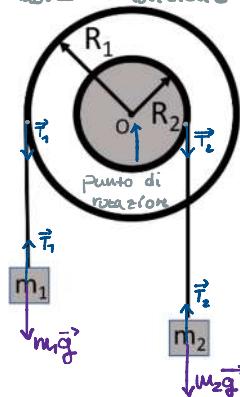


momento iniziale



Dati

$$I_{\text{dischi}} = 38 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$R_1 = 120 \text{ cm} \quad R_2 = 50 \text{ cm}$$

$$m_1 = 25 \text{ kg}$$

filo teso: le forze sono applicate al punto di contatto

carucola: l'angolo tra \vec{r} e $\vec{F}(\phi)$ è un angolo costante

$$1. \alpha = 0, m_2 = ?$$

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = 0 = \vec{R}_1 \times m_1 \vec{g} - \vec{R}_2 \times m_2 \vec{g} \rightarrow \vec{R}_1 \times m_1 \vec{g} = \vec{R}_2 \times m_2 \vec{g}$$

$$\rightarrow R_1 m_1 g = R_2 m_2 g \rightarrow m_2 = \frac{R_1 m_1}{R_2} = \dots$$

alternativa:

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = 0 \rightarrow m_1 g = T_1 \\ m_2 g - T_2 = 0 \rightarrow m_2 g = T_2 \\ R_1 T_1 - R_2 T_2 = 0 \rightarrow R_1 T_1 = R_2 T_2 \end{cases}$$

 $\sum \vec{\tau}_{\text{ext}}$

$$2. m_1 = 35 \text{ kg}, m_2 = ?, \alpha = ? = \frac{\alpha}{r}$$

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = I_T \alpha \rightarrow R_1 m_1 g - R_2 m_2 g = I_T \alpha$$

$$I_T = I_{\text{dischi}} + I_{m_1} + I_{m_2}$$

$$\alpha = \frac{R_1 m_1 g - R_2 m_2 g}{I_T}$$

Th. Huggens - Steiner

$$I_{m_1} = \cancel{I} + M d^2 = m_1 R_1^2$$

$$I_{m_2} = \cancel{I} + M d^2 = m_2 R_2^2$$

$$3. \vec{T}_1 = ?, \vec{T}_2 = ? \quad a = R \alpha$$

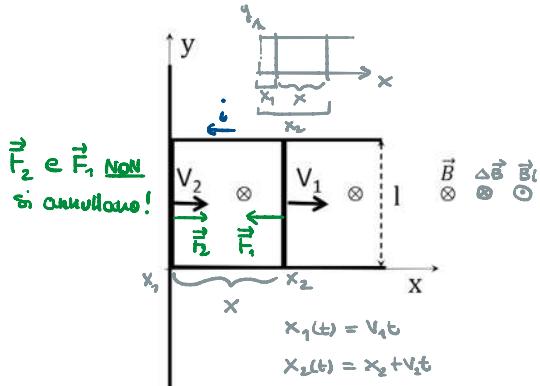
$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 = m_1 \alpha R_1 \\ -m_2 g + T_2 = m_2 a_2 = m_2 \alpha R_2 \\ I_T \alpha = \sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{R}_1 \times \vec{T}_1 - \vec{R}_2 \times \vec{T}_2 = R_1 T_1 - R_2 T_2 \end{cases}$$

(dobbiamo dare un segno alle forze)

$$T_1 = m_1 g - m_1 \alpha R_1$$

$$T_2 = m_2 g + m_2 \alpha R_2$$

Esercizio 2



Due sbarrette conduttrici, ciascuna di resistenza $R = 2 \Omega$, poggiano e possono scorrere senza attrito su due binari orizzontali di resistenza trascurabile. La distanza tra i binari è $l = 1.3 \text{ m}$. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $B = 0.5 \text{ T}$, entrante nel piano della figura. Le sbarrette si muovono con velocità costante $v_1 = 8 \text{ m/s}$ e $v_2 = 3 \text{ m/s}$. Determinare

1. L'intensità della corrente circolante (il suo modulo), i , e il verso (se orario e antiorario) giustificando la risposta
 $i = \dots$

2. Le forze esterne \vec{F}_{ext1} , \vec{F}_{ext2} che debbono essere applicate per mantenere rispettivamente v_1 e v_2 costanti.
 $\vec{F}_{ext1} = \dots$ $\vec{F}_{ext2} = \dots$

3. Determinare la potenza necessaria a mantenere in moto rispettivamente la sbarretta 1, P_1 , e la sbarretta 2, P_2 .
 $P_1 = \dots$ $P_2 = \dots$

Dati: $R = 2 \Omega$, $l = 1.3 \text{ m}$, $B = 0.5 \text{ T}$, $v_1 = 8 \text{ m/s}$, $v_2 = 3 \text{ m/s}$.

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = \vec{F}_{ext1} \cdot \vec{v}_1 = iLBv_1 = 4.2 \text{ W} \\ P_2 = \vec{F}_{ext2} \cdot \vec{v}_2 = -iLBv_2 = -1.6 \text{ W} \end{array} \right\}$$

quelle necessarie a fare in modo che le due sbarre non sbattano! ←

1. prima di tutto dobbiamo calcolare il flusso di campo magnetico, per Gauss:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint B dA = Blx(t) = Bl(x_2 + tv_2 - tv_1)$$

$$\text{ove } x(t) = x_2(t) - x_1(t) = x_2 + v_2 t - v_1 t = x_2 + t(v_2 - v_1)$$

$$\text{adesso per Faraday: } E = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -Blv_2 + blv_1 = bl(v_1 - v_2)$$

$$\text{e quindi la corrente varrà: } i = \frac{E}{2R} = \frac{bl}{2R}(v_1 - v_2) = 0.8 \text{ A}$$

e circolerà in verso antiorario per la regola della mano destra, in modo tale che il campo magnetico generato da essa sia opposto alla variazione di flusso di campo magnetico (che in questo caso aumenta); ciò è confermato anche dal segno della f.e.m.

2. la corrente i indotta fa sì che le sbarrette siano soggette alla forza di Lorentz, che vale:

$$\vec{F}_1 = i\vec{l} \times \vec{B} = -iLB\hat{x} \quad \text{e} \quad \vec{F}_2 = i\vec{l} \times \vec{B} = iLB\hat{x} \quad \text{con } iLB = 0.5 \text{ N}$$

$$\text{Quindi } \vec{F}_{ext1} = -\vec{F}_1 = iLB\hat{x} \quad \text{e} \quad \vec{F}_{ext2} = -\vec{F}_2 = -iLB\hat{x}$$

attenzione: le due forze non si annullano dato che sono applicate a 2 corpi diversi

3. semplicemente:

Esercizio 1



Una massa $M = 1 \text{ kg}$, assimilabile ad un punto materiale, oscilla su un piano orizzontale senza attrito sotto l'azione della forza elastica esercitata da una molla di costante elastica $k = 300 \text{ N/m}$. Una massa $m = 0.1 \text{ kg}$, anch'essa assimilabile ad un punto materiale, che si muove (vedi figura) con velocità orizzontale $v_0 = 30 \text{ m/s}$ sul piano, urta la massa M nel punto di massima elongazione della molla, corrispondente all'ampiezza massima di oscillazione $A_0 = 0.5 \text{ m}$. Subito dopo l'urto, la massa m resta attaccata ad M . Si calcoli:

1. La velocità del sistema $M + m$ subito dopo l'urto, v'

$$v' = \dots$$

2. La quantità di energia dissipata nell'urto, E_{diss}

$$E_{diss} = \dots$$

3. L'ampiezza massima delle oscillazioni dopo l'urto, A_{max}

$$A_{max} = \dots$$

$$2. K_i = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad K_f = \frac{1}{2}(m+M)v'^2 \quad E_{diss} = K_f - K_i = \frac{1}{2}(mv_0^2 - (m+M)\frac{(mv_0)^2}{(m+M)}) = 41 \text{ J}$$

$$3. x(t=0) = A\cos(\omega t + \phi) = A\cos(\phi) = \underline{A_0} \rightarrow \cos(\phi) = \frac{A_0}{A}$$

$$\Delta v(t=0) = -A\omega\sin(\omega t + \phi) = -A\omega\sin(\phi) = \underline{v'} \rightarrow \sin(\phi) = \frac{v'}{-A\omega}$$

$$\left[\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1 \rightarrow \left(\frac{A_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{v'}{-A\omega}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{A_0^2}{A^2} + \frac{v'^2}{A^2\omega^2} = 1 \rightarrow \frac{A^2}{A_0^2} + \frac{A^2\omega^2}{v'^2} = 1 \right]$$

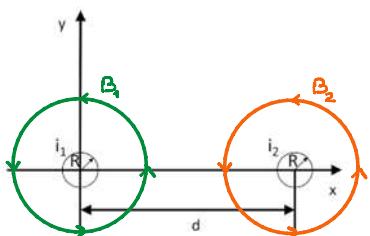
$$\left[\omega^2 = \frac{k}{(m+M)} \rightarrow \frac{A_0^2 v'^2 A^2 + A_0^2 v'^2 A^2 \omega^2}{A_0^2 v'^2} = 1 \rightarrow \frac{A^2 v'^2 (A^2 + A^2 \omega^2)}{A_0^2 v'^2} = 1 \rightarrow A^2 (1 + \omega^2) = 1 \right]$$

$$\rightarrow A^2 = \frac{1}{1 + \omega^2} \rightarrow A = \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2}}$$

- 3b. dopo l'urto, $E_{mecc} = \text{cost} \rightarrow E_i = E_f$

$$E_i = \frac{1}{2}(m+M)v'^2 + \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}KA_{max}^2 \rightarrow A_{max} = \sqrt{\frac{(m+M)v'^2}{K} + A_0^2}$$

Esercizio 2



Consideriamo due fili di materiale conduttore paralleli, di raggio R , posti nel vuoto, con gli assi distanti d e percorsi dalla stessa corrente $i_1 = i_2 = i$ in direzione dell'asse x (vedi figura) e con lo stesso verso (ortogonali e uscenti dal foglio). Assumendo l'asse x come indicato in figura:

1. Determinare l'espressione del campo di induzione magnetica nella regione (A) dell'asse x ($y=z=0$) corrispondente a $0 \leq x \leq R$, $\vec{B}_A(x)$ e calcolare le componenti del campo quando $x=0$, $\vec{B}_A(0)$

$$\vec{B}_A(x) = \dots \quad \vec{B}_A(0) = \dots$$

2. Si determini l'espressione del campo di induzione magnetica nella regione (B) dell'asse x ($y=z=0$), compresa tra i due fili, corrispondente a $R \leq x \leq d-R$, $\vec{B}_B(x)$, e calcolare le componenti del campo quando $x = \frac{d}{2}$, $\vec{B}_B\left(\frac{d}{2}\right)$

$$\vec{B}_B(x) = \dots \quad \vec{B}_B\left(\frac{d}{2}\right) = \dots$$

3. Si determini l'espressione del campo di induzione magnetica nella regione (C) dell'asse x ($y=z=0$), corrispondente a $x \geq d+R$, $\vec{B}_C(x)$

$$\vec{B}_C(x) = \dots$$

Dati: $d = 4 \text{ cm}$, $i = 4 \text{ A}$.

Sempre dal th. Ampere, il campo B_2 vale:

$$\oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{s} = \oint B_2 ds = B_2 [2\pi(d-x)] = \mu_0 i_{\text{corre}} = \mu_0 i \rightarrow B_2(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi(d-x)} \quad \vec{B}_2(x) = -B_2(x) \hat{j}$$

B_2 è originato da i_2 che è a distanza d

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = -A_0 \omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -A_0 \omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

Urto elastico

• $E \neq \text{cost}$

• $\vec{P} = \text{cost} \leftarrow$ non ci sono forze impulsive

$$1. P_i = P_f$$

$$MV_0 = (m+M)V \rightarrow V = \frac{MV_0}{m+M} = 2.7 \text{ m/s}$$

$$\Delta v(t=0) = -A\omega\sin(\omega t + \phi) = -A\omega\sin(\phi) = \underline{v'} \rightarrow \sin(\phi) = \frac{v'}{-A\omega}$$

$$\left[\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1 \rightarrow \left(\frac{A_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{v'}{-A\omega}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{A_0^2}{A^2} + \frac{v'^2}{A^2\omega^2} = 1 \rightarrow \frac{A^2}{A_0^2} + \frac{A^2\omega^2}{v'^2} = 1 \right]$$

$$\left[\omega^2 = \frac{k}{(m+M)} \rightarrow \frac{A_0^2 v'^2 A^2 + A_0^2 v'^2 A^2 \omega^2}{A_0^2 v'^2} = 1 \rightarrow \frac{A^2 v'^2 (A^2 + A^2 \omega^2)}{A_0^2 v'^2} = 1 \rightarrow A^2 (1 + \omega^2) = 1 \right]$$

$$\rightarrow A^2 = \frac{1}{1 + \omega^2} \rightarrow A = \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2}}$$

1. region A: il campo magnetico è dato dalla somma vettoriale del campo interno al filo B_1 , del primo filo ed esterno al filo B_2 del secondo filo.

"Kouo Dio da" verso la i , il campo magnetico diretto come si chiude il palmo.

Dal th. di Ampere, il campo B_1 all'interno del filo vale:

$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \oint B_1 dl = B_1 (2\pi r) = \mu_0 i$$

$$i = JA = \frac{iA}{A} = i \frac{\pi R^2}{\pi R^2} = i \frac{R^2}{R^2}$$

$$B_1(x) = \frac{\mu_0 i x^2}{2\pi x R^2} = \frac{\mu_0 i x}{2\pi R^2} \quad \vec{B}_1(x) = B_1(x) \hat{y}$$

B_2 è originato da
che è a distanza d
 $\forall x: 0 \leq x \leq R$

Inoltre: $\vec{B}_A(x) = \vec{B}_1(x) + \vec{B}_2(x) = (B_1(x) - B_2(x))\hat{y} = \left(\frac{H_0 i x}{2\pi R^2} - \frac{H_0 i}{2\pi(d-x)}\right)\hat{y} = \frac{H_0 i}{2\pi} \left(\frac{x}{R^2} - \frac{1}{d-x}\right)\hat{y}$

$$\vec{B}_A(0) = \frac{H_0 i}{2\pi} \left(\frac{0}{R^2} - \frac{1}{d}\right)\hat{y} = -\frac{H_0 i}{2\pi d}\hat{y} = -2 \cdot 10^{-5} T \hat{y}$$

a + e sono la distanza dal centro del luo
generato B_k in funzione di x .

2. Nella regione B i campi sono ancora discordi, per cui:

- dal th. Ampere, il campo B_1 all'esterno del filo vale: $\vec{B}_1(x) = \frac{H_0 i}{2\pi x}\hat{y}$
- sempre da Ampere, il campo B_2 all'esterno del filo vale: $\vec{B}_2(x) = -\frac{H_0 i}{2\pi(d-x)}\hat{y}$

Quindi $\vec{B}_B(x) = \vec{B}_1(x) + \vec{B}_2(x) = (B_1(x) - B_2(x))\hat{y} = \left(\frac{H_0 i}{2\pi x} - \frac{H_0 i}{2\pi(d-x)}\right)\hat{y} = \frac{H_0 i}{2\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d-x}\right)\hat{y}$

$$\vec{B}_B\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{H_0 i}{2\pi} \left(\frac{2}{d} - \frac{1}{\frac{d}{2}}\right)\hat{y} = \frac{H_0 i}{2\pi} \left(\frac{2}{d} - \frac{1}{\frac{d}{2}}\right)\hat{y} = \frac{H_0 i}{2\pi} \left(\frac{2}{d} - \frac{2}{d}\right)\hat{y} = 0$$

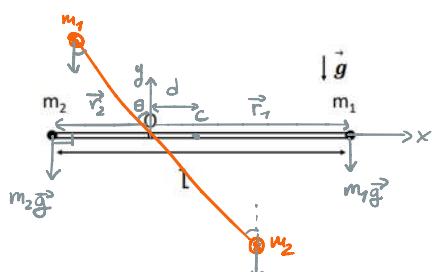
3. Nella regione C i campi sono concordi:

- $\vec{B}_1(x)$ come quello della regione B
- $\vec{B}_2(x) = \frac{H_0 i}{2\pi(x-d)}\hat{y}$

$$\vec{B}_C(x) = \vec{B}_1(x) + \vec{B}_2(x) = (B_1(x) + B_2(x))\hat{y} = \left(\frac{H_0 i}{2\pi x} - \frac{H_0 i}{2\pi\underline{(x-d)}}\right)\hat{y} = \frac{H_0 i}{2\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\underline{x-d}}\right)\hat{y}$$

Esercizio 1

$$1. \vec{\tau}_o^{\text{ext}} = \vec{r}_2 \times m_2 \vec{g} - \vec{r}_1 \times m_1 \vec{g}$$



$$I\dot{\omega} = r_2 m_2 g - r_1 m_1 g$$

$$I\dot{\omega} = (\frac{1}{2} - d)m_2 g - (\frac{1}{2} + d)m_1 g$$

$$\vec{\tau}_o^{\text{ext}} > 0 \rightarrow \text{verso antiorario}$$

Un'asta rigida di massa trascurabile e di lunghezza L , ai cui estremi sono fissate due masse puntiformi m_1 e m_2 , è libera di ruotare in un piano verticale intorno a un asse orizzontale fisso passante per il punto O che dista d dal centro dell'asta.

Il sistema è posto inizialmente in posizione orizzontale (vedi figura) e lasciato cadere con velocità iniziale nulla.

1. Calcolare il momento delle forze, $\vec{\tau}$ agente sul sistema rispetto al polo O , e il verso di rotazione (orario o antiorario) del sistema quando esso viene lasciato cadere motivando la risposta.

$$\vec{\tau} = \dots \rightarrow \text{verso di rotazione} = \dots$$

2. Con le stesse condizioni iniziali, calcolare la velocità angolare della sbarra, ω , quando questa raggiunge la posizione verticale.

$$\omega = \dots$$

3. Calcolare il periodo delle oscillazioni T attorno alla posizione verticale, assumendo piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

$$T = \dots$$

[$m_1 = 400 \text{ g}$, $m_2 = 700 \text{ g}$, $L = 1.5 \text{ m}$, $d = 20 \text{ cm}$]

$$2. I_o = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = m_1 (\frac{1}{2} + d)^2 + m_2 (\frac{1}{2} - d)^2$$

$$E = \text{cost} \rightarrow E_i = 0 = \frac{1}{2} I \omega^2 - (\frac{1}{2} - d)m_2 g + (\frac{1}{2} + d)m_1 g = E_f$$

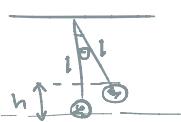
$$\rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 = (\frac{1}{2} - d)m_2 g - (\frac{1}{2} + d)m_1 g \rightarrow I \omega^2 = 2g [(\frac{1}{2} - d)m_2 - (\frac{1}{2} + d)m_1]$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{2g [(\frac{1}{2} - d)m_2 - (\frac{1}{2} + d)m_1]}{I} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g [(\frac{1}{2} - d)m_2 - (\frac{1}{2} + d)m_1]}{m_1 (\frac{1}{2} + d)^2 + m_2 (\frac{1}{2} - d)^2}}$$

$$3. I\dot{\omega} = -(r_2 m_2 g - r_1 m_1 g) \sin\theta \xrightarrow[\text{piccole oscillazioni}]{\sin\theta \approx \theta} \dot{\omega} = \ddot{\theta} = -(\frac{r_2 m_2 g - r_1 m_1 g}{I})\theta$$

$$\rightarrow \ddot{\theta} = -\Omega^2 \theta \rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{(r_2 m_2 g - r_1 m_1 g)}{I}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 (\frac{1}{2} + d)^2 + m_2 (\frac{1}{2} - d)^2}{(r_2 m_2 g - r_1 m_1 g)}} = 21.5 \text{ s}$$



$$\frac{dE}{dt} = 0 \rightarrow \Delta U = \Delta K \quad (m_1 + m_2)g d_{CM} (1 - \cos\theta) - \frac{1}{2} I \omega^2 = \text{cost}$$

$$\omega = \dot{\theta} \rightarrow M_T g d_{CM} (-\sin\theta) \dot{\theta} - I \dot{\theta} \ddot{\theta} = 0 \rightarrow -M_T g d_{CM} \sin\theta - I \ddot{\theta} = 0$$

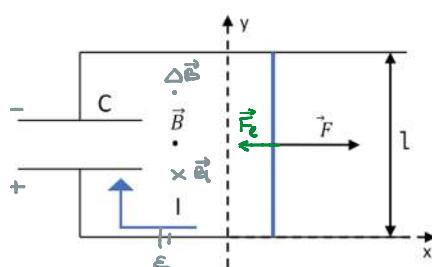
$$\rightarrow -M_T g d_{CM} \theta - I \ddot{\theta} = 0 \rightarrow -I \lambda^2 - M_T g d_{CM} = 0 \rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{M_T g d_{CM}}{I}}$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{M_T g d_{CM}}} =$$

$$d_{CM} = \frac{m_1 (\frac{1}{2} + d) + m_2 (\frac{1}{2} - d)}{m_1 + m_2}$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 (\frac{1}{2} + d)^2 + m_2 (\frac{1}{2} - d)^2}{M_T g [m_1 (\frac{1}{2} + d) + m_2 (\frac{1}{2} - d)]}}$$

Esercizio 2



Il circuito illustrato in figura è costituito da due conduttori paralleli che giacciono su un piano orizzontale, distanti $l = 50 \text{ cm}$, che formano due binari sui quali può scorrere senz'attrito una sbarretta anch'essa conduttrice di massa $m = 40 \text{ g}$ e da un condensatore di capacità $C = 500 \mu\text{F}$. La resistenza di tutti i conduttori in gioco è trascurabile e il circuito è immerso in una zona di campo magnetico uniforme $B = 1 \text{ T}$ ortogonale al piano orizzontale.

Al tempo $t=0$ viene applicata una forza meccanica costante $F = 10^{-2} \text{ N}$ parallela all'asse x che mette in moto la sbarretta.

- Determinare l'espressione della corrente I indotta che carica il condensatore in funzione dell'accelerazione a della sbarretta. Assumere che la fem indotta si stabilisce instantaneamente ai capi della sbarretta.

$$I(a) = \dots$$

- Determinare la forza totale agente sulla sbarretta \vec{F}_s e descrivere e motivare il tipo di moto della sbarretta (moto uniformemente accelerato, moto vario, moto uniforme, ecc...)

$$\vec{F}_s = \dots$$

- Calcolare la carica del condensatore al tempo $t = 2 \text{ s}$, $Q(2s)$, assumendo al tempo $t=0$ il condensatore scarico e la velocità della sbarretta nulla

$$Q(2s) = \dots$$

destra, e' diretta come $-\hat{x}$, e vale:

$$\vec{F}_e = I(a) \vec{l} \times \vec{B} = -I(a) L B \hat{x} = -C B^2 l^2 a \hat{x} = -3.125 \cdot 10^{-5} N \hat{x}$$

la forza totale agente sulla sbarretta sarà $\vec{F}_s = \vec{F}_e + \vec{F} = (-C B^2 l^2 a + m a) \hat{x} = a(-C B^2 l^2 + m) \hat{x} = 10^{-2} N \hat{x}$
il moto è uniformemente accelerato verso \hat{x} .

- molto semplicemente $Q(2s) = C E(2s) = C B l a t^2 = 1.25 \cdot 10^{-9} \text{ C}$

1. per trovare $I(a)$ abbiamo bisogno del flusso di campo magnetico attraverso il circuito, per Gauss:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint B dA = B \oint dA = B l x(t) = B l (x_0 + \frac{1}{2} a t^2)$$

$$\text{ove } x(t) = x_0 + \cancel{\frac{1}{2} a t^2} + \frac{1}{2} a t^2 \text{ ove } a = \frac{E}{m} = \frac{1}{4}$$

quindi, per Faraday:

$$E(t) = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -Blat, \text{ il flusso aumenta, quindi la corrente}$$

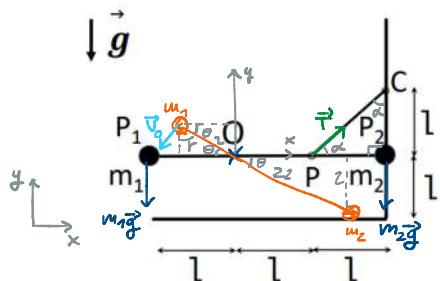
girerà in verso orario così che il campo magnetico indotto si opponga a questa variazione (Legge di Lenz), ciò è confermato anche dal segno meno della fem.

$$\text{Quindi } Q(t) = C \Delta U(t) = C E(t)$$

$$\text{e } I(a) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \frac{dE(t)}{dt} = -C Bl a = 6.25 \cdot 10^{-5} A$$

2. dato che si è generata una corrente, la sbarretta riceverà anche della forza di Lorentz, che per la regola della mano

Esercizio 1



Due punti materiali di massa $m_1 = m$ e $m_2 = 2m$ sono collegati da un'asta rigida di massa trascurabile e lunghezza 3l. L'asta può ruotare, nel piano verticale, intorno al punto O, che si trova a distanza l dal corpo di massa m_1 , come in figura. Un filo inestensibile collega il punto P al punto C. Entrambi P e C (vedi figura) sono ad una distanza l dal corpo di massa m_2 . In questa configurazione l'asta risulta in equilibrio.

Determinare:

1. La reazione del vincolo in O, \vec{R}_O .

$$\vec{R}_O = \dots$$

2. Nell'ipotesi che ad un certo istante il filo si spezzi, calcolare la velocità angolare dell'asta, ω , un istante prima dell'urto con il piano orizzontale posto a distanza l dalla posizione di equilibrio dell'asta.

$$\omega = \dots$$

3. Nell'ipotesi che, a causa dell'urto, le palline si stacchino istantaneamente dall'asta, calcolare il tempo (t^*) impiegato dalla seconda pallina (quella connessa all'estremo che non ha urtato il piano) per raggiungere il piano orizzontale dopo l'urto (trascurare l'effetto dell'aria).

$$t^* = \dots$$

(dati: l=20 cm; m=50 g; g=10 m/s²)

$$\vec{R}_O = -\frac{3mg}{\sin\alpha} \cos\alpha \hat{x} = \left(-\frac{3mg}{\sin\alpha} \cos\alpha, 0\right)$$

1.

$$\text{equilibrio} \begin{cases} \sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \\ \sum \vec{T}_{\text{ext}} = 0 \end{cases} \quad 2\alpha + \frac{\pi}{2} = \pi \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$m_1 \vec{g} + 2m_2 \vec{g} + \vec{T} + \vec{R}_O = 0 \quad A$$

$$1mg - 2l z_2 mg + l T \sin\alpha = 0 \quad B$$

$$\text{da } B: l T \sin\alpha = -l mg + 4l mg$$

$$\rightarrow T = \frac{3mg}{\sin\alpha}$$

$$\text{da } A \begin{cases} (-mg - 2mg + T \sin\alpha + R_O^y) \hat{y} = 0 & A_1 \\ (T \cos\alpha + R_O^x) \hat{x} = 0 & A_2 \end{cases}$$

$$\text{da } A_2: R_O^x = -T \cos\alpha = -\frac{3mg}{\sin\alpha} \cos\alpha$$

$$\begin{aligned} \text{da } A_1: R_O^y &= m_1 g - m_2 g - T \sin\alpha \\ &= g(m_1 + m_2) - \frac{g 3m}{\sin\alpha} \cdot \cancel{\sin\alpha} \\ &= g 3m - g 3m = 0 \end{aligned}$$

2.

$$E = \text{cost} \rightarrow E_i = K_i + U_i = 0 = E_f = K_f + U_f = \frac{1}{2} I \omega^2 + m_1 g l \sin\theta - m_2 g l \sin\theta = 0$$

$$I = m_1 l^2 + m_2 4l^2 = m_1 l^2 + 8m_1 l^2$$

$$l = 2l \sin\theta \rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m_1 g l - 2m_2 g l = 0$$

$$\rightarrow I \omega^2 = -m_1 g l + 4m_2 g l = 3m_2 g l$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{3m_2 g l}{I} = \frac{3m_2 g l}{m_1 l^2 + 8m_1 l^2} = \frac{3g}{9l} = \frac{g}{3l}$$

$$\rightarrow \omega = -\sqrt{\frac{g}{3l}} \hat{z}$$

3.

metto lo θ delle y nel piano mento

$$\text{moto circif. accel.} \rightarrow y(t^*) = y_0 + v_0 t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = 0$$

$$\frac{1}{2} l + l + \omega l \cos(\theta) t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = 0$$

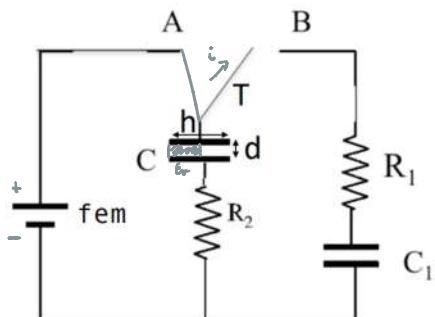
$$-\frac{1}{2} g t^{*2} + \omega l \cos(\theta) t^* + \frac{3}{2} l = 0$$

$$\rightarrow t^* = \frac{-\omega l \cos(\theta) \pm \sqrt{(\omega l \cos(\theta))^2 + 3gl}}{-g} = \dots$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{l} = \omega l (\cos\gamma, \sin\gamma, 0)$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta \rightarrow v_{oy} = \omega l \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \omega l \cos(\theta)$$

Esercizio 2



Un condensatore piano parallelo con armature di lati $h = 5 \text{ mm}$ e $l = 4 \text{ mm}$ e distanti $d = 3 \text{ mm}$ è riempito per metà della sua altezza ($h/2$) di un dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4.1$

1. Calcolare la capacità equivalente C_{eq} del condensatore C
 $C_{eq} = \dots$

Questo condensatore di capacità C_{eq} viene quindi inserito nel circuito in figura ($C_1 = 3 \text{ nF}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 50 \Omega$, $fem = 4 \text{ V}$) con l'interruttore T chiuso sul punto A, e si aspetta un tempo molto lungo ($t \gg \tau$).

2. Calcolare la carica (Q) e l'energia immagazzinata (U) nel condensatore C.
 $Q = \dots$ $U = \dots$

Successivamente, l'interruttore è spostato sulla posizione B, e si aspetta ancora un tempo molto lungo ($t \gg \tau'$). Calcolare in questa configurazione:

3. la carica sui conduttori (Q_C) e il condensatore (C) e le rispettive energie (U_C e U_{C_1}) in essi immagazzinate.
 $Q_C = \dots$ $Q_{C_1} = \dots$ $U_C = \dots$ $U_{C_1} = \dots$

Dati: $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

$$\text{e } Q_{C_1} = \frac{C_1 C \epsilon}{C + C_1} = 6 \cdot 10^{-13} \text{ C}$$

$$\text{e } U_C = \frac{1}{2} Q_C^2 C = 3.03 \cdot 10^{-21} \text{ J} \quad U_{C_1} = \frac{1}{2} Q_{C_1}^2 C_1 = 6.09 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

1. il condensatore può essere schematizzato come 2 condensatori piani in parallelo di superficie $S = \frac{1}{2}lh$, il primo di costante dielettrica ϵ_0 e l'altro $\epsilon_0\epsilon_r$, di conseguenza:

$$C_{eq} = C_v + C_d = \frac{S}{d} \epsilon_0 + \frac{S}{d} \epsilon_r \epsilon_0 = 1.5 \cdot 10^{-13} \text{ F}$$

2. il circuito è un circuito RC, con soluzione:

$$Q(t) = CE(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \text{ e per } t \gg T: Q(t) = CE = 6.02 \cdot 10^{-13} \text{ C}$$

L'energia immagazzinata sarà quindi $U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = 1.2 \cdot 10^{-11} \text{ J}$

3. la carica si conserva: $Q = Q_0 + Q_{C_1} = CE$ sempre

$$\text{da cui } Q = C \Delta V + C_1 \Delta V_{C_1} = CE \quad (C = \frac{Q}{\Delta V} \rightarrow Q = C \Delta V)$$

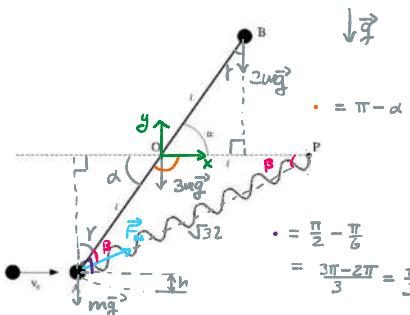
e, dato che collega due conduttori (i conduttori): $\Delta V_C = \Delta V_{C_1}$,

$$\text{e quindi } \frac{Q_C}{C} = \frac{Q_{C_1}}{C_1} \rightarrow Q_C = C \frac{Q_{C_1}}{C_1}$$

$$\text{inoltre } Q = \Delta V(C + C_1) = CE \rightarrow \Delta V = \frac{CE}{C + C_1} = \frac{Q_C}{C} = \frac{Q_{C_1}}{C_1}$$

$$\text{Infine } Q_C = \frac{C_1 C \epsilon}{C + C_1} = 3.03 \cdot 10^{-13} \text{ C}$$

Esercizio 1



Due masse, $m_A = m = m_B = 2m$, assimilabili a due punti materiali, sono connesse da una sbarretta di massa $3m$ e lunghezza $2l$, incernierata nel suo punto medio O , sul piano verticale. La massa m_A è collegata al punto P , che si trova ad una distanza l da O e alla stessa quota di O , tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile. Inizialmente il sistema è in equilibrio nella configurazione di figura con angolo $\alpha = \pi/3$.

1. Calcolare la costante elastica della molla, k .

$$k = \dots$$

Al tempo $t = 0$ un punto materiale di massa m colpisce il punto di massa m_A con velocità v_0 , orizzontale e diretta verso destra. L'urto è perfettamente anelastico.

2. Calcolare la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto, ω , e l'energia dissipata nell'urto, E_{diss} .

$$\omega = \dots \quad E_{diss} = \dots$$

3. Determinare la velocità, \vec{v}_A con cui il punto materiale A passa dall'asse orizzontale, nel moto successivo all'urto.

$$\vec{v}_A = \dots$$

Dati: $m = 100 \text{ g}$, $l = 50 \text{ cm}$, $v_0 = 5 \text{ m/s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

2.

urto anelastico $\rightarrow E \neq \text{cost}$, $\vec{L}_0 = \cos\alpha \rightarrow \vec{L}_f = \vec{L}_0 \rightarrow mV_0 \sin\frac{\pi}{3} = I\omega \rightarrow \omega = \frac{\sqrt{3}mV_0}{2I} = \frac{\sqrt{3}mV_0}{10kl} = \frac{\sqrt{3}}{10} \frac{V_0}{l}$
 $I = ml^2 + 2ml^2 + ml^2 + \frac{1}{2}k(l^2) = 5ml^2$

$$E_{diss} = -\Delta E = -(\frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}mV_0^2) = -\frac{1}{2}(5ml^2(\frac{\sqrt{3}}{10} \frac{V_0}{l})^2 - mV_0^2)$$

3.

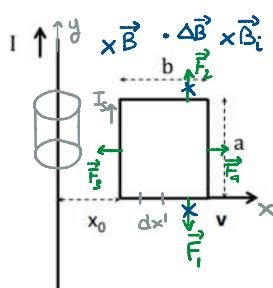
$$\rightarrow e \quad v_i = -v_f$$

$$\text{dopo l'urto: } E = \text{cost} \rightarrow E_i = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}K(\sqrt{3}l)^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 = E_f$$

$$\text{asse orizzontale: } \alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \omega^2 = \omega^2 + \frac{K(\sqrt{3}l)^2}{I} \rightarrow \omega = \sqrt{\omega^2 + \frac{K(\sqrt{3}l)^2}{I}}$$

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{l}$$

Esercizio 2



Un filo conduttore ideale infinitamente lungo, è percorso da una corrente costante I nel verso indicato in figura. Un avvolgimento piatto di N spire di forma rettangolare con lati a e b indeformabile, giace nello stesso piano del filo, a distanza x_0 , come in figura. La resistenza dell'avvolgimento di spire è R . Ad un certo istante ($t = 0$) l'avvolgimento di spire viene messo in moto con velocità costante v a partire dalla posizione x_0 nella direzione indicata in figura. Si trascuri il coefficiente di autoinduzione dell'avvolgimento di spire.

1. Calcolare la corrente che circola nell'avvolgimento di spire, $I_s(t')$, all'istante $t = t'$, e determinarne il verso (orario o antiorario) motivando la risposta.

$$I_s(t') = \dots$$

2. Determinare la forza istantanea $\vec{F}(t')$ all'istante t' , che deve essere applicata all'avvolgimento per mantenerlo in moto con velocità costante.

$$\vec{F}(t') = \dots$$

3. Determinare la potenza dissipata nell'avvolgimento al tempo $t = t'$, $P(t')$.

1. Il campo magnetico del filo ha simmetria cilindrica, per cui dal th. Ampere essa vale:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B ds = B(2\pi r) = \mu_0 i_{int} \rightarrow B(x') = \frac{\mu_0 I}{2\pi x'}$$

il flusso del campo magnetico è variabile (spire in movimento) e vale:

$$\Phi(t) = \int_x^{x+b} B(x') dx' = \int_x^{x+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x'} dx' = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln x' \right]_x^{x+b} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln(x+b) - \ln x \right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln(x+b) - \ln x \right] = N \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{x+b}{x} \right) \leftarrow \text{spire}$$

L'aumentamento è mantenuto in modo a velocità costante secondo la legge

$$X(t) = X_0 + Vt = x$$

$$f_{em} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(N \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{x+b}{x} \right) \right) = -N \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{x+b} \frac{\dot{x}}{x}$$

$$= -N \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x(-1/x+b)}{x(x+b)} \dot{x} = N \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{b}{x(x+b)} = N \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{bV}{(x_0+vt)(x_0+vt+b)}$$

$$T(t') = f_{em}(t') = \dots$$

2. Determinare la forza istantanea $F(t')$ all'istante t' , che deve essere applicata all'avvolgimento per mantenerlo in moto con velocità costante.

$$\vec{F}(t') = \dots$$

3. Determinare la potenza dissipata nell'avvolgimento al tempo $t = t'$, $P(t')$

$$P(t') = \dots$$

Dati: $I = 450 \text{ A}$, $N = 10000$, $a = 8 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $R = 1 \Omega$, $v = 0.5 \text{ m/s}$, $x_0 = 4 \text{ mm}$, $t' = 2 \text{ s}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T/m}$, $1.26 \times 10^{-6} \text{ T/m}$.

$$= -N \frac{\mu_0}{2\pi} a \frac{\cancel{x}}{x(x+b)} \hat{x} = N \frac{\mu_0}{2\pi} a \frac{\cancel{x}}{x(x+b)} = N \frac{\mu_0}{2\pi} a \frac{\cancel{x}}{(x_0+vt+b)}$$

$$I_s(t') = \frac{I_{av}(t')}{R} = 1.7 \text{ mA}$$

2. per mantenere la velocità costante si deve applicare una forza uguale ed opposta alla forza di Lorentz risultante presente in \hat{x} (che ha direzione opposta a quella del moto)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_2 = NI_s b \times \vec{B} \rightarrow F_2 = NI_s b B(x) \hat{y} \\ \vec{F}_1 = NI_s b \times \vec{B} \rightarrow F_1 = NI_s b B(x) \hat{y} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Si avvallano sempre perché hanno distanza uguale} \\ \text{dal filo (ovvero dal campo magnetico)} \end{array}$$

$$\vec{F}_R(t) = (F_2 - F_1) \hat{x} = -(F_2 - F_1) \hat{x}$$

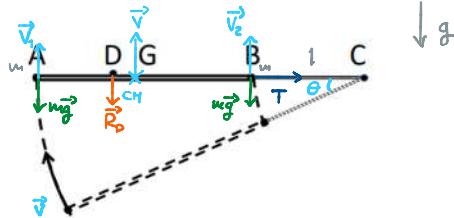
$$\begin{aligned} \vec{F}_R(t) &= F_2 - F_1 = NI_s a B(x) - NI_s a B(x+b) = NI_s a (B(x) - B(x+b)) = NI_s a \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi x} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+b)} \right) = NI_s a \frac{(x+b)\mu_0 I - x\mu_0 I}{2\pi x(x+b)} \\ &= NI_s a \mu_0 I \frac{x+b \cancel{x}}{2\pi x(x+b)} = \frac{NI_s a \mu_0 I b}{2\pi(x_0+vt)(x_0+vt+b)} \end{aligned}$$

$$\vec{F}_R(t') = -\frac{NI_s(t') a \mu_0 I b}{2\pi(x_0+vt)(x_0+vt+b)} \hat{x} = -5.8 \cdot 10^{-6} \text{ N} \hat{x} = (-5.8 \cdot 10^{-6}, 0, 0) \text{ N}$$

$$\vec{F}_R(t') = (5.8 \cdot 10^{-6}, 0, 0) \text{ N}$$

$$3. P(t') = I_s(t') R = 1.7 \cdot 10^{-6} \text{ W}$$

Esercizio 1



Con riferimento alla figura, un'asta rigida di lunghezza $2l$ (AB), è appoggiata su un piano orizzontale (la forza di gravità è ortogonale al piano) privo di attrito ed è collegata a un punto fisso C di questo piano mediante una corda BC, flessibile, inestensibile di massa trascurabile e di lunghezza l . Due punti materiali di ugual massa m sono posti negli estremi A e B dell'asta e sono solidali con essa, la massa dell'asta è trascurabile rispetto a m . L'asta ruota con la corda tesa intorno ad un asse verticale passante per C con una velocità angolare costante di modulo ω . Ad un certo istante viene posto in un punto D un chiodo di dimensioni trascurabili in cui l'asta va ad urtare. Dopo l'urto, perfettamente anelastico, l'asta rimane in quiete. Calcolare:

- La tensione della corda (T) prima dell'urto

$$T = \dots$$

- L'energia meccanica persa nell'urto (ΔE)

$$\Delta E = \dots$$

- La distanza tra D e C (DC)

$$DC = \dots$$

Dati: $m = 0.3 \text{ kg}$, $\omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$, $l = 30 \text{ cm}$

$$1. E = \text{cost}, \text{ moto circolare uniforme}$$

$$\cdot v = r\omega = 2l\omega$$

$$\cdot T = 2ma_c = 2m\frac{v^2}{r} = 2m\frac{v^2}{2l} = m\frac{4l\omega^2}{2l} = 4ml\omega^2$$

$$2. \Delta E = E_i - E_f = \frac{1}{2}I\omega^2 - 0 = \frac{1}{2}I_e\omega^2 = 5ml^2\omega^2$$

$$I_e = ml^2 + m\frac{l^2}{4} = 10ml^2$$

no uglie durante l'urto
e' trascurabile

$$3. \vec{L}_{D_1} = mv_1(3l-x) + mv_2(x-l) = 0 = \vec{L}_{ap}$$

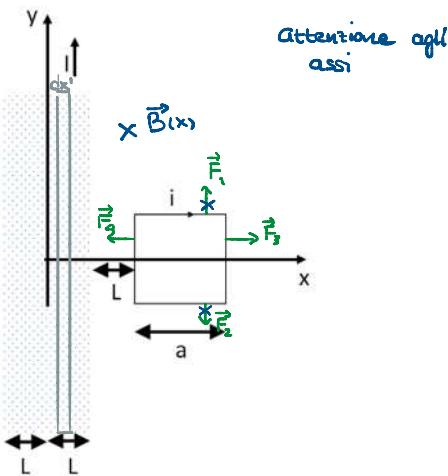
$$-m3l\omega(3l-x) + ml\omega(x-l) = 0$$

$$-9l^2m\omega + 3l^2m\omega x + 3ml\omega x - ml^2\omega = 0$$

$$-10l^2m\omega + 6l^2m\omega x = 0$$

$$x = \frac{10}{6}l = \frac{5}{3}l$$

Esercizio 2



$$1. dI = \frac{I}{2L}dx' \leftarrow \text{suddividiamo il nastro in strisce larghe } dx'$$

per Biot-Savart per $x > L$, B è entrante nel foglio e, per Ampere, vale:

$$dB(dx', x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-x')} \leftarrow \frac{\mu_0 i}{2\pi r} B \text{ del filo}$$

$$B(x) = \int_{-L}^L \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-x')} dx' = \frac{\mu_0 I}{2L2\pi} \int_{-L}^L \frac{dx'}{x-x'} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2L2\pi} [-\ln(x-x')]_{-L}^L = \frac{\mu_0 I}{2L2\pi} [-\ln(x-L) + \ln(x+L)]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2L2\pi} \ln \frac{x+L}{x-L}$$

$$\vec{B}(x) = -B(x)\hat{z}$$

2. La forza risultante \vec{F} si ottiene sommando le forze sui quattro lati della spira, i lati paralleli all'asse x hanno uguale distanza dal nastro quindi si elidono, la risultante sarà la somma delle forze sui lati vicinali

$$\vec{F}_3 = F_3 \hat{x} = iaB(2L+a) \hat{x}$$

$$\vec{F}_4 = -F_4 \hat{x} = -iaB(2L) \hat{x}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = iaB(2L+a) - iaB(2L) \hat{x} =$$

$$= ia \left(\frac{\mu_0 I}{2L2\pi} \ln \frac{2L+a+L}{2L+a-L} - \frac{\mu_0 I}{2L2\pi} \ln \frac{2L+L}{2L-L} \right) \hat{x} =$$

$$= \frac{ia\mu_0 I}{4\pi L} \left(\ln \frac{3L+a}{L+a} - \ln \frac{3L}{L} \right) \hat{x} = \frac{ia\mu_0 I}{4\pi L} \left(\ln \frac{3L+a}{L+a} - \ln 3 \right) \hat{x}$$

Consideriamo un nastro conduttore rettilineo, virtualmente infinito, di spessore trascurabile e larghezza $2L$, percorso da una corrente costante ed uniforme I . Nel piano del nastro è posta una spira conduttrice rigida quadrata di lato a e distanza L dal bordo del nastro. Questa spira è percorsa da una corrente costante i . Tutto il sistema si trova nel vuoto. Vedi la figura ai versi delle correnti.

- Esprimere il campo magnetico \vec{B} generato dal nastro a una distanza $x > L$ dall'asse del nastro sul piano individuato dal nastro e dalla spira.

$$\vec{B}(x) = \dots$$

- Esprimere la forza totale \vec{F} esercitata sulla spira dal nastro percorso da corrente in modulo direzione e verso in funzione di a , L , I , i .

$$\vec{F} = \dots$$

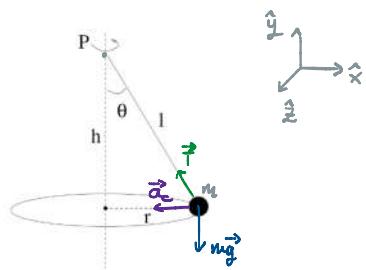
- Calcolare il valore della forza nel caso in cui $a=L$, $\vec{F}_{a=L}$.

$$\vec{F}_{a=L} = \dots$$

Dati: $I = 5 \text{ A}$, $i = 100 \text{ mA}$.

$$3. \vec{F}_{a=L} = \frac{i\sqrt{\mu_0 I}}{4\pi L} \left(\ln \frac{3L+a}{L+a} - \ln 3 \right) \hat{x} = \frac{i\mu_0 I}{4\pi L} \left(\ln 2 - \ln 3 \right) \hat{x} = -2 \cdot 10^{-8} \text{ N} \hat{x}$$

Esercizio 1



Una massa $m = 1 \text{ kg}$, attaccata ad un filo inestensibile e senza massa di lunghezza l_0 , ruota attorno all'asse verticale inizialmente con velocità angolare ω_0 , descrivendo un cono di angolo θ_0 , come in figura. Da un certo istante in poi la lunghezza del filo viene lentamente aumentata in modo che comunque la massa descriva sempre un'orbita circolare (seppure di raggio differente). Sapendo che all'inizio $l_0 = 2 \text{ m}$ e $\theta_0 = \pi/3$, si calcoli:

- Il valore della tensione del filo e la velocità angolare iniziale:

$$T_0 = \dots$$

$$\omega_0 = \dots$$

- Il valore della velocità angolare quando il raggio (ovvero la distanza dall'asse) diventa il doppio del raggio iniziale:

$$\omega_{2r_0} = \dots$$

- La lunghezza del filo quando il raggio diventa il doppio del raggio iniziale:

$$l_{2r_0} = \dots$$

$$3. L_z = r_0 m v_0 = r_0^2 m \omega_0 = r_0^2 m \sqrt{\frac{g}{l_0}} = \text{cost!}$$

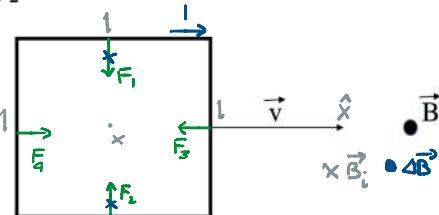
$$\frac{r_0^2}{l_0} = \frac{(2r_0)^2}{\sqrt{h_{2r_0}}} \quad \frac{r^2}{l_0} = \text{cost!}$$

$$\frac{\sqrt{h_{2r_0}}}{r_0^2} = \frac{\sqrt{h_{2r_0}}}{(2r_0)^2}$$

$$\frac{4r_0 \sqrt{l_0}}{r_0} = \sqrt{h_{2r_0}}$$

$$h_{2r_0} = 16 l_0$$

Esercizio 2



Una spira quadrata conduttrice con resistenza $R = 4 \Omega$ e lato $l = 0.5 \text{ m}$ viene mantenuta in moto retilineo uniforme con velocità $v = 6 \text{ m/s}$, diretta lungo l'asse x , componante al piano della spira. Nella stessa regione spaziale è presente un campo magnetico orientato ortogonalmente al piano della spira, che varia secondo la legge $B(x) = B_0(x/L)$ con $L = 4 \text{ m}$ e $B_0 = 2 \text{ T}$. Supponendo che all'istante iniziale il centro della spira si trovi in $x = 0$: Si calcoli:

- la corrente I circolante nella spira e la potenza P dissipata per effetto Joule ad un generico istante $I = \dots$ $P = \dots$

- il modulo della forza agente sulla spira, F , necessaria a mantenere il moto uniforme, specificandone direzione e verso $F = \dots$

- la potenza associata al lavoro compiuto dalla forza di cui al punto precedente, P' , commentando il risultato ottenuto $P' = \dots$

$$2. \vec{F}_q = i \vec{L} \times \vec{B} \rightarrow F_q = i l B = \frac{B_0 l^2 v}{RL} l B \left(x + \frac{l}{2}\right) = \frac{B_0 l^3 v}{RL} B_0 \frac{x + l/2}{L} = \frac{B_0^2 l^3 v}{RL} \frac{2x + l}{2L}$$

B dipende dalla distanza dal centro!

$$\vec{F}_3 = i \vec{L} \times \vec{B} \rightarrow F_3 = i l B = \frac{B_0 l^2 v}{RL} l B \left(x - \frac{l}{2}\right) = \frac{B_0 l^3 v}{RL} B_0 \frac{x - l/2}{L} = \frac{B_0^2 l^3 v}{RL} \frac{2x - l}{2L}$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \text{ perciò } x_1 = x_2$$

$$1. r_0 = l_0 \sin \theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} l_0$$

$$h_0 = l_0 \cos \theta_0 = \frac{1}{2} l_0$$

$$V_0 = r_0 \omega_0$$

$$T \cos \theta_0 = mg \rightarrow T = \frac{mg}{\cos \theta_0}$$

$$T \sin \theta_0 = m a_c = m \frac{v_0^2}{r_0} = m \frac{r_0 \omega_0^2}{r_0} = m r_0 \omega_0^2$$

$$\rightarrow \frac{mg}{\cos \theta_0} \sin \theta_0 = m r_0 \omega_0^2$$

$$mg \tan \theta_0 = m r_0 \omega_0^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{gtan \theta_0}{r_0}} = \sqrt{\frac{gsin \theta_0}{cos \theta_0 l_0 sin \theta_0}} = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$$

$$2. P = p_0 l_0 \quad \vec{L}_T = 0 \quad r_{2r_0} = 2r_0$$

$$L_0 = r_0 m v_0 = 2r_0 m v_{2r_0} = L_0$$

$$v_0 / \omega_0 = (2r_0)^2 / \omega_0 r_{2r_0}$$

$$\omega_{2r_0} = \frac{\omega_0}{4}$$

B dipende dalla distanza dal centro

$$1. \Phi_B = \int_{x-\frac{L}{2}}^{x+\frac{L}{2}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{x-\frac{L}{2}}^{x+\frac{L}{2}} B_0 \frac{x}{L} l dx = \frac{B_0 l}{L} \int_{x-\frac{L}{2}}^{x+\frac{L}{2}} x dx = \frac{B_0 l}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x-\frac{L}{2}}^{x+\frac{L}{2}}$$

$$= \frac{B_0 l}{L} \left[\frac{(x+\frac{L}{2})^2 - (x-\frac{L}{2})^2}{2} \right] = \frac{B_0 l}{L} \left[\frac{x+\frac{L}{2} + 1x}{2} - \frac{x+\frac{L}{2} - 1x}{2} \right] = \frac{B_0 l}{L} \frac{L}{2}$$

$$= \frac{B_0 l^2}{2}$$

$$f_{em} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial t} \frac{x}{L} l^2 = -B_0 \frac{l^2}{L} \frac{dx}{dt} = -B_0 \frac{l^2}{L} v$$

$$I = \frac{f_{em}}{R} = \frac{B_0 l^2 v}{RL} = 0.1875 \text{ A}$$

\leftarrow O : corrente circolare in senso orario

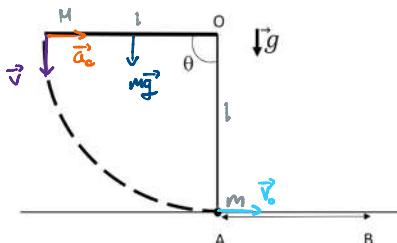
$$P = I^2 R = 0.14 \text{ W}$$

$$\vec{F}_3 = i \vec{L} \times \vec{B} \rightarrow F_3 = i l B = \frac{B_0 l^2 v}{RL} l B \left(x - \frac{l}{2}\right) = \frac{B_0 l^3 v}{RL} B_0 \frac{x - l/2}{L} = \frac{B_0^2 l^3 v}{RL} \frac{2x - l}{2L}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_4 - \vec{F}_3 \longrightarrow F = F_4 - F_3 = \frac{B_0^2 l^2 V (2x+1)}{2RL^2} - \frac{B_0^2 l^2 V (2x-1)}{2RL^2} = \frac{B_0^2 l^2 V (2x+1 - 2x+1)}{2RL^2} = \frac{B_0^2 l^2 V}{RL^2} = 2.3 \cdot 10^{-2} N$$

3. $P' = FV = \frac{B_0^2 l^2 V^2}{RL^2} = 0.14 W$ P' = P

Esercizio 1



Un'asta rigida sottile ed omogenea di massa $M = 3 \text{ kg}$ e lunghezza $l = 2 \text{ m}$ è vincolata a ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il punto fisso O. L'asta, lasciata libera di muoversi a partire dalla configurazione $\theta = 90^\circ$, urta in modo completamente elastico un corpo assimilabile a un punto materiale situato sulla verticale, nel punto A. Dopo l'urto, l'asta rimane in quiete.

1. Si calcoli la velocità angolare dell'asta, ω_0 , un'istante prima dell'urto.

$$\omega_0 = \dots$$

2. Si calcoli la massa del corpo, m , e la sua velocità, v_0 , immediatamente dopo l'urto.

$$m = \dots \quad v_0 = \dots$$

Successivamente, il corpo percorre un tratto rettilineo su una guida orizzontale scabra, caratterizzata da un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.7$.

3. Calcolare la distanza, d , percorsa dal corpo sul piano, dal punto A fino al punto B in cui si arresta.

$$d = \dots$$

$$\text{infatti } v_0 = \omega_0 \times l = l\omega_0$$

$$3. L = K_f - K_i = -\frac{1}{2}mv_0^2 = \int_a^b \vec{F}_a \cdot d\vec{s} = \vec{F}_a \int_a^b d\vec{s} = -\mu_d mg \int_a^b d\vec{s} = -\mu_d mg [a^b] =$$

unica forza in gioco : \vec{F}_a

$$1. v_0 = l\omega_0$$

$$a_c = \frac{v_0^2}{l} = \omega_0^2 l$$

$$E_i = Mg l = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 + Mg \frac{l}{2} = E_f \rightarrow Mg l - \frac{1}{2} Mg l = \frac{1}{6} M l^2 \omega_0^2$$

$$I_0 = \frac{1}{3} M l^2$$

$$\frac{1}{2} Mg l = \frac{1}{6} M l^2 \omega_0^2$$

$$\sqrt{\frac{3g}{l}} = \omega_0$$

$U_f \approx U_f$ durante l'urto

$$2. E_i = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 = E_f \quad \theta = 0$$

$$\vec{L}_{0i} = I_0 \omega_0 = l m v_0 = \vec{L}_{0f} \rightarrow I_0^2 \omega_0^2 = l^2 m^2 v_0^2$$

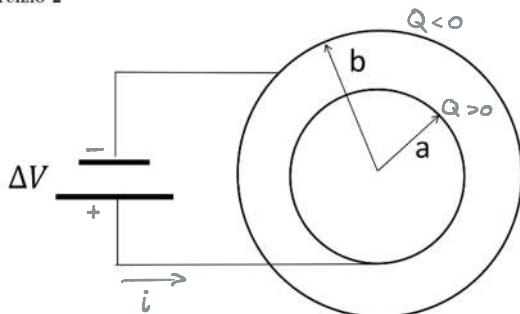
$$\text{divido nella ①: } I_0 = l^2 m \rightarrow m = \frac{I_0}{l^2} = \frac{M}{3}$$

$$\text{sostituisco in ①: } I_0 \omega_0^2 = \frac{M}{3} v_0^2 \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{3 I_0 \omega_0^2}{M}} = \sqrt{l^2 \omega_0^2} = l \omega_0$$

questo si può fare perché è un sistema (sono ambedue vere!)

$$\hookrightarrow d = \frac{v_0^2}{2 \mu_d g} = \frac{l^2 \omega_0^2}{2 \mu_d g}$$

Esercizio 2



Le armature di un condensatore sferico di raggi a e b , e vengono mantenute ad una differenza di potenziale costante $\Delta V = V(a) - V(b)$ da una pila, come in figura.

1. Ricavare l'espressione e calcolare la capacità del condensatore, C , nonché l'energia elettristica in esso immagazzinata, U .

$$C = \dots \quad U = \dots$$

2. Calcolare la densità di carica sull'armatura interna σ_a .

$$\sigma_a = \dots$$

3. Determinare a parità di differenza di potenziale ΔV e di raggio b dell'armatura esterna, quanto deve valere il raggio dell'armatura interna a' affinché su di essa il campo elettrico $E(a')$ sia minimo.

$$a' = \dots$$

Dati: $\Delta V = 10 \text{ V}$, $a = 0.6 \text{ cm}$, $b = 1 \text{ cm}$.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{bc}{x(b-x)} \right) \quad b = b \\ c = \Delta V \quad x = a' \\ \frac{bc}{xb-x^2} = bc(xb-x^2)^{-1} \\ \downarrow \frac{d}{dx} \\ -bc(xb-x^2)^{-2}(b-2x)$$

$$\boxed{-bc(xb-x^2)^{-2}(b-2x)}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dx} x^{-1}}$$

$$1. U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 ?$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_0}{Q \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{b-a}{ab}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Delta V = V(A) - V(B) = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_a^b E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right]$$

$$2. \sigma_a = \frac{Q}{S_a} = \frac{Q}{4\pi a^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{4\pi a^2 (b-a)} \Delta V = \epsilon_0 \frac{b}{a(b-a)} \Delta V$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \rightarrow Q = C \Delta V = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{(b-a)} \Delta V$$

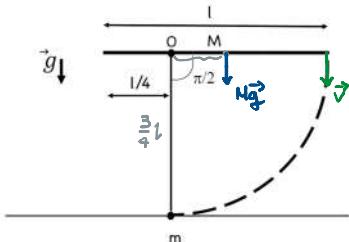
$$3. E(a') = \frac{Q(a')}{4\pi a'^2 \epsilon_0} = \frac{\pi \epsilon_0 k b}{4\pi a'^2 \epsilon_0 (b-a')} \Delta V = \frac{b}{d(b-a')} \Delta V$$

$$\frac{dE(a')}{da'} = -\Delta V b (a'b - a'^2)^{-2} (b-2a') = 0$$

$$\uparrow \Delta V \text{ cost} \quad \cdot -\Delta V b [a'(b-a')]^{-2} = 0 \rightarrow -\Delta V b = 0 \quad \text{N.A.}$$

$$\cdot b - 2a' = 0 \rightarrow a' = \frac{b}{2}$$

Esercizio 1



Un'asta omogenea di lunghezza l e massa M è libera di ruotare nel piano verticale (vedi figura) attorno ad un perno posto in O ad una distanza pari a $1/4$ della sua lunghezza dal suo estremo superiore. L'asta, inizialmente in quiete in posizione orizzontale, viene lasciata cadere e quando giunge nella posizione verticale, urta elasticamente in corrispondenza del suo estremo un punto materiale di massa m . Si calcoli:

1. Il momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse di rotazione, I_O .

$$I_O = \dots$$

2. La velocità angolare della sbarra subito prima dell'urto, ω .

$$\omega = \dots$$

3. La velocità del punto materiale subito dopo l'urto, v .

$$v = \dots$$

Dati: $l = 2 \text{ m}$, $M = 5 \text{ kg}$, $m = 200 \text{ g}$

$$1. I_O = I_A + M \frac{1}{16} l^2 = \frac{1}{12} M l^2 + \frac{1}{16} M l^2 = \frac{4Ml^2 + 3Ml^2}{48} = \frac{7}{48} Ml^2$$

$$2. E_i = Mg \frac{3l}{4} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 + Mg \frac{l}{2} = E_f$$

$$\frac{3}{4} Mg l - \frac{1}{2} Mg l = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$

$$\frac{1}{4} Mg l = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg l}{2 I_O}}$$

$$3. \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I_O \omega'^2 \quad \text{cons. E}$$

$$I_O \omega = \frac{3}{4} l mv \sin \theta + I_O \omega' \quad \text{cons. } \vec{L}_O$$

$$\text{da } ①: \cancel{\frac{1}{2} I_O (\omega^2 - \omega'^2)} = \cancel{\frac{1}{2} mv^2} \rightarrow \omega^2 - \omega'^2 = \frac{mv^2}{I_O}$$

$$\text{da } ②: I_O (\omega - \omega') = \frac{3}{4} l mv \rightarrow \omega - \omega' = \frac{3l mv}{4 I_O}$$

$$\omega^2 - \omega'^2 = (\omega + \omega')(\omega - \omega') \rightarrow \omega + \omega' = \frac{\omega^2 - \omega'^2}{\omega - \omega'} = \frac{mv^2}{\omega - \omega'}$$

$$\text{da cui: } \omega + \omega' = \frac{mv^2}{I_O} \cdot \frac{4 I_O}{3l mv} = \frac{4v}{3l}$$

$$\text{infine: } (\omega - \cancel{\omega'}) + (\omega + \cancel{\omega'}) = \frac{3l mv}{4 I_O} + (\omega + \omega')$$

$$2\omega = \frac{3l mv}{4 I_O} + \frac{4v}{3l} = \frac{9l^2 mv + 16 I_O v}{12 I_O l}$$

$$24 I_O l \omega = 9l^2 mv + 16 I_O v$$

$$24 I_O l \omega = v(9l^2 m + 16 I_O)$$

$$v = \frac{24 I_O l \omega}{9l^2 m + 16 I_O}$$

Esercizio 2

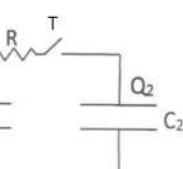
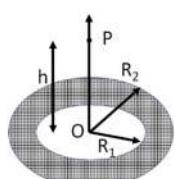


Fig.A

Fig.B

$$1. dV(r, h) = K \frac{dq}{D} = K \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

e quindi

$$V(h) = \int_{R_1}^{R_2} dV = \int_{R_1}^{R_2} K \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + h^2}} = K \sigma \pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{2r dr}{\sqrt{r^2 + h^2}} \downarrow = K \sigma \pi \int_{R_1^2 + h^2}^{R_2^2 + h^2} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + h^2}} =$$

$$= \frac{2\sigma\pi}{4\pi\epsilon_0} [\sqrt{R_2^2 + h^2} - \sqrt{R_1^2 + h^2}] \rightarrow V(0) = \frac{C}{2\epsilon_0} [R_2 - R_1]$$

$$\Delta V = V(0) - V(h) = \frac{C}{2\epsilon_0} (R_2 - R_1 + \sqrt{R_2^2 + h^2} - \sqrt{R_1^2 + h^2})$$

$$\Delta V_{R_2=h=2R_1} = \frac{C}{2\epsilon_0} (2R_1 - R_1 + \sqrt{R_2^2 + 4R_1^2} - \sqrt{R_1^2 + 4R_1^2}) = \frac{C}{2\epsilon_0} (1 + \sqrt{5} + \sqrt{2}) = 0.04V$$

(Fig.A) Una carica elettrica positiva è uniformemente distribuita, con densità superficiale σ , su di una corona circolare di raggio interno R_1 , raggio esterno R_2 e centro in O .

- 2.1 Determinare l'espressione della differenza di potenziale, $\Delta V = V(O) - V(P)$, tra il punto O ed un punto P posto sull'asse del disco a distanza h da O e calcolare esplicitamente il valore della differenza di potenziale nel caso in cui $R_2 = h = 2R_1$, $\Delta V_{R_2=h=2R_1}$

$$\Delta V = \dots \quad \Delta V_{R_2=h=2R_1} = \dots$$

Consideriamo ora due condensatori di capacità C_1 e C_2 , inizialmente caricati con carica Q_1 e Q_2 e isolati (vedi Fig.B). Se l'interruttore T viene chiuso, dopo un tempo sufficientemente lungo il sistema si porta all'equilibrio. Calcolare:

- 2.2 Il valore della ddp all'equilibrio ai capi dei due condensatori, ΔV_{C_1} e ΔV_{C_2}

$$\Delta V_{C_1} = \dots \quad \Delta V_{C_2} = \dots$$

- 2.3 La variazione di energia elettrostatica di tutto il sistema tra l'istante iniziale (E_i) e quello finale (E_f), $\Delta E = E_f - E_i$

$$\Delta E = \dots$$

Dati: Es. Fig.A) $\sigma = 1.8 \times 10^{-11} \text{ C/m}^2$, $R_1 = 10 \text{ cm}$. Es. Fig.B) $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $Q_1 = Q_2 = 2 \text{ nC}$.

dalla conservazione della carica: $Q_{eq} = Q_1 + Q_2 \leftarrow \text{sempre vero}$

$$\text{per cui: } \Delta V_{C_1} = \Delta V_{C_2} = \frac{Q_{eq}}{C_{eq}} = \frac{4nC}{3\mu F} = \frac{4}{3} \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

$$3. E_i = E_c + E_e = \frac{1}{2} C_e \Delta V^2 + \frac{1}{2} C_e \Delta V^2 = \frac{1}{2} C_1 \underline{Q_1^2} + \frac{1}{2} C_2 \underline{Q_2^2} = \frac{1}{2} \underline{Q_1^2} + \frac{1}{2} \underline{Q_2^2} = \frac{1}{2} (\underline{Q_1^2} + \underline{Q_2^2}) = 2 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

2. all'equilibrio una circola comune e la d.d.p. ai capi dei condensatori è la stessa.

| de condensatori sono in parallelo, quindi $C_{eq} = C_1 + C_2$

$$\text{Per cui: } \Delta V_1 = \Delta V_2 = \frac{C_{eq}}{C_{eq}} = \frac{3}{3} = 1 \text{ V}$$

$$3. E_i = E_{C_1} + E_{C_2} = \frac{1}{2} C_1 \Delta V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 \Delta V_2^2 = \frac{1}{2} C_1 \frac{Q_1^2}{C_{eq}} + \frac{1}{2} C_2 \frac{Q_2^2}{C_{eq}} = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{Q_2^2}{C_2} \right) = 3 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

$$\Delta V_1^2 = \frac{Q_1^2}{C_1^2} \quad \Delta V_2^2 = \frac{Q_2^2}{C_2^2}$$

$$E_f = \frac{1}{2} C_{eq} \Delta V_{eq}^2 = \frac{1}{2} C_{eq} \frac{Q_{eq}^2}{C_{eq}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{eq}} = \frac{8}{3} \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

$$\Delta E = E_f - E_i = -\frac{1}{3} \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

parte dell'energia è
dissipata nella resistenza

ESERCIZIO.1 - Meccanica

Il disco forato in Figura è di spessore trascurabile, di materiale omogeneo, ha raggio $R = 29$ cm e massa $M = 2.5$ kg. I fori praticati nel disco corrispondono a due circonference di raggio $(R/4)$ e due finestre rettangolari di dimensioni $(R/8) \times (R/2)$ e sono disposti come in Figura.

I centri dei fori circolari e rettangolari giacciono su di una circonferenza (tratteggiata in Figura) di raggio $r = R/2$. Al centro del disco è attaccata una molla di massa trascurabile e di costante elastica $k = 208$ N/m.

Nell'ipotesi in cui il disco rotola senza strisciare sulla superficie orizzontale, si calcoli:

- 1) La massa rimossa dal disco pieno (m_{2r}) corrispondente ai 2 fori rettangolari

$$m_{2r} = \dots$$

- 2) Il momento di inerzia del disco forato per rotazioni rispetto al punto di contatto con la superficie orizzontale, (I_{pe})

$$I_{pe} = \dots$$

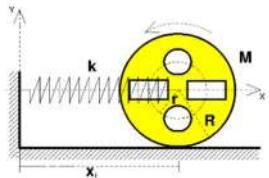
Suggerimento: per una lastra rettangolare sottile di massa m , lati a e b e densità di massa superficiale costante $\sigma = \frac{m}{ab}$, il momento di inerzia I_{tot}^* rispetto ad un asse ortogonale al piano che contiene la lastra e passante per il suo CM al centro del rettangolo è dato da:

$$I_{tot}^* = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$$

Il disco è lasciato libero da fermo dalla posizione (x_0) in cui la molla è allungata di $\Delta x = 27.3$ cm

- 3) Si calcoli l'energia cinetica di rotazione del disco (E_k^{tot}) nell'istante in cui il centro di massa del disco forato passa per la posizione di equilibrio della molla, per la quale l'allungamento della molla è nullo.

$$E_k^{tot} = \dots$$



(Figura qualitativa e non in scala a scopo illustrativo)

$$I_{circ}^{hole} = 2 I_{circ_0}^{hole} = -m_c \frac{R^2}{16} - 2m_c \frac{R^2}{4} = -m_c R^2 \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2} \right) = -m_c R^2 \frac{9}{16}$$

$$I_{rect}^{hole} = 2 I_{r_0}^{hole} = -\frac{m_r}{6} \left[\frac{R^2}{64} + \frac{R^2}{4} \right] - 2m_r \frac{R^2}{4} = -\frac{m_r}{6} \left[\frac{17R^2}{64} \right] - m_r \frac{R^2}{2} = -m_r R^2 \left(\frac{17}{384} + \frac{1}{2} \right) = -m_r R^2 \frac{209}{384}$$

$$I_{cm}^{tot} = I_{disc} + I_{rect}^{hole} + I_{circ}^{hole} = \sigma \pi \frac{R^4}{2} - m_c R^2 \frac{9}{16} - m_r R^2 \frac{209}{384} = \sigma \pi \frac{R^4}{2} - \pi \sigma \frac{R^2}{16} R^2 \frac{9}{16} - \sigma \frac{R^4}{16} R^2 \frac{209}{384} \\ = \sigma R^4 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{256} - \frac{209}{6144} \right)$$

$$I_{pe} = I_{cm}^{tot} + MR^2 = \sigma R^4 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{256} - \frac{209}{6144} \right) + MR^2$$

$$3. E_i = \frac{1}{2} K \Delta x^2 = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}^{tot} \omega^2 = E_f \quad V_{CM} = R \omega \rightarrow \omega = \frac{V_{CM}}{R}$$

$$K \Delta x^2 = M R^2 \omega^2 + I_{cm}^{tot} \omega^2$$

$$\omega^2 (M R^2 + I_{cm}^{tot}) = K \Delta x^2$$

$$\omega^2 = \frac{K \Delta x^2}{M R^2 + I_{cm}^{tot}}$$

$$E_K^{rot} = \frac{1}{2} I_{cm}^{tot} \omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm}^{tot} \frac{K \Delta x^2}{M R^2 + I_{cm}^{tot}}$$

ESERCIZIO.2 – Elettromagnetismo

Nella Figura(a) è rappresentata una spira $MNPQ$ con i lati NP , PQ e QM di lunghezza variabile nel tempo. Il lato MN ha una lunghezza $L = 147$ cm e una resistenza elettrica $R = 482$ m Ω . Questa spira variabile giace in un piano orizzontale ed è immersa in un campo magnetico uniforme e costante di intensità $B = 11.4$ T diretto come in Figura(a). Le equazioni orarie delle coordinate orizzontali degli estremi del lato PQ sono rispettivamente:

- $x_P(\text{cm}) = 588.0 + 73.5 \cos(0.285 t)$
- $x_Q(\text{cm}) = 588.0 + 73.5 \cos(0.683 t)$

La spira, instantaneamente indeformabile, è vincolata a girare nel piano xy e non può né ruotare né traslare.

1) Determinare l'espressione del flusso del campo magnetico (Φ_m) attraverso la spira in funzione del tempo.

$$\Phi_m = \dots$$

2) Determinare la f.e.m. indotta nella spira $MNPQ$ all'istante $t^* = 22.0$ s

$$fem(t^*) = \dots$$

Consideriamo ora una spira che si ottiene da quella di prima con le lunghezze dei lati uguali $NP = MQ = 73.5$ cm, immersa come la prima nello stesso campo magnetico di intensità $B = 11.4$ T vedi Figura(b). Per $t = 0$ s la spira viene messa in rotazione con una velocità angolare $\vec{\Omega} = 0.691 \hat{y}$ rad/s.

3) Determinare la potenza dissipata nella resistenza all'istante $t^{**} = 24.9$ s

$$P(t^{**}) = \dots$$

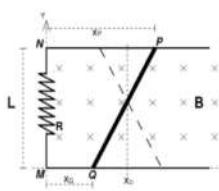


Figura (a)

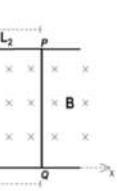


Figura (b)

$$1. x_p = a + b \cos(\omega_p t) \quad \text{e} \quad x_q = a + b \cos(\omega_q t)$$

per Gauss :

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint B dA = B \int dA = B \left[(x_p + x_q)L \cdot \frac{1}{2} \right] = \\ &= \frac{BL}{2} [a + b \cos(\omega_p t) + a + b \cos(\omega_q t)] \\ &= \frac{BL}{2} [2a + b(\cos(\omega_p t) + \cos(\omega_q t))] \end{aligned}$$

2) Determinare la f.e.m. indotta nella spira $MNPQ$ all'istante $t^* = 22.0$ s

$$fem(t^*) = \dots$$

Consideriamo ora una spira che si ottiene da quella di prima con le lunghezze dei lati uguali $NP = MQ = 73.5$ cm, immersa come la prima nello stesso campo magnetico di intensità $B = 11.4$ T vedi Figura(b)

Per $t = 0$ s la spira viene messa in rotazione con una velocità angolare $\vec{\Omega} = 0.691 \hat{y}$ rad/s.

3) Determinare la potenza dissipata nella resistenza all'istante $t^{**} = 24.9$ s

$$P(t^{**}) = \dots$$

2. l'area variabile della spira genera una fem che vale:

$$\begin{aligned} fem &= -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} = -\frac{BLb}{2} (-\sin(\omega_p t)\omega_p) - \frac{BLb}{2} (-\sin(\omega_q t)\omega_q) = \\ &= \frac{BLb}{2} (\sin(\omega_p t)\omega_p + \sin(\omega_q t)\omega_q) \end{aligned}$$

$$fem(t^*) = \frac{BLb}{2} (\sin(\omega_p t^*)\omega_p + \sin(\omega_q t^*)\omega_q)$$

da notare che il segno della fem varia nel tempo, quindi anche il verso della corrente lo farà

3. dobbiamo calcolare il flusso di campo magnetico attraverso la spira, essendo cambiata l'area:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint B dA \cos\theta = B \int dA \cos\theta(t) = BLL_2 \cos\theta(t)$$

adesso abbiamo bisogno di θ : la velocità angolare è costante, quindi segue:

$$\theta(t) = \theta_0 + \Omega t \quad \text{con} \quad \theta_0 = 0, \quad \text{dato che} \quad d\vec{A} \parallel \vec{B} \quad \text{inizialmente}; \quad \text{quindi} \quad \Phi_B = BLL_2 \cos(\Omega t)$$

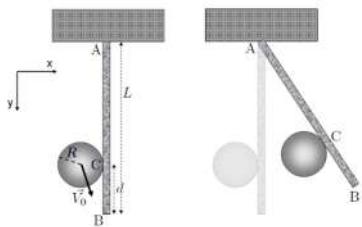
$$\text{e quindi la fem varrà} \quad fem = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = BLL_2 \sin(\Omega t) \Omega$$

$$\text{con corrente indotta che vale} \quad i = \frac{fem}{R} = \frac{BLL_2 \sin(\Omega t) \Omega}{R}$$

$$\text{infine la potenza dissipata} \quad P(t) = i^2(t)R \rightarrow P(t^{**}) = i^2(t^{**})R = \frac{B^2 L^2 L_2 \sin^2(\Omega t^{**}) \Omega^2}{R}$$

Esercizio 1

Un'asta sottile omogenea di massa $M = 1\text{kg}$ e lunghezza $L = 1\text{m}$ è incernierata nel suo estremo A ed è libera di oscillare nel piano verticale. L'asta è inizialmente in equilibrio.



Ad un certo istante l'asta viene colpita nel punto C da una sfera di raggio $R = 0.5\text{m}$ e massa $m = 0.5\text{Kg}$. Il punto C dista $d = 0.3\text{m}$ dall'estremo B dell'asta. Un attimo prima dell'urto la velocità della sfera vale $V_0 = (5; 10)\frac{\text{m}}{\text{s}}$ e l'urto è completamente anelastico (la sfera resta attaccata all'asta).

Si calcoli:

a) Quanto dista dall'estremo A il centro di massa del sistema subito dopo l'urto:

$$D = \dots$$

b) Il valore della velocità angolare ω subito dopo l'urto:

$$\omega = \dots$$

c) Qual è la massima variazione di altezza raggiunta dal centro di massa del sistema nel moto successivo all'urto:

$$\Delta h_{\max} = \dots$$

$$\begin{aligned} 1. \quad x_{CM} &= \frac{-Rm}{m+M} \\ y_{CM} &= \frac{m(L-d) + M \frac{L}{2}}{m+M} \end{aligned} \quad D = \sqrt{x_{CM}^2 + y_{CM}^2}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \vec{L}_{A_1} &= m(r_x v_y - r_y v_x) = m(-Rv_y - (L-d)v_x) = I\omega = \vec{L}_{A_f} \\ r &= (-R, (L-d)) \\ v &= (v_x, v_y) \end{aligned} \quad \omega = \frac{m(-Rv_y - (L-d)v_x)}{I}$$

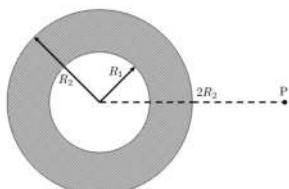
$$I = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{2}{5}mR^2 + m(R^2 + (L-d)^2)$$

$$3. \quad E_i = \frac{1}{2}I\omega^2 + (m+M)gh_{CM} = (m+M)gh_{CM}^i = E_f$$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = (m+M)g\Delta h_{CM}$$

$$\Delta h_{CM} = \frac{I\omega^2}{2(m+M)g}$$

Esercizio 2



Una carica negativa Q è distribuita omogeneamente nel guscio sferico di raggio interno $R_1 = 0.1\text{m}$ e raggio esterno $R_2 = 0.2\text{m}$. La differenza di potenziale tra i punti a distanza R_2 e quelli a distanza R_1 è $|V_2 - V_1| = 200\text{V}$.

Si calcoli:

a) Quanto vale la carica Q :

$$Q = \dots$$

b) Il potenziale dei punti distanti R_1 dal centro (si assuma $V_\infty = 0$):

$$V_1 = \dots$$

c) La densità di energia elettrostatica di un punto P distante $2R_2$ dal centro della sfera:

$$u_e = \dots$$

1. nella zona dove c'è presa la carica sappiamo che, per Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \int \frac{\rho dV}{\epsilon_0}$$

sulla superficie interna $Q = 0 \rightarrow E = 0$, nella esterna invece

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) \quad \text{gaussiana!}$$

$$\text{quindi } E(4\pi r^2) = \int \frac{\rho dV}{\epsilon_0} = \frac{\rho V^i}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)$$

$$\text{infine } E(r) = \frac{\rho \pi r^2}{4\pi r^2 \epsilon_0} (r^3 - R_1^3) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^3 - R_1^3}{r^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(R_2) - V(R_1) = \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_2}^{R_1} E dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_{R_2}^{R_1} \frac{r^3 - R_1^3}{r^2} dr = \\ &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_{R_2}^{R_1} r dr - \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0} \int_{R_2}^{R_1} r^{-2} dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R_2}^{R_1} - \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_2}^{R_1} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{2} - \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0} \left[-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \right] = \frac{\rho}{6\epsilon_0} [R_2^2 - R_1^2] - \frac{\rho R_1^2}{3\epsilon_0} \left[\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \right] = \frac{\rho}{6\epsilon_0} [R_2^2 - R_1^2] - \frac{\rho R_1^2}{3\epsilon_0} \left[\frac{R_1 - R_2}{R_2} \right] =$$

$$= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{R_1^2 - R_2^2}{2} - \frac{R_1^2(R_1 - R_2)}{2R_2} \right] = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{R_1(R_1^2 - R_2^2) - 2R_1^2(R_1 - R_2)}{2R_2} \right] = \Delta V$$

$$\text{quindi } \rho = 6R_2 \epsilon_0 \Delta V [R_2(R_1^2 - R_2^2) - 2R_1^2(R_1 - R_2)]^{-1}$$

$$\text{e } Q = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)$$

$$2. \quad \text{il potenziale in } r = R_2 \text{ vale } V(R_2) = K \frac{Q}{R_2}$$

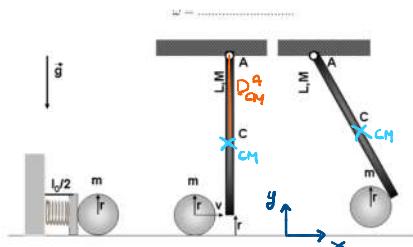
$$\text{quindi quello in } R_1 \text{ vale } \Delta V = V_2 - V_1 = V(R_2) - V(R_1) \rightarrow V(R_1) = V_1 = V_2 - \Delta V$$

$$3. \quad \text{essa vale } U_2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E(2R_2)$$

Esercizio 1

Una sferetta rigida di massa $m = 0.3\text{kg}$ e raggio $r = 0.2\text{m}$ è inizialmente ferma nei pressi di una molla di costante elastica $k = 50\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ e lunghezza a riposo $l_0 = 0.40\text{m}$. La sferetta poggia su un piano orizzontale con attrito mentre la molla è tenuta compressa per un tratto $\Delta x = l_0/2$ da un filo. Ad un certo istante il filo si spezza e la molla scatta accelerando la sferetta. Si faccia l'ipotesi che l'attrito del piano orizzontale sia tale da avere sempre rotolamento puro. Si calcoli:

- a) La velocità angolare ω della sferetta sul piano orizzontale :



Si supponga quindi che, nel moto sul piano orizzontale, la sferetta urti anelasticamente un'asta rigida omogenea di lunghezza $L = 1\text{m}$ e massa $M = 1\text{kg}$. (L'asta è inizialmente ferma ed è libera di ruotare nel piano verticale intorno al vincolo liscio in A). Trascurando la componente lungo x della posizione del centro di massa, si calcoli :

- b) Il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo in A durante l'urto:

$$\Delta p_A = \dots$$

- c) L'altezza massima raggiunta dal centro dell'asta C nel moto successivo all'urto:

$$h_{\max}(C) = \dots$$

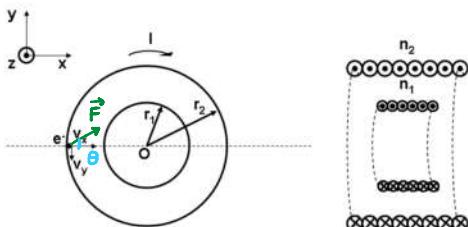
$$\text{ove } I_A = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{2}{5}mr^2 + m(L^2 + r^2) \leftarrow \text{congiungente!}$$

$$\Delta p_a = p_f - p_i = \omega_s D_{CM}^A (M+m) - mr\omega = \\ m\omega_{CM} \quad m\omega_i$$

$$3. E_i = \frac{1}{2}I_A\omega_s^2 = (m+M)gh_{\max} = E_f \leftarrow U(0) \text{ in } y = \frac{L}{2} + r \text{ dal suolo}$$

$$h_{\max} = \frac{I_A\omega_s^2}{2g(m+M)}$$

Esercizio 2



Due solenoidi concentrici hanno raggio $r_1 = 10\text{cm}$ e $r_2 = 20\text{cm}$. Questi solenoidi sono caratterizzati da due valori diversi di n definito come numero di spire per unità di lunghezza: $n_1 = 2\text{cm}^{-1}$, $n_2 = 1.1\text{cm}^{-1}$. All'interno dei due solenoidi circola la stessa corrente $I = 2\text{mA}$. Un elettrone di massa $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\text{kg}$ e carica $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}\text{C}$ penetra nel campo magnetico prodotto dal sistema dei due solenoidi nel punto di coordinate $(-r_2, 0)$ con velocità $v = (5 \cdot 10^4; 1 \cdot 10^4)\text{m/s}$. Si calcoli:

- a) il modulo della forza di Lorentz sull'elettrone nell'istante in cui entra nel solenoide più largo:

$$F = \dots$$

- b) il punto in cui penetra nel solenoide più piccolo:

$$x_p = \dots \quad y_p = \dots$$

- c) La forza di Lorentz nell'istante in cui l'elettrone entra nel solenoide di raggio r_1 e la componente x della velocità dell'elettrone sempre nello stesso istante:

$$F' = \dots \quad v_x(P) = \dots$$

per ottenere θ : $\Theta = \arccos(\frac{v_x}{v})$, da cui si calcola il centro della circonferenza:

$$\begin{aligned} x_c &= -R \cos \theta \\ y_c &= -R \sin \theta \quad \text{(r2)} \end{aligned}$$

e l'equazione della circonferenza $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x x_c - 2y y_c = R^2$

quindi $x^2 + y^2 - ax - by = K$ e mettendo a sistema:

$$\begin{cases} (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R_1^2 \\ x^2 + y^2 - ax - by = K \end{cases}$$

$$1. E_i = \frac{1}{2}K\Delta x^2 = \frac{1}{2}I_p\omega^2 = E_f$$

$$V_{CM} = r\omega \quad I_p = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2$$

$$\frac{1}{2}K\Delta x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5}mr^2\omega^2$$

$$\frac{7}{10}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}K\Delta x^2$$

$$\omega^2 = \frac{10}{14} \frac{K\Delta x^2}{mr^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{5}{7}} \frac{\sqrt{K\Delta x}}{\sqrt{mr}}$$

$$\text{oppure } \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}V_{CM}^2$$

$$\text{con } I_{CM} = \frac{2}{5}mr^2$$

importante

$$2. D_{CM}^A = \frac{M\frac{L}{2} + mL}{(M+m)} \quad V_{CM} = \omega_s D_{CM}^A$$

$$L_{A_f} = mLv = I_A\omega_s = L_{A_f}$$

$$mL\omega_s = I_A\omega_s$$

$$\omega_s = \frac{mL\omega_s}{I_A}$$

1. il campo magnetico all'interno del solenoide più grande è $\vec{B}_2 = \mu_0 i n_2 \hat{z}$ e in quello più piccolo $\vec{B}_1 = \mu_0 i (n_1 + n_2) \hat{z}$

$$\vec{F} = q_e \vec{v} \times \vec{B}_2 = -q_e (v_x \hat{x} + v_y \hat{y}) \times \mu_0 i n_2 \hat{z} = q_e v_y \mu_0 i n_2 \hat{x} \\ + q_e v_x \mu_0 i n_2 \hat{y}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{q_e^2 \mu_0^2 i^2 n_2^2 (v_y^2 + v_x^2)} = q_e \mu_0 i n_2 \sqrt{v_y^2 + v_x^2} \\ = q_e \mu_0 i n_2 v = q_e v B = 0.23 \cdot 10^{-20} \text{ N}$$

2. il punto in cui l'elettrone entra nel solenoide più piccolo si può trovare calcolando l'equazione della circonferenza su cui si muove l'elettrone e metterla a sistema con la circonferenza di centro (0,0) e raggio R_1

l'elettrone esegue un moto circolare il quale raggio vale:

$$F = q_e v B_2 = m_e a_c = m_e \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{m_e v}{q_e B_2}$$

$$2x_c = a, \quad 2y_c = b, \quad R^2 - x_c^2 - y_c^2 = K$$

$$\begin{aligned} ax &= K^* - by \\ \rightarrow (ax)^2 &= (K^* - by)^2 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R_1^2 \\ x^2 + y^2 - ax - by = K \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = R_1^2 \\ R_1^2 - ax - by = K \rightarrow ax + by = R_1^2 - K = K^* \end{array} \right.$$

$ax = K^* - by$ altro $\rightarrow (ax)^2 = (K^* - by)^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2x^2 + a^2y^2 = a^2R_1^2 \rightarrow (K^* - by)^2 + (ay)^2 = (aR_1)^2 \rightarrow K^{*2} + b^2y^2 + 2byK^* + a^2y^2 - a^2R_1^2 = 0 \\ ax + by = K^* \end{array} \right.$$

che è una quadratica in y: $b^2y^2 + a^2y^2 + 2byK^* + K^{*2} - a^2R_1^2 = 0 \rightarrow y^2(b^2 + a^2) + y(2bK^*) + K^{*2} - a^2R_1^2 = 0$

con soluzione $y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ $\rightarrow y_p = -0.0262m$, scegliendo la soluzione più vicina all'origine

e $x = x_p = \frac{K^* - by}{a} = -0.0965m$

3. quando l'elettrode entra nel solenoide piccolo, dato che $B_T = \mu_0 i (n_i + n_e)$: $F' = q_e v B_T$
dato che $V \perp B_T$, quest'ultimo costante e dritto lungo \hat{z} .

ESERCIZIO.1 - Meccanica

Con riferimento alla figura, una carruola, di massa $M = 0.5 \text{ kg}$ e di forma cilindrica e omogenea, è libera di ruotare senza attrito intorno al proprio asse orizzontale. Essa è fissata alla sommità di un piano inclinato formante un angolo $\theta = 30^\circ$ rispetto al piano orizzontale. Intorno alla carruola è avvolto un filo, inestensibile e di massa trascurabile, alla cui estremità libera è fissato un corpo di massa $m = 0.3 \text{ kg}$, di forma cubica e assimilabile a un punto materiale, che giace sul piano inclinato. Il filo si mantiene sempre parallelo al piano e non slitta sulla carruola. Tra il corpo e piano inclinato si esercita attrito radente dinamico, caratterizzato dal coefficiente $\mu = 0.3$. Il corpo di massa m è inizialmente fermo.

Determinare:

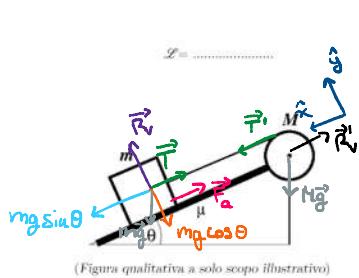
1. La tensione del filo durante la discesa lungo piano
- $|\vec{T}|$

$$|\vec{T}| = \dots$$

2. Calcolare la velocità del corpo di massa
- m
- dopo che ha percorso un tratto di lunghezza
- $L = 3 \text{ m}$
- lungo il piano inclinato

$$v = \dots$$

3. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza di attrito
- \mathcal{L}
- quando la massa
- m
- ha percorso il tratto di lunghezza
- L
- lungo il piano.

2. $a = \text{cost} \rightarrow \text{moto unif. accelerato}$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x(t^*) = y_0^0 + v_0^0 t + \frac{1}{2} a t^{*2} \rightarrow 2L = a t^{*2} \rightarrow t^{*2} = \frac{2L}{a} \rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2L}{a}}$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$v(t^*) = y_0^0 + at^* = a \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2a^2 L}{a}} = \sqrt{2aL}$$

$$a(t) = \text{cost.}$$

$$3. \mathcal{L} = \int_0^L \vec{F}_a \cdot d\vec{s} = \vec{F}_a \int_0^L ds = -\mu mg \cos \theta L$$

ESERCIZIO.2 - Elettromagnetismo

Con riferimento alla figura, una sfera uniformemente carica di raggio $R_1 = 0.03 \text{ m}$ e carica $Q = 1.1 \text{ nC}$, è contenuta all'interno di una superfcie sferica di raggio $R_2 = 0.05 \text{ m}$, sulla quale è distribuita la stessa carica Q in modo uniforme. Le due sfere sono concentriche con centro in O e il sistema si trova nel vuoto.

1. Si determini il campo elettrico
- \vec{E}
- in tutto lo spazio e si disegni il grafico del modulo del campo elettrico in funzione della distanza dal centro delle sfere.

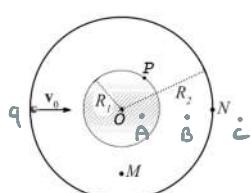
$$\vec{E} = \dots$$

2. Determinare la differenza di potenziale
- $V_{MN} = V(M) - V(N)$
- tra il punto
- M
- , posto a distanza
- $\frac{(R_1 + R_2)}{2}$
- dal centro delle sfere, e il punto
- N
- , posto a distanza
- R_2
- sempre dal centro delle sfere.

$$V_{MN} = \dots$$

3. Determinare la velocità minima iniziale,
- v_0
- , con cui deve essere lanciata una particella puntiforme di massa
- $m = 4 \times 10^{-12} \text{ kg}$
- e carica
- $q = 3 \text{ pC}$
- dalla superficie sferica esterna verso il centro delle sfere per raggiungere la superficie sferica interna.

$$v_0 = \dots$$

Costanti Utili: $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ 

(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)



$$\left(\frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \right) \quad r < R_1 \quad (\propto kr)$$

1.

$$ma = mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta - T$$

$$\vec{r} \times \vec{T}' = I \vec{\alpha} = r T' \hat{z} = I \alpha \hat{z} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{carruola}$$
$$\text{ove } I = \frac{1}{2} M r^2$$

$$|T'| = |T|, \quad a = rd \rightarrow \alpha = \frac{a}{r}$$

$$rT = I \alpha = \frac{1}{2} Mr^2 \frac{a}{r} \rightarrow T = \frac{1}{2} Ma$$

$$\text{sostituendo: } ma = mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta - \frac{1}{2} Ma$$

$$ma + \frac{1}{2} Ma = mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta$$

$$a(m + \frac{1}{2} M) = mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta$$

$$a = \frac{mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta}{m + \frac{1}{2} M} \quad \text{costante!}$$

$$x(t^*) = L$$

$$x(t^*) = y_0^0 + v_0^0 t + \frac{1}{2} a t^{*2} \rightarrow 2L = a t^{*2} \rightarrow t^{*2} = \frac{2L}{a} \rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2L}{a}}$$

$$v(t^*) = y_0^0 + at^* = a \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2a^2 L}{a}} = \sqrt{2aL}$$

1.

$$\Phi_A = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA = E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$Q : \frac{4}{3}\pi R_1^3 = Q_{\text{int}} : \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$Q_{\text{int}} = \frac{Q \frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} = Q \frac{r^3}{R_1^3}$$

$$E_A = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R_1^3} = KQ \frac{r}{R_1^3} \quad \vec{E}_A = E_A \hat{r}$$

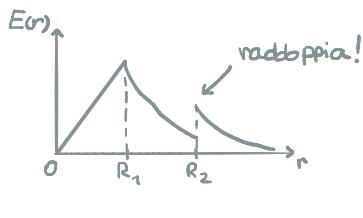
$$\Phi_B = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA = E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{\text{int}} = Q \text{ per Gauss}$$

$$E_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = KQ \frac{1}{r^2} \quad \vec{E}_B = E_B \hat{r}$$

$$\Phi_C = 2\Phi_B \text{ dato che } Q_{\text{int}} = 2Q$$

$$E_C = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2} \quad \vec{E}_C = E_C \hat{r}$$



$$E(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} & r < R_1 \quad (\propto kr) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \quad (\propto k \frac{1}{r^2}) \\ \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2} & r > R_2 \quad (\propto k \frac{1}{r^2}) \end{cases}$$

$$E_C = \frac{-\infty}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{-\infty}{2\pi\epsilon_0 r^2} \quad E_C = E_C r$$

$$2. V_{MN} = V(M) - V(N) = \int_M^N \vec{E}_B \cdot d\vec{r} = \int_M^N \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_M^N \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\frac{R_1+R_2}{2}}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{2}{R_1+R_2} \right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-R_1-R_2+2R_2}{(R_1+R_2)R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2-R_1}{(R_1+R_2)R_2}$$

$$V_{op} = V(O) - V(P) = \int_O^P \vec{E}_B \cdot d\vec{r} = \int_O^P \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \int_O^P r dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \frac{P^2}{2} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R_1} \frac{P^2}{2}$$

$$3. \Delta E = 0 \leftrightarrow E = \text{const} \quad (\text{energia!})$$

$$E_{R_2} = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV(R_2) = qV(R_1) = E_{R_1}, \quad V = \frac{U}{q} \rightarrow U = qV$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = qV(R_1) - qV(R_2)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = q \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_B \cdot d\vec{r} = q \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r^2} \right]_{R_1}^{R_2} = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_1^2} \right] = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

$$v_0^2 = \frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0 m} \cdot \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}$$

Se ci arrivava con $v_i \neq 0$, si sommava dentro la \sqrt

$$v_0 = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 m} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}$$

ESERCIZIO.1 - Meccanica



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

Con riferimento alla figura, un corpo assimilabile a un punto materiale di massa $m = 100 \text{ g}$ è collegato ad un filo, indeformabile e privo di massa, di lunghezza $L = 50 \text{ cm}$. Inizialmente il punto materiale è tenuto fermo nella posizione in cui il filo forma un angolo $\theta_0 = 45^\circ$ con la verticale. Ad un certo istante, il punto materiale viene lasciato cadere. Calcolare:

La 1) modulo della tensione del filo, T , un istante dopo che è stato lasciato cadere

$$T = \dots$$

1.b) Il modulo della componente normale alla traiettoria del corpo della forza F_n , che agisce su di esso, un istante dopo che il corpo è stato lasciato cadere

$$F_n = \dots$$

2.a) Il modulo della velocità v_1 del punto quando il filo forma un angolo $\theta_1 = 30^\circ$ con la verticale e il modulo della forza F_1 , che agisce su di esso

$$v_1 = \dots \quad F_1 = \dots$$

2.b) Il modulo della velocità v_1 del punto quando il filo forma un angolo $\theta_1 = 30^\circ$ con la verticale, e il modulo delle componenti normale, a_{1n} , e tangenziale, a_{1t} , alla traiettoria della sua accelerazione

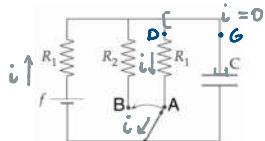
$$v_1 = \dots \quad a_{1n} = \dots \quad a_{1t} = \dots$$

Supponiamo ora che nel suo moto di discesa il corpo vada a comprimere una molla di $d = 1.0 \text{ cm}$ (notare che $d \ll L$). La molla giace sul piano, è fissata a un estremo, è ideale, ha massa nulla, costante elastica k e quando raggiunge la massima compressione (d) il filo forma un angolo $\theta = 0^\circ$.

3. Determinare la costante elastica della molla k

$$k = \dots$$

ESERCIZIO.2 - Elettromagnetismo



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

Con riferimento alla figura, il generatore di t.c.m. ha una resistenza interna trascurabile e stabilisce una d.d.p. di 12 V , le resistenze valgono rispettivamente $R_1 = 3 \Omega$ e $R_2 = 0.6 \Omega$, mentre il condensatore ha una capacità $C = 4 \mu\text{F}$. Inizialmente il deviatore è commutato su A.

Una volta che il circuito ha raggiunto la condizione di regime, determinare:

1.1 La potenza P erogata dal generatore e la carica Q del condensatore

$$P = \dots \quad Q = \dots$$

1.2 La potenza P erogata dal generatore e la differenza di potenziale, V_C ai capi del condensatore

$$P = \dots \quad V_C = \dots$$

Il deviatore viene poi commutato nella posizione B.

Una volta che il circuito ha raggiunto la condizione di regime, si determini:

2.1 L'energia dissipata, E_{diss} , nelle resistenze dopo un intervallo di tempo di Δt secondi

$$E_{diss} = \dots$$

2.2 La variazione di energia elettrostatica del sistema, $\Delta E = E_B - E_A$, tra quando il commutatore è deviato su B e quando lo è su A in condizione di regime per entrambi i casi

$$\Delta E = \dots$$

Sempre con il deviatore commutato nella posizione B si riempie il condensatore con un materiale di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 3$ e si aspetta che il circuito raggiunga una nuova condizione di regime. Si determini:

3.1 La variazione di energia elettrostatica del sistema, $\Delta E' = E'_B - E'_A$

$$\Delta E' = \dots$$

3.2 La carica Q' del condensatore

$$Q' = \dots$$

Costante di Dielectrico: $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

$$\Delta E = E_B - E_A = \frac{1}{2} C i^2 R_2^2 - \frac{1}{2} C i^2 R_1^2$$

$$3. C' = \epsilon_r C$$

$$E'_B = \frac{1}{2} C' \Delta V_B^2 = \frac{1}{2} \epsilon_r C i^2 R_2^2$$

$$Q' = C' \Delta V_B = \epsilon_r C i R_2$$

1. $m a_c = T - mg \cos \theta_0 = 0 \rightarrow T = mg \cos \theta_0$
2. $E_i = mgL(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2} mv_1^2 + mgL(1 - \cos \theta_1) = E_f$
 $\frac{1}{2} mv_1^2 = mgL(1 - \cos \theta_0) - mgL(1 - \cos \theta_1)$
 $\frac{1}{2} mv_1^2 = \cancel{mgL(1 - \cos \theta_0)} + mgL(\cos \theta_1 - 1)$

$$v_1^2 = gL(\cancel{1 - \cos \theta_0} + \cos \theta_1 - 1)$$

$$v_1 = \sqrt{2gL(\cos \theta_1 - \cos \theta_0)}$$

$$F_1^n = m a_c = \frac{mv_1^2}{L} = 2mg(\cos \theta_1 - \cos \theta_0)$$

$$F_1^t = mg \sin \theta_1,$$

$$F_1 = \sqrt{F_1^n + F_1^t} = \sqrt{4m^2 g^2 (\cos \theta_1 - \cos \theta_0)^2 + m^2 g^2 \sin^2 \theta_1}$$

$$= mg \sqrt{4(\cos \theta_1 - \cos \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_1}$$

$$3. E_i = mgL(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2} k d^2 = E_f$$

$$k = \frac{2mgL(1 - \cos \theta_0)}{d^2}$$

$$1. P = R i^2 = 2R_1 i^2 = \cancel{\pi R_1 \frac{(\Delta V)^2}{4R_1}} = \frac{(\Delta V)^2}{2R_1}$$

$$R i = \Delta V \rightarrow i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V}{2R_1}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \rightarrow Q = C \Delta V = C i R_1 \leftarrow \text{c'è la resistenza davanti}$$

$$R i = \Delta V \rightarrow i R_1 = \Delta V = V_C$$

$$2. P_B = \frac{E_B}{\Delta t} \rightarrow E_{diss} = P_B \Delta t = \frac{(\Delta V)^2}{R_1 + R_2} \Delta t$$

$$P_B = (R_1 + R_2) i^2 = (R_1 + R_2) \frac{(\Delta V)^2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{(\Delta V)^2}{R_1 + R_2}$$

$$i = \frac{\Delta V}{R_1 + R_2}$$

$$E_B = \frac{1}{2} C \Delta V_B^2 = \frac{1}{2} C i^2 R_2^2$$

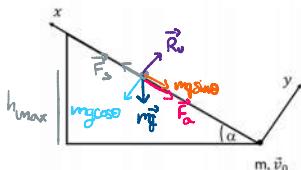
$$\Delta V_B = i R_2$$

$$E_A = \frac{1}{2} C \Delta V_A^2 = \frac{1}{2} C i^2 R_1^2$$

$$\Delta V_A = i R_1$$

$$\Delta E' = E'_B - E'_A = \frac{1}{2} \epsilon_r C i^2 R_2^2 - \frac{1}{2} C i^2 R_1^2$$

ESEMPIO.1 - Mecanica



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

Con riferimento alla figura, a un punto materiale che si trova nell'origine del sistema di assi cartesiani indicato, viene fornita all'istante $t = 0$ una velocità $\vec{v}_0 = (10, 0) \text{ ms}^{-1}$. Il moto del punto materiale negli istanti successivi avviene lungo un piano inclinato, con un angolo di base $\alpha = 30^\circ$, e sciolto. Indichiamo con μ_s e μ_d rispettivamente il coefficiente di attrito statico e dinamico tra il piano ed il punto materiale, con $\mu_s > 0.3$.

1.a Scrivere la legge oraria per lo spazio percorso lungo il piano nel moto di salita

$$x(t) = \dots$$

1.b Eseguire la velocità in funzione del tempo, $v(t)$, nel moto di salita lungo il piano

$$v(t) = \dots$$

2.a Calcolare il tempo necessario, t^* , perché il punto materiale si ferma e la corrispondente quota massima rispetto al suolo, h_{\max} , raggiunta dal punto nella salita

$$t^* = \dots \quad h_{\max} = \dots$$

2.b Calcolare il tempo necessario, t' , affinché il punto materiale nel moto di salita raggiunga una velocità pari a $v(t') = v_0/2$ e la corrispondente quota, h' , rispetto al suolo

$$t' = \dots \quad h' = \dots$$

$$1. \quad m\ddot{x} = -\mu_d mg \cos \alpha - mg \sin \alpha$$

$$\ddot{x} = -g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha) = \text{costante!}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \ddot{x} t^2$$

$$= v_0 t - \frac{1}{2} g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha) t^2$$

$$v(t) = v_0 + \ddot{x} t = v_0 - g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha) t$$

$$2. \quad v(t^*) = v_0 - g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha) t^* = 0$$

$$-t^* g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha) = -v_0$$

$$t^* = \frac{v_0}{g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)}$$

$$x(t^*) = v_0 t^* - \frac{1}{2} g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha) t^{*2}$$

$$= \frac{v_0^2}{g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)} - \frac{1}{2} g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha) \frac{v_0^2}{g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)}$$

$$= \frac{v_0^2}{g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)}$$

$$h_{\max} = x(t^*) \sin \alpha = \frac{\sin \alpha v_0^2}{2g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)}$$

$$\text{Oppure: } K_f - K_i = U_i - U_f + L_{\text{diss}} \rightarrow 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mgh_{\max} + \int_0^{x(t^*)} \vec{F}_a \cdot d\vec{s}$$

Th. forze vive

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 = -mgh_{\max} - \mu_d mg \cos \theta x(t^*)$$

$$\frac{1}{2} v_0^2 = g h_{\max} - \mu_d g \cos \theta \frac{h_{\max}}{\sin \alpha}$$

$$h_{\max} = x(t^*) \sin \alpha$$

$$h_{\max} (g - \mu_d g \cos \theta \frac{1}{\sin \alpha}) = \frac{1}{2} v_0^2$$

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g(1 - \frac{\mu_d}{\tan \alpha})} \leftarrow \text{Stesso risultato}$$

$$v(t') = v_0 - g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha) t' = \frac{v_0}{2}$$

$$-g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha) t' = \frac{v_0}{2} - v_0$$

$$t' = \frac{v_0}{2g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)}$$

$$x(t') = v_0 t' - \frac{1}{2} g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha) t'^2$$

$$= v_0 \frac{v_0}{2g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)} - \frac{1}{2} g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha) \frac{v_0^2}{4g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)}$$

$$= \frac{v_0^2}{2g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)} - \frac{v_0^2}{8g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)}$$

$$= \frac{3v_0^2}{8g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)}$$

$$h' = x(t') \sin \alpha = \frac{3v_0^2 \sin \alpha}{8g(\mu_d \cos \alpha + \sin \alpha)}$$

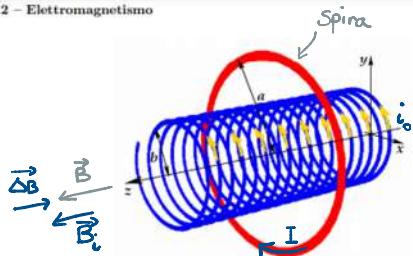
$$\text{Oppure: } K_f - K_i = U_i - U_f + L_{\text{diss}} \rightarrow \frac{1}{2} m (\frac{v_0}{2})^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mgh' - \mu_d mg \cos \alpha x(t')$$

$$3. \quad F_s^{\max} \geq m g \sin \alpha \rightarrow \mu_s m g \cos \alpha \geq m g \sin \alpha$$

$$3. F_s^{\max} \geq m g_{\text{inerti}} \rightarrow \mu_s \frac{m}{r} \cos \alpha \geq \frac{m}{r} g_{\text{inerti}}$$

$$\mu_s \geq \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

ESERCIZIO.2 - Elettromagnetismo



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

Una spira circolare conduttrice giace in un piano ortogonale all'asse di un solenoide ed è ad esso coassiale. La spira ha raggio $a = 10 \text{ mm}$ e resistenza $R = 4 \text{ m}\Omega$, mentre il solenoide ha raggio $b = a/2$ e $n = 10^3 \text{ spire/mm}$, spire per unità di lunghezza. Nell'ipotesi in cui la corrente nel solenoide è $i_0 = 0.5 \text{ A}$ e nel verso indicato in figura:

- 1.a Determinare l'espressione del campo di induzione magnetica \vec{B} in tutto lo spazio, e calcolare il campo in un punto che giace in un piano parallelo alla spira e distante $a/4$ dall'asse del solenoide

$$\vec{B} = \dots \quad \vec{B}_{a/4} = \dots$$

- 1.b Determinare l'espressione del campo di induzione magnetica \vec{B} in tutto lo spazio, e calcolare il campo in un punto che giace in un piano parallelo alla spira e distante a dall'asse del solenoide

$$\vec{B} = \dots \quad \vec{B}_a = \dots$$

Nell'ipotesi in cui la corrente che scorre nel solenoide sia variabile nel tempo e data da $i(t) = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, con $\tau = 1 \text{ ms}$:

- 2.a Si determini l'espressione della corrente I che circola nella spira e il suo verso (giustificando la risposta e con un disegno)

$$I = \dots$$

- 3.a Calcolare l'energia complessivamente dissipata nella spira, E_{diss}

$$E_{\text{diss}} = \dots$$

- 3.b Calcolare il valore massimo della potenza dissipata nella spira P_{max}

$$P_{\text{max}} = \dots$$

Costanti Utili: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\mu_0 n_i \pi b^2}{R \tau} \right)^2 R \left[-e^{-\frac{2t}{\tau}} + e^{\frac{2t}{\tau}} \right]^1 = 3.04 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

1. dal th. Ampere, il campo magnetico vale:

$$B(r) = \begin{cases} \mu_0 n i_0 & 0 \leq r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$\vec{B} = B(r) \hat{z} \quad \vec{B}_a = 0 \quad \vec{B}_{a/4} = 0.628 \text{ T} \hat{z}$$

$$2. B(r) = \begin{cases} \mu_0 n i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} & 0 \leq r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$\vec{B} = B(r) \hat{z} \quad n = 10^3 \frac{\text{spire}}{\text{mm}} \cdot 10^3 = 10^6 \frac{\text{spire}}{\text{m}}$$

$$\Phi(B) = BA = \mu_0 n i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \pi b^2$$

$$\dot{\Phi}_{\text{ind}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial (\mu_0 n i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \pi b^2)}{\partial t} = \frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}$$

$$I = I(t) = \frac{\dot{\Phi}_{\text{ind}}}{R} = \frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2 e^{-\frac{t}{\tau}}}{R \tau}$$

$$3. P = I^2 R = \left(\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2 e^{-\frac{t}{\tau}}}{R \tau} \right)^2 R$$

$$P_{\text{max}} = P(0) = \left(\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2}{R \tau} \right)^2 R = 0.609 \text{ W}$$

$$E_{\text{diss}} = \int_0^\infty P(t) dt = \int_0^\infty \left(\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2 e^{-\frac{t}{\tau}}}{R \tau} \right)^2 R dt = \left(\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2}{R \tau} \right)^2 R \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}} dt$$

$$= -\frac{\pi}{2} \left(\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2}{R \tau} \right)^2 R \int_0^\infty e^{\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\mu_0 n i_0 \pi b^2}{R \tau} \right)^2 R \left[-e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^\infty$$

ESERCIZIO.1 - Meccanica

Un punto materiale di massa $m=16.3 \text{ kg}$ può muoversi senza attrito su un piano orizzontale. Al punto sono collegate due molle ideali di costanti elastiche $k_1=71 \text{ Nm}^{-1}$ e $k_2=571 \text{ Nm}^{-1}$, rispettivamente, come mostrato in figura. Nella posizione $x_0=0$ il blocco è in equilibrio e le molle sono a riposo. All'istante $t=0$ il punto materiale di massa m viene lasciato, da fermo, dalla posizione $x=133 \text{ cm}$. Determinare:

- 1) la pulsazione ω delle oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio:

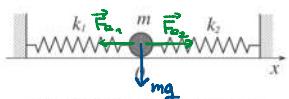
$$\omega = \dots$$

- 2) la legge oraria del punto per $t \geq 0$ s e il modulo della massima accelerazione $|a_{max}|$ raggiunta dal punto durante il suo moto:

$$|a_{max}| = \dots \quad t = x(t) = \dots$$

- 3) l'energia meccanica totale E_{tot} del punto al tempo $t=T/19$ (con T periodo del moto oscillatorio):

$$E_{tot} = \dots$$



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

$$\begin{cases} x(0) = \bar{x} = A \cos \phi \rightarrow \bar{x} = A \\ \dot{x}(0) = 0 = -\omega A \sin \phi \rightarrow \phi = 0 \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{cases} x(t) = \bar{x} \cos(\omega t) \\ \dot{x}(t) = -\omega \bar{x} \sin(\omega t) \\ \ddot{x}(t) = -\omega^2 \bar{x} \cos(\omega t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |V_{max}| = \omega \bar{x} = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} \bar{x} \\ |a_{max}| = \omega^2 \bar{x} = \frac{k_1+k_2}{m} \bar{x} \end{cases}$$

$$3. K(t) = \frac{1}{2} m V^2(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 \bar{x}^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} m \frac{k_1+k_2}{m} \bar{x}^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} K_{eq} \bar{x}^2 \sin^2(\omega t) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{pallina}$$

$$K(t = \frac{T}{n}) = \frac{1}{2} K_{eq} \bar{x}^2 \sin^2(\omega \frac{T}{n}) = \frac{1}{2} K_{eq} \bar{x}^2 \sin^2(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{n}) = \frac{1}{2} K_{eq} \bar{x}^2 \sin^2(\frac{2\pi}{n})$$

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{1}{2} k_1 \bar{x}^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} k_2 \bar{x}^2 \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} K_{eq} \bar{x}^2 \cos^2(\omega t) \\ U(t = \frac{T}{n}) &= \frac{1}{2} K_{eq} \bar{x}^2 \cos^2(\frac{2\pi}{n}) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{molle}$$

$$E = K(t) + U(t) = \frac{1}{2} K_{eq} \bar{x}^2 \sin^2(\frac{2\pi}{n}) + \frac{1}{2} K_{eq} \bar{x}^2 \cos^2(\frac{2\pi}{n}) = \frac{1}{2} K_{eq} \bar{x}^2$$

ESERCIZIO.2 - Elettromagnetismo

I due solenoidi in figura sono rettilinei, di lunghezza infinita, coassiali con l'asse in comune lungo l'asse Z e hanno raggi $r_1=21 \text{ mm}$ ed $r_2=112 \text{ mm}$. I solenoidi hanno entrambi $n=5.38 \cdot 10^5 \text{ spire m}^{-1}$ e sono percorsi da una medesima corrente $i_0=36 \text{ A}$ ma in versi opposti, come rappresentato in figura. Si determinino:

- 1) Il grafico di $B(r)$ in funzione della distanza r dall'asse Z e dell'angolo φ

L'espressione del campo magnetico $\vec{B}(r, \varphi, z)$ $\forall r \geq 0 ; \forall \varphi \in [0, 2\pi] ; \forall z \in \mathbb{R}$

$$\vec{B}(r, \varphi, z) = \dots$$

- 2) Calcolare l'intensità del campo magnetico $|\vec{B}(0, \varphi, z)|$ $\forall \varphi \in [0, 2\pi] ; \forall z \in \mathbb{R}$

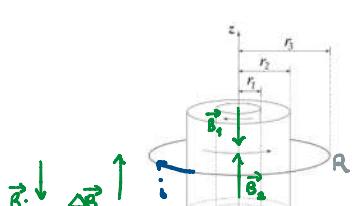
$$|\vec{B}(0, \varphi, z)| = \dots$$

Intorno ai due solenoidi, e coassialmente ad essi, viene collocata una spira circolare, di raggio $r_3=71 \text{ cm}$ e resistenza ohmica $R=119 \Omega$, mentre la corrente che scorre nei solenoidi viene fatta variare con legge $i(t)=24.1 t$. Determinare:

- 3) la potenza P dissipata in (mW) sulla spira per effetto Joule

$$P = \dots$$

Costanti Utili: $\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6} \text{ TmA}^{-1}$



$$1. F(x) = -(K_1 + K_2)x$$

$$ma = -(K_1 + K_2)x$$

$$m\ddot{x} = -(K_1 + K_2)x$$

$$\ddot{x} = \frac{-(K_1 + K_2)}{m} x$$

$$\ddot{x} + \frac{K_1 + K_2}{m} x = 0 \leftarrow \text{oscillatore armonico}$$

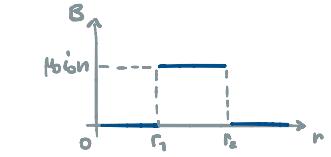
$$\omega = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{m}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_1 + K_2}} \quad V = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{m}}$$

$$2. K_{eq} = K_1 + K_2$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$



1. il campo magnetico di entrambi i solenoidi separata mente è $\vec{B} = \mu_0 i n$

$$\text{si cioè così} \quad \vec{B}(r) = \begin{cases} 0 & r < r_1 \\ \mu_0 i n \hat{z} & r_1 < r < r_2 \\ 0 & r > r_2 \end{cases}$$

$$2. |\vec{B}(0, \varphi, z)| = 0 \text{ perché } \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 0 \text{ in } r=0$$

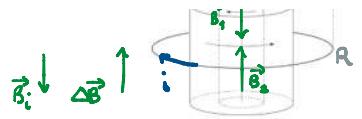
3. il flusso di campo magnetico attraverso la spira vale, per Gauss:

$$\Phi_B(t) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint B dA = B \oint dA = B \pi (r_2^2 - r_1^2) = B \pi (r_2^2 - r_1^2)$$

$$= \mu_0 i(t) n \pi (r_2^2 - r_1^2) = \mu_0 a n \pi (r_2^2 - r_1^2)$$

quindi, per Faraday si svilupperà una E sulla spira che vale

$$E = -\frac{\partial \Phi_B(t)}{\partial t} = -\mu_0 a n \pi (r_2^2 - r_1^2) \text{ e } i = \frac{E}{R}$$



$$\pi r_2^2 - \pi r_1^2 \\ = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$

$$E = -\frac{\partial \Phi_B(t)}{\partial t} = -\mu_0 n \pi (r_2^2 - r_1^2) \quad e \quad i = \frac{|E|}{R}$$

che scorra' in senso orario per la regola della mano destra

$$\text{quindi: } P = i^2 R = \frac{E^2}{R} R = \frac{E^2}{R}$$

ESERCIZIO.1 - Meccanica

Un'asta orizzontale di lunghezza $L = 107.4$ m e massa $m = 248$ kg giace su un piano orizzontale privo di attrito. Due corpi assimilabili a due punti materiali, di massa $m_1 = 62$ kg e $m_2 = 31$ kg, si muovono sullo stesso piano orizzontale con velocità rispettivamente $v_1 = 8 \text{ ms}^{-1}$ e $v_2 = 16 \text{ ms}^{-1}$ in direzione ortogonale alla sbarra e versi opposti come in figura. I due corpi colpiscono contemporaneamente l'asta, rispettivamente alle distanze $d_1 = 17.9$ m e $d_2 = 35.8$ m dal suo centro e rimangono attaccati ad essa.

1.a Dire quali delle seguenti grandezze fisiche si conserva nell'urto, giustificando la risposta:

- Energia del sistema, E
- quantità di moto del sistema, \vec{P}
- momento angolare con polo nel centro dell'asta, \vec{L}

2.a Calcolare la posizione \vec{R}_{cm} e la velocità \vec{v}_{cm} del centro di massa dopo l'urto

$$\vec{R}_{cm} = \dots \quad \vec{v}_{cm} = \dots$$

2.b Calcolare il momento angolare del sistema dopo l'urto rispetto al centro dell'asta, \vec{L}

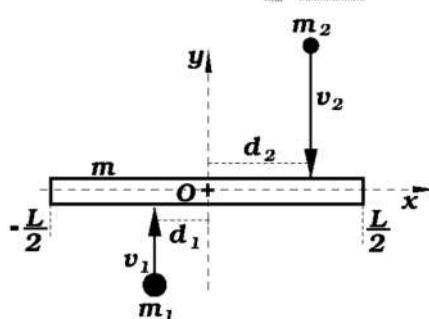
$$\vec{L} = \dots$$

3.a Calcolare l'energia cinetica K del sistema dopo l'urto

$$K = \dots$$

3.b Calcolare l'energia cinetica rotazionale E_{rot} del sistema dopo l'urto

$$E_{rot} = \dots$$



$$L_{0_i} = -d_1 m_1 v_1 - d_2 m_2 v_2 = I \omega = L_{0f}$$

$$\omega = \frac{-d_1 m_1 v_1 - d_2 m_2 v_2}{I} = -0.09 \text{ s}^{-1}$$

$$1. E = no \text{ (urto onelastico)}$$

$$\vec{P} = si \text{ (no } \vec{F} dt \text{ impulsivo)}$$

$$\vec{L}_0 = si \left(\sum \vec{L}_{ext} = 0 \right)$$

$$2. \vec{R}_{cm} = \left(\frac{-m_1 d_1 + m_2 d_2}{m_1 + m_2 + m}, 0, 0 \right) = (0, 0, 0)_m$$

$$P_{i_y} = -m_2 v_2 + m_1 v_1 = (m_1 + m_2 + m) V_{cm_y} = P_{f_y}$$

$$P_{i_x} = 0 = P_{f_x}$$

$$P_{i_z} = 0 = P_{f_z}$$

$$\vec{V}_{cm} = (0, \frac{-m_2 v_2 + m_1 v_1}{m_1 + m_2 + m}, 0) = (0, 0, 0) \text{ m/s}$$

$$\vec{L}_{0i} = \vec{d}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{d}_2 \times m_2 \vec{v}_2 = \vec{L}$$

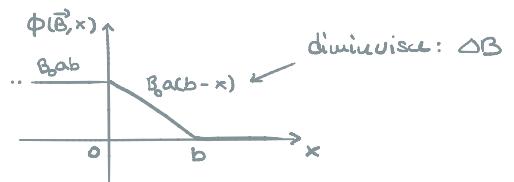
$$\vec{L} = (-d_1 m_1 v_1 - d_2 m_2 v_2) \hat{z} = -(d_1 m_1 v_1 + d_2 m_2 v_2) \hat{z} = -2.66 \cdot 10^4 \text{ kg m}^2 \text{s}^{-1} \hat{z}$$

$$3. K = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m) \vec{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cancel{I} \cancel{\left(-d_1 m_1 v_1 - d_2 m_2 v_2 \right)^2} =$$

$$I = \frac{1}{12} m L^2 + m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 = 297 \cdot 10^3 \text{ kg m}$$

$$1. \Phi(\vec{B}, x) = \begin{cases} \vec{B}_0 \cdot \vec{A} = B_0 A = B_0 ab = 2.24 \cdot 10^{-2} \text{ wb} & -\infty < x \leq 0 \\ \vec{B}_0 \cdot \vec{A} = B_0 A = B_0 a(b-x) & 0 < x < b \\ \vec{B}_0 \cdot \vec{A} = 0 \cdot A = 0 & b \leq x < \infty \end{cases} \quad \Delta$$

$$B_0 a(b-x) = 0 \rightarrow x \geq b \quad (2.24 \cdot 10^{-2} - 2.8 \cdot 10^{-1} \cdot x) \text{ wb}$$



$i(x) \neq 0$ solo in $0 < x < b$, ovvero $\Phi(\vec{B}, x)$ non è costante

$$f.e.m = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial (B_0 a(b-x))}{\partial t} = B_0 a \frac{dx}{dt} = B_0 a v_0 \leftarrow \text{Levi-Civita}$$

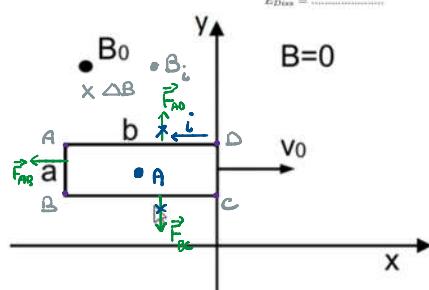
$$i = \frac{B_0 a v_0}{R} = 10.26 \text{ A} \quad > 0 : \text{ senso concorde a } B_0$$

3.a Si calcoli il lavoro L necessario per estrarre la spira dalla regione in cui è presente il campo magnetico.

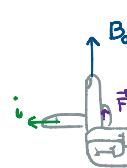
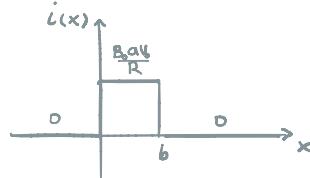
$$L = \dots$$

3.b Si calcoli l'energia complessivamente dissipata per effetto Joule nella spira durante il processo di estrazione E_{Diss} .

$$E_{Diss} = \dots$$



negli altri casi $\frac{\partial \Phi}{\partial B} = 0 \rightarrow i = 0$



$$2. \vec{F} = i \vec{L} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_A = i \vec{L} \times \vec{B} = i b B_0 \hat{y} \quad \} \text{ si annullano}$$

$$\vec{F}_B = i \vec{L} \times \vec{B} = -i a B_0 \hat{x} = -\frac{B_0 a v_0}{R} a B_0 \hat{x} = -\frac{B_0^2 a^2 v_0}{R} \hat{x} = \underline{\underline{2.87 \cdot 10^{-1} N}}$$

$$\leftarrow \Gamma = vL \times B$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ab} &= i \vec{L} \times \vec{B} = i b B_0 \hat{j} \\ \vec{F}_{bc} &= i \vec{L} \times \vec{B} = -i b B_0 \hat{j}\end{aligned}\quad \left. \right\} \text{ si annullano}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ba} &= i \vec{L} \times \vec{B} = -i a B_0 \hat{x} = -\frac{B_0 a V}{R} a B_0 \hat{x} = -\frac{B_0^2 a^2 V}{R} \hat{x} = \underline{2.87 \cdot 10^{-1} N \hat{x}} \\ \vec{F}_{ca} &= i \vec{L} \times \vec{B} = 0\end{aligned}$$

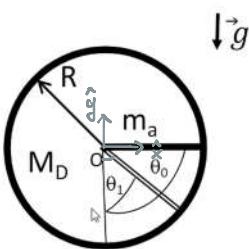
$$3. L = \int_0^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = Fb = \frac{B_0^2 a^2 V}{R} b = \frac{B_0^2 a^2 V b}{R} = \text{ ore } \vec{F} = -\vec{F}_{ab}$$

$$W = i^2 R = \frac{B_0^2 a^2 V^2}{R^2} \cancel{R} = \frac{(B_0 a V_0)^2}{R} \quad E_{diss} = \int_0^{t^*} W dt = W t^* = W \frac{b}{V_0} = \frac{(B_0 a V_0)^2}{R} \frac{b}{V_0} = \frac{B_0^2 a^2 V b}{R}$$

$$x(t^*) = \cancel{x_0} + V_0 t^* = b \rightarrow t^* = \frac{b}{V_0}$$

costante
perché la spira
è mantenuta a
 $V \text{ cost} \rightarrow E \text{ cost}$
 $\rightarrow i \text{ cost}$

Esercizio 1



$$1. \vec{R}_{cm} = \left(\frac{\frac{R}{2}m_a + M_D R}{M}, 0, 0 \right) \quad m_a + M_D = M$$

$$d = \frac{Rm_a}{2M} \quad M_D = 6m_a$$

$$2. I_o = \frac{1}{2}M_D R^2 + \frac{1}{3}m_a R^2 = \frac{1}{2}6m_a R^2 + \frac{1}{3}m_a R^2 = \frac{10}{3}m_a R^2$$

$$E_{\theta_1} = \frac{1}{2}I_o \omega_1^2 + M_D d(1 - \cos \theta_1) = M_D d(1 - \cos \theta_1) = E_{\theta_0}$$

$$\frac{1}{2}I_o \omega_1^2 = M_D d(1 - \cos \theta_0) - M_D d(1 - \cos \theta_1)$$

$$I_o \omega_1^2 = 2M_D d \cos \theta_0 + M_D d \cos \theta_1,$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2M_D d(\cos \theta_0 + \cos \theta_1)}{I_o}}$$

$$3. E_{\theta} = \frac{1}{2}I_o \omega^2 + M_D d(1 - \cos \theta) = \text{cost}$$

$$\text{l'energia si conserva: } \frac{dE}{dt} = 0 = \frac{1}{2}I_o \cancel{\omega} \omega + 0 + M_D d \sin \theta \dot{\theta}$$

Un'asta omogenea di massa m_a e di lunghezza R è rigidamente vincolata ad un disco omogeneo di massa M_D e raggio R . Il sistema è libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per il centro del disco (O , in figura) e perpendicolare al disco.

1. Calcolare la distanza d del centro di massa del sistema dal centro del disco (O).

$$d = \dots$$

2. Determinare il momento di inerzia I_o del sistema rispetto all'asse di rotazione passante per il centro del disco e calcolare la velocità angolare del sistema (ω_1) quando esso raggiunge posizione indicata in figura (θ_1) una volta lasciato libero di ruotare dalla posizione corrispondente a θ_0 .

$$I_o = \dots \quad \omega_1 = \dots$$

3. Determinare il periodo delle piccole oscillazioni T , attorno alla posizione di equilibrio del sistema.

$$T = \dots$$

Dati: $m_a = 10 \text{ g}$, $M_D = 60 \text{ g}$, $R = 30 \text{ cm}$, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

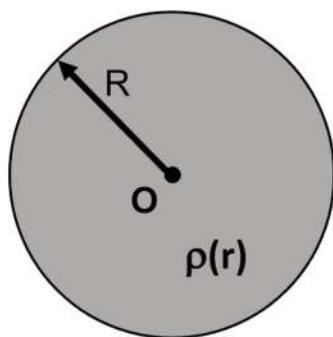
$$\omega = \dot{\theta}, \ddot{\omega} = \ddot{\theta} \rightarrow I_o \ddot{\theta} + M_D d \sin \theta \ddot{\theta} = 0$$

$$\text{piccole oscillazioni, } \sin \theta \approx \theta \rightarrow I_o \ddot{\theta} + M_D d \theta = 0 \quad \text{ovvero } \ddot{\theta} + \frac{M_D d}{I_o} \theta = 0$$

ovvero l'equazione differenziale dei moto annuaria/oscillatorio $a = -\frac{k}{m}x$ con $a = \ddot{\theta}$, $\frac{k}{m} = \frac{M_D d}{I_o}$ e $x = \theta$ con soluzioni:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\Omega t) \quad \text{con } \Omega = \sqrt{\frac{M_D d}{I_o}} \quad \text{e } T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{M_D d}}$$

Esercizio 2



Una nuvola sferica di raggio R , ha una densità di carica variabile con la distanza dal centro con la legge:

$$\rho = A \frac{r^2}{R^2} \quad \text{per } 0 \leq r \leq R$$

La nuvola ha una carica totale Q .
Determinare:

1. Il valore di A .

$$A = \dots$$

2. Il campo elettrico ad una distanza dal centro della nuvola pari a $R/2$, $\vec{E}(R/2)$, e a distanza pari a $2R$, $\vec{E}(2R)$.

$$\vec{E}\left(\frac{R}{2}\right) = \dots \quad \vec{E}(2R) = \dots$$

3. Determinare la differenza di potenziale tra il centro, C , della nuvola e l'infinito, dovuta alla distribuzione di carica della nuvola, $V(C) - V(\infty)$.

$$V(C) - V(\infty) = \dots$$

Dati: $Q = 5 \text{ nC}$, $R = 10 \text{ cm}$

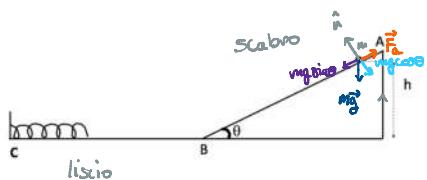
$$3. V(O) - V(\infty) = \int_0^R \vec{E}(r) \cdot dr = \int_0^R E dr = \int_0^R \frac{A r^3}{\epsilon_0 S R^2} dr = \frac{A}{\epsilon_0 S R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{A}{\epsilon_0 S R^2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{A R^4}{20 \epsilon_0 S R^2} = \frac{A R^2}{20 \epsilon_0}$$

$$V(R) - V(\infty) = \int_0^\infty \vec{E}(r) \cdot dr = \int_0^\infty E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_0^\infty = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$V(R) - V(\infty) = \int_R^{\infty} \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = \int_R^{\infty} E dr = \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$V(0) - V(R) + V(R) - V(\infty) = V(0) - V(\infty)$$

Esercizio 1



Con riferimento alla figura, un punto materiale di massa $m = 0.2 \text{ kg}$ è posto su di un piano inclinato scorbo di coefficiente di attrito dinamico μ_d che forma con il piano orizzontale un angolo $\theta = 30^\circ$. Il punto materiale, partendo da fermo da una altezza $h = 0.8 \text{ m}$ rispetto al piano orizzontale, scende lungo il piano inclinato che si raccorda con un piano orizzontale liscio. Alla fine del piano orizzontale, il punto materiale si attacca ad una molla posta inizialmente nella sua posizione di riposo ed inizia un moto di oscillazione. Il moto di oscillazione avviene sul piano orizzontale che è privo di attrito. La molla ha massa nulla. Durante il moto di oscillazione la molla viene compressa di una lunghezza massima pari a $x_{\max} = 0.2 \text{ m}$ e il periodo di oscillazione del sistema è $T=1 \text{ s}$.

Si calcoli:

1. la costante elastica K della molla

$$K = \dots$$

2. l'accelerazione massima a_{\max} e la velocità massima v_{\max} del moto di oscillazione

$$a_{\max} = \dots \quad v_{\max} = \dots$$

3. il coefficiente di attrito dinamico μ_d esistente tra punto materiale e piano inclinato

$$\mu_d = \dots$$

$$\frac{1}{2}Kx_{\max}^2 = mgh - \mu_d mg \frac{h}{\tan\theta}$$

$$\mu_d mg \frac{h}{\tan\theta} = mgh - \frac{1}{2}Kx_{\max}^2$$

$$\mu_d = \frac{mgh - \frac{1}{2}Kx_{\max}^2}{mgh} \tan\theta = \tan\theta \left(1 - \frac{Kx_{\max}^2}{2mgh}\right) = 0.52$$

$$1. \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$K = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = 7.9 \text{ N/m}$$

$$(1 - \omega^2 x_{\max})$$

$$2. a_{\max} = \frac{Kx_{\max}}{m} = 7.9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Velocità massima: $K = \max$, $U = 0$, l'energia si conserva:

$$E_i = \frac{1}{2}Kx_{\max}^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = E_f$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{Kx_{\max}^2}{m}} = x_{\max}\omega = 1.26 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

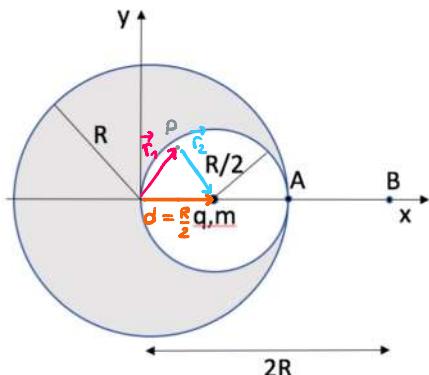
$$3. \text{ dal th. forze vive: } K_f - K_i = U_i - U_f - L_{\text{diss}} \quad h = d's' \omega$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh - \mu_d mg \cos\theta d = mgh - \mu_d mg \cos\theta \frac{h}{\sin\theta}$$

quando la molla raggiunge la massima compressione

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}Kx_{\max}^2$$

Esercizio 2



Una sfera di raggio R ha una distribuzione di carica ρ_0 uniforme. In essa viene praticato un foro sferico di raggio $R/2$. Assumendo un sistema di assi cartesiani in cui il centro della sfera ha coordinate $(0,0,0)$, il centro del foro ha coordinate $(R/2, 0, 0)$. Nel centro del foro viene poi posta una carica puntiforme di carica q e massa m .

Con riferimento alla figura, e sapendo che $\rho_0 = 1 \mu\text{C}/\text{m}^3$, $R = 1 \text{ m}$, $q = 1 \mu\text{C}$, e $m = 10^{-6} \text{ kg}$:

1. determinare l'espressione del campo elettrico dovuto alla distribuzione di carica della sfera cava (\vec{E}_1) e

$$\vec{E}_1 = \dots \quad |\vec{E}_1| = \dots$$

2. calcolare il tempo t che impiega la carica q a raggiungere il punto A di coordinate $(R, 0, 0)$ sotto l'azione del campo elettrico generato dalla sfera cava

$$t = \dots$$

3. calcolare il modulo della velocità (v) della carica puntiforme q nel punto B di coordinate $(2R, 0, 0)$

$$v = \dots$$

mentre invece il campo elettrico all'esterno di una sfera generica è:

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{qV}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{qR^3\rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

2. Il campo elettrico radiale genererà una forza sulla carica q che vale:

$$\vec{F} = q\vec{E} = q \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0} \hat{r}$$

assumendo che la sua velocità iniziale sia nulla, si ha un moto uniformemente accelerato lungo x

1. Il campo elettrico della sfera cava è dato dalla somma del campo elettrico di una sfera non cava con quello di una sfera con densità di carica opposta a quella della sfera intera; quindi il campo elettrico all'interno di una sfera qualunque è:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E dA = E (4\pi r^2) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Ora, dato che ρ è costante: $\rho = \frac{q}{V} = \frac{q_{\text{int}}}{V_{\text{int}}} \rightarrow q_{\text{int}} = q \frac{V_{\text{int}}}{V}$

$$\text{quindi } q_{\text{int}} = q \frac{r^3}{R^3} = \rho V \frac{r^3}{R^3}$$

$$\text{e } E(r) = \rho \frac{4\pi r^2 r^3}{3\epsilon_0} = \frac{\rho r^5}{3\epsilon_0} \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho r^5}{3\epsilon_0} \hat{r}$$

e quindi all'interno della sfera si ha $\vec{E}(r_1) = \frac{\rho r_1^5}{3\epsilon_0} \hat{r}$

e nella cava $\vec{E}(r_2) = -\frac{\rho r_2^5}{3\epsilon_0} \hat{r}$

Sommando i due si trova il campo all'interno della cava, che vale

$$\vec{E}_c = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho R}{6\epsilon_0} \hat{r} \rightarrow |\vec{E}_c| = \frac{\rho R}{6\epsilon_0} = 1.9 \cdot 10^4 \text{ Vm}^{-1}$$

$$F_x = q \frac{d\vec{v}}{dt} = ma_x \rightarrow a_x = \frac{qER}{6me_0}$$

$$\text{e quindi } x(t) = \cancel{x_0} + \cancel{V_0 t} + \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{R}{2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{R}{a_x}} = \sqrt{\frac{6me_0}{qP}} = 7.3ms$$

3. adesso la carica risentirà di un campo elettrico diverso, dato dalla somma dei 2 campi elettrici delle sfere

Esercizio 1

Due sfere, una di massa $m_1 = 2\text{kg}$ e raggio $r_1 = 0.17\text{m}$ la seconda di massa $m_2 = 8\text{kg}$ e raggio $r_2 = 0.23\text{m}$, si urtano centralmente e rimangono attaccate senza deformarsi (troppo). La prima sfera viaggia alla velocità $v_1 = 34\text{m/s}$ verso la seconda che è ferma ma ruota su se stessa con una velocità angolare $\omega_2 = 20\text{rad/s}$ (vedere Fig.1).

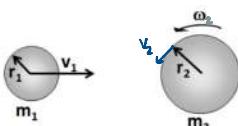


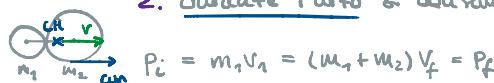
Fig.1

$$1. E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{5} m_2 r_2^2 \omega_2^2 = 1189.9 \text{ J}$$

$$I_2 = \frac{2}{5} m_2 r_2^2 = 0.17 \text{ kgm}^2$$

$$d_{cm} = \frac{m_2(r_2 + r_1)}{m_1 + m_2} = 0.32\text{m}$$

2. durante l'urto si conserva la quantità di moto



$$P_i = m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_f = P_f$$

$$v_f = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 6.8 \text{ ms}^{-1}$$

... e il momento angolare del sistema (finale: polo nel CM)

$$L_s = I_2 \omega_2 = I_{tot} \omega = L_{sf} \leftarrow \text{puoi scegliere qualunque polo, anche diverso polo tra } L_s \text{ e } L_{sf}$$

$$\omega = \frac{I_2 \omega_2}{I_{tot}} = 7.56 \text{ s}^{-1}$$

$$I_{tot} = \frac{2}{5} m_1 r_1^2 + \frac{2}{5} m_2 r_2^2 + m_1 d_{cm}^2 + m_2 (r_1 + r_2 - d_{cm})^2 = 0.45 \text{ kgm}^2$$

Si calcoli:

a) l'energia cinetica totale iniziale del sistema e la distanza tra il centro di massa del sistema (dopo l'urto) e il centro della prima sfera:

$$E_c = \dots ; \quad d_{cm} = \dots$$

b) la velocità angolare del sistema dopo l'urto e la massima velocità del centro della seconda sfera rispetto al laboratorio

$$\omega = \dots ; \quad v_{max} = \dots$$

c) la variazione di energia del sistema dovuta all'urto tra le due sfere:

$$\Delta E = \dots$$

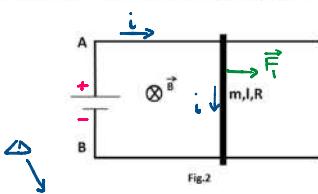
$V_{max} = (r_1 + r_2 - d_{cm}) \omega + V = 7.4 \text{ ms}^{-1} \leftarrow \text{ci sarà un momento in cui } V_{cm} \text{ e } V = \omega r \text{ sono allineati, quella sarà la } V_{max}$

$$3. \Delta E = E_f - E_c = -996 \text{ J}$$

$$E_f = \frac{1}{2} I_{tot} \omega^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 = 244 \text{ J}$$

Esercizio 2

Una barra conduttrice, di massa $m = 100\text{g}$ e resistenza $R = 500\Omega$, appoggia senza attrito su due binari orizzontali di resistenza trascurabile. La distanza tra i binari è $l = 40\text{cm}$ e il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $B = 0.8\text{T}$, perpendicolare ai binari ed alla barra (entra nel foglio, vedere Fig.2). All'istante $t=0$ la barra è ferma e tra i binari viene posto un generatore ($V_A - V_B > 0$).



ignora la ϵ

Il generatore fornisce una corrente costante $i_0 = 0.2\text{A}$. Si calcoli:

a) in che direzione si muove la sbarra e la velocità della sbarra al tempo $t_1 = 15\text{s}$

$$v_1 = \dots$$

b) il lavoro fatto dal generatore fino al tempo t_1

$$L = \dots$$

Se invece il generatore fornisce una FEM costante pari a $V_0 = 8\text{V}$ calcolare:

c) la velocità limite della sbarra, ossia la velocità della sbarra quando si annulla l'accelerazione della sbarra stessa

$$v_{lim} = \dots$$

$$1. \vec{F}_i = i_0 \vec{l} \times \vec{B} \rightarrow F_i = i_0 B \hat{x} \rightarrow ma = i_0 B \rightarrow a = \frac{i_0 B}{m} = \text{cost}$$

$$V(t) = V_0 + at_1 = \frac{i_0 B}{m} t_1 = 9.6 \text{ ms}^{-1}$$

perché sia i due B
siano costanti!

2. il lavoro fatto equivale a:

$$L = \Delta K = R i^2 t_1 + \frac{1}{2} mv^2 = 305 \text{ J}$$

$$3. \Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B ds = B l x$$

dato che non farà una tensione costante, l'accelerazione non sarà più costante perché la ϵ cresce con la velocità della sbarra:

$$\epsilon = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -Blv$$

la velocità limite si raggiunge quando la ϵ è uguale alla tensione del generatore, a quel punto non ci sarà più corrente nel circuito, e quindi non sarà più soggetta a forze esterne

$$V_0 - Bl V_{lim} = 0 \rightarrow V_{lim} = \frac{V_0}{Bl} = 25 \text{ ms}^{-1}$$

ESERCIZIO.1 - Meccanica

Un cilindro omogeneo di massa $m = 5.0 \text{ kg}$ e raggio $r = 25 \text{ cm}$ rotola senza strisciare su un piano orizzontale scabro sotto l'azione di una forza F orizzontale applicata al baricentro C del cilindro (vedi figura) di modulo $F = 77.0 \text{ N}$. Sapendo che il cilindro parte da fermo e che il coefficiente di attrito statico fra il cilindro e il piano è $\mu_s = 0.79$, determinare:

- 1) il modulo dell'accelerazione del cilindro a e la forza di attrito statico \vec{F}_s

$$a = \dots \quad \vec{F}_s = \dots$$

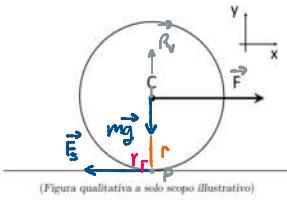
- 2) l'energia cinetica K del cilindro dopo un tempo $t^* = 2.2 \text{ s}$ dalla messa in moto

$$K = \dots$$

- 3) il valore massimo del modulo della forza esterna orizzontale F_{\max} che può essere applicata affinché il rotolamento avvenga senza strisciare

$$F_{\max} = \dots$$

Nota Bene: assumere per i calcoli $g = 10 \text{ m/s}^2$



(Figura qualitativa a solo scopo illustrativo)

1.

- Moto di pura rotolamento

- parte da fermo

- noti: F , μ_s , r , m

- incognite: a , \vec{F}_s

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} + \vec{F}_s = m\vec{a} \\ \vec{r} \times \vec{F}_s = I\vec{\alpha} \end{array} \right. \quad \text{polo: } C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (F - F_s)\hat{x} = ma\hat{x} \rightarrow F - \frac{ma}{2} = ma \rightarrow \frac{3}{2}ma = F \rightarrow a = \frac{2}{3}\frac{F}{m} \\ -rF_s\hat{z} = -I\alpha\hat{z} \rightarrow F_s = \frac{Id}{r} = -\frac{ma^2}{2r} = -\frac{1}{2}\frac{F}{\sqrt{m}} = -\frac{1}{3}F \end{array} \right. \quad \text{con } I = \frac{1}{2}mr^2$$

$$\vec{F}_s = (-\frac{1}{3}F, 0, 0) = -25.7 \text{ N} \quad a = 10.13 \text{ ms}^{-2}$$

$$\boxed{F_s \leq \mu_s N}$$

2. il cilindro esegue moto di pura rotolamento, dunque la sua energia cinetica avrà sia la componente traslazionale che rotazionale. Inoltre, esegue moto uniformemente accelerato, con a nota.

$$K = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{con } \omega = -\frac{V_{cm}}{r}$$

Il moto è uniformemente accelerato: $a = \text{cost}$

$$\left. \begin{array}{l} V_{cm}(t) = \int_0^t a dt' = V_0 + at = at \\ X_{cm}(t) = \int_0^t (V_0 + at') dt' = X_0 + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2 \end{array} \right\} \text{il cilindro parte da fermo}$$

quindi $V_{cm}(t^*) = at^*$ e $X_{cm}(t) = \frac{1}{2}at^{*2}$;

$$\begin{aligned} \text{di conseguenza: } K(t^*) &= \frac{1}{2}mv_{cm}^2(t^*) + \frac{1}{2}I\frac{V_{cm}(t^*)}{r}^2 = \\ &= \frac{1}{2}ma^2t^{*2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2 \cdot \frac{a^2t^{*2}}{r^2} = \\ &= \frac{1}{2}ma^2t^{*2} + \frac{1}{4}ma^2t^{*2} = \frac{3}{4}ma^2t^{*2} = 1862.5 \text{ J} \end{aligned}$$

- 2b. Il lavoro L fatto dalle forze agenti sul cilindro in un tempo $t^* = 2.2 \text{ s}$ dall'inizio del moto?

L'unica forza che compie lavoro è F : F agisce sul punto di contatto P istantaneamente fermo!

$$L = \int_0^{t^*} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{t^*} \vec{F} ds = F \int_0^{t^*} ds = F X_{cm}(t^*) = \frac{1}{2}Fat^{*2} = \frac{Fat^{*2}}{2} = 1887.6 \text{ J} \leftarrow \text{dovrebbe corrispondere a } K \text{ per il th.}$$

3. il corpo continua a rotolare senza strisciare finale $\frac{1}{3}F = \boxed{F_s \leq \mu_s mg}$

dunque la forza massima applicabile per il moto di pura rotolamento è: $F_{\max} = 3\mu_s mg = 118.5 \text{ N}$

ESERCIZIO.2 - Elettromagnetismo

Con riferimento alla figura, due fili indefiniti paralleli, posti a distanza $r = 2 \text{ m}$ e perpendicolari al piano del foglio, sono percorsi dalla stessa corrente costante $i_0 = 3 \text{ A}$ nei versi indicati in figura. Si calcoli:

- 1.a la forza \vec{F}_L^{12} per unità di lunghezza che il filo 1 esercita sul filo 2

$$\vec{F}_L^{12} = 9 \times 10^{-7} \hat{x} \text{ N/m}$$

- 1.b la forza \vec{F}_L^{21} per unità di lunghezza che il filo 2 esercita sul filo 1

$$\vec{F}_L^{21} = -9 \times 10^{-7} \hat{x} \text{ N/m}$$

Nel punto P indicato in figura, a distanza r da entrambi i fili è posta una spira circolare conduttrice di raggio $a = 2 \text{ cm}$, con $a \ll r$ e di resistenza $R_s = 4 \mu\Omega$, la cui normale forma un angolo $\theta = 45^\circ$ con l'asse y . Determinare:

- 2.a Il campo magnetico \vec{B} nel punto P , e il flusso del campo magnetico $\phi(\vec{B})$ attraverso la spira.

$$\vec{B} = 3 \times 10^{-7} \hat{y} \text{ T} \quad \phi(\vec{B}) = 2.67 \times 10^{-10} \text{ Wb}$$

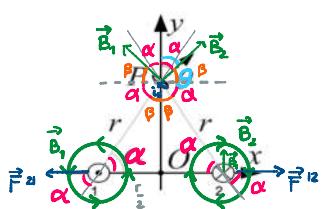
Dal tempo $t = 0$ la corrente nei fili varia nel tempo ed è data da $i(t) = i_0 + \beta t$, con $\beta = 10 \text{ A/s}$. Si determini (trascurando l'autodissidenza):

- 3.a la forza elettromotrice, fem , indotta nella spira e l'energia in essa dissipata, E_{Diss} , al tempo $t^* = 5 \text{ s}$.

$$fem = -8.89 \times 10^{-10} \text{ V} \quad E_{Diss} = 9.88 \times 10^{-13} \text{ J}$$

- 3.b la corrente che circola nella spira i_s e il suo verso (motivando la risposta e con un disegno), e la potenza dissipata P al tempo $t^* = 5 \text{ s}$

$$i_s = 2.22 \times 10^{-4} \text{ A orario} \quad P = 1.98 \times 10^{-13} \text{ W}$$



i due campi magnetici hanno lo stesso verso dato che hanno stessa corrente e sono equidistanti tra loro.

2. per ottenere il campo magnetico $\vec{B}(P)$ dobbiamo sommare i due campi magnetici \vec{B}_1 e \vec{B}_2 in P ; i campi magnetici sono ortogonali ai raggi congiungenti a P in quanto le linee di campo sono circonferenze.

Calcoliamoci innanzitutto gli angoli importanti α e β :

$$r \cos \alpha = \frac{r}{2} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \quad \beta = \frac{\pi}{6}$$

Dividiamo \vec{B}_1 e \vec{B}_2 nelle componenti:

$$\vec{B}_1 = -B_1 \sin \alpha \hat{x} + B_1 \cos \alpha \hat{y} \quad \vec{B}_2 = B_2 \sin \alpha \hat{x} + B_2 \cos \alpha \hat{y}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -B_1 \sin \alpha \hat{x} + B_1 \cos \alpha \hat{y} + B_2 \sin \alpha \hat{x} + B_2 \cos \alpha \hat{y} = (B_1 + B_2) \cos \alpha \hat{y} = \frac{\mu_0 i_0}{\pi r} \cos \alpha \hat{y}$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i_0}{\pi r} \cos \alpha \hat{y} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

dato che $a \ll r$, si può considerare uniforme sulla spira.

$$\phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA \cos \theta = B\pi a^2 \cos \theta = \frac{\mu_0 i_0 \pi a^2}{\pi r} \cos \alpha \cos \theta = \frac{\mu_0 i_0 a^2}{r} \cos \alpha \cos \theta = 2.67 \cdot 10^{-10} \text{ Wb}$$

3. il flusso diventa $\Phi_B(t) = \frac{\mu_0 i(t) a^2}{r} \cos \alpha \cos \theta = \frac{\mu_0 (i_0 + \beta t) a^2}{r} \cos \alpha \cos \theta = \frac{\mu_0 i_0 \cos \alpha \cos \theta a^2}{r} + \frac{\mu_0 \beta t a^2 \cos \alpha \cos \theta}{r}$

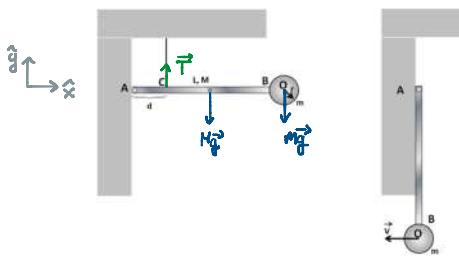
$$fem = -\frac{\partial \Phi_B(t)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0 i_0 \cos \alpha \cos \theta a^2}{r} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0 \beta t a^2 \cos \alpha \cos \theta}{r} \right) = -\left(0 + \frac{\mu_0 \beta a^2 \cos \alpha \cos \theta}{r} \right) = -\frac{\mu_0 \beta a^2 \cos \alpha \cos \theta}{r} = -8.89 \cdot 10^{-10} \text{ V}$$

La corrente nella spira circola in modo che il campo magnetico indotto si opponga alla variazione del flusso, quest'ultimo concorde a \vec{B} , dato che incrementa nel tempo. Il segno "-" della fem ci conferma il fatto che il campo magnetico indotto sia opposto a \vec{B} : il verso della corrente i_s è quindi oraio.

$$i_s = \frac{|fem|}{R_s} = 2.22 \cdot 10^{-4} \text{ A}$$

$$P = i_s^2 R_s \quad E_{Diss} = \int_0^{t^*} P dt = \int_0^{t^*} i_s^2 R_s dt = i_s^2 R_s \int_0^{t^*} dt = i_s^2 R_s t^* = 9.85 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Una sbarra omogenea di lunghezza $L = 1\text{m}$ e massa $M = 3\text{kg}$ è incornierata su una parete verticale e può ruotare senza attrito nel piano verticale. All'estremo B dell'asta è saldata una sfera piena di raggio $r = 10\text{cm}$ e massa $m = 1\text{kg}$. Inizialmente la sbarra è tenuta in posizione orizzontale da un filo verticale, vincolato al punto C della sbarra e distante $d = 20\text{cm}$ dall'estremo A dell'asta.



Si calcoli:

a) il modulo della tensione del filo e della reazione vincolare in A

$$T = \dots \quad R = \dots$$

Il filo si spezza e l'asta ruota nel piano verticale; si calcoli:
b) il modulo dell'accelerazione angolare del sistema nell'istante immediatamente successivo alla rottura del filo

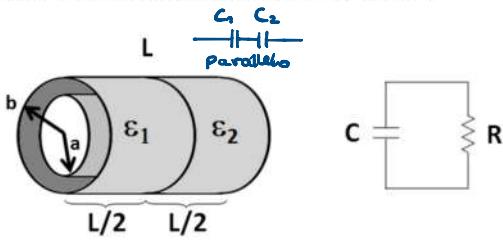
$$\alpha = \dots$$

c) il modulo della velocità del centro O della sfera nell'istante in cui l'asta passa per la sua posizione verticale

$$v = \dots$$

quando la sbarra è in posizione verticale: $V = \omega(L+r) = 5.3\text{ms}^{-1}$

Un condensatore cilindrico di raggi $a = 0.3\text{cm}$ e $b = 1\text{cm}$ e di lunghezza $L = 30\text{cm}$ è riempito con due diversi dielettrici di costante dielettrica relativa rispettivamente $\epsilon_{r1} = 2$ e $\epsilon_{r2} = 3$.



Si calcoli:

a) la capacità del condensatore ($\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\text{F/m}$)

$$C = \dots$$

Il condensatore, caricato a una differenza di potenziale $V = 50\text{V}$, viene scaricato su una resistenza $R = 10\text{k}\Omega$. Si calcoli:

b) l'energia totale dissipata sulla resistenza

$$E = \dots$$

c) la potenza istantanea dissipata sulla resistenza dopo un tempo $t_1 = 100\text{ns}$ ($1\text{ns} = 10^{-9}\text{s}$)

$$P(t_1) = \dots$$

1. inizialmente si calcola il centro di massa da A

$$D_{\text{cm}} = \frac{M\frac{L}{2} + mL}{M+m}$$

$$T_{\text{f}}^* = T_{\text{T}}^* \rightarrow (M+m)g(D_{\text{cm}}) = dT \rightarrow T = \frac{(M+m)gD_{\text{cm}}}{d} = 127.4\text{N}$$

$$\vec{R} + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0} \rightarrow R = T - P = T - (m+M)g = 88.2\text{N}$$

$$2. \alpha = r\omega \rightarrow \alpha = \frac{\omega}{r}$$

$$T_{\text{asta}}^* = D_{\text{cm}}(M+m)g = Id \quad \text{con } I = \frac{2}{5}mL^2 + m(r+L)^2 + \frac{1}{3}ML^2 \\ \rightarrow \alpha = \frac{D_{\text{cm}}(M+m)g}{I} = 11.5\text{s}^{-2}$$

3. l'energia si conserva e $V = rw$ (l'altezza è D_{cm})

$$D_{\text{cm}}(M+m)g = \frac{1}{2}Iw^2 \\ w = \sqrt{\frac{2D_{\text{cm}}(M+m)g}{I}}$$

1. i due condensatori sono in parallelo (le superfici delle armature sono equipotenziali):

$$C = C_1 + C_2 = \epsilon_1 \frac{\epsilon_0 2\pi L}{2 \ln(\frac{b}{a})} + \epsilon_2 \frac{\epsilon_0 2\pi L}{2 \ln(\frac{b}{a})} = 0.035 \cdot 10^{-9} \text{F}$$

2. l'energia nel condensatore è la stessa che viene dissipata dalla resistenza durante la scarica: \rightarrow un RC in scarica

$$E = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = 43.3 \cdot 10^{-9} \text{J}$$

3. la differenza di potenziale ai capi del condensatore durante il processo di scarica presenta il seguente andamento:

$$V_c(t) = Ve^{-\frac{t}{RC}}$$

all'istante t_1 , quindi la potenza vale:

$$P(t_1) = \frac{V^2}{R} e^{-\frac{2t_1}{RC}} = 0.14\text{W}$$

Esercizio 1

Una sfera di raggio $r = 40\text{cm}$ e massa $m = 3\text{kg}$ rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Il suo centro O è fissato a un punto P del piano da una molla di costante elastica $k = 60\text{N/m}$ e lunghezza a riposo nulla. All'inizio O si trova sulla verticale di P.

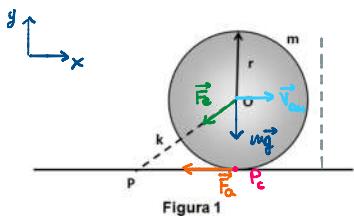


Figura 1

1. le uniche forze in gioco sono conservative, e l'unica forza non conservativa non couple lavora: la forza di attrito statico, dato che il moto è di tipo rotolamento

$$E_v = \frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}Kl_{\text{max}}^2 = E_0$$

nel punto di max elongation la sfera è ferma ($v_{\text{cm}} = \omega = 0$); considerando che $\omega = -\frac{v_{\text{cm}}}{r}$:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_{\text{cm}}^2}{r^2} + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}Kl_{\text{max}}^2 \quad (\text{lunghezza a riposo } l_0 = 0)$$

$$\text{con } I = \frac{2}{5}mr^2 = 0.192\text{kgm}^2$$

$$kl_{\text{max}}^2 = mv_{\text{cm}}^2 + \frac{2}{5}mr^2 \frac{v_{\text{cm}}^2}{r^2} + kr^2$$

$$l_{\text{max}} = \sqrt{\frac{mv_{\text{cm}}^2 + \frac{2}{5}mr^2 + kr^2}{k}} = 1.38\text{m}$$

$$2. L_{\text{min}} = I\omega_{\text{min}} \text{ con } I = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2 = 0.672\text{kgm}^2$$

lo spostamento della sfera è $S = r\theta = r_2\pi$

Si calcoli:

- a) la lunghezza massima della molla nel caso in cui la sfera si muova inizialmente con una velocità del centro di massa $v_{\text{cm}} = 5\text{m/s}$

$$l_{\text{max}} = \dots$$

- b) il momento angolare minimo (rispetto al punto di contatto) che deve avere la sfera per compiere un giro completo

$$L_{\text{min}} = \dots$$

- c) il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio (suggerimento: scrivere l'energia del sistema in funzione dell'angolo di rotazione θ)

$$T = \dots$$

L'energia si conserva, per cui:

$$E_v = \frac{1}{2}I\omega_{\text{min}}^2 + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}K(r^2 + 4\pi^2r^2) = E_f$$

$$\omega_{\text{min}} = \sqrt{\frac{K(r^2 + 4\pi^2r^2) - K}{I}} = 23.75\text{s}^{-1}$$

infine: $L_{\text{min}} = I\omega_{\text{min}} = 16\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$

$$3. E = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}K(r^2 + r^2\theta^2) = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{2}kr^2\theta^2$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}I \cdot 2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}kr^2 \cdot 2\theta\dot{\theta} = 0$$

$$I\ddot{\theta} + Kr^2\theta = 0$$

che corrisponde all'equazione di un oscillatore armonico con $\omega = \sqrt{\frac{Kr^2}{I}}$ e $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Kr^2}} = 1.66\text{s}$

Esercizio 2

Una sfera di raggio $R_1 = 0.4\text{m}$ presenta una distribuzione di carica positiva uniforme tale che il potenziale in un punto distante $2R_1$ dal centro è $V_0 = 0.2\text{V}$ rispetto all'infinito (fig.2A).

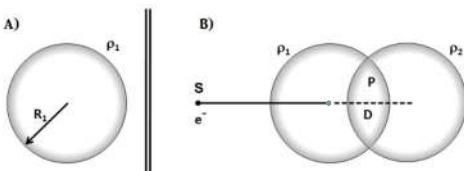


Figura 2

Si calcoli:

- a) la densità di carica ($\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\text{F/m}$)

$$\rho_1 = \dots$$

- Un'altra sfera di raggio $R_2 = 0.4\text{m}$ e densità di carica negativa uniforme ($\rho_2 = -\rho_1$) si avvicina a quella precedente. Quando i centri delle due sfere distano $D = 0.6\text{m}$ (fig.2B).

Si calcoli:

- b) il modulo del campo elettrico in un punto P interno alla regione di sovrapposizione delle due sfere (il campo elettrico è uniforme in tutta la regione di sovrapposizione)

$$E_P = \dots$$

- c) l'accelerazione di un elettrone che si trova in un punto S a distanza $2R_1$ dal centro della sfera di raggio R_1 e giace sulla retta che passa per i centri delle due sfere ($q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}\text{C}$; $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\text{kg}$)

$$a_e = \dots$$

$$1. \rho_1 = \frac{Q}{V_0}$$

$$V(2R_1) - V(\infty) = \int_{2R_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_0 \quad \textcircled{A}$$

} quello che conosciamo

Il campo elettrico all'esterno di una sfera per il th. di Gauss è:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint EdA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \text{ con } q_{\text{int}} = Q$$

$$\rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$$\text{Sostituendo in } \textcircled{A}: \int_{2R_1}^{\infty} Edr = \int_{2R_1}^{\infty} \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \int_{2R_1}^{\infty} r^{-2} dr = V_0$$

$$= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{2R_1}^{\infty} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{2R_1} = \frac{Q}{8\pi \epsilon_0 R_1} = V_0$$

Q è costante

$$\text{e quindi: } Q = 8V_0 \epsilon_0 R_1; \rho_1 = \frac{3Q}{4\pi R_1^3} = 6.6 \cdot 10^{-12} \frac{C}{m^3}$$

2. per trovare il campo elettrico in P dobbiamo trovare il campo elettrico all'interno di ognuna delle due sfere e sommarli, ad una distanza dal centro che sia interna alla regione in comune

Il campo elettrico (per Gauss) all'interno della sfera 1 è:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = \oint E_1 dA = E_1(4\pi r^2) = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \text{ ove } q_{\text{int}} = Q \frac{r^3}{R_1^3} \rightarrow E_1(r) = Q \frac{r^2}{4\pi \epsilon_0 r^2 R_1^3} = \frac{Qr}{4\pi \epsilon_0 R_1^3} = \frac{4\pi r \epsilon_0 \rho_1}{4\pi \epsilon_0 R_1^3 \cdot 3} = \frac{\rho_1 r}{3\epsilon_0}$$

il campo elettrico per dentro una sfera 1 è:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = \oint E_1 dA = E_1 (4\pi r^2) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad \text{ove } q_{int} = Q \frac{r^3}{R_1^3} \rightarrow E_1(r) = Q \frac{r^2}{4\pi \epsilon_0 R_1^3} = \frac{\rho V r}{4\pi \epsilon_0 R_1^3} = \frac{4\pi r^2 \rho}{3\epsilon_0} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

$$q_{int} : \frac{4}{3}\pi r^3 = Q : \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rightarrow q_{int} = Q \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} = Q \frac{r^3}{R_1^3}$$

$$\boxed{\vec{E}_1(r) = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\epsilon_0}}$$

quello interno alla sfera 2 è del tutto analogo: $E_2(r) = E_1(r)$ con la differenza che $\vec{E}_2(r_2) = -\frac{\rho \vec{r}_2}{3\epsilon_0}$

di conseguenza si ottiene il campo della regione comune sommando vettorialmente i 2 contributi:

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1(r_1) + \vec{E}_2(r_2) = \frac{\rho(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{3\epsilon_0} \quad \text{dove } r_1 \text{ indica la distanza del punto P dal centro della sfera 1, } r_2 \text{ di quello della sfera 2.}$$

→ importante: r_1, r_2 sono le variabili

$$\text{quindi: } E_P = \frac{\rho D}{3\epsilon_0} = 1.5 \text{ NC}^{-1}$$

3. $F = mae$ ove $F = q_e E$, quindi ci sono $E = E_1(2R_1) + E_2(2R_1+D)$ ove $Q = 8V_0 \epsilon_0 R_1 = Q_1 = -Q_2$

$$\text{quindi } F = q_e \left(\frac{Q}{4\pi(2R_1)^2 \epsilon_0} - \frac{Q}{4\pi(2R_1+D)^2 \epsilon_0} \right) = \dots$$

$$\text{infine } a_e = \frac{F}{m_e} = 0.03 \cdot 10^{-12} \text{ ms}^{-2}$$

Esercizio 1

Una sfera di raggio $r_1 = 40\text{cm}$ e massa $m_1 = 3\text{kg}$ rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Intorno ad essa è avvolto un filo inestensibile di massa nulla, che è collegato all'estremo opposto ad un blocco di massa $m_2 = 2\text{kg}$, posto su un piano inclinato privo di attrito. Il filo è avvolto attorno a una scanalatura di profondità trascurabile, in modo da non interferire col moto di rotolamento della sfera di raggio r_1 . L'angolo tra il piano inclinato e l'orizzontale vale $\theta = \pi/6$ grad. Inizialmente il sistema è in quiete.

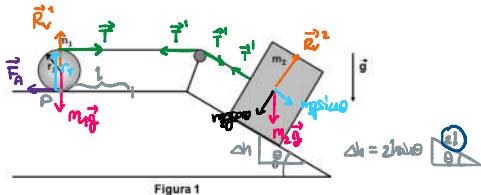


Figura 1

Dopo che la massa m_1 si è spostata di un tratto $l = 80\text{cm}$ si calcoli:

a) la velocità angolare della sfera

$$\omega = \dots$$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 \cos \theta \\ v_2 &= v_2 \sin \theta \end{aligned}$$

b) il modulo della variazione di quantità di moto del sistema costituito da sfera, filo e blocco

$$\Delta p = \dots$$

c) L'accelerazione del centro di massa della sfera

$$a_1 = \dots$$

$$2. P_i = 0, P_f = \Delta p = \sqrt{(m_1(\omega r_1 + m_2 v_2 \cos \theta)^2 + (m_2 v_2 \sin \theta)^2)}$$

$$3. scriviamo l'energia in funzione dell'angolo \varphi: E = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 (I_s + 4m_2 r_1^2) - 2m_2 g r_1 \varphi \sin \theta \text{ con } r_1 \dot{\varphi} = l = s$$

$$\text{dalla conservazione dell'energia } \frac{dE}{dt} = 0 = \frac{1}{2} \cdot 2 \ddot{\varphi} (I_s + 4m_2 r_1^2) - 2m_2 g r_1 \ddot{\varphi} \sin \theta = \ddot{\varphi} (I_s + 4m_2 r_1^2) - 2m_2 g r_1 \sin \theta = 0$$

$$\text{e quindi } \ddot{\varphi} = \frac{2m_2 g r_1 \sin \theta}{I_s + 4m_2 r_1^2} = \alpha$$

$$\text{infine } a = r_1 \alpha = r_1 \ddot{\varphi} = 1.6 \text{ ms}^{-2}$$

Esercizio 2

Una barretta metallica di lunghezza $L = 0.2\text{m}$ può muoversi liberamente su una guida metallica, a U, posizionata su un tavolo (vedere figura 2). La massa della barretta è $M = 100\text{g}$ e $D = 0.3\text{m}$. Barretta e guida metallica compongono un circuito elettrico rettangolare nel quale è presente una resistenza $R = 2\Omega$. Si suppone che il circuito sia immerso in un campo magnetico perpendicolare al piano del circuito e diretto verso l'alto.

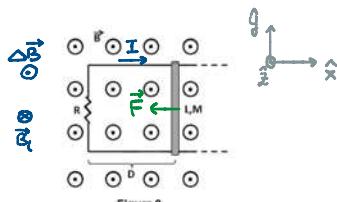


Figura 2

Il modulo del campo magnetico varia con il tempo secondo l'espressione $B(t) = B_0 + kt$ con $B_0 = 1\text{T}$ e $k = 0.2\text{T/s}$. Considerando la barretta bloccata nella posizione iniziale, si calcoli:

a) la corrente che circola nel circuito al tempo $t_1 = 10\text{s}$

$$I = \dots$$

b) il modulo della forza che agisce sulla barretta al tempo $t_1 = 10\text{s}$

$$F = \dots$$

Si assume che, dopo $t_1 = 10\text{s}$, la barretta cominci a muoversi verso destra di moto rettilineo uniforme con velocità $v = 1\text{m/s}$. Si calcoli:

c) la potenza istantanea che circola nel circuito al tempo $t_2 = 20\text{s}$

$$P_2 = \dots$$

1. per trovare la corrente (indotta) nel circuito dobbiamo trovare il flusso del campo magnetico che passa nel circuito, per Gauss:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint B dA = B(t) DL = DL(B_0 + kt)$$

il campo magnetico varia, quindi ci sarà una fem, secondo la legge di Faraday:

$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} (DLB_0 + DLTk) = - DLk$$

il campo magnetico incrementa nel tempo, la corrente circolerà nella sfera in verso tale da produrre un campo magnetico intorno che si oppone a questa variazione, ciò è confermato anche dal segno negativo della fem.

La corrente circola quindi in senso orario e vale:

$$I = \frac{|fem|}{R} = \frac{DLk}{R} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

2. sulla sbarretta si svilupperà una forza (forza di Lorentz) che vale:

$$\vec{F} = IL \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow F = ILB(t_1) = \frac{DLk}{R} L (B_0 + kt_1) = 3.6 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

$$\vec{F} = -F \hat{j}$$

3. dato che la barretta inizia a muoversi, dobbiamo ricalcolare il flusso di campo magnetico:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint B dA = B(t)L(D + x(t)) \text{ con } x(t) = x_0 + vt_1 \rightarrow B(t)L(D + B(t)Lvt_1) = (B_0 + kt_1)L(D + (B_0 + kt_1)Lvt_1) =$$

$$\text{e la fem} = - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = - [0 + KLD + (B_0 + kt_1)LV + KLvt_1] = - 1.41 \text{ V}$$

$$\text{infine la potenza sarà: } P = \frac{fem^2}{R} = 0.99 \text{ W}$$

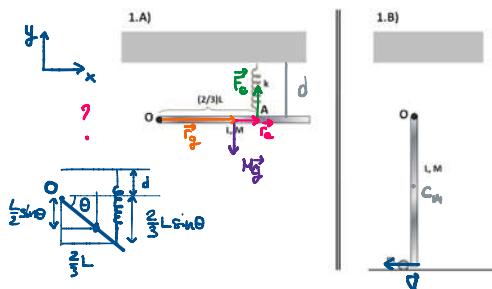
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} (kt_1 Lvt_1) \right) = kt_1 LV + Kt_1 LV$$

infine la potenza sarà: $P = \frac{I^2 R}{R} = 0.99 \text{ W}$

$$\frac{\partial}{\partial t} (Kt_2 L V t_1) = Kt_2 L V + Kt_1 L V$$

Esercizio 1

Una sbarra omogenea di lunghezza $L = 0.2\text{m}$ e massa $M = 0.3\text{kg}$ è incernierata senza attrito a un estremo O. La sbarretta è mantenuta in posizione di equilibrio orizzontale da una molla verticale, di costante elastica $k = 20\text{N/m}$ e lunghezza a riposo nulla, fissata alla sbarra nel punto A distante $\frac{2}{3}L$ dall'estremo O (Fig.1.A).



Si calcoli:

- a) l'allungamento d della molla quando il sistema si trova in equilibrio e il modulo della reazione vincolare in O:

$$d = \dots \quad R = \dots$$

- b) il periodo delle piccole oscillazioni della sbarretta (suggerimento: Data l'equazione differenziale $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta + \text{cost}$ il periodo delle piccole oscillazioni si ricava trascurando il termine costante)

$$T = \dots$$

Si supponga ora che la molla si spezzi e che la sbarretta, ruotando intorno all'estremo O, faccia un urto perfettamente elastico con il punto materiale di massa $m = 1\text{kg}$ (Fig.1.B).

Si calcoli:

- c) il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo:

$$p = \dots$$

1. Il sistema è in equilibrio:

$$\sum \vec{F} = 0 \rightarrow \sum \vec{F}_y = 0 = \vec{F}_e + Mg + \vec{R} = (F_e - Mg) \hat{y} = 0$$

$$\textcircled{B} \quad \Theta kd - Mg + R = 0$$

$$\sum \vec{T}^o = 0 = \vec{r}_g \times \vec{F}_p + \vec{r}_e \times \vec{F}_e \rightarrow \sum T^o = 0 = -\frac{L}{2}Mg + \frac{2}{3}kL F_e$$

$$\textcircled{A} = -\frac{k}{2}Mg + \frac{2}{3}kL F_e = 0$$

$$\text{da } \textcircled{A}: \frac{2}{3}kd = \frac{1}{2}Mg$$

$$d = \frac{3Mg}{4k} = 0.11\text{m}$$

$$\text{in } \textcircled{B}: \cancel{k} \frac{3Mg}{4k} - Mg + R = 0$$

$$R = \left| -\frac{3}{4}Mg + Mg \right| = \frac{1}{4}Mg = 0.74\text{N}$$

2. puova di tutto calcoliamoci il momento d'inerzia rispetto a O:

$$I_o = \frac{1}{3}ML^2 = 4 \cdot 10^{-3}\text{kgm}^2$$

dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 + Mg \frac{L}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} k(d - \frac{2}{3}L \sin \theta)^2 \right) = 0$$

$$\text{in funzione di } \theta: \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 + Mg \frac{L}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} k(d - \frac{2}{3}L \sin \theta)^2 \right) = 0$$

$$\text{quindi: } I_o \ddot{\theta} + Mg \frac{L}{2} \cos \theta \dot{\theta} + \frac{1}{2} k \cdot \cancel{x} (d - \frac{2}{3}L \sin \theta) (-\frac{2}{3}L \cos \theta \dot{\theta})$$

$$\text{piccole oscillazioni: } \sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1: I_o \ddot{\theta} + Mg \frac{L}{2} \ddot{\theta} + k(d - \frac{2}{3}L \theta) (-\frac{2}{3}L \dot{\theta}) = 0$$

$$I_o \ddot{\theta} + Mg \frac{L}{2} + (kd - \frac{2}{3}kL\theta)(-\frac{2}{3}L) = 0$$

$$I_o \ddot{\theta} + Mg \frac{L}{2} - \frac{2}{3}Lkd + \frac{4}{9}kL^2\theta = 0$$

$$I_o \ddot{\theta} + \frac{4}{9}kL^2\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{4kL^2}{9I_o}\theta = 0$$

$$\text{equazione differenziale dell'oscillatore armonico con } \omega = \sqrt{\frac{4kL^2}{9I_o}} \text{ e } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{9I_o}{4kL^2}} = 0.675$$

3. L'energia si conserva: $E_i = Mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = E_f$ scegliendo $\frac{L}{2}$ come lo zero del potenziale

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I_o}}, \text{ velocità della sbarra prima dell'urto}$$

$$\text{quantità di moto della sbarra prima dell'urto: } p_i = Mv = M \frac{L}{2} \omega$$

$$\text{durante l'urto si conservano sia l'energia: } E_i = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = \frac{1}{2} mv_i^2 + \frac{1}{2} I_o \omega_f^2 = E_f \quad \textcircled{A}$$

$$\text{che il momento angolare con polo in O: } L_{O_i} = I_o \omega = I_o \omega_f + mv_i \cdot L = L_{O_f} \quad \textcircled{B}$$

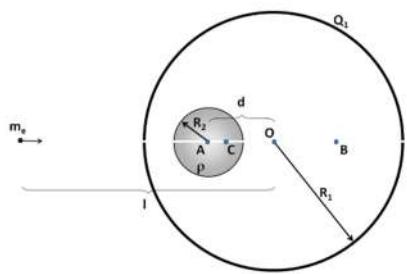
$$\text{con soluzione: } v_i = \frac{2\omega I_o L}{mL^2 + I_o} \text{ e } \omega_f = \omega \frac{I_o - mL^2}{I_o + mL^2}$$

$$\text{la quantità di moto del sistema: } p_f = Mv_f + mv_i = M \frac{L}{2} \omega_f + mv_i$$

$$\text{il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo: } p = p_i - p_f = M \frac{L}{2} \omega_f - (M \frac{L}{2} \omega_f + mv_i) = 0.2\text{kgms}^{-1}$$

Esercizio 2

Una carica $Q_1 = +10^{-9}\text{C}$ è distribuita su un guscio sferico di raggio $R_1 = 0.2\text{m}$. All'interno del guscio sferico è posizionata una sfera isolante, di raggio $R_2 = 0.05\text{m}$ il cui centro è collocato nel punto A, distante $d = 0.1\text{m}$ dal centro del guscio di raggio R_1 . La carica distribuita sulla sfera isolante è anch'essa positiva e la densità di carica non è uniforme ma segue la legge $\rho = kr$ con $k = 3 \cdot 10^{-4}\text{C/m}^4$



Si calcoli:

- a) La carica totale Q_2 contenuta nella sferetta e il modulo del campo elettrico nel punto B simmetrico di A rispetto al centro del guscio sferico ($\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\text{F/m}$)

$$Q_2 = \dots \quad E_B = \dots$$

- b) il potenziale all'interno della sfera piccola nel punto C distante $R_2/2$ da A

$$V_C = \dots$$

Si supponga che un elettrone di massa $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\text{kg}$ e carica $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}\text{C}$ si trovi, fermo, a una distanza $l = 2R_1$ dal punto O, e che sull'asse delle x sia praticato un piccolo foro che permetta il passaggio attraverso guscio e sfera.

Si calcoli:

- c) con quale velocità l'elettrone passa per il punto O

$$v_O = \dots$$

Il campo elettrico all'esterno del guscio vale, per Gauss, come quello della sfera: $E_s(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$\text{quindi } E_T(r) = \frac{KR_1^3}{4r^2\epsilon_0} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V_e = \int_c^{R_1} E_1 \cdot dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2 \cdot dr + \int_{R_2}^{\infty} E_T \cdot dr = \int_c^{R_1} \frac{KR_1^3}{4r^2\epsilon_0} dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{KR_1^3}{4r^2\epsilon_0} dr + \int_{R_2}^{\infty} \left(\frac{KR_1^3}{4r^2\epsilon_0} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dr = \frac{K}{4\epsilon_0} \int_c^{R_1} r^2 dr + \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} r^{-2} dr + \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0} \int_{R_2}^{\infty} r^{-2} dr + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_2}^{\infty} r^{-2} dr = \\ = \frac{K}{4\epsilon_0} \left[\frac{r^3}{3} \right]_c^{R_1} + \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} + \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_2}^{\infty} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_2}^{\infty} = \frac{K}{4\epsilon_0} \left[\frac{R_1^3}{3} - \frac{R_2^3}{27} \right] + \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0} \left[-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] + \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_2} \right] + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_2} \right] = \\ = \frac{K}{4\epsilon_0} \left[\frac{3R_1^3 - R_2^3}{27} \right] + \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0} \left[\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \right] + \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{7KR_1^3}{96\epsilon_0} + \frac{KR_1^3(R_1 - R_2)}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 3.09\text{V} + 7.95\text{V} + 2.69\text{V} + 44.96\text{V} = 58.6\text{V}$$

Si poterà anche fare $V_e = \int_c^{R_1} E_1 \cdot dr + \int_{R_1}^{\infty} E_2 \cdot dr + \int_{R_1}^{\infty} E_T \cdot dr$

3. Il campo elettrico è conservativo, quindi l'energia si conserva:

$$E_i = q_e V_e = \frac{1}{2} m_e V_o^2 + q_e V_o = E_f$$

$$\frac{1}{2} m_e V_o^2 = q_e (V_o - V_b) \quad \text{ove } V_o = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 (2d)} + \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0 (2d - d)} \quad \text{e } V_b = \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0 d}$$

$$V_b = \sqrt{\frac{2q_e(V_o - V_b)}{m_e}} =$$

1. Q_1 non produce campo all'interno del guscio.

la carica Q_2 contenuta nella sfera si trova integrando:

$$Q_2 = \int_0^{R_2} \rho dV = \int_0^{R_2} k r^2 \epsilon_0 r^2 dr = 4\pi \int_0^{R_2} r^3 dr = 4\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{R_2} = 4\pi K \cdot \frac{R_2^4}{4} = K\pi R_2^4 \\ = 5.9 \cdot 10^{-11}\text{C}$$

Il campo elettrico all'esterno della sfera vale, per Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA = E (4\pi r^2) = \frac{Q_2}{\epsilon_0} = \frac{KR_2^3}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{KR_2^3}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$$E(B) = \frac{KR_2^3}{4(2d)^2 \epsilon_0} = 13.2 \text{ NC}^{-1}$$

2. Il campo elettrico all'interno della sfera vale, per Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = \oint E_1 dA = E_1 \oint dA = E_1 (4\pi r^2) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \rightarrow E_1(r) = \frac{r^2 K}{4\pi \epsilon_0} = \frac{r^2 K}{4\epsilon_0}$$

$$\text{ove } q_{int} = \int_0^r \rho dV = \int_0^r Kr^2 \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi K \int_0^r r^5 dr = 4\pi K \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^r = r^6 K$$

Il potenziale in C si trova ponendo:

$$V_c - V_\infty = \int_c^{R_1} E_1 \cdot dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2 \cdot dr + \int_{R_2}^{\infty} E_T \cdot dr \quad \text{ove } E_T = E_a + E_s$$

Il campo elettrico all'estero del guscio vale, per Gauss, come quello della sfera: $E_s(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$\text{quindi } E_T(r) = \frac{KR_1^3}{4r^2\epsilon_0} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

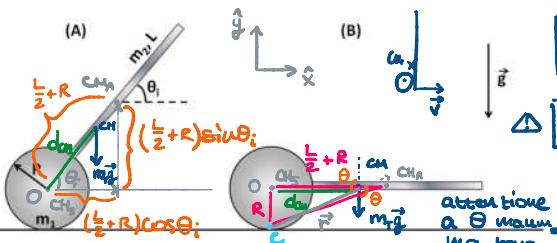
$$V_e = \int_c^{R_1} E_1 \cdot dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2 \cdot dr + \int_{R_2}^{\infty} E_T \cdot dr = \int_c^{R_1} \frac{KR_1^3}{4r^2\epsilon_0} dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{KR_1^3}{4r^2\epsilon_0} dr + \int_{R_2}^{\infty} \left(\frac{KR_1^3}{4r^2\epsilon_0} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dr = \frac{K}{4\epsilon_0} \int_c^{R_1} r^2 dr + \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} r^{-2} dr + \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0} \int_{R_2}^{\infty} r^{-2} dr + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_2}^{\infty} r^{-2} dr =$$

$$= \frac{K}{4\epsilon_0} \left[\frac{r^3}{3} \right]_c^{R_1} + \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} + \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_2}^{\infty} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_2}^{\infty} = \frac{K}{4\epsilon_0} \left[\frac{R_1^3}{3} - \frac{R_2^3}{27} \right] + \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0} \left[-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] + \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_2} \right] + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_2} \right] =$$

$$= \frac{K}{4\epsilon_0} \left[\frac{3R_1^3 - R_2^3}{27} \right] + \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0} \left[\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \right] + \frac{KR_1^3}{4\epsilon_0} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 3.09\text{V} + 7.95\text{V} + 2.69\text{V} + 44.96\text{V} = 58.6\text{V}$$

Esercizio 1

Un disco di massa $m_1 = 3\text{kg}$ ha raggio $R = 10\text{cm}$ è saldato all'estremo di un'asta lunga $L = 40\text{cm}$ di massa $m_2 = 5\text{kg}$. Inizialmente il disco poggia su un piano orizzontale, e l'asta forma un angolo $\theta_i = \pi/3$ rad con l'orizzontale. A un certo istante si elimina il vincolo che tiene il sistema in equilibrio, questo sistema è soggetto all'accelerazione di gravità g .



Si calcoli:

a) la velocità angolare del corpo quando l'asta è orizzontale considerando il piano orizzontale privo di attrito

$$\omega_a = \dots$$

b) la velocità angolare del corpo quando l'asta è orizzontale considerando che il disco rotola senza strisciare sul piano

$$\omega_b = \dots$$

c) il modulo dell'accelerazione angolare quando l'asta è orizzontale considerando che il disco rotola senza strisciare sul piano

$$\alpha = \dots$$

1. prima di tutto calcoliamoci il CM del sistema:

$$\vec{d}_{CM} = \left(\frac{\frac{L}{2} + R}{m_1 + m_2}, \frac{\frac{L}{2} + R}{m_1 + m_2} \right) = (0.06, 0.08) \text{ m}$$

[attenzione: questo corpo ha d_{CM} costante! Questo perché non ci sono forze lungo x, ma solo lungo y]

$$\dot{d}_{CMx} = \frac{dv_{CMx}}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad v_{CMx} = 0 \rightarrow d_{CMx} \text{ è costante}$$

$$\dot{d}_{CMy} = \frac{dv_{CMy}}{dt} \neq 0 \quad \text{e} \quad v_{CMy} = \frac{d}{dt} d_{CMy} = \frac{(\frac{L}{2} + R) \cos \theta_i m_2}{m_1 + m_2} \dot{\theta}$$

la forza totale esercitata sul corpo sarà solamente

$$\vec{F}_y = -(m_1 + m_2)g \hat{y} \quad \text{che è conservativa, quindi l'energia è}$$

Costante: non esendo un vincolo, de' questa componente

$$E_i = (m_1 + m_2)g d_{CMy}^i = \frac{1}{2} I_a \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{CMy}^2 = E_f$$

segnando come zero del potenziale il punto in cui l'asta è orizzontale e

$$I_{an} = \frac{1}{2} m_1 R^2 + m_1 d_{an}^2 + \frac{1}{12} m_2 L^2 + m_2 \left(\frac{L}{2} + R - d_{an} \right)^2 \text{ rispetto al CM perché non c'è un vincolo (e' sempre così)}$$

$$\text{riservo l'energia in funzione di } \theta: (m_1 + m_2)g d_{CMy}^i = \frac{1}{2} I_{an} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{(\frac{L}{2} + R)^2 \cos^2 \theta m_2 \dot{\theta}^2}{(m_1 + m_2)}$$

$$\dot{\theta}_{af}^2 \left(I_{an} + \frac{(\frac{L}{2} + R)^2 \cos^2 \theta m_2}{(m_1 + m_2)} \right) = 2(m_1 + m_2)g d_{CMy}^i$$

$$\dot{\theta}_{af}^2 = 2(m_1 + m_2)g d_{CMy}^i \cdot \left(I_{an} + \frac{(\frac{L}{2} + R)^2 \cos^2 \theta m_2}{(m_1 + m_2)} \right)^{-1}$$

$$\dot{\theta}_{af} = \omega_b = \sqrt{2(m_1 + m_2)g d_{CMy}^i \cdot \left(I_{an} + \frac{(\frac{L}{2} + R)^2 \cos^2 \theta m_2}{(m_1 + m_2)} \right)^{-1}} = 6.92 \text{ s}^{-1}$$

2. Si può considerare il sistema in MPR rispetto al punto di contatto, in tal caso l'inertie vale:

$$I_c = \frac{1}{2} m_1 R^2 + m_1 R^2 + \frac{1}{12} m_2 L^2 + m_2 \left(\sqrt{(\frac{L}{2} + R)^2 + R^2} \right)^2 \quad \text{e, per conservazione dell'energia:}$$

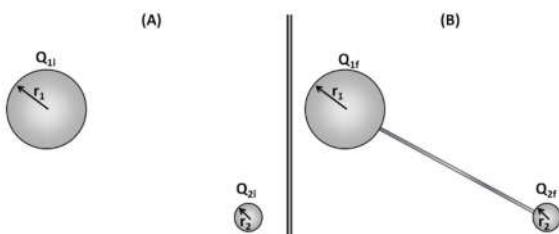
$$E_i = (m_1 + m_2)g d_{CMy}^i = \frac{1}{2} I_c \omega_b^2 = E_f$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2)g d_{CMy}^i}{I_c}} = 6.92 \text{ s}^{-1}$$

3. il moto è ancora di pura rotolamento, quindi: $I_c \alpha = T^{ext} = (m_1 + m_2)g r = (m_1 + m_2)g \sqrt{R^2 + d_{CM}^2}$

Esercizio 2

Su una sfera conduttrice di raggio $r_1 = 20\text{cm}$ è depositata la carica $Q_{1i} = 20 \cdot 10^{-9}\text{C}$; un'altra sfera conduttrice di raggio $r_2 = 5\text{cm}$ presenta la carica $Q_{2i} = 30 \cdot 10^{-9}\text{C}$. Le sfere, inizialmente isolate, vengono poste in contatto attraverso un filo conduttore. Le sfere sono abbastanza lontane da non influenzarsi a vicenda e la carica sul filo è trascurabile ($\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\text{F/m}$).



Si calcoli:

a) la carica Q_{1f} e Q_{2f} presente sulle sfere rispettivamente di raggio r_1 e r_2 dopo che sono state collegate (in condizioni stazionarie)

$$Q_{1f} = \dots$$

$$Q_{2f} = \dots$$

b) Il rapporto tra E_1 ed E_2 cioè tra i campi elettrici alla superficie (appena all'esterno di essa) delle sfere rispettivamente di raggio r_1 e r_2 dopo che sono state collegate

$$E_1 = \dots$$

$$1. Q_{tot} = Q_{1i} + Q_{2i} = Q_{1f} + Q_{2f}, \text{ conservazione della carica}$$

poiché sono a contatto, avranno lo stesso potenziale, quindi:

$$\cancel{Q_{1f}} = \cancel{Q_{2f}} = \frac{Q_{tot}}{r_1 + r_2}$$

mettendo insieme queste relazioni si ha

$$Q_{1f} = \frac{Q_{tot} r_1}{r_1 + r_2} = 10 \cdot 10^{-9}\text{C} \quad \text{e} \quad Q_{2f} = \frac{Q_{tot} r_2}{r_1 + r_2} = 40 \cdot 10^{-9}\text{C}$$

2. I campi elettrici delle due sfere valgono per Gauss rispettivamente:

$$E_1 = k \frac{Q_{1f}}{r_1^2} \quad \text{e} \quad E_2 = k \frac{Q_{2f}}{r_2^2} \quad \text{quindi} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{Q_{1f}}{r_1^2} \frac{r_2^2}{Q_{2f}} = 0.25$$

3. all'inizio l'energia eletrostatica vale:

$E_{zJ} = \dots$

$E_{xJ} = \dots$

T

- b) Il rapporto tra E_1 ed E_2 cioè tra i campi elettrici alla superficie (appena all'esterno di essa) delle sfere rispettivamente di raggio r_1 e r_2 dopo che sono state collegate

$$\frac{E_1}{E_2} = \dots$$

- c) La variazione di energia elettrostatica tra il caso iniziale, in cui le sfere non sono collegate, e il caso finale, in cui le sfere sono unite dal filo conduttore (Si utilizzi la formula $U = 1/2CV^2$ considerando ogni sfera come un condensatore in cui la seconda armatura è a distanza infinita)

$$U_{diss} = \dots$$

3. all'inizio l'energia elettrostatica vale:

$$U_i = \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2 \text{ ovre } C_1 = \epsilon_0 \frac{4\pi ab}{b-a} \text{ ovre } b \gg a, \text{ quindi}$$

$$C_1 = \epsilon_0 4\pi a = \epsilon_0 4\pi r_1 \text{ e } C_2 = \epsilon_0 4\pi r_2, V_1 = k \frac{Q_{1i}}{r_1} \text{ e } V_2 = k \frac{Q_{2i}}{r_2}$$

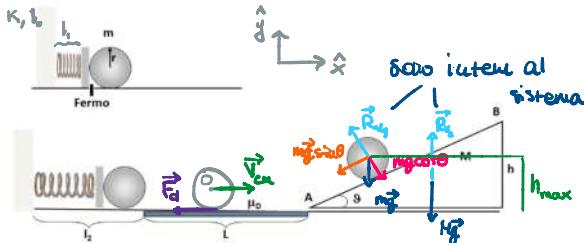
$$U_i = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{4\pi r_1}{k} k^2 \frac{Q_{1i}^2}{r_1^2} + \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{4\pi r_2}{k} k^2 \frac{Q_{2i}^2}{r_2^2} = \frac{1}{2} \frac{Q_{1i}^2}{4\pi \epsilon_0 r_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_{2i}^2}{4\pi \epsilon_0 r_2}$$

$$\text{e alla fine vale } U_f = \frac{1}{2} \frac{Q_{1f}^2}{4\pi \epsilon_0 r_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_{2f}^2}{4\pi \epsilon_0 r_2}$$

$$\text{la differenza quindi vale } U_{diss} = U_i - U_f = 4500 \text{ J}$$

Esercizio 1

Una sfera di massa $m = 1\text{kg}$ e raggio $r = 0.1\text{m}$ è appoggiata a una molla di costante elastica $K = 60\text{N/m}$ e lunghezza a riposo $l_0 = 0.3\text{m}$. La molla è inizialmente compresa con un fermo, la sua lunghezza è $l_1 = 0.1\text{m}$. A un certo istante il fermo che trattiene la molla viene rimosso e la molla comincia a muoversi sul piano orizzontale. Il primo tratto fino alla distanza $l_2 = 0.5\text{m}$ è privo di attrito, nel tratto successivo $L = 1\text{m}$ è presente attrito dinamico $\mu_D = 0.4$. A distanza $l_2 + L$ dalla parete cui è ancorata la molla c'è un piano inclinato di massa $M = 2\text{kg}$, angolo $\theta = 30^\circ$, altezza $h = 5\text{m}$ privo di attrito nel tratto AB e che può muoversi senza attrito sul piano orizzontale.



Si calcoli:

a) la velocità del centro di massa della sfera quando inizia a percorrere il tratto L con attrito

$$v_{iL} = \dots$$

b) il tempo impiegato dalla sfera a raggiungere il piano inclinato partendo dalla distanza l_2

$$t_{totL} = \dots$$

c) la velocità del piano inclinato quando la sfera raggiunge il punto di massima altezza

$$v_{finp} = \dots$$

non escevo il moto di puro rotolamento, $\alpha \neq -\mu_D g$ e ma inizia a creare una velocità rotazionale $\omega(t)$ fintanto il corpo, dopo un certo tempo t_1 , inizia un moto di puro rotolamento, dove non agisce più μ_D ma μ_S , che non compie lavoro, ovvero il corpo compie moto rettilineo uniforme;

a tale istante t_1 , $v_{cm} = \omega(t_1)r = \alpha t_1 r = V_{iL} - \mu_D g t_1 \rightarrow \frac{5\mu_D g}{2} t_1 = V_{iL} - \mu_D g t_1 \rightarrow \frac{7}{2} \mu_D g t_1 = V_{iL}$

quindi $t_1 = \frac{2V_{iL}}{7\mu_D g}$ e anche $x(t_1) = V_{iL} t_1 - \frac{1}{2} \mu_D g t_1^2$ e $\omega(t_1) = \alpha t_1$

da questo momento il corpo compie moto rettilineo uniforme $x(t_2) = r\omega(t_1)t_2 = L - x(t_1)$ fino al tempo t_2 che vale:

$t_2 = \frac{L - x(t_1)}{r\omega(t_1)}$; il tempo totale che ci metterà la sfera è $t_{tot} = t_1 + t_2 = 0.875$

3. qui si conserva l'energia e la quantità di moto lungo \hat{x} (del sistema sfera + guida)

$$P_i = mc\omega(t_1)r = (M+m)V_{finp} \rightarrow V_{finp} = \frac{mc\omega(t_1)r}{M+m} = 0.37\text{ms}^{-1}$$

la velocità è tutta del piano inclinato

prendendo come sistema di riferimento il sistema di laboratorio possiamo considerare v_{finp} come se sentisse le componenti

1. entrando nel campo magnetico, il flusso di campo magnetico varierà nel tempo:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint B dA = B \oint dA = B I X(t)$$

con $X(t)$ ignoto dato che il circuito sarà poi sottoposto alla forza di Lorentz variabile nel tempo entrando nel campo, si genererà una E che per Faraday vale

$$E = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -B I v(t) \quad \text{e corrente indotta } i(t) = \frac{E}{R} = -\frac{B I v(t)}{R}$$

$$\text{ove } R = \rho \frac{l}{S} = 6.8 \cdot 10^{-6} \Omega$$

che circolerà in senso orario secondo la legge di Lenz. e sul circuito si svilupperà una forza di Lorentz per via della corrente indotta che vale

$$\vec{F} = i \vec{l} \times \vec{B} = -i l B \hat{x} = -\frac{B^2 l^2 v(t)}{R} \hat{x}$$

$$\text{quindi vale } a(t) = \frac{F l}{m} = -\frac{B^2 l^2 v(t)}{m R} \text{ non costante!}$$

Si calcoli:

a) Il tempo impiegato dal circuito per entrare nella regione in cui è presente il campo magnetico fino a $t/2$ (si ricordi che la soluzione generale di un'equazione differenziale del tipo $\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx$ è $\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx$)

$$t_1 = \dots$$

b) la forza che agisce sul circuito al tempo t_1

$$F_{1/2} = \dots$$

c) l'energia dissipata nel circuito per effetto joule nel tempo t_1

$$E_{diss} = \dots$$

$$\text{e quindi } \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 l^2 v(t)}{m R} dt$$

c) l'energia dissipata nel circuito per effetto joule nel tempo t_1

$$\text{quiudi vale } a(t) = \frac{r(t)}{u} = -\frac{B^2 l^2 v(t)}{MR} \text{ non costante!}$$

$$e \text{ quiudi } \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 l^2 v(t)}{uR} dt$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{B^2 l^2}{uR} dt$$

$$\int v^{-1} dv = -\frac{B^2 l^2}{uR} t$$

$$[\ln v]_0^v = -\frac{B^2 l^2}{uR} t$$

$$[\ln v - \ln v_0] = -\frac{B^2 l^2}{uR} t$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{B^2 l^2}{uR} t$$

$$\frac{v}{v_0} = e^{-\frac{B^2 l^2}{uR} t} \rightarrow v(t) = v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{uR} t}$$

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = \left[-v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{uR} t} \cdot \frac{uR}{B^2 l^2} \right]_0^t = \left[-v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{uR} t} \cdot \frac{uR}{B^2 l^2} + v_0 \frac{uR}{B^2 l^2} \right] =$$

$$= v_0 \frac{uR}{B^2 l^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{uR} t} \right)$$

$$\text{quindi } x(t_1) = v_0 \frac{uR}{B^2 l^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{uR} t_1} \right) = \frac{1}{2}$$

$$-v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{uR} t_1} \cdot \frac{uR}{B^2 l^2} + v_0 \frac{uR}{B^2 l^2} = \frac{1}{2}$$

$$-v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{uR} t_1} \cdot \frac{uR}{B^2 l^2} = \frac{1}{2} - v_0 \frac{uR}{B^2 l^2}$$

$$v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{uR} t_1} \cdot \frac{uR}{B^2 l^2} = -\frac{1}{2} + v_0 \frac{uR}{B^2 l^2}$$

$$e^{-\frac{B^2 l^2}{uR} t_1} = -\frac{B^2 l^2}{2uR} + 1 = \underbrace{-\frac{B^2 l^2 + 2v_0 uR}{2v_0 uR}}$$

$$-\frac{B^2 l^2}{uR} t_1 = \ln \lambda$$

$$B^2 l^2 t_1 = -uR \ln \lambda$$

$$t_1 = -\frac{uR}{B^2 l^2} \ln \lambda = 0.05 \text{ s}$$

$$2. \text{ semplicemente } F_{l_2} = \frac{B^2 l^2 v(t_1)}{R} = \frac{B^2 l^2 v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{uR} t_1}}{R} = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$3. \text{ la potenza dissipata è } P(t) = i(t)^2 R = \frac{B^2 l^2 v^2(t)}{R} \quad \text{non usare subito } t_1!$$

per trovare l'energia dissipata basta integrare:

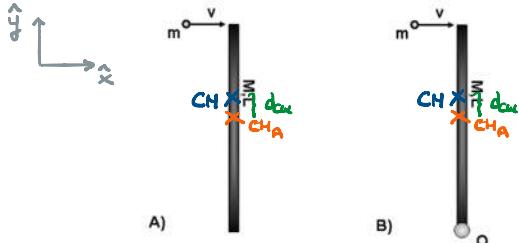
$$E_{\text{diss}} = \int_0^{t_1} P(t) dt = \int_0^{t_1} \frac{B^2 l^2 v^2(t)}{R} dt = \frac{B^2 l^2}{R} \int_0^{t_1} v^2(t) dt = \frac{B^2 l^2}{R} \int_0^{t_1} v_0^2 e^{-2\frac{B^2 l^2}{uR} t} dt = \frac{B^2 l^2}{R} v_0^2 \left[-\frac{uR}{2B^2 l^2} e^{-2\frac{B^2 l^2}{uR} t} \right]_0^{t_1} =$$

$$= \frac{B^2 l^2}{R} v_0^2 \left[-\frac{uR}{2B^2 l^2} e^{-2\frac{B^2 l^2}{uR} t_1} + \frac{uR}{2B^2 l^2} \right] = \frac{B^2 l^2 v_0^2}{R} \frac{uR}{2B^2 l^2} [1 - e^{-2\frac{B^2 l^2}{uR} t_1}] = 0.06 \text{ J}$$

? (nuovamente con riferimento a cui sono)

Esercizio 1

Sono date le due situazioni riportate in figura. Nel primo caso una massa puntiforme $m_1 = 4.0\text{kg}$ urta un'asta, libera di muoversi su un piano, di lunghezza $L = 4.2\text{m}$ e massa $M = 1.7\text{kg}$. Nel secondo caso, invece, i corpi coinvolti sono gli stessi ma l'asta è vincolata in un estremo. La massa m_1 si muove con velocità di modulo, $v_1 = 4.5\text{m/s}$. L'urto, che avviene all'estremo dell'asta, è perfettamente anelastico.



Si calcoli:

- a) La velocità angolare del sistema subito dopo l'urto nei due casi:

$$\omega_A = \dots \quad \omega_B = \dots$$

- b) L'energia dissipata nell'urto nei due casi:

$$E_A = \dots \quad E_B = \dots$$

- c) La differenza tra la quantità di moto finale del sistema nel caso A e nel caso B:

$$\Delta p = \dots \quad \leftarrow \text{solo a blank space}$$

$$-Lm_1\hat{z} = -I_0\omega_B\hat{z} \text{ con } I_0 = \frac{1}{3}ML^2 + m_1L^2 \text{ quindi } \omega_B = \frac{Lm_1}{I_0} = 0.99\text{s}^{-1}$$

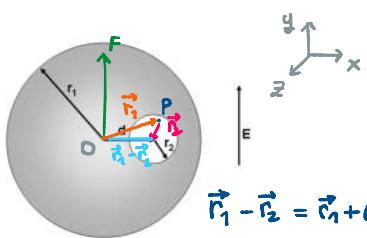
$$2. \text{ nel primo caso } E_A = E_i - E_f = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}I_{cm}w_b^2 - \underbrace{\frac{1}{2}(M+m)V_{cm}}_{= 3.09\text{J}}$$

$$\text{nel secondo caso } E_A = E_i - E_f = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}I_0\omega_B^2 = 5.03\text{J} \quad \text{doubt forget!}$$

$$3. \Delta p = P_{fini} - P_{finf} = \underbrace{(M+m)V_{cm}^A}_{= m_1v_1} - \underbrace{(M+m)V_{cm}^B}_{= m_1v_1} = m_1v_1 - (M+m)\omega_B d_{cm}^2 = 6.77\text{kgms}^{-1}$$

$$\text{Oppure } m_1v_1 \quad V_{cm} = rw \text{ perché ruota e basta}$$

Esercizio 2



Una sfera di raggio $r_1 = 0.20\text{m}$ presenta una densità di carica elettrica uniforme $\rho = 0.3 \cdot 10^{-6}\text{C/m}^3$. All'interno della sfera si trova una cavità sferica di raggio $r_2 = 0.05\text{m}$ con il centro posizionato a distanza $d = 0.10\text{m}$ dal centro della sfera. Si calcoli:

- a) Il modulo del campo elettrico all'interno della cavità mostrando che tale campo elettrico è uniforme:

$$E_{int} = \dots$$

Si accende quindi un campo elettrico esterno uniforme $E = 20 \cdot 10^8\text{N/C}$ diretto ortogonalmente rispetto all'asse che congiunge i centri delle due sfera (vedere figura). Calcolare:

- b) Il modulo della forza sulla sfera:

$$F = \dots$$

- c) Il modulo del momento della forza rispetto al centro della sfera:

$$\tau = \dots$$

ed è costante.

1. La sfera caica uniformemente con una carica sferica è equivalente ad una sfera piena con ρ costante sommato ad una sfera con densità opposta, per Gauss il campo el esterno all'interno di una qualunque sfera caica è:

$$\vec{E}_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = q \frac{r^2}{R^3}$$

$$\text{Ore, dato che } \rho \text{ è costante: } \rho = \frac{q}{V} = \frac{q_{int}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \rightarrow q_{int} = q \frac{V_{int}}{V} = q \frac{r^3}{R^3}$$

$$\text{quindi } E(r) = q \frac{r^2}{4\pi R^3 \epsilon_0} = \rho V \frac{r^2}{4\pi R^3 \epsilon_0} = \rho \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi R^3 \epsilon_0} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}$$

di conseguenza:

$$\cdot \text{ per la sfera grande: } \vec{E}(r_1) = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\epsilon_0}$$

$$\cdot \text{ per la cavità: } \vec{E}(r_2) = \Theta \frac{\rho \vec{r}_2}{3\epsilon_0} \text{ dato che } \rho < 0 \rightarrow E < 0$$

$$\text{In somma } \vec{E}_{int} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho \vec{D}}{3\epsilon_0} \rightarrow E_{int} = \frac{\rho D}{3\epsilon_0} = 1.13 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

2. Il modulo della forza sulla sfera sarà

$$F = QE = \rho \frac{4}{3}\pi (r_1^3 - r_2^3) E = 19.79 \text{ N}$$

$$\text{Ove } Q = \rho V - \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r_1^3 - \rho \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \rho \frac{4}{3}\pi (r_1^3 - r_2^3)$$

3. la forza è diretta ortogonalmente, all'asse x , proprio come il campo elettrico, ed è radiale, e parso dal centro della sfera: semplificando il sistema a 2 cariche puntiformi una nel centro della sfera e l'altra nel centro della cavità, si ha solo che il momento applicato su quest'ultima non è nullo

$$\vec{T}_o = \vec{d} \times \vec{F} = \vec{d} \times q\vec{E} = dqE\hat{z} \rightarrow T = d\frac{q}{3}\pi(r_1^3 - r_2^3)E = 0.031 \text{ Nm}$$

momento della
forza di Coulomb