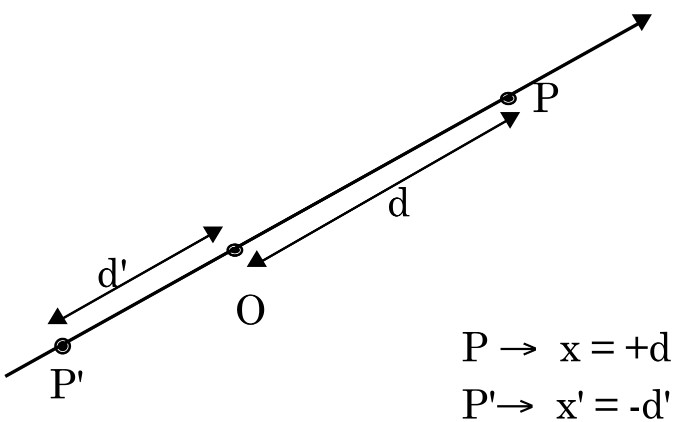
Sistemi di riferimento: 1D

- **Posizione di un punto su di una retta: il moto del punto e` confinato a svolgersi sulla retta, Moto 1-Dimensionale**
- Per rappresentare la posizione di un punto su di una retta si sceglie in maniera arbitraria un punto della retta, O, come origine del riferimento e si fissa sempre in maniera arbitraria un verso sulla retta (retta orientata, asse orientato).

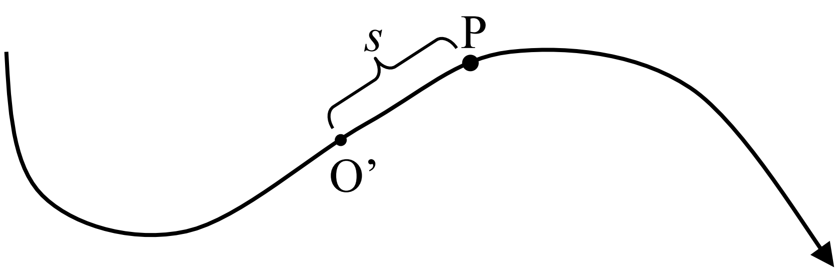


- Utilizzando la definizione operativa della lunghezza si può misurare la distanza tra l'origine O ed il generico punto sulla retta: sia d per il punto P e d' per il punto P'. Si assegna al punto la coordinata x uguale alla distanza da O presa **con il segno *più* (+)** se il punto viene dopo O quando la retta viene percorsa nel verso fissato, **con il segno *meno* (-),** se il punto viene prima di O quando la retta viene percorsa nel verso fissato.
  - **Nel caso della figura, la coordinata di P è positiva, quella di P' è negativa.**

Sistema di coordinate "curvilinee"

- **Posizione di un punto su di una curva, la cui equazione analitica sia nota: il moto del punto è confinato a svolgersi sulla curva, Moto 1-Dimensionale**

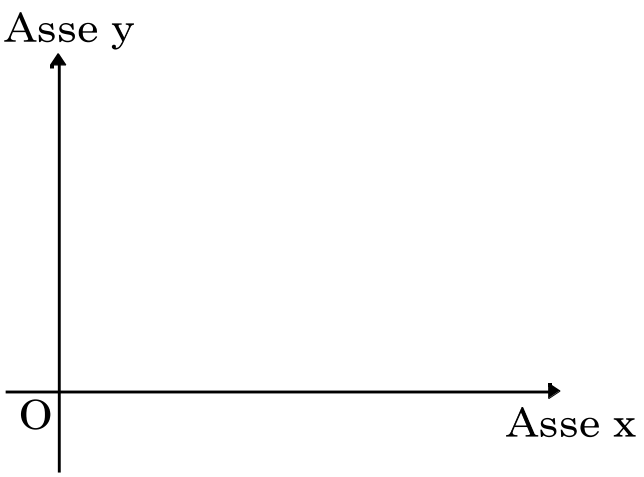
- Per rappresentare la posizione di un punto sulla traiettoria curva si sceglie in maniera arbitraria un punto, O, come origine del riferimento e si fissa sempre in maniera arbitraria un verso di percorrenza sulla curva.



- Utilizzando la definizione operativa della lunghezza si può misurare la distanza tra l'origine O ed il generico punto sulla curva: sia "s" per il punto P.
Si assegna al punto la coordinata s uguale alla distanza da O presa **con il segno *più* (+)** se il punto viene dopo O quando la curva viene percorsa nel verso fissato, **con il segno *meno* (-),** se il punto viene prima di O quando la curva viene percorsa nel verso fissato.

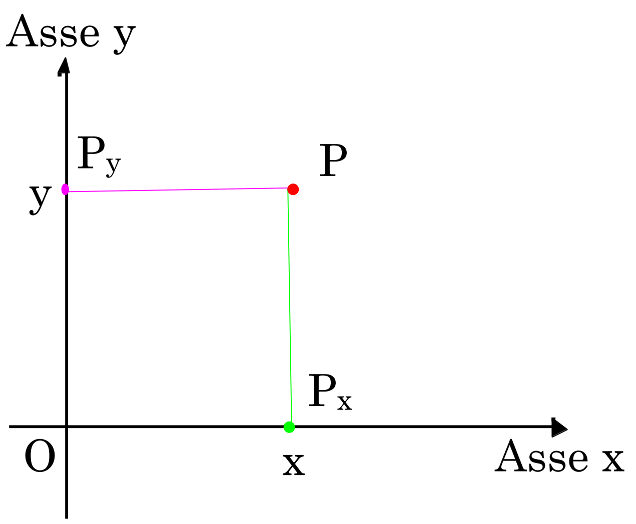
Sistemi di riferimento: 2D

- **Posizione di un punto nel PIANO cartesiano**
  - Per specificare la posizione di un punto in un piano si può introdurre un sistema cartesiano formato da due assi orientati perpendicolari tra loro, l'asse x e l'asse y. Le origini sui due assi orientati vengono fissate in maniera da coincidere con il loro punto di intersezione. Inoltre l'orientazione dell'asse y viene scelta in modo che l'asse x per sovrapporsi all'asse y deve essere ruotato di 90° in senso antiorario.



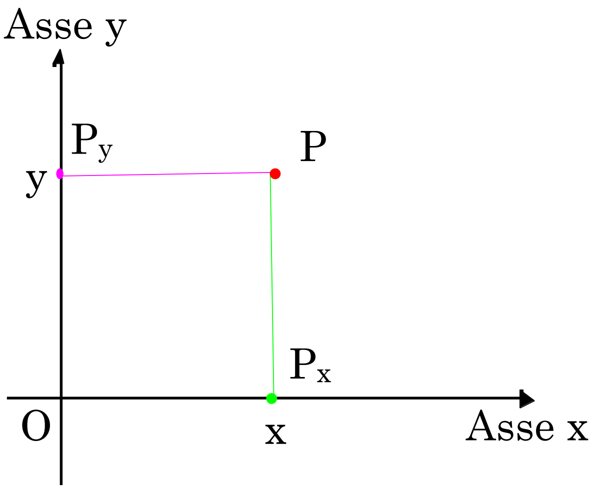
- **Posizione di un punto nel piano. Rappresentazione cartesiana.**
  - La posizione di un generico punto P del piano può essere descritta specificando la coppia ordinata (x,y), in cui x rappresenta la posizione del punto proiezione P_x sull'asse x (determinata utilizzando la definizione precedentemente data di posizione di un punto su una retta) e, in maniera analoga, y rappresenta la posizione del punto proiezione P_y sull'asse y.

I punti proiezione P_x e P_y sugli assi x e y possono essere determinati in maniera univoca mandando da P le perpendicolari rispettivamente all'asse x e all'asse y.



Sistemi di riferimento: 2D

- **Posizione di un punto nel piano. Rappresentazione polare.**
  - Una maniera alternativa per rappresentare la posizione del punto P nel piano è quella di specificare la coppia ordinata (r,θ) in cui r è la distanza di P dall'origine O e θ è l'angolo che la retta passante per O e P ed orientata da O a P forma con un asse orientato arbitrariamente scelto nel piano, per esempio l'asse x.
  - L'angolo θ, espresso in radianti, è l'angolo fprmato dal segmento OP con l'asse x con $\theta \in [0, 2\pi]$



- Le due rappresentazioni cartesiana ($P \equiv (x,y)$) e polare ($P \equiv (r,\theta)$), sono ovviamente equivalenti. Valgono infatti le seguenti relazioni per passare dall'una all'altra delle due rappresentazioni

Da Polari a Cartesiane

$x=r\cos\theta$

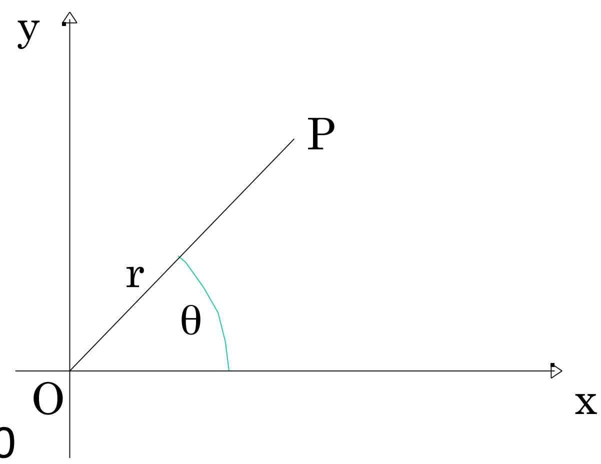
$y=r\sin\theta$

Da Cartesiane a Polari

$r^2= x^2+y2 \quad r\ [0, \infty]$

1) $\theta=\arctan g(y/x)$ se $x>0$ e $y>0$
2) $\theta=\arctan g(y/x))+\pi$ se $x<0$ e $y>0$
3) $\theta=\arctan g(y/x)+\pi$ se $x<0$ e $y<0$
4) $\theta=\arctan g(y/x)+2\pi$ se $x>0$ e $y<0$

$\theta \in [0, 2\pi]$

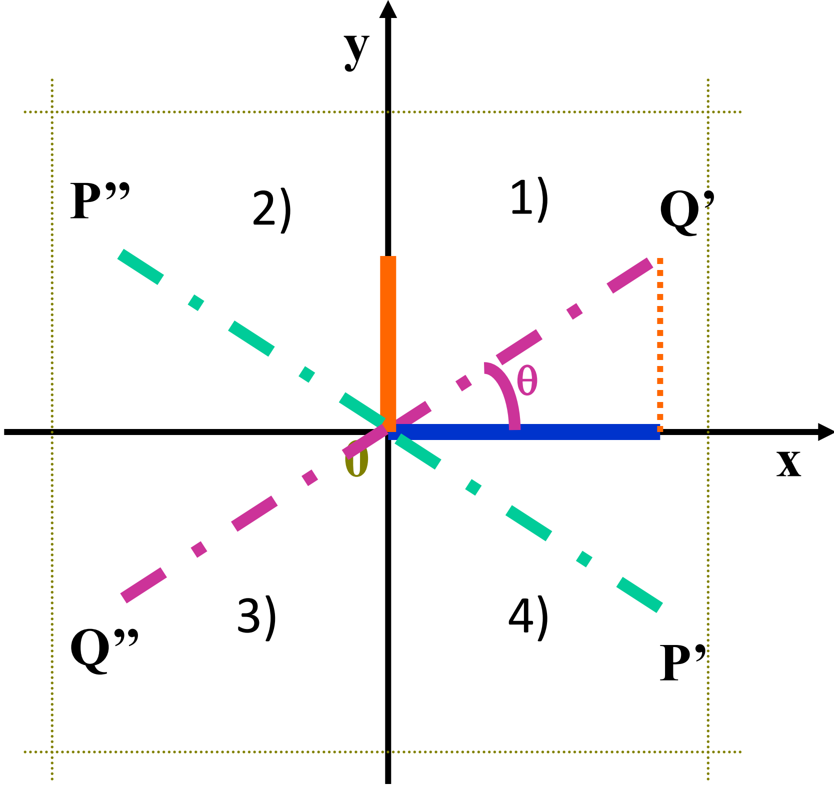


Abbiamo supposto che usate la calcolatrice per calcolare l'arcotangente (**atg**)

Calcolare l'**atg di** un numero y/x con la calcolatrice vuol dire trovare **un angolo** α compreso tra -π/2 **e** +π/2, estremi esclusi, tale che la tangente di α sia uguale a y/x.

essa fornisce un angolo

$\alpha \in [-{}^{\pi}/_{2}, {}^{\pi}/_{2}]$ che ha ${}^{y}/_{x} = tg\alpha$



Per determinare θ ∈[0, 2 π]

Da Cartesiane a Polari usando la calcolatrice

$r^2 = x^2 + y^2$ r [0, ∞]

1) θ=arctang(y/x) se x>0 e y>0
2) θ=arctang(y/x))+π se x<0 e y>0
3) θ=arctang(y/x)+π se x<0 e y<0
4) θ=arctang(y/x) +2π se x>0 e y<0

con θ ∈[0, 2 π]

Esempio

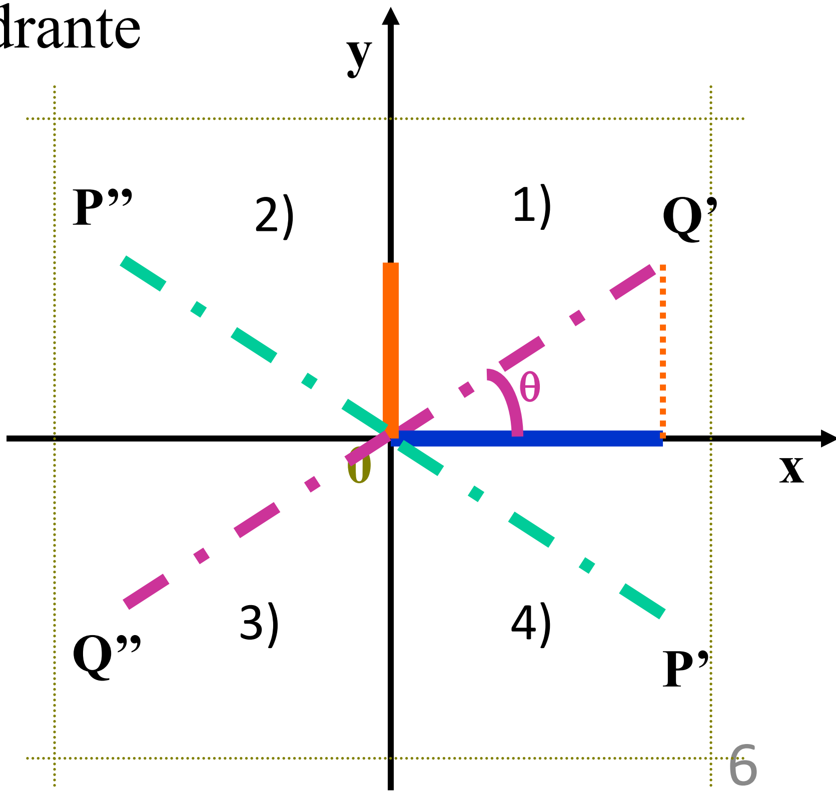
Trovare le coordinate polari di un punto che ha coordinate cartesiane
P=(-1.0,+3) m

Il punto occupato occupa il 2) quadrante

$r = \sqrt[2]{x^2 + y^2}$=3.16 m

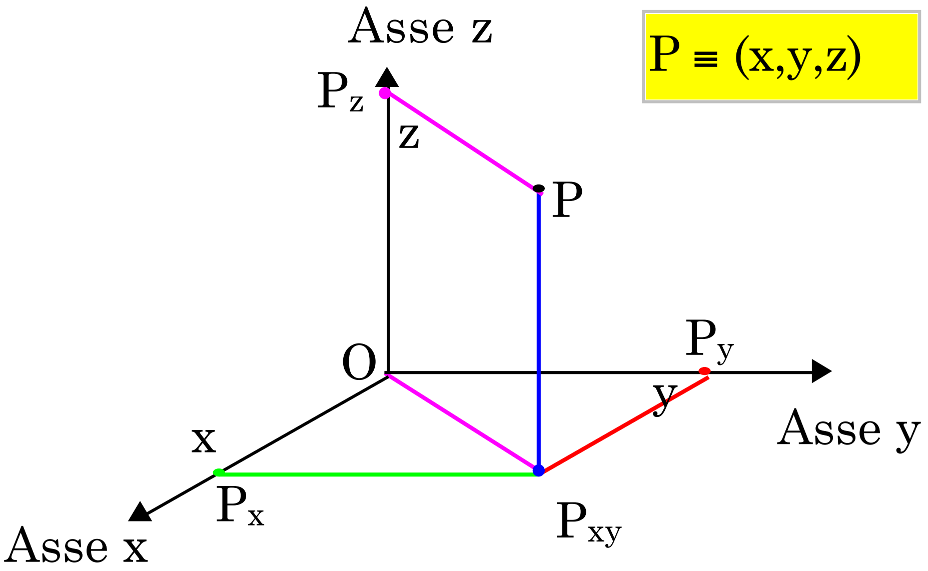
$\alpha = atg\left(\frac{y}{x}\right)$=-71.6^0

$\theta = \alpha$+180^0 = 108.4^0



Sistemi di riferimento: 3D

- **Posizione di un punto nello spazio. Rappresentazione cartesiana.**
  - Per specificare la posizione di un punto nello spazio introduciamo una terna di riferimento cartesiana, costituita da tre assi orientati, x,y,z, ortogonali tra di loro. In particolare useremo una terna **levogira**.
  - La posizione del generico punto P nello spazio sarà determinata dalle coordinate dei punti proiezione sugli assi orientati x,y e z.

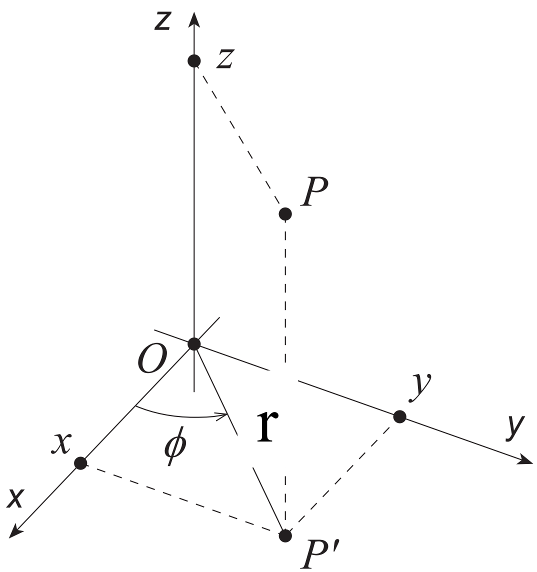


  - Per determinare i punti proiezione sugli assi cartesiani si manda da P la parallela all'asse z fino ad incontrare il piano xy: si determina così il punto P_{xy} proiezione di P sul piano xy.
    - Si congiunge con un segmento l'origine O con il punto P_{xy}: P_{xy}. La proiezione P_x di P sull'asse x si determina mandando da P_{xy} la parallela all'asse y fino ad intersecare l'asse x, mentre la proiezione P_y di P sull'asse y si determina mandando da P_{xy} la parallela all'asse x fino ad intersecare l'asse y.
    - la proiezione di P sull'asse z, P_z, si determina mandando da P un segmento parallelo al segmento P_{xy} .

Sistemi di riferimento 3D: Cilindriche

- Sistema di coordinate Cilindriche: estensione a 3D del Sistema di riferimento polare, la terna è rappresentata da *(r,ϕ,z)*.

$$\text{con } r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad z \in [-\infty, +\infty]$$



Le relazioni fra le coordinate cilindriche e cartesiane sono le seguenti:

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$ (è la stessa coordinata)

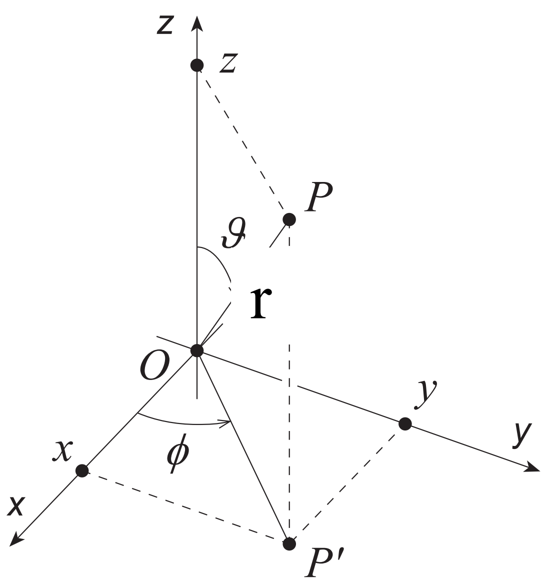
Mentre se conosciamo le coordinate cartesiane, le coordinate cilindriche

sono date da: $\begin{cases} z = z \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$

Sistemi di riferimento 3D: coordinate Sferiche

- Sistema di coordinate Sferiche: la terna è rappresentata da *(r, θ, ϕ)*.

$$\text{con} \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$



Le relazioni fra le coordinate sferiche e cartesiane sono le seguenti:

$$z = r\cos\theta$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

Mentre se conosciamo le coordinate cartesiane, le coordinate sferiche sono date da:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Quale sistema di riferimento usare?

Dipende dalle caratteristiche geometriche e di simmetria del problema.

Es.

automobile, bicicletta
peso che cade
scatola cubica…

coord. cartesiane

ruota, palla
giostra
Terra, Sole, pianeti
onde elettromagnetiche
atomi…

coord. sferiche

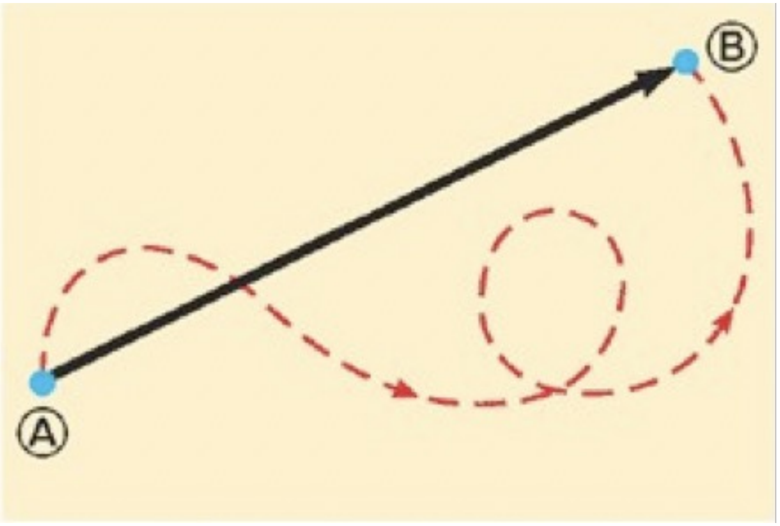
tubi, impianti idraulici
condotti elettrici
vasi sanguigni

coord. cilindriche

Grandezze scalari e vettoriali

- Grandezze scalari: sono completamente specificate da un numero in unità appropriate.
  — Volume, massa, intervalli di tempo, etc., sono scalari.
- Grandezze vettoriali: sono specificate da modulo (o intensità), direzione, verso.
  — Spostamento, velocità, forze, etc., sono vettori.

Esempio: vettore spostamento di un punto materiale da A a B. Il modulo è la distanza fra A e B (differisce dalla distanza percorsa!)



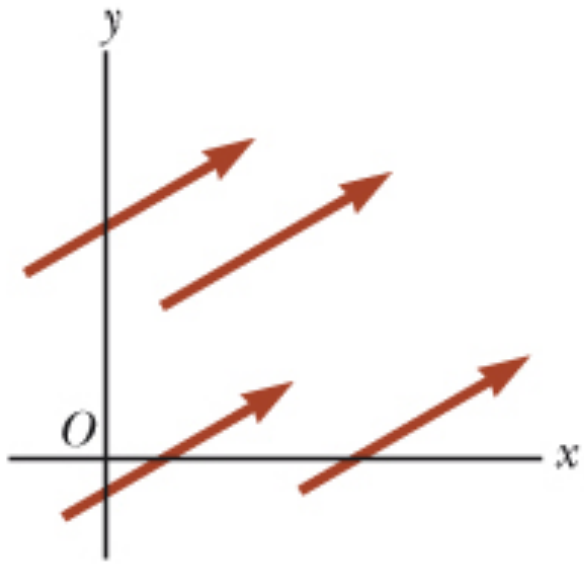
Vettori

- Notazione: $\vec{A}$ o anche **A** o <u>A</u>

- Modulo: | $\vec{A}$ | o semplicemente A (sempre positivo!)

- I vettori possono essere "applicati" ad un punto

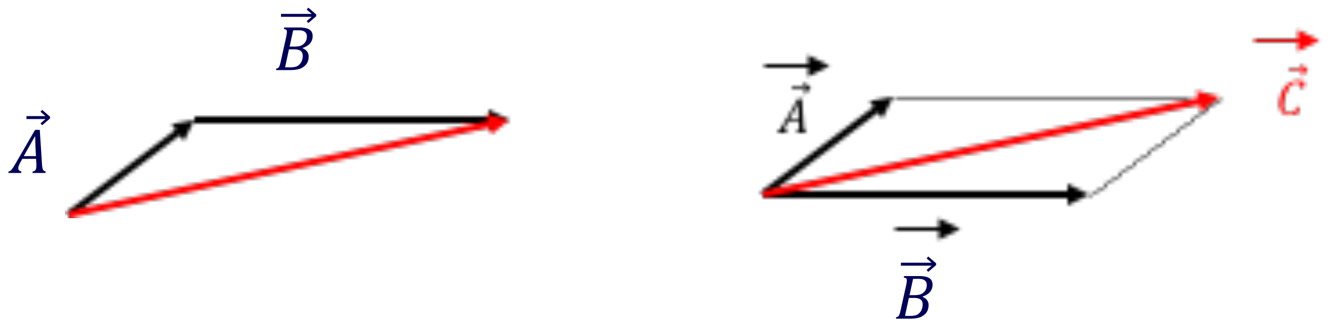
- In coordinate cartesiane tutti i vettori sovrapponibili con una traslazione sono equivalenti allo stesso vettore "libero"



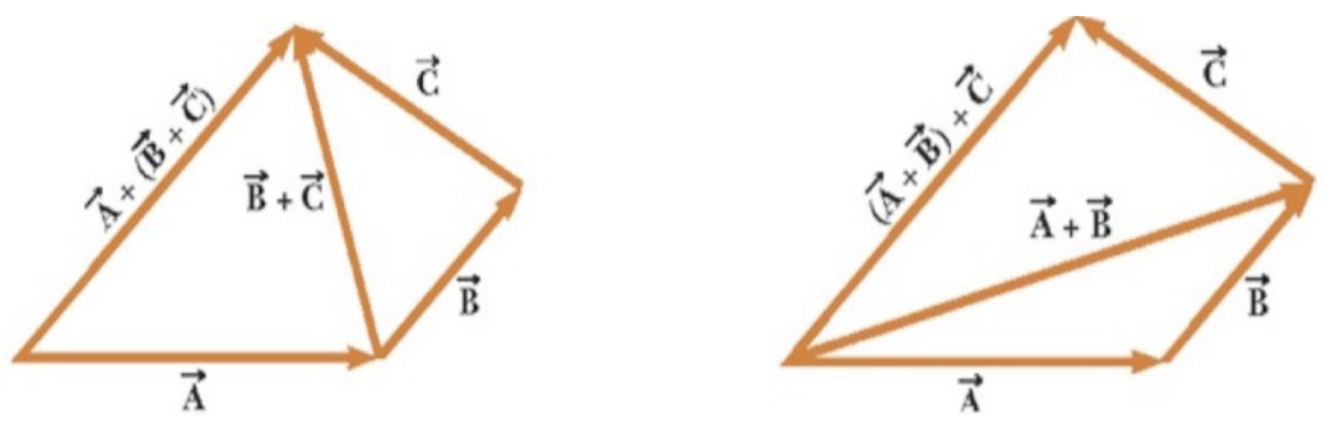
Nota: i vettori hanno le stesse unità di misura della grandezza che rappresentano: un vettore spostamento è in metri, un vettore velocità in metri al secondo etc.

Somma di vettori (I)

Regola del parallelogramma per la somma di vettori
Attenzione: somma vettoriale ≠ somma dei moduli!

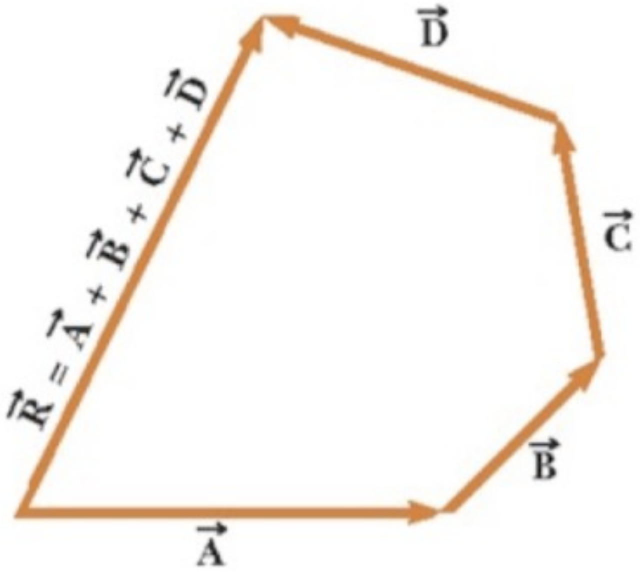


Vale la proprietà associativa $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$:



Somma di vettori (2)

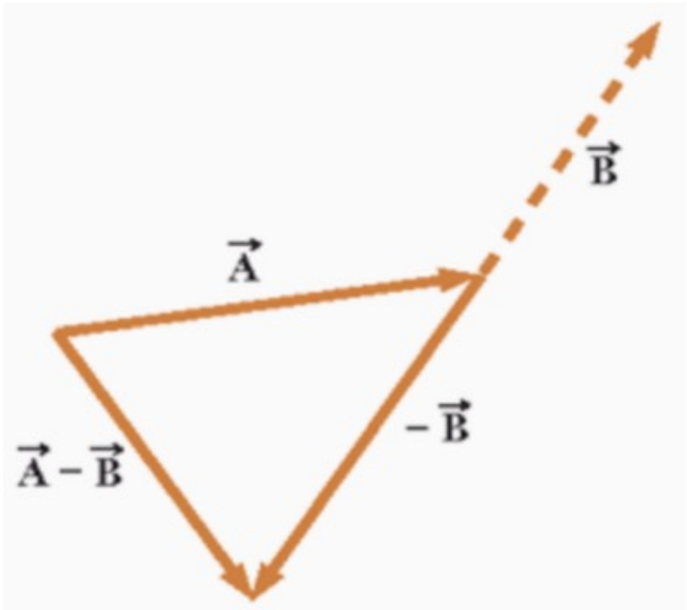
- Somma di più vettori



- In generale, se a è un numero, |a $\vec{A}$ | = |a|A.

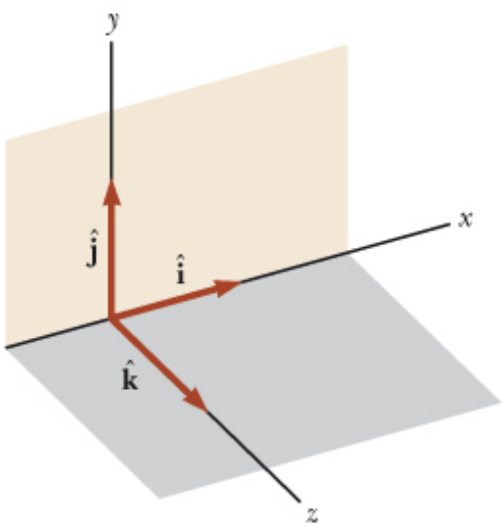
- Differenza di due vettori

è la somma del primo vettore con l'opposto del secondo, cioè con il vettore che si ottiene dal secondo cambiandogli verso

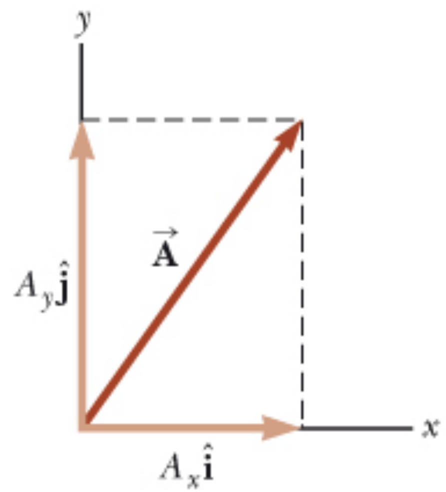


Versori (vettori di modulo unitario)

Fra i versori, cioè vettori di modulo unitario, sono particolarmente importanti e utili i versori cartesiani $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ lungo i tre assi cartesiani:



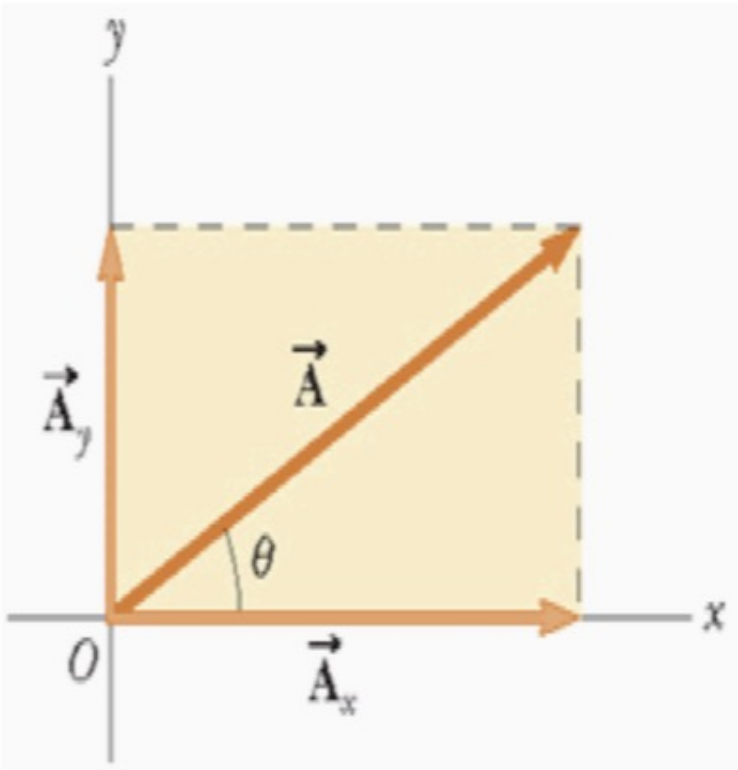
Un vettore in coordinate cartesiane può essere espresso utilizzando i versori. Ad es. per un vettore $\vec{A}$ nel piano xy:

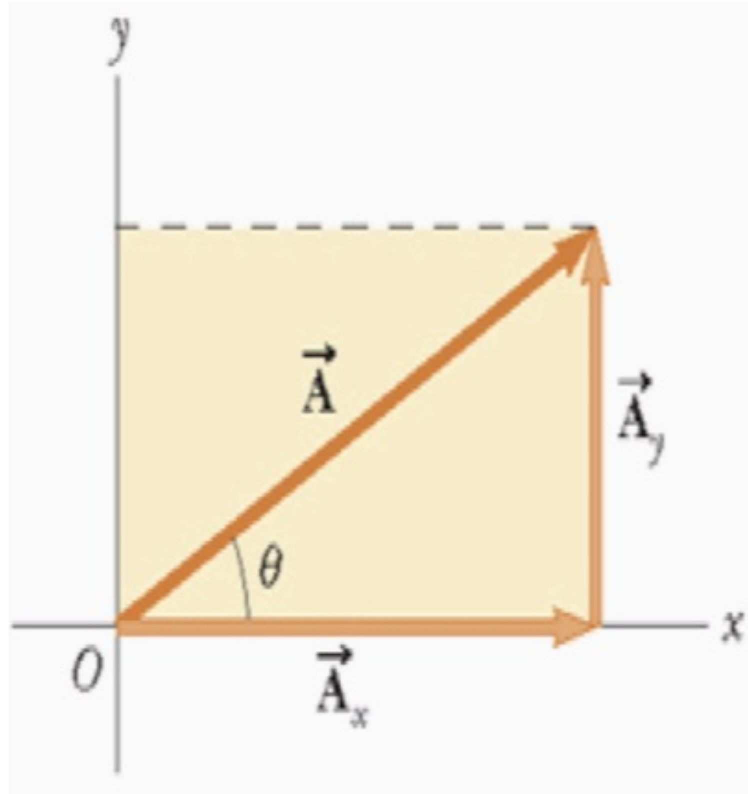


Espressione di un vettore in coordinate cartesiane

$$\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z \equiv (A_x, A_y, 0)$$

Vettori in Coordinate Cartesiane



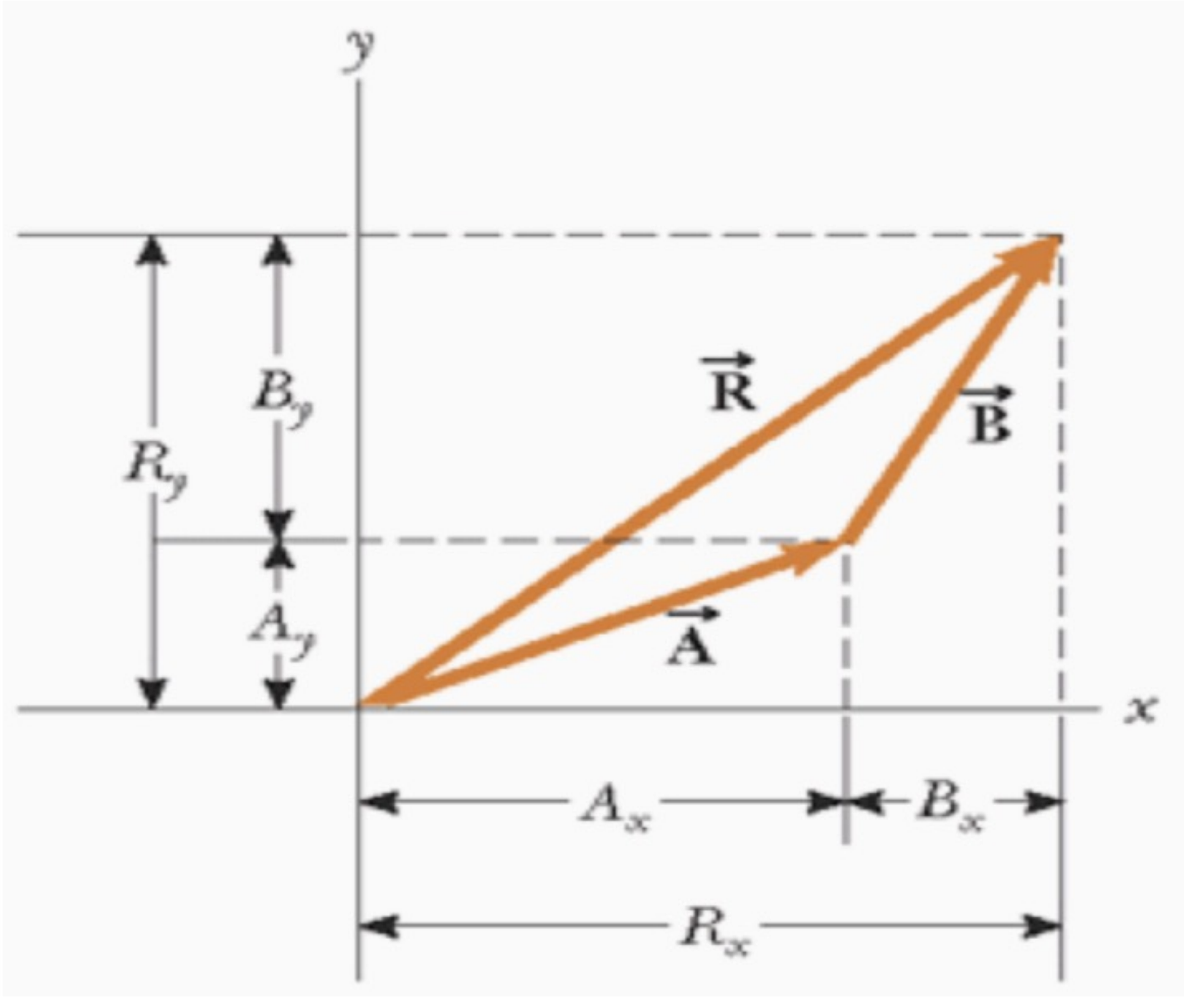


$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$ $\qquad$ $\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y \equiv (A_x, A_y)$

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2$$

Notare che $A_x = A\cos\theta$, $A_y = A\sin\theta$ può essere sia positivo che negativo.

Somma di vettori in Coordinate Cartesiane

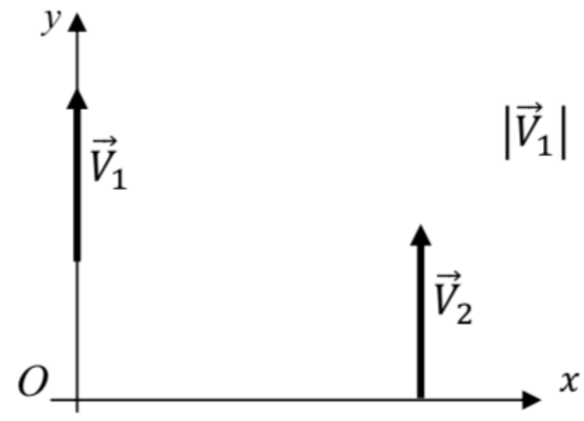


$$\vec{A} + \vec{B} \equiv (A_x + B_x, A_y + B_y)$$

Vettori in coordinate cartesiane

La **scomposizione di un vettore su un sistema di assi coordinati** è un metodo di **rappresentazione** del vettore. **Le componenti in coordinate polari** cilindriche o sferiche <u>dipendono</u> dal punto di applicazione

Esempio



$|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = 1\text{m/s}$

a) Esprimere $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ in coordinate cartesiane

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 = (V_x, V_y, V_z) = (0{,}1\ \text{m/s}, 0).$$

Vettori in coordinate polari cilindriche

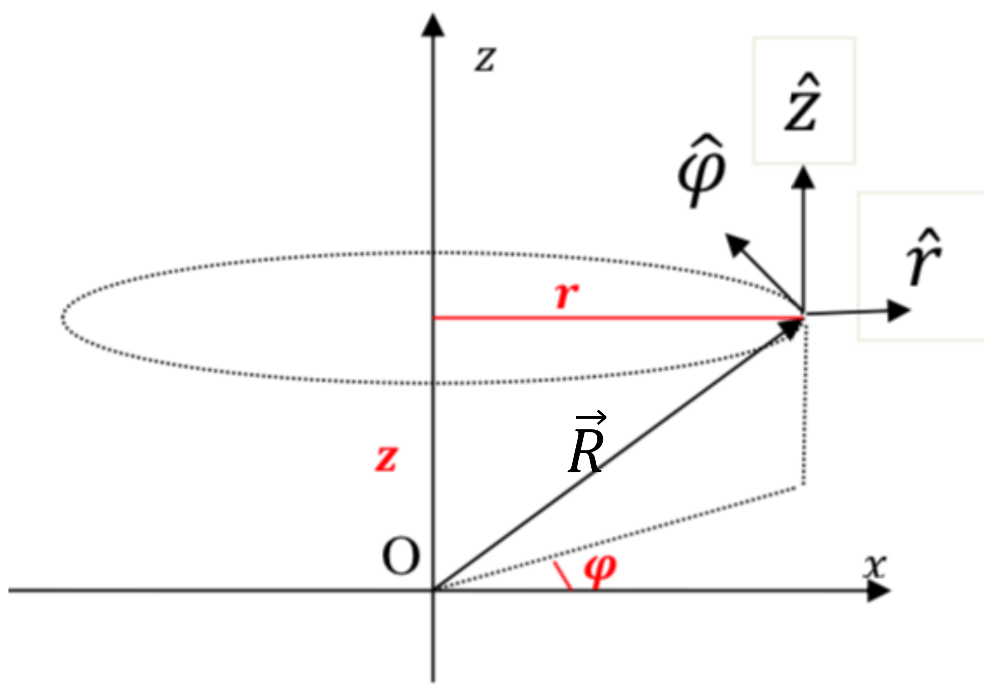
Rappresentazione del vettore posizione $\vec{R}$ e di un vettore generico $\vec{A}$ in coordinate **polari cilindriche:**

$$\vec{R} = (r, \varphi, z) \quad \vec{A} = (A_r, A_\varphi, A_z)$$

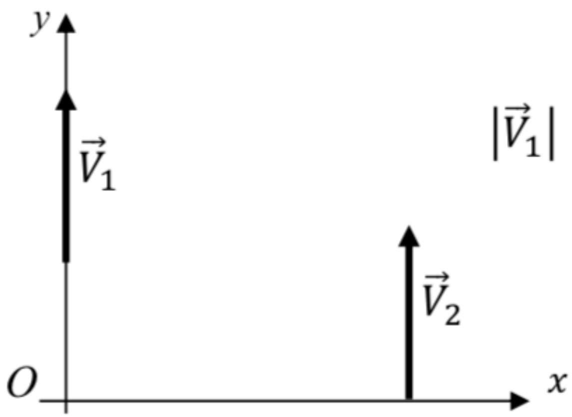
Componente assiale

Componente tangenziale

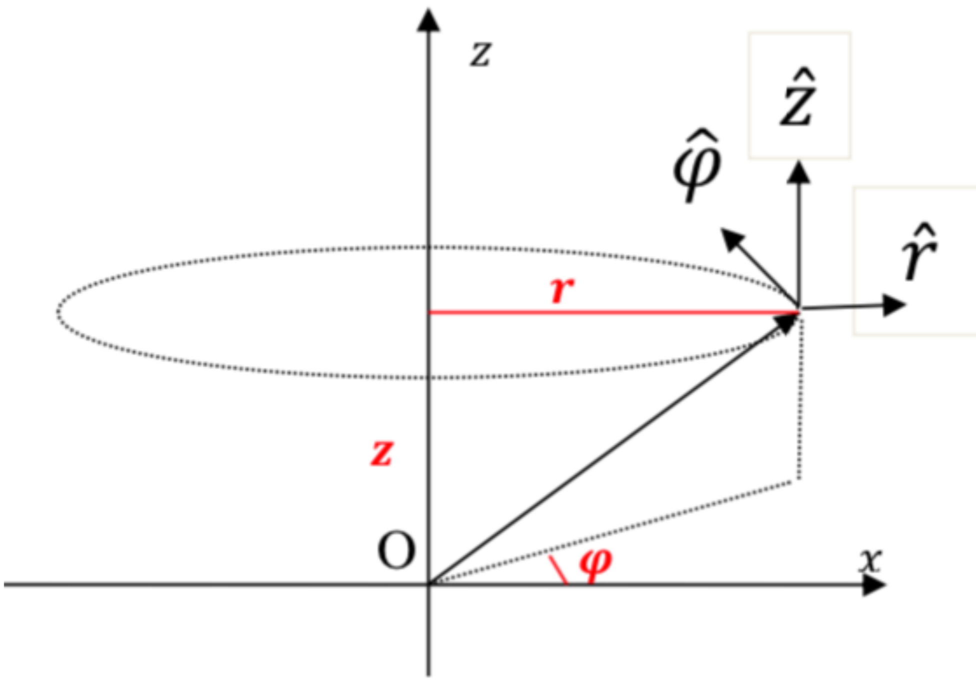
Componente radiale



Vettori in coordinate polari cilindriche



$$|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = 1\text{m/s}$$



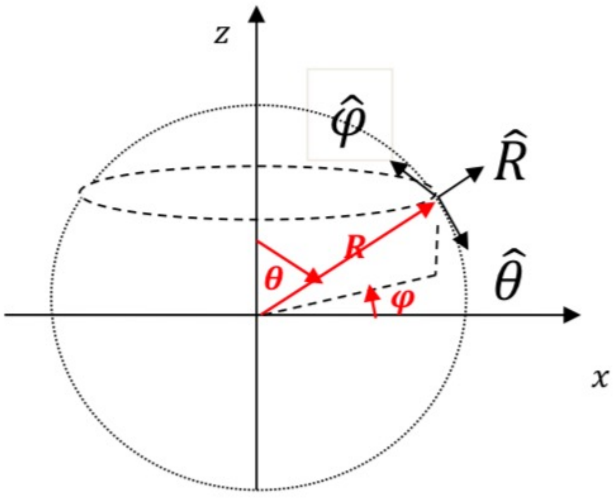
b) Esprimere $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ in coordinate polari cilindriche

$$\vec{V}_1 = (V_{1r}, V_{1\varphi}, V_{1z}) = (1\text{m/s}, 0{,}0).$$

$$\vec{V}_2 = (V_{2r}, V_{2\varphi}, V_{2z}) = (0, 1\text{m/s}, 0)$$

Vettori in coordinate sferiche

Rappresentazione del vettore posizione $\vec{R}$ e di un vettore generico $\vec{A}$ in coordinate **polari sferiche:**



$$\vec{R} = (R, \theta, \varphi) \quad \vec{A} = \left(A_R, A_\theta, A_\varphi\right)$$

<u>Attenzione</u>: gli angoli delle coordinate polari terrestri (latitudine e longitudine) hanno limiti diversi rispetto agli angoli θ e φ. $(0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

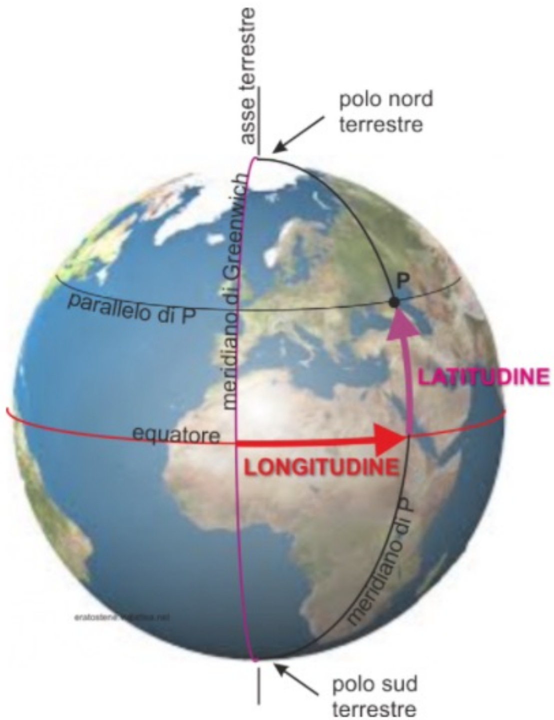
Longitudine (φ) = $[-180°, +180°]$; Latitudine (θ) = $[-90°, +90°]$.

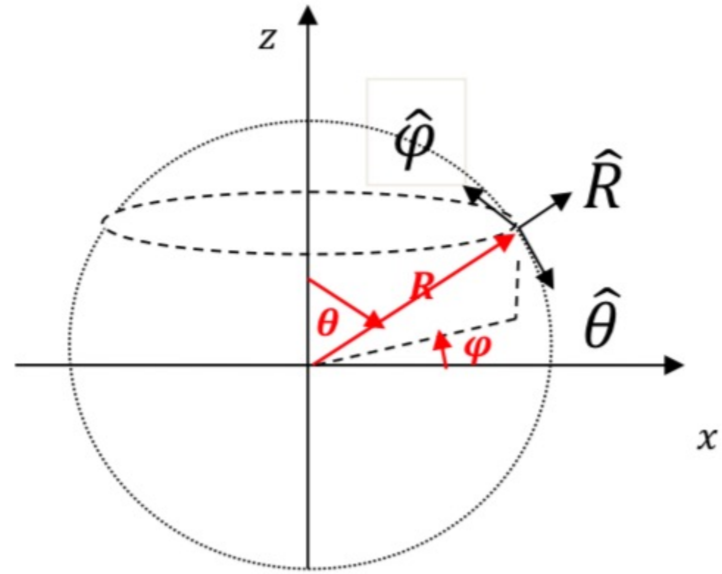
$r \geq 0$,

Vettori in coordinate sferiche

$\vec{R} = (R, \theta, \varphi)$

$\vec{A} = (A_R, A_\theta, A_\varphi)$





Attenzione: gli angoli delle coordinate polari terrestri (latitudine e longitudine) hanno limiti diversi rispetto agli angoli θ e φ. ($0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$)

Longitudine (φ) = $[-180°, +180°]$; Latitudine (θ) = $[-90°, +90°]$.
$r \ge 0$,

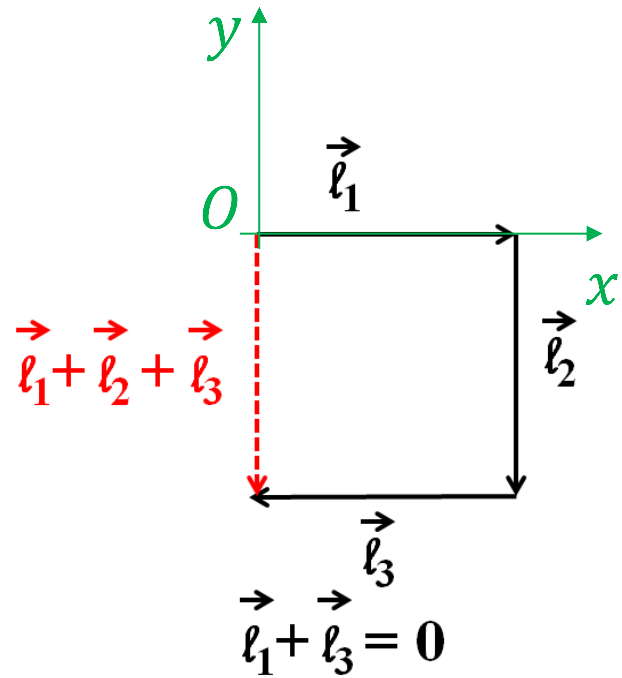
Esempi

Una nave si sposta di 10 km verso E (spostamento $\vec{\ell}_1$), poi di 10 km verso S (spostamento $\vec{\ell}_2$), infine di 10 km verso W (spostamento $\vec{\ell}_3$). Rispondere alle seguenti domande, sia senza definire un sistema di coordinate, sia introducendo un sistema di coordinate $Oxyz$ levogiro, con O punto di partenza della nave, l'asse x diretto verso E e l'asse y verso N.

a) Quanto vale $\sum_{i=1}^{3} \vec{\ell}_i$ (vettore spostamento totale) ?

$$\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3$$
$$= (10\text{ km}, 0) + (0, -10\text{ km})$$
$$+ (-10\text{ km}, 0) = (0, -10\text{ km})$$

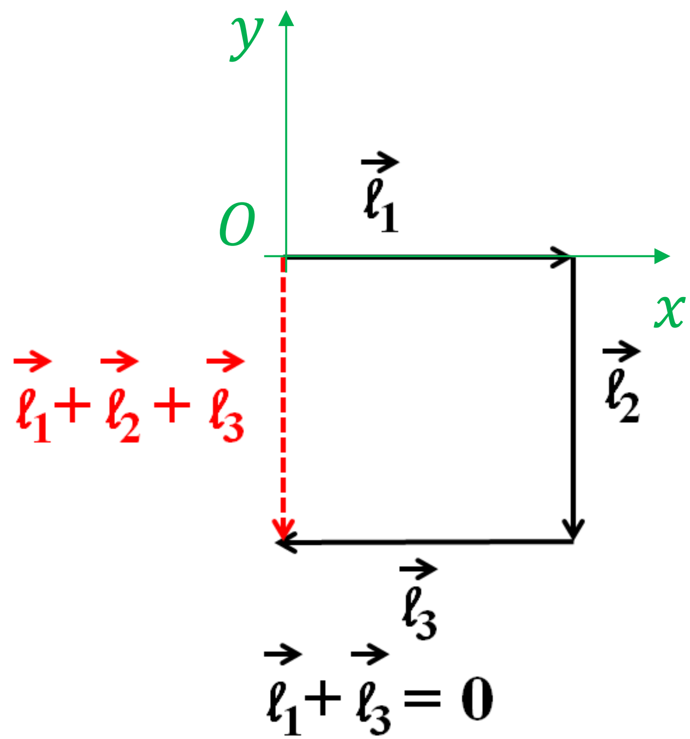
cioè 10 km verso S.



Esempi

b) Quanto vale $\left|\sum_{i=1}^{3}\vec{\ell}_i\right|$ (modulo della somma degli spostamenti)?

$$\left|\vec{\ell}_1+\vec{\ell}_2+\vec{\ell}_3\right| = \left|\vec{\ell}_2\right| = |(0,-10\ \mathrm{km})| = 10\ \mathrm{km}$$



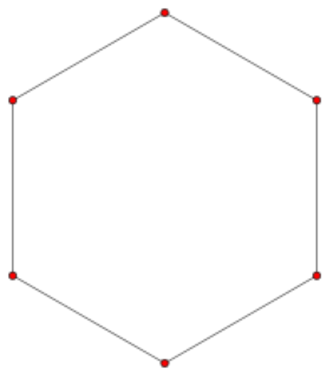
c) Quanto vale $\sum_{i=1}^{3}\left|\vec{\ell}_i\right|$ (somma dei moduli degli spostamenti)?

$$\begin{aligned}&\left|\vec{\ell}_1\right|+\left|\vec{\ell}_2\right|+\left|\vec{\ell}_3\right|\\ &= |(10\ \mathrm{km},0)| + |(0,-10\ \mathrm{km})|\\ &+ |(-10\ \mathrm{km},0)|\\ &= 10\ \mathrm{km}+10\ \mathrm{km}+10\ \mathrm{km} = 30\ \mathrm{km}\end{aligned}$$

Esempi

Una persona percorre i sei lati di un esagono (ogni spostamento sia $\vec{\ell}_i$, $i = 1 - 6$) di lato 10 m. Calcolare:

a) $\sum_{i=1}^{6} |\vec{\ell}_i|$



Tutti gli spostamenti hanno modulo 10 m, per cui $\sum_{i=1}^{6} |\vec{\ell}_i| = 6 \times 10\ \mathrm{m} = 60\ \mathrm{m}$

b) $\left|\sum_{i=1}^{6} \vec{\ell}_i\right|$

In questo caso lo spostamento globale corrisponde a partire da un punto dell'esagono, percorrerlo integralmente e tornare nello stesso punto, per cui $\left|\sum_{i=1}^{6} \vec{\ell}_i\right| = 0.$

Esempi

c)$\int_{esagono} d\vec{l}$

Come nel caso precedente, lo spostamento descritto dall'integrale corrisponde a percorrere integralmente l'esagono tornando al punto di partenza, per cui

$$\int_{esagono} d\vec{l} = 0.$$

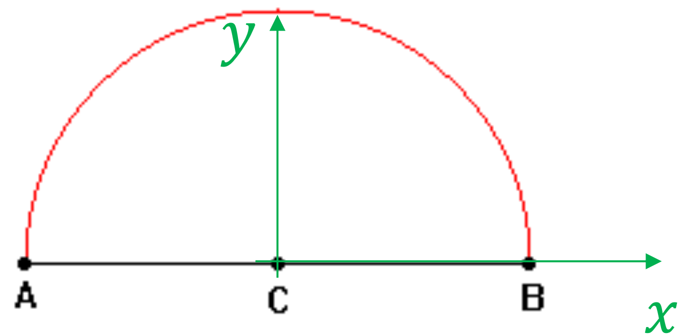
d)$\int_{esagono} \left|d\vec{l}\right|$

Questo integrale è invece coincidente con la prima sommatoria: infatti il bordo dell'esagono è un percorso non continuo, ma a tratti, per cui $\int_{esagono} \left|d\vec{l}\right|$ si divide in 6 integrali, uno su ciascuno dei 6 lati e di valore eguale alla lunghezza del rispettivo lato, che è sempre 10 m. Pertanto: $\int_{esagono} \left|d\vec{l}\right| = 6 \times 10\ \text{m} = 60\ \text{m}$

Esempi

Una persona percorre una semicirconferenza γ_1 di raggio R e centro O partendo da A. Chiamiamo x l'asse su cui giace il diametro. Calcolare:

a) $\left|\int_{\gamma_1} d\vec{l}\right|$



La posizione iniziale della persona in coordinate cartesiane è $(-R, 0)$, quella finale è $(R, 0)$ (dalla parte opposta del diametro), per cui:

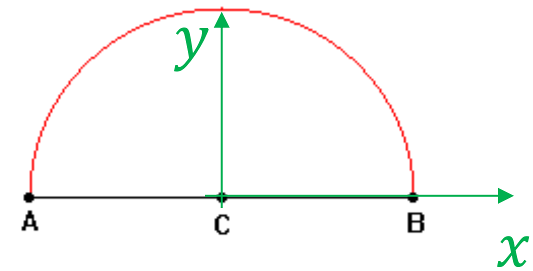
$$\Delta\vec{R} = \int_{\gamma_1} d\vec{l} = (R, 0) - (-R, 0) = 2R\hat{x}$$

e quindi:

$$\left|\int_{\gamma_1} d\vec{l}\right| = 2R$$

Esempi

b) $\int_{\gamma_1} |d\vec{l}|$



Per quanto discusso nell'esercizio precedente, l'integrale della domanda corrisponde alla lunghezza della traiettoria percorsa, pertanto:

$$\int_{\gamma_1} |d\vec{l}| = \pi R$$

c) $\int_{\gamma_1} d\vec{l}$

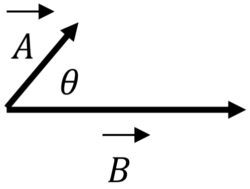
Abbiamo implicitamente già risposto risolvendo la domanda a):

$$\int_{\gamma_1} d\vec{l} = (R, 0) - (-R, 0) = 2R\hat{x}$$

Prodotto Scalare

- Il prodotto scalare di due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ si indica come $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ed è dato da

  $$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$$

  dove θ è l'angolo fra i due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

  È il prodotto del modulo del primo vettore (A) per la proiezione del secondo vettore sul primo (B cos θ), o viceversa

- Di conseguenza, il prodotto scalare di un vettore con se stesso è uguale al modulo del vettore al quadrato:

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2 \quad \Longrightarrow |\vec{A}| \equiv \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$$

- Il risultato dell'operazione di prodotto scalare è una grandezza scalare

- Proprietà:

  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$; (a $\vec{A}$)·(b $\vec{B}$) = (ab)($\vec{B} \cdot \vec{A}$); $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

Prodotto Scalare

- I prodotti scalari dei versori (cartesiani) verificano le relazioni:

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \qquad \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0$$

- *Di conseguenza*

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left(\hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z\right) \cdot \left(\hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z\right) = (\hat{\imath} \cdot \hat{\imath})A_xB_x + (\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath})A_yB_y + \left(\hat{k} \cdot \hat{k}\right)A_zB_z + (\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath})A_xB_y + (\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath})A_yB_x + \left(\hat{\imath} \cdot \hat{k}\right)A_xB_z + \left(\hat{k} \cdot \hat{\imath}\right)A_zB_x + \left(\hat{\jmath} \cdot \hat{k}\right)A_yB_z + \left(\hat{k} \cdot \hat{\jmath}\right)A_zB_y = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \cos\theta$$

Versore di un Vettore

Il versore di un vettore $\vec{A}$ è $definito\ da$

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

Infatti:

$$\hat{A} \bullet \hat{A} = 1 = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \bullet \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{|\vec{A}||\vec{A}|}{|\vec{A}|^2} = 1$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{v}} = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{v}}|}}$$

modulo = 1

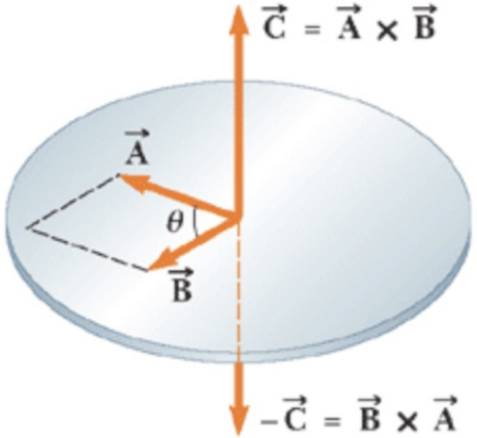
direzione $\vec{\mathbf{v}}$

verso $\vec{\mathbf{v}}$

Prodotto Vettoriale

Prodotto vettoriale $\vec{A} \wedge \vec{B}$ $\Longrightarrow$ è un'operazione fra vettori, che ha per risultato **un vettore** $\vec{C}$ con le seguenti proprietà:

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$



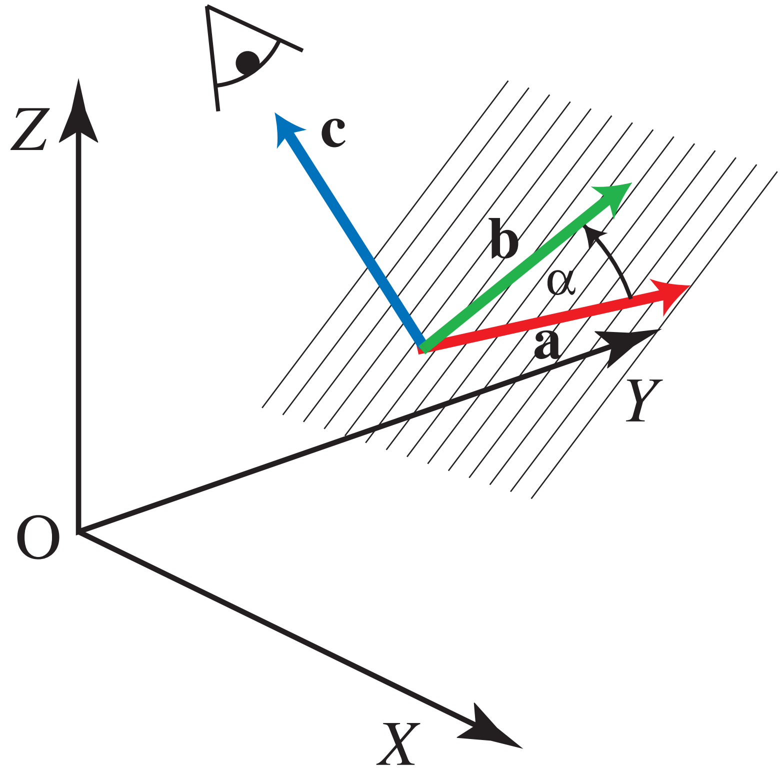
- il modulo è pari al prodotto dei moduli per il modulo del seno dell'angolo compreso, definito in base alla rotazione che porta il primo vettore sul secondo

$$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}||\sin\theta|$$

- la direzione è perpendicolare al piano formato dai due vettori

- il verso è dato dalla regola della mano destra.

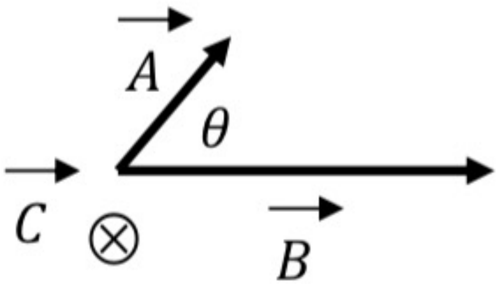
Prodotto Vettoriale



Note

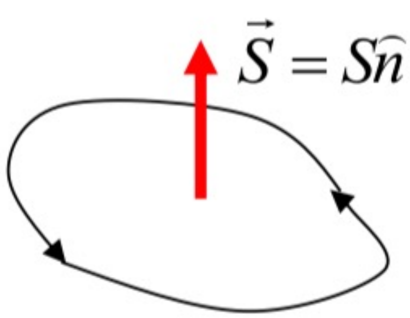
- $\vec{\boldsymbol{C}} = \vec{\boldsymbol{A}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} = -\vec{\boldsymbol{B}} \wedge \vec{\boldsymbol{A}}$, ovvero il prodotto vettoriale è anticommutativo.
- $|\vec{C}|$ è **l'area del parallelogramma** formato dai vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$, infatti se B è la base del parallelogramma, $A \sin\theta$ è l'altezza.

es. figura: Se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sono contenuti nel piano del foglio, $\vec{C}$ è entrante



$\Longrightarrow$ si intuisce che una superficie può essere rappresentata da un vettore !

La figura che segue rappresenta una **superficie orientata**, in cui il verso della normale è determinato dal senso di percorrenza del bordo della superficie. Il <u>vettore superficie $\vec{S}$</u> è diretto come la normale alla superficie ed ha come modulo l'area della superficie.



Prodotto Vettore in Coordinate Cartesiane

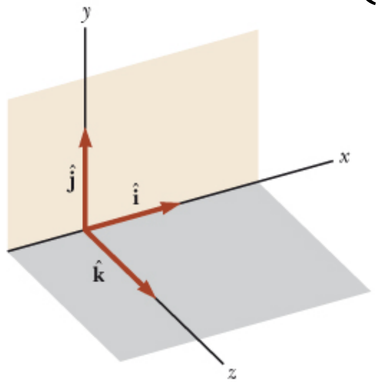
$$\vec{A} \times \vec{B} = \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}\right) \times \left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$\hat{\imath}A_x \wedge \left(\hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z\right)$$
$$= (\hat{\imath}\wedge\hat{\imath})A_xB_x + (\hat{\imath}\wedge\hat{\jmath})A_xB_y + \left(\hat{\imath}\wedge\hat{k}\right)A_xB_z = \hat{k}A_xB_y - \hat{\jmath}A_xB_z$$

$$\hat{\jmath}A_y \wedge \left(\hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z\right) = (\hat{\jmath}\wedge\hat{\imath})A_yB_x + (\hat{\jmath}\wedge\hat{\jmath})A_yB_y + \left(\hat{\jmath}\wedge\hat{k}\right)A_yB_z$$
$$= -\hat{k}A_yB_x + \hat{\imath}A_yB_z$$

$$\hat{k}A_z \wedge \left(\hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z\right)$$
$$= \left(\hat{k}\wedge\hat{\imath}\right)A_zB_x + \left(\hat{k}\wedge\hat{\jmath}\right)A_zB_y + \left(\hat{k}\wedge\hat{k}\right)A_zB_z = \hat{\jmath}A_zB_x - \hat{\imath}A_zB_y$$

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \hat{\imath}\left(A_yB_z - A_zB_y\right) - \hat{\jmath}\left(A_xB_z - A_zB_x\right) + \hat{k}\left(A_xB_y - A_yB_x\right)$$



perché

$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}} = 0, \quad \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}} = 0, \quad \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}} = 0$$
$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}, \quad \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}, \quad \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$

Prodotto Vettore in Coordinate Cartesiane

Sfruttando la decomposizione dei vettori come somma sui versori:

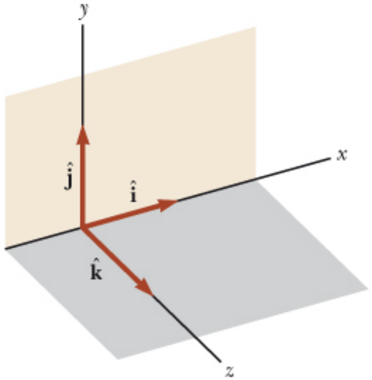
$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + \hat{k}A_z \qquad \vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

Troviamo

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}\right) \times \left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}\right) \\ &= \hat{\mathbf{i}}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{\mathbf{j}}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{\mathbf{k}}(A_xB_y - A_yB_x)\end{aligned}$$

perché

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = 0, \qquad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = 0, \qquad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$$
$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}, \qquad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}, \qquad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$



Prodotto Vettoriale come determinante

Un modo semplice per ricordarsi l'espressione del prodotto vettore è usare le regole per il calcolo del determinante di una matrice:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left(A_y B_z - A_z B_y\right) - \hat{\jmath}(A_x B_z - A_z B_x) + \hat{k}\left(A_x B_y - A_y B_x\right)$$

- il prodotto vettoriale è distributivo rispetto alla somma:

$$\vec{A} \wedge \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$$

- il prodotto vettoriale non è associativo:

$$\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) \neq \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) \wedge \vec{C}$$

Infatti ad esempio: $\vec{A} \wedge \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) \neq \left(\vec{A} \wedge \vec{A}\right) \wedge \vec{B}$

il secondo membro è sempre nullo, mentre il primo in generale non lo è.

ancora prodotto vettoriale

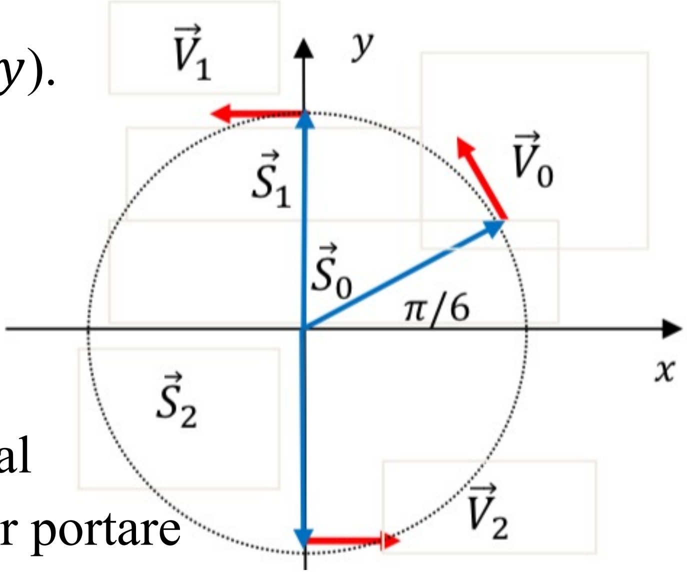
è utile introdurre il tensore di Ricci-Levi Civita ε_{ijk} che vale +1 se ijk = 123 e permutazioni cicliche pari; −1 se ijk = 213 e permutazioni cicliche dispari; 0 altrimenti. Usando la convenzione di Einstein: indici ripetuti sono sommati, si può scrivere

$$C_i = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$$

es.

Esercizio

Consideriamo i vettori in figura (tutti posti nel piano xy).



Fissiamo $|\vec{S}_0| = |\vec{S}_1| = |\vec{S}_2| = 100\ m$ e $|\vec{V}_0| = |\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = 1\ m/s$.

Calcolare: $\vec{S}_0 \wedge \vec{V}_0$, $\vec{S}_1 \wedge \vec{V}_1$,$\vec{S}_2 \wedge \vec{V}_2$, $\sum(\vec{S}_i \wedge \vec{V}_i)$, $(\sum \vec{S}_i) \wedge (\sum \vec{V}_i)$

Notiamo innanzitutto che ogni vettore $\vec{S}_i$ è ortogonale al corrispondente vettore $\vec{V}_i$ e che il senso di rotazione per portare $\vec{S}_i$ su $\vec{V}_i$ è sempre lo stesso. Pertanto:

$$\vec{S}_0 \wedge \vec{V}_0 = |\vec{S}_0||\vec{V}_0|\hat{k} = 100\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\hat{k} = \vec{S}_1 \wedge \vec{V}_1 = \vec{S}_2 \wedge \vec{V}_2$$

Inoltre:

$$\sum(\vec{S}_i \wedge \vec{V}_i) = \vec{S}_0 \wedge \vec{V}_0 + \vec{S}_1 \wedge \vec{V}_1 + \vec{S}_2 \wedge \vec{V}_2 = 3(\vec{S}_0 \wedge \vec{V}_0) = 300\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\hat{k}$$

Osserviamo poi che $\vec{S}_1 = -\vec{S}_2$ e $\vec{V}_1 = -\vec{V}_2$, per cui:

$$\left(\sum \vec{S}_i\right) \wedge \left(\sum \vec{V}_i\right) = (\vec{S}_0 + \vec{S}_1 + \vec{S}_2) \wedge (\vec{V}_0 + \vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{S}_0 \wedge \vec{V}_0 = 100\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\hat{k}$$

Scalari, Vettori e leggi fisiche

- Le leggi fisiche non possono dipendere dal sistema di coordinate!

- Il prodotto scalare di due vettori *non* dipende dal sistema di coordinate: è *invariante* rispetto a rotazioni del sistema di coordinate.

- Una legge fisica espressa come relazione tra quantità vettoriali è *covariante*: per esempio, nella legge di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, entrambe i membri si trasformano allo stesso modo

Spesso avremo a che fare con *funzioni vettoriali*: ad esempio, $\vec{r}(t)$, posizioni di un punto al tempo t, equivalente a una terna di funzioni: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Campi

- In fisica sentiremo parlare del concetto di Campo. Si intende come una proprietà fisica dello spazio:
  - possiamo associare alla proprietà fisica una grandezza e di questa grandezza ne conosciamo i valori nei punti dello spazio (tutto o una regione limitata)
- I campi possono essere di tipo scalare o vettoriale

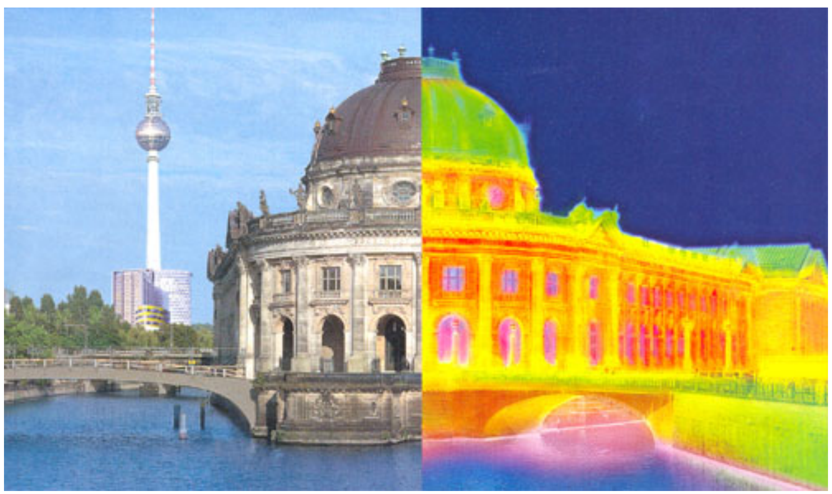
Scalare $\mathrm{T} = \mathrm{T}(x,y,z)$

Vettoriale $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x,y,z) = \mathrm{V}_x(x,y,z)\,\hat{\imath} + \mathrm{V}_y(x,y,z)\,\hat{\jmath} + \mathrm{V}_z(x,y,z)\,\hat{k}$

Esempi di campi

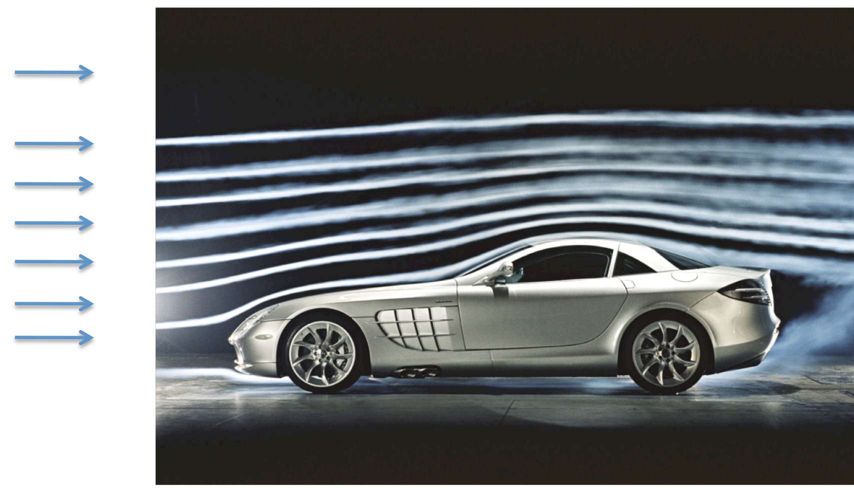
- Il concetto di campo di una grandezza fisica è comunemente utilizzato in varie applicazioni

Campo (scalare) di temperatura



$T = T(x,y)$

Campo (vettoriale) di velocità



$\vec{v}(x,y,z)$