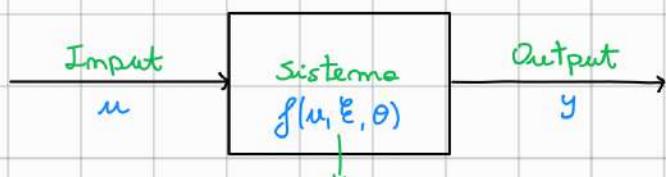


## Introduzione alla teoria dei controlli

Un sistema è una collezione di parti interconnesse che compiono un qualcosa di più complesso, possiamo rappresentarlo come una scatola:

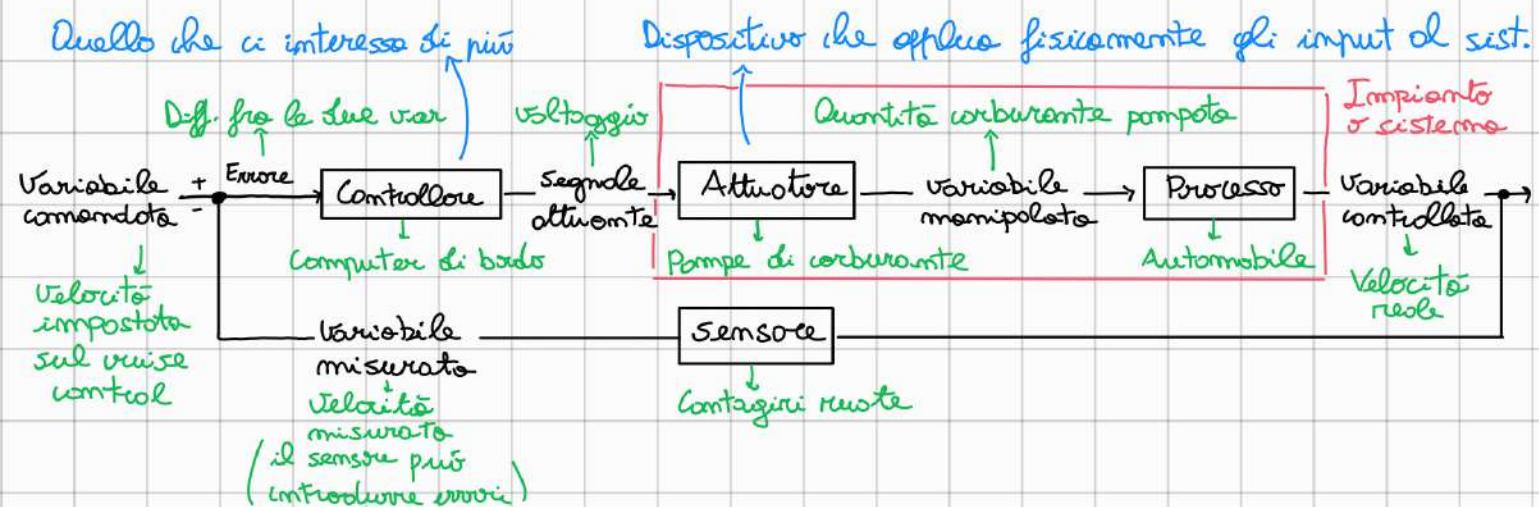


Internamente descritto da un modello matematico:

- $u$  sono le variabili che possiamo controllare (es: pedale del gas)
- $E$  sono i disturbi (es: Resistenza aerodinamica, pendente della strada)
- $\theta$  sono i parametri del sistema (es: massa della macchina)
- $y$  è la risposta del sistema (es: velocità attuale)

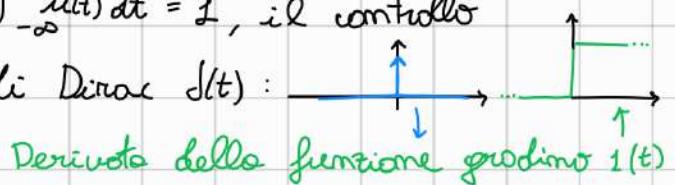
Vogliamo essere in grado di controllare come si comporta il sistema, ossia sapere come dare gli input per ottenere l'output desiderato, abbiamo quindi bisogno di un sistema di controllo e questo corso spiega come progettarne uno!

Soltanmente i sistemi di controllo sono organizzati come un **anello chiuso**, in modo da poter ricevere un feedback dal processo (o sistema), ad esempio il sistema di cruise control di un'automobile può essere:



## Sistemi LTI

Per questa prima parte del corso tratteremo solamente di sistemi lineari tempo invarianti, i quali sono caratterizzati da come rispondono ad un controllo impulsivo, ossia un segnale puramente teorico molto corto e con intensità molto elevata tale che  $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) dt = 1$ , il controllo impulsivo per esempio è detto delta di Dirac  $\delta(t)$ :



Questo significa che se sappiamo come un sistema LTI risponde ad un segnale che approssima  $\delta(t)$  allora possiamo conoscere come il sistema risponde ad un qualsiasi segnale in ingresso, infatti:

Supponiamo di sapere che il sistema risponde ad un segnale impulsivo secondo la funzione  $H(t)$ , grazie alle proprietà dei sistemi LTI sappiamo che la risposta del sistema ad un doppio segnale impulsivo è la somma delle funzioni risposta ai singoli segnali impulsivi, allora per conoscere la risposta ad un generico segnale  $u(t)$  possiamo vederlo come combinazione di infiniti impulsi e dunque sommare tutte le risposte infinitesime, per farlo sfruttiamo lo strumento matematico della convoluzione

$$(u \otimes H)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) H(t-\tau) d\tau \rightarrow \text{Somma delle aree sotto le dell'intersezione di } u \text{ e } H \text{ tenendo fissa } u \text{ e facendo scorrere } H$$



## Trasformazioni di Laplace

Una trasformazione di Laplace è un processo matematico che scomponne un segnale nel dominio del tempo in funzioni sinusoidali ed esponenziali, per fare questo viene scelto un nuovo dominio complesso  $s = \sigma + j\omega$  e si sfrutta il fatto che:

$$e^{st} = e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t} (e^{j\omega t}) = e^{\sigma t} (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) \rightsquigarrow \text{scompongo in esp. e sinusoidali}$$

verso o decadimento esponenziale del segnale frequenza del segnale

Per definizione:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{w \rightarrow \infty} \int_{\sigma-jw}^{\sigma+jw} e^{st} F(s) ds$$

Le proprietà / vantaggi di fare questo sono molteplici, supponendo infatti condizioni iniziali nulle ottieniamo:

- Linearità:  $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + b g(t)\} = \alpha F(s) + b G(s)$
- Traslazione di tempo:  $\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-\tau s} F(s)$
- Traslazione di frequenza:  $\mathcal{L}\{f(t) e^{\alpha t}\} = F(s-\alpha)$
- Derivata:  $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s F(s)$
- Integrale:  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(z) dz\right\} = \frac{1}{s} F(s)$
- Convoluzione:  $\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s)$

## Antitrasformata di Laplace

Trasformare dal dominio  $t$  ad  $s$  è facile, basta consultare una tabella, meno banale è invece fare il contrario, quello che facciamo è scomporre  $F(s)$  in fratti semplici da cui mi ricondurrà alla tabella.

- Porto  $F(s)$  in un rapporto di polinomi in  $s$ :  $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$   $\rightsquigarrow$  Si può sempre fare

• Rimuovi il denominatore  $\rightarrow$  si ha grado max della base legg. 1

- Fattorizza il denominatore

a questo punto ho vari possibili casi:

→  $\deg(N) > \deg(D)$

Devo abbassare il grado di  $N$  separando la frazione in due, ad esempio:

Rapporto tra i due  $s^2$  resto

$$F(s) = \frac{2s^2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{\overbrace{2(s^2 + 4s + 3)}^1 - 8s - 6}{(s^2 + 4s + 3)} = 2 - \frac{8s + 6}{s^2 + 4s + 3} = 2 - \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{8s + 6}{s^2 + 4s + 3} \right\}$$

→  $\deg(N) < \deg(D)$

- Se tutte le radici sono reali e distinte

Fatti semplici:  $F(s) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s - p_i}$

Residui:  $A_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) F(s)$

Antitrasformata:  $f(t) = \sum_{i=1}^m A_i e^{p_i t}$

- Se tutte le radici sono reali ma alcune ripetute, per queste:

Fatti complessi:  $F(s) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{(s - p)^i}$

Residui:  $A_i = \lim_{s \rightarrow p} \frac{1}{(m-i)!} \frac{\partial^{m-i}}{\partial s^{m-i}} [(s - p)^m \cdot F(s)]$  la radice ripetuta

Antitrasformata:  $\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{(s - p)^m} \right\} = \frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} e^{pt}$

- Se le radici sono complesse (e dunque coniugate perché  $D$  è a coeff. reali)

Si procede come per quelle medie distinte con la scomposizione in fratti semplici e poi si cerca di applicare direttamente  $\mathcal{L}\{\sin(wt)u(t)\} = \frac{w}{s^2 + w^2}$  e  $\mathcal{L}\{\cos(wt)u(t)\} = \frac{s}{s^2 + w^2}$ , oppure si continua ad antitrasformare normalmente e poi si cerca di ricomporre l'espressione a:  $\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ ,  $\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

Ricordo che  $\frac{1}{Z} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}$

### Esempio

$$\frac{100}{(s+1)(s^2 + 4s + 13)} = \frac{100}{(s+1)(s - (-2+3i))(s - (-2-3i))} = \frac{10}{s - (-1)} + \frac{\frac{100}{-6i - 18}}{s - (-2+3i)} + \frac{\frac{100}{6i - 18}}{s - (-2-3i)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(t) &= 10e^{-t} + \frac{100}{-18-6i} e^{(-2+3i)t} + \frac{100}{-18+6i} e^{(-2-3i)t} \\ &= 10e^{-t} + \left(-5 + \frac{5}{3}i\right)e^{-2t} e^{3it} + \left(-5 - \frac{5}{3}i\right)e^{-2t} e^{-3it} \\ &= 10e^{-t} + e^{-2t} \left(-5e^{3it} - \frac{5}{3}e^{3it} - 5e^{-3it} + \frac{5}{3}e^{-3it}\right) \\ &= 10e^{-t} + e^{-2t} \left(-5(e^{3it} + e^{-3it}) - \frac{5}{3}(e^{3it} - e^{-3it})\right) \\ &= 10e^{-t} + e^{-2t} \left(-10 \left(\frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2}\right) - \frac{10}{3} \left(\frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i}\right)\right) \\ &= 10e^{-t} - 10e^{-2t} \left(\frac{\sin(3t)}{3} + \cos(3t)\right) \end{aligned}$$

Note:  $\mathcal{L}\{f(t)\} = 1$   
 $\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$



## Funzione di trasferimento

Sempre LTI

Il problema che vogliamo risolvere è trovare un modo per calcolare facilmente l'integrale di convoluzione e dunque scoprire la risposta del sistema ad un qualsiasi input. Sapendo che nel dominio di Laplace questo è una semplice moltiplicazione, quello che possiamo fare è applicare la trasformata di Laplace alla risposta impulsiva del sistema (a condizioni iniziali nulle) e moltiplicarla per la trasformata dell'input desiderato:  $H(s)U(s) = Y(s)$  → la corrispondente uscita

Risposta impulsiva del sistema a  $\underbrace{CI}_{\text{nulle condizioni iniziali}} \text{ nulle qualsiasi ingresso}$

CI = Condizioni Iniziali = Valore delle variabili di stato del sistema all'istante 0  
quelle necessarie per descrivere il sistema, ad esempio posizione e velocità nelle  
→ lo vediamo bene nella 2<sup>a</sup> parte del corso

La funzione  $H(s)$  così definita è detta matrice di trasferimento, mentre ogni sua componente è detta funzione di trasferimento dell'ingresso  $j$  all'uscita  $i$ . In particolare in questa prima parte del corso tratteremo solo di sistemi SISO (single input single output) e dunque la matrice di trasferimento sarà sempre  $1 \times 1$  e considereremo con lo f.d.t. di trasferimento tra  $u$  ed  $y$ .

Per ogni funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ :

- Le radici di  $N(s)$  sono dette **zeri** ( $G(s) \rightarrow 0$ ), indicati con 0
- Le radici di  $D(s)$  sono dette **poli** ( $G(s) \rightarrow \infty$ ), indicati con x e sono tutti e soli quelli controllabili dall'ingresso  $u$  e osservabili dall'uscita  $y$ , dunque in generale un sottosistema degli autovalori della matrice A: nel calcolo di  $G$  può infatti accadere che alcuni poli e zeri si cancellino.

corretto. Se non diversamente specificato, cioè se

$G(s)$  assumeremo sempre che non siano presenti correlazioni e chiameremo il grado di  $D$  ordine del sistema, cioè il numero di variabili di stato necessarie a descriverlo.

Lo vediamo bene nella 2<sup>a</sup> parte del corso

Note: Antitrasformando la funzione di trasferimento si ottiene la risposta nel dominio del tempo al controllo impulsivo

Note: Dato che una funzione di trasferimento rappresenta un fenomeno fisico questo ha sempre coefficienti reali, dunque una sua radice può solo essere reale oppure complessa e coniugata con un'altra radice.

### Stabilità esterna di un sistema LTI

Un sistema LTI è detto esternamente stabile o BIBO stabile se:

$$\exists M \in \mathbb{R}^+: \forall \tilde{u}(t): |\tilde{u}(t)| < B, B \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow |\tilde{y}(t)| < M$$

Bounded Input  $\Rightarrow$  Bounded output

Questo è vero se e solo se i poli della funzione di trasferimento hanno  $\{\text{Re}\} < 0$ : intuitivamente ha senso perché antitrasformando si ottiene sempre un'espressione che coinvolge  $e^{st}$  e dunque se anche solo una parte reale fosse positiva allora la risposta andrebbe sempre a  $\infty$ .



## Diagrammi a blocchi

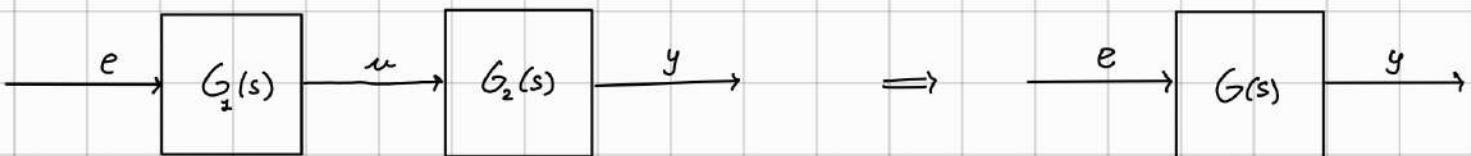
Come fatto prima assumiamo sia LT e SISO

Un diagramma a blocchi è un grafico dove ogni blocco contiene una funzione di trasferimento che rappresenta un sistema, come i circuiti elettrici, anche i diagrammi a blocchi possono essere semplificati.

Quando semplifichiamo può succedere che il grado del sistema finale sia inferiore alla somma dei gradi dei singoli blocchi pur essendo esattamente equivalente, se questo accade vuol dire che alcuni zeri si sono semplificati con alcuni poli e abbiamo dunque perso controllabilità o osservabilità

Note: Nel caso di cancellazioni dove il polo cancellato ha  $\{Re\} > 0$  si parla di cancellazione critica perché manca una parte instabile del sistema

### • Blocchi in serie



Sappiamo che  $G_1(s) = \frac{U(s)}{E(s)}$  e  $G_2(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

Allora  $Y(s) = G_2(s) U(s) = G_2(s) G_1(s) E(s)$

e dunque  $\frac{Y(s)}{E(s)} = G_1(s) G_2(s) = G(s) = \frac{N_1}{D_1} \frac{N_2}{D_2}$

### Controllabilità e osservabilità

- Se  $N_1$  e  $D_1$  hanno radici comuni  $G$  perde controllabilità
- Se  $N_2$  e  $D_2$  hanno radici comuni  $G$  perde osservabilità

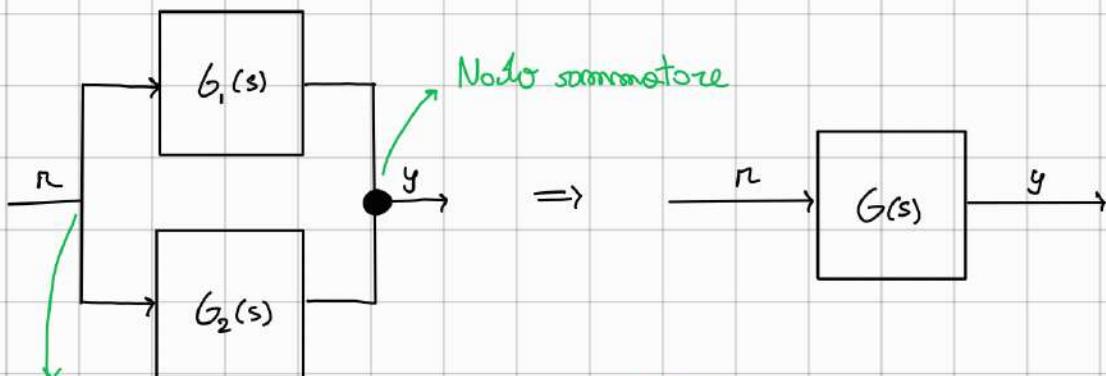
Non lo dimostriamo

### Stabilità

- $\zeta < 1$  è sufficiente stabilità se  $\zeta < 1$

Se  $G_1$  e  $G_2$  sono asintoticamente stabili anche  $G$  lo è

- **Blocchi in parallelo**



Semplificazione (segnale ripetuto)

Sappiamo che  $G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{R(s)}$ ,  $G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{R(s)}$  e  $Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$

Allora  $Y(s) = G_1(s)R(s) + G_2(s)R(s) = R(s)(G_1(s) + G_2(s))$

e dunque  $\frac{Y(s)}{R(s)} = G_1(s) + G_2(s) = G(s) = \frac{N_1}{D_1} + \frac{N_2}{D_2} = \frac{N_1 D_2 + N_2 D_1}{D_1 D_2}$

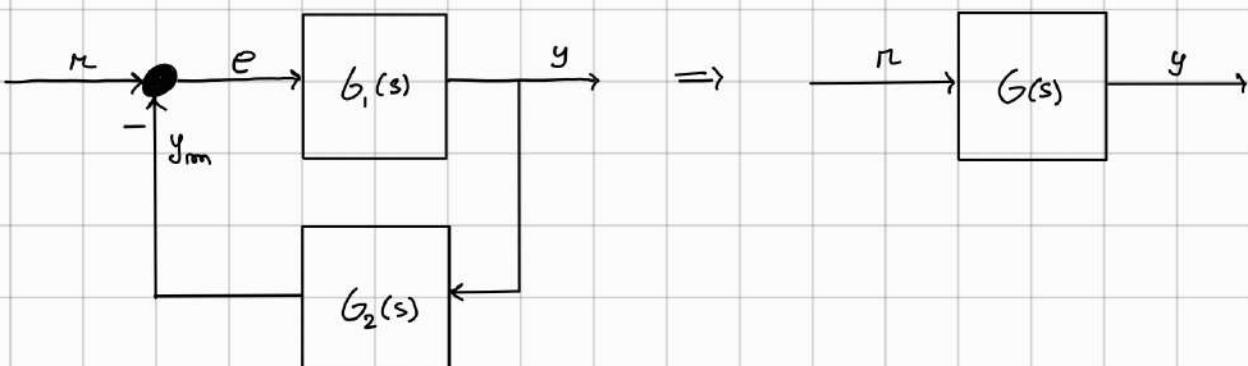
### Controllabilità e osservabilità

- Se  $D_1$  e  $D_2$  hanno radici comuni  $G$  perde sia controll. che osservab.

### Stabilità

- Se  $G_1$  e  $G_2$  sono asintoticamente stabili anche  $G$  lo è

- **Blocchi e ciclo chiuso**



Sappiamo che  $G_1(s) = \frac{f(s)}{E(s)}$ ,  $G_2(s) = \frac{f_M(s)}{Y(s)}$  e  $E(s) = R(s) - Y_M(s)$

dove  $Y(s) = G_1(s)E(s) = G_1(s)(R(s) - Y_M(s)) = G_1(s)(R(s) - G_2(s)Y(s))$

$$= G_1(s)R(s) - G_1(s)G_2(s)Y(s)$$

$$\Rightarrow Y(s)(1 + G_1(s)G_2(s)) = G_1(s)R(s)$$

e dunque  $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = G(s) = \frac{N_2 D_2}{D_2 D_2 + N_1 N_2} = 0$

Detto eq. caratteristico dei cicli chiusi

### Controllabilità e osservabilità

- Se  $N_1$  e  $D_2$  hanno radici comuni  $G$  perde sia controll. che osserv.

### Stabilità

In questo caso i poli di  $G$  dipendono anche dagli zeri di  $G_1$  e  $G_2$ , il sistema è esistematicamente stabile se non ci sono cancellazioni e le radici di  $D_2 D_2 + N_1 N_2 = 0$  hanno  $\{\text{Re}\} < 0$ , se invece ci sono cancellazioni dobbiamo accertarci che non siano critiche.

Dal momento che i poli di  $G$  sono in generale diversi da quelli di  $G_1$  e  $G_2$  il sistema a ciclo chiuso modifica le dinamiche del sistema e può essere usedo per spostare i poli dove ne abbiamo bisogno.



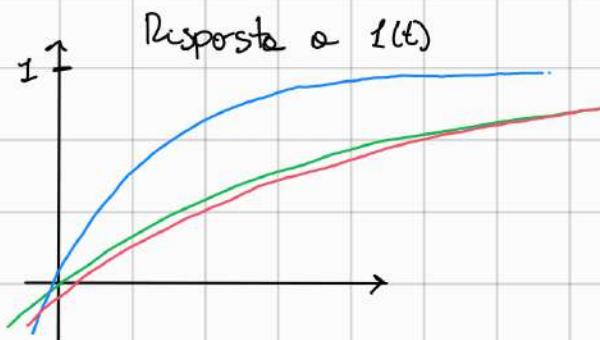
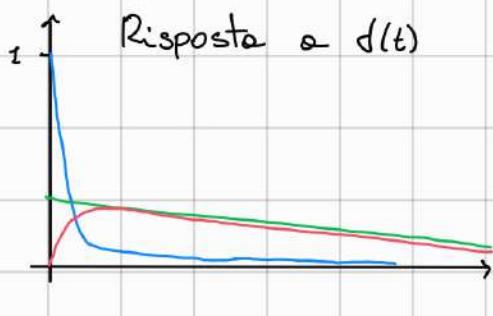
## Approssimazione del polo dominante

I sistemi con ordine maggiore di due possono essere difficili da studiare, quello che possiamo fare è approssimarli con un sistema di grado 1 o 2 ignorando le parti "veloci a rispondere" e considerando solo quelle più "lente", che caratterizzeranno maggiormente la risposta.

Supponiamo di avere un sistema  $G = \frac{0.1}{(s+1)(s+0.1)}$ , questo ha poli  $P_1 = -1$  e  $P_2 = -0.1$ , dato che  $P_2$  ha parte reale più vicina a 0 allora il suo contributo alla risposta di un qualsiasi input è più importante del contributo dell'altro polo  $P_1$  perché è più lento ( $e^{-0.1t} \gg e^{-t}$ ), possiamo dunque approssimare  $G$  con il solo polo dominante  $P_2$ :  $G \approx \frac{0.1}{s+0.1}$

Verifichiamo che questo è vero studiando le risposte a  $d(t)$  e  $1(t)$ :

$$\bullet G(s) = P_1(s) P_2(s) \quad \bullet P_1(s) = \frac{t}{s+1} \quad \bullet P_2(s) = \frac{0.1}{s+0.1}$$



Più in generale:

## Riduzione di sistemi del 2<sup>o</sup> ordine (con due radici reali)

Dato uno generico  $G(s) = \frac{\alpha\beta}{(s+\alpha)(s+\beta)}$ , se  $\beta \gg \alpha$  (tipicamente  $\beta \geq 5\alpha$ ), allora si ha che  $G(s) \approx \frac{\alpha\beta}{s+\beta}$

se sono presenti opporsi a s, per  $s < 0$ , la funzione si prosciugherà come  $G(s) \approx \frac{\alpha}{(s+\alpha)} = \frac{1}{s/\alpha + 1}$

### Riduzione di sistemi del 3° ordine (con una radice reale e due complesse)

Dato  $G(s) = \frac{\alpha w_0^2}{(s+\alpha)(s^2 + 2\xi w_0 s + w_0^2)}$   $\Rightarrow$   $\begin{cases} \text{se } \alpha \ll \xi w_0 & G(s) \approx \frac{\alpha}{s+\alpha} \\ \text{se } \alpha \gg \xi w_0 & G(s) \approx \frac{w_0^2}{s^2 + 2\xi w_0 s + w_0^2} \end{cases}$

$\xi = w_0$  sono due cose separate

Vedi nota 8: Teorema del valore finale

In ogni caso  $G(0)$ , che equivale alla risposta del sistema quando l'input è  $i(t)$   $[FV = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) U(s) s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \cdot K = K G(0)]$  non cambia mai, e questo assicura che i valori finali delle  $G$  approssimate e non siano regolari.

Per  $i(t)$

Note: Nel caso in cui ci sia uno zero molto vicino ad un polo questi non hanno effetti tangibili e dunque non vengono considerati nell'approssimazione al polo dominante, nonostante il polo possa essere quello più lento



## Risposta alla funzione gradino



Studieremo la risposta allo f. gradino  $I(t)$ : perché questo fornisce importanti parametri del sistema, inoltre lo studiamo solo per sistemi del 1° e 2° ordine perché, grazie alla tecnica dell'approssimazione del polo dominante, questi approssimano anche sistemi di ordine superiore

## Risposta a $I(t)$ per sistemi del 1° ordine

Consideriamo  $G(s) = \frac{1}{1+2s}$  (Polo in  $s = -\frac{1}{2}$ )

allora l'output allo step è  $Y(s) = \frac{1}{1+2s} \frac{1}{s}$  ovvero  $y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}}$



$\tau$  è detta costante di tempo e caratterizza completamente la risposta dei sistemi del 1° ordine

$t_s$  è detto tempo di assettamento:  $t_s = -\tau \ln(0.05)$

In questo caso entro il 5% dell'output

## Risposta a $I(t)$ per sistemi del 2° ordine

Consideriamo  $G(s) = \frac{1}{\omega_m^2 + \frac{2\xi}{\omega_m}s + 1}$  dove:

Più è basso più oscilla 'forte'

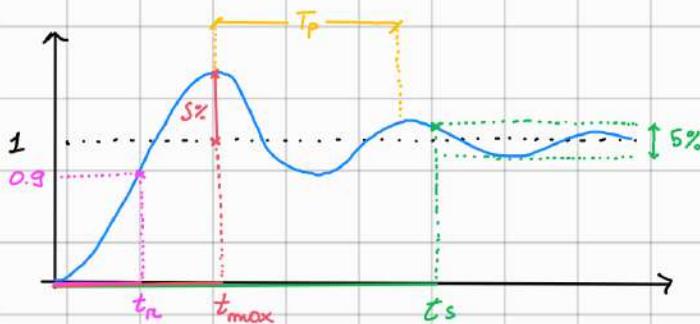
- $\xi$  è detto coefficiente di smorzamento del sistema
  - $\omega_m$  (o spesso  $\omega_0$ ) è la frequenza naturale del sistema, cioè quella da quale oscilla se non forzato
- se  $\xi < 0$  o  $\omega_m < 0$  il sistema è instabile e non ci interessa
- Se  $\xi > 1$  il sistema ha due poli reali e si comporta come visto sopra
- Approssimando  
il polo dominante

Se analizziamo i poli di un sistema del 2<sup>o</sup> ordine infatti:



Possiamo dunque assumere  $0 < \xi < 1$ , allora il sistema ha due poli complessi coniugati  $s = -\xi w_m \pm j w_m \sqrt{1-\xi^2}$  e si può dimostrare che l'output alla funzione gradino è:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_m t} \sin(w_m \sqrt{1-\xi^2} t + \arccos(\xi))$$



Possiamo definire alcuni valori interessanti:

Per sistemi del 1<sup>o</sup> ordine  
 $\xi = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{w_m}$

- **Tempo di arrestamento (entro il 5%)**:  $t_s \approx -\frac{1}{\xi w_m} \ln(0.05)$   
*Settling time*
- **Periodo delle oscillazioni**:  $T_p = \frac{2\pi}{w_m \sqrt{1-\xi^2}}$   
*Oscillation period*
- **Tempo di salita (al 90%)**:  $t_n \approx \frac{1.8}{w_m}$   
*Rise time*
- **Superamento massimo percentuale**:  $S\% = 100 e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$   
*Maximum overshoot*
- **Tempo di superamento massimo**:  $t_{max} = \frac{\pi}{w_m \sqrt{1-\xi^2}} \rightsquigarrow t_{max} = \arg\max_{t>0} y(t)$   
*Time of maximum overshoot*

Note:  $G(s) = e^{-s\tau}$  è detto ritardo e genera uno sconsenso di frequenza proporzionale a  $\omega$  e al ritardo:

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau} \Rightarrow |G(j\omega)| = 1, \angle G(j\omega) = -\omega\tau$$

Anche zeri con parte reale positiva si comportano in modo molto simile a dei ritardi.

[Ad esempio la risposta a  $I(t)$  di  $G(s)$  è esteticamente 3 secondi indietro rispetto a quello di  $G(s)e^{-3s}$  ed è molto simile a quello di  $(s-3)G(s)$ ]



## Risposta in frequenza

Altrimenti Bode da risultati sbagliati

Una proprietà dei sistemi LTI è quella che, assumendo il sistema

sia assintoticamente stabile, dato un ingresso  $u(t) = A \sin(\omega t)$

dove l'uscita converge sempre a  $y(t) = A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$

$\omega = 0$ , siamo all'equilibrio e ci sono solo oscillazioni

Guadagno Stesso Fase

$G(j\omega)$  è detta risposta in frequenza, se conosciamo questa risposta al variare di  $\omega$  allora conosciamo la risposta del sistema ad un qualsiasi segnale sinusoidale

$G(j\omega)$  è in genere un numero complesso dunque  $G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}$

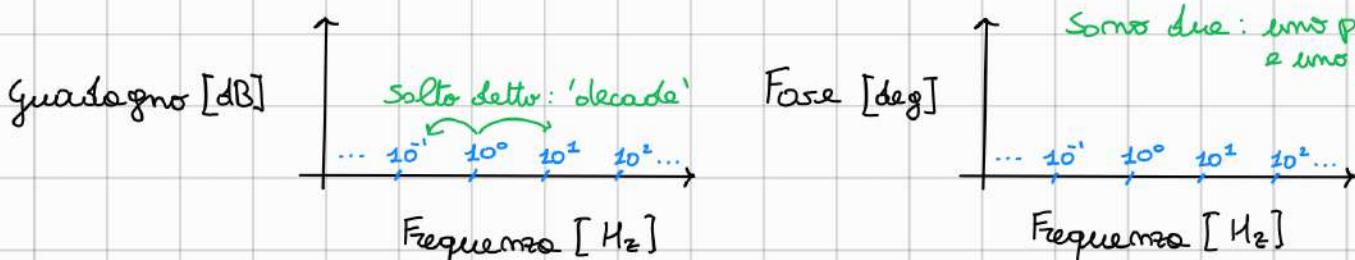
- $|G(j\omega)| = \text{Ampiezza} = \sqrt{\text{Re}\{G(j\omega)\}^2 + \text{Im}\{G(j\omega)\}^2}$

- $\angle G(j\omega) = \text{Fase} = \arctan_2(\text{Im}\{G(j\omega)\}, \text{Re}\{G(j\omega)\})$

- $\omega > 0$

Sarebbe  $\arctan\left(\frac{\text{Im}\{G(j\omega)\}}{\text{Re}\{G(j\omega)\}}\right)$  ma con i segni aggiustati

Per visualizzare la risposta in frequenza ricorriamo ai diagrammi di Bode:



Per ragioni storiche, non si traccia direttamente il guadagno ma lo si converte prima in potenza ( $\text{Potenza} \propto \text{Guadagno}^2$ ) e poi in decibel ( $1 \text{ dB} = 10 \log_{10} \text{Potenza}$ ), dunque si trova  $20 \log_{10} (\text{Guadagno}) [\text{dB}]$ . Sempre per ragioni storiche la fase viene indicata in gradi  $^\circ$  e la frequenza viene anche essa tracciata in scala logaritmica.

Calcolare  $|G(j\omega)|$  e  $\angle G(j\omega)$  a mano è complicato, esistono tuttavia metodi veloci per approssimare i diagrammi di Bode osservandoli.

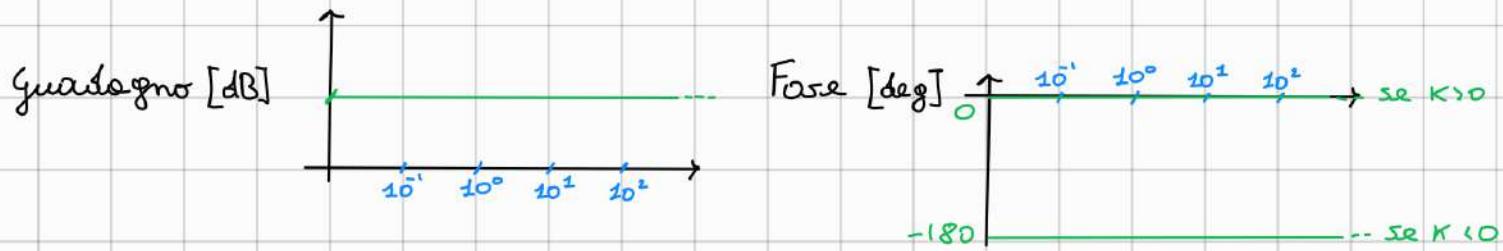
sovrappone la funzione di regolamento, i di meno possono anche essere usati al contrario, ossia per stimare la funzione di trasferimento dai diagrammi di Bode:

### Diagrammi di Bode per funzioni costanti

$$G(s) = G(j\omega) = K \in \mathbb{R} \implies \text{Guadagno} = \sqrt{k^2} = |K| \rightarrow 20 \log_{10}(|K|)$$

$$\implies \text{Fase} = \arctan_2(0, K) \rightarrow 0^\circ \text{ se } K > 0$$

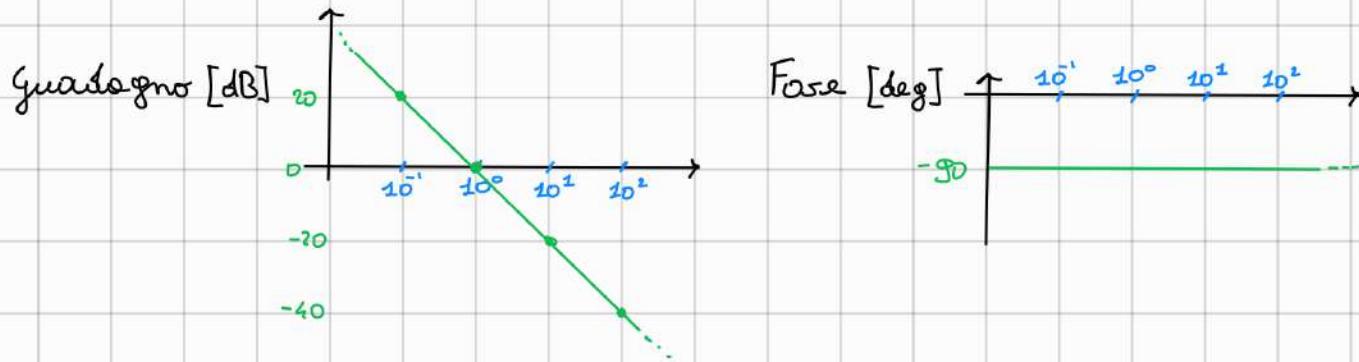
$$\qquad \qquad \qquad -180^\circ \text{ se } K < 0$$



### Diagrammi di Bode per poli nell'origine

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad G(j\omega) = -\frac{1}{\omega} j \implies \text{Guadagno} = \sqrt{\frac{1}{\omega^2}} = \frac{1}{\omega} \rightarrow 20 \log_{10}\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

$$\implies \text{Fase} = \arctan_2\left(-\frac{1}{\omega}, 0\right) \rightarrow -90^\circ$$



### Diagrammi di Bode per poli redi

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0}} \quad \text{"Break frequency"}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} \cdot \frac{1 - \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{j\omega}{\omega_0}} = \frac{1 - \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} - j \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\Rightarrow \text{Guadagno} = 20 \log_{10} \sqrt{\left(\frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)^2} = -20 \log_{10} \left( \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Fase} = \arctan 2 \left( \frac{-\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}, \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) = \arctan \left( -\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

Caso 1:  $\omega \ll \omega_0$

$$\text{Guadagno} = -20 \log_{10}(1) = 0 \text{ dB}$$

$$\text{Fase} = \arctan(0) = 0^\circ$$

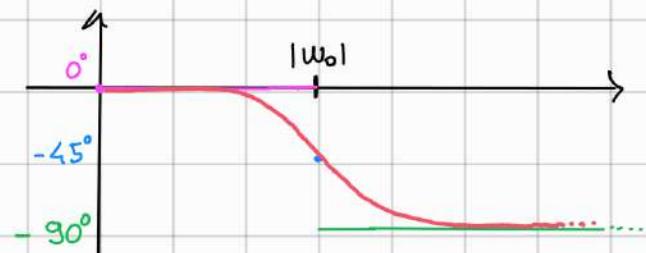
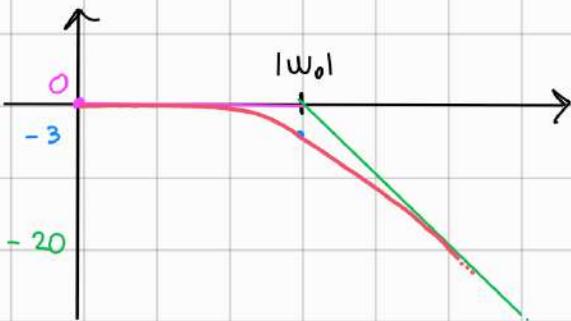
Caso 2:  $\omega = \omega_0$

$$\text{Guadagno} = -20 \log_{10}(\sqrt{2}) = -3 \text{ dB} \quad \text{Fase} = \arctan(-1) = -45^\circ$$

Caso 3:  $\omega \gg \omega_0$

$$\text{Guadagno} = -20 \log_{10}(\infty) = -\infty \quad \text{Fase} = \arctan(\infty) = -90^\circ$$

↳ Rette con pendenza  $-20 \text{ dB/decade}$  che intersecano l'asse  $\omega$  in  $\omega_0$ .



se  $\omega_0 < 0$  (sistema instabile) questo è speciato  
(come se fosse uno zero)

Diagrammi di Bode per poli complessi coniugati:

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad \text{dove } \xi \text{ è il coeff. di smorzamento: } 0 < \xi \leq 1$$

$$G(j\omega) = \dots = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2} - j \frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}$$

Caso 1:  $\omega \ll \omega_0$  :  $\text{Re} = 1, \text{Im} = 0$

$$\text{Guadagno} = 20 \log_{10}(1) = 0 \text{ dB}$$

$$\text{Fase} = \arctan(0) = 0^\circ$$

Caso 2:  $\omega = \omega_0$  :  $\text{Re} = 0, \text{Im} = \frac{1}{2\xi}$

$$\text{Guadagno} = 20 \log_{10} \left( \sqrt{\frac{1}{1-\xi^2}} \right) = 20 \log_{10} ((2\xi)^{-1}) = -20 \log_{10} (2\xi)$$

$$\text{Fase} = \arctan \left( \frac{1}{2\xi}, 0 \right) = \arctan(\infty) = -90^\circ$$

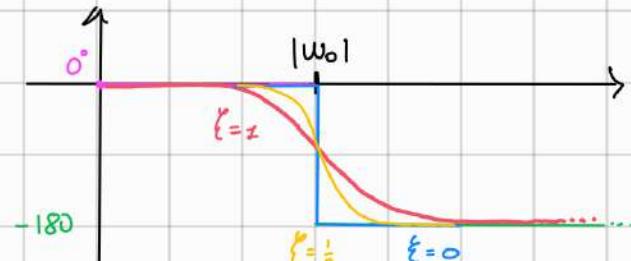
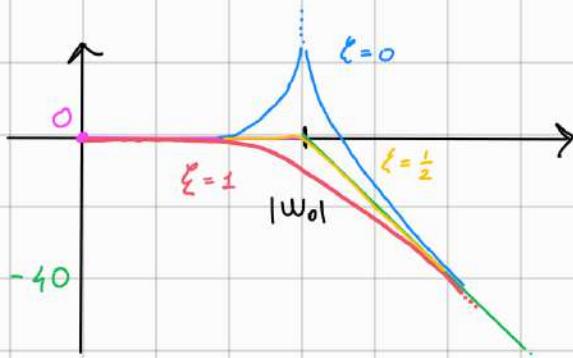
$\xi = \frac{1}{2}$	0 dB
$\xi < \frac{1}{2}$	Supera $\omega_0$
$\xi > \frac{1}{2}$	Sta sotto $\omega_0$
$\xi = 0$	$\infty$ dB

$$\text{Caso 3: } \omega \gg \omega_0 : R_E = -\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-2}, I_m = -2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-3}$$

$$\text{Guadagno} = 20 \log_{10} \left( \sqrt{\left(-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-2}\right)^2 + \left(-2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-3}\right)^2} \right) \approx 20 \log_{10} \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-2}} = -40 \log_{10} \left(\left|\frac{\omega}{\omega_0}\right|\right)$$

↳ Rotta con pendenza  $-40 \text{ dB/decade}$  che interseca l'asse  $\omega$  in  $\omega_0$ .

$$\text{Fase} = \arctan 2 \left( -2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-3}, -\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-2} \right) = -180^\circ$$



se  $\omega_0 < 0$  (sistema instabile) questo è speciato  
(come se fosse uno zero)

### Diagrammi di Bode per zeri qualsiasi

Quello che succede quando ho uno zero è molto semplice: i diagrammi di Bode sono speciati rispetto a quelli dello zero messo come polo, intuitivamente ha senso perché poli e zeri uguali si cancellano, ed

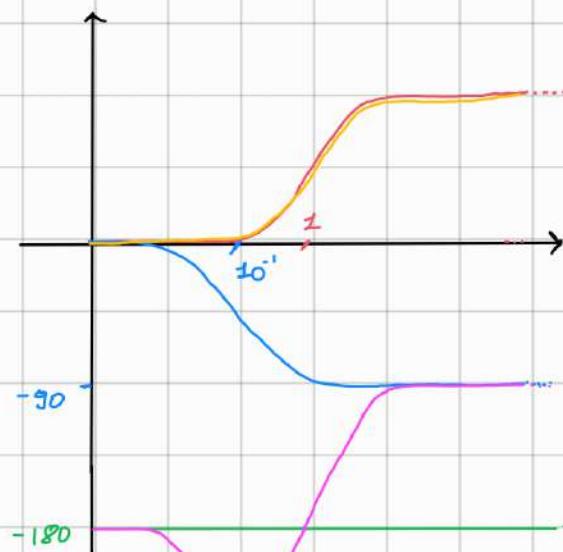
esempio:  $G(s) = s = \frac{1}{1/s} = 1 - \frac{1}{s} \rightarrow$  lo zero messo  
come polo  
e speciato

Tutto 0

A cosa ci serve questo? Grazie al fatto che disegniamo logaritmi la risposta in frequenza di una funzione di trasformante è la somma delle risposte in frequenza dei singoli blocchi elementari (poli e zeri) che le comppongono:  $\log(AB) = \log(A) + \log(B)$

Esempio

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s+0.1)(s-1)} = -10^2 \cdot \frac{1}{\frac{s}{0.1} + 1} \cdot \frac{1}{\frac{s}{-1} + 1} \cdot \left(\frac{1}{s+1}\right)^{-2}$$



Note: Il valore più alto di ampiezza in un diagramma di Bode è detto 'Picco di risonanza'  $M_r$  e la frequenza a cui avviene è detta 'Frequenza di picco'  $\omega_{rp}$ .

Note: La conversione inversa da dB a numero è: Numero =  $10^{\frac{dB}{20}}$

## Banda

Un'importante proprietà delle risposte in frequenza è la banda  $B$ , ossia il range di frequenze per cui il guadagno è significativo (non viene persa o ottenuta l'informazione).

Dopo inizia la netta -20dB

Dato un sistema del primo ordine  $\frac{1}{1+\frac{s}{\omega_0}}$  con banda  $B = [0, \omega_0]$ , questo può essere scritto come  $\frac{1}{1+s^2}$  dare  $\tau = \frac{1}{\omega_0}$ , ma allora la banda indica la velocità di risposta del sistema perché più è alta  $\omega_0$ .

Più è piccolo  $\tau$  (ricordiamo che è il tempo per raggiungere il 63% circa del valore finale); questo vale anche, seppure con qualche approssimazione, per sistemi di ordine più alto.



Note: Dato un sistema a ciclo chiuso  $H = \frac{1}{1+L}$  ci aspettiamo che:

- Il suo diagramma di Bode inizi da 0dB, infatti  $\lim_{w \rightarrow 0} |H(jw)| = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{|L(jw)|}{\sqrt{1 + |L(jw)|^2}} \approx \frac{|L(jw)|}{|L(jw)|} = 1 = 0\text{dB}$  perché dato che  $L$  è un sistema causale (più pili che zero)  $\lim_{w \rightarrow 0} |L(jw)| \gg 1$
- Il suo diagramma di Bode termini come quello di  $L$ , infatti  $\lim_{w \rightarrow \infty} |H(jw)| = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{|L(jw)|}{\sqrt{1 + |L(jw)|^2}} \approx \frac{|L(jw)|}{1} = |L(jw)|$  perché dato che  $L$  è un sistema causale (più pili che zero)  $\lim_{w \rightarrow \infty} |L(jw)| \ll 1$

È inoltre possibile dimostrare che i sistemi a ciclo aperto  $L$  e chiuso  $H$  hanno circa la stessa frequenza di superamento  $w_{sp}$ , dunque hanno circa la stessa banda e lo stesso tempo di risposta.

Frequenza dove il guadagno tocca 0dB

Note: Sistemi con ritardi sono detti non a fase minima perché esiste un diagramma di Bode con stesso guadagno ma a fase minore



## Teorema del valore finale

Il sistema: L'input di cui voglio calcolare il valore finale

Se e solo se  $F(s) = G(s) \cdot U(s)$  ha poli con  $(Re) < 0$  o al più nell'origine, allora il valore finale  $FV = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$  corrisponde a  $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

In particolare, il numero di poli nell'origine è detto tipo del sistema:

- Per  $F(s)$  di tipo 0  $FV = 0 \rightsquigarrow$  converge a 0
- Per  $F(s)$  di tipo 1  $FV \in \mathbb{R} \rightsquigarrow$  È l'integrale di qualcosa che  $\rightarrow 0$
- Per  $F(s)$  di tipo 2 o più  $FV = \infty \rightsquigarrow$  È l'integrale di qualcosa che  $\rightarrow K \in \mathbb{R}$

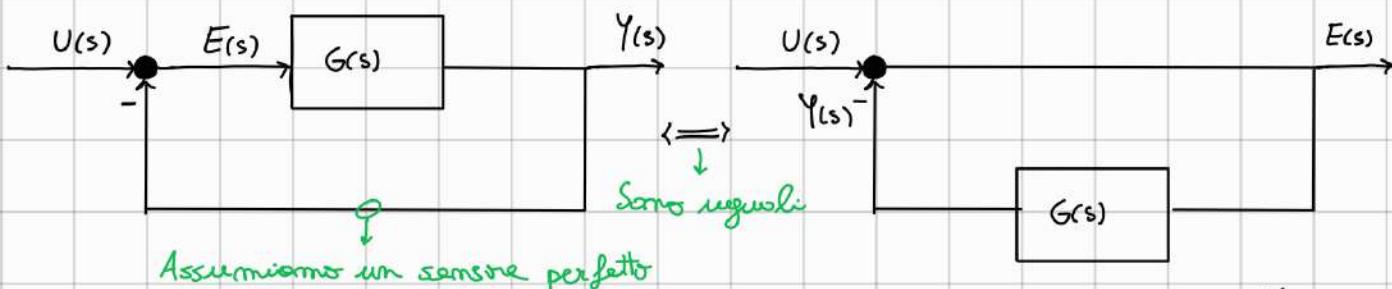
## Esempio

Dato  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ :

- FV per  $\delta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s(s+1)} = 1$
- FV per  $I(+)= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s(s+1)} = +\infty$

## Valore finale dell'errore

Possiamo applicare questo teorema ad un sistema a ciclo chiuso per valutare il valore finale dell'errore (steady state error):



Da  $E(s) = U(s) - Y(s)$  e  $Y(s) = G(s)E(s)$  ottengo  $E(s) = U(s) - G(s)E(s) = \frac{U(s)}{1 + G(s)}$

Allora il valore finale dell'errore  $E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sU(s) \frac{1}{1 + G(s)}$

Note: In un sistema a ciclo chiuso ci aspettiamo che  $G(0) = 1 = 0 \text{ dB}$

Volumi:  $P_1 = P_2 = 1000 \text{ miliardi} \text{ m}^3$   $P_3 = P_4 = 100 \text{ miliardi} \text{ m}^3$

nuova finora nuova risposta alla domanda 1(t)



Vedremo come si comporta il valore finale dell'errore di un sistema a ciclo chiuso facendo variare il tipo della f. o ciclo aperto L:  
supponendo che questo sia stabile

	Tipo 0	Tipo 1	Tipo 2
Graditmo ( $\frac{1}{s}$ )	$\frac{1}{1+K}$	0	0 $\Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+L}$
Rampe ( $\frac{1}{s^2}$ )	inf	$\frac{1}{K}$	0 $\Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{1}{1+L}$
Parabola ( $\frac{1}{s^3}$ )	inf	inf	$\frac{1}{K} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \frac{1}{1+L}$



## Criterio di Routh - Hurwitz

Servire per controllare la stabilità di un sistema senza dover risolvere l'equazione caratteristica (trovare i poli:  $\alpha_m x^m + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ )

Assumiamolo positivo, al massimo raggiro -1

Se gli  $\alpha_i$  non sono tutti dello stesso segno il sistema è instabile, altrimenti per valutare la stabilità devo creare le seguenti tabelle:

$S^n$	$\alpha^n$	$\alpha^{n-2}$	$\alpha^{n-4}$	$\alpha^0$
$\vdots$	$\alpha^{n-1}$	$\alpha^{n-3}$	$\vdots$	$0$
$\vdots$	$\alpha^{n-2}$	$\alpha^{n-4}$	$\vdots$	$0$
$S^0$				

$S^n$	$\alpha^n$	$\alpha^{n-2}$	$\alpha^{n-4}$	$\alpha^0$
$\vdots$	$\alpha^{n-1}$	$\alpha^{n-3}$	$\vdots$	$0$
$\vdots$	$\alpha^{n-2}$	$\alpha^{n-4}$	$\vdots$	$0$
$S^0$	$\square$	$\frac{\alpha^{n-1} \cdot \alpha^{n-2} - \alpha^n \cdot \alpha^{n-3}}{\alpha^{n-1}}$		

$S^n$	$\alpha^n$	$\alpha^{n-2}$	$\alpha^{n-4}$	$\alpha^0$
$\vdots$	$\alpha^{n-1}$	$\alpha^{n-3}$	$\vdots$	$0$
$\vdots$	$\alpha^{n-2}$	$\alpha^{n-4}$	$\vdots$	$0$
$S^0$	$\square$	$\square$		

$S^n$	$\alpha^n$	$\alpha^{n-2}$	$\alpha^{n-4}$	$\alpha^0$
$\vdots$	$\alpha^{n-1}$	$\alpha^{n-3}$	$\vdots$	$0$
$\vdots$	$\alpha^{n-2}$	$\alpha^{n-4}$	$\vdots$	$0$
$S^0$	$\square$	$\square$		

$S^n$	$\alpha^n$	$\alpha^{n-2}$	$\alpha^{n-4}$	$\alpha^0$
$\vdots$	$\alpha^{n-1}$	$\alpha^{n-3}$	$\vdots$	$0$
$\vdots$	$\alpha^{n-2}$	$\alpha^{n-4}$	$\vdots$	$0$
$S^0$	$\square$	$\text{Hatched}$		

N° di poli con  $\text{Re}(\lambda) > 0 = N^o$  di combi di segno in questa colonna

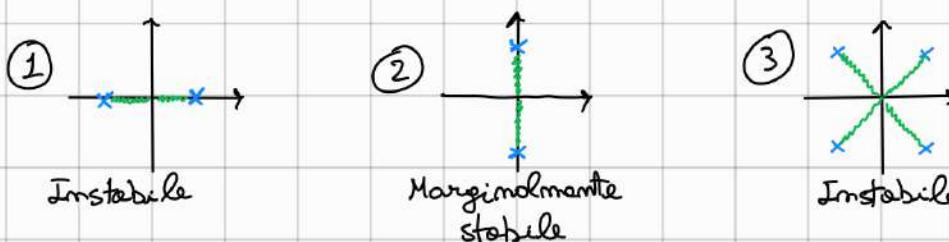
così specifici:

- Se c'è uno zero in una riga e l'elemento in elemento non zero in una colonna successiva della stessa riga allora il sistema è instabile (completando la tabella avrà sicuramente almeno un cambio di segno)

### Esempio

$s^4$	1	2	5		$s^4$	1	2	5
$s^3$	2	4		Se voglio andare avanti	$s^3$	2	4	
$s^2$	0 = E	5		devo considerare $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+}$	$s^2$	$0^+$	5	
$s$	$\frac{4\epsilon - 10}{\epsilon}$				$s$	$-\infty$		Due cambi di segno
I	5				1	5		

- Se c'è un'intera riga di zeri ci sono solo tre configurazioni di poli che la possono generare:



Vediamo con un esempio come completare la tabella

$s^5$	1	6	8	Chiama la riga sopra	$s^5$	1	6	8
$s^4$	2	10	12	"polinomio auxiliare"	$s^4$	2	10	12
$s^3$	1	2	0	$P(s) = 6s^2 + 12s^0$	$s^3$	1	2	0
$s^2$	6	12	0	Se skipiamo i gradi	$s^2$	6	12	0
$s$	0	0	0	Calcolo $\frac{dP}{ds}$ e inserisco i coefficienti nella riga	$s$	22	0	0
I					1	.....		

↑  $R(s)$

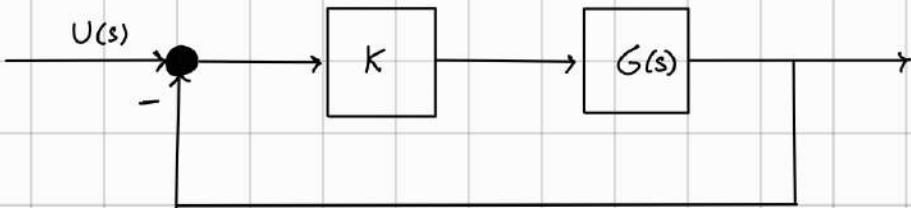
↓  $P(s)$

Note:  $P(s)$  è un divisore dell'equazione caratteristica

$Q(s) = P(s) \cdot R(s)$   $\rightsquigarrow$  un altro polinomio e le sue radici sono quelle presenti in una delle 3 configurazioni sopra.

### Esempio

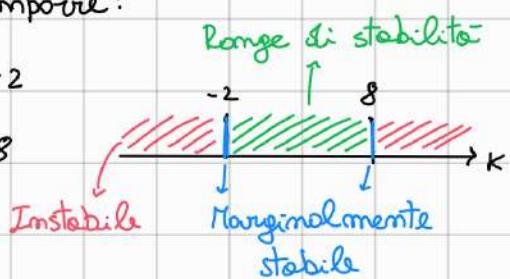
Supponiamo di avere un sistema  $G(s) = \frac{1}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 2}$  e di voler velocizzare il suo tempo di risposta alla funzione gradino:



Possiamo utilizzare un controllore con guadagno costante, vogliamo aumentare  $K$  il più possibile (più sensibilità all'errore e dunque risposta più veloce) mantenendo il sistema stabile:

$$F(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{K}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 2 + K}$$

$s^4$	1	11	$2+K$	Dovrò dunque impostare:
$s^3$	6	6	0	$2+K > 0 \quad K > -2$
$s^2$	10	2+K	$\frac{48-6K}{10} > 0 \quad K < 8$	
$s^1$	$\frac{48-6K}{10}$	0		
$s^0$	2+K			



Note Può essere utile impostare che il sistema sia né troppo lento né troppo veloce, questo equivale ad impostare che i poli siano a sinistra di una certa linea verticale  $z$ , per controllare questo basta usare Routh-Hurwitz sostituendo  $s = z - \text{offset desiderato}$



## Criterio di stabilità di Nyquist



Dato un sistema a ciclo aperto  $G(s)H(s)$  vogliamo studiare la stabilità del sistema a ciclo chiuso  $\frac{G}{1+GH}$ , che in generale avrà poli diversi dal primo.

## Principio dell'argomento di Cauchy

La funzione di trasferimento mappa punti del piano  $s$  di Laplace al piano  $s\bar{z}$  complesso, ad esempio se  $G(s) = \frac{s+3}{s+2}$  allora  $G(-2+j) = \frac{-2+j+3}{-2+j+2} = 1-j$ , se facciamo questo per ogni punto di una curva chiusa quello che otteniamo è un'altra curva chiusa nel piano complesso:



Detto 'principio dell'argomento di Cauchy'

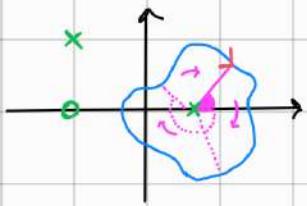
Una proprietà interessante è che per ogni punto nel piano  $s$ , il corrispondente punto nel piano  $s\bar{z}$  è un fasore tale che:

- Il suo modulo è proporzionale alla somma dei moduli dei fasori che congiungono il punto  $s$  agli zeri di  $G(s)$  fatto le stesse somme ma riferite ai poli.
- La sua fase è uguale alla somma delle fasi dei fasori che congiungono il punto  $s$  agli zeri di  $G(s)$  meno le stesse somme ma riferite ai poli.

Supponiamo di muoverci lungo la seguente curva:

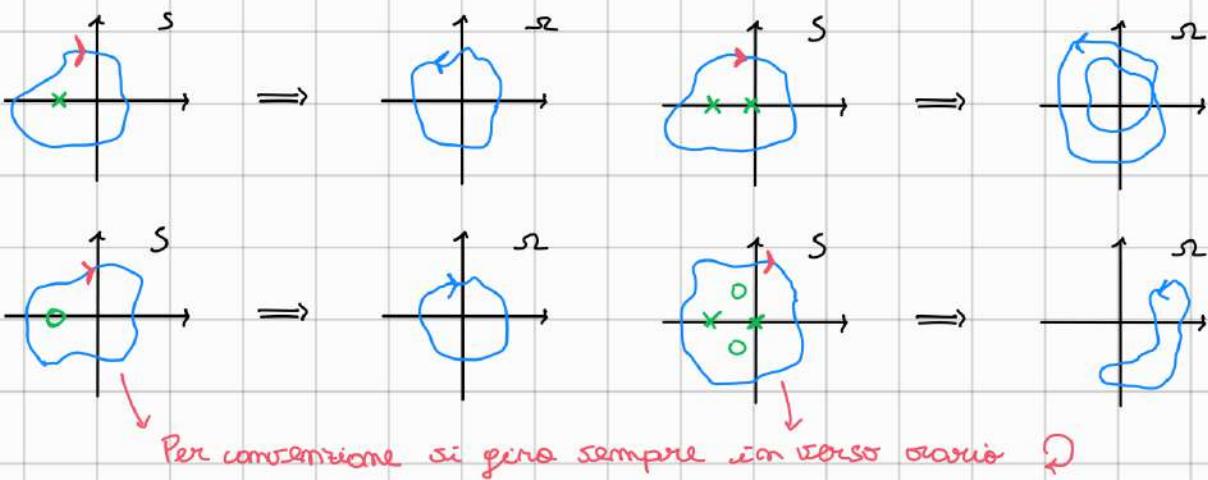


Lo zero a destra contribuisce ad una fase totale di  $+2\pi$ , mentre ogni altro polo o zero fuori dal contorno contribuisce a  $-2\pi$ .

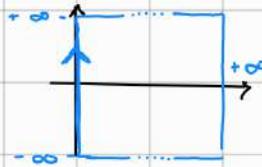


Il pole a destra contribuisce ad una fase totale di  $-2\pi$ , mentre ogni altro polo o zero fuori dal contorno contribuisce in totale ad una fase di  $0\pi$

Questo vuol dire che, dato una qualsiasi curva chiusa nel piano  $S$ , siamo in grado di distinguere la differenza tra il numero di poli e di zeri che racchiude contorno quante volte e in che direzione cerchia l'origine la corrispondente curva del piano  $S_2$ :



Torniamo al problema iniziale: vogliamo studiare la stabilità di  $\frac{G}{1+GH}$ , dunque controllare se non ci siano poli con  $\{\text{Re}\} > 0$ , o in modo equivalente che il denominatore  $1+GH$  non abbia zeri con  $\{\text{Re}\} > 0$ , per fare questo potremmo muoverci lungo la seguente curva del piano  $S$ :



, la curva del piano  $S_2$   
corrispondente è detto

diagramma di Nyquist

Spesso detta funzione di ciclo aperto L

Note: Il diagramma di Nyquist si trova per la funzione  $GH$  e poi si controlla quante volte cerchia  $-1$  anche l'origine

Note:  $\text{Poli}(GH) = \text{Zeri}(G_0 H_0) = \text{Poli}\left(\frac{G_0 H_0 + G_0 H_{\infty}}{G_0 H_0}\right) = \text{Poli}(1 + GH)$

Dunque se, come spesso accade, conosciamo già il numero di poli con

$|Re| > 0$  di  $GH$ , allora conosciamo anche quello di  $z + GH$  e dunque possiamo dire con esattezza il numero di zeri di  $z + GH$  con  $|Re| > 0$

$$\Rightarrow Z = N + P \rightarrow \text{Numero di poli con } |Re| > 0 \text{ di } GH \text{ (uguale a quello di } z + GH)$$

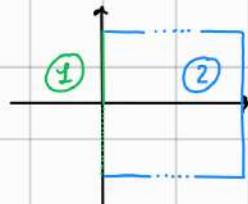
Numero di zeri con  $|Re| > 0$  di  $z + GH$   
(oppure numero di poli con  $|Re| > 0$  di  $\frac{G}{z + GH}$ )

Numero di giri in senso orario attorno a  $-1$   
del diagramma di Nyquist di  $GH$

Numero di zeri - numero di poli con  $|Re| > 0$  di  $z + GH$

### Trovare diagrammi di Nyquist

Dividiamo la curva di Nyquist in due parti:



Per quanto riguarda ① basta sostituire  $s = j\omega$  per  $\omega > 0$  perché, dato che poli e zeri sono spostati rispetto all'asse reale, anche la curva risultante lo sarà.

Per quanto riguarda ② se il sistema è proprio ( $\deg(N) \leq \deg(D)$ ) allora il tutto corrisponde ad un solo punto nel piano  $s$ , infatti:

- Per sistemi strettamente propri abbiamo più poli che zeri, dunque il modulo del fasore risultante per  $s \rightarrow +\infty$  è 0 e dunque il fasore è l'origine
- Per sistemi propri abbiamo che per  $s \rightarrow +\infty$  il modulo del fasore risultante è il rapporto tra due numeri molto simili e dunque  $\approx 1$ , mentre la fase è la differenza tra due numeri molto simili e dunque  $\approx 0$

Allora l'unica cosa da fare è studiare  $G(j\omega)$  per  $\omega > 0$ :

1)  $\omega = 0$  | Dove inizia la curva

2)  $\omega = +\infty$  | Dove finisce

3) Intersecca l'asse  $\text{Im}$  | Punti intermedi

4) Intersecca l'asse  $\text{Re}$

Esempio  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$

$$1) G(0) = 2$$

$$2) G(\infty) = \frac{1}{\infty} = 0$$

Calcolo  $G(j\omega)$  e separo  $\{\text{Re}\}$  e  $\{\text{Im}\}$

$$G(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 3j\omega + 2} = \frac{1}{(2 - \omega^2) + j(3\omega)} \cdot \frac{(2 - \omega^2) - j(3\omega)}{(2 - \omega^2) - j(3\omega)} = \frac{(2 - \omega^2) - j(3\omega)}{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2}$$

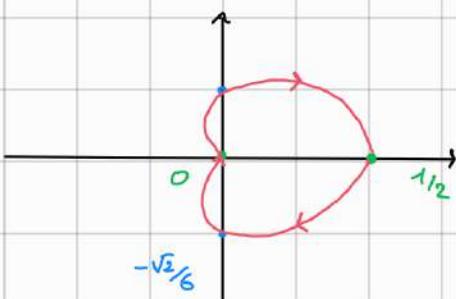
$$\text{Re}\{G(j\omega)\} = \frac{2 - \omega^2}{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2} \quad \text{Im}\{G(j\omega)\} = \frac{-3\omega}{(2 - \omega^2)^2 + 9\omega^2}$$

3) Impongo  $\text{Re}\{G(j\omega)\} = 0$  e risolvo per  $\omega \Rightarrow \omega = \sqrt{2} \rightsquigarrow$  (non considero  $\omega < 0$ )

$$\text{Sostituisco } \text{Im}\{G(j\sqrt{2})\} = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

Conosciamo già questi punti:

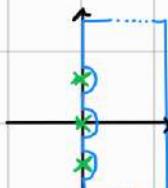
4) Impongo  $\text{Im}\{G(j\omega)\} = 0$  e risolvo per  $\omega \Rightarrow \omega = 0 \vee \omega = \infty$



Ricordiamo che nel diagramma di Nyquist ogni punto è un fosse con modulo  $\angle \frac{\sum \text{zeri} \leftrightarrow \text{fosse im s}}{\sum \text{poli} \leftrightarrow \text{fosse im s}}$  e fosse =  $\sum \angle \text{zeri} \leftrightarrow \text{fosse im s} - \sum \angle \text{poli} \leftrightarrow \text{fosse im s}$ :

- Che cosa succede se in GH ho dei poli lungo l'asse  $j\omega$ ?

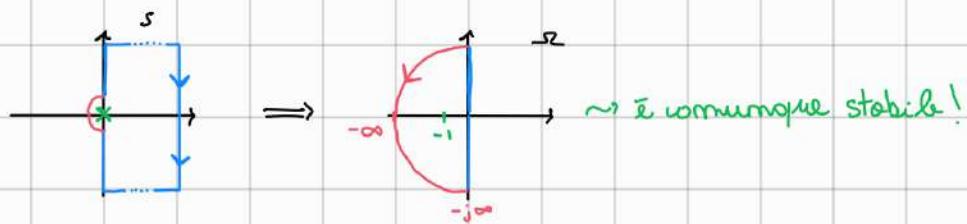
Consideriamo un polo nell'origine: non meno che si allontaniamo il modulo dei fosse corrispondenti sul piano  $s$  tende a  $+\infty$ , mentre le fosse tendono ad essere indefinita (fossa di un fosse di modulo 0); non possiamo dunque utilizzare la curva di Nyquist originale ma dobbiamo modificarla leggermente per evitare i poli sull'asse  $j\omega$ :



In questo modo possiamo tracciare Nyquist:



questo funziona anche se evitiamo il polo verso semistato:



- Che cosa succede se im GH ha degli zeri lungo l'asse jw?

In sostanza nulla perché sebbene la fase sia comunque indefinita per  $s \rightarrow \text{zero}$ , questo non mi interessa perché il modulo tende a 0



## Margini di guadagno e di fase

Riordiniamo che:

Una proprietà dei sistemi LTI è quella che, assumendo il sistema sia asintoticamente stabile, dato un ingresso  $u(t) = \sin(\omega t)$

dove l'uscita converge sempre a  $y(t) = \frac{|G(j\omega)|}{\text{Guadagno}} \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$

$\xrightarrow{\text{Stessa frequenza}}$

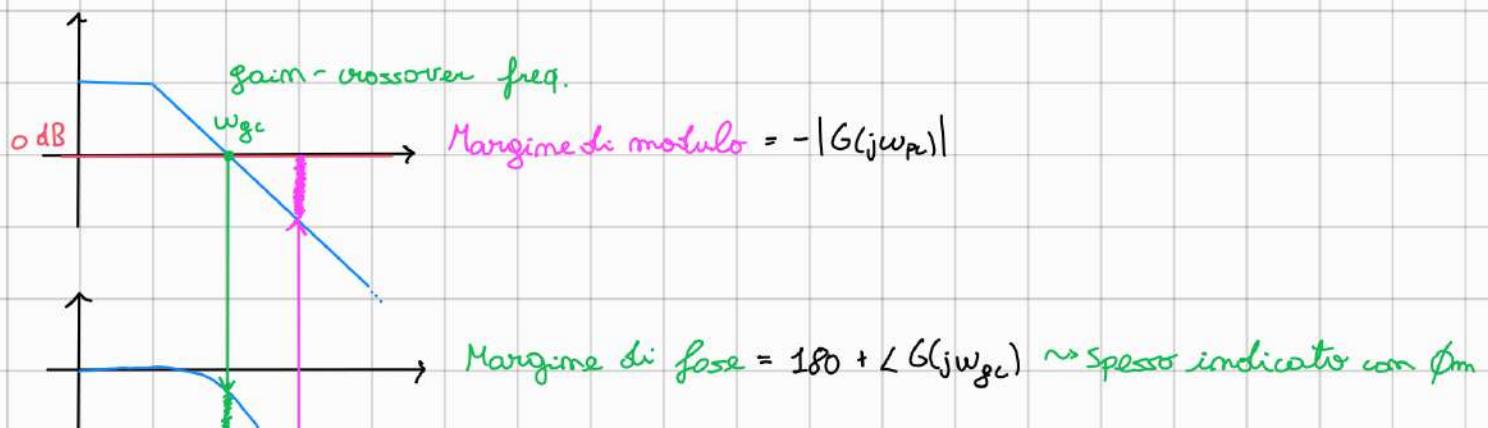
Note: per convenzione il ritardo ha fase negativa:

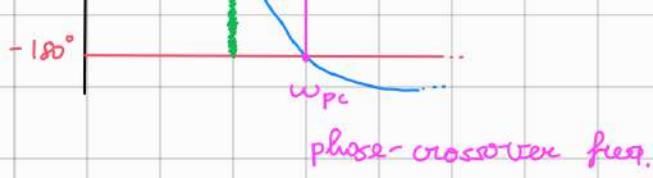


Dato un sistema a ciclo aperto  $G(s)$ , ci chiediamo quali caratteristiche deve avere affinché chiudendo il ciclo  $\frac{G(s)}{1+G(s)}$  risulti stabile:

La risposta è semplice, basta che  $G(s) \neq -1 \text{ Vs}$  (e questo ci torna dal diagramma di Nyquist), o in modo equivalente  $|G(j\omega)| \neq 1 = 0 \text{ dB}$  e  $\angle G(j\omega) \neq -180^\circ \text{ Vs}$  (e questo lo si può vedere sui diagrammi di Bode)

I margini di modulo e fase sono proprio le quantità di modulo e fase che posso aggiungere al sistema a ciclo aperto  $G(s)$  prima che si formi una frequenza con guadagno 0dB e fase  $-180^\circ$ , ossia prima che il sistema a ciclo chiuso  $\frac{G(s)}{1+G(s)}$  diventi instabile.





## Criterio di stabilità di Bode

sia  $H(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$

Caso 1:

sia  $w_{gc}$ :  $|L(jw_{gc})| = 1$ ,  $|L(jw)| > 1 \forall w < w_{gc}$ ,  $|L(jw)| < 1 \forall w > w_{gc}$

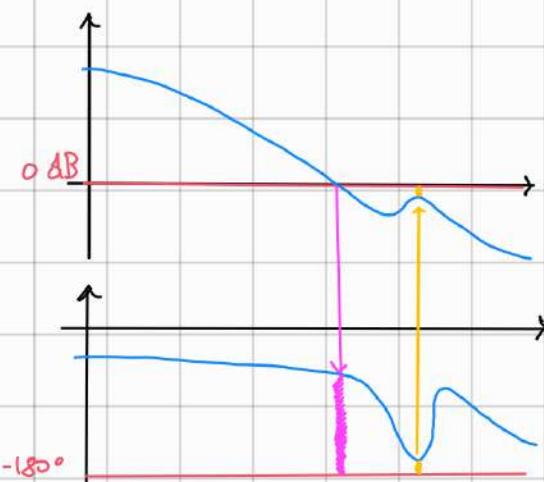
se  $\angle L(jw_{gc}) > -180^\circ$  allora  $H$  è BIBO stabile

Caso 2:

sia  $w_{gc}$ :  $\angle L(jw_{gc}) = -180^\circ$ ,  $|L(jw)| > -180^\circ \forall w < w_{gc}$ ,  $\angle L(jw) < -180^\circ \forall w > w_{gc}$

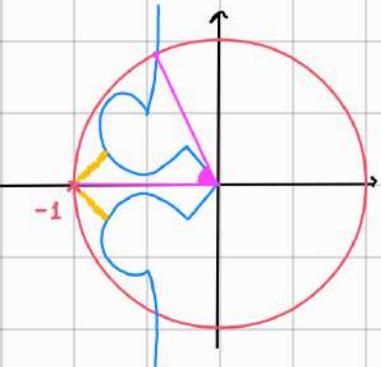
se  $|L(jw_{gc})| < 1$  allora  $H$  è BIBO stabile

Un'analisi del genere è tuttavia superficiale, consideriamo una situazione del tipo:



Matematicamente abbiamo un ampio margine di fase ed un infinito margine di modulo, tuttavia un poco ritardo di fase può rendere il sistema riconosciuto d'essere instabile, dunque in pratica abbiamo solo qualche grado di margine di fase.

È anche possibile vedere i margini di modulo e fase da Nyquist, di fatto sia Bode che Nyquist rappresentano la risposta in frequenza, l'utilità di quest'ultimo prevale quando il sistema è uido aperto da studiare è instabile.



Margine di fase: il più piccolo angolo tra  $-180^\circ$  e l'intersezione del diagramma con la circonferenza unitaria, ossia quanto posso ruotare Nyquist prima di toccare  $-1$

Margine di guadagno: Quanto posso scalare Nyquist prima di toccare  $-1$

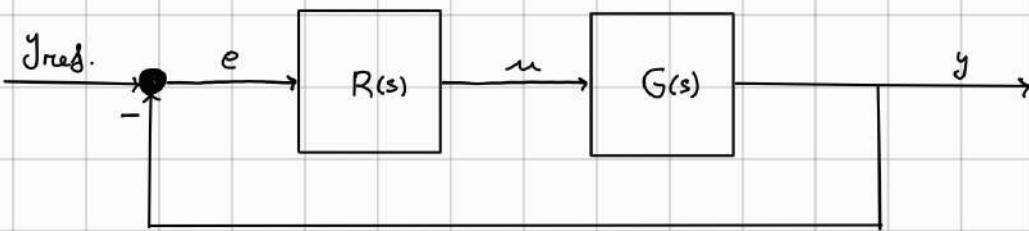
Note: Quando la fase va sotto a  $-180^\circ$  è come se ci avesse un cambio di segno nel modo sommatore del ciclo chiuso!

Note: Supponendo un'approssimazione di polo ottomimonte, se il margine di fase  $\phi_m > 75^\circ$  possiamo supporre  $G$  come sistema del prim'ordine, al contrario se  $\phi_m \leq 75^\circ$  lo possiamo supporre del 2° ordine, in particolare in questo caso  $\zeta \approx \frac{\phi_m}{100}$

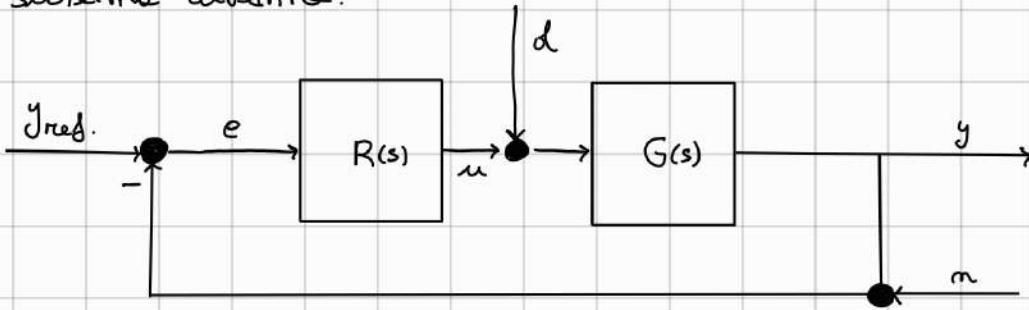


## Sistemi a ciclo chiuso

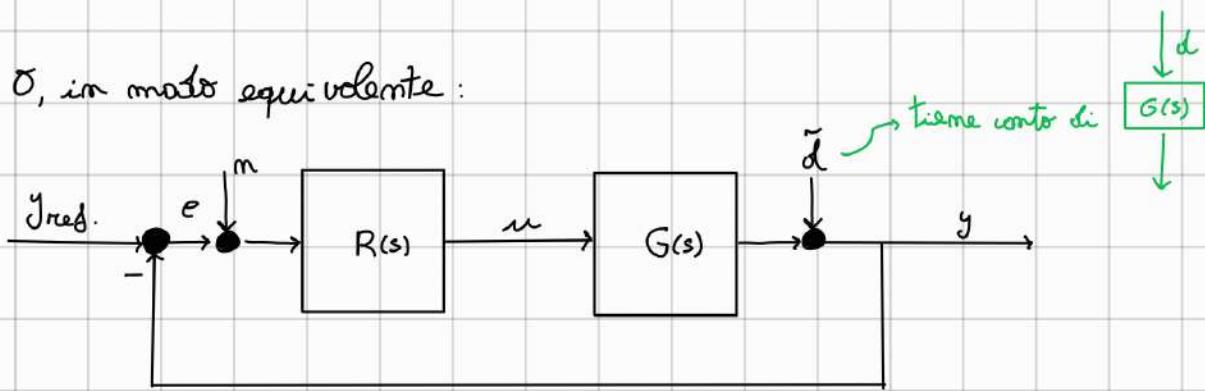
Il classico sistema a ciclo chiuso prevede un controllore  $R(s)$  ed un impianto  $G(s)$ :



Introducendo anche dei disturbi di carico  $d$  e di misurazione  $m$  il sistema diventa:



O, in modo equivalente:



= alta costante di tempo (es: pendolo)

Tipicamente i disturbi di carico sono dominati dalle alte frequenze mentre i disturbi di misurazione delle alte frequenze

= alta costante di tempo (es: interferenzelettiche)

Vogliamo dunque progettare un controllore tale che:

- Il sistema a ciclo chiuso sia stabile
- Il guadagno di ciclo sia alto in corrispondenza dei segnali  $y_{ref}$  e  $d$ : vogliamo amplificare i disturbi di carico per fare in modo che il sistema a ciclo chiuso sia più sensibile ad essi e dunque li sorregga meglio e più velocemente.
- Il guadagno di ciclo sia basso in corrispondenza del segnale  $n$   
La funzione  $L = R(s)G(s)$ , detta anche f. di trasferimento del ciclo
- Rispetti eventuali vincoli sulla risposta transitoria (es: tempo di assettim.) e sulla risposta all'equilibrio (es: valore finale dell'errore)

Considerando tutte le relazioni fra input ( $y_{ref}, n, d$ ) e output ( $y$ ):

$$Y = D + RG(Y_{ref} - Y + N)$$

$$\Rightarrow (1 + RG) Y = D + RG(Y_{ref} + N)$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{1 + RG} D + \frac{RG}{1 + RG} Y_{ref} + \frac{RG}{1 + RG} N$$

Inoltre  $E(s) = \frac{1}{1 + RG} Y_{ref} + \frac{1}{1 + RG} D + \frac{RG}{1 + RG} N$

Possiamo notare che tutte hanno  $1 + RG$  al denominatore, e dunque dobbiamo studiare la stabilità solo una volta, poiché queste sono particolarmente importanti:

Come d influenza  $y$

- La **funzione di sensitività**  $S(s) = \frac{1}{1 + RG}$  dovrebbe essere tale che  $|S|$  è piccolo o equivalentemente, come detto prima,  $|RG|$  è grande alle basse frequenze, dove i disturbi di carico sono concentrati

Come m influenza  $y$

- La **funzione di sensitività complementare**  $T(s) = \frac{RG}{1 + RG}$  dovrebbe essere tale che  $|T|$  è piccolo o equivalentemente, come detto prima,  $|RG|$  è piccolo alle alte frequenze, dove i disturbi di misurazione sono concentrati

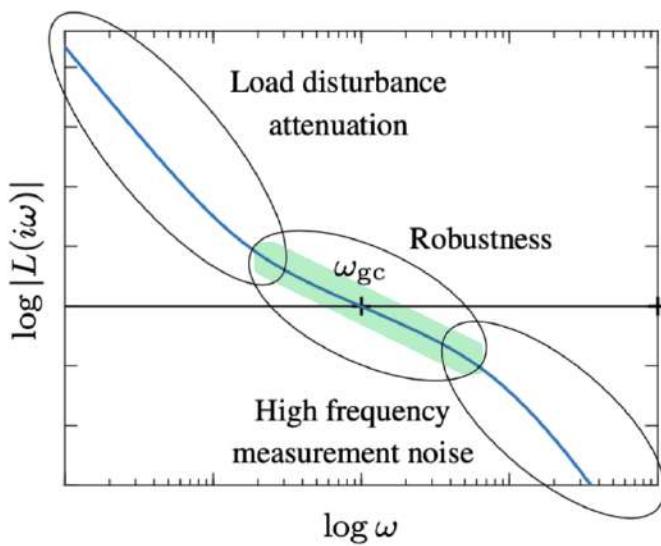
Come  $y_{ref}$  influenza  $y$

- La funzione di sensitività del controllore  $G(s) = C_s(s) = \frac{R}{1+RG}$  dovrebbe, anche questa, essere tale che  $|G|$  è piccolo alle alte frequenze.

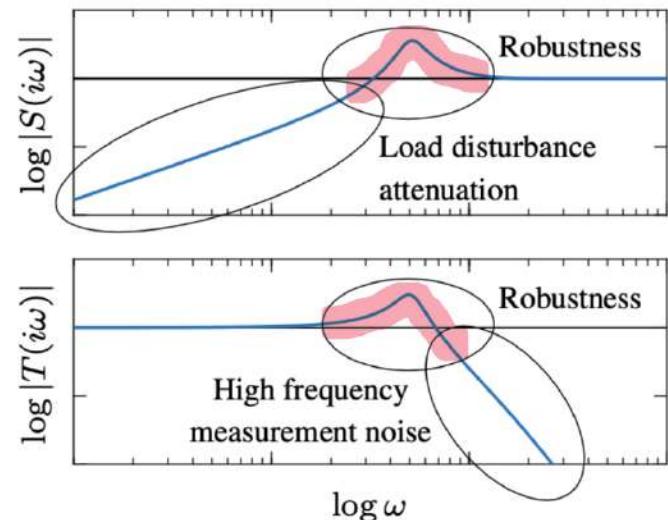
Note  $S + T = \frac{1}{1+RG} + \frac{RG}{1+RG} = \frac{1+RG}{1+RG} = 1 = 0 \text{dB}$  per ogni frequenza  $\omega$ , dunque  $T$  ed  $S$  non possono essere sempre nulli entrambi.

In pratica vorremmo ottenere una situazione del genere:

La pendente di  $|L|$  intorno a  $\omega_{gc}$  è detta  $m_{gc}$  ed è approssimabile, per sistemi a fase minima, con  $m_{gc} \approx \frac{\phi_m}{90} - 2$ , dunque più è nello più margine abbiamo.



(a) Gain plot of loop transfer function



(b) Gain plot of sensitivity functions

Vorremmo che avesse un comportamento simile a  $\frac{K}{s}$   $\xrightarrow{K \text{ alto}} K \text{ alto} = \text{scelto a } \infty$   $\xrightarrow{K \text{ basso}} K \text{ basso} = \text{scelto a } \infty$

Si definisce pico di sensitività nominale  $M_s$  l'inverso della più piccola distanza fra il punto  $-1$  e il diagramma di Nyquist, assia:

$$M_s = \min_{-\infty < \omega < \infty} |R(j\omega)G(j\omega) - (-1)| = \max_{0 < \omega < \infty} \left| \frac{1}{R(j\omega)G(j\omega) + 1} \right| = \max_{0 < \omega < \infty} |S(j\omega)| \quad \text{lo vedremo da Bode!}$$

Nyquist è simmetrico

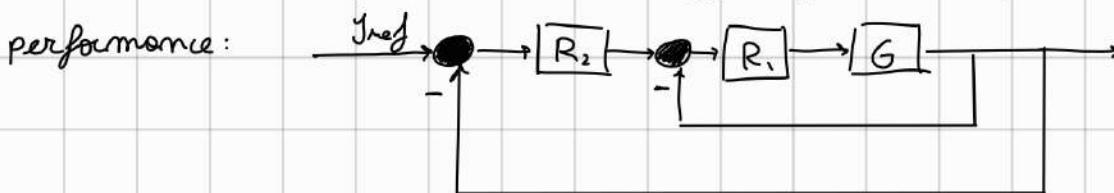
Dunque più il pico evidenziato è nello più il sistema è robusto, a volte però potremmo avere dei sistemi dare ritardi o incertezze

impediscono al pillo di essere piccolo, in quel caso dovremmo per forza diminuire la banda

La frequenza di superamento (o d'incontro)  $w_{gc}$  è tipicamente scelta guardando il diagramma di Bode del sistema  $G$  e tenendo a mente le frequenze dei segnali che ci interessano ridurre o amplificare, per esempio se il sistema  $G$  si trova spesso a dover rispondere velocemente allora vorremo una  $w_{gc}$  più alta (senza esagerare altrimenti saremo troppo sensibili a ritardi: contribuiscono alla fase con  $w_{gc}$ )

Note: Per ottenere la forma desiderata potremmo pensare di scegliere  $R$ :  $L = RG = \frac{F_1}{s} \Rightarrow R = \frac{K}{sG}$  ma questo è pericoloso in quanto invertendo  $G$  rischiamo di nascondere eventuali poli instabili facendoli diventare zeri ed inoltre il controllore potrebbe non essere efficace nel caso il modello  $G$  non sia preciso

Note: che cosa succede se  $G$  è instabile? Si utilizzano due controllori, uno per stabilizzarlo e uno per raggiungere i requisiti di performance:



### Esempio

Supponiamo di avere l'impianto  $G(s) = \frac{10}{s+0.1}$  e di dover progettare un controllore  $R(s)$  a circuito chiuso con le seguenti caratteristiche:

- 1) Nessun errore di tracciamento rispetto all'ingresso o gatino
- 2) Al più un errore di tracciamento del 5% rispetto all'ingresso e rombo
- 3) Superamento massimo dello 0%
- 4) Tempo di ossestamento al 95% per input a gatino inferiore a 15 s
- 5) Attenuazione dei disturbi di carico per dmeno 20 dB fino a 0.06 rad/s
- 6) Attenuazione dei disturbi di misurazione a partire da 2 rad/s

1) Per il teorema del valore finale  $R$  deve essere almeno di tipo 1

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{1}{1+L} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+RG} = 0 \Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow 0} RG = \lim_{s \rightarrow 0} 100R = \inf \Leftrightarrow R \approx \frac{K}{S}$$

2) Per il teorema del valore finale

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \frac{1}{1+L} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{1}{1+L} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+SL} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sL} = \frac{1}{\alpha} \leq 0.05 \Rightarrow \alpha \geq 20$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} SL = \lim_{s \rightarrow 0} 100RS = \lim_{s \rightarrow 0} 100K \geq \alpha = 20 \Rightarrow K \geq 0.2 \text{ (o -14 dB)}$$

3) Per non avere superamento massimo  $H$  deve comportarsi come un sistema del prim' ordine, dato che  $H = \frac{L}{1+L}$  questo accade se  $L$  si comporta come tale, questo requisito può essere approssimato imponendo che  $\phi_m \leq 75^\circ$  per  $L$

4)  $t_s \approx -2 \ln(0.05) \Rightarrow 25 \geq \frac{3}{w_b} \Rightarrow w_b \geq 0.2 \text{ rad/s}$  per il polo dominante di  $H$  e dunque, dato che la banda di  $H$  è simile a quella di  $L$ , questo si traduce imponendo tale condizione per il polo dominante di  $L$

5) Imporre  $|S(jw)| < \epsilon$  quando  $w \in [0, w^*]$  equivale a imporre   

$$\left| \frac{1}{1+L(jw)} \right| < \epsilon \Rightarrow |1+L(jw)| \approx |L(jw)| > \frac{1}{\epsilon}$$
, in questo esempio vogliamo che  $|S(jw)| < -20 \text{ dB} = \frac{1}{10}$  per  $w \in [0, 0.06] \text{ rad/s}$  e dunque  $|L(jw)| \geq 10 = 20 \text{ dB}$  per  $w \in [0, 0.06] \text{ rad/s}$

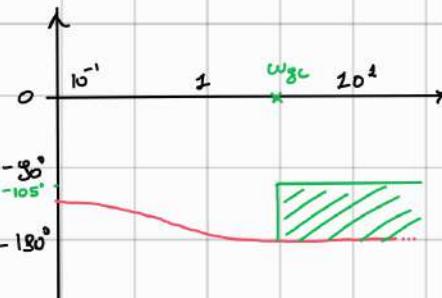
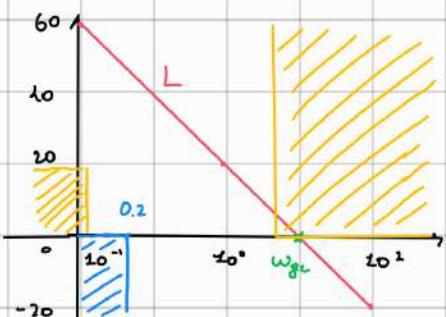
6) Imporre  $|T(jw)| < \epsilon$  quando  $w \in [w^*, \infty]$  equivale a imporre   

$$\left| \frac{L(jw)}{1+L(jw)} \right| \approx \left| \frac{L(jw)}{1} \right| = |L(jw)| < \epsilon$$
, in questo esempio vogliamo che  $|L(jw)| < \epsilon$  per grandi  $w$

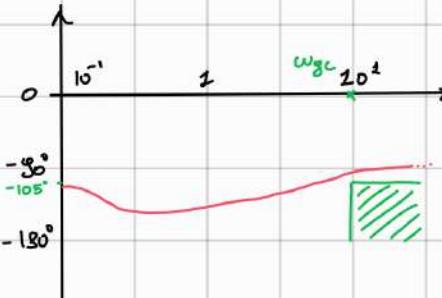
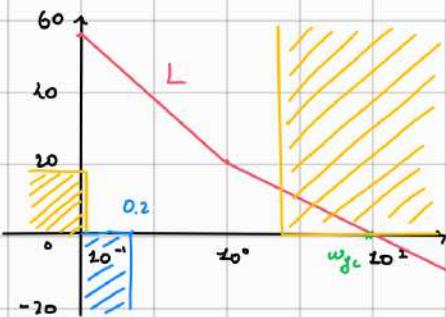
$|T(j\omega)| < 0 \text{ dB} = 1$  per  $\omega \in [2, \infty] \text{ rad/s}$  e dunque  $|L(j\omega)| < 1 = 0 \text{ dB}$

per  $\omega \in [2, \infty] \text{ rad/s}$

Supponiamo  $R = \frac{1}{5}$  e vediamo se è sufficiente:



L non rispetta il vincolo sul margine di fase, dobbiamo fare in modo di darlo intorno a  $\omega_{gc}$ , ad esempio inserendo uno zero nel controllore  $R = \frac{s+0.5}{s}$ :



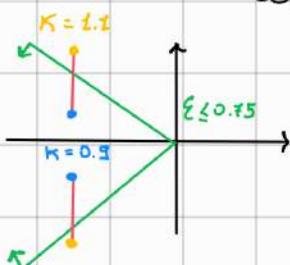
Meglio di prima, l'unico vincolo non rispettato è quello sui disturbi di misurazione



## Luogo delle radici

Spesso ci ritroviamo a dover analizzare funzioni di trasferimento al variare di un parametro  $K$ , il metodo del luogo delle radici ci permette di studiare come variano i poli della funzione di trasferimento al variare di  $K$

Esempio Studio  $G(s) = \frac{s}{s^2 + \frac{3}{2}s + K}$  per  $0.9 \leq K \leq 1.1$ , il sistema deve avere coefficiente di smorzamento  $\xi \leq 0.75$ :



Dal luogo delle radici vediamo che il sistema non rispetta le specifiche per valori di  $K$  vicini a 1.1

## Disegnare il luogo delle radici

Vogliamo studiare come variano le radici (i poli) di una certa funzione di trasferimento  $F(s, K)$  per  $0 \leq K < \infty$ , supponiamo questa sia  $\frac{s^2 + s + 1}{s^3 + 4s^2 + ks + 1}$ , siamo dunque interessati a come variano le soluzioni di  $s^3 + 4s^2 + ks + 1 = 0$ , per fare questo riscriviamo l'equazione sopra nella forma  $1 + KG(s) = 0$ :

$$s^3 + 4s^2 + 1 + K \cdot s = 0 \Rightarrow \frac{s^3 + 4s^2 + 1}{s^3 + 4s^2 + 1} + \frac{K \cdot s}{s^3 + 4s^2 + 1} = \frac{0}{s^3 + 4s^2 + 1} \Rightarrow 1 + K \frac{s}{s^3 + 4s^2 + 1} = 0$$

e questo equivale a studiare come si muovono i poli del sistema a ciclo chiuso unitario  $\text{---} \rightarrow [K] \rightarrow [G] \rightarrow \text{---}$  al variare del guadagno  $K$

Considereremo  $G$  dell'equazione  $1 + KG = 0$  come rapporto  $\frac{Q}{P}$ , ci sono un totale di 11 regole da seguire per disegnare il luogo delle radici:

- 1) Il numero delle linee (luoghi)  $n$  è uguale a  $\max\{\deg(Q), \deg(P)\}$
- 2) Le radici partono ( $K \rightarrow 0$ ) dai poli di  $G$  per arrivare ( $K \rightarrow \infty$ ) agli zeri di  $G$ 
  - se ci sono più poli che zeri alcune linee vanno a  $\infty$
  - se ci sono più zeri che poli alcune linee vanno a  $0$

• se ci sono più zeri che poi accade tutte le vengono da 0

3) Le radici di poli complessi coniugati si muovono in coppie

$\Rightarrow$  il luogo delle radici è simmetrico lungo l'asse reale

4) La stessa radice non torna mai su un punto già percorso,  
ad esempio non può fare così:

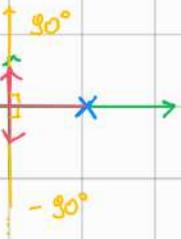


5) La porzione dell'asse reale a sinistra di un polo o zero di numero dispari (se contati da destra a sinistra) è parte del luogo delle radici, ad esempio:

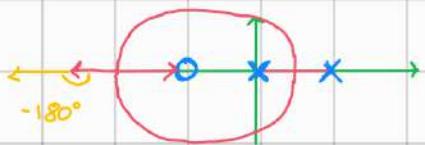


6) Se le linee devono uscire o entrare dall'asse reale lo fanno solo con un angolo di  $90^\circ$ , seguendo gli asintoti

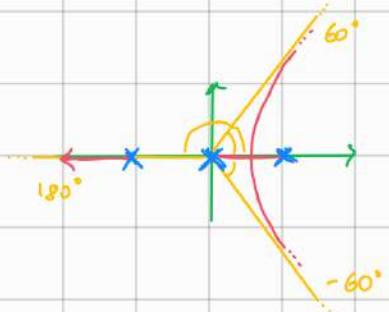
di angoli  $\phi_i = \frac{2i-1}{\text{ABS}(\text{m° poli} - \text{m° zeri})}$  per  $i = 1, \dots, \text{ABS}(\text{m° poli} - \text{m° zeri}) - 1$   
centrati nel punto  $c = \frac{\sum \text{poli} - \sum \text{zeri}}{\text{ABS}(\text{m° poli} - \text{m° zeri})}$ , ad esempio:



2 poli in più  $\Rightarrow$  2 linee verso infinito, le quali seguono gli asintoti di angoli  $\phi_0 = -\frac{1}{2} \cdot 180 = -90^\circ$   
e  $\phi_1 = \frac{2-1}{2} \cdot 180 = 90^\circ$  a partire da  $c = \frac{\sum \text{poli}}{2} = 0$

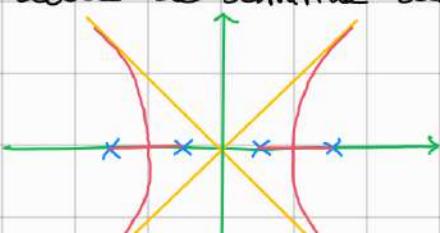


1 polo in più  $\Rightarrow$  1 linea verso infinito (le altre si devono riunire), la quale segue l'asintoto di angolo  $\phi_0 = -\frac{1}{1} \cdot 180 = -180^\circ$



3 poli in più  $\Rightarrow$  3 linee verso infinito, le quali seguono gli asintoti di angoli  $\phi_0 = -\frac{1}{3} \cdot 180 = -60^\circ$ ,  
 $\phi_1 = \frac{2-1}{3} \cdot 180 = 60^\circ$  e  $\phi_2 = \frac{4-1}{3} \cdot 180 = 180^\circ$  a partire da  $c = \frac{\sum \text{poli}}{3} = 0$

7) Se ci sono almeno due linee che vanno a viengono da infinito allora la somma delle radici è costante, ad esempio:

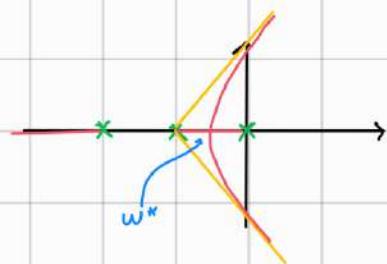


8) Se fosse necessario tracciare il luogo delle radici per  $-\infty < K \leq 0$  basta invertire la regola 5 (usare la destra anziché la sinistra) e aggiungere  $180^\circ$  agli asintoti.

$$KG + 1 = 0$$

9) Per trovare le frequenze dove eventualmente le radici si separano o uniscono si risolve  $\frac{dK}{ds} = 0$  ossia  $\frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{G}\right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{G}\right) = 0$  (le soluzioni al di fuori del luogo delle radici vengono scartate)

Esempio Sia  $G = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ , determinare le frequenze  $w^*$  in cui si separano le radici:



$$w^* \in \left\{ \frac{d}{ds} \frac{1}{G} = 0 \right\} = \left\{ \frac{d}{ds} s(s+1)(s+2) = 0 \right\} = \left\{ \frac{d}{ds} s^3 + 3s^2 + 2s = 0 \right\} = \left\{ 3s^2 + 6s + 2 = 0 \right\} = \left\{ -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

Tempo solo  $-1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

10) Per trovare le intersezioni delle radici con l'asse immaginario possiamo trovare con Routh-Hurwitz il valore di  $K$  che rende il sistema marginalmente stabile (una rega di zeri) e poi risolvere le radici del polinomio ausiliare, oppure in alternativa impostare a 0 sia  $\{Re\}$  che  $\{Im\}$  dell'eq. caratteristica di  $G(jw)$  e risolvere per  $w$  e  $K$ .

Esempio Sia  $G = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ , determinare le intersezioni con l'asse  $jw$  del luogo delle radici:



Con Routh-Hurwitz:  $H(s) = \frac{KG}{1 + KG} = \frac{K}{1 + K} = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 2s + K}$

$$s^3 \quad 1 \quad 2$$

$$s^2 \quad 3 \quad K$$

$$s^3 \quad 1 \quad 2$$

$$s^2 \quad 3 \quad 6$$

$$s^2 \frac{6-K}{3} 0 = \text{Se } K=6 \Rightarrow s^2 0 0 \Rightarrow \text{Pd. ausiliario: } 3s^2 + 6 \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{2}j$$

Algebricamente:  $H(s) = \frac{KG}{s^2 + KG} = \frac{K}{\frac{1}{s^2} + K} = \frac{K}{s^2 + 3s^2 + 2s + K}$

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K = 0 \Rightarrow (K - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K - 3\omega^2 = 0 \\ 2\omega - \omega^3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} K - 3\omega^2 = 0 \\ \omega(2 - \omega^2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} K = 0, \quad K = 6 \\ \omega = 0, \quad \omega = \pm \sqrt{2}j \end{cases}$$

21) Vogliamo determinare l'angolo di partenza del luogo delle radici da una coppia di poli e zeri complessi coniugati.

Un generico punto  $s$  è parte del luogo delle radici se e solo se che  $KG(s) + 1 = 0$ , dunque  $KG(s) = -1$ , ma queste è una quantità complessa dunque:

$$KG(s) = |KG(s)| e^{i \angle KG(s)} = -1 + j0 = 1 e^{j(2m+1)\pi} \quad \text{con } m \in \mathbb{N}$$

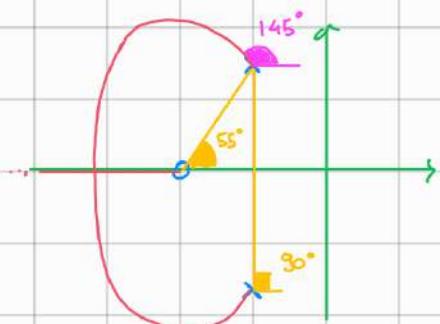
da cui ricaviamo: Trova  $K$  tale per cui  $s$  è radice

- Criterio del modulo:  $|KG(s)| = 1$
- Criterio dell' angolo:  $\angle G(s) = (2m+1)\pi$

Verifica che  $s$  appartenga al luogo delle radici

È possibile dimostrare che:

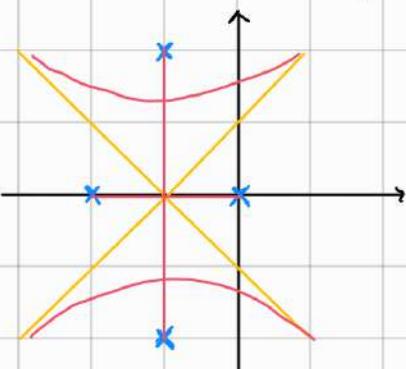
- Angolo di partenza da poli complessi coniugati  
 $= 180^\circ - \sum \text{Angoli polo} \leftrightarrow \text{altri poli} + \sum \text{Angoli polo} \leftrightarrow \text{altri zeri}$
- Angolo di partenza da zeri complessi coniugati  
 $= 180^\circ - \sum \text{Angoli zero} \leftrightarrow \text{altri zeri} + \sum \text{Angoli zero} \leftrightarrow \text{altri poli}$



$$G(s) = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 3}$$

### Esempio finale

Troccate il luogo delle radici di  $\frac{K}{s(s+4)(s^2 + 4s + 20)}$



- La linea viene verso  $\infty$
- Gli osinti sono  $-45^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ$
- Freq. di rottura  $\frac{d}{ds} s(s+a)(s^2 + 4s + 20) = 0 \Rightarrow \omega^* = -2$
- Angolo di partenza:  $180^\circ - 90^\circ - 64^\circ - 116^\circ = -90^\circ$

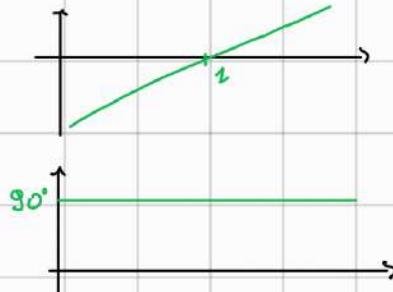
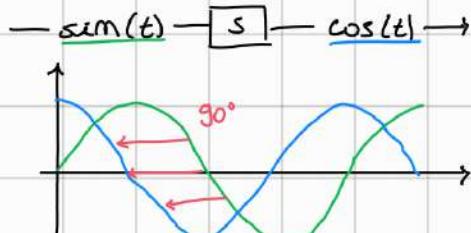


## Compensatori di anticipo e di ritardo

Ripasso dei diagrammi di Bode

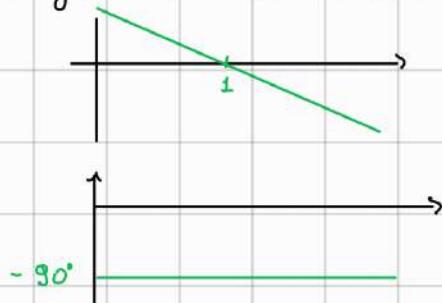
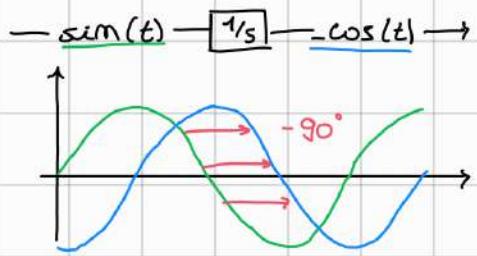
o in generale uno zero

Il blocco derivatore  $s$  fornisce un anticipo di  $90^\circ$ , infatti:



o in generale un polo

mentre il blocco integratore  $\frac{1}{s}$  fornisce un ritardo di  $90^\circ$ , infatti:



La generica funzione di trasformante di un compensatore di fase è

$$\frac{s/w_z + 1}{s/w_p + 1} = \frac{w_p}{w_z} \frac{s + w_z}{s + w_p}$$

- Se  $w_z < w_p$  si tratta di un **compensatore di anticipo**:

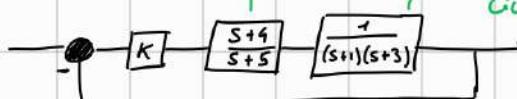


e questo ha l'effetto di spostare i poli del ciclo chiuso a sinistra, supponiamo ad esempio di trovarci in una situazione del genere:

Compensatore d'anticipo

Sistema a  
ciclo chiuso

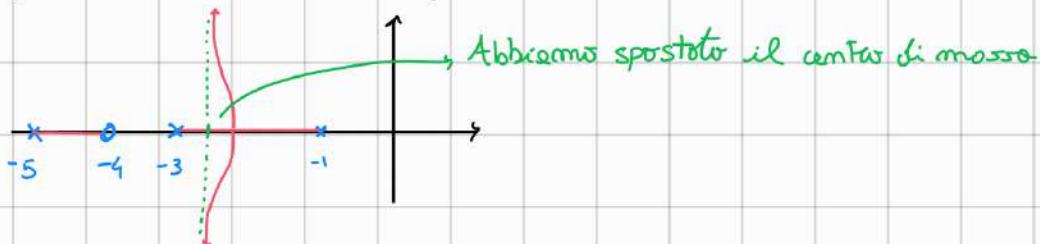
Aumenta la stabilità  
e la velocità di risposta



Luogo delle radici senza compensatore:



Luogo delle radici con compensatore:



- Se  $\omega_z \gamma \omega_p$  si tratta di un **compensatore di ritardo**:

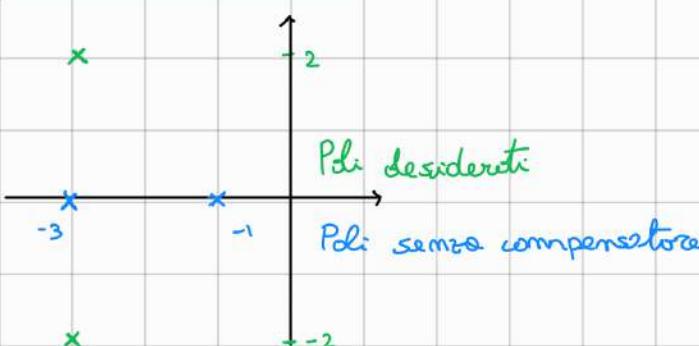


e questo, al contrario del compensatore d'anticipo, ha l'effetto di spostare i poli del ciclo chiuso a destra,

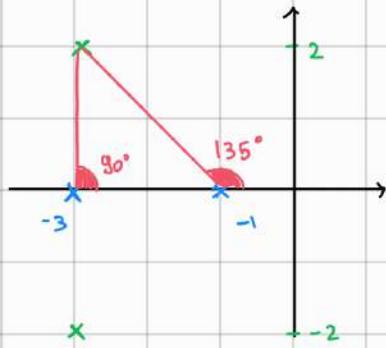
*Riduce l'errore a regime*

Progettare un compensatore d'anticipo con il luogo delle radici

Supponiamo di avere un sistema a ciclo aperto e di voler aumentare la stabilità e la velocità di risposta del sistema a ciclo chiuso, possiamo usare un compensatore d'anticipo per spostare i poli a sinistra verso la posizione desiderata:



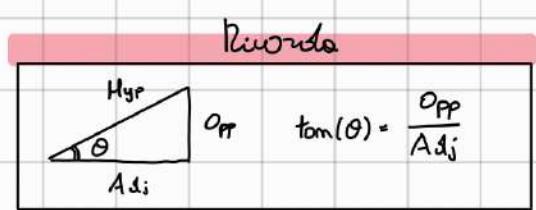
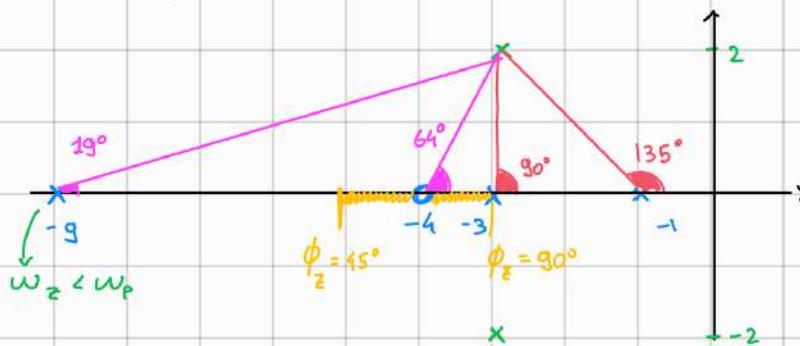
Quello che possiamo fare è impostare che questi siamo nel luogo delle radici (criterio dell'angolo):



Il compensatore deve essere tale che  $90^\circ + 135^\circ + \phi_p - \phi_z = 180^\circ$   
dunque  $\phi_z > 45^\circ$  e  $\phi_p = -225^\circ + 180^\circ + \phi_z = \phi_z - 45^\circ$

Altamente la somma non può fare  $180^\circ$

La scelta dello zero è arbitraria purché rispetti i limiti imposti e non interferisca con i poli dominanti:



Note: Più sceglieremo lo zero vicino a  $45^\circ$  più l'angolo del polo deve essere piccolo dunque più questo deve essere lontano e quindi più i poli verranno spostati a sinistra, ad esempio:

- Se  $Z = -4.5 \Rightarrow \phi_z = 53^\circ$  dunque  $\phi_p = 8^\circ \Rightarrow P = -17.23$
- Se  $Z = -3.5 \Rightarrow \phi_z = 76^\circ$  dunque  $\phi_p = 31^\circ \Rightarrow P = -6.33$

Il compensatore scelto è dunque  $\frac{s+4}{s+9}$ , bisogna infine scegliere il guadagno appropriato per spostare i poli dato necessario (criterio del modulo): Tolosiamo il guadagno  $\frac{9}{4}$  tanto lo prendiamo dal luogo delle radici

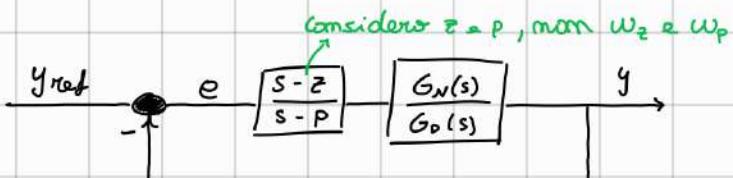
$$|K G(s)| = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{|G(s)|} = \frac{1}{|G(-3+2j)|} = \frac{(s+9)(s+1)(s+3)}{s+4} \Big|_{s=-3+2j} \Rightarrow K = 16$$

Note: Non potendo aumentare  $K$  a piacere spesso ci ritroviamo con un errore a regime non indifferente

Per ridurlo si usa

## Progettare un compensatore di ritardo con il luogo delle radici

Supponiamo di avere un sistema a ciclo aperto e di voler ridurre il suo errore a regime per un certo input, per fare questo è possibile utilizzare un compensatore di ritardo, infatti:



Per il termine del valore finale (per l'input  $y_{ref} = 1(t)$ ):

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot 1}{s \cdot 1 + G} = \frac{G_p(0)}{G_p(0) + G_N(0)} \quad | \text{ Senza compensatore}$$

$$E_{ssc} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot 1}{s \cdot 1 + G \frac{s-z}{s-p}} = \frac{p G_p(0)}{p G_p(0) + z G_N(0)} \quad | \text{ Con compensatore}$$

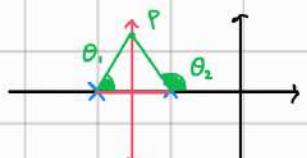
$$\text{Da cui ricavo } \frac{z}{p} = \frac{G_p(0) - E_{ssc} G_N(0)}{E_{ssc} G_N(0)}$$

noè la posizione da devono avere  $z = p$  per il  $E_{ss}$  desiderato

(Se volessi  $E_{ssc} = 0$   $\frac{z}{p}$  dovrebbe essere  $\infty$  e questo non è possibile)

Soltanmente utilizzeremo un compensatore di ritardo per ridurre l'errore a regime di un certo input per un sistema che soddisfa gli i requisiti di performance, vogliamo dunque evitare di spostarne i poli dominanti:

In pratica vogliamo fare in modo che preso un punto del luogo delle radici  $P$ , aggiungendo il compensatore, dunque un polo  $\phi_p$  e uno zero  $\phi_z$ ,  $P$  rimanga nel luogo delle radici:  $\theta_1 + \theta_2 + \phi_p - \phi_z \approx 180^\circ$

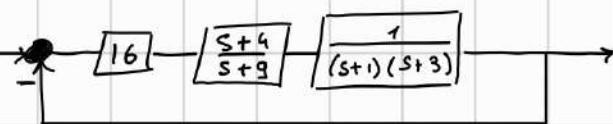


Dunque vogliamo  $\phi_p \approx \phi_z$  mantenendo il rapporto  $\frac{z}{p}$  ricavato dallo studio dell' $E_{ssc}$ , e questo è possibile solo se  $z = p$  sono molto vicini all'origine, in questo modo anche se  $z$  deve essere 20 volte  $p$  lo loro sistema e dunque la differenza tra i loro angoli rimane molto piccolo.

In generale lo zero viene piazzato 50 volte più vicino all'asse jw dei poli dominanti ed il polo viene piazzato. In conseguenza al rapporto  $\frac{z}{p}$ , visto che questo non cambia i poli dominanti perché seppur il nuovo polo è il più vicino all'origine, il suo effetto viene compensato dallo zero altrettanto vicino.

### Esempio

Riprendendo l'esempio sopra abbiamo trovato che il sistema finale era:



Per  $I(t)$

$$\text{Tuttavia } H = \frac{L}{1+L} = \frac{16s + 64}{s^3 + 13s^2 + 55s + 91} \Rightarrow H(0) \approx 0.7 \text{ dunque } E_{ss} = 0.3$$

$$\text{Supponiamo di voler } E_{sc} = 0.1: \frac{z}{p} = \frac{G_0(0) - E_{sc} G_D(0)}{E_{sc} G_N(0)} \approx 3.8$$

$$\text{Allora, dato che } \text{Re}(p_{\text{di dom}}) = -3, z = -\frac{3}{50} = -0.06 \text{ e } p = -\frac{-0.06}{3.8} = -0.016$$

quindi ci basta aggiungere un blocco  $\frac{s+0.06}{s+0.016}$

D'anticipo o di ritardo

Progettare un compensatore con i diagrammi di Bode

A volte possiamo avere dei requisiti nel dominio della frequenza (ad esempio margine di fase, frequenza di incastro, banda, ...), può dunque essere utile vedere l'effetto di un compensatore sui diagrammi di Bode.

È utile risolvere l'equazione del compensatore come

$$\frac{\alpha^2 s + 1}{2s + 1}$$

dove  $\omega_z = \frac{1}{\alpha^2}$ ,  $\omega_p = \frac{1}{2}$ ,  $K = \alpha$   $\Rightarrow$  se  $\alpha > 1$  è di anticipo, se  $\alpha < 1$  è di ritardo

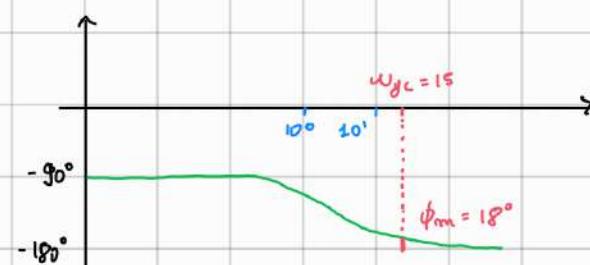
Supponiamo ad esempio di avere il sistema  $G = \frac{1}{0.2s + 1}$  e i requisiti  $\phi_m > 48^\circ$  e  $E_{ss} < 0.02$  per impatti a rompe

Immaginiamo il controllore deve essere di tipo 1 altrimenti non è

possibile rispettare il vincolo su  $E_{ss} \Rightarrow R = \frac{1}{5}$

$$\lim_{S \rightarrow 0} S \frac{1}{S^2} \frac{1}{1+GR} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \frac{1}{2 + \frac{K}{S(0.2S+1)}} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \frac{1}{2 + \frac{K}{0.2S+1}} < 0.02$$

dunque  $\frac{1}{K} < 0.02 \Rightarrow K > 49$  e per esempio noi sceglieremo  $K=50$  ed il vincolo su  $E_{ss}$  è soddisfatto, controlliamo invece quello sul margine di fase guardando Bode di GR

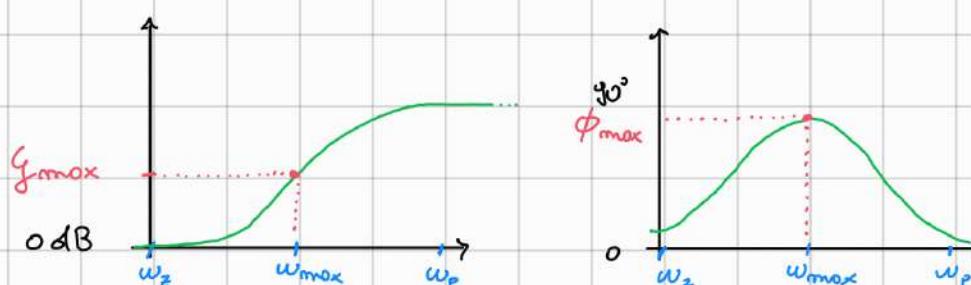


Abbriamo due strade:

1) Alzare il diagramma di fase in corrispondenza di 15 rad/s

Si può dimostrare che inserendo un compensatore d'anticipo si ha:

- Massimo contributo di fase:  $\phi_{max} = \arcsin\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)$
- Frequenza del contributo massimo:  $\omega_{max} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$
- Guadagno alla frequenza di contributo massimo:  $G_{max} = \sqrt{\alpha}$



Nel nostro esempio vogliamo che

- $\phi_{max} = 90^\circ - 18^\circ = 30^\circ \Rightarrow \frac{\alpha-1}{\alpha+1} = \sin(30^\circ) \Rightarrow \alpha = 4$
- $\omega_{max} = 20 \text{ rad/s} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = 20 \Rightarrow \alpha = 0.025$

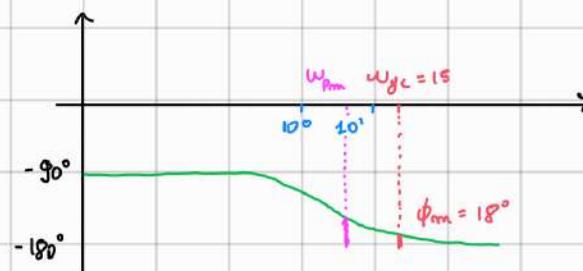
Ricorda che il compensatore aumenta il guadagno intorno a  $\omega_{max}$  e dunque sposta la  $\omega_p$  leggermente a destra, quindi il contributo di fase a  $\omega_{max}$  non sarà  $\phi_{max}$  ma leggermente meno, per fare tutto il  $\phi_{max} = 15 \text{ rad/s}$  abbiamo dunque bisogno di impostare  $\omega_{max}$  leggermente più alto.

Infine verifichiamo con Bode:



- 2) Abbassare il diagramma del guadagno in modo da spostare la  $w_{gc}$  dove la fase è alta di  $\pi$  (senza toccare il guadagno a  $\omega=0$ , il quale determina l'Ess che abbiamo oppure aggiustato)

Immaginiamo calcoliamo quale dovrebbe essere  $w_{gc}$  per rispettare  $\phi_m$ :



Dobbiamo dunque diminuire il guadagno di circa 18 dB, facciamo 20 dB per sicurezza, ossia  $d = 0.1$ ; vogliamo inoltre evitare di influenzare la fase intorno a  $w_{pm}$  e dunque vorremmo il polo e lo zero più vicini possibile all'origine, anche qui vole la regola di scegliere lo zero 50 volte più vicino del polo dominante.

In questo caso dunque  $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{0.1\zeta} = \frac{10}{\zeta} = \frac{50}{5} \Rightarrow \zeta = 100$

e quindi il compensatore è  $\frac{\zeta s + 1}{s^2 + \zeta s + 1} = \frac{10s + 1}{100s^2 + 10s + 1}$

Fug polo dom.

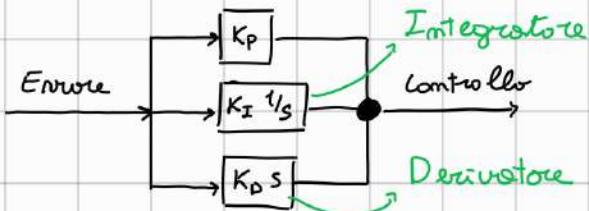
Infine verifichiamo con Bode:





## Controllori PID

Un controllore PID gestisce l'errore in tre modi:



$K_p, K_i$  e  $K_d$  possono essere aggiustati  
a seconda delle performance  
desiderate (possono anche essere 0)

1) Tramite un controllore **proporzionale**  $K_p$ :

Il comando è proporzionale all'errore attuale

PRESENT → <sup>Aumenta  $u_m$</sup>   
↓  
PRESENT → <sup>Diminuisce  $E$</sup>

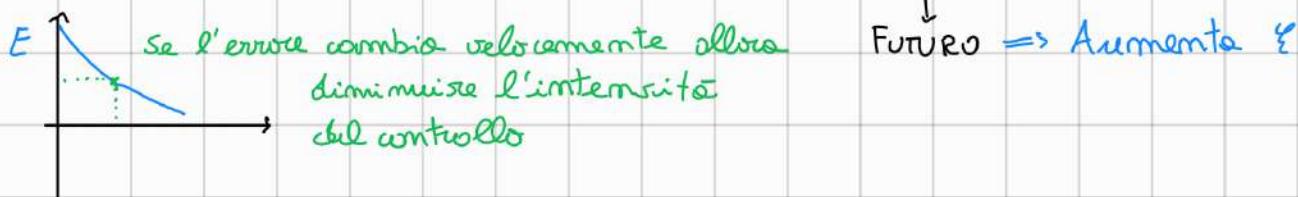
2) Tramite un **integratore**  $K_i \frac{1}{s}$ :

Il comando dipende dalla storia dell'errore



3) Tramite un **derivatore**  $K_d s$ :

Il comando dipende da come sta cambiando l'errore

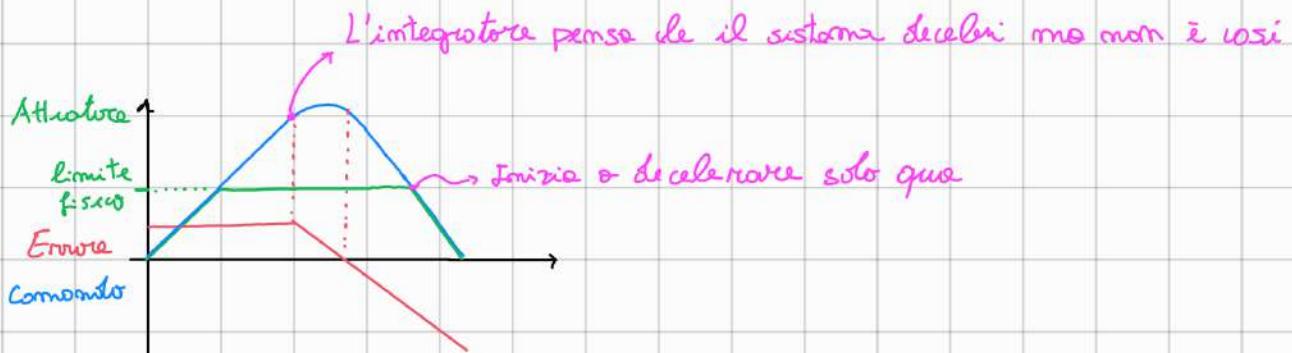


Vediamo alcuni problemi tipici di questo approccio:

- **Integral wind-up**

Nel mondo reale gli attuatori hanno dei limiti fisici oltre i quali non possono andare anche se comandati diversamente, il problema

com l'integratore e che se gli svilupperà non segnino il comando  
allora questi non riceveranno o reggere fino a quando il  
comando non toccherà entro i limiti fiscali!



Per risolvere questo problema ci sono vari metodi, ad esempio  
resetto l'integrale ( $=0$ ) ogni volta che l'errore è o attraversa 0

#### • Rumore nel derivatore

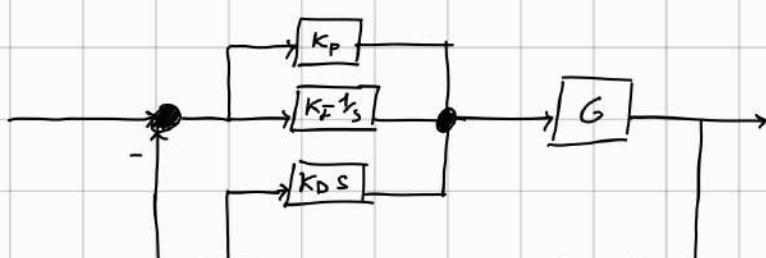
Il derivatore è molto sensibile ai rumori ad alta frequenza,  
questo perché variano molto rapidamente producendo una  
derivata alta in valore (es:  $\frac{d}{dt} \sin(10t) = 10 \cos t$ )

Quello che vogliamo fare è ridurre il guadagno del derivatore  
per le alte frequenze, e questo può essere fatto implementando  
il derivatore con un filtro passa-basso:  $\frac{1}{Ns + 1} \cdot K_D s$

A volte qui c'è  $\frac{K_D}{K_P}$  Polo in  $s = -N \Rightarrow$  Freq. di taglio

#### • Setpoint Kick

Un'altro problema del derivatore è che se impostiamo all'  
improvviso un segnale di riferimento (ad esempio  $z(t)$ )  
allora questo genererà un controllo impulsivo, per evitarlo  
spesso si collega il derivatore all'output del sistema e  
non all'errore:



## Metodo di Ziegler - Nichols

La scelta dei parametri di un controllore PID è complicata e dipende molto dal sistema e dai requisiti di performance, tuttavia esistono delle heuristiche che ottimizzando la risposta a gradino riescono a fornire dei parametri accettabili per la maggior parte delle volte:

Risorsa de Bode / luogo natura → Sistema supposto del 2° ordine

Sia  $K^*$  e  $T^*$  il margine di guad. ed il periodo delle oscillazioni del sistema a ciclo aperto con solo il termo proporzionale del controllore, se  $K^* \neq \infty$  allora una possibile scelta dei parametri è:

Tipo di controllore	$K_p$	$\zeta_I$	$\zeta_D$
P	$0.5K^*$	/	/
PD	$0.45K^*$	$0.8T^*$	/
PID	$0.6K^*$	$0.5T^*$	$0.126T^*$

Dove  $\zeta_I$  e  $\zeta_D$  sono le costanti di tempo dei controllori I e D:

$$PID(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_p s^2 + K_p s + K_I}{s} = K_p \left( 1 + \frac{1}{\zeta_I s} + \zeta_D s \right) = K_p \frac{\zeta_I \zeta_D s^2 + \zeta_I s + 1}{\zeta_I s}$$