# Derivate di ordini superiori

$f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $A$ è aperto, $\qquad x_0 \in A$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\cancelto{x}{x_0}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\cancelto{x}{x_0})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\Bigg|_{x_0} \quad , f_{x_i x_j} \quad , f_{,x_i x_j} \quad f_{,ij} \quad , \partial^2_{x_i x_j} f$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x_1^2 \, \partial x_2 \, \partial x_3^2} = D^{(2,1,2)} f = \partial^\alpha f$$

$\alpha = (2,1,2)$

multiindice

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

a priori non si esclude

**Th (Schwartz)**

- se $f \in C^2(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$
- In particolare,
$$\text{Hess} f = D^2 f = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n =$$
$$= \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & & & \\ f_{x_nx_1} & \cdots & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$
è simmetrica
- Anche per derivate di ordini successivi vale lo stesso se tutte le derivate parziali $D^\alpha f$ $\forall \alpha : |\alpha| \leq k$ sono continue ($f \in C^k(A)$), allora l'ordine di derivazione non conta.

Esempio $f \in C^3(A) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1^2}$$ per il Th. di Schwartz.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1} = \dots$$

# ~~Sviluppo~~ Formula di Taylor (a ordine 2)

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

$A$ aperto

•) $f \in C^1(A) \Rightarrow$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)}_{} + o(|x - x_0|) \qquad x \to x_0$$

$\nabla f(x_0)^T (x - x_0)$

~~sviluppo~~ Formula di Taylor di $f$ nel punto $x_0$ di ordine $1$.

•) $f \in C^2(A) \Rightarrow$

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^T D^2 f(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|^2) \qquad x \to x_0$$

~~sviluppo~~ Formula di Taylor di $f$ di ordine 2 in $x_0$

Caso particolare: $n = 1$, $A = I \subset \mathbb{R}$ − intervallo

$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(I)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o(|x - x_0|), \quad x \to x_0$$

**Corollario** Se $f \in C^2(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto,

e $x_0 \in A$ è tale che

$\nabla f(x_0) = 0$ ed inoltre

•) $D^2 f(x_0)$ è definita ~~positiva~~ negativa

allora $x_0$ è un punto di ~~min~~ max

locale stretto di $f$

Caso particolare $n = 1$, $A = I \subset \mathbb{R}$ intervallo

se $x_0 \in I$; $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ allora

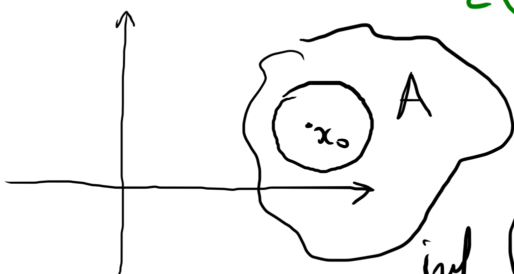
$x_0$ è di min locale stretto

**Dim.** Sia $x_0 \in A$ : $\nabla f(x_0) = 0$

Allora per $x \to x_0$ si ha:

$$f(x) = f(x_0) + \cancel{\nabla f(x_0)} \cdot (x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^T D^2 f(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|) =$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{2}\left( D^2 f(x_0)(x-x_0), x-x_0 \right) + (|x-x_0|^2)$$



$|x-x_0| = \varepsilon$ , $D^2 f(x_0) > 0$

definito positivo

$$\inf_{|x-x_0| = r} \left( D^2 f(x_0)(x-x_0), x-x_0 \right) \geq$$

$$\geq \lambda_1 |x-x_0|^2 = \lambda_1 r^2$$

$$f(x) \geq f(x_0) + \frac{\lambda_1}{2} |x-x_0|^2 + o\left(|x-x_0|^2\right)$$

Posso scegliere $\varepsilon > 0$ : $|x-x_0| \leq \varepsilon \Rightarrow \left| o\left(|x-x_0|^2\right) \right| < \frac{\lambda_1}{4} |x-x_0|^2$

Vuol dire che per $x$ : $|x-x_0| \leq \varepsilon$

$$f(x) \geq f(x_0) + \frac{\lambda_1}{2} |x-x_0|^2 - \frac{\lambda_1}{4} |x-x_0|^2 =$$

$$= f(x_0) + \frac{\lambda}{4} |x-x_0|^2 > f(x_0) \quad \text{se } x \neq x_0$$

Ovvero $x_0$ è pt di min locale per $f$. q.e.d

Da ricordare: $A$ matrice simmetrica $n \times n$

si dice

$(a, b) = a \cdot b$

$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

$\lambda_j \in \mathbb{R}$

$(\forall j)\ \lambda_j \geq 0 \iff$ •) semidefinita positiva se $(Ah, h) \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$

$(Ah) \cdot h = h^T A h$

$(\forall j)\ \lambda_j > 0 \iff$ •) definita positiva, se è semidef. positiva, ed inoltre $(Ah, h) = 0$ solo quando $h = 0$

$(\forall j)\ \lambda_j \leq 0 \iff$ •) semidefinita negativa se $(Ah, h) \leq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$

$(\forall j)\ \lambda_j < 0 \iff$ •) definita negativa se è semidef. negativa ed inoltre $(Ah, h) = 0$ solo se $h = 0$.

$$A > 0 \qquad \sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n$$

$$(Ah, h)_n = \left(Q^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} Qh, h\right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \underbrace{Qh}_{= \tilde{h}}, \underbrace{Qh}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{h}_i^2 \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \tilde{h}_i^2 = \lambda_1 |\tilde{h}|^2 =$$

$$= \lambda_1 |Qh|^2 = \lambda_1 |h|^2$$

## Esempio # 1.

$$f(x,y) = xy + x^2 + y^4$$

- $D(f) = \mathbb{R}^2$
- $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = +\infty$ ?

$$|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} \iff x^2+y^2 \geq 2|x|\cdot|y|$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 - 2|x||y| + y^2 \geq 0$$

$$\| \quad (|x|-|y|)^2$$

$$-\frac{x^2+y^2}{2} \le xy \le \frac{x^2+y^2}{2}$$

$$-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + x^2 + y^4 \le f(x,y) = xy + x^2 + y^4 \le \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + x^2 + y^4 =$$

$$= \frac{3x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + y^4$$

$$\| $$

$$\frac{x^2}{2} + \left(y^4 - \frac{y^2}{2}\right)$$

$$\underset{\downarrow \atop +\infty}{\frac{x^2}{2} + \left(y^4 - \frac{y^2}{2}\right)} \le \underset{\downarrow \atop +\infty}{f(x,y)} \le \underset{\downarrow \atop +\infty}{\frac{3x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + y^4}$$

4) $f$ ha minimo (globale) "per Weierstrass"

o) Ricerca di max/min locali/globali

$$\nabla f(x,y) = (\underline{y+2x}, x+4y^3)$$

$$(D^2 f)(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} y+2x = 0 \\ x + 4y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4y^3 \\ y - 8y^3 = 0 \end{cases}$$

$$y(1-8y^2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1/2\sqrt{2} \\ y = -1/2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$
\left[
\begin{array}{l}
\begin{cases} x = -4y^3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\[2ex]
\begin{cases} x = -4y^3 = -\dfrac{4}{8\sqrt{8}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{8}} = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}} \\[2ex] y = 1/\sqrt{8} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \\[2ex]
\begin{cases} x = -4y^3 = -4\cdot\left(-\dfrac{1}{8\sqrt{8}}\right) = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \\[2ex] y = -\dfrac{1}{\sqrt{8}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}
\end{array}
\right.
$$

$$
\underbrace{(0,0)}_{A}, \quad \underbrace{\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}_{B}, \quad \left(\underbrace{\frac{1}{4\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}}_{C}\right)
$$

$$D^2 f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 12y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^2 f(B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} = D^2 f(C)$$

•) A: $\quad \sigma\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$

$$\lambda_1 \lambda_2 = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \qquad \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 + 0 = 2 \qquad \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$$

•) B, C $\quad \sigma\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}$ :

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \lambda_2 = 3 - 1 = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 7/2 \end{array}\right| \Rightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$$

$D^2 f(B) = D^2 f(C)$ è definita positiva $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sia B che C sono di min locale stretto

Coroll.

•) $f(B) = f\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{8\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 16} + \frac{1}{2^4\cdot 2^2} = \dots$ $< 0$

$f(C) = f\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{8\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 16} + \frac{1}{2^4+2^2} = \dots$

Conclusione B e C sono punti di minimo (globale)

**Esempio #2**

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2}{2} + y^2\right) e^{-(x^2+y^2)}$$

- $D(f) = \mathbb{R}^2$
- $f$ è continua
- $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = 0 \; \cancel{?}$

$$0 \le \left(\frac{x^2}{2} + y^2\right) e^{-(x^2+y^2)} \le (x^2+y^2)\, e^{-(x^2+y^2)} =$$

$$= \rho^2 e^{-\rho^2} \xrightarrow[\rho \to +\infty]{} 0$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

.) $f$ ammette min globale

$\min f = 0 = f(0,0)$

Inoltre, $(0,0)$ è un unico punto di min (globale)

.) $f$ ammette anche un max globale

.) $\begin{cases} f_x = x e^{-(x^2+y^2)} + \left(\frac{x^2}{2}+y^2\right) e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x) \\ \quad = e^{-(x^2+y^2)}\left(-\left(\frac{x^2}{2}+y^2\right)\cdot 2x + x\right) = 0 \\ f_y = 2y e^{-(x^2+y^2)} + \left(\frac{x^2}{2}+y^2\right) e^{-(x^2+y^2)} (-2y) \\ \quad = e^{-(x^2+y^2)}\left(-\left(\frac{x^2}{2}+y^2\right)\cdot 2y + 2y\right) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -2x\left(\frac{x^2}{2}+y^2\right) + x = 0 \\ -2y\left(\quad'' \quad\right) + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2+2y^2 = 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x^2+2y^2 = 2 \end{array}\right. \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ x^2+2y^2=2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ x^2+2y^2=1 \end{cases} \\ \xcancel{\begin{cases} x^2+2y^2=1 \\ x^2+2y^2=2 \end{cases}} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

$A(0,0)$ min

$B_1(0,1)$

$B_2(0,-1)$ max

$C_1(1,0)$

$C_2(-1,0)$

$f(A)=0$

$f(B_1)=f(B_2)=e^{-1}$

$f(C_1)=f(C_2)=\frac{1}{2}e^{-1}$