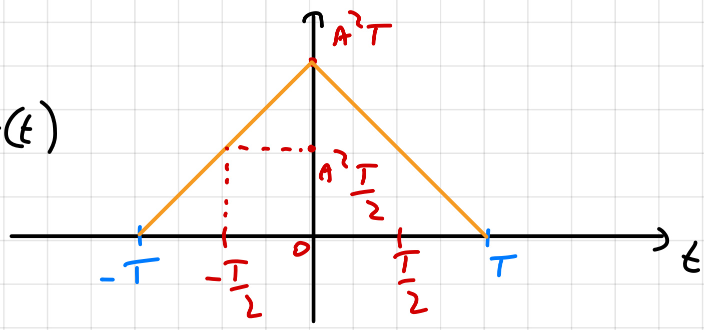




$$h(0) = A^2 T$$

QUINDI

$$h(t) = x(t) \otimes y(t)$$



UN RISULTATO CHE POTEVO ASPETTARMI DATO CHE PER IL TH

$$A\,rect\left(\frac{t}{T}\right) \otimes A\,rect\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow AT\,sinc(fT)\,AT\,sinc(fT)$$

$$= A^2 T^2 sinc^2(fT)$$

$$\Updownarrow$$

$$A^2 T\, triang\left(\frac{t}{T}\right)$$

LA DURATA DEL PRODOTTO DI CONVOLUZIONE È SEMPRE LA SOMMA DELLE DURATE DEI SEGNALI CONVOLUTI

TEOREMA DI PARSEVAL

SAPENDO CHE $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$

ALLORA $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 dt$ (AI FINI DELL'ENERGIA DI UN SEGNALE LO SPETTRO DI FASE È INDIFFERENTE)

DIM

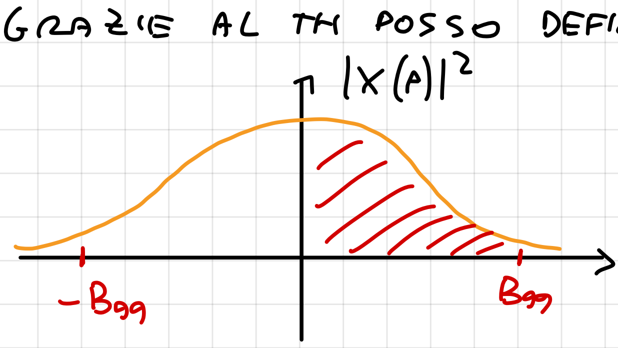
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,x(t)^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,e^{j2\pi ft}\,df\right]^* dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)^*\,e^{-j2\pi ft}\,df\right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)^*\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j2\pi ft}\,dt\right] df =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)^*\,X(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

IL TH DICE CHE $|X(f)|^2$ È UNA QUALCHE FORMA DI POTENZA (NOTA COME S_x DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA) DEL SEGNALE DETERMINISTICO $x(t)$, INFATTI INTEGRANDOLA TROVO L'ENERGIA.

GRAZIE AL TH POSSO DEFINIRE LA BANDA IN BASE A CONSIDERAZIONI ENERGETICHE



$$0{,}99\,E_x = \int_{-B_{99}}^{B_{99}} |X(f)|^2 df$$

$\Downarrow$

BANDA TALE CHE CATTURO IL 99 % DELLA POTENZA

VEDIAMO DI METTERE IN RELAZIONE IL TEMPO DI USCITA DEI SIMBOLI T_S CON IL TEMPO DI INGRESSO DEI bit T_C (QUINDI QUELLO DI CAMPIONAMENTO T), IN GENERALE POSSIAMO NOTARE CHE $T_S = \log_2 |A| T_C = \log_2 M T_C$

$$T_S = \log_2 M T_C = \log_2 M \frac{k}{n} T_b = \log_2 M \underbrace{r}_{\text{RATE}} T_q = \log_2 M r \frac{1}{\log_2 L} T = r \frac{\log_2 M}{\log_2 L} T$$

$$F_S = \frac{1}{T_S} = \frac{1}{rT} \frac{\log_2 L}{\log_2 M} = \frac{1}{r \log_2 M} \frac{\log_2 L}{T} \left[\frac{\text{baud}}{s}\right] = \left[\frac{\text{SIMBOLI}}{s}\right]$$

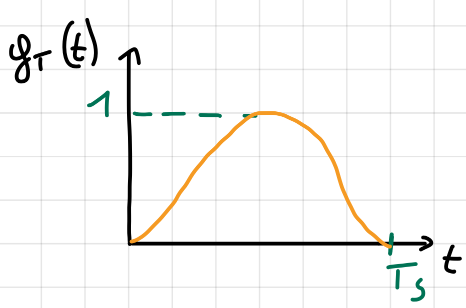
- SE r DIMINUISCE IL BAUD RATE AUMENTA (+ RIDONDANZA, MANDO PIÙ ROBA)
- SE L AUMENTA IL BAUD RATE AUMENTA (CREO PIÙ bit, MANDO PIÙ ROBA)
- SE M AUMENTA IL BAUD RATE DIMINUISCE (TRASMETTO PIÙ bit CON UN SIMBOLO)

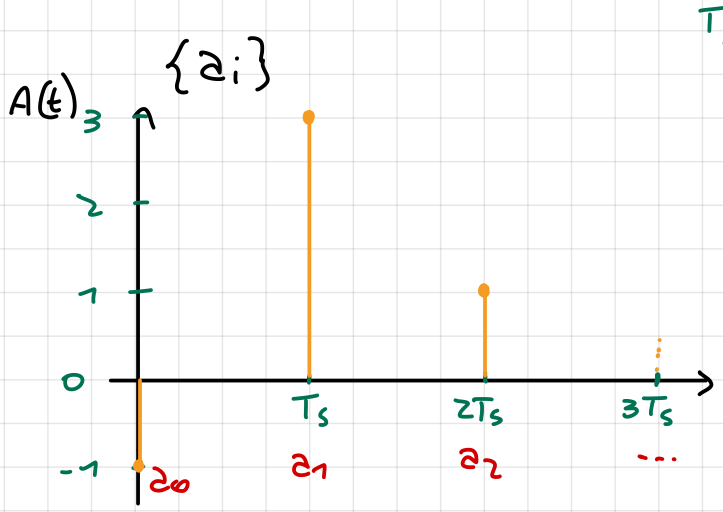
INTERPOLATORE

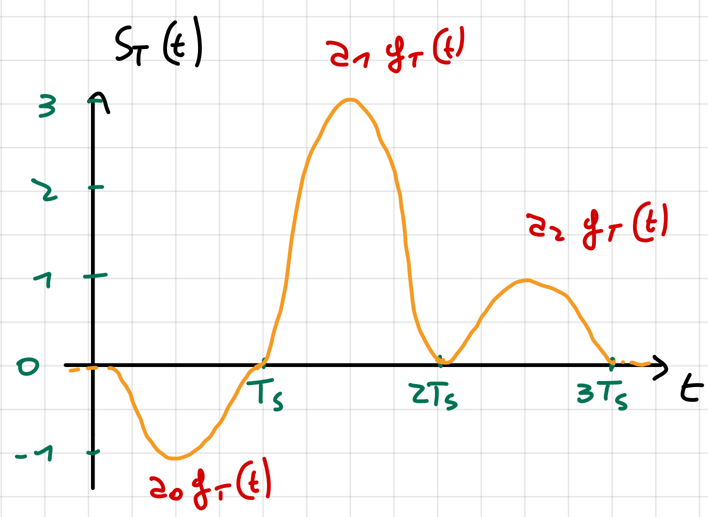
HA IL COMPITO DI TRADURRE LA SEQUENZA DEI SIMBOLI IN UN SEGNALE ANALOGICO $s_T(t)$, DI FORMA TALE DA POTER ESSERE TRASMESSO SUL CANALE DI COMUNICAZIONE.

ES

$g_T(t)$ TIPO







SOVRAPPONENDO TUTTI QUESTI IMPULSI OTTENIAMO IL SEGNALE PAM

$$s_T(t) = \sum_i a_i \, g_T(t - iT_S)$$

PER IL CALCOLO DELLA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DI UN SEGNALE PAM, AMMETTO CHE LA SEQUENZA $\{a_i\}$ DEI SIMBOLI DI MODULAZIONE SIA STAZIONARIA ALMENO IN SENSO LATO

LA SUA MEDIA È $\eta_a = E\{a_i\}$

LA SUA F. DI AUTOCORR. È $R_a(m) = E\{a_i \, a_{i+m}\}$

(i : ISTANTE TEMPORALE
$i+m$: ISTANTE TEMPORALE)

IN DEFINITIVA SI HA

$$S_s(f) = \frac{1}{T_S} S_a(f) \, |G_T(f)|^2$$

(DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA) (DELLA SEQ DI SIMBOLI TRASMESSI)

DOVE

$$S_a(f) = \sum_m R_a(m) \, e^{-j2\pi m f T_S}$$

LA POTENZA DEL SEGNALE PAM SI PUÒ ANCHE ESPRIMERE COME

$$P_s = \frac{1}{T_S} \int_{-\infty}^{\infty} S_a(f) \, |G_T(f)|^2 \, df$$

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE (HA PIÙ SENSO PER SISTEMI ALEATORI)

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,x(t-\tau)\,dt = x(\tau) \otimes x(-\tau)$$ SE IL SEGNALE È PARI È LA CONVOLUZIONE

SAREBBE * MA SOLO SEGNALI REALI

$|R_x(\tau)| \leq |R_x(0)|$ QUANDO $\tau = 0$ HO DUE $x(t)$ (MASSIMA CORR.)

$$R_x(\tau) \Leftrightarrow X(f)X(-f) = X(f)X(f)^* = |X(f)|^2 = S_x(f)$$

SIMMETRIA HERM.
SEGNALI REALI

DATO CHE $x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,df \rightarrow R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\,df = E_x$

ES

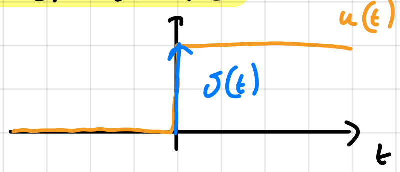
$$R_x(\tau) = 2B\,\mathrm{sinc}(2B\tau) \Leftrightarrow \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) = |X(f)|^2 = S_x(f)$$

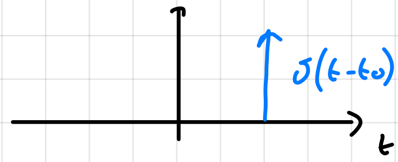
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)df = 2B$$

OPPURE $E_x = R_x(0) = 2B\,\mathrm{sinc}(0) = 2B$

FUNZIONE DELTA DI DIRAC

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$$





PROPRIETÀ:

- INTEGRALE UNITARIO: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$

- FUNZIONE PARI: $\delta(t) = \delta(-t)$

- PROPRIETÀ CAMPIONATRICE: $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$

DIM

PER PARTI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt = x(t)u(t-t_0)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t)u(t-t_0)\,dt = x(+\infty)\cdot 1 - x(-\infty)\cdot 0 - \int_{t_0}^{+\infty} x'(t)\,dt =$$

$$= x(+\infty) - x(+\infty) + x(t_0) = x(t_0)$$

- INVARIANTE ALLA CONVOLUZIONE:

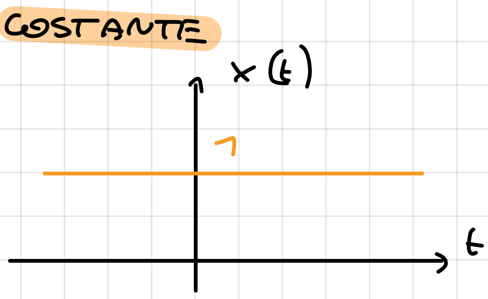
$$x(t) \otimes \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau = x(t)$$

(IN GENERALE $x(t) \otimes \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

- $\delta(t) \Leftrightarrow \Delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi f t}\,dt = e^{-j2\pi f \cdot 0} = 1$

QUESTO MI PERMETTE (INSIEME AL TH DELLA DUALITÀ), DI CALCOLARE LA TRASFORMATA DI SEGNALI AD ENERGIA INFINITA (TRA CUI QUELLI PERIODICI):

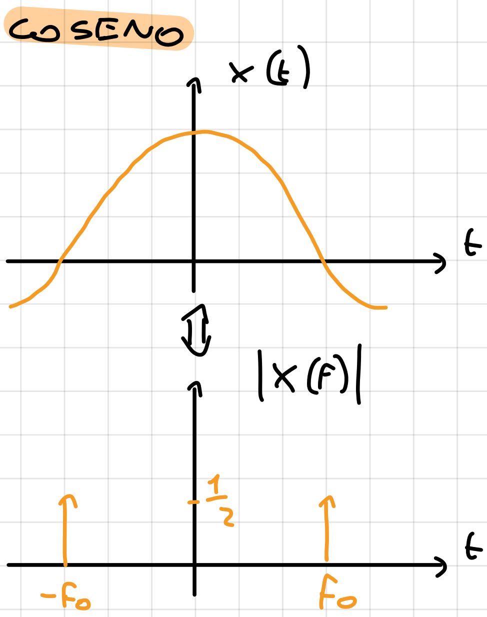
COSTANTE



$$\delta(t) \Leftrightarrow 1$$

$$1 \Leftrightarrow \delta(f)$$

COSENO



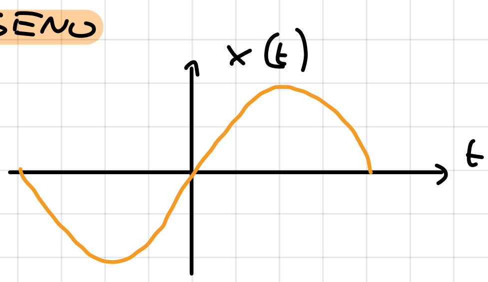
TH RITARDO

SE $\delta(t) \Leftrightarrow 1$ ALLORA $\delta(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}$

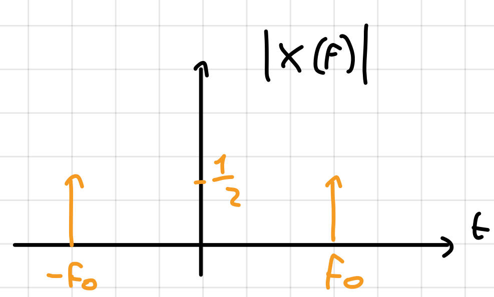
QUINDI $e^{-j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow \delta(f+f_0)$

$$\Rightarrow \cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$$

SENO



$\Leftrightarrow$



AMPIEZZA UGUALE

$$\sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)\right]$$

CAMPIONAMENTO CON CAMBIO DI SCALA

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(\alpha t)\,dt = \frac{x(0)}{|\alpha|} \qquad \alpha \neq 0$$

DIM

SE $\alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(\alpha t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{t'}{\alpha}\right)\delta(t')\,\frac{dt'}{\alpha} = \qquad \alpha t = t' \qquad dt = \frac{dt'}{\alpha}$$

$$= \frac{1}{\alpha}x(0)$$

SE $\alpha < 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(\alpha t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{t'}{\alpha}\right)\delta(t') - \frac{dt'}{|\alpha|} = \qquad -|\alpha|t = t' \qquad dt = -\frac{dt'}{|\alpha|}$$

$$= \frac{1}{|\alpha|}\int_{+\infty}^{-\infty} x\left(-\frac{t'}{\alpha}\right)\delta(t')\,dt' = \frac{1}{|\alpha|}x(0)$$

SEGNALI PERIODICI OTTENUTI DA SEGNALI APERIODICI

$$y(t) = y(t+T_0) = \sum_n \underbrace{x(t-nT_0)}_{\text{APERIODICO}} \qquad \text{SO CHE} \quad x(t) \Longleftrightarrow X(f)$$

SO CHE

$$y(t) = \sum_k Y_k\, e^{j2\pi k F_0 t} \qquad \text{IN CHE RELAZIONE STANNO I COEFF. } Y_k \text{ E } y(t)\,?$$

VOGLIO SCRIVERE Y_k IN FUNZIONE DI $X(f)$

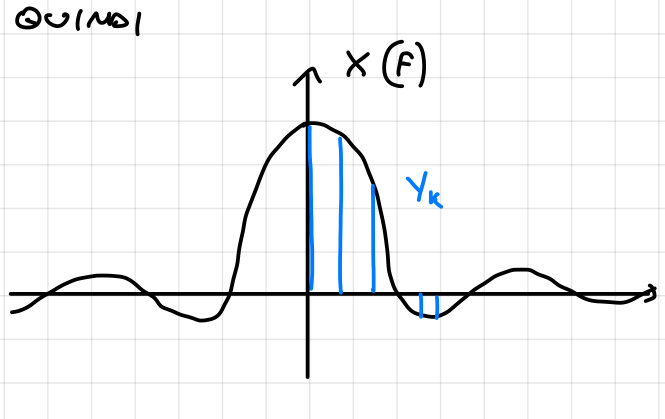
$$Y_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t)\,e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_n x(t-nT_0)\,e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\sum_n \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t-nT_0)\,e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt =$$

$t' = t - nT_0$

$$= \frac{1}{T_0}\sum_n \int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x(t')\,\underbrace{e^{-j2\pi k f_0 (t'+nT_0)}}_{e^{-j2\pi k f_0 t'}\cdot \underbrace{e^{-j2\pi k f_0 n T_0}}_{=1\ \forall k}}\,dt' = \frac{1}{T_0}\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0}}_{\text{INTERVALLI DISGIUNTI}} x(t')\,e^{-j2\pi k f_0 t'} =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\,e^{-j2\pi k f_0 t'}\,dt' = \frac{1}{T_0}X(kf_0)$$

QUINDI



IL RISULTATO SI CHIAMA PRIMA FORMULA DI POISSON

$$y(t) = \sum_k \frac{1}{T_0}X(kf_0)\,e^{j2\pi k f_0 t}$$

QUANDO PERIODICIZZO NEL TEMPO UN SEGNALE ANALOGICO, IN FREQUENZA LO CAMPIONO

SISTEMI LTI

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow y(t) \qquad y(t) = T[x(t)]$$

↳ TRASFORMAZIONE IMPOSTA DAL SISTEMA

STAZIONARIETÀ (TEMPO INVARIANZA)

$$y(t) = T[x(t)] \implies y(t-t_0) = T[x(t-t_0)]$$

CAUSALITÀ

$$y(t) = T[x(\tau) \mid \tau \le t]$$

USCITE DIPENDONO SOLO DA INGRESSI PRECEDENTI →

- SISTEMI REAL TIME : CAUSALI
- SISTEMI VIRTUAL TIME : CAUSALI E NON

LINEARITÀ

$$\begin{cases} y_1(t) = T[x_1(t)] \\ y_2(t) = T[x_2(t)] \end{cases} \implies T[x_1(t) + x_2(t)] = T[x_1(t)] + T[x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t)$$

STABILITÀ BIBO

$$|x(t)| \le M \implies |y(t)| \le K$$

CONSIDERO UN SISTEMA LTI E DEFINISCO CON $h(t) = T[\delta(t)]$ RISPOSTA IMPULSIVA DEL SISTEMA

$$y(t) = T[x(t)] = T[x(t) \otimes \delta(t)] = T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} T[x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(\tau)}_{\text{COSTANTE PER } T[..]} T[\delta(t-\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = x(t) \otimes h(t) = \underbrace{X(f)\,H(f)}_{\text{TH CONVOLUZIONE}}$$

QUINDI SE CONOSCO LA RISPOSTA IMPULSIVA DI UN SISTEMA LTI ALLORA RIESCO A CALCOLARE L'USCITA PER OGNI $x(t)$.

GENERARE UN INGRESSO A $\delta(t)$ È FISICAMENTE IMPOSSIBILE, POSSO PERÒ FARE 3 COSE:

1) **METODO ESPONENZIALE**

$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ SONO UN SIN E UN COS (FACILI DA REALIZZARE)

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,e^{j2\pi f_0(t-\tau)}\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t}\,h(\tau)\,e^{-j2\pi f_0 \tau}\,d\tau =$$

$$= e^{j2\pi f_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,e^{-j2\pi f_0 \tau}\,d\tau = x(t)\,H(f_0)$$

QUINDI $H(f_0) = \dfrac{y(t)}{x(t)}$ SE $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$

↳ TANTE PROVE PER STIMARE $H(f)\ \forall f$

2) **APPROSSIMARE $\delta(t)$** CON UN SEGNALE REALE DI BREVE DURATA E OSSERVARE L'USCITA DEL SISTEMA, EVENTUALMENTE APPLICANDONE LA TRASFORMATA DI FOURIER PER OTTENERE $H(f)$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,e^{-j2\pi f t}\,dt$$

3) SAPENDO CHE $Y(f) = X(f)\,H(f)$ ALLORA BASTA **CALCOLARE $H(f)$** COME RAPPORTO TRA LA TCF DI UN'USCITA NOTA E LA TCF DELL'INGRESSO CHE L'HA GENERATA

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

PER LA STABILITÀ BIBO NEI SISTEMI LTI BASTA CONTROLLARE LA RISPOSTA IMPULSIVA

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow |y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)| |h(t-\tau)|\, d\tau \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|\, d\tau =$$

$$= M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt \leq k$$

QUESTO È VERO SE E SOLO SE $h(t)$ È ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt \neq \infty \right)$

INFINE, UN SISTEMA LTI È CAUSALE SE E SOLO SE $h(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$

INFATTI: $y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau =$

$$= \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$\Rightarrow$ $y(t)$ DIPENDE SOLO DA CIÒ CHE SUCCEDE FINO A t

NOTA: SPESSO $H(f)$ CONTIENE FORTI AMPLIFICAZIONI O ATTENUAZIONI QUINDI NON È ADATTA AD ESSERE TRATTATA IN SCALA NORMALE, SI INTRODUCE QUINDI LA SCALA LOGARITMICA [dB]

$$|H(f)|^2 \, dB = 10 \log_{10} \left(\frac{|H(f)|^2}{|H(0)|^2} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{|H(f)|}{|H(0)|} \right)$$

SE CONOSCO IL MODULO^2 USO $10 \log_{10}$

SE CONOSCO SOLO IL MODULO USO $20 \log_{10}$

IL DEN $H(f_0)$ È DATO DAL FATTO CHE dB È UNA GRANDEZZA RELATIVA, DEVO AVERE UN RIFERIMENTO (SPESSO $|H(f_0)| = 1$)

$x \, dB = 10 \log_{10}(y) \qquad y = 10^{\frac{x}{10}}$

$\lvert H(f)\rvert^2$	dB
1	0
2	3
4	6
8	9
10	10
100	20
1000	30

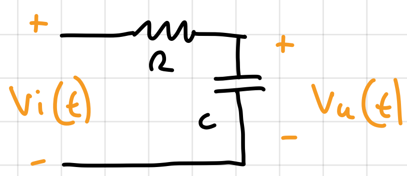
APPROX

$\lvert H(f)\rvert^2$	dB
50	17
25	14
1/2	-3
1/4	-6
1/10	-10
1/100	-20
1/1000	-30

APPROX

FILTRI REALI ED IDEALI

FILTRO RC



$$V_u(t) = V_i(t) - R\,i(t) = V_i(t) - RC\,\underbrace{\frac{dV_u(t)}{dt}}_{\text{CORRENTE SUL CONDENSATORE}}$$

$\downarrow$ IN FREQ

$$V_u(f) = V_i(f) - RC(j2\pi f)V_u(f)$$

$$f_T = \frac{1}{2\pi RC}$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \rightarrow H(f) = \frac{V_u(f)}{V_i(f)} = \frac{1}{1+j2\pi fRC} = \frac{1}{1+j\frac{f}{f_T}} =$$

$$= \frac{1}{1+j\frac{f}{f_T}} \cdot \frac{1-j\frac{f}{f_T}}{1-j\frac{f}{f_T}} = \frac{1-j\frac{f}{f_T}}{1+\frac{f^2}{f_T^2}} = \frac{1}{1+\frac{f^2}{f_T^2}} - \frac{j\frac{f}{f_T}}{1+\frac{f^2}{f_T^2}}$$

MODULO

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{1}{\left(1+\frac{f^2}{f_T^2}\right)^2} + \frac{\frac{f^2}{f_T^2}}{\left(1+\frac{f^2}{f_T^2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{f^2}{f_T^2}}{\left(1+\frac{f^2}{f_T^2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{1+\frac{f^2}{f_T^2}}}{1+\frac{f^2}{f_T^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{f^2}{f_T^2}}}$$

FASE

$$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{-\frac{f}{f_T}}{1-\frac{f^2}{f_T^2}} \cdot 1-\frac{f^2}{f_T^2}\right) = \arctan\left(-\frac{f}{f_T}\right)$$

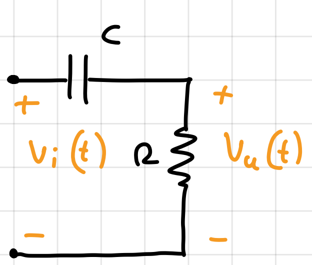
È UNA FUNZIONE MONOTONA DECRESCENTE, IL FILTRO OTTENUTO È UN LOW-PASS E NON È MOLTO PERFORMANTE SE CONFRONTATO CON QUELLO IDEALE $rect\left(\frac{f}{2B}\right)$

SE PRENDO $rect\left(\frac{f}{2B}\right)$, LA SUA RISPOSTA IMPULSIVA SARÀ DATA DA $h(t) = 2B\,sinc(2Bt)$.

IL FILTRO NON È CAUSALE, VISTO CHE SINC È DEFINITA IN TUTTO $\mathbb{R}$ E NON SOLO IN $\mathbb{R}^+$. PER RENDERLO CAUSALE DEVO TRONCARE LA SINC E TRASLARLA MA IN QUESTO MODO IL FILTRO NON È PIÙ IDEALE A CAUSA DEL TRONCAMENTO.

IL FILTRO È TANTO PIÙ PRECISO QUANTO PRENDO AMPIA LA FINESTRA DI TRONCAMENTO.

FILTRO CR



$$V_u(t) = V_i(t) - \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt$$

$\downarrow$ IN FREQ.

$$V_u(f) = V_i(f) - \frac{1}{C}\,\frac{1}{2\pi f}I(f) = V_i(f) - \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{j2\pi f}\,\frac{V_u(f)}{R}$$

$$V_i(f) = \left[1 + \frac{1}{C}\,\frac{1}{j2\pi fR}\right]V_u(f) \qquad V_u(f) = \left[\frac{V_i(f)}{1+\frac{1}{j2\pi CRf}}\right] = \left[\frac{V_i(f)}{1+\frac{1}{j\frac{f}{f_T}}}\right]$$

$$H(f) = \frac{1}{1+\frac{1}{j\frac{f}{f_T}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{j\frac{f}{f_T}}} \cdot \frac{j\frac{f}{f_T}}{j\frac{f}{f_T}} = \frac{j\frac{f}{f_T}+1-1}{1+j\frac{f}{f_T}} = 1 - \frac{1}{1+j\frac{f}{f_T}} = 1 - H_{RC}(f)$$

SI HA UN FILTRO HIGH-PASS, FA PASSARE LE FREQ ALTE E ATTENUA LE BASSE.

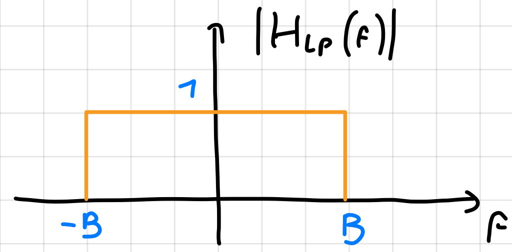
LA f_T SI TROVA SEMPRE A -3 dB

IL FILTRO IDEALE È $H_{HP}(f) = 1 - H_{LP}(f) = 1 - rect\left(\frac{f}{2B}\right)$

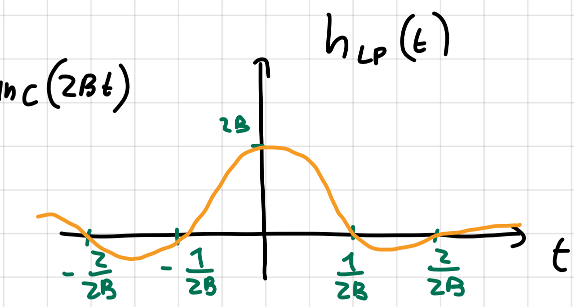
QUELLI SOPRA NON SONO FILTRI PARTICOLARMENTE EFFICIENTI, SUPPONIAMO TUTTI LTI :

FILTRO PASSA BASSO (LP)

$H_{LP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$



$h_{LP}(t) = 2B\,\text{sinc}(2Bt)$

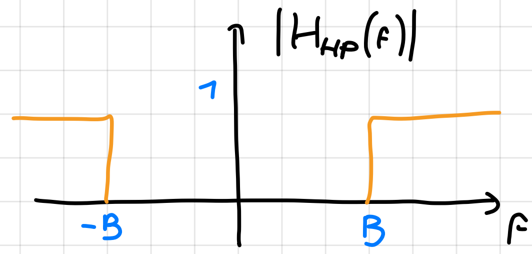


IL PROBLEMA È CHE DOVREI AVERE UN SEGNALE INFINITO (SINC) PER GENERARLO CORRETTAMENTE, IN PRATICA POSSO SOLO GENERARE UNA SINC TAGLIATA A $\pm T$, LA QUALE IMPLICA UN $|H(f)|$ TANTO POCO PRECISO TANTO T È PICCOLO (TRONCO PIÙ SEGNALE UTILE).

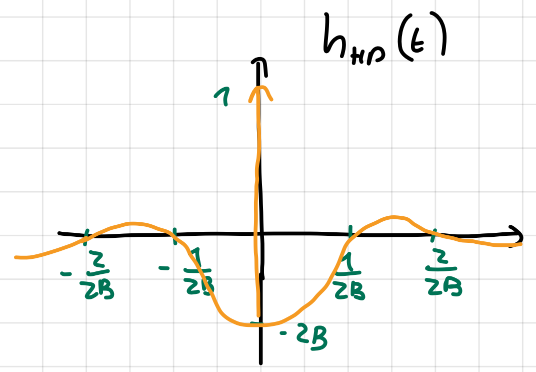
UN ALTRO PROBLEMA DI QUESTO FILTRO È CHE AVENDO $h(t) \neq 0$ PER $t<0$ NON È CAUSALE (NON È UN PROBLEMA SE VOGLIO FARE POST PROCESSING, L'USCITA DIPENDE DAL FUTURO CHE CONOSCO GIÀ), MENTRE SE LO VOGLIO USARE PER UN SISTEMA A TEMPO REALE ALLORA DEVO SHIFTARLO DI QUANTO L'HO TRONCATO, INTRODUCENDO UN RITARDO.
PIÙ IL FILTRO È SELETTIVO IN FREQ PIÙ È ESTESO NEL TEMPO, PIÙ TEMPO DEVO RACCHIUDERE NELLA TRONCATURA PER RAPPRESENTARLO CORRETTAMENTE, QUINDI PIÙ RITARDO INTRODUCO.

FILTRO PASSA ALTO (HP)

$H_{HP}(f) = 1 - H_{LP}(f)$

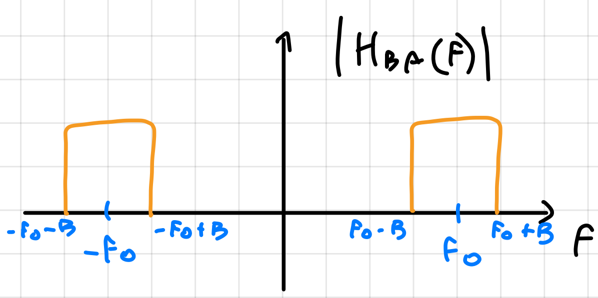


$h_{HP}(t) = \delta(t) - h_{LP}(t) =$
$= \delta(t) - 2B\,\text{sinc}(2Bt)$



STESSI PROBLEMI DI LP + DIFFICOLTÀ NEL REALIZZARE $\delta(t)$

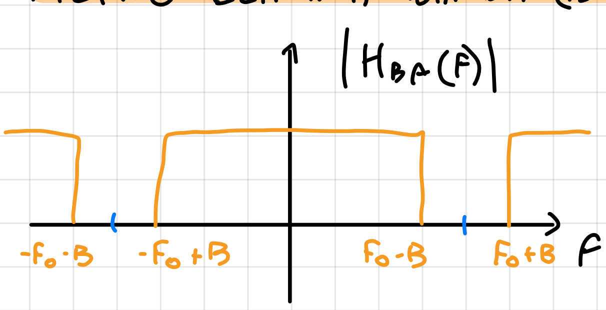
FILTRO PASSA BANDA (BP)



$H_{BP}(f) = H_{LP}(f-f_0) + H_{LP}(f+f_0)$

$h_{BP}(t) = h_{LP}(t)\cos(2\pi f_0 t) = 2B\,\text{sinc}(2Bt)\cos(2\pi f_0 t)$

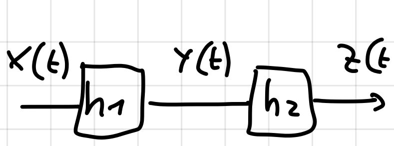
FILTRO ELIMINA BANDA (BR)



$H_{BR}(f) = 1 - H_{BP}(f)$

$h_{BR}(t) = \delta(t) - h_{BP}(t) = \delta(t) - 2B\,\text{sinc}(2Bt)\cos(2\pi f_0 t)$

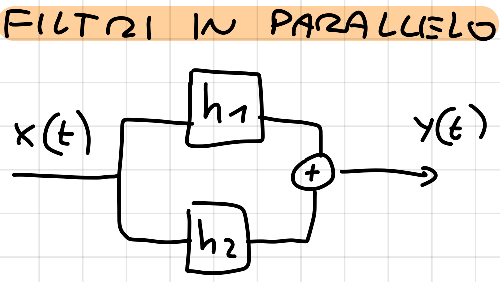
FILTRI IN SERIE



$y(t) = x(t) \otimes h_1(t)$

$z(t) = y(t) \otimes h_2(t) = (x(t) \otimes h_1(t)) \otimes h_2(t) = x(t) \otimes (h_1(t) \otimes h_2(t)) = x(t) \otimes h(t)$

FILTRI IN PARALLELO

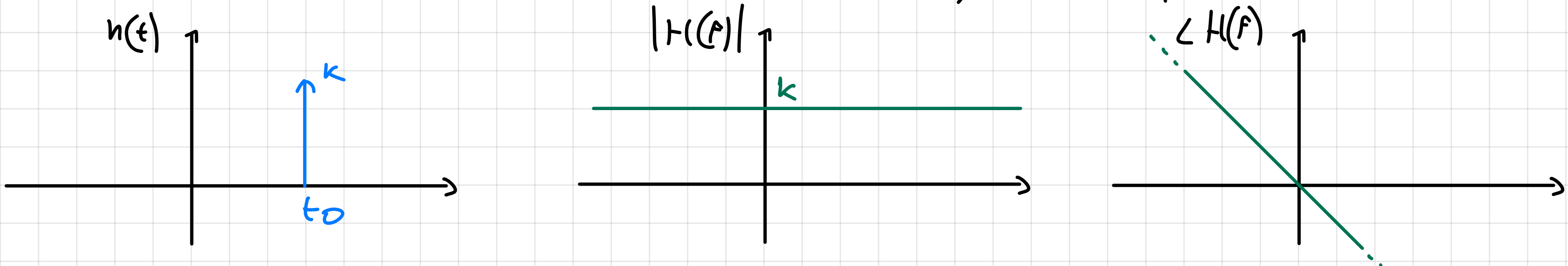


$y(t) = x(t) \otimes h_1(t) + x(t) \otimes h_2(t) = x(t) \otimes (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) \otimes h(t)$

FILTRI NON DISTORCENTI

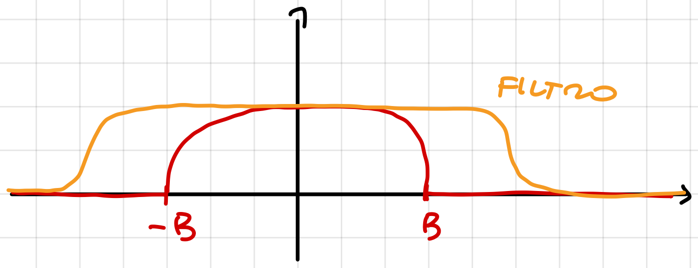
L'USCITA $y(t)$ NON È DISTORTA SE $y(t) = k\,x(t-t_0)$ $\quad k \in \mathbb{R}^+$

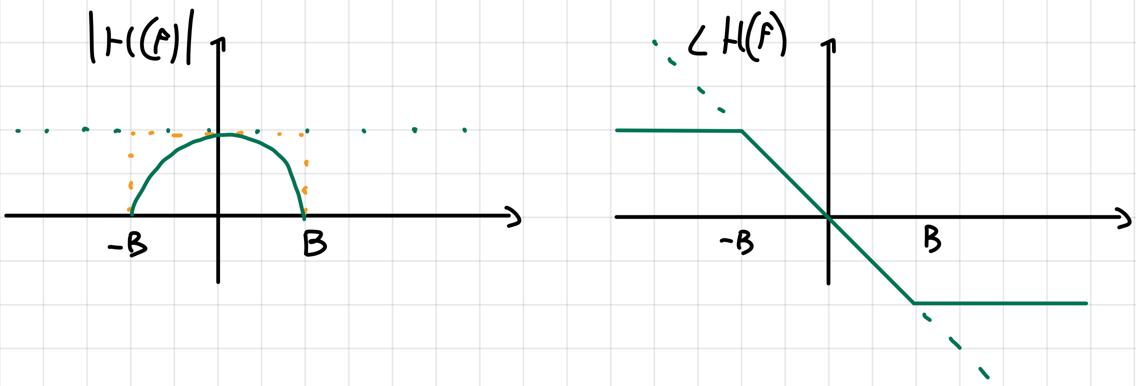
$y(t) = x(t) \otimes h(t) = k\,x(t-t_0) \rightarrow h(t) = k\,\delta(t-t_0) \Leftrightarrow H(f) = k\,e^{-j2\pi f t_0}$



IL FILTRO SOPRA NON DISTORCE NESSUN TIPO DI SEGNALE. PER RENDERE MENO STRINGENTE LA DEFINIZIONE CONVIENE DEFINIRE IL FILTRO NON DISTORCENTE IN BASE AL TIPO DI SEGNALE CON CUI SI DEVE LAVORARE.

VOGLIO CHE NON SIA DISTORCENTE TRA $\pm B$





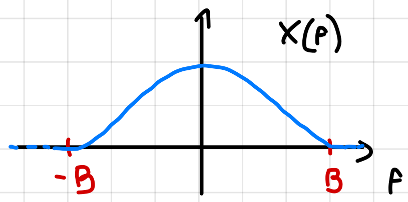
TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER

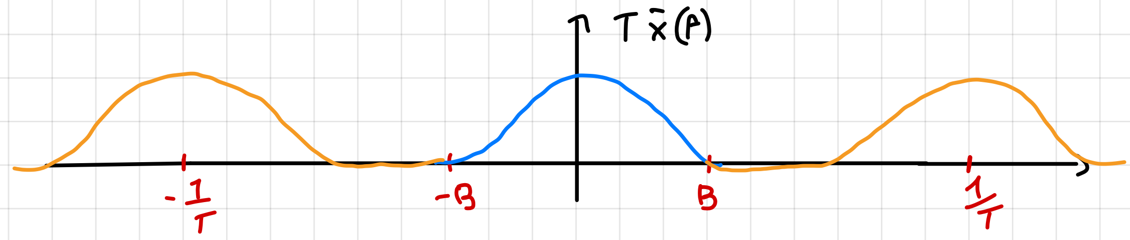
LA TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER DI UNA SEQUENZA $x[nT]$ È DEFINITA COME:

$$\bar{X}(f) = \sum_n x[nT] e^{-j2\pi f nT} = \frac{1}{T} \sum_n X\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

NO DIM

$\bar{X}(f)$ SI OTTIENE DALLA CONTINUA $X(f)$ SCALATA E TRASLATA A MULTIPLI DELLA FREQ DI CAMPIONAMENTO $\frac{1}{T}$

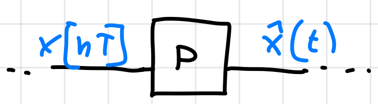




IN GENERALE UN SEGNALE CAMPIONATO HA UNO SPETTRO PERIODICO E VICEVERSA.

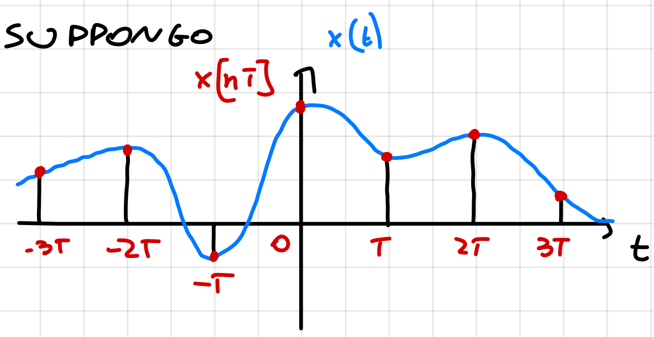
SUPPONIAMO DI VOLER RICOSTRUIRE $x(t)$ A PARTIRE DALLA SUA SEQ. DI CAMPIONAMENTO $x[nT]$ CAMPIONATA CON UNA GENERICA FREQ $1/T$.

INTERPOLATORE



$$\hat{x}(t) = \sum_n x[nT]\, p(t - nT)$$

SUPPONGO



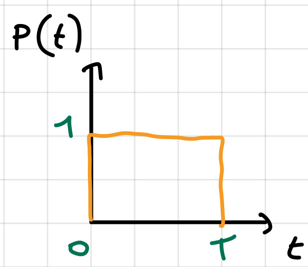
ALCUNI TIPI DI INTERPOLATORE:

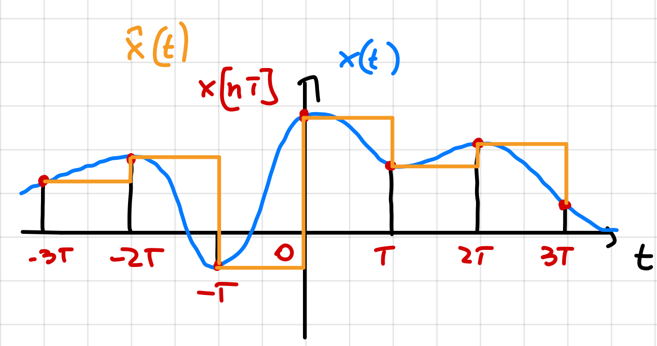
A MANTENIMENTO

$$p(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$$

$$P(f) = T \,\mathrm{sinc}(fT)\, e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

RITARDO $\frac{T}{2}$

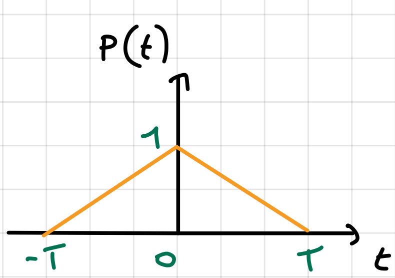


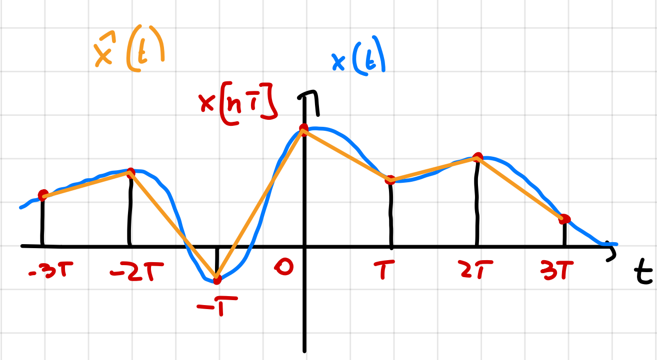


LINEARE

$$p(t) = \mathrm{triang}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$P(f) = T \,\mathrm{sinc}^2(fT)$$





IN ENTRAMBI $x(t) \neq \hat{x}(t)$, MI CHIEDO SE ESISTE $P(t)$ TC $x(t) = \hat{x}(t)$ E SOTTO QUALI CONDIZIONI

TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

COND NYQUIST

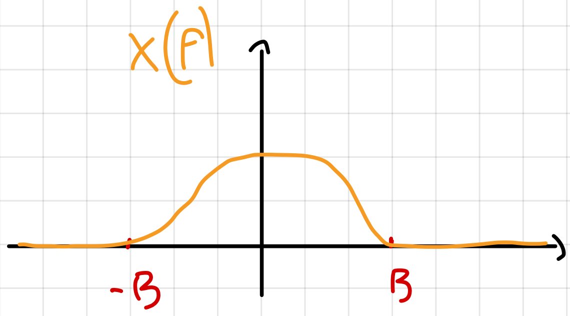
DATO $x(t)$ LIMITATO IN BANDA E CAMPIONATO A $\frac{1}{T} \geq 2B$, ALLORA I CAMPIONI $x[nT]$ POSSONO ESSERE USATI PER RICOSTRUIRE SENZA PERDITA DI INFORMAZIONE $x(t)$, A PATTO CHE SI USI L'INTERPOLATORE CARDINALE $p(t) = 2BT \,\mathrm{sinc}(2Bt) \Leftrightarrow P(f) = T\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$

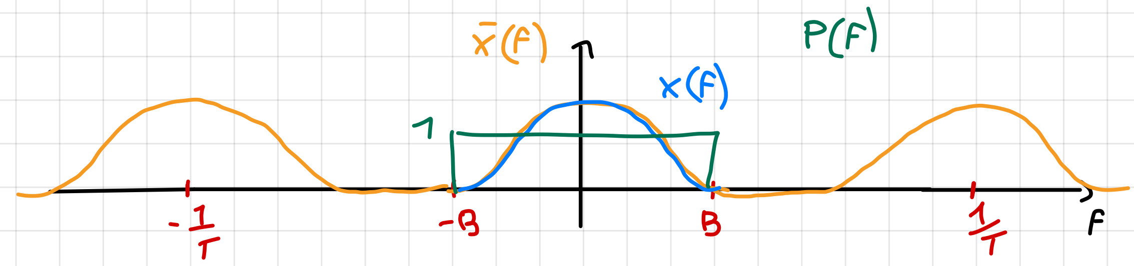
DIM

IL SEGNALE È RICOSTRUITO SENZA PERDITE SE E SOLO SE $x(t) = \hat{x}(t) \Leftrightarrow X(f) = \hat{X}(f)$ DATO CHE

$$\hat{X}(f) = \sum_n x[nT] P(f) e^{-j2\pi f nT} = \frac{1}{T} \sum_k X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

SUPPONGO $p(t) = 2BT \,\mathrm{sinc}(2Bt) \Leftrightarrow P(f) = T\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$ E $\frac{1}{T} \geq 2B$ SI VEDE GRAFICAM.



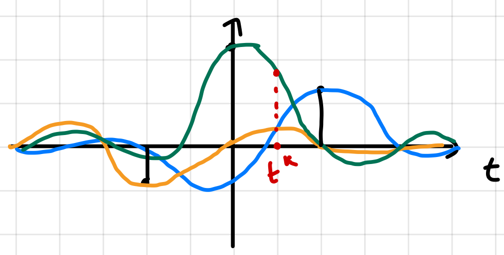


CRITICITÀ TH

a) TRATTANDO SEGNALI $x(t)$ FISICI (TEMPO LIMITATO) ALLORA SONO INFINITI IN BANDA, QUINDI PER POTER APPLICARE NYQUIST DEVO FILTRARLI, IN QUESTO MODO PERÒ RICOSTRUIRÒ IL SEGNALE FILTRATO, NON L'ORIGINALE

b) $p(t)$ USA UNA SINC (ILLIMITATA NEL TEMPO), QUINDI NON RIESCO A GENERARLA, SE LA TRONCASSI IL TH DECADREBBE PERCHÉ NON SAREBBE UNA SINC PURA.
ANCHE SE VOLESSI PROVARE AD USARLA (IN UN SISTEMA A TEMPO REALE) NON POTREI PERCHÉ LA SINC, ANCHE TRONCATA, NON È CAUSALE, DOVREI SHIFTARLA INTRODUCENDO UN RITARDO

SINGOLE SINC COMPONENTI $\hat{x}(t)$

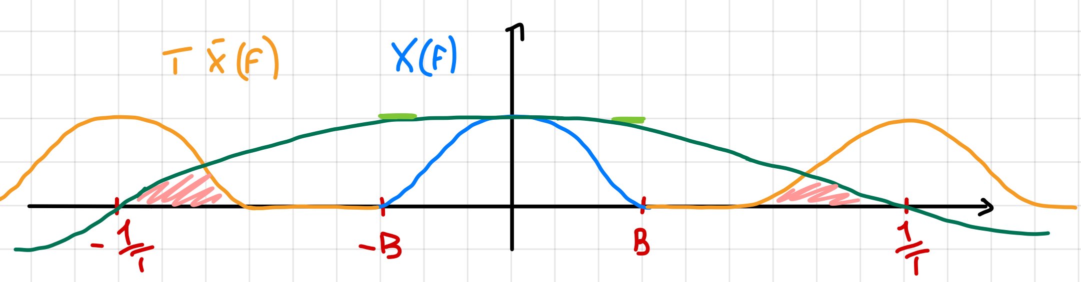


NON È CAUSALE: $\hat{x}(t^*)$ È INFLUENZATO ANCHE DALLA SINC DEI CAMPIONI A $t > t^*$

VEDIAMO COME I DUE INTERPOLATORI DI SOPRA INTRODUCONO DISTORSIONI

A MANTENIMENTO

$$P(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)\, e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

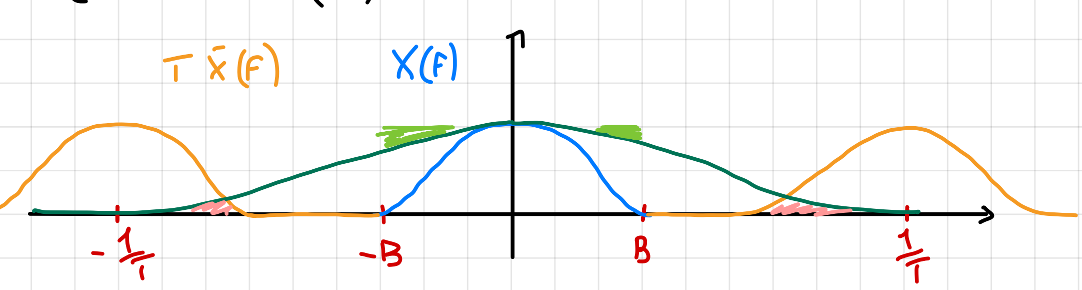


1) LASCIA PASSARE FREQ "IMMAGINE" (TANTO)

2) INTRODUCE DISTORSIONI IN BANDA (POCO)

LINEARE

$$P(f) = T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$



1) LASCIA PASSARE FREQ "IMMAGINE" (POCO)

2) INTRODUCE DISTORSIONI IN BANDA (TANTO)

1) SI PUÒ RISOLVERE FILTRANDO CON UN PASSA BASSO ANCHE DOPO L'INTERPOLAZIONE, SE FACCIO COSÌ ALLORA TANTO VALE USARE L'INTERPOLAZIONE LINEARE, CHE IN BANDA BASSA FA MEGLIO.
SE INVECE TOLLERO DI DISTORCERE POCO PIÙ LA BANDA BASE ALLORA POSSO USARE L'INTERPOLATORE LINEARE E RISPARMIARE IL FILTRO FINALE

2) NON SI PUÒ RISOLVERE (AL MASSIMO POSSO ALLUNGARE $\frac{1}{T}$ MA COSÌ INTRODUCO RITARDO IN UN SISTEMA A TEMPO REALE)

LA COND DI NYQUIST CONSIDERA ANCHE UN'EVENTUALE FREQ. PORTANTE f_0 $\frac{1}{T} \geq 2(f_0+B)$.
È QUESTO IL MOTIVO PER CUI SI CAMPIONA UN SEGNALE A RADIO FREQ. MA PRIMA LO SI DEMODULA.

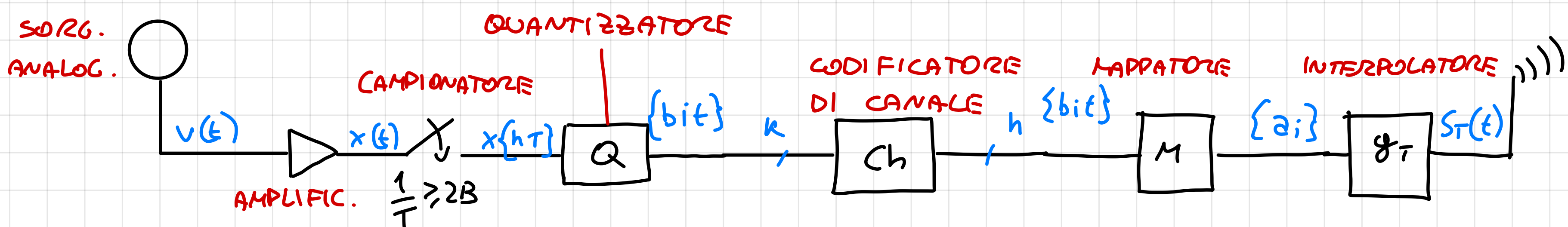
SISTEMI PAM : TRASMETTITORE

UN SISTEMA DI COMUNICAZIONE NUMERICO HA LO SCOPO DI CONVOGLIARE SEQUENZE DI bit DA UN TRASMETTITORE AD UN RICEVITORE : IL TRASMETTITORE DEVE GENERARE SEGNALI FISICI CON DETERMINATI VALORI DI AMPIEZZA, FASE E FREQUENZA CHE IL RICEVITORE DOVRÀ INTERPRETARE.

PER FARE CIÓ SERVE UNA MAPPA, CIOÈ UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA GRUPPI DI bit E VALORI DI AMPIEZZA /FASE / FREQ , DETTI SIMBOLI.

UN TIPICO SISTEMA DI COMUNICAZIONE NUMERICO È IL PAM (PULSE AMPLITUDE MODULATION) , DOVE I SIMBOLI CORRISPONDONO ALL'AMPIEZZA DEGLI IMPULSI DI TENSIONE IN USCITA.

COMPLETO LO SCHEMA DEL TRASMETTITORE SUPPONENDO DI VOLER REALIZZARE UN SISTEMA PAM CHE TRASMETTA IN BANDA BASE



$\frac{1}{T} \geq 2B$

$$T_q = \frac{T}{\log_2(L)} = T_b \qquad T_d = \frac{k}{h} T_b \qquad T_s = \log_2 M \, T_d$$

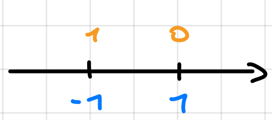
MAPPATORE

IL SUO COMPITO È QUELLO DI RAGGRUPPARE I bit IN INGRESSO E OGNI T_s SECONDI CODIFICARLI IN UN SIMBOLO a APPARTENENTE AD UN ALFABETO A DI M SIMBOLI DI MODULAZIONE UNICI.

DI SOLITO LE MAPPE CHE ASSOCIANO bit A SIMBOLI SONO ANTIPODALI , CIOÈ CON SIMBOLI DISPARI E DISTRIBUITI IN MODO SIMMETRICO RISPETTO ALLO ZERO

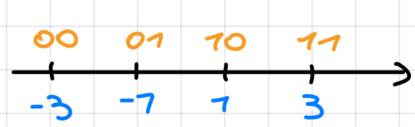
MAPPA BINARIA

bit	a
0	1
1	-1



MAPPA QUATERNARIA

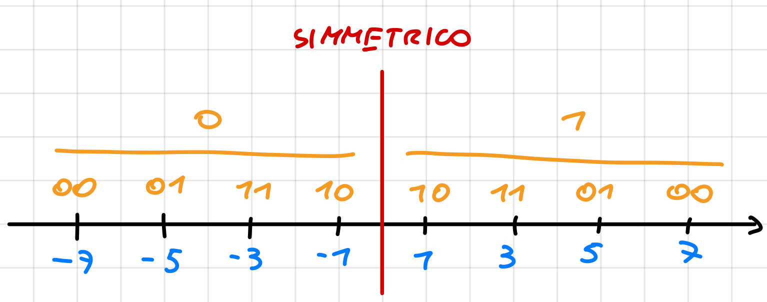
bit	a
00	-3
01	-1
10	1
11	3



PIÙ I SIMBOLI SONO VICINI E PIÙ È FACILE CONFONDERLI PER VIA DEL RUMORE TERMICO, CONVIENE FARE IN MODO CHE I SIMBOLI ADIACENTI ABBIANO UN SOLO bit DI DIFFERENZA (CODIFICA DI GRAY) , COSÌ DA MINIMIZZARE LA PROBABILITÀ DI ERRORE SUL SINGOLO bit CODIFICATO

MAPPA (SENZA NOME)

bit	a
000	-7
001	-5
011	-3
010	-1
110	1
111	3
101	5
100	7



SE I SIMBOLI $\{a_i\}$ SONO INCORRELATI SI HA

$$R_a(m) = \begin{cases} E\{a_i^2\} = \sigma_a^2 + \eta_a^2 & \text{SE } m=0 \\ E\{a_i\}E\{a_{i+m}\} = \eta_a^2 & \text{SE } m\neq 0 \end{cases}$$ (ISTANTI UGUALI)

CIOÈ $R_a(m) = \eta_a^2 + \sigma_a^2\delta(m)$

PER CUI $$S_a(f) = \sigma_a^2 + \frac{\eta_a^2}{T_s}\sum_m \delta\left(f-\frac{m}{T}\right)$$

QUINDI $$\boxed{S_s(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s}|G_T(f)|^2 + \frac{\eta_a^2}{T_s^2}\sum_m \left|G_T\left(\frac{m}{T_s}\right)\right|^2\delta\left(f-\frac{m}{T}\right)}$$ DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA

LA POTENZA DEL SEGNALE È

$$P_s = \frac{\sigma_a^2}{T_s}E_{g_T} + \frac{\eta_a^2}{T_s^2}\sum_m \left|G_T\left(\frac{m}{T_s}\right)\right|^2$$

DOVE $$E_{g_T} = \int_{-\infty}^{+\infty} |G_T(f)|^2 df$$ ENERGIA DELL'IMPULSO $g_T(t)$

COME SI NOTA LA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA SI COMPONE DI UNA PARTE CONTINUA E DI UNA PARTE DISCRETA COSTITUITA DA UN PETTINE DI DELTA DI DIRAC

NEL CASO IN CUI I SIMBOLI SIANO INCORRELATI A MEDIA NULLA (MAPPA ANTIPODALE), LE EQ SOPRA SI SEMPLIFICANO

$$R_a(m) = \sigma_a^2\delta(m) \qquad S_a(f) = \sigma_a^2$$

$$S_s(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s}|G_T(f)|^2 \qquad P_s = \frac{\sigma_a^2}{T_s}E_{g_T}$$

NEL CASO DI PAM CON SIMBOLI INDIPENDENTI E IDENTICAMENTE DISTRIBUITI SI HA

$$\eta_a = 0 \quad e \quad \sigma_a^2 = E\{a_i^2\} = \frac{M^2-1}{3}$$

ESSENDO M LA CARDINALITÀ DELL'ALFABETO A DEI SIMBOLI DI MODULAZIONE $\{a_i\}$

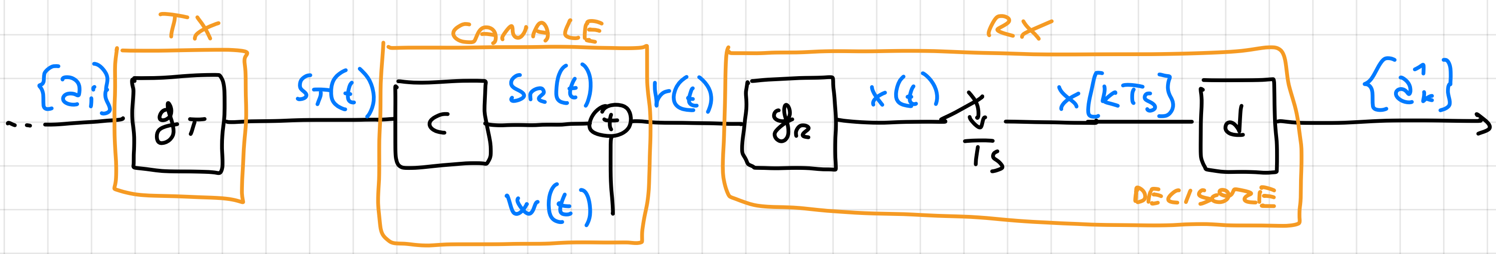
RISULTA $$S_s(f) = \frac{M^2-1}{3T_s}|G_T(f)|^2 \qquad P_s = \frac{M^2-1}{3T_s}E_{g_T}$$

$$E_s = P_sT_s = \frac{M^2-1}{3}E_{g_T}$$ ENERGIA MEDIA PER SIMBOLO

$$E_d = P_sT_d = \frac{M^2-1}{3\log_2 M}E_{g_T}$$ ENERGIA MEDIA PER bit TRASMESSO

SISTEMI PAM : RICEVITORE

COMPLETO LO SCHEMA DI COMUNICAZIONE AGGIUNGENDO IL CANALE E IL RICEVITORE, SUPPONENDO SEMPRE DI OPERARE IN PAM E IN BANDA BASE



- $g_T(t)$ DEVE ESSERE SCELTO IN MODO CHE ABBIA BANDA PARI A QUELLA RISERVATA AL SEGNALE $s_T(t)$ NEL SISTEMA DI COMUNICAZIONE
- ABBIAMO SUPPOSTO DI POTER MODELLARE IL CANALE COME UN FILTRO LTI
- $w(t)$ È RUMORE TERMICO CHE PER TH LIMITE CENTRALE SI PUÒ APPROSSIMARE COME PROCESSO GAUSSIANO BIANCO

$$\eta_w = 0 \qquad S_w(f) = \frac{N_0}{2}$$ $N_0 \simeq$ cost BOLTZMANN • TEMP. ANTENNA

LO SUPPORREMO SEMPRE

- IL FILTRO $g_R(t)$ SERVE PER LIMITARE IN BANDA IL RUMORE TERMICO, SENZA TAGLIARE COMPONENTE UTILE DEL SEGNALE (SI VEDE POI COME SCEGLIERLO)
- IL CAMPIONATORE NON C'ENTRA NULLA CON NYQUIST, DEVE SOLO CAMPIONARE I SIMBOLI CON LA STESSA FREQ. CON CUI VENGONO MANDATI

ANALIZZO IL MODELLO DEL SEGNALE NEI VARI PUNTI DELLO SCHEMA

1) $s_T(t) = \sum_i a_i g_T(t - iT_s)$ SEGNALE TRASMESSO

2) $s_R(t) = s_T(t) \otimes c(t) = \sum_i a_i g_{Tc}(t - iT_s)$ SEGNALE UTILE RICEVUTO

DOVE $g_{Tc}(t) = g_T(t) \otimes c(t)$

3) $r(t) = s_R(t) + w(t)$ SEGNALE RICEVUTO

4) $x(t) = r(t) \otimes g_R(t) = \left(\sum_i a_i g(t - iT_s) + w(t)\right) \otimes g_R(t) = \sum_i a_i g(t - iT_s) + n(t)$ SEGNALE IN USCITA DAL FILTRO DI RICEZIONE

DOVE $g(t) = g_{Tc}(t) \otimes g_R(t) = g_T(t) \otimes c(t) \otimes g_R(t)$ "RISPOSTA IMPULSIVA GLOBALE" DEL SISTEMA DI COMUNICAZIONE

E $n(t) = w(t) \otimes g_R(t)$ COMPONENTE DEL RUMORE

↓

PROCESSO GAUSSIANO A MEDIA NULLA E DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA

$$S_n(f) = S_w(f)|G_R(f)|^2 = \frac{N_0}{2}|G_R(f)|^2$$

5) $x(k) = \sum_i a_i g[(k-i)T_s] + n_k$ CAMPIONE RICEVUTO

DOVE n_k È UNA VARIABILE ALEATORIA GAUSSIANA A MEDIA NULLA E VARIANZA $\left(\sigma_n^2 = P_x - \eta_x^2 = P_x\right)$

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |G_R(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} E_{g_R}$$

↳ ENERGIA DI $g_R(t)$

CON IL CAMBIO DI INDICE $k - i = m$ IL CAMPIONE IN USCITA DEL FILTRO DI RICEZIONE ASSUME LA FORMA

$$x(k) = \sum_m a_{k-m}\, g(mT_s) + n_k$$

ISOLANDO POI IL TERMINE RELATIVO A $m=0$

$$\boxed{x(k) = \underbrace{a_k\, g(0)}_{\text{SEGNALE UTILE}} + \underbrace{\sum_{m\neq 0} a_{k-m}\, g(mT_s)}_{\text{INTER-SYMBOL INTERFERENCE}} + \underbrace{n(k)}_{\text{RUMORE TERMICO}}}$$

$x(k)$ È USATO PER PRENDERE UNA DECISIONE SUL VALORE DEL SIMBOLO a_k, IL TERMINE UTILE AI FINI DELLA DECISIONE È $a_k\, g(0)$.

L'ISI (INTER-SYMBOL INTERFERENCE) RAPPRESENTA UN DISTURBO CHE SI SOVRAPPONE AL TERMINE UTILE (CARATTERISTICO DEI SISTEMI DI COMUNICAZIONE NUMERICA).

$$ISI = \sum_{m\neq 0} a_{k-m}\, g(mT_s)$$

IN MOLTE OCCASIONI L'ISI È UN DISTURBO PIÙ RILEVANTE DI QUELLO TERMICO, PER CUI SI DEVE TENERE SOTTO CONTROLLO.

CONDIZIONE PER L'ANNULLAMENTO DELL'ISI

$$ISI = \sum_{m\neq 0} a_{k-m}\, g(mT_s)$$

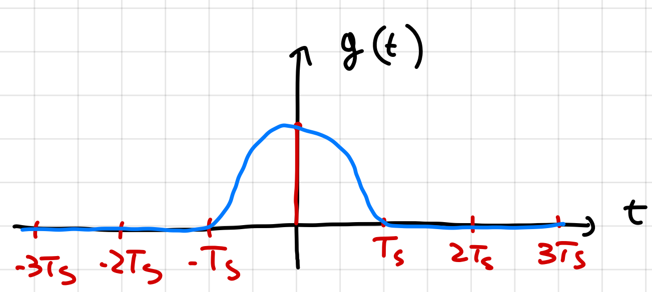
SI VEDE CHE IL SUO ANNULLAMENTO SI HA IMPONENDO LE SEGUENTI "CONDIZIONI DI NYQUIST" NEL DOMINIO DEL TEMPO

$$g(mT_s) = \begin{cases} 1 & m=0 \\ 0 & m\neq 0 \end{cases}$$

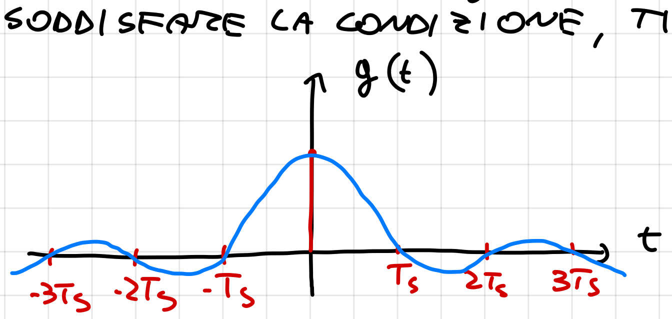
SE VALGONO QUESTE CONDIZIONI $ISI=0$ E $x(k) = a_k + n_k$

UN IMPULSO CHE SODDISFA TALE CONDIZIONE SI DICE "IMPULSO DI NYQUIST"

OSSERVIAMO CHE TUTTI GLI IMPULSI $g(t)$ CHE SONO NULLI FUORI DALL'INTERVALLO $(-T_s, T_s)$ E NON NULLI IN $t=0$ SODDISFANO TALE CONDIZIONE



ANCHE GLI IMPULSI $g(t)$ NON NULLI ALL'ESTERNO DI $(-T_s, T_s)$ POSSONO COMUNQUE SODDISFARE LA CONDIZIONE, TIPO:



TRADUCIAMO ORA LA COND. DI NYQUIST NEL DOMINIO DEL TEMPO IN COND. EQUIVALENTE SULLA TRASFORMATA DI FOURIER DI $g(t)$, DENOMINATA

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

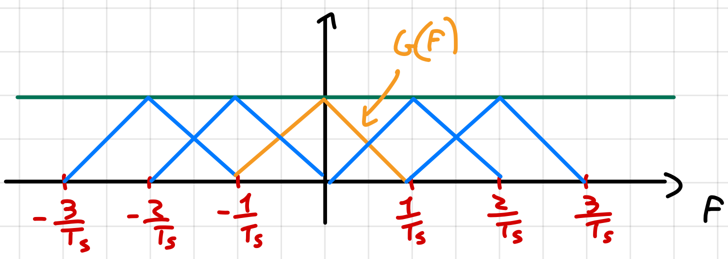
RICORDIAMO CHE VALE LA SEGUENTE (SOMMA DI POISSON)

$$G(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(mT_s)\, e^{-j2\pi m f T_s} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

SE $g(t)$ SODDISFA LE CONDIZIONI DI NYQUIST NEL DOMINIO DEL TEMPO, ALLORA IL PRIMO MEMBRO DELLA PRECEDENTE EQ. SI RIDUCE A UN SOLO TERMINE DI VALORE UNITARIO (RELATIVO A $m=0$), OTTENGO QUINDI QUESTE "CONDIZIONI DI NYQUIST" NEL DOMINIO DELLA FREQ.

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(f-\frac{k}{T_s}\right)=1}$$

CHE INDICA CHE LA RIPETIZIONE DELLE TRASFORMATE $G(f)$ NEL DOMINIO DELLA FREQ PER MULTIPLI DI $1/T_s$ DEVE ESSERE COSTANTE SU TUTTO L'ASSE



$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(f-\frac{k}{T_s}\right)$$

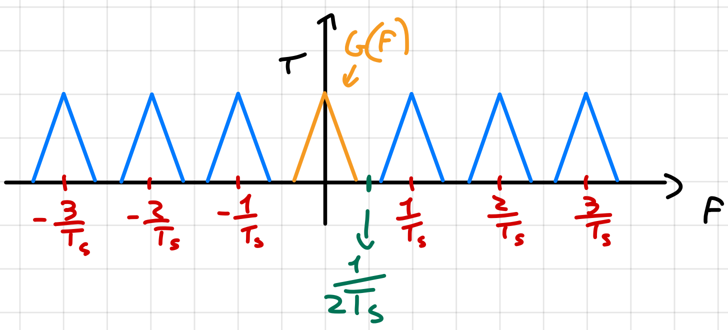
BANDA MINIMA DI NYQUIST

LA COND DI NYQUIST NEL DOMINIO DELLA FREQ. INDICA CHE

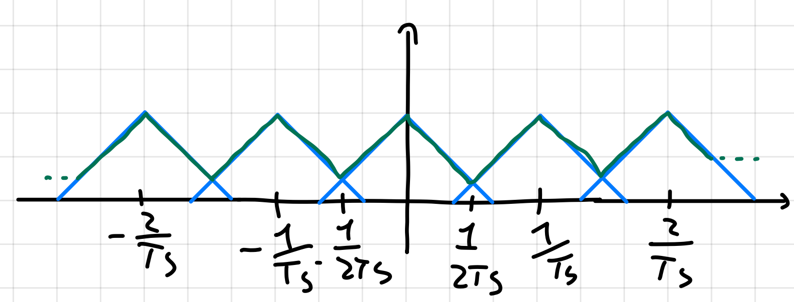
[CN AFFINCHE UN IMPULSO $g(t)$ SIA DI NYQUIST È CHE LA SUA TRASFORMATA DI FOURIER $G(f)$ ABBIA BANDA ALMENO PARI A $1/2T_s$]

→ BANDA MINIMA DI NYQUIST

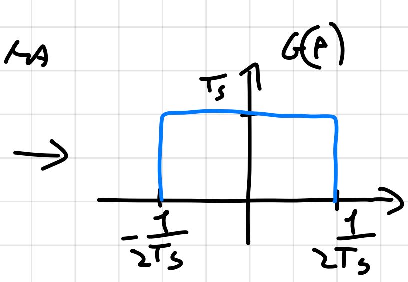
SE COSÌ NON FOSSE LA RIPETIZIONE DI $G(f)$ NEL DOMINIO DELLA FREQ SAREBBE NULLA IN $f=1/2T_s$ E NON SAREBBERO PIÙ SODDISFATTE LE COND DI NYQUIST



SOLO NECESSARIA, DA SOLA NON È SUFF. PER L'ELIMINAZIONE DELL'ISI



IMPULSO CON BANDA MINIMA CHE RISPETTA NYQUIST →



$$g(t)=\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

$$G(f)=T_s\,\mathrm{rect}(fT_s)$$

IMPULSI A COSENO RIALZATO

L'IMPULSO A BANDA MINIMA ABBIAMO VISTO ESSERE $g(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$ CON $G(F)$ RETTANGOLARE

ANCHE SE TALE IMPULSO GARANTISCE LA MIGLIOR EFFICIENZA SPETTRALE AL SISTEMA, NON VIENE USATO PER TALI MOTIVI:

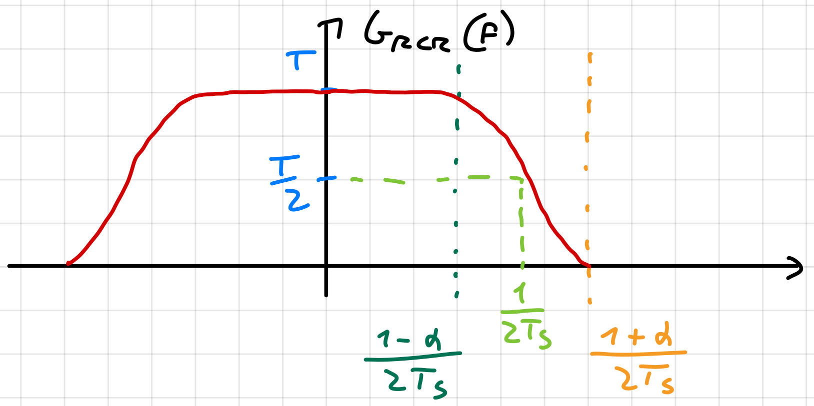
- NON FACILMENTE IMPLEMENTABILE VISTA LA DISCONTINUITÀ DI $G(F)$ IN $F = \pm \frac{1}{2T_s}$
- HA LOBI MOLTO PRONUNCIATI NEL DOMINIO DEL TEMPO, QUINDI RENDE IL SISTEMA SENSIBILE AD ELEVATI ERRORI DI TIMING (CAMPIONO A $kT+\tau$, τ È IL RITARDO TRA TX E RX)

AL SUO POSTO SI USANO DEGLI IMPULSI DETTI "A COSENO RIALZATO" (RCR) (RAISED COSINE ROLL-OFF). CARATTERIZZATI DA UN PARAMETRO $\alpha \in [0,1]$ DETTO "FATTORE DI ROLL-OFF".

LA LORO TRASFORMATA DI FOURIER HA UNA PARTE PIATTA DI VALORE T_s CHE SI ESTENDE FINO A $F = \frac{1-\alpha}{2T_s}$

DOPO QUESTA PARTE PIATTA C'È LA ZONA DI ROLL-OFF CHE SI ESTENDE FINO A $F = \frac{1+\alpha}{2T_s}$ E DURANTE LA QUALE $G(F)$ SCENDE A ZERO

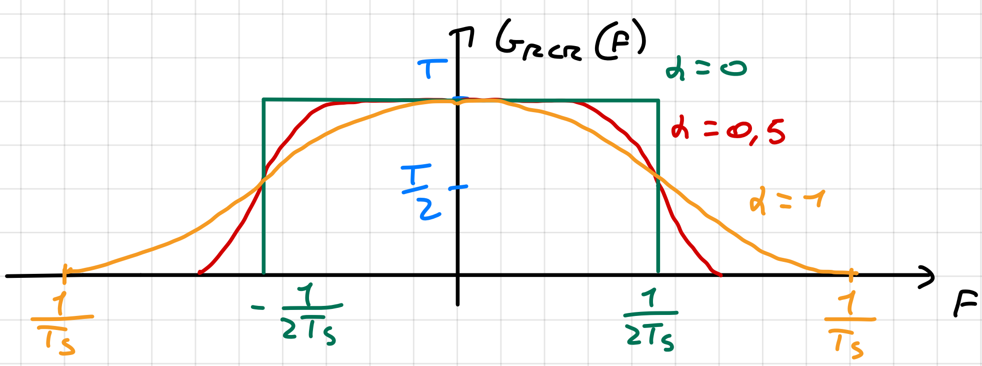
A $F = \frac{1}{2T_s}$ HA VALORE $\frac{T}{2}$ INDIPENDENTEMENTE DA α

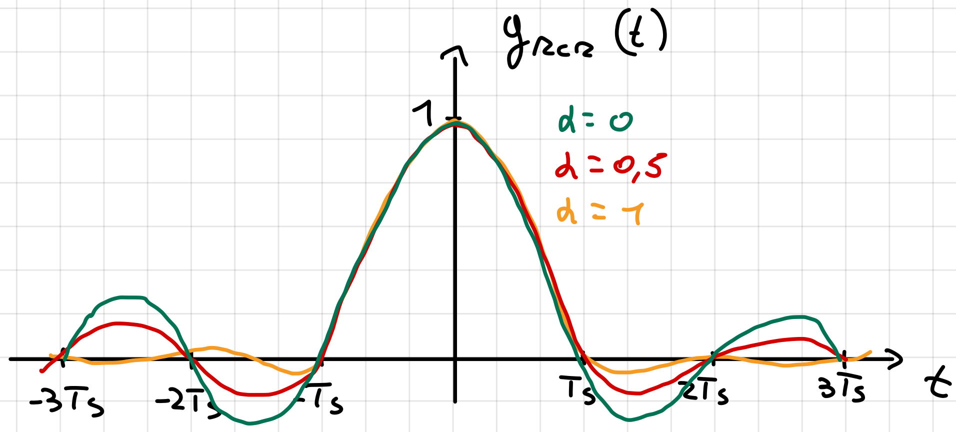


FORMA NEL DOMINIO t

$$g_{RCR}(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)}{\frac{\pi t}{T_s}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\alpha \pi t}{T_s}\right)}{1-\left(\frac{2\alpha t}{T_s}\right)^2}$$

ESEMPI DI $G_{RCR}(F)$ e $g_{RCR}(F)$





DIMINUENDO α MIGLIORO L'EFF. SPETTRALE, MA AUMENTA LA SENSIBILITÀ AL DISTURBO ISI. VA SCELTO UN VALORE CHE BILANCI LE DUE COSE.

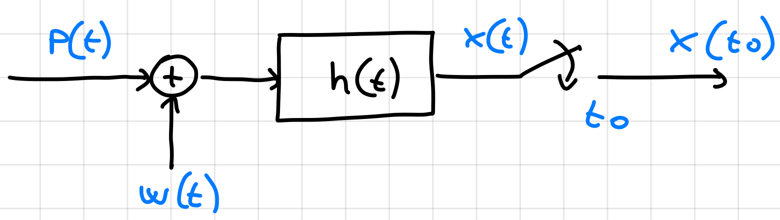
FILTRO ADATTATO

DEVO CAPIRE COME SCEGLIERE LE RISPOSTE IMPULSIVE g_T e g_R DEI DUE FILTRI, COSÌ DA COMBATTERE IN MODO PIÙ EFFICACE SIA L'ISI SIA IL RUMORE TERMICO.

PER RISOLVERE OCCORRE TRATTARE PRIMA I FILTRI ADATTATI.

DATO L'IMPULSO $p(t)$ DI FORMA NOTA, IMMERSO IN UN RUMORE BIANCO $w(t)$ CON DENSITÀ SPETTRALE $S_w(f) = N_0/2$.

IL SEGNALE VIENE INVIATO IN INGRESSO AD UN SISTEMA LTI CON RISPOSTA IMPULSIVA $h(t)$ E CAMPIONATO AD UN PREFISSATO ISTANTE t_0, OTTENENDO IL CAMPIONE $x(t_0)$



VOGLIO TROVARE $x(t_0)$ IN MODO CHE SIA MASSIMO IL RAPPORTO $\frac{\text{SEGNALE}}{\text{RUMORE}}$ SU $x(t_0)$

QUINDI PARTO DA $x(t) = s(t) + n(t)$

$$s(t) = p(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, p(t-\tau)\, d\tau \qquad \text{CONTRIBUTO DI } p(t)$$

$$n(t) = w(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, n(t-\tau)\, d\tau \qquad \text{CONTRIBUTO RUMORE TERMICO}$$

$$x(t_0) = s(t_0) + n(t_0) \qquad \text{CAMPIONE IN USCITA DAL FILTRO}$$

CON
$$s(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, p(t_0-\tau)\, d\tau$$
$$n(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, w(t_0-\tau)\, d\tau$$

IL RAPPORTO $\frac{\text{SEGNALE}}{\text{RUMORE}}$ SUL CAMPIONE È DEFINITO DA

$$SNR = \frac{S_u}{N_u} = \frac{s^2(t_0)}{E\{n^2(t_0)\}}$$

DOVE
$$E\{n^2(t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)\, df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 df$$

ESSENDO $H(f)$ LA TRASFORMATA DI $h(t)$ E DEL TH DI PARSEVAL

$$E\{n^2(t_0)\} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\, dt$$

$$\frac{S_u}{N_u} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, p(t_0-t)\, dt\right]^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\, dt}$$

DEVO TROVARE $h(t)$ IN MODO CHE $\frac{S_u}{N_u}$ SIA MASSIMO

(USO DIS. SCHWARTZ)

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, p(t_0-t)\, dt\right]^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\, dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} p^2(t_0-t)\, dt$$

CON L'UGUALE CHE VALE QUANDO $h(t) = k\, p(t_0-t) \qquad k \in \mathbb{R},\ k \ne 0$

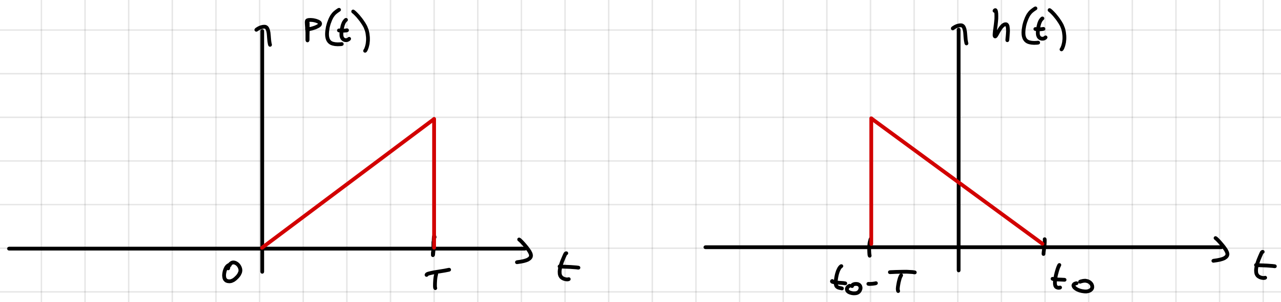
SOSTITUENDO NELL'EQ SI HA

$$\frac{S_u}{N_u} \le \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} p^2(t_0 - t)\, dt \qquad \frac{S_u}{N_u} \le \frac{2E_p}{N_0} \to \text{ENERGIA IMPULSO } p(t)$$

DEDUCO CHE IL MASSIMO RAPPORTO $\frac{\text{SEGNALE}}{\text{RUMORE}}$ OTTENIBILE SUL CAMPIONE $x(t_0)$ È

$$\left.\frac{S_u}{N_u}\right|_{max} = \frac{2E_p}{N_0} \qquad (\text{QUANDO } h(t) = p(t_0 - t))$$

IL FILTRO $h(t)$ (CHE HA RISPOSTA IMPULSIVA $h(t) = p(t_0 - t)$) SI DICE <u>ADATTATO</u> ALL'IMPULSO $p(t)$ E MASSIMIZZA IL RAPPORTO SEGNALE/RUMORE ALLA SUA USCITA ALL'ISTANTE t_0 QUANDO IL RUMORE DI INGRESSO È BIANCO.



SI OSSERVA CHE LA COMPONENTE UTILE $s(t_0)$ IN USCITA DAL FILTRO ADATTATO ALL'ISTANTE t_0 È

$$s(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p^2(t_0 - t)\, dt = E_p$$

LA RISPOSTA IN FREQ DEL FILTRO ADATTATO È

$$H(f) = TCF\{p(t_0 - t)\} = P^*(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$$

QUINDI $|H(f)| = |P(f)|$

SI OSSERVA CHE NEL DOMINIO f IL FILTRO ADATTATO AMPLIFICA LE ZONE FREQUENZIALI DOVE $|P(f)|$ È MAGGIORE (ALTO RAPPORTO S/R) E ATTENUA LE ZONE DOVE $|P(f)|$ È MINORE (BASSO RAPPORTO S/R)

PROGETTO DEI FILTRI DI TRASMISSIONE E DI RICEZIONE

IN UN SISTEMA DI COMUNICAZIONE IL CANALE FISICO È IN GENERALE DISTORCENTE. CIOÈ HA UNA RISPOSTA IMPULSIVA $c(t) \neq \delta(t)$.

IN TALI CONDIZIONI LA PROGETTAZIONE DEI FILTRI DI TRASMISSIONE E RICEZIONE NON È PERSEGUIBILE PERCHÉ $g_T(t)$ e $g_R(t)$ VERREBBERO A DIPENDERE DA $c(t)$, CHE DI SOLITO NON È NOTO IN FASE PROGETTUALE.

SI PUÒ ASSUMERE $c(t) = \delta(t)$, CIOÈ CHE IL CANALE NON HA DISTORCENZE, IN QUESTO MODO POSSO DIMENSIONARE I FILTRI DI TRASMISSIONE E RICEZIONE PRESCINDENDO DAL REALE VALORE DI $c(t)$.

SE POI IL SISTEMA DI COMUNICAZIONE PROGETTATO DOVRÀ OPERARE SU UN CANALE DISTORCENTE, ALLORA PRENDERÒ PRECAUZIONI AL RICEVITORE PER MITIGARE LE DISTORSIONI INTRODOTTE DAL CANALE.

QUINDI ABBIAMO DETTO $c(t) = \delta(t)$

$$g_{TC}(t) = g_T(t) \otimes c(t) = g_T(t) \qquad \text{IMPULSI IN INGRESSO AL FILTRO DI RICEZIONE}$$

$$g(t) = g_{TC}(t) \otimes g_R(t) = g_T(t) \otimes g_R(t) \qquad \text{RISPOSTA IMPULSIVA GLOBALE DEL SISTEMA PAM}$$

LA PROGETTAZIONE DEI FILTRI PASSA ATTRAVERSO QUESTI PASSI:

1) <u>ANNULLAMENTO ISI</u>

SI DEVE FARE IN MODO CHE $g(t)$ SIA UN IMPULSO DI NYQUIST, TIPICAMENTE A COSENO RIALZATO

$$\boxed{G(f) = G_T(f)\, G_R(f) = G_{RCR}(f)}$$

2) MASSIMIZZAZIONE RAPPORTO $\frac{\text{SEGNALE}}{\text{RUMORE}}$ SUL CAMPIONE IN USCITA DAL FILTRO DI RICEZIONE

DEVO FARE IN MODO CHE $g_R(t)$ SIA ADATTATO AGLI IMPULSI PRESENTI AL SUO INGRESSO

$$\boxed{g_R(t) = g_T(-t) \implies G_R(f) = G_T^*(f)}$$

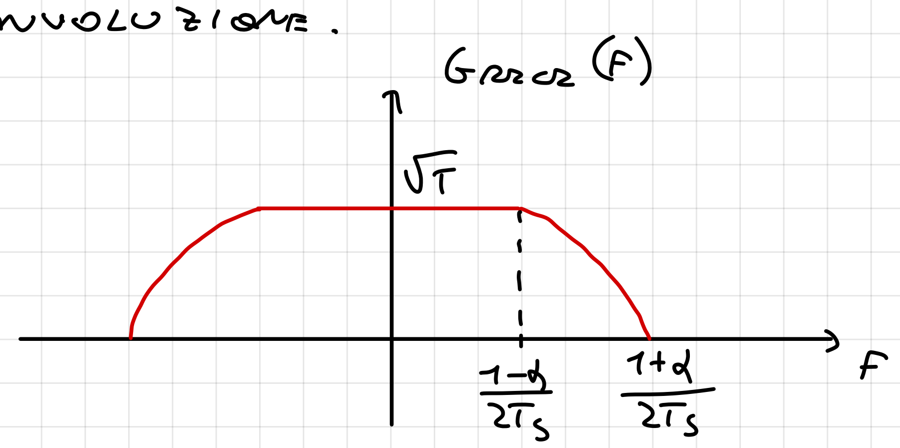
COMBINANDO 1) e 2) E TENENDO DI CONTO CHE $G_{RCR}(f)$ È REALE E NON NEGATIVA SI HA

$$\boxed{G_T(f) = G_R(f) = \sqrt{G_{RCR}(f)}}$$

RISPOSTE IN FREQ DEI FILTRI DI TX E RX SONO LA RADICE DI UNA FUNZIONE A COSENO RIALZATO

g_T e g_R SONO ALLORA DETTI IMPULSI A RADICE DI COSENO RIALZATO (RRCR)

SI OSSERVA CHE NON SONO IMPULSI DI NYQUIST, MA LO È LA LORO CONVOLUZIONE.



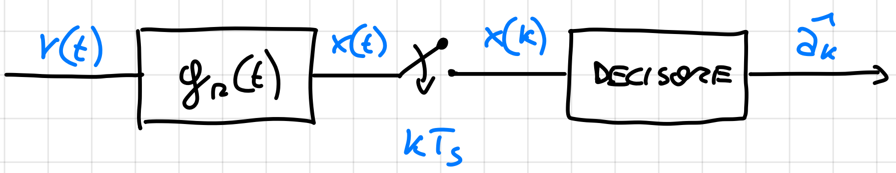
TRASFORMATA DI UN IMPULSO $g_{RRCR}(t)$

SISTEMI PAM : PROBABILITÀ DI ERRORE

CONSIDERO UN SISTEMA PAM CON ALFABETO M-ARIO

$$A = \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (M-1)\}$$

VOGLIO CALCOLARE LA PROBABILITÀ MEDIA DI ERRORE SUL SIMBOLO DECISO, AMMETTENDO CHE I SIMBOLI SIANO EQUIPROBABILI E CHE NON CI SIA ISI IN INGRESSO AL RICEVITORE.



SUPPONIAMO FILTRI TX E RX A COSENO RIALZATO.

$r(t) = s_R(t) + w(t)$ DOVE $s_R(t) = A \sum_i a_i g_T(t - iT_s)$

$w(t)$ È RUMORE GAUSSIANO BIANCO CON DENSITÀ DI POTENZA $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$

A TIENE CONTO DELL'ATTENUAZIONE INTRODOTTA DAL CANALE TRASMISSIVO.

VEDREMO CHE LA SER (SYMBOL ERROR RATE) DIPENDE DALL'ENERGIA MEDIA PER SIMBOLO RICEVUTO E_s, CONVIENE QUINDI TROVARE IL LEGAME TRA E_s E L'ATTENUAZIONE A.

LA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DEL SEGNALE UTILE $s_R(t)$ È

$$S(f) = \frac{A^2}{T_s} E\{a_i^2\} |G_T(f)|^2$$

DOVE SI È TENUTO CONTO CHE PER SIMBOLI INDIPENDENTI ED EQUIPROBABILI HO

$$\sigma_a^2 = E\{a_i^2\} = \frac{M^2-1}{3}$$

L'ENERGIA E_s PER SIMBOLO RICEVUTO È QUINDI

$$E_s = T_s \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) = \frac{A^2}{3}(M^2-1) \int_{-\infty}^{+\infty} |G_T(f)|^2 df$$

VISTO CHE $G_T(f)$ È UN IMPULSO A RADICE DI COSENO RIALZATO SI HA

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G_T(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} G_{RCR}(f)\, df = g_{RCR}(0) = 1$$

QUINDI $E_s = \frac{A^2}{3}(M^2-1)$

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{3E_s}{M^2-1}}}$$

DOPO IL FILTRO DI RICEZIONE HO IL SEGNALE

$$x(t) = A \sum a_i g(t - iT_s) + n(t)$$

DOVE $g(t) = g_T(t) \otimes g_R(t)$ È UN IMPULSO A COSENO RIALZATO

$n(t)$ È UN PROCESSO GAUSSIANO A MEDIA NULLA E POTENZA

$$\sigma^2 = E\{n^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} |G_R(f)|^2 df$$

SAPENDO CHE $G_R(f)$ È UN IMPULSO A COSENO RIALZATO SI HA

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_R(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{RCR}(f)\, df = \frac{N_0}{2}$$

IL CAMPIONE IN USCITA DAL FILTRO QUINDI È

$$x(k) = A a_k + n_k$$

DOVE $n_k \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ È UNA VARIABILE ALEATORIA GAUSSIANA

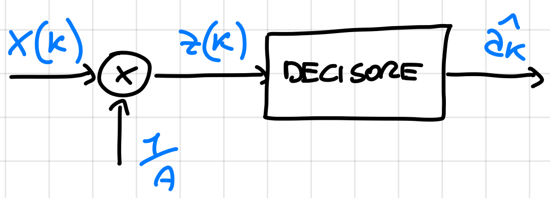
$x(k)$ È UNA VERSIONE "SCALATA" DEL SIMBOLO TRASMESSO a_k IMMERSA IN RUMORE GAUSSIANO.

SE $x(k)$ VENISSE INVIATO DIRETTAMENTE IN INGRESSO AL DECISORE LE SOGLIE DI DECISIONE DOVREBBERO ESSERE OPPORTUNATAMENTE DIMENSIONATE TENENDO DI CONTO DELL'ATTENUAZIONE A DEL CANALE, CHE PUÒ VARIARE IN MODO IMPREVEDIBILE A SECONDA DELLE CONDIZIONI DEL MEZZO TRASMISSIVO.

LE SOGLIE QUINDI DOVREBBERO ESSERE ADATTIVE, CIOÈ DOVREBBERO ESSERE OGNI VOLTA VARIATE IN ACCORDO ALLE CONDIZIONI DEL CANALE.

VISTO CHE ADATTARE LE SOGLIE NON È PRATICO SI PREFERISCE SCALARE OPPORTUNAMENTE IL SEGNALE PER IL FATTORE A, COSÌ DA RENDERE FISSE LE SOGLIE DEL DECISORE.

QUINDI IN INGRESSO AL DECISORE SI MANDA IL CAMPIONE $z(k) = \frac{1}{A} x(k)$



DOVE $z(k) = a_k + n_k$

n_k È UNA VARIABILE ALEATORIA GAUSSIANA, A MEDIA NULLA E CON VARIANZA

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_n^2}{A^2} = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{M^2-1}{3E_s} = \frac{M^2-1}{6\left(\frac{E_s}{N_0}\right)}$$

IL DECISORE DIVIDE L'ASSE x IN ZONE DI DECISIONE CON SOGLIE POSTE ESATTAMENTE A METÀ TRA DUE SIMBOLI ADIACENTI (STRATEGIA MV)

USANDO IL TH DELLA PROBABILITÀ TOTALE SI PUÒ ESPRIMERE LA SER COME

$$SER = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} P(e \mid a^{(m)})$$

RESTANO DA CALCOLARE LE M PROBABILITÀ CONDIZIONATE $P(e \mid a^{(m)})$

TENENDO CONTO DELL'ALFABETO $\mathcal{A}$ E DELLE ZONE DI DECISIONE SULL'ASSE x, SI VEDE CHE I PUNTI "INTERNI" DELL'ALFABETO (SIMBOLI $\{\pm 1, \pm 3, \dots \pm (M-3)\}$) SONO CARATTERIZZATI DA ZONE DI DECISIONE DI AMPIEZZA 2 CENTRATE SUL CORRISPONDENTE SIMBOLO, PER CUI AVRANNO LA STESSA PROBABILITÀ DI ERRORE CONDIZIONATA.

POSSO QUINDI SCRIVERE

$$P(e \mid a^{(m)}) = P(e \mid a_k = 1) \quad \text{SE} \quad a^{(m)} \in \{\pm 1, \pm 3, \dots \pm (M-3)\}$$

$$P(e \mid a_k = -M+1) = P(e \mid a_k = M-1)$$

QUINDI L'ESPRESSIONE DELLA SER DIVENTA

$$SER = \frac{M-2}{M} P(e \mid a_k = 1) + \frac{2}{M} P(e \mid a_k = M-1)$$

CALCOLIAMO ALLORA LE 2 PROBABILITÀ CONDIZIONATE

1) $P(e|a_k = 1)$

CONDIZIONATAMENTE ALL'AVER TRASMESSO IL SIMBOLO $a_k = 1$, IL CAMPIONE RICEVUTO È ESPRESSO DA

$$z(k) = 1 + n_k$$

POICHÉ LA ZONA DI DECISIONE RELATIVA AL SIMBOLO $a_k = 1$ È L'INTERVALLO $[0,2]$

OTTENGO QUINDI $\boxed{P(e|a_k = 1) = 2Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)}$

2) $P(e|a_k = M-1)$

CONDIZIONATAMENTE ALL'AVER TRASMESSO IL SIMBOLO $a_k = M-1$, IL CAMPIONE RICEVUTO È ESPRESSO DA

$$z(k) = M-1 + n_k$$

VISTO CHE LA ZONA DI DECISIONE RELATIVA A TALE SIMBOLO È LA SEMIRETTA $(M-2, +\infty)$

$$P(e|a_k = M-1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_1^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \boxed{Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)}$$

METTENDO TUTTO INSIEME SI HA

$$SER = \frac{M-2}{M} 2Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{2}{M} Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

E TENENDO CONTO DELL'ESPRESSIONE DI σ

$$SER = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6\left(\frac{E_s}{N_0}\right)}{M^2-1}}\right)$$

IN TERMINI DI $\frac{E_d}{N_0}$ LA SER IN UN SISTEMA PAM È

$$\boxed{SER = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6\left(\frac{E_d}{N_0}\right)\log_2 M}{M^2-1}}\right)}$$

SISTEMI PAM : EFFICIENZA SPETTRALE ED ENERGETICA

SI È VISTO COME L'IMPULSO DI TRASMISSIONE $y_T(t)$ IMPIEGATO IN UN SISTEMA PAM SIA DI SOLITO A RADICE DI COSENO RIALZATO.

NEL CASO DI SIMBOLI INDIPENDENTI ED EQUIPROBABILI, LA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DEL SEGNALE TRASMESSO È

$$S_s(f) = \frac{M^2-1}{3T_s}\left|G_T(f)\right|^2 = \frac{M^2-1}{3T_s}G_{RCR}(f)$$

QUINDI LA BANDA IMPIEGATA DAL SEGNALE PAM È

$$B_T = \frac{1+\alpha}{2T_s}$$

E DIPENDE SIA DAL FATTORE DI ROLL-OFF α CHE DALLA FREQUENZA DI SEGNALAZIONE $F_s = \frac{1}{T_s}$

L'EFFICIENZA SPETTRALE DEL SISTEMA PAM È DEFINITA DA

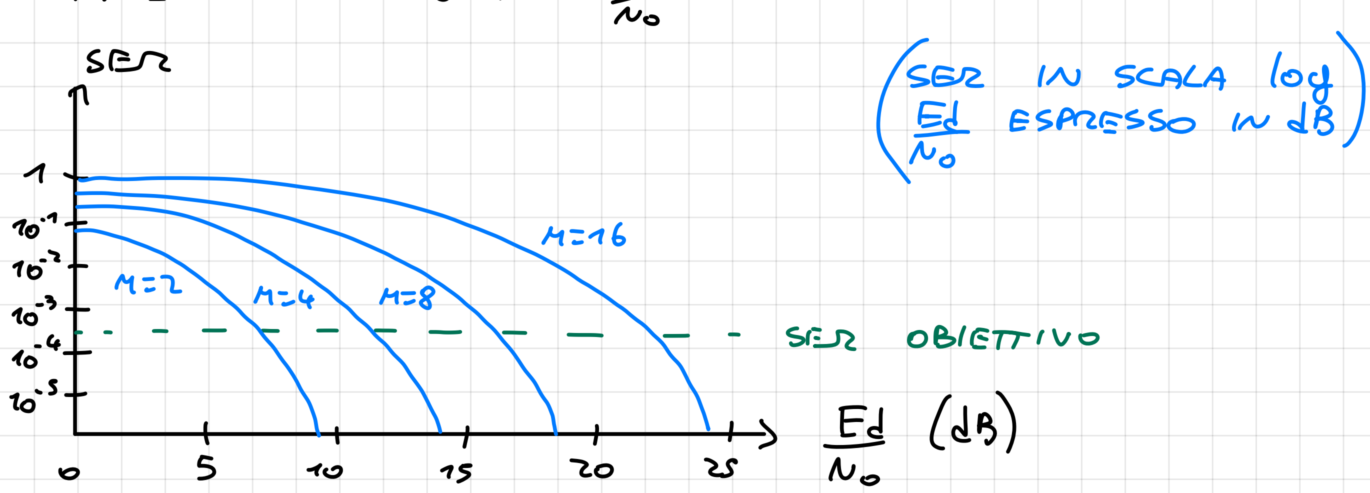
$$\eta_{sp} = \frac{R_b}{B_T} \quad (\text{bit/s per Hz})$$

DOVE $R_b = \frac{\log_2 M}{T_s}$ È IL bit-RATE

SI HA QUINDI $\boxed{\eta_{sp} = \frac{2\log_2 M}{1+\alpha}}$

CHE INDICA COME L'EFF. SPETTR. DEL SISTEMA AUMENTI AL CRESCERE DELLA CARDINALITÀ DELL'ALFABETO M.

PER L'EFFICIENZA ENERGETICA SI DEVE ANALIZZARE IL GRAFICO DELLA SER AL VARIARE DEL RAPPORTO $\frac{E_d}{N_0}$.



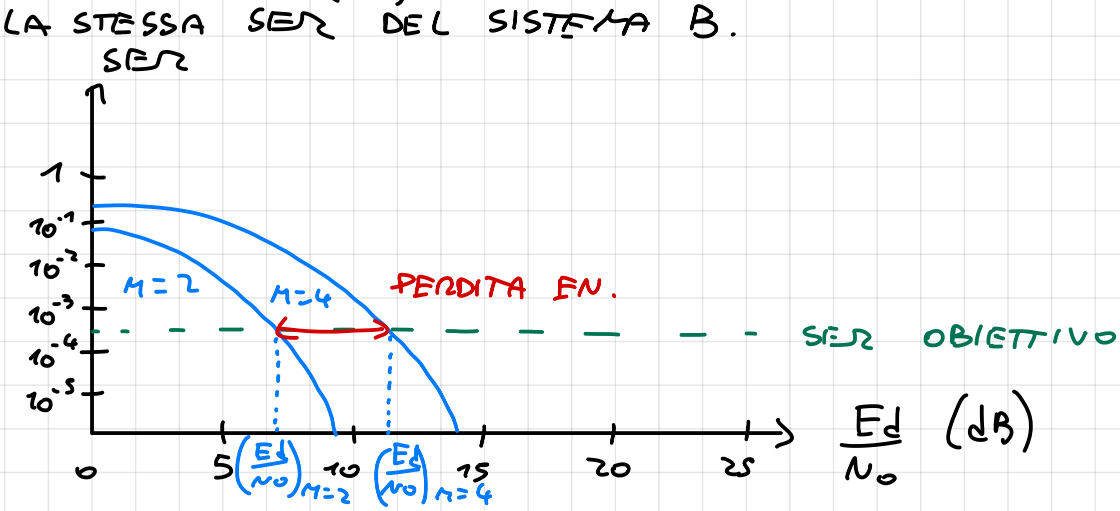
COME SI VEDE, FISSATA UNA CERTA PROBABILITÀ DI ERRORE OBIETTIVO STABILITA IN BASE ALLA PARTICOLARE APPLICAZIONE, IL RAPPORTO E_d/N_0 RICHIESTO PER RAGGIUNGERE LA SER OBIETTIVO CRESCE AL CRESCERE DELLA CARDINALITÀ M DELL'ALFABETO.

QUESTO INDICA COME L'EFFICIENZA ENERGETICA DEL SISTEMA DIMINUISCA AL CRESCERE DI M.

LA SCELTA DELL'ALFABETO È PILOTATA DA 2 ESIGENZE CONTRASTANTI:

- SAREBBE BENE SCEGLIERE M GRANDE PER AUMENTARE L'EFFICIENZA SPETTRALE
- SCEGLIERE M GRANDE PREGIUDICA L'EFFICIENZA ENERGETICA

SI DEFINISCE "PERDITA ENERGETICA" DI UN SISTEMA DI COM. NUM A RISPETTO AD UN ALTRO B L'AUMENTO (dB) DEL RAPPORTO E_d/N_0 NECESSARIO AL SISTEMA A PER RAGGIUNGERE LA STESSA SER DEL SISTEMA B.



CALCOLO PERDITA IN MODO ANALITICO

EGUAGLIO LA SER DEL SISTEMA PAM NEI CASI $M=2$ e $M=4$

$$SER = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \frac{E_d}{N_0} \log_2 M}{M^2-1}}\right)$$

$$\frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\left(\frac{E_d}{N_0}\right)}\right)\Bigg|_{4\text{-PAM}} = Q\left(\sqrt{2\left(\frac{E_d}{N_0}\right)}\right)\Bigg|_{2\text{-PAM}}$$

DI SOLITO SI TENDE A TRASCURARE ALCUNI COEFF.

QUINDI $\frac{4}{5}\left(\frac{E_d}{N_0}\right)_{M=4} = 2\left(\frac{E_d}{N_0}\right)_{M=2}$

LA PERDITA DEL SISTEMA PAM QUATERNARIO RISPETTO AL PAM BINARIO È (IN dB)

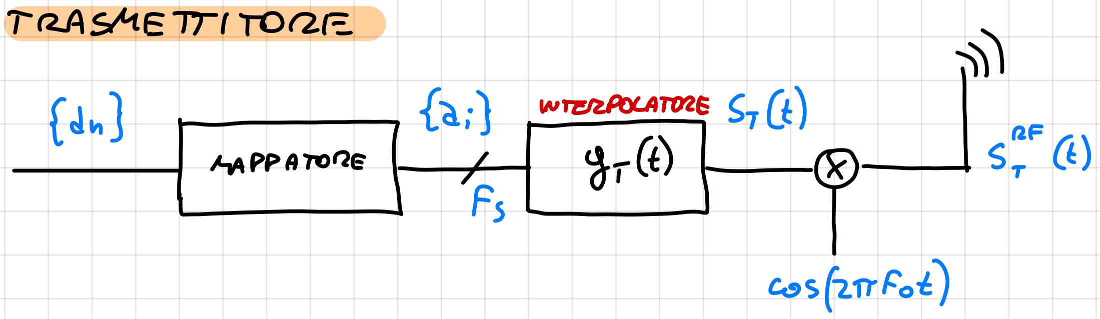
$$L\Big|_{dB} = 10 \log_{10} \frac{(E_d/N_0)_{M=4}}{(E_d/N_0)_{M=2}} = 10 \log_{10} \frac{5}{2} \simeq 4 \text{ dB}$$

QUINDI VUOL DIRE CHE LA CURVA DI SER DI UN PAM QUATERNARIO È PRATICAMENTE QUELLA DEL PAM BINARIO TRASLATA DI 4 dB VERSO DX.

SISTEMI PAM IN BANDA PASSANTE

SONO SISTEMI DI COMUNICAZIONE IN CUI IL SEGNALE TRASMESSO HA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DI TIPO PASSA-BANDA, CENTRATA SU UNA FREQUENZA f_0 DETTA "FREQUENZA PORTANTE"

TRASMETTITORE



$$s_T(t) = \sum a_i\, g_T(t - iT_s) \qquad T_s = \frac{1}{F_s}$$

DOVE I SIMBOLI $\{a_i\}$ APPARTENGONO AD M LIVELLI

$$s_T^{RF}(t) = s_T(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

LA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA $S_s^{RF}(t)$ È LEGATA A QUELLA DI $s_T(t)$ DALLA SEGUENTE:

$$\boxed{S_s^{RF}(f) = \frac{S_s(f - f_0) + S_s(f + f_0)}{4}}$$

DOVE $S_s(f)$ È LA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DEL SEGNALE $s_T(t)$

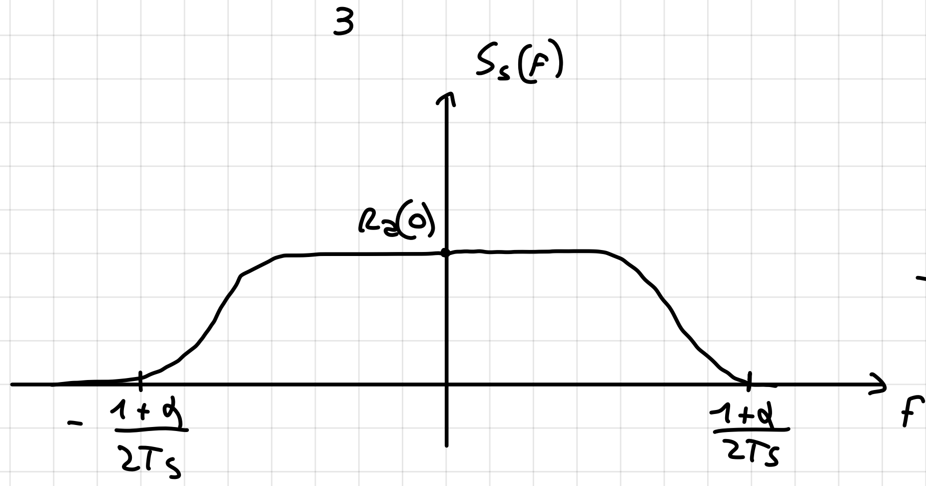
$$S_s(f) = \frac{1}{T_s} S_a(f)\, |G_T(f)|^2 = \frac{1}{T_s} R_a(0)\, |G_T(f)|^2$$

IPOTIZZO CHE $G_T(f) = \sqrt{G_{RCR}(f)}$

ALLORA $S_s(f) = \frac{1}{T_s} R_a(0)\, G_{RCR}(f)$

DOVE, PER UN PAM A M LIVELLI

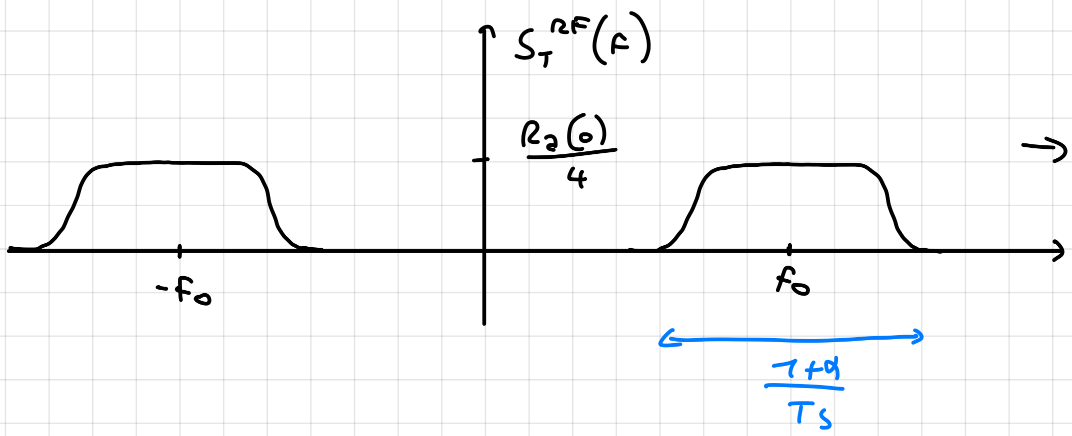
$$R_a(0) = \frac{M^2 - 1}{3}$$



$\rightarrow$ BANDA DI $s_T(t)$

$$\boxed{B_T = \frac{1 + \alpha}{2T_s}}$$

LA DENSITÀ SPETTRALE DI $s_T^{RF}(t)$ È



$\rightarrow$ BANDA SEGNALE TRASMESSO

$$\boxed{B_{RF} = 2B_T = \frac{1 + \alpha}{T_s}}$$

EFFICIENZA SPETTRALE DEL SISTEMA:

$$\eta_{sp} = \frac{R_b}{B_{RF}} = \frac{\log_2 M}{1 + \alpha} \qquad \text{TENENDO DI CONTO CHE} \quad R_b = \frac{\log_2 M}{T_s}$$

CALCOLIAMO LA POTENZA DEL SEGNALE TRASMESSO $S_T^{RF}(t)$

$$P_S^{RF} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_s^{RF}(F)\, dF = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_s(F-F_0)+S_s(F+F_0)}{4}\, dF = \frac{1}{4}\left[2\int_{-\infty}^{+\infty} S_s(F-F_0)\, dF\right] = \frac{1}{4}2P_s = \frac{P_s}{2}$$

LA POTENZA DEL SEGNALE IN BANDA PASSANTE È LA METÀ DI QUELLO IN BANDA BASE

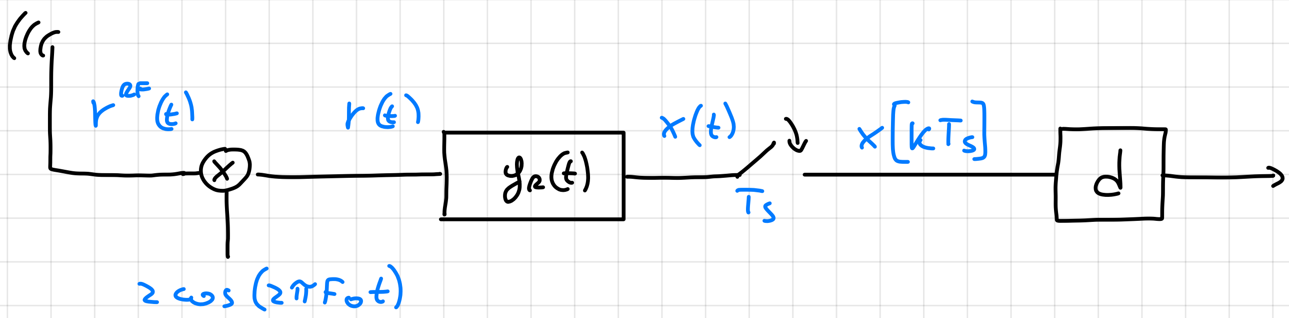
L'ENERGIA DEL SEGNALE TRASMESSO $S_T^{RF}(t)$ È

$$\boxed{E_{RF} = P_{RF} T_s = \frac{P_s T_s}{2}}$$

IN UN SISTEMA PAM CON $G_T(F) = \sqrt{G_{RCR}(F)}$ OTTENGO

$$E_{RF} = \frac{T_s}{2}\frac{1}{T_s}\int_{-\infty}^{+\infty} R_a(0)\,|G_T(F)|^2\, dF = \frac{R_a(0)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |G_T(F)|^2\, dF = \frac{R_a(0)}{2}$$

RICEVITORE



$$r^{RF}(t) = \underbrace{S_T^{RF}(t) \otimes c(t)}_{} + w^{RF}(t)$$

RISPOSTA IMP. DEL CANALE — RUMORE GAUSSIANO BIANCO CON DENSITÀ SPETTRALE

SUPPONIAMO CANALE NON DISTORCENTE $c(t) = \delta(t)$

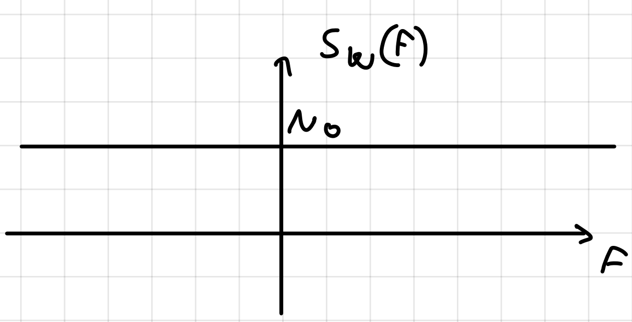
$$r(t) = 2r^{RF}(t)\cos(2\pi F_0 t) = 2S_T^{RF}(t)\cos(2\pi F_0 t) + w(t)$$

DOVE $\boxed{w(t) = w^{RF}(t) \cdot 2\cos(2\pi F_0 t)}$

SI OSSERVA CHE (COME IN TRASMISSIONE) LA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DEL RUMORE $w(t)$ È PARI A

$$S_w(F) = 4 \cdot \frac{S_w^{RF}(F-F_0) + S_w^{RF}(F+F_0)}{4}$$

SO CHE $S_w^{RF} = \frac{N_0}{2}$



DA CUI SEGUE CHE $w(t)$ È GAUSSIANO BIANCO CON DENSITÀ SPETTRALE N_0

IN USCITA DEL FILTRO DI RICEZIONE $g_R(t)$ SI OTTIENE

$$\boxed{x(t) = r(t) \otimes g_R(t) = S_T(t) + n(t)}$$

DAL TH MODULAZIONE TENGO DI CONTO CHE

$$2S_T^{RF}(t)\cos(2\pi F_0 t) = 2S_T(t)\cos^2(2\pi F_0 t) = 2S_T(t)\frac{1+\cos(4\pi F_0 t)}{2} =$$

$$= S_T(t) + \underline{S_T(t)\cos(4\pi F_0 t)}$$

TALE SEGNALE HA UNA DENSITÀ SPETTRALE CENTRATA A $2F_0$, PER CUI VIENE FILTRATO DAL FILTRO DI RICEZIONE $g_R(t)$

INVECE PER QUANTO RIGUARDA IL RUMORE TERMICO $n(t)$

$$\boxed{S_n(f) = S_w(f)\,|G_R(f)|^2 = N_0\, G_{RCR}(f)}$$

QUINDI DOPO IL CAMPIONATORE OTTENGO

$$x[kT_s] = a_k + n(k)$$

DOVE $n(k)$ È UNA VARIABILE GAUSSIANA A MEDIA NULLA E VARIANZA

$$\boxed{\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)\,df = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} G_{RCR}(f)\,df = N_0}$$

CALCOLO ALLORA LA PROBABILITÀ DI ERRORE

TENENDO CONTO CHE: $x(k) = a_k + n(k)$ $\in N(0, N_0)$

OTTENGO CHE PER UNA PAM A M LIVELLI

$$SER = 2\cdot\frac{M-1}{M}\,Q\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) = 2\cdot\frac{M-1}{M}\,Q\left(\sqrt{\frac{1}{N_0}}\right)$$

TENENDO CONTO CHE

$$\boxed{E_s = \frac{R_a(0)}{2} = \frac{M^2-1}{6}}$$

OTTENGO

$$\frac{E_s^{RF}}{N_0} = \frac{M^2-1}{6N_0} \qquad N_0 = \frac{M^2-1}{6\,\frac{E_s^{RF}}{N_0}}$$

$$\boxed{SER^{RF} = 2\cdot\frac{M-1}{M}\,Q\left(\sqrt{\frac{6\,\frac{E_s^{RF}}{N_0}}{M^2-1}}\right)}$$

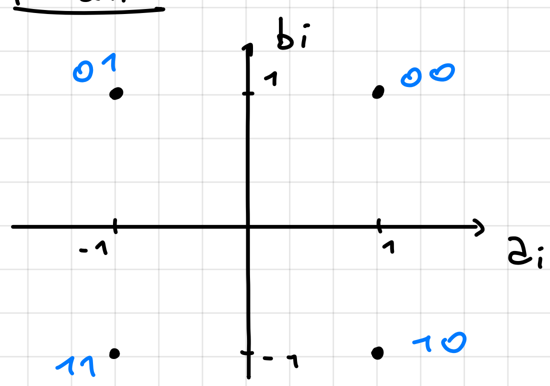
CHE È UGUALE A QUELLA DI UNA PAM IN BANDA BASE

SISTEMI QAM

(QUADRATURE AMPLITUDE MODULATION)

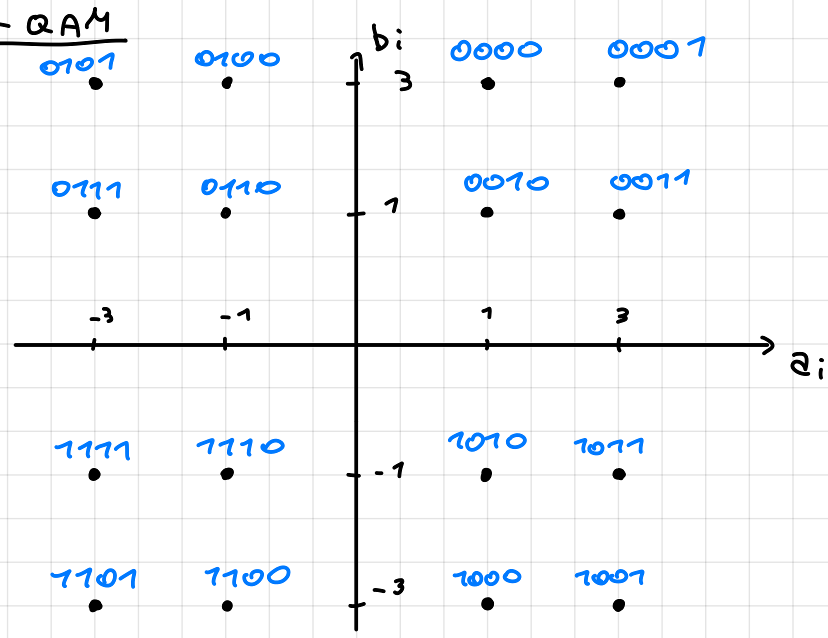
IN QUESTI SISTEMI I SIMBOLI APPARTENGONO AD UNA COSTELLAZIONE DI ORDINE M GENERATA DA DUE MAPPE PAM DI ORDINE $\sqrt{M}$.

4 - QAM

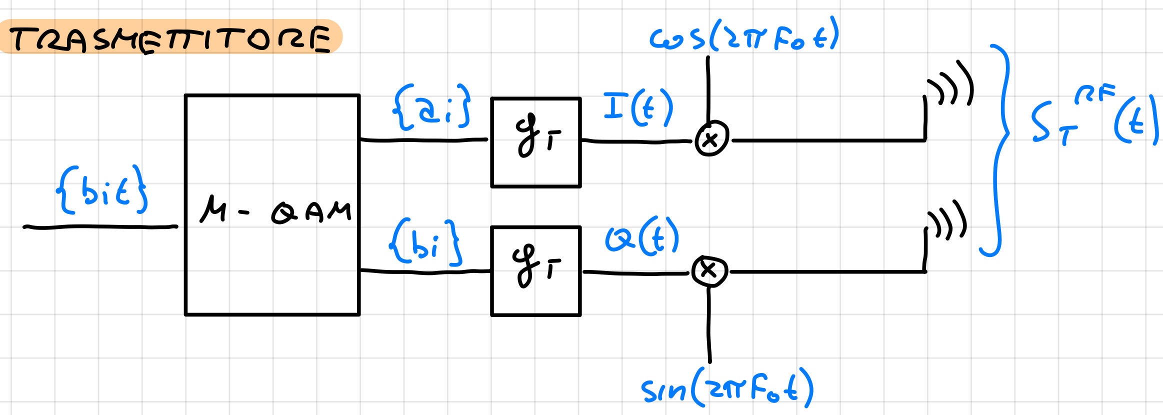


A CIASCUN SIMBOLO È ASSOCIATA UNA COPPIA DI bit (CODIFICA DI GRAY)

16 - QAM



TRASMETTITORE



$$\boxed{S_T^{RF}(t) = I(t)\cos(2\pi F_0 t) - Q(t)\sin(2\pi F_0 t)}$$

DOVE $I(t)$ e $Q(t)$ SONO LE COMPONENTI IN "FASE" E IN "QUADRATURA" DEL SEGNALE

$$I(t) = \sum a_i \, g_T(t - iT_s)$$

$$Q(t) = \sum b_i \, g_T(t - iT_s)$$

SI NOTA CHE $S_T^{RF}(t)$ SI PUÒ RISCRIVERE COME

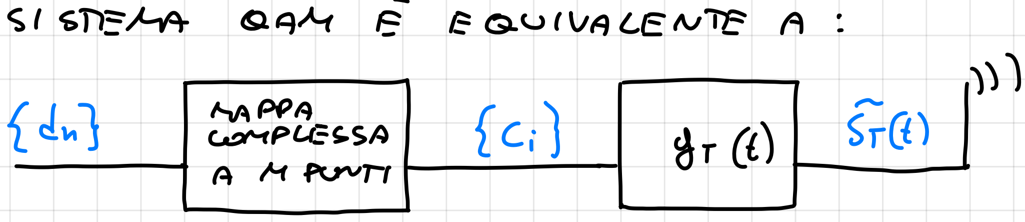
$$S_T^{RF}(t) = \mathrm{Re}\left\{ \tilde{S}_T(t) e^{j 2\pi F_0 t} \right\}$$ DOVE $\tilde{S}_T(t) = I(t) + j\,Q(t)$ SI CHIAMA <u>INVILUPPO COMPLESSO</u>

SOSTITUENDO

$$\boxed{\tilde{S}_T(t) = \sum c_i \, g_T(t - iT_s)}$$ AVENDO DEFINITO $c_i = a_i + j b_i$

SI VEDE CHE $\tilde{S}_T(t)$ È IN PRATICA UN SEGNALE PAM CON SIMBOLI COMPLESSI $\{c_i\}$

IL SISTEMA QAM È EQUIVALENTE A:



LA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DI UN SEGNALE QAM È LEGATA A QUELLA DELL'INVILUPPO COMPLESSO $\tilde{s}_T(t)$ DALLA RELAZIONE

$$S_s(f) = \frac{S_{\tilde{s}}(f-f_0) + S_{\tilde{s}}(f+f_0)}{4} \quad \text{DOVE} \quad S_{\tilde{s}}(f) = \frac{1}{T_s} R_c(0)\,|G_T(f)|^2$$

E DOVE $R_c(0) = E\{|c_i|^2\} = E\{|a_i + jb_i|^2\} = E\{(a_i+jb_i)(a_i+jb_i)^*\} = E\{(a_i+jb_i)(a_i - jb_i)\} =$

$$= E\{a_i^2 + b_i^2 + ja_ib_i - ja_ib_i\} = E\{a_i^2\} + E\{b_i^2\} = \frac{\sqrt{M}^2 - 1}{3} + \frac{\sqrt{M}^2-1}{3} = 2\cdot\frac{M-1}{3}$$

(SI È TENUTO DI CONTO CHE LE DUE PAM HANNO $\sqrt{M}$ LIVELLI SE LA QAM HA M SIMBOLI)

IN ANALOGIA ALLA PAM IN BANDA PASSANTE SI OTTIENE CHE LA BANDA DI UN SEGNALE QAM È

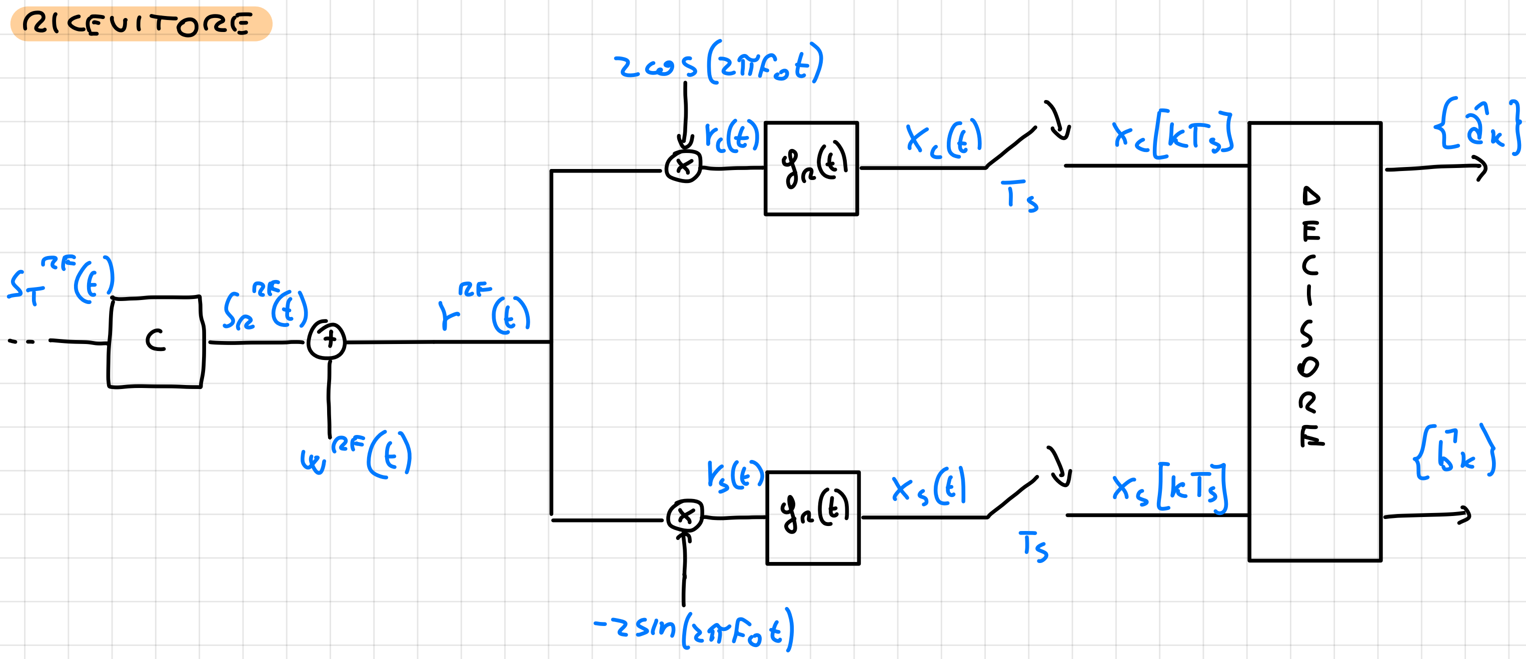
$$\boxed{B_{RF} = 2B_T = \frac{1+\alpha}{T_s}}$$

E L'ENERGIA

$$\boxed{E_{RF} = \frac{P_S T_s}{2} = \frac{T_s}{2}\cdot\frac{1}{T_s}\int_{-\infty}^{+\infty} R_c(0)\,|G_T(f)|^2\,df = \frac{R_c(0)}{2} = \frac{M-1}{3}}$$

SEMPRE SUPPONENDO $G_T(f) = \sqrt{G_{RCR}(f)}$

RICEVITORE



$$\boxed{r^{RF}(t) = s_R^{RF}(t) + w^{RF}(t)}$$

SUPPONENDO CANALE NON DISTURBATO CON $c(t) = \delta(t)$

CONSIDERO IL RAMO SUPERIORE DEL RICEVITORE

$$2r^{RF}(t)\cos(2\pi f_0 t) = 2 s_R^{RF}(t)\cos(2\pi f_0 t) + w_c(t)$$

CON $\boxed{w_c(t) = 2w^{RF}(t)\cos(2\pi f_0 t)}$

IL RUMORE SI TRATTA COME NELLA PAM IN BANDA PASSANTE. QUINDI IN USCITA DAL FILTRO DI RICEZIONE IL RUMORE È UNA VARIABILE GAUSSIANA A MEDIA NULLA E VARIANZA

$$\boxed{\sigma_{n_c}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{n_c}(f)\,df = N_0\int_{-\infty}^{+\infty} G_{RCR}(f)\,df = N_0}$$

CONSIDERO IL SEGNALE UTILE $2 s_R^{RF}(t)\cos(2\pi f_0 t)$

E TENENDO CONTO CHE

$$\boxed{s_T^{RF}(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)}$$

OTTENGO $2I(t)\cos^2(2\pi f_0 t) - 2Q(t)\cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t)$

$2I(t)\cos^2(2\pi f_0 t) = I(t) + \underline{I(t)\cos(4\pi f_0 t)}$

$-2Q(t)\cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t) = \underline{-Q(t)\sin(4\pi f_0 t)}$

QUESTO SEGNALE HA UNA DENSITÀ SPETTRALE CENTRATA A $2f_0$, PER CUI VIENE FILTRATO DAL FILTRO DI RICEZIONE $g_R(t)$

QUINDI SUL RAMO SUPERIORE OTTENGO $x_c(k) = a_k + h_c(k)$

$h_c(k) \in N(0, N_0)$

CONSIDERO IL RAMO INFERIORE DEL RICEVITORE

$-2r^{RF}(t)\sin(2\pi f_0 t) = -2S_R^{RF}(t)\sin(2\pi f_0 t) + w_s(t)$

DOVE $\boxed{w_s(t) = -2w^{RF}(t)\sin(2\pi f_0 t)}$

IL RUMORE SI TRATTA COME NELLA PAM IN BANDA PASSANTE.
QUINDI IN USCITA DAL FILTRO DI RICEZIONE IL RUMORE È UNA VARIABILE GAUSSIANA A MEDIA NULLA E VARIANZA

$$\boxed{\sigma_{h_s}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{h_s}(f)\,df = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} G_{RR}(f)\,df = N_0}$$

CONSIDERO IL SEGNALE UTILE $2S_R^{RF}(t)\cos(2\pi f_0 t)$

E TENENDO CONTO CHE

$$\boxed{S_T^{RF}(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)}$$

OTTENGO $-2I(t)\cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t) + 2Q(t)\sin^2(2\pi f_0 t)$

$-2\underline{I(t)\cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t)}$

$2Q(t)\sin^2(2\pi f_0 t) = Q(t) + \underline{Q(t)\cos(4\pi f_0 t)}$

QUESTO SEGNALE HA UNA DENSITÀ SPETTRALE CENTRATA A $2f_0$, PER CUI VIENE FILTRATO DAL FILTRO DI RICEZIONE $g_R(t)$

QUINDI NEL RAMO INFERIORE OTTENGO $x_s(k) = b_k + h_s(k)$ $\in N(0, N_0)$

CALCOLO PROBABILITÀ DI ERRORE

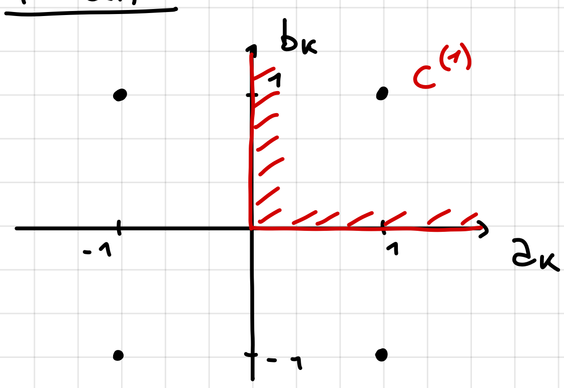
$$x(k) = x_c(k) + j x_s(k) = c_k + n(k)$$

CON $n(k) = n_c(k) + j n_s(k)$

DOVE $n_c(k)$ E $n_s(k)$ SONO VARIABILI ALEATORIE GAUSSIANE A MEDIA NULLA E VARIANZA N_0

$$n_c(k),\ n_s(k) \in N_0(0, N_0)$$

4 - QAM



ZONA DI CORRETTA RICEZIONE DEL SIMBOLO

$$P(e) = \frac{1}{4} \sum P(e \mid c_K = c^{(i)})$$

GRAZIE ALLA SIMMETRIA DELLA COSTELLAZIONE POSSO CALCOLARE SOLO UNA PROBABILITÀ

TIPO $P(e \mid c_K = c^{(1)}) = 1 - \underline{P(c \mid c_K = c^{(1)})}$

↳ PROBABILITÀ DI CORRETTA RICEZIONE

$$P(c \mid c_K = c^{(1)}) = P_r\left(x_c(k) \geq 0,\ x_s(k) \geq 0 \mid c_K = c^{(1)}\right)$$

DOVE $x_c(k) = a_K + n_c(k)$ E $x_s(k) = b_K + n_s(k)$

VISTO CHE SONO INDIPENDENTI, OTTENGO

$$P_r\left(x_c(k) \geq 0,\ x_s(k) \geq 0 \mid c_K = c^{(1)}\right) = P_r\left(x_c(k) \geq 0 \mid a_K = a^{(1)}\right) P_r\left(x_s(k) \geq 0 \mid b_K = b^{(1)}\right) =$$

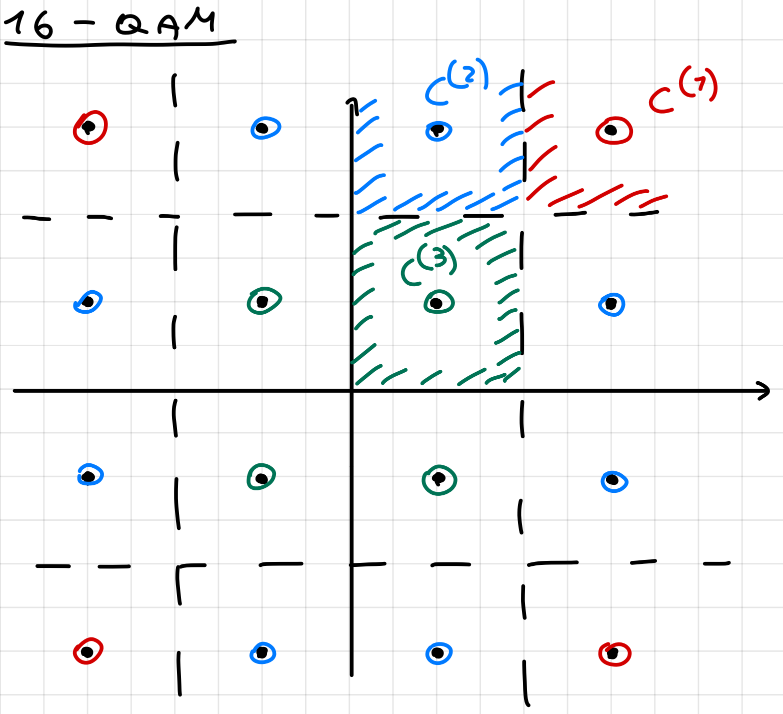
$$= Q\left(-\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) Q\left(-\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) = \left(1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)\right)^2 = 1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) + Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)$$

QUINDI $\boxed{P(e) = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) - Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) \simeq Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)}$

TENENDO CONTO CHE PER UNA QAM $\frac{E_S}{N_0} = \frac{M-1}{3N_0} = \frac{1}{N_0}$

$$\boxed{P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{N_0}}\right)}$$

16 - QAM



I SIMBOLI CON LO STESSO COLORE HANNO LA STESSA PROBABILITÀ DI ERRORE

QUINDI

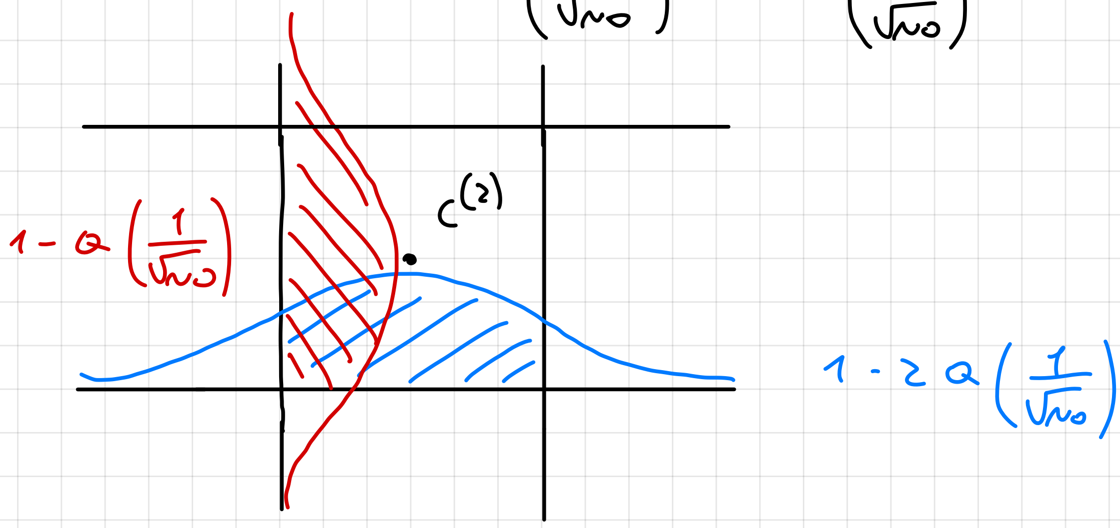
$$P(e) = \frac{1}{16}\left[4P(e \mid c_K = c^{(1)}) + 8P(e \mid c_K = c^{(2)}) + \right.$$

$$\left. + 4P(e \mid c_K = c^{(3)})\right]$$

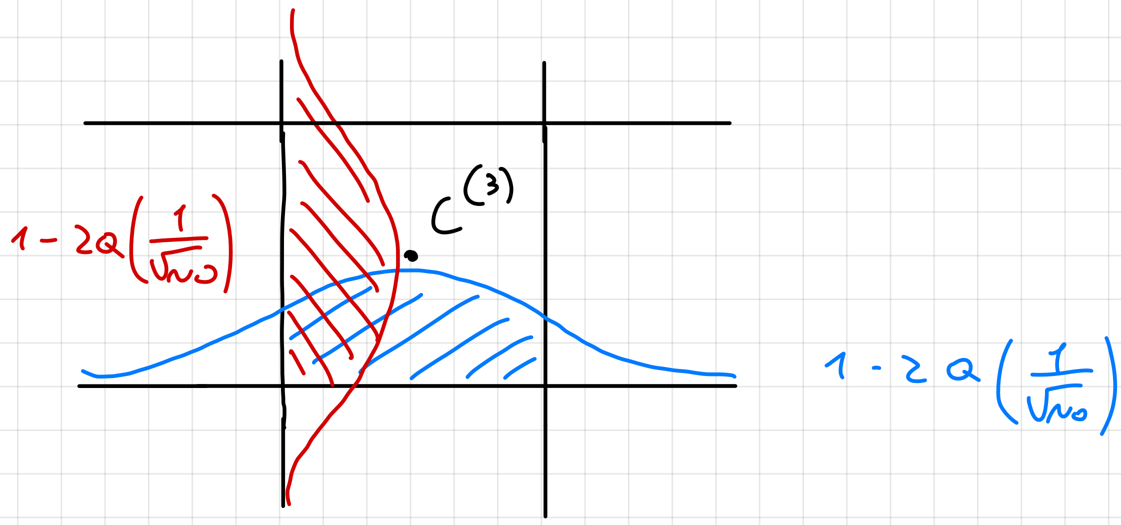
$$\underline{P(e|c_k=c^{(1)})} = 1 - P(c|c_k=c^{(1)}) = 1-\left(1-Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)\right)^2 = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) - Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)$$

$$\underline{P(e|c_k=c^{(2)})} = 1 - P(c|c_k=c^{(2)}) = 1-\left(1-Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)\right)\left(1-2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)\right) =$$

$$= 3Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) - 2Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)$$



$$\underline{P(e|c_k=c^{(3)})} = 1 - P(c|c_k=c^{(3)}) = 1-\left(1-2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)\right)^2 = 4Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) - 4Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)$$



METTENDO TUTTO INSIEME

$$P(e) = \frac{1}{16}\left[4\left(2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) - Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)\right) + 8\left(3Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) - 2Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)\right) + 4\left(4Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) - 4Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)\right)\right] =$$

$$= 3Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) - \frac{9}{4}Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) \simeq \boxed{3Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)}$$

E TENENDO CONTO CHE $\frac{E_s}{N_0} = \frac{M-1}{3N_0} = \frac{16-1}{3N_0} = \frac{5}{N_0}$

$$\boxed{\simeq 3Q\left(\sqrt{\frac{1}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right)}$$

FORMULA GENERICA PER UNA M-QAM INVECE È

$$\boxed{SER = \frac{4(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M}}\, Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}\frac{E_s}{N_0}}\right)}$$

TEORIA DEI CODICI

NELLO SCHEMA DEL TRASMETTITORE IL PROSSIMO BLOCCO CHE ANALIZZIAMO È IL **CODIFICATORE DI CANALE**, CHE HA IL COMPITO DI CODIFICARE I bit RICEVUTI IN INGRESSO USANDO UN CERTO **CODICE**, CON L'OBIETTIVO DI AUMENTARE LA RESISTENZA DEL SEGNALE A RUMORE ED INTERFERENZA, FORNENDO LA RIVELAZIONE E LA CORREZIONE DI ERRORE.

TRATTEREMO **CODICI LINEARI A BLOCCHI** (LAVORANO SU PAROLE DI bit), CARATTERIZZATI DAL RATE $r = \frac{k}{n}$

- k : DIMENSIONE IN bit DELLA PAROLA IN INGRESSO
- n : DIMENSIONE IN bit DELLA PAROLA IN USCITA

VISTO CHE DOBBIAMO INTRODURRE RIDONDANZA $n > k$

ES

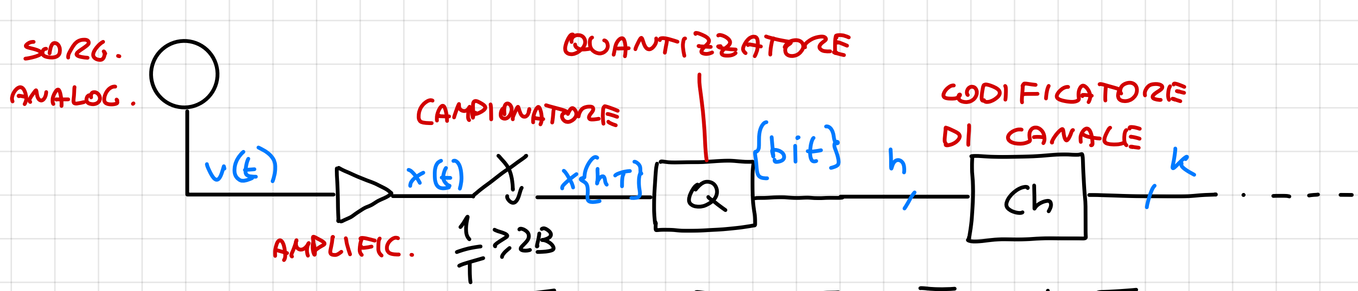
QUAL È IL RATE DI UN CODICE CHE HA 1024 PAROLE LUNGHE 15 bit?

POSSIBILE OUTPUT 1024 PAROLE DIVERSE CODIFICATE SU 15 bit $(n = 15)$, VISTO CHE TRATTO CODICI LINEARI DEVE ESSERCI CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA LE PAROLE IN INGRESSO E QUELLE IN USCITA, DEVO AVERE ESATTAMENTE 1024 POSSIBILI INGRESSI CHE SI CODIFICANO SU $k = 10$ bit $\quad r = \frac{10}{15}$

NOTA: IL CANALE È IL MEZZO FISICO ATTRAVERSO IL QUALE SI TRASMETTE IL SEGNALE AL RICEVITORE, NOI TRATTEREMO SEMPRE CANALI:

- <u>BINARI</u> : TRASMETTONO bit
- <u>SIMMETRICI</u> : PROBABILITÀ DI ERRORE UGUALI PER 0 e 1
- <u>SENZA MEMORIA</u> : OGNI bit TRASMESSO CON UNA PROBABILITÀ DI ERRORE INDIPENDENTE DAGLI ALTRI

IL TRASMETTITORE QUINDI DIVENTA:



$T_q = \frac{T}{\log_2(L)} = T_b \qquad T_c = \frac{k}{n} T_b$

↳ SALTIAMO LA CODIFICA DI SORGENTE $T_b = T_q$

CODICI A RIPETIZIONE

CODICI A BLOCCHI PIÙ SEMPLICI

ES: CODICE A RIPETIZIONE CON $R = \frac{1}{3}$

$m = 0 \rightarrow c = [0\,0\,0]$
$m = 1 \rightarrow c = [1\,1\,1]$

RICEVITORE FA DECODIFICA A MAGGIORANZA (DECIDE PER IL bit CHE COMPARE NELLA MAGGIORANZA DELLE POSIZIONI DELLA PAROLA RICEVUTA)

$r = [000] \quad \hat{c} = [000] \quad \hat{m} = 0$
$r = [010] \quad \hat{c} = [000] \quad \hat{m} = 0$
$r = [101] \quad \hat{c} = [111] \quad \hat{m} = 1$

NEI BSC (BINARY SYMMETRIC CHANNEL) LA PROBABILITÀ DI SBAGLIARE t bit IN UNA PAROLA DI n bit È

$$P(t, n) = \binom{n}{t} p^t (1-p)^{(n-t)} \quad \text{DOVE} \quad \binom{n}{t} = \frac{n!}{t!\,(n-t)!}$$

($n°$ POSSIBILI COMBINAZIONI DI t ERRORI SU n bit)

UN CODICE A RIPETIZIONE CON $R = \frac{1}{n}$ PUÒ RIVELARE FINO A $n-1$ ERRORI E CORREGGERE $\frac{(n-1)}{2}$ ERRORI (PER n DISPARI)

L'ERRORE NEI CODICI A RIPETIZIONE CONSISTE NEL NON ESSERE IN GRADO DI CORREGGERE TUTTI GLI ERRORI.

SE LA PROBABILITÀ DI ERRORE SUL bit $P_{e,b}$ È ABBASTANZA PICCOLA, LA PROBABILITÀ DI ERRORE $P_{e,w}$ PER IL CODICE PUÒ ESSERE APPROSSIMATA DAL PRIMO EVENTO CHE DETERMINA LA RICEZIONE ERRATA

(ES AVER FATTO 2 ERRORI PER $R = \frac{1}{3}$)

$R = \frac{1}{3}$ SE $P_{e,b} = 0{,}1 \Rightarrow P_{e,w} \simeq 2{,}7 \cdot 10^{-2}$ $(P_{e,w} = 2{,}8 \cdot 10^{-2})$

SE $P_{e,b} = 0{,}01 \Rightarrow P_{e,w} \approx 2{,}97 \cdot 10^{-4}$ $(P_{e,w} = 2{,}98 \cdot 10^{-4})$

CODICI A CONTROLLO DI PARITÀ

CODICE CON RATE $R = \frac{k}{k+1}$ (k bit INFORMATIVI + 1 DI PARITÀ) $\begin{pmatrix} 1 \text{ SE } \#\text{bit DISPARI} \\ 0 \text{ SE } \#\text{bit PARI} \end{pmatrix}$

ES

TRASMETTO PAROLE DI 11 bit CON RATE $R_b = 10$ Mb/s E LA PROBABILITÀ DI ERRORE SUL bit TRASMESSO $P_{e,b} = 10^{-8}$

SENZA CONTROLLO DI PARITÀ

È SUFFICIENTE CHE SIA SBAGLIATO UN SOLO bit PER SBAGLIARE TUTTA LA PAROLA

$$P_{e,w} = \sum_{J=1}^{11} \binom{11}{J} P_{e,b}^{J} (1 - P_{e,b})^{(11-J)} \approx 11 P_{e,b} (1 - P_{e,b})^{10} \approx 11P$$

RATE DI PAROLE SBAGLIATE /s

$$R_{e,w} = \frac{R_b}{11} \cdot P_{e,w} \approx 0,1 \text{ w/s}$$

SBAGLIO UNA PAROLA OGNI $T_{e,w} = \frac{1}{R_{e,w}} = 10$ s

AGGIUNGO UN bit DI PARITÀ

PAROLA DI 12 bit, SBAGLIO QUANDO FACCIO ALMENO 2 ERRORI, GLI ERRORI DI 1 bit VENGONO RIVELATI E CORRETTI (CON RITRASMISSIONE)

$$P_{e,w} = \sum_{J=1}^{12} \binom{12}{J} P_{e,b}^{J} (1 - P_{e,b})^{(12-J)} \approx 66 P_{e,b}^{2}$$

RATE DI PAROLE SBAGLIATE /s

$$R_{e,w} = \frac{R_b}{12} \cdot P_{e,w} \approx 5,5 \cdot 10^{-9} \text{ w/s}$$

QUINDI $T_{e,w} = \frac{1}{R_{e,w}} = 1,82 \cdot 10^{8}$ s (SBAGLIO UNA PAROLA OGNI 6 ANNI CIRCA)

CODICI LINEARI A BLOCCHI

QUESTI CODICI USANO L'ARITMETICA MODULO 2 (ADDIZIONE UGUALE A SOTTRAZIONE) $1+1=|2|_2=0$.

SIA $m=[m_1 \dots m_k]$ UNA PAROLA DI k CIFRE BINARIE, IL CODICE A BLOCCO LINEARE $C(k,n)$ È L'INSIEME DELLE 2^k PAROLE $c=[c_1 \dots c_n]$ DI n CIFRE BINARIE OTTENUTE CON LA TRASFORMAZIONE LINEARE $\underset{1\times n}{c}=\underset{1\times k}{m}\underset{k\times n}{G}$ (G DETTA MATRICE GENERATRICE DEL CODICE)

$c=mG=\sum^k m_i g_i$ (g_i SONO LE RIGHE DI G)

- OGNI PAROLA DI CODICE È UNA COMB. LINEARE DELLE RIGHE DELLA MATRICE GENERATRICE (PER AVERNE 2^k DIVERSE G DEVE AVERE RANGO k)
- IL CODICE È COSTITUITO DA TUTTE LE POSSIBILI COMBINAZIONI DELLE RIGHE DELLA MATRICE GENERATRICE
- LA SOMMA DI 2 PAROLE DI CODICE È ANCORA UNA PAROLA DI CODICE
  DIM: SIANO $c_i=m_iG$ $c_j=m_jG$ $c_i+c_j=m_iG+m_jG=m_kG=c_k$
- LA n-UPLA DI TUTTI ZERI È SEMPRE UNA PAROLA DI CODICE
  DIM: $\vec{0}$ È SEMPRE m_0 E $m_0G=\vec{0}$

LA DISTANZA DI HAMMING $d_H(c_1,c_2)$ TRA DUE VETTORI DI n ELEMENTI c_1 e c_2 È DEFINITA COME IL N° DI POSIZIONI IN CUI LE 2 PAROLE SONO DIVERSE TRA LORO, GODE DELLE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- $d_H(c_1,c_2)\geq 0$
- $d_H(c_1,c_2)=0 \iff c_1=c_2$
- $d_H(c_1,c_2)=d_H(c_2,c_1)$
- $d_H(c_1,c_3)\leq d_H(c_1,c_2)+d_H(c_2,c_3)$

DEFINISCO ANCHE PESO DI HAMMING $w(c)=d_H(c,0_n)$

LA DISTANZA MINIMA DI UN CODICE C È LA MINIMA DISTANZA DI HAMMING FRA TUTTE LE POSSIBILI PAROLE DI CODICE, QUESTA EQUIVALE AL MINIMO PESO DI HAMMING TRA TUTTE LE PAROLE DI CODICE ESCLUSA $\vec{0}$

$$\min\{d_H(c_i,c_j)\}=\min\{d_H(0,c_i+c_j)\}=\min\{d_H(0,c_k)\}=\min\{w(c_k)\}$$

UN CODICE LINEARE A BLOCCHI SI DICE IN FORMA SISTEMATICA SE LE PAROLE DI CODICE SONO TUTTE DEL TIPO: $\underbrace{\overbrace{\text{bit INFORMAZIONI}}^{k}\ \overbrace{\text{bit DI PARITÀ}}^{n-k}}_{n}$ CIOÈ SE:

$$G=[P, I_k] \Rightarrow c=mG=m[P,I_k]=[mP, m]=[b, m]$$

P: MATRICE DI PARITÀ $(k\times(n-k))$

ES

CODICE A RIPETIZIONE $R=\frac{1}{3}$

$m=0 \Rightarrow c=mG=[0\ 0\ 0]$

$m=1 \Rightarrow c=mG=[1\ 1\ 1]$

LA MATRICE GENERATRICE È $G=[1\ 1\ 1]$

$d_{min}=3$

POSSIAMO ALLORA DEFINIRE LA MATRICE DI CONTROLLO DI PARITÀ $H = \left[I_{n-k} , P^T \right]$

TC $\forall c \in C \quad c H^T = m G H^T = \vec{0}$

ES

PER IL CODICE A RIPETIZIONE $r = \frac{1}{3}$ SI HA $k = 1 \quad n = 3 \quad n-k = 2$

PER CUI $H = \left[I_2 , P^T \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ($n-k$ RIGHE , n COLONNE)

PER IL CODICE A RIPETIZIONE $r = \frac{7}{8}$ $k = 7 \quad n = 8 \quad n-k = 1$

$H = \left[I_1 , P^T \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

CAPACITÀ DI RIVELARE ERRORI

SIA X LA PAROLA TRASMESSA E $Y = X + e$ LA CORRISP. SEQUENZA DI n bit RICEVUTA

PAROLA DI CODICE TRASMESSA — VETTORE DEGLI ERRORI INTRODOTTO DAL CANALE

SUPPONIAMO CHE IL CANALE INTRODUCA UN CERTO NUMERO DI ERRORI $w(e) > 0$

- SE Y NON È UNA PAROLA DI CODICE SI È VERIFICATO UN ERRORE RIVELABILE
- SE Y È UNA PAROLA DI CODICE MA NON QUELLA TRASMESSA, SI È VERIFICATO UN ERRORE NON RIVELABILE $(w(e) \geq d_{min})$

IL CODICE $C(k,n)$ RIVELA UN ERRORE QUANDO $Y \notin C(k,n)$

TH: IL CODICE $C(k,n)$ È IN GRADO DI RIVELARE CON CERTEZZA FINO A $d_{min} - 1$ ERRORI

- SE $d_H(X,Y) < d_{min}$: Y NON PUÒ ESSERE UNA PAROLA DI CODICE, ALTRIMENTI LA d_{min} NON SAREBBE TALE
- SE $d_H(X,Y) = d_{min}$: ESISTE ALMENO UNA PAROLA DI CODICE $c \in C(k,n)$, $c \neq X$ TC $d_H(X,c) = d_{min}$ E SE $Y = c$ L'ERRORE NON PUÒ ESSERE RIVELATO

CAPACITÀ DI CORREGGERE ERRORI

SIA $Y = X + e$ IL VETTORE RICEVUTO, LA STRATEGIA DI DECODIFICA OTTIMA È QUELLA A MASSIMA VEROSIMIGLIANZA (MAXIMUM LIKELYHOOD) E CONSISTE NEL TROVARE LA PAROLA DI CODICE $\hat{X}$ TC, TRA TUTTE LE POSSIBILI 2^k PAROLE, MASSIMIZZI LA PROBABILITÀ CONDIZIONATA $P(Y|X)$ (PROBABILITÀ DI AVER RICEVUTO Y AVENDO TRASMESSO X)

$$\hat{X} = \arg \max_{X \in C(k,n)} P(Y|X)$$

VISTO CHE IL CANALE È SENZA MEMORIA GLI EVENTI DI ERRORE SONO INDIPENDENTI DA bit A bit, SI PUÒ QUINDI SCRIVERE LA PROBABILITÀ CONDIZIONATA COME IL PRODOTTO DELLE PROBABILITÀ CONDIZIONATE OTTENUTE PER CIASCUN bit TRASMESSO

$$P(Y|X) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i | X_i)$$

VISTO CHE IL CANALE È SIMMETRICO

$$P(Y_i|X_i) = \begin{cases} 1-P & \text{SE } Y_i = X_i \\ P & \text{SE } Y_i \neq X_i \end{cases}$$

DATO CHE $d_H(Y,X)$ MISURA IL NUMERO DI i TC $Y_i \neq X_i$, ALLORA $n - d_H(Y,X)$ MISURA IL NUMERO DI i TC $Y_i = X_i$

$P(Y|X)$ SI CALCOLA COME

$$P(Y|X) = P^{d_H(X,Y)} (1-P)^{n - d_H(X,Y)} = (1-P)^n \left(\frac{P}{1-P}\right)^{d_H(X,Y)}$$

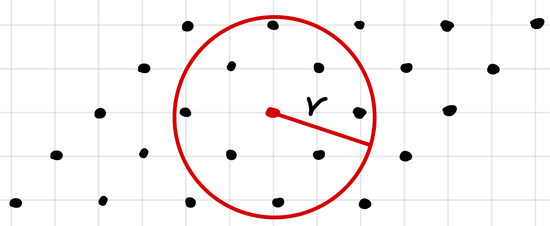
LA PAROLA DI CODICE DECISA $\hat{X}$ È QUELLA CHE MINIMIZZA LA DISTANZA DELLA PAROLA Y RICEVUTA

$$\hat{X} = \arg \max_{X \in C(k,n)} P(Y|X) = \arg \min_{X \in C(k,n)} d_H(Y,X)$$

IL RICEVITORE ML OTTIMO È IL RICEVITORE A DISTANZA MINIMA: IL RICEVITORE CHE ASSOCIA ALLA SEQUENZA Y RICEVUTA (n bit) LA PAROLA DI CODICE X CHE MINIMIZZA $d_H(X,Y)$

IL RICEVITORE ML È IN GRADO DI CORREGGERE CON SUCCESSO TUTTI QUEGLI ERRORI E PER CUI LA PAROLA RICEVUTA $Y = X + e$ È COMUNQUE PIÙ VICINA ALLA PAROLA TRASMESSA X CHE A QUALSIASI ALTRA PAROLA DEL CODICE

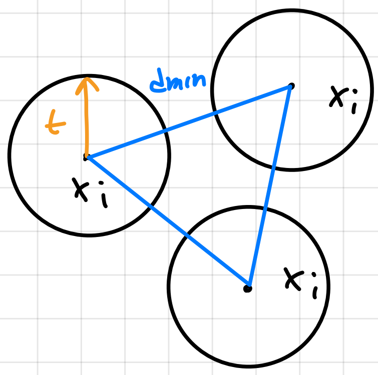
PER OGNI VETTORE $v \in V_n$ E UN RAGGIO r ESISTE UNA SFERA DI RAGGIO r I CUI ELEMENTI SONO TUTTI QUEI VETTORI IN V_n CHE HANNO d_H DA v MINORE O UGUALE A r



ASSUMENDO DI ADOTTARE UN RICEVITORE ML, IL NUMERO MASSIMO t DI ERRORI CHE IL CODICE $C(k,n)$ È IN GRADO DI CORREGGERE È IL MASSIMO RAGGIO t PER CUI LE SFERE CENTRATE NELLE PAROLE DI CODICE DI $C(k,n)$ SONO TUTTE TRA LORO DISGIUNTE

TH: UN CODICE A BLOCCO LINEARE PUÒ CORREGGERE FINO A $t_{max} = \frac{d_{min}-1}{2}$ ERRORI

LA CONDIZIONE PER CUI LE SFERE DI RAGGIO t CHE CIRCONDANO LE PAROLE DI CODICE SIANO DISGIUNTE È CHE $2t_{max} < d_{min} \rightarrow t_{max} < \frac{d_{min}}{2}$



SE FOSSE $2t_{max} \geq d_{min}$ CI SAREBBERO ALMENO 2 PAROLE x_i e x_j LA CUI DISTANZA

$$d(x_1, x_2) = d_{min} \leq 2t_{max}$$

E LE 2 SFERE DI RAGGIO t AVREBBERO ALMENO UN PUNTO IN COMUNE

CODICI DI HAMMING

SONO DEFINITI DA UN PARAMETRO $m \geq 2$

$$n = 2^m - 1 \qquad k = 2^m - m - 1$$

LA MATRICE DI CONTROLLO DI PARITÀ $H\,(n-k \times n)$ PER I CODICI DI HAMMING HA DIMENSIONE $m \times (2^m - 1)$

PER UN CODICE DI HAMMING SISTEMATICO LA MATRICE DI PARITÀ P VIENE COSTRUITA COSÌ CHE LE COLONNE DI $H = [P^T, I_{n-k}]$ SIANO TUTTE LE POSSIBILI $2^m - 1$ COMBINAZIONI (ESCLUSO L'n-UPLA DI TUTTI 0) DI m bit

LA <u>DISTANZA MINIMA</u> DI UN QUALSIASI CODICE DI HAMMING $C_H(m)$ È $d_{min}(C_H(m)) = 3$

SEMPRE

<u>SE $m=2$</u>

IL CODICE È EQUIVALENTE AD UNO A RIPETIZIONE CON $R = \frac{1}{3}$

$m=2 \qquad n = 2^2 - 1 = 3 \qquad k = 2^2 - 2 - 1 = 1$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>SE $m=3$</u>

$n = 2^3 - 1 = 7 \qquad k = 2^3 - 3 - 1 = 4$ UNA SUA POSSIBILE COPIA IN FORMA SISTEMATICA È:

$$H = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow G = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\qquad P^T \qquad I_{n-k} \qquad\qquad I_k \qquad P$

DECODIFICA DEI CODICI A BLOCCO

APPROCCIO ALTERNATIVO A QUELLO DI ML SU X (STESSI RISULTATI) CONSISTE NELL' OSSERVARE CHE, DATO CHE MASSIMIZZARE $P[Y/X]$ VUOL DIRE CERCARE LA PAROLA DI CODICE X MENO DISTANTE DA Y NEL SENSO DI HAMMING, CIÒ EQUIVALE A CERCARE LA X PER CUI (AVENDO RICEVUTO Y) SONO STATI COMMESSI MENO ERRORI, CIOÈ CERCARE L'ERRORE e CON PESO DI HAMMING MINORE TC $Y+e \in \mathcal{C}$

$$P[Y/X] = P[X+e/X] = P[Y+e \in \mathcal{C}]$$

ALLORA $\underbrace{\hat{x}}_{\text{ML SU X}} = \underset{x\in\mathcal{C}}{\arg\max}\, P[Y/X] \underbrace{=}_{\text{ML SU } e} Y - \hat{e} \underbrace{=}_{\text{MODULO 2}} Y + \hat{e}$

INVECE DI STIMARE $\hat{x}$ STIMO IL VETTORE $\hat{e}$ PIÙ PROBABILE

$$\hat{e} = \underset{e}{\arg\max}\; P[e / Y+e \in \mathcal{C}] \underbrace{=}_{\substack{\text{EVENTI DI ERRORE} \\ \text{INDIP. bit A bit}}} \underset{e|\{Y+e\in\mathcal{C}\}}{\arg\max}\; p^{w(e)}(1-p)^{n-w(e)} = \underset{e|\{Y+e\in\mathcal{C}\}}{\arg\max}\; (1-p)^n \left(\frac{p}{1-p}\right)^{w(e)} = \underset{e|\{Y+e\in\mathcal{C}\}}{\arg\min}\; w(e)$$

PER ORA NON È CAMBIATO NULLA, ANZI HO PEGGIORATO LE COSE PERCHÉ SONO PASSATO A CERCARE DA 2^k POSSIBILI x A 2^n POSSIBILI e $(n>k)$, PER POTER CERCARE $\hat{e}$ IN MODO EFFICIENTE DEVO PRIMA INTRODURRE IL CONCETTO DI COSET.

COSET

SIA $\mathcal{C}(k,n)$ UN CODICE LINEARE E SIA $v \in V^n$ UN VETTORE DI n CIFRE BINARIE, SI DEFINISCE COSET DI $\mathcal{C}$ INDIVIDUATO DA v $C_v = C + v = \{x+v : x \in C\}$, OGNI COSET GODE DELLE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- QUALSIASI VETTORE DI V^n APPARTIENE AD UN COSET DI $\mathcal{C}(k,n)$
- CIASCUN COSET CONTIENE 2^k ELEMENTI
- 2 COSET O SONO COINCIDENTI O HANNO INTERSEZIONE NULLA
- CI SONO 2^{n-k} COSET DISTINTI

ES

SIA $\mathcal{C}(2,3) = \{000, 101, 010, 111\}$

I COSET DI $\mathcal{C}(2,3)$ SONO:

$$\left.\begin{aligned}
C+000 &= \{000, 101, 010, 111\} = C_0 \\
C+001 &= \{001, 100, 011, 110\} = C_1 \\
C+010 &= \{010, 111, 000, 101\} = C_0 \\
C+011 &= \{011, 110, 001, 100\} = C_1 \\
C+100 &= \{100, 001, 110, 011\} = C_1 \\
C+101 &= \{101, 000, 111, 010\} = C_0 \\
C+110 &= \{110, 011, 100, 001\} = C_1 \\
C+111 &= \{111, 010, 101, 000\} = C_0
\end{aligned}\right\}\; 2^{n-k} = 2^{3-2} = 2$$

PROBLEMA INIZIALE

HO RICEVUTO Y CHE SO ESSERE $X \in C$ + UN QUALCHE ERRORE e.
NON CONOSCO NÉ X NÉ e MA VOGLIO STIMARE e PER OTTENERE X.

DEVO PRENDERE OGNI POSSIBILE ERRORE, VEDERE SE SOMMATO AD Y MI DA UNA PAROLA DI CODICE, E POI TRA QUESTI PRENDO QUELLO CON PESO DI HAMMING MINORE CIOÈ IL PIÙ PROBABILE.

PERÒ, VISTO CHE C_Y CONTIENE TUTTI GLI ELEMENTI CHE SOMMATI AD Y DANNO UNA PAROLA DI CODICE ($v \in C_Y \rightarrow Y+v = Y+C+Y = C$), ALLORA QUESTO CONTIENE SICURAMENTE ANCHE IL PARTICOLARE e CHE CERCO, QUINDI LA SUA STIMA DIVENTA L'ELEMENTO DI C_Y CON PESO DI HAMMING MINORE DETTO **COSET LEADER**.

ES

SIA $C(2,4) = \{0000, 1011, 0101, 1110\}$ CON $d_{min} = 2$ E COSET

$C_1 = C + 0000 = \{0000, 1011, 0101, 1110\}$

$C_2 = C + 0001 = \{0001, 1010, 0100, 1111\}$

$C_3 = C + 0010 = \{0010, 1001, 0111, 1100\}$

$C_4 = C + 1000 = \{1000, 0011, 1101, 0110\}$

DECODIFICARE $Y = [1101]$ e $Y = [1111]$

- $Y = [1101] \rightarrow C_Y = C_4 \quad (Y \in C_4) \qquad \hat{X} = Y + \hat{e} = 1101 + 1000 = 0101$
- $Y = [1111] \rightarrow C_Y = C_2 \quad (Y \in C_2) \qquad \hat{X} = Y + \hat{e} = 1111 + 0001$ o 0100 → ERRORE NON CORRETTO

COMUNQUE I COSTI COMPUTAZIONALI RISULTANO MOLTO ALTI

<u>ML SU $\hat{X}$</u>

SE LA FACCIO OGNI VOLTA È $O(2^k)$ (CALCOLO $d_H(Y,X)$ $\forall X \in C$)

SE LA PRECALCOLO SERVE $O(2^n)$ SPAZIO (TABELLA $Y \rightarrow X : d_H(Y,X)$ È MIN)

<u>ML SU $\hat{e}$</u>

SE LA FACCIO OGNI VOLTA È $O(2^k)$ (CALCOLO C_Y E SCELGO IL COSET LEADER)

SE LA PRECALCOLO SERVE $O(2^n)$ SPAZIO (TABELLA $Y \rightarrow$ COSET LEADER DI Y)

PER SFRUTTARE I COSET DEVO INTRODURRE IL CONCETTO DI **SINDROME** DI Y

$$s = YH^T = (x+e)H^T = xH^T + eH^T = eH^T$$

DATO CHE $cH^T = 0 \quad \forall c \in C$ E TUTTI I MEMBRI DI OGNI COSET DIFFERISCONO DI UNA PAROLA DI CODICE ($v_1, v_2 \in C_v \rightarrow v_1 + v_2 = v + c_1 + v + c_2 = c_1 + c_2 = c_3$), ALLORA ESISTONO 2^{n-k} SINDROMI ASSOCIATE AI 2^{n-k} COSET DISTINTI, CIASCUNA DELLE QUALI RICONOSCE 2^k PATTERN DI ERRORE.

SE PRECALCOLASSI UNA TABELLA SINDROME → COSET LEADER ALLORA IL COSTO SCENDEREBBE A:

$O(n(n-k))$ TEMPORALE, PER CALCOLARE $s = YH^T$

$O(2^{n-k})$ SPAZIALE, PER MEMORIZZARE LA TABELLA

ES

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$n = 6,\ k = 3 \qquad 2^{n-k} = 8$ SINDROMI

s	$\hat{e}$
000	000000
001	000001
010	000010
011	010000
100	000100
101	001000
110	100000
111	010100, 100001, 001010

(SE ESCE QUESTO NON RIESCO A CORREGGERE)

DATO CHE $s = eH^T$ PER TROVARE IL COSET LEADER POSSO ANDARE A CERCARE e TC SODDISFI $s = eH^T$, PARTENDO DAGLI e DI PESO 1 ED AUMENTANDO, EVITANDO QUINDI IL CALCOLO DEI COSET

DECODIFICA $Y = 110110 \qquad s = YH^T = 011 \qquad \hat{e} = 010000 \qquad \hat{x} = Y + \hat{e} = 100110$

ALL'ESAME SI POTEVA CALCOLARE IL COSET LEADER SOLO DI QUESTA SINDROME

PROBABILITÀ DI ERRORE

SUPPONENDO IL CANALE BINARIO, SIMMETRICO E SENZA MEMORIA (PROBABILITÀ DI ERRORE INDIPENDENTI PER OGNI bit), ALLORA LA PROBABILITÀ DI ERRORE SULLA PAROLA DI CODICE DECODIFICATA È

$$P_W(e) = \sum_{i=t+1}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad \text{DOVE} \quad t = \frac{d_{min} - 1}{2}$$

(n° MAX DI ERRORI CHE RIESCO A CORREGGERE)

LA PROBABILITÀ DI ERRORE SUL bit DECODIFICATO INVECE NON SI PUÒ CALCOLARE ESATTAMENTE PERCHÉ, IN PRESENZA DI UN n° DI ERRORI NON CORREGGIBILE ($>t$), LA DECODIFICA STESSA PUÒ INTRODURNE ULTERIORI

DATO CHE LA DECODIFICA RESTITUISCE SEMPRE UNA PAROLA DI CODICE, ALLORA OGNI VOLTA CHE C'È UN ERRORE IN DECODIFICA I bit ERRATI SONO SEMPRE ALMENO d_{min}, ALLORA POSSO STIMARE LA PROBABILITÀ DI ERRORE SUL bit DECODIFICATO

$$P_b(e) \simeq \frac{d_{min}}{n} P_W(e) \simeq \frac{d_{min}}{n} \binom{n}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{n-(t+1)}$$

INTRODUZIONE

L'USCITA DI UN MODELLO MATEMATICO PUÓ ESSERE STUDIATA A PRIORI, I MODELLI REALI INVECE POSSIEDONO UN CERTO GRADO DI INCERTEZZA CHE LI RENDE "PROBABILISTICI". LO STUDIO DI QUESTI SISTEMI CONSENTE DI CREARE A PRESTAZIONI AFFIDABILI, EFFICIENTI ED ECONOMICI.

LO SCOPO DELLA PROBABILITÀ È QUELLO DI DESCRIVERE DEI MODELLI PROBABILISTICI DA CUI SVILUPPARE UN RAGIONAMENTO PER GESTIRE L'INCERTEZZA.

LEGGI DELL'ALGEBRA DEGLI INSIEMI	
Leggi di idempotenza	
1a. $A \cup A = A$	1b. $A \cap A = A$
Leggi associative	
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Leggi commutative	
3a. $A \cup B = B \cup A$	3b. $A \cap B = B \cap A$
Leggi distributive	
4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Leggi di identità	
5a. $A \cup \emptyset = A$	5b. $A \cap \Omega = A$
6a. $A \cup \Omega = \Omega$	6b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
Leggi di complementarietà	
7a. $A \cup \bar{A} = \Omega$	7b. $A \cap \bar{A} = \emptyset$
8a. $\overline{(\bar{A})} = A$	8b. $\bar{\Omega} = \emptyset$, $\bar{\emptyset} = \Omega$
Leggi di De Morgan	
9a. $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$	9b. $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

TEORIA DELLA PROBABILITÀ

HA LO SCOPO DI FORNIRE UN MODELLO MATEMATICO PER LA DESCRIZIONE DI FENOMENI NON DETERMINISTICI TRAMITE L'ANALISI A POSTERIORI DEI RISULTATI OTTENUTI. IL RISULTATO DI QUESTO STUDIO È L'ESTRAZIONE DI REGOLARITÀ GLOBALI CHE POSSONO ESSERE UTILI NELLA PREVISIONE D'INSIEME DEI RISULTATI FUTURI.

- <u>ESPERIMENTO CASUALE</u>: PROCEDIMENTO DI OSSERVAZIONE DEL RISULTATO FINALE DI UN SISTEMA, IL QUALE DEVE ESSERE RIPETIBILE UN NUMERO INFINITO DI VOLTE
- <u>RISULTATO</u>: ESITO DELL'ESPERIMENTO
- <u>PARAMETRI O ATTRIBUTI</u>: INSIEME DEI POSSIBILI RISULTATI
- <u>SPAZIO CAMPIONE Ω</u>: INSIEME DI TUTTI I POSSIBILI RISULTATI
- <u>EVENTO</u>: INSIEME DEI RISULTATI INDIVIDUABILI, TUTTI SOTTOINSIEMI DI Ω
  - <u>CERTO</u>: Ω
  - <u>IMPOSSIBILE</u>: ϕ
  - <u>ELEMENTARE "a"</u>: UN ELEM. DI Ω, UN SINGOLO RISULTATO
- <u>PROVA</u>: SINGOLA ESECUZIONE DELL'ESPERIMENTO CHE HA COME RISULTATO "a", IN ESSA SI È VERIFICATO L'EVENTO A SE $a \in A$

LE OPERAZIONI TRA EVENTI NON SONO CHE OPERAZIONI TRA INSIEMI:

- <u>$A \cup B$</u>: RISULTATO APPARTIENE AD ALMENO UNO DEI DUE EVENTI (ANCHE $A+B$)
- <u>$A \cap B$</u>: RISULTATO APPARTIENE AD ENTRAMBI GLI EVENTI (ANCHE AB)
- <u>$A - B$</u>: RISULTATO APPARTIENE AD A MA NON A B

DEFINIZIONE DELLA PROBABILITÀ

LA PROBABILITÀ DI UN EVENTO A SI ESPRIME COME

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

CON PROBABILITÀ INTENDIAMO UNA VALUTAZIONE QUANTITATIVA DELLA POSSIBILITÀ CHE QUELL'EVENTO SI VERIFICHI, UN NUMERO REALE $[0,1]$.

IL PRIMO CONCETTO DI PROBABILITÀ, DATO PER IPOTESI CHE TUTTI I RISULTATI SONO UGUALMENTE VEROSIMILI, CHE Ω CONTENGA "M" ELEMENTI E CHE DI QUESTI "m_A" SIANO FAVOREVOLI ALL'EVENTO A, SOSTIENE CHE

$$P(A) = \frac{m_a}{M}$$

DEFINIZIONE DETTA "CLASSICA", DATO PER IPOTESI CHE TUTTI I RISULTATI SONO EQUIPROBABILI, SENZA RICORRERE AD ESPERIMENTI.

ES: LA PROBABILITÀ DI ESTRARRE UN ASSO DI QUALSIASI COLORE DA UN MAZZO DI 52 CARTE NON TRUCCATE È $P(A) = \frac{4}{52}$

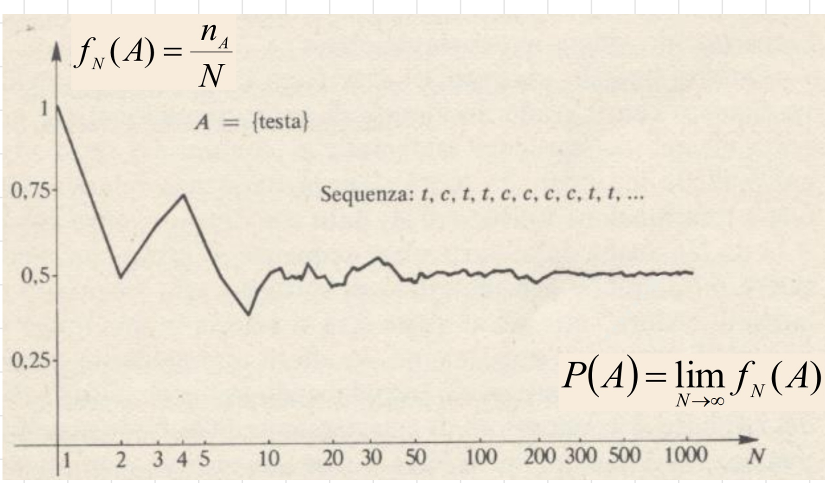
DATA INVECE IL NUMERO DEGLI ESPERIMENTI SVOLTI "N" E "h_A" IL NUMERO DEGLI ESITI FAVOREVOLI AD A, OTTENGO LA <u>FREQUENZA RELATIVA AD A</u>

$$f_N(A) = \frac{h_a}{N}$$

DA QUI OTTENGO LA DEFINIZIONE "FREQUENTISTA" DELLA PROBABILITÀ COME IL LIMITE DELLA FREQUENZA CON $N \to \infty$. TALE DEFINIZIONE SUPPORTA IL CASO DI EVENTI NON EQUIPROBABILI, MA IL SUO CALCOLO È SOLO TEORICO VISTO CHE NON È POSSIBILE REPLICARE UN ESPERIMENTO ∞ VOLTE, MA ACCONTENTANDOSI DI N GRANDE.

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} f_N(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{h_a}{N}$$

ES: GRAFICO FREQ RELATIVA LANCIO DI UNA MONETA



RIPETENDO 1000 VOLTE IL LANCIO OTTENGO CROCE 495 VOLTE E 505 TESTA.

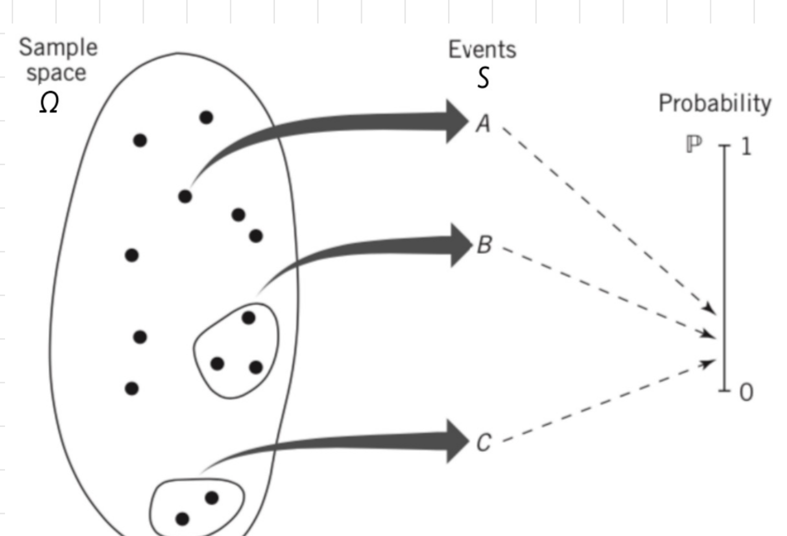
$P(C) = 0,495 \quad P(T) = 0,505$

SE RIPETO L'ESPERIMENTO ALTRE 1000 VOLTE NON È DETTO CHE OTTENGA LO STESSO RISULTATO

TERNA (Ω, S, P)

DAI LIMITI DEI MODELLI SOPRA NASCE LA NECESSITÀ DI DEFINIRE LA PROBABILITÀ IN MANIERA ASSIOMATICA: QUALSIASI SIA LA DEFINIZIONE USATA GLI ASSIOMI DEVONO SEMPRE ESSERE RISPETTATI.
SI DEFINISCE LA TERNA (Ω, S, P) DETTA SPAZIO DI PROBABILITÀ:

- Ω : SPAZIO CAMPIONE, INSIEME DI TUTTI I POSSIBILI ESITI DELL'ESPERIMENTO
- S : EVENTI, DEI SOTTOINSIEMI DI Ω
- P : FUNZIONE A VALORI REALI (DETTA PROBABILITÀ) CHE ASSOCIA AD OGNI EVENTO A DI S UN NUMERO NON NEGATIVO



LA PROBABILITÀ DEVE RISPETTARE I SEGUENTI ASSIOMI:

1) NON NEGATIVITÀ: $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A$

2) ADDITIVITÀ: DATI A e B EVENTI DISGIUNTI ($A \cap B = \emptyset$) $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ CHE NON POSSONO ACCADERE INSIEME

3) NORMALIZZAZIONE: $P(\Omega) = 1$

DA QUESTI 3 SI POSSONO OTTENERE ANCHE ALTRE PROPRIETÀ:

- LA PROBABILITÀ DI UN EVENTO IMPOSSIBILE È ZERO: $P(\emptyset) = 0$

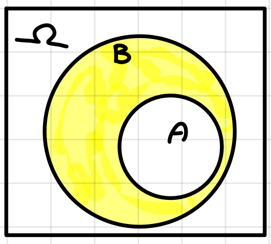
$$\begin{cases} P(\Omega) = 1 \quad \Omega \cup \emptyset = \Omega \quad \Omega \cap \emptyset = \emptyset \text{ (DISGIUNTI)} \\ P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 + P(\emptyset) = P(\Omega) = 1 \\ 1 + P(\emptyset) = 1 \quad P(\emptyset) = 0 \end{cases}$$

- $P(A^c) = 1 - P(A)$

$$\begin{cases} A \cup A^c = \Omega \quad A \cap A^c = \emptyset \text{ (DISGIUNTI)} \\ P(\Omega) = 1 = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \\ 1 = P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A) \end{cases}$$

- PER $A \subseteq B$ SI HA $P(A) \leq P(B)$

$$\begin{cases} B = A \cup (A^c \cap B), \quad A \text{ e } A^c \cap B \text{ (DISGIUNTI)} \\ P(B) = P(A \cup (A^c \cap B)) = P(A) + P(A^c \cap B) \quad \text{PER } P(A^c \cap B) \geq 0 \\ \Rightarrow P(B) \geq P(A) \end{cases}$$



- DATI $A_1 \ldots A_n$ EVENTI DISGIUNTI ($A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$) E $\bigcup A_i = \Omega$

$\Rightarrow \sum P(A_i) = 1$

$$\left[P(\Omega) = 1 \quad P(\bigcup A_i) = 1 = P(A_1) + \ldots + P(A_n) = \sum P(A_i) \right.$$

- DATI A e B NON DISGIUNTI $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  - $A \cup B = A \cup (A^c \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$ PER A e $A^c \cap B$ DISGIUNTI
  - $B = B \cap \Omega = B \cap (A^c \cup A) = (B \cap A^c) \cup (B \cap A) \Rightarrow P(B) = P(B \cap A^c) + P(B \cap A)$

  $P(B) = P(A^c \cap B) + P(B \cap A) \qquad P(A \cup B) = P(A) + [P(B) - P(B \cap A)]$

ES

PRODUZIONE IN SERIE DI CONDENSATORI

- PROBABILITÀ CHE LA CAPACITÀ SIA ENTRO I LIMITI DI TOLLERANZA = 0,96
- PROBABILITÀ CHE LA TENSIONE DI ISOLAMENTO SUPERI UN CERTO VAL. MIN = 0,96
- PROBABILITÀ CHE ALMENO UNA DELLE CONDIZIONI SIA SODDISFATTA = 0,98

CALCOLA PROBABILITÀ CHE IL COND NON SIA COMMERCIABILE PERCHÉ NON SODDISFA UNO DEI 2 REQUISITI

$A = \{\text{CAPACITÀ NEI LIMITI}\} \qquad B = \{\text{TENSIONE ISOL} > \text{VALORE MIN}\}$

$P(A) = 0,96 \qquad P(B) = 0,97 \qquad P(A \cup B) = 0,98$

$C = \{\text{COND. COMMERCIABILE}\} = A \cap B \qquad \bar{C} = \{\text{COND. NON COMM}\}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad P(A \cap B) = P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,95$

$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 0,05 = 5\%$

ASSIOMI PROBABILITÀ E FREQ. RELATIVA

LA DEFINIZIONE DI FREQ. RELATIVA PER ESSERE VALIDA DEVE SODDISFARE GLI ASSIOMI:

1) NON NEGATIVITÀ: VERA $\rightarrow 0 \leq f_N(A) \leq 1$
2) ADDITIVITÀ: PER A e B DISGIUNTI $f_N(A \cup B) = \dfrac{n_A + n_B}{N} = f_N(A) + f_N(B)$
3) NORMALIZZAZIONE: $f_N(\Omega) = \dfrac{N}{N} = 1$

MODELLO UNIFORME DI PROBABILITÀ

IL MODELLO "UNIFORME" DELLA PROBABILITÀ SUGGERISCE CHE, DATO $\Omega = \{a_1 .. a_M\}$ INSIEME DI "M" RISULTATI E DATO L'EVENTO A VERSO IL QUALE "m" SONO I RISULTATI FAVOREVOLI $(A: \{a_1 .. a_m\})$, ALLORA LA PROBABILITÀ DI A È

$$P(A) = P\left(\bigcup^{m} a_i\right) = \sum^{m} P(a_i) = \frac{m}{M}$$

ESSENDO "m" ANCHE IL NUMERO DI RISULTATI FAVOREVOLI AD A, LA DEFINIZIONE È IDENTICA A QUELLA "CLASSICA".

ADOTTANDO TALE MODELLO UNIFORME IL CALCOLO DELLA PROBABILITÀ DI UN EVENTO SI RIDUCE AL CONTEGGIO DEL NUMERO DI RISULTATI AD ESSO FAVOREVOLI (m)

ES

MAZZO DA 52 NON TRUCCATO $M = 52$

PROBABILITÀ DI ESTRARRE UN ASSO NON DI CUORI?

$m_A = 3 \qquad P(A) = \dfrac{m_A}{M} = \dfrac{3}{52}$

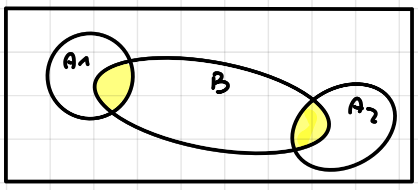
PROBABILITÀ DI ESTRARRE UNA CARTA DI CUORI CHE NON SIA UNA FIGURA?

$m_C = 10 \qquad P(C) = \dfrac{m_C}{M} = \dfrac{10}{52}$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

SUPPONGO DI STAR STUDIANDO 2 EVENTI A e B E SIA $P(A|B)$ LA <u>PROBABILITÀ CONDIZIONATA</u> DI A DATO B, CIOÈ LA PROBABILITÀ DI A DATO CHE L'EVENTO B SI È GIÀ VERIFICATO. ASSUMENDO $P(B) \neq 0$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



PER DEF DEVE SODDISFARE GLI ASSIOMI

1) $0 \leq P(A|B) \leq 1 \Rightarrow 0 < P(B) \leq 1 \ , \ 0 \leq P(A \cap B) \leq 1$
2) $P((A_1 \cup A_2)|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ (A_1 e A_2 DISGIUNTI)

$$P((A_1 \cup A_2)|B) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} =$$
$$= P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

3) $P(\Omega|B) = 1 \Rightarrow \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

POSSO INTERPRETARE LA PROBABILITÀ CONDIZIONATA ANCHE IN <u>TERMINI DI FREQ.</u>

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \simeq \frac{\frac{n_{A \cap B}}{N}}{\frac{n_B}{N}} \simeq \frac{n_{A \cap B}}{n_B}$$

4) $P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|B)$

REGOLA DI BAYES

CI PERMETTE DI TROVARE $P(B|A)$ DA $P(A|B)$

$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ $\quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$

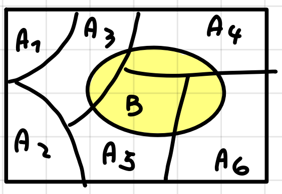
$(= P(B|A)P(A))$

$$\Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

LEGGE DELLA PROBABILITÀ TOTALE

DATO UN INSIEME DI EVENTI A_i DISGIUNTI TALI CHE LA LORO UNIONE SIA Ω

(CIOÈ $\bigcup^{N} A_i = \Omega$, $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$)



$$\Rightarrow P(B) = \sum^{N} P(B|A_i)P(A_i)$$

DIM

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap \bigcup^{N} A_i) = P(\bigcup^{N}(B \cap A_i)) = \sum^{N} P(B \cap A_i) = \sum^{N} P(B|A_i)P(A_i)$$

ES : RADAR DETECTION PROBLEM

$A = \{$TARGET PRESENTE NELL'AREA SORVEGLIATA$\}$

$A^c = \{$NESSUN TARGET NELL'AREA$\}$

$B = \{$IL RICEVITORE RADAR TROVA UN TARGET$\}$

CI SONO 3 PROBABILITÀ DI INTERESSE

$P(A)$: TARGET NELL'AREA (PRIORITÀ A PRIORI)

$P(B|A)$: RADAR TROVA UN TARGET DATO CHE IL TARGET È PRESENTE NELL'AREA (PROBABILITÀ DI RILEVAMENTO)

$P(B|A^c)$: RADAR TROVA UN TARGET DATO CHE NON C'È NESSUN TARGET NELL'AREA (PROBABILITÀ DI FALSO ALLARME)

IL PROBLEMA È CALCOLARE $P(A|B)$, CIOÈ LA PROBABILITÀ CHE IL TARGET È PRESENTE NELL'AREA DATO CHE IL RADAR HA RILEVATO UN TARGET

SUPPONIAMO $P(A) = 0,02$ $\quad P(B|A) = 0,99$ $\quad P(B|A^c) = 0,01$

$\underset{\text{TH BAYES}}{P(A|B) =} \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$ $\qquad \underset{\text{TH PROB. TOT.}}{P(B) =} P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$

$P(A^c) = 1 - P(A)$ $\qquad P(A|B) = \frac{0,99 \cdot 0,02}{0,99 \cdot 0,02 + 0,01 \cdot 0,98} \simeq 0,69$

EVENTI INDIPENDENTI

SUPPONGO CHE IL VERIFICARSI DI UN EVENTO A NON INFLUISCA SU B : $P(B|A) = P(B)$

PER BAYES : $P(A|B) = P(A)$

IN PIÙ AVREI : $P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

DANDO UN'INTERPRETAZIONE FREQUENTISTICA A CIÒ SOPRA POSSO DIRE CHE LA FREQ. DI B NELLA SEQUENZA DI N RIPETIZIONI È SIMILE ALLA FREQ. DI B NELLA SEQUENZA DI h_A RIPETIZIONI IN CUI SI È PRESENTATO A , E VICEVERSA

$$P(B|A) = P(B) \Rightarrow \frac{h_{A \cap B}}{h_A} \approx \frac{h_B}{N}$$

$$P(A|B) = P(A) \Rightarrow \frac{h_{A \cap B}}{h_B} \approx \frac{h_A}{N}$$

COMPOSIZIONE DI EVENTI INDIPENDENTI

CONSIDERO DUE DIVERSI ESPERIMENTI ALEATORI DI SPAZI CAMPIONE $\Omega_1 = \{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N\}$ e $\Omega_2 = \{\lambda_1 \dots \lambda_M\}$ CON RISPETTIVI EVENTI A_1 e A_2 E FUNZIONI DI PROBABILITÀ P_1, P_2 (LANCIO DADO E MONETA $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\Omega_2 = \{T, C\}$)

UN ESPERIMENTO COMPOSTO SI DEFINISCE ATTRAVERSO:

- COPPIE ORDINATE $(\varepsilon_i ; \lambda_j)$ DEI RISULTATI DEGLI ESPERIMENTI COMPONENTI $(2, T)$
- UNO SPAZIO CAMPIONE PARI AL PRODOTTO CARTESIANO DEI 2 SPAZI CAMPIONE COMPONENTI : $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$
- DEGLI EVENTI , TUTTI SOTTOINSIEMI DI Ω NELLA FORMA $A = A_1 \times A_2$

ES

ESPERIMENTO : LANCIO DI MONETA RIPETUTO 2 VOLTE

$$\Omega_1 = \{\varepsilon_1 = T, \varepsilon_2 = C\} \qquad \Omega_2 = \{\lambda_1 = T, \lambda_2 = C\}$$

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(T,T), (T,C), (C,T), (C,C)\}$$

COME TROVO LA PROBABILITÀ CHE UN EVENTO $A = A_1 \times A_2$ POSSA AVVENIRE IN $\Omega \times \Omega_1 \times \Omega_2$?

SE GLI ESPERIMENTI COMPONENTI SONO INDIPENDENTI ALLORA VALE $P(A) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2)$. DALLE SOLE FUNZIONI DI CALCOLO DEI SINGOLI ELEMENTI NON È IN GENERALE POSSIBILE RICAVARE LA FUNZIONE DI PROBABILITÀ DELL'ESPERIMENTO COMPOSTO.

DA NON CONFONDERE EVENTI ED ESPERIMENTI INDIPENDENTI:

- EVENTI INDIP: PROBABILITÀ DELL'INTERSEZIONE DEI DUE EVENTI
- ESPERIMENTI INDIP: PRODOTTO CARTESIANO DEGLI EVENTI SINGOLI

SI PUÒ RAPPRESENTARE IL PRODOTTO CARTESIANO COME INTERSEZIONE DI 2 EVENTI NELLO SPAZIO CAMPIONE COMPOSTO.

INFATTI VISTO CHE Ω_1 CONTIENE TUTTI GLI EVENTI AL SUO INTERNO E ANCHE Ω_2, ALLORA POSSO DIRE CHE $A_i \times \Omega_J$ SI VERIFICA PER QUALSIASI RISULTATO DI A_i

$$A = A_1 \times A_2 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = A_1 \times \Omega_2 \\ A_2 = \Omega \times A_2 \end{cases} \Rightarrow A_1 \times A_2 = (A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2)$$

$$P(A_1 \times \Omega_2) = P_1(A_1)$$

$$P(\Omega_1 \times A_2) = P_2(A_2)$$

SEMPRE ASSUMENDO CHE GLI ESPERIMENTI SIANO INDIPENDENTI, OTTENGO CHE CIÒ EQUIVALE A DIRE CHE TUTTI GLI EVENTI DEL TIPO $((A_1 \times \Omega_2), (\Omega_1 \times A_2))$ SONO ANCH'ESSI INDIPENDENTI

$$P(A) = P(A_1 \times A_2) = P(A_1 \times \Omega_2) \cap P(\Omega_1 \times A_2) = P(A_1 \times \Omega_2) P(\Omega_1 \times A_2) = P_1(A_1) P_2(A_2)$$

ES

LANCIO 2 MONETE $\quad A_1 = \{T\} \quad A_2 = \{C\}$

$$A_1 \times A_2 = (A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2) = \{TC\}$$

$A_1 \times \Omega_1$

$\{TT\} \quad \{TC\} \rightarrow A_1 \times A_2 = \{TC\}$

$\{CT\} \quad \{CC\} \quad \Omega_1 \times A_2$

ES

PROBABILITÀ CHE LANCIANDO 2 DADI ENTRAMBI PRESENTINO O 4 O 5

SOL 1

CONSIDERO L'ESPERIM. COMPOSTO DA 2 LANCI INDIP.

$$P_1(\mathcal{E}_i) = \frac{1}{6} \qquad P_2(\lambda_J) = \frac{1}{6}$$

$$P((\mathcal{E}_i, \lambda_J)) = P_1(\mathcal{E}_i) P_2(\lambda_J) = \frac{1}{36}$$

$$P((\mathcal{E}_4, \lambda_4) \cup (\mathcal{E}_5, \lambda_5)) = P((\mathcal{E}_4, \lambda_4)) + P((\mathcal{E}_5, \lambda_5)) = P_1(\mathcal{E}_4) P_2(\lambda_4) + P_1(\mathcal{E}_5) P_2(\lambda_5) = \frac{1}{18}$$

SOL 2

APPLICO IL MODELLO UNIFORME

RISULTATI POSSIBILI LANCIANDO 2 DADI $= 6^2 = 36 = m$

RISULTATI FAVOREVOLI $= 2 = m_A$

$$P((\mathcal{E}_4, \lambda_4) \cup (\mathcal{E}_5, \lambda_5)) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

ES

UN APPARECCHIO È FORMATO DA 2 COMPONENTI UGUALI IN SERIE, PER OGNUNO SO CHE LA PROBABILITÀ CHE SI GUASTI ENTRO 1000 ORE DI USO È $P = 0{,}1$

SI SUPPONE CHE I GUASTI DEI 2 SI VERIFICHINO IN MODO INDIP.

QUAL È LA PROBABILITÀ P(GUASTO) CHE L'APPARECCHIO SI GUASTI ENTRO 1000 ORE?

SOL 1

$$P_1(G_1) = 0{,}1 \qquad P_2(G_2) = 0{,}1$$

$$P_1(F_1) = 1 - P_1(G_1) = 0{,}9 \qquad P_2(F_2) = 1 - P_2(G_2) = 0{,}9$$

$$P[(F_1, F_2)] \underset{\text{INDIP.}}{=} P_1(F_1) P_2(F_2) = 0{,}81$$

$$P(\text{GUASTO}) = 1 - P[(F_1, F_2)] = 0{,}19$$

SOL 2

$$P(\text{GUASTO}) = P[(G_1 \times \Omega_2) \cup (\Omega_1 \times G_2)] = P[(G_1 \times \Omega_2)] + P[(\Omega_1 \times G_2)] - P[(G_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times G_2)] =$$

$$= P_1(G_1) + P_2(G_2) - P_1(G_1) P_2(G_2) = 0{,}19$$

RISULTATI BINARI INDIPENDENTI

MI PORTO NEL CASO DI UNO SPAZIO CAMPIONE $\Omega = \{A, \bar{A}\}$ COSTITUITI DA SOLO 2 RISULTATI, CIASCUNO DI PROBABILITÀ:

$$P(A) = p \qquad P(\bar{A}) = 1 - p = q$$

CONSIDERO L'ESPERIMENTO COMPOSTO PER IL QUALE, RIPETENDO N VOLTE LO STESSO IN MODO INDIPENDENTE DAI PRECEDENTE E CALCOLO LA PROBABILITÀ CHE A SI VERIFICHI "k" VOLTE IN UN QUALSIASI ORDINE.

PARTO DALL'INDIVIDUARE E, L'INSIEME DELLE SEQUENZE $E_1 \dots E_R$ TALI CHE OGNUNA DI ESSE SIA LUNGA "N" E CONTENGA "k" EVENTI A.

PRENDO LA PRIMA E_1:

$$E = \bigcup^{R} E_i \qquad E_1 = \underbrace{A \times \dots A}_{k} \times \underbrace{\bar{A} \times \dots \bar{A}}_{N-k}$$

$$P(E_i) = p \cdot \dots p \cdot q \cdots q = p^k \cdot q^{(N-k)} = p^k (1-p)^{N-k}$$

$$P(E) = \sum^{N} P(E_i) = R\, p^k (1-p)^{N-k}$$

MI MANCA DA TROVARE IL NUMERO DI SEQUENZE "R"

$$R = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}$$

$$P(E) = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}\, p^k (1-p)^{N-k} = \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \qquad 0 \le k \le N$$

ES

M BIGLIE, b BIANCHE, RIMANENTI DI DIVERSO COLORE

ESTRAGGO 5 BIGLIE, RIMETTENDO OGNI VOLTA LA BIGLIA ESTRATTA NELL'URNA

PROBABILITÀ DI OTTENERE 3 BIGLIE BIANCHE E 2 DI DIVERSO COLORE?

$$P\{\text{ESTRARRE BIANCA}\} = \frac{b}{M} = p \qquad P\{\text{NON BIANCA}\} = 1 - p = q = 1 - \frac{b}{M} \qquad k = 3$$

$$P\{3 \text{ BIANCHE SU 5 PROVE}\} = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}\, p^k (1-p)^{N-k} = \frac{5!}{3!\,2!} \left(\frac{b}{M}\right)^3 \left(1 - \frac{b}{M}\right)^2 = \frac{10\, b^3 (M-b)^2}{M^5}$$

ES

5 LANCI DATO

- PROBABILITÀ CHE ESCA 2 VOLTE 3?

$$P\{\text{ESCA } 3\} = \frac{1}{6} = p \qquad P\{\text{NON ESCA } 3\} = \frac{5}{6} = 1 - p = q$$

$$M = 5 \qquad k = 2$$

$$P\{2 \text{ VOLTE 3 SU 5 LANCI}\} = \frac{5!}{2!\,3!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}16075$$

- PROBABILITÀ CHE ESCA ALMENO 2 VOLTE 3?

$$P\{3 \text{ ESCE ALMENO 2 VOLTE}\} = P\{3 \text{ ESCE 2 VOLTE}\} + P\{3 \text{ ESCE 3 VOLTE}\} +$$
$$+ P\{3 \text{ ESCE 4 VOLTE}\} + P\{3 \text{ ESCE 5 VOLTE}\} =$$
$$= \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 + \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + \binom{5}{5} p^5 = 0{,}1962$$

- PROBABILITÀ CHE 3 ESCA AL PIÙ 2 VOLTE?

$$P\{3 \text{ ESCE AL PIÙ 2 VOLTE}\} = P\{3 \text{ ESCE 0 VOLTE}\} + P\{3 \text{ ESCE 1 VOLTA}\} +$$
$$+ P\{3 \text{ ESCE 2 VOLTE}\}$$

ES : COMPOSIZIONE DI ESPERIMENTI NON INDIPENDENTI

PROBABILITÀ CHE ESTRAENDO DUE CARTE DA UN MAZZO DI 40, ENTRAMBE SIANO FIORI

SOL 1

$A = \{\text{PRIMA ESTR. OTTENGO FIORI}\}$ $B = \{\text{SECONDA ESTR OTTENGO FIORI}\}$

$B|A = \{\text{SECONDA OTTENGO FIORI DOPO CHE NELLA PRIMA HO OTTENUTO FIORI}\}$

$P(A) = \frac{10}{40}$ $P(B|A) = \frac{9}{39}$

$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{3}{52}$

SOL 2

IL NUMERO DI POSSIBILI RISULTATI (M) È DATO DAL NUMERO DI COMBINAZIONI DI 40 OGGETTI PRESI 2 A 2

$$C_{40,2} = \binom{40}{2} = \frac{40!}{2!(40-2)!}$$

IL NUMERO DI POSSIBILI RISULTATI FAVOREVOLI (m_A) È DATO DAL NUMERO DI POSSIBILI MODI IN CUI POSSONO APPARIRE LE 10 CARTE DI FIORI A COPPIE

$$C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!}$$

$$P(\text{ESTRAZIONE 2 FIORI}) = \frac{m_A}{M} = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{3}{52}$$

CODICE A RIPETIZIONE

UNO DEGLI IMPIEGHI DELLA PROBABILITÀ IN COM NUM È RELATIVO ALLA RIPETIZIONE DEI bit SU UN CANALE NON SEMPRE AFFIDABILE IN MODO DA RIDURRE IL bit ERROR RATE DELLA COMUNICAZIONE.

DATO UN NUMERO DISPARI "n" IL TRASMETTITORE RIPETE OGNI bit "n" VOLTE, MENTRE IL RICEVITORE DECODIFICA IL TUTTO A MAGGIORANZA, CIOÈ CONSIDERA LO STREAM DI bit RICEVUTO "n" bit ALLA VOLTA E LI CONVERTE IN UN SOLO bit PARI A QUELLO PIÙ RICORRENTE NEL GRUPPO.

TALE METODO È IN GRADO DI CORREGGERE FINO A $\frac{n-1}{2}$ ERRORI

DATO UN CANALE CON PROBABILITÀ DI ERRORE "p" SUL QUALE I bit VENGONO RIPETUTI "n" VOLTE, CALCOLO LA PROBABILITÀ CHE IL RICEVITORE OTTENGA UNA CODIFICA ERRATA. LA CODIFICA ERRATA VERRÀ RICEVUTA SOLO SE VENGONO TRASMESSI $\{\frac{n+1}{2} \dots n\}$ bit ERRATI

$$P_{err} = P\left(\tfrac{n+1}{2}\,err\right) + \dots + P(n\,err) = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} p^{\frac{n+1}{2}}(1-p)^{n-\frac{n+1}{2}} + \dots + \binom{n}{n}p^n = \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

ES: CANALE DI COMUNICAZIONE BINARIO SIMMETRICO

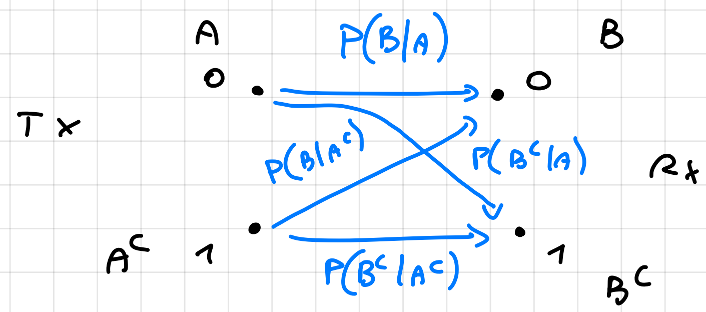
- 1 TRASMESSO CON PROBABILITÀ $p = 0{,}3$ e 0 CON $(1-p) = 0{,}7$
- PROBABILITÀ DI ERRORE $P_e = 0{,}01$

SUPPONGO CHE SIA STATO RICEVUTO 0, QUAL È LA PROBABILITÀ CHE 0 SIA STATO EFFETTIVAMENTE TRASMESSO?

$A = \{\text{È STATO TRASMESSO } 0\}$ $\quad A^c = \{\text{È STATO TRASMESSO } 1\}$

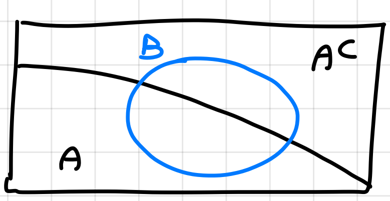
$B = \{\text{È STATO RICEVUTO } 0\}$ $\quad B^c = \{\text{È STATO RICEVUTO } 1\}$

$P[A|B]$? (PROBABILITÀ CHE SIA STATO TRASMESSO 0 DATO CHE È STATO RICEVUTO 0)



$P(A) = 0{,}7$ $\quad P(A^c) = 1 - P(A) = 0{,}3$ $\qquad P(A|B) = \dfrac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$ BAYES

$P_e = P(B^c|A) = P(B|A^c) = 0{,}01$ $\qquad P(B|A) = 1 - P(B^c|A) = 0{,}99$



$P(B) = P(B|A)\,P(A) + P(B|A^c)\,P(A^c) = 0{,}696$

$P(A|B) = 0{,}996$

$P_e = 0$ $\qquad P(B|A) = 1 = P(B^c|A^c)$ $\qquad P(B) = 0{,}7$ $\qquad P(A|B) = 1$

$P_e = 0{,}5$ $\qquad P(B|A) = 0{,}5 = P(B|A^c)$ $\qquad P(B) = 0{,}5$ $\qquad P(A|B) = P(A) = 0{,}7$

ES: MONETA PERFETTA O TRUCCATA?

2 MONETE DI CUI UNA CON $P(T) = 0{,}8$, SI SCEGLIE A CASO UNA DELLE DUE E SI LANCIA PER 10 VOLTE, OSSERVANDO L'USCITA DI 5 TESTE E 5 CROCI.

- QUAL È LA PROBABILITÀ CHE LA MONETA SCELTA SIA QUELLA PERFETTA?
- COSA SI PUÒ DIRE DI QUESTA PROBABILITÀ SE SI OSSERVANO 5000 TESTE SU 10000 LANCI?

$A = \{\text{LA MONETA È PERFETTA}\}$ $\quad B = \{5T, 5C\}$ $\qquad P(A|B)$? PROBABILITÀ CHE LA MONETA È PERFETTA DATO CHE HO OTTENUTO 5T, 5C

$P(B|A) = \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K}$ $\qquad N = 10,\ K = 5,\ p = 0{,}5$

PROVE RIPETUTE BINARIE E INDIPENDENTI

$P(B|A) = \binom{10}{5} (0{,}5)^5 (0{,}5)^5 = 0{,}246$

$P(A|B) = \dfrac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$ $\qquad P(A) = 0{,}5$ $\qquad P(A^c) = 0{,}5$

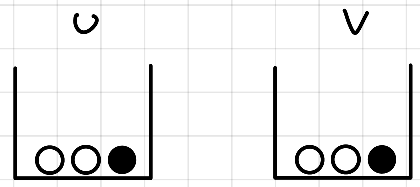
$P(B|A^c) = \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K}$ $\qquad N = 10,\ K = 5,\ p = 0{,}8$ $\qquad P(B|A^c) = 0{,}0264$

$P(B) = P(B|A)\,P(A) + P(B|A^c)\,P(A^c) = 0{,}1363$

$P(A|B) = \dfrac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)} = 0{,}9$

$B' = \{5000\ T \text{ SU } 10000\}$ $\qquad P(A|B') = \dfrac{P(B'|A)\,P(A)}{P(B')} \simeq 1$

ES: BIGLIE IN DUE URNE



PESCO UNA PALLA A CASO DA U E LA METTO IN V

1) PESCO POI UNA PALLA DA V: PROBABILITÀ CHE SIA BIANCA?

2) SE LA PALLA PESCATA DA V È BIANCA: PROBABILITÀ DI AVER PESCATO UNA PALLA NERA DA U?

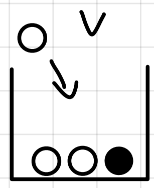
$A = \{$PESCO PALLA BIANCA DA V$\}$

$B = \{$PESCO PALLA BIANCA DA U$\}$ $\qquad B^c = \{$PESCO PALLA NERA DA U$\}$

1)
$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

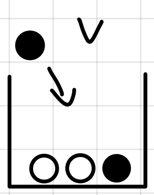
TH PROB TOTALE

$P(A|B) = \frac{3}{4}$ PROBABILITÀ DI PESCARE UNA BIANCA DA V DATO CHE HO PESCATO UNA BIANCA DA U



$P(B) = \frac{2}{3}$

$P(A|B^c) = \frac{1}{2}$ PROBABILITÀ DI PESCARE UNA BIANCA DA V DATO CHE HO PESCATO UNA NERA DA U



$P(B^c) = \frac{1}{3} \quad \rightarrow P(A) = \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_2} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

2)
$$P(B^c|A) = \frac{P(A|B^c)P(B^c)}{P(A)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$$

ES: CONTENITORI DI CONDENSATORI

	Contenitore #			
Capacità (μF)	1	2	3	Totale
0.1	35	25	40	100
0.5	75	95	70	240
1.0	60	10	65	135
Totale	170	130	175	475

PRIMA SI SELEZIONA UN CONTENITORE TRA I 3, POI SI ESTRAE UN CONDENSATORE

SAPENDO CHE È STATO ESTRATTO UN COND DA 0,1 μF: PROBABILITÀ CHE VENGA DAL CONTENITORE 3?

$A_i = \{$SCELGO CONTENITORE $i\}$ $\quad B = \{$COND. HA CAPACITÀ 0,1 μF$\}$ $\quad P(A_i) = \frac{1}{3}$

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B)}$$

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$

$P(B|A_1) = \frac{35}{170} \qquad P(B|A_2) = \frac{25}{130} \qquad P(B|A_3) = \frac{40}{175}$

$P(B) = 0,2089 \qquad P(A_3|B) = 0,3647$

ES : DUE DISSALATORI

UNA NAVE HA 2 DISSALATORI UNO NUOVO E UNO RICONDIZIONATO : ENTRAMBI SONO INDIP. E IN GRADO DI SOPPERIRE ALLA NECESSITÀ DI BORDO.

LA PROBABILITÀ CHE IN 1 MESE IL NUOVO SI GUASTI È $P_N = 0{,}05$ PER IL RIC. INVECE $P_R = 0{,}2$.

PROBABILITÀ CHE LA NAVE DEBBA INTERROMPERE LA NAVIGAZIONE ENTRO 1 MESE ?

$\Omega_N = \{\varepsilon_1 = F_N, \varepsilon_2 = G_N\}$ $\quad P_N(F_N) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \quad P_N(G_N) = 0{,}05$

$\Omega_R = \{\lambda_1 = F_R, \lambda_2 = G_R\}$ $\quad P_R(F_R) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 \quad P_R(G_R) = 0{,}8$

$\Omega = \Omega_N \times \Omega_R = \{(F_N, G_R); (F_N, G_N); (G_N, G_R); (G_N, F_R)\}$

SI DEVONO GUASTARE ENTRAMBI

$P(\text{RIENTRO}) = P\{(G_N, G_R)\} = P_N(G_N)\, P_R(G_R) = 0{,}01$

ES : DIODI APPARENTEMENTE IDENTICI

HO 10 DIODI APPARENTEMENTE IDENTICI , DI CUI 3 GUASTI

PROBABILITÀ CHE SCEGLIENDONE 5, 2 SONO GUASTI ?

$A = \{2 \text{ GUASTI SU } 5 \text{ PESCATI}\}$ $\qquad N = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!}$

$P(A) = \frac{h_A}{N}$ $\qquad$ o o o o o o o ⊗ ⊗ ⊗ $\qquad h_A = \binom{7}{3} \cdot \binom{3}{2}$

$\binom{7}{3} \rightarrow$ 7 POSSIBILI, 3 PRESI $\qquad \binom{3}{2} \rightarrow$ 3 POSSIBILI, 2 PRESI

$$P(A) = \frac{\binom{7}{3} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{12} = 0{,}417$$

ES : STUDIARE CONVIENE ?

PROBABILITÀ STUDENTE SUPERI ESAME AVENDO STUDIATO : 0,9
PROBABILITÀ STUDENTE SUPERI ESAME SENZA AVER STUDIATO : 0,2

PROBABILITÀ CHE ABBIA STUDIATO : 0,75

PROBABILITÀ CHE ABBIA STUDIATO DATO CHE HA PASSATO L'ESAME ?

$A = \{\text{STUDENTE HA STUDIATO}\}$ $\quad P(A) = 0{,}75 \quad P(A^c) = 0{,}25$

$B = \{\text{STUDENTE HA SUPERATO ESAME}\}$

$P(B|A) = 0{,}9 \quad P(B|A^c) = 0{,}2 \quad P(A|B)$?

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)} \qquad P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$$

$P(A^c) = 1 - P(A) = 0{,}25 \qquad P(B) = 0{,}725$

$P(A|B) = 0{,}93$

ES : INTEL 386

IN UN INTEL 386 OGNI NUMERO È RAPPRESENTATO DA UNA PAROLA DI 32 CIFRE BINARIE. SAPENDO CHE LA PROBABILITÀ DI ERRORE NELLA LETTURA DI UNA SINGOLA CIFRA BINARIA È $P = 10^{-3}$

- PROBABILITÀ CHE CI SIA UN SOLO ERRORE IN UNA PAROLA
- PROBABILITÀ CHE NON CI SIANO ERRORI IN UNA PAROLA

$N = 32 \quad P = 10^{-3} \quad k = 1$

$P(1 \text{ ERRORE}) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = 0{,}031$

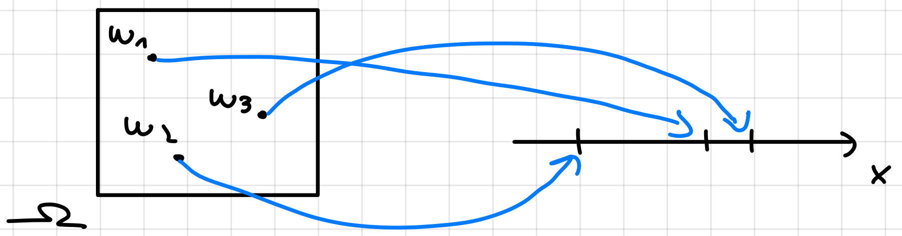
$N = 32 \quad P = 10^{-3} \quad k = 0$

$P(0 \text{ ERRORI}) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = 0{,}9685$

VARIABILI ALEATORIE

DATA UNA TERNA (Ω, S, P) DEFINISCO UNA CORRISPONDENZA $X(\omega)$ CHE ASSOCIA A CIASCUN RISULTATO "ω" DELL'ESPERIMENTO UN UNICO VALORE REALE. UN ESEMPIO È IL LANCIO DI UNA MONETA, PONENDO $X(T) = 1$ $X(C) = 0$, OPPURE IL LANCIO DI UN DADO $X(\text{FACCIA } i\text{-ESIMA}) = i$.

IL CRITERIO USATO PER ASSOCIARE RISULTATI A VALORI REALI È TOTALMENTE ARBITRARIO, MA SI PREFERISCE SEGUIRE CRITERI INTUITIVI PER EVITARE DI CONFONDERSI.



SPESSO NON SONO INTERESSATO ALLA PROBABILITÀ CHE L'ESITO DI UN ESPERIMENTO SIA UN ESATTO VALORE, MA PIÙ CHE ALTRO MI INTERESSA CHE SIA $\leq$ AD UN CERTO VALORE.

DEFINISCO QUINDI UNA "VARIABILE ALEATORIA" UNA CORRISPONDENZA TRA Ω E L'ASSE REALE NELLA QUALE SI VERIFICA CHE $X(\omega) \leq a$ È UN EVENTO QUALSIASI SIA IL VALORE DI a.

TUTTI I SOTTOINSIEMI SULL'ASSE REALE POSSONO ESSERE OTTENUTI COME UNIONE O INTERSEZIONE DI ALTRI INSIEMI DEL TIPO $\{X(\omega) \leq a\}$, QUINDI AD OGNI VARIABILE PUÒ ESSERE ASSOCIATA UNA CERTA PRIORITÀ.

$$\forall b < a \quad \{b < X(\omega) \leq a\} = \{X(\omega) \leq a\} - \{X(\omega) \leq b\}$$

FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE

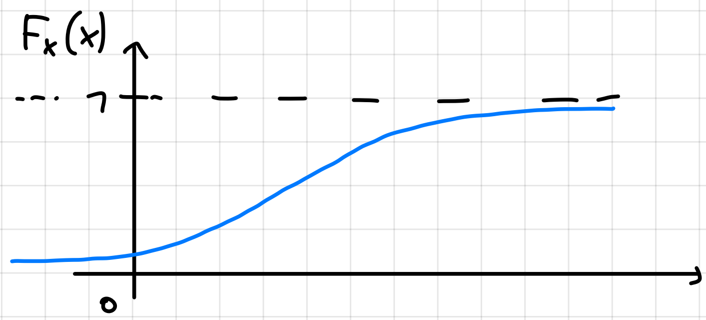
DEFINISCO LA "FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE" DI PROBABILITÀ DI UNA VARIABILE ALEATORIA X LA FUNZIONE

$$F_X(x) = P(\{X \le x\})$$

VISTO CHE X ALEATORIA, SARÀ DEFINITA PER OGNI VALORE REALE

$F_X(x)$ TRA L'ALTRO È MONOTONA NON DECRESCENTE (PER VALORI SUCCESSIVI DI "x" PUÒ RIMANERE COSTANTE O CRESCERE)

HA ANCHE ALTRE PROPRIETÀ:



- $0 \le F_X(x) \le 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = \lim P(\{X \le x\}) = P(\{X \le -\infty\}) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = \lim P(\{X \le x\}) = P\{\{X \le +\infty\}\} = 1$
- $F_X(x_1) \le F_X(x_2) \quad \forall x_1 < x_2$ (MONOTONA NON DECRESCENTE)
  - $\{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\} \Rightarrow P(\{X \le x_1\}) \le P(\{X \le x_2\})$
- $P(x_1 < X \le x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$
  - $\{X \le x_2\} = \{X \le x_1\} \cup \{x_1 < X \le x_2\} \Rightarrow P(\{X \le x_2\}) = P(\{X \le x_1\}) + P(\{x_1 < X \le x_2\})$
- $F_X(x^+) = \lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)\ ,\ h > 0$ (SE DISCONTINUA, È CONTINUA A DESTRA)
  - $\{X \le x+h\} = \{X \le x\} \cup \{x < X \le x+h\} \Rightarrow P(\{X \le x+h\}) = P(\{X \le x\}) + P(\{x < X \le x+h\})$

    $F_X(x+h) = F_X(h) + P(\{x < X \le x+h\}) \Rightarrow \lim_{h\to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x) + \lim_{h \to 0^+} \underbrace{P(\{x < X \le x+h\})}_{\Downarrow}$

    $F_X(x^+) = F_X(x) + 0$
- $P(\{X = x'\}) = F_X(x'^-) - F_X(x'^+)$ (DISCONTINUITÀ NEL PUNTO "x" È ESATTAMENTE $P(\{X = x'\})$)
  - $F_X(x'^+) = F_X(x') = P(\{X \le x\}) = P(\{X \le x'-h\}) + P(\{x'-h < X \le x'\})$

    $\lim_{h \to 0^+} P(\{X \le x'-h\}) + \lim_{h \to 0^+} P(\{x'-h < X \le x'\}) = F_X(x'^-) + P(\{X = x'\}) = F_X(x'^+)$

TALI PROPRIETÀ MOSTRANO COME CONOSCENDO $F_X(x)$ SIA POSSIBILE TROVARE LA PROBABILITÀ DI QUALSIASI EVENTO, DATO X APPARTENENTE AD UN INTERVALLO DI VALORI REALI.

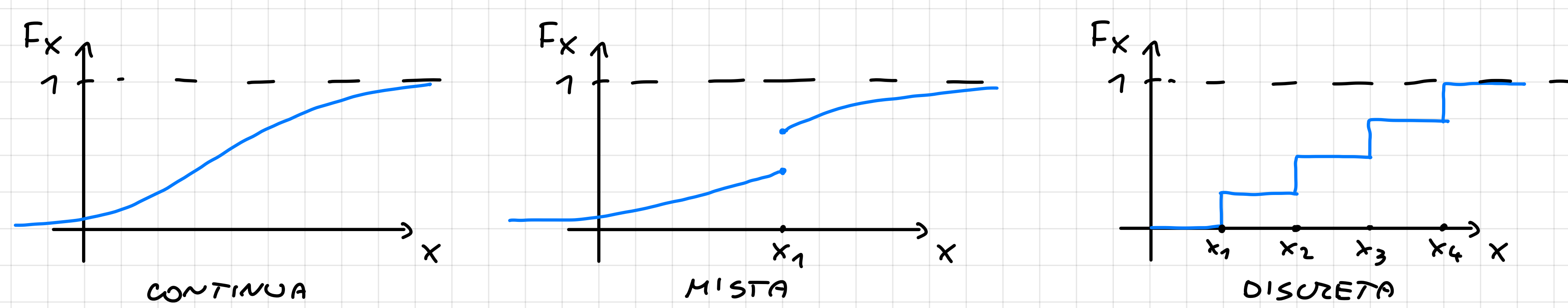
$F_X(x)$ RAPPRESENTA UNA DESCRIZIONE STATISTICA COMPLETA DELLA VARIABILE ALEATORIA X.

UNA <u>VARIABILE ALEATORIA</u> È <u>CONTINUA</u> SE PUÒ ASSUMERE UN'INFINITÀ DI VALORI, OGNUNO DEI QUALI CON PROBABILITÀ NULLA

$$P(\{X = x\}) = 0 \quad \forall x$$

UNA <u>VARIABILE ALEATORIA</u> SI DICE <u>DISCRETA</u> SE ASSUME UN NUMERO FINITO O UN'INFINITÀ NUMERABILE DI VALORI DISTINTI $x_1 \dots x_i$

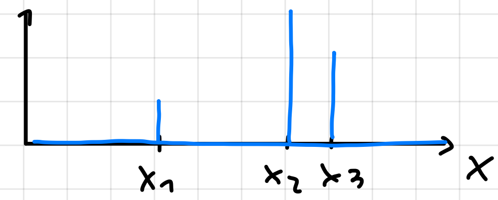
UNA <u>VARIABILE ALEATORIA</u> SI DICE <u>MISTA</u> SE LA SUA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE È DISCONTINUA MA NON COSTANTE A TRATTI. L'ALTEZZA DEL TRATTO RAPPRESENTA



MASSA DI PROBABILITÀ

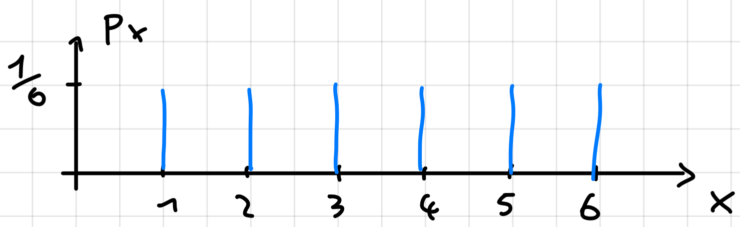
PER VARIABILI ALEATORIE DISCRETE DEFINISCO LA FUNZIONE MASSA DI PROBABILITÀ

$$p_X(x) = P(\{X = x_i\}) \qquad x_i \in \{x_1 \dots x_n\}$$



SARÀ NON NULLA SOLO IN CORRISPONDENZA DI $x_1 \dots x_i$

ES: LANCIO DI UN DADO



PER DEF. LA SOMMA DELLE PROBABILITÀ NEI PUNTI DISCRETIZZATI SARÀ

$$\sum p_i(x) = \sum P(\{X = x_i\}) = 1$$

SI PUÒ DEFINIRE ANCHE COME LIMITE DELLA FREQUENZA RELATIVA.
CIOÈ POSSO RIPETERE "N" VOLTE L'ESPERIMENTO AGGIORNANDO OGNI VOLTA IL VALORE $n(x_i)$, NUMERO DI VOLTE CHE IL VALORE x_i SI È PRESENTATO

$$p_X(x) = P(\{X = x_i\}) = \lim_{N \to +\infty} \frac{n(x_i)}{N} \qquad \hat{p}_X(x_i) = \frac{n(x_i)}{N}$$

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

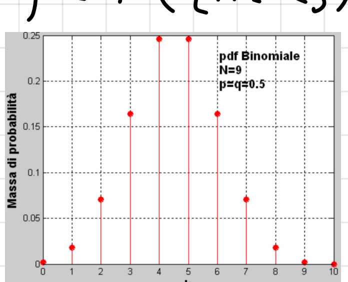
DATO UN ESPERIMENTO BINARIO POSSO DEFINIRE UNA VARIABILE ALEATORIA CON 2 VALORI POSSIBILI DI PROBABILITÀ "p" e "1-p".

VARIABILI DI QUESTO TIPO SONO DETTE DI <u>BERNOULLI</u> ($X \in \text{Bernoulli}(p)$).

PER PROVE RIPETUTE INDIPENDENTI DEFINISCO INVECE LA VARIABILE ALEATORIA <u>BINOMIALE</u> ($X \in B(p)$), DEFINITA PER VALORI INTERI $0 \dots N$.

DATO L'EVENTO FAVOREVOLE "A" CHE AVVIENE CON PROBABILITÀ "p" X VOLTE SUL TOTALE DI "N" PROVE SVOLTE:

$$p_X(k) = P(\{X = k\}) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \qquad 0 < p < 1 \qquad k = 0 \dots N$$



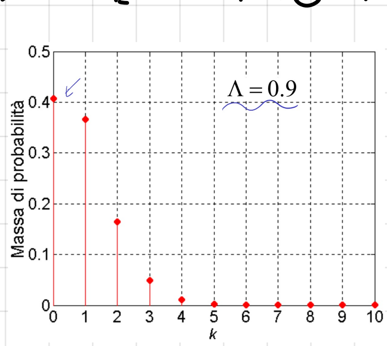
UNA VARIABILE ALEATORIA SI DICE DI <u>POISSON</u> ($X \in P(p)$) CON PARAMETRO Λ SE È DISCRETA, DEFINITA PER VALORI INTERI POSITIVI E HA MASSA DI PROBABILITÀ:

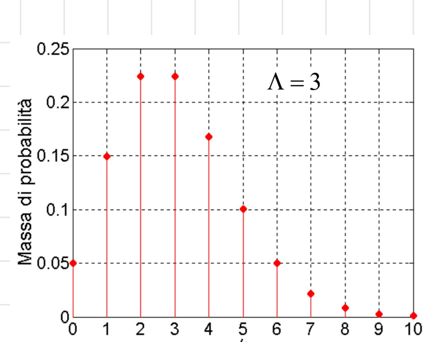
$$p_X(k) = P(\{X = k\}) = \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda} \qquad k = 0 \dots N$$

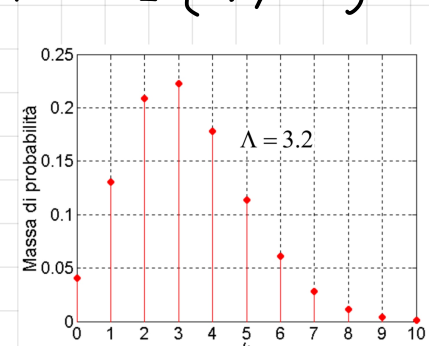
$$\sum_{k=0} p_X(k) = e^{\Lambda} \sum_k \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda} = e^{\Lambda} e^{-\Lambda} = 1$$

IN BASE ALLA SCELTA DI Λ OTTENGO $p_X(k)$ DIVERSA

- $\Lambda < 1$: FUNZIONE CON MASSIMO IN $k = 0$
- $\Lambda > 1$ E NON INTERO : FUNZIONE CON MASSIMO IN $k = \lfloor \Lambda \rfloor$
- $\Lambda > 1$ E INTERO : FUNZIONE CON 2 MASSIMI IN $k = \{\Lambda, \Lambda - 1\}$







ES: DECADIMENTO RADIOATTIVO

IL NUMERO DI DECADIMENTI PER UNITÀ DI TEMPO IN UNA SOSTANZA RADIOATTIVA A VITA MEDIA MOLTO LUNGA (COSÌ DA POTER CONSIDERARE COSTANTE L'INTENSITÀ RADIOATTIVA PER TUTTA L'OSSERVAZIONE) È SCHEMATIZZABILE COME UNA VARIABILE DI POISSON.

I NUMERI DI DECADIMENTI CHE AVVENGONO IN INTERVALLI DI TEMPO NON SOVRAPPOSTI POSSONO CONSIDERARSI INDIPENDENTI.

IL NUMERO DI DECADIMENTI AL SECONDO È $\lambda = 0,5$

CALCOLA LA PROBABILITÀ CHE L'INTERVALLO DI TEMPO INTERCORRENTE FRA DUE DECADIMENTI SUCCESSIVI SUPERI 1 S.

$$p_X(k) = P(\{X : k \text{ DECADIMENTI IN UN SECONDO}\}) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$p_X(0) = P(\{X = 0\}) = \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} = 0,606$$

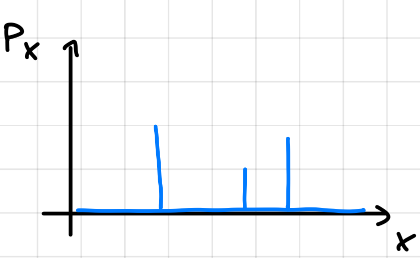
IN UN SECONDO ZERO DECADIMENTI $\longrightarrow$ INTERVALLO TRA DUE DECADIMENTI SUCCESSIVI > 1 S

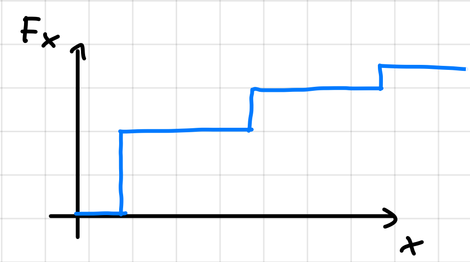
FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE DI VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

$F_X(x)$ PER VARIABILI DISCRETE PUÒ ESSERE RAPPRESENTATA COME SOMMA DI FUNZIONI DI GRADINO DI SALTO $p_X(x_i)$ IN CORRISP. DI OGNI x_i

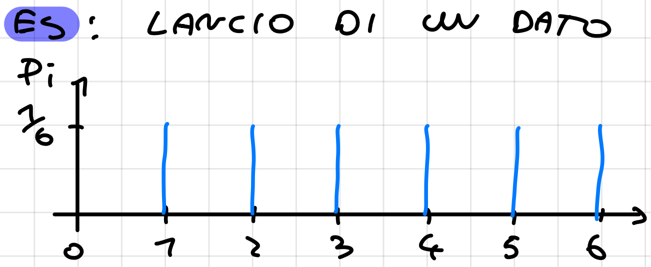
$$F_X(x) = P(\{X \le x\}) = \sum_{i : x_i < x} P(\{X = x_i\}) = \sum_i p_X(k)$$

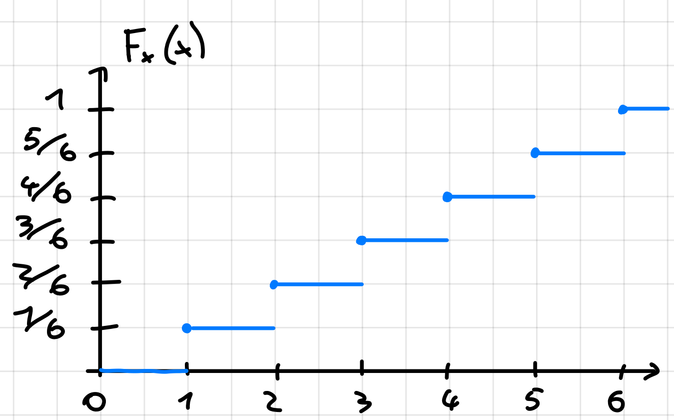
$$= \sum_i P(\{X = x_i\})\, u(x - x_i) = \sum_i p_X(x_i)\, u(x - x_i)$$





ES: LANCIO DI UN DADO





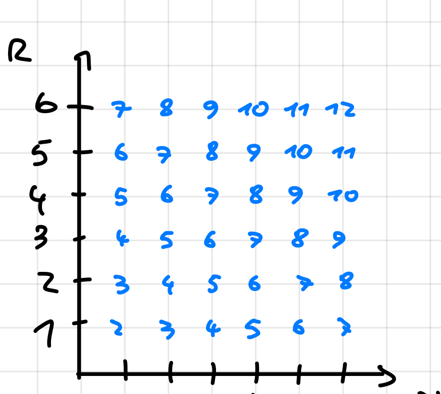
ES: LANCIO DI 2 DADI

UNO DI COLORE VERDE, UNO ROSSO

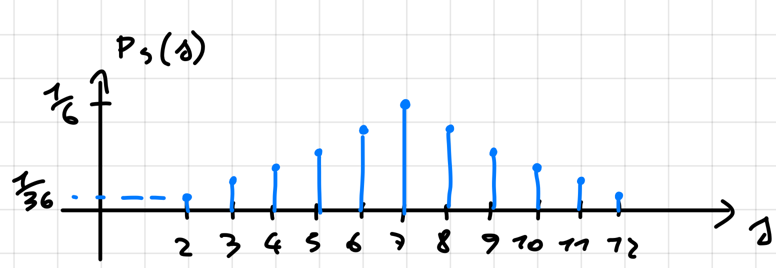
DEFINISCO LE VARIABILI DISCRETE
- V : NUMERO FACCIA VERSO L'ALTO DADO VERDE
- R : NUMERO FACCIA VERSO L'ALTO DADO ROSSO

MASSA DI PROBABILITÀ E LA F. DI DISTRIBUZIONE SONO QUELLE SOPRA

TROVA LA MASSA DI PROBABILITÀ DELLA VARIABILE ALEATORIA S = V+R



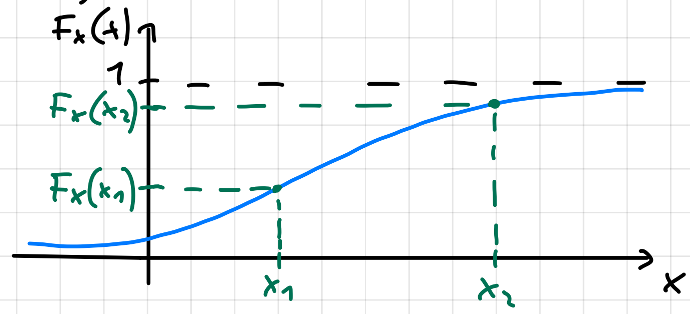
S	n° VOLTE	
2	1	1/36
3	2	2/30
4	3	3/36
5	4	4/36
6	5	5/36
7	6	6/36
8	5	5/36
9	4	4/36
10	3	3/36
11	2	2/36
12	1	1/36
	$\Sigma = 36$	



FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE DI VARIABILI CONTINUE

UNA VARIABILE ALEATORIA SI DICE CONTINUA SE PUÒ ASSUMERE UN'INFINITÀ DI VALORI (ES TUTTI I NUMERI REALI IN UN INTERVALLO) OGNUNO DEI QUALI CON PROBABILITÀ NULLA.

$$P(\{X=x\})=0 \quad \forall x$$



- LA F. DI DISTRIBUZIONE È CONTINUA

$$F_x(x^+) = F_x(x^-) = F_x(x)$$

- $P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = F_x(x_2) - F_x(x_1)$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

$$p_x(x) = \frac{d F_x(x)}{dx}$$

PROPRIETÀ:

- $p_x(x) \geq 0$
- $F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} p_x(\alpha)\, d\alpha$
- $\int_{x_1}^{x_2} p_x(\alpha)\, d\alpha = F_x(x_2) - F(x_1)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} p_x(\alpha)\, d\alpha = F_x(+\infty) - F_x(-\infty) = 1$

LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ RAPPRESENTA LA PROBABILITÀ, AL VARIARE DI x, CHE X ASSUME NELL'INTERVALLO $[x, x+dx]$ FRATTO L'AMPIEZZA DELL'INTERVALLO STESSO dx

$$\int_{x_1}^{x_2} p_x(x) = P(\{x_1 \leq X \leq x_2\}) \Rightarrow p_x(x)\,dx = P(\{x < X \leq x+dx\})$$

$$\Rightarrow p_x(x) = \frac{P(\{x < X \leq x+dx\})}{dx}$$

CIÒ TORNA UTILE QUANDO PER MISURARE SPERIMENTALMENTE LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI UNA VARIABILE ALEATORIA PASSANDO ALLA FREQ. RELATIVA.

RIPETENDO L'ESPERIMENTO "N" VOLTE E CONTANDO COME $\Delta n(x)$ IL NUMERO DI RISULTATI PER CUI $[x, x+\Delta x]$ OTTENGO, PER N ABBASTANZA GRANDE E Δx SUFFICIENTEMENTE PICCOLO:

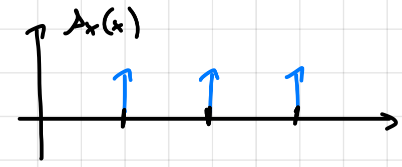
$$p_x(x)\Delta x \simeq P(\{x < X \leq x+\Delta x\}) \simeq \frac{\Delta n(x)}{N} \qquad p_x(x) \simeq \frac{\Delta n(x)}{N \Delta x}$$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI UNA VARIABILE ALEATORIA DISCRETA

PUÒ ESSERE ESPRESSA TRAMITE IL DELTA DI DIRAC.

$$F_x(x) = \sum_i p_x(x_i)\, u(x - x_i) \qquad p_x(x) = \int_{-\infty}^{x} F_x(x) = \sum_i p_x(x_i)\, \delta(x - x_i)$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b p_x(x)\, dx = \sum_i p_x(x_i) \int_a^b \delta(x - x_i)\, dx$$



SE a e b NON COINCIDONO CON NESSUN x_i OTTENGO SEMPLICEMENTE LA SOMMA DELLE PROBABILITÀ ASSOCIATE AI VALORI ASSUNTI DALLA V.A. NELL'INTERVALLO (a, b)

SI DEVE FARE ATTENZIONE QUANDO UNO DEI DUE ESTREMI (b) COINCIDE CON UN VALORE DELLA V.A.

$$\int_a^{b^+} p_x(x)\, dx = P(a < X \leq b) \quad e \quad \int_a^{b^-} p_x(x)\, dx = P(a < X < b)$$

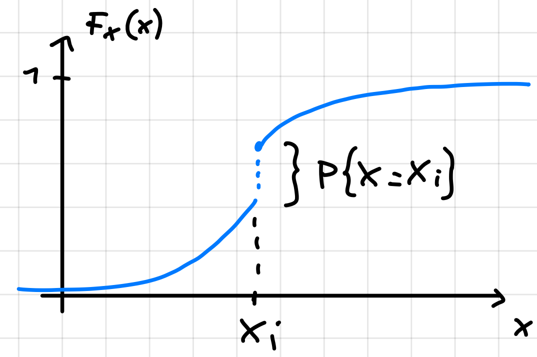
NON SONO UGUALI, NEL PRIMO CASO CONSIDERO ANCHE L'IMPULSO $P(X=b)\,\delta(x-b)$, NEL SECONDO NO

FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE DI VARIABILI MISTE

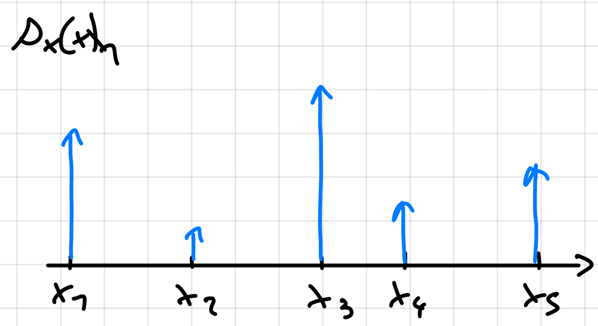
UNA V.A. SI DICE MISTA SE LA F. DI DISTRIBUZIONE $F_x(x)$ È DISCONTINUA, MA NON COSTANTE A TRATTI.

IN TAL CASO LA V.A. PUÒ ASSUMERE VALORI DISCRETI CON PROBABILITÀ NON NULLA.

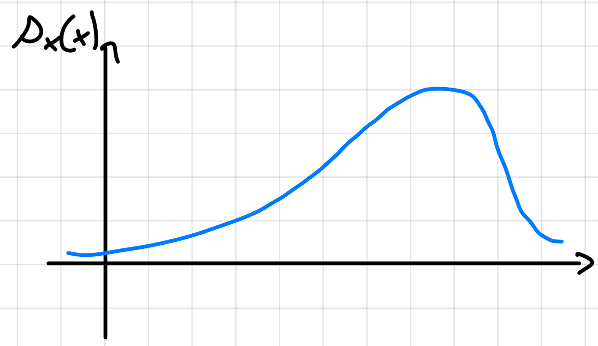
L'ENTITÀ DEL SALTO IN x_i RAPPRESENTA LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO $\{X = x_i\}$



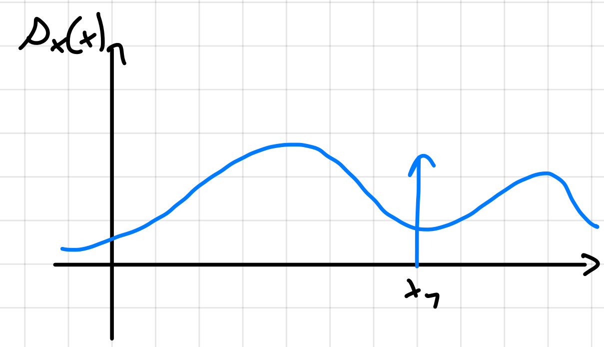
ESEMPI



V.A. DISCRETA



V.A. CONTINUA

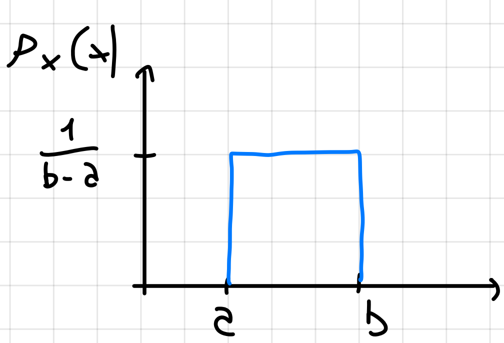


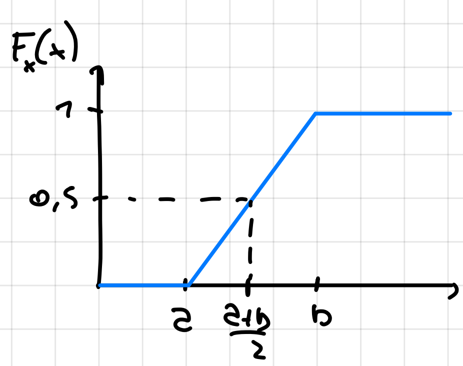
V.A. MISTA

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

UNA VARIABILE ALEATORIA È UNIFORME $(X \in U(a,b))$ SE LA SUA DENSITÀ DI PROBABILITÀ È COSTANTE NELL'INTERVALLO $[a,b]$

$$p_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \{x < a,\ x > b\} \end{cases} \qquad F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

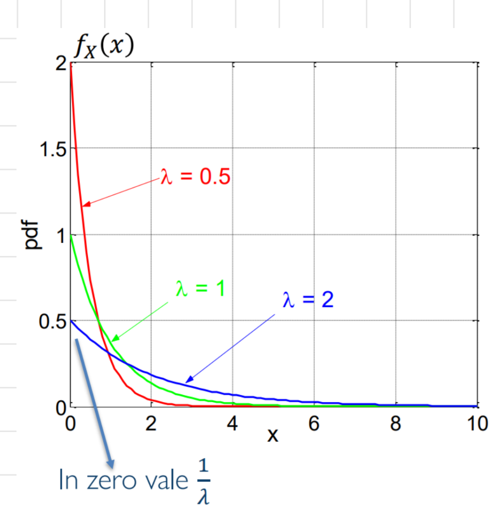


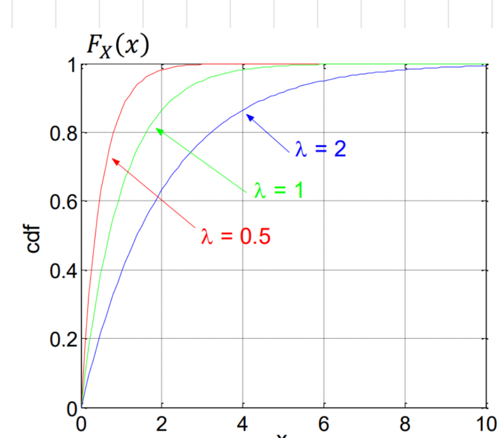


UNA VARIABILE ALEATORIA È ESPONENZIALE $(x \in Exp(a,b))$ CON PARAMETRO λ SE HA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI FORMA:

$$p_x(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} u(x)$$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\alpha}{\lambda}} u(\alpha)\, d\alpha = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\alpha}{\lambda}}\, d\alpha & x \geq 0 \end{cases} = \left(1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}\right) u(x)$$





ES : SCATOLA FORATA

UN CONTENITORE HA UN FONDO QUADRATO CON LATO $\ell = 1\ m$, AL CENTRO C'È UN FORO CIRCOLARE CON $d = 0,2\ m$

SUL FONDO VENGONO DEPOSITATE A CASO E IN MODO INDIP.TO PALLINE CON DIAMETRO ...

PROBABILITÀ CHE ALLA FINE SIANO RIMASTE 7 PALLINE?

CALCOLO TEORICO

PROVE RIPETUTE BINARIE INDIP.

PROBABILITÀ CHE UNA PALLINA ESCA $\quad q = \frac{A_F}{A_C} = \frac{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}{\ell^2} = \frac{\pi}{100}$

$A = \{$ 7 PALLINE NELLA SCATOLA DOPO 10 LANCI $\}$

$N = 10 \qquad K = 7 \qquad P = 1 - q$

$$P(A) = \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K} = 2,98 \cdot 10^{-3}$$

VERIFICA SPERIMENTALE

DESCRIZIONE STATISTICA COORDINATE (X_K, Y_K) DEL PUNTO P_K DOVE VIENE APPOGGIATA LA K-ESIMA PALLINA SUL FONDO DELLA SCATOLA

X_K, Y_K (V.A.) $\in U(0, 1\ m)$ INDIP.

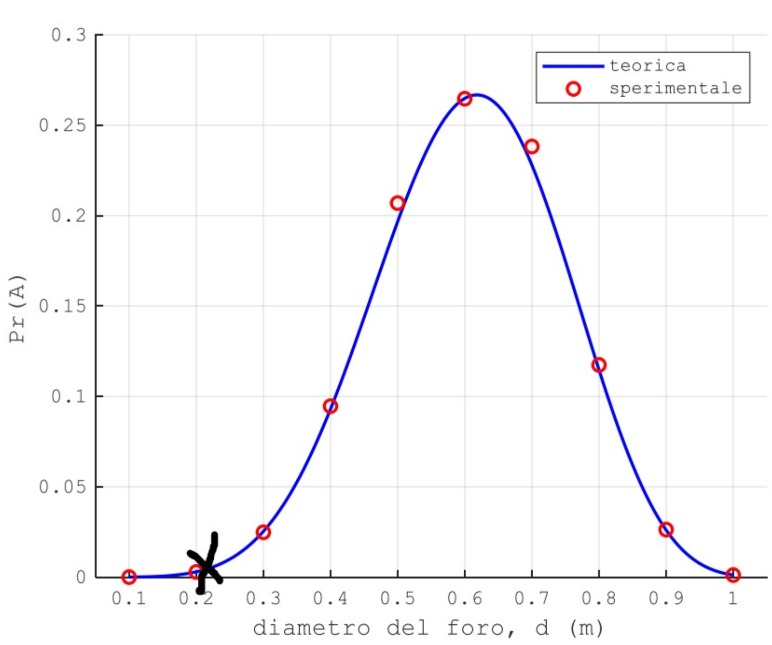
LA K-ESIMA PALLINA ESCE SE LA DISTANZA DAL CENTRO $D_K \leq \frac{d}{2}$

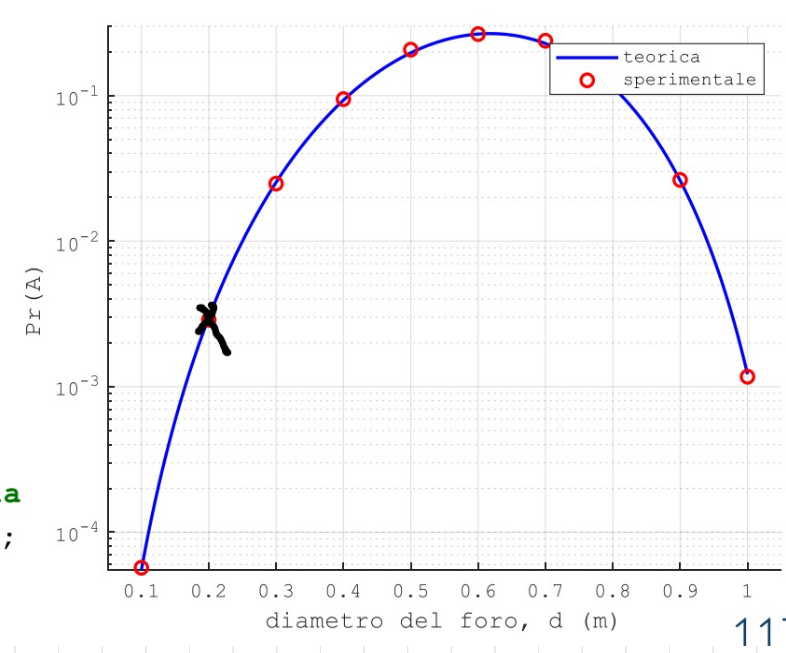
$$D_K = \sqrt{\left(X_K - \frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(Y_K - \frac{\ell}{2}\right)^2}$$

CALCOLO QUINDI $P\left(\left\{D_K \leq \frac{d}{2}\right\}\right)$ CON UN APPROCCIO FREQUENTISTA

```
diametro=0.1:0.1:1.0; % diametro del foro [m]
for i=1:length(diametro)
    d=diametro(i); % diametro del foro [m]
    l=1.0; % lato della scatola [m]
    N=0; % numero di prove effettuate
    N_A=0; % numero di prove in cui l'evento A si è verificato
    while (N_A<1000)
        N=N+1; % incremento del contatore N
        pallineUscite=0; % numero di palline uscite dal foro
        for k=1:10
            % lancio della k-esima pallina
            x=l*rand(1); % ascissa del punto P [m]
            y=l*rand(1); % ordinata del punto P [m]
            dp=sqrt((x-l/2)^2+(y-l/2)^2); % distanza dal centro [m]
            if (dp<d/2) % la pallina esce dal foro
                pallineUscite=pallineUscite+1;
                % incremento del contatore pallineUscite
            end
        end
        if (pallineUscite==3) % l'evento A si è verificato
            N_A=N_A+1; % incremento del contatore N_A
        end
    end
    prob_sperimentale(i)=N_A/N % probabilità sperimentale

    q=pi/4*(d/l)^2; % probabilità teorica che una pallina esca
    p=1-q; % probabilità teorica che una pallina rimanga nella scatola
    prob_teorica(i)=factorial(10)/(factorial(7)*factorial(3))*p^7*q^3;
    % probabilità teorica
end
```





TRASFORMAZIONI DI VARIABILI ALEATORIE

ESISTONO V.A. FUNZIONI DI ALTRE E RICAVABILI COME $Y = g(X)$.

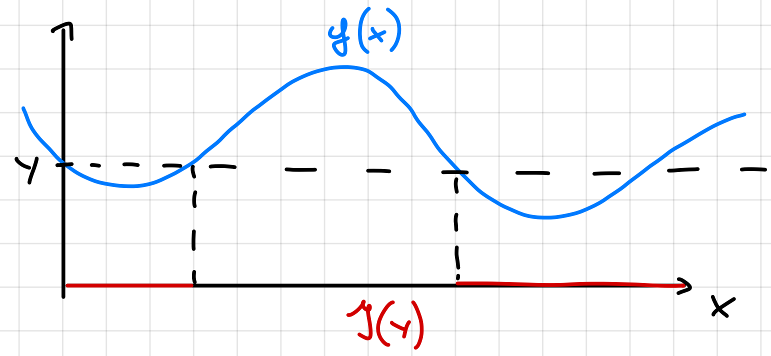
$g(X)$ HA DOMINIO E CODOMINIO REALI ED È TC AD OGNI VALORE DI X CORRISPONDE UN SOLO VALORE DI Y, MA UNA STESSA Y PUÒ ESSERE OTTENUTA DA PIÙ VALORI DI X.

DALLA RELAZIONE CHE C'È TRA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE $F_Y(y)$ E MASSA DI PROBABILITÀ POSSO DIRE CHE

$$F_Y(y) = P(\{Y \leq y\}) = P(\{X \in \mathcal{I}(y)\})$$

$$\mathcal{I}(y) = \{x : g(x) \leq y\}$$

$$p_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$



QUESTO VIENE DETTO <u>METODO DELLA FUNZIONE DISTRIBUZIONE</u> E SI PUÒ APPLICARE A QUALSIASI TIPO DI VARIABILE ALEATORIA. IN ALCUNI CASI PERÒ, SI PUÒ RICAVARE LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ IN MODO PIÙ SEMPLICE.

SE Y È DISCRETA E ASSUME I VALORI $\{y_1, y_2 ..\}$ ALLORA HO CHE $P(Y = y_k) = p_Y(y_k)$.

SE ANCHE X È DISCRETA L'EVENTO $\{g(X) = y_k\}$ È DATO DALL'UNIONE DI TUTTI GLI EVENTI $\{X = x_i\}$ PER CUI $y_k = g(x_i)$

DEFINENDO UN CERTO INSIEME $G(y_k)$ AVRÒ

$$G(y_k) = \{x_i : g(x_i) = y_k\}$$

$$p_Y(y_k) = P(\{Y = y_k\}) = \sum_{G(y_k)} P(\{X = x_i\}) = \sum_{G(y_k)} p_X(x_i)$$

ES

SE $X = Y^2$ E VOGLIO CALCOLARE LA PROBABILITÀ CHE $Y = 4$ AVRÒ

$$p_Y(4) = P(X = 2) + P(X = -2) = p_X(2) + p_X(-2)$$

SE X È UNA VARIABILE TERNARIA CHE PUÒ ASSUMERE VALORI $\{-2, 0, 2\}$ CON UGUALE PROBABILITÀ, ALLORA $Y = X^2$ È UNA V.A. BINARIA CHE PUÒ ASSUMERE VALORI $\{0, 4\}$ CON MASSA DI PROBABILITÀ:

$$p_Y(0) = P(X = 0) = \frac{1}{3} \qquad p_Y(4) = P(X = 2) + P(X = -2) = \frac{2}{3}$$

LO STESSO RAGIONAMENTO VALE SE Y È DISCRETA E X CONTINUA.

ES

CONSIDERO $Y = g(X)$ DATA DA $g(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

X È UNA V.A. CONTINUA, DI CUI È NOTA $p_X(x)$ OPPURE $F_X(x)$

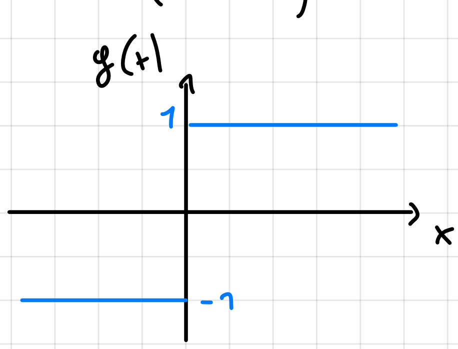
CALCOLARE LA LEGGE DI DISTRIBUZIONE DI Y

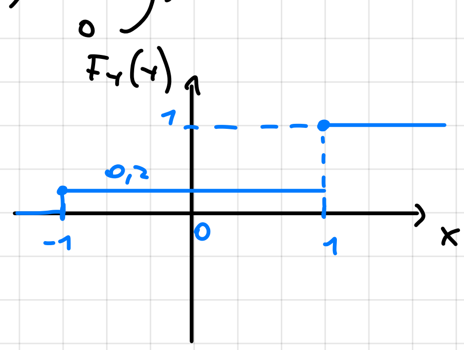
Y V.A. TERNARIA CHE PUÒ ASSUMERE VALORI $\{-1, 0, 1\}$, QUINDI È COMPLESSIVAMENTE SPECIFICATA DALLA CONOSCENZA DELLA MASSA DI PROBABILITÀ

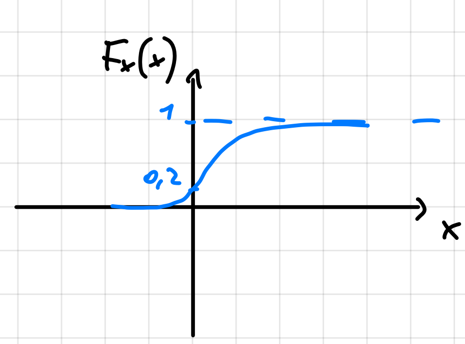
$$P(Y = -1) = P(X < 0) = \int_{-\infty}^{0} p_X(x)\,dx = F_X(0)$$

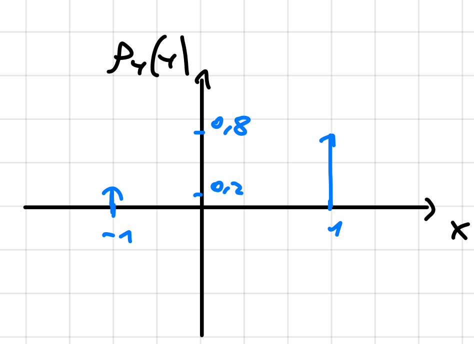
$$P(Y = 0) = P(X = 0) = 0$$

$$P(Y = 1) = P(X > 0) = \int_{0}^{+\infty} p_X(x)\,dx = 1 - F_X(0)$$

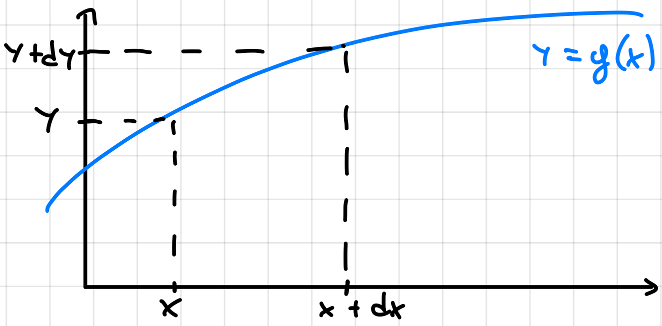








SE X E Y SONO ENTRAMBI CONTINUE SI PUÒ ESPRIMERE DIRETTAMENTE LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI Y TRAMITE QUELLA DI X. ESSENDO GLI EVENTI $\{y < Y \leq y+dy\}$ E $\{x < X \leq x+dx\}$ UGUALI VISTO CHE RELATIVI AGLI STESSI RISULTATI, ALLORA AVRANNO STESSA PROBABILITÀ.



$$\{y < Y \leq y + dy\} = \{x < X \leq x + dx\} \qquad Y = g(x) \qquad x = g^{-1}(y)$$

$$p_X(x)\,dx = p_Y(y)\,dy \qquad dy = g'(x)\,dx$$

$$p_Y(y)\,g'(x)\,dx = p_X(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$p_Y(y) = \left.\frac{p_X(x)}{|g'(x)|}\right|_{x = g^{-1}(y)}$$

POSSO GENERALIZZARE QUESTO RAGIONAMENTO SE $y = g(x)$ HA PIÙ SOLUZIONI, INDIVIDUATE DAGLI INSIEMI

$$\{y < Y \leq y + dy\} = \{x_1 < X \leq x_1 + dx_1\} + \{x_2 < X \leq x_2 + dx_2\} + \dots$$

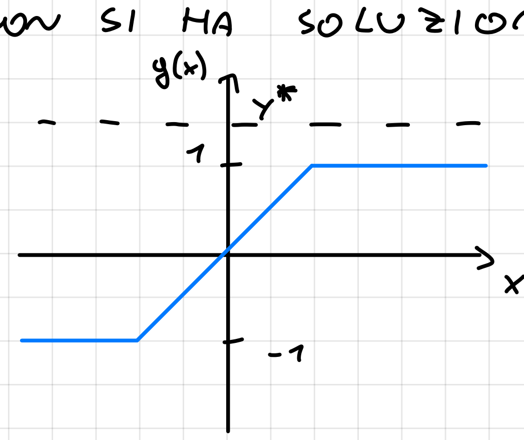
OTTENENDO

$$p_Y(y) = \sum^{N} \left.\frac{p_X(x_i)}{|g'(x_i)|}\right|_{x_i = g^{-1}(y)} \qquad \{x_i : g(x_i) = y\}$$

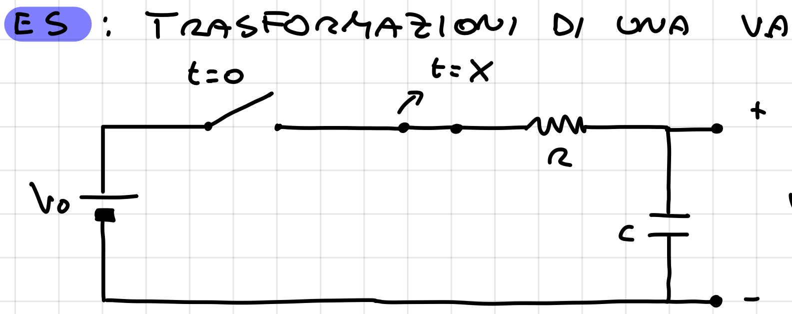
(TEOREMA FONDAMENTALE PER LA TRASFORMAZIONE DI VARIABILI ALEATORIE)

IL TH FORMALMENTE DICE CHE DATA UNA VAR. AL. X CON DENSITÀ DI PROBABILITÀ $p_X(x)$ E DATA LA SECONDA VARIABILE ALEATORIA Y LEGATA AD X DA $y = g(x)$ SI HA CHE SE x_i SONO LE SOLUZIONI REALI DELL'EQUAZIONE $y - g(x) = 0$ ALLORA LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI Y SARÀ DATA DALLA FORMULA SOPRA.

SE PER UN CERTO y^* NON SI HA SOLUZIONE PER $y = g(x)$ ALLORA AVRÒ $p_Y(y^*) = 0$



ES: TRASFORMAZIONI DI UNA VA., SQUADRA RC



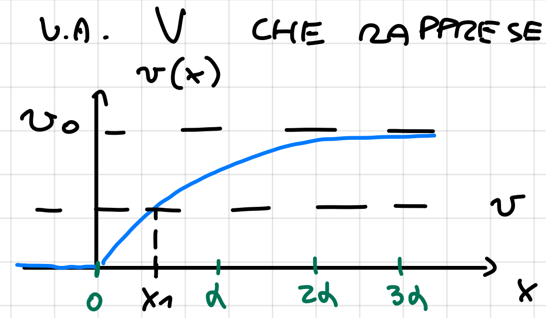
GENERATORE V_0 COLLEGATO ALLA SQUADRA RC ALL'ISTANTE $t = 0$.
IL RESISTORE HA UN TEMPO DI GUASTO ALEATORIO X IN CORRISPONDENZA DEL QUALE ESSO INTERROMPE IL CIRCUITO.

X È UNA V.A. CON DENSITÀ DI PROB. $p_X(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{x}{2\alpha}} u(x)$ CON $\alpha = RC$

VOGLIO TROVARE $p_V(v)$ DELLA V.A. V CHE RAPPRESENTA LA TENSIONE AI CAPI DEL CONDENSATORE DOPO IL GUASTO

$$v(t) = v_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\alpha}}\right) u(t)$$

$$V = v(x) = v_0\left(1 - e^{-\frac{x}{\alpha}}\right) u(x)$$

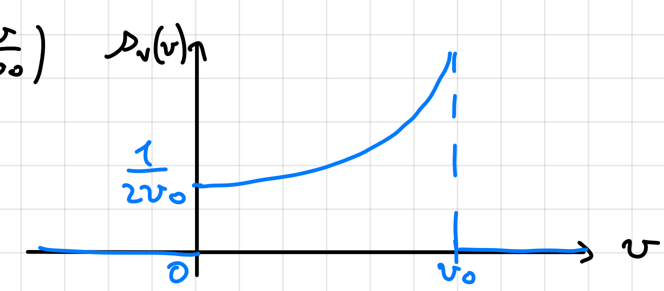


$p_V(v)$ DATO $p_X(x)$?

SE $v \geq v_0$ o $v < 0 \rightarrow p_V(v) = 0$

SE $0 \leq v < v_0 \rightarrow v = v_0\left(1 - e^{-\frac{x_1}{\alpha}}\right) \qquad \frac{v}{v_0} = 1 - e^{-\frac{x_1}{\alpha}} \qquad e^{-\frac{x_1}{\alpha}} = 1 - \frac{v}{v_0}$

$$-\frac{x_1}{\alpha} = \ln\left(1 - \frac{v}{v_0}\right) \qquad x_1 = -\alpha \ln\left(1 - \frac{v}{v_0}\right)$$



$$p_V(v) = \frac{p_X(x_1)}{|v'(x_1)|}\Bigg|_{x_1 = -\alpha \ln\left(1-\frac{v}{v_0}\right)} \qquad v'(x) = v_0 \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}}$$

$$p_V(v) = \frac{\frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{x}{2\alpha}} u(x)}{\frac{v_0}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}}}\Bigg|_{x_1 = -\alpha \ln\left(1-\frac{v}{v_0}\right)} = \frac{\frac{1}{2\alpha} e^{\frac{1}{2\alpha}\left(\alpha \ln\left(1-\frac{v}{v_0}\right)\right)}}{\frac{v_0}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha}\left(\alpha \ln\left(1-\frac{v}{v_0}\right)\right)}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2\alpha}\sqrt{1-\frac{v}{v_0}}}{\frac{v_0}{\alpha}\left(1-\frac{v}{v_0}\right)} = \frac{1}{2v_0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v}{v_0}}}$$

ES: TRASFORMAZIONI DI UNA V.A. , rand() $\to$ V.A. GENERICA

TRASFORMARE UN VALORE (OTTENUTO CON rand()) DI UNA V.A. Y UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA TRA 0 E 1 IN UN VALORE DI UNA V.A. X CON $p_X(x)$ ASSEGNATA $\to$ $X \in Exp(\eta)$

$$p_X(x) = \frac{1}{\eta} e^{-\frac{x}{\eta}} u(x)$$

$$F_X(x) = \left[1 - e^{-\frac{x}{\eta}}\right] u(x)$$

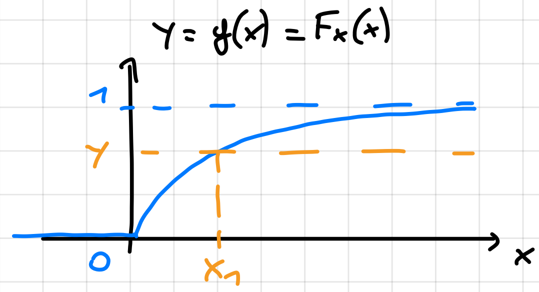
$Y \in U(0,1)$ $\qquad p_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

$X = h(Y)$ $\qquad h\,?$

$Y = g(X)$ $\qquad g(x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(\alpha)\, d\alpha$

TH FOND.

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_X(x_i)}{|g'(x_i)|}\Bigg|_{x_i = g^{-1}(y)}$$



IL k NELLA SOMMATORIA SAREBBE IL n° DI SOLUZIONI DI $Y - g(x) = 0$
$x_1 \ldots x_k$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{p_X(x_1)}{|g'(x_1)|} & 0 \le y < 1 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \qquad g'(x_1) = \left(F_X(x_1)\right)' = p_X(x_1) > 0 \quad \forall x$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{p_X(x_1)}{p_X(x_1)} = 1 & 0 \le y < 1 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$g(x) = F_X(x)$ $\qquad y = \left[1 - e^{-\frac{x}{\eta}}\right] u(x)$

$1 - y = e^{-\frac{x}{\eta}}$ $\qquad \ln(1-y) = -\frac{x}{\eta}$

$x = -\eta \ln(1-y) = h(y)$

$x = h(y)$

INDICI CARATTERISTICI DI UNA DISTRIBUZIONE

SPESSO È DIFFICILE OTTENERE UNA DESCRIZIONE COMPLETA DELL'ANDAMENTO DI UNA V.A. X, VISTO CHE DISTRIBUZIONE O DENSITÀ DI PROBABILITÀ POSSONO ESSERE DIFFICILI DA OTTENERE. QUANDO CIÒ ACCADE È NECESSARIO ACCONTENTARSI DI PARAMETRI STATISTICI SEMPLIFICATI CHE DANNO INFORMAZIONI PARZIALI SU X.

IL VALOR MEDIO $E(X)$ RAPPRESENTA LA POSIZIONE ATTORNO ALLA QUALE SI CONCENTRANO I VALORI DI X. SI TRATTA DEL "VALORE ATTESO" E RAPPRESENTA UN "INDICE DI POSIZIONE" COMPRESO TRA IL PIÙ GRANDE E IL PIÙ PICCOLO DEI VALORI ASSUNTI DA X E PUÒ NON COINCIDERE CON NESSUNO DI QUESTI.

SI CALCOLA COME $\quad \eta_x = E(X) = \sum x_i P_x(x_i)$

POSSO ANCHE INTERPRETARLO IN MODO FREQUENTISTICO, RIPETENDO "N" VOLTE UN ESPERIMENTO CHE HA ESITO "$x(n)$", SE I POSSIBILI RISULTATI SONO "M" E OGNUNO DI ESSI AVVIENE "n_i" VOLTE, AVRÒ

$$\eta_x = \sum^M x_i P_x(x_i) \simeq \sum^M \frac{x_i n_i}{N_i} = \frac{1}{N} \sum^N x(n) = \hat{\eta}_x$$

QUESTA RAPPRESENTAZIONE È LA MEDIA ARITMETICA DEI VALORI ASSUNTI DA X IN UN NUMERO DI "N" PROVE PIÙ GRANDE POSSIBILE.

LA VARIANZA È UNA MISURA DELLO SCOSTAMENTO DEI VALORI DI X RISPETTO AL VALORE MEDIO. È UN "INDICE DI DISPERSIONE" DELLA V.A.

$$\sigma_x^2 = E\left[(X-\eta_x)^2\right] = \sum (x_i - \eta_x)^2 P_x(x_i)$$

ANCHE QUESTA SI PUÒ RAPPRESENTARE CON UN APPROCCIO FREQUENTISTA

$$\sigma_x^2 \simeq \sum^M \left[(x_i - \eta_x)^2 \frac{n_i}{N}\right] = \frac{1}{N} \sum^N \left[x(n) - \eta_x\right]^2 = \hat{\sigma}_x^2$$

LA DEVIAZIONE STANDARD È UNA MISURA DELLO SCOSTAMENTO DEI VALORI DI X DAL VALOR MEDIO

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

IL VALORE QUADRATICO MEDIO DI UNA V.A. RAPPRESENTA LA SUA "POTENZA MEDIA STATISTICA"

$$P_x = E\left[X^2\right] = \sum x_i^2 P_x(x_i)$$

$$\text{(FREQ)} \quad P_x \simeq \sum^M \left[x_i^2 \frac{n_i}{N}\right] = \frac{1}{N} \sum^N x^2(n) = \hat{P}_x$$

C'È UNA CORRELAZIONE TRA VARIANZA E VALORE QUADRATICO MEDIO

$$\sigma_x^2 = E\left[(X-\eta_x)^2\right] = E\left[X^2 - 2X\eta_x + \eta_x^2\right] = E\left[X^2\right] + E\left[-2X\eta_x + \eta_x^2\right] = P_x - 2\eta_x E[X] + \eta_x^2 =$$
$$= P_x - 2\eta_x^2 + \eta_x^2 = P_x - \eta_x^2$$

PER VARIABILI ALEATORIE CONTINUE AVRÒ I SEGUENTI INDICI

$$\eta_x = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_x(x)\, dx$$

$$\sigma_x^2 = E\left[(X-\eta_x)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\eta_x)^2 p_x(x)\, dx$$

$$P_x = E\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_x(x)\, dx$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

COVARIANZA

$$C(X,Y) = E\left[(X - E[X])(Y - E[Y])\right] = E[XY] - \eta_x \eta_y$$

COEFF. DI CORRELAZIONE

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

INCORRELATE SE $C(X,Y) = 0$

VALORE MEDIO ED ASPETTAZIONE

IL VALORE MEDIO PER VARIABILI ALEATORIE DISCRETE SI PUÒ RICAVARE COME CASO PARTICOLARE DAL CASO CONTINUO.

$$p_x(x) = \sum p_x(x_i)\,\delta(x-x_i)$$

$$\eta_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,p_x(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \sum p_x(x_i)\,\delta(x-x_i)\,dx = \sum p_x(x_i)\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\delta(x-x_i)\,dx = \sum p_x(x_i)\,x_i$$

SE LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI UNA V.A. X È PARI ALLORA IL SUO VALORE MEDIO SARÀ ZERO, VISTO CHE $p_x(x) = p_x(-x)$ È SIMMETRICA RISPETTO ALLE Y. IN GENERALE SE $p_x(x)$ È SIMMETRICA RISPETTO AD UN VALORE "a", QUEST'ULTIMO SARÀ IL SUO VALORE MEDIO.

$$p_x(a-x) = p_x(a+x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(a-x)\,p_x(x)\,dx = 0 = a\int_{-\infty}^{+\infty} p_x(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} x\,p_x(x)\,dx = a\cdot 1 - \eta_x \rightarrow a = \eta_x$$

NEL CASO DI TRASFORMAZIONI DI VARIABILI SE $Y = g(X)$ SI PUÒ RICAVARE η_Y DIRETTAMENTE DALLA VARIABILE DI DISTRIBUZIONE PER X.

PER X E Y DISCRETE: $\quad \eta_Y = E[Y] = \sum y_u\,P(Y=y_u)$

(TERMINE i SOMMATORIA) $\quad y_i\,P(Y=y_i) = y_i \sum_{G(y_i)} P(X=x_j) = y_i \sum_{G(y_i)} g(x_j)\,P(X=x_j)$

$$G(y_i) = \{x_j : g(x_j) = y_i\}$$

DA NOTARE CHE I $G(y_i)$ SONO PARTIZIONI DELL'INSIEME DEI NUMERI REALI, QUINDI $E[\,]$ SI PUÒ ESPRIMERE COME SOMMA

$$E[Y] = E[g(X)] = \sum g(x_i)\,P(X=x_i)$$ TEOREMA DELL'ASPETTAZIONE PER V.A. DISCRETE

CASO X VARIABILE CONTINUA: $\quad E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,p_x(x)\,dx$

LA STESSA DEF DI VARIANZA È UN CASO PARTICOLARE DEL TH: $g(x) = (x_i - \eta_x)^2$

L'ASPETTAZIONE È A TUTTI GLI EFFETTI UN OPERATORE CON ALCUNE PROPRIETÀ:

- $E[g(X)+c] = E[g(X)]+c$
$$= \sum (g(X)+c)\,P(X=x_i) = \sum g(X)\,P(X=x_i) + c\underbrace{\sum P(X=x_i)}_{=1} = E[g(X)]+c$$
- $E[c\,g(X)] = c\,E[g(X)]$
$$= c\sum g(x)\,P(X=x_i) = c\,E[g(X)]$$
- $E[g(X)+h(X)] = E[g(X)]+E[h(X)]$
$$= \sum (g(X)+h(X))\,P(X=x_i) = \sum g(X)\,P(X=x_i) + \sum h(X)\,P(X=x_i) =$$
$$= E[g(X)] + E[h(X)]$$
- $E\left[\sum a_i g_i(X)\right] = \sum a_i\,E[g_i(X)]$

ES

$$Y = 2(X-1)^2$$

$$E(Y) = E[2(X-1)^2] = E[2X^2-4X+2] = E(2X^2)+E(-4X)+2 = 2E(X^2)-4E(X)+2$$

INDICI CARATTERISTICI DI VARIABILI ALEATORIE NOTEVOLI

X DI POISSON

$$p_X(k) = P(\{X=k\}) = \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda}$$

- $$\eta_X = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k p_k(x_k) = \sum_{k=0} k \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda} = e^{-\Lambda} \sum_{k=1} \frac{\Lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\Lambda} \Lambda \sum_{k=1} \frac{\Lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \cancel{e^{-\Lambda}} \Lambda \cancel{e^{\Lambda}} = \Lambda$$
- $$P_X = E[X^2] = E[X^2 - X + X] = E[X(X-1)] + E[X]$$
  - $$E[X(X-1)] = \sum_{k=0} x_k(x_k-1) p_k(x_k) = \sum k(k-1) \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda} = e^{-\Lambda} \sum \frac{\Lambda^k}{(k-2)!} =$$
    $$= e^{-\Lambda} \Lambda^2 \sum_{k=2} \frac{\Lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \cancel{e^{-\Lambda}} \Lambda^2 \cancel{e^{\Lambda}} = \Lambda^2$$
- $$\sigma_X^2 = P_X - \eta_X^2 = \Lambda^2 + \Lambda - \Lambda^2 = \Lambda$$

X UNIFORME

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$$

- $$\eta_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_X(x)\, dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_a^b \frac{1}{b-a} = \frac{b^2-a^2}{2} \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$
- $$P_X = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x)\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3}\right]\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$
- $$\sigma_X^2 = P_X - \eta_X^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = (b-a)\left(\frac{1}{12}\right)$$

X ESPONENZIALE

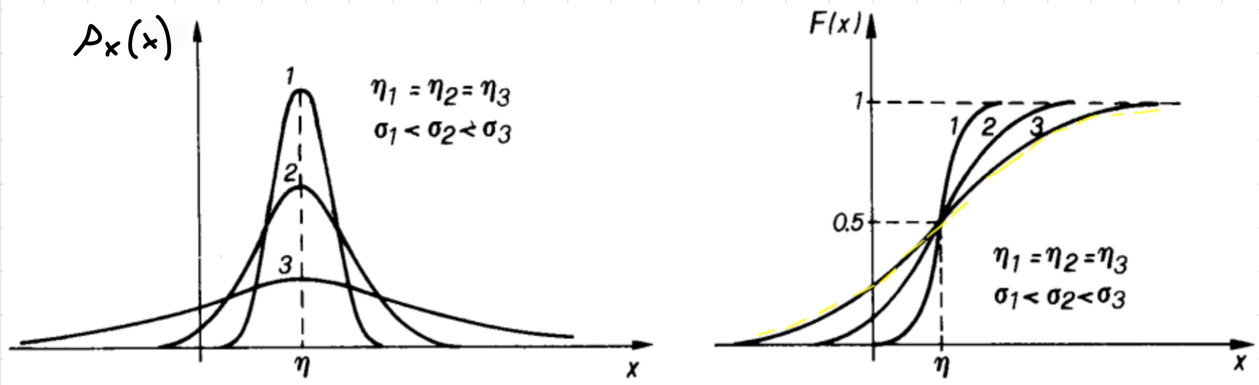
$$p_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} u(x)$$

- $$\eta_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_X(x)\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = \frac{1}{\cancel{\lambda}} \left[\cancel{\lambda} x e^{-\frac{x}{\lambda}}\right]\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\cancel{\lambda}} \int_0^{+\infty} -\cancel{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = \lambda$$
- $$P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x)\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = \frac{1}{\cancel{\lambda}} \left[\cancel{\lambda} x^2 e^{-\frac{x}{\lambda}}\right]\Big|_{+\infty}^{0} - \frac{2}{\cancel{\lambda}} \int_0 x(-\cancel{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}) dx =$$
  $$= 0 + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = 2\lambda \eta_X = 2\lambda^2$$
- $$\sigma_X^2 = P_X - \eta_X^2 = 2\lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^2$$

VARIABILI ALEATORIE GAUSSIANE

UNA V.A SI DICE GAUSSIANA O NORMALE $(X \in N(\eta, \sigma^2))$ SECONDO PARAMETRI (η, σ^2) SE LA SUA DENSITÀ DI PROBABILITÀ È

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$$



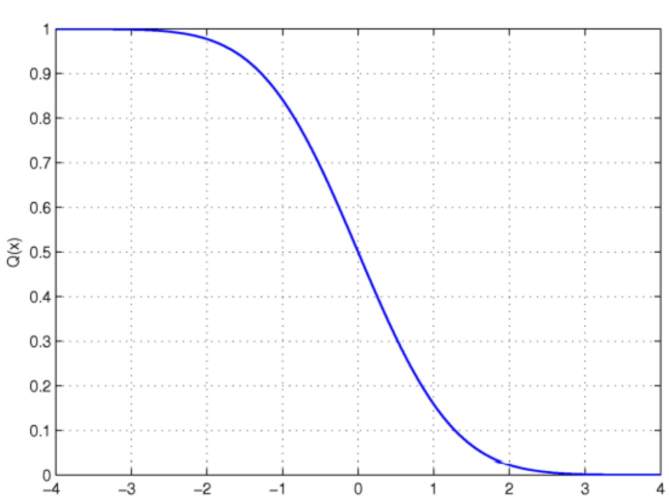
LA GAUSSIANA CON $(\eta, \sigma^2) = (0,1)$ È DETTA "STANDARD"

DEFINISCO DUE NUOVE FUNZIONI

$$\phi(z) = F_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$$

$$Q(z) = 1 - \phi(z) = 1 - F_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}} d\alpha$$

$Q(z)$ È SIMMETRICA RISPETTO AL PUNTO $(0, \frac{1}{2})$ E ASSUME IL COMPORTAMENTO IN FIGURA



$Q(-z) = 1 - Q(z)$

z	Q(x)
.0	.5000
.1	.4602
.2	.4207
.3	.3821
.4	.3446
.5	.3085
.6	.2743
.7	.2420
.8	.2119
.9	.1841
1.0	.1587
1.1	.1357
1.2	.1151
1.3	.0968
1.4	.0808
1.5	.0668
1.6	.0548
1.7	.0446
1.8	.0359
1.9	.0287
2.0	.0228
2.1	.0179
2.2	.0139
2.3	.0107
2.4	.0082
2.5	.0062
2.6	.0047
2.7	.0035
2.8	.0026
2.9	.0019
3.0	.0013

SE $X \in N(\eta, \sigma^2)$ LA SUA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE SI RICAVA DALL'INTEGRALE DELLA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DELLA STANDARD

$$F_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\eta}{\sigma}\right)^2} d\alpha \qquad y = \frac{\alpha - \eta}{\sigma} \qquad dy = \frac{d\alpha}{\sigma}$$

$$F_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\eta}{\sigma}} \frac{e}{\sigma}^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\eta}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \phi\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right)$$

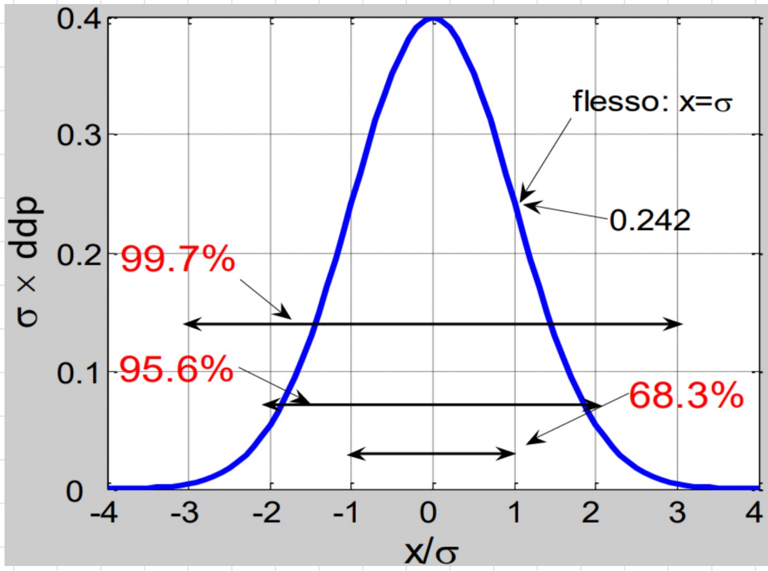
$$Q(z) = 1 - \phi(z) \qquad 1 - \phi\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right) \qquad P(X > \lambda) = 1 - F_x(\lambda) = Q\left(\frac{\lambda-\eta}{\sigma}\right)$$

IN GENERALE, DATA UNA VAR. GAUSSIANA, LA PROBABILITÀ ASSOCIATA AD UN QUALUNQUE EVENTO PUÒ ESSERE CALCOLATA TRAMITE $\phi(x)$, EQUIVALENTE DELLA $Q(x)$

$$P(\{a < X \le b\}) = \int_{a}^{b} p_x(\alpha)\, d\alpha = F_x(b) - F_x(a) = \phi\left(\frac{b-\eta}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\eta}{\sigma}\right) =$$

$$= Q\left(\frac{a-\eta}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{b-\eta}{\sigma}\right)$$

RAPPRESENTANDO L'ANDAMENTO DELLA GAUSSIANA SU UN PIANO CON ASCISSA x/σ E ORDINATA $\sigma \cdot ddp$ OTTENGO



SARÀ D'INTERESSE RICERCARE LA PROBABILITÀ CHE DETERMINATI VALORI DI X SI DISCOSTINO DI UN CERTO FATTORE DAL VALORE ATTESO.

IL FATTORE DI NOSTRO INTERESSE SARÀ PROPORZIONALE ALLA VARIAZIONE STANDARD σ (QUINDI $n\sigma$)

$$P(\{|X-\eta| > n\sigma\}) = \int_{-\infty}^{\eta - n\sigma} p_x(\alpha)\, d\alpha + \int_{\eta+n\sigma}^{+\infty} p_x(\alpha)\, d\alpha = 2Q(n)$$

$$P(\{|X-\eta| \leq n\sigma\}) = 1 - 2Q(n)$$

NEL GRAFICO SOPRA SI VEDONO LE PROBABILITÀ PER LE QUALI $|x-\eta| \leq \sigma$ (68,3 %) $|x-\eta| \leq 2\sigma$ (95,6 %), $|x-\eta| \leq 3\sigma$ (99,7 %)

PROPRIETÀ DELLA VARIANZA

TEOREMA DI TCHEBYCHEFF

DATA UNA QUALSIASI V.A. X CON VARIANZA FINITA

$$\forall k > 1 \Rightarrow P(|X - \eta_x| \geq k\sigma_x) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$P(\eta_x - k\sigma_x \leq X \leq \eta_x + k\sigma_x) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

IL TH STABILISCE UN LIMITE INFERIORE ALLA PROBABILITÀ CHE LA V.A. X STIA ENTRO UN CERTO INTERVALLO CENTRATO INTORNO AL VALORE MEDIO E DI AMPIEZZA PARI A $2k\sigma$, INDIPENDENTEMENTE DALLA DENSITÀ DI PROBABILITÀ.

DAL TH SI NOTA CHE, DATO UN CERTO $\varepsilon = k\sigma$, PER VALORI $\sigma \ll \varepsilon$ (CIOÈ PER K MOLTO GRANDI), LA PROBABILITÀ CHE $X \in (\eta - \varepsilon, \eta + \varepsilon)$ TENDE A 1:

$$\varepsilon = k\sigma_x \Rightarrow P(\{\eta_x - \varepsilon \leq X \leq \eta_x + \varepsilon\}) \geq 1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{\sigma_x^2}{k^2\sigma_x^2} = 1 - \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2}$$

ES

SI CONSIDERI UNA V.A. GAUSSIANA CON VALOR MEDIO η E VARIANZA σ^2 CALCOLARE CON IL TH DI TCH. IL LIMITE SUP PER LA PROBABILITÀ CHE X NON APPARTENGA ALL'INTERVALLO $(\eta - 4\sigma, \eta + 4\sigma)$, CONFRONTARE IL RISULTATO CON IL VALORE VERO

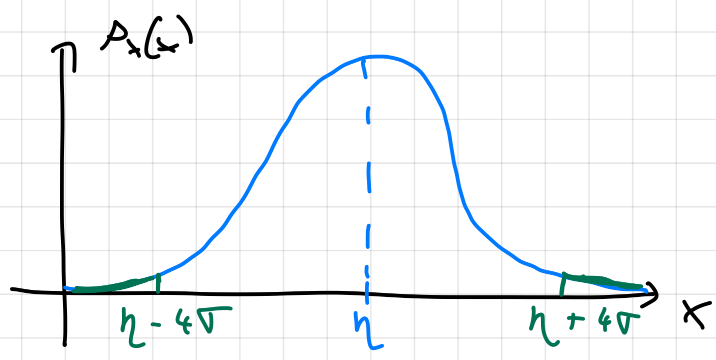
$$P(|X - \eta_x| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \qquad k=4 \qquad = \frac{1}{16} = 6{,}25 \cdot 10^{-2} \quad \text{(TH TCH.)}$$

$$P(|X - \eta_x| \geq k\sigma) = 2 \cdot \int_{\eta+4\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} dx = 2 \int_4^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = 2Q(4) = 6{,}3 \cdot 10^{-5}$$

(CALCOLO)

IL TH DA UN LIMITE GENERALE FACILE DA CALCOLARE.

IL CALCOLO ESATTO È PIÙ PRECISO MA PIÙ COMPLICATO.



VARIABILI ALEATORIE CONDIZIONATE

LA DISTRIBUZIONE DI UNA VARIABILE ALEATORIA X PUÒ ESSERE CONDIZIONATA DA UN EVENTO. DATO TALE EVENTO "C", LA NUOVA FUNZIONE CONDIZIONATA SARÀ:

$$F_{X|C}(x|C) = P(X \leq x | C) = \frac{P(X \leq x, C)}{P(C)}$$

L'EVENTO $\{X \leq x, C\}$ RAPPRESENTA TUTTI I PUNTI DELLO SPAZIO CAMPIONE NEL QUALE $\{X(\omega) \leq x\}$ e $\{\omega \in C\}$, CIOÈ L'EVENTO $\{X \leq x\} \cap C$

DEFINISCO DENSITÀ DI PROBABILITÀ DELLA V.A. X CONDIZIONATA ALL'EVENTO C:

$$p_{X|C}(x|C) = \frac{d\, F_{X|C}(x|C)}{dx}$$

VARIABILI ALEATORIE E PROBABILITÀ TOTALE

SE L'INSIEME DEI C_i $i = 1..N$ RAPPRESENTA UNA PARTIZIONE DELLO SPAZIO CAMPIONE Ω, DAL TH. PROB. TOT SI HA

$$P(X \leq x) = \sum^{N} P(X \leq x | C_i)\, P(C_i)$$

CIOÈ

$$F_X(x) = \sum_i^{N} F_{X|C}(x|C_i)\, P(C_i) \qquad \text{DOVE} \quad \sum_i^{N} P(C_i) = 1$$

ES: TEMPO DI GUASTO DOPO RODAGGIO

SUPPONGO DI FARE IL COLLAUDO DI UNA PARTITA DI LAMPADINE, ACCENDENDOLE E LASCIANDOLE ACCESE FINO A CHE NON SI GUASTANO.
IN UNA PRIMA APPROSSIMAZIONE, DEFINISCO IL TEMPO DI GUASTO CON UNA V.A. X ESPONENZIALE

$$p_X(x) = \frac{1}{\eta} e^{-\frac{x}{\eta}} u(x) \qquad \text{DOVE} \quad \eta = \text{TEMPO MEDIO DI GUASTO}$$

ALTERO LA MODALITÀ DI COLLAUDO IN QUESTO MODO: ATTENDO UN TEMPO FISSO x_0 DALL'ACCENSIONE, SCARTO LE LAMPADINE CHE A QUELL'ISTANTE SONO GIÀ GUASTE E RIPETO IL COLLAUDO DI PRIMA SOLO ALLE RIMANENTI. QUESTA COSA HA INFLUENZA SULLA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DEL TEMPO DI GUASTO DELLE RIMANENTI.

VOGLIO TROVARE LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONDIZIONATA $p_{X|B}(x|B)$ DOVE $B = \{X \geq x_0\}$

PRIMA DEVO CALCOLARE $F_{X|B}(x|B)$ E $P(B)$ E $P(\{X \leq x\}, B)$

$$P(B) = P(\{X \geq x_0\}) = 1 - P(\{X \leq x_0\}) = 1 - F_X(x_0)$$

$$P(\{X \leq x\}, B) = P(\{X \leq x\}, \{X \geq x_0\}) = \begin{cases} F_X(x) - F_X(x_0) & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

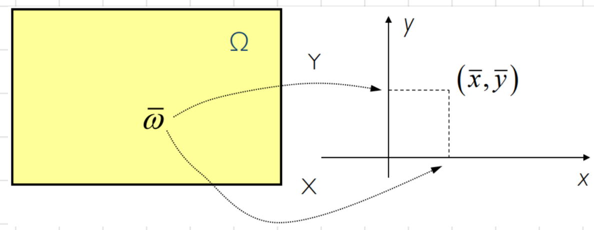
CIOÈ $\quad P(\{X \leq x\}, B) = [F_X(x) - F_X(x_0)]\, u(x - x_0)$

$$F_{X|B}(x|B) = \frac{P(\{X \leq x\}, B)}{P(B)} = \frac{F_X(x) - F_X(x_0)}{1 - F_X(x_0)}\, u(x - x_0)$$

$$p_{X|B}(x|B) = \frac{d\, F_{X|B}(x|B)}{dx} = \frac{p_X(x)}{1 - F_X(x_0)}\, u(x - x_0)$$

SISTEMI DI VARIABILI ALEATORIE

SIANO X e Y DUE VARIABILI ALEATORIE DEFINITE SULLO STESSO SISTEMA DI PROBABILITÀ $S=(\Omega, F, P)$, ESSE COSTITUISCONO UN SISTEMA DI 2 V.A. (VETTORE ALEATORIO BIDIMENSIONALE) CHE TRASFORMA GLI ELEMENTI DELL'INSIEME Ω IN PUNTI DEL PIANO (x,y)



VISTO CHE X e Y SONO V.A., ALLORA $\{X \leq x\}$ e $\{Y \leq y\}$ SONO DUE EVENTI DI PROBABILITÀ DEFINITA DALLE RELATIVE FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE.

GLI INSIEMI AMMETTONO POI UN'INTERSEZIONE $\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\} = \{X \leq x, Y \leq y\}$ DI PROBABILITÀ DETTA <u>FUNZIONE DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ CONGIUNTA</u> CHE DESCRIVE IN MODO COMPLETO IL COMPORTAMENTO STATISTICO DELLE 2 V.A.

$$F_{XY}(x,y) = P(\{X \leq x, Y \leq y\})$$

- $F_{XY}(-\infty,-\infty) = F_{XY}(-\infty, y) = F_{XY}(x,-\infty) = 0$

$$\{X \leq -\infty, Y \leq -\infty\} = \emptyset$$
$$\{X \leq -\infty, Y \leq y\} \subset \{X \leq -\infty\} = \emptyset \qquad \forall y$$
$$\{X \leq x, Y \leq -\infty\} \subset \{Y \leq -\infty\} = \emptyset \qquad \forall x$$

- $F_{XY}(\infty, \infty) = 1$

$$\{X \leq \infty, Y \leq \infty\} = \Omega$$

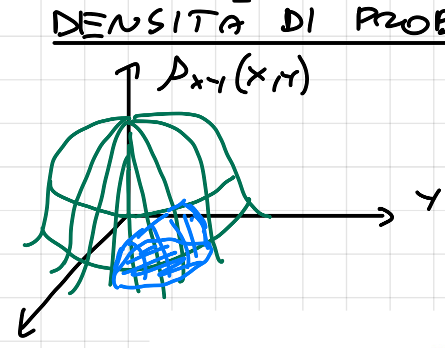
LE FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE DI OGNUNA DELLE 2 V.A. SI OTTENGONO DALLE <u>REGOLE MARGINALI</u>

$$F_X(x) = F_{XY}(x,\infty)$$
$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y)$$

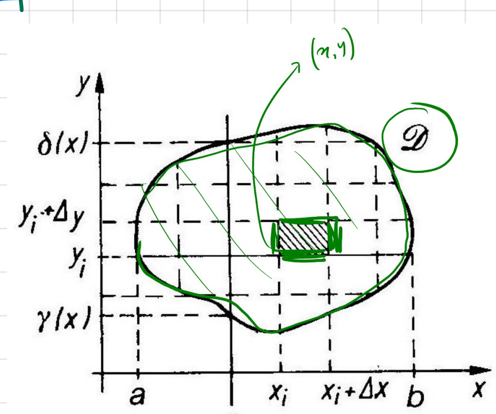
(INFATTI $\{X \leq x, Y \leq \infty\} = \{X \leq x\}$
$\{X \leq \infty, Y \leq y\} = \{Y \leq y\}$
$\Rightarrow F_{XY}(x,\infty) = P(X \leq x, Y \leq \infty) = P(X \leq x) = F_X(x)$)

ALLO STESSO MODO SI PUÒ RICAVARE UNA <u>DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONGIUNTA</u>

$$p_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \, \partial y}$$



$$p_{XY}(x,y)\,dx\,dy = P(x < X \leq x+dx, \; y < Y \leq y+dy)$$

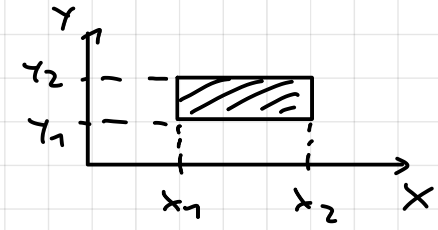


$$P[(X,Y) \in D] = \iint_D p_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

IN BASE AL VALORE D SI PUÒ CALCOLARE LA PROBABILITÀ ENTRO UNA CERTA AREA ED È POI POSSIBILE STABILIRE UNA <u>CONDIZIONE DI NORMALIZZAZIONE</u>.

$$P(X \leq \infty, Y \leq \infty) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1 \quad \text{(COND. NORM.)}$$

$$P(x_1 < X \le x_2,\ y_1 < Y \le y_2) = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} p_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$ (INTERVALLO 2D)



$$F_X(x) = P(X \le x,\ Y \le \infty) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} p_{XY}(\xi,y)\,d\xi\,dy$$ (FD MARGINALE DI X)

$$F_Y(y) = P(X \le \infty,\ Y \le y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} p_{XY}(x,\eta)\,d\eta\,dx$$ (FD MARGINALE DI Y)

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)\,dy$$ (DDP MARGINALE DELLA V.A. X)

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)\,dx$$ (DDP MARGINALE DELLA V.A. Y)

LE VARIABILI X e Y SI DICONO <u>STATISTICAMENTE INDIPENDENTI</u> SE GLI EVENTI $\{X \le x\}$ e $\{Y \le y\}$ SONO INDIP, CIOÈ

$$F_{XY}(x,y) = P(X \le x,\ Y \le y) = P(X \le x)\,P(Y \le y) = F_X(x)F_Y(y)$$

DA CUI SEGUE CHE ANCHE LA DDP CONGIUNTA SI FATTORIZZA NEL PRODOTTO DELLE 2 DDP MARGINALI

$$p_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}\,\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = p_X(x)\,p_Y(y)$$

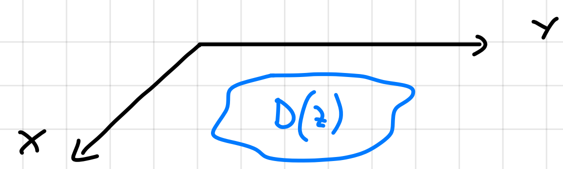
NEL CASO DI V.A. INDIP. LE DDP MARGINALI BASTANO PER DESCRIVERE IL SISTEMA

TRASFORMAZIONE DI SISTEMI DI DUE VARIABILI CONTINUE

SIA (X,Y) UN SISTEMA DI VARIABILI DEFINITE PER UN ESPERIMENTO DI MODELLO DI PROBABILITÀ ASSEGNATO. ASSEGNANDO AD OGNI COPPIA DI VALORI (x,y) DELLE DUE VARIABILI IL VALORE DI $z = g(x,y)$, RISULTA DEFINITA LA NUOVA VARIABILE $Z = g(X,Y)$.

DATA $f_{XY}(x,y)$ POSSO OTTENERE LA FD DI Z

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P[g(X,Y) \le z] = \iint_{D(z)} p_{XY}(x,y)\,dx\,dy \qquad D(z) = \{(x,y) : g(x,y) \le z\}$$



PER TROVARE IL VALORE ATTESO η_z DI $Z = g(X,Y)$ POSSO USARE IL TH DELL'ASPETTAZIONE

$$\eta_z = E(Z) = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\,p_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

NEL CASO IN CUI $Z = g(X,Y) = \underline{X+Y}$

$$D(z) = \{(x,y) : x+y \le z\} = \{(x,y) : y \le z - x\}$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} p_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$p_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, z-x)\,dx$$

SE X e Y SONO <u>INDIP</u> AVRÒ UNA CONVOLUZIONE

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\, p_Y(z-x)\, dx = p_X(z) \otimes p_Y(z)$$

DA $Z = X + Y$ OTTENGO CHE IL VALOR MEDIO SI PUÒ OTTENERE COME SEGUE

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, p_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y)\, p_{XY}(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, p_{XY}(x,y)\, dx\, dy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, p_{XY}(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, p_{XY}(x,y)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} y\, p_{XY}(x,y)\, dy = E[X] + E[Y]$$

INDICI PER VARIABILI CONGIUNTE

PER LE COPPIE DI VARIABILI ALEATORIE (X, Y) ESISTONO ALTRI INDICI CHE DETERMINANO ALCUNI PARAMETRI STATISTICI PER LA COMPRENSIONE DEL LORO COMPORTAMENTO CONGIUNTO

<u>CORRELAZIONE</u>

$$r_{XY} = E\{XY\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, p_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

<u>COVARIANZA</u>

$$C_{XY} = E\{(X-\eta_X)(Y-\eta_Y)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\eta_x)(y-\eta_y)\, p_{XY}(x,y)\, dx\, dy = r_{XY} - \eta_X \eta_Y$$

NEL CASO DI TRASFORMAZIONE $Z = g(X,Y) = \underline{X+Y}$ OTTENGO UN CASO PARTICOLARE

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2C_{XY}$$

<u>DIM</u>

$$\sigma_Z^2 = Var(X+Y) = P_Z - \eta_Z^2 = E[(X+Y)^2] - E^2[X+Y] =$$

$$= E[X^2] + E[Y^2] + 2E[XY] - E^2[X] - E^2[Y] - 2E[X]E[Y] =$$

$$= (E[X^2] - E^2[X]) + (E[Y^2] - E^2[Y]) + 2(E[XY] - E[X]E[Y]) =$$

$$= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2(r_{XY} - \eta_X\eta_Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2C_{XY}$$

LA COVARIANZA ACCERTA SE TRA DUE VARIABILI ESISTE UNA RELAZIONE DI DIPENDENZA DI TIPO LINEARE E CHE COMUNQUE MISURA LA TENDENZA DI VARIAZIONE CONGIUNTA DELLE DUE.

SE DUE V.A. SONO TC $C_{XY} = 0$ CIOÈ SONO <u>INCORRELATE</u>, LA VARIANZA DELLA SOMMA È LA SOMMA DELLE VARIANZE, INVECE SE È GRANDE E POSITIVA ALLORA TENDONO A DISCOSTARSI DAL LORO VALORE MEDIO NELLA STESSA DIREZIONE.

SE $r_{XY} = 0$ SI DICONO ORTOGONALI

LO STESSO SIGNIFICATO DELLA COVARIANZA CE L'HA IL <u>COEFF. DI CORRELAZIONE</u>

$$\rho_{XY} = E\left[\frac{X-\eta_X}{\sigma_X} \cdot \frac{Y-\eta_Y}{\sigma_Y}\right] = \frac{C_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{r_{XY} - \eta_X\eta_Y}{\sigma_X\sigma_Y}$$

↳ COEFF. DI CORRELAZIONE (COV. NORMALIZZ.)

PROPRIETÀ

- $C_{XY}^2 \le \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \Rightarrow |\rho_{XY}| \le 1$
- SE LE V.A. SONO INCORRELATE $\Rightarrow \rho_{XY} = 0$
- SE $Y = aX + b$ $\quad a \neq 0 \Rightarrow |\rho_{XY}| = 1$

NEL CASO DI V.A. INDIPENDENTI

$$r_{XY} = E\{XY\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, p_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, p_X(x) p_Y(y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, p_X(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} y\, p_Y(y)\, dy = \eta_X \eta_Y$$

$$C_{XY} = r_{XY} - \eta_X \eta_Y = 0$$

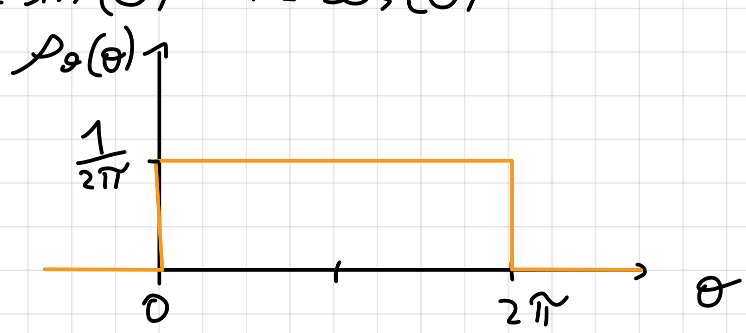
$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = 0$$

(SE X e Y SONO INDIPENDENTI SONO ANCHE INCORRELATE ($C_{XY} = 0$), VICEVERSA SE $C_{XY} = 0$ (V.A. INCORRELATE) NON È DETTO CHE SIANO INDIPENDENTI)

ES: INCORRELAZIONE $\not\Rightarrow$ INDIPENDENZA

SIA Θ UNA VARIABILE ALEATORIA UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA SU $[0, 2\pi)$

A PARTIRE DA Θ SI DEFINISCONO ALTRE 2 VARIABILI ALEATORIE DI CUI VOGLIO VALUTARE LA CORRELAZIONE STATISTICA $X = \sin(\Theta)$ $\quad Y = \cos(\Theta)$



$$r_{XY} = E\{XY\} = E\{g(\Theta)h(\Theta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\theta)\cos(\theta)\, p_\theta(\theta)\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin(\theta)\cos(\theta)\frac{1}{2\pi}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(2\theta)\frac{1}{2\pi}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(2\theta)\, d\theta}_{=0} = 0$$

INTEGRO SU MULTIPLI DEL PERIODO

$$\eta_X = E\{\cos(\theta)\} = \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\frac{1}{2\pi}\, d\theta = 0$$

$$\eta_Y = E\{\sin(\theta)\} = \int_0^{2\pi} \sin(\theta)\frac{1}{2\pi}\, d\theta = 0$$

$$C_{XY} = r_{XY} - \eta_X \eta_Y = 0$$

ES: VITI E DADI

UNA PRIMA MACCHINA PRODUCE VITI IL CUI DIAMETRO X (mm) SI PUÒ CONSIDERARE UNA V.A. NORMALE DI PARAMETRI $(5; 0{,}01)$ $\quad X \in \mathcal{N}(5; 0.01)$

UNA SECONDA MACCHINA PRODUCE DADI IL CUI DIAMETRO Y (mm) SI PUÒ CONSIDERARE UNA V.A. NORMALE DI PARAMETRI $(5.2; 0{,}04)$ $\quad Y \in \mathcal{N}(5.2; 0.04)$

UN DADO SI AVVITA CORRETTAMENTE SU UNA VITE SE IL SUO DIAMETRO È MAGGIORE DI QUELLO DELLA VITE DI ALMENO 0.04 mm, MA NON PIÙ DI 0.36 mm

CALCOLA LA PROBABILITÀ CHE UNA VITE E UN DADO SCELTI A CASO SI AVVITINO

X, Y INDIP. $\qquad D = Y - X \qquad \mathcal{N}(\eta_D, \sigma_D^2) \qquad \eta_D = E\{Y-X\} = E\{Y\} - E\{X\} = 0{,}2$

$$\sigma_D^2 = E\{D^2\} - E^2\{D\} = E\{(Y-X)^2\} - [E\{Y\} - E\{X\}]^2 =$$
$$= E\{Y^2\} - 2E\{XY\} + E\{X^2\} - E^2\{Y\} + 2E\{X\}E\{Y\} - E^2\{X\} =$$
$$= \sigma_Y^2 + \sigma_X^2 - 2\underbrace{[E\{XY\} - E\{X\}E\{Y\}]}_{C_{XY}}$$

$\sigma_D^2 = \sigma_Y^2 + \sigma_X^2 - 2C_{XY}$ $\quad$ (VAR INDIP SONO INCORRELATE, $C_{XY} = 0$)

$\sigma_D = \sigma_Y^2 + \sigma_X^2 = 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}05$

$D \in \mathcal{N}(0.2; 0.05) \qquad D = \sigma_D Z + \eta_D \qquad Z = \dfrac{D - \eta_D}{\sigma_D}$

$$P\{0.04 \le D \le 0.36\} = F_D(0.36) - F_D(0.04) = \left(1 - Q\left(\frac{0.36 - \eta_D}{\sigma_D}\right)\right) - \left(1 - Q\left(\frac{0.04 - \eta_D}{\sigma_D}\right)\right) =$$
$$= -Q\left(\frac{0.16}{\sqrt{0{,}05}}\right) + Q\left(\frac{-0.16}{\sqrt{0{,}05}}\right)$$

$$Q(-x) = 1 - Q(x) = 1 - Q\left(\frac{0.16}{\sqrt{0{,}05}}\right) - Q\left(\frac{0.16}{\sqrt{0{,}05}}\right) = 1 - 2Q\left(\frac{0.16}{\sqrt{0{,}05}}\right) =$$
$$= 1 - 2Q(0.716) = 0{,}525$$

ES: STANZA CON 2 LAMPADE

UNA STANZA SENZA FINESTRE È ILLUMINATA DA UN LAMPADARIO COSTITUITO DA 2 LAMPADE ALIMENTATE IN PARALLELO.
I TEMPI DI VITA DELLE LAMPADE SONO DESCRITTI DA 2 V.A. T_1, T_2 INDIP. E CARATTERIZZATE DA UNA DDP ESPONENZIALE MONOLATERA CON $\eta_1 = 2\eta$ $\eta_2 = \eta$ E $\eta = 6000$ ORE

$$p_{T_i}(t_i) = \frac{1}{\eta_i} e^{-\frac{t_i}{\eta_i}} u(t_i) \qquad i = 1,2$$

CALCOLARE IL TEMPO MEDIO DI ILLUMINAZIONE DELLA STANZA T.

$$T = \max(T_1, T_2)$$

$$F_T(t) = P\{T \leq t\} = P\{\max(T_1, T_2) \leq t\} = P\{(T_1 \leq t, T_1 \geq T_2) \cup (T_2 \leq t, T_1 \leq T_2)\} =$$

$$= P\{T_1 \leq t, T_2 \leq t\} = \int_0^t \int_0^t p_{T_1T_2}(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2$$

$$p_{T_1T_2}(t_1, t_2) = p_{T_1}(t_1)\, p_{T_2}(t_2) = \frac{1}{2\eta} e^{-\frac{t_1}{2\eta}} \frac{1}{\eta} e^{-\frac{t_2}{\eta}} u(t_1)\, u(t_2)$$

$$F_T(t) = \int_0^t \int_0^t \frac{1}{2\eta} e^{-\frac{t_1}{2\eta}} \frac{1}{\eta} e^{-\frac{t_2}{\eta}} u(t)\, dt_1\, dt_2 = \int_0^t \frac{1}{2\eta} e^{-\frac{t_1}{2\eta}} dt_1 \int_0^t \frac{1}{\eta} e^{-\frac{t_2}{\eta}} dt_2\, u(t) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\eta}} \left[-\cancel{2\eta}\, e^{-\frac{t_1}{2\eta}} \right]\Bigg|_0^t \frac{1}{\cancel{\eta}} \left[-\cancel{\eta}\, e^{-\frac{t_2}{\eta}} \right]_0^t u(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{2\eta}}\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{\eta}}\right) u(t)$$

$$p_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt} = \left[\frac{1}{2\eta} e^{-\frac{t}{2\eta}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\eta}}\right) + \left(1 - e^{-\frac{t}{2\eta}}\right) \frac{1}{\eta} e^{-\frac{t}{\eta}} \right] u(t) =$$

$$= \left(\frac{1}{2\eta} e^{-\frac{t}{2\eta}} - \frac{1}{2\eta} e^{-\frac{3}{2}\frac{t}{\eta}} + \frac{1}{\eta} e^{-\frac{t}{\eta}} - \frac{1}{\eta} e^{-\frac{3}{2}\frac{t}{\eta}} \right) u(t) =$$

$$= \left(\frac{1}{\eta} e^{-\frac{t}{\eta}} + \frac{1}{2\eta} e^{-\frac{t}{2\eta}} - \frac{3}{2\eta} e^{-\frac{3}{2}\frac{t}{\eta}} \right) u(t)$$

$$\eta_T = E\{T\} = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, p_T(t)\, dt = \eta + 2\eta - \frac{2}{3}\eta = 14000 \text{ ORE}$$

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

CONSIDERO LA V.A. $Y_n = \sum^{n} X_i$

SUPPONGO LE X_i INDIPENDENTI CON LA STESSA DDP, η E σ^2, ALLORA

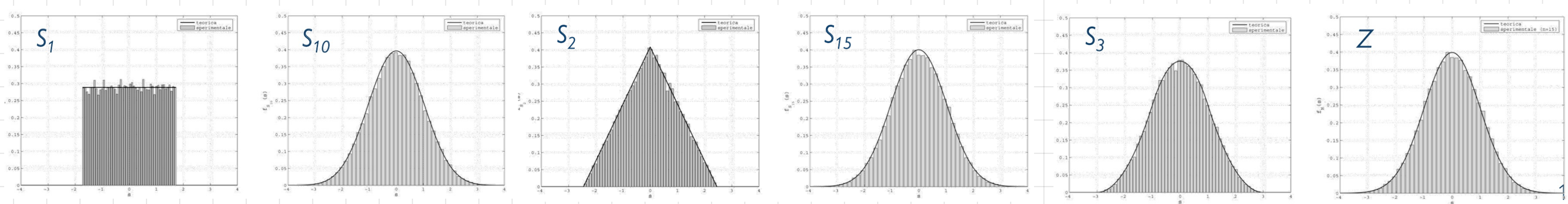
$$E\{Y_n\} = \eta_n = n\eta \qquad E\{(Y_n - \eta_n)^2\} = \sigma_n^2 = n\sigma^2$$

SE CONSIDERO UN NUMERO DI VARIABILI n MAN MANO CRESCENTE, LA DDP DELLA V.A. NORMALIZZATA S_n

$$S_n = \frac{Y_n - \eta_n}{\sigma_n} = \frac{Y_n - n\eta}{\sqrt{n}\,\sigma}$$

TENDE AD UNA DENSITÀ NORMALE STANDARD, CIOÈ $\eta = 0$ $\sigma^2 = 1$

$$\lim_{n \to +\infty} p_{S_n}(s) = p_Z(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}}$$



ES

HO DEI RESISTORI LA CUI RESISTENZA PUÒ ESSERE DESCRITTA DA UNA V.A. R AVENTE DISTRIBUZIONE UNIFORME DEI PARAMETRI $a = 9$ $b = 13$

SE COLLEGO IN PARALLELO 100 RESISTORI A CASO, QUAL È LA PROBABILITÀ CHE LA R COMPLESSIVA SUPERI 0,11 Ω?

$Y_n = \frac{1}{R_n}$ $\quad p_Y(y)$? $\quad y = g(r) = \frac{1}{r}$

DIST. UNIFORME $\quad p_X(x) = \frac{1}{b-a}$

$$p_R(r) = \frac{1}{13-9} = \frac{1}{4}$$

$$p_Y(y) = \sum^{k} \frac{p_R(r_i)}{|g'(r_i)|}\Bigg|_{r_i = g^{-1}(y)} \qquad g'(r) = -\frac{1}{r^2}$$

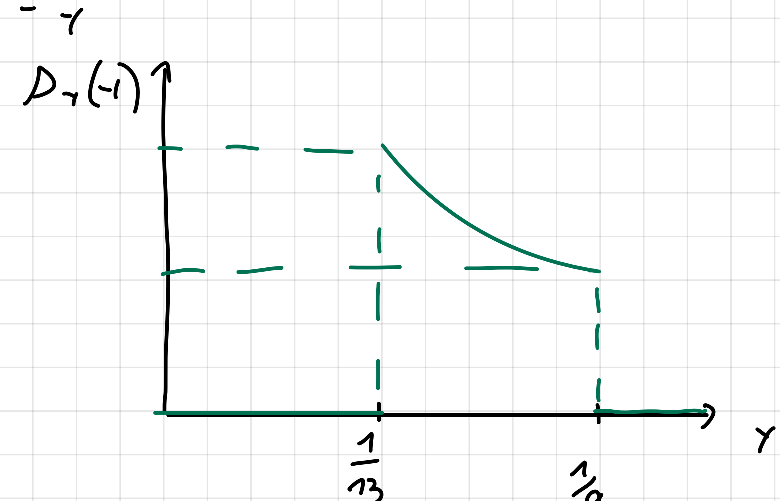
$$p_Y(y) = \frac{p_R(r_1)}{|g'(r_1)|}\Bigg|_{r_1 = g^{-1}(y)} = \frac{p_R(r_1)}{\frac{1}{r_1^2}}\Bigg|_{r_1 = \frac{1}{y}}$$

$\neq 0$ SE $9 \leq r_1 \leq 13$

$\Downarrow$

$\frac{1}{9} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{13}$

$$= \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{4}}{y^2} = \dfrac{1}{4y^2} & \frac{1}{13} \leq y \leq \frac{1}{9} \\ 0 & \text{ALTRIM.} \end{cases}$$



$$E\{Y\} = E\{g(R)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} p_R(r)\,dr = \int_{9}^{13} \frac{1}{r}\frac{1}{4}\,dr = \frac{1}{4}\ln(r)\Big|_{9}^{13} = 0{,}0919 = \eta_Y$$

$$E\{Y^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 p_Y(y)\,dy = \int_{\frac{1}{13}}^{\frac{1}{9}} \cancel{y^2}\frac{1}{4\cancel{y^2}}\,dy = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{9} - \frac{1}{13}\right] = \frac{1}{13 \cdot 9}$$

$$\sigma_Y^2 = E\{Y^2\} - \eta_Y^2 = 9{,}55 \cdot 10^{-5}$$

$$Y_{100} = \sum^{100} Y_n \qquad R_{100} = \frac{1}{Y_{100}}$$

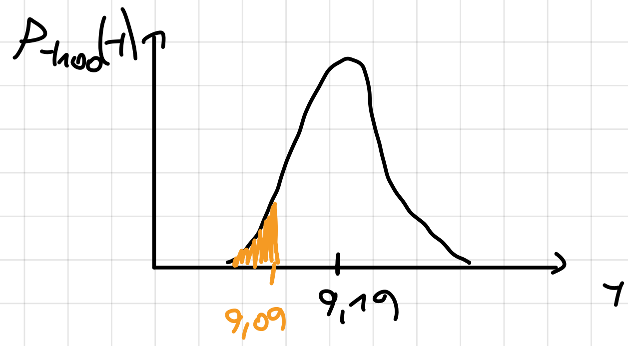
$$E\{Y_{100}\} = 100\,\eta_Y = 9{,}19 = \eta_{100} \qquad E\{(Y_{100} - \eta_{100}^2)\} = \sigma^2_{100} = 100\,\sigma_Y^2 = 9{,}55 \cdot 10^{-3}$$

$$S_{100} = \frac{Y_{100} - \eta_{100}}{\sigma_{100}} = z \qquad Y_{100} = \sigma_{100}\, z + \eta_{100} \qquad Y \in \mathcal{N}(\eta_{100}, \sigma^2_{100})$$

$$P\{R_{100} > 0{,}11\} = P\left\{\frac{1}{Y_{100}} > 0{,}11\right\} = P\left\{Y_{100} < \frac{1}{0{,}11}\right\} = P\{Y_{100} < 9{,}09\} =$$

$$= 1 - P\{Y_{100} > 9{,}09\} = 1 - Q\left(\frac{9{,}09 - \eta_{100}}{\sigma_{100}}\right) =$$

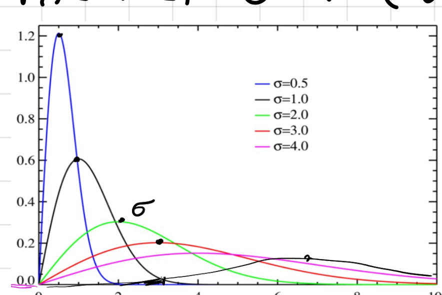
$$= 1 - Q\left(\frac{9{,}09 - 9{,}19}{0{,}0978}\right) = 1 - Q(-1{,}045) = Q(1{,}045) \simeq 0{,}148$$



VARIABILI ALEATORIE DI RAYLEIGH

UNA V.A. SI DICE DI RAYLEIGH DI PARAMETRO σ ($\sigma > 0$) E SI INDICA CON $X \in R(\sigma^2)$ SE LA SUA DDP È

$$p_X(x) = \frac{x}{\sigma^2}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, u(x)$$



SE $U, V \in \mathcal{N}(0, \sigma^2) \rightarrow X = \sqrt{U^2 + V^2}$

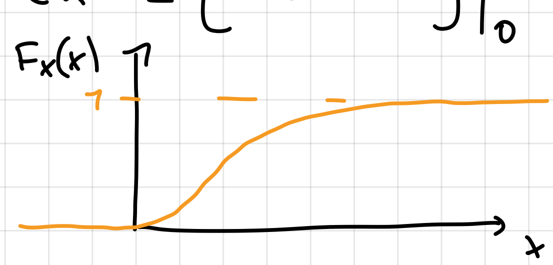
X RAPPRESENTA LA DISTANZA DALL'ORIGINE DI UN PUNTO (U,V) NEL PIANO EUCLIDEO LE CUI COORDINATE SIANO V.A. INDIPENDENTI AVENTI ENTRAMBE DISTRIBUZIONE NORMALE

IMPORTANTE PER MODELLARE L'AMPIEZZA DI UN SEGNALE RICEVUTO QUANDO VI SONO NUMEROSI CAMMINI MULTIPLI TRA TX E RX

1) $F_X(x)$?

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(\alpha)\, d\alpha = \int_0^x \frac{\alpha}{\sigma^2}\, e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}\, d\alpha = \left[-e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}\right]_0^x = -e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + 1$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad x \geq 0$$



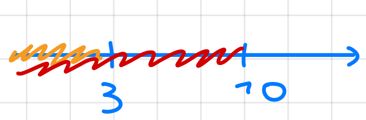
2) SE $\sigma = 7$, $P(X \leq 3)$?

$$P\{X \leq 3\} = F_X(3) = 1 - e^{-\frac{9}{2 \cdot 49}} = 0{,}087$$

3) SE $\sigma = 7$, $P(X \leq 3 \mid X \leq 10)$?

$$P\{X \leq 3 \mid X \leq 10\} = \frac{P\{X \leq 3\} \cap P\{X \leq 10\}}{P\{X \leq 10\}} = \frac{P\{X \leq 3\}}{P\{X \leq 10\}} = 0{,}137$$

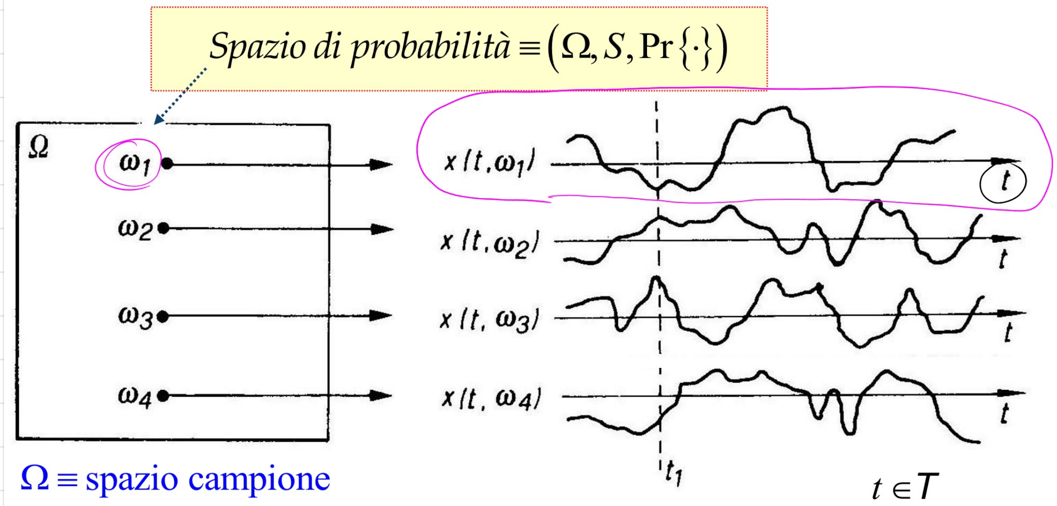
$$\overset{\shortparallel}{F_X(10)}$$



PROCESSI ALEATORI

DATO UN ESPERIMENTO CASUALE DI MODELLO DI PROBABILITÀ ASSEGNATO, AD OGNI SUO RISULTATO ω, SI ASSOCI UNA FUNZIONE REALE $x(t,\omega)$ DELLA VAR. t.

RISULTA COSÌ DEFINITO UN INSIEME DI FUNZIONI $X(t,\omega)$, DETTO PROCESSO ALEATORIO, CHE VERRÀ INDICATO CON $X(t)$ OMETTENDO LA DIP. DA ω



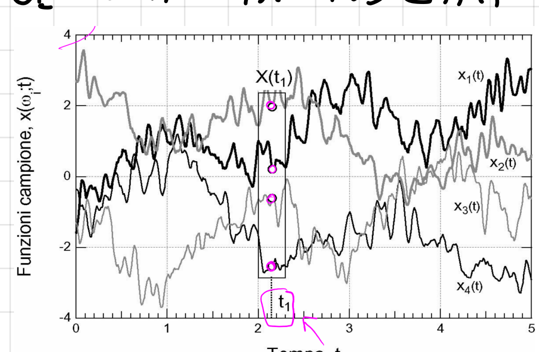
FISSATO ω, $X(t,\omega)$ È UNA FUNZIONE DETERMINISTICA DETTA FUNZIONE CAMPIONE DEL PROCESSO.

LA PARTICOLARE $x(t,\omega)$ CHE OSSERVO IN UNA DATA PROVA DELL'ESPERIMENTO ALEATORIO SI DICE REALIZZAZIONE DEL PROCESSO

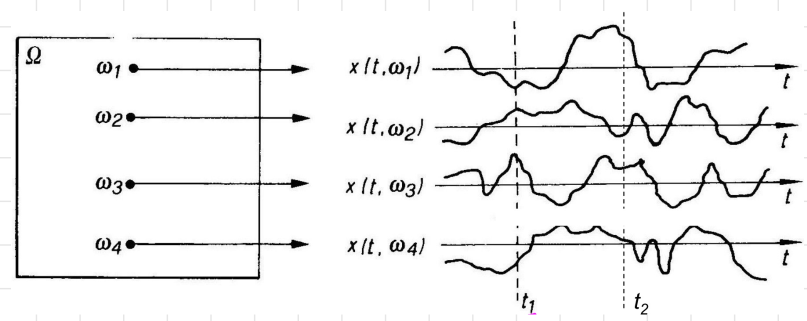
NEL CASO SI FISSI UN ISTANTE t_1, AD OGNI RISULTATO ω DELL'ESP. VIENE ASSOCIATO IL VALORE NUMERICO $x(t_1,\omega)$ DELLA CORRISP. REALIZZAZIONE IN QUELL'ISTANTE.

OTTENGO UNA QUANTITÀ DIPENDENTE DA ω, CIOÈ UNA V.A. INDICATA CON $X(t_1)$

PRATICAMENTE, FISSATO t, IL PROCESSO CASUALE $X(t)$ È UNA V.A.



SE FISSO 2 ISTANTI t_1, t_2 OTTENGO 2 DISTINTE V.A. $X(t_1)$ e $X(t_2)$, CHE COSTITUISCONO UN SISTEMA DI 2 V.A., CIOÈ IL VETTORE ALEATORIO $X = [X(t_1)\ X(t_2)]$



FISSANDO N ISTANTI AVRÒ UN VETTORE DI N V.A. $X = [X_1(t_1) \dots X_N(t_N)]$

LA DESCRIZIONE STATISTICA DI UN PROC. ALEATORIO IMPLICA LA CONOSCENZA DELLA LEGGE DI DISTRIBUZIONE DI TUTTI I POSSIBILI SISTEMI COSÌ FORMATI

UN P.A. SI DICE STATISTICAMENTE DETERMINATO SE SONO NOTE LE SUE N FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE $F_X(x_1 \dots x_N, t_1 \dots t_N) = P\{X(t_1) \le x_1 \dots X(t_N) \le x_N\}$.

NOTA LA FUNZIONE DI ORDINE N SARÀ POSSIBILE RICAVARE TUTTE LE ALTRE DI ORDINE INFERIORE. SPESSO UN P.A. PUÒ COMUNQUE ESSERE STUDIATO SAPENDO SOLO ALCUNI ORDINI DELLE FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE, ATTRAVERSO UNA DESCRIZIONE DI POTENZA DEL PROCESSO

UN PROCESSO $X(t)$ SI DICE PARAMETRICO QUANDO PUÒ ESSERE SPECIFICATO CON LA FORMA DELLE SUE FUNZIONI CAMPIONE.

LA CARATTERIZZAZIONE COMPLETA DI UN PROCESSO RICHIEDE LA CONOSCENZA DELLA DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONGIUNTA DEI PARAMETRI ALEATORI.

DESCRIZIONE STATISTICA DEL PRIMO ORDINE

FISSATO t, $X(t)$ È UNA V.A. DI FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DETTA "DEL PRIMO ORDINE".

$$F_x(x,t) = P\{X(t) \leq t\} \qquad p_x(x,t) = \frac{\partial F_x(x,t)}{\partial x}$$

LA FUNZIONE CAMBIA IN GENERALE $\forall t$.
ANCHE LA FUNZIONE DI DDP ASSOCIATA SI DICE "DEL PRIMO ORDINE".

RIPETENDO UN ESPERIMENTO N VOLTE SI PUÒ OSSERVARE OGNI VOLTA UNA SUA REALIZZAZIONE $x(t)$.

INDICANDO CON $\Delta n_t(x)$ IL N° DI REALIZZAZIONI PER CUI SI VERIFICA CHE $x(t) \in [x, x+\Delta x]$ SI OTTIENE UN'INTERPRETAZIONE DELLA DDP IN TERMINI DI FREQ. RELATIVA

$$p_x(x,t)\Delta x = P\{x \leq X < x+\Delta x\} = \lim_{N\to\infty} \frac{\Delta n_t(x)}{N} \Rightarrow p_x(x,t) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \frac{\Delta n_t(x)}{N\Delta x}$$

PER DESCRIZIONI DEL PRIMO ORDINE SI POSSONO INDIVIDUARE TALI INDICI

$$\eta_x(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_x(x,t)\,dx$$

$$P_x(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_x(x,t)\,dx$$

$$\sigma_x^2(t) = E[(X(t) - \eta_x(t))^2] = P_x(t) - \eta_x^2(t)$$

ES: $F_x(x, t_1)$ SUFFICIENTE PER CARATTERIZZARE LE PROPRIETÀ DEL PROCESSO?

L'ANDAMENTO DI UN TITOLO IN BORSA AL VARIARE DI t NON È PREVEDIBILE.

SIA $X(t)$ LA QUOTAZIONE ALEATORIA DEL TITOLO: UN INVESTITORE È INTERESSATO A FARE UN PROFITTO, ACQUISTANDO A t_1

$$P\{X(t_2) \geq X(t_1)\}$$

TALE PROBABILITÀ <u>NON</u> PUÒ ESSERE RICAVATA DALLA FUNZIONE $F_x(x,t)$ (PRIMO ORDINE) PERCHÉ RICHIEDE LA CONSIDERAZIONE CONGIUNTA DI 2 V.A. ESTRATTE DALLO STESSO PROCESSO IN 2 ISTANTI DISTINTI

DESCRIZIONE STATISTICA DELL'N-ESIMO ORDINE

FISSATI t_1 e t_2 CONSIDERO LE V.A. $X(t_1)$ $X(t_2)$. SARÀ POSSIBILE TROVARE LA LORO FD CONGIUNTA CHE DIPENDE DA t_1 e t_2 DETTA FD DEL SECONDO ORDINE.

$$F_x(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$$

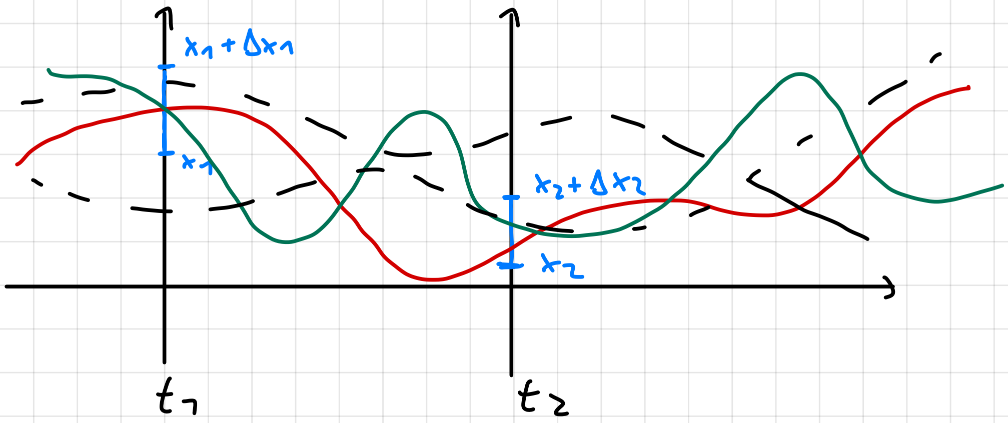
$$p_x(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial_1 \partial_2 F_x(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

COME PRIMA, POSSO INTERPRETARE TUTTO IN TERMINI DI FREQ. RELATIVA

$$p_x(x_1, x_2, t_1, t_2)\Delta x_1 \Delta x_2 = P\{x_1 \leq X(t_1) \leq x_1 + \Delta x_1, x_2 \leq X(t_2) \leq x_2 + \Delta x_2\} =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\Delta n_t(x)}{N}$$

$$p_x(x_1, x_2, t_1, t_2) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ (\Delta x_1, \Delta x_2)\to(0,0)}} \frac{\Delta n_t(x)}{N\Delta x_1 \Delta x_2}$$

(NATURALMENTE LA DEF SI PUÒ ESTENDERE A PIACERE FINO A ORDINE N)



FISSO t_1, t_2 E OTTENGO 2 V.A. $Y = X(t_1)$ $Z = X(t_2)$, È SIGNIFICATIVA LA CORRELAZIONE $r_{YZ} = E\{YZ\}$ TRA LE 2.

IL VALORE DI TALE CORRELAZIONE RISULTERÀ FUNZIONE DEI 2 ISTANTI t_1, t_2 AI QUALI LE VARIABILI SONO STATE ESTRATTE, E POTRÀ ESSERE CALCOLATA SOLO CONOSCENDO LA FUNZIONE DDP DEL SECONDO ORDINE DEL PROC.

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{x_1=-\infty}^{+\infty}\int_{x_2=-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 \, p_X(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2$$

SI CHIAMA DI <u>AUTOCORRELAZIONE</u> PERCHÉ LE 2 V.A. DI CUI SI CALCOLA LA CORRELAZIONE SONO ESTRATTE DALLO STESSO P.A.

SE INVECE TRA Y e Z CALCOLO LA COVARIANZA OTTENGO LA FUNZIONE DI <u>AUTOCOVARIANZA</u>

$$C_X(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - \eta_X(t)][X(t_2) - \eta_X(t_2)]\} =$$

$$= \int_{x_1=-\infty}^{+\infty}\int_{x_2=-\infty}^{+\infty} [x_1 - \eta_X(t_1)][x_2 - \eta_X(t_2)]\, p_X(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2 = R_X(t_1, t_2) - \eta_X(t_1)\eta_X(t_2)$$

PONENDO $t_1 = t_2 = t$ L'AUTOCORRELAZIONE E L'AUTOCOVARIANZA SI IDENTIFICANO RISPETTIVAMENTE CON IL VALORE QUADRATICO MEDIO E LA VARIANZA DELLA V.A. $X(t)$

$$R_X(t,t) = E\{X^2(t)\} = P_X(t) \qquad C_X(t,t) = E\{[X(t) - \eta_X(t)]^2\} = \sigma_X^2(t)$$

STAZIONARIETÀ DEI PROCESSI ALEATORI

UN P.A. SI DICE <u>STAZIONARIO IN SENSO STRETTO</u> SE IL SUO COMPORTAMENTO STATISTICO È INVARIANTE RISPETTO AD UNA TRASLAZIONE SULL'ASSE TEMPORALE

$$p_x(x_1 \dots x_n, t_1 \dots t_n) = p_x(x_1 \dots x_n, t_1+\varepsilon \dots t_n+\varepsilon) \qquad \forall \varepsilon, n, t_1 \dots t_n$$

DUE PROCESSI $X(t)$ e $X(t+\varepsilon)$ AVRANNO STESSE STATISTICHE $\forall \varepsilon$ E PER OGNI ORDINE DI N E SI DIRANNO <u>STATISTICAMENTE EQUIVALENTI</u> NEL SENSO CHE NON SONO DISTINGUIBILI TRAMITE MISURAZIONE DELLE LORO STATISTICHE.

PER IL <u>PRIMO ORDINE</u> UN PROCESSO SI DICE STAZIONARIO SE :

$$p_x(x,t) = p_x(x, t+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon, t \quad \Rightarrow \quad \underline{p_x(x,t) = p_x(x)}$$

IMPLICA $p_x(x,t)$ INDIPENDENTE DA t

- $\eta_x(t) = E\{X(t)\} = \int x\, p_x(x,t)dx = \int x\, p_x(x)dx = \eta_x$
- $P_x(t) = E\{X^2(t)\} = \int x^2 p_x(x,t)dx = \int x^2 p_x(x)dx = P_x$
- $\sigma_x^2(t) = P_x(t) - \eta_x^2(t) = P_x - \eta_x^2 = \sigma_x^2$

PER IL <u>SECONDO ORDINE</u> LA DDP DIPENDERÀ SOLO DA $\tau = t_2 - t_1$

$$p_x(x_1, x_2, t_1, t_2) = p_x(x_1, x_2, t_1+\varepsilon, t_2+\varepsilon) \qquad \forall \varepsilon, t_1, t_2$$

$$p_x(x_1, x_2, t_1, t_2) = p_x(x_1, x_2, 0, t_2-t_1) = p(x_1, x_2, \tau) \qquad \tau = t_2 - t_1 \qquad \varepsilon = -t_1$$

- $R_x(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_1)X(t_1+\tau)] = \int x_1 x_2\, p_x(x_1,x_2,\tau)dx_1\,dx_2 = R_x(\tau)$
- $C_x(t_1,t_2) = R_x(t_1,t_2) - \eta_x(t_1)\eta_x(t_2) = R_x(\tau) - \eta_x^2$

<u>ORDINE N</u> :

$$p_x(x_1 \dots x_n, t_1 \dots t_n) = p_x(x_1 \dots x_n, t_1+\varepsilon \dots t_n+\varepsilon) = p_x(x_1 \dots x_n, t_1-t_1 \dots t_n-t_1) =$$
$$= p_x(x_1 \dots x_n, 0, \tau_2 \dots \tau_n) \qquad \varepsilon = -t_1 \qquad \tau_i = t_i - t_1$$

UN PROCESSO STAZIONARIO DI ORDINE N LO SARÀ ANCHE PER OGNI ALTRO ORDINE $K < N$

$K = N-1$
$$p_x(x_1 \dots x_n, t_1 \dots t_k) = \int p_x(x_1 \dots x_n, t_1 \dots t_n)dx_n =$$
$$= \int p_x(x_1 \dots x_n, t_1+\varepsilon \dots t_n+\varepsilon)dx_n = p_x(x_1 \dots x_{n-1}, t_1+\varepsilon \dots t_{n-1}+\varepsilon)$$

PROCESSO STAZIONARIO IN SENSO LATO

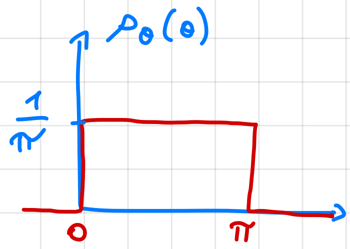
UN PROC. SI DICE STAZIONARIO IN SENSO LATO (O DEBOLMENTE STAZIONARIO) SE IL SUO VALORE MEDIO È COSTANTE E LA SUA F. DI AUTOCORRELAZIONE DIPENDE SOLO DALL' INTERVALLO TRA I TEMPI CONSIDERATI $\tau = t_2 - t_1$

$$\eta_x(t) = E\{X(t)\} = \eta_x \qquad R_x(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = R_x(\tau)$$

$$C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - \eta_x(t_1)\eta_x(t_2) = R_x(\tau) - \eta_x^2 = C_x(\tau)$$

ES : P.A. PARAMETRICO

DATO IL P.A. PARAMETRICO $X(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ DOVE a E f_0 SONO NOTI E LA FASE INIZIALE È UNA V.A. $\theta \in U(0, \pi)$. $\eta_x(t)$? $R_x(t_1, t_2)$?



$$\eta_x(x) = E\{X(t)\} = E\{a\cos(2\pi f_0 t + \theta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} a\cos(2\pi f_0 t + \theta)\, p_\theta(\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{a}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(2\pi f_0 t + \theta)\, d\theta = \frac{a}{\pi}\Big[\sin(2\pi f_0 t + \theta)\Big]\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{a}{\pi}\Big(\sin(2\pi f_0 t + \pi) - \sin(2\pi f_0 t)\Big) = -2\frac{a}{\pi}\sin(2\pi f_0 t)$$

$$R_x(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = E\{a\cos(2\pi f_0 t_1 + \theta)\, a\cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)\} =$$

$$= a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t_1 + \theta)\cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)\, p_\theta(\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{a^2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(2\pi f_0 t_1 + \theta)\cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)\, d\theta =$$

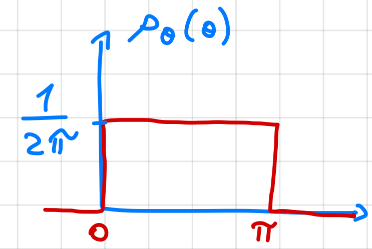
$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y)$$

$$= \frac{a^2}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\Big[\underbrace{\cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\theta)}_{=0} + \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))\Big]d\theta =$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos\big(2\pi f_0(t_1 - t_2)\big) = R_x(t_1 - t_2)$$

ES : P.A. PARAMETRICO

DATO IL P.A. PARAMETRICO $X(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ DOVE a E f_0 SONO NOTI E LA FASE INIZIALE È UNA V.A. $\theta \in U(0, 2\pi)$. $\eta_x(t)$? $R_x(t_1, t_2)$?



$$\eta_x(t) = E\{X(t)\} = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(2\pi f_0 t + \theta)\, d\theta}_{=0} = 0 = \eta_x$$

$$R_x(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t_1 + \theta)\cos(2\pi f_0 t_2 + \theta)\, d\theta =$$

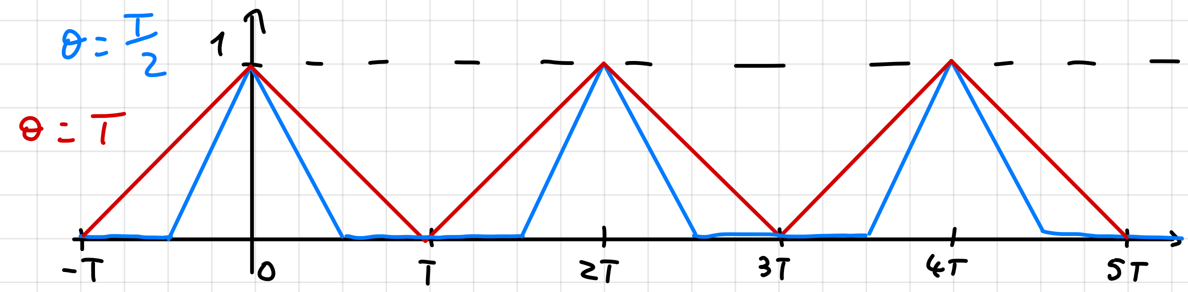
$$= \frac{a^2}{2\pi}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[\underbrace{\cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\theta)}_{=0} + \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))\Big]d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos\big[2\pi f_0(t_1 - t_2)\big] = R_x(t_1 - t_2) \qquad X(t) \text{ SSL}$$

ES : P.A. PARAMETRICO

CONSIDERO IL P.A. PARAM. $X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P(t-2nT)$ OTTENUTO CON LA PERIODICIZZAZIONE DEL SEGNALE ALEATORIO $P(t) = \left(1 - \frac{|t|}{\Theta}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2\Theta}\right)$ DOVE Θ È UNA V.A. UNIFORME SU $[0, T]$

VERIFICARE SE $X(t)$ È STAZIONARIO IN SENSO LATO.



$E[X(t)]$ NON DEVE DIPENDERE DA t

VISTO CHE $X(t)$ È COSTRUITO CON UNA PERIODICIZZAZIONE DI $P(t)$, SFRUTTO LA PERIODICITÀ DEL SEGNALE PER STUDIARLO IN PUNTI SPECIFICI TIPO $t = 2kT$ E $t = 2kT + T$

$X(2kT) = 0 \quad k \in \mathbb{Z}$ $\qquad X(2kT + T) = 1$

$h_x(2kT) = 1$ $\qquad h_x[(2k+1)T] = 0$

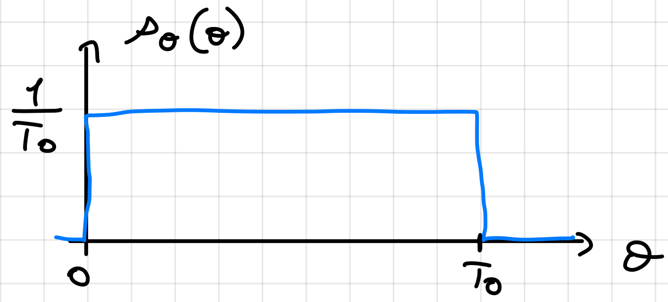
IL VALORE ATTESO DI $X(t)$ VARIA NEL TEMPO PER VIA DELLA DIPENDENZA DA K.

ES : P.A. PARAMETRICO

UNA SITUAZIONE COMUNE È CHE L'ANDAMENTO DEL SEGNALE È NOTO, MA NON SI CONOSCE ESATTAMENTE LA POSIZIONE RISPETTO A UN RIFERIMENTO TEMPORALE.

MODELLO APPROPRIATO DI P.A. TIPO $X(t) = p(t - \Theta)$ DOVE $p(t)$ È UN SEGNALE DETERMINATO E Θ È UNA V.A. CHE MODELLA L'INCERTEZZA TEMPORALE SULLA POSIZIONE DEL SEGNALE.

SUPPONGO CHE $p(t)$ SIA UN SEGNALE CON PERIODO T_0 $\quad p(t) = p(t + T_0)$ E CHE Θ SIA UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO TRA 0 E T_0



DIMOSTRARE CHE $X(t)$ È STAZIONARIO IN SENSO LATO.

$$h_x(t) = E\{X(t)\} = E\{p(t-\Theta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t-\theta) f_\Theta(\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t-\theta)\, d\theta \qquad \alpha = t - \theta \qquad d\alpha = -d\theta \qquad \begin{array}{l} \theta = 0 \to \alpha = t \\ \theta = T_0 \to \alpha = t - T_0 \end{array}$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_t^{t-T_0} p(\alpha)[-d\alpha] = \underbrace{\frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^{t} p(\alpha)\, d\alpha}_{\text{COSTANTE}} \to h_x(t) = h_x$$

↳ PERIODICA CON PERIODO T_0

SE $t = \frac{T_0}{2}$ $\qquad h_x = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} p(\alpha)\, d\alpha$ $\quad$ VALORE MEDIO TEMPORALE DEL SEGNALE $p(t)$

$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2)$?

$$E\{X(t_1) X(t_2)\} = E\{p(t_1 - \Theta) p(t_2 - \Theta)\} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t_1 - \theta) p(t_2 - \theta)\, d\theta \qquad \begin{array}{l} \alpha = t_1 - \theta \\ d\alpha = -d\theta \end{array}$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{t_1 - T_0}^{t_1} p(\alpha) p(\alpha + t_2 - t_1)\, d\alpha =$$

↳ PRODOTTO DI 2 FUN. PERIODICHE IN T_0 → PERIODICA IN T_0

SCELGO $t_1 = \frac{T_0}{2}$ $\quad = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} p(\alpha)\, p[\alpha - (t_1 - t_2)]\, d\alpha = R_x(t_1 - t_2)$

$x(t)$ SSL

$\tau = t_1 - t_2$ $\quad R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} p(\alpha)\, p(\alpha - \tau)\, d\alpha$

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DEL SEGNALE DETERMINATO E PERIODICO $p(t)$ CON PERIODO T_0

PROPRIETÀ DELL'AUTOCORRELAZIONE

1) L'AUTOCORR. DI UN PROC. REALE, STAZIONARIO ALMENO IN SENSO LATO, È UNA FUNZIONE REALE E PARI

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = E[x(t'-\tau)x(t')] = E[x(t')x(t'-\tau)] = R_x(\tau), \quad t' = t+\tau$$

$$R_x(0) = P_x \geq 0$$

$R_x(0)$ SI DICE "POTENZA MEDIA STATISTICA (ISTANTANEA)" DEL PROC.
SE QUESTO È ALMENO SSL ALLORA $R_x(t,t) = R_x(0)$ È UNA COSTANTE, CIOÈ LA POTENZA MEDIA DISSIPATA IN QUALUNQUE ISTANTE.

2) L'ACF DI UN PROC. ALMENO SSL ASSUME VALORE MASSIMO IN ZERO

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$$

$$E[(x(t+\tau) \pm x(t))^2] \geq 0$$

$$\Rightarrow E[(x(t+\tau) \pm x(t))^2] = E[x^2(t+\tau)] \pm 2E[x(t+\tau)x(t)] + E[x^2(t)] =$$

$$= R_x(0) \pm 2R_x(\tau) + R_x(0) = 2R_x(0) \pm 2R_x(\tau) \geq 0 \quad \rightarrow \quad |R_x(\tau)| \leq R_x(0)$$

3) SE UN PROC. CONTIENE UNA COMPONENTE PERIODICA $x(t) = x(t+T_0)$, ALLORA ANCHE L'ACF CONTIENE UNA COMPONENTE PERIODICA CON LO STESSO PERIODO

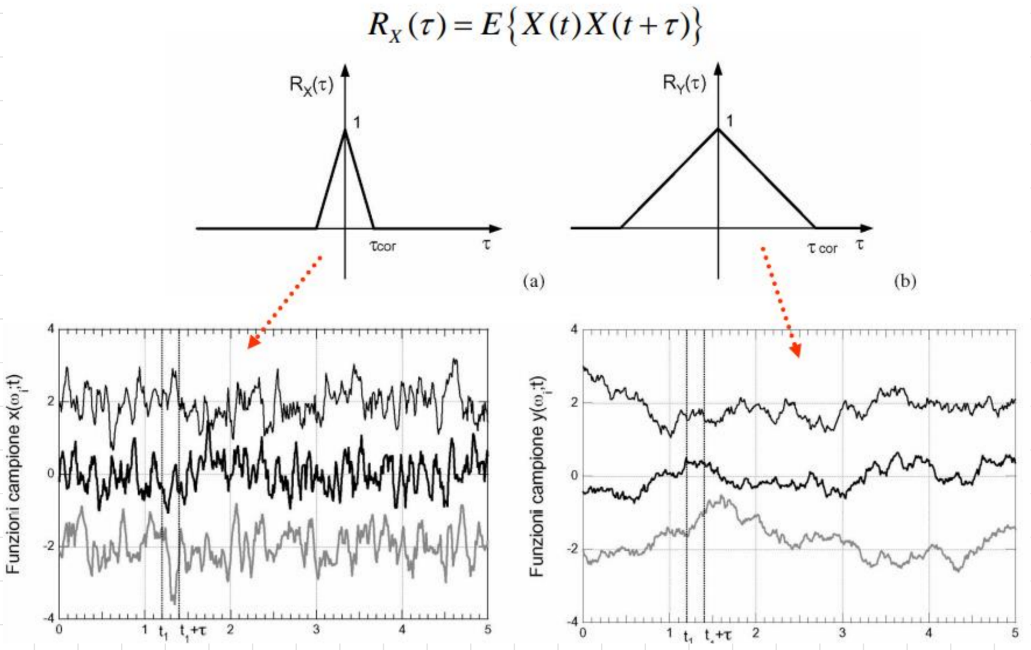
$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = E[x(t)x(t+\tau+T_0)] = R_x(\tau+T_0)$$

4) SE L'ACF DI UN PROC. SSL CONTIENE COMPONENTI PERIODICHE, ALLORA VALE:

$$\lim_{\tau \to +\infty} R_x(\tau) = \lim_{\tau \to +\infty} [C_x(\tau) + \eta_x^2] = \lim_{\tau \to +\infty} C_x(\tau) + \eta_x^2 = \eta_x^2$$

AL CRESCERE DI τ LA DISTANZA TRA t E $t-\tau$ AUMENTA, QUINDI LE FUNZIONI CAMPIONE DEL PROC TROVANO UN'OCCASIONE MAGGIORE DI VARIARE SENSIBILMENTE, RIDUCENDO PROGRESSIVAMENTE LA LORO COVARIANZA.

AUTOCORRELAZIONE GRAFICAMENTE



LE 3 FUNZIONI RIPORTATE SONO 3 DIVERSE REALIZZAZIONI (SHIFTATE SU E GIÙ PER LEGGERE MEGLIO) DI 2 PROC. $X(t)$ E $Y(t)$ CON STATISTICHE DEL PRIMO ORDINE, MA CON VELOCITÀ DI VARIAZIONE DIVERSE.

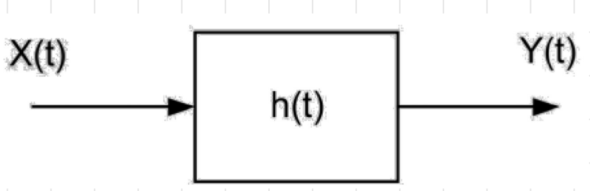
L'ACF MISURA LA RAPIDITÀ DI VARIAZIONE DEL SEGNALE.

PER QUANTIFICARE QUESTA VELOCITÀ INTRODUCO UN INTERVALLO DI TEMPO τ_{cor} CHE RAPPRESENTA LA MINIMA DISTANZA TRA 2 ISTANTI DOPO IL QUALE LE VARIABILI ESTRATTE DEL PROC. AGLI ISTANTI t E $t+\tau$ SIANO INCORRELATE

CHIAMANDO TALI VARIABILI A e B AVRÒ:

$$C_{AB} = E[AB] = R_X(t_A, t_B) = R_X(t_A - t_B) = R_X(\tau_{AB}) = 0 \qquad \tau_{AB} \geq \tau_{cor}$$

FILTRAGGIO DI UN PROCESSO ALEATORIO



INVIANDO UN P.A. $X(t)$ IN INGRESSO AD UN SLS, PROVO A STABILIRE LE CARATTERISTICHE DEL PROC. $Y(t)$ IN USCITA IN FUNZIONE DI QUELLE DI $X(t)$

TALE RELAZIONE TRA INGRESSO E USCITA RIGUARDA LA CONVOLUZIONE

$y(\omega,t) = x(\omega,t) \otimes h(t)$ DOVE $h(t)$ È LA RISPOSTA IMPULSIVA DEL SISTEMA.

QUINDI

- $$\eta_Y(t) = E[Y(t)] = E[X(t)\otimes h(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) X(t-\alpha)\, d\alpha\right] = \int h(\alpha)\, E[X(t-\alpha)]\, d\alpha =$$
$$= \int h(\alpha)\, \eta_X(t-\alpha)\, d\alpha = \eta_X(t) \otimes h(t)$$

- $$R_Y(t_1,t_2) = E[Y(t_1)Y(t_2)] = E[(X(t_1)\otimes h(t_1))(X(t_2)\otimes h(t_2))] =$$
$$= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) h(t_1-\alpha)\, d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} X(\beta) h(t_2-\beta)\, d\beta\right] =$$
$$= \iint E[X(\alpha)h(t_1-\alpha)X(\beta)h(t_2-\beta)]\, d\alpha\, d\beta = \int (R_X(t_1,\beta)\otimes h(t_1))\, h(t_2-\beta)\, d\beta =$$
$$= R_X(t_1,t_2) \otimes h(t_1) \otimes h(t_2)$$

NEL CASO PARTICOLARE IN CUI $X(t)$ È SSL ALLORA

- $\eta_x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\,\eta_x(t-\alpha)\,d\alpha = \int h(\alpha)\,\eta_x\,d\alpha = \eta_x \int h(\alpha)\,d\alpha = \eta_x \underline{H(0)} = \eta_Y$

↳ RISP IN FREQ DEL SISTEMA

- $R_Y(t, t-\tau) = E\left[Y(t)\,Y(t-\tau)\right] = E\left[\left(X(t)\otimes h(t)\right)\left(X(t-\tau)h(t-\tau)\right)\right] =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau+\beta-\alpha)\,h(\alpha)\,h(\beta)\,d\alpha\,d\beta = \int R_X(\tau+\beta)\otimes h(\tau)\,h(\beta)\,d\beta =$$

$$= R_X(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)$$

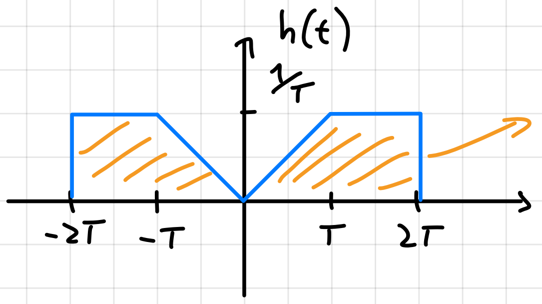
DATA $r_h(\tau) = h(\tau)\otimes h(-\tau) \quad \Rightarrow \quad R_Y(\tau) = R_X(\tau)\otimes \underline{r_h(\tau)}$

↳ ACF DELLA RISPOSTA IMPULSIVA DEL FILTRO

ES: FILTRAGGIO DI UN P.A. SSL

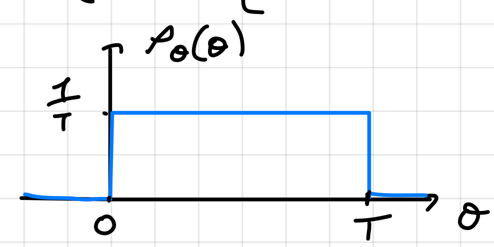
CONSIDERO IL P.A. PARAMETRICO $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT-\theta)$ $\quad\theta$ V.A. UNIFORME IN $[0,T)$

TROVA $\eta_Y(t)$ DEL PROC. $Y(t)$ OTTENUTO DAL FILTRAGGIO DI $X(t)$ CON UN FILTRO LA CUI RISPOSTA IMPULSIVA $h(t)$ È



$= T\cdot\frac{1}{T} + T\cdot\frac{1}{T} + T\cdot\frac{1}{T} = 3$

$\eta_Y(t) = \eta_X(t)\otimes h(t)$



$$\eta_Y(t) = E\{X(t)\} = E\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT-\theta)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(\theta)\sum_k \delta(t-kT-\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_k \delta(t-kT-\theta)\,d\theta = \frac{1}{T}\sum_k \int_0^T \delta(t-kT+\theta)\,d\theta$$

$u = t-kT+\theta$

$du = d\theta$

$$= -\frac{1}{T}\sum_k \int_{t-kT}^{t-(k+1)T}\delta(u)\,du = \frac{1}{T}\sum_k \int_{t-kT}^{t-(k+1)T}\delta(u)\,du =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_k \int_{t-(k+1)T}^{t-kT}\delta(u)\,du = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(u)\,du = \frac{1}{T} = \eta_X(t) = \eta_X$$

$$\eta_Y = \eta_X\,H(0) = \eta_X\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = \frac{1}{T}\cdot 3 = \frac{3}{T}$$

DENSITÀ DI POTENZA

NEL FILTRAGGIO DI UN P.A. CONVIENE SPESSO ANALIZZARLO IN FREQ.

NEL CASO DI PROC. SSL LE FUNZIONI CAMPIONE DEL PROC. NON POSSONO ESSERE SEGNALI AD ENERGIA FINITA (TENDONO A 0 SE $t \to \infty$), SONO INVECE A POTENZA FINITA, CIOÈ VUOL DIRE CHE AMMETTERANNO UNA CERTA DENSITÀ DI POTENZA.

LA DEF DI FUNZIONE DI DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA $S_x(f)$ PER UN SEGNALE ALEATORIO È MOLTO SIMILE A QUELLA RELATIVA AD UN SEGNALE DETERMINATO A POTENZA FINITA.

PER UN P.A. DEVO PENSARE DI ESEGUIRE L'OPERAZIONE DI TRONCAMENTO TEMPORALE SU CIASCUNA FUNZIONE CAMPIONE, OTTENENDO UNA QUANTITÀ ALEATORIA VARIABILE DA FUNZIONE CAMPIONE A FUNZIONE CAMPIONE, CIOÈ CON IL RISULTATO DELL'ESPERIMENTO

$$\tilde{S}_x(\omega, f) = \lim_{T \to \infty} \frac{|\tilde{X}_T(\omega, f)|^2}{T} \qquad \text{DOVE} \qquad \tilde{X}_T(\omega, f) \Longleftrightarrow x(\omega, t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

IL <u>TEOREMA DI WIENER-KHINTCHINE</u> DICE CHE PER OTTENERE LA DENSITÀ SPETTRALE DI UN PROC. IN MODO INDIPENDENTE DALLA PARTICOLARE FUNZIONE CAMPIONE, BISOGNA AGGIUNGERE UN'OPERAZIONE DI VALOR MEDIO A $X_T(f)$

$$S_x(\omega, f) = E\left[\tilde{S}_x(\omega, f)\right] = \lim_{T \to +\infty} \frac{E\left[|\tilde{X}_T(\omega, f)|^2\right]}{T}$$

QUESTA DEF È COERENTE CON QUELLA PER SEGNALI DETERMINATI, MA NON È SEMPRE FACILMENTE APPLICABILE IN PRATICA. PER I PROC. STAZIONARI SI USA ALLORA UNA DEF. DIVERSA DI DENSITÀ SPETTRALE, CIOÈ QUELLA PER SEGNALI DETERMINATI, PER CUI LA <u>DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA CORRISPONDE ALLA TRASFORMATA DI FOURIER DELL'ACF</u> $R_x(\tau)$

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = 2\int_0^{+\infty} R_x(\tau)\cos(2\pi f\tau)\, d\tau$$

<u>DIM</u>

$$R_x(\tau) = E\left[X(t)X(t-\tau)\right] \qquad R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_0^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{0} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau =$$

$$= \int_0^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} R_x(-\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau =$$

$$= \int_0^{+\infty} R_x(\tau)\left(e^{-j2\pi f\tau} + e^{-j2\pi f\tau}\right) d\tau = 2\int_0^{+\infty} R_x(\tau)\cos(2\pi f\tau)\, d\tau$$

VISTO CHE $R_x(\tau)$ REALE E PARI, ANCHE $S_x(f)$ LO SARÀ E SARÀ ANCHE POSITIVA

LA <u>POTENZA MEDIA STATISTICA</u> P_x DI UN PROC PUÒ ESSERE CALCOLATA INTEGRANDO LA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA SU TUTTO L'ASSE DELLE FREQ.:

$$P_x = E\left[x^2(t)\right] = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df = 2\int_0^{+\infty} S_x(f)\, df$$

AVENDO UN SISTEMA DI INGRESSO $X(t)$ E DI USCITA $Y(t)$ ENTRAMBI SSL, SI PUÒ METTERE IN RELAZIONE LE LORO DENSITÀ DI POTENZA

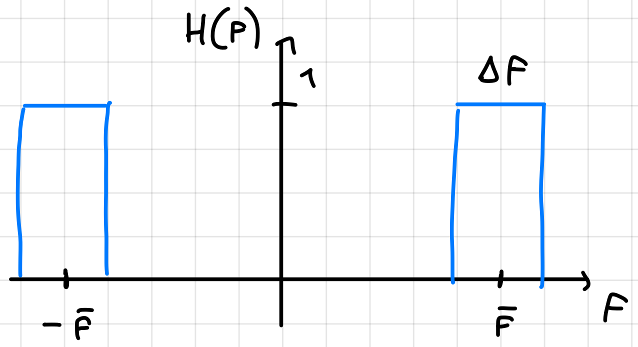
$$S_Y(F) \Leftrightarrow R_Y(\tau) = R_X(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) \Leftrightarrow S_X(F)\,H(F)\,H(-F)$$

$$H(F) = H^*(F) \quad \text{SE } H(F) \in \mathbb{R} \qquad H(-F) = H(F)$$

$$S_Y(F) = S_X(F)\,H(F)\,H^*(F) = S_X(F)\,|H(F)|^2$$

LA RELAZIONE DEL FILTRAGGIO PERMETTE DI DIMOSTRARE CHE $S_X(F)$ È NON NEGATIVA E DESCRIVE LA DISTR. DI FREQ. SULLE VARIE COMPONENTI FREQUENZIALI DELLO SPETTRO DEL SEGNALE ALEATORIO $X(t)$

FILTRANDO IL SEGNALE CON UN <u>FILTRO PASSA-BANDA IDEALE</u>, LA POTENZA DEL PROCESSO IN USCITA PUÒ ESSERE CALCOLATA DI CONSEGUENZA



$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(F)\,dF = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(F)\,|H(F)|^2\,dF = 2\int_{\bar{F}-\frac{\Delta F}{2}}^{\bar{F}+\frac{\Delta F}{2}} S_X(F)\,dF$$

SE SI RIDUCE PROGRESSIVAMENTE LA BANDA PASSANTE DEL FILTRO SI PUÒ APPROSSIMARE $S_X(F)$ ALL'INTERNO DELLA BANDA STESSA CON UNA COSTANTE

$$P_Y \approx 2\Delta F\, S_X(\bar{F})$$

P_Y RAPPRESENTA IL CONTRIBUTO DELLA POTENZA TOTALE P_X NELLE SOLE COMPONENTI DI $X(t)$ CON FREQ. APPARTENENTI ALL'INTERVALLO PASSANTE DEL FILTRO

ES : DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA

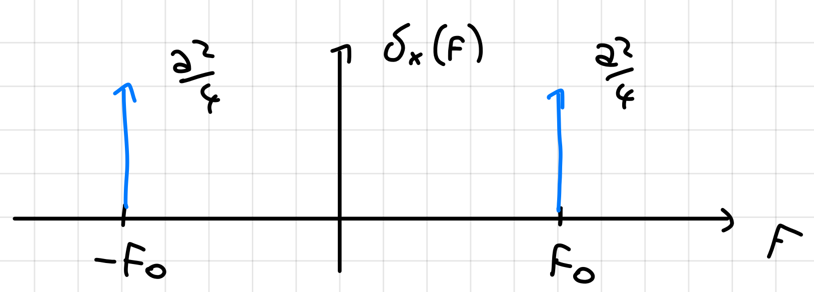
CALCOLARE LA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DEL PROC. PARAMETRICO

$X(t) = a\cos(2\pi F_0 t + \Theta)$ DOVE Θ È UNA V.A. UNIFORME SU $[0, 2\pi]$

SO CHE $R_X(\tau) = \frac{a^2}{2}\cos(2\pi F_0 \tau)$ (ES PREC)

$$S_X(F) = \mathcal{F}(R_X(\tau)) = \frac{a^2}{2}\mathcal{F}(\cos(2\pi F_0 t)) = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\delta(F-F_0) + \delta(F+F_0)\right)\right] =$$

$$= \frac{a^2}{4}\delta(F-F_0) + \frac{a^2}{4}\delta(F+F_0)$$

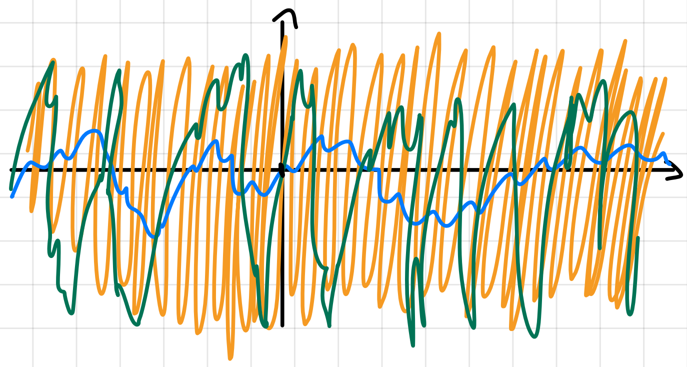


RUMORE BIANCO A TEMPO CONTINUO

LA GRANDEZZA CORRISPONDENTE AL TEMPO DI CORRELAZIONE IN AMBITO FREQUENZIALE È LA BANDA DELLO SPETTRO DI POTENZA DEL PROCESSO: DUE ESECUZIONI DELLO STESSO PROCESSO TENDONO AD ESSERE MENO CORRELATI SE POSSONO VARIARE PIÙ IN FRETTA.

SE IL TEMPO DI AUTOCORRELAZIONE È PICCOLO LA BANDA DEL SEGNALE SARÀ GRANDE. QUANTO È MAGGIORE LA RAPIDITÀ DI VARIAZIONE TRA DUE REALIZZAZIONI DI UN PROC, PIÙ GRANDE SARÀ LA BANDA DEL SUO SPETTRO DI POTENZA.

METTENDO A CONFRONTO PIÙ REALIZZAZIONI DI PROC. CON BANDA VIA VIA CRESCENTE IN MODO ILLIMITATO, MA CON STESSO VALORE IN $F=0$, LA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA TENDE A DIVENTARE COSTANTE, MENTRE IL TEMPO DI CORRELAZIONE τ_{cor} TENDERÀ A RIDURSI.



$B = 1\ kHz$

$B = 10\ kHz$

$B = 100\ kHz$

$$S_x(0) = \xi$$

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \qquad S_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\cdot 1\, d\tau \qquad \xi = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\, d\tau$$

AL LIMITE SI RAGGIUNGE UNA SITUAZIONE IN CUI ACF DIVENTA IMPULSIVA

$$S_x(f) = S_x(0) = \xi \iff R_x(\tau) = \xi\,\delta(\tau)$$

UN P.A. SSL CHE PRESENTA QUESTE CARATTERISTICHE SI DICE "δ-CORRELATO" O "RUMORE BIANCO", UN PROC CHE POSSIEDE SEMPRE VALORE MEDIO NULLO.

BASTA SAPERE CHE LA MOLTEPLICITÀ DEI FATTORI CHE LO COMPONGONO, PER IL TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE, RENDE VALIDA QUESTA RAPPRESENTAZIONE

LA DENSITÀ SPETTRALE DEL RUMORE TERMICO SI OTTIENE COSÌ

$$S_n(f) = 2kT_R R \frac{|f|/f_0}{e^{(|f|/f_0)} - 1} \qquad f_0 = \frac{kT_R}{h} \qquad k \text{ (BOLTZMANN)} \quad h \text{ (PLANCK)}$$

SI NOTA CHE PER VALORI DI f TC $|f| \ll f_0$ IL VALORE DELLA DENSITÀ RESTA PRATICAMENTE COSTANTE : $S_n(f) \simeq 2kT_R R$

PROCESSI ALEATORI GAUSSIANI A TEMPO CONTINUO

UN P.A. $X(t)$ SI DICE GAUSSIANO SE LE n V.A. $X(t_i)$ DA ESSO ESTRATTE AGLI ISTANTI $t_1 \dots t_n$ SONO CONGIUNTAMENTE GAUSSIANE QUALSIASI SIA IL NUMERO DI CAMPIONI SCELTO. SE POI LE V.A. GAUSSIANE $X(t_i)$ SONO INCORRELATE, ALLORA SONO ANCHE INDIPENDENTI.

LA PARTICOLARE FORMA DELLA DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONGIUNTA GAUSSIANA COMPORTA CHE SE UN PROCESSO DI QUESTO TIPO $X(t)$ È SSS, ALLORA LO È ANCHE IN SENSO STRETTO (SSS)

VISTO CHE DEVO INTERAGIRE CON PROC. GAUSSIANI TIPO IL RUMORE TERMICO, SONO COSTRETTO A DOVERLI FILTRARE VIA PER ESTRAPOLARE IL CONTENUTO DEI SEGNALI DI INTERESSE, UN'OPERAZIONE NON DEL TUTTO RISOLVIBILE VISTO CHE IL RUMORE BIANCO POSSIEDE COMPONENTI A CIASCUN ORDINE DI FREQ.

DEFINISCO ORA UN SISTEMA $h(t)$ DI INGRESSO $X(t)$ E USCITA $Y(t)$: SE $X(t)$ È GAUSSIANO SI PUÒ DIMOSTRARE CHE LO È ANCHE $Y(t)$. PER QUESTO TIPO DI PROC. SI PUÒ FORNIRE UNA DESCR. STATISTICA COMPLETA DEL PROC. IN USCITA DI UN SISTEMA LTI IN FUNZIONE DELLE CARATTERISTICHE D'INGRESSO. IN PIÙ SE L'INGRESSO È SSL (QUINDI SSS) ALLORA ANCHE IL PROC. IN USCITA LO SARÀ.

DATO UN SEGNALE IN INGRESSO GAUSSIANO $X(t)$, CAMPIONATO AL TEMPO t_0 PER OTTENERE $X(t_0)$, POSSO DIRE CHE:

$$X(t_0) \in \mathcal{N}(\eta_x(t_0), \sigma_x^2(t_0)) \qquad \sigma_x^2(t_0) = P_x(t_0) - \eta_x^2(t_0) = R_x(t_0,t_0) - \eta_x^2(t_0)$$

SE IL PROC È ANCHE STAZIONARIO, ALLORA:

$$\eta_x(t) = \eta_x \qquad R_x(t_1,t_2) = R_x(\tau) \qquad \tau = t_2 - t_1$$

$$P_x = E[X^2(t)] = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\,df$$

$$\sigma_x^2 = P_x - \eta_x^2$$

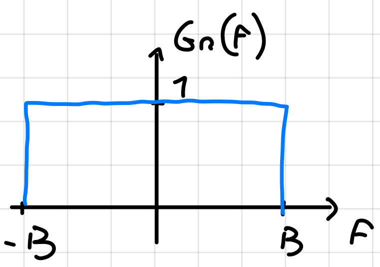
NEL CASO DEL RUMORE TERMICO BIANCO $W(t)$

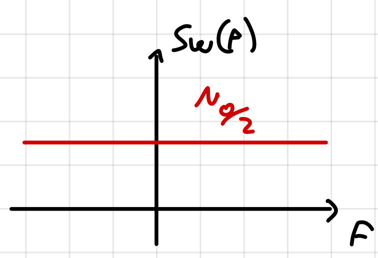
$$\eta_w = 0 \qquad R_w(\tau) = k\delta(\tau) \qquad S_w(f) = R_w(0) = k$$

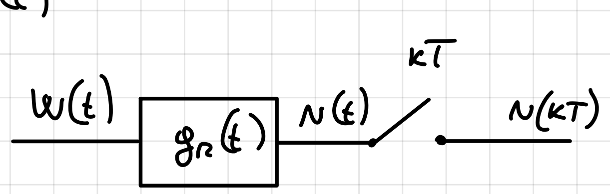
$$P_w = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(f)\,df = \int k\,df = +\infty$$

FILTRO PASSA-BASSO IDEALE

SUPPONGO DI PORTARE IN INGRESSO AD UN FILTRO $G_R(f)$ PASSA BASSO IDEALE CON BANDA "B" DEL RUMORE BIANCO DI DENSITÀ SPETTRALE DI VALORE $S_w(f) = N_0/2$ PER OTTENERE IN USCITA UN CERTO SEGNALE $N(t)$







$$S_N(f) = S_w(f)\,|G_R(f)|^2 \rightarrow S_N(f) = \begin{cases} N_0/2 & |f| < B \\ 0 & |f| > B \end{cases} = \frac{N_0}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$P_N = N_0 B$$

VISTO CHE L'ANTITRASFORMATA DI $S_N(f)$ È $R_N(\tau)$, POSSO CALCOLARE

$$R_N(\tau) = 2B\,\mathrm{sinc}(2B\tau)$$

SUPPONENDO DI CAMPIONARE $N(t)$ A INTERVALLI $T=\frac{1}{2B}$ PER OTTENERE DEI VALORI $N(kT)$, PER IL FATTO CHE QUESTI ULTIMI SONO INCORRELATI E INDIP. AVRO:

$$\eta_N(kT) = \eta_W(kT)\,G_R(0) = 0\cdot G_R(0) = 0$$

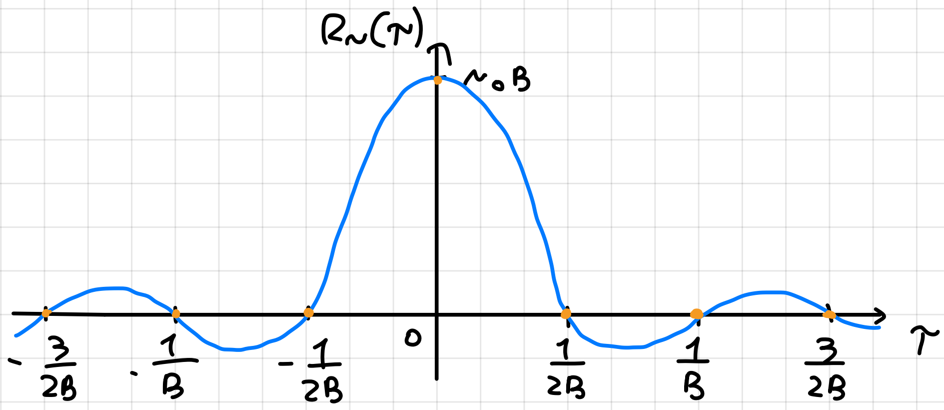
$$\sigma^2_N(kT) = P_N(kT) - \eta_N(kT) = P_N(kT) - 0 = R_N(0) = N_0 B\,\mathrm{sinc}(0) = N_0 B = \int_{-\infty}^{+\infty} S_N(f)\,df$$

$$N(kT) \in \mathcal{N}(0, N_0 B)$$

OGNI CAMPIONE RAPPRESENTA UNA V.A. GAUSSIANA CON VALORE MEDIO NULLO E VARIANZA $N_0 B$.

L'ACF TRA I CAMPIONI, PER IL FATTO CHE IL SENO CARDINALE SI ANNULLA PER OGNI VALORE DI $k/2B$, SARÀ ESATTAMENTE ZERO:

$$R_N(k_1T, k_2T) = E[N(k_1T)N(k_2T)] = R_N((k_1-k_2)T) = R_N\left(\frac{k_1-k_2}{2B}\right) = 0 \qquad \forall k_1 \neq k_2$$

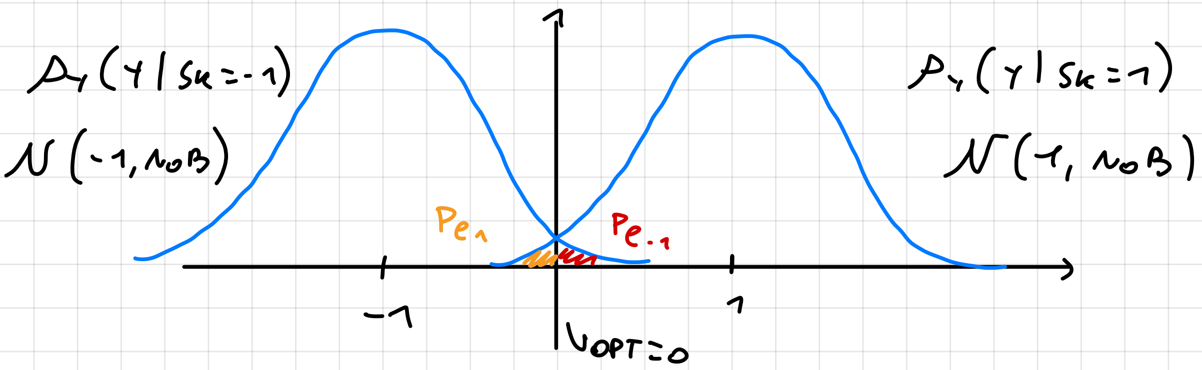


IN PRATICA I RICEVITORI OTTENGONO (CAMPIONANDO IL SEGNALE IN INGRESSO) DEI CAMPIONI $Y(kT) = S_k + N(kT)$ DOVE S_k È IL SIMBOLO IN INGRESSO E $N(kT)$ LA COMPONENTE RICEVUTA DI RUMORE BIANCO. I CAMPIONI SONO TRA LORO INDIP., QUINDI IL RICEVITORE PUÒ GESTIRLI CAMPIONE PER CAMPIONE.

SE SUL CANALE POSSONO TRANSITARE SOLO 2 SIMBOLI $S_k = \{-1, 1\}$, ALLORA POSSO TROVARE 2 FUNZIONI DI PROBABILITÀ RELATIVE ALL'EVENTO "HO RICEVUTO $Y(kT)$ AVENDO INVIATO S_k", OVVERO DUE GAUSSIANE DI VALORE MEDIO S_k E VARIANZA N_0B.

SE I SIMBOLI SONO EQUIPROBABILI HA SENSO DEFINIRE UNA SOGLIA V_{OPT} PER APPLICARE UNA DECODIFICA A MASSIMA VEROSIMIGLIANZA: IL RICEVITORE INTERPRETERÀ QUALSIASI VALORE A SX DI V_{OPT} COME "-1" E A DX COME "1".

LA PROBABILITÀ DI COMMETTERE UN ERRORE, QUINDI DI INTERPRETARE IL SIMBOLO SBAGLIATO SARÀ LA PROBABILITÀ CONDIZIONATA $P(e\,|\,Y(kT))$, RICONOSCIBILE SUL GRAFICO COME IL VOLUME DELLA GAUSSIANA CHE ECCEDE LA SOGLIA V_{OPT}



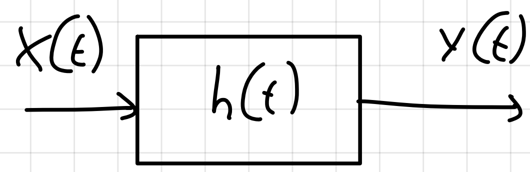
$$P_{e_{-1}} = P(e\,|\,S_k=1) = \phi\left(\frac{V_{OPT}+1}{\sqrt{N_0B}}\right) = P_{e_1} = P(e\,|\,S_k=1)$$

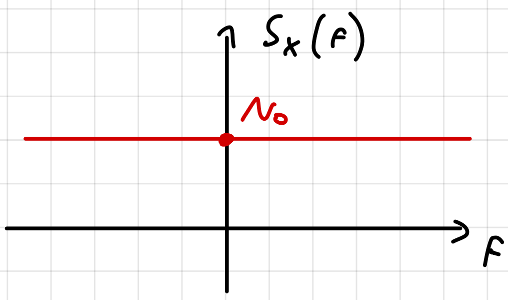
ES : PROC GAUSSIANO BIANCO

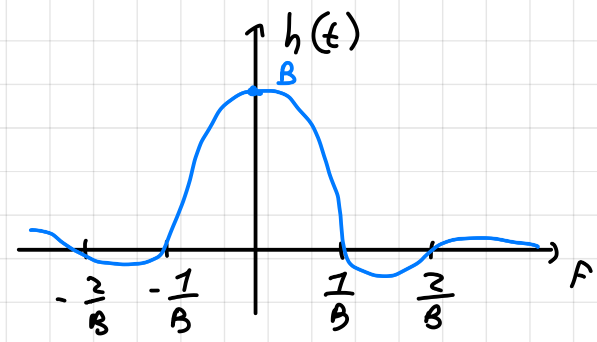
Un processo bianco Gaussiano X(t) con densità spettrale di potenza pari a N_0 viene dato in ingresso ad un sistema lineare stazionario con risposta impulsiva $h(t) = B \cdot sinc(Bt)$

a) Calcolare il valore medio del processo in uscita Y(t)

b) Calcolare la potenza del processo in uscita Y(t)





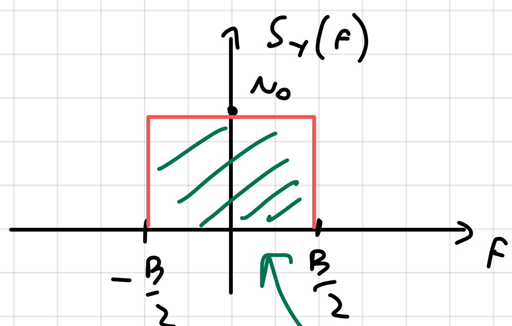


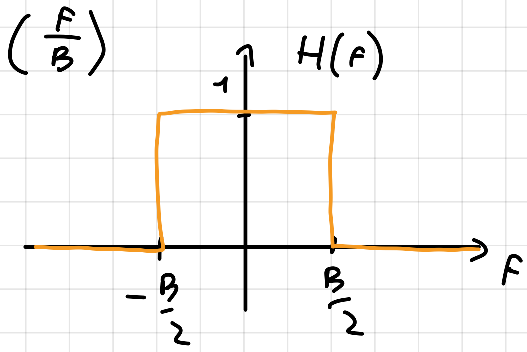
$$S_Y(f) = S_X(f)\,|H(f)|^2 = \begin{cases} N_0 & |f| < \frac{B}{2} \\ 0 & \text{ALTRIM} \end{cases}$$

$$h(t) = B\,sinc(Bt)$$

$$\Updownarrow$$

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{B}\right)$$





$$\eta_X = \eta_X(t) = 0$$

$$\eta_Y(t) = \eta_Y = \eta_X\,H(0) = 0$$

$$P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)\,df = B N_0$$

ES: PROCESSO GAUSSIANO BIANCO IN BANDA B

Sia N(t) un processo bianco Gaussiano in banda B con potenza N_0B. Viene dato in ingresso ad un sistema lineare stazionario con risposta impulsiva $h(t) = e^{-2t}u(t)$.

a) Si calcoli la densità spettrale di potenza del processo in uscita X(t).

b) Si determini la potenza del processo in uscita X(t).

Supponendo di campionare il processo X(t) al tempo t=0, sia X=X(0) a v.a. estratta.

c) Si calcoli la densità di probabilità di X.

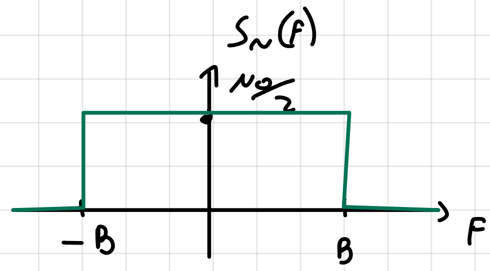
a) $h(t) = e^{-2t}u(t)$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-2t} e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-2(1-j\pi f)t}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2(1+j\pi f)}\left[e^{-2(1-j\pi f)t}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2(1+j\pi f)}(0-1) = \frac{1}{2+j2\pi f}$$

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{4+4\pi^2 f^2}$$

$$S_x(f) = S_N(f)\,|H(f)|^2$$



$$S_N(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & |f| \le B \\ 0 & \text{ALTRIM} \end{cases}$$

$$S_x(f) = \begin{cases} \frac{1}{4+4\pi^2 f^2}\,\frac{N_0}{2} & |f| \le B \\ 0 & \text{ALTRIM.} \end{cases}$$

b) $$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df = \frac{N_0}{8}\int_{-B}^{B} \frac{1}{1+\pi^2 f^2}\, df =$$

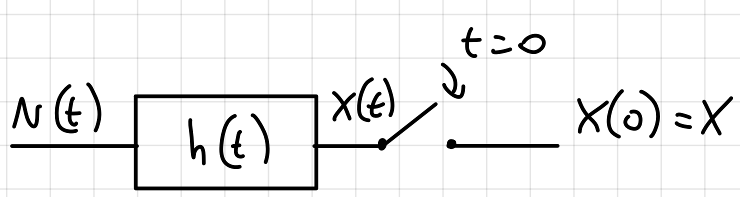
$\alpha = \pi f \qquad f = \frac{\alpha}{\pi}$

$df = \frac{d\alpha}{\pi}$

$$= \frac{N_0}{8\pi}\int_{-\pi B}^{\pi B} \frac{1}{1+\alpha^2}\, d\alpha = \frac{N_0}{8\pi}\arctan(\alpha)\Big|_{-\pi B}^{\pi B} = \frac{N_0}{8\pi}\left(\arctan(\pi B) - \arctan(-\pi B)\right) =$$

$$= \frac{N_0}{8\pi}\, 2\arctan(\pi B) = \frac{N_0}{4\pi}\arctan(\pi B)$$

c)



$X = X(0)$ V.A. GAUSSIANA $\qquad X \in \mathcal{N}(\eta_x, \sigma_x^2)$

$\eta_x = \eta_N H(0) = 0 \qquad \sigma_x^2 = P_x - \eta_x^2 = P_x$

$X \in \mathcal{N}(0, P_x) \qquad f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi P_x}}\, e^{-\frac{x^2}{2P_x}}$

ES : PROCESSO GAUSSIANO BIANCO

Sia dato un sistema LTI con la risposta impulsiva $h(t) = e^{-2t}u(t)$ dell'esercizio precedente. All'ingresso del sistema viene posto il processo X(t) Gaussiano bianco con correlazione $R_X(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$.

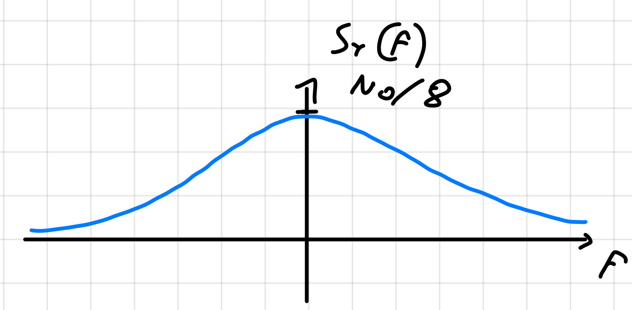
1) Calcolare la correlazione e la densità spettrale di potenza del processo Y(t) all'uscita del sistema e rappresentarle graficamente.
2) Calcolare la potenza dei processi X(t) e Y(t).
3) Determinare la densità di probabilità della variabile aleatoria $Y(t_0)=Y$ estratta dal processo di uscita al generico istante t_0.
4) Calcolare la probabilità che $Y > \sqrt{\frac{N_0}{2}}$.

1) $R_Y(\tau)$? $S_Y(f)$?

$$R_X(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \Leftrightarrow S_X(f) = \frac{N_0}{2}$$

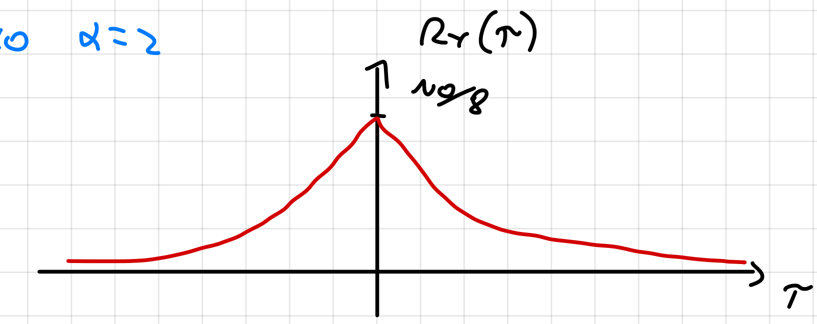
$$h(t) = e^{-2t}u(t) \qquad H(f) = \frac{1}{2+j2\pi f}$$

$$S_Y(f) = S_X(f)\,|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}\,\frac{1}{4+4\pi^2 f^2} = \frac{N_0}{8}\,\frac{1}{1+\pi^2 f^2}$$



$$e^{-\alpha|t|} \Leftrightarrow \frac{2}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{\alpha^2}\pi^2 f^2} \qquad \text{IO HO } \alpha = 2$$

$$R_Y(\tau) = \text{ATCF}\left[S_Y(f)\right] = \frac{N_0}{8}e^{-2|\tau|}$$



2) P_X ? P_Y ?

$$P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N_0}{2}\,df = +\infty$$

$$P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)\,df = \frac{N_0}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\pi^2 f^2}\,df = \frac{N_0}{8\pi}\arctan(\alpha)\Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$\alpha = \pi f \qquad df = \frac{d\alpha}{\pi}$$

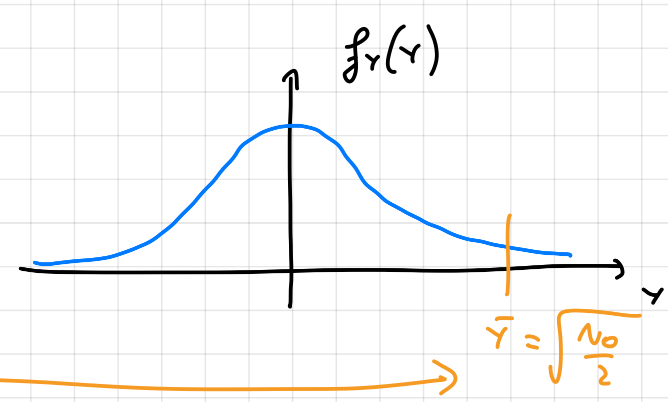
$$= \frac{N_0}{8\pi}\left(\arctan(+\infty) - \arctan(-\infty)\right) = \frac{N_0}{8\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{N_0}{8\pi}\pi = \frac{N_0}{8}$$

3) $Y(t)$ — t_0 — $Y(t_0) = Y$ $\qquad$ Y V.A. GAUSSIANA $\qquad f_Y(y)$?

$$\eta_Y(t) = \eta_X(t) \otimes h(t) = 0 \qquad \eta_X(t_0) = \eta_Y = 0 \qquad \sigma_Y^2 = P_X - \eta_Y^2 = P_Y = \frac{N_0}{8}$$

X(t) BIANCO

$$f_Y(y, t_0) = f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{N_0}{8}}}\,e^{-\frac{y^2}{2\frac{N_0}{8}}}$$

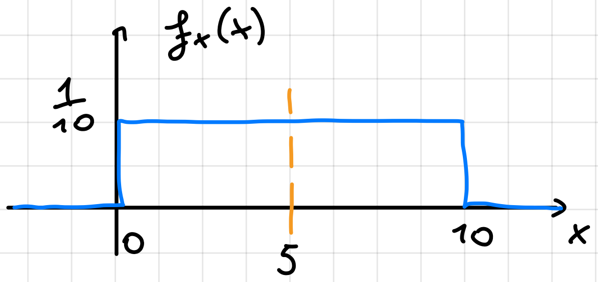


4) $P\left(Y > \sqrt{\frac{N_0}{2}}\right)$?

$$= Q\left(\frac{\bar{Y} - \eta_X}{\sigma_Y}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}{\sqrt{\frac{N_0}{8}}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q(2) = 0{,}0228$$

ES : P.A. CON AUTOCOVARIANZA E DDP NOTE

L'autocovarianza di un processo aleatorio X(t) con densità di probabilità distribuita uniformemente tra 0 e 10 è data da $C_X(\tau) = A\,e^{-\alpha|\tau|}\cos(2\pi f_0 \tau)$.
Calcolare la densità spettrale di potenza di X(t).



$$S_x(F)\,? = TCF\left[R_x(\tau)\right]$$

$$R_x(\tau) = C_x(\tau) + \mu_x^2 \qquad \mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx = 5$$

$$R_x(\tau) = A\, e^{-\alpha|\tau|} \cos(2\pi F_0 t) + 25$$

$$S_x(F) = TCF\left[R_x(\tau)\right] = 25\,\delta(F) + A\, TCF\left[e^{-\alpha|\tau|}\cos(2\pi F_0 \tau)\right]$$

$$S_{x_0}(F) = TCF\left[e^{-\alpha|\tau|}\right] = \frac{2}{\alpha}\,\frac{1}{1+\frac{4}{\alpha^2}\pi^2F^2}$$

$$S_x(F) = 25\,\delta(F) + A\left(\frac{S_{x_0}(F-F_0) + S_x(F-F_0)}{2}\right) = 25\,\delta(F) + \frac{A}{\alpha}\left(\frac{1}{1+\frac{4}{\alpha^2}\pi^2(F-F_0)^2} + \frac{1}{1+\frac{4}{\alpha^2}\pi^2(F+F_0)^2}\right) =$$

$$= 25\,\delta(F) + A\,\alpha\left(\frac{1}{\alpha^2+4\pi^2(F-F_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2+4\pi^2(F+F_0)^2}\right)$$