PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE BINARIE INDIPENDENTI

- N esperimenti identici ed indipendenti
- Spazio campione Ω costituito da solo due possibili risultati $\Omega = \{ \omega_1 , \omega_2 \}$

Esempio : lanci ripetuti di una moneta

$$\text{moneta} \begin{cases} \nearrow \text{testa} \\ \searrow \text{croce} \end{cases}$$

$\omega_1 =$ testa $\Rightarrow P\{\omega_1\}$

$\omega_2 =$ croce $\Rightarrow P\{\omega_2\} = 1 - P\{\omega_1\}$

$A = \{ \omega_1$ si presenta k volte su n lanci $\}$

$$\boxed{P\{A\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

Formula di Bernoulli (binomiale)

$p = P\{\omega_1\}$

$q = 1 - p = P\{\omega_2\}$

$$\binom{n}{k} \triangleq \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Esempio

Esistono due monete $\begin{cases} \nearrow \text{perfetta} \\ \searrow \text{truccata} \end{cases}$

moneta perfetta $\Rightarrow$ $P\{\text{"testa"}\} = P\{\text{"croce"}\} = 0.5$

moneta truccata $\Rightarrow$ $P\{\text{"testa"}\} = 0.8$, $P\{\text{"croce"}\} = 0.2$

$\Rightarrow$ Esperimento

1) Si sceglie una moneta a caso tra le due
2) Si lancia la moneta scelta per 10 volte osservando che per 5 volte esce "testa" e per 5 volte esce "croce"

$\Rightarrow$ Qual'è la probabilità di aver scelto la moneta perfetta ??

Svolgimento

$\Rightarrow$ Devo calcolare una prob. a posteriori (condizionata)

$\Rightarrow$ Se non avessi osservato niente avrei detto che la prob. di pescare la moneta perfetta è pari a 0.5 (pesco a caso)

$A = \{\text{"pesco la moneta perfetta"}\}$

$P\{A\} = 0.5$

$B = \{\text{"osservo 5 volte testa e 5 volte croce dopo 10 lanci"}\}$

$\Rightarrow P\{A \mid B\}$ $\Leftarrow$ prob. da calcolare

$$P\{A \mid B\} \neq P\{A\}$$

in generale

⇒ Quando sono uguali ?!

quando A e B sono eventi indipendenti

⇒ A e B non sono indipendenti !!

⇒ L'aver osservato 10 lanci mi condiziona la prob. di aver scelto la moneta perfetta

⇒ TEOREMA DI BAYES

$$P\{A \mid B\} = \frac{P\{B \mid A\}\, P\{A\}}{P\{B\}}$$

$$P\{B \mid A\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{10!}{5!\,5!}\, 0.5^5\, 0.5^5 \cong 0.246$$

$$\left.\begin{array}{l} p = 0.5 \\ q = 0.5 \end{array}\right\} \text{moneta perfetta} \qquad \begin{array}{l} n = 10 \\ k = 5 \end{array}$$

$$P\{A\} = 0.5$$

$P\{B\}$ Probabilità totale

$$P\{B\} = \sum_{i=1}^{M} P\{B \mid C_i\} P\{C_i\}$$ ← Teo. della prob totale

M = nr. di eventi di una partizione di Ω

$C_1 = \{$scelgo la moneta perfetta$\} = A$

$C_2 = \{$scelgo la moneta truccata$\}$

C_1 e C_2 sono gli eventi di una partizione di Ω

$$P\{B\} = \underbrace{P\{B|A\}}_{\simeq 0.246} \underbrace{P\{A\}}_{0.5} + \underbrace{P\{B|C_2\}}_{?} \underbrace{P\{C_2\}}_{0.5}$$

$$P\{B|C_2\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{10!}{5!\,5!} 0.8^5\, 0.2^5 \simeq 0.0264$$

$n = 10$ $\quad p = 0.8$ "testa"

$k = 5$ $\quad q = 0.2$ "croce"

$$P\{B\} \simeq 0.136$$

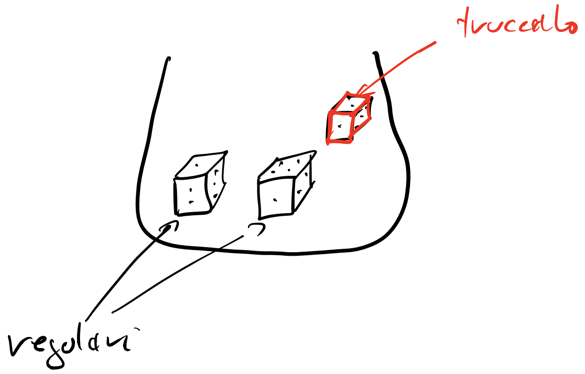
$$\boxed{P\{A|B\} \simeq \frac{0.246 \cdot 0.5}{0.136} \simeq 0.903}$$

⇒ Abbiamo applicato 2 teoremi

Prob totale

Bayes

ESERCIZIO – TESTO DI ESAME DEL 04/06/19



regolare $\Rightarrow$ $P\{1\} = P\{2\} = \dots = P\{6\} = \frac{1}{6}$

truccato $\Rightarrow$ $P\{1\} = P\{2\} = \frac{1}{4}$, $P\{3\} = P\{4\} = P\{5\} = P\{6\} = \frac{1}{8}$

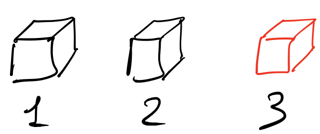
Esperimento

1) estraggo "a caso" due dadi dal sacchetto

a) calcolare la prob. che esca un "1" ed un "2"

b) calcolare la prob. di aver estratto il dado truccato avendo osservato un "1" ed un "3"

Svolgimento



1, 2 $\Rightarrow$ 2 dadi regolari

1, 3
2, 3 } 1 dado regolare ed uno truccato

$A = \{$ "estraggo due dadi regolari" $\} \Rightarrow P\{A\} = \frac{1}{3}$

$B = \{$ "estraggo 1 dado reg. ed 1 dado truccato" $\}$

$P\{B\} = \frac{2}{3}$

lo calcolo tramite la definizione classica di probabilità

$P\{A\} = \frac{n_F}{n_T}$

$C = \{$ "escono un "1" ed un "2" $\}$

$$P\{C\} = P\{C|A\} P\{A\} + P\{C|B\} P\{B\}$$

il teo. della prob. totale lo posso applicare poiché A e B sono una partizione di Ω

$P\{C|A\} =$ prob. che esca "1" e "2" avendo pescato due dadi regolari

$P\{1\} = \frac{1}{6}$

$P\{2\} = \frac{1}{6}$

per l'indipend. dei lanci

$$P\{1,2\} = P\{1\} P\{2\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P\{2,1\} = P\{2\} P\{1\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P\{C|A\} = P\{1,2\} + P\{2,1\} = \frac{1}{18}$$

⇒ tutti i casi

I dado	II° dado
1	1
1	2
⋮	⋮
1	6
2	1
2	2
⋮	⋮
2	6
⋮	⋮
6	1
6	2
⋮	⋮
6	6

$$\frac{2 \text{ eventi fav.}}{36 \text{ " possibili}} = \frac{1}{18}$$

tutti eventi equiprobabili

36 comb.

·) $P\{C|B\}$ = prob. che escano "1" e "2" avendo estratto 1 dado truccato ed 1 dado regolare

2 casi:

dado truccato	dado regolare	
1	2	$\Rightarrow P\{1\} = \frac{1}{4} \quad P\{2\} = \frac{1}{6}$
2	1	$\Rightarrow P\{2\} = \frac{1}{4} \quad P\{1\} = \frac{1}{6}$

$$P\{1,2\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

$$P\{2,1\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

$$\Rightarrow P\{C|B\} = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

$$\boxed{P\{C\}} = P\{C|A\}\,P\{A\} + P\{C|B\}\,P\{B\}$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{54} + \frac{1}{18} = \frac{4}{54} = \boxed{\frac{2}{27}}$$

b)

$D = \{$"esco un "1" ed un "3" "$\}$

$P\{B|D\} = ?$

$B = \{$"estraggo un dado regolare ed uno truccato"$\}$

Applico il Teo. di Bayes

$$P\{B|D\} = \frac{P\{D|B\}\,P\{B\}}{P\{D\}}$$

$P\{D|B\}$

dado truccato	dado regolare	
1	3	$\Rightarrow P\{1,3\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$
3	1	$\Rightarrow P\{3,1\} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6}$

$$P\{D|B\} = \frac{1}{24} + \frac{1}{48} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$$

$$P\{B\} = \frac{2}{3}$$

$$P\{D\} = P\{D|A\}P\{A\} + P\{D|B\}P\{B\}$$

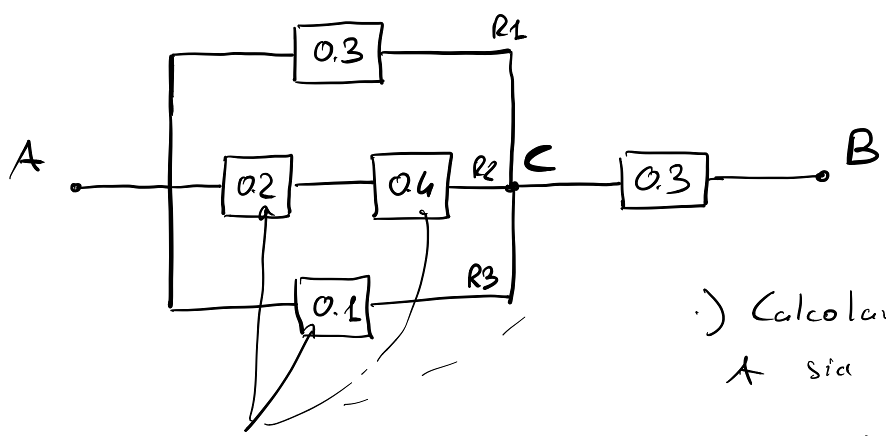
$$\Rightarrow P\{D|A\} = \frac{1}{18}$$

dado ver.	dado ver.	
1	3	$P\{1,3\} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$
3	1	$P\{3,1\} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$

$$= \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{16}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{54} + \frac{1}{24} = \frac{4+9}{216} = \frac{13}{216}$$

$$\Rightarrow \boxed{P\{B|D\} = \frac{\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{13}{216}} = \frac{1}{24}\cdot\frac{216}{13} = \frac{9}{13}}$$

⇒ ESERCIZIO



PROBABILITÀ DI GUASTO (INDIPENDENTI)

·) Calcolare la prob. che A sia connesso a B

Svolgimento

P_{AB} = prob. che A sia connesso a B

P_{AC} = " " A " " " C

P_{CB} = " " C " " " B

$P_{AB} = P_{AC} \cdot P_{CB} \simeq 0.69$ per l'indipendenza dei guasti dei relè

$P_{CB} = 1 - 0.3 = 0.7$ prob. che il relè tra C e B non si guasti

$$P_{AC} = 1 - P_{\overline{AC}} = 0.9844$$

$$P_{\overline{AC}} = P_{\overline{R1}} \cdot P_{\overline{R2}} \cdot P_{\overline{R3}} = 0.3 \cdot 0.52 \cdot 0.1 = 0.0156$$

ramo 1 disconnesso — ramo 2 disc. — ramo 3 disc

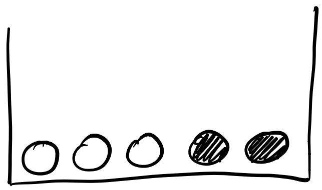
$$P_{\overline{R1}} = 0.3$$

$$P_{\overline{R3}} = 0.1$$

$$P_{\overline{R2}} = 1 - (1-0.2)(1-0.4) = 1 - 0.8 \cdot 0.6 = 0.52$$

prob che il primo relè funzioni — prob. che il secondo relè funzioni

ESERCIZIO – 31/01/20



I° esp: si pescano due palline a caso

a) Calcolare la prob. che se ne peschi una bianca ed una nera

Svolgimento

Estrazione di due palline

	estrazione della I^a pallina	estrazione della seconda pallina
I° caso	○	●
II° caso	●	○

$A = \{$"estraggo una pallina bianca ed una nera"$\}$

$$A = \underbrace{\{\circ\,\bullet\}}_{\text{I° caso}} + \underbrace{\{\bullet\,\circ\}}_{\text{II° caso}} = P\{\circ\,\bullet\} + P\{\bullet\,\circ\}$$

poiché mutuamente esclusivi

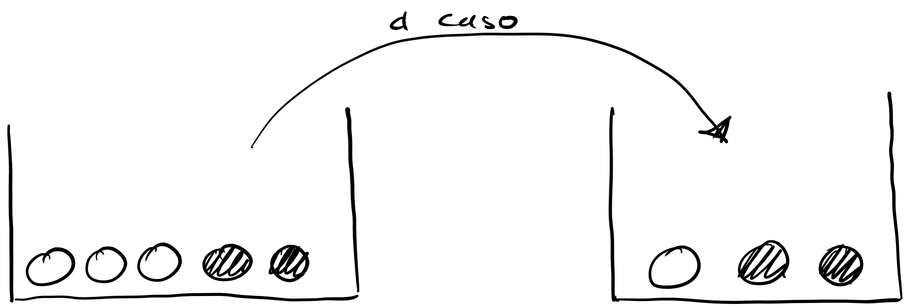
$$P\{\circ\,\bullet\} = P\{\circ\} \cdot P\{\bullet \mid \circ\} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

prob. di estrarre la prima pallina bianca

prob. di estrarre la seconda pallina nera dopo aver estratto una bianca

$$P\{\bullet\,\circ\} = P\{\bullet\} \cdot P\{\circ \mid \bullet\} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

$$\boxed{P\{1\} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}}$$



b) calcolare la prob. che pescando una pallina dalla seconda scatola questa sia nera

c) calcolare la prob. di aver estratto una pallina bianca dalla prima scatola avendo pescato una pallina nera dalla seconda.

b)

$B = \{$"pesco una pallina nera dalla seconda scatola"$\}$

$C = \{$"pesco una pallina bianca dalla prima scatola"$\}$

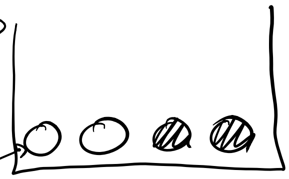
$D = \{$"pesco una pallina nera dalla prima scatola"$\}$

$$P\{B\} = P\{B \mid C\}\, P\{C\} + P\{B \mid D\}\, P\{D\}$$

C e D sono una partizione di Ω

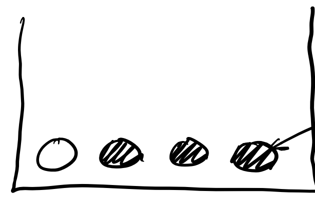
$P\{B|C\} = \frac{1}{2}$

seconda scatola



pescata dalla I^a scatola

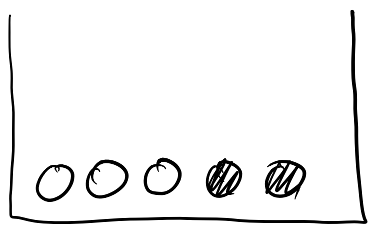
$P\{B|D\} = \frac{3}{4}$



pescata dalla I^a scatola

$P\{C\} = \frac{3}{5}$

$P\{D\} = \frac{2}{5}$



$$\boxed{P\{B\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}}$$

c) $$P\{C|B\} = \frac{P(B|C)\,P(C)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \cancel{\frac{3}{5}}}{\cancel{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{2}$$

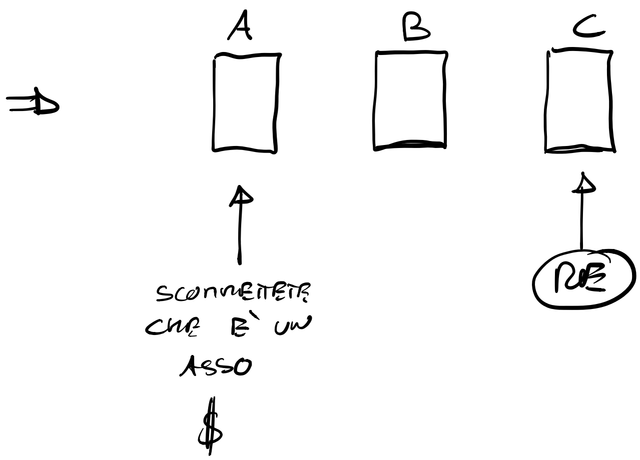
pesco una pallina bianca dalla prima scatola

pesco una pallina nera dalla seconda scatola

$P\{C|B\} = \frac{1}{2}$

$P\{C\} = \frac{3}{5}$

prob è diminuita dopo aver osservato l'estrazione della pallina nera dalla seconda scatola



1 ASSO
2 RE

$A = \{$"Asso nella I^a carta"$\}$

$$P\{A\} = \frac{1}{3}$$

$D = \{$"viene scoperto un re"$\}$

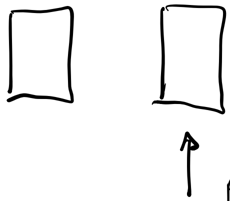
$$P\{A \mid D\} = ?$$

Asso in posizione "A" dopo osservato D

$P\{A|D\} \geq P\{B|D\} \Rightarrow$ rimanete come siete

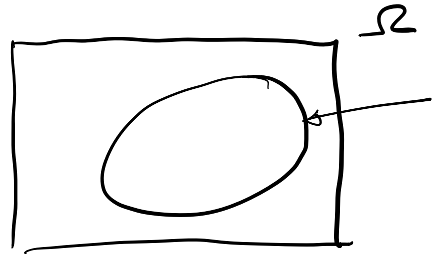
$P\{A|D\} < P\{B|D\} \Rightarrow$ conviene cambiare carta

A posteriori, dopo l'evento D



$B|D$ = Asso presente in pos "B"

$$P\{B|D\} = 1 - P\{A|D\}$$



$\Omega|D = \Omega'$

$$\boxed{P\{A|D\} = \frac{\overset{1}{\overbrace{P\{D|A\}}}\ \overset{1/3}{\overbrace{P\{A\}}}}{P\{D\} = 1} = \frac{1}{3}}$$

$$P\{D\} = 1$$

$$P\{B|D\} = \frac{2}{3} > P\{A|D\} = P\{A\}$$

conviene cambiare carta perché raddoppio la mia prob di vincita