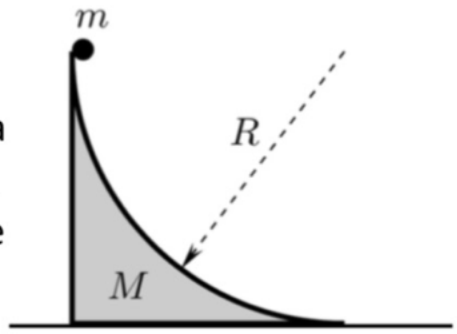
## Es 1 Esame del 20/7/2018




Un punto materiale di massa m è inizialmente fermo sulla cima di di una guida liscia con profilo circolare di raggio R (vedi figura). La guida, di massa M, anch'essa inizialmente ferma, può scivolare su di un piano orizzontale privo di attrito.
Al tempo t = 0 il punto materiale viene lasciato libero.

1. Calcolare la velocità finale del punto materiale $\vec{v}$ e della guida $\vec{V}$, quando il punto materiale arriva sul piano.
   $\vec{v} =$ .............. $\vec{V} =$ ..............

2. Calcolare la velocità finale del centro di massa del sistema punto materiale-guida, $\vec{V}_{cm}$, quando il punto materiale arriva sul piano.
   $\vec{V}_{cm} =$ ................

3. Come cambierebbero i risultati del punto 1 e 2 se invece di una guida con profilo circolare avessimo un piano inclinato di altezza R e angolo $\theta$?
   $\vec{v}' =$ .............. $\vec{V}' =$ .............. $\vec{V'}_{cm} =$ ...............

[ $m = 2.00\ kg,\ \ M = 3.00\ kg,\ R = 0.5\ m$ ]

Il sistema guida-punto è ISOLATO RISPETTO l'asse x dato che non agiscono forze esterne. Sull'asse y agisce la forza peso ma tale forza è conservativa e per tale motivo l'energia meccanica del sistema è conservata.

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$\frac{1}{2}M(v_f^2 - v_i^2) + \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) \quad mgR + Mgh_{cm} - Mgh_{cm} = 0$$

Se M e m sono fermi per $t=0$ segue

$$\frac{1}{2}MV_f^2 + \frac{1}{2}mv_f^2 - mgR = 0$$

Implicitamente si sta svolgendo il problema in 3 dimensioni. L'asse z non influisce nel moto dei corpi perché nessuna forza perturba l'asse.

$$V_z = a_z = 0$$

Notiamo come la quantità di moto è conservata solamente per l'asse x perché sull'asse y c'è la forza peso.

$$m\vec{v}_x + M\vec{V}_x \Rightarrow (m+M)\vec{V}_{xcm}$$

$$m(\vec{v}_{xf} - \underset{0}{\underset{\parallel}{\vec{v}_{xi}}}) + M(\vec{V}_{xf} - \underset{0}{\underset{\parallel}{\vec{V}_{xi}}}) = 0$$

Si ricavano due relazioni:

$$\vec{V}_x = -\frac{m}{M}\vec{v}_x \qquad v_x = -\frac{M}{m}\vec{V}_x$$

È agevole notare che quando si considera l'istante finale del moto sia la guida sia la massa hanno come unica componente del vettore velocità quella diretta lungo l'asse delle x. Le due equazioni per giunta diventano un sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_{xf}^2 + \frac{1}{2}MV_{xf}^2 - mgR = 0 \\ mv_x + MV_x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}mv_{xf}^2 + \frac{1}{2}M\left(-\frac{m}{M}v_{xf}\right)^2 - mgR = 0$$

$$v_{xf}^2\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}\right) - mgR = 0$$

$$v_{xf} = \sqrt{gR \setminus \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{m}{M}\right)} = \sqrt{gR / \frac{M+m}{2M}}$$

$$V_{xf} = -\frac{m}{M}\sqrt{gR / \frac{M+m}{2M}}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m\vec{v}_{xf} + M\vec{V}_{xf}}{m+M}$$

---

DINAMICA ROTAZIONALE - ESERCIZI

1. Un punto materiale P di massa m è legato mediante una corda inestensibile ad una sottile asta verticale e ruota, in un piano supposto orizzontale, attorno al punto O dell'asta; inizialmente il raggio della traiettoria di P misura r1 = 24cm e ha velocità v1 = 2.4m/s, dopo un certo tempo la corda si è avvolta attorno all'asta e il raggio della traiettoria si è ridotto alla misura r2 = 15 cm; determinare la velocità finale di P.

NO FORZE ESTERNE $\longrightarrow$ $\vec{P}_M$ CONSERVATA

$$m\vec{v}_i r_i = m\vec{v}_f r_f$$

$$v_f = \frac{r_i \vec{v}_i}{r_f} = 3.8 \ \frac{m}{s}$$

---

35. L'effetto risultante di una forza esterna e dell'attrito è un momento di 36 Nm applicato ad una ruota che gira intorno al suo asse fisso. La forza esterna agisce per 6.00s e, in questo intervallo di tempo, la velocità angolare della ruota passa da 0 a 10.0 rad/s. A questo istante, la forza esterna viene eliminata, e la ruota si ferma dopo 60.0s. Si calcolino A) il momento d'inerzia della ruota, B) il modulo della forza d'attrito e C) il numero di giri della ruota nei 66.0s

$$\alpha_m = \frac{\omega_f - \omega_i}{\Delta t} = \frac{10.0 - 0}{6.00} = 1.66 \ \frac{rad}{s^2}$$

$$\tau = \vec{F} r = m r^2 \alpha = I \alpha$$

$$I = \frac{\tau}{\alpha} = \frac{36}{1.66} = 21.60 \ Kg\,m^2$$

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \quad \rightarrow \quad \alpha_A = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{10.0}{60.0} = 0.166 \ \frac{rad}{s^2}$$

Il momento risultante relativo all'attrito è:

$$\Sigma \tau = I\alpha = 21.60 \cdot 0.166 = 3.60 \ Nm$$

$$\theta(6.00) = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}(1.66)36 = 29.88 \ rad$$

$$\theta(60) = 0 + 10t - \frac{1}{2}(0.166)t^2 = 301.2 \ rad$$

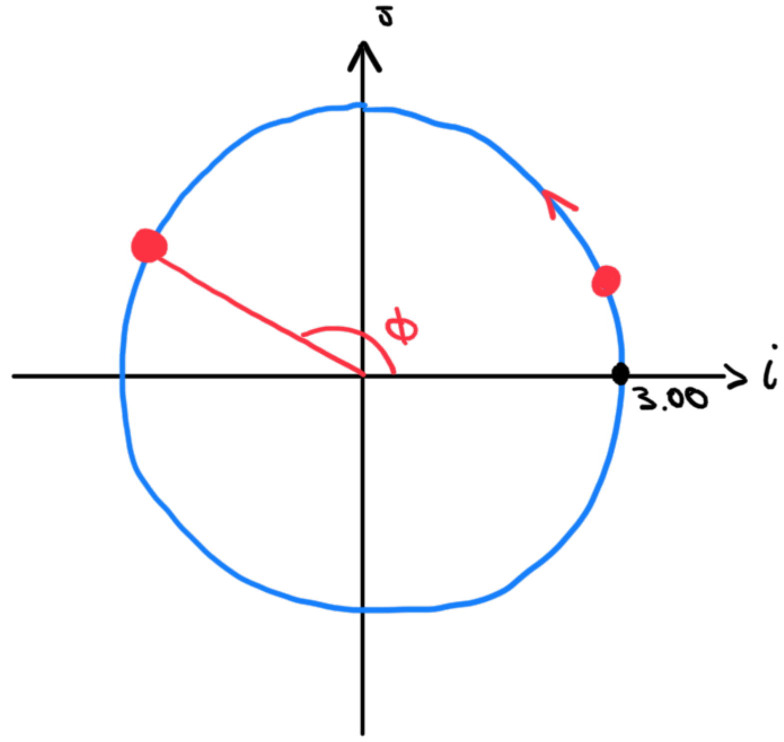
$$\theta_{TOT} = 330.90 \ rad$$

oppure $330.90 : x = 2\pi : 1$

52.69 giri

---

36. Un piccolo oggetto di 4.00kg si muove in senso antiorario con una velocità angolare di modulo 1.50 rad/s lungo una circonferenza di raggio 3.00m, centrata nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane. All'istante di partenza il corpo si trovava nel punti identificato dal vettore (3.00i)m. A) Quale é il suo vettore posizione quando ha compiuto uno spostamento angolare di 9.00 rad? Si esprimano tutte le quantità vettoriali in termini dei versori degli assi. B) In quale quadrante si trova l'oggetto e quale angolo il vettore posizione fa con l'asse delle x positive. C) Quanto vale il vettore velocità dell'oggetto? D) In quale direzione si sta muovendo? E) Qual'è la sua accelerazione? G) Quanto vale la forza risultante sull'oggetto?




$\theta(0) = 0$ rad $\Rightarrow$ $s = (3.00\,\hat{i},\ 0\,\hat{j})$ m

$\theta(t) = 9.00$ rad $\Rightarrow$ $\phi \Rightarrow (9 - 6.28)$ rad $= 2.72$ rad

$$2.72 : \phi = 2\pi : 360$$

$$\phi = 156^\circ$$

$$i = r\cos\phi$$

$$j = r\sin\phi$$

$$S = (-2.73\,\hat{i},\ + 1.24\,\hat{j})\ \mathrm{m}$$

Il corpo si trova nel 2° quadrante e forma un angolo di 156°.

$\vec{\omega} = (1.50\,\hat{z})$ rad/s

$v = r\omega = (3.00)(1.50) = 4.50\ \frac{m}{s}$

La velocità deve essere tangente al vettore posizione

$$\begin{pmatrix} \cos\phi\, r \\ \sin\phi\, r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} v = \cos\phi\, r\, x + \sin\phi\, r\, y = 0$$

se $x = -\sin\phi$ e $y = \cos\phi$

si ha $\vec{s} \cdot \vec{v} = 0$ quindi velocità tangente al vettore posizione!

posizione!

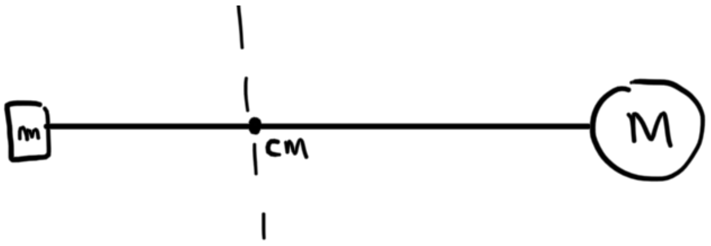
$$\vec{v} = \left(-v\sin\phi\,\hat{i},\ v\cos\phi\,\hat{j}\right)\frac{m}{s} = \left(-1.84\,\hat{i},\ -4.11\,\hat{j}\right)\frac{m}{s}$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r} = 6.75\,\frac{m}{s^2}$$

$$\vec{M} = m r \vec{a} = 81\ Nm$$

---

37. Due masse m ed M sono collegate da un’asta rigida di lunghezza L e massa trascurabile, come in figura. Si dimostri che il valore del momento di inerzia del sistema rispetto a un asse perpendicolare all’asta è minimo quando l’asse passa per il centro di massa. Si mostri che tale valore è I = μL^2, con μ = mM/(m + M).




Si deve calcolare il MOMENTO D' INERZIA del corpo. Si prenda come asse di riferimento la perpendicolare passante per m. Per th. assi paralleli:

$$I = \int_0^m r^2 dm + M(L-r)^2 = r^2 m + M(L-r)^2$$

$$\frac{dI}{dr} = 2rm - 2M(L-r)$$

$$\frac{dI}{dr} = 0 \Rightarrow 2rm - 2M(L-r) = 0$$

$$2rm - 2ML - 2Mr = 0$$

$$2rm + 2Mr = 2ML$$

$$r = ML/_{m+M}$$

se l'asse di rotazione dista da m $\frac{ML}{m+M}$ si ha MOMENTO d' inerzia MINIMO.

$$X_{CM} = \frac{0 \cdot m + LM}{M + m} = \frac{LM}{M+m}$$

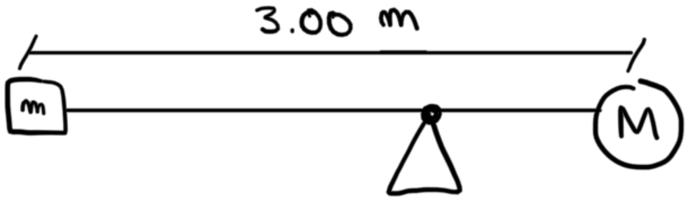
Se l' asse di rotazione passa per il centro di massa si ha il MOMENTO d' INERZIA MINIMO.

$$I = r^2 m = L^2 \left(\frac{Mm}{M+m}\right)$$

---

47. Un “lupo da guerra” o “trebuchet” é un macchinario considerato il diretto erede della catapulta. Nel Medio Evo, veniva utilizzato per lanciare rocce contro i castelli ed oggi usato solo per lanciare ortaggi molto grandi o pianoforti a scopo dimostrativo. Schematizzatelo come una sbarra rigida di massa trascurabile, lunga 3.00m, su cui estremi sono posti due corpi di massa 60.0kg e 0.120kg. La sbarra è incernierata su di un perno senza attrito posto ad una distanza di 14.0 cm dal corpo più massivo. La sbarra viene quindi lasciata libera di muoversi a partire dalla posizione orizzontale. A) Si calcoli la velocità tangenziale del corpo più piccolo quando esso viene lanciato e lascia il

vincolo. B) Esso si muove di moto uniformemente accelerato? C) La componente tangenziale dell’accelerazione è costante? D) Il trebuchet si muove con accelerazione angolare costante?




$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$I_1 = \int_0^m (3-0.14)^2 dm = 2.86^2 m = 0.98$$

$$I_2 = \int_0^M 0.14^2 dm = 0.14^2 M = 1.176$$

$$\frac{1}{2} I_1(\omega_f^2 - \cancel{\omega_{i1}^2}) + \frac{1}{2} I_2(\omega_f^2 - \cancel{\omega_{i2}^2}) - mgh_{f1} - \cancel{mgh_i} - Mgh_{f2} - \cancel{Mgh_i} = 0$$

$\omega_{i1} = \omega_{i2} = h_i = 0$ $\qquad$ $h_{f1} = (3.00 - 0.14)\, m$

$h_{f2} = -0.14\, m$

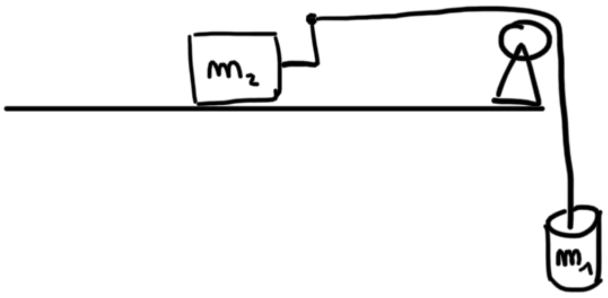
$$\omega_f = \sqrt{\frac{2g(mh_{f1} + Mh_{f2})}{I_1 + I_2}} = 8.55 \text{ rad/s}$$

$$v_1 = \omega h_{f1} = 24.5 \frac{m}{s}$$

---

53. Pagina 329

MODULO VELOCITÀ
$m_2$ quando
$m_2$ percorre 0.700 m




Nel sistema è presente una forza dissipativa che compie lavoro sulle componenti del sistema:

$$\vec{F}_d = \vec{F}_{ATTRITO} = -\mu_D m g$$

$$\frac{1}{2}m_2\left(v_f^2 - v_i^2\right) + \frac{1}{2}m_1\left(v_f^2 - v_i^2\right) - m_2 g h_i + \frac{1}{2}I\left(\omega_f^2 - \omega_i^2\right) = \int_0^{0.700} -\mu_D m g \, d\vec{s}$$

$$h_i = 0.700$$

$$\omega_i = \frac{v_i}{r} = \frac{0.820}{0.030} = 27.33 \ \frac{rad}{s}$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(v_f^2 - v_i^2\right) + \frac{1}{2}I\left(\omega_f^2 - \omega_i^2\right) = m_1 g h_i - \mu_D m_2 g h_i$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M(R_1+R_2)^2\right)\left(\frac{1}{R_2}\right)^2\left(v_f^2\right) = v_i^2\left(\frac{1}{2}(m_1+m_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M(R_1+R_2)^2\right)\left(\frac{1}{R_2}\right)^2\right) + g h_i\left(m_2 - \mu_D m_1\right)$$

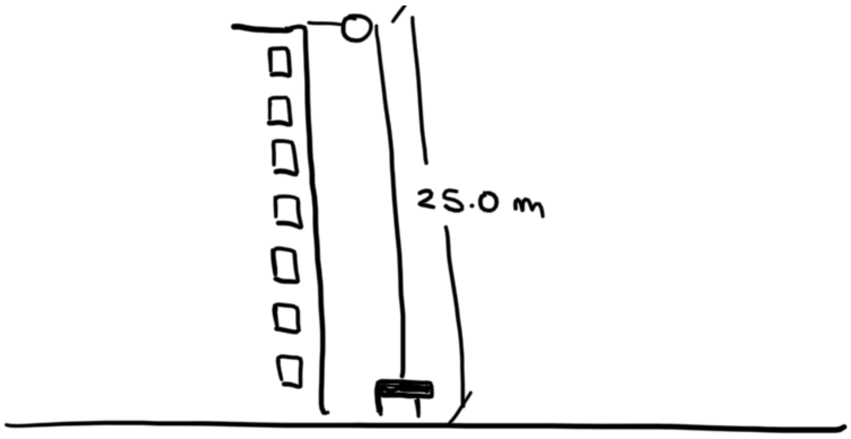
$$v_f^2 = v_i^2 + \frac{+ 2 g h_i\left(m_1 - \mu_D m_2\right)}{(m_1+m_2) + \frac{1}{2}M(R_1+R_2)^2\left(\frac{1}{R_2}\right)^2}$$

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + \frac{2 g h_i\left(m_1 - \mu_D m_2\right)}{(m_1+m_2) + \frac{1}{2}M(R_1+R_2)^2\left(\frac{1}{R_2}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt{0.820^2 + \frac{2(0.420)9.81(0.700)\left(0.420 - 0.250(0.850)\right)}{(0.420 + 0.850) + \frac{1}{2}0.350(0.020 + 0.030)\left(\frac{1}{0.030^2}\right)}} =$$

---

54. Un pianoforte di 3.50 kN viene sollevato da tre operai a velocità costante fino ad un appartamento che si trova a 25.0m sopra la strada che usando una carrucola agganciata al tetto del palazzo. Ciascun operaio può sviluppare una potenza di 165 W, e la carrucola ha un’efficienza del 75% (questo significa che il 25% dell’energia meccanica di trasforma a causa dell’attrito). Trascurando la massa della carrucola, si trovi il tempo necessario per sollevare il pianoforte dalla strada all’appartamento.




3 operai che sviluppano 165 W.

$\vec{P} = \frac{dW}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dW}{\vec{P}}$

Durante la salita si usa il 75% di $\vec{P}$

$$\Delta t = \int_0^{25} mg\,dy \Big/ 0.750 \cdot 3\vec{P} = \frac{25mg}{2.25\vec{P}} = 3.92 \text{ min}$$

---

ESERCITAZIONE CIOCCI 17 APRILE

## Esame scritto es. 1 del 22/07/2016

Una guida a forma di semicirconferenza ha raggio $R$ = 1m e massa $M$ = 3kg e può muoversi su un piano orizzontale liberamente (tra il piano e la guida non c'è attrito).

Un punto materiale di massa $m$ = 1.6 kg è vincolato a muoversi al suo interno. La massa m viene lasciata cadere da un'altezza $h$ = 1.3 m all'interno della guida (Fig.1). Tutto il sistema è soggetto all'accelerazione di gravità g.

Si calcoli:

a) lo spostamento orizzontale d della guida quando la massa m esce dall'altro lato rispetto a quello da cui è entrata nella guida

$d$ = ................

b) il modulo della velocità della guida quando m passa nel punto più basso della guida stessa

$v_M$ = ................

c) la quantità di moto del sistema quando la massa m si trova a un angolo $\alpha = \pi/4$

$p$ = ................

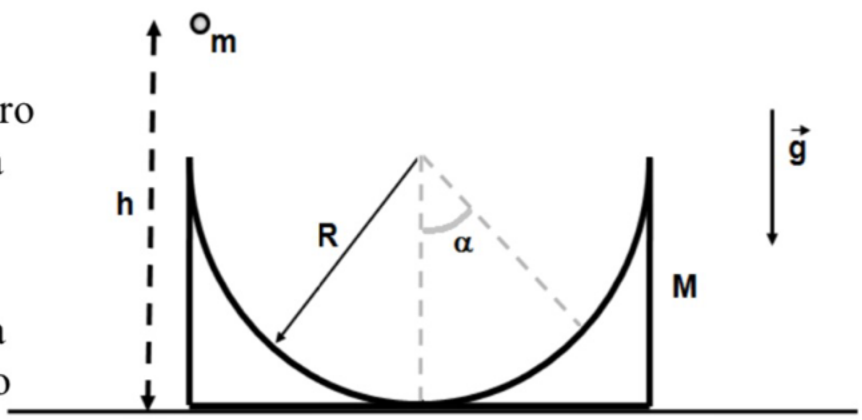



Fig.1

2

A) Si consideri il sistema guida-punto materiale: dato che lungo il piano xz e la superficie di contatto della guida non agisce alcuna forza d'attrito (in generale nessuna forza agisce lungo i due assi) possiamo dedurre che la quantità di moto del sistema è co servita. Segue:

$$\sum F_{EXT\,x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_{cmx} \equiv \text{COSTANTE}$$
$$\sum F_{EXT\,z} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{cmz} \equiv \text{COSTANTE}$$

Lungo l'asse y agisce la forza peso ma in contrasto di essa agisce la reazione vincolare del piano che annulla gli effetti sella forza peso. Per tale motivo:

$$\sum F_{EXT\,y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_{cmy} \equiv \text{COSTANTE}$$

Notiamo inoltre che lungo l'asse y e lungo l'asse z il sistema non si muove e quindi sia velocità iniziale sia velocità finale lungo i due assi sono nulle.

$$v_{ix} = v_{fx} = v_{iz} = v_{fz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_{cmy} = \vec{P}_{cmz} = 0$$

$$\vec{X}_{cms_i} = \frac{M\vec{x}_M + m\vec{x}_m}{M+m} = \frac{MR}{M+m} \qquad \vec{x}_M = R \qquad \vec{x}_m = 0$$

$$X_{cms_f} = \frac{M(\vec{x}_M + d) + m(\vec{x}_m + 2R + d)}{M+m} = \frac{M(R+d) + m(2R+d)}{M+m}$$

Lungo l'asse x la quantità di moto si conserva per cui questo significa che il sistema è in movimento a velocità costante oppure è in stato di quiete. All'istante iniziale il sistema è in stato di quiete e si nota facilmente che la posizione finale del centro di massa del sistema deve essere uguale alla posizione iniziale del centro di massa del sistema.

$$\Delta\vec{P}_{cmsx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{X}_{cms_i} = \vec{X}_{cms_f}$$

$$\frac{MR}{M+m} = \frac{M(R+d) + m(2R+d)}{M+m}$$

$$MR = MR + Md + 2mR + md$$

$$d = \frac{-2mR}{m+M}$$

$$d = -\frac{2\cdot(1.60)(1.30)}{1.60 + 3.00} = -0.70\ \text{m}$$

B) Durante l'osservazione del fenomeno si noti che le componenti della velocità della guida e del punto risultano essere:

$$\vec{V}_M = (\vec{V}_{Mx}, 0, 0)$$
$$\vec{V}_m = (\vec{V}_{mx}, \vec{V}_{my}, 0)$$

Inoltre sul sistema non agiscono forze dissipative per cui l'energia meccanica si conserva. Da questo si ricava:

$$E_M \equiv \text{COSTANTE}$$

$$\Delta E_{KG} + \Delta E_{KP} + \Delta E_{UP} = 0$$

$$\frac{1}{2}m\left(\vec{V}_{mf}^2 - \vec{V}_{mi}^2\right) + \frac{1}{2}M\left(\vec{V}_{Mf}^2 - \vec{V}_{Mi}^2\right) + \left(mgh_f - mgh_i\right) = 0$$

Se si considera la situazione del sistema quando il punto materiale si trova alla quota più bassa si ha:

$$h_f = 0 \Rightarrow mgh_f - mgh_i \Rightarrow -mgh_i$$

$$\vec{V}_{mf} = (V_{mx}, 0, 0)$$

$$\vec{V}_{mi} = 0$$

$$\vec{V}_{Mi} = 0$$

$$\vec{V}_{Mf} = (V_{Mx}, 0, 0)$$

$$\frac{1}{2}mV_{mx}^2 + \frac{1}{2}MV_{Mx}^2 - mgh_i = 0$$

Calcoliamo la velocità del CENTRO di MASSA per $t = f$

$$\vec{V}_{cmf} = \frac{m\vec{V}_m + M\vec{V}_M}{m + M} = \frac{mV_{mx} + MV_{Mx}}{m + M}$$

Se $\vec{P}_{cm} \equiv$ COSTANTE e $V_i = V_f = 0$ segue

$$V_{mx} = -\frac{M}{m}V_{Mx}$$

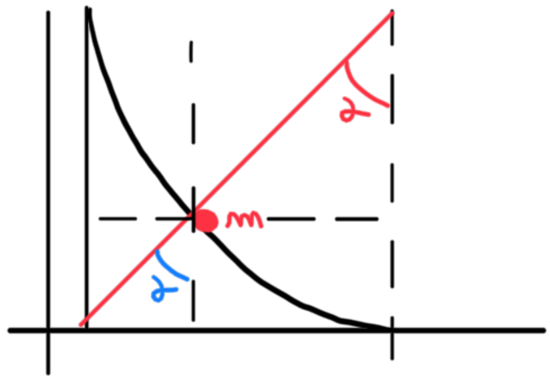
$$\frac{1}{2}m\frac{M^2}{m^2}V_{Mx}^2 + \frac{1}{2}MV_{Mx}^2 - mgh_i = 0$$

$$V_{Mx} = \sqrt{2mgh_i \cdot \frac{1}{M + \frac{M^2}{m}}}$$

$$V_{Mx} = \sqrt{2mgh_i \cdot \frac{m}{mM + M^2}} = 2.17\ \frac{m}{s}$$

C) quantità di moto del sistema quando m si trova ad α = π/4

$$\vec{V}_{cms} = \frac{m\vec{V}_m + M\vec{V}_M}{m+M} \qquad \vec{P}_{cms} = (m+M)\vec{V}_{cms}$$




Si nota che $m$ si muove di moto circolare dentro la guida.

Dato che $\vec{V}_m$ tangente alla traiettoria, si ha:

$\vec{V}_m \perp \vec{R}$

$$\vec{R} = (R\sin\alpha, R\cos\alpha)$$

$$\vec{V}_m = (\omega R\cos\alpha, \omega R\sin\alpha, 0)$$

Si noti che $\vec{V}_M = \vec{V}_{Mx} = \left(-\frac{m}{M}\vec{V}_{mx}, 0, 0\right)$

$$\frac{1}{2}m(\omega R\cos\alpha)^2 + \frac{1}{2}m(\omega R\sin\alpha)^2 + \frac{1}{2}M\left(-\frac{m}{M}\omega R\cos\alpha\right)^2 +$$

$$+ mg(R(1-\cos\alpha)-h) = 0$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2R^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}\omega^2R^2\cos^2\alpha = -mg(R(1-\cos\alpha)-h)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{-2mg}{R^2 m}\frac{(R(1-\cos\alpha)-h)}{\left(1+\frac{m}{M}\cos^2\alpha\right)}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{-2g}{(3}\frac{(1-\cos45°-1.30)3}{+1.60\cos45°)}}$$

---

ESERCIZIO: centro di massa di un triangolo rettangolo

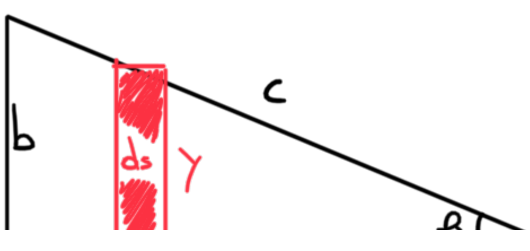
$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

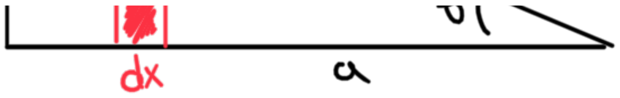
$$\vec{X}_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm \quad ; \quad \vec{Y}_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm$$


Si ricordi che $\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow \rho = \frac{M2}{ab}$

Si pensi di calcolare il centro di massa dividendo il triangolo in tanti piccoli rettangoli la cui massa sia dm.

$dm = \rho\, ds$ $\qquad ds \Rightarrow$ superficie e non VOLUME perché, in questo caso, si considera un triangolo di spessore $\to 0$






$$\vec{X}_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^a x\rho y\,dx = \frac{1}{M}\int x\frac{M_2}{ab}y\,dx$$

$y \Rightarrow$ spostamento lungo l' asse $y$

$$y = x\,tg\,\theta = x\frac{b}{a} \qquad \Rightarrow \text{SEGUE} \Rightarrow \vec{X}_{cm} = \frac{1}{M}\int x^2\frac{M_2}{ab}\frac{b}{a}\,dx$$

$$\vec{X}_{cm} = 2\frac{1}{a^2}\int_0^a x^2\,dx = \frac{2}{3}a$$

$$\vec{Y}_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{M}\int y\rho\,ds = \frac{1}{M}\int_0^b \rho(a-x)y\,dy$$

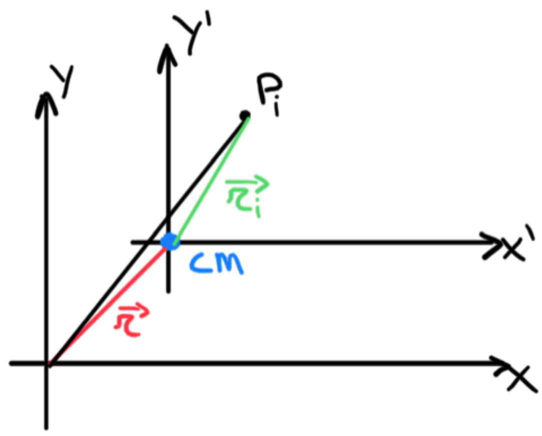
$$y = x\,tg\,\theta \Rightarrow x = y/tg\,\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{M}\rho\int_0^b\left(ay - y^2\frac{a}{b}\right)dy = 2/ab\left(\frac{a}{2}b^2 - \frac{b^3a}{3b}\right) = \frac{2}{ab}\left(\frac{3-2}{6}\right)b^2a = \frac{b}{3}$$

---

## 1° TEOREMA di KÖENIG PER L' ENERGIA CINETICA

$$\underline{K = \frac{1}{2}M_{TOT}\vec{V}_{cm}^{\,2} + \sum\frac{1}{2}m_i\vec{V}_{ri}^{\,2}}$$




L' ENERGIA CINETICA di un sistema di punti è data dalla somma dell'energia cinetica del CENTRO DI MASSA (quindi si considera il corpo come un sistema continuo in cui tutta la massa è concentrata in un punto) più l'energia cinetica relativa di tutti i punti (quindi di ogni punto si calcola la sua energia cinetica rispetto al sistema di riferimento centrato nel centro di massa).

DIM:

Rispetto al sistema xy $P_i$ è dato da:

$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_i\,'$ e DERIVANDO si ottiene $\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i\,'$

Si calcola l'energia cinetica di un corpo discreto posto in $P_i$ rispetto al sistema xy:

$$K = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$$

Si noti che $\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i\,'$ da cui si ricava:

$$K = \frac{1}{2}\sum m_i (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i\,')(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i\,')$$

Segue:

$$K = \underbrace{\frac{1}{2}\overset{M_{TOT}}{\overset{\parallel}{\sum m_i}} V_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i (v_i')^2}_{\text{Tesi teorema}} + \underset{\overset{\parallel}{\emptyset}}{\frac{1}{2}\sum m_i (2\vec{V}_{cm}\vec{v}_i\,')}$$

$$\frac{1}{2}\sum m_i (2\vec{V}_{cm}\vec{v}_i\,') = \sum m_i \vec{V}_{cm}\vec{v}_i\,' = \vec{V}_{cm}\sum m_i \vec{v}_i\,'$$

Notiamo che $\vec{P}_{cm}'$ rispetto al sistema x'y'z' è nullo.

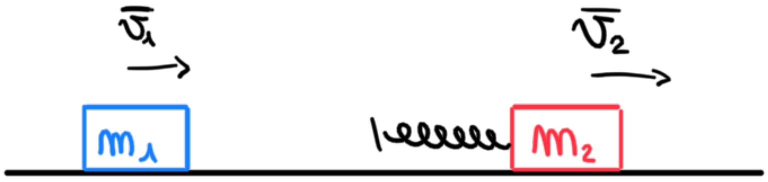
Da ciò segue:

$$\vec{P}_{cm}' = \sum_i m_i \vec{v}_i\,' \cdot \frac{1}{\sum m_i} = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \vec{v}_i\,' = 0$$

∎

---

Esercizio: due corpi di massa m1 ed m2 giacciono su un piano orizzontale senza attrito e sul secondo corpo è fissata una molla ne dilatata ne compressa (massa trascurabile e lunghezza a riposo L). I due corpi si muovo rispettivamente con velocità V1 e v2 (V1 > v2) in verso concorde uno rispetto l'altro. Determinare la massima compressione della molla.


$\vec{v}_1$
$\vec{v}_2$
$m_1$
$m_2$

# Riassunto: moto di un corpo rigido

| | Moto di traslazione | Moto rotatorio |
|---|---|---|
| Massa | $M = \sum_i m_i$ | $I = \sum_i m_i r_{\perp i}^2$ |
| Velocità | $\vec{V} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i$ | $\vec{\omega}$ |
| Quantità di moto | $\vec{P} = M\vec{V}$ | $L_a = I\omega$ (lungo l'asse) |
| Energia cinetica | $K = \frac{1}{2} M V^2$ | $K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$ |
| | | |
| Equilibrio | $\sum \vec{F} = 0$ | $\sum \vec{\tau} = 0$ |
| II Legge di Newton | $\sum \vec{F} = M\vec{a}$ | $\sum \tau_a = I\alpha$ (lungo l'asse) |
| o anche | $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ | $\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ |
| Legge di conservazione | $\vec{P}$ =costante | $\vec{L}$ =costante |
| Potenza | $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ | $\mathcal{P} = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$ |

# Riassunto: leggi di conservazione

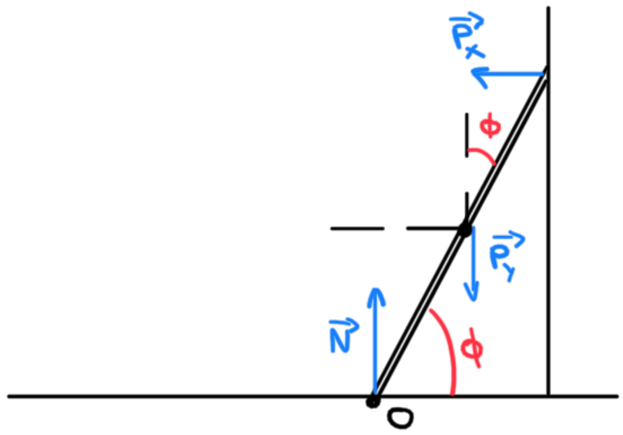
Per un sistema di particelle o un corpo esteso isolato, si conservano

1. energia cinetica, $K_f = K_i$, per i soli processi (esempio: urti) *elastici*
2. quantità di moto, $\vec{P}_f = \vec{P}_i$, se risultante forze esterne nulla
3. momento angolare, $\vec{L}_f = \vec{L}_i$, se risultante momenti esterni nulla

Per un sistema sotto sole forze conservative, si conservano

1. energia meccanica, $E_f = K_f + U_f = K_i + U_i = E_i$
2. momento angolare, $\vec{L}_f = \vec{L}_i$ se forze *centrali*, dirette verso un punto

Equilibrio di un corpo rigido: si supponga di appoggiare una scala ad una parete verticale liscia. Se io coefficiente di attrito statico tra il suolo e la scala è μ si trovi qual’è angolo ϕ minimo che la scala deve formare con il suolo per non cadere.




Condizione di equilibrio, rispetto al polo O:

$$\sum \vec{F} = \emptyset \Rightarrow mg\cos\phi\left(\frac{l}{2}\right) - l\sin\phi\,\vec{P_x} = 0$$

$$\vec{P_x}\tan\phi\, l = mg\frac{l}{2}$$

$$\vec{P_x} = \frac{mg}{\tan\phi}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\vec{P_x} \leq \mu_s mg \Rightarrow \tan\phi\,\mu_s mg \geq \frac{mg}{2}$$

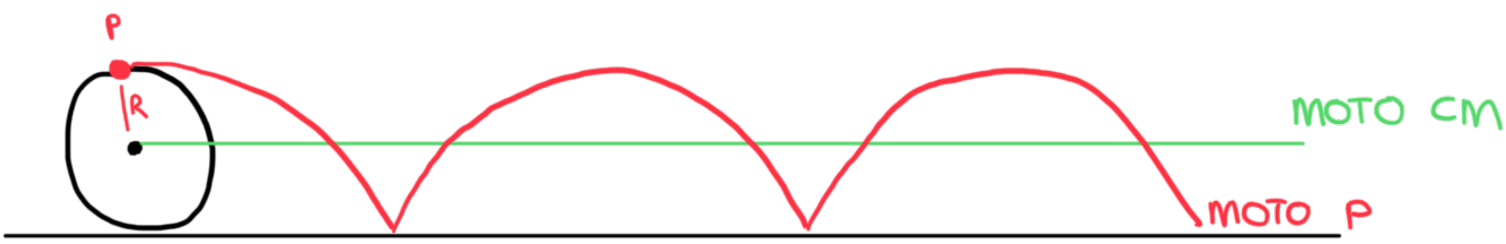
$$\tan\phi \geq \frac{1}{2\mu_s} \Rightarrow \phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\mu_s}\right)$$

---

MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

Un corpo si può muovere, oltre di moto traslatorio, anche roteando su di un asse. Tali moti producono degli spostamenti. Consideriamo il caso di un cilindro uniforme che si muove roteando sull'asse passante per il centro della superficie di base. Se il corpo mentre si muove non striscia sulla superficie allora si dirà che il suo moto è di **puro rotolamento**. Le condizioni di moto di puro rotolamento sono le seguenti:

$$\vec{S}_{cm} = R\theta \qquad \vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{s}_{cm}}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \qquad \vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = R\alpha$$




Affinché possa essere considerato come moto di puro rotolamento un punto generico P posto sulla circonferenza del cilindro deve produrre uno spostamento nullo quando è in contatto con la superficie su cui poggia il cilindro (viceversa striscerebbe). Ciò implica che un punto P sulla circonferenza, tale che sia a contatto con la superficie su cui si muove il corpo, ha velocità nulla rispetto al sistema suolo cilindro. Nel verificarsi di queste ipotesi il centro di massa si muove di moto rettilineo, in direzione parallela al terreno, mentre un punto p a piacere si muove compiendo una traiettoria chiamata cicloide.

Si ipotizzi di prendere in considerazione un sistema di riferimento solidale al centro di massa. Essendo un sistema inerziale (il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme) il moto che verrebbe descritto da un osservatore sarebbe di rotazione attorno all'asse passante per CM. Ora si consideri un sistema solidale alla superficie e si noti che il CM ha una velocità costate Vcm. Per le relazioni che intercorrono tra i due sistemi la velocità di un punto posto sulla circonferenza (tranne il punto in cui in quell'istante il cilindro poggia sulla superficie) è data da:

$$\vec{V}_p = \vec{V}_{cm} + \vec{V'} = \vec{V}_{cm} + R\omega = 2\vec{V}_{cm}$$

Tale relazione è di fondamentale importante perché in un generico istante t un punto P, posto sulla circonferenza del cilindro, si muoverebbe come se l'asse di rotazione passasse per il punto a contatto con la superficie (v = 0). Infatti si dimostra facilmente che calcolando la velocità tangenziale di un punto rispetto al punto di contatto con la superficie si ha:

$$\vec{V}_p = R_p\,\omega = 2R\omega = 2\vec{V}_{cm}$$

Fatte queste considerazioni è possibile studiare, dal punto di vista energetico, il moto di puro rotolamento di un corpo materiale.
Si consideri il punto P di contatto con la superficie. Inoltre si consideri l'asse passante per P come asse di riferimento per il moto rotazionale del corpo. In queste condizioni l'energia cinetica del corpo è data da:

$$K = \frac{1}{2} I_p \omega^2$$ $I_p$ = MOMENTO D'INERZIA RELATIVO ALL'ASSE PASSANTE per P

Th. ASSI PARALLELI

$$I_p = I_{cm} + MD^2$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}(I_{cm} + MD^2)\omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} MD^2\omega^2$$

Si noti che $V_{cm} = R\omega \Rightarrow V_{cm}^2 = R^2\omega^2$

$$K = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M V_{cm}^2$$

oppure

$$K = \frac{1}{2}\left(I_{cm}/R^2 + M\right) V_{cm}^2$$

Esempio: Quale tra una sfera, che si muove di moto di puro rotolamento, ed un oggetto che striscia, a parità di massa, arriva primo alla fine di un piano inclinato su cui non c'è attrito?

Si calcola la velocità del corpo c :

$$\frac{1}{2} m \left(v_f^2 - v_i^2\right) + mg(h_f - h_i) = 0$$

$$h_f = v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad v_f^2 = 2\frac{mgh_i}{m} \quad \Rightarrow \quad v_f = \sqrt{2gh_i}$$

Si calcola la velocità del cm della sfera :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{I_{cm}}{R^2} + M\right)\left(V_{cm\,f}^2 - V_{cm\,i}^2\right) + Mg(h_f - h_i) = 0$$

$$V_{cm} = \sqrt{2Mgh_i \cdot \frac{R^2}{I_{cm} + MR^2}}$$

$$V_{cm} = \sqrt{2gh_i \cdot \frac{R^2}{I_{cm}/M + R^2}}$$

N.B. $h_i = h + R$

$$V_{cm} = \sqrt{2gh_i \cdot \frac{1}{I_{cm}/MR^2 + 1}}$$

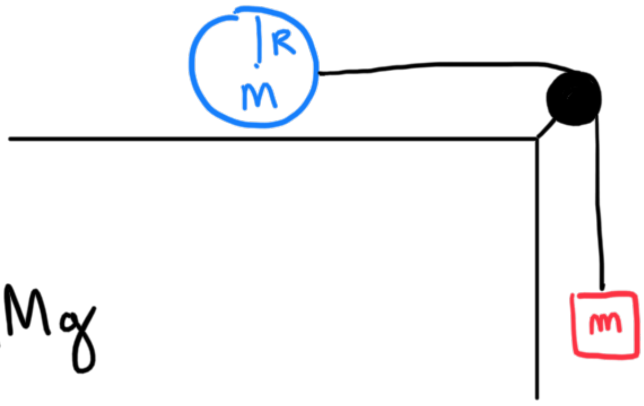
Quindi segue :

$$V_c \geq V_s$$

FORZA E LAVORO NEL MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

Affinché si verifichi un moto di puro rotolamento tra la superficie e il corpo, in generale, c'è dell'attrito. Notiamo che l'unico punto di contatto ha velocità nulla per cui segue che il punto non compie spostamenti. Le tale motivo la forza d'attrito non fa lavoro e l'attrito è di sola natura statica.

Esercizio: Un corpo di massa m trascina il centro di massa di una sfera di massa M e raggio R. I coefficienti di attrito statico e dinamico sono µs e µd. Qual' è il massimo m per cui il moto della sfera è di puro rotolamento?




Equazioni del moto:

$$Ma = T - F_a = T - \mu_s Mg$$

$$ma = -T + mg$$

$$RF_a = I_M \alpha = \frac{2}{5}MR^2\alpha = \frac{2}{5}MRa \quad \Rightarrow \quad F_a = \frac{2}{5}Ma$$

CONDIZIONE DI PURO ROTOLAMENTO

$$a_{cm} = R\alpha \quad , \quad F_a \leq \mu_s Mg$$

Sommatoria delle forze agenti sul sistema:

$$(M+m)a = T - \mu_s Mg - T + mg$$

$$(M+m)a = g(m - \mu_s M)$$

$$m(a-g) = -M(a + \mu_s g)$$

$$m = \frac{-M(a+\mu_s g)}{a-g}$$

Dalla ③ si ottiene:

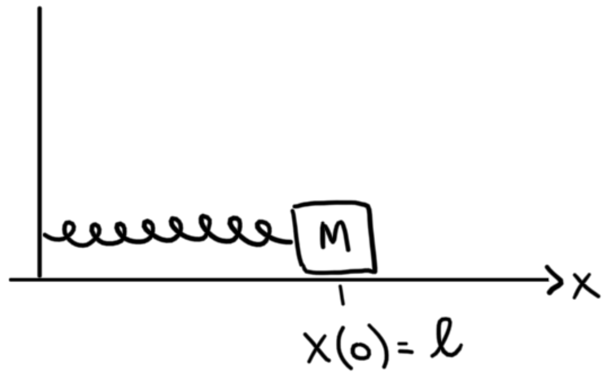
$$a = F_a \frac{5}{2m} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5\mu_s g}{2}$$

$$m = -M\left(\frac{5\mu_s g + 2\mu_s g}{5\mu_s g - 2g}\right) = -M\left(\frac{7\mu_s}{5\mu_s - 2}\right)$$

---

MOTO OSCILLATORIO

Si definisce un moto oscillatorio un moto di un corpo tale che nel tempo acquisti la medesima posizione spaziale ripetitivamente con un intervallo fisso di tempo. Un esempio comune di questo moto solo le oscillazione prodotte da una molla (vincolata ad un estremo) a cui è stata sottoposta una forza iniziale di contrazione (o estensione) ed ad una estremità è collegata una massa M.




L’esperienza quotidiana ci suggerisce che il corpo verrá “tirato” verso la posizione di equilibrio se la molla è in estensione mentre verrà spinto se la molla è in contrazione. Dopo un certo intervallo di tempo, se si segnasse sulla superficie di appoggio la posizione di equilibrio del sistema, si noterà che il corpo avrà la tendenza di tornare in quella posizione. Idealmente, in assenza di attriti o altre forze dissipative in generale, il corpo continuerà il moto all’infinito perché sotto costante effetto della forza attrazione/repulsione della molla.

EQUAZIONI DEL MOTO

$$Ma = -kx$$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{M}x$$ → Equazione differenziale di secondo ordine, lineare, omogenea

Soluzione GENERALE

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) =$$
$$= A\cos(\omega t + \phi)$$

Dove si è posto $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$

$\omega$ = PULSAZIONE, FREQUENZA ANGOLARE

$\phi$ = FASE

$\omega, \phi$ dipendono dalle condizioni del moto.

RICAPITOLANDO:

POSIZIONE ⇒ $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

VELOCITÀ ⇒ $\frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$

ACCELERAZIONE ⇒ $\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$

PERIODO $T$: intervallo di tempo necessario al corpo per compiere un ciclo.

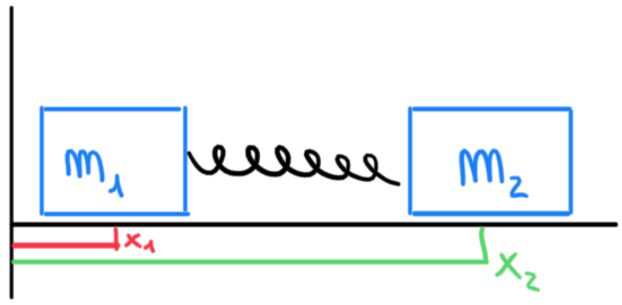
$$T = \frac{2\pi}{\omega} =$$

FREQUENZA $F = \frac{1}{T}$

AMPIEZZA MAX ⇒ $\omega t + \phi = \pi + k\pi$ ⇒ $\cos(\omega t + \phi) = 1$

Ampiezza $= A$

ESEMPIO UTILE: due corpi legati ad una molla
Consideriamo due masse m1 e m2 nelle posizioni x1 e x2 (assumiamo moto unidimensionale).
La molla ha lunghezza a riposo l e costante elastica k.
Equazioni del moto:




$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -k(x_1 - l - x_2) \Rightarrow \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{k}{m_1}(x_1 - l - x_2)$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = +k(x_1 - l - x_2) \Rightarrow \frac{d^2x_2}{dt} = \frac{k}{m_2}(x_1 - l - x_2)$$

La posizione dei due corpi dipende mutuamente l'uno dall'altro.

Posto $z = x_1 - l - x_2$ si ha:

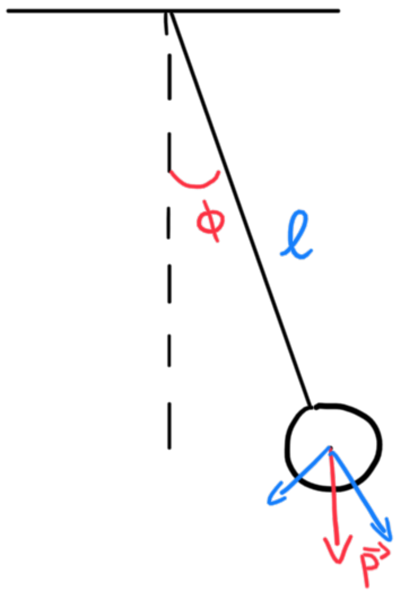
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{d^2x_2}{dt^2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k}{m_1}z - \frac{k}{m_2}z \Rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right)z$$

$$\frac{d^2z}{dt} = -k\left(\frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2}\right)z \Rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} = -w^2 z$$

Dove $w^2 = k\left(\frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2}\right)$

Esempio di moto approssimativamente armonico: il PENDOLO




3 metodi di risoluzione per determinare l'equazione del moto:

1. Forze lungo il filo del pendolo.
2. Momento d'inerzia.
3. Conservazione dell'energia.

① $Ma = -Mg\sin\phi$

Dato che per piccoli angoli $\sin\phi \cong \phi$ allora si ha:

$$M\frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = -Mg\sin\phi \implies \frac{d^2(\ell\phi)}{dt^2} = -g\phi$$

$$\ell\frac{d^2\phi}{dt^2} = -g\phi \implies \frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\phi$$

Posto $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ si ha:

$$\phi(t) = A\cos(\omega\phi + \theta)$$

Dove A indica l' angolo massimo raggiunto dall' oscillazione.

② $I\alpha = -Mg\sin\phi\,\ell$

Si ricordi che $I = M\ell^2$

$$M\ell\frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = -Mg\sin\phi\,\ell \quad \text{oppure} \quad M\ell^2\frac{d^2\phi}{dt^2} = -Mg\sin\phi\,\ell$$

Come detto in precedenza, per piccoli angoli e quindi per piccole oscillazioni $\sin\phi \cong \phi$, da cui segue:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\phi \implies \phi(t) = A\cos(\omega\phi + \theta)$$

ove si è posto $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

③ Sul pendolo agiscono forze CONSERVATIVE

$$\implies \Delta K + \Delta U = 0$$

$$\frac{1}{2}M(v_f^2 - v_i^2) + Mg\ell(1-\cos\phi) = 0$$

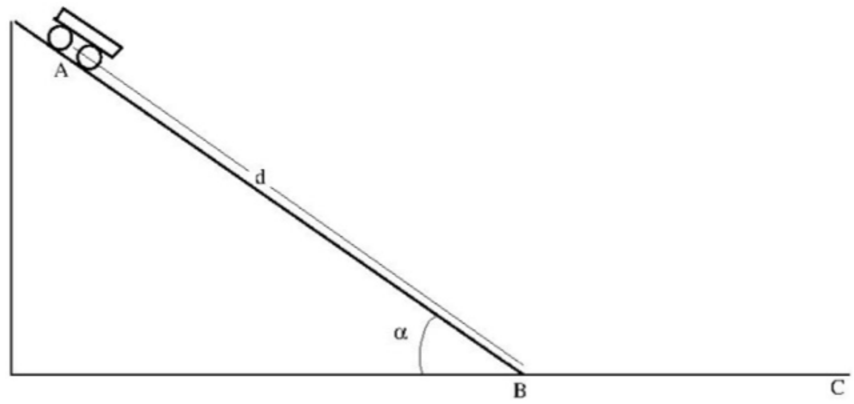
$$\frac{1}{2}M\ell^2(\omega_f^2 - \omega_i^2) = -Mg\ell(1-\cos\phi)$$

Supposto che $v_i = \omega_i = 0$

$$\frac{1}{2} M\ell^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - - Mg\ell(1-\cos\phi)$$

---

**Esercizio 1**




Un carrello può essere schematizzato da 4 ruote, ciascuna di massa m/4 e raggio R, e da un pianale di massa m. Tale carrello, partendo da fermo nel punto A (in figura) scende lungo un piano inclinato scabro lungo d (con angolo $\alpha$) con moto di puro rotolamento (supporre d molto maggiore della distanza tra le due ruote).

1. Calcolare la velocità, $v$ e l'accelerazione $a$ con cui il carrello arriva alla base del piano inclinato (punto B) e l'accelerazione che avrebbe avuto lo stesso carrello in assenza di attrito, $a_{na}$.

   $v =$ ..................... $a =$ ..................... $a_{na} =$ .....................

2. Giunto nel tratto orizzontale (punto B), il carrello viene fermato in un tempo $\Delta t$ (nel punto C) per mezzo di un momento frenante di modulo $M_f$ costante. Determinare $M_f$ assumendo che, fino all'arresto, il moto sia sempre di puro rotolamento.

   $M_f =$ .....................

3. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza frenante nel tratto BC per fermare il carrello.

   $L_{freno} =$ .....................

Dati: g=10 $m/s^2$, m=10 $Kg$, R=15 $cm$, $\alpha = \pi/6$, d=10 $m$, $\Delta$t=5 $s$.



RISOLUZIONE: il primo passo da compiere è la verifica delle quantità fondamentali conservate: dato che il moto é di puro rotolamento e la forza non conservative in gioco (l'attrito statico tra piano e ruote) non fa lavoro segue che l'energia meccanica è conservata. Osservato questo possiamo impostare il problema analizzando la conservazione dell'energia:

$$\Delta U = M_{CARRELLO}\, g\,(h_f - h_i) = 2mg\sin\alpha\,(0-d) = -2mg\sin\alpha\, d$$

$$\Delta K_c = \frac{1}{2} M_{CARRELLO}\left(V^2_{cm\,f} - V^2_{cm\,i}\right) = \frac{1}{2}\cdot 2m V^2_{cm\,f} = m V^2_{cm\,f}$$

$$4\cdot \Delta K_R = \left(\frac{1}{2} I_R (\omega_f^2 - \omega_i^2)\right)4 = 4\left(\frac{1}{2}\frac{m}{4} r^2 \cdot \frac{1}{2}\omega_f^2\right) = \frac{m}{4} r^2 \omega_f^2$$

MOTO PURO ROTOLAMENTO $\Rightarrow$ $v_{cm} = \omega r$ $\Rightarrow$ $\omega = \frac{v_{cm}}{r}$

$$\frac{m}{4} r^2 V^2_{cm} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{m}{4} V^2_{cm}$$

$$-2mg\sin\alpha\, d + m V^2_{cm\,f} + \frac{m}{4} V^2_{cm} = 0$$

$$V_{cm} = v = \sqrt{\frac{2mg\sin\alpha\, d}{m + m/4}} = \sqrt{\frac{8}{5} g \sin\alpha\, d} = 8.9\ \frac{m}{s}$$

Le forze agenti sul sistema, dirette lungo il piano, sono la forza peso agente sull'intero sistema carrello e l'attrito statico agente su ogni ruota del sistema.

$$2ma = 2mg\sin\alpha - 4A_r$$

La forza attrito agisce sulle ruote e inoltre sappiamo che la risultante dei momenti delle 4 ruote é data da:

$$4A_r \cdot r = I_r \alpha$$

$$A_r = -\frac{I_r \alpha}{4r}$$ = MOTO PURO ROTOLAMENTO $V = \omega r \Rightarrow a = \dot{V}$

$$\Rightarrow a = \dot{\omega} r = \alpha r$$

$$\alpha = \frac{a}{r}$$

$$A_r = \frac{I_r a}{4r^2}$$

$$2ma = 2mg\sin\alpha - \frac{I_r a}{r^2}$$

$$a\left(2m + \frac{I_R}{r^2}\right) = 2mg\sin\alpha$$

$$a = 2mg\sin\alpha r^2 \cdot \frac{1}{2mr^2 + I_r} = \frac{2mg\sin\alpha \cancel{r^2}}{\cancel{r^2}(2m + \frac{1}{2}m)}$$

$$a = \frac{4}{5} g\sin\alpha = 4 \ m/s^2 \ \checkmark$$

$$a_{NA} \Rightarrow \quad 2ma_{NA} = 2mg\sin\alpha$$

$$a_{NA} = g\sin\alpha = 5 \ \frac{m}{s^2} \ \checkmark$$

👆🏻 Finire domande 2 e 3.

**Esercizio 1**


Una massa $M = 1\ kg$, assimilabile ad un punto materiale, oscilla su un piano orizzontale senza attrito sotto l'azione della forza elastica esercitata da una molla di costante elastica $k = 300\ N/m$. Una massa $m = 0.1\ kg$, anch'essa assimilabile ad un punto materiale, che si muove (vedi figura) con velocità orizzontale $v_0 = 30\ m/s$ sul piano, urta la massa M nel punto di massima elongazione della molla, corrispondente all'ampiezza massima di oscillazione $A_0 = 0.5\ m$. Subito dopo l'urto, la massa m resta attaccata ad M. Si calcoli:

1. La velocità del sistema $M + m$ subito dopo l'urto, $v'$

$$v' = \text{...............}$$

2. La quantità di energia dissipata nell'urto, $E_{diss}$

$$E_{diss} = \text{...............}$$

3. L'ampiezza massima delle oscillazioni dopo l'urto, $A_{max}$

$$A_{max} = \text{...............}$$

Dati: $M = 1\ kg$, $k = 300\ N/m$, $m = 0.1\ kg$, $v_0 = 30\ m/s$, $A_0 = 0.5\ m$

RISOLUZIONE: l'urto è di tipo anelastico. Da ciò segue che si conserva esclusivamente la quantità di moto. Si considerino come t iniziale di riferimento l'istante subito prima dell'urto e come t finale l'istante subito dopo l'urto.

$$\vec{V}'_i = \frac{M\vec{V}_{si} + m\vec{V}_0}{M+m} = \text{MOTO SOLO SU ASSE } x = \frac{MV_{si} + mV_0}{M+m}$$

Si calcola $V_{si}$ quando $A_0$ è MASSIMO

$$Ma = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt} = -\frac{k}{M}x$$

$$x_M(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)$$

COND. INIZIALI

$$x_M(0) = 0.5\ m$$

$$\dot{x}_M(0) = 0\ \frac{m}{s}$$

$$x_M(0) = A = 0.5\ m$$

$$\dot{x}_M(0) = B\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$x_M(t) = (0.5\ m)\cos\sqrt{\frac{k}{M}}t$$

$$M\dot{x}_M(0) + mV_0 = (M+m)V'$$

$$\text{Segue} \quad v' = \frac{M\dot{x}_{cm}(0) + mV_0}{M+m} = \frac{mV_0}{m+M} = 2.72\ \frac{m}{s}\ \checkmark$$

Quantità di energia dissipata dopo l'urto.

$$E_i = \frac{1}{2}M[\dot{x}(0)]^2 + \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{1}{2}k(X(0))^2$$

$$E_f = \frac{1}{2}(M+m)(v')^2 - \frac{1}{2}k(X(0))^2$$

$$\Delta E = |E_f - E_i| = \left|\frac{1}{2}(m+M)(v')^2 - \frac{1}{2}mV_0^2\right| = 40.81\ J\ \checkmark$$

Ampiezza massima delle oscillazioni dopo l'urto.

$$M' = m + M$$

$$M'a = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt} = -\frac{k}{M'}x$$

$$x_{M'}(t) = A\cos\sqrt{\frac{k}{M'}}t + B\sin\sqrt{\frac{k}{M'}}t$$

COND. INIZIALI

$$x_{M'}(0) = 0.5$$

$$\dot{x}_{M'}(0) = 2.7\ \frac{m}{s}$$

$$x_{M'}(0) = A = 0.5 = A_0$$

$$\dot{x}_{M'}(0) = B\sqrt{\frac{k}{M'}} = 2.7\ \frac{m}{s} = V' \quad \Rightarrow \quad B = V'\sqrt{\frac{M'}{k}}$$

$$x_{M'}(t) = A_0\cos\sqrt{\frac{k}{M'}}t + V'\sqrt{\frac{M'}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{M'}}t$$

$$x\ MAX \Rightarrow A_{MAX} \Rightarrow \dot{x}(t) = 0$$

$$\dot{x}(t) = -A_0\sqrt{\frac{k}{M'}}\sin\sqrt{\frac{k}{M'}}t + V'\cos\sqrt{\frac{k}{M'}}t$$

$$-A_0\sqrt{\frac{k}{M'}}\sin\sqrt{\frac{k}{M'}}t + V'\cos\sqrt{\frac{k}{M'}}t = 0$$

$$-A_0\sqrt{\frac{k}{M'}}\tan\sqrt{\frac{k}{M'}}t = -V'$$

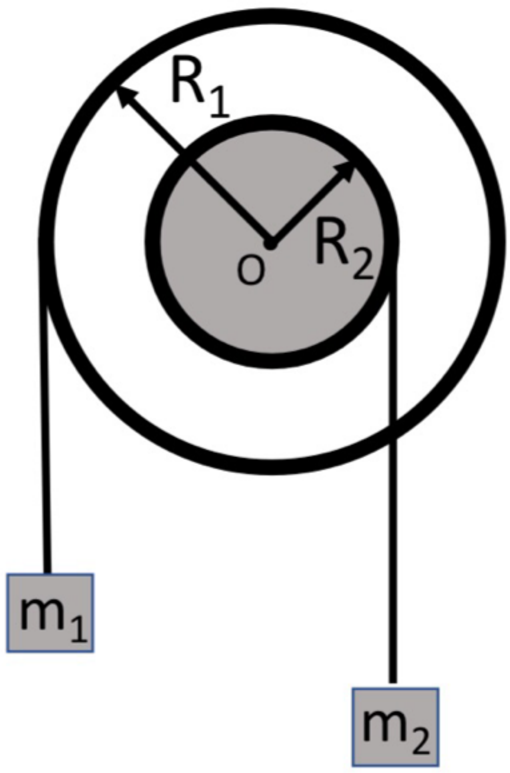
$$\tan\sqrt{\frac{k}{M'}}t = \frac{V'}{A_0}\sqrt{\frac{M'}{k}}$$

$$\sqrt{\frac{k}{M'}}t = \tan^{-1}\frac{V'}{A_0}\sqrt{\frac{M'}{k}} = 18.10 = \bar{t}$$

$$A_{MAX} = A_0\cos\bar{t} + v'\sqrt{\frac{M'}{k}}\sin\bar{t} = 0.525\ m = 0.53\ m$$

---

**Esercizio 1**




Due dischi concentrici sono fissati uno sull'altro e possono ruotare alla stessa velocità angolare intorno ad un asse privo di attrito che passa per il centro dei due dischi ($O$, nella figura). Si arrotola una corda connessa ad una massa $m_1$ intorno alla circonferenza del disco di raggio maggiore ($R_1$) ed una seconda corda collegata ad una massa $m_2$ intorno alla circonferenza del disco di raggio minore ($R_2$). Le due corde sono inestensibili e di massa trascurabile e non slittano rispetto ai dischi su cui sono avvolte. Inoltre, se il sistema dei due dischi è in rotazione una delle due corde si arrotola e l'altra si srotola. Il momento d'inerzia complessivo dei due dischi rispetto al centro O (vedi figura), vale $I = 38\ kg \cdot m^2$. I raggi dei dischi sono sono $R_1 = 120\ cm$ e $R_2 = 50\ cm$.

1. Se $m_1 = 25\ kg$, quale dovrebbe essere il valore di $m_2$ affinchè l'accelerazione angolare del sistema dei due dischi sia nulla?

$$m_2 = ..............$$

La massa $m_1$ viene ora portata a $35\ kg$ ed il sistema rilasciato dalla posizione di riposo. Supponendo che $m_2$ sia quello ottenuto al punto precedente, determinare:

2. L'accelerazione angolare del sistema costituito dai due dischi, $\alpha$

$$\alpha = .............$$

3. Le tensioni di entrambe le corde, $T_1$, $T_2$

$$T_1 = ............... \qquad T_2 = ...............$$

RISOLUZIONE:

SISTEMA IN EQUILIBRIO:

Equazioni cardinali:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - \vec{T}_1 \\ m_2 a = m_2 g - \vec{T}_2 \\ m_1 a r_1 - m_2 a r_2 = I\alpha \end{cases}$$

Se $\alpha = 0 \Rightarrow a = 0$ dato che $a = \alpha r$

$$\begin{cases} 0 = m_1 g - \vec{T}_1 \Rightarrow \vec{T}_1 = m_1 g \\ 0 = m_2 g - \vec{T}_2 \Rightarrow \vec{T}_2 = m_2 g \\ r_1 m_1 g - r_2 m_2 g = 0 \quad (3) \end{cases}$$

(3) si ricava $m_2 = \frac{r_1}{r_2} m_1 = 60\ \text{Kg}$

SISTEMA RILASCIATO dalla POSIZIONE di EQUILIBRIO:

NO ATTRITI O FORZE NON CONSERVATIVE

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - \vec{T}_1 \\ m_2 a = -m_2 g + \vec{T}_2 \\ r_1 \vec{T}_1 - r_2 \vec{T}_2 = I\alpha \end{cases}$$

Inoltre sappiamo che $a = \alpha r$ da cui

$$m_1 \alpha r_1 = m_1 g - \vec{T}_1 \Rightarrow \vec{T}_1 = m_1 g - m_1 \alpha r_1$$
$$m_2 \alpha r_2 = m_2 g - \vec{T}_2 \Rightarrow T_2 = m_2 g + m_2 \alpha r_2$$

$$r_1 m_1 g - m_1 \alpha r_1^2 - r_2 m_2 g - m_2 \alpha r_2^2 = I\alpha$$

$$(r_1 m_1 - r_2 m_2) g = \alpha \left( I + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \right)$$

$$\alpha = (r_1 m_1 - r_2 m_2) g \, \frac{1}{\quad}$$

$$\dots (m_1 r_1 - m_2 r_2) g \; / \; I + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

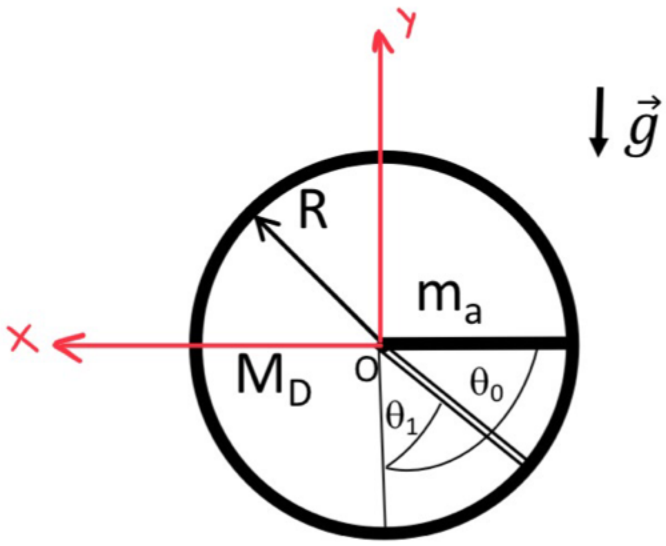
$$\alpha = 1.14 \ \frac{rad}{s^2}$$ ✓

$$\vec{T}_1 = m_1 g - m_1 \alpha r_1 = 295 \text{ N}$$ ✓

$$\vec{T}_2 = m_2 g + m_2 \alpha r_2 = 623 \text{ N}$$ ✓

---

**Esercizio 1**




Un'asta omogenea di massa $m_a$ e di lunghezza $R$ è rigidamente vincolata ad un disco omogeneo di massa $M_D$ e raggio $R$. Il sistema è libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per il centro del disco ($O$, in figura) e perpendicolare al disco.

1. Calcolare la distanza $d$ del centro di massa del sistema dal centro del disco ($O$).

$$d = \dots\dots\dots\dots$$

2. Determinare il momento di inerzia $I_O$ del sistema rispetto all'asse di rotazione passante per il centro del disco e calcolare la velocità angolare del sistema ($\omega_1$) quando esso raggiunge posizione indicata in figura ($\theta_1$) una volta lasciato libero di ruotare dalla posizione corrispondente a $\theta_0$.

$$I_O = \dots\dots\dots\dots \qquad \omega_1 = \dots\dots\dots\dots$$

3. Determinare il periodo delle piccole oscillazioni $T$, attorno alla posizione di equilibrio del sistema.

$$T = \dots\dots\dots\dots$$

Dati: $m_a = 10\ g$, $M_D = 60\ g$, $R = 30\ cm$, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

RISOLUZIONE: si posizioni il riferimento del sistema sul centro del disco.

$$\vec{S}_{cm} = \frac{\vec{S}_{cm} M_D + \vec{S}_{cm} m_a}{M_D + m_a} = \begin{cases} X_{cm} = \dfrac{0 + \frac{R}{2} m_a}{m_a + M_D} \\ Y_{cm} = \dfrac{0 + 0}{m_a + M_D} \end{cases}$$

$$\vec{S}_{cm} = \left( R\left( \frac{\frac{1}{2} m_a}{m_a + M_D} \right) \hat{i}, \emptyset \hat{j}, \emptyset \hat{k} \right) m = 0.0214 \hat{i}\ m = 2.14 \cdot 10^{-2} \hat{i}\ m$$

$$d = 2.14 \cdot 10^{-2}\ m$$

$$I_D = \frac{1}{2} M_D R^2 \qquad I_A = \frac{1}{12} M_A R^2$$

Th. assi paralleli:

$I_D = \frac{1}{2} M R^2 \rightarrow$ rispetto a O

$I_A = \frac{1}{12} M R^2 \rightarrow$ rispetto a $\frac{R}{2}$

$$I_0 = I_D + I_A + m_a \frac{R^2}{4} = 5 \cdot 10^{-3}\ Kg\, m^2$$

SISTEMA OSCILLANTE : PENDOLO FISICO

$$I_0 \alpha = -(m_a + m_D) g \sin\theta (O - \vec{S}_{cm})$$

per piccole oscillazioni $\sin\theta \simeq \theta$

$$I_0 \alpha = \theta g (m_A + m_D) d$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g(m_A + m_D) d}{I_0} \theta$$

posto $\omega^2 = \dfrac{g(m_A + m_D) d}{I_0}$

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

COND. INIZIALI

$\theta(0) = \frac{\pi}{2} = \theta_0$

$\dot{\theta}(0) = 0$

$\theta(0) = A\cos(\phi) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = 0$

$\dot{\theta}(0) = -A\omega\sin(\phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$ oppure $\phi = 0$

$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2.84\ s$ ✓

NO ATTRITI e SOLO FORZE CONSERVATIVE :

$$\frac{1}{2} I_0 (\omega_f^2 - \omega_i^2) - (m_A + m_D) g (\cos\theta_f - \cos\theta_i) = 0$$

$\omega_i = 0 \qquad \theta_f = \frac{\pi}{4} \qquad \theta_i = \frac{\pi}{2}$

$$\omega_f^2 = \frac{2}{I_0}(m_a + m_D) g \left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2}{I_0}(m_a + m_d) g \left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2}\right)} = 2.63\ s^{-1}$$ ✓

Oppure con la legge $\theta(t)$ :

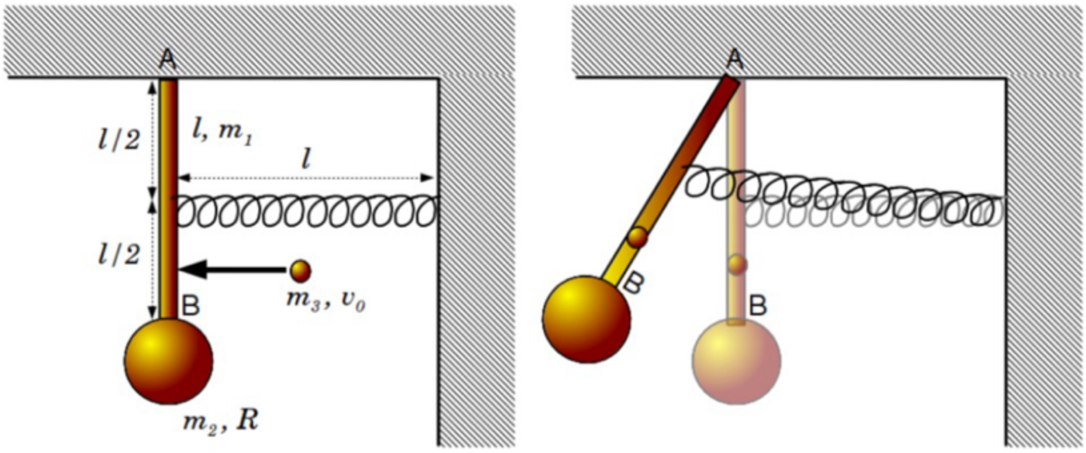
$\theta(t) = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad A_0 \cos(\omega t) = \frac{\pi}{4}$

$\cos(\omega t) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{A_0}$

$\omega t = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \bar{t}$

$\dot{\theta}(\bar{t}) = A_0 \omega \sin(\bar{t}) = \omega_1$

## Esercizio 1




Un'asta omogenea di lunghezza $l = 1$ m e massa $m_1 = 1$ Kg è appesa al soffitto nel punto $A$ e può oscillare senza attrito nel piano verticale. All'altro estremo dell'asta, $B$, è saldata una sfera di massa $m_2 = 500$ g e raggio $R = 10$ cm. Nel punto medio dell'asta, a distanza $l/2$ da $A$ e $B$, è collegata una molla ideale (massa nulla, costante elastica $k = 10$ N/m e lunghezza a riposo $l$ uguale a quella dell'asta) che, all' altro estremo e' fissata alla parete verticale. La distanza iniziale fra asta e parete verticale è $l$ ed il sistema è inizialmente in quiete. Ad un dato istante un proiettile puntiforme di massa $m_3 = 10$ g e velocità $v_0 = 100$ m/s orizzontale colpisce l'asta nel punto distante $3/4l$ dal soffitto e rimane conficcato nell'asta.

Calcolare:

a) La velocità angolare del sistema subito dopo l'urto

$$\omega = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) il modulo dell'impulso assorbito dal vincolo in $A$ durante l'urto del proiettile

$$P = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

c) la velocità del proiettile $v_0$ necessaria affinchè la sfera raggiunga un'altezza pari a $l/2$ rispetto alla sua altezza iniziale, i.e. $h_2 = l/2$

$$v_0^{min} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*(punteggio: 1.a-c = 5 punti )*

RISOLUZIONE: il proiettile colpisce l'asta e rimane conficcato. Tale fenomeno indica che l'urto è di tipo anelastico per cui si conserverebbe la quantità di moto ma il vincolo in A agisce sul sistema tramite una forza impulsiva. In questo caso è conservato il momento angolare del sistema.

Dati iniziali $\Rightarrow \omega_i = 0$

$$I_{sta}\omega_i + m_3\left(\frac{3}{4}\ell\right)\vec{V_0} = I_p\omega$$

$$\omega = \frac{m_3\left(\frac{3}{4}\ell\right)}{I_p}\vec{V_0}$$

$$I_p = I_s^A + I_a^A + I_{pr}^A = I_{cms} + (\ell+r)^2 m_2 + I_{cma} + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 m_1 + m_3\left(\frac{3}{4}\ell\right)^2 =$$

$$= \frac{2}{5}m_2R^2 + (\ell+r)^2 m_2 + \frac{1}{12}m_1\ell^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 m_1 + m_3\left(\frac{3}{4}\ell\right)^2 =$$

$$= \frac{2}{5}m_2R^2 + (\ell+r)^2 m_2 + \frac{1+3}{12}m_1\ell^2 + m_3\left(\frac{3}{4}\ell\right)^2$$

✓ $$\omega = m_3\left(\frac{3}{4}\ell\right)V_0 \cdot \frac{1}{\frac{2}{5}m_2R^2 + (\ell+r)^2 m_2 + \frac{1+3}{12}m_1\ell^2 + m_3\left(\frac{3}{4}\ell\right)^2} = 0.79\ s^{-1}$$

Dal th. IMPULSO si ha:

$$I = \Delta\vec{p}$$

$$\vec{P_i} = \vec{V_{op}}(m_1 + m_2) + m_3\vec{V_0}$$

$$\vec{P_f} = \vec{V_{cm}}(m_1 + m_2 + m_3)$$

$$\vec{P_f} - \vec{P_i} \Rightarrow \vec{V_{cm}}(m_1 + m_2 + m_3) - m_3\vec{V_0} = I$$

$$\vec{V_{cm}} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} + m_3\vec{v_3}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1\left(\frac{\ell}{2}\omega\right) + m_2(\ell+r)\omega + m_3\left(\frac{3}{4}\ell\right)\omega}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$I = m_1\left(\frac{\ell}{2}\omega\right) + m_2(\ell+r)\omega + m_3\left(\frac{3}{4}\ell\right)\omega - m_3\vec{V_0} = 0.16\ Ns$$ ✓

---

FORZA GRAVITAZIONALE

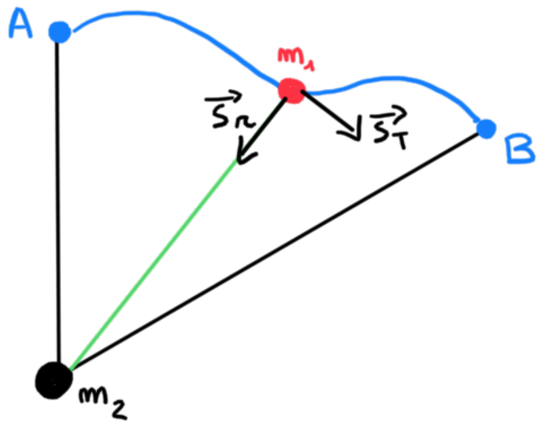
La forza gravitazionale è “scaturita” dalla massa dei corpi.

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\hat{r}$$

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

La forza gravitazionale è conservativa. Si dimostra qui di seguito:

Forze conservative => Lavoro dipendente solo dal punto di inizio e fine dello spostamento e non dal percorso.




$$L = \int_{\vec{A}}^{\vec{B}} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{\vec{A}}^{\vec{B}} \vec{F}\, d\vec{r} + \underbrace{\vec{F}\, d\vec{s}}_{= 0} = \int_{A_r}^{B_r} \vec{F}\, d\vec{r}$$

VELOCITÀ DI FUGA

ELETTROMAGNETISMO

Alla base dei fenomeni elettromagnetici c’è una proprietà della materia chiamata **carica elettrica** (oppure carica di Coulomb).

L’intensità dell’interazione elettrica, paragonata all’attrazione gravitazionale, è un’intensità molto forte.

Altra analogia tra le interazione gravitazionali ed elettriche è il fatto che tutti e due sono delle forze attrattive ed inoltre la forza elettrica può essere repulsiva.

Normalmente la materia è NEUTRA (supponiamo che i principali materiali con cui abbiamo a che fare abbiano questa proprietà).

QUANTIZZAZIONE DELLA CARICA: si dice che la carica è quantizzata. Vuol dire che tale proprietà è espressa solamente da multipli interi di una unità presa come riferimento: il *coulomb*.

Legge di Coulomb:

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

Energia potenziale in elettrostatica:

$$U = -\frac{K q_1 q_2}{r}$$

Anche in elettromagnetismo persiste il principio di conservazione del momento angolare.

CAMPO ELETTRICO

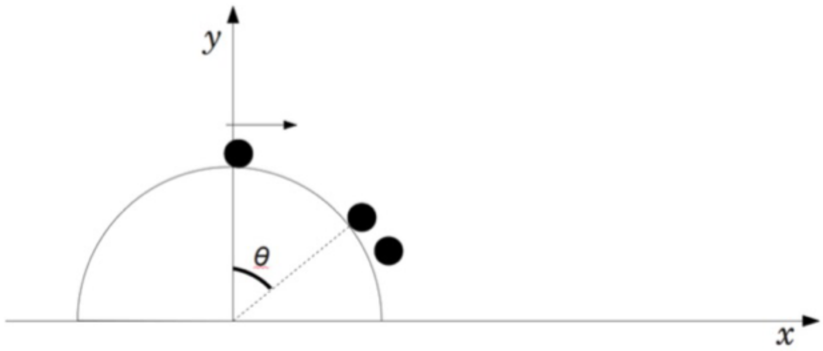
Campo di forze generato dalla presenza di una più o più cariche. Tale campo è una proprietà che appartiene allo spazio.

$$\text{CAMPO ELETTRICO} \quad E = \frac{\vec{F}}{q} = -\frac{kQ}{r^2} \hat{r}$$

Il campo elettrico è bi-segno.
Campo elettrico di una carica puntiforme: come detto in precedenza il campo generato da una carica posta in uno spazio è dato dal rapporto della carica stessa e la distanza a cui si misura il campo. Il campo prescinde dalla presenza o meno di altre cariche nello spazio ma le forze generate dal campo elettrico dipende dall'interazione tra cariche elettriche. Ricordiamo che cariche diverse generano campi diversi.
LINEE DI FORZA: raffigurazione del campo elettrico. La direzione del campo è tangente alla direzione delle linee di forza. Si assume come verso del campo è USCENTE se la carica è positiva mentre ENTRANTE se la carica è negativa.

---

## Esercizio 1




Un cilindro di raggio $r = 2cm$ e massa $m = 300g$ si trova appoggiato sulla sommità di una guida semicilindrica di raggio $R = 2.9m$ come mostrato in figura.
Il cilindro inizia a scivolare senza attrito, con una velocità iniziale trascurabile, dalla sommità della guida. Si calcoli (approssimando $R + r \approx R$)

a) La velocità $v$ (modulo e direzione) del cilindro in funzione dell'angolo $\theta$ definito in figura, finchè il cilindro resta appoggiato alla guida

$|v(\theta)| =$ .......................... *direzione* $=$ ....................

b) La forza $F$ (modulo e direzione) che la guida esercita sul cilindro in funzione dell'angolo $\theta$

$|F(\theta)| =$ .......................... *direzione* $=$ ....................

c) L'angolo $\theta_{max}$ per il quale il cilindro si distacca dalla guida circolare

$\theta_{max} =$ ..........................

d) La velocità $v_f$ (componenti $x$ e $y$) del cilindro quando giunge a terra e l'intervallo di tempo $\Delta t$ tra il distacco dalla guida e l'arrivo a terra

$v_x^f =$ .......................... $v_y^f =$ .......................... $\Delta t =$ ..........................

Si consideri adesso il caso in cui il cilindro, che è da considerarsi *pieno* e di densità uniforme, sempre partendo dalla sommità del cilindro, rotoli sulla superficie della guida senza strisciare. Si calcolino anche in questo caso

e) Il modulo della velocità $|v(\theta)|$ del cilindro in funzione dell'angolo $\theta$ (prima del distacco)

$|v(\theta)| =$ ..........................

f) La componente radiale della forza $F$ che la guida esercita sul cilindro in funzione dell'angolo $\theta$ e l'angolo $\theta_{max}$ per il quale il cilindro si distacca dalla guida circolare

$F(\theta)_{perp} =$ .......................... $\theta_{max} =$ ..........................

*(punteggio: 1.a = 1 punto, 1.b-1.c = 2 punti, 1.d = 4 punti, 1.e-1.f = 3 punti)*

---

Risoluzione:

NO ATTRITO, FORZE CONSERVATIVE => SI CONSERVA E.M.

$$\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) + mg(\cos\theta R - R) = 0$$

$$v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad v_f = \sqrt{-2gR(\cos\theta - 1)}$$

$$|v(\theta)| = \sqrt{-2gR(\cos\theta - 1)} \quad ✓$$

Se vettore posizione è dato da:

$$r_\theta = [(\sin\theta\,\hat{i}, \cos\theta\,\hat{j}, 0)\cdot R]\,m$$

$$r_\theta \perp v_\theta \quad \Rightarrow \quad v_\theta = |v_\theta|(\cos\theta\,\hat{i}, -\sin\theta\,\hat{j}, 0)\,m \quad ✓$$

Visto che il cilindro percorre una traiettoria idealmente circolare la forza agente sul cilindro è radiale e tale forza è data:

$$\vec{F}_{radiale} = \vec{P}_{CILINDRO} + \vec{F}_\theta$$

$$m_c\vec{a}_{centripeta} = \vec{P}_{CILINDRO} + \vec{F}_\theta$$

$$m\frac{v(\theta)^2}{R} = -mg\cos\theta + \vec{F}_\theta$$

$$|\vec{F}(\theta)| = m\left(\frac{v(\theta)^2}{R} - g\cos\theta\right)N$$

$$\vec{F}(\theta) = |\vec{F}(\theta)|(\sin\theta\,\hat{i}, \cos\theta\,\hat{j}, 0)\,N \quad ✓$$

$$|F(\theta)| = -m\left(2g(\cos\theta - 1) + g\cos\theta\right) =$$

$$= -mg(2\cos\theta - 2 + \cos\theta) =$$

$$= -mg(3\cos\theta - 2) \quad ✓$$

Quando il cilindro si distacca dalla guida? Quando non vi è più alcuna forza radiale che mantiene il cilindro in traiettoria.

$$F_\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad -mg(3\cos\theta - 2) = 0$$

$$\begin{matrix} m \neq 0 \\ g \neq 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 3\cos\theta - 2 &= 0 \\ \cos\theta &= \frac{2}{3} \\ \theta &= \arccos\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Quando il cilindro si stacca dalla guida parte con una traiettoria tangente alla semicirconferenza. Da questo punto in poi il cilindro, si assume come un punto materiale, si muove di una composizione di moto rettilineo uniforme con una velocità iniziale (asse x) e di moto rettilineo uniformemente accelerato (asse y).

$$|\vec{V}_{ox}| = |v(\theta_{max})| \cos\theta_{max} \qquad |v(\theta)| = \sqrt{-2gR(\cos\theta - 1)}$$

$$|\vec{V}_{oy}| = |v(\theta_{max})| \sin\theta_{max}$$

$$\Delta t \Rightarrow \quad 0 = \underbrace{R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{max}\right)}_{h_i} - |\vec{V}_{oy}| t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t_{1,2} = \frac{\vec{V}_{oy} \pm \sqrt{V_{oy}^2 + 4h_i\left(\frac{1}{2}g\right)}}{-g}$$

Si prende il risultato positivo.

$$\Delta t = \frac{\vec{V}_{oy} - \sqrt{V_{oy}^2 + 4h_i(\frac{1}{2}g)}}{-g}$$

$$V_{f_x}(\Delta t) = V_{ox} = \sqrt{-2gR(\cos\theta - 1)} \cdot \cos(\arccos\tfrac{2}{3}) = 2.9 \ \frac{m}{s}$$ ✓

CASO DI MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

Condizioni di moto di puro rotolamento:

$v_{cm} = \omega r$

$$\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) - mgR(\cos\theta - 1) = 0$$

$$\frac{1}{2}I(\omega_f^2 - \omega_i^2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$v_i = 0 \ ; \quad v_f = v_{cm} \Rightarrow$ MOTO PURO ROTOLAMENTO

$$\Downarrow$$

$$v_{cm} = \omega r = v_f$$

SOMMANDO MEMBRO A MEMBRO

$$\frac{1}{2}mr^2\omega_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 = mgR(1-\cos\theta)$$

$$\omega_f^2 = \frac{2mgR(1-\cos\theta)}{mr^2 + I}$$

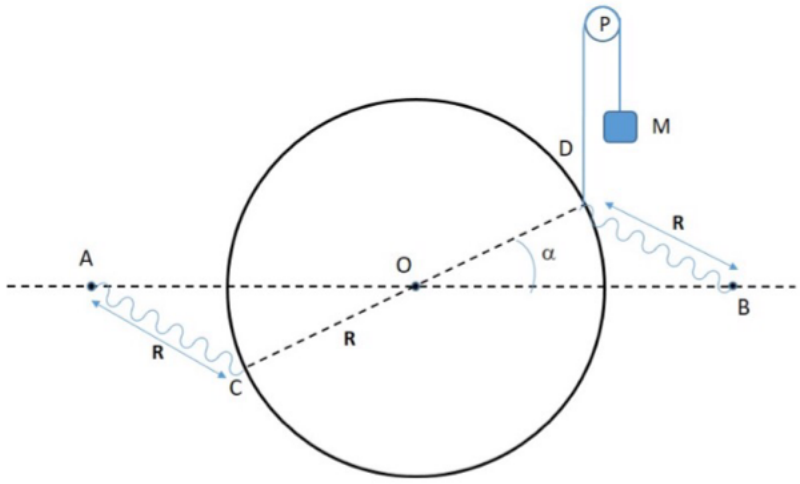
$$\omega_f = \sqrt{\frac{2mgR(1-\cos\theta)}{mr^2 + I}} =$$

$$\omega_f = \sqrt{\frac{4}{3}gR(1-\cos\theta)} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\Downarrow$$

$$v(\theta) = \sqrt{\frac{4}{3}gR(1-\cos\theta)}$$ ✓

## Esercizio 1




Un disco di legno (densità $\rho_{legno}$, raggio R e spessore d) può ruotare intorno a un asse orizzontale passante per il suo centro O. Nei punti A e B, posti lungo la retta passante per il diametro orizzontale, sono disposte due molle di lunghezza a riposo nulla e costanti elastiche $k_{BD} = k$ e $k_{AC} = 2k$, i cui altri estremi sono connessi al bordo del disco, rispettivamente nei punti C e D.
Un filo ideale esercita una forza verticale nel punto D ed il sistema risulta in equilibrio nella configurazione in figura, per la quale l'angolo $\alpha = \pi/6$ e la lunghezza di ciascuna molla è pari a R.
A tale filo è appesa una massa M attraverso una carrucola fissa (P) avente massa nulla, su cui il filo può scorrere senza strisciare.

1. Calcolare il valore della massa M nella configurazione di equilibrio.
   $M =$ ...............

2. All'istante t=0 il filo viene tagliato. Calcolare l'accelerazione angolare, $\dot{\omega}$, e la reazione vincolare in O, $\vec{R}_O$ subito dopo il taglio del filo.

   $\dot{\omega} =$ ............... $\vec{R}_O =$ ...............

3. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni $T$ intorno alla posizione di equilibrio del sistema molle-disco, quando il filo è tagliato
   $T =$ ...............

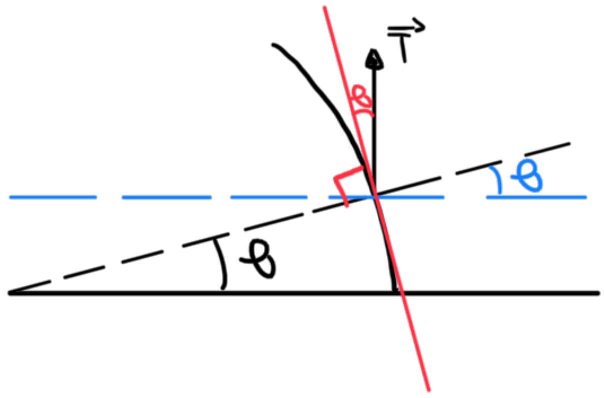
[ assumere l'accelerazione di gravità $g = 10\ m/s^2$, $\rho_{legno} = 0.4\ g/cm^3$, $R = 1\ m$, $d = 1\ cm$, $k = 10\ N/m$]



Risoluzione:

Dalle informazioni date dal testo si scrivono le due equazioni cardinali:

① $$\sum_y \vec{F}_y = \vec{T} + \vec{F}_{y\,MOLLA} - \vec{P} = 0$$
$$\sum_x \vec{F}_x = \vec{F}_{x\,MOLLA} = 0$$



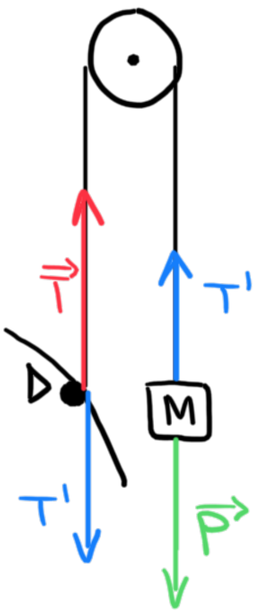

② $$\sum I_0 \dot{\omega} = \vec{T}\cos\theta R - \vec{F}_{y\,MOLLA}$$

Consideriamo solo il moto ROTAZIONALE, quindi dalla ② segue:

$$\vec{T}\cos\theta R - 2kR^2\sin\theta - kR^2\sin\theta = 0$$
$$\vec{T} = \frac{3k\sin\theta}{\cos\theta}R$$

Scopriamo da cosa è composta $\vec{T}$: si noti che se il sistema è fermo anche la carrucola è in equilibrio. Da ciò segue:

$$\sum F_{CARRUCOLA} = 0 \Rightarrow \vec{T} - \vec{T}' + \vec{T}' - M\vec{g} = 0$$
$$\vec{T} = Mg$$




Infine:

$$M = 3\frac{k}{g}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}R = 3\frac{k}{g}\tan\theta R$$

All'istante $t=0$ il filo viene tagliato.
Calcolare $\dot{\omega}$.

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_y &= -\vec{P} + \vec{R}_y - k\sin\theta R + 2k\sin\theta R \\ \vec{F}_x &= -2k\cos\theta R + k\cos R + \vec{R}_x \end{aligned}\right\} \text{① Equazione cardinale}$$

$$I\dot{\omega} = -K\sin\theta R^2 - 2K\sin\theta R^2$$

$$\dot{\omega} = -\frac{3K\sin\theta R}{I} = \frac{-3K\sin\theta R^2}{\frac{1}{2}M_{DISCO}R^2} = -3\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10\cdot\frac{2}{2\pi\,\rho\cdot d} = -4.1\ s^{-2}$$

$$M_{DISCO}\cdot(\dot{\omega}R) = -M_{DISCO}g + \vec{R}_y - K\sin\theta R + 2K\sin\theta R$$

$$M_{DISCO}\cdot(\dot{\omega}R) = -2K\cos\theta R + K\cos R + \vec{R}_x$$

Dato l' equilibrio TRASLAZIONALE

$$0 = -M_{DISCO}g + \vec{R}_y - K\sin\theta R + 2K\sin\theta R$$

$$0 = -2K\cos\theta R + K\cos R + \vec{R}_x$$

$$\vec{R}_y = M_{DISCO}g - K\sin\theta R = 12.6\ Kg\cdot 10\frac{m}{s^2} - 10\cdot\frac{1}{2} = 121\hat{j}\ N$$

$$\vec{R}_x = K\cos\theta R = 5\sqrt{3}\,\hat{i}\ N$$

Il periodo delle piccole oscillazioni può essere calcolato osservando che dalla posizione di equilibrio (quindi quando le forze esterne e i momenti sono nulli) il disco si muove intorno all’asse O di moto oscillatorio.

Si noti che durante il moto oscillatorio l’energia è conservata perché agiscono solo forze conservative.

I punti C e D oscillano intorno l’asse orizzontale durante il moto rotatorio. Di seguito scrive l’equazione dell’energia:

$$\frac{1}{2}I_0(\omega_f^2 - \omega_i^2) + 2K$$