



# Fondamenti di Automatica 077II-9 CFU



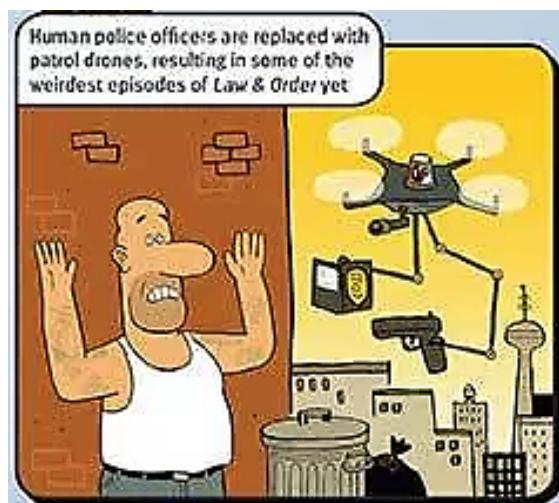
Università di Pisa, Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

Laurea Triennale in Ingegneria Informatica

[02.03.20 – 08.04.20], [16.04.20 – 30.05.20]

|                 |           |               |     |
|-----------------|-----------|---------------|-----|
| Orario Lezioni: | Martedì   | 10:30 – 13:30 | F06 |
|                 | Mercoledì | 11:30 – 13:30 | PN1 |
|                 | Giovedì   | 11:30 – 13:30 | F08 |
| Ricevimento     | Martedì   | 15:00 – 18:00 |     |

## Docenti



Mario Innocenti (6 CFU)

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DII),  
Università di Pisa

Tel. 050-2217319, email: [mario.innocenti@unipi.it](mailto:mario.innocenti@unipi.it)

Riccardo Costanzi (3 CFU)

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DII),  
Università di Pisa

Tel. 050-2217314, email: [riccardo.costanzi@unipi.it](mailto:riccardo.costanzi@unipi.it)



# Obiettivi Formativi



- **Obiettivi Formativi**

- Il corso si propone di fornire concetti di base per l'analisi ed il controllo di sistemi dinamici continui. Vengono presentate le tecniche principali per la valutazione della stabilità e delle proprietà strutturali. Viene affrontata la sintesi in frequenza di sistemi di controllo su applicazioni ingegneristiche di processi industriali. Al termine del corso, lo studente sarà in grado di:
  - Rappresentare analiticamente una classe di processi dinamici naturali ed ingegneristici, che possano essere descritti da modelli basati su equazioni differenziali lineari.
  - Definire le linee di massima per il progetto di sistemi di controllo standard.
  - Usare metodologie progettuali basate sulla sistemistica e la valutazione analitica di processi dinamici.
  - Usare strumenti numerici e di calcolo quali Matlab e Simulink, come supporto all'analisi ed alla sintesi.

- **Collocazione Didattica**

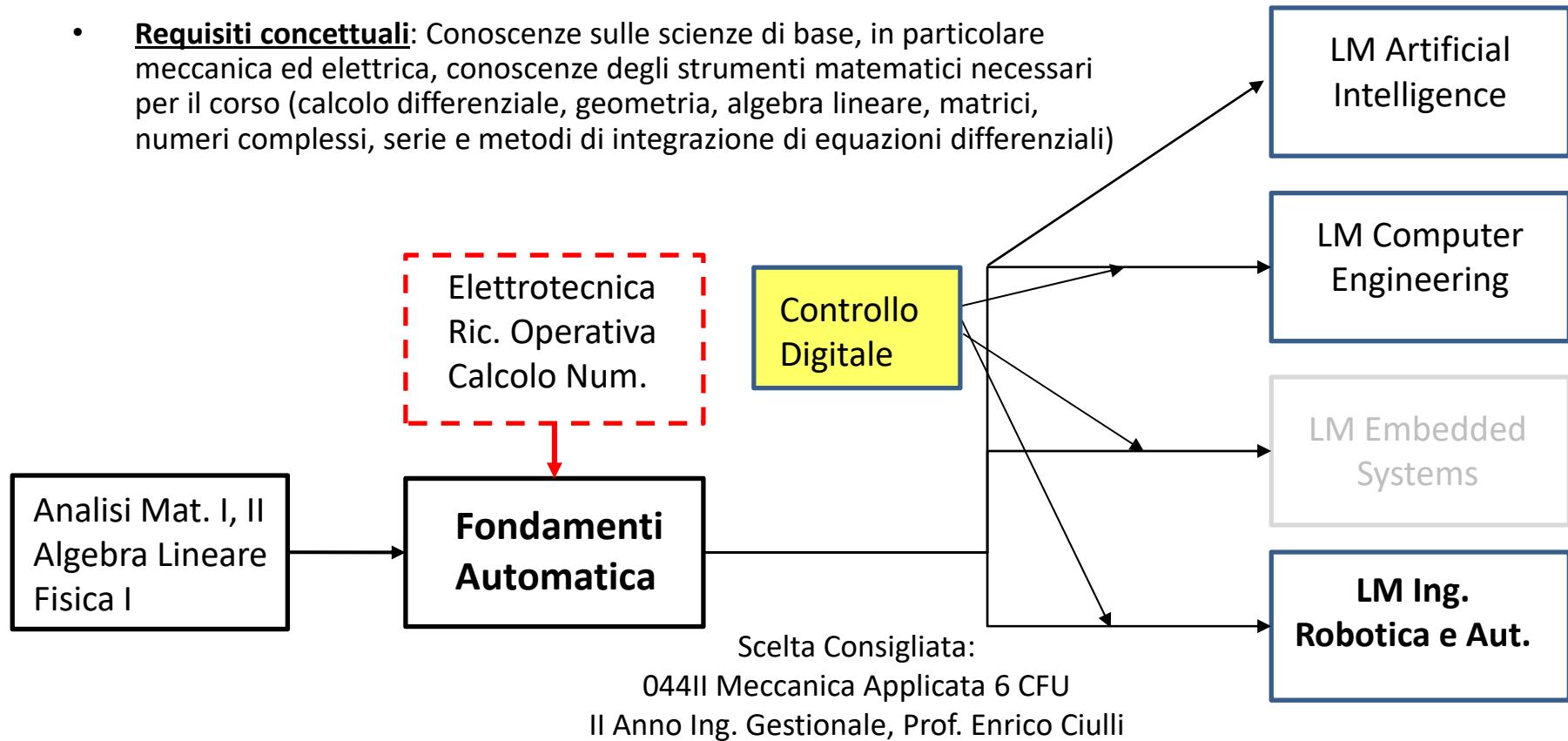
- Il corso fa parte dell'insieme degli insegnamenti caratterizzanti per la Laurea in Ingegneria Informatica ed appartiene al settore scientifico disciplinare ministeriale SSD ING-INF/04: Automatica.



# Prerequisiti e Percorso Formativo



- **Prerequisiti/Corequisiti**
- **Prerequisiti formali:** Fisica Generale I, Analisi Matematica II ed Algebra Lineare.
- **Corequisiti:** Elettrotecnica, Ricerca Operativa, Calcolo Numerico.
- **Requisiti concettuali:** Conoscenze sulle scienze di base, in particolare meccanica ed elettrica, conoscenze degli strumenti matematici necessari per il corso (calcolo differenziale, geometria, algebra lineare, matrici, numeri complessi, serie e metodi di integrazione di equazioni differenziali)





# Informazioni sul Materiale Didattico



- **Testi e Riferimenti**

- Il materiale in programma è disponibile in una quantità molto ampia di testi sia italiani che stranieri di controlli automatici. Due testi di base sono i seguenti:
  - **[“Fondamenti di Controlli Automatici”](#)**, IV Edizione, P.Bolzern, R.Scattolini, N.Schiavoni, McGraw Hill, Milano. (Capitoli 1,2,3,4,5,6,7,10,11,12,13,14,15,16,20 Appendici)
  - **[“Fondamenti di Sistemi dinamici”](#)**, S.Chiaverini, F.Caccavale, L.Villani, L.Sciavicco, McGraw Hill, Milano 2003. (Capitoli 1,2,3,4,5,appendici).
- La lista seguente presenta testi aggiuntivi che sono disponibili in biblioteca d'Ateneo e che possono contenere informazioni complementari ed esercizi svolti e da svolgere.
  - K. Ogata: “Modern Control Engineering”, Prentice Hall, Fifth Ed., 2010. (Tutti i capitoli)
  - G Dutton, S. Thompson, B Barraclough: “The Art of Control Engineering” Addison Wesley, 1997. (I capitoli appropriati)
  - Dorf: “Modern Control Engineering”, Addison Wesley 1991 ed edizioni successive. (I capitoli appropriati).
  - **Lewis: A Mathematical Approach to Classical Control**, [downloadable](#).
  - **Murray, Astrom: Feedback Systems**, [downloadable](#).
  - **WIKI Control Systems e Signals and Systems**, [downloadable](#).
- Si assume che gli studenti abbiano accesso a MATLAB, per svolgere numericamente problemi ed esercizi.  
[LICENZA MATLAB](#)

- Il materiale presentato a lezione va considerato come una traccia, da completarsi con lo studio nei testi di riferimento e può essere scaricato dal sito del docente: [https://people.unipi.it/mario\\_innocenti/](https://people.unipi.it/mario_innocenti/). Il materiale è disponibile agli studenti del corso e non può essere riprodotto né usato a fini commerciali senza il consenso dell'autore.**
- Il materiale presentato a lezione fa riferimento a materiale disponibile da parte di altri autori, non vincolato a copyright. Si ringraziano i vari autori per la disponibilità ad uso didattico senza scopo di lucro.**



## Informazioni sulla Verifica



- L'iscrizione all'esame avviene per via elettronica ([esami.unipi](#)).
- A causa dell'elevato numero di studenti, lo spostamento dell'esame a data diversa da quella stabilita nell'appello non è consentito (eccetto emergenze documentate e di natura medica).
- Gli appelli straordinari vengono offerti secondo le modalità definite dalla Scuola di Ingegneria
- L'esame è soltanto orale e comprende anche la soluzione di esercizi numerici. La valutazione dell'esame è fatta in base alla verifica delle conoscenze acquisite, alle capacità di sintesi e della presentazione orale del materiale.
- L'esame viene verbalizzato indipendentemente dall'esito e deve essere sostenuto dopo aver superato gli esami relativi ai prerequisiti.
- Esercizi addizionali a quelli presentati a lezione disponibili in rete su siti italiani e stranieri  
[Lanari](#) [Oriolo](#) [Link ad esercizi in rete](#)
- Lo studente è responsabile per l'intero programma del corso e per gli argomenti propedeutici necessari alla comprensione del programma del corso stesso.
- La frequenza alle lezioni non è obbligatoria, ma fortemente suggerita. Le lezioni frontali costituiscono una parte fondamentale nel percorso formativo, oltre a permettere allo studente di avere chiarimenti sui concetti presentati. Il docente si assume la responsabilità di verificare periodicamente il numero di studenti a lezione a fini puramente statistici come richiesto dal Consiglio di Corso di Studio.

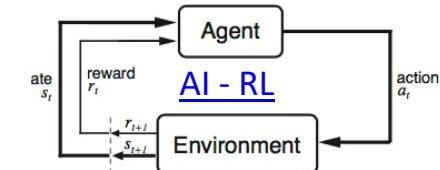


# Informatica ed Automatica



Il Corso di Laurea in Ingegneria Informatica si propone di formare laureati dotati di una preparazione culturale di base, di conoscenze ingegneristiche intersetoriali, di approfondite competenze informatiche, capaci di “realizzare, configurare e gestire elaboratori e reti di elaboratori, applicazioni software, sistemi di **automazione** industriale, sistemi informativi aziendali, servizi di calcolo e di rete, sistemi integrati di acquisizione, elaborazione e **controllo**”.

I possibili **sbocchi occupazionali** riguardano anzitutto le industrie informatiche operanti negli ambiti della produzione di hardware e software e le industrie per **l'automazione industriale**. Inoltre, vista la natura pervasiva dell'informatica, questo tipo di laureato è richiesto in tutte le imprese che utilizzano sistemi informativi e reti di calcolatori nell'ambito dei propri processi produttivi e/o gestionali, nelle imprese di servizi, in particolare nei servizi informatici della pubblica amministrazione. Sono infine molto diffuse, dati i modesti investimenti necessari, le attività libero-professionali, in particolare per la realizzazione di **sistemi di calcolo** e di **controllo** destinati ad applicazioni specifiche. I principali ruoli che un laureato in Ingegneria Informatica potrà ricoprire in questi ambiti sono i seguenti: - progettista e gestore di elaboratori, di reti di elaboratori e di servizi di rete; - progettista e gestore di sistemi e servizi in ambiente web; - progettista di sistemi software e di software applicativo con particolare riferimento alle tecnologie e metodologie object-oriented; - progettista di sistemi integrati di acquisizione, **elaborazione e controllo**; - progettista e gestore di centri per l'elaborazione dati.





# Concetti Principali



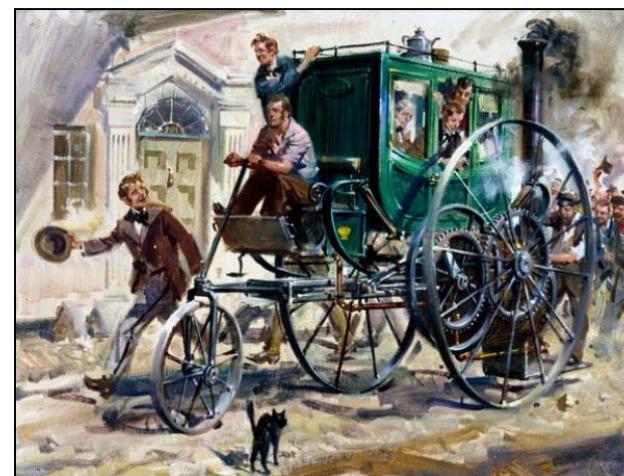
- **Concetti Base:** Il corso si basa sulla integrazione di 3 componenti fondamentali comuni in particolare all'ingegneria dell'automazione, ma riscontrabili in larga misura nelle altre aree dell'ingegneria, in fenomeni naturali, in macchine ed elementi artificiali e nel comportamento stesso di specie viventi ivi compresa quella umana ( ... a volte...).
  - **Sistema/Impianto:** L'oggetto di interesse. Macchinario, fenomeno naturale i quali sono descritti matematicamente con un'approssimazione tale da poter ricavarne gli elementi causali essenziali (Modellistica, Teoria dei Sistemi), producendo un **MODELLO** operativo.
  - **Controllo:** “Un controllore misura il comportamento di un sistema, lo paragona a valori desiderati, calcola eventuali azioni correttive basandosi su specifiche della risposta del sistema a ingressi esterni e forza il sistema a variare il proprio funzionamento nel modo desiderato”. (Controlli Automatici)
  - **Informazione/Implementazione:** Elementi che permettono al controllore di conoscere l'evoluzione del sistema e di intervenire con interfaccia e potenza appropriate (sensori, attuatori).
- **Struttura più comune di intervento di controllo**
  - **Feedback/Retroazione/Anello Chiuso/...:**
    - Feedback è una procedura essenziale nei sistemi biologici, fisici, naturali ed artificiali. Il processo di retroazione gestisce come si cresce, come si risponde allo stress ed alle difficoltà e regola fattori quali la temperatura corporea, la pressione sanguigna, il livello di colesterolo. I meccanismi di feedback operano a tutti i livelli, dall'interazione delle proteine nelle cellule, ai macrosistemi ambientali complessi.
    - Feedback è una procedura fondamentale tutte le volte che macchinari, processi industriali, sistemi informatici complessi e distribuiti devono operare mantenendo dei requisiti di precisione, caratteristiche operative e stato nominale i quali possono variare a causa di fattori esterni, guasti, variazioni ambientali, ecc.



## Motivazione (Esempio Automotive 1)



Prima..

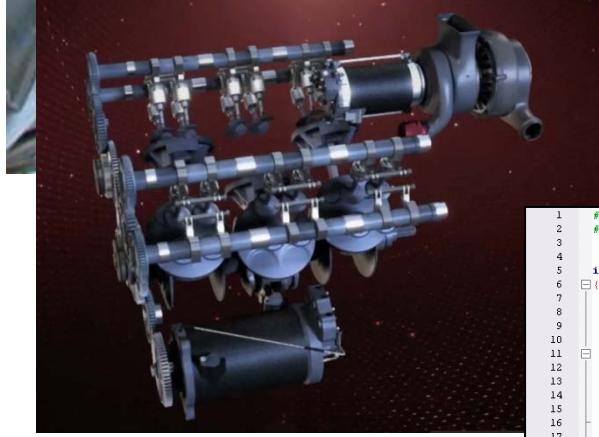
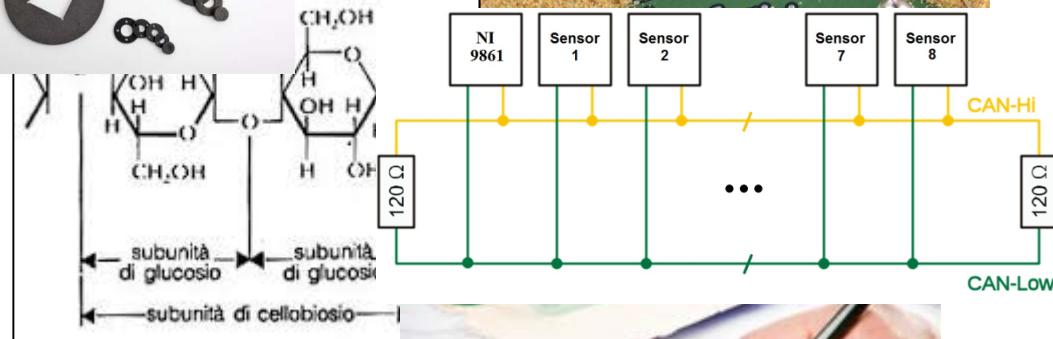


Cugnot, 1769





## Motivazione (Esempio Automotive 2)



```
1 #include <stdio.h>
2 #include <windows.h>
3
4
5 int main(void)
6 {
7     POINT mouse, old_mouse;
8     if (!GetCursorPos(&mouse)) return -1;
9     old_mouse = mouse;
10    while(1)
11    {
12        if (!GetCursorPos(&mouse)) return -1;
13        if (mouse.x != old_mouse.x || mouse.y != old_mouse.y)
14            printf("%d %d\n", mouse.x, mouse.y);
15        old_mouse = mouse;
16    }
17    return 0;
18 }
```





## Motivazione (Automotive 2)



Adesso... io speriamo che si vince...

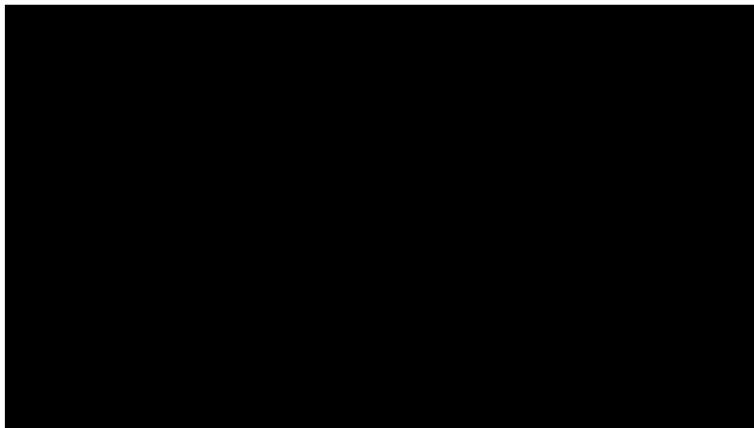


- **Fisica:** principi fondamentali di statica, dinamica, elettromagnetismo, ottica,...
- **Chimica:** combustione, proprietà materiali gassosi, liquidi, iniezione, calore,...
- **Ingegneria Meccanica:** materiali (carbonio, gomma, acciaio, titanio,...), motore, differenziale, cambio, ruote dentate, ammortizzatori, pompe,...
- **Ingegneria Aeronautica:** aerodinamica, fluidodinamica, effetto suolo,...
- **Ingegneria dell'Informazione:** schede, centraline di comando, processori, codifica, trasmissione segnali, acquisizione informazioni sullo stato, interfaccia uomo – macchina,...
- **Ingegneria Gestionale:** produzione, indagine di mercato, marketing, vendita, rapporto con l'utenza,...
- **Ingegneria Biomedica:** preparazione psico – fisica del pilota, training
- **Amministrazione:** regolamentazione componenti, soddisfacimento requisiti di emissione, qualifica conducente (patenti,...), ...



## Motivazione (Esempio)

- Domanda: **dove e come** interveniamo come esperti di Automatica?



### Nuovo Incidente per la Google Car

Furgone passa col rosso e colpisce la fiancata destra dell'auto

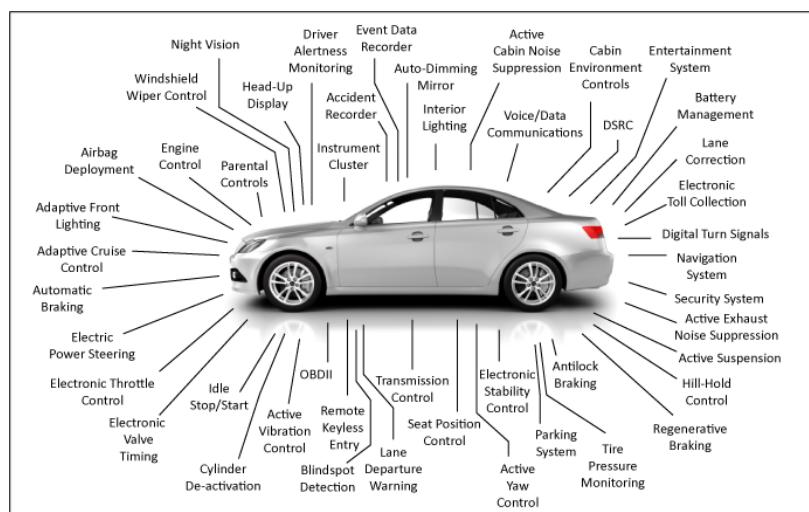


VisLab, start-up italiana comprata da azienda Usa per 30 milioni di dollari

#### Vi aspettate resistenze?

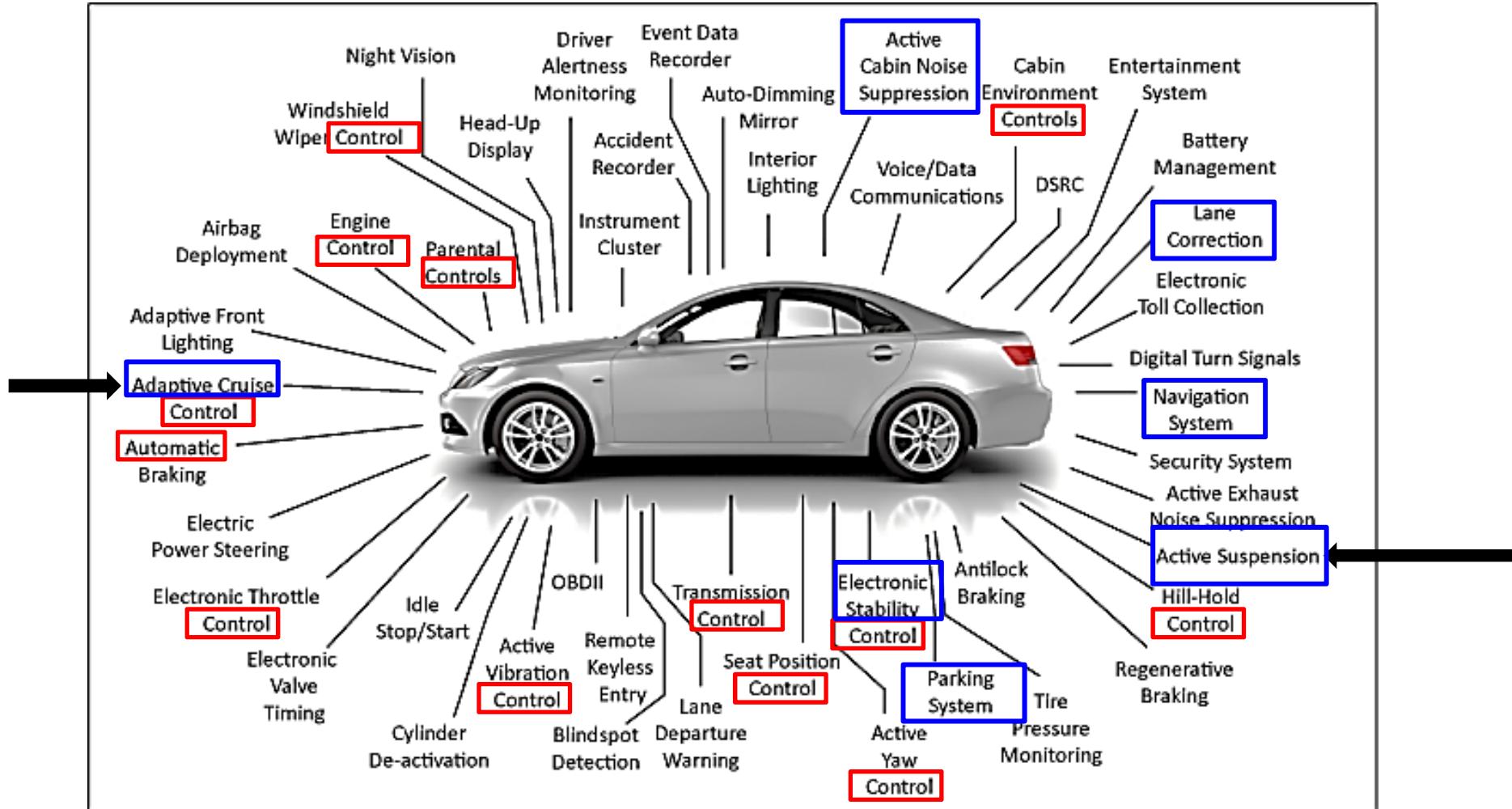
"Mi sembra che le persone si dividano in due gruppi. Quelli che non si fidano, e quelli convinti della totale sicurezza della tecnologia. Questi secondi sono anche più pericolosi, pensano che la guida autonoma sia una magia che risolve tutti i problemi, grazie alla velocità e alla precisione di calcolo dei computer. Ma le leggi della fisica vanno comunque rispettate".

These are impressive amounts of software, yet if you bought a premium-class automobile recently, "it probably contains close to 100 million lines of software code," says Manfred Broy, a professor of informatics at Technical University, Munich, and a leading expert on software in cars. All that software executes on 70 to 100 microprocessor-based electronic control units (ECUs) networked throughout the body of your car.





These are impressive amounts of software, yet if you bought a premium-class automobile recently, "it probably contains close to 100 million lines of software code," says Manfred Broy, a professor of informatics at Technical University, Munich, and a leading expert on software in cars. All that software executes on 70 to 100 microprocessor-based electronic control units (ECUs) networked throughout the body of your car.





## Cruise Control - Automotive

### OBIETTIVO 1:

Mantenere una velocità costante in presenza di variazioni della pendenza stradale  
**(STABILITA', EQUILIBRIO)**



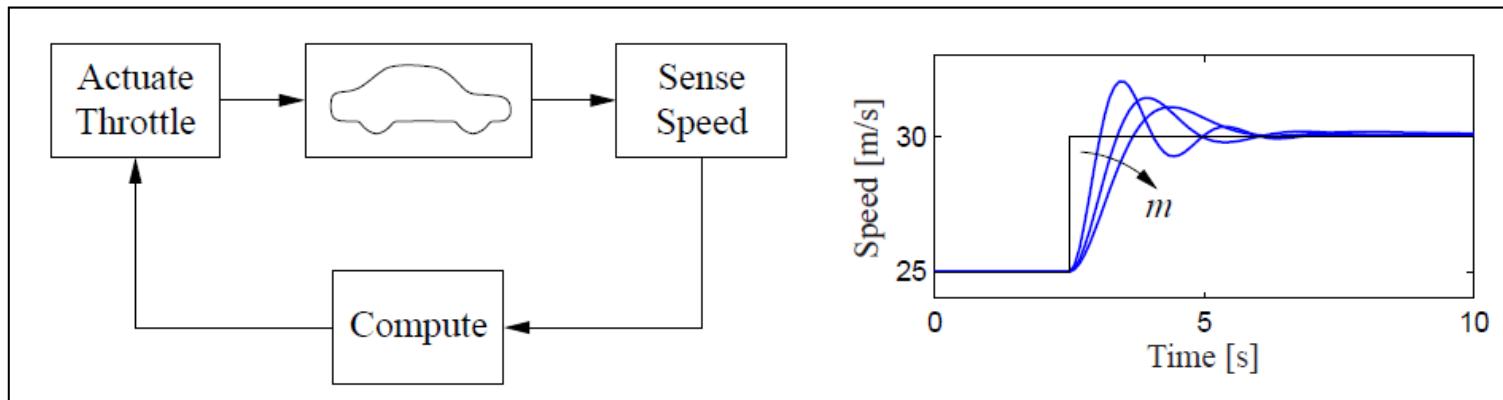
- Informazioni sulla velocità ad ogni istante, informazioni sulla velocità desiderata e, se possibile, informazioni sulla pendenza della strada
- Tempo necessario al recupero della velocità desiderata, come la velocità varia prima di tornare al valore desiderato
- Azionamento dell'acceleratore, ovvero gestione del numero di giri del motore per annullare la variazione di velocità (accelerazione e/o decelerazione)



## Cruise Control - Automotive

### **OBIETTIVO 2:**

Variazione di velocità (**INSEGUIMENTO DI UN COMANDO, TRACKING, PUNTO OPERATIVO**)



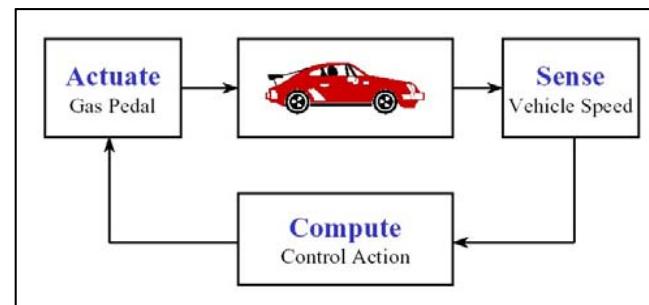
- Informazioni sulla velocità ad ogni istante, informazioni sulla velocità desiderata
- Tempo necessario per raggiungere la velocità desiderata, andamento della velocità nel transitorio (presenza o meno di oscillazioni)
- Azionamento dell'acceleratore, ovvero gestione del numero di giri del motore per fornire la necessaria accelerazione o decelerazione



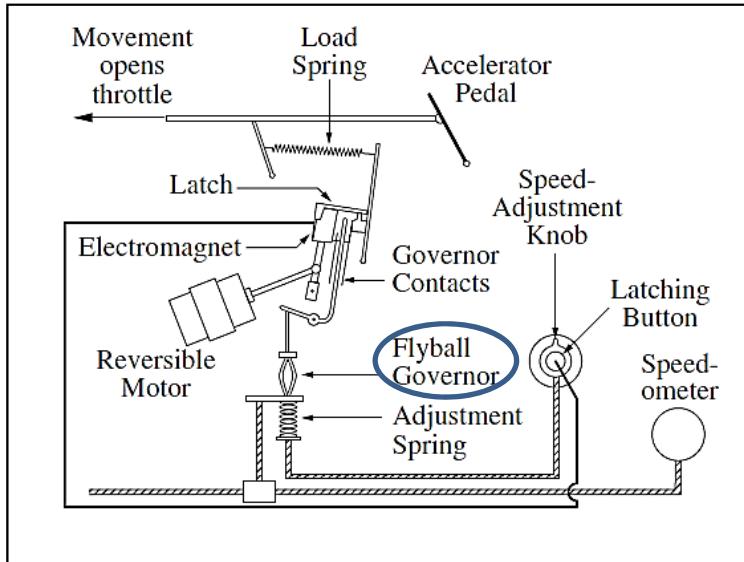
## Cruise Control - Automotive



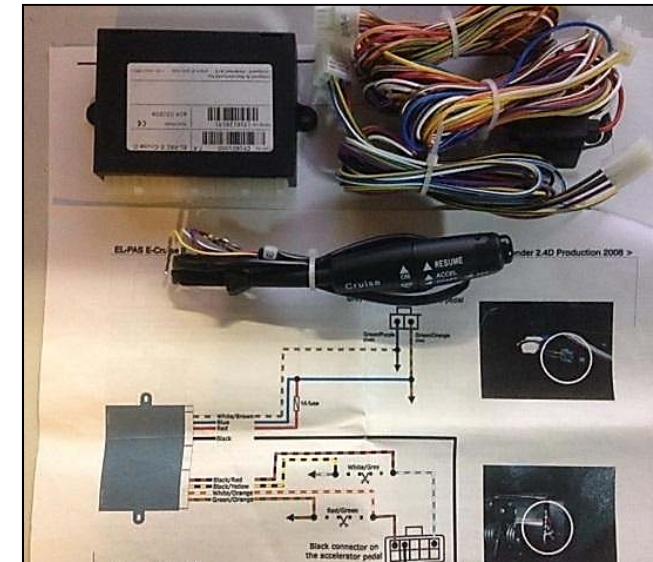
- Una volta **misurata** la velocità, **introdotto** il valore della velocità desiderata, si può azionare il meccanismo che serve ad **attuare** la **decisione** di come deve variare la velocità dal valore corrente al valore desiderato.



## Chrysler – 1958 (FIAT ?..)



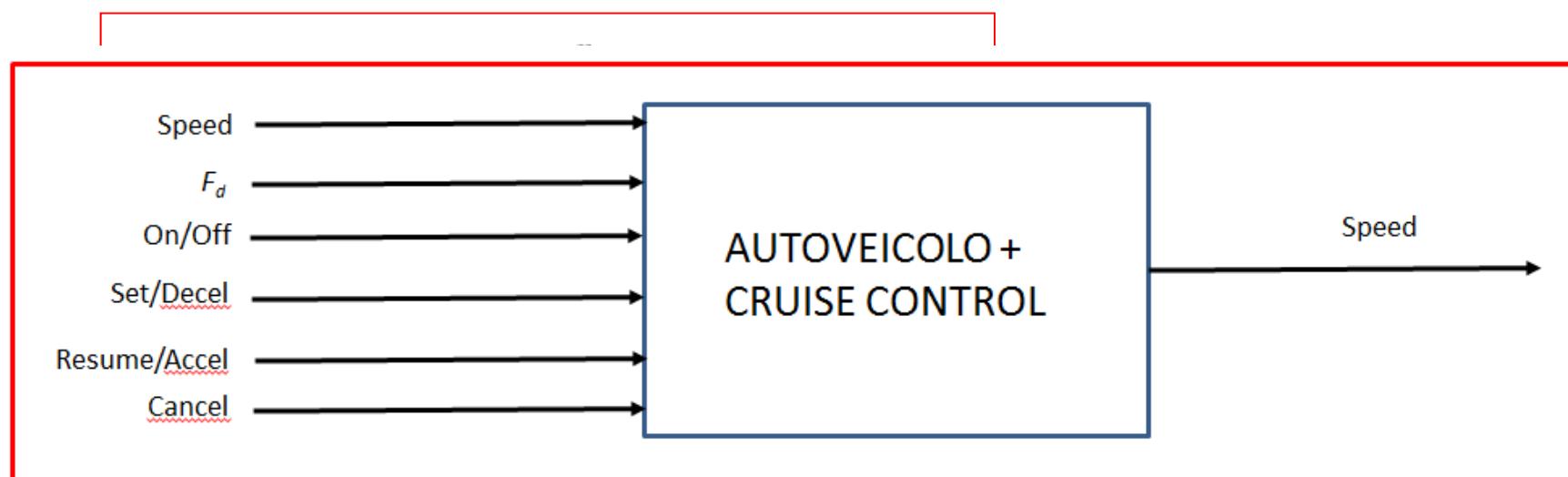
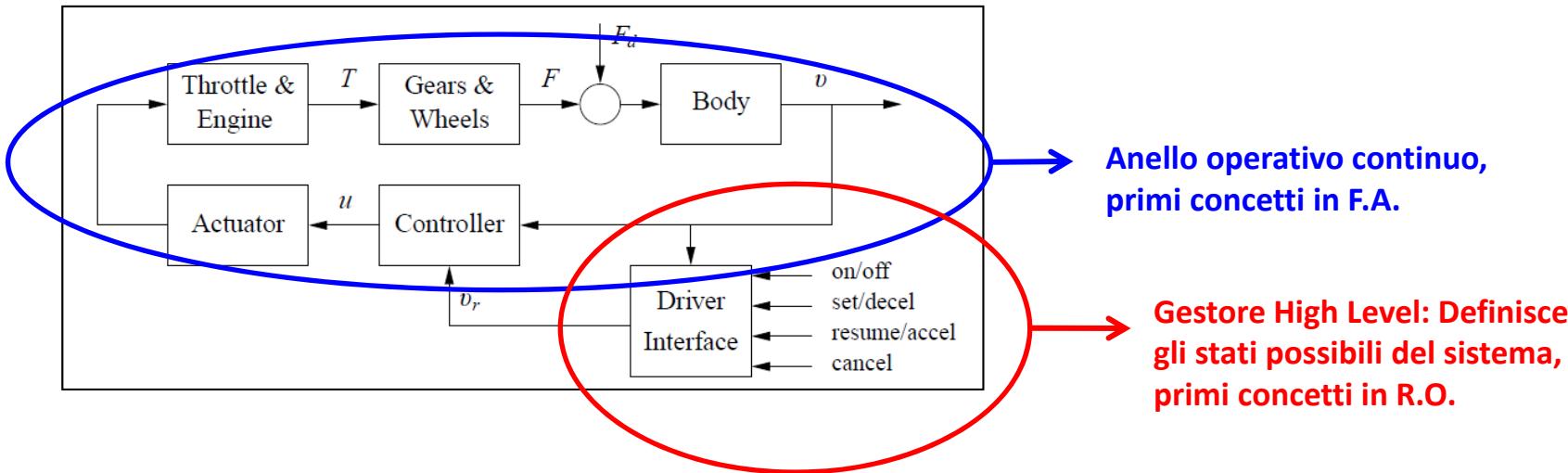
Online





## Cruise Control - Automotive

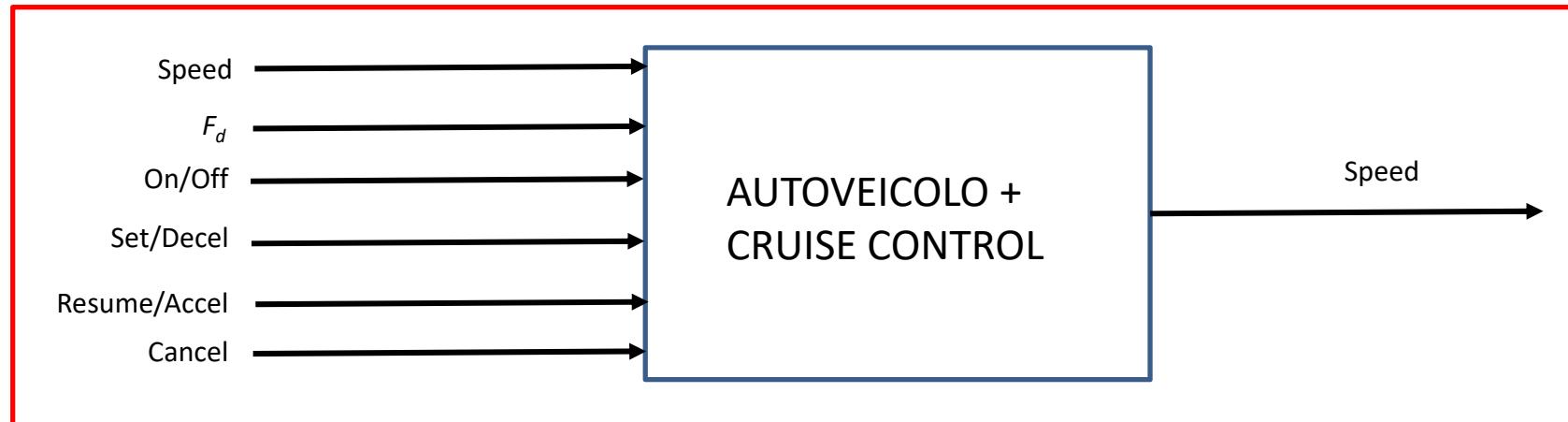
- Impostazione matematica del problema (tratto dal testo di Murray):





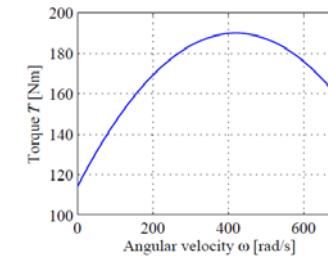
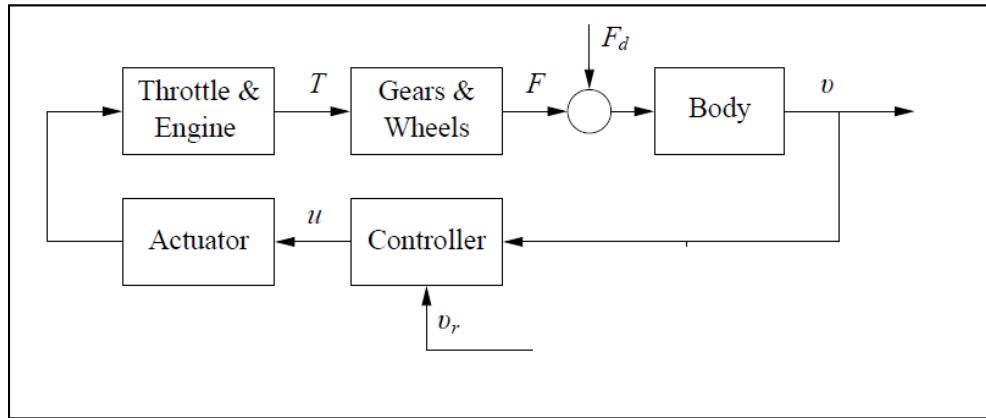
## Cruise Control - Automotive

- Descrizione grafica mediante “algebra a blocchi”:





# Cruise Control - Automotive



## 1. Moto del veicolo

$$m \frac{dv}{dt} = F - F_d \quad \text{Forza motore} - \text{Somma Forze Disturbo (Gravità, attrito, Resistenza Aer.)}$$

## 2. Coppia motrice e forza motore

$$T(\omega) = T_m \left( 1 - \beta \left( \frac{\omega}{\omega_m} - 1 \right)^2 \right)$$

$T(\omega)$  Coppia motrice [  $T_m$  coppia max.].  $T$  è funzione del sistema di iniezione, controllata dall'acceleratore ( $0 < u < 1$ ) e dalla velocità angolare dell'albero motore  $\omega$ .

$$\omega = \frac{n}{r} v =: \alpha_n v; (\alpha_i = 1, 2, 3, 4, \dots)$$

Velocità angolare motore funzione del rapporto di trasmissione e velocità tangenziale

$$F = \alpha_n u T(\alpha_n v)$$



## Cruise Control - Automotive



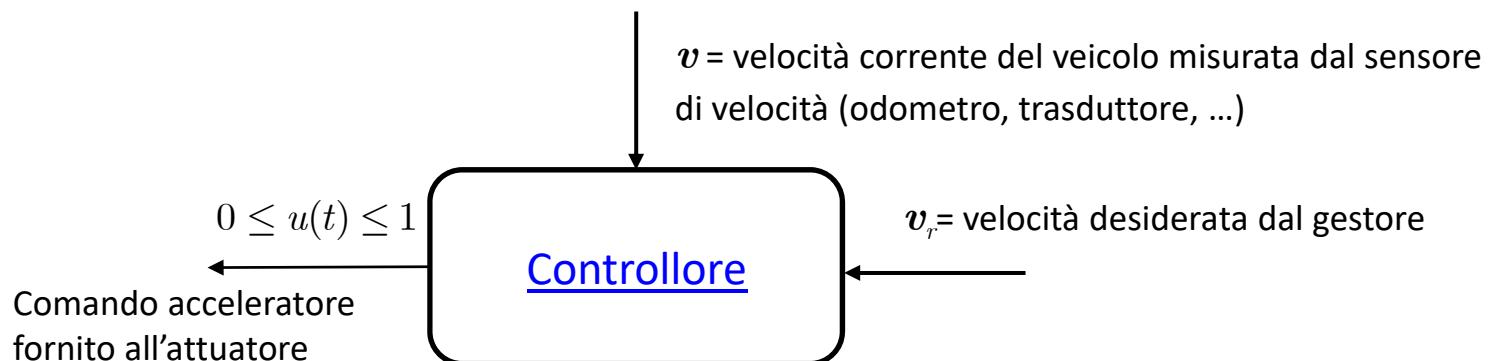
### 3. Forze di disturbo

$$F_d = mgC_r \operatorname{sgn}(v) + \frac{1}{2} \rho C_d A v^2 + mg \sin \theta$$

Forza di attrito, resistenza aerodinamica, gravità funzione della pendenza della strada

### 4. Sommario

$$m \frac{dv}{dt} = \alpha_n u T(\alpha_n v) - mgC_r \operatorname{sgn}(v) - \frac{1}{2} \rho C_d A v^2 - mg \sin \theta$$



Robot Operating System is mainly developed using 2 languages: **C++** and **Python**. Those are often the most preferred and used languages when developing robotics applications. You will use the `roscpp` library to write C++ code, and the `rospy` library to write Python code

**Obiettivo del Corso di F. A.**



## Controllo Attivo delle Sospensioni - Automotive

### OBIETTIVO

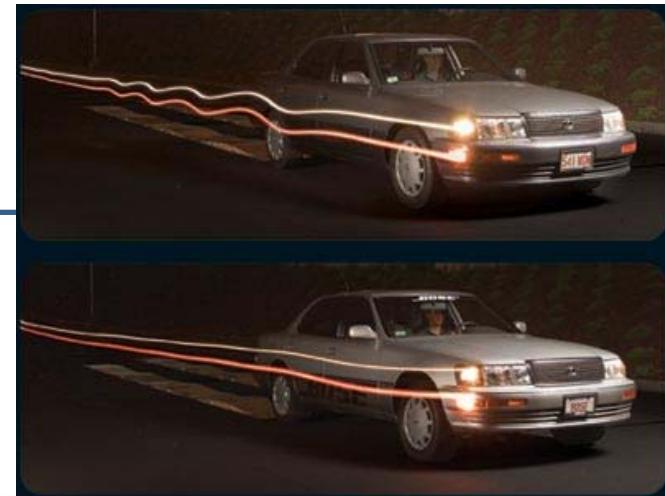
Capacità di mantenere costante il livello del veicolo rispetto alla strada in maniera soddisfacente, fornendo comfort anche nell'affrontare imperfezioni nel manto stradale.

#### (REIEZIONE)

Quando si sconnette non dovrebbero esserci grandi danni dovrebbe riavviarsi rapidamente.

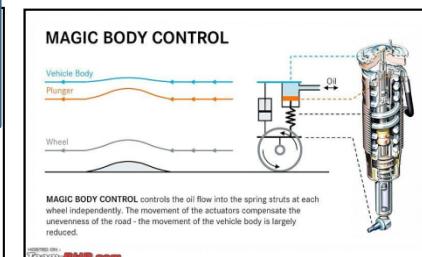


≈ 900 USD



Active Suspension

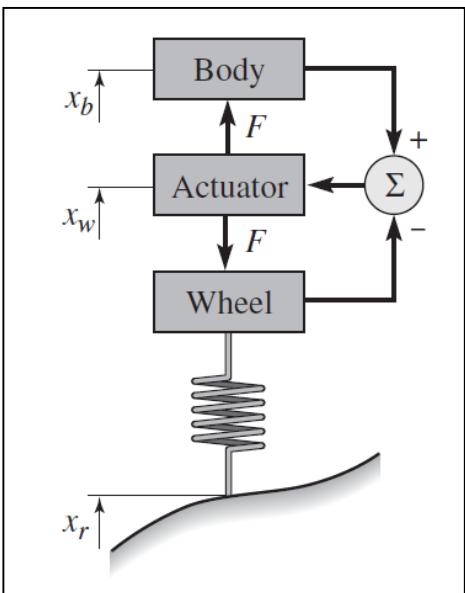
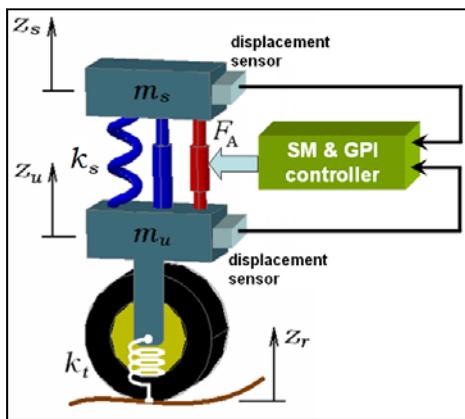
#### (STABILITÀ'): Teoricamente, il passeggero non dovrebbe essere soggetto ad alcun movimento verticale né rotatorio.





# Controllo Attivo delle Sospensioni - Automotive

- **Impostazione matematica del problema:** Modello standard usato prende il nome di Quarter Car Model



- L'attuatore attivo addizionale esercita una forza  $F$  tra la ruota ed il corpo (1/4) della vettura in base alla distanza relativa tra corpo della vettura e centroide della ruota.

## 1. Movimento lineare (Legge di Newton)

$$\begin{cases} m_b \ddot{x}_b = F \\ m_w \ddot{x}_w = -F + k_t(x_r - x_w) \end{cases}$$

$m_w$  = massa effettiva della ruota (incluso sospensione, freni, ecc.)

$k_t$  = rigidezza pneumatico

$x_r(t)$  = disturbo dovuto al manto stradale

## 2. Forza totale di smorzamento (componente passiva lineare)

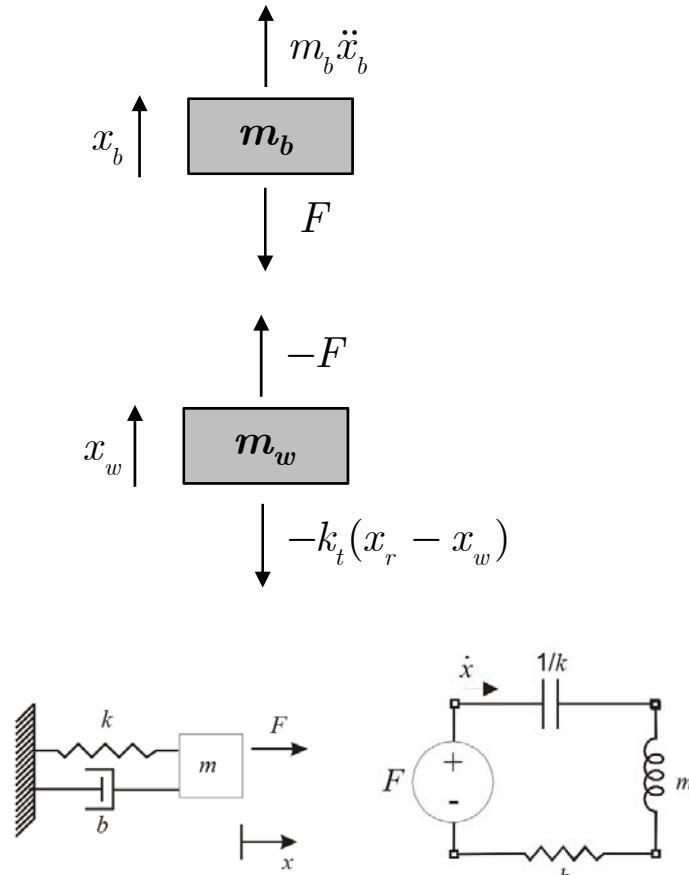
$$F = \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_A$$

$$\mathbf{F}_P = k(x_w - x_b) + c(\dot{x}_w - \dot{x}_b)$$



## Controllo Attivo delle Sospensioni - Automotive

### 3. Diagramma corpo libero



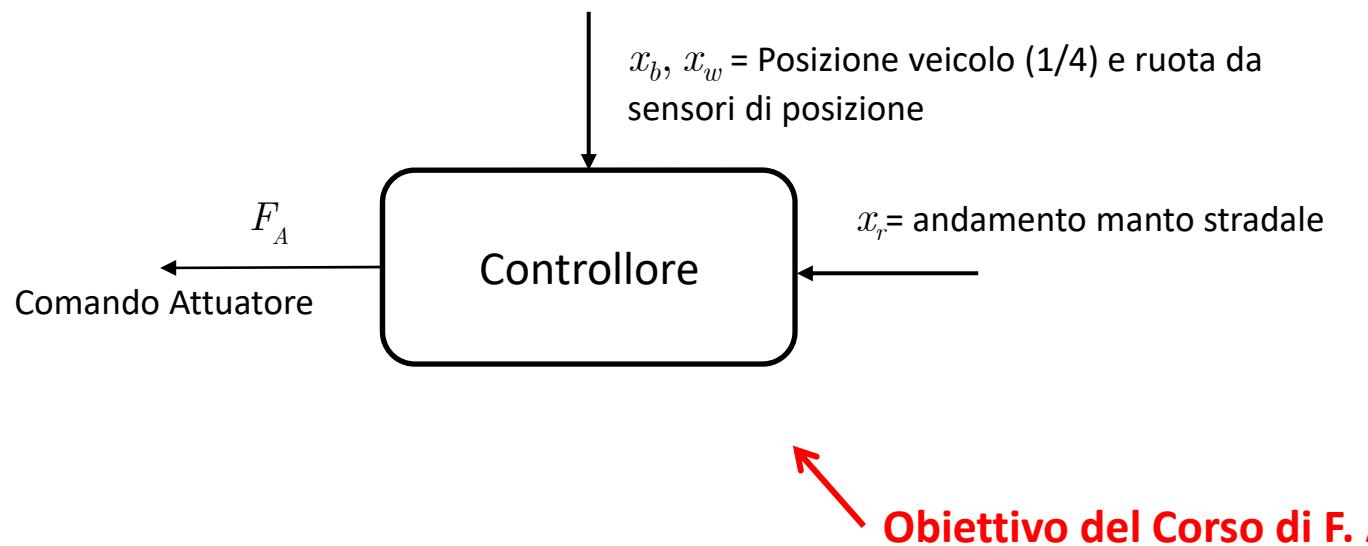
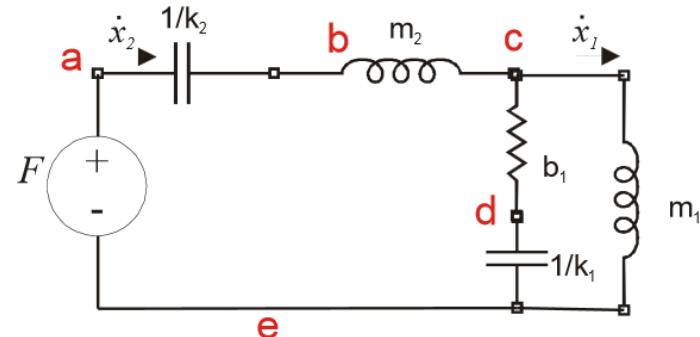
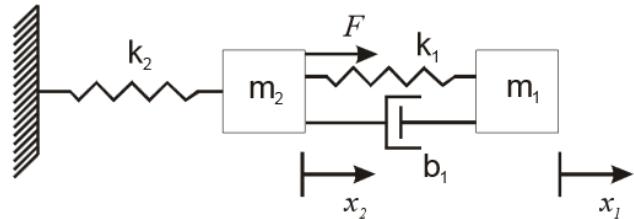
Key Concept: Analogous Quantities

| Electrical Quantity  | Mechanical Analog I<br>(Force-Current)         | Mechanical Analog II<br>(Force Voltage)        |
|----------------------|--|--|
| Voltage, $e$         | Velocity, $v$                                  | Force, $f$                                     |
| Current, $i$         | Force, $f$                                     | Velocity, $v$                                  |
| Resistance, $R$      | Lubricity, $1/B$<br>(Inverse friction)         | Friction, $B$                                  |
| Capacitance, $C$     | Mass, $M$                                      | Compliance, $1/K$<br>(Inverse spring constant) |
| Inductance, $L$      | Compliance, $1/K$<br>(Inverse spring constant) | Mass, $M$                                      |
| Transformer, $N1:N2$ | Lever, $L1:L2$                                 | Lever, $L1:L2$                                 |

| Electrical Equation  | Mech. Analogy I  | Mech. Analogy II   |
|--|--|--|
| $e = iR$   | $v = \frac{f}{B}, B = \frac{1}{R}$   | $f = vB, B = \frac{1}{R}$  |
| $e = L \frac{di}{dt}$<br>$i = \frac{1}{L} \int e \cdot dt$ | $v = \frac{1}{K} \frac{df}{dt}, K = \frac{1}{L}$<br>$f = K \int v \cdot dt = Kx$ | $v = \frac{1}{M} \int f \cdot dt$<br>$f = M \frac{dv}{dt} = M \frac{d^2x}{dt^2}$ |
| $e = \frac{1}{C} \int i \cdot dt$<br>$i = C \frac{de}{dt}$ | $v = \frac{1}{M} \int f \cdot dt, M = C$<br>$f = M \frac{dv}{dt}$                | $f = K \int v \cdot dt = Kx$<br>$v = \frac{1}{K} \frac{df}{dt}$                  |

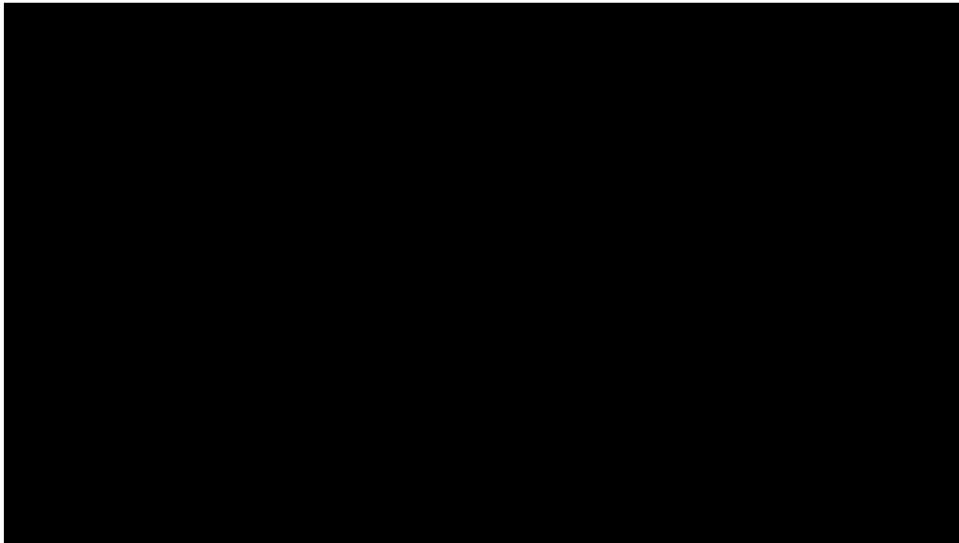
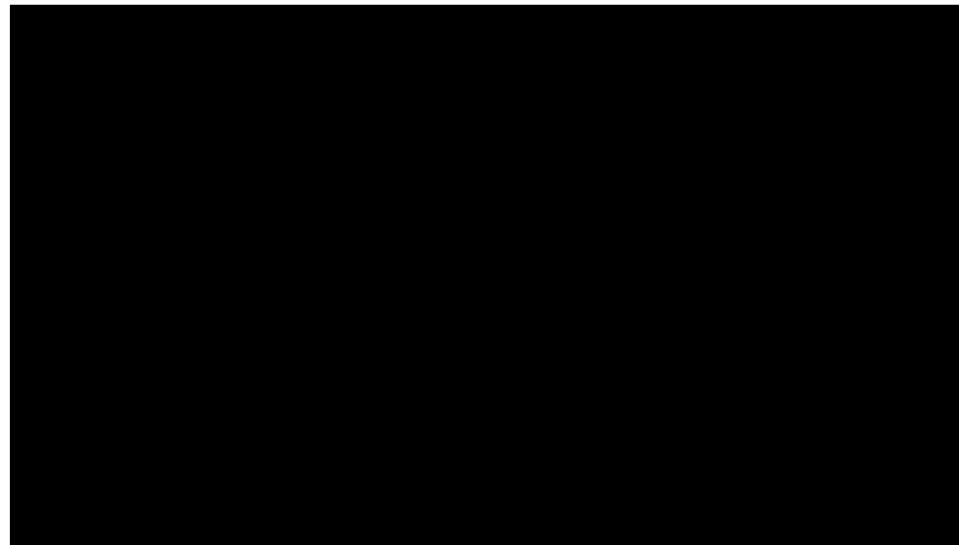


## Controllo Attivo delle Sospensioni - Automotive





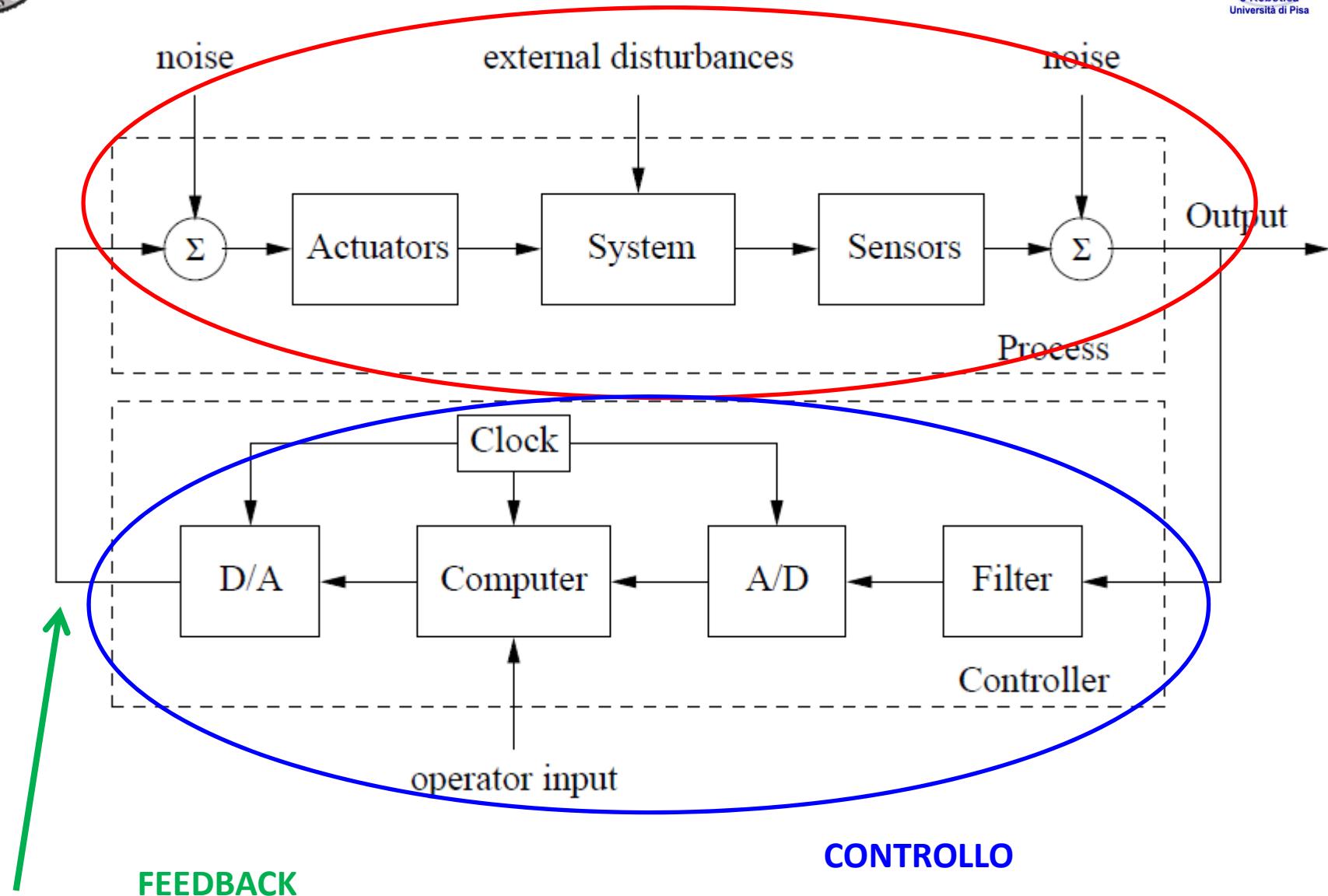
## Conclusioni





SISTEMA

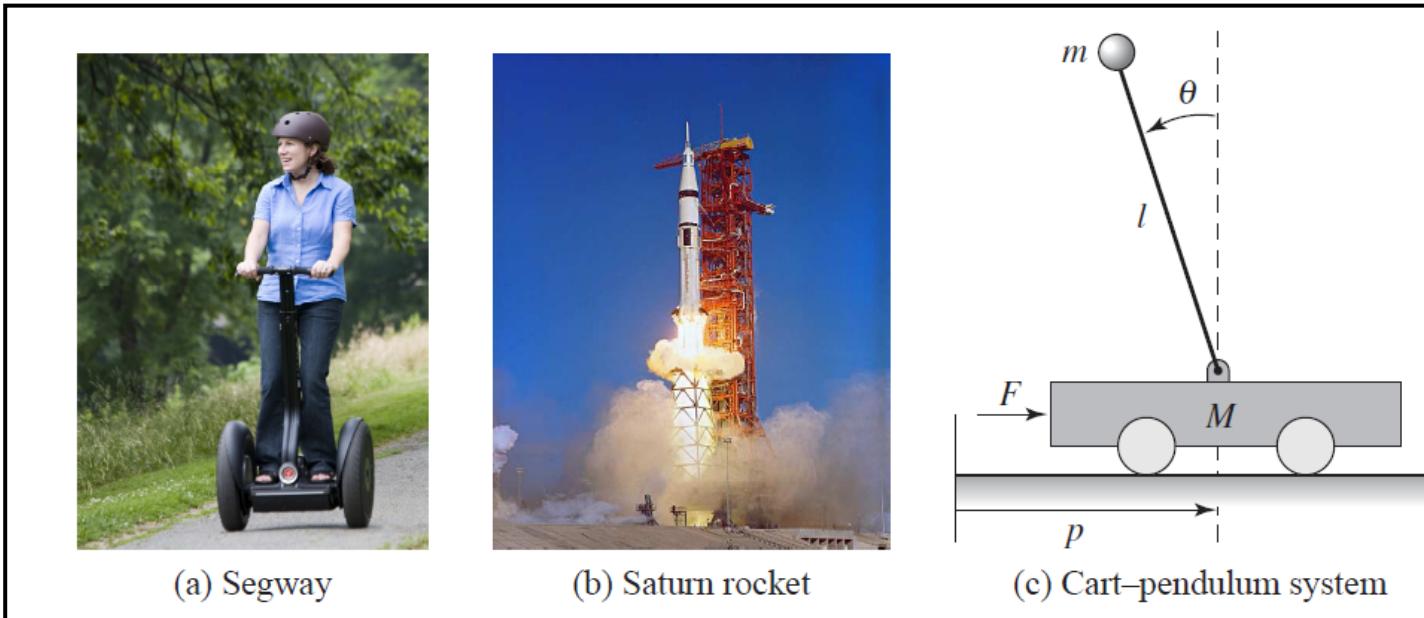
## Concetti Principali





## Esempi

### □ Controllo del Pendolo Inverso Obiettivo: Stabilità-Equilibrio



$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + K(q) = B(q)u,$$

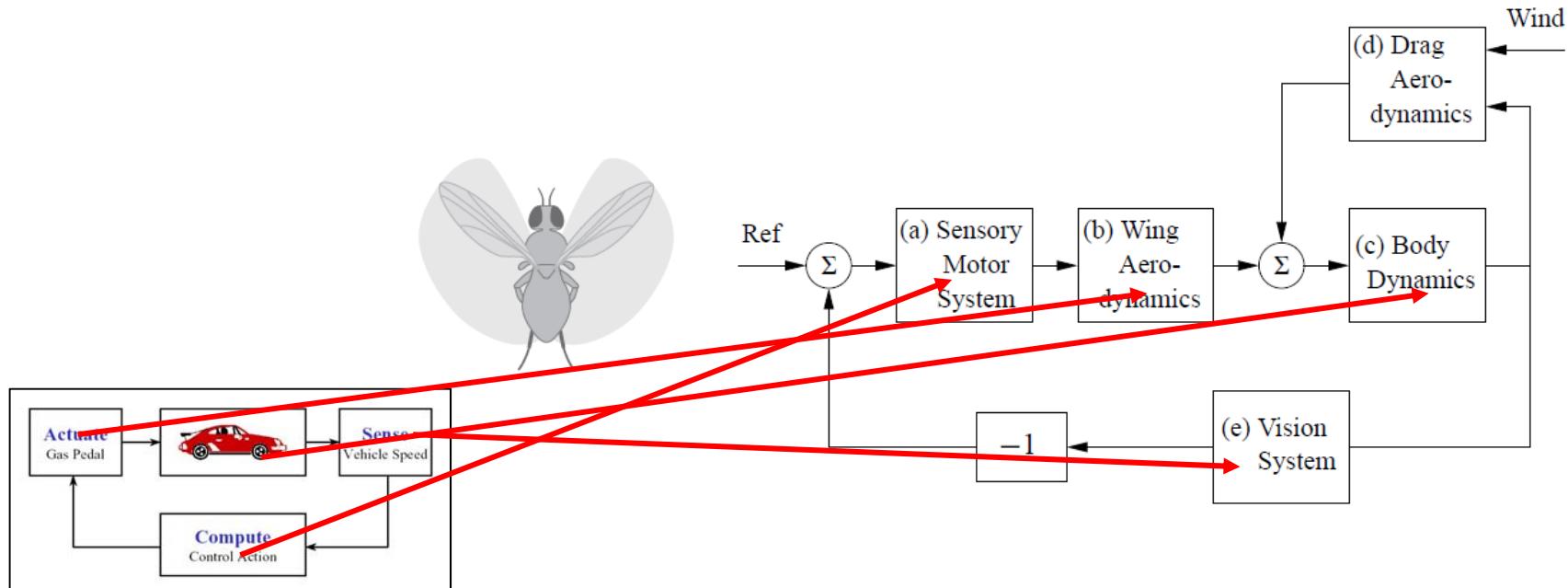
$q$  = vettore di variabili che definiscono il moto in funzione del tempo

$$\begin{bmatrix} (M+m) & -ml \cos \theta \\ -ml \cos \theta & (J+ml^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\dot{p} + ml \sin \theta \dot{\theta}^2 \\ \gamma \dot{\theta} - mgl \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$



## Esempi

### □ Diagramma Sistemico del controllo di volo di un insetto

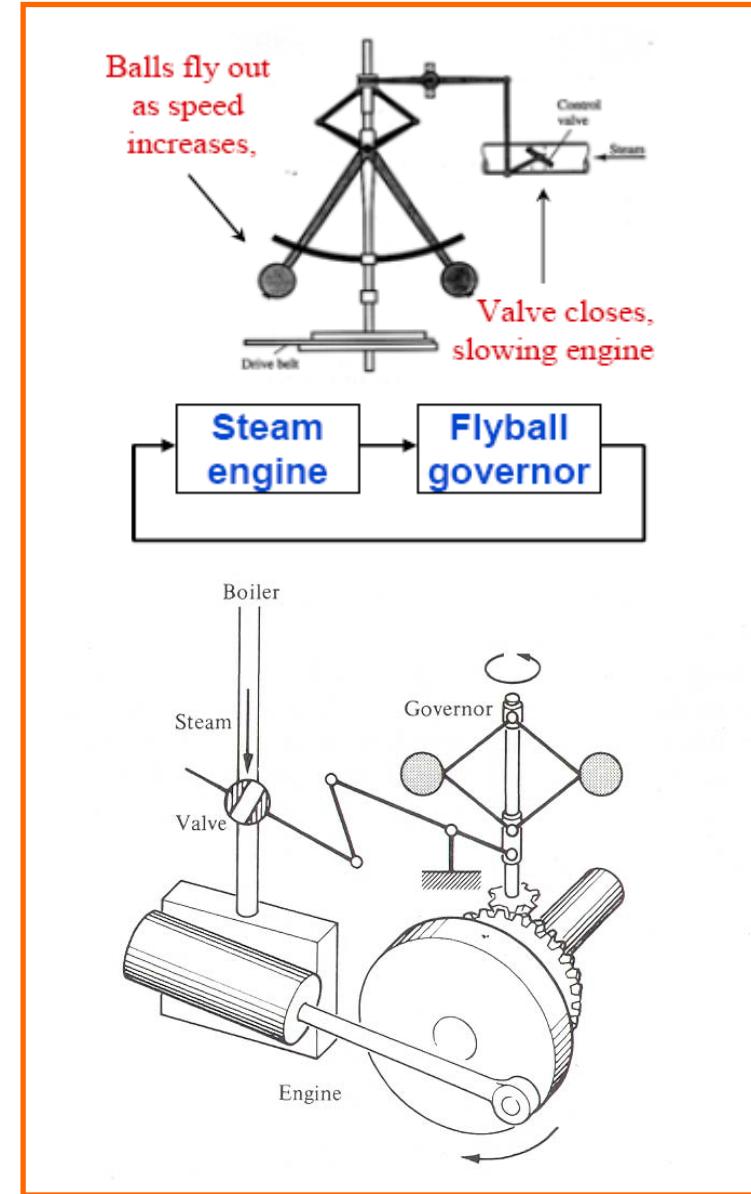


- La mosca usa una tecnica chiamata «Flusso Ottico» per il feedback di navigazione
- Il centraggio del campo visuale è ottenuto mediante l'attuazione motoria delle ali attraverso i muscoli
- Il sistema motorio è governato da un insieme connesso di circa 500.000 neuroni per il processo delle informazioni



## Cenni Storici

- Esempi di “controllo” si possono trovare presso i Greci ed i Romani
  - Lampade ad olio
  - Livello regolatori ad acqua
  - Orologi ad acqua
  - Apertura porte con contrappesi
  - ...
- Rivoluzione Industriale 1769, Regolatore di Watt (Regolatore di Portata di Vapore)
  - Sistema meccanico di regolazione di un motore a vapore
  - Quando la velocità aumenta, le sfere si spostano verso l'alto, chiudendo la valvola che porta il vapore dal boiler al pistone

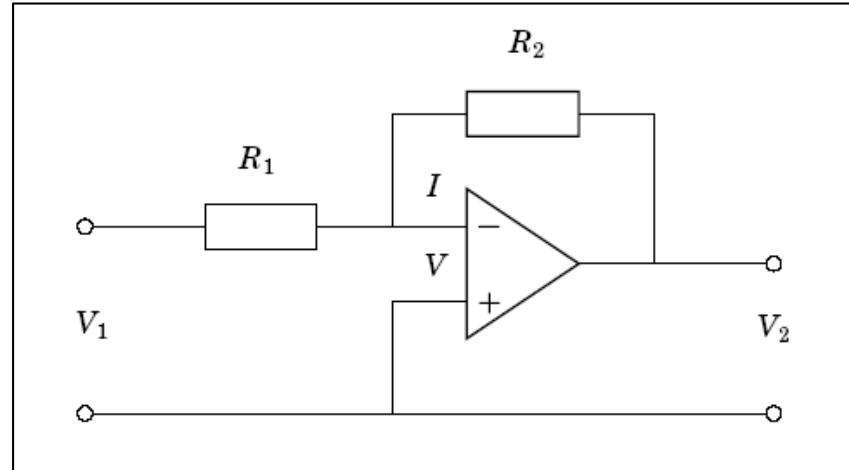




## Cenni Storici

- **Amplificatore a retroazione negativa (1927 Black) (reiezione del disturbo)**

- Amplificazione per compensare l'attenuazione nelle linee telefoniche
- Riduzione di rumore e disturbi associati con la necessaria amplificazione del segnale
- Assumendo  $I \sim 0$ , vale la legge di Ohm e la corrente tra le resistenze è la stessa.
- Definendo il guadagno  $G$  ( $10^5$ - $10^8$ ), il rapporto di tensione vale  $V_2/V_1$  ed è funzione essenzialmente delle resistenze  $R_1$  ed  $R_2$ .



$$\frac{V_1 - V}{R_1} = \frac{V - V_2}{R_2}$$

$$V_2 = -GV$$

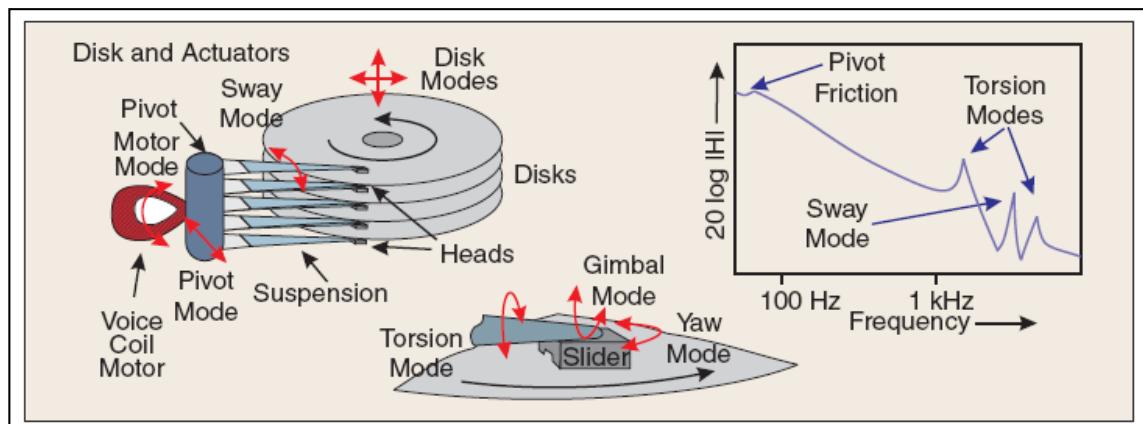
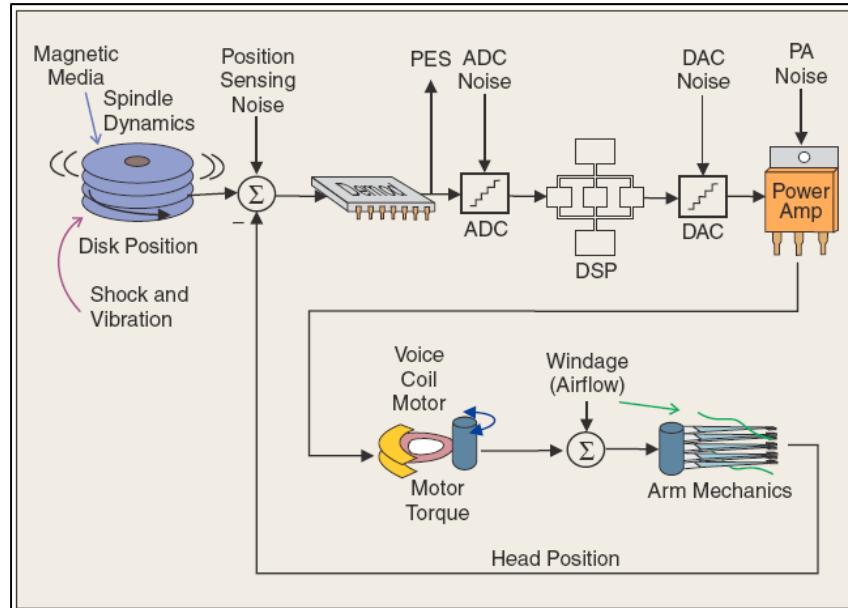
$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \frac{1}{G}(1 + \frac{R_2}{R_1})} \approx -\frac{R_2}{R_1}$$



## Cenni Storici

- **1950 Controllo di un Disk Drive (precisione e reiezione del disturbo)**

- La posizione della testina rispetto alla traccia è letta direttamente dal disco.
- Mediante la tecnica di “Data sectoring” i dati e la posizione sono disposti spazialmente e poi convertiti in sequenza temporale in lettura.
- La posizione della testina è un segnale modulato nel dominio magnetico ed in seguito inserita nella legge di controllo.
- **La legge di controllo provvede a far inseguire la traccia e a muovere la testina da una traccia all'altra.**
- I problemi riguardano I disturbi causati da:
  - **moto della puntina,**
  - **l'aria sul disco,**
  - **il rumore di misura dell'errore,**
  - **I colpi,**
  - **Le vibrazioni**

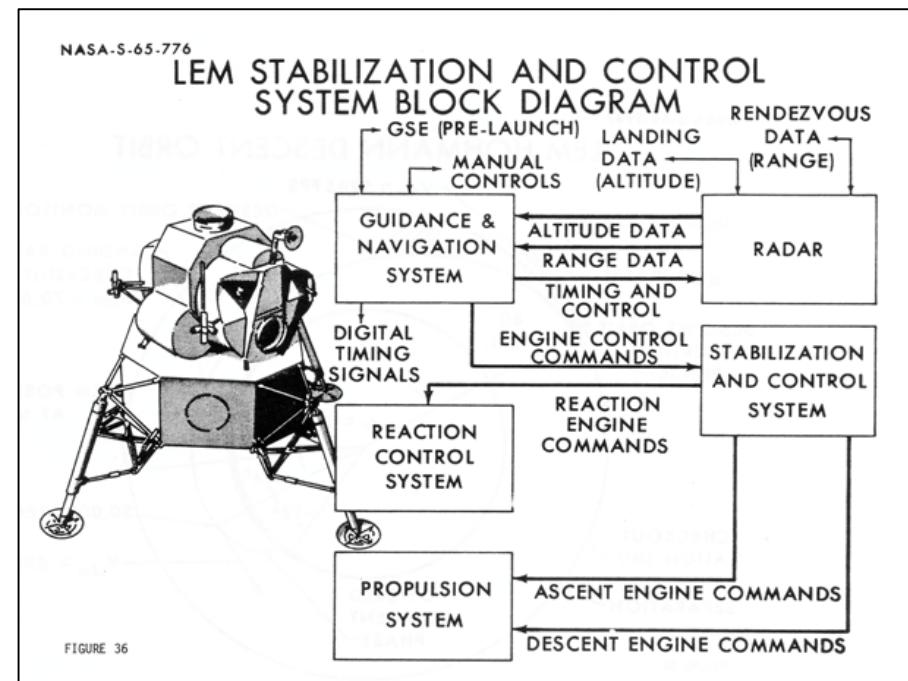
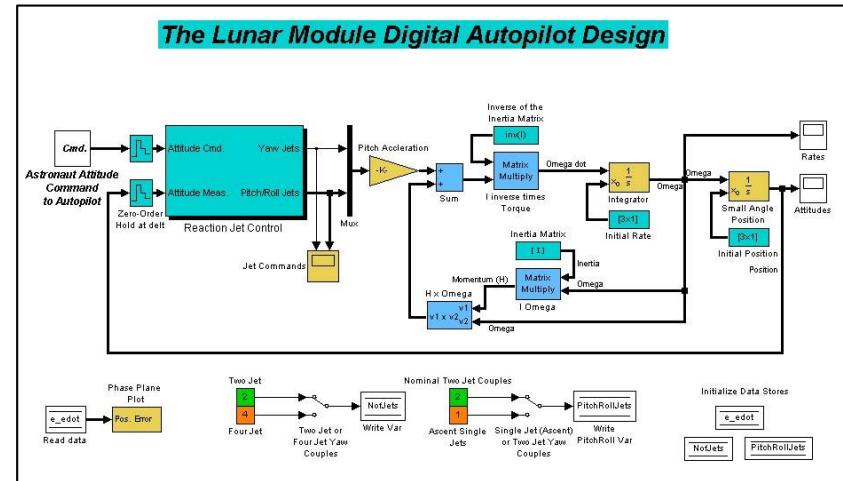
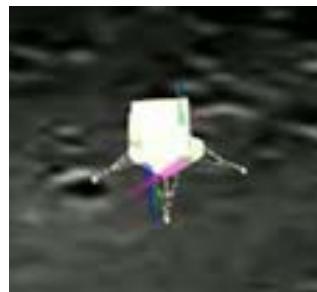
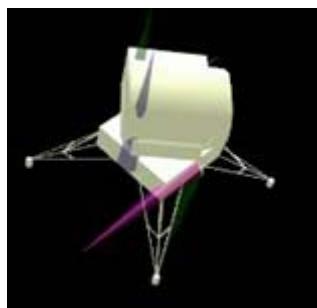




## Cenni Storici

- 1969, Lunar Excursion Module (Precisione, inseguimento di traiettoria)

- Una delle molte applicazioni in campo aerospaziale





## Cenni Storici



On board Apollo 11 was a computer called the Apollo Guidance Computer (AGC). It had **2048 words of RAM** (Random Access Memory). Each word comprised 16 binary digits (bits), with a bit being a zero or a one. This means that the Apollo computer had 32,768 bits of RAM memory. In addition, it had **72KB of Read Only Memory** (ROM), which is equivalent to 589,824 bits. This memory is programmed and cannot be changed once it is finalized.



To put that into more concrete terms, the latest phones typically have 4GB of RAM. That is 34,359,738,368 bits. This is more than one million (1,048,576 to be exact) times more memory than the Apollo computer had in RAM. The iPhone also has up to 512GB of ROM memory. That is 4,398,046,511,104 bits, which is more seven million times more than that of the guidance computer.

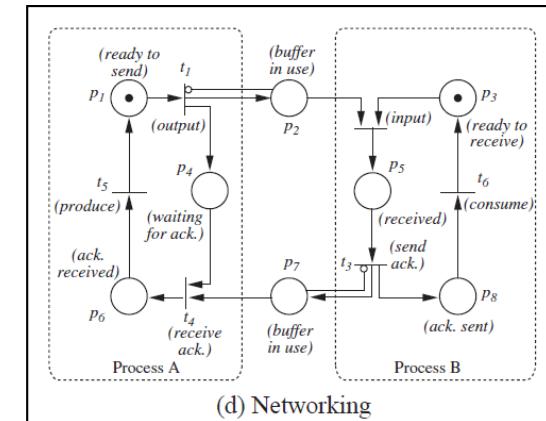
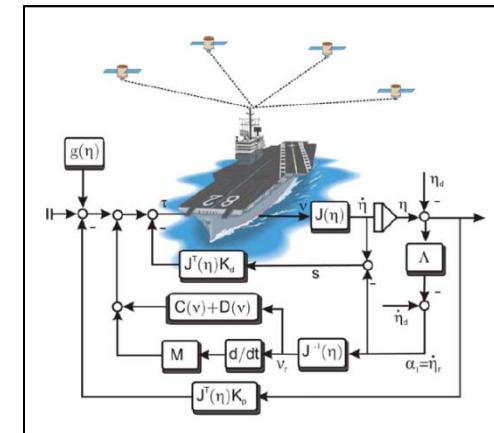
But memory isn't the only thing that matters. The Apollo 11 computer had a **processor** – an electronic circuit that performs operations on external data sources – which ran at **0.043 MHz**. The latest iPhone's processor is estimated to run at about 2490 MHz. Apple do not advertise the processing speed, but others have calculated it. This means that the iPhone in your pocket has over 100,000 times the processing power of the computer that landed man on the moon 50 years ago.



# Applicazioni

## □ Aerospace, Sistemi di Trasporto, Comunicazioni ed Energia

.. Aerospace and transportation encompasses a collection of critically important application areas where control is a key enabling technology. These application areas represent a significant part of the modern world's overall technological capability..





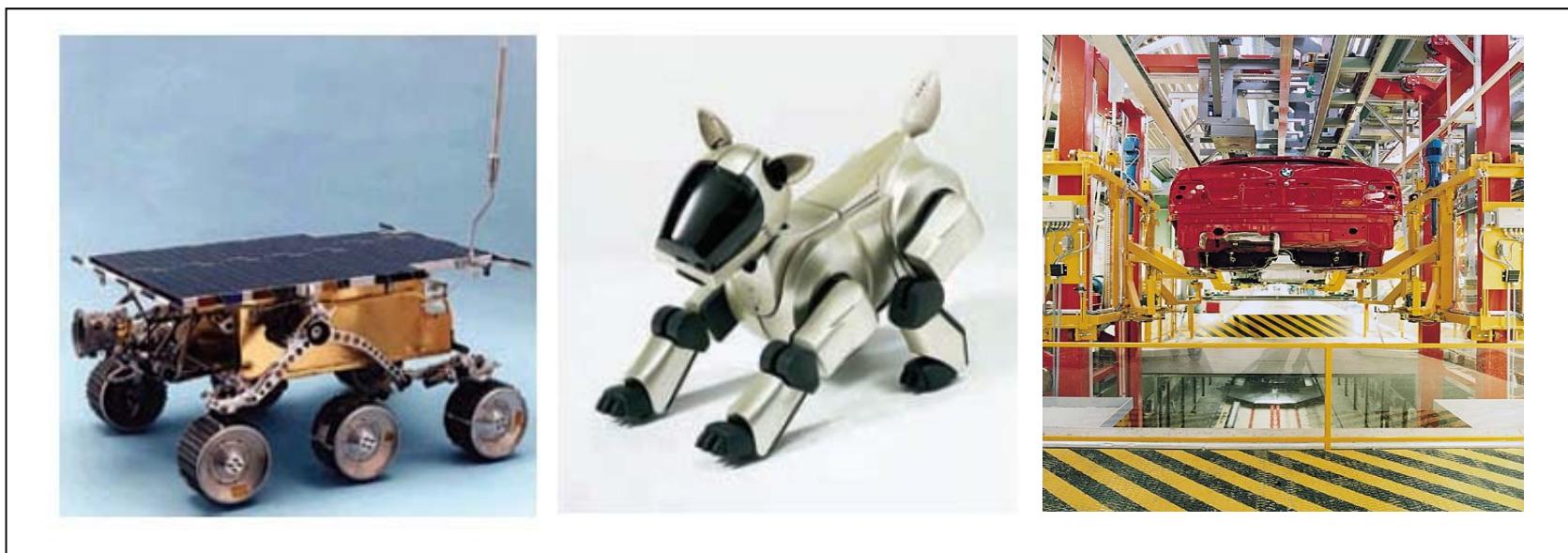
## Applicazioni



### □ Robotica

..Robotics and intelligent machines refer to a collection of applications involving the development of machines with humanlike behavior. Future applications will involve both increased autonomy and increased interaction with humans and with society.

Control is a central element in all of these applications and will be even more important as the next generation of intelligent machines is developed..

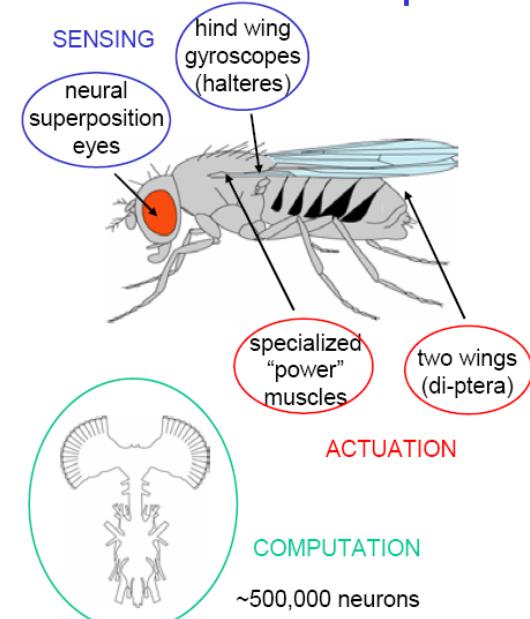
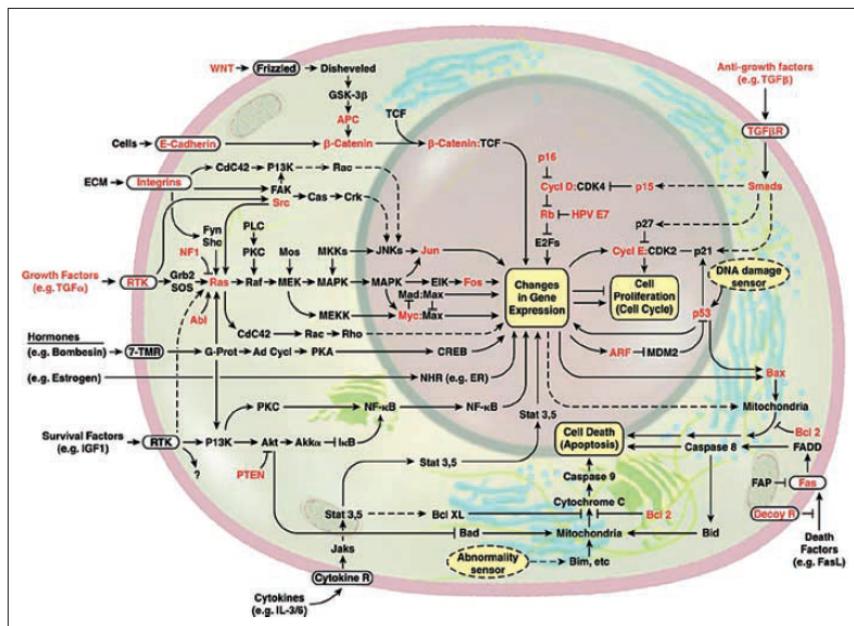




# Applicazioni

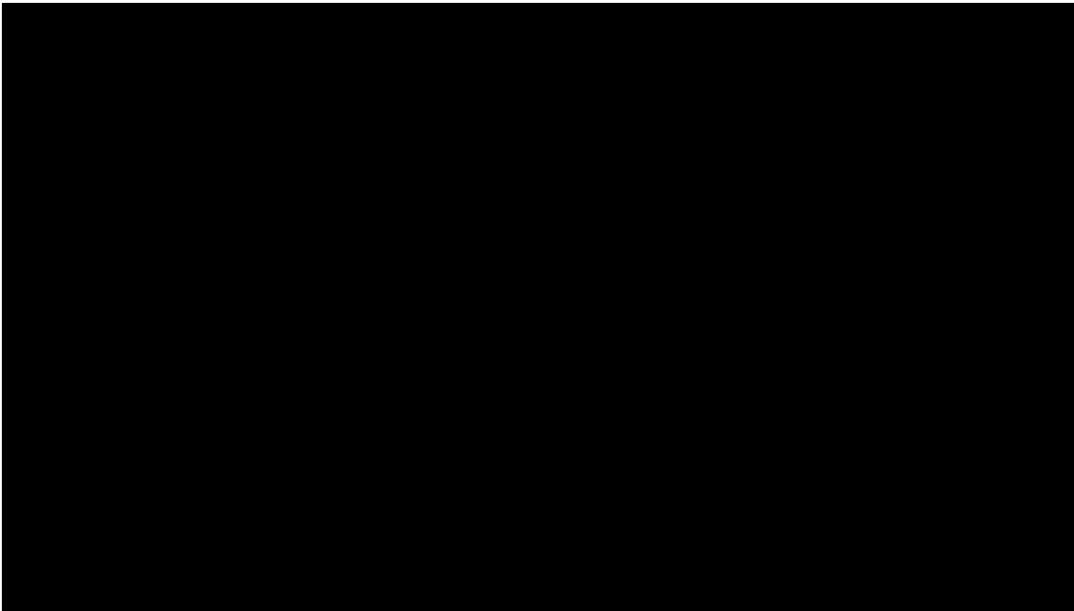
## □ Medicina, Biologia

..A major theme is the science of reverse (and eventually forward) engineering of biological control networks. A wide variety of biological phenomena provide a rich source of examples for control, including gene regulation and signal transduction; hormonal, immunological, and cardiovascular feedback mechanisms; muscular control and locomotion; active sensing, vision, and proprioception; attention and consciousness; and population dynamics and epidemics..



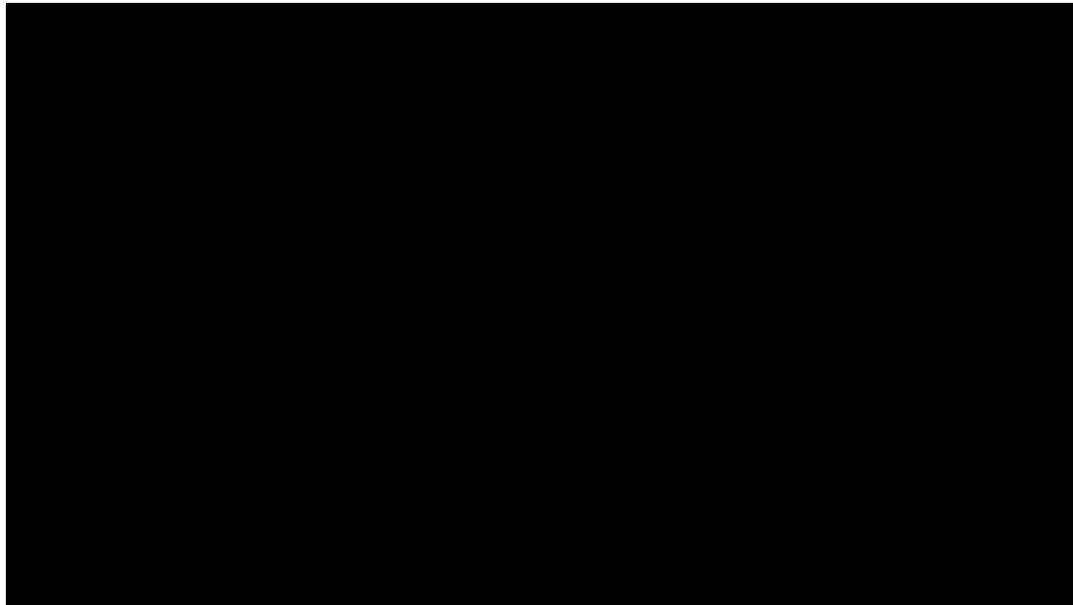
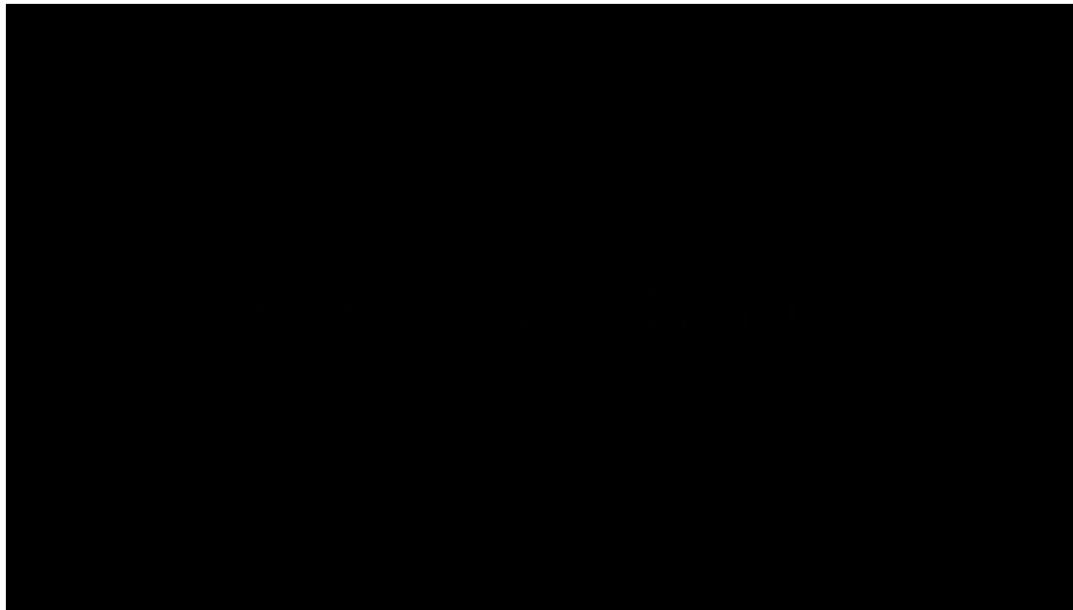


# Applicazioni





# Applicazioni



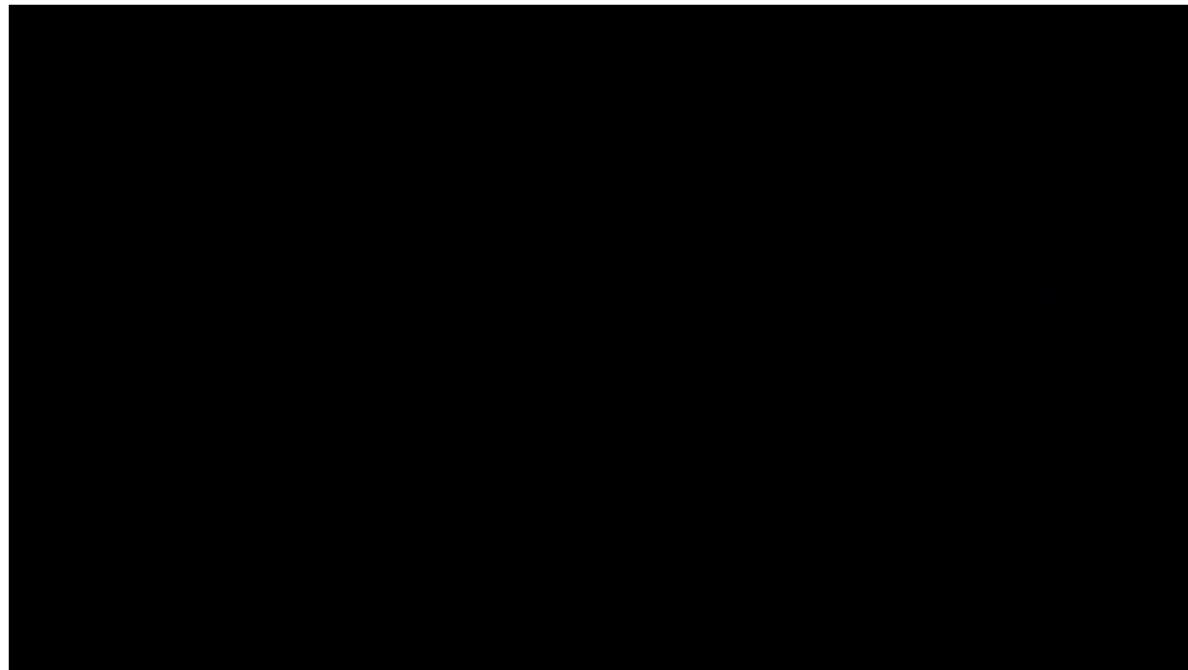
ARL  
Laboratorio di Automazione  
e Robotica  
Università di Pisa



## Cosa è la Teoria del Controllo?



- L'insieme di principi e metodi usati per il progetto di elementi che permettano a processi dinamici e impianti di raggiungere e/o mantenere prestazioni desiderate in modo autonomo e che si adattino automaticamente al variare dell'ambiente in cui essi operano ed alla presenza di guasti o perdite parziali di operatività



[Brian Douglas Introduction Lecture](#)



# Programma del Corso

- **Descrizione di massima del Programma**

- L'attività frontale del corso ed incontri di esercitazioni sono:

- **Richiami:**
  - Richiami di calcolo differenziale.
  - Introduzione ai sistemi dinamici.
  - Modelli di sistemi dinamici tempo-continui. Descrizione ingresso/uscita, operatore di ritardo e di integrazione. Calcolo operazionale: la trasformata di Laplace. Metodi di anti-trasformazione. Funzione di Trasferimento, algebra a blocchi, sistemi in retroazione. **Rappresentazione ingresso/stato/uscita, rappresentazione in variabili di stato e loro soluzione.**
  - **Proprietà strutturali, risposta temporale ed armonica:**
    - Sistemi composti. **Controllabilità e osservabilità. Forme canoniche di controllo e di osservazione. Stabilità secondo Lyapunov. Criteri di stabilità per sistemi lineari.** Criterio di Routh-Hurwitz. Risposta transitoria e a regime, poli dominanti. Risposta armonica per sistemi tempo-continui. Diagrammi di Bode, di Nyquist e di Nichols.



# Programma del Corso



- **Elementi di Analisi dei sistemi di controllo:**
- Azioni di controllo: ciclo aperto e ciclo chiuso, in avanti e in retroazione. Prestazioni generali di un sistema di controllo. Luogo delle radici. Principio del modello interno. Curve M-N. Struttura generale del controllore. Problematiche di sensitività alla variazione dei parametri e di robustezza ad incertezze di modello.
- **Tecniche di sintesi del controllore I:**
- Specifiche generali di progetto (Stabilità, prestazioni e reiezione del disturbo). Sintesi dei sistemi di controllo nel dominio del tempo e della frequenza. Rappresentazioni grafiche, criterio di stabilità di Nyquist, trasformazione da ciclo aperto a ciclo chiuso. Regolatori standard e regole di Ziegler-Nichols. Reti correttive. Sistemi con ritardo. Sintesi per tentativi, metodo analitico.
- **Tecniche di sintesi del controllore II:**
- **Sintesi nello spazio degli stati. Sintesi diretta con assegnazione dei poli ed osservatore dello stato. Regolazione con Set-Point. Osservatori dello stato.**



# Programma del Corso

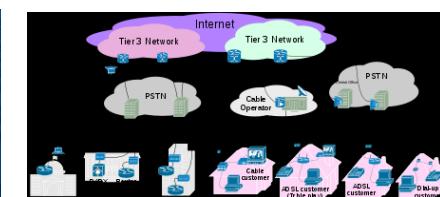


- **Strumenti Matematici e Definizioni**
- **Modellistica dei Sistemi Dinamici**

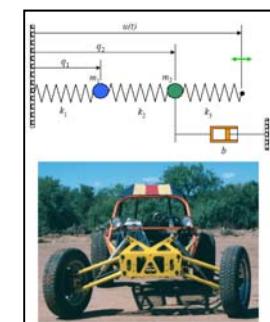
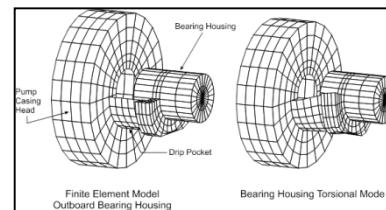
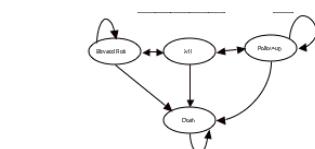
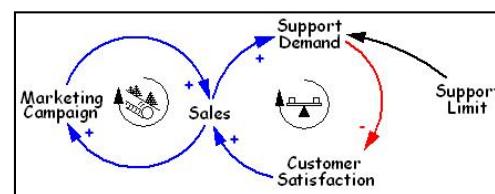
- Calcolo differenziale lineare
- Elementi di Geometria ed Algebra Lineare
- Matrici e Numeri Complessi
- Trasformata di Laplace
- Diagrammi di Flusso e a Blocchi

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_{\tau=0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

- Legami Causa - Effetto
- Approssimazioni
- Astrazioni
- Elementi comuni a Processi diversi



- Definizione di Sistema, Processo
- Componenti del Processo
- Segnali di trasmissione delle informazioni

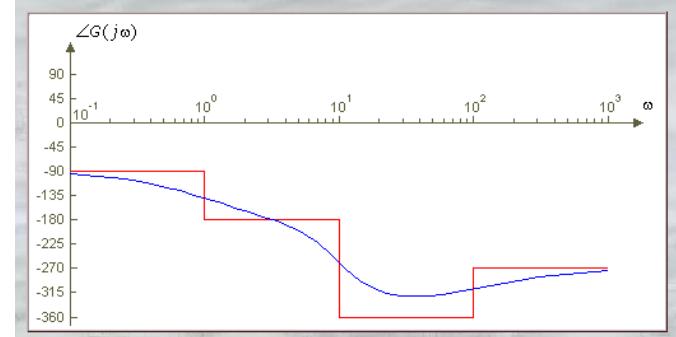
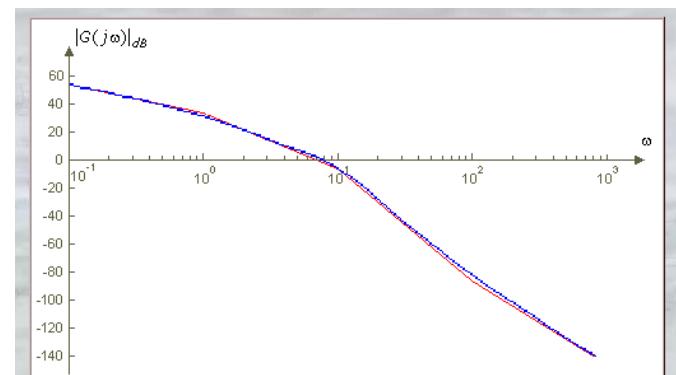
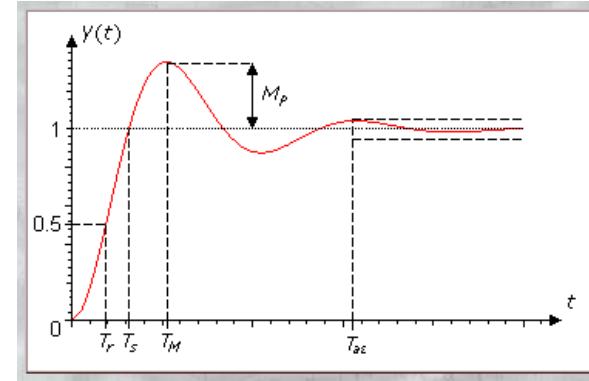
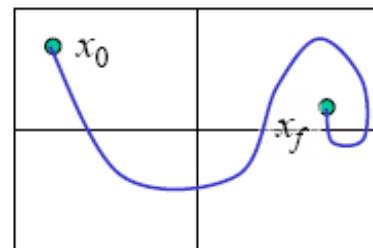
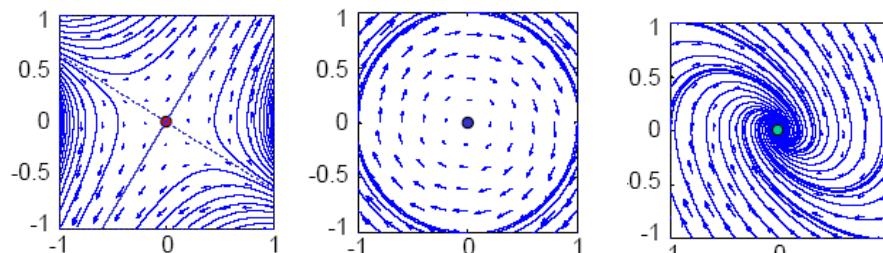




# Programma del Corso



- **Analisi di Sistema**
  - Caratteristiche di Stabilità
  - Controllabilità ed Osservabilità
  - Risposta Temporale
  - Risposta in Frequenza





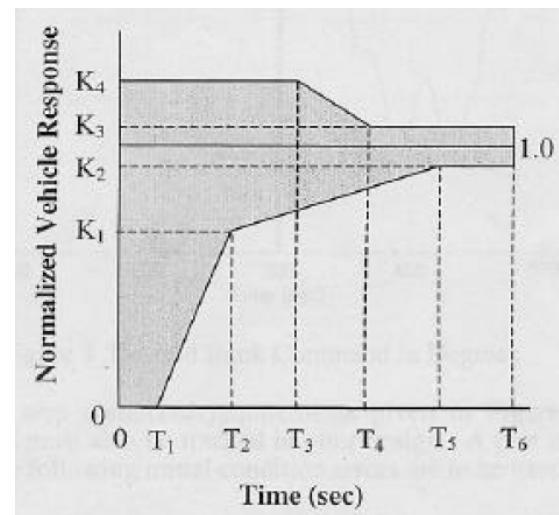
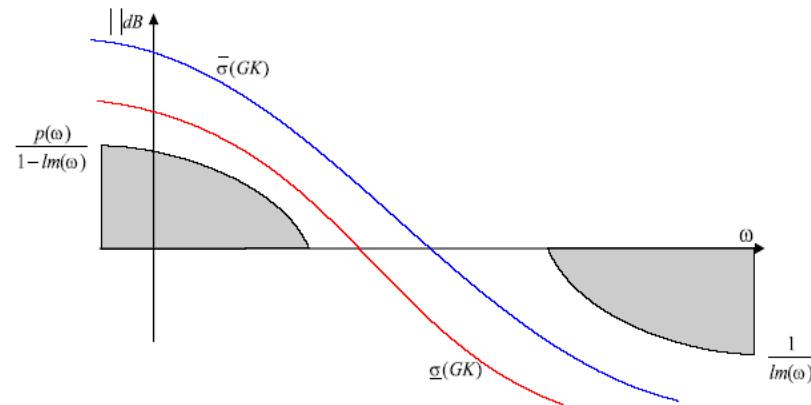
# Programma del Corso



- **Specifiche e Struttura di un Sistema di Controllo**

- Stabilità
- Precisione della Risposta
- Errore rispetto alle Specifiche
- Attenuazione dei Disturbi
- Banda Passante
- Insensitività a Errori di Modello e Rumore nei Componenti

$$K(s) = L\{k(t)\} = K_0 \frac{\prod_i (s + z_i)}{s^r \prod_j (s + p_j)}$$





# Programma del Corso

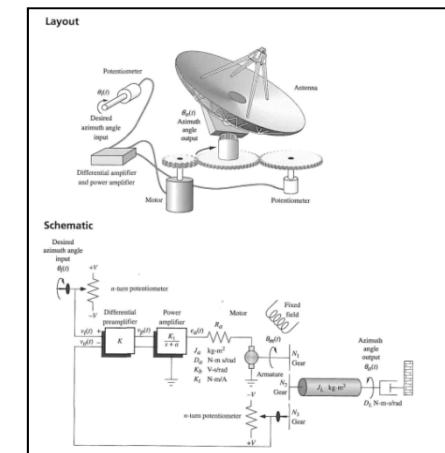
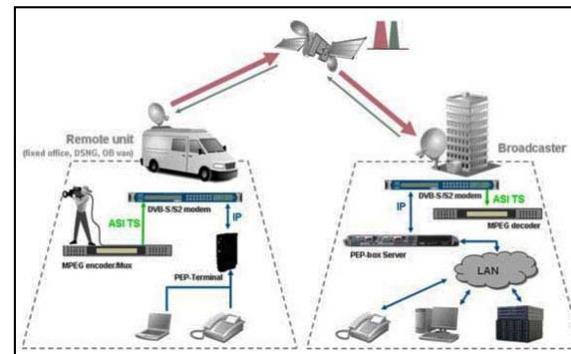
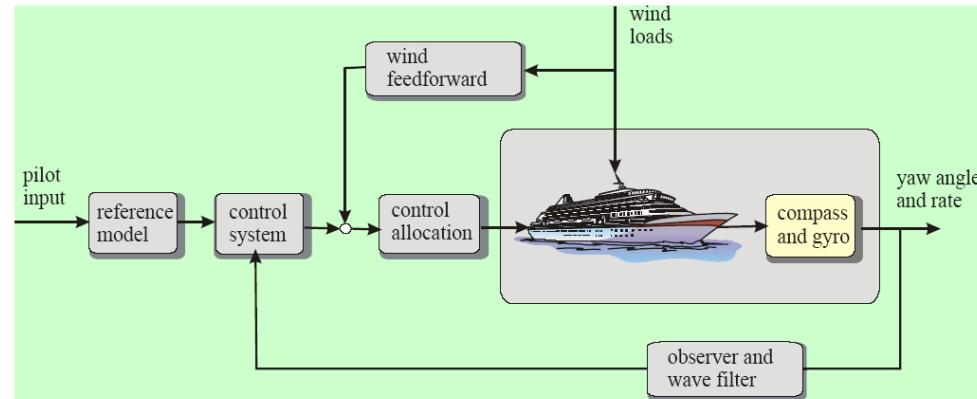
## • Analisi e Sintesi

### – Strumenti di Analisi e di Sintesi

- Criterio di Routh
- Luogo delle Radici
- Risposta nel Tempo
- Risposta in Frequenza
- Criterio di Nyquist

### – Strutture Standard

- Controllori PID
- Reti Correttive
- Filtri PB, PA, ...
- Controllore Statico
- Osservatore





## Riferimenti

- Capitolo 1 Testo di Bolzern
- Capitolo 1 testo di Murray



Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.

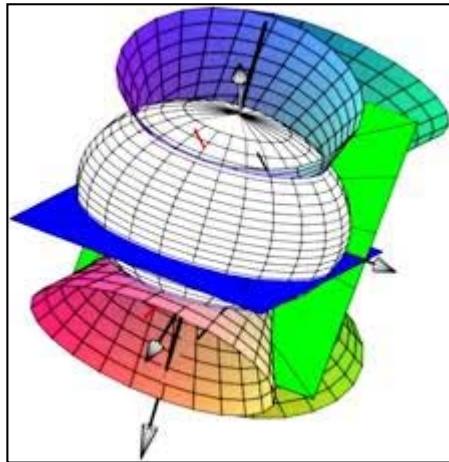
Contr. Avanzati

Con. Standard



# RICHIAMI

- Spazi Vettoriali, Algebra Lineare
- Matrici
- Numeri Complessi
- Equazioni differenziali lineari
- Esempi



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.  $\frac{dy}{dx} + x^2y = x$
2.  $\frac{1}{x} \frac{d^2y}{dx^2} - y^3 = 3x$
3.  $\frac{dy}{dx} - \ln y = 0$
4.  $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2\sin x$

[www.analyzemath.com](http://www.analyzemath.com)

$$\frac{35 \angle 65^\circ}{10 \angle -12^\circ} = 3.5 \angle 77^\circ$$

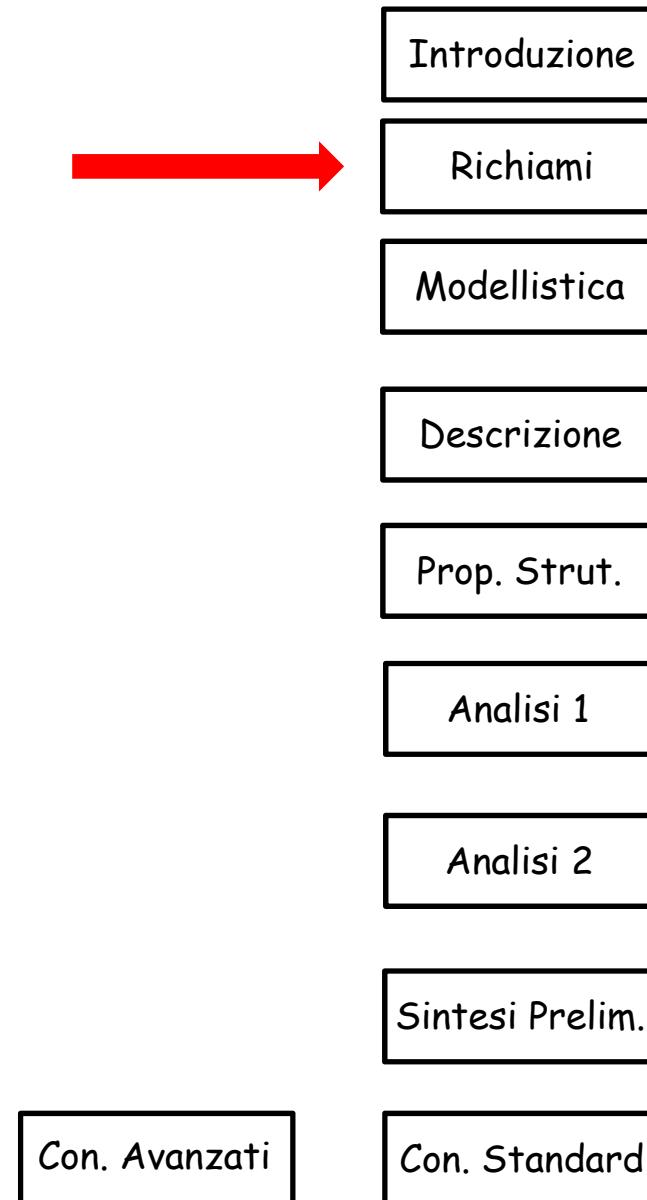
$$\frac{124 \angle 250^\circ}{11 \angle 100^\circ} = 11.273 \angle 150^\circ$$

$$\frac{3 \angle 30^\circ}{5 \angle -30^\circ} = 0.6 \angle 60^\circ$$



# Riferimenti

- Analisi e Algebra Lineare
- Fisica
- Appendice A testo di Bolzern
- Appendici A e B testo di Lewis (download)
- Richiami di Sistemi (download)





# Spazi Vettoriali

□ **Definizione:** Si definisce spazio vettoriale  $V$ , un set chiuso di elementi (vettori), per cui valgono le operazioni (assiomi):

- $v_1 \in V, v_2 \in V \Rightarrow v_1 + v_2 \in V$
- $v_1 \in V, v_2 \in V \Rightarrow v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
- $v_1 \in V, \alpha \in \Re \Rightarrow \alpha v_1 \in V$
- $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$
- $\exists 0 \therefore v_1 + 0 = v_1 \in V$

□ **Definizione:** Si definisce sottospazio vettoriale  $W$ , un sottoinsieme di uno spazio vettoriale  $V$ , per cui valgono le stesse operazioni dello spazio vettoriale:

■ Esempio:  $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \Re^3, w = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re^3 \quad W \subset V$



# Spazi Vettoriali

- Esempio:  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^n$  Spazio Vettoriale sui reali  
 $\alpha_1, \alpha_2$  Scalari arbitrari  
 $v = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 = v_1 + v_2 \Rightarrow V(v)$  Sottospazio Vettoriale sui reali

□ **Combinazione Lineare:** Dato un set di  $n$  vettori  $v_i$  ed un set di  $n$  scalari  $\alpha_i$ , il set si dice linearmente indipendente se e solo se:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n \doteq 0$$

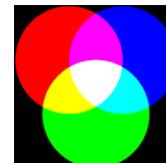
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \doteq 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -2\alpha_1$$

$$v = \alpha \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ G \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in [0, 255]$$





# Spazi Vettoriali

- **Copertura Lineare (Span)**: sia dato un numero di vettori:  $v_1, \dots, v_p$

Si dice copertura lineare, il sottospazio generato da tali vettori e si indica con:

$$span(v_1, \dots, v_p)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

- **Dimensione di un (sotto)spazio vettoriale**: La dimensione di un sottospazio vettoriale è data dal numero massimo di vettori linearmente indipendenti appartenenti al sottospazio.
- Il numero massimo di vettori linearmente indipendenti si dice **BASE** del sottospazio.
- Se  $n$  vettori costituiscono la base di un sottospazio, tutti gli altri vettori sono ottenibili come combinazione lineare degli elementi della base stessa.

$$v_1, \dots, v_n = base(\mathbb{R}^n)$$

$$\forall v^* \in \mathbb{R}^n \Leftarrow v^* = \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



- Base di un sottospazio  $\mathbb{R}^2$  di uno spazio  $\mathbb{R}^3$

- Base di uno spazio in  $\mathbb{R}^3$



# Spazi Vettoriali

- **Definizione – Vettori Ortogonali:** Due vettori si dicono ortogonali se il loro prodotto scalare (prodotto interno) è uguale a 0.

$$\langle v_1, v_2 \rangle \triangleq v_1^T \cdot v_2 = 0 = \|v_1\| \|v_2\| \cos \alpha$$

- Base Ortogonale in  $\mathbb{R}^2$   $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

- **Definizione – Vettori Ortonormali:** un vettore si dice ortonormale se ha modulo unitario (due vettori ortonormali sono anche ortogonali):

$$v \triangleq \frac{v}{\|v\|_2} = 1$$

- Base Ortonormale in  $\mathbb{R}^2$   $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$



# Matrici

□ **Matrici (2D)**: Un insieme di elementi dati dal prodotto esterno di due vettori

$$A(p\rangle\langle q) = v_1^{(p \times 1)} \cdot v_2^{(1 \times q)}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad A \quad (n \times n) \quad \text{quadrata}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad A \quad (n \times m) \quad , \quad \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \quad B \quad (p \times q) \quad \text{rettangolari}$$

```
>> A=[1,2,3;4,5,6]
```

```
A =
```

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

```
>> AT=A'
```

```
AT =
```

$$\begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{matrix}$$

## □ Definizioni

- **Matrice Trasposta**: Data una matrice  $A$  ( $n \times m$ ), si dice trasposta la matrice  $A^T$  ottenuta scambiando le righe con le colonne

$$A^T = [a_{ji}]_n^m = [a_{ij}]_m^n$$

- **Matrice Simmetrica/Antisimmetrica**: Data una matrice quadrata  $A$  ( $n \times n$ ), si dice simmetrica (antisimmetrica) se vale:

$$A^T = A$$

$$A^T = -A$$

```
A =  
  
1 3 0  
3 6 -4  
0 -4 10
```

```
>> A'
```

```
ans =
```

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{matrix}$$



## Matrici (esempi)

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = A^T \quad \text{Matrice Simmetrica}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -A^T \quad \text{Matrice Antisimmetrica}$$

**Nota:**  $T = A - A^T$   $\quad T = \text{Antisimmetrica}$   $\Rightarrow A = \frac{1}{2}(S + T)$

$S = A + A^T$   $\quad S = \text{Simmetrica}$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 6 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T = A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -1 \\ -6 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; S = A + A^T = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 6 & 8 & 4 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}(S + T) = A$$



# Matrici

- **Inversa di una Matrice:** Data una matrice quadrata  $A$  ( $n \times n$ ), si dice inversa di  $A$  una matrice  $A^{-1}$  tale che:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

- **Determinante:** Data una matrice  $A$  ( $n \times n$ ), si dice determinante di  $A$ , uno scalare calcolato mediante una formula ricorsiva:

```
A =  
d  
1 3 0  
3 6 -4  
0 -4 10  
 $\hat{a}_{ij} =$   
det(A)  
ans =  
-46  
 $adj(A) =$   
ans =  
 $A^{-1} =$   
-0.956521739130435 0.652173913043478 0.260869565217391  
0.652173913043478 -0.217391304347826 -0.086956521739130  
0.260869565217391 -0.086956521739130 0.065217391304348
```

- **Definizione:** Data una matrice  $A$  ( $n \times n$ ) si definiscono i minori e gli elementi aggiunti:

$$adj(A) =$$

$$A^{-1} =$$

|                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| -0.956521739130435 | 0.652173913043478  | 0.260869565217391  |
| 0.652173913043478  | -0.217391304347826 | -0.086956521739130 |
| 0.260869565217391  | -0.086956521739130 | 0.065217391304348  |

- **NOTA:** Una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da 0. In tal caso la matrice si dice **NON SINGOLARE**.



## Matrici (esempi)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 4 \quad A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \det(A) = 11 \quad adj(A) = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 10 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -9 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 10 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

```
>> A
A =
    1     0     2
    4    -1     4
    2     2     1
>> AINV=inv(A)
AINV =
   -0.8182    0.3636    0.1818
   0.3636   -0.2727    0.3636
   0.9091   -0.1818   -0.0909
>> ADJ=AINV*det(A)
ADJ =
    -9     4     2
    4    -3     4
   10    -2    -1
>> d=det(A)
d =
   11
```

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Matrici



□ **Definizione:** Data una matrice rettangolare  $A$  ( $n \times m$ ), si definisce **Rango** di  $A$ , il numero di righe (colonne) linearmente indipendenti. Per il rango valgono le seguenti proprietà:

1.  $\text{Rango}(A) = \text{massimo numero di righe linearmente indipendenti } (n < m).$
2.  $\text{Rango}(A) = \text{massimo numero di colonne linearmente indipendenti } (n > m).$
3.  $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^T).$
4.  $\text{Rango}(A) \leq \min(n, m).$
5. Una matrice quadrata  $A(n, n)$ , ammette un'inversa  $A^{-1}$ , se e solo se  $\text{Rango}(A) = n$ .
6. Una matrice quadrata  $A(n, n)$  ha determinante diverso da zero, se e solo se è di rango massimo =  $n$ . In tal caso la matrice  $A$  è non singolare.
7.  $\text{Rango}(A)$  è invariante rispetto a pre- post moltiplicazioni per matrici quadrate non singolari.
8. Date due matrici  $A_1$  e  $A_2$  aventi rango  $n_1$  ed  $n_2$ , si ha:  $\text{Rango}(A_1 A_2) = \min(n_1, n_2)$ .



## Matrici (pseudo inversa)

A) Consideriamo una matrice rettangolare **alta**  $A$  ( $n, m$ ) con  $n > m$ . Nel caso in cui  $A$  abbia rango massimo ( $m$ ), vale la seguente relazione:

$$(A^T A)^{-1} (A^T A) = I$$

$A =$



Si definisce matrice pseudo inversa sinistra di  $A$ , la matrice:

$$A^{+S} = (A^T A)^{-1} A^T \quad A^{+S} \cdot A = I_{m \times m}$$

B) Consideriamo una matrice rettangolare **piatta**  $A$  ( $n, m$ ) con  $n < m$ . Nel caso in cui  $A$  abbia rango massimo ( $n$ ), vale la seguente relazione:

$$(AA^T)(AA^T)^{-1} = I$$

Si definisce matrice pseudo inversa destra di  $A$ , la matrice:

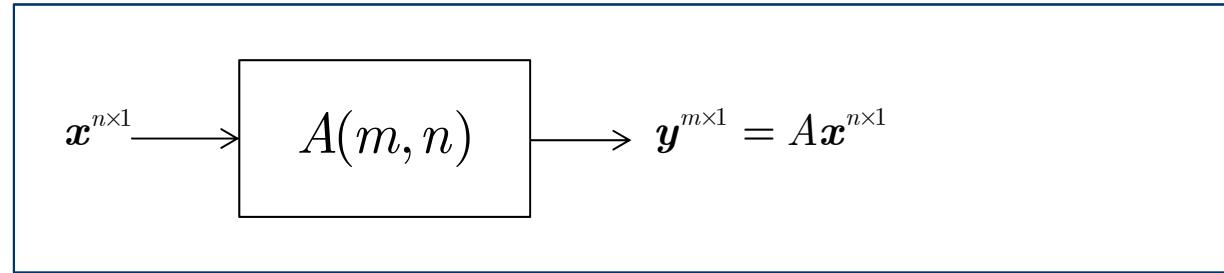
$A =$



$$A^{+D} = A^T (AA^T)^{-1} \quad A \cdot A^{+D} = I_{n \times n}$$



# Algebra Lineare



- Una matrice  $A$  può essere pensata come un elemento di trasmissione di segnale  $x$  in  $y$ , la trasmissione di segnale è lineare ed algebrica, nel caso di matrice con elementi costanti nel tempo (**trasformazione lineare**).
- **Definizione (Geometria)**: Si associa una matrice  $A^{m \times n}$  a due vettori  $x$  ed  $y$ , tale che:

$$y = Ax, x \in V^n, y \in V^m$$

la matrice  $A$  si dice operatore lineare del vettore  $x$  in  $y$

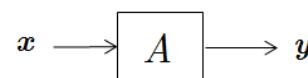
- **Definizione (Algebra)**: Dal punto di vista algebrico,  $y = Ax$  rappresenta un sistema algebrico per cui significa calcolare il vettore  $x$  dati il vettore  $y$  e la matrice  $A$ . si dice sistema omogeneo se  $y = 0$ , non omogeneo se  $y \neq 0$
- Per un sistema algebrico  $y = Ax$  definisce il **Teorema fondamentale di Algebra Lineare**, ovvero: l'esistenza e la correlazione tra i 4 sottospazi fondamentali introdotti da una matrice rettangolare  $A$

| name of subspace             | definition                              | containing space | dimension         | basis                             |
|------------------------------|---|------------------|-------------------|-----------------------------------|
| column space, range or image | $\text{im}(A)$ or $\text{range}(A)$     | $\mathbf{R}^m$   | $r$ (rank)        | The first $r$ columns of $U$      |
| nullspace or kernel          | $\ker(A)$ or $\text{null}(A)$           | $\mathbf{R}^n$   | $n - r$ (nullity) | The last $(n - r)$ columns of $V$ |
| row space or coimage         | $\text{im}(A^T)$ or $\text{range}(A^T)$ | $\mathbf{R}^n$   | $r$ (rank)        | The first $r$ columns of $V$      |
| left nullspace or cokernel   | $\ker(A^T)$ or $\text{null}(A^T)$       | $\mathbf{R}^m$   | $m - r$ (corank)  | The last $(m - r)$ columns of $U$ |



# Algebra Lineare

## □ Interpretations of: $y = Ax, x \in V^n, y \in V^m$



## □ Interpretation of: $a_{ij}$

$a_{ij}$  is *gain factor* from  $j$ th input ( $x_j$ ) to  $i$ th output ( $y_i$ )

$$\text{thus, e.g., } y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

- $i$ th *row* of  $A$  concerns  $i$ th *output*
- $j$ th *column* of  $A$  concerns  $j$ th *input*
- $a_{27} = 0$  means 2nd output ( $y_2$ ) doesn't depend on 7th input ( $x_7$ )
- $|a_{31}| \gg |a_{3j}|$  for  $j \neq 1$  means  $y_3$  depends mainly on  $x_1$



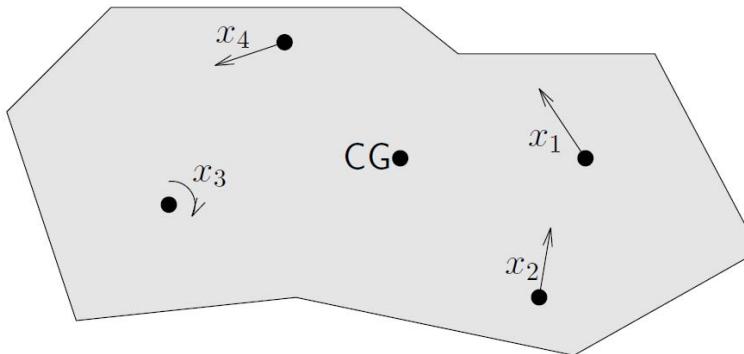
# Algebra Lineare

## Esempio: Copie e Forze applicate ad un corpo rigido

$$A^{m \times n} \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$$

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^6$$



- $x_j$  is external force/torque applied at some point/direction/axis
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^6$  is resulting total force & torque on body  
( $y_1, y_2, y_3$  are x-, y-, z- components of total force,  
 $y_4, y_5, y_6$  are x-, y-, z- components of total torque)
- we have  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$
- $A$  depends on geometry  
(of applied forces and torques with respect to center of gravity CG)
- $j$ th column gives resulting force & torque for unit force/torque  $j$



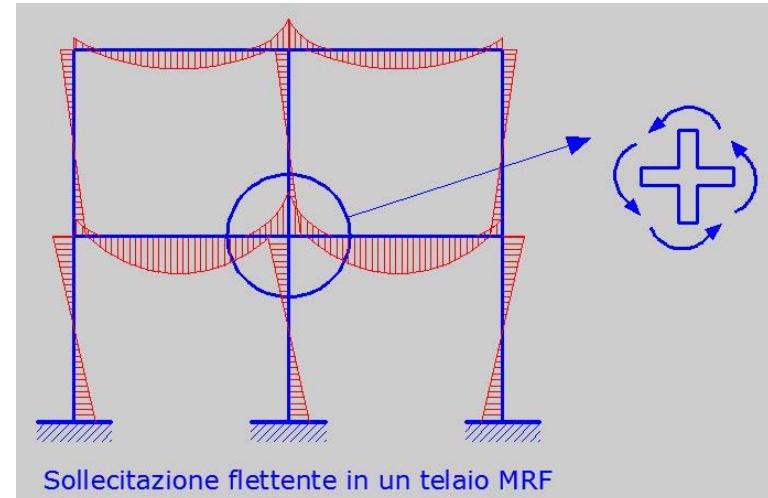
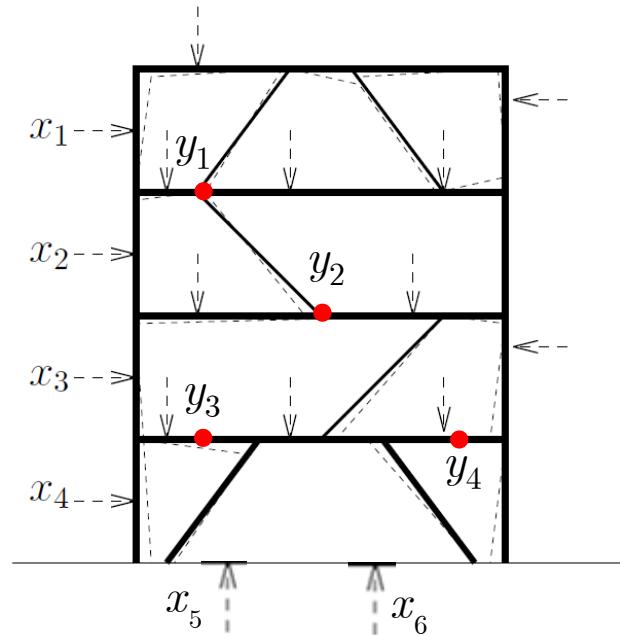
# Algebra Lineare

## Esempio: Movimento di una struttura elastica

$$A^{m \times n} x = y$$

$$x \in \mathbb{R}^6$$

$$y \in \mathbb{R}^4$$



- $x_i$  is external force applied at some node, in some fixed direction
- $y_i$  is (small) deflection of some node, in some fixed direction



# Algebra Lineare

- Consideriamo il caso di sistema non omogeneo:  $Ax = y, A(m \times n)$  (1)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = y$$

Quindi,  $y$  è una combinazione lineare delle colonne di  $A$ , ovvero:

$$y \in V := \text{span} \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

- Richiamo della definizione:** SPAN = Copertura Lineare (sottospazio generato da tutti i vettori della copertura)
- Definizione:** Il sottospazio formato dalle colonne di  $A$  si dice Spazio Immagine (Range Space) =  $\mathcal{R}(A)$ . Essendo  $n$  il numero delle colonne di  $A$ , lo Spazio Immagine è descritto dalle  $n$  colonne di  $A$  aventi  $m$  righe per cui è un sottospazio in  $\mathbf{R}^m$

the range of  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$  is defined as

$$\mathcal{R}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbf{R}^n\} \subseteq \mathbf{R}^m$$

- Domande:** Consideriamo il sistema (1):
  - Quando ammette soluzione?
  - Quante sono le soluzioni?
  - Quali sono le soluzioni?



# Algebra Lineare

- **Teorema:** Il sistema non omogeneo ha soluzione (non banale) se e soltanto se  $\mathbf{y}$  è una combinazione lineare di una base dello spazio immagine di  $A$ :

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A | \mathbf{y})$$

- **Esempio:** Il sistema seguente ha soluzione?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow Ax = \mathbf{y}$$

- Le colonne di  $A$  sono vettori in  $\mathbb{R}^4$
- Le colonne di  $A$  sono linearmente dipendenti in quanto  $a_3 = a_1 + a_2$
- Ci sono 2 colonne linearmente indipendenti, quindi lo spazio immagine (spazio colonna, range space) è un sottospazio in  $\mathbb{R}^2$  di  $\mathbb{R}^4$

- Il sistema ha soluzione per un qualsiasi vettore  $\mathbf{y}$  combinazione lineare di una base del sottospazio immagine, ovvero:

$$\text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\forall \mathbf{y} = \alpha a_1 + \beta a_2 \Rightarrow \mathbf{x} \neq 0$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 = 1 - x_3 = 0 \\ x_2 = -x_1 - 2x_3 = -2 \\ x_3 = 1 \end{bmatrix}$$



# Algebra Lineare

- Il sistema non ha soluzione se non soddisfa il teorema precedente

$$\forall \mathbf{y} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \gamma \neq 0 \quad \forall \mathbf{y} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \delta \neq 0 \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 = -x_3 = 0 \\ x_2 = -x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_3 = 1 - x_1 = 0 \end{bmatrix}$$

## □ Generalizzazione

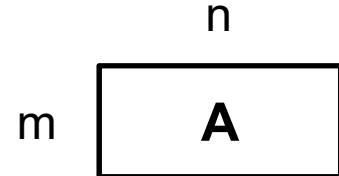
n  
  
m A

Rango massimo =  $n \leq m$   
Più equazioni che incognite

- il Rango è  $r \leq n$ . Il sistema ha soluzione per ogni  $\mathbf{y}$  combinazione lineare di  $r$  colonne di  $A$  linearmente indipendenti (oppure di una sua base)
- Il vettore  $\mathbf{y}$  è costituito da una base che definisce un sottospazio di dimensioni pari al Rango della matrice  $A$



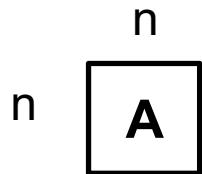
# Algebra Lineare



Rango massimo =  $m \leq n$

Più incognite che equazioni

- Se il Rango è massimo (= m), il sistema ha sempre soluzione, in quanto  $y$  è sempre combinazione lineare di m colonne di  $A$
- Se il Rango è minore di m, il sistema ha soluzione se e solo se  $y$  è combinazione lineare di una base del sottospazio immagine di  $A$



- Il Rango è = n . Il sistema ha una sola soluzione  $y$  combinazione lineare delle n colonne di  $A$ .  $A$  è non singolare,  $A^{-1}$  esiste.
- Il Rango è  $r < n$ . La soluzione  $y$  è una combinazione lineare di una base delle colonne di  $A$  linearmente indipendenti e appartenenti ad un sottospazio di dimensioni r



# Algebra Lineare

Nel caso in cui il vettore  $y$  sia il vettore nullo, il sistema algebrico si dice **omogeneo ed ammette sempre soluzione:**

$$Ax = 0$$

□ **Definizione:** La soluzione  $x_h$  del sistema omogeneo appartiene ad un sottospazio chiamato Nullo di  $A$  (Kernel) =  $\mathbf{N}(A)$ . Il Nullo di  $A$  ( $m \times n$ ) ha dimensioni  $n$  e contiene sempre almeno il vettore zero.

the *nullspace* of  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$  is defined as

$$\mathcal{N}(A) = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid Ax = 0 \}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot x = 0 \quad \text{Rango(A): } \gamma = 2 \quad x_h = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Rango(A): } \gamma = 1 \quad x_h = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot x = 0 \quad \text{Rango(A): } \gamma = 2 \quad x_h = 0 \quad \text{Rango(A): } \gamma = 1 \quad x_h = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$



# Algebra Lineare

- **Esempio:** Esistenza della soluzione non banale del vettore  $\mathbf{x}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

- Lo spazio Nullo è uno spazio vettoriale in quanto soddisfa le definizioni assiomatiche
- Lo spazio Nullo è un sottospazio in  $\mathbb{R}^3$
- Il Nullo di  $A$  consiste di tutti i multipli del vettore

$$\mathbf{x}_h = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Il Nullo di  $A$  è quindi una retta in  $\mathbb{R}^3$

- Lo spazio Nullo è uno spazio vettoriale
- Lo spazio Nullo è un sottospazio in  $\mathbb{R}^2$
- Il Nullo di  $A$  consiste nel vettore nullo, unico elemento nel sottospazio
- Il Nullo di  $A$  contiene soltanto l'origine

$$\mathbf{x}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



# Algebra Lineare

- **Teorema del Rango:** Fornisce la relazione tra  $\text{Rango } \gamma$ , dimensione dello spazio immagine  $\dim \mathbf{R}(A)$  e dimensione dello spazio nullo  $\dim \mathbf{N}(A)$ .

$$\boxed{\gamma + \dim[\mathbf{N}(A)] = \dim[\mathbf{R}(A)]}$$

- Dato il sistema  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ , con  $m$  equazioni ed  $n$  incognite e rango della matrice  $A$  uguale a  $\gamma$ . Il sistema ammette  $\infty^{(n-\gamma)}$  soluzioni che si ottengono sommando ad una soluzione particolare tutte le soluzioni del sistema omogeneo
- **Esempio:** Supponiamo per semplicità che la matrice  $A$  sia quadrata di ordine  $n$ .

- $\text{Rango}(A) = \gamma = \dim \mathbf{R}(A)$
- $\gamma + \dim \mathbf{N}(A) = n$
- Se  $\gamma = n$ ,  $\mathbf{N}(A)$  è un insieme vuoto quindi La matrice  $A$  è non singolare, ovvero  $\det(A) \neq 0$ .

- **Conclusioni:** La soluzione esiste se e solo se  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}(A)$  ed ha la forma:  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h = \mathbf{x}_p + \mathbf{N}(A)$ . La soluzione è unica se e solo se  $\mathbf{N}(A)$  è vuoto (a parte il vettore nullo), ovvero  $\gamma = n$ .

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbf{N}(A) \Rightarrow \mathbf{y} = A(\mathbf{x} + \mathbf{z})$$

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}, \mathbf{y} = A\tilde{\mathbf{x}} \Rightarrow \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{z}, \forall \mathbf{z} \in \mathbf{N}(A)$$



## Algebra Lineare

3BLUE1BROWN



### ■ Esempi:

•  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dim(\text{Im}) = 3 \\ \dim(N) = 1 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

•  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = 0 + \mathbf{x}_p = A^{-1}\mathbf{y}$

$$\begin{cases} \dim(\text{Im}) = 2 \\ \dim(N) = 0 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

•  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = \mathbf{x}_h = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dim(\text{Im}) = 2 \\ \dim(N) = 2 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

•  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p = 0 + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$

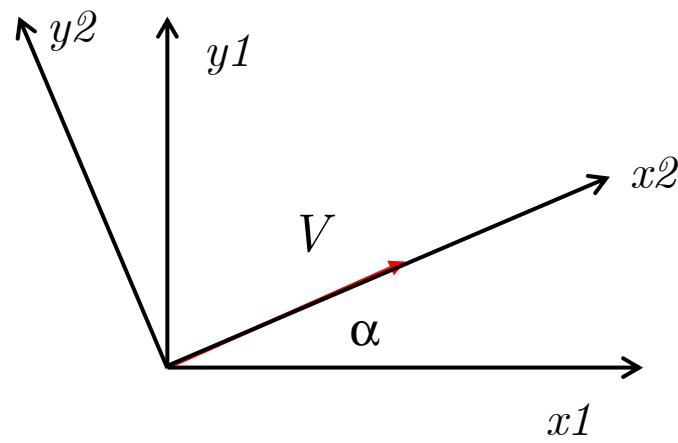
$$\begin{cases} \dim(\text{Im}) = 2 \\ \dim(N) = 0 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$



## Matrici Simili – Trasformazione di Similitudine

- Esempio da un problema di guida e navigazione

**Esempio:** Dato un vettore  $V$  che esprime la misura di una grandezza fisica, esso può essere espresso in diversi sistemi di riferimento (per comodità di calcolo, per migliore comprensione fisica, ecc.)



$$\begin{bmatrix} V_{x2} \\ V_{y2} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} V_{x1} \\ V_{y1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_{x2} \\ V_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{x1} \\ V_{y1} \end{bmatrix}$$

$$y = Ax, A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1 \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = A^T$$

□ **Domanda:** Come possiamo collegare le componenti dello stesso vettore nei due sistemi di riferimento?

$$\begin{bmatrix} V_{x1} \\ V_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \cos \alpha \\ V \sin \alpha \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_{x2} \\ V_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}$$

□ **Nota:** Il vettore è lo stesso in assoluto, ma le componenti ovviamente no.

$$\begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \cos \alpha \\ V \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V \cos \alpha \\ V \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}$$



## Trasformazioni di Similitudine

- **Definizione:** Date due matrici quadrate  $A(n,n)$  e  $B(n,n)$ , esiste una matrice quadrata  $T(n,n)$ , non singolare tale che:

$$B = T^{-1}AT \Leftrightarrow A = TBT^{-1}$$

La trasformazione da  $A \rightarrow B$  (e viceversa) si dice **Trasformazione di Similitudine**

- La trasformazione di similitudine è una trasformazione lineare ed ha importanti proprietà di invarianza (endomorfismo)
- La matrice di trasformazione esegue in sostanza un cambio di base dello spazio immagine .

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{y}' = B\mathbf{x}' \quad \begin{aligned} \mathbf{y}' &= T^{-1}\mathbf{y} \\ \mathbf{x}' &= T\mathbf{x} \end{aligned}$$

- Particolari Trasformazioni di interesse nella teoria dei sistemi lineari dinamici sono:

$$1 \quad \Lambda = M^{-1}AM \quad \Lambda = \text{Matrice Diagonale}$$

$$2 \quad J = P^{-1}AP \quad J = \text{Matrice quasi Diagonale (Forma di Jordan)}$$



## Autovalori e Autovettori ( Altro caso di applicazione di $y = Ax$ )

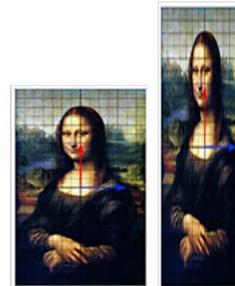
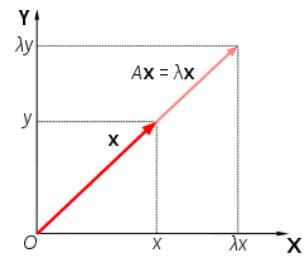
□ **Problema:** Data una matrice quadrata  $A$  ( $n \times n$ ), determinare il valore dello scalare  $\lambda$  e del vettore  $v$ , tale che valga la relazione:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow A\mathbf{v} = (\lambda I)\mathbf{v} \Leftrightarrow (\lambda I - A)\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$$

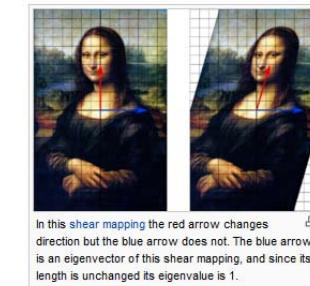
- $\lambda$  si dice autovalore di  $A$
- $v$  si dice autovettore (destro) associato a  $\lambda$



□ **Interpretazione geometrica:** La matrice  $A$  è un operatore lineare che trasforma il vettore  $v$  in se stesso a meno di un fattore di scala  $\lambda$



$$\begin{aligned} R1 &= 4, B1 = 5 \\ R2 &= 6, B2 = 2.5 \\ \lambda_1 &= 1.5, \lambda_2 = 0.5 \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



## Autovalori e Autovettori

□ **Soluzione:** Calcolo del vettore  $v$  non banale del sistema omogeneo:

$$(\lambda I - A)v = 0$$

$$\gamma + \dim[N(A)] = \dim[R(A)]$$

- La matrice  $(\lambda I - A)$  deve avere rango  $< n$ , ovvero il suo determinante deve essere uguale a 0, ovvero il nullo di  $(\lambda I - A)$  deve contenere una soluzione non banale.

$$\det(\lambda I - A) = |\lambda I - A| = \Delta(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots, a_1\lambda + a_0 \quad \text{Si chiama Polinomio Caratteristico di } A$$

- La soluzione fornisce  $n$  radici che prendono il nome di autovalori

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n = \{\lambda_i\}$$

- Gli autovalori costituiscono un **set di numeri autoconiugati** (ovvero reali e complessi e coniugati)
- Gli autovalori possono essere quindi:
  - **Reali e distinti (molteplicità algebrica = 1)**
  - **Reali e ripetuti  $m$  volte (molteplicità algebrica =  $m$ )**
  - **Coppie di numeri complessi e coniugati (magari con molteplicità algebrica  $\neq 1$ )**

□ **Definizione:** Si definisce Molteplicità algebrica il numero delle volte che un autovalore è ripetuto



## Autovalori e Autovettori

- **Esempi:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow (\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$$
$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & 2 \\ -1 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$
$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 + j\sqrt{2}, \lambda_2 = -1 - j\sqrt{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 6$$
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -2$$

□ **Nota 1:** Gli autovalori sono gli elementi della diagonale principale

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8$$
$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2$$

□ **Nota 2:** L'ultima riga contiene i coefficienti del polinomio caratteristico in ordine crescente e cambiati di segno



## Autovalori e Autovettori

- Per ogni autovalore  $\lambda_i$ , esiste un autovettore  $v$  (almeno uno) in quanto  $(\lambda_i I - A)$  perde di rango
- Gli autovettori costituiscono un set di vettori linearmente indipendente
- Gli autovettori associati ad autovalori reali sono reali
- Gli autovettori associati ad autovalori complessi e coniugati sono anch'essi complessi e coniugati

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3$$

$$\lambda_1 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 4 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2j$$

$$\lambda_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 2j & 4 \\ -1 & 2j \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 2 \\ -j \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 \rightarrow \begin{bmatrix} -2j & 4 \\ -1 & -2j \end{bmatrix} v = 0 \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 2 \\ j \end{bmatrix}$$



## Autovalori e Autovettori

```
>> A=[10,1,0;0,10,0;0,0,-13];
>> [V,D]=eig(A)
V =
 1.0000 -1.0000    0
  0  0.0000    0
  0    0  1.0000
D =
 10   0   0
  0  10   0
  0   0  -13
```

```
>> A=[1,2,3,4;5,6,7,8;8,7,6,5;4,3,2,1];
>> [V,D]=eig(A)
V =
 -0.2538  -0.5000   0.5194  -0.1718
 -0.6600  -0.5000  -0.8221   0.6168
 -0.6600   0.5000   0.0859  -0.7180
 -0.2538   0.5000   0.2168   0.2731
D =
 18.0000      0      0      0
  0  -4.0000      0      0
  0      0  0.0000      0
  0      0      0  -0.0000
```

```
A =
 1   2   3   4
 5   6   7   8
 8   7   6   5
 4   3   2   1
>> rank(A)
ans =
 2
>> rref(A)
ans =
 1   0   -1   -2
 0   1    2    3
 0   0    0    0
 0   0    0    0
```



## Autovalori e Autovettori

- Per ogni autovalore di molteplicità algebrica uguale a 1 esiste un solo autovettore linearmente indipendente
- Gli autovettori complessi e coniugati sono linearmente indipendenti per definizione (essendo ortogonali)

**Definizione:** (Molteplicità geometrica) Il numero di autovettori linearmente indipendenti corrispondenti ad uno stesso autovalore si dice molteplicità geometrica ed è uguale a  $\dim N(\lambda I - A)$

- **Domanda:** Cosa succede nel caso di calcolo di autovettori associati ad autovalori di molteplicità algebrica  $m > 1$ ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2 = 0; \lambda_{1,2} = 1 \quad \text{Molteplicità algebrica} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Molteplicità geometrica} = 1. \text{ Un solo autovettore linearmente indipendente}$$



## Autovalori e Autovettori

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, (\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}, \Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2 = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Molteplicità algebrica = 2

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v} = 0 \quad \mathbf{v} = \begin{cases} v_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ v_2 = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad \mathbf{v} = \begin{cases} v_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ v_2 = \beta \begin{bmatrix} \neq 0 \\ \neq 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad \mathbf{v} = \begin{cases} v_1 = \alpha \begin{bmatrix} \neq 0 \\ \neq 0 \end{bmatrix} \\ v_2 = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Molteplicità geometrica = 2

- In questo caso vi sono 2 autovettori linearmente indipendenti ed il sottospazio degli autovettori (eigenspace) associato all'autovalore 1 ha dimensione 2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, (\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}, \Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2 = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \bullet \quad \text{Molteplicità algebrica} = 2$$

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v} = 0 \quad \mathbf{v} = \begin{cases} v_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ v_2 = ? \end{cases} \quad \bullet \quad \text{Molteplicità geometrica} = 1$$



## Trasformazioni di Similitudine

- Proprietà di Invarianza di cui gode una Trasformazione di Similitudine ([https://it.wikipedia.org/wiki/Similitudine\\_fra\\_matrici](https://it.wikipedia.org/wiki/Similitudine_fra_matrici)):

$$B = T^{-1} A T \Leftrightarrow A = T B T^{-1}$$

- Proprietà commutativa e transitiva
- $\det(A) = \det(B)$
- $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(B)$
- $\text{Traccia}(A) = \text{Traccia}(B) = \text{somma degli elementi della diagonale}$
- $\text{eig}(A) = \text{eig}(B)$
- ..

- Example:  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **Trasformazione Modale:** Una particolare trasformazione di similitudine ( $A \sim B$ ) dove la matrice di similitudine  $T$  è formata dagli autovettori della matrice di partenza. La matrice risultante è diagonale (ovvero quasi diagonale)

- Una matrice è diagonalizzabile, mediante trasformazione di similitudine, se la molteplicità algebrica e geometrica sono le stesse.



## Trasformazioni Modali

### □ Caso 1: Gli autovalori di A sono distinti (Molteplicità algebrica = 1)

$$A^{n \times n} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1, \dots, \lambda_n \\ \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \end{cases}$$

$$T = M \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \quad B = M^{-1}AM = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & 0 \\ 0 & .. & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad A = M\Lambda M^{-1}$$

Esempio :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, M^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$



## Trasformazioni Modali

Esempio :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (\lambda, v) = 1 \pm 2j, \begin{bmatrix} 2 \\ -j \end{bmatrix}; 1 - 2j, \begin{bmatrix} 2 \\ j \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -j & j \end{bmatrix}, M^{-1} = \begin{bmatrix} .5 & j/2 \\ .5 & -j/2 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} .5 & j/2 \\ .5 & -j/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -j & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2j & 0 \\ 0 & 1-2j \end{bmatrix}$$

- Un'alternativa per avere una matrice reale e non complessa è quella di costruire la matrice di similitudine con la parte reale e la parte immaginaria di uno degli autovettori complessi:

$$M = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(v_1) & \operatorname{Im}(v_1) \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} A M = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 \\ -\omega_1 & \sigma_1 \end{bmatrix}; \lambda_1 = \sigma_1 + j\omega_1$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, M^{-1} = \begin{bmatrix} .5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} .5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \tilde{\Lambda}$$



## Trasformazioni Modali

### □ Caso 2: Gli autovalori di A sono ripetuti (molteplicità algebrica > 1)

- **Definizione:** si dice matrice **difettiva**, una matrice quadrata di ordine n che non possiede una base completa di autovettori e quindi non è diagonalizzabile
- **Definizione:** si dicono **autovettori generalizzati** i vettori che costituiscono una base completa di autovettori per una matrice difettiva. Essi sono in numero pari alla differenza tra la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica
- **Teorema:** una matrice quadrata  $A$  avente un autovalore  $\lambda_i$  con molteplicità algebrica  $r$ , può essere trasformata per similitudine in una forma quasi diagonale detta forma di Jordan.  $J$  ha l'autovalore sulla diagonale principale ed unità (1) sulla diagonale superiore, in numero pari alla differenza tra molteplicità algebrica e geometrica.

- Consideriamo la matrice modale di trasformazione di similitudine  $P$  formata da tutti gli autovettori ed eventuali autovettori generalizzati.

$$J = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PJP^{-1}$$

- Se e solo se le due molteplicità sono le stesse, si ha una diagonalizzazione

- **Teorema:** Data una matrice  $A$  avente un autovalore di molteplicità  $k$ , allora  $\dim N(\lambda I - A)^k$  è  $k$  e una base di  $N(\lambda I - A)^k$  è il set di autovettori generalizzati associati all'autovalore.



## Trasformazioni Modali

- Calcolo degli autovettori generalizzati mediante la formula ricorsiva:

$$(\lambda_i I - A)\mathbf{v}_i = 0$$

$$(\lambda_i I - A)\mathbf{v}_i^1 = -\mathbf{v}_i$$

$$(\lambda_i I - A)\mathbf{v}_i^2 = -\mathbf{v}_i^1$$

$$(\lambda_i I - A)\mathbf{v}_i^3 = -\mathbf{v}_i^2$$

...

### Esempio :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{pmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 2)^3 \quad \lambda_i = 2 \quad \blacksquare \quad \text{Molteplicità algebrica} = 3$$

$$(\lambda_i I - A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -8 & 12 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \blacksquare \quad \text{Molteplicità geometrica} = 1 \text{ (quindi 1 autovettore e 2 autovettori generalizzati)}$$



## Trasformazioni Modali

$$(2I - A)\mathbf{v}_i^1 = -\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_i^1 = \beta \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2I - A)\mathbf{v}_i^2 = -\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_i^2 = \gamma \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = [\mathbf{v}_i \quad \mathbf{v}_i^1 \quad \mathbf{v}_i^2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & .75 \\ 2 & -1 & .5 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & .25 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & .25 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & .75 \\ 2 & -1 & .5 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

□ A seconda della molteplicità geometrica, vi possono essere diverse forme di Jordan:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_2^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_2^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



## Trasformazioni Modali

**Definizione** : data una matrice A quadrata di ordine n, si definiscono autovettori destri gli autovettori  $v_i$  per cui vale:

$$(\lambda_i I - A)v_i = 0$$

ed autovettori sinistri, gli autovettori  $\mu_i$  per cui vale:

$$(\lambda_i I - A^T)\mu_i = \mu_i^T (\lambda_i I - A) = 0$$

Nota che vale:

$$M = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_1^T \\ \mu_2^T \\ \vdots \\ \mu_n^T \end{bmatrix}$$

- **Nota:** Data la matrice quadrata: Se  $A_{12}$  e/o  $A_{21} = 0$ , vale:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & | & A_{12} \\ \hline A_{21} & | & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{eig}(A) = \text{eig}(A_{11}) \cup \text{eig}(A_{22})$$

Eigenvalues Eigenvectors



## Teorema di Cayley-Hamilton

- **Enunciato:** Ogni matrice quadrata  $A$  soddisfa la propria equazione caratteristica

$$\det(\lambda I - A) = |\lambda I - A| = \Delta(\lambda) = -(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0) = 0$$



$$\Delta(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0$$

- **Nota:** dalla teoria delle matrici,  $a_0 = \det(A)$
- **Nota:** nel caso di matrice  $A$  non singolare, il teorema di Cayley-Hamilton fornisce un metodo per il calcolo della matrice inversa  $A^{-1}$ .

$$A^{-1}[\Delta(A)] = A^{-1}[A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I] = 0$$

$$A^{-1}[\Delta(A)] = A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I + a_0A^{-1} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{a_0}[A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I] \\ a_0 &\neq 0 \end{aligned}}$$



## Teorema di Cayley-Hamilton

■ **Esempio:**  $A = \begin{bmatrix} 8 & -0.1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3.4 & 6 & 12.5 \end{bmatrix}$

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 8 & 0.1 & -2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ 3.4 & -6 & \lambda - 12.5 \end{bmatrix}, \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 22.5\lambda^2 + 141.9\lambda - 179.19$$

$$\Delta(A) = A^3 - 22.5A^2 + 141.9A - 179.19I = 0$$

$$179.19A^{-1}A = (A^2 - 22.5A + 141.9I)A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{179.19}(A^2 - 22.5A + 141.9I)$$

```
A =
          8.0000   -0.1000    2.0000
          1.0000    2.0000    1.0000
         -3.4000    6.0000   12.5000
>> det(A)
ans =
179.1900

>> inv(A)
ans =
          1.0000   -0.0000   -0.0000
          0.0000    1.0000    0.0000
         -0.0000   -0.0000    1.0000
          0.1060    0.0739   -0.0229
         -0.0887    0.5960   -0.0335
          0.0714   -0.2660    0.0898

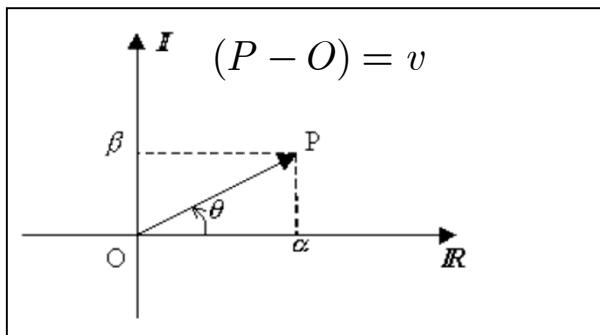
>> B=(A*A-22.5*A+141.9*eye(3))/179.19
B =
          0.1060    0.0739   -0.0229
         -0.0887    0.5960   -0.0335
          0.0714   -0.2660    0.0898

>> B*A
ans =
          1.0000   -0.0000   -0.0000
          0.0000    1.0000    0.0000
         -0.0000   -0.0000    1.0000
```



# Numeri Complessi

## □ Rappresentazioni nel piano Cartesiano complesso



$$v = \alpha + j\beta$$

$$v = \begin{cases} |v| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \angle v = \theta = \tan^{-1} \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^* \end{cases}$$

- Modulo
- Fase

$$v = |v|(\cos \theta + j \sin \theta)$$

## □ Formule di Eulero

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad \cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

## □ Diseguaglianza di Schwartz

$$|v_1 + v_2| \leq |v_1| + |v_2|$$



# Numeri Complessi

## □ Operazioni algebriche

$$v_1 \cdot v_2 = z = \begin{cases} |z| = |v_1| \cdot |v_2| \\ \angle z = \angle v_1 + \angle v_2 \end{cases}$$

$$v_1 / v_2 = z = \begin{cases} |z| = |v_1| / |v_2| \\ \angle z = \angle v_1 - \angle v_2 \end{cases}$$

## □ Somma di esponenziali complessi

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta \\ c_{1,2} = \delta \pm j\gamma \end{cases} \Rightarrow z = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = ?$$

$$\begin{aligned} z &= (\delta + j\gamma)e^{(\alpha+j\beta)t} + (\delta - j\gamma)e^{(\alpha-j\beta)t} = \\ &= \delta e^{\alpha t} \left[ e^{+j\beta t} + e^{-j\beta t} \right] + j\gamma e^{\alpha t} \left[ e^{+j\beta t} - e^{-j\beta t} \right] = \\ &= 2\delta e^{\alpha t} \cos(\beta t) - 2\gamma e^{\alpha t} \sin(\beta t) = \\ &= 2e^{\alpha t} \left[ \delta \cos(\beta t) - \gamma \sin(\beta t) \right] \end{aligned}$$

## □ Esponenziale complesso

$$z = \alpha + j\beta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{j \tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha})} = |z| e^{j\theta}$$

$$e^z = e^{(\alpha+j\beta)} = e^\alpha \cdot e^{j\beta}$$

```
>> a=3+4*i
a =
3.0000 + 4.0000i
>> b=6-2*i
b =
6.0000 - 2.0000i
>> a+b
ans =
9.0000 + 2.0000i
>> a*b
ans =
26.0000 +18.0000i
>> a/b
ans =
0.2500 + 0.7500i
```



# Numeri Complessi

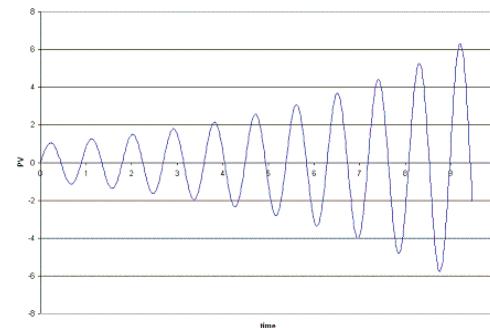
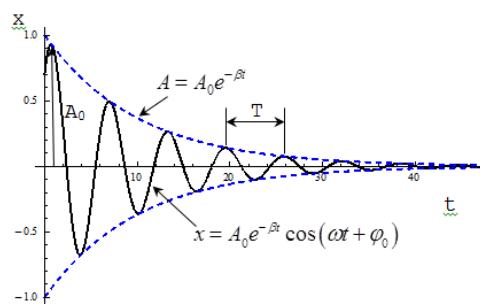
$$\begin{cases} |c_1| = |c_2| = |c| = \sqrt{\delta^2 + \gamma^2} \\ \angle c_1 = \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right); \angle c_2 = -\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-\gamma}{\delta}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta = |c| \cos \phi \\ \gamma = |c| \sin \phi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z &= |c| e^{j\phi} e^{(\alpha+j\beta)t} + |c| e^{-j\phi} e^{(\alpha-j\beta)t} = \\ &= |c| e^{\alpha t} [e^{+j(\beta t + \phi)} + e^{-j(\beta t + \phi)}] = \\ &= 2|c| e^{\alpha t} \cos(\beta t + \phi) = \\ &= 2|c| e^{\alpha t} \sin\left(\beta t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$z = (\delta + j)\gamma e^{(\alpha+j\beta)t} + (\delta - j\gamma)e^{(\alpha-j\beta)t} = 2e^{\alpha t} [\delta \cos(\beta t) - \gamma \sin(\beta t)]$$

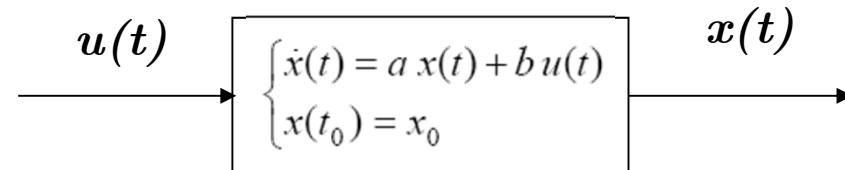
$$z = (\delta + j)\gamma e^{(\alpha+j\beta)t} + (\delta - j\gamma)e^{(\alpha-j\beta)t} = 2\sqrt{\delta^2 + \gamma^2} e^{\alpha t} \sin\left(\beta t + \tan^{-1}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$





## Equazioni Differenziali Lineari

- Consideriamo un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti.



- Moltiplicando ambo i membri per  $e^{-at} \neq 0$ , per ogni  $t > 0$

$$e^{-at} \dot{x}(t) = e^{-at} a x(t) + e^{-at} b u(t) \quad \Rightarrow \quad e^{-at} \dot{x}(t) - a e^{-at} x(t) = e^{-at} b u(t) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d[e^{-at} x(t)]}{dt} = e^{-at} b u(t)$$

- Integrando tra  $[t_0, t]$  si ha:

$$e^{-at} x(t) \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t e^{-a\tau} b u(\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad e^{-at} x(t) = e^{-at_0} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-a\tau} b u(\tau) d\tau$$

- Moltiplicando ambo i membri per  $e^{at} \neq 0$ , per ogni  $t > 0$

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$



## Equazioni Differenziali Lineari

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)b}u(\tau)d\tau = x_h(t) + x_p(t)$$

$x_h(t)$  □ Il primo termine del secondo membro rappresenta l'evoluzione libera. Ovvero la soluzione dell'omogenea associata.

$x_p(t)$  □ Il secondo termine del secondo membro rappresenta l'evoluzione forzata. Ovvero la soluzione particolare dipendente da  $u(t)$ .

- Essendo l'equazione differenziale lineare, la soluzione globale è una combinazione lineare delle due soluzioni.

### ■ Esempio

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -2x(t) + 6u(t) & x_h(t) &= ce^{-2t}; x_p(t) = k \\ x(0) &= 1; u(t) = 1\end{aligned}$$

$$0 = -2k + 6 \Rightarrow k = 3$$

$$x(0) = 1 = ce^{-2 \cdot 0} + 3 \Rightarrow c = -2 \quad x(t) = -2e^{-2t} + 3$$

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{at}x(0) + \int_0^t e^{-2(t-\tau)}6u(\tau)d\tau \\ &= e^{-2t} + 6 \left[ \frac{e^{-2(t-\tau)}}{2} \right]_0^t = e^{-2t} + 3 - 3e^{-2t}\end{aligned}$$

$$x(t) = -2e^{-2t} + 3$$



# Equazioni Differenziali Lineari

## □ Equazioni Differenziali Lineari a Coefficienti Costanti – 2º Ordine

### 1. Equazione omogenea

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = 0$$
$$x_0, \dot{x}_0$$

- Dalla teoria delle equazioni differenziali è sempre possibile trovare due soluzioni linearmente indipendenti

$$x_{h1}(t); x_{h2}(t)$$

- Due soluzioni sono linearmente indipendenti se e solo se il determinante Wronskiano  $W$  è diverso da zero

$$W = \begin{vmatrix} x_{1h} & x_{2h} \\ \dot{x}_{1h} & \dot{x}_{2h} \end{vmatrix} = x_{1h}\dot{x}_{2h} - \dot{x}_{1h}x_{2h} \neq 0$$

- Se due soluzioni sono indipendenti, esiste una coppia non nulla di parametri tale che:

$$x_{3h}(t) = c_1 x_{1h}(t) + c_2 x_{2h}(t)$$

Quindi, date due soluzioni, anche la loro combinazione lineare è soluzione



## Equazioni Differenziali Lineari a Coefficienti Costanti – 2º Ordine



Assumiamo come soluzione generale dell'equazione omogenea una funzione esponenziale:

$$x_h(t) = ce^{\lambda t}$$

Da cui:  $\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = (\lambda^2 + a\lambda + b)ce^{\lambda t} = 0$

Deve essere quindi soddisfatta l'equazione **Algebrica**  $\Rightarrow (\lambda^2 + a\lambda + b) \triangleq 0$   
**associata**

- Radici  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  reali e distinte  $x_h(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} \Rightarrow W = c_1c_2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0$
- Radici  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  reali e ripetute  $x_h(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t} = (c_1 + c_2t)e^{\lambda t} \Rightarrow W = c_1c_2e^{2\lambda t} \neq 0$
- Radici  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  complesse e coniugate

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta \\ c_{1,2} = \delta \pm j\gamma \end{cases} \quad x_h(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$$



## Equazioni Differenziali Lineari a Coefficienti Costanti – 2º Ordine

Nel caso di radici complesse e coniugate, la soluzione può essere espressa in forma **REALE** usando le formule di Eulero:

$$z = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = 2e^{\alpha t} \left[ \delta \cos(\beta t) - \gamma \sin(\beta t) \right] = 2|c| e^{\alpha t} \sin\left(\beta t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_h(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_2 t} \\ a_1 e^{\alpha t} \sin(\beta t + a_2) \end{cases}$$

### 2. Equazione differenziale del secondo ordine non omogenea:

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = f(t)$$
$$x_0, \dot{x}_0$$

- La soluzione è somma delle soluzioni dell'omogenea associata e della soluzione particolare.

$$x(t) = c_1 x_{h1}(t) + c_2 x_{h2}(t) + x_p(t)$$



## Equazioni Differenziali Lineari – 2º Ordine

**Esempio 1:**  $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) - 10x(t) = 1$

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$$

$$\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 2$$

$$x(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{2t} + k$$

**Esempio 2:**

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 2 \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + k$$



## Equazioni Differenziali Lineari – 2º Ordine



**Esempio 3:**

$$\ddot{x}(t) + x(t) = e^{-3t} \quad \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm j$$

$$x(t) = (\delta + j\gamma)e^{(\alpha+j\beta)t} + (\delta - j\gamma)e^{(\alpha-j\beta)t} + ke^{-3t}$$

$$x(t) = \delta e^{\alpha t} [e^{j\beta t} + e^{-j\beta t}] + j\gamma [e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}] + ke^{-3t}$$

$$\alpha = 0; \beta = 1$$

$$x(t) = 2\delta \cos t - 2\gamma \sin t + ke^{-3t}$$



# Equazioni Differenziali Lineari di Ordine Superiore

□ La forma generale è data da:

$$\begin{cases} \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = u \\ y_0, \dot{y}_0, \dots \end{cases}$$

□ La soluzione è :

$$\begin{cases} y(t) = y_h(t) + y_p(t) \\ y(t) = y_p(t) + \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \end{cases}$$

- L'equazione algebrica associata è :  $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$

- Per ogni soluzione  $\lambda_i$  reale e distinta si ha il contributo:

$$c_i e^{\lambda_i t}$$

- Per ogni soluzione  $\lambda_j$  reale e di molteplicità  $m$  si ha il contributo:

$$c_j e^{\lambda_j t} + c_{j+1} t e^{\lambda_j t} + \dots + c_{j+m} t^{m-1} e^{\lambda_j t}$$

- Per ogni soluzione  $\lambda_h, \lambda_k$  complessa e coniugata si ha il contributo:

$$\begin{aligned} c_h e^{\lambda_h t} + c_k e^{\lambda_k t} &= (\delta + j\gamma) e^{(\alpha+j\beta)t} + (\delta - j\gamma) e^{(\alpha-j\beta)t} \\ ce^{\alpha t} \sin(\beta t + d) \end{aligned}$$



# Equazioni Differenziali Lineari di Ordine Superiore

- Un'equazione differenziale di ordine n ([lineare o nonlineare](#)) può essere sempre trasformata in un sistema equivalente di equazioni differenziali del primo ordine

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = u$$

1. Definiamo il vettore:

$$\mathbf{x}(t) \in \Re^n$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T$$

2. Si può riscrivere:

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}, \dots, x_n = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2, \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3, \dots, \dot{x}_n = \frac{d^n y}{dt^n}$$

3. Si può riscrivere l'equazione differenziale di ordine n come un sistema di equazioni differenziali del primo ordine più un sistema algebrico che identifica la soluzione:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_{nxn} \mathbf{x}(t) + B_{nx1} u(t)$$

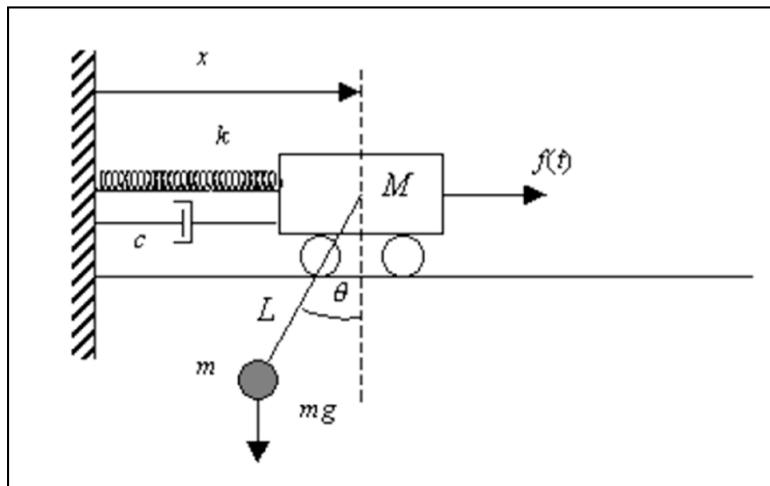
$$\mathbf{y}(t) = C_{1xn} \mathbf{x}(t)$$

$$A_{nxn} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_{nx1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



## Equazioni Differenziali Lineari: Esempi

### □ Modello di Carro Ponte



$$\begin{cases} x_m = x - L \sin \theta \cong x - L\theta \\ y_m = -L \cos \theta \cong -L \end{cases}$$

Equazioni del moto per piccoli spostamenti (linearizzate)

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} - mL\ddot{\theta} + c\dot{x} + kx = f(t) \\ mL^2\ddot{\theta} - mL\ddot{x} + mLg\theta = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = \theta, \quad x_4 = \dot{\theta}$$

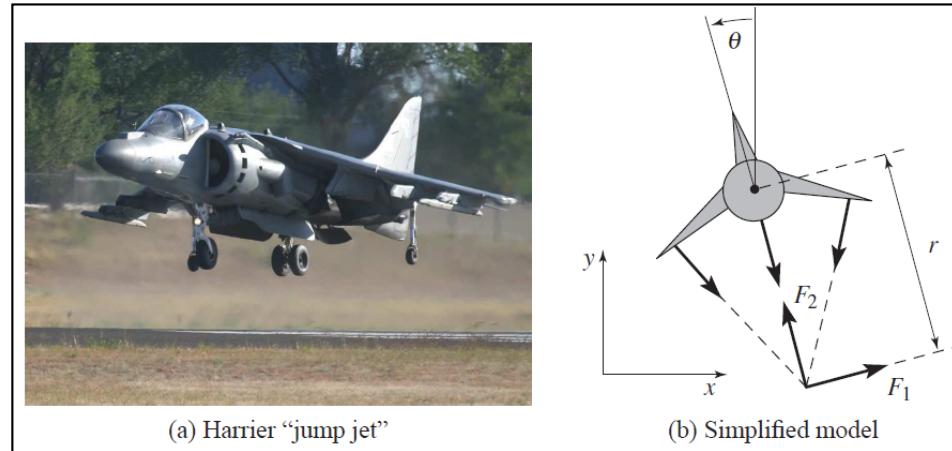
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{mL}{M+m}\dot{x}_4 - \frac{c}{M+m}x_2 - \frac{k}{M+m}x_1 + \frac{1}{M+m}f(t) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{\dot{x}_2}{L} - \frac{g}{L}x_3 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{M}, b = \frac{1}{ML}$$

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -ak & -ac & -amg & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -bk & -bc & -b(M+m)g & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} f(t)$$



## Equazioni Differenziali Lineari: Esempi



- Equilibrio dinamico

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= F_1 \cos \theta - F_2 \sin \theta - c\dot{x}, \\m\ddot{y} &= F_1 \sin \theta + F_2 \cos \theta - mg - c\dot{y}, \\J\ddot{\theta} &= rF_1.\end{aligned}$$

- Assumendo piccoli spostamenti rispetto alla posizione verticale

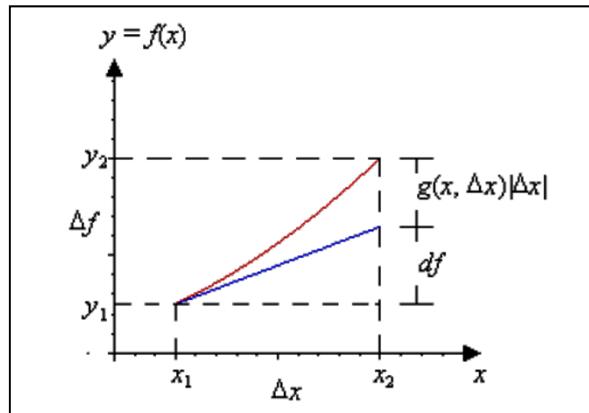
$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= F_1 - c\dot{x} \\m\ddot{y} &= F_2 - mg - c\dot{y} \\J\ddot{\theta} &= rF_1\end{aligned}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 = \dot{x} \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} \\ \dot{x}_3 = \dot{y} \\ \dot{x}_4 = \ddot{y} \\ \dot{x}_5 = \dot{\theta} \\ \dot{x}_6 = \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 \\ \frac{r}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ -g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



## Linearizzazione

- Il processo di linearizzazione è molto importante per la costruzione di una classe di modelli approssimati di largo uso in campo ingegneristico: **I sistemi lineari dinamici**
- La linearizzazione è una procedura che consiste nell'approssimare una funzione non lineare nell'intorno di un punto particolare definito, con la tangente in tale punto, ovvero sostituire la variazione  $\Delta f$  della funzione con il suo differenziale  $df$ .



$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

$$\begin{cases} \Delta f = df + g(x, \Delta x)|\Delta x| \\ df = \frac{df}{dx} dx \approx k\Delta x \end{cases} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x, \Delta x) = 0 \Rightarrow \Delta f = df$$

- Con questa approssimazione, la retta secante che passa tra i punti  $x_1$  e  $x_2$ , tende a coincidere con la retta tangente alla curva nel punto  $x_1$ , per  $\Delta x > 0$

- La linearizzazione si può applicare a funzioni algebriche e/o differenziali continue e con derivata continua della forma:

$$y = f(x) \quad y = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x)$$



## Linearizzazione

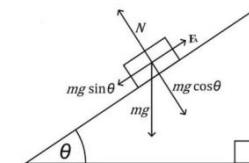
- **Definizione:** Data una funzione  $y = f(x)$ , si definisce punto stazionario  $x_0$ , il valore che annulla la derivata prima

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} = f'(x_0) = 0$$

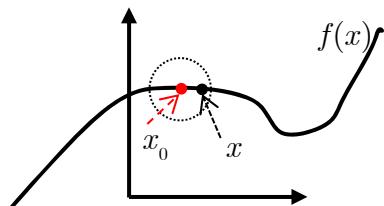
- **Definizione:** Dato un sistema descritto da un'equazione differenziale del tipo  $\dot{x} = f(x)$  si definisce punto di equilibrio  $x_0$ , il valore che annulla la derivata prima, ovvero:

$$\dot{x}_0 = f(x_0) = 0$$

In assenza di agenti esterni (forzanti, condizioni iniziali), un sistema che si trova al punto di equilibrio vi rimane indefinitamente.



**Le due definizioni coincidono nel caso di equazione  $f(x)$  omogenea e non necessariamente nel caso di equazione non omogenea**



- Nel seguito consideriamo soltanto funzioni che descrivono sistemi dinamici della forma:  
$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$
- Con  $x(t)$  scalare oppure vettore



## Linearizzazione

$$\dot{x} = f(x)$$

$$x(t) = x_0 + \delta x \Rightarrow f(x) = f(x_0 + \delta x)$$

□ **Strumento per la linearizzazione:** Sviluppo in Serie di Taylor nell'intorno di un punto stazionario/equilibrio  $x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x_0} \delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\Big|_{x_0} \delta x^2 + \dots$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \delta \dot{x} \cong f(x_0) + \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x_0} \delta x + \dots$$

La parte che interessa è costituita dall'evoluzione dovuta a 'piccoli' spostamenti  $\delta x$  rispetto all'equilibrio, quindi:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x_0} \delta x + g(x, \delta x)$$

Essendo  $x_0$  un punto di equilibrio, per definizione:  $\dot{x}_0 = f(x_0) = 0$

Da cui, sostituendo, si ricava:

$$\delta \dot{x} = \frac{df}{dx}\Big|_{x_0} \delta x = a \delta x$$

- La soluzione approssimata lineare è quindi:  $\dot{x} = f(x) \Rightarrow x(t) \approx x_0 + \delta x(t)$



## Linearizzazione (esempio)

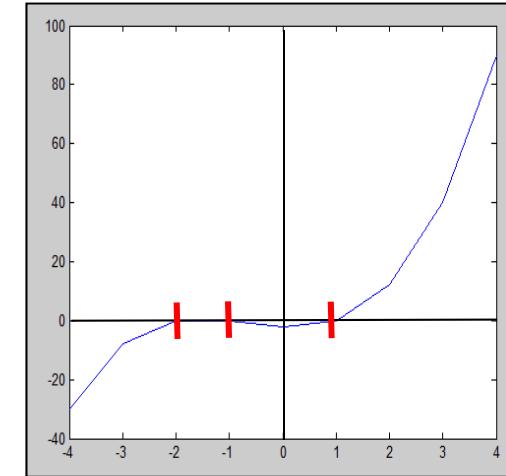
$$\dot{x} = x^3 + 2x^2 - x - 2 = f(x)$$

$$f(x_0) = x_0^3 + 2x_0^2 - x_0 - 2 = (x_0^2 - 1)(x_0 + 2) = 0$$

$$\Rightarrow x_{01} = -1, x_{02} = 1, x_{03} = -2$$

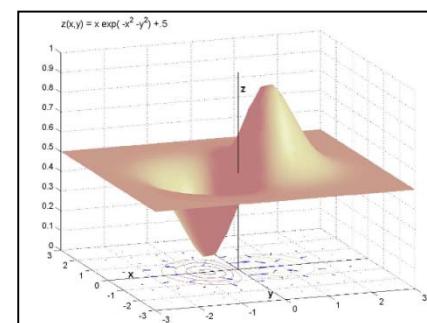
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 4x - 1 \quad \begin{cases} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{01}} = -2 \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{02}} = 6 \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{03}} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{1L} = -2(x+1) \\ \dot{x}_{2L} = 6(x-1) \\ \dot{x}_{3L} = 3(x+2) \end{cases}$$



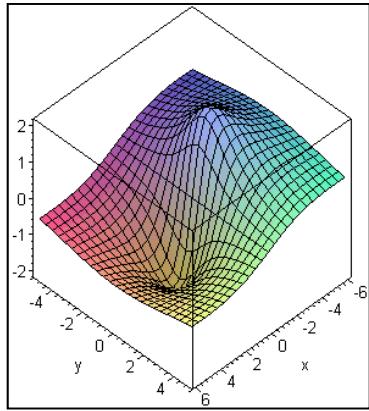
- Linearizzazione di una funzione scalare differenziale di più variabili: **il Gradiente**

$$\dot{y} = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

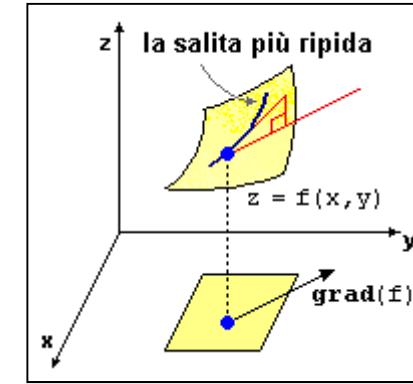




## Linearizzazione



$$f(x_1, x_2) = \frac{6x_1}{2 + x_1^2 + x_2^2}$$



□ **Definizione:** Data una funzione scalare di  $n$  variabili  $f(x_1, \dots, x_n)$  differenziabile, ad ogni punto  $x$  è possibile associare un campo vettoriale detto gradiente e definito dal vettore di derivate parziali nel punto:

$$\nabla f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

- Lo sviluppo in serie di Taylor di tale funzione vale:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \Bigg|_{\mathbf{x}_0} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Bigg|_{\mathbf{x}_0} \delta x_n \right] + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \Bigg|_{\mathbf{x}_0} \delta x_1^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \Bigg|_{\mathbf{x}_0} \delta x_n^2 + \right. \\ \left. 2 \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1,n \\ j=1,n}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Bigg|_{\mathbf{x}_0} \delta x_i \delta x_j \right] + \frac{1}{3!} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3} \Bigg|_{\mathbf{x}_0} \delta x_i^3 + 3 \left[ \sum_{\substack{i \neq j \neq k \\ i=1,n \\ j=1,n \\ k=1,n}} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \Bigg|_{\mathbf{x}_0} \delta x_i \delta x_j \delta x_k \right] \right\} + \dots$$



## Linearizzazione

- Da cui, mantenendo i termini lineari (termini del primo ordine nella perturbazione e termini relativi all'equilibrio) si ha:

$$f(\mathbf{x}) \simeq f(\mathbf{x}_0) + f(\delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + (\nabla f|_{\mathbf{x}_0})^T \delta\mathbf{x}$$

□ Esempio:  $f(\mathbf{x}) = z = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 - x_2$

- Calcolo punti di equilibrio:

$$f(\mathbf{x}_0) = 0 \Rightarrow x_1(x_1 + 4) + x_2(x_2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_{01} = (0, 0) \\ \mathbf{x}_{02} = (-4, 1) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - 1$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}_{01}} = 4$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}_{01}} = -1$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}_{02}} = -4$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}_{02}} = 1$$



## Linearizzazione

$$z_{LIN} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 4 & 2x_2 - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \end{bmatrix}$$
$$z_{LIN1} = 4x_1 - x_2$$
$$z_{LIN2} = -4(x_1 + 4) + (x_2 - 1)$$

- Linearizzazione di una funzione vettoriale di più variabili: **Matrici Jacobiana ed Hessiana**

$$\dot{x} = f(x)$$

- **Matrice Jacobiana contiene le derivate prime**

$$\begin{aligned} x &= [x_1, \dots, x_n]^T \\ \dot{x} &= [\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n]^T \\ f &= [f_1, \dots, f_n]^T \end{aligned}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- **Matrice Hessiana contiene le derivate seconde**

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$



## Linearizzazione

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \delta x = f(x_0) + J\Big|_{x_0} \delta x + \frac{1}{2!} \delta x^T H\Big|_{x_0} \delta x + \dots$$

$\dot{x}_0 = f(x_0) = 0 \longrightarrow$  Il calcolo della condizione di equilibrio implica  
La soluzione di un sistema algebrico nonlineare  
(problema complesso in generale)

$\delta \dot{x} = J\Big|_{x_0} \delta x \longrightarrow$  Il sistema , se quadrato, è costituito da n equazioni  
differenziali lineari, a coefficienti costanti, con n  
Incognite della forma generale:

$$\delta \dot{x} = A \delta x$$

□ Esempio:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1^2 - 6x_2 \\ 6x_1 x_2 + 9x_1^2 - 3 \sin x_1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 8x_1 & -6 \\ 18x_1 + 6x_2 - 3 \cos x_1 & 6x_1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

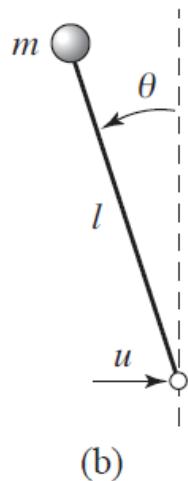
$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \delta \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \delta x \quad \begin{aligned} \delta \dot{x}_1 &= -6 \delta x_2 \\ \delta \dot{x}_2 &= -3 \delta x_1 \end{aligned} \quad \begin{cases} x_1(t) = ? \\ x_2(t) = ? \end{cases}$$



## Esempio Applicativo - Linearizzazione



(a)



- Modello lancio razzo mediante pendolo inverso.
- In questo caso, si usa la forza  $u$  per mantenere il pendolo verticale

$$\ddot{\theta} = \frac{mgl}{J_T} \sin \theta - \frac{\gamma}{J_T} \dot{\theta} + \frac{l}{J_T} \cos \theta \cdot u$$
$$J_T = J + ml^2$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{mgl}{J_t} \sin \theta - \frac{\gamma}{J_t} \dot{\theta} + \frac{l}{J_t} \cos \theta u \end{bmatrix}, \quad y = \theta, \quad \begin{bmatrix} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

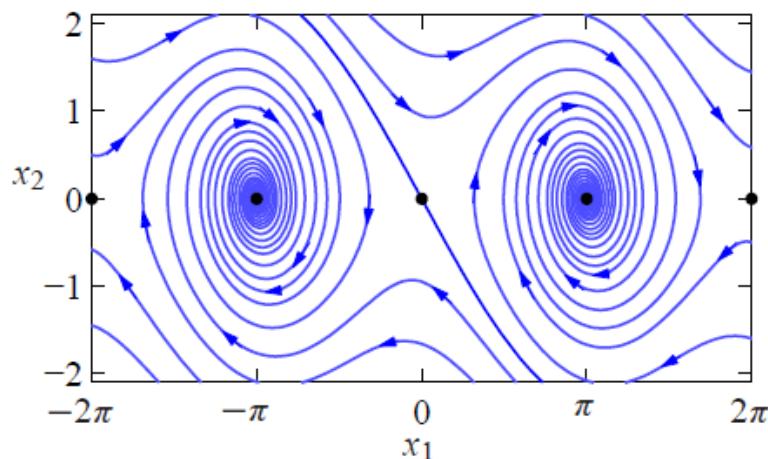
$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sin x_1 - cx_2 + u \cos x_1 \end{bmatrix}$$



## Esempio Applicativo - Linearizzazione

- Calcolo dei punti di Equilibrio:

$$\dot{x}_e = F(x_e) = 0 \Rightarrow x_e = \begin{bmatrix} \pm n\pi, n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 \end{bmatrix}, u = 0$$



- Piano delle fasi della soluzione per  $u = 0$ . (soltanto 5 punti di equilibrio)

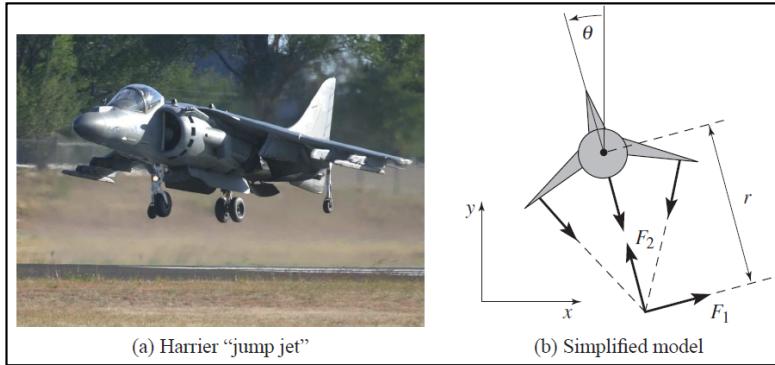
$$\begin{aligned} x &= x_e + \delta x \\ \dot{x} &= \dot{x}_e + \delta \dot{x} = F(x_e) + J|_{x_e} \cdot \delta x \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta \dot{x} &= J|_{x_e} \cdot \delta x \end{aligned}$$

$$J|_{x_e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos x_1 - u \sin x_1 & -c \end{bmatrix}_{\bar{x}_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{bmatrix} \quad \ddot{\theta} = \theta - c\dot{\theta}$$



## Linearizzazione (esercizio)

- Linearizzare il sistema:



$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= F_1 \cos \theta - F_2 \sin \theta - c\dot{x}, \\m\ddot{y} &= F_1 \sin \theta + F_2 \cos \theta - mg - c\dot{y}, \\J\ddot{\theta} &= rF_1.\end{aligned}$$

- Intorno alla posizione di hover data dal seguente punto di equilibrio:

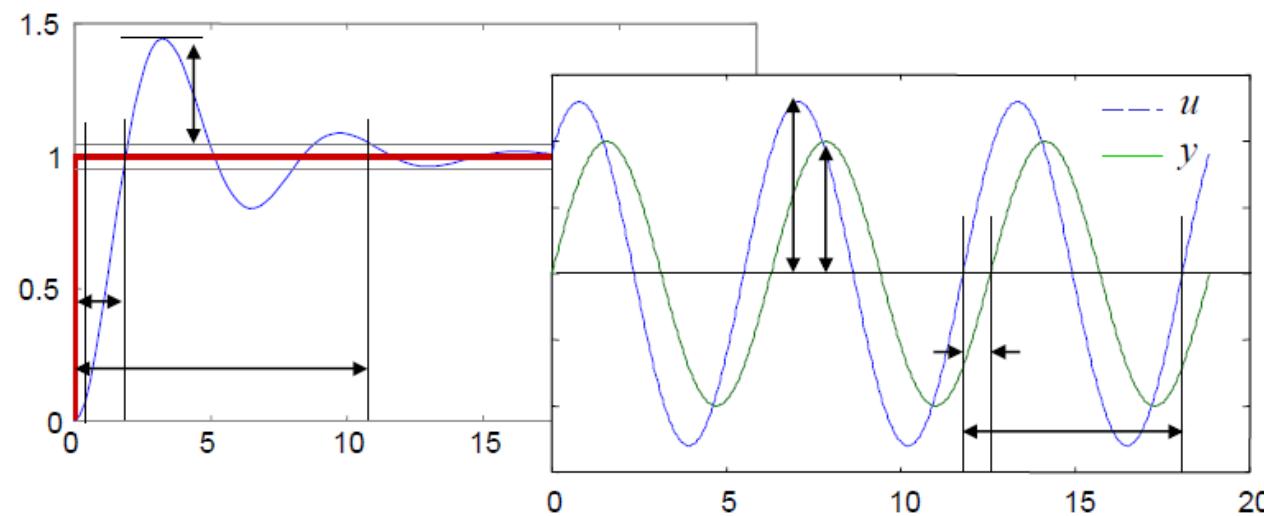
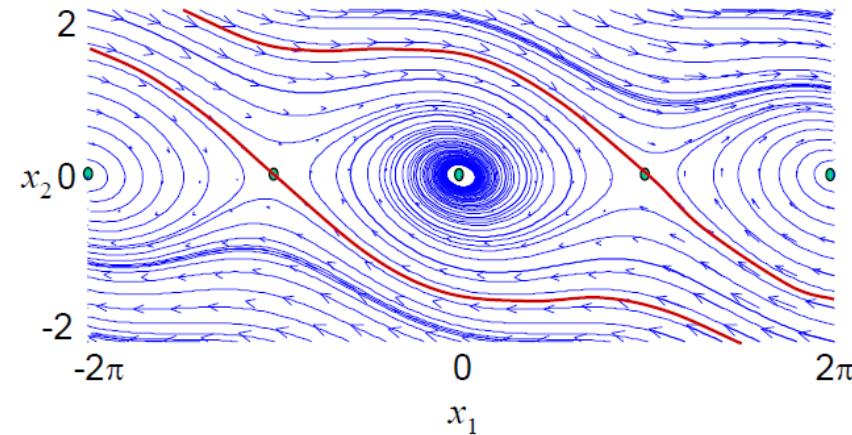
$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\ \dot{x}_0 &= 0 \\ y_0 &= r_0 \\ \dot{y}_0 &= 0 \\ \theta_0 &= 0 \\ \dot{\theta}_0 &= 0 \\ F_1 &= 0 \\ F_2 &= mg\end{aligned}$$



# MODELLISTICA E SISTEMI



- Definizioni
- Classificazione
- Esempi
- Tipologie di Controllo





# Riferimenti

- Capitolo 2 Testo di Bolzern
- Capitoli 2 e 5 testo di Murray  
(download)
- Appunti prof. Canale  
(POLITO)



Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.

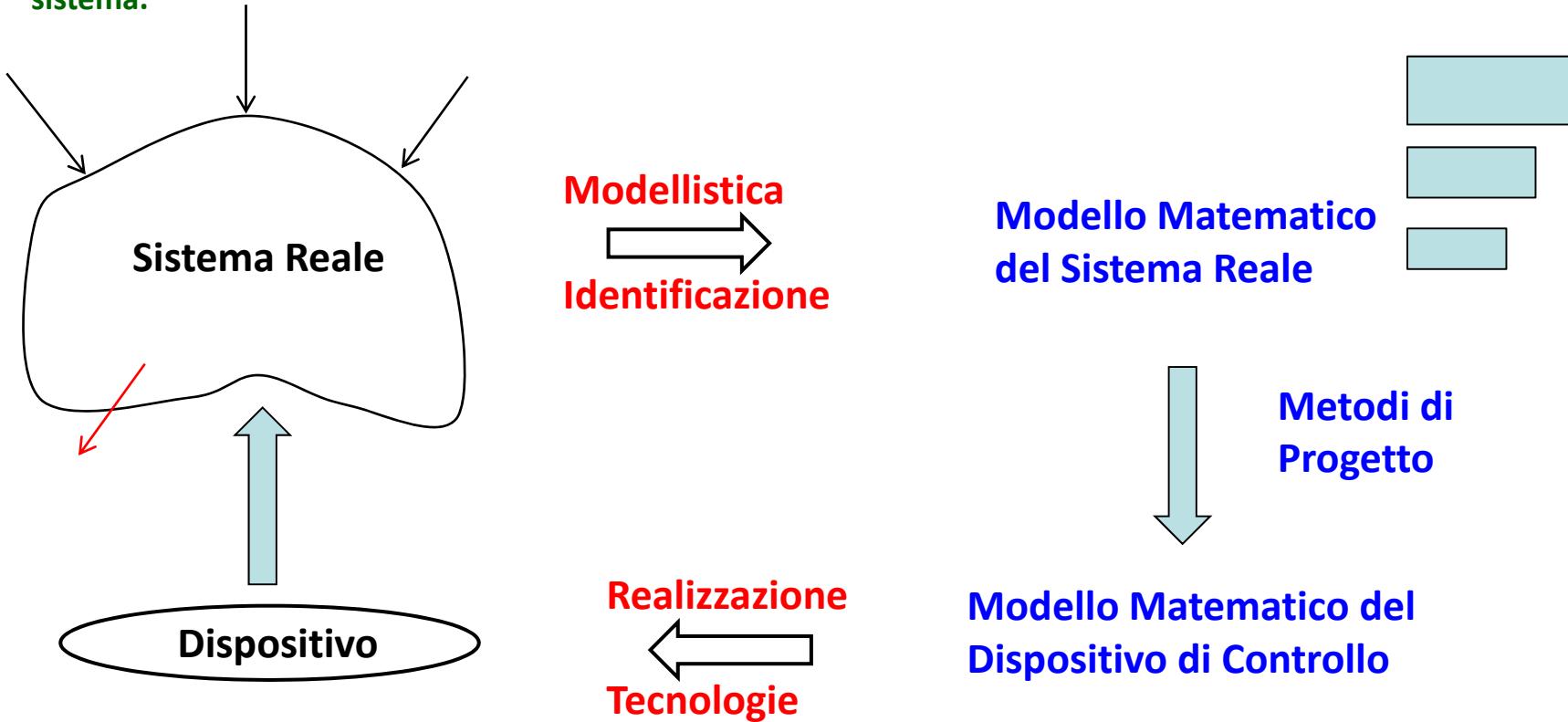
Con. Avanzati

Con. Standard



## Definizioni

- L'area tecnologica dell'automazione riguarda una grande varietà di processi e di applicazioni.
- Il corso descrive alcune metodologie e procedure applicabili in generale e non vincolati al particolare sistema.

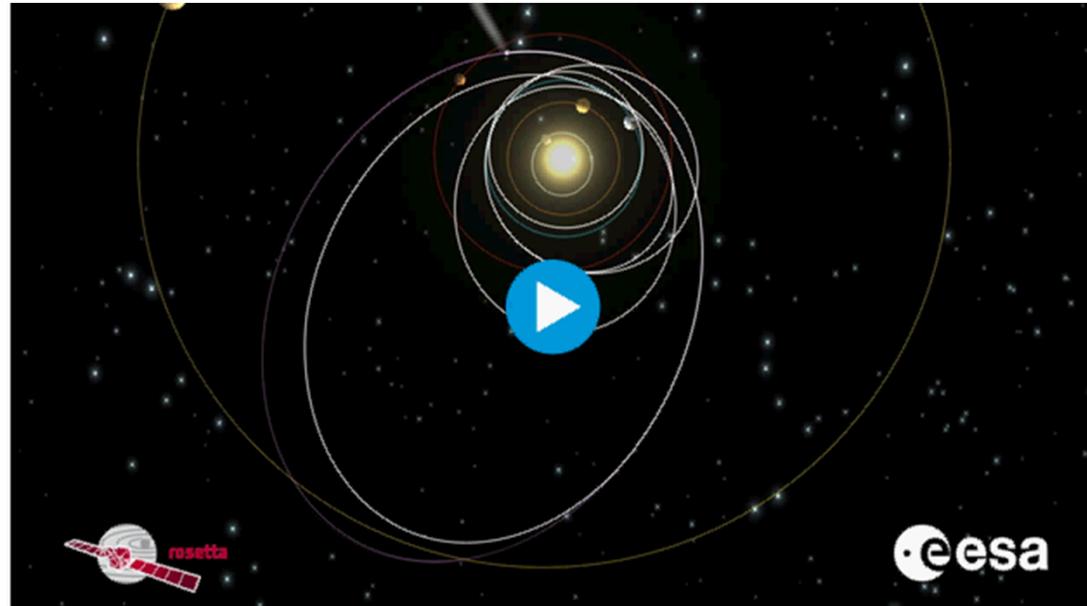
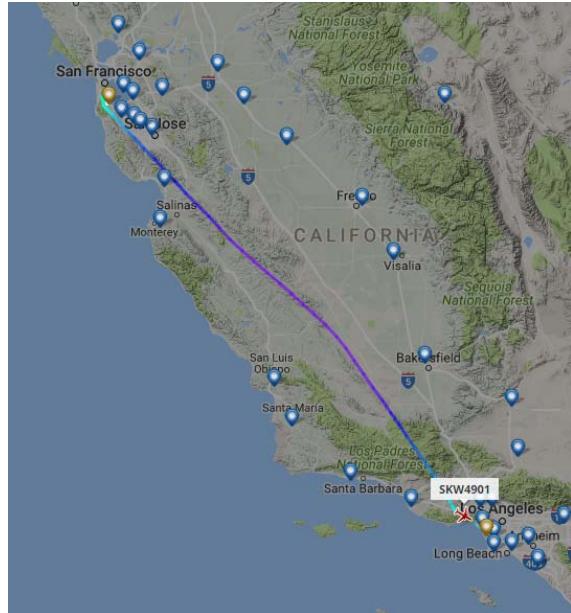


- L'elemento base della catena è quindi il sistema che deve essere descritto matematicamente e di cui devono esserne studiate ed analizzate le proprietà: (Sistema, Impianto, Processo) = (System, Plant, Process)

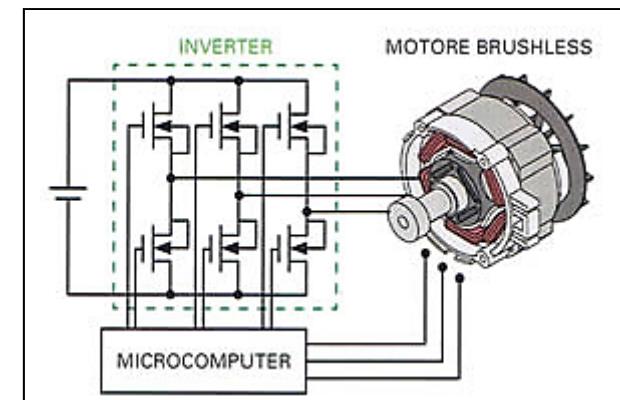
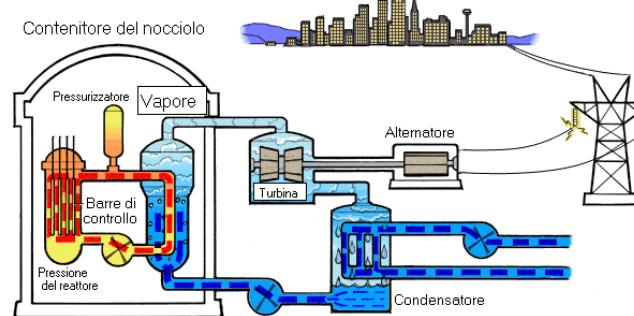


# Definizioni

- Un sistema può essere un singolo set di elementi di interesse per il controllo



Cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko





# Definizioni

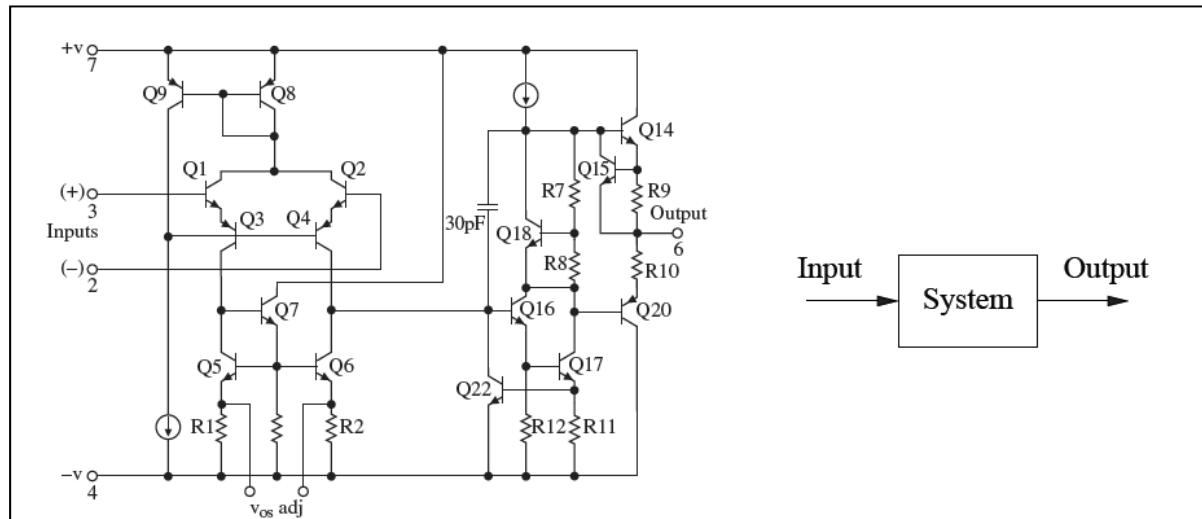
□ Oppure un insieme di sottosistemi anch'esso soggetto al controllo





# Definizioni

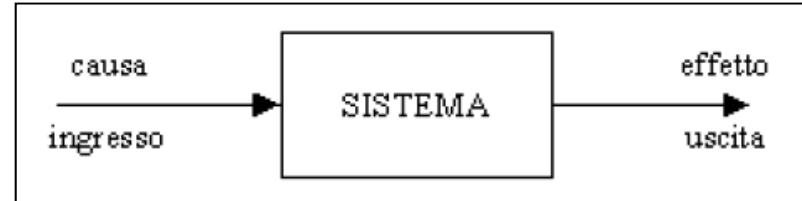
- **Definizione:** si definisce sistema (impianto, processo) un insieme di oggetti e/o eventi interconnessi legati tra loro mediante una relazione causa-effetto basata su leggi scientifiche, economiche, sociali, ecc.
- **Proprietà:** le proprietà di un sistema dipendono dalle caratteristiche **interne** al sistema stesso (**stato del sistema**) e non da elementi esterni (ingressi al sistema)
- **Evoluzione:** l'evoluzione di un sistema ne descrive il proprio comportamento dinamico e gli elementi necessari a descrivere tale evoluzione si dicono **variabili di stato del sistema**.



Amplificatore  
Analogico

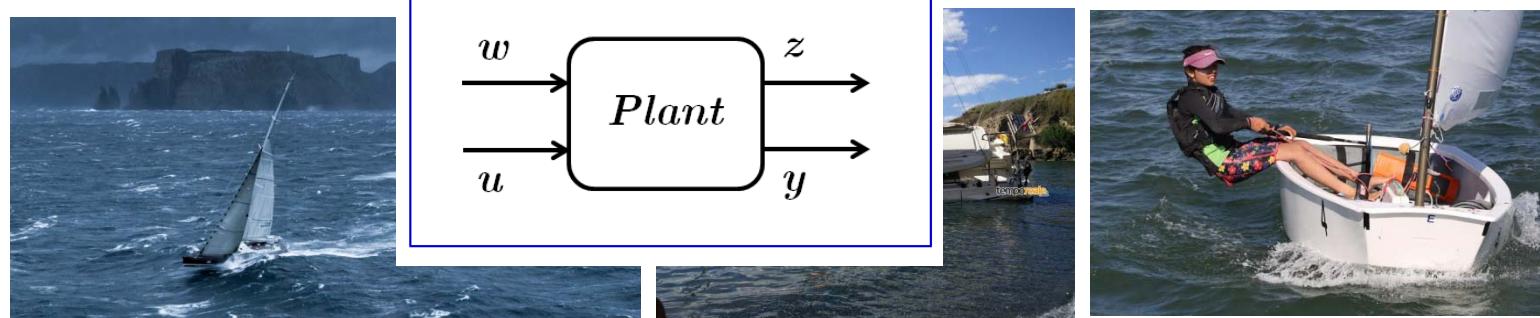


# Definizioni



□ **Variabili di Ingresso** (segnali, funzioni, **cause**): agiscono sul sistema fisico dall'esterno influenzandone il comportamento. Si dividono in due gruppi:

- Disturbi e/o variabili non manipolabili imposte dall'esterno e non controllabili dall'utente (ingressi esogeni, **w**)
- Controlli o variabili manipolabili, il cui andamento può essere imposto dal progettista (ingressi endogeni **u**)



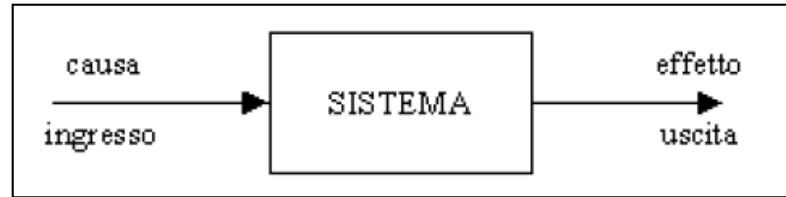
□ **Variabili di Uscita** (segnali, funzioni, **effetti**): costituiscono l'effetto sul sistema fisico e descrivono la sua evoluzione. Si dividono in due gruppi:

- Variabili da regolare e controllare **z**
- Misure necessarie alla descrizione del sistema ed al controllore (**y**)



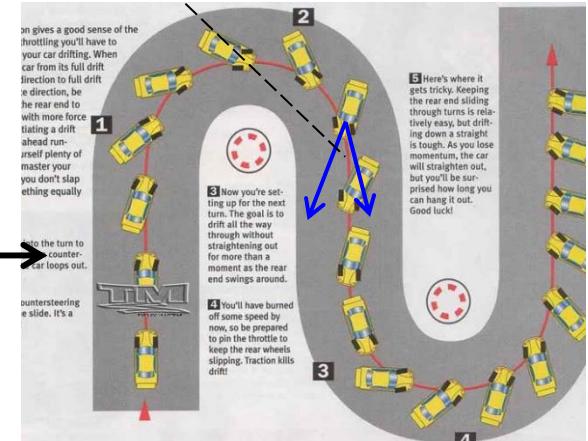
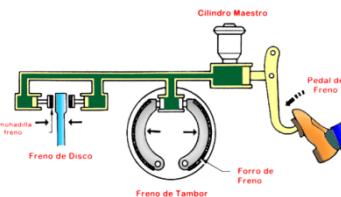
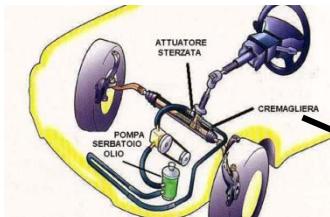


# Definizioni



□ La conoscenza delle variabili di ingresso in un certo istante non è in generale sufficiente a determinare il valore delle variabili di uscita allo stesso istante.

□ Esempio: Dato un angolo di sterzo, un valore di freno ed di acceleratore ad un istante  $t$  generico, è possibile ricavare il valore dell'angolo di derapata  $\beta$  allo stesso istante?

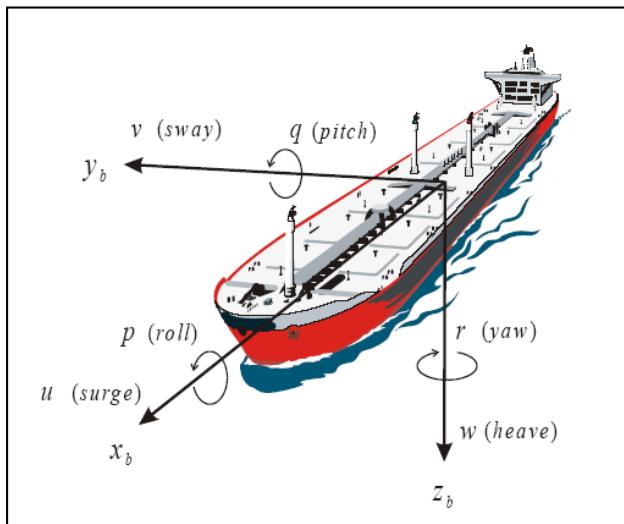




## Definizioni



□ **Variabili di Stato:** descrivono l'evoluzione interna del sistema fisico permettendo di calcolarne le variabili di uscita, una volta note le condizioni iniziali e gli ingressi a partire dal tempo corrente. Costituiscono il **set necessario** per la descrizione matematica dell'andamento del processo.



### □ Input (Esempio):

- Ingressi Esogeni: vento, corrente,...
- Ingressi Endogeni: propulsione, timone di direzione,...

### □ Output (Esempio):

- Variabili da Controllare: Angolo di Rollio, Velocità nella direzione del moto,...
- Misure: Velocità angolare di rollio, Angolo di Rollio, Componente di velocità nella direzione del moto,...

### □ Variabili di Stato (Esempio, veicolo rigido):

- Posizione del centro di massa (3 componenti:  $x$ ,  $y$ ,  $z$ )
- Velocità del centro di massa (3 componenti:  $u$ ,  $v$ ,  $w$ )
- Rotazione intorno al centro di massa (3 componenti:  $\Phi$ ,  $\Theta$ ,  $\Psi$ )
- Velocità angolare rispetto al centro di massa (3 componenti:  $p$ ,  $q$ ,  $r$ )



## Definizioni



### □ Rappresentazione matematica generica del modello di un sistema fisico

- **Rappresentazione ingresso – uscita (esterna):** L'uscita del sistema viene determinata senza la necessità di utilizzare o anche solo di definire le variabili di stato (**solo per sistemi lineari**)

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_{t_0}^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau \Leftrightarrow Y(s) = G(s)U(s)$$

- **Rappresentazione ingresso – stato - uscita (interna):** Le variabili di stato sono espresse esplicitamente nelle equazioni che legano ingresso ed uscita

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f[x(t), u(t), t] \\ y(t) &= g[x(t), u(t), t]\end{aligned}$$

**Nota:** Le funzioni di cui sopra possono essere date da segnali vettoriali

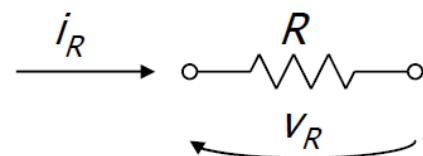
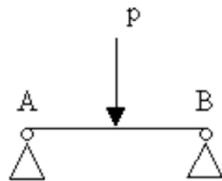


# Classificazione



- I sistemi possono essere classificati in base alla descrizione fisica, alla rappresentazione matematica, ecc.
- **Definizione – Sistema Statico:** un sistema statico è un sistema a riposo oppure in moto uniforme (se meccanico, tutte le accelerazioni sono nulle). Le equazioni costitutive sono algebriche e non differenziali.

$$R_A = R_B = p/2$$



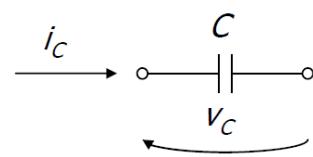
$$\begin{aligned} u(t) &= i_R(t) \\ y(t) &= v_R(t) = R i_R(t) = g(u(t)), \forall t \end{aligned}$$



# Classificazione



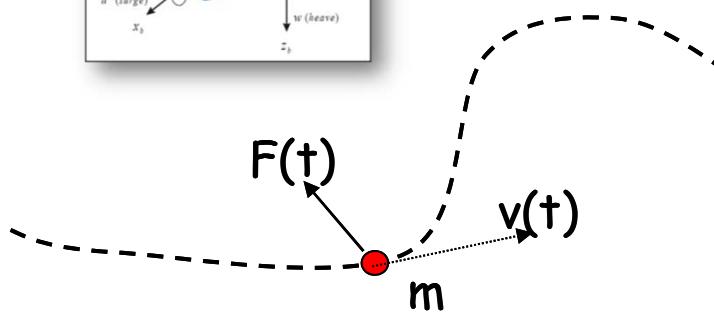
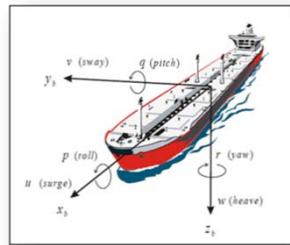
□ **Definizione – Sistema dinamico:** un sistema dinamico è caratterizzato da una relazione causa-effetto tempo variante rappresentabile mediante un'equazione differenziale



$$\begin{aligned} u(t) &= i_C(t) = C dv_C(t)/dt \\ y(t) &= v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\sigma) d\sigma = \\ &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t u(\sigma) d\sigma = g(u([-\infty, t])), \forall t \end{aligned}$$



URBAN REBOUNDING

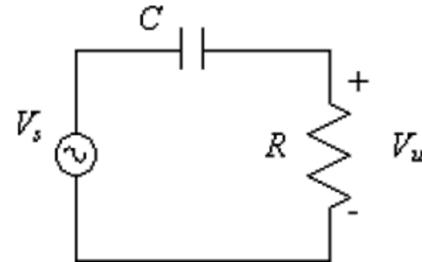


$$m(t) \frac{dv(t)}{dt} + \frac{dm(t)}{dt} v(t) = F(t)$$

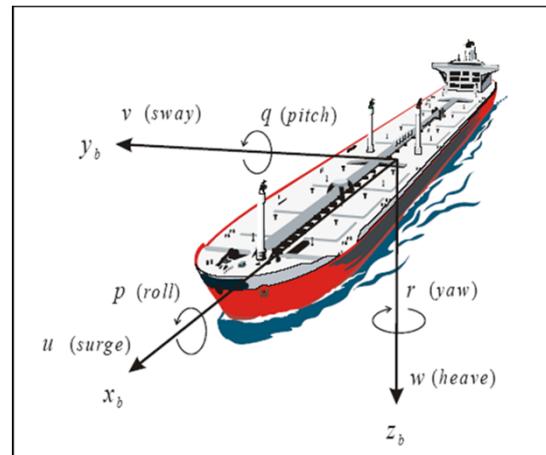


# Classificazione

- **Definizione – Sistema Monovariabile (SISO):** un sistema per cui vi è un solo ingresso ed una sola uscita.



- **Definizione – Sistema Multivariabile (MIMO):** un sistema in cui la dinamica causa-effetto lega  $m$  ingressi con  $p$  uscite (per esempio: timone ed eliche -> velocità e rollio).



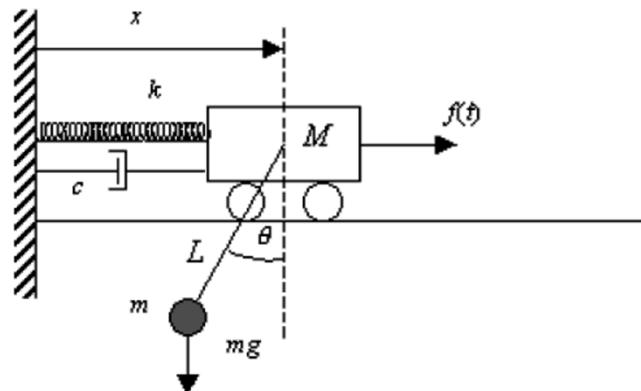


# Classificazione



- **Definizione – Sistema Lineare:** un sistema la cui dinamica causa-effetto è descritta da equazioni differenziali (algebriche) per cui vale il principio di sovrapposizione degli effetti.
  
- **Definizione – Sistema Non Lineare:** un sistema per cui non valgono le ipotesi di linearità.

**Modello carro-ponte**



**Sistema non lineare**

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} - mL\ddot{\theta} + c\dot{x} + (k_1x + k_2x^3) = f(t) \\ mL^2\ddot{\theta} - mL\ddot{x} + mgL \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

**Sistema lineare**

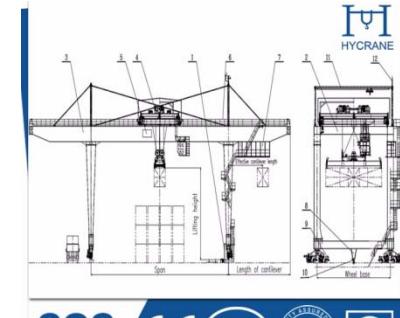
$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} - mL\ddot{\theta} + c\dot{x} + kx = f(t) \\ mL^2\ddot{\theta} - mL\ddot{x} + mLg\theta = 0 \end{cases}$$



# Classificazione

- **Definizione – Sistema Tempo invariante o Stazionario:** un sistema i cui parametri non variano nel tempo.

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} - mL\ddot{\theta} + c\dot{x} + kx = f(t) \\ mL^2\ddot{\theta} - mL\ddot{x} + mLg\theta = 0 \end{cases}$$



- **Definizione – Sistema Tempo variante o non Stazionario:** un sistema i cui parametri variano nel tempo.

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} - mL(t)\ddot{\theta} + c\dot{x} + k(t)x = f(t) \\ mL(t)^2\ddot{\theta} - mL(t)\ddot{x} + mL(t)g\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dL(t)}{dt} = ..... \neq 0 \\ \frac{dk(t)}{dt} = ..... \neq 0 \end{cases}$$



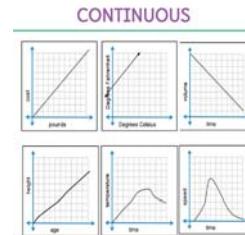


# Classificazione

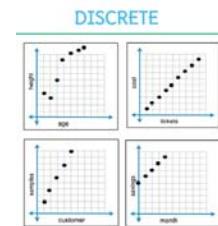
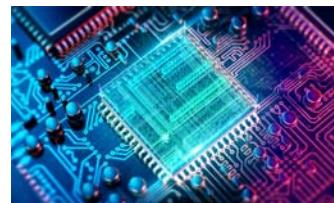


## □ Funzionalità temporale per sistemi dinamici:

- **Sistema continuo:** un sistema si dice continuo se la variabile temporale appartiene ai reali



- **Sistema discreto:** un sistema si dice discreto se la variabile temporale appartiene agli interi.



- **Sistema ad Eventi Discreti:** un sistema in cui lo spazio di stato è discreto e non necessariamente numerico. Il comportamento dinamico è guidato da eventi discreti che possono cambiare istantaneamente lo stato del sistema stesso

**Example: Traffic light logic**





# Classificazione

- **Definizione – Sistema strettamente proprio:** un sistema le cui variabili di uscita non dipendono da quelle di ingresso se non attraverso le variabili di stato.
- **Definizione – Sistema proprio:** sistema in cui le variabili (almeno una) di uscita dipendono direttamente da quelle di ingresso. Un sistema statico è un sistema proprio in quanto non è necessaria la presenza del vettore di stato.
- **I sistemi fisici basati sul principio di causa-effetto sono tutti propri o strettamente propri in quanto, altrimenti, richiederebbero informazioni sullo stato del sistema a tempi antecedenti la causa (sono anche detti SISTEMI CAUSALI).**
- **Definizione – Sistema Deterministico:** un sistema in cui nessuna variabile del sistema (ingresso, stato, uscita) ha natura aleatoria.
- **Definizione – Sistema Stocastico:** sistema per cui non è possibile usare la definizione di sistema deterministico.



$$\frac{d^n y}{dt^n} + \dots = \frac{d^m u}{dt^m} + \dots$$

$n > m$



$$\frac{d^n y}{dt^n} + \dots = \frac{d^m u}{dt^m} + \dots$$

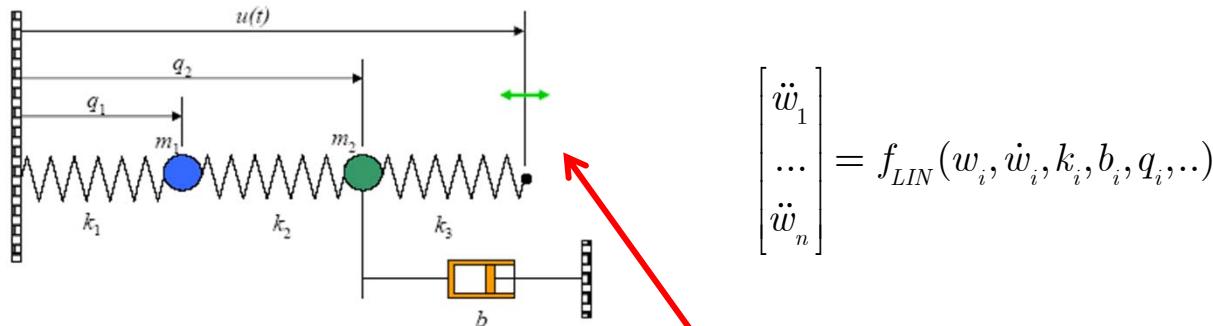
$n = m$



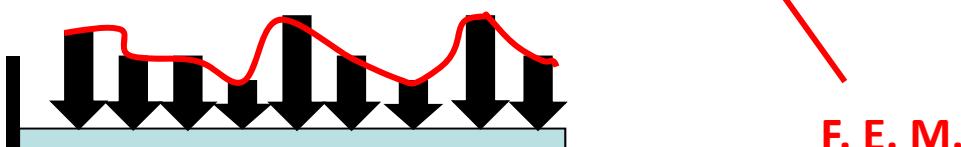


# Classificazione

- **Definizione – Sistema a parametri concentrati (dim. finita):** un sistema che può essere descritto da un numero finito di variabili interne (vettore di stato). Le equazioni costitutive sono differenziali ordinarie.



- **Definizione – Sistema a parametri distribuiti (dim. Infinita):** sistema in cui lo stato è una funzione continua di più variabili (oltre alla variabile tempo). Le equazioni costitutive sono differenziali alle derivate parziali..

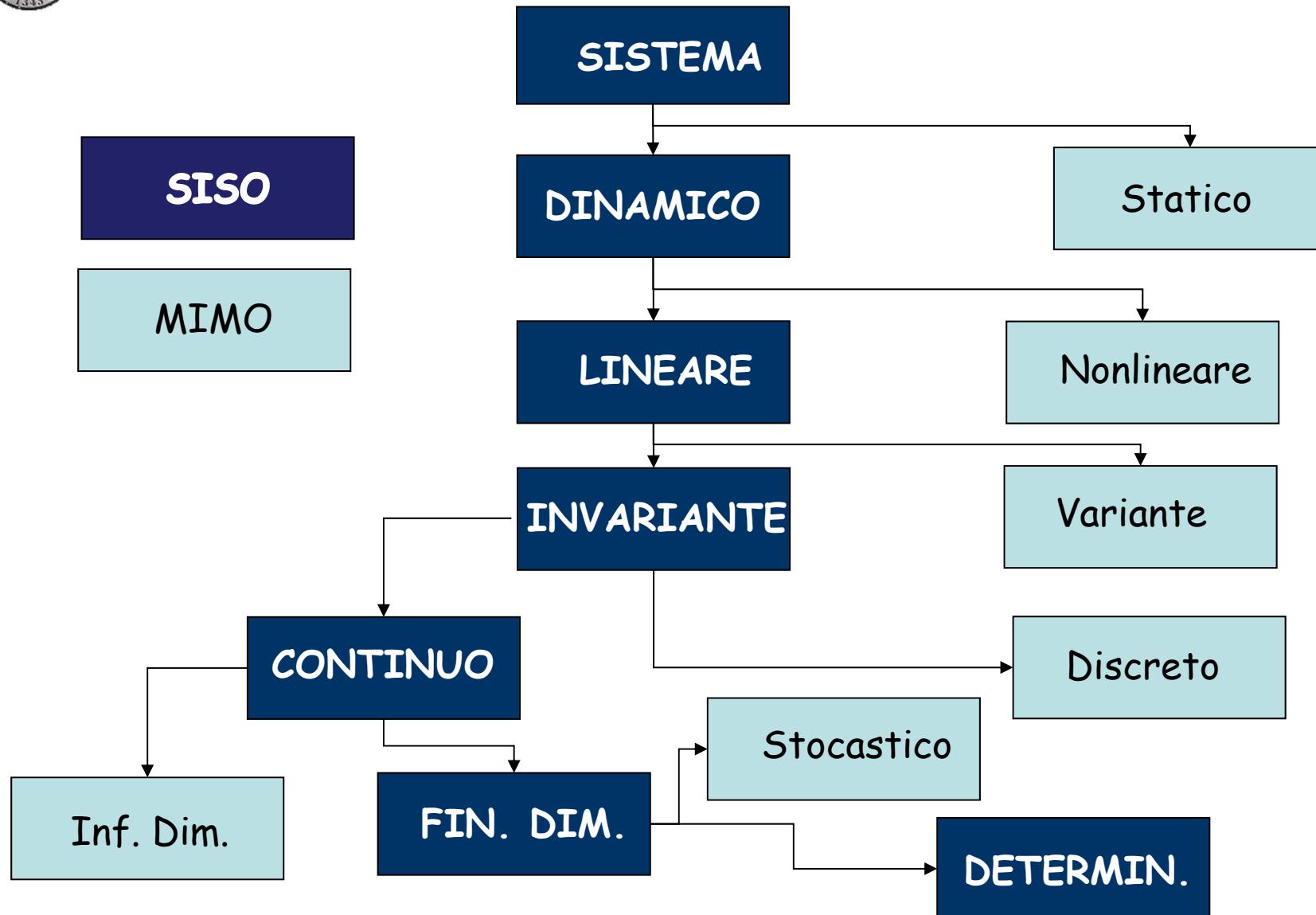


F. E. M.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x)$$



## Classificazione



Equazioni Differenziali Lineari a Coefficienti Costanti



# Classificazione



**Equazioni Differenziali Lineari (e non lineari) a Coefficienti Costanti  
e loro rappresentazione nello spazio di stato**



## Esempio 1

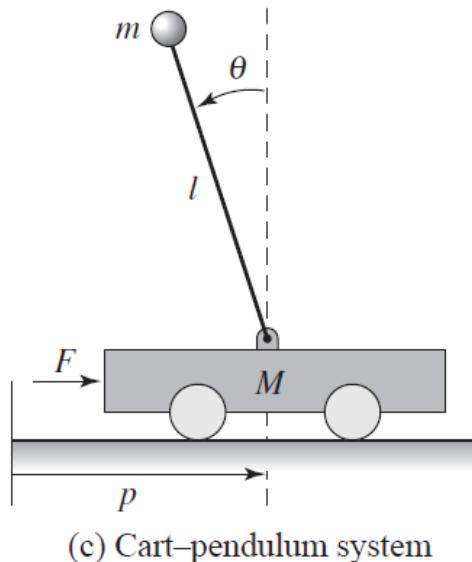


### □ Modello di Pendolo Invertito

Consideriamo il caso in cui sia di interesse anche la posizione della Cerniera.



(a) Segway



(c) Cart-pendulum system

- Equilibrio dinamico alla Cerniera. Traslazione verticale soddisfatta dal vincolo. Traslazione orizzontale e rotazione rispetto alla cerniera dalla seconda legge di Newton.
- Il comportamento dinamico del sistema è univocamente determinato dall'andamento temporale di 4 variabili (variabili di stato):

$$p(t), \dot{p}(t), \theta(t), \dot{\theta}(t)$$

$$\begin{bmatrix} (M+m) & -ml \cos \theta \\ -ml \cos \theta & (J+ml^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\dot{p} + ml \sin \theta \dot{\theta}^2 \\ \gamma \dot{\theta} - mgl \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$



# Esempio 1



## □ Modello di Pendolo Invertito (WIKI)

### Inverted pendulum on a cart [edit]

An inverted pendulum on a cart consists of having a horizontally moving base as shown in the image to the right. The cart is restricted to linear motion and is subject to forces resulting in or hindering motion. The equations of motion can be derived using Lagrange's equations. We refer to the drawing to the right where  $\theta(t)$  is the angle of the pendulum of length  $l$  with respect to the vertical direction and the acting forces are gravity and an external force  $F$  in the  $x$ -direction. Define  $x(t)$  to be the position of the cart. The Lagrangian  $L = T - V$  of the system is:

$$L = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 - mgl\cos\theta$$

where  $v_1$  is the velocity of the cart and  $v_2$  is the velocity of the point mass  $m$ .  $v_1$  and  $v_2$  can be expressed in terms of  $x$  and  $\theta$  by writing the velocity as the first derivative of the position:

$$v_1^2 = \dot{x}^2$$

$$v_2^2 = \left(\frac{d}{dt}(x - l\sin\theta)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}(l\cos\theta)\right)^2$$

Simplifying the expression for  $v_2$  leads to:

$$v_2^2 = \dot{x}^2 - 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \ell^2\dot{\theta}^2$$

The Lagrangian is now given by:

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - m\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$$

and the equations of motion are:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F$$

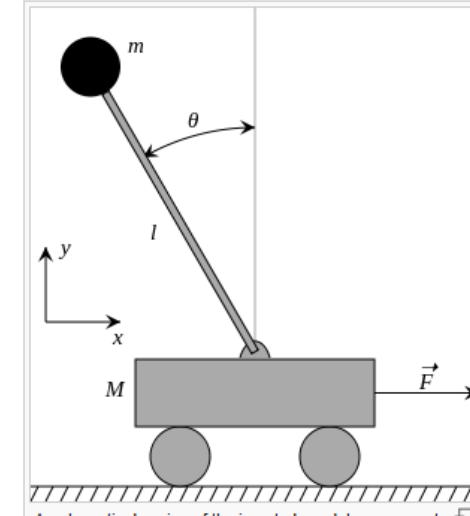
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

substituting  $L$  in these equations and simplifying leads to the equations that describe the motion of the inverted pendulum:

$$(M+m)\ddot{x} - m\ell\ddot{\theta}\cos\theta + m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta = F$$

$$\ell\ddot{\theta} - g\sin\theta = \ddot{x}\cos\theta$$

These equations are nonlinear, but since the goal of a control system would be to keep the pendulum upright the equations can be linearized around  $\theta \approx 0$ .



A schematic drawing of the inverted pendulum on a cart. The rod is considered massless. The mass of the cart and the point mass at the end of the rod are denoted by  $M$  and  $m$ . The rod has a length  $l$ .



## Esempio 1



$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ \theta \\ \dot{p} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\theta} \\ -mls_{\theta}\dot{\theta}^2 + mg(ml^2/J_t)s_{\theta}c_{\theta} - c\dot{p} - \gamma lm c_{\theta}\dot{\theta} + u \\ M_t - m(ml^2/J_t)c_{\theta}^2 \\ -ml^2s_{\theta}c_{\theta}\dot{\theta}^2 + M_t g l s_{\theta} - cl c_{\theta}\dot{p} - \gamma(M_t/m)\dot{\theta} + lc_{\theta}u \\ J_t(M_t/m) - m(lc_{\theta})^2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} p \\ \theta \\ \dot{p} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} p \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{cases} M_t = M + m \\ J_t = J + ml^2 \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} p \\ \theta \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} x_e = 0 \\ u_e = 0 \\ \mu = M_t J_t - m^2 l^2 \end{cases}$$

□ Condizione di Equilibrio intorno alla quale eseguire la linearizzazione

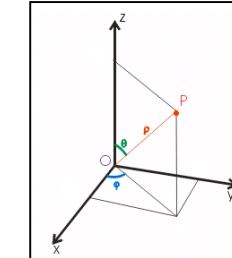
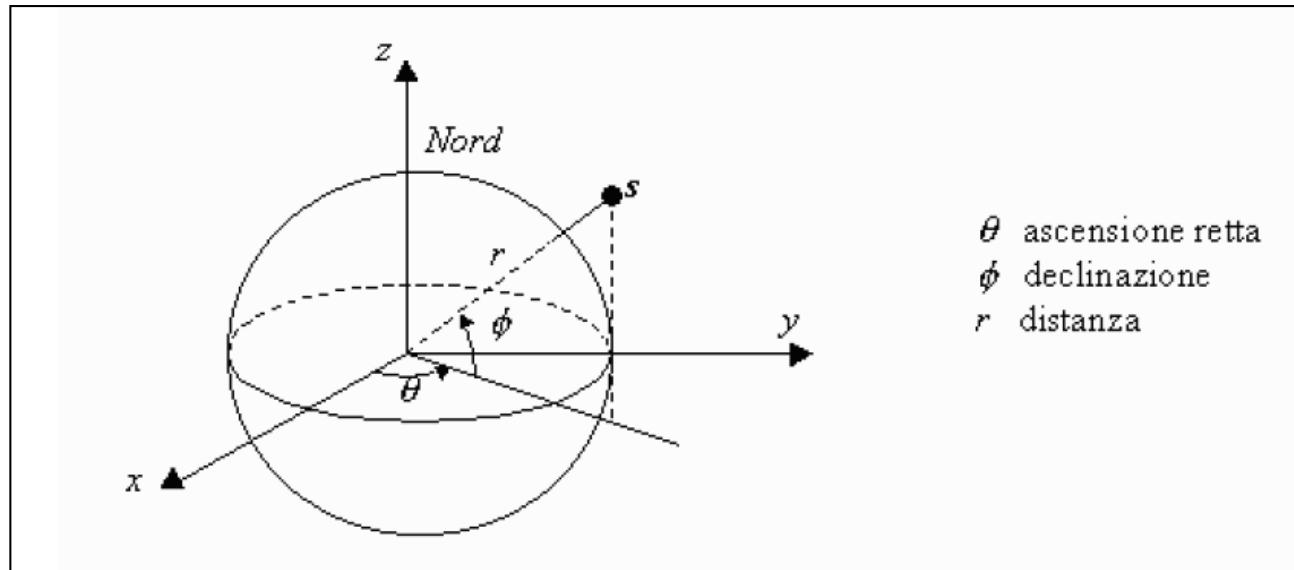
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ \theta \\ \dot{p} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m^2 l^2 g / \mu & -c J_t / \mu & -\gamma J_t l m / \mu \\ 0 & M_t m g l / \mu & -c l m / \mu & -\gamma M_t / \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \theta \\ \dot{p} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_t / \mu \\ l m / \mu \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x,$$



## Esempio 2

### □ Moto Orbitale di un Satellite in Coordinate Sferiche



$$\begin{cases} x = ho \sin(h\eta)\cos(\phi) \\ y = ho \sin(h\eta)\sin(\phi) & ho \in [0, +\infty) \quad h\eta \in [0, \pi] \quad \phi \in [0, 2\pi) \\ z = ho \cos(h\eta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \phi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \\ h\eta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{cases}$$

### Ipotesi semplificative sul sistema:

- La Terra si considera perfettamente sferica e con densità uniforme
- Il veicolo è approssimato da un punto materiale con massa  $m$
- L'attrazione gravitazionale è costante
- Non vi sono altri corpi che esercitano una attrazione sul satellite.



## Esempio 2



- Equazioni descrittive basate sul bilancio Energetico (Eq. di Eulero-Lagrange)

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2 + (r\dot{\theta}\cos\phi)^2]$$

$$V = -\frac{km}{r} = -\frac{gMm}{r}$$

$$\begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 \cos^2 \phi + r\dot{\phi}^2 - \frac{k}{r^2} + \frac{u_r}{m} \\ \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{2\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi}{\cos\phi} + \frac{u_\theta}{mr\cos^2\phi} \\ \ddot{\phi} = -\dot{\theta}^2 \cos\phi \sin\phi - \frac{2\dot{r}\dot{\phi}}{r} + \frac{u_\phi}{mr} \end{cases}$$

Non esiste soluzione analitica, ma soltanto numerica.

- Lo «stato» del sistema è descritto da 6 variabili corrispondenti a posizione e velocità dei 3 Gradi di Libertà

$$\mathbf{x} = [r \quad \dot{r} \quad \theta \quad \dot{\theta} \quad \phi \quad \dot{\phi}]^T$$

- Per ipotesi, si assume che esistano ingressi che agiscono sui 3 gradi di libertà.

$$\mathbf{u} = [u_r \quad u_\theta \quad u_\phi]^T$$

$$\longrightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

$$\begin{cases} r(t) = ? \\ \theta(t) = ? \\ \phi(t) = ? \end{cases}$$

- Scelta del linguaggio (basso livello, alto livello, ...)
- Algoritmo di integrazione appropriato (Newton-Rapshon, Runge-Kutta, Predittore-Correttore, ecc.)
- Scelta del passo di integrazione appropriato all'evoluzione prevista del sistema
- Soluzione dipendente dalle condizioni iniziali, che richiede estensiva simulazione



## Esempio 2



- Equazioni del moto esplicitate in forma compatta, usando le variabili di stato

$$\dot{\mathbf{x}}^{6 \times 1}(t) = f^{6 \times 1}(\mathbf{x}^{6 \times 1}, \mathbf{u}^{3 \times 1}) \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_4^2 \cos^2 x_5 + x_1 x_6^2 - \frac{k}{x_1^2} + \frac{u_r}{m} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\frac{2x_2 x_4}{x_1} + \frac{2x_4 x_6 \sin x_5}{\cos x_5} + \frac{u_\theta}{mx_1 \cos^2 x_5} \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = -x_4^2 \cos x_5 \sin x_5 - \frac{2x_2 x_6}{x_1} + \frac{u_\phi}{mx_1} \end{cases}$$

- Il primo passo è quello di calcolare le condizioni di equilibrio e poi sceglierne una su cui eseguire la linearizzazione.

$$f^{6 \times 1}(\mathbf{x}^{6 \times 1}, \mathbf{u}^{3 \times 1}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_0^{6 \times 1}, \mathbf{u}_0^{3 \times 1}$$

- Il calcolo può essere molto complesso in quanto richiede la soluzione di un sistema algebrico non lineare a 6 dimensioni.



## Esempio 2

- La meccanica celeste permette di identificare una tra le possibili condizioni di equilibrio corrispondente ad un moto Kepleriano dato da **un'orbita circolare equatoriale** con raggio  $r_0$  e velocità angolare  $\omega_0$ , in modo da uguagliare forza centrifuga e centripeta, in assenza di ingressi.

$$m\omega_0^2 r_0 = \frac{km}{r_0^2}$$
$$\mathbf{x}_0 = [r_0 \quad 0 \quad \omega_0 t \quad \omega_0 \quad 0 \quad 0]^T$$
$$\mathbf{u}_0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

- Linearizzazione intorno alla condizione di equilibrio, mediante la serie di Taylor:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = A \delta \mathbf{x} + B \delta \mathbf{u}$$

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x_0, u_0} \quad B = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{x_0, u_0}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\omega_0 r_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega_0/r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/mr_0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1/mr_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_{\dot{r}} \\ u_{\theta} \\ u_{\dot{\theta}} \\ u_{\phi} \\ u_{\dot{\phi}} \end{bmatrix}$$



## Esempio 2



### □ Analisi qualitativa basata sulle equazioni linearizzate.

Il moto linearizzato intorno all'orbita circolare equatoriale nominale risulta disaccoppiato in due moti separati:

- Perturbazione sul piano equatoriale (le prime 4 equazioni)
- Perturbazione fuori dal piano equatoriale (Azimuth/Ascensione retta, le ultime due equazioni)

- Partendo dalle condizioni equilibrio, consideriamo il moto in risposta a condizioni iniziali diverse da 0. Quindi studiamo il sistema omogeneo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\omega_0 r_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\omega_0}{r_0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} x$$



## Esempio 2



- Il moto in Azimuth è descritto dalla partizione  $A_{22}$  della matrice A

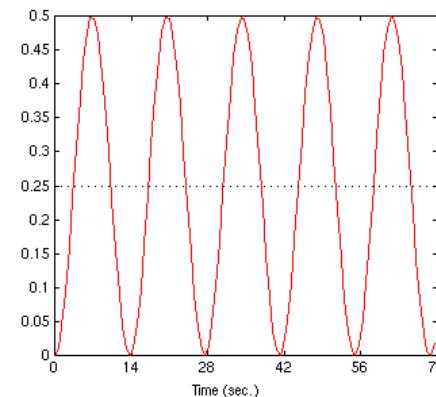
$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad \ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0$$

- Gli autovalori della partizione  $A_{22}$  e le radici dell'algebrica associata all'equazione differenziale coincidono e sono pari a:

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 j$$

- Il moto in Azimuth in funzione delle condizioni iniziali è un moto armonico con frequenza  $2\pi\omega_0$  intorno alla condizione di equilibrio:

$$\phi_0 = 0^{rad}, \dot{\phi}_0 = 0^{rad/sec}$$



- Il moto totale è quindi:  $\phi(t) = \phi_0 + c_1 \sin(\omega_0 t + c_2)$



## Esempio 2

- Il moto sul piano Equatoriale è descritto dalla partizione  $A_{11}$  della matrice A, il suo studio è apparentemente più complesso, in quanto il sistema è del quarto ordine e lega i moti radiale e di elevazione.

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\omega_0 r_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\omega_0}{r_0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \ddot{r} + 3\omega_0^2 r + 2\omega_0 r_0 \dot{\theta} = 0 \\ \ddot{\theta} - \frac{2\omega_0}{r_0} \dot{r} = 0 \end{cases}$$

- La soluzione generale (sistema omogeneo con ingresso nullo) è data dalla somma di 4 esponenziali corrispondenti alle radici dell'algebrica associata ed uguali agli autovalori della partizione  $A_{11}$
- Algebrica associata e rispettive radici (Autovalori di  $A_{11}$ ):

$$\lambda^2(\lambda^2 + \omega_0^2) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = +\omega_0 j \\ \lambda_4 = -\omega_0 j \end{cases}$$

- Mediante l'uso della trasformazione di similitudine **modale**, potremo assegnare univocamente gli autovalori ai due moti radiale ed elevazione (declinazione)



## Esempio 2

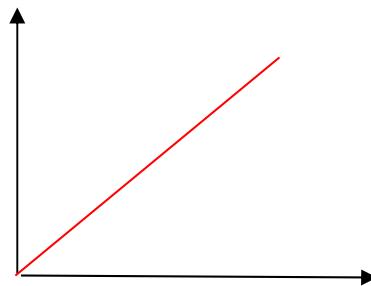


- Più precisamente, le due radici all'origine sono associate al moto perturbato in  $\theta(t)$  e la coppia di radici immaginarie pure al moto perturbato radiale

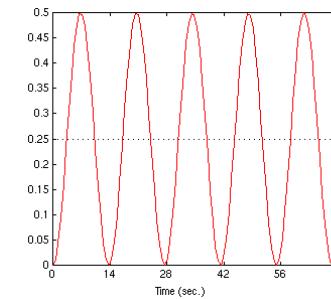
$$\delta \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + c_3 e^{\lambda_3 t} + c_4 e^{\lambda_3^* t}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \delta\theta(t) = c_{13} + c_{14}t = \omega_0 t$$

$$r(t) = r_0 + \delta r(t) = \sqrt{c_{31}^2 + c_{41}^2} \sin(\omega_0 t + \tan^{-1} \frac{c_{41}}{c_{31}})$$



+





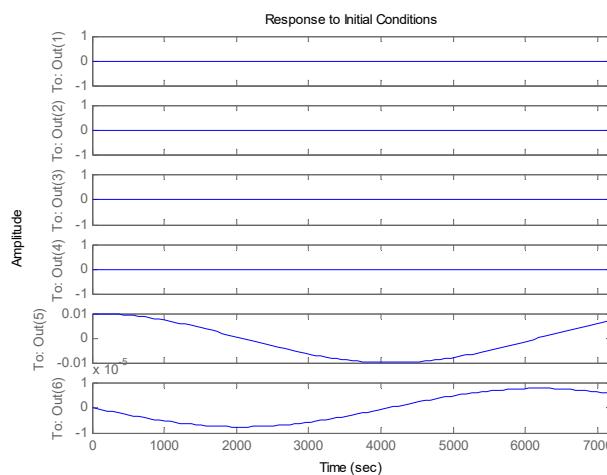
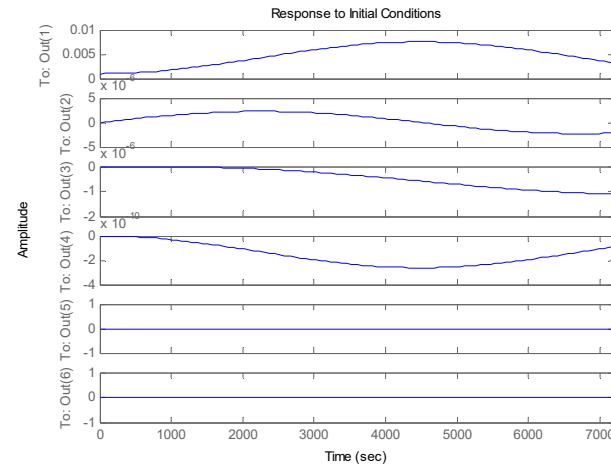
## Esempio 2: Satellite TLC in Orbita Geosincrona

a =

$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.6e-006 & 0 & 0 & 52.23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4e-008 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5.8e-007 & 0 \end{matrix} \end{matrix}$$

b =

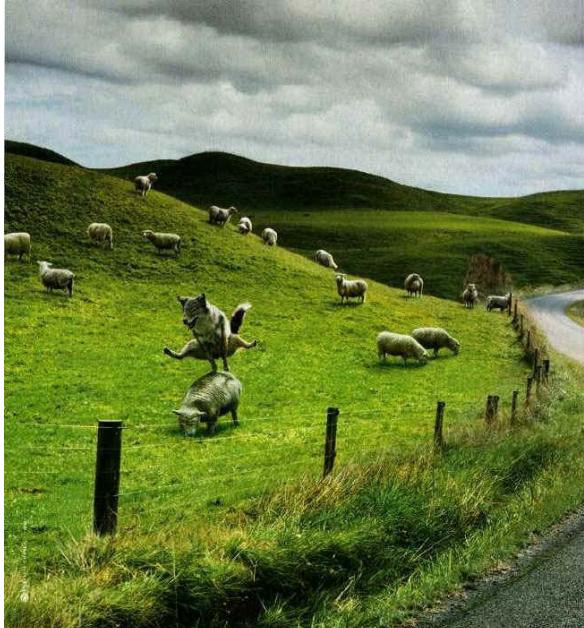
$$\begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.0007 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.85e-008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.85e-008 \end{matrix} \end{matrix}$$





## Esempio 3

### □ Modelli biologici/agricoli/alimentari per la dinamica Preda – Predatore:



- Studio e Monitoraggio di ecosistemi biologici per il mantenimento di specie in pericolo di estinzione, riduzione di specie dannose, ecc.

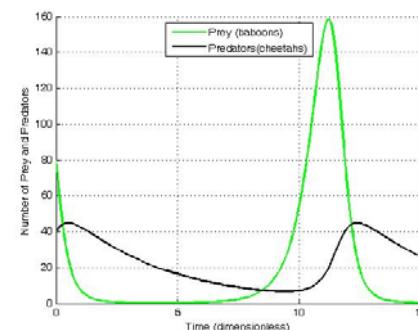
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= rx_1 - sx_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= fsx_1x_2 - qx_2\end{aligned}$$



- Il modello base si rifa alle equazioni di Lotka-Volterra, dove  $x_1$  rappresenta la popolazione preda e  $x_2$  la popolazione predatore. Questo modello assume:
  - Riserva illimitata di cibo per la preda
  - Riproduzione continua nel tempo

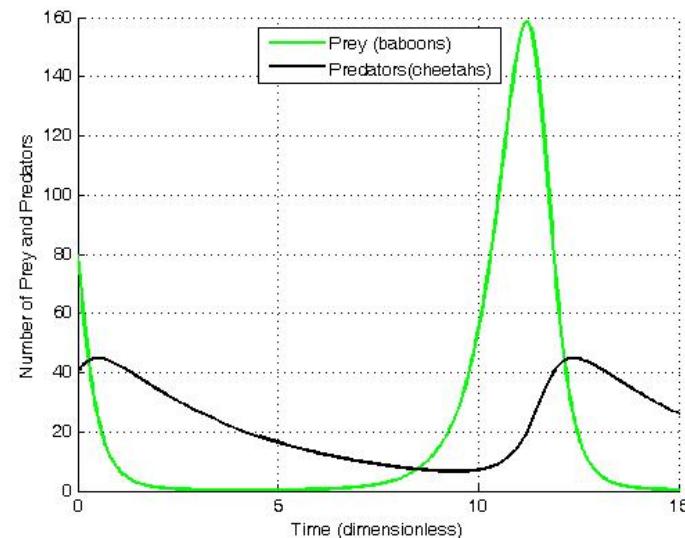
#### □ Parametri (non negativi)

- $r$  = rateo riproduzione preda (fraz.)
- $s$  = efficacia/rateo attacco predatore
- $q$  = rateo morte predatore (fraz.)
- $f$  = Efficienza conversione cibo-riproduzione predatore





## Esempio 3



### □ Linearizzazione

#### Calcolo dei punti di equilibrio

$$\begin{aligned} rx_1 - sx_1x_2 &= 0 \\ fsx_1x_2 - qx_2 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x_{1E} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_{2E} = \begin{bmatrix} \frac{q}{r} \\ \frac{g}{s} \end{bmatrix}; g = fs \end{aligned}$$

Il primo punto rappresenta l'evoluzione indipendente delle due specie; il secondo rappresenta il mantenimento dei numeri definiti dai parametri del problema

### □ Linearizzazione

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} r - sx_2 & -sx_1 \\ gx_2 & -q + gx_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{x}(t) = Ax(t)$$

$$A_{1E} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -q \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= rx_1 \Rightarrow x_1(t) = x_{10}e^{rt} \rightarrow \infty \\ \dot{x}_2 &= qx_2 \Rightarrow x_2(t) = x_{20}e^{-qt} \rightarrow 0 \end{aligned}$$



## Esempio 3

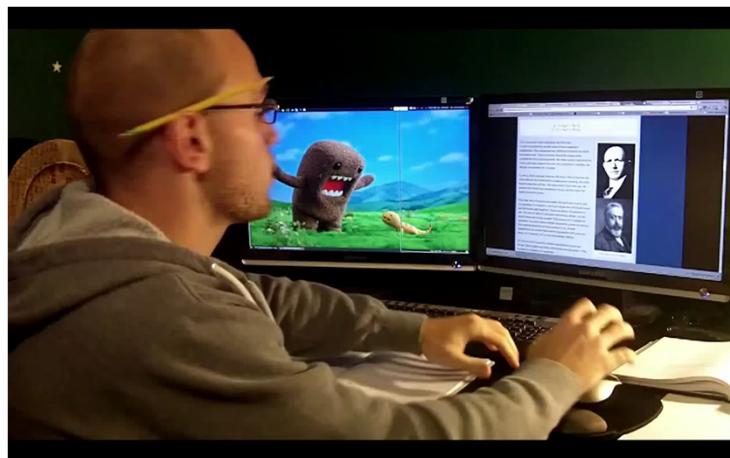
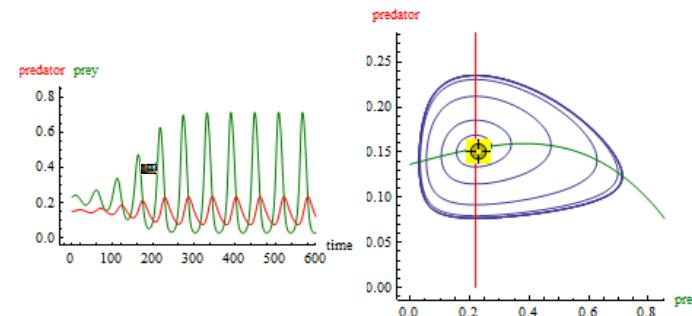
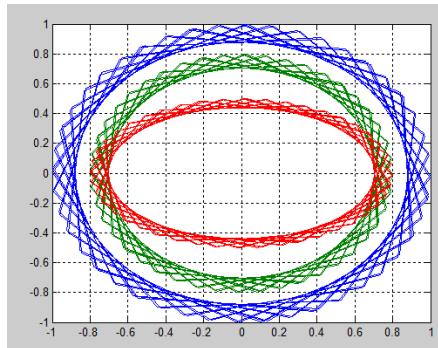
$$A_{2E} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{sq}{g} \\ \frac{gr}{s} & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow$$

□ Gli autovalori della matrice A sono:

$$\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{qr}$$

□ L'andamento nel tempo del numero di prede e predatori è puramente armonico con frequenza  $2\pi(qr)^{1/2}$ .

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + rqx_1 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + rqx_2 &= 0\end{aligned}$$



[https://www.youtube.com/watch?v=qp4i\\_Br8-dE](https://www.youtube.com/watch?v=qp4i_Br8-dE)



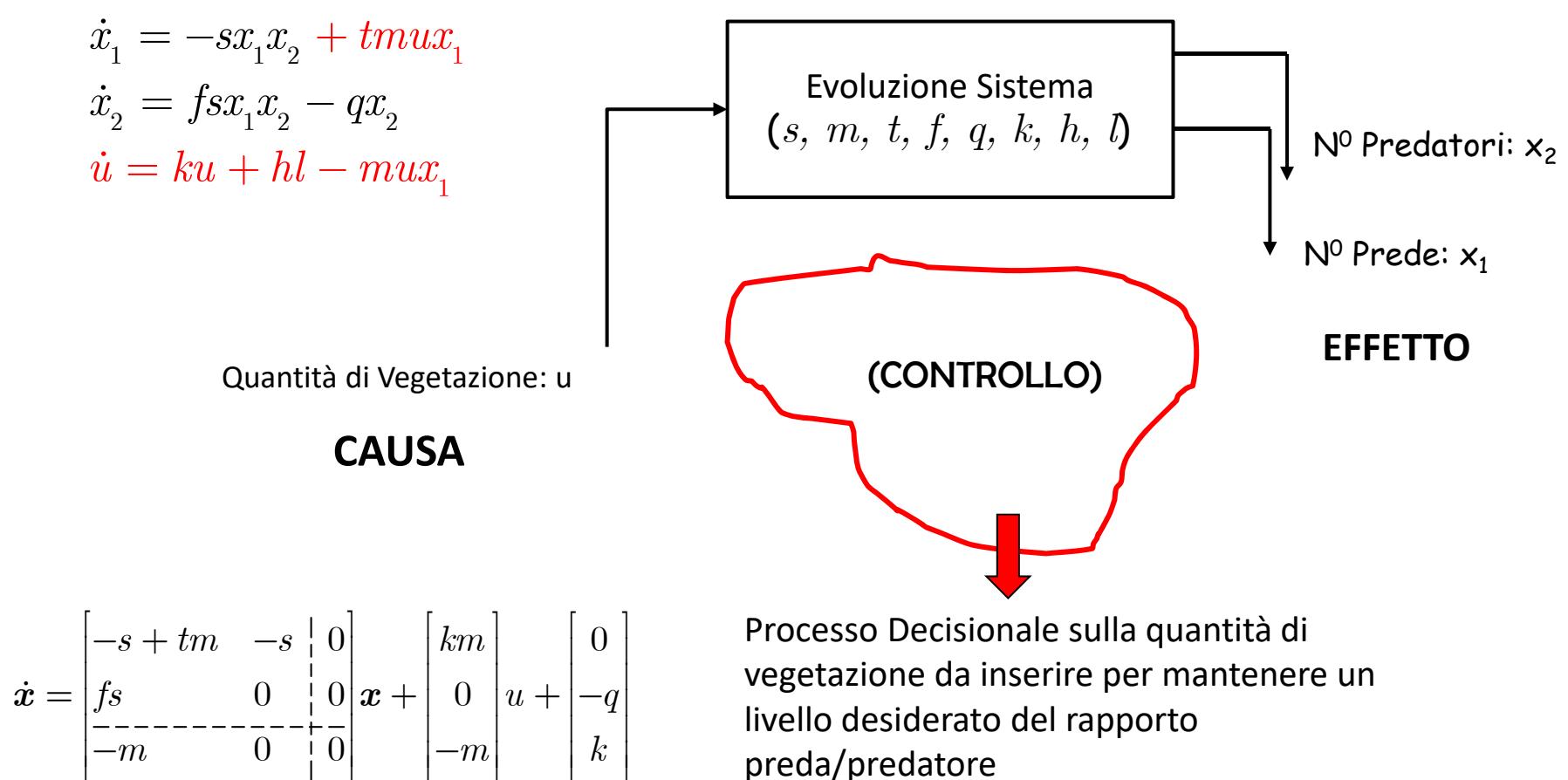
## Esempio 3

- Comportamento Controllato con l'introduzione di una variabile addizionale, per esempio la presenza di vegetazione  $u(t)$  che controlla il foraggiamento della preda.

$$\dot{x}_1 = -sx_1x_2 + tmux_1$$

$$\dot{x}_2 = fsx_1x_2 - qx_2$$

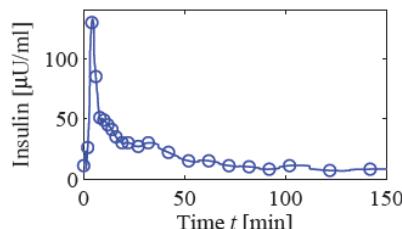
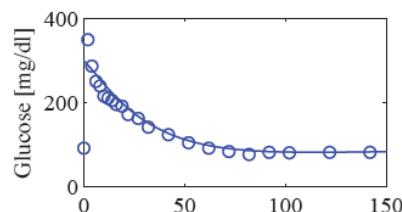
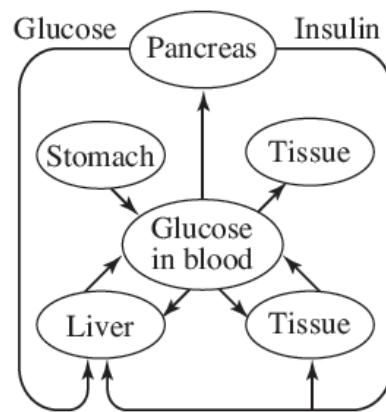
$$\dot{u} = ku + hl - mux_1$$





## Esempio 4

### □ Modello Glucosio - Insulina



(c) Intravenous injection

- Intervallo di concentrazione molto ristretto (0.7 – 1.1 g/L)
- Elevato Rischio Diabete
- Ereditarietà, Dieta, Esercizio fisico, ecc.

Durante la digestione, il pancreas rilascia glucagone, l'ormone che serve a scomporre i glucidi in uno zucchero semplice, il glucosio, e a rilasciarlo nel sangue. L'altro ormone, **l'insulina**, serve ad **abbassare la glicemia** (la quantità di zuccheri nel sangue), permettendo al glucosio di penetrare le cellule del fegato, dei muscoli e di altri tessuti per venirvi immagazzinato e produrre energia nel momento del bisogno. Il *surplus* viene immagazzinato, sotto forma di grasso e di proteine, nel fegato e nei muscoli. In ogni secondo le cellule hanno bisogno di glucosio per produrre l'energia necessaria al loro funzionamento, e questo è il solo zucchero che il cervello è in grado di utilizzare. **Il tasso di glucosio nel sangue deve essere costante** perché l'organismo possa funzionare normalmente: se il corpo non produce abbastanza insulina o non è in grado di utilizzare quella disponibile, **il glucosio si accumula nel sangue o passa nell'urina (glicosuria), senza poter svolgere il suo ruolo**. L'iperglycemia cronica come nel caso del diabete, o poco controllata, può causare complicazioni acute e croniche molto gravi.



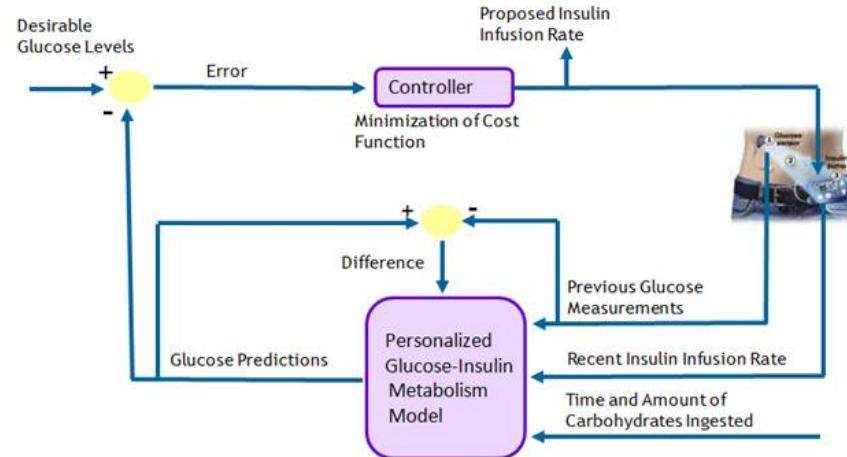
## Esempio 4

Types of mathematical models:

- ▶ Ordinary differential equation (ODE) models
- ▶ Delay differential equation (DDE) models
- ▶ Partial differential equation (PDE) models
- ▶ Fredholm integral equation (FIE) models
- ▶ Stochastic differential equation (SDE) models
- ▶ Integro-differential equation (IDE) models

### Dinamica nonlineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(p_1 + x_2)x_1 + p_1 g_E \\ \dot{x}_2 = -p_2 x_2 + p_3(u - i_E) \end{cases}$$



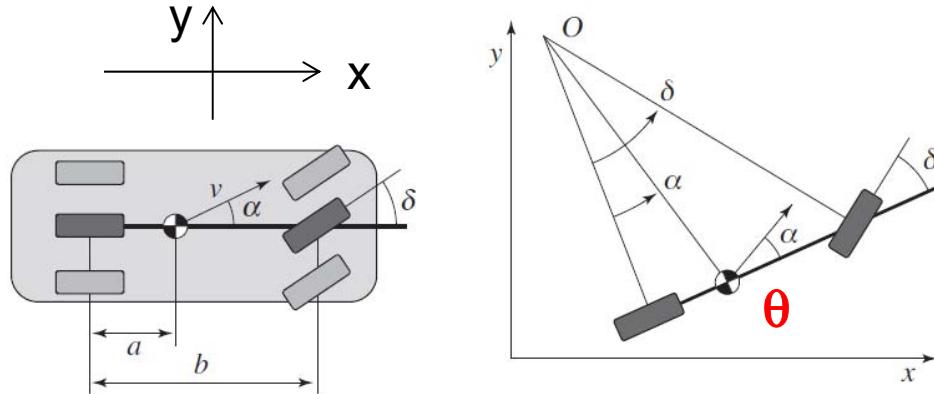
### □ Modello “minimo” [Bergman 1989]

- Analisi della dinamica del glucosio ed Insulina durante il test IVGTT
- Determinazione dei parametri: sensitività Insulina e Efficacia Glucosio a livello di individuo
- Parametri del modello generati sperimentalmente mediante il metodo dei minimi quadrati

- $g_E, i_E$ : valori di equilibrio di glucosio ed insulina.
- $x_1$ : Concentrazione di Glucosio.
- $x_2$ : Valore proporzionale alla concentrazione di Insulina nel fluido interstiziale.
- $u$  : Insulina nel sangue (ingresso).



## Esempio 5: Modello di Autoveicolo Dinamica di Steering



$$\alpha(\delta) = \tan^{-1}\left(\frac{a \tan \delta}{b}\right), v = \frac{v_0}{\cos \alpha}$$

$v_0$  = velocità ruote posteriori

$v$  = velocità c.m. veicolo

$$\frac{dx}{dt} = v \cos(\alpha + \theta) = v_0 \frac{\cos(\alpha + \theta)}{\cos \alpha},$$

$$\frac{dy}{dt} = v \sin(\alpha + \theta) = v_0 \frac{\sin(\alpha + \theta)}{\cos \alpha}.$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{r_a} = \frac{v_0}{b} \tan \delta.$$

Relazione dinamica tra velocità  $v$  del veicolo ed angolo di sterzata  $\delta$

Il modello usato è quello del biciclo  
Con i pneumatici che ruotano senza scivolamento.

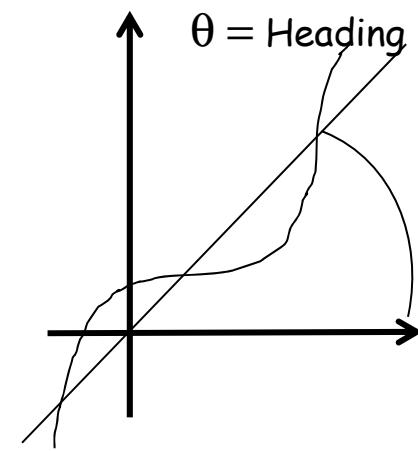
La linearizzazione è eseguita  
Partendo da una condizione di  
Equilibrio di moto rettilineo lungo x,  
Considerando il moto perturbato rispetto  
All'asse x.

Condizioni di Equilibrio:

$$\theta = \theta_e = 0$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix} = 0$$

$$u = \delta = 0$$





## Esempio 5



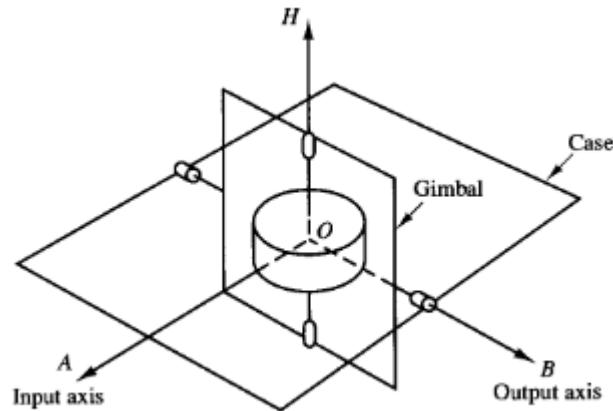
$$f(x, u) = \begin{bmatrix} v \sin(\alpha(u) + x_2) \\ \frac{v_0}{b} \tan u \end{bmatrix}, \quad \alpha(u) = \arctan\left(\frac{a \tan u}{b}\right), \quad h(x, u) = x_1.$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ u=0}} = \begin{bmatrix} 0 & v_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{x=0 \\ u=0}} = \begin{bmatrix} av_0/b \\ v_0/b \end{bmatrix},$$
$$C = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ u=0}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \frac{\partial h}{\partial u} \Big|_{\substack{x=0 \\ u=0}} = 0,$$

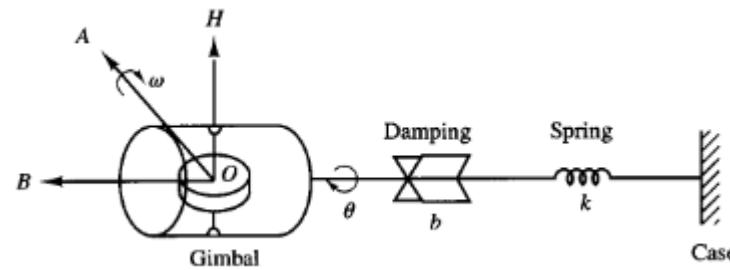
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \frac{av_0}{b} \\ \frac{v_0}{b} \end{bmatrix} u$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_{2 \times 2} \boldsymbol{x}(t) + B_{2 \times 1} u(t)$$
$$y(t) = C_{1 \times 2} \boldsymbol{x}(t) + D_{1 \times 1} u(t)$$
$$y = [1 \ 0] \boldsymbol{x}$$



## Esempio 6: Giroscopio ad 1 Grado di Libertà



Il disco ruota ad alta velocità intorno all'asse **H** è ed è montato su un supporto (Gimbal) ruotante intorno all'asse B, a sua volta montato nella struttura (Case). L'asse di ingresso A misura la velocità angolare (oppure l'angolo) a cui è soggetta la struttura. Tale misura è ottenuta in funzione della rotazione dell'asse B per effetto giroscopico di accoppiamento tra asse A ed asse H.



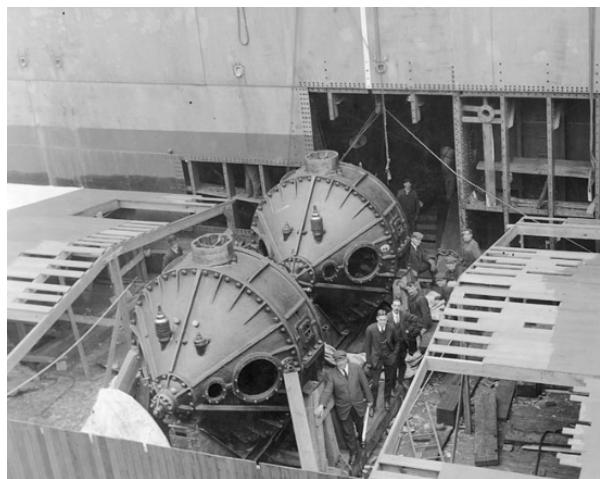
$$\begin{cases} I\ddot{\theta} - H\omega \cos \theta = -b\dot{\theta} - k\theta \\ |\theta| \leq \pm 2.5^\circ - 3.0^\circ \end{cases}$$



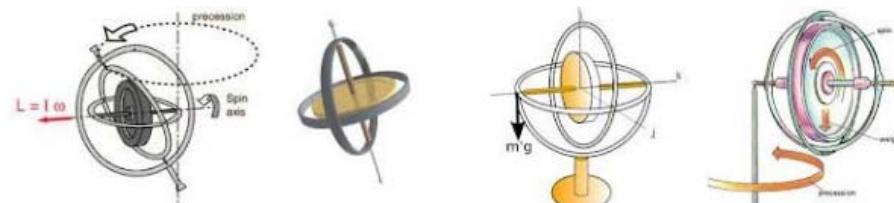
$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = H\omega$$



## Esempio 6: Giroscopio ad 1 Grado di Libertà



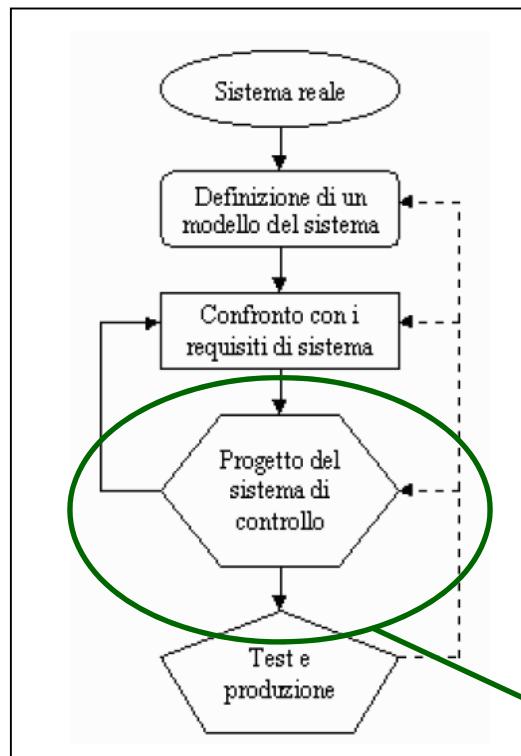
La [Robbe](#) ci segnala la disponibilità dell'ultima evoluzione nel campo dei giroscopi il **Futaba GY-520**. Questo Gyro comprende un'avanzata tecnologia di sensori denominata MEMS (Micro-Electro-Mechanical Systems). Il vantaggio di questi sensori è di poter essere integrati in un unico Chip insieme ad un regolatore PID ad alta velocità: conseguentemente è stato possibile racchiudere tutti i dispositivi in un unico giroscopio di piccole dimensioni, soltanto  $20 \times 20 \times 10$  mm. L'altro vantaggio dei sensori MEMS risiede nell'elevata velocità di elaborazione dei segnali, che consente ai piloti di compiere al meglio le rapide evoluzioni acrobatiche 3D e F3N.





# Tipologie di Controllo

Nello studio dei sistemi di controllo vi sono essenzialmente Problemi di Sintesi e Problemi di Analisi.



**Modellistica:** Creazione di Un modello del sistema reale (sintesi), Verifica della bontà del modello e studio delle prestazioni (analisi).

**Controllo:** Formalizzazione specifiche Del sistema, progetto del controllore (sintesi) e studio delle prestazioni (analisi).

**Strategie qualitative di un sistema di controllo**

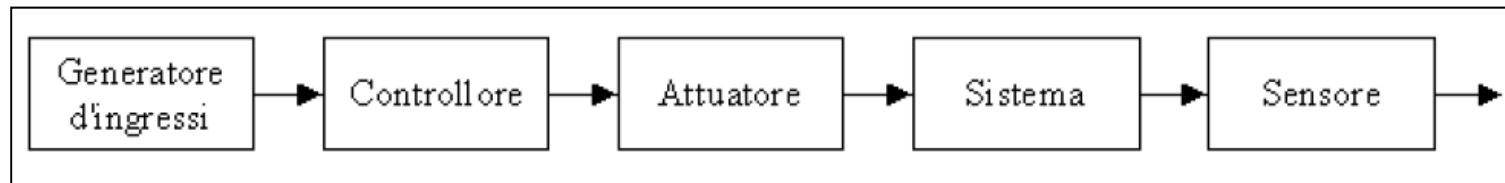
l'**analisi** del sistema è un processo di "previsione", il progetto di controllo è un processo di "decisione".



## Tipologie di Controllo



### 1) Anello aperto, open loop



Esempi tipici di sistemi controllati ad anello aperto sono:

- lavatrice, tostapane, forno a microonde
- sistemi di navigazione aeronautici
- processi automatizzati di saldatura
- impianti di assemblaggio
- sistemi di orientazione di sonde spaziali
- sistemi robotizzati



**Strutturalmente più semplice, non richiede modifiche**

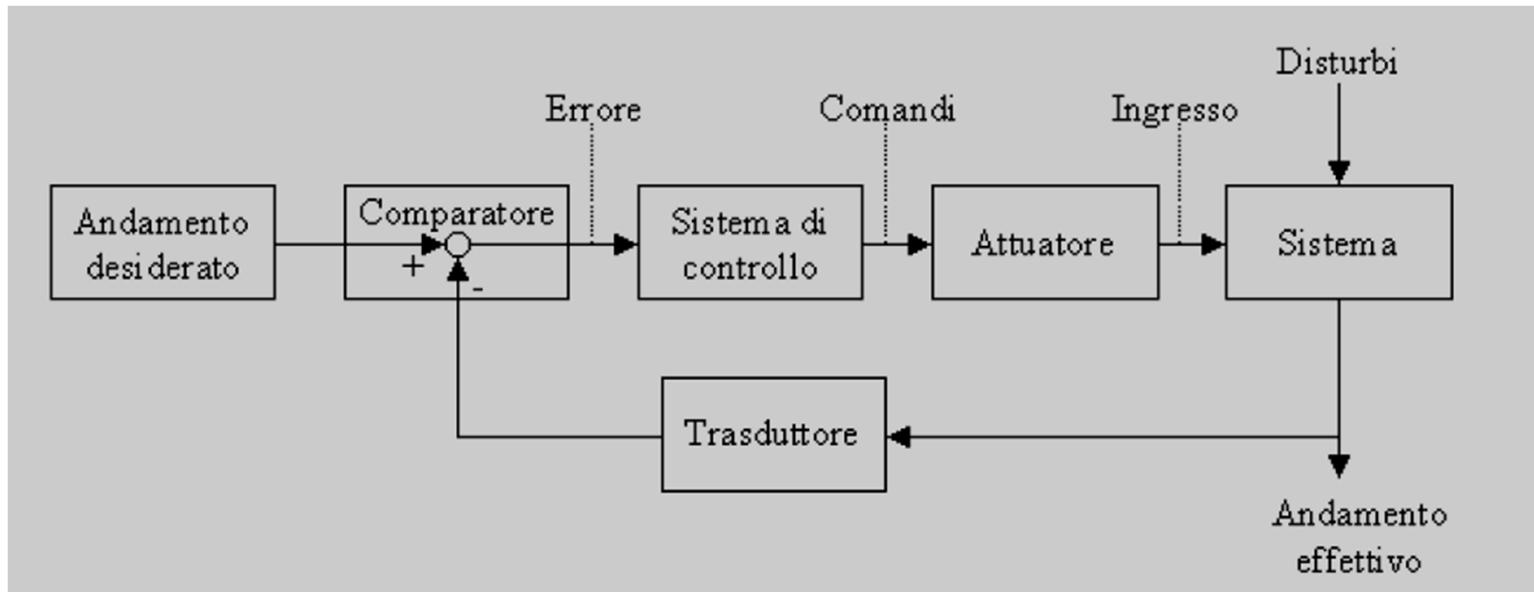


**Richiede un modello matematico molto fedele al processo reale**



## Tipologie di Controllo

### 2) Anello chiuso, Closed Loop, Feedback



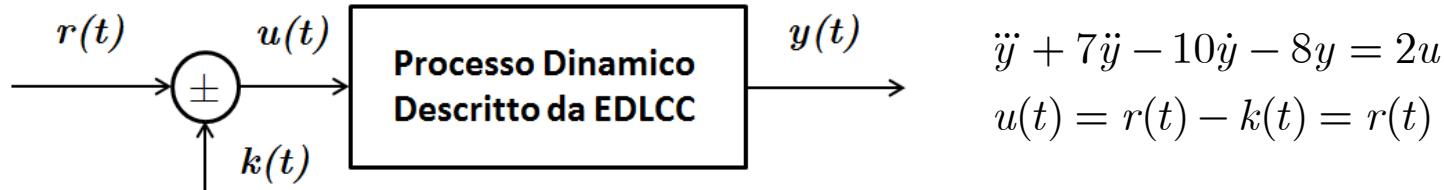
**Non richiede un modello molto accurato, compensazione errori**



**Struttura più complessa, più componenti soggetti a rottura**



## Esempio



$$\lambda^3 + 7\lambda^2 - 10\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = +4$$

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{+4t} + y_p(t)$$

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty}$$

- Indipendentemente dal segnale  $r(t)$ , l'uscita del sistema cresce in modo illimitato

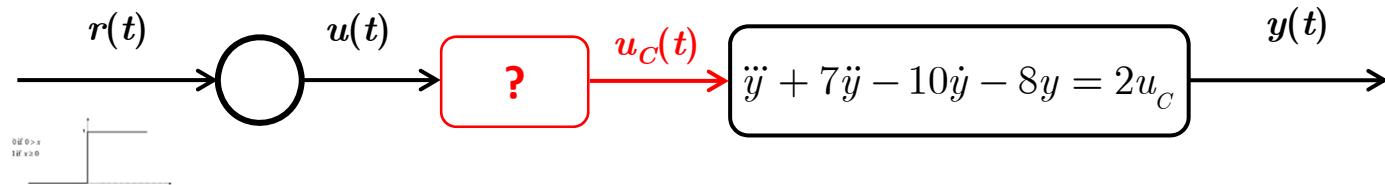
□ **Requisito:** L'uscita del sistema non deve discostarsi molto dal segnale  $r(t)$

1. Si deve evitare che l'uscita cresca nel tempo in modo illimitato
2. Si deve fare in modo che l'errore tra  $y(t)$  e  $r(t)$  sia inferiore ai requisiti richiesti di errore  $e(t) = r(t) - y(t)$
3. L'unico strumento a disposizione è il segnale di ingresso  $u(t)$



## Esempio

- Struttura di controllo ad anello aperto



- $y(t)$  = limitata
- $r(t)$  = 1 costante

$$y(t) = \frac{2}{5}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{60}e^{+4t} - \frac{1}{4}$$

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{+4t} - C_3 e^{+4t} + 1$$

- Scelta del controllore (per adesso non giustificata)

$$u_C(t) = \dot{u}(t) - 4u(t) \quad y(t) = 2e^{-t} - \frac{6}{5}e^{-2t} + 1$$

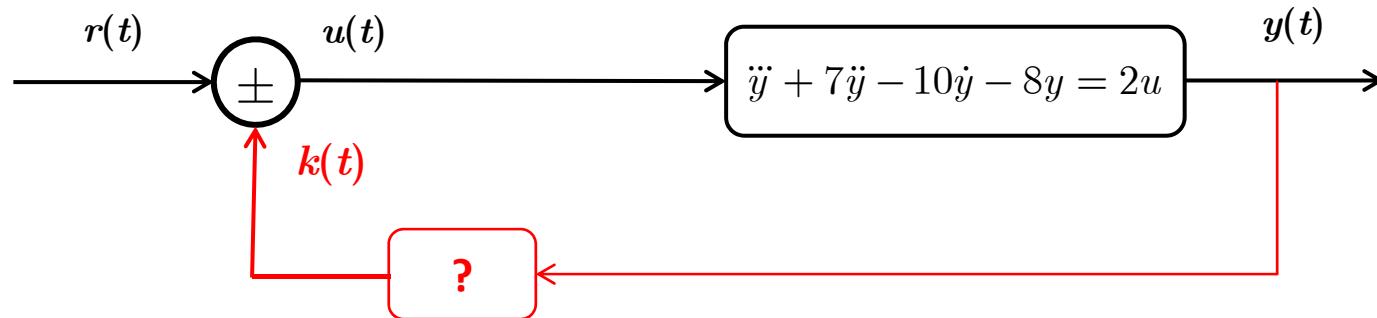
1. Si deve ottenere una cancellazione dell'esponenziale crescente
2. Il controllore non è causale



## Esempio



### □ Struttura di controllo ad anello chiuso



- $y(t)$  = limitata       $\ddot{y}(t) + 7\ddot{y}(t) - 10\dot{y}(t) - 8y(t) = 2u(t) = 2[r(t) - k(t)]$
- $r(t)$  = 1 costante       $k(t) = ??$

- Scelta del controllore (per adesso non giustificata)

$$k(t) = 12\dot{y}(t) + 8y(t)$$

$$u(t) = r(t) - k(t)$$

→  $\ddot{y}(t) + 7\ddot{y}(t) + 14\dot{y}(t) + 8y(t) = 2r(t)$



## Esempio

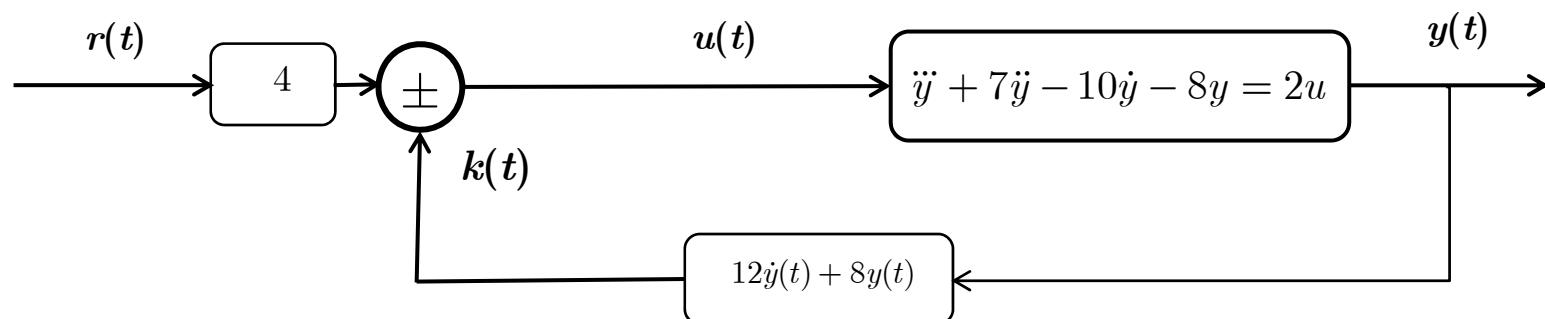
$$\lambda^3 + 8\lambda^2 + 14\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -4$$

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-4t} + C_4$$

- $y(t)$  è limitata, se l'ingresso è costante in quanto  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_P(t) = C_4$

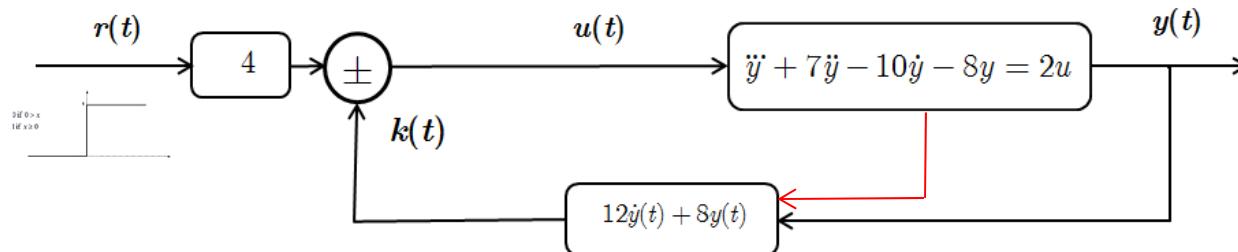
- Nel caso di  $r(t) = 1$ , quanto vale  $y(t)$ ?

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t} + \frac{1}{4}$$





# Esempio



## Implementazione A

- Misura uscita
- Calcolo della derivata
- Combinazione lineare con l'ingresso
- Operazioni più complesse
- Minore strumentazione

## Implementazione B

- Misura uscita
- Misura Derivata
- Combinazione lineare con l'ingresso
- Operazioni più semplici
- Maggiore strumentazione

Brian Douglas Open Loop Closed Loop

Brian Douglas LTI Systems



# TRASFORMATA DI LAPLACE E FdT



- Definizioni e Proprietà
  - Teoremi sulla Trasformata di Laplace
  - Soluzione di Equazioni Differenziali
- Definizione di Funzione di Trasferimento
  - Funzione di Trasferimento come modello di sistema
  - Algebra e Diagrammi a Blocchi
- Esempi
- Uso di Matlab

... Figlio di un contadino piccolo proprietario o forse di un bracciante, dovette la sua educazione all'interesse suscitato in alcuni ricchi vicini dalle sue capacità e dalla sua bella presenza. (???)..... (WIKI)





# Riferimenti

- Capitoli 4, 5, 6 Testo di Bolzern (parte)
- App. B Testo di Bolzern (parte)
- Capitolo 8 testo di Murray (download)
- Capitolo 3 e App E Testo di Lewis (download)
- Corso di Elettrotecnica



Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.

Con. Avanzati

Con. Standard



## Introduzione - Motivazioni

- Descrizione dell'impianto (sistema) mediante un'approssimazione o Modello

MODELLO → Sistema Dinamico Lineare

- Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di ordine arbitrario
- Sistema di equazioni differenziali a coefficienti costanti del primo ordine

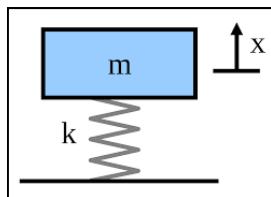
**Nota:** Uno dei metodi più efficaci per la risoluzione di equazioni ( o sistemi di equazioni) differenziali lineari a coefficienti costanti è la Trasformata di Laplace:

- Conversione dell'equazione differenziale in equazione algebrica mediante trasformazione
- Conversione della soluzione nel dominio iniziale mediante anti-trasformazione
- Introduzione del concetto di Funzione di Trasferimento
- Manipolazione di sistemi complessi mediante semplici operazioni algebriche.



# Concetti Generali

- 1. Serie di Fourier:** Permette di scrivere una funzione periodica  $f(t) = f(t + T)$  in una somma infinita di armoniche a frequenza crescenti multiple della frequenza di base  $f_0 = 1/T$ .

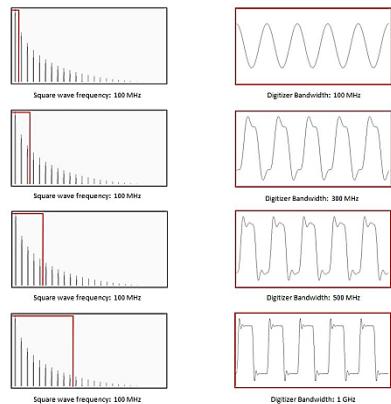
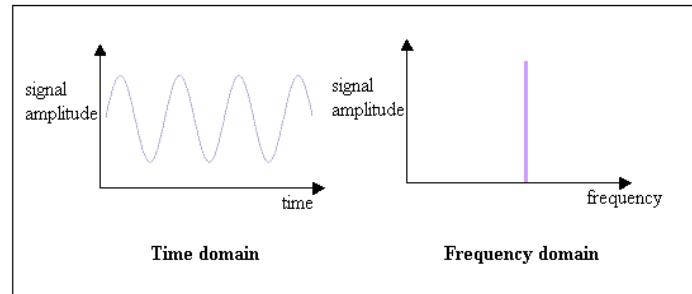


$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$x_0 = 0, \dot{x}_0 = v_0$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + B),$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, B = 0, A = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$$



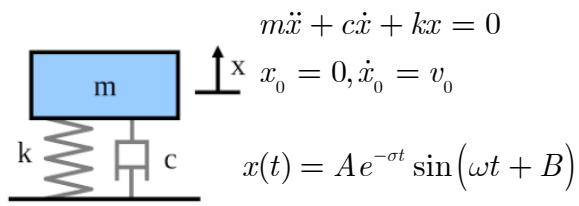
- Onda quadra mediante sviluppo in serie di Fourier
- $$m\ddot{x} + kx = u(t)$$
- $$u(t) = \sum_i c_i \sin \omega_i t$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Quando il periodo tende all'infinito, la serie di Fourier deve essere descritta mediante un integrale e non una sommatoria producendo la **Trasformata di Fourier**

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Rightarrow \sum \rightarrow \int$$

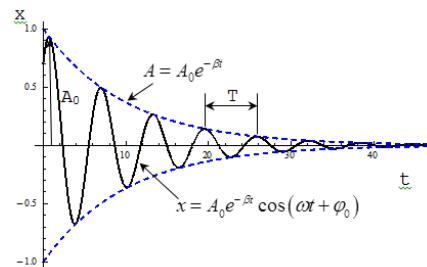
$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt; e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$x_0 = 0, \dot{x}_0 = v_0$$

$$x(t) = A e^{-\sigma t} \sin(\omega t + B)$$



$$F(s = \sigma + j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$



# Concetti Generali

- **Serie discreta di Potenze:** Serie di funzioni polinomiali della forma (McLaurin):

$$\sum_0^{\infty} a_n x^n = \sum_0^{\infty} a(n) x^n : n = 0, 1, 2, \dots$$

La serie si dice convergente se per  $n \rightarrow: \sum_0^{\infty} a(n) x^n = A(x)$

$$n = 0, 1, 2, \dots, a(n) = 1 \Rightarrow \sum_0^{\infty} a(n) x^n = A(x) = \frac{1}{1-x}, \forall |x| < 1$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, a(n) = \frac{1}{n!} \Rightarrow \sum_0^{\infty} a(n) x^n = A(x) = e^x$$

- Nel caso di variazione continua di  $n$ , la serie si trasforma in un integrale

$$\sum_0^{\infty} a_t x^t = \sum_0^{\infty} a(t) x^t : t \in \Re \Rightarrow \int_0^{\infty} a(t) x^t dt = A(x)$$

- Ai matematici piace derivare ed integrare funzioni in base  $e$ , non in base  $x$  (più facile)

$$x = e^{\ln x} \Rightarrow x^t = (e^{\ln x})^t$$

$$\int_0^{\infty} a(t) x^t dt = \int_0^{\infty} a(t) e^{\ln x \cdot t} dt = A(x)$$



# Concetti Generali

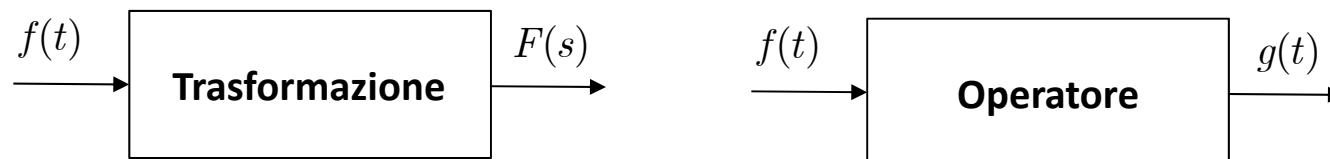
- Come per la serie di potenze, l'integrale improprio deve convergere alla stessa funzione per tutti i  $t$ .

$$\int_0^\infty \dots = \lim_{R \rightarrow 0} \int_0^R \dots \quad a(t) = 1, x = 2 \Rightarrow 2^t \rightarrow \infty \quad \text{:(frowny face)}$$

- Ci piacerebbe  $x < 1$  e positivo (se negativo, la potenza fornisce un numero immaginario)  $0 < x < 1$
- Cosa succede in questo caso a  $\ln x$ ?  $0 < x < 1 \Rightarrow -\infty < \ln x < 0$

- Cambio variabile:  $\ln x = -s \quad 0 < s < \infty$
- Siccome una **Funzione** si indica di solito con  $f$ , scriviamo  $a(t) = f(t)$

$$\sum_0^\infty a(t)x^t : t \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_0^\infty a(t)x^t dt = \int_0^\infty a(t)e^{\ln x \cdot t} dt = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = F(s)$$





# Definizioni

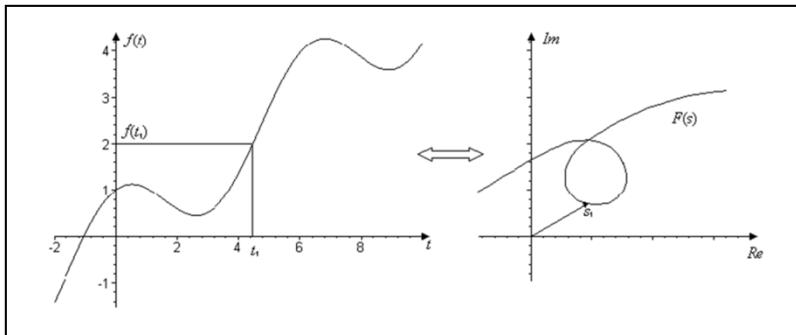
- **Definizione - Trasformata di Laplace:** Sia  $f(t)$  una funzione reale definita per  $t \geq 0$ , compreso  $0^+$ ; e sia  $s = \sigma + j\omega$  una variabile complessa. Si definisce trasformata di Laplace  $F(s)$  l'integrale (se esiste e converge):

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}[f(t)]$$

- $F(s)$  è analitica
- $\operatorname{Re}(s) > \sigma$

- **Definizione - Antitrasformata di Laplace:** Si definisce antitrasformata di Laplace  $f(t)$  (oppure trasformata inversa di Laplace), la funzione

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\sigma-jR}^{\sigma+jR} e^{st} F(s) ds \right\}$$



- **Trasformazione biunivoca** dal dominio del tempo al dominio complesso (o della frequenza)

$$f(t) \Rightarrow [F(s)] \Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \Rightarrow f(t)$$

[Brian Douglas Laplace Transform](#)



## Proprietà - Esempi

- Teoremi di esistenza (integrale improprio) ed unicità
  - Le funzioni (nel nostro contesto) che ammettono la Trasformata di Laplace sono le funzioni continue a tratti
- **Teorema di Linearità:** La Trasformata di Laplace è una trasformazione lineare

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = af(t) + bg(t)$$

- Il Calcolo della Trasformata di Laplace viene eseguito applicando direttamente la definizione
  - **Esempio**

$$f(t) = k$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} ke^{-st} dt = \frac{k}{-s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{k}{-s} = \frac{k}{s}; s > 0$$



## Esempi

- **Esempio**  $f(t) = e^{-5t}$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-5t} e^{-st} dt = \frac{-1}{s+5} e^{-(s+5)t} \Big|_0^\infty = \frac{-1}{s+5} e^{-(s+5)\infty} + \frac{1}{s+5} e^{-(s+5)0}$$

In generale:  $f(t) = e^{at}$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \frac{1}{-(s-a)} e^{-(s-a)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}$$

■ **Nota:**  $s > a$ ,  $a$  viene detta ascissa di convergenza

- **Esempio**

$$f(t) = \sin(at)$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty \sin(at) e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \int_0^\infty (e^{jat} - e^{-jat}) e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \left[ \int_0^\infty e^{-(s-j)a} t dt - \int_0^\infty e^{-(s+j)a} t dt \right] \\ &= \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{s-j} - \frac{1}{s+j} \right] = \frac{a}{s^2 + a^2} \end{aligned}$$

- **Esempio**  $f(t) = t^n$

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$



## Esempi

- $f(t) = t; F(s) = \int_0^\infty te^{-st} dt$ 

$$\int_0^\infty u dv = uv - \int_0^\infty u dv$$

$$u = t \quad | \quad v = \frac{e^{-st}}{-s}$$

$$du = dt \quad | \quad dv = e^{-st} dt$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty te^{-st} dt &= t \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt \\
 &= [0 - 0] + \left. \frac{1}{s} \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^\infty = \frac{1}{s^2} = \int_0^\infty te^{-st} dt
 \end{aligned}$$

- $f(t) = t^2; F(s) = \int_0^\infty t^2 e^{-st} dt$ 

$$\int_0^\infty u dv = uv - \int_0^\infty u dv$$

$$u = t^2 \quad | \quad v = \frac{e^{-st}}{-s}$$

$$du = 2t dt \quad | \quad dv = e^{-st} dt$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty t^2 e^{-st} dt &= t^2 \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^\infty - \int_0^\infty 2t \frac{e^{-st}}{-s} dt \\
 &= [0 - 0] + \frac{2}{s} \int_0^\infty te^{-st} dt = \frac{2 \cdot 1}{s^3}
 \end{aligned}$$

quod erat demonstrandum

|                             |
|-----------------------------|
| $f(t) = t^n$                |
| $F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ |

q.e.d



# Esempi

- **Esempio**

$$f(t) = 6t^2 - 12t^5 + 9e^{-2t} + \sin(2t)$$

$$F(s) = 6\frac{2!}{s^3} - 12\frac{5!}{s^6} + \frac{9}{s+2} + \frac{4}{s^2+4}$$

- In generale per il calcolo della Trasformata di Laplace di una funzione complessa, si usano tabelle disponibili

TABLE 2-1 Laplace Transform Pairs

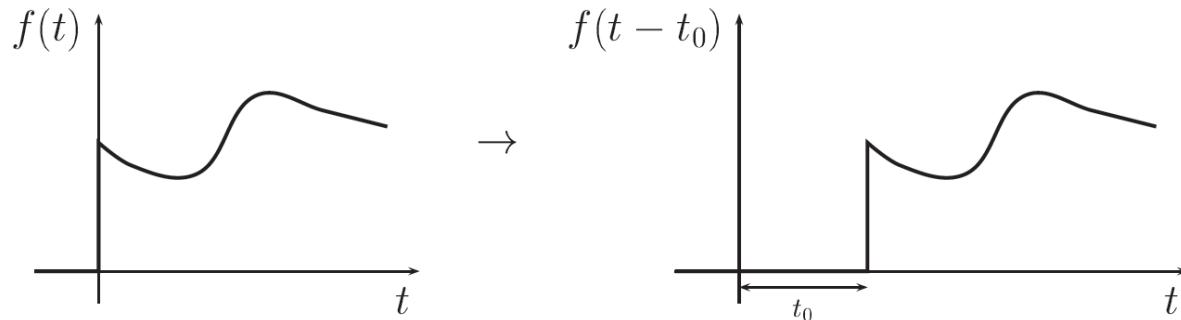
| $f(t)$   | $F(s)$                          | $f(t)$  | $F(s)$  |
|--|---------------------------------|---|---|
| Unit impulse $\delta(t)$   | 1                               | $\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$  | $\frac{1}{s(s+a)^2}$                                      |
| Unit step $1(t)$   | $\frac{1}{s}$                   | $\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$   | $\frac{1}{s^2(s+a)}$                                      |
| $t$  | $\frac{1}{s^2}$                 | $e^{-at}\sin \omega t$  | $\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$                       |
| $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )                    | $\frac{1}{s^n}$                 | $e^{-at}\cos \omega t$  | $\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$                          |
| $t^n$ ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )                                       | $\frac{n!}{s^{n+1}}$            | $\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\phi_{inj}} \sin \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t$                         | $\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$    |
| $e^{-at}$  | $\frac{1}{s+a}$                 | $-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\phi_{inj}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t - \phi)$                       | $\frac{s}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$             |
| $te^{-at}$   | $\frac{1}{(s+a)^2}$             | $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$   |   |
| $\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$ ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )            | $\frac{1}{(s+a)^n}$             | $1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\phi_{inj}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t + \phi)$                    | $\frac{\omega_0^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)}$ |
| $t^n e^{-at}$ ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )                               | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$        | $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$   |   |
| $\sin \omega t$  | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ | $1 - \cos \omega t$   | $\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$                      |
| $\cos \omega t$  | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$      | $a\omega - \sin \omega t$   | $\frac{\omega^2}{s^2(s^2 + \omega^2)}$                    |
| $\sinh \omega t$   | $\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$ | $\sin \omega t - a\omega \cos \omega t$   | $\frac{2\omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$                    |
| $\cosh \omega t$   | $\frac{s}{s^2 - \omega^2}$      | $\frac{1}{2\omega}t \sin \omega t$  | $\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$                            |
| $\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$   | $\frac{1}{s(s+a)}$              | $t \cos \omega t$   | $\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$               |
| $\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$                                   | $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$          | $\frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$ ( $\omega_1^2 \neq \omega_2^2$ ) | $\frac{s}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$          |
| $\frac{1}{b-a}(be^{-at} - ae^{-bt})$                                 | $\frac{s}{(s+a)(s+b)}$          | $\frac{1}{2\omega}(\sin \omega t + a\omega \cos \omega t)$  | $\frac{s^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$                          |
| $\frac{1}{ab} \left[ 1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$ | $\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$         |   |   |



## Teoremi sulla Trasformata di Laplace

□ **Teorema:** Traslazione nel tempo. Sia  $F(s)$  la trasformata di Laplace della funzione  $f(t)$ , nulla per  $t < 0$ . Vale la relazione

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$$

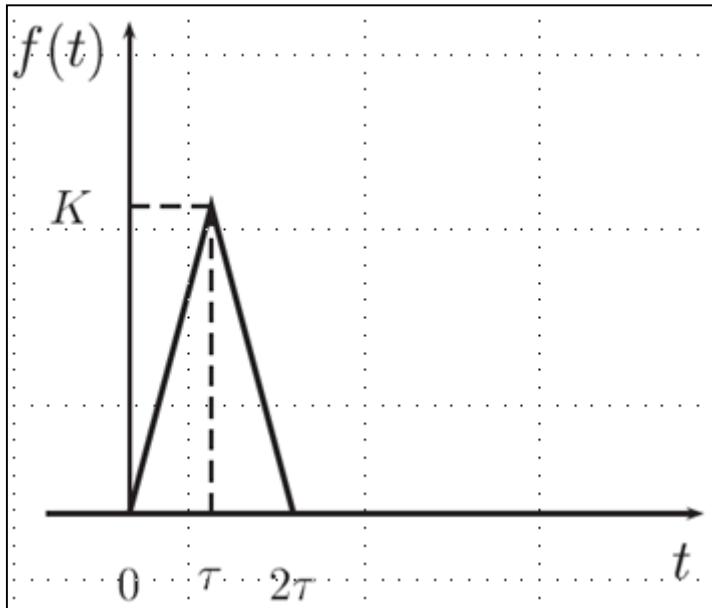


$$f(t - t_0) = e^{-5(t-t_0)} \Rightarrow F(s) = e^{-t_0 s} \frac{1}{s + 5}$$

$$f(t) = (t - 1)^2 + 4 \sin(t - 10) \Rightarrow F(s) = e^{-s} \frac{3!}{s^3} + 4e^{-10s} \frac{1}{s^2 + 1}$$



# Teoremi sulla Trasformata di Laplace



Esempio: Il segnale  $f(t)$  è scomponibile nella somma di tre rampe, di pendenze  $K/\tau$ ,  $-2K/\tau$  e  $K/\tau$ , applicate rispettivamente agli istanti  $t=0$ ,  $t=\tau$  e  $t=2\tau$  utilizzando il teorema della traslazione nel tempo, si deduce

$$f(t) = \frac{K}{\tau} t \Big|_{t=0}^{t=\tau} - 2 \frac{K}{\tau} t \Big|_{t=\tau}^{t=2\tau} + \frac{K}{\tau} t \Big|_{t>2\tau}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{K}{\tau s^2} (1 - 2 e^{-\tau s} + e^{-2\tau s}) \\ &= \frac{K}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s})^2 \end{aligned}$$



## Teoremi sulla Trasformata di Laplace

- **Teorema:** Traslazione nel dominio della variabile complessa

Sia  $f(t)$  una funzione con Trasformata di Laplace  $F(s)$  e sia  $a$  una costante reale o complessa. Vale la seguente relazione:

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)}$$

$$\hat{f}(t) = e^{2t} \cos(3t) \quad \text{posto: } f(t) = \cos 3t \rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + 9}$$

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\cos(3t)\} = F(s-2) = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 9}.$$

- Passaggio inverso:  $F(s) \rightarrow f(t)$

$$F(s) = \frac{s+9}{s^2 + 6s + 13}$$

$$F(s) = \frac{s+9}{(s+3)^2 + 4} = \frac{(s+3)+6}{(s+3)^2 + 2^2} = \frac{s+3}{(s+3)^2 + 2^2} + 3 \frac{2}{(s+3)^2 + 2^2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s+3}{(s+3)^2 + 2^2} + 3 \frac{2}{(s+3)^2 + 2^2} \right\} = e^{-3t} \cos(2t) + 3e^{-3t} \sin(2t).$$

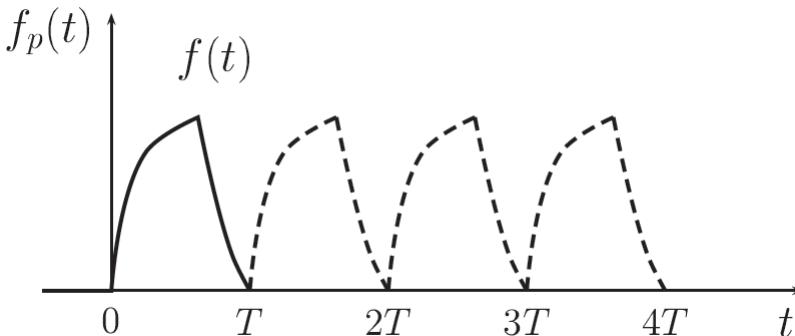


## Teoremi sulla Trasformata di Laplace

□ **Teorema:** Trasformata di una funzione periodica. Sia  $f(t)$  una funzione non nulla solo per  $0 \leq t \leq T$  e sia  $f_p(t)$  la funzione che si ottiene ripetendo in modo periodico la funzione  $f(t)$ .

$$f_p(t + nT) = f(t)$$

$$\forall n, \quad 0 \leq t \leq T$$



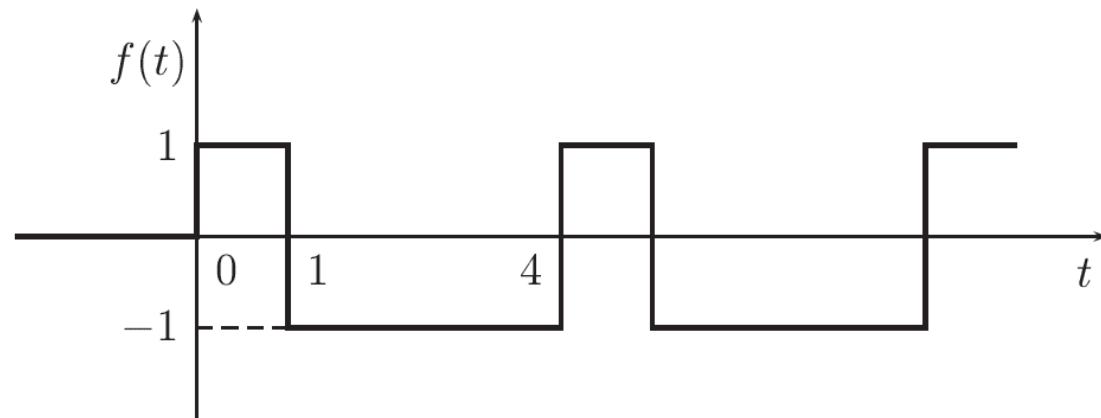
Vale la seguente relazione:

$$\mathcal{L}[f_p(t)] = \frac{F(s)}{1 - e^{-Ts}}$$

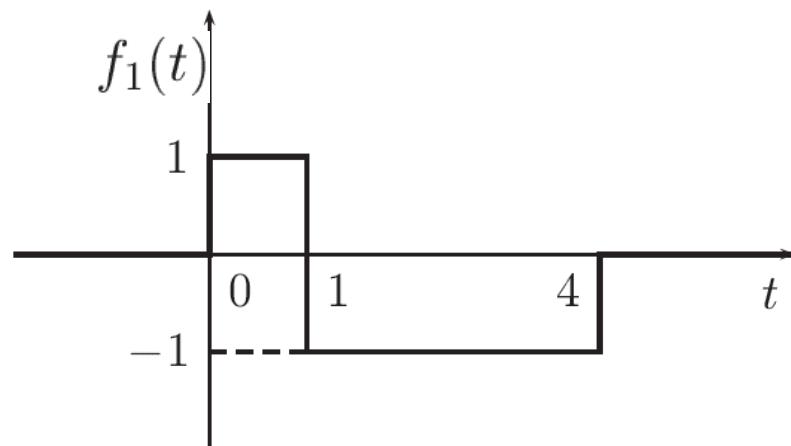


## Teoremi sulla Trasformata di Laplace

Esempio. Calcolare la trasformata di Laplace del seguente segnale:



La funzione  $f(t)$  è periodica di periodo  $T = 4$ .



$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{1 - e^{-4s}} \mathcal{L}[f_1(t)] \\ &= \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-4s}}{s(1 - e^{-4s})}\end{aligned}$$



## Derivata, Integrale

- **Teorema – Derivazione:** sia  $f(t)$  una funzione continua a tratti, limitata superiormente e con derivata continua, avente come trasformata di Laplace  $F(s)$ . Si dimostra che:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2f(t)}{dt^2} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{df(t)}{dt} \right) \right\} = s\mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} - \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

- **Derivate di Ordine Superiore:** La trasformata di Laplace delle derivate di ordine superiore di una funzione  $f(t)$  sono ottenute mediante la relazione ricorsiva:

$$\boxed{\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} = s^n F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} \frac{d^j f(0)}{dt^j}}$$

- Il teorema precedente permette di rappresentare un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti mediante una relazione algebrica tra la soluzione e tutte le sue derivate.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = u(t) \Rightarrow Y(s) = F[s, u(s)]$$



# Derivata, Integrale

## □ Teorema – Derivazione: (dimostrazione)

- Per ipotesi si supponga noto che  $F(s)$  è la trasformata di Laplace di  $f(t)$ .

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df(t)}{dt} dt = sF(s) - f(0)$$

- Risolviamo l'integrale per parti:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -se^{-st} f(t) dt = \frac{f(t)}{e^{st}} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} se^{-st} f(t) dt; s > 0$$

- Se la funzione  $f(t)$  è di tipo esponenziale, ovvero:  $|f(t)| < ce^{kt}$ ;  $k < s$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{e^{st}} = 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = 0 - f(0) + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = sF(s) - f(0)$$



## Derivata, Integrale

□ **Teorema – Integrazione:** data una funzione  $f(t)$  integrabile e con trasformata di Laplace  $F(s)$ . Vale la relazione (con condizioni iniziali nulle):

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

- **Esempio**

$$\mathcal{L} \{ \cos(at) \} = \frac{s}{a} \mathcal{L} \{ \sin(at) \} = \frac{s}{a} \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L} \{ \sin(at) \} = \mathcal{L} \left\{ \int_0^t \cos(a\tau) d\tau \right\} = a \frac{1}{s} \frac{s}{s^2 + a^2} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$



# Derivata, Integrale



- **Esempio**

$$\begin{cases} \ddot{y} + 4y = 0 \\ y_0 = 1 \quad \dot{y}_0 = 2 \end{cases} \quad \mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} + 4\mathcal{L}\{y(t)\} = s^2y(s) - sy_0 - \dot{y}_0 + 4y(s) = 0$$
$$(s^2 + 4)y(s) = sy_0 + \dot{y}_0$$

$$y(s) = \frac{s+2}{(s^2 + 4)} = \frac{s}{s^2 + 2^2} + \frac{2}{s^2 + 2^2} \quad y(t) = \cos(2t) + \sin(2t)$$

$$\begin{cases} \ddot{y} - 4y = 0 \\ y_0 = 1 \quad \dot{y}_0 = 2 \end{cases} \quad (s^2 - 4)y(s) = sy_0 + \dot{y}_0$$

$$y(s) = \frac{s+2}{(s^2 - 4)} = \frac{s+2}{(s+2)(s-2)} = \frac{1}{s-2} \quad y(t) = e^{2t}$$



Nota la cancellazione



# Derivata, Integrale



- **Esempio**

$$\begin{cases} \ddot{y} + 4y = 0 \\ y_0 = 1 \quad \dot{y}_0 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda^2 + 4 = 0 \\ y(t) = c_1 e^{2jt} + c_2 e^{-2jt} \end{cases} \quad \lambda = \pm 2j$$

$$\begin{cases} y_0 = 1 = c_1 e^{2j0} + c_2 e^{-2j0} \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_0 = 2 = 2jc_1 e^{2j0} - 2jc_2 e^{-2j0} \\ 2jc_1 - 2jc_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ j - jc_2 - jc_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1-j}{2} \\ c_2 = \frac{1+j}{2} \end{cases} \quad \boxed{y(t) = \frac{1-j}{2} e^{2jt} + \frac{1+j}{2} e^{-2jt}}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{2jt} - \frac{j}{2} e^{2jt} + \frac{1}{2} e^{-2jt} + \frac{j}{2} e^{-2jt} \quad y(t) = \frac{1}{2} [e^{2jt} + e^{-2jt}] - \frac{j}{2} [e^{2jt} - e^{-2jt}]$$

$$y(t) = \frac{1}{2} 2 \cos(2t) - \frac{j}{2} 2j \sin(2t) \quad \boxed{y(t) = \cos(2t) + \sin(2t)}$$



# Convoluzione

□ **Nota:**  $\mathcal{L}[f(t) \cdot g(t)] \neq F(s) \cdot G(s)$

□ **Definizione:** Prodotto di Convoluzione. Date due funzioni  $f(t)$  e  $g(t)$  con trasformate  $F(s)$  e  $G(s)$ , si definisce Prodotto di Convoluzione:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t g(t - \eta)f(\eta)d\eta = g(t) * f(t)$$
$$\eta = t - \tau$$

- Il Prodotto di Convoluzione soddisfa la proprietà commutativa ed ammette Trasformata di Laplace. Date due funzioni  $f(t)$  e  $g(t)$ , con trasformate  $F(s)$  e  $G(s)$ , si ha:

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$$

- Esempio:**

$$F(s) \cdot G(s) = \frac{4}{s+2} \cdot \frac{3}{s^2 + 9}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = 4 \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \sin(3\tau)d\tau$$



# Convoluzione

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (f * g) dt$$

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

$$\begin{cases} \sum_0^{\infty} a_n x^n = F(x) \\ \sum_0^{\infty} b_n x^n = G(x) \end{cases} \Rightarrow F(x)G(x) = \sum_0^{\infty} c_n x^n$$

- Esempio:

$$\begin{cases} f(t) = t^2 \\ g(t) = t \end{cases} \quad f(t) * g(t) = \int_0^t \tau^2 (t - \tau) d\tau = \int_0^t (\tau^2 t - \tau^3) d\tau = \left[ \frac{\tau^3 t}{3} - \frac{\tau^4}{4} \right]_0^t = \frac{t^4}{12}$$

- Calcolo della trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} F(s) = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3} \\ G(s) = \frac{1!}{s^2} = \frac{1}{s^2} \end{cases} \Rightarrow F(s)G(s) = \frac{2}{s^5} \Rightarrow \frac{t^4}{12}$$



# Convoluzione

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (f * g)(t) dt$$

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

$$F(s) \cdot G(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du \cdot \int_0^{\infty} e^{-sv} g(v) dv \Rightarrow \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s(u+v)} f(u) g(v) du dv$$

- Esempio:

$$\int_0^{10} \int_0^2 x^3 y^2 dx dy = \int_0^{10} x^3 f(u) dx \cdot \int_0^2 y^2 dy \Rightarrow \frac{10^4}{4} \cdot \frac{2^3}{3}$$

- Nel calcolo della trasformata di Laplace vorremmo avere  $e^{-st}$

$$\begin{cases} t = u + v \\ u = u \end{cases} \Rightarrow v = t - u$$

$$F(s) \cdot G(s) = \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} e^{-st} f(u) g(t - u) du dv$$

- Dobbiamo avere  $du dt$
- Dobbiamo trovare i limiti di integrazione

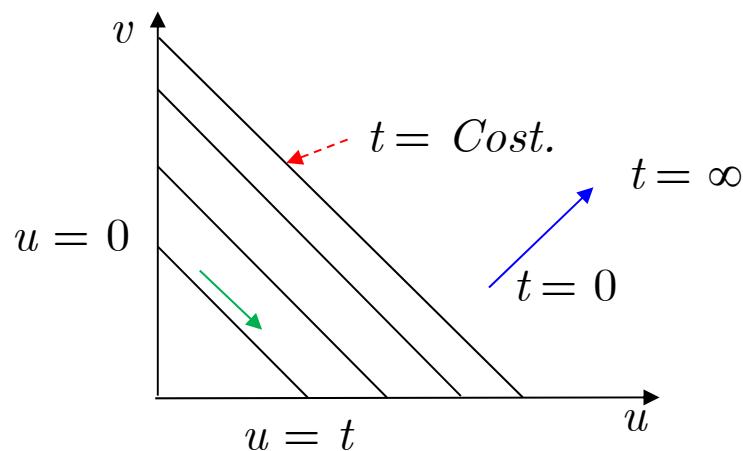


# Convoluzione

- Dalla teoria delle derivate parziali:

$$dudv = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial(u, v)}{\partial(u, t)} \\ \frac{\partial(v, u)}{\partial(u, t)} \end{pmatrix} \right\| dudt \quad \begin{cases} u = u \\ v = t - u \end{cases} \quad \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial(u, v)}{\partial(u, t)} \\ \frac{\partial(v, u)}{\partial(u, t)} \end{pmatrix} \right\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$F(s) \cdot G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(u) g(t-u) dudt$$



$$F(s) \cdot G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[ \int_0^t f(u) g(t-u) du \right] dt$$

$$F(s) \cdot G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (f * g) dt$$



## Teoremi ai limiti (Valore Finale, Valore Iniziale)

- **Teorema del Valore Finale:** Data una funzione  $f(t)$  con Trasformata  $F(s)$ , se e solo se il limite temporale esiste ed è finito, vale la seguente relazione:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)]$$

- **Esempio:**

$$f(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-4t} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{1}{4}$$

$$F(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{s+4+3s}{s(s+4)} = \frac{s+1}{s(s+4)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{s+1}{s(s+4)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+1}{s+4} = \frac{1}{4}$$



## Teoremi ai limiti (Valore Finale, Valore Iniziale)

□ Nota !

$$f(t) = \frac{1}{4} + e^{+4t} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty !!! \quad \text{Il teorema non si può applicare}$$

$$F(s) = \frac{1}{4s} + \frac{1}{s-4} = \frac{1}{4} \left[ \frac{5s-4}{s(s-4)} \right] \quad \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{4} \left[ \frac{5s-4}{s(s-4)} \right] \Rightarrow -\frac{1}{4}$$

□ **Teorema del Valore Iniziale:** Data una funzione  $f(t)$  con Trasformata  $F(s)$ , se e solo se il limite in  $s$  esiste, vale la seguente relazione:

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]}$$

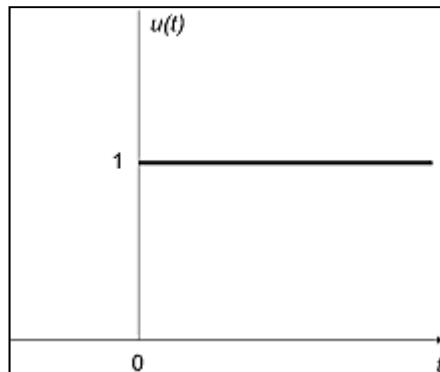
$$F(s) = \frac{1}{4s} + \frac{1}{s-4} = \frac{1}{4} \left[ \frac{5s-4}{s(s-4)} \right]$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{5s-4}{4s(s-4)} = \frac{5}{4}$$

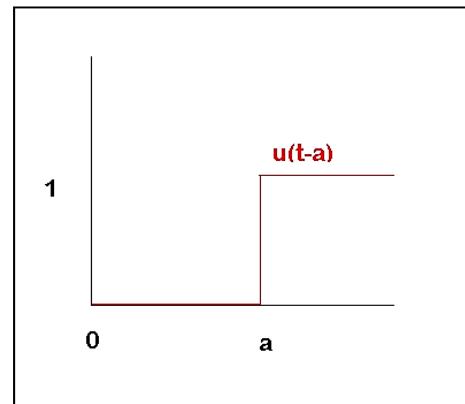


# Segnali Canonici

- Nello studio dei sistemi di controllo, due funzioni particolari sono utilizzate in molte applicazioni: **la funzione a gradino (scalino..) e la funzione impulsiva.**
- **Definizione:** Si definisce funzione a gradino unitario (funzione di Heaviside), la funzione  $H(t)$ :



$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



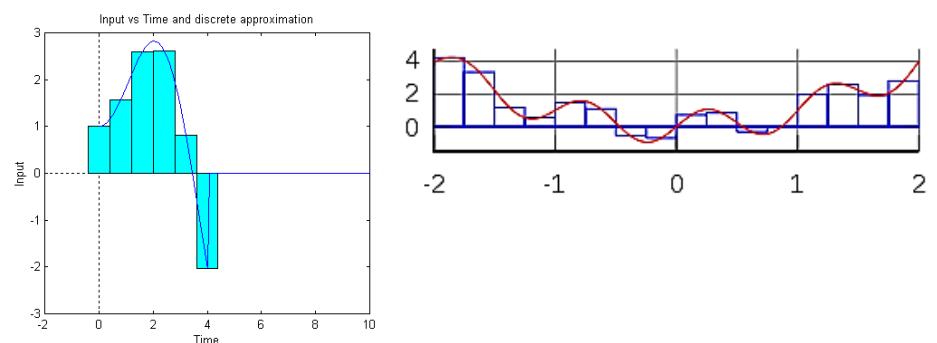
$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

$a$  = ritardo temporale

$$L[H(t)] = \int_0^{\infty} H(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

$$L[H(t-a)] = \int_0^{\infty} H(t-a)e^{-st} dt = \int_a^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-as}}{s}$$

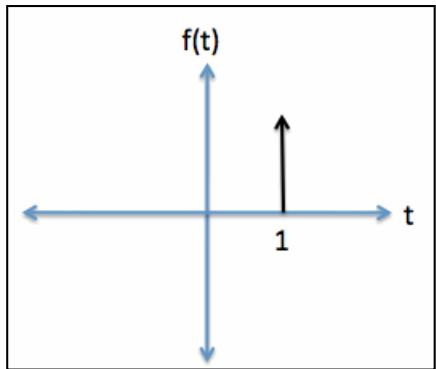
- Uso della funzione a gradino come approssimante





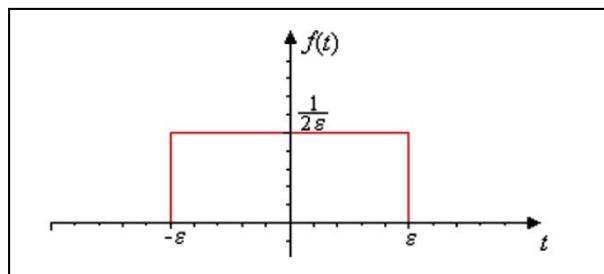
# Segnali Canonici

- **Definizione:** Si definisce funzione a impulso unitario (Delta di Dirac)  $\delta(t - \tau)$ , applicata all'istante  $t = \tau$ , come passaggio al limite di una funzione rettangolare avente area unitaria.



$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & t \neq \tau \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) dt = 1 & t = \tau \end{cases}$$

- Limite della funzione rettangolare con area unitaria, centrata all'origine



$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & |t| \leq \varepsilon \\ 0 & |t| > \varepsilon \end{cases}$$

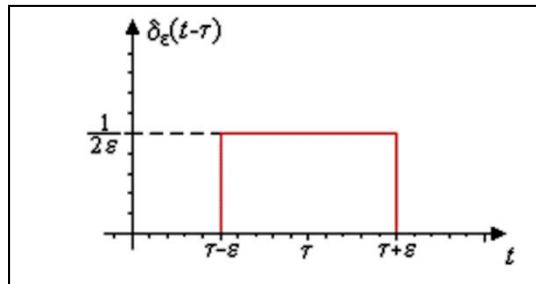
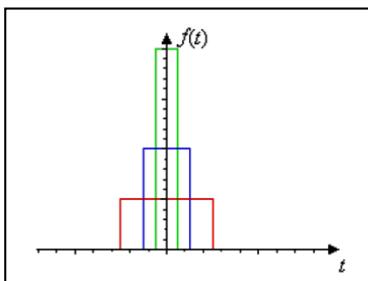
$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dt = 1$$



# Segnali Canonici

- Calcolo della Trasformata di Laplace della Funzione di Dirac

[Khan Academy](#)



- Trasformata di  $\delta_\varepsilon(t)$
- Calcolo del limite

Uso della funzione impulsiva come approssimante

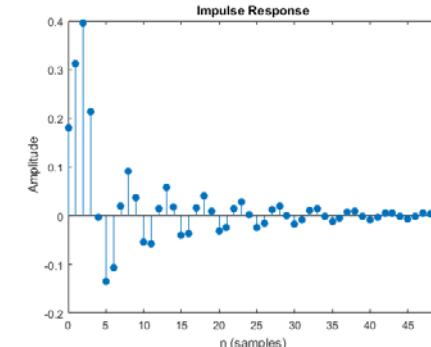
$$\delta_\varepsilon(t-\tau) = \frac{1}{2\varepsilon} [H(t-(\tau-\varepsilon)) - H(t-(\tau+\varepsilon))]$$

$$L[\delta(t-\tau)] = L\left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t-\tau)\right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L[\delta_\varepsilon(t-\tau)]$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2\varepsilon} \left( \frac{e^{-(\tau-\varepsilon)s}}{s} - \frac{e^{-(\tau+\varepsilon)s}}{s} \right) \right] = \frac{e^{-\tau s}}{2s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\varepsilon s} - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon} = \frac{e^{-\tau s}}{2s} 2s = e^{-\tau s}$$

$$\begin{cases} L[\delta(t-\tau)] = e^{-\tau s} \\ L[\delta(t)] = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} L[H(t-\tau)] = \frac{e^{-\tau s}}{s} \\ L[H(t)] = \frac{1}{s} \end{cases}$$

la funzione impulso unitario può essere vista come la derivata della funzione gradino unitario.





## Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

$$\begin{cases} \ddot{y} + a\dot{y} + by = u(t) \\ y_0 = 1, \dot{y}_0 = 0 \end{cases} \longrightarrow (s^2 + as + b)y(s) - (s + a)y_0 - \dot{y}_0 = u(s)$$

- Come esempio consideriamo un ingresso a gradino unitario

$$y(s) = \frac{(s + a)}{(s^2 + as + b)} + \frac{u(s)}{(s^2 + as + b)} \quad u(t) = H(t) \Rightarrow u(s) = \frac{1}{s}$$

$$y(s) = \frac{(s + a)}{(s^2 + as + b)} + \frac{1}{s(s^2 + as + b)} = \frac{s^2 + as + 1}{s^3 + as^2 + bs}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2 + as + 1}{s^3 + as^2 + bs}\right]$$



## Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u(t) \quad u(t) = e^{-2t} \cos(4t) \Rightarrow u(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 16}$$
$$y_0 = 3, \dot{y}_0 = 0$$

$$s^2 y(s) - s y_0 - \dot{y}_0 + 3s y(s) - 3y_0 + 2y(s) = u(s)$$

$$(s^2 + 3s + 2)y(s) = s y_0 + \dot{y}_0 + 3y_0 + u(s)$$
$$y(s) = \frac{3s + 3}{(s^2 + 3s + 2)} + \frac{u(s)}{(s^2 + 3s + 2)} = \frac{3s + 3}{(s^2 + 3s + 2)} + \frac{s + 2}{[(s + 2)^2 + 16](s^2 + 3s + 2)}$$
$$y(s) = \frac{3s^3 + 15s^2 + 73s + 62}{s^4 + 7s^3 + 34s^2 + 68s + 40}$$

□ **Considerazione Generale:** data l'espressione analitica dell'ingresso  $u(t)$  e la sua trasformata di Laplace si può sempre scrivere la trasformata di Laplace della soluzione come funzione complessa razionale fratta della forma:

$$y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}; m \leq n$$

**Nota:** l'unica eccezione riguarda funzioni con ritardo per le quali si ha una  $F(s)$  che è una funzione irrazionale.



# Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

1. Soluzione analitica mediante uso di tabelle disponibili in letteratura
2. Soluzione mediante Matlab oppure altro software (simbolico o numerico)
3. Soluzione analitica mediante la tecnica della scomposizione in Fratti Semplici

## □ Scomposizione in Fratti Semplici

$$F(s) = \frac{b_m s^m + \frac{b_{m-1}}{b_m} s^{m-1} + \dots + \frac{b_0}{b_m}}{a_n s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n}} = k \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Se  $F(s)$  è strettamente propria (ovvero  $m < n$ ), si può scomporre in una somma di frazioni antitrasformabili detti fratti semplici.
- Se  $F(s)$  è propria (ovvero  $m = n$ ), si può scomporre nella somma di una costante + una somma di fratti semplici antitrasformabili.

$$F(s) = k \frac{(s + z_1)(z + z_2)\dots(s + z_m)}{(s + p_1)(z + p_2)\dots(s + p_n)}$$



# Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

$$y(s) = \frac{A_1}{s + p_1} + \frac{A_2}{s + p_2} + \dots + \frac{A_i}{s + p_i} + \frac{B_r}{(s + p_r)^r} + \frac{B_{r-1}}{(s + p_r)^{r-1}} + \dots + \frac{B_1}{(s + p_r)} + \begin{cases} \frac{C_k}{s + p_k} + \frac{C_k^*}{s + p_k^*} \\ \frac{C_k s + D_k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \end{cases}$$

$$L^{-1}\left[\frac{A}{s + p}\right] = A e^{-pt} \quad L^{-1}\left[\frac{B_r}{(s + p)^r}\right] = \frac{B_r t^{(r-1)}}{(r-1)!} e^{-pt} \quad \bullet \quad \text{Teorema di traslazione in } s$$

$$L^{-1}\left[\frac{C}{(s + p)} + \frac{C^*}{(s + p^*)}\right] = C e^{-jpt} + C^* e^{-jp^*t} =$$

$$\mathbf{A} e^{\operatorname{Re}\{-p\}t} \cos[\operatorname{Im}\{-p\}t + \mathbf{B}] = \mathbf{A} e^{\operatorname{Re}\{-p\}t} \sin[\operatorname{Im}\{-p\}t + \mathbf{B} + \frac{\pi}{2}]$$

$$\mathbf{A} = 2\sqrt{\operatorname{Re}^2\{C\} + \operatorname{Im}^2\{C\}}$$

$$\mathbf{B} = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im}\{C\}}{\operatorname{Re}\{C\}}$$

□ I termini  $A_i, B_i, C_i, D_i, C, C^*$  sono detti **RESIDUI**

**NOTA:** nel seguito si dimostra la relazione tra residui e condizioni iniziali di un'equazione differenziale, ovvero dell'ampiezza della risposta di un sistema



# Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

## □ Calcolo dei Residui:

### ■ Esempio: Radici Reali e Distinte

$$\frac{A_i}{s + p_i} \Rightarrow A_i = (s + p_i)F(s) \Big|_{s=-p_i}$$

$$y(s) = \frac{4}{s^2 + 5s + 4} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+4} \Rightarrow A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t}$$

$$A_1 = y(s) \cdot (s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{4(s+1)}{s^2 + 5s + 4} \Big|_{s=-1} = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = y(s) \cdot (s+4) \Big|_{s=-4} = \frac{4(s+4)}{s^2 + 5s + 4} \Big|_{s=-4} = -\frac{4}{3}$$

$$y(s) = \frac{4}{s^2 + 5s + 4} = \frac{4}{3} \frac{1}{s+1} - \frac{4}{3} \frac{1}{s+4} \quad \rightarrow \quad y(t) = \frac{4}{3} e^{-t} - \frac{4}{3} e^{-4t}$$



## Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

- **Esempio:** Radici Reali con molteplicità  $r > 1$

$$\frac{B_r}{(s+p)^r} \Rightarrow B_{r-k} = \frac{1}{k!} \left\{ \frac{d^k}{ds^k} [(s+p)^r F(s)] \right\}_{s=-p}$$

$$y(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2} = \frac{B_2}{(s-1)^2} + \frac{B_1}{(s-1)} = B_2 te^t + B_1 e^t$$

$$B_2 = [y(s) \cdot (s-1)^2]_{s=1} = \frac{(s+1)(s-1)^2}{(s-1)^2} \Big|_{s=1} = 2$$

$$B_1 = \frac{d}{ds} [y(s) \cdot (s-1)^2]_{s=1} = 1$$

$$y(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2} = \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)} \quad \longrightarrow \quad y(t) = 2te^{+t} + e^{+t}$$



# Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

## ■ Esempio: Radici Complesse e Coniugate

$$\begin{cases} \frac{C_k}{s + p_k} + \frac{C^*_k}{s + p_k^*} \\ \frac{C_k s + D_k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \end{cases} \quad -p, -p^* = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$y(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2} = \frac{C}{(s + 1 + j)} + \frac{C^*}{(s + 1 - j)} = Ce^{-(1+j)t} + C^*e^{-(1-j)t}$$

$$C = \frac{1}{-j}; C^* = \frac{1}{j}; \quad y(t) = \frac{1}{-j}e^{-(1+j)t} + \frac{1}{j}e^{-(1-j)t}$$

$$y(t) = \dots \quad \text{Completare per esercizio}$$

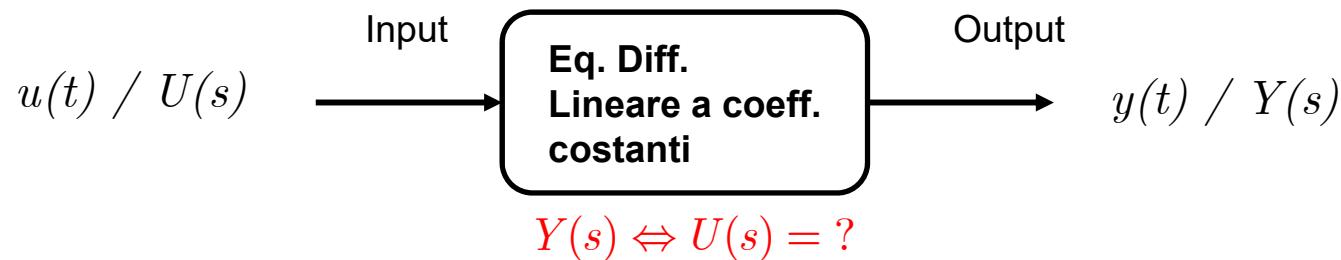
## □ Calcolo dei residui mediante Matlab:

```
RESIDUE Partial-fraction expansion (residues).
[R,P,K] = RESIDUE(B,A) finds the residues, poles and direct term of
a partial fraction expansion of the ratio of two polynomials B(s)/A(s).
If there are no multiple roots,
B(s)      R(1)      R(2)      R(n)
----- = ----- + ----- + ... + ----- + K(s)
A(s)      s - P(1)    s - P(2)    s - P(n)
```



# Funzione di Trasferimento

- Concetto fondamentale nello studio dei sistemi lineari e del loro controllo



$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = u(t) \quad D(s)Y(s) = N_H(s) + U(s)$$

$$Y(s) = \frac{N_H(s)}{D(s)} + \frac{1}{D(s)}U(s) = Y_H(s) + Y_P(s)$$

- La funzione di trasferimento è una espressione che, dato un ingresso qualsiasi, permette di valutare l'uscita del sistema in alternativa alla soluzione dell'equazione differenziale associata



# Funzione di Trasferimento

- **Definizione (1):** La Funzione di Trasferimento di un sistema lineare tempo invariante è il rapporto tra la Trasformata di Laplace dell'uscita e la Trasformata di Laplace dell'ingresso a condizioni iniziali nulle

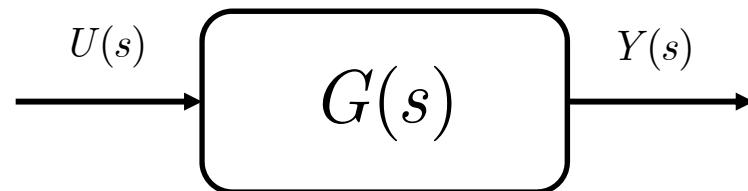
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

- **Nota la FdT, è possibile calcolare la trasformata di Laplace dell'uscita, per una qualsiasi funzione di ingresso**

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

- **Nel dominio del tempo, l'uscita si determina mediante l'integrale di convoluzione, il cui calcolo può non essere semplice**

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau \Leftrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)]$$





# Funzione di Trasferimento

□ **Definizione (2):** La Funzione di Trasferimento di un sistema lineare è la Trasformata di Laplace dell'uscita del sistema, quando l'ingresso è un impulso (delta di Dirac) applicato all'istante  $t = 0$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \quad \begin{matrix} u(t) = \delta(t) \\ \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 = U(s) \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad Y(s) = G(s)$$

- **In generale, per condizioni iniziali non nulle occorre aggiungerne il contributo:**

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) + G^{IC}(s)$$

- **Forme equivalenti per la FdT:**

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, m \leq n \quad G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

- $K$  = **Guadagno** del sistema (della FdT)
- $-p_j$  = **Poli** del sistema
- $-z_i$  = **Zeri** del sistema



# Funzione di Trasferimento

- Consideriamo un sistema lineare descritto dalla seguente equazione differenziale:

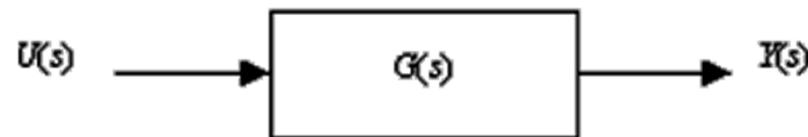
$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 4\dot{u}(t) - 8u(t) \\ y_0, \dot{y}_0 \end{cases}$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 3)y_0 + \dot{y}_0 + (4s - 8)U(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{(s + 3)y_0 + \dot{y}_0}{(s^2 + 3s + 2)} + \frac{(4s - 8)}{(s^2 + 3s + 2)} U(s) = Y_h(s) + Y_p(s)$$

- La FdT del sistema è data da:

$$G(s) = \frac{4(s - 2)}{s^2 + 3s + 2}$$



- Supponiamo che il sistema sia soggetto ad un gradino unitario  $u(t) = 1$  e ad un impulso unitario  $\delta(t)$

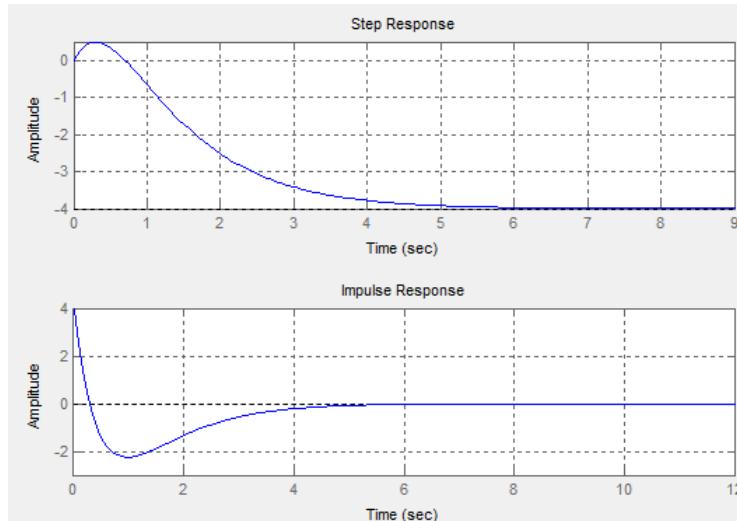
$$y(s) = G(s) \cdot u(s) = \frac{4(s - 2)}{s(s + 2)(s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s + 2}; y(s) = G(s) = \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s + 2}$$



# Funzione di Trasferimento

$$y(t) = -4 + 12e^{-t} - 8e^{-2t}$$

$$y(t) = -12e^{-t} + 16e^{-2t}$$

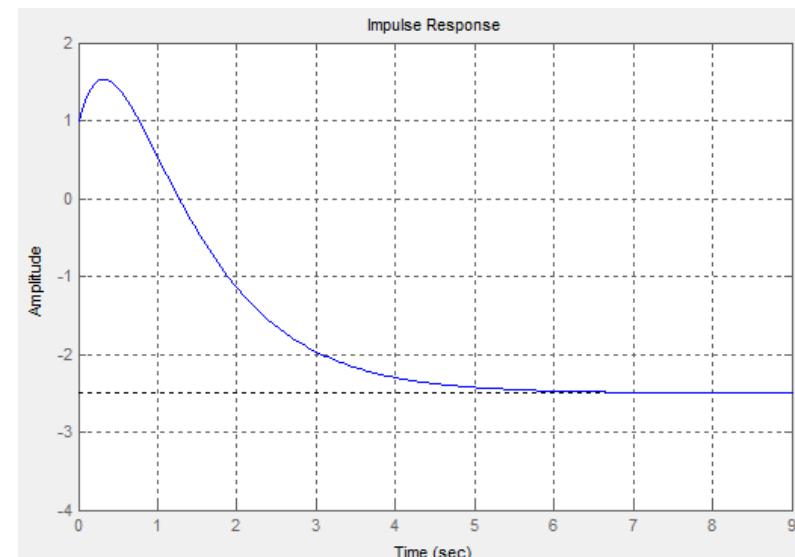
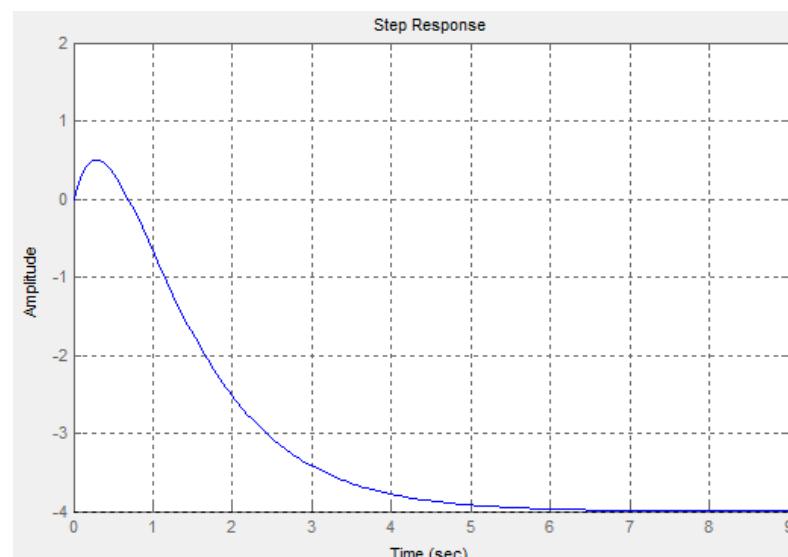


- Supponiamo di avere le seguenti condizioni iniziali:

$$y(0) = 1; \dot{y}(0) = 0$$

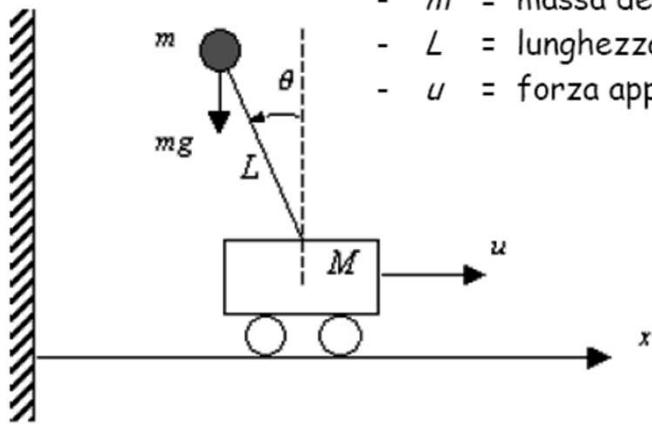
$$y(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} + \frac{4(s-2)}{s(s+2)(s+1)} = \frac{s^2 + 7s - 5}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

$y(t) = ?$  **esercizio**

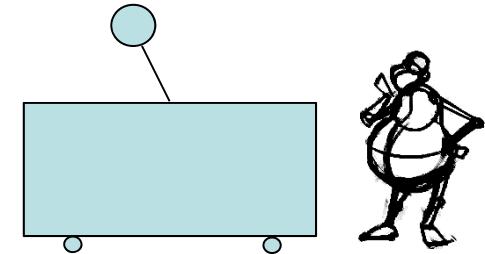
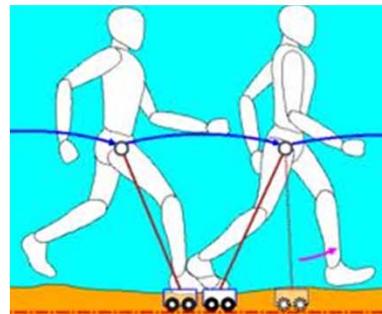




## Esempio: Carrello con Pendolo



- $M$  = massa del carrello
- $m$  = massa del pendolo
- $L$  = lunghezza del braccio (supposto di massa trascurabile)
- $u$  = forza applicata al carrello



### □ Studio del movimento del bacino

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{p}(t) + ml\ddot{\theta}(t) = F(t) \\ ml\ddot{p}(t) + ml^2\ddot{\theta}(t) = mgl\theta(t) \end{cases}$$

$$M = 20Kg; m = 1Kg; l = 1m; g = 9.8m / \text{sec}^{-2}$$

$$\begin{cases} 21\ddot{p} + \ddot{\theta} = F \\ \ddot{p} + \ddot{\theta} = 9.8\theta \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 21s^2 & s^2 \\ s^2 & s^2 - 9.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(s) \\ \theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- In questo caso si possono identificare 2 FdT



## Esempio: Carrello con Pendolo

$$\Delta(s) = \det \begin{bmatrix} 21s^2 & s^2 \\ s^2 & s^2 - 9.8 \end{bmatrix} = 21s^2(s^2 - 9.8) - s^4$$

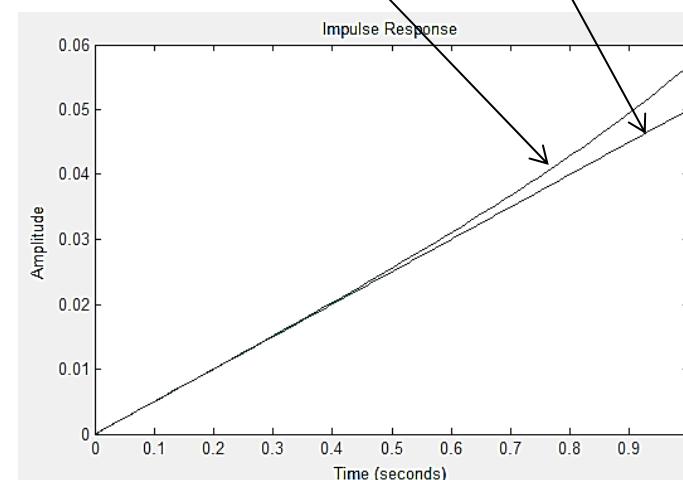
$$\begin{cases} F(t) = \delta(t) \\ \theta(t) = 0.078e^{-3.21t} - 0.078e^{+3.21t} \end{cases}$$

$$G_F^\theta(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{\det \begin{bmatrix} 21s^2 & 1 \\ s^2 & 0 \end{bmatrix}}{\Delta(s)} = \frac{-s^2}{21s^2(s^2 - 9.8) - s^4} = \frac{-1}{20s^2 - 205.8} = \frac{-1}{20(s^2 - 10.29)}$$

$$G_F^p(s) = \frac{p(s)}{F(s)} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & s^2 \\ 0 & s^2 - 9.8 \end{bmatrix}}{\Delta(s)} = \frac{s^2 - 9.8}{21s^2(s^2 - 9.8) - s^4} = \frac{s^2 - 9.8}{20s^2(s^2 - 10.29)} \approx \frac{1}{20s^2} \rightarrow \begin{cases} F(t) = \delta(t) \\ p(t) = 0.05t \end{cases}$$

□ Cosa possiamo Concludere sul tipo di moto? Ovvero:

1. Come si muove il Pendolo (bacino)?
2. Come si muove il carrello (passo)?



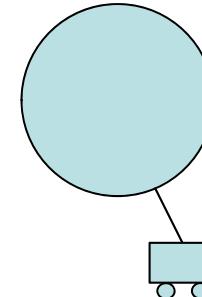


## Esempio: Carrello con Pendolo

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{p}(t) + ml\ddot{\theta}(t) = F(t) \\ ml\ddot{p}(t) + ml^2\ddot{\theta}(t) = mgl\theta(t) \end{cases} \quad M = 1Kg; m = 20Kg; l = 1m; g = 9.8m / \text{sec}^{-2}$$

$$\begin{cases} 21\ddot{p} + 20\ddot{\theta} = F \\ 20\ddot{p} + 20\ddot{\theta} = 196\theta \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 21s^2 & 20s^2 \\ 20s^2 & 20s^2 - 196 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(s) \\ \theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$



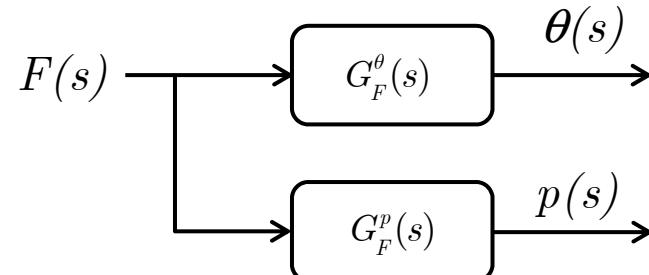
$$G_F^\theta(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{-20s^2}{20s^2(s^2 - 20.58)} = \frac{-1}{s^2 - 205.8}$$

$$G_F^p(s) = \frac{p(s)}{F(s)} = \frac{20s^2 - 196}{20s^2(s^2 - 205.8)} = \frac{s^2 - 9.8}{s^2(s^2 - 205.8)}$$

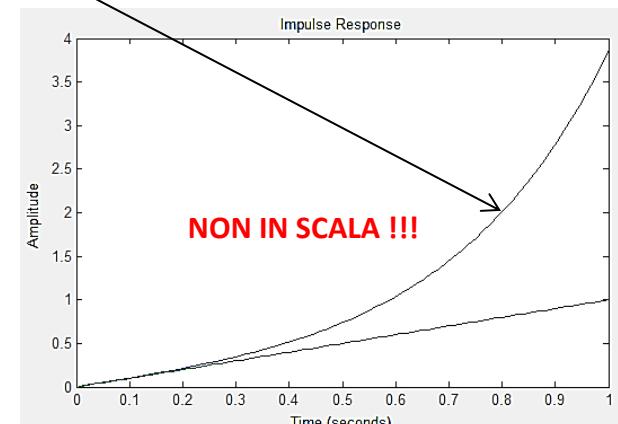
$$\begin{cases} F(t) = \delta(t) \\ \theta(t) = 0.0349e^{-14.34t} - 0.0349e^{+14.34t} \end{cases}$$

□ Cosa possiamo Concludere sul tipo di moto? Ovvero:

1. Come si muove il Pendolo (bacino)?
2. Come si muove il carrello (passo)?



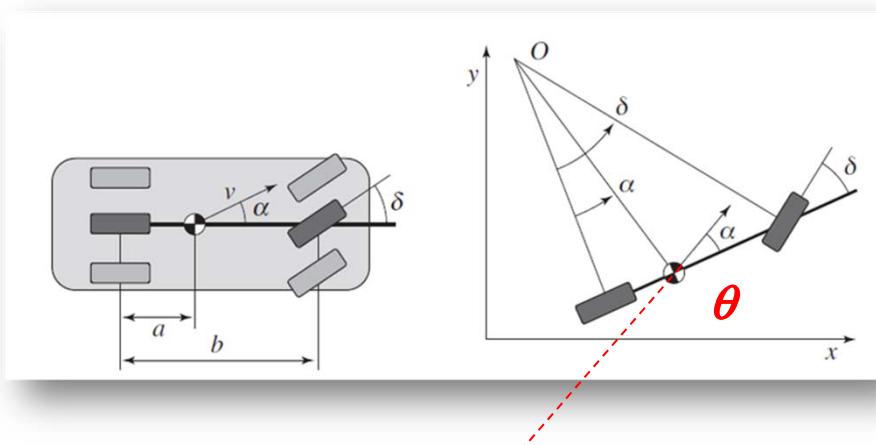
$$\begin{cases} F(t) = \delta(t) \\ p(t) = 0.0476t - 0.0332e^{-14.34t} + 0.0332e^{+14.34t} \end{cases}$$





## Esempio: Modello di Autoveicolo

- Dinamica della sterzata



$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{av_0}{b} \\ \frac{v_0}{b} \end{bmatrix} u$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\begin{cases} sy(s) = v_0 \theta(s) + \frac{av_0}{b} \delta(s) \\ s\theta(s) = \frac{v_0}{b} \delta(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(s) = \frac{1}{s} [v_0 \theta(s) + \frac{av_0}{b} \delta(s)] \\ \theta(s) = \frac{1}{s} \frac{v_0}{b} \delta(s) \end{cases}$$

$$G_{\delta}^y(s) = \frac{y(s)}{\delta(s)} = \frac{v_0}{b} \frac{as + v_0}{s^2}$$

$$G_{\delta}^{\theta}(s) = \frac{\theta(s)}{\delta(s)} = \frac{v_0}{b} \frac{1}{s}$$

□ Esempio Numerico

$$v_0 = 60 \text{ km/h}$$

$$b = 4 \text{ m}$$

$$a = 1.5 \text{ m}$$

$$\delta = 10^\circ = \frac{10}{57.3} \text{ rad}$$



## Esempio: Modello di Autoveicolo

$$\frac{\theta(s)^{rad}}{\delta(s)^{rad}} = \frac{4.1675}{s}$$

$$\frac{y(s)^{metri}}{\delta(s)^{rad}} = 6.25 \frac{s + 11.13}{s^2}$$

- Comando costante dello sterzo ( $\delta = \text{cost.}$ )

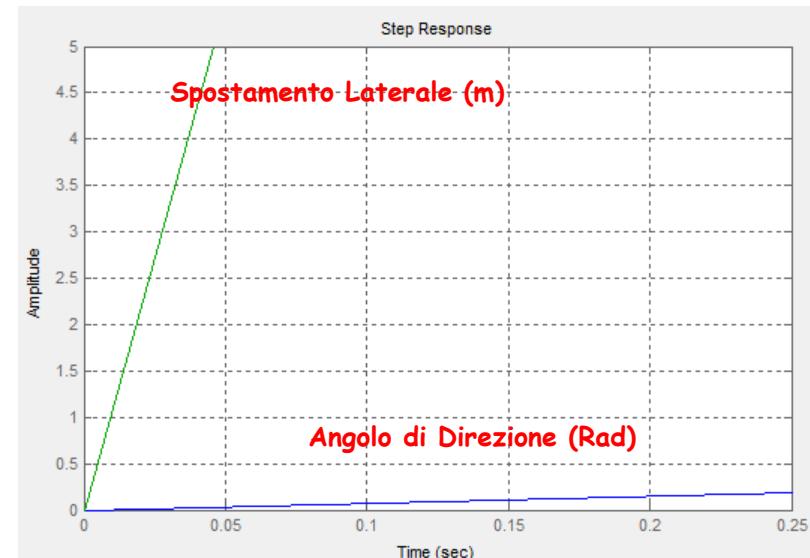
$$y(s)^{metri} = 6.25 \frac{s + 11.13}{s^2} \cdot \frac{0.1745}{s} = 1.0906 \frac{s + 11.13}{s^3}$$

$$\theta(s)^{gradi} = \frac{238.7978}{s^2}$$

### Esercizio:

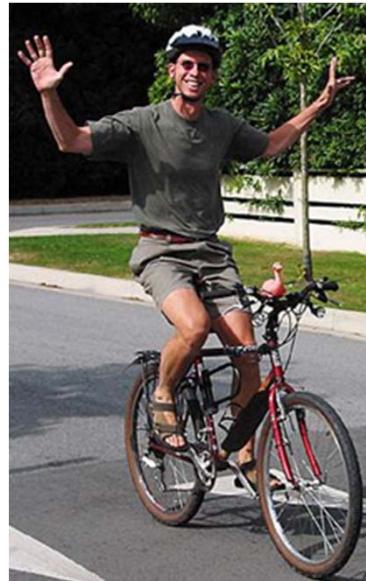
- Verificare analiticamente i risultati del grafico
- Calcolare lo spostamento laterale nel caso di ingresso di sterzo dato da:

$$\delta(t) = \begin{cases} 10^\circ & 0 \leq t < 1 \\ 0^\circ & t \geq 1 \end{cases}$$





## Esempio: modello biciclo



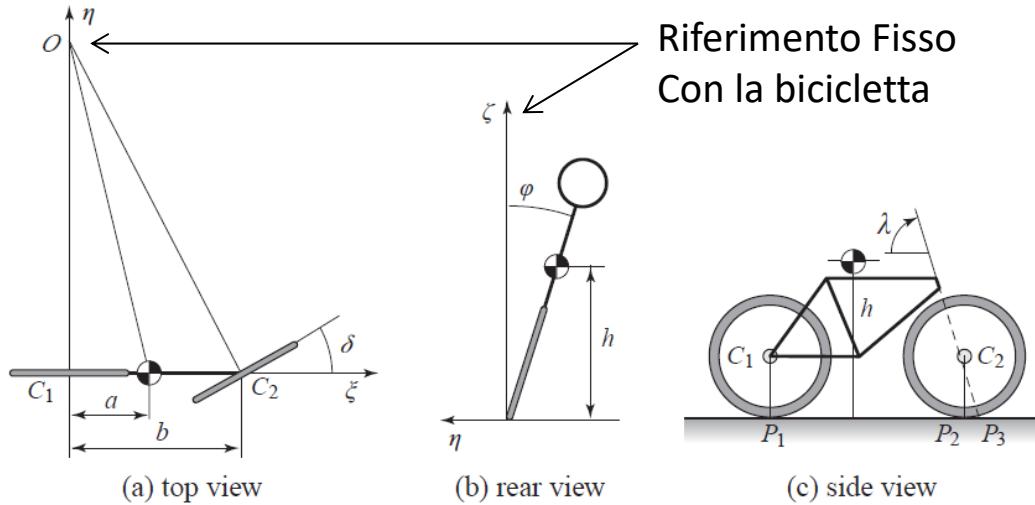
1. Sistema attuale

2. Passaggio intermedio

3. Target di controllo



## Esempio: modello biciclo



**Figure 3.5:** Schematic views of a bicycle. The steering angle is  $\delta$ , and the roll angle is  $\varphi$ . The center of mass has height  $h$  and distance  $a$  from a vertical through the contact point  $P_1$  of the rear wheel. The wheel base is  $b$ , and the trail is  $c$ .

Riferimento Fisso  
Con la bicicletta

$$\frac{v_0 \delta}{b} = \omega$$

Velocità  
Angolare  
Rispetto ad O

$m$  be the total mass of the system,  $J$  the moment of inertia of this body with respect to the  $\xi$ -axis and  $D$  the product of inertia with respect to the  $\xi\zeta$  axes. Furthermore, let the  $\xi$  and  $\zeta$  coordinates of the center of mass with respect to the rear wheel contact point,  $P_1$ , be  $a$  and  $h$ , respectively. We have  $J \approx mh^2$  and  $D = mah$ . The torques acting on the system are due to gravity and centripetal action.

- **Modello del movimento di Rollio**

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{Dv_0}{b} \frac{d\delta}{dt} = mgh \sin \varphi + \frac{mv_0^2 h}{b} \delta.$$

**Ipotesi semplificativa**

$$\begin{cases} \lambda = 90^\circ \\ |P_2 - P_3| = 0 \end{cases}$$



## Esempio: modello biciclo

Con l'ipotesi di piccoli valori angolari di  $\varphi$

$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} = \frac{\frac{Dv_0}{b}s + \frac{mv_0^2 h}{b}}{J(s^2 - mgh)}$$

$$J \approx mh^2 \quad D \approx mah$$

$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} \approx \frac{av_0}{bh} \frac{s + \frac{v_0}{a}}{s^2 - \frac{g}{h}}$$

Ci sono 2 POLI  
ed uno ZERO:

$$P_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{mgh}{J}} \approx \pm \sqrt{\frac{g}{h}}$$
$$Z_1 = -\frac{mv_0 h}{D} \approx -\frac{v_0}{a}$$

- Dinamica simile al pendolo inverso, la risposta ad un impulso vale:

$$\varphi(t) = C_1 e^{+\sqrt{\frac{g}{h}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{h}}t}$$

- Il modello non “cattura” la dinamica dell’equilibrio senza mani
- La bici può essere mantenuta verticale con un controllo attivo di sterzata della ruota anteriore, se la velocità è sufficientemente elevata



## Esempio: modello biciclo

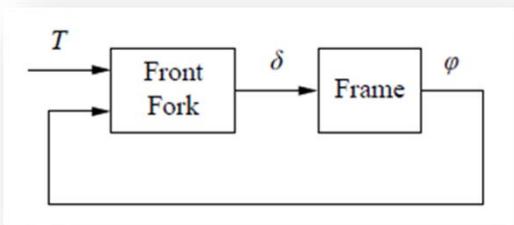
$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} \approx \frac{av_0}{bh} \frac{s + \frac{v_0}{a}}{s^2 - \frac{g}{h}} = K_1 \frac{s + z}{s^2 - p}; \quad p = \frac{g}{h}, z = \frac{v_0}{a}, K_1 = \frac{av_0}{bh}$$

$$\delta(s) = -K_2 \varphi(s) \quad \ddot{\varphi} + K_1 K_2 \dot{\varphi} + (K_1 K_2 z - p) \varphi = 0$$

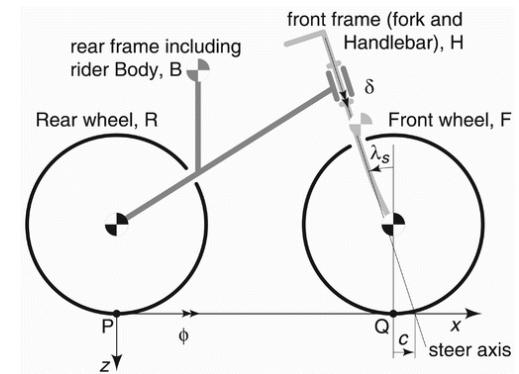
$$K_2 > \frac{p}{K_1 z} = \frac{gb}{v_0^2}$$

- Modello di Whipple, 1899 (vedi Articolo online) tiene conto del manubrio, che ha un impatto fondamentale, nella dinamica della bicicletta.

### Dinamica del Manubrio



$$k_1(v_0) = \frac{b^2}{(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda) mac \sin \lambda}$$
$$k_2(v_0) = \frac{bg}{v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda}$$

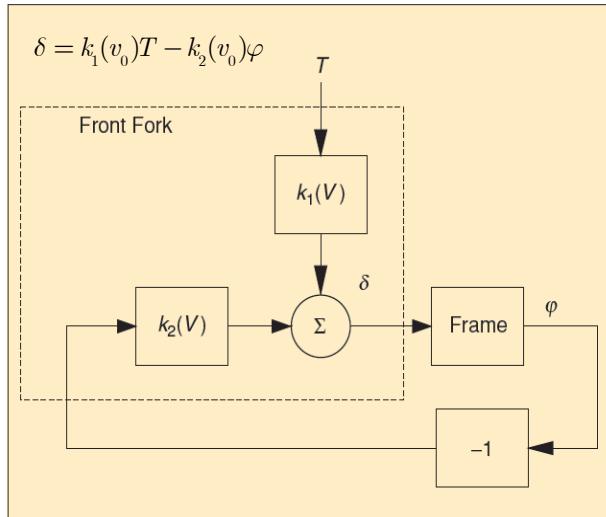


$$\delta = k_1(v_0)T - k_2(v_0)\varphi$$



## Esempio: modello biciclo

$$\begin{aligned}
 J\ddot{\varphi} + \frac{Dv_0g}{v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda} \dot{\varphi} + \frac{mg^2(bh \sin \lambda - ac \cos \lambda)}{v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda} \varphi = \\
 = \frac{Dv_0b}{mac(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)} \dot{T} + \frac{b(hv_0^2 - acg)}{ac(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)} T
 \end{aligned}$$



- Il manubrio produce una retroazione effettiva sull'angolo di sterzata  $\delta$  della ruota anteriore, che aiuta la stabilizzazione in modo automatico sempre in funzione della velocità.

$$\ddot{\varphi} + A_1 \dot{\varphi} + A_2 \varphi = B_1 \dot{T} + B_2 T$$

$$\delta = k_1(v_0)T - k_2(v_0)\varphi$$

$$G_T^\varphi(s) = B_1 \frac{s + \frac{B_2}{B_1}}{s^2 + A_1 s + A_2}$$

$$A_1 = \frac{Dv_0g}{J(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)}; A_2 = \frac{mg^2(bh \sin \lambda - ac \cos \lambda)}{J(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)}$$

$$B_1 = \frac{Dv_0b}{macJ(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)}; B_2 = \frac{b(hv_0^2 - acg)}{acJ(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)}$$

$$v_w = \sqrt{bg \cot \lambda} \quad \text{Velocità di Auto allineamento}$$

$$\begin{cases} v_0 > v_w \\ bh > ac \tan \lambda \end{cases} \quad \text{Stabilità}$$



## Esempio: modello biciclo

- Introduzione di un modello dinamico del manubrio

$$M \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} + Cv_0 \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + (K_0 + K_2 v_0^2) \begin{bmatrix} \varphi \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}$$

$$\left[ Ms^2 + Cv_0 s + (K_0 + K_2 v_0^2) \right] \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \delta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} T(s)$$

$$A(s) \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \delta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(s) & | & A_{12}(s) \\ \hline A_{21}(s) & | & A_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} T(s)$$

$$\begin{cases} \frac{\varphi(s)}{T(s)} = A_{12}^{-1}(s) \\ \frac{\delta(s)}{T(s)} = A_{22}^{-1}(s) \end{cases}$$

**Table 1. Basic bicycle parameters.** This table gives the mass, inertia tensor, and geometry for a standard bicycle with a rider. The values in parentheses are for a bicycle without a rider.

|                               | Rear Frame      | Front Frame | Rear Wheel | Front Wheel |
|-------------------------------|-----------------|-------------|------------|-------------|
| Mass $m$ [kg]                 | 87 (12)         | 2           | 1.5        | 1.5         |
| Center of Mass                |                 |             |            |             |
| $x$ [m]                       | 0.492 (0.439)   | 0.866       | 0          | b           |
| $z$ [m]                       | 1.028 (0.579)   | 0.676       | $R_{rw}$   | $R_{fw}$    |
| Inertia Tensor                |                 |             |            |             |
| $J_{xx}$ [kg-m <sup>2</sup> ] | 3.28 (0.476)    | 0.08        | 0.07       | 0.07        |
| $J_{xz}$ [kg-m <sup>2</sup> ] | -0.603 (-0.274) | 0.02        | 0          | 0           |
| $J_{yy}$ [kg-m <sup>2</sup> ] | 3.880 (1.033)   | 0.07        | 0.14       | 0.14        |
| $J_{zz}$ [kg-m <sup>2</sup> ] | 0.566 (0.527)   | 0.02        | $J_{xx}$   | $J_{xx}$    |

$$M = \begin{pmatrix} 96.8 (6.00) & -3.57 (-0.472) \\ -3.57 (-0.472) & 0.258 (0.152) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -50.8 (-5.84) \\ 0.436 (0.436) & 2.20 (0.666) \end{pmatrix},$$

$$K_0 = \begin{pmatrix} -901.0 (-91.72) & 35.17 (7.51) \\ 35.17 (7.51) & -12.03 (-2.57) \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & -87.06 (-9.54) \\ 0 & 3.50 (0.848) \end{pmatrix}.$$



# Esempio: modello biciclo quarto ordine

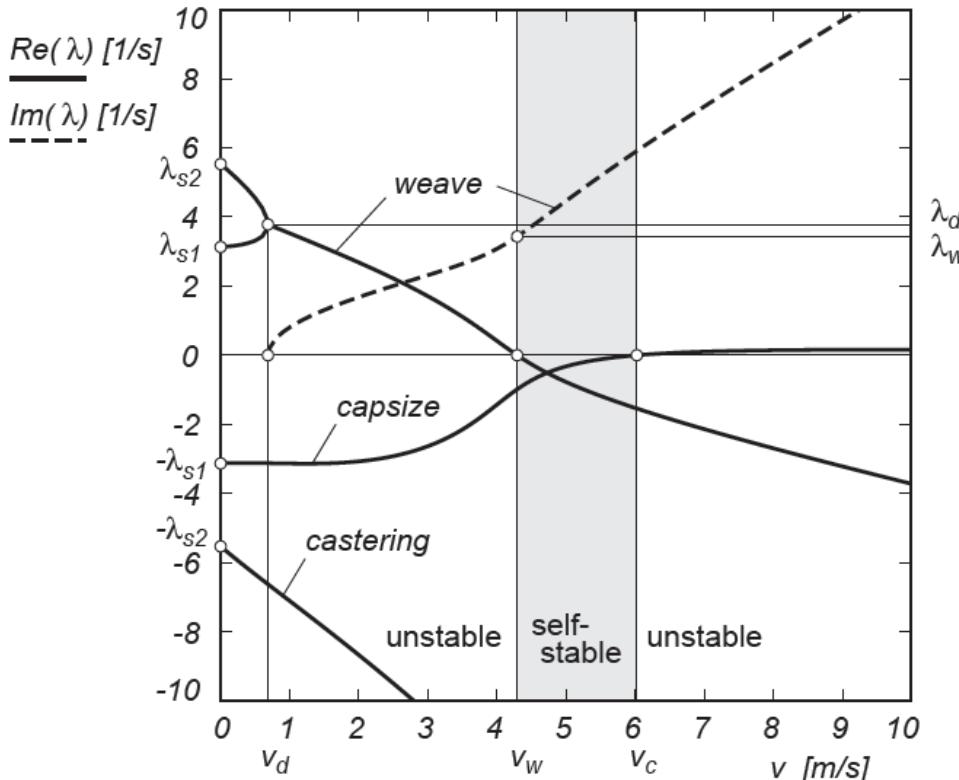


Figure 3. Eigenvalues  $\lambda$  from the linearized stability analysis for the benchmark bicycle from figure 1 and table 1 where the solid lines correspond to the real part of the eigenvalues and the dashed line corresponds to the imaginary part of the eigenvalues, in the forward speed range of  $0 \leq v \leq 10$  m/s. The speed range for the asymptotic stability of the benchmark bicycle is  $v_w < v < v_c$ . The zero crossings of the real part of the eigenvalues are for the weave motion at the weave speed  $v_w \approx 4.3$  m/s and for the capsize motion at capsize speed  $v_c \approx 6.0$  m/s, and oscillations emerge at the real double root at  $v_d \approx 0.7$  m/s. For accurate eigenvalues and transition speeds see table 2.

Table 2. Some characteristic values for the forward speed  $v$  and the eigenvalues  $\lambda$  from the linearized stability analysis for the benchmark bicycle from figure 1 and table 1. Fourteen digit results are presented for benchmark comparisons. (a)  $v = 0$ , weave speed  $v_w$ , capsize speed  $v_c$  and the speed with a double root  $v_d$ . In the forward speed range of  $0 \leq v \leq 10$  m/s (b) Complex (weave motion) eigenvalues  $\lambda_{\text{wave}}$ , and (c) Real eigenvalues  $\lambda$ .

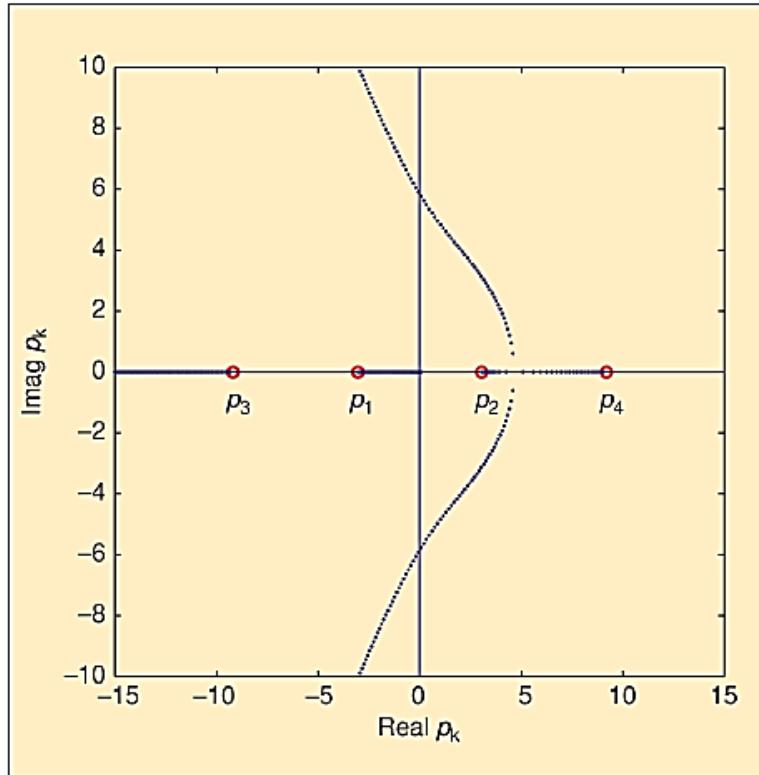
| $v$ [m/s]                        | $\lambda$ [1/s]                                |
|----------------------------------|--|
| $v = 0$                          | $\lambda_{s1} = \pm 3.131\,643\,247\,906\,56$  |
| $v = 0$                          | $\lambda_{s2} = \pm 5.530\,943\,717\,653\,93$  |
| $v_d = 0.684\,283\,078\,892\,46$ | $\lambda_d = 3.782\,904\,051\,293\,20$         |
| $v_w = 4.292\,382\,536\,341\,11$ | $\lambda_w = 0 \pm 3.435\,033\,848\,661\,44 i$ |
| $v_c = 6.024\,262\,015\,388\,37$ | 0  |

| $v$ [m/s] | $\text{Re}(\lambda_{\text{wave}})$ [1/s] | $\text{Im}(\lambda_{\text{wave}})$ [1/s] |
|-----------|--|--|
| 0         | -  | -  |
| 1         | 3.526 961 709 900 70                     | 0.807 740 275 199 30                     |
| 2         | 2.682 345 175 127 45                     | 1.680 662 965 906 75                     |
| 3         | 1.706 756 056 639 75                     | 2.315 824 473 843 25                     |
| 4         | 0.413 253 315 211 25                     | 3.079 108 186 032 06                     |
| 5         | -0.775 341 882 195 85                    | 4.464 867 713 788 23                     |
| 6         | -1.526 444 865 841 42                    | 5.876 730 606 987 09                     |
| 7         | -2.138 756 442 583 62                    | 7.195 259 133 298 05                     |
| 8         | -2.693 486 835 810 97                    | 8.460 379 713 969 31                     |
| 9         | -3.216 754 022 524 85                    | 9.693 773 515 317 91                     |
| 10        | -3.720 168 404 372 87                    | 10.906 811 394 762 87                    |

| $v$ [m/s] | $\lambda_{\text{capsize}}$ [1/s] | $\lambda_{\text{castering}}$ [1/s] |
|-----------|----------------------------------|------------------------------------|
| 0         | -3.131 643 247 906 56            | -5.530 943 717 653 93              |
| 1         | -3.134 231 250 665 78            | -7.110 080 146 374 42              |
| 2         | -3.071 586 456 415 14            | -8.673 879 848 317 35              |
| 3         | -2.633 661 372 536 67            | -10.351 014 672 459 20             |
| 4         | -1.429 444 273 613 26            | -12.158 614 265 764 47             |
| 5         | -0.322 866 429 004 09            | -14.078 389 692 798 22             |
| 6         | -0.004 066 900 769 70            | -16.082 371 230 980 26             |
| 7         | 0.102 681 705 747 66             | -18.157 884 661 252 62             |
| 8         | 0.143 278 797 657 13             | -20.279 408 943 945 69             |
| 9         | 0.157 901 840 309 17             | -22.437 885 590 408 58             |
| 10        | 0.161 053 386 531 72             | -24.624 596 350 174 04             |



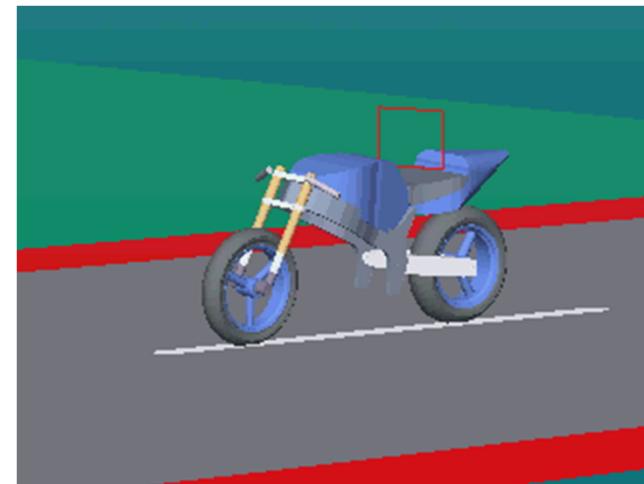
## Esempio: modello biciclo quarto ordine



**Figure 8.** Root locus for the bicycle with respect to velocity. The model is given by (24) with parameters given by (25). The poles at zero velocity, marked with red o, are symmetric with respect to the imaginary axis. The poles  $p_1$  and  $p_2$  are the pendulum poles given by (2), and the poles  $p_3$  and  $p_4$  are the front fork poles.

### □ Main Natural Modes

- Capsize: Fall over with no oscillation, due to high lean and low speed
- Weave: slow oscillation lean left and steer right
- Caster: high frequency oscillation of front wheel as supermarket cart





## Esempio: Applicazioni biciclo



LOUIS MCCLELLAN/TOM THOMPSON-MCCLELLAN  
PHOTOGRAPHY

**Figure 11.** A UIUC bicycle with precession canceling. This bicycle is used to illustrate that gyroscopic effects have little influence on rideability.



LOUIS MCCLELLAN/TOM THOMPSON-MCCLELLAN  
PHOTOGRAPHY

**Figure 18.** Klein's original unridable rear-steered bicycle. This bicycle shows the difficulties of controlling a system with poles and zeros in the right-half plane. There is a US\$1,000 prize for riding this bicycle under specified conditions.



KARI ASTROM

**Figure 20.** The UCSB rear-steered bicycle. This bicycle is rideable as demonstrated by Dave Bothman, who supervised the construction of the bicycle. Riding this bicycle requires skill and dare because the rider has to reach high speed quickly.

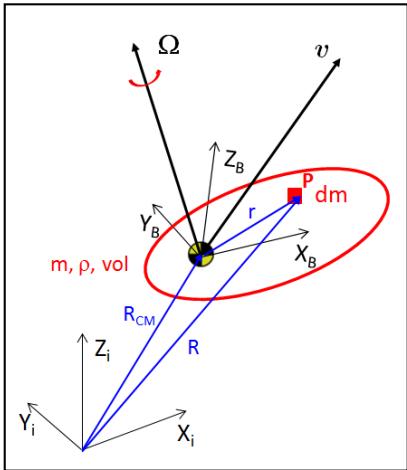


LOUIS MCCLELLAN  
TOM THOMPSON-MCCLELLAN PHOTOGRAPHY

**Figure 19.** Klein's rideable rear-steered bicycle. This bicycle is rideable because the rider has a high center of gravity and because the vertical projection of the center of mass of the rider is close to the contact point of the driving wheel with the ground.



# Dinamica del Corpo Rigido



- Meccanica classica → Newton
  - Sistema di Riferimento: Inerziale
  - Quantità di moto, Momento della quantità di moto
- $$\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$$
- $$\mathbf{H} = \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i)$$
- Ipotesi Corpo rigido → moto del CM + moto intorno al CM (ovvero moto di traslazione + moto di rotazione)

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{EXT} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \Big|_{In} = \frac{d(m_{TOT} \mathbf{v}_{CM})}{dt} \Big|_{In} = \mathbf{F} \quad \sum_i \mathbf{M}_i^{EXT} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} \Big|_{In} = \frac{d([I]\boldsymbol{\Omega})}{dt} \Big|_{In} = \mathbf{M}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$

$$I_x = \int_{vol} (y^2 + z^2) dm \quad I_y = \int_{vol} (x^2 + z^2) dm$$

$$I_z = \int_{vol} (x^2 + y^2) dm \quad I_{xy} = I_{yx} = \int_{vol} xy dm$$

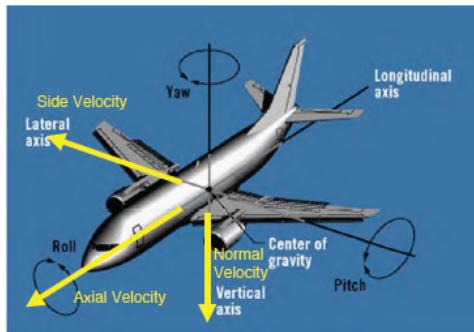
$$I_{xz} = I_{zx} = \int_{vol} xz dm \quad I_{yz} = I_{zy} = \int_{vol} yz dm$$

$$\begin{cases} \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} + \dot{m}\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{v}} = m\dot{\mathbf{v}}_{CM} + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{CM}) \\ \mathbf{M} = [I]\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times ([I]\boldsymbol{\Omega}) + [\dot{I}]\boldsymbol{\Omega} = [I]\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times ([I]\boldsymbol{\Omega}) \end{cases}$$

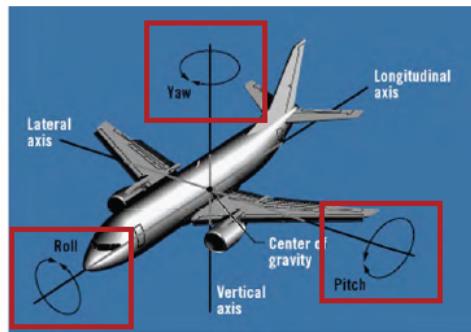


# Esempi Aero/Navali

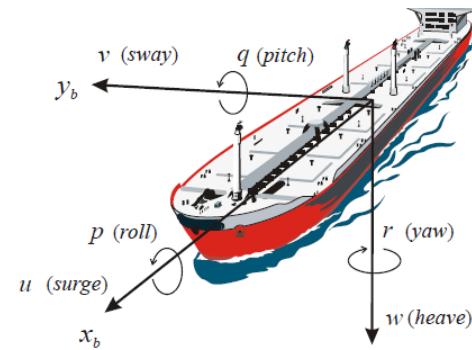
## Airplane Translational Degrees of Freedom



## Airplane Rotational Degrees of Freedom



**Esempi relativi ad Attività parte del CM in Ingegneria Robotica e dell'Automazione**



Lecture Notes 2005



Pierce STP System APL

| DOF |  | forces and moments | linear and angular velocities | positions and Euler angles |
|-----|--|--------------------|-------------------------------|----------------------------|
| 1   | motions in the $x$ -direction (surge)      | $X$                | $u$                           | $x$                        |
| 2   | motions in the $y$ -direction (sway)       | $Y$                | $v$                           | $y$                        |
| 3   | motions in the $z$ -direction (heave)      | $Z$                | $w$                           | $z$                        |
| 4   | rotation about the $x$ -axis (roll, heel)  | $K$                | $p$                           | $\phi$                     |
| 5   | rotation about the $y$ -axis (pitch, trim) | $M$                | $q$                           | $\theta$                   |
| 6   | rotation about the $z$ -axis (yaw)         | $N$                | $r$                           | $\psi$                     |

I gradi di libertà (DOF) sono associati e si riferiscono alle componenti di moto del corpo rigido



# Esempi Aero/Navali



Models for ships, semi-submersibles, and underwater vehicles are usually represented as one of the following subsystems:

- ✓ **Surge model:** velocity  $u$
- ✓ **Maneuvering model (sway and yaw):** velocities  $v$  and  $r$
- ✓ **Horizontal motion (surge, sway, and yaw):** velocities  $u, v$ , and  $r$
  
- ✓ **Longitudinal motion (surge, heave, and pitch):** velocities  $u, w$ , and  $q$
- ✓ **Lateral motion: (sway, roll, and yaw):** velocities  $v, p$ , and  $\psi$

or:

- ✓ **Horizontal plane models:** DOFs 1, 2, 6
  
- ✓ **Longitudinal motion:** DOFs 1, 3, 5
- ✓ **Lateral motion:** DOFs 2, 4, 6

The 6 DOF equations of motion can in many cases be divided into two non-interacting (or lightly interacting) subsystems:

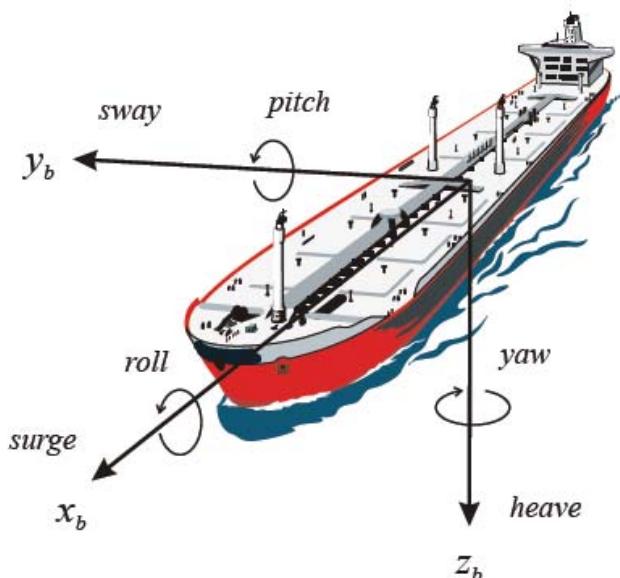
- ✓ **Longitudinal subsystem:** states  $u, w, q$ , and  $\theta$
- ✓ **Lateral subsystem:** states  $v, p, r$ , and  $\psi$

This decomposition is good for *slender bodies* (large length/width ratio). Typical applications are *aircraft, missiles, and submarines*.



## Esempi Aero/Navali

# Degrees-of-Freedom (DOF)



In maneuvering, a marine craft experiences motion in 6 DOF. The motion in the horizontal plane is referred to as **surge** (**longitudinal motion**, usually superimposed on the steady propulsive motion) and **sway** (**sideways motion**).

Heading, or **yaw** (rotation about the vertical axis) describes the course of the vessel. The remaining three DOFs are **roll** (rotation about the longitudinal axis), **pitch** (rotation about the transverse axis), and **heave** (vertical motion).

**Roll** is probably the most troublesome DOF, since it produces the highest accelerations and, hence, is the principal villain in seasickness. Similarly, pitching and heaving feel uncomfortable to humans.

When designing ship autopilots, yaw is the primary mode for feedback control. Station-keeping of a marine craft implies stabilization of the surge, sway and yaw modes.

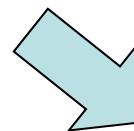


## Esempi Aero/Navali

- La linearizzazione delle equazioni del moto segue la tecnica classica:
  - Scelta di una condizione di equilibrio
  - Calcolo della matrice Jacobiana riferita allo stato del sistema ed al controllo (nel caso di condizione di equilibrio non autonoma)
- Le condizioni di equilibrio corrispondono a situazioni di accelerazione nulla
  - Moto uniforme (velocità costante di traslazione o di rotazione)
  - Quota o profondità costanti
  - ...
- Nel caso di corpi dotati di simmetria e in movimento unidirezionale, la linearizzazione produce due sottosistemi disaccoppiati (**longitudinale**, **laterale**) che quindi possono essere studiati **separatamente** dal punto di vista dinamico.

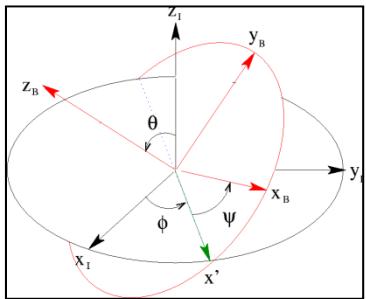
$$\begin{cases} \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} + \dot{m}\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{v}}_{CM} + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{CM}) \\ \mathbf{M} = [I]\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times ([I]\boldsymbol{\Omega}) + [\dot{I}]\boldsymbol{\Omega} = [I]\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times ([I]\boldsymbol{\Omega}) \end{cases}$$

Rappresentazione in componenti  
rispetto al sistema non inerziale delle 6  
variabili di stato



$$\begin{cases} m[\dot{u} - vr + wq] = X - mg \sin \Theta \\ m[\dot{v} - wp + ur] = Y + mg \cos \Theta \sin \Phi \\ m[\dot{w} - uq + vp] = Z + mg \cos \Theta \cos \Phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{xx}\dot{p} + (I_{zz} - I_{yy})qr - (\dot{r} + pq)I_{xz} = L \\ I_{yy}\dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})rp + (p^2 - r^2)I_{xz} = M \\ I_{zz}\dot{r} + (I_{yy} - I_{xx})pq + (rq - \dot{p})I_{xz} = N \end{cases}$$



1. Origin reference is the inertial system  $[o]_{IN}$
2. Target reference is a body – fixed system  $[o]_B$
3. First rotation of  $\Psi$  about the  $Z_{IN} = Z_1$  axis (type 3)
4. Second rotation of  $\Theta$  about the  $Y_1$  axis (type 2)
5. Third rotation of  $\Phi$  about the  $X_2 = X_B$  axis (type 1)

$$\begin{bmatrix} c\Psi & s\Psi & 0 \\ -s\Psi & c\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[ T(\Psi) \right]_{INERTIAL}^1$$

$$\begin{bmatrix} c\Theta & 0 & -s\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\Theta & 0 & c\Theta \end{bmatrix} = \left[ T(\Theta) \right]_1^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\Phi & s\Phi \\ 0 & -s\Phi & c\Phi \end{bmatrix} = \left[ T(\Phi) \right]_2^{BODY}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B = \left[ T(\Phi) \right]_2^{BODY} \cdot \left[ T(\Theta) \right]_1^2 \cdot \left[ T(\Psi) \right]_{INERTIAL}^1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_I$$

$$\left[ T(\Phi, \Theta, \Psi) \right]_{INERTIAL}^{BODY} = \begin{bmatrix} c\Theta c\Psi & c\Theta s\Psi & -s\Theta \\ -c\Phi s\Psi + s\Phi s\Theta c\Psi & c\Phi c\Psi + s\Phi s\Theta s\Psi & s\Phi c\Theta \\ s\Phi s\Psi + c\Phi s\Theta c\Psi & -s\Phi c\Psi + c\Phi s\Theta s\Psi & c\Phi c\Theta \end{bmatrix}$$



## Esempi Aero/Navali

### □ Moto longitudinale linearizzato (traslazione x, z e rotazione y)

$$\begin{bmatrix} m - X_{\dot{u}} & -X_{\dot{w}} & mz_g - X_{\dot{q}} \\ -X_{\dot{w}} & m - Z_{\dot{w}} & -mx_g - Z_{\dot{q}} \\ mz_g - X_{\dot{q}} & -mx_g - Z_{\dot{q}} & I_y - M_{\dot{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -X_u & -X_w & -X_q \\ -Z_u & -Z_w & -Z_q \\ -M_u & -M_w & -M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(m - X_{\dot{u}})u \\ 0 & (Z_{\dot{w}} - X_{\dot{u}})u & mx_g u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ WBG_z \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_3 \\ \tau_5 \end{bmatrix}$$

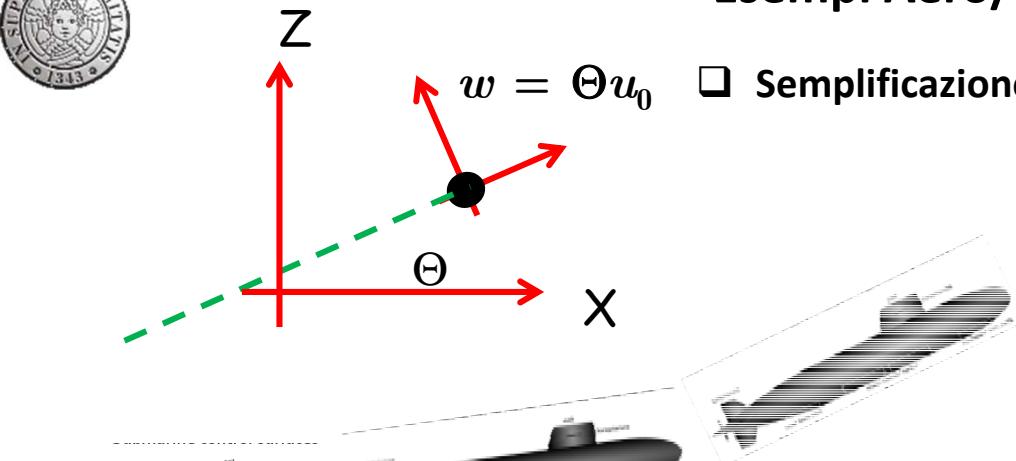
### □ Nel caso in cui non vi sia perturbazione di velocità di traslazione lungo la x:

$$u = u_o = \text{constant}$$

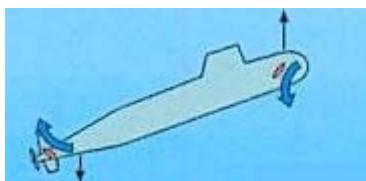
$$\begin{bmatrix} m - Z_{\dot{w}} & -mx_g - Z_{\dot{q}} \\ -mx_g - Z_{\dot{q}} & I_y - M_{\dot{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Z_w & -Z_q \\ -M_w & -M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & -(m - X_{\dot{u}})u_o \\ (Z_{\dot{w}} - X_{\dot{u}})u_o & mx_g u_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ BG_z W \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_3 \\ \tau_5 \end{bmatrix}$$



## Esempi Aero/Navali



$$(I_y - M_q)\ddot{\theta} - M_q\dot{\theta} + BG_zW\theta = \tau_5$$



□ Standard Size Diesel Submarine: Depth = 280 ft, Speed = 9 Kts

$$\frac{\theta(s)}{\delta_E(s)} = \frac{-0.467(s + 0.12)}{s(s^2 + 0.8s + .25)}$$



Super Falcon is equipped with high heads-up combined graphics navigation and is controlled by a pilot.

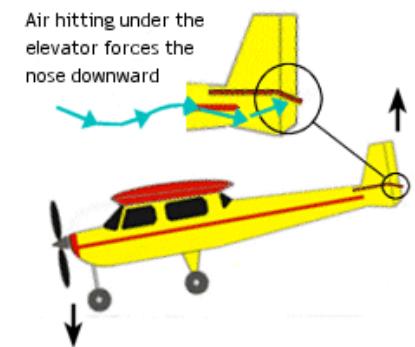
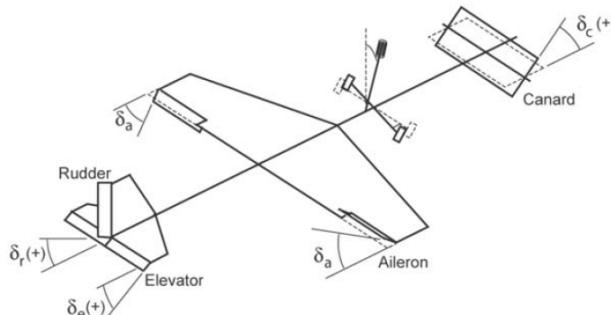
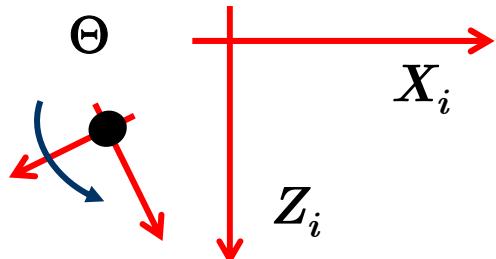
The flight controls are mechanical linkages for pitch, roll and yaw, with a throttle lever for forward and reverse thrust. As proven by the previous generations of DeepFlight winged submersibles, the craft is highly maneuverable, and can be flown level and gently over the reef, or dive nose-first to depth and spyhop to the surface. DeepFlight Merlin can be flown at cruising speeds up to 2-5 knots, or less than 1 knot for observation.

Another first is the navigation module which includes an on-board computerized track plot that enables the pilot to mark way points and will guide the sub back to its launch point.





## Esempi Aero/Navali



□ Linearized Model for Pitch Rotation: Altitude = 40Kft, Speed = 0.8 M

$$G_{\delta_E}^{\theta}(s) = 1.1569 \frac{s + 0.2929}{s(s^2 + 0.7410s + 0.9272)}$$

$$p_{1,2} = -0.37 \pm 0.89j$$

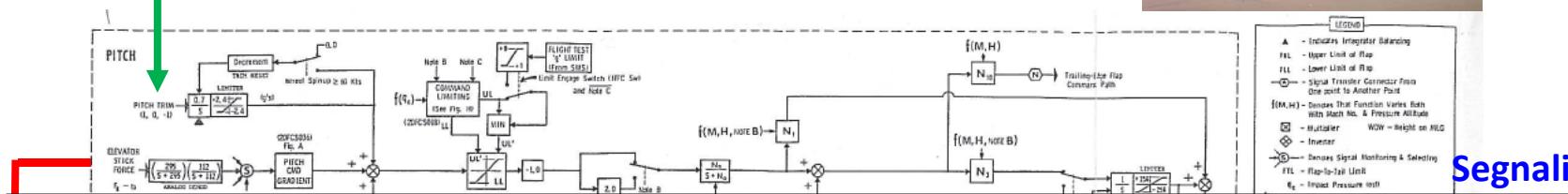


## **Algebra a Blocchi**



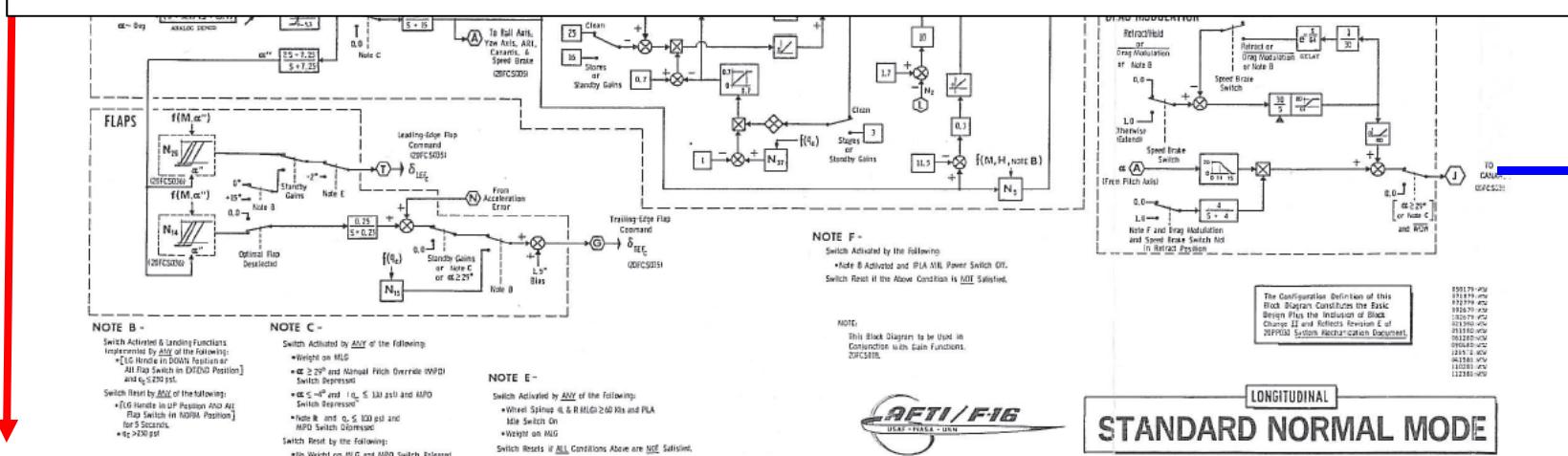
## Segnale di Riferimento

## **Schema Sistema di Controllo base in Beccheggio**



# Segnali diretti atori

- Un sistema lineare è descritto dalla propria FdT in termini di relazione ingresso – uscita
  - Le interconnessioni tra sistemi lineari possono essere rappresentate in forma grafica mediante diagrammi a blocchi
  - Le interconnessioni dinamiche ed evoluzione temporale di sistemi lineari interconnessi sono rappresentabili mediante espressioni algebriche delle varie FdT



## Segnali provenienti dai sensori



# Algebra a Blocchi

Diagramma Motore Asincrono

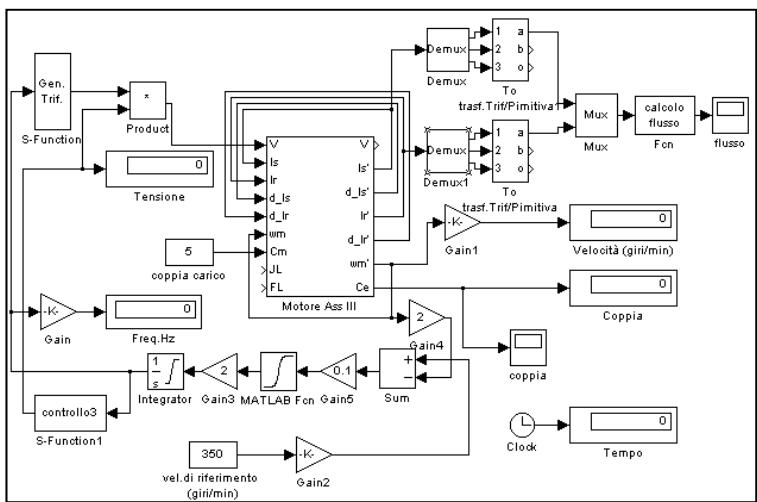


Diagramma operazionale Drone

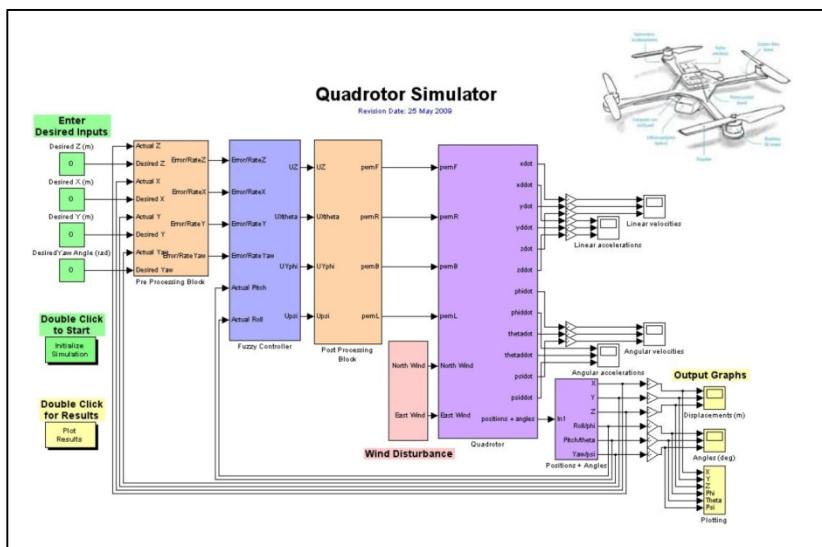
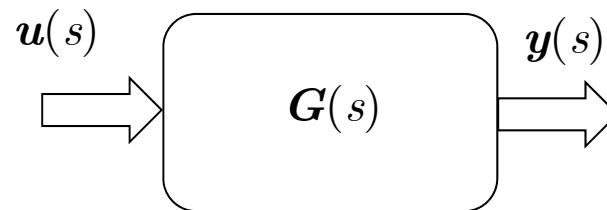
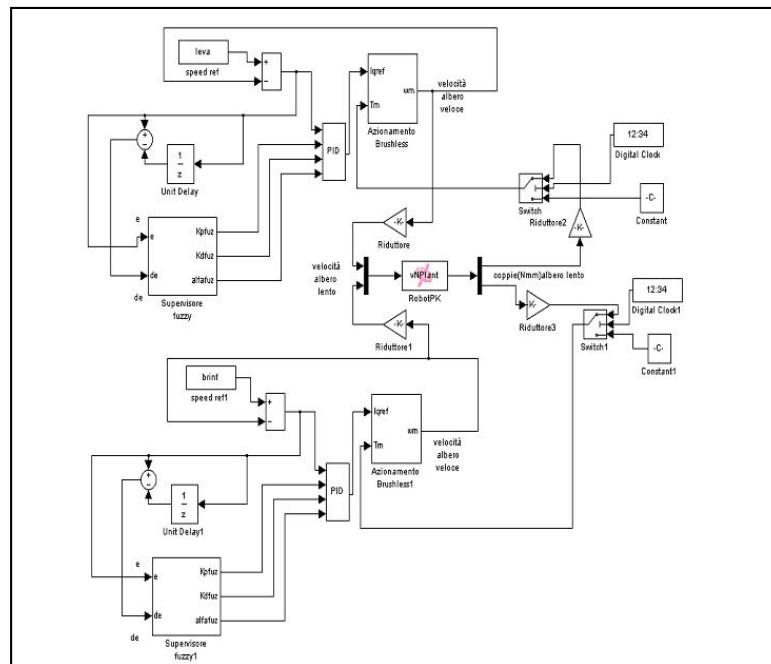


Diagramma Realizzazione Scatole di detergivo

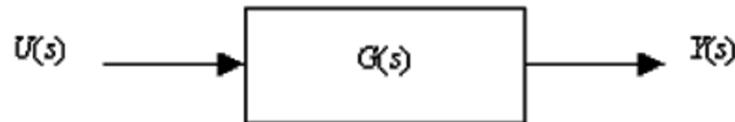




# Algebra a Blocchi

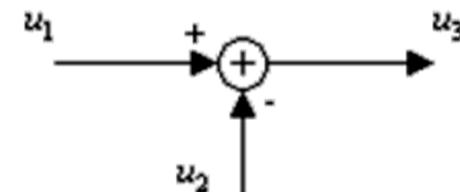
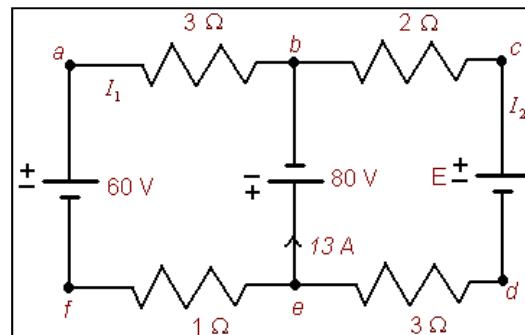
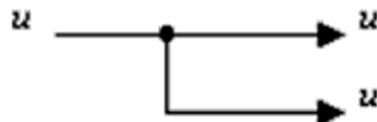
- Rappresentazione grafica ed algebrica di sistemi complessi (Per ipotesi semplificativa i segnali sono scalari)

Sistema dinamico



- Sequentialità causa - effetto

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) , \quad Y(s) = G(s) U(s)$$



$$u_3 = u_1 - u_2$$

[Diagrammi a Blocchi YouTube Lecture](#)

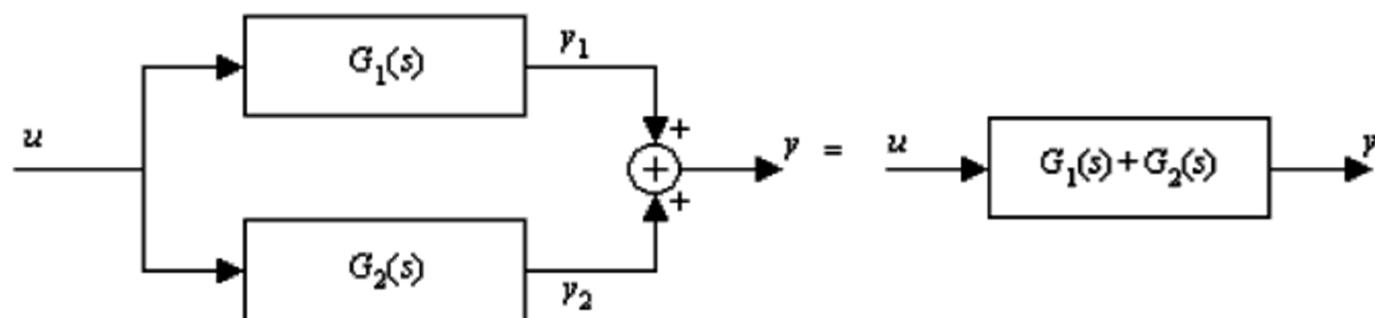


# Algebra a Blocchi



$$y_1 = G_1 u_1, \quad y_2 = G_2 u_2, \quad u_2 = y_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = G_2(s)G_1(s)$$

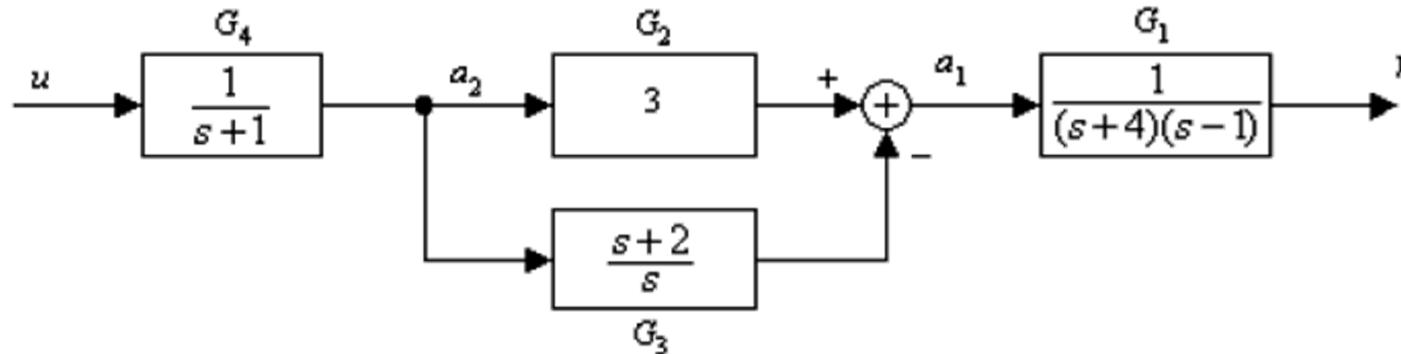


$$y = G_1 u + G_2 u = (G_1 + G_2) u$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s)$$



# Algebra a Blocchi



$$\begin{cases} y = G_1 a_1 \\ a_1 = (G_2 - G_3) a_2 \quad \Rightarrow \quad y = G_1 (G_2 - G_3) G_4 u \quad \Rightarrow \\ a_2 = G_4 u \end{cases}$$

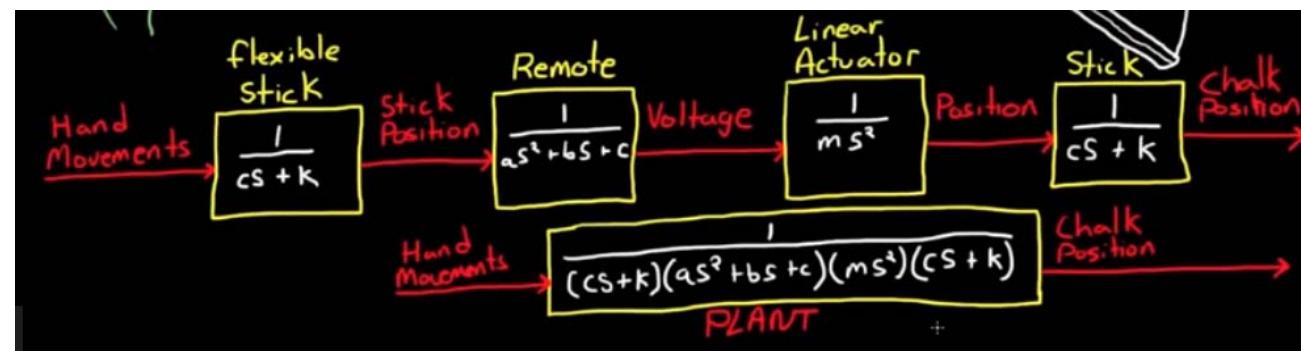
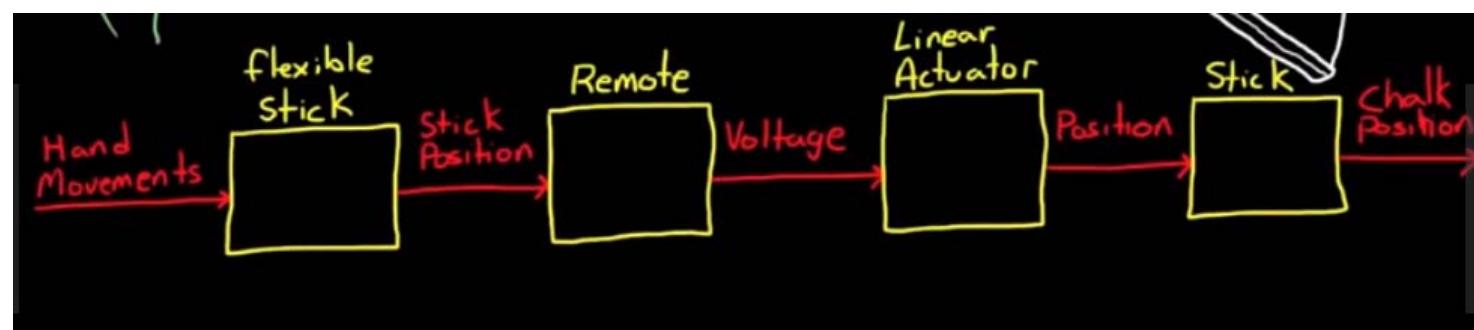
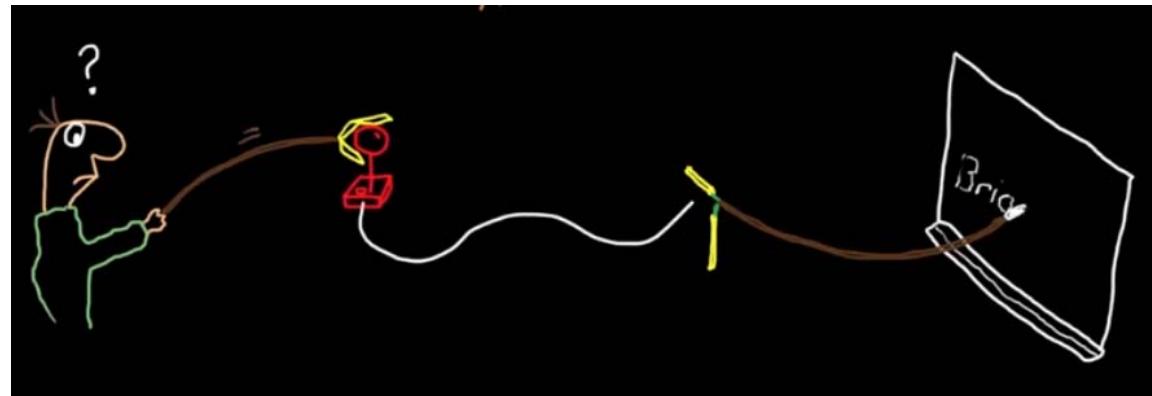
$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1 (G_2 - G_3) G_4 = \frac{1}{(s+4)(s-1)} \left( 3 - \frac{s+2}{s} \right) \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+4)(s-1)} \cdot \frac{2(s-1)}{s} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{2}{s(s+1)(s+4)}$$



# Algebra a Blocchi

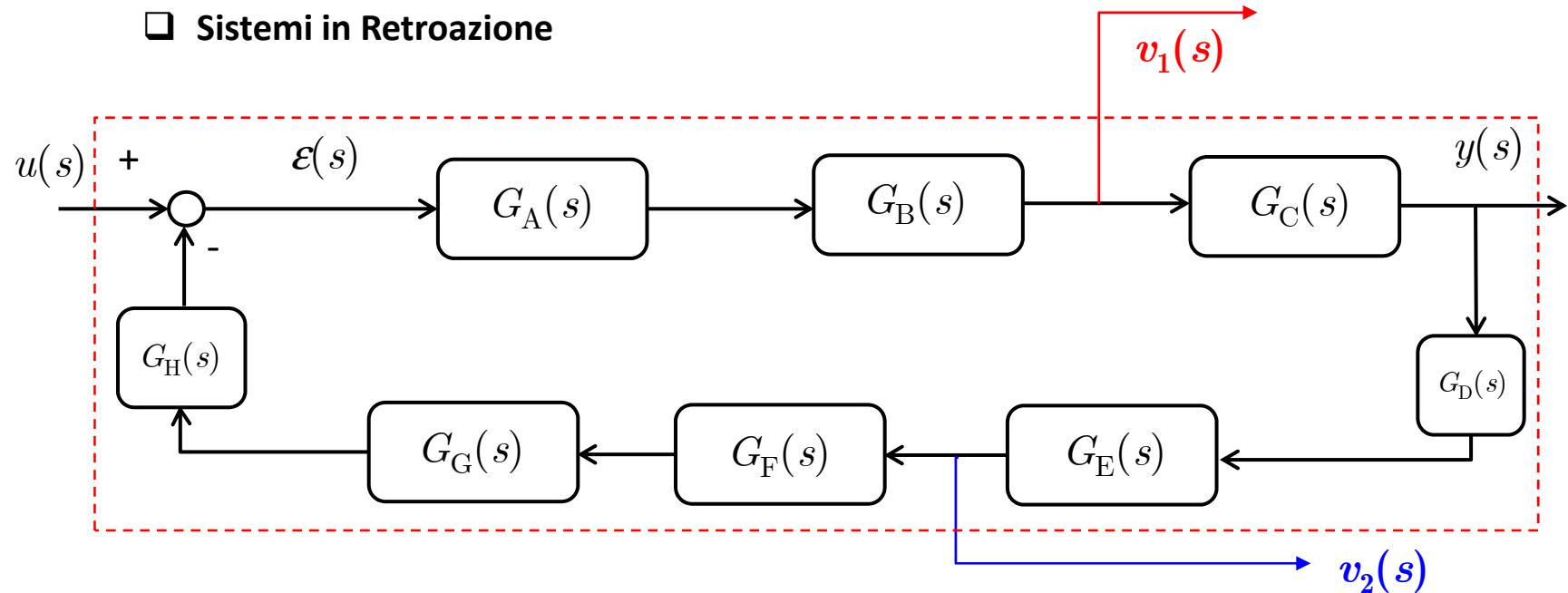
Brian Douglas: Transfer Function





# Algebra a Blocchi

## □ Sistemi in Retroazione



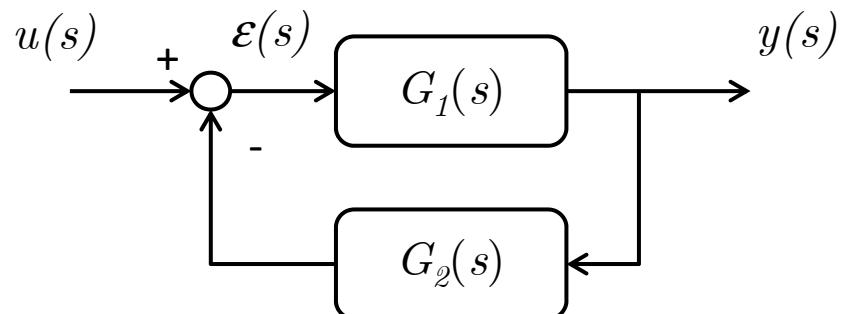
$$\frac{v_1(s)}{u(s)} = \frac{G_B \cdot G_A}{1 + G_H \cdot G_G \cdot G_F \cdot G_E \cdot G_D \cdot G_C}$$

$$\frac{v_2(s)}{u(s)} = \frac{G_E \cdot G_D \cdot G_C \cdot G_B \cdot G_A}{1 + G_H \cdot G_G \cdot G_F}$$

- Calcolo della FdT tra  $u(s)$  e  $y(s)$

$$G_1(s) = G_A \cdot G_B \cdot G_C$$

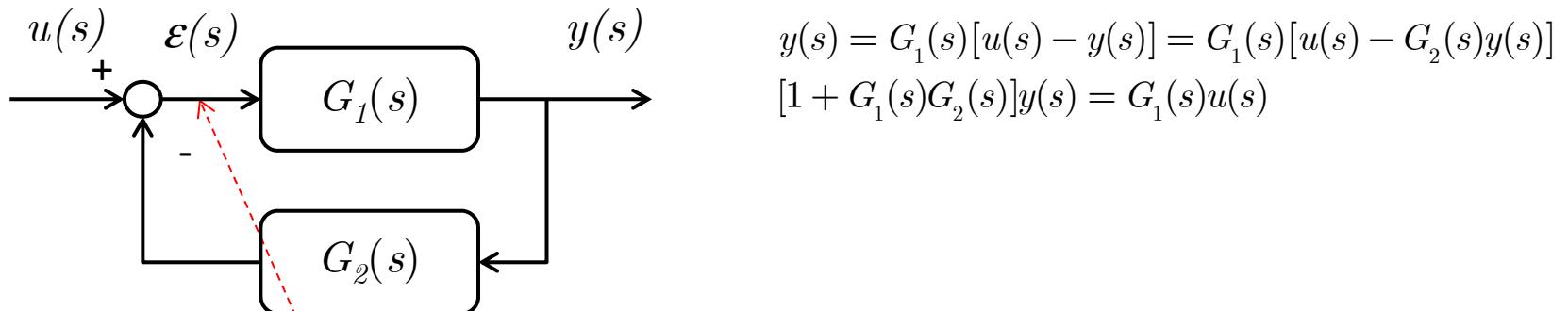
$$G_2(s) = G_D \cdot G_E \cdot G_F \cdot G_G \cdot G_H$$





# Algebra a Blocchi

## ■ Retroazione non unitaria



□ **Definizione** - FdT in anello chiuso o Funzione di Sensitività Complementare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = G_{CL}(s) = T(s)$$

□ **Definizione** - Funzione di Trasferimento di Anello (o ad Anello aperto): prodotto di tutte le funzioni di trasferimento presenti in anello:

$$G_{OL}(s) = G_1(s)G_2(s)$$

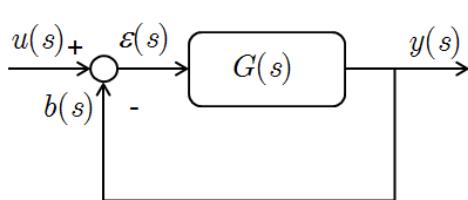
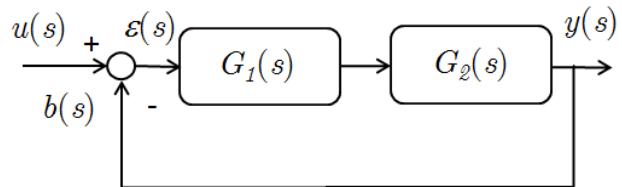
□ **Definizione** - Funzione di Sensitività :

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_2(s)G_1(s)} = \frac{\varepsilon(s)}{u(s)}$$



# Algebra a Blocchi

## ■ Retroazione Unitaria



$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

- **u** = segnale di Riferimento/Comando
- **y** = variabile controllata
- **ε** = segnale di errore
- **b** = segnale di retroazione

### □ FdT in anello chiuso o Funzione di Sensitività Complementare

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = G_u^y(s)$$

### □ FdT di Anello

$$G_{OL}(s) = G(s)$$

### □ FdT di Sensitività (Errore)

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)} = G_u^\varepsilon(s)$$

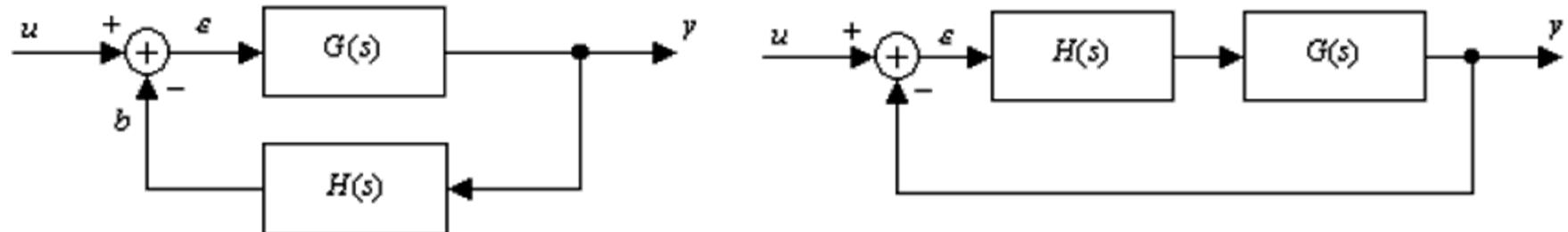
### □ Vincolo Algebrico

$$S(s) + T(s) = \frac{1}{1 + G(s)} + \frac{G(s)}{1 + G(s)} = 1$$



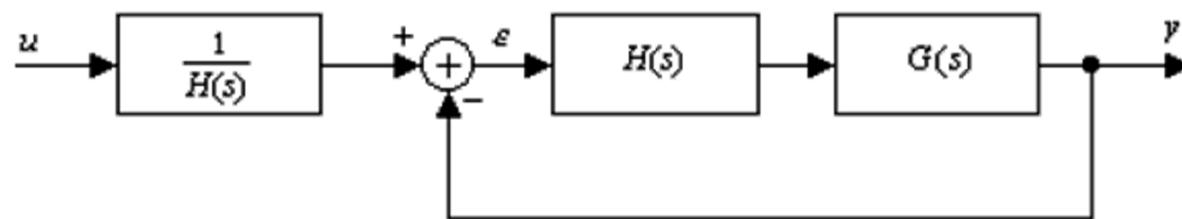
# Algebra a Blocchi

- Relazione tra retroazione non unitaria e retroazione unitaria



$$G_{CL}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$G_{CL}(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



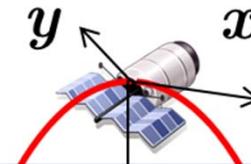
$$G_{CL}(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{H(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



# Algebra a Blocchi

## □ Moto di Assetto di un Satellite

L'asse  $z$  è rivolto verso la Terra mentre il moto orbitale avviene lungo l'asse  $x$ : in questo esempio si trascura il moto orbitale e si esamina l'assetto del satellite relativamente alla rotazione in beccheggio (cioè il satellite risulti sempre orientato nella maniera corretta rivolto verso le antenne a terra).

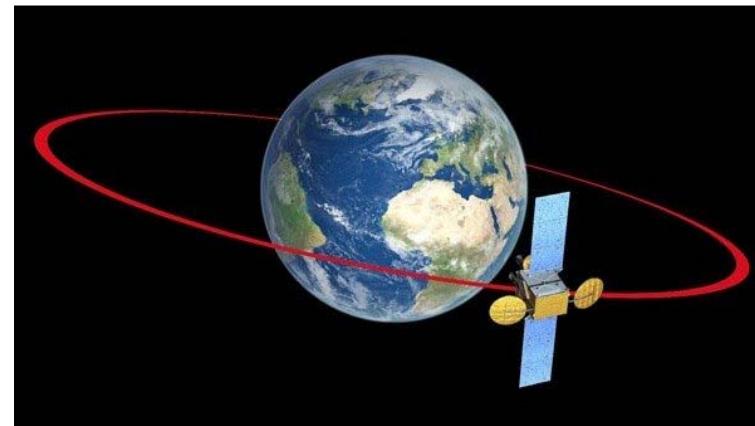


$$m\dot{\mathbf{v}} = \sum_i F_i; \dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

- Distanza
- Azimut
- Elevazione

$$\begin{cases} \ddot{r} + 3\omega_0^2 r + 2\omega_0 r_0 \dot{\theta} = 0 \\ \ddot{\theta} - \frac{2\omega_0}{r_0} \dot{r} = 0 \\ \ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0 \end{cases}$$

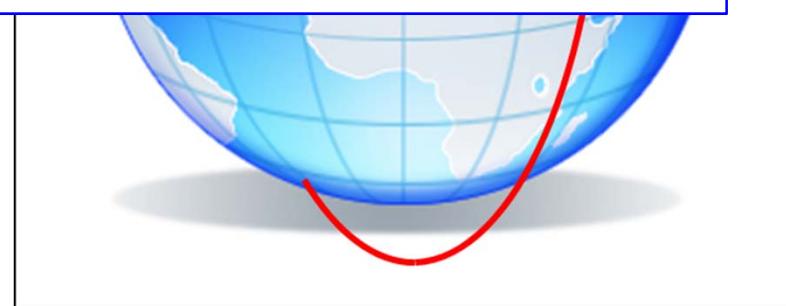
**Terra**



- coppie di correnti
- coppia magnetica
- coppia gravitazionale
- coppie dovute agli urti

$$[I]\dot{\boldsymbol{\omega}} = \sum_i M_i; \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

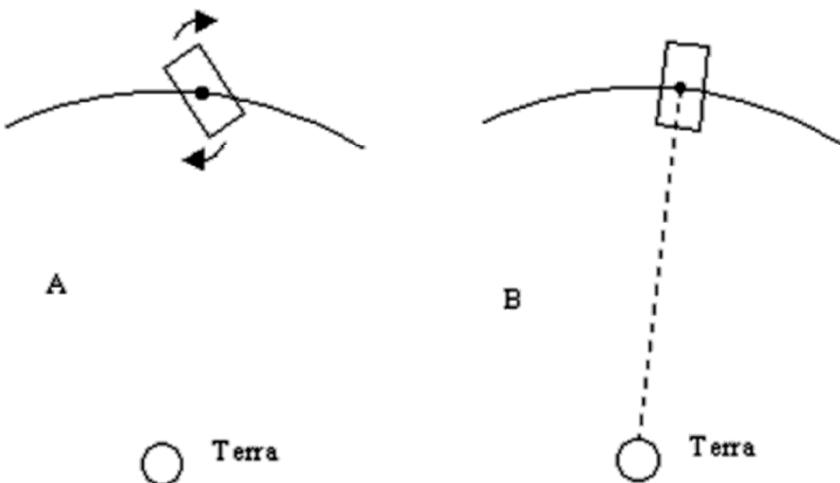
- Rollio
- Becheggio
- Imbardata





## Algebra a Blocchi

In questo caso si prendono in considerazione solo una coppia di controllo ( $M$ ) ed una ( $M_G$ ) gravitazionale; si noti che quest'ultima è dovuta all'effetto dell'attrazione gravitazionale quando il satellite non ha una distribuzione uniforme intorno al centro di massa:

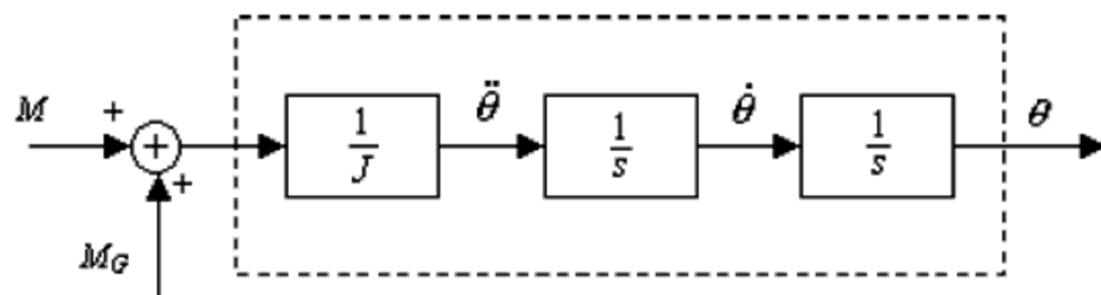


$$J \cdot \ddot{\theta} = M + M_G$$

$$M_G = C_g \sin(2\theta_T)$$

$$\theta_T = \theta_c + \theta$$

- $\theta_c$  = Angolo di riferimento
- $\theta$  = Angolo di assetto effettivo



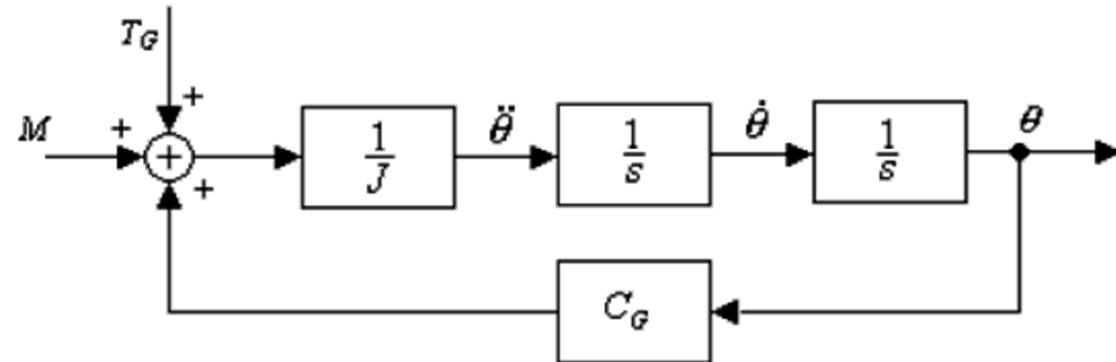


# Algebra a Blocchi



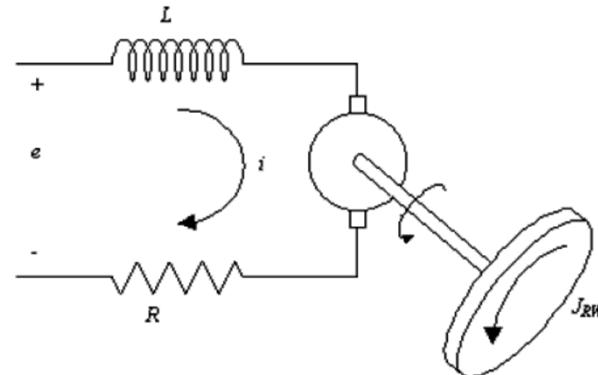
$$M_G = C_g \sin(2\theta_C + 2\theta) = C_g [\sin(2\theta_C) \cos(2\theta) + \cos(2\theta_C) \sin(2\theta)]$$

$$M_G = C_g \sin(2\theta_C) + [C_g \cos(2\theta_C)] \cdot 2\theta_C = T_G + C_g \theta$$



- **Coppia di controllo ( $M$ )**

- ad elementi continui con parti rotanti,
  - piatti inerziali
  - giroscopio
  - ruote inerziali
- ad elementi discontinui:
  - razzetti d'assetto



**Motore in Continua ad eccitazione di armatura. La tensione variabile cambia la velocità di rotazione dell'albero**



# Algebra a Blocchi

- Equazioni del circuito di armatura

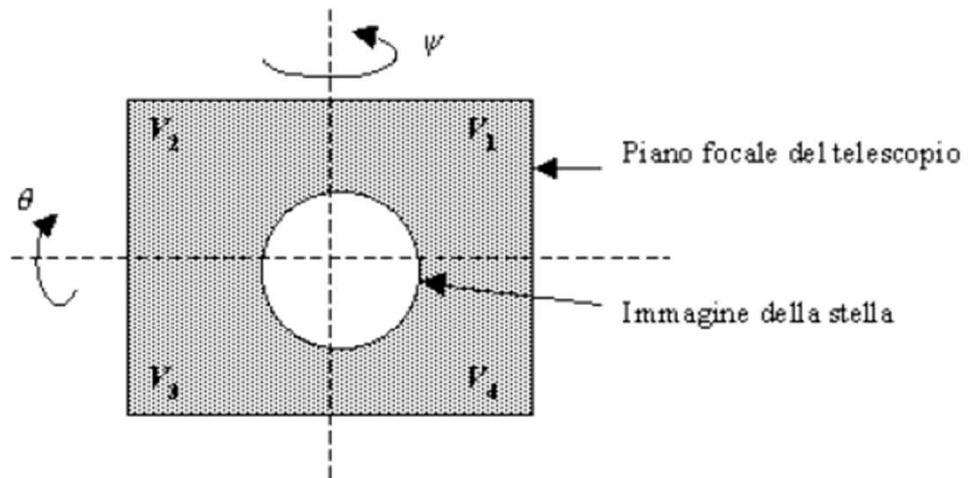
$$e = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + e_b$$

$$I(s) = \frac{E(s) - E_b(s)}{R + L \cdot s}$$

- Sistema sensori

L'insieme degli elementi di misura

- piattaforme inerziali
- sensori giroscopici
- sensori stellari
- sensori d'orizzonte
- sistemi GPS

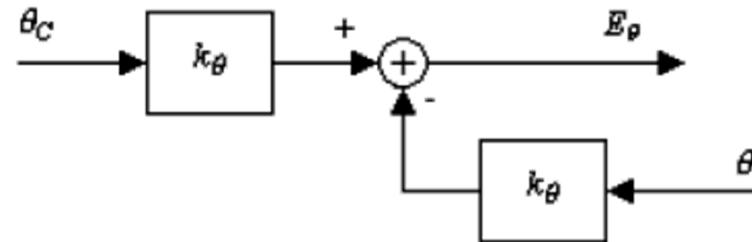


I quattro pannelli riescono a generare da una variazione di intensità luminosa una variazione di potenziale; nel caso in esame, prendendo in considerazione solo la rotazione  $\theta$

$$k_\theta(\theta_c - \theta) = (V_3 + V_4) - (V_1 + V_2) \Delta E_\theta$$



# Algebra a Blocchi



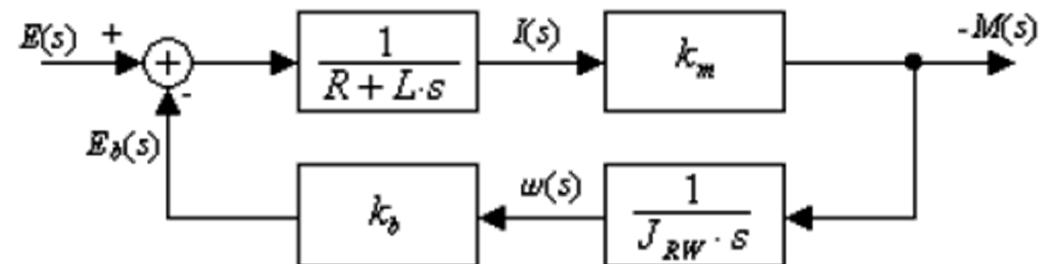
- Motore in continua (a corrente di campo costante)

$$\begin{cases} -M = k_m i \\ J_{RW} \cdot \dot{\omega} = -M \end{cases}$$

$$I(s) = \frac{1}{R + L \cdot s} [E(s) - E_b(s)]$$

$$E_b(s) = k_b \cdot \omega(s)$$

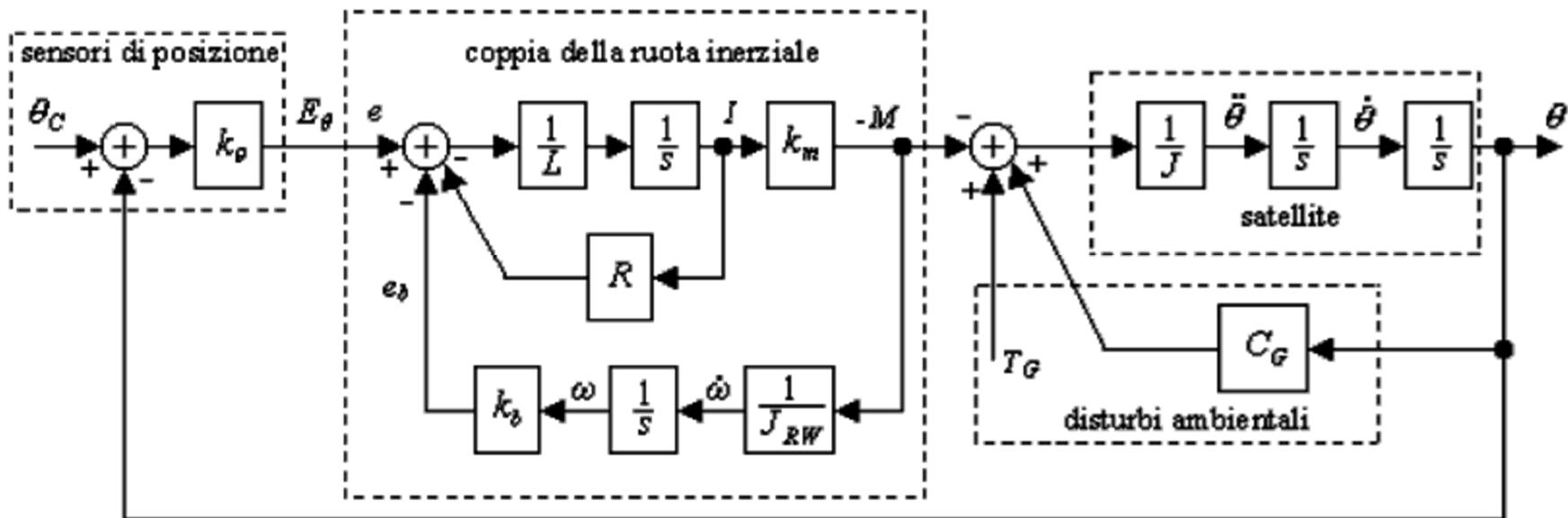
$$\omega(s) = \frac{1}{J_{RW} \cdot s} [-M(s)]$$



$$-M(s) = \frac{k_m \cdot J_{RW} \cdot s}{J_{RW} \cdot s \cdot (R + L \cdot s) + k_m k_b} E(s) = G_{ACT}(s) \cdot E(s)$$



# Algebra a Blocchi

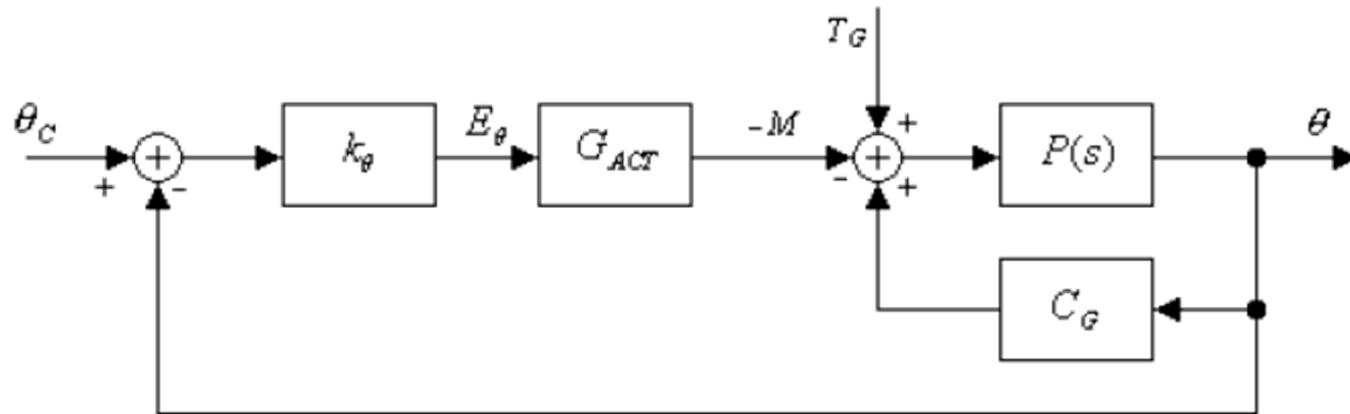


$$P(s) = \frac{1}{J \cdot s^2} , \quad G_{ACT}(s) = \frac{k_m \cdot J_{RW} \cdot s}{J_{RW} \cdot s \cdot (R + L \cdot s) + k_m k_b}$$

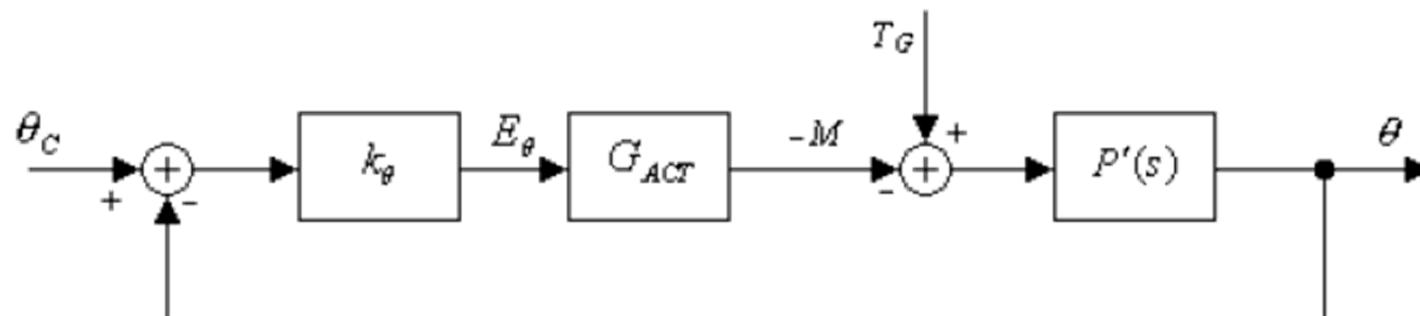
□ Riduzione del Diagramma completo →



# Algebra a Blocchi



$$P'(s) = \frac{P(s)}{1 - C_G P(s)} = \frac{1}{J \cdot s^2 - C_G}$$



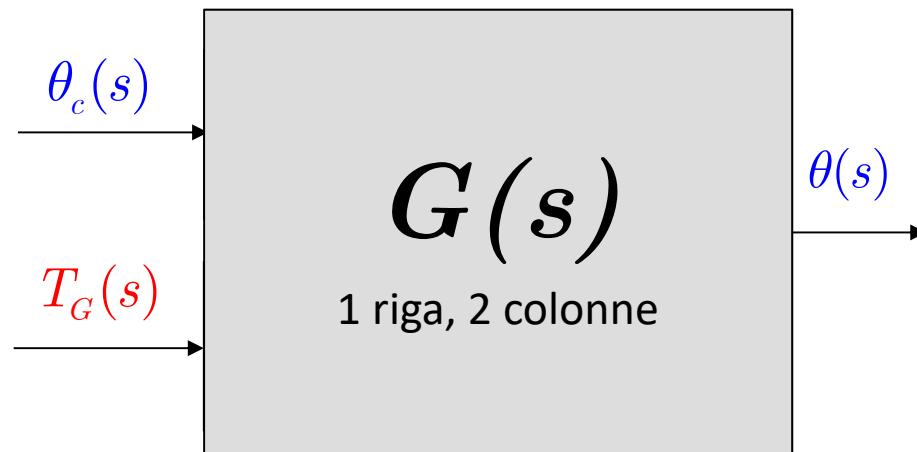


# Algebra a Blocchi



$$\theta(s) = \frac{k_\theta G_{ACT}(s) P'(s)}{1 + k_\theta G_{ACT}(s) P'(s)} \theta_c(s) + \frac{P'(s)}{1 + k_\theta G_{ACT}(s) P'(s)} T_G(s)$$

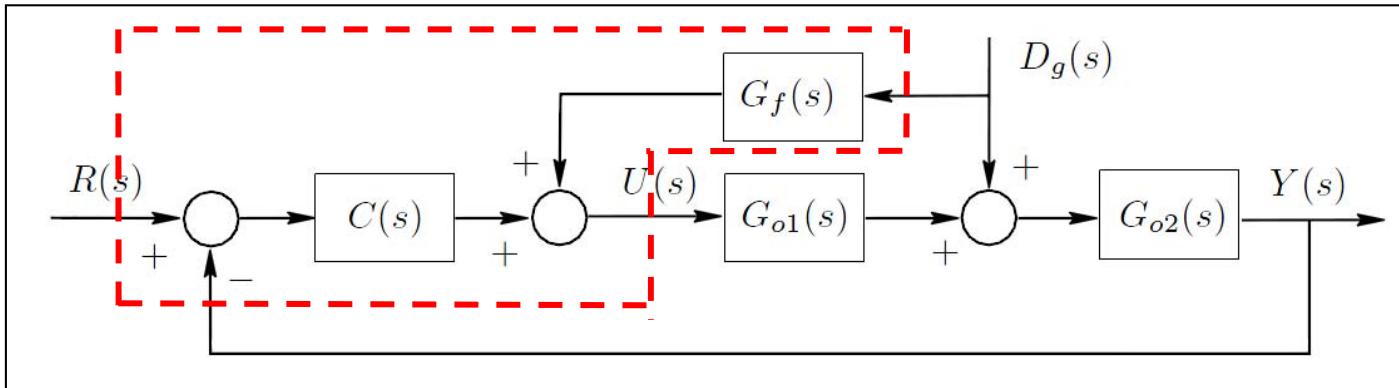
$$\theta(s) = G_1(s) \theta_c(s) + G_2(s) T_G(s)$$





# Algebra a Blocchi

## □ Struttura di controllo con feedforward e feedback per attenuazione di disturbi



- **Obiettivo:** far sì che l'uscita segua il riferimento in presenza di un disturbo esterno
- **Sistema descritto dalle FdT:**  $G_{o1}(s)$  e  $G_{o2}(s)$
- **Controllore descritto dalle FdT:**  $G_f(s)$  e  $C(s)$

$$Y(s) = G_{o2}(s) \left\langle D_g(s) + G_{o1}(s) \left\{ G_f(s)D_g(s) + C(s)[R(s) - Y(s)] \right\} \right\rangle$$

$$Y(s) = \frac{G_{o2}(1 + G_{o1}G_f)}{1 + G_{o2}G_{o1}C} D_g(s) + \frac{G_{o2}G_{o1}C}{1 + G_{o2}G_{o1}C} R(s)$$

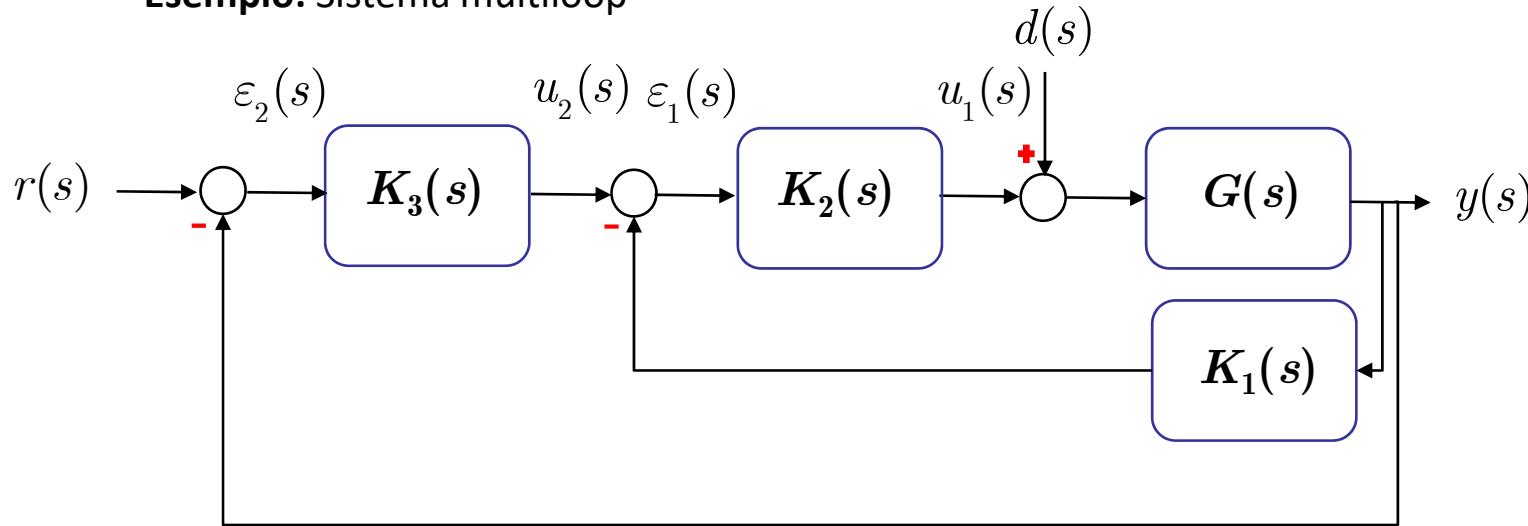
□ **Che succede se poniamo:**

$$G_f(s) = -\frac{1}{G_{o1}(s)}$$



# Algebra a Blocchi

- **Esempio:** Sistema multiloop



- Il sistema ha 2 ingressi ed una uscita
- Il sistema è formato da due anelli in retroazione: il primo è l'anello interno con retroazione non unitaria, mentre l'anello esterno ha retroazione unitaria.
- In generale, l'anello interno opera a frequenza più elevata (struttura tipica è quello di controllo e guida di un sistema di trasporto)

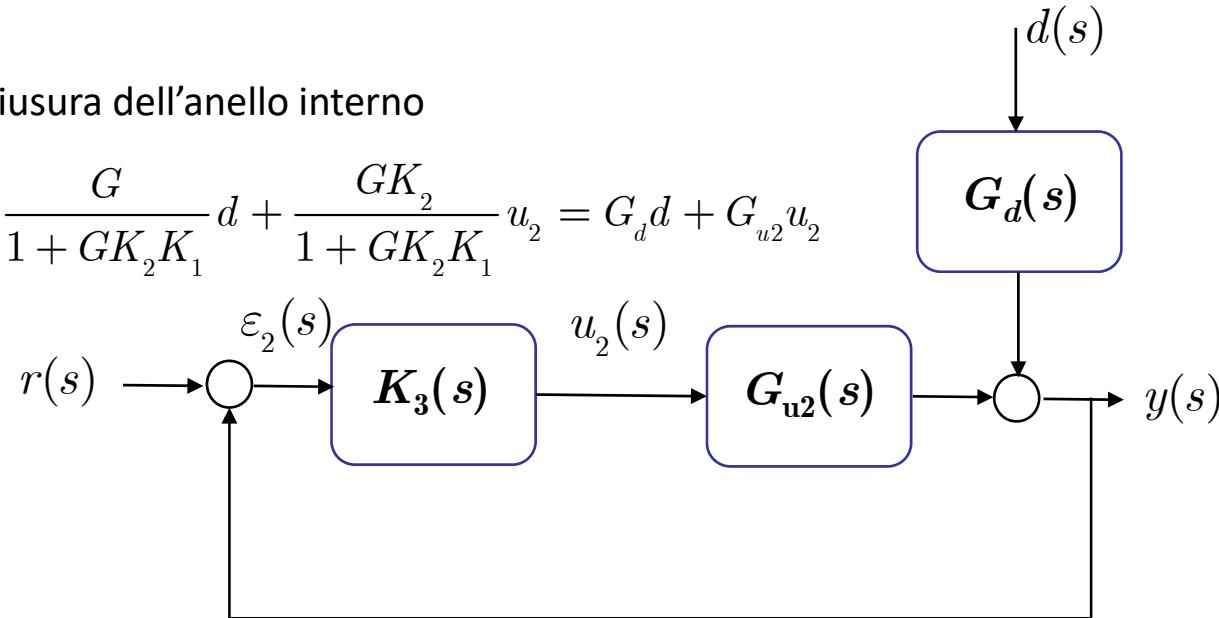
$$\begin{cases} y = G[d + u_1] \\ u_1 = K_2 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 = u_2 - K_1 y \\ u_2 = K_3 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 = r - y \end{cases}$$



# Algebra a Blocchi

- Chiusura dell'anello interno

$$y = \frac{G}{1 + GK_2K_1}d + \frac{GK_2}{1 + GK_2K_1}u_2 = G_d d + G_{u2}u_2$$



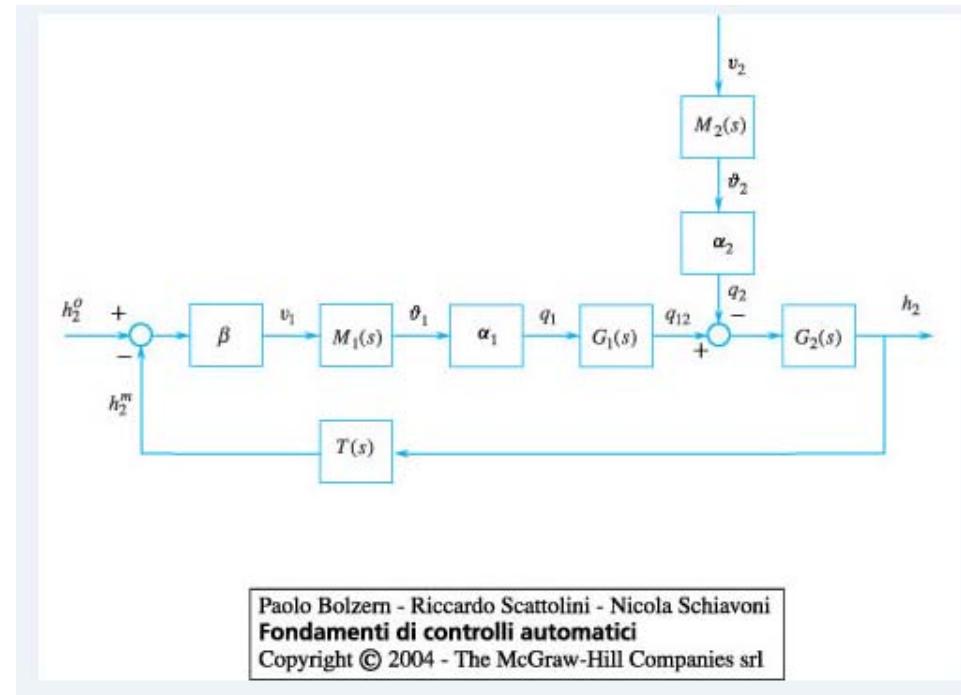
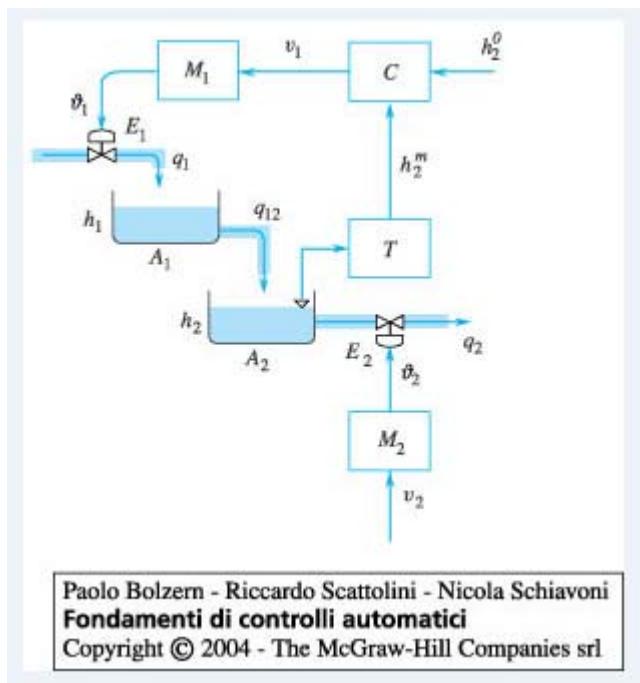
- Chiusura dell'anello esterno

$$y = \frac{G_d}{1 + G_{u2}K_3}d + \frac{G_{u2}K_3}{1 + G_{u2}K_3}r$$



# Algebra a Blocchi

- Esercizi: Capitolo 6 (paragrafi 6.1, 6.2, 6.3), libro di testo



- Il sistema a sinistra mostra un sistema a doppio serbatoio in ciclo chiuso con il controllore C(s) che provvede a mantenere il livello del secondo serbatoio costante ad un valore desiderato:

$$h_2 = h_2^0$$

- Derivare il diagramma a blocchi e la FdT in ciclo chiuso del sistema



# Algebra a Blocchi



[CTMS TUTORIAL](#)



# VARIABILI DI STATO



- Definizioni e Proprietà
- Derivazione delle Equazioni di Stato
- Soluzione delle Equazioni di Stato
- Esempi



# Riferimenti

- Capitoli 2, Testo di Bolzern (parte)
- Capitolo 2, testo di Murray (download)
- Capitolo 2, Testo di Lewis (download)



Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.

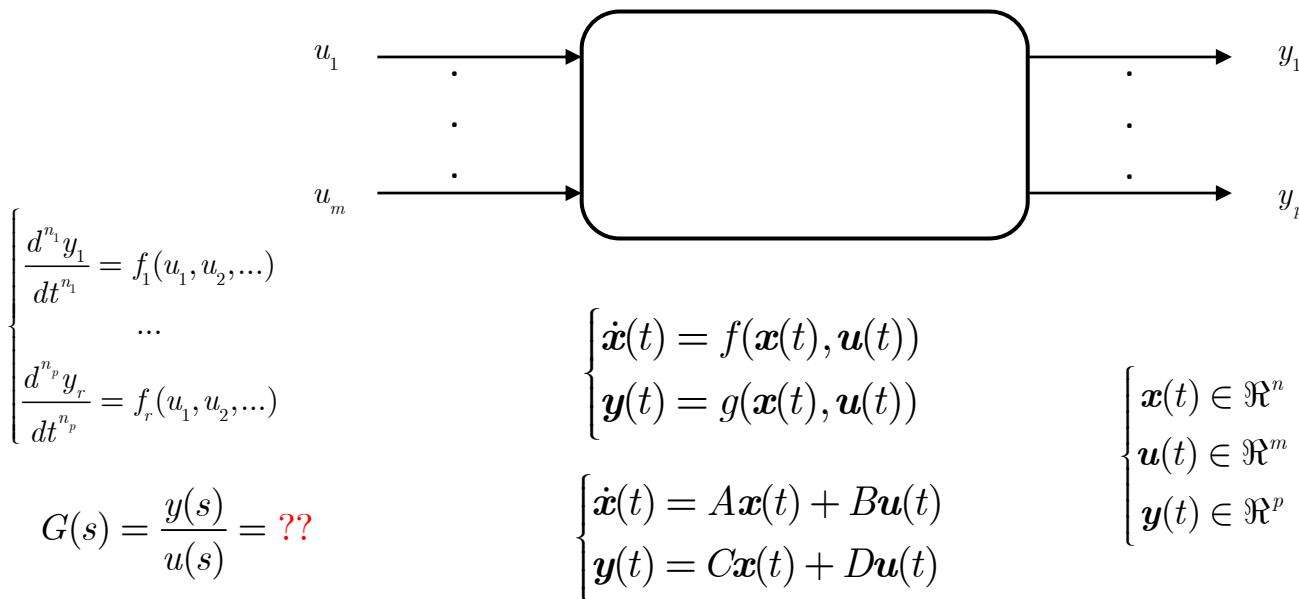
Con. Avanzati

Con. Standard



# Definizioni e Proprietà

- La rappresentazione in variabili di stato (I-S-U) è un metodo efficace per descrivere sistemi MIMO nonlineari e lineari, sfruttando le proprietà delle matrici ed elementi di geometria.
- Dato un sistema dinamico a parametri concentrati con  $m$  ingressi  $u_i$  e  $p$  uscite  $y_j$ , è sempre possibile darne una rappresentazione mediante:
  - Equazioni differenziali (nonlineari e lineari)
  - Funzioni di Trasferimento (nel caso di sistemi lineari e tempo invarianti)
  - **Variabili di Stato (Sistemi nonlineari e lineari).**





# Definizioni e Proprietà

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{x}(t) \in \Re^n \\ \mathbf{u}(t) \in \Re^m \\ \mathbf{y}(t) \in \Re^p \end{cases}$$

- **Definizione:** il vettore  $\mathbf{x}(t)$  si definisce vettore di stato e/o vettore di variabili di stato ed è costituito dal numero minimo (\*) di variabili indipendenti necessarie a descrivere univocamente il sistema dinamico (noti gli ingressi) nel sottospazio  $\Re^n$  (ovvero una base del sottospazio).
  - **Nota:** Nel caso di sistemi lineari, la quadrupla di matrici  $(A, B, C, D)$  non è unica e, dato un vettore di ingresso, esiste un numero infinito di vettori di stato appartenenti allo stesso sottospazio, i quali producono lo stesso vettore di uscita (ovvero una qualsiasi combinazione lineare di una base in  $\Re^n$ ).
  - Una rappresentazione nello spazio di stato costituisce un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, ottenibile da equazioni differenziali di ordine qualsiasi e/o funzioni di trasferimento (per sistemi LTI).
- (\*) Il numero minimo di variabili di stato è dato dal numero di condizioni iniziali necessarie alla soluzione delle equazioni differenziali di partenza.



## Derivazione delle Equazioni di Stato

- Procedura per la derivazione della rappresentazione nello spazio di stato partendo da equazioni differenziali
- **Caso 1:** Equazioni differenziali senza derivate dell'ingresso

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = u$$

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}, \dots x_n = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \quad x \in \Re^n$$
$$x = [x_1, x_2, x_3, \dots x_n]^T$$

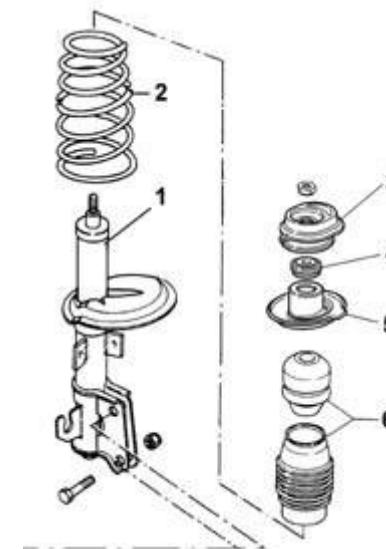
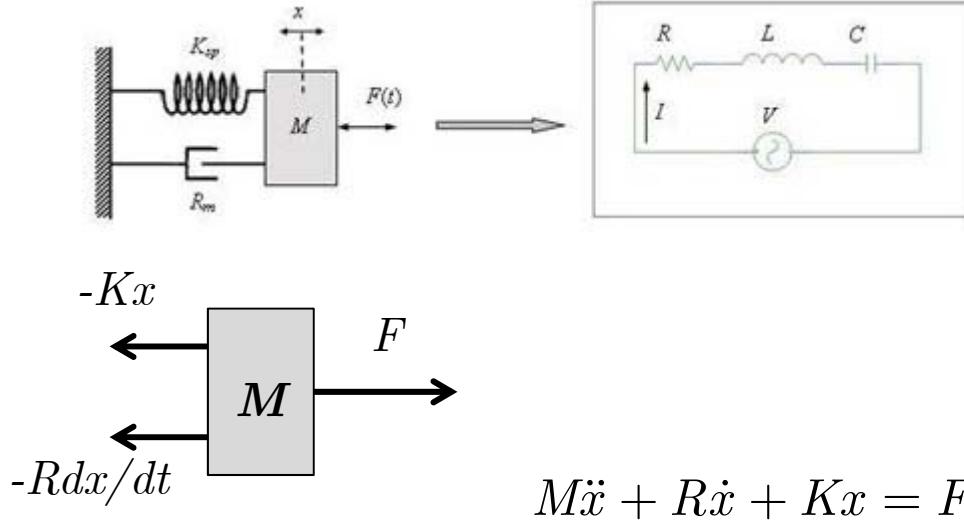
$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2, \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3, \dots \dot{x}_n = \frac{d^n y}{dt^n}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A_{n \times n} \mathbf{x}(t) + B_{n \times 1} u(t) \\ y(t) &= C_{1 \times n} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (*)$$

(\*) La matrice D è nulla se e solo se il sistema è strettamente proprio, come nel presente caso



## Derivazione delle Equazioni di Stato



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x \\ \dot{x}_2 = \dot{x} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{M}F - \frac{R}{M}x_2 - \frac{K}{M}x_1 \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{R}{M} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} F$$

$$y = [1 \ 0] \mathbf{x}$$

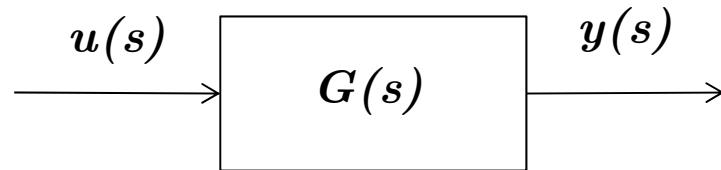


## Derivazione delle Equazioni di Stato

$$\ddot{y} + 16\dot{y} - 4y = 18u$$

$$y(s) = G(s)u(s)$$

$$G(s) = \frac{18}{s^3 + 16s^2 - 4}$$



$$x_1 = y \quad x_2 = \dot{y} \quad x_3 = \ddot{y}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{y} = -16\ddot{y} + 4y + 18u = -16x_3 + 4x_1 + 18u$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -16 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix} u = A\mathbf{x} + Bu$$

$$y = x_1 = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x} + [0] u = C\mathbf{x} + Du$$



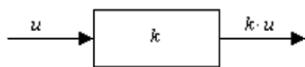
# Derivazione delle Equazioni di Stato

## □ Caso 2: Equazioni con derivate dell'ingresso

- In generale, nelle equazioni differenziali possono comparire anche derivate degli ingressi e, in tal caso, è necessario utilizzare metodi analitici; le derivate di ordine più elevato delle variabili d'ingresso devono essere di ordine inferiore, o al massimo uguale, a quello di ordine più alto delle derivate delle variabili delle equazioni differenziali (causalità del sistema).

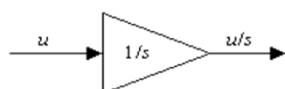
- Uso di diagrammi analogici che rappresentano operazioni possibili mediante circuitazione elettrica

1) Guadagno



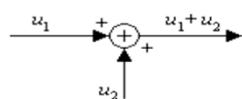
- Uso di Operatori Integrali “1/s”

2) Integrale



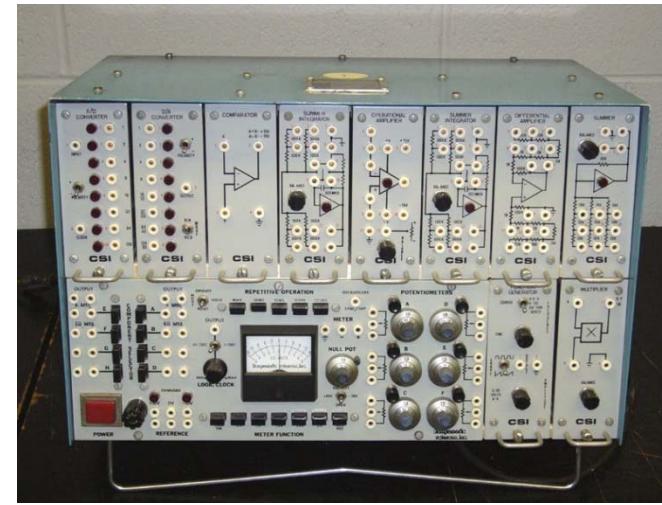
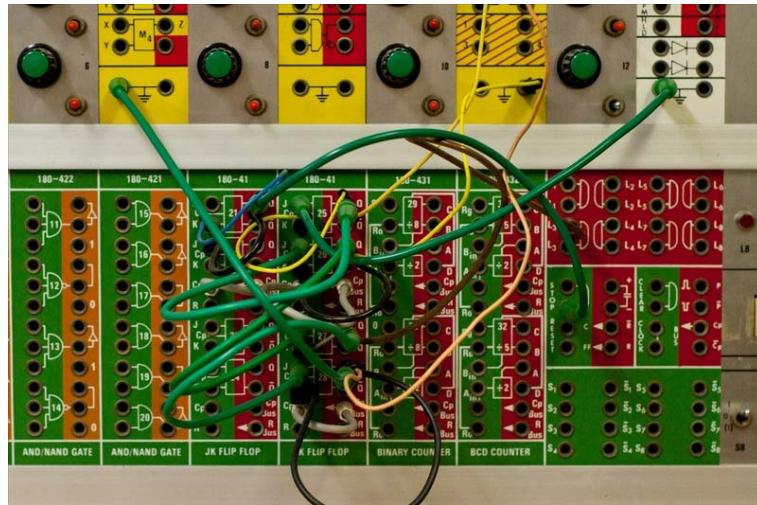
- Uso di Operatori Differenziali “s”

3) Sommatore

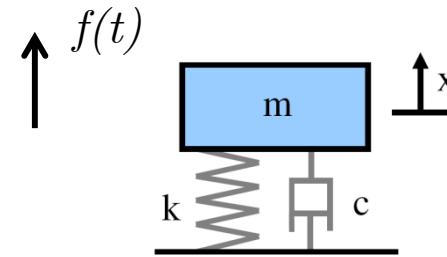
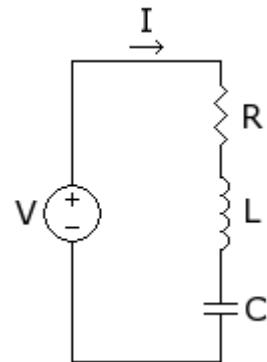




# Derivazione delle Equazioni di Stato



Equivalenza elettromeccanica per la costruzione di diagrammi analogici equivalenti

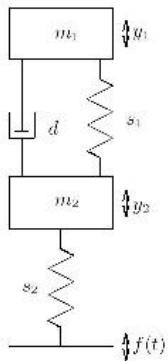


$$\frac{d^2 i(t)}{dt} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = v(t)$$

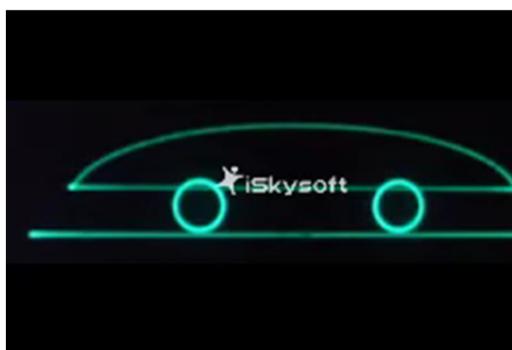
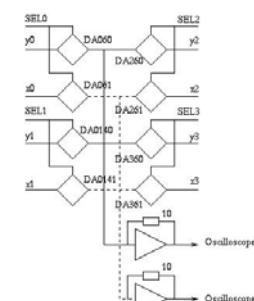
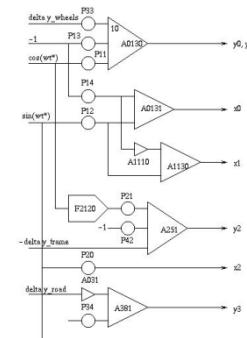
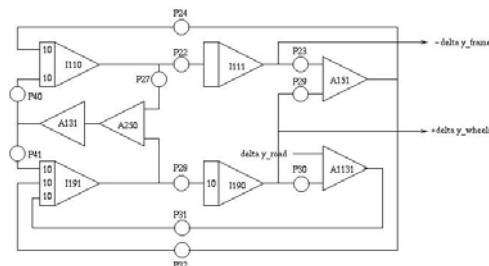
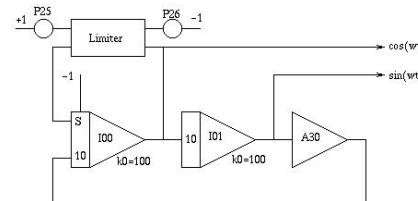
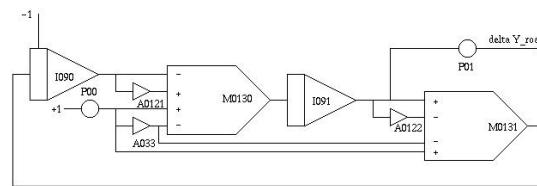
$$\frac{d^2 x(t)}{dt} + \frac{c}{m} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m} x(t) = f(t)$$



# Derivazione delle Equazioni di Stato



$$m_1 \ddot{y}_1 + d(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + s_1(y_1 - y_2) = 0$$
$$m_2 \ddot{y}_2 + d(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + s_1(y_2 - y_1) + s_2(y_2 - y_3) = 0,$$





## Derivazione delle Equazioni di Stato

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 2u + 3\dot{u}$$

$$G(s) = \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 1}$$

□ Operatore Integrale:  $y = \frac{1}{s}\dot{y}$

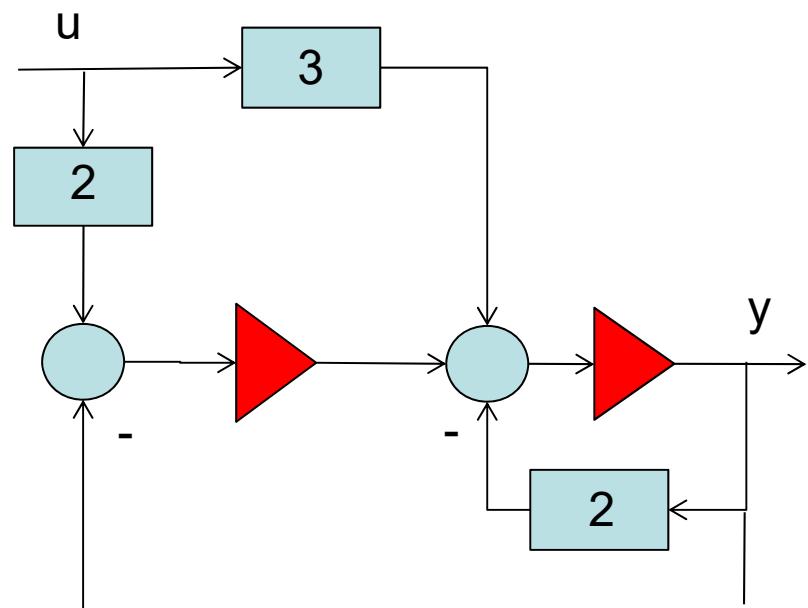
$$s^2y + 2sy + y = 2u + 3su$$

$$s^2y = 2u + 3su - 2sy - y$$

$$y = \frac{1}{s^2} [2u + 3su - 2sy - y]$$

$$y = \frac{2u}{s^2} + \frac{3u}{s} - \frac{2y}{s} - \frac{y}{s^2}$$

$$y = \frac{1}{s} \left\{ 3u - 2y + \frac{1}{s} [2u - y] \right\}$$



**Nota:** L'operatore non è propriamente una trasformata di Laplace !



# Derivazione delle Equazioni di Stato

Selezionando come **variabili di stato le uscite di ogni integratore** (l'ordine non è importante)

$$\dot{x}_1 = 3u - 2x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2u - x_1$$

$$\dot{x}_1 = 2u - x_2$$

$$\dot{x}_2 = 3u - 2x_2 + x_1$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} u = A\mathbf{x} + Bu \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u = A\mathbf{x} + Bu \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 1}$$



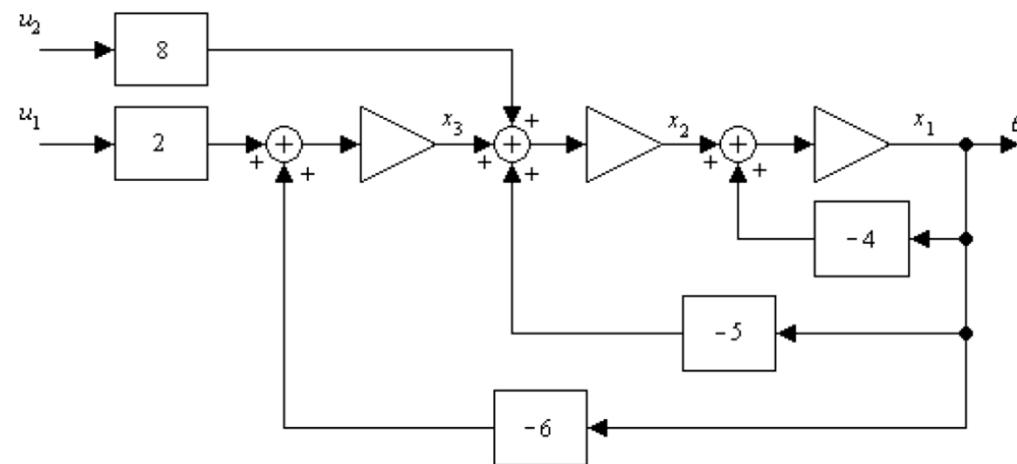
# Derivazione delle Equazioni di Stato



$$\ddot{\theta} + 4\dot{\theta} + 5\dot{\theta} + 6\theta = 2u_1 + 8iu_2 \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$s^3 \cdot \theta(s) + 4s^2 \cdot \theta(s) + 5s \cdot \theta(s) + 6\theta(s) = 2u_1(s) + 8s \cdot u_2(s)$$

$$\theta(s) = \frac{1}{s} \cdot \left\{ -4\theta(s) + \frac{1}{s} \cdot \left[ -5\theta(s) + 8 \cdot u_2(s) + \frac{1}{s}(-6\theta(s) + 2u_1(s)) \right] \right\}$$





## Derivazione delle Equazioni di Stato

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - 4x_1 \\ \dot{x}_2 &= 8u_2 + x_3 - 5x_1 \\ \dot{x}_3 &= 2u_1 - 6x_1\end{aligned} \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$

$$\theta = x_1 \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u}$$

$G(s) = ?$  Vi sono 2 ingressi e una uscita -> ciò significa 2 FdT

$$y(s) = \theta(s) = G_1(s)u_1(s) + G_2(s)u_2(s) = \frac{2}{s^3 + 4s^2 + 5s + 6} u_1(s) + \frac{8s}{s^3 + 4s^2 + 5s + 6} u_2(s)$$

Nel caso si vogliano come uscite le variabili  $\theta$  e la sua derivata:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - 4x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u}$$



# Derivazione delle Equazioni di Stato

$$\ddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 14y(t) + 8y(t) = 2\ddot{u}(t) + 3\dot{u}(t) + 4u(t)$$

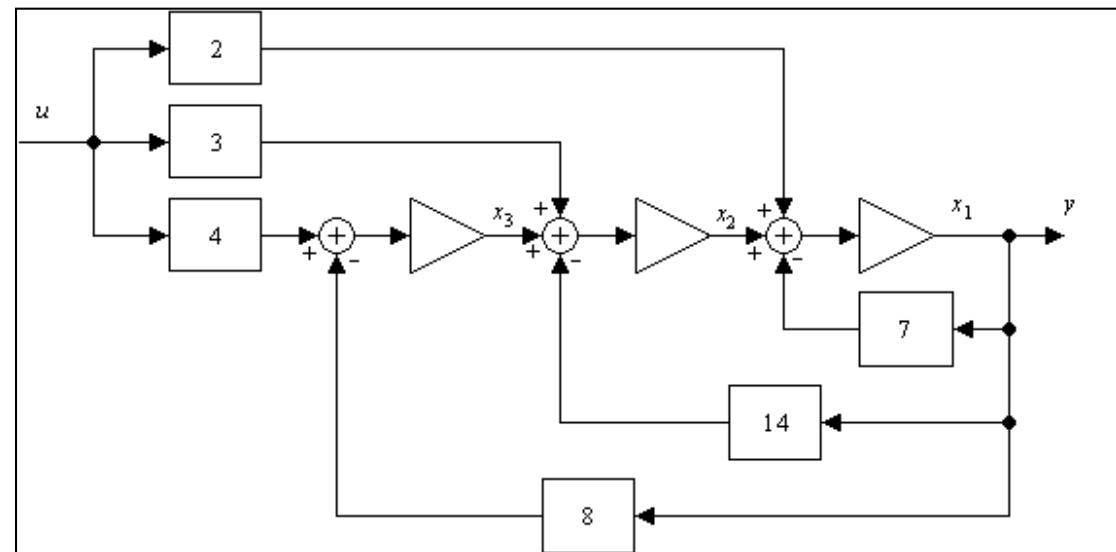
$$G(s) = \frac{2s^2 + 3s + 4}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8} = \frac{(s + 0.75 + 1.199j)(s + 0.75 - 1.199j)}{(s + 1)(s + 2)(s + 4)}$$

$$s^3 \cdot y + 7s^2 \cdot y + 14s \cdot y + 8y = 2s^2 \cdot u + 3s \cdot u + 4u$$

**Operatore Integrale:**

$$y = -\frac{7}{s}y - \frac{14}{s^2}y - \frac{8}{s^3}y + \frac{2}{s}u + \frac{3}{s^2}u + \frac{4}{s^3}u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{s} \left\{ -7y + 2u + \frac{1}{s} \left[ -14y + 3u + \frac{1}{s}(-8y + 4u) \right] \right\}$$





# Derivazione delle Equazioni di Stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2u - 7x_1 \\ \dot{x}_2 = x_3 + 3u - 14x_1, \quad y = x_1 \\ \dot{x}_3 = 4u - 8x_1 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 0 \\ -14 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

□ Operatore Differenziale:  $\dot{y} = sy$

$$(s^3 + 7s^2 + 14s + 8)y = (2s^2 + 3s + 4)u$$

- Introduciamo una variabile ausiliaria  $w$  in modo da verificare l'identità di cui sopra, ovvero riscriviamo ingresso ed uscita ( $u, y$ ) in funzione di  $w$

$$y = (2s^2 + 3s + 4)w = 2s^2 \cdot w + 3s \cdot w + 4w$$

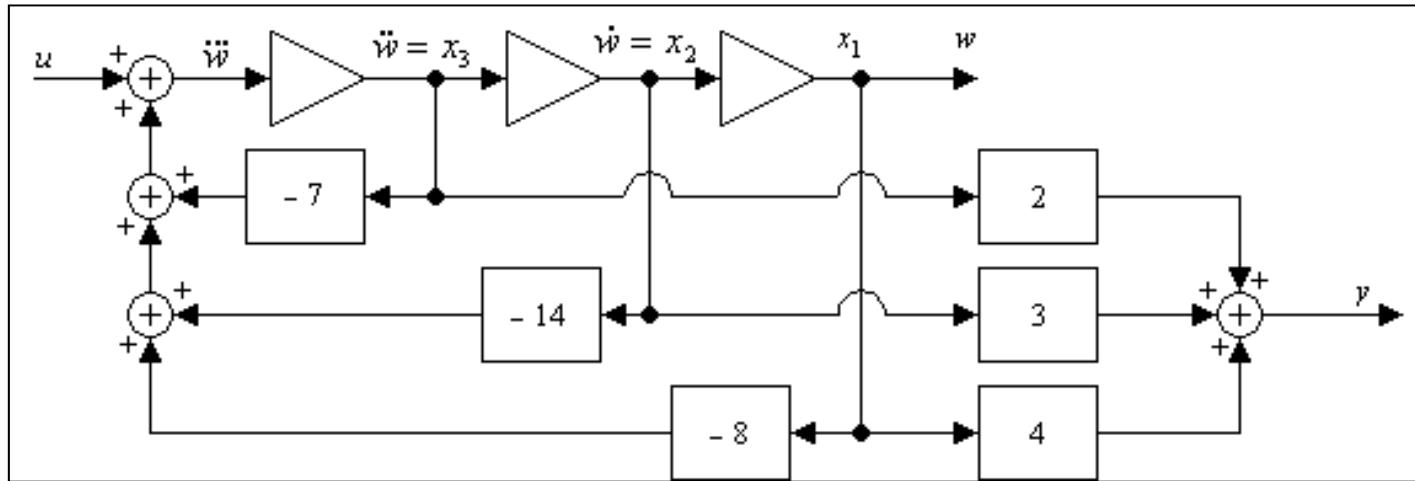
$$u = (s^3 + 7s^2 + 14s + 8)w = s^3 \cdot w + 7s^2 \cdot w + 14s \cdot w + 8w$$

$$(s^3 + 7s^2 + 14s + 8)(2s^2 + 3s + 4)w = (2s^2 + 3s + 4)(s^3 + 7s^2 + 14s + 8)w$$

- Individuare la derivata massima della variabile ausiliaria  $w$  in modo da sapere quante integrazioni sono necessarie



# Derivazione delle Equazioni di Stato



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -7x_3 - 14x_2 - 8x_1 + u \end{cases}, \quad y = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$



# Derivazione delle Equazioni di Stato

## ■ Esempio 2

$$\ddot{y}(t) + 9\dot{y}(t) + 10y(t) = 6\ddot{u}(t) + 12u(t)$$

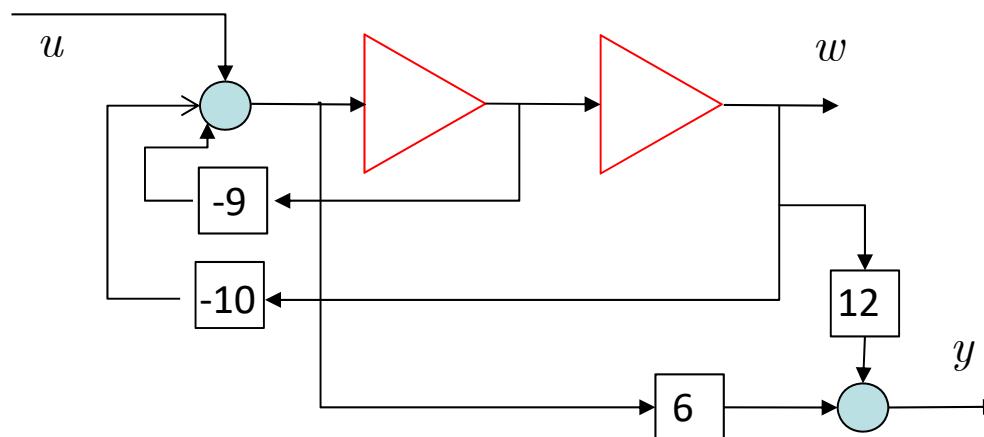
$$G(s) = \frac{6s^2 - 12}{s^2 + 9s + 10}$$

$$(s^2 + 9s + 10)y = (6s^2 + 12)u$$

$$\begin{cases} z_{1,2} = \pm 1.414j \\ p_{1,2} = -6.1; -2.899 \end{cases}$$

$$y = (6s^2 + 12)w$$

$$u = (s^2 + 9s + 10)w \Rightarrow s^2w = u - 9sw - 10w$$





# Derivazione delle Equazioni di Stato

$$\begin{cases} x_1 = w \\ x_2 = \dot{w} \\ y = 12w + 6\ddot{w} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - 10x_1 - 9x_2 \\ y = 12x_1 + 6(u - 10x_1 - 9x_2) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -48 & -54 \end{bmatrix}, \quad D = [6]$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ y = C\mathbf{x} + Du \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{x}(t) \in \Re^2 \\ \mathbf{u}(t) \in \Re^1 \\ \mathbf{y}(t) \in \Re^1 \end{cases}$$

□ **Esercizio:** calcolare A, B, C, D ponendo:

$$\begin{cases} x_1 = \dot{w} \\ x_2 = w \end{cases}$$



# Soluzione delle Equazioni di Stato

- **Soluzione:** Data la rappresentazione ISU o in variabili di stato:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A_{n \times n} \mathbf{x}(t) + B_{n \times m} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C_{p \times n} \mathbf{x}(t) + D_{p \times m} \mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

Dati  $\mathbf{u}(t)$  ed  $\mathbf{x}_0$ , determinare  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$ , per ogni  $t > t_0$ .

- Metodo nel Dominio della Frequenza per Sistemi tempo invarianti, con  $(A, B, C, D)$  matrici costanti.
- Metodo nel Dominio del Tempo per Sistemi tempo invarianti, tempo varianti e non lineari.

## □ **Dominio della Frequenza (ovvero attraverso la Trasformata di Laplace)**

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}(s) + B\mathbf{u}(s) \quad (sI - A)\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + B\mathbf{u}(s)$$

$$\mathbf{y}(s) = C\mathbf{x}(s) + D\mathbf{u}(s) \quad \mathbf{y}(s) = C\mathbf{x}(s) + D\mathbf{u}(s)$$

$$\mathbf{x}(s) = (sI - A)^{-1} \mathbf{x}_0 + (sI - A)^{-1} B\mathbf{u}(s)$$

$$\mathbf{y}(s) = C(sI - A)^{-1} \mathbf{x}_0 + C(sI - A)^{-1} B\mathbf{u}(s) + D\mathbf{u}(s)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{y}(s) &= G(s)\mathbf{u}(s) \\ G_{p \times m}(s) &= [C(sI - A)^{-1} B + D]\end{aligned}}$$



# Soluzione delle Equazioni di Stato

## □ Esempio

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0 \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \quad (sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

$$C(sI - A)^{-1} = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{3}{s+1} \\ \frac{-3}{s+2} \end{bmatrix} = H(s) \quad \text{matrice } 2 \times 1$$

$$y(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{s+1} \\ \frac{-3}{s+2} \end{bmatrix} U(s)$$



# Soluzione delle Equazioni di Stato

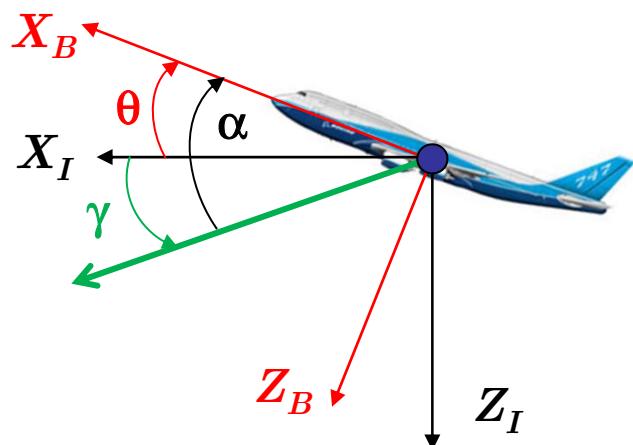
Ingresso impulsivo

$$y(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{s+1} \\ -\frac{3}{s+2} \end{bmatrix} \Rightarrow y(t) = \begin{bmatrix} 4e^{-t} \\ -3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Ingresso a  
Gradino Unitario

$$y(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s(s+1)} \\ -\frac{3}{s(s+2)} \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} 3 - 2e^{-t} \\ -\frac{3}{2}(1 - e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

Esempio 2: Moto Longitudinale Linearizzato di un Velivolo



Condizioni di Equilibrio (Trim)

|                                  |   |                          |
|----------------------------------|---|--------------------------|
| Quota                            | = | Sea Level(ft)            |
| Mach                             | = | 0.2                      |
| $U_0$                            | = | 221(ft / sec)            |
| $\gamma_0 = \theta_0 - \alpha_0$ | = | $-3.5^0 = -6.11rad^{-2}$ |
| $\alpha_0$                       | = | $6^0 = 10.47rad^{-2}$    |



# Soluzione delle Equazioni di Stato

## Variabili di Stato:

- $u$  = componente velocità di traslazione lungo l'asse  $x_B$
- $w$  = componente velocità di traslazione lungo l'asse  $y_B$
- $q$  = componente velocità di rotazione intorno all'asse  $y_B$
- $\theta$  = Equazione cinematica di rotazione intorno all'asse  $y_B$

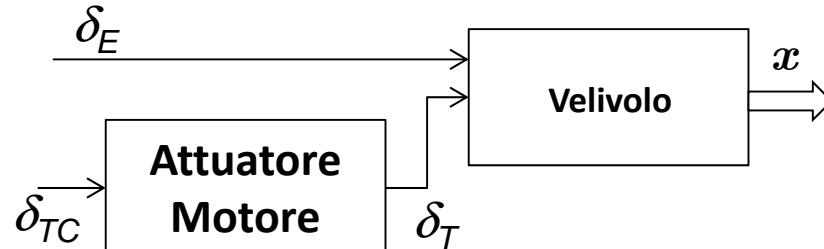
$$\dot{\boldsymbol{x}}_{AC}(t) = \begin{bmatrix} u \\ w = \alpha U_0 \\ q = \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix}; u_{AC}(t) = \delta_E; u_T(t) = \delta_T; \boldsymbol{d}(t) = \begin{bmatrix} u_w \\ w_w \end{bmatrix}$$

$$\dot{\delta}_T = 0.25\delta_T + 0.25\delta_{TC}$$

$$\dot{h} = -w + 2.21\theta$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_{AC} \\ \dot{\delta}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.021 & .122 & 0 \\ -.209 & -.53 & 2.2 \\ .017 & -.164 & - \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} \delta_E \\ \delta_{TC} \end{bmatrix}$$



1. La dinamica del motore è disaccoppiata nella direzione aereo -> motore (ma non l'inverso)

$$\dot{\delta}_T = 0.25\delta_T + 0.25\delta_{TC} \Rightarrow G_T(s) = \frac{0.25}{s + 0.25} \quad \delta_{TC} = 1 \Rightarrow \delta_T = 1 - e^{-0.25t}$$



## Soluzione delle Equazioni di Stato

**2. La dinamica della quota (traslazione lungo  $zI$ ) è combinazione lineare di 2 variabili di stato e può essere calcolata a parte**

$$\dot{h} = -w + 2.21\theta$$

**3. Trascuriamo per adesso la componente di disturbo, si deve risolvere quindi:**

$$\dot{\begin{bmatrix} \dot{x}_{AC} \\ \dot{\delta}_T \end{bmatrix}} = \left[ \begin{array}{cccc|c} -.021 & .122 & 0 & -.322 & 1 \\ -.209 & -.53 & 2.21 & 0 & -.044 \\ .017 & -.164 & -.412 & 0 & .544 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -.25 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} x_{AC}(t) \\ \delta_T(t) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] x(t)$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B \quad (4 \times 2) = (4 \times 5) \cdot (5 \times 5) \cdot (5 \times 2)$$



# Soluzione delle Equazioni di Stato

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s + .021 & -.122 & 0 & .322 & -1 \\ .209 & s + .53 & -2.21 & 0 & .044 \\ -.017 & .164 & s + .412 & 0 & -.544 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} .01 & 0 \\ -.064 & 0 \\ -.378 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ss2tf State-space to transfer function conversion.  
[NUM,DEN] = ss2tf(A,B,C,D,iu) calculates the transfer function:

$$H(s) = \frac{NUM(s)}{DEN(s)} = \frac{-1}{C(sI-A)B + D}$$

of the system:

$$\begin{aligned} x &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

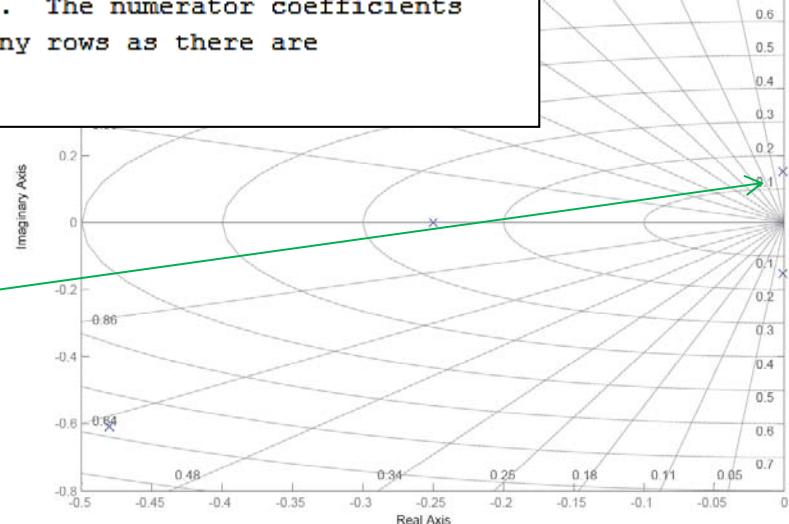
>> roots([1.0000 1.

ans =  
-0.4804 + 0.6083i  
-0.4804 - 0.6083i  
-0.2507  
-0.0008 + 0.1524i  
-0.0008 - 0.1524i

>> eig(a)

ans =  
-0.4804 + 0.6083i  
-0.4804 - 0.6083i  
-0.0011 + 0.1523i  
-0.0011 - 0.1523i  
-0.2500

.25  
0.1375 -0.0238  
0.0059 0.0091  
0.0158 0.0000  
0.0810 0.0158

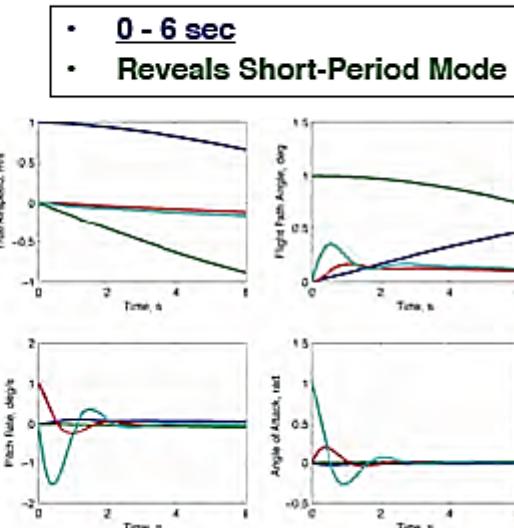
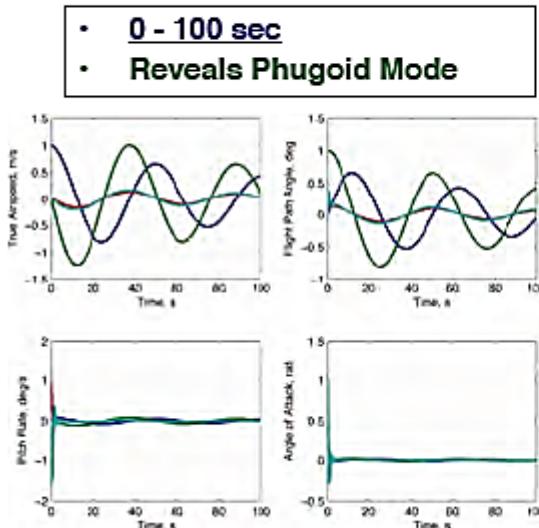




# Soluzione delle Equazioni di Stato

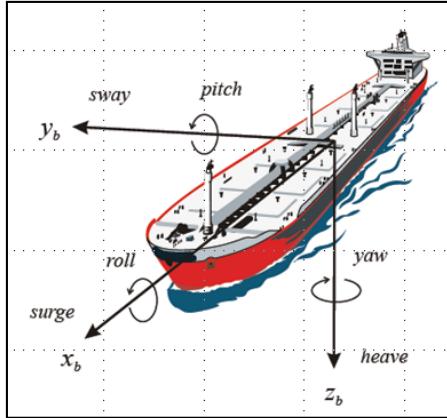
$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \\ q(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \mathbf{C}_1 e^{-0.4804t} \sin(0.6083t + \mathbf{C}_2) + \mathbf{C}_3 e^{-0.0011t} \sin(0.1543t + \mathbf{C}_4)$$

- 2 MODI propri oscillatori
  - Corto Periodo (Short Period) interessa prevalentemente le variabili  $w$  e  $q$
  - Fugoide (Phugoid) interessa prevalentemente le variabili  $u$ ,  $w$  e  $q$
- 
- LTI 4<sup>th</sup>-order responses viewed over different periods of time
    - 4 initial conditions





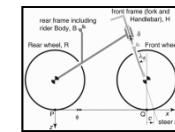
# Soluzione delle Equazioni di Stato



$$\begin{cases} \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} + \dot{m}\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{v}} = m\dot{\mathbf{v}}_{CM} + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{CM}) \\ \mathbf{M} = [I]\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times ([I]\boldsymbol{\Omega}) + [\dot{I}]\boldsymbol{\Omega} = [I]\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times ([I]\boldsymbol{\Omega}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m[\dot{u} - vr + wq] = X - mg \sin \Theta \\ m[\dot{v} - wp + ur] = Y + mg \cos \Theta \sin \Phi \\ m[\dot{w} - uq + vp] = Z + mg \cos \Theta \cos \Phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{xx}\dot{p} + (I_{zz} - I_{yy})qr - (\dot{r} + pq)I_{xz} = L \\ I_{yy}\dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})rp + (p^2 - r^2)I_{zx} = M \\ I_{zz}\dot{r} + (I_{yy} - I_{xx})pq + (rq - \dot{p})I_{xz} = N \end{cases}$$



$$M\dot{\nu} + Cv_0\boldsymbol{\nu} + (K_0 + K_2v_0^2)\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

- Sistema linearizzato rispetto ad un equilibrio corrispondente a moto rettilineo a velocità costante (equazioni longitudinali in blu)

$$\begin{bmatrix} m + X_{\dot{u}} & -X_{\dot{w}} & mz_g - X_{\dot{q}} \\ -\dot{X}_{\dot{w}} & m - Z_{\dot{w}} & -mx_g - Z_{\dot{q}} \\ mz_g - X_{\dot{q}} & -mx_g - Z_{\dot{q}} & I_y - M_{\dot{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -X_u & -X_w & -X_q \\ -Z_u & -Z_w & -Z_q \\ -M_u & -M_w & -M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(m - X_{\dot{u}})u \\ 0 & (Z_{\dot{w}} - X_{\dot{u}})u & mx_g u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ WBG_z \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_3 \\ \tau_5 \end{bmatrix}$$



# Soluzione delle Equazioni di Stato

- Modello linearizzato di Manovra (surge, sway, yaw)

$$\begin{cases} m[\dot{u} - vr + wq] = X - mg \sin \Theta \\ m[\dot{v} - wp + ur] = Y + mg \cos \Theta \sin \Phi \\ I_{zz}\dot{r} + (I_{yy} - I_{xx})pq + (rq - \dot{p})I_{zx} = N \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{c|cc} m - X_{\dot{u}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & m - Y_{\dot{v}} & -Y_{\dot{r}} \\ 0 & -N_{\dot{v}} & I_z - N_{\dot{r}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \left[ \begin{array}{c|cc} -X_u & 0 & 0 \\ \hline 0 & -Y_v & (m - Y_{\dot{v}})u_0 - Y_r \\ 0 & -N_v & -Y_{\dot{r}}u_0 - N_{\dot{r}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} u \\ v \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_\delta \\ Y_\delta \\ N_\delta \end{bmatrix} \delta_{RUD} + \begin{bmatrix} X_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T_{PROP} + \tau_{DIST}$$

$$(m - X_{\dot{u}})\dot{u} - X_u u = X_T T_{PROP} + \tau_{DIST}^x$$

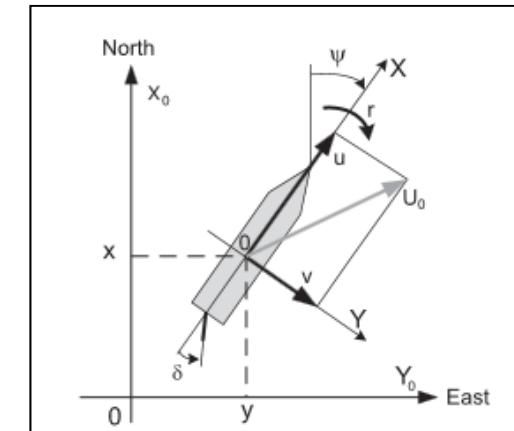
- Modello linearizzato di Manovra (sway, yaw)

$$\left[ \begin{array}{c|cc} m - Y_{\dot{v}} & -Y_{\dot{r}} \\ \hline -N_{\dot{v}} & I_z - N_{\dot{r}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \left[ \begin{array}{c|cc} -Y_v & (m - Y_{\dot{v}})u_0 - Y_r \\ \hline -N_v & -Y_{\dot{r}}u_0 - N_{\dot{r}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y_\delta \\ -N_\delta \end{bmatrix} \delta + \begin{bmatrix} \tau_{DIST}^v \\ \tau_{DIST}^r \end{bmatrix}$$

$$\delta = -\delta_{RUD}$$

$$\dot{\psi} = r$$

|       |          |  |         |
|-------|----------|--|---------|
| $u_0$ | 4        | $N_r$  | -0.016  |
| $L$   | 5.3      | $Y_\delta$   | 0.027   |
| $m$   | 0.1415   | $Y_{\dot{v}}$  | -0.055  |
| $I_z$ | 0.006326 | $N_{\dot{r}}$  | -0.0034 |
| $Y_v$ | -0.1     | $N_\delta$   | -0.013  |
| $Y_r$ | 0.03     | $X_T$  | 0.025   |
| $N_v$ | -0.0074  | $X_\delta, Y_{\dot{r}}, N_{\dot{v}}, X_u, X_{\dot{u}}$ | 0.0     |



- Trascurando il contributo del disturbo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.589 & -3.847 \\ -0.763 & -0.351 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.1374 \\ -1.3402 \end{bmatrix} u$$

$$y = Cx$$



## Soluzione delle Equazioni di Stato

- Funzione di trasferimento moto di Surge (moto linearizzato di traslazione lungo  $x$ )  $\frac{u(s)}{T(s)} = \frac{0.1767}{s}$

- Dinamica laterale  $G(s) = \begin{bmatrix} G_{\delta}^v(s) & G_{\delta}^r(s) \end{bmatrix} = C(sI - A)^{-1}B$

$$\begin{cases} G_{\delta}^v(s) = \frac{0.1374(s + 37.875)}{s^2 + 0.94s - 2.729} \\ G_{\delta}^r(s) = \frac{-1.3402(s + 0.667)}{s^2 + 0.94s - 2.729} \end{cases}$$

- Poli delle FdT:  $\lambda_1 = -2.1874$ ;  $\lambda_2 = 1.2474$

- Risposta al gradino unitario (in motore e timone)

$$u(t) = 0.1767$$

$$v(t) = -1.9072 + 0.6526e^{-2.1874t} + 1.2546e^{+1.2474t}$$

$$r(t) = 0.3277 + 0.2712e^{-2.1874t} - 0.5989e^{+1.2474t}$$

- Il motore agisce soltanto sulla velocità longitudinale
- Un comando costante di timone produce una velocità laterale (sbandata) che aumenta nel tempo
- Un comando costante di timone produce una velocità angolare (imbardata) che aumenta nel tempo



# Soluzione delle Equazioni di Stato

## □ Dominio del Tempo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases}, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

□ Riprendiamo il caso visto in precedenza di un sistema scalare, omogeneo e tempo invariante

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x(t) &= ke^{at} \\ x(t_0) &= x_0 = ke^{at_0} \Rightarrow k = x_0 e^{-at_0} \end{aligned}$$

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0$$

$$e^{at} = 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2!} + a^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

- Serie di Potenze globalmente convergente



# Soluzione delle Equazioni di Stato

Consideriamo il caso di un sistema LTI n - dimensionale  $\mathbf{x}(t) \in \Re^n \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}, A^{n \times n}$

Dalla trasformata di Laplace sappiamo che:  $\mathbf{x}(s) = (sI - A)^{-1} \mathbf{x}_0$

- Per analogia con il caso scalare:  $\rightarrow \mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}_0$

- **Definizione** : Si definisce, per i sistemi lineari e tempo invarianti, come **matrice di transizione dello stato (o matrice esponenziale)**, la matrice:

$$e^{A(t-t_0)}$$

- La soluzione del sistema omogeneo si riduce al calcolo della **Matrice di Transizione**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad e^{At} \neq \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^{3t} & e^{4t} \end{bmatrix}$$

- **Metodo I: Serie di Potenze**

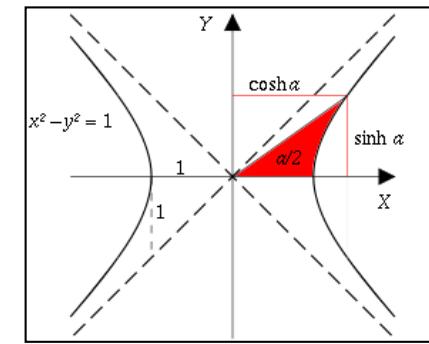
$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots + A^k \frac{t^k}{k!} + \dots \quad A^i = A \cdot A \cdot A \dots$$



# Soluzione delle Equazioni di Stato

■ **Esempio:**  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}x$        $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,       $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,       $A^3 = A$ ,       $A^4 = I$ ,      ...

$$\begin{aligned} e^{At} &= I \left[ 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \dots \right] + A \left[ t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right] = \\ &= I \cosh t + A \sinh t = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} \end{aligned}$$



## □ Metodo II: Trasformata di Laplace

$$\dot{x} = Ax \Rightarrow s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_0 = Ax(s) \Rightarrow \mathbf{x}(s) = [sI - A]^{-1} \mathbf{x}_0$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}(t) = L^{-1} \left\{ [sI - A]^{-1} \right\} \mathbf{x}_0 = e^{At} \mathbf{x}_0 \quad \Rightarrow \quad e^{At} = \boxed{L^{-1} \left\{ [sI - A]^{-1} \right\}}$$



# Soluzione delle Equazioni di Stato

■ **Esempio:**  $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$   $[sI - A] = \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}$

$$[sI - A]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}}{s^2 + 6s + 8} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+2)(s+4)} & \frac{1}{(s+2)(s+4)} \\ \frac{1}{(s+2)(s+4)} & \frac{s+3}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix} e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t} & -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t} \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t} & \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

## □ Metodo III: Riduzione in Forma diagonale o Jordan

Data una matrice quadrata  $A$ , è sempre possibile trasformarla in una matrice diagonale  $\Lambda$  o in una matrice di Jordan  $J$  tramite opportune trasformazioni di similitudine.

### Caso A: Autovalori di $A$ distinti

$$M^{-1}AM = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad A = M\Lambda M^{-1}$$



# Soluzione delle Equazioni di Stato

$$\begin{aligned} e^{At} &= MM^{-1} + M\Lambda M^{-1}t + M\Lambda M^{-1}M\Lambda M^{-1} \frac{t^2}{2!} + \dots \\ &= MIM^{-1} + M\Lambda M^{-1}t + M\Lambda^2 M^{-1} \frac{t^2}{2!} + \dots = \\ &= M \left\{ I + \Lambda t + \Lambda^2 \frac{t^2}{2!} + \dots \right\} M^{-1} = \boxed{Me^{\Lambda t} M^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\Lambda t} &= I + \Lambda t + \Lambda^2 \frac{t^2}{2!} + \Lambda^3 \frac{t^3}{3!} + \dots + \Lambda^k \frac{t^k}{k!} + \dots = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \dots + \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \frac{t^k}{k!} + \dots = \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \lambda_1^2 t^2 + \dots + \lambda_1^k t^k + \dots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 + \lambda_n t + \lambda_n^2 t^2 + \dots + \lambda_n^k t^k + \dots \end{bmatrix} = \boxed{e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}} \end{aligned}$$



## Soluzione delle Equazioni di Stato

- Essendo  $e^{\Lambda t}$  nota una volta noti gli autovalori di  $A$ , la matrice di transizione originale è ottenibile calcolando le matrici  $M$  ed  $M^{-1}$ .

$$M = [v_1, v_2, \dots, v_n], \quad (\lambda_i I - A)v_i = 0$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_1^T \\ \mu_2^T \\ \vdots \\ \mu_n^T \end{bmatrix}, \quad \mu_i^T (\lambda_i - A) = 0$$

$$e^{At} = M e^{\Lambda t} M^{-1} = [v_1, v_2, \dots, v_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1^T \\ \mu_2^T \\ \vdots \\ \mu_n^T \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \boldsymbol{\mu}_i^T e^{\lambda_i t} \mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\alpha}_i e^{\lambda_i t} = \boldsymbol{\alpha}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \boldsymbol{\alpha}_n e^{\lambda_n t}}$$



# Soluzione delle Equazioni di Stato

## Caso B: Autovalori di A ripetuti

In tale situazione, usando un'appropriata trasformazione di similitudine  $P$ , la matrice  $A$  può essere portata nella forma di Jordan ( la matrice  $P$  contiene gli autovettori ed eventuali autovettori generalizzati)

$$P^{-1}AP = J \quad A = PJP^{-1} \Rightarrow e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$$

Consideriamo, ad esempio, il caso in cui  $J$  sia un unico blocco di Jordan:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_i I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_i I + R$$

Da cui:

$$e^{Jt} = e^{(\lambda_i I + R)t} = e^{\lambda_i t} e^{Rt}$$



## Soluzione delle Equazioni di Stato

Il prodotto di una qualsiasi matrice  $C$  moltiplicata per  $R$  fornisce la stessa matrice in cui però ogni colonna viene shiftata verso destra e la prima colonna risulta essere una colonna di zeri.

$$CR = [c_1, c_2, \dots, c_n] R = [0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}]$$

**Se  $R$  è una matrice  $(n \times n)$ , allora  $R^n = 0$ ,** infatti, per esempio, se  $n = 3$ :

$$R_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R^4 = R^5$$

$$e^{Rt} = I + Rt + R^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + R^n \frac{t^n}{n!} + 0 = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Soluzione delle Equazioni di Stato

Esempio:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} J_1 & | & 0 \\ \hline 0 & | & J_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_i I + R$$

$$e^{J_1 t} = e^{-t} e^{Rt} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & | & 0 \\ \hline 0 & | & e^{J_2 t} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & | & 0 \\ 0 & e^{-t} & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10}e^{-t} + x_{20}te^{-t} \\ x_2(t) = x_{20}e^{-t} \\ x_3(t) = x_{30}e^{-2t} \end{cases}$$



# Soluzione delle Equazioni di Stato

## □ Metodo IV: Uso del Teorema di Cayley-Hamilton

$$\Delta(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0$$

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \dots - a_0I$$

$$A^{n+1} = AA^n = -a_{n-1} \left[ -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \dots - a_0I \right] - a_{n-2}A^{n-1} - \dots - a_0A$$

$$A^{n+2} = AA^{n+1} = -a_{n-1} \left[ -a_{n-1} \left[ -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \dots - a_0I \right] - a_{n-2}A^{n-1} - \dots - a_0A \right] \\ - a_{n-2} \left[ -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \dots - a_0I \right] - \dots - a_0A^2$$

- Da queste relazioni si deduce che qualsiasi potenza della matrice  $A$  può essere espressa come combinazione delle prime  $n-1$  potenze

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} A^i \alpha_i(t)$$



# Soluzione delle Equazioni di Stato

- Usando il Teorema di Caley-Hamilton si trovano i termini  $\alpha_i$  per ogni autovalore:

$$\forall \lambda_i \Rightarrow e^{\lambda_i t} = 1 + \lambda_i t + \lambda_i^2 \frac{t^2}{2!} + \dots = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_i + \alpha_2(t)\lambda_i^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1}$$

- Considerando il caso di matrice  $A$  con autovalori distinti si costruisce la **Matrice Vandermonde** da cui si possono calcolare i coefficienti  $\alpha_i$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

- Nota:** Una Versione della Matrice di Vandermonde esiste anche nel caso di autovalori con molteplicità  $>1$ .



# Soluzione delle Equazioni di Stato

- **Esempio:**

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \text{Autovalori : } (\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = +2)$$

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{+2t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0(t) = \frac{e^{2t} + 2e^{-t}}{3} \\ \alpha_1(t) = \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3} \end{cases}$$

$$e^{At} = \frac{e^{2t} + 2e^{-t}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} (3x_{10} - 4x_{20}) e^{-t} + \frac{4}{3} x_{20} e^{2t} \\ \frac{1}{3} (x_{10} - 2x_{20}) e^{-t} + \frac{1}{3} (x_{10} + 2x_{20}) e^{2t} \end{bmatrix}}$$



# Soluzione delle Equazioni di Stato

- Consideriamo il Caso generale di Sistema forzato:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases}, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$e^{-At}\dot{\mathbf{x}} = e^{-At}A\mathbf{x} + e^{-At}B\mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[e^{-At}\mathbf{x}] = e^{-At}B\mathbf{u} \quad \Rightarrow$$

$$e^{-At}\mathbf{x} = e^{-At_0}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

- NOTA:** La matrice di transizione è l'unico elemento necessario alla soluzione del problema

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \mathbf{y}(t) = Ce^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \end{cases}$$



# Coordinate Modali

- Dato il sistema  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  Consideriamo la Trasformazione  $\mathbf{q} = M^{-1}\mathbf{x}$

$$\dot{\mathbf{q}} = M^{-1}\dot{\mathbf{x}} = M^{-1}A\mathbf{x} = M^{-1}AM\mathbf{q} = \Lambda\mathbf{q}$$

- Il vettore  $\mathbf{q}$  si chiama vettore modale o di coordinate modali

$$\mathbf{q}(t) = e^{\Lambda t} \mathbf{q}_0, \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \dots \\ q_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & .. & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & .. & .. \\ .. & .. & .. & 0 \\ 0 & .. & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{10} \\ \dots \\ q_{n0} \end{bmatrix}$$

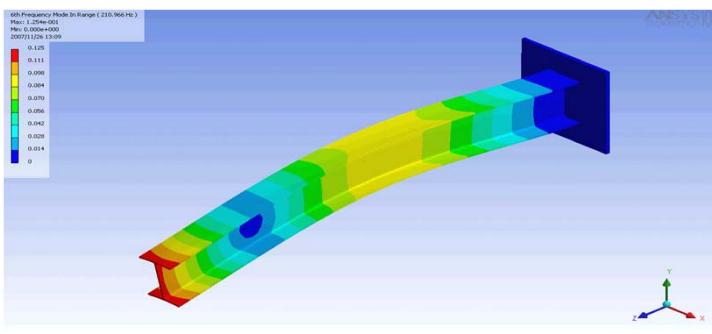
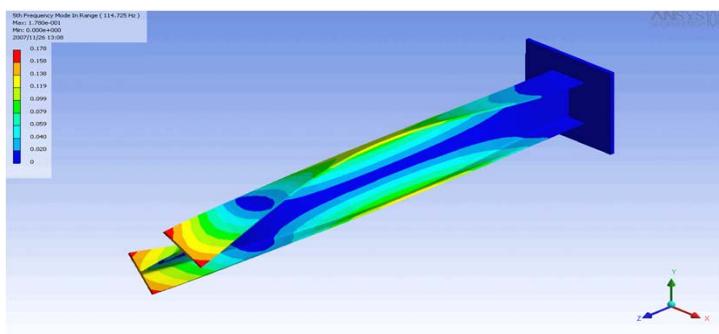
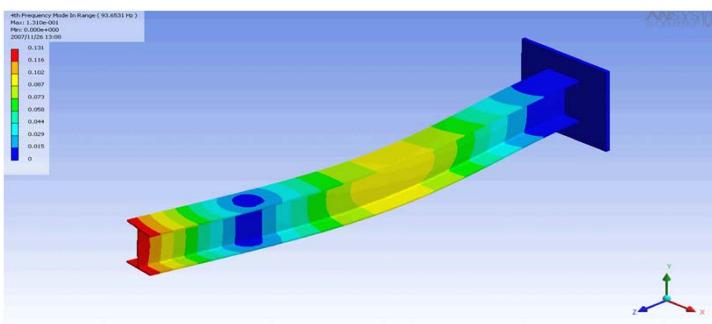
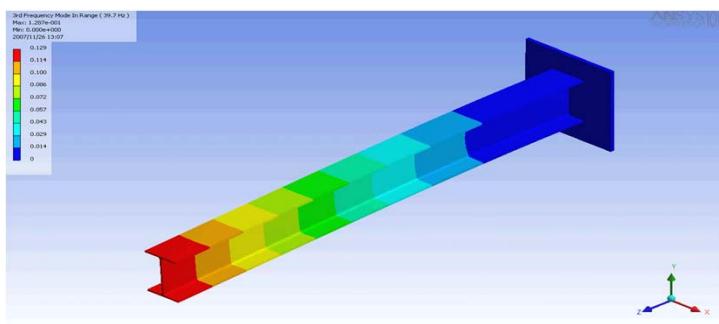
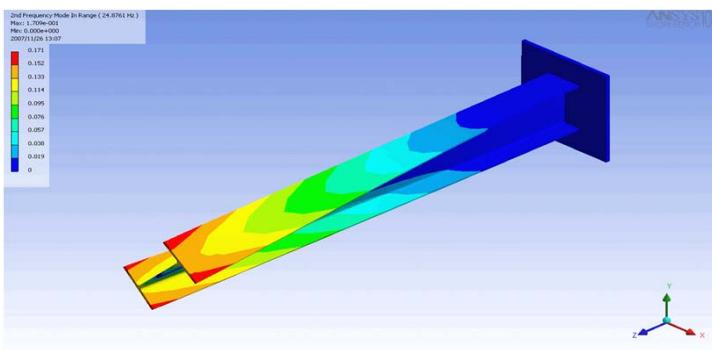
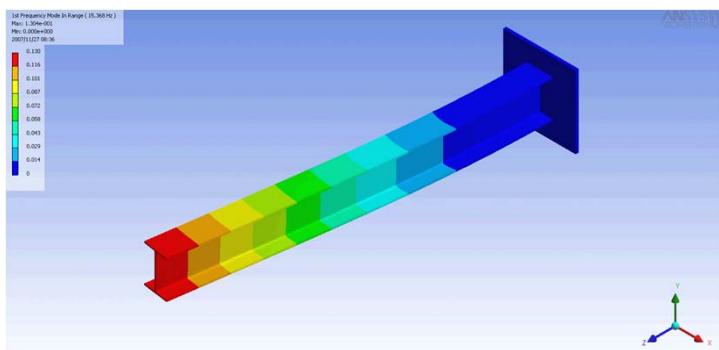
$$\mathbf{x} = M\mathbf{q} = M e^{\Lambda t} \mathbf{q}_0 = v_1 e^{\lambda_1 t} q_{10} + \dots + v_n e^{\lambda_n t} q_{n0}$$

$$\mathbf{x} = M\mathbf{q} = M e^{\Lambda t} M^{-1} \mathbf{x}_0 = v_1 \mu_1^T x_0 e^{\lambda_1 t} + \dots + v_n \mu_n^T x_0 e^{\lambda_n t}$$

[Vibrations - WIKI](#)



# Coordinate Modali





## Coordinate Modali

Dato il sistema



$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{AC} \\ \dot{\delta}_T \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccc|c} -.021 & .122 & 0 & -.322 & 1 \\ -.209 & -.53 & 2.21 & 0 & -.044 \\ .017 & -.164 & -.412 & 0 & .544 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -.25 \end{array} \right] \boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

Autovalori

-0.4804 + 0.6083i  
-0.4804 - 0.6083i  
-0.0011 + 0.1523i  
-0.0011 - 0.1523i  
-0.2500

Autovettori

|                   |                   |                   |                   |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| -0.0430 + 0.0961i | -0.0430 - 0.0961i | 0.8905            | 0.8905            |
| -0.9118           | -0.9118           | -0.0848 - 0.0291i | -0.0848 + 0.0291i |
| -0.0245 - 0.2419i | -0.0245 + 0.2419i | 0.0659 - 0.0128i  | 0.0659 + 0.0128i  |
| -0.2253 + 0.2182i | -0.2253 - 0.2182i | -0.0872 - 0.4323i | -0.0872 + 0.4323i |
| 0                 | 0                 | 0                 | 0                 |

Column 5

-0.8943  
0.4200  
-0.0006  
0.0025  
0.1544



## Coordinate Modali



$$\mathbf{q} = M^{-1}\mathbf{x} \quad \dot{\mathbf{q}} = M^{-1}\dot{\mathbf{x}} = M^{-1}A\mathbf{x} = M^{-1}AM\mathbf{q} = \Lambda\mathbf{q}$$

JNORM =

Columns 1 through 4

|                   |                   |                   |                   |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| -0.4804 + 0.6083i | 0.0000 + 0.0000i  | -0.0000 + 0.0000i | -0.0000 - 0.0000i |
| 0.0000 - 0.0000i  | -0.4804 - 0.6083i | -0.0000 + 0.0000i | -0.0000 - 0.0000i |
| 0.0000 + 0.0000i  | -0.0000 - 0.0000i | -0.0011 + 0.1523i | -0.0000 - 0.0000i |
| -0.0000 + 0.0000i | 0.0000 - 0.0000i  | -0.0000 - 0.0000i | -0.0011 - 0.1523i |
| 0                 | 0                 | 0                 | 0                 |

Column 5

|                  |
|------------------|
| 0.0000 - 0.0000i |
| 0.0000 + 0.0000i |
| 0.0000 + 0.0000i |
| 0.0000 - 0.0000i |
| -0.2500          |



# Coordinate Modali

```
M =
-0.0430  0.0961  0.8905      0  -0.8943
-0.9118      0  -0.0848  -0.0291  0.4200
-0.0245 -0.2419  0.0659  -0.0128 -0.0006
-0.2253  0.2182 -0.0872  -0.4323  0.0025
      0      0      0      0  0.1544
J =
-0.4804  0.6083  -0.0000  0.0000  0.0000
-0.6083 -0.4804  -0.0000      0  0.0000
-0.0000  0.0000  -0.0011  0.1523  0.0000
  0.0000  0.0000  -0.1523 -0.0011 -0.0000
      0      0      0      0  -0.2500
>> inv(M)
ans =
-0.1005 -1.1110  0.0269  0.0741  2.4391
  0.3066  0.0631 -3.9117  0.1117  1.5864
  1.0850 -0.0604  0.4233 -0.0085  6.4521
 -0.0117  0.6231 -2.0744 -2.2939 -1.7342
      0      0      0      0  6.4779
```

$$e^{J_{NORM}t} = \begin{bmatrix} e^{(-.4804+j0.6083)t} & 0 \\ 0 & e^{(-.4804-j0.6083)t} \\ e^{(-.0011+j0.1523)t} & 0 \\ 0 & e^{(-.0011-j0.1523))t} \\ 0 & e^{-25t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = M e^{J_{NORM}t} M^{-1} \mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} \boldsymbol{\mu}_1^T \mathbf{x}_0 + \dots + \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t} \boldsymbol{\mu}_n^T \mathbf{x}_0 = \sum_{i=1,\dots,n} \mathbf{C}_i e^{\lambda_i t}$$

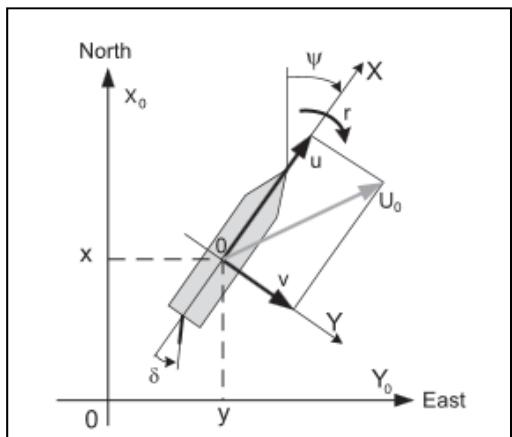
$$\mathbf{C}_i = \mathbf{v}_i \boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_1 e^{-0.4804t} \cos(0.6083t + \mathbf{B}_1) + \mathbf{A}_2 e^{-0.0011t} \cos(0.1523t + \mathbf{B}_2) + \mathbf{A}_3 e^{-0.25t}$$



## Coordinate Modali

- Dato il sistema che descrive la dinamica linearizzata laterale di una nave:



$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.589 & -3.847 \\ -0.763 & -0.351 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.1374 \\ -1.3402 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = C\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau; \mathbf{y} = C\mathbf{x}$$

$$e^{At} = L^{-1} \left\{ [sI - A]^{-1} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} s + 0.351 & -3.847 \\ -0.763 & s + 0.589 \end{bmatrix} \right\}; \Delta = s^2 + 0.94s - 2.729$$

$$\mathbf{q} = M^{-1} \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = M^{-1} A M \mathbf{q} + M^{-1} B \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2.1874 & 0 \\ 0 & 1.2474 \end{bmatrix} \mathbf{q} + \begin{bmatrix} 1.5459 \\ 1.7341 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = C M \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -0.9235 & 0.9025 \\ -0.3837 & -0.4308 \end{bmatrix} \mathbf{q}$$



## Coordinate Modali

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-2.1874t} & 0 \\ 0 & e^{+1.2474t} \end{bmatrix}$$

- Consideriamo un ingresso a gradino unitario, a partire dall'istante  $t_0 = 0$ :

$$e^{At} = L^{-1} \left\{ [sI - A]^{-1} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} s + 0.351 & -3.847 \\ -0.763 & s + 0.589 \end{bmatrix} \right\}; \Delta = s^2 + 0.94s - 2.729$$

$$\mathbf{q} = M^{-1}\mathbf{x} \quad \mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2.1874t} & 0 \\ 0 & e^{+1.2474t} \end{bmatrix} \mathbf{q}_0 + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2.1874(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{+1.2474(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5459 \\ 1.7341 \end{bmatrix} d\tau$$

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2.1874t} q_{10} + 0.7067(1 - e^{-2.1874t}) \\ e^{+1.2474t} q_{20} + 1.3902((1 + e^{+1.2474t})) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = M\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} -0.9235 & 0.9025 \\ -0.3837 & -0.4308 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2.1874t} q_{10} + 0.7067(1 - e^{-2.1874t}) \\ e^{+1.2474t} q_{20} + 1.3902((1 + e^{+1.2474t})) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = M\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} -0.9235 & 0.9025 \\ -0.3837 & -0.4308 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2.1874t} q_{10} + 0.7067(1 - e^{-2.1874t}) \\ e^{+1.2474t} q_{20} + 1.3902((1 + e^{+1.2474t})) \end{bmatrix}$$

$$v(t) = -1.9225 + 0.6526e^{-2.1874t} + \color{red}{1.2547e^{+1.2474t}}$$

$$r(t) = 0.3277 + 0.2712e^{-2.1874t} - \color{red}{0.5989e^{+1.2474t}}$$



## Esempi

□ **Controllo di assetto satellite:** Il sistema ha due ingressi ( $\theta_c$  e  $T_G$ ) e, supponiamo una singola uscita  $\theta$ . Le equazioni che descrivono il moto sono:

$$J\ddot{\theta} - C_G\theta = -k_m i + T_G$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = k_\theta(\theta_c - \theta) - k_b \omega$$

$$J_{RW}\dot{\omega} = k_m i$$

- Il sistema ha 4 variabili di stato, 2 ingressi ed una uscita. Gli ingressi sono il riferimento ed il disturbo

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ed \\ y = Cx \end{cases}, \quad x \in \Re^4, u \in \Re^1, y \in \Re^1, d \in \Re_1$$

$$\begin{cases} x_1 = \theta & u_1 = \theta_c & y = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} & d_1 = T_G \\ x_3 = i \\ x_4 = \omega \end{cases}$$

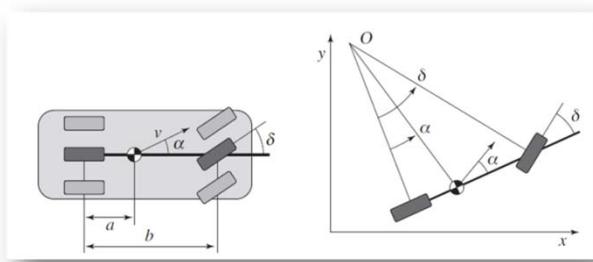
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \theta \\ \dot{x}_2 = \frac{C_G}{J}x_1 - \frac{k_m}{J}x_3 + \frac{1}{J}T_G \\ \dot{x}_3 = -\frac{R}{L}x_3 - \frac{1}{L}x_1 - \frac{kb}{L}x_4 + \frac{1}{L}\theta_c \\ \dot{x}_4 = \frac{k_m}{J_{RW}}x_3 \end{cases}$$



## Esempi

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{C_G}{J} & 0 & -\frac{k_m}{J} & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & -\frac{R}{L} & -\frac{k_b}{L} \\ 0 & 0 & \frac{k_m}{J_{RW}} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \theta_c \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{J} T_G \\ 0 \end{bmatrix} \\ y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x \end{cases}$$

□ **Controllo di sterzata:** Il sistema ha un ingresso dato dall'angolo di sterzata ed una singola uscita che è la traslazione laterale.



$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{av_0}{b} \\ \frac{v_0}{b} \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0] x \end{aligned}$$



## Esempi

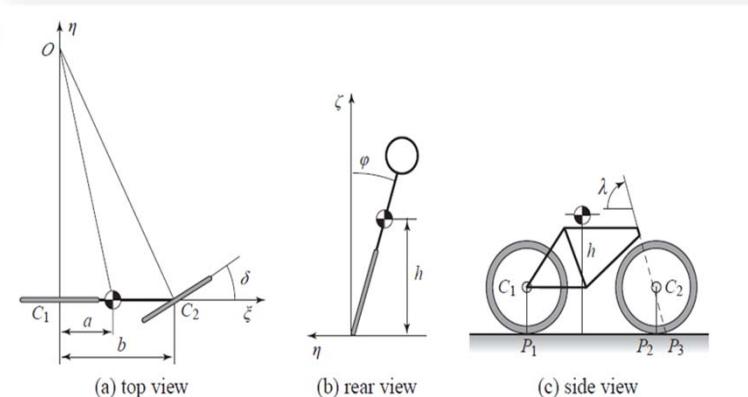
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 16.67 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 6.25 \\ 4.1675 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

$$e^{At} = L^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{16.67}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 16.67t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & .06 \end{bmatrix}; M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16.67 \end{bmatrix}; e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = M \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 16.67t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Controllo di Equilibrio di un biciclo:** Il sistema ha un ingresso dato dalla coppia sul manubrio ed una uscita che è l'angolo di tilt.



**Figure 3.5:** Schematic views of a bicycle. The steering angle is  $\delta$ , and the roll angle is  $\varphi$ . The center of mass has height  $h$  and distance  $a$  from a vertical through the contact point  $P_1$  of the rear wheel. The wheel base is  $b$ , and the trail is  $c$ .

$$M = \begin{pmatrix} 96.8 (6.00) & -3.57 (-0.472) \\ -3.57 (-0.472) & 0.258 (0.152) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -50.8 (-5.84) \\ 0.436 (0.436) & 2.20 (0.666) \end{pmatrix},$$

$$K_0 = \begin{pmatrix} -901.0 (-91.72) & 35.17 (7.51) \\ 35.17 (7.51) & -12.03 (-2.57) \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & -87.06 (-9.54) \\ 0 & 3.50 (0.848) \end{pmatrix}.$$



## Esempi

$$M \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} + Cv_0 \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + (K_0 + K_2 v_0^2) \begin{bmatrix} \varphi \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}$$

**Ipotesi:  $v_0 = 9 \text{ m/sec}$**

$$\begin{bmatrix} 96.8 & -3.57 \\ -3.57 & 0.258 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -457.2 \\ 3.924 & 19.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -901 & -7060.43 \\ 35.17 & 271.47 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T$$

□ Definizione del vettore di stato, ingressi ed uscite:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}; u(t) = T; y(t) = \varphi$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 8.7411x_1 + 8.5031x_2 + 69.716x_3 + 0.2922u \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -15.36x_1 + 102.4347x_2 - 87.3634x_3 + 0.2922u \end{cases}$$



## Esempi

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8.7411 & 8.5031 & 69.716 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -15.36 & 102.4347 & -87.3634 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2922 \\ 0 \\ 7.92 \end{bmatrix} u \quad e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{9.43t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-0.9269t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

INVM =

```
-117.3765  1.7572 -35.1427  1.0000
  9.0619  9.7761  80.8478    0
 108.3616 -11.4911  415.7435    0
      0       0  461.1070    0
```

>> M

M =

```
  0   0.0099  0.0084 -0.0093
  0   0.0931 -0.0078 -0.0093
  0     0     0  0.0022
1.0000  0.9956  0.9999 -0.9999
```



## Esempi

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{9.43t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-0.9269t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \mathbf{q}_0 + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{9.43(t-\tau)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-0.9269(t-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{(t-\tau)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8.4335 \\ 2.8566 \\ -3.3577 \\ 0 \end{bmatrix} u(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} q_{10} \\ e^{9.43t} q_{20} \\ e^{-0.9269t} q_{30} \\ e^t q_{40} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 8.4335 \\ 2.8566 e^{9.43(t-\tau)} \\ -3.3577 e^{-0.9269(t-\tau)} \\ 0 \end{bmatrix} u(\tau) d\tau$$

$\mathbf{M} =$

|        |        |         |         |
|--------|--------|---------|---------|
| 0      | 0.0099 | 0.0084  | -0.0093 |
| 0      | 0.0931 | -0.0078 | -0.0093 |
| 0      | 0      | 0       | 0.0022  |
| 1.0000 | 0.9956 | 0.9999  | -0.9999 |

### ■ Risposta a condizioni iniziali

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & .0099 & .0084 & -.0093 \\ 0 & .0931 & -.0078 & -.0093 \\ 0 & 0 & 0 & .0022 \\ 1 & .9956 & .9999 & -.9999 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} .0099 e^{9.43t} q_{20} + .0084 e^{-0.9269t} q_{30} - .0093 e^t q_{40} \\ \dots \\ .0022 e^t q_{40} \\ \dots \end{bmatrix}$$



## Esempi

- Dati i sistemi:

$$\ddot{y} + 5\ddot{y} + 9\dot{y} + 7\dot{y} + 2y = \dot{u} + 4u$$

$$\ddot{y} + 4\ddot{y} - 6\dot{y} + 10y = \ddot{u} + 4u$$

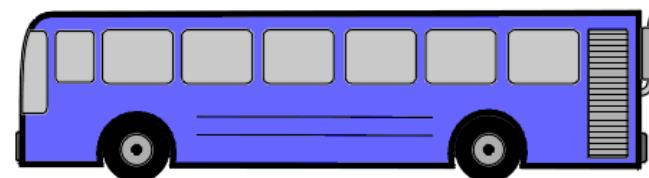
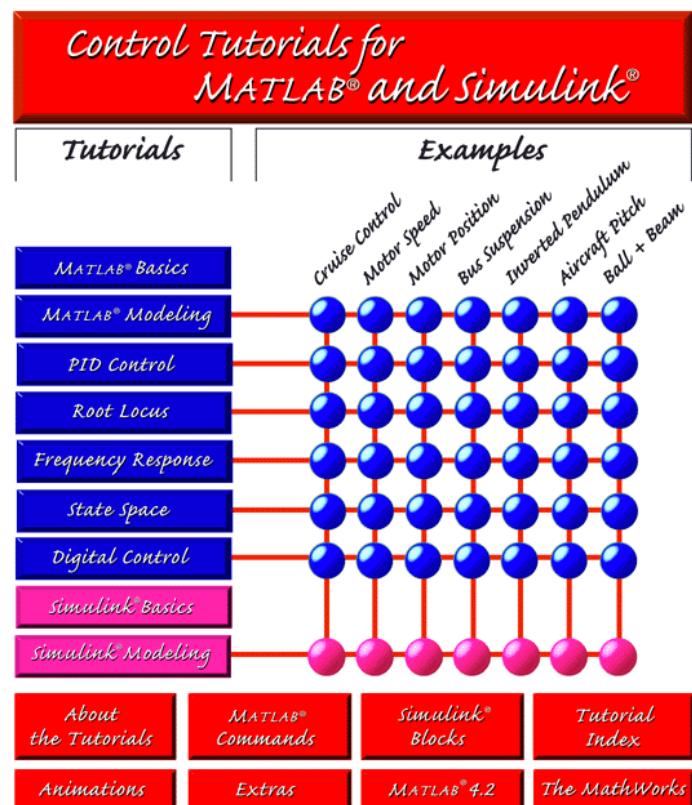
$$\begin{cases} 4\ddot{y}_1 - 8\dot{y}_1 + 6y_2 = u_1 + 4u_2 \\ \ddot{y}_2 - y_1 = 8u_2 \end{cases}$$

Determinare una rappresentazione nello spazio di stato e calcolare  
I vettori di stato e di uscita analiticamente e mediante Matlab

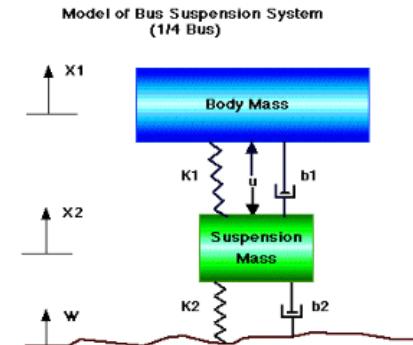


# Esercizi

## Tutorial University of Michigan

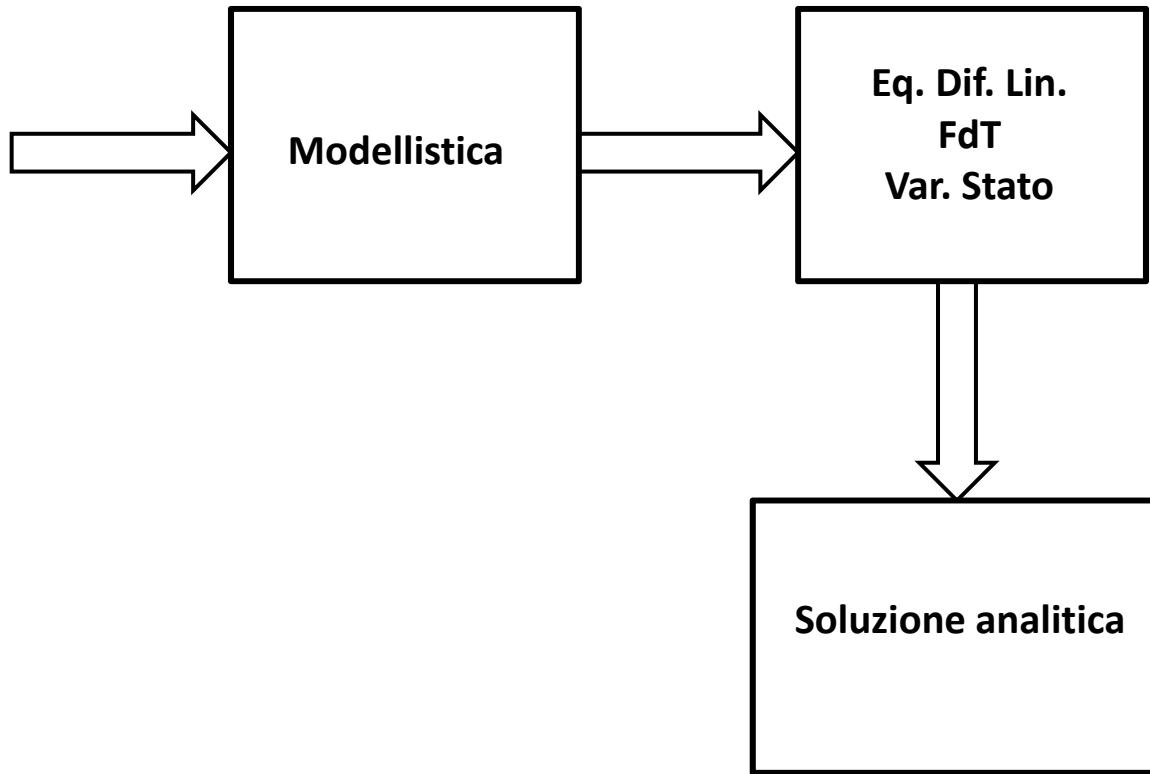


problem. When the suspension system is designed, a 1/4 bus model (one of the four wheels) is u





# Sommario





# Risposta a Segnali Canonici



Valutazione della risposta di un sistema descritto nello spazio di stato a segnali standard usati in analisi di sistema e di controllo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, x(t_0) = x_0$$

## □ Risposta all'impulso di Dirac

Cosideriamo dapprima un singolo ingresso scalare impulsivo con condizioni iniziali nulle:

$$u(t) = u_j(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ .. \\ \delta(t) \\ .. \\ 0 \end{bmatrix} \quad Bu(t) \Rightarrow b_j u_j(t) = b_j \delta(t)$$



## Risposta a Segnali Canonici

$$g_j(t) = Ce^{At} \int_0^t e^{-A\tau} b_j \delta(\tau) d\tau + d_j \delta(t)$$

Usando la proprietà di campionamento della funzione di Dirac e notando che vale:

$$e^{-A \cdot 0} = I \quad g_j(t) = Ce^{At} b_j + d_j \delta(t)$$

Se estendiamo la risposta impulsiva a tutti gli  $m$  canali di ingresso si ha quindi:

$$g(t) = Ce^{At} B + D\delta(t)$$

Nota che:

$$L[g(t)] = CL[e^{At}]B + DL[\delta(t)] = C(sI - A)^{-1}B + D = G(s)$$



# Risposta a Segnali Canonici

## Risposta al gradino unitario

$$\begin{aligned}r_j(t) &= Ce^{At} \int_0^t e^{-A\tau} b_j u_{-1}(\tau) d\tau + d_j = C \int_0^t e^{A\xi} b_j u_{-1}(t - \xi) d\xi + d_j \\r_j(t) &= CA^{-1} [e^{At} - I] b_j + d_j\end{aligned}$$

- Se estendiamo la risposta a tutti gli  $m$  canali di ingresso si ha quindi:

$$r(t) = CA^{-1} [e^{At} - I] B + D = C [e^{At} - I] A^{-1} B + D$$

- Nel caso di sistema con autovalori tutti di parte reale strettamente negativa

$$r_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ CA^{-1} [e^{At} - I] B + D \right\} = -CA^{-1} B + D$$



## Proprietà della Matrice di Transizione

La matrice di Transizione ha delle speciali proprietà che diventano molto importanti dal punto di vista applicativo nel caso di **matrice esponenziale** (sistemi lineari tempo invarianti)

Dalla definizione:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots$$

$$e^{A \cdot 0} = I + A \cdot 0 + \frac{A^2 \cdot 0^2}{2!} + \dots = I$$

$$\int_0^t e^{At} d\tau = It + \frac{A t^2}{2!} + \frac{A^2 t^3}{3!} \dots$$

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$$



## Proprietà della Matrice di Transizione

$$\int_0^t e^{At} d\tau = It + \frac{A t^2}{2!} + \frac{A^2 t^3}{3!} \dots$$
$$A \int_0^t e^{At} d\tau + I = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} \dots = e^{At}$$

Nel caso di A non singolare:

$$\int_0^t e^{At} d\tau = A^{-1} (e^{At} - I) = (e^{At} - I) A^{-1}$$



# Extra



```
>> [va2,ve2]=eig(a2)
va2 =
-0.5774    0.1048    0.2182
-0.5774   -0.3145   -0.4364
-0.5774    0.9435    0.8729
ve2 =
1.0000      0      0
      0   -3.0000      0
      0      0   -2.0000
~~
```



# PROPRIETA' STRUTTURALI

- Introduzione
- Stabilità
  - Introduzione e Definizioni
  - Stabilità nei Sistemi Lineari
  - Metodo di Lyapunov
  - Stabilità mediante FdT
  - Criterio di Routh - Hurwitz
- Controllabilità / Raggiungibilità
- Osservabilità
- Realizzazioni

**STABILITA'**



**CONTROLLABILITA'**



**OSSERVABILITA'**





# Riferimenti

- Capitoli 2, 3, 4, 5, 6 Testo di Bolzern
- Capitoli 3 4, 6 testo di Murray (download)
- Appunti ECE801
- Lezioni di Boyd online video

Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.

Con. Avanzati

Con. Standard





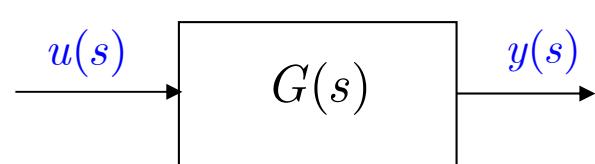
# Introduzione

- L'analisi dei sistemi dinamici riguarda, in generale, lo studio di proprietà specifiche estraibili dalla loro modellazione matematica e che si dividono in:
  - **Proprietà interne o strutturali:** esse dipendono dalla natura stessa del sistema e non da sollecitazioni esterne
    - Le proprietà strutturali descrivono la capacità di un sistema di operare in modo autonomo, di descriverne in modo univoco la sua evoluzione completa e di permettere la gestione totale della sua evoluzione nel sottospazio di riferimento
  - **Proprietà esterne:** esse dipendono dalla relazione esterna ingresso - uscita
    - Le proprietà esterne descrivono le caratteristiche di risposta di un sistema a segnali di ingresso endogeno ed esogeno
- Alla fine del processo di analisi, il progettista di un sistema di controllo possiede un set di parametri di riferimento, i quali forniscono i requisiti di progetto del comportamento desiderato del sistema stesso



## Proprietà strutturali

- L'analisi di sistemi dinamici lineari tempo invarianti viene effettuata mediante 3 diverse rappresentazioni matematiche del tutto equivalenti:



$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{\prod_i (s + z_i)}{\prod_j (s + p_j)}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = u \\ y_0, \dot{y}_0, \dots \end{cases}$$

- Molti processi fisici diversi in natura possono essere descritti mediante modelli semplificati aventi la stessa forma analitica di cui sopra.
- Possiamo usare proprietà generali dell'algebra lineare, della teoria delle matrici, dell'algebra delle funzioni complesse, ecc. per stabilire caratteristiche generali riguardanti i sistemi studiati, indipendentemente dalla natura fisica del processo?

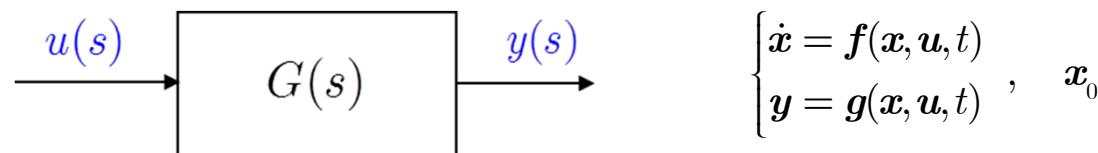
Subset di un problema più complesso riguardante sistemi nonlineari in generale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \\ y(t) = g[x(t), u(t), t] \end{cases}$$



# Stabilità: Introduzione e Definizioni

- Il concetto di Stabilità è del tutto generale ed è applicabile a sistemi Lineari e Nonlineari, Continui e Discreti, Tempo invarianti e Tempo varianti e addirittura a sistemi che non hanno una descrizione matematica



## Definizioni Preliminari

- Definizione:** Dati l'istante iniziale, lo stato iniziale ed il segnale di ingresso  $t_0, x(t_0), u(t)$ : si definisce movimento dello stato, l'andamento dello stato al tempo corrente ottenuto come soluzione del sistema di equazioni differenziali costitutive.

$$\tilde{x}(t) \text{ soddisfa } \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}, u, t) \\ \tilde{y} = g(\tilde{x}, u, t) \end{cases}, \quad \tilde{x}_0$$

- Definizione:** Si definisce movimento di equilibrio, quel particolare movimento  $x_E(t)$  per cui:

$$\begin{cases} \dot{x}_E = 0 = f(x_E, u_E, t) \\ y_E = g(x_E, u_E, t) \end{cases}, \quad x_{E0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= [r_0 \quad 0 \quad \omega_0 t \quad \omega_0 \quad 0 \quad 0]^T \\ u_0 &= [0 \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned}}$$



# Stabilità: Introduzione e Definizioni

- **Definizione:** Si definisce perturbazione, la variazione di un movimento (anche di equilibrio) dovuta a variazioni di condizioni iniziali e/o ingressi ed indicata come:

$$\tilde{x}^*(t) = \tilde{x}(t) + \delta x(t)$$

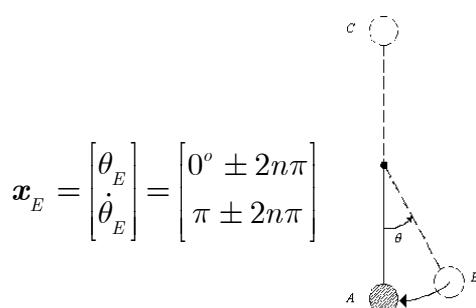
$$\dot{\tilde{x}}^*(t) = \dot{\tilde{x}}(t) + \delta \dot{x}(t) = f(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*, t), \quad \tilde{x}_0^* = \tilde{x}_0 + \delta \tilde{x}_0$$

Perturbazione di un movimento per variazione di condizioni iniziali

$$\ddot{\tilde{x}}_E^*(t) = \ddot{\tilde{x}}_E(t) + \delta \dot{x}(t) = \delta \dot{x}(t) = f(\tilde{x}^*, \tilde{u}, t), \quad \tilde{x}_E^* = \tilde{x}_{E0} + \delta \tilde{x}_E$$

Perturbazione di un movimento di equilibrio per variazione di condizioni iniziali

- La perturbazione può essere quindi la variazione di un movimento, oppure di un movimento di equilibrio.
- In generale, all'equilibrio, si suppone nulla la perturbazione di ingresso e si considera soltanto l'ingresso nominale necessario per mantenere la condizione di equilibrio .



**Posizione A)** In questo caso le condizioni iniziali sono individuate dal valore  $\theta_0 = 0$  e  $d\theta_0/dt = 0$ ; se tali condizioni vengono perturate (il pendolo viene portato in B) il pendolo tenderà a tornare nella posizione A (equilibrio stabile)

**Posizione C)** Le condizioni iniziali sono, questa volta, quelle per cui  $\theta_0 = 180^\circ$  e  $d\theta_0/dt = 0$ ; se il pendolo viene spostato pur di poco dalla sua situazione di equilibrio, tenderà ad allontanarsi dalla sua posizione iniziale (equilibrio instabile)



## Stabilità: Esempi

- Per un sistema lineare tempo invariante autonomo, l'unica condizione di equilibrio è l'origine

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases}, \quad \mathbf{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t x_{10} \\ e^{-t} x_{20} \\ e^{-2t} x_{30} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_E = A\mathbf{x}_E = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}_{E0} = 0$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad y(t) = c_1 e^t x_{10} + c_2 e^{-t} x_{20} + c_3 e^{-2t} x_{30}$$

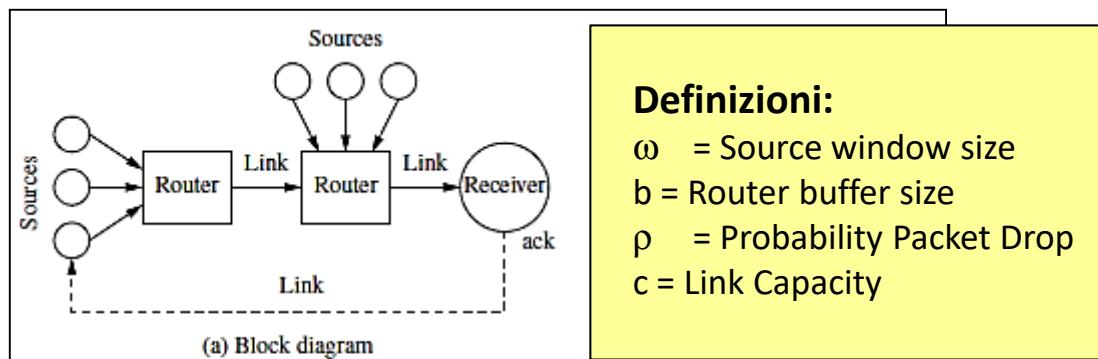
$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad y(t) = c_2 e^{-t} x_{20} + c_3 e^{-2t} x_{30}$$



# Stabilità: Esempi

**Controllo Congestione Network:** Il sistema ha due meccanismi di controllo, denominati protocolli: Transmission Control Protocol (TCP) per la comunicazione end-to-end ed Internet Protocol (IP) per il routing dei pacchetti e la comunicazione tra i vari gateway.

Il meccanismo di controllo TCP si basa sulla conservazione del numero dei pacchetti nell'anello sender-receiver-sender. La velocità di trasmissione aumenta in modo esponenziale in assenza di congestione e viene ridotta a livelli predeterminati in presenza di congestione.



**Figure A.12:** Internet congestion control. (a) Source computers send information to routers, which forward the information to other routers that eventually connect to the receiving computer. When a packet is received, an acknowledgement packet is sent back through the routers (not shown). The routers buffer information received from the sources and send the data across the outgoing link. (b) The equilibrium buffer size  $b_e$  for a set of  $N$  identical computers sending packets through a single router with drop probability  $p$ .

## Variabili di Stato:

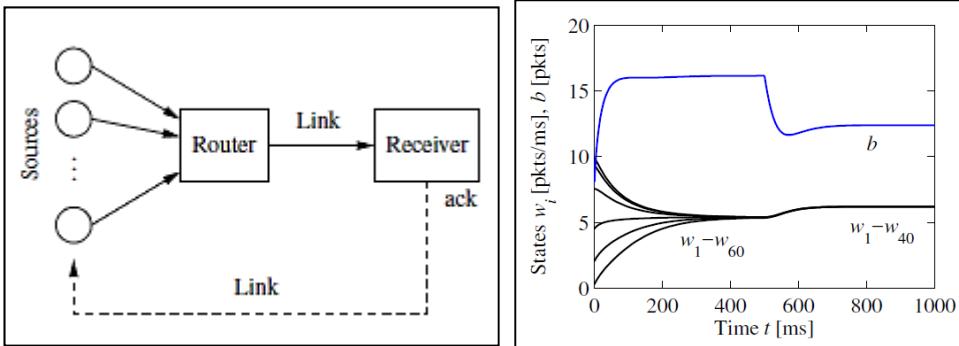
1. Dimensione dinamica della finestra di ogni sorgente in funzione dell'ultimo pacchetto ricevuto.
2. Dimensione del buffer di memoria del router indicante il numero di pacchetti disponibili per l'invio.

**Calcolo dei punti di equilibrio:** La dimensione di equilibrio del buffer rappresenta un bilancio tra la velocità di trasmissione delle sorgenti e la capacità dei link.



# Stabilità: Esempi

**Esempio:** Singolo Router, con N Sorgenti uguali e Buffer non superiore a 500 pacchetti



- As shown on the left, multiple sources attempt to communicate through a router across a single link. An “ack” packet sent by the receiver acknowledges that the message was received; otherwise the message packet is resent and the sending rate is slowed down at the source.
- The simulation on the right is for 60 sources starting random rates, with 20 sources dropping out at  $t = 500$  ms. The buffer size is shown at the top, and the individual source rates for 6 of the sources are shown at the bottom.

$$\begin{cases} \frac{c}{x_{2E}} - \rho c(1 + \frac{x_{1E}^2}{2}) = 0 \\ \frac{Ncx_{1E}}{x_{2E}} - c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - \rho x_{2E}(1 + \frac{x_{2E}^2}{2N^2}) = 0 \\ x_{1E} = \frac{1}{N} x_{2E} \end{cases}$$

$$x_1 = \omega, x_2 = b$$

$$\dot{x} = \mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c}{x_2} - \rho c(1 + \frac{x_1^2}{2}) \\ \frac{Ncx_1}{x_2} - c \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_E = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{c}{x_{2E}} - \rho c(1 + \frac{x_{1E}^2}{2}) \\ \frac{x_{2E}}{Ncx_{1E}} - c \end{bmatrix} = 0$$

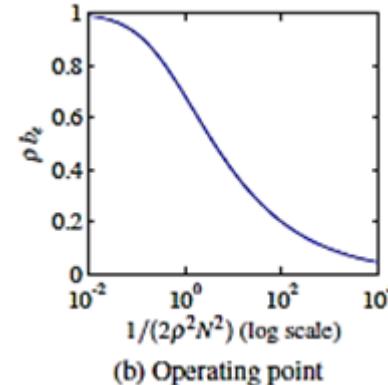
$$\begin{cases} \frac{1}{2\rho^2 N^2} (\rho^3 x_{2E}^3) + (\rho x_{2E}) - 1 = 0 \\ x_{1E} = \frac{1}{N} x_{2E} \end{cases}$$



## Stabilità: Esempi

Soluzione numerica dell'equazione di equilibrio per  $x_{2E}$  (dimensione del buffer all'equilibrio).

$$\frac{1}{2\rho^2 N^2} (\rho^3 x_{2E}^3) + (\rho x_{2E}) - 1 = 0$$



### ■ Studio del sistema linearizzato

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c}{x_2} - \rho c(1 + \frac{x_1^2}{2}) \\ \frac{Ncx_1}{x_2} - c \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = f(x) \Rightarrow \dot{x} = \dot{x}_E + \delta\dot{x} \Rightarrow \delta\dot{x} = J \Big|_{x_E} \delta x$$

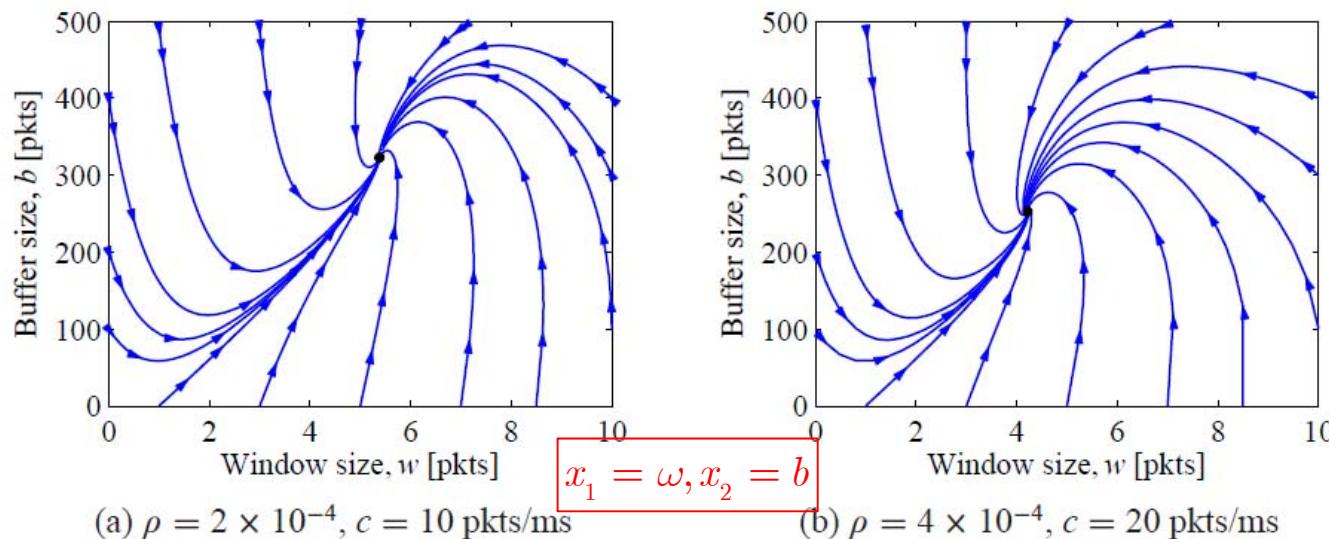
$$J \Big|_{x_E} = \begin{bmatrix} -\rho c x_1 & -\frac{c}{x_2^2} \\ \frac{Nc}{x_2} & -\frac{Ncx_1}{x_2^2} \end{bmatrix}_{x_E}$$

Cosa succede alla evoluzione del sistema nel tempo se il sistema è perturbato dalla condizione di equilibrio trovata precedentemente?



## Stabilità: Esempi

- Introducendo i valori numerici precedenti, si possono tracciare gli andamenti delle perturbazioni nel tempo oppure usando il piano delle fasi, nel caso bidimensionale, la variazione relativa delle variabili perturate a partire da una condizione iniziale.
- Il risultato mostra che, a partire da una condizione iniziale perturbata, il sistema torna alla condizione di equilibrio.

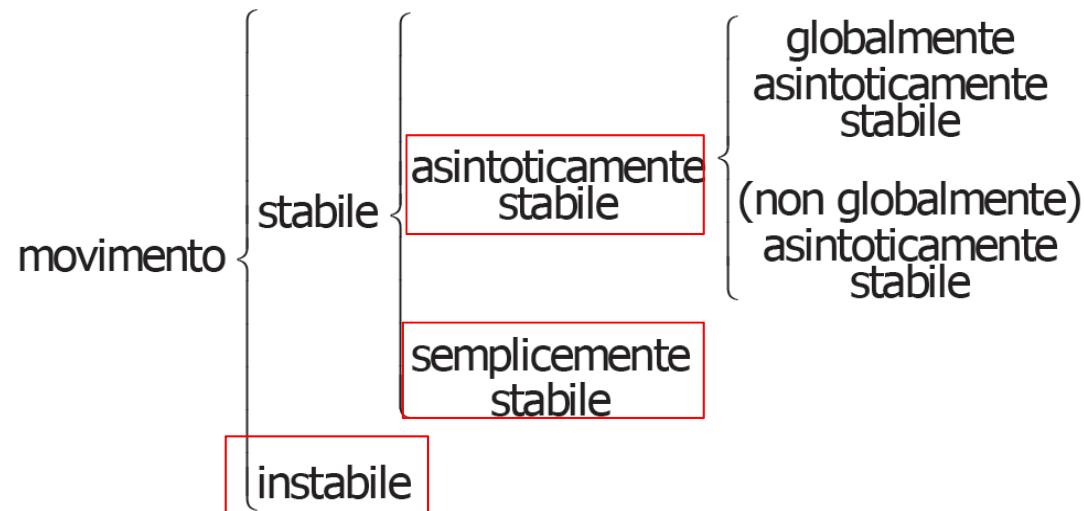


**Figure 4.10:** Phase portraits for a congestion control protocol running with  $N = 60$  identical source computers. The equilibrium values correspond to a fixed window at the source, which results in a steady-state buffer size and corresponding transmission rate. A faster link (b) uses a smaller buffer size since it can handle packets at a higher rate.

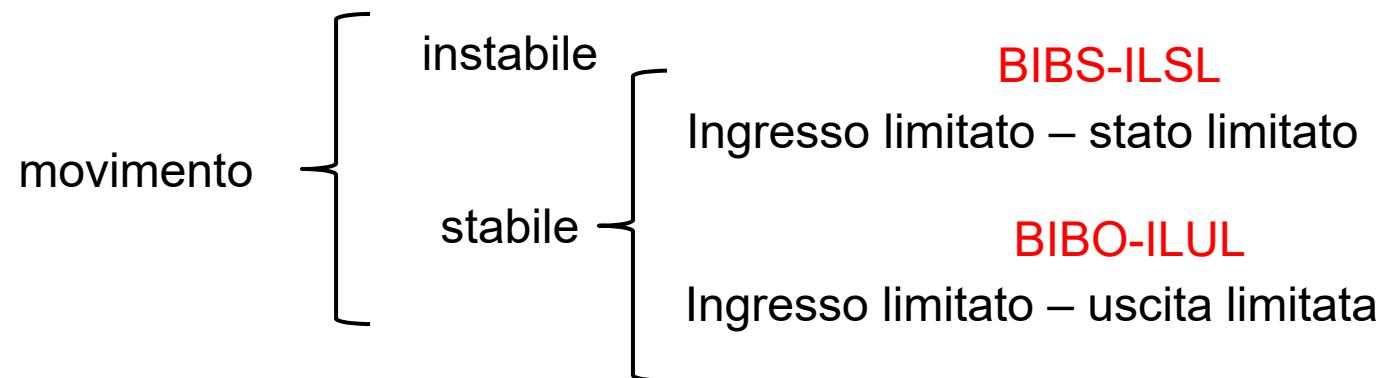


## Stabilità: Classificazione

□ **Definizione-Stabilità Interna:** indipendente dagli ingressi al sistema



□ **Definizione-Stabilità Esterna:** dipendente dagli ingressi al sistema

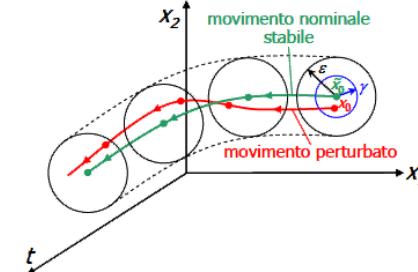




## Stabilità Interna

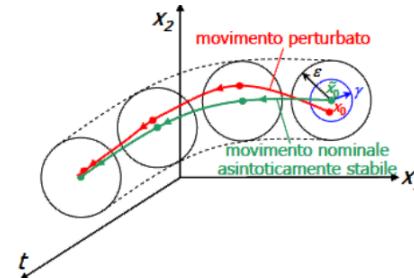
Un movimento  $\tilde{x}(\cdot)$  si dice **stabile** se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste un  $\gamma > 0$  tale che, per tutti gli stati iniziali  $x_0$  per cui risulta  $\|\delta x(t_0 = 0)\| = \|x_0 - \tilde{x}_0\| \leq \gamma$ , si abbia

$$\|\delta x(t)\| = \|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$



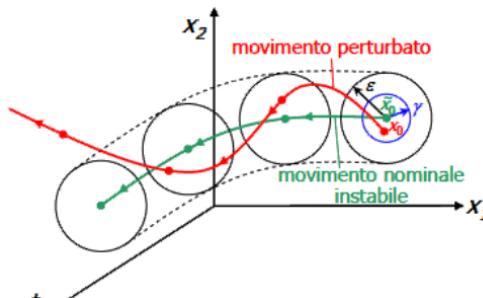
Un movimento  $\tilde{x}(\cdot)$  si dice **asintoticamente stabile** se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste un  $\gamma > 0$  tale che, per tutti gli stati iniziali  $x_0$  per cui  $\|\delta x(t_0 = 0)\| = \|x_0 - \tilde{x}_0\| \leq \gamma$ , si abbia:

- 1)  $\|\delta x(t)\| = \|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$
- 2)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta x(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \tilde{x}(t)\| = 0$



Un movimento  $\tilde{x}(\cdot)$  si dice **instabile** se non soddisfa le condizioni di stabilità. In tal caso, esiste almeno un  $\varepsilon > 0$  tale che, per ogni  $\gamma > 0$ , almeno uno degli stati iniziali  $x_0$  per cui  $\|\delta x(t_0 = 0)\| = \|x_0 - \tilde{x}_0\| \leq \gamma$  è tale che

$$\exists t \geq 0 : \|\delta x(t)\| = \|x(t) - \tilde{x}(t)\| > \varepsilon$$

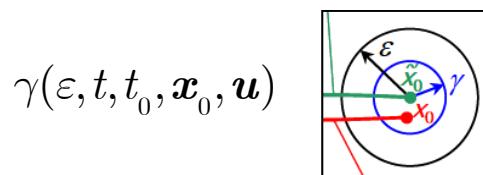




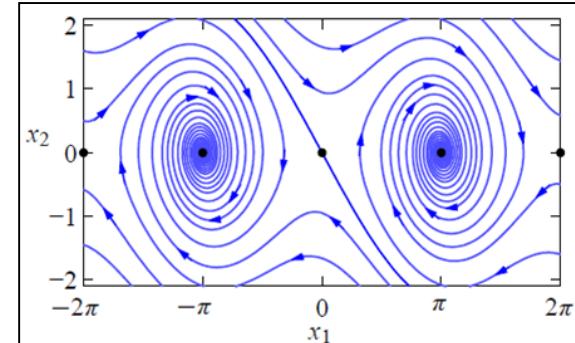
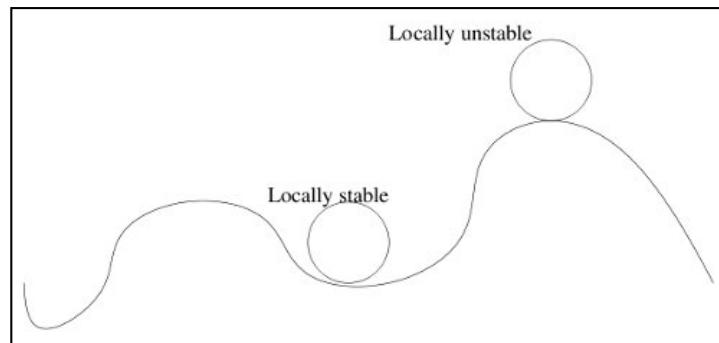
## Stabilità Interna

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases}, \quad x_0$$

- **Osservazione:** Le definizioni di stabilità e asintotica stabilità sono valide anche per movimenti generati da perturbazioni limitate degli ingressi.  $\gamma$  è, in genere, una funzione del tipo



- Se  $\gamma$  non dipende da  $t_0$ , la stabilità è detta **uniforme**.
- Se  $\gamma$  può essere scelta arbitrariamente grande, la stabilità è detta **globale**, altrimenti è **locale**.
- La stabilità di un movimento non implica, in generale, la stabilità di un sistema; infatti, se ad un movimento stabile si fa corrispondere una diversa funzione d'ingresso, o di condizioni iniziali, non è detto che esso presenti le stesse caratteristiche di stabilità.





## Stabilità Interna nei Sistemi Lineari



La linearità di un sistema permette di semplificarne l'analisi di stabilità (per movimento si implica un movimento di equilibrio).

- **Teorema:** Un movimento (di equilibrio) di un sistema lineare è stabile, asintoticamente stabile o instabile se e solo se tutti i movimenti del sistema sono, rispettivamente, stabili, asintoticamente stabili o instabili.

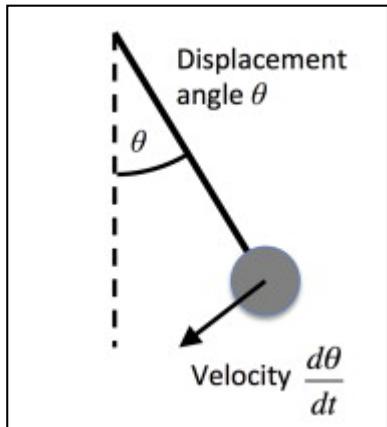
Da questo teorema si deducono le seguenti proprietà:

- Se un movimento di un sistema lineare è stabile (asintoticamente) rispetto a perturbazioni dello stato iniziale, anche qualsiasi altro movimento del sistema è stabile (asintoticamente) rispetto a perturbazioni dello stato iniziale.
- Se un movimento di un sistema lineare è stabile (asintoticamente) rispetto a perturbazioni dell'ingresso, anche qualsiasi altro movimento del sistema è stabile (asintoticamente) rispetto a perturbazioni dell'ingresso.
- Se un sistema lineare è stabile (asintoticamente) rispetto a “piccole” perturbazioni (delle condizioni iniziali o dell'ingresso), lo è anche per perturbazioni di qualsiasi entità, purché finite.

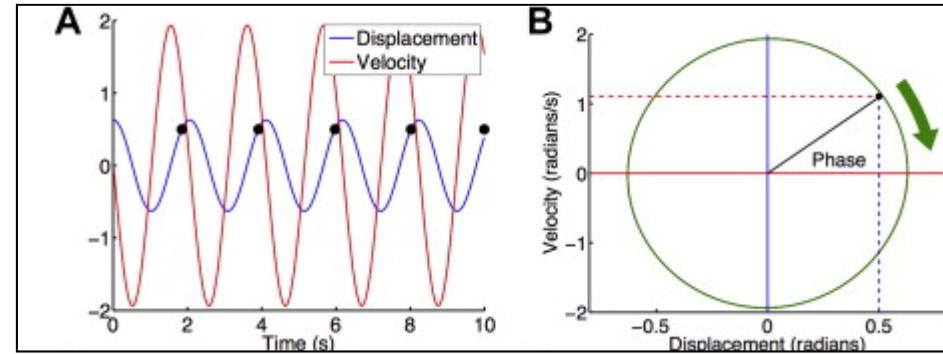


# Stabilità Interna nei Sistemi Lineari

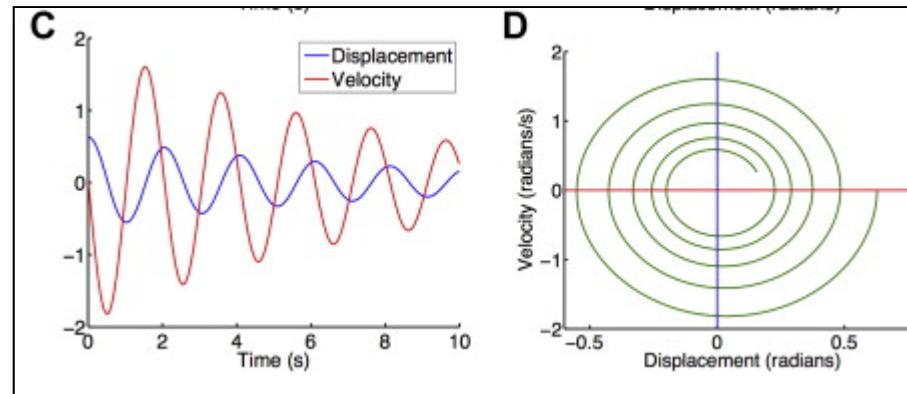
Esempio di stabilità interna di un sistema lineare.



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{a}{l} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$





## Stabilità Interna nei Sistemi Lineari

- Per i sistemi lineari, la stabilità interna può essere studiata analizzando il sistema omogeneo equivalente (**Condizione Sufficiente**). Consideriamo infatti:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x}_0$$

- Stabilità di un movimento Nominale  $\tilde{\boldsymbol{x}}$

$\tilde{\boldsymbol{x}}_p = \tilde{\boldsymbol{x}} + \delta\boldsymbol{x}$  Movimento Perturbato in condizioni iniziali e ingresso nominale

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_p - \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = A(\tilde{\boldsymbol{x}} + \delta\boldsymbol{x}) + B\boldsymbol{u} - A\tilde{\boldsymbol{x}} - B\boldsymbol{u} \quad \Rightarrow \quad \delta\dot{\boldsymbol{x}} = A\delta\boldsymbol{x}$$

- Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. la stabilità può essere valutata riferendosi solamente al sistema autonomo.
2. E' sufficiente studiare la stabilità del movimento all'origine.
3. Per quanto detto anche in precedenza, si può parlare indifferentemente di stabilità di movimento di equilibrio o stato di equilibrio di sistema.
4. La conoscenza della matrice dinamica del sistema fornisce le tutte le informazioni sulla stabilità interna del sistema.



# Stabilità Interna nei Sistemi Lineari

## □ Sommario per Sistemi Lineari (applicazione delle definizioni)

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_0 \quad \begin{cases} \mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 & A = A(t) \\ \mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 & A = \text{costante} \end{cases}$$

- Stato di Equilibrio  $\mathbf{x}(t) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}_E = 0$

- Requisito di Stabilità

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq M \quad \forall t \geq t_0 \quad \|e^{A(t-t_0)}\| \leq M \quad \forall t \geq t_0$$

- Requisito di Stabilità Asintotica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, t_0)\| = 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{A(t-t_0)}\| = 0 \quad \forall t \geq t_0$$



## Stabilità Interna nei Sistemi Lineari

- Le definizioni di stabilità viste finora sono legate a proprietà *intrinseche* del sistema e sono definite come **proprietà di stabilità interna del sistema**; non dipendono né dalle particolari condizioni iniziali, né dagli ingressi ma solo dalla matrice dinamica e dai suoi autovalori.

- Nel caso di sistemi LTI

$$\delta \mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \delta \mathbf{x}_0$$

- **Teorema:** Un sistema lineare stazionario è asintoticamente stabile se e solo se **tutti** gli autovalori di A hanno parte reale strettamente negativa.
- **Teorema:** Un sistema lineare stazionario è stabile se e solo se gli autovalori di A sono a parte reale negativa o nulla, ma questi ultimi hanno molteplicità algebrica e geometrica uguale.
- **Teorema:** Un sistema lineare stazionario è instabile altrimenti
  - Almeno un autovalore di parte reale positiva
  - Autovalori a parte reale nulla ma con molteplicità algebrica diversa dalla molteplicità geometrica.



# Stabilità Esterna dei Sistemi Lineari

- La stabilità esterna si riferisce al comportamento limitato o meno dello stato o dell'uscita di un sistema, quando si hanno ingressi limitati.
- **Definizione – Stabilità BIBS:** Un sistema lineare tempo variante o tempo invariante è stabile BIBS (Bounded Input Bounded State (ingresso limitato stato limitato) se:

$$\begin{cases} \forall t_0, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \\ \forall \|\mathbf{u}(t)\| < \delta, \forall t > t_0 \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) u(\tau) d\tau \right\| < \varepsilon \end{cases}$$

- **Definizione – Stabilità BIBO:** Un sistema lineare tempo variante o tempo invariante è stabile BIBO (Bounded Input Bounded Output (ingresso limitato uscita limitata) se:

$$\begin{cases} \forall t_0, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \\ \forall \|\mathbf{u}(t)\| < \delta, \forall t > t_0 \Rightarrow \|\mathbf{y}(t)\| = \left\| C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) u(\tau) d\tau \right\| < \varepsilon \end{cases}$$



## Stabilità: Esempi

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \quad \Rightarrow \quad x(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} x_0 \quad \Rightarrow \quad \text{instabile}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x \quad \Rightarrow \quad x(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} x_0 \quad \Rightarrow \quad \text{asintoticamente stabile}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x \quad \Rightarrow \quad x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} x_0 \quad \Rightarrow \quad \text{stabile}$$

□ **Nota:** le precedenti proprietà valgono anche nel caso di ingresso non nullo, ma limitato

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x \quad \Rightarrow \quad x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} x_0 \quad \Rightarrow \quad \text{instabile}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \quad \Rightarrow \quad x(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0 \quad \Rightarrow \quad \text{instabile}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \quad \Rightarrow \quad x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0 \quad \Rightarrow \quad \text{stabile}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

**BIBO stabile, Instabile**



## Stabilità: Esempi

□ Consideriamo il modello di biciclo visto precedentemente

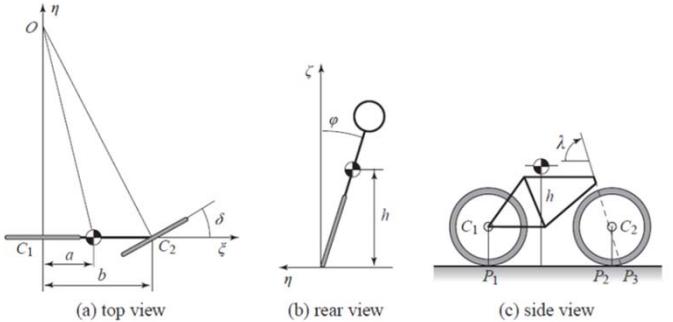


Figure 3.5: Schematic views of a bicycle. The steering angle is  $\delta$ , and the roll angle is  $\phi$ . The center of mass has height  $h$  and distance  $a$  from a vertical through the contact point  $P_1$  of the rear wheel. The wheel base is  $b$ , and the trail is  $c$ .

$$M = \begin{pmatrix} 96.8 (6.00) & -3.57 (-0.472) \\ -3.57 (-0.472) & 0.258 (0.152) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -50.8 (-5.84) \\ 0.436 (0.436) & 2.20 (0.666) \end{pmatrix},$$

$$K_0 = \begin{pmatrix} -901.0 (-91.72) & 35.17 (7.51) \\ 35.17 (7.51) & -12.03 (-2.57) \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & -87.06 (-9.54) \\ 0 & 3.50 (0.848) \end{pmatrix}.$$

| Parameter  | Symbol  | Value for benchmark  |
|--|---|--|
| Wheel base                                       | $w$   | 1.02 m   |
| Trail  | $c$   | 0.08 m   |
| Steer axis tilt<br>$(\pi/2 - \text{head angle})$ | $\lambda$   | $\pi/10$ rad<br>$(90^\circ - 72^\circ)$  |
| Gravity  | $g$   | 9.81 N/kg  |
| Forward speed                                    | $v$   | various m/s, see tables 2  |
| <b>Rear wheel R</b>                              |   |  |
| Radius   | $r_R$   | 0.3 m  |
| Mass   | $m_R$   | 2 kg   |
| Mass moments of inertia                          | $(I_{Rxx}, I_{Ryy})$  | $(0.0603, 0.12)$ kg m <sup>2</sup>   |
| <b>Rear Body and frame assembly B</b>            |   |  |
| Position centre of mass                          | $(x_B, z_B)$  | $(0.3, -0.9)$ m  |
| Mass   | $m_B$   | 85 kg  |
| Mass moments of inertia                          | $\begin{bmatrix} I_{Bxx} & 0 & I_{Bzz} \\ 0 & I_{Byy} & 0 \\ I_{Bzz} & 0 & I_{Bzz} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 9.2 & 0 & 2.4 \\ 0 & 11 & 0 \\ 2.4 & 0 & 2.8 \end{bmatrix}$ kg m <sup>2</sup>                     |
| <b>Front Handlebar and fork assembly H</b>       |   |  |
| Position centre of mass                          | $(x_H, z_H)$  | $(0.9, -0.7)$ m  |
| Mass   | $m_H$   | 4 kg   |
| Mass moments of inertia                          | $\begin{bmatrix} I_{Hxx} & 0 & I_{Hzz} \\ 0 & I_{Hyy} & 0 \\ I_{Hzz} & 0 & I_{Hzz} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.05892 & 0 & -0.00756 \\ 0 & 0.06 & 0 \\ -0.00756 & 0 & 0.00708 \end{bmatrix}$ kg m <sup>2</sup> |
| <b>Front wheel F</b>                             |   |  |
| Radius   | $r_F$   | 0.35 m   |
| Mass   | $m_F$   | 3 kg   |
| Mass moments of inertia                          | $(I_{Fxx}, I_{Fyy})$  | $(0.1405, 0.28)$ kg m <sup>2</sup>   |

$$M \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} + Cv_0 \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + (K_0 + K_2 v_0^2) \begin{pmatrix} \varphi \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}$$

$\dot{\varphi}(t)$  descrive la dinamica dell'angolo di rollio (lean angle)

$\dot{\delta}(t)$  descrive la dinamica dello sterzo (steering angle)

$T$  è la coppia applicata al manubrio



## Stabilità: Esempi

- Trasformazione nello spazio di stato

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 = \varphi \\ x_2 = \delta \\ \dot{x}_3 = \dot{\varphi} \\ x_4 = \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}, \quad u = T \quad M\dot{\mathbf{x}}_2 + Cv_0\mathbf{x}_2 + (K_0 + K_2v_0^2)\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = -M^{-1}Cv_0\mathbf{x}_2 - M^{-1}(K_0 + K_2v_0^2)\mathbf{x}_1 + M^{-1}Bu \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}(K_0 + K_2v_0^2) & -M^{-1}Cv_0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B \end{bmatrix} u$$

- La stabilità del sistema dipende dagli autovalori della matrice  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}(K_0 + K_2v_0^2) & -M^{-1}Cv_0 \end{bmatrix}$$



## Stabilità: Esempi

- Calcolo degli autovalori

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} \lambda I_{2 \times 2} & -I_{2 \times 2} \\ M^{-1}(K_0 + K_2 v_0^2) & \lambda I_{2 \times 2} + M^{-1}Cv_0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

- Per le proprietà dei determinanti:  $\det(\lambda I - A) = \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I_{2 \times 2}) \cdot \det \left\{ (\lambda I_{2 \times 2} + M^{-1}Cv_0) - \left[ M^{-1}(K_0 + K_2 v_0^2) \right] \left( \frac{1}{\lambda} I_{2 \times 2} \right) (-I_{2 \times 2}) \right\}$$

- Al variare della velocità, variano gli autovalori della matrice  $A$ , quindi variano le caratteristiche di stabilità del sistema.

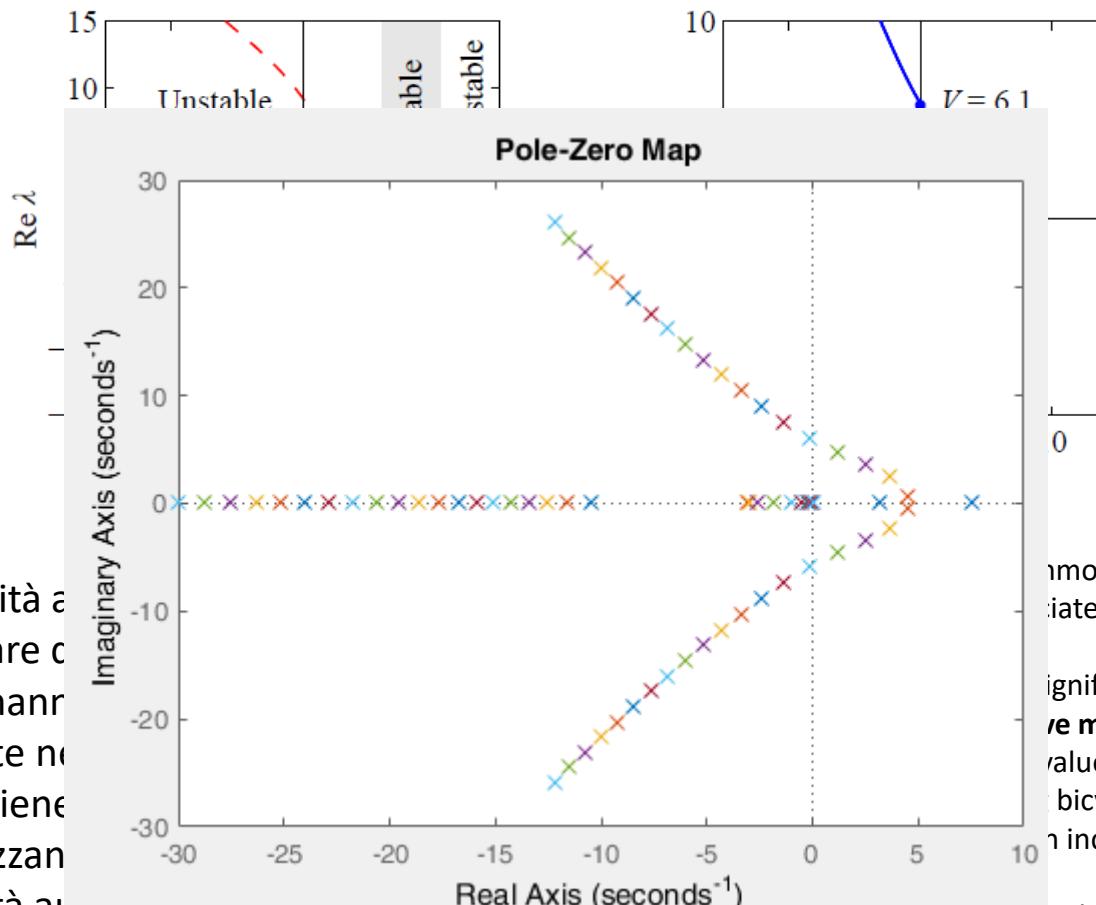
```
%MODELLO BICI
for v0=1:20
    %enter parameter data matrices M, C, K0, K2:
    M=[96.8 -3.57;-3.57 0.258];
    C=[0 -50.8;0.436 2.20];
    K0=[-901.0 35.17;35.17 -12.03];
    K2=[0 -87.06;0 3.50];
    A=[zeros(2,2),eye(2,2);-inv(M)*(K0+K2*v0^2),-inv(M)*C*v0];
    B=[zeros(2,1);inv(M)*[0;1]];
    eig(A);
    sys=ss(A,B,eye(4),zeros(4,1));
    pzmap(sys),hold on
    pause
end
```

| v=0   | v=1   | v=6               | v=7               | v=10               | v=20                |
|-------|-------|-------------------|-------------------|--------------------|---------------------|
| 9.18  | 7.57  | -0.97             | -0.46             | -0.0123            | 0.0898              |
| 3.05  | 3.22  | -0.1276 + 5.9291i | -1.3236 + 7.4054i | -4.2637 + 11.8076i | -12.1732 + 25.9492i |
| -9.18 | -3.04 | c.c.              | c.c.              | c.c.               | c.c.                |
| -3.05 | -10.4 | -15.0             | -15.8             | -18.5754           | -29.9738            |



## Stabilità: Esempi

1. Vi è instabilità a velocità zero.
2. All'aumentare della velocità i suoi autovalori hanno un comportamento strettamente non monotone. Il biciclo diventa instabile e 'autostabilizzante'.
3. Se la velocità aumenta ancora, un autovalore diventa instabile ma può essere controllato dal ciclista (a seconda del tipo di addestramento).



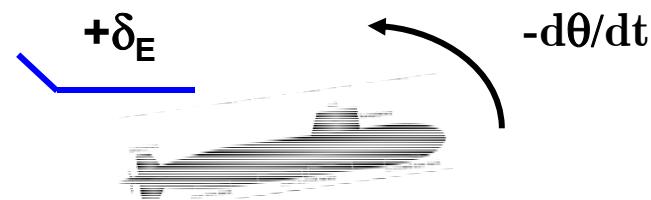
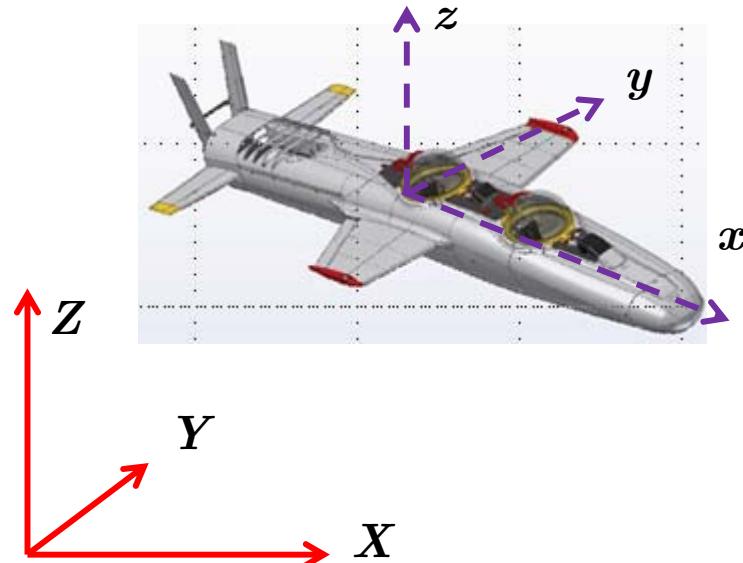
### Real Axis ( $\text{seconds}^{-1}$ )

- The **weave mode** is an oscillatory motion in which the bicycle steers sinusoidally about the headed direction with a slight phase lag relative to leaning.
- The third eigenvalue is large, real and negative. It corresponds to the **castering mode** which is dominated by steer in which the front ground contact follows a tractrix - like pursuit trajectory, like the straightening of a swivel wheel under the front of a grocery cart.



## Stabilità: Esempi

- Consideriamo l'approssimazione lineare di beccheggio (pitch), di un veicolo sottomarino a profondità e velocità costanti.



$$x(t) = x_0 + \delta x = \begin{bmatrix} U = U_0 + \delta u \\ W = W_0 + \delta w \\ Q = Q_0 + \delta q \\ \Theta = \Theta_0 + \delta \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U = U_0 \\ W = W_0 \\ Q = \delta q \approx \delta \dot{\theta} \\ \Theta = \delta \theta \end{bmatrix}$$

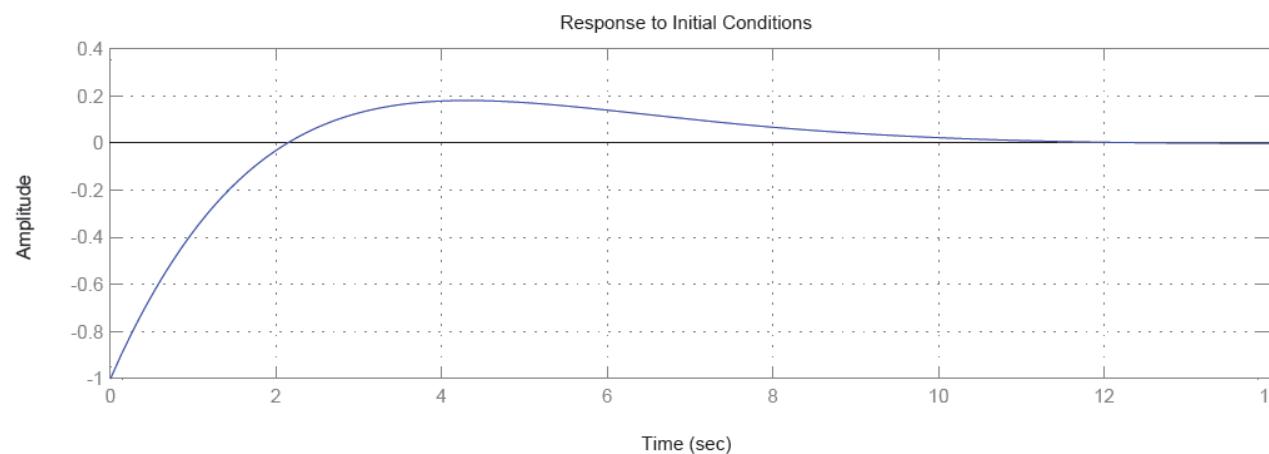
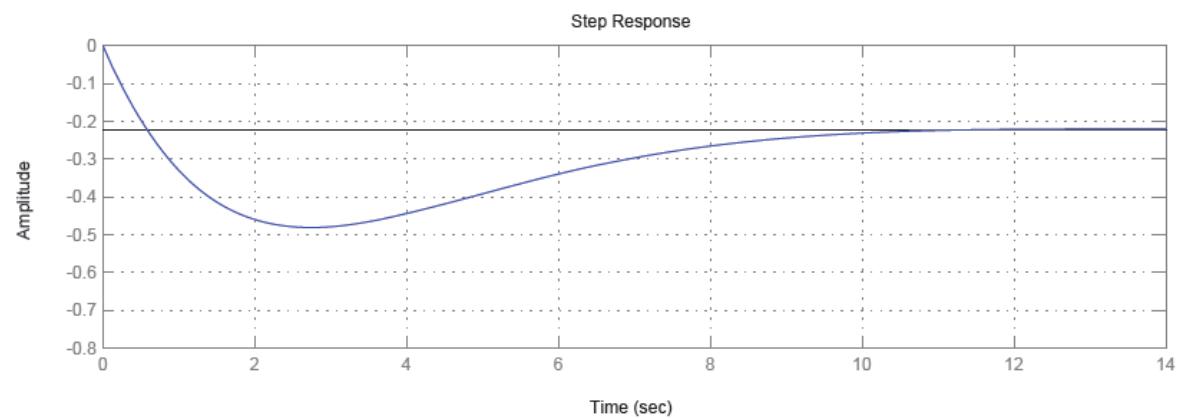
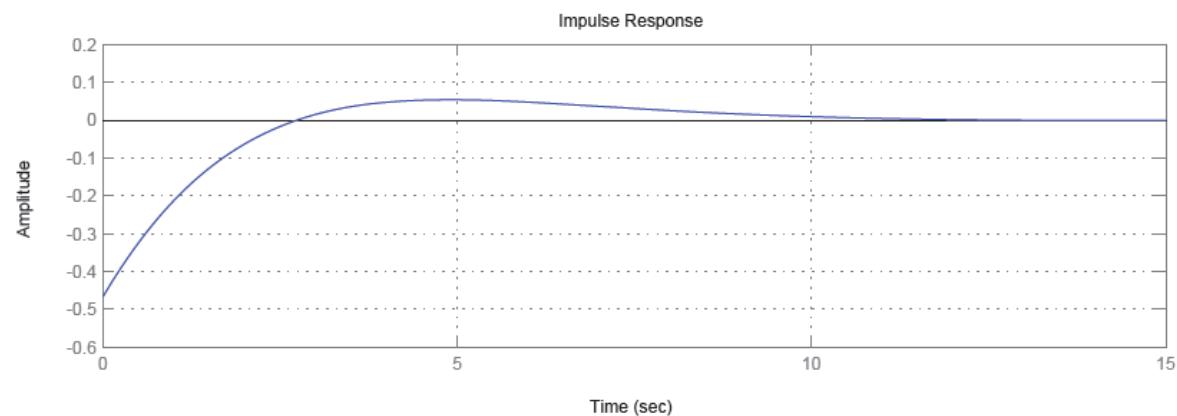
$$(I_y - M\dot{q})\ddot{\theta} - Mq\dot{\theta} + BG_zW\theta = \tau_5$$

$$\frac{\dot{\theta}(s)}{\delta_E(s)} = \frac{-0.467(s + 0.12)}{s^2 + 0.8s + 0.25}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -0.8 & 1 \\ -0.25 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0.467 \\ 0.056 \end{bmatrix}\delta_E \\ y &= \dot{\theta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}x\end{aligned}$$

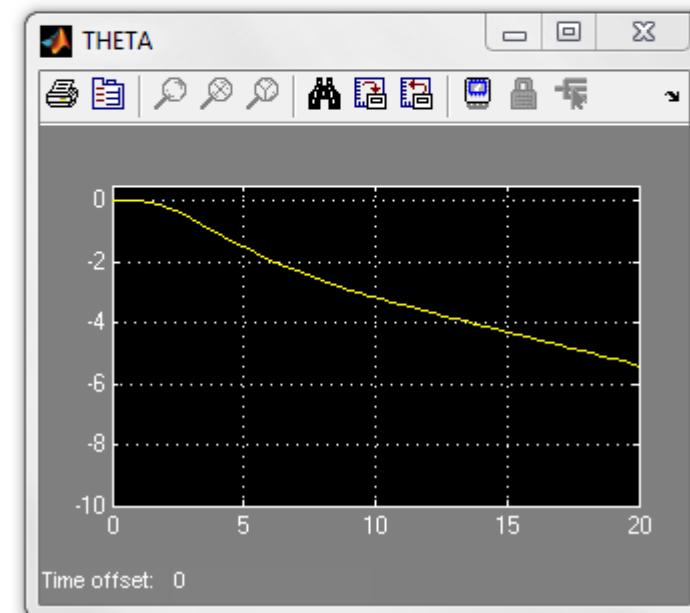
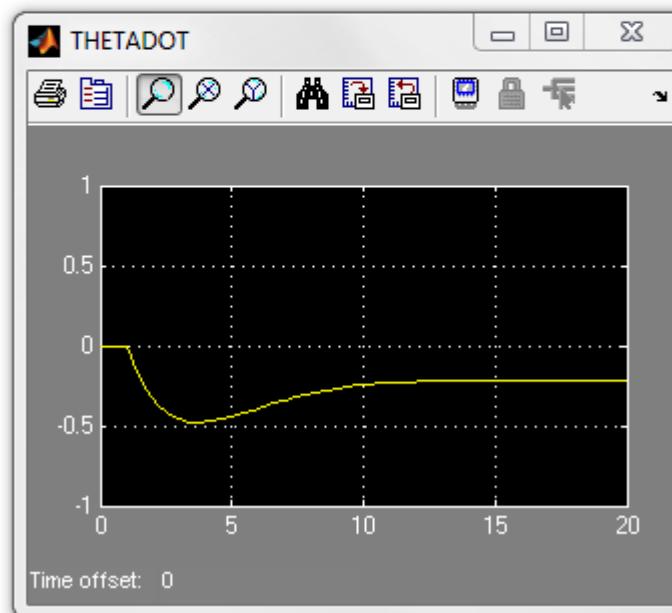
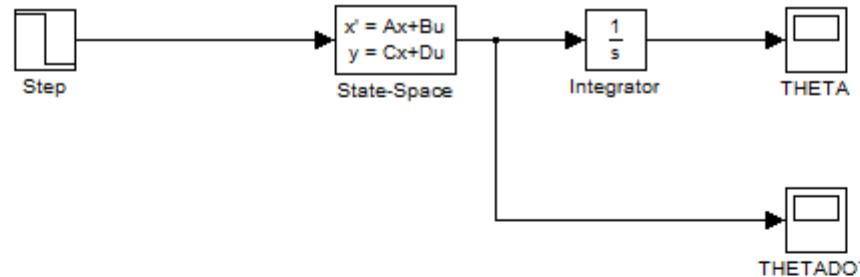
- Sistema Asintoticamente stabile

$$\begin{aligned}-0.4000 &+ 0.3000i \\ -0.4000 &- 0.3000i\end{aligned}$$





# Esempi



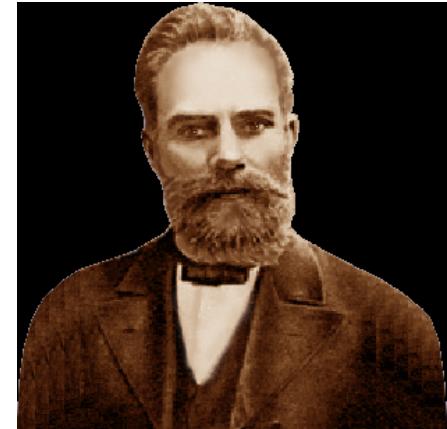


## Stabilità Interna: Metodo di Lyapunov

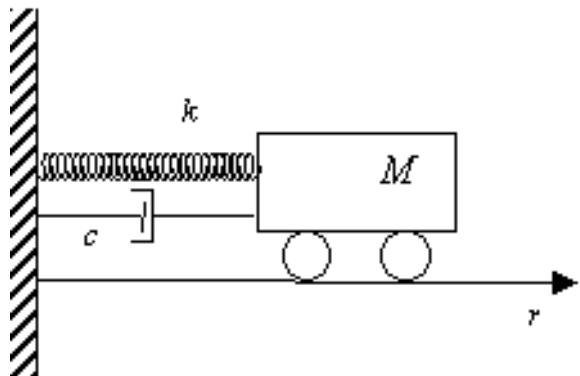
La teoria della stabilità di Lyapunov permette di studiare la **stabilità interna** di sistemi dinamici (NL, LTV, LTI) ed fu sviluppata analizzando le proprietà energetiche di sistemi meccanici ed elettrici.

Il Principio fisico di base, su cui Lyapunov sviluppò la teoria che porta il suo nome, è che, se l'energia totale di un sistema è continuamente dissipata, il sistema evolve verso l'equilibrio.

Se ne deduce che lo studio dell'equilibrio può essere eseguito esaminando le variazioni nel tempo di una funzione scalare, cioè **dell'energia totale**.



1857 - 1918



Consideriamo un sistema meccanico non conservativo:

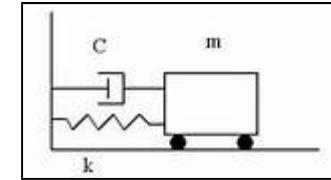
- Energia cinetica dovuta alla velocità della massa
- Energia potenziale dovuta alla posizione della massa
- **Energia dissipativa dovuta a frizione, smorzamento ed altri fattori quali calore, resistenza del fluido.**



## Metodo di Lyapunov

Un modello nonlineare del sistema è dato da:

$$(1) \quad M \ddot{r} + c\dot{r}\left|\dot{r}\right| + k_0 r + k_1 r^3 = 0$$



Contributo dovuto all'elasticità della molla

Dissipazione dovuta allo smorzatore

- Partendo dalla condizione di equilibrio di riposo, studiare la stabilità rispetto a perturbazioni nelle condizioni iniziali.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \end{bmatrix}; \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{c}{M}x_2|x_2| - \frac{k_0}{M}x_1 - \frac{k_1}{M}x_1^3 \end{cases}; \mathbf{x}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Calcolo dell'energia meccanica: cinetica + energia potenziale

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \int_0^r (k_0\xi + k_1\xi^3)d\xi = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}k_0r^2 + \frac{1}{4}k_1r^4$$

**Nota 1:** in assenza di altre forme di energia,  $V(\mathbf{x})$  rimane costante nel tempo (campo energetico conservativo).

**Nota 2:** La descrizione del moto (1) può essere ottenuta mediante le equazioni di Lagrange, posto  $L = T - V$ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$



## Metodo di Lyapunov

- Considerazioni sull'energia meccanica  $V(\mathbf{x})$ :

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} M\dot{r}^2 + \frac{1}{2} k_0 r^2 + \frac{1}{4} k_1 r^4$$

- $V(\mathbf{x}) > 0$
- $V(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_E = (r = 0, \dot{r} = 0)$
- $V(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \Rightarrow \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_E$
- $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \Rightarrow \mathbf{x}(t) \rightarrow \infty \in \Re^2$
- È una funzione positiva
- La funzione è nulla soltanto all'origine (equilibrio)
- Il movimento è asintoticamente stabile
- Il movimento è instabile

L'energia meccanica riflette l'ampiezza del vettore di stato ma si nota anche che la sua variazione nel tempo caratterizza le proprietà di stabilità del sistema.

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = M\dot{r}\ddot{r} + (k_0 r + k_1 r^3)\dot{r}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{r}(-c\dot{r}|\dot{r}|) = -c|\dot{r}|^3 < 0$$
$$c > 0$$

- L'energia totale, quindi, viene continuamente dissipata dallo smorzatore fino a quando la massa non si ferma.



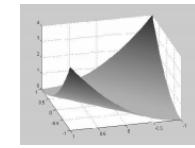
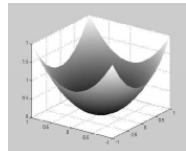
# Metodo di Lyapunov

□ **Definizione – Funzione di Lyapunov:** Consideriamo una funzione scalare

$$V(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1 \text{ Si ha che:}$$

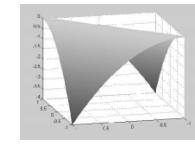
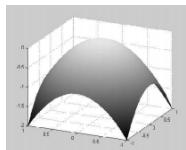
- $V$  si dice definita (semi-definita) positiva in  $\mathbf{x}'$  se:

$$V(\mathbf{x}') = 0, \exists \delta > 0 \Rightarrow V(\mathbf{x}) > 0 \quad (V(\mathbf{x}) \geq 0) \quad \forall \mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < \delta, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$$



- $V$  si dice definita (semi-definita) negativa in  $\mathbf{x}'$  se:

$$V(\mathbf{x}') = 0, \exists \delta > 0 \Rightarrow V(\mathbf{x}) < 0 \quad (V(\mathbf{x}) \leq 0) \quad \forall \mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < \delta, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$$



- $V$  si dice non definita altrimenti.
- Esempio: forme quadratiche

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = A^T > 0$$

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = A^T < 0$$

- **Nota:** Una matrice reale quadrata simmetrica positiva (negativa) definita ha tutti gli autovalori positivi (negativi). Una matrice complessa quadrata simmetrica positiva (negativa) definita ha tutti gli autovalori di parte reale positiva (negativa)



# Metodo di Lyapunov

## □ Teoremi di Stabilità (si tralascia la differenza tra proprietà locale, uniforme, globale)

□ **Teorema:** –Stabilità dell'equilibrio di un sistema autonomo (Primo teorema di Lyapunov).

Consideriamo un sistema autonomo nonlineare avente un punto di equilibrio dato da  $x_E$ , ovvero:

$$\dot{x}_E = f(x_E) = 0$$

Calcoliamo il sistema linearizzato intorno a tale condizione di equilibrio:

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Bigg|_{x=x_0} \delta x = A \delta x$$

- Se l'origine del sistema linearizzato ( $\delta x = 0$ ) è asintoticamente stabile, allora anche il punto di equilibrio del sistema nonlineare  $x_E$  è asintoticamente stabile,
- Se l'origine del sistema linearizzato ( $\delta x = 0$ ) è instabile, allora anche il punto di equilibrio del sistema nonlineare  $x_E$  è instabile,
- Se l'origine del sistema linearizzato ( $\delta x = 0$ ) è stabile, allora non si può dire nulla sulla stabilità del punto di equilibrio del sistema nonlineare  $x_E$ .



## Metodo di Lyapunov

- **Teorema:** –Metodo Diretto di Lyapunov (Secondo teorema di Lyapunov). Sia  $V(\cdot)$  una funzione di Lyapunov continua e con derivate parziali continue. Si consideri lo stato di equilibrio di un sistema autonomo:

$$\dot{\mathbf{x}}_E = f(\mathbf{x}_E) = 0$$

Sia inoltre  $V(\mathbf{x}) > 0$  eccetto che al più  $V(\mathbf{x}_E) = 0$  e si calcoli la derivata prima totale rispetto al tempo:

$$\dot{V}(\cdot) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

Se  $\dot{V}(\cdot) \leq 0$ , **Lo stato di equilibrio è stabile**

Se  $\dot{V}(\cdot) < 0$ , **Lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile**

Se  $\dot{V}(\cdot) > 0$ , **Lo stato di equilibrio è instabile**

- **Nota:** nel caso più generale di funzione di Lyapunov con dipendenza esplicita del tempo  $V(\mathbf{x}, t)$ , si ha:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$



# Metodo di Lyapunov



## □ Osservazioni:

- Il sistema considerato è autonomo; la stabilità, in questa analisi, dipende solo da variazioni delle condizioni iniziali.
- Le precedenti sono condizioni sufficienti ma non necessarie per cui la mancanza di una funzione di Lyapunov non permette di ipotizzare alcuna conclusione sulla stabilità del punto di equilibrio considerato.
- **Tale metodo non fornisce nessuna indicazione su come trovare la funzione di Lyapunov**

### ▪ Esempio

$$\dot{x} = (1 - x^5) \quad \text{Unica Condizione di equilibrio: } x_E = 1$$

- scegliere una funzione di Lyapunov che sia continua, con derivate continue , definita positiva per tutti i punti e nulla nel punto di equilibrio;

$$V(x) = (1 - x)^2 > 0 \quad \dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = -2(1 - x)(1 - x)^5 = -2(1 - x)^6$$

- è sicuramente definita negativa ed il punto di equilibrio è asintoticamente stabile.



## Metodo di Lyapunov

- **Esempio:** Dato il seguente sistema nonlineare ed il suo punto di equilibrio:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{cases}; \mathbf{x}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Consideriamo una funzione di Lyapunov continua, con derivate continue, positiva definita e nulla soltanto nel punto di equilibrio:

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}; P = I$$

- Calcoliamo la derivata temporale della funzione di Lyapunov scelta:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{bmatrix} = -2x_2^2(x_1^2 - 1)$$

$$\forall |x_1| < 1 \Rightarrow \dot{V}(\mathbf{x}) > 0$$

- L'origine è quindi un punto di equilibrio **instabile**



## Metodo di Lyapunov

- Per i sistemi lineari stazionari la teoria di Lyapunov si semplifica e si riduce allo studio della stabilità dell'origine.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_E(t) &= 0 \end{aligned}$$

In questo caso, data una qualsiasi matrice simmetrica e definita positiva  $P > 0$ , la funzione di Lyapunov può essere scelta come:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \quad \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0$$

Per studiare la stabilità, bisogna quindi esaminare il segno della variazione totale della funzione di Lyapunov nel tempo, ovvero:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T P \quad \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T A^T P \quad \mathbf{x} + \mathbf{x}^T PA \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (A^T P + PA) \mathbf{x}$$

Posto:  $A^T P + PA = -Q$   $\xrightarrow{\hspace{1cm}}$   $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T Q \quad \mathbf{x}$



## Metodo di Lyapunov

□ **Definizione:** Si dice equazione di Lyapunov, la seguente equazione matriciale algebrica:

$$A^T P + PA = -Q$$

□ **Teorema :** Un sistema lineare autonomo è asintoticamente stabile se e solo se, per ogni matrice  $Q$  simmetrica e definita positiva, esiste una matrice  $P$ , anch'essa simmetrica e definita positiva, tale che:

$$A^T P + PA = -Q$$

□ **Teorema:** Data una matrice  $A$ , tutti i suoi autovalori hanno parte reale negativa se e solo se esiste una matrice  $P$  simmetrica e definita positiva ed una matrice  $Q$  simmetrica e definita positiva tale che:

$$A^T P + PA + Q = 0$$

**Corollario:** Se  $P$  esiste, è unica.



# Metodo di Lyapunov

□ **Teorema:** Sia  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. Tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale strettamente negativa
2. Per tutte le matrici  $Q = Q^T > 0$ , esiste una soluzione unica  $P = P^T > 0$  dell'equazione:

$$A^T P + PA + Q = 0 \quad (1)$$

## □ Dimostrazione 1 -> 2

Supponiamo che  $A$  abbia tutti gli autovalori di parte reale strettamente negativa.

Definiamo:

$$P := \int_0^{+\infty} e^{A^\top t} Q e^{At} dt$$

L'integrale esiste ed è finito in quanto:  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$

Verifichiamo che  $P$  è soluzione di (1).

$$A^\top P + PA = \int_0^{+\infty} (A^\top e^{A^\top t} Q e^{At} + e^{A^\top t} Q e^{At} A) dt$$



## Metodo di Lyapunov

$$= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left( e^{A^\top t} Q e^{At} \right) dt = \left[ e^{A^\top t} Q e^{At} \right]_0^{+\infty} = -Q$$

Essendo:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{A^\top t} Q e^{At} = 0$

La soluzione è anche unica. Siano infatti  $P_1$  e  $P_2$  soluzioni di (1), ovvero:

$$A^\top P_1 + P_1 A + Q = 0$$

$$A^\top P_2 + P_2 A + Q = 0$$

Sottraendo la seconda dalla prima:

$$A^\top (P_1 - P_2) + (P_1 - P_2) A = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= e^{A^\top t} \left( A^\top (P_1 - P_2) + (P_1 - P_2) A \right) e^{At} \\ &= e^{A^\top t} A^\top (P_1 - P_2) e^{At} + e^{A^\top t} (P_1 - P_2) A e^{At} \\ &= \frac{d}{dt} \left( e^{A^\top t} (P_1 - P_2) e^{At} \right) \end{aligned}$$



## Metodo di Lyapunov

Il termine  $e^{A^\top t}(P_1 - P_2)e^{At}$  è quindi costante e per ogni  $t$  assume il valore che ha per  $t = 0$

$$e^{A^\top t}(P_1 - P_2)e^{At} = P_1 - P_2$$

Ma per  $t \rightarrow +\infty$   $P_1 - P_2 = 0$

Quindi le due soluzioni coincidono, ovvero la soluzione è unica. ■

- **Esempio:** Consideriamo l'equazione di Lyapunov con la seguente matrice  $A$ :

$$A^\top P + PA + Q = 0; A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, P = P^T > 0, Q = Q^T > 0$$

- Scegliamo una matrice  $Q$  simmetrica e positiva definita:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} = q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow q_{11}q_{22} - q_{12}^2 > 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} q_{11} > 0 & 0 \\ 0 & q_{22} > 0 \end{bmatrix}$$



## Metodo di Lyapunov

- Risolviamo per  $P$ :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2p_{11} & -3p_{12} \\ -3p_{12} & -4p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} p_{11} = \frac{q_{11}}{2} > 0 \\ p_{12} = 0 \\ p_{22} = \frac{q_{22}}{4} > 0 \end{cases}, \Rightarrow P = P^T > 0$$

- Ripetiamo la procedura con:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} > 0 & 0 \\ 0 & q_{22} > 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} p_{11} = -\frac{q_{11}}{2} < 0 \\ p_{12} = 0 \\ p_{22} = \frac{q_{22}}{4} > 0 \end{cases}, \Rightarrow P = P^T < 0$$



## Stabilità mediante FdT

□ Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \mathbf{y}(t) = Ce^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \end{cases}$$

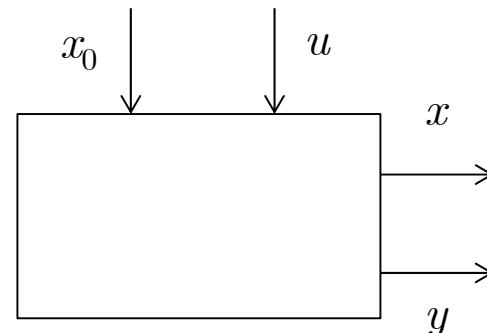
- Si possono definire quattro diverse **funzioni di trasferimento di segnale**:

$$G_{x_0}^x(s) = (sI - A)^{-1} = H(s)$$

$$G_{x_0}^y(s) = C(sI - A)^{-1}$$

$$G_u^x(s) = (sI - A)^{-1}B$$

$$G_u^y(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$



- Per i sistemi autonomi (con ingresso nullo) l'analisi della stabilità interna richiede la valutazione di

$$G_{x_0}^x(s) = (sI - A)^{-1} = H(s) \quad h_{ij}(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$



## Stabilità mediante FdT

- **Teorema** - Un sistema lineare autonomo è:

- **Stabile** se tutti i poli di ciascun elemento  $h_{ij}$  hanno parte reale strettamente negativa tranne alcuni, a molteplicità unitaria, con parte reale pari a 0.
- **Asintoticamente stabile** se tutti i poli di ciascun elemento  $h_{ij}$  hanno parte reale strettamente negativa.
- **Instabile** altrimenti.
- Si noti che l'insieme dei poli di ciascun elemento  $h_{ij}$  è, in realtà, l'insieme degli Autovalori della matrice  $A$  e delle radici del polinomio caratteristico.

$$\lambda_i \{h_{ij}\} \subseteq \lambda_i \{A\}$$

- Nella relazione ingresso – uscita, quale delle due funzioni risulta critica per la valutazione della stabilità?

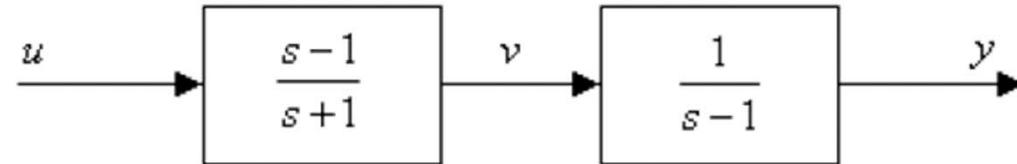
$$\longrightarrow G_{x_0}^x(s) = (sI - A)^{-1}$$

$$\longrightarrow G_u^y(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$



## Stabilità mediante FdT

### □ Cancellazione ZERO - POLO



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2u \\ v = x_1 + u \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = x_2 + v \\ y = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = x_2 + x_1 + u \\ y = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$H(s) = [sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s-1)} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$



## Stabilità mediante FdT

$$G_u^x(s) = [sI - A]^{-1} B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \quad G_u^y(s) = C[sI - A]^{-1} B = \frac{1}{(s+1)}$$

- Il *sistema risulta instabile*, anche se né nella matrice di trasferimento ingresso-stato, né in quella ingresso-uscita, tutti i poli risultano presenti. I poli instabili sono presenti soltanto in  $H(s)$ . *Il sistema è comunque stabile esternamente (BIBS e BIBO).*
- Test:

$$G^{NO CANC}(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-1)} = \frac{y(s)}{u(s)} \Leftrightarrow \ddot{y} - y = \dot{u} - u$$

- Consideriamo un ingresso a gradino unitario e condizioni iniziali nulle

$$y(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-1)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1}$$

$$y(s) = \frac{A=1}{s} + \frac{B=-1}{s+1} + \frac{C=0}{s-1} \Rightarrow y(t) = 1 - e^{-t}$$



## Stabilità mediante FdT

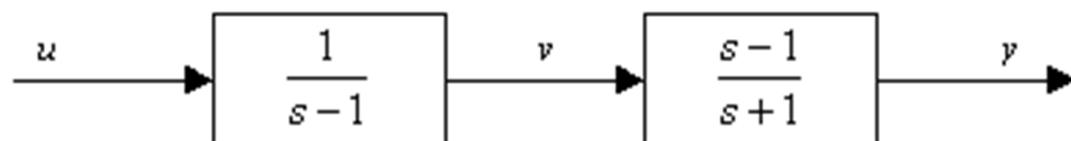
- Consideriamo un ingresso a gradino unitario e condizioni iniziali diverse da zero, per esempio:

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ \dot{y}_0 = 0 \end{cases} \quad (s^2 - 1)y(s) = sy_0 + \dot{y}_0 + su(s) - u(s) = s + \frac{s-1}{s}$$

$$y(s) = \frac{s^2 + s - 1}{s(s+1)(s-1)} = \frac{A=0}{s} + \frac{B=-\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{C=\frac{1}{2}}{s-1} \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} & e^t \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}x_{10} \\ \frac{1}{2}e^t x_{10} - \frac{1}{2}e^{-t}x_{10} + e^t x_{20} \end{pmatrix}$$

### □ Cancellazione POLO - ZERO





## Stabilità mediante FdT



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u \\ v = x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 - 2v \\ y = x_2 + v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 - 2x_1 \\ y = x_2 + x_1 \end{cases}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad G(s) = C[sI - A]^{-1} B = \frac{1}{(s+1)}$$

$$y = [1 \ 1] \boldsymbol{x}$$

$$H(s) = [sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ -\frac{2}{(s+1)(s-1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$G_u^x(s) = [sI - A]^{-1} B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} \\ -\frac{2}{(s+1)(s-1)} \end{bmatrix}$$

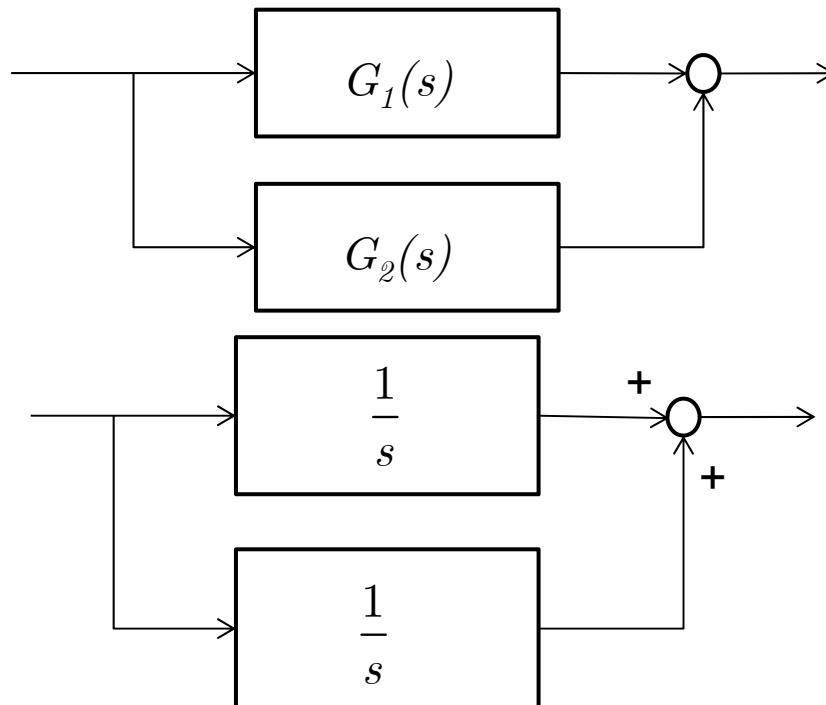
- Il sistema è instabile internamente ,  
BIBS instabile ma BIBO stabile



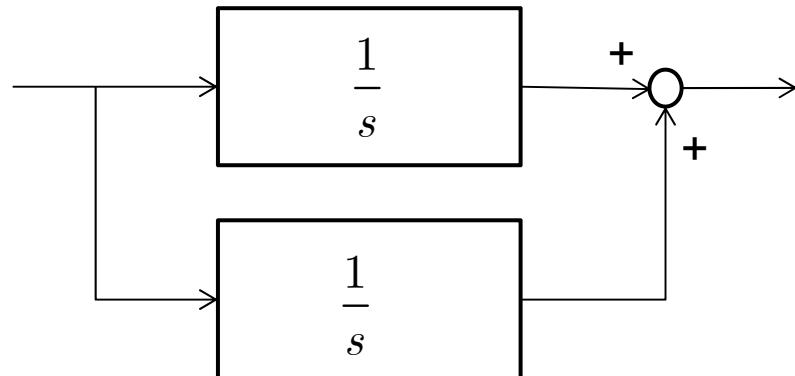
## Stabilità mediante FdT

- La perdita di componenti dinamiche può avvenire anche senza una cancellazione, ma dalla struttura ‘in parallelo’ di un diagramma a blocchi.

$$G(s) = G_1(s) \pm G_2(s) = \frac{N_1(s)D_2(s) \pm N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$



- I denominatori devono essere primi tra loro



$$G(s) = \frac{2}{s}$$

Uno dei due integratori  
Non appare nella FdT

$$y(s) = [1 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{s}$$



## Stabilità mediante FdT

### □ Stabilità Esterna

- La conoscenza delle due matrici ingresso-uscita e ingresso-stato, risulta comunque utile nella verifica della stabilità esterna del sistema, come enunciato nei due seguenti teoremi.

□ **Teorema:** Un sistema lineare Tempo Invariante è stabile BIBS (o ILSL) se e solo se i poli degli elementi della matrice di trasferimento ingresso-stato  $[sI - A]^{-1}B$  hanno parte reale negativa.

$$\mathbf{x}(s) = G_{x_0}^x(s)\mathbf{x}_0 + G_u^x(s)\mathbf{u}(s)$$

□ **Teorema:** Un sistema lineare Tempo Invariante è stabile BIBO (o ILUL) se e solo se i poli degli elementi della matrice di trasferimento ingresso-uscita  $C[sI - A]^{-1}B + D$  hanno parte reale negativa.

$$\mathbf{y}(s) = G_{x_0}^y(s)\mathbf{x}_0 + G_u^y(s)\mathbf{u}(s)$$

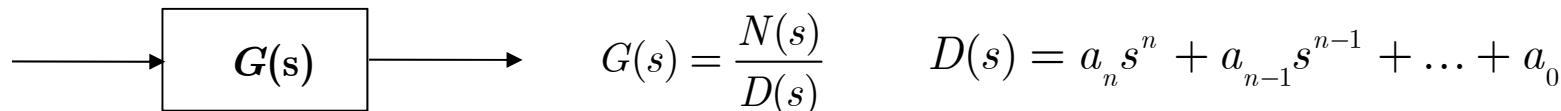
Dai Risultati precedenti si può dire che, in generale, se un sistema è Asintoticamente Stabile è anche BIBO (BIBS) stabile. Il viceversa non è comunque necessariamente vero.  
(dovuto a possibili cancellazioni che si possono avere nel calcolo della FdT)



## Criterio di Routh (1876) – Hurwitz (1895)

$$G(s) = \frac{10(s^3 + 2.7s^2 + 4s + 12)}{s^5 + 12s^4 + 0.4s^2 + 9.2s - 14}$$

- Il criterio di stabilità di Routh - Hurwitz è una tecnica per il calcolo delle proprietà delle radici di un polinomio e che può servire per lo studio della stabilità di sistemi lineari Tempo Invarianti descritti da FdT senza dover calcolare i poli del sistema.



- Il criterio si basa su risultati precedenti dovuti a Cartesio riguardanti il segno delle radici di polinomi del tipo  $D(s)$ .

- Condizione necessaria**

Affinché il sistema descritto da una FdT  $G(s)$  sia asintoticamente stabile deve valere:

1)  $a_i \neq 0 \quad i = 0, 1, \dots, n$

2) Tutti i coefficienti  $a_i$  devono avere lo stesso segno

Routh, E. J. [1877] *A treatise on the stability of a given state of motion*, Cambridge University,  
Adam's Prize Essay.



## Criterio di Routh - Hurwitz

### ▪ Condizione Necessaria e Sufficiente

Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se:

- 1) Rispetta la condizione necessaria
- 2) La Tabella di Routh generata da  $D(s)$  è ben definita e tutti gli elementi della Prima colonna (array) sono positivi.

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + \dots + a_0$$

|           |           |           |           |         |   |
|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|---|
| $s^n$     | $a_n$     | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | $\dots$ | 0 |
| $s^{n-1}$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | $\dots$ | 0 |
| $s^{n-2}$ | $b_1$     | $b_2$     | $b_3$     | $\dots$ |   |
| $s^{n-3}$ | $c_1$     | $c_2$     | $c_3$     | $\dots$ |   |
| $\vdots$  | $\vdots$  | $\vdots$  |           |         |   |
| $s^0$     |           |           |           |         |   |

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}},$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}},$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1},$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1},$$



## Criterio di Routh - Hurwitz

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^4 + 6s^3 + 8s^2 + s + 1}$$

- Sistema Asintoticamente Stabile

|   |                 |   |    |      |
|---|-----------------|---|----|------|
| 4 | 1               | 8 | 1  | 0    |
| 3 | 6               |   | 1  | 0 .. |
| 2 | $\frac{47}{6}$  |   | 1  | 0 .. |
| 1 | $\frac{11}{47}$ |   | 0  | ..   |
| 0 | $1 = a_0$       | 0 | .. |      |

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s + 4}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8}$$

- Sistema asintoticamente stabile;  
 $D(s) = (s + 2)^3$  i tre poli del sistema sono uguali a  $-2$ .

|       |        |    |   |
|-------|--------|----|---|
| $s^3$ | 1      | 12 | 0 |
| $s^2$ | 6      | 8  | 0 |
| $s^1$ | $32/3$ | 0  |   |
| $s^0$ | 8      |    |   |



## Criterio di Routh - Hurwitz

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{10}{s^3 - s^2 + s - 6}$$

- Si nota subito che il sistema è instabile (i coefficienti  $a_i$  non hanno tutti lo stesso segno).

$$s_1 = 2, \quad s_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j\sqrt{\frac{3}{2}}$$

- Applicazione del criterio di Routh:

|       |    |    |   |
|-------|----|----|---|
| $s^3$ | 1  | 1  | 0 |
| $s^2$ | -1 | -6 | 0 |
| $s^1$ | -5 | 0  |   |
| $s^0$ | -6 |    |   |

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2 + 1}{s^3 + s^2 + 2s + 8}$$

- il sistema è instabile, essendo presenti due cambiamenti di segno

$$s_1 = -2, \quad s_{2,3} = \frac{1}{2} \pm j\sqrt{\frac{15}{2}}$$

|       |    |   |
|-------|----|---|
| $s^3$ | 1  | 2 |
| $s^2$ | 1  | 8 |
| $s^1$ | -6 | 0 |
| $s^0$ | 8  |   |



## Criterio di Routh - Hurwitz

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^3 + 1.7s^2 + 0.4s + 1.7}$$

| $s$   |      |     |
|-------|------|-----|
| $s^3$ | 1    | 0.4 |
| $s^2$ | 1.7  | 1.7 |
| $s^1$ | -0.6 | 0   |
| $s^0$ | 1.7  |     |

- il sistema è instabile, essendo presenti due cambiamenti di segno

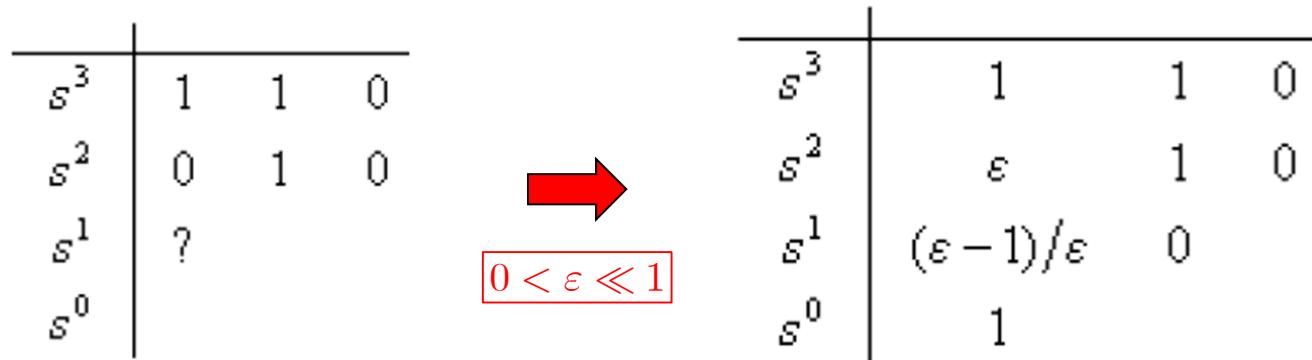
```
>> den=[1 1.7 0.4 1.7];
>> roots(den)
ans =
-1.9441 + 0.0000i
0.1220 + 0.9271i
0.1220 - 0.9271i
>> [ra,s]=routh(den,eps)
ra =
[ 1,    2/5]
[ 17/10, 17/10]
[ -3/5,    0]
[ 17/10,    0]
s =
```



## Criterio di Routh - Hurwitz

- **Proprietà Generale:** il numero di radici a parte reale positiva, coincide con il numero di variazioni di segno nella prima colonna della tabella di Routh.
- **Caso Particolare #1:** Un elemento della prima colonna è nullo. Esso viene sostituito con un  $\varepsilon$  positivo arbitrariamente piccolo e la tabella completata.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{4}{s^3 + s + 1}$$



|       |   |   |   |
|-------|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | 1 | 0 |
| $s^2$ | 0 | 1 | 0 |
| $s^1$ | ? |   |   |
| $s^0$ |   |   |   |

$\xrightarrow{0 < \varepsilon \ll 1}$

|       |                                 |   |   |
|-------|---------------------------------|---|---|
| $s^3$ | 1                               | 1 | 0 |
| $s^2$ | $\varepsilon$                   | 1 | 0 |
| $s^1$ | $(\varepsilon - 1)/\varepsilon$ | 0 |   |
| $s^0$ | 1                               |   |   |

- Si hanno 2 variazioni di segno. Il sistema è Instabile, con due poli di parte reale positiva.



## Criterio di Routh - Hurwitz

- Caso Particolare #2 : un'intera riga della tabella è formata da zeri.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2 + 16s + 10}{s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50}$$

|       |   |    |     |   |
|-------|---|----|-----|---|
| $s^5$ | 1 | 24 | -25 | 0 |
| $s^4$ | 2 | 48 | -50 | 0 |
| $s^3$ | 0 | 0  |     |   |
| $s^2$ | ? |    |     |   |
| $s^1$ |   |    |     |   |
| $s^0$ |   |    |     |   |

$$Y(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50 \Rightarrow \dot{Y}(s) = 8s^3 + 96s$$

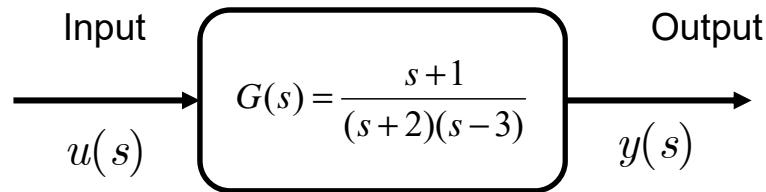
|       |       |     |     |   |
|-------|-------|-----|-----|---|
| $s^5$ | 1     | 24  | -25 | 0 |
| $s^4$ | 2     | 48  | -50 | 0 |
| $s^3$ | 8     | 96  | 0   |   |
| $s^2$ | 24    | -50 |     |   |
| $s^1$ | 112,7 | 0   |     |   |
| $s^0$ | -50   |     |     |   |

- Nella tabella così ottenuta si rileva un cambiamento di segno da cui si deduce che c'è una radice a parte reale positiva ed il Sistema è Instabile



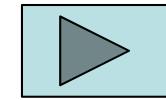
# Criterio di Routh - Hurwitz

## □ Criterio di R – H Come tecnica di Sintesi di Controllo



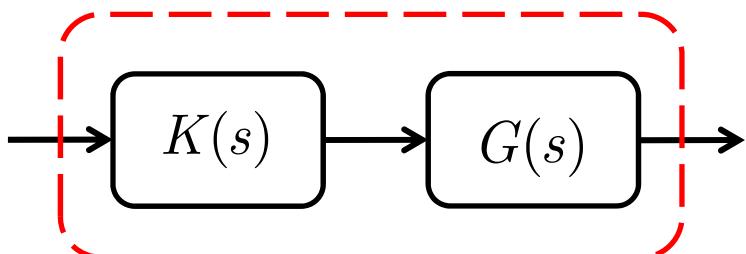
- Il sistema è instabile per qualsiasi ingresso e condizioni iniziali

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{+3t} + \dots$$



□ **Problema di Controllo:** Stabilizzare il Sistema (Tutti i poli devono essere di parte reale strettamente  $< 0$ )

□ **Controllo ad Anello Aperto:** Quale che sia la forma del controllore  $K(s)$ , essa deve eseguire una cancellazione Zero – Polo per eliminare  $(s-3)$ .



$$K(s) = k(s-3) \Rightarrow G'(s) = K(s)G(s) = k \frac{(s+1)}{(s+2)}$$

- A. **Problema 1:** Chi garantisce che la cancellazione possa essere eseguita in pratica? (Problema tecnologico)



## Criterio di Routh - Hurwitz

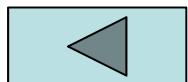
$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-3)} \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u & \lambda_i(A) = -2, +3 \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) = C e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau \end{cases}$$

$$e^{At} = M^{-1} e^{\Lambda t} M = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4e^{-2t} - 0.6e^{3t} & 0.4e^{-2t} - 0.4e^{3t} \\ 0.6e^{-2t} - 0.6e^{3t} & 0.6e^{-2t} + 0.4e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\forall \mathbf{x}_0 \neq 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$$

$$\forall u(t) \neq 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$$

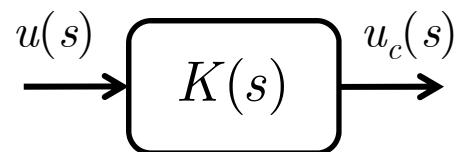




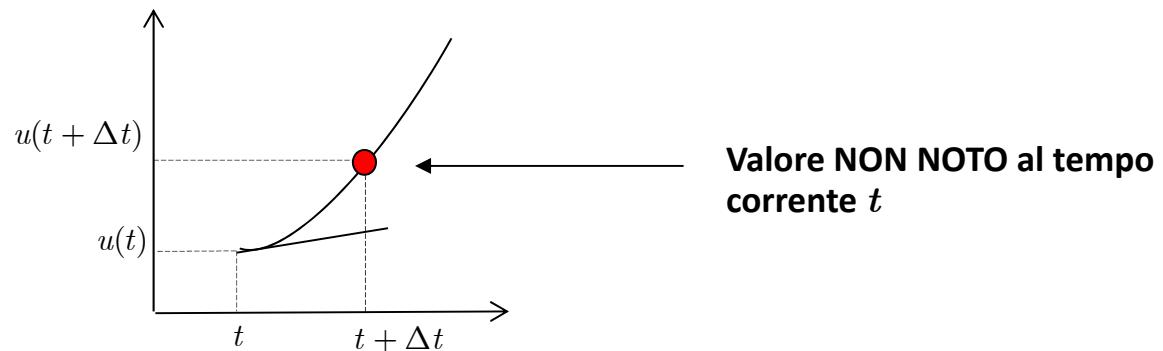
## Criterio di Routh - Hurwitz

### B. Problema 2: Realizzabilità del controllore

$$K(s) = k(s - 3) \quad \Rightarrow \quad G'(s) = K(s)G(s) = k \frac{s + 1}{(s + 2)} \quad \text{Controllore non causale}$$



$$u_c(t) = \frac{du(t)}{dt} - 3u(t) \quad \rightarrow \quad \frac{du(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$



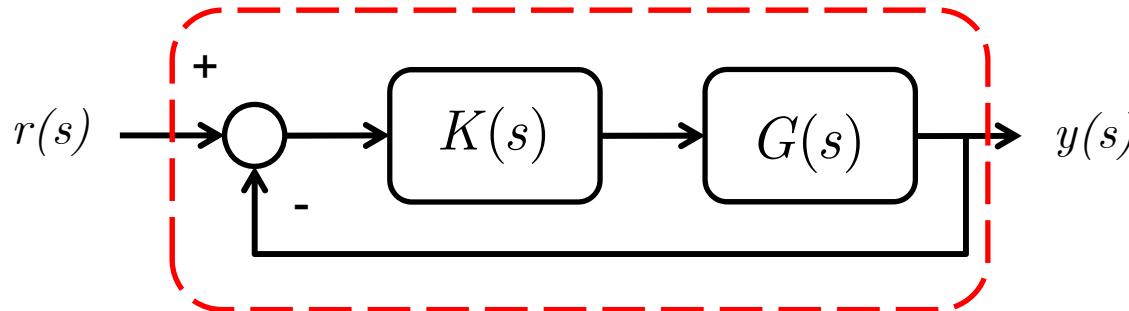
$$K(s) = \frac{s - 3}{s + P} \quad \Rightarrow \quad G'(s) = K(s)G(s) = \frac{(s + 1)}{(s + 2)(s + P = 100)} \quad \text{Controllore causale}$$

- **Nota:** la locazione appropriata del polo sarà descritta in seguito



## Criterio di Routh - Hurwitz

- **Controllo in Ciclo Chiuso:** Stabilizzazione mediante retroazione unitaria.



- **Scelta di Progetto:**

$$K(s) = k$$

$$G^{CL}(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)} = \frac{k(s+1)}{s^2 + (k-1)s + (k-6)}$$

|       |         |         |
|-------|---------|---------|
| $s^2$ |         |         |
|       | 1       | $(k-6)$ |
| $s^1$ |         |         |
|       | $(k-1)$ | 0       |
| $s^0$ |         |         |
|       | $(k-6)$ |         |

- Ponendo  $k > 6$  il sistema così ottenuto risulta asintoticamente stabile; si noti che ponendo  $k = 6$  il sistema è solo stabile, dato che i poli risultano essere rispettivamente  $s_1 = 0$  ed  $s_2 = -5$

- La risposta al gradino unitario del sistema originale vale:

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-3)}, u(t) = 1 \Rightarrow y(s) = \frac{s-1}{s^2}, \Rightarrow y(t) = 1 - t$$



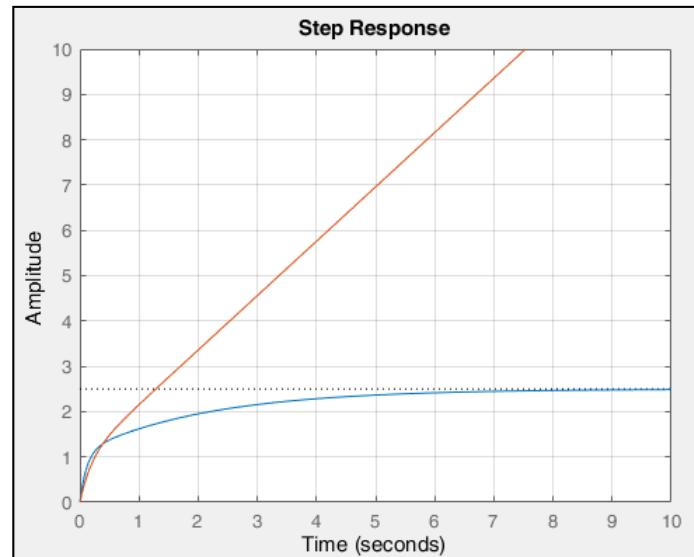
## Criterio di Routh - Hurwitz

$$K(s) = 6$$

$$\frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)} = \frac{k(s+1)}{s^2 + 5s}, u(t) = 1 \Rightarrow y(s) = A_1 + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3}{(s+5)}, \Rightarrow y(t) = A_1 + A_2 t + A_3 e^{-5t}$$

$$K(s) = 10$$

$$\frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)} = \frac{k(s+1)}{s^2 + 9s + 4}, u(t) = 1 \Rightarrow y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s + 8.5311)} + \frac{A_3}{(s + 0.4689)},$$
$$\Rightarrow y(t) = A_1 + A_2 e^{-0.4689t} + A_3 e^{-8.5311t}$$



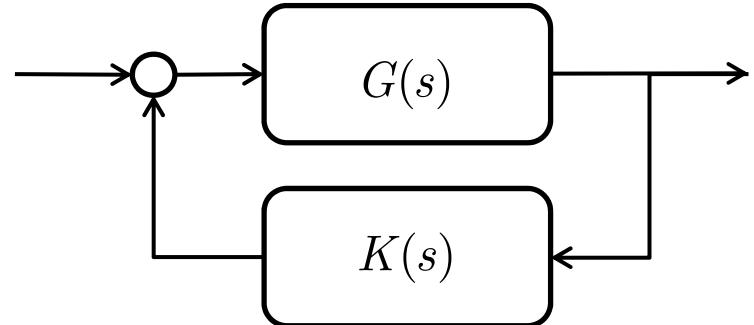


# Criterio di Routh - Hurwitz

□ **Controllo in ciclo chiuso:** Stabilizzazione con controllore nella catena di retroazione

$$y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} u(s) = \frac{(s+1)}{s^2 + (k-1)s + (k-6)} u(s)$$

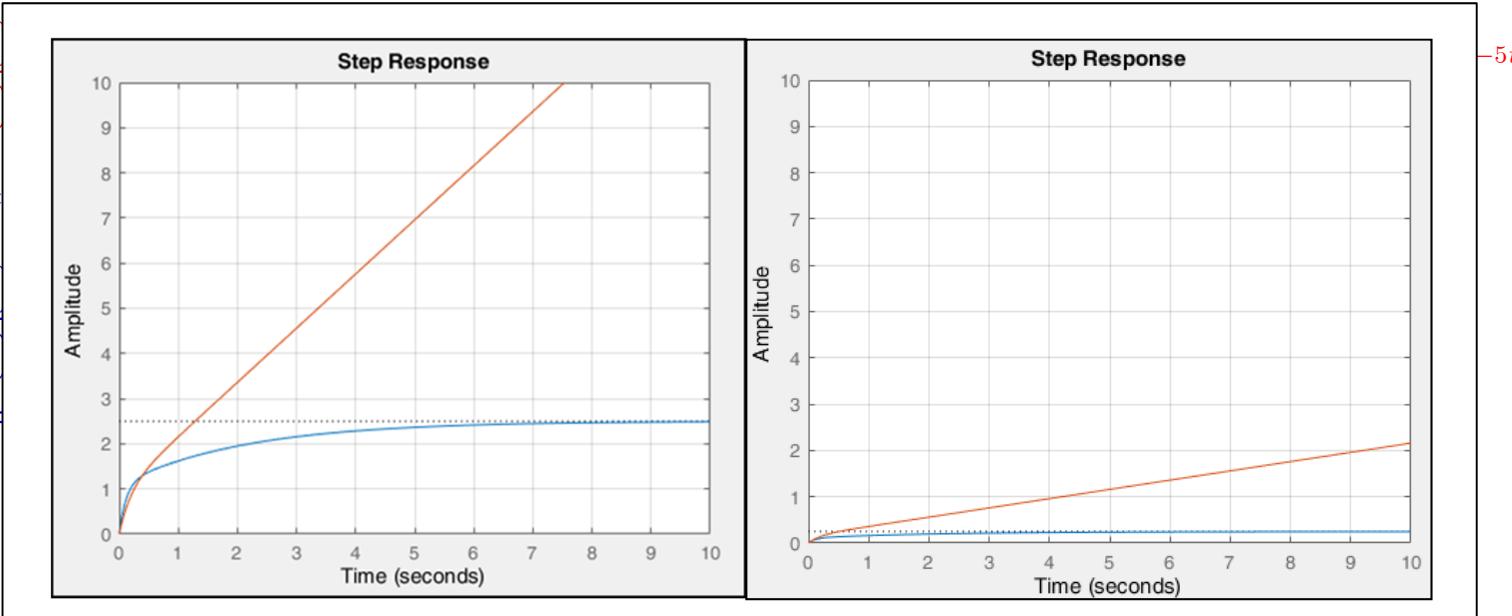
$$K(s) = 6$$



$$\frac{G(s)}{1 + K(s)}$$

$$K(s) =$$

$$\frac{G(s)}{1 + K(s)}$$
$$\Rightarrow y(t) =$$





## Criterio di Routh - Hurwitz

### □ Stabilizzazione in ciclo chiuso, Esempio #2

$$G(s) = \frac{s-1}{s}, u(t) = 1 \Rightarrow y(s) = \frac{s-1}{s^2}, \Rightarrow y(t) = 1 - t$$

A. Retroazione non unitaria,  $K(s) = k$

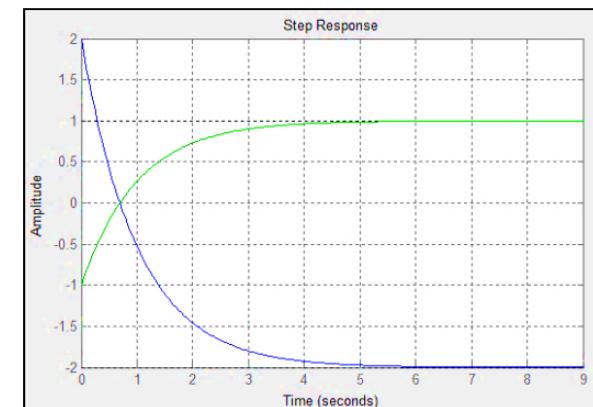
$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} u(s) \\ \Rightarrow y(s) &= \frac{s-1}{(1+k)s-k} \cdot \frac{1}{s} \end{aligned}$$

$$(1+k)s - k \Rightarrow -1 < k < 0$$

B. Retroazione unitaria,  $K(s) = k$

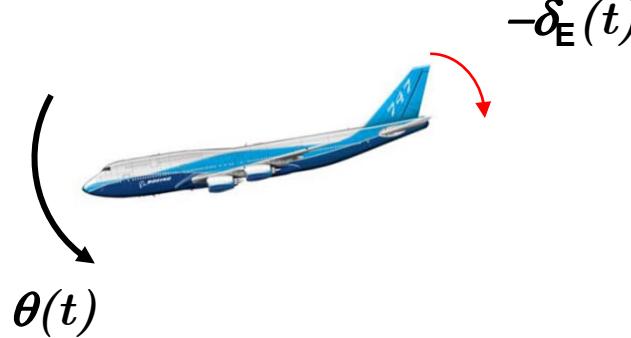
$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} u(s) \\ \Rightarrow y(s) &= \frac{k(s-1)}{(1+k)s-k} \cdot \frac{1}{s} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} k &= -0.5 \\ &\frac{2(s-1)}{s+1} \\ &\frac{-(s-1)}{s+1} \end{aligned}$$

$$(1+k)s - k \Rightarrow -1 < k < 0$$





## Criterio di Routh - Hurwitz



$$G_{\delta_E}^{\dot{\theta}}(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{\delta_E(s)} = 1.1569 \frac{s + 0.2929}{(s^2 + 0.7410s + 0.9272)}$$

$-0.3705 \pm 0.89j$  Poles

$-0.2969$  Zero

Gain = 1.1569

- L'andamento dell'angolo di beccheggio  $\theta(t)$  ad un comando a gradino in equilibratore  $\delta_E(t)$  tende all'infinito, all'aumentare del tempo.

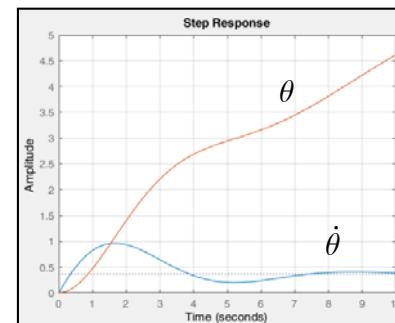
$$\theta(s) = 1.1569 \frac{s + 0.2929}{(s^2 + 0.7410s + 0.9272)} \delta_E(s) = 1.1569 \frac{s + 0.2929}{s(s^2 + 0.7410s + 0.9272)}$$

$$\theta(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{-0.3705t} \sin(0.8597t + C_4)$$

- **Problema:** progettare un controllore in feedback, tale che l'angolo di beccheggio tenda ad un valore costante, ovvero  $\theta_{DES}(t)$

- **Strumenti disponibili:**

- Retroazione
- Criterio di Routh
- Teorema del Valore Finale



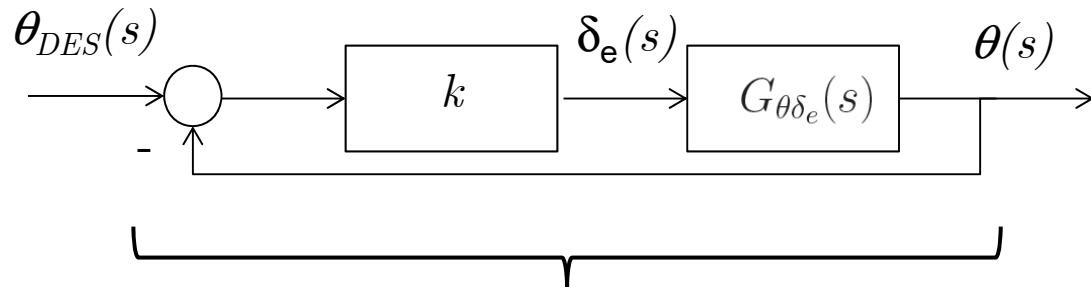


# Criterio di Routh - Hurwitz

**Requisiti:**

- Controllabilità (vedi dopo..)
- Stabilità asintotica in ciclo chiuso

**Ipotesi di Lavoro:** Retroazione unitaria con un controllore costante  $K(s) = k > 0$



$$G^{CL}(s) = \left[ \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} \right]^{CL} = \frac{K(s)G_{\theta\delta_e}(s)}{1 + K(s)G_{\theta\delta_e}(s)} = \frac{1.1569ks + 0.3435k}{s^3 + 0.7410s^2 + (.9272 + 1.1569k)s + 0.3435k}$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & .9272 + 1.1569k & 0 \\ s^2 & .7410 & .3435k & \\ s^1 & .9278 + .6934k & 0 & \\ s^0 & .3435k & & \end{array}$$

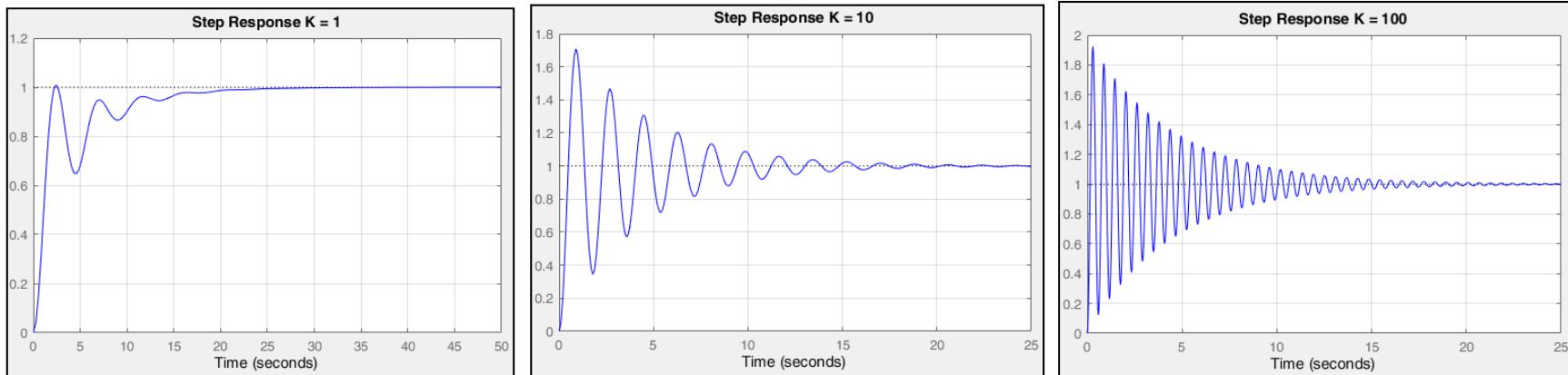
**Sistema asintoticamente stabile per  $k > 0$ .**



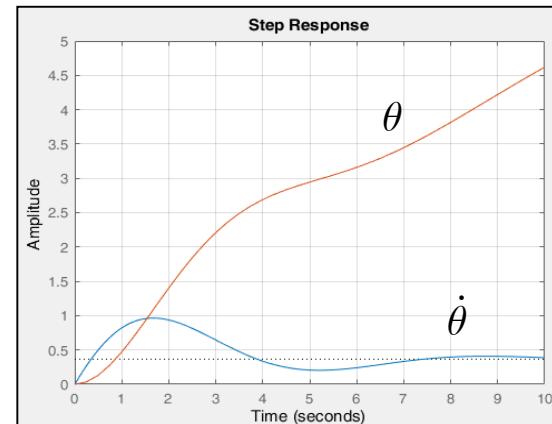
## Criterio di Routh - Hurwitz

- Si può applicare il teorema del valore finale. Ponendo l'ingresso pari ad un gradino unitario si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G^{CL}(s) \cdot \frac{1}{s} = 1$$



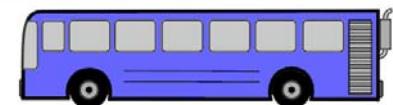
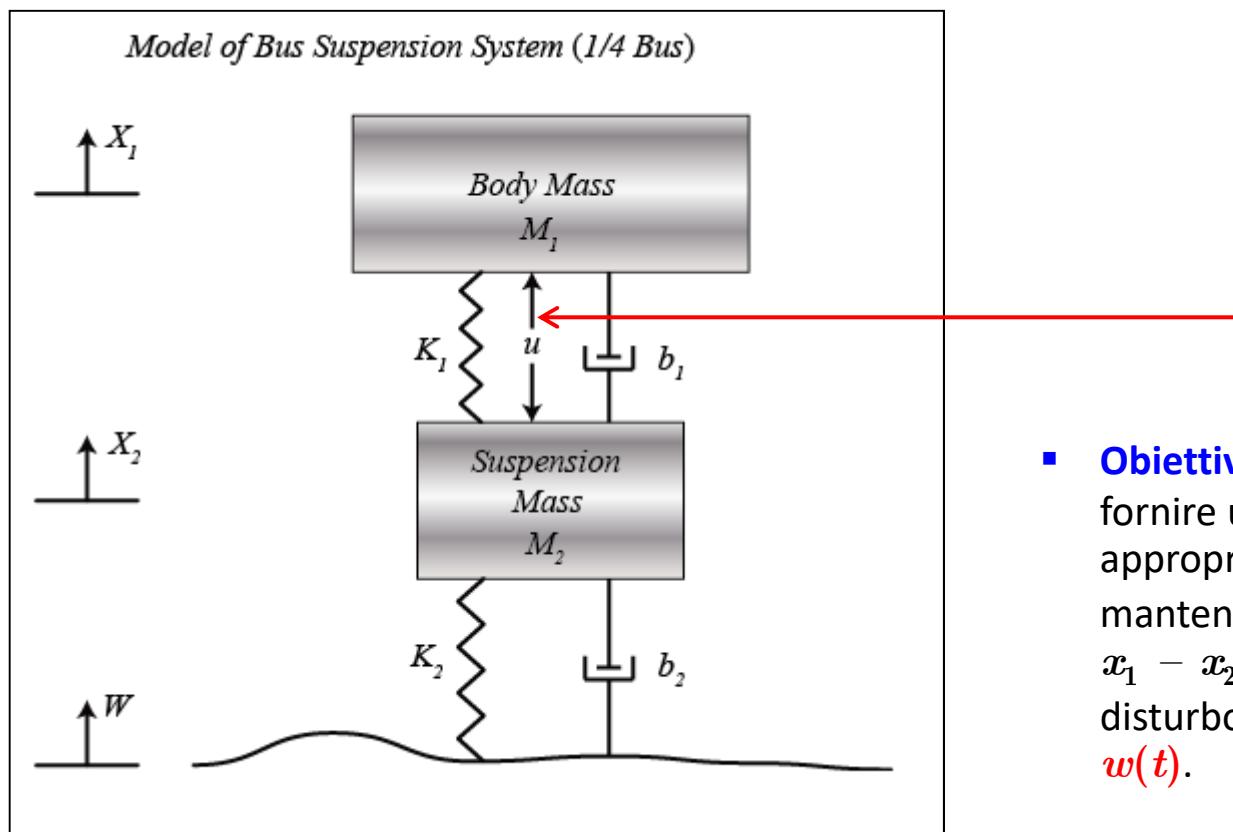
- Il comportamento fisico, naturale del sistema (angolo di beccheggio che cresce indefinitamente per un ingresso costante di equilibratore) viene alterato dal movimento dell'equilibratore stesso in funzione dell'angolo di beccheggio opportunamente amplificato.





## Criterio di Routh - Hurwitz

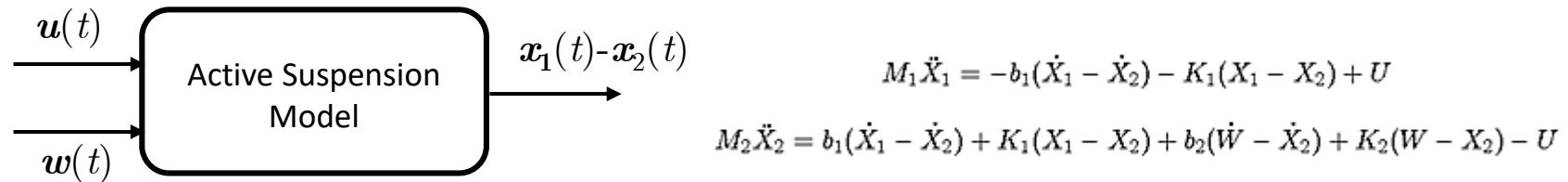
- Nel progetto della sospensione di un autoveicolo, viene usato di solito il modello a 1/4 che tratta una sola ruota. Il modello consiste in un sistema massa-molla-smorzatore come indicato nella figura. Il modello della sospensione attiva include la presenza di un attuatore capace di generare una forza di controllo  $u(t)$  per modificare il movimento del veicolo.



- Obiettivo del Controllo:** fornire un segnale di controllo appropriato  $u(t)$ , tale da mantenere costante la distanza  $x_1 - x_2$  in presenza di un disturbo dovuto al terreno  $w(t)$ .



# Criterio di Routh - Hurwitz



$$G_1(s) = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{U(s)} = \frac{(M_1 + M_2)s^2 + b_2s + K_2}{\Delta}$$

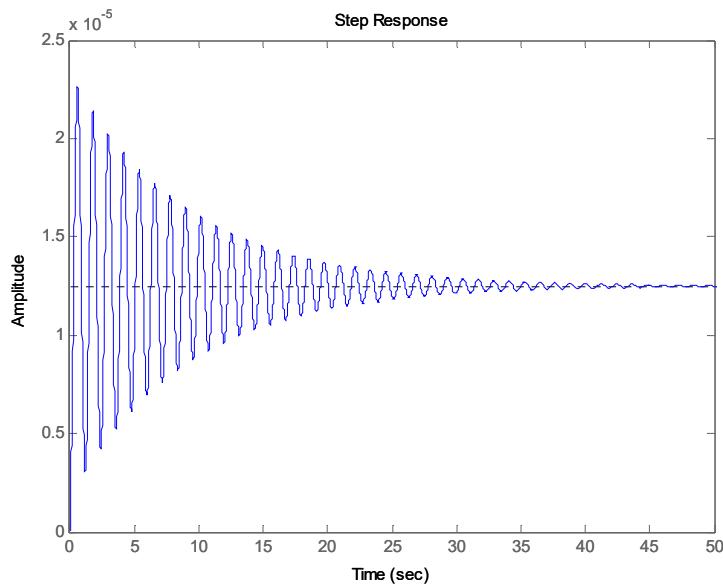
$$G_2(s) = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{W(s)} = \frac{-M_1b_2s^3 - M_1K_2s^2}{\Delta}$$

$$\Delta = (M_1s^2 + b_1s + K_1) \cdot (M_2s^2 + (b_1 + b_2)s + (K_1 + K_2)) - (b_1s + K_1) \cdot (b_1s + K_1)$$

```
M1 = 2500;
M2 = 320;
K1 = 80000;
K2 = 500000;
b1 = 350;
b2 = 15020;
s = tf('s');
G1 = ((M1+M2)*s^2+b2*s+K2)/((M1*s^2+b1*s+K1)*(M2*s^2+(b1+b2)*s+(K1+K2))-(b1*s+K1)*(b1*s+K1));
step(G1),pause
G2 = (-M1*b2*s^3-M1*K2*s^2)/((M1*s^2+b1*s+K1)*(M2*s^2+(b1+b2)*s+(K1+K2))-(b1*s+K1)*(b1*s+K1));
step(0.1*G2)
```

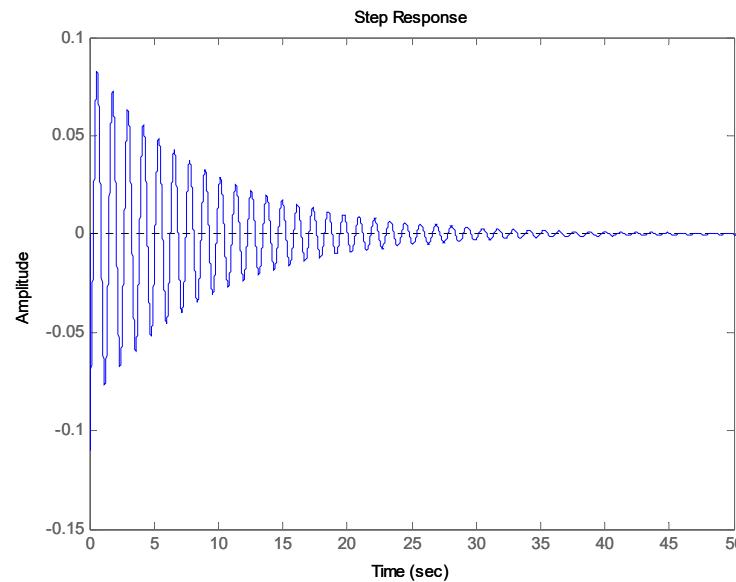


# Criterio di Routh - Hurwitz



Response to 1 m unit step Command

People sitting in the bus will feel very small amount of oscillation. Moreover, the bus takes an unacceptably long time to go back to the original state



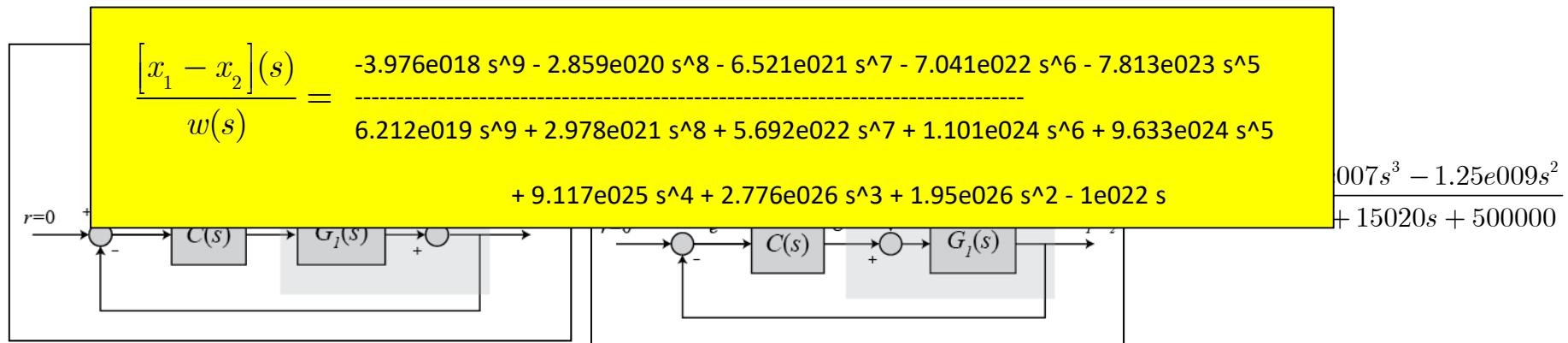
Response to 0.1 m unit step Disturbance

From this graph of the open-loop response for 10 cm step disturbance, we can see that when the bus passes a 10 cm high bump on the road, the bus body will oscillate for an unacceptably long time (~50 seconds) with an initial amplitude of **8 cm**. People sitting in the bus will not be comfortable with such an oscillation.

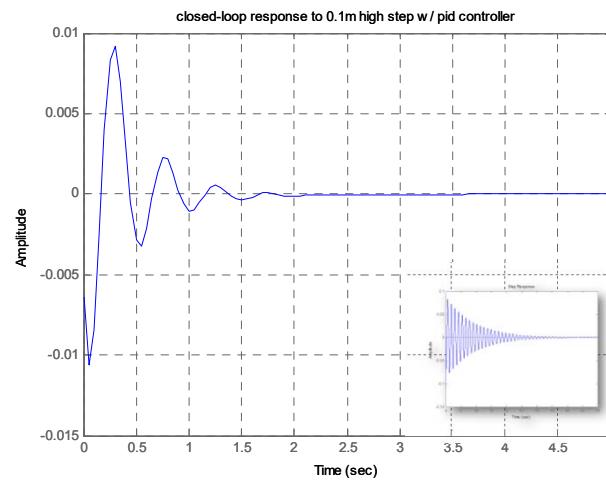


# Criterio di Routh - Hurwitz

- **Problema:** progettare un sistema di controllo in ciclo chiuso tale che, in presenza di un disturbo della strada costante, la distanza relativa tra le due masse abbia le seguenti caratteristiche:
1. Il valore finale della distanza sia raggiunto entro 5 secondi,
  2. L'oscillazione massima non superi il 5% del valore finale.



$$C(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s} =$$
$$= 832100 + 208025s + \frac{624075}{s}$$





# Criterio di Routh - Hurwitz

<http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Home>

**CONTROL TUTORIALS** FOR MATLAB® & SIMULINK®

SUSPENSION

Welcome to the Control Tutorials for MATLAB and Simulink (CTMS): They are designed to help you learn how to use MATLAB and Simulink for the analysis and design of automatic control systems. They cover the basics of MATLAB and Simulink, and introduce the most common classical and modern control design techniques.

About the Authors: These tutorials were originally developed by Prof. Bill Messner at Carnegie Mellon and Prof. Dawn Tilbury at the University of Michigan. Originally funded by NSF with further funding by MathWorks in 2011, Prof. Messner, Assoc. Prof. Rick Hill (U Detroit-Mercy), and PhD Student JD Taylor (CMU), completely redesigned the web interface and updated all of the tutorials to reflect

All contents licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License.



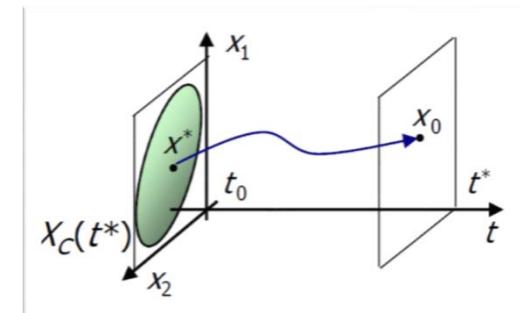
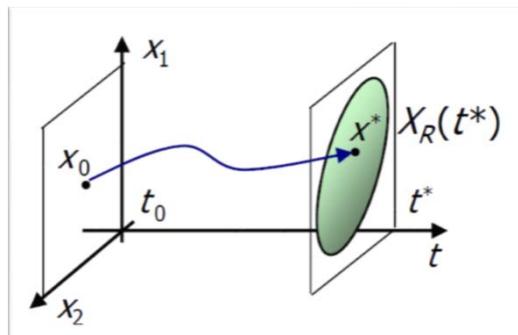
## Raggiungibilità, Controllabilità

- Le proprietà che verranno illustrate sono valide anche per sistemi lineari tempo varianti e/o nonlineari, noi ci limitiamo allo studio di sistemi lineari tempo invarianti, cioè del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \quad x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$$

Si vuole studiare la capacità intrinseca del sistema di poter pilotare, manipolare l'andamento temporale dello stato attraverso un opportuna scelta del segnale di controllo.

1. Dove possiamo trasferire uno stato del sistema  $x(t_0)$  ad un istante  $t = t_1$  ?
2. Quanto velocemente possiamo trasferire uno stato del sistema ad un valore desiderato  $x(t_1)$  ?
3. Come possiamo calcolare il controllo  $u(t)$  tale che si possa trasferire  $x(t_0)$  ad un valore desiderato  $x(t_1)$  ?
4. Come possiamo trovare il minimo (più efficiente) controllo  $u(t)$  tale che valga 3. ?





## Raggiungibilità - Definizione

- **Definizione – Sistema Raggiungibile:** Un sistema si dice raggiungibile dall'istante  $t_0$ , se è possibile trovare un segnale di ingresso **limitato**  $\mathbf{u}(t)$  tale da portare il sistema dallo stato iniziale  $\mathbf{x}(t_0) = 0$  ad uno stato finale  $\mathbf{x}(t_1)$  in un **tempo limitato**  $[t_0, t_1]$ .

- Dato il Vettore di stato:  $\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau; \mathbf{x}(t) \in \Re^n$

$$\forall t_1 > 0 \quad \exists \quad \left\{ \mathbf{u}(\tau), \|\mathbf{u}(\tau)\| < M : \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{x}(t_1) \right\}$$

- L'insieme di tutti gli stati per cui vale la definizione si indica con  $X_R$  (sottospazio di  $\Re^n$ ); se si verifica che  $X_R = \Re^n$  il sistema viene detto **completamente raggiungibile**
- L'insieme di tutti gli stati non raggiungibili  $X_{NR}$  è il complemento a  $X_R$  del sottospazio  $\Re^n$ . Si ha quindi:

$$X_R \cup X_{NR} = \Re^n$$



## Controllabilità - Definizione

- **Definizione – Sistema Controllabile:** Un sistema si dice controllabile dall'istante  $t_0$ , se è possibile trovare un segnale di ingresso **limitato**  $\mathbf{u}(t)$  tale da portare il sistema da uno stato iniziale  $\mathbf{x}(t_0) \neq 0$  allo stato finale  $\mathbf{x}(t_1) = 0$  in un **tempo limitato**  $[t_0, t_1]$ .

- Dato il Vettore di stato: 
$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau; \mathbf{x}(t) \in \Re^n$$

$$\forall t_1 > 0 \quad \exists \quad \left\{ \mathbf{u}(\tau), \|\mathbf{u}(\tau)\| < M : e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau = 0 \right\}$$

- L'insieme di tutti gli stati per cui vale la definizione si indica con  $X_C$  (sottospazio di  $R^n$ ); se si verifica che  $X_C = R^n$  il sistema viene detto completamente controllabile
- L'insieme di tutti gli stati non controllabili  $X_{NC}$  è il complemento a  $X_C$  del sottospazio  $R^n$ . Si ha quindi:

$$X_C \cup X_{NC} = \Re^n$$



## Definizioni

□ **Teorema:** Per i sistemi lineari stazionari tempo continui si ha che  $X_C = X_R$ .

- Si consideri il sistema completamente controllabile e quindi tale che  $X_C = R^n$ . Dalla definizione, posto  $t_0 = 0$ :

$$\forall t_1 > 0 \quad \exists \mathbf{u}(\tau) : e^{At_1} \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau = 0$$

$$\forall t_1 > 0, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad \exists \mathbf{u}(\tau) : \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau = -e^{At_1} \mathbf{x}_0$$

- Ma  $\text{Rango}(e^{At_1}) = n$ , quindi il secondo membro fornisce un vettore in  $R^n$ , per ogni condizione iniziale

$$\mathbf{x} = -e^{At_1} \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

poiché tale vettore può essere un qualsiasi vettore di  $R^n$ , ogni stato risulta raggiungibile, per cui:

$$X_C \in \mathbb{R}^n \rightarrow X_R \in \mathbb{R}^n \rightarrow X_C = X_R$$

■



## Esempi

Dato il sistema:

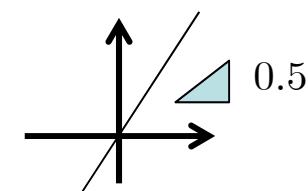
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = 0 \quad \text{è (completamente) controllabile se } X_C \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{2}{s+1} U(s) \\ X_2(s) = \frac{1}{s+1} U(s) \end{cases}$$

Il sistema risulta **non controllabile** in quanto per qualsiasi  $U(s)$ , si ha che  $X_1(s) = 2X_2(s)$  e, quindi  $x_1(t) = 2x_2(t)$  e  $X_C \in \mathbb{R}^1$

- Attraverso la scelta della  $u(t)$ , si possono raggiungere tutti gli stati tali che:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix}$$



- Non si possono mai raggiungere stati per cui:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad a \neq b$$



## Esempi

Dato il sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = 0 \quad \text{è (completamente) controllabile se } X_C \in \Re^2$$

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{1}{s+1} X_2(s) = \frac{1}{(s+1)^2} U(s) \\ X_2(s) = \frac{1}{s+1} U(s) \end{cases}$$

Il sistema risulta **controllabile** in quanto per ogni  $U(s)$ , si ha che  $X_1(s)$  non è mai una Combinazione lineare di  $X_2(s)$  e, quindi  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  sono linearmente indipendenti.

- Attraverso la scelta della  $u(t)$ , si può sempre raggiungere uno stato  $\mathbf{x}(t)$  tale che:

$$\mathbf{x} \in \Re^2 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad a \neq b$$



## Proprietà

- Un aspetto importante della controllabilità è la sua relazione con la stabilità del sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t x_{10} \\ e^{-3t} x_{20} + \int_0^t e^{-3(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{pmatrix}$$

Il sistema è instabile nello stato  $x_1(t)$  e non può essere stabilizzato dato che risulta anche non controllabile (l'azione dell'ingresso agisce solo su  $x_2(t)$ ).

- **Definizione:** Un sistema si dice **stabilizzabile** se tutti gli stati instabili sono controllabili.
  - Se un sistema è controllabile, esiste un ingresso che può fare evolvere il sistema all'origine con andamento desiderato mediante opportuna scelta dell'ingresso
  - Se un sistema è stabilizzabile, vale lo stesso, ma con andamento parzialmente desiderato
  - Altrimenti, non esiste ingresso per garantire un'evoluzione stabile all'equilibrio.
  - **Come possiamo verificare in generale se un sistema è controllabile o no?**

$$x(t_1) \in X_C \equiv \Re^n$$



## Test di Controllabilità

- **Definizione - Matrice di Controllabilità:** Dato un sistema lineare, tempo invariante:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in \Re^n, \quad \mathbf{u} \in \Re^m$$

Si definisce matrice di Controllabilità  $\mathcal{B}$ , la matrice  $n \times nm$  data da:

$$\mathcal{B} = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$$

- **Teorema:** Un sistema lineare continuo tempo invariante è controllabile **se e solo se** la sua matrice di controllabilità ha Rango massimo:

$$\text{rango}(\mathcal{B}) = \text{rango}\left((B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)\right) = n$$

- **Traccia di Dimostrazione (Solo C. N.)**

- Per semplicità supponiamo di avere condizioni iniziali nulle

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{At_1} \mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B\mathbf{u}(\tau) d\tau = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B\mathbf{u}(\tau) d\tau$$



## Test di Controllabilità

- La condizione necessaria richiede di dimostrare che, per ogni  $u(t)$  finito:

$$\mathbf{x}(t_1) \in \Re^n \Rightarrow \text{rango}(\mathcal{B}) = n$$

- Sfruttando il Teorema di Cayley-Hamilton

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i$$

$$\mathbf{x}(t_1) = \int_0^{t_1} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t_1 - \tau) A^i B \mathbf{u}(\tau) d\tau = \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \int_0^{t_1} \alpha_i(t_1 - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau = \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \beta_i(i, \mathbf{u}, t_1)$$

$$\beta_i(i, \mathbf{u}, t_1) = \int_0^{t_1} \alpha_i(t_1 - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$$\left[ B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B \right] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{x}(t_1)$$

Essendo la soluzione un vettore L.I.,  $\mathbf{x}(t_1) \in \Re^n$

Questo implica che la matrice di Controllabilità  
Deve avere Rango massimo

$$\text{Rango}(\mathcal{B}) = n$$



## Teoremi sulla Controllabilità

□ **Teorema:** La proprietà di controllabilità è invariante rispetto a cambiamenti di base.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

- Operiamo un cambio di Base con la matrice non singolare  $T$

$$x = T z \Rightarrow z = T^{-1}x \quad \longrightarrow \quad \dot{z} = T^{-1}AT z + T^{-1}Bu$$

- Se il sistema originale è controllabile, così lo è il sistema trasformato. Infatti le due Matrici di Controllabilità hanno lo stesso Rango.

$$\tilde{\mathcal{B}} = [T^{-1}B, T^{-1}ATT^{-1}B, (T^{-1}AT)^2T^{-1}B, \dots, (T^{-1}AT)^{n-1}T^{-1}B]$$

$$(T^{-1}AT)^r = (T^{-1}AT)_1 \cdot (T^{-1}AT)_2 \cdot (T^{-1}AT)_3 \cdot \dots \cdot (T^{-1}AT)_r = T^{-1}A^rT$$

$$\tilde{\mathcal{B}} = [T^{-1}B, T^{-1}ATT^{-1}B, T^{-1}A^2B, \dots, T^{-1}A^{n-1}B] = T^{-1}\mathcal{B}$$

$$Rango(\tilde{\mathcal{B}}) = \min [Rango(T^{-1}), Rango(\mathcal{B})] = Rango(\mathcal{B})$$



# Teoremi sulla Controllabilità

□ **Teorema:** Un sistema è non completamente controllabile se almeno una variabile di stato non è influenzata, direttamente o indirettamente, dall'ingresso.

- Dato il sistema:

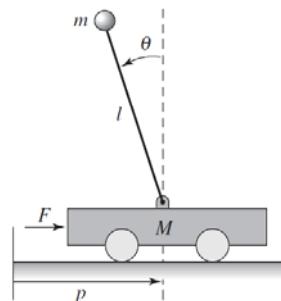
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^p$$

- Le prime  $n - p$  variabili sono influenzate direttamente dall'ingresso, mentre le altre seguono una evoluzione autonoma data da:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2 = A_{22} \boldsymbol{x}_2 \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) = e^{A_2 t} \boldsymbol{x}_0$$

Indipendentemente dall'ingresso e quindi costituiscono un sottoinsieme non controllabile

- **Esempio - Pendolo**



$$(M+m)\ddot{p} - ml \cos \theta \ddot{\theta} = -c\dot{p} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + F,$$
$$(J+ml^2)\ddot{\theta} - ml \cos \theta \ddot{p} = -\gamma \dot{\theta} + mg l \sin \theta.$$



- Poniamo  $c = \gamma = 0$  e consideriamo l'approssimazione lineare intorno all'equilibrio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m^2 l^2 g / \mu & 0 & 0 \\ 0 & M_t m g l / \mu & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_t / \mu \\ lm / \mu \end{pmatrix}$$

- Posto:

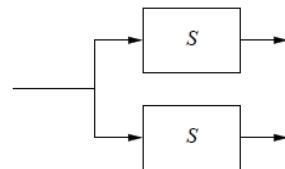
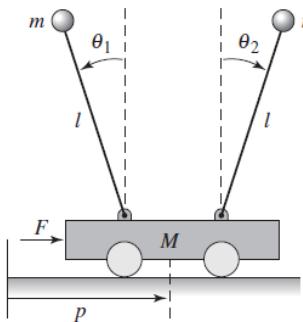
$$\mu = M_t J_t - m^2 l^2, M_t = M + m \text{ and } J_t = J + ml^2$$

La matrice di controllabilità vale:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & J_t / \mu & 0 & gl^3 m^3 / \mu^2 \\ 0 & lm / \mu & 0 & gl^2 m^2 (m + M) / \mu^2 \\ J_t / \mu & 0 & gl^3 m^3 / \mu^2 & 0 \\ lm / \mu & 0 & gl^2 m^2 (m + M) / \mu^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rango } [\mathcal{B}] = 4$$



## Esempio – Pendolo 2



La dinamica dei due pendoli è  
La stessa

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [p \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \dot{p} \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^T \\ \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m^2 l^2 g}{\mu} & \frac{m^2 l^2 g}{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M_m g l}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_m g l}{\mu} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J_t}{\mu} F \\ \frac{l m}{\mu} \\ \frac{J_t}{\mu} F \\ \frac{l m}{\mu} \\ \frac{J_t}{\mu} F \end{bmatrix} \end{aligned}$$

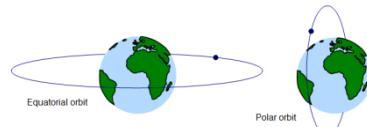
$$B = \begin{bmatrix} J_t / \mu & 0 & \frac{gl^3 m^3}{\mu^2} & 0 & a_{42} B_{42} \\ 0 & lm / \mu & 0 & \frac{gl^2 m^2 (m+M)}{\mu^2} & 0 \\ 0 & lm / \mu & 0 & \frac{gl^2 m^2 (m+M)}{\mu^2} & 0 \\ J_t / \mu & 0 & \frac{gl^3 m^3}{\mu^2} & 0 & a_{42} B_{42} \\ lm / \mu & 0 & \frac{gl^2 m^2 (m+M)}{\mu^2} & 0 & a_{52} B_{42} \\ lm / \mu & 0 & \frac{gl^2 m^2 (m+M)}{\mu^2} & 0 & a_{63} B_{43} = a_{52} B_{42} \end{bmatrix}$$

Rango( $\mathcal{B}$ ) = 4

Sistema non controllabile



# Esempio Satellite



$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\omega_0 r_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega_0/r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/mr_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/mr_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \\ u_{\dot{\theta}} \\ u_{\dot{\phi}} \\ u_{\ddot{\phi}} \end{bmatrix}$$

## □ Moto Equatoriale Controllabile

$$\mathcal{B} = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/m & 0 & 0 & \frac{2\omega_0}{m} & \dots & \dots \\ 1/m & 0 & 0 & \frac{2\omega_0}{m} & \frac{3\omega_0^2}{m} - \frac{2\omega_0^2}{mr_0} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/mr_0 & \frac{-2\omega_0}{mr_0^2} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1/mr_0 & \frac{-2\omega_0}{mr_0^2} & 0 & 0 & \frac{-2\omega_0}{mr_0^2} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

## □ Moto non-Equatoriale Controllabile

$$\mathcal{B} = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1/mr_0 \\ 1/mr_0 & 0 \end{bmatrix}$$



## Esempio Numerico

- Moto linearizzato della traiettoria di un satellite geostazionario in orbita equatoriale

$$\text{Unità : } \begin{cases} m & 10^3 \text{Kg} = 1 \\ \omega_0 & \text{rad / day} = 2\pi \\ r_0 & 10^4 \text{Km} = 3.6 \end{cases} \quad \dot{x}(t) = \left[ \begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 118.4 & 0 & 0 & 22.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -.3537 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39.48 \end{array} \right] \boldsymbol{x}(t) + \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & .28 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .28 \end{array} \right] \boldsymbol{u}(t)$$

```
a =  
  
0 1.0000 0 0 0  
118.4000 0 0 22.6200 0 0  
0 0 0 1.0000 0 0  
0 -0.3537 0 0 0 0  
0 0 0 0 0 1.0000  
0 0 0 0 0 -39.4800
```

```
>> b
```

```
b =  
  
0 0 0  
1.0000 0 0  
0 0 0  
0 0.2800 0  
0 0 0  
0 0 0.2800
```

- Il sistema è controllabile

```
>> rank(ctrb(a,b))
```

```
ans =
```



# Sommario Controllabilità

- Per sistemi lineari tempo invarianti continui controllabilità e raggiungibilità sono sinonimi
- Dato un sistema lineare tempo invariante in  $\mathbb{R}^n$ . La (completa) controllabilità permette di trovare un ingresso limitato  $u(t)$  tale che, in un tempo limitato  $[t_0, t_1]$ , possa permettere raggiungere un punto qualsiasi dello spazio di stato da una condizione iniziale qualsiasi.
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$$
- Un sistema lineare tempo invariante è (completamente) controllabile se e solo se la matrice di controllabilità ha rango pieno
$$Rango \left\{ [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \right\} = n$$
- Se alcuni stati non sono controllabili, il sistema è non controllabile
- Se gli stati non controllabili sono asintoticamente stabili, il sistema si dice **stabilizzabile**
- La controllabilità è una proprietà legata al numero di attuatori presenti nel sistema
- Se il sistema è (completamente) controllabile, non tutte le traiettorie possono portare il sistema da un punto ad un altro dello spazio di stato con uno specifico ingresso limitato, ma esiste sempre un ingresso limitato in grado di soddisfare il requisito



# Sommario Controllabilità

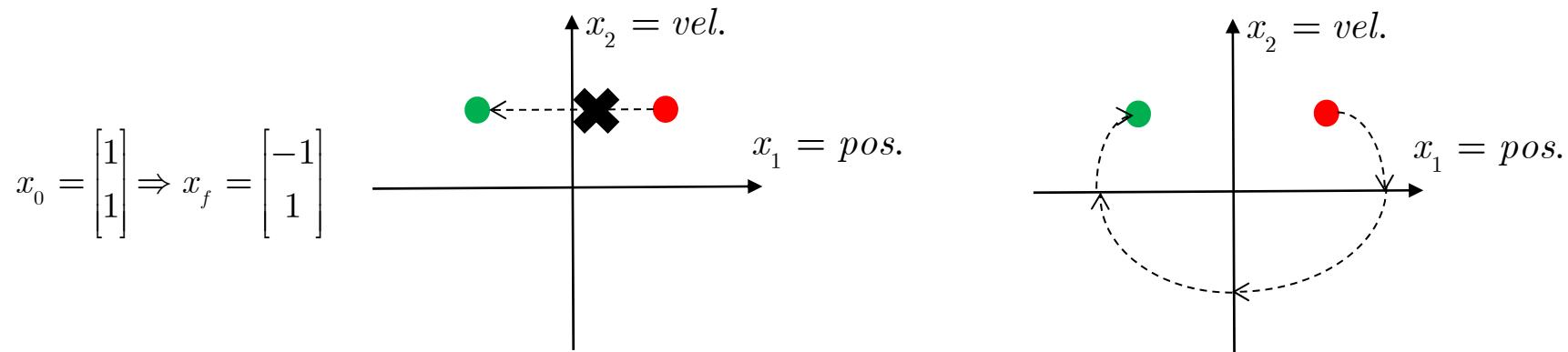
- Consideriamo il modello di un punto materiale di massa unitaria che segue la seconda legge di Newton.

$$\ddot{x}(t) = u(t) \quad \begin{cases} x_1 = pos. \\ x_2 = vel. \end{cases} \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad x(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} u(s)$$

$$Rango \{[B, AB]\} = Rango \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \quad e^{At} = e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_0 + \int_0^t \begin{bmatrix} t-\tau \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau) d\tau$$

- Problema:** Trovare un ingresso finito  $u(t)$  tale da portare il vettore di stato da  $x(0) = x_0 \rightarrow x(t_f) = x_f$ .





## Osservabilità - Definizioni

- Questa Proprietà riflette la capacità di determinare lo stato iniziale (**Osservabilità**) o quello corrente (**Ricostruibilità**) di un sistema, noto il segnale d'uscita del sistema stesso.

- Anche in questo caso, per sistemi continui le due definizioni si equivalgono

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ \mathbf{y} = Cx \end{cases}, \quad \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in \Re^n, \mathbf{y} \in \Re^p$$

- **Definizione:** Un sistema Lineare Tempo Invariante si dice **non osservabile** se:

$$\mathbf{y}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}_0 \neq 0 \in \Re^n$$

- Dato un sistema lineare tempo invariante, indichiamo il sottospazio di non osservabilità come:

$$X_{NO} = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \Re^n : \mathbf{y}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 = 0, \forall t \geq 0 \right\}$$

- Il sistema si dice (completamente) Osservabile, se e soltanto se  $X_{NO} = 0$ . Definendo il sottospazio di Osservabilità come  $X_O$ , si ha:

$$X_{NO} \cup X_O = \Re^n$$



## Esempi - Definizioni

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} & y(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

- Conoscendo l'uscita, possiamo avere direttamente la prima variabile di stato e calcolare la seconda dal segnale di uscita, per cui il sistema è **osservabile**.

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ 2\dot{y}(t) - 4y(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

- In questo caso, la prima variabile di stato non è ottenibile dall'uscita, per cui il sistema è non osservabile

$$\forall t \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \Re^n \Rightarrow \text{Ker}(Ce^{At}) \in \Re^n$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & -t \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y \end{pmatrix} \\ y(t) &= x_2(t)\end{aligned}$$



## Definizioni

- Un aspetto importante della osservabilità è la sua relazione con la stabilità del sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}\quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t x_{10} \\ e^{-3t} x_{20} \end{pmatrix}, y(t) = x_2(t) = e^{-3t} x_{20}$$

- Il sistema è instabile nello stato  $x_1(t)$  e tale stato non è presente nell'uscita, per cui l'uscita del sistema non fornisce alcuna indicazione sulla stabilità.
- **Definizione – Sistema Rivelabile:** Un sistema si dice rivelabile se tutti gli stati non osservabili sono stabili
- **Definizione – Matrice di Osservabilità:** Dato un sistema lineare tempo invariante si definisce **matrice di osservabilità**, la matrice  $C$ :

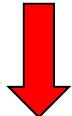
$$C = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$



## Test di Osservabilità

- **Teorema:** Un sistema lineare è completamente osservabile (la coppia  $A, C$  è completamente osservabile) se e solo se il rango della matrice di osservabilità è massimo, ovvero per:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}, \quad x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p$$



$$Rango(C) = Rango\left((C, CA, CA^2, \dots, CA^{n-1})^T\right) = n$$

- **Traccia di Dimostrazione**

- Supponiamo che esistano  $r$  stati non osservabili, per essi si ha:

$$y(t) = Ce^{At}x_{NO} = 0, \quad x_{NO} \in \mathbb{R}^r$$



## Test di Osservabilità

- Dal Teorema di Cayley – Hamilton:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} A^i \alpha_i(t) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{y}(t) = C \sum_{i=0}^{n-1} A^i \alpha_i(t) \mathbf{x}_{NO} = 0$$

- Poiché  $\alpha_i(t)$  sono  $n$  funzioni linearmente indipendenti, si può scrivere:

$$\mathbf{y}(t) = C\alpha_0(t)\mathbf{x}_{NO} + CA\alpha_1(t)\mathbf{x}_{NO} + CA^2\alpha_2(t)\mathbf{x}_{NO} + \dots + CA^{n-1}\alpha_{n-1}(t)\mathbf{x}_{NO} = 0$$

$$CA^i \mathbf{x}_{NO} = 0 \quad \forall i$$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{NO} = C \mathbf{x}_{NO} = 0$$

- Essendo  $\mathbf{x}_{NO}$  non nullo, la Matrice di Osservabilità deve avere rango inferiore al rango massimo
- Se il rango della Matrice di Osservabilità è massimo ( $n$ ) l'unica soluzione dell'equazione è data dal vettore nullo, per cui  $X_{NO}$  risulta essere un insieme vuoto e ciò implica che il sistema è osservabile.



## Teoremi sull'Osservabilità

- In modo del tutto duale alla proprietà di Controllabilità, si può dimostrare:

- **Teorema:** La proprietà di osservabilità è invariante rispetto a cambiamenti di base.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ \mathbf{y} = Cx \end{cases} \quad \mathbf{x} = Tz \Rightarrow z = T^{-1}\mathbf{x} \quad \begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ \mathbf{y} = CTz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ \mathbf{y} = \tilde{C}z \end{cases}$$

- **Teorema:** Un sistema è non completamente osservabile se almeno una variabile di stato non influenza, direttamente o indirettamente, l'uscita.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}, \quad \mathbf{x} \in \Re^n, \quad A_{11} = (m \times n)$$

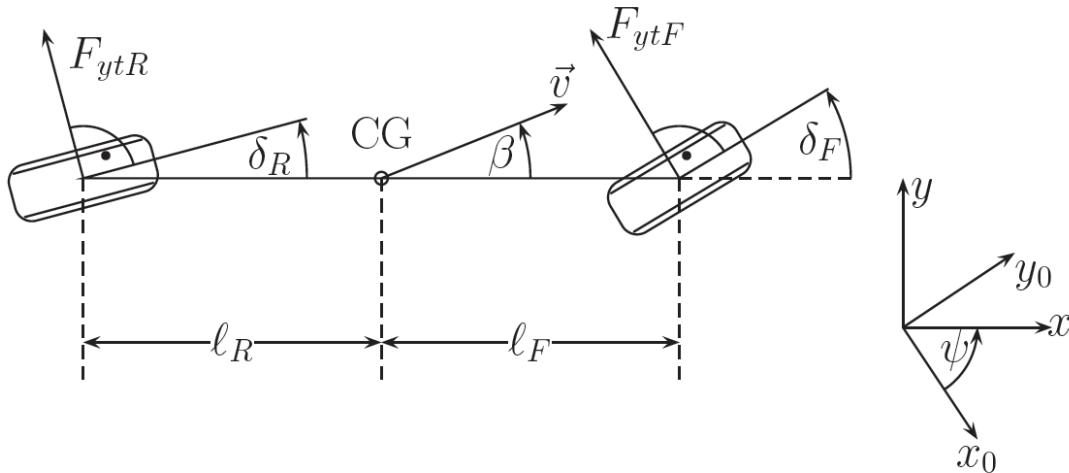
$$\mathbf{y}(t) = C_1 \mathbf{x}_1(t) = C_1 e^{A_{11}t} \mathbf{x}_1(0)$$

- Gli stati corrispondenti alla partizione  $A_{22}$  sono non osservabili



# Esempio

## □ Single Track Steering Model: Dynamics (Ackerman 1994)



$$\begin{aligned} F_{yF} &= F_{ytF} \cos \delta_F \\ F_{yR} &= F_{ytR} \cos \delta_R \\ F_x &= -F_{ytF} \sin \delta_F - F_{ytR} \sin \delta_R \end{aligned}$$

- Moto Laterale

$$mv(\dot{\beta} + \dot{\psi}) \cos \beta + m\dot{v} \sin \beta = F_{yF} + F_{yR}$$

- Moto Longitudinale

$$-mv(\dot{\beta} + \dot{\psi}) \sin \beta + m\dot{v} \cos \beta = F_x$$

- Moto di imbardata (yaw)

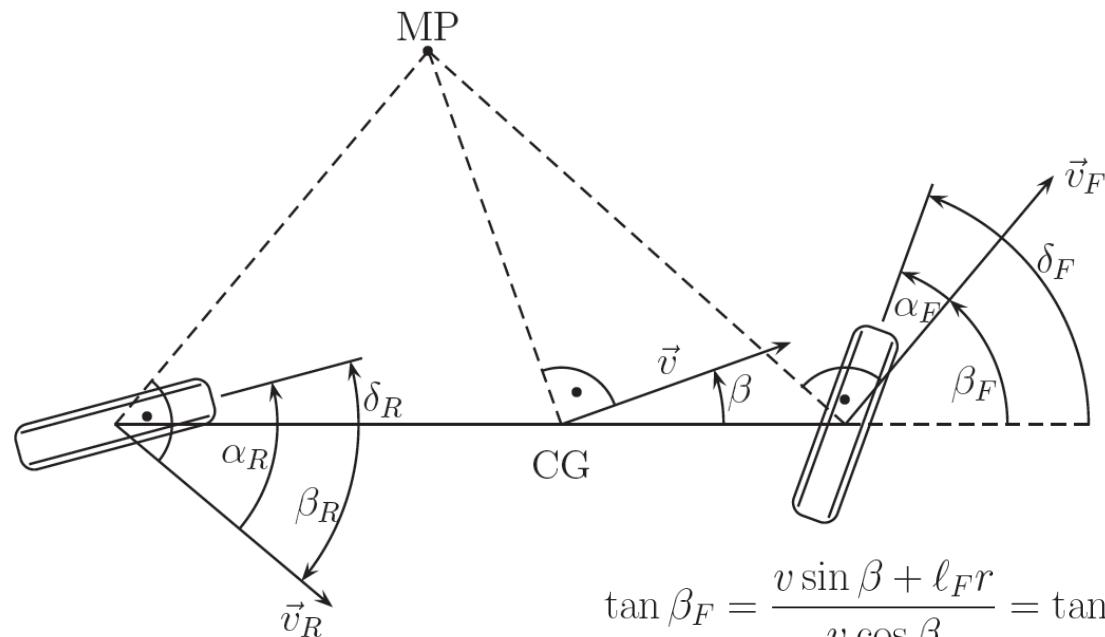
$$J\ddot{\psi} = F_{yF}\ell_F - F_{yR}\ell_R + M_{zD}$$



# Esempio

$$\begin{bmatrix} mv(\dot{\beta} + r) \\ m\dot{v} \\ J\dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_{yF} + F_{yR} \\ F_{yF}\ell_F - F_{yR}\ell_R + M_{zD} \end{bmatrix}$$

## □ Single Track Steering Model: Kinematics



Relazione tra gli angoli dei pneumatici ( $\alpha_i, \delta_i, \beta_i$ )

$$v_R \cos \beta_R = v_F \cos \beta_F = v \cos \beta$$

$$v_F \sin \beta_F = v \sin \beta + \ell_F r$$

$$v_R \sin \beta_R = v \sin \beta - \ell_R r$$

$$\tan \beta_F = \frac{v \sin \beta + \ell_F r}{v \cos \beta} = \tan \beta + \frac{\ell_F r}{v \cos \beta}$$

$$\tan \beta_R = \frac{v \sin \beta - \ell_R r}{v \cos \beta} = \tan \beta - \frac{\ell_R r}{v \cos \beta}$$

$$\alpha_F = \delta_F - \beta_F$$

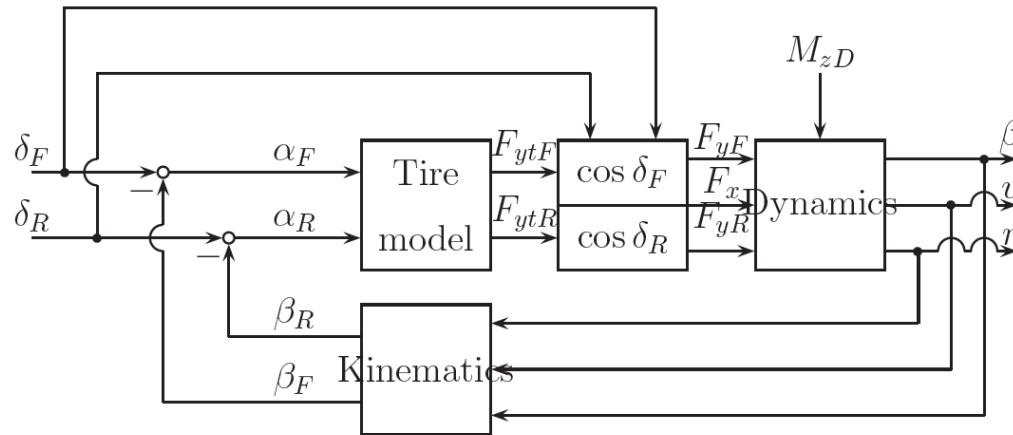
$$\alpha_R = \delta_R - \beta_R$$



## Esempio

- La nonlinearietà più critica è dovuta alla modellazione dei pneumatici, che dipende fortemente dalla sperimentazione:

$$\begin{cases} F_{ytF} = f_F(\alpha_F) \\ F_{ytR} = f_R(\alpha_R) \end{cases}$$



### □ Ipotesi di linearizzazione:

- Velocità costante (ovvero varia + lentamente delle altre variabili)  $\begin{cases} \dot{v} = 0 \\ v = \cos t. \end{cases}$
- Forza Longitudinale trascurabile  $F_x \approx 0$
- Angoli di sideslip (derapata) dello chassis sono piccoli  $\cos \beta_i = 1, \forall i = F, R, ()$
- Angoli di steering (sterzata) sono piccoli  $\cos \delta_i = 1, \forall i = F, R$



## Esempio

- Dalle precedenti ipotesi di linearizzazione sugli angoli di sterzata e derapata si ha:

$$\beta_F = \beta + \ell_F r/v \quad F_{yF} = F_{yF}(\alpha_F)$$

$$\beta_R = \beta - \ell_R r/v \quad F_{yR} = F_{yR}(\alpha_R)$$

$$\begin{bmatrix} mv(\dot{\beta} + r) \\ J\dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{yF}(\alpha_F) + F_{yR}(\alpha_R) \\ F_{yF}(\alpha_F)\ell_F - F_{yR}(\alpha_R)\ell_R + M_{zD} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_F = \delta_F - \beta_F, \alpha_R = \delta_R - \beta_R$$

- Linearizzazione delle forze agenti sui pneumatici, mediante approssimazione dei dati sperimentali.**

$$F_{yF}(\alpha_F) = \mu c_F \alpha_F \quad \mu = \text{coefficiente di frizione}$$

$$F_{yR}(\alpha_R) = \mu c_R \alpha_R \quad c_F, c_R = \text{rigidezze di curvatura (cornering)}$$



## Esempio

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{mv}(c_F\alpha_F + c_R\alpha_R) - r \\ \frac{\mu}{J}(c_F\ell_F\alpha_F - c_R\ell_R\alpha_R) + \frac{1}{J}M_{zD} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \alpha_F &= \delta_F - \beta_F \\ \alpha_R &= \delta_R - \beta_R \end{aligned}$$

$$\beta_F = \beta + \ell_F r/v$$

$$\beta_R = \beta - \ell_R r/v$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{mv}[c_F(\delta_F - \beta - \ell_F r/v) + c_R(\delta_R - \beta + \ell_R r/v)] - r \\ \frac{\mu}{J}[c_F\ell_F(\delta_F - \beta - \ell_F r/v) - c_R\ell_R(\delta_R - \beta + \ell_R r/v)] + M_{zD}/J \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_F \\ \delta_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_D \end{bmatrix} M_{zD}$$



## Esempio

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_F \\ \delta_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_D \end{bmatrix} M_{zD}$$

$$a_{11} = -\mu(c_R + c_F)/mv$$

$$b_{11} = \mu c_F/mv$$

$$a_{12} = -1 + \mu(c_R \ell_R - c_F \ell_F)/mv^2$$

$$b_{12} = \mu c_R/mv$$

$$a_{21} = \mu(c_R \ell_R - c_F \ell_F)/J$$

$$b_{21} = \mu c_F \ell_F/J$$

$$a_{22} = -\mu(c_R \ell_R^2 + c_F \ell_F^2)/Jv$$

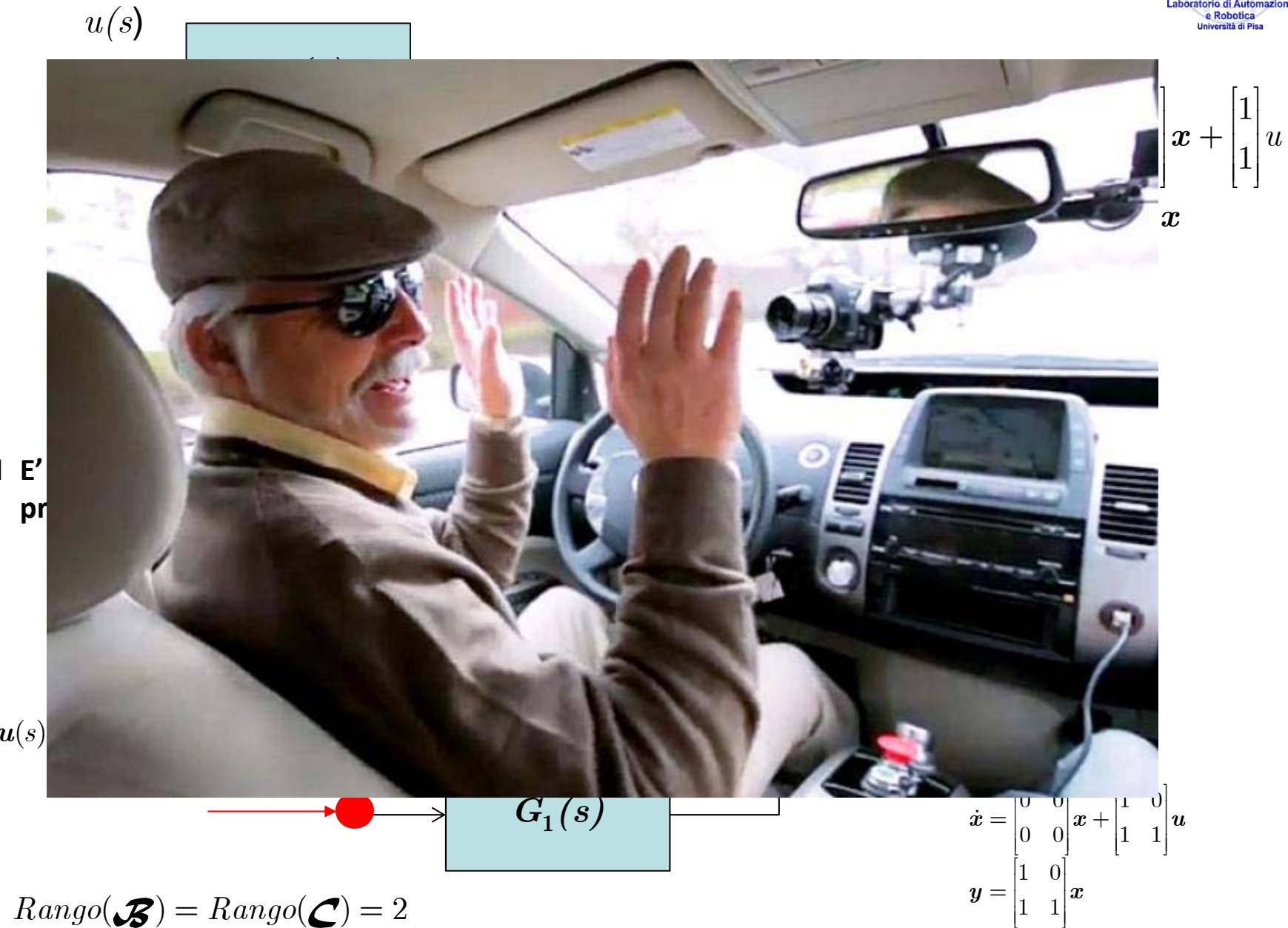
$$b_{22} = -\mu c_R \ell_R/J$$

$$b_D = 1/J$$

□ Determinare se il sistema è controllabile e osservabile nel caso di due o quattro ruote motrici).



## Esempio 2





## Commenti

- Controllabilità
- Osservabilità
- Raggiungibilità
- Ricostruibilità
- Stabilizzabilità
- Rivelabilità

### Teorema della Dualità

$$1. \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases}, \quad \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$$

$$2. \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = A^T \mathbf{z} + C^T \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = B^T \mathbf{z} \end{cases}, \quad \mathbf{z}_0, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$$

- **Controllabilità/Osservabilità del sistema 1. implica Osservabilità/Controllabilità del sistema 2 e viceversa**



# Scomposizioni Canoniche

- Nello studio dei sistemi lineari è spesso utile avere delle rappresentazioni più comode per l'analisi delle proprietà strutturali, sfruttando l'invarianza dimostrata dai precedenti teoremi.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$$

- **Teorema :** Sia dato un sistema non completamente controllabile, e si costruisca una matrice di trasformazione non singolare  $T = (T_1, T_2)$  tale che le colonne di  $T_1$  formino una base per il sottospazio controllabile di dimensione  $m$  e le colonne di  $T_2$  siano tali da fornire, insieme a quelle di  $T_1$ , una base per  $\mathbb{R}^n$ . Utilizzando tale matrice di trasformazione si ha:

$$x = Tz \Rightarrow z = T^{-1}x$$

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [C_1 \mid C_2] z \end{cases}$$

## ▪ Forma Controllabile Compagna

il sottosistema  $(A_{11}, B_1, C_1)$  di dimensione  $m$  è controllabile ed è detto *sottosistema controllabile* mentre il sottosistema  $(A_{22}, 0, C_2)$  di dimensione  $p = n-m$ , non controllabile, è detto *sottosistema non controllabile*.



# Scomposizioni Canoniche

- **Teorema :** Sia dato un sistema non completamente osservabile, e si costruisca una matrice di trasformazione non singolare  $T = (T_1, T_2)$  tale che le colonne di  $T_1$  formino una base per il sottospazio osservabile di dimensione  $m$  e le colonne di  $T_2$  siano tali da fornire, insieme a quelle di  $T_1$ , una base per  $\mathbb{R}^n$ . Utilizzando tale matrice di trasformazione si ha:

$$\mathbf{x} = T\mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{z} = T^{-1}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{z} = [\mathbf{z}_o \mid \mathbf{z}_{NO}]^T$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = [C_1 \mid 0] \mathbf{z} \end{cases}$$

## ▪ Forma Osservabile Compagna

il sottosistema  $(A_{11}, B_1, C_1)$  di dimensione  $m$  è osservabile ed è detto *sottosistema osservabile* mentre il sottosistema  $(A_{22}, B_2, 0)$  di dimensione  $p = n-m$ , non osservabile, è detto *sottosistema non osservabile*.



## Decomposizione di Kalman

- La decomposizione di Kalman permette di separare le variabili di stato nei 4 sottospazi strutturali mediante una trasformazione di similitudine:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ \mathbf{y} = Cx \end{cases} \quad \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in \Re^n, \mathbf{u} \in \Re^m, \mathbf{u} \in \Re^p$$

- Un sistema lineare stazionario non completamente controllabile e non completamente osservabile, può essere posto, tramite una matrice di trasformazione di similitudine non singolare  $T_K$ , nella forma:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \hat{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \hat{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

- La matrice  $T_k$  è formata da una base di ciascuno dei 4 sottospazi strutturali

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \\ \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \hat{\mathbf{x}}_4 \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \hat{A}_{13} & \hat{A}_{14} \\ 0 & \hat{A}_{22} & 0 & \hat{A}_{24} \\ 0 & 0 & \hat{A}_{33} & \hat{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_{44} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_2 & 0 & \hat{C}_4 \end{bmatrix}$$



## Decomposizione di Kalman

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{A}_{11} \bar{\hat{x}}_1(t) + \hat{A}_{12} \bar{\hat{x}}_2(t) + \hat{A}_{13} \bar{\hat{x}}_3(t) + \hat{A}_{14} \bar{\hat{x}}_4(t) + \hat{B}_1 \bar{u}(t)$$

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{A}_{22} \bar{\hat{x}}_2(t) + \hat{A}_{24} \bar{\hat{x}}_4(t) + \hat{B}_2 \bar{u}(t)$$

$$\dot{\hat{x}}_3(t) = \hat{A}_{33} \bar{\hat{x}}_3(t) + \hat{A}_{34} \bar{\hat{x}}_4(t)$$

Sottosistema Non Osservabile e Non Controllabile

$$\dot{\hat{x}}_4(t) = \hat{A}_{44} \bar{\hat{x}}_4(t)$$

$$\bar{y}(t) = \hat{C}_2 \bar{\hat{x}}_2(t) + \hat{C}_4 \bar{\hat{x}}_4(t)$$

- Il dettaglio della scomposizione permette di evidenziare le partizioni del vettore di stato che sono controllabili, non controllabili, osservabili e non osservabili

- Sottosistema Controllabile**

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \hat{C}_2 \hat{x}_2(t)$$

- Sottosistema Osservabile**

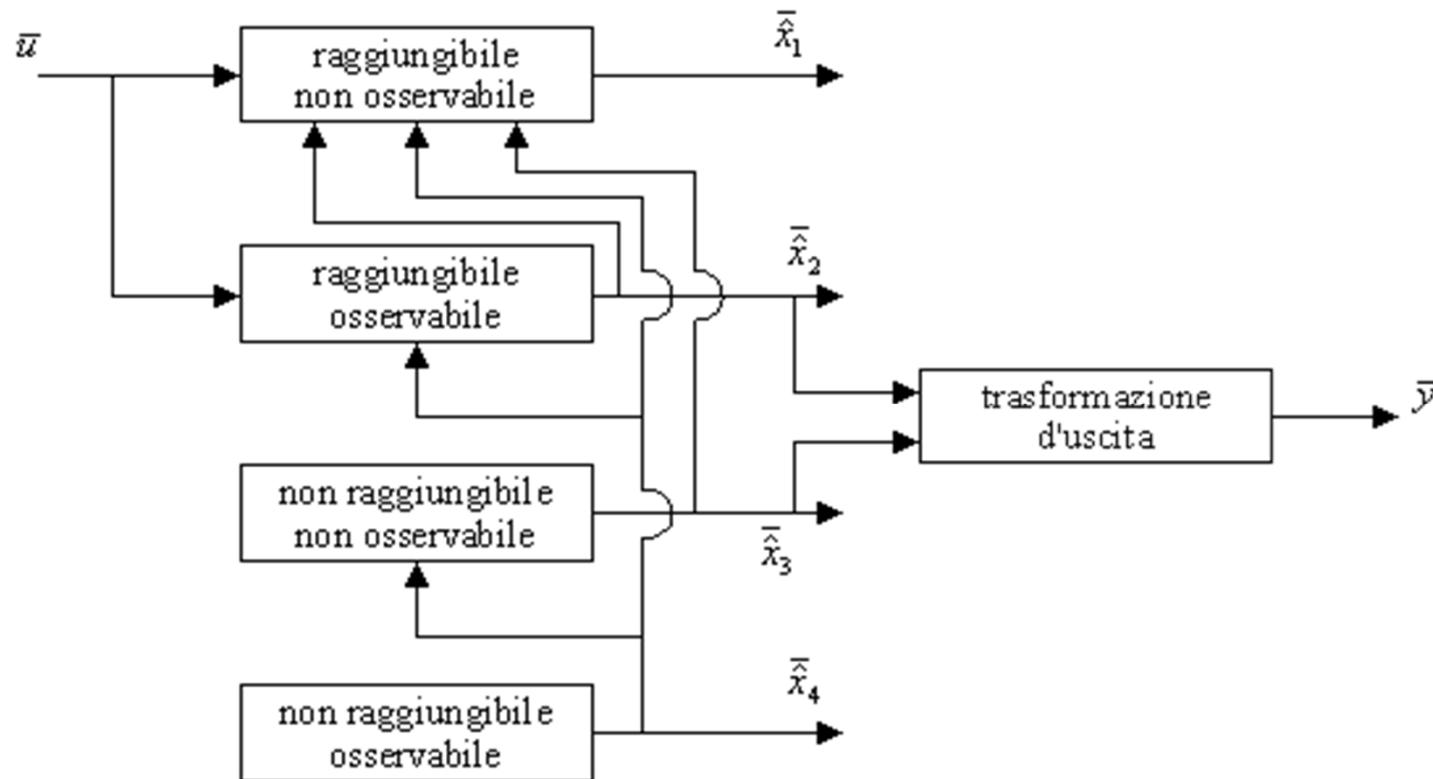
$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_2(t) \\ \dot{\hat{x}}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{22} & \hat{A}_{24} \\ 0 & \hat{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \hat{C}_2 \hat{x}_2(t) + \hat{C}_4 \hat{x}_4(t)$$



# Decomposizione di Kalman

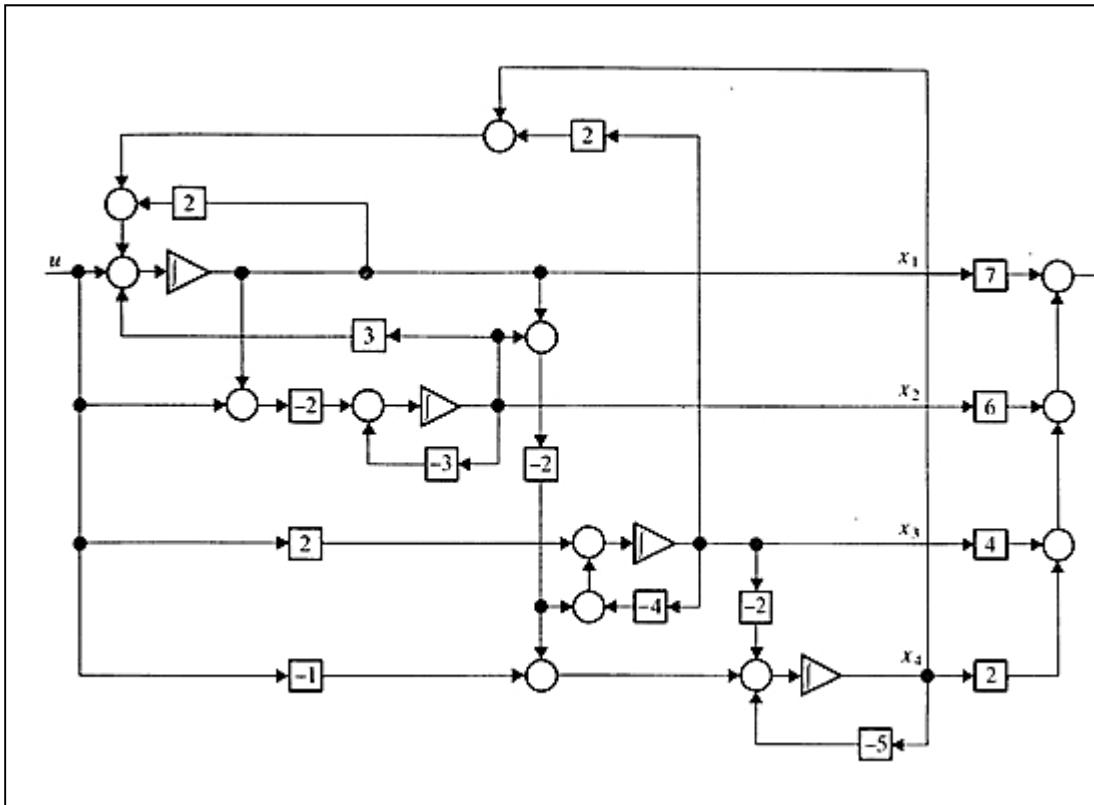
$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{A}_{22}\hat{x}_2(t) + \hat{B}_2 u(t) \\ y(t) = \hat{C}_2\hat{x}_2(t) \end{cases}$$

- **Sottosistema Osservabile e Controllabile**





# Decomposizione di Kalman



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = [7 \quad 6 \quad 4 \quad 2]$$

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}{s^4 + 21s^3 + 35s^2 + 50s + 24}$$

$$H(s) = \frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{1}{s+1}$$



# Decomposizione di Kalman

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$TAT^{-1} = \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = TB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = CT^{-1} = [1 \ 1 \ 0 \ 0]$$

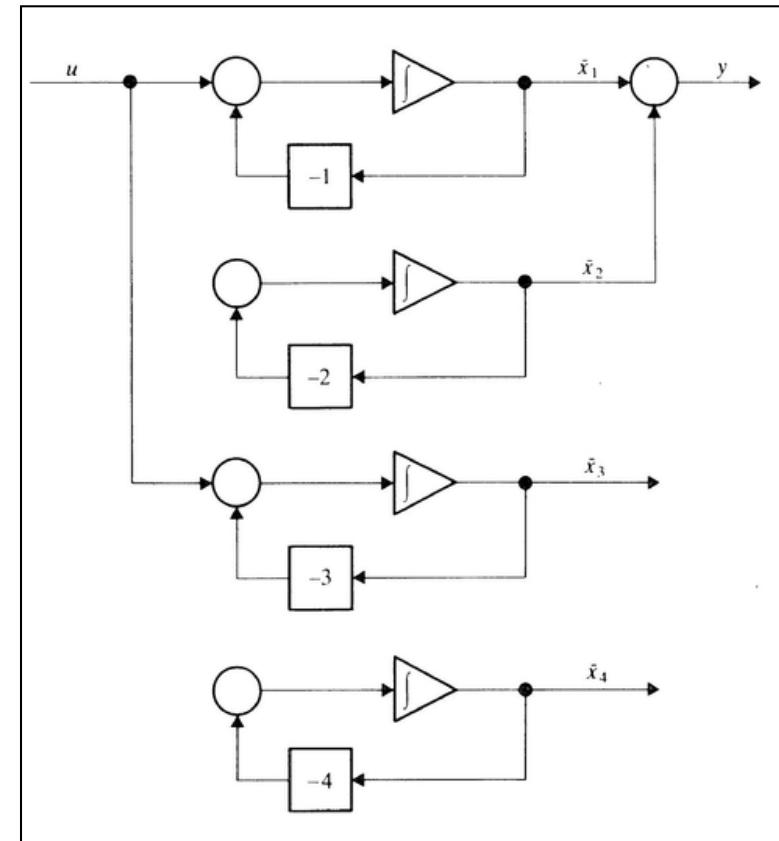
$$\dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_1 + u$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = -2\bar{x}_2$$

$$\dot{\bar{x}}_3 = -3\bar{x}_3 + u$$

$$\dot{\bar{x}}_4 = -4\bar{x}_4$$

$$y = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$$



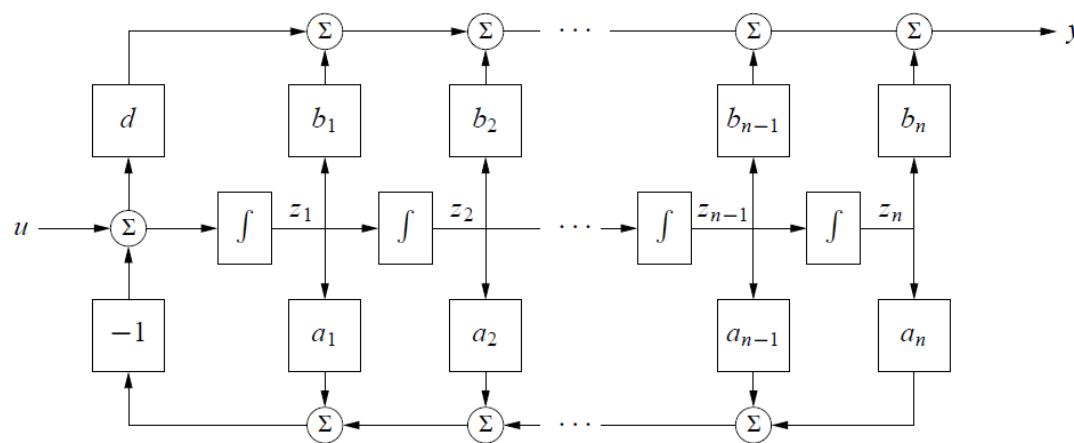


# Scomposizioni Canoniche

- Forma canonica di controllabilità

$$\dot{x} = Ax + bu \Rightarrow z = Tx \Rightarrow \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{b}u; T = \tilde{B}_C^Z \left( B_C^X \right)^{-1}$$

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u,$$
$$y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{bmatrix} z + du.$$



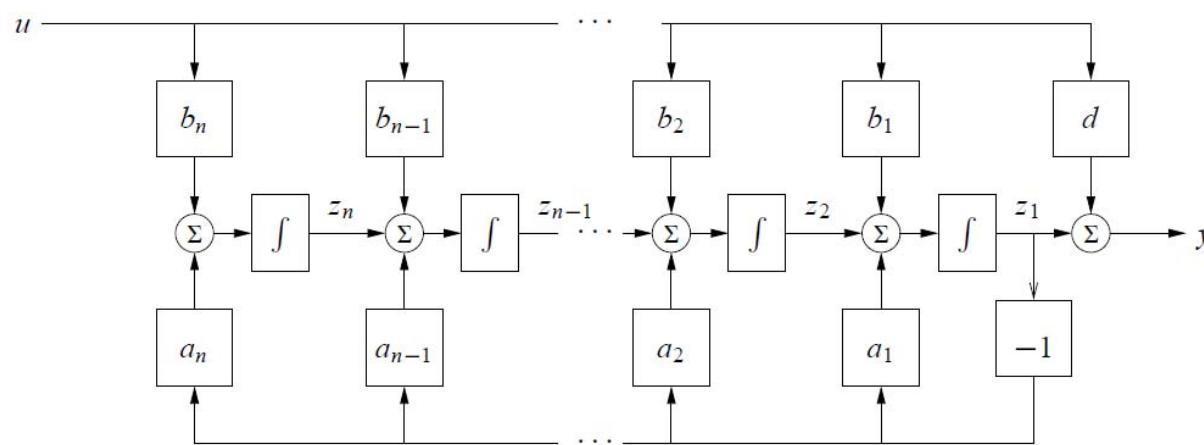


# Scomposizioni Canoniche

- **Forma canonica di osservabilità**

$$\dot{x} = Ax + bu \Rightarrow z = Tx \Rightarrow \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{b}u; T = \tilde{C}_c^Z \left( C_c^X \right)^{-1}$$

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} z + Du.\end{aligned}$$





## Realizzazioni

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases} \quad \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in \Re^n, \mathbf{u} \in \Re^m, \mathbf{y} \in \Re^p$$

- La matrice di trasferimento (che lega ingresso e uscita del sistema), è:

$$G(s) = C[sI - A]^{-1} B + D$$

□ **Teorema :** La matrice di trasferimento è invariante rispetto a cambiamenti di base.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = T^{-1}A T \mathbf{z} + T^{-1}B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C T \mathbf{z} \end{cases} \Rightarrow G'(s)$$

$$\begin{aligned} G'(s) &= CT(sI - T^{-1}AT)^{-1} + T^{-1}B = CT\left[T^{-1}(sI - A)T\right]^{-1}T^{-1}B = \\ &= CTT^{-1}(sI - A)^{-1}TT^{-1}B = C(sI - A)^{-1}B = \textcolor{red}{G(s)} \end{aligned}$$



## Realizzazioni

- Esaminando la scomposizione di Kalman, si può osservare che nella trasformazione d'uscita l'unico termine collegato all'ingresso è quello dovuto alla parte completamente controllabile e completamente osservabile da cui si deduce che **nella matrice di trasferimento compaiono tutti e soli i poli completamente controllabili e osservabili**. Questo implica il sottosistema:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{A}_{22}\hat{x}_2(t) + \hat{B}_2 u(t) \\ y(t) = \hat{C}_2\hat{x}_2(t) \end{cases}$$

- **Teorema :** Un sistema è completamente osservabile e controllabile se e solo se nella matrice di trasferimento  $G(s)$  compaiono tutti gli autovalori della matrice  $A$ .
- Per la dimostrazione, consideriamo due esempi in cui la Trasformazione di Base porta ad una Forma Diagonale e ad una Forma di Jordan



# Realizzazioni

## □ Caso #1: Sistema Diagonalizzabile SISO

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = \Lambda z + \tilde{B}u = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \\ y = \tilde{C}z = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} z \end{cases}$$

Essendo  $\Lambda$  diagonale, deve verificarsi che  $b_i \neq 0$ ,  $c_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2$

$$G(s) = \tilde{C}(sI - \Lambda)^{-1} \tilde{B} = \frac{c_1 b_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2 b_2}{s - \lambda_2}$$

- Lo stesso si può dimostrare valido per sistemi MIMO, dove tutte le colonne della matrice  $\tilde{C}$  e tutte le righe della matrice  $\tilde{B}$  devono essere non nulle



# Realizzazioni

## □ Caso #2: Sistema in Forma di Jordan SISO

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ y = C\mathbf{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = J\mathbf{z} + \tilde{B}u = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \\ y = \tilde{C}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \mathbf{z} \end{cases}$$

Essendo  $J$  una matrice di Jordan, La FdT diviene:

$$G(s) = \tilde{C}(sI - J)^{-1} \tilde{B} = \frac{c_1 b_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_1 b_2}{(s - \lambda_1)^2} + \frac{c_2 b_2}{s - \lambda_1}$$

Affinchè entrambi i poli siano presenti nella FdT, è necessario che sia

$$\begin{cases} c_1 \neq 0 \\ b_2 \neq 0 \end{cases}$$

- In generale, per un sistema MIMO, devono essere quindi non nulle la prima colonna della matrice  $C$  e l'ultima riga della matrice  $B$  associate alla Forma d Jordan



## Realizzazioni

- **Definizione – Realizzazione:** Data una trasformazione lineare ingresso-uscita  $W(s)$ , si definisce **realizzazione** di  $W(s)$  ogni sistema dinamico  $(A, B, C, D)$  tale che la sua matrice di trasferimento coincida con  $W(s)$

$$Y(s) = W(s) \cdot U(s), W(s) \Rightarrow (A, B, C, D)$$

- **Definizione – Realizzazione minima:** Data una rappresentazione ingresso – uscita, una realizzazione si definisce **minima** se la dimensione del sistema è inferiore o uguale alla dimensione di ogni altra realizzazione (di  $W(s)$ ).

- **Teorema:** Una realizzazione è minima se e solo se è controllabile e osservabile.

- La dimostrazione usa la scomposizione di Kalman per dimostrare che ogni realizzazione non Controllabile ed ogni realizzazione non Osservabile ha dimensioni maggiori di quella dei rispettivi sottosistemi Controllabili ed Osservabili.



## Sistemi Interconnessi

- La descrizione di un sistema interconnesso attraverso la funzione di trasferimento può essere effettuata solo se si suppone che quel sistema sia completamente controllabile e osservabile; se così non fosse, come visto in precedenza, la funzione di trasferimento non rappresenterebbe tutto il sistema ma solo la sua parte contemporaneamente osservabile e controllabile.

Collegando in cascata due sottosistemi aventi rispettivamente funzioni di trasferimento  $T_1(s)$  e  $T_2(s)$ , si ha che:

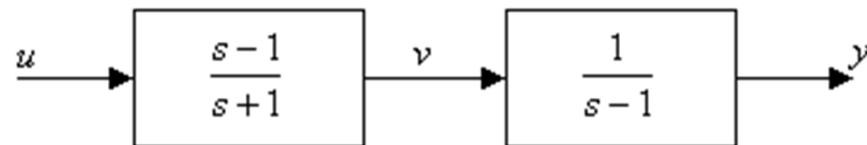


- a) se il prodotto  $T_1(s) \cdot T_2(s)$  non ha cancellazioni il sistema risulta completamente osservabile e controllabile
- b) se si hanno solo cancellazioni del tipo zero-polo (uno zero di  $T_1(s)$  coincide con un polo di  $T_2(s)$ ) il sistema risulta completamente osservabile e non completamente controllabile
- c) se si hanno solo cancellazioni del tipo polo-zero (un polo di  $T_1(s)$  coincide con uno zero di  $T_2(s)$ ) il sistema risulta completamente controllabile e non completamente osservabile
- d) se si hanno cancellazioni di entrambe i tipi, il sistema risulta non controllabile e non osservabile



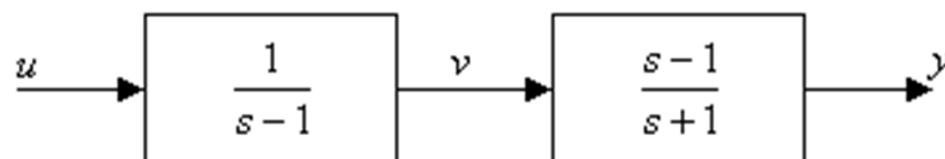
# Sistemi Interconnessi

## □ Esempio: Cancellazione Zero-Polo



$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}u & \mathcal{B} = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ Non Controllabile} \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}x & C = [C \quad CA] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ Osservabile} \end{cases}$$

## □ Esempio: Cancellazione Polo-Zero



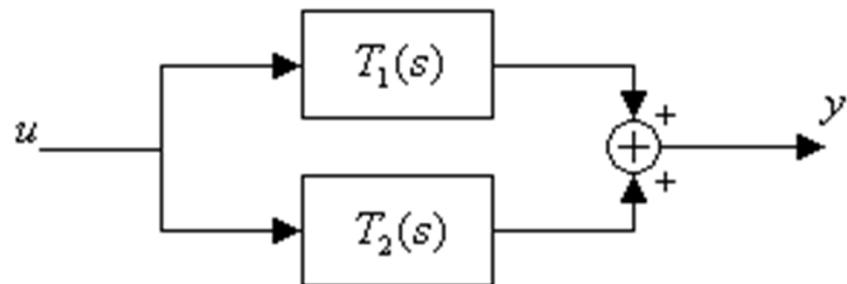


# Sistemi Interconnessi

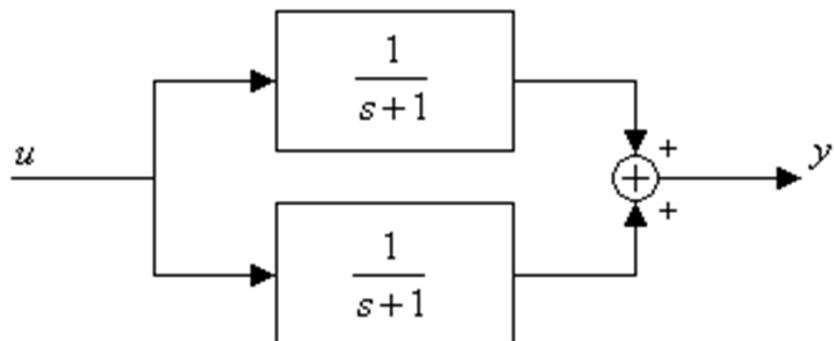
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}x \end{cases} \quad \mathcal{B} = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Controllabile

Non Osservabile



□ **Teorema:** Un sistema formato dal parallelo di due sottosistemi è completamente controllabile ed osservabile se e solo se i due sottosistemi non hanno poli in comune



$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}x \end{cases}$$



# Sistemi Interconnessi



$$G_u^y(s) = \frac{2}{s+1}, \quad G_u^x(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s+1 & s+1 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- In questo caso le matrici di controllabilità ed osservabilità hanno entrambe lo stesso Rango uguale ad 1 ed il sistema risulta non controllabile e non osservabile



# Esempi

```
C =
1.0e+007 *
0.0000      0      0.0000      0.0000      -0.0000
          0      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000
0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0
0.0000      -0.0000      0.0000      -0.0000      0.0000
0.0000      0.0000      0.0000      0.0001      0.0000
0.0000      -0.0000      0.0001      0.0000      0.0000
-0.0001      0.0005      -0.0001      -0.0008      0.0001
0.0003      0.0000      0.0032      -0.0007      0.0002
0.0000      0.0009      0.0009      -0.0019      0.0003
-0.0041      0.0058      -0.0296      0.0099      -0.0013
-0.0041      0.0522      0.0025      -0.0794      0.0124
-0.0100      0.0308      -0.0616      -0.0101      0.0019
0.0624      -0.4992      0.2220      0.7747      -0.1094
-0.4135      0.8271      -2.8025      0.5914      -0.0596
-0.0316      -0.7348      -0.6567      1.8531      -0.2550

>> rank(C)
ans =
5

B =
1.0e+007 *
0.0000      -0.0000      -0.0000      0.0000      0.0000      0.0004      0.0014      0.0037      -0.0203      -0.3628
0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0005      0.0020      0.0101      -0.0004      -0.3306
0      0.0000      0.0000      0.0000      0.0001      0.0003      -0.0013      -0.0244      -0.0910      -0.1722
0.0000      -0.0000      -0.0000      0.0000      0.0001      0.0014      0.0048      0.0133      -0.0613      -1.1616
0.0000      0      0.0000      0.0000      -0.0000      0.0007      0.0056      0.0665      0.2001      0.2595

>> rank(B)
ans =
5
```



# Sommario

## □ Introduzione alle proprietà strutturali

1. Stabilità
2. Controllabilità (Raggiungibilità)
3. Osservabilità

## □ **Stabilità:** mantenimento di uno stato di equilibrio in presenza di azioni esterne e/o condizioni iniziali

- Definizioni (stabilità interna e stabilità esterna)
- Relazione tra stabilità ed autovalori della matrice  $A$  nel caso di sistemi LTI, invarianza rispetto a cambi di base
- Teoria della stabilità di Lyapunov: Funzione di Lyapunov, equazione di Lyapunov e relazione con gli autovalori di  $A$  per sistemi LTI
- Stabilità mediante analisi dei poli della FdT
- Criterio di Routh - Hurwitz



# Sommario

□ **Controllabilità:** capacità di gestire il vettore di stato in tutto il proprio sottospazio in un tempo limitato, con ingresso limitato

- Definizioni di controllabilità, raggiungibilità e stabilizzabilità
- Teoremi costitutivi, test PBH e matrice di controllabilità
- Invarianza rispetto a cambi di base. Forme compagne
- Relazione con il numero minimo di attuatori linearmente indipendenti

□ **Osservabilità:** capacità di ricostruzione del vettore di stato dal vettore di uscita

- Definizioni di osservabilità e rivelabilità
- Teoremi costitutivi, test PBH e matrice di osservabilità, teorema della dualità
- Invarianza rispetto a cambi di base. Forme compagne
- Relazione con il numero minimo di sensori linearmente indipendenti



# Sommario



## □ Realizzazioni:

- Decomposizione di Kalmann nei 4 sottospazi costitutivi
- Realizzazioni e realizzazione minima
- Relazione tra controllabilità, osservabilità e dimensione della matrice di trasferimento
- Effetto di cancellazioni sulle proprietà strutturali
- Requisito affinché i poli della matrice di trasferimento siano tutti gli autovalori della matrice  $A$ .



# TRASFORMATA DI LAPLACE E FdT



- Definizioni e Proprietà
  - Teoremi sulla Trasformata di Laplace
  - Soluzione di Equazioni Differenziali
- Definizione di Funzione di Trasferimento
  - Funzione di Trasferimento come modello di sistema
  - Algebra e Diagrammi a Blocchi
- Esempi
- Uso di Matlab

... Figlio di un contadino piccolo proprietario o forse di un bracciante, dovette la sua educazione all'interesse suscitato in alcuni ricchi vicini dalle sue capacità e dalla sua bella presenza. (???)..... (WIKI)





# Riferimenti

- Capitoli 4, 5, 6 Testo di Bolzern (parte)
- App. B Testo di Bolzern (parte)
- Capitolo 8 testo di Murray (download)
- Capitolo 3 e App E Testo di Lewis (download)
- Corso di Elettrotecnica



Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.

Con. Avanzati

Con. Standard



## Introduzione - Motivazioni



- Descrizione dell'impianto (sistema) mediante un'approssimazione o Modello

MODELLO → Sistema Dinamico Lineare

- Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di ordine arbitrario
- Sistema di equazioni differenziali a coefficienti costanti del primo ordine

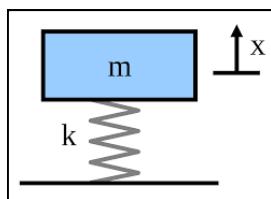
**Nota:** Uno dei metodi più efficaci per la risoluzione di equazioni (o sistemi di equazioni) differenziali lineari a coefficienti costanti è la Trasformata di Laplace:

- Conversione dell'equazione differenziale in equazione algebrica mediante trasformazione
- Conversione della soluzione nel dominio iniziale mediante anti-trasformazione
- Introduzione del concetto di Funzione di Trasferimento
- Manipolazione di sistemi complessi mediante semplici operazioni algebriche.



# Concetti Generali

- 1. Serie di Fourier:** Permette di scrivere una funzione periodica  $f(t) = f(t + T)$  in una somma infinita di armoniche a frequenza crescenti multiple della frequenza di base  $f_0 = 1/T$ .

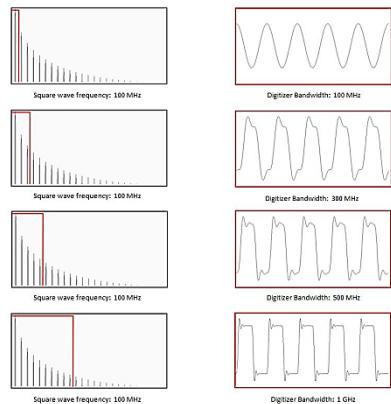
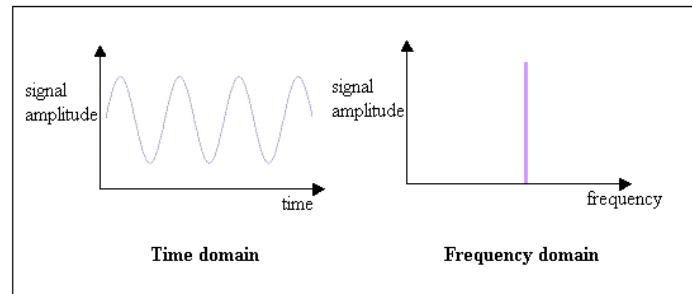


$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$x_0 = 0, \dot{x}_0 = v_0$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + B),$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, B = 0, A = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$$



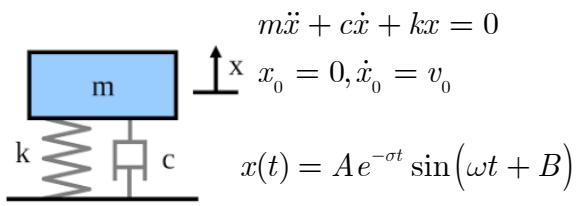
- Onda quadra mediante sviluppo in serie di Fourier
- $$m\ddot{x} + kx = u(t)$$
- $$u(t) = \sum_i c_i \sin \omega_i t$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Quando il periodo tende all'infinito, la serie di Fourier deve essere descritta mediante un integrale e non una sommatoria producendo la **Trasformata di Fourier**

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Rightarrow \sum \rightarrow \int$$

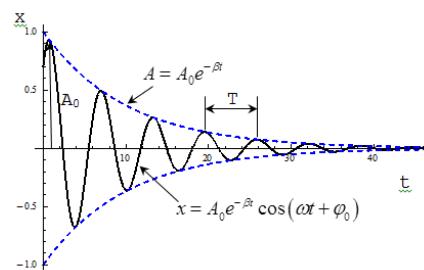
$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt; e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$x_0 = 0, \dot{x}_0 = v_0$$

$$x(t) = A e^{-\sigma t} \sin(\omega t + B)$$



$$F(s = \sigma + j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$



# Concetti Generali

- **Serie discreta di Potenze:** Serie di funzioni polinomiali della forma (McLaurin):

$$\sum_0^{\infty} a_n x^n = \sum_0^{\infty} a(n) x^n : n = 0, 1, 2, \dots$$

La serie si dice convergente se per  $n \rightarrow: \sum_0^{\infty} a(n) x^n = A(x)$

$$n = 0, 1, 2, \dots, a(n) = 1 \Rightarrow \sum_0^{\infty} a(n) x^n = A(x) = \frac{1}{1-x}, \forall |x| < 1$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, a(n) = \frac{1}{n!} \Rightarrow \sum_0^{\infty} a(n) x^n = A(x) = e^x$$

- Nel caso di variazione continua di  $n$ , la serie si trasforma in un integrale

$$\sum_0^{\infty} a_t x^t = \sum_0^{\infty} a(t) x^t : t \in \Re \Rightarrow \int_0^{\infty} a(t) x^t dt = A(x)$$

- Ai matematici piace derivare ed integrare funzioni in base  $e$ , non in base  $x$  (più facile)

$$x = e^{\ln x} \Rightarrow x^t = (e^{\ln x})^t$$

$$\int_0^{\infty} a(t) x^t dt = \int_0^{\infty} a(t) e^{\ln x \cdot t} dt = A(x)$$



# Concetti Generali

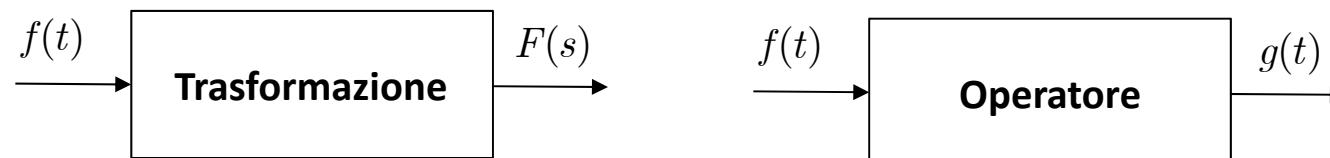
- Come per la serie di potenze, l'integrale improprio deve convergere alla stessa funzione per tutti i  $t$ .

$$\int_0^\infty \dots = \lim_{R \rightarrow 0} \int_0^R \dots \quad a(t) = 1, x = 2 \Rightarrow 2^t \rightarrow \infty \quad \text{:(frowny face)}$$

- Ci piacerebbe  $x < 1$  e positivo (se negativo, la potenza fornisce un numero immaginario)  $0 < x < 1$
- Cosa succede in questo caso a  $\ln x$ ?  $0 < x < 1 \Rightarrow -\infty < \ln x < 0$

- Cambio variabile:  $\ln x = -s \quad 0 < s < \infty$
- Siccome una **Funzione** si indica di solito con  $f$ , scriviamo  $a(t) = f(t)$

$$\sum_0^\infty a(t)x^t : t \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_0^\infty a(t)x^t dt = \int_0^\infty a(t)e^{\ln x \cdot t} dt = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = F(s)$$





# Definizioni

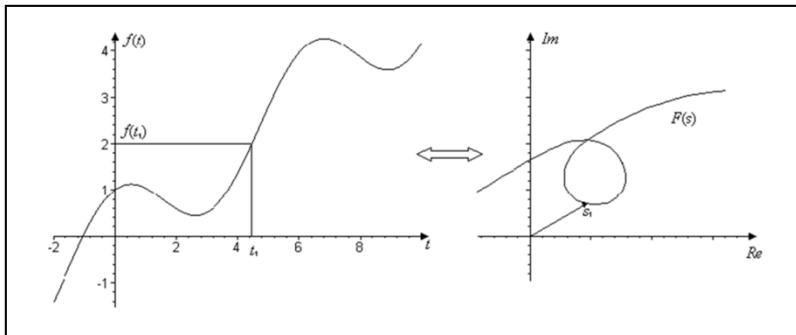
- **Definizione - Trasformata di Laplace:** Sia  $f(t)$  una funzione reale definita per  $t \geq 0$ , compreso  $0^+$ ; e sia  $s = \sigma + j\omega$  una variabile complessa. Si definisce trasformata di Laplace  $F(s)$  l'integrale (se esiste e converge):

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}[f(t)]$$

- $F(s)$  è analitica
- $\operatorname{Re}(s) > \sigma$

- **Definizione - Antitrasformata di Laplace:** Si definisce antitrasformata di Laplace  $f(t)$  (oppure trasformata inversa di Laplace), la funzione

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\sigma-jR}^{\sigma+jR} e^{st} F(s) ds \right\}$$



- **Trasformazione biunivoca** dal dominio del tempo al dominio complesso (o della frequenza)

$$f(t) \Rightarrow [F(s)] \Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \Rightarrow f(t)$$

[Brian Douglas Laplace Transform](#)



## Proprietà - Esempi

- Teoremi di esistenza (integrale improprio) ed unicità
  - Le funzioni (nel nostro contesto) che ammettono la Trasformata di Laplace sono le funzioni continue a tratti

- **Teorema di Linearità:** La Trasformata di Laplace è una trasformazione lineare

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = af(t) + bg(t)$$

- Il Calcolo della Trasformata di Laplace viene eseguito applicando direttamente la definizione
  - **Esempio**

$$f(t) = k$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} ke^{-st} dt = \frac{k}{-s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{k}{-s} = \frac{k}{s}; s > 0$$



## Esempi

- **Esempio**  $f(t) = e^{-5t}$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-5t} e^{-st} dt = \frac{-1}{s+5} e^{-(s+5)t} \Big|_0^\infty = \frac{-1}{s+5} e^{-(s+5)\infty} + \frac{1}{s+5} e^{-(s+5)0}$$

In generale:  $f(t) = e^{at}$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \frac{1}{-(s-a)} e^{-(s-a)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}$$

■ **Nota:**  $s > a$ ,  $a$  viene detta ascissa di convergenza

- **Esempio**

$$f(t) = \sin(at)$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty \sin(at) e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \int_0^\infty (e^{jat} - e^{-jat}) e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \left[ \int_0^\infty e^{-(s-j)a} t dt - \int_0^\infty e^{-(s+j)a} t dt \right] \\ &= \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{s-j} - \frac{1}{s+j} \right] = \frac{a}{s^2 + a^2} \end{aligned}$$

- **Esempio**  $f(t) = t^n$

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$



## Esempi

- $f(t) = t; F(s) = \int_0^\infty te^{-st} dt$ 

$$\int_0^\infty u dv = uv - \int_0^\infty u dv$$

|           |                          |
|-----------|--------------------------|
| $u = t$   | $v = \frac{e^{-st}}{-s}$ |
| $du = dt$ | $dv = e^{-st} dt$        |

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty te^{-st} dt &= t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt \\
 &= [0 - 0] + \frac{1}{s} \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s^2} = \int_0^\infty te^{-st} dt
 \end{aligned}$$

- $f(t) = t^2; F(s) = \int_0^\infty t^2 e^{-st} dt$ 

$$\int_0^\infty u dv = uv - \int_0^\infty u dv$$

|              |                          |
|--------------|--------------------------|
| $u = t^2$    | $v = \frac{e^{-st}}{-s}$ |
| $du = 2t dt$ | $dv = e^{-st} dt$        |

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty t^2 e^{-st} dt &= t^2 \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty 2t \frac{e^{-st}}{-s} dt \\
 &= [0 - 0] + \frac{2}{s} \int_0^\infty te^{-st} dt = \frac{2 \cdot 1}{s^3}
 \end{aligned}$$

quod erat demonstrandum

|                             |
|-----------------------------|
| $f(t) = t^n$                |
| $F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ |

q.e.d



# Esempi

- **Esempio**

$$f(t) = 6t^2 - 12t^5 + 9e^{-2t} + \sin(2t)$$

$$F(s) = 6\frac{2!}{s^3} - 12\frac{5!}{s^6} + \frac{9}{s+2} + \frac{4}{s^2+4}$$

- In generale per il calcolo della Trasformata di Laplace di una funzione complessa, si usano tabelle disponibili

TABLE 2-1 Laplace Transform Pairs

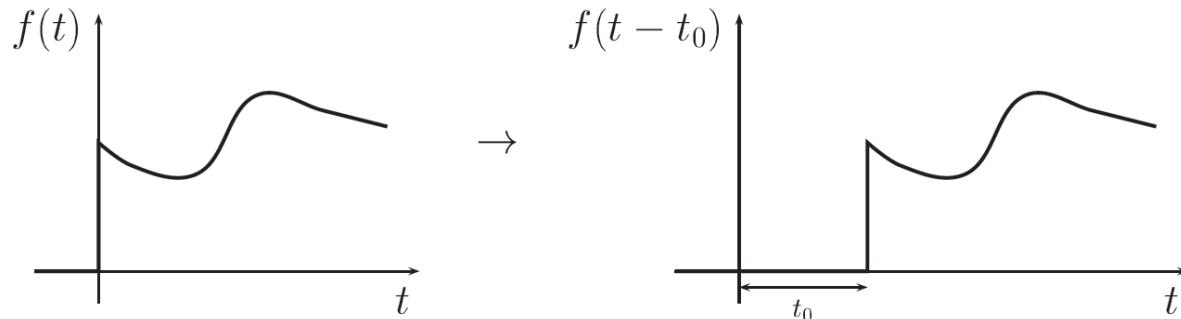
| $f(t)$   | $F(s)$                          | $f(t)$  | $F(s)$  |
|--|---------------------------------|---|---|
| Unit impulse $\delta(t)$   | 1                               | $\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$  | $\frac{1}{s(s+a)^2}$                                      |
| Unit step $1(t)$   | $\frac{1}{s}$                   | $\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$   | $\frac{1}{s^2(s+a)}$                                      |
| $t$  | $\frac{1}{s^2}$                 | $e^{-at}\sin \omega t$  | $\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$                       |
| $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )                    | $\frac{1}{s^n}$                 | $e^{-at}\cos \omega t$  | $\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$                          |
| $t^n$ ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )                                       | $\frac{n!}{s^{n+1}}$            | $\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\phi_{inj}} \sin \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t$                         | $\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$    |
| $e^{-at}$  | $\frac{1}{s+a}$                 | $-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\phi_{inj}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t - \phi)$                       | $\frac{s}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$             |
| $te^{-at}$   | $\frac{1}{(s+a)^2}$             | $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$   |   |
| $\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$ ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )            | $\frac{1}{(s+a)^n}$             | $1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\phi_{inj}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t + \phi)$                    | $\frac{\omega_0^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)}$ |
| $t^n e^{-at}$ ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )                               | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$        | $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$   |   |
| $\sin \omega t$  | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ | $1 - \cos \omega t$   | $\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$                      |
| $\cos \omega t$  | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$      | $a\omega - \sin \omega t$   | $\frac{\omega^2}{s^2(s^2 + \omega^2)}$                    |
| $\sinh \omega t$   | $\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$ | $\sin \omega t - a\omega \cos \omega t$   | $\frac{2\omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$                    |
| $\cosh \omega t$   | $\frac{s}{s^2 - \omega^2}$      | $\frac{1}{2\omega}t \sin \omega t$  | $\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$                            |
| $\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$   | $\frac{1}{s(s+a)}$              | $t \cos \omega t$   | $\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$               |
| $\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$                                   | $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$          | $\frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$ ( $\omega_1^2 \neq \omega_2^2$ ) | $\frac{s}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$          |
| $\frac{1}{b-a}(be^{-at} - ae^{-bt})$                                 | $\frac{s}{(s+a)(s+b)}$          | $\frac{1}{2\omega}(\sin \omega t + a\omega \cos \omega t)$  | $\frac{s^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$                          |
| $\frac{1}{ab} \left[ 1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$ | $\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$         |   |   |



## Teoremi sulla Trasformata di Laplace

□ **Teorema:** Traslazione nel tempo. Sia  $F(s)$  la trasformata di Laplace della funzione  $f(t)$ , nulla per  $t < 0$ . Vale la relazione

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$$

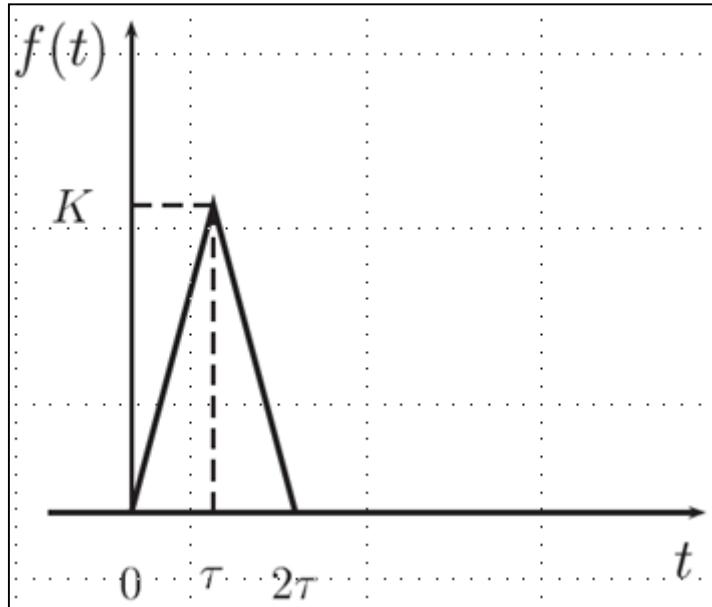


$$f(t - t_0) = e^{-5(t-t_0)} \Rightarrow F(s) = e^{-t_0 s} \frac{1}{s + 5}$$

$$f(t) = (t - 1)^2 + 4 \sin(t - 10) \Rightarrow F(s) = e^{-s} \frac{3!}{s^3} + 4e^{-10s} \frac{1}{s^2 + 1}$$



## Teoremi sulla Trasformata di Laplace



Esempio: Il segnale  $f(t)$  è scomponibile nella somma di tre rampe, di pendenze  $K/\tau$ ,  $-2K/\tau$  e  $K/\tau$ , applicate rispettivamente agli istanti  $t=0$ ,  $t=\tau$  e  $t=2\tau$  utilizzando il teorema della traslazione nel tempo, si deduce

$$f(t) = \frac{K}{\tau} t \Big|_{t=0}^{t=\tau} - 2 \frac{K}{\tau} t \Big|_{t=\tau}^{t=2\tau} + \frac{K}{\tau} t \Big|_{t>2\tau}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{K}{\tau s^2} (1 - 2 e^{-\tau s} + e^{-2\tau s}) \\ &= \frac{K}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s})^2 \end{aligned}$$



## Teoremi sulla Trasformata di Laplace

- **Teorema:** Traslazione nel dominio della variabile complessa

Sia  $f(t)$  una funzione con Trasformata di Laplace  $F(s)$  e sia  $a$  una costante reale o complessa. Vale la seguente relazione:

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)}$$

$$\hat{f}(t) = e^{2t} \cos(3t) \quad \text{posto: } f(t) = \cos 3t \rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + 9}$$

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\cos(3t)\} = F(s-2) = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 9}.$$

- Passaggio inverso:  $F(s) \rightarrow f(t)$

$$F(s) = \frac{s+9}{s^2 + 6s + 13}$$

$$F(s) = \frac{s+9}{(s+3)^2 + 4} = \frac{(s+3)+6}{(s+3)^2 + 2^2} = \frac{s+3}{(s+3)^2 + 2^2} + 3 \frac{2}{(s+3)^2 + 2^2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s+3}{(s+3)^2 + 2^2} + 3 \frac{2}{(s+3)^2 + 2^2} \right\} = e^{-3t} \cos(2t) + 3e^{-3t} \sin(2t).$$

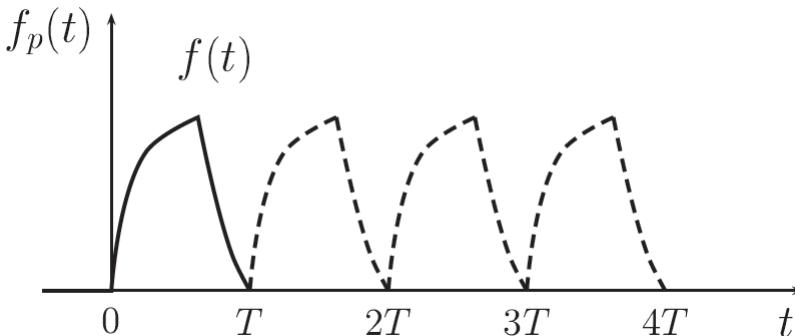


## Teoremi sulla Trasformata di Laplace

□ **Teorema:** Trasformata di una funzione periodica. Sia  $f(t)$  una funzione non nulla solo per  $0 \leq t \leq T$  e sia  $f_p(t)$  la funzione che si ottiene ripetendo in modo periodico la funzione  $f(t)$ .

$$f_p(t + nT) = f(t)$$

$$\forall n, \quad 0 \leq t \leq T$$



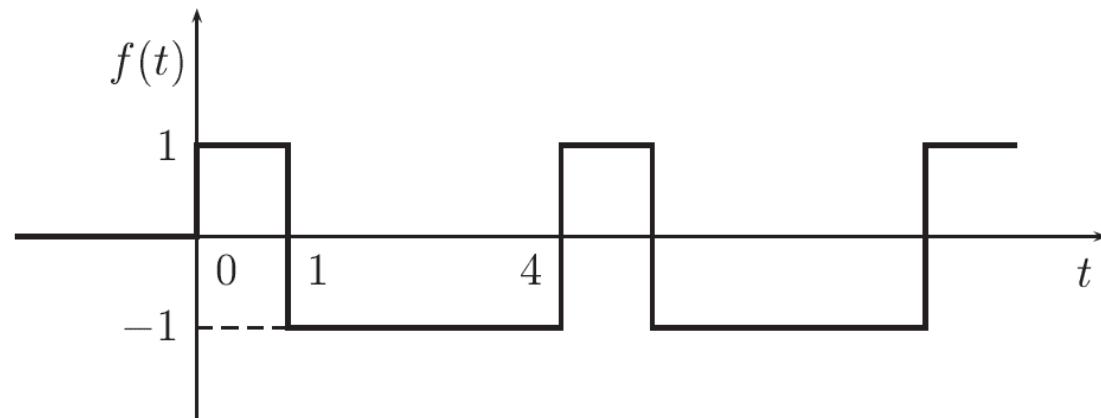
Vale la seguente relazione:

$$\boxed{\mathcal{L}[f_p(t)] = \frac{F(s)}{1 - e^{-Ts}}}$$

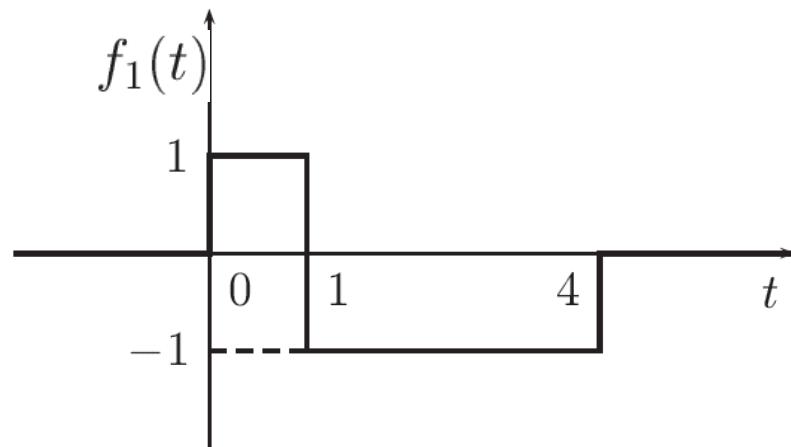


## Teoremi sulla Trasformata di Laplace

Esempio. Calcolare la trasformata di Laplace del seguente segnale:



La funzione  $f(t)$  è periodica di periodo  $T = 4$ .



$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{1 - e^{-4s}} \mathcal{L}[f_1(t)] \\ &= \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-4s}}{s(1 - e^{-4s})}\end{aligned}$$



## Derivata, Integrale



- **Teorema – Derivazione:** sia  $f(t)$  una funzione continua a tratti, limitata superiormente e con derivata continua, avente come trasformata di Laplace  $F(s)$ . Si dimostra che:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2f(t)}{dt^2} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{df(t)}{dt} \right) \right\} = s\mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} - \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

- **Derivate di Ordine Superiore:** La trasformata di Laplace delle derivate di ordine superiore di una funzione  $f(t)$  sono ottenute mediante la relazione ricorsiva:

$$\boxed{\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} = s^n F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} \frac{d^j f(0)}{dt^j}}$$

- Il teorema precedente permette di rappresentare un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti mediante una relazione algebrica tra la soluzione e tutte le sue derivate.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = u(t) \Rightarrow Y(s) = F[s, u(s)]$$



# Derivata, Integrale

## □ Teorema – Derivazione: (dimostrazione)

- Per ipotesi si supponga noto che  $F(s)$  è la trasformata di Laplace di  $f(t)$ .

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df(t)}{dt} dt = sF(s) - f(0)$$

- Risolviamo l'integrale per parti:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -se^{-st} f(t) dt = \frac{f(t)}{e^{st}} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} se^{-st} f(t) dt; s > 0$$

- Se la funzione  $f(t)$  è di tipo esponenziale, ovvero:  $|f(t)| < ce^{kt}$ ;  $k < s$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{e^{st}} = 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = 0 - f(0) + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = sF(s) - f(0)$$



## Derivata, Integrale

□ **Teorema – Integrazione:** data una funzione  $f(t)$  integrabile e con trasformata di Laplace  $F(s)$ . Vale la relazione (con condizioni iniziali nulle):

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

- **Esempio**

$$\mathcal{L} \{ \cos(at) \} = \frac{s}{a} \mathcal{L} \{ \sin(at) \} = \frac{s}{a} \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L} \{ \sin(at) \} = \mathcal{L} \left\{ \int_0^t \cos(a\tau) d\tau \right\} = a \frac{1}{s} \frac{s}{s^2 + a^2} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$



# Derivata, Integrale



- **Esempio**

$$\begin{cases} \ddot{y} + 4y = 0 \\ y_0 = 1 \quad \dot{y}_0 = 2 \end{cases} \quad \mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} + 4\mathcal{L}\{y(t)\} = s^2y(s) - sy_0 - \dot{y}_0 + 4y(s) = 0$$
$$(s^2 + 4)y(s) = sy_0 + \dot{y}_0$$

$$y(s) = \frac{s+2}{(s^2 + 4)} = \frac{s}{s^2 + 2^2} + \frac{2}{s^2 + 2^2} \quad y(t) = \cos(2t) + \sin(2t)$$

$$\begin{cases} \ddot{y} - 4y = 0 \\ y_0 = 1 \quad \dot{y}_0 = 2 \end{cases} \quad (s^2 - 4)y(s) = sy_0 + \dot{y}_0$$

$$y(s) = \frac{s+2}{(s^2 - 4)} = \frac{s+2}{(s+2)(s-2)} = \frac{1}{s-2} \quad y(t) = e^{2t}$$



Nota la cancellazione



# Derivata, Integrale



- **Esempio**

$$\begin{cases} \ddot{y} + 4y = 0 \\ y_0 = 1 \quad \dot{y}_0 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda^2 + 4 = 0 \\ y(t) = c_1 e^{2jt} + c_2 e^{-2jt} \end{cases} \quad \lambda = \pm 2j$$

$$\begin{cases} y_0 = 1 = c_1 e^{2j0} + c_2 e^{-2j0} \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_0 = 2 = 2jc_1 e^{2j0} - 2jc_2 e^{-2j0} \\ 2jc_1 - 2jc_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ j - jc_2 - jc_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1-j}{2} \\ c_2 = \frac{1+j}{2} \end{cases} \quad \boxed{y(t) = \frac{1-j}{2} e^{2jt} + \frac{1+j}{2} e^{-2jt}}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{2jt} - \frac{j}{2} e^{2jt} + \frac{1}{2} e^{-2jt} + \frac{j}{2} e^{-2jt} \quad y(t) = \frac{1}{2} [e^{2jt} + e^{-2jt}] - \frac{j}{2} [e^{2jt} - e^{-2jt}]$$

$$y(t) = \frac{1}{2} 2 \cos(2t) - \frac{j}{2} 2j \sin(2t) \quad \boxed{y(t) = \cos(2t) + \sin(2t)}$$



# Convoluzione

□ **Nota:**  $\mathcal{L}[f(t) \cdot g(t)] \neq F(s) \cdot G(s)$

□ **Definizione:** Prodotto di Convoluzione. Date due funzioni  $f(t)$  e  $g(t)$  con trasformate  $F(s)$  e  $G(s)$ , si definisce Prodotto di Convoluzione:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t g(t - \eta)f(\eta)d\eta = g(t) * f(t)$$
$$\eta = t - \tau$$

- Il Prodotto di Convoluzione soddisfa la proprietà commutativa ed ammette Trasformata di Laplace. Date due funzioni  $f(t)$  e  $g(t)$ , con trasformate  $F(s)$  e  $G(s)$ , si ha:

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$$

- Esempio:**

$$F(s) \cdot G(s) = \frac{4}{s+2} \cdot \frac{3}{s^2 + 9}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = 4 \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \sin(3\tau)d\tau$$



# Convoluzione

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (f * g) dt$$

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

$$\begin{cases} \sum_0^{\infty} a_n x^n = F(x) \\ \sum_0^{\infty} b_n x^n = G(x) \end{cases} \Rightarrow F(x)G(x) = \sum_0^{\infty} c_n x^n$$

- Esempio:

$$\begin{cases} f(t) = t^2 \\ g(t) = t \end{cases} \quad f(t) * g(t) = \int_0^t \tau^2 (t - \tau) d\tau = \int_0^t (\tau^2 t - \tau^3) d\tau = \left[ \frac{\tau^3 t}{3} - \frac{\tau^4}{4} \right]_0^t = \frac{t^4}{12}$$

- Calcolo della trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} F(s) = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3} \\ G(s) = \frac{1!}{s^2} = \frac{1}{s^2} \end{cases} \Rightarrow F(s)G(s) = \frac{2}{s^5} \Rightarrow \frac{t^4}{12}$$



# Convoluzione

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (f * g)(t) dt$$

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

$$F(s) \cdot G(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du \cdot \int_0^{\infty} e^{-sv} g(v) dv \Rightarrow \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s(u+v)} f(u) g(v) du dv$$

- Esempio:

$$\int_0^{10} \int_0^2 x^3 y^2 dx dy = \int_0^{10} x^3 f(u) dx \cdot \int_0^2 y^2 dy \Rightarrow \frac{10^4}{4} \cdot \frac{2^3}{3}$$

- Nel calcolo della trasformata di Laplace vorremmo avere  $e^{-st}$

$$\begin{cases} t = u + v \\ u = u \end{cases} \Rightarrow v = t - u$$

$$F(s) \cdot G(s) = \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} e^{-st} f(u) g(t - u) du dv$$

- Dobbiamo avere  $du dt$
- Dobbiamo trovare i limiti di integrazione

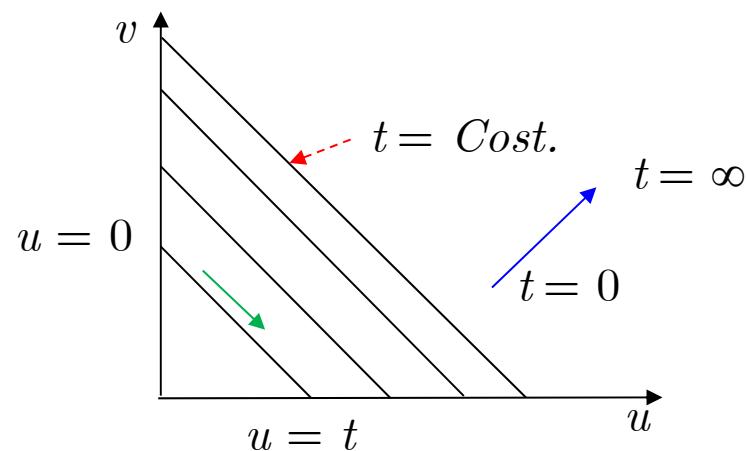


# Convoluzione

- Dalla teoria delle derivate parziali:

$$dudv = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial(u, v)}{\partial(u, t)} \\ \frac{\partial(v, u)}{\partial(u, t)} \end{pmatrix} \right\| dudt \quad \begin{cases} u = u \\ v = t - u \end{cases} \quad \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial(u, v)}{\partial(u, t)} \\ \frac{\partial(v, u)}{\partial(u, t)} \end{pmatrix} \right\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$F(s) \cdot G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(u) g(t-u) dudt$$



$$F(s) \cdot G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[ \int_0^t f(u) g(t-u) du \right] dt$$

$$F(s) \cdot G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (f * g) dt$$



## Teoremi ai limiti (Valore Finale, Valore Iniziale)

- **Teorema del Valore Finale:** Data una funzione  $f(t)$  con Trasformata  $F(s)$ , se e solo se il limite temporale esiste ed è finito, vale la seguente relazione:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)]$$

- **Esempio:**

$$f(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-4t} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{1}{4}$$

$$F(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{s+4+3s}{s(s+4)} = \frac{s+1}{s(s+4)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{s+1}{s(s+4)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+1}{s+4} = \frac{1}{4}$$



## Teoremi ai limiti (Valore Finale, Valore Iniziale)

□ Nota !

$$f(t) = \frac{1}{4} + e^{+4t} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty !!! \quad \text{Il teorema non si può applicare}$$

$$F(s) = \frac{1}{4s} + \frac{1}{s-4} = \frac{1}{4} \left[ \frac{5s-4}{s(s-4)} \right] \quad \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{4} \left[ \frac{5s-4}{s(s-4)} \right] \Rightarrow -\frac{1}{4}$$

□ **Teorema del Valore Iniziale:** Data una funzione  $f(t)$  con Trasformata  $F(s)$ , se e solo se il limite in  $s$  esiste, vale la seguente relazione:

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]}$$

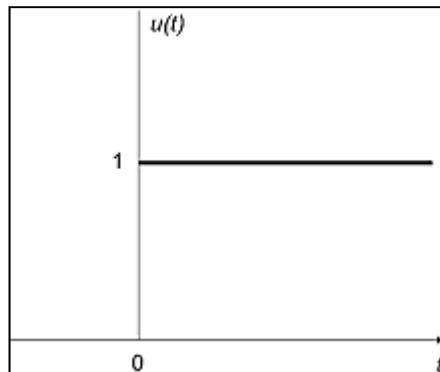
$$F(s) = \frac{1}{4s} + \frac{1}{s-4} = \frac{1}{4} \left[ \frac{5s-4}{s(s-4)} \right]$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{5s-4}{4s(s-4)} = \frac{5}{4}$$

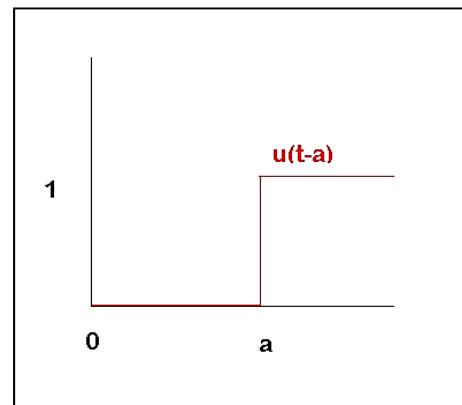


# Segnali Canonici

- Nello studio dei sistemi di controllo, due funzioni particolari sono utilizzate in molte applicazioni: **la funzione a gradino (scalino..) e la funzione impulsiva.**
- **Definizione:** Si definisce funzione a gradino unitario (funzione di Heaviside), la funzione  $H(t)$ :



$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



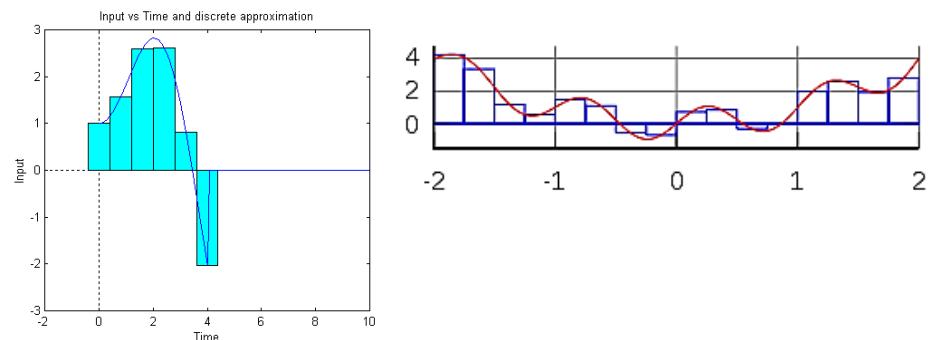
$$H(t - a) = \begin{cases} 0 & t - a < 0 \\ 1 & t - a \geq 0 \end{cases}$$

$a$  = ritardo temporale

$$L[H(t)] = \int_0^{\infty} H(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

$$L[H(t - a)] = \int_0^{\infty} H(t - a)e^{-st} dt = \int_a^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-as}}{s}$$

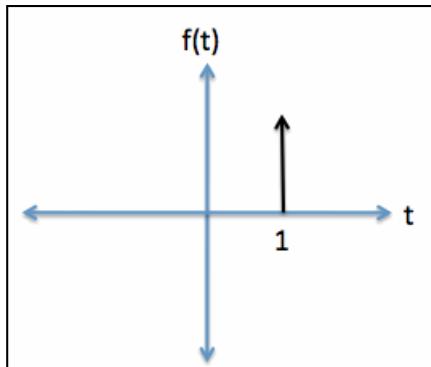
- Uso della funzione a gradino come approssimante





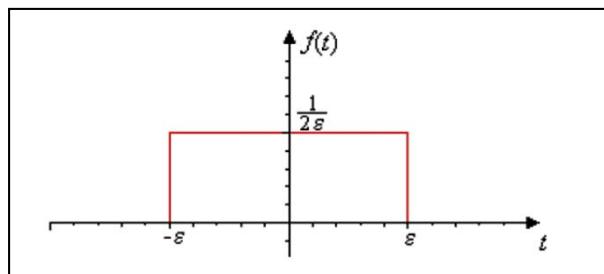
# Segnali Canonici

- **Definizione:** Si definisce funzione a impulso unitario (Delta di Dirac)  $\delta(t - \tau)$ , applicata all'istante  $t = \tau$ , come passaggio al limite di una funzione rettangolare avente area unitaria.



$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & t \neq \tau \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) dt = 1 & t = \tau \end{cases}$$

- Limite della funzione rettangolare con area unitaria, centrata all'origine



$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & |t| \leq \varepsilon \\ 0 & |t| > \varepsilon \end{cases}$$

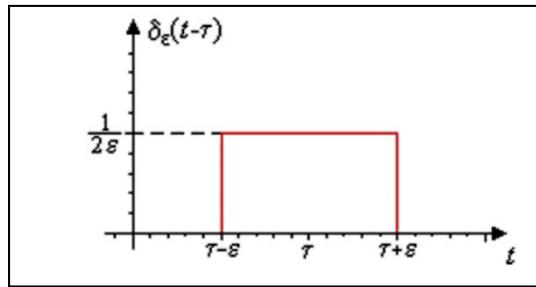
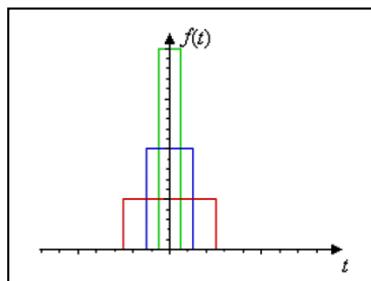
$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dt = 1$$



# Segnali Canonici

- Calcolo della Trasformata di Laplace della Funzione di Dirac

[Khan Academy](#)



- Trasformata di  $\delta_\varepsilon(t)$
- Calcolo del limite

Uso della funzione impulsiva come approssimante

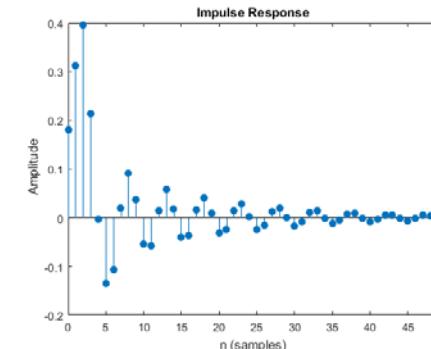
$$\delta_\varepsilon(t - \tau) = \frac{1}{2\varepsilon} [H(t - (\tau - \varepsilon)) - H(t - (\tau + \varepsilon))]$$

$$L[\delta(t - \tau)] = L\left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t - \tau)\right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L[\delta_\varepsilon(t - \tau)]$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2\varepsilon} \left( \frac{e^{-(\tau-\varepsilon)s}}{s} - \frac{e^{-(\tau+\varepsilon)s}}{s} \right) \right] = \frac{e^{-\tau s}}{2s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\varepsilon s} - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon} = \frac{e^{-\tau s}}{2s} 2s = e^{-\tau s}$$

$$\begin{cases} L[\delta(t - \tau)] = e^{-\tau s} \\ L[\delta(t)] = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} L[H(t - \tau)] = \frac{e^{-\tau s}}{s} \\ L[H(t)] = \frac{1}{s} \end{cases}$$

la funzione impulso unitario può essere vista come la derivata della funzione gradino unitario.





## Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari



$$\begin{cases} \ddot{y} + a\dot{y} + by = u(t) \\ y_0 = 1, \dot{y}_0 = 0 \end{cases} \longrightarrow (s^2 + as + b)y(s) - (s + a)y_0 - \dot{y}_0 = u(s)$$

- Come esempio consideriamo un ingresso a gradino unitario

$$y(s) = \frac{(s + a)}{(s^2 + as + b)} + \frac{u(s)}{(s^2 + as + b)} \quad u(t) = H(t) \Rightarrow u(s) = \frac{1}{s}$$

$$y(s) = \frac{(s + a)}{(s^2 + as + b)} + \frac{1}{s(s^2 + as + b)} = \frac{s^2 + as + 1}{s^3 + as^2 + bs}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2 + as + 1}{s^3 + as^2 + bs}\right]$$



## Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u(t) \quad u(t) = e^{-2t} \cos(4t) \Rightarrow u(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 16}$$
$$y_0 = 3, \dot{y}_0 = 0$$

$$s^2 y(s) - s y_0 - \dot{y}_0 + 3s y(s) - 3y_0 + 2y(s) = u(s)$$

$$(s^2 + 3s + 2)y(s) = s y_0 + \dot{y}_0 + 3y_0 + u(s)$$
$$y(s) = \frac{3s + 3}{(s^2 + 3s + 2)} + \frac{u(s)}{(s^2 + 3s + 2)} = \frac{3s + 3}{(s^2 + 3s + 2)} + \frac{s + 2}{[(s + 2)^2 + 16](s^2 + 3s + 2)}$$
$$y(s) = \frac{3s^3 + 15s^2 + 73s + 62}{s^4 + 7s^3 + 34s^2 + 68s + 40}$$

□ **Considerazione Generale:** data l'espressione analitica dell'ingresso  $u(t)$  e la sua trasformata di Laplace si può sempre scrivere la trasformata di Laplace della soluzione come funzione complessa razionale fratta della forma:

$$y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}; m \leq n$$

**Nota:** l'unica eccezione riguarda funzioni con ritardo per le quali si ha una  $F(s)$  che è una funzione irrazionale.



# Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

1. Soluzione analitica mediante uso di tabelle disponibili in letteratura
2. Soluzione mediante Matlab oppure altro software (simbolico o numerico)
3. Soluzione analitica mediante la tecnica della scomposizione in Fratti Semplici

## □ Scomposizione in Fratti Semplici

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = k \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Se  $F(s)$  è strettamente propria (ovvero  $m < n$ ), si può scomporre in una somma di frazioni antitrasformabili detti fratti semplici.
- Se  $F(s)$  è propria (ovvero  $m = n$ ), si può scomporre nella somma di una costante + una somma di fratti semplici antitrasformabili.

$$F(s) = k \frac{(s + z_1)(z + z_2)\dots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\dots(s + p_n)}$$



# Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

$$y(s) = \frac{A_1}{s + p_1} + \frac{A_2}{s + p_2} + \dots + \frac{A_i}{s + p_i} + \frac{B_r}{(s + p_r)^r} + \frac{B_{r-1}}{(s + p_r)^{r-1}} + \dots + \frac{B_1}{(s + p_r)} + \begin{cases} \frac{C_k}{s + p_k} + \frac{C_k^*}{s + p_k^*} \\ \frac{C_k s + D_k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \end{cases}$$

$$L^{-1}\left[\frac{A}{s + p}\right] = A e^{-pt} \quad L^{-1}\left[\frac{B_r}{(s + p)^r}\right] = \frac{B_r t^{(r-1)}}{(r-1)!} e^{-pt} \quad \bullet \quad \text{Teorema di traslazione in } s$$

$$L^{-1}\left[\frac{C}{(s + p)} + \frac{C^*}{(s + p^*)}\right] = C e^{-jpt} + C^* e^{-jp^*t} =$$

$$\mathbf{A} e^{\operatorname{Re}\{-p\}t} \cos[\operatorname{Im}\{-p\}t + \mathbf{B}] = \mathbf{A} e^{\operatorname{Re}\{-p\}t} \sin[\operatorname{Im}\{-p\}t + \mathbf{B} + \frac{\pi}{2}]$$

$$\mathbf{A} = 2\sqrt{\operatorname{Re}^2\{C\} + \operatorname{Im}^2\{C\}}$$

$$\mathbf{B} = \tan^{-1} \frac{\operatorname{Im}\{C\}}{\operatorname{Re}\{C\}}$$

□ I termini  $A_i, B_i, C_i, D_i, C, C^*$  sono detti **RESIDUI**

**NOTA:** nel seguito si dimostra la relazione tra residui e condizioni iniziali di un'equazione differenziale, ovvero dell'ampiezza della risposta di un sistema



# Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

## □ Calcolo dei Residui:

### ■ Esempio: Radici Reali e Distinte

$$\frac{A_i}{s + p_i} \Rightarrow A_i = (s + p_i)F(s) \Big|_{s=-p_i}$$

$$y(s) = \frac{4}{s^2 + 5s + 4} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+4} \Rightarrow A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t}$$

$$A_1 = y(s) \cdot (s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{4(s+1)}{s^2 + 5s + 4} \Big|_{s=-1} = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = y(s) \cdot (s+4) \Big|_{s=-4} = \frac{4(s+4)}{s^2 + 5s + 4} \Big|_{s=-4} = -\frac{4}{3}$$

$$y(s) = \frac{4}{s^2 + 5s + 4} = \frac{4}{3} \frac{1}{s+1} - \frac{4}{3} \frac{1}{s+4} \quad \rightarrow \quad y(t) = \frac{4}{3} e^{-t} - \frac{4}{3} e^{-4t}$$



## Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

- **Esempio:** Radici Reali con molteplicità  $r > 1$

$$\frac{B_r}{(s+p)^r} \Rightarrow B_{r-k} = \frac{1}{k!} \left\{ \frac{d^k}{ds^k} [(s+p)^r F(s)] \right\}_{s=-p}$$

$$y(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2} = \frac{B_2}{(s-1)^2} + \frac{B_1}{(s-1)} = B_2 te^t + B_1 e^t$$

$$B_2 = [y(s) \cdot (s-1)^2]_{s=1} = \frac{(s+1)(s-1)^2}{(s-1)^2} \Big|_{s=1} = 2$$

$$B_1 = \frac{d}{ds} [y(s) \cdot (s-1)^2]_{s=1} = 1$$

$$y(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2} = \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)} \quad \longrightarrow \quad y(t) = 2te^{+t} + e^{+t}$$



# Soluzione di Equazioni Differenziali Lineari

## ■ Esempio: Radici Complesse e Coniugate

$$\frac{\frac{C_k}{s + p_k} + \frac{C^*_k}{s + p_k^*}}{\frac{C_k s + D_k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}} \quad -p, -p^* = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$y(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2} = \frac{C}{(s + 1 + j)} + \frac{C^*}{(s + 1 - j)} = Ce^{-(1+j)t} + C^*e^{-(1-j)t}$$

$$C = \frac{1}{-j}; C^* = \frac{1}{j}; \quad y(t) = \frac{1}{-j}e^{-(1+j)t} + \frac{1}{j}e^{-(1-j)t}$$

$$y(t) = \dots \quad \text{Completare per esercizio}$$

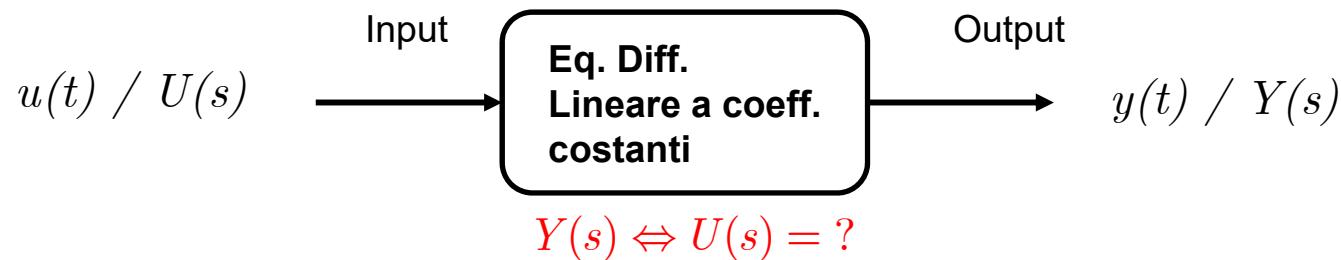
## □ Calcolo dei residui mediante Matlab:

```
RESIDUE Partial-fraction expansion (residues).
[R,P,K] = RESIDUE(B,A) finds the residues, poles and direct term of
a partial fraction expansion of the ratio of two polynomials B(s)/A(s).
If there are no multiple roots,
B(s)      R(1)      R(2)      R(n)
----- = ----- + ----- + ... + ----- + K(s)
A(s)      s - P(1)    s - P(2)    s - P(n)
```



# Funzione di Trasferimento

- Concetto fondamentale nello studio dei sistemi lineari e del loro controllo



$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = u(t) \quad D(s)Y(s) = N_H(s) + U(s)$$

$$Y(s) = \frac{N_H(s)}{D(s)} + \frac{1}{D(s)}U(s) = Y_H(s) + Y_P(s)$$

- La funzione di trasferimento è una espressione che, dato un ingresso qualsiasi, permette di valutare l'uscita del sistema in alternativa alla soluzione dell'equazione differenziale associata



# Funzione di Trasferimento

- **Definizione (1):** La Funzione di Trasferimento di un sistema lineare tempo invariante è il rapporto tra la Trasformata di Laplace dell'uscita e la Trasformata di Laplace dell'ingresso a condizioni iniziali nulle

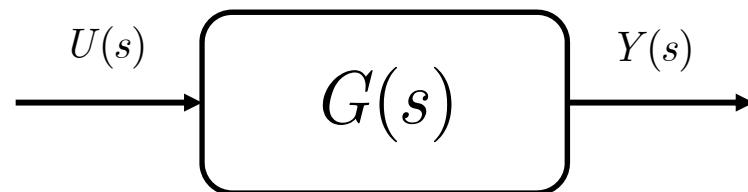
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

- **Nota la FdT, è possibile calcolare la trasformata di Laplace dell'uscita, per una qualsiasi funzione di ingresso**

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

- **Nel dominio del tempo, l'uscita si determina mediante l'integrale di convoluzione, il cui calcolo può non essere semplice**

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau \Leftrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)]$$





# Funzione di Trasferimento



□ **Definizione (2):** La Funzione di Trasferimento di un sistema lineare è la Trasformata di Laplace dell'uscita del sistema, quando l'ingresso è un impulso (delta di Dirac) applicato all'istante  $t = 0$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \quad \begin{matrix} u(t) = \delta(t) \\ \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 = U(s) \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad Y(s) = G(s)$$

- **In generale, per condizioni iniziali non nulle occorre aggiungerne il contributo:**

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) + G^{IC}(s)$$

- **Forme equivalenti per la FdT:**

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, m \leq n \quad G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

- $K$  = **Guadagno** del sistema (della FdT)
- $-p_j$  = **Poli** del sistema
- $-z_i$  = **Zeri** del sistema



## Funzione di Trasferimento

- Consideriamo un sistema lineare descritto dalla seguente equazione differenziale:

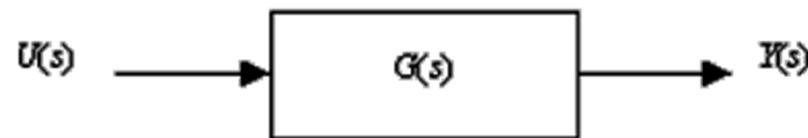
$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 4\dot{u}(t) - 8u(t) \\ y_0, \dot{y}_0 \end{cases}$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 3)y_0 + \dot{y}_0 + (4s - 8)U(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{(s + 3)y_0 + \dot{y}_0}{(s^2 + 3s + 2)} + \frac{(4s - 8)}{(s^2 + 3s + 2)} U(s) = Y_h(s) + Y_p(s)$$

- La FdT del sistema è data da:

$$G(s) = \frac{4(s - 2)}{s^2 + 3s + 2}$$



- Supponiamo che il sistema sia soggetto ad un gradino unitario  $u(t) = 1$  e ad un impulso unitario  $\delta(t)$

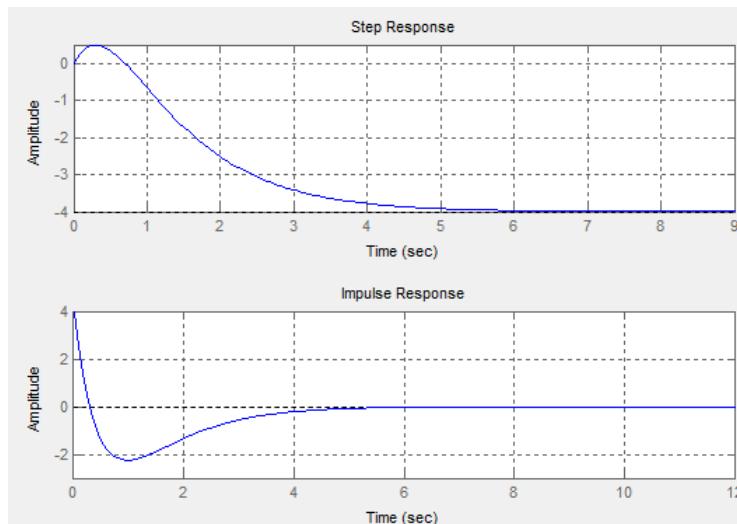
$$y(s) = G(s) \cdot u(s) = \frac{4(s - 2)}{s(s + 2)(s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s + 2}; y(s) = G(s) = \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s + 2}$$



# Funzione di Trasferimento

$$y(t) = -4 + 12e^{-t} - 8e^{-2t}$$

$$y(t) = -12e^{-t} + 16e^{-2t}$$

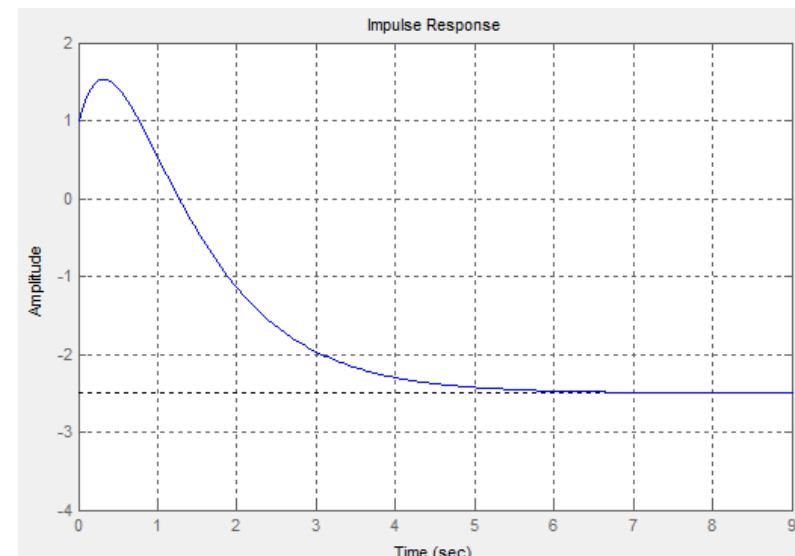
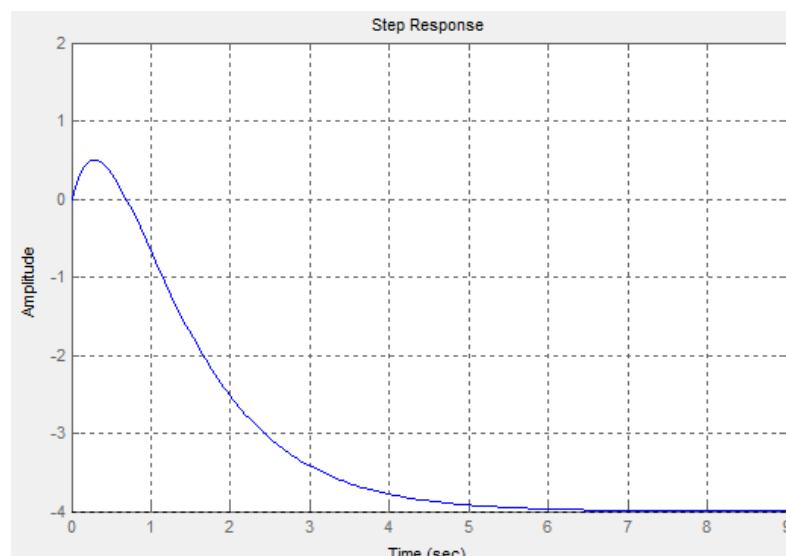


- Supponiamo di avere le seguenti condizioni iniziali:

$$y(0) = 1; \dot{y}(0) = 0$$

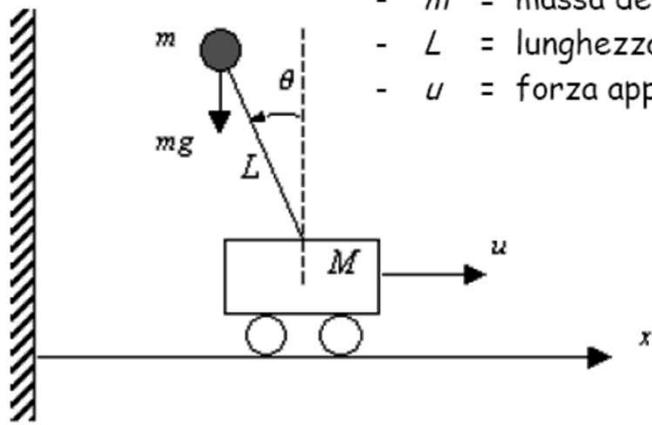
$$y(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} + \frac{4(s-2)}{s(s+2)(s+1)} = \frac{s^2 + 7s - 5}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

$y(t) = ?$  esercizio

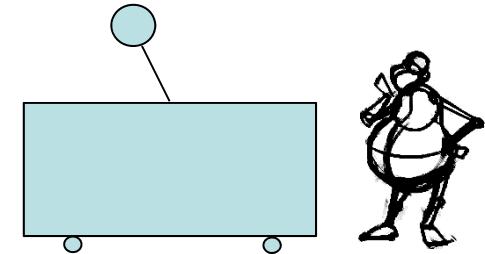
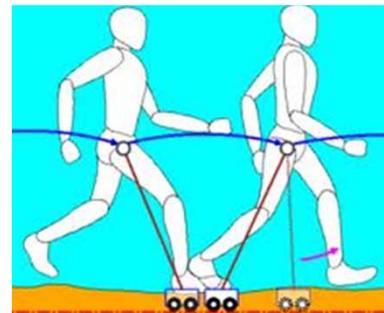




## Esempio: Carrello con Pendolo



- $M$  = massa del carrello
- $m$  = massa del pendolo
- $L$  = lunghezza del braccio (supposto di massa trascurabile)
- $u$  = forza applicata al carrello



### □ Studio del movimento del bacino

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{p}(t) + ml\ddot{\theta}(t) = F(t) \\ ml\ddot{p}(t) + ml^2\ddot{\theta}(t) = mgl\theta(t) \end{cases}$$

$$M = 20Kg; m = 1Kg; l = 1m; g = 9.8m / \text{sec}^{-2}$$

$$\begin{cases} 21\ddot{p} + \ddot{\theta} = F \\ \ddot{p} + \ddot{\theta} = 9.8\theta \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 21s^2 & s^2 \\ s^2 & s^2 - 9.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(s) \\ \theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- In questo caso si possono identificare 2 FdT



## Esempio: Carrello con Pendolo

$$\Delta(s) = \det \begin{bmatrix} 21s^2 & s^2 \\ s^2 & s^2 - 9.8 \end{bmatrix} = 21s^2(s^2 - 9.8) - s^4$$

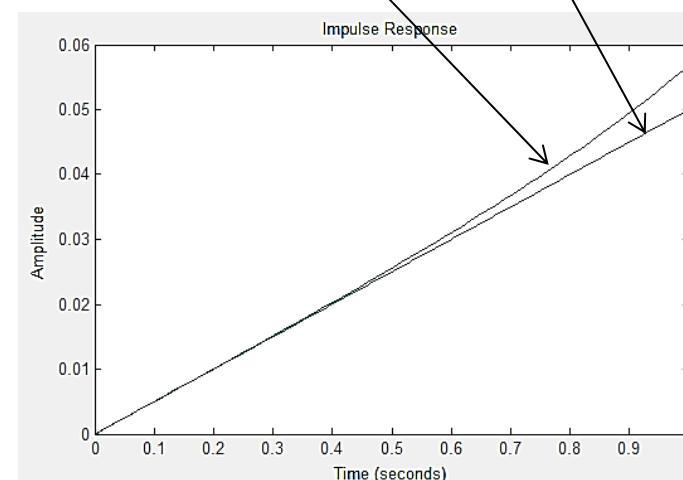
$$\begin{cases} F(t) = \delta(t) \\ \theta(t) = 0.078e^{-3.21t} - 0.078e^{+3.21t} \end{cases}$$

$$G_F^\theta(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{\det \begin{bmatrix} 21s^2 & 1 \\ s^2 & 0 \end{bmatrix}}{\Delta(s)} = \frac{-s^2}{21s^2(s^2 - 9.8) - s^4} = \frac{-1}{20s^2 - 205.8} = \frac{-1}{20(s^2 - 10.29)}$$

$$G_F^p(s) = \frac{p(s)}{F(s)} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & s^2 \\ 0 & s^2 - 9.8 \end{bmatrix}}{\Delta(s)} = \frac{s^2 - 9.8}{21s^2(s^2 - 9.8) - s^4} = \frac{s^2 - 9.8}{20s^2(s^2 - 10.29)} \approx \frac{1}{20s^2} \rightarrow \begin{cases} F(t) = \delta(t) \\ p(t) = 0.05t \end{cases}$$

□ Cosa possiamo Concludere sul tipo di moto? Ovvero:

1. Come si muove il Pendolo (bacino)?
2. Come si muove il carrello (passo)?



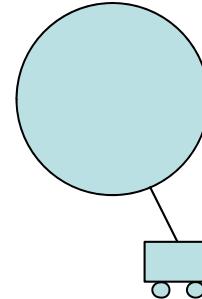


## Esempio: Carrello con Pendolo

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{p}(t) + ml\ddot{\theta}(t) = F(t) \\ ml\ddot{p}(t) + ml^2\ddot{\theta}(t) = mgl\theta(t) \end{cases} \quad M = 1Kg; m = 20Kg; l = 1m; g = 9.8m / \text{sec}^{-2}$$

$$\begin{cases} 21\ddot{p} + 20\ddot{\theta} = F \\ 20\ddot{p} + 20\ddot{\theta} = 196\theta \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 21s^2 & 20s^2 \\ 20s^2 & 20s^2 - 196 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(s) \\ \theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$



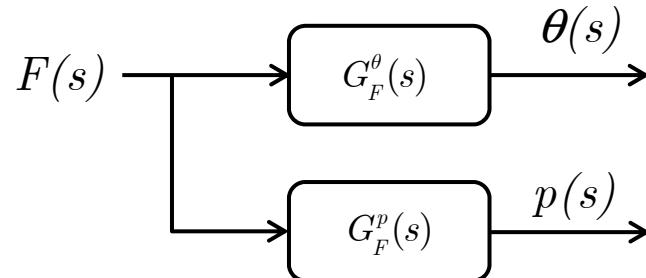
$$G_F^\theta(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{-20s^2}{20s^2(s^2 - 20.58)} = \frac{-1}{s^2 - 205.8}$$

$$G_F^p(s) = \frac{p(s)}{F(s)} = \frac{20s^2 - 196}{20s^2(s^2 - 205.8)} = \frac{s^2 - 9.8}{s^2(s^2 - 205.8)}$$

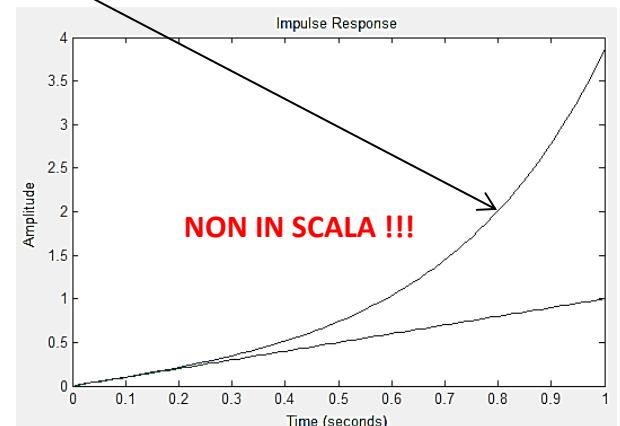
$$\begin{cases} F(t) = \delta(t) \\ \theta(t) = 0.0349e^{-14.34t} - 0.0349e^{+14.34t} \end{cases}$$

□ Cosa possiamo Concludere sul tipo di moto? Ovvero:

1. Come si muove il Pendolo (bacino)?
2. Come si muove il carrello (passo)?



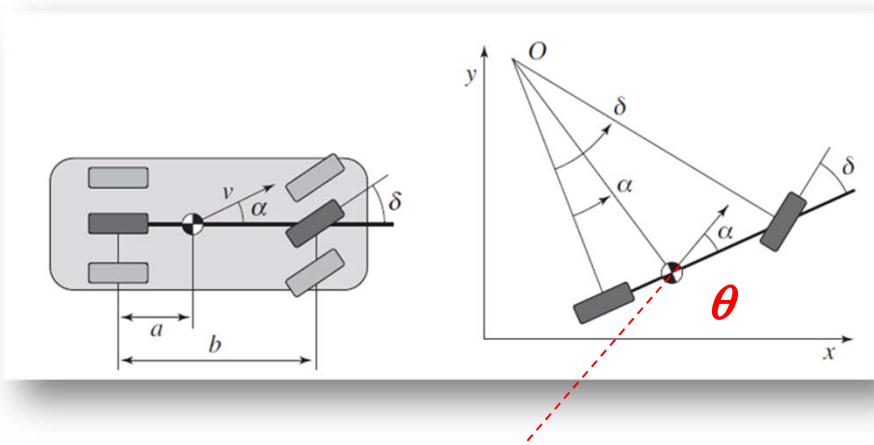
$$\begin{cases} F(t) = \delta(t) \\ p(t) = 0.0476t - 0.0332e^{-14.34t} + 0.0332e^{+14.34t} \end{cases}$$





## Esempio: Modello di Autoveicolo

- Dinamica della sterzata



$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{av_0}{b} \\ \frac{v_0}{b} \end{bmatrix} u$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\begin{cases} sy(s) = v_0 \theta(s) + \frac{av_0}{b} \delta(s) \\ s\theta(s) = \frac{v_0}{b} \delta(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(s) = \frac{1}{s} [v_0 \theta(s) + \frac{av_0}{b} \delta(s)] \\ \theta(s) = \frac{1}{s} \frac{v_0}{b} \delta(s) \end{cases}$$

$$G_{\delta}^y(s) = \frac{y(s)}{\delta(s)} = \frac{v_0}{b} \frac{as + v_0}{s^2}$$

$$G_{\delta}^{\theta}(s) = \frac{\theta(s)}{\delta(s)} = \frac{v_0}{b} \frac{1}{s}$$

□ Esempio Numerico

$$v_0 = 60 \text{ km/h}$$

$$b = 4 \text{ m}$$

$$a = 1.5 \text{ m}$$

$$\delta = 10^\circ = \frac{10}{57.3} \text{ rad}$$



## Esempio: Modello di Autoveicolo

$$\frac{\theta(s)^{rad}}{\delta(s)^{rad}} = \frac{4.1675}{s}$$

$$\frac{y(s)^{metri}}{\delta(s)^{rad}} = 6.25 \frac{s + 11.13}{s^2}$$

- Comando costante dello sterzo ( $\delta = \text{cost.}$ )

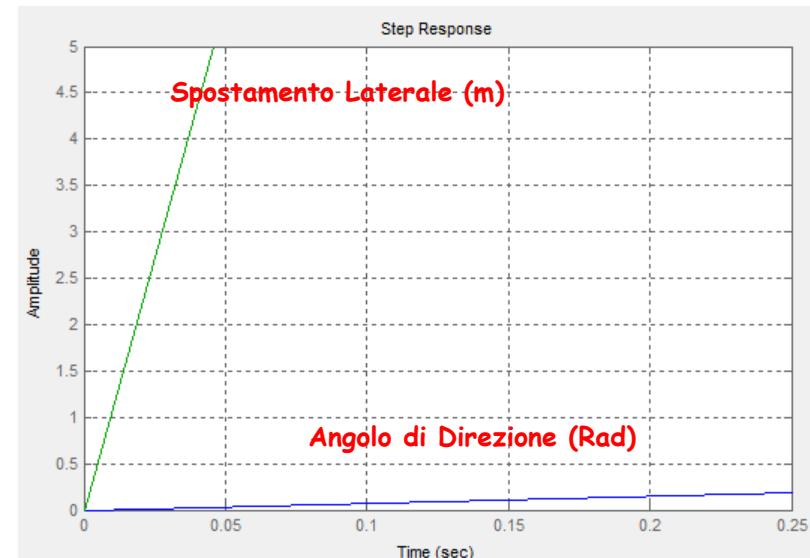
$$y(s)^{metri} = 6.25 \frac{s + 11.13}{s^2} \cdot \frac{0.1745}{s} = 1.0906 \frac{s + 11.13}{s^3}$$

$$\theta(s)^{gradi} = \frac{238.7978}{s^2}$$

### Esercizio:

- Verificare analiticamente i risultati del grafico
- Calcolare lo spostamento laterale nel caso di ingresso di sterzo dato da:

$$\delta(t) = \begin{cases} 10^\circ & 0 \leq t < 1 \\ 0^\circ & t \geq 1 \end{cases}$$





## Esempio: modello biciclo



1. Sistema attuale



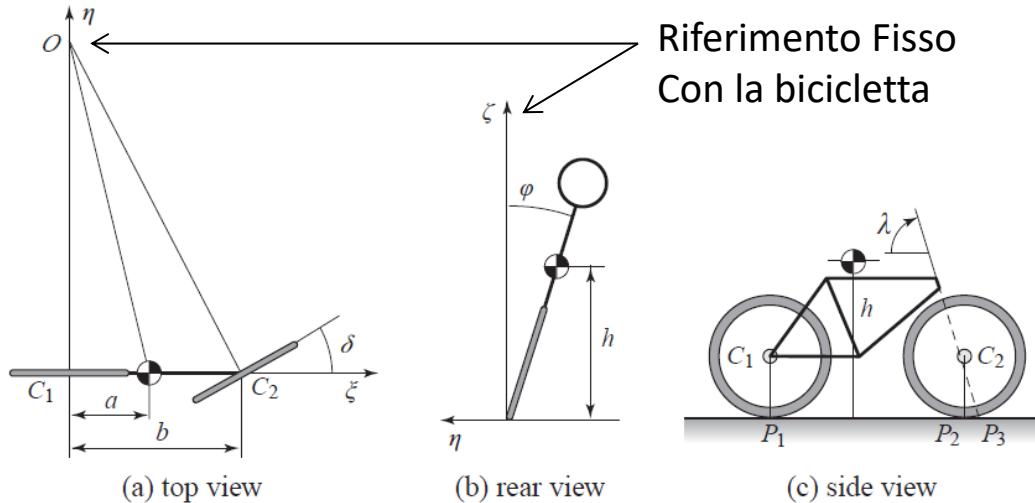
2. Passaggio intermedio



3. Target di controllo



## Esempio: modello biciclo



**Figure 3.5:** Schematic views of a bicycle. The steering angle is  $\delta$ , and the roll angle is  $\varphi$ . The center of mass has height  $h$  and distance  $a$  from a vertical through the contact point  $P_1$  of the rear wheel. The wheel base is  $b$ , and the trail is  $c$ .

Riferimento Fisso  
Con la bicicletta

$$\frac{v_0 \delta}{b} = \omega$$

Velocità  
Angolare  
Rispetto ad O

$m$  be the total mass of the system,  $J$  the moment of inertia of this body with respect to the  $\xi$ -axis and  $D$  the product of inertia with respect to the  $\xi\zeta$  axes. Furthermore, let the  $\xi$  and  $\zeta$  coordinates of the center of mass with respect to the rear wheel contact point,  $P_1$ , be  $a$  and  $h$ , respectively. We have  $J \approx mh^2$  and  $D = mah$ . The torques acting on the system are due to gravity and centripetal action.

- **Modello del movimento di Rollio**

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{Dv_0}{b} \frac{d\delta}{dt} = mgh \sin \varphi + \frac{mv_0^2 h}{b} \delta.$$

**Ipotesi semplificativa**

$$\begin{cases} \lambda = 90^\circ \\ |P_2 - P_3| = 0 \end{cases}$$



## Esempio: modello biciclo

Con l'ipotesi di piccoli valori angolari di  $\varphi$

$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} = \frac{\frac{Dv_0}{b}s + \frac{mv_0^2 h}{b}}{J(s^2 - mgh)}$$

$$J \approx mh^2 \quad D \approx mah$$

$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} \approx \frac{av_0}{bh} \frac{s + \frac{v_0}{a}}{s^2 - \frac{g}{h}}$$

Ci sono 2 POLI  
ed uno ZERO:

$$P_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{mgh}{J}} \approx \pm \sqrt{\frac{g}{h}}$$
$$Z_1 = -\frac{mv_0 h}{D} \approx -\frac{v_0}{a}$$

- Dinamica simile al pendolo inverso, la risposta ad un impulso vale:

$$\varphi(t) = C_1 e^{+\sqrt{\frac{g}{h}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{h}}t}$$

- Il modello non “cattura” la dinamica dell’equilibrio senza mani
- La bici può essere mantenuta verticale con un controllo attivo di sterzata della ruota anteriore, se la velocità è sufficientemente elevata



## Esempio: modello biciclo

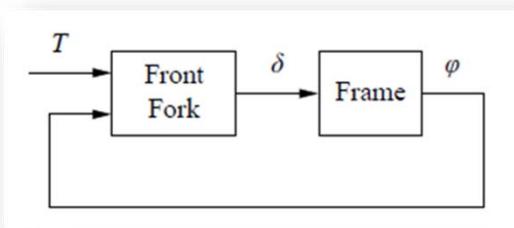
$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} \approx \frac{av_0}{bh} \frac{s + \frac{v_0}{a}}{s^2 - \frac{g}{h}} = K_1 \frac{s + z}{s^2 - p}; \quad p = \frac{g}{h}, z = \frac{v_0}{a}, K_1 = \frac{av_0}{bh}$$

$$\delta(s) = -K_2 \varphi(s) \quad \ddot{\varphi} + K_1 K_2 \dot{\varphi} + (K_1 K_2 z - p) \varphi = 0$$

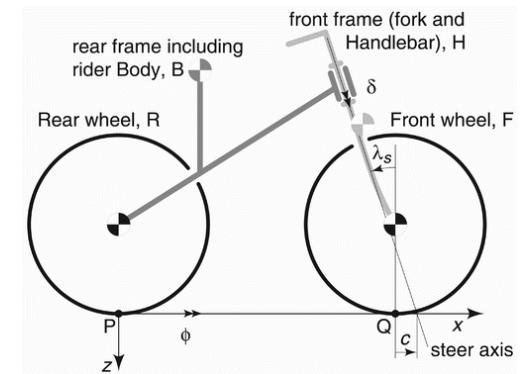
$$K_2 > \frac{p}{K_1 z} = \frac{gb}{v_0^2}$$

- Modello di Whipple, 1899 (vedi Articolo online) tiene conto del manubrio, che ha un impatto fondamentale, nella dinamica della bicicletta.

### Dinamica del Manubrio



$$k_1(v_0) = \frac{b^2}{(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda) mac \sin \lambda}$$
$$k_2(v_0) = \frac{bg}{v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda}$$

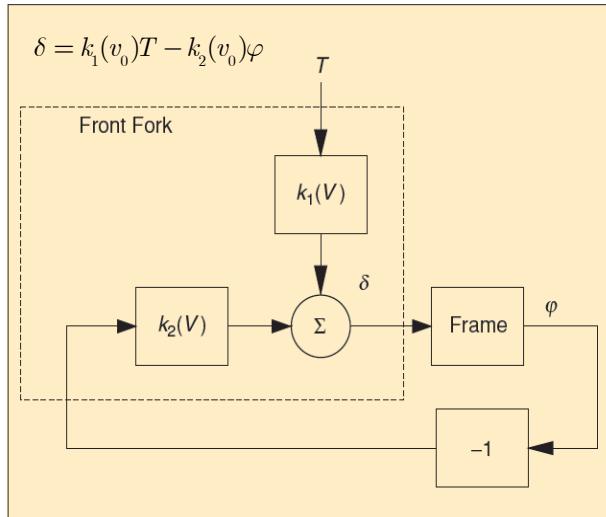


$$\delta = k_1(v_0)T - k_2(v_0)\varphi$$



## Esempio: modello biciclo

$$\begin{aligned}
 J\ddot{\varphi} + \frac{Dv_0g}{v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda} \dot{\varphi} + \frac{mg^2(bh \sin \lambda - ac \cos \lambda)}{v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda} \varphi = \\
 = \frac{Dv_0b}{mac(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)} \dot{T} + \frac{b(hv_0^2 - acg)}{ac(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)} T
 \end{aligned}$$



- Il manubrio produce una retroazione effettiva sull'angolo di sterzata  $\delta$  della ruota anteriore, che aiuta la stabilizzazione in modo automatico sempre in funzione della velocità.

$$\ddot{\varphi} + A_1 \dot{\varphi} + A_2 \varphi = B_1 \dot{T} + B_2 T$$

$$\delta = k_1(v_0)T - k_2(v_0)\varphi$$

$$G_T^\varphi(s) = B_1 \frac{s + \frac{B_2}{B_1}}{s^2 + A_1 s + A_2}$$

$$A_1 = \frac{Dv_0g}{J(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)}; A_2 = \frac{mg^2(bh \sin \lambda - ac \cos \lambda)}{J(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)}$$

$$B_1 = \frac{Dv_0b}{macJ(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)}; B_2 = \frac{b(hv_0^2 - acg)}{acJ(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)}$$

$$v_w = \sqrt{bg \cot \lambda} \quad \text{Velocità di Auto allineamento}$$

$$\begin{cases} v_0 > v_w \\ bh > ac \tan \lambda \end{cases} \quad \text{Stabilità}$$



## Esempio: modello biciclo

- Introduzione di un modello dinamico del manubrio

$$M \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} + Cv_0 \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + (K_0 + K_2 v_0^2) \begin{bmatrix} \varphi \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}$$

$$\left[ Ms^2 + Cv_0 s + (K_0 + K_2 v_0^2) \right] \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \delta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} T(s)$$

$$A(s) \Big|_{2 \times 2} \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \delta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(s) & | & A_{12}(s) \\ \hline A_{21}(s) & | & A_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} T(s)$$

$$\begin{cases} \frac{\varphi(s)}{T(s)} = A_{12}^{-1}(s) \\ \frac{\delta(s)}{T(s)} = A_{22}^{-1}(s) \end{cases}$$

**Table 1. Basic bicycle parameters.** This table gives the mass, inertia tensor, and geometry for a standard bicycle with a rider. The values in parentheses are for a bicycle without a rider.

|                               | Rear Frame      | Front Frame | Rear Wheel | Front Wheel |
|-------------------------------|-----------------|-------------|------------|-------------|
| Mass $m$ [kg]                 | 87 (12)         | 2           | 1.5        | 1.5         |
| Center of Mass                |                 |             |            |             |
| $x$ [m]                       | 0.492 (0.439)   | 0.866       | 0          | b           |
| $z$ [m]                       | 1.028 (0.579)   | 0.676       | $R_{rw}$   | $R_{fw}$    |
| Inertia Tensor                |                 |             |            |             |
| $J_{xx}$ [kg-m <sup>2</sup> ] | 3.28 (0.476)    | 0.08        | 0.07       | 0.07        |
| $J_{xz}$ [kg-m <sup>2</sup> ] | -0.603 (-0.274) | 0.02        | 0          | 0           |
| $J_{yy}$ [kg-m <sup>2</sup> ] | 3.880 (1.033)   | 0.07        | 0.14       | 0.14        |
| $J_{zz}$ [kg-m <sup>2</sup> ] | 0.566 (0.527)   | 0.02        | $J_{xx}$   | $J_{xx}$    |

$$M = \begin{pmatrix} 96.8 (6.00) & -3.57 (-0.472) \\ -3.57 (-0.472) & 0.258 (0.152) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -50.8 (-5.84) \\ 0.436 (0.436) & 2.20 (0.666) \end{pmatrix},$$

$$K_0 = \begin{pmatrix} -901.0 (-91.72) & 35.17 (7.51) \\ 35.17 (7.51) & -12.03 (-2.57) \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & -87.06 (-9.54) \\ 0 & 3.50 (0.848) \end{pmatrix}.$$



# Esempio: modello biciclo quarto ordine

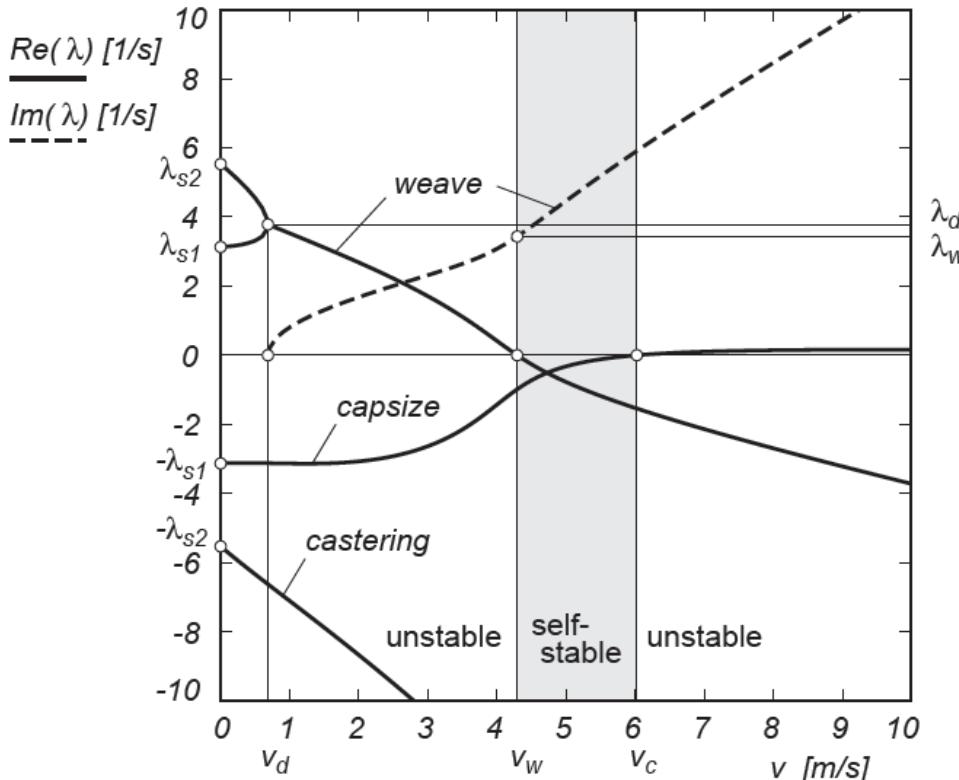


Figure 3. Eigenvalues  $\lambda$  from the linearized stability analysis for the benchmark bicycle from figure 1 and table 1 where the solid lines correspond to the real part of the eigenvalues and the dashed line corresponds to the imaginary part of the eigenvalues, in the forward speed range of  $0 \leq v \leq 10$  m/s. The speed range for the asymptotic stability of the benchmark bicycle is  $v_w < v < v_c$ . The zero crossings of the real part of the eigenvalues are for the weave motion at the weave speed  $v_w \approx 4.3$  m/s and for the capsize motion at capsize speed  $v_c \approx 6.0$  m/s, and oscillations emerge at the real double root at  $v_d \approx 0.7$  m/s. For accurate eigenvalues and transition speeds see table 2.

Table 2. Some characteristic values for the forward speed  $v$  and the eigenvalues  $\lambda$  from the linearized stability analysis for the benchmark bicycle from figure 1 and table 1. Fourteen digit results are presented for benchmark comparisons. (a)  $v = 0$ , weave speed  $v_w$ , capsize speed  $v_c$  and the speed with a double root  $v_d$ . In the forward speed range of  $0 \leq v \leq 10$  m/s (b) Complex (weave motion) eigenvalues  $\lambda_{\text{wave}}$ , and (c) Real eigenvalues  $\lambda$ .

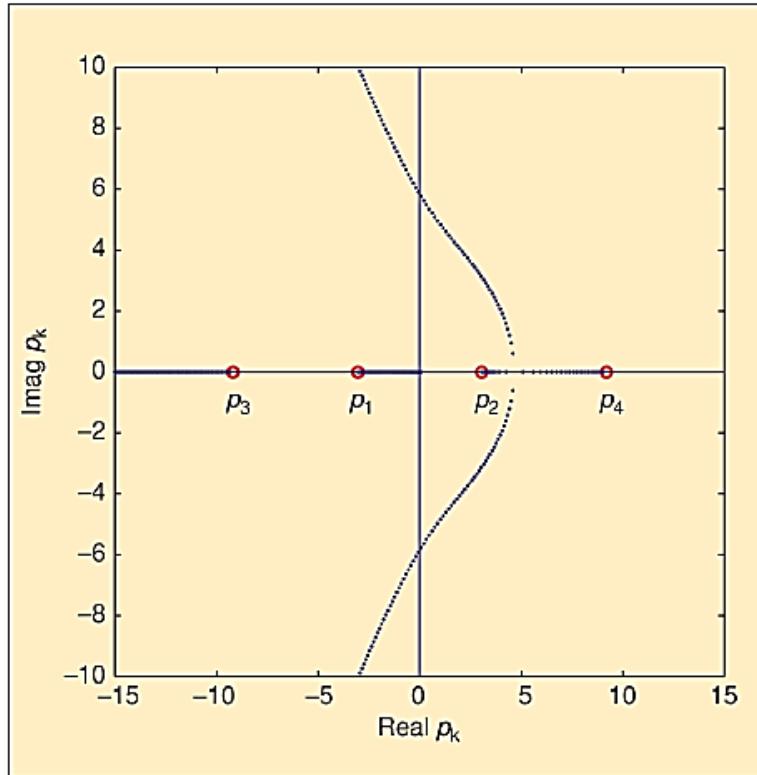
|     | $v$ [m/s]                        | $\lambda$ [1/s]                                |
|-----|----------------------------------|--|
| (a) | $v = 0$                          | $\lambda_{s1} = \pm 3.131\,643\,247\,906\,56$  |
|     | $v = 0$                          | $\lambda_{s2} = \pm 5.530\,943\,717\,653\,93$  |
|     | $v_d = 0.684\,283\,078\,892\,46$ | $\lambda_d = 3.782\,904\,051\,293\,20$         |
|     | $v_w = 4.292\,382\,536\,341\,11$ | $\lambda_w = 0 \pm 3.435\,033\,848\,661\,44 i$ |
|     | $v_c = 6.024\,262\,015\,388\,37$ | 0  |

| $v$ [m/s] | $\text{Re}(\lambda_{\text{wave}})$ [1/s] | $\text{Im}(\lambda_{\text{wave}})$ [1/s] |
|-----------|--|--|
| 0         | -  | -  |
| 1         | 3.526 961 709 900 70                     | 0.807 740 275 199 30                     |
| 2         | 2.682 345 175 127 45                     | 1.680 662 965 906 75                     |
| 3         | 1.706 756 056 639 75                     | 2.315 824 473 843 25                     |
| 4         | 0.413 253 315 211 25                     | 3.079 108 186 032 06                     |
| 5         | -0.775 341 882 195 85                    | 4.464 867 713 788 23                     |
| 6         | -1.526 444 865 841 42                    | 5.876 730 606 987 09                     |
| 7         | -2.138 756 442 583 62                    | 7.195 259 133 298 05                     |
| 8         | -2.693 486 835 810 97                    | 8.460 379 713 969 31                     |
| 9         | -3.216 754 022 524 85                    | 9.693 773 515 317 91                     |
| 10        | -3.720 168 404 372 87                    | 10.906 811 394 762 87                    |

| $v$ [m/s] | $\lambda_{\text{capsize}}$ [1/s] | $\lambda_{\text{castering}}$ [1/s] |
|-----------|----------------------------------|------------------------------------|
| 0         | -3.131 643 247 906 56            | -5.530 943 717 653 93              |
| 1         | -3.134 231 250 665 78            | -7.110 080 146 374 42              |
| 2         | -3.071 586 456 415 14            | -8.673 879 848 317 35              |
| 3         | -2.633 661 372 536 67            | -10.351 014 672 459 20             |
| 4         | -1.429 444 273 613 26            | -12.158 614 265 764 47             |
| 5         | -0.322 866 429 004 09            | -14.078 389 692 798 22             |
| 6         | -0.004 066 900 769 70            | -16.082 371 230 980 26             |
| 7         | 0.102 681 705 747 66             | -18.157 884 661 252 62             |
| 8         | 0.143 278 797 657 13             | -20.279 408 943 945 69             |
| 9         | 0.157 901 840 309 17             | -22.437 885 590 408 58             |
| 10        | 0.161 053 386 531 72             | -24.624 596 350 174 04             |



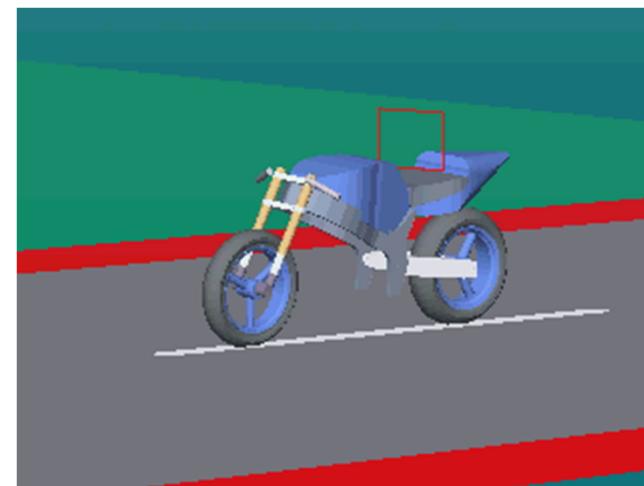
## Esempio: modello biciclo quarto ordine



**Figure 8.** Root locus for the bicycle with respect to velocity. The model is given by (24) with parameters given by (25). The poles at zero velocity, marked with red o, are symmetric with respect to the imaginary axis. The poles  $p_1$  and  $p_2$  are the pendulum poles given by (2), and the poles  $p_3$  and  $p_4$  are the front fork poles.

### □ Main Natural Modes

- Capsize: Fall over with no oscillation, due to high lean and low speed
- Weave: slow oscillation lean left and steer right
- Caster: high frequency oscillation of front wheel as supermarket cart





## Esempio: Applicazioni biciclo



**Figure 11.** A UIUC bicycle with precession canceling. This bicycle is used to illustrate that gyroscopic effects have little influence on rideability.



**Figure 18.** Klein's original unridable rear-steered bicycle. This bicycle shows the difficulties of controlling a system with poles and zeros in the right-half plane. There is a US\$1,000 prize for riding this bicycle under specified conditions.



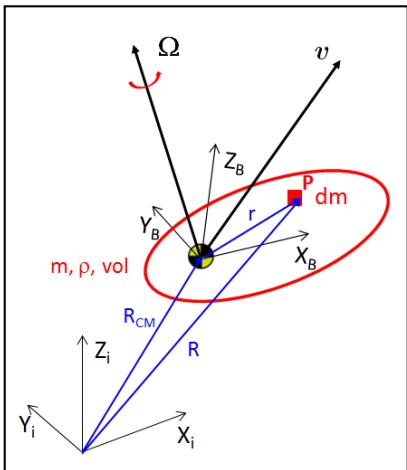
**Figure 20.** The UCSB rear-steered bicycle. This bicycle is rideable as demonstrated by Dave Bothman, who supervised the construction of the bicycle. Riding this bicycle requires skill and dare because the rider has to reach high speed quickly.



**Figure 19.** Klein's rideable rear-steered bicycle. This bicycle is rideable because the rider has a high center of gravity and because the vertical projection of the center of mass of the rider is close to the contact point of the driving wheel with the ground.



# Dinamica del Corpo Rigido



- Meccanica classica → Newton
  - Sistema di Riferimento: Inerziale
  - Quantità di moto, Momento della quantità di moto
- $$\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$$
- $$\mathbf{H} = \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i)$$
- Ipotesi Corpo rigido → moto del CM + moto intorno al CM (ovvero moto di traslazione + moto di rotazione)

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{EXT} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \Big|_{In} = \frac{d(m_{TOT} \mathbf{v}_{CM})}{dt} \Big|_{In} = \mathbf{F} \quad \sum_i \mathbf{M}_i^{EXT} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} \Big|_{In} = \frac{d([I]\boldsymbol{\Omega})}{dt} \Big|_{In} = \mathbf{M}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$

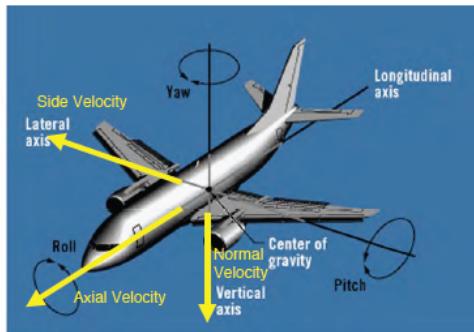
$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_{vol} (y^2 + z^2) dm & I_y &= \int_{vol} (x^2 + z^2) dm \\
 I_z &= \int_{vol} (x^2 + y^2) dm & I_{xy} &= I_{yx} = \int_{vol} xy dm \\
 I_{xz} &= I_{zx} = \int_{vol} xz dm & I_{yz} &= I_{zy} = \int_{vol} yz dm
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} + \dot{m}\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{v}} = m\dot{\mathbf{v}}_{CM} + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{CM}) \\
 \mathbf{M} = [I]\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times ([I]\boldsymbol{\Omega}) + [\dot{I}]\boldsymbol{\Omega} = [I]\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times ([I]\boldsymbol{\Omega})
 \end{cases}$$

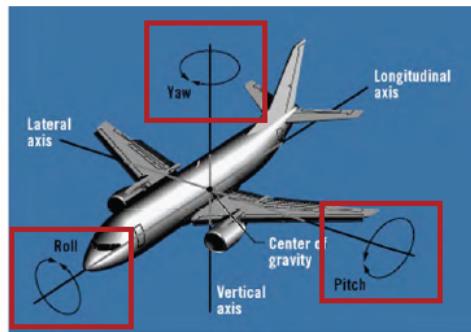


# Esempi Aero/Navali

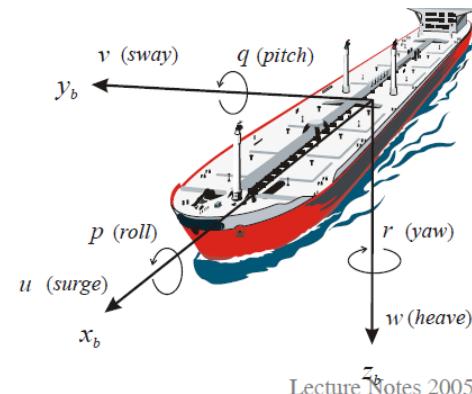
## Airplane Translational Degrees of Freedom



## Airplane Rotational Degrees of Freedom



**Esempi relativi ad Attività parte del CM in Ingegneria Robotica e dell'Automazione**



Lecture Notes 2005



Pierce STP System APL

| DOF |  | forces and moments | linear and angular velocities | positions and Euler angles |
|-----|--|--------------------|-------------------------------|----------------------------|
| 1   | motions in the $x$ -direction (surge)      | $X$                | $u$                           | $x$                        |
| 2   | motions in the $y$ -direction (sway)       | $Y$                | $v$                           | $y$                        |
| 3   | motions in the $z$ -direction (heave)      | $Z$                | $w$                           | $z$                        |
| 4   | rotation about the $x$ -axis (roll, heel)  | $K$                | $p$                           | $\phi$                     |
| 5   | rotation about the $y$ -axis (pitch, trim) | $M$                | $q$                           | $\theta$                   |
| 6   | rotation about the $z$ -axis (yaw)         | $N$                | $r$                           | $\psi$                     |

I gradi di libertà (DOF) sono associati e si riferiscono alle componenti di moto del corpo rigido



# Esempi Aero/Navali



Models for ships, semi-submersibles, and underwater vehicles are usually represented as one of the following subsystems:

- ✓ **Surge model:** velocity  $u$
- ✓ **Maneuvering model (sway and yaw):** velocities  $v$  and  $r$
- ✓ **Horizontal motion (surge, sway, and yaw):** velocities  $u, v$ , and  $r$
- ✓ **Longitudinal motion (surge, heave, and pitch):** velocities  $u, w$ , and  $q$
- ✓ **Lateral motion: (sway, roll, and yaw):** velocities  $v, p$ , and  $\psi$

or:

- ✓ **Horizontal plane models:** DOFs 1, 2, 6
- ✓ **Longitudinal motion:** DOFs 1, 3, 5
- ✓ **Lateral motion:** DOFs 2, 4, 6

The 6 DOF equations of motion can in many cases be divided into two non-interacting (or lightly interacting) subsystems:

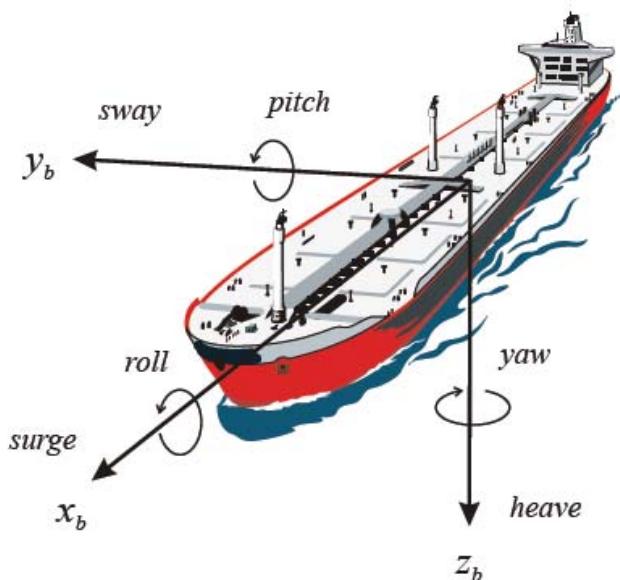
- ✓ **Longitudinal subsystem:** states  $u, w, q$ , and  $\theta$
- ✓ **Lateral subsystem:** states  $v, p, r$ , and  $\psi$

This decomposition is good for *slender bodies* (large length/width ratio). Typical applications are *aircraft, missiles, and submarines*.



## Esempi Aero/Navali

# Degrees-of-Freedom (DOF)



In maneuvering, a marine craft experiences motion in 6 DOF. The motion in the horizontal plane is referred to as **surge** (**longitudinal motion**, usually superimposed on the steady propulsive motion) and **sway** (**sideways motion**).

Heading, or **yaw** (rotation about the vertical axis) describes the course of the vessel. The remaining three DOFs are **roll** (rotation about the longitudinal axis), **pitch** (rotation about the transverse axis), and **heave** (vertical motion).

**Roll** is probably the most troublesome DOF, since it produces the highest accelerations and, hence, is the principal villain in seasickness. Similarly, pitching and heaving feel uncomfortable to humans.

When designing ship autopilots, yaw is the primary mode for feedback control. Station-keeping of a marine craft implies stabilization of the surge, sway and yaw modes.

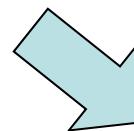


## Esempi Aero/Navali

- La linearizzazione delle equazioni del moto segue la tecnica classica:
  - Scelta di una condizione di equilibrio
  - Calcolo della matrice Jacobiana riferita allo stato del sistema ed al controllo (nel caso di condizione di equilibrio non autonoma)
- Le condizioni di equilibrio corrispondono a situazioni di accelerazione nulla
  - Moto uniforme (velocità costante di traslazione o di rotazione)
  - Quota o profondità costanti
  - ...
- Nel caso di corpi dotati di simmetria e in movimento unidirezionale, la linearizzazione produce due sottosistemi disaccoppiati (**longitudinale**, **laterale**) che quindi possono essere studiati **separatamente** dal punto di vista dinamico.

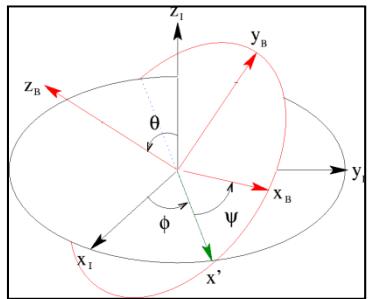
$$\begin{cases} \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} = m\dot{\mathbf{v}}_{CM} + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{CM}) \\ \mathbf{M} = [I]\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times ([I]\boldsymbol{\Omega}) = [I]\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times ([I]\boldsymbol{\Omega}) \end{cases}$$

Rappresentazione in componenti rispetto al sistema non inerziale delle 6 variabili di stato



$$\begin{cases} m[\dot{u} - vr + wq] = X - mg \sin \Theta \\ m[\dot{v} - wp + ur] = Y + mg \cos \Theta \sin \Phi \\ m[\dot{w} - uq + vp] = Z + mg \cos \Theta \cos \Phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{xx}\dot{p} + (I_{zz} - I_{yy})qr - (\dot{r} + pq)I_{xz} = L \\ I_{yy}\dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})rp + (p^2 - r^2)I_{xz} = M \\ I_{zz}\dot{r} + (I_{yy} - I_{xx})pq + (rq - \dot{p})I_{xz} = N \end{cases}$$



1. Origin reference is the inertial system  $[o]_{IN}$
2. Target reference is a body – fixed system  $[o]_B$
3. First rotation of  $\Psi$  about the  $Z_{IN} = Z_1$  axis (type 3)
4. Second rotation of  $\Theta$  about the  $Y_1$  axis (type 2)
5. Third rotation of  $\Phi$  about the  $X_2 = X_B$  axis (type 1)

$$\begin{bmatrix} c\Psi & s\Psi & 0 \\ -s\Psi & c\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [T(\Psi)]^1_{INERTIAL}$$

$$\begin{bmatrix} c\Theta & 0 & -s\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\Theta & 0 & c\Theta \end{bmatrix} = [T(\Theta)]^2_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\Phi & s\Phi \\ 0 & -s\Phi & c\Phi \end{bmatrix} = [T(\Phi)]^BODY_2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B = [T(\Phi)]^BODY_2 \cdot [T(\Theta)]^2_1 \cdot [T(\Psi)]^1_{INERTIAL} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_I$$

$$[T(\Phi, \Theta, \Psi)]^BODY_{INERTIAL} = \begin{bmatrix} c\Theta c\Psi & c\Theta s\Psi & -s\Theta \\ -c\Phi s\Psi + s\Phi s\Theta c\Psi & c\Phi c\Psi + s\Phi s\Theta s\Psi & s\Phi c\Theta \\ s\Phi s\Psi + c\Phi s\Theta c\Psi & -s\Phi c\Psi + c\Phi s\Theta s\Psi & c\Phi c\Theta \end{bmatrix}$$



## Esempi Aero/Navali

### □ Moto longitudinale linearizzato (traslazione x, z e rotazione y)

$$\begin{bmatrix} m - X_{\dot{u}} & -X_{\dot{w}} & mz_g - X_{\dot{q}} \\ -X_{\dot{w}} & m - Z_{\dot{w}} & -mx_g - Z_{\dot{q}} \\ mz_g - X_{\dot{q}} & -mx_g - Z_{\dot{q}} & I_y - M_{\dot{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -X_u & -X_w & -X_q \\ -Z_u & -Z_w & -Z_q \\ -M_u & -M_w & -M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(m - X_{\dot{u}})u \\ 0 & (Z_{\dot{w}} - X_{\dot{u}})u & mx_g u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ WBG_z \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_3 \\ \tau_5 \end{bmatrix}$$

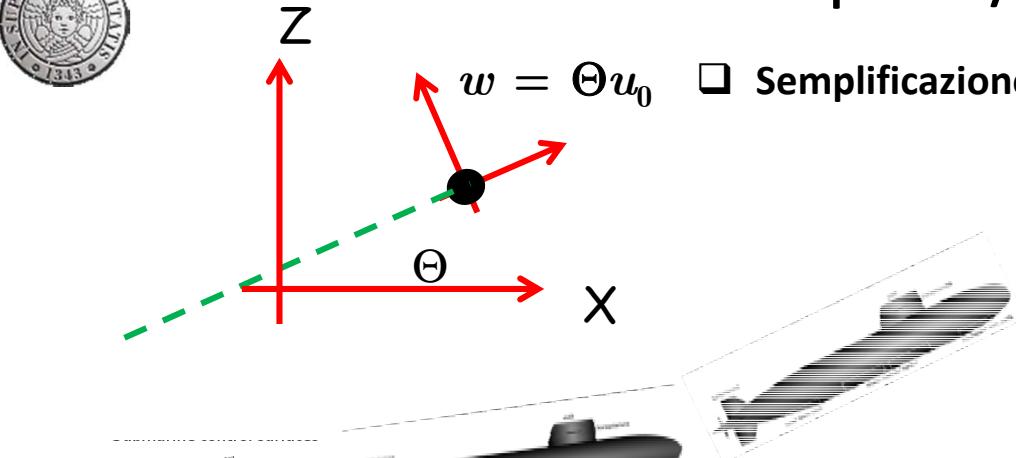
### □ Nel caso in cui non vi sia perturbazione di velocità di traslazione lungo la x:

$$u = u_o = \text{constant}$$

$$\begin{bmatrix} m - Z_{\dot{w}} & -mx_g - Z_{\dot{q}} \\ -mx_g - Z_{\dot{q}} & I_y - M_{\dot{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Z_w & -Z_q \\ -M_w & -M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & -(m - X_{\dot{u}})u_o \\ (Z_{\dot{w}} - X_{\dot{u}})u_o & mx_g u_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ BG_z W \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_3 \\ \tau_5 \end{bmatrix}$$



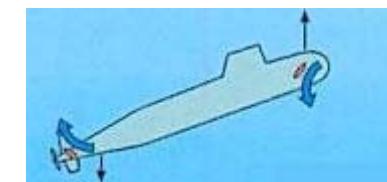
## Esempi Aero/Navali



$$(I_y - M_q)\ddot{\theta} - M_q\dot{\theta} + BG_zW\theta = \tau_5$$



□ Standard Size Diesel Submarine: Depth = 280 ft, Speed = 9 Kts



$$\frac{\theta(s)}{\delta_E(s)} = \frac{-0.467(s + 0.12)}{s(s^2 + 0.8s + .25)}$$

$$p_{1,2} = -0.4 \pm j0.3$$



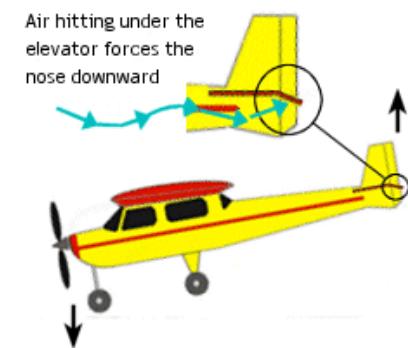
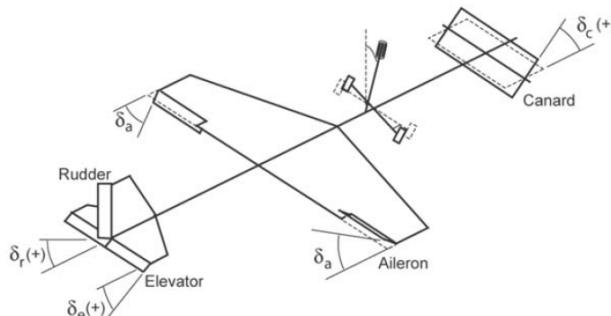
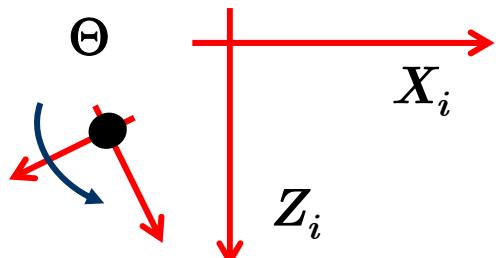
Super Falcon is equipped with high heads-up combined graphics navigation and is controlled by a pilot.

The flight controls are mechanical linkages for pitch, roll and yaw, with a throttle lever for forward and reverse thrust. As proven by the previous generations of DeepFlight winged submersibles, the craft is highly maneuverable, and can be flown level and gently over the reef, or dive nose-first to depth and spyhop to the surface. DeepFlight Merlin can be flown at cruising speeds up to 2-5 knots, or less than 1 knot for observation.

Another first is the navigation module which includes an on-board computerized track plot that enables the pilot to mark way points and will guide the sub back to its launch point.



## Esempi Aero/Navali



□ Linearized Model for Pitch Rotation: Altitude = 40Kft, Speed = 0.8 M

$$G_{\delta_E}^{\theta}(s) = 1.1569 \frac{s + 0.2929}{s(s^2 + 0.7410s + 0.9272)}$$

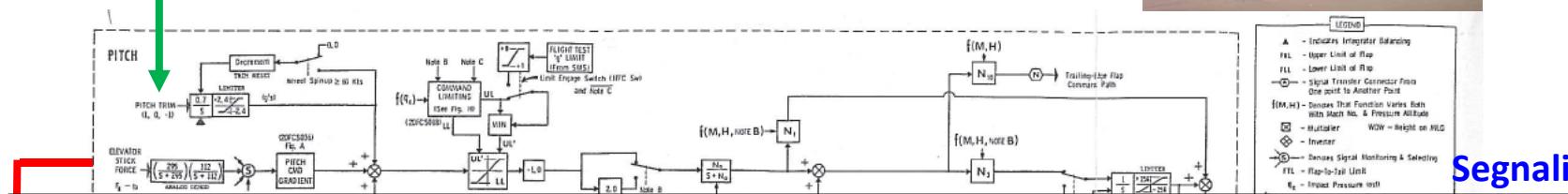
$$p_{1,2} = -0.37 \pm 0.89j$$



# Algebra a Blocchi

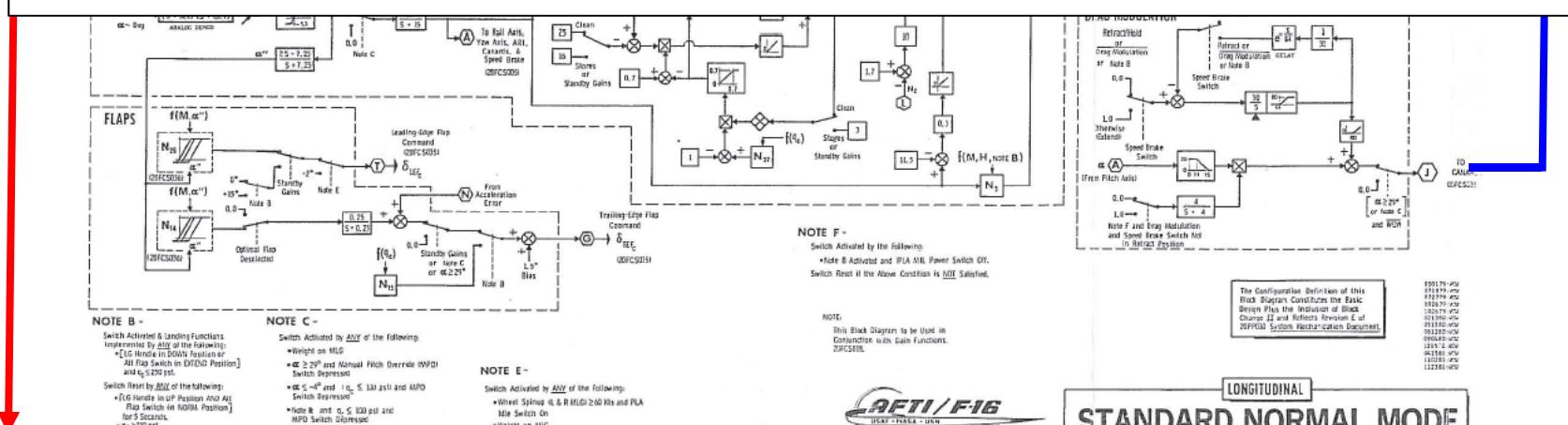
## Segnale di Riferimento

### Schema Sistema di Controllo base in Beccheggio



**Segnali diretti  
dai sensori**

- Un sistema lineare è descritto dalla propria FdT in termini di relazione ingresso – uscita
- Le interconnessioni tra sistemi lineari possono essere rappresentate in forma grafica mediante diagrammi a blocchi
- Le interconnessioni dinamiche ed evoluzione temporale di sistemi lineari interconnessi sono rappresentabili mediante espressioni algebriche delle varie FdT



**STANDARD NORMAL MODE**

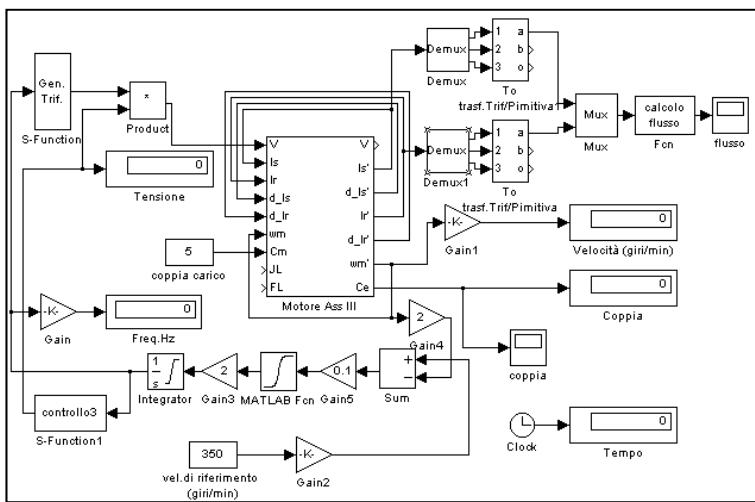
**Segnali provenienti dai sensori**



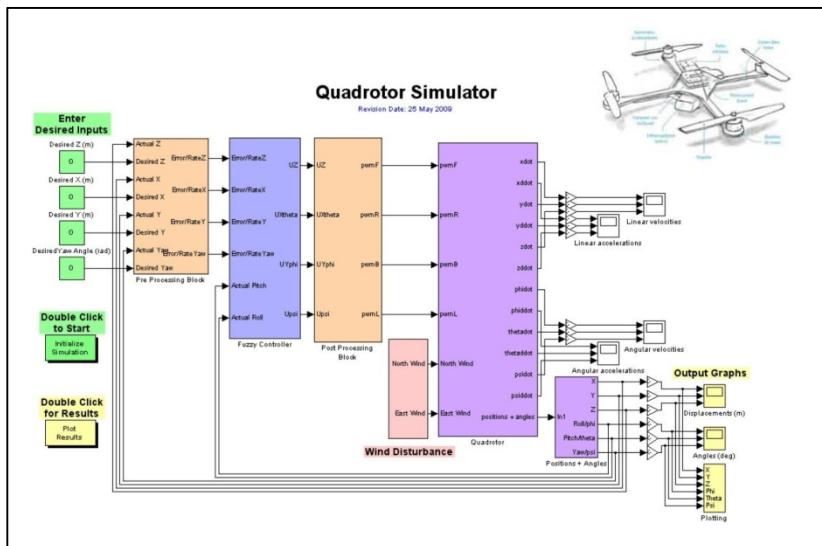
# Algebra a Blocchi



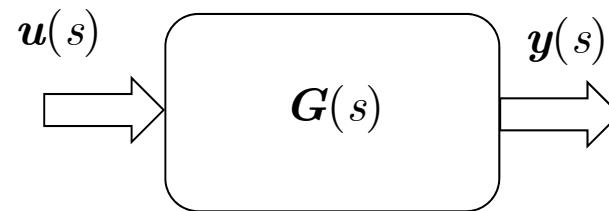
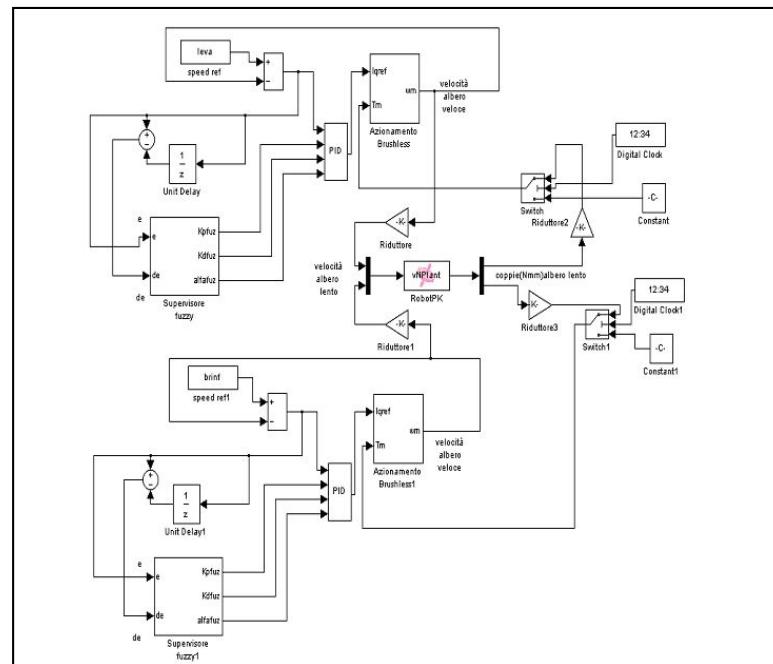
## Diagramma Motore Asincrono



## Diagramma operazionale Drone



# Diagramma Realizzazione Scatole di detersivo

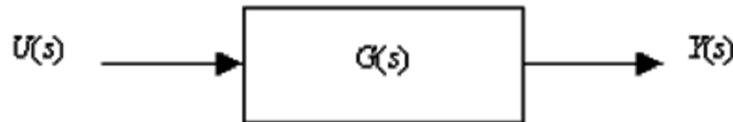




# Algebra a Blocchi

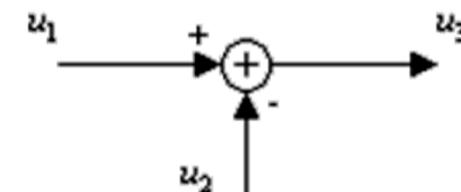
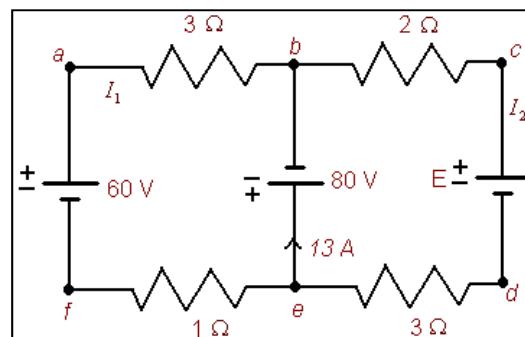
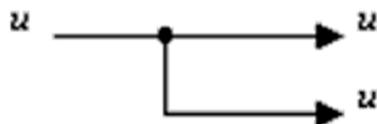
- Rappresentazione grafica ed algebrica di sistemi complessi (Per ipotesi semplificativa i segnali sono scalari)

Sistema dinamico



- Sequenzialità causa - effetto

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) , \quad Y(s) = G(s) U(s)$$



$$u_3 = u_1 - u_2$$

[Diagrammi a Blocchi YouTube Lecture](#)

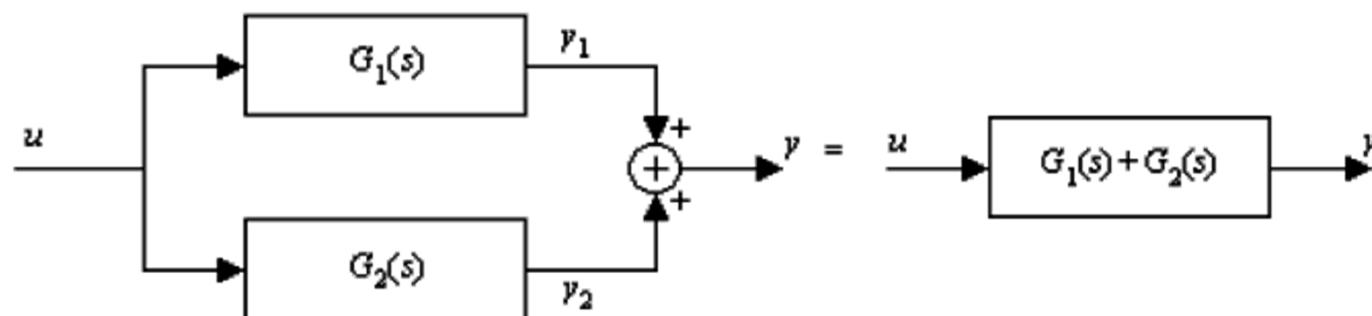


# Algebra a Blocchi



$$y_1 = G_1 u_1, \quad y_2 = G_2 u_2, \quad u_2 = y_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = G_2(s)G_1(s)$$

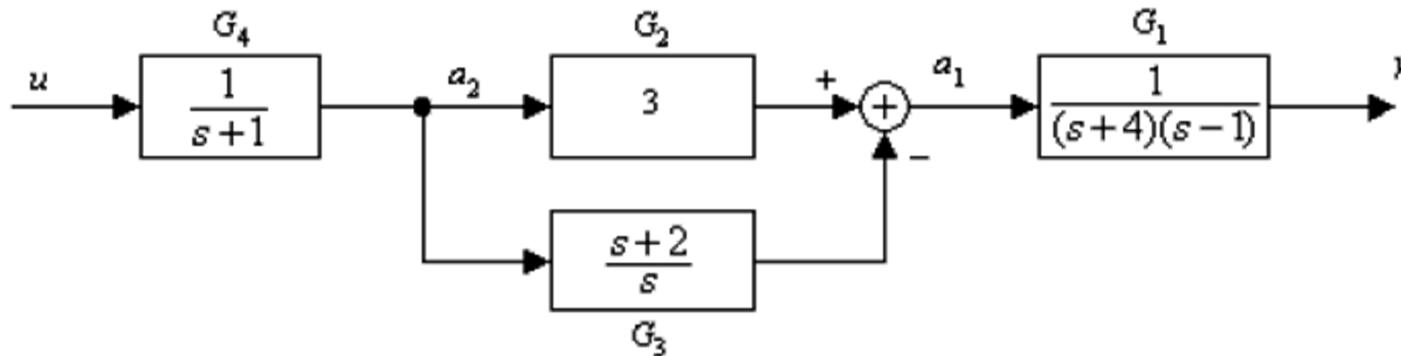


$$y = G_1 u + G_2 u = (G_1 + G_2) u$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s)$$



# Algebra a Blocchi



$$\begin{cases} y = G_1 a_1 \\ a_1 = (G_2 - G_3) a_2 \quad \Rightarrow \quad y = G_1 (G_2 - G_3) G_4 u \quad \Rightarrow \\ a_2 = G_4 u \end{cases}$$

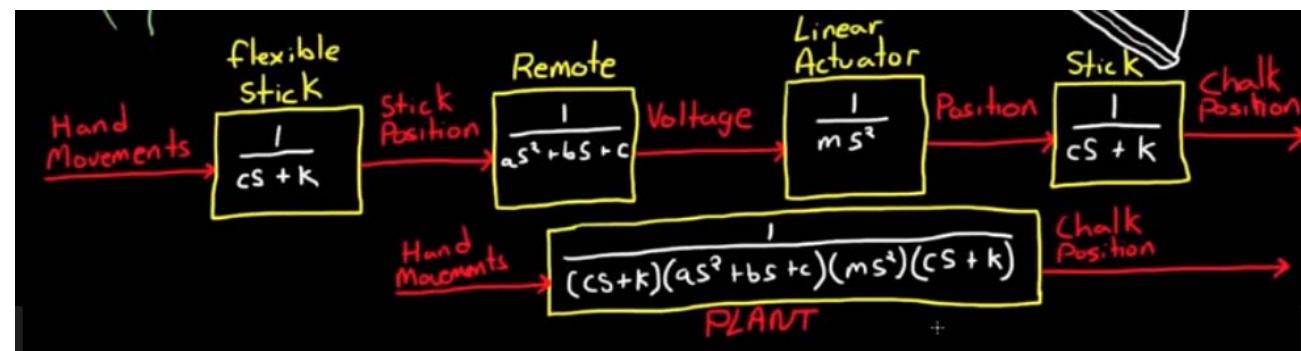
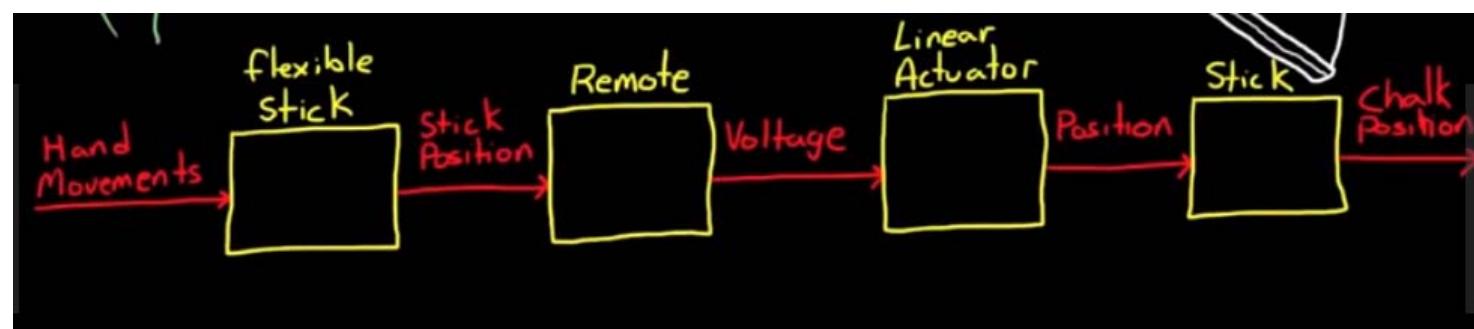
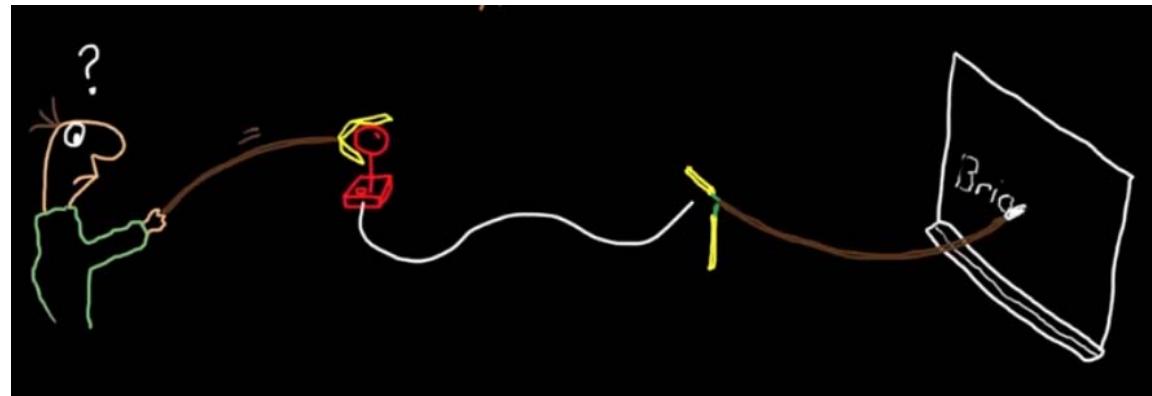
$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1 (G_2 - G_3) G_4 = \frac{1}{(s+4)(s-1)} \left( 3 - \frac{s+2}{s} \right) \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+4)(s-1)} \cdot \frac{2(s-1)}{s} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{2}{s(s+1)(s+4)}$$



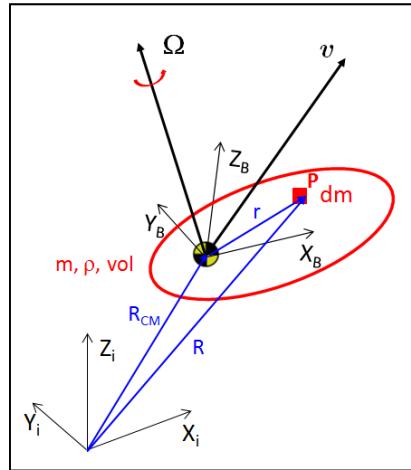
# Algebra a Blocchi

Brian Douglas: Transfer Function



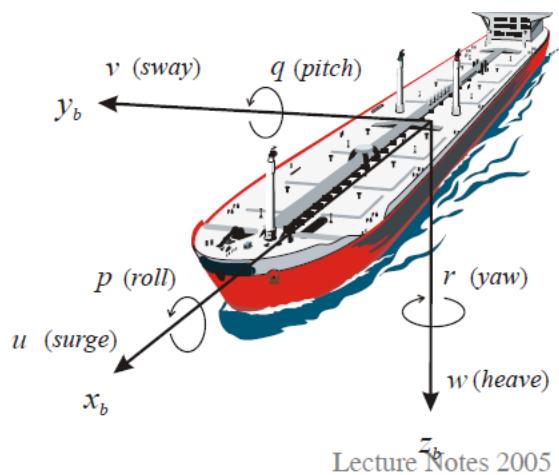


# Algebra a Blocchi



$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \Big|_{In} = \mathbf{F} \quad \text{Quantità di moto } m\mathbf{v}$$

$$\frac{d([I]\boldsymbol{\Omega})}{dt} \Big|_{In} = \mathbf{M} \quad \text{Momento della quantità di moto } \mathbf{H}$$
$$\mathbf{H} = m\mathbf{v} \times \mathbf{r} = [I]\boldsymbol{\Omega}$$



$$\begin{cases} \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} = m\dot{\mathbf{v}}_{CM} + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{CM}) \\ \mathbf{M} = [I]\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times ([I]\boldsymbol{\Omega}) = [I]\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times ([I]\boldsymbol{\Omega}) \end{cases}$$

Ricordare la trasformazione di similutidine



# Algebra a Blocchi

| DOF |  | forces and moments | linear and angular velocities | positions and Euler angles |
|-----|--|--------------------|-------------------------------|----------------------------|
| 1   | motions in the $x$ -direction (surge)      | $X$                | $u$                           | $x$                        |
| 2   | motions in the $y$ -direction (sway)       | $Y$                | $v$                           | $y$                        |
| 3   | motions in the $z$ -direction (heave)      | $Z$                | $w$                           | $z$                        |
| 4   | rotation about the $x$ -axis (roll, heel)  | $K$                | $p$                           | $\phi$                     |
| 5   | rotation about the $y$ -axis (pitch, trim) | $M$                | $q$                           | $\theta$                   |
| 6   | rotation about the $z$ -axis (yaw)         | $N$                | $r$                           | $\psi$                     |

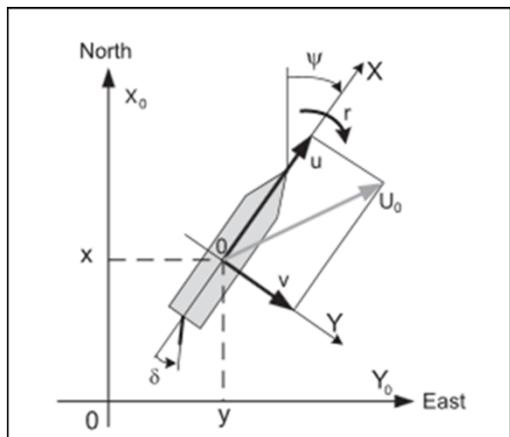
I gradi di libertà (DOF) sono interconnessi e si riferiscono alle componenti di moto del corpo rigido

$$\begin{cases} m[\dot{u} - vr + wq] = X - mg \sin \Theta \\ m[\dot{v} - wp + ur] = Y + mg \cos \Theta \sin \Phi \\ m[\dot{w} - uq + vp] = Z + mg \cos \Theta \cos \Phi \end{cases}$$

$$\Omega = [p, q, r]^T$$

$$\begin{cases} I_{xx}\dot{p} + (I_{zz} - I_{yy})qr - (\dot{r} + pq)I_{xz} = L \\ I_{yy}\dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})rp + (p^2 - r^2)I_{zx} = M \\ I_{zz}\dot{r} + (I_{yy} - I_{xx})pq + (rq - \dot{p})I_{xz} = N \end{cases}$$

Forze esterne e Coppie esterne applicate

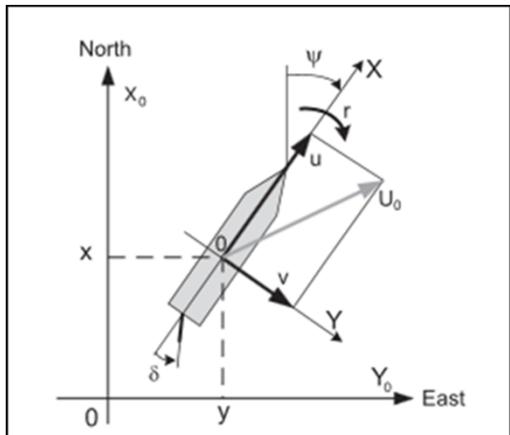


## □ Moto sul piano orizzontale a velocità costante

- Si trascura il moto ondoso
- Si considerano i gradi di libertà di interesse (sway, yaw)
- Si linearizza



# Algebra a Blocchi



$$\begin{bmatrix} m - Y_{\dot{v}} & -Y_{\dot{r}} \\ -N_{\dot{v}} & I_z - N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_v & (m - Y_{\dot{v}})u_0 - Y_r \\ -N_v & -Y_{\dot{r}}u_0 - N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y_\delta \\ -N_\delta \end{bmatrix} \delta$$
$$\delta = -\delta_{RUD}$$
$$\dot{\psi} = r$$

$$G_{\delta}^r(s) = \frac{r(s)}{\delta(s)} = \frac{K(1 + T_3 s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$
$$\psi(s) = \frac{1}{s} r(s)$$

**Modello di Nomoto**

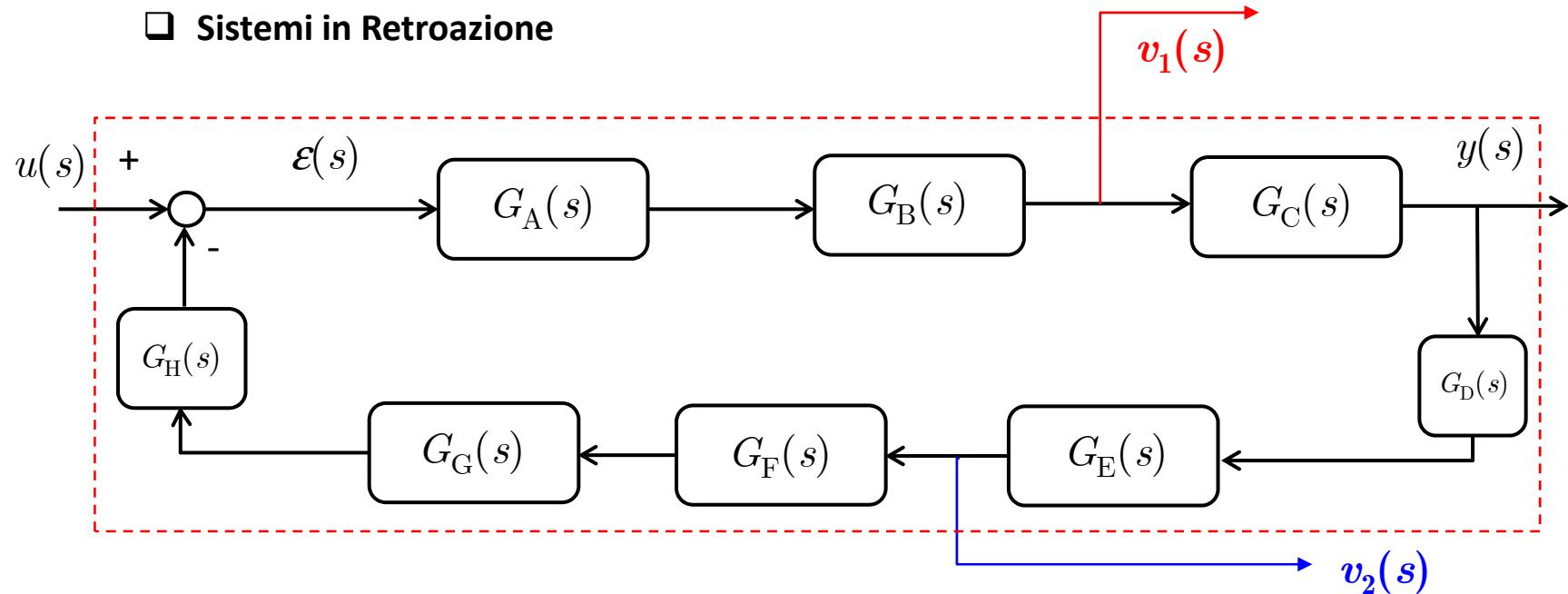
|            | $L$ (m) | $u_0$ (m/s) | $\nabla$ (dwt) | $K$ (1/s) | $T_1$ (s) | $T_2$ (s) | $T_3$ (s) |
|------------|---------|-------------|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| cargo ship | 161     | 7.7 15.4 kn | 16622          | 0.185     | 118.0     | 7.8       | 18.5      |
| Oil tanker | 350     | 8.1 16.2 kn | 389100         | -0.019    | -124.1    | 16.4      | 46.0      |

$$G(s) = \frac{-0.019(1 + 46s)}{(1 - 124.1s)(1 + 16.4s)} = \frac{0.0004(s + 46)}{(s - 124.1)(s + 16.4)}$$



# Algebra a Blocchi

## □ Sistemi in Retroazione



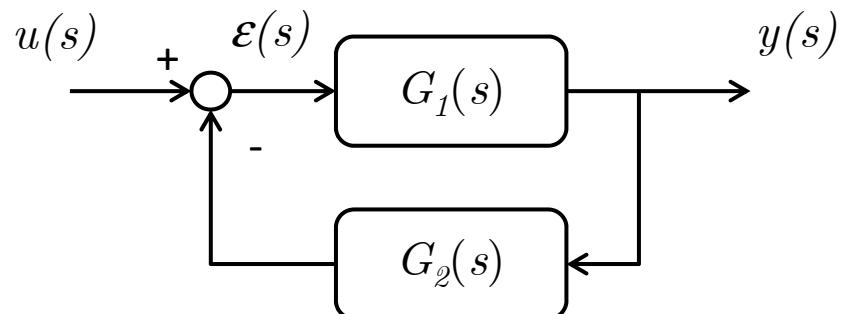
$$\frac{v_1(s)}{u(s)} = \frac{G_B \cdot G_A}{1 + G_H \cdot G_G \cdot G_F \cdot G_E \cdot G_D \cdot G_C}$$

$$\frac{v_2(s)}{u(s)} = \frac{G_E \cdot G_D \cdot G_C \cdot G_B \cdot G_A}{1 + G_H \cdot G_G \cdot G_F}$$

- Calcolo della FdT tra  $u(s)$  e  $y(s)$

$$G_1(s) = G_A \cdot G_B \cdot G_C$$

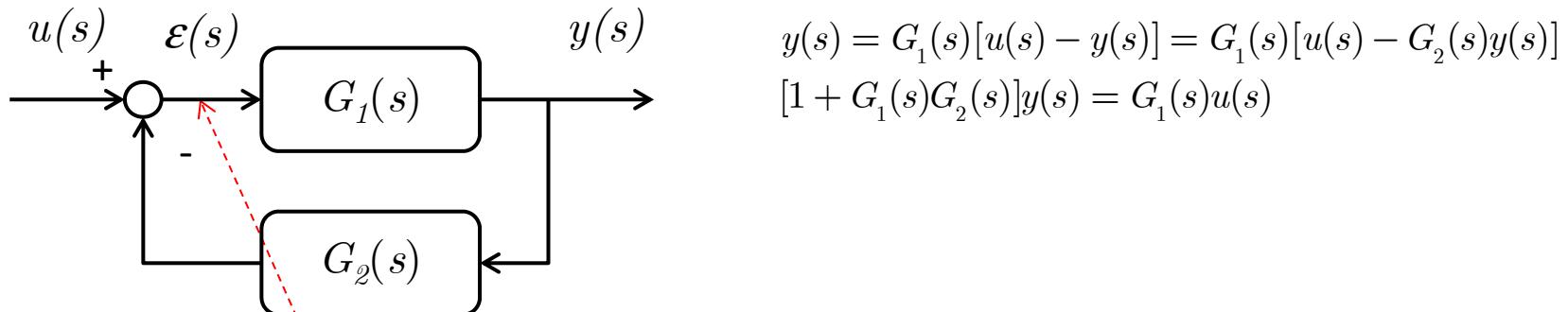
$$G_2(s) = G_D \cdot G_E \cdot G_F \cdot G_G \cdot G_H$$





# Algebra a Blocchi

## ■ Retroazione non unitaria



□ **Definizione** - FdT in anello chiuso o Funzione di Sensitività Complementare

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = G_{CL}(s) = T(s)$$

□ **Definizione** - Funzione di Trasferimento di Anello (o ad Anello aperto): prodotto di tutte le funzioni di trasferimento presenti in anello:

$$G_{OL}(s) = G_1(s)G_2(s)$$

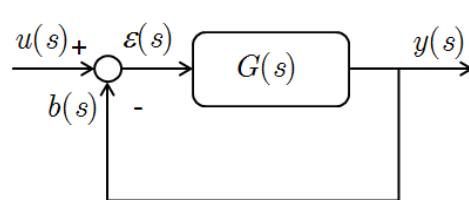
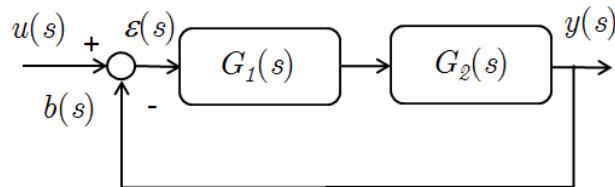
□ **Definizione** - Funzione di Sensitività :

$$S(s) = \frac{1}{1 + G_2(s)G_1(s)} = \frac{\varepsilon(s)}{u(s)}$$



# Algebra a Blocchi

## ■ Retroazione Unitaria



$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

- **u** = segnale di Riferimento/Comando
- **y** = variabile controllata
- **ε** = segnale di errore
- **b** = segnale di retroazione

### □ FdT in anello chiuso o Funzione di Sensitività Complementare

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = G_u^y(s)$$

### □ FdT di Anello

$$G_{OL}(s) = G(s)$$

### □ FdT di Sensitività (Errore)

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)} = G_u^\varepsilon(s)$$

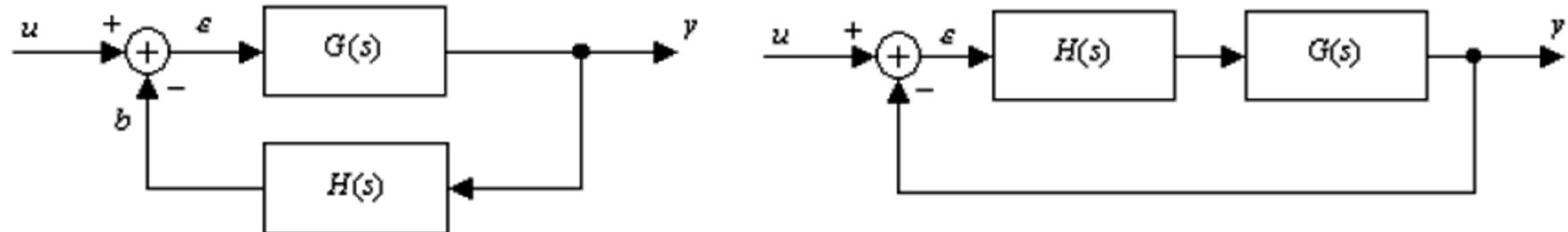
### □ Vincolo Algebrico

$$S(s) + T(s) = \frac{1}{1 + G(s)} + \frac{G(s)}{1 + G(s)} = 1$$



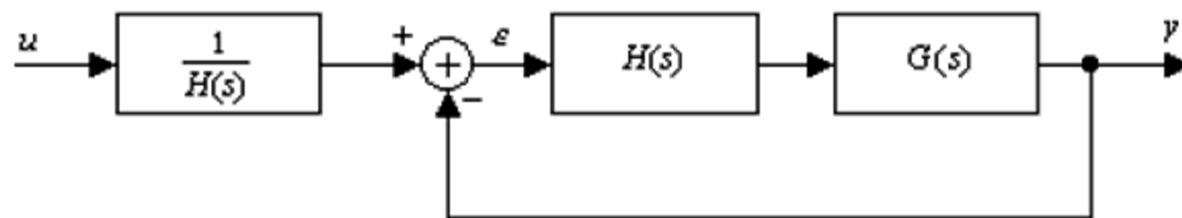
# Algebra a Blocchi

- Relazione tra retroazione non unitaria e retroazione unitaria



$$G_{CL}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$G_{CL}(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



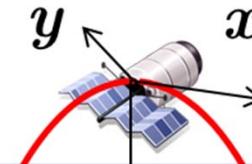
$$G_{CL}(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{H(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



# Algebra a Blocchi

## □ Moto di Assetto di un Satellite

L'asse  $z$  è rivolto verso la Terra mentre il moto orbitale avviene lungo l'asse  $x$ : in questo esempio si trascura il moto orbitale e si esamina l'assetto del satellite relativamente alla rotazione in beccheggio (cioè in  $y$ ). Il satellite risulti sempre orientato nella maniera corretta (cioè con l'asse  $z$  rivolto verso le antenne a terra).

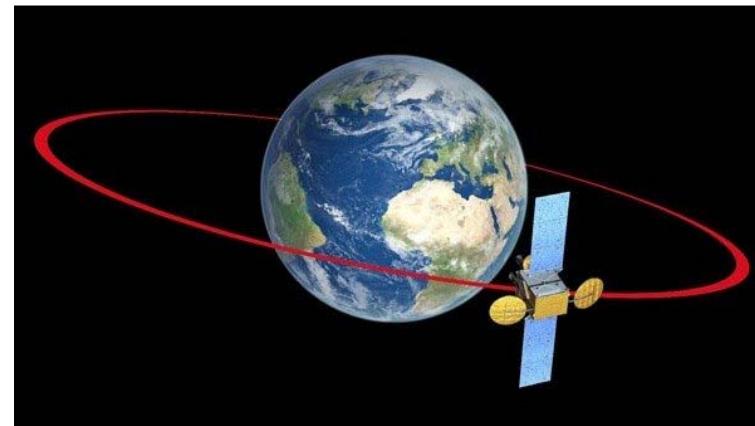


$$m\dot{\mathbf{v}} = \sum_i F_i; \dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

- Distanza
- Azimut
- Elevazione

$$\begin{cases} \ddot{r} + 3\omega_0^2 r + 2\omega_0 r_0 \dot{\theta} = 0 \\ \ddot{\theta} - \frac{2\omega_0}{r_0} \dot{r} = 0 \\ \ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0 \end{cases}$$

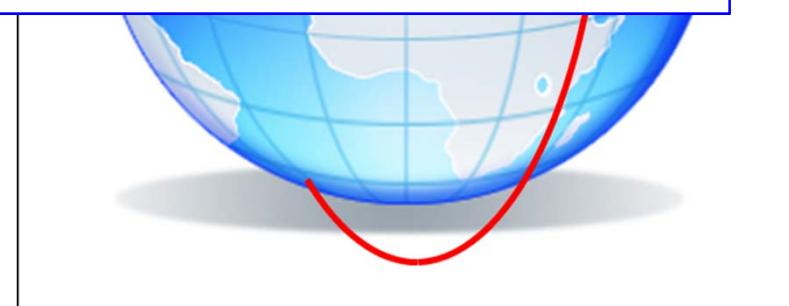
Terra



- coppie di correnti
- coppia magnetica
- coppia gravitazionale
- coppie dovute agli urti

$$[I]\dot{\boldsymbol{\omega}} = \sum_i M_i; \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

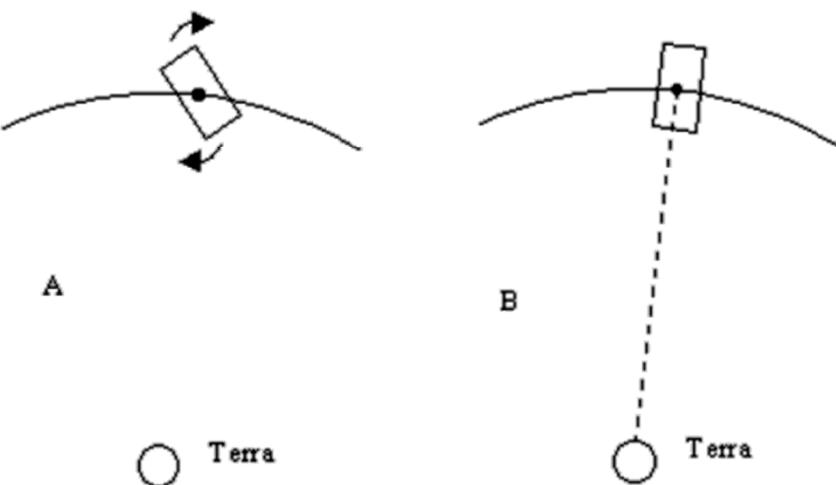
- Rollio
- Becheggio
- Imbardata





## Algebra a Blocchi

In questo caso si prendono in considerazione solo una coppia di controllo ( $M$ ) ed una ( $M_G$ ) gravitazionale; si noti che quest'ultima è dovuta all'effetto dell'attrazione gravitazionale quando il satellite non ha una distribuzione uniforme intorno al centro di massa:

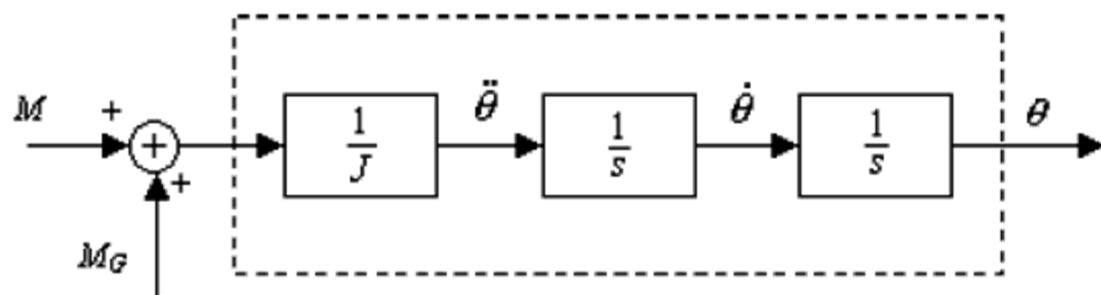


$$J \cdot \ddot{\theta} = M + M_G$$

$$M_G = C_g \sin(2\theta_T)$$

$$\theta_T = \theta_c + \theta$$

- $\theta_c$  = Angolo di riferimento
- $\theta$  = Angolo di assetto effettivo

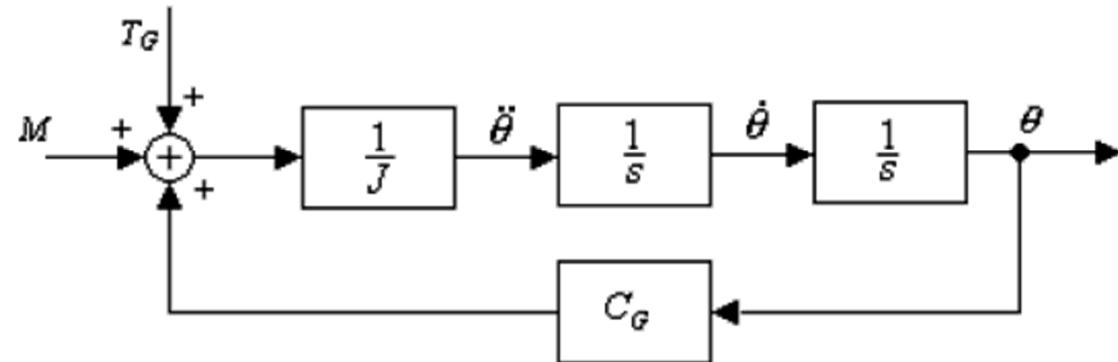




# Algebra a Blocchi

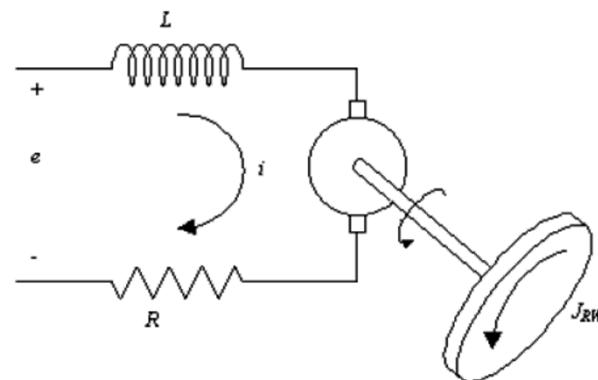
$$M_G = C_g \sin(2\theta_C + 2\theta) = C_g [\sin(2\theta_C) \cos(2\theta) + \cos(2\theta_C) \sin(2\theta)]$$

$$M_G = C_g \sin(2\theta_C) + [C_g \cos(2\theta_C)] \cdot 2\theta_C = T_G + C_G \theta$$



- **Coppia di controllo ( $M$ )**

- ad elementi continui con parti rotanti:
  - piatti inerziali
  - giroscopio
  - ruote inerziali
- ad elementi discontinui:
  - razzetti d'assetto



**Motore in Continua ad eccitazione di armatura. La tensione variabile cambia la velocità di rotazione dell'albero**



# Algebra a Blocchi

- Equazioni del circuito di armatura

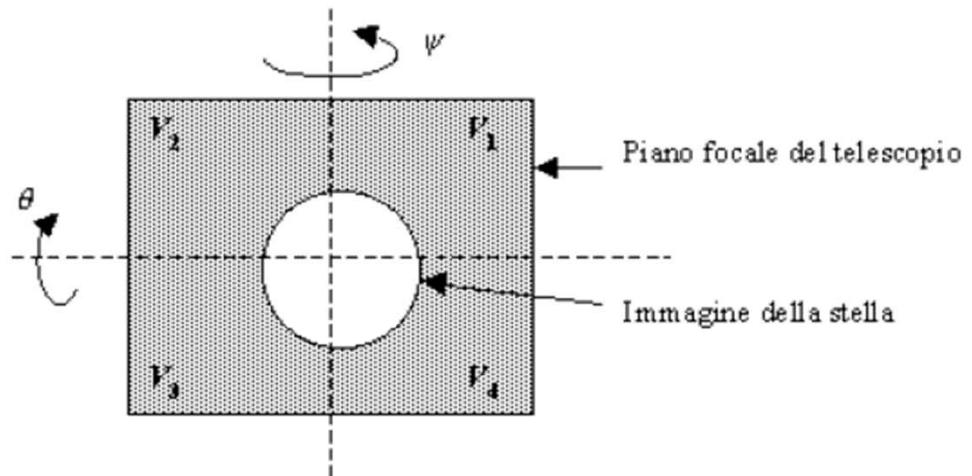
$$e = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + e_b$$

$$I(s) = \frac{E(s) - E_b(s)}{R + L \cdot s}$$

- Sistema sensori

L'insieme degli elementi di misura

- piattaforme inerziali
- sensori giroscopici
- sensori stellari
- sensori d'orizzonte
- sistemi GPS

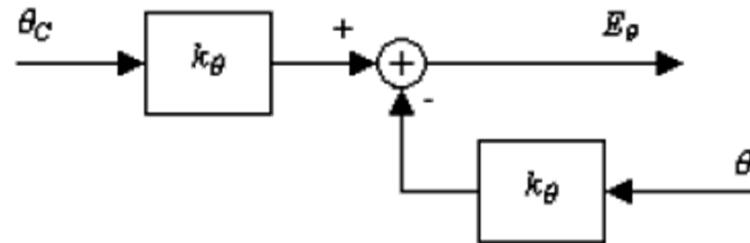


I quattro pannelli riescono a generare da una variazione di intensità luminosa una variazione di potenziale; nel caso in esame, prendendo in considerazione solo la rotazione  $\theta$

$$k_\theta(\theta_c - \theta) = (V_3 + V_4) - (V_1 + V_2) \Delta E_\theta$$



# Algebra a Blocchi



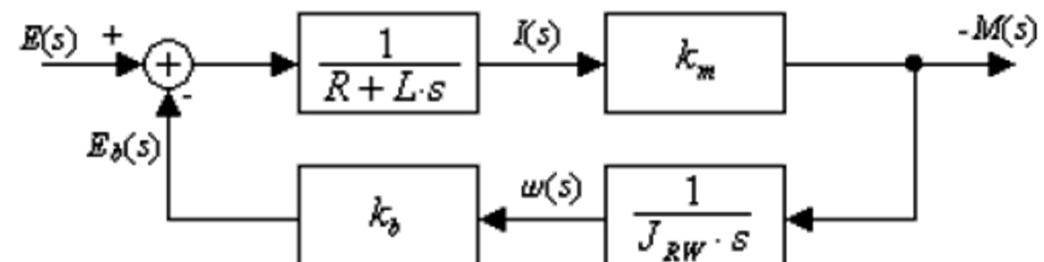
- Motore in continua (a corrente di campo costante)

$$\begin{cases} -M = k_m i \\ J_{RW} \cdot \dot{\omega} = -M \end{cases}$$

$$I(s) = \frac{1}{R + L \cdot s} [E(s) - E_b(s)]$$

$$E_b(s) = k_b \cdot \omega(s)$$

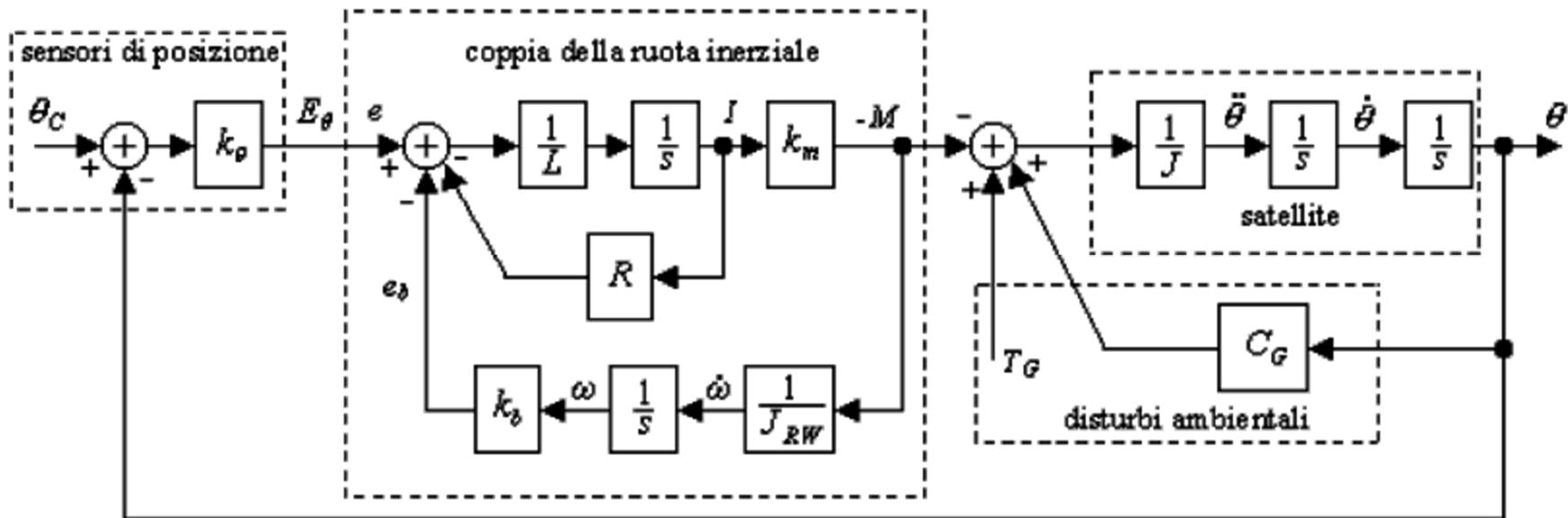
$$\omega(s) = \frac{1}{J_{RW} \cdot s} [-M(s)]$$



$$-M(s) = \frac{k_m \cdot J_{RW} \cdot s}{J_{RW} \cdot s \cdot (R + L \cdot s) + k_m k_b} E(s) = G_{ACT}(s) \cdot E(s)$$



# Algebra a Blocchi

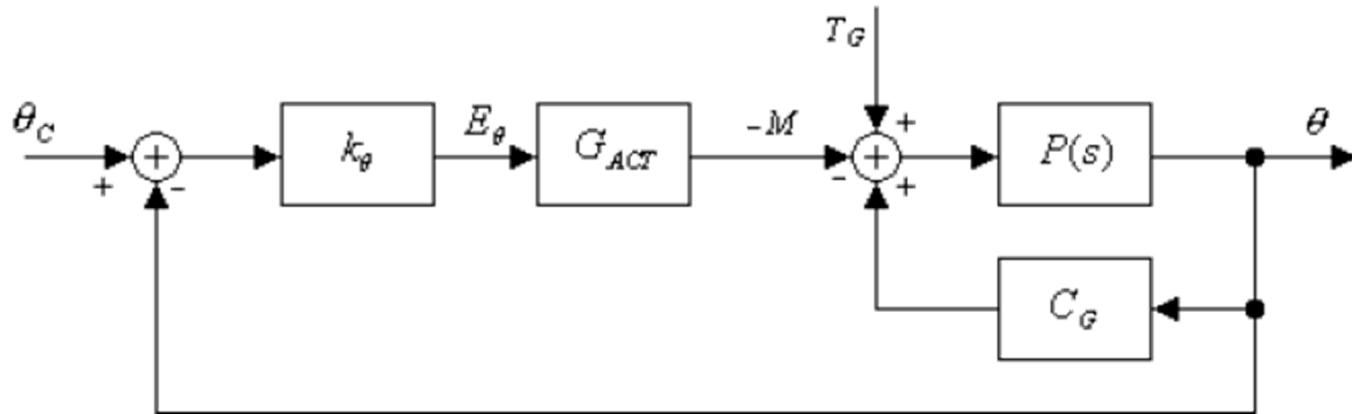


$$P(s) = \frac{1}{J \cdot s^2} \quad , \quad G_{ACT}(s) = \frac{k_m \cdot J_{RW} \cdot s}{J_{RW} \cdot s \cdot (R + L \cdot s) + k_m k_b}$$

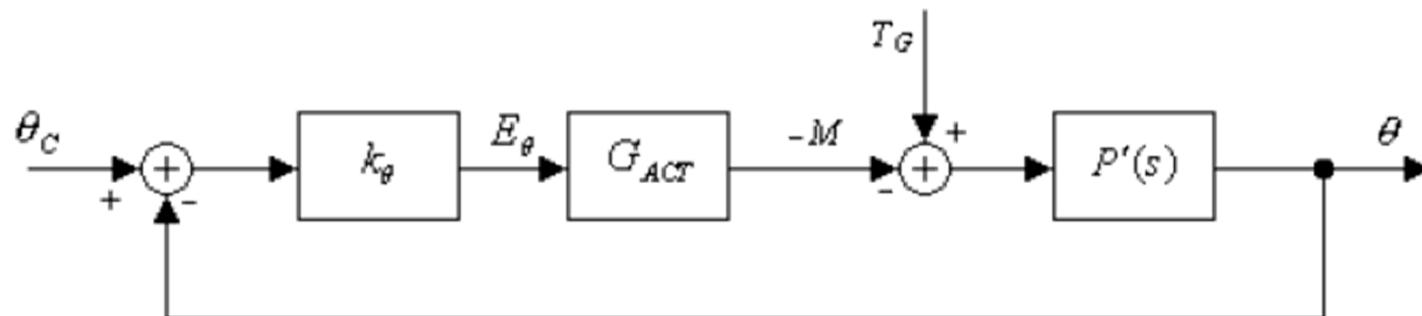
□ Riduzione del Diagramma completo →



# Algebra a Blocchi



$$P'(s) = \frac{P(s)}{1 - C_G P(s)} = \frac{1}{J \cdot s^2 - C_G}$$

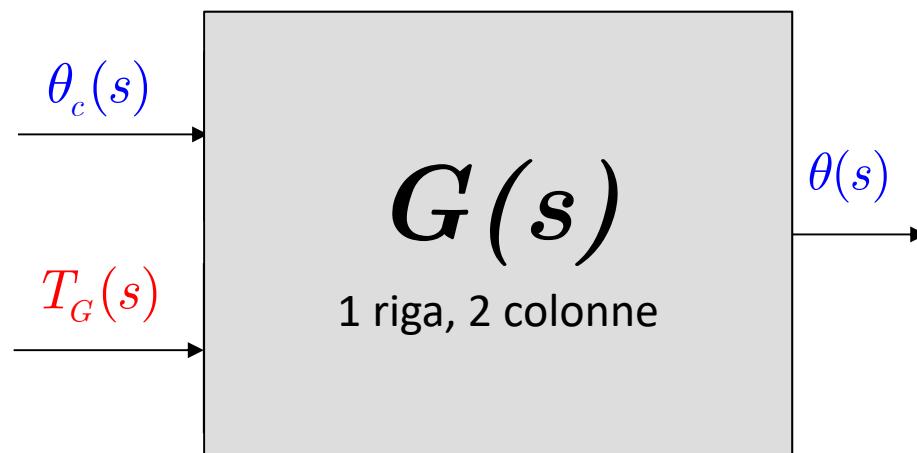




# Algebra a Blocchi

$$\theta(s) = \frac{k_\theta G_{ACT}(s) P'(s)}{1 + k_\theta G_{ACT}(s) P'(s)} \theta_c(s) + \frac{P'(s)}{1 + k_\theta G_{ACT}(s) P'(s)} T_G(s)$$

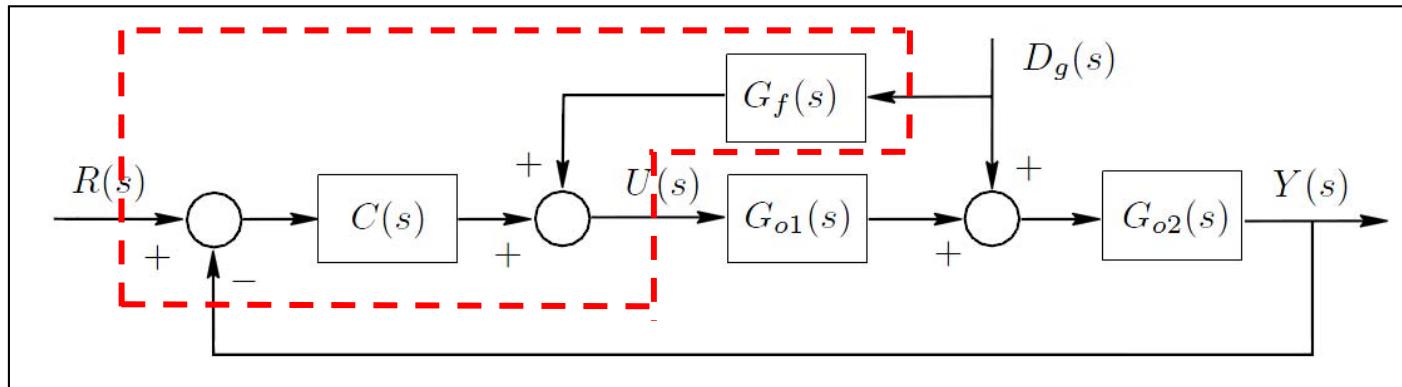
$$\theta(s) = G_1(s) \theta_c(s) + G_2(s) T_G(s)$$





# Algebra a Blocchi

## □ Struttura di controllo con feedforward e feedback per attenuazione di disturbi



- **Obiettivo:** far sì che l'uscita segua il riferimento in presenza di un disturbo esterno
- **Sistema descritto dalle FdT:**  $G_{o1}(s)$  e  $G_{o2}(s)$
- **Controllore descritto dalle FdT:**  $G_f(s)$  e  $C(s)$

$$Y(s) = G_{o2}(s) \left\langle D_g(s) + G_{o1}(s) \left\{ G_f(s)D_g(s) + C(s)[R(s) - Y(s)] \right\} \right\rangle$$

$$Y(s) = \frac{G_{o2}(1 + G_{o1}G_f)}{1 + G_{o2}G_{o1}C} D_g(s) + \frac{G_{o2}G_{o1}C}{1 + G_{o2}G_{o1}C} R(s)$$

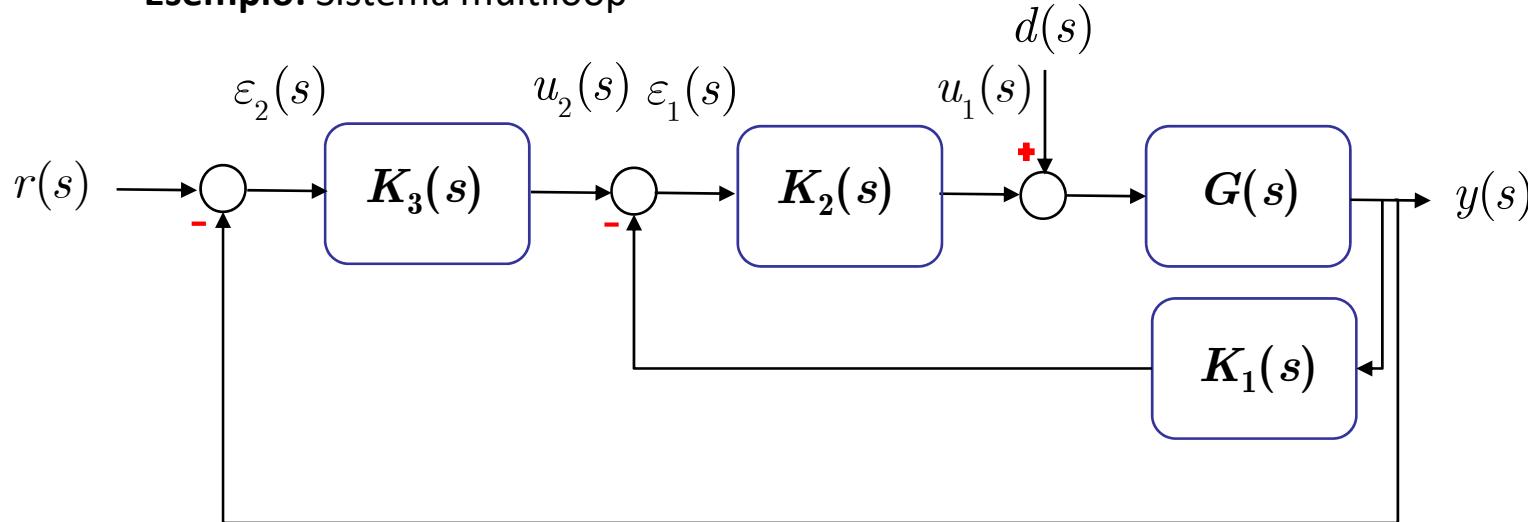
□ Che succede se poniamo:

$$G_f(s) = -\frac{1}{G_{o1}(s)}$$



# Algebra a Blocchi

- **Esempio:** Sistema multiloop



- Il sistema ha 2 ingressi ed una uscita
- Il sistema è formato da due anelli in retroazione: il primo è l'anello interno con retroazione non unitaria, mentre l'anello esterno ha retroazione unitaria.
- In generale, l'anello interno opera a frequenza più elevata (struttura tipica è quello di controllo e guida di un sistema di trasporto)

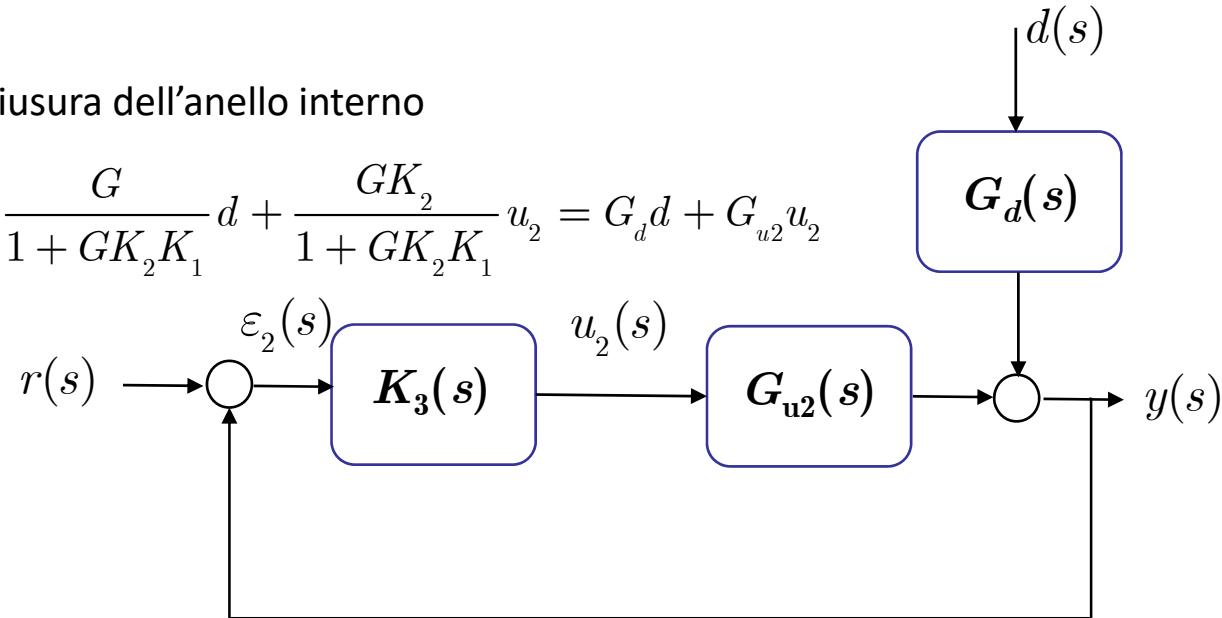
$$\begin{cases} y = G[d + u_1] \\ u_1 = K_2 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 = u_2 - K_1 y \\ u_2 = K_3 \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 = r - y \end{cases}$$



# Algebra a Blocchi

- Chiusura dell'anello interno

$$y = \frac{G}{1 + GK_2K_1}d + \frac{GK_2}{1 + GK_2K_1}u_2 = G_d d + G_{u2}u_2$$



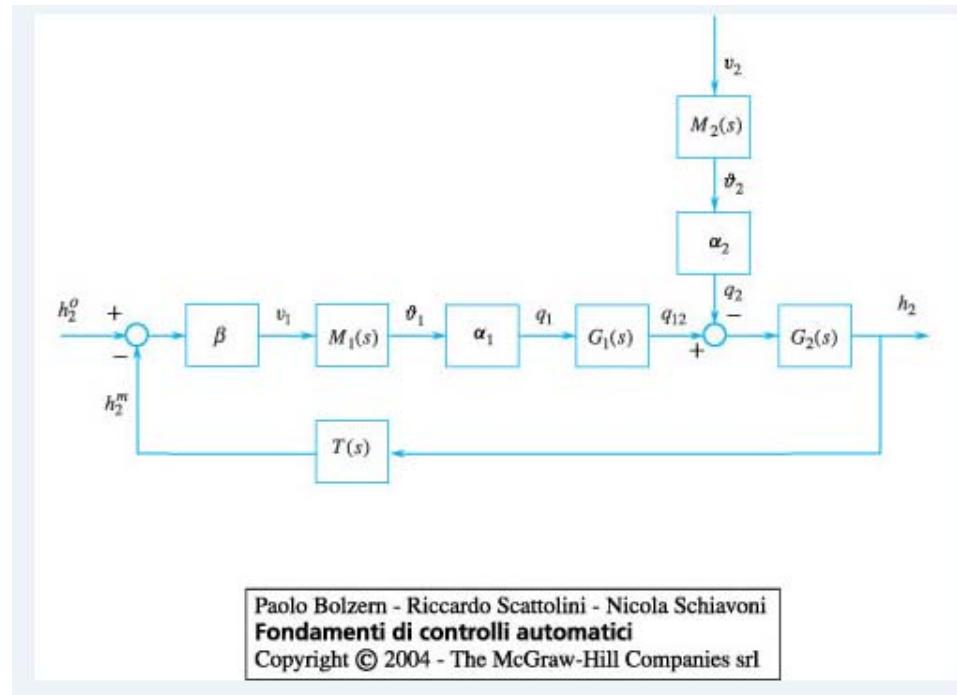
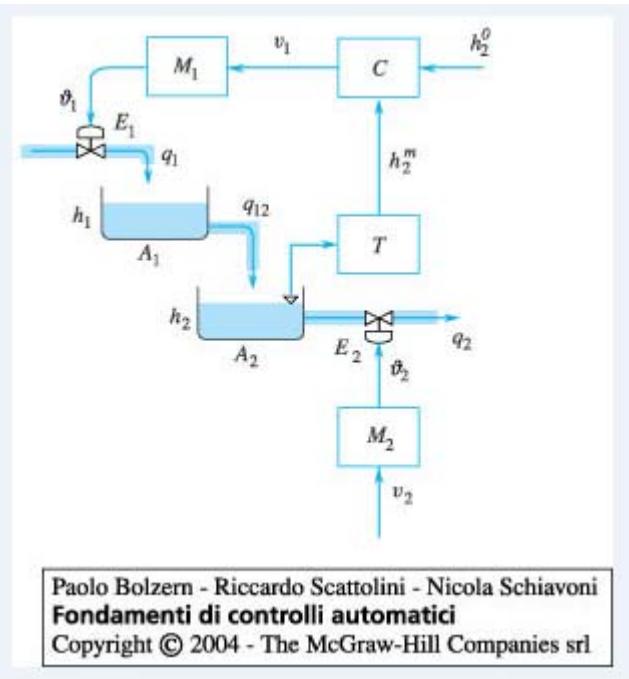
- Chiusura dell'anello esterno

$$y = \frac{G_d}{1 + G_{u2}K_3}d + \frac{G_{u2}K_3}{1 + G_{u2}K_3}r$$



# Algebra a Blocchi

- Esercizi: Capitolo 6 (paragrafi 6.1, 6.2, 6.3), libro di testo



- Il sistema a sinistra mostra un sistema a doppio serbatoio in ciclo chiuso con il controllore  $C(s)$  che provvede a mantenere il livello del secondo serbatoio costante ad un valore desiderato:

$$h_2 = h_2^0$$

- Derivare il diagramma a blocchi e la FdT in ciclo chiuso del sistema



# Algebra a Blocchi



[CTMS TUTORIAL](#)



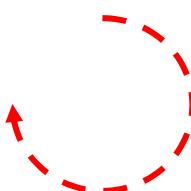
# Status sui Sistemi Lineari Invarianti

- I sistemi dinamici studiati nel corso sono descritti da modelli lineari e tempo invarianti



$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = \frac{d^n u}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 u; \textcolor{red}{m \leq n}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) \in \Re^n \\ \mathbf{u}(t) \in \Re^m \\ \mathbf{y}(t) \in \Re^p \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) = C e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau \end{cases}$$

$$G(s) = \begin{cases} \frac{y(s)}{u(s)} \\ \dots \end{cases}$$



# Status sui Sistemi Lineari Invarianti

## □ Relazione

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = \frac{d^n u}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 u; m \leq n$$



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) \in \Re^n \\ \mathbf{u}(t) \in \Re^m \\ \mathbf{y}(t) \in \Re^p \end{cases}$$

$$\xrightarrow{} \begin{aligned} \mathbf{y}(s) &= G(s)\mathbf{u}(s) \\ G_{p \times m}(s) &= [C(sI - A)^{-1}B + D] = \\ &= \frac{C \cdot \text{adj}(sI - A) \cdot B + \det(sI - A) \cdot D}{\det(sI - A)} \end{aligned}$$

- Stabilità → Funzione degli Autovalori di A
- Controllabilità/Raggiungibilità → Funzione della coppia (A, B)
- Osservabilità → Funzione della coppia (A, C)



## Status sui Sistemi Lineari Invarianti

- Sistema SISO strettamente proprio (per semplicità numerica)

$$\mathbf{y}(s) = G(s)\mathbf{u}(s)$$

$$G(s) = [C(sI - A)^{-1}B] = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$D(s) = \det(sI - A)$$

- Se e solo se il sistema è completamente controllabile ed osservabile
  - In tal caso stabilità interna ed esterna coincidono
  - ***G(s) contiene soltanto la parte controllabile ed osservabile del sistema (scomposizione di Kalman)***
  - Perdita di **controllabilità** implica una cancellazione **zero – polo** in un diagramma a blocchi
  - Perdita di **osservabilità** implica una cancellazione **polo - zero** in un diagramma a blocchi
- $$D(s) \neq \det(sI - A)$$
- Radici di  $D(s) = 0 \subset \text{eig}(A)$  stabilità interna ed esterna non coincidono



## Stabilità mediante FdT

□ Dato il sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \mathbf{y}(t) = Ce^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \end{cases}$$

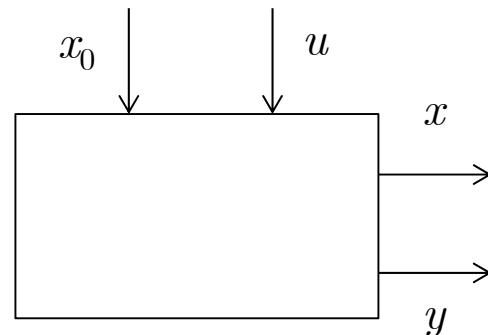
- Si possono definire quattro diverse **funzioni di trasferimento di segnale**:

Stabilità Interna  $G_{x_0}^x(s) = (sI - A)^{-1} = H(s)$

Osservabilità  $G_{x_0}^y(s) = C(sI - A)^{-1}$

Controllabilità  $G_u^x(s) = (sI - A)^{-1}B$

$$G_u^y(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$



- Per i sistemi autonomi (con ingresso nullo) l'analisi della stabilità interna richiede la valutazione di

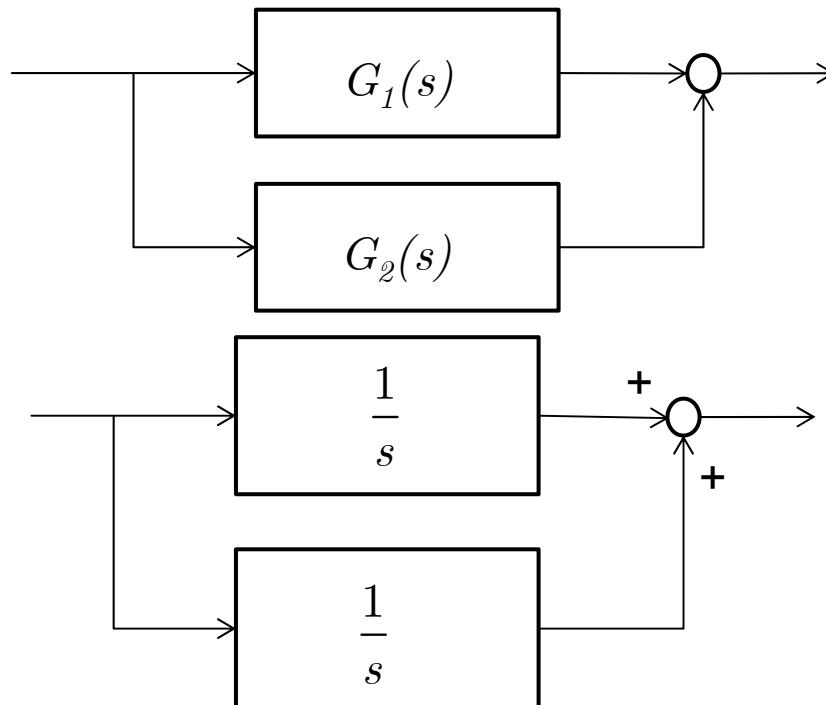
$$G_{x_0}^x(s) = (sI - A)^{-1} = H(s) \quad h_{ij}(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$



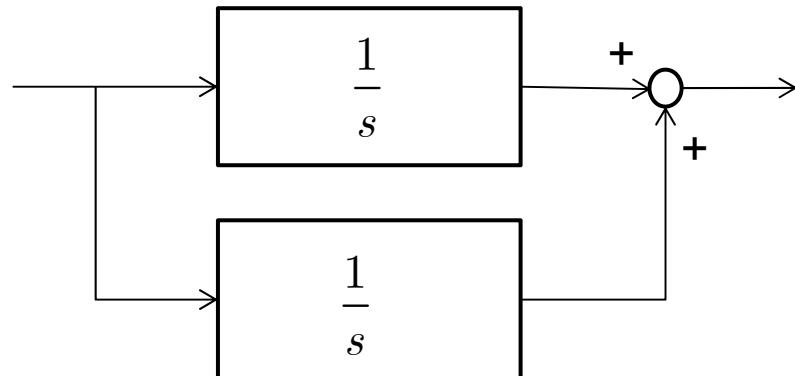
## Stabilità mediante FdT

- La perdita di componenti dinamiche può avvenire anche senza una cancellazione, ma dalla struttura ‘in parallelo’ di un diagramma a blocchi.

$$G(s) = G_1(s) \pm G_2(s) = \frac{N_1(s)D_2(s) \pm N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$



- I denominatori devono essere primi tra loro



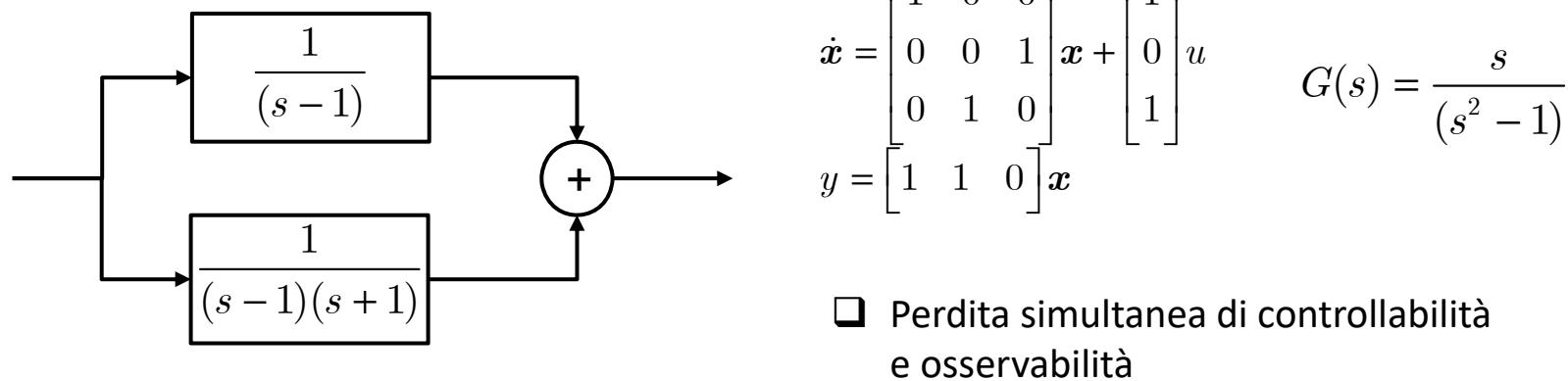
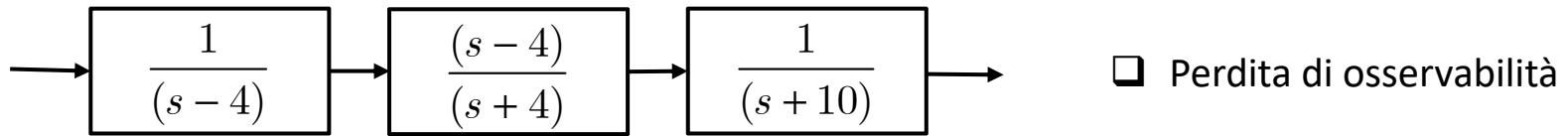
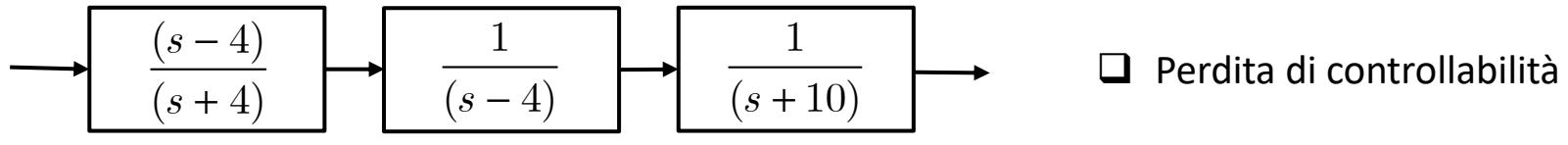
$$G(s) = \frac{2}{s}$$

Uno dei due integratori  
Non appare nella FdT

$$y(s) = [1 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{s}$$



# Status sui Sistemi Lineari Invarianti

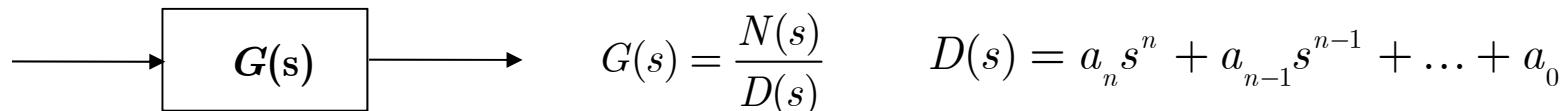




## Criterio di Routh (1876) – Hurwitz (1895)

$$G(s) = \frac{10(s^3 + 2.7s^2 + 4s + 12)}{s^5 + 12s^4 + 0.4s^2 + 9.2s - 14}$$

- Il criterio di stabilità di Routh - Hurwitz è una tecnica per il calcolo delle proprietà delle radici di un polinomio e che può servire per lo studio della stabilità di sistemi lineari Tempo Invarianti descritti da FdT senza dover calcolare i poli del sistema.



- Il criterio si basa su risultati precedenti dovuti a Cartesio riguardanti il segno delle radici di polinomi del tipo  $D(s)$ . Nel nostro caso, vi è equivalenza tra stabilità (locazione dei poli del sistema) e locazione delle radici di  $D(s)$ , nel semipiano di parte reale negativa.

- Condizione necessaria**

Affinché il sistema descritto da una FdT  $G(s)$  sia asintoticamente stabile deve valere:

1)  $a_i \neq 0 \quad i = 0, 1, \dots, n$

2) Tutti i coefficienti  $a_i$  devono avere lo stesso segno (positivo per convenzione)

Routh, E. J. [1877] *A treatise on the stability of a given state of motion*, Cambridge University,  
Adam's Prize Essay.



## Criterio di Routh - Hurwitz

### ▪ Condizione Necessaria e Sufficiente

Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se:

- 1) Rispetta la condizione necessaria
- 2) La Tabella di Routh generata da  $D(s)$  è ben definita e tutti gli elementi della Prima colonna (array) sono positivi.

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + \dots + a_0$$

|           |           |           |           |         |   |
|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|---|
| $s^n$     | $a_n$     | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | $\dots$ | 0 |
| $s^{n-1}$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | $\dots$ | 0 |
| $s^{n-2}$ | $b_1$     | $b_2$     | $b_3$     | $\dots$ |   |
| $s^{n-3}$ | $c_1$     | $c_2$     | $c_3$     | $\dots$ |   |
| $\vdots$  | $\vdots$  | $\vdots$  |           |         |   |
| $s^0$     |           |           |           |         |   |

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}},$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}},$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1},$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1},$$



## Criterio di Routh - Hurwitz

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^4 + 6s^3 + 8s^2 + s + 1}$$

- Sistema Asintoticamente Stabile

|   |                 |   |    |      |
|---|-----------------|---|----|------|
| 4 | 1               | 8 | 1  | 0    |
| 3 | 6               |   | 1  | 0 .. |
| 2 | $\frac{47}{6}$  |   | 1  | 0 .. |
| 1 | $\frac{11}{47}$ |   | 0  | ..   |
| 0 | $1 = a_0$       | 0 | .. |      |

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s + 4}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8}$$

- Sistema asintoticamente stabile;  
 $D(s) = (s + 2)^3$  i tre poli del sistema sono uguali a  $-2$ .

|       |        |    |   |
|-------|--------|----|---|
| $s^3$ | 1      | 12 | 0 |
| $s^2$ | 6      | 8  | 0 |
| $s^1$ | $32/3$ | 0  |   |
| $s^0$ | 8      |    |   |



## Criterio di Routh - Hurwitz

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{10}{s^3 - s^2 + s - 6}$$

- Si nota subito che il sistema è instabile (i coefficienti  $a_i$  non hanno tutti lo stesso segno).

$$s_1 = 2, \quad s_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j\sqrt{\frac{3}{2}}$$

- Applicazione del criterio di Routh:

|       |    |    |   |
|-------|----|----|---|
| $s^3$ | 1  | 1  | 0 |
| $s^2$ | -1 | -6 | 0 |
| $s^1$ | -5 | 0  |   |
| $s^0$ | -6 |    |   |

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2 + 1}{s^3 + s^2 + 2s + 8}$$

- il sistema è instabile, essendo presenti due cambiamenti di segno

$$s_1 = -2, \quad s_{2,3} = \frac{1}{2} \pm j\sqrt{\frac{15}{2}}$$

|       |    |   |
|-------|----|---|
| $s^3$ | 1  | 2 |
| $s^2$ | 1  | 8 |
| $s^1$ | -6 | 0 |
| $s^0$ | 8  |   |



## Criterio di Routh - Hurwitz

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^3 + 1.7s^2 + 0.4s + 1.7}$$

| $s$   |      |     |
|-------|------|-----|
| $s^3$ | 1    | 0.4 |
| $s^2$ | 1.7  | 1.7 |
| $s^1$ | -0.6 | 0   |
| $s^0$ | 1.7  |     |

- il sistema è instabile, essendo presenti due cambiamenti di segno

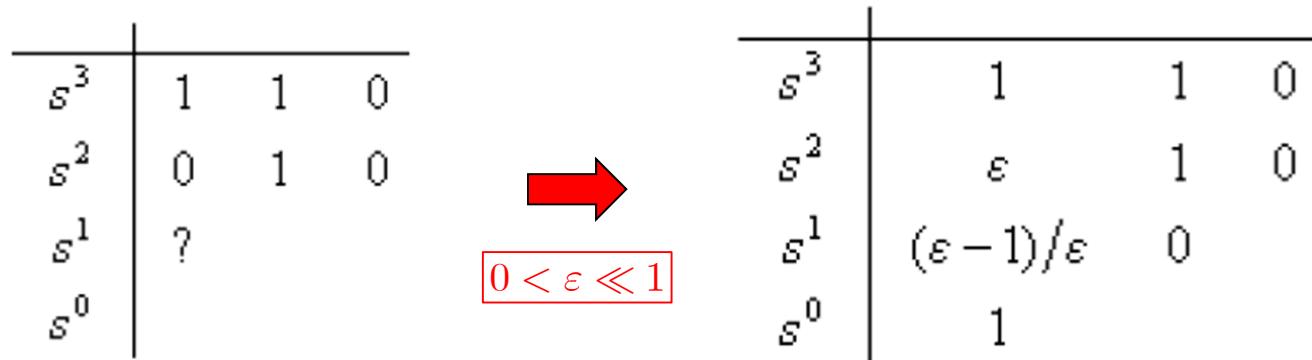
```
>> den=[1 1.7 0.4 1.7];
>> roots(den)
ans =
-1.9441 + 0.0000i
0.1220 + 0.9271i
0.1220 - 0.9271i
>> [ra,s]=routh(den,eps)
ra =
[ 1,    2/5]
[ 17/10, 17/10]
[ -3/5,    0]
[ 17/10,    0]
s =
```



## Criterio di Routh - Hurwitz

- **Proprietà Generale:** il numero di radici a parte reale positiva, coincide con il numero di variazioni di segno nella prima colonna della tabella di Routh.
- **Caso Particolare #1:** Un elemento della prima colonna è nullo. Esso viene sostituito con un  $\varepsilon$  positivo arbitrariamente piccolo e la tabella completata.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{4}{s^3 + s + 1}$$



|       |   |   |   |
|-------|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | 1 | 0 |
| $s^2$ | 0 | 1 | 0 |
| $s^1$ | ? |   |   |
| $s^0$ |   |   |   |

$0 < \varepsilon \ll 1$

|       |                                 |   |   |
|-------|---------------------------------|---|---|
| $s^3$ | 1                               | 1 | 0 |
| $s^2$ | $\varepsilon$                   | 1 | 0 |
| $s^1$ | $(\varepsilon - 1)/\varepsilon$ | 0 |   |
| $s^0$ | 1                               |   |   |

- Si hanno 2 variazioni di segno. Il sistema è instabile, con due poli di parte reale positiva.



## Criterio di Routh - Hurwitz

- Caso Particolare #2 : un'intera riga della tabella è formata da zeri.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2 + 16s + 10}{s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50}$$

|       |   |    |     |   |
|-------|---|----|-----|---|
| $s^5$ | 1 | 24 | -25 | 0 |
| $s^4$ | 2 | 48 | -50 | 0 |
| $s^3$ | 0 | 0  |     |   |
| $s^2$ | ? |    |     |   |
| $s^1$ |   |    |     |   |
| $s^0$ |   |    |     |   |

$$Y(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50 \Rightarrow \dot{Y}(s) = 8s^3 + 96s$$

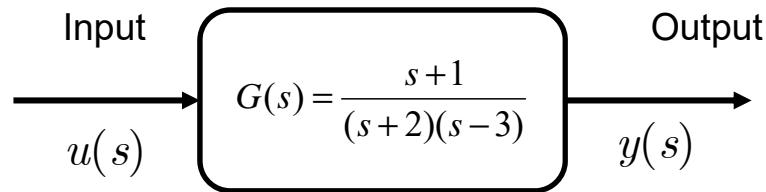
|       |       |     |     |   |
|-------|-------|-----|-----|---|
| $s^5$ | 1     | 24  | -25 | 0 |
| $s^4$ | 2     | 48  | -50 | 0 |
| $s^3$ | 8     | 96  | 0   |   |
| $s^2$ | 24    | -50 |     |   |
| $s^1$ | 112,7 | 0   |     |   |
| $s^0$ | -50   |     |     |   |

- Nella tabella così ottenuta si rileva un cambiamento di segno da cui si deduce che c'è una radice a parte reale positiva ed il Sistema è Instabile



# Criterio di Routh - Hurwitz

## □ Criterio di R – H Come tecnica di Sintesi di Controllo

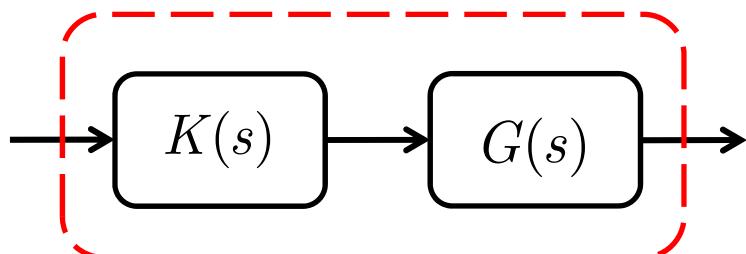


- Il sistema è instabile per qualsiasi ingresso e condizioni iniziali

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{+3t} + \dots$$


□ **Problema di Controllo:** Stabilizzare il Sistema (Tutti i poli devono essere di parte reale strettamente  $< 0$ )

□ **Controllo ad Anello Aperto:** Quale che sia la forma del controllore  $K(s)$ , essa deve eseguire una cancellazione Zero – Polo per eliminare  $(s-3)$ .



$$K(s) = k(s-3) \Rightarrow G'(s) = K(s)G(s) = k \frac{(s+1)}{(s+2)}$$

- A. **Problema 1:** Chi garantisce che la cancellazione possa essere eseguita in pratica? (Problema tecnologico)



## Criterio di Routh - Hurwitz

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-3)} \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u & \lambda_i(A) = -2, +3 \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) = C e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau \end{cases}$$

$$e^{At} = M^{-1} e^{\Lambda t} M = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4e^{-2t} - 0.6e^{3t} & 0.4e^{-2t} - 0.4e^{3t} \\ 0.6e^{-2t} - 0.6e^{3t} & 0.6e^{-2t} + 0.4e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\forall \mathbf{x}_0 \neq 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$$

$$\forall u(t) \neq 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$$

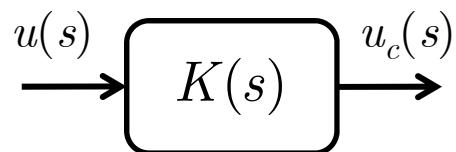




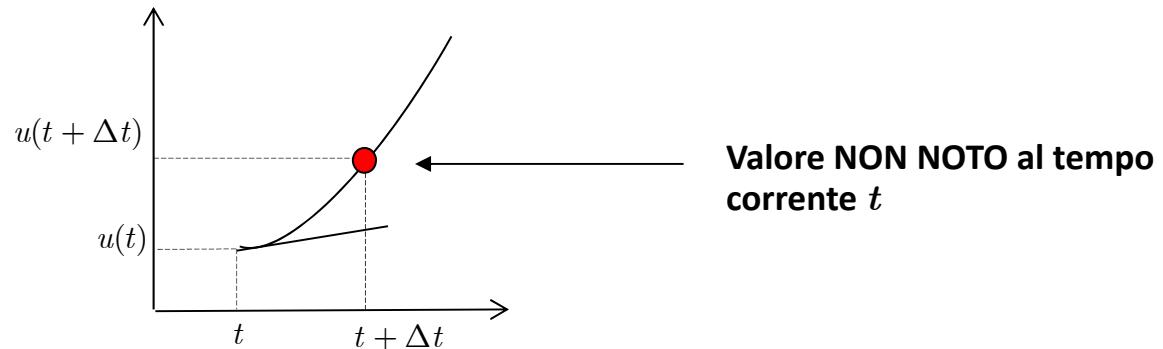
## Criterio di Routh - Hurwitz

### B. Problema 2: Realizzabilità del controllore

$$K(s) = k(s - 3) \quad \Rightarrow \quad G'(s) = K(s)G(s) = k \frac{s + 1}{(s + 2)} \quad \text{Controllore non causale}$$



$$u_c(t) = \frac{du(t)}{dt} - 3u(t) \quad \rightarrow \quad \frac{du(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}$$



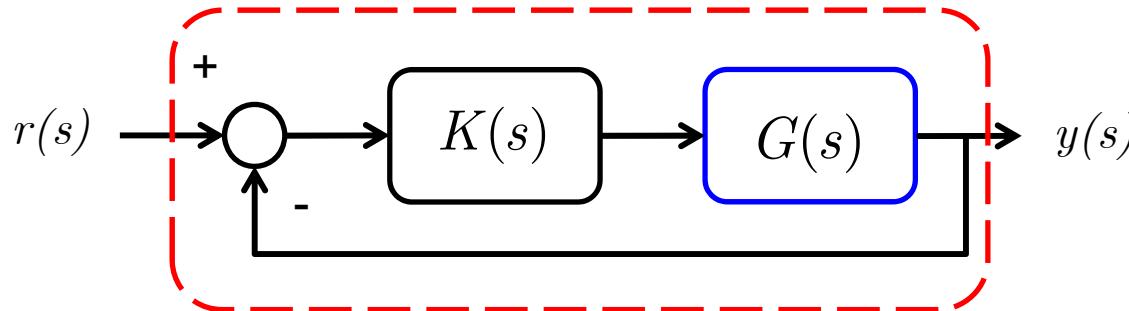
$$K(s) = \frac{s - 3}{s + P} \quad \Rightarrow \quad G'(s) = K(s)G(s) = \frac{(s + 1)}{(s + 2)(s + P = 100)} \quad \text{Controllore causale}$$

- **Nota:** la locazione appropriata del polo sarà descritta in seguito. La procedura di sintesi richiede:
  1. Scelta appropriata degli zeri
  2. Rendere in controllore causale



## Criterio di Routh - Hurwitz

- **Controllo in Ciclo Chiuso:** Stabilizzazione mediante retroazione unitaria.



- **Scelta di Progetto:**

$$K(s) = k$$

$$G^{CL}(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)} = \frac{k(s+1)}{s^2 + (k-1)s + (k-6)}$$

|       |           |  |
|-------|-----------|--|
| $s^2$ | 1 $(k-6)$ |  |
| $s^1$ | $(k-1)$ 0 |  |
| $s^0$ | $(k-6)$   |  |

- Ponendo  $k > 6$  il sistema così ottenuto risulta asintoticamente stabile; si noti che ponendo  $k = 6$  il sistema è solo stabile, dato che i poli risultano essere rispettivamente  $s_1 = 0$  ed  $s_2 = -5$

- La risposta al gradino unitario del sistema originale vale:

$$y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s(s+2)(s-3)}, \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{6} - \frac{1}{10} e^{-2t} + \frac{4}{15} e^{3t}$$



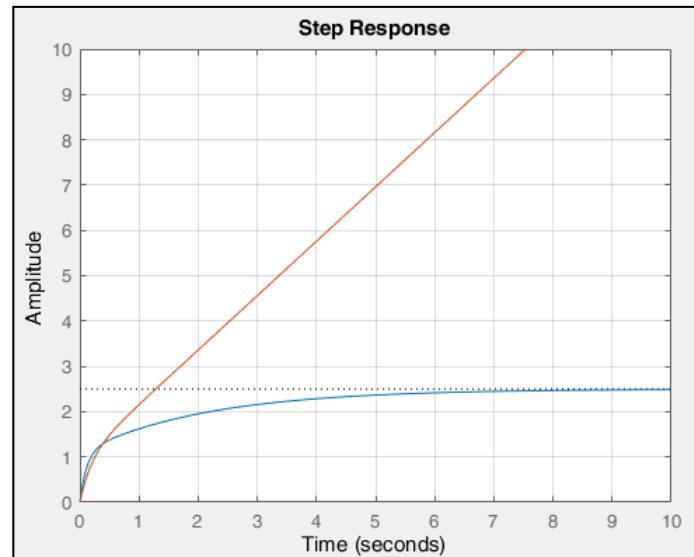
## Criterio di Routh - Hurwitz

$$K(s) = 6$$

$$\frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)} = \frac{k(s+1)}{s^2 + 5s}, u(t) = 1 \Rightarrow y(s) = A_1 + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3}{(s+5)}, \Rightarrow y(t) = A_1 + A_2 t + A_3 e^{-5t}$$

$$K(s) = 10$$

$$\frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)} = \frac{k(s+1)}{s^2 + 9s + 4}, u(t) = 1 \Rightarrow y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s + 8.5311)} + \frac{A_3}{(s + 0.4689)},$$
$$\Rightarrow y(t) = A_1 + A_2 e^{-0.4689t} + A_3 e^{-8.5311t}$$



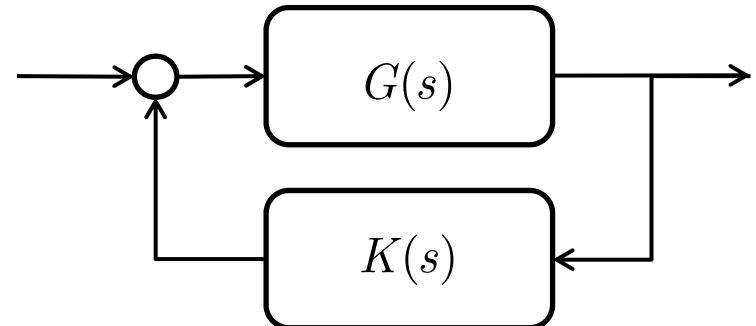


## Criterio di Routh - Hurwitz

□ **Controllo in ciclo chiuso:** Stabilizzazione con controllore nella catena di retroazione

$$y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} u(s) = \frac{(s+1)}{s^2 + (k-1)s + (k-6)} u(s)$$

$$K(s) = 6$$



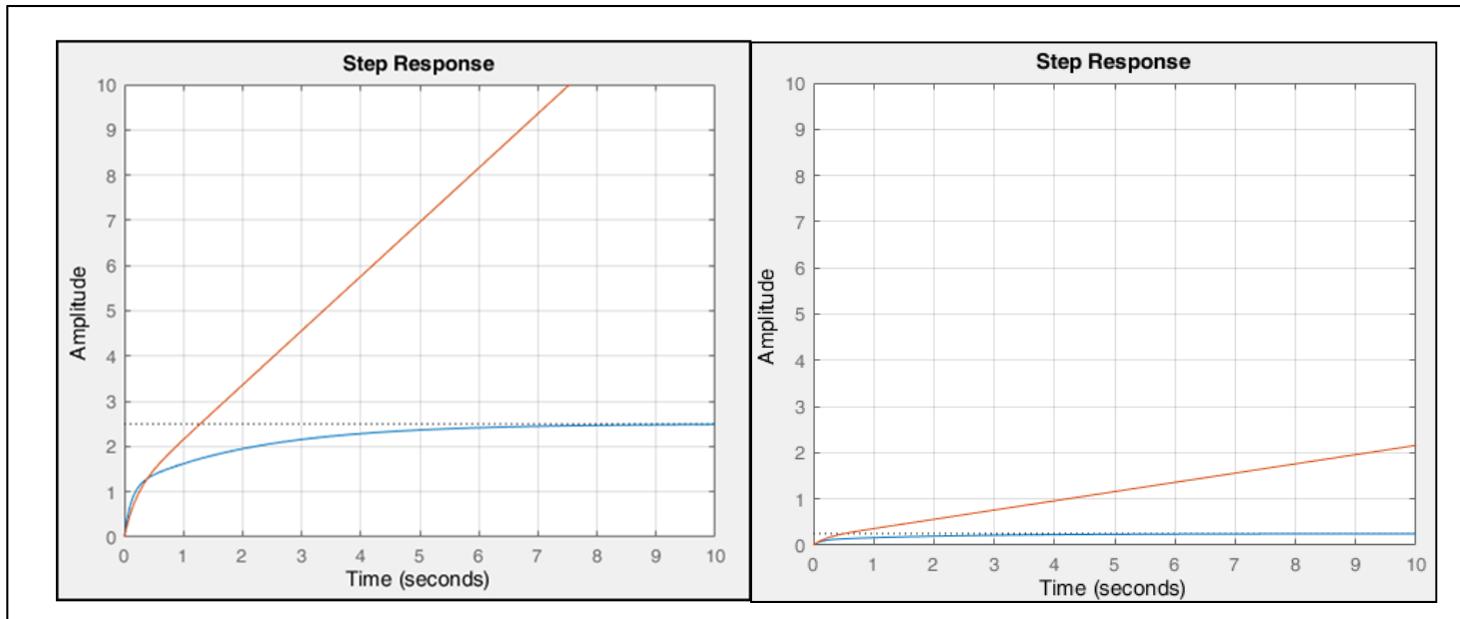
$$\frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{(s+1)}{s^2 + 5s}, u(t) = 1 \Rightarrow y(s) = A_1 + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3}{(s+5)}, \Rightarrow y(t) = A_1 + A_2 t + A_3 e^{-5t}$$

$$K(s) = 10$$

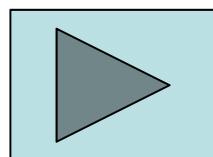
$$\frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{(s+1)}{s^2 + 9s + 4}, u(t) = 1 \Rightarrow y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s + 8.5311)} + \frac{A_3}{(s + 0.4689)},$$
$$\Rightarrow y(t) = A_1 + A_2 e^{-0.4689t} + A_3 e^{-8.5311t}$$



# Criterio di Routh - Hurwitz



**Esercizio:** risolvere lo stesso esercizio se l'ingresso è un impulso di Dirac.





## Criterio di Routh - Hurwitz

### □ Stabilizzazione in ciclo chiuso, Esempio #2

$$G(s) = \frac{s-1}{s}, u(t) = 1 \Rightarrow y(s) = \frac{s-1}{s^2}, \Rightarrow y(t) = 1 - t$$

A. Retroazione non unitaria,  $K(s) = k$

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} u(s) \\ \Rightarrow y(s) &= \frac{s-1}{(1+k)s-k} \cdot \frac{1}{s} \end{aligned}$$

$$(1+k)s - k \Rightarrow -1 < k < 0$$

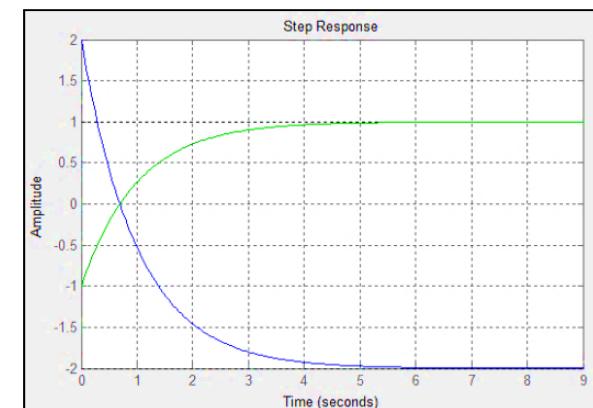
B. Retroazione unitaria,  $K(s) = k$

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} u(s) \\ \Rightarrow y(s) &= \frac{k(s-1)}{(1+k)s-k} \cdot \frac{1}{s} \end{aligned}$$

$$(1+k)s - k \Rightarrow -1 < k < 0$$

$$k = -0.5$$

$$\begin{array}{c} \frac{2(s-1)}{s+1} \\ \frac{-(s-1)}{s+1} \end{array}$$





## Criterio di Routh - Hurwitz



$$-\delta_E(t)$$

$$G_{\delta_E}^{\dot{\theta}}(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{\delta_E(s)} = 1.1569 \frac{s + 0.2929}{(s^2 + 0.7410s + 0.9272)}$$

$-0.3705 \pm 0.89j$  Poles

$-0.2969$  Zero

Gain = 1.1569

- L'andamento dell'angolo di beccheggio  $\theta(t)$  ad un comando a gradino in equilibratore  $\delta_E(t)$  tende all'infinito, all'aumentare del tempo.

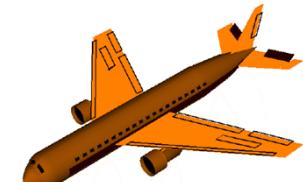
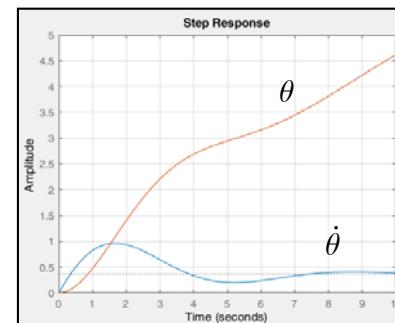
$$\theta(s) = 1.1569 \frac{s + 0.2929}{s(s^2 + 0.7410s + 0.9272)} \delta_E(s) = 1.1569 \frac{s + 0.2929}{s(s^2 + 0.7410s + 0.9272)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\theta(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{-0.3705t} \sin(0.8597t + C_4)$$

- **Problema:** progettare un controllore in feedback, tale che l'angolo di beccheggio tenda ad un valore costante, ovvero  $\theta_{DES}(t)$

### □ Strumenti disponibili:

- Retroazione
- Criterio di Routh
- Teorema del Valore Finale





## Criterio di Routh - Hurwitz

$$G_{\delta_E}^{\dot{\theta}}(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{\delta_E(s)} = 1.1569 \frac{0.2929}{0.9272} \frac{\frac{s}{0.2929} + 1}{(\frac{s^2}{0.9272} + \frac{0.7410}{0.9272}s + 1)} =$$

$$G_{\delta_E}^{\dot{\theta}}(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{\delta_E(s)} = 0.3655 \frac{3.4141s + 1}{(1.0785s^2 + 0.7992s + 1)}$$

$-0.3705 \pm 0.89j$  Poles

$-0.2969$  Zero

Static Gain = 0.3655

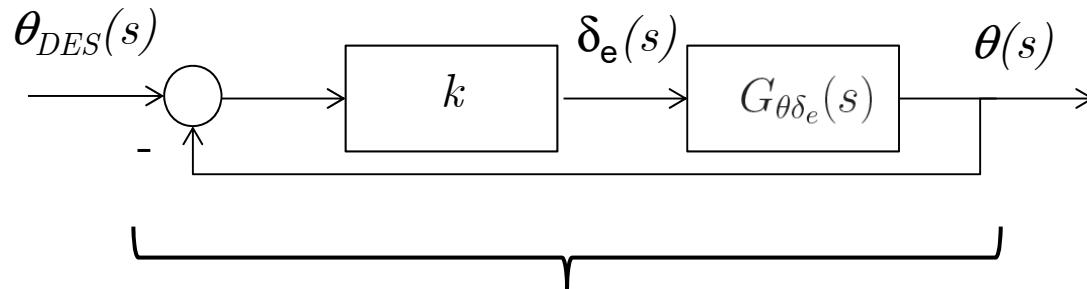


# Criterio di Routh - Hurwitz

**Requisiti:**

- Controllabilità
- Stabilità asintotica in ciclo chiuso

**Ipotesi di Lavoro:** Retroazione unitaria con un controllore costante  $K(s) = k > 0$



$$G^{CL}(s) = \left[ \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} \right]^{CL} = \frac{K(s)G_{\theta\delta_e}(s)}{1 + K(s)G_{\theta\delta_e}(s)} = \frac{1.1569ks + 0.3435k}{s^3 + 0.7410s^2 + (.9272 + 1.1569k)s + 0.3435k}$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & .9272 + 1.1569k & 0 \\ s^2 & .7410 & .3435k & \\ s^1 & .9278 + .6934k & 0 & \\ s^0 & .3435k & & \end{array}$$

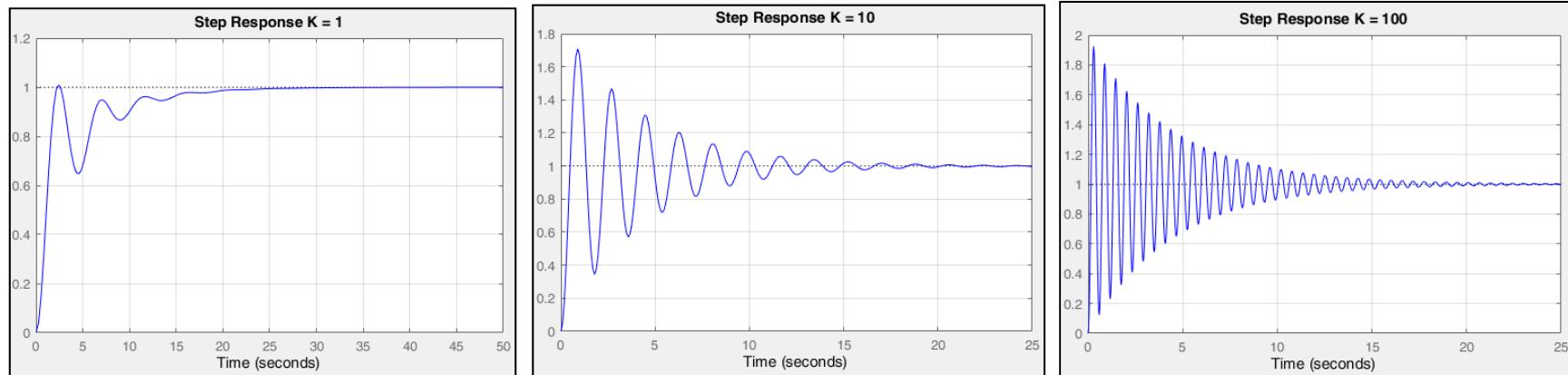
**Sistema asintoticamente stabile per  $k > 0$ .**



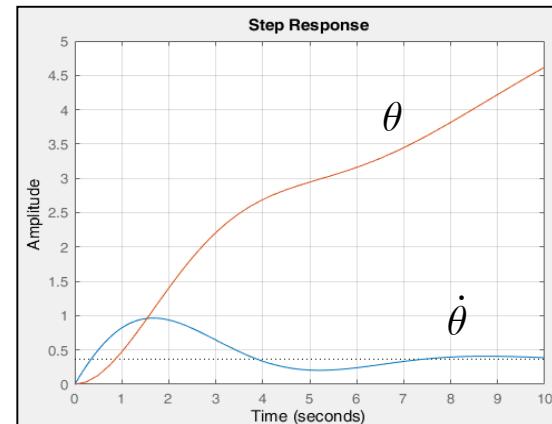
## Criterio di Routh - Hurwitz

- Si può applicare il teorema del valore finale. Ponendo l'ingresso pari ad un gradino unitario si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G^{CL}(s) \cdot \frac{1}{s} = 1$$

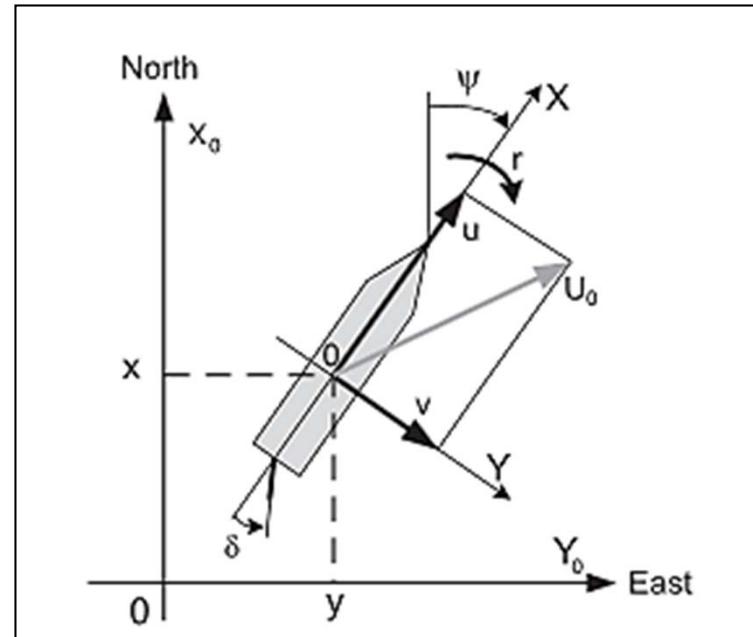
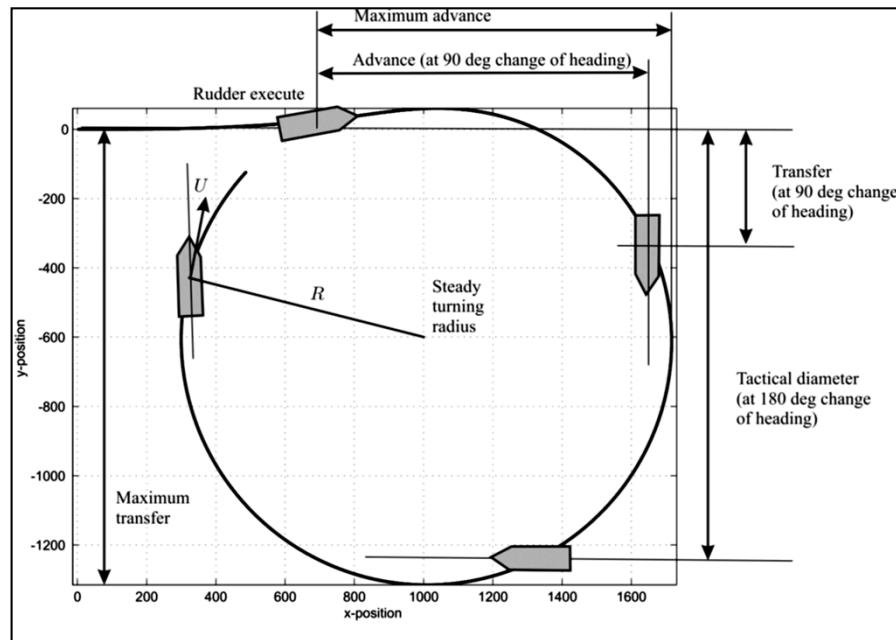


- Il comportamento fisico, naturale del sistema (angolo di beccheggio che cresce indefinitamente per un ingresso costante di equilibratore) viene alterato dal movimento dell'equilibratore stesso in funzione dell'angolo di beccheggio opportunamente amplificato.





# Criterio di Routh - Hurwitz



## □ Nomoto Model (1957, Osaka University):

$$G_{\delta_E}^{\dot{\theta}}(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{\delta_E(s)} = 1.1569 \frac{s + 0.2929}{(s^2 + 0.7410s + 0.9272)}$$



$$G_{\delta}^r(s) = \frac{r(s)}{\delta(s)} = \frac{K(1 + T_3 s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

with

$$\psi(s) = \frac{1}{s} r(s)$$



## Criterio di Routh - Hurwitz



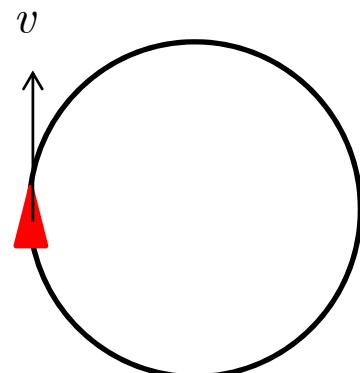
| TYPE    | DATA               |
|---------|--------------------|
| Vessel  | Oil Tanker         |
| Speed   | 15.7 Kts = 8.1 m/s |
| Length  | 350 m              |
| Loading | full               |

$$G_{\delta}^r(s) = \frac{r(s)}{\delta(s)} = \frac{-0.019(1 + 46s)}{(1 - 124.1s)(1 + 16.4s)} = \frac{0.0004(s + 0.0217)}{(s - 0.0081)(s + 0.061)}$$

$$G_{\delta_E}^{\dot{\theta}}(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{\delta_E(s)} = 1.1569 \frac{s + 0.2929}{(s^2 + 0.7410s + 0.9272)}$$



- Problema di Controllo:**  
Generazione di una traiettoria circolare per lo studio di manovrabilità.



$$\begin{aligned}D &= 8,000 \text{ m} \\v &= 8.1 \text{ m/sec} \\r &= 2.1 \cdot 10^{-3} \text{ rad/sec}\end{aligned}$$



## Criterio di Routh - Hurwitz

### □ Requisiti:

- Stabilità in ciclo chiuso
- Risposta ad un comando costante

$$G_{\delta}^r(s) = \frac{r(s)}{\delta(s)} = \frac{0.0004(s + 0.0217)}{(s - 0.0081)(s + 0.061)}$$

### □ Ipotesi di Lavoro: Retroazione unitaria con un controllore costante $K(s) = k > 0$

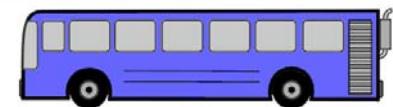
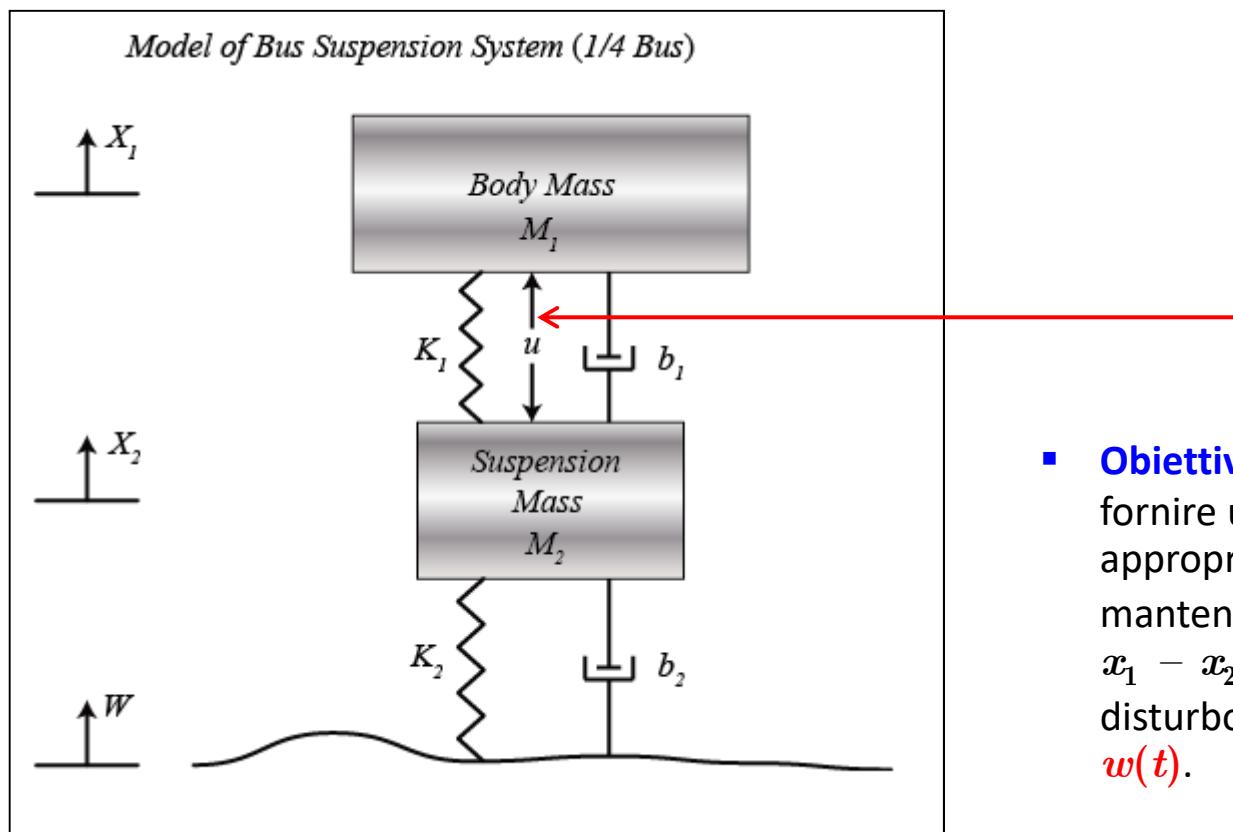
$$G^{CL}(s) = \left[ \frac{r(s)}{\delta(s)} \right]^{CL} = \frac{K(s)G_{\delta}^r(s)}{1 + K(s)G_{\delta}^r(s)} = \frac{0.0004k(s + 0.0217)}{s^2 + (0.0004k - 0.02)s + (0.00000087k - 0.0049)}$$

1. Apply il criterio di Routh to find the constraints on k for closed loop stability
2. Determine the amount of rudder to generate the desired angular velocity with a constant rudder angle, using the TVF



## Criterio di Routh - Hurwitz

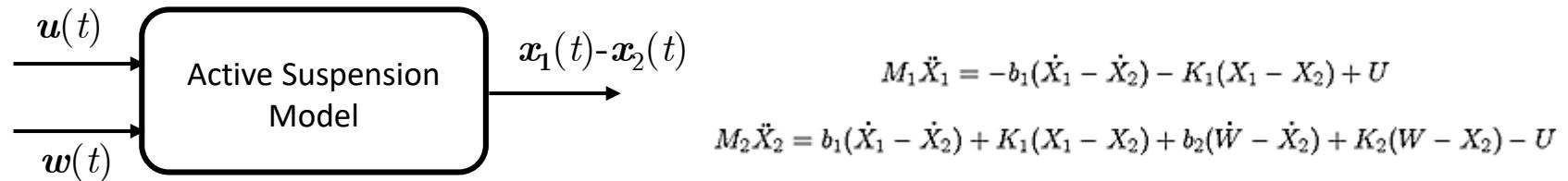
- Nel progetto della sospensione di un autoveicolo, viene usato di solito il modello a 1/4 che tratta una sola ruota. Il modello consiste in un sistema massa-molla-smorzatore come indicato nella figura. Il modello della sospensione attiva include la presenza di un attuatore capace di generare una forza di controllo  $u(t)$  per modificare il movimento del veicolo.



- Obiettivo del Controllo:** fornire un segnale di controllo appropriato  $u(t)$ , tale da mantenere costante la distanza  $x_1 - x_2$  in presenza di un disturbo dovuto al terreno  $w(t)$ .



# Criterio di Routh - Hurwitz



$$G_1(s) = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{U(s)} = \frac{(M_1 + M_2)s^2 + b_2 s + K_2}{\Delta}$$

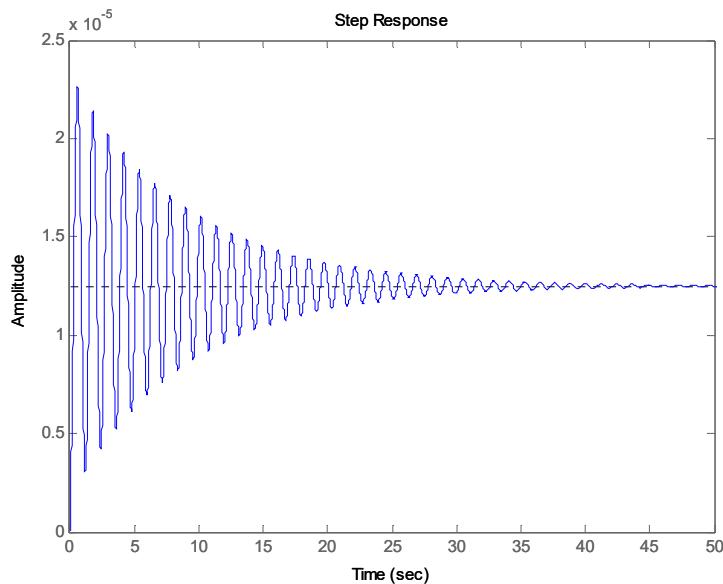
$$G_2(s) = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{W(s)} = \frac{-M_1 b_2 s^3 - M_1 K_2 s^2}{\Delta}$$

$$\Delta = (M_1 s^2 + b_1 s + K_1) \cdot (M_2 s^2 + (b_1 + b_2)s + (K_1 + K_2)) - (b_1 s + K_1) \cdot (b_1 s + K_1)$$

```
M1 = 2500;
M2 = 320;
K1 = 80000;
K2 = 500000;
b1 = 350;
b2 = 15020;
s = tf('s');
G1 = ((M1+M2)*s^2+b2*s+K2)/((M1*s^2+b1*s+K1)*(M2*s^2+(b1+b2)*s+(K1+K2))-(b1*s+K1)*(b1*s+K1));
step(G1),pause
G2 = (-M1*b2*s^3-M1*K2*s^2)/((M1*s^2+b1*s+K1)*(M2*s^2+(b1+b2)*s+(K1+K2))-(b1*s+K1)*(b1*s+K1));
step(0.1*G2)
```

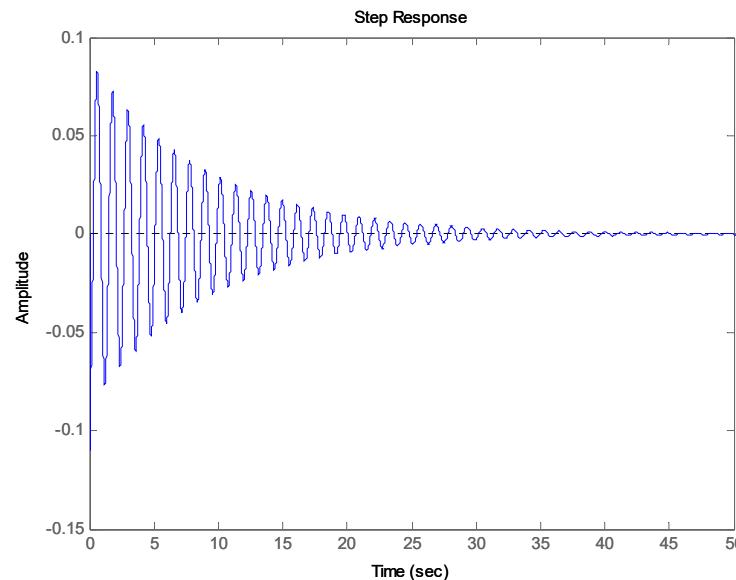


# Criterio di Routh - Hurwitz



Response to 1 m unit step Command

People sitting in the bus will feel very small amount of oscillation. Moreover, the bus takes an unacceptably long time to go back to the original state



Response to 0.1 m unit step Disturbance

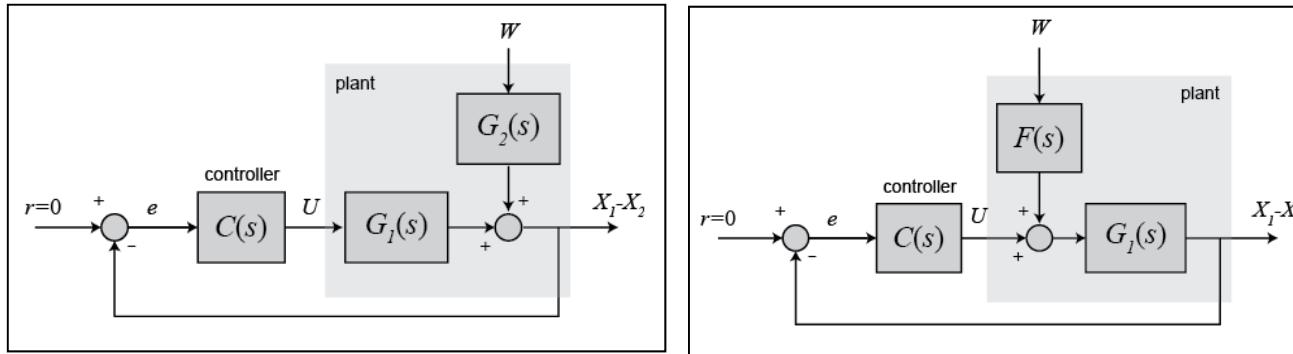
From this graph of the open-loop response for 10 cm step disturbance, we can see that when the bus passes a 10 cm high bump on the road, the bus body will oscillate for an unacceptably long time (~50 seconds) with an initial amplitude of **8 cm**. People sitting in the bus will not be comfortable with such an oscillation.



# Criterio di Routh - Hurwitz

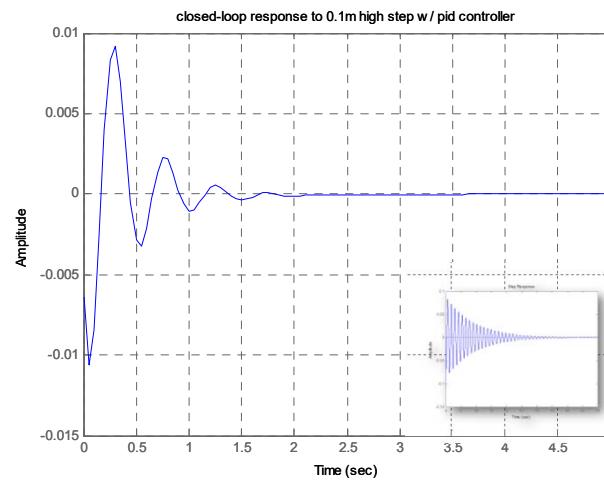
□ **Problema:** progettare un sistema di controllo in ciclo chiuso tale che, in presenza di un disturbo della strada costante, la distanza relativa tra le due masse abbia le seguenti caratteristiche:

1. Il valore finale della distanza sia raggiunto entro 5 secondi,
2. L'oscillazione massima non superi il 5% del valore finale.



$$F(s) = \frac{-3.755e007s^3 - 1.25e009s^2}{2820s^2 + 15020s + 500000}$$

$$\begin{aligned}C(s) &= K_P + K_D s + \frac{K_I}{s} = \\&= 832100 + 208025s + \frac{624075}{s}\end{aligned}$$





# Criterio di Routh - Hurwitz



$$\frac{[x_1 - x_2](s)}{w(s)} = \frac{-3.976e018 s^9 - 2.859e020 s^8 - 6.521e021 s^7 - 7.041e022 s^6 - 7.813e023 s^5}{6.212e019 s^9 + 2.978e021 s^8 + 5.692e022 s^7 + 1.101e024 s^6 + 9.633e024 s^5} \\ + 9.117e025 s^4 + 2.776e026 s^3 + 1.95e026 s^2 - 1e022 s$$

[Brian Douglas Routh Criterion \(3 videos\)](#)



# Criterio di Routh - Hurwitz

<http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Home>

**CONTROL TUTORIALS** FOR MATLAB® & SIMULINK®

TIPS ABOUT BASICS HARDWARE INDEX NEXT ▶

INTRODUCTION CRUISE CONTROL MOTOR SPEED MOTOR POSITION SUSPENSION INVERTED PENDULUM AIRCRAFT PITCH BALL & BEAM

SYSTEM MODELING ANALYSIS

CONTROL

PID ROOT LOCUS FREQUENCY STATE-SPACE DIGITAL

SIMULINK MODELING CONTROL

Welcome to the Control Tutorials for MATLAB and Simulink (CTMS): They are designed to help you learn how to use MATLAB and Simulink for the analysis and design of automatic control systems. They cover the basics of MATLAB and Simulink, and introduce the most common classical and modern control design techniques.

About the Authors: These tutorials were originally developed by Prof. Bill Messner at Carnegie Mellon and Prof. Dawn Tilbury at the University of Michigan. Originally funded by NSF with further funding by MathWorks in 2011, Prof. Messner, Assoc. Prof. Rick Hill (U Detroit-Mercy), and PhD Student JD Taylor (CMU), completely redesigned the web interface and updated all of the tutorials to reflect

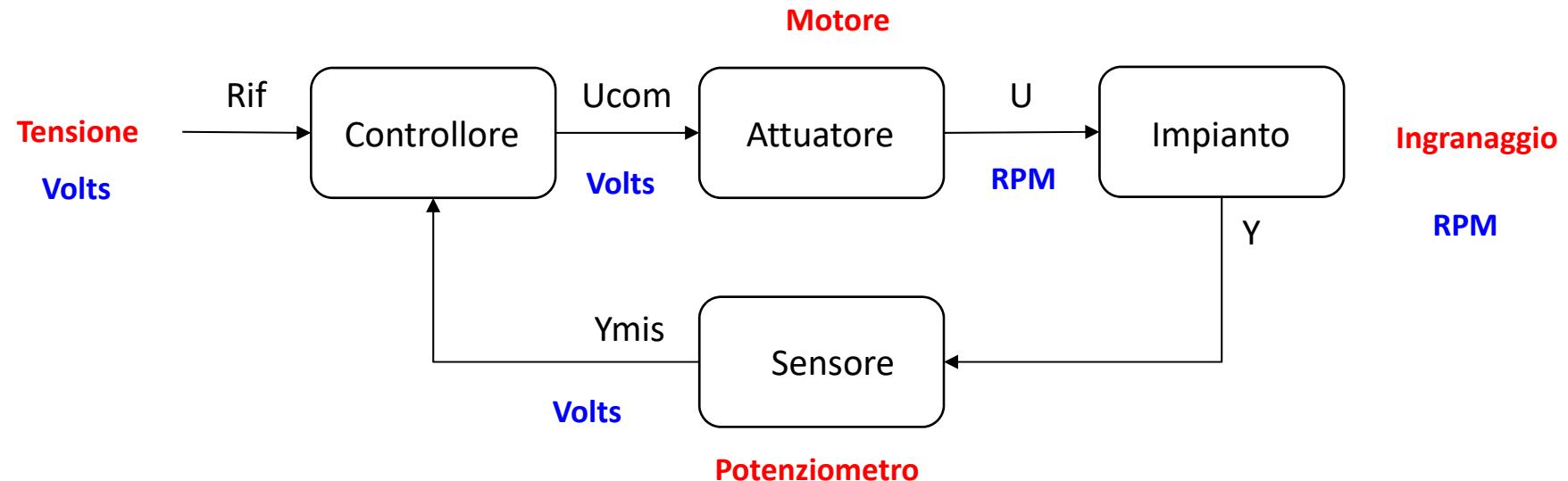
All contents licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License.

CC i o

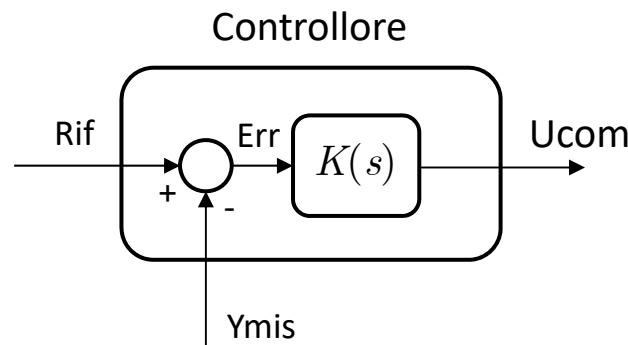


# Note sulla Implementazione

❑ Esempio: Consideriamo il caso in cui i segnali siano continui



- Ciascun blocco è rappresentato da un elemento dinamico descritto da una funzione di trasferimento (oppure da una equazione differenziale)

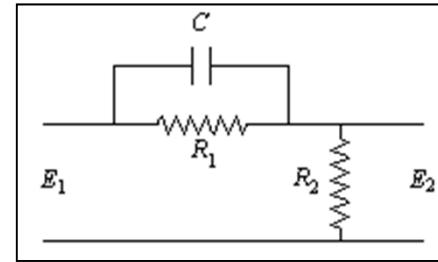




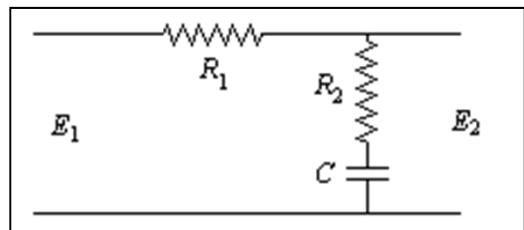
# Note sulla Implementazione

$$K(s) = \frac{U_{com}}{Err} = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{s+z}{s+p}; \quad p > z > 0 \quad \dot{E}_2 + pE_2 = \dot{E}_1 + zE_1$$

$$z = \frac{1}{R_1 R_2 C}, \quad p = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$$



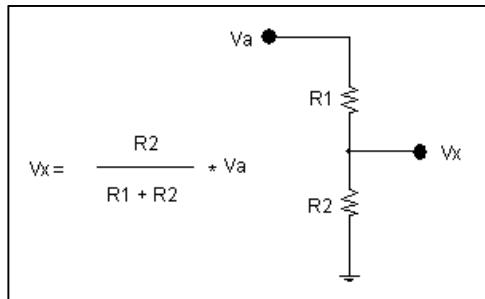
- Dimostrare che:



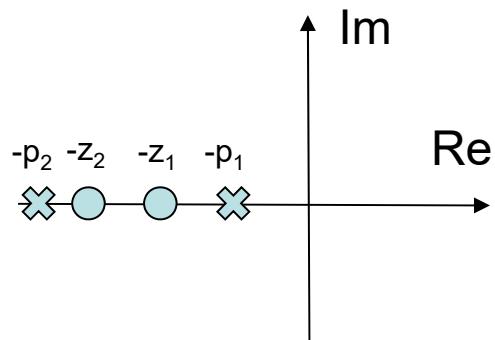
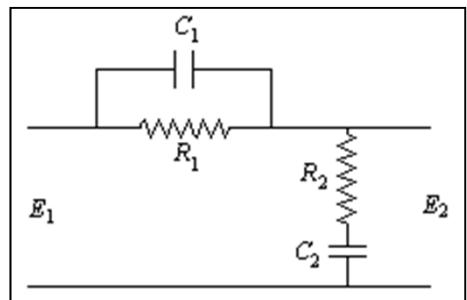
$$K(s) = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{R_2 + 1/Cs}{R_1 + R_2 + 1/Cs} = \frac{R_2 Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1} = \frac{s+z}{s+p}; \quad z > p > 0$$



# Note sulla Implementazione



$$K(s) = K = \frac{V_x(s)}{V_a(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



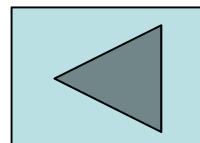
$$K(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{(s + p_1)(s + p_2)} = \frac{s^2 + (\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2})s + \frac{1}{R_1 C_1} \cdot \frac{1}{R_2 C_2}}{s^2 + (\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1})s + \frac{1}{R_1 C_1} \cdot \frac{1}{R_2 C_2}}$$



## Note sulla Implementazione

- Il corso di Fondamenti di Automatica **riguarda il progetto di K(s)**, ovvero quale è la struttura matematica del controllore ed il suo collegamento con il processo da controllare (anello aperto o anello chiuso), in funzione dei requisiti di progetto che l'impianto deve soddisfare.
- Il corso di Fondamenti di Automatica **non riguarda come implementare K(s)** se mediante:
  - Circuiti elettrici passivi/attivi
  - Circuiti idraulici
  - Collegamenti meccanici, elettromeccanici
  - Implementazione digitale (codice, schede elettroniche, ecc.)

Perchè       $K(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{(s + p_1)(s + p_2)}$       e non       $K(s) = \frac{(s + z)}{s(s + p_1)^2}$       ?





# RISPOSTA TEMPORALE



- Introduzione
- Risposta a Regime
- Risposta Transitoria
- Effetto degli Zeri
- Poli Dominanti



# Riferimenti

- Capitoli 5, 6, 11 Testo di Bolzern (parte)
- Capitoli 5 8, testo di Murray (download)
- Capitoli 3, 8 Lewis (download)
- ....

Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.

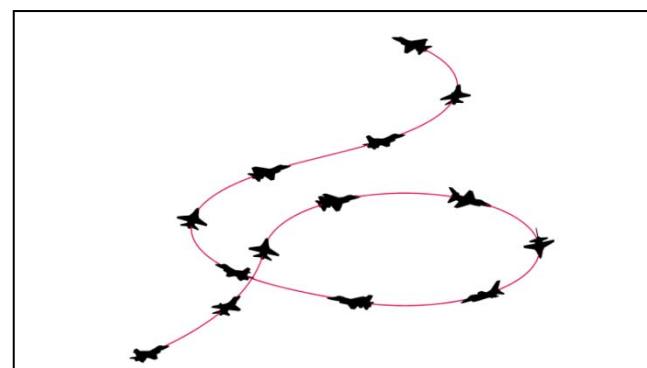
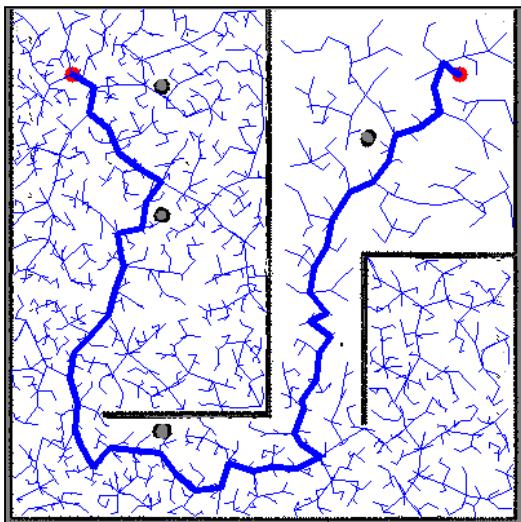
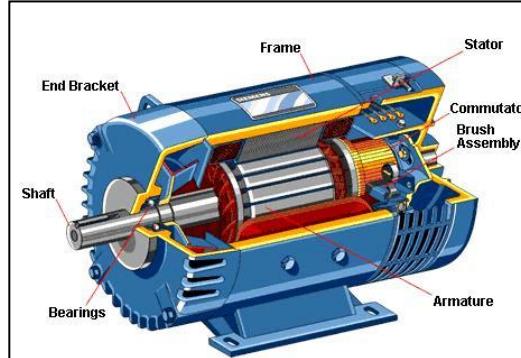
Con. Avanzati

Con. Standard





# Introduzione



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad G_u^y(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$



# Introduzione

- **L'analisi di un sistema** è effettuata al fine di determinare le sue prestazioni, e la eventuale necessità di un sistema di controllo.

1. Stabilità
2. Controllabilità ed Osservabilità
3. Risposta ai comandi (precisione, accuratezza, velocità di risposta)
4. Reiezione dei disturbi e rumori
5. Risposta non nominale (ovvero in presenza di errori di modello)

- **Strumenti utilizzati** per lo studio delle prestazioni sono:

- ✓ Criterio di stabilità di Routh - Hurwitz, Teoria della stabilità di Lyapunov
- ✓ Matrici di Controllabilità, Osservabilità e Realizzazioni
- **La Risposta Temporale**
- La Risposta in Frequenza
- Criterio di Nyquist e Stabilità Relativa

□ **Obiettivi:**

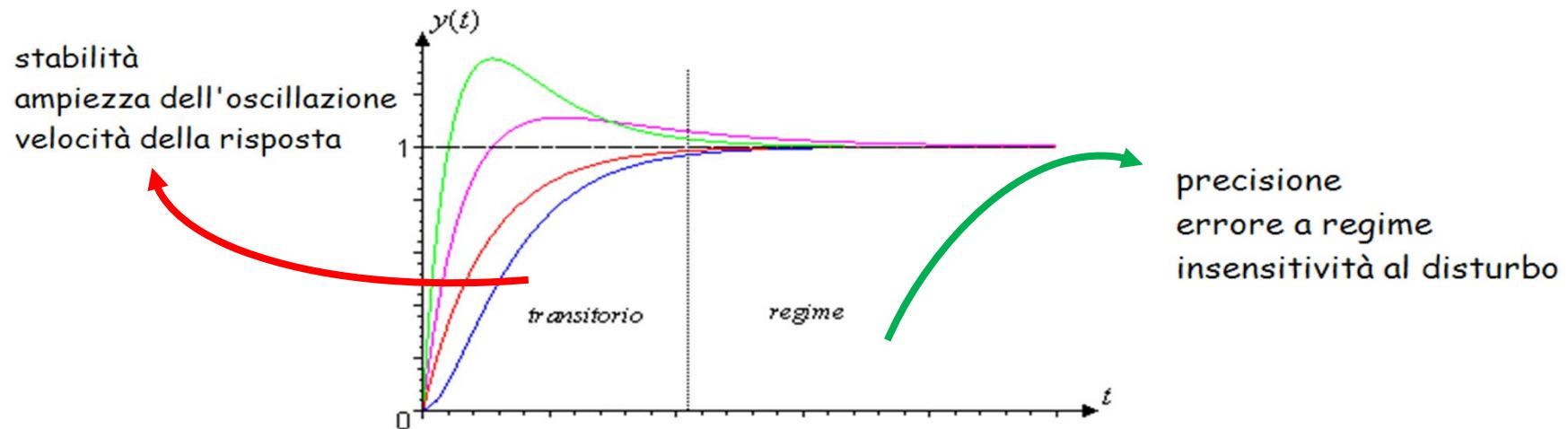
Identificazione di un set generale di parametri in modo da poter eseguire matematicamente l'analisi delle prestazioni e la sintesi di un sistema di controllo, se richiesto dai requisiti di progetto.

- **Nota:** nel seguito consideriamo sistemi SISO controllabili ed osservabili, per cui la stabilità mediante FdT garantisce la stabilità sia esterna che interna



# Introduzione

- La risposta temporale definisce l'andamento del segnale in uscita quando il sistema viene sottoposto a determinati segnali in ingresso
- Sistemi Instabili: la risposta del sistema ad un ingresso impulsivo tende asintoticamente all'infinito
- Sistemi Stabili: la risposta del sistema ad un ingresso impulsivo tende asintoticamente ad un valore costante
- Sistemi Asintoticamente Stabili: la risposta del sistema ad un ingresso impulsivo tende asintoticamente a zero



- In generale è possibile riconoscere due zone che individuano rispettivamente la parte transitoria e quella a regime; ognuna di esse fornisce specifiche proprietà del sistema in esame

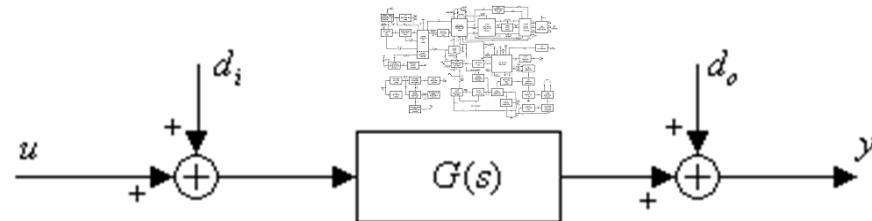


## Risposta a Regime

- La risposta a regime è la parte della risposta temporale che si ha una volta finito il transitorio

**Nota:** La risposta a regime ha senso soltanto per sistemi asintoticamente stabili, Altrimenti l'uscita è un segnale illimitato per ogni ingresso limitato (a meno del caso di sistemi stabili con ingresso impulsivo).

- Lo studio della risposta a regime di un sistema non retroazionato è banale (nota che a livello di analisi il sistema potrebbe essere arbitrariamente complesso e/o internamente controllato)



$$y = d_o + G(s)(u + d_i)$$

$$e = u - y = [1 - G(s)]u - d_o - G(s)d_i$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)u(s) + \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot d_o(s) + \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)d_i(s)$$

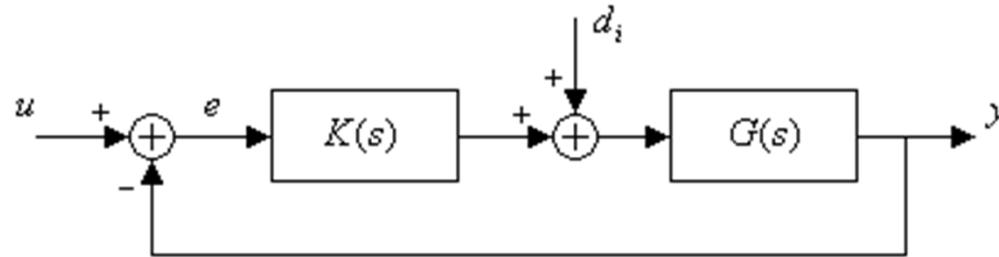
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot [1 - G(s)]u(s) - \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot d_o(s) - \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)d_i(s)$$

- **Nota:** la  $G(s)$  è una funzione scalare razionale fratta propria o strettamente propria.



# Risposta a Regime

- Consideriamo un sistema SISO in Ciclo Chiuso con retroazione unitaria (per semplicità  $d_o = 0$ )

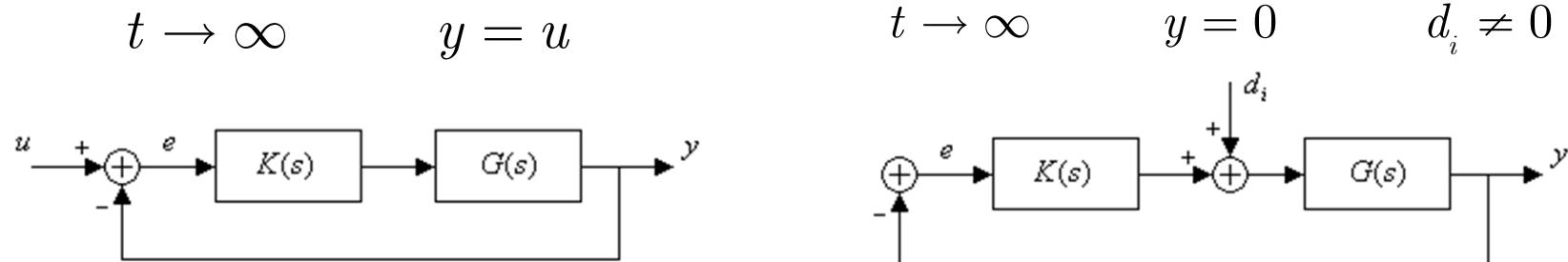


$$G_{CL}(s) = \frac{K(s) \cdot G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)} = T(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$$

$$G_\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)} = S(s) = \frac{\varepsilon(s)}{u(s)}$$

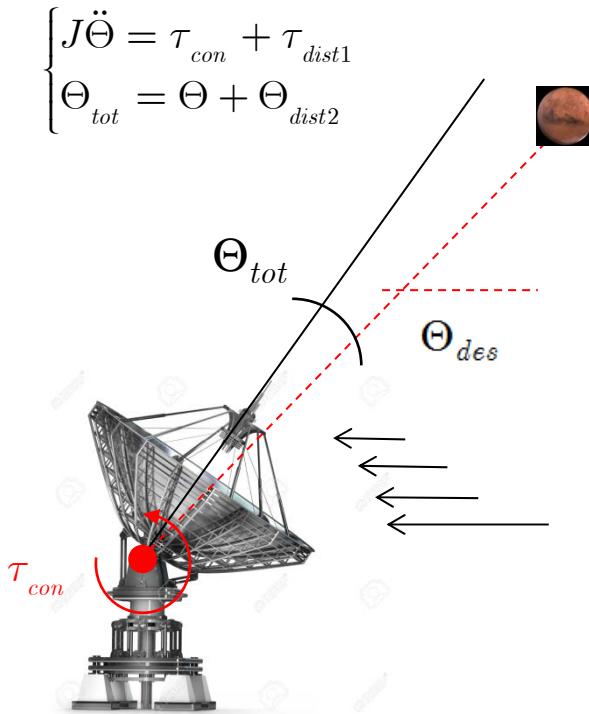
$$G_d(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)} = G(s)S(s) = \frac{y(s)}{d_i(s)}$$

- In condizioni di Regime il Comportamento desiderato rispetto agli Ingressi

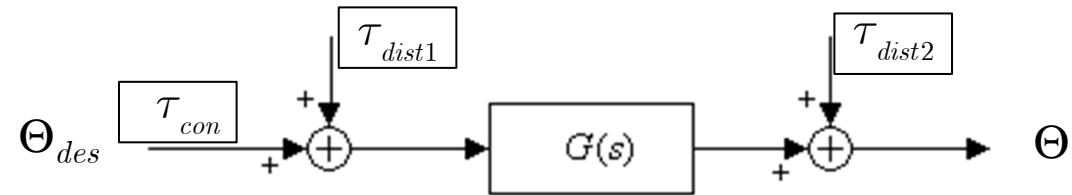




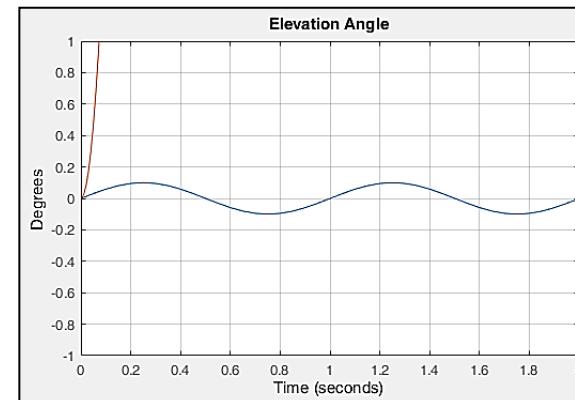
# Risposta a Regime



- $\tau_{con}$  = controllo angolare mediante motore
- $\tau_{dist1}$  = disturbo dovuto a raffiche di vento modellato come coppia di rotazione intorno al centro di massa
- $\tau_{dist2} \rightarrow \Theta_{dist2}$  disturbo angolare dovuto a fenomeni di diffrazione, umidità, densità atmosferica,...

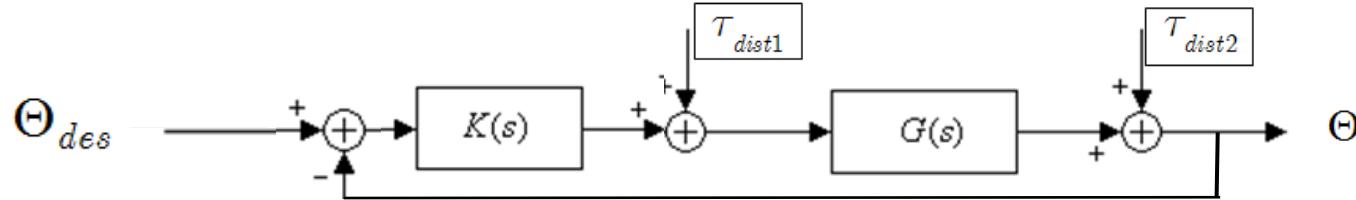


$$\begin{aligned}\Theta(s) &= \tau_{dist2} + \frac{1}{Js^2} \tau_{dist1} + \frac{1}{Js^2} \Theta_{des} \\ &= 0.1 \frac{6.28}{s^2 + 6.28^2} + \frac{2000}{s^2} \left( \frac{1}{10s} \right) + \frac{2000}{s^2} \left( \frac{5}{57.3s} \right)\end{aligned}$$





# Risposta a Regime



$$\Theta(s) = \tau_{dist2} + \frac{1}{Js^2}\tau_{dist2} + \frac{1}{Js^2}\Theta_{des}$$
$$\Theta(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Js^2}K(s)}\tau_{dist2} + \frac{\frac{1}{Js^2}}{1 + \frac{1}{Js^2}K(s)}\tau_{dist2} + \frac{\frac{1}{Js^2}K(s)}{1 + \frac{1}{Js^2}K(s)}\Theta_{des}$$

- La presenza di feedback e di un sistema di controllo altera il comportamento dinamico del sistema.
  
- (Analisi): verificare che  $K(s)$  sia tale che:  
$$\forall \Theta_{des} \neq 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Theta(t) = \Theta_{des}$$
$$\forall \tau_{dist1} \neq 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Theta(t) = 0$$
- (Sintesi): determinare un controllore  $K(s)$  tale che:  
$$\forall \tau_{dist2} \neq 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Theta(t) = 0$$



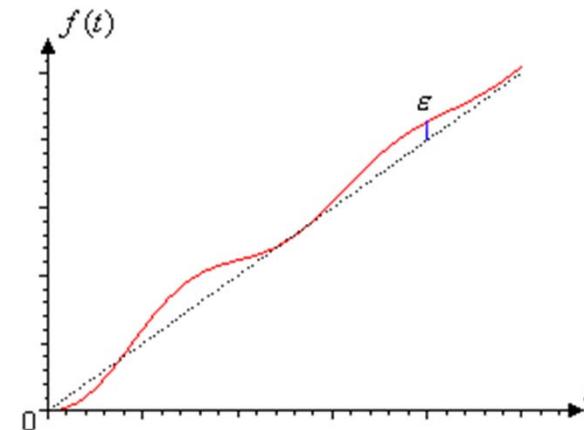
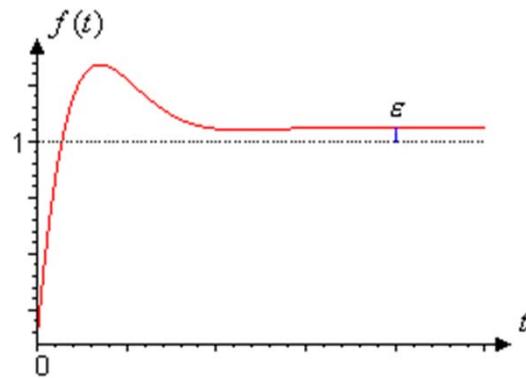
## Risposta a Regime (ad un comando/riferimento)

□ **Parametro di Progetto:** Errore a Regime (sia in anello aperto che anello chiuso)

□ L'errore  $\varepsilon_{ss}$  è il parametro base per la valutazione della risposta a regime; il requisito fondamentale per il calcolo dell'errore a regime è la stabilità (asintotica) del sistema e, in tal caso, sia l'errore, che l'uscita si possono calcolare mediante il **Teorema del valore finale**

$$\varepsilon_{ss} = u(t) - y_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon(s)$$

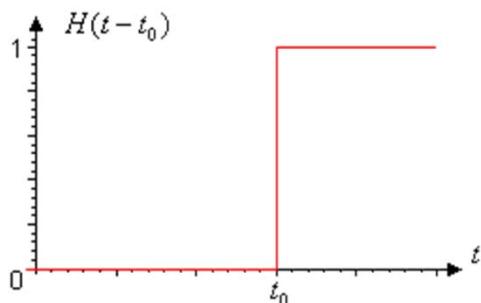
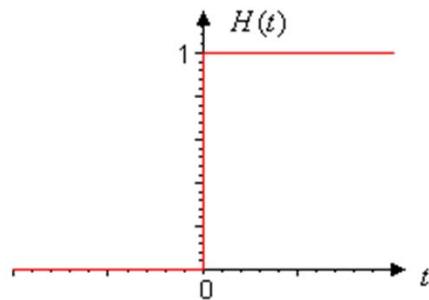
$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s)$$





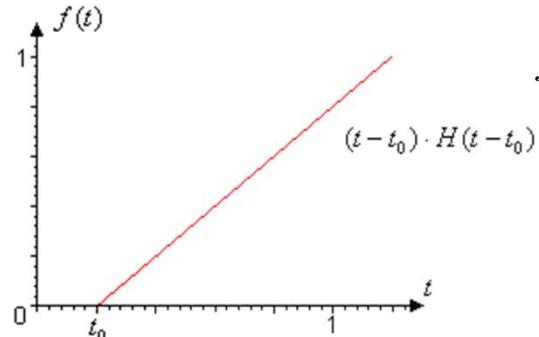
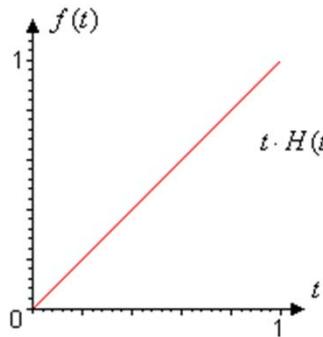
# Risposta a Regime

- **Segnali d'ingresso:** La valutazione dell'errore a regime è effettuata usando ingressi tipici di riferimento (segnali polinomiali)



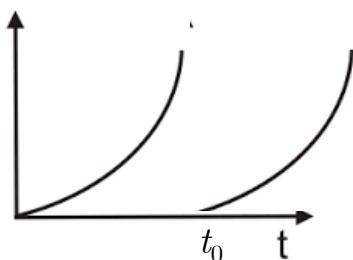
$$H(t), \quad H(t - t_0)$$

$$H(s) = \frac{1}{s}, \quad H(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-t_0 s}$$



$$f(t) = t \cdot H(t), \quad f(t) = (t - t_0) \cdot H(t - t_0)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2}, \quad F(s) = \frac{1}{s^2} \cdot e^{-t_0 s}$$



$$f(t) = t^2 \cdot H(t), \quad f(t) = (t - t_0)^2 \cdot H(t - t_0)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^3}, \quad F(s) = \frac{1}{s^3} \cdot e^{-t_0 s}$$



## Risposta a Regime

- **Strumento di Calcolo:** FdT di Anello e/o Funzione di Sensitività

$$K(s)G(s)$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + K(s)G(s)}$$

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + K(s)G(s)} u(s) \quad \varepsilon(s) = \frac{1}{1 + K(s)G(s)} G(s)d_i(s) \quad \varepsilon(s) = \frac{1}{1 + K(s)G(s)} d_o(s)$$

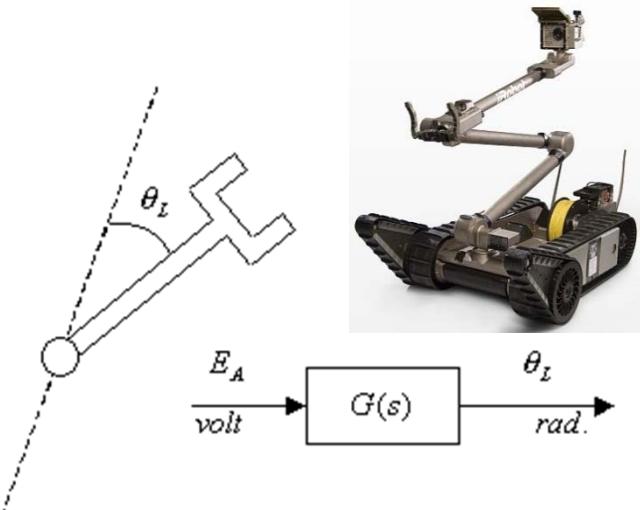
- Per il calcolo dell'errore a regime, la FdT in Anello Aperto è catalogata come tipo, ovvero come eccesso polo-zero all'origine. Riscrivendo la  $K(s)G(s)$  in forma fattorizzata, si ha:

|  |         |        |  |
|--|---------|--------|--|
| $K(s)G(s) = k_0 \frac{\prod_i (s + z_i)}{s^j \prod_k (s + p_k)}$ | $j = 0$ | tipo 0 | $K(s) \cdot G(s) = \frac{N(s)}{(s + a)(s + b) \dots}$    |
|  | $j = 1$ | tipo 1 | $K(s) \cdot G(s) = \frac{N(s)}{s(s + a)(s + b) \dots}$   |
|  | $j = 2$ | tipo 2 | $K(s) \cdot G(s) = \frac{N(s)}{s^2(s + a)(s + b) \dots}$ |
|  | $j = 3$ | tipo 3 | $K(s) \cdot G(s) = \frac{N(s)}{s^3(s + a)(s + b) \dots}$ |

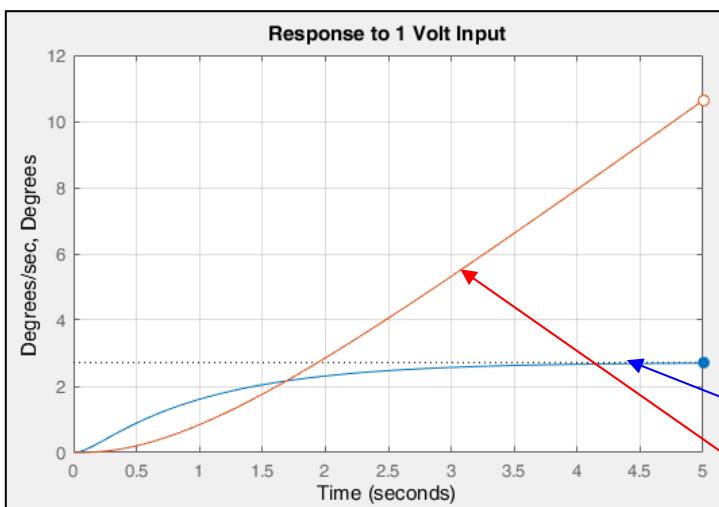
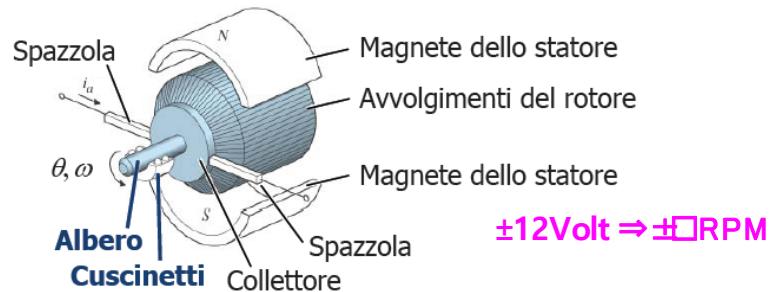


# Risposta a Regime

□ **Esempio:** Risposta di un Link robotico ad un Comando di Giunto



- Il motore, ad una tensione (oppure corrente) costante, produce una Rotazione dell'albero a velocità angolare costante e l'angolo del Link aumenta linearmente nel tempo



$$\frac{\dot{\theta}_L(s)}{E_A(s)} = sG(s) = \frac{0.475}{(s+1)(s+10)} = \frac{[\text{rad}]}{[\text{sec volt}]}$$

$$\frac{\theta_L(s)}{E_A(s)} = G(s) = \frac{0.475}{s(s+1)(s+10)} = \frac{[\text{rad}]}{[\text{volt}]}$$

- Risposta al gradino unitario (Es. 1 Volt)

0.0475 rad/sec       $E_A(t) = H(t), E_A(s) = \frac{1}{s}$

$$\dot{\theta}(t) = 0.0475 - 0.0528e^{-t} + 0.0053e^{-10t}$$

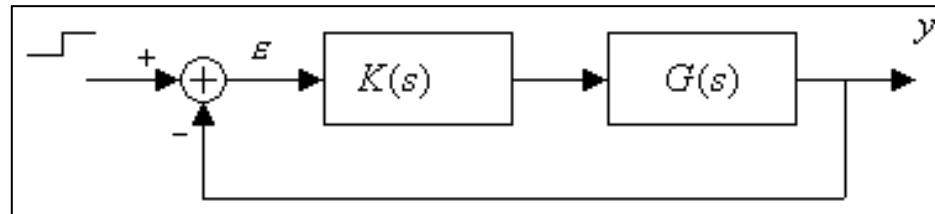
$$\theta(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t} + c_4 e^{-10t}$$



## Risposta a Regime

- **Problema:** E' possibile progettare un sistema di controllo in modo che a Regime il braccio si sposti di 1 rad ad un comando di 1 Volt di tensione?

1. Il sistema in ciclo chiuso deve essere asintoticamente stabile
2. Per il sistema iniziale la velocità angolare di regime vale 0.0475 rad/sec per Volt
3. Per il sistema iniziale vale  $\varepsilon \rightarrow \infty$  per  $t \rightarrow \infty$  in spostamento angolare  $\theta(t)$



- Consideriamo un controllore proporzionale in retroazione unitaria  $K(s) = k$

$$\begin{cases} \varepsilon(s) = \frac{1}{1 + K(s)G(s)} E_A(s) = \frac{1}{1 + \frac{0.475k}{s(s+1)(s+10)}} E_A(s) \\ \theta_L(s) = G_{CL}(s)E_A(s) = \frac{K(s) \cdot G(s)}{1 + K(s)G(s)} E_A(s) = \frac{0.475k}{s^3 + 11s^2 + 10s + 0.475k} E_A(s) \end{cases}$$

- **Il controllore progettato deve garantire la stabilità asintotica del sistema in ciclo chiuso**



## Risposta a Regime

- Analisi della Stabilità con il Criterio di Routh:

|   |                     |        |   |  |
|---|---------------------|--------|---|--|
| 3 | 1                   | 10     | 0 |  |
| 2 | 11                  | 0.475k | 0 | $0 < k < \frac{110}{0.475} = 231.5789$ |
| 1 | <u>110 - 0.475k</u> | 0      |   | Valori ammissibili del controllore     |
| 0 | 11                  |        |   |  |

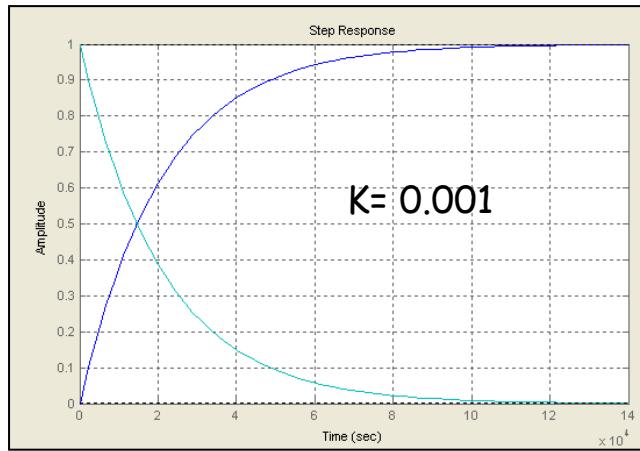
- Quanto vale l'errore a regime nel campo di stabilità del controllore?

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + K(s)G(s)} u(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{0.475k}{s(s+1)(s+10)}} \cdot \frac{1}{s} = \\ &= \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0.475k}{s(s+1)(s+10)}} = 0, \quad 0 < k < 231.5789\end{aligned}$$

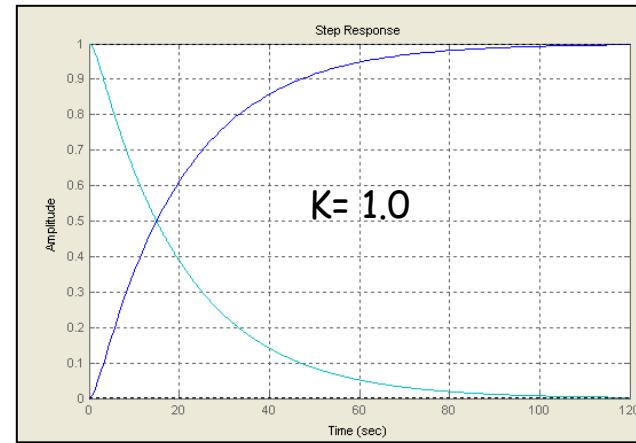
□ Qualsiasi valore di  $k$  ammissibile, produce un errore a regime = 0.



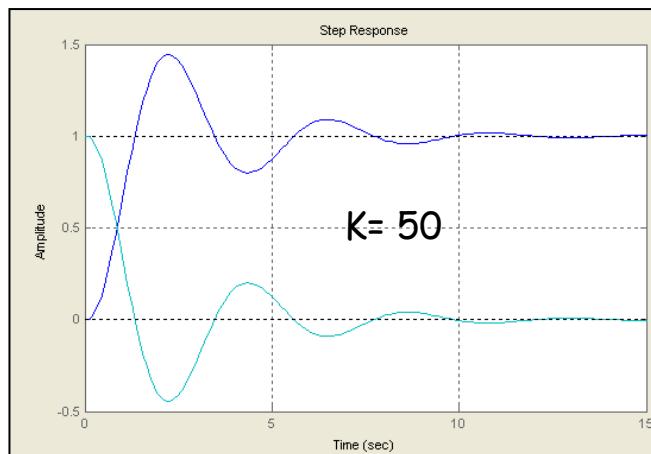
# Risposta a Regime



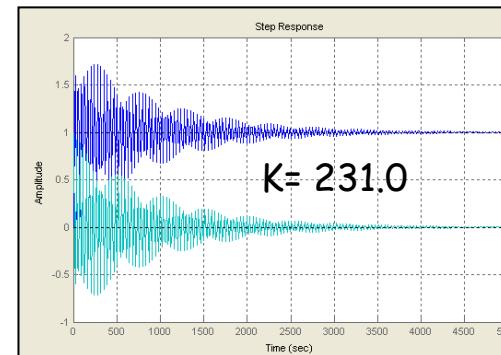
$K = 0.001$



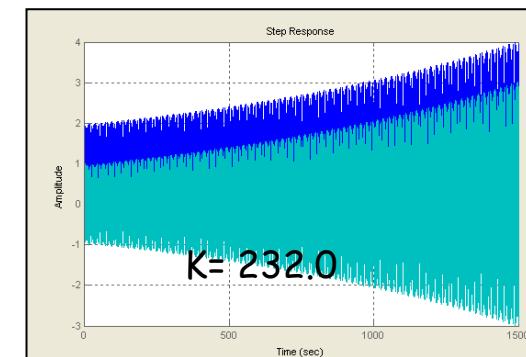
$K = 1.0$



$K = 50$



$K = 231.0$



$K = 232.0$

$$k < 231.5789$$

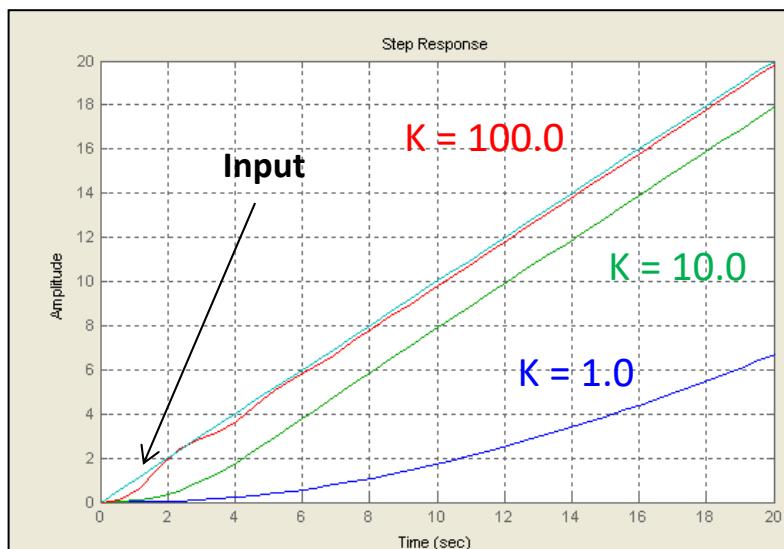


## Risposta a Regime

- **Domanda:** Cosa succede all'errore a regime se il comando è una rampa? Ovvero se La tensione di ingresso cresce linearmente nel tempo? (1 Volt/sec)

- Il sistema è asintoticamente stabile per  $k$  ammissibile  $k < 231.5789$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{0.475k}{s(s+1)(s+10)}} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{1 + 0.0475k}$$



- L'errore a regime alla Rampa è sempre limitato (finito) ed il suo valore numerico dipende dal guadagno  $k$  del controllore
- Domanda:** Quale è il minimo errore alla rampa ammissibile?

$$k < 231.5789$$

$$\varepsilon_{MIN}^{RAMP} = \frac{1}{1 + (0.0475 \cdot 231.5789)} \approx 0.0835 = 8.35\%$$



## Risposta a Regime

- L'esempio precedente permette di **generalizzare** il Calcolo dell'Errore a Regime in funzione di:

1. Ingresso (Gradino, Rampa, Parabola, ecc.)
2. "Tipo" di FdT di Anello

$$K(s)G(s) = k_0 \frac{\prod_i (s + z_i)}{s^j \prod_k (s + p_k)} = k_0 P(s)$$

|       |       |  |
|-------|-------|--|
| j = 0 | tip 0 | $K(s) \cdot G(s) = \frac{N(s)}{(s + a)(s + b) \dots}$    |
| j = 1 | tip 1 | $K(s) \cdot G(s) = \frac{N(s)}{s(s + a)(s + b) \dots}$   |
| j = 2 | tip 2 | $K(s) \cdot G(s) = \frac{N(s)}{s^2(s + a)(s + b) \dots}$ |
| j = 3 | tip 3 | $K(s) \cdot G(s) = \frac{N(s)}{s^3(s + a)(s + b) \dots}$ |

- Ingresso a Gradino Unitario:  $u(t)=H(t)$ ,  $u(s)=1/s$

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + k_0 P(s)} = \frac{1}{1 + k_0 \frac{\prod_i (z_i)}{\prod_k (p_k)}} \quad \text{Tip 0, Errore finito}$$

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + k_0 P(s)} = \frac{1}{1 + \infty} = 0 \quad \text{Tip 1, 2, ecc., Errore nullo}$$



## Risposta a Regime

- Ingresso a Rampa Unitaria:  $u(t)=tH(t)$ ,  $u(s)=1/s^2$

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + K(s)G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sK(s)G(s)}$$

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{\prod_k (s + p_k)}{\prod_i (s + z_i)} = \infty \quad \text{Tipo 0, Errore Infinito}$$

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{s \cdot \prod_k (s + p_k)}{k_0 \cdot \prod_i (s + z_i)} = \frac{1}{k_0} \frac{\prod_k (p_k)}{\prod_i (z_i)} \quad \text{Tipo 1, Errore Finito}$$

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2 \cdot \prod_k (s + p_k)}{k_0 \cdot \prod_i (s + z_i)} = 0 \quad \text{Tipo 2, ecc., Errore nullo}$$



# Risposta a Regime

- Per altri ingressi polinomiali la regola può essere estesa facilmente

**Table 7.2** Relationships between input, system type, static error constants, and steady-state errors

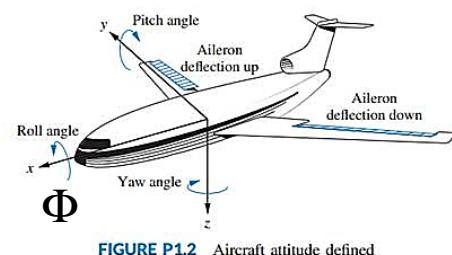
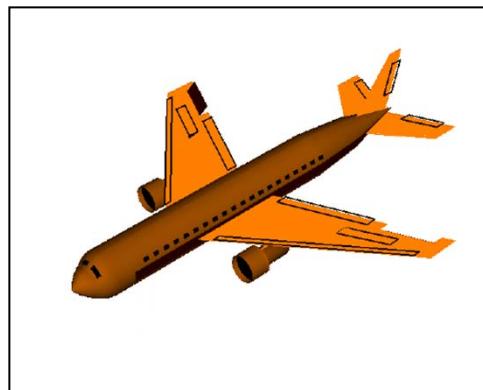
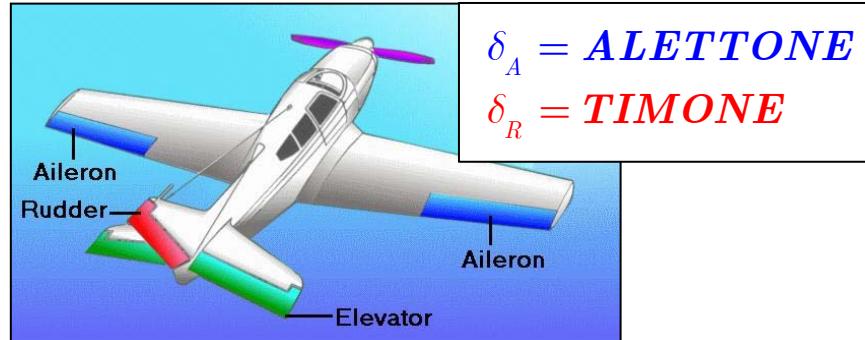
| Input                             | Steady-state<br>error formula | Type 0                      |                     | Type 1                      |                 | Type 2                      |                 |
|-----------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|---------------------|-----------------------------|-----------------|-----------------------------|-----------------|
|                                   |                               | Static<br>error<br>constant | Error               | Static<br>error<br>constant | Error           | Static<br>error<br>constant | Error           |
| Step,<br>$u(t)$                   | $\frac{1}{1 + K_p}$           | $K_p =$<br>Constant         | $\frac{1}{1 + K_p}$ | $K_p = \infty$              | 0               | $K_p = \infty$              | 0               |
| Ramp,<br>$tu(t)$                  | $\frac{1}{K_v}$               | $K_v = 0$                   | $\infty$            | $K_v =$<br>Constant         | $\frac{1}{K_v}$ | $K_v = \infty$              | 0               |
| Parabola,<br>$\frac{1}{2}t^2u(t)$ | $\frac{1}{K_a}$               | $K_a = 0$                   | $\infty$            | $K_a = 0$                   | $\infty$        | $K_a =$<br>Constant         | $\frac{1}{K_a}$ |

- **NOTA:** il calcolo dell'errore a regime richiede la stabilità asintotica per poter applicare il teorema del valore finale



# Risposta a Regime

- **Esempio:** Moto linearizzato di Rollio di un Velivolo durante una virata



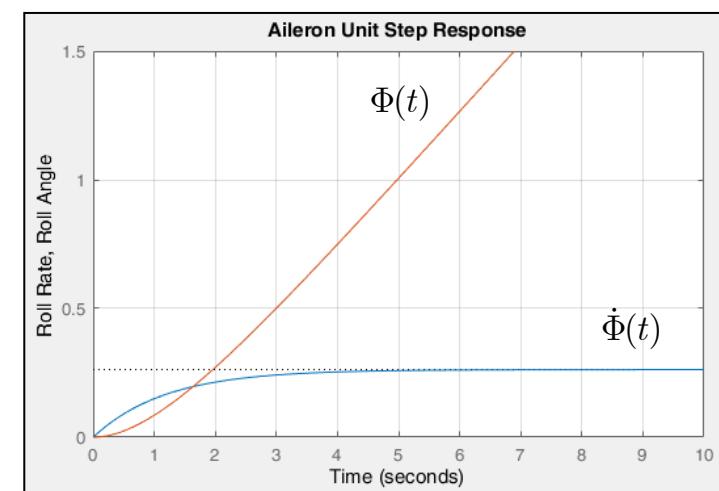
Aereo Passeggeri in volo di crociera  
Alt. = 33,000 ft, Speed = 0.84 Mach

$$G_{\delta}^{\dot{\Phi}}(s) = \frac{\dot{\Phi}(s)}{\delta_A(s)} = \frac{L_{\delta A}}{s + L_p} = \frac{0.2214}{s + 0.8432} \text{ sec}^{-1}$$

$$G_{\delta}^{\Phi}(s) = \frac{\Phi(s)}{\delta_A(s)} = \frac{0.2214}{s(s + 0.8432)} \quad y(t) = \dot{\Phi}(t) = 0.2626 \cdot (1 - e^{-0.8432 \cdot t})$$

## Virata Coordinata (zero sideslip)

1. Alettone sinistro giù
2. Aumento portanza Semiala sinistra e **rollio** a destra (Senso Orario)
3. Aumento resistenza semiala sinistra e conseguente momento di **imbardata** antiorario verso sinistra. Creazione di **sideslip** (derapata)
4. Spostamento timone verso destra per creazione di portanza sulla coda e conseguente momento in senso orario che compensa l'imbardata e annulla il sideslip
5. Annullamento Alettone per mantenimento heading

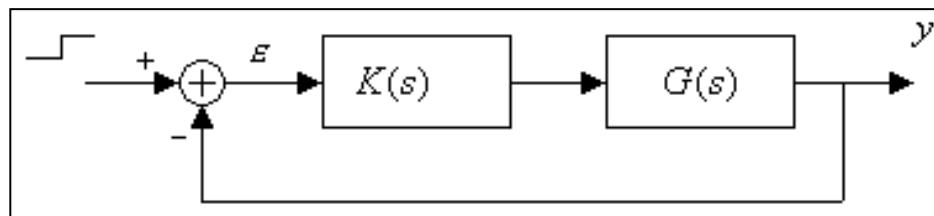




# Risposta a Regime

- **Obiettivo:** Annullare l'errore a regime in velocità di rollio ad un comando a gradino

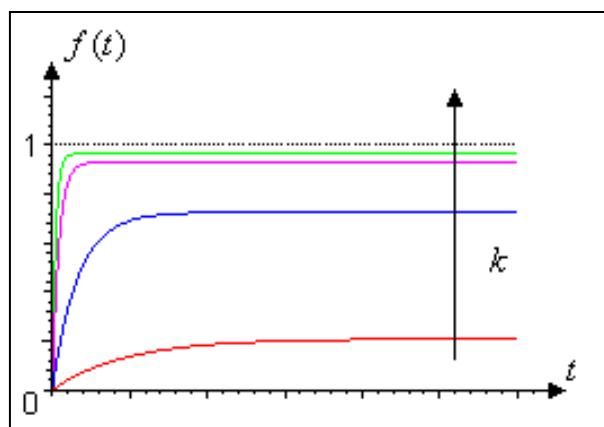
$$\varepsilon_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - y(t)) = 1 - 0.2626 \cong 74\%$$



$$G(s) = \frac{\dot{\Phi}(s)}{\delta_A(s)} = \frac{0.2214}{s + 0.8432}$$

- Qualsiasi Controllore Proporzionale  $K(s) = k$  stabilizzante produce un errore a regime finito in quanto La FdT di Anello è di Tipo 0

$$K(s)G(s) = \frac{0.2214k}{s + 0.8432} \quad T(s) = \frac{0.2214k}{s + (0.8432 + 0.2214k)}$$



| $\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \varepsilon(s) = \frac{1}{1 + k \cdot 0.2626}$ |                      |
|---|----------------------|
| $K$   | $\varepsilon_{ss}\%$ |
| 1   | 79,2                 |
| 10  | 27,6                 |
| 50  | 7,1                  |
| 100   | 3,7                  |



## Risposta a Regime

- Affinchè l'errore a regime al gradino sia nullo, la FdT di anello deve essere di Tipo 1

$$K(s)G(s) = k_0 \frac{N_K(s)}{sD_K(s)} \frac{0.2214}{(s + 0.8432)} \quad \Rightarrow \quad K(s) = \frac{k_0}{s}$$

- Il controllore selezionato è di tipo Integrale
- Il Controllore è accettabile se e solo se il sistema in anello chiuso è Asintoticamente Stabile

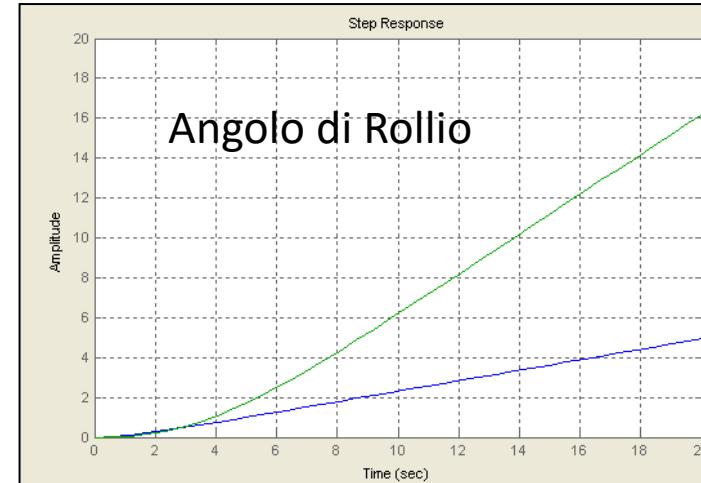
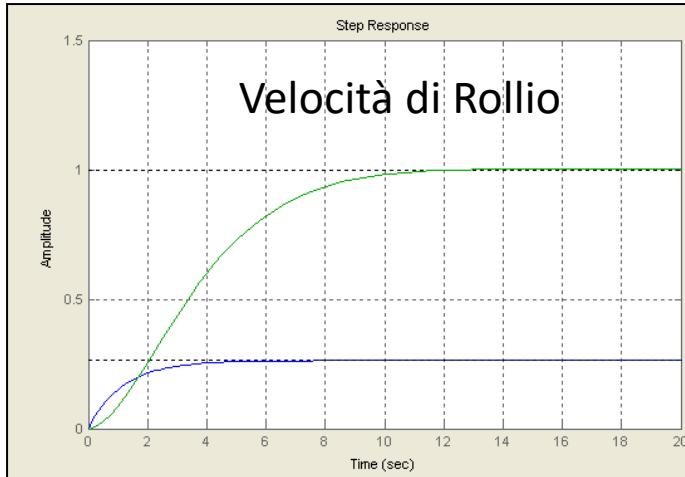
$$G_{CL}(s) = \frac{K(s) \cdot G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)} = \frac{0.2214 \cdot k_0}{s^2 + 0.8432 \cdot s + 0.2214 \cdot k_0}$$

$K_0 > 0$

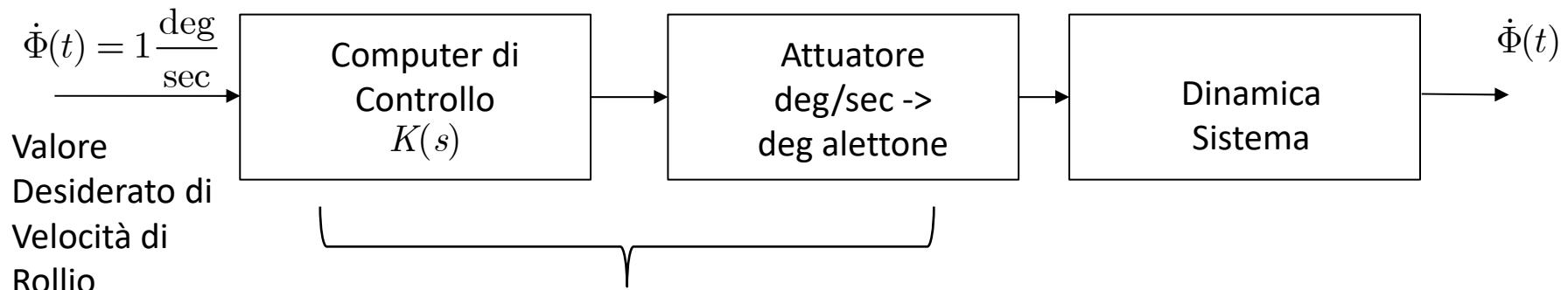
- 1 Grado al secondo di velocità di Rollio desiderato → 1 Grado al secondo di velocità di Rollio



# Risposta a Regime



- Quale è adesso il comportamento fisico ingresso – uscita?



$K(s) = k$  produce un errore finito diverso da zero; per esempio  $k = 10$  da un errore di circa 27.6 %

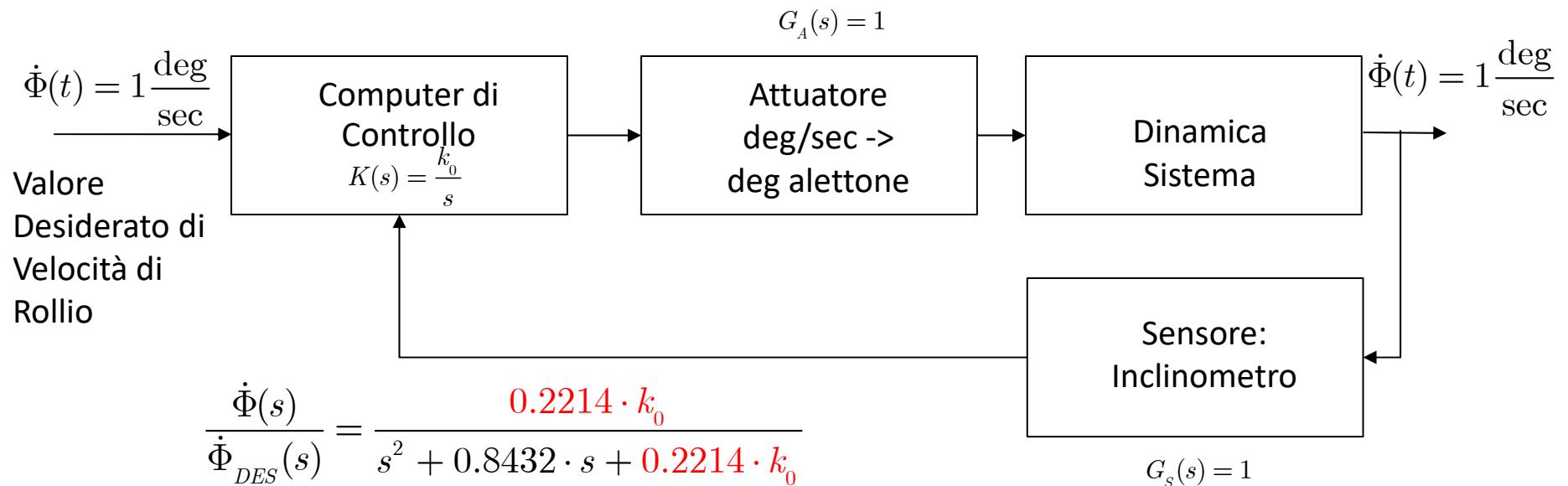


## Risposta a Regime

- Un sistema di controllo integrale non retroazionato produce un errore infinito al gradino

$$\dot{\Phi}(s) = \frac{k_0}{s} \cdot \frac{0.2214}{s + 0.8432} \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow \dot{\Phi}(t) = A_1 + A_2 t + A_3 e^{-0.8432t}$$

- Un sistema di controllo integrale in retroazione unitaria soddisfa i requisiti richiesti



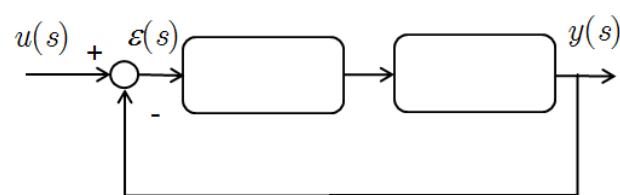
- **Esercizio:** E' possibile progettare un controllore tale che vi sia un errore a Regime nullo tra comando di alettone ed angolo di Rollio?

$$G_\delta^\Phi(s) = \frac{\Phi(s)}{\delta_A(s)} = \frac{0.2214}{s(s + 0.8432)}$$



# Risposta a Regime

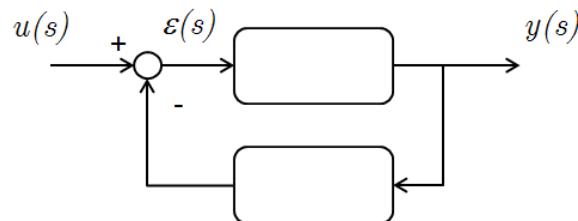
- Esiste una differenza tra feedback unitario e non unitario per quanto riguarda l'errore a regime?



$$K(s) = \frac{k_0}{s} \quad G(s) = \frac{0.2214}{s + 0.8432}$$

- L'errore tende a zero nel caso di tipo appropriato della funzione di trasferimento di anello

$$\frac{\dot{\Phi}(s)}{\dot{\Phi}_{DES}(s)} = \frac{0.2214 \cdot k_0}{s^2 + 0.8432 \cdot s + 0.2214 \cdot k_0}$$

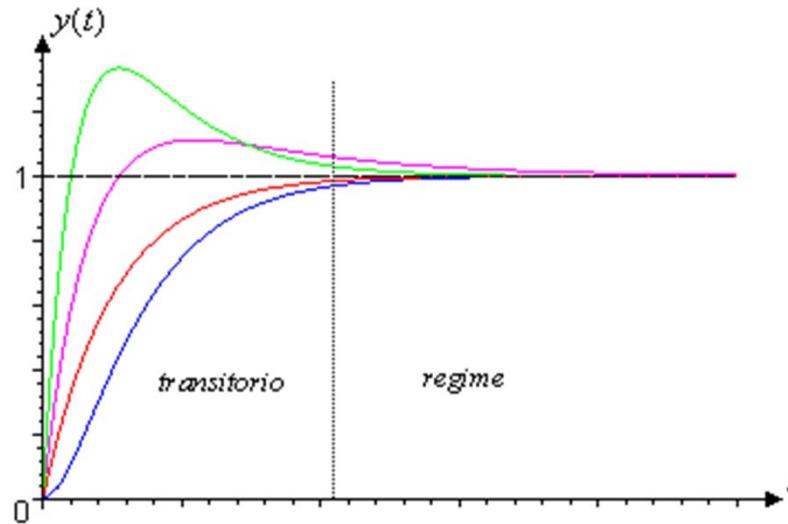


- L'errore non tende mai a zero

$$\frac{\dot{\Phi}(s)}{\dot{\Phi}_{DES}(s)} = \frac{0.2214}{s^2 + 0.8432 \cdot s + 0.2214 \cdot k_0}$$



# Risposta Transitoria



- ❑ Lo studio della risposta transitoria di un sistema permette di studiare i seguenti requisiti principali:
  1. Stabilità
  2. Ampiezza massima delle componenti oscillatorie
  3. Velocità di Risposta
- ❑ In termini di  $FdT$ , gli elementi che influenzano la risposta transitoria sono:
  1. I poli, che determinano l'andamento temporale
  2. Gli zeri ed il guadagno che determinano l'ampiezza ed il valore di regime



## Risposta Transitoria

$$G_1(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+4)}, \quad G_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

- In entrambi i casi, la risposta ad un impulso ha la forma:

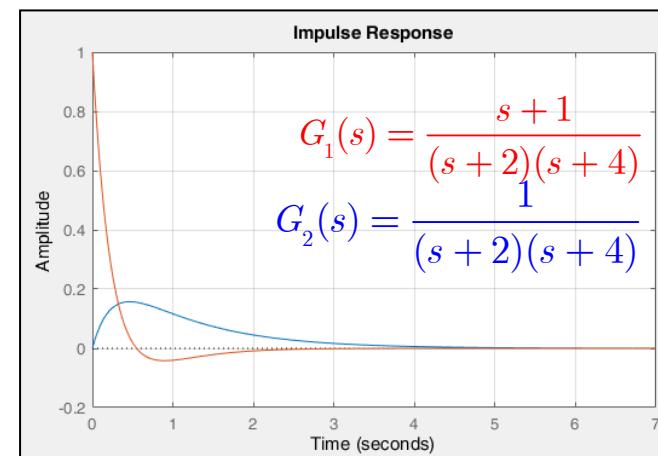
$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$$

- Le costanti sono diverse e sono date dai residui della scomposizione in fratti semplici. Nota che i residui dipendono dalle condizioni iniziali, dagli zeri del sistema e (in modo equivalente) dagli autovettori associati alla matrice  $A$ .

$$(c_1, c_2) = f(z_i, \mathbf{x}_0)$$

$$G_1(s) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases} \quad G_2(s) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

$$y_1(t) = -\frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{3}{2} e^{-4t} \quad y_2(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-4t}$$

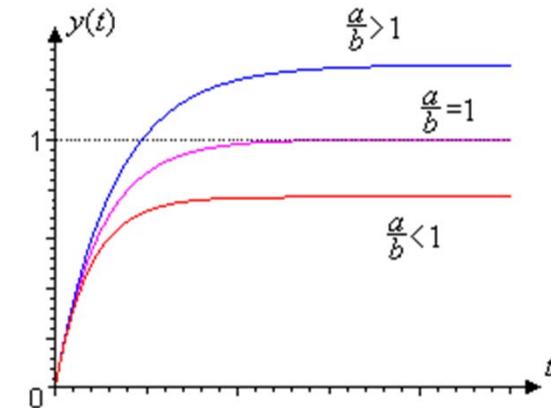




## Risposta Transitoria

- L'analisi della risposta transitoria si basa tradizionalmente su un ingresso a gradino e sulla valutazione del sistema in base all'ordine
- Risposta transitoria per sistemi del 1° ordine

$$G(s) = \frac{a}{s + b} \quad y(t) = \frac{a}{b} \left(1 - e^{-bt}\right)$$



- **Definizione** – Costante di tempo: Si definisce costante di tempo il parametro  $\tau = 1/b$ . Tale parametro fornisce informazioni su quanto velocemente il sistema tende al suo valore di regime

$$y(\tau) = 63\% y_\infty \quad \text{dove } y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

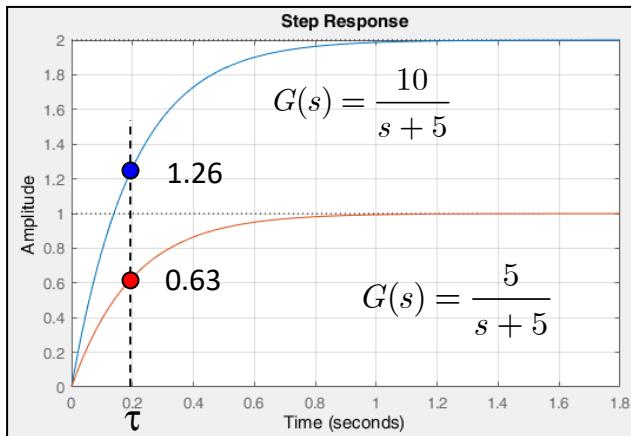
$$t = \tau = \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad y(\tau) = \frac{a}{b} \left(1 - e^{-b\tau}\right) = \frac{a}{b} \left(1 - e^{-1}\right) = 0,632 \cdot \frac{a}{b} \cong 63\% \frac{a}{b}$$

- Un'altra definizione è che la costante di tempo sia pari a  $3/b$ , ovvero tale che  $y(\tau) = 95\%$  del valore finale.



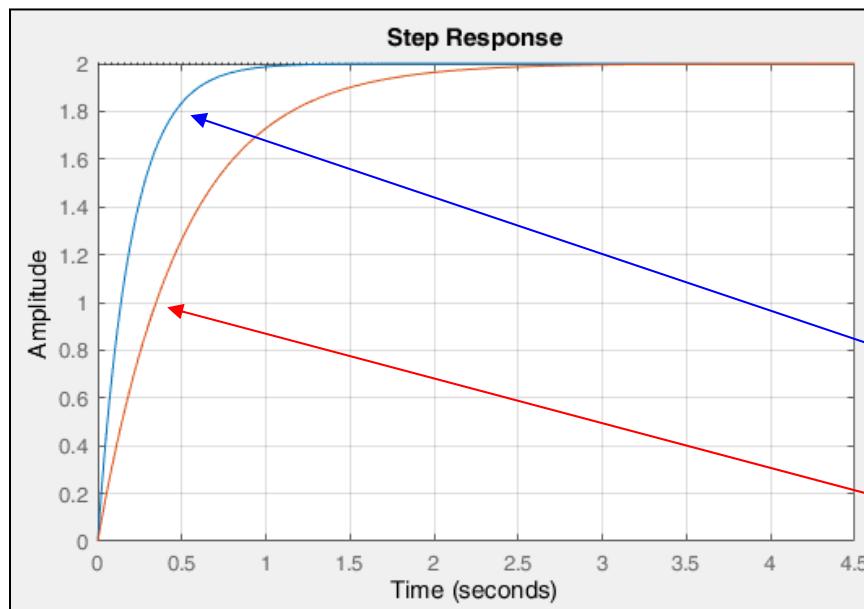
# Risposta Transitoria

## □ Esempio



- I due sistemi hanno la stessa costante di tempo avendo lo stesso polo -5

$$\tau = \frac{1}{5} \text{ sec}$$



- Quanto minore è la costante di tempo, tanto maggiore è la velocità di risposta del sistema

$$G_1(s) = \frac{10}{s+5}, \tau = 0.2 \text{ sec}, y_{\infty} = 2, \varepsilon_{ss} = 100\%$$

$$G_2(s) = \frac{4}{s+2}, \tau = 0.5 \text{ sec}, y_{\infty} = 2, \varepsilon_{ss} = 100\%$$



## Risposta Transitoria

□ **Problema:** Dato il sistema  $G(s) = \frac{1.8}{s + 5}$

si desiderano i seguenti requisiti di risposta temporale:

- Costante di tempo  $\tau = 0.1$  sec
- Errore a regime al gradino non superiore al 2%

- Analisi:
  - Sistema asintoticamente stabile

$$\begin{cases} \tau = 0.2 \text{ sec} \\ \varepsilon_{STEP} = 64\% \end{cases}$$

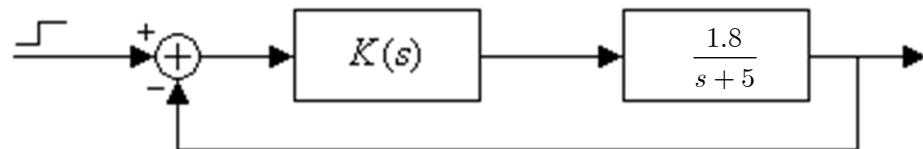
- Data la stabilità del sistema è possibile verificare la sintesi di un controllore in ciclo aperto, che sfrutta una cancellazione zero – polo (**anche se la procedura è sconsigliabile per le ragioni viste in precedenza**):



$$K(s) = K \frac{s + 5}{s + 10}, \frac{1.8K}{10} < 0.02 \Rightarrow K > 0.1111$$



## Risposta Transitoria

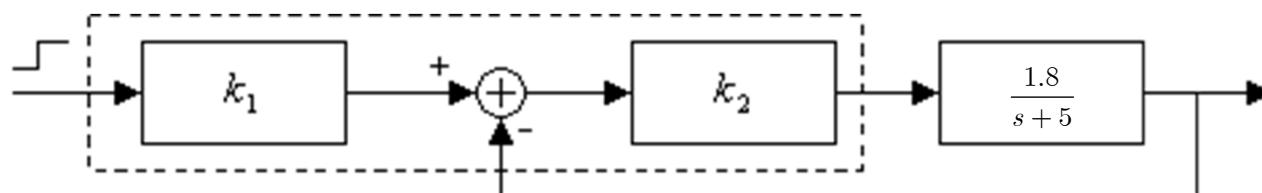


Scegliendo un controllore Proporzionale (cioè  $K(s) = k = \text{cost.}$ ), si ha un errore a regime finito e non nullo

$$G_{CL}(s) = \frac{1.8k}{s + 5 + 1.8k}$$

- Per  $K = 2.7778$ , la costante di tempo è  $\tau = 0.1$  sec, ma  $\varepsilon = 50\%$
- Per  $K < 0.068$ ,  $\varepsilon < 2\%$ , ma la costante di tempo è  $\tau = 0.1952$  sec

- **Vi sono 2 Specifiche di progetto Linearmente Indipendenti e dobbiamo usare 2 parametri Indipendenti nel controllore**



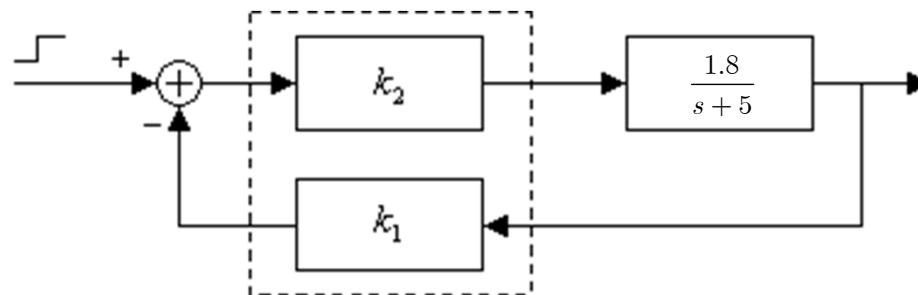
$$G_{CL}(s) = \frac{1.8k_1 k_2}{s + 5 + 1.8k_2}$$



## Risposta Transitoria

- Costante di tempo  $b = \frac{1}{\tau} = 10 \Rightarrow 5 + 1.8k_2 = 10 \Rightarrow k_2 = 2.7778$

- Errore a Regime  $\frac{4k_1 k_2}{2 + 4k_2} = \frac{5k_1}{10} = 0.5k_1 = 0.98 \quad (1.02) \Rightarrow k_1 = 1.96 \quad (2.04)$



- Costante di tempo

$$b = \frac{1}{\tau} = 10 \Rightarrow 5 + 1.8k_1 k_2 = 10 \Rightarrow k_1 k_2 = 2.7778$$

- Errore a Regime

$$\frac{1.8k_2}{5 + 1.8k_1 k_2} = \frac{1.8k_2}{10} = 0.18k_2 = 0.98 \quad (1.02) \Rightarrow k_2 = 5.44 \quad (5.6667)$$

$$\begin{cases} k_1 = 0.5106 \\ k_2 = 5.44 \end{cases}, \quad \begin{cases} k_1 = 0.4902 \\ k_2 = 5.6667 \end{cases}$$



## Risposta Transitoria



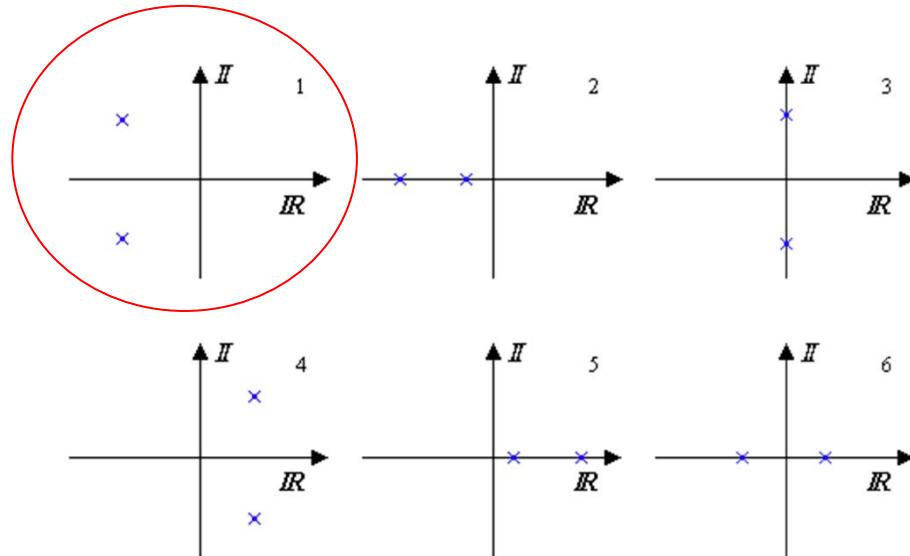
- Domanda:** Possiamo usare una retroazione unitaria con un controllore che rende la FdT di anello di tipo 1, così che l'errore a regime al gradino risulta nullo?
  
- Risposta:** .....



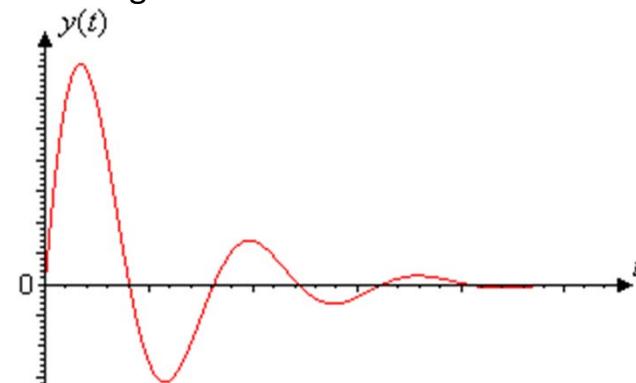
## Risposta Transitoria

### □ Risposta transitoria per sistemi del 2° ordine

Le possibili disposizioni, nel piano complesso, dei poli di un sistema del secondo ordine sono:



Risposta impulsiva di un sistema del secondo ordine con poli complessi e coniugati asintoticamente stabile



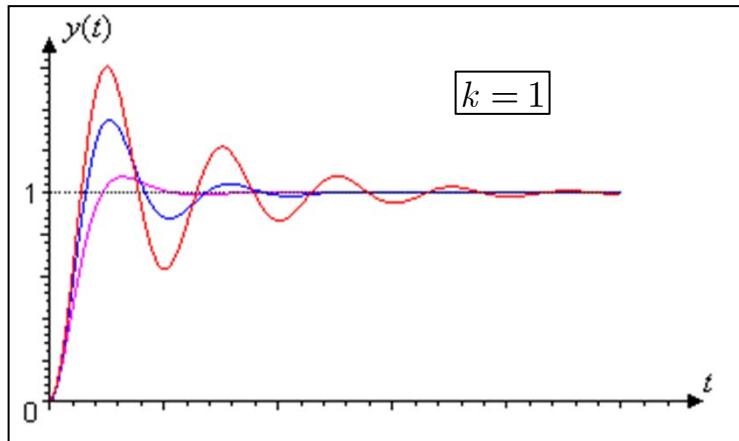
- L'unica situazione di interesse è data dal **sistema 1**; infatti, per gli altri si può notare che:
  - sistema 2 : può essere visto come composizione di due sistemi del primo ordine.
  - sistema 3 : è la rappresentazione di un'oscillazione autosostenuta; l'interesse su di esso è marginale dato che, solo per segnali impulsivi e stabili la risposta è limitata.
  - sistemi 4, 5 e 6 : sono sistemi instabili che richiedono, se devono essere studiati, una stabilizzazione.



# Risposta Transitoria

- La FdT di un sistema del secondo ordine ha la forma:

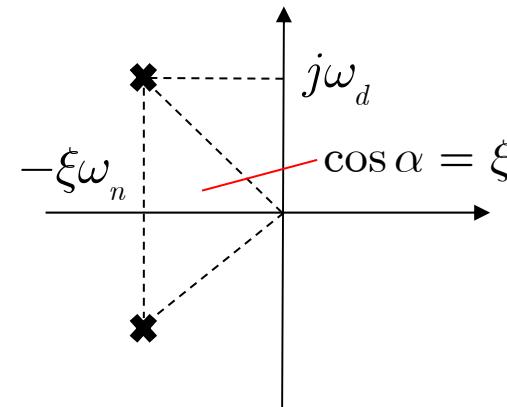
$$G(s) = k \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = k \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi s}{\omega_n} + 1}$$



- $\omega_n$  = pulsazione propria non smorzata
- $\omega_d$  = pulsazione propria smorzata
- $\xi$  = fattore (coefficiente) di smorzamento

- I poli del sistema sono dati da:

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \\ \alpha = \cos^{-1}(\xi)$$

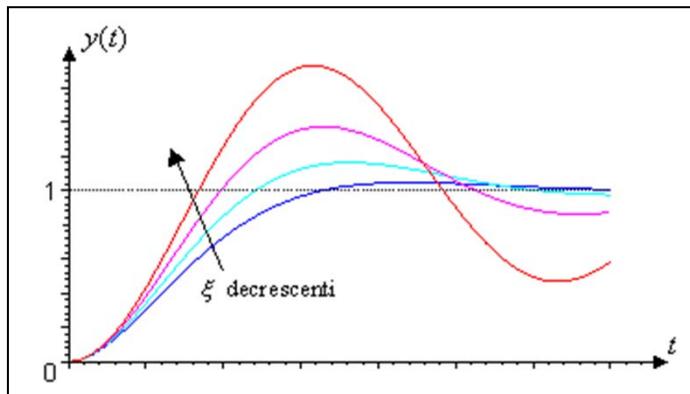


$$y(t) = k \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \left( \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \cos^{-1}(\xi) \right) \right]$$



# Risposta Transitoria

- Effetto del Coefficiente di Smorzamento ( $k = 1$ )



$\xi$  è lo smorzamento; da esso dipende la forma della risposta:

$\xi > 1$  → 2 radici reali (sistema del secondo tipo, sovrasmorzato)

$\xi = 1$  → 2 radici reali coincidenti (sistema del secondo tipo con smorzamento critico)

$0 < \xi < 1$  → 2 radici complesse coniugate (oscillazione smorzata)

$\xi = 0$  → 2 radici immaginarie pure (sistema del tipo 3, oscillazione non smorzata)

- A differenza di un sistema del primo ordine, in questo caso vi sono due parametri che influenzano la risposta transitoria:

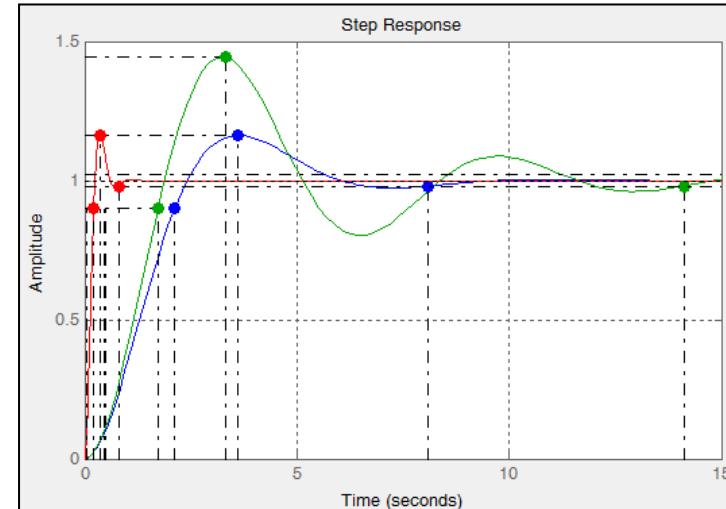
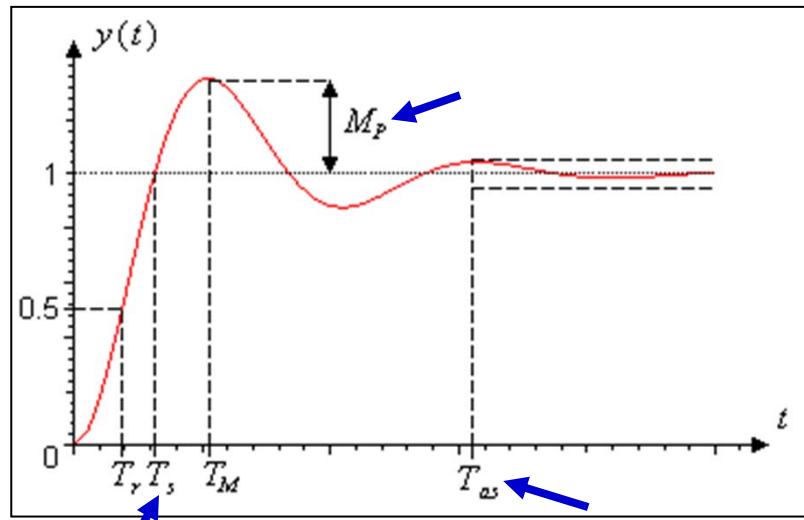
- $\omega_n$  = pulsazione propria non smorzata
- $\xi$  = coefficiente di smorzamento

$$\omega_n = 2\pi f = \frac{2\pi}{P}$$



# Risposta Transitoria

## □ Parametri Caratteristici della risposta transitoria



- 1) Sovraelongazione Massima: indica la massima ampiezza di Oscillazione
- 2) Tempo di Salita: indica la velocità di risposta
- 3) Tempo di Assestamento: indica il raggiungimento della condizione di Regime



## Risposta Transitoria

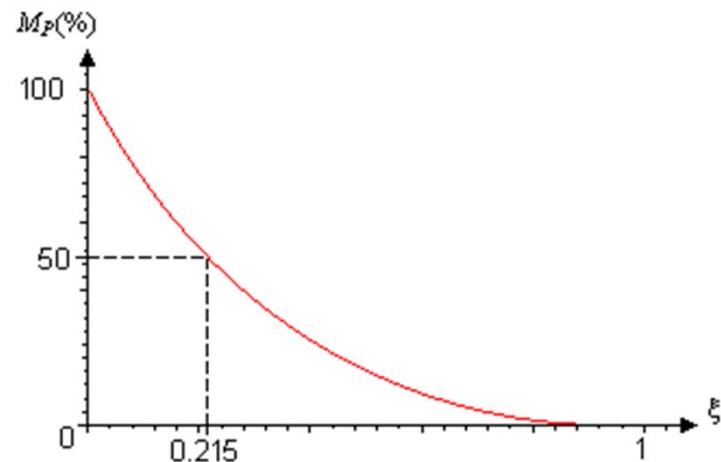
### □ Sovraelongazione Massima $M_p$

Indicando con  $y_\infty$  il valore di regime e con  $y_{\max}$  il valore massimo, la sovraelongazione massima percentuale risulta essere:

$$M_p = 100 \cdot \frac{y_{\max} - y_\infty}{y_\infty} = 100 \cdot e^{-\left(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}$$

$$y_{\max} = 1 + e^{-\left(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}; y_\infty = 1$$

$$T_M = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$



- La sovraelongazione massima fornisce anche una misura della "stabilità" del sistema; come visto, più il valore di  $\xi$  è basso più il sistema oscilla prima di raggiungere il valore di regime
- La sovraelongazione dipende soltanto dallo Smorzamento e non da altri parametri



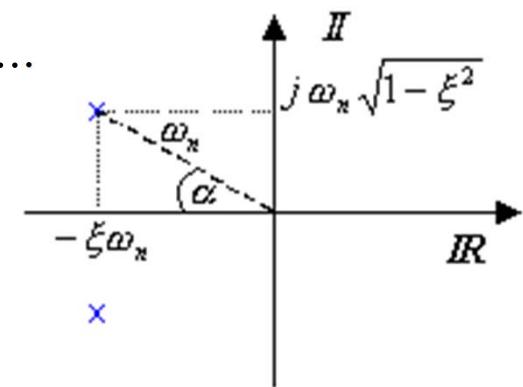
# Risposta Transitoria

## ☐ Tempo di Salita $T_s$

È definito come il tempo necessario affinchè il sistema arrivi, la prima volta, al valore di regime (sebbene esistano nei testi altre definizioni simili).

$$y(T_s) = 1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n T_s} \sin(\omega_d T_s + \cos^{-1}(\xi)) = \dots$$

$$\dots = 1 - e^{-\xi\omega_n T_s} \left[ \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin(\omega_d T_s) + \cos(\omega_d T_s) \right]$$



Da cui:

$$T_s = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \tan^{-1} \left( \frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{-\omega_n \xi} \right)$$

$$T_s = \frac{\pi - \cos^{-1} \xi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi - \alpha}{\omega_d}$$

$$T_s \cong \frac{0.8 + 2.5\xi}{\omega_n} \quad 0 < \xi < 1, \quad T_s \cong \frac{1 + 1.1\xi + 1.4\xi^2}{\omega_n} \quad 1 < \xi$$



## Risposta Transitoria

### ☐ Tempo di Assestamento $T_{as}$

Tempo oltre il quale la differenza fra valore di regime e valore effettivo dell'uscita rimane al di sotto di un valore  $\varepsilon$  calcolato come percentuale del valore di regime stesso (es.  $\varepsilon = 5\%$  o  $3\%$  o  $2\%$  di  $y_\infty$ ); superato il tempo di assestamento il sistema viene considerato a regime.

$$T_{a\varepsilon} = -\frac{1}{\xi\omega_n} \cdot \ln \varepsilon$$

$$\varepsilon = 2\% \rightarrow T_{a2} \cong \frac{4}{\xi\omega_n} \quad \varepsilon = 5\% \rightarrow T_{a5} \cong \frac{3}{\xi\omega_n}$$

Quanto detto è valido anche nel caso in cui il valore a regime dell'uscita sia diverso da 1; in tal caso è sufficiente assumere tutti i parametri normalizzati al valore di regime.

### ☐ Tempo di Ritardo $T_r$

Tempo affinchè l'uscita raggiunga il 50% del valore di regime

$$y(T_r) = \frac{1}{2} y_\infty$$

$$T_r \cong \frac{1 + 0.7\xi}{\omega_n} \quad 0 < \xi < 1$$

$$T_r \cong \frac{1 + 0.6\xi + 0.15\xi^2}{\omega_n} \quad 1 < \xi$$



## Risposta Transitoria

□ **Esempio 1:** Dato il sistema

$$G(s) = \frac{4}{(s + 0.8)}$$

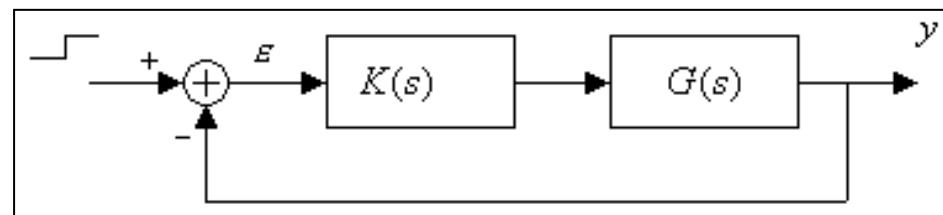
Progettare un controllore tale che

$$\begin{cases} \varepsilon_{step} = 0 \\ M_P \leq 10\% \\ T_{as} \leq 10\text{sec} \end{cases}$$

- **NOTA:** La struttura del controllore che soddisfi il requisito di regime deve essere impostata come primo step

$$K(s) \cdot G(s) = k_0 \frac{\prod_i (s + z_i)}{\prod_k (s + p_k)} = k_0 P(s)$$

- Requisito di Regime



- Requisito di Regime



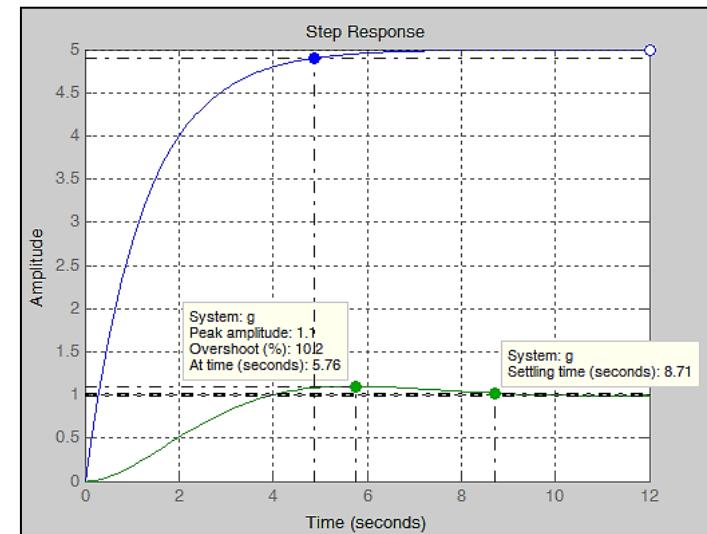
# Risposta Transitoria

$$\begin{cases} M_p = e^{-\left(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)} \leq 0.1 \\ T_{as} \cong \frac{4}{\xi\omega_n} \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \geq 0.5916 \\ \omega_n \leq 0.68 \end{cases}$$

- Requisito di Risposta Transitoria

- Sintesi del controllore  $K(s)$ 
  - $K(s) = k$  non annulla l'errore a regime
  - Occorre un controllore integrale  $K(s) = k/s$
- Il controllore deve garantire la stabilità asintotica in ciclo chiuso e deve avere almeno un integratore per il requisito di regime.

$$G_{CL}(s) = \frac{4k}{s^2 + 0.816s + 4k} \Rightarrow k = 0.1156$$

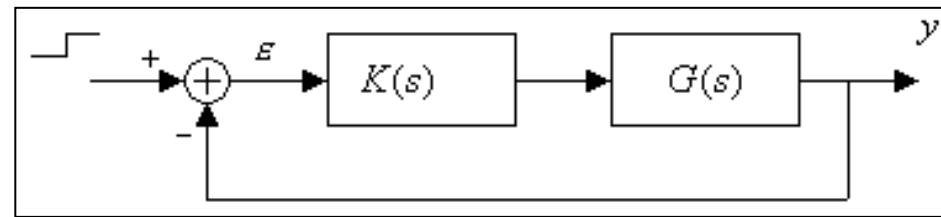




## Risposta Transitoria

□ **Esempio:** Dato il sistema instabile  $G(s) = \frac{16}{(s+5)(s-1)}$  Progettare un controllore tale che

$$\begin{cases} \varepsilon_{step} = 0 \\ M_p \leq 10\% \\ T_{as} \leq 10\text{sec} \end{cases}$$



$$K(s) \cdot G(s) = k_0 \frac{\prod_i (s + z_i)}{\prod_k (s + p_k)} = k_0 P(s)$$

▪ Requisito di Regime

- **NOTA:** La struttura del controllore che soddisfi il requisito di regime deve essere impostata come primo step

$$\begin{cases} M_p = e^{-\left(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)} \leq 0.1 \\ T_{as} \cong \frac{4}{\xi\omega_n} \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \geq 0.5916 \\ \omega_n \leq 0.68 \end{cases}$$

▪ Requisito di Risposta Transitoria



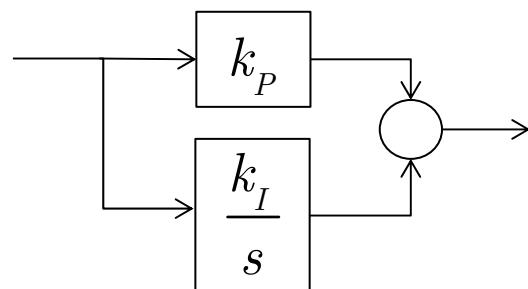
## Risposta Transitoria

- Il controllore deve garantire la stabilità asintotica in ciclo chiuso e deve avere almeno un integratore per il requisito di regime.
  - Il controllore deve essere almeno un **controllore integrale** affinchè la FDT in anello aperto sia di **tipo 1**.

$$G(s)K(s) = \frac{16k}{s(s+5)(s-1)}$$

$$G_{CL}(s) = \frac{16k}{s^3 + 4s^2 - 5s + 16k}$$

- Il sistema in anello chiuso è sempre instabile per qualsiasi valore di  $k$ 
  - Scelta di tentativo: Controllore P-I (Proporzionale-Integrale)



$$K(s) = k_P + \frac{k_I}{s} = k \frac{s + z}{s}$$



## Risposta Transitoria

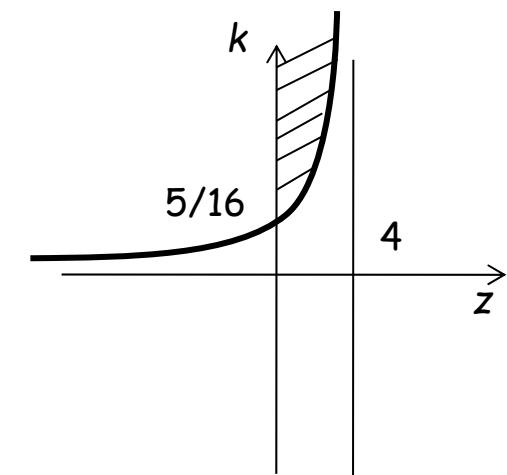
$$G(s)K(s) = \frac{16k(s+z)}{s(s+5)(s-1)}$$

$$G_{CL}(s) = \frac{16k(s+z)}{s^3 + 4s^2 + (16k-5)s + 16kz}$$

- Criterio di Routh

$$\begin{cases} 16k - 5 > 0 \Rightarrow k > \frac{5}{16} > 0 \\ 16kz > 0 \Rightarrow z > 0 \end{cases}$$

|               |         |   |
|---------------|---------|---|
| 1             | 16k - 5 | 0 |
| 4             | 16kz    | 0 |
| 16k - 5 - 4kz | 0       |   |
| 16kz          |         |   |



$$\begin{aligned} k &> \frac{5}{4(4-z)} \\ 4 &> z > 0 \end{aligned}$$

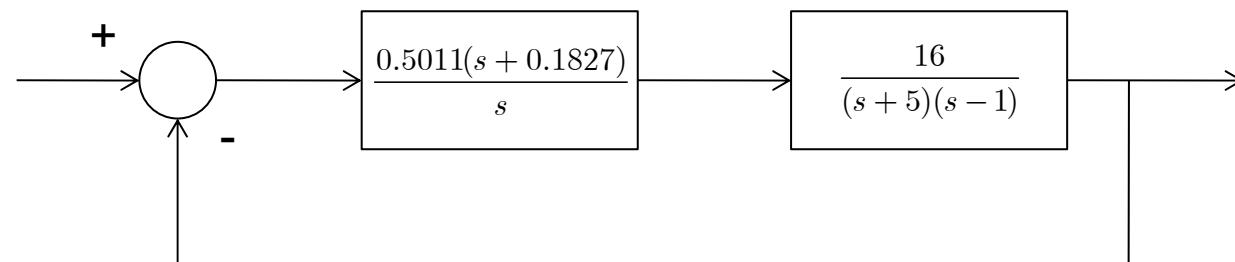


## Risposta Transitoria

- Dai requisiti di Risposta Transitoria:

$$G_{CL}(s) = \frac{16k(s+z)}{s^3 + 4s^2 + (16k-5)s + 16kz} \cong \frac{16k(s+z)}{(s^2 + 0.8001s + 0.4578)(s+P)} = \\ = \frac{16k(s+z)}{s^3 + (0.8001 + P)s^2 + (0.4578 + 0.8001P)s + 0.4587P}$$

$$\begin{cases} 0.8001 + P = 4 \\ 0.4578 + 0.8001P = 16k - 5 \\ 0.4587P = 16kz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = 3.1999 \\ k = 0.5011 \\ z = 0.1827 \end{cases}$$

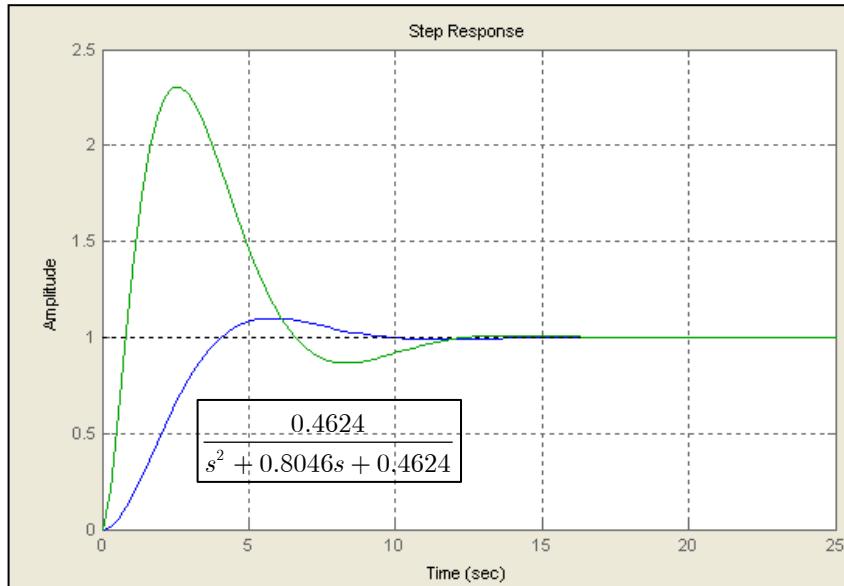




# Risposta Transitoria

- Commenti:

$$G_{CL}(s) = \frac{8.0176(s + 0.1827)}{s^3 + 4s^2 + 3.0176s + 1.4678}$$



1. Errore a Regime 😊
2. Tempo di Assestamento 😋
3. Sovraelongazione 😥

## ■ Possibili Cause?

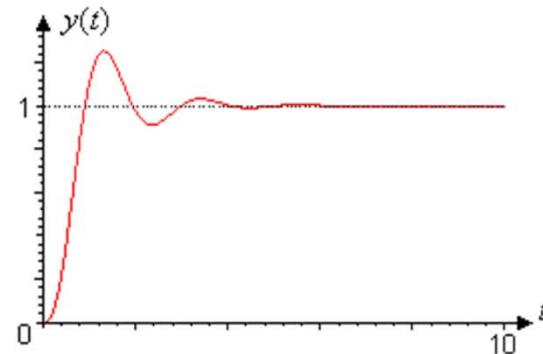
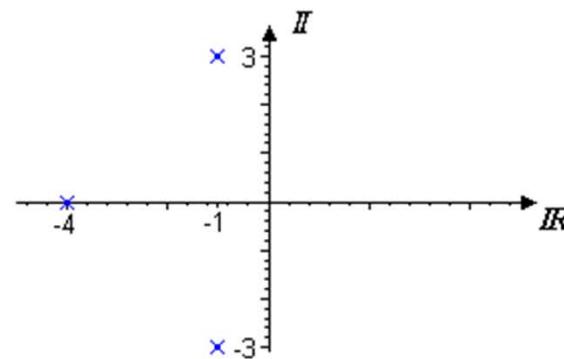
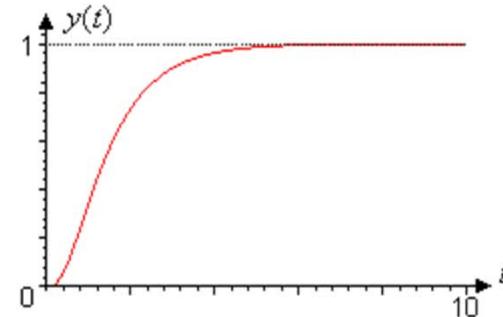
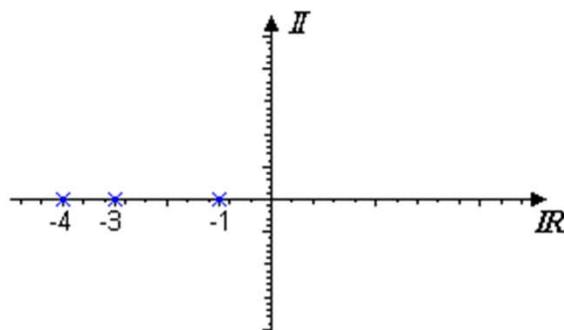
Rispetto ad un sistema del 2<sup>o</sup> ordine puro si ha:

- Il sistema ha uno Zero a -0.1827
- Il sistema è del 3<sup>o</sup> ordine e vi è un Polo a -3.1999



## Poli Dominanti

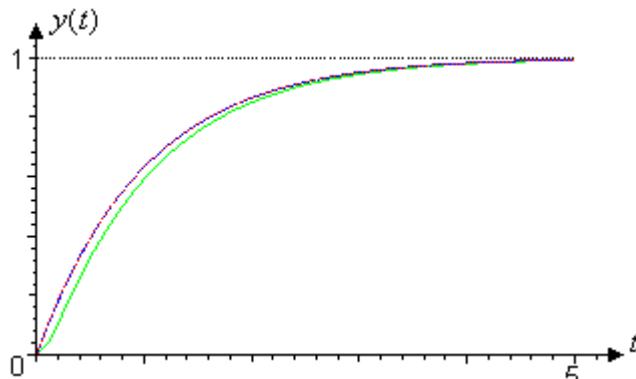
- Per i sistemi di ordine superiore al secondo non esistono espressioni analitiche per il calcolo dei parametri della risposta transitoria anche se questa mantiene le stesse proprietà dei sistemi del secondo ordine e viene caratterizzata attraverso gli stessi parametri





## Poli Dominanti

- Lo studio dei sistemi di ordine superiore può essere fatto mediante una approssimazione tramite il concetto dei **poli dominanti**.
- **Definizione:** I *poli dominanti* di un sistema sono quelli, reali o complessi, molto più vicini all'asse immaginario rispetto agli altri poli e sono i più critici per la stabilità del sistema stesso.
- È importante tenere presente che un polo viene considerato dominante in funzione della sua posizione in relazione agli altri poli e non in funzione della sua posizione "assoluta".
- Di solito si usa una approssimazione a poli dominanti del primo o del secondo ordine, per cui possono essere usate le espressioni analitiche dei parametri di risposta transitoria



$$G_1(s) = \frac{1000}{(s + 1000)(s + 1)}$$

$$y_1(t) = c_1 e^{-1000t} + c_2 e^{-t} \cong -e^{-1000t} + e^{-t}$$

$$G_2(s) = \frac{10}{(s + 10)(s + 1)}$$

$$y_2(t) = c_1 e^{-10t} + c_2 e^{-t} \cong -e^{-10t} + e^{-t}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{(s + 1)}$$

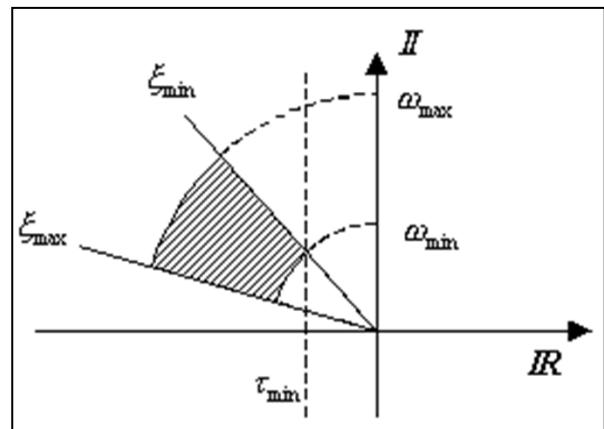
$$y_3(t) = e^{-t}$$

$G_3$  è una buona approssimazione di  $G_1$  ma non di  $G_2$



## Poli Dominanti

- La "zona" dei poli dominanti dipende dalla particolare applicazione; è chiaro che se i poli dominanti sono complessi coniugati, rivestono ugual importanza sia la parte reale che quella immaginaria.



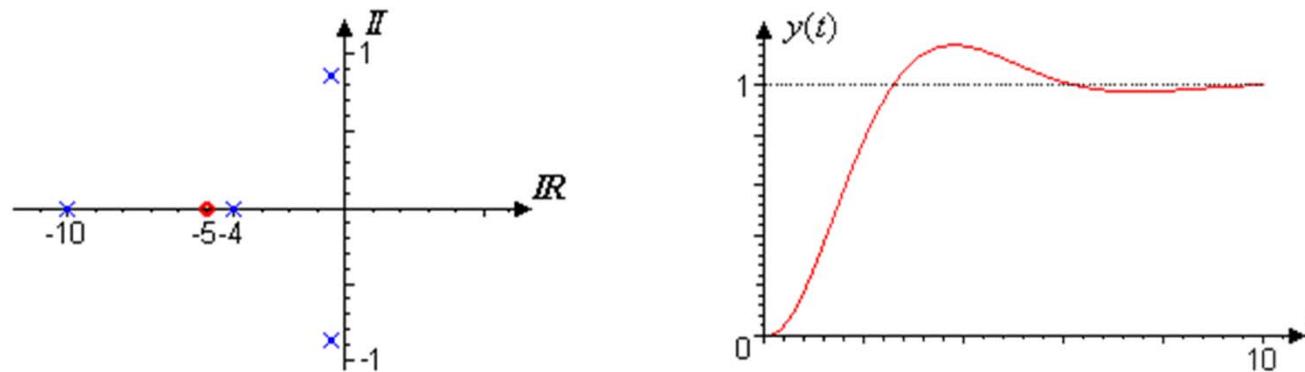
- In molti casi, le specifiche di Risposta Transitoria possono essere fornite in termini di Poli dominanti complessi e coniugati, oppure reali

- Esistono diverse tecniche per l'approssimazione di sistemi di ordine superiore con sistemi del secondo ordine, come quella della tangente, la tecnica delle aree, gli approssimanti di Padè o la *Trasformazione bilanciata* che tiene conto di controllabilità e osservabilità del sistema.
- Una rappresentazione con poli dominanti può essere anche usata per stabilire un **modello desiderato** di comportamento nel transitorio



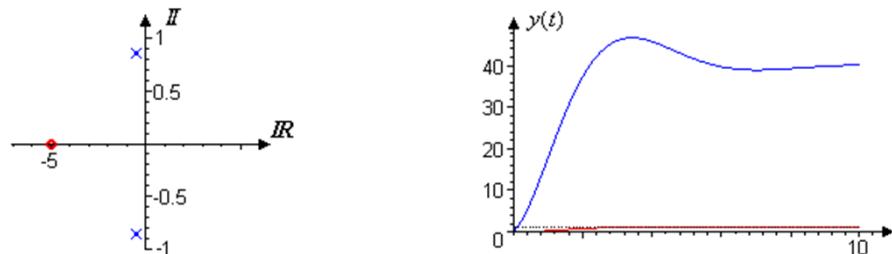
## Poli Dominanti

□ **Esempio:**  $G(s) = \frac{8(s + 5)}{(s^2 + s + 1)(s + 4)(s + 10)}$



- Se non è richiesta una precisione estrema il sistema può essere approssimato prendendo in considerazione solo i poli dominanti, cioè quelli con parte reale più vicina all'origine, che hanno una dinamica più lenta; è però necessario mantenere quelle che sono le caratteristiche del sistema a regime e quindi anche al numeratore della FdT .

$$G(s) = \frac{8(s + 5)}{(s^2 + s + 1)}$$



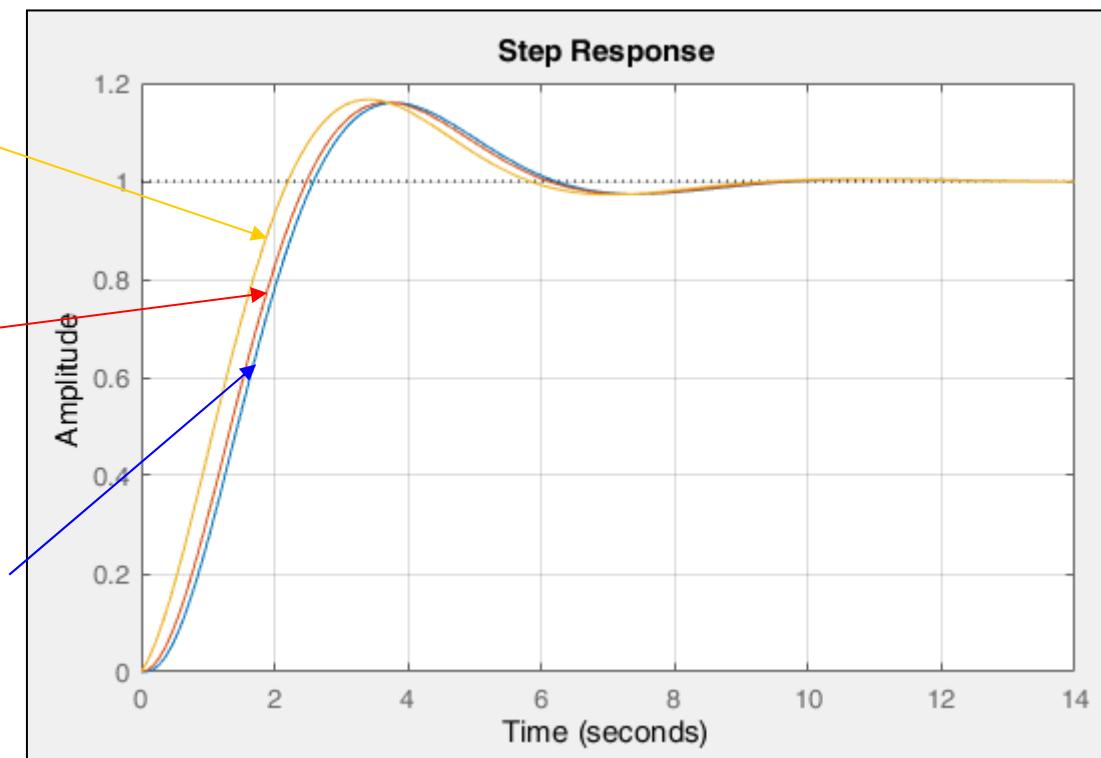


## Poli Dominanti

$$G(s) = \frac{0.2(s + 5)}{(s^2 + s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{0.8(s + 5)}{(s^2 + s + 1)(s + 4)}$$

$$G(s) = \frac{8(s + 5)}{(s^2 + s + 1)(s + 4)(s + 10)}$$

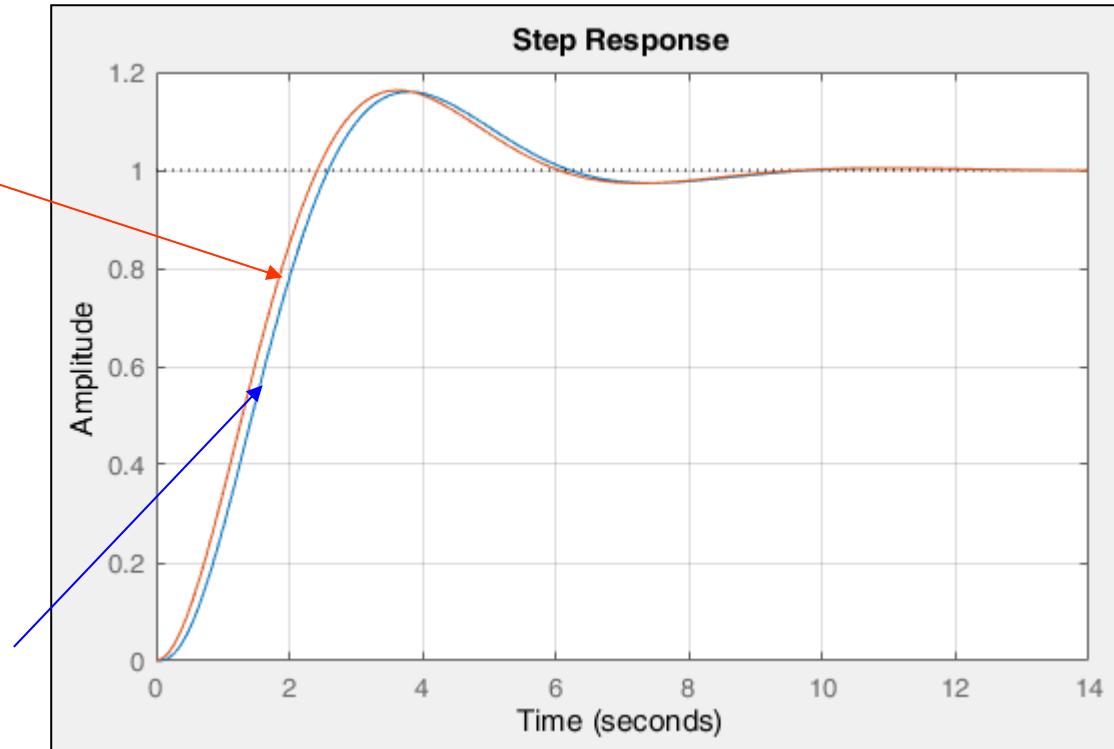




## Poli Dominanti

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{8(s + 5)}{(s^2 + s + 1)(s + 4)(s + 10)}$$



- Nel caso in cui l'approssimazione sia soddisfacente, il sistema del secondo ordine può essere usato come dinamica reale, riducendo la complessità del problema.



# Poli Dominanti

## □ Esempio:

Transfer function:

$$10 s + 150$$

$$-----$$
$$s^4 + 110.6 s^3 + 1067 s^2 + 710 s + 1000$$

>> ltiview

>> sys2=tf(0.15,[1 0.6 1])

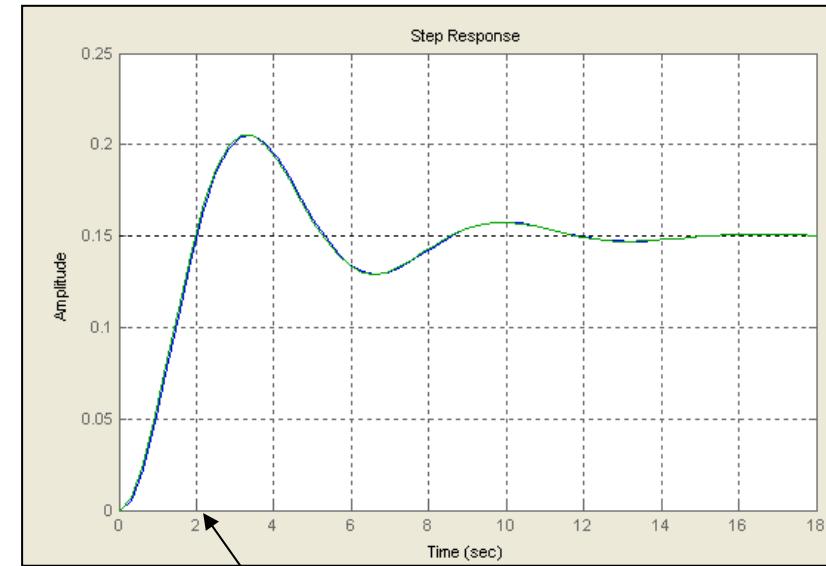
|                   |
|-------------------|
| -100.0000         |
| -10.0000          |
| -0.3000 + 0.9539i |
| -0.3000 - 0.9539i |

Transfer function:

$$0.15$$

$$-----$$

$$s^2 + 0.6 s + 1$$



- Usando l'approssimazione a poli dominanti possiamo progettare un controllore per diminuire il tempo di salita (adesso circa 2 sec).

$$T_s = \frac{\pi - \alpha}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

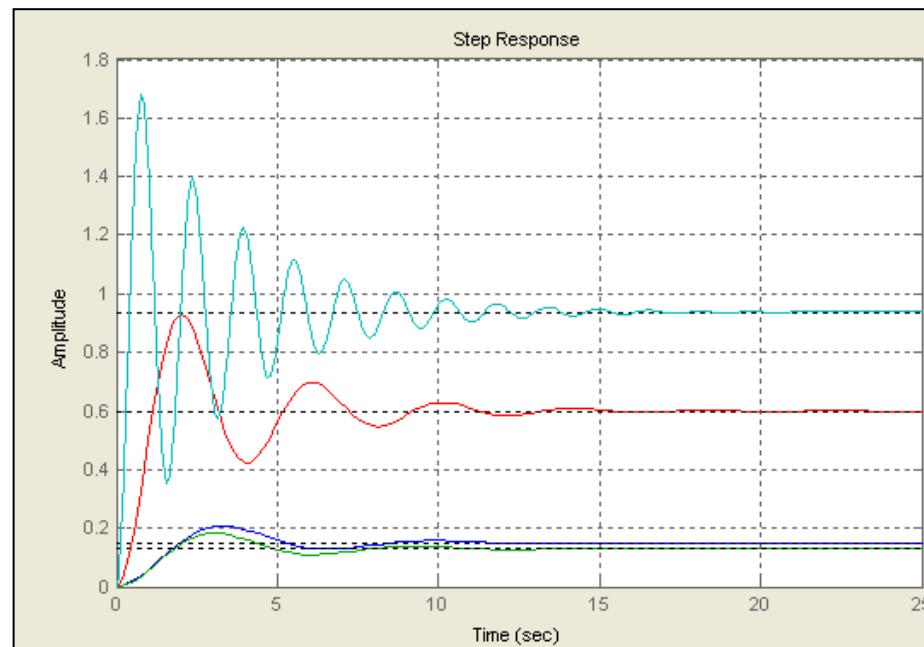
- Questo può essere fatto con un controllore Proporzionale in retroazione unitaria



## Poli Dominanti

$$G^{CL}(s) = \frac{0.15k}{s^2 + 0.6s + (1 + 0.15k)} \quad \begin{cases} \omega_n = \sqrt{(1 + 0.15k)} \\ \xi = \frac{0.3}{\sqrt{(1 + 0.15k)}} \end{cases}$$

- Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile per  $-6.667 < k < \infty$
- Consideriamo valori positivi del guadagno:  $k = 0, 1, 10, 100$

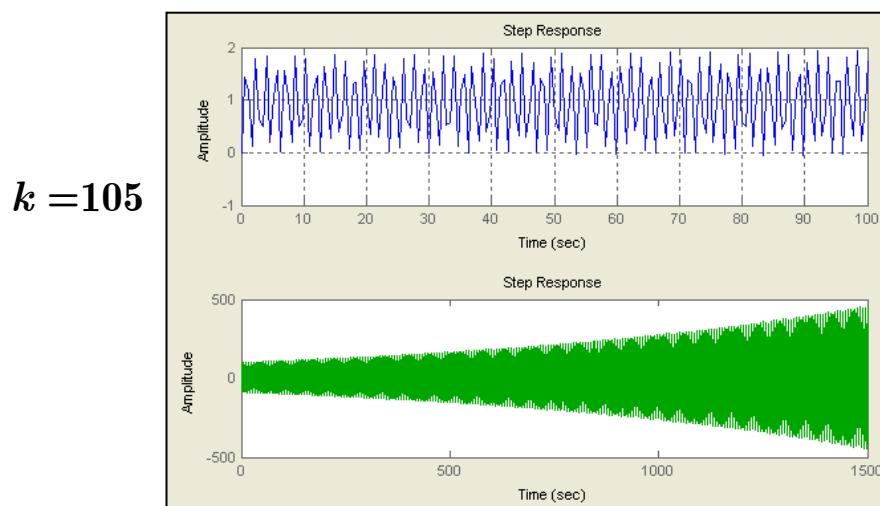
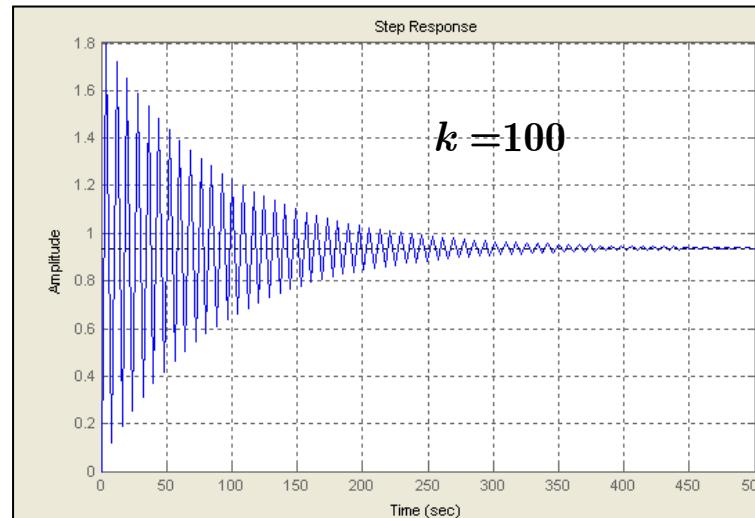
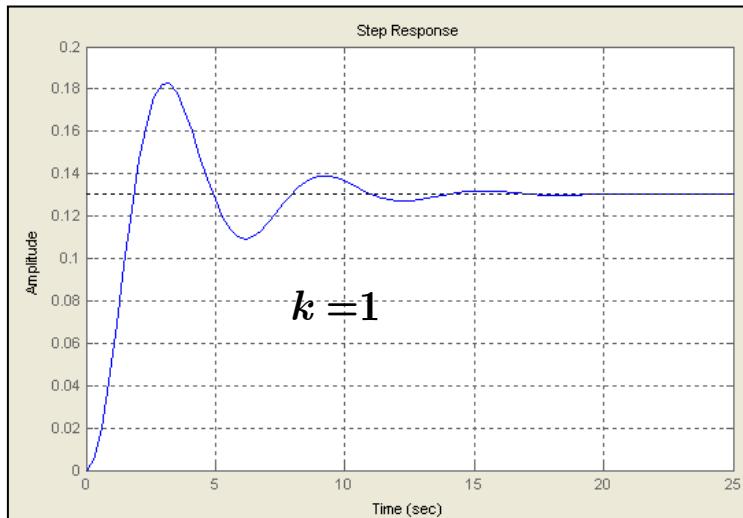


- Maggiore è il guadagno e minore è il tempo di salita



# Poli Dominanti

- Sostituiamo il controllore nel sistema originale:

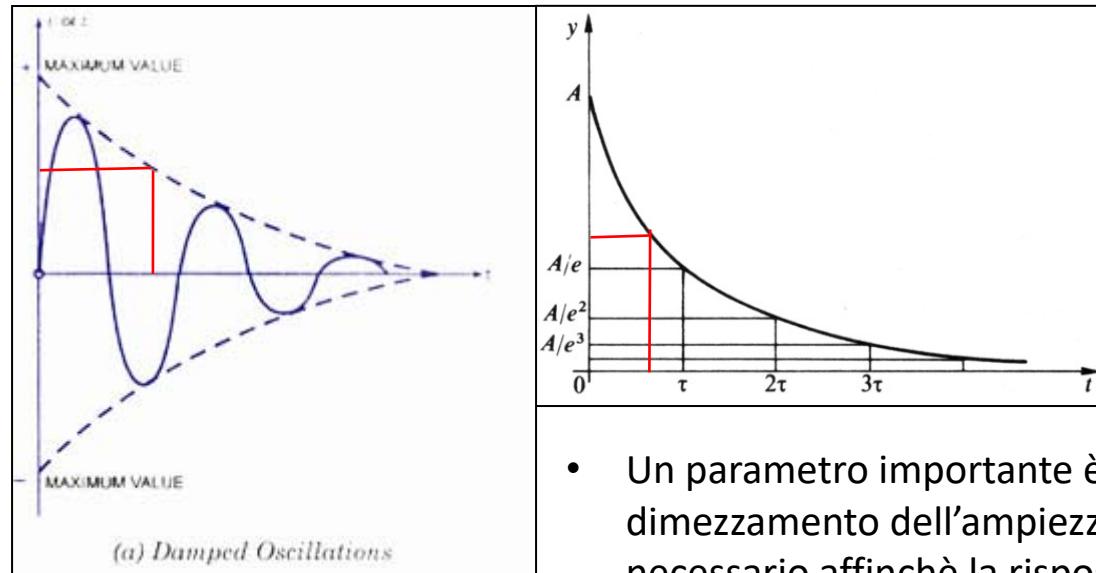


- NOTA:** L'approssimazione può essere usata ma il controllore va verificato sul sistema originale !!



# Poli Dominanti

- Stabilità asintotica implica (per un ingresso impulsivo):



- Un parametro importante è il tempo di dimezzamento dell'ampiezza  $t_{0.5}$  ovvero il tempo necessario affinchè la risposta sia la metà del valore iniziale.

$$y(t_{0.5}) = \frac{1}{2}y(0)$$

- Dato il sistema in anello aperto (instabile):

$$G_{OL}(s) = \frac{k(s + 0.5)}{(s - 1)(s - 2)(s + 100)}$$

- Esiste un  $k$  tale che il sistema in ciclo chiuso abbia un  $t_{0.5} < 1$  secondo?



# Poli Dominanti

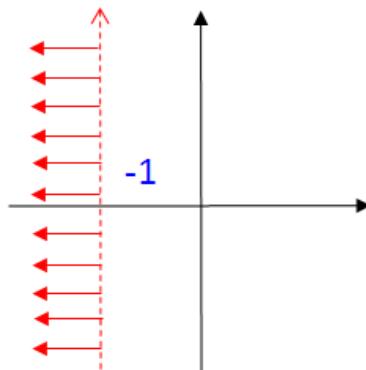
- Sistema in anello chiuso

$$G(s) = \frac{k(s + 0.5)}{s^3 + 97s^2 + (k - 298)s + 0.5k} \quad \text{CN } k > 298$$

|   |                 |           |                          |
|---|-----------------|-----------|--------------------------|
| 4 | 1               | $k - 298$ | 0                        |
| 3 | 97              | $0.5k$    | 0                        |
| 2 | $0.9948k - 298$ | 0         |                          |
| 1 | $0.5k$          |           | $\Rightarrow k > 299.55$ |

• Dal Criterio di Routh =>  $k > 299.55$

- Dal requisito di tempo di dimezzamento sostituire  $s = z - 1$



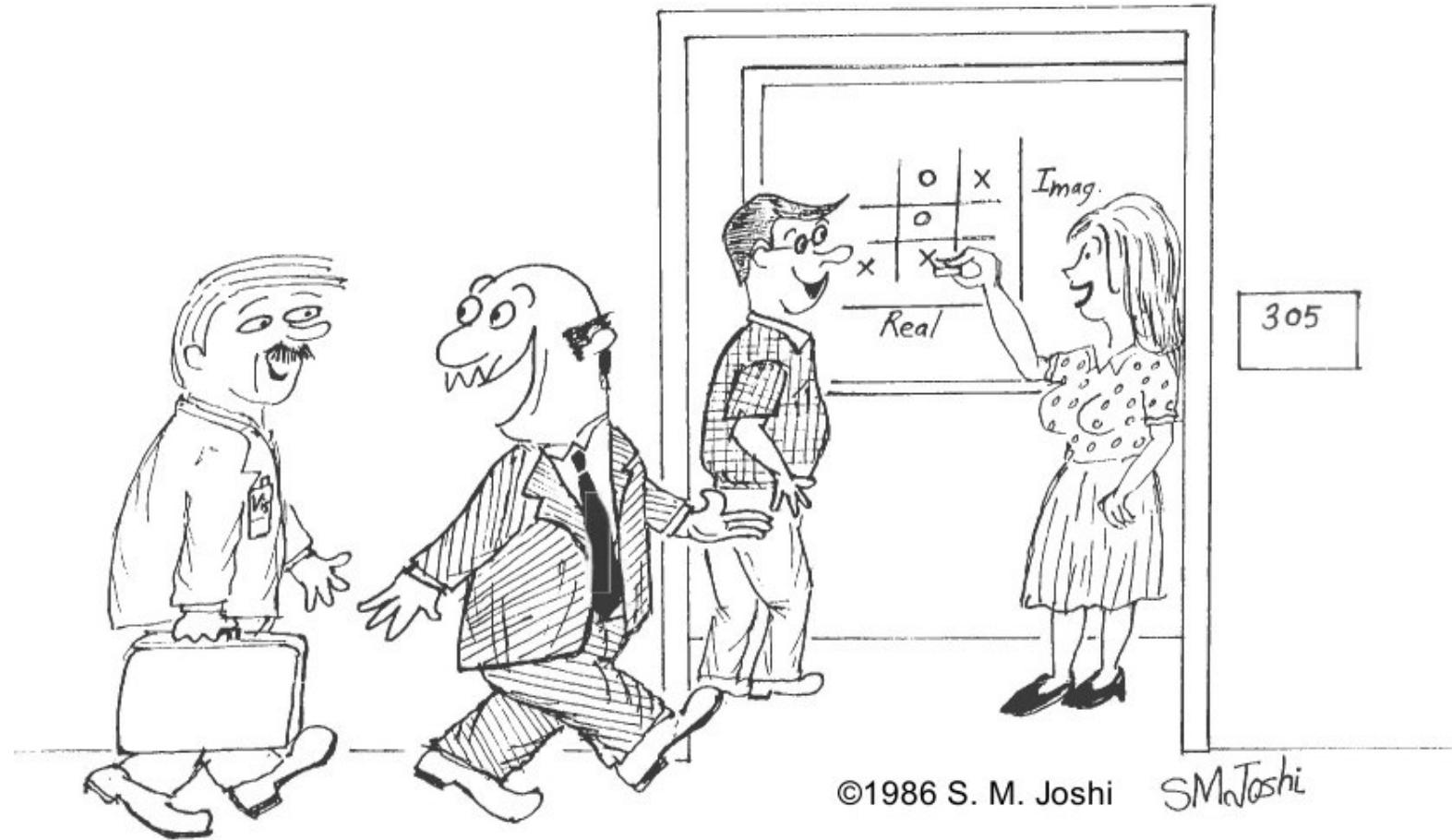
$$G(s) = \frac{k(z - 0.5)}{z^3 + 94z^2 + (k - 489)s + (594 - 0.5k)}$$

CN  $1188 > k > 489$

|   |                    |              |                                 |
|---|--------------------|--------------|---------------------------------|
| 4 | 1                  | $k - 489$    | 0                               |
| 3 | 94                 | $594 - 0.5k$ | 0                               |
| 2 | $1.0053k - 495.32$ | 0            |                                 |
| 1 | $594 - 0.5k$       |              | $\Rightarrow 1188 > k > 492.71$ |



## Influenza degli Zeri



*"...and our control engineers apply highly advanced, state-of-the-art techniques for selecting pole-zero locations."*



## Effetto degli Zeri

□ **Definizione 1:** Radice del numeratore della FdT (per sistemi SISO)

$$G(s) = \frac{s + 4}{s + 10} \quad z = -4, \text{ è uno zero del sistema}$$

□ **Definizione 2:** Frequenza bloccante del segnale d'ingresso

$$G(s) = \frac{s + 4}{s + 10}, u(t) = e^{-4t}, y(t) = e^{-10t} \quad z = -4, \text{ è uno zero del sistema in quanto } u(t) \text{ non appare nell'uscita}$$

- La presenza degli zeri nella *FdT* di un sistema influenza la risposta in termini di Ampiezza

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}; G_{CL}(s) = \frac{N(s)}{N(s) + D(s)}$$

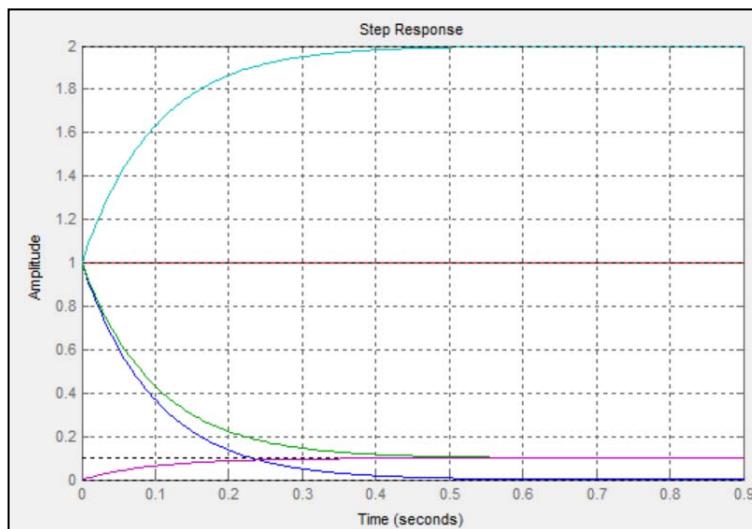


# Effetto degli Zeri

## □ Sistemi del 1<sup>o</sup> Ordine (risposta al gradino)

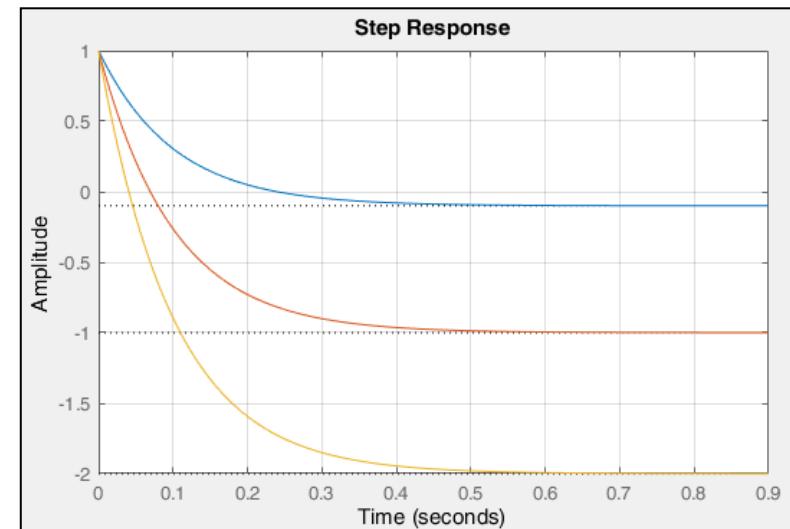
$$G(s) = \frac{s + z}{s + 10}$$

- Zero di parte reale negativa



— No zeri  
— zero = 0  
— zero = -1  
— zero = -10  
— zero = -20

- Zero di parte reale positiva



— zero = +1  
— zero = +10  
— zero = +20

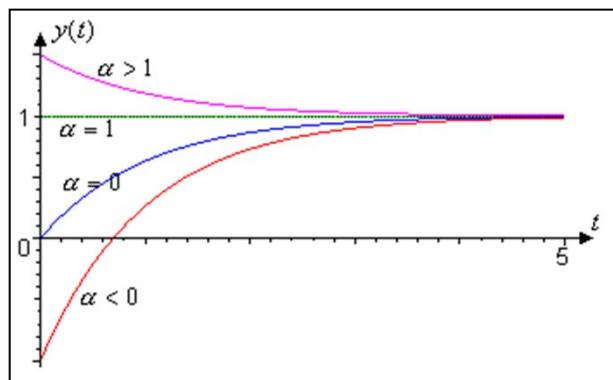


## Effetto degli Zeri

- La risposta al gradino in forma generale vale:

$$G(s) = k \cdot \frac{s + z}{s + p} = \mu \cdot \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} \quad T = \frac{1}{p}, \alpha = \frac{p}{z}$$

- $\mu$  prende il nome di Guadagno Statico, ovvero guadagno della funzione:  $G(0) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$
- Risposta al Gradino



$$y(t) = \mu \left[ 1 + (\alpha - 1) e^{-\frac{1}{T}t} \right] \quad t \geq 0$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \mu \cdot \frac{1 + \alpha Ts}{s(1 + Ts)} = \mu$$

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \mu \cdot \frac{1 + \alpha Ts}{s(1 + Ts)} = \mu \alpha$$

1. Nella simulazione si è supposto  $T = 1$  e  $\mu = 1$  (dal parametro  $T$  dipende la velocità di risposta, da  $\mu$  invece il valore finale del guadagno)
2. L'uscita presenta una discontinuità analitica in 0 (escludendo ovviamente  $\alpha = 0$ )
3. **Per valori negativi di  $\alpha$ , cioè in caso di zeri a parte reale positiva, il sistema risponde in maniera opposta rispetto al comando e risulta molto più lento nel raggiungere il valore di regime**
4. Per valori di  $\alpha > 1$  (cioè lo zero, a parte reale negativa, è più vicino all'asse immaginario rispetto al polo) l'uscita assume, inizialmente, un valore maggiore del valore di regime.
5. L'andamento di  $y(t)$  è sempre comunque esponenziale e dipende dalla costante di tempo associata al polo.



## Effetto degli Zeri

### □ Sistemi del 2º Ordine (risposta al gradino)

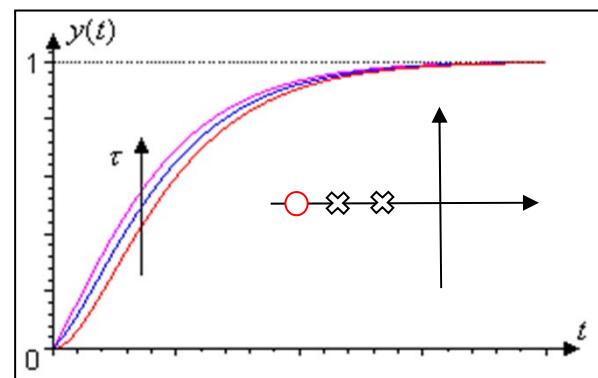
L'influenza di uno zero in un sistema del secondo ordine dipende dalla sua posizione sul piano complesso relativa a quella dei due poli

#### ■ Sistema con poli reali

$$G(s) = k \frac{(s + z)}{(s + p_1)(s + p_2)} = \mu \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad \mu = \frac{kz}{p_1 p_2}, \tau = \frac{1}{z}, T_1 = \frac{1}{p_1}, T_2 = \frac{1}{p_2}$$

$$y(t) = \mu \left( 1 - \frac{T_1 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2 - \tau}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right), \quad t \geq 0 \quad \textcolor{red}{\mu = 1 \text{ per semplicità}}$$

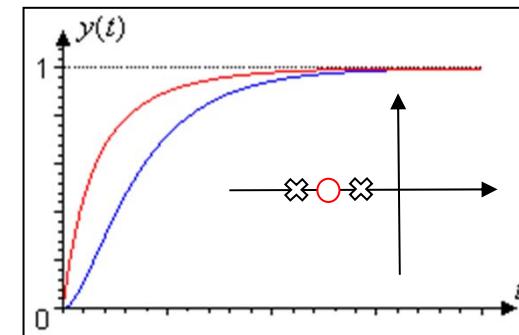
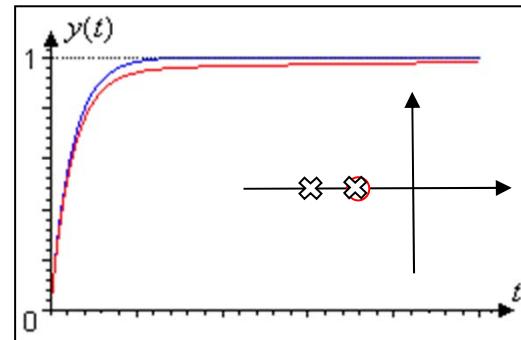
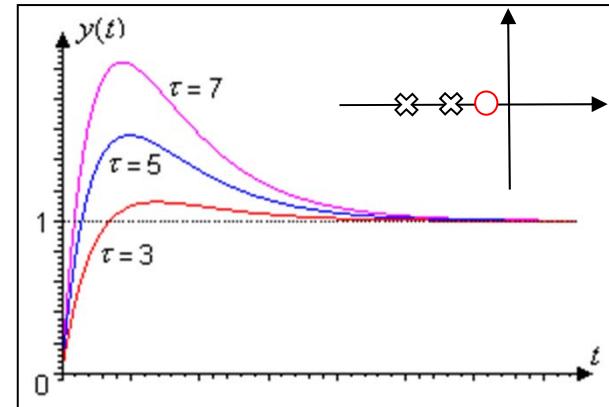
- $T_1 > T_2 > \tau$  - lo zero è più lontano dall'origine rispetto ai poli; più lo zero si allontana dall'origine, più la risposta del sistema si avvicina a quella del sistema privo di zeri (in rosso il sistema privo di zeri)





## Effetto degli Zeri

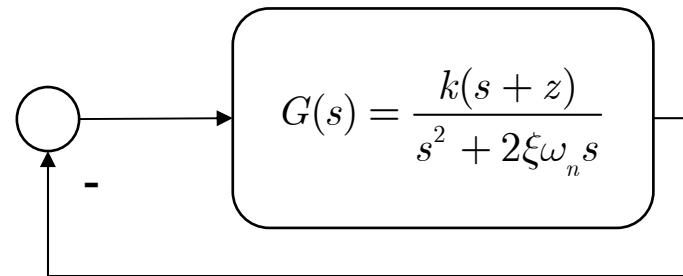
- $\tau \gg T_1 > T_2$  - lo zero, a parte reale negativa, è più vicino all'origine rispetto ai poli; la risposta presenta una sovraelongazione tanto più elevata quanto più lo zero è vicino all'origine
- $\tau \approx T_1 > T_2$  - lo zero è molto vicino al polo più "lento"; il polo vicino allo zero può essere trascurato e il sistema può essere considerato del primo ordine (la rossa è del sistema del secondo ordine, la blu quella del sistema del primo ordine ottenuto dalla approssimazione)
- $T_1 > \tau > T_2$  - lo zero è in mezzo ai due poli; lo zero tende a velocizzare la risposta rispetto al caso di sistema senza zeri (in rosso il sistema con lo zero, in blu quello senza)





## Effetto degli Zeri

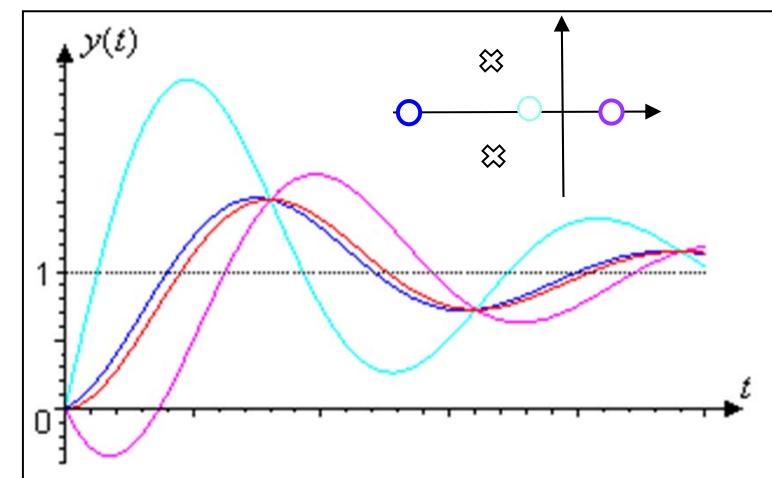
- **Sistema con poli complessi e coniugati**



$$G^{CL}(s) = \frac{k(s+z)}{s^2 + (2\xi\omega_n + k)s + kz}$$

- Supponiamo che i parametri della  $G^{CL}(s)$  siano tali che il sistema sia asintoticamente stabile.

- La curva in **rosso** rappresenta il caso in assenza di zeri
- la curva in **blu**, che rappresenta il caso con lo zero lontano dall'origine, risulta assimilabile al caso senza zeri;
- la curva in **azzurro**, zero vicino all'origine, amplifica la sovraelongazione e velocizza la risposta.
- La curva in **magenta** descrive chiaramente il comportamento a fase non minima con sottoelongazione

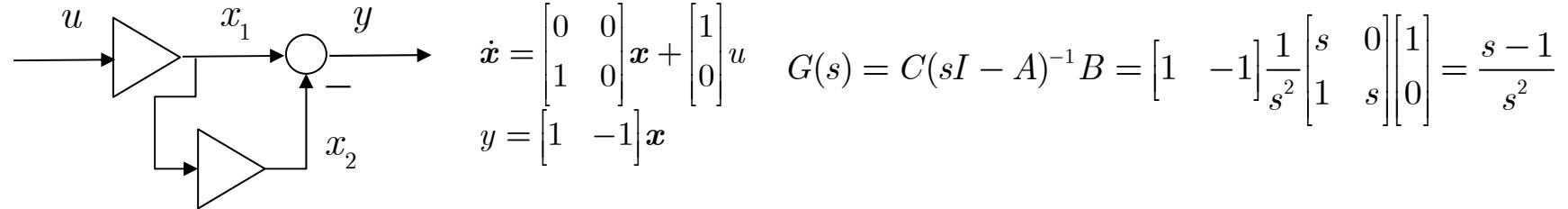




# Influenza degli Zeri

- Consideriamo un punto materiale in movimento

$$\begin{array}{c} \text{red dot} \\ \rightarrow \end{array} \quad F = u = \ddot{x} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 = \text{vel.} \\ x_2 = \text{pos.} \end{bmatrix}$$



- Il sistema è controllabile e osservabile ma instabile
- Determinazione della velocità e della posizione dall'uscita:

$$y = x_1 - x_2$$

$$\dot{x}_1 = u - \dot{y}$$

$$\dot{y} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = u - x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - y = u - \dot{y} - y$$

- Problema:** progettare un controllore tale che ad una forza costante la posizione vari con errore a regime uguale a zero, ovvero che il sistema possa raggiungere a regime una posizione desiderata.

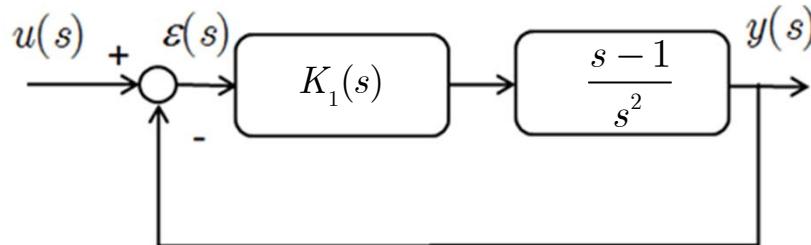


# Influenza degli Zeri

- **Commento:** Essendo il sistema controllabile ed osservabile, qualsiasi sia la variabile di stato di interesse, il comportamento è sempre instabile, ovvero:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \infty$$

- Qualsiasi controllore stabilizzante va bene in quanto il sistema possiede già 2 poli all'origine.
- L'uscita deve essere stabilizzata perché viene usata per ricostruire il vettore di stato  $x$ .



- **Scelta possibile del controllore:**

1. un controllore proporzionale non è stabilizzante

$$K_1(s) = K_1 \quad T_1(s) = \frac{K_1(s-1)}{s^2 + K_1 s - K_1}$$

Instabile per  $\forall K_1 \in (-\infty, +\infty)$



## Influenza degli Zeri

2. Contributo di un polo nel controllore:

$$K_1(s) = \frac{K_1}{s + P} \quad T_1(s) = \frac{K_1(s - 1)}{s^3 + Ps^2 + K_1s - K_1}$$

Instabile per  $\forall [K_1 \in (-\infty, +\infty); P > 0]$

3. Contributo di uno zero nel controllore (controllore non causale):

$$K_1(s) = K_1(s + z_1) \quad T_1(s) = \frac{K_1(s + z_1)(s - 1)}{(1 + K_1)s^2 + K_1(z_1 - 1)s - K_1z_1}$$

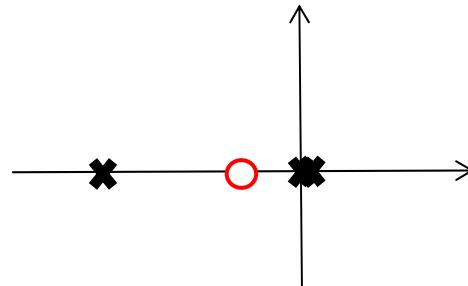
Asintoticamente stabile per  $\forall [-1 < K_1 < 0; 0 < z_1 < 1]$

- Eseguire il test con il seguente controllore:  $K_1(s) = -0.5(s + 0.1)$
  
- Modificare il controllore rendendolo causale con polo a frequenza molto maggiore dello zero:



# Influenza degli Zeri

$$K_1(s) = -0.045 \frac{(1+10s)}{(1+0.2s)}$$

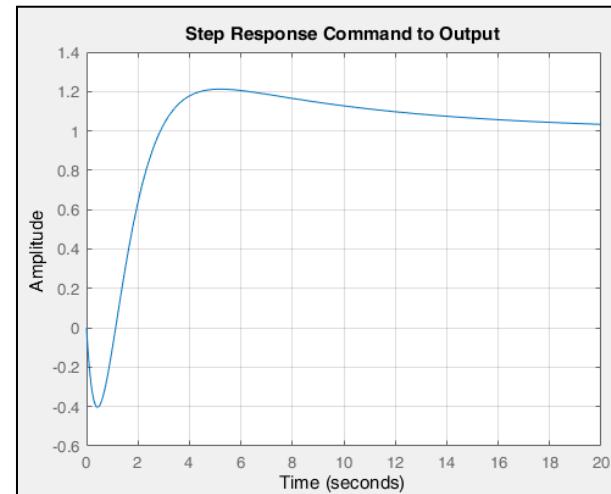


- FdT in anello chiuso:

$$T_1(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{-0.9s^3 - 0.369s^2 + 0.414s + 0.045}{0.04s^4 + 0.31s^3 + 0.631s^2 + 0.414s + 0.045}$$

- Test con il criterio di Routh:

|    |        |       |       |
|----|--------|-------|-------|
| s4 | 0.04   | 0.631 | 0.045 |
| s3 | 0.31   | 0.414 | 0     |
| s2 | 0.5776 | 0.045 | 0     |
| s1 | 0.3898 | 0     |       |
| s0 | 0.045  |       |       |

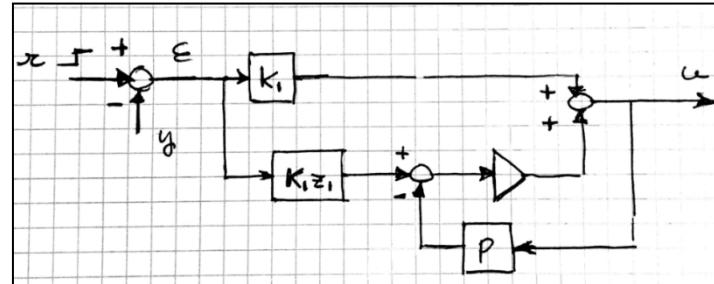


- Eseguire la simulazione mediante Matlab



# Influenza degli Zeri

- Diagramma analogico del controllore:



- Viene richiesto il comportamento costante al gradino unitario della posizione  $x_2(t)$  della massa

$$x_1 = u - \dot{y}$$

$$x_2 = x_1 - y = u - \dot{y} - y$$

$$x_2(s) = \frac{1}{s^2} u(s) = \frac{1}{s^2} \frac{K_1(s)}{1 + K_1(s)G(s)} r(s); r(s) = \frac{1}{s}$$

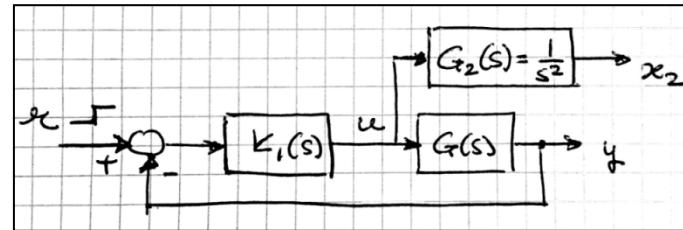
- Come possiamo garantire che la posizione della massa vada ad un valore costante e l'uscita sia asintoticamente stabile ?





# Influenza degli Zeri

- Diagramma a blocchi del sistema:



- Comportamento desiderato:

$$r(t) = x_2^{DES} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1(\infty) = 0 \\ x_2(\infty) = 1 \end{cases} \Rightarrow y(\infty) = x_1(\infty) - x_2(\infty) = -1$$

- FdT tra riferimento e posizione:

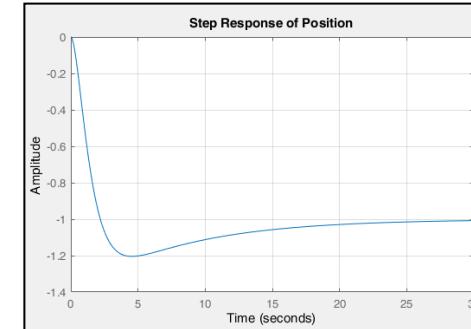
$$x_2(s) = G_2[K_1(r(s) - y(s))]; y(s) = \frac{GK_1}{1 + GK_1} r(s)$$

$$x_2(s) = \frac{G_2 K_1}{1 + GK_1} r(s) = \frac{\frac{1}{s^2} \left( \frac{-0.045(1 + 10s)}{(1 + 0.2s)} \right)}{1 - \frac{0.045(1 + 10s)(s - 1)}{s^2(1 + 0.2s)}}$$

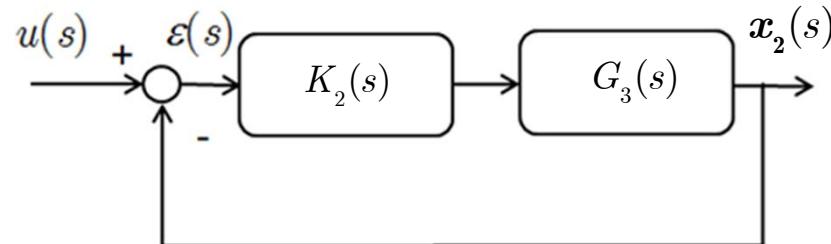


# Influenza degli Zeri

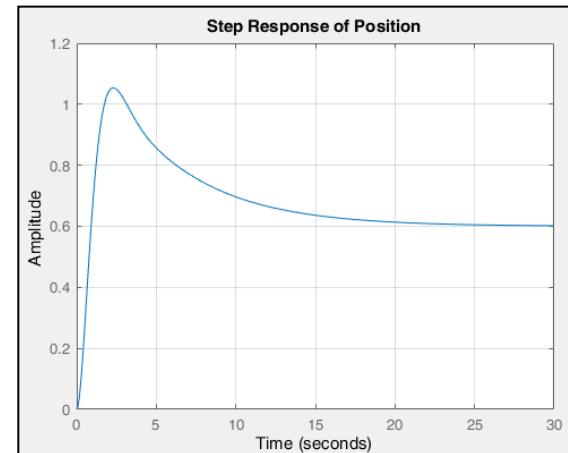
$$x_2(s) = \frac{G_2 K_1}{1 + GK_1} r(s) = \frac{-2.25(s + 0.1)}{s^3 + 2.75s^2 + 2.025s + 0.225} = G_3(s)$$



- Progettare un controllore  $K_2(s)$  a retroazione unitaria per avere  $G_3(s)$  che è di **tipo 0**, con valore positivo



- Un controllore proporzionale è sufficiente ma produce un errore a regime diverso da zero. **Test con Matlab per esempio  $K_2(s)=-0.2$**



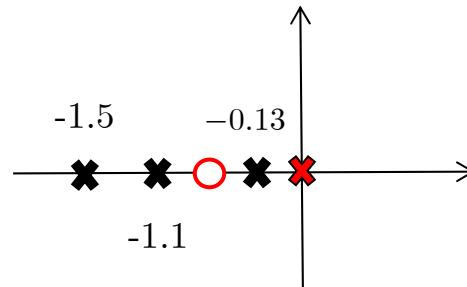
- Perché un errore non nullo mi complica la vita?



# Influenza degli Zeri

- Per avere un errore nullo al gradino unitario occorre un integratore nel controllore
- Verificare che un integratore puro  $K_2(s) = K_2/s$  **non funziona** (il sistema in anello chiuso è instabile)
- Scelta di progetto controllore proporzionale integrale (PI):

$$K_2(s) = \frac{K_2(s + z_2)}{s} = -0.95 \frac{(1 + 2s)}{s}$$



- Comportamento in anello chiuso

$$T_2(s) = \frac{x_2(s)}{r(s)} = \frac{4.275(s^2 + 0.6s + 0.05)}{s^4 + 2.75s^3 + 6.3s^2 + 2.79s + 0.021375}$$

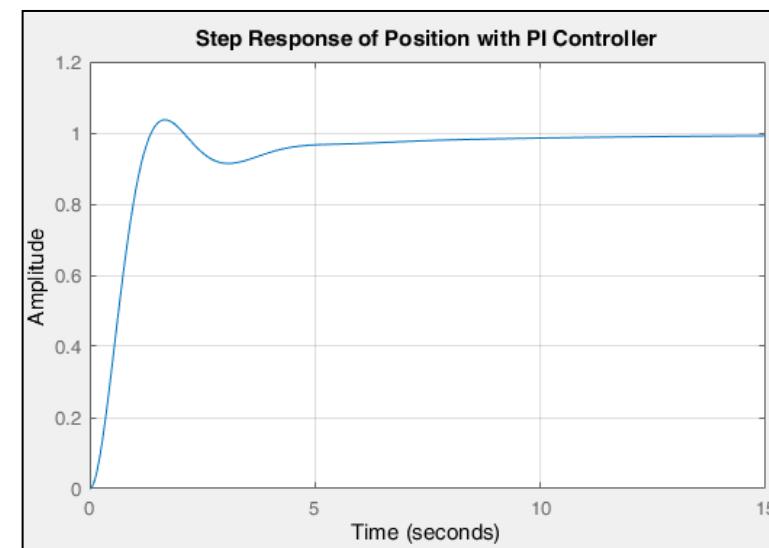


# Influenza degli Zeri

- Il sistema è asintoticamente stabile (verifica con il criterio di Routh)

|    |         |         |         |
|----|---------|---------|---------|
| s4 | 1       | 6.3     | 0.21375 |
| s3 | 2.75    | 2.79    | 0       |
| s2 | 5.2855  | 0.21375 | 0       |
| s1 | 2.6788  | 0       |         |
| s0 | 0.21375 |         |         |

- Verifica del comportamento della posizione in anello chiuso ad un comando a gradino unitario mediante Matlab





# Influenza degli Zeri

- Verifica del comportamento richiesto, mediante il teorema del valore finale

1. Andamento a regime della posizione della massa:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sx_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sT_2(s) \frac{1}{s} = 1 \quad \checkmark$$

2. Andamento a regime della velocità della massa:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 x_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 T_2(s) \frac{1}{s} = 0 \quad \checkmark$$

3. Andamento a regime dell'uscita del sistema:

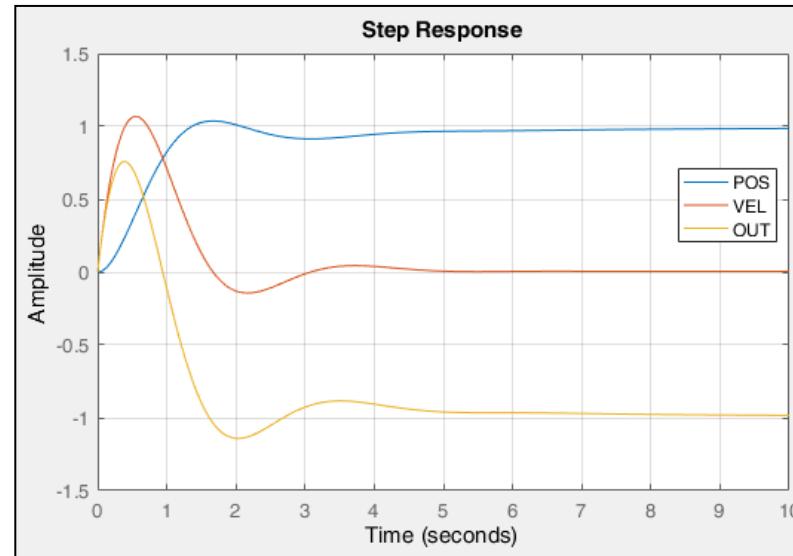
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [x_1(t) - x_2(t)] = -1 \quad \checkmark$$

Sapendo che l'uscita a regime tende a -1, sappiamo che abbiamo soddisfatto i requisiti

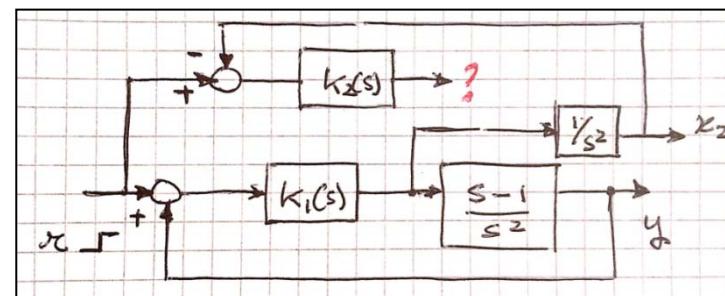


# Influenza degli Zeri

- Simulazione mediante Matlab



- Implementazione completa del sistema in anello chiuso

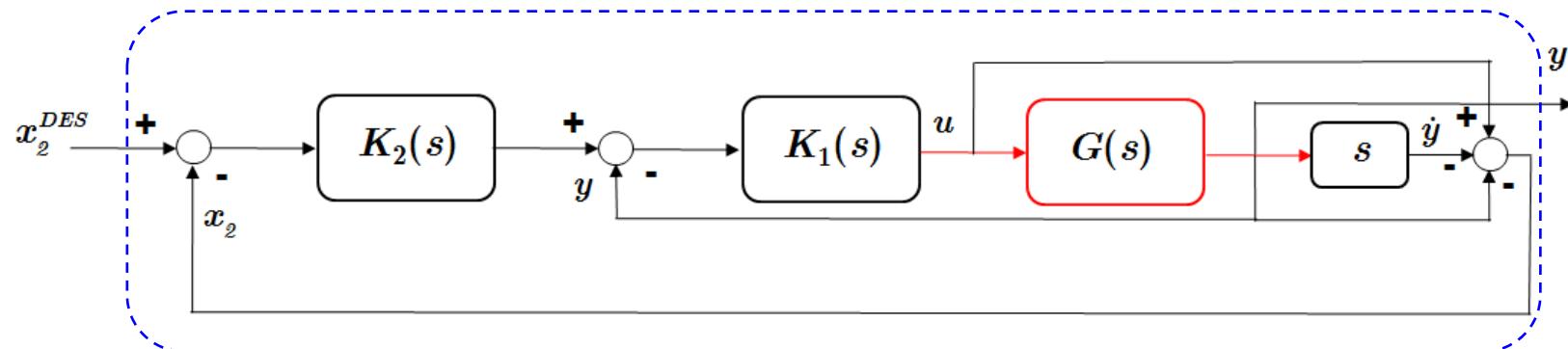
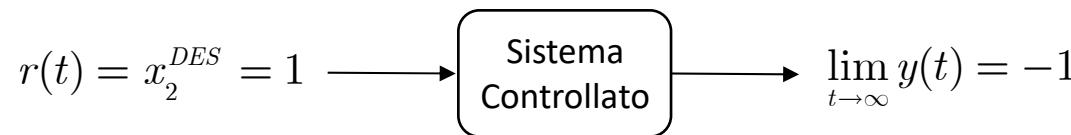




# Influenza degli Zeri

- Implementazione completa del sistema in anello chiuso

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2} \quad K_1(s) = -0.045 \frac{(1+10s)}{(1+0.2s)} \quad K_2(s) = -0.95 \frac{(1+2s)}{s} \quad x_1 = u - \dot{y} \quad x_2 = x_1 - y$$



□ Come semplificare il problema



# Influenza degli Zeri

- L'interesse primario è il controllo della posizione, quindi la logica impone un sensore per la posizione (nota la posizione troviamo la velocità per differenziazione)

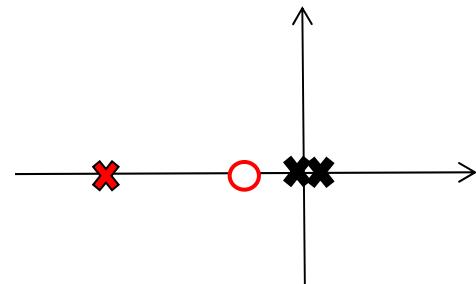
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_2(s) = y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2}$$

- L'unico vincolo sul controllore è che sia stabilizzante in quanto il tipo di FdT di anello è soddisfatto dai due poli all'origine (tipo 2).
- Scelta del controllore:  $K_3(s) = K_3 \frac{(s + z_3)}{(s + p_3)}$

$$G_2(s)K_3(s) = \frac{K_3(s)}{s^2}$$

$$T_3(s) = \frac{x_2(s)}{r(s)} = \frac{K_3(s + z_3)}{s^3 + p_3 s^2 + K_3 s + K_3 z_3}$$

$$\begin{cases} p_3 > 0, z_3 > 0 \\ K_3 z_3 > 0 \\ K_3 > 0 \\ p_3 > z_3 \end{cases}$$



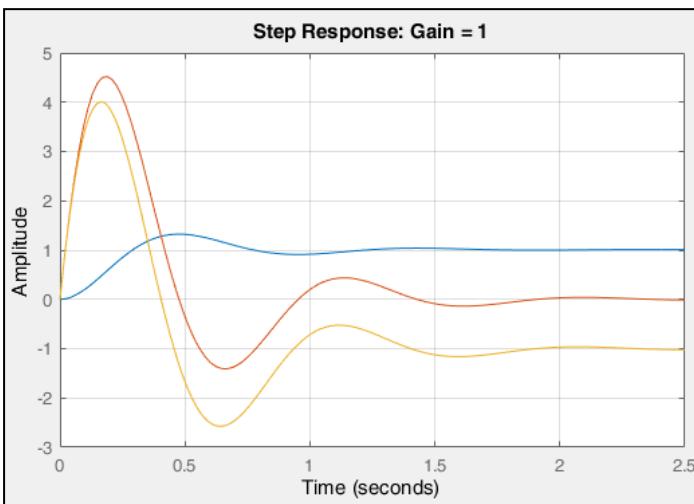
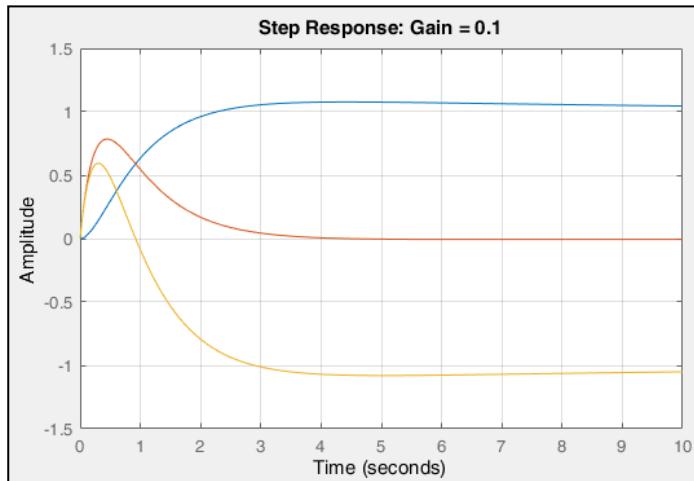
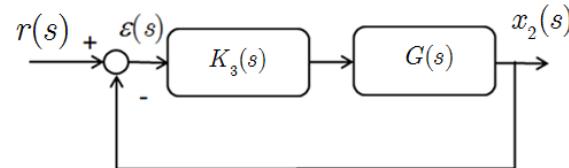
|    |           |      |   |
|----|-----------|------|---|
| s3 | 1         | K3   | 0 |
| s2 | P3>0      | K3z3 | 0 |
| s1 | K2(p3-z3) | 0    |   |
| s0 | K3z3 >0   |      |   |



# Influenza degli Zeri

- Scelta numerica del controllore e simulazione con Matlab

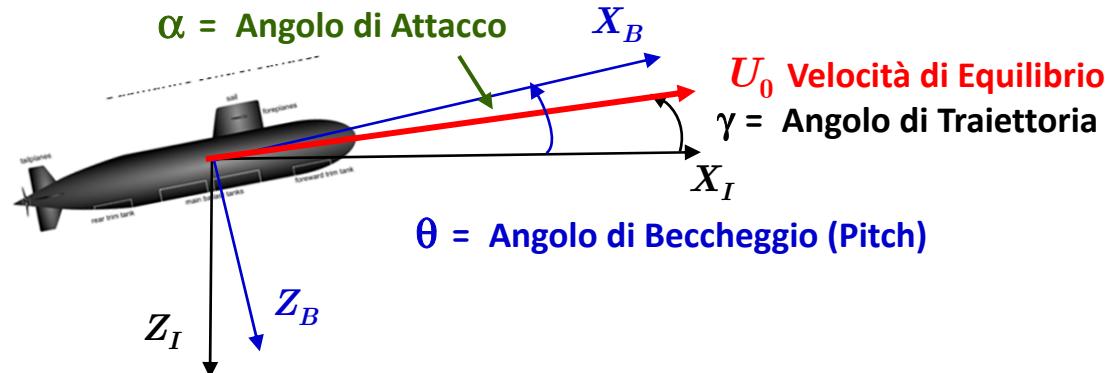
$$K_3(s) = K_3 \frac{(1 + 10s)}{(1 + 0.2s)}$$





## Esempio

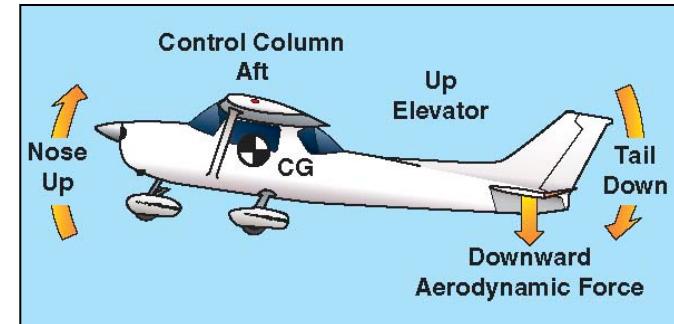
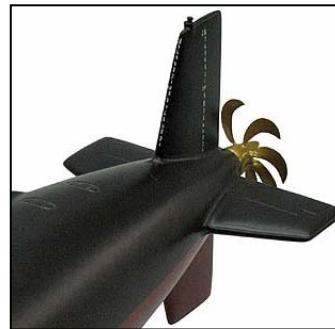
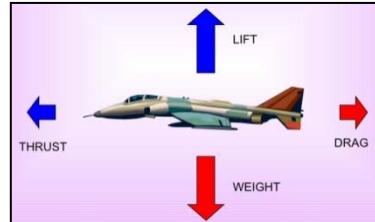
□ **Esempio:** Dinamica e Controllo attivo di Profondità (Depth)



- Il veicolo può essere modellato in prima approssimazione come un corpo rigido la cui dinamica di riferimento comprende i gradi di libertà longitudinali:
    - Surge = traslazione lungo l'asse x
    - Heave = traslazione lungo l'asse z
    - Pitch = rotazione rispetto all'asse y
  - Gli ingressi tipici di controllo sono
    - Propulsione usata prevalentemente per il mantenimento della condizione di equilibrio (Elica)
    - Interazione idrodinamica mediante piani di coda orizzontali usata per moto di manovra
- $$m[\dot{u} - vr + wq - x_G(q^2 + r^2) + y_G(pq - \dot{r}) + z_G(pr + \dot{q})] = \sum X_{ext}$$
- $$m[\dot{w} - uq + vp - z_G(p^2 + q^2) + x_G(rp - \dot{q}) + y_G(rq + \dot{p})] = \sum Z_{ext}$$
- $$I_{yy}\dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})rp - m[z_G(\dot{u} - vr + wq) - x_G(\dot{w} - uq + vp)] = \sum M_{ext}$$



## Esempio



- Moto longitudinale linearizzato, rispetto ad una velocità di Equilibrio costante  $U_0$  ottenuta ponendo la spinta uguale alla resistenza idrodinamica

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = A\mathbf{x}(t) + B\delta_{STERN}(t)$$

- $u$  = velocità longitudinale lungo XB
- $w$  = velocità verticale lungo ZB
- $q$  = velocità angolare di beccheggio rispetto a YB
- $\theta$  = angolo di beccheggio rispetto a YB
- $\delta_e$  = angolo di comando a poppa (stern)

- Variabili cinematiche di interesse:
  - $\gamma = \theta - \alpha$  angolo di traiettoria
  - $\alpha = w / U_0$  angolo di attacco
  - Variazione di profondità (Nota segno)

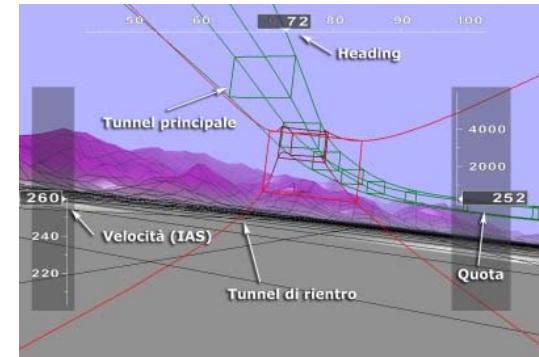
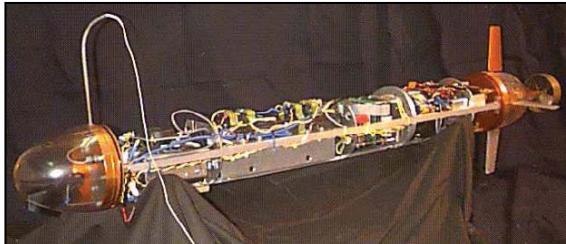
$$\dot{h} = w - U_0 \theta$$

- Accelerazione del centro di massa:

$$a_{Zcg} = \dot{w} - U_0 q = U_0 (\dot{\alpha} - \dot{\theta}) = -U_0 \dot{\gamma}$$



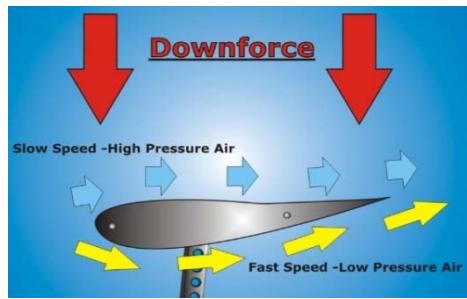
## Esempio



Sistema Multiplo di Attuazione  
Idrodinamica

- Dinamica linearizzata in Pitch

$$G_{SUB}(s) = \frac{\dot{\theta}(s) \approx q(s)}{\delta_{STERN}(s)} = \frac{-0.467(s + 0.12)}{s^2 + 0.8s + .25}$$



- Dinamica linearizzata in Accelerazione

$$G_{\dot{\theta}}^{a_z}(s) = \frac{a_z(s)}{\dot{\theta}(s)} = \frac{2.0642(s + 1.4)(s - 1.4)}{s + 0.12}$$

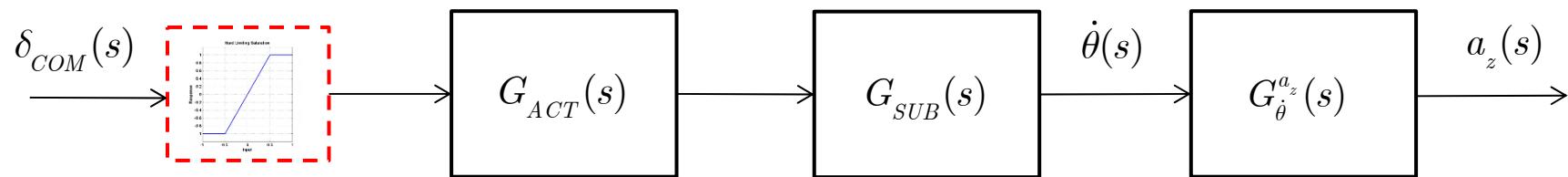
$$G_3(s) = \frac{a_z(s)}{\delta_{STERN}(s)} = -\frac{0.964(s + 1.4)(s - 1.4)}{s^2 + 0.8s + 0.25}$$



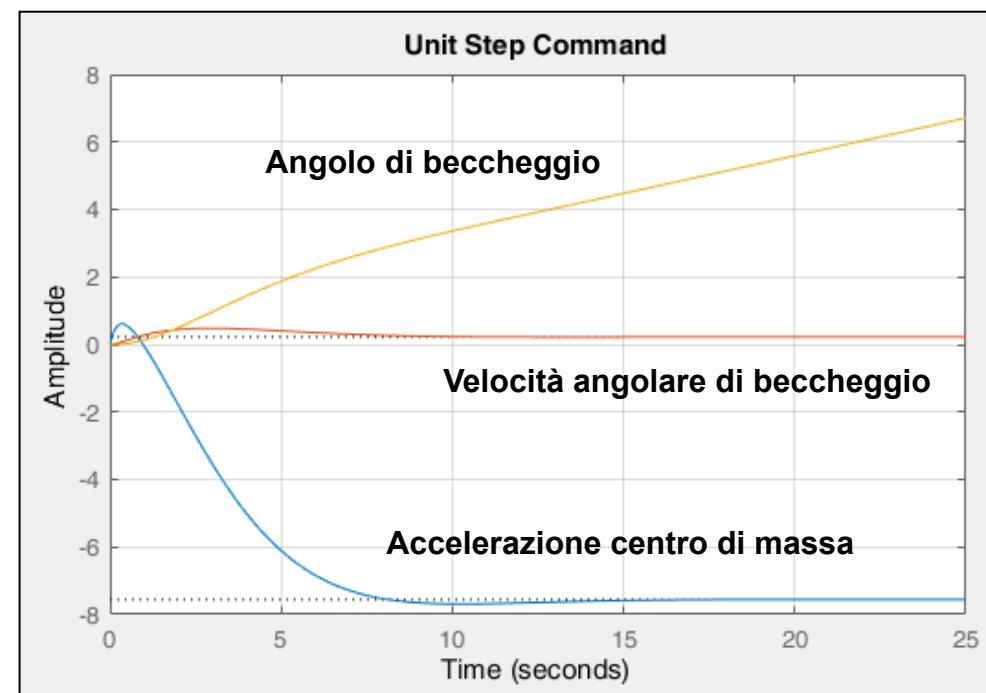
## Esempio

- Dinamica del sistema di attuazione (comando operatore -> movimento piano di coda)

$$G_{ACT}(s) = \frac{\delta_{STERN}(s)}{\delta_{COM}(s)} = \frac{5}{s + 5}$$



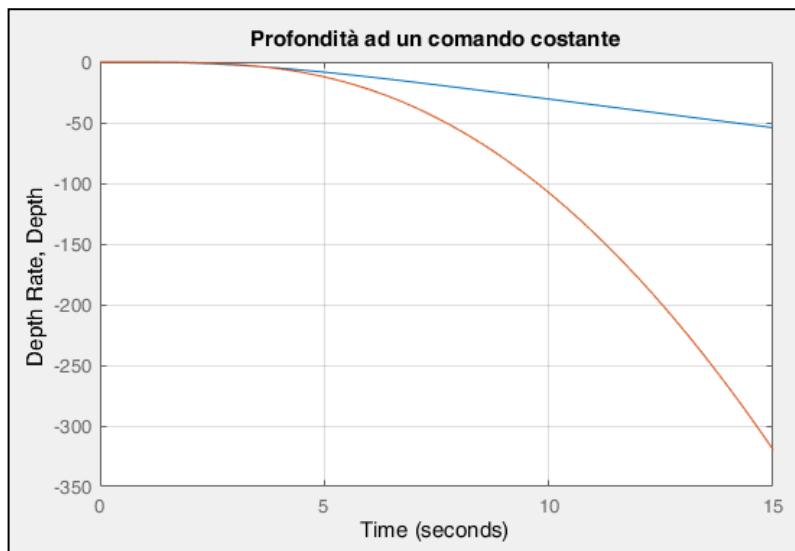
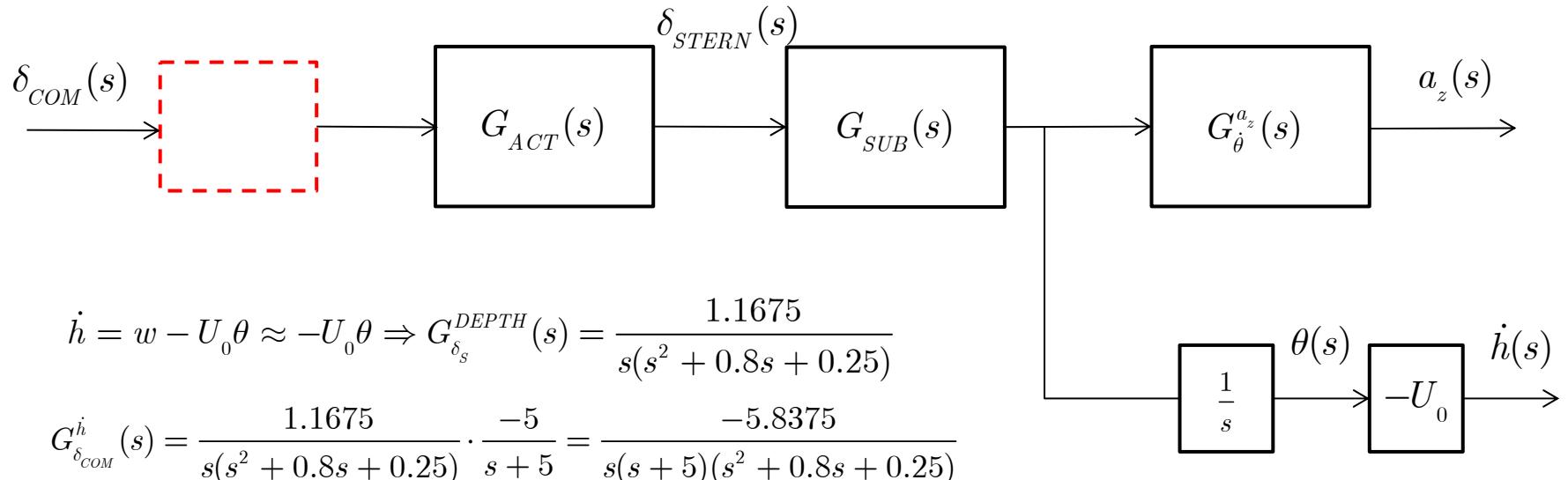
$$G(s) = \frac{a_z(s)}{\delta_{COM}(s)} = -\frac{4.82(s + 1.4)(s - 1.4)}{(s^2 + 0.8s + 0.25)(s + 5)}$$





## Esempio

- Dinamica approssimata di profondità (Velocità di equilibrio  $U_0 = 0.5 \text{ m/sec}$ )





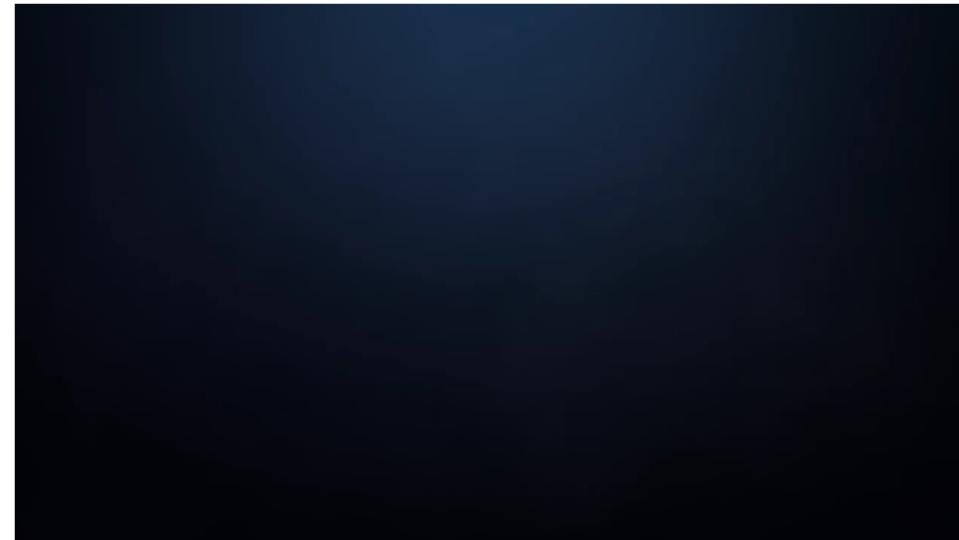
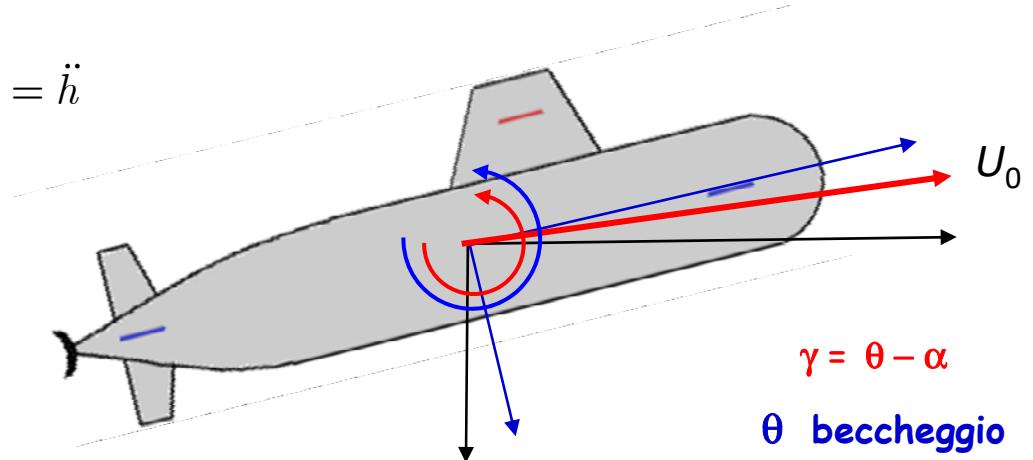
## Esempio

- Dinamica linearizzata di profondità

$$a_{Zcg} = \dot{w} - U_0 q = U_0(\dot{\alpha} - \dot{\theta}) = -U_0 \dot{\gamma} = \ddot{h}$$

$$\dot{h} = w - U_0 \theta$$

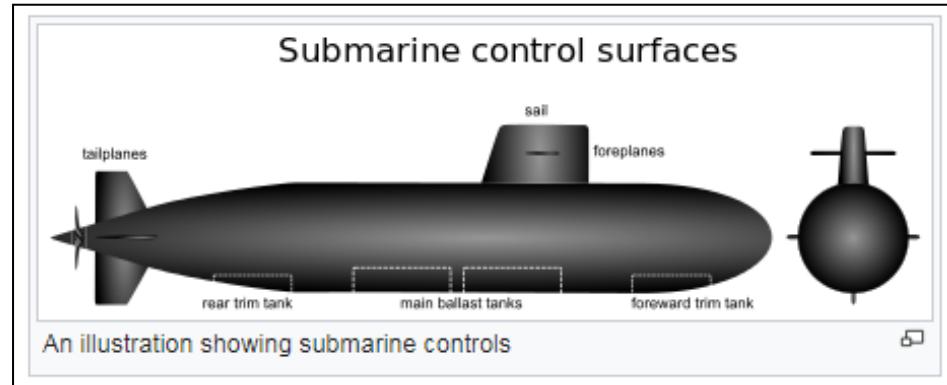
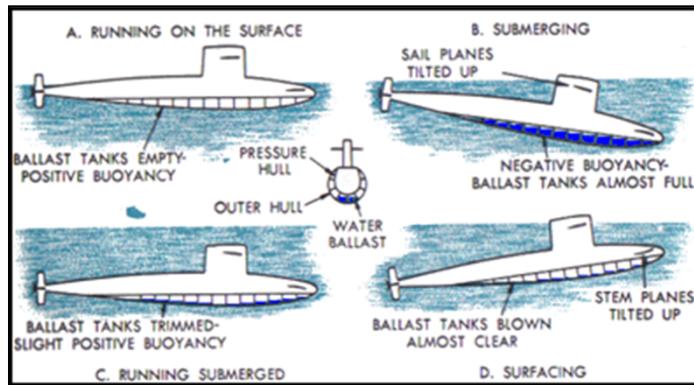
$$h(t) = \int_0^t [w(\tau) - U_0 \theta(\tau)] d\tau$$





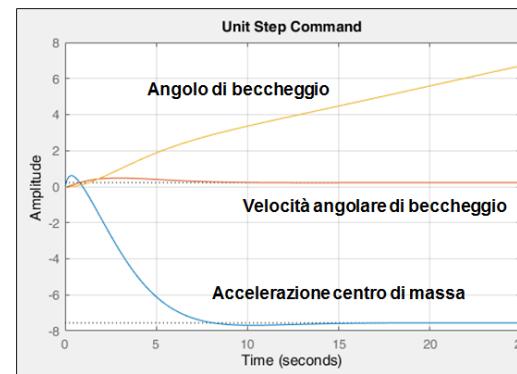
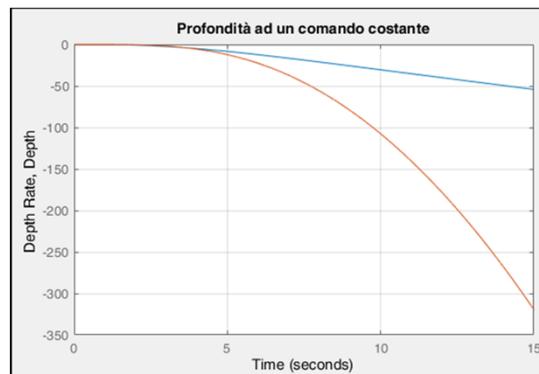
## Esempio

- La variazione di profondità può essere ottenuta, in generale, da una combinazione di manovra ed una variazione di galleggiamento prodotta da una quantità variabile di acqua immagazzinata nei serbatoi (ballast tanks)



- Si può operare in accelerazione e poi integrare due volte. Il sistema è a fase non minima!

$$G(s) = \frac{a_z(s)}{\delta_{COM}(s)} = -\frac{4.82(s + 1.4)(s - 1.4)}{(s^2 + 0.8s + 0.25)(s + 5)}$$





## Esempio

1. Si può operare in profondità

$$G_{\delta_{COM}}^h(s) = -\frac{5.8375}{s^2(s+5)(s^2 + 0.8s + 0.25)}, \frac{[m]}{[rad]}$$

- Il sistema è del quarto ordine con poli: 0, 0, -5, -0.4  $\pm j0.3$
- Il sistema è instabile
- La risposta al gradino vale:  $h(t) = C_1 + C_2t + C_3t^2 + C_4e^{-5t} + C_5e^{-0.4t} \sin(0.3t + C_5)$

### □ Specifiche di progetto per controllo di profondità:

- Errore a regime nullo per un comando a gradino in profondità
- Overshoot minimo < 2%
- $T_A = 10$  sec



## Esempio

$$G_{\delta_{COM}}^h(s) = \frac{5.8375}{s^2(s+5)(s^2 + 0.8s + 0.25)}$$

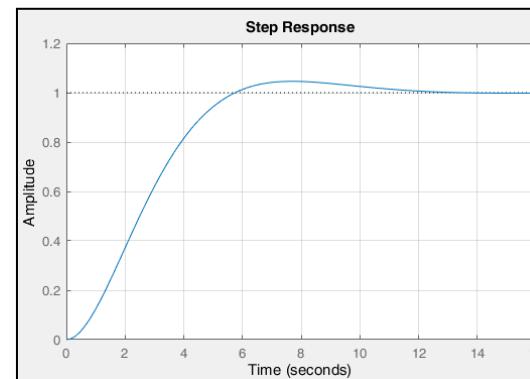
1. Per semplicità usiamo il segno positivo, il che significa semplicemente cambiare il segno del movimento del piano di coda orizzontale
2. Il sistema deve essere stabilizzato
3. Nel caso di sistema asintoticamente stabile, la FdT di anello è di tipo 2 quindi potrebbe bastare un controllore proporzionale
  - Il sistema in ciclo chiuso è instabile con un controllore proporzionale (CN del criterio di RH non soddisfatta)

$$T(s) = \frac{5.8375k}{s^5 + 5.8s^4 + 4.25s^3 + 1.25s^2 + \boxed{+} 5.8375k}$$

- In base ai requisiti di risposta transitoria, il sistema dovrebbe comportarsi come:

$$M_p = e^{-\left(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)} \leq 2\% \Rightarrow \xi \geq 0.6079$$

$$T_a = \frac{4}{\xi\omega_n} \leq 10 \Rightarrow \omega_n \geq 0.6580$$





## Esempio

- Consideriamo un controllore proporzionale – derivativo (PD)

$$K(s) = K_p + K_d s = K_d \left( s + \frac{K_p}{K_d} \right) = k(s + z)$$

$$T(s) = \frac{5.8375k(s+z)}{s^5 + 5.8s^4 + 4.25s^3 + 1.25s^2 + 5.8375ks + 5.8375kz}$$

- Applicazione del criterio di RH

|   |                |          |   |
|---|----------------|----------|---|
| 1   | 4.25           | 5.8375k  | 0 |
| 5.8   | 1.25           | 5.8375kz | 0 |
| 4.0345  | 8.39k(1-1.45z) | 0        |   |
| 1.25-12.06k(1-1.45z)  | 5.8375kz       | 0        |   |
| $\frac{10.49k(1 - 1.45z) - 101.18k^2(1 - 1.45z)^2 - 23.55kz}{1.25 - 12.06k(1 - 1.45z)}$ |                | 0        |   |
| 5.8375kz  |                |          |   |



## Esempio

$k > 0$  dalla condizione necessaria sul termine del primo ordine

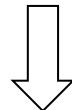
$$5.8375kz > 0$$



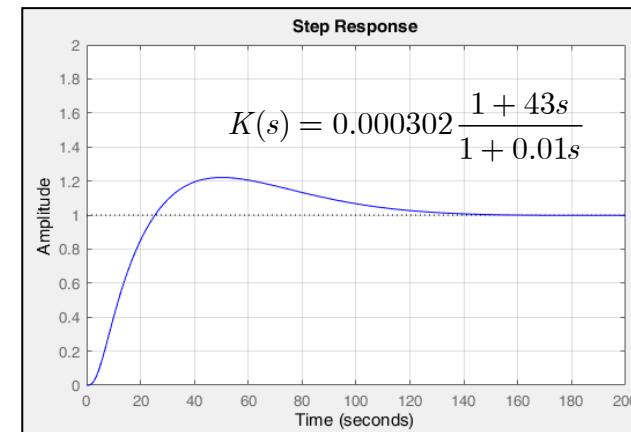
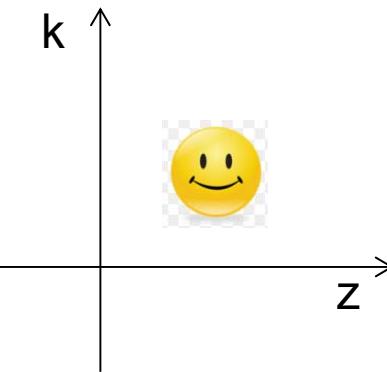
$$1.25 - 12.06k(1 - 1.45z) > 0$$



$$\frac{10.49k(1 - 1.45z) - 101.18k^2(1 - 1.45z)^2 - 23.55kz}{1.25 - 12.06k(1 - 1.45z)}$$



$$10.49k(1 - 1.45z) - 101.18k^2(1 - 1.45z)^2 - 23.55kz > 0$$



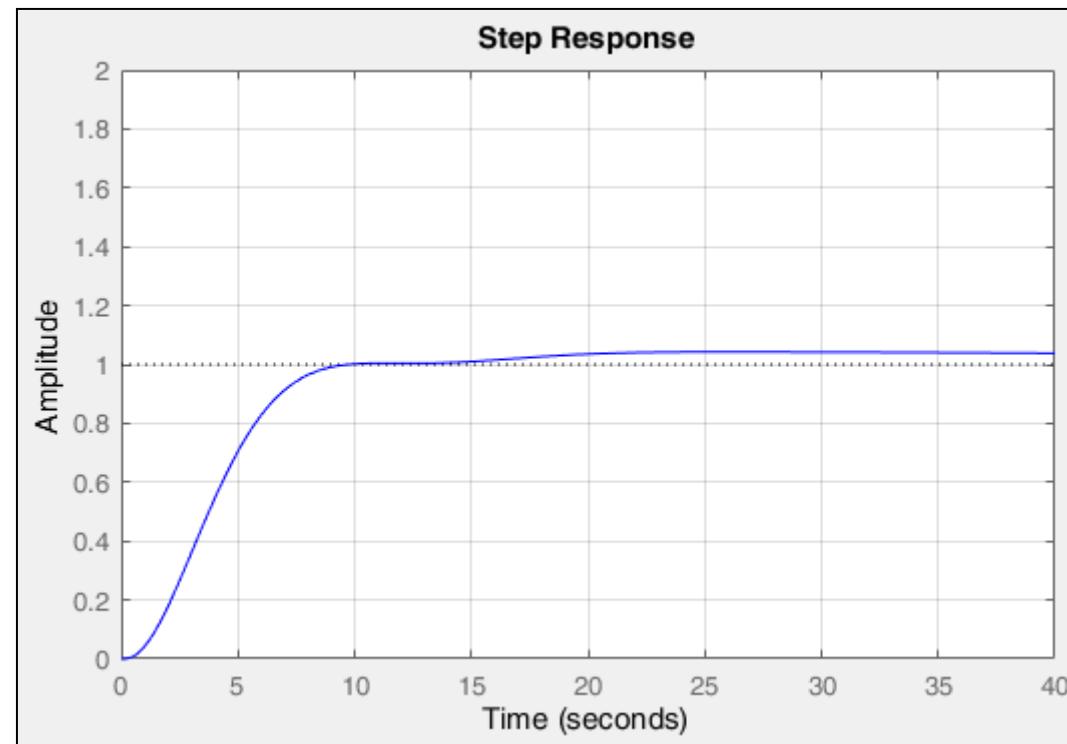
1. Se troviamo una coppia  $(k, z)$  stabilizzante, come possiamo garantire i requisiti di risposta transitoria?
2. Il controllore deve essere causale, per cui deve avere anche un polo, il più ininfluenzante possibile. Il polo aggiunge dimensionalità al sistema in anello chiuso



## Esempio

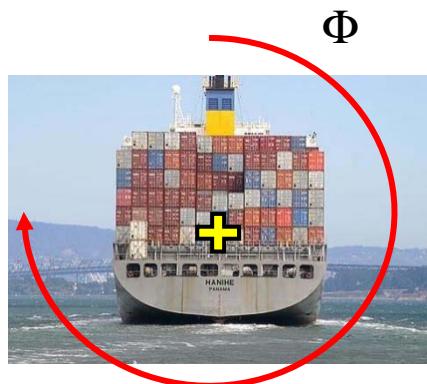
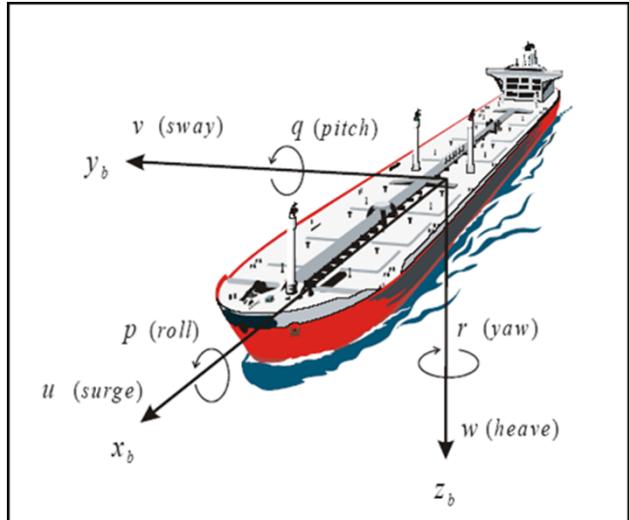
$$K(s) = 0.000057 \frac{(1 + 83s)(1 + 2.6s)}{(1 + 0.01s)^2}$$

Zeri = -0.012, -0.381  
Poli = 100, -100

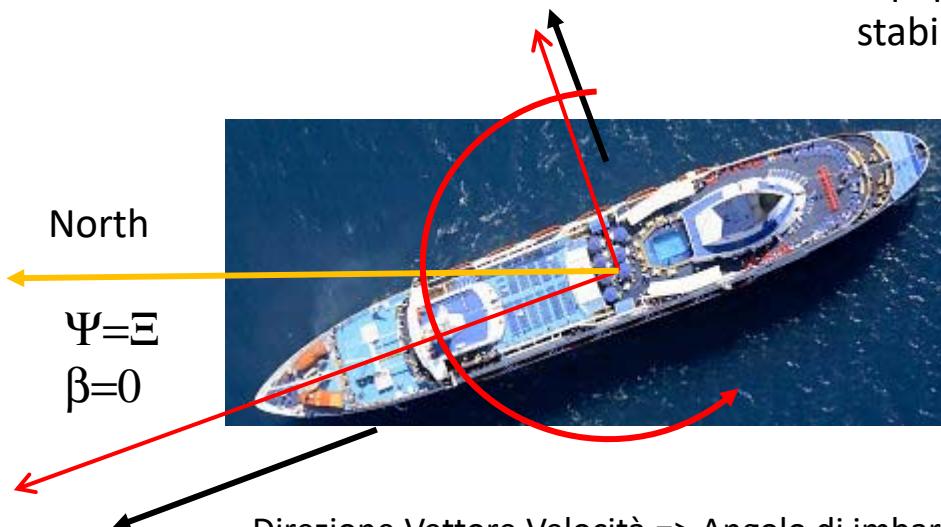




## Esempio



- **Moto in Rollio:** prevalentemente un problema di reiezione del disturbo. Il rollio dovuto ad agenti atmosferici (vento, moto ondoso, correnti) deve essere ridotto al minimo per il conforto e operatività dei passeggeri ed equipaggio e per il mantenimento della stabilità del carico.



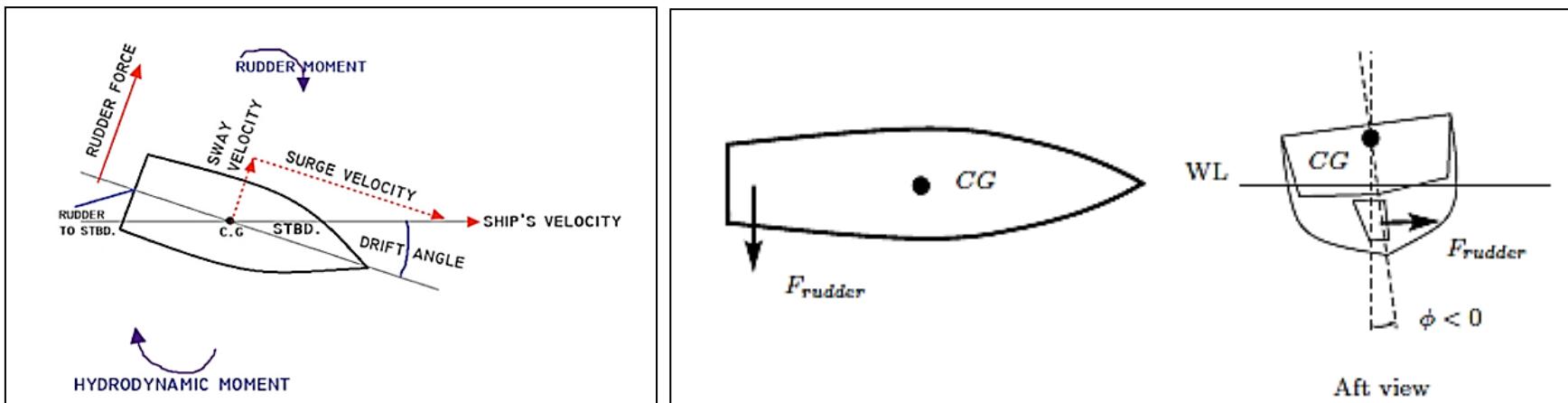
- **Moto in Imbardata :** prevalentemente un problema di accuratezza e precisione nel seguire una rotta specifica e nel cambio di rotta da una direzione all'altra.



## Esempio

### □ Modello linearizzato Roll – Sway – Yaw (Fossen Marine Systems Control, 2002)

- **Ipotesi #1:** Il timone è l'unico attuatore. Produce movimento sui 3 gradi di libertà



- **Ipotesi #2:** Il moto si considera linearizzato intorno ad una condizione di equilibrio a velocità (surge) costante, moto rettilineo uniforme e mare calmo.

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \\ \dot{\psi} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & 0 & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & 0 & a_{32} & a_{34} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{23} & 0 & a_{22} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \\ \psi \\ p \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{31} \\ 0 \\ b_{21} \\ 0 \end{bmatrix} u$$



## Esempio

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\psi \\ \dot{x}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\psi\psi} & A_{\psi\phi} \\ A_{\phi\psi} & A_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\psi \\ x_\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\psi \\ B_\phi \end{bmatrix} u \quad x_\psi = [v, r, \psi]^\top \quad x_\phi = [p, \phi]^\top$$

- Nelle ipotesi che vi sia limitato accoppiamento tra rollio ed imbardata si possono studiare i due sottosistemi separatamente:

$$A_{\psi\phi} = A_{\phi\psi} = \mathbf{0}$$

- Modello di Rollio (Son e Nomoto, 1981)

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{24} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{21} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

- Modello di Traslazione laterale e imbardata (Son e Nomoto, 1981)

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & 0 \\ a_{31} & a_{33} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{31} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

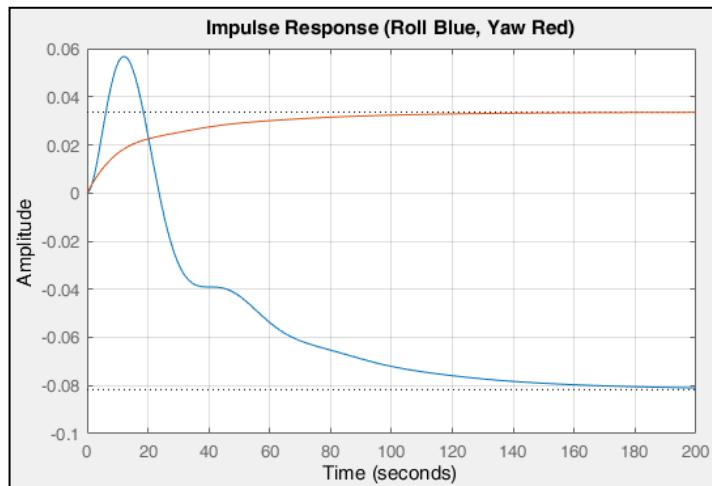


## Esempio

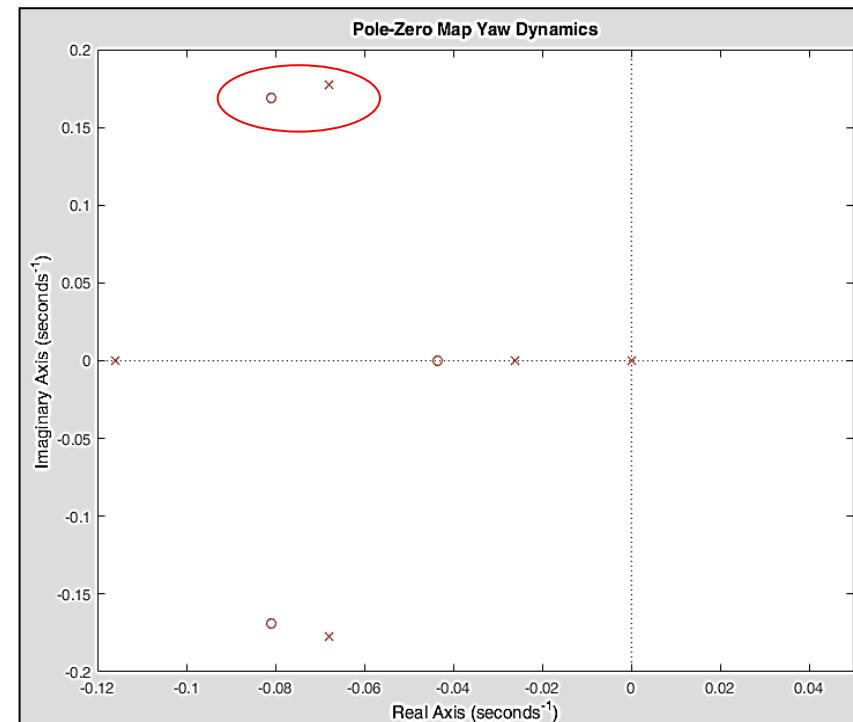
- Nave container di lunghezza = 175 m, volume = 21.22 m<sup>3</sup>, velocità di riferimento  $U_0$  = 7 m/s = 13.6 Knots = 25.2 Km/h

$$\frac{\phi}{\delta}(s) = \frac{0.0032(s - 0.036)(s + 0.077)}{s(s + 0.026)(s + 0.116)(s^2 + 0.136s + 0.036)}$$

$$\frac{\psi}{\delta}(s) = \frac{0.0024(s + 0.0436)(s^2 + 0.162s + 0.035)}{s(s + 0.0261)(s + 0.116)(s^2 + 0.136s + 0.036)}$$



- Poli del sistema:**  
0, -0.026, -0.116, **-0.068±j0.1771**
- Zeri di Rollio:**  
**+0.036**, -0.077
- Zeri di Imbardata:**  
-0.0436, **-0.068±j0.1743**



- Approssimazione Nomoto per la dinamica di imbardata

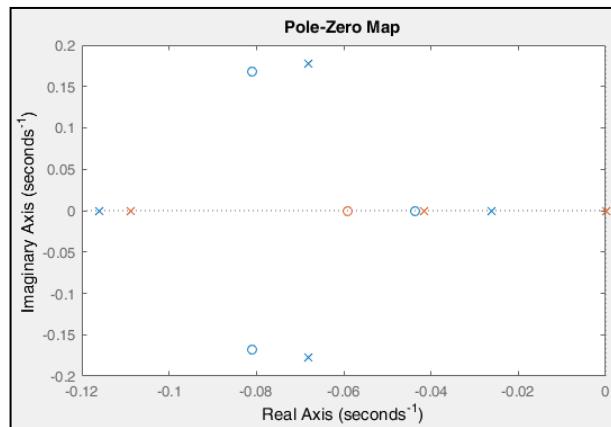
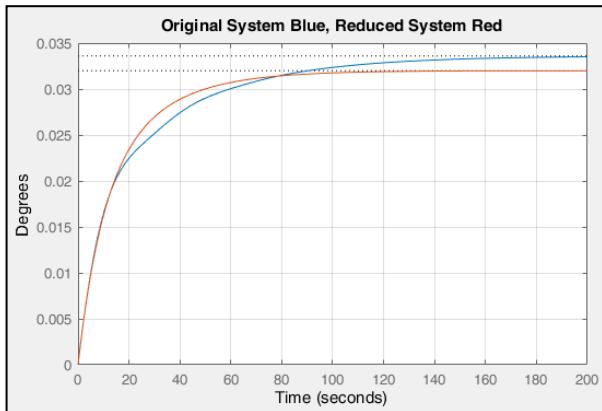
$$\frac{\psi}{\delta}(s) \approx \frac{0.032(1 + 16.9s)}{s(1 + 24.0s)(1 + 9.2s)}$$

- Zeri:** -0.0592, **Poli:** 0, -0.0417, -0.1087

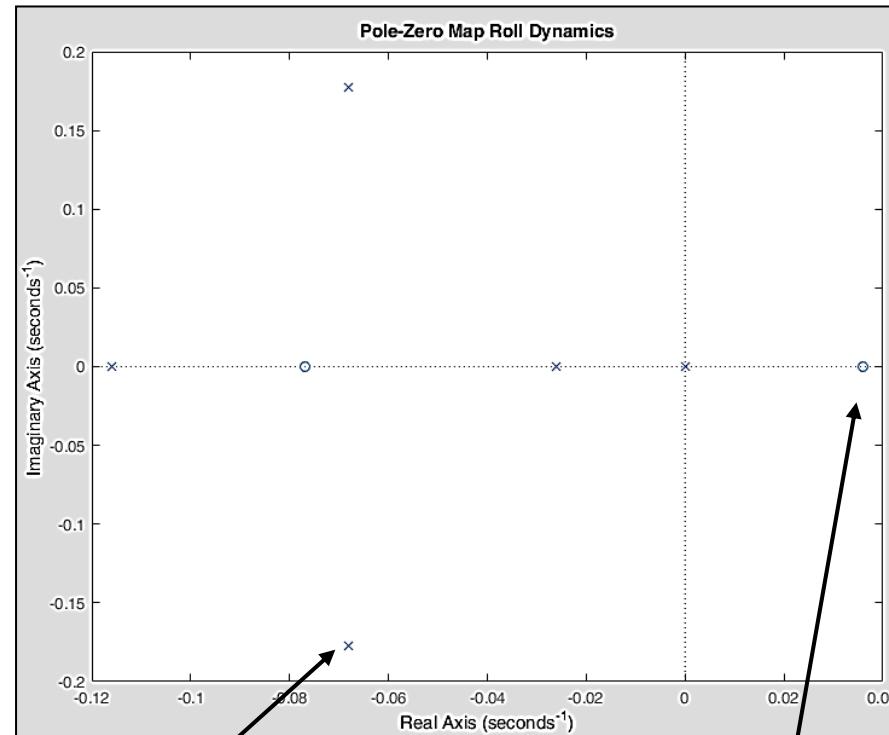


## Esempio

- Analisi dinamica di imbardata



- Analisi dinamica di Rollio



- Oscillazione a basso smorzamento,  $z \approx 0.36$
- Zero instabile (Fase non minima)



## Esempio

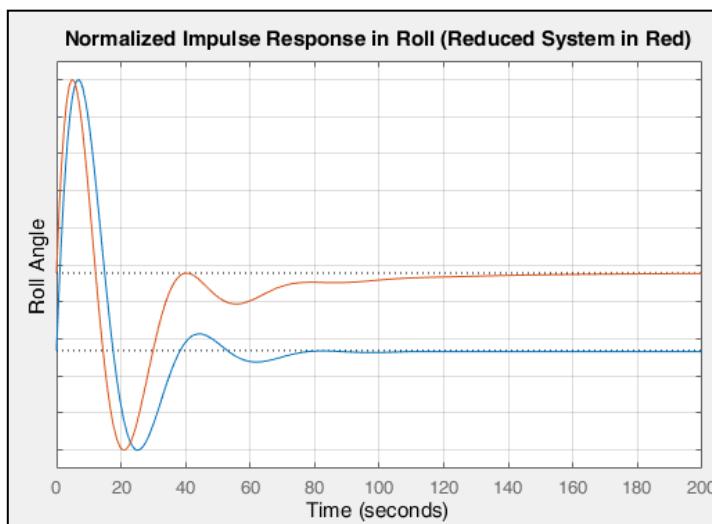
Oscillazione a basso smorzamento



Zero instabile (Fase non minima)



- Approssimazione moto di Rollio



$$\frac{\phi}{\delta}(s) \approx \frac{0.083(1 + 49.1s)}{(1 + 31.5s)(s^2 + 0.134s + 0.033)}$$

- Requisiti di Controllo: Il sistema è **sottoattuato**, il solo timone deve smorzare l'oscillazione di rollio e mantenere l'accuratezza in angolo di imbardata.
- Si sfrutta la separazione a poli dominanti



## Sommario

- Le specifiche di progetto nel dominio del tempo riguardano:
- Proprietà Strutturali: Stabilità, Controllabilità, Osservabilità
- Errore a regime rispetto ad un comando da inseguire
- Insensitività a disturbi in anello (reiezione del disturbo)
- Andamento transitorio (velocità di risposta, presenza di oscillazioni, Tempo di assestamento,...)
- Le specifiche sono analizzate in base ad un set di parametri, Calcolabili analiticamente per sistemi fino al secondo ordine.
- Per sistemi di ordine superiore le formule forniscono dati approssimati
- I poli dominanti costituiscono una possibile semplificazione al problema dell'analisi di sistemi di dimensioni elevate
- Sistemi a fase non minima pongono un limite alle prestazioni



# RISPOSTA IN FREQUENZA

- Introduzione
- Definizioni e Calcolo
- Rappresentazioni Grafiche
- Parametri della Risposta Temporale dalla Risposta in Frequenza

<https://www.youtube.com/watch?v=xyDvBeMgy9o>



# Riferimenti

- Capitoli 7, 11, Appendice B  
Testo di Bolzern
- Capitolo 9, testo di Murray  
(download)
- Capitolo 4 Lewis (download)
- ....

Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.

Con. Avanzati

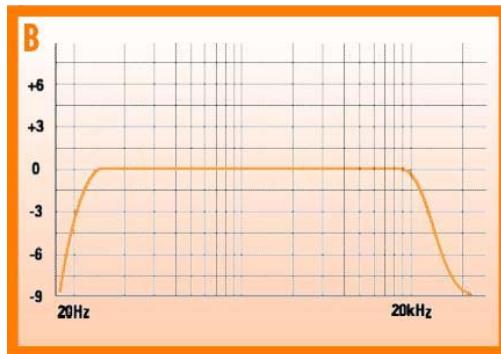
Con. Standard





# Introduzione

- Metodo più comunemente utilizzato per l'analisi e la progettazione di sistemi di controllo classico e SISO.
- La risposta in frequenza è riguarda la risposta dei sistemi ad ingressi di tipo sinusoidale a diverse frequenze; l'uscita di sistemi lineari a tali ingressi è data da segnali sinusoidali alla stessa frequenza ma con ampiezze e fasi differenti.
- Tutte quelle funzioni che, tramite la scomposizione armonica, possono rappresentare un segnale come combinazione lineare di componenti sinusoidali possono essere prese in considerazione (segnali sviluppabili in Serie di Fourier e/o che ammettono trasformata di Fourier).

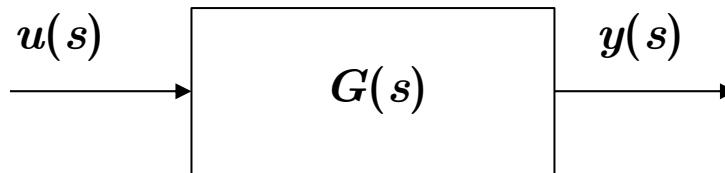


- Banda Passante
- Frequenza di campionamento
- Filtraggio
- Armonica
- Broadband
- Spettro
- Densità spettrale di potenza
- ...



# Introduzione

- Caratteristiche che definiscono la risposta in frequenza:
  - Proprietà strutturali del sistema (stabilità)
  - Tipologia di ingresso  $u(t)$



- Consideriamo un sistema lineare SISO, stazionario e asintoticamente stabile, e calcoliamo la risposta a regime, quando l'ingresso è una funzione sinusoidale con ampiezza  $U$  e frequenza (pulsazione)  $\omega_0$ :

$$\begin{cases} u(t) = U \sin \omega_0 t \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = ? \end{cases}$$

- Applicando la Trasformata di Laplace:

$$y(s) = G(s) \frac{U \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{A_1}{s + j\omega_0} + \frac{A_1^*}{s + j\omega_0} + \text{i termini asintoticamente stabili dovuti a } G(s)$$



## Definizioni e Calcolo

- L'uscita a regime, indicata con  $y_{ss}(s)$  è quindi:  $\dots_{ss}$  = steady state

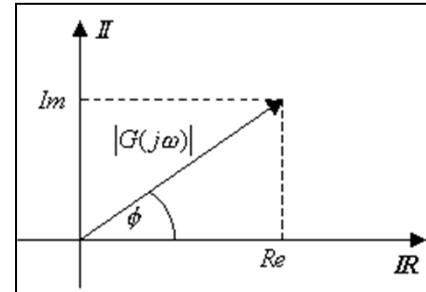
$$y_{ss}(s) = \frac{A_1}{s + j\omega_0} + \frac{A_1^*}{s - j\omega_0}$$

- I residui (complessi e coniugati) valgono:

$$A_1 = \left[ G(s) \cdot u(s) \right]_{s=-j\omega_0} = \frac{G(-j\omega_0)U}{-2j} \quad A_1^* = \frac{G(j\omega_0)U}{2j}$$

- Poiché  $s = j\omega_0$  è un numero complesso lo sono anche  $G(j\omega_0)$  e  $G(-j\omega_0)$

$$\begin{cases} G(j\omega_0) = |G(j\omega_0)| \cdot e^{j\varphi} \\ G(-j\omega_0) = |G(-j\omega_0)| \cdot e^{-j\varphi} = |G(j\omega_0)| \cdot e^{-j\varphi} \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[G(j\omega_0)]}{\text{Re}[G(j\omega_0)]} = \arg G(j\omega_0) = \angle G(j\omega_0) \end{cases}$$





## Definizioni e Calcolo

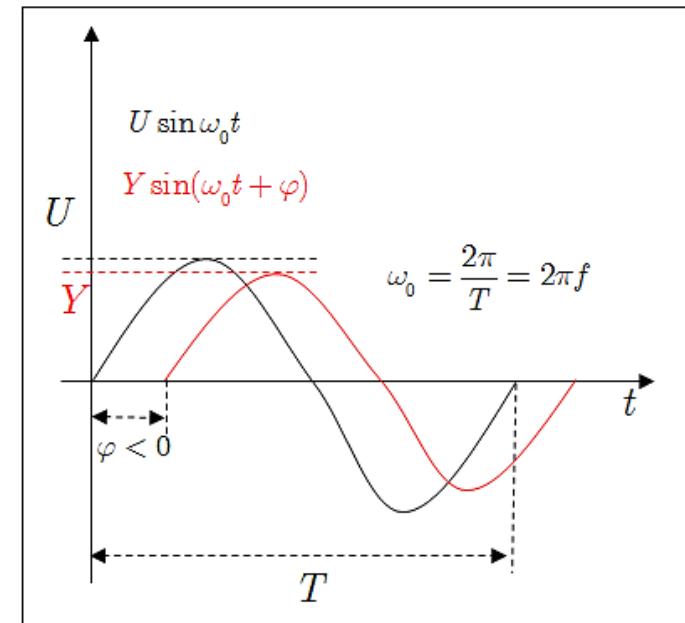
- Applicando la Antitrasformata di Laplace, si ha:

$$y_{ss}(t) = A_1 e^{-j\omega_0 t} + A_1^* e^{j\omega_0 t} = \frac{U |G(j\omega_0)|}{-2j} \cdot e^{-j(\omega_0 t + \varphi)} + \frac{U |G(j\omega_0)|}{2j} \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$$

- Nel dominio del tempo, usando le formule di Eulero:

$$y_{ss}(t) = U |G(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi) = Y \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{cases} Y = U \cdot |G(j\omega_0)| \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[G(j\omega_0)]}{\text{Re}[G(j\omega_0)]} \end{cases}$$





## Definizioni e Calcolo

- **Commenti:**

1. La risposta di un sistema lineare ad un ingresso sinusoidale (armonico) a frequenza  $\omega_0$  è un segnale sinusoidale alla stessa frequenza;
2. L'ampiezza  $Y$  della risposta dipende dall'ampiezza  $U$  del segnale d'ingresso e dall'ampiezza del sistema (ovvero del modulo della sua FdT)  $|G(j\omega_0)|$
3. La fase  $\varphi$  ( $< 0$  ritardo,  $> 0$  anticipo) della risposta è uguale alla fase del sistema (ovvero la fase della sua FdT)

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[G(j\omega_0)]}{\text{Re}[G(j\omega_0)]}$$

4. La risposta di un sistema lineare ad un ingresso armonico è quindi nota quando siano noti:
  - Ampiezza e Fase di  $G(j\omega_0)$ , **oppure**
  - Parte Reale e Parte Immaginaria di  $G(j\omega_0)$

**Definizione di Risposta in Frequenza:** Dato un sistema lineare SISO, stazionario e asintoticamente stabile, la risposta in frequenza è data dall'uscita  $y(t)$  a regime, quando l'ingresso è una funzione sinusoidale del tipo  $u(t) = U \cdot \sin(\omega t)$ ,  $t \geq 0$  e per  $\omega \in [0, \infty)$

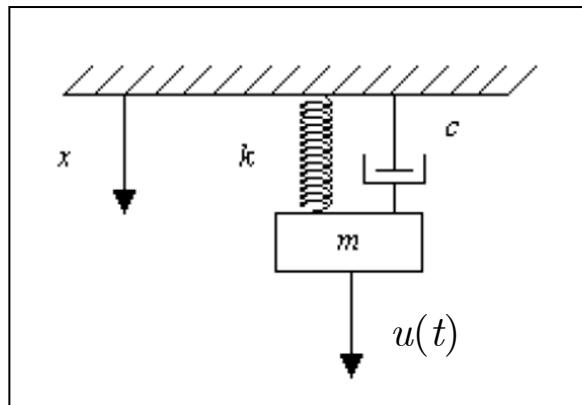


# Definizioni e Calcolo

□ **Nota:** Un sistema “perfetto”, ovvero capace di riprodurre esattamente un ingresso armonico a tutte le frequenze deve avere una FdT pari a:

$$G(j\omega) \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = 1 \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} = 0^\circ \end{cases}, \forall \omega \in [0, \infty)$$

□ **Esempio 1:**



$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u(t) \\ u(t) = 10 \sin(\omega t) \end{cases}$$

- Posto  $m = k = c = 1$ :

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X = 10 |G(j\omega)| \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} \end{cases}$$



## Definizioni e Calcolo

- FdT in funzione della frequenza

$$G(j\omega) = \frac{1 \cdot e^{j0}}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} \cdot e^{j \tan^{-1} \frac{\omega}{1-\omega^2}}}$$

- Modulo e Fase della FdT

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}},$$

$$\varphi = -\tan^{-1} \frac{\omega}{1 - \omega^2}$$

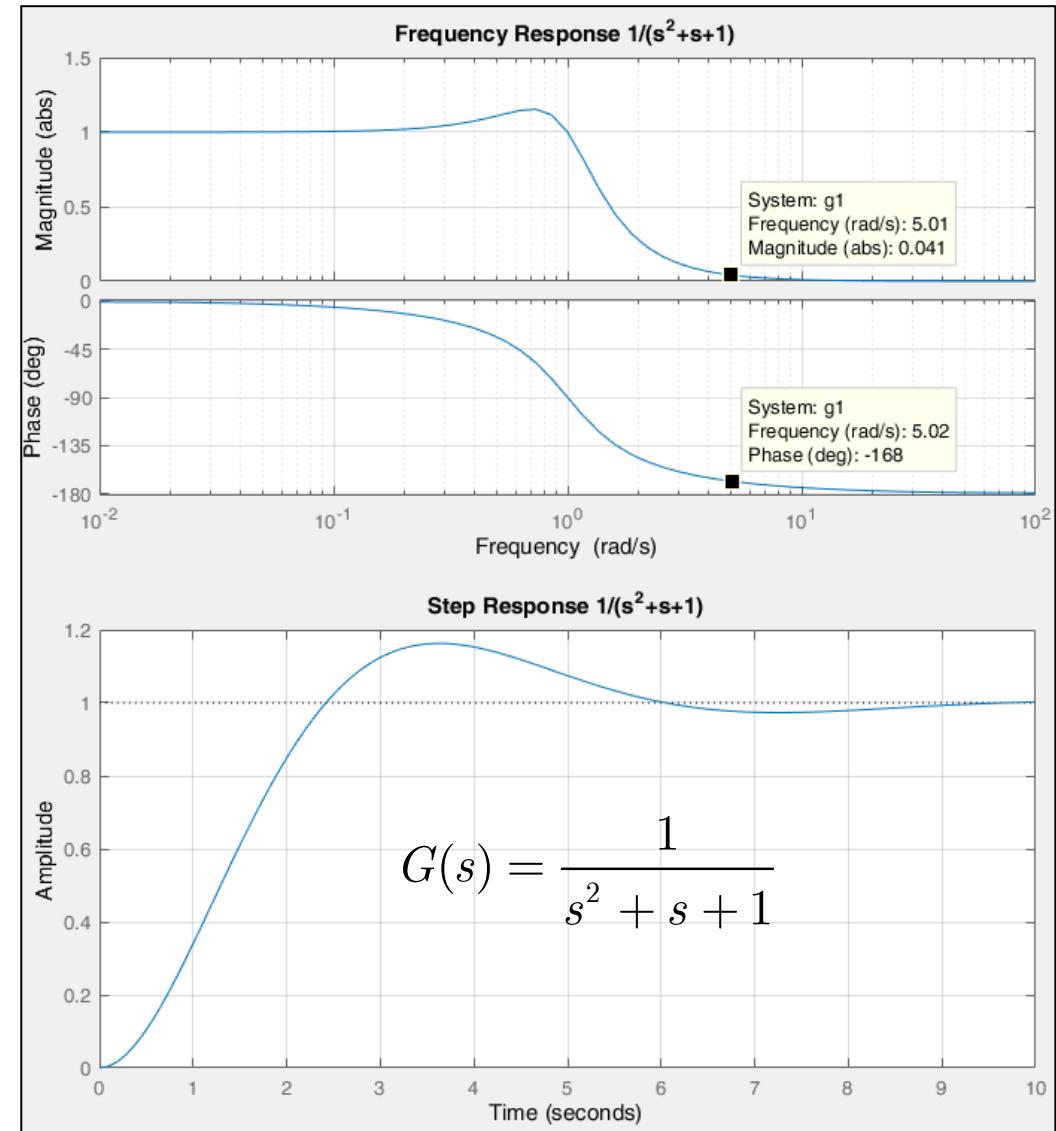
- Forma generale della risposta

$$x(t) = \frac{10}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega}{1 - \omega^2})$$

- Caso numerico particolare

$$u(t) = 10 \sin(5t)$$

$$\Rightarrow x(t) = 0.401 \sin(5t - 0.29)$$



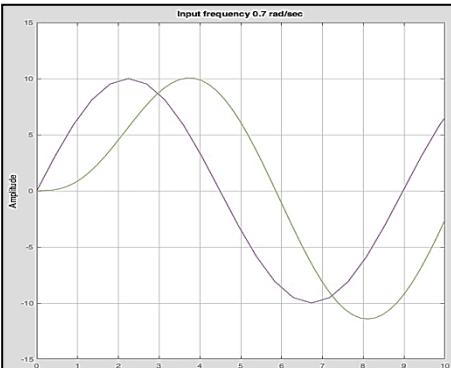
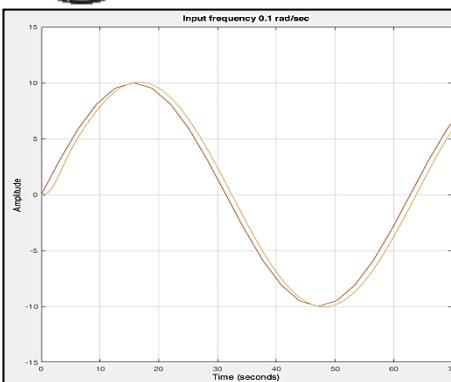


# Definizioni e Calcolo

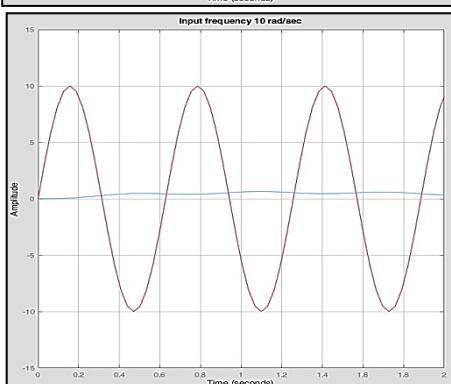
$$u(t) = 10 \sin(\omega t)$$

$$x(t) = 10 |G(j\omega)| \sin[\omega t + \angle G(j\omega)]$$

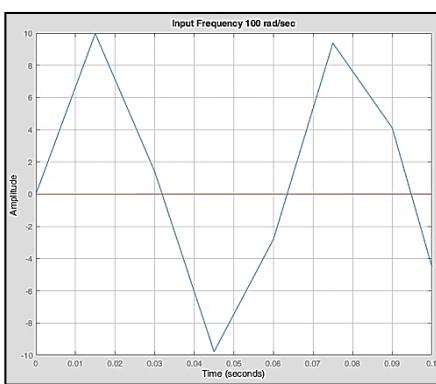
$$\omega = 0.1, M = 1.01, P = -5.8^\circ$$



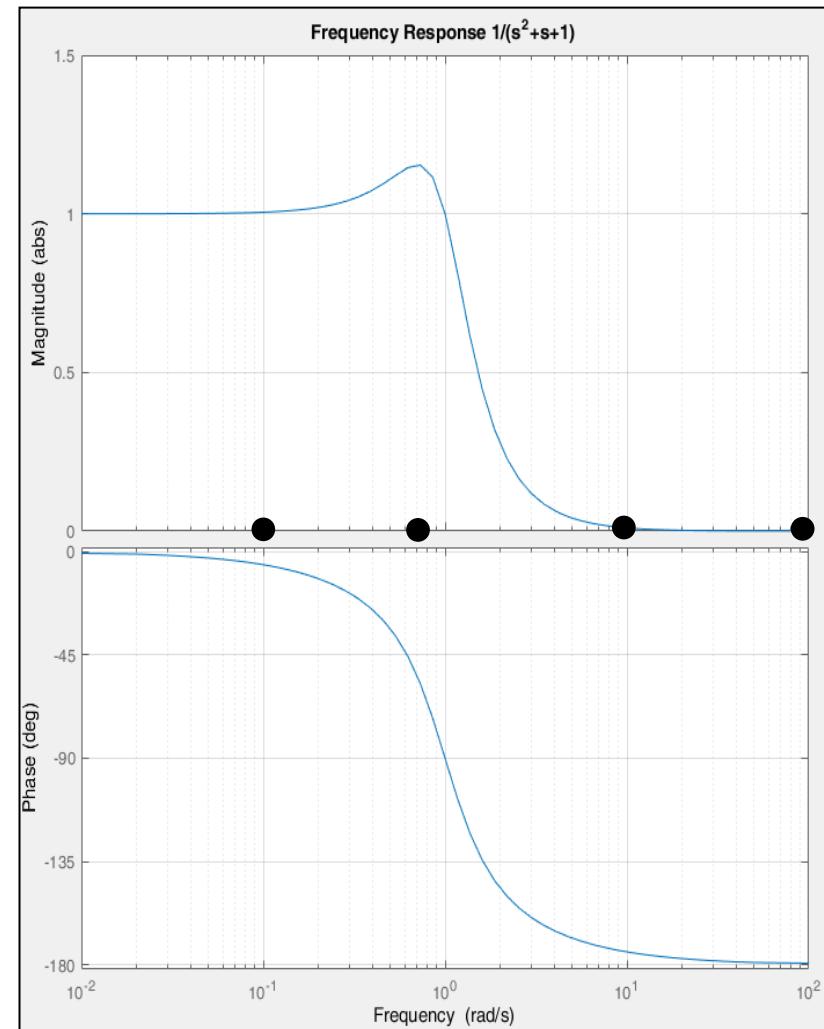
$$\omega = 0.7, M = 1.15, P = -53.7^\circ$$



$$\omega = 10, M = 0.01, P = -174^\circ$$



$$\omega = 100, M = 0.0003, P = -179^\circ$$

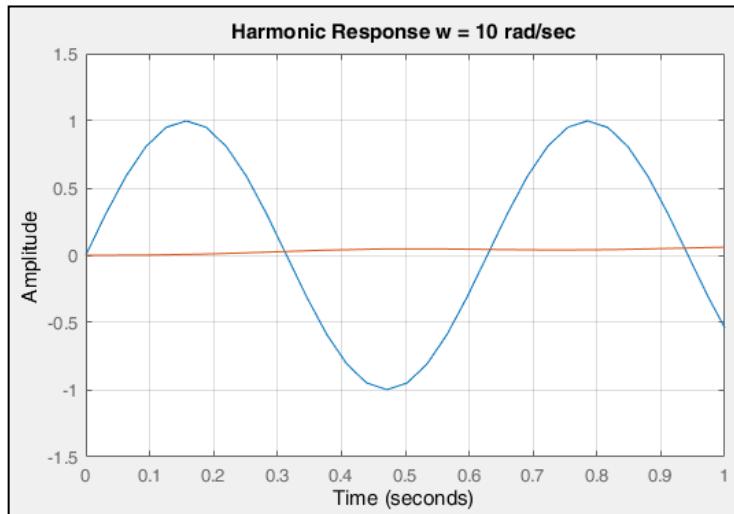




# Definizioni e Calcolo

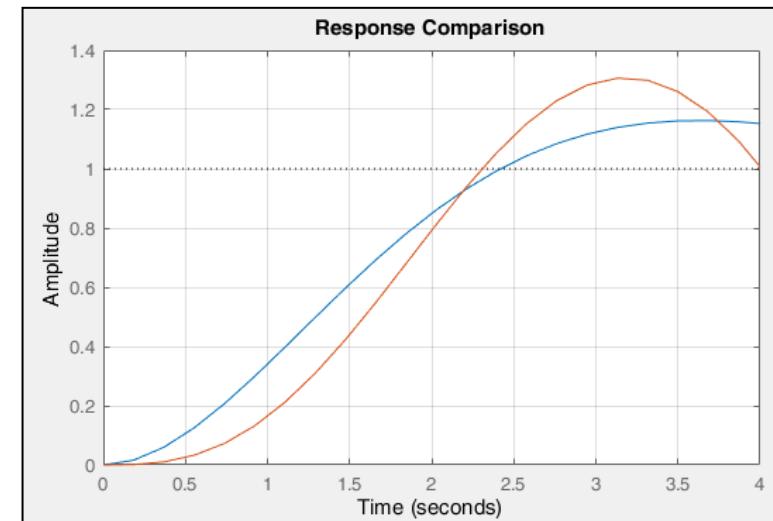
## □ Commenti:

1. All'aumentare della frequenza, l'ampiezza della risposta armonica tende a zero. Si può quindi definire una frequenza dopo la quale possiamo dire che, in pratica, il sistema NON risponde, ovvero la massa non si muove!



2. Paragone tra la risposta al gradino e la risposta ad una somma di ingressi sinusoidali

$$u(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,7} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi t}{30}\right)$$





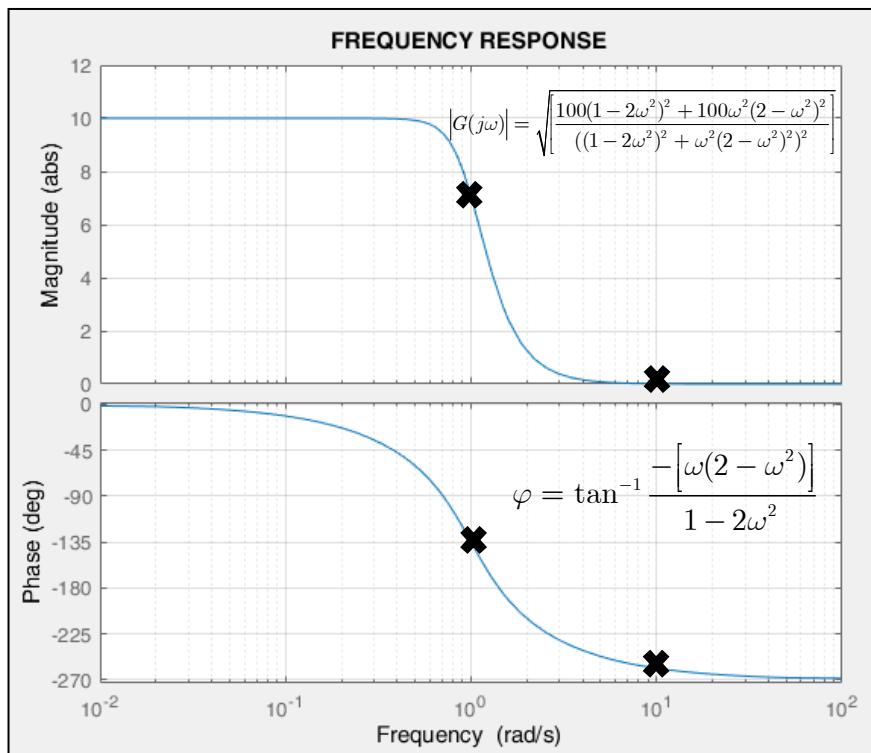
## Definizioni e Calcolo

### □ Esempio 2:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{10}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)(1+j\omega-\omega^2)}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{100(1-2\omega^2)^2 + 100\omega^2(2-\omega^2)^2}{((1-2\omega^2)^2 + \omega^2(2-\omega^2)^2)^2}}$$
$$\varphi = \tan^{-1} \frac{-[\omega(2-\omega^2)]}{1-2\omega^2}$$



$$u(t) = U \sin \omega t$$

$$y(t) = U |G(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi)$$

| frequency    | Magnitude | Phase    |
|--------------|-----------|----------|
| 0.1 rad/sec  | 10.0      | -12 deg  |
| 1.0 rad/sec  | 7.0       | -135 deg |
| 10.0 rad/sec | 0.0107    | -258 deg |

$$u(t) = 4 \sin t \quad u(t) = \sin 10t$$

$$y(t) = 28 \sin(t - 2.356) \quad y(t) = 0.0107 \sin(t - 4.5)$$



# Introduzione

- La risposta in frequenza può essere calcolata anche per segnali non puramente armonici sfruttando lo sviluppo in serie di Fourier, la sua trasformata ed il fatto che per i sistemi di interesse vale il principio di sovrapposizione degli effetti (linearità)
  - Si può quindi studiare la risposta di un sistema ad ingressi:
    - Sinusoidali
    - Periodici
    - “Aperiodici”

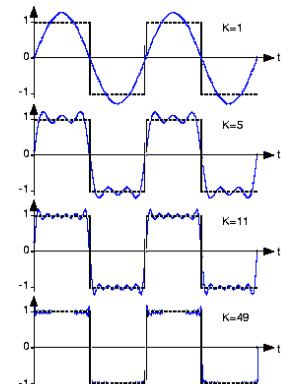
## □ Definizione – Funzione periodica:

Una funzione  $f(t)$  si dice periodica di periodo  $T$  se

$$\exists T > 0 \text{ : } f(t) = f(t + T), \forall t \quad \bullet \text{ Il più piccolo valore } T \text{ si dice Periodo fondamentale}$$

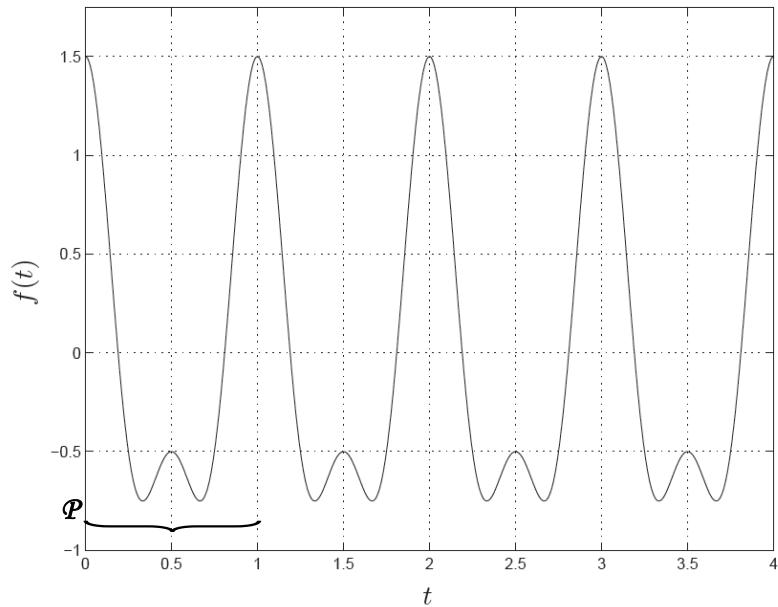
Ogni multiplo intero del periodo fondamentale è anch'esso un Periodo.

$$f(t + mT) = f(t), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$





# Introduzione



$$f(t) = \cos(2\pi t) + \frac{1}{2} \cos(4\pi t)$$

$$\begin{cases} \cos(2\pi t) \Rightarrow \mathcal{P} = 1 \\ \cos(4\pi t) \Rightarrow \mathcal{P} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\mathcal{P} = 1$  è il più piccolo periodo  $T$  per cui  $f(t) = f(t + T)$

- In generale, per una funzione periodica (per esempio di periodo  $2\pi$ ) si hanno le seguenti definizioni:

$$A \sin\left(2\pi\nu t + \phi\right)$$

A = Ampiezza (Modulo)

$\phi$  = Fase (rad)

$\nu = 1/\mathcal{P}$  frequenza (Hz, sec<sup>-1</sup>)

$2\pi\nu = \omega$  = pulsazione (rad/sec)

$$A \sin\left[2\pi\nu\left(t + \frac{1}{\nu}\right) + \phi\right] = A \sin\left[2\pi\nu t + 2\pi + \phi\right] = A \sin\left[2\pi\nu t + \phi\right]$$

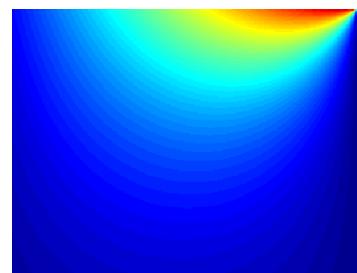


# Introduzione

- **Domanda:** E' possibile usare una somma di funzioni trigonometriche per rappresentare una funzione periodica qualsiasi? → Serie di Fourier

- Nel caso dello sviluppo originario di Fourier (circa 1822) si parla di periodicità spaziale per il modello della distribuzione di temperatura in una piastra metallica partendo da una barra monodimensionale:

$$? = \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta + \phi_n)$$



- I termini sinusoidali sono detti Armoniche
- La dipendenza dal tempo è eventualmente implicita nei coefficienti
- Ogni armonica ha Periodo  $2\pi/n$  con frequenza  $\nu = n/2\pi$
- Il Periodo della somma è comunque  $2\pi$  !

- Nelle tre dimensioni spaziali, definendo la funzione diffusione termica  $u(x, y, z)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \nabla^2 u = 0$$

$$u_t = \alpha \left( u_{xx} + u_{yy} \right) \Big|_{\substack{0 < x < L \\ 0 < y < L}}$$



# Introduzione

## □ Serie di Fourier per una funzione periodica (forma esponenziale):

- Consideriamo una funzione periodica complessa, continua e continuamente derivabile

$$f(t) = f(t + T), \forall t \in (-\infty, +\infty)$$

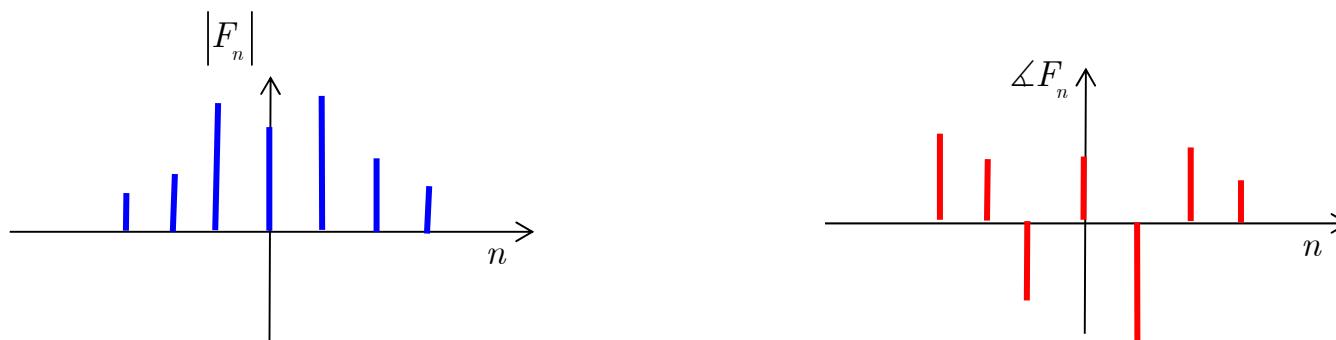
$$2\pi v = \frac{2\pi}{T} = \omega \text{ pulsazione}$$

- Si associa alla funzione  $f(t)$  i coefficienti complessi  $F_n$  per  $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

$$e^{-jn\omega t} = \cos(n\omega t) - j \sin(n\omega t)$$

$$e^{jn\omega t} = \cos(n\omega t) + j \sin(n\omega t)$$



$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega t}$$



# Introduzione

- Nel caso in cui  $f(t)$  sia una funzione reale i coefficienti complessi sono anche coniugati rispetto ad  $n$

$$F_{-n} = \bar{F}_n, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( F_n e^{jn\omega t} + \bar{F}_n e^{-jn\omega t} \right)$$

- Quindi il modulo e la fase di  $F_n, n = 0, 1, 2, \dots$  definiscono completamente la  $f(t)$

## □ Serie di Fourier per una funzione periodica (forma trigonometrica)

- Usando le formule di Eulero per riscrivere i coefficienti  $F_n$ :

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [F_{cn} \cos(n\omega t) + F_{sn} \sin(n\omega t)] \quad F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) dt$$

$$f(t) = F_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |F_n| \cos(n\omega t + \angle F_n)$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

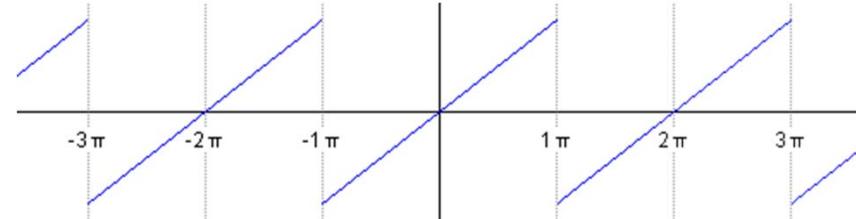


# Introduzione

□ **Esempio:** Consideriamo la seguente funzione periodica

$$f(x) = x, -\pi < x < \pi$$

$$f(x + 2\pi) = f(x), -\infty < x < \infty$$

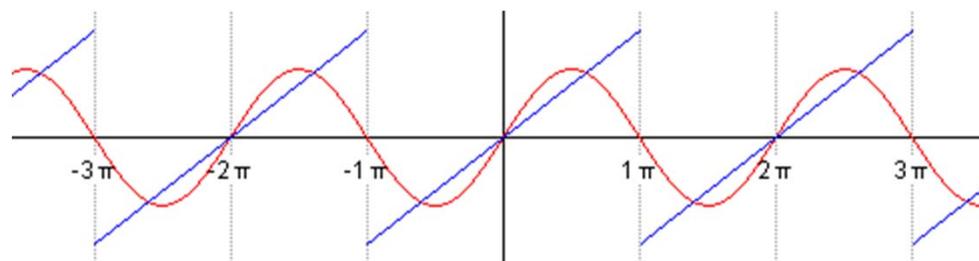


$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \right] \cos(nx) + \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \right] \sin(nx)$$

$$a_n = 0$$

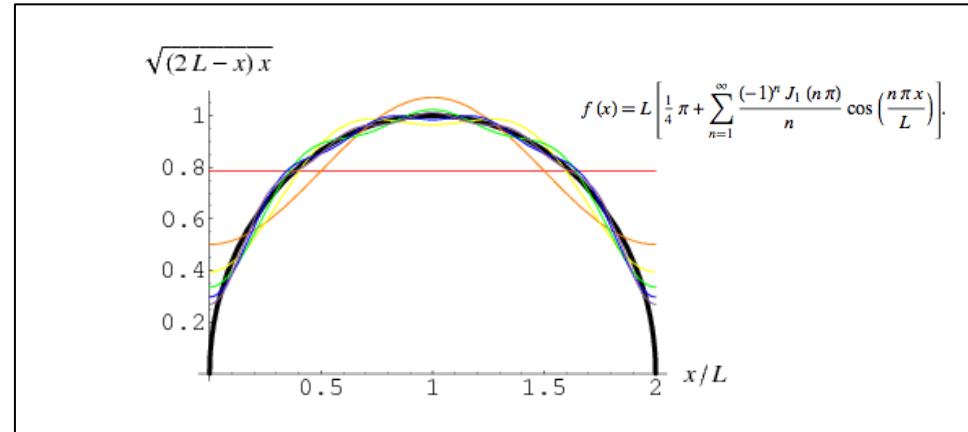
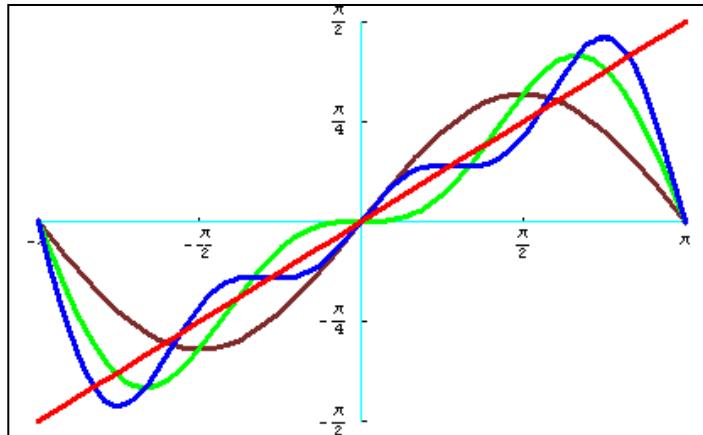
$$b_n = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) = 2 \sin x - \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x) + \dots, -\infty < x < \infty$$



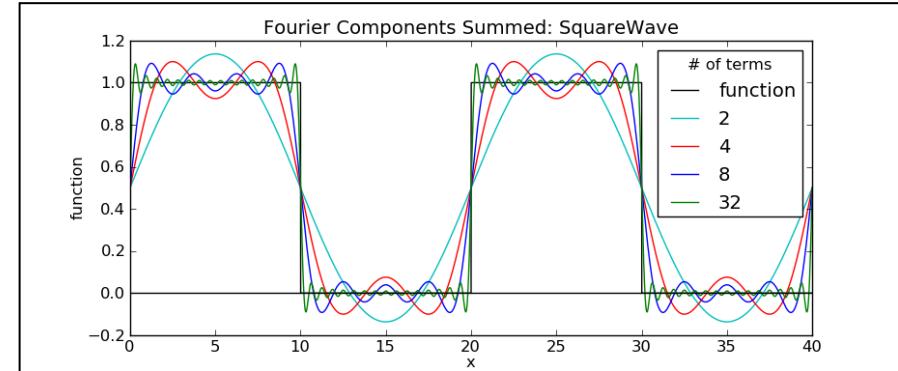


# Introduzione



- Segnali a banda limitata:

$$f(t) = F_0 + 2 \sum_{n=1}^N |F_n| \cos(n\omega t + \angle F_n)$$
$$F_n = 0, n > N$$



- Come quantifichiamo la ‘capacità di risposta’ di un sistema? L’intervallo di frequenze entro il quale il sistema fornisce una risposta è detto **Banda** oppure **Banda Passante**.



# Introduzione

## □ Serie di Fourier per segnali Aperiodici (Trasformata Continua)

Nel caso di segnale aperiodico, si ipotizza che esso sia un segnale periodico il cui periodo,  $T_0$  tende all'infinito, il che significa che la pulsazione (frequenza) tende a zero

$$f(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} f_p(t)$$

## □ Sommario: Dato un sistema lineare, tempo invariante, asintoticamente stabile con FdT $G(j\omega)$

- La risposta in frequenza ad un ingresso sinusoidale è ancora un segnale sinusoidale

$$\boxed{u(t) = U \sin \omega_0 t}$$
$$y(t) = U |G(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

- La risposta in frequenza ad un ingresso periodico è la combinazione lineare delle risposte alle armoniche costituenti lo sviluppo in serie di Fourier dell'ingresso

$$\boxed{u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n e^{jn\omega_0 t}, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}}$$
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n e^{jn\omega_0 t}, Y_n = G(jn\omega_0)U_n$$

- La risposta in frequenza ad un ingresso aperiodico può essere approssimata con quella di un ingresso periodico avente periodo  $T \rightarrow \infty$



# Introduzione

## □ Serie di Fourier per segnali Aperiodici (Trasformata Continua)

Nel caso di segnale aperiodico, si ipotizza che esso sia un segnale periodico il cui periodo,  $T_0$  tende all'infinito, il che significa che la pulsazione (frequenza) tende a zero

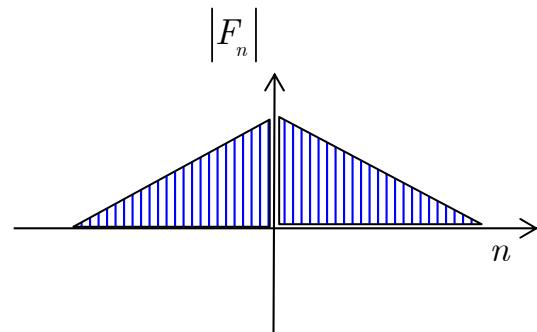
$$f(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} f_p(t)$$

## □ In questo caso, formalmente, si può applicare la Trasformata di Fourier

- Riprendendo la serie di Fourier, quando il periodo tende all'infinito, essa diventa la trasformata di Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$



- Nel caso di funzioni reali,  $n$  ha soltanto valori positivi



# Rappresentazioni Grafiche

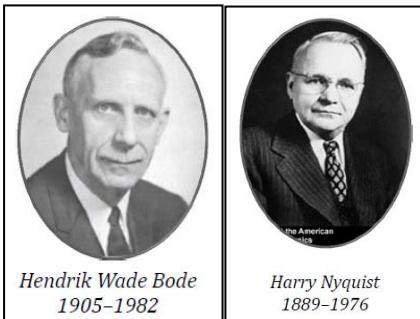
## □ Rappresentazione Grafica della Risposta in Frequenza

- Uno dei vantaggi della risposta in frequenza è la sua facilità di rappresentazione grafica che si può tracciare facilmente in modo approssimato manualmente.

$$G(j\omega), \forall \omega = [0, \infty)$$

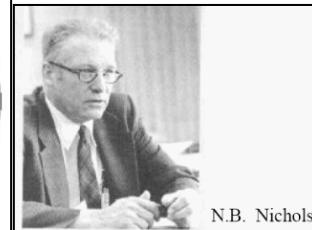
- Le tecniche grafiche principali sono:
  - Diagrammi di Bode o diagrammi Cartesiani
  - Diagrammi di Nyquist o polari
  - Diagrammi (carte) di Nichols

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{10}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

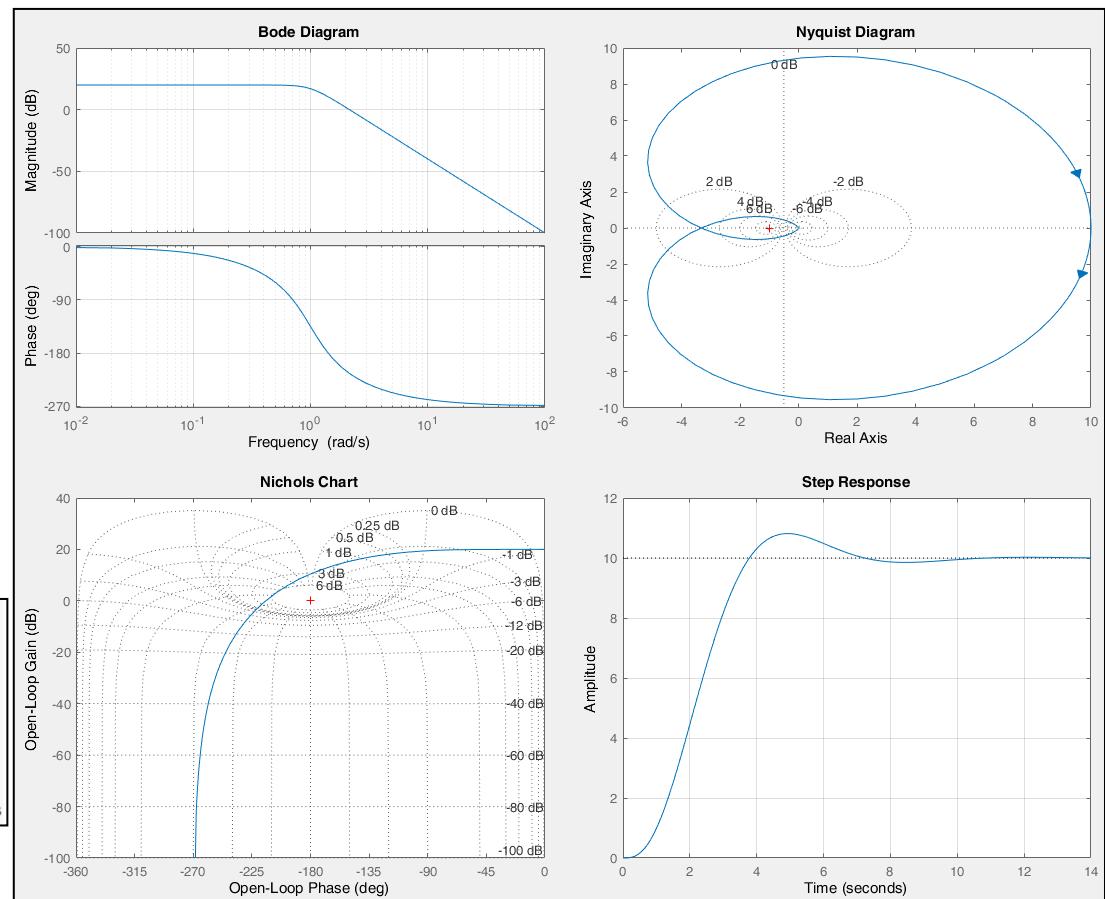


Hendrik Wade Bode  
1905-1982

Harry Nyquist  
1889-1976



N.B. Nichols





## Richiami

### □ Introduzione con Esempio

- Consideriamo una funzione scalare razionale fratta di variabile complessa

$$G = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2)}{(a_3 + jb_3)} \quad (a_1 + jb_1) = |(a_1 + jb_1)| e^{j\angle(a_1 + jb_1)} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} e^{j \tan^{-1} \frac{b_1}{a_1}}$$

- Per le proprietà dei numeri complessi:

$$|G| = \left| \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2)}{(a_3 + jb_3)} \right| = \frac{|a_1 + jb_1| |a_2 + jb_2|}{|a_3 + jb_3|} = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}$$

$$\angle G = \angle(a_1 + jb_1) + \angle(a_2 + jb_2) - \angle(a_3 + jb_3)$$

- Per le proprietà logaritmi:

$$\begin{aligned} \log_{10} |G| &= \log_{10} \frac{|a_1 + jb_1| |a_2 + jb_2|}{|a_3 + jb_3|} = \log_{10} \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} = \\ &= \log_{10} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \log_{10} \sqrt{a_2^2 + b_2^2} - \log_{10} \sqrt{a_3^2 + b_3^2} \end{aligned}$$



## Richiami

$$G(s) = \frac{(10)(s+5)}{s(s+40)} \Rightarrow G(j\omega) = \left. \frac{(10)5(\frac{j\omega}{5} + 1)}{(j\omega)40(\frac{j\omega}{40} + 1)} \right|_{s=j\omega} = \frac{(1.25)(\frac{j\omega}{5} + 1)}{(j\omega)(\frac{j\omega}{40} + 1)}$$

- Consideriamo la seguente misura per il modulo di  $G(j\omega)$ :

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} \Rightarrow 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

$$\begin{aligned} \left|G(j\omega)\right|_{dB} &= 20 \log_{10} \frac{\left|1.25\left|\frac{j\omega}{5} + 1\right|\right|}{\left|j\omega\left|\frac{j\omega}{40} + 1\right|\right|} = \\ &= 20 \log_{10}(1.25) + 20 \log_{10}\left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{25}}\right) - 20 \log_{10}(\sqrt{\omega^2}) - 20 \log_{10}\left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{1600}}\right) \end{aligned}$$

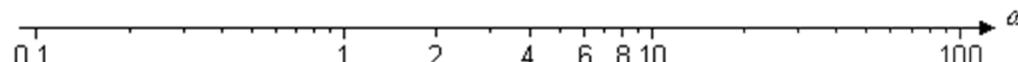
- Calcoliamo la fase di  $G(j\omega)$ :

$$\angle G(j\omega) = \angle(1.25) + \angle\left(\frac{j\omega}{5} + 1\right) - \angle(j\omega) - \angle\left(\frac{j\omega}{40} + 1\right)$$



## Diagrammi di Bode

- I *diagrammi di Bode* sono la tecnica grafica più comunemente utilizzata per rappresentare la risposta in frequenza; tale rappresentazione usa due diversi diagrammi, uno per il modulo per la fase come funzioni della frequenza
  
- L'asse delle ascisse riporta il valore delle diverse frequenze  $f$  o pulsazioni  $\omega = 2\pi f$ ; l'unità di misura di solito quindi Hz oppure rad/sec rispettivamente. *La scala dell'asse delle ascisse è di solito logaritmica in base 10* e riproduce tutte le frequenze da 0 a  $\infty$



- Se il rapporto fra due pulsazioni successive è pari a 10 si dice che sono separate da una *decade*:

$$\text{decade} = \frac{\log_{10} (\omega_2 / \omega_1)}{\log_{10} 10}$$

- Se il rapporto fra due pulsazioni è pari a 2 si dice che sono separate da una *ottava*

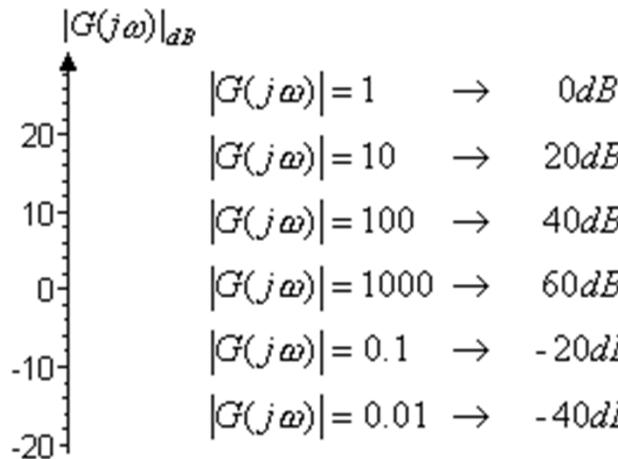
$$\text{ottava} = \frac{\log_{10} (\omega_2 / \omega_1)}{\log_{10} 2}$$



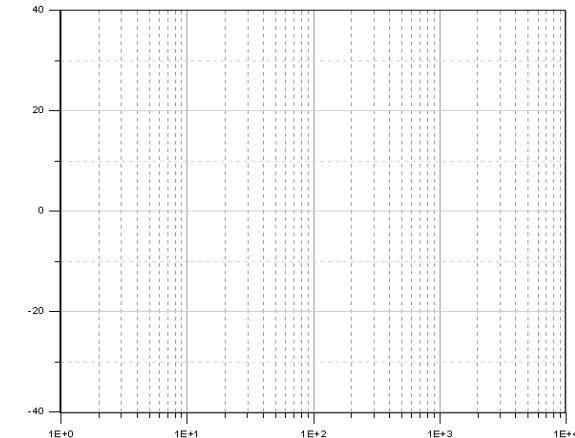
## Diagrammi di Bode

- Nel diagramma del modulo l'asse delle ordinate riporta, il valore dell'ampiezza della  $G(j\omega)$ ; i valori vengono riportati in *Decibel (dB)*, in una scala lineare

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}|G(j\omega)|$$



|                       |               |        |
|-----------------------|---------------|--------|
| $ G(j\omega)  = 1$    | $\rightarrow$ | 0 dB   |
| $ G(j\omega)  = 10$   | $\rightarrow$ | 20 dB  |
| $ G(j\omega)  = 100$  | $\rightarrow$ | 40 dB  |
| $ G(j\omega)  = 1000$ | $\rightarrow$ | 60 dB  |
| $ G(j\omega)  = 0.1$  | $\rightarrow$ | -20 dB |
| $ G(j\omega)  = 0.01$ | $\rightarrow$ | -40 dB |



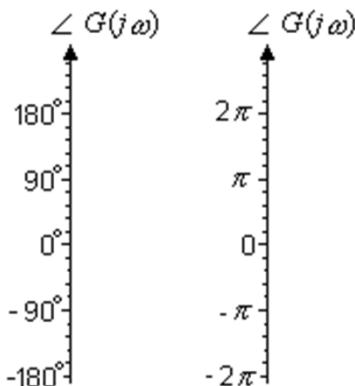
- Una differenza di 20 dB corrisponde ad un cambiamento di un'ordine di grandezza dell'ampiezza.
- Un grafico lineare asintotico approssimato può essere disegnato usando linee rette dato che la relazione fra dB e  $\log_{10}\omega$  è lineare.**
- Utilizzando i dB le ampiezze possono essere semplicemente sommate e sottratte (essendo logaritmi).

[Origin of Decibel](#)



## Diagrammi di Bode

- Nel diagramma di fase l'asse delle ordinate riporta, la fase di  $G(j\omega)$  espressa in gradi o radianti, con scala lineare; quando la  $G(j\omega)$  viene espressa in modulo e fase (cioè come  $|G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)}$ ) anche le fasi possono essere sommate e sottratte



- L'uso dei logaritmi e della trattazione del numero complesso  $G(jw)$ , permette anche il tracciamento approssimato dei diagrammi di Bode per mezzo di approssimanti Lineari, ottenendo i cosiddetti diagrammi asintotici
- Il tracciamento dei diagrammi asintotici di Bode consiste dapprima nel riscrivere la  $G(s)$  in **forma di Bode**, con  $s = j\omega$ , ottenendo l'espressione:

$$G(j\omega) = \frac{k \prod_i (1 + j\tau_i \omega) \prod_i (1 + 2j\xi_{iz} \omega / \omega_{iz} - \omega^2 / \omega_{iz}^2)}{(j\omega)^r \prod_i (1 + jT_i \omega) \prod_i (1 + 2j\xi_{ip} \omega / \omega_{ip} - \omega^2 / \omega_{ip}^2)}$$

- Dopo di chè si usano le proprietà dei logaritmi e dei numeri complessi viste precedentemente approssimando la somma algebrica dei moduli e delle fasi di tutti i contributi della  $G(s)$ .



## Diagrammi di Bode

- Essendo la  $G(j\omega)$  un numero complesso, la fase è data dalla somma (e sottrazione) delle fasi delle varie componenti e il modulo è dato dal prodotto dei moduli; ricordando però che il diagramma riporta il modulo espresso in  $dB$  si ha che anche il modulo è dato dalla somma dei moduli, espressi in  $dB$ , delle varie componenti:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} = & 20 \cdot \log_{10} |k| - 20 \cdot r \cdot \log_{10} |j\omega| + \sum_i 20 \cdot \log_{10} |1 + j\tau_i \omega| + \\ & + \sum_i 20 \cdot \log_{10} \left| 1 + 2j\xi_{iz} \omega / \omega_{iz} - \omega^2 / \omega_{iz}^2 \right| - \sum_i 20 \cdot \log_{10} |1 + jT_i \omega| + \\ & - \sum_i 20 \cdot \log_{10} \left| 1 + 2j\xi_{ip} \omega / \omega_{ip} - \omega^2 / \omega_{ip}^2 \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) = & \angle k - r \cdot \angle(j\omega) + \sum_i \angle(1 + j\tau_i \omega) + \sum_i \angle(1 + 2j\xi_{iz} \omega / \omega_{iz} - \omega^2 / \omega_{iz}^2) + \\ & - \sum_i \angle(1 + jT_i \omega) - \angle \sum_i (1 + 2j\xi_{ip} \omega / \omega_{ip} - \omega^2 / \omega_{ip}^2) \end{aligned}$$

Hearing is a log scale



## Diagrammi di Bode

□ **Esempio**     $G(s) = \frac{2(s+1)}{s(s+10)}$

- Forma di Bode

$$G(s) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1+s}{s \cdot (1+s/10)} = 0.2 \cdot \frac{1+s}{s \cdot (1+s/10)} \Rightarrow G(j\omega) = 0.2 \cdot \frac{1+j\omega}{j\omega \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)}$$

- Modulo e Fase

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20 \log_{10} |0.2| - 20 \log_{10} \left| \frac{1}{j\omega} \right| + 20 \log_{10} |1 + j\omega| - 20 \log_{10} \left| 1 + j\frac{\omega}{10} \right|$$

$$\angle G(j\omega) = \angle 0.2 - \angle(j\omega) + \angle(1 + j\omega) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)$$

- Esaminiamo i contributi separatamente



## Diagrammi di Bode

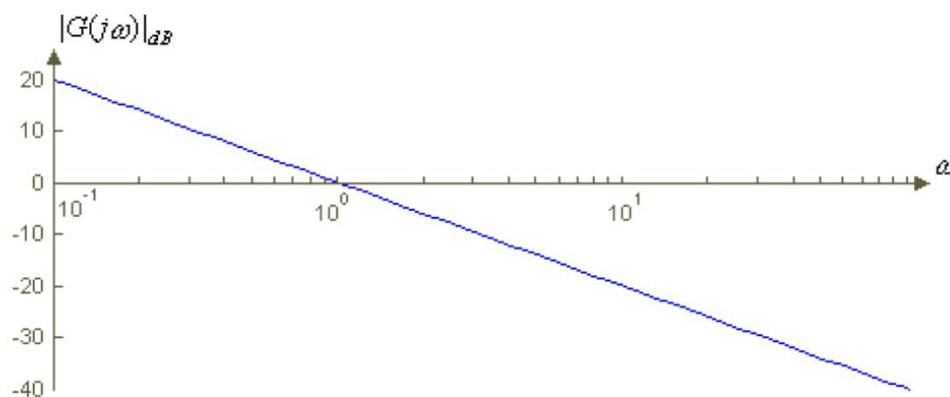
$$|G(j\omega)|_{dB} = \boxed{20 \log_{10} |0.2|} - 20 \log_{10} |j\omega| + 20 \log_{10} |1 + j\omega| - 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{10} \right|$$

$$1) 20 \log_{10} |0.2| = -14$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |0.2| \boxed{-20 \log_{10} \left| \frac{1}{j\omega} \right|} + 20 \log_{10} |1 + j\omega| - 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{10} \right|$$

**CORREGGERE** 2)  $-20 \cdot \log_{10} |j\omega|$

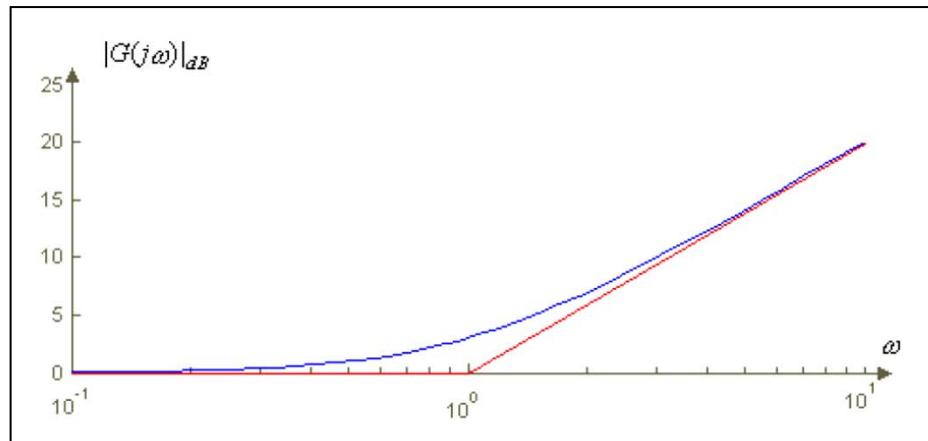
Si ha ovviamente che per  $\omega \rightarrow 0$  tende a  $\infty$  mentre per  $\omega \rightarrow \infty$  tende a 0 con un andamento lineare con una pendenza di  $-20 \text{ dB/decade}$ :





## Diagrammi di Bode

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |0.2| - 20 \log_{10} |j\omega| + 20 \log_{10} |1 + j\omega| - 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{10} \right|$$



3)  $20 \cdot \log_{10} |1 + j\omega|$

Tenendo presente che

$$|1 + j\omega| = \sqrt{1 + \omega^2}$$

si possono fare le seguenti ipotesi:

a)  $\omega \ll 1 \Rightarrow \sqrt{1 + \omega^2} \approx 1$

b)  $\omega \gg 1 \Rightarrow \sqrt{1 + \omega^2} \approx \omega$

e quindi, per  $\omega \rightarrow 0$  tende a 0 mentre per  $\omega \rightarrow \infty$  tende a  $\infty$  con un andamento lineare con una pendenza di  $20 \text{ dB/decade}$ .



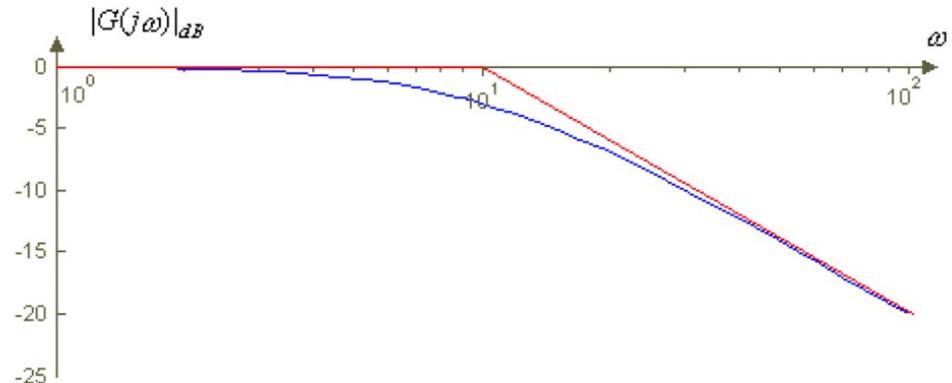
## Diagrammi di Bode

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20 \log_{10} |0.2| - 20 \log_{10} |j\omega| + 20 \log_{10} \left|1 + j\omega\right| - 20 \log_{10} \left|1 + j\frac{\omega}{10}\right|$$

4)  $-20 \cdot \log_{10} \left|1 + j(\omega/10)\right|$

In questo caso si ha che:

$$\left|1 + j\frac{\omega}{10}\right| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100}}$$



si possono fare le seguenti ipotesi:

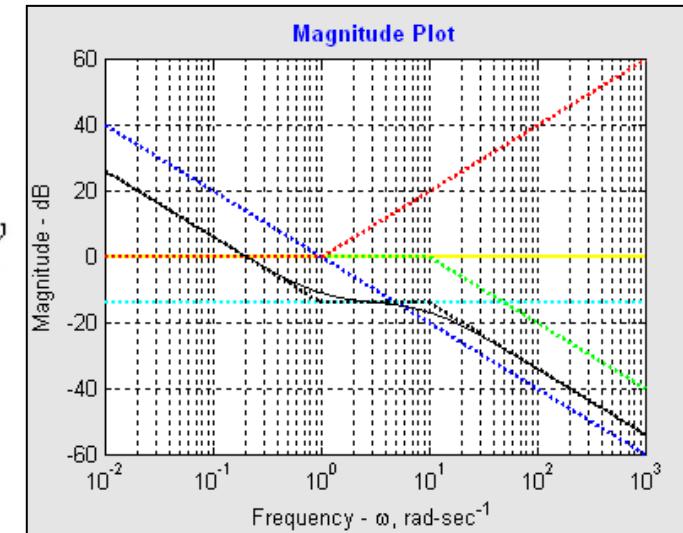
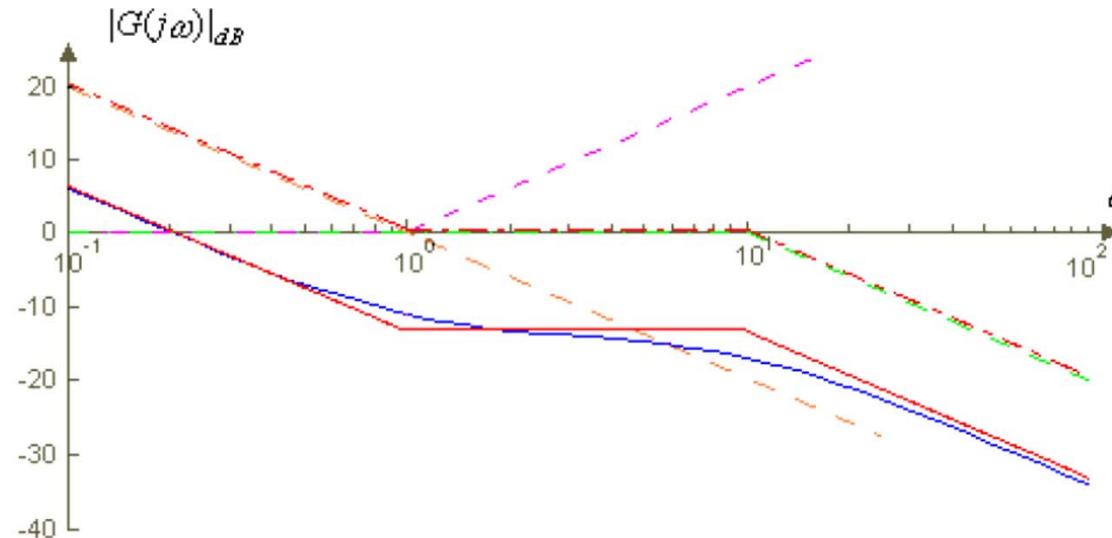
a)  $\omega \ll 10 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100}} \approx 1$

b)  $\omega \gg 10 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100}} \approx \frac{\omega}{10}$

e quindi, per  $\omega \rightarrow 0$  tende a 0 mentre per  $\omega \rightarrow \infty$  tende a andamento lineare con una pendenza di  $-20 \text{ dB/decade}$ .



## Diagrammi di Bode



- Comando Matlab: BodePlotGui
- Scaricabile dal sito oppure da Matlab Central

$$\angle G(j\omega) = \boxed{\angle 0.2} - \angle(j\omega) + \angle(1 + j\omega) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)$$

$$\angle 0.2 = 0$$

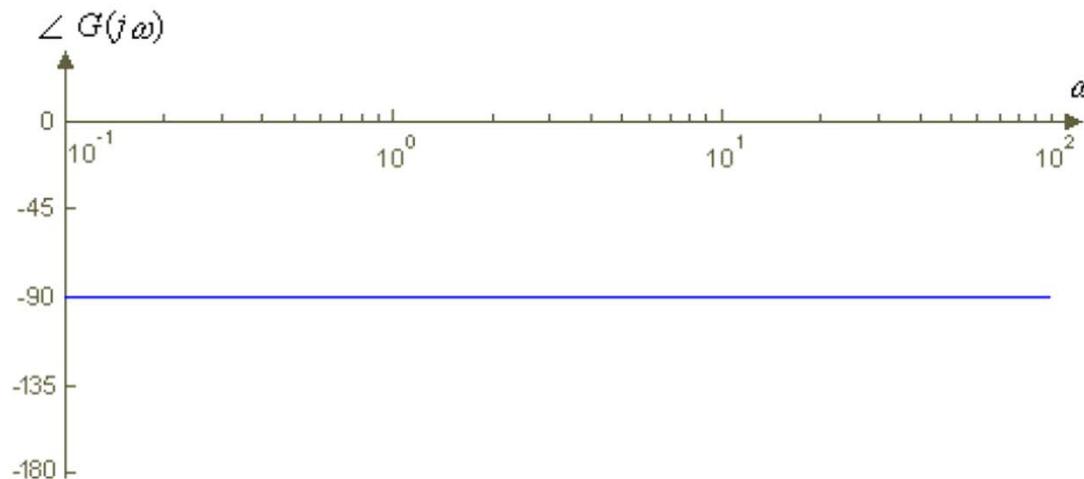


## Diagrammi di Bode

$$\angle G(j\omega) = \angle 0.2 - \boxed{\angle(j\omega)} + \angle(1 + j\omega) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)$$

2)  $\angle(-j\omega)$

Questo termine introduce una fase pari a  $-90^\circ$  per tutte le frequenze





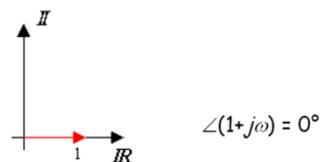
## Diagrammi di Bode

$$\angle G(j\omega) = \angle 0.2 - \angle(j\omega) + \angle(1 + j\omega) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)$$

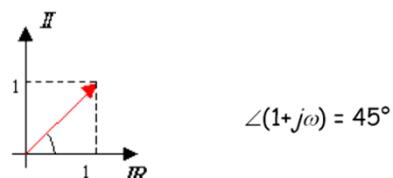
3)  $\angle(1+j\omega)$

Il termine  $(1+j\omega)$  rappresenta un vettore con parte reale pari a 1  
parte immaginaria pari a  $\omega$  e quindi:

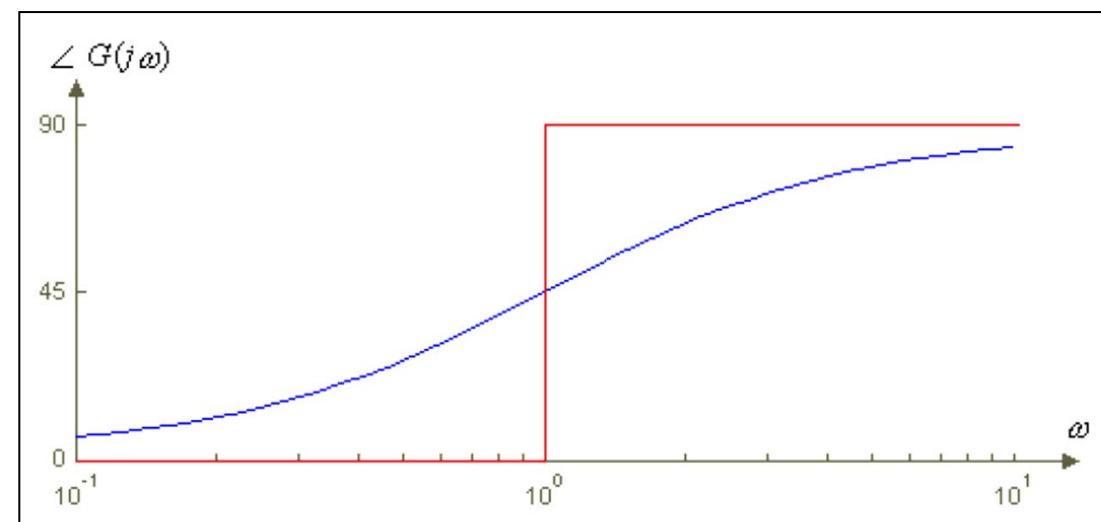
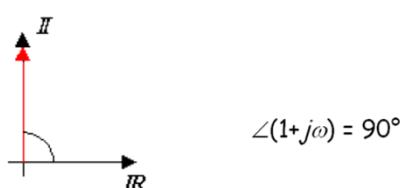
$$\omega \rightarrow 0$$



$$\omega = 1$$



$$\omega \rightarrow \infty$$





## Diagrammi di Bode

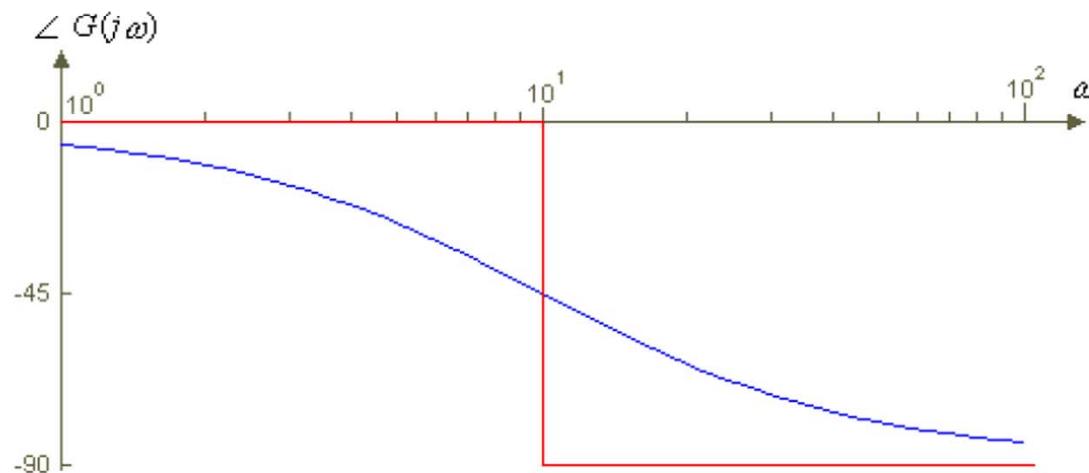
$$\angle G(j\omega) = \angle 0.2 - \angle(j\omega) + \angle(1 + j\omega) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)$$

4)  $\angle\{-[1+(j\omega/10)]\}$

Con ragionamenti analoghi al termine appena visto si ha che:

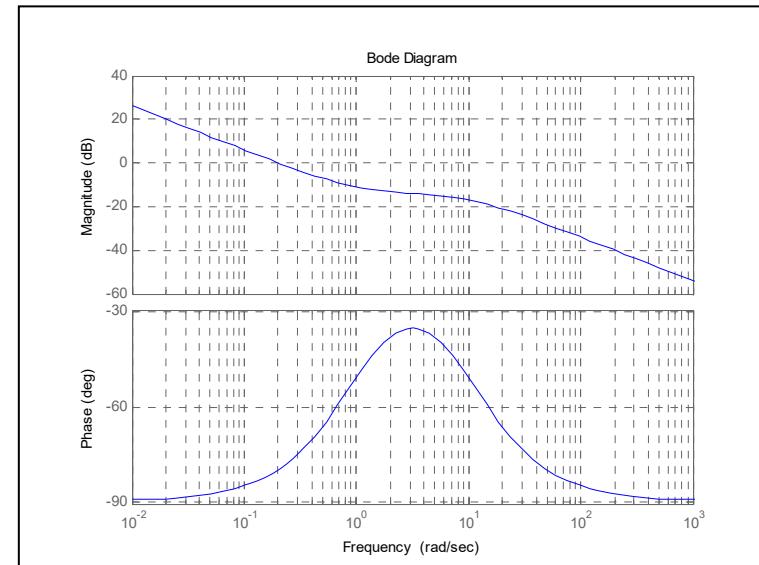
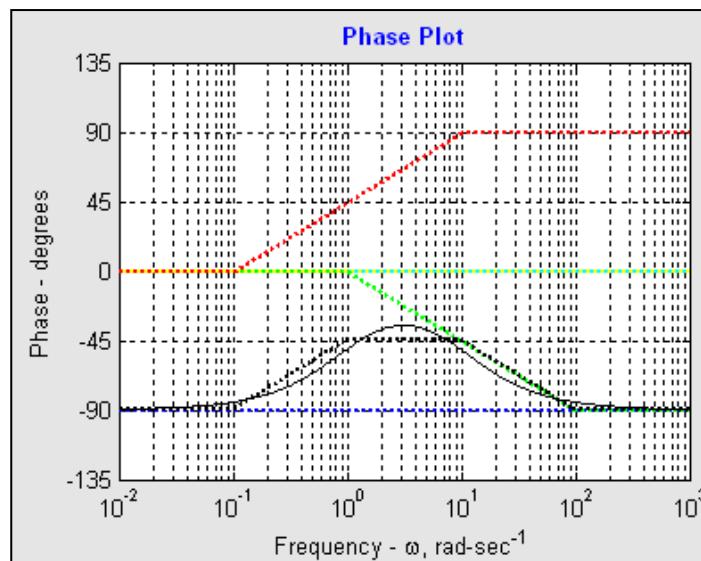
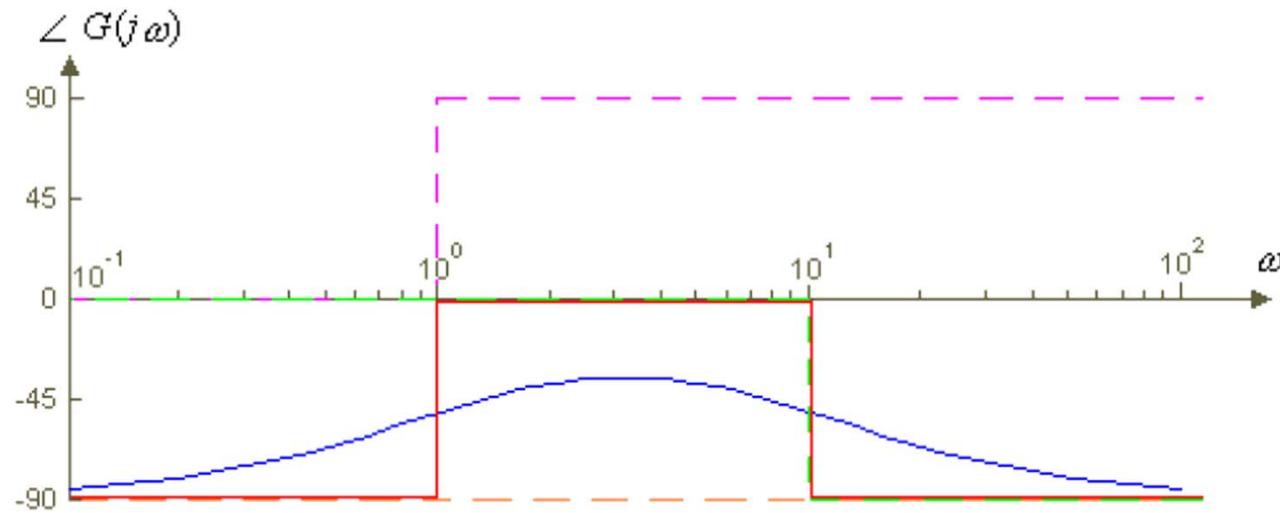
- a)  $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \angle\{-[1+(j\omega/10)]\} = 0^\circ$
- b)  $\omega = 10 \Rightarrow \angle\{-[1+(j\omega/10)]\} = 45^\circ$
- c)  $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \angle\{-[1+(j\omega/10)]\} = 90^\circ$

$$\frac{1}{(1+j\frac{\omega}{10})} = \frac{(1-j\frac{\omega}{10})}{(1+j\frac{\omega}{10})(1-j\frac{\omega}{10})} = \frac{1}{1+\frac{\omega^2}{10^2}} - j\frac{\frac{\omega^2}{10^2}}{1+\frac{\omega^2}{10^2}}$$





# Diagrammi di Bode





# Diagrammi di Bode

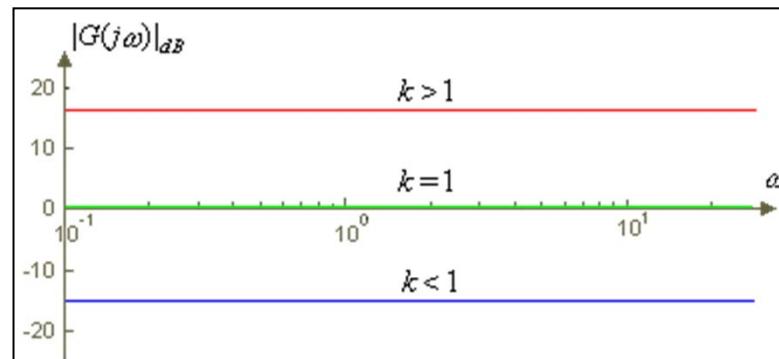
## □ Regole generali per il tracciamento del diagramma asintotico del modulo

- Qualsiasi funzione di trasferimento è costruita in generale da una combinazione di quattro Componenti:

$$G(j\omega) = \frac{k \prod_i (1 + j\tau_i \omega) \prod_i (1 + 2j\xi_{iz} \omega / \omega_{iz} - \omega^2 / \omega_{iz}^2)}{(j\omega)^r \prod_i (1 + jT_i \omega) \prod_i (1 + 2j\xi_{ip} \omega / \omega_{ip} - \omega^2 / \omega_{ip}^2)}$$

1. Guadagno statico
2. Polo/Zero all'origine
3. Polo/Zero ad una frequenza finita (termine del primo ordine)
4. Coppia di Poli/Zeri complessi e coniugati

1.  $\pm k$  Costante di Guadagno Statico  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |k|$

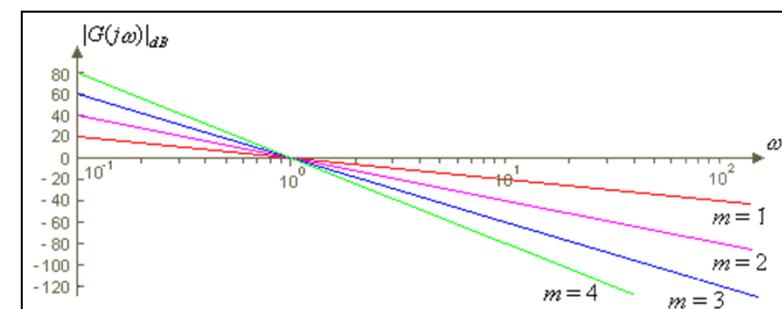
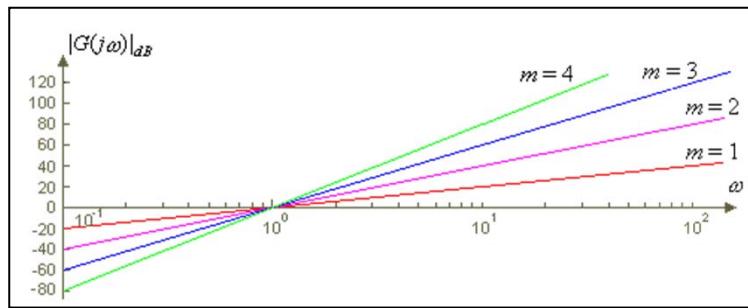




## Diagrammi di Bode

2.  $(j\omega)^{\pm m}$  zeri/poli nell'origine

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20 \log_{10} |(j\omega)^m| = m \cdot 20 \log_{10} \omega \quad \left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20 \log_{10} |(j\omega)^{-m}| = -m \cdot 20 \log_{10} \omega$$



- Lo zero all'origine inserisce una retta con una pendenza pari a  $m \cdot 20 \text{ dB/dec}$ . e tale che per  $\omega = 1$  si ha  $|G(j\omega)|_{dB} = 0$ ;
- Il polo all'origine inserisce una retta con una pendenza pari a  $-m \cdot 20 \text{ dB/dec}$ . e tale che per  $\omega = 1$  si ha  $|G(j\omega)|_{dB} = 0$

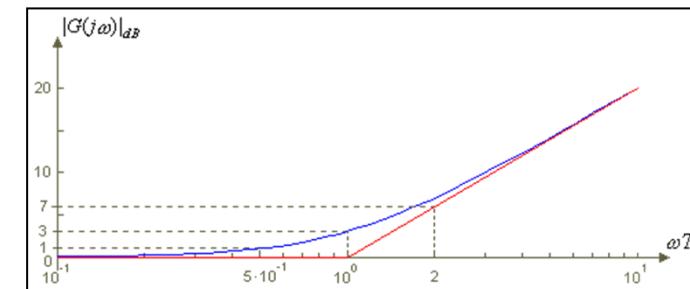
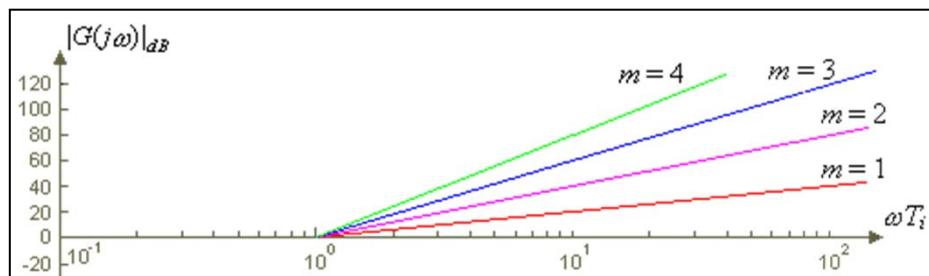


## Diagrammi di Bode

3.  $(1 + jT_i\omega)^{\pm m}$  zeri/poli semplici o ripetuti

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |(1 + j\omega T_i)^m| = m \cdot 20 \log_{10} |1 + j\omega T_i| \quad \text{zeri (+ } m)$$

- $\omega \ll 1/T_i \Rightarrow |G(j\omega)| = 0$  questa approssimazione individua un asintoto della curva effettiva, dato dalla retta orizzontale 0 dB;
- $\omega \gg 1/T_i \Rightarrow |G(j\omega)| = m \cdot 20 \log_{10}(\omega T_i)$  in questo caso l'approssimazione individua un altro asintoto: la retta con pendenza pari a  $m \cdot 20$  dB/dec. e passante per la frequenza  $\omega = 1/T_i$ .
- La frequenza  $\omega = 1/T_i$  è detta frequenza d'angolo (Corner Frequency) ed è pari al valore dello Zero



La curva effettiva si discosta di 3 dB  
alla frequenza d'angolo

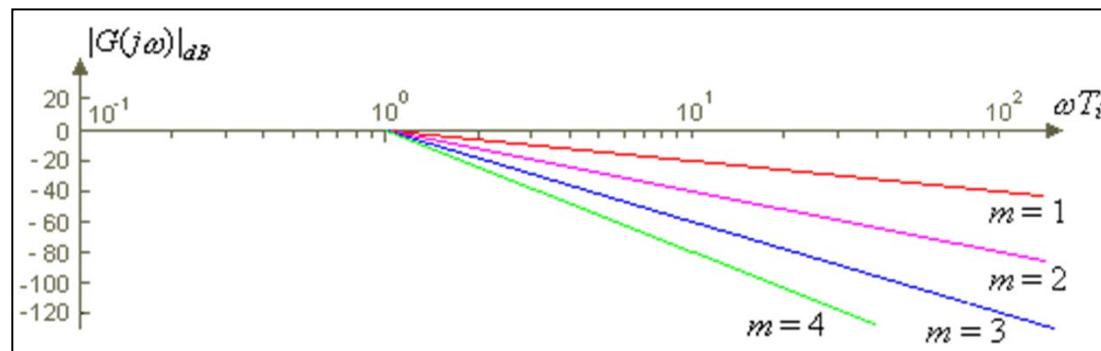


## Diagrammi di Bode

3.  $(1 + jT_i\omega)^{\pm m}$  zeri/poli semplici o ripetuti

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |(1 + j\omega T_i)^{-m}| = -m \cdot 20 \log_{10} |1 + j\omega T_i| \quad \text{poli } (-m)$$

- Con considerazioni del tutto analoghe al caso degli zeri e tenendo presente che questa volta le pendenze sono negative ( $-m \cdot 20 \text{ db/dec.}$ ) si ottiene, per diversi valori del parametro  $m$  il seguente grafico:





## Diagrammi di Bode

4.  $(1 + 2j\xi_i \omega / \omega_i + \omega^2 / \omega_i^2)^{\pm 1}$  zeri/poli complessi coniugati ( $\xi_i < 1$ )

- Zeri complessi coniugati

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left| (1 + 2j\xi_i \omega / \omega_i - \omega^2 / \omega_i^2) \right| = 20 \log_{10} \sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_i^2)^2 + (2\xi_i \omega / \omega_i)^2}$$

I.  $\omega \ll \omega_i \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 0$

questa approssimazione individua un asintoto della curva effettiva,  
dato dalla retta orizzontale 0 dB;

II.  $\omega \gg \omega_i \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}(\omega / \omega_i)^2 = 40 \log_{10}(\omega / \omega_i)$

in questo caso l'approssimazione individua un altro asintoto: la  
retta con pendenza pari a 40 dB/dec. e passante per la frequenza  
 $\omega = \omega_i$ .

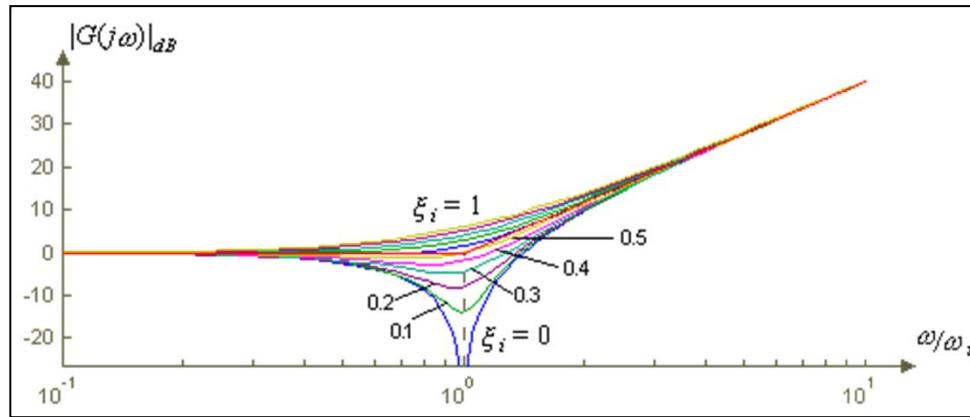
La frequenza  $\omega_i$  è la *frequenza d'angolo* e per  $\omega = \omega_i$  si ha:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} 2\xi_i$$

valore che ovviamente aumenta al crescere di  $\xi_i$ .



## Diagrammi di Bode



- Una situazione particolare si ha quando  $\xi_i = 0$ , cioè nel caso di due zeri immaginari puri; il fattore in esame diviene così  $(1 - \omega^2/\omega_i^2)$  e ai due asintoti che si ottengono normalmente se ne aggiunge un terzo dato da una retta verticale che interseca l'asse delle ascisse sempre in  $\omega_i$
- La curva reale interseca l'asse 0 dB per  $\omega/\omega_i = 1$  quando  $\xi_i = 0.5$
- La frequenza  $\omega_r$  per la quale si ottiene il minimo valore si definisce frequenza di risonanza; al variare del coefficiente di smorzamento è individuata annullando la derivata rispetto a  $\omega/\omega_i$  del modulo del fattore stesso

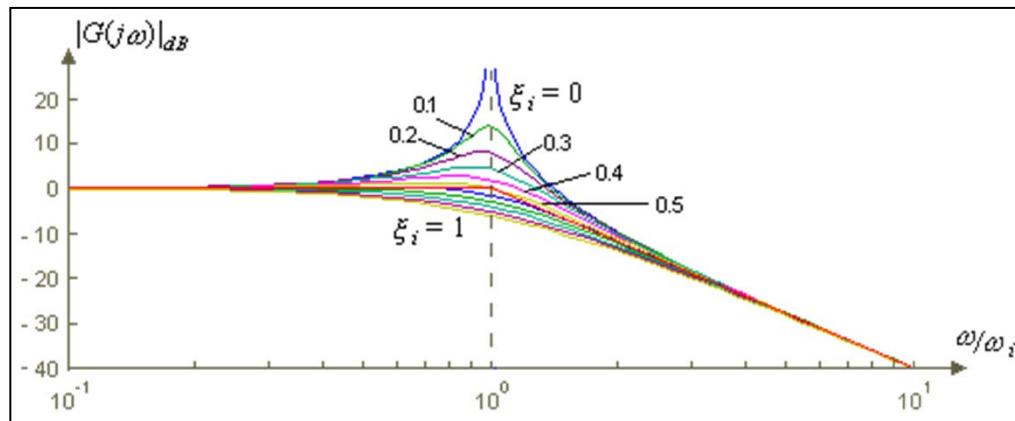
$$\omega_r = \omega_i \sqrt{1 - 2\xi_i^2} < \omega_i$$
$$M_s = -\frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$



## Diagrammi di Bode

- Poli complessi coniugati

$$\begin{aligned}|G(j\omega)|_{dB} &= 20 \log_{10} \left| \left( 1 + 2j\xi_i \omega / \omega_i - \omega^2 / \omega_i^2 \right)^{-1} \right| = \\ &= -20 \log_{10} \sqrt{\left( 1 - \omega^2 / \omega_i^2 \right)^2 + \left( 2\xi_i \omega / \omega_i \right)^2}\end{aligned}$$



- La frequenza  $\omega_r$  per la quale si ottiene il massimo valore si definisce frequenza di *risonanza*; al variare del coefficiente di smorzamento è individuata annullando la derivata rispetto a  $\omega/\omega_i$  del modulo del fattore stesso

$$\begin{aligned}\omega_r &= \omega_i \sqrt{1 - 2\xi_i^2} < \omega_i \\ M_s &= \frac{1}{2\xi_i \sqrt{1 - \xi_i^2}}\end{aligned}$$



## Diagrammi di Bode

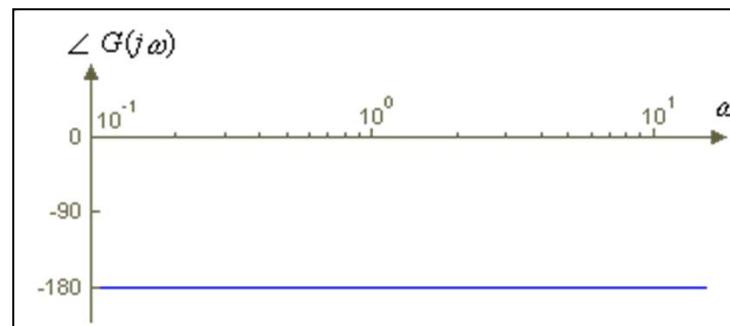
### □ Regole generali per il tracciamento del diagramma asintotico della Fase

$$G(j\omega) = \frac{k \prod_i (1 + j\tau_i \omega) \prod_i (1 + 2j\xi_{iz} \omega / \omega_{iz} - \omega^2 / \omega_{iz}^2)}{(j\omega)^r \prod_i (1 + jT_i \omega) \prod_i (1 + 2j\xi_{ip} \omega / \omega_{ip} - \omega^2 / \omega_{ip}^2)}$$

1. Guadagno statico
2. Polo/Zero all'origine
3. Polo/Zero ad una frequenza finita (termine del primo ordine)
4. Coppia di Poli/Zeri complessi e coniugati

1.  $\pm k$  Costante di Guadagno Statico  $\angle G(j\omega) = \angle(\pm k)$

- Questo termine ha fase uguale a zero se è positivo; nel caso, invece, in cui il termine di guadagno sia negativo, ovvero  $-k$  esso introduce una fase pari a  $-180^\circ$  ( $-\pi$ )



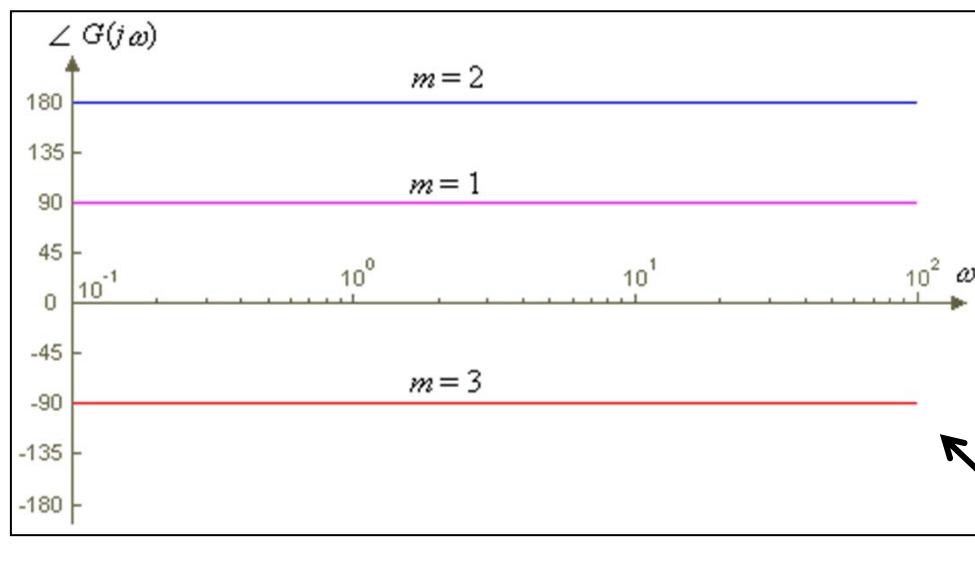


## Diagrammi di Bode

2.  $(j\omega)^{\pm m}$  zeri/poli nell'origine

- Gli Zeri introducono un ANTICIPO di Fase, multiplo di 90 gradi

$$\angle G(j\omega) = \angle(j\omega)^m = m \cdot 90^\circ = m \frac{\pi}{2}$$



Per convenzioni di tracciamento, se la rappresentazione della fase avviene fra  $-180^\circ$  e  $180^\circ$ , il caso  $m = 2$  può essere riportato indifferentemente ai due estremi, mentre per il caso  $m = 3$  si considera che la fase  $270^\circ$  coincide con  $-90^\circ$



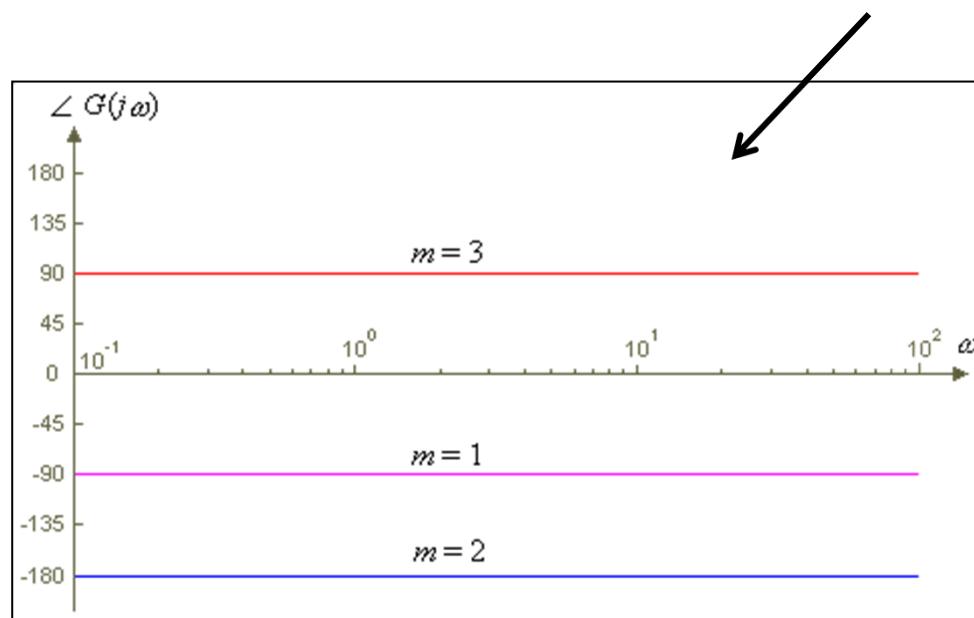
## Diagrammi di Bode

2.  $(j\omega)^{\pm m}$  zeri/poli nell'origine

- I Poli introducono un RITARDO di Fase multiplo di  $-90^\circ$

$$\angle G(j\omega) = \angle(j\omega)^{-m} = -m \cdot 90^\circ = -m \frac{\pi}{2}$$

Si deve tener presente che, se la rappresentazione della fase avviene fra  $-180^\circ$  e  $180^\circ$ , il caso  $m = -2$  può essere riportato indifferentemente ai due estremi, mentre per il caso  $m = -3$  si considera che la fase  $-270^\circ$  coincide con  $+90^\circ$





## Diagrammi di Bode

3.  $(1 + jT_i\omega)^{\pm m}$  zeri/poli semplici o ripetuti

- Si considera dapprima il caso di zeri con  $m = 1$  per il quale si ha che

$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega T_i) = \tan^{-1}(\omega T_i)$$

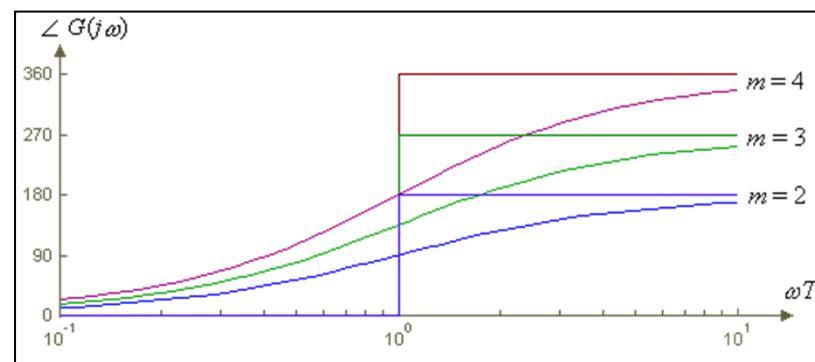
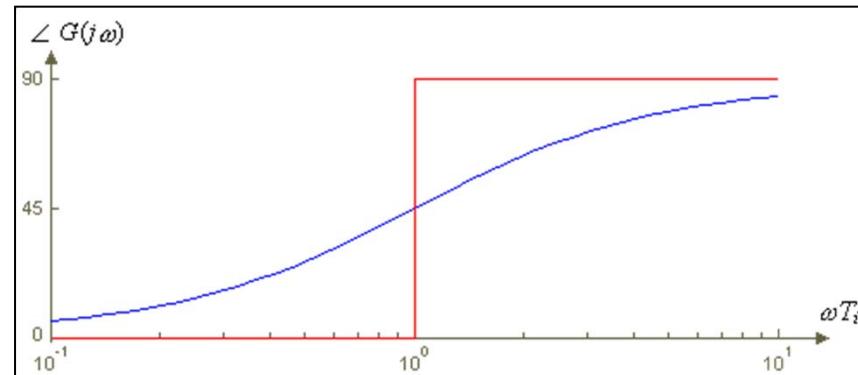
La costruzione del diagramma di Bode asintotico della fase usa le approssimazioni:

$$\omega \ll 1/T_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = 0$$

$$\omega \gg 1/T_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = 90^\circ$$

$$\omega = 1/T_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = 45^\circ$$

Nel caso in cui sia  $m > 1$  si ha che per  $\omega \gg 1/T_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = m \cdot 90^\circ$  e per  $\omega = 1/T_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = m \cdot 45^\circ$





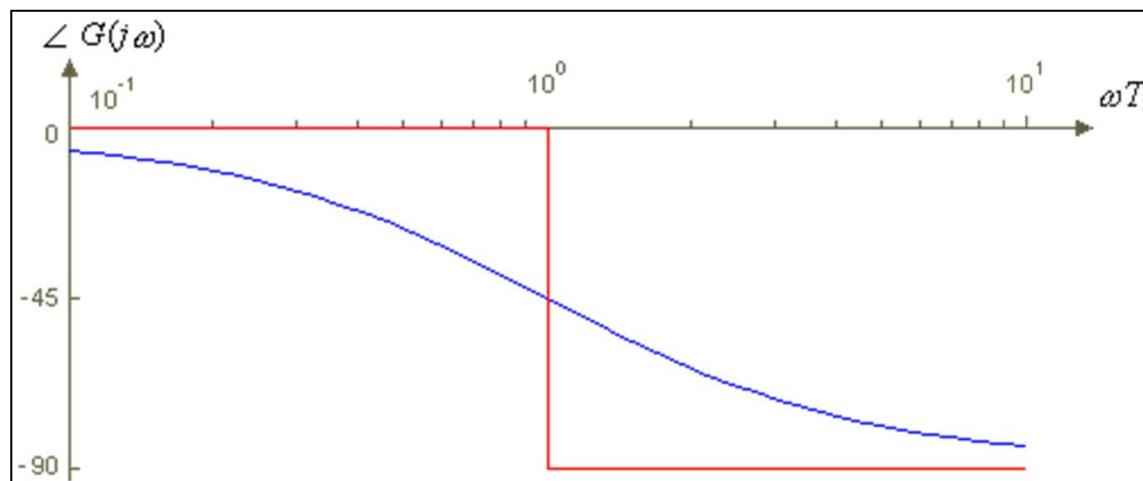
## Diagrammi di Bode

Consideriamo adesso il caso dei poli, con  $m > 1$  si ha  $\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega T_i)^{-m}$

Nel caso di polo singolo,

$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega T_i)^{-1} = -\angle(1 + j\omega T_i) = -\tan^{-1} \omega T_i$$

Le considerazioni fatte per gli zeri sono valide anche per i poli e il diagramma asintotico che se ne ricava, tenendo presente la differenza del segno, è:



Nel caso di  $m = 2$  il ritardo di fase è pari a  $-180^\circ$  e così via.



## Diagrammi di Bode

4.  $(1 + 2j\xi_i \omega / \omega_i + \omega^2 / \omega_i^2)^{\pm 1}$  zeri/poli complessi coniugati ( $\xi_i < 1$ )

- Zeri complessi e coniugati

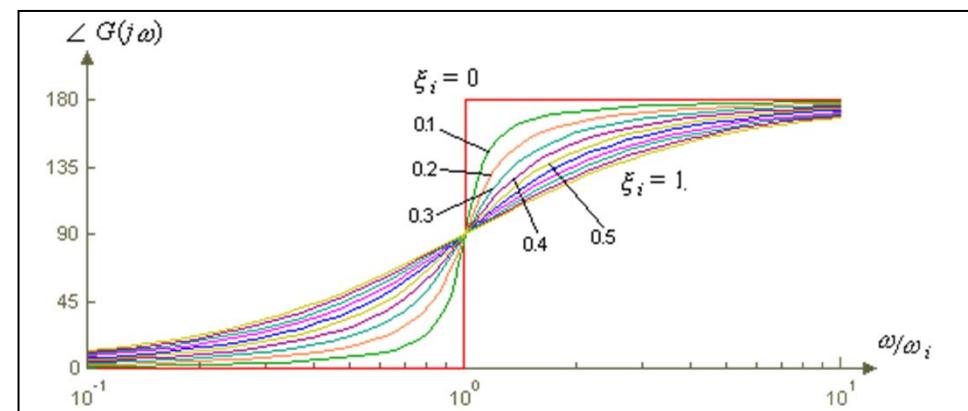
$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + 2j\xi_i \omega / \omega_i + \omega^2 / \omega_i^2) = \tan^{-1} \frac{2\xi_i \omega / \omega_i}{1 - \omega^2 / \omega_i^2}$$

Consideriamo le seguenti approssimazioni:

$$\omega \ll \omega_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = 0$$

$$\omega \gg \omega_i \Rightarrow \angle G(j\omega) = \tan^{-1}(-2\xi_i \omega_i / \omega) = 180^\circ$$

Quando la frequenza assume il valore della frequenza d'angolo  $\omega = \omega_i$  la fase è:  
 $\angle G(j\omega) = \tan^{-1}[2\xi_i / (1 - 1)] = 90^\circ$ .

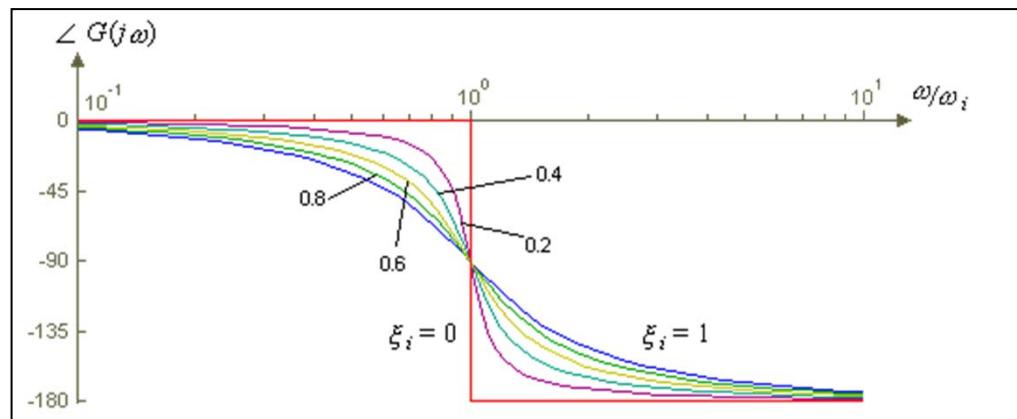




# Diagrammi di Bode

- Poli complessi e coniugati

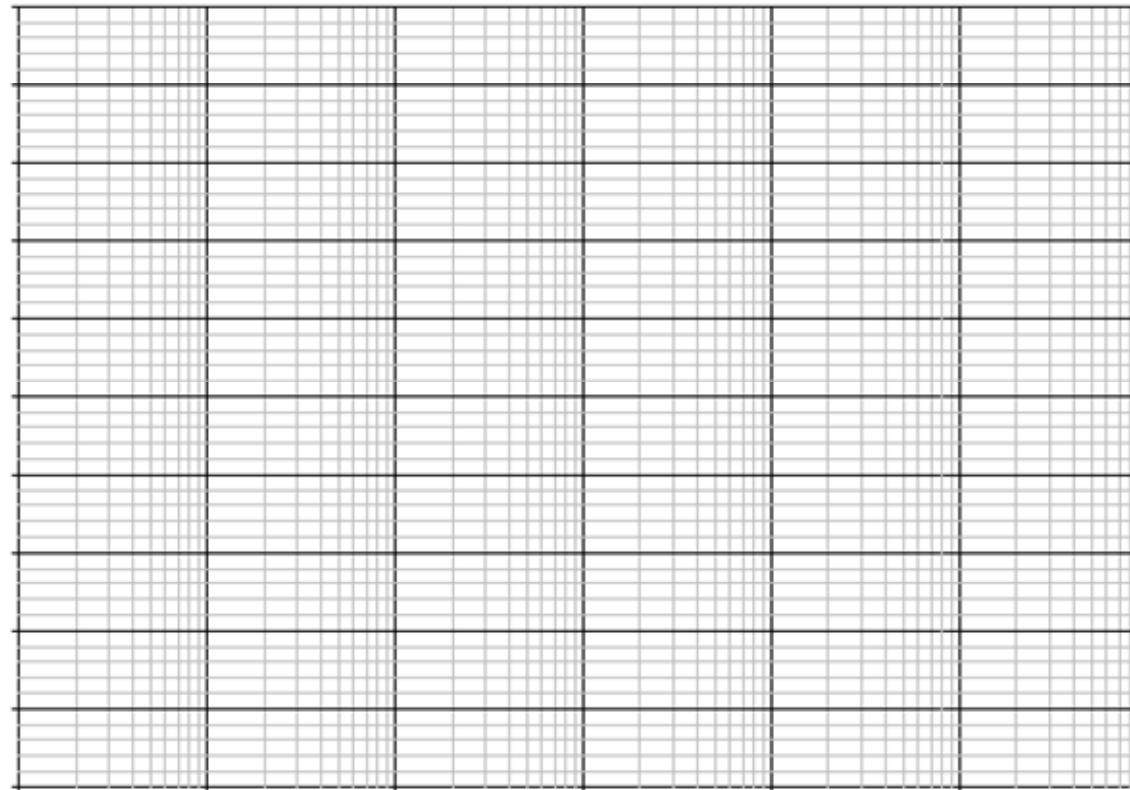
$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{(1 + 2j\xi_i \omega/\omega_i + \omega^2/\omega_i^2)} = 0^\circ - \tan^{-1} \frac{2\xi_i \omega/\omega_i}{1 - \omega^2/\omega_i^2}$$



1. Scrivere la  $G(s)$  in Forma di Bode
2. Porre il Guadagno statico  $K = 1$
3. Riportare sulle ascisse tutte le frequenze d'angolo (Corner Frequencies), ovvero tutti i poli e gli zeri della  $G(s)$  e la pulsazione propria dei termini del secondo ordine
4. Tracciare tutte le componenti del Modulo a partire dalle frequenze più basse
5. Sommare e sottrarre i Moduli al crescere di  $\omega$
6. Ripetere il passo 4 per le fasi
7. Spostare verticalmente il diagramma del Modulo del valore del Guadagno Statico pari a  $20 \cdot \log_{10} k$



# Diagrammi di Bode

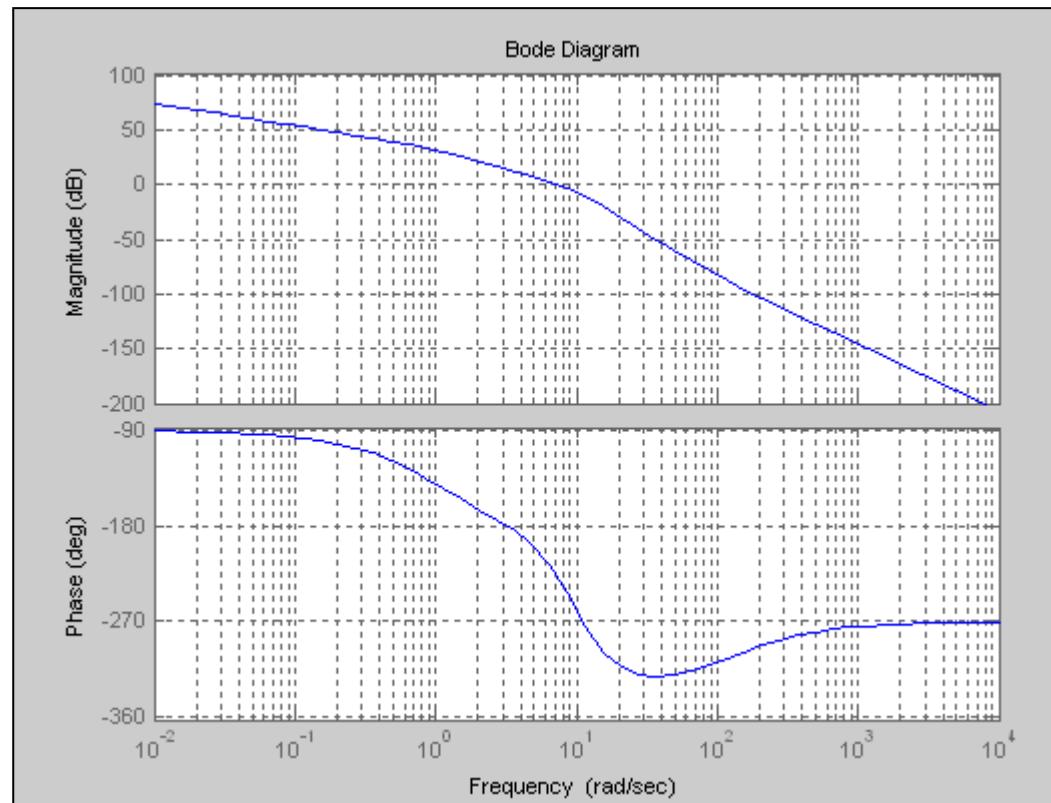




## Diagrammi di Bode

□ Esempio

$$G(s) = \frac{50 \cdot (s + 100)}{s \cdot (s + 1) \cdot (s^2 + 10s + 100)}$$





## Diagrammi di Bode

- Riscrivere la FdT in forma di Bode

$$G(s) = 50 \frac{\left(1 + j\frac{\omega}{100}\right)}{j\omega \cdot (1 + j\omega) \cdot 100 \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{10} - \frac{\omega^2}{100}\right)}$$

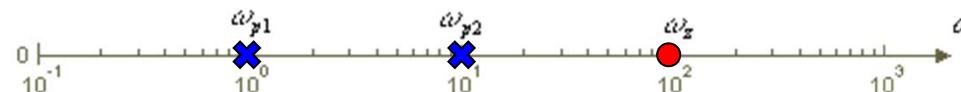
- Guadagno Statico:  
 $k = 50 = 20 \log_{10} 50 = 33.98dB$

- Zeri:  $Z_1 = -100$
- Poli:  $P_0=0, P_1=-1, P_{2,3}=-5+-j4.33$

$$\left(1 + j\frac{\omega}{100}\right) \Rightarrow \omega_z = 100$$

$$(j\omega)^{-1} \quad (1 + j\omega)^{-1} \Rightarrow \omega_{p1} = 1$$

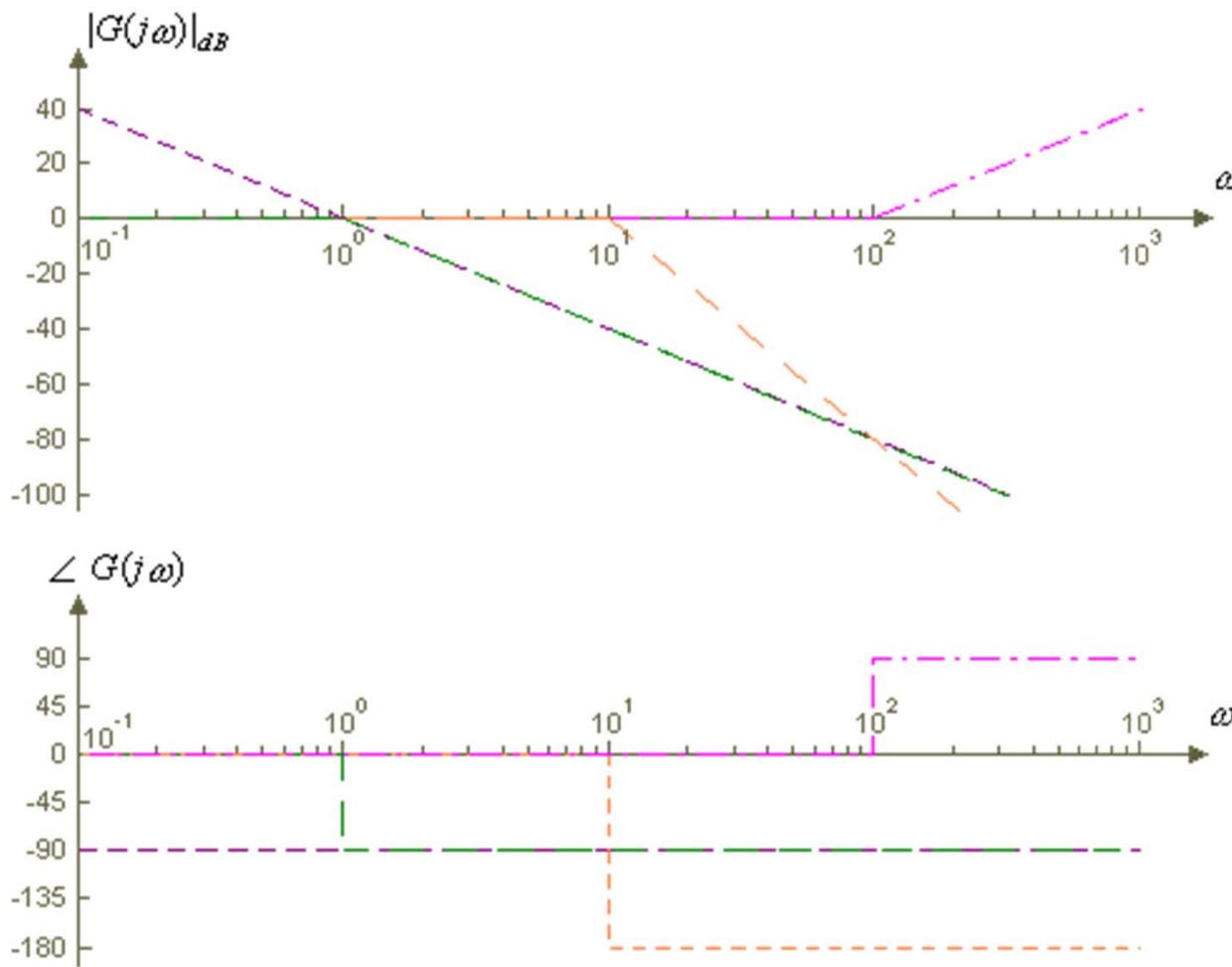
$$\left(1 + j\frac{\omega}{10} - \frac{\omega^2}{100}\right)^{-1} \Rightarrow \omega_{p2} = 10, \xi = 0.5$$





## Diagrammi di Bode

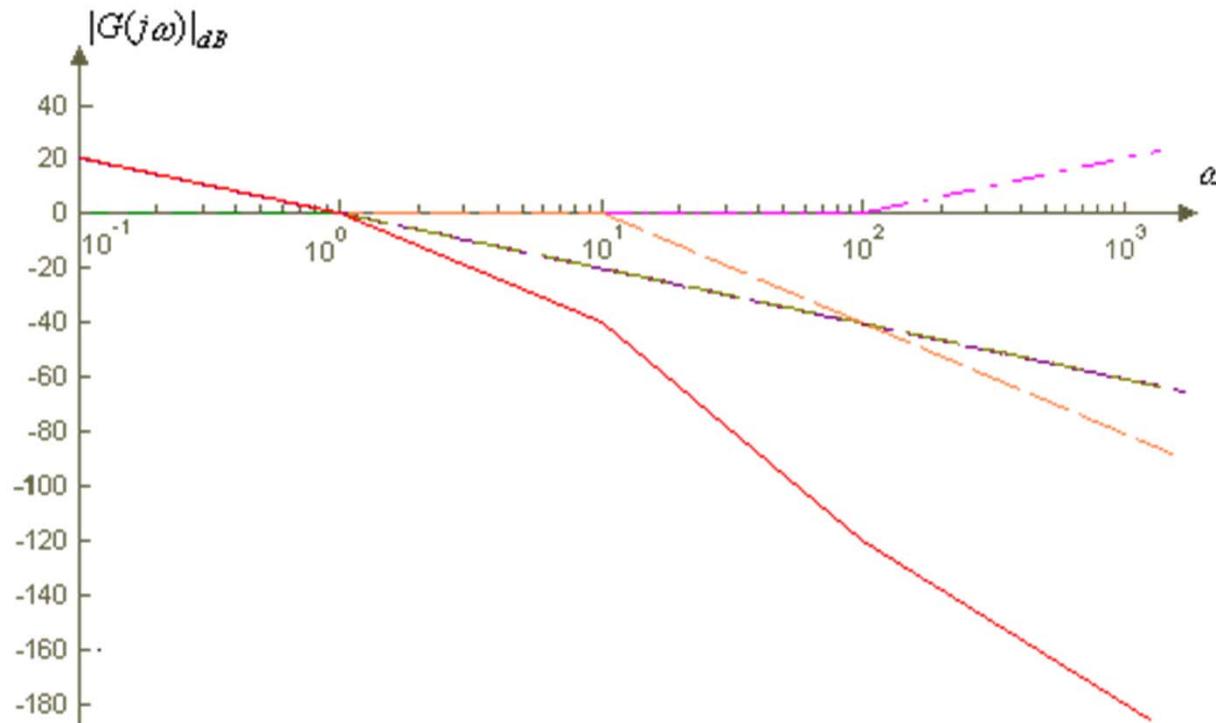
- Disegnare tutte le componenti partendo dalle frequenze più basse





## Diagrammi di Bode

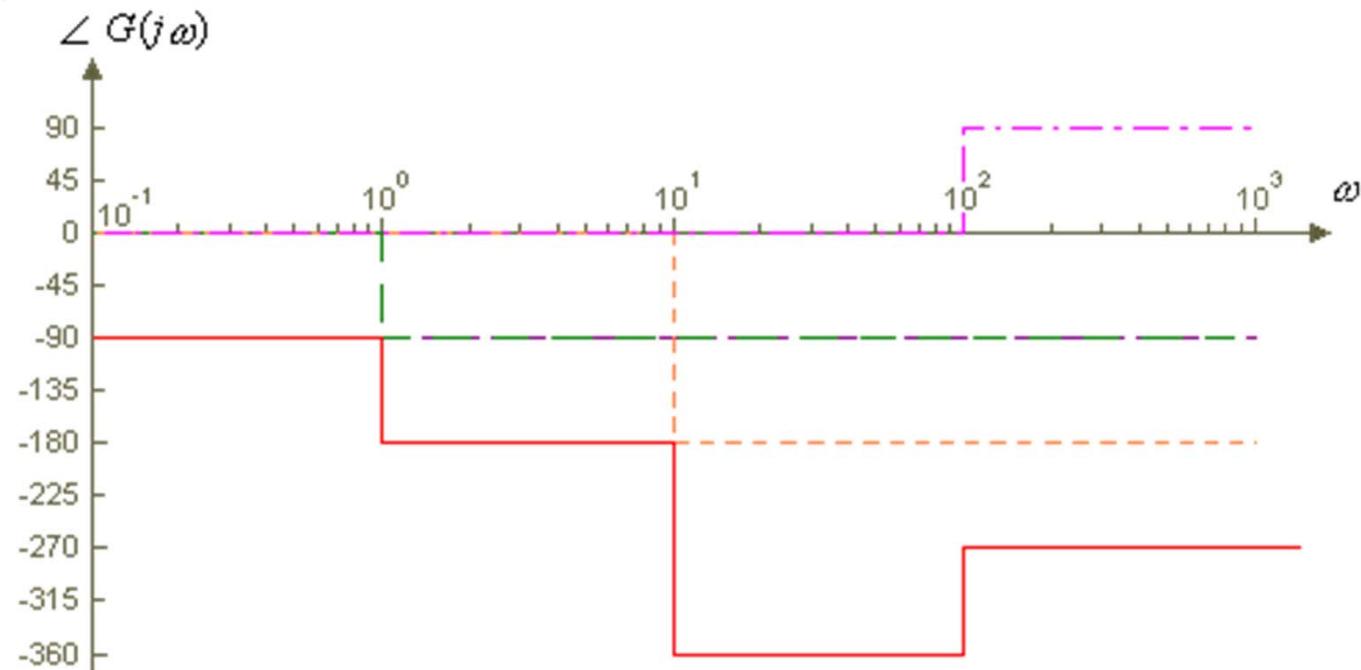
- Sommare Algebricamente i Moduli partendo dalle frequenze più basse





## Diagrammi di Bode

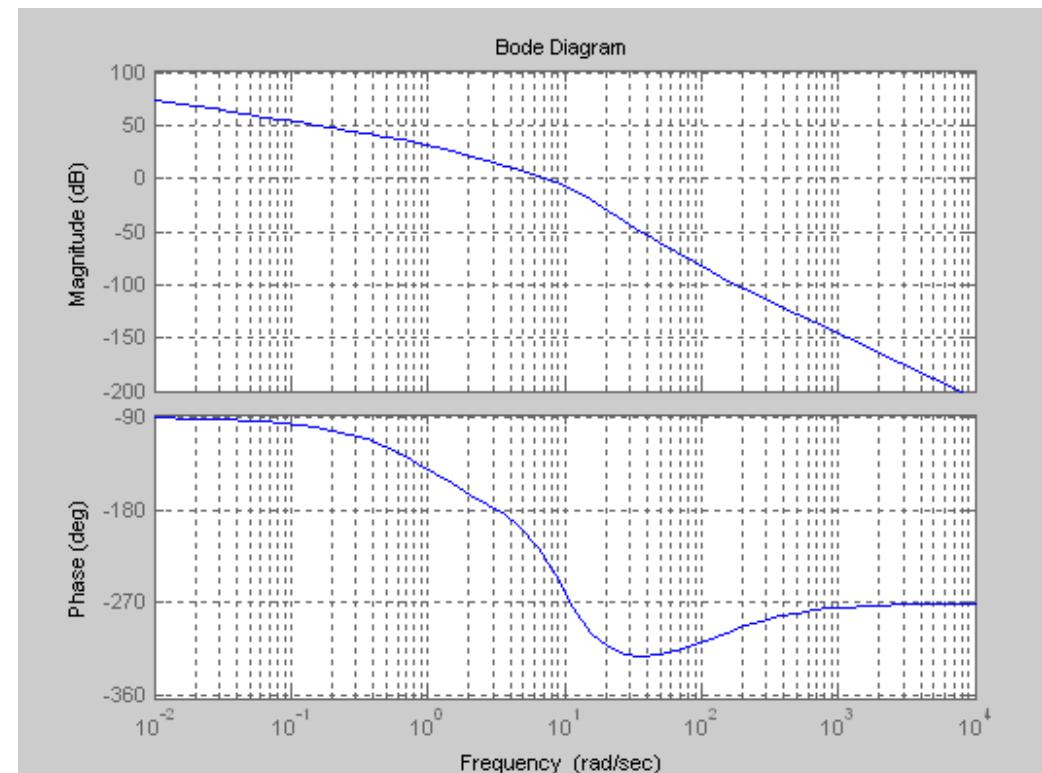
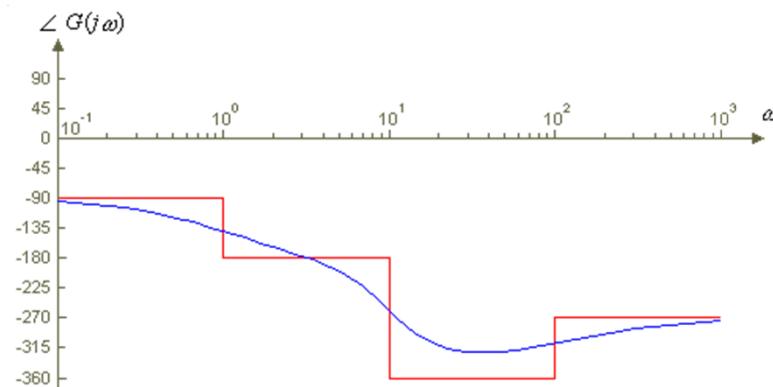
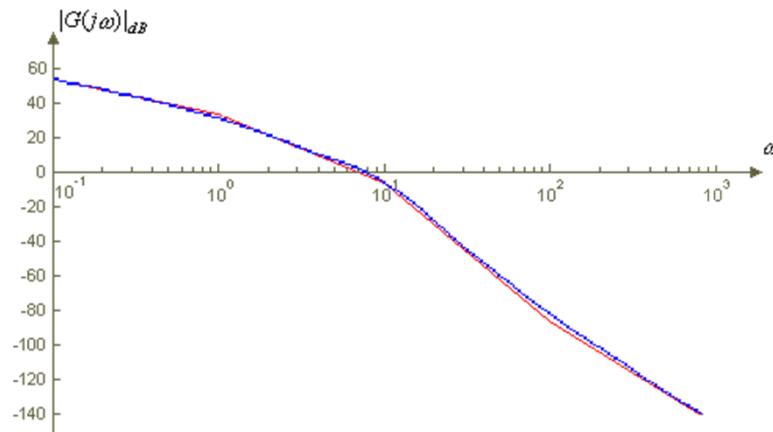
- Sommare Algebricamente le Fasi partendo dalle frequenze più basse





## Diagrammi di Bode

- Aggiungere il Contributo del Guadagno Statico pari a 33.98 dB





## Diagrammi di Bode

□ Esempio:  $G(s) = \frac{10(s + 0.5)(s + 20)}{s^2(s + 0.1)(s + 10)(s + 100)}$

N =

10 205 100

>> D=conv([1 0 0],[1 0.1])

D =

1.0000 0.1000 0 0

>> D=conv(D,[1 10]);  
>> D=conv(D,[1 100])

D =

1.0e+003 \*  
0.0010 0.1101 1.0110 0.1000 0 0

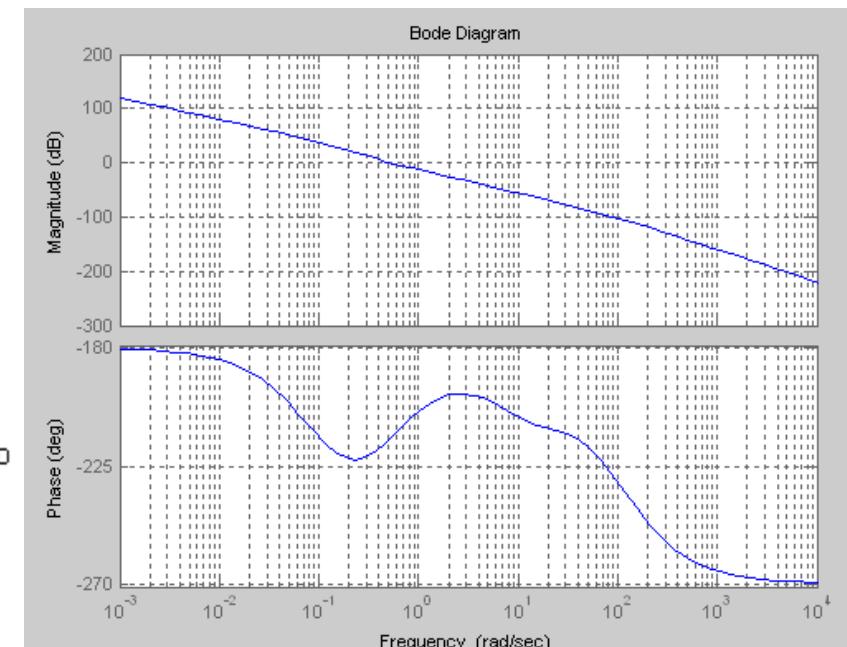
>> sys=tf(N,D)

Transfer function:

10 s^2 + 205 s + 100

-----  
s^5 + 110.1 s^4 + 1011 s^3 + 100 s^2

>> bode(sys)



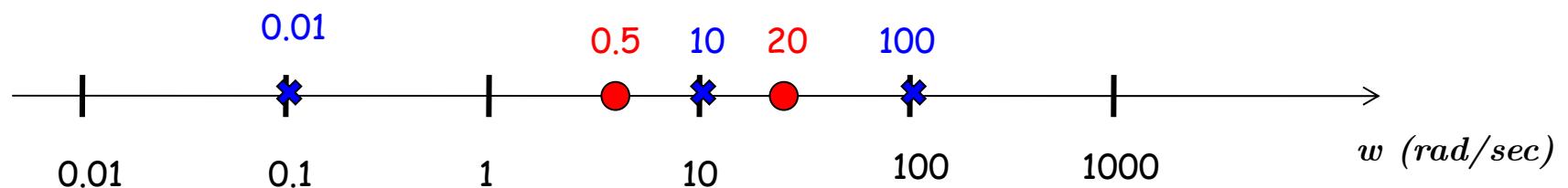


## Diagrammi di Bode

$$G(j\omega) = k \cdot \frac{(1 + \frac{j\omega}{0.5})(1 + \frac{j\omega}{20})}{(j\omega)^2(1 + \frac{j\omega}{0.1})(1 + \frac{j\omega}{10})(1 + \frac{j\omega}{100})}, k = 0dB$$

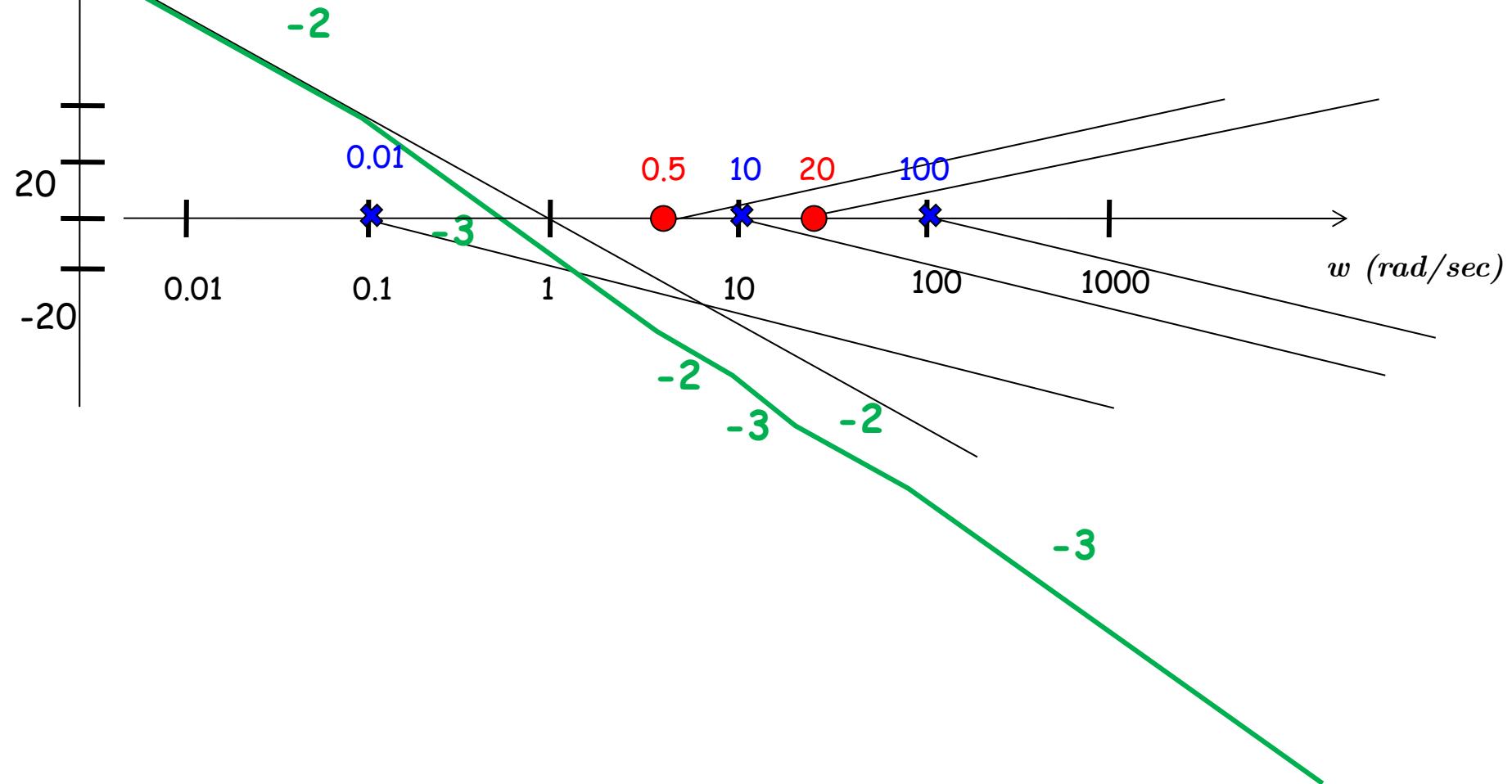
✗ 0

✗ 0



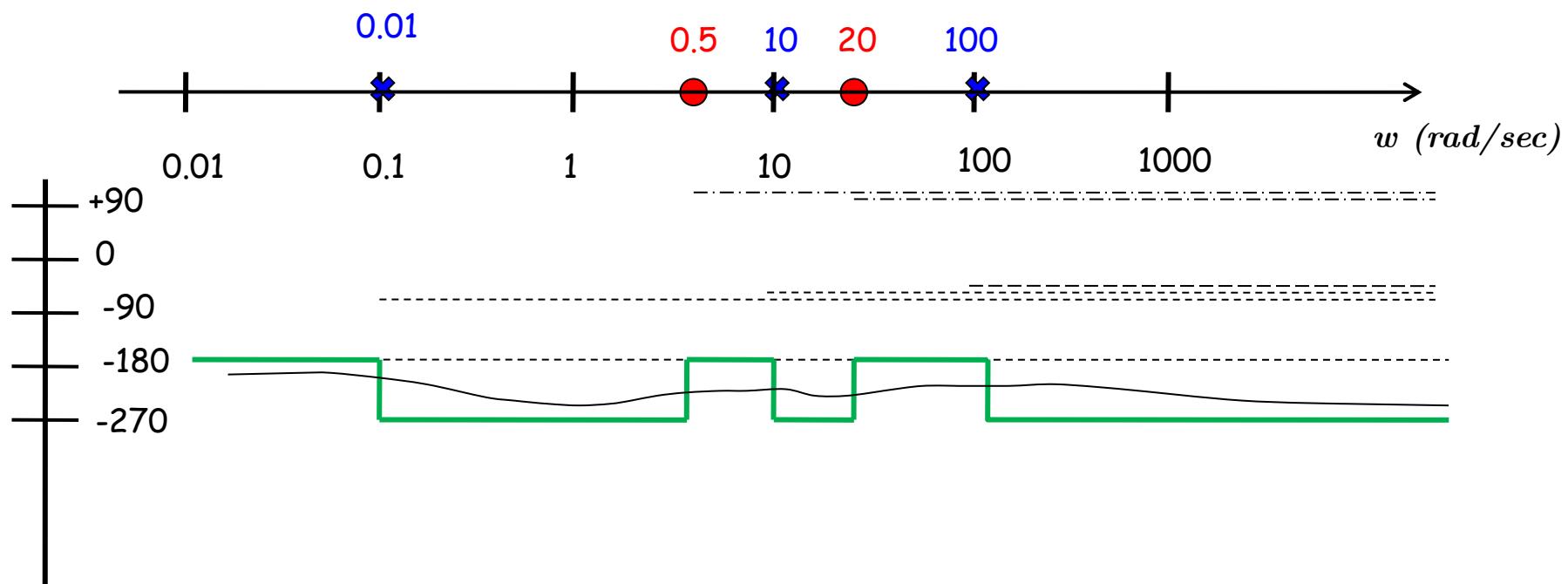


## Diagrammi di Bode





## Diagrammi di Bode

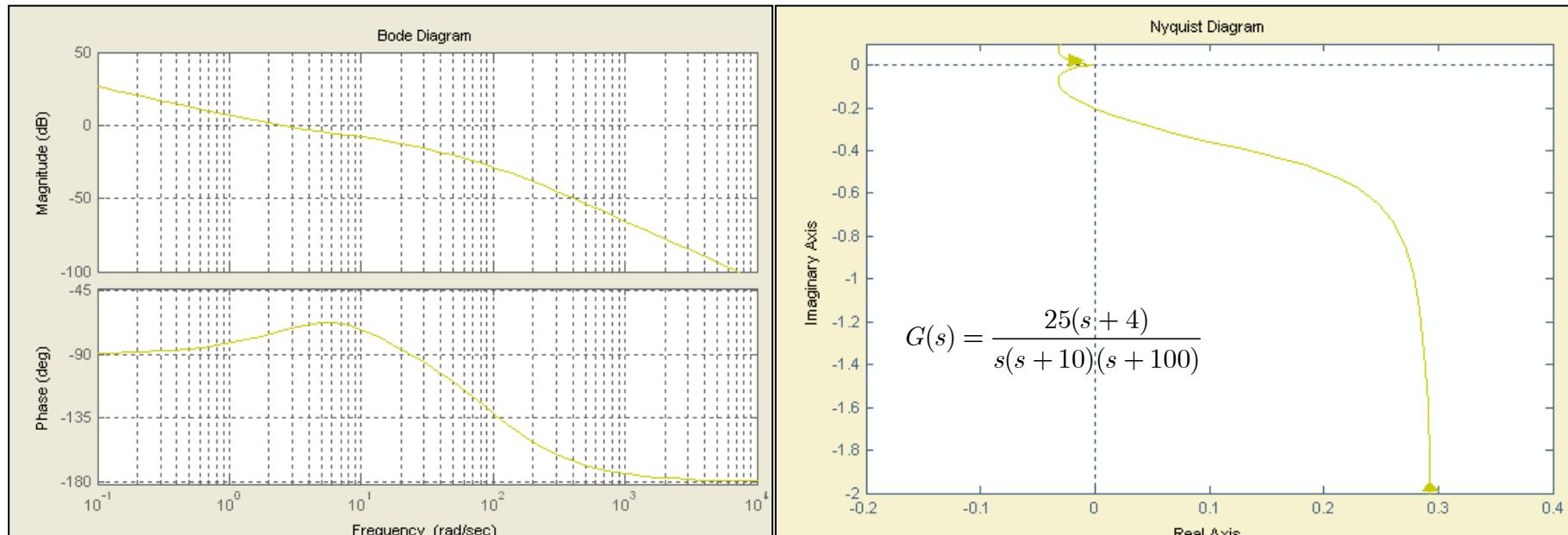


Uso di Matlab



## Diagrammi Polari

- I diagrammi polari (o di Nyquist) sono una rappresentazione grafica alternativa della risposta in frequenza di sistemi lineari. Data una funzione di trasferimento  $G(s)$ , il diagramma polare è il grafico implicito di parte reale e parte immaginaria nel piano complesso posto che sia  $s = j\omega$  ( $Re[G(j\omega)]$  e  $Im[G(j\omega)]$ ) e  $\omega \in [0, \infty)$ .



- Formalmente, il diagramma di Nyquist è il diagramma polare tracciato per frequenze comprese tra  $\omega \in (-\infty, +\infty)$ .



# Diagrammi Polari

- I diagrammi polari possono essere tracciati in modo approssimato facendo attenzione all'intervallo di frequenza di interesse in quanto i punti sul piano complesso non hanno una evoluzione lineare con la frequenza.

1. Riscrivere la  $G(s)$  in forma fattorizzata ponendo  $s = j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{k \prod_i (-z_i + j\omega) \prod_i (-\omega^2 + \omega_{iz}^2 + 2j\xi_{iz}\omega_{iz}\omega)}{(j\omega)^r \prod_i (-p_i + j\omega) \prod_i (-\omega^2 + \omega_{ip}^2 + 2j\xi_{ip}\omega_{ip}\omega)}$$

2. Riscrivere la  $G(s)$  in parte reale ed immaginaria

$$G(j\omega) = \operatorname{Re}[G(j\omega)] + j \operatorname{Im}[G(j\omega)]$$

3. Trovare i valori ai limiti di parte reale e parte immaginaria

$$\begin{aligned} & \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}[G(j\omega)], \quad \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}[G(j\omega)] \\ & \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}[G(j\omega)], \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}[G(j\omega)] \end{aligned}$$

4. Trovare eventuali punti di intersezione con gli assi, ponendo  $\operatorname{Re}[G(j\omega)] = 0$  e  $\operatorname{Im}[G(j\omega)] = 0$

5. Ricavare ampiezza e fase di  $G(j\omega)$  per  $\omega \rightarrow 0^+$  e  $\omega \rightarrow +\infty$ , con l'aiuto di Bode



## Diagrammi Polari

□ Esempio:

$$G(s) = \frac{s+5}{s+10} = \frac{5+j\omega}{10+j\omega} \frac{(5+j\omega)(10-j\omega)}{(10+j\omega)(10-j\omega)} = \frac{50+\omega^2}{100+\omega^2} + j \frac{5\omega}{100+\omega^2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{50+\omega^2}{100+\omega^2} = \frac{1}{2}$$

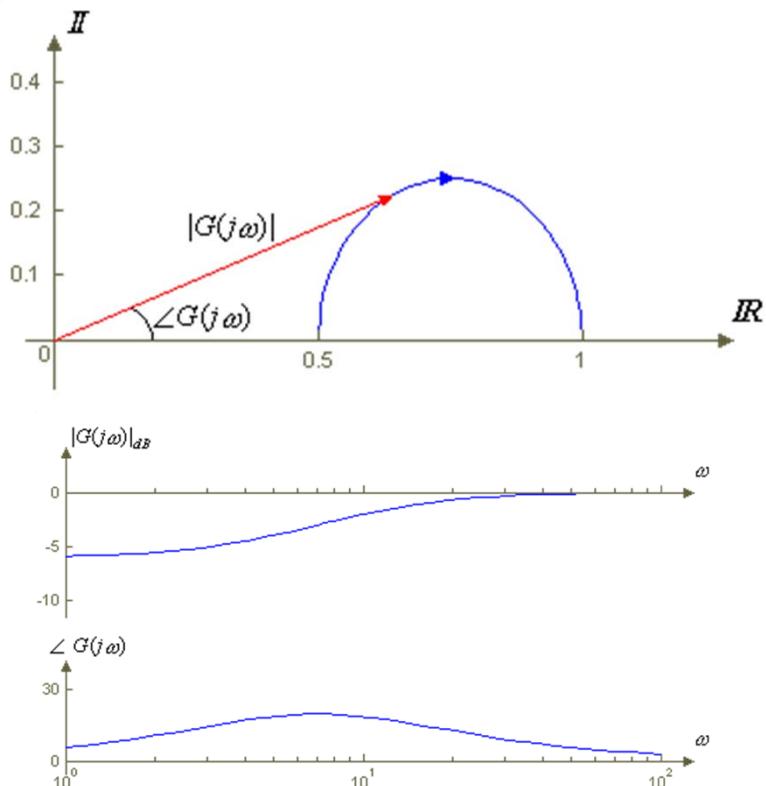
$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{5\omega}{100+\omega^2} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{50+\omega^2}{100+\omega^2} = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{5\omega}{100+\omega^2} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G(j\omega) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| = 1, \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G(j\omega) = 0$$





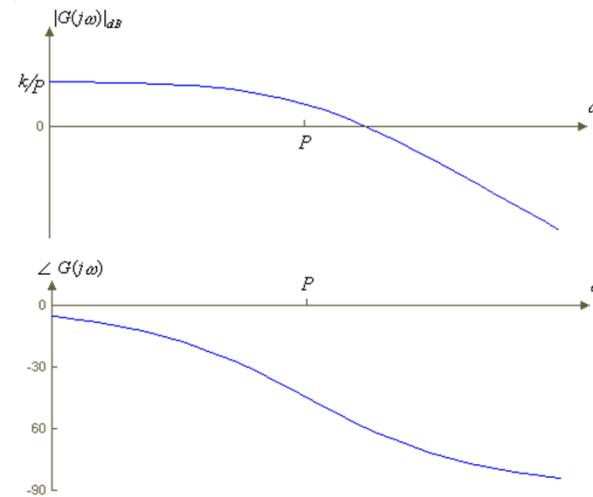
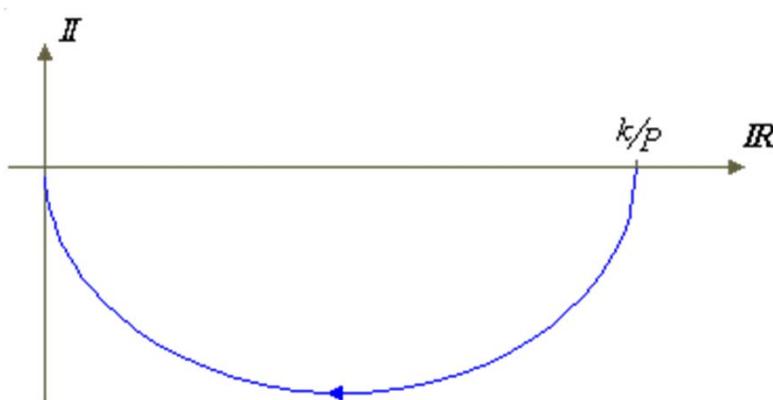
## Diagrammi Polari

- Il tracciamento approssimato dei diagrammi polari sfrutta le variazioni di Modulo e Fase dei poli e degli zeri all'aumentare della Frequenza.

$$G(s) = \frac{k}{s + P} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{kP}{P^2 + \omega^2} + j \frac{-k\omega}{P^2 + \omega^2}$$

- Il diagramma non attraversa gli assi per alcun valore della frequenza

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{P^2 + \omega^2}, \quad \angle G(j\omega) = 0^\circ - \angle(P + \omega) = -\arctg\left(\frac{\omega}{P}\right)$$





# Diagrammi Polari

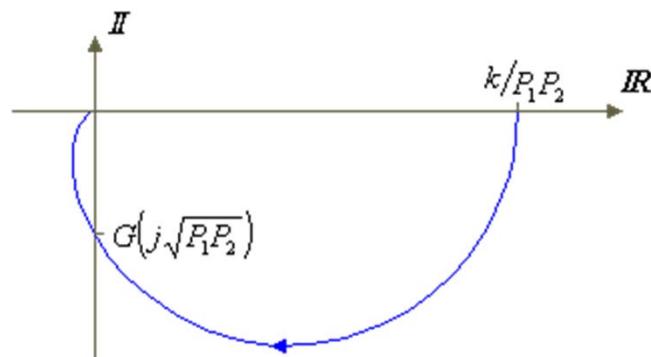
$$G(s) = \frac{k}{(s + P_1)(s + P_2)} \Rightarrow G(j\omega) = k \frac{P_1 P_2 - \omega^2}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} + j \frac{-k\omega(P_1 + P_2)}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} k \frac{P_1 P_2 - \omega^2}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = \frac{k}{P_1 P_2}$$

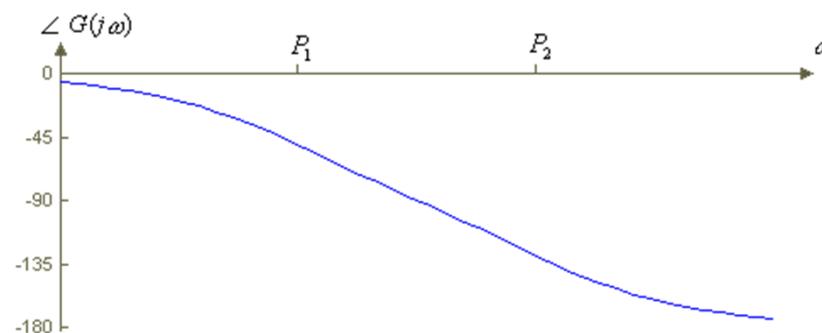
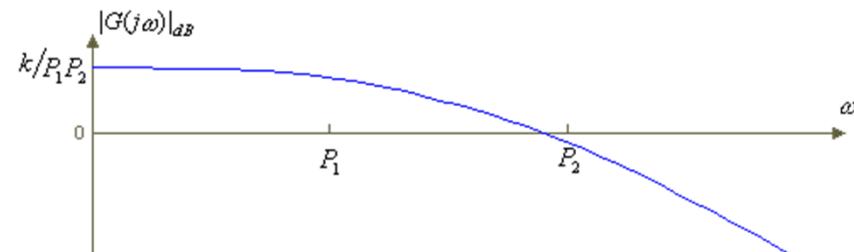
$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{-k\omega(P_1 + P_2)}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} k \frac{P_1 P_2 - \omega^2}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{-k\omega(P_1 + P_2)}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0$$



$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = k \frac{P_1 P_2 - \omega^2}{(P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{P_1 P_2}$$





## Diagrammi Polari

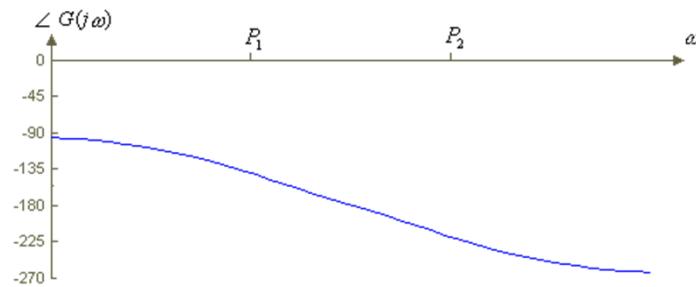
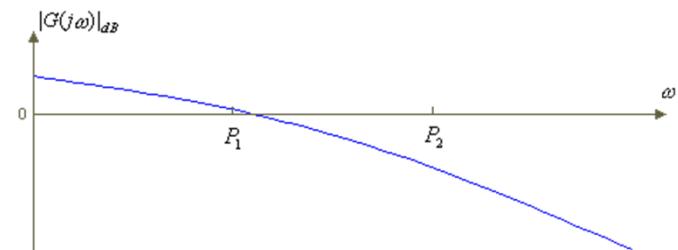
$$G(s) = \frac{k}{s(s + P_1)(s + P_2)} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{-k\omega^2(P_1 + P_2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} + j \frac{k\omega(P_1 P_2 - \omega^2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{-k\omega^2(P_1 + P_2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = -k \frac{P_1 + P_2}{P_1^2 P_2^2}$$

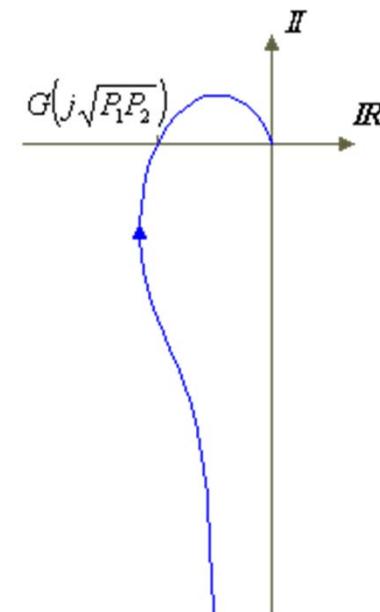
$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{k\omega(P_1 P_2 - \omega^2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = -\infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{-k\omega^2(P_1 + P_2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{k\omega(P_1 P_2 - \omega^2)}{\omega^2 \cdot (P_1^2 + \omega^2)(P_2^2 + \omega^2)} = 0$$



- Il grafico attraversa una volta l'asse reale mentre non attraversa quello immaginario



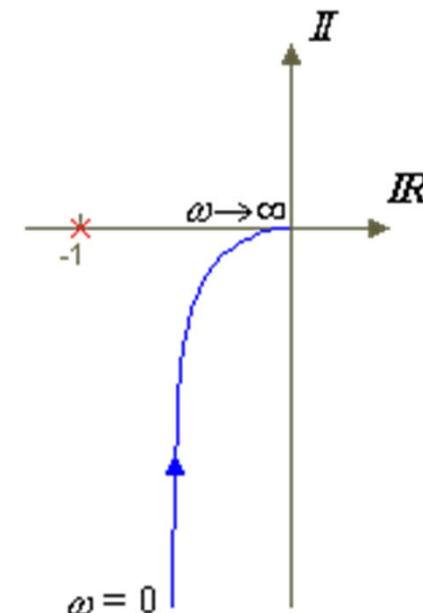
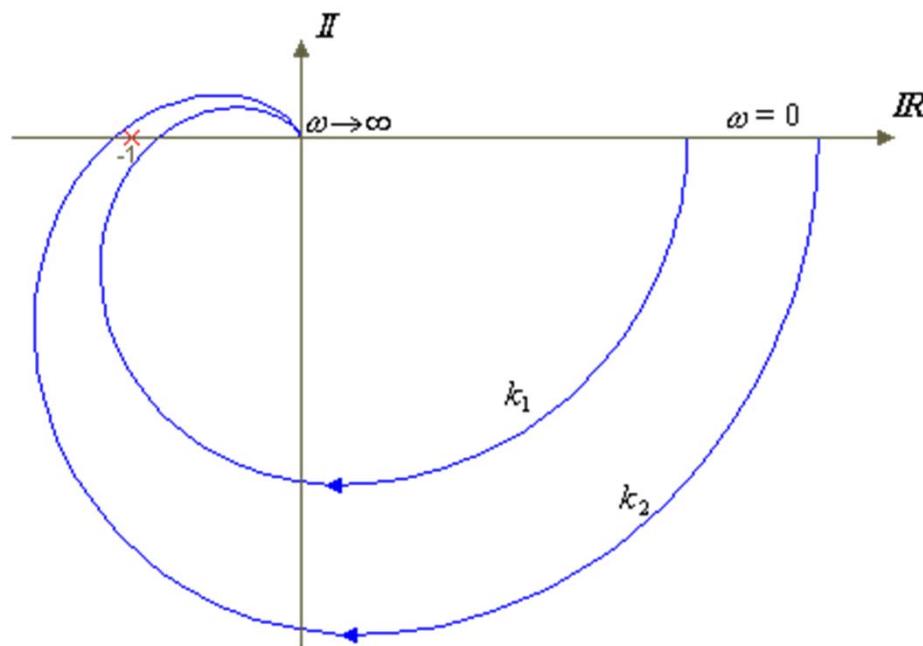


## Diagrammi Polari

- Come verrà mostrato più avanti, il comportamento del diagramma polare nei riguardi del punto di coordinate  $(-1, 0)$ , ha un'estrema importanza, essendo legato alla stabilità del sistema in ciclo chiuso.

$$G(s) = \frac{k}{(s + P_1)(s + P_2)(s + P_3)}$$

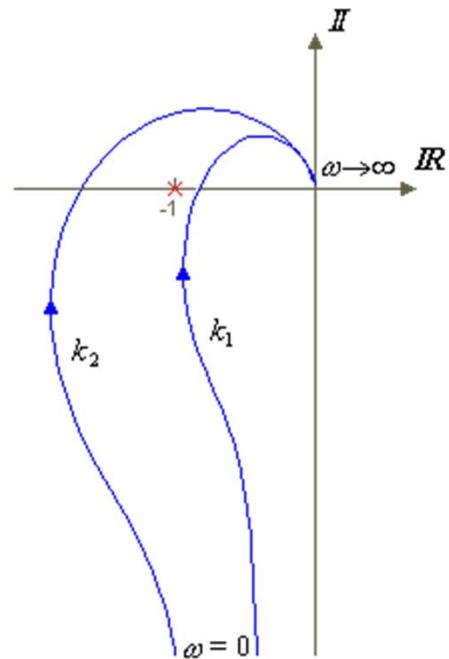
$$G(s) = \frac{k}{s(s + P)}$$





## Diagrammi Polari

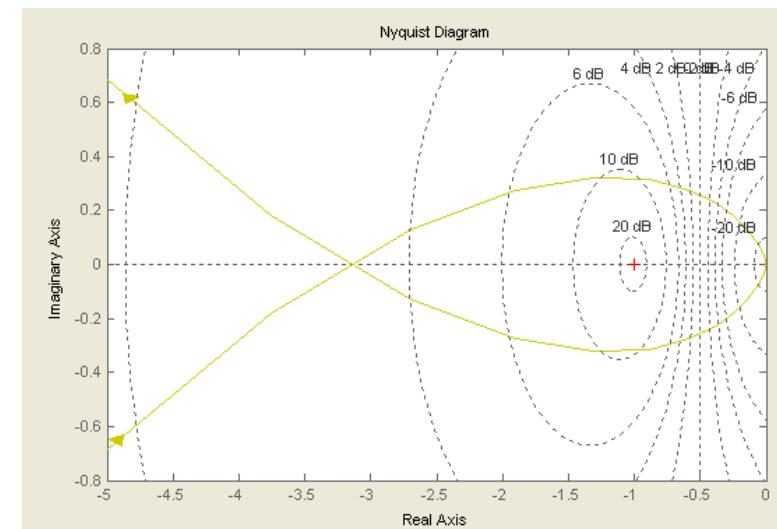
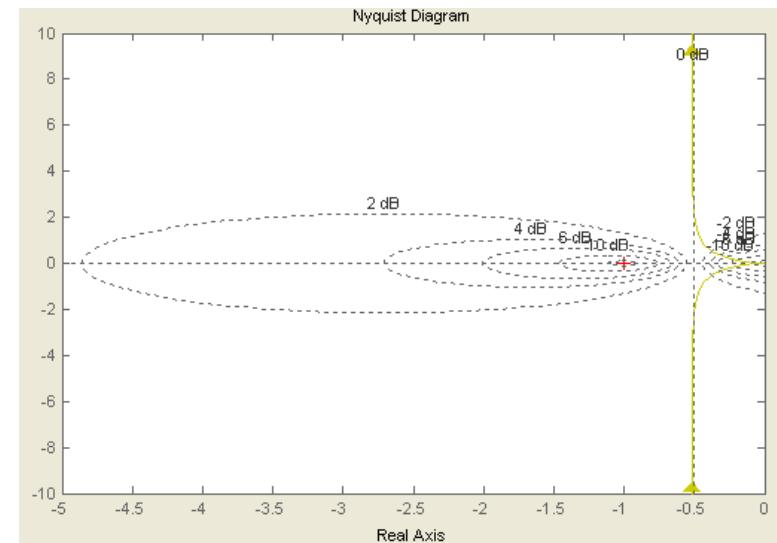
$$G(s) = \frac{k}{s \cdot (s + P_1)(s + P_2)}$$



$$G(s) = \frac{k}{s \cdot (s + 1)(s + 10)}$$

$$K < 110$$

$$K > 110$$

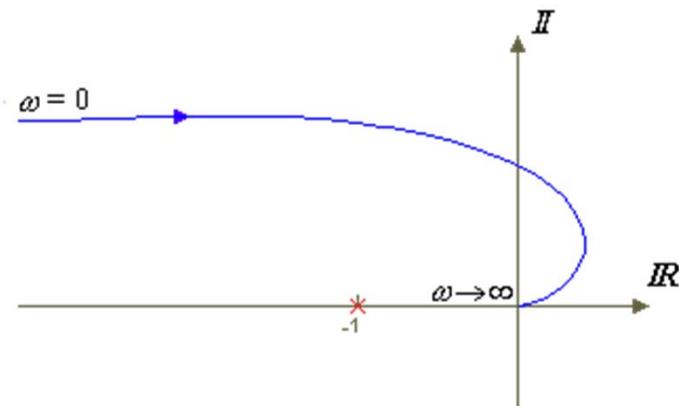
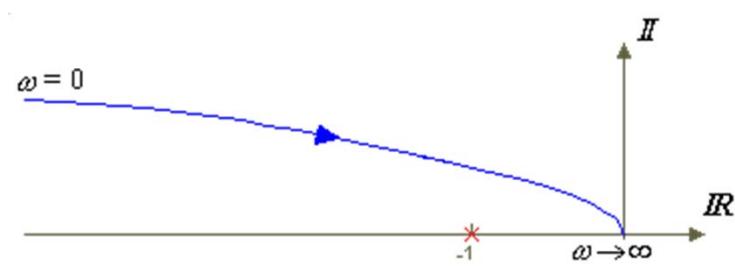




## Diagrammi Polari

$$G(s) = \frac{k}{s^2(s + P)}$$

$$G(s) = \frac{k}{s^2(s + P_1)(s + P_2)}$$

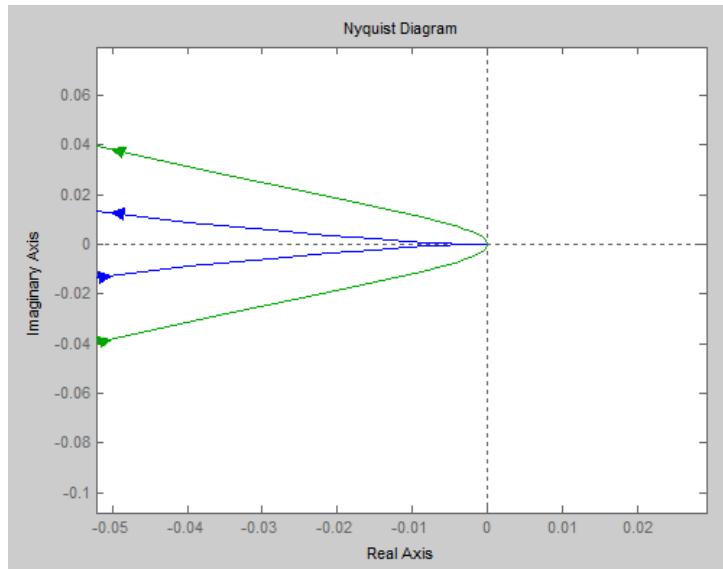


### Presenza di Zeri nella FdT

- La presenza di Zeri, **riduce e/o rallenta il ritardo di Fase** dovuto ai poli all'aumentare della frequenza



# Diagrammi Polari



Transfer function:

$$100$$

$$s^2 + 11s + 10$$

>> sys2

Transfer function:

$$s + 100$$

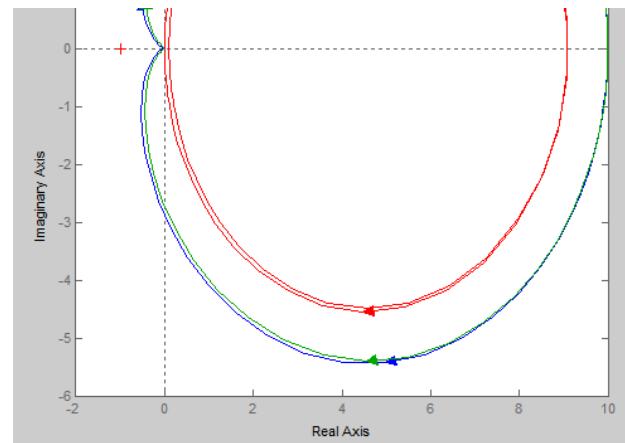
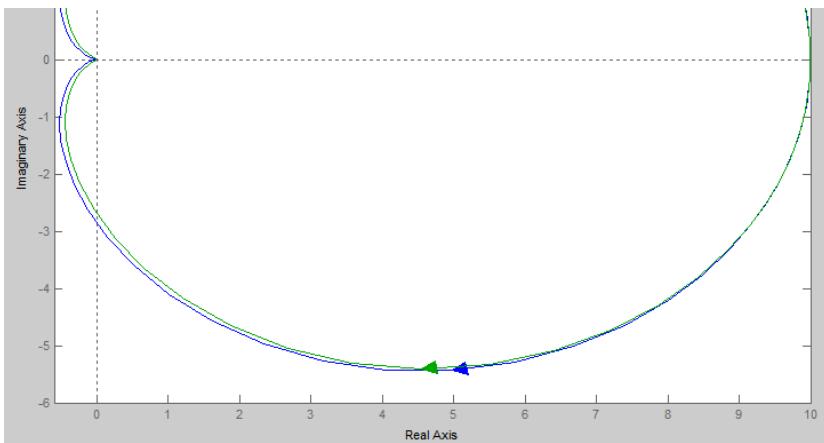
$$s^2 + 11s + 10$$

>> sys3

Transfer function:

$$100s + 1$$

$$s^2 + 11s + 10$$

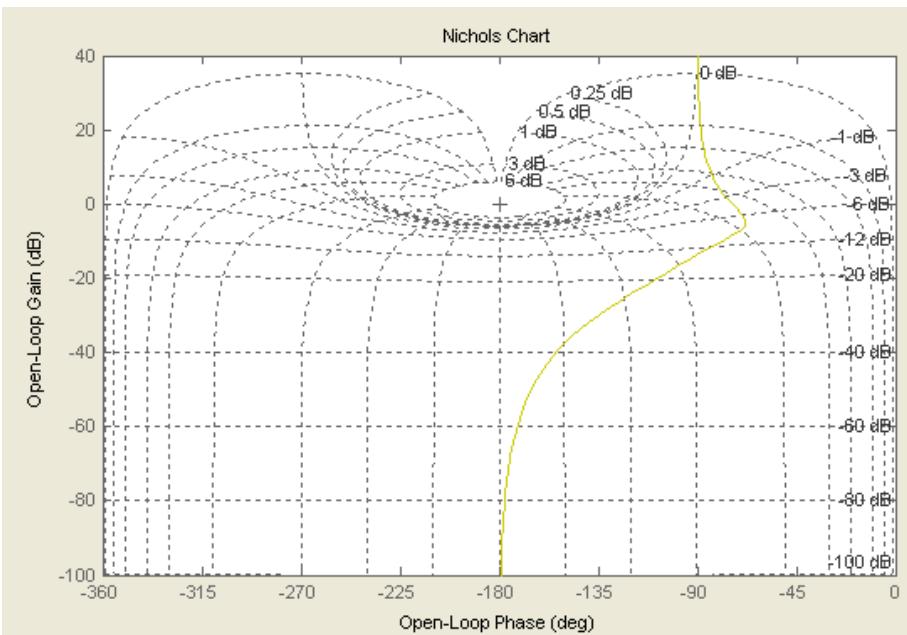
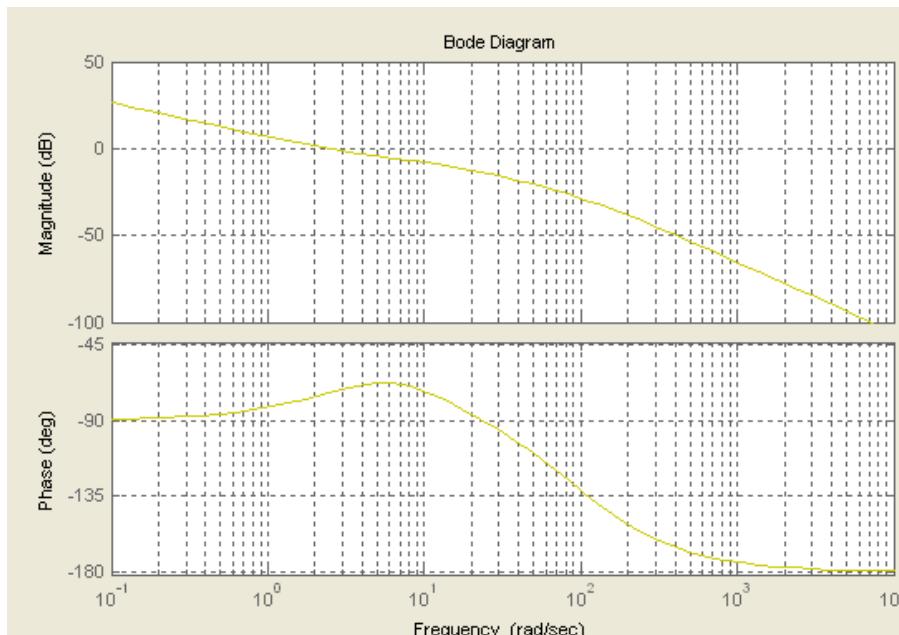




## Diagrammi di Nichols

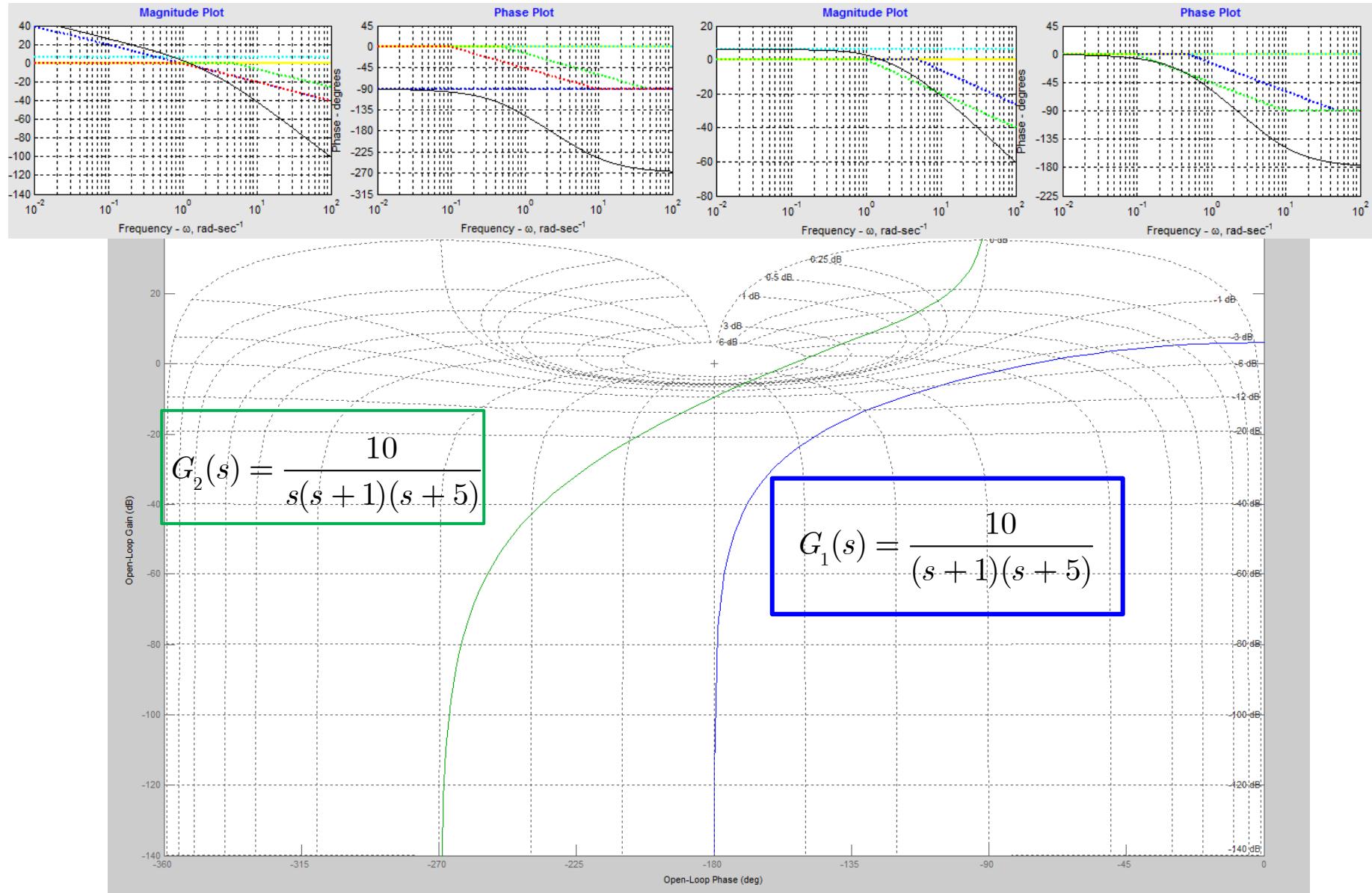
- Le Carte di Nichols forniscono una rappresentazione “implicita” della Risposta in Frequenza. La Fase è riportata in Ascissa ed il Modulo in Ordinata (in dB).
- L’uso delle carte di Nichols è storicamente prevalente in ambiente industriale (elettrico, meccanico, aeronautico,..)

$$G(s) = \frac{25(s + 4)}{s(s + 10)(s + 100)}$$





# Diagrammi di Nichols





## Casi Particolari nella Risposta in Frequenza

Vi sono dei casi di interesse pratico, per i quali il tracciamento della risposta in Frequenza richiede particolare attenzione.

- **Presenza di un Ritardo Puro o Dinamico:** Questa situazione si presenta spesso nei a causa di ritardi puri e/o approssimazioni di dinamiche mediante elementi di ritardo. La presenza del ritardo può portare a fenomeni di instabilità per Valori sufficientemente alti del Guadagno statico di anello.
- **Sistemi Instabili:** In questo caso, la risposta in frequenza come da definizione non è applicabile. Si può comunque tracciare un andamento di  $G(j\omega)$  Tenendo conto del valore esatto della fase delle varie componenti.
- **Sistemi a Fase non minima:** Tali sistemi hanno un effetto di fase che Risulta destabilizzante ad alti guadagni, per cui la risposta in frequenza va Tracciata con attenzione.
- **$G(s)$  da dati sperimentali:** Dati sperimentali possono essere usati per Ricavare la risposta in frequenza in alcuni casi.



## Presenza del Ritardo Puro (Bode)

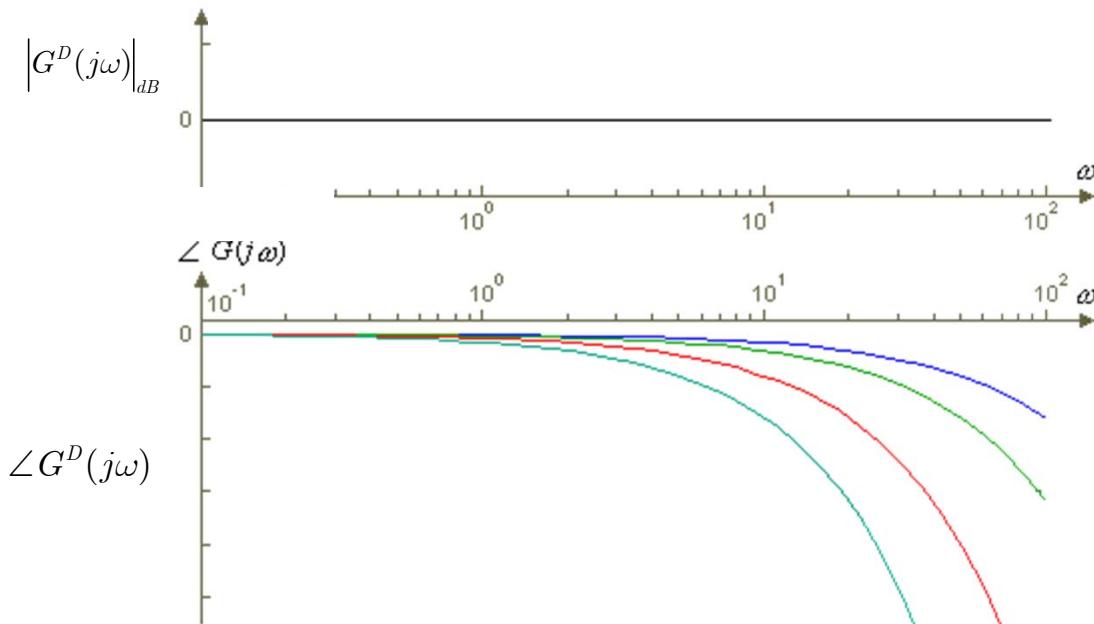
- Consideriamo una funzione con un ritardo  $T_d$ , applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$g(t) \rightarrow g(t - T_d) \Rightarrow G(s) \rightarrow G(s) \cdot e^{-T_d s} = G(s)G^D(s)$$

- Contributo del Ritardo nella risposta in frequenza:

$$G^D(j\omega) = e^{-jT_d \omega} = \cos(\omega T_d) - j \sin(\omega T_d)$$

$$\begin{aligned} |G^D(j\omega)| &= \sqrt{\cos^2(\omega T_d) + \sin^2(\omega T_d)} = 1 \\ \angle G^D(j\omega) &= \tan^{-1}\left(\frac{-\sin(\omega T_d)}{\cos(\omega T_d)}\right) = -T_d \omega \end{aligned}$$



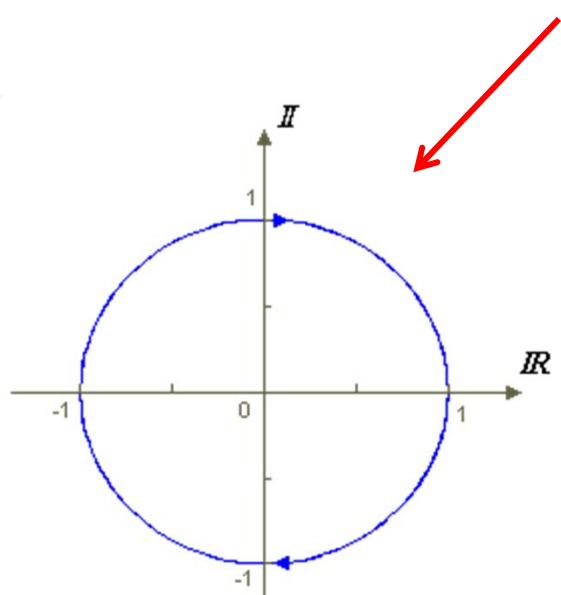
| $\omega$ | 0.01   | 1.0  | 10    | Ritardo (sec) |
|----------|--------|------|-------|---------------|
| 0.01     | 0.0001 | 0.01 | 0.1   |               |
| 0.1      | 0.001  | 0.1  | 1.0   |               |
| 1.0      | 0.01   | 1.0  | 10    |               |
| 10       | 0.1    | 10   | 100   |               |
| 100      | 1      | 100  | 1000  |               |
| 1000     | 10     | 1000 | 10000 |               |
| ..       | ..     | ..   | ..    |               |

Contributo di Fase(rad)  
Negativo



## Presenza del Ritardo (Nyquist)

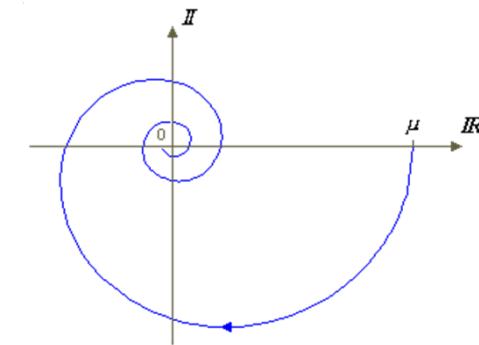
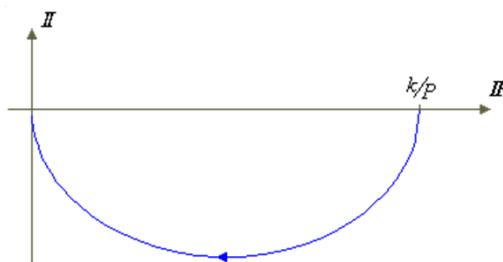
Il diagramma polare associato al ritardo è costituito, per quanto visto su modulo e fase, da una circonferenza di raggio unitario percorsa un numero infinito di volte in senso orario a partire dal semiasse reale positivo



- il modulo della  $G(s)$  non è influenzato dal ritardo, mentre la fase decresce al crescere di  $\omega$  in modo tale che il diagramma compie un numero sempre maggiore di giri in senso orario attorno all'origine del piano complesso

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}, \mu = kT = \frac{k}{P} > 0, T = \frac{1}{P} > 0$$

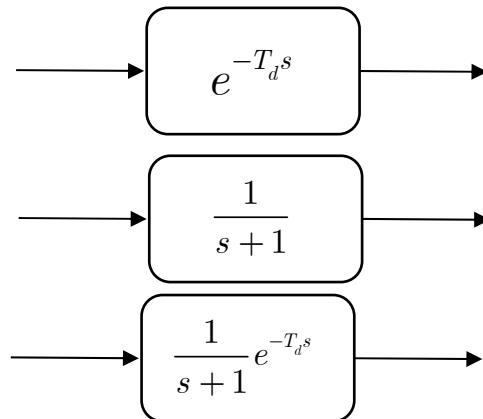
$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} e^{-T_d s}$$





# Presenza del Ritardo

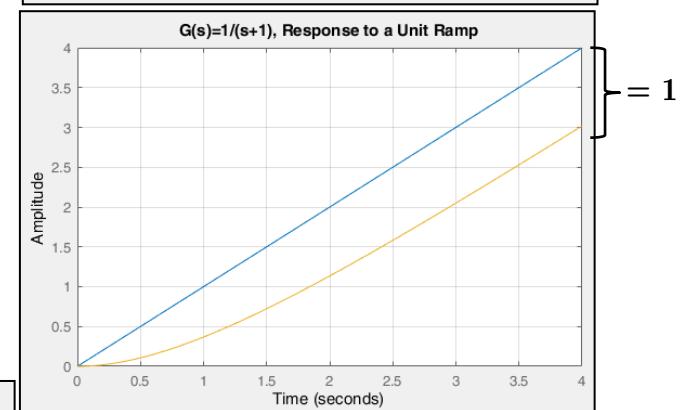
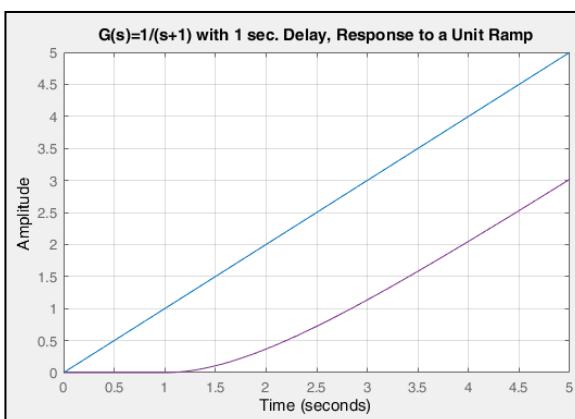
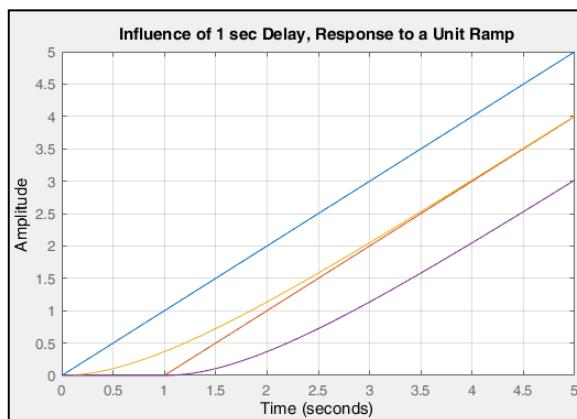
- Esempio numerico  $G(s) = \frac{1}{s+1}$ ,  $u(s) = \frac{1}{s^2} e^{-T_d s}$ ,  $T_d = 1$  sec.



$$u(t) = t$$
$$y(t) = t - T_d = t - 1$$

$$u(t) = t$$
$$y(t) = t - 1 + e^{-t}$$

$$u(t) = t$$
$$y(t) = t - 1 - 1 + e^{-(t-1)}$$

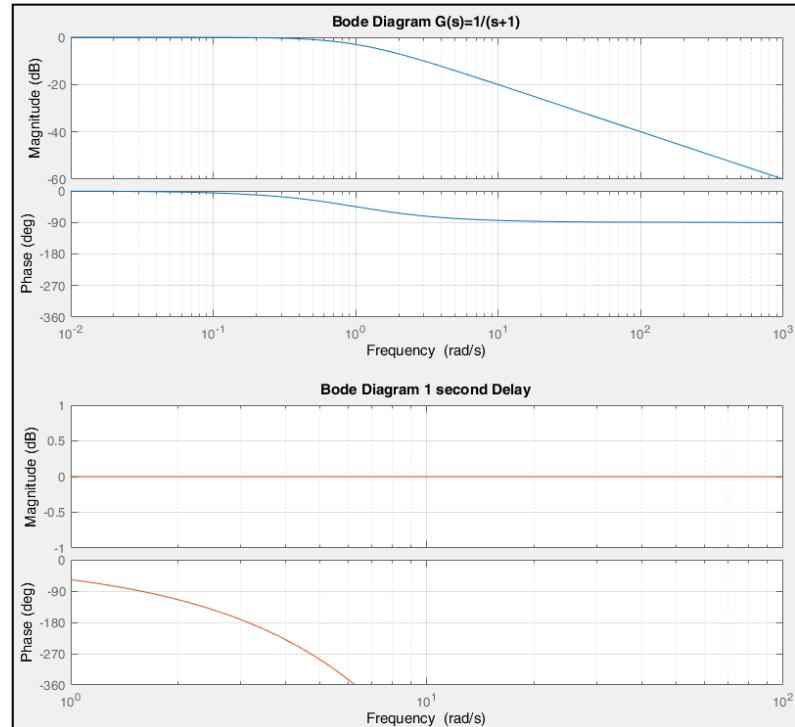
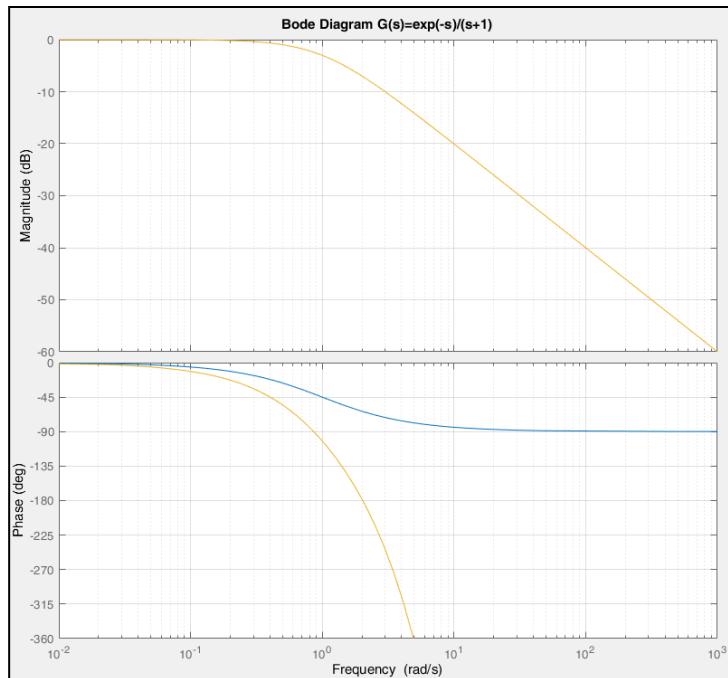




# Presenza del Ritardo

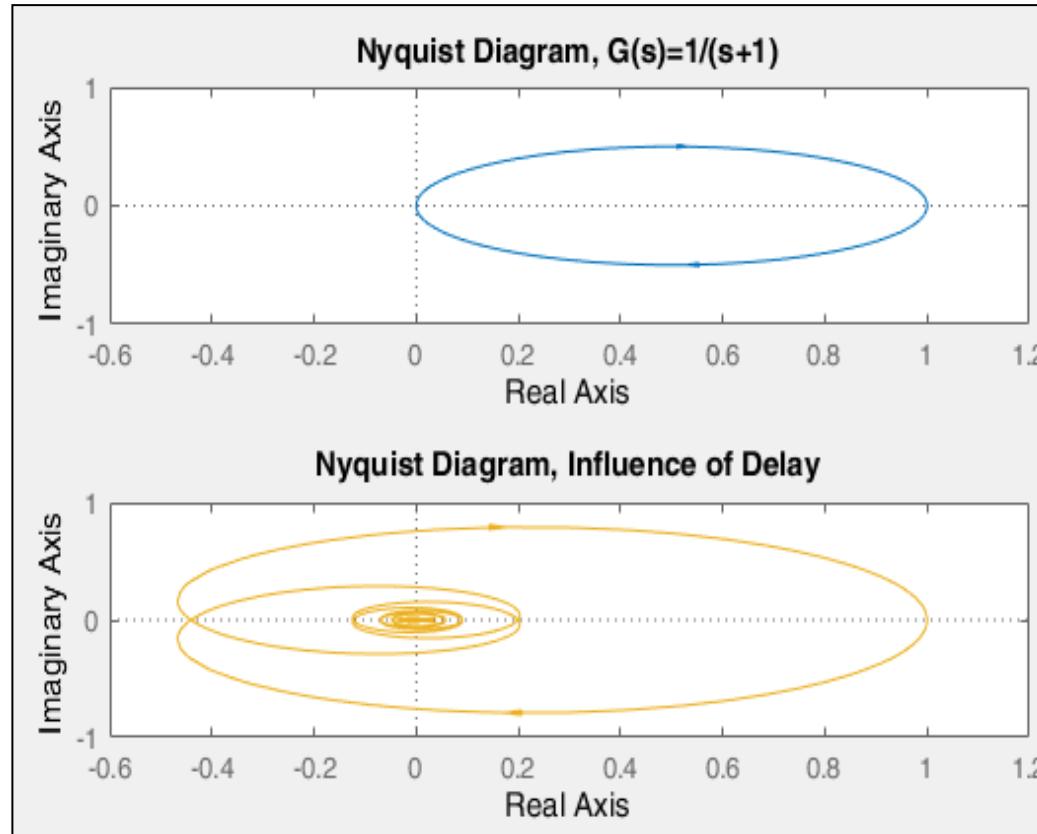
- Esempio numerico  $G(s) = \frac{1}{s+1}$ ,  $u(s) = \frac{1}{s^2} e^{-T_d s}$ ,  $T_d = 1$  sec.

$$\begin{array}{ccc} \text{Block Diagram: } & \frac{1}{s+1} & \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} & & \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\ & u(t) = t & \\ & y(t) = t - 1 - 1 + e^{-t} & \\ \\ \text{Block Diagram: } & \frac{1}{s+1} e^{-T_d s} & \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} & & \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\ & u(t) = t & \\ & y(t) = t - 1 - 1 + e^{-(t-1)} & \end{array}$$





# Presenza del Ritardo

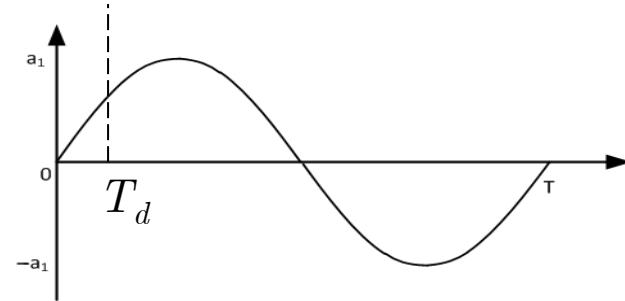




## Presenza del Ritardo

- La presenza di ritardo di anello rende impossibile il calcolo dei poli in ciclo chiuso, essendo il sistema descritto da una FdT **non razionale**:

$$G_{OL}(s) = K(s)G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} e^{-T_d s}$$



- La FdT in anello chiuso vale:

$$T(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{\omega_n^2 e^{-T_d s}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 (1 + e^{-T_d s})}$$

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 (1 + e^{-T_d s}) = 0$$

- **Quali sono i poli del sistema in anello chiuso?**  
**Non esiste una radice s (reale o complessa) tale che il denominatore sia uguale a zero !!**



- Come si può verificare la stabilità in anello chiuso?

- Approssimazione polinomiale del termine di ritardo (approssimatori di Padè)
- Uso della risposta in frequenza (vedi Criterio di Nyquist)

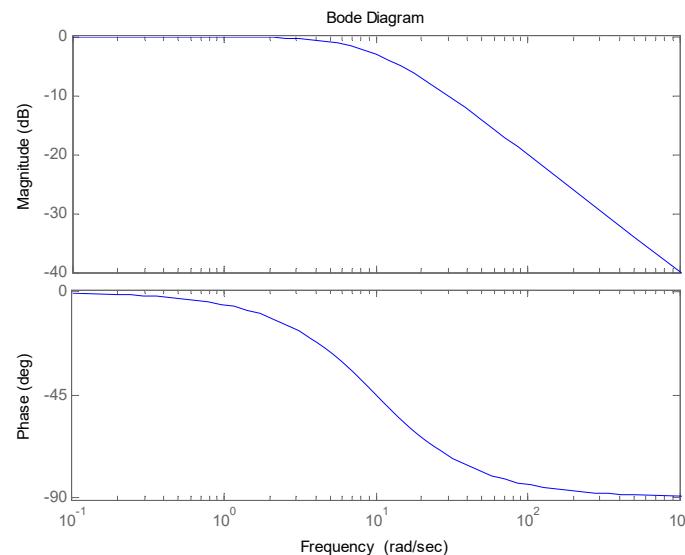


# Presenza del Ritardo

- L'approssimazione polinomiale viene eseguita mediante un sistema del primo ordine oppure con gli approssimatori algebrici di Padè.

- Sistema del primo ordine

$$e^{-T_d s} \approx \frac{1}{1 + T_d s}$$



$\exp(x)$

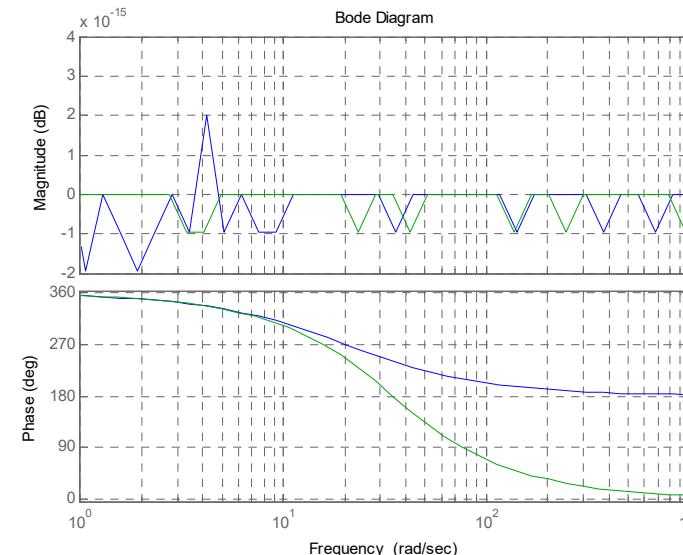
$$\exp(x) = \frac{\exp(x/2)}{\exp(-x/2)} \approx \frac{1 + (1/2)x + (1/8)x^2 + (1/48)x^3 + (1/384)x^4 + (1/3840)x^5}{1 - (1/2)x + (1/8)x^2 - (1/48)x^3 + (1/384)x^4 - (1/3840)x^5}$$

- Approssimanti di Padè di  $e^x$

$$\exp_{1/1}(x) = \frac{2+x}{2-x}$$

$$\exp_{2/2}(x) = \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$$

$$\exp_{3/3}(x) = \frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}.$$



Transfer function:

$-s + 20$

$s + 20$

$\gg sys2$

Transfer function:

$s^2 - 60 s + 1200$

$s^2 + 60 s + 1200$



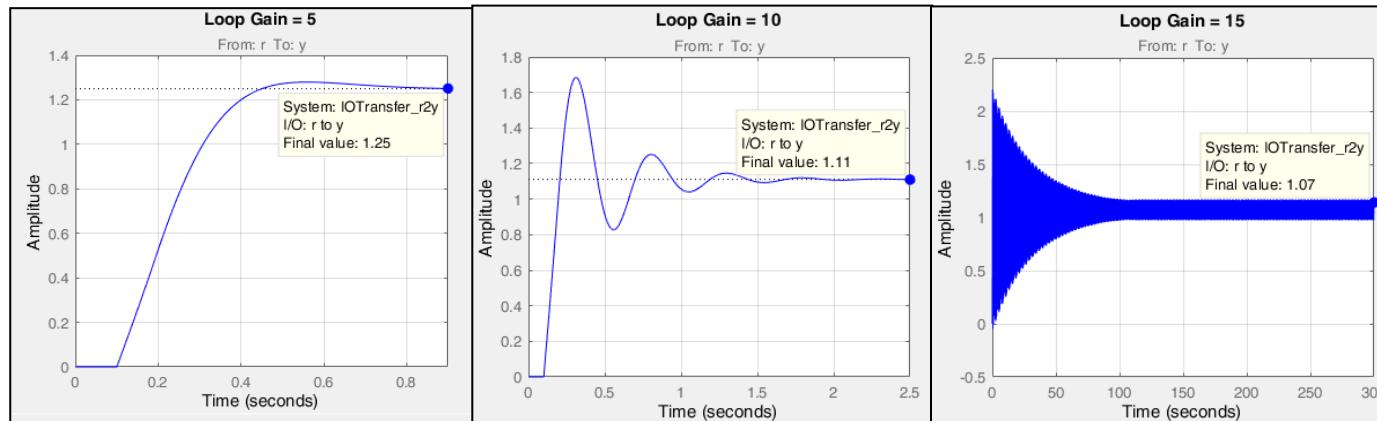
# Presenza del Ritardo

- **Problema:** Dato il sistema  $G(s)$ , progettare un controllore tale che l'errore a regime al gradino unitario sia minore o uguale al 5%.

$$G(s) = \frac{1}{s-1} \quad \epsilon_{\text{r}} \leq 5\%$$

- Un controllore proporzionale stabilizza il sistema per  $k > 1$ .  $T(s) = \frac{k}{s+k-1}$
- per  $k > 21$  viene soddisfatto il requisito di regime.  $y_{ss} = \frac{k}{k-1} \leq 1.05 \Rightarrow k > 21$

$$T_d = 0.1 \text{ sec} \quad T(s) = \frac{ke^{-0.1s}}{s-1+ke^{-0.1s}}$$





## Sistemi Instabili

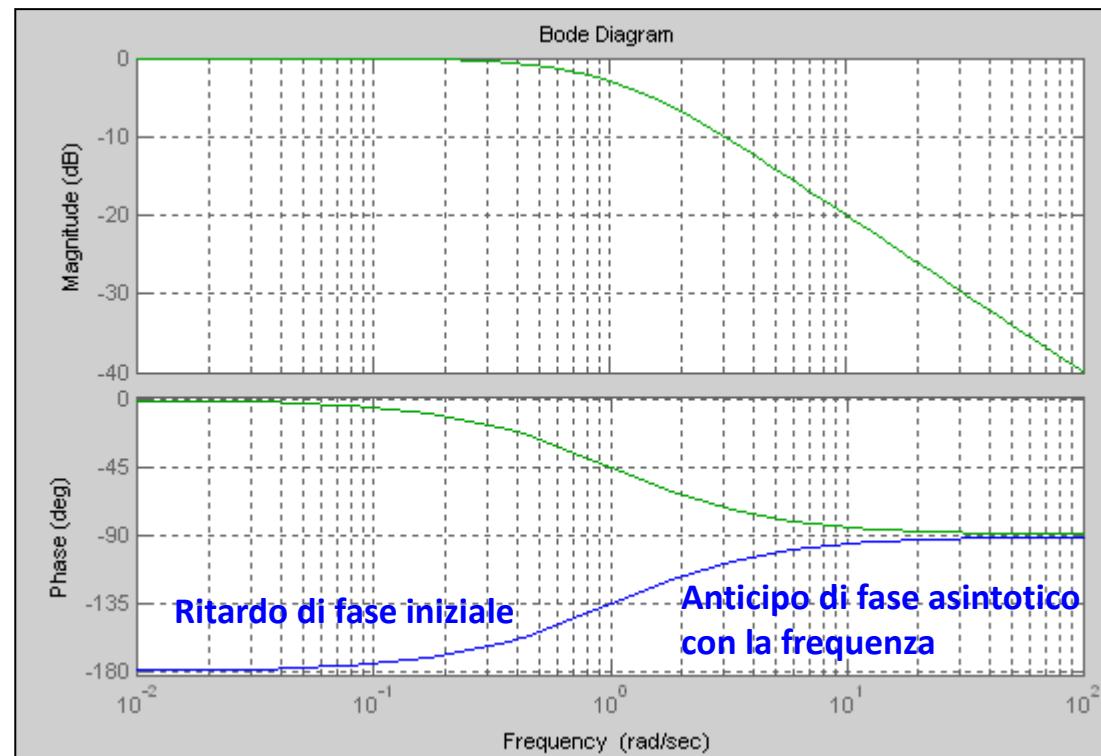
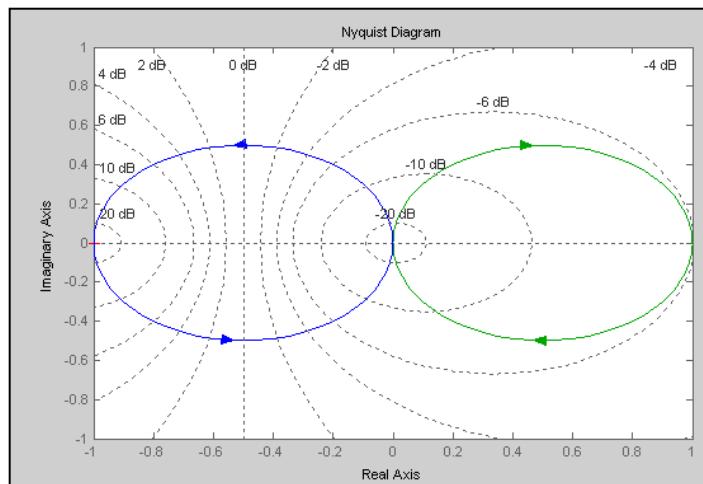
- I sistemi instabili hanno poli a parte reale positiva, per cui formalmente la risposta in frequenza non produce un'armonica in uscita. Possiamo comunque tracciare l'andamento di  $G(j\omega)$  sia come diagrammi di Bode, che come diagramma polare. Consideriamo il caso di un singolo polo instabile

$$G_p(s) = \frac{1}{s-1} = -\frac{1}{1-s}$$

$$\left|G_p(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} = |G(j\omega)| \quad G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\angle G_p(j\omega) = \angle(-1) - \tan^{-1}(-\omega) = -180^\circ + \tan^{-1} \omega$$

$$G_p(j\omega) = -\frac{1}{1-j\omega}$$





## Sistemi Instabili

- Nel caso di sistemi instabili, comunque, si può dimostrare che un'opportuna scelta di condizioni iniziali permette di avere un'uscita armonica (Vedi testo Bolzern, pp 169 – 170).
  - Consideriamo un sistema SISO, lineare, strettamente proprio e asintoticamente stabile:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ y = C\mathbf{x} \end{cases}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; u, y \in \mathbb{R}^1 \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

- Sia  $u(t)$  un ingresso esponenziale, con polo dominante e/o divergente:

$$u(t) = Ue^{\lambda^* t}, [\lambda^* \neq \{\lambda_i(A)\}, A < 0]$$

- A regime si ha:

$$y(s) = G(s) \cdot \frac{U}{s - \lambda^*} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s + p_i} + \frac{B_1}{s - \lambda^*} = y_1(s) + y_2(s)$$

$$y^*(t) = y_2(t) = [C(\lambda^* I - A)^{-1}B + D]Ue^{\lambda^* t} = \textcolor{red}{G(\lambda^*)}Ue^{\lambda^* t}$$



## Sistemi Instabili

- Consideriamo adesso il caso di un sistema instabile, con ingresso esponenziale:
- **Teorema:** Esiste un vettore di condizioni iniziali capace di produrre l'equivalente della componente  $y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[y_2(s)]$ , annullando il termine  $y_1(t)$

$$\exists \mathbf{x}(0) : \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0)e^{\lambda^* t} \quad \lambda^* \mathbf{x}(0)e^{\lambda^* t} = A\mathbf{x}(0)e^{\lambda^* t} + BUe^{\lambda^* t} \quad (\lambda^* I - A)\mathbf{x}(0) = BU$$

$$[\lambda^* \neq \{\lambda_i(A)\}, A < 0] \Rightarrow \mathbf{x}(0) = (\lambda^* I - A)^{-1}BU$$

$$y_2(t) = C\mathbf{x}(0)e^{\lambda^* t} \quad y_2(t) = [C(\lambda^* I - A)^{-1}B]Ue^{\lambda^* t} = G(\lambda^*)Ue^{\lambda^* t}$$

- **La stessa procedura la possiamo applicare ad un sistema instabile con ingresso armonico:**

$$u(t) = U \sin \omega_0 t = \frac{U \left( e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t} \right)}{2j} \quad \lambda^* = j\omega_0; \bar{\lambda}^* = -j\omega_0$$

$$y(s) = G(s) \cdot U \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s + p_i} + \frac{B_1}{s + j\omega_0} + \frac{B_1^*}{s - j\omega_0} = y_1(s) + y_2(s)$$

$$\exists \mathbf{x}(0) : \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) \sin \omega_0 t \quad \blacksquare \quad \text{Tale che: } y(t) = y_2(t) ?$$



## Sistemi Instabili

- Il vettore di condizioni iniziali è dato dalla combinazione lineare di due componenti esponenziali:

$$[\lambda^*, \bar{\lambda}^* \neq \{\lambda_i(A)\}, A < 0] \Rightarrow \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_1(0) - \mathbf{x}_2(0) = (\lambda^* I - A)^{-1} B U - (\bar{\lambda}^* I - A)^{-1} B U$$

$$y_2(t) = C\mathbf{x}(t) \quad y_2(t) = \frac{G(\lambda^*)U}{2j} e^{\lambda^* t} + \frac{G(\bar{\lambda}^*)U}{-2j} e^{\bar{\lambda}^* t} = |G(j\omega_0)| U (\sin \omega_0 t + \varphi)$$



## Sistemi a Fase Non Minima

- Consideriamo un sistema del primo ordine con uno zero a parte reale negativa

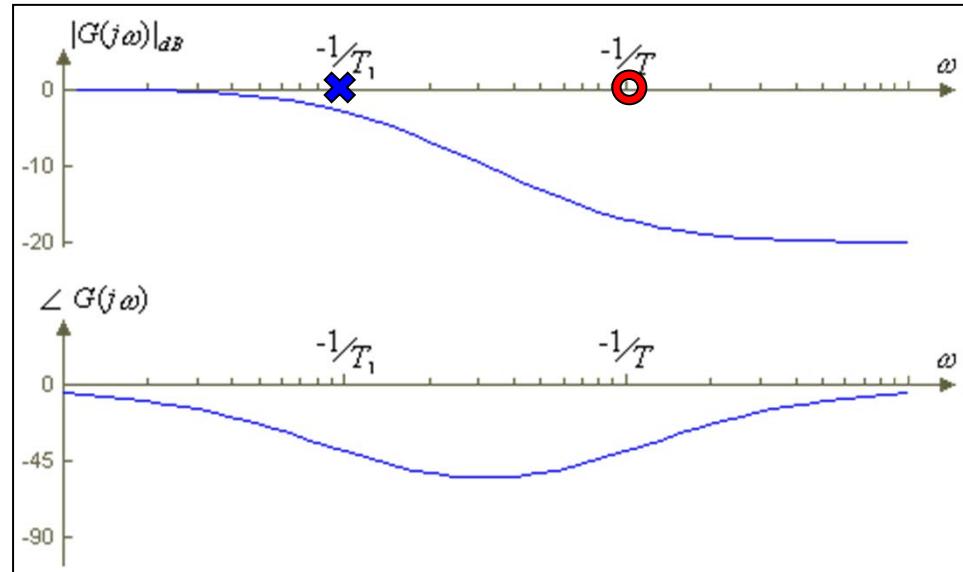
$$G(s) = \frac{1 + sT}{1 + sT_1}, \quad 0 < T < T_1$$

- Nel caso di zero di parte reale positiva si ha un ritardo di fase!

$$G_p(s) = \frac{1 - sT}{1 + sT_1}, \quad 0 < T < T_1$$

$$G_p(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T_1}$$

$$\begin{aligned}\angle G_p(j\omega) &= \angle(1 - j\omega T) - \angle(1 + j\omega T_1) = \\ &= \tan^{-1}(-\omega T) - \tan^{-1}(\omega T_1) = -\tan^{-1}(\omega T) - \tan^{-1}(\omega T_1)\end{aligned}$$

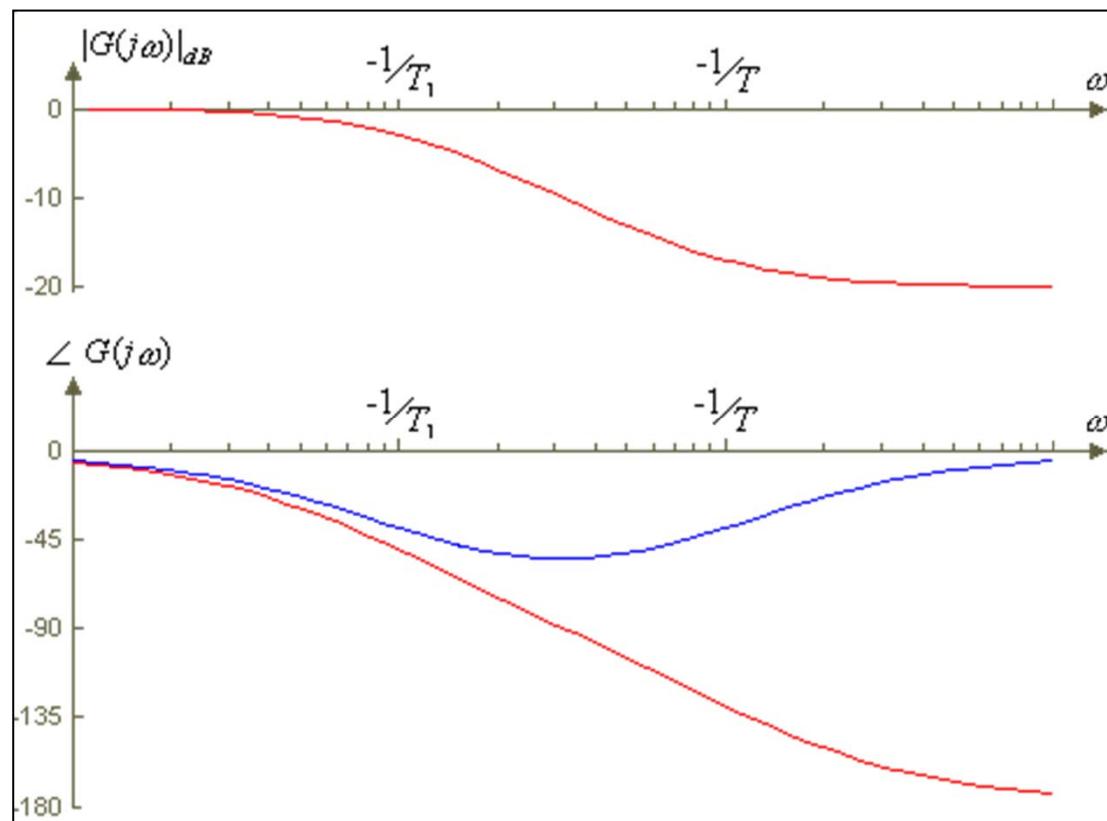


$$\left|G_p(j\omega)\right| = \frac{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2}} = \left|G(j\omega)\right|$$



## Sistemi a Fase Non Minima

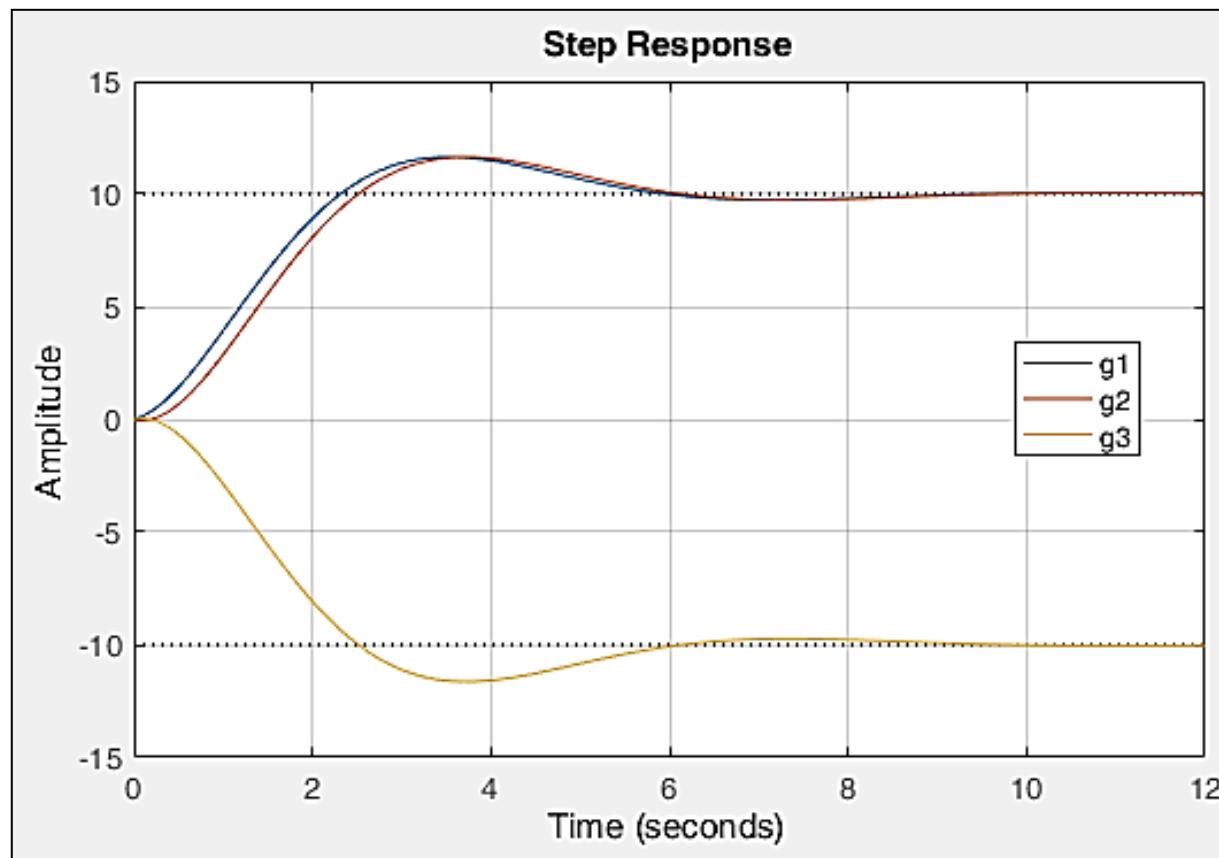
- Il diagramma del modulo coincide con il sistema a fase minima, quello della fase è diverso; in particolare, lo zero a parte reale positiva si comporta, per la fase, come uno polo a parte reale negativa portando un decremento della fase di  $-90^\circ$ , ovvero un ritardo





## Sistemi a Fase Non Minima

$$G_1(s) = \frac{s + 10}{s^2 + s + 1} \quad G_2(s) = \frac{10 - s}{s^2 + s + 1} \quad G_3(s) = \frac{s - 10}{s^2 + s + 1}$$



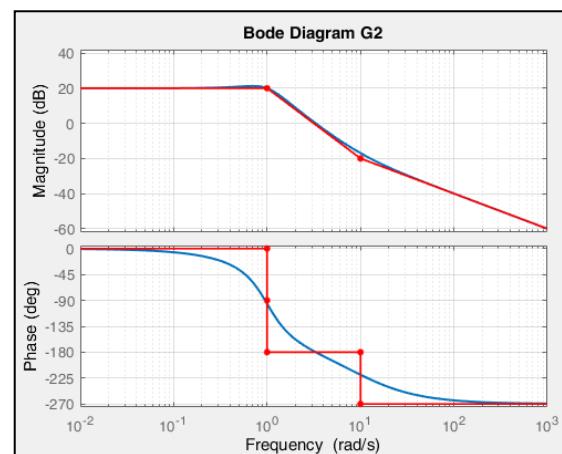
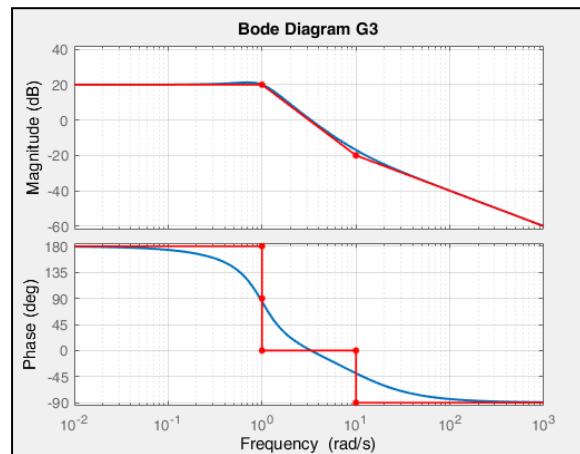
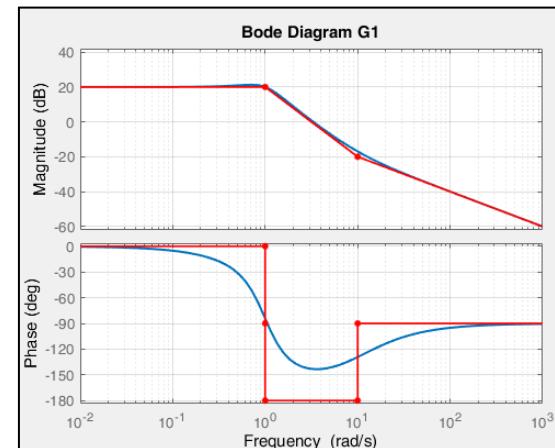
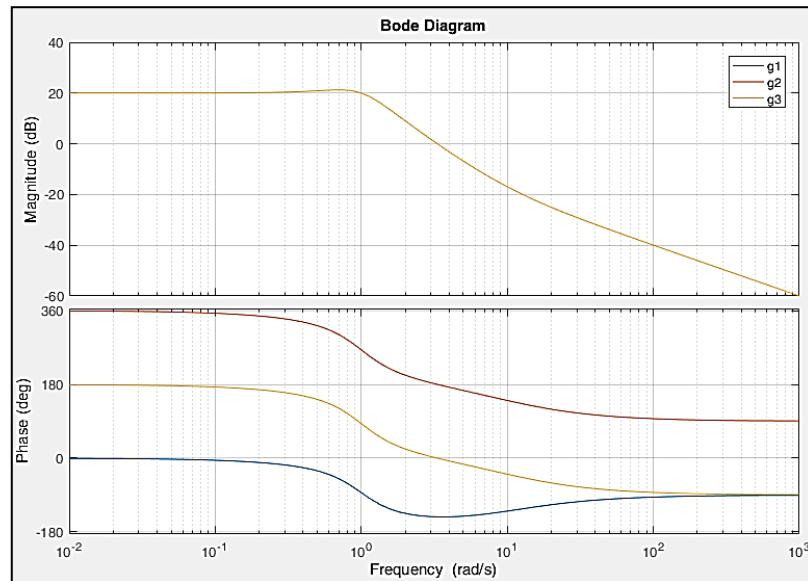


# Sistemi a Fase Non Minima

$$G_1(s) = \frac{s + 10}{s^2 + s + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{10 - s}{s^2 + s + 1}$$

$$G_3(s) = \frac{s - 10}{s^2 + s + 1}$$





# Sommario

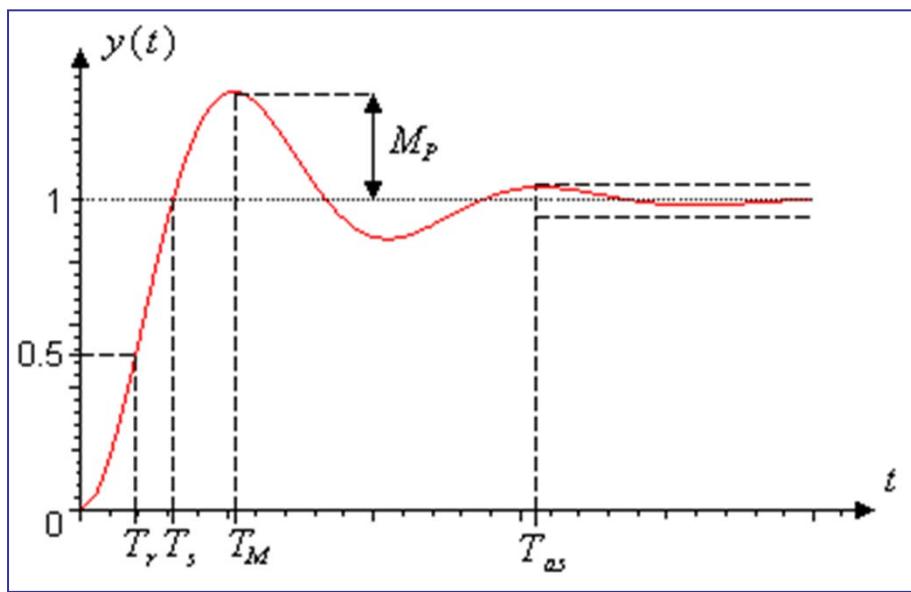


<https://www.youtube.com/channel/UCq0imsn84ShAe9PBOFnolrg>



## Parametri della Risposta Transitoria

- La risposta in frequenza può essere utilizzata per calcolare parametri, riconducibili ai parametri tipici già visti per la risposta transitoria e la risposta a regime sia in anello aperto che in anello chiuso.
- Risultati analitici sono ottenibili per sistemi del primo e del secondo ordine. Per sistemi di ordine superiore si possono fare considerazioni qualitative oppure considerazioni di prima approssimazione, seguite da simulazione, ma comunque attendibili dal punto di vista della comprensione del comportamento fisico.



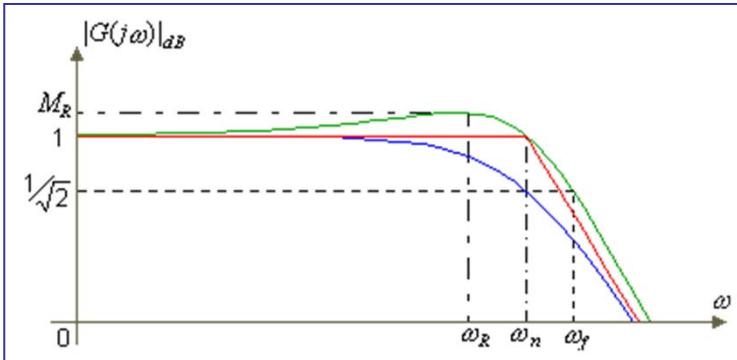
- Consideriamo un sistema del secondo ordine, oppure approssimato con due poli dominanti

$$T_M = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}},$$
$$M_p = 100 \cdot e^{-\left(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)},$$
$$T_s = \frac{\pi - \alpha}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi - \alpha}{\omega_d},$$
$$T_{as} = -\frac{1}{\xi\omega_n} \cdot \ln \varepsilon = \frac{3}{\xi\omega_n}$$

- **Nota:** Per sistemi del primo ordine ci riferiamo alla costante di tempo simile al tempo di assestamento



# Parametri della Risposta Transitoria



- La frequenza di *risonanza*  $\omega_R$ , frequenza a cui la risposta assume il suo valore massimo, è legata alla frequenza d'angolo dalla relazione

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} < \omega_n$$

**$\omega_R$**  può essere usata come indicatore del tempo di salita e di assestamento

- Il *picco di risonanza*  $M_R$ , rapporto fra valore massimo e valore statico della risposta, è pari a

$$M_R = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \propto M_p = e^{-\left(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}$$

**$M_R$**  può essere usato come indicatore della sovraelongazione e della velocità di risposta

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$$

- Nella figura sono stati riportati, il diagramma asintotico (in rosso), e quelli reali per due diversi valori del coefficiente di smorzamento  $\xi$ , 0.5 (in verde) e 0.707 (in blu) relativi ad un sistema del secondo ordine oscillatorio smorzato

$$\xi = 0 \Rightarrow M_R = \infty, M_p = 1$$

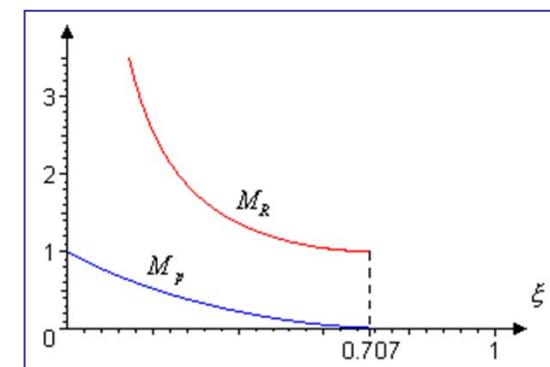
$$\xi = 0.1 \Rightarrow M_R = 5.025, M_p = 0.73$$

$$\xi = 0.3 \Rightarrow M_R = 1.747, M_p = 0.37$$

$$\xi = 0.5 \Rightarrow M_R = 1.15, M_p = 0.163$$

$$\xi = 0.707 \Rightarrow M_R = 1, M_p = 0.0433$$

$$\xi = 0.8 \Rightarrow M_R = 1.04, M_p = 0.0152$$





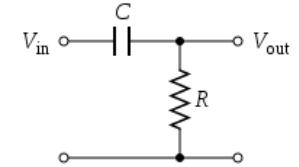
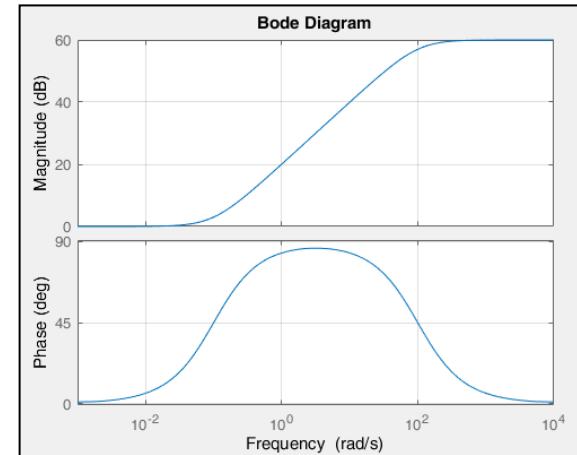
# Parametri della Risposta Transitoria

## □ Sistemi lineari come ‘Filtri’

- La riproduzione di un segnale armonico è limitata nel caso di sistemi fisici a causa della proprietà di causalità (sistemi propri o strettamente propri)
- Esempio: Filtro passa – Alto (High – Pass)

$$G(s) = \frac{1000(s + 0.1)}{(s + 100)}$$

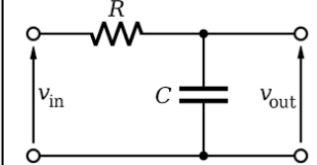
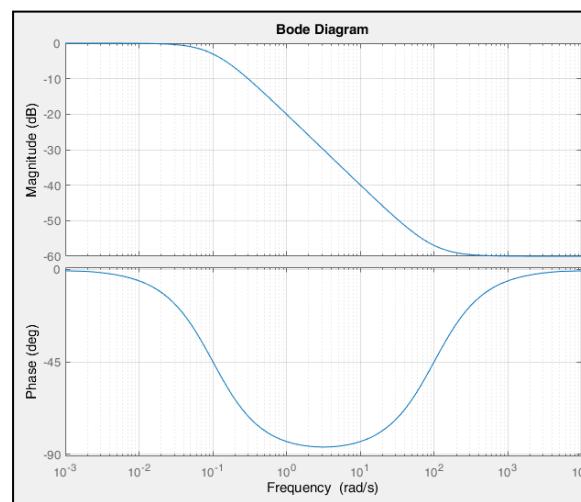
- Nel caso di filtro passa alto, le armoniche prima di una certa frequenza vengono ‘tagliate’, ovvero hanno un contributo trascurabile nella risposta



- Esempio: Filtro Passa – Basso (Low – Pass)

$$G(s) = \frac{(s + 100)}{1000(s + 0.1)}$$

- Nel caso di filtro passa basso, le armoniche dopo una certa frequenza vengono ‘tagliate’, ovvero hanno un contributo trascurabile nella risposta (**comportamento tipico della maggioranza dei sistemi fisici**)

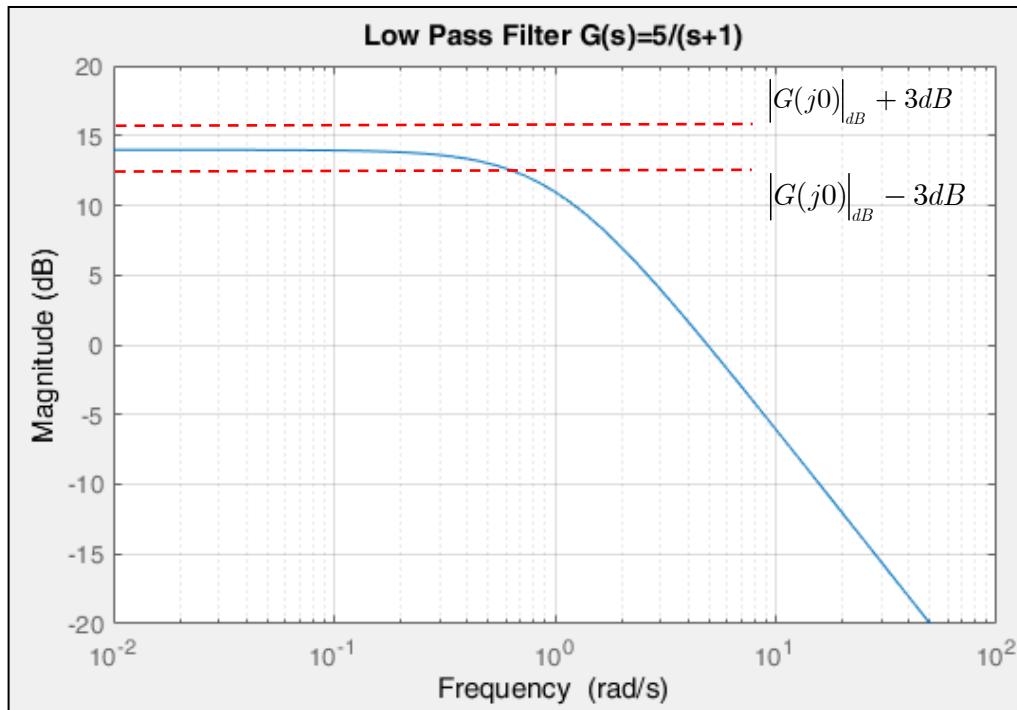




## Parametri della Risposta Transitoria

### □ La larghezza di banda o banda passante $\omega_{BW}$

1. Nella teoria dei segnali, la banda passante definisce, in frequenza, la limitazione superiore di un filtro teorico passa basso e la limitazione inferiore di un filtro teorico passa alto, ovvero la capacità di riprodurre, con perdita di ampiezza limitata, un segnale armonico in un certo intervallo di frequenze.

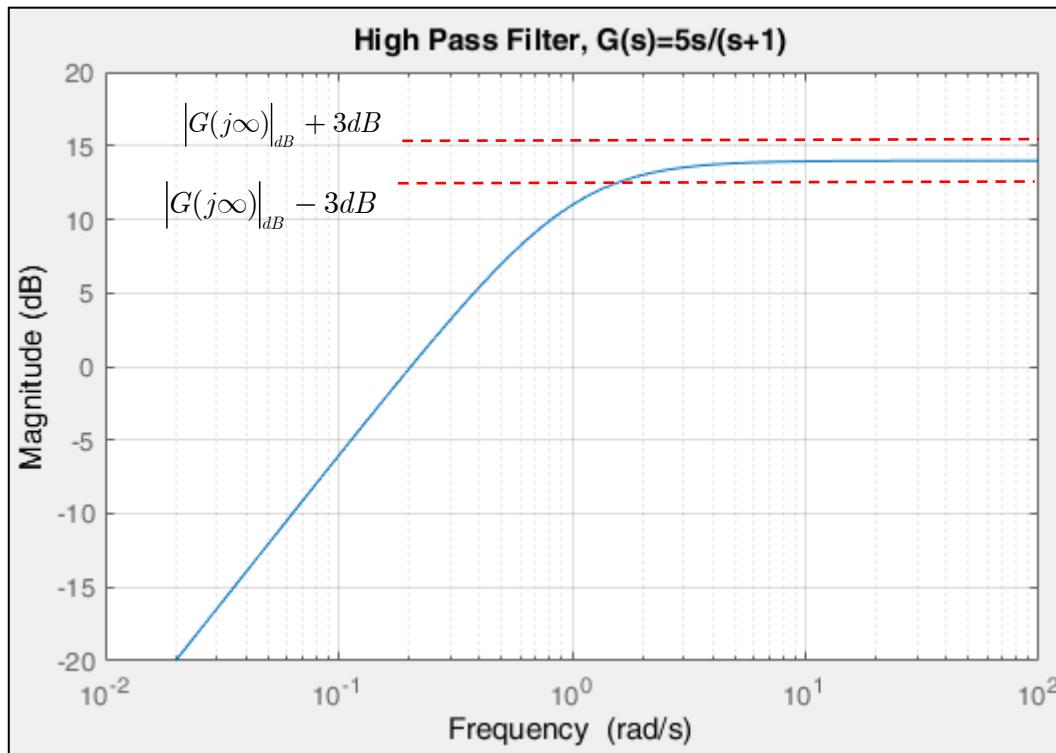


$$\sqrt{2} = 3dB$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} < \sqrt{2}, \omega < \omega_{BW}^{SUP} \\ \frac{|G(j\omega)|_{dB}}{|G(j0)|_{dB}} < \frac{1}{\sqrt{2}}, \omega > \omega_{BW}^{SUP} \end{cases}$$



## Parametri della Risposta Transitoria



$$\sqrt{2} = 3dB$$

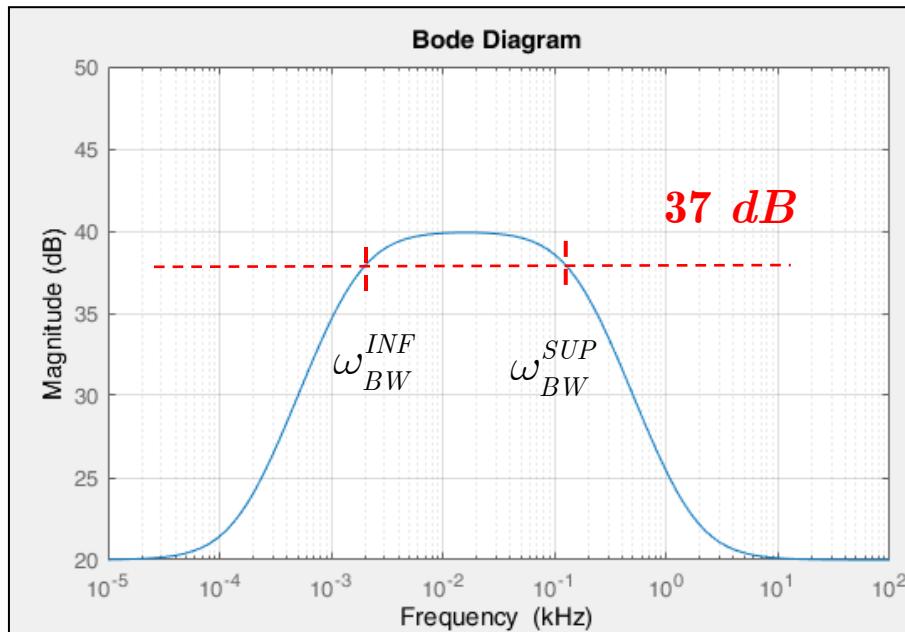
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} < \sqrt{2}, \omega > \omega_{BW}^{INF} \\ \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\infty)|} < \frac{1}{\sqrt{2}}, \omega < \omega_{BW}^{INF} \end{cases}$$

- I termini  $[\omega_{BW}^{INF}, \omega_{BW}^{SUP}]$  definiscono il limite inferiore e limite superiore della banda passante dei due filtri.



## Parametri della Risposta Transitoria

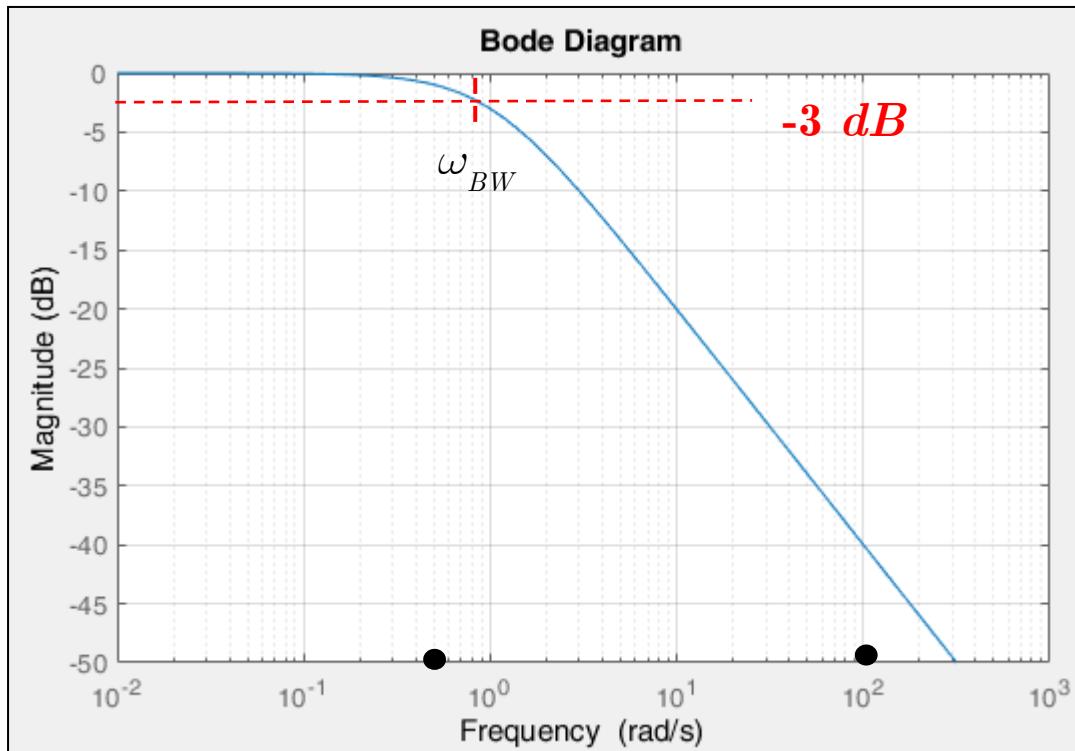
2. Nella teoria dei sistemi e del controllo, la banda passante definisce in pratica l'intervallo di frequenze entro il quale il sistema risponde con un'ampiezza non trascurabile. Individua quindi il contenuto frequenziale dell'ingresso al quale il sistema è capace di rispondere.



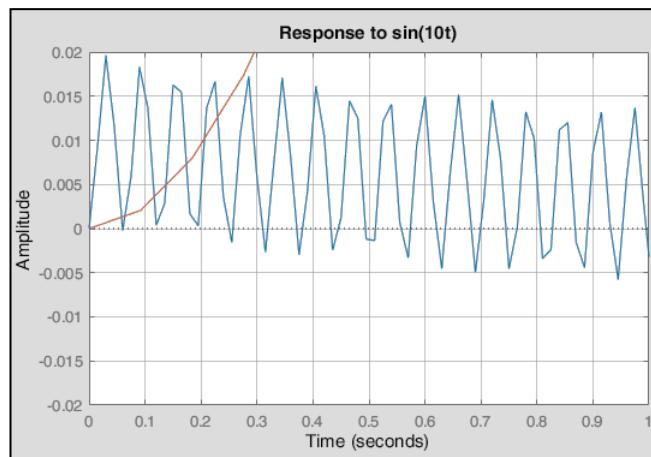
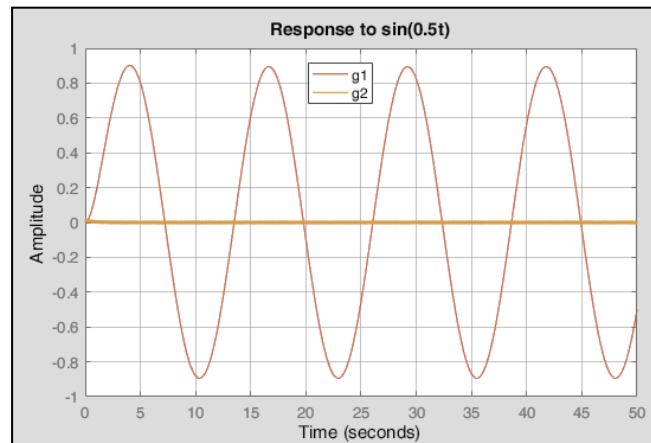
$$G(s) = \frac{10(s + 1)(s + 10000)}{(s + 10)(s + 1000)}$$



# Parametri della Risposta Transitoria



$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)}$$



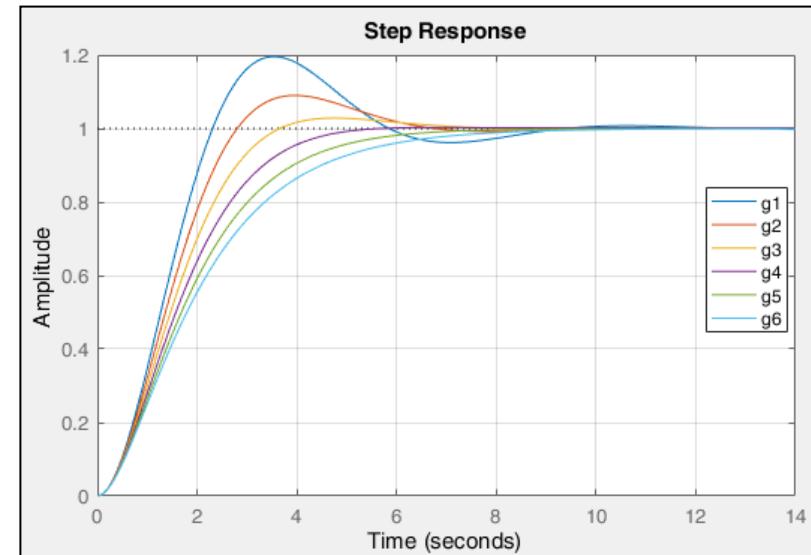
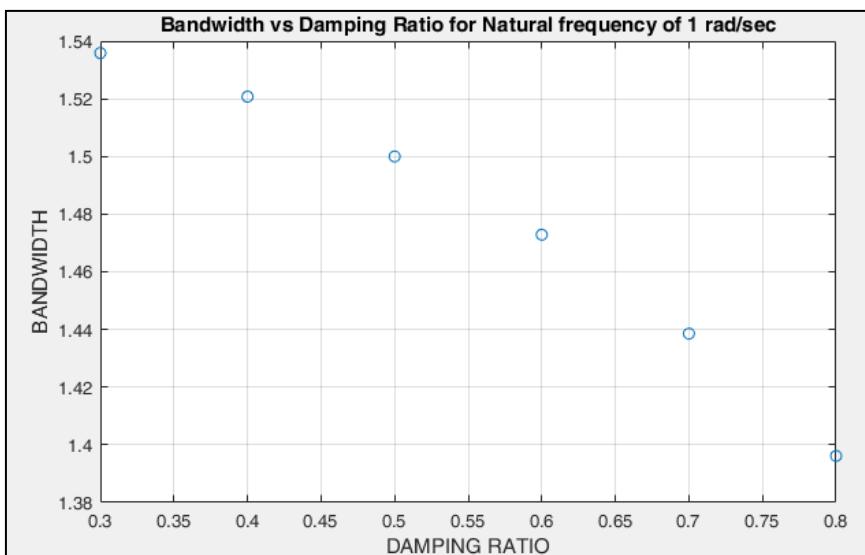


# Parametri della Risposta Transitoria

- La banda passante è inversamente proporzionale al coefficiente di smorzamento; tale parametro determina le caratteristiche della risposta transitoria del sistema in termini di tempo di salita e tempo di assestamento.
- Maggiore è la banda passante e migliore è la capacità di un sistema a riprodurre ingressi ad alta frequenza

| $\omega_{BW}$ | $\xi$  |
|---------------|--------|
| 1.5359        | 0.3000 |
| 1.5207        | 0.4000 |
| 1.5000        | 0.5000 |
| 1.4729        | 0.6000 |
| 1.4385        | 0.7000 |
| 1.3962        | 0.8000 |

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$
$$\xi = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \omega_n = 1$$





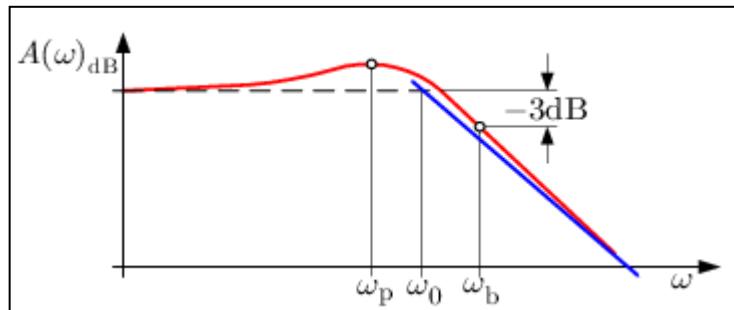
# Parametri della Risposta Transitoria

## □ Relazione tra banda passante $\omega_{BW}$ e parametri della risposta transitoria

- Alcuni legami di interesse si possono trovare se ci riferiamo ad un sistema del secondo ordine (per semplicità a guadagno statico unitario).

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi s}{\omega_n} + 1}$$

$$y(t) = \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \cos^{-1}(\xi)\right) \right]$$



$$\omega_{BW} = \omega_n \sqrt{(1-2\xi^2) + \sqrt{\xi^4 - 4\xi^2 + 2}}$$

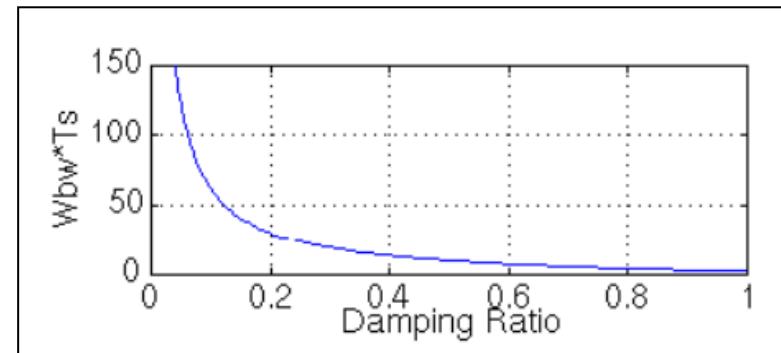
$$\omega_{BW} = \frac{4}{T_s \xi^2} \sqrt{(1-2\xi^2) + \sqrt{\xi^4 - 4\xi^2 + 2}}$$

$\omega_{BW}$  può essere usata come indicatore del tempo di salita e di assestamento

$$T_{a2} \cong \frac{4}{\xi\omega_n} \quad M_p = e^{-\left(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}$$

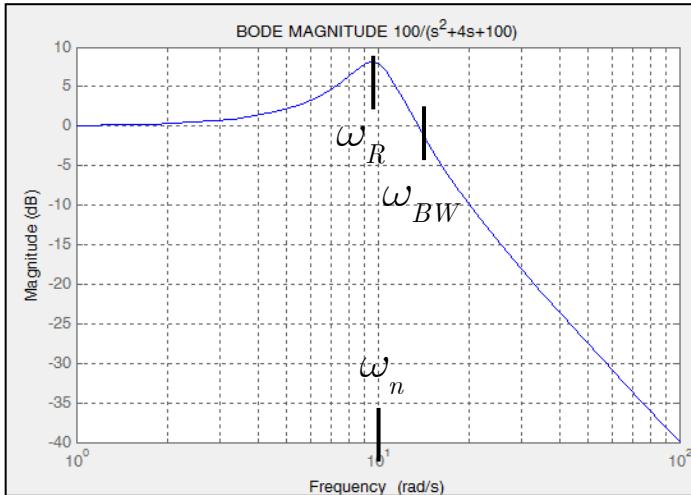
$$T_s = \frac{\pi - \cos^{-1} \xi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi - \alpha}{\omega_d}$$

$$|G(j\omega_{BW})| = 0.707 \cdot |G(j0)| = 0.707$$
$$A(\omega) = 0dB$$





# Parametri della Risposta Transitoria



$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} < \omega_n$$

$$M_R = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \propto M_p = e^{-\left(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}$$

$$|G(j\omega_{BW})| = 0.707 \cdot |G(j0)| = 0.707 = -3dB$$

$$|G(j\omega)| = -20 \log_{10} \sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}$$

$$\frac{d|G(j\omega)|}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_R$$

$$|G(j\omega_R)| = M_R$$

$$|G(j\omega_{BW})| = 0.707 |G(j0)| \Rightarrow \omega_{BW}$$

□ **Problema:** cosa succede se la FdT è in ciclo chiuso?

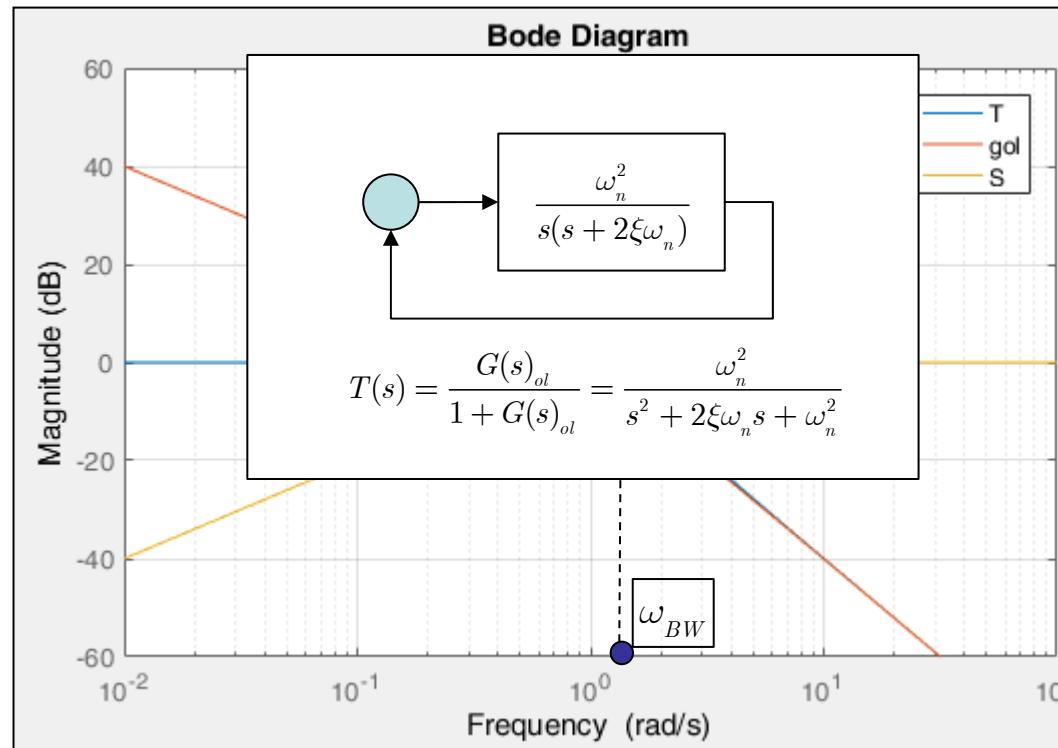
□ Possiamo identificare i parametri della risposta in frequenza in ciclo chiuso dalla risposta in frequenza in ciclo aperto?



# Parametri della Risposta Transitoria

- Relazione tra banda passante in anello aperto e anello chiuso (diagrammi di Bode)

$$G_{ol}(s) = \frac{1}{s(s+1)}; T(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}; S(s) = \frac{s(s+1)}{s^2 + s + 1}$$

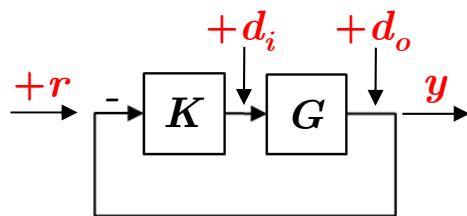


- Come possiamo stimare la banda passante in anello chiuso senza calcolare  $T(j\omega_{BW}) = -3$  dB ?



# Parametri della Risposta Transitoria

- Prestazioni in anello chiuso dalla funzione di sensitività



- $G(s)$  strettamente propria ( $\# \text{ poli} > \# \text{ zeri}$ )
- $K(s)$  propria (strettamente)  
 $\Downarrow$
- $G_{ol}(s) = K(s)G(s)$  strettamente propria

$$T(s) = \frac{G_{ol}(s)}{1 + G_{ol}(s)}, S(s) = \frac{1}{1 + G_{ol}(s)}$$

$$y(s) = S(s)d_o(s) + G(s)S(s)d_i(s) + T(s)r(s) \Rightarrow T(s) + S(s) = 1$$

$$\varepsilon(s) = r(s) - y(s) = S(s)r(s)$$

$S(j\omega) \downarrow$

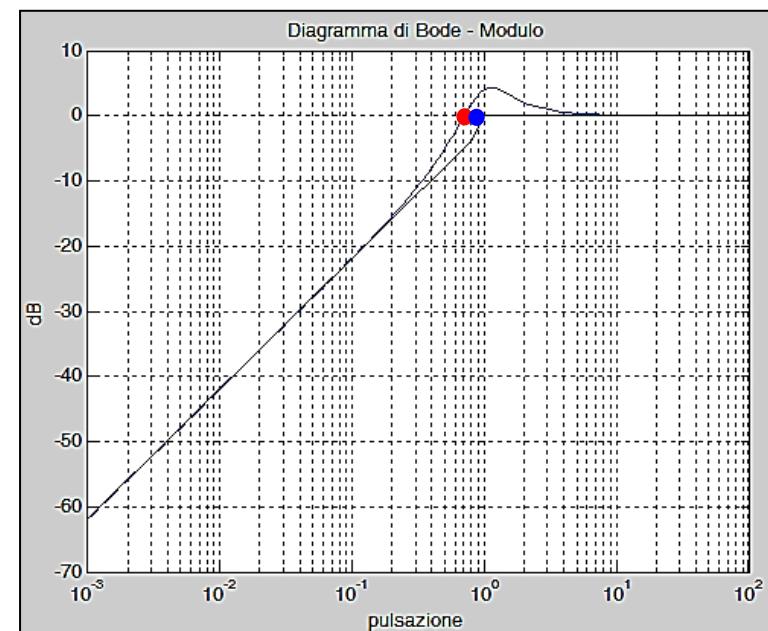
$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow |G_{ol}(j\omega)| \rightarrow \infty \Rightarrow |S(j\omega)| \rightarrow 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow |G_{ol}(j\omega)| \rightarrow 0 \Rightarrow |S(j\omega)| \rightarrow 1$$

- $S(j\omega)$  opera come Filtro Passa Alto per frequenze inferiori a  $\omega_C$

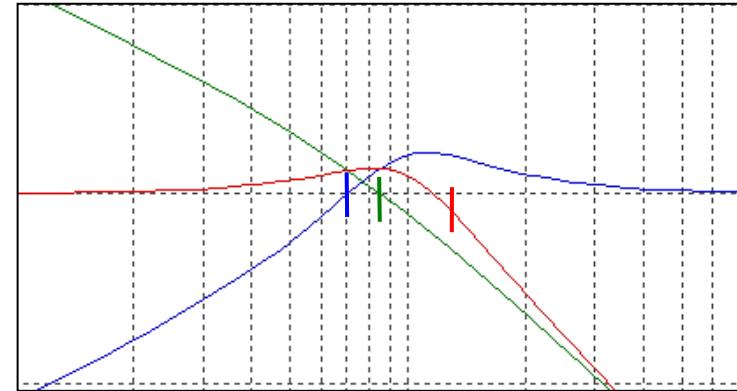
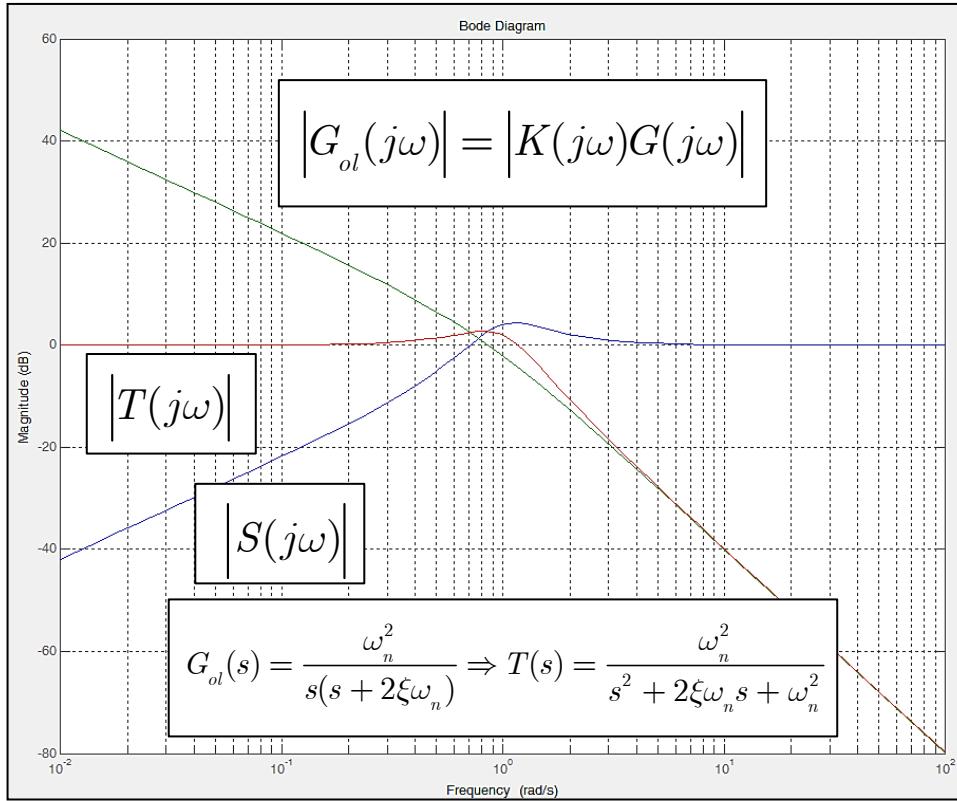
$$\exists \omega = \omega_C \mid |S(j\omega_C)| = 1$$

Frequenza di attraversamento  
Crossover Frequency  
 $\omega_C$   $\underline{\omega}_C$





# Parametri della Risposta Transitoria



$\omega_{BW}$  Banda Passante

$\omega_C$  Frequenza di Attraversamento  $S$

$\omega_C$  Frequenza Appross. di Attrav.  
 $G_{ol}$

- La frequenza di attraversamento della Sensitività oppure della FdT di anello ( $\omega_C$  oppure  $\omega_C$ ), possono essere considerate un valore approssimato della risposta transitoria per quanto riguarda:
  - La Banda Passante in anello chiuso
  - La capacità del sistema in anello chiuso di reiettare disturbi e di inseguire un comando

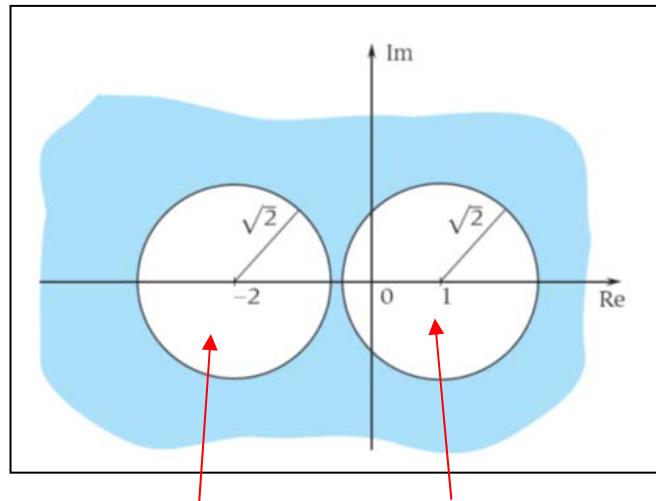


## Parametri della Risposta Transitoria (in ciclo chiuso)

- Relazione tra banda passante in anello aperto e anello chiuso (diagramma polare)

$$T(s) = \frac{G_{ol}(s)}{1 + G_{ol}(s)}, S(s) = \frac{1}{1 + G_{ol}(s)} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq |T(j\omega)| \leq \sqrt{2} \Rightarrow \omega_{BW} = ?? \quad (1)$$

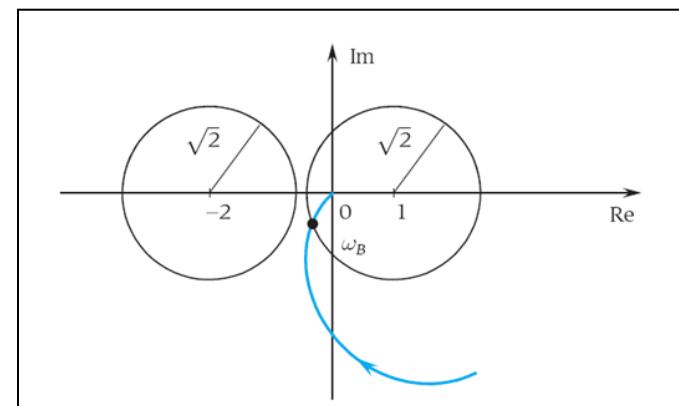
- Il diagramma polare di  $G_{ol}(s)$  permette di definire il valore della banda passante di  $T(s)$
- I valori  $s$  del piano complesso che soddisfano la definizione di banda passante dati da (1) sono quelli nella zona scura della figura (esterno dei due cerchi):



$$|s| = \sqrt{2} |1 + s| \quad |1 + s| = \sqrt{2} |s|$$

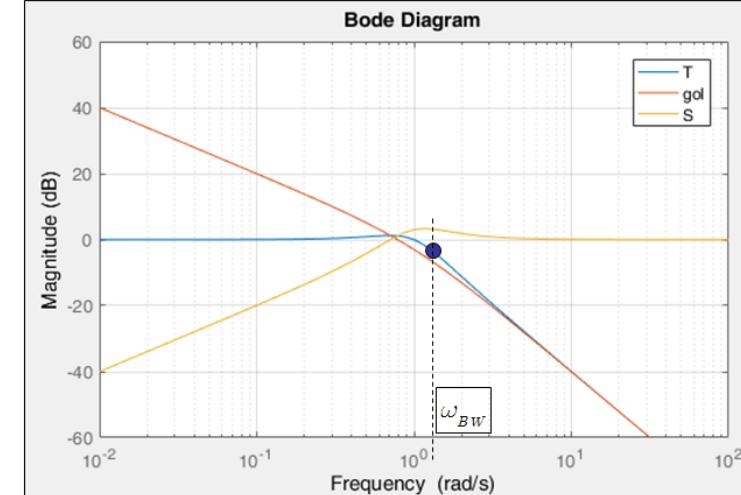
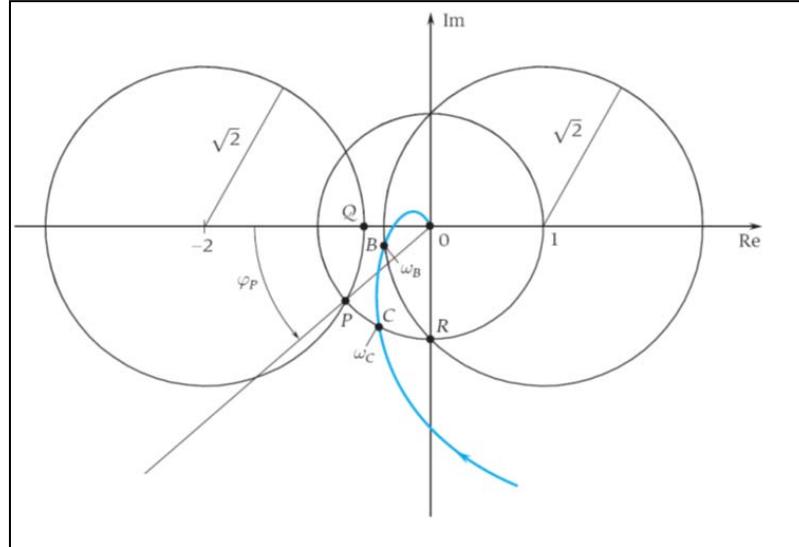
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|s|}{|1 + s|} \leq \sqrt{2}$$

- diagramma polare di  $G_{ol}(s)$





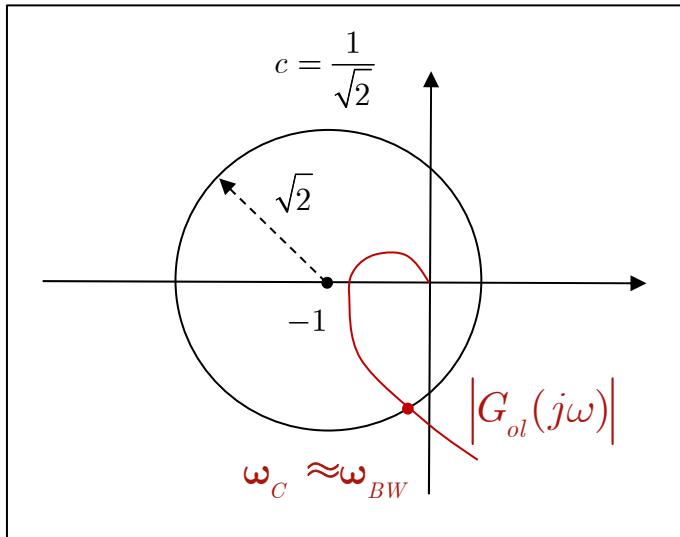
# Parametri della Risposta Transitoria



- La frequenza di attraversamento è in genere limitata superiormente dalla banda passante in anello chiuso (vedi punto C rispetto al punto B)
- Solo nel caso in cui il punto C della FdT di anello coincida con i punti P oppure R si ha uguaglianza tra le due frequenze



# Parametri della Risposta Transitoria



- Considerazioni aggiuntive sulla Sensitività  $S(j\omega)$

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + G_{ol}(j\omega)|} \Rightarrow \frac{1}{|1 + s|} = c$$

Circonferenza di centro  $-1$  e raggio  $1/c$

- Valori per cui la Sensitività è inferiore a  $c$  sono punti del piano complesso fuori al cerchio

$$|1 + G_{ol}(j\omega)| > \frac{1}{c}$$

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + G_{ol}(j\omega)|} < c$$

$$1 + \frac{1}{c} > G_{ol}(j\omega) > -1 + \frac{1}{c}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|S(j\omega_{BW})| = \frac{1}{|1 + G_{ol}(j\omega_{BW})|} < \frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB$$



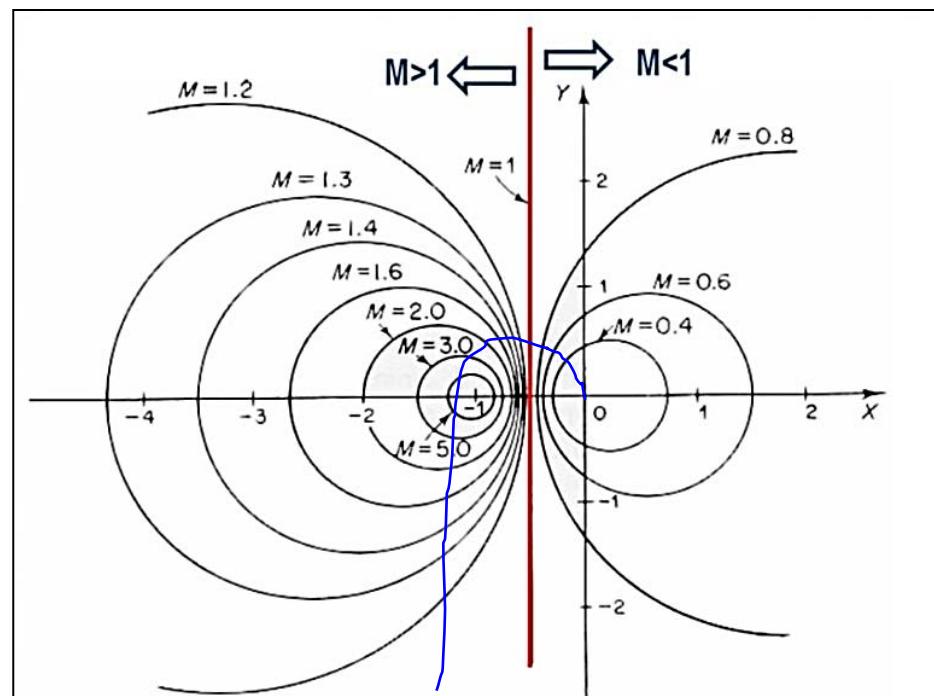
## Parametri della Risposta Transitoria

- Consideriamo una retroazione unitaria

$$T(j\omega) = \frac{G_{ol}(j\omega)}{1 + G_{ol}(j\omega)} = \frac{x + jy}{1 + x + jy}$$

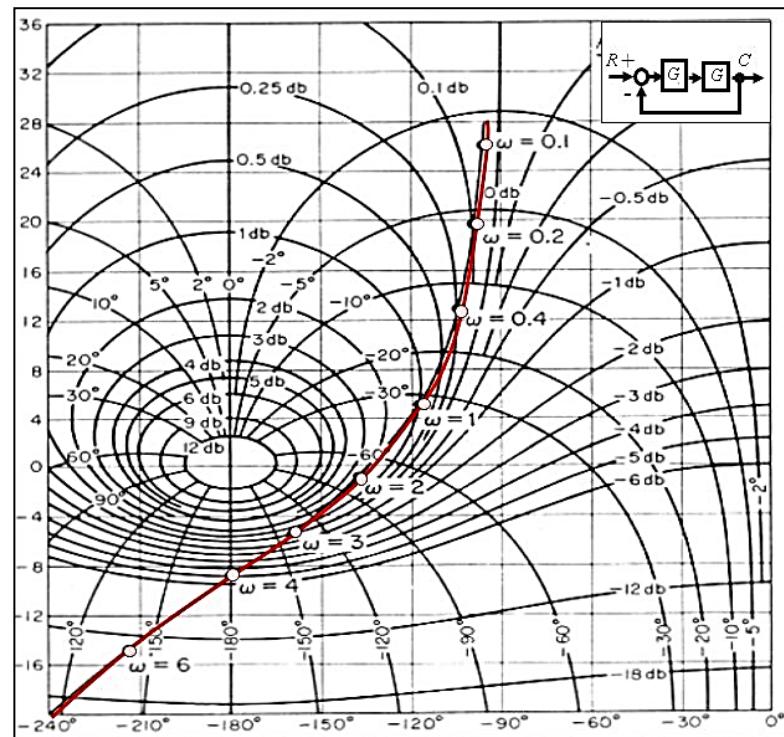
$$|T(j\omega)| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2}} = M \quad (x - \frac{M^2}{1-M^2}) + y^2 = \frac{M^2}{1-M^2} \quad \text{origin } (\frac{M^2}{1-M^2}, 0); \text{ radius } \frac{M}{1-M^2}$$

- Tracciare cerchi a  $M$  costante.
- Per  $M = 1$  si ha  $x = -1/2$





# Parametri della Risposta Transitoria





## Parametri della Risposta a Regime

- La risposta in Frequenza della funzione di trasferimento di anello fornisce anche informazioni sull'errore a regime in ciclo chiuso

$$\varepsilon(s) = S(s)u(s) = \frac{1}{1 + K(s)G(s)}u(s)$$

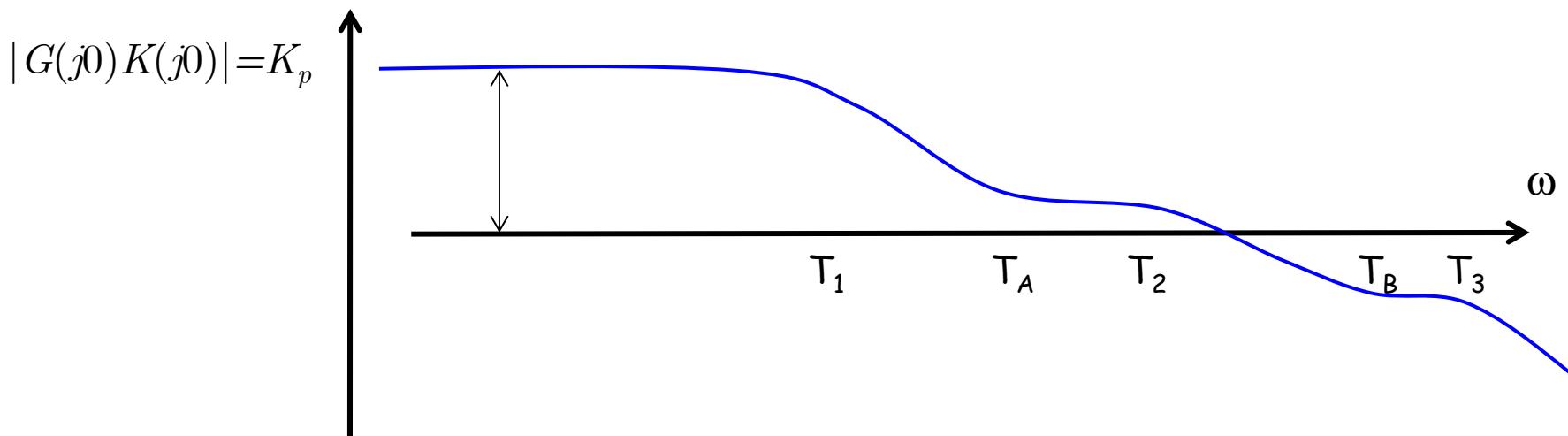
### Sistema di Tipo 0

$$G(j\omega)K(j\omega) = K_p \frac{(1 + j\omega T_A^{-1})(1 + j\omega T_B^{-1})\dots}{(1 + j\omega T_1^{-1})(1 + j\omega T_2^{-1})\dots}$$

■  $K_p$  è il guadagno (statico) di anello

L'errore al Gradino Unitario vale

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + G(s)K(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$





# Parametri della Risposta a Regime

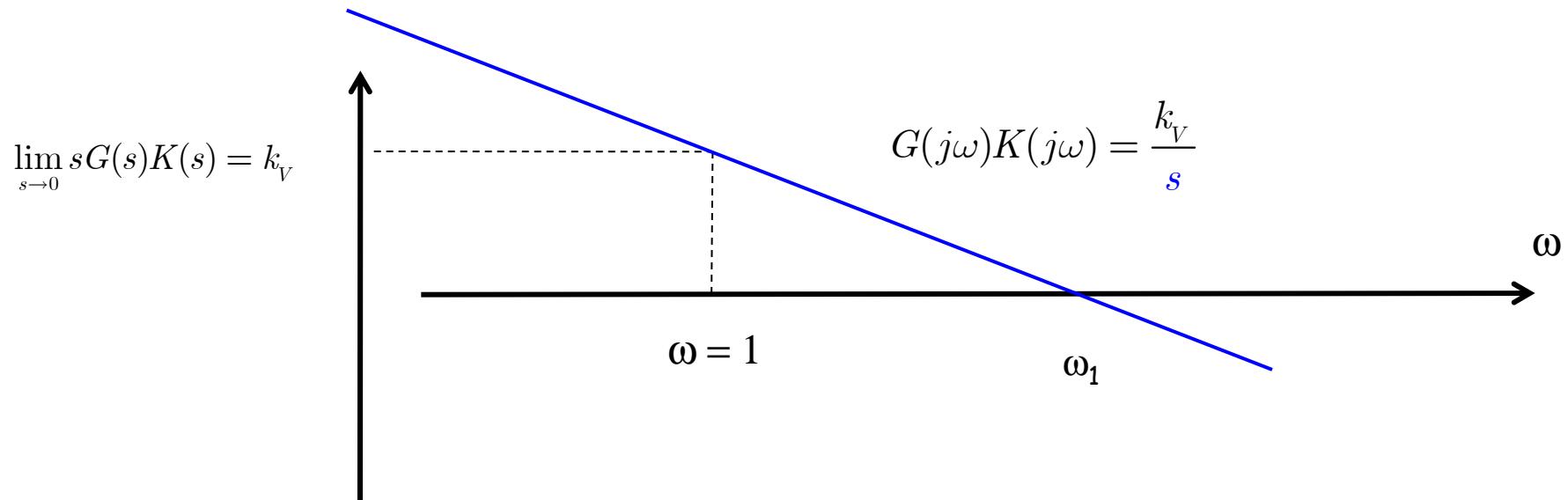
## Sistema di Tipo 1

$$G(j\omega)K(j\omega) = K_V \frac{(1 + j\omega T_A^{-1})(1 + j\omega T_B^{-1}) \cdots}{s(1 + j\omega T_1^{-1})(1 + j\omega T_2^{-1}) \cdots}$$

- $K_p$  è il guadagno di anello della parte senza polo all'origine

- L'errore al Gradino Unitario vale 0
- L'errore alla Rampa Unitaria vale:

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)K(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sG(s)K(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)K(s)} = \frac{1}{k_V}$$



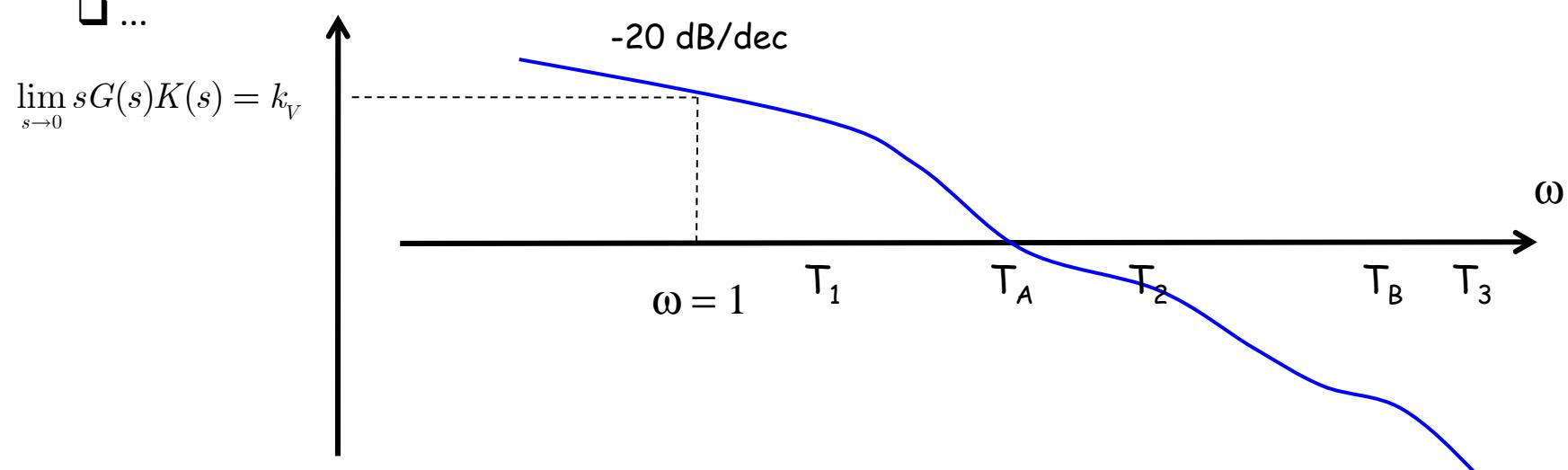


## Parametri della Risposta a Regime

La risposta in frequenza della FdT in Anello aperto fornisce direttamente il TIPO di sistema.

A basse frequenze ( $\omega \rightarrow 0$ ):

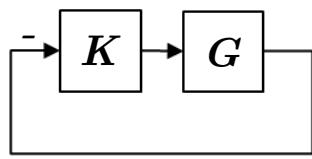
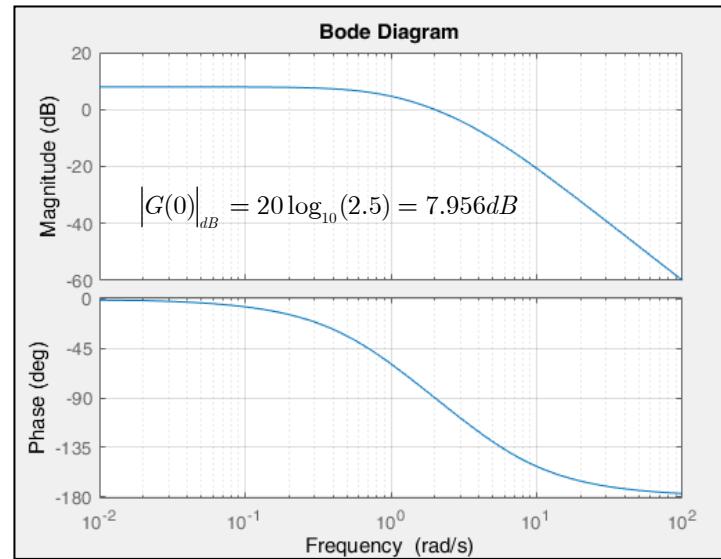
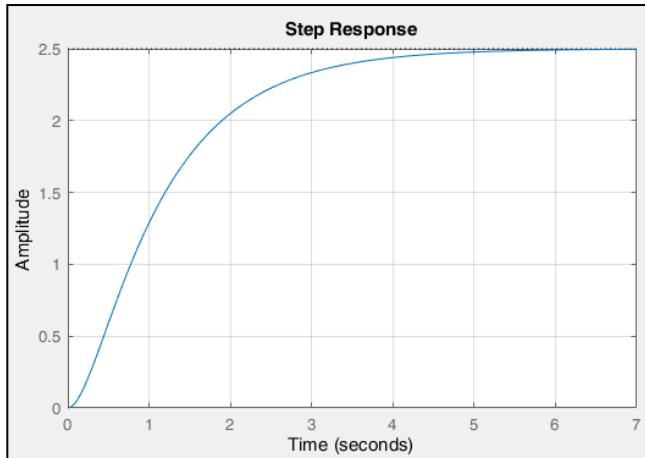
- Se il diagramma del modulo ha una pendenza nulla il sistema è di tipo 0 e l'errore al gradino sarà sempre finito.
- Se il diagramma del modulo ha una pendenza di  $-20 \text{ dB/dec}$  il sistema è di tipo 1 e l'errore al gradino sarà sempre nullo.
- Se il diagramma del modulo ha una pendenza di  $-40 \text{ dB/dec}$  il sistema è di tipo 2 e l'errore alla rampa sarà sempre nullo.
- ...





## Esempio

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+4)}$$



- Controllore proporzionale
  1. Sistema in anello chiuso sempre asintoticamente stabile
  2. Errore a regime al gradino: FINITO

$$T(s) = \frac{\frac{10k}{(s+1)(s+4)}}{1 + \frac{10k}{(s+1)(s+4)}} = \frac{10k}{s^2 + 5s + (4 + 10k)}$$

$$K(s)G(s) = \frac{10k}{(s+1)(s+4)}$$

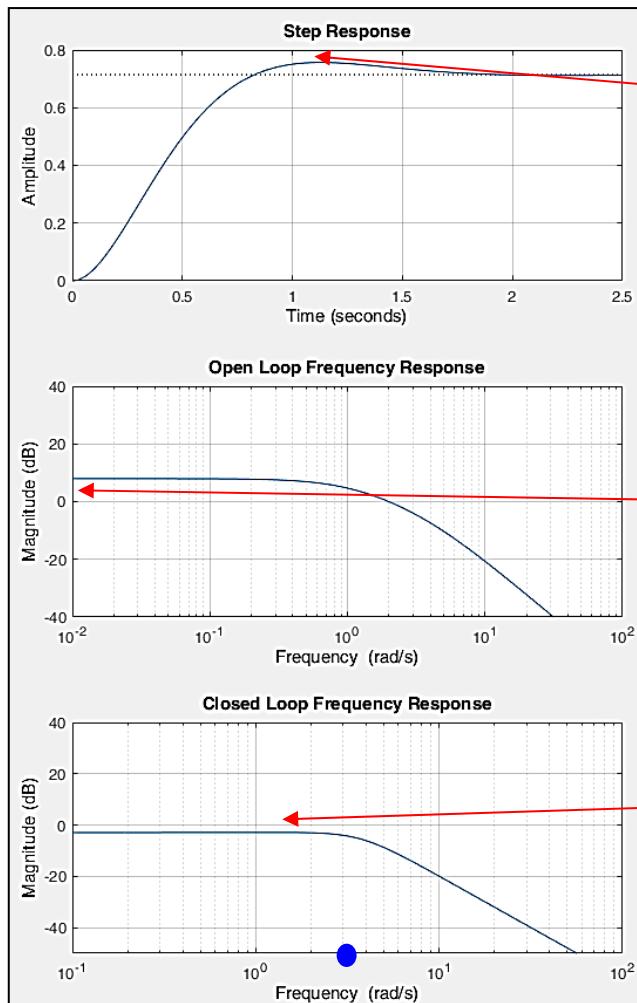
▪ **Tipo 0**



## Esempio

- Riduzione dell'errore a regime

$$k \uparrow \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{1 + K(0)G(0)} \downarrow$$



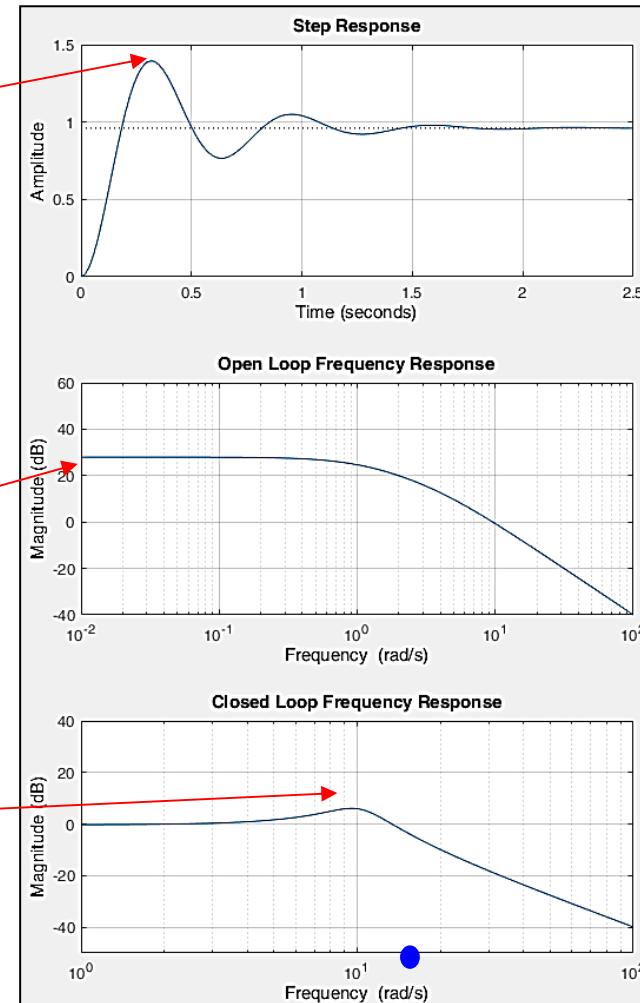
$K = 1$

$M_P$

$K(0)G(0)$

$M_R$

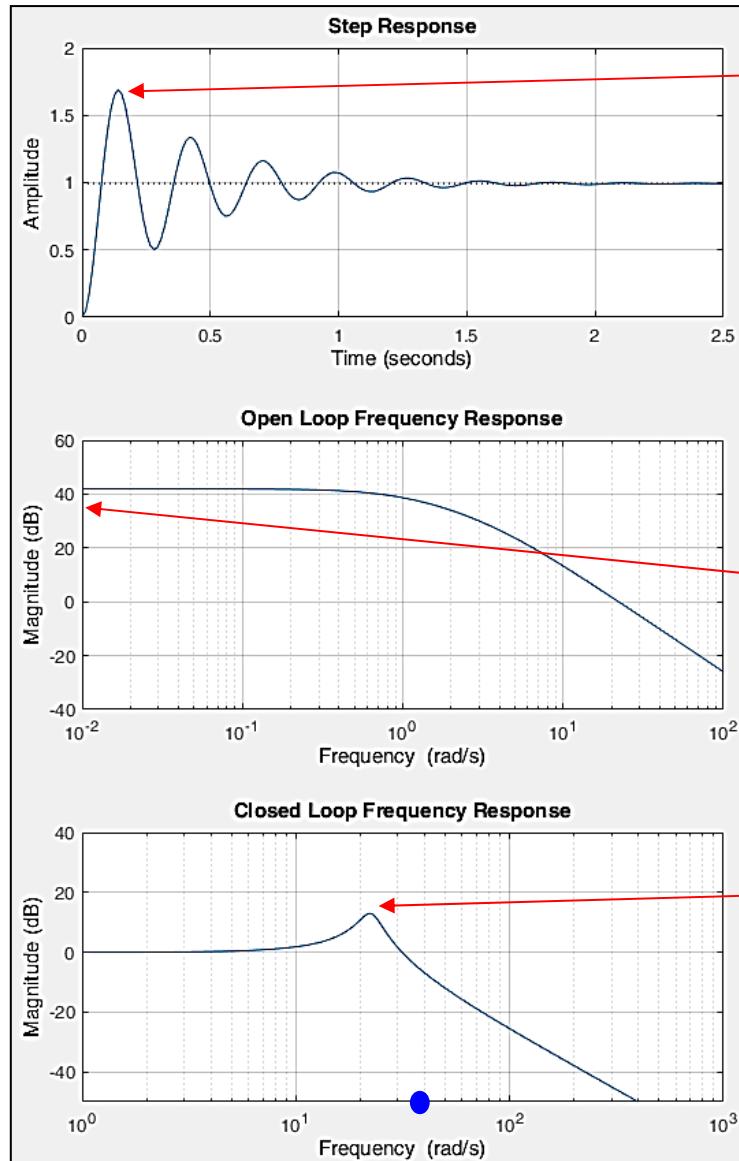
$\omega_{BW}$



$K = 10$



## Esempio



$$K = 50$$

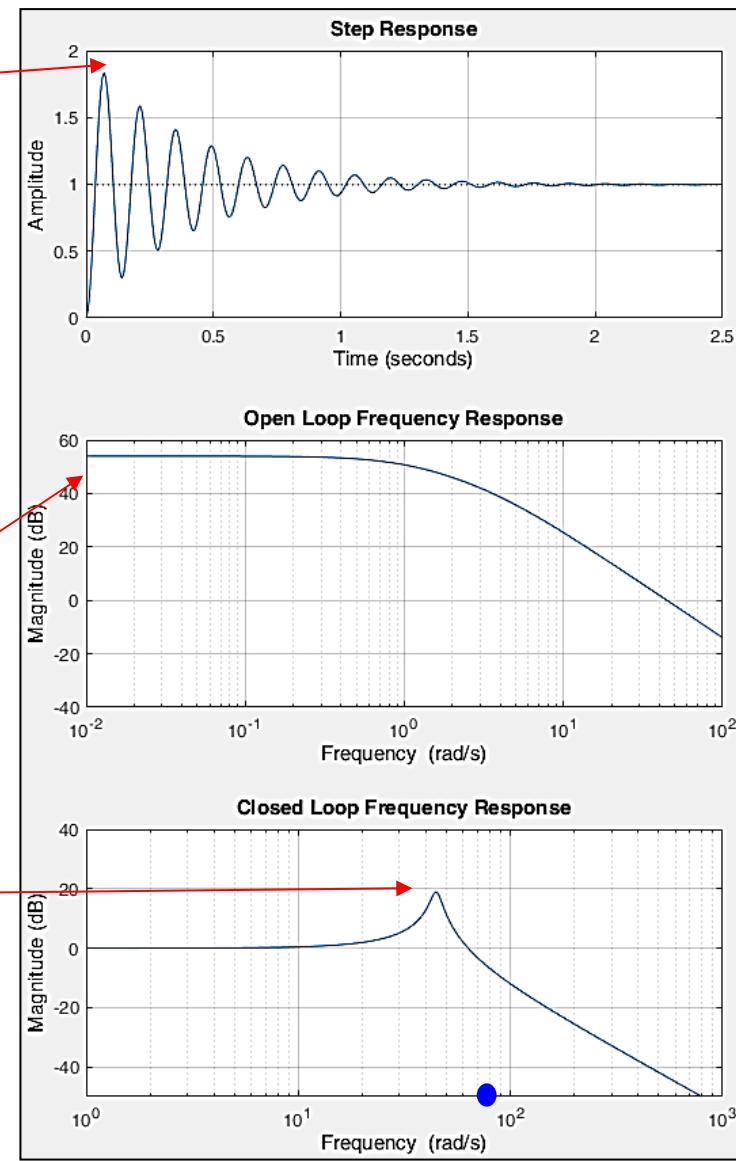
$$M_P$$

$$K(0)G(0)$$

$$M_R$$

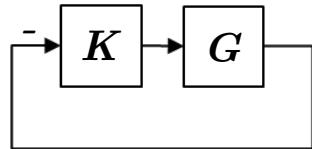
$$\omega_{BW}$$

$$K = 200$$





# Esempio

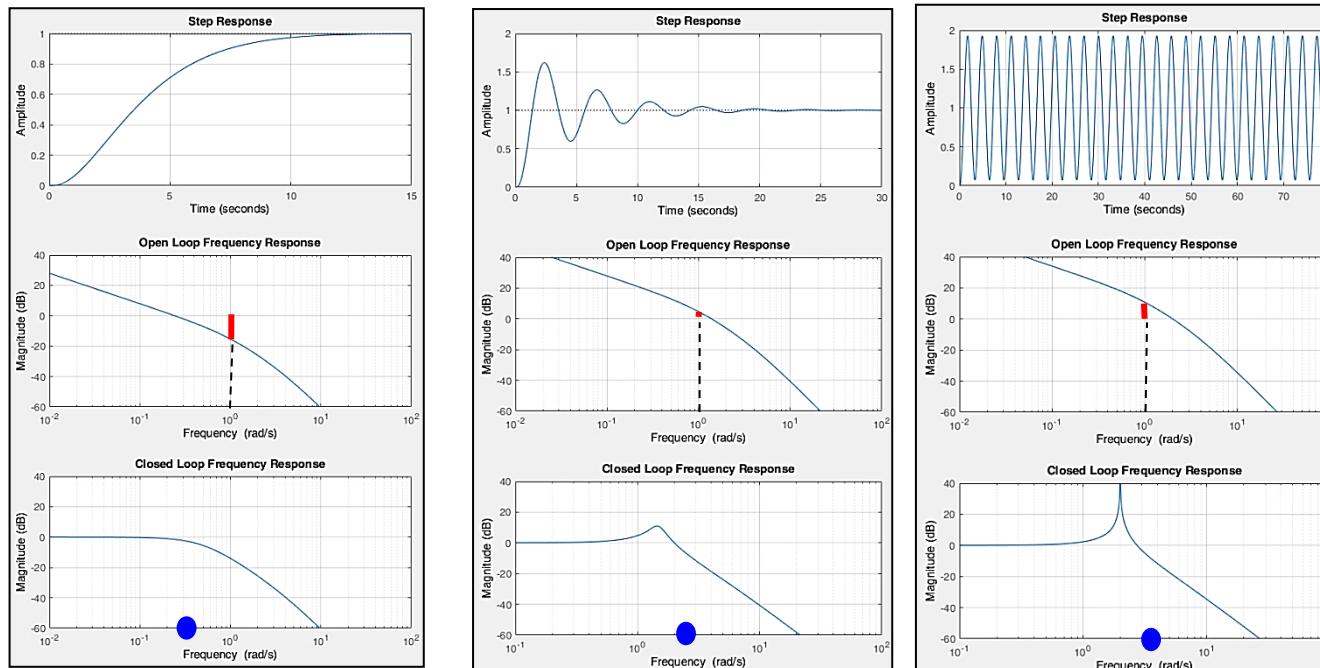


- Controllore integrale
  1. Sistema in anello chiuso sempre asintoticamente stabile ?? =>  $K < 2$
  2. Errore a regime al gradino: NULLO

$$T(s) = \frac{\frac{10k}{s(s+1)(s+4)}}{1 + \frac{10k}{s(s+1)(s+4)}} = \frac{10k}{s^3 + 5s^2 + 4s + 10k}$$

$$K(s)G(s) = \frac{10k}{s(s+1)(s+4)}$$

■ **Tipo 1**



$K = 0.1, 1.0, 2$

$\epsilon_{GRAD} = 0$

$$K_V \uparrow \Rightarrow \epsilon_{RAMP} = \frac{1}{K_V} \downarrow$$

$\omega_{BW} \uparrow$

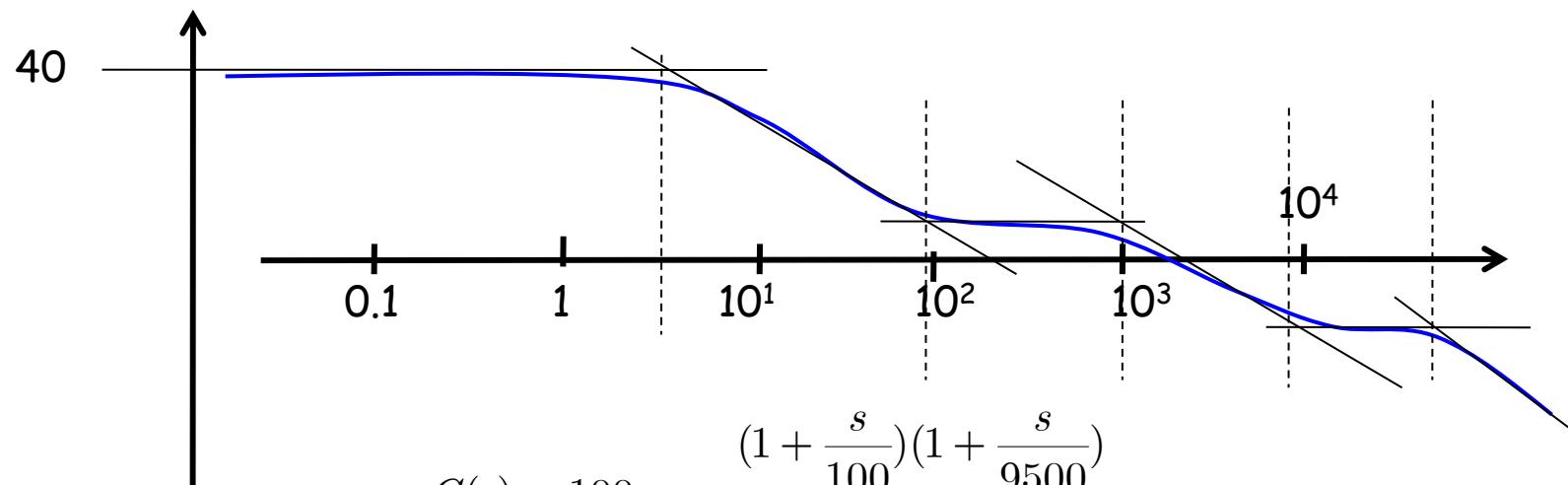


## $G(s)$ da Dati Sperimentali

- La risposta in Frequenza è uno degli strumenti per ricavare la FdT di un Sistema a partire da dati sperimentali

- Uso della Trasformata di Fourier (FFT)
- Ingresso Impulsivo

Nel Caso di Sistemi Stabili a Sfasamento Minimo:



$$G(s) \simeq 100 \frac{(1 + \frac{s}{100})(1 + \frac{s}{9500})}{(1 + \frac{s}{2})(1 + \frac{s}{1000})(1 + \frac{s}{25000})^2}$$



# LUOGO DELLE RADICI



- Introduzione
- Regole di Tracciamento (LD)
- Applicazioni ed Esempi
- Luogo Inverso



# Riferimenti

- Capitolo 13 Testo di Bolzern
- Capitolo 11 Lewis (download)
- ....

Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

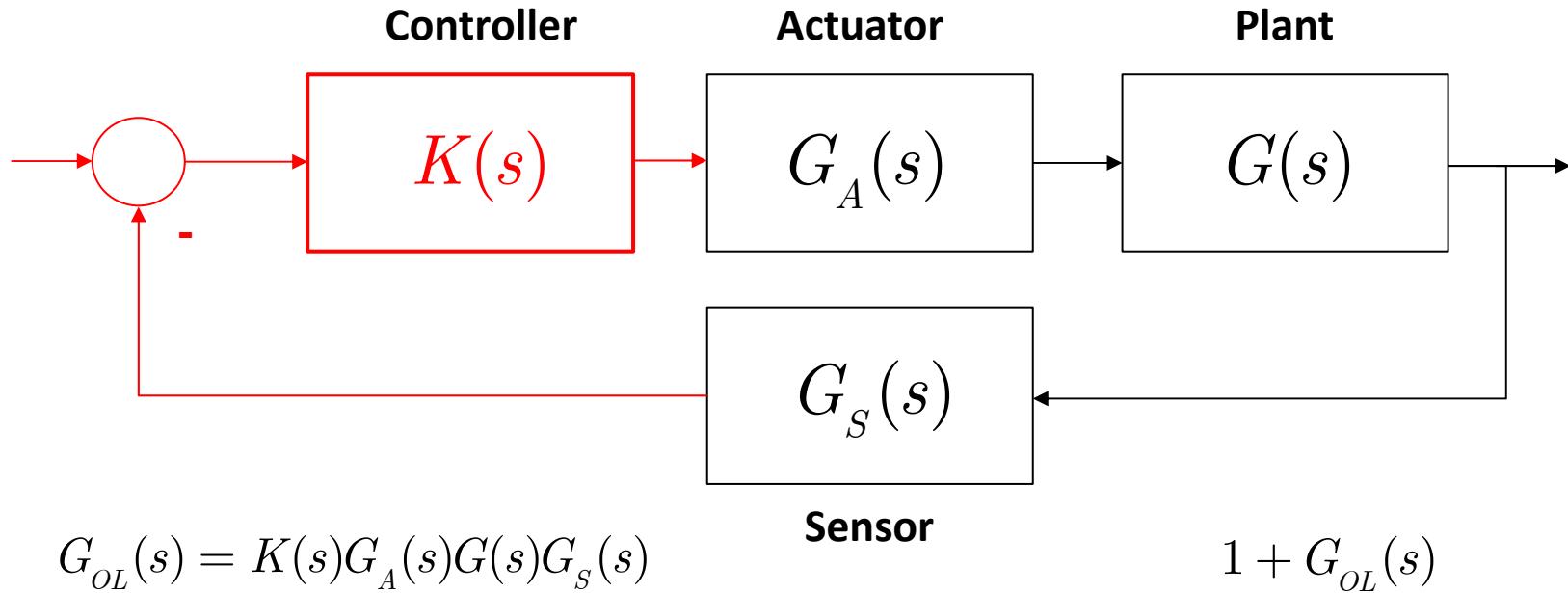


Analisi 2

Sintesi Prelim.

Con. Avanzati

Con. Standard



## □ Prestazioni nel dominio del tempo

- Locazione dei poli in ciclo chiuso all'interno del OLHP

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s)$$

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{1}{1 + K_p} \\ \varepsilon = \frac{1}{K_v} \\ \dots \end{cases}$$

- Poli dominanti  $(\varepsilon, \tau, \xi, \omega_n)$

$$\tau = \frac{1}{polo} \quad y(\tau) = 63\% y_\infty$$

$$M_p = 100 \cdot \frac{y_{\max} - y_\infty}{y_\infty} = 100 \cdot e^{-\left(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}$$

$$T_s = \frac{\pi - \cos^{-1} \xi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi - \alpha}{\omega_d}$$

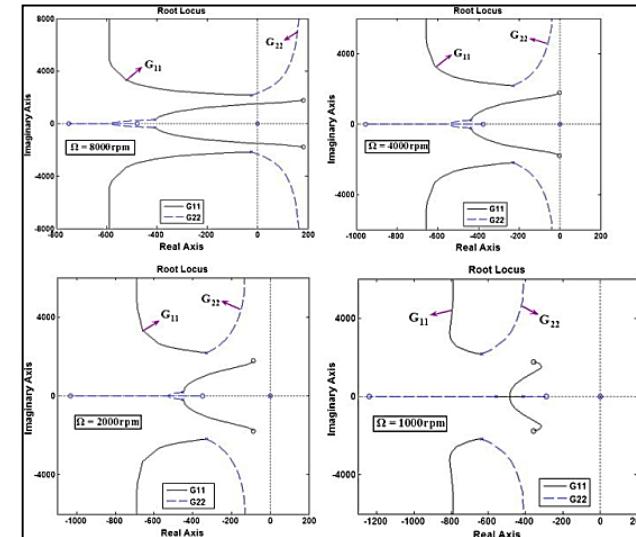
$$T_{a2} \cong \frac{4}{\xi \omega_n} \rightarrow \varepsilon = 2\%$$



# Introduzione

- Una delle tecniche disponibili per l'analisi e la sintesi dei sistemi di controllo in retroazione è quella del metodo del Luogo delle Radici; tale tecnica fornisce il luogo descritto nel piano complesso dai poli in ciclo chiuso in funzione del guadagno di anello.
- **Il Luogo delle Radici studia il comportamento dinamico del sistema in ciclo chiuso partendo dalle caratteristiche della FdT in anello aperto**
- Il Luogo delle Radici considera sistemi senza ritardo di anello (a meno di approssimazione di Padè).
- Il Metodo del Luogo delle Radici è tradizionalmente complementare alle altre tecniche (p.es. la risposta in Frequenza) e si applica nella sua versione più comune a sistemi SISO in quanto può essere visualizzato graficamente in forma qualitativa.

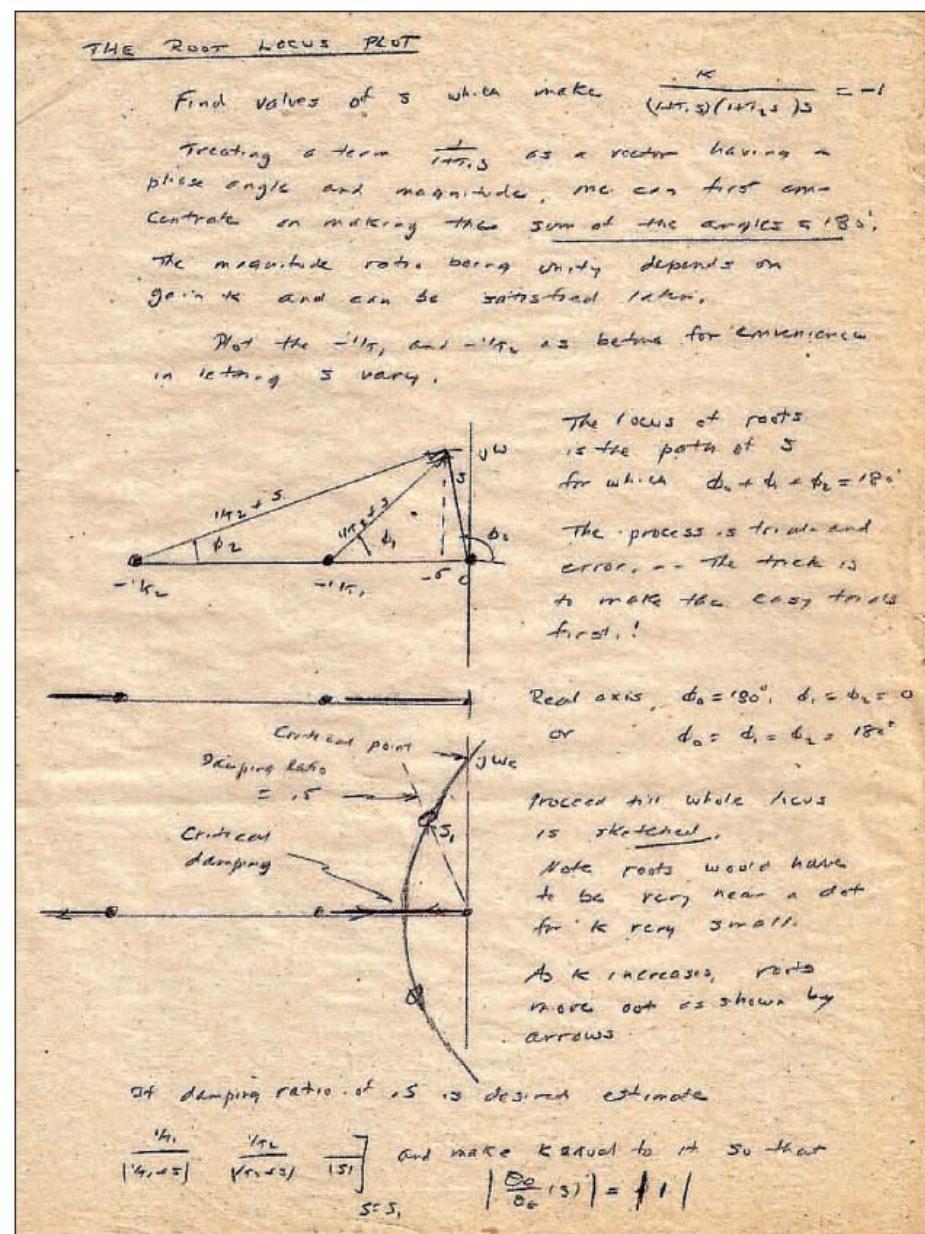
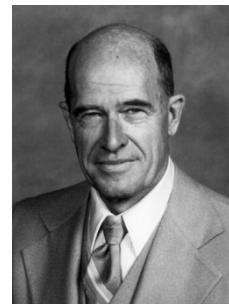
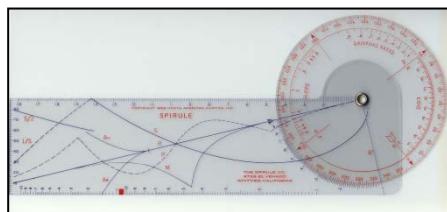
- Il Metodo del Luogo delle Radici è usato sia come Analisi dei sistemi di controllo, che di Sintesi del controllore in anello chiuso





# Introduzione

- In 1949 Evans showed how the characteristic equation could be solved by plotting **the locus of points "s" that have a simple relationship with other known points, that is, angles that sum to 180°**.
- Evans developed a simple, sequential process, which engineers used to generate sketches in seconds, and a specialized protractor, which supported high accuracy in minutes.
- First used by North American Aviation designers and taught at UCLA, the application and instruction of Evans' new method spread rapidly to other companies and universities.





# Richiami

- Parametri della risposta temporale:

$$\varepsilon_{ss} = u(t) - y_{ss}(t) \quad \varepsilon_{ss}^{RAMP} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s G_{OL}(s)} = \frac{1}{k_V} \quad \varepsilon_{ss}^{STEP} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_{OL}(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$M_p = 100 \cdot e^{-\left(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)},$$

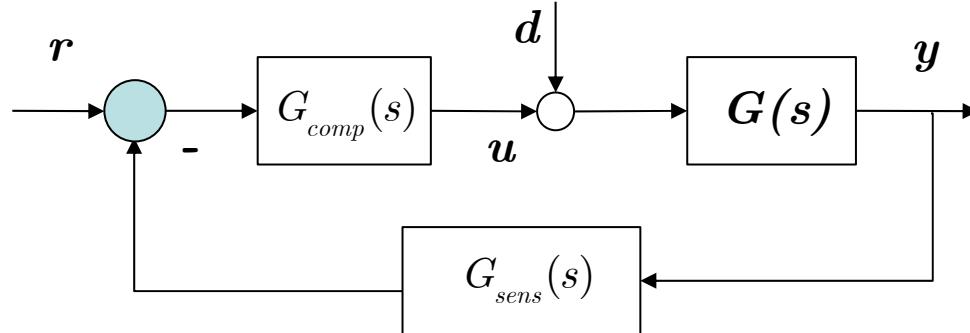
$$T_s = \frac{\pi - \alpha}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi - \alpha}{\omega_d},$$

$$T_{as} = -\frac{1}{\xi\omega_n} \cdot \ln \varepsilon = \frac{3}{\xi\omega_n}$$

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} < \omega_n$$

$$M_R = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \propto M_p = e^{-\left(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}$$

$$|G(j\omega_{BW})| = 0.707 \cdot |G(j0)|$$

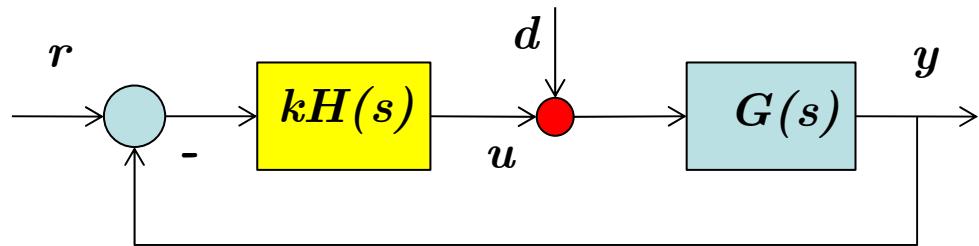


- Il controllore (compensatore) è responsabile della compensazione dei requisiti del processo in termini di risposta temporale, quindi di locazione dei poli in anello chiuso



## Definizioni

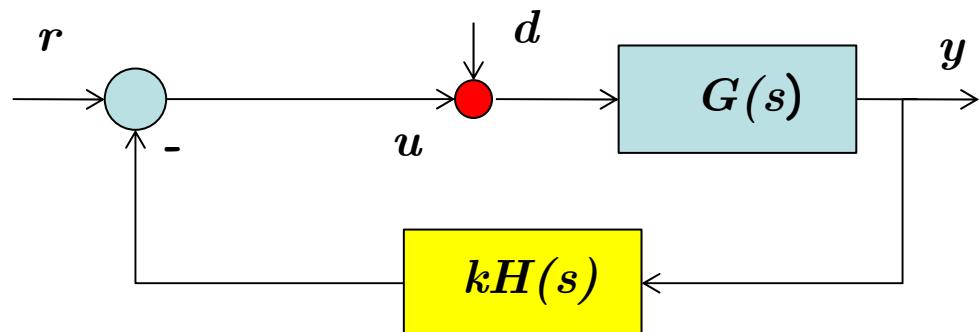
- Consideriamo un sistema lineare in retroazione:



$$K(s) = kH(s)$$

$$L(s) = K(s)G(s) = kH(s)G(s)$$

$$y(s) = \frac{kH(s)G(s)}{1 + kH(s)G(s)} r(s) + \frac{G(s)}{1 + kH(s)G(s)} d(s)$$



$$y(s) = \frac{G(s)}{1 + kH(s)G(s)} [d(s) + r(s)]$$

- Equazione Caratteristica in Ciclo Chiuso:  $D(s) = 1 + kH(s)G(s) = 1 + L(s) = 0$
- Funzione di Trasferimento di Anello:  $L(s) = G_{OL}(s) = K(s)G(s) = kH(s)G(s)$



## Definizioni

□ **Richiami:** un luogo geometrico (in 2D per semplicità), o più semplicemente un luogo, è l'insieme di tutti e soli i punti del piano che godono di una determinata proprietà.

- **Esempio:** L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per cui è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi

□ **Definizione di Luogo delle Radici:** Per un sistema in retroazione si definisce **luogo delle radici**, il luogo descritto nel piano complesso dalle radici dell'equazione caratteristica  $D(s) = 0$ , al variare del parametro reale  $k$  da  $-\infty$  a  $+\infty$

$$D(s) = 1 + kH(s)G(s) = 1 + G_{OL}(s) = 0$$

$$\boxed{\forall k \in \Re^1 \Rightarrow \left\{ s \in \mathbb{C}^1 : [1 + G_{OL}(s) = 0], G_{OL}(s) = kG(s)H(s) \right\}}$$

- **Ovvero:** Il Luogo delle Radici descrive il movimento dei poli in ciclo chiuso al variare del guadagno di anello  $k$ .
  - Si definisce Luogo Diretto (LD) quando il guadagno varia da  $0 < k < \infty$
  - Si definisce Luogo Inverso (LI) quando il guadagno varia da  $-\infty < k < 0$

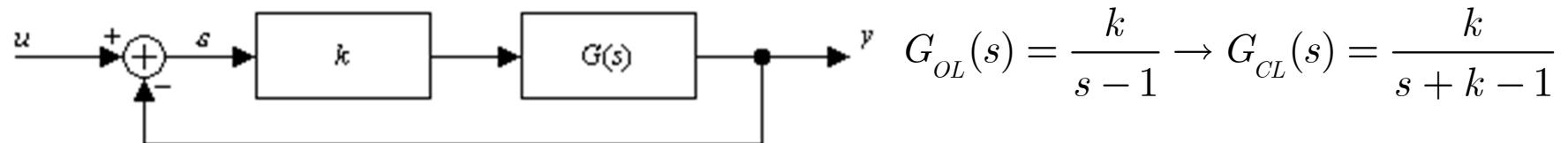
Il guadagno  $k$  non è necessariamente il guadagno statico del sistema, come quello usato tradizionalemente la risposta in frequenza

$$G_{OL}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k \cdot \frac{\prod_j^m (s + z_j)}{\prod_i^n (s + p_i)}, m \leq n; k_{STAT} = k \frac{\prod_j^m z_j}{\prod_i^n p_i}$$

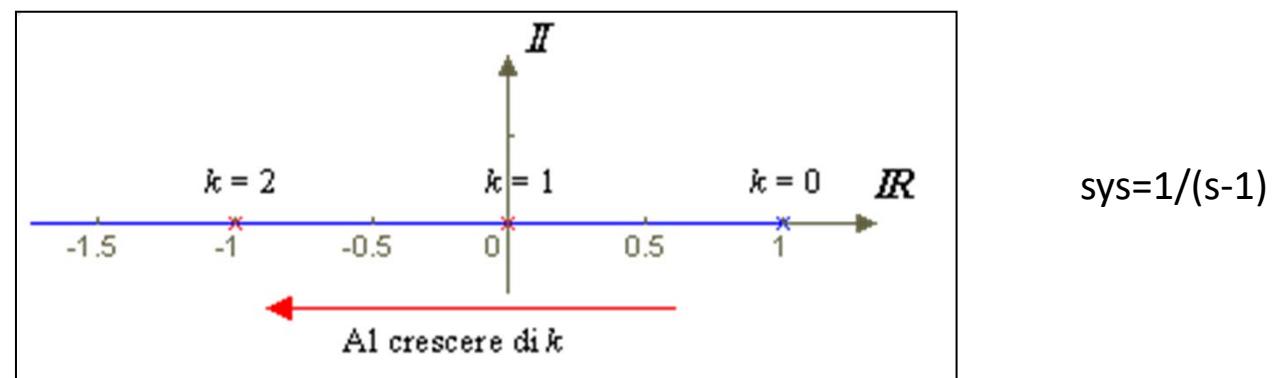


## Esempi

□ **Esempio:**  $G(s) = \frac{1}{s-1}$        $0 < k < \infty$



- Il luogo delle radici (diretto) si calcola risolvendo per  $s$ , al variare di  $k$  da 0 a  $+\infty$ ,  $s + k - 1 = 0$
- Il polo in ciclo chiuso vale  $s = (1 - k)$  e il sistema è asintoticamente stabile per tutti i  $k > 1$ ;





## Esempi

□ **Esempio:**  $G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$   $G_{OL}(s) = \frac{k}{(s-1)(s+2)} \rightarrow G_{CL}(s) = \frac{k}{s^2 + s + k - 2}$

- Vogliamo trovare il luogo dei punti  $s$  del piano complesso (con  $0 < k < \infty$ ) per cui:

$$s^2 + s + k - 2 = 0$$

- Il luogo delle radici traccia sul piano complesso i poli in ciclo chiuso al variare del guadagno  $k$ , in questo caso:

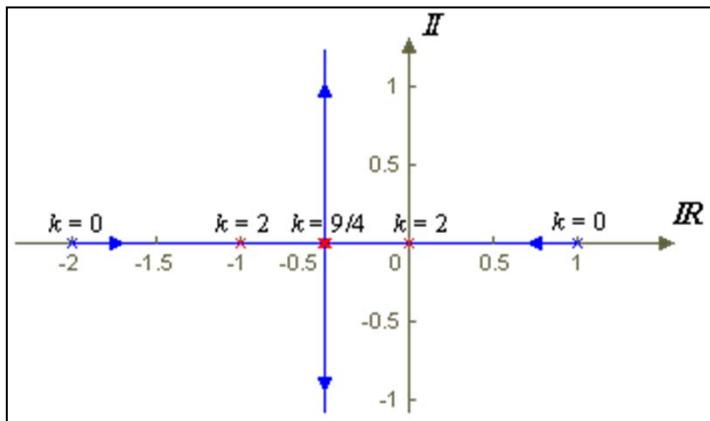
$$s_1, s_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4(k-2)}, \forall k \in [0, \infty)$$

1.  $k = 0$  (non reazionato)  $\rightarrow s_1 = 1, s_2 = -2$
2.  $k = 2$   $s_1 = -1, s_2 = 0$
3.  $k = 9/4$   $s_1 = s_2 = -1/2$
4.  $k > 9/4$  i poli di anello chiuso diventano complessi e coniugati con parte reale = -0.5 e parte immaginaria che  $\rightarrow \infty$

$$s_1, s_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} j \sqrt{4k - 9}$$



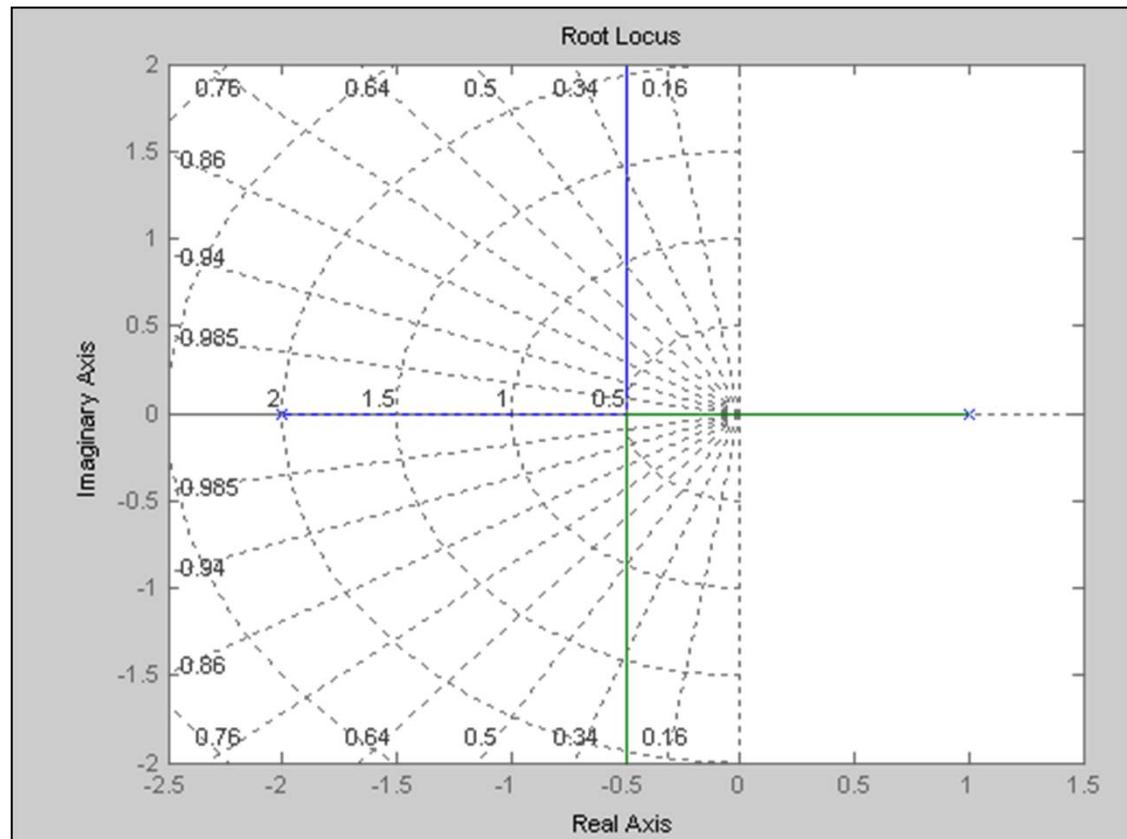
## Esempi



Si deduce così che per  $k > 2$  il sistema in ciclo chiuso è asintoticamente Stabile

```
>> sys=tf(1,[1 1 -2])  
  
Transfer function:  
1  
-----  
s^2 + s - 2
```

```
>> rlocus(sys)
```



```
sys=1/(s^2+s-2)
```

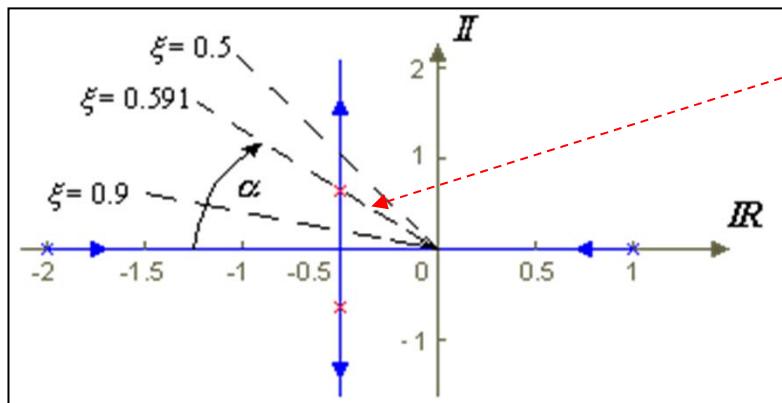


## Esempi

### □ Commenti:

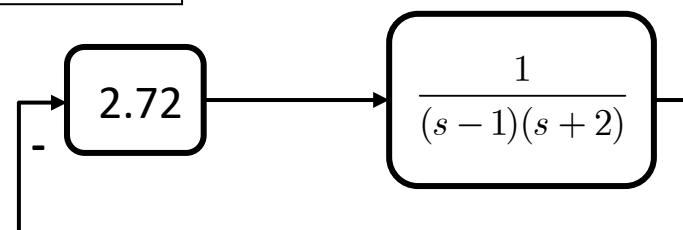
- Se si desidera una risposta in ciclo chiuso senza oscillazioni , deve essere:  $0 < k < 9/4$
- Se si desidera una risposta transitoria con una sovraelongazione del 10% si ha:

$$M_p = 0.1 = e^{(-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2})} \Rightarrow \xi = 0.591 \quad \xi \omega_n = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_n = 0.846 \text{ rad / sec}$$



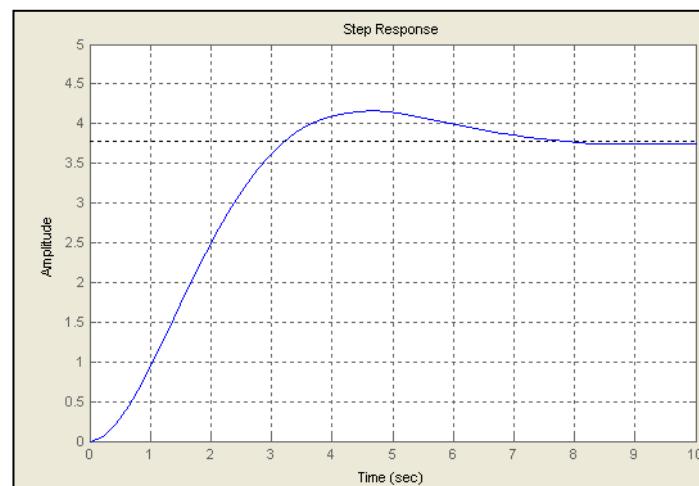
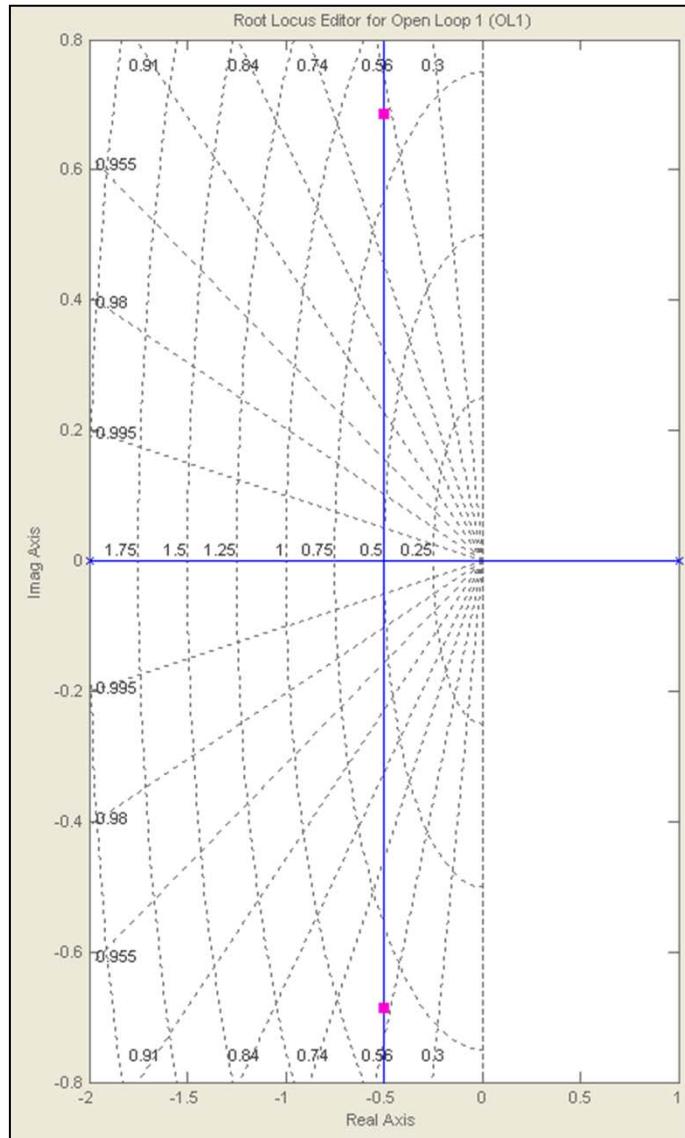
Essendo  $\cos\alpha = \xi$ , si ha:

$$\frac{1}{2}\sqrt{4k - 9} = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = 0.682 \Rightarrow k = 2.72$$





## Esempi



- Esempio con SISOTOOL



# Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

- Il Luogo delle Radici è tracciabile mediante ausilio numerico, basato su un certo numero di regole, che ne permette anche il tracciamento grafico qualitativo

## □ Luogo Diretto ( $k > 0$ )

$$D(k, s) = 1 + kG(s)H(s) = 0 \quad 0 < k < \infty$$

$$G(s)H(s) = -\frac{1}{k}$$

$$\left| \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \right| = \left| -\frac{1}{k} \right|$$

$$k \frac{\prod_{j=1}^m |s + z_j|}{\prod_{i=1}^n |s + p_i|} = 1 \quad \sum_{j=1}^m \angle(s + z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s + p_i) = \pm(2\nu + 1)\pi$$

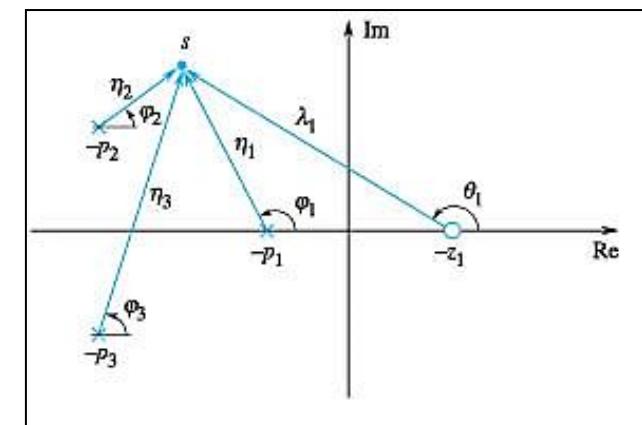
$$kG(s)H(s) = k \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

$$\sum_{j=1}^m \angle(s + z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s + p_i) = \sum_{j=1}^m \theta_j - \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

$$\angle -\frac{1}{k} = \pi - \angle k = \pm(2\nu + 1)\pi \quad (\nu \text{ intero})$$

Un punto  $s$  appartiene al luogo se e solo se la somma algebrica degli angoli sottintesi dai poli e dagli zeri è un multiplo dispari di  $\pi$  ed il rapporto dei moduli è pari a  $1/k$

$$1 + \frac{kP(s)}{Q(s)} = \frac{kP(s)}{kP(s) + Q(s)} \Rightarrow kP(s) + Q(s) = 0$$





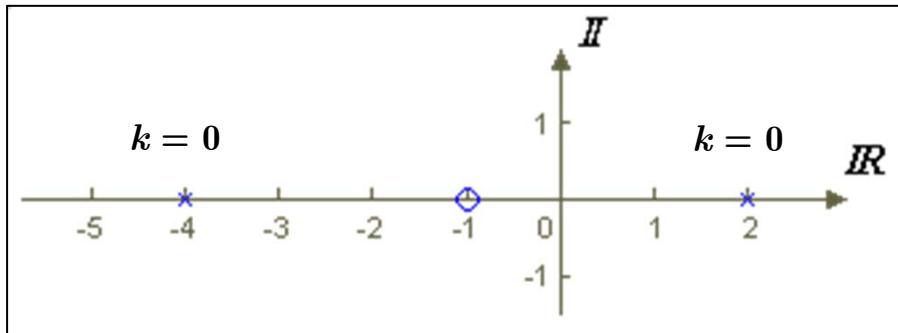
## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

□ **Regola No. 1:** Se  $k = 0$ , i poli in ciclo aperto e ciclo chiuso coincidono. Quindi il luogo parte dai poli della funzione di trasferimento in ciclo aperto.

$$|G(s)H(s)| = \left| \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \right| = \left| -\frac{1}{k} \right| = \left| \frac{1}{k} \right| \quad k \rightarrow 0 \Rightarrow |G(s)H(s)| = \left| \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \right| \Rightarrow \infty \Rightarrow s \rightarrow -p_i$$

$$kG(s)H(s) = k \frac{s+1}{(s-2)(s+4)}$$
$$1 + kG(s)H(s) = s^2 + (2+k)s + (k-8) = 0$$

$$\text{sys} = (s+1)/((s-2)*(s+4))$$



- Il numero dei poli in ciclo chiuso è sempre uguale al numero dei poli in ciclo aperto quando il guadagno varia da 0 a  $+\infty$

$$\frac{N_{ol}(s)}{D_{ol}(s)} \Rightarrow \frac{N_{ol}(s)}{N_{ol}(s) + D_{ol}(s)}$$



## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

□ **Regola No. 2:** Per  $k \rightarrow \infty$ , i poli in ciclo chiuso tendono a:

- Gli zeri ad anello aperto
- infinito

$$|G(s)H(s)| = \left| -\frac{1}{k} \right|$$

$$k \rightarrow \infty \Rightarrow |G(s)H(s)| = \left| \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \right| \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} s \rightarrow -z_j \\ \infty \end{cases}$$

```
>> sys=tf([1 2 6],[4 12 11 10 13 6])

Transfer function:
s^2 + 2 s + 6
-----
4 s^5 + 12 s^4 + 11 s^3 + 10 s^2 + 13 s + 6

>> roots([1 2 6])

ans =

-1.0000 + 2.2361i
-1.0000 - 2.2361i

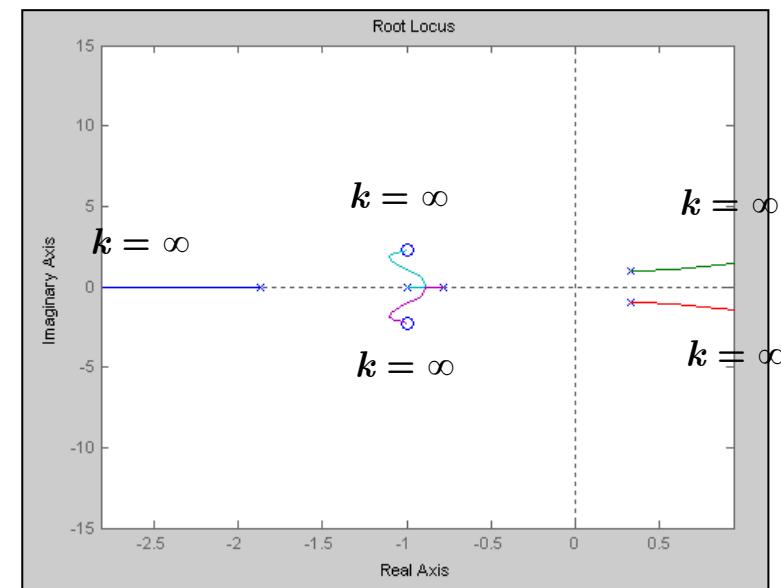
>> roots([4 12 11 10 13 6])

ans =

-1.8700
0.3276 + 0.9561i
0.3276 - 0.9561i
-1.0000
-0.7853

>> rlocus(sys)
>>
```

- Data una FdT in Anello Aperto con  $n$  poli e  $m$  zeri (con  $n \geq m$ ), se  $k \rightarrow \infty$ ,  $m$  poli a ciclo chiuso tendono agli  $m$  zeri di anello aperto e i restanti  $n-m$  poli a ciclo chiuso  $\rightarrow \infty$



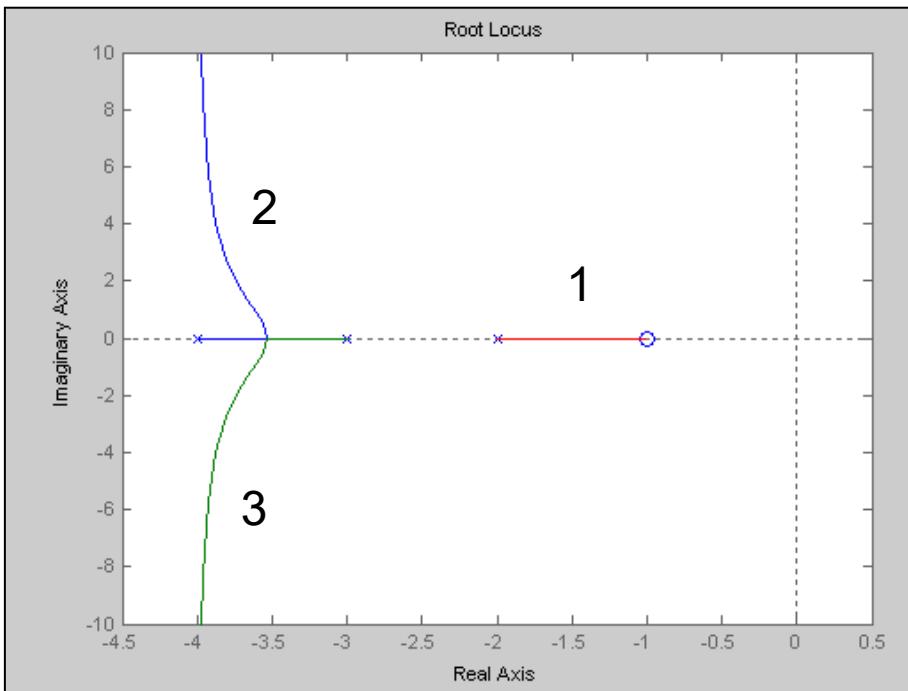
$$\text{sys}=(s^2+2*s+6)/(s^5+12*s^4+11*s^3+10*s^2+13*s+6)$$



## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

- **Regola No. 3:** Il luogo delle radici ha un numero di rami pari al numero  $n$  dei poli in anello aperto (ogni polo in anello chiuso che si muove nel piano complesso definisce un ramo del luogo).

$$kG(s)H(s) = k \frac{s + 1}{(s + 2)(s + 3)(s + 4)}$$



- Il luogo delle radici presenta tre rami; per  $k = 0$  il luogo delle radici parte dai tre punti  $-2, -3, -4$  ([Regola 1](#)); mentre per  $k \rightarrow \infty$  due rami vanno all'infinito e il terzo va a  $-1$ , dove si trova lo zero di anello aperto ([Regola 2](#)).

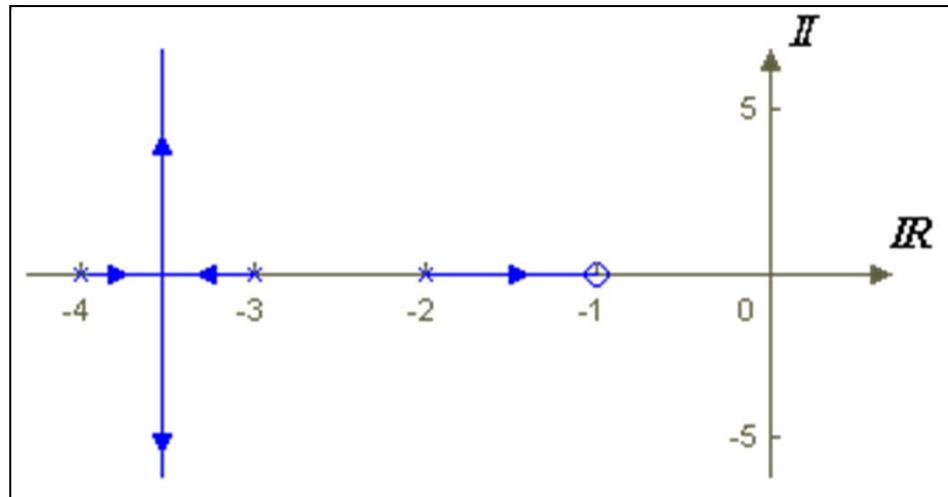
```
sys1=tf([1,1],[1,9,26,24])
```



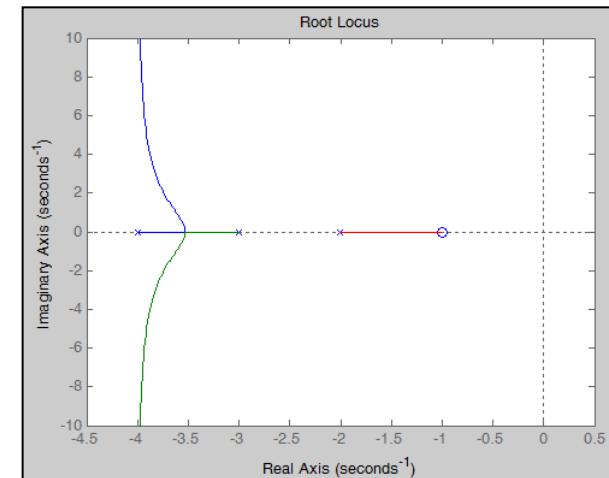
## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

- **Regola No. 4:** Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale, in quanto descrive l'andamento di un set di numeri autoconiugati

$$kG(s)H(s) = k \frac{s + 1}{(s + 2)(s + 3)(s + 4)}$$



- **Nota:** Tracciamento approssimato

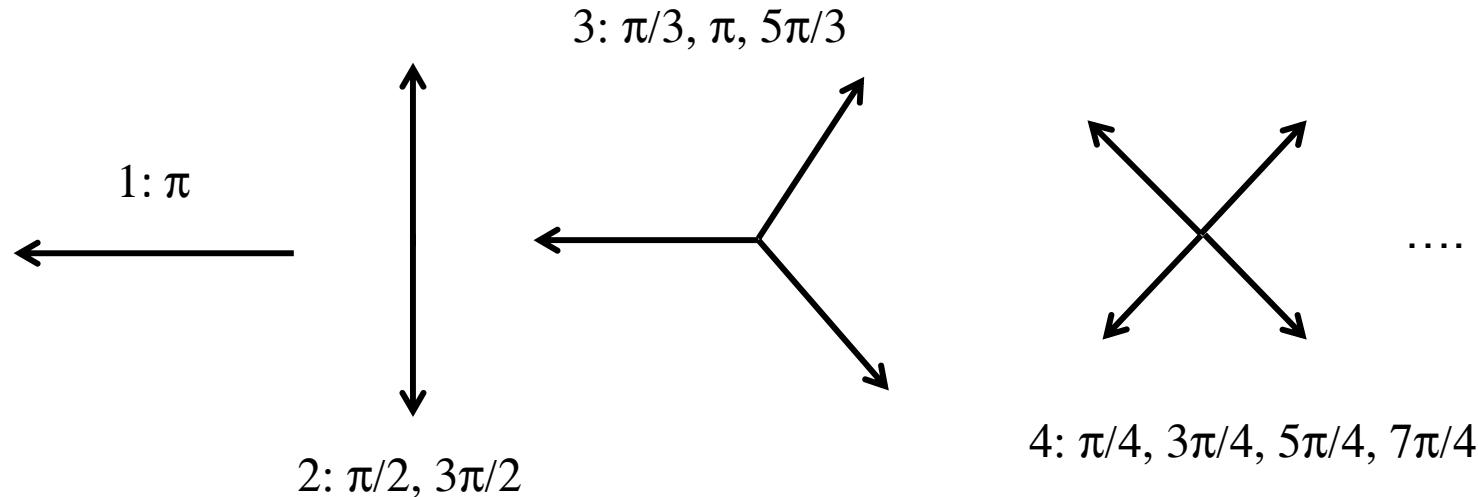




## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

□ **Regola No. 5:** I poli in ciclo chiuso ( $n - m$ ) che tendono all'infinito seguono direzioni asintotiche quando  $k \rightarrow \infty$ . Gli asintoti hanno l'origine in comune  $x_a$  e formano con l'asse reale un angolo pari a  $\psi_{ar}$ . La somma dei poli (se in eccesso di 2 o superiore) rimane costante all'aumentare di  $k$ . Il baricentro del Luogo è dato da  $x_b$ .

$$x_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} \quad \psi_a = \frac{(2r + 1)\pi}{n - m}, r = 0, 1, 2, \dots, n - m - 1$$



$$x_b = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i; (n - m) \geq 2$$

- NOTA: se vi sono 2 o più asintoti, la somma dei poli è costante al variare di K !!!!

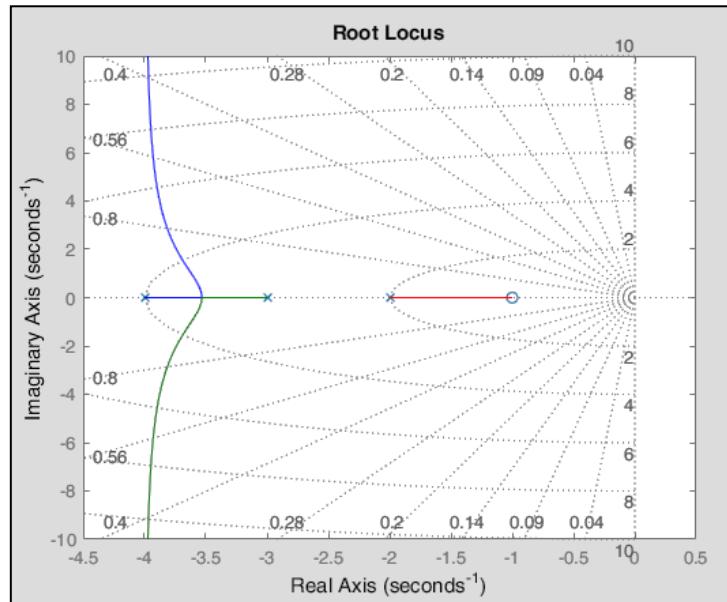


## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

$$kG(s)H(s) = k \frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

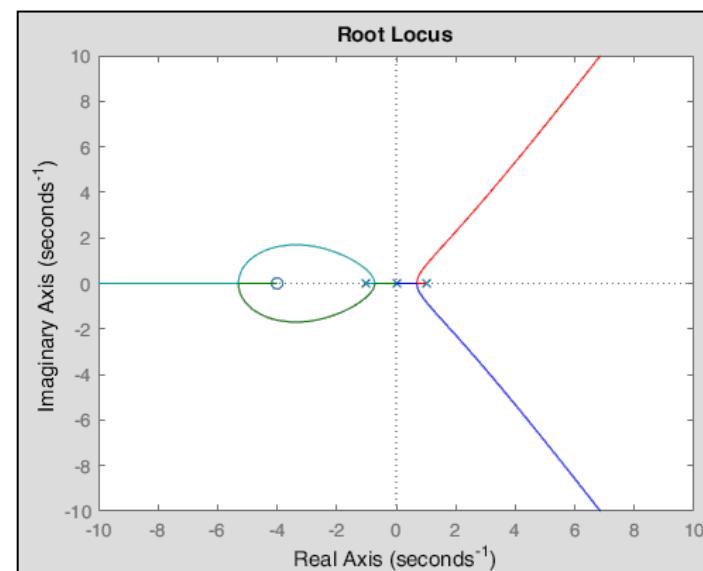
$$x_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{-2 - 3 - 4 + 1}{3 - 1} = -4$$

$$\psi_{a0} = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{a1} = \frac{3}{2}\pi$$



$$kG(s)H(s) = k \frac{s+4}{s^2(s+1)(s-1)}$$

$$x_a = \frac{-0 - 0 - 1 + 1 + 4}{4 - 1} = \frac{4}{3},$$
$$\psi_{a0} = \frac{\pi}{3}, \quad \psi_{a1} = \frac{3}{3}\pi, \quad \psi_{a2} = \frac{5}{3}\pi$$

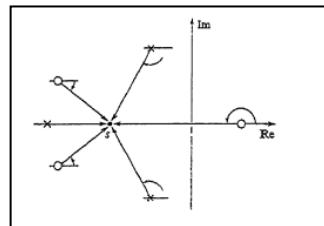


```
sys=tf([1,4],conv([1 1 0 0],[1 -1]))
```



## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

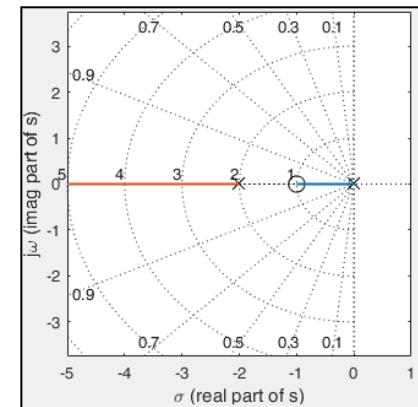
- **Regola No. 6:** Lungo l'asse reale, il luogo lascia alla propria destra un numero dispari di singolarità (poli e zeri in anello aperto).



$$\sum_{j=1}^m \angle(s + z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s + p_i) = \sum_{j=1}^m \theta_j - \sum_{i=1}^n \varphi_i$$
$$\angle - \frac{1}{k} = \pi - \angle k = (2\nu + 1)\pi \quad (\nu \text{ intero})$$

$$kG(s)H(s) = k \frac{s+1}{s(s+2)}$$

$$\text{sys}=(s+1)/(s^2+2*s)$$



- **Regola No. 7:** Il luogo lascia l'asse reale e/o rientra sull'asse reale con pendenza 90°, in punti predefiniti e calcolati mediante la relazione (per due rami):

$$\frac{dk}{ds} = 0$$

- **Nota:** Il calcolo di tale relazione può portare a diverse soluzioni, alcune anche non accettabili poiché i punti così ricavati non appartengono al luogo delle radici diretto (ma a quello inverso, vedi dopo).



## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

$$kG(s)H(s) = k \frac{s+4}{s(s+1)(s-1)}$$

$$1 + kG(s)H(s) = 0 \quad \Rightarrow$$

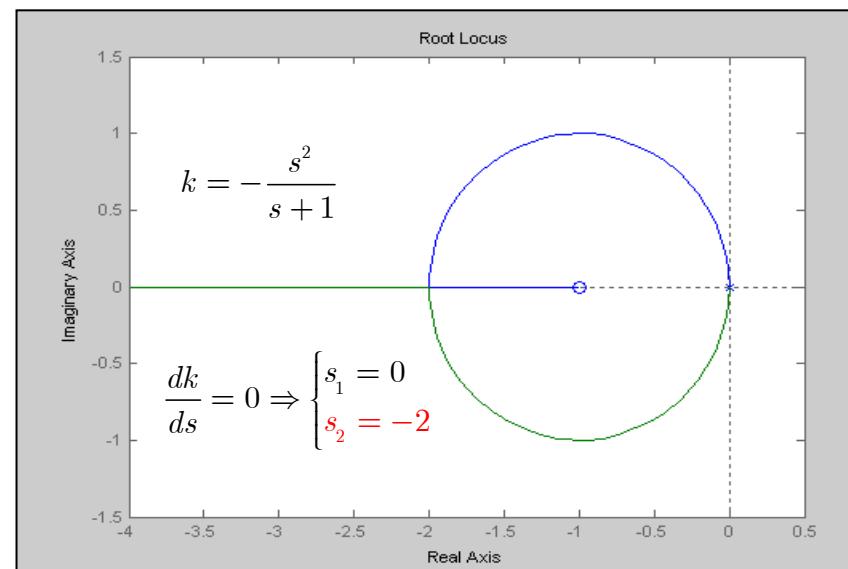
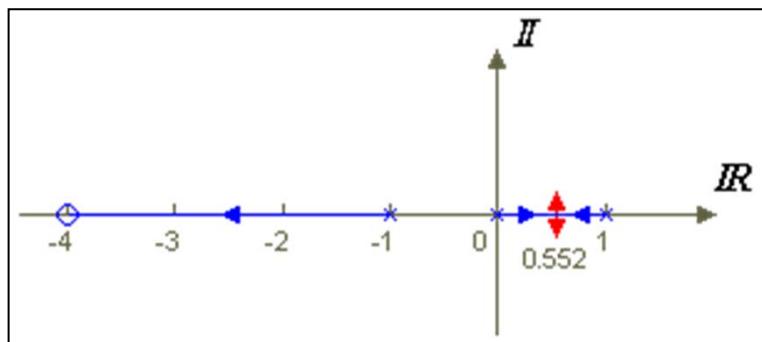
$$k = -\frac{s(s+1)(s-1)}{s+4} \quad \Rightarrow \quad \frac{dk}{ds} = -\frac{(3s^2-1)(s+4) - s^3 + s}{(s+4)^2} = -\frac{2s^3 + 12s^2 - 4}{(s+4)^2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1 = -5.943 \\ s_2 = -0.609 \\ s_3 = 0.552 \end{cases}$$

sys=(s+4)/(s^3-s^2)

$$sys=(s+1)/(s^2) \quad kG(s)H(s) = k \frac{s+1}{s^2}$$

- Per la regola 6 però, solo  $s_3$  appartiene al luogo delle radici e risulta essere un punto di uscita





## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

- **Regola No. 8:** L'angolo di partenza da una coppia di poli complessi e coniugati e l'angolo di arrivo ad una coppia di zeri complessi e coniugati si calcolano mediante le seguenti espressioni:

$$\gamma_{p_k} = (2\nu + 1)\pi - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \angle(p_k - p_i) + \sum_{j=1}^m \angle(p_k - z_j)$$

$$\gamma_{z_k} = (2\nu + 1)\pi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \angle(z_k - z_j) + \sum_{i=1}^n \angle(z_k - p_i)$$

- I poli e gli zeri di anello aperto rappresentano punti di partenza e di arrivo dei rami del luogo delle radici; nel caso in cui tali singolarità siano reali, i rami vi partono o arrivano lungo l'asse reale ma se invece si è in presenza di poli o zeri complessi e coniugati, può essere importante conoscere l'angolo di partenza o arrivo.
- L'appartenenza al luogo delle radici richiede come è noto:

$$\angle H(s)G(s) = \sum_{j=1}^m \angle(s + z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s + p_i) = (2\nu + 1)\pi \quad (\nu \text{ intero})$$



# Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

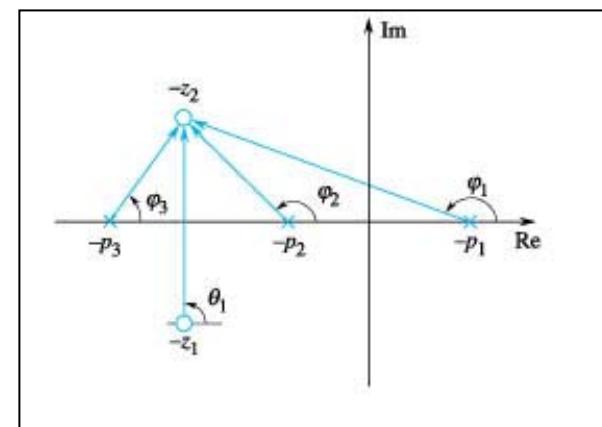
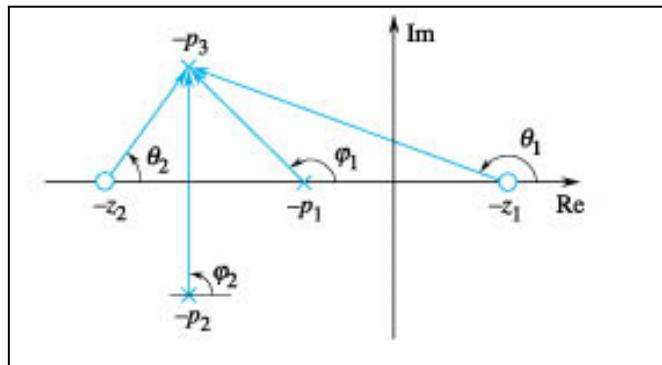
- Consideriamo un punto nell'intorno infinitesimo della singolarità (polo o zero) e appartenente al luogo delle radici, sfruttando la relazione di fase e tenendo presente che, sotto queste ipotesi, la tangente si può "confondere" con l'angolo, si ha:

- per i poli

l'angolo di partenza da un polo complesso è pari a  $(2\nu+1)\pi$  meno gli angoli dei segmenti che lo congiungono agli altri poli più gli angoli dei segmenti che lo congiungono agli zeri.

- per gli zeri

l'angolo di arrivo a uno zero complesso è pari a  $(2\nu+1)\pi$  meno gli angoli dei segmenti che lo congiungono agli altri zeri più gli angoli dei segmenti che lo congiungono ai poli.

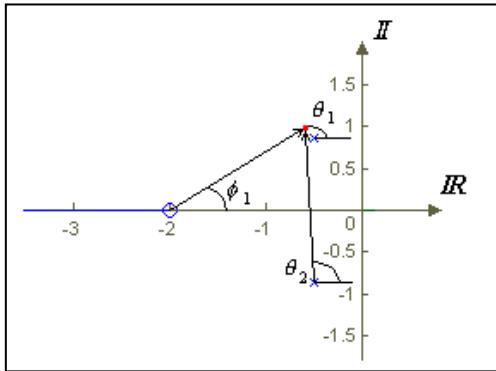




## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

$$kG(s)H(s) = k \frac{s+2}{s^2 + s + 1}$$

$$p_{1,2}^{OL} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2} = -0.5 \pm j0.866, \quad z_1^{OL} = -2$$



$$\theta_2 \approx \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1 \approx \frac{\pi}{6}$$

$$\gamma_{p_1} \simeq \theta_1 = \pi - \theta_2 + \varphi_1$$

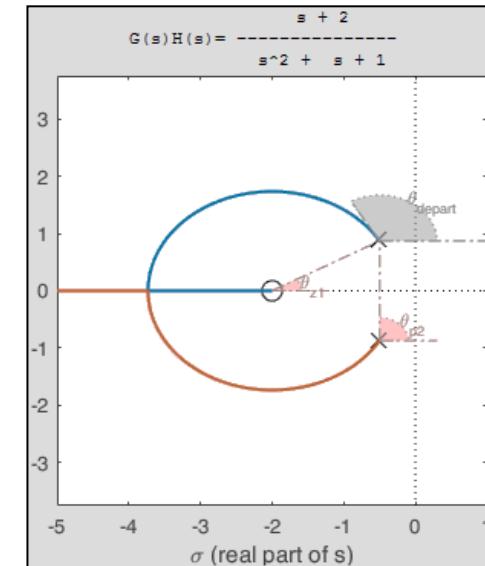
$$= \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi = 120^0$$

$$T(s) = \frac{k(s+2)}{s^2 + (k+1)s + 1 + 2k}$$

$$k = -\frac{s^2 + s + 1}{(s+2)} \Rightarrow \frac{dk}{ds} = -\frac{s^2 + 4s + 1}{(s+2)^2} = 0$$

$$s_1 = -3.73 \quad s_2 = -0.268$$

$$\text{sys}=(s+2)/(s^2+s+1)$$

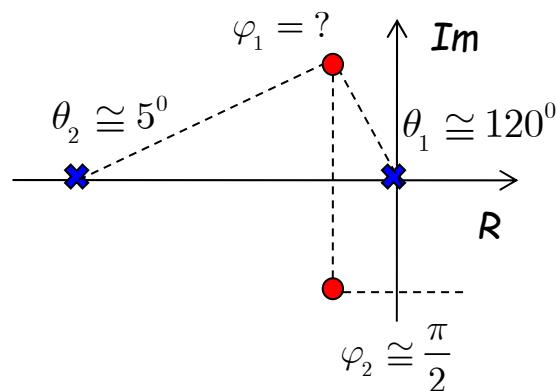




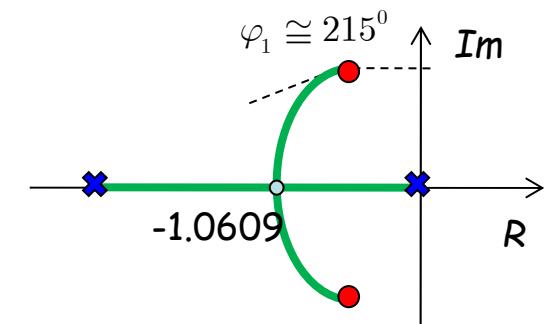
# Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

$$kG(s)H(s) = k \frac{s^2 + s + 1}{s(s + 10)}$$

$$z_{1,2}^{OL} = -0,5 \pm j0.866, \quad p_{1,2}^{OL} = 0, -10$$



$$\begin{aligned}\gamma_{z_1} &\simeq \varphi_1 = \pi + \theta_1 + \theta_2 - \varphi_2 = \\ &= \pi + 120^\circ + 5^\circ - 90^\circ = 215^\circ\end{aligned}$$

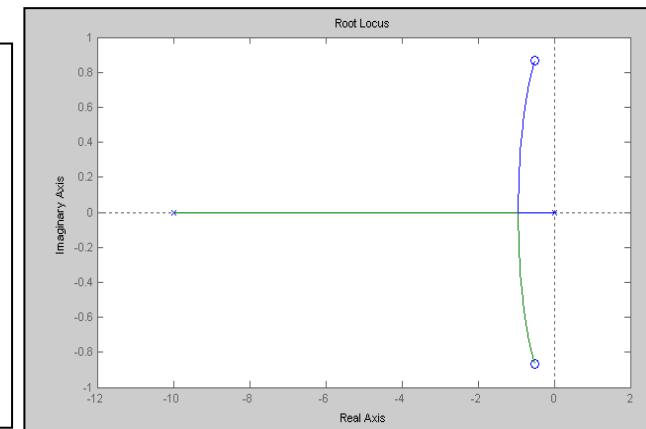


$$k = -\frac{s(s+10)}{s^2 + s + 1} \Rightarrow \frac{dk}{ds} = 0,$$

$$\begin{cases} s_1 = 1.3466 \\ s_2 = -1.0609 \end{cases}$$

Note: Theta\_p2 denotes angle labeled theta with subscript p2.  
 Theta\_z2=angle( (Arriving zero) - (zero at -10) ).  
 $\Theta_z2=\text{angle}((-0.5+0.87i)-(-0.5-0.87i))=\text{angle}(0+1.74i)=90^\circ$   
 Theta\_p1=angle( (Arriving zero) - (pole at 0) ).  
 $\Theta_p1=\text{angle}((-0.5+0.87i)-(0))=\text{angle}(-0.5+0.87i)=119.8865^\circ$   
 $\Theta_p2=\text{angle}((-0.5+0.87i)-(-10))=\text{angle}(9.5+0.87i)=5.2325^\circ$   
 Angle of arrival is equal to:  
 $\Theta_{arrive}=180^\circ-\sum(\text{angle to zeros})+\sum(\text{angle to poles}).$   
 $\Theta_{arrive}=180^\circ-90+125.119.$   
 $\Theta_{arrive}=215^\circ.$   
 This is equivalent to -145°.

$$T(s) = \frac{k(s^2 + s + 1)}{(1+k)s^2 + (10+k)s + k}$$





## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

□ **Regola No. 9:** Il valore del guadagno  $k$  per cui il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario si trova usando il criterio di Routh.

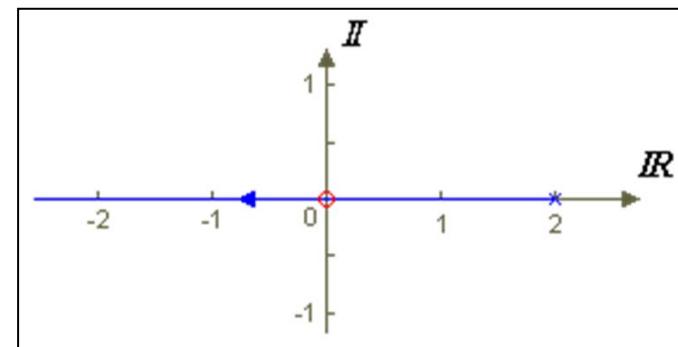
- Questa regola è di estrema importanza perché determina uno o più  $k$  critici, cioè i valori massimo/minimo del guadagno prima che il sistema divenga instabile o necessario per la stabilità del sistema stesso (a ciclo chiuso).

$$kG(s)H(s) = k \frac{1}{s-2}$$

$$1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 \Rightarrow s - 2 + k = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^1 & 1 \\ \hline s^0 & k-2 \end{array}$$

$k_{CR} = 2$ , Sistema in Ciclo Chiuso  
Asintoticamente Stabile per  $k > k_{CR} = 2$



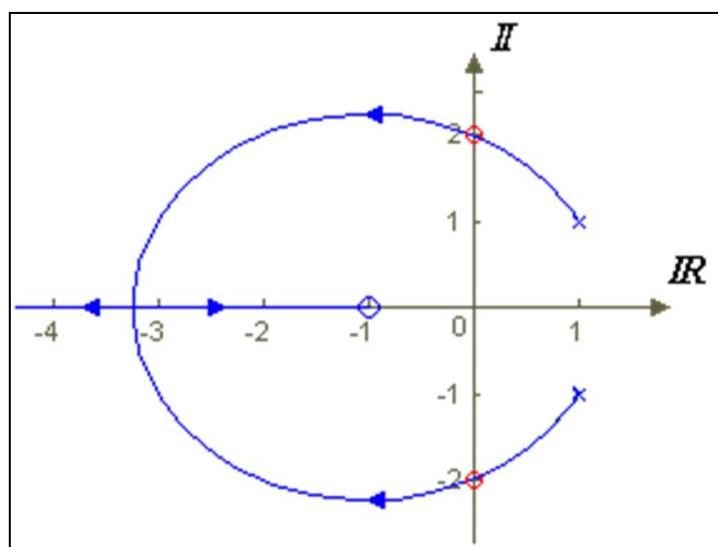


## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

$$kG(s)H(s) = k \frac{s+1}{s^2 - 2s + 2}$$

$$z^{OL} = -1, \quad p_{1,2}^{OL} = 1 \pm j$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow s_1 = 1.236, \textcolor{red}{s_2 = -3.236}$$



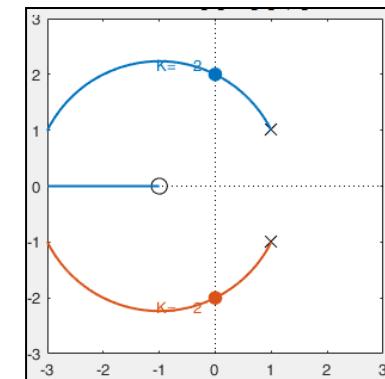
$$1 + kG(s)H(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + (k-2)s + k+2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & k+2 \\ s^1 & k-2 \\ s^0 & k+2 \end{array}$$

$$K_{CR} = 2$$

$$\text{sys}=(s+1)/(s^2-2*s+2)$$

■ **sisotool**





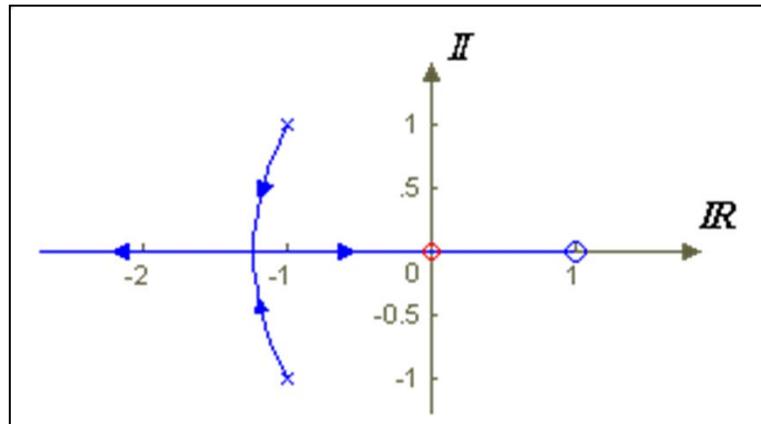
## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

$$kG(s)H(s) = k \frac{s - 1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$z^{OL} = 1, \quad p_{1,2}^{OL} = -1 \pm j$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow s_1 = -1.236, s_2 = 3.236$$

$$1 + k \cdot G(s) \cdot H(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + (k+2)s + 2 - k = 0$$



$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 2-k \\ s^1 & k+2 & \\ s^0 & 2-k & \end{array}$$

- $k_{CR} = 2$  ma, in questo caso, il sistema in ciclo chiuso è asintoticamente stabile per valori del guadagni inferiori a quello critico.

sys=(s-1)/(s^2-2\*s+2)

■ **sisotool**



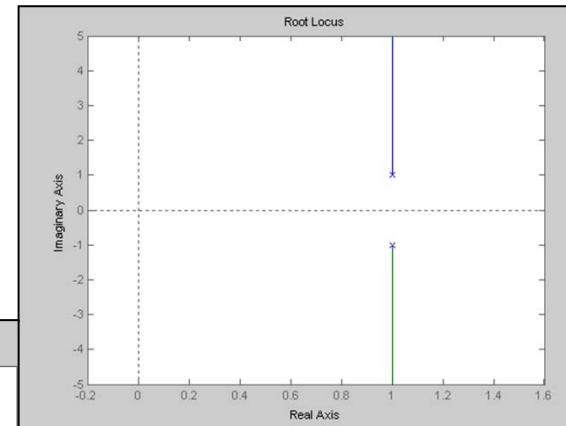
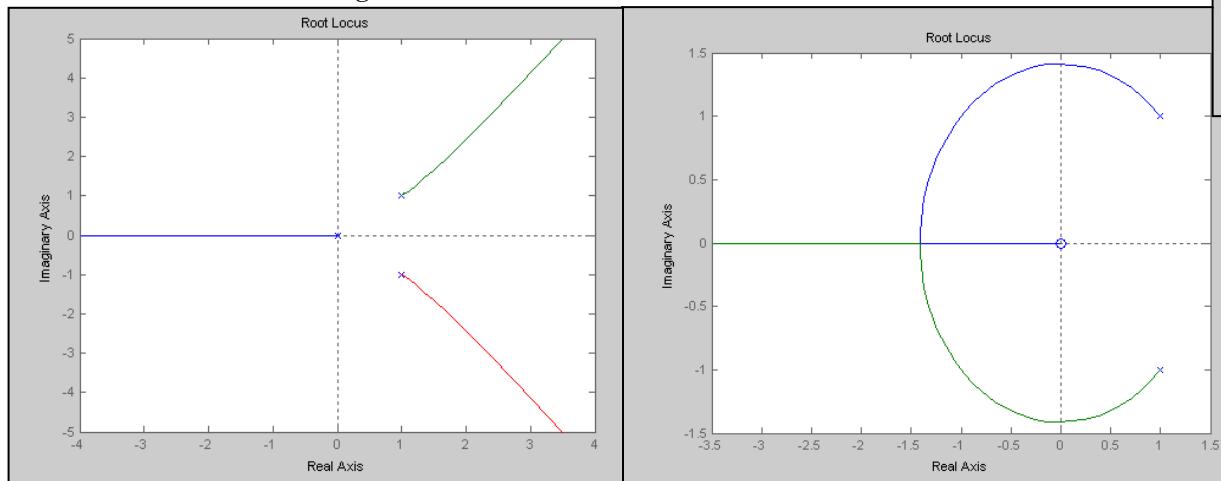
## Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

- **Regola No. 10:** Gli zeri in anello aperto attraggono i rami del luogo, i poli in anello aperto respingono i rami del luogo.
- Questa regola risulta fondamentale nel progetto e nella fase di sintesi in quanto fornisce indicazioni sul numero e locazione delle singolarità del controllore  $K(s)$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 2}, kH(s) = k \Rightarrow kG(s)H(s) = \frac{k}{s^2 - 2s + 2}$$

$$H(s) = \frac{1}{s}$$

$$H(s) = s$$





# Regole di Tracciamento (Luogo Diretto)

## □ Sommario, $k > 0$ .

- 1) Il luogo delle radici parte dai poli a ciclo aperto.
- 2) I poli a ciclo chiuso tendono agli zeri di anello aperto o all'infinito.
- 3) Il luogo delle radici ha un numero di rami pari al numero di poli della Fd/T di anello aperto.
- 4) Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.
- 5) Gli asintoti sono tali che:

$$x_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}, \quad \psi_{ar} = \frac{(2r+1)\pi}{n-m}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

- 6) Il luogo delle radici sull'asse reale lascia alla sua destra un numero dispari di singolarità.
- 7) I punti di uscita e di ingresso si trovano dalla soluzione della:

$$\frac{dk}{ds} = 0$$

- 8) L'angolo di partenza o di arrivo per singolarità complesse è dato da:

$$\gamma_{p_k} = (2\nu+1)\pi - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \angle(p_k - p_i) + \sum_{j=1}^m \angle(p_k - z_j)$$

$$\gamma_{z_k} = (2\nu+1)\pi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \angle(z_k - z_j) + \sum_{i=1}^n \angle(z_k - p_i)$$

- 9) Il  $k$  critico si calcola tramite il metodo di Routh.
- 10) Gli zeri attraggono i rami del luogo delle radici, i poli li respingono.

□ Nota: per il tracciamento del Luogo delle Radici, non fa differenza la natura di  $k$ ,  $G(s)$ ,  $H(s)$ . Ovvero possono essere parte del processo, parte del controllore, in catena diretta, oppure in catena di retroazione



## Esempi e Applicazioni

$$G_{OL}(s) = k \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}$$

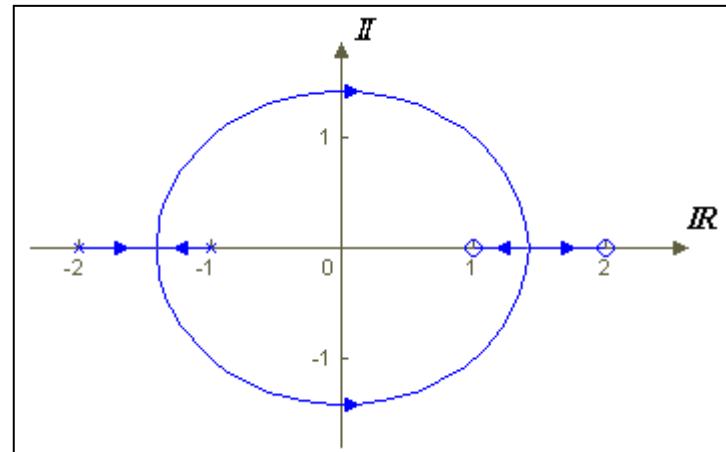
1. Singolarità: Zeri +1, +2; Poli -1, -2
2. Non vi sono Asintoti
3. Vi sono 2 rami che si distaccano dall'asse Reale e poi rientrano

$$\frac{dk}{ds} = -6 \frac{s^2 - 2}{(s^2 - 3s + 2)^2} = 0 \Rightarrow s^2 - 2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

4. Esiste un  $k_{CR}$ , calcolabile con il Criterio di Routh

$$D(s) = (1+k)s^2 + 3(1-k)s + 2(1+k) = 0$$

$$\text{sys}=((s-1)*(s-2))/(s^2+3*s+2)$$



|       |            |            |
|-------|------------|------------|
| $s^2$ | 1 + $k$    | $2(1 + k)$ |
| $s^1$ | $3(1 - k)$ |            |
| $s^0$ | $2(1 + k)$ |            |

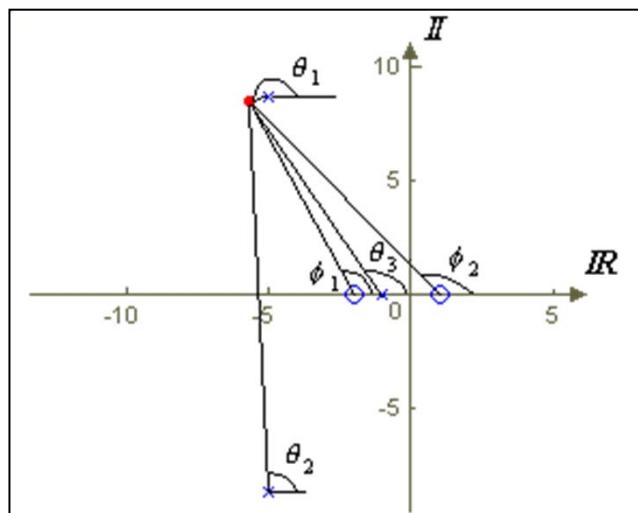
$$k_{CR} = 1; k < k_{CR}$$



## Esempi e Applicazioni

$$G_{OL}(s) = k \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s^2 + 10s + 100)}$$

1. Singolarità: Zeri +1, -2; Poli -1, -5+-j8.66, ci sono 3 rami
2. No. Asintoti = 1
3. Calcolo Angolo di partenza dai poli complessi e coniugati



$$\theta_1 \cong \pi - \theta_2 - \theta_3 + \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\begin{aligned}\theta_1 &\cong \pi - 90^\circ - 114.79^\circ + 109.11^\circ + 124.72^\circ \\ &\cong 209.04^\circ\end{aligned}$$



## Esempi e Applicazioni

### 4. Calcolo Punti di Ingresso/Uscita

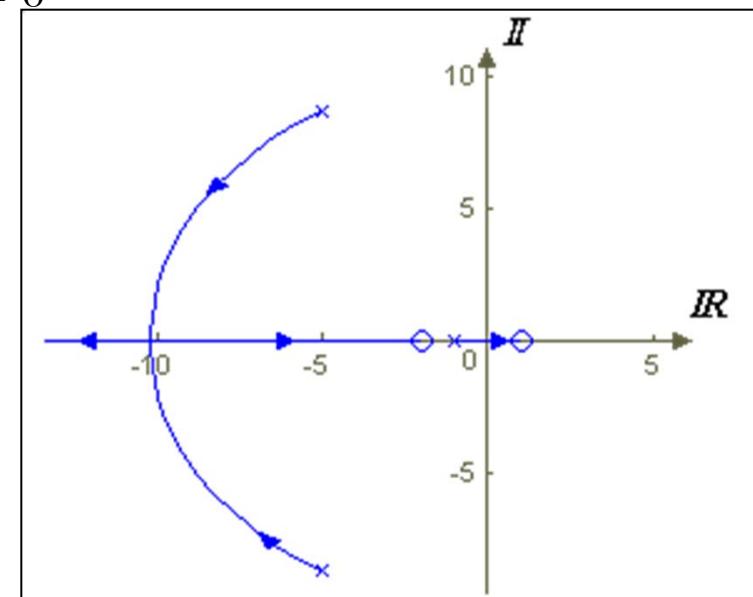
$$1 + G_{OL}(s) = 0 \Rightarrow k = \frac{(s+1)(s^2 + 10s + 100)}{(s-1)(s+2)}$$
$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow s_1 = -10.23, \quad s_2 = 10.5$$

### 5. Calcolo $k$ critico, $k < k_{CR}$ per la stabilità asintotica in anello chiuso

$$D(s) = s^3 + (11+k)s^2 + (110+k)s + 100 - 2k = 0$$

|       |                                    |                   |
|-------|------------------------------------|-------------------|
| $s^3$ | 1                                  | $110 + k$         |
| $s^2$ | $11 + k$                           | $100 - 2k$        |
| $s^1$ | $\frac{1110 + 123k + k^2}{11 + k}$ | 0                 |
| $s^0$ | $100 - 2k$                         | $k < k_{CR} = 50$ |

sys=((s-1)\*(s+2))/((s^2+10\*s+100)\*(s+1))





## Esempi e Applicazioni

$$G_{OL}(s) = k \frac{s + 5}{s(s - 1)(s + 7)(s^2 + 3s + 3)}$$

1. Zeri: -5; Poli: 0, +1, -7, -1.5+j0.866,  
Il Luogo ha 5 rami

2. No. Asintoti = 4

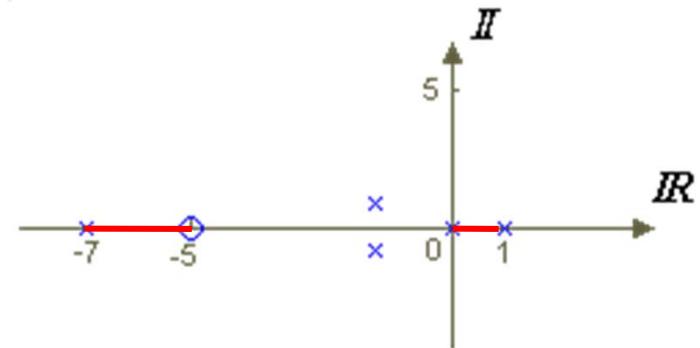
$$x_a = \frac{0 + 1 - 7 - 1.5 - 1.5 + 5}{5 - 1} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\psi_{a0} = \frac{\pi}{4}, \psi_{a1} = \frac{3}{4}\pi, \psi_{a2} = \frac{5}{4}\pi, \psi_{a3} = \frac{7}{4}\pi$$

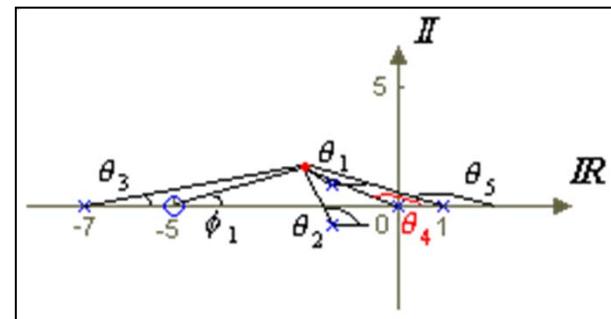
3. Esiste 1 punto di uscita

$$k = \frac{s(s - 1)(s + 7)(s^2 + 3s + 3)}{s + 5},$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad s = 0.59$$



4. Angolo di Uscita dai Poli Complessi



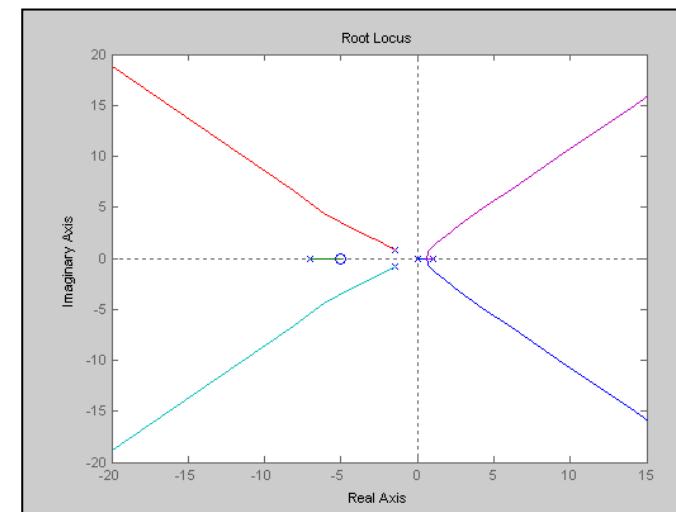
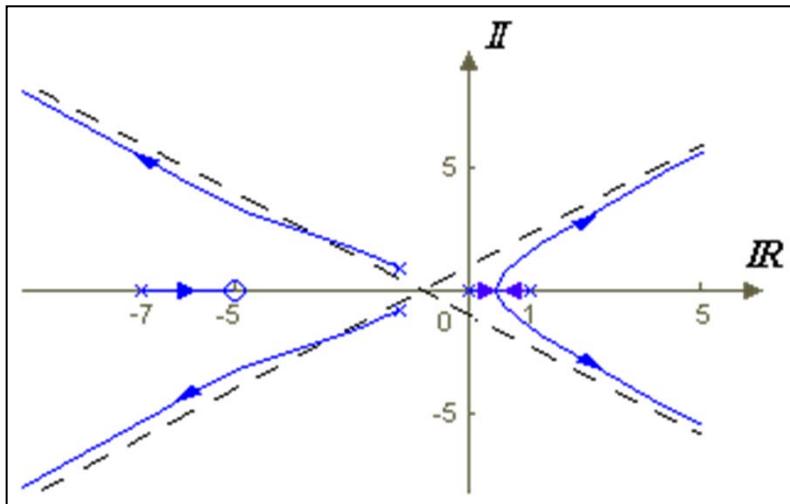
$$\theta_1 = \pi - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \varphi_1$$

$$\theta_1 \cong 3\pi - 90^\circ - 8.95^\circ - 150^\circ - 160.89 + 13.9^\circ \cong 144.06^\circ$$



## Esempi e Applicazioni

- Il sistema in ciclo chiuso è sempre INSTABILE



$$\text{sys} = (s+5)/((s^2-s)*(s+7)*(s^2+3*s+3))$$



## Esempi e Applicazioni

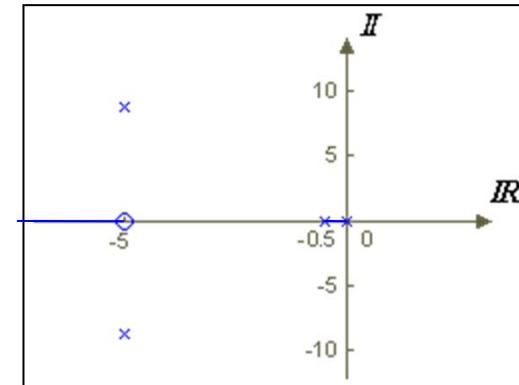
$$G_{OL}(s) = \frac{k(s+5)}{s(s+0.5)(s^2 + 10s + 100)}$$

1. Zeri: -5; Poli: 0, -0.5, -5+-j8.66: Il Luogo ha 5 rami

2. No. Asintoti = 3

$$x_a = \frac{0 - 0.5 - 5 - 5 + 5}{4 - 1} = \frac{-5.5}{3} = -1.83$$

$$\psi_{a0} = \frac{\pi}{3}, \quad \psi_{a1} = \pi, \quad \psi_{a2} = \frac{5}{3}\pi$$



3. Esistono 1 punto di uscita ed 1 punto di ingresso

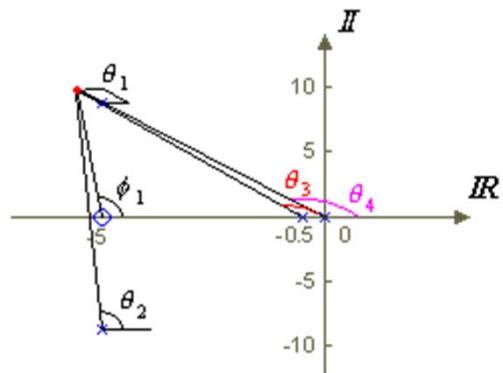
$$k = \frac{s(s+0.5)(s^2 + 10s + 100)}{s + 5}$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow s_1 = -8.04, s_2 = -0.25$$



## Esempi e Applicazioni

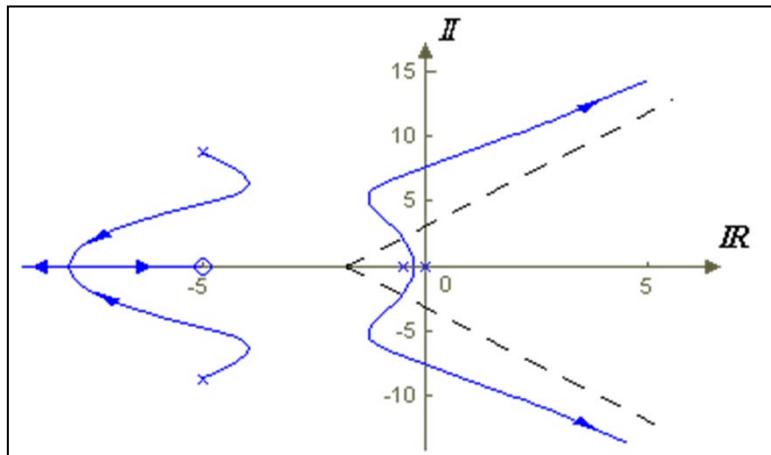
### 4. Angolo di Uscita dai Poli Complessi



$$\theta_1 = \pi - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \varphi_1$$

$$\theta_1 \cong \pi - 90^\circ - 117.46^\circ - 120^\circ + 90^\circ \cong -57.46^\circ$$

### 5. Calcolo $k$ critico con Routh



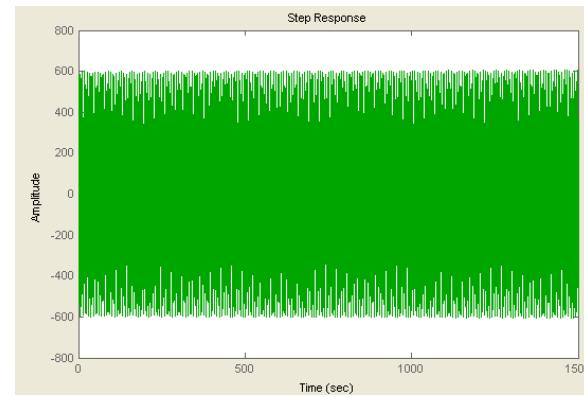
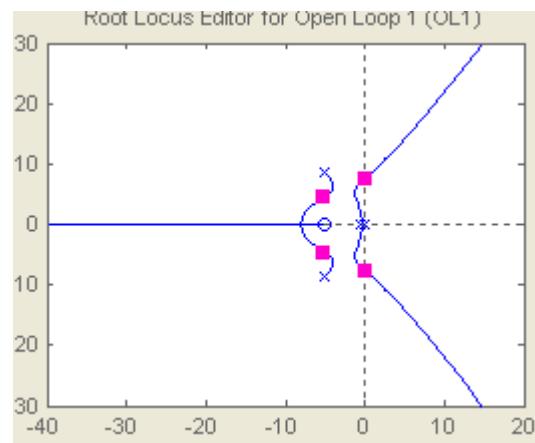
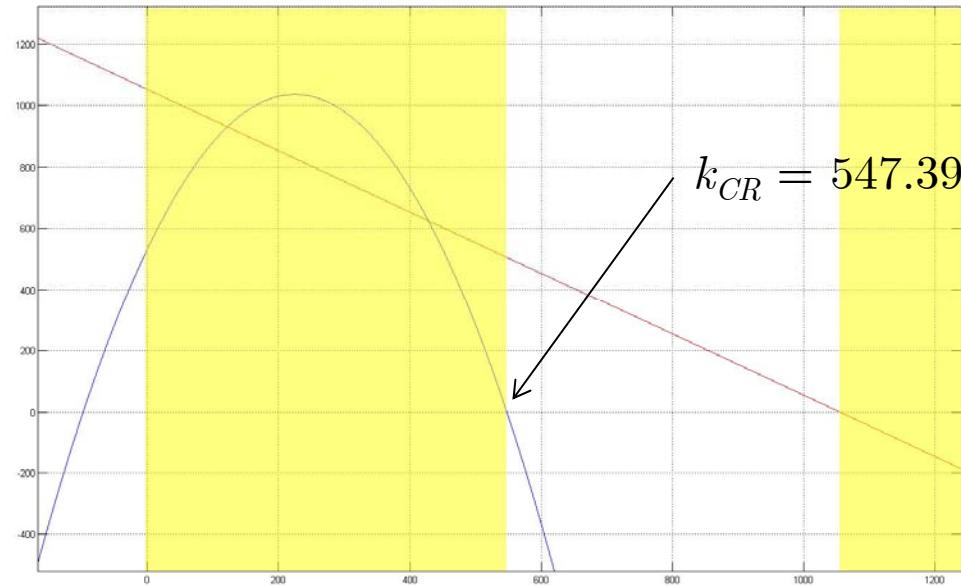
$$D(s) = k(s + 5) + s(s + 0.5)(s^2 + 10s + 100) = 0$$

$$D(s) = s^4 + 10.5s^3 + 105s^2 + (50 + k)s + 5k = 0$$

|       |   |          |      |
|-------|---|----------|------|
| $s^4$ | 1   | 105      | $5k$ |
| $s^3$ | 10.5  | $50 + k$ |      |
| $s^2$ | $\frac{1052.5 - k}{10.5}$                             | $5k$     | 0    |
| $s^1$ | $\frac{(1052.5 - k)(50 + k) - 551.25k}{(1052.5 - k)}$ | 0        |      |
| $s^0$ | 5k  |          |      |

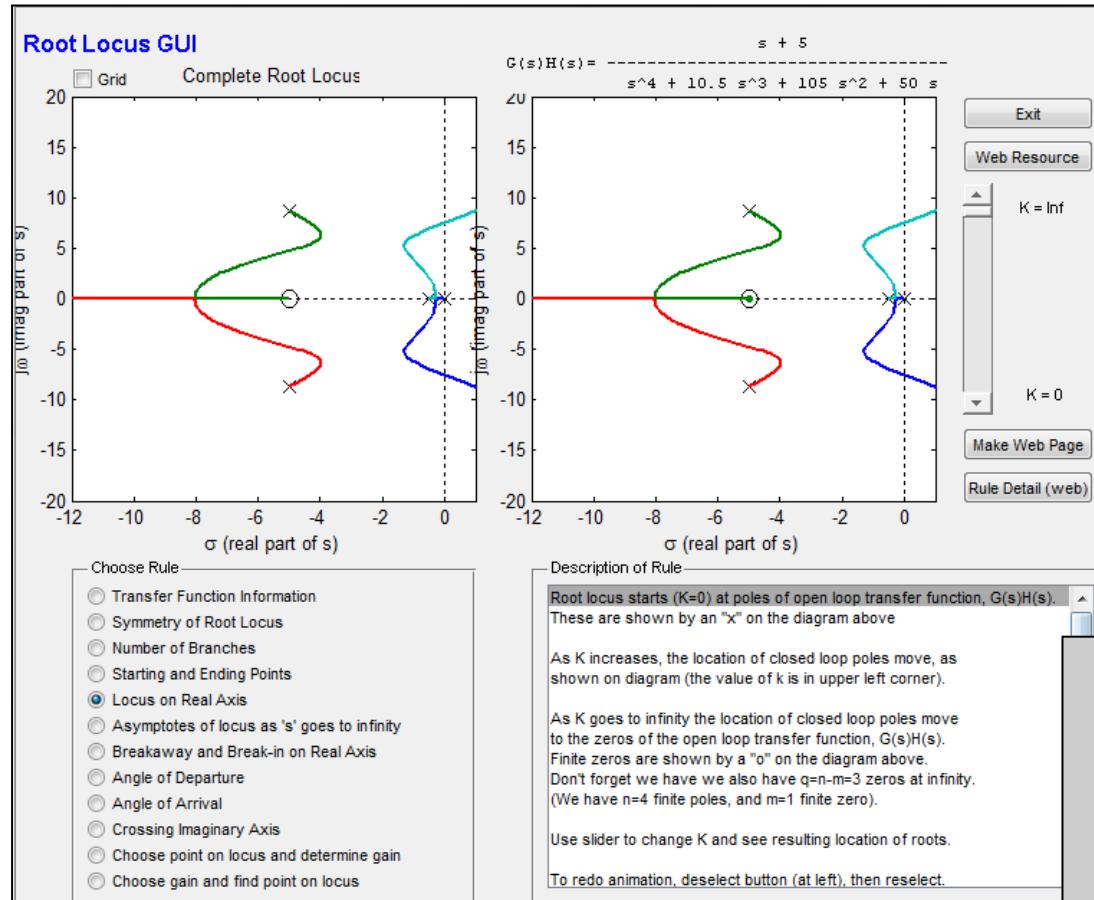


## Esempi e Applicazioni

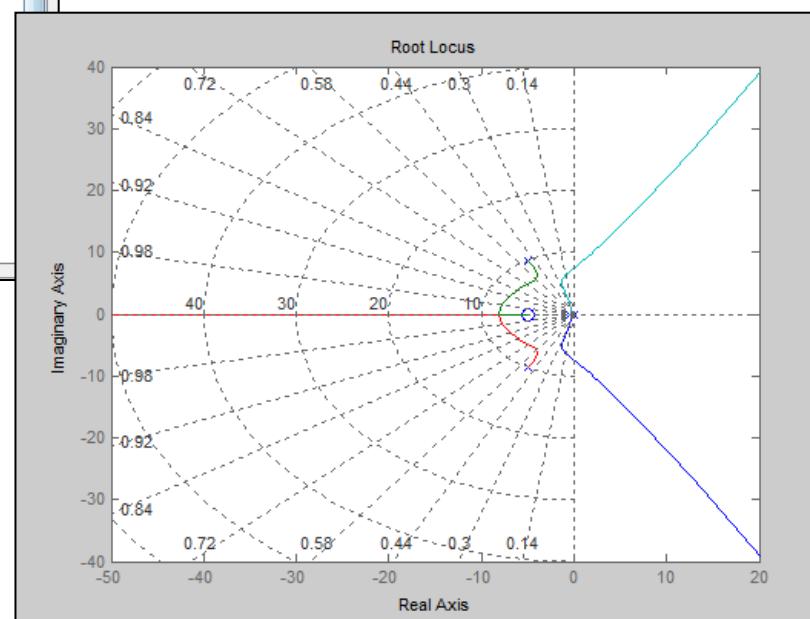




# Esempi e Applicazioni



$$sys=(s+5)/(s^4+10.5*s^3+105*s^2+50*s)$$





## Esempi ed Applicazioni

### □ Esempio di Sintesi

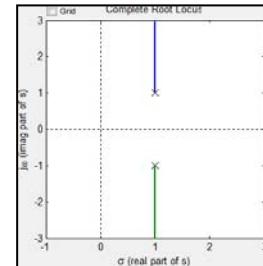
Dato il sistema  $G(s)$ , progettare un controllore tale che:

1. L'errore a regime al gradino unitario sia = 0
2. La risposta transitoria sia dominata da un comportamento del primo ordine

- Consideriamo una variazione di guadagno. Il luogo delle Radici per  $k > 0$  è dato da:

$$G_{OL}(s) = K(s)G(s) = \frac{k}{s^2 - 2s + 2}$$

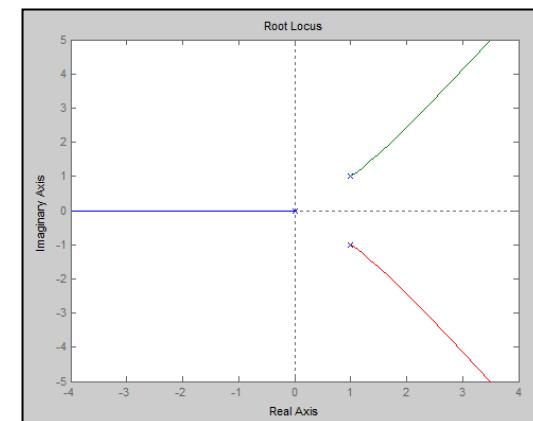
$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 2}; p_{1,2} = +1 \pm j$$



- E' necessario introdurre un polo all'origine per soddisfare il requisito di risposta a regime. Un controllore possibile è quindi:

$$K(s) = \frac{k}{s}$$

$$G_{OL}(s) = K(s)G(s) = \frac{k}{s} \frac{1}{s^2 - 2s + 2}$$





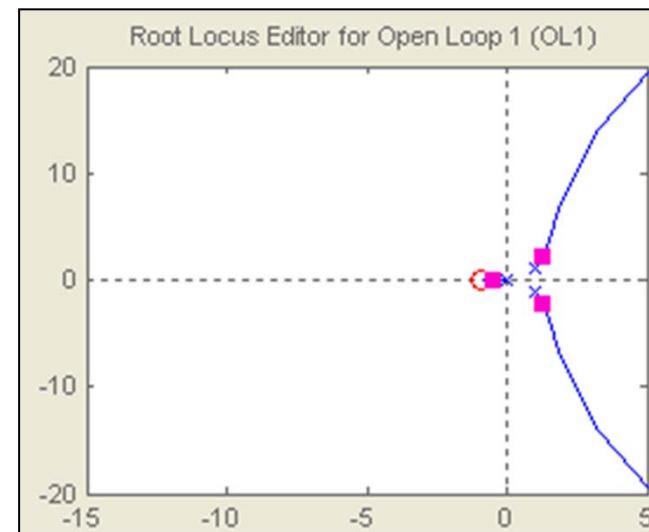
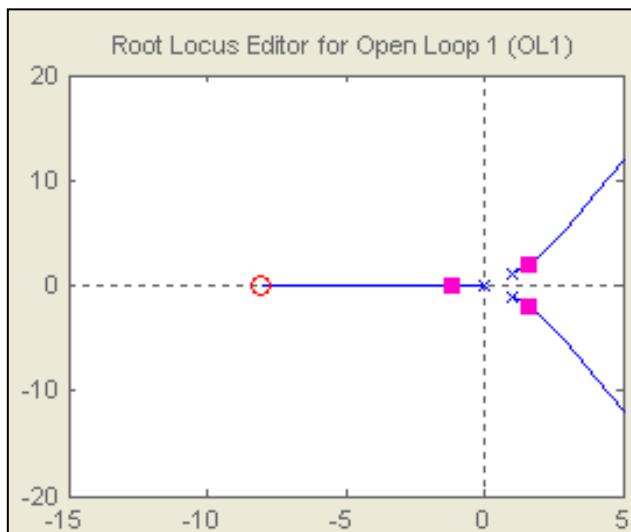
## Esempi ed Applicazioni

- Per attirare i rami instabili nel semipiano di parte reale negativa, occorre introdurre uno ZERO (regola 10). Consideriamo un controllore P – I:

$$K(s) = k \frac{(s + z_1)}{s} \quad G_{OL}(s) = K(s)G(s) = k \frac{(s + z_1)}{s} \frac{1}{s^2 - 2s + 2}$$

$$D(s) = s(s^2 - 2s + 2) + k(s + z_1) = 0 \quad D(s) = s^3 - 2s^2 + (2 + k)s + kz_1 = 0$$

□ CN di Routh non è soddisfatta ed il sistema in ciclo chiuso è sempre instabile





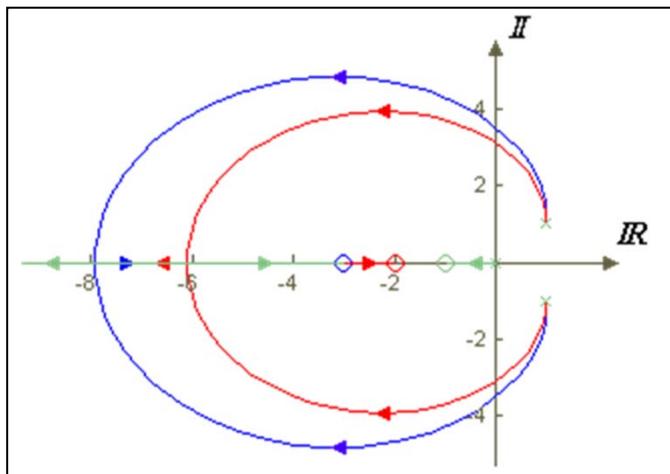
## Esempi ed Applicazioni

- La regola 10 suggerisce l'inserimento di almeno un ulteriore zero per "attrarre" il luogo delle radici nel semipiano di parte reale negativa
- Un possibile controllore è un Controllore industriale di nome P-I-D ed ha la forma generale (formalmente non causale):

$$K(s) = k \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s}$$

$$G_{OL}(s) = K(s)G(s) = k \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s} \frac{1}{s^2 - 2s + 2}$$

$$\begin{aligned} D(s) &= s(s^2 - 2s + 2) + k(s + z_1)(s + z_2) = \\ &= s^3 + (k - 2)s^2 + [2 + k(z_1 + z_2)]s + kz_1z_2 = 0 \end{aligned}$$



|           |                |   |
|-----------|----------------|---|
| 1         | $2+k(z_1+z_2)$ | 0 |
| $k-2$     | $kz_1z_2$      |   |
| (*)       | 0              |   |
| $kz_1z_2$ |                |   |

$$(*) = \frac{(k-2)[2 + k(z_1 + z_2)] - kz_1z_2}{(k-2)}$$



## Esempi ed Applicazioni

- Il controllore scelto, stabilizza il sistema in ciclo chiuso per valori del guadagno maggiori del  $k_{cr}$ , ma è un controllore non causale (due zeri ed un polo).
  - Risulta necessario aggiungere almeno un polo, “Fuori Banda”, in modo da influenzare il meno possibile la stabilità in ciclo chiuso del sistema.
- **L'aggiunta di poli fuori dalla banda passante ovvero a frequenza molto maggiore di  $w_{BW}$  non influenza in modo sostanziale la risposta in frequenza (almeno una decade al di là del polo più veloce)**

$$K(s) = k \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s(s + P)}$$

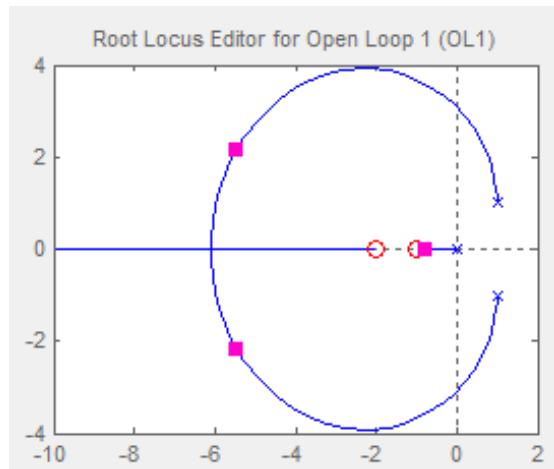
$$K(s) = k \frac{(s + 1)(s + 2)}{s(s + P)} \quad \Rightarrow \quad K(s)G(s) = k \frac{(s + 1)(s + 2)}{s(s + P)(s^2 - 2s + 2)}$$

□ **Uso di SISOTOOL**

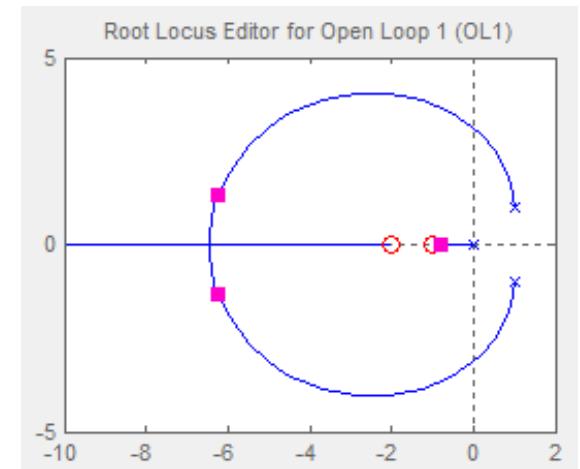
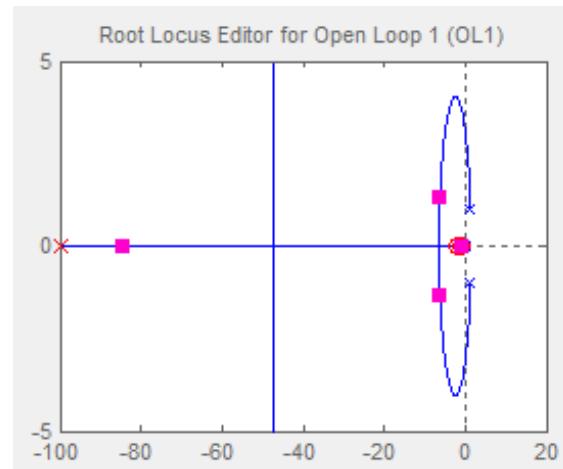


## Esempi ed Applicazioni

No Pole

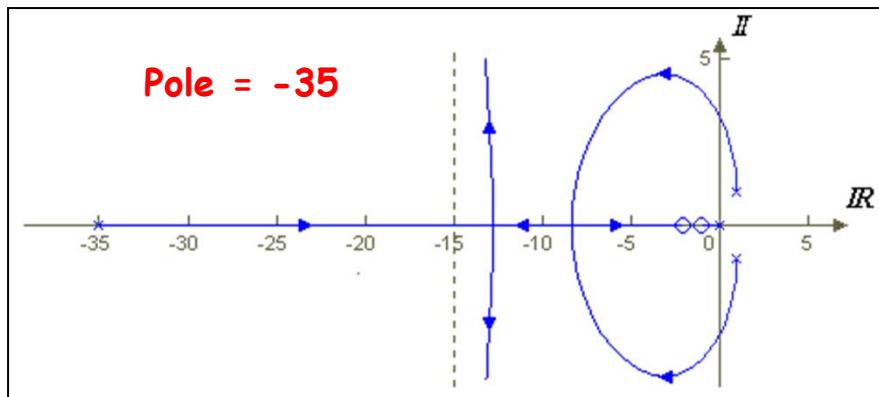


Pole = -100

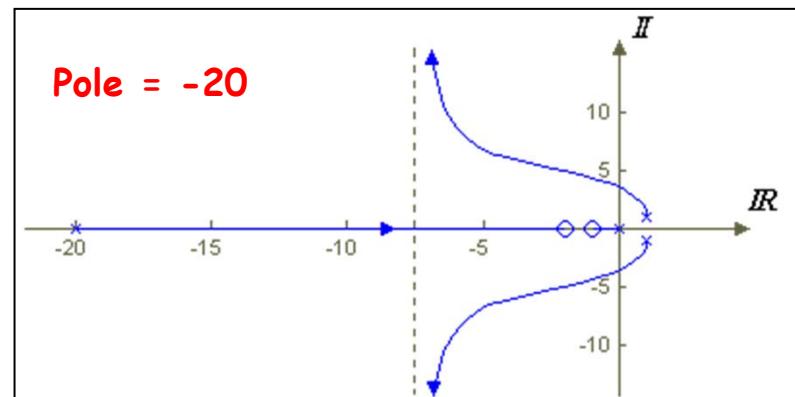


$$\text{sys} = 1/(s^2 - 2s + 2)$$

Pole = -35



Pole = -20





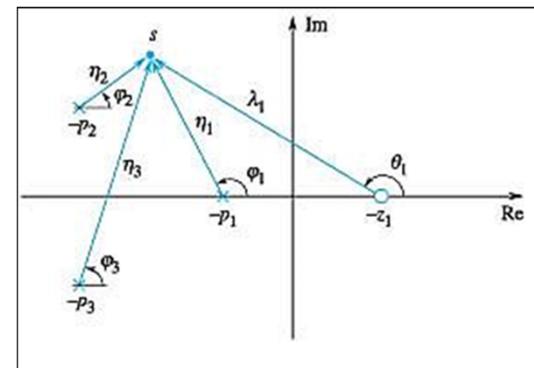
## Luogo delle Radici Inverso

- ❑ Il luogo delle radici inverso fornisce l'andamento dei poli a ciclo chiuso quando la costante di guadagno  $k$  è negativa o quando, pur essendo  $k$  positiva, si è in presenza di retroazione positiva.
  - Il tracciamento del Luogo segue le stesse regole, con variazioni riguardanti La componente di fase dell'equazione caratteristica.

$$D_{CL}(s) = 1 + kG(s)H(s) = 1 + G_{OL}(s) = 0$$

$$G(s)H(s) = -\frac{1}{k}$$

$$\left| \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \right| = \left| -\frac{1}{k} \right|, k < 0$$



$$\sum_{j=1}^m \angle(s + z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s + p_i) = \angle -\frac{1}{k} = \pi - \angle k = \pm 2\nu\pi \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$



# Tracciamento del Luogo Inverso

## Regola 1

*Il luogo delle radici parte dai poli a ciclo aperto.*

## Regola 2

*Dato un sistema con FdT con  $n$  poli e  $m$  zeri (con  $n \geq m$ ), se  $k \rightarrow -\infty$ ,  $m$  poli a ciclo chiuso tendono agli  $m$  zeri di anello aperto e i restanti  $n-m$  poli a ciclo chiuso tendono all'infinito.*

## Regola 3

*Il luogo delle radici ha un numero di rami pari a  $n$ , numero di poli della FdT di anello aperto.*

## Regola 4

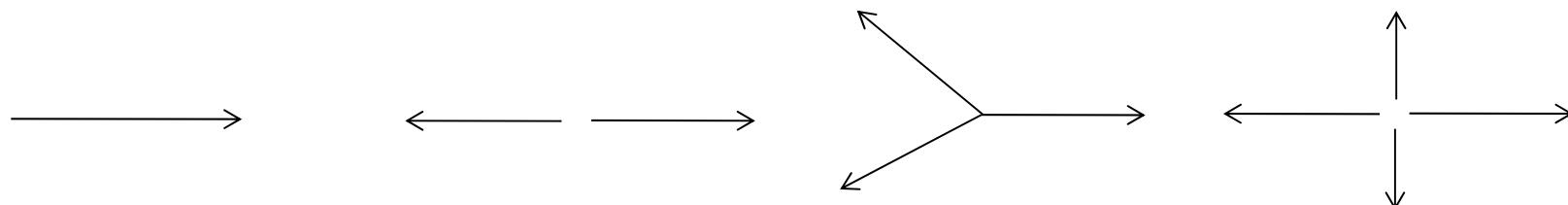
*Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.*

## ✖ Regola 5

*I rami che individuano lo spostamento dei poli che tendono all'infinito ( $n-m$ ), seguono asintoti che si individuano tenendo conto che:*

- si intersecano sull'asse reale, come nel luogo diretto,
- formano, con l'asse reale, angoli pari a:

$$\psi_{ar} = \frac{2\nu\pi}{n-m}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, n-1$$





# Tracciamento del Luogo Inverso

## ❖ Regola 6

Lungo l'asse reale il luogo delle radici lascia alla sua destra un numero pari di singolarità, cioè di poli e zeri a ciclo aperto.

## Regola 7

I punti di uscita e di ingresso si trovano risolvendo l'equazione:  $\frac{dk}{ds} = 0$

## ❖ Regola 8

L'angolo di partenza da un polo complesso e di arrivo a uno zero complesso si determinano utilizzando, rispettivamente, le seguenti relazioni:

$$\gamma_{p_k} = 2\nu\pi - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \angle(p_k - p_i) + \sum_{j=1}^m \angle(p_k - z_j)$$

$$\gamma_{z_k} = 2\nu\pi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \angle(z_k - z_j) + \sum_{i=1}^n \angle(z_k - p_i)$$

## Regola 9

Il valore del parametro  $k$  per cui il luogo delle radici attraversa l'asse immaginario si trova utilizzando il metodo di Routh.

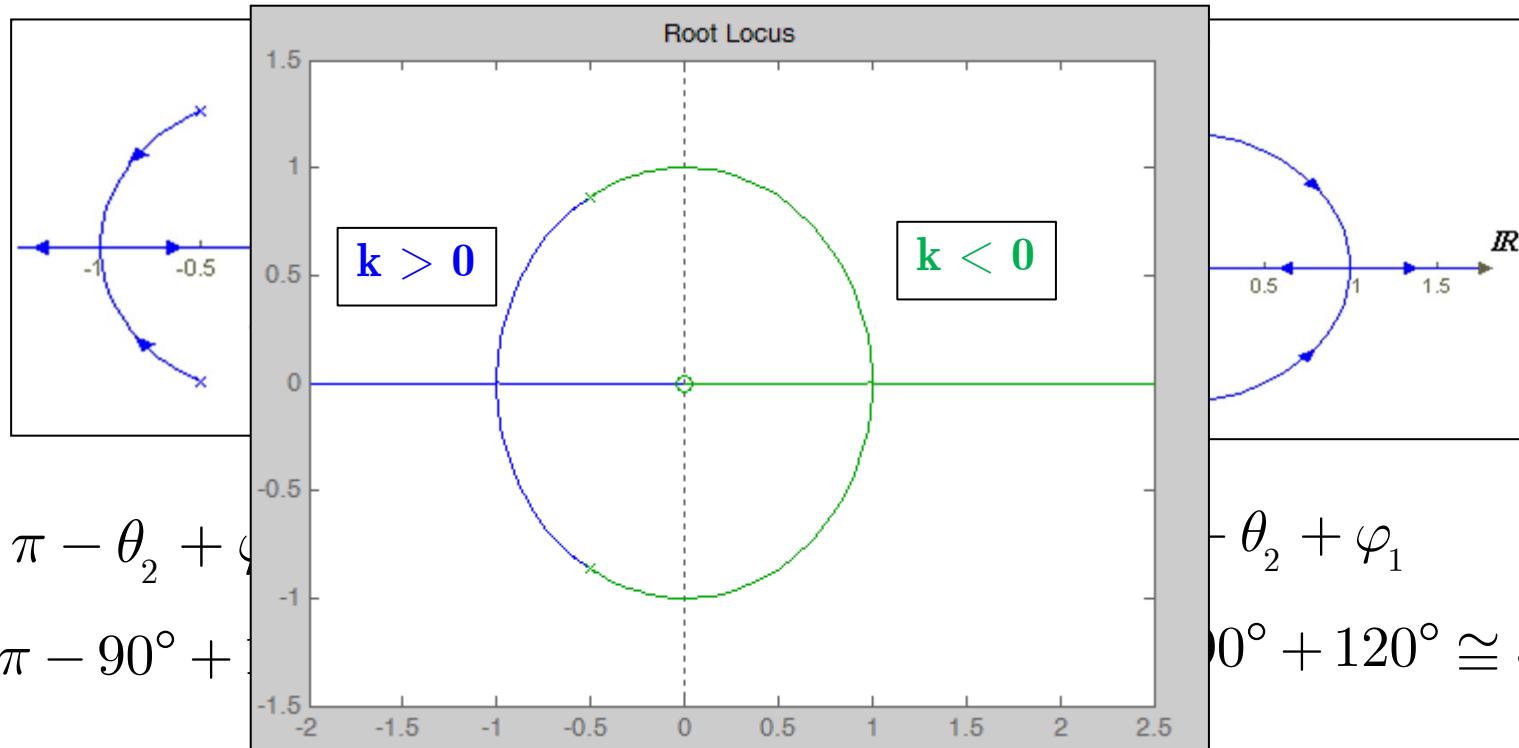
## Regola 10

Gli zeri attraggono i rami del luogo delle radici, i poli li respingono.



## Esempi e Applicazioni (LI)

$$G_{OL}(s) = k \frac{s}{s^2 + s + 1}$$



- Asintoticamente stabile in ciclo chiuso per tutti i  $k$  positivi

$$1 + G_{OL}(s)H(s) = 0 \Rightarrow k = -\frac{s^2 + s + 1}{s}$$

$$\frac{dk}{ds} = -\frac{s^2 - 1}{s^2} = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm 1$$

- Asintoticamente stabile in ciclo chiuso per tutti i  $k < k_{cr} = 1$

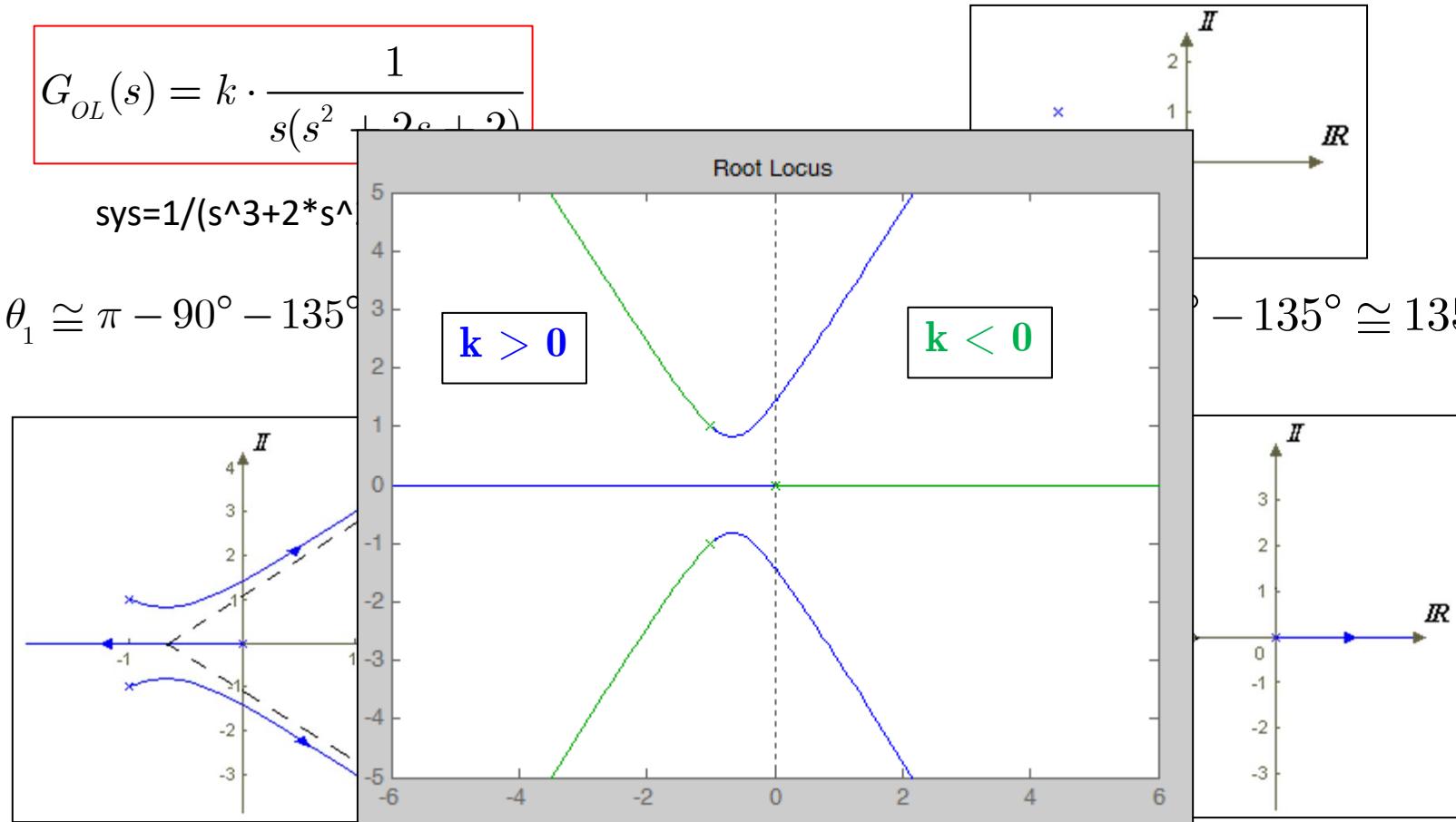


## Esempi e Applicazioni (LI)

$$G_{OL}(s) = k \cdot \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

sys=1/(s^3+2\*s^

$$\theta_1 \cong \pi - 90^\circ - 135^\circ$$



- Asintoticamente stabile in ciclo chiuso per tutti i  $k < k_{cr}$

$$k_{CR} < 4$$
$$0 < k < k_{CR}$$

- Instabile in ciclo chiuso per tutti i  $k$



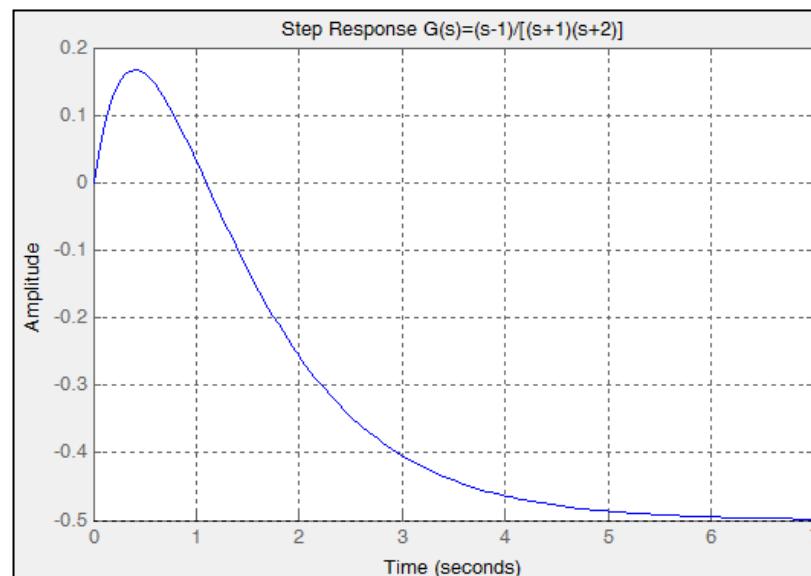
## Esempi

### □ Esempio di Sintesi:

Dato il sistema  $G(s)$ , determinare un controllore  $K(s)$  tale che l'errore a regime al gradino unitario sia = 0

$$G(s) = \frac{s - 1}{(s + 1)(s + 2)} \quad \text{sys1}=(s-1)/(s^2+3*s+2)$$

- Il controllore deve introdurre un integratore in modo che la FdT in anello aperto sia di tipo 1.
- Il sistema in ciclo chiuso deve essere asintoticamente stabile
- Il sistema è a fase non minima (zero instabile)



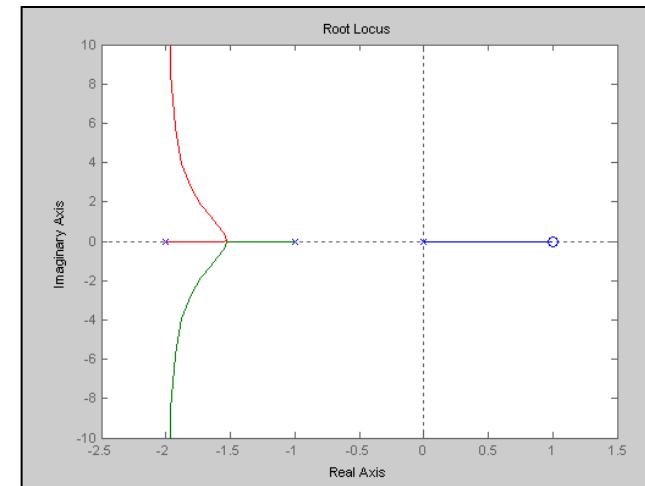
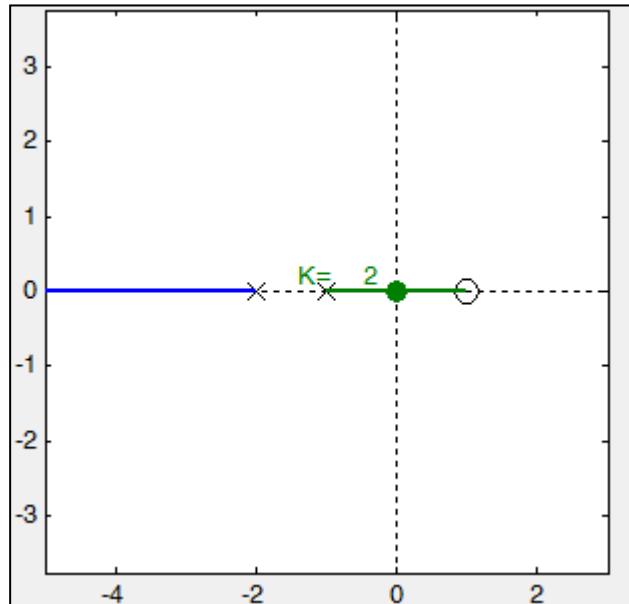


## Esempi

- Un controllore proporzionale garantisce in errore al gradino finito per  $k < k_{cr}$
- Scelta iniziale del controllore in modo che la FdT di  $K(s) = \frac{k}{s}$  anello sia di tipo 1:

$$G_{OL}(s) = \frac{k(s-1)}{s(s+1)(s+2)} \quad G_{CL}(s) = \frac{G_{OL}(s)}{1+G_{OL}(s)} = \frac{k(s-1)}{s^3 + 3s^2 + (2+k)s - k}$$

- **Il Luogo delle Radici Diretto,  $K > 0$  mostra che il sistema in anello chiuso è sempre instabile (La CN del Criterio di Routh non è infatti soddisfatta).**

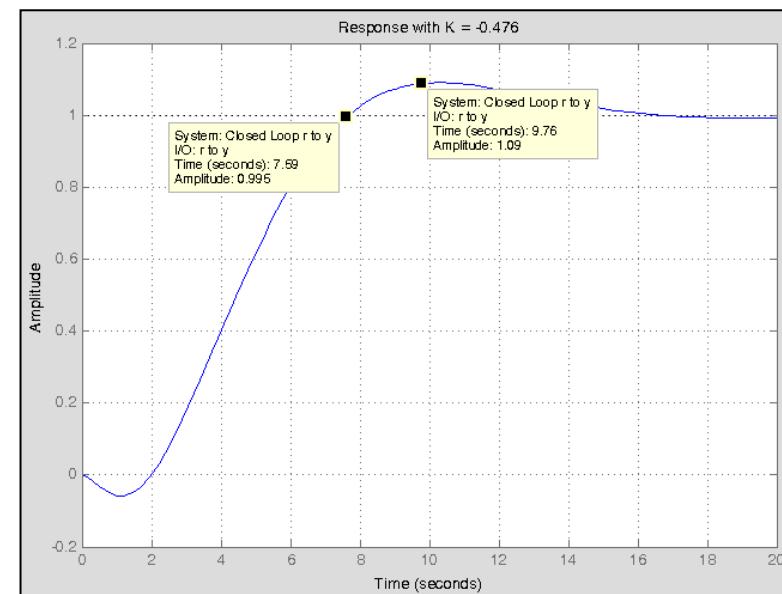
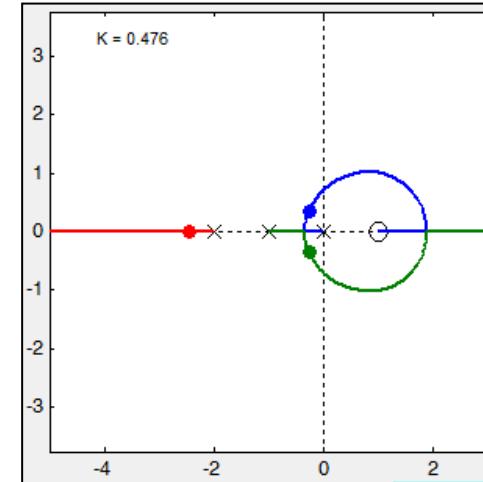
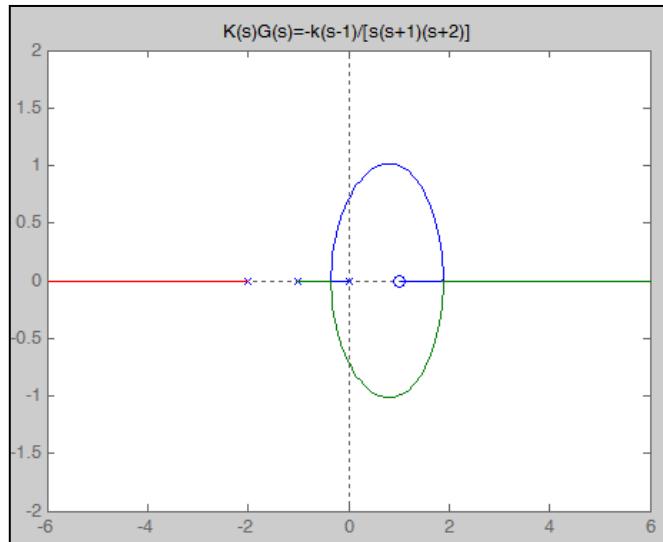


- Luogo delle Radici Diretto,  $K > 0$



## Esempi

- Luogo delle Radici Inverso,  $K < 0$



Esiste un Intervallo di Stabilità per il guadagno

$$0 > k > -\frac{3}{2} = -1.5$$

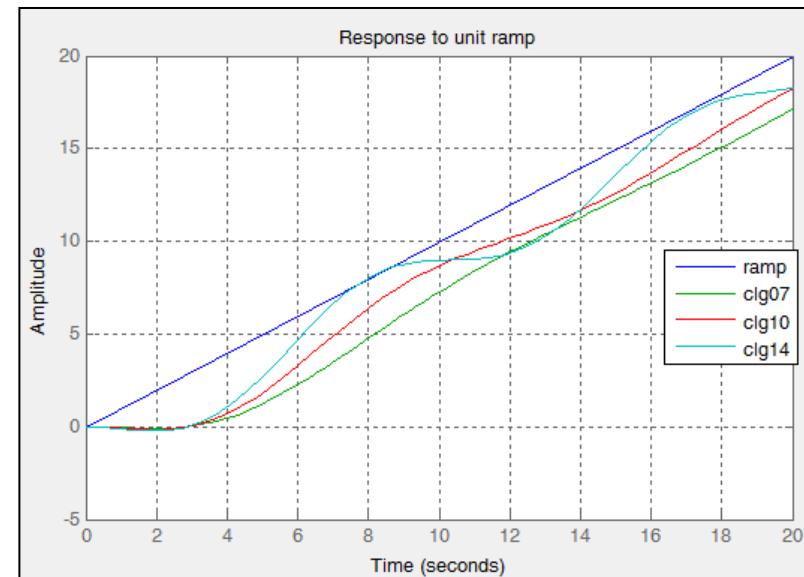


## Esempi

- Uso del luogo delle radici inverso. Il valore critico di K per la stabilità in ciclo chiuso è  $k = -1.5$
- La FdT in ciclo aperto è di tipo 1 quindi il minimo errore alla rampa è dato dal massimo valore del guadagno che mantiene la stabilità asintotica
- La verifica può essere fatta con sisotool, oppure calcolando l'errore minimo mediante il teorema del valore finale.

$$\varepsilon_{ramp} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{k(s-1)}{s(s+1)(s+2)}} \frac{1}{s^2} = \\ = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k(s-1)}{(s+1)(s+2)}} = \frac{1}{1 + \frac{|k|}{2}}$$

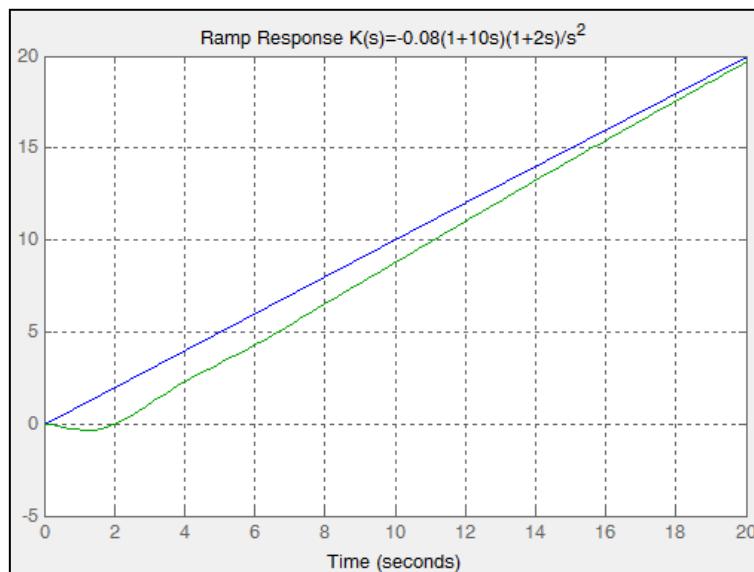
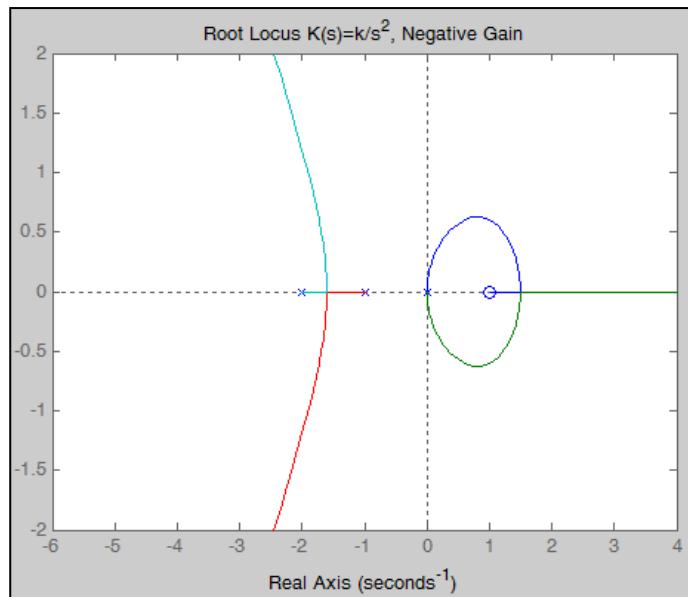
$$\varepsilon_{ramp} = \begin{cases} 0.7407 & k = -0.35 \\ 0.6667 & k = -1.00 \\ 0.5882 & k = -1.40 \end{cases}$$





## Esempi

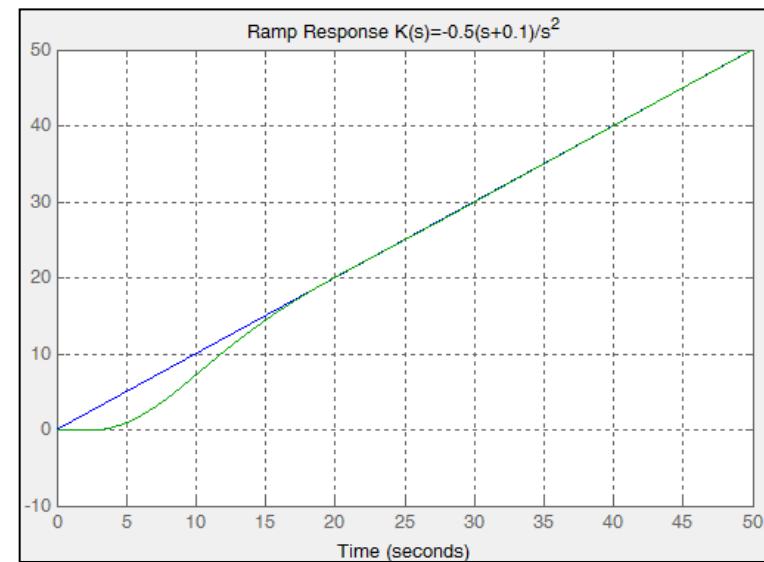
- Per avere un errore nullo alla rampa,  $K(s)G(s)$  deve essere di tipo 2.



- Aggiungiamo uno zero per attrarre i due rami instabili.

$$K(s) = \frac{k(s+z)}{s^2}; k < 0, z > 0$$

$$K(s) = \frac{-0.05(1+10s)}{s^2}$$





## Esempi

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)(s^2 + 4s + 20)}$$

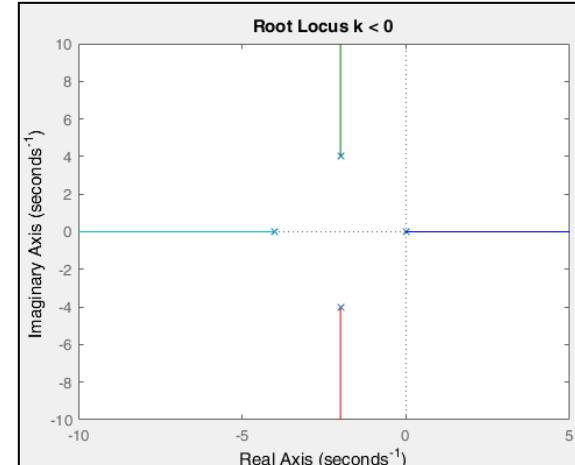
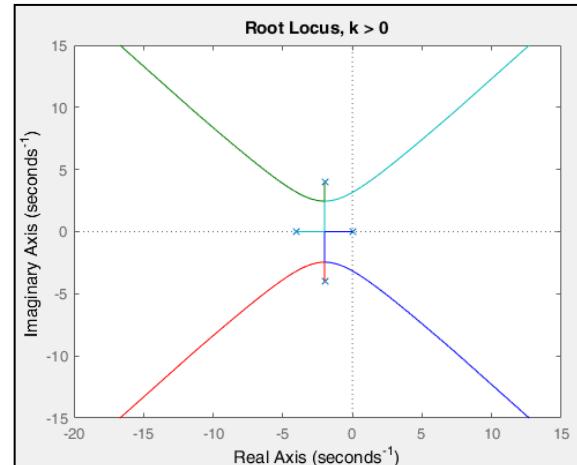
$$G_{ol}^1(s) = \frac{k}{s(s+4)(s^2 + 4s + 20)}$$

$$k = \frac{-1}{G(s)} = -(s^4 + 8s^3 + 36s^2 + 80s); \frac{dk}{ds} = -(4s^3 + 24s^2 + 72s + 80) = 0$$

### Requisiti di progetto:

1. Errore alla rampa nullo
2. Massima sovraelongazione = 20%
3. Tempo di assestamento più piccolo possibile

1. 4 asintoti
2. Origine degli asintoti = -2
3. Break out point = -2

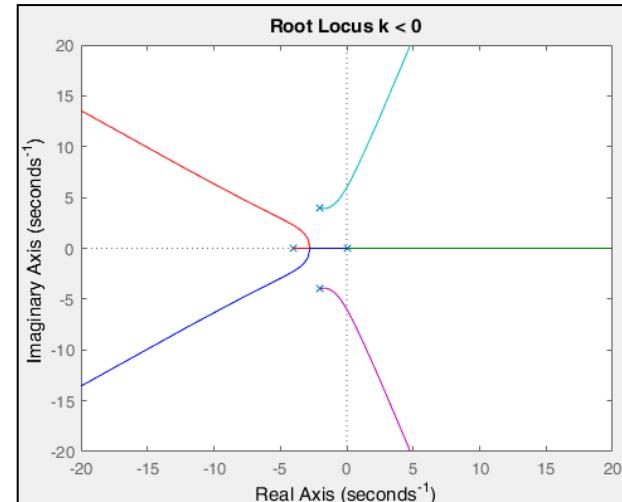
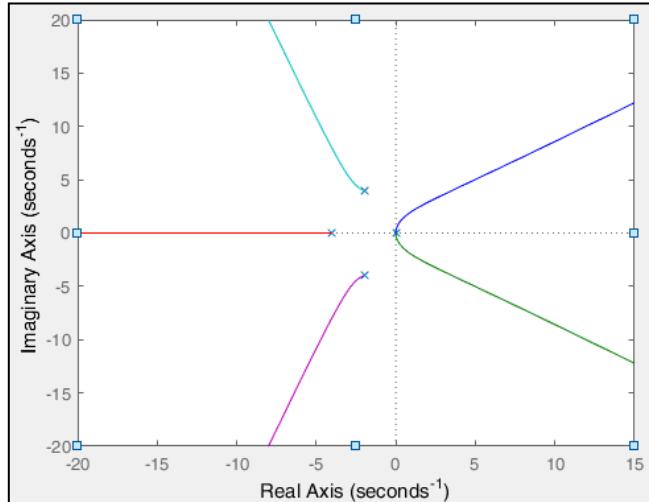




## Esempi

- Il requisito di regime richiede una FdT di anello di tipo 2

$$G_{ol}^2(s) = \frac{k}{s(s+4)(s^2 + 4s + 20)}$$

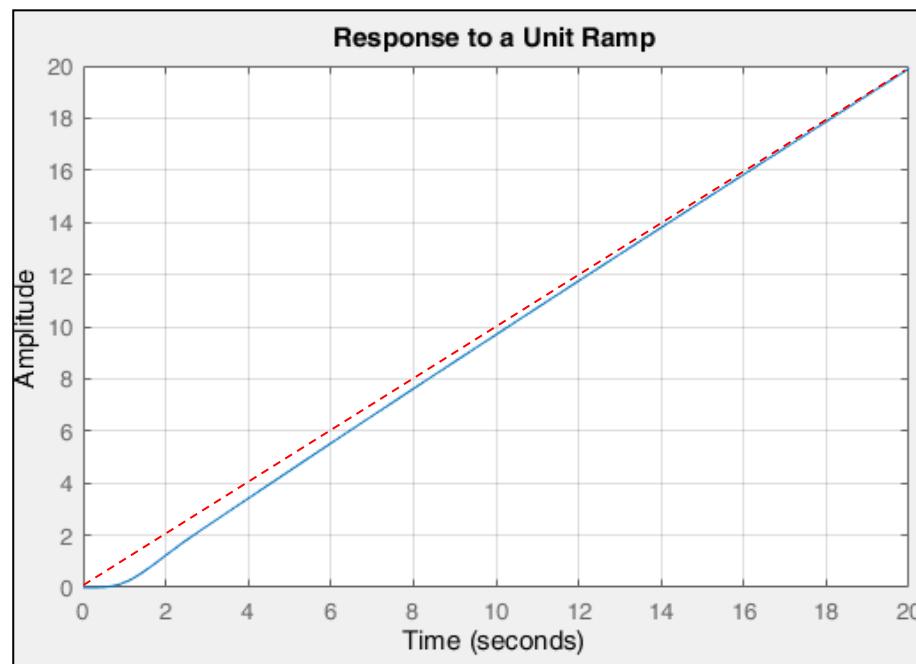
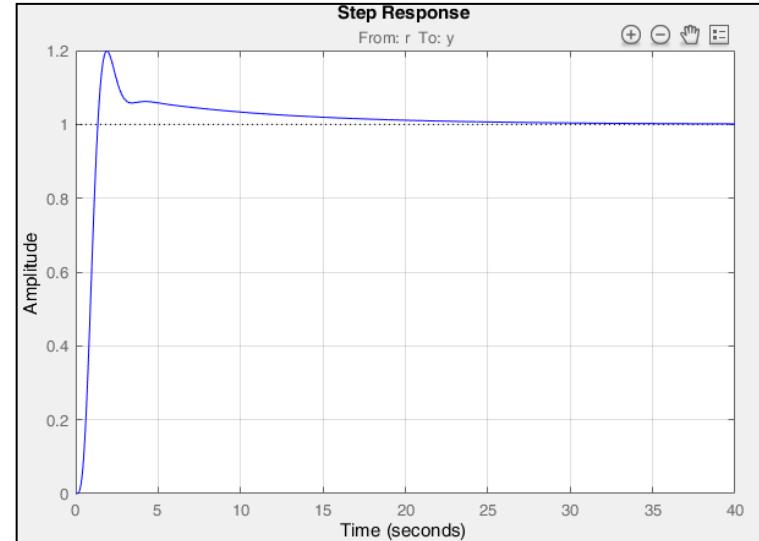
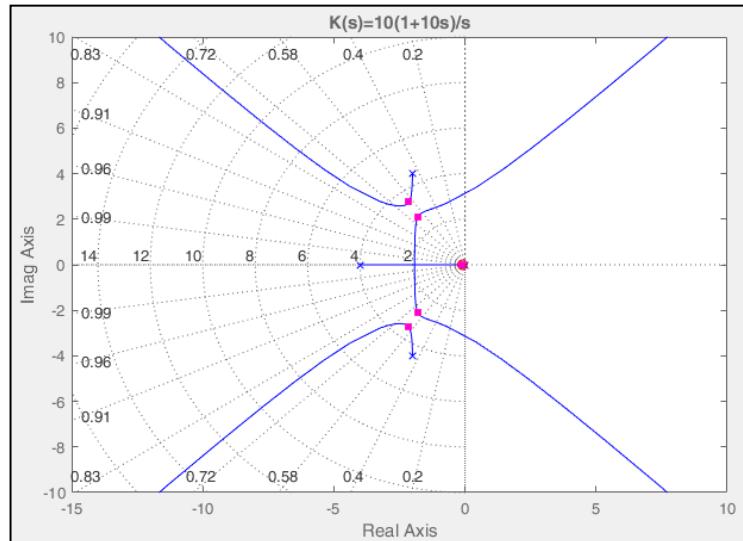


- I rami instabili devono essere attratti nel semipiano di parte reale negativa -> il controllore deve avere degli zeri.

Sisotool



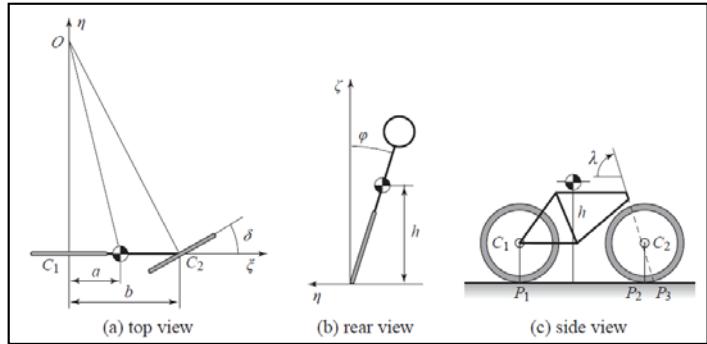
# Esempi





# Esempi

## □ Dinamica biciclo (Steering)



$$m = 80 \text{ Kg}$$

$$a = 0.4 \text{ m}$$

$$b = 1.02 \text{ m}$$

$$h = 0.8 \text{ m}$$

$$v_0 = 5 \text{ m / sec}$$

$$\lambda = 90^\circ$$

$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} \approx 2.4510 \frac{s + 12.5}{s^2 - 12.2625}$$

$$\text{sysdeltaphi1} = (2.451 * (s + 12.5)) / (s^2 - 12.2625)$$

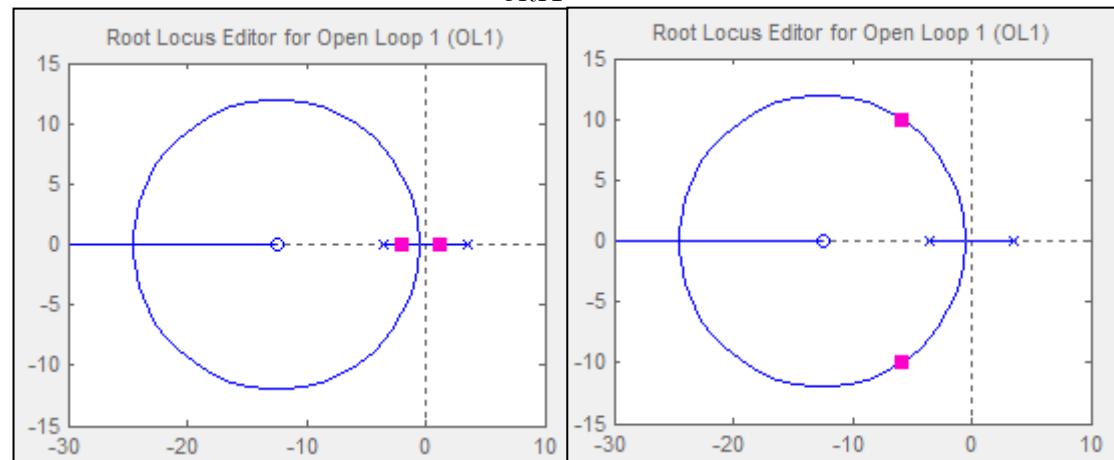
$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} = \frac{\frac{Dv_0}{b}s + \frac{mv_0^2 h}{b}}{Js^2 - mgh} \quad J \approx mh^2$$

$$D \approx mah$$

$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} \approx \frac{av_0}{bh} \frac{s + \frac{v_0}{a}}{s^2 - \frac{g}{h}}$$

Retroazione Proporzionale  $\delta(s) = -k \cdot \varphi(s)$

$$k_{CRIT} = 0.4$$





## Esempi

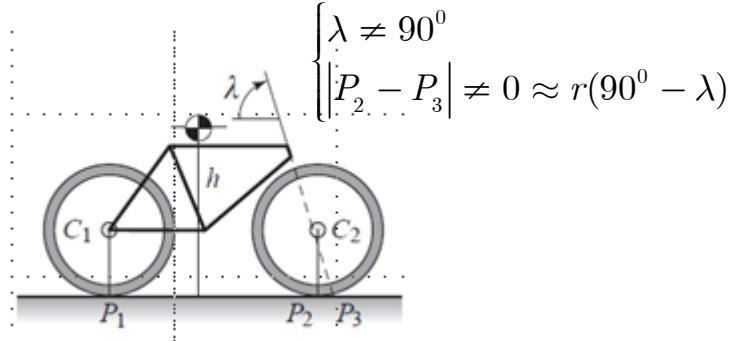
### □ Significato del guadagno nel luogo delle radici

$$J\ddot{\varphi}(t) + \frac{Dhv_0}{b} k\dot{\varphi}(t) + \left[ \frac{mhv_0^2}{b} k - mgh \right] \varphi(t) = 0$$

$$k_{CR} > \frac{gb}{v_0^2}$$

- Al diminuire della velocità, occorre un guadagno maggiore per la stabilità in ciclo chiuso.
- Per valori inferiori al guadagno critico il sistema in ciclo chiuso è instabile

### □ Importanza del manubrio nella dinamica e nella stabilità



$$\delta = k_1(v_0)T - k_2(v_0)\varphi$$

$$k_1(v_0) = \frac{b^2}{(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)mac \sin \lambda}$$

$$k_2(v_0) = \frac{bg}{v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda}$$

- Gli angoli  $\phi$  e  $\delta$  cambiano a causa della presenza del manubrio in funzione di  $\lambda$
- Velocità di autoallineamento
- Velocità critica per la stabilità

$$v_C = \sqrt{bg \cot \lambda}$$

$$v_0 > v_C$$



## Esempi

$$\left[Ms^2 + Cv_0s + (K_0 + K_2v_0^2)\right] \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \delta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} T(s)$$

$$\ddot{\varphi} + A_1\dot{\varphi} + A_2\varphi = B_1\dot{T} + B_2T$$

$$\delta = k_1(v_0)T - k_2(v_0)\varphi$$

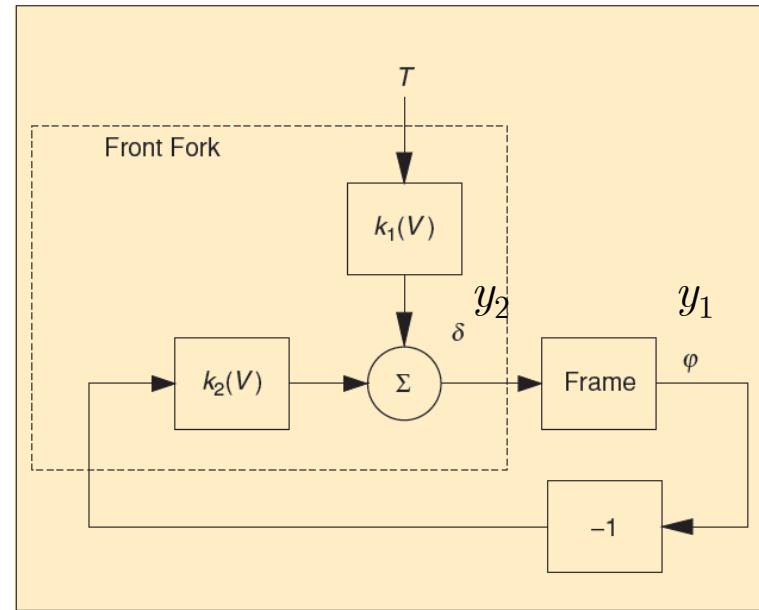
$$G_T^\varphi(s) = B_1 \frac{s + \frac{B_2}{B_1}}{s^2 + A_1s + A_2}$$

$$A_1 = \frac{Dv_0g}{J(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)}$$

$$A_2 = \frac{mg^2(bh \sin \lambda - ac \cos \lambda)}{J(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)}$$

$$B_1 = \frac{Dv_0b}{macJ(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)}$$

$$B_2 = \frac{b(hv_0^2 - acg)}{acJ(v_0^2 \sin \lambda - bg \cos \lambda)}$$



ans =

```
13.3161 + 3.6949i
13.3161 - 3.6949i
-4.7448
0.3081
```

Transfer function:

```
-1.869 s^2 - 123.9 s - 1870
-----
13.2 s^4 - 293.1 s^3 + 942.1 s^2 + 1.17e004 s - 3686
```

Transfer function:

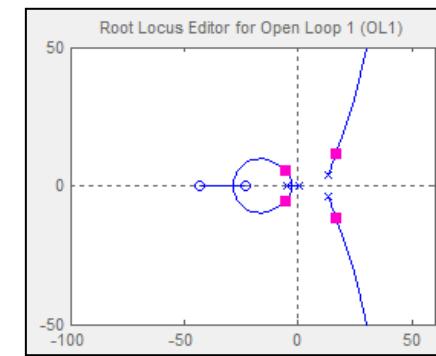
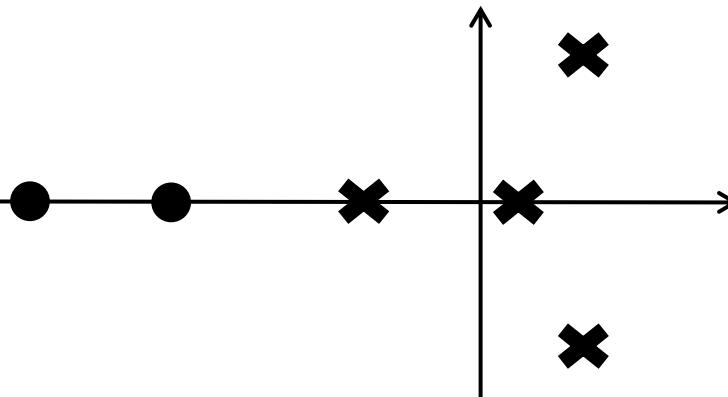
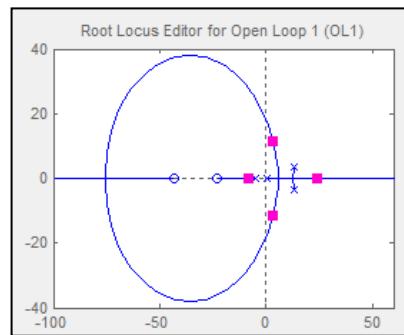
```
69.86 s^2 - 771.1
-----
13.2 s^4 - 293.1 s^3 + 942.1 s^2 + 1.17e004 s - 3686
```



## Esempi

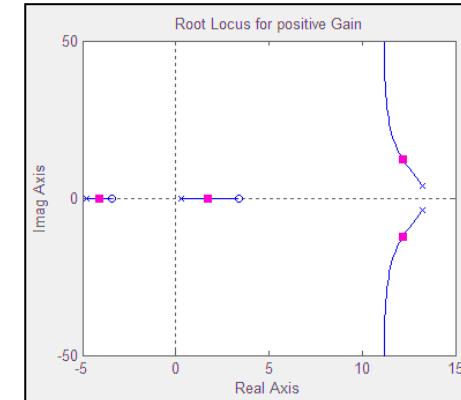
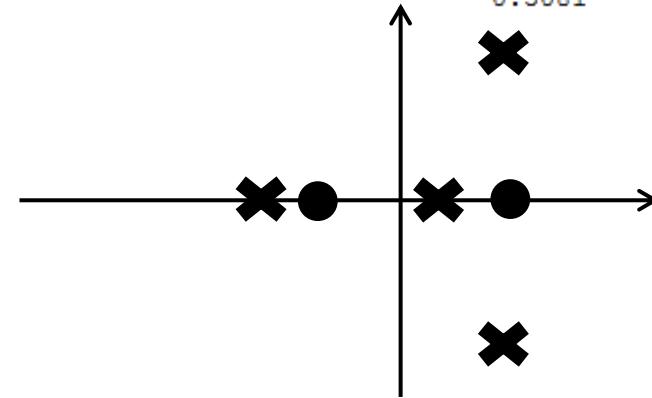
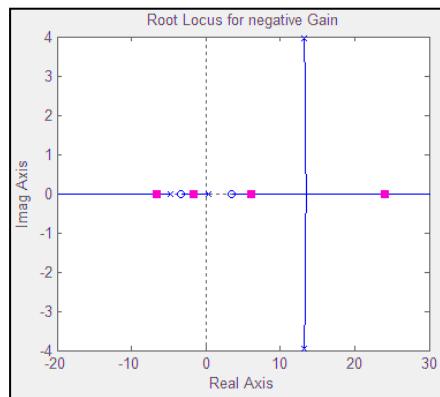
$$\frac{\varphi(s)}{T(s)} = \frac{-0.1416 s^2 - 9.387 s - 141.7}{s^4 - 22.2 s^3 + 71.37 s^2 + 886.4 s - 279.2}$$

$$\begin{array}{ll} 13.3204 + 3.6858i & -43.0491 \\ 13.3204 - 3.6858i & -23.2409 \\ -4.7444 & \\ 0.3081 & \end{array}$$



$$\frac{\delta(s)}{T(s)} = \frac{5.065 s^2 - 58.42}{s^4 - 22.2 s^3 + 71.37 s^2 + 886.4 s - 279.2}$$

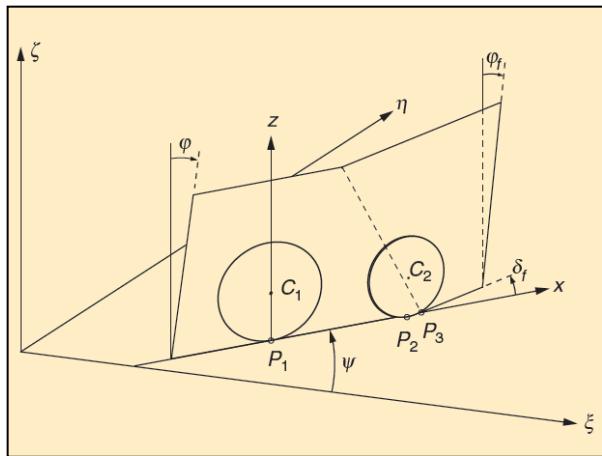
$$\begin{array}{ll} 13.3204 + 3.6858i & 3.3962 \\ 13.3204 - 3.6858i & -3.3962 \\ -4.7444 & \\ 0.3081 & \end{array}$$





## Esempi

- Dinamica biciclo (maneuvering, track following)



$$m = 80 \text{ Kg}$$

$$a = 0.4 \text{ m}$$

$$b = 1.02 \text{ m}$$

$$h = 0.8 \text{ m}$$

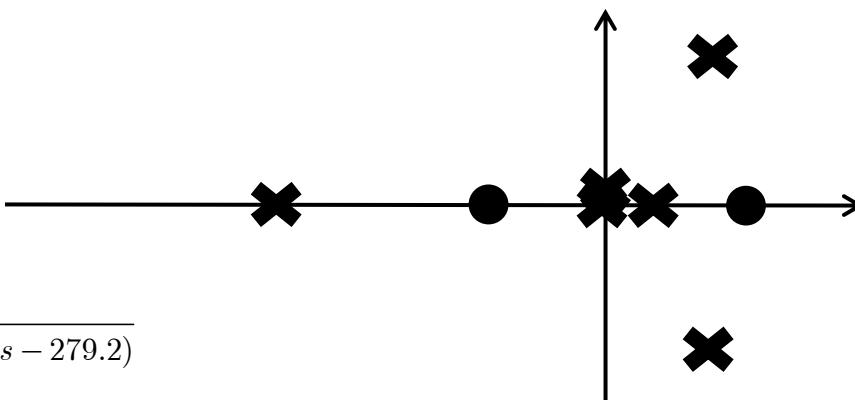
$$v_0 = 5 \text{ m/sec} = 18 \text{ Km/h}$$

$$\frac{\eta(s)}{T(s)} = 124.14 \cdot \frac{s^2 - 11.5341}{s^2(s^4 - 22.2s^3 + 71.37s^2 + 886.4s - 279.2)}$$

- La dinamica di manovra riguarda lo scostamento da una traiettoria rettilinea lungo l'asse  $\xi$ .
- Per piccoli movimenti tali per cui il modello lineare è valido, si ha:

$$\eta(s) = \frac{v_0}{s} \psi(s)$$

$$\psi(s) = \frac{v_0}{bs} \delta(s)$$





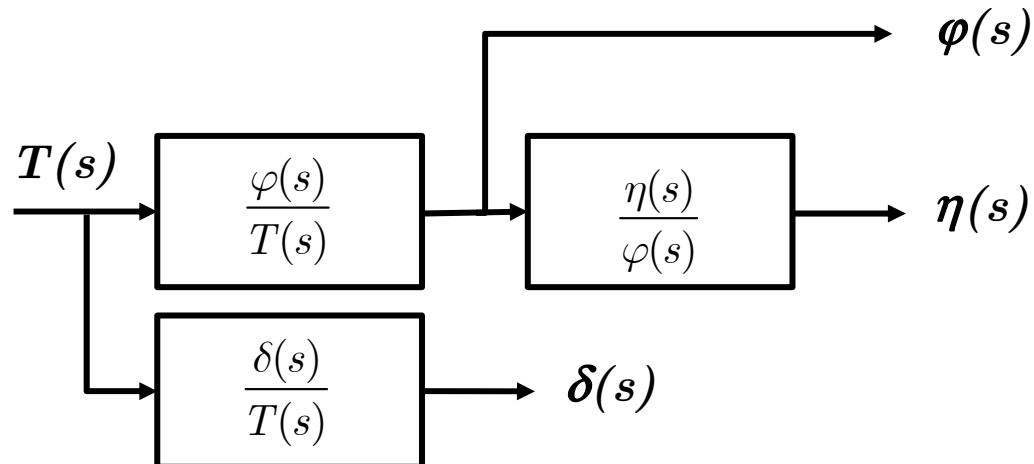
## Esempi

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(s)}{T(s)} &= -0.416 \frac{(s^2 + 22.565s + 340.63)}{(s^4 - 22.2s^3 + 71.37s^2 + 886.4s - 279.2)} \\ &= -0.416 \frac{(s + 43.049)(s + 23.409)}{(s - 0.3081)(s + 4.744)(s^2 - 26.408s + 187.93)}\end{aligned}$$

$$\frac{\delta(s)}{T(s)} = \frac{5.065s^2 - 58.42}{(s^4 - 22.2s^3 + 71.37s^2 + 886.4s - 279.2)}$$

$$\frac{\eta(s)}{\varphi(s)} = -298.41 \cdot \frac{s^2 - 11.5341}{(s^2 + 22.565s + 340.63)} = -298.41 \cdot \frac{(s - 3.3962)(s + 3.3962)}{(s + 43.049)(s + 23.409)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\eta(s)}{T(s)} &= 124.14 \cdot \frac{s^2 - 11.5341}{s^2(s^4 - 22.2s^3 + 71.37s^2 + 886.4s - 279.2)} \\ &= 124.14 \cdot \frac{(s - 3.3962)(s + 3.3962)}{s^2(s - 0.3081)(s + 4.744)(s^2 - 26.408s + 187.93)}\end{aligned}$$

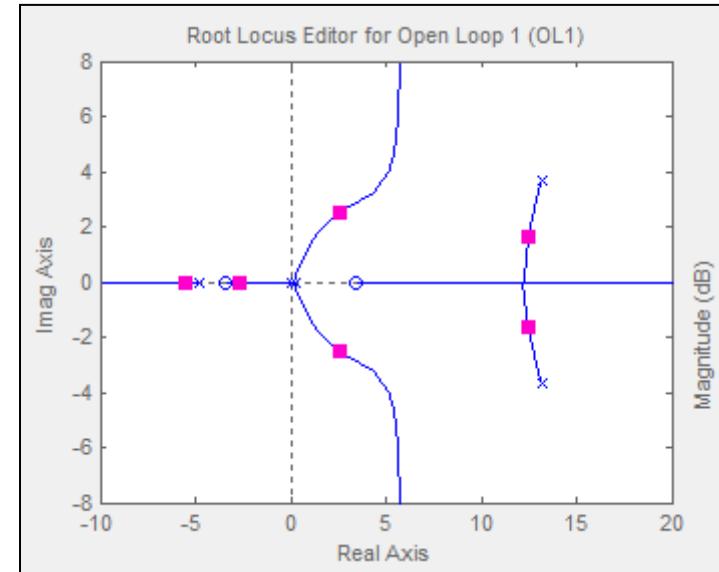
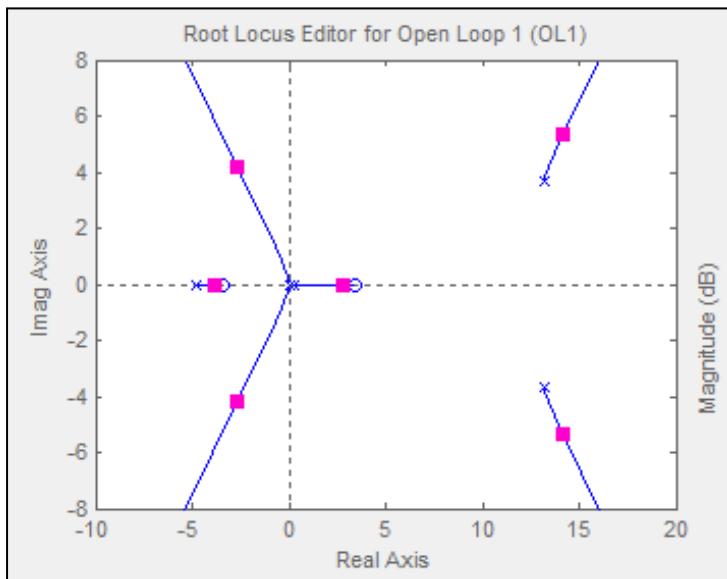




## Esempi

### □ Forma di Bode

$$\frac{\eta(s)}{T(s)} = 5.2127 \cdot \frac{(1 + 0.2944s)(1 - 0.2944s)}{s^2(1 - 3.2457s)(1 + 0.2108s)(1 - 0.1409s + .0053s^2)}$$





## Esempi

$$\text{sysdeltaphi1} = (2.451 * (s + 12.5)) / (s^2 - 12.2625)$$

$$\text{sysTphi} = (-0.1416 * s^2 - 9.387 * s - 141.7) / (s^4 - 22.2 * s^3 + 71.37 * s^2 + 886.4 * s - 279.2)$$

$$\text{sysTdelta} = (5.065 * s^2 - 58.42) / (s^4 - 22.2 * s^3 + 71.37 * s^2 + 886.4 * s - 279.2)$$

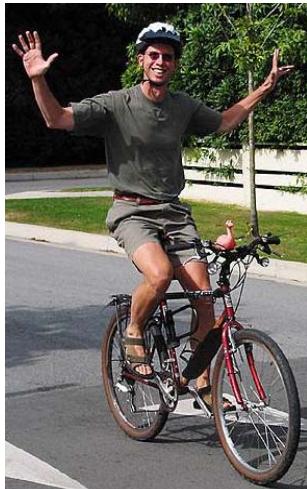
$$\text{sysTeta} = (124.14 * (5.065 * s^2 - 58.42)) / (s^2 * (s^4 - 22.2 * s^3 + 71.37 * s^2 + 886.4 * s - 279.2))$$



## Esempi

- Commenti

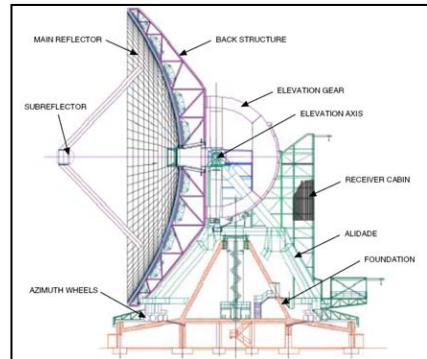
- Sistema altamente instabile
- Controllo manuale relativamente semplice con training minimo
- Implementazione automatica/robotica richiede una sintesi complessa





## Esempi

- Analisi Modello Antenna (Esempio 70 m radio telescopio, Goldstone, Mojave desert, California)



- **Caratteristiche Generali:**

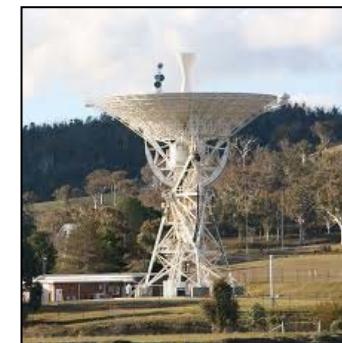
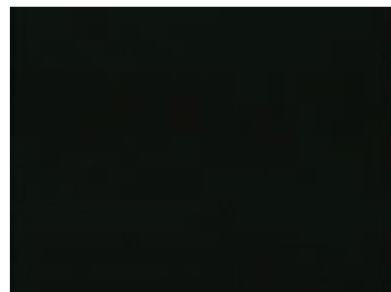
1. La precisione di forma del riflettore di 70 m di diametro deve essere di 1 cm su tutta la superficie di 3,850 metri quadrati.
2. Antenna e struttura di controllo per I due canali di azimut ed elevazione ha un peso 2,700 tonnellate metriche.
3. Frequenza di operazione Ka-Band = 32 GHz

- **Precisioni richieste (approx.):**

1. Azimut < 0.5 arcsec =  $1.38 \cdot 10^{-4}$  gradi
2. Elevazione < 1.5 arcsec =  $4 \cdot 10^{-4}$  gradi

- Modello generato per il controllo (tra encoder di motore e velocità di rotazione): 18 stati, 1 ingresso, 1 uscita

$$A = (18, 18), B = (18, 1), C = (1, 18)$$





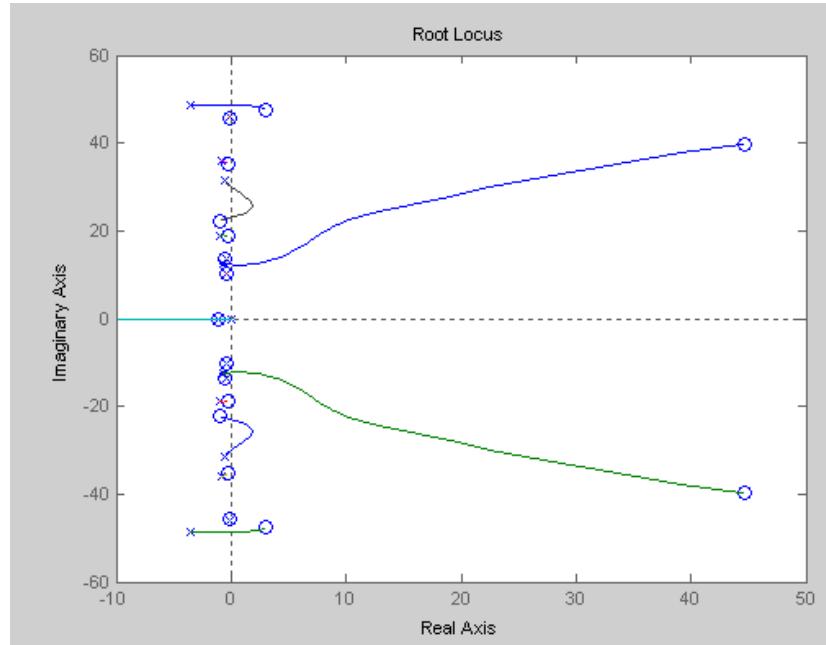
# Esempi

$$G(s) = \frac{\dot{y}(s)}{u(s)} =$$

$$\frac{-0.1037 s^{17} + 9.279 s^{16} - 1070 s^{15} + 6.132e004 s^{14} - 4.161e006 s^{13} + 1.487e008 s^{12} - 7.958e009 s^{11} + 1.626e011 s^{10} - 8.067e012 s^9 + 8.148e013 s^8 - 4.345e015 s^7 + 1.75e016 s^6 - 1.203e018 s^5 + 9.864e017 s^4 - 1.556e020 s^3 - 9.712e019 s^2 - 7.202e021 s - 7.724e021}{s^{18} + 16.01 s^{17} + 7661 s^{16} + 9.978e004 s^{15} + 2.268e007 s^{14} + 2.374e008 s^{13} + 3.298e010 s^{12} + 2.731e011 s^{11} + 2.501e013 s^{10} + 1.601e014 s^9 + 9.858e015 s^8 + 4.717e016 s^7 + 1.993e018 s^6 + 6.768e018 s^5 + 1.943e020 s^4 + 4.214e020 s^3 + 7.164e021 s^2 + 7.65e021 s}$$

```
zeros18 =  
  
44.6612 +39.8118i  
44.6612 -39.8118i  
2.9652 +47.6003i  
2.9652 -47.6003i  
-0.1125 +45.7714i  
-0.1125 -45.7714i  
-0.1948 +35.2556i  
-0.1948 -35.2556i  
-0.9408 +22.3040i  
-0.9408 -22.3040i  
-0.2790 +18.6838i  
-0.2790 -18.6838i  
-0.4894 +13.6233i  
-0.4894 -13.6233i  
-0.3481 +10.1103i  
-0.3481 -10.1103i  
-1.0613
```

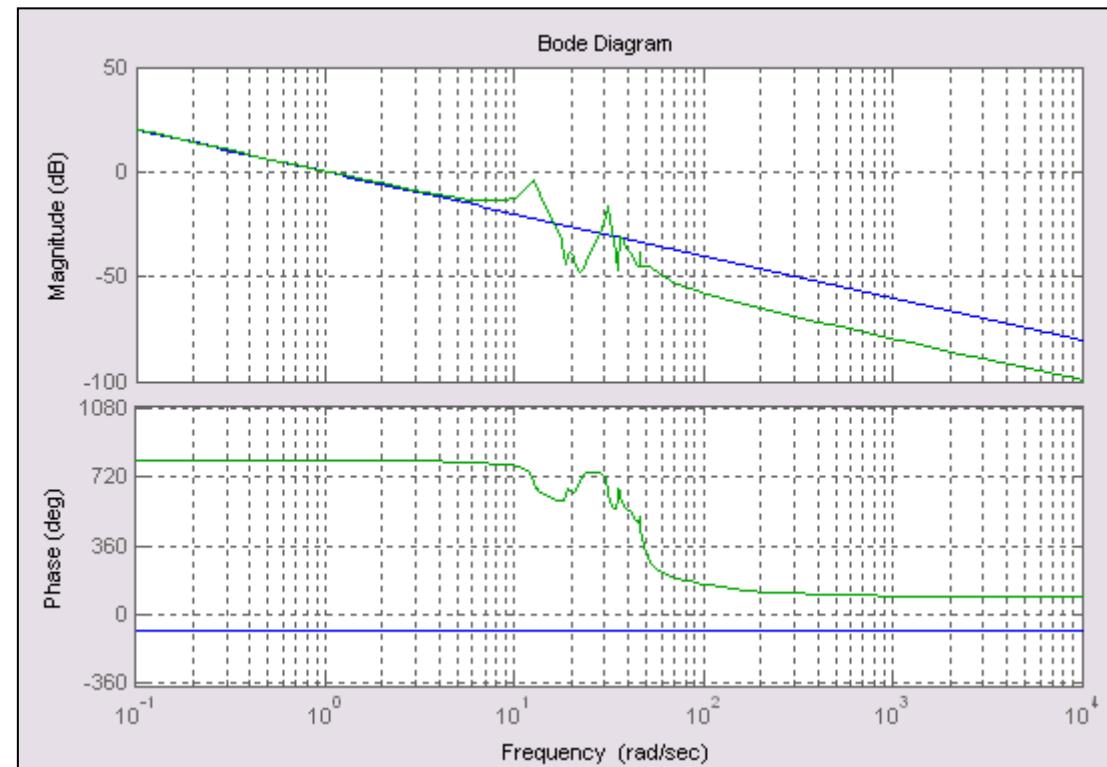
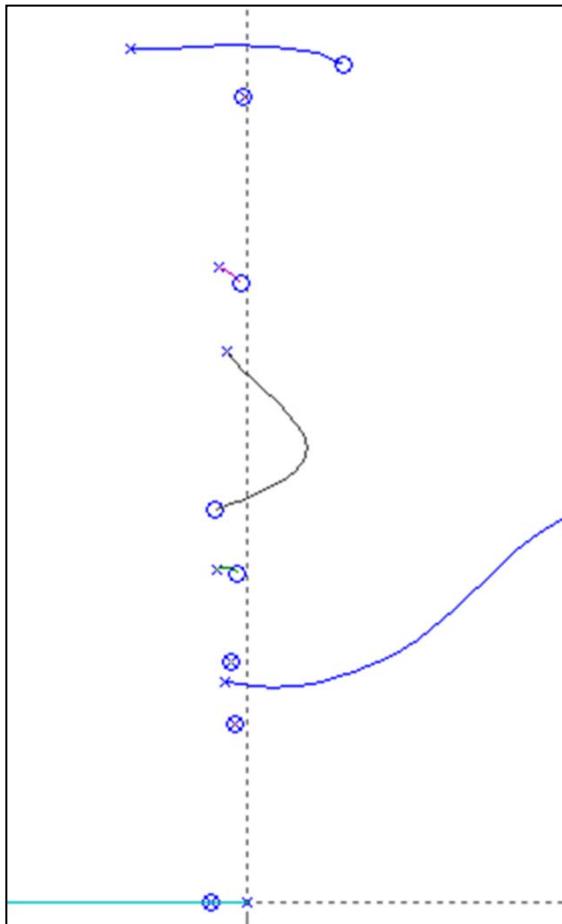
```
poles18 =  
  
0  
-3.5695 +48.5082i  
-3.5695 -48.5082i  
-0.0735 +45.8622i  
-0.0735 -45.8622i  
-0.8428 +36.1405i  
-0.8428 -36.1405i  
-0.5803 +31.3313i  
-0.5803 -31.3313i  
-0.9349 +18.9374i  
-0.9349 -18.9374i  
-0.4593 +13.6604i  
-0.4593 -13.6604i  
-0.6459 +12.5613i  
-0.6459 -12.5613i  
-0.3483 +10.0998i  
-0.3483 -10.0998i  
-1.1041
```





## Esempi

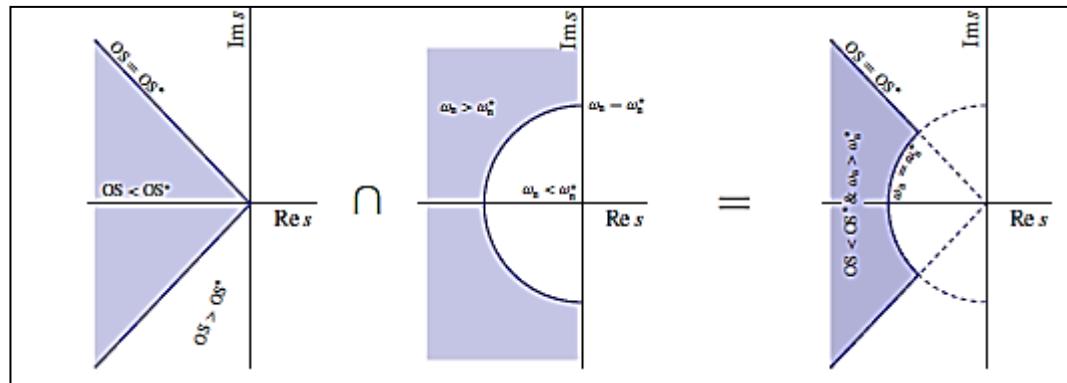
- Approssimazione Singolo Integratore (modello in velocità)  $G(s) = \frac{\dot{y}(s)}{u(s)} \simeq \frac{k}{s}$





# Criteri Generali di Sintesi

- Il Luogo delle Radici, nella Sintesi, fa riferimento a requisiti di progetto sulla risposta transitoria generata dai poli dominanti in anello chiuso.



- I requisiti di risposta transitoria si traslano naturalmente nella locazione appropriata dei poli in ciclo chiuso
- La locazione dei poli dominanti può essere definita in base a specifiche del progetto



## Luogo delle Radici non - Standard

- ❑ Cosa succede nel caso in cui si vuole tracciare l'andamento dei poli in anello chiuso al variare di un parametro che non è il guadagno di anello?

- **Esempio:**

$$G(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + 4s^2 + ks + 1}$$

- Come variano i poli del sistema  $G(s)$  al variare di  $\textcolor{red}{k}$  ?

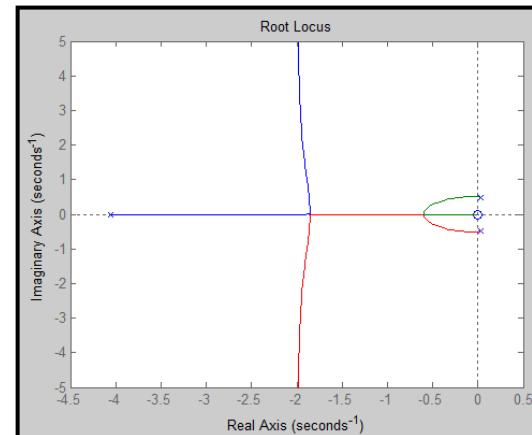
$$s^3 + 4s^2 + \textcolor{red}{k}s + 1 = 0 \quad \left( s^3 + 4s^2 + 1 \right) + \textcolor{red}{k}s = 0 \quad \frac{\left( s^3 + 4s^2 + 1 \right)}{\left( s^3 + 4s^2 + 1 \right)} + \frac{\textcolor{red}{k}s}{\left( s^3 + 4s^2 + 1 \right)} = 0$$

$$1 + \frac{\textcolor{red}{k}s}{\left( s^3 + 4s^2 + 1 \right)} = 0$$

- Tracciare il luogo delle radici per il nuovo sistema

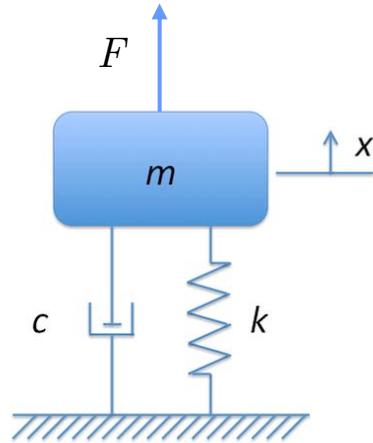
$$1 + \textcolor{red}{k}G_{ol}^{Eq}(s) = 0$$

$$G_{ol}^{Eq}(s) = \frac{s}{\left( s^3 + 4s^2 + 1 \right)}$$





## Luogo delle Radici non - Standard



$$\frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad c = \frac{F}{\dot{x}} = \frac{[N \cdot \text{sec}]}{[m]} \quad k = \frac{F}{x} = \frac{[N]}{[m]}$$

- Dati forniti:  $m = 1$ ;  $k = 1$ .
- Requisito di progetto:  $\exists c \mid \xi \geq 0.75$

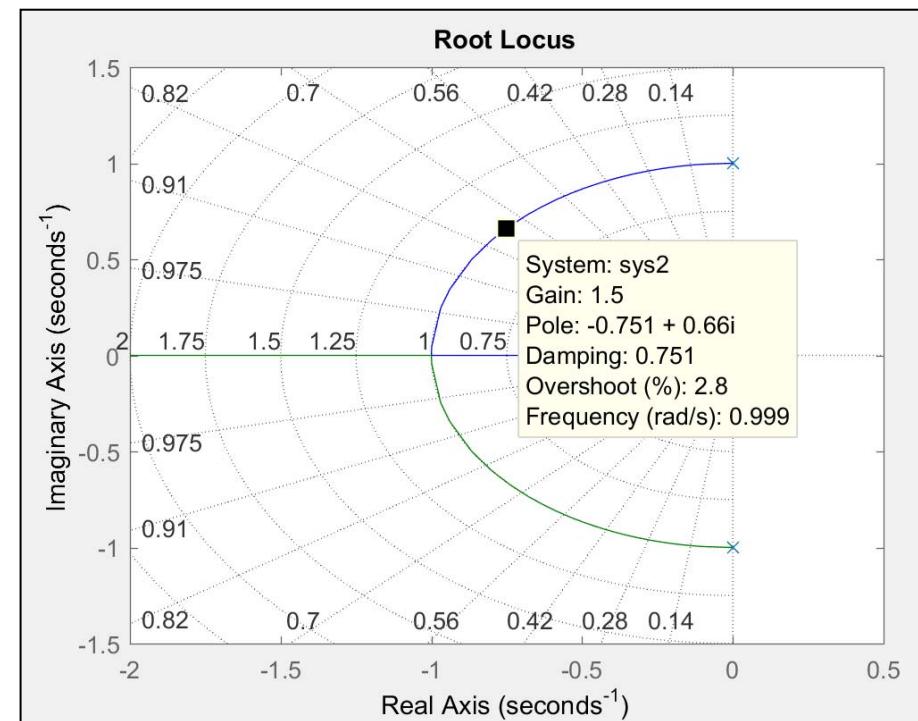
$$s^2 + cs + 1 = 0 \quad (s^2 + 1) + cs = 0$$

$$\frac{(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)} + \frac{cs}{(s^2 + 1)} = 1 + cG(s) = 0$$

$$G(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)}$$

$$p_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm j\sqrt{1 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

$$\xi \geq 0.75 \Rightarrow c \geq 1.5$$





## Luogo delle Radici non - Standard

- Supplier della molla dichiara che il materiale è soggetto a variazioni dovute alla temperatura.  
In particolare si ha che:

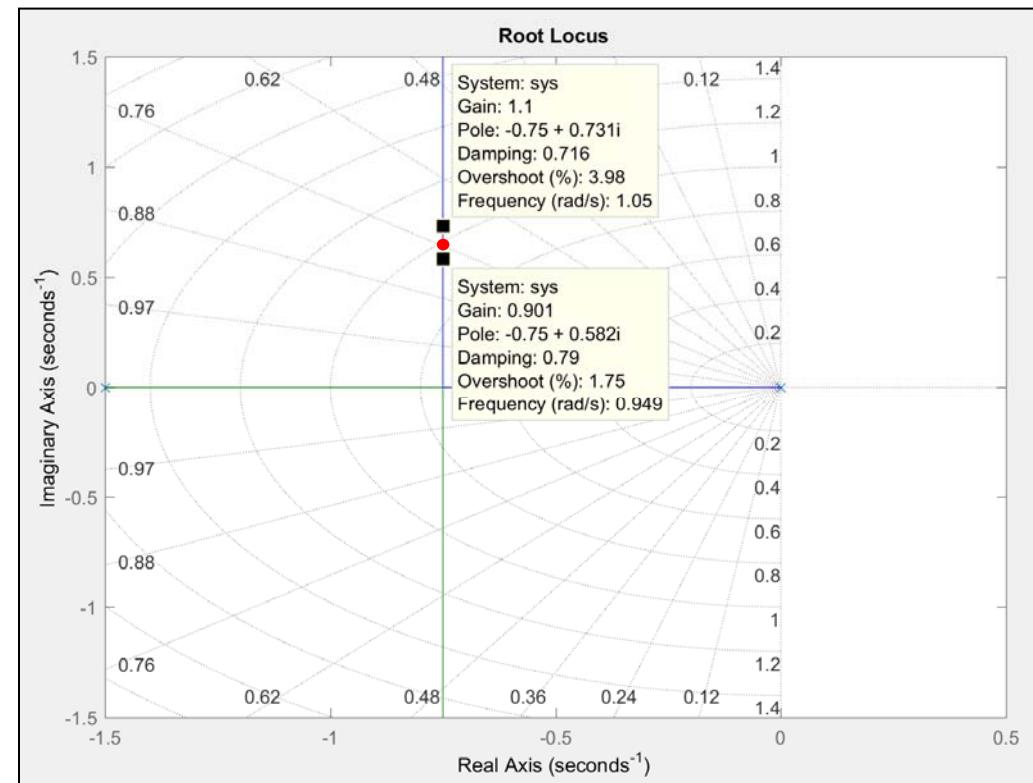
$$\Delta T \uparrow \Rightarrow 0.9k_{nom}, \Delta T \downarrow \Rightarrow 1.1k_{nom}$$

- Possiamo usare il Luogo delle Radici per valutare il progetto dello smorzatore?

$$s^2 + 1.5s + k = 0$$

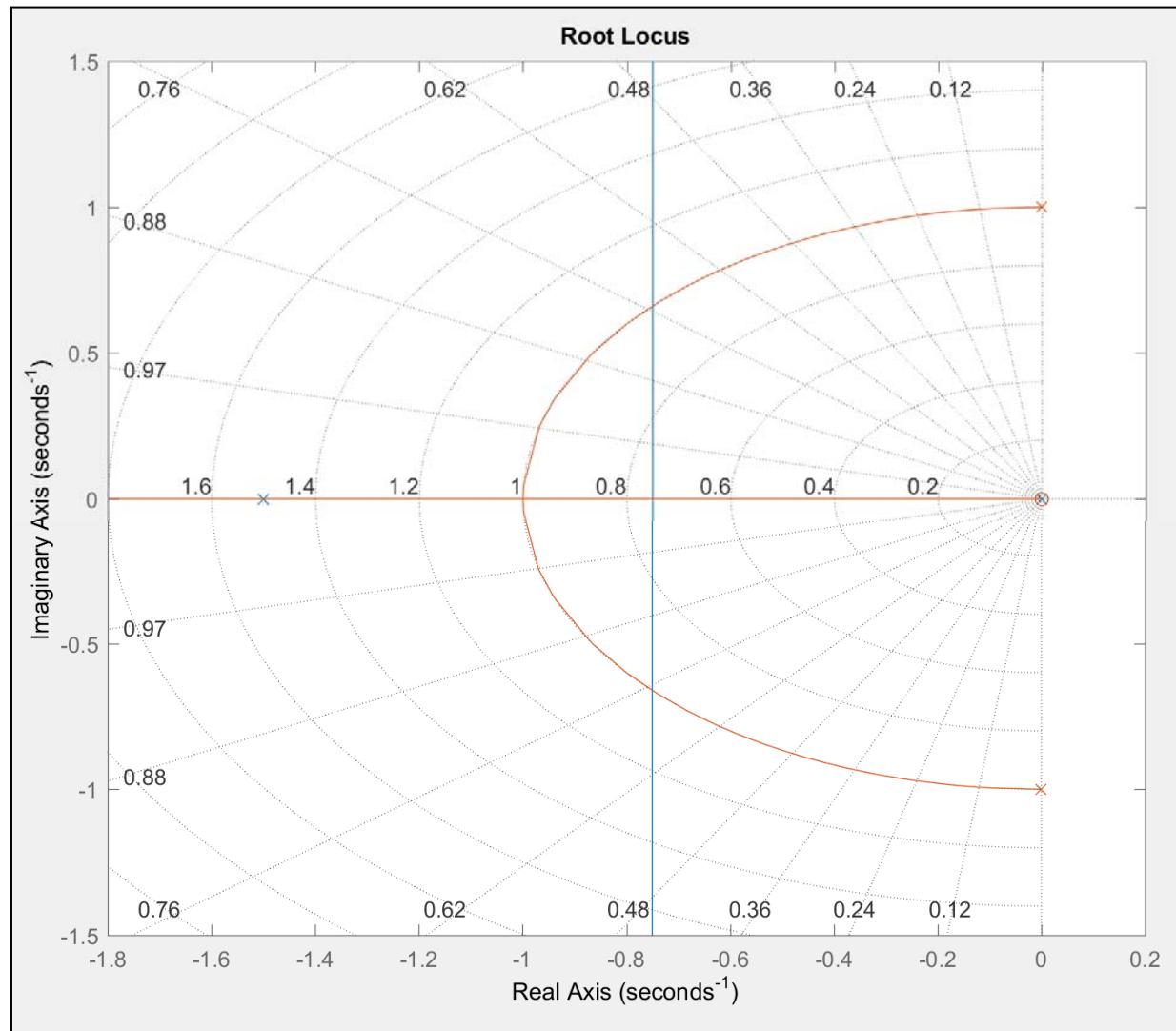
$$1 + kG(s) = 1 + \frac{k}{s^2 + 1.5s} = 0$$

- Il riscaldamento della molla garantisce le prestazioni dello smorzatore. Il raffreddamento no.
- Soluzione:
  - Restrizione uso in funzione della temperatura
  - Uso normale ma prestazioni degradate alla diminuzione della temperatura
  - Riprogettazione completa





# Luogo delle Radici non - Standard





## Luogo delle Radici Videos



- <https://www.youtube.com/watch?v=CRvVDoQJjYI&list=PLUMWjy5jgHK0iUaExESSY5-PYpTcoHE9z&index=7>
- <https://www.youtube.com/watch?v=eTVddYCeIKI&list=PLUMWjy5jgHK0iUaExESSY5-PYpTcoHE9z&index=8>
- [https://www.youtube.com/watch?v=jb\\_FiP5tKig](https://www.youtube.com/watch?v=jb_FiP5tKig)
- [https://www.youtube.com/watch?v=pG3\\_b7wuweQ&index=7&list=PLUMWjy5jgHK3-ca6GP6PL0AgcNGHqn33f](https://www.youtube.com/watch?v=pG3_b7wuweQ&index=7&list=PLUMWjy5jgHK3-ca6GP6PL0AgcNGHqn33f)
- <https://www.youtube.com/watch?v=WLBszzT0jp4&index=6&list=PLUMWjy5jgHK3-ca6GP6PL0AgcNGHqn33f>



# Dialettica

The root locus does not provide a closed loop transfer function.

The root locus is only good for find where the poles will be as ONLY a proportional gain is changed.

What systems use only a proportional gain? Only mechanical systems like a speed governor or some spring based hydraulic devices.

Teaching root locus is almost useless. There are many threads on YouTube that show how to calculate the root locus and various related items.

I once asked a college instructor why he taught the root locus. The answer is that is is part of the curriculum that was always taught.

I think learning root locus it is a waste of time.

What is important is knowing where the break away point is. After that the rest is useless.

Root locus could be useful to mechanical designers that need to make sure their speed governors or spring type hydraulic control devices will work.

However, after 30+ years of control I have yet to see where any mechanical engineer knows how to calculate an open loop transfer function.

Look at the videos on YouTube. They all assume one knows an open loop transfer function to work with. This is definitely NOT the case in real life.

The root locus is useless unless one first has an open loop transfer function. The root locus is useless when using modern controllers capable of PI, PD, PID or leadlag closed loop control.

I submit that colleges and universities are wasting students time and money learning about the root locus. There are better things to learn that make learning the root locus obsolete.

This is my finger in the eye of those who continue to waste time and money teaching root locus.

Don't bother to object unless you have a very good argument for root locus.

Examples of topics that we have included are non-linear dynamics, Lyapunov stability analysis, the matrix exponential, reachability and observability, and fundamental limits of performance and robustness. Topics that we have deemphasized include root locus techniques, lead/lag compensation and detailed rules for generating Bode and Nyquist plots by hand.

<https://www.youtube.com/watch?v=CRvVDoQjYI&list=PLUMWjy5jgHK3-ca6GP6PL0AgcNGhqn33f>



## CRITERIO DI NYQUIST – STABILITÀ RELATIVA

- Introduzione
- Criterio di Stabilità di Nyquist
- Stabilità in condizioni non nominali e Margini di Stabilità
- Casi Particolari
- Esempi ed Applicazioni



# Riferimenti

- Capitoli 10, 11 Testo di Bolzern
- Capitoli 4, 7, 9 Lewis (download)
- Capitolo 9 Murray (download)

Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1



Analisi 2

Sintesi Prelim.

Con. Avanzati

Con. Standard



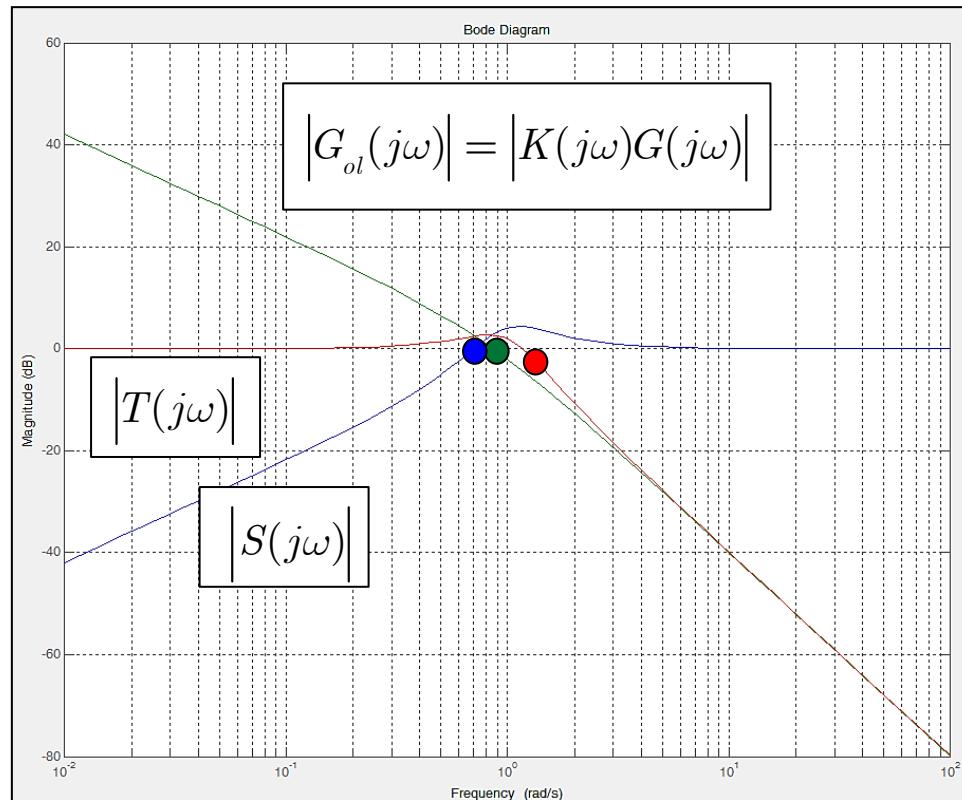
# Sommario Risposta in Frequenza

- Risposta transitoria e risposta a regime in ciclo chiuso mediante l'uso della risposta in frequenza in anello aperto

$$T(s) = \frac{G_{ol}(s)}{1 + G_{ol}(s)}$$

$$G_{ol}(s) = K(s)G(s), S(s) = \frac{1}{1 + G_{ol}(s)}$$

$\omega_{BW}$  Banda Passante in ciclo chiuso



$\omega_C$  Frequenza Approssimata di Attraversamento a 0 dB della  $G_{ol}$

$\omega_p$  Frequenza di Attraversamento a 0 dB della sensitività  $S$

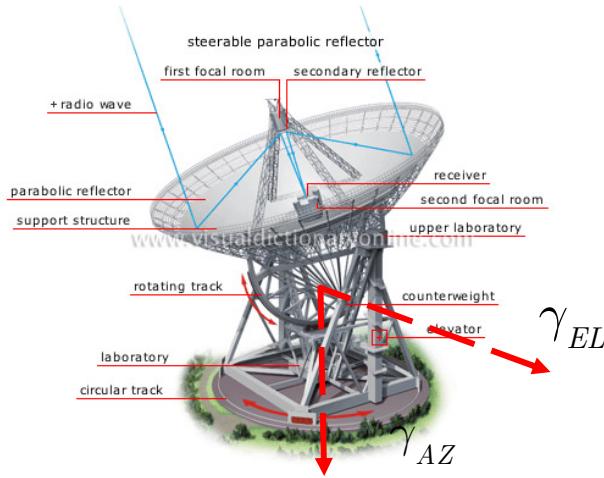
$\omega_{BW}$  Definisce la velocità di risposta in ciclo chiuso ed è inversamente proporzionale allo smorzamento

$$M_R = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \propto M_p = e^{-\left(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}$$
$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} < \omega_n$$

- Le specifiche di risposta a regime in ciclo chiuso si possono evincere dalla risposta in frequenza in anello aperto (guadagno a frequenza nulla)



# Motivazione



- Grado di Libertà di elevazione, senza disturbo

$$J_{EL} \ddot{\gamma}_{EL} + c_{EL} \dot{\gamma}_{EL} = m_{EL} u_{EL} \quad k_0 = \frac{m_{EL}}{J_{EL}}; p = \frac{c_{EL}}{J_{EL}}; k_s = \frac{m_{EL}}{c_{EL}}$$

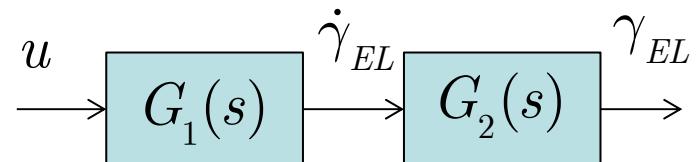
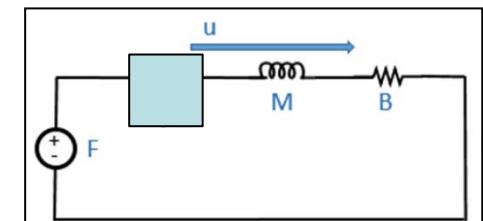
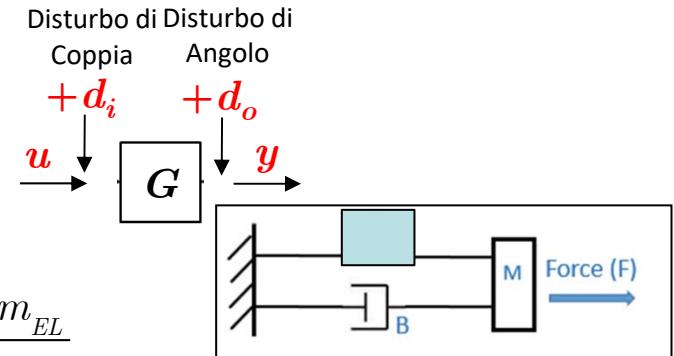
$$\frac{\gamma_{EL}(s)}{u_{EL}(s)} = \frac{m_{EL}}{s(J_{EL}s + c_{EL})} = \frac{k_0}{s(s + p)}$$

$$\frac{\gamma_{EL}(s)}{u_{EL}(s)} = G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{k_0}{(s + p)} \cdot \frac{1}{s}$$

□ Modello di corpo rigido  $I\ddot{\gamma} + C\dot{\gamma} = M$

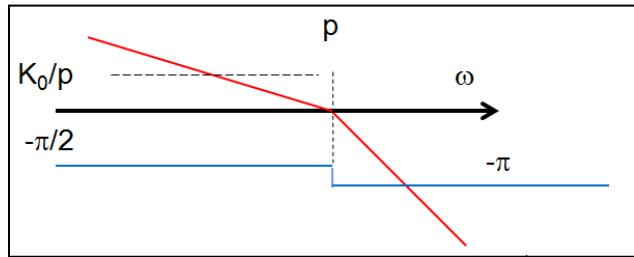
$$\begin{bmatrix} J_{EL} & 0 \\ 0 & J_{AZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\gamma}_{EL} \\ \ddot{\gamma}_{AZ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{EL} & 0 \\ 0 & c_{AZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_{EL} \\ \dot{\gamma}_{AZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{EL} & 0 \\ 0 & m_{AZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{EL} \\ u_{AZ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{EL} \\ d_{AZ} \end{bmatrix}$$

- Il disturbo può essere inserito in forma diversa

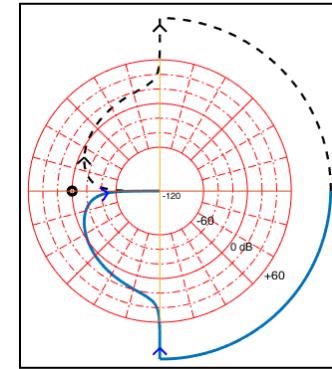




# Motivazione



$$\frac{\gamma_{EL}(s)}{u(s)} = \frac{10}{(s+2)} \cdot \frac{1}{s}$$

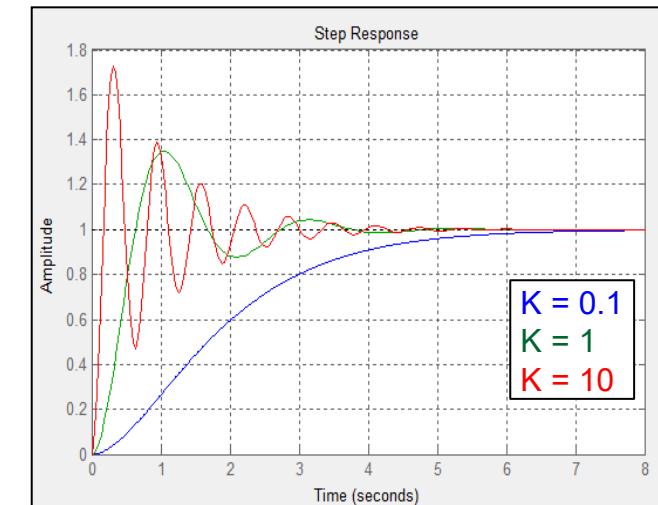
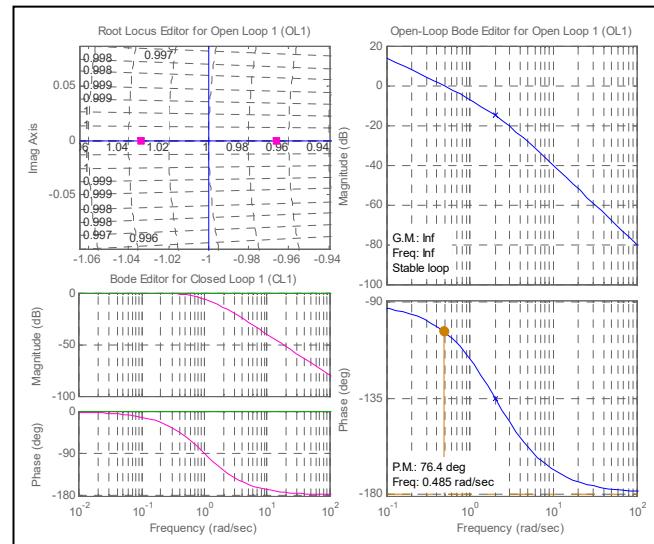


- Problema:** Supponiamo i seguenti requisiti di progetto: stabilità in ciclo chiuso, errore nullo a regime in posizione, no overshoot

$$\left| y(s) = \frac{G_{ol}(s)}{1 + G_{ol}(s)} u(s) \right| \leq \left| \frac{G_{ol}(s)}{1 + G_{ol}(s)} \right| \cdot |u(s)| < \infty \Rightarrow \left| \frac{G_{ol}(s)}{1 + G_{ol}(s)} \right| < \infty$$

$$\Rightarrow G_{ol}(s) \neq -1$$

- Controllore Proporzionale:**
- Teoricamente il guadagno di anello può essere aumentato arbitrariamente per avere una maggiore velocità di risposta





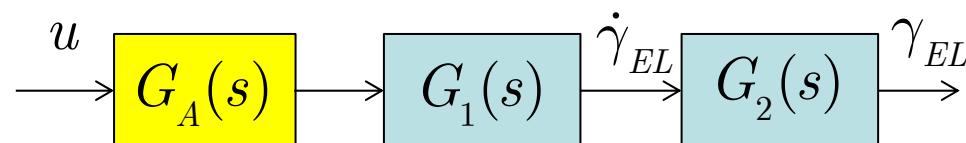
## Motivazione

- Il sistema in ciclo chiuso è sempre asintoticamente stabile, nell'esempio numerico:

$$G_{CL}(s) = \frac{1}{(s+1)^2}, k_p = 0.1$$

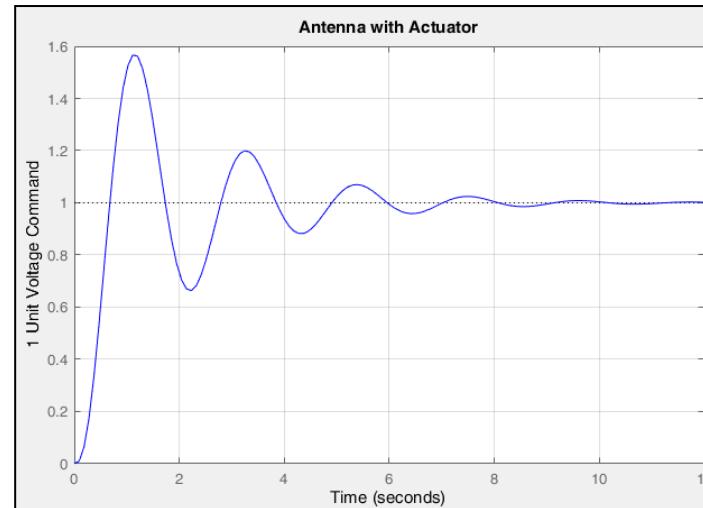
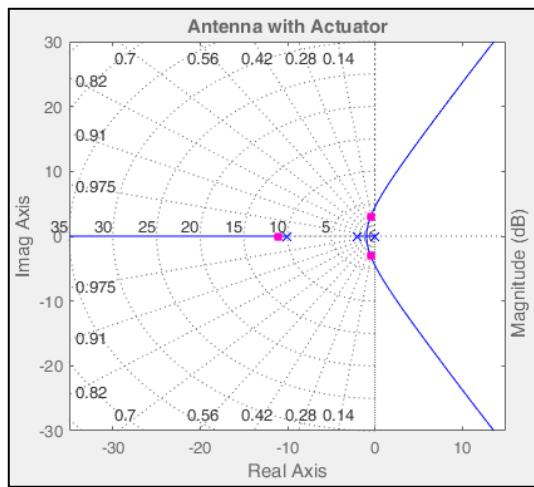
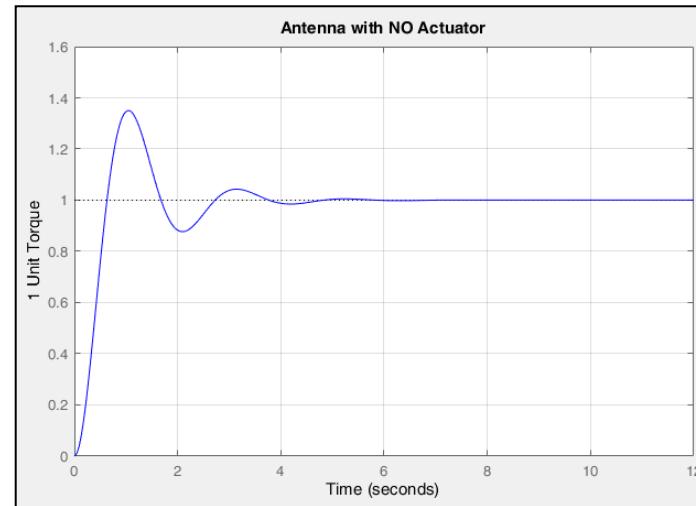
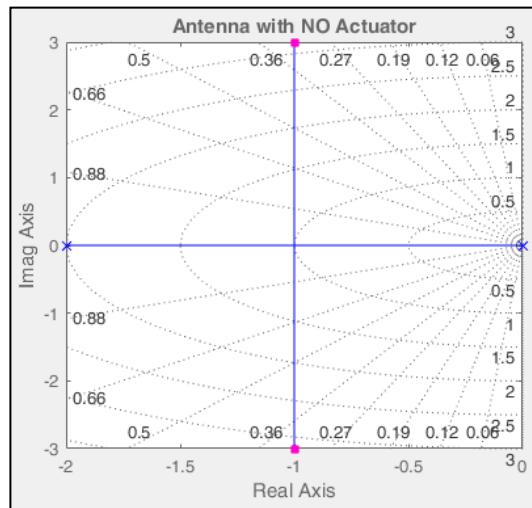
- Un modello più preciso può includere, per esempio, la dinamica dell'attuatore di potenza, ovvero il motore elettrico che muove l'antenna (Si tralascia per adesso l'effetto della flessibilità, la dinamica del sensore di posizione ed altri errori parametrici relativi a dimensioni, materiali, ecc.):
  - Supponiamo che tutto il sistema di attuazione sia descritto da un comportamento non oscillatorio con costante di tempo di 0.1 secondi e guadagno statico unitario:

$$\frac{\gamma_{EL}(s)}{u(s)} = \frac{10}{(s+2)} \cdot \frac{1}{s} \frac{10}{(s+10)}$$





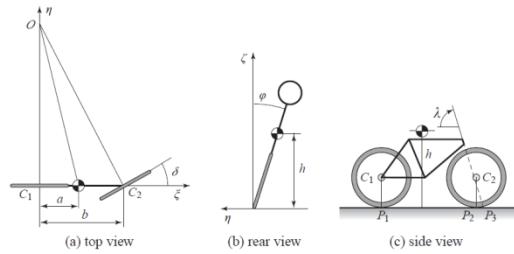
# Motivazione



Domanda: è possibile prevedere a priori l'effetto sulla stabilità dovuto a dinamiche non modellate?



# Motivazione



$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} \approx \frac{av_0}{bh} \frac{s + \frac{v_0}{a}}{s^2 - \frac{g}{h}}$$

$$m = 80Kg$$

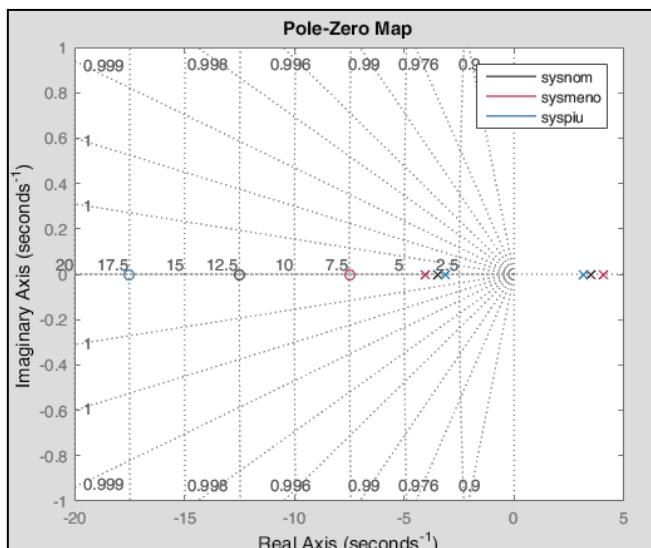
$$a = 0.4\text{ m}$$

$$b = 1.02\text{ m}$$

$$h = [0.6 - \textcolor{red}{0.8} - 1.0]\text{ m}$$

$$v_0 = [3 - \textcolor{red}{5} - 7]\text{ m / sec}$$

$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} \in \left\{ 1.9608 \frac{s + 7.5}{s^2 - 16.33} \quad \textcolor{red}{2.451} \frac{s + 12.5}{s^2 - 12.2625} \quad 6.827 \frac{s + 17.5}{s^2 - 9.8} \right\}$$



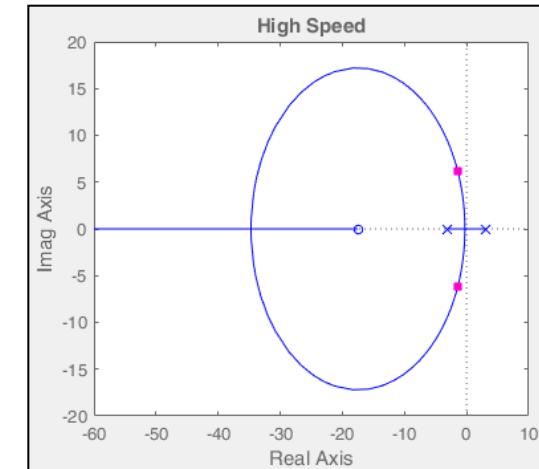
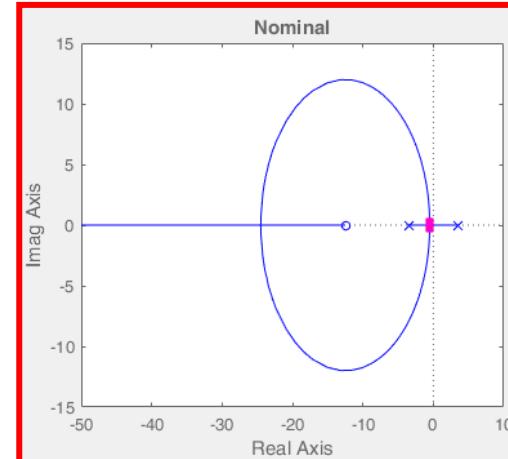
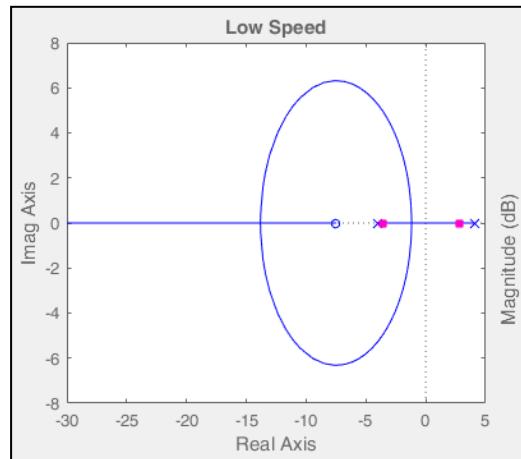
- Il sistema nominale in anello chiuso richiede un guadagno di 0.40025 per la stabilità asintotica.
- Che succede nel caso di variazioni di velocità e/o altri parametri fisici?



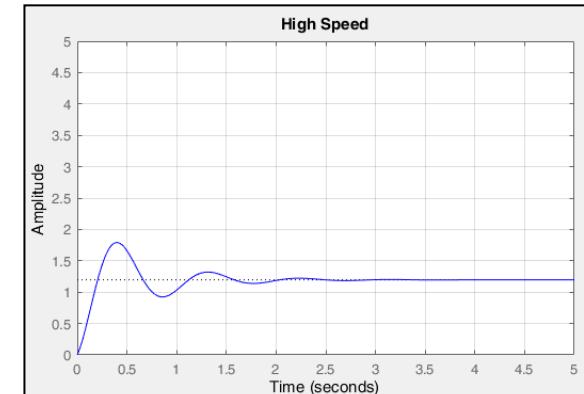
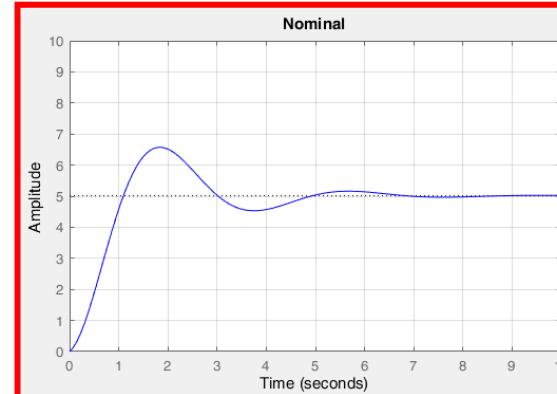
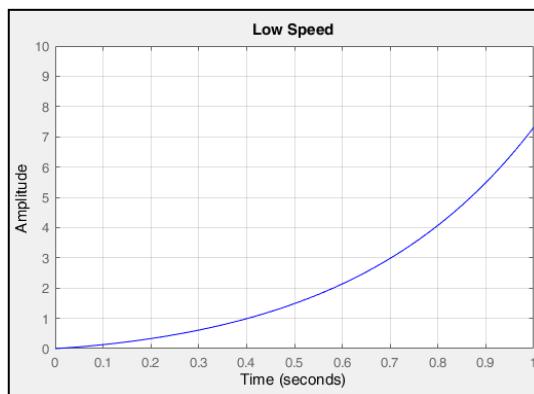
## Motivazione

$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} \in \left\{ 1.9608 \frac{s + 7.5}{s^2 - 16.33} \quad \textcolor{red}{2.451} \frac{s + 12.5}{s^2 - 12.2625} \quad 6.827 \frac{s + 17.5}{s^2 - 9.8} \right\}$$

- Il sistema nominale in anello chiuso richiede un guadagno di 0.40025 per la stabilità asintotica.
  - Luogo delle Radici nel caso di guadagno pari a 0.5.



- Risposta al gradino nel caso di guadagno pari a 0.5.



Domanda: è possibile prevedere a priori l'effetto sulla stabilità dovuto ad errori parametrici?



## Introduzione



- Il Criterio di Nyquist (Bell Labs.) permette di calcolare la stabilità in anello chiuso di un sistema lineare dalla conoscenza della Risposta in Frequenza della FdT di Anello (derivata, in particolare, mediante il diagramma polare).
- Il Criterio ha una rappresentazione grafica (per sistemi SISO) che può essere usata come strumento qualitativo per l'analisi della stabilità in anello chiuso e per la sintesi di controllori stabilizzanti.
- Altri metodi che forniscono la stessa informazione (Routh, Luogo delle Radici, Autovalori di  $A$ , diagramma a blocchi,...)
- **Il Criterio ha una applicabilità FONDAMENTALE per sistemi che presentano incertezze ed errori di modello.**
- La derivazione del criterio è basata sul “Principio dell’Argomento di Cauchy” e sulle proprietà riguardanti funzioni analitiche di variabile complessa (olomorfe, mappe conformi).
  - <https://www.youtube.com/watch?v=sof3meN96MA>



# Introduzione

- Consideriamo una funzione di variabile complessa  $F(s)$ , con  $s$  definita in un open set complesso  $\mathcal{D}$ :

$$s = \sigma$$

$$F(s) =$$

- **Ipotesi:** sia  $F(s)$  continuamente differentiabile in tutto il piano complesso tranne per un numero finito di singolarità (poli), ovvero sia  $F(s)$  rappresentata da una serie convergente in tutto il piano complesso tranne per un numero finito di singolarità.

- Data una funzione di variabile complessa  $F(s)$ :

$$s = \sigma + j\omega \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$$

$$F(s) = u(\sigma, \omega) + jv(\sigma, \omega)$$

- $s = z$  si dice zero di  $F(s)$  se  $F(z) = 0$
- $s = p$  si dice polo di  $F(s)$  se  $1/F(p) = 0$

$$\frac{dF(s)}{ds} \Rightarrow \left\{ \frac{\partial u}{\partial \sigma}, \frac{\partial u}{\partial \omega}, \frac{\partial v}{\partial \sigma}, \frac{\partial v}{\partial \omega} \right\}$$

- **Teorema di Cauchy (Principio dell'Argomento):** Si consideri una **funzione razionale** di variabile complessa  $F(s)$  avente  $m$  zeri ed  $n$  poli. Si definisca un **contorno chiuso  $\Gamma$  arbitrario** che racchiuda l'insieme dei poli e degli zeri e all'interno del quale la  $F(s)$  sia analitica. Sotto queste ipotesi, percorrendo  $\Gamma$  in **senso orario**,  $F(s)$  mappa  $\Gamma$  in una **curva chiusa  $\Omega$**  che gira intorno all'origine in **senso orario** un numero di volte pari a  $N = m-n$ .

$$F(s) = k \frac{\prod_j^m (s + z_j)}{\prod_i^n (s + p_i)}$$

[Teorema di Cauchy - Wiki](#)



# Introduzione

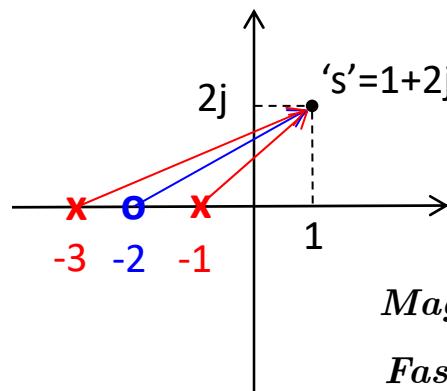
$$F(s) = k \frac{\prod_j^m (s + z_j)}{\prod_i^n (s + p_i)}$$

1. Zeri di  $F(s)$   $\prod_j^m (s + z_j) = 0$

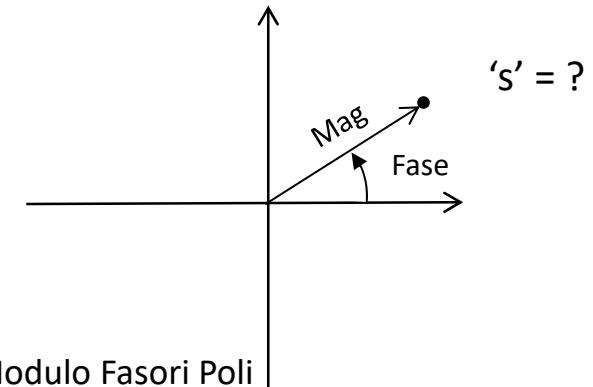
2. Poli di  $F(s)$   $\prod_i^n (s + p_i) = 0$

3. Zeri di  $1 + F(s)$   $\prod_i^n (s + p_i) + k \cdot \prod_j^m (s + z_j) = 0$

- Concetto di Fasore  $F(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$



$F(s)$

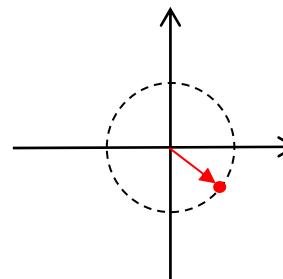


$Mag = \text{Prodotto Modulo Fasori Zeri} / \text{Prodotto Modulo Fasori Poli}$

$Fase = (\text{Somma Fase Fasori Zeri}) - (\text{Somma Fase Fasori Poli})$

$$M = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{20}} = 0.285$$

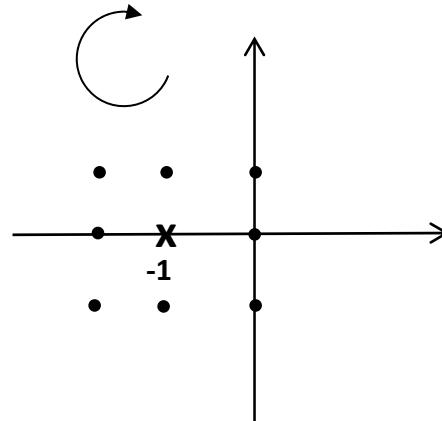
$$\begin{aligned} F &= \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) - \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0.5) = \\ &= 33.7^\circ - 45^\circ - 26.56^\circ = -37.86^\circ \end{aligned}$$



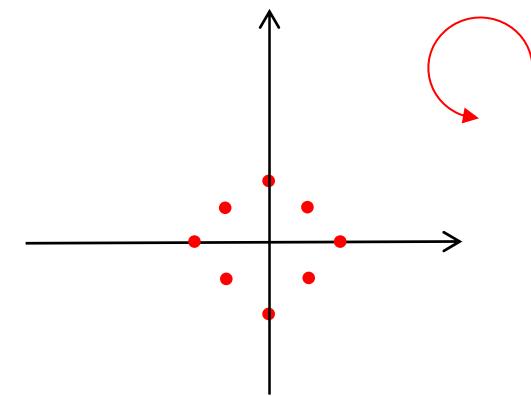


## Introduzione

- Esempio  $F(s) = \frac{1}{(s + 1)}$ 
  1. Creare un percorso chiuso in senso orario che racchiuda tutte le singolarità ( in questo caso il polo a -1 )
  2. Mappare tutti i punti del percorso sul piano complesso con  $F(s)$



-2  
- 2 + j  
- 1 + j  
+ j  
0  
- j  
-1 - j  
-2 - j



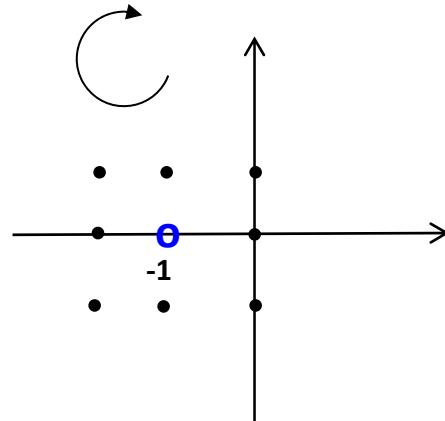
-1  
- 0.5 - 0.5j  
- j  
0.5 – 0.5j  
1  
0.5 + 0.5j  
+j  
-0.5 + 0.5j

- Si ottiene una curva chiusa che gira intorno all'origine un numero di volte pari a -1

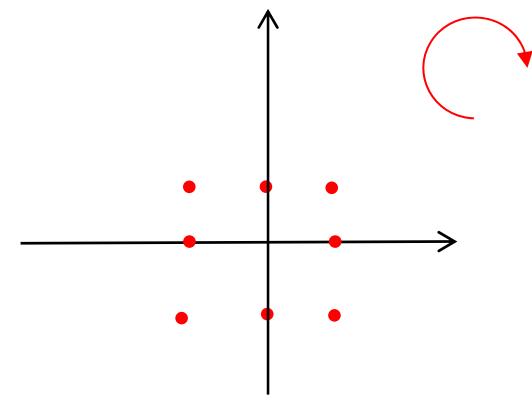


## Introduzione

- Esempio  $F(s) = s + 1$ 
  1. Creare un percorso chiuso in senso orario che racchiuda tutte le singolarità ( in questo caso lo zero a -1 )
  2. Mappare tutti i punti del percorso sul piano complesso con  $F(s)$



-2  
 $-2 + j$   
 $-1 + j$   
 $+ j$   
0  
 $- j$   
 $-1 - j$   
 $-2 - j$



-1  
 $-1 - j$   
 $j$   
 $1 + j$   
 $1$   
 $1 - j$   
 $- j$   
 $-1 - j$

- Si ottiene una curva chiusa che gira intorno all'origine un numero di volte pari a 1

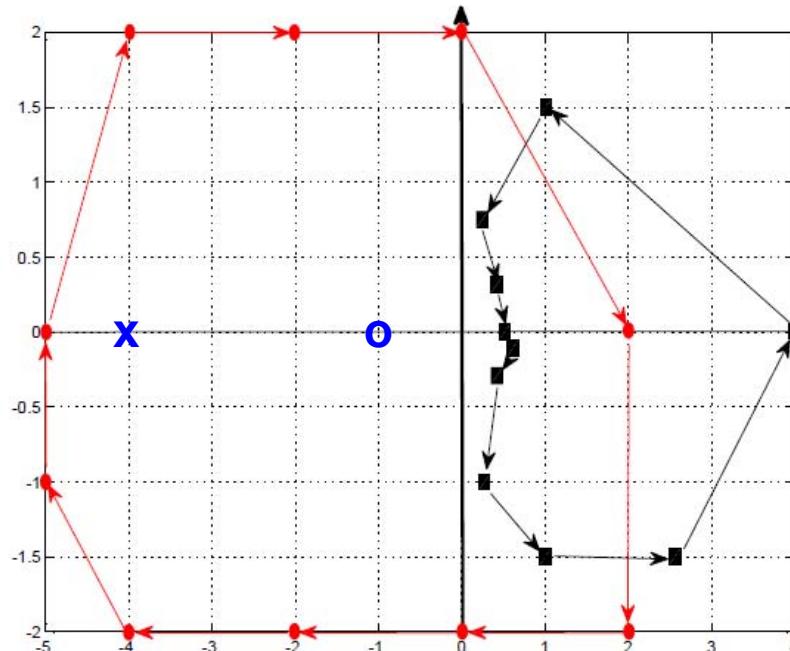


# Introduzione

- Esempio  $F(s) = \frac{s+1}{s+4}$

□ **Per il Teorema di Cauchy:** percorrendo  $\Gamma$  (rosso) in senso orario,  $F(s)$  mappa  $\Gamma$  in una curva chiusa  $\Omega$  (nero) che gira intorno all'origine in senso orario un numero di volte pari a  $N = 1 - 1 = 0$ . (Nota il senso di  $\Omega$  è dato da Matlab..)

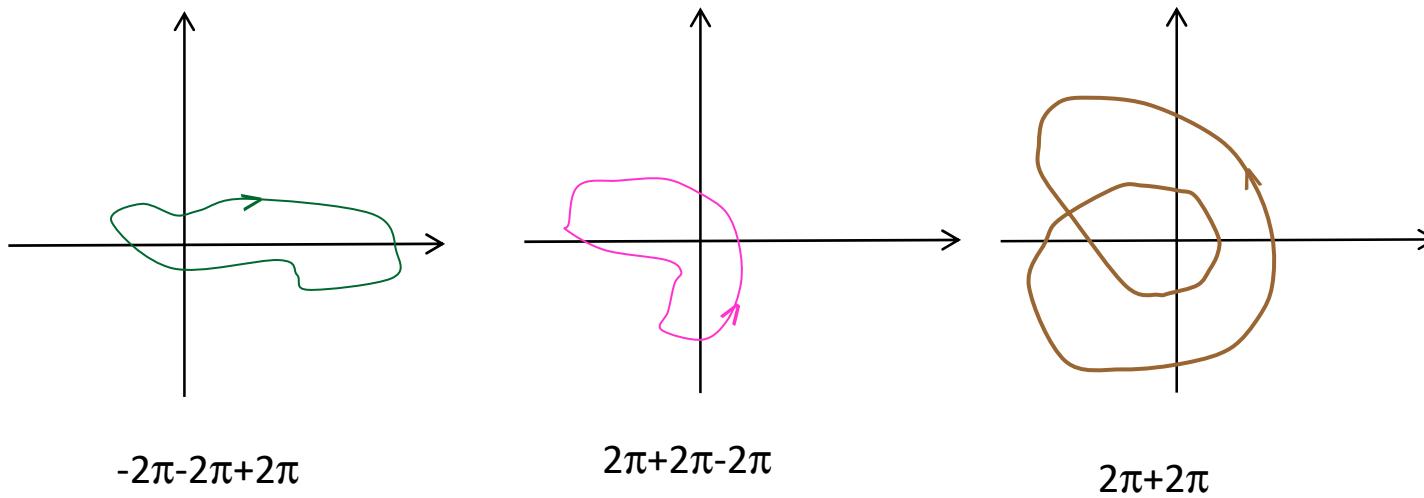
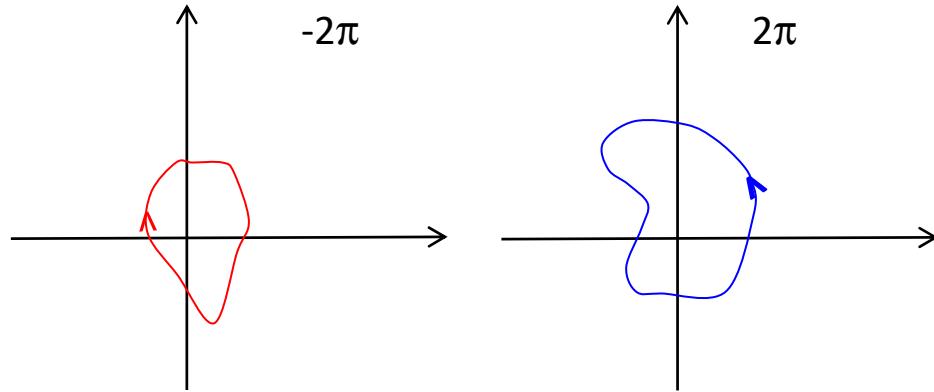
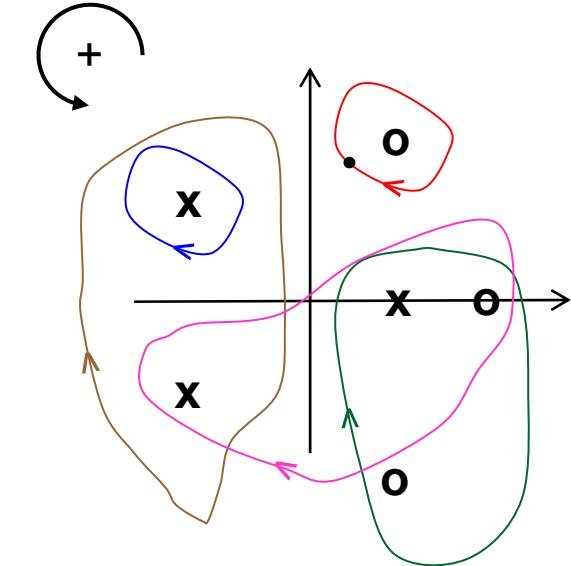
$z =$   
-5.0000 + 0.0000i  
-4.0000 - 2.0000i  
-2.0000 - 2.0000i  
0.0000 - 2.0000i  
2.0000 + 0.0000i  
2.0000 + 2.0000i  
0.0000 + 2.0000i  
-2.0000 + 2.0000i  
-4.0000 + 2.0000i  
-5.0000 + 1.0000i



$zz =$   
4.0000 + 0.0000i  
1.0000 - 1.5000i  
0.2500 - 0.7500i  
0.4000 - 0.3000i  
0.5000 + 0.0000i  
0.5500 + 0.1500i  
0.4000 + 0.3000i  
0.2500 + 0.7500i  
1.0000 + 1.5000i  
2.5000 + 1.5000i



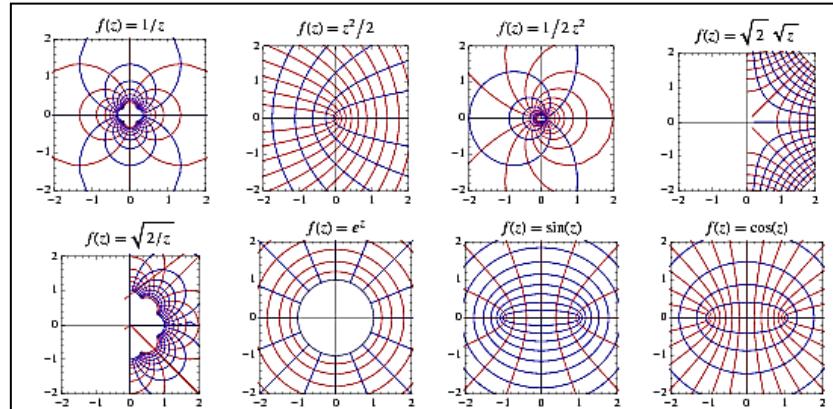
# Introduzione





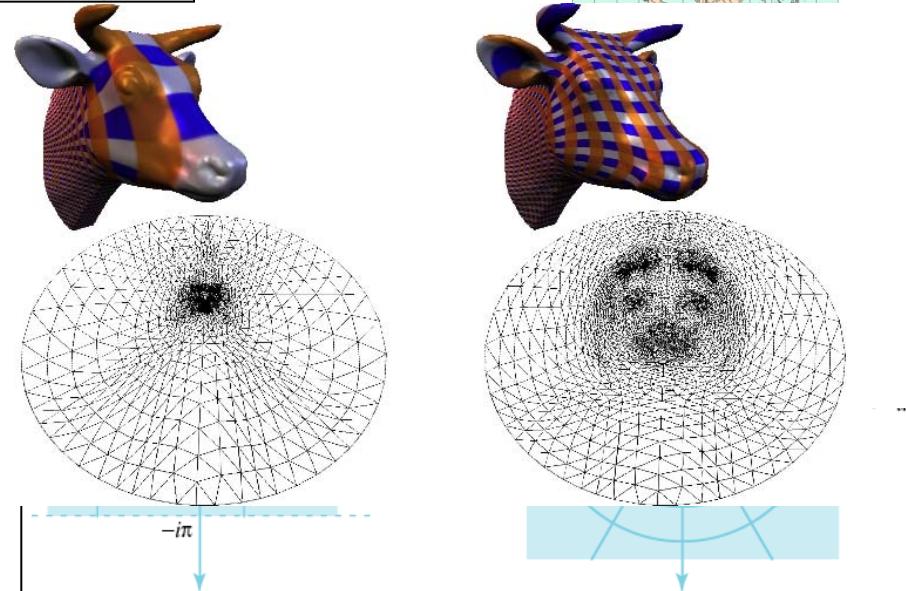
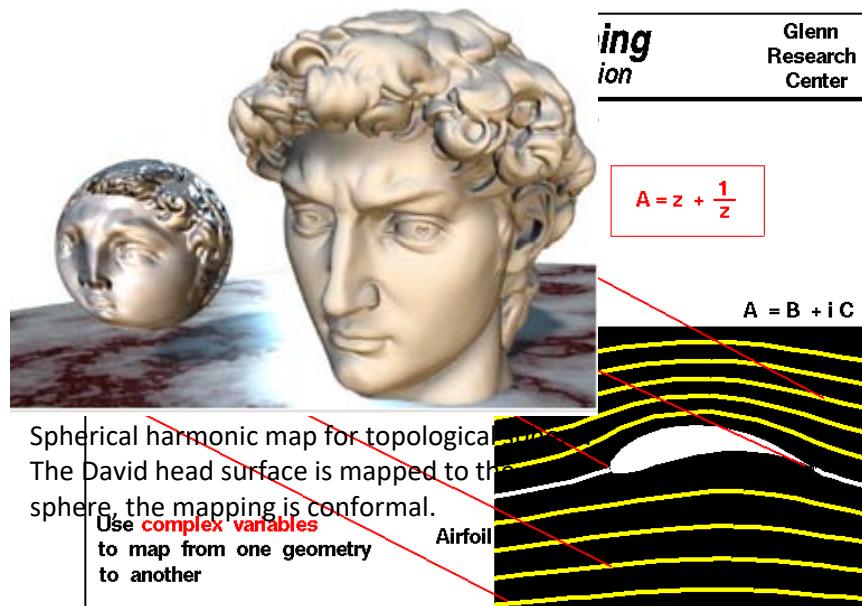
# Introduzione

- Trasformazioni Conformi (Trasformazioni che mantengono gli angoli localmente), attraverso una mappatura mediante una funzione analitica con derivata non nulla nel contorno  $\Gamma$



$$z = \sigma + j\omega \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$$

Conformal Map Projections





## Criterio di Stabilità di Nyquist

- L'uso del teorema precedente ai fini dell'enunciato del criterio di Nyquist richiede una scelta opportuna di  $\Gamma$ , e  $F(s)$ , che producono una particolare  $\Omega$

### □ Scelta della Funzione Analitica $F(s)$

- Poiché lo scopo è quello di studiare la stabilità del sistema in ciclo chiuso, si sceglie come  $F(s)$ :

$$F(s) = 1 + K(s)G(s) = 1 + G_{OL}(s)$$

Nel caso di retroazione unitaria:

$$G_{OL}(s) = K(s)G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, G_{CL}(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)} = \frac{N(s)}{N(s) + D(s)}$$

Per cui:

$$F(s) = \frac{N(s) + D(s)}{D(s)}$$

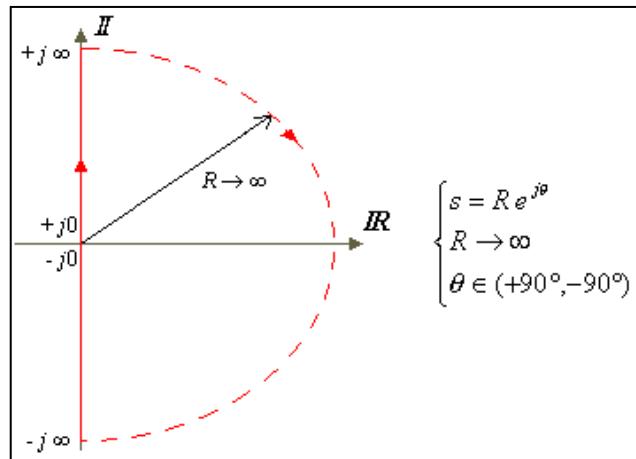
- **Gli zeri di  $F(s)$  sono i poli in ciclo chiuso mentre i poli di  $F(s)$  coincidono con i poli a ciclo aperto; per garantire la stabilità del sistema a ciclo chiuso gli zeri di  $F(s)$  devono quindi essere a parte reale strettamente negativa**



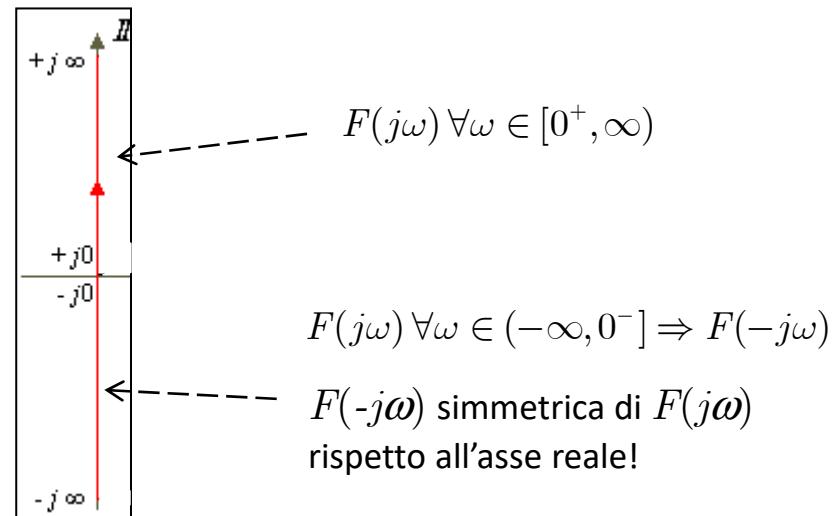
# Criterio di Stabilità di Nyquist

## □ Scelta del Contorno chiuso $\Gamma$

- Il contorno deve racchiudere la parte del piano complesso critica per la stabilità, quindi tutto il semipiano di parte reale positiva inclusivo dell'asse Immaginario



- Posto  $s = j\omega$  con  $\omega$  che va da  $-\infty$  a  $+\infty$  si ha:

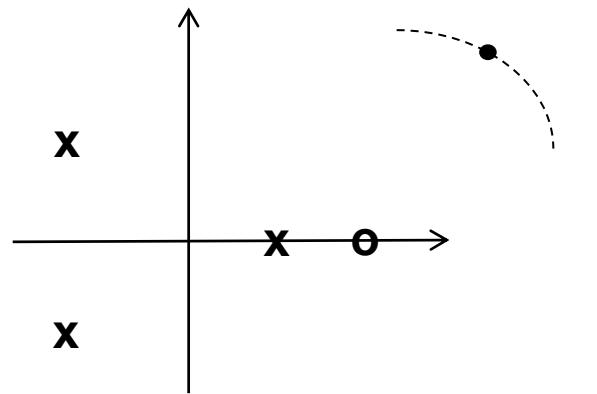




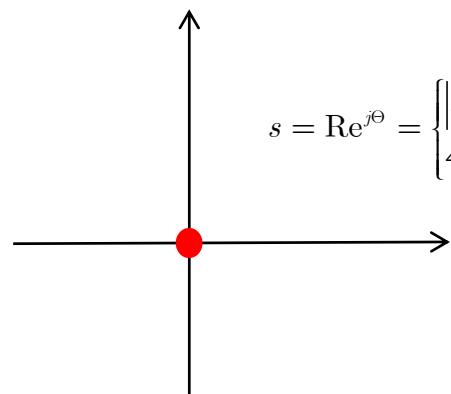
## Criterio di Stabilità di Nyquist

2. Quale è la mappa del punto all'infinito  $s = Re^{j\Theta}$ ? (sistemi strettamente propri e propri)

- Sistema strettamente proprio



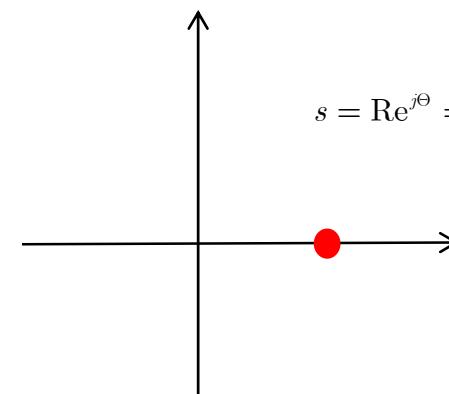
$$s = Re^{j\Theta} = \begin{cases} |s| \propto 0 \\ \angle \rightarrow 0 \end{cases} \text{ Irrilevante}$$



- Sistema proprio



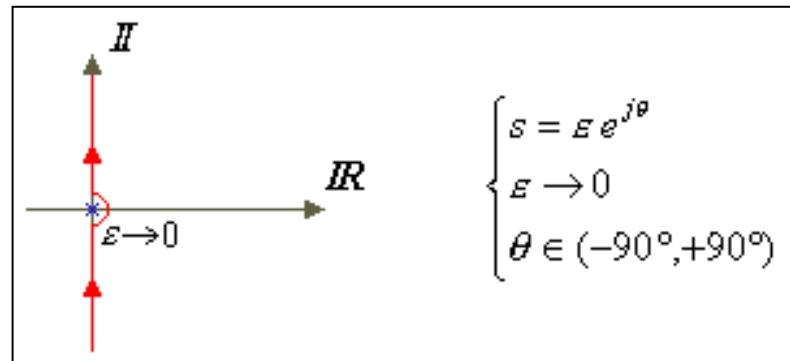
$$s = Re^{j\Theta} = \begin{cases} |s| \propto 1 \\ \angle \rightarrow 0 \end{cases}$$



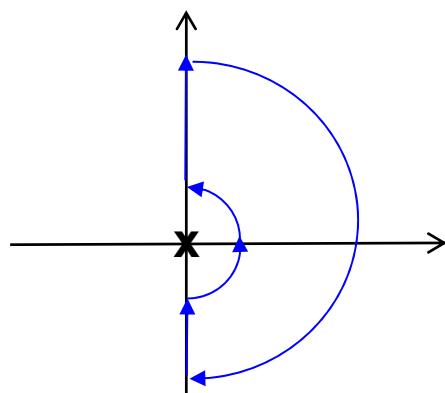


## Criterio di Stabilità di Nyquist

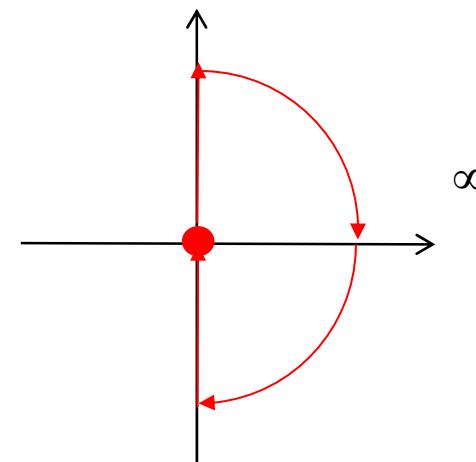
- Nel caso di punti singolari sull'asse immaginario si considerano delle semicirconferenze di raggio  $\varepsilon$  e centro in poli e zeri immaginari della  $F(s)$  con  $\varepsilon \rightarrow 0$



- La procedura vale anche se circondiamo la singolarità dalla sinistra (test con un singolo integratore)
- Nel caso di zeri sull'asse immaginario, il problema non si pone in quanto il modulo del fasore è zero!!



$$Z = N + P = 0$$





# Criterio di Stabilità di Nyquist

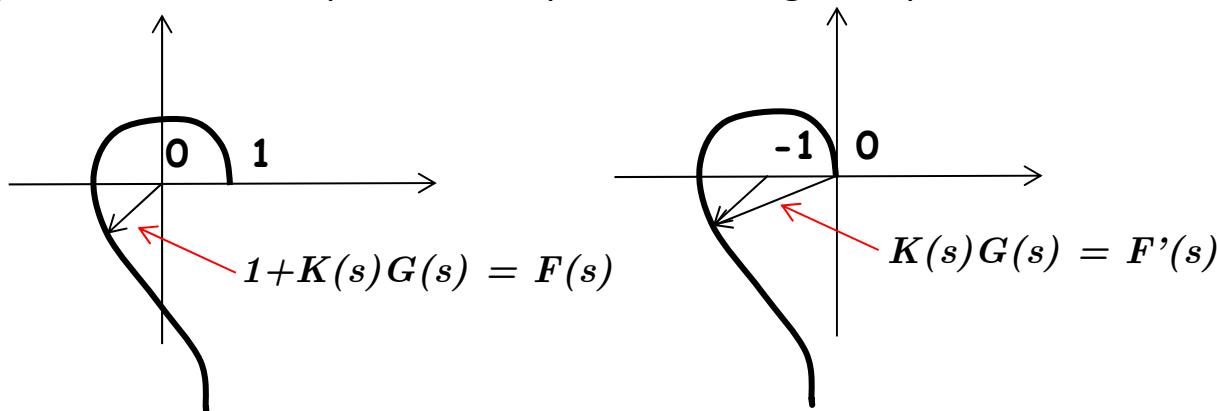
**Nota:**

- se uno degli zeri di  $F(s) \in \Gamma$  il sistema è instabile in ciclo chiuso;
- se uno dei poli di  $F(s) \in \Gamma$  il sistema è instabile in ciclo aperto.

□ Per l'applicazione del Criterio di Nyquist la funzione che viene mappata dal Principio dell'Argomento non è  $F(s)$  ma  $F'(s)$  data da uno shift dell'origine da  $(0, 0)$  a  $(-1, 0)$

$$F'(s) = F(s) - 1 = G(s)K(s) = G_{OL}(s)$$

□ La mappatura di  $F'(s)$  su  $\Gamma$  produce quindi una curva chiusa curva  $\Omega$  che gira eventualmente intorno al punto  $(-1, 0)$ , chiamato punto critico e non intorno all'origine. Si ottiene semplicemente spostando l'origine al punto  $-1$



```
sys = tf([1 3 5 7], [2 4 6 8 2])
```



## Criterio di Stabilità di Nyquist

### Enunciato del Criterio di Nyquist:

Data una funzione di variabile complessa  $F'(s)$  definita come:

$$F'(s) = F(s) - 1 = G(s)K(s) = G_{OL}(s)$$

Quando  $s$  segue la curva chiusa  $\Gamma_N$  (contorno di Nyquist) in senso orario per  $\omega = [-\infty, +\infty]$ ,  $F'(s)$  viene mappata in una curva chiusa  $\Omega_N$  che gira intorno al punto  $(-1, 0)$  un numero di volte  $N$  pari a  $N = Z - P$ , in senso orario.

Dove:

- $Z$  è il numero di poli in ciclo chiuso raccolti dentro  $\Gamma_N$  (instabili)
- $P$  è il numero di poli in ciclo aperto raccolti dentro  $\Gamma_N$  (instabili).

- La curva  $\Omega_N$  che si ricava con la scelta fatta per  $\Gamma_N$  e  $F'(s)$  è il diagramma polare per  $\omega \in (-\infty, +\infty)$  della FdT in Anello Aperto (Diagramma di Nyquist). Dall'esame del comportamento di quest'ultimo rispetto al punto  $(-1, 0)$  si ricava il valore di  $N$  e, quindi, di  $Z$ .  $Z = N + P$  è quindi la relazione che fornisce se e quanti sono i poli instabili a ciclo chiuso.

### Enunciato Originale, (Nyquist 1932)

Un sistema in ciclo chiuso è asintoticamente stabile se e solo se il diagramma di Nyquist non gira intorno a  $(-1, 0)$  quando non sono presenti poli instabili in anello aperto, cioè:

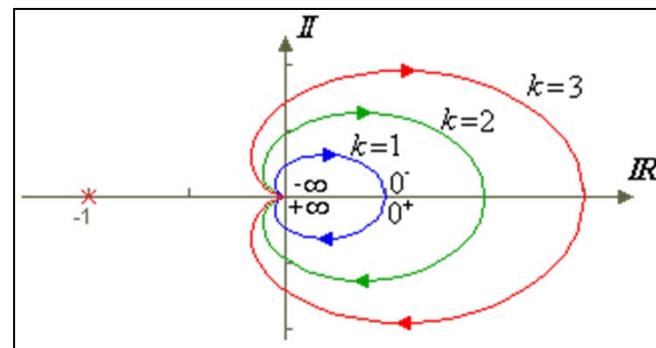
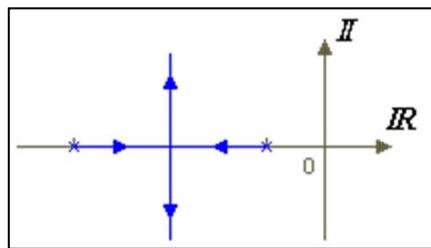
$$P = 0 \text{ e } Z = N + P = 0$$



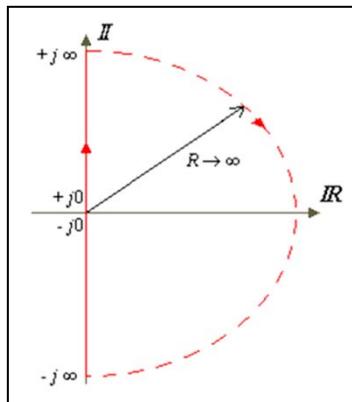
## Criterio di Stabilità di Nyquist

- **Esempio:** Consideriamo un sistema asintoticamente stabile (formalmente una FdT di anello)

$$K(s) \cdot G(s) = \frac{k}{(s + P_1)(s + P_2)}$$



- Essendo la FdT di anello asintoticamente stabile,  $P = 0$ .



- Percorrendo  $\Gamma$  per  $\omega \in (-\infty, +\infty)$ , anche al crescere di  $k$ ,  $N = 0$ , da cui  $Z = N + P = 0$  ed il sistema il ciclo chiuso ha 0 poli instabili, ovvero è asintoticamente stabile.



# Criterio di Stabilità di Nyquist

## Nyquist Stability Criterion Gui

Choose a system,  $L(s)$

Built-in Systems

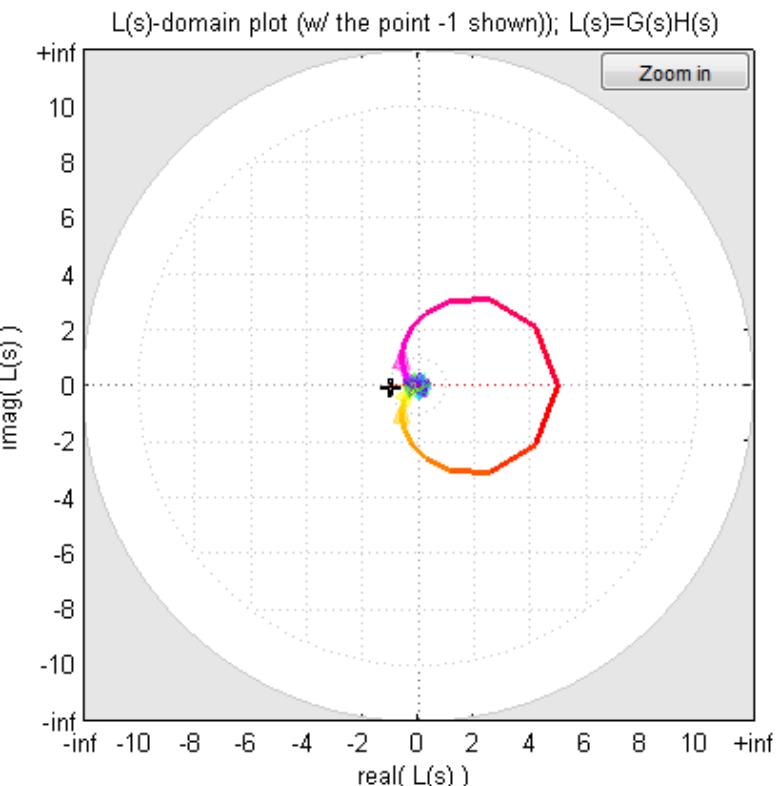
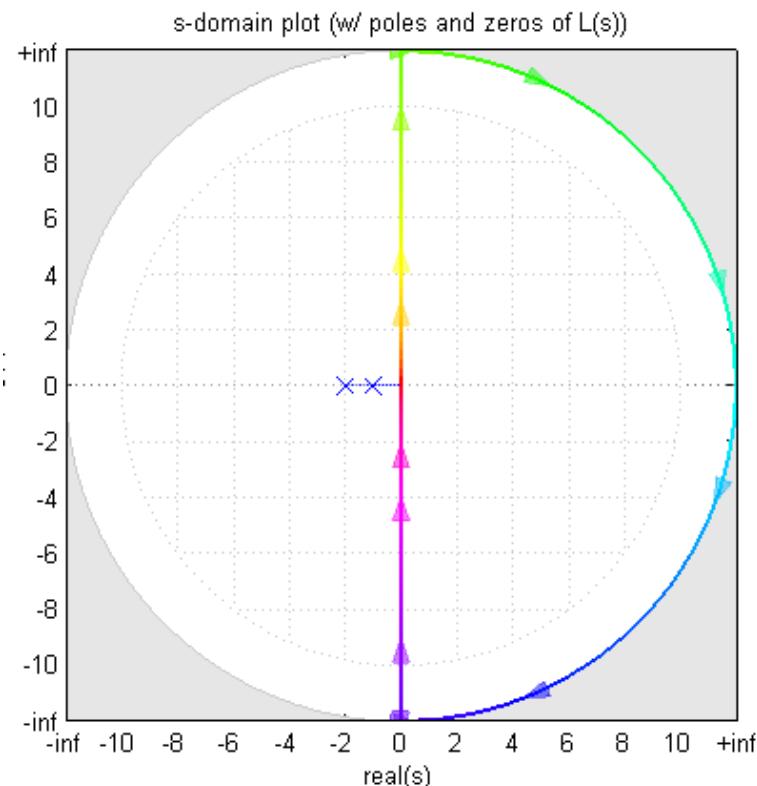
sys1

? Limitations ?

Web Resource

### Transfer Function

$$L(s) = \frac{10}{s^2 + 3s + 2}$$



Path in s-domain

Circle ( $r=5$ )  Nyquist Path

Draw Path

Start Slow Pause Clear

### Explanation

The open-loop transfer function,  $L(s)$ , has  $P=0$  pole(s) in the RHP.

The s-domain path encircles the origin  $N=0$  time(s) in a CW direction.

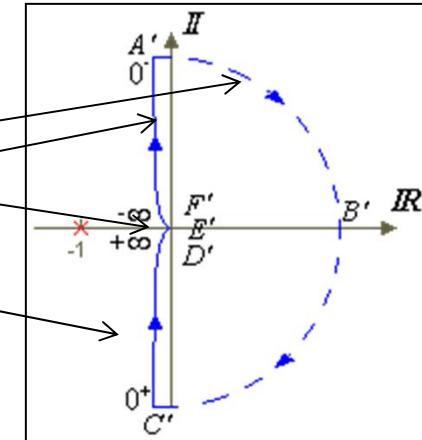
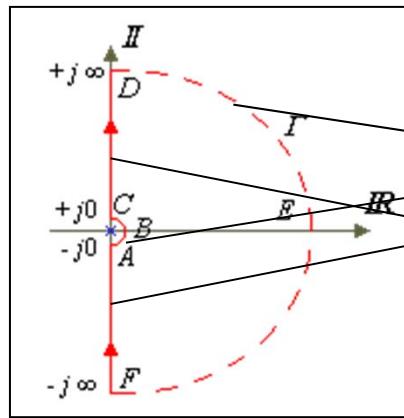
Therefore the closed loop transfer function has  $Z=N+P=0$  pole(s) in the RHP (0 zero(s) of c.e. in RHP).

The system is stable.



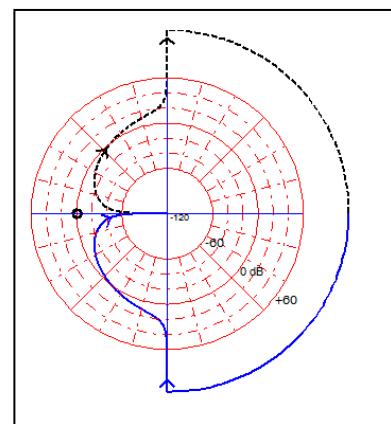
# Criterio di Stabilità di Nyquist

□ Esempio:  $K(s)G(s) = \frac{k}{s(s + P)}$  Essendo la FdT di anello stabile,  $P = 0$ .



- $w = (0^+, +\infty)$ , diagramma polare
- $w = (-\infty, 0^-)$ , diagramma polare a frequenze negative
- $w = (0^-, 0^+)$ , Semicerchio
- $w = (+\infty, -\infty)$ , Semicerchio

$$\begin{cases} s = \varepsilon e^{j\theta} \\ \varepsilon \rightarrow 0 \\ \theta \in (-90^\circ, +90^\circ) \end{cases}$$

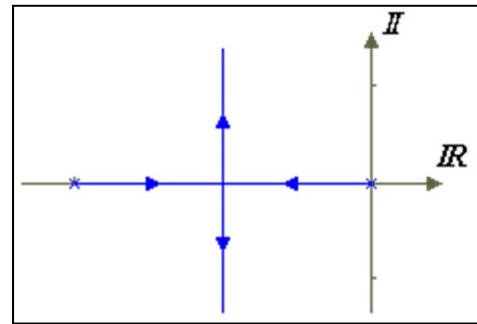


$$\begin{cases} s = R e^{j\theta} \\ R \rightarrow \infty \\ \theta \in (+90^\circ, -90^\circ) \end{cases}$$



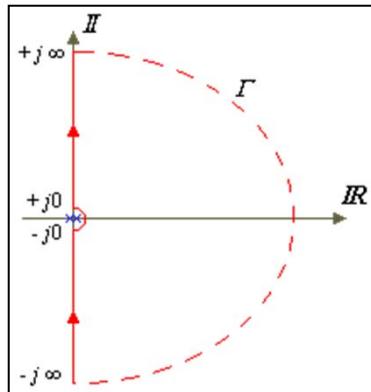
# Criterio di Stabilità di Nyquist

- Il sistema in ciclo chiuso è sempre asintoticamente stabile in quanto:



$$Z = N + P = 0 + 0$$

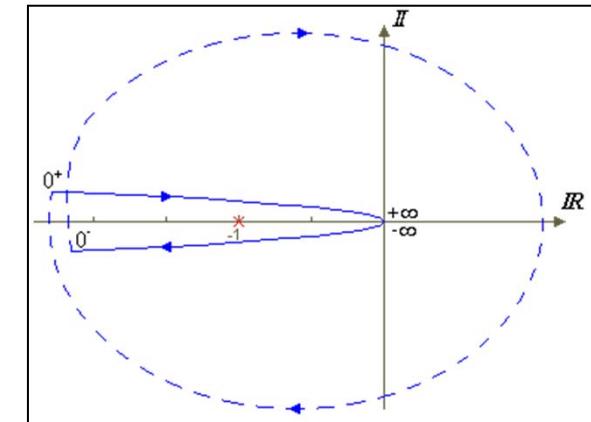
□ Esempio:  $K(s)G(s) = \frac{k}{s^2(s + P)}$



$$|K(s)G(s)| \rightarrow \infty$$

$$\angle(K(s)G(s)) = \angle \frac{k}{\varepsilon^2 \cdot e^{j2\theta}} = \frac{k}{\varepsilon^2} e^{-j2\theta}$$

$\angle(K(s)G(s))$  va da  $+180^\circ$  a  $-180^\circ$



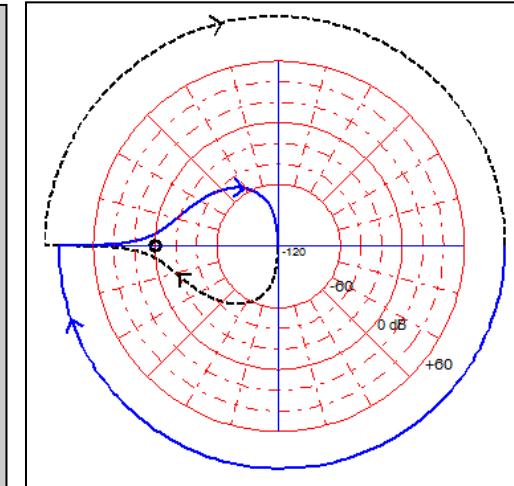
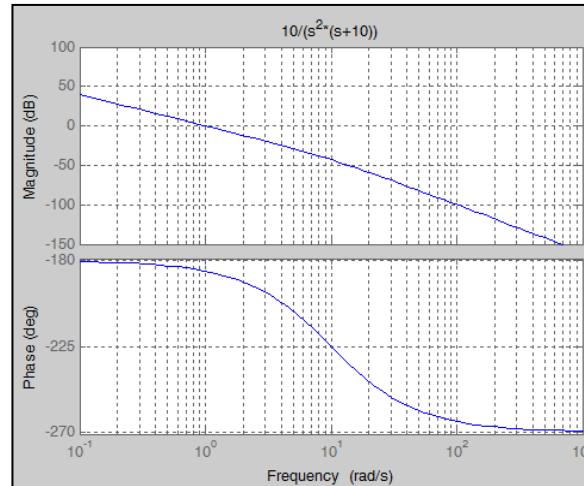
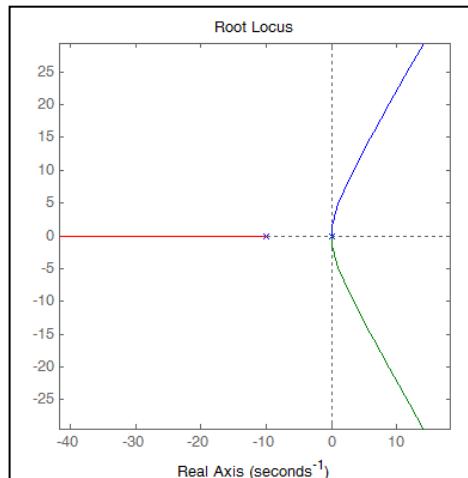


# Criterio di Stabilità di Nyquist

- In questo caso,  $N = 2$  (il diagramma gira intorno al punto  $(-1, 0)$  due volte in senso orario). Per cui:

$$Z = N + P = 2 + 0 = 2$$

- il sistema in ciclo chiuso risulta instabile (due poli instabili in ciclo chiuso)



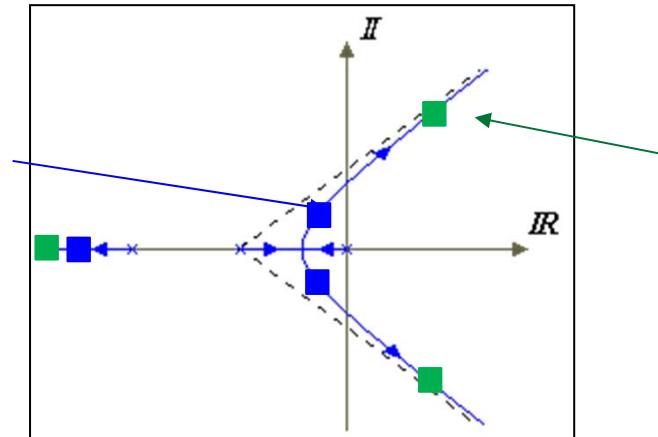
```
sys=10/(s^2*(s+10));nyqlog(sys)
```



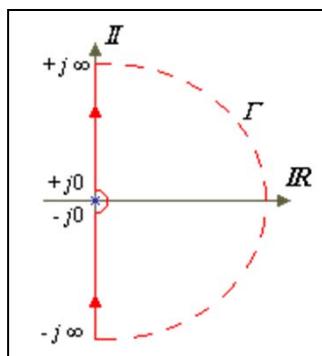
# Criterio di Stabilità di Nyquist

□ Esempio:  $K(s)G(s) = \frac{k}{s(s + P_1)(s + P_2)}$   $K > 0$

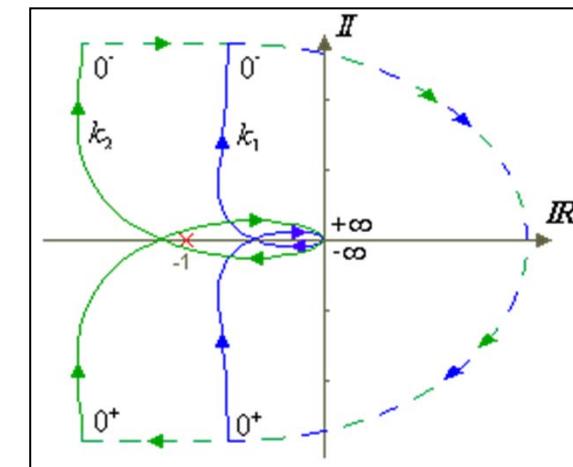
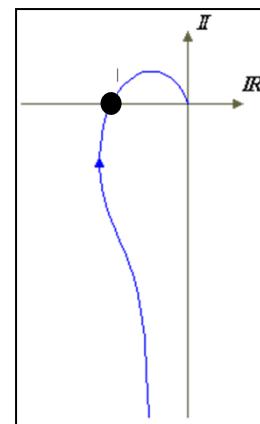
$k_1 < k_{CR}$ ,  $Z = N+P = 0+0 = 0$   
Sistema in Ciclo Chiuso  
asintoticamente stabile



$k_2 > k_{CR}$ ,  $Z = N+P = 2+0 = 2$   
Sistema in Ciclo Chiuso  
instabile



$$\begin{cases} \omega = \sqrt[3]{P_1 P_2} \\ \text{Re}[G(j\omega)] = -k \end{cases}$$



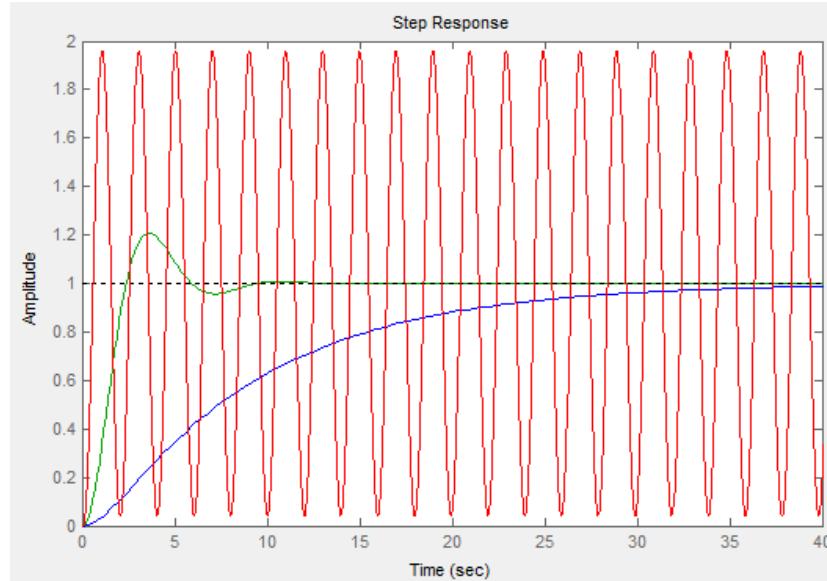


# Criterio di Stabilità di Nyquist

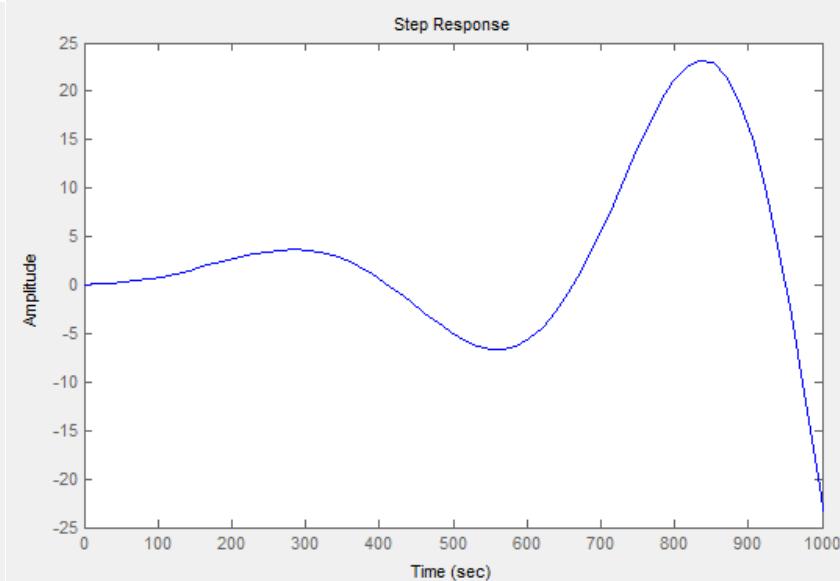
□ Esempio:  $K(s)G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+10)}$ ;  $\frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{k}{s^3 + 11s^2 + 10s + k}$

|            |           |          |
|------------|-----------|----------|
| <b>1</b>   | <b>10</b> | <b>0</b> |
| 11         | k         | 0        |
| (110-k)/11 | 0         |          |
| k          |           |          |

$$0 < k < 110$$



**K = 1, 10, 110**

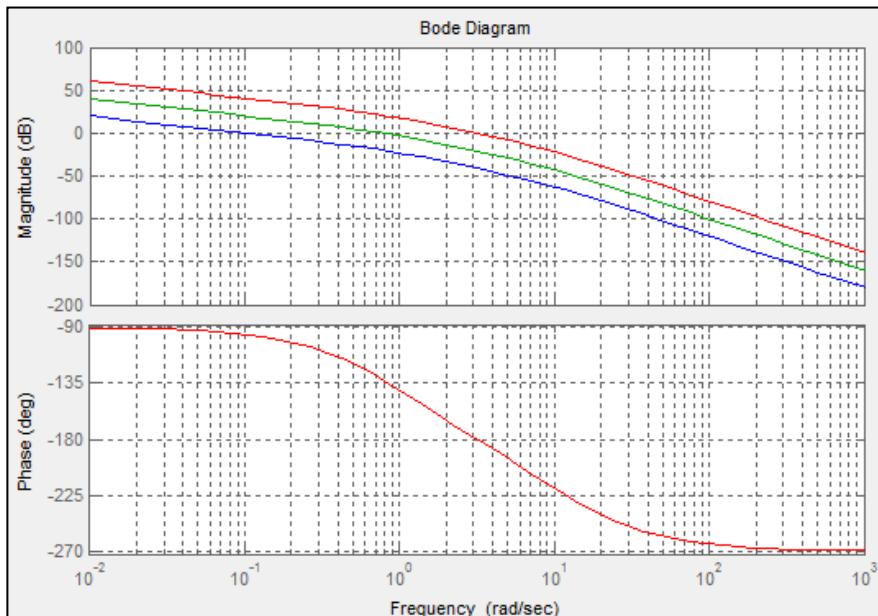


**K = 111**

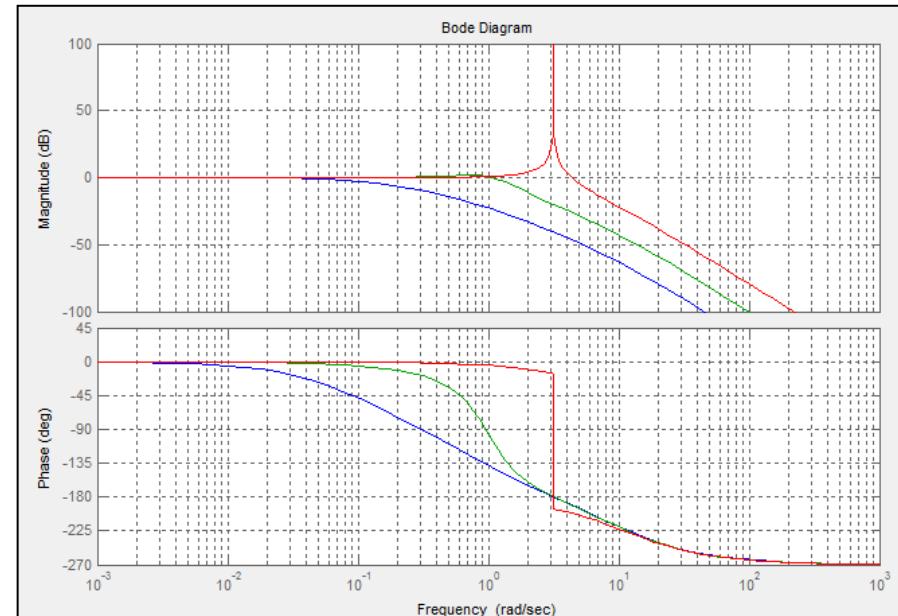


# Criterio di Stabilità di Nyquist

$$K(s)G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+10)}; \quad \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{k}{s^3 + 11s^2 + 10s + k}$$



Open Loop Frequency Response

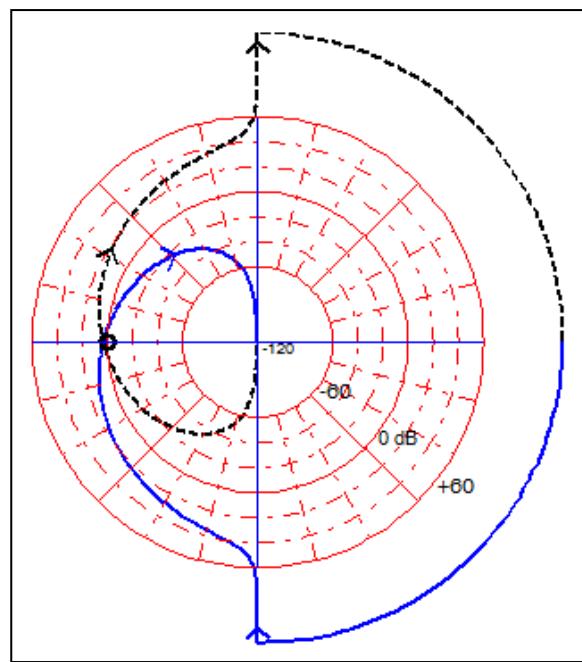
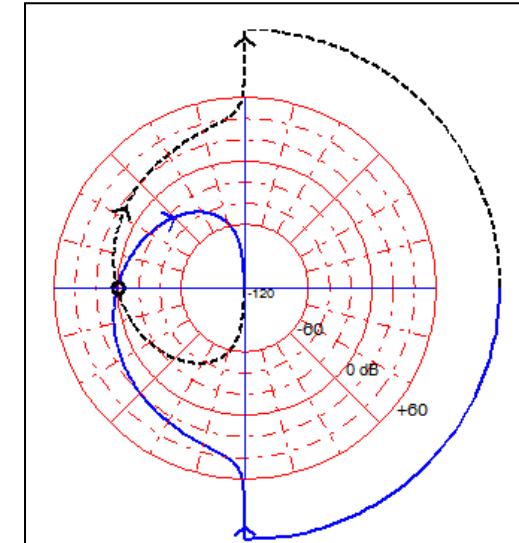
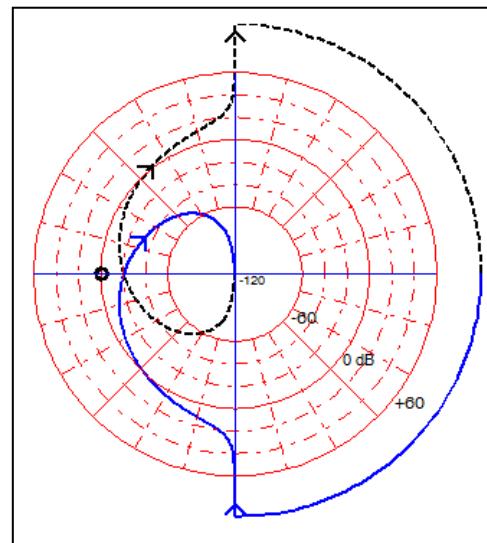
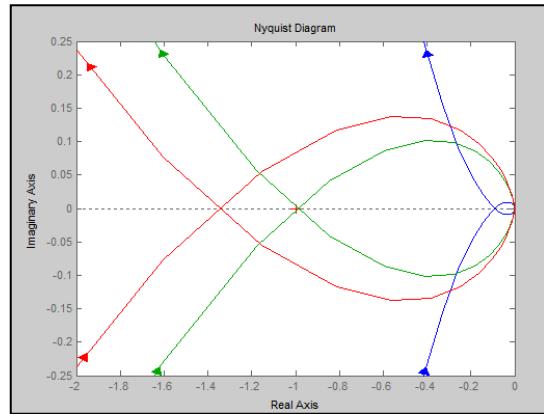


Closed Loop Frequency Response



# Criterio di Stabilità di Nyquist

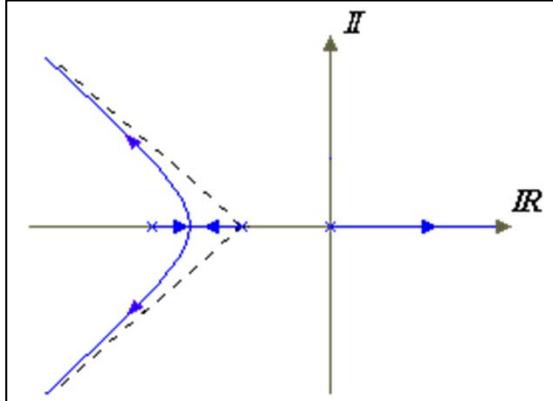
**K = 10, 110, 150**





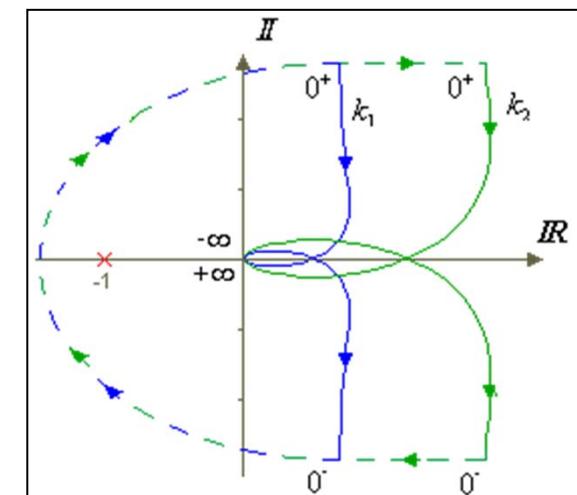
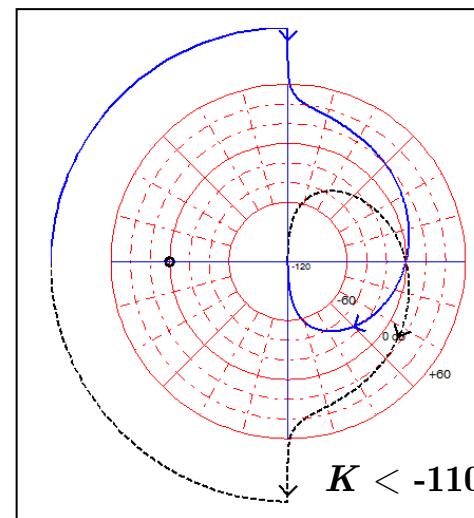
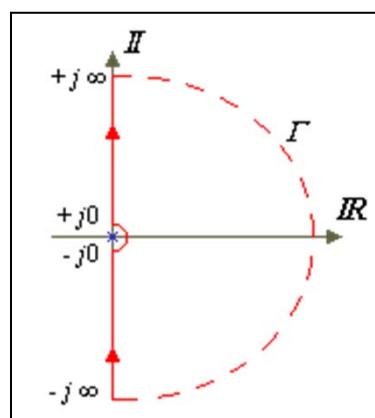
## Criterio di Stabilità di Nyquist

- Consideriamo adesso lo stesso sistema, ma chiuso in anello con retroazione positiva (Equivalente ad un Luogo delle Radici inverso).



$$K < 0$$

- Per qualsiasi valore di  $k$ , il diagramma circonda sempre una volta il punto  $(-1, 0)$  in senso orario, per cui è  $N = 1$  e, essendo comunque  $P = 0$ , si ha  $Z = 1$ ; il sistema risulta quindi essere sempre instabile.

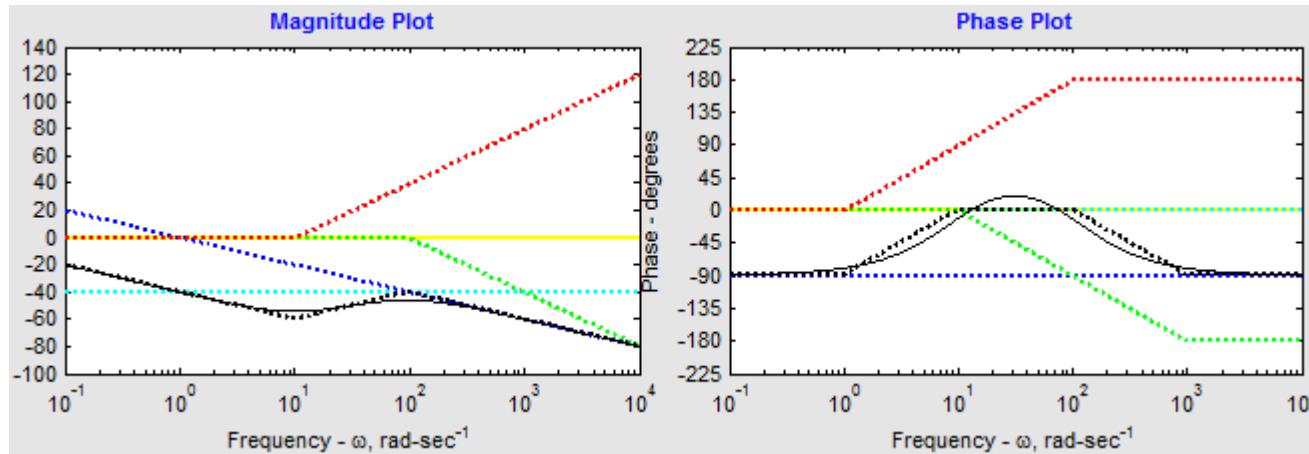




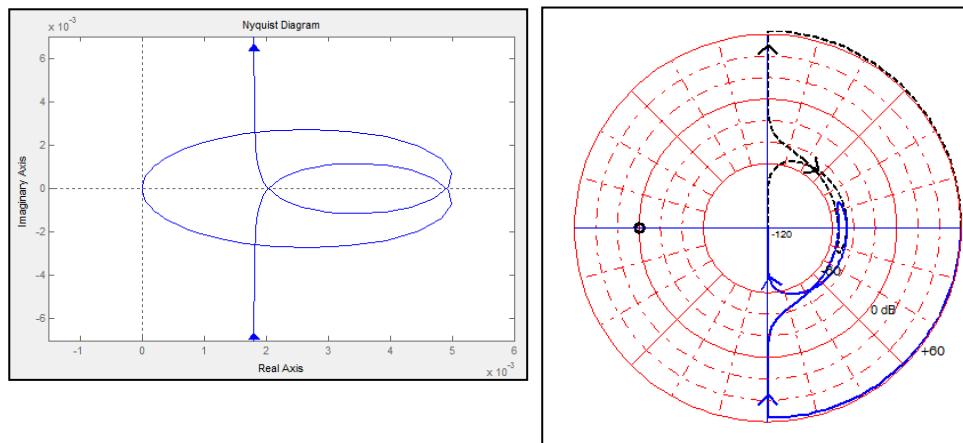
# Criterio di Stabilità di Nyquist

## □ Esempio

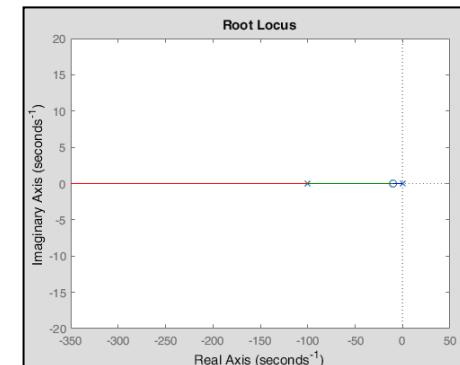
$$K(s)G(s) = \frac{k(s+10)^2}{s(s+100)^2} = \frac{1}{100} \frac{\left(\frac{s}{10} + 1\right)^2}{s\left(\frac{s}{100} + 1\right)^2}; k = 1$$



1. Tracciare Bode Open Loop
2. Tracciare Polare Open Loop
3. Tracciare Luogo delle Radici



- Non vi sono accerchiamenti del punto -1, quindi il sistema è sempre asintoticamente stabile in ciclo chiuso.

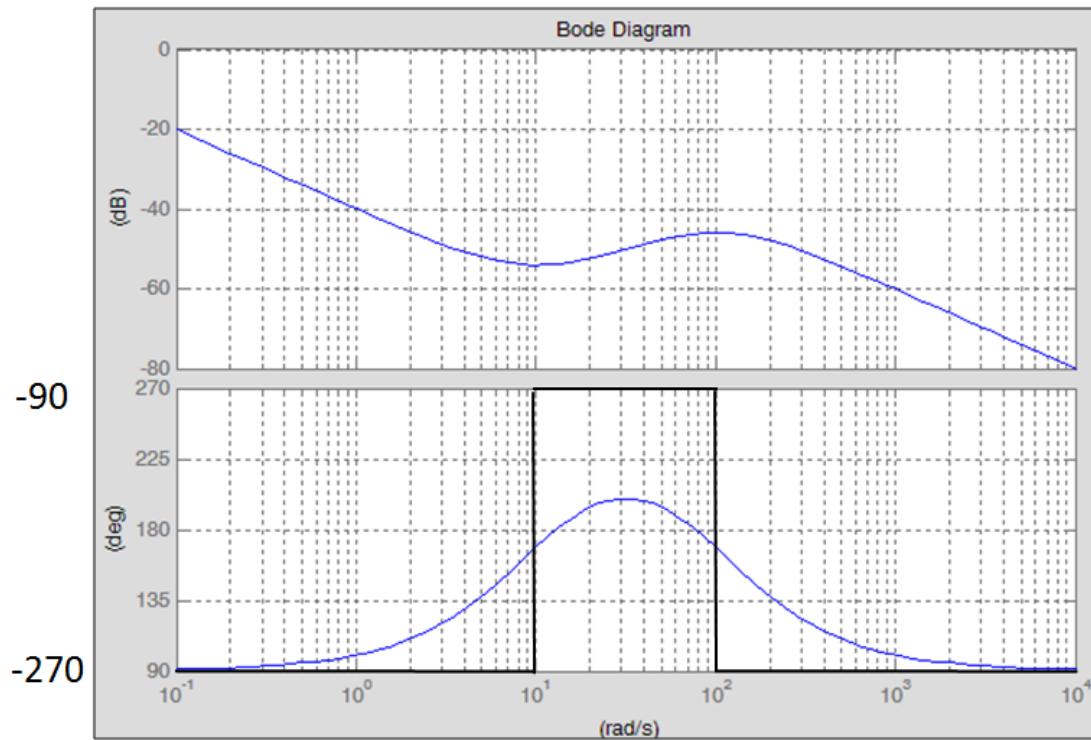




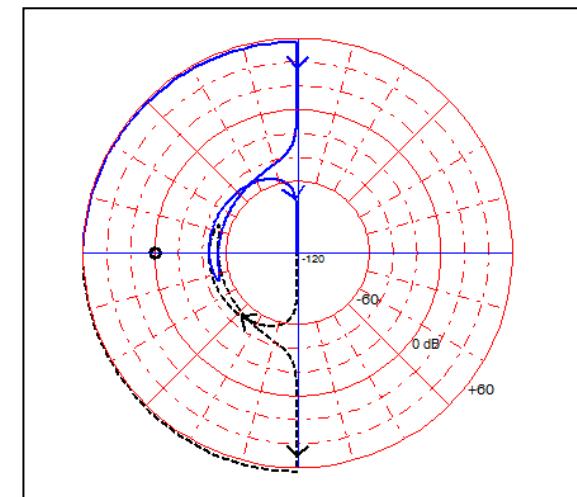
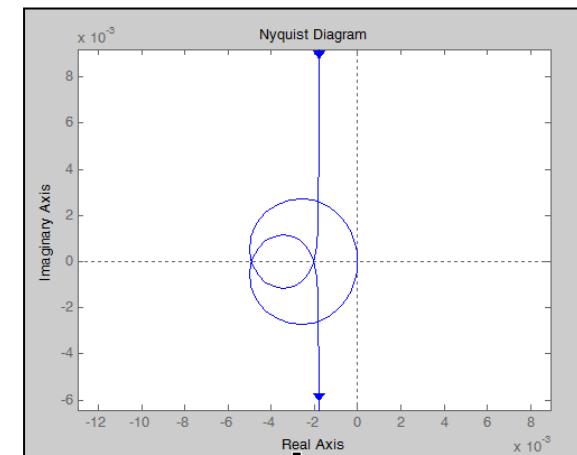
# Criterio di Stabilità di Nyquist

## □ Esempio

$$K(s)G(s) = \frac{k(s+10)^2}{s(s+100)^2} = \frac{-1}{100} \frac{(\frac{s}{10} + 1)^2}{s(\frac{s}{100} + 1)^2}; k = -1$$



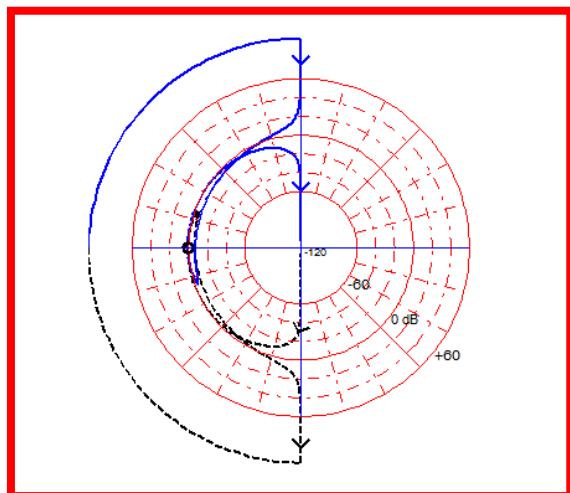
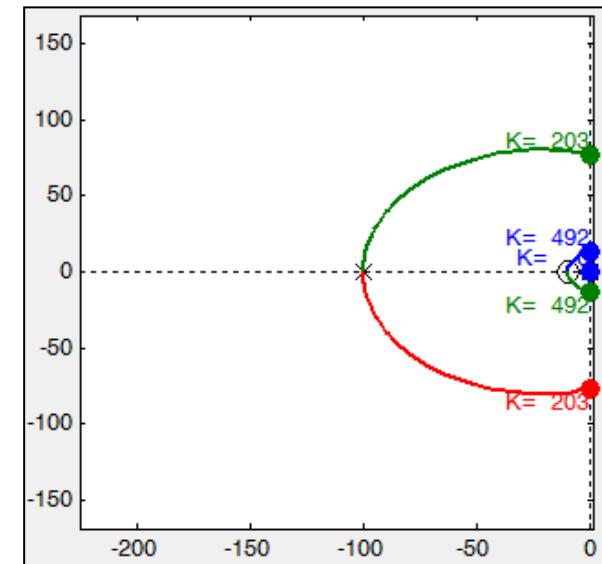
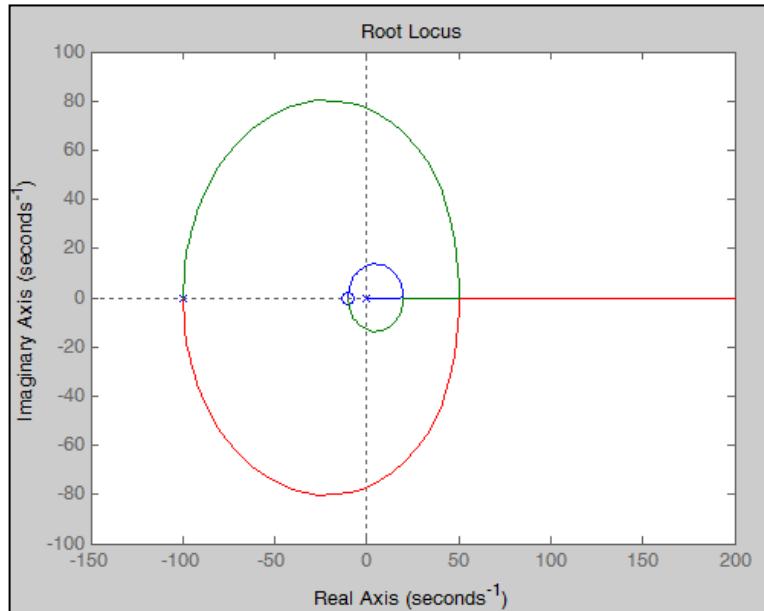
- Un accerchiamento del punto -1,  $N = 1$ ,  $P = 0$ , quindi  $Z = 1$  ed il sistema è instabile in anello chiuso .





# Criterio di Stabilità di Nyquist

- Cosa succede al diminuire del guadagno?



- $K \approx -500$ .  $P = 0$ ,  $N = 3$ ,  $Z = N - P = 3$
- 3 poli instabili in anello chiuso

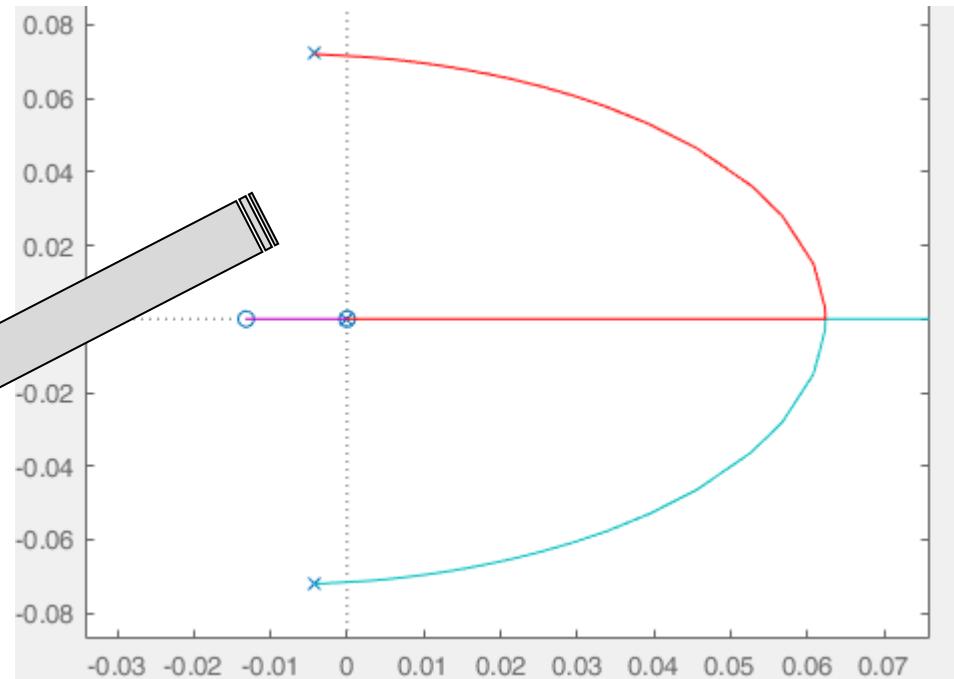
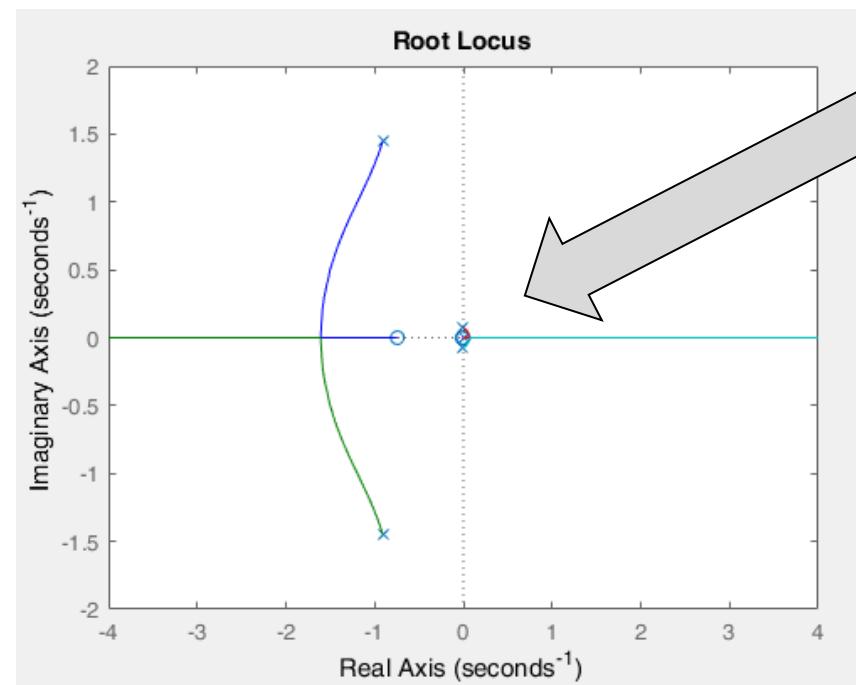


# Criterio di Stabilità di Nyquist

$n=[3.553\text{e-}15 \ -0.1642 \ -0.1243 \ -0.00161 \ 9.121\text{e-}17]$   
 $d=[1 \ 1.825 \ 2.941 \ 0.03508 \ 0.01522 \ -1.245\text{e-}15];$

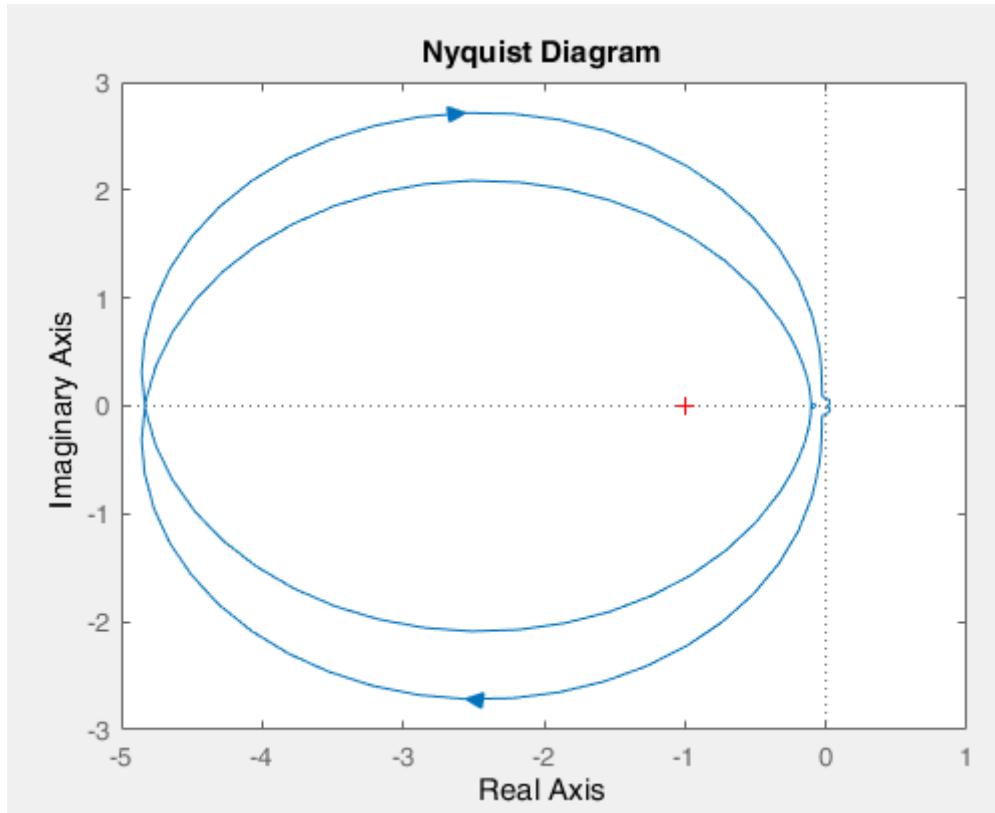
$$\frac{3.553\text{e-}15 s^4 - 0.1642 s^3 - 0.1243 s^2 - 0.00161 s + 9.121\text{e-}17}{s^5 + 1.825 s^4 + 2.941 s^3 + 0.03508 s^2 + 0.01522 s - 1.245\text{e-}15}$$

$1.0\text{e+}13 *$   
-0.9081 + 1.4475i  
-0.9081 - 1.4475i 4.6214  
-0.0044 + 0.0721i -0.0000  
-0.0044 - 0.0721i -0.0000  
0.0000 + 0.0000i 0.0000





# Criterio di Stabilità di Nyquist



$$Z = N + P = 2 + 1 = 3$$

**Esercizio:** Valutare la stabilità in anello chiuso con retroazione positiva

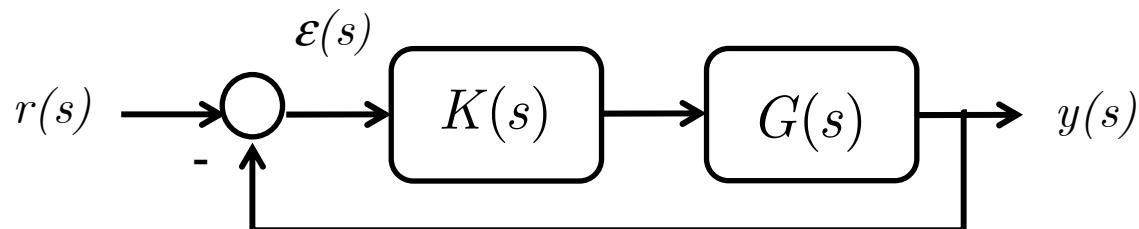


# Stabilità in Condizioni Non Nominali

- Il vero potenziale del Criterio di Nyquist si ha nello studio di sistemi soggetti ad errori e/o incertezze di modello. Tali sistemi vengono detti anche sistemi in condizioni non nominali o perturbate.

## □ Sistema in Condizioni Nominali

- In questo caso si ipotizza che la  $G(s)$  rappresenti fedelmente il comportamento dinamico del sistema



$$T(s) = G_{CL}(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)},$$
$$S(s) = 1 - T(s) = \frac{1}{1 + K(s)G(s)}$$

### 1. Stabilità in Ciclo Chiuso

2. Velocità di Risposta (Transitorio)
3. Precisione di Risposta (Errore a Regime)
4. Reiezione di Disturbi non desiderati
5. Adequata Banda Passante
6. ...



# Stabilità in Condizioni Non Nominali

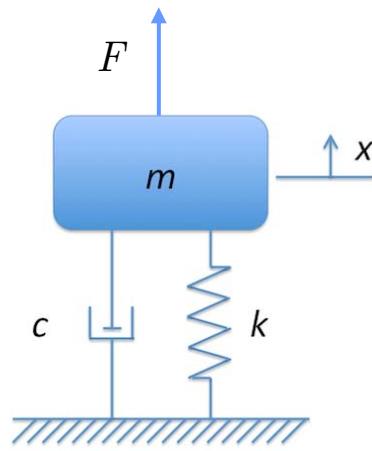
## □ Sistema in Condizioni NoN Nominali (Perturbate)

- la  $G(s)$  rappresenta un'approssimazione lineare tempo invariante del comportamento reale di un processo (oppure di un suo modello più complesso) a causa di:
  1. Non linearità senza memoria (Saturazioni, Isteresi, Zone morte, Relè, ...)
  2. Approssimazioni dovute a Linearizzazione
  3. Dinamiche non modellate perchè fuori Banda, ovvero per riduzione di modello
  4. Dinamiche trascurate per mancanza di capacità di misura (prevalentemente dinamiche ad alta frequenza) non modellata
  5. Variazioni di parametri (Guadagno statico, Poli, Zeri) per insufficiente conoscenza della struttura fisica del processo
  6. Presenza di ritardo dovuto ad implementazione software e/o dinamiche trascurate
  7. ...
- Il controllore  $K(s)$  deve essere in grado di mantenere, per quanto possibile, i requisiti di **Stabilità e Prestazioni** in presenza degli Errori ed Incertezze descritte, in modo da garantire il buon comportamento del sistema reale.



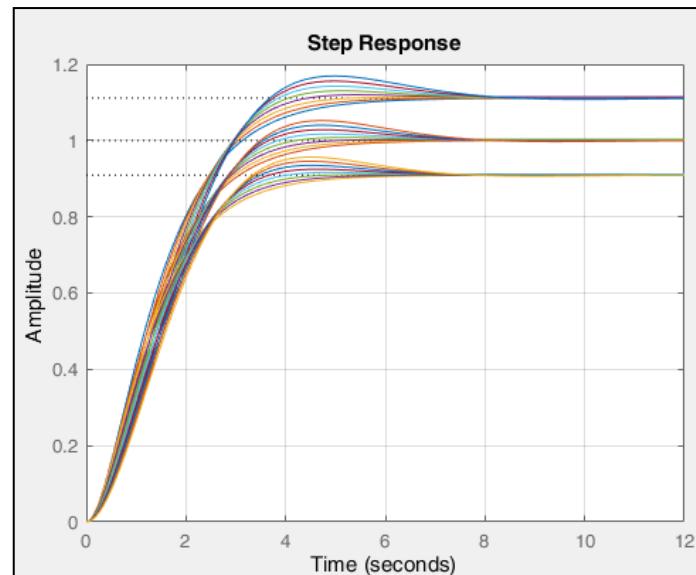
# Stabilità in Condizioni Non Nominali

## □ Esempio



$$\frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad c = \frac{F}{\dot{x}} = \frac{[N \cdot \text{sec}]}{[m]} \quad k = \frac{F}{x} = \frac{[N]}{[m]}$$

- Dati nominali forniti:  $m = 1$ ;  $k = 1$ .
- Requisito di progetto:  $\xi \geq 0.75 \Rightarrow c = 2\xi\omega_n = 1.5$
- A causa di imperfezioni in  $m$  e  $k$ , si ha in realtà:  
 $0.5 < m < 1.2 \text{ Kg}$ ;  $0.9 < k < 1.1 \text{ Kg/m}$

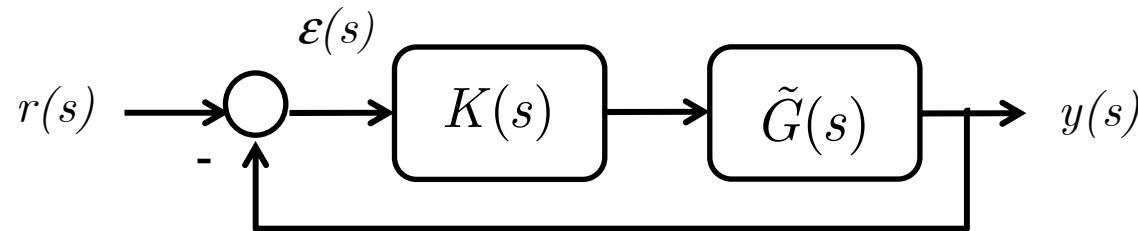




## Stabilità in Condizioni Non Nominali

- Una classe di incertezze che può essere trattata mediante il Criterio di Nyquist è quella delle Incertezze non strutturate moltiplicative
  
- **IPOTESI:** L'incertezza è modellabile mediante una funzione stabile razionale fratta limitata superiormente secondo una qualche norma.

$$L(s) = L(j\omega) = |L(j\omega)| e^{j\angle L(j\omega)}; \|L(j\omega)\| < \Delta$$



$$\tilde{G}(s) = L(s) \cdot G(s) \quad \tilde{G}_{CL}(s) = \frac{K(s)\tilde{G}(s)}{1 + K(s)\tilde{G}(s)}$$



## Stabilità in Condizioni Non Nominali

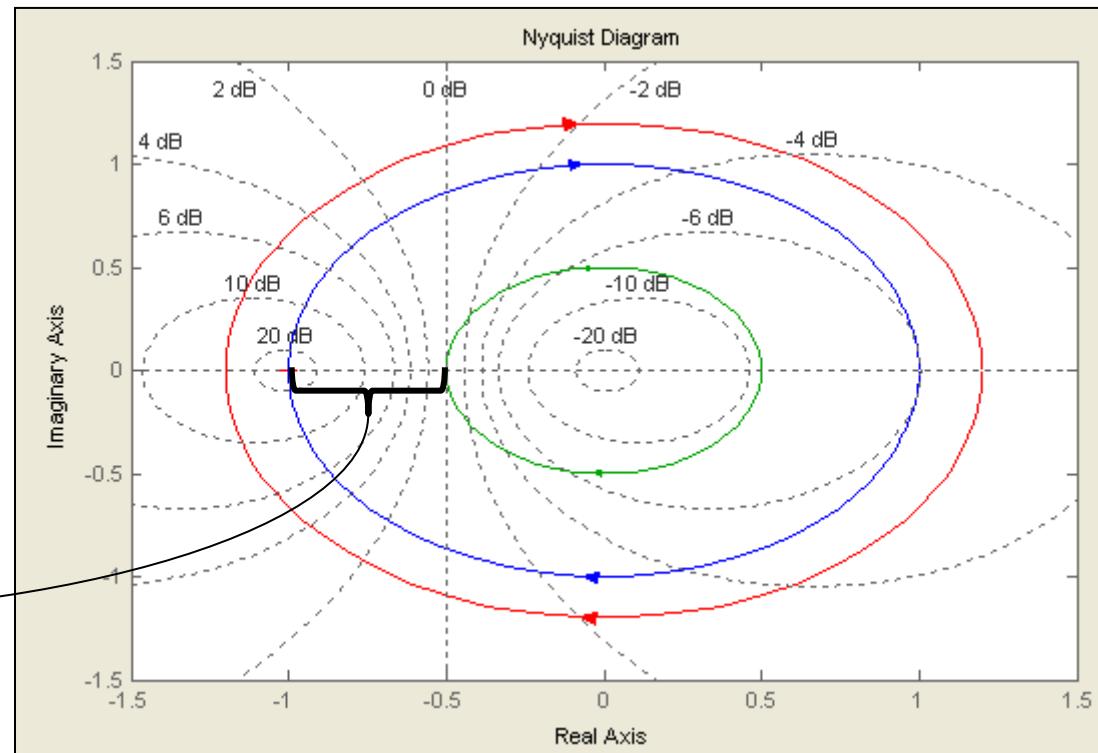
### □ Esempio

$$G_{OL}(s) = K(s)G(s) = k \frac{s-1}{s+1} \Rightarrow T(s) = \frac{k(s-1)}{s + ks + (1-k)}$$

- Green:  $k=0.5$ ,  $P=0$ ,  $N=0$ ,  $Z=0$ , Ciclo Chiuso Asintoticamente Stabile
- Red:  $k=1.2$ ,  $P=0$ ,  $N=1$ ,  $Z=1$ , Ciclo Chiuso Instabile
- Blu:  $k=1$ , Condizioni critiche di stabilità marginale

### □ Differente Lettura:

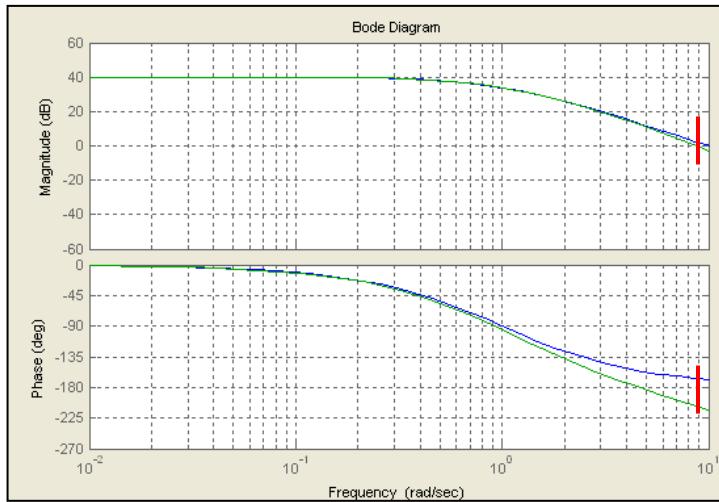
Dato un  $k$  nominale pari a 0.5,  
È possibile mantenere la  
Stabilità in Ciclo Chiuso per  
Tutte le incertezze di modello  
In modulo  $|L(j\omega)| < 0.5$





# Stabilità in Condizioni Non Nominali

## □ Esempio



- Dal Criterio di Nyquist:
- **Blu:  $P=0, N=0, Z=0$  Asint. Stabile in ciclo chiuso**
- **Verde:  $P=0, N=2, Z=2$ , Instabile in ciclo chiuso**

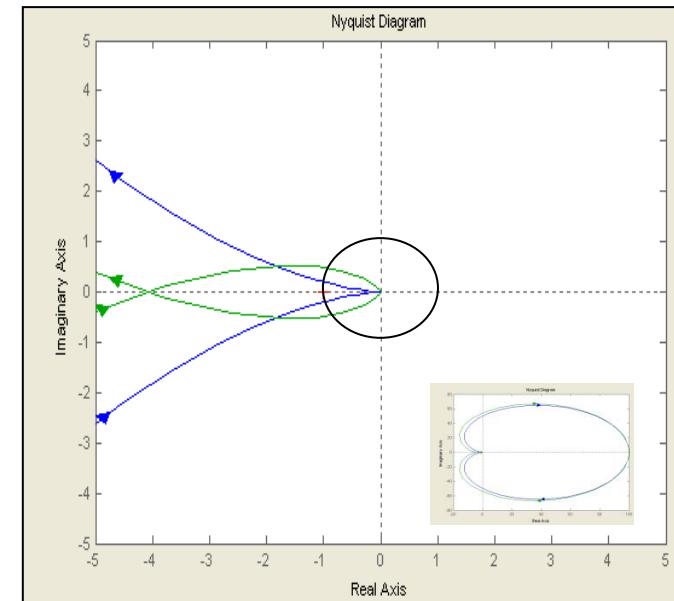
## □ Differenti Letture

E' possibile mantenere la stabilità in ciclo chiuso del sistema Blu, per tutte le incertezze di fase

$$\angle L(j\omega < -180^\circ - (-157^\circ)) = -23^\circ$$

Nella Banda di interesse i due Sistemi differiscono di un contributo di fase. Il modulo di entrambi i sistemi è praticamente lo stesso. Per  $\omega = 9$  rad/sec, ad esempio, la differenza di fase vale:

**Fase sistema Blu  $-157^\circ$**   
**Fase sistema Verde  $-210^\circ$**





# Stabilità in Condizioni Non Nominali

## 1) Errore di guadagno

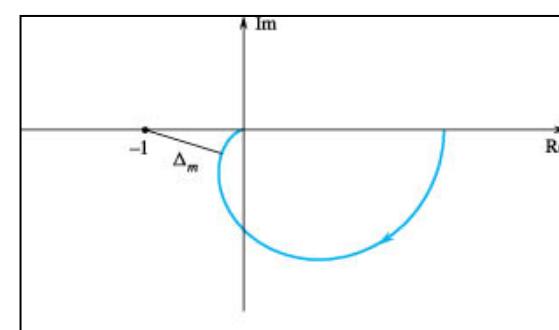
L'esempio sopra riportato mostra come, modificando la costante di guadagno  $k$ , si possa passare da una situazione di stabilità ad una di instabilità; se quindi, modellando il sistema, si introduce un errore dovuto a  $|L(j\omega)|$ , si può portare il sistema in una situazione critica.

## 2) Errore di fase

Realizzando il modello del sistema si può commettere un errore anche sulla fase, dovuto al termine  $\angle L(j\omega)$ ; un errore di questo tipo comporta un anticipo o un ritardo di fase che può rivelarsi anch'esso critico per il sistema stesso.

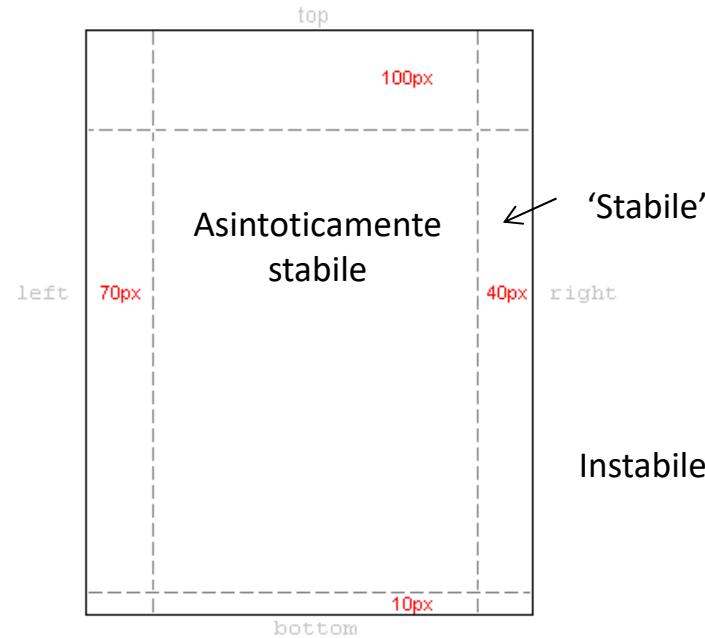
In Condizioni non nominali, dobbiamo distinguere tra Stabilità Relativa e Robustezza (Grado di Stabilità)

- **Definizione – Grado di stabilità:** Per un sistema stabile in anello aperto con FdT data da  $G_{OL}(s)$ , viene detto **grado di stabilità** la distanza vettoriale di  $G_{OL}(s)$  dal punto  $(-1, 0)$  poiché al variare di tale distanza può cambiare il valore di  $N$  nel criterio di Nyquist e, quindi, la stabilità a ciclo chiuso.





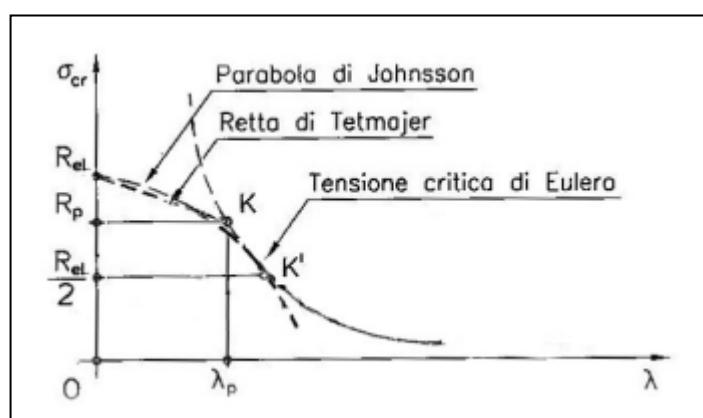
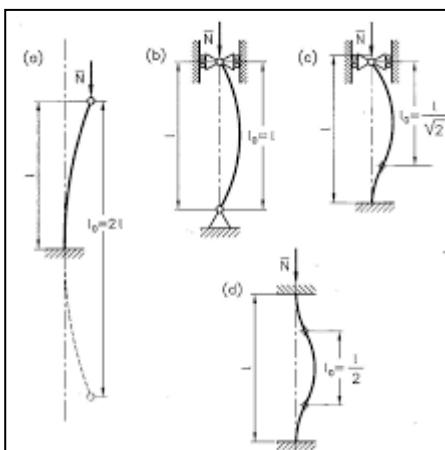
# Margini di Stabilità



Il coefficiente di sicurezza per gli acciai assume, in base alla normativa italiana, il valore  $g = 1,5$  per la sollecitazione di compressione semplice ( $\lambda = 0$ ) e aumenta al crescere della snellezza, assumendo, secondo la norma CNR-10011, il valore  $g = 2,5$  nel campo euleriano; il DM del 30.5.1972 stabilisce semplicemente che sia  $g \geq 1,5$ .

Instabile

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \frac{\sigma_{cr}}{k}$$



$$\frac{N}{A} \leq \frac{\sigma_{cr}}{k} = \frac{\pi^2 E}{k \lambda^2}$$

$$k = 1,5 + \frac{\lambda}{\lambda_p}$$

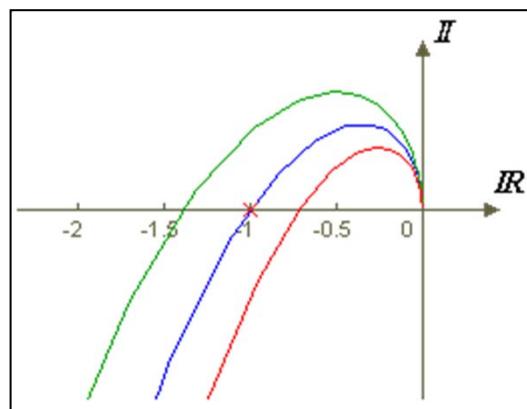


## Stabilità Relativa - Margini di Stabilità

- ❑ I *margini di stabilità* sono due parametri che misurano la *stabilità relativa*, dei sistemi in retroazione dalla risposta in frequenza in anello aperto e permettono:
  - ❑ la valutazione dell'effetto di incertezze moltiplicative di anello sulla stabilità ciclo chiuso
  - ❑ La possibilità di sintesi di un controllore che mantenga la stabilità del sistema in presenza di tali incertezze.

### ❑ Ipotesi iniziale (Criterio di Bode):

- Consideriamo un sistema la cui  $G_{ol}(s)$  sia stabile, con guadagno positivo ed un unico attraversamento dell'asse a 0 dB

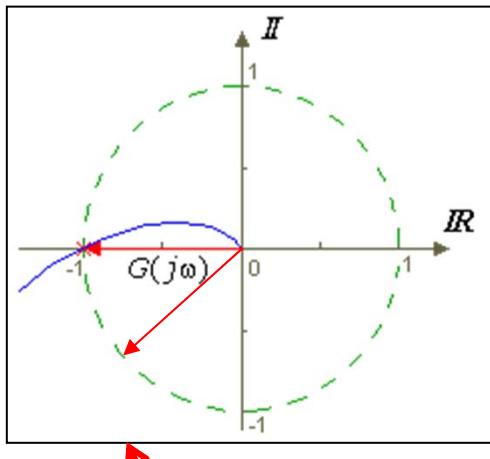




## Margini di Stabilità

- Il passaggio critico per la stabilità (ovvero quando il numero di giri intorno al punto critico  $N$  varia) si ottiene per:

$$1 + G(s)K(s) = 0 \Rightarrow G_{OL}(s) = -1$$



- L'uguaglianza si ha per 2 frequenze di attraversamento (Crossover Frequencies):

$\omega_c \Rightarrow$  Frequenza di attraversamento di Guadagno

$$G_{OL}(j\omega_c) = |-1| = 1$$

$\omega_\pi \Rightarrow$  Frequenza di attraversamento di Fase

$$G_{OL}(j\omega_\pi) = \angle -1 = -180^\circ$$

Nel caso in cui  $\omega_\pi = \omega_c = \omega^*$  si ha la completa identità  $G_{OL}(j\omega^*) = -1$

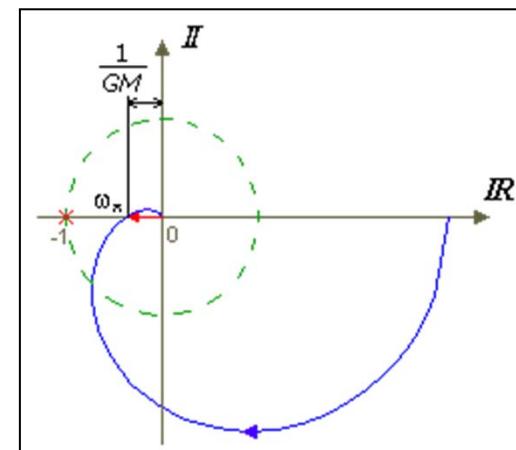
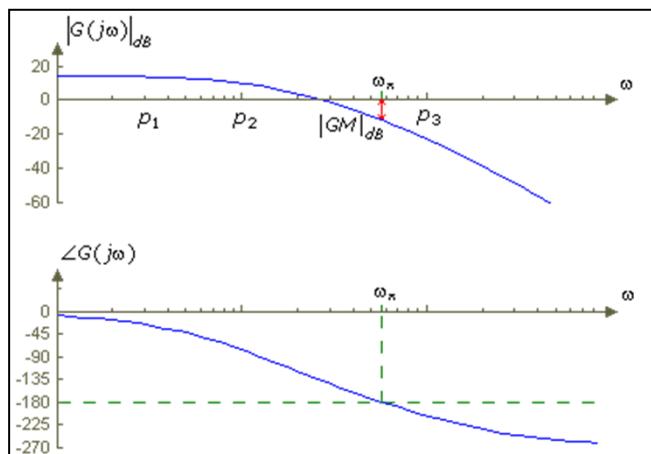


# Margini di Stabilità

- **Margine di Guadagno:** Si definisce *margine di guadagno* del sistema il valore:

$$GM_{dB} = \frac{1}{|G(j\omega_{\pi})|} \quad |G(j\omega_{\pi})|_{dB} = \frac{1}{GM}$$

- Ovvero, l'inverso del modulo della  $FdT$  calcolata nel punto di intersezione con l'asse reale, in cui la pulsazione, indicata come  $\omega_{\pi}$ , è quindi tale che  $\angle G(j\omega_{\pi}) = -180^\circ$ . Vedi il diagramma di Nyquist.
- Il calcolo del margine di guadagno può essere fatto mediante i diagrammi di Bode di modulo e fase.



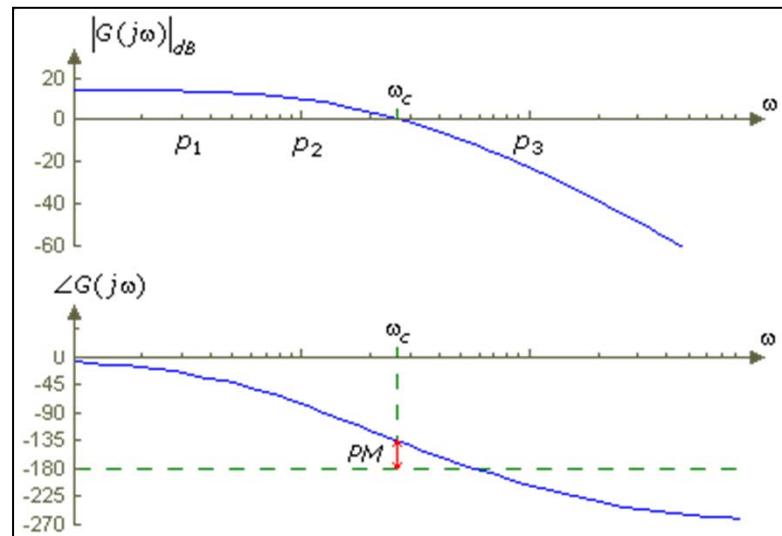
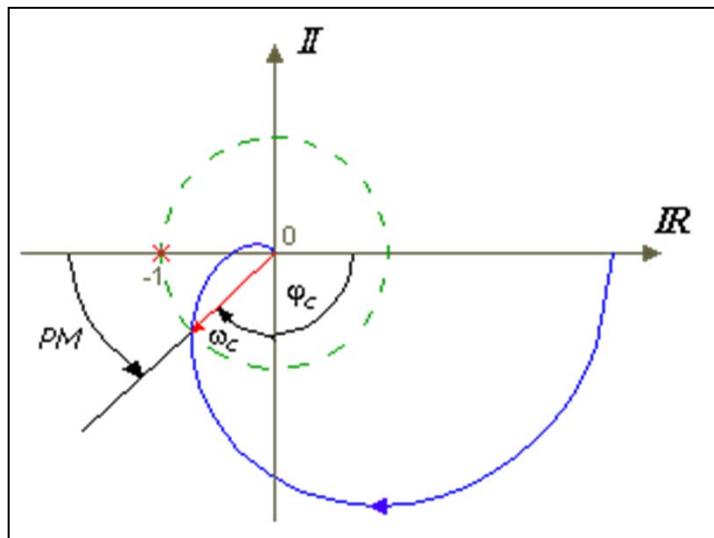


# Margini di Stabilità

□ **Margine di Fase:** Si definisce *margine di fase* del sistema il valore:

$$PM = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ + \varphi_c$$

- Il margine di fase è  $180^\circ$  più  $\varphi_c$  ( $= \angle G(j\omega_c)$ ), detta *fase critica*, cioè la fase del sistema calcolata nel punto di intersezione del diagramma di Nyquist con il cerchio di raggio unitario centrato nell'origine, in cui quindi la frequenza  $\omega_c$  è tale per cui  $|G(j\omega_c)| = 1$



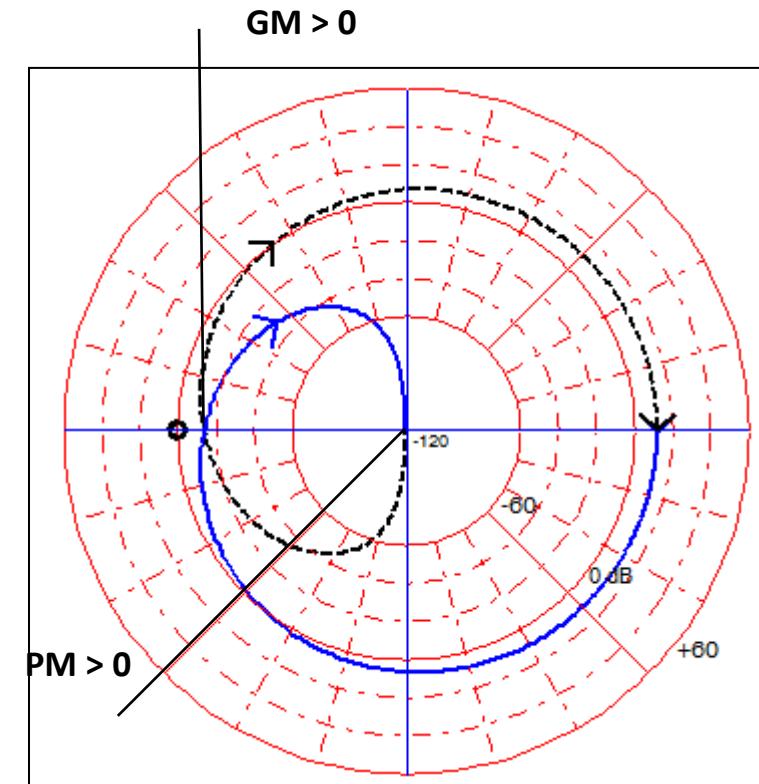
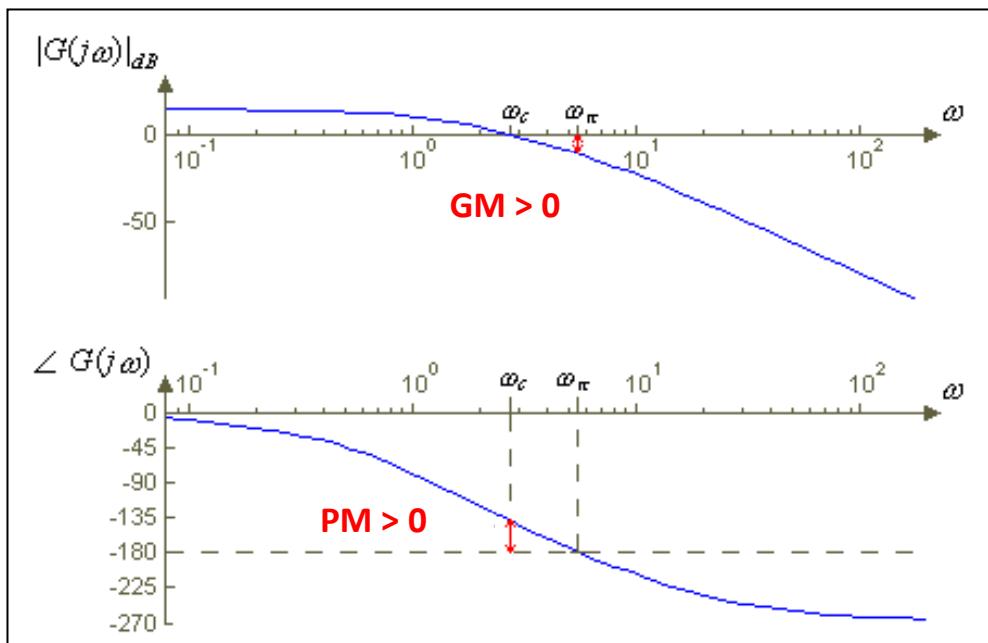


## Margini di Stabilità

- Per sistemi la cui FdT di anello soddisfi il Criterio di Bode, la stabilità in Ciclo Chiuso è garantita (C.N.S.) dall'avere **GM > 0 e PM > 0**

▪ **Valori tipici accettabili in pratica sono  $GM \approx (10-20) \text{ dB}$ ,  $PM > 40^\circ - 50^\circ$**

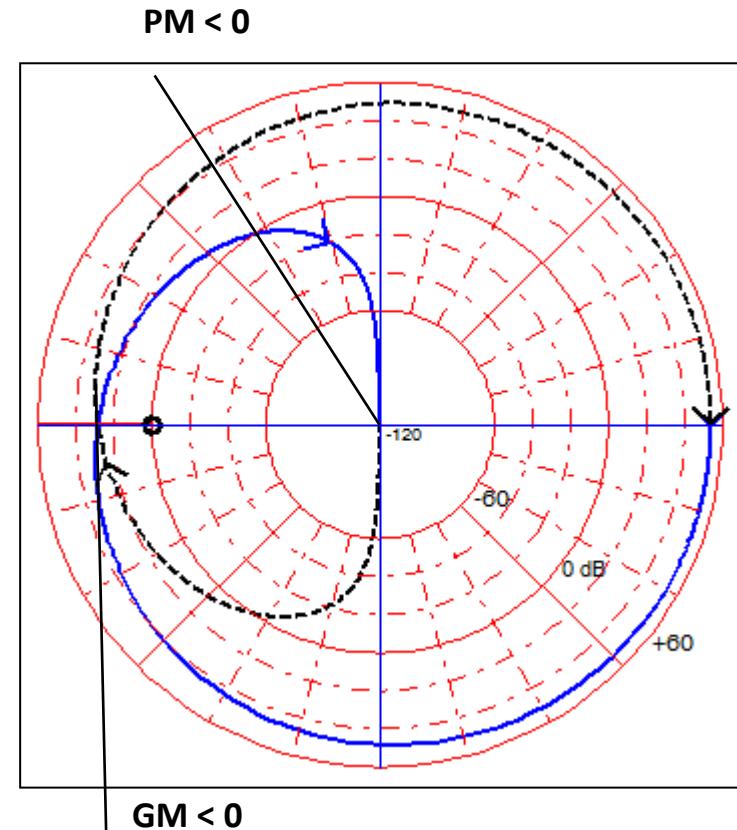
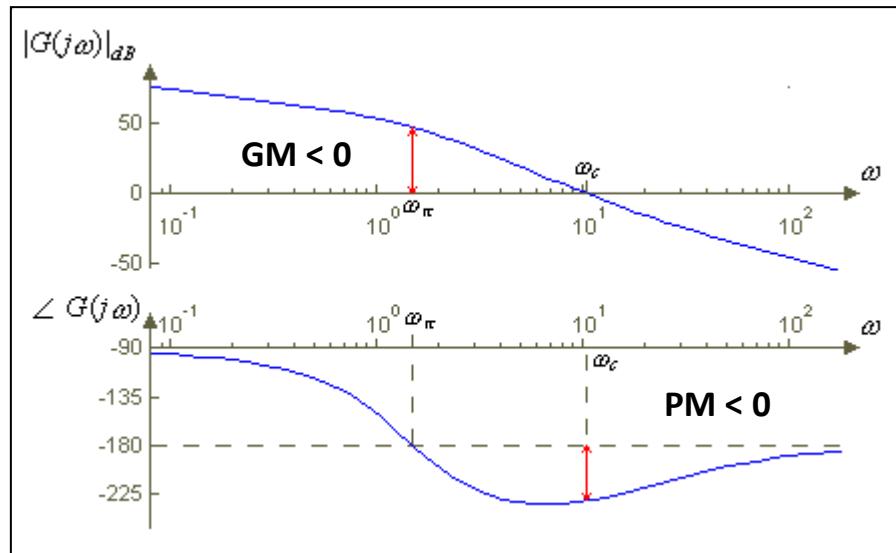
**$GM > 0$  e  $PM > 0$ , Sistema Stabile in ciclo chiuso**



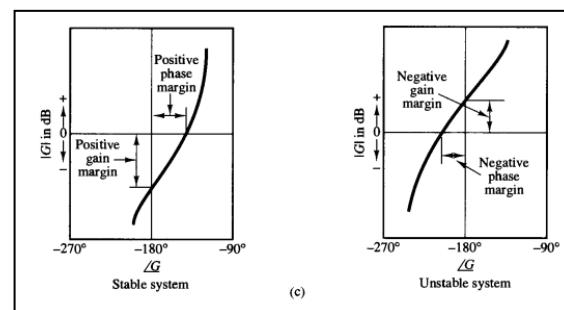


# Margini di Stabilità

**GM < 0 e PM < 0, Sistema Instabile in ciclo chiuso**



- Valutazione dei margini di stabilità mediante i diagrammi di Nichols

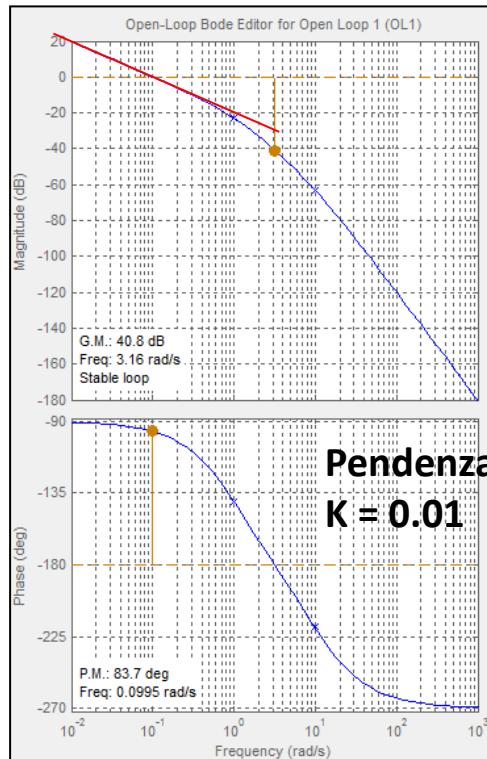




# Margini di Stabilità

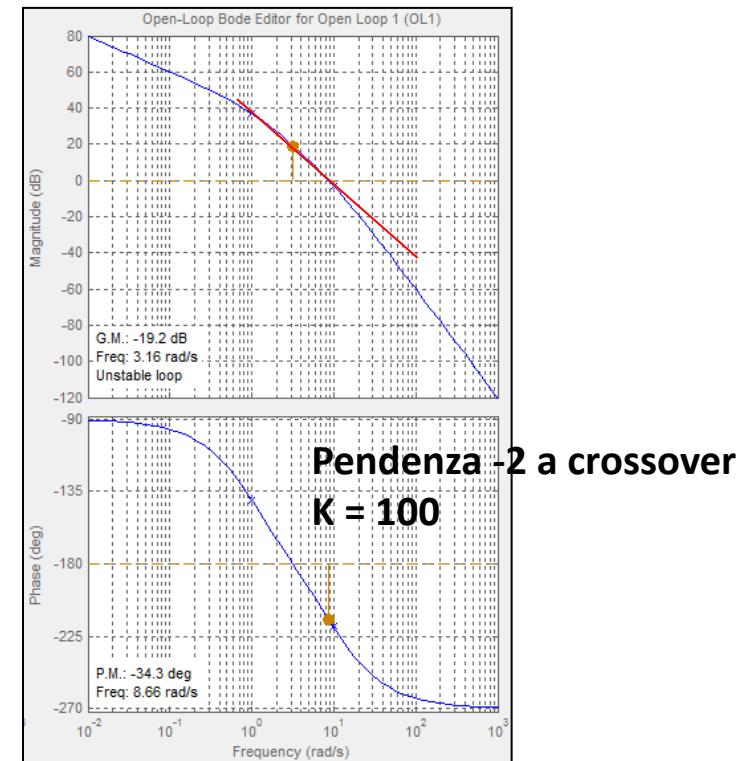
❑ **Nota pratica:** Dato un sistema lineare che soddisfa il criterio di Bode, fase minima, e senza ritardo in anello. La stabilità in ciclo chiuso è ‘ragionevolmente’ garantita se la funzione di trasferimento di anello attraversa l’asse di 0 dB con pendenza -1 (-20 dB / dec). Ovvero se la funzione di trasferimento di anello si comporta come un integratore all’attraversamento. In tal caso, infatti, il margine di fase è quasi sicuramente positivo.

- **Esempio**  $G_{OL}(s) = k \frac{100}{s(s+1)(s+10)}$ ;  $G_{CL}(s) = \frac{100k}{s^3 + 11s^2 + 10s + 100k}$



Pendenza -1 a crossover  
 $K = 0.01$

■ sisotool

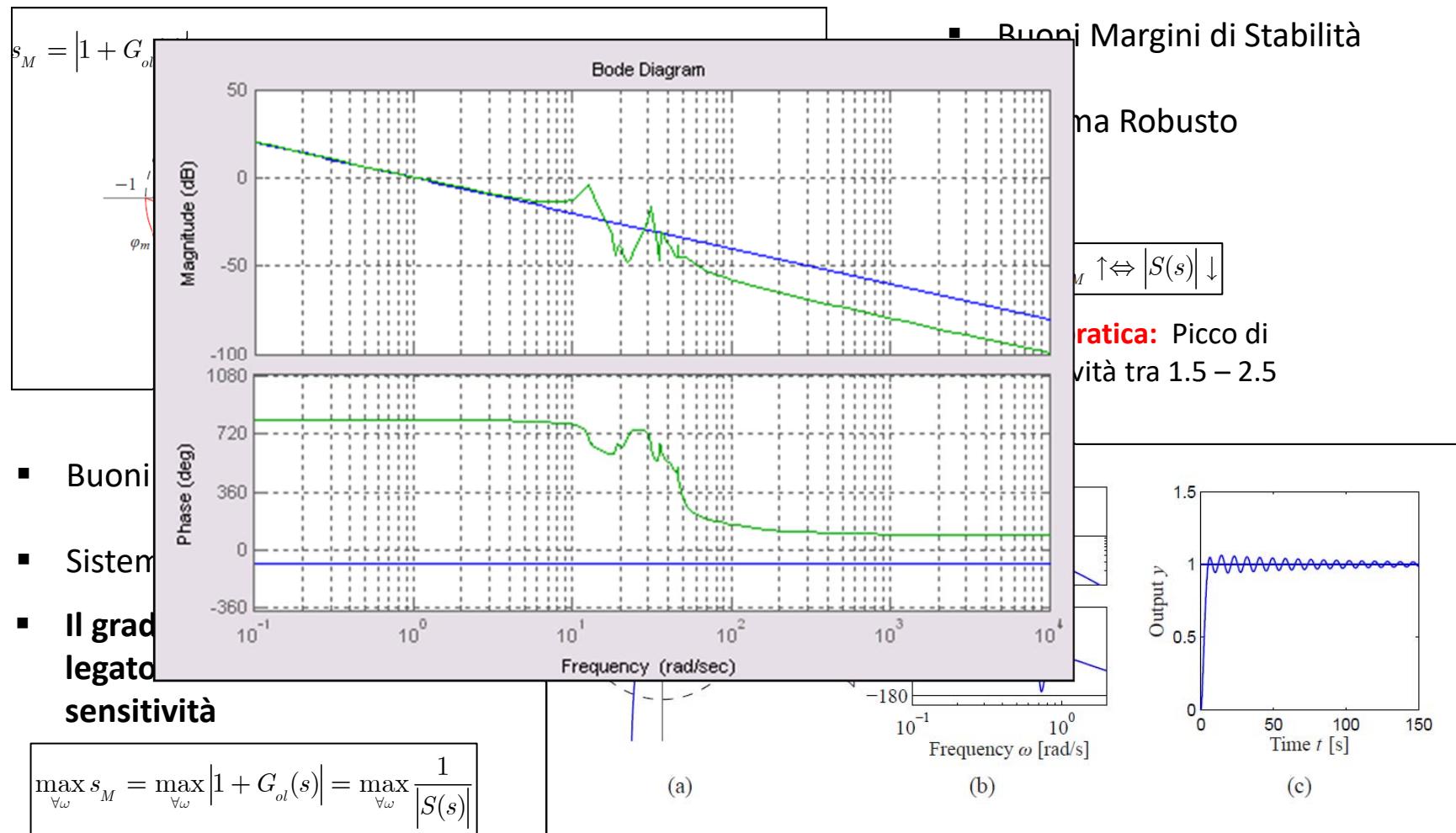


Pendenza -2 a crossover  
 $K = 100$



# Grado di Stabilità - Robustezza

- In alcuni casi, la ‘robustezza’ del sistema non è completamente garantita dai margini di guadagno e di fase ed il grado di stabilità  $s_M$  ( $\Delta_M$ ) fornisce una misura più corretta e complementare al calcolo dei margini di stabilità

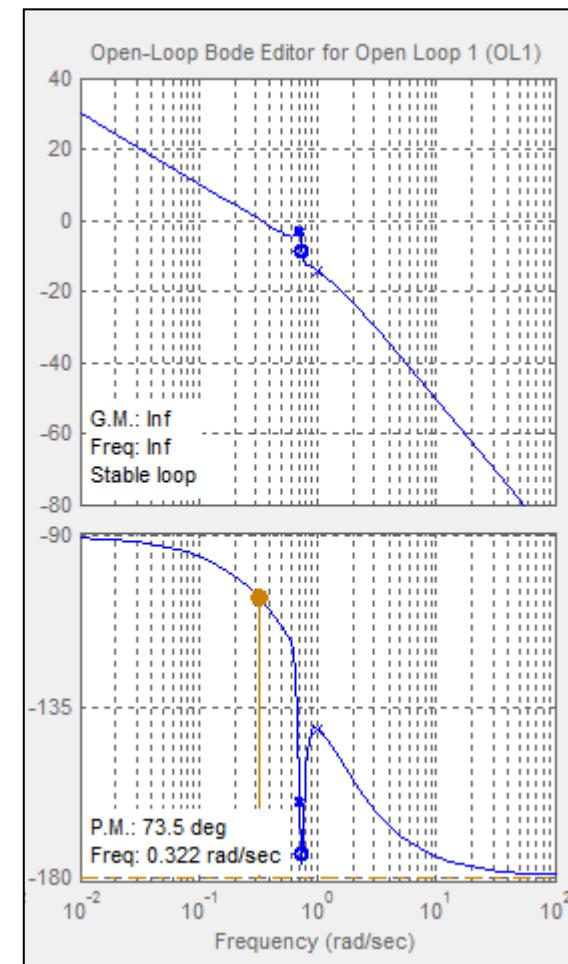
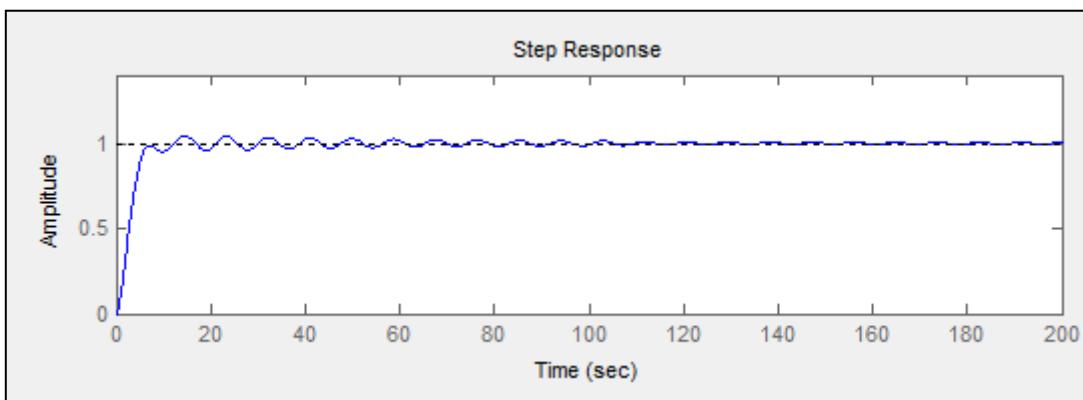
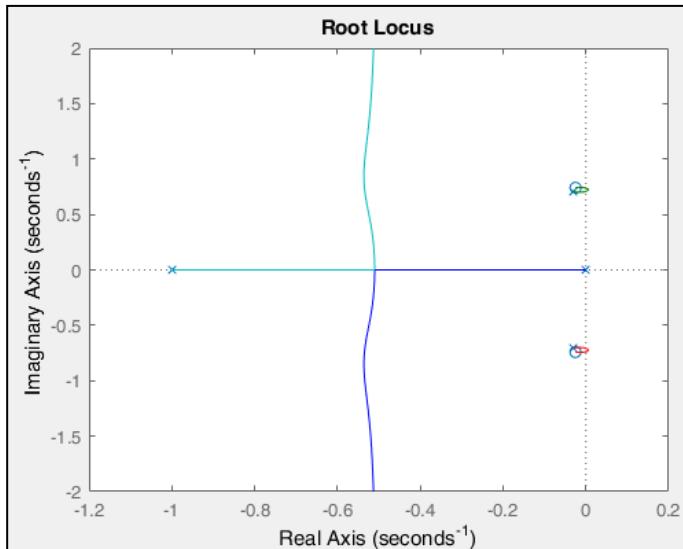




# Grado di Stabilità

$$G_{OL}(s) = \frac{0.38(s^2 + 0.05s + 0.55)}{s(s+1)(s^2 + 0.06s + 0.5)} \quad Z = -0.025 \pm 0.7412j$$
$$P = 0, -1, -0.03 \pm 0.7065j$$

sys=0.38\*(s^2+0.05\*s+0.55)/(s\*(s+1)\*(s^2+0.06\*s+0.5))





# Grado di Stabilità

$$G_{OL}(s) = \frac{0.38(s^2 + 0.05s + 0.55)}{s(s+1)(s^2 + 0.06s + 0.5)} \quad Z = -0.025 \pm 0.7412j \quad P = 0, -1, -0.03 \pm 0.7065j$$

sys=0.38\*(s^2+0.05\*s+0.55)/(s\*(s+1)\*(s^2+0.06\*s+0.5))

- Cancellazione polo-zero

$$G_{OL}(s) = \frac{0.38(s^2 + 0.05s + 0.55)}{s(s+1)(s^2 + 0.06s + 0.5)} \Rightarrow \frac{0.4}{s(s+1)}$$

- Verifica con sisotool



## Stabilità Relativa - Esempi

- **Esempio:** Dato il sistema  $G(s)$ , determinare un controllore tale che l'errore a regime alla rampa sia finito.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)}$$

- Il controllore deve avere un comportamento integrale, con guadagno variabile a seconda dell'entità dell'errore a regime desiderato

$$K(s) = \frac{k}{s}, G(s)K(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+5)}, G_{CL}(s) = \frac{k}{s^3 + 6s^2 + 5s + k}$$

- Dal Criterio di Routh:  $k < k_{CR} = 30$

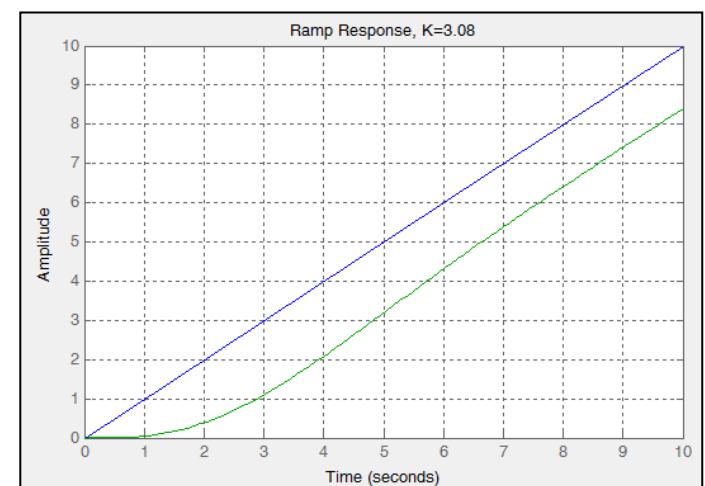
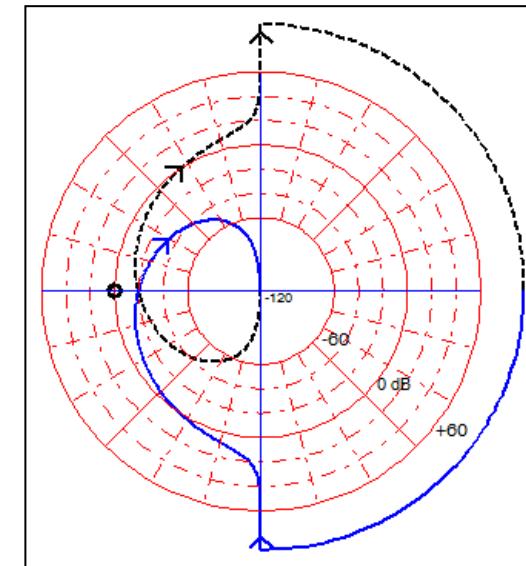
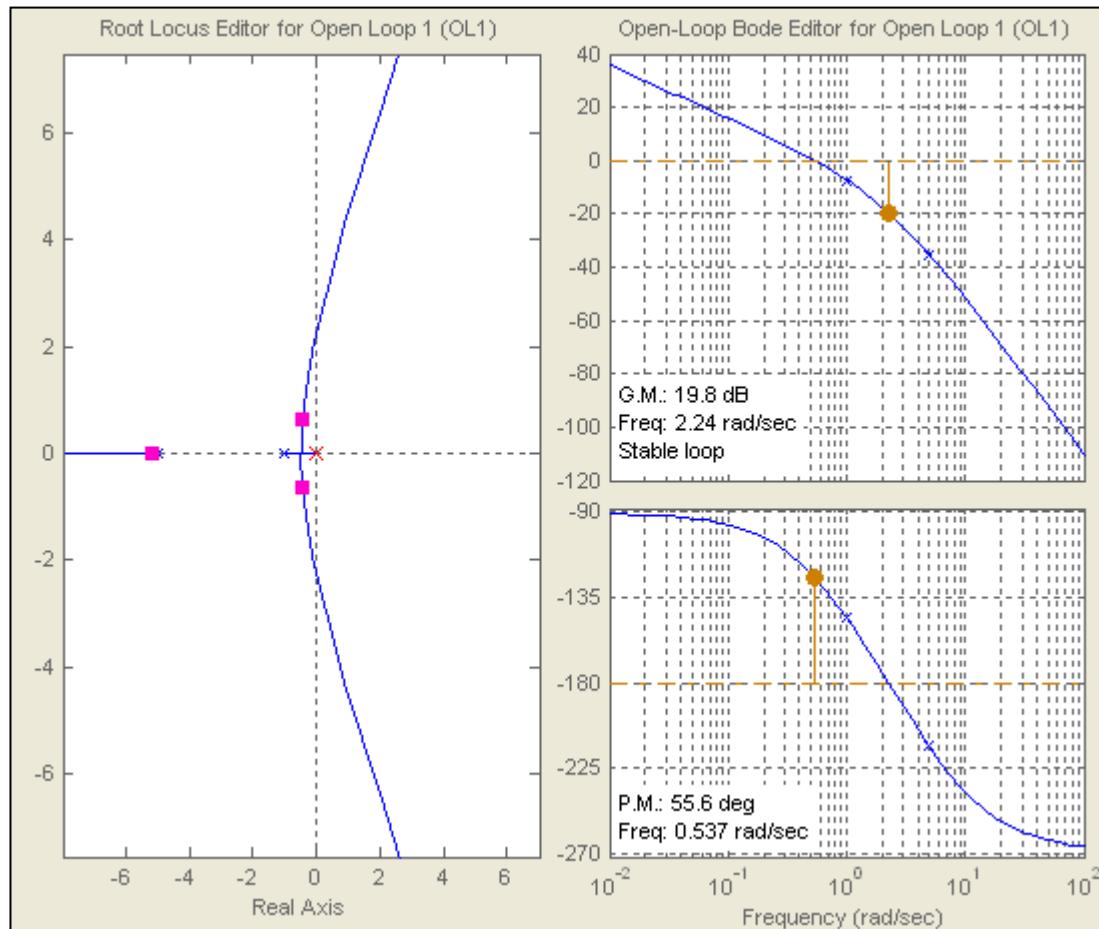
- **Il minimo valore di errore alla rampa possibile si può calcolare dal TVF assumendo  $k < k_{CR}$**

- Dal Criterio di Nyquist possiamo calcolare i margini di Stabilità per valori del guadagno  $k$  minori e maggiori del Guadagno critico.



# Stabilità Relativa - Esempi

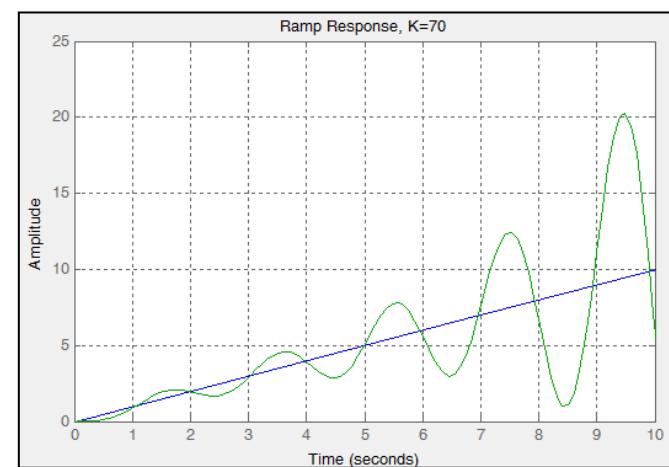
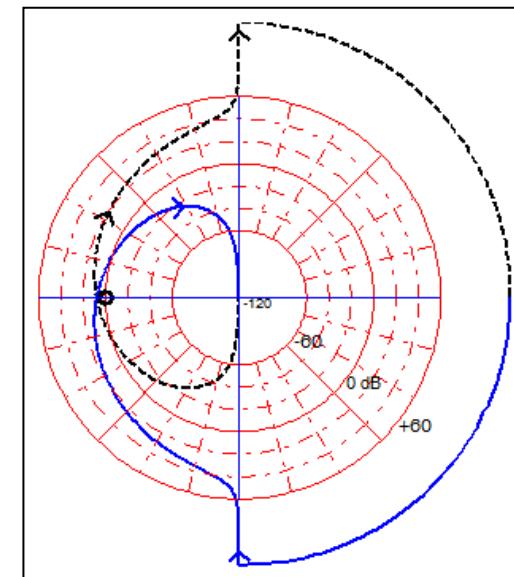
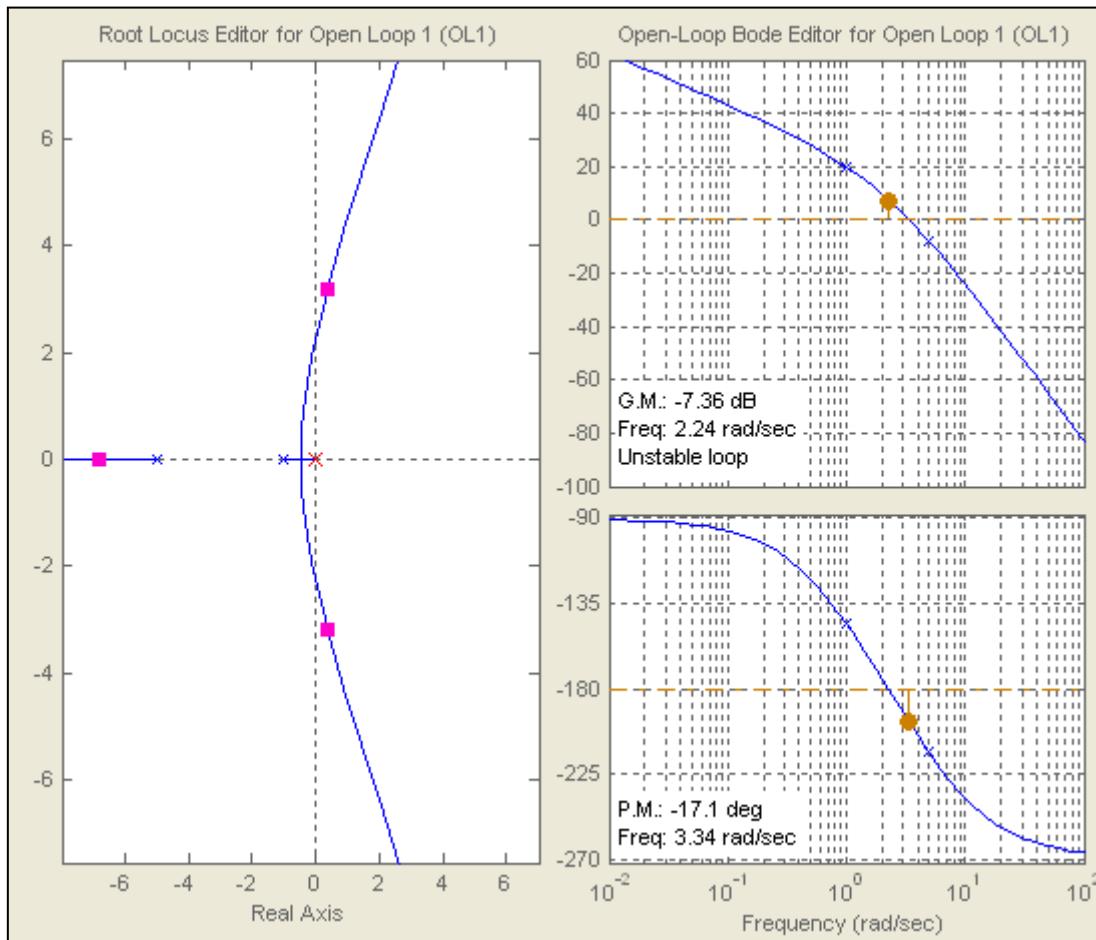
$$K = 3.08$$





# Stabilità Relativa - Esempi

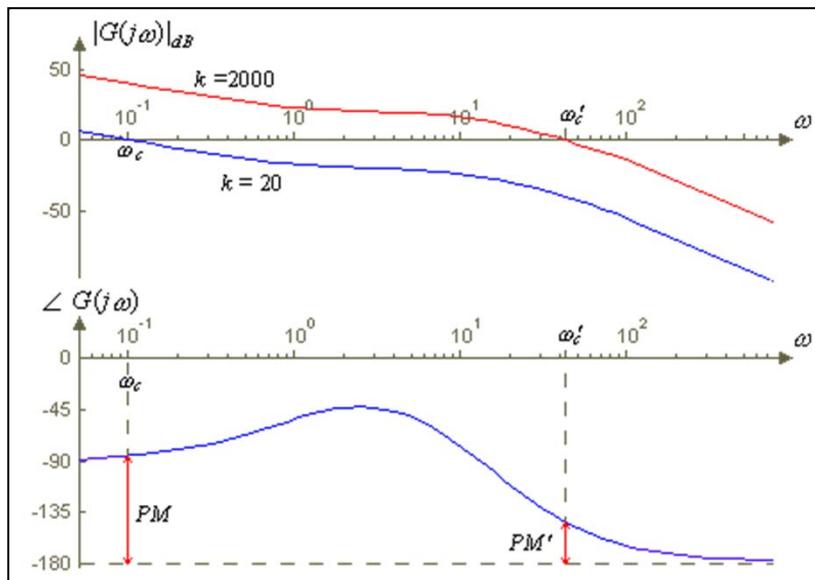
$$K = 70$$



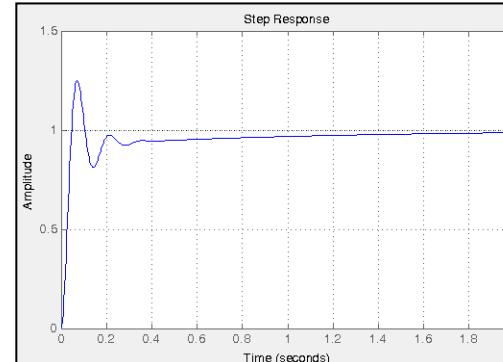
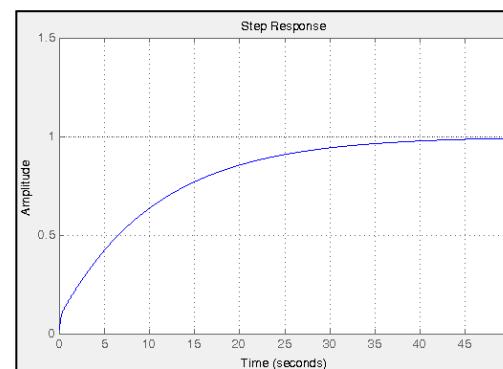
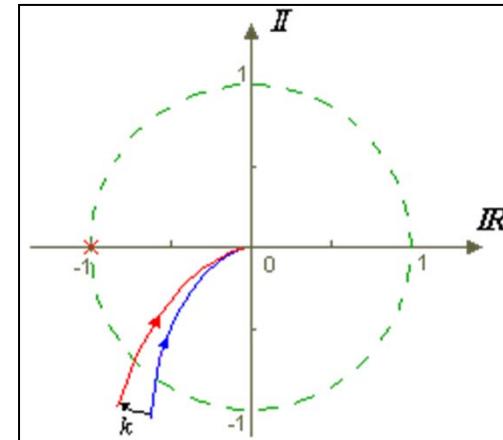
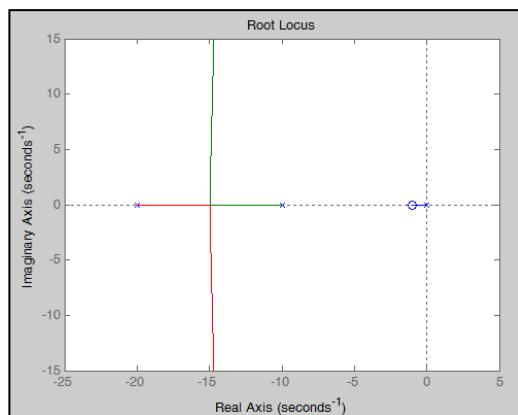


## Stabilità Relativa - Esempi

□ **Esempio:**  $K(s)G(s) = k \frac{s + 1}{s(s + 10)(s + 20)}$



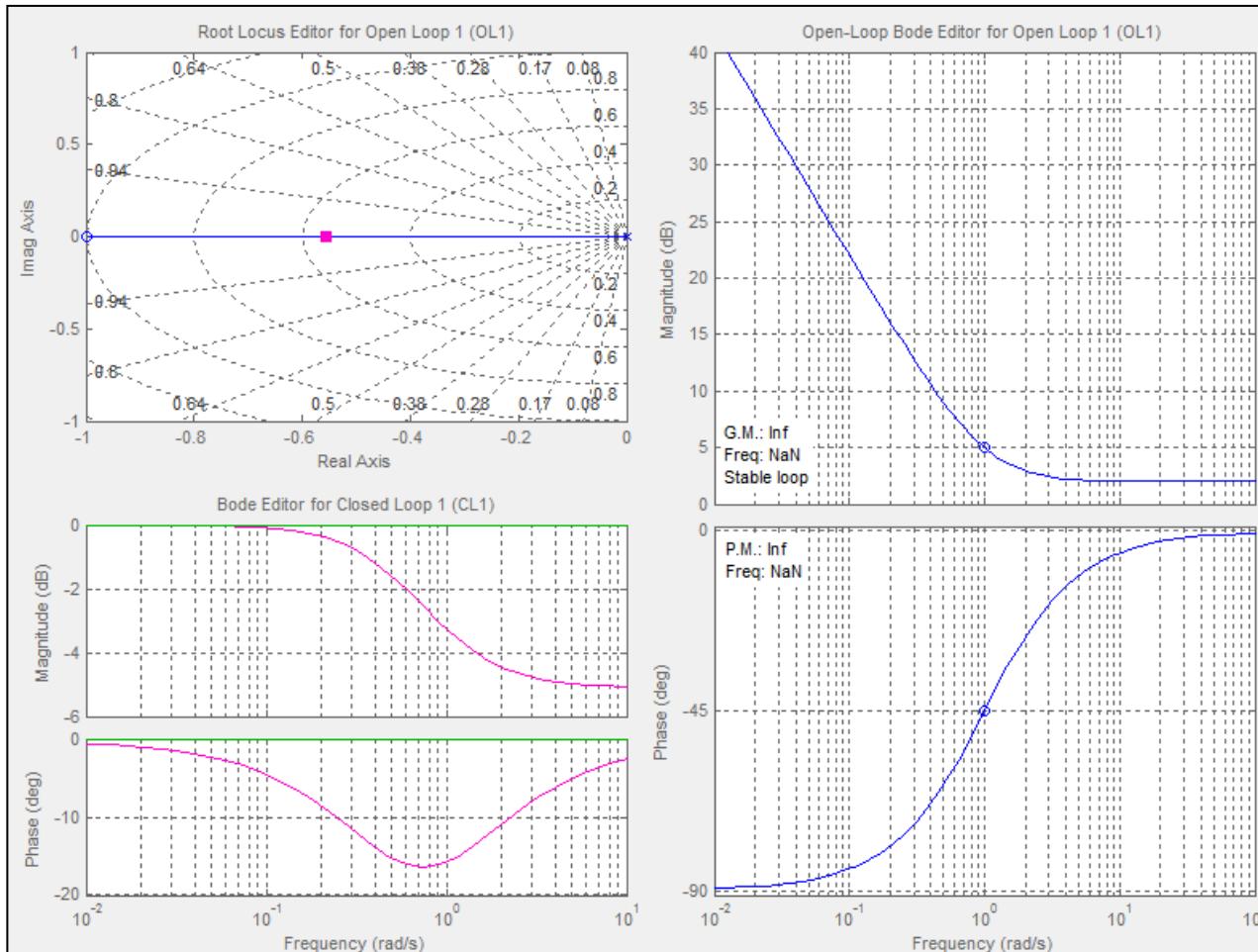
$GM = \infty$   $PM > 0$  ma varia con  $k$





## Stabilità Relativa - Esempi

- **Approssimazione a poli dominanti:**  $K(s)G(s) \approx \frac{k}{200} \frac{s+1}{s} = \frac{k'(s+1)}{s}$



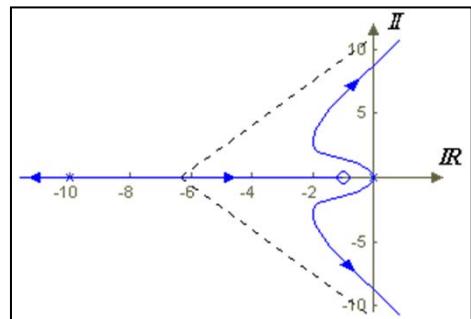
$$k' = 0.10956$$



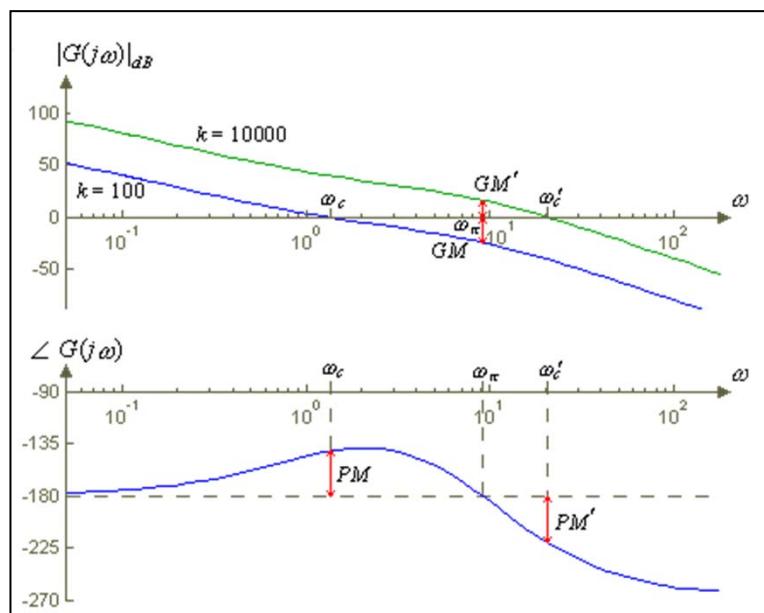
## Stabilità Relativa - Esempi

□ Esempio:

$$K(s)G(s) = k \frac{s+1}{s^2(s+10)^2}$$
$$\text{sys}=(s+1)/(s^2(s+10)^2)$$



$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 100 & k \\ \hline s^3 & 20 & k & 0 \\ s^2 & \frac{2000-k}{20} & k & 0 \\ s^1 & \frac{1600k-k^2}{2000-k} & 0 \\ s^0 & k & & \end{array}$$



$$k_{CR} = 1600$$

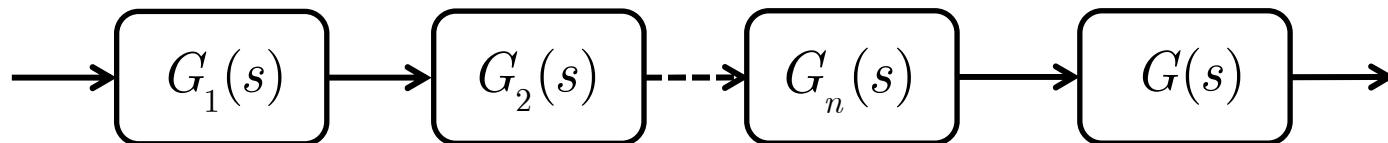
- $k < k_{CR} \Rightarrow \text{GM} > 0, \text{PM} > 0$
- $k > k_{CR} \Rightarrow \text{GM} < 0, \text{PM} < 0$



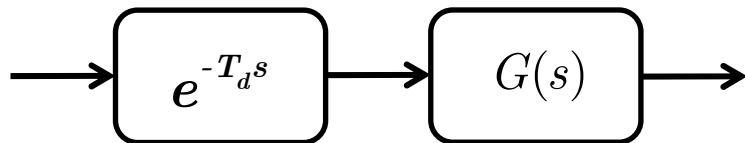
## Casi Particolari

### □ Influenza del Ritardo sulla Stabilità in Anello Chiuso

- La presenza di ritardo in anello è dovuta a fattori quali dinamiche di attuazione e di misura non modellate, tempi di calcolo finiti, ecc..
- Ogni sistema strettamente proprio aggiunge un ritardo che aumenta fino a -90 gradi a frequenza infinita, per ogni eccesso polo-zero nella propria FdT

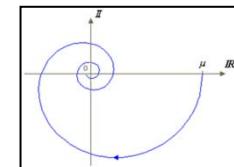
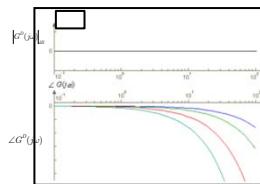


- Ogni tempo di calcolo e/o di trasmissione di segnale creano un ritardo nella FdT globale



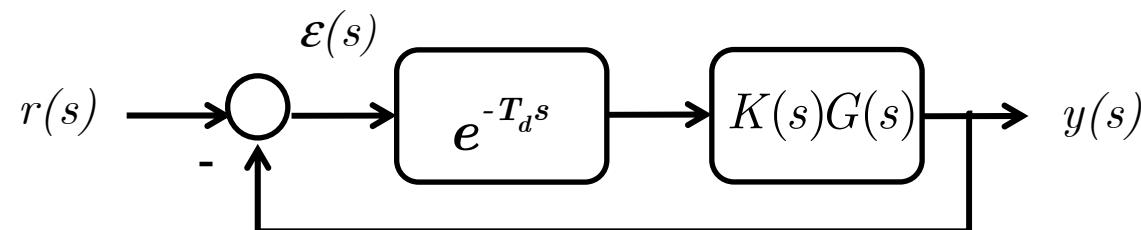
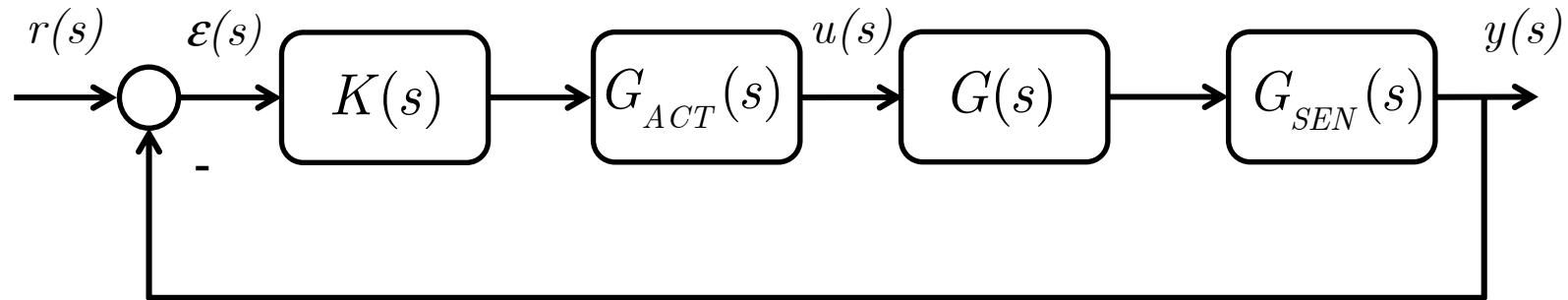
- Il ritardo può essere descritto analiticamente mediante un aumento di perdita di fase, all'aumentare della frequenza

$$\left| e^{-T_d s} \right| = 1 = 0 \text{ dB} \quad \angle e^{-T_d s} = -T_d \omega$$





## Casi Particolari

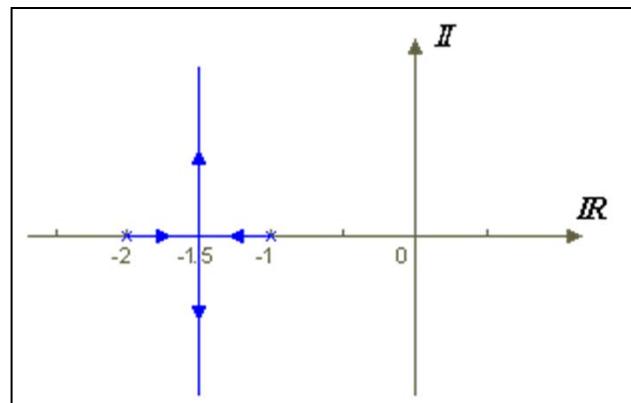


- Il ritardo di anello introdotto crea una perdita di fase, che può portare all'instabilità in ciclo chiuso

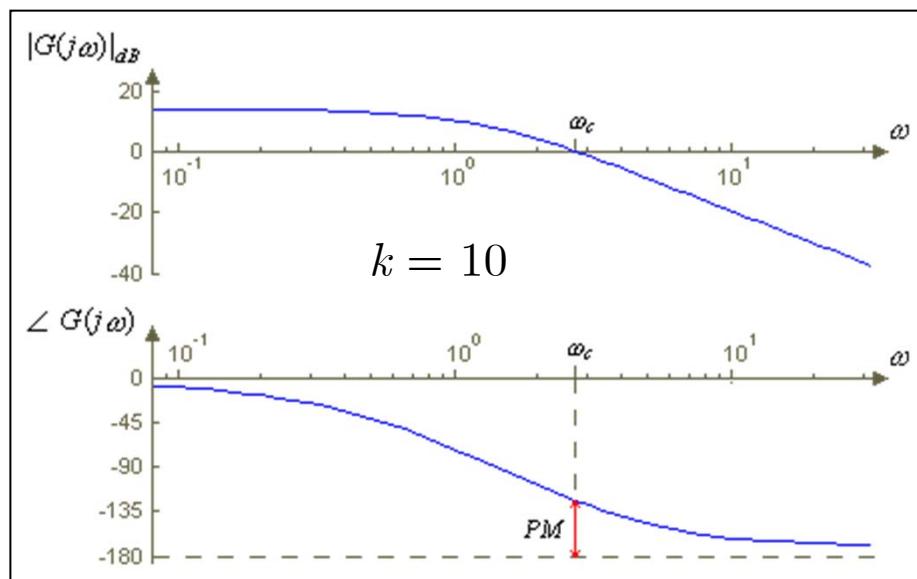


## Casi Particolari

□ **Esempio:**  $K(s)G(s) = k \frac{1}{(s+1)(s+2)}$



- In condizioni nominali (senza ritardo), il sistema in anello chiuso è sempre asintoticamente stabile per ogni valore di  $k > 0$  essendo  $GM = \infty$  e  $PM > 0$ .



- Analisi della stabilità in anello chiuso in presenza di un ritardo di anello:

$$G_{CL}(s) = \frac{ke^{-T_d s}}{s^2 + 3s + 2 + ke^{-T_d s}}$$





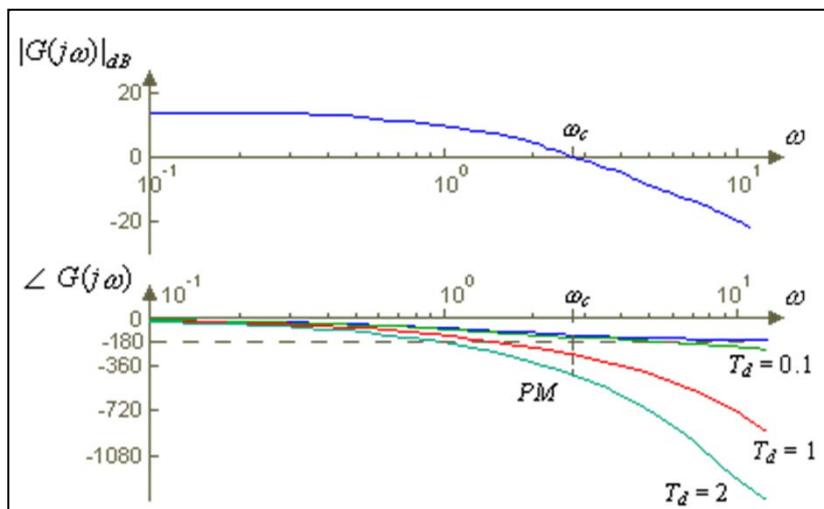
## Casi Particolari

- Uso del Criterio di Nyquist e calcolo dei margini di stabilità

| $T_d$ | $\omega$ | 0.1      | 1       | 10      |
|-------|----------|----------|---------|---------|
| 0.1   | 0.1      | -0.0573° | -0.573° | -5.73°  |
| 1     | 1        | -0.573°  | -5.73°  | -57.3°  |
| 2     | 2        | -1.146°  | -11.46° | -114.6° |

$$\tilde{G}(s) = k \frac{e^{-T_d s}}{(s+1)(s+2)}$$

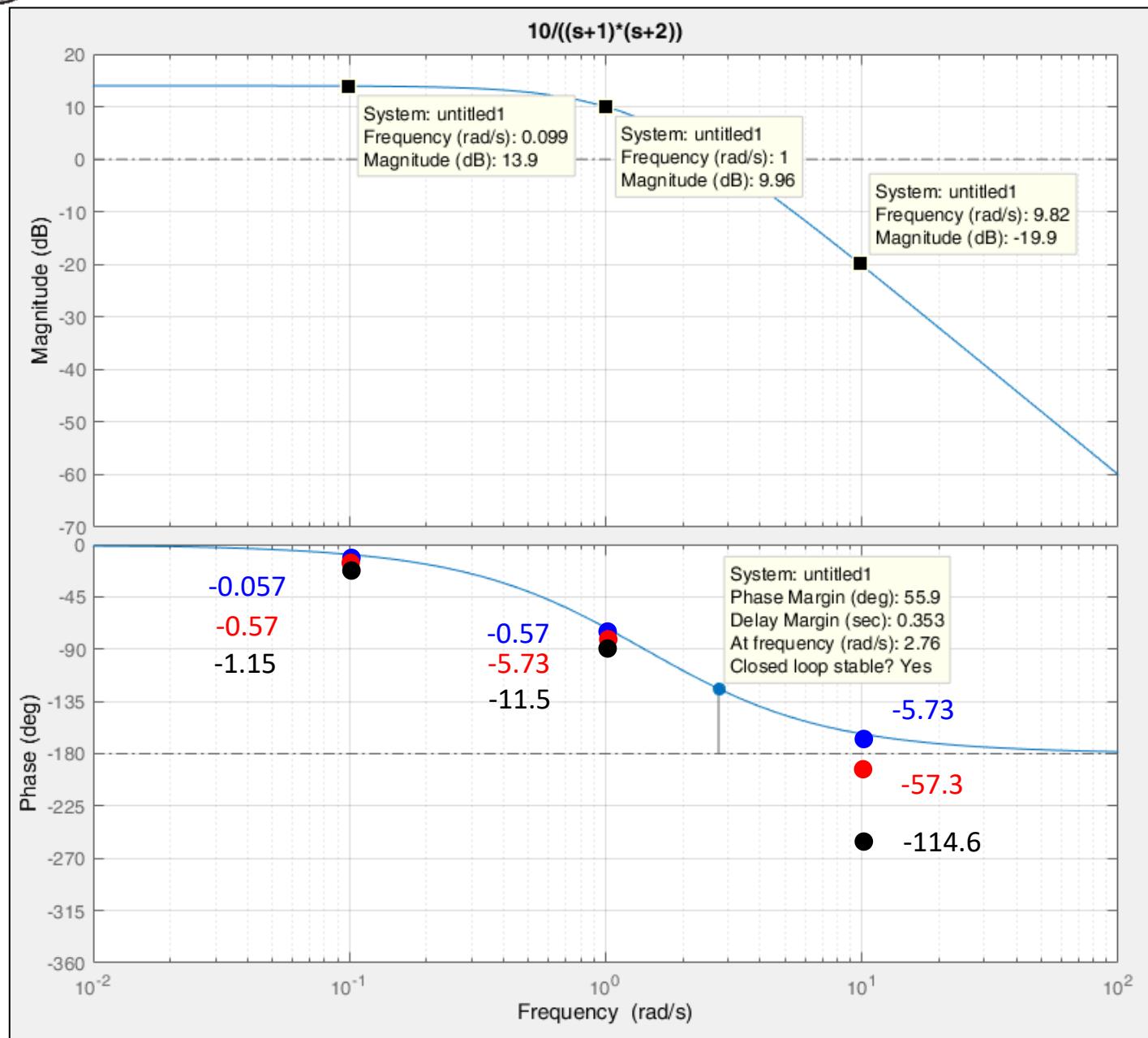
$$\angle \tilde{G}(s) = \angle G(s) + \angle e^{-T_d s}$$



- Nel sistema privo di ritardo il margine di fase, essendo  $\omega_c = 2.76$  (rad/s), risulta essere  $PM \cong 56^\circ$ ;
- il sistema diventa quindi instabile quando, per  $\omega_c = 2.76$  (rad/s), il ritardo è tale da portare  $PM$  a 0 (*ritardo critico*  $T_{cr}$ )



## Casi Particolari





## Casi Particolari

- Dato un sistema, possiamo quindi calcolare il massimo ritardo che l'anello può sopportare, prima di diventare instabile in ciclo chiuso

$$\omega_c T_{cr} = PM = 56^\circ = 0.977 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad T_{cr} = \frac{PM}{\omega_c} = \frac{0.977}{2.76} \cong 0.354s.$$

### □ Margini di Stabilità e Sistemi a fase non minima

- Gli zeri di parte reale positiva introducono una perdita (ritardo) di fase e quindi hanno influenza sui margini di stabilità di un sistema

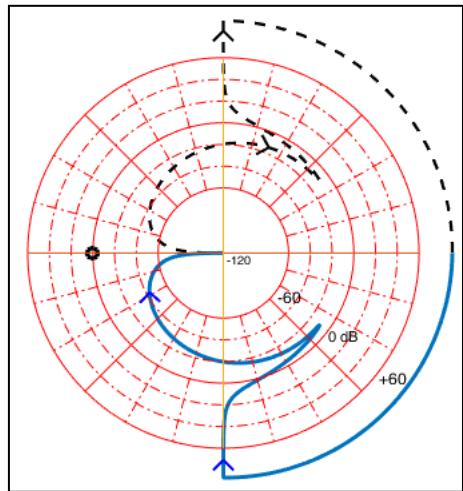
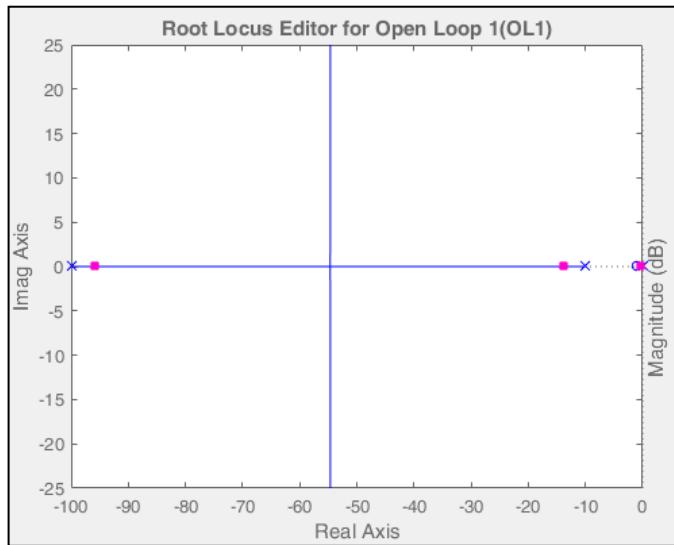
□ Esempio:  $K(s)G(s) = k \frac{s + 1}{s(s + 10)(s + 100)}$

- Il sistema è sempre asintoticamente stabile in ciclo chiuso, con margine di guadagno infinito.
- Il sistema in ciclo chiuso ha un errore al gradino nullo

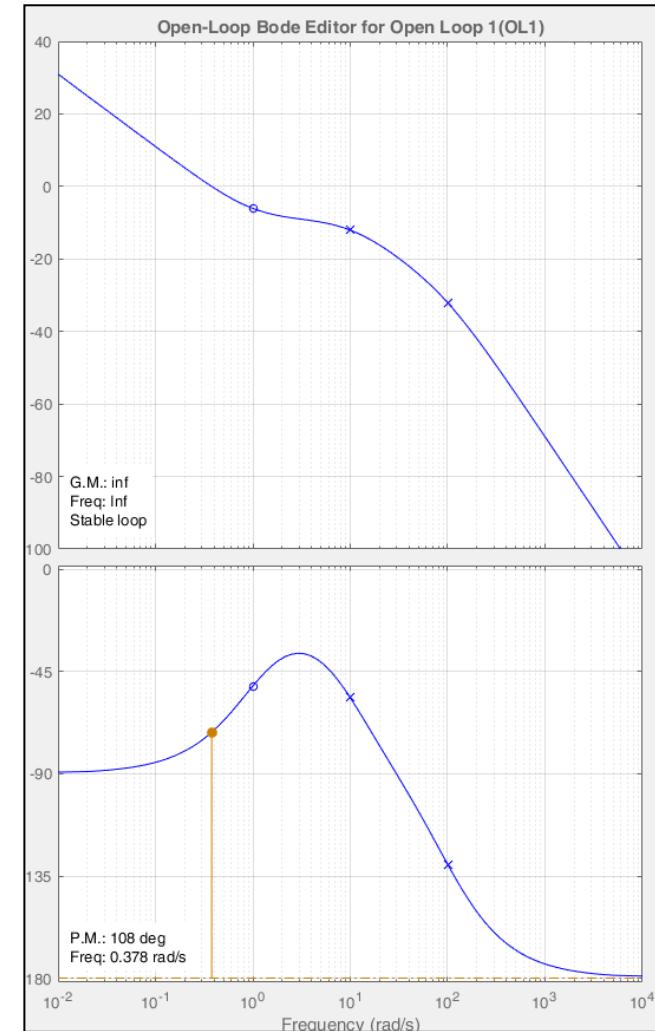


## Casi Particolari

$GM = \infty, k \approx 340 \Rightarrow PM \approx 108^\circ$  ad una frequenza di circa  $\omega_c \approx 0.38 \text{ rad/s}$



Dal Criterio di Nyquist:  
 $Z = N - P = 0 - 0 = 0$



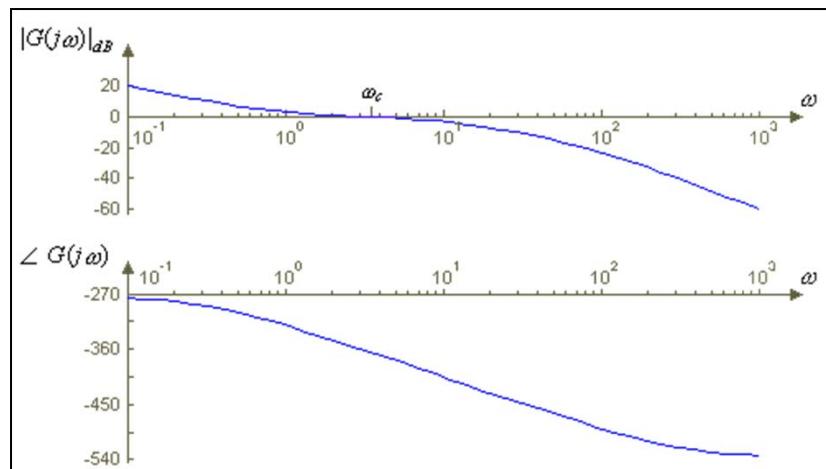


## Casi Particolari

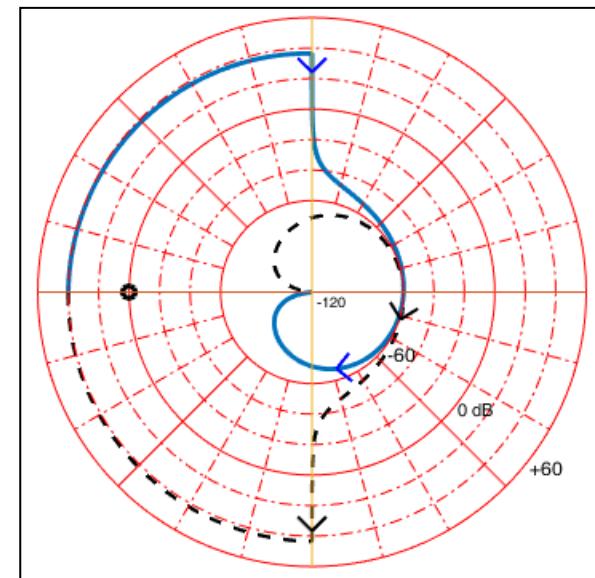
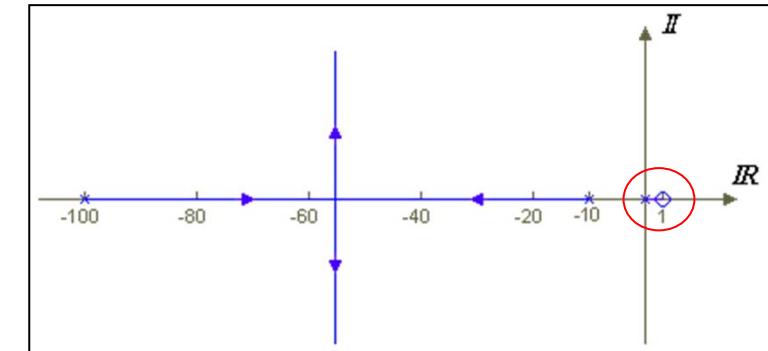
$$K(s)G(s) = k \frac{s - 1}{s(s + 10)(s + 100)}$$

- Il sistema in ciclo chiuso è sempre instabile in ciclo chiuso, con guadagni positivi, a causa dello zero a +1

- Il Margine di Fase è sempre < 0



Dal Criterio di Nyquist:  
 $Z = N - P = 1 - 0 = 1$





## Casi Particolari

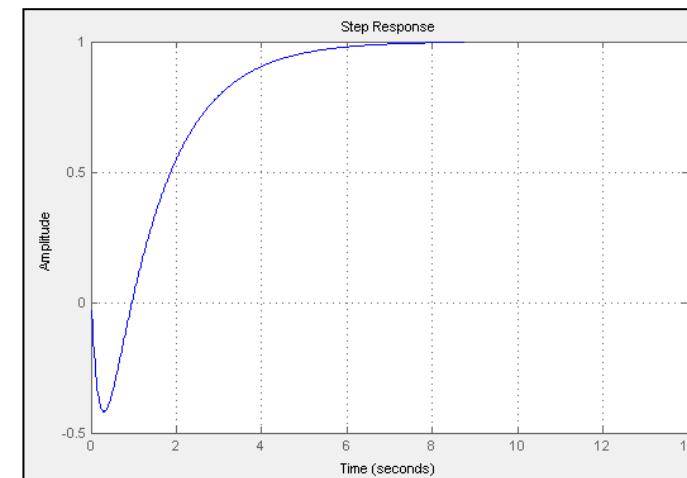
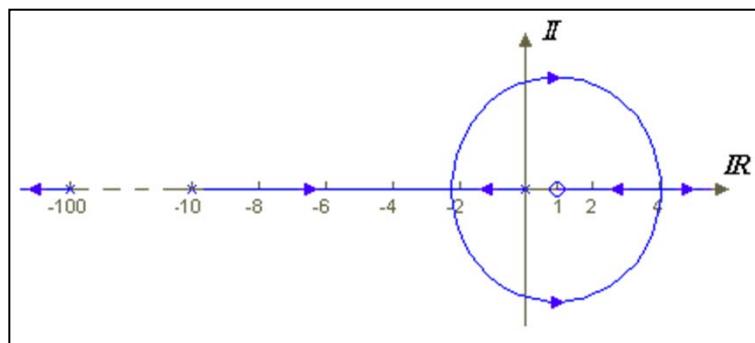
□ **Nota:** La stabilità in ciclo chiuso si può ottenere mediante retroazione positiva, oppure con guadagno negativo ( $k < 0$ ).

$$1 + K(s)G(s) = 0 \quad \Rightarrow s^3 + 110s^2 + (1000 + k)s - k = 0 \quad k_{CR} \cong -991$$

|       |                                 |            |
|-------|---------------------------------|------------|
| $s^3$ | 1                               | 1000 + $k$ |
| $s^2$ | 110                             | - $k$      |
| $s^1$ | $\frac{110(1000 + k) + k}{110}$ | 0          |
| $s^0$ | - $k$                           |            |

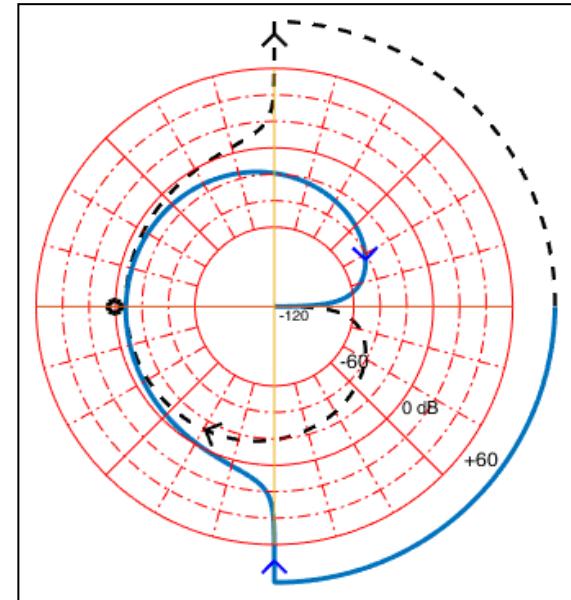
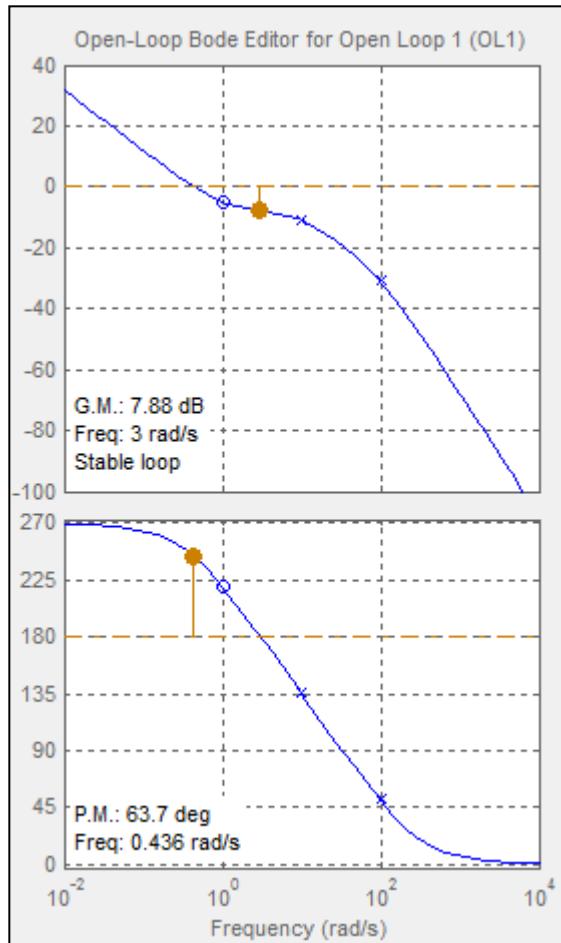
$$k = -400$$

$$p_1 = -0.78, \quad p_2 = -4.93, \quad p_3 = -104.28,$$





## Casi Particolari



Dal Criterio di Nyquist:  
 $Z = N - P = 0 - 0 = 0$

- per  $\omega_c \approx 0.437 \text{ rad/s}$  si ha  $PM \approx 64^\circ$  mentre per  $\omega_\pi (\approx 3.02 \text{ rad/s})$  si ha  $GM \approx 7.7 \text{ dB}$ ;
- entrambi i margini sono quindi positivi, il sistema è asintoticamente stabile in Ciclo Chiuso.

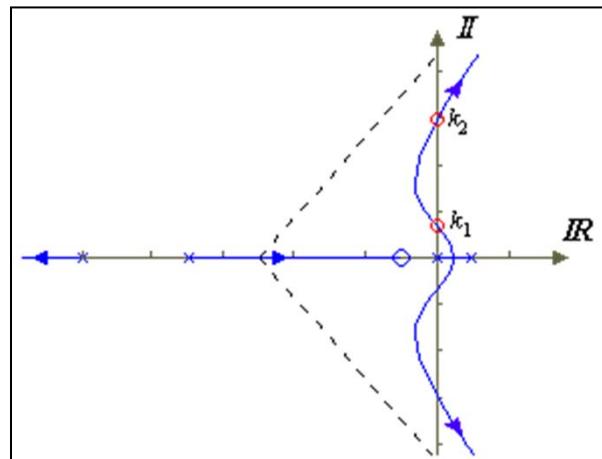


## Casi Particolari

### □ Margini di Stabilità per Sistemi a Stabilità Condizionata

- **Definizione:** Un sistema la cui stabilità in anello chiuso può variare sia per una attenuazione che per una amplificazione di anello si dice a stabilità condizionata

$$G(s) = \frac{1}{(s - p_1)(s + p_2)(s + p_3)} \quad K(s) = k \frac{s + z}{s}$$



- Con una opportuna scelta dei poli e dello zero, il sistema risulta asintoticamente Stabile per  $k_1 < k < k_2$
- Il sistema **NON** soddisfa il Criterio di Bode. La stabilità in ciclo chiuso non è garantita dai margini entrambi positivi. Deve essere applicato il criterio di Nyquist.
- **Esempio di progetto di un controllore P-I che stabilizzi un sistema del terzo ordine e mandi a zero l'errore a regima al gradino unitario**



## Casi Particolari

□ **Esempio numerico**  $K(s)G(s) = k \frac{s + 0.1}{s(s - 0.5)(s + 2)(s + 10)}$

$$G_{CL}(s) = \frac{k(s + 0.1)}{s^4 + 11.5s^3 + 14s^2 + (k - 10)s + 0.1k}$$

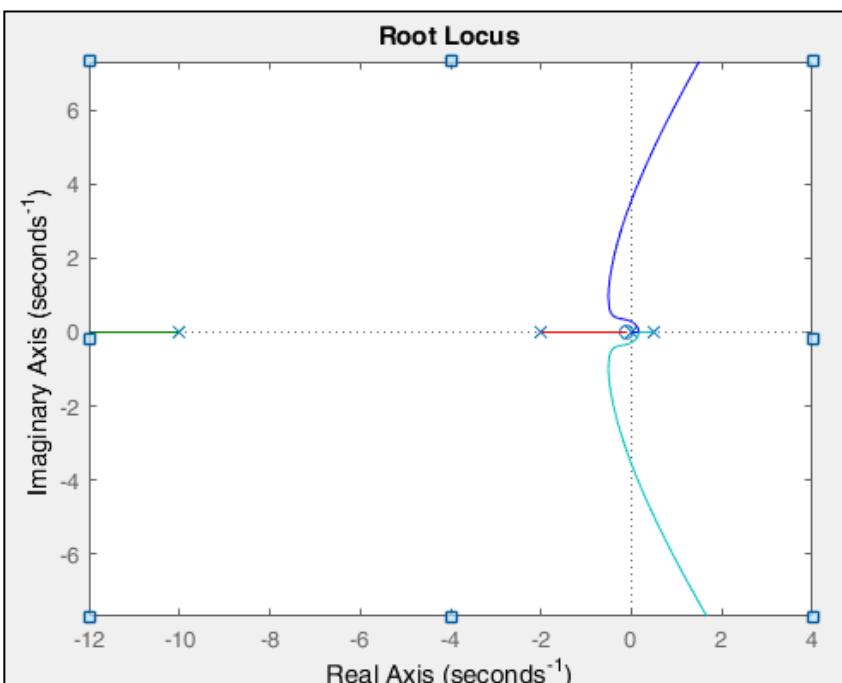
- **Condizione necessaria del Criterio di Routh:**  
 $k > 0; k > 10$

|   |   |          |      |  |
|---|---|----------|------|--|
|   |   |          |      |  |
| 4 | 1                                       | 14       | 0.1k |  |
| 3 | 11.5                                    | $k - 10$ | 0    |  |
| 2 | $\frac{171 - k}{11.5}$                  | 0.1k     | 0    |  |
| 1 | $\frac{-k^2 + 167.78k - 1710}{171 - k}$ | 0        |      |  |
| 0 | 0.1k                                    |          |      |  |

- **Tabella di Routh:**

$$k < 171$$

$$\begin{aligned} 10.9 &< k < 156.88 \\ \Rightarrow 10.9 &= k_1^{CR} < k < k_2^{CR} = 156.88 \end{aligned}$$

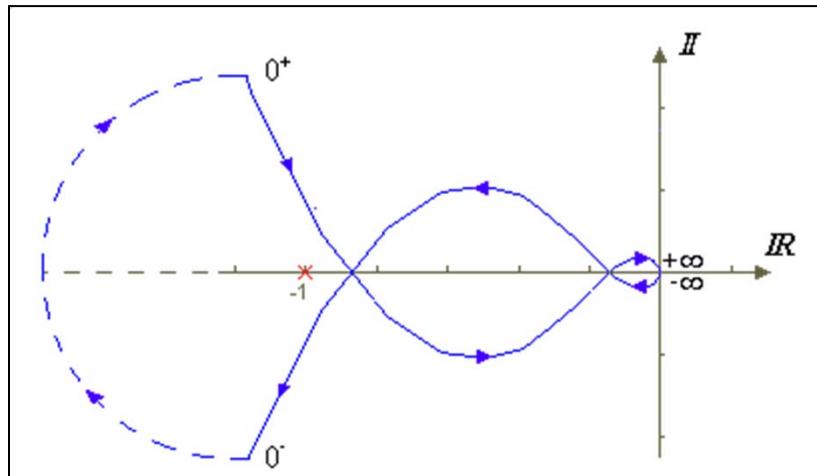




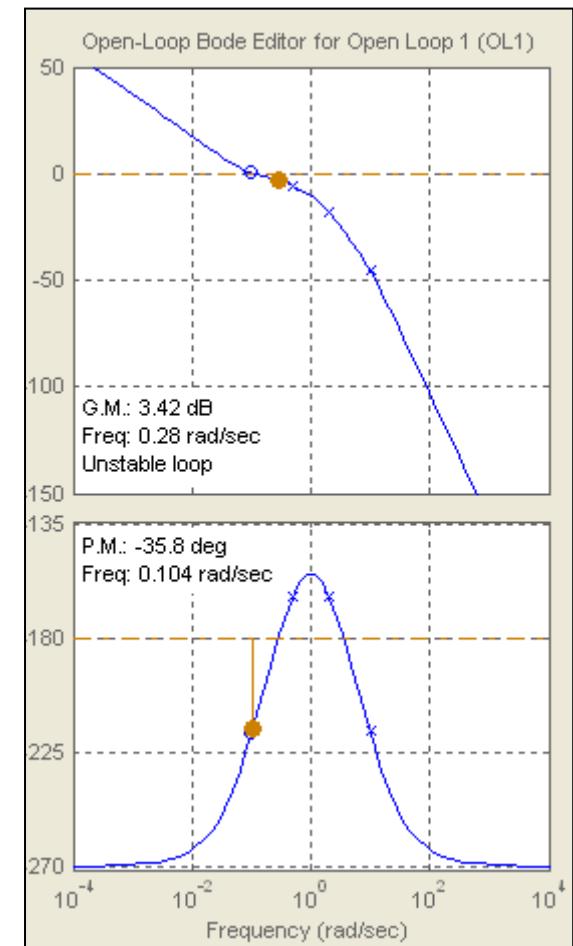
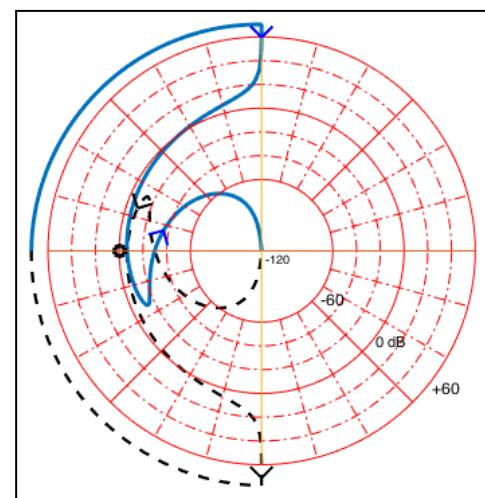
## Casi Particolari

### □ Applicazione del Criterio di Nyquist nei 3 casi limite

- Il sistema in anello chiuso è instabile per  $k < k_{1cr} = 10.9$



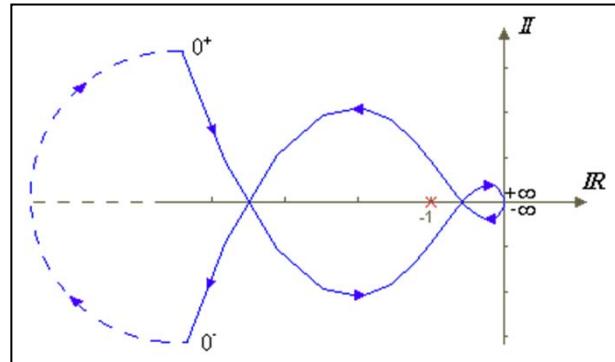
$$\begin{cases} P = 1 \\ N = 1 \end{cases} \Rightarrow Z = N + P = 2$$



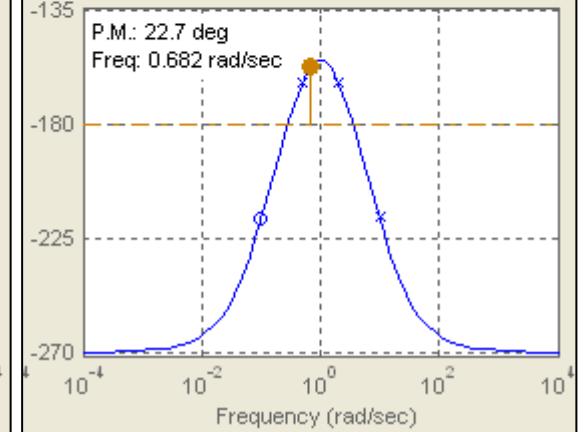
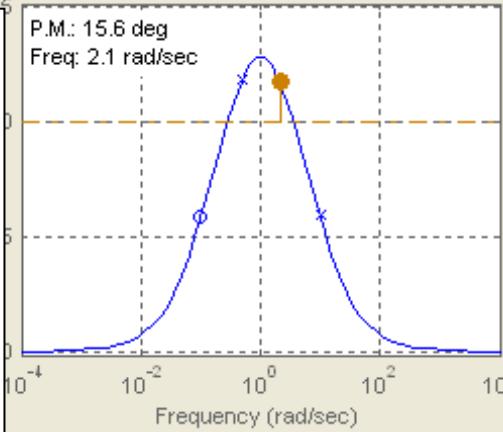
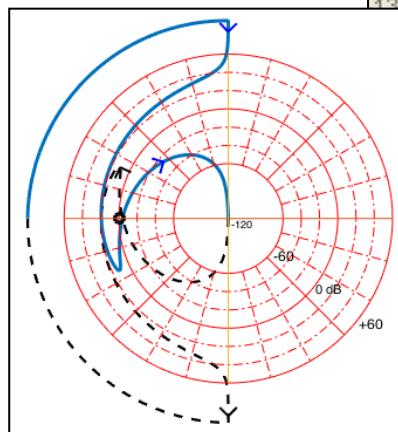
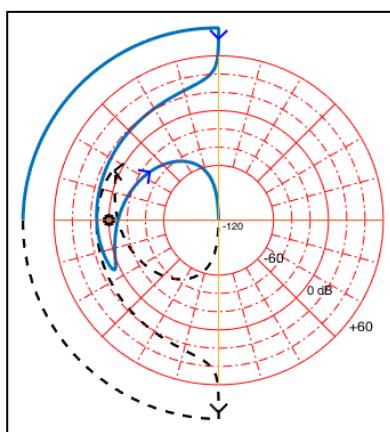
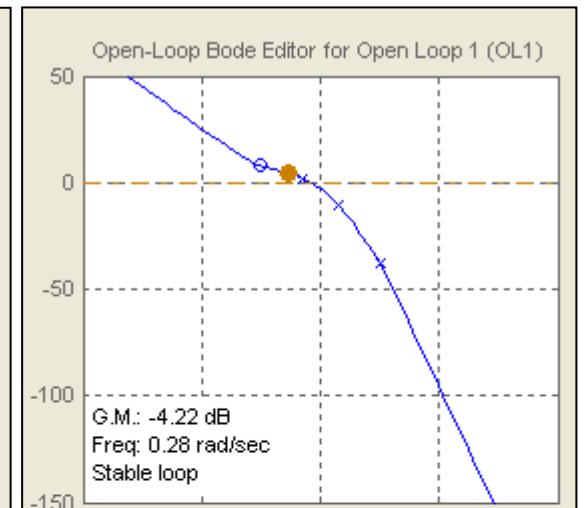
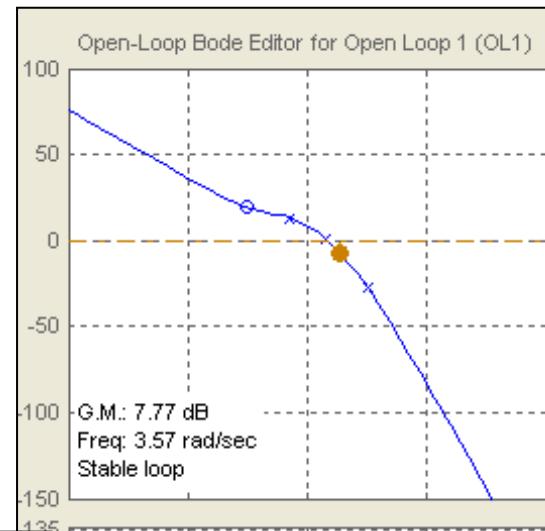


## Casi Particolari

- Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile per  $10.9 = k_{1cr} < k < k_{2cr} = 156.88$



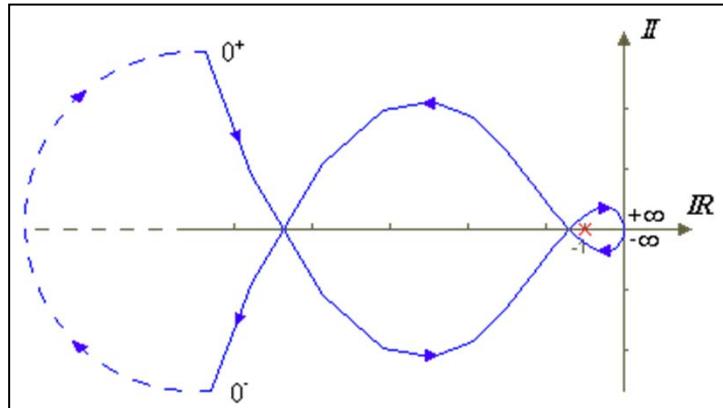
$$\begin{cases} P = 1 \\ N = -1 \end{cases} \Rightarrow Z = N + P = 0$$



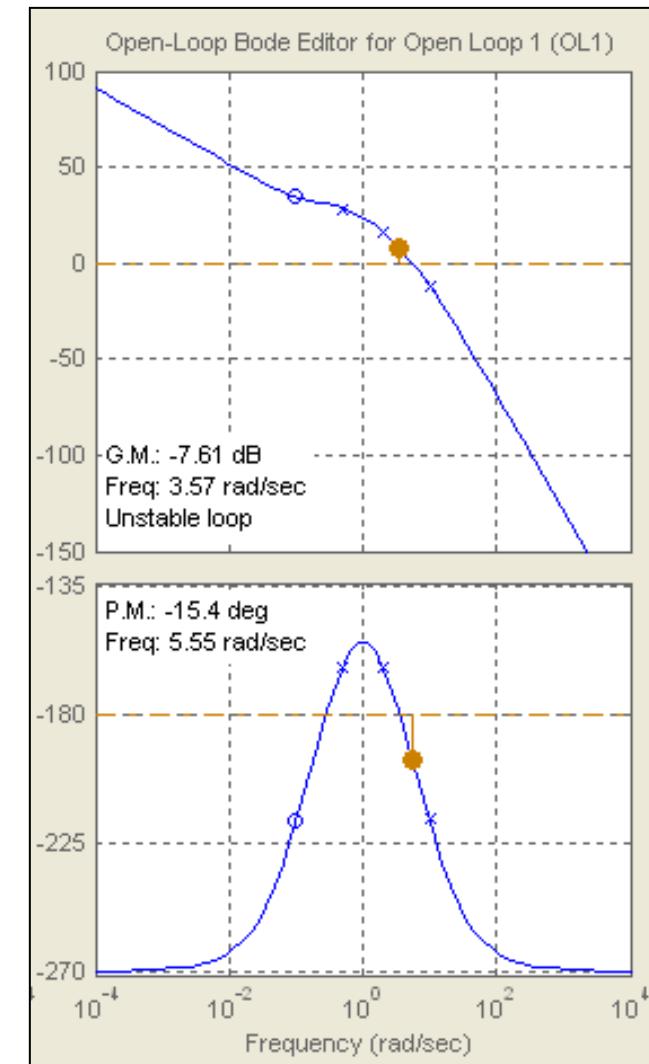
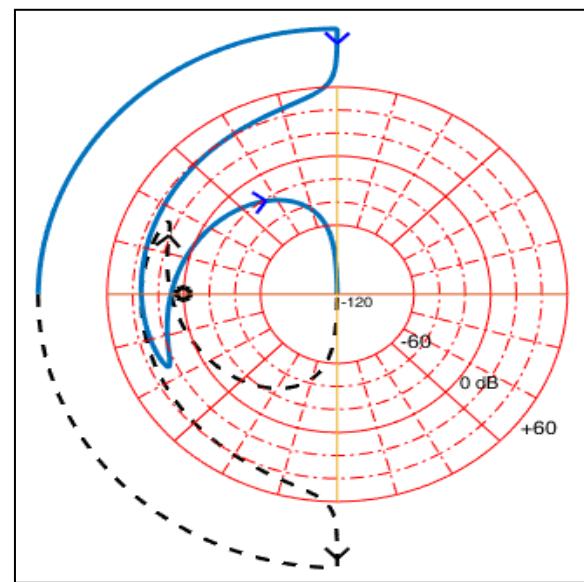


## Casi Particolari

- Il sistema in anello chiuso è instabile per  $156.88 = k_{2cr} < k$



$$\begin{cases} P = 1 \\ N = 1 \end{cases} \Rightarrow Z = N + P = 2$$

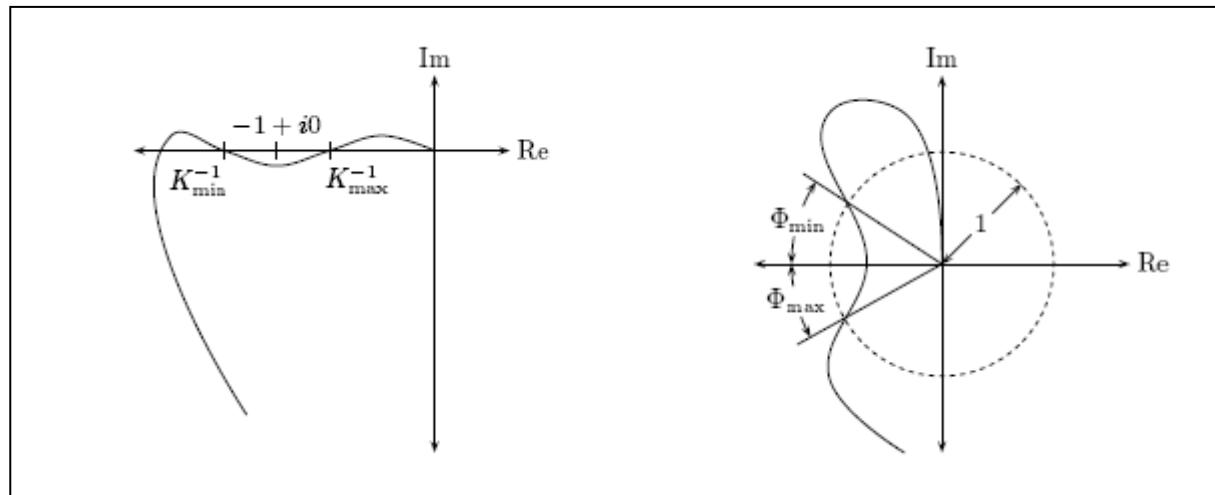




## Casi Particolari

- **Nota:** In generale quindi, si possono avere situazioni in cui GM e PM sono limitati sia Inferiormente, che superiormente. Ovvero:

$$GM \in [GM_{\min}, GM_{\max}], PM \in [\Phi_{\min}, \Phi_{\max}]$$





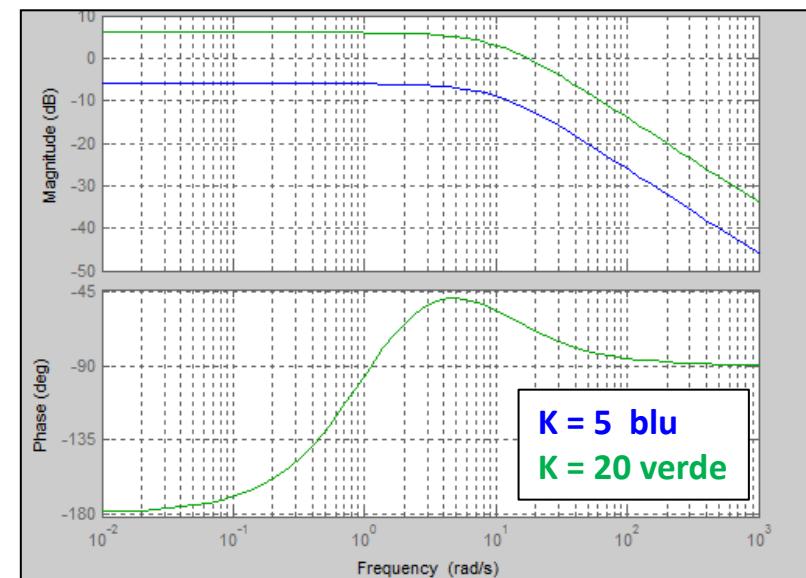
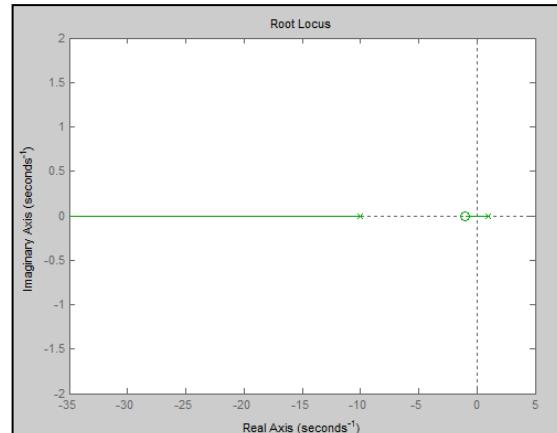
## Casi Particolari

□ Nota: Nel caso di sistemi che non soddisfano il criterio di Bode:

- I margini di stabilità entrambi positivi non garantiscono la stabilità asintotica in ciclo chiuso
- La verifica va fatta applicando il criterio di Nyquist ( $Z = N + P$ )

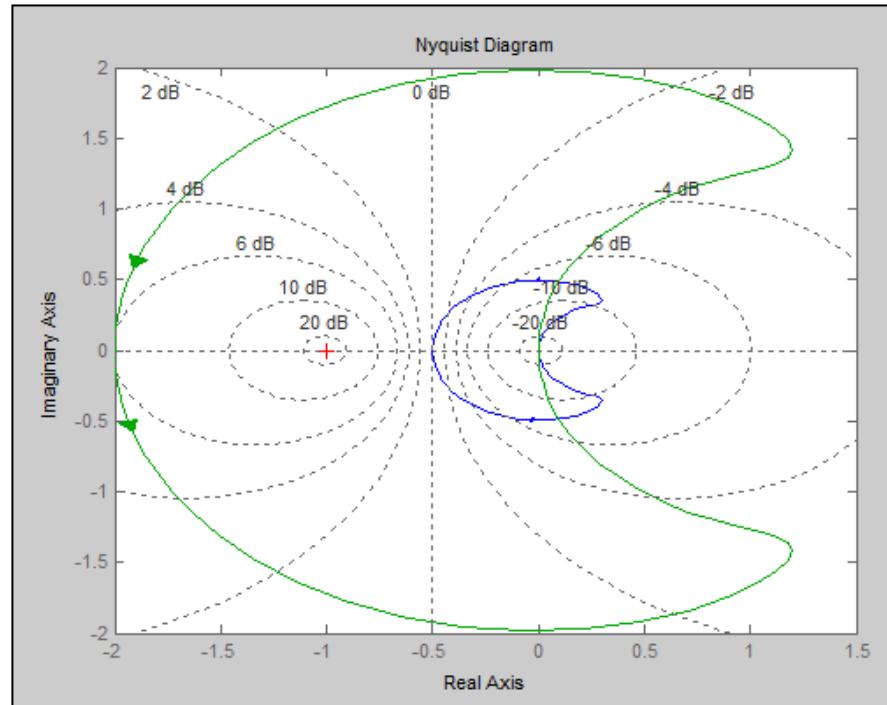
□ Esempio:  $G_{OL}(s) = \frac{k(s+1)}{(s-1)(s+10)} = -\frac{k}{10} \cdot \frac{(1+s)}{(1-s)(1+\frac{s}{10})}$

- $k > 10$  per la stabilità in ciclo chiuso





## Casi Particolari



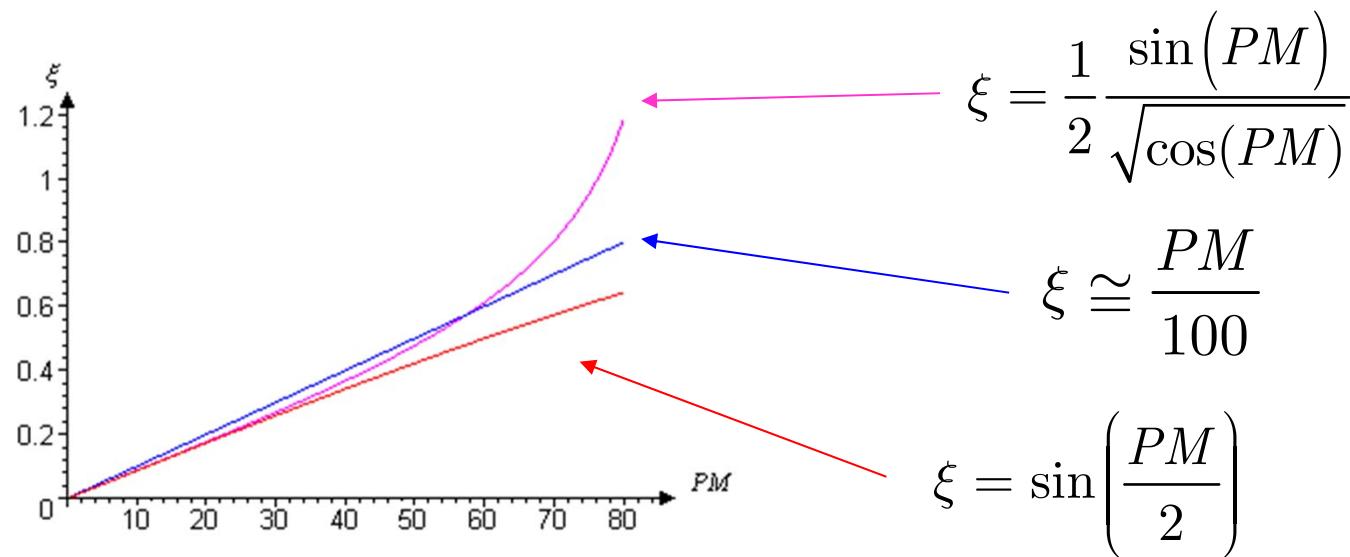
- Nel caso di  $k = 5$  (blu),  $\mathbf{N = 0 \Rightarrow Z = N + P = 0 + 1 = 1}$ : sistema instabile in anello chiuso, ma  $GM > 0$
- Nel caso di  $k = 20$  (verde),  $\mathbf{N = -1 \Rightarrow Z = N + P = -1 + 1 = 0}$ : sistema asintoticamente stabile in anello chiuso, ma  $GM < 0$



# Margini di Stabilità e Parametri Temporali

## □ Margini di Stabilità e Smorzamento

- Il margine di fase è legato da una relazione di proporzionalità al coefficiente di smorzamento  $\xi$  dei poli dominanti complessi coniugati di un sistema; esistono diverse relazioni approssimate fra i due parametri:



- La richiesta di PM può quindi essere legata non solo ad incertezze di modello, ma anche alla richiesta di uno specifico smorzamento del transitorio



# Margini di Stabilità e Parametri Temporali

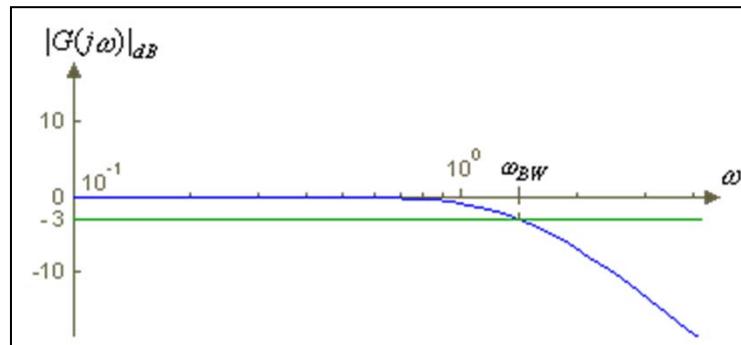
## □ Margini di Stabilità e Banda Passante

- Consideriamo come esempio un filtro passa-basso del 2<sup>o</sup> ordine a guadagno unitario

$$G_{OL}(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} \Rightarrow G_{CL}(s) = \frac{G_{OL}(s)}{1 + G_{OL}(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Dalla definizione di Banda Passante:

$$|G_{CL}(j\omega_{BW})| = \frac{|G_{OL}(j\omega_{BW})|}{|1 + G_{OL}(j\omega_{BW})|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



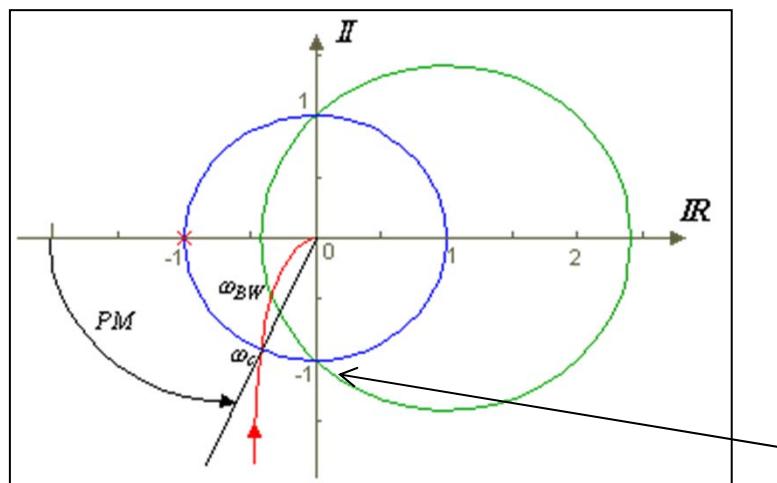


# Margini di Stabilità e Parametri Temporali

- La circonferenza di centro 1 e raggio  $\sqrt{2}$  è l'insieme dei punti del piano complesso che soddisfa la relazione:

$$\frac{|s|}{|1+s|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- I valori di  $\omega$  per cui il segnale non viene "tagliato" dalla caratteristica passa-basso del sistema a ciclo chiuso sono quelli per cui il diagramma polare del sistema di anello aperto ricade all'esterno della circonferenza dove



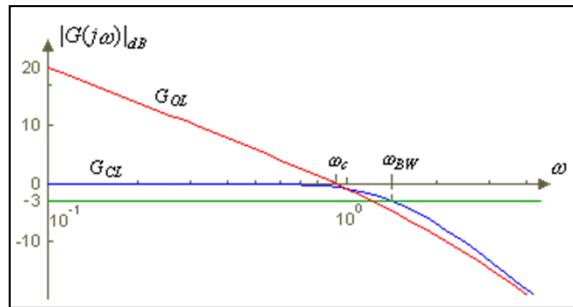
$$|G_{CL}(j\omega_{BW})| = \frac{|G_{OL}(j\omega_{BW})|}{|1 + G_{OL}(j\omega_{BW})|} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Si nota che per valori del margine di fase prossimi ai  $90^\circ$  è possibile approssimare il limite di banda del sistema a ciclo chiuso  $\omega_{BW}$  con la pulsazione di attraversamento del sistema di anello aperto  $\omega_c$



# Margini di Stabilità e Parametri Temporali

- Confronto tra i diagrammi di Bode (anello aperto e chiuso)



$$\omega_{BW} \cong \omega_c \quad \text{con} \quad \omega_{BW} > \omega_c$$

$$G_{OL}(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$$

- Commenti:** Informazioni ottenibili dalla risposta in frequenza in anello, riguardo al comportamento del sistema in ciclo chiuso

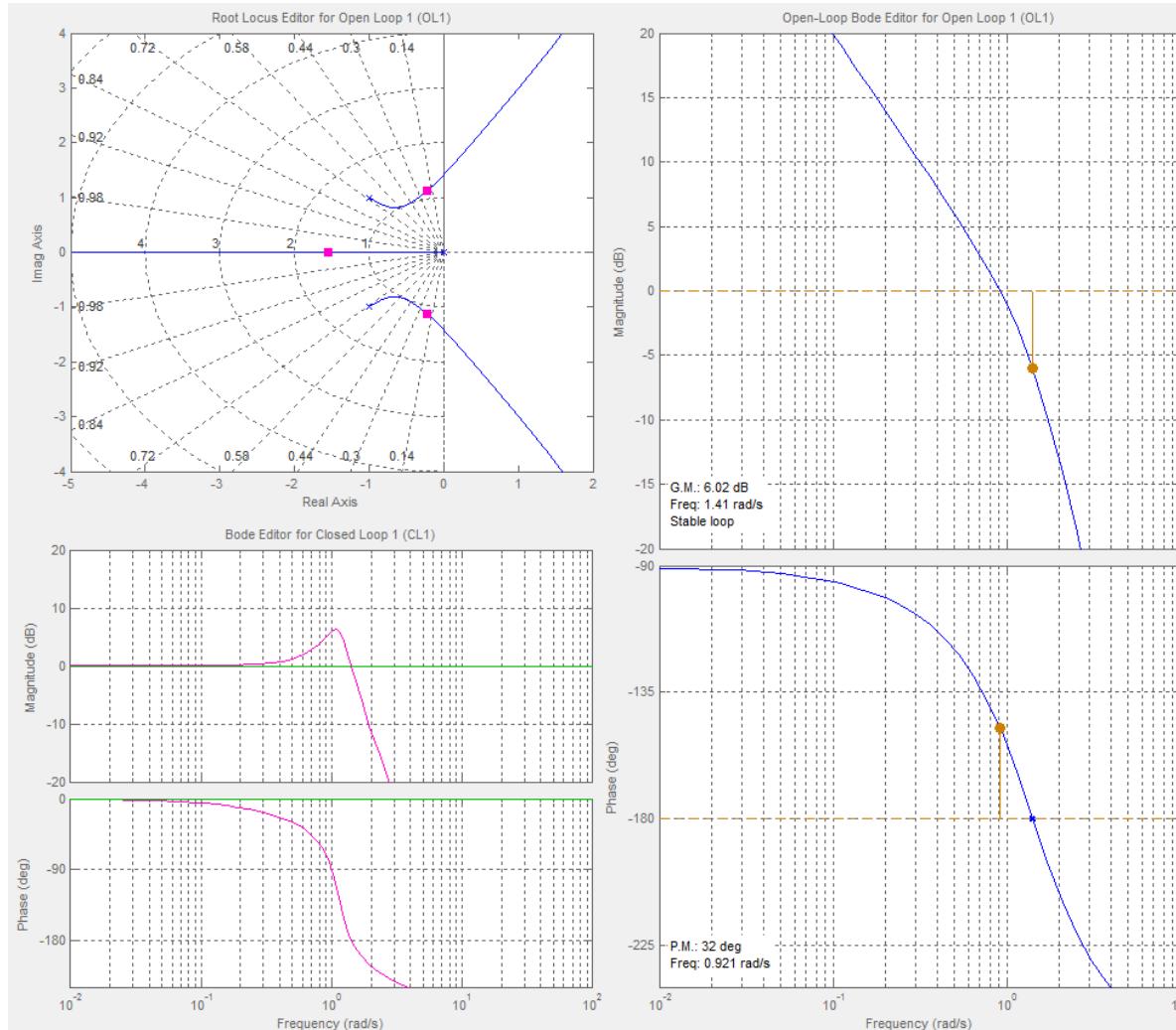
- Stabilità in anello chiuso attraverso i margini di stabilità e la pendenza all'attraversamento ( $\omega = \omega_c$ )
- Banda passante in anello chiuso dalla frequenza di attraversamento ( $\omega = \omega_c$ )
- Picco di risonanza in anello chiuso e quindi smorzamento dei poli dominanti
- Frequenza di risonanza in anello chiuso
- Errore a regime in anello chiuso
- Limiti di stabilità in presenza di incertezze di anello



# Margini di Stabilità e Parametri Temporali

## □ Esempio

$$G_{OL}(s) = \frac{k}{s(s + 1)(0.5s + 1)}; k = 1$$

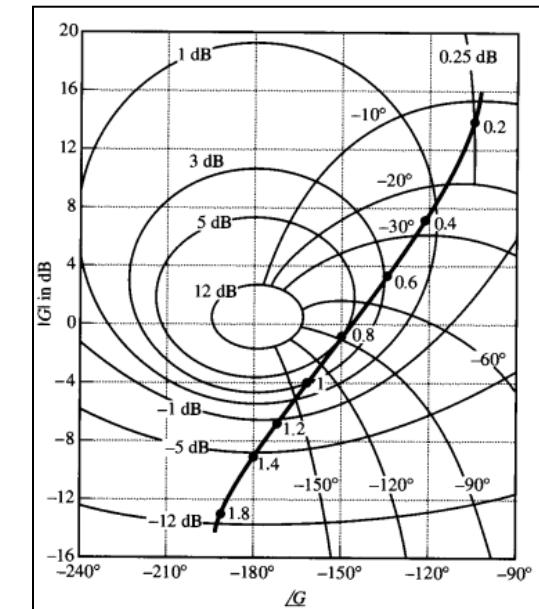
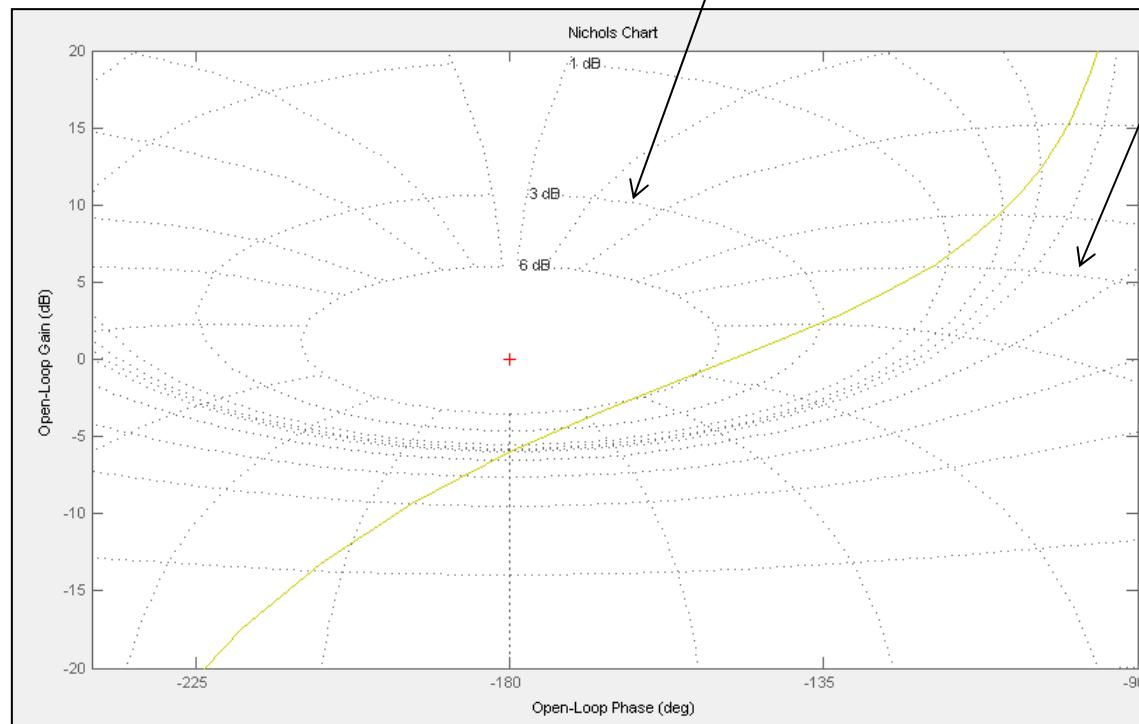




# Margini di Stabilità e Parametri Temporali

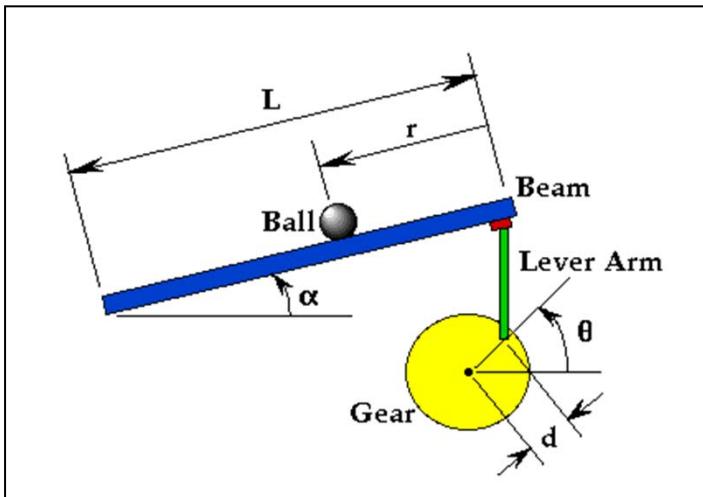
- Tradizionalmente, mediante le carte di Nichols, la risposta in frequenza di anello è tracciata sui luoghi di modulo costante ( $M$ ) e fase costante ( $N$ ) della funzione di trasferimento in anello chiuso

$$G_{CL}(s) = \frac{G_{CL}(s)}{1 + G_{CL}(s)} \quad M(s) = \left| \frac{G_{CL}(s)}{1 + G_{CL}(s)} \right|_{dB} \quad N(s) = \angle \left[ \frac{G_{CL}(s)}{1 + G_{CL}(s)} \right]$$





# Applicazioni: Ball - Beam



$$\begin{aligned}m &= 0.111; \\R &= 0.015; \\g &= -9.8; \\L &= 1.0; \\d &= 0.03; \\J &= 9.99 \times 10^{-6};\end{aligned}$$

$$\frac{r(s)}{\theta(s)} = -\frac{mgd}{L\left(\frac{J}{R^2} + m\right)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{0.21}{s^2} \quad [m/rad]$$

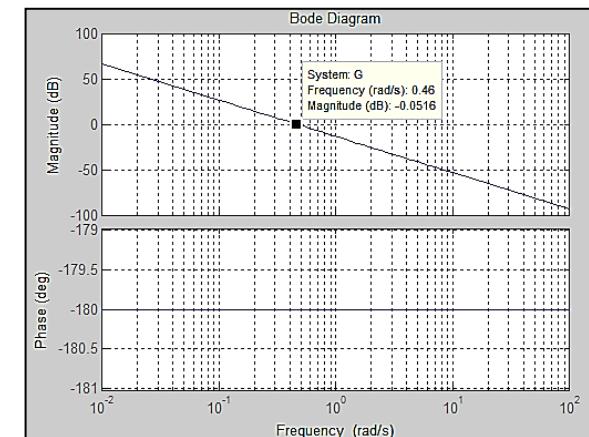
## □ Considerazioni sulla fisica del problema ed ipotesi di base

1. Sistema costituito da elementi rigidi e non deformabili, per cui i parametri dimensionali non variano (lunghezza trave, massa sfera, offset camma, gravità, ecc.)
2. Misura posizione sfera ed azionamento motore sono considerati perfetti, quindi con FdT unitaria
3. Definizione dell'origine del riferimento per la sfera
4. Piccoli spostamenti per garantire l'applicabilità della linearizzazione

## □ Analisi del comportamento del sistema (modello nominale)

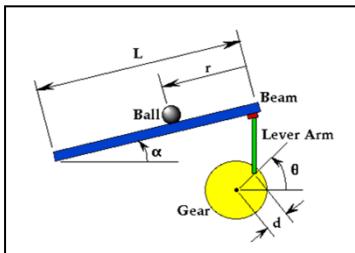
1. Cosa succede alla sfera quando diamo un comando di camma, per esempio  $10^\circ$ ?  
 $r(s) = \frac{0.21}{s^2} \theta(s) = \frac{0.21}{s^2} \cdot \frac{0.1745}{s} = \frac{3.66}{s^3} [cm \cdot deg]$
2. Quale è la risposta in frequenza  
 $r(t) = 3.66t^2$

▪ Dopo 5.27 secondi la sfera ha percorso 100 cm





## Applicazioni: Ball - Beam



$$\frac{r(s)}{\theta(s)} = \frac{0.21}{s^2}$$

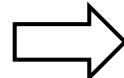
□ **Problema:** Si vuole completo controllo sulla posizione della sfera, mediante opportuno movimento della camma

### □ Requisiti di Progetto:

- Tempo di Assestamento < 3 Sec
- Sovraelongazione < 5%
- Stabilità asintotica

- **Nota:** Nel caso di stabilità, il sistema in ciclo chiuso ha un errore nullo sia al gradino che alla rampa (tipo 2)

$$M_p = e^{-\left(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)} \leq 0.05$$



$$\xi \geq 0.69$$

$$\omega_n \geq 1.9315 \text{ rad / sec}$$

$$T_{a2} \cong \frac{4}{\xi\omega_n} \leq 3$$

- Dai requisiti di risposta transitoria, il valore desiderato dei poli in anello chiuso (ovvero dei poli dominanti) è dato da:

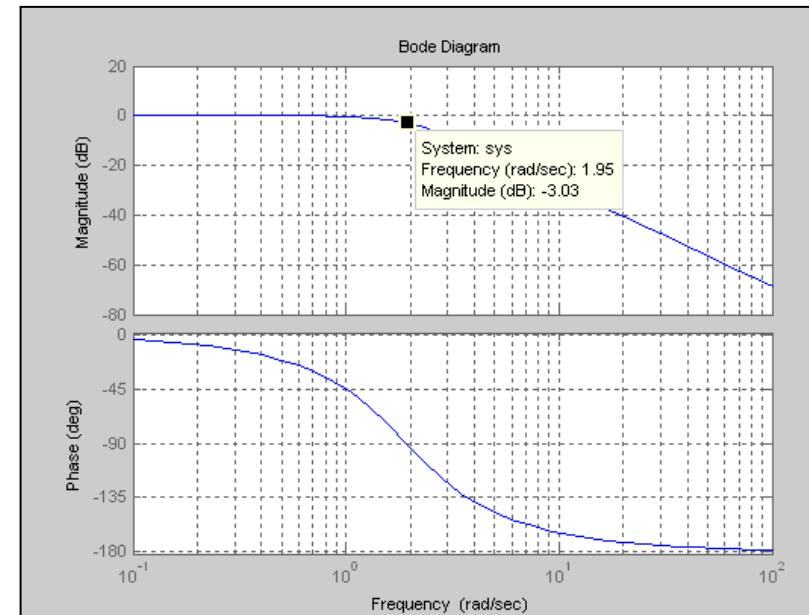
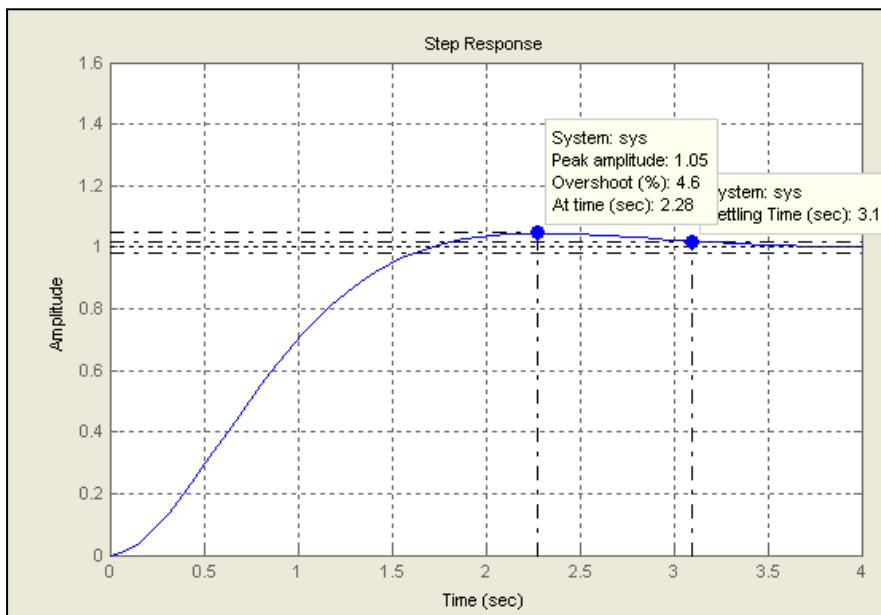
$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -1.3328 \pm j1.398 \\ (s^2 + 2.6656s + 3.7307)$$



# Applicazioni: Ball - Beam

- Dinamica Target per i requisiti di risposta transitoria:

$$G_{DES}(s) = \frac{3.7307}{(s^2 + 2.6656s + 3.7307)}$$



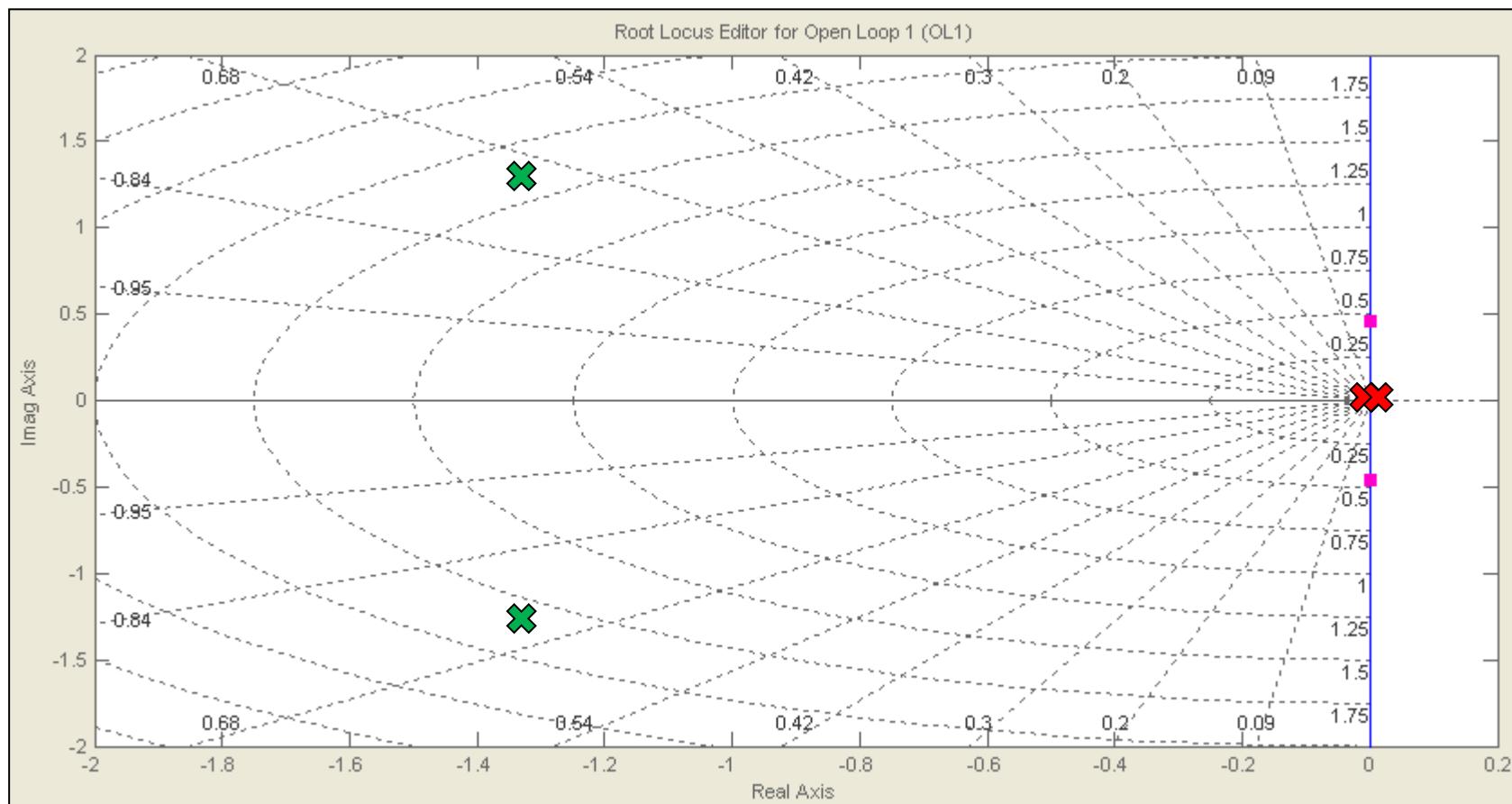
- Procedura No. 1: Uso del Luogo delle Radici



## Applicazioni: Ball - Beam

- Locazione Poli desiderati in ciclo chiuso (**verde**), e poli del modello (**rosso**)

$$p_{1,2} = -1.3328 \pm j1.398$$

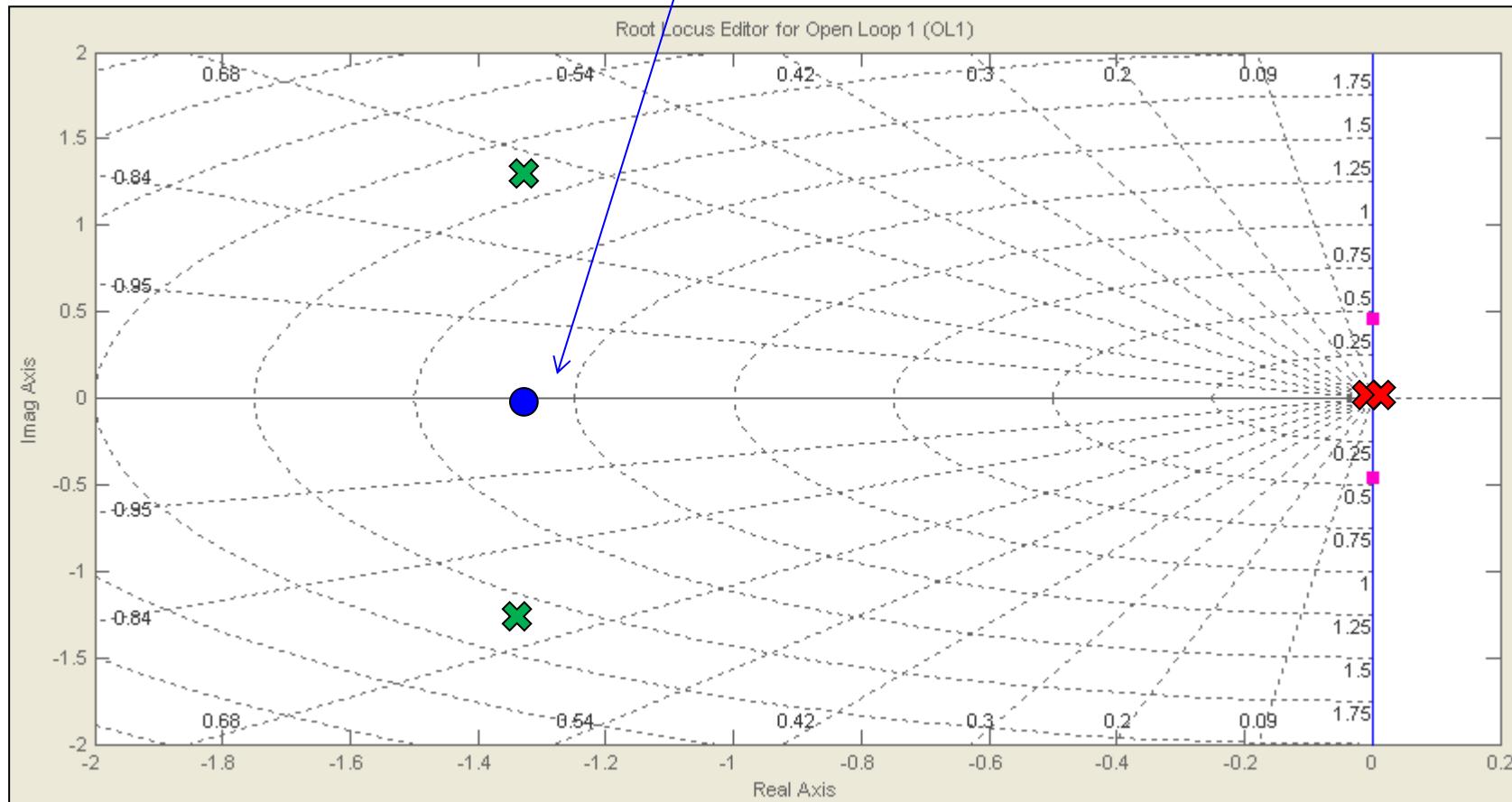




## Applicazioni: Ball - Beam

- Il Controllore deve avere un contenuto primario di anticipo di fase, è necessario almeno uno zero per attrarre i rami del luogo delle radici nel semipiano di parte reale negativa.  
Prima scelta di sintesi al valore della parte reale dei poli desiderati

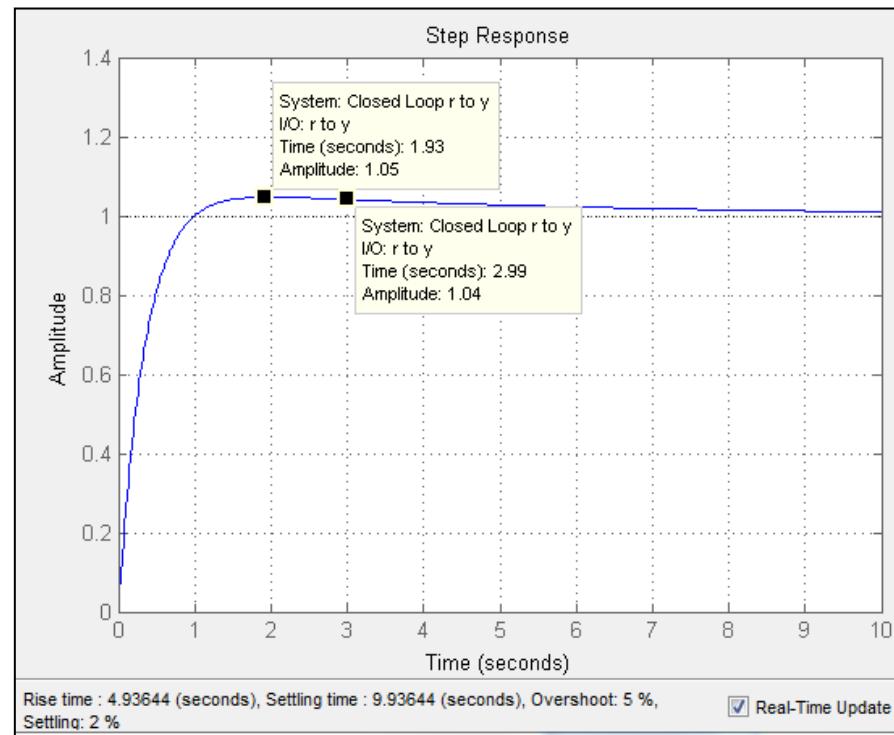
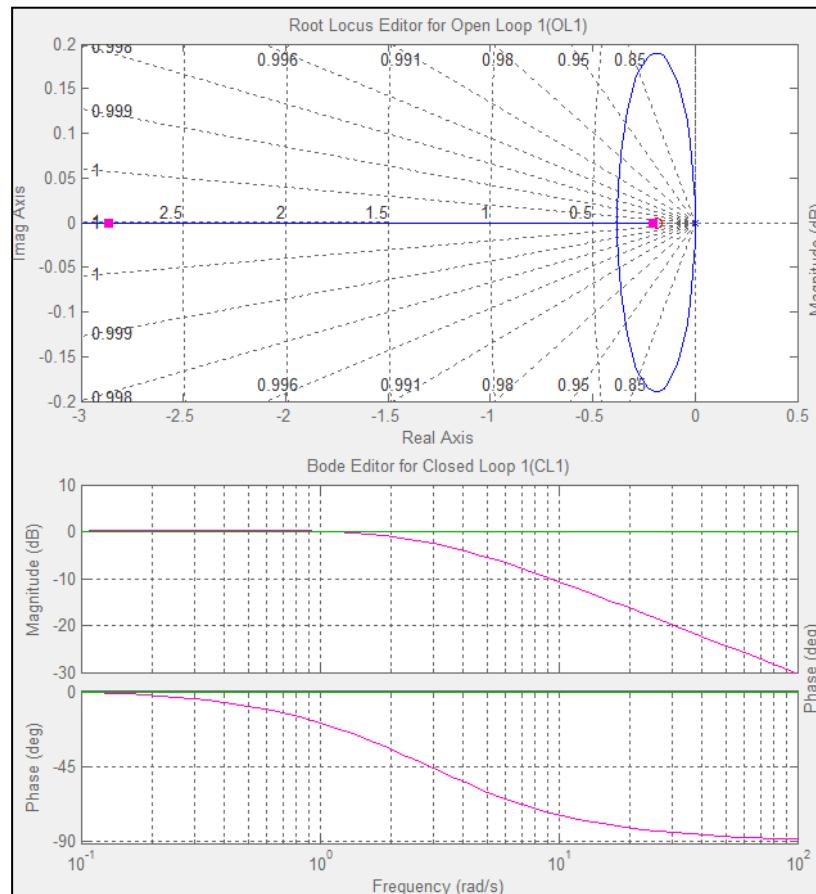
$$K(s) = k(s + Z)$$





## Applicazioni: Ball - Beam

- Tuning può essere necessario (vedi sisotool)



$$K(s) = 14.621(s + 0.19)$$

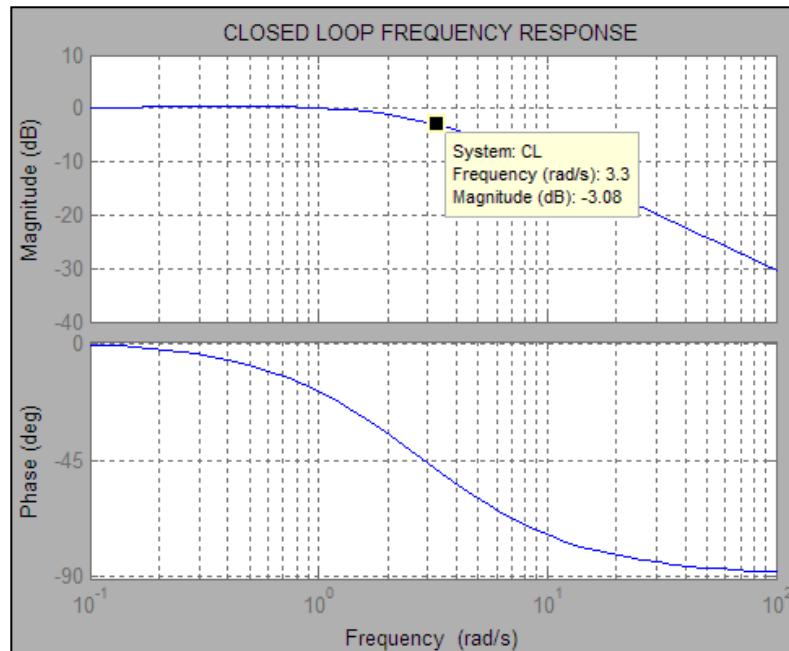
- La FdT in anello aperto è quindi:

$$G_{OL}(s) = K(s)G(s) = \frac{3.07(s + 0.19)}{s^2}$$



## Applicazioni: Ball - Beam

- Il controllore progettato è **NON CAUSALE** (1 zero e nessun polo).
- Per rendere il controllore causale, si deve introdurre almeno un Polo. La scelta del polo deve essere “Fuori Banda”, ovvero a frequenza molto più elevata della Banda Passante del sistema.



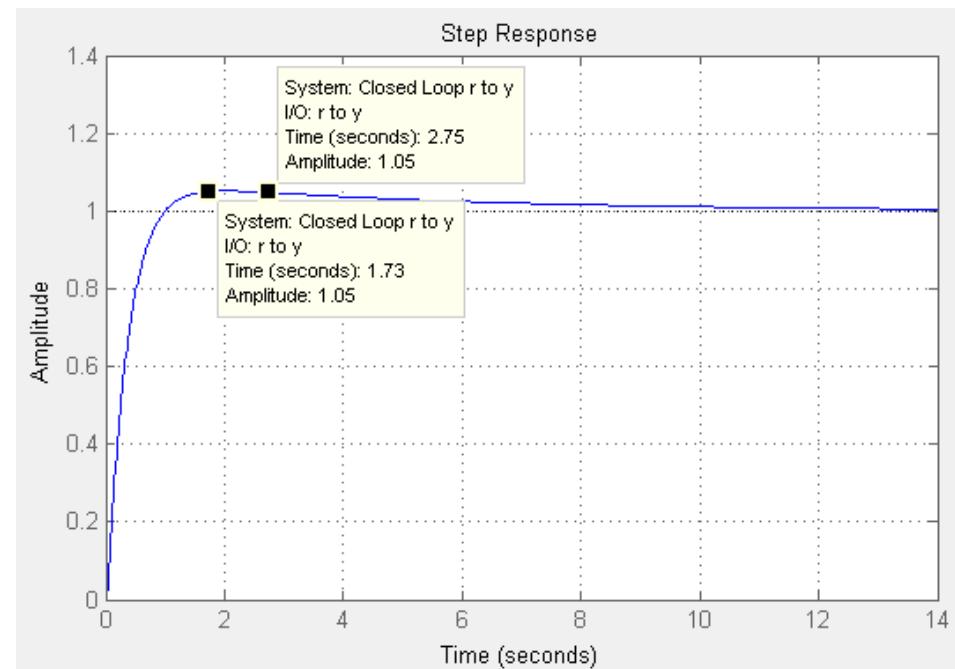
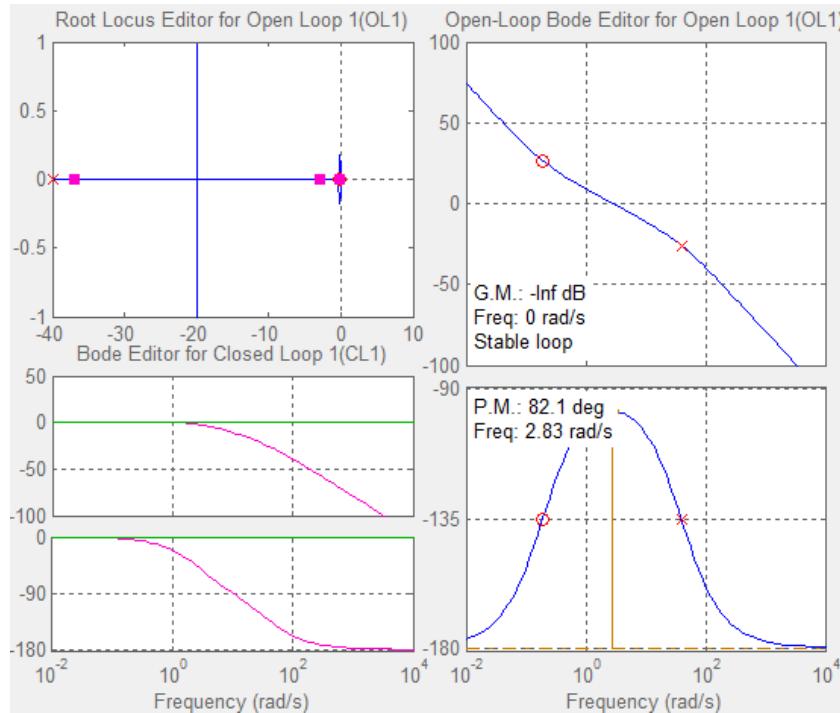
- Il polo va selezionato almeno una decade al di là della banda passante.
- Scelta di progetto: polo a frequenza di 40 rad/sec, con guadagno statico unitario.

$$\frac{40}{(s + 40)}$$



# Applicazioni: Ball - Beam

$$K(s) = \frac{584.80(s + 0.19)}{(s + 40)}$$



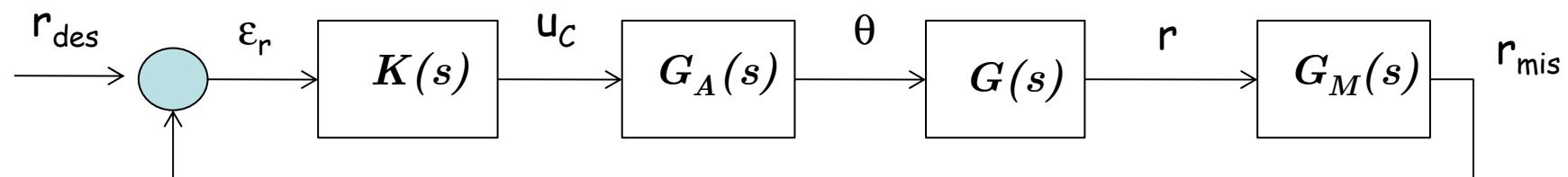


## Applicazioni: Ball - Beam

□ **Condizioni non nominali:** Incertezze non strutturate dovute a:

- Dinamica di attuazione: Motore Elettrico e trasmissione,  $G_A(s)$
- Dinamica del Sensore: Trasduttore Ottico a resistenza variabile  $G_M(s)$

$$G_A(s) = 261.8 \frac{100}{s(s+100)}, 261.8 = \frac{1000 \text{ rpm}}{24 \text{ Volt}}$$
$$G_M(s) = 24 \frac{1000}{(s+1000)}, 24 = \frac{\text{Volt}}{\text{metro}}$$

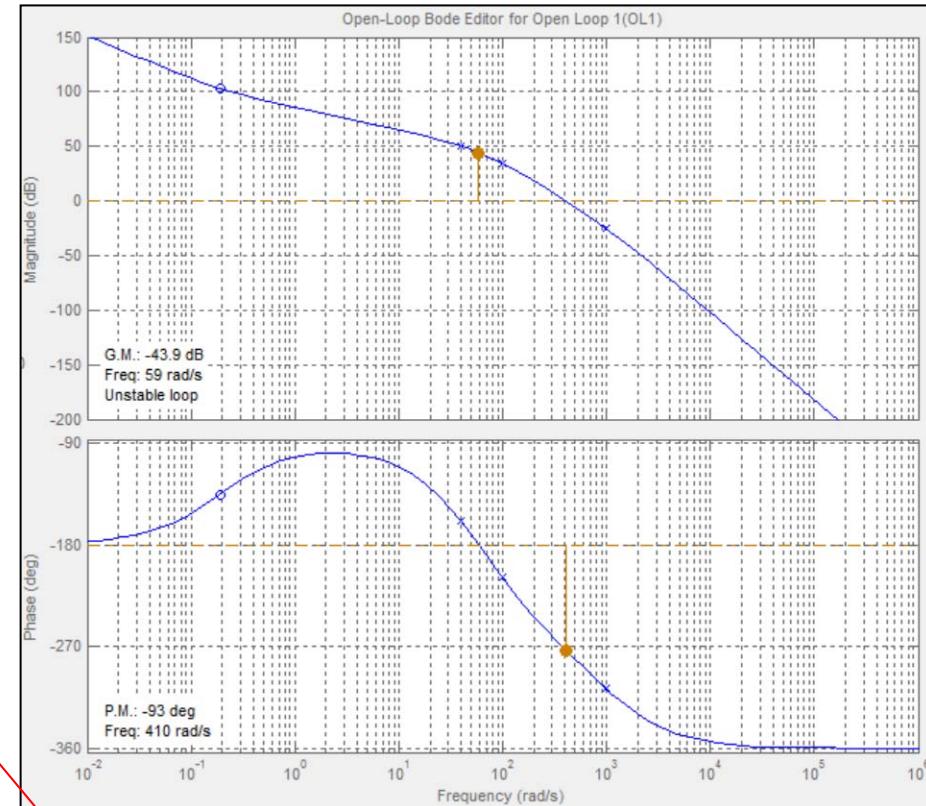
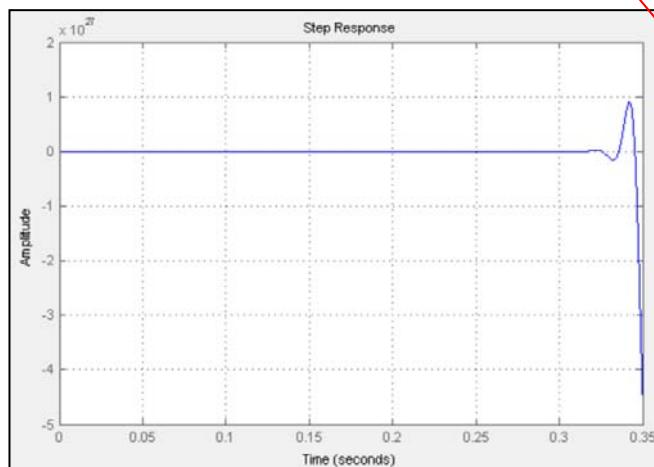
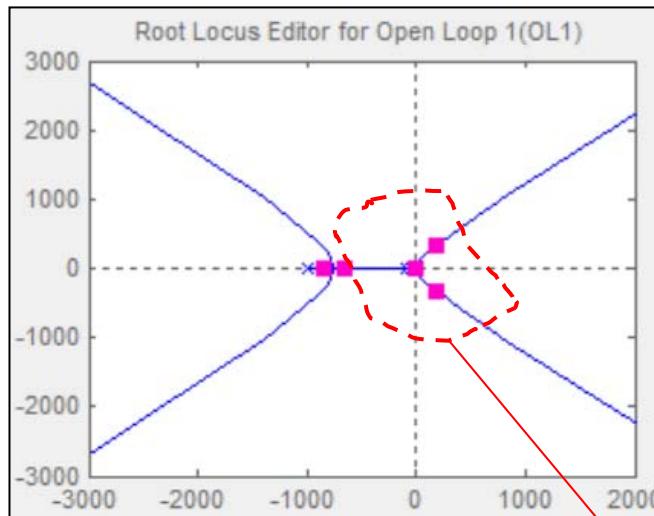


- Stabilità e prestazioni sono garantite in presenza delle dinamiche di attuazione e misura?
- La dinamica di attuazione introduce un ritardo di fase minimo di  $-\pi/2$  a tutte le frequenze, per cui in PM originale non è sufficiente ( $\approx 88^\circ$ ).



## Applicazioni: Ball - Beam

- Comportamento in ciclo chiuso con il controllore originale (Sistema Instabile con guadagno unitario)

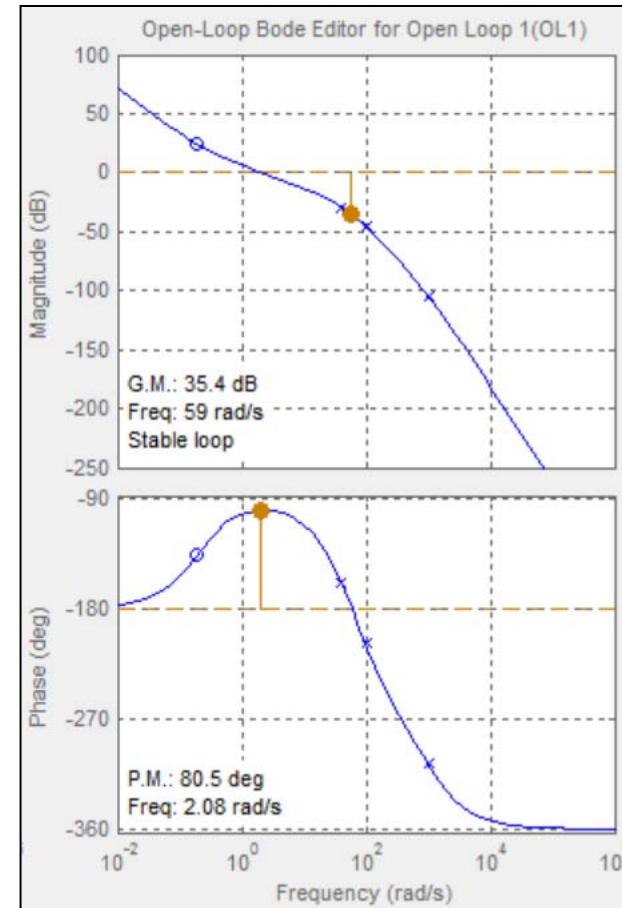
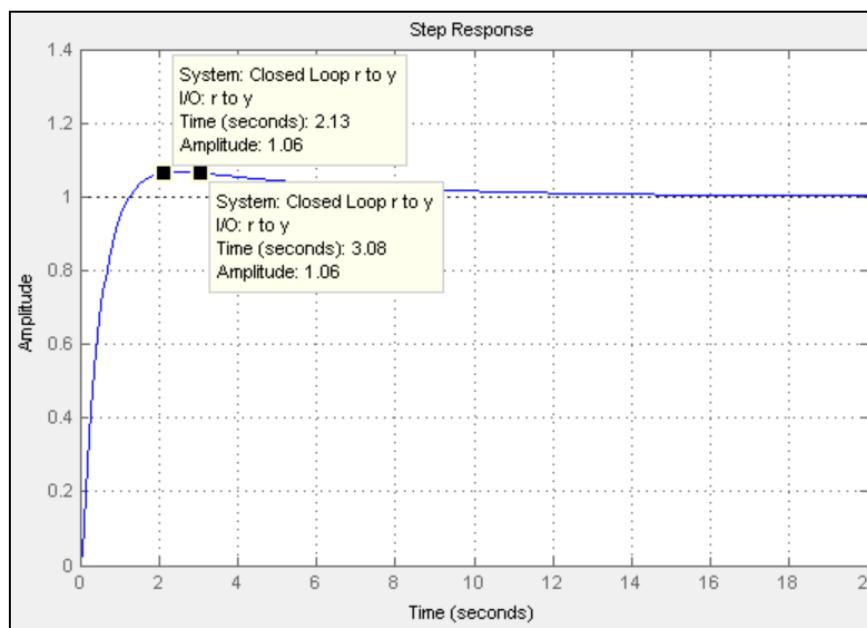
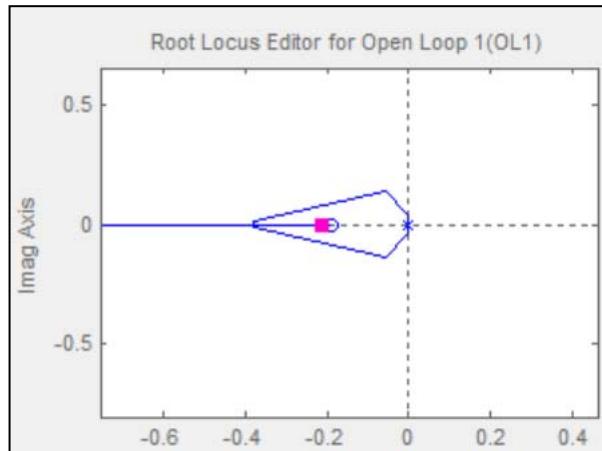


- Verifica dettaglio Luogo Radici



## Applicazioni: Ball - Beam

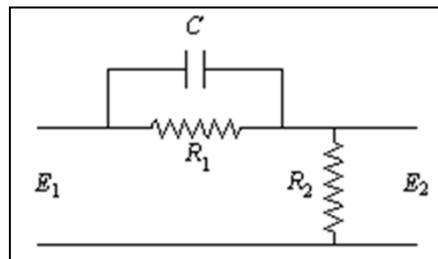
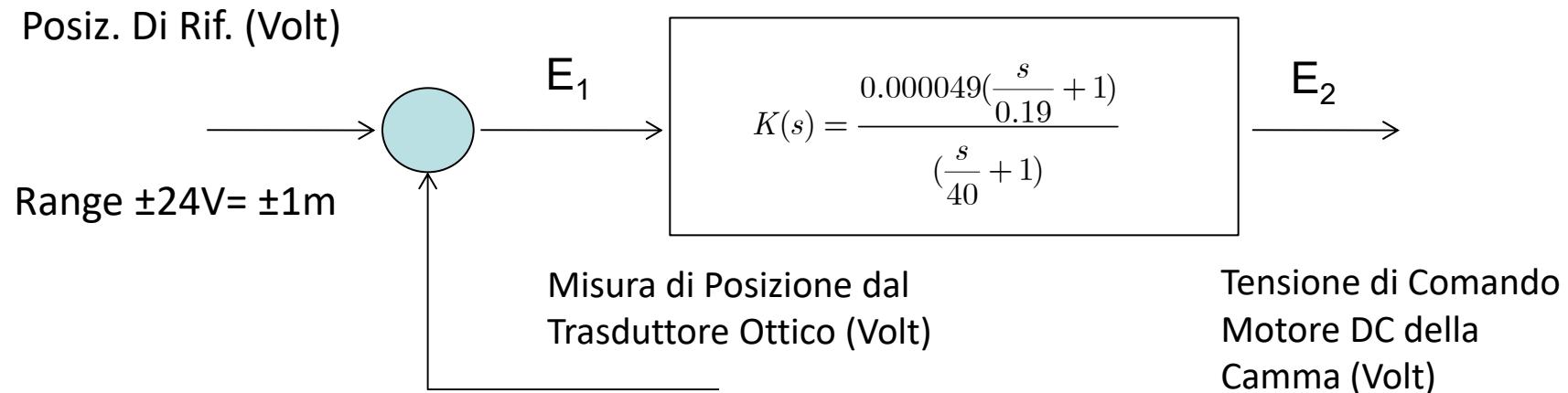
- Consideriamo un guadagno pari a: 0.00001789





## Applicazioni: Ball - Beam

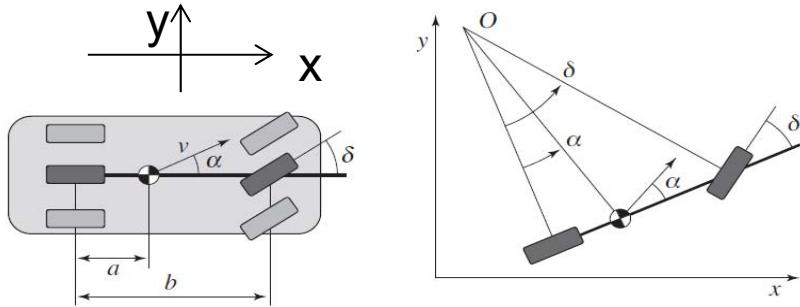
- Implementazione analogica del controllore sviluppato.



$$K(s) = \frac{0.000049(\frac{s}{0.19} + 1)}{(\frac{s}{40} + 1)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{(R_1 C s + 1)}{\left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C s + 1 \right)} = \frac{E_2(s)}{E_1(s)}$$



## Applicazioni: Controllo della Dinamica di Sterzata



- Controllo della posizione laterale mediante angolo di sterzata
- Il modello usato è quello del biciclo con le ruote che ruotano senza scivolamento.

$$\theta = \theta_e = 0$$
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix} = 0$$
$$u = \delta = 0$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} av_0 \\ b \\ v_0 \\ b \end{bmatrix} u$$
$$G(s) = I(sI - A)^{-1}B$$
$$y = I\dot{\mathbf{x}}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -v_0 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} av_0 \\ b \\ v_0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{v_0}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} av_0 \\ b \\ v_0 \\ b \end{bmatrix}$$



## Applicazioni: Controllo della Dinamica di Sterzata

$$G_{\delta}^y(s) = \frac{av_0s + v_0^2}{bs^2}; G_{\delta}^{\theta}(s) = \frac{v_0}{bs} \quad a = 1.375m, b = 2.56m, \\ |v_0| = (25, 50, 75)km/h = (6.94, 13.09, 20.83)m/sec$$

- Il modello cambia a seconda che il veicolo si muova in avanti oppure all'indietro e a seconda del modulo della velocità di riferimento

|                | 25     | 50    | 75     | -25     | -50   | -75    |
|----------------|--------|-------|--------|---------|-------|--------|
| K              | 3.7275 | 7.03  | 11.18  | -3.7275 | -7.03 | -11.18 |
| Z              | -5.047 | -9.52 | -15.15 | 5.047   | 9.52  | 15.15  |
| K <sub>s</sub> | 18.81  | 66.93 | 169.38 | 18.81   | 66.93 | 169.38 |

$$G_{\delta}^y(s) = \frac{av_0s + v_0^2}{bs^2} = \frac{7.03(s + 9.52)}{s^2} = \frac{[m]}{[rad]} \quad G_{\delta}^{\theta}(s) = \frac{v_0}{bs} = \frac{5.11}{s} = \frac{[rad]}{[rad]}$$



## Applicazioni: Controllo della Dinamica di Sterzata

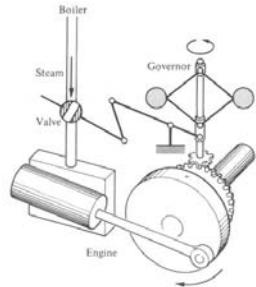
$$G_{\delta}^y(s) = \frac{av_0 s + v_0^2}{bs^2} = \frac{7.03(s + 9.52)}{s^2} = \frac{[m]}{[rad]}$$
$$G_{\delta}^{\theta}(s) = \frac{v_0}{bs} = \frac{5.11}{s} = \frac{[rad]}{[rad]}$$

□ **Requisiti:** si vuole inseguire un riferimento in distanza  $y_{REF}$  con:

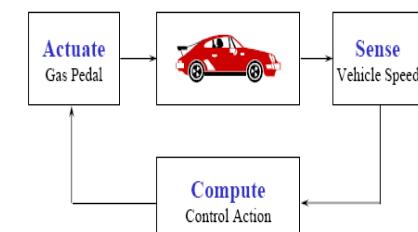
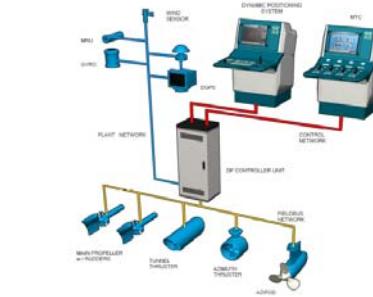
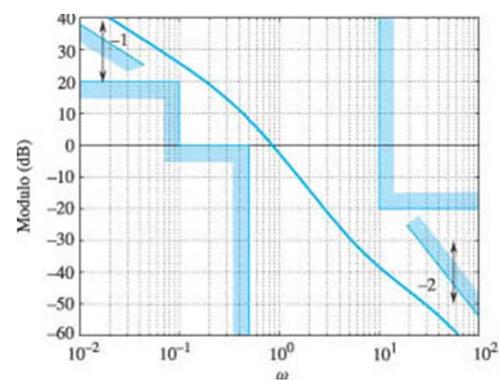
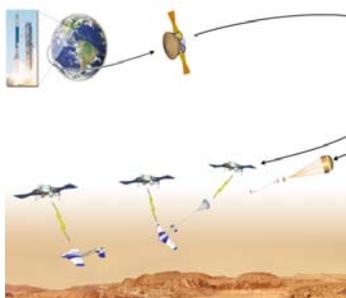
- overshoot massimo del 20%
- Errore nullo al gradino unitario ed alla rampa
- Banda passante di circa 20 rad/sec
- Margini di stabilità di circa [ 20 dB, 45°]



# SINTESI NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA



1. Concetti Generali
2. Requisiti del Sistema di Controllo
3. SISO Shaping
4. Controllori Standard (Proprietà)
5. Controllori Standard nella Sintesi





# Riferimenti

- Capitolo 12, 15 Testo di Bolzern
- Capitoli 12, 13 Lewis (download)
- Capitolo 10, 11 Murray  
(download)

Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.

Con. Avanzati

Con. Standard





## Concetti Generali

- Dato un generico sistema lineare tempo invariante rappresentato da:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- Il problema di sintesi è quello della progettazione del controllore in modo che il sistema raggiunga un determinato tipo di prestazioni e che l'uscita abbia un andamento desiderato pur rispettando i limiti delle prestazioni imposte. Tale risultato deve valere, se possibile, in presenza di incertezze/errori presenti nel modello usato per la sintesi.
- Il primo passo è l'analisi delle proprietà del sistema per valutarne il comportamento ai segnali di ingresso (riferimento e disturbi) sia in assenza, che in presenza di incertezze nel modello che si utilizza nell'analisi del sistema stesso.



# Concetti Generali

□ Proprietà intrinseche dell'impianto: riguardano le proprietà strutturali del sistema da controllare e le caratteristiche temporali/frequenziali

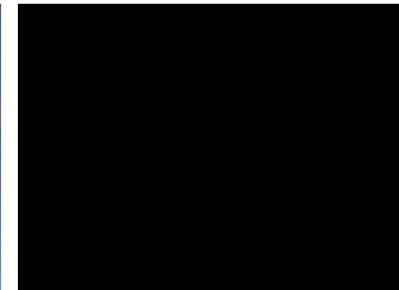
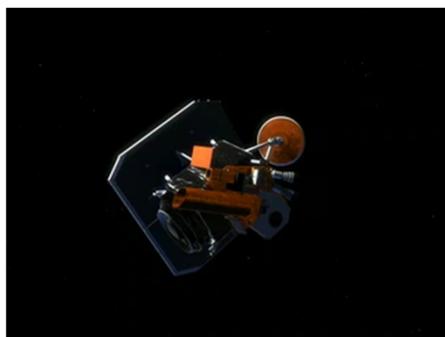
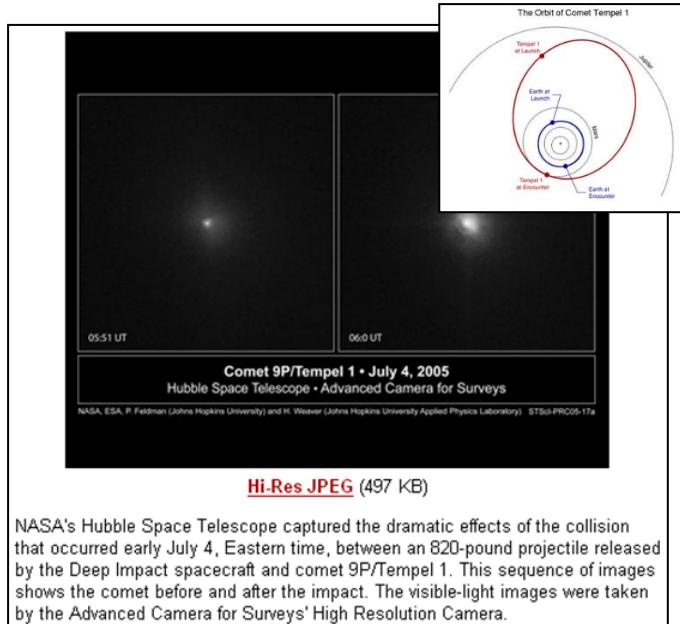
## □ Stabilità

- la stabilità è necessaria per l'utilizzo di un qualsiasi sistema fisico, per:
  - il mantenimento del punto di equilibrio richiesto senza intervento esterno
  - la sicurezza delle operazioni
  - la riduzione dei carichi di lavoro del sistema di controllo (costi, possibilità di guasti, ecc.)
  - La verifica della velocità di risposta del sistema stesso.
- Il grado di stabilità è importante e dipende dal tipo di sistema in esame:
  - Per sistemi quali mezzi di trasporto, sistemi di telecomunicazioni, centrali di processo si richiede un'elevata stabilità per evitare oscillazioni e variazioni dall'equilibrio (Comfort, Sicurezza)
  - Per sistemi ad elevata manovrabilità quali veicoli sportivi, sistemi militari, sistemi di gestione di emergenze ambientali, si richiede una minore stabilità ed una elevata Banda Passante in modo da velocizzare la risposta a variazione nei comandi. In taluni casi, si può anche scegliere un sistema instabile e stabilizzato soltanto mediante il controllo.



# Concetti Generali

- Stabilità può essere ottenuta in anello aperto, se il modello è fedele al processo reale, oppure se non vi sono alternative tecniche
- Instabilità può portare ad eventi catastrofici se non controllata automaticamente



- Simulazione è parte integrante del processo di analisi





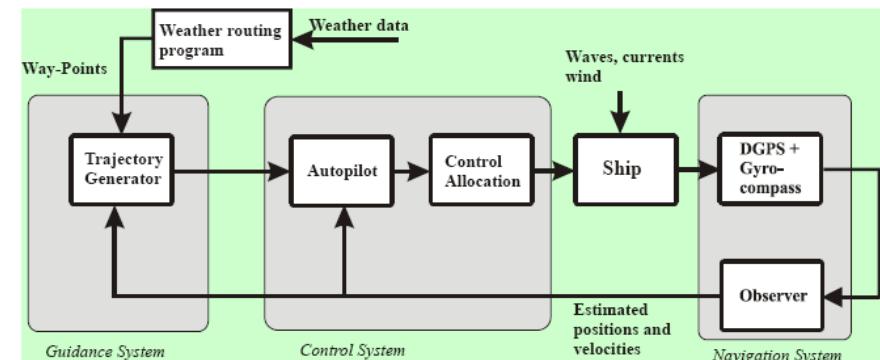
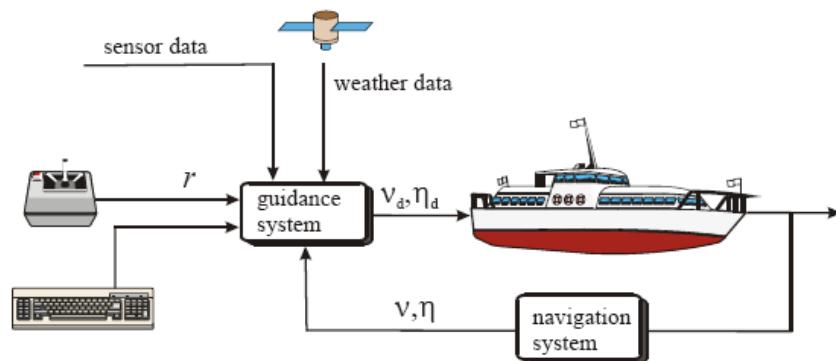
# Concetti Generali

## □ Controllabilità

- E' richiesta garantire la stabilità del sistema e la gestione del vettore di stato nell'intero sottospazio di appartenenza.
- La sua valutazione permette di stabilire la quantità e le caratteristiche degli attuatori e l'allocazione delle risorse di controllo.

## □ Osservabilità

- Permette di determinare la quantità , caratteristiche e numero minimo dei sensori
- Definisce la necessità o meno di strumenti addizionali (stimatori e/o filtri) per la determinazione del vettore di stato dalle uscite misurate

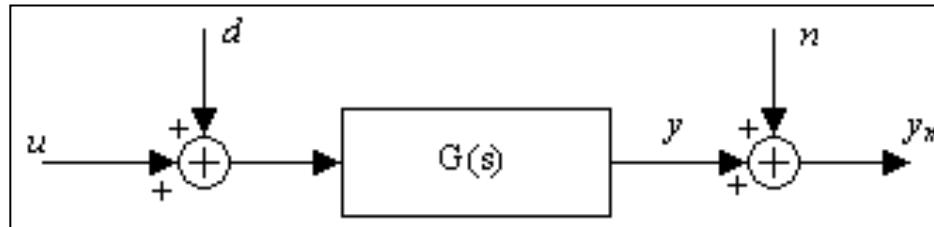




## Concetti Generali

- **Proprietà estrarinseche dell'impianto (nominali):** Sono le proprietà relative alla risposta a segnali esterni, distinti in due categorie:

- Comandi o riferimenti
- Disturbi



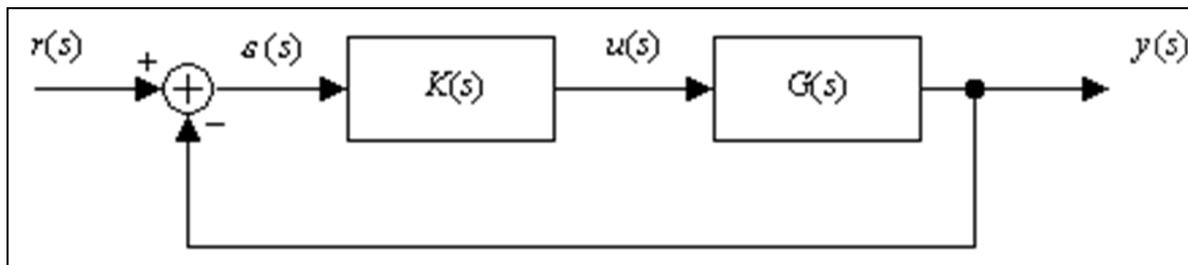
- In generale, la risposta deve essere tale da:
  - Garantire l'accuratezza rispetto a comandi e/o riferimenti
  - Essere insensibile a disturbi e/o rumori; il sistema deve avere una "banda passante" per reiettare i disturbi funzioni della frequenza



## Concetti Generali

□ **Prestazioni in presenza di incertezze (Condizioni Non Nominali):** La presenza di incertezze è un aspetto critico del comportamento dei sistemi dinamici; in genere la  $G(s)$  è un modello del sistema fisico soggetto a:

- - Differenze assimilabili ad incertezze moltiplicative
- - Variazioni dei parametri, non linearità, ecc.



$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$K(s) = \frac{u(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{N_k(s)}{D_k(s)}$$

$$G_{ol}(s) = K(s)G(s) = \frac{N(s)N_k(s)}{D(s)D_k(s)}$$

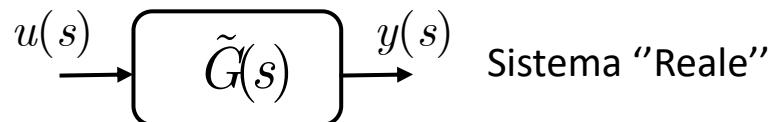
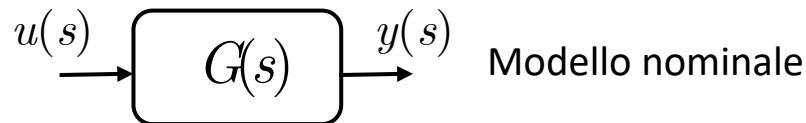
$$T(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{N(s)N_k(s)}{N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s)}$$

□ La retroazione è l'unico strumento (a meno di cancellazioni) per modificare i poli del sistema



# Considerazioni Generali

## □ Riepilogo delle problematiche relative agli errori di modello:



## □ Formalismo matematico per la gestione di A. e B., mediante un esempio numerico:

$$\tilde{G}(s) = L(s) \cdot [G(s) + E(s)]$$

- $G(s)$  = modello nominale
- $L(s)$  = errori dovuti ad A.
- $E(s)$  = errori dovuti a B.

## □ Errori tipici tra i due sistemi:

- A. **Incertezze non strutturate** **moltiplicative** (dinamiche trascurate, comportamento ad alta frequenza, ritardo di anello,...), trattabili come funzioni di variabile complessa e gestibili con i margini di stabilità oppure con il criterio di Nyquist
- B. **Variazioni parametriche** dovute ad errori sulle caratteristiche fisiche del processo che si riflettono sui poli, zeri e guadagno della FdT e sono parametri reali
- C. **Nonlinearità** quali limitazioni di segnale, dinamiche accoppiate, ... (non trattate nel corso)



## Considerazioni Generali

□ **Esempio Antenna:**  $G(s) = \frac{2}{s(s + 4)}$

$$\tilde{G}(s) = L(s) \frac{2 \pm \delta_1}{s(s + 4 \pm \delta_2)} = [1 + \Delta(s)] \frac{2 \pm \delta_1}{s(s + 4 \pm \delta_2)}$$

- $\Delta(s)$  è rappresentazione matematica di un'incertezza limitata, moltiplicativa (in percentuale del modello) descritta da una funzione stabile, razionale fratta  $L(s)$

$$|\Delta(s)| = |L(s) - 1| \leq \Delta_{\max}; \forall \omega$$

- $\delta_i$  è rappresentano gli errori di modello nei vari parametri del sistema
  - $\delta_1 \sim 10\%$  del guadagno nominale
  - $\delta_2 \sim 20\%$  del valore nominale del polo

$$\tilde{G}(s) = [1 + \Delta(s)] \frac{2 + 0.1\Delta_1}{s(s + 4 + 0.2\Delta_2)}; |\Delta(s)| < \Delta_{\max}; |\Delta_1| < 1; |\Delta_2| < 1$$



## Considerazioni Generali

- Tutte le incertezze sono descritte da funzioni generali separabili nell'anello e vincolate soltanto da limitazioni in norma (oppure in modulo per sistemi SISO):

$$|\Delta(s)| < \Delta_{\max}; |\Delta_1| < 1; |\Delta_2| < 1$$

- Si può riscrivere un diagramma analogico a blocchi del sistema, in modo del tutto equivalente

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \tilde{G}(s) = [1 + \Delta(s)] \frac{2 + 0.1\Delta_1}{s(s + 4 + 0.2\Delta_2)}$$

$$y(s) = \frac{2 + 0.1\Delta_1}{s(s + 4 + 0.2\Delta_2)} [1 + \Delta(s)] u(s) = \frac{2 + 0.1\Delta_1}{s(s + 4 + 0.2\Delta_2)} u'(s)$$

$$u'(s) = u(s) + \Delta(s)u(s)$$

$$s(s + 4 + 0.2\Delta_2)y(s) = (2 + 0.1\Delta_1)u'(s)$$

$$y'(s) = sy(s)$$

$$sy'(s) = -4y'(s) + 2u'(s) - 0.2\Delta_2y'(s) + 0.1\Delta_1u'(s)$$

- In nero è rappresentato il modello nominale. In rosso i contributi degli errori/incertezze



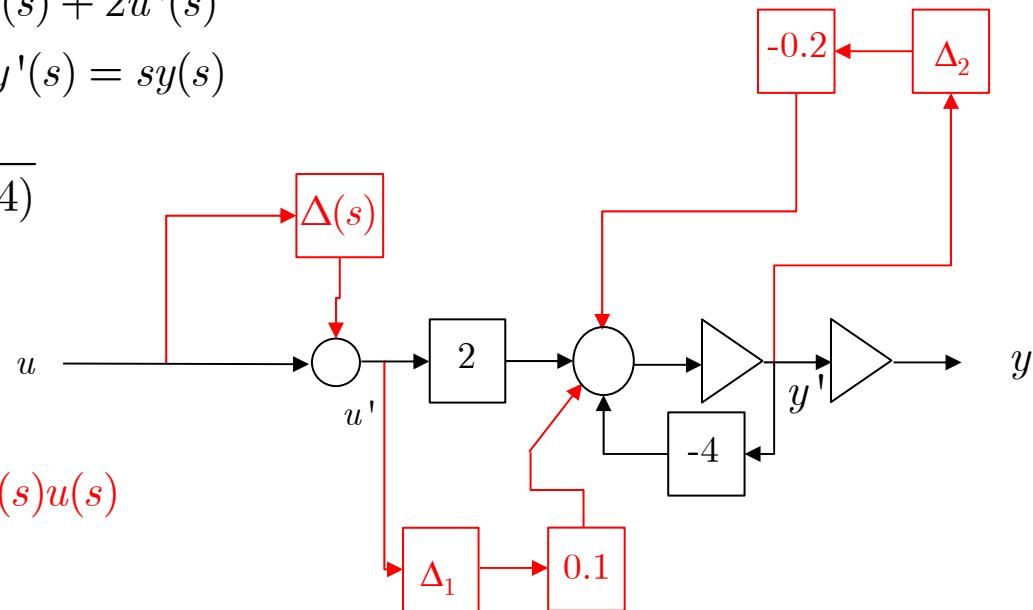
## Considerazioni Generali

$$sy'(s) = -4y'(s) + 2u'(s)$$

$$u'(s) = u(s) \quad y'(s) = sy(s)$$

$$G(s) = \frac{2}{s(s+4)}$$

$$u'(s) = u(s) + \Delta(s)u(s)$$



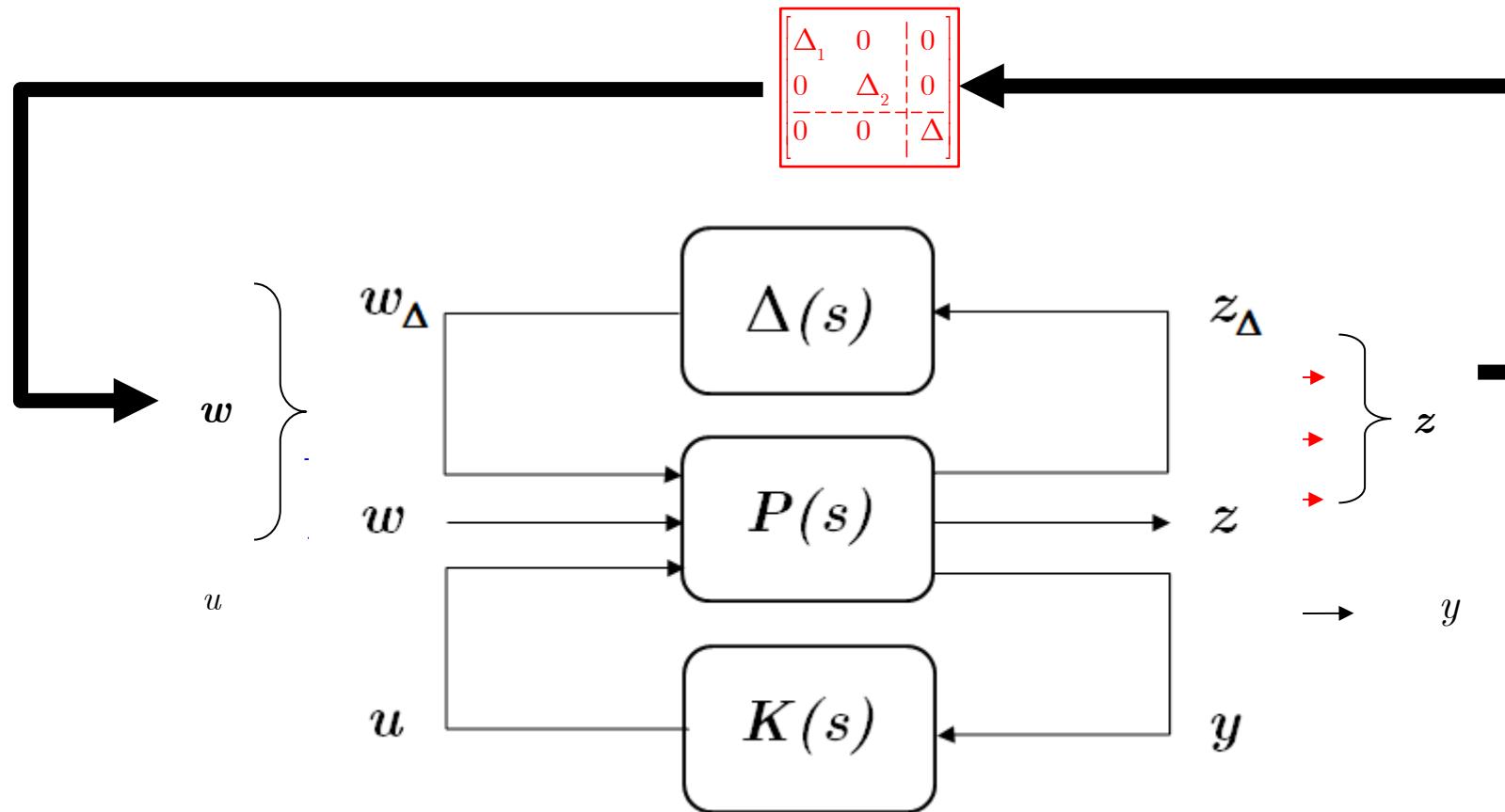
$$sy'(s) = -4y'(s) + 2u'(s) - 0.2\Delta_2y'(s)$$

$$sy'(s) = -4y'(s) + 2u'(s) - 0.2\Delta_2y'(s) + 0.1\Delta_1u'(s)$$

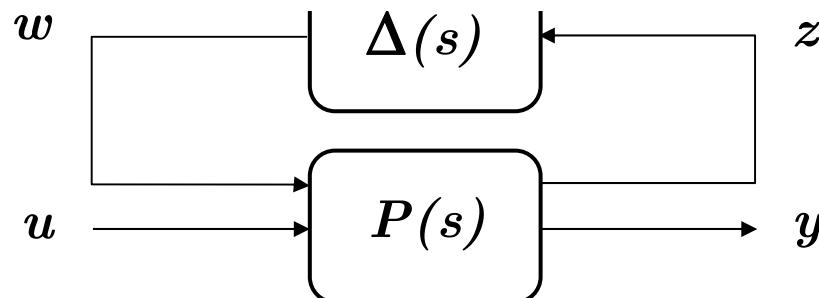
- La struttura può essere semplificata in due blocchi, uno che descrive il sistema nominale ed il secondo che raccoglie tutte le incertezze attraverso un set ingresso – uscita fittizio



# Considerazioni Generali



$$\begin{cases} w_1 = \Delta_1 z_1 \\ w_2 = \Delta_1 z_2 \\ w_3 = \Delta z_3 \end{cases}$$





## Concetti Generali



### □ Effetto della retroazione in Condizioni non nominali

- Perturbazioni dovute a Incertezze non strutturate: Trattabili, mediante la retroazione che può garantire adeguati *Margini di Stabilità e Grado di Stabilità (o di robustezza)*
- Variazioni dei Parametri: Anche in questo caso, la retroazione ha un effetto positivo.
- Analisi qualitativa in assenza di feedback:

$$y(s) = G(s)r(s)$$

$$\tilde{y}(s) = \tilde{G}(s)r(s) = y(s) + \Delta y(s) = [G(s) + \Delta G(s)]r(s)$$

$$\frac{\Delta y(s)}{y(s)} = \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

- All'aumentare dell'errore di modello  $\Delta G$ , aumenta l'errore  $\Delta y$  sull'uscita prevista



## Considerazioni Generali

- In presenza di retroazione unitaria si ha:

$$y(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} r(s) \quad \tilde{y}(s) = \frac{\tilde{G}(s)K(s)}{1 + \tilde{G}(s)K(s)} r(s) = \frac{[G(s) + \Delta G(s)]K(s)}{1 + [G(s) + \Delta G(s)]K(s)} r(s)$$

$$\frac{\Delta y(s)}{y(s)} = \frac{\tilde{y}(s) - y(s)}{y(s)} = \frac{\tilde{y}(s)}{y(s)} - 1 = \dots = \frac{\Delta G(s)}{G(s)} \cdot \frac{1}{1 + \tilde{G}(s)K(s)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y(s)}{y(s)} &= \frac{\tilde{y}(s)}{y(s)} - 1 = \frac{\frac{\tilde{G}(s)K(s)}{1 + \tilde{G}(s)K(s)} r(s)}{\frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} r(s)} - 1 = \frac{\tilde{G}(s)K(s)[1 + G(s)K(s)]}{G(s)K(s)[1 + \tilde{G}(s)K(s)]} - 1 = \\ &= \frac{\tilde{G}(s)K(s)[1 + G(s)K(s)] - G(s)K(s)[1 + \tilde{G}(s)K(s)]}{G(s)K(s)[1 + \tilde{G}(s)K(s)]} = \\ &= \frac{[G(s) + \Delta G(s)]K(s)[1 + G(s)K(s)] - G(s)K(s)[1 + [G(s) + \Delta G(s)]K(s)]}{G(s)K(s)[1 + [G(s) + \Delta G(s)]K(s)]} = \\ &= \frac{\Delta G(s)}{G(s)} \cdot \frac{1}{1 + [G(s) + \Delta G(s)]K(s)} = \frac{\Delta G(s)}{G(s)} \cdot \frac{1}{1 + \tilde{G}(s)K(s)} \end{aligned}$$

- In questa situazione tramite il controllo è possibile ridurre l'errore in uscita introdotto dall'errore di modello; infatti al crescere di  $K(s)$  il valore di  $\Delta y(s)$  decresce.



# Requisiti di Controllo

- Stabilità in Condizioni nominali
  - Stabilità interna
  - Stabilità esterna
  - Realizzazioni

$$K(s) = L\{k(t)\} = K_0 \frac{\prod_{1}^m (s + z_i)}{s^r \prod_{1}^n (s + p_j)}$$
$$\prod_{1}^m (1 + \frac{s}{z_i})$$
$$\frac{z_1 z_2 \dots z_m}{p_1 p_2 \dots p_n}$$

- Stabilità in condizioni non nominali (perturbate)
  - Sensitività
  - Stabilità per multipli
  - Robustezza
- Prestazioni
  - Precisione statica
    - Errore
  - Precisione dinamica
    - Risposta
    - Attenuazione
    - Linearità

## Sommario

$$K(s) = \frac{k}{s^r} \cdot \frac{\prod_i (1 + \tau_i s)}{\prod_j (1 + T_j s)} = \frac{N_k(s)}{D_k(s)}$$

Data la struttura generale di un controllore:

- Si determinano gli integratori necessari per la risposta a regime desiderata.
- Si sceglie la dinamica più adatta ed il guadagno statico per seguire l'andamento per la risposta transitoria
- Si modifica tale scelta per garantire adeguati margini di stabilità

polo

Stabilità

uscita,

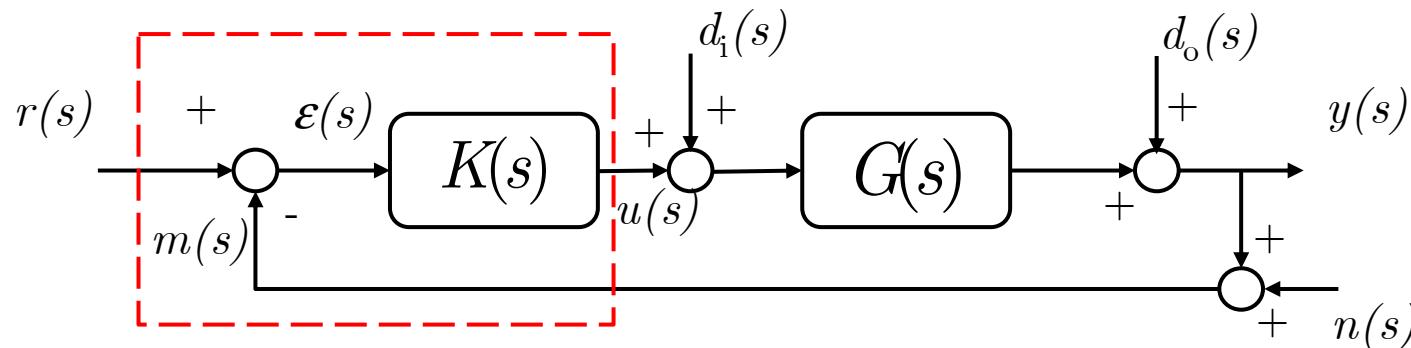
- Prestazioni in condizioni non nominali (perturbate)
  - Precisione statica
  - Precisione dinamica

- Controllore Ottimale
- Modello Interno
- Controllore Predittivo
- Controllori non lineari (adattivi, Lyapunov, Relè, ecc.)
- Controllo MIMO Robusto
- Controllori neurali, fuzzy, ecc.



## Sintesi mediante Loop Shaping

- ❑ La procedura di Loop Shaping (sintesi in frequenza) opera sulla modifica della risposta in frequenza della FdT di anello, in modo da ottenere un risultato desiderato in anello chiuso
- ❑ La procedura è del tutto generale a parte che il sistema di partenza soddisfi a certi requisiti (modulo e fase della FdT di anello univocamente determinati). La difficoltà della procedura può aumentare (uso di Nyquist completo) nel caso di sistemi particolari.
- ❑ La sintesi del controllore può essere eseguita usando la FdT di anello oppure la sensitività  $S(j\omega)$ , in modo del tutto equivalente
- ❑ Consideriamo la struttura generale di un sistema in retroazione unitaria:



$r$  – Segnale di riferimento (inseguito dall'uscita  $y$ )

$d$  – Disturbo esterno (riferito all'ingresso e/o uscita)

$n$  – Rumore sensori (alta frequenza)

$\varepsilon$  – Errore

$y$  – Segnale di uscita

$u$  – Segnale al sottosistema attuatore

$m$  – Segnale di misura al controllore



# Sintesi mediante Loop Shaping

- Calcolo delle FdT di interesse nell'anello di retroazione

$$L(s) = G(s)K(s)$$

- FdT di Anello

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

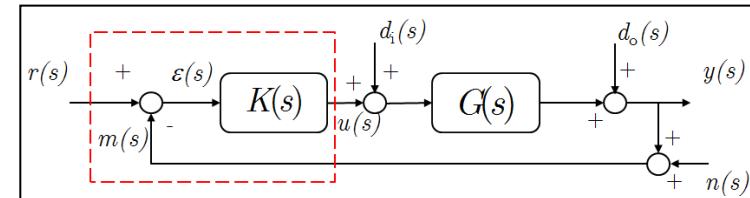
- Sensitività complementare (FdT in Ciclo Chiuso)

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

- Sensitività in ingresso (FdT Errore)

$$S_u(s) = K(s)S(s)$$

- Sensitività in uscita (FdT Attuatore)



$$y(s) = T(s)[r(s) - n(s)] + S(s)d_o(s) + G(s)S(s)d_i(s)$$

$$\varepsilon(s) = S(s)[r(s) - n(s)] - S(s)d_o(s) - G(s)S(s)d_i(s)$$

$$u(s) = K(s)S(s)[r(s) - n(s) - d_o(s)] - T(s)d_i(s)$$



# Sintesi mediante Loop Shaping

## □ Progettare $K(s)$ tale che:

i) Stabilità in Condizioni nominali

$K(s)$  stabilizza  $G(s)$

ii) Risposta transitoria e a regime al comando

Errore a Regime (a segnali tipici, o funzioni sviluppabili in Serie di Fourier)

Velocità di risposta (tempo di salita, sovraelongazione, banda passante)

iii) Attenuazione dei disturbi

Am piezza limitata nella frequenza del disturbo

iv) Limite nella quantità di controllo

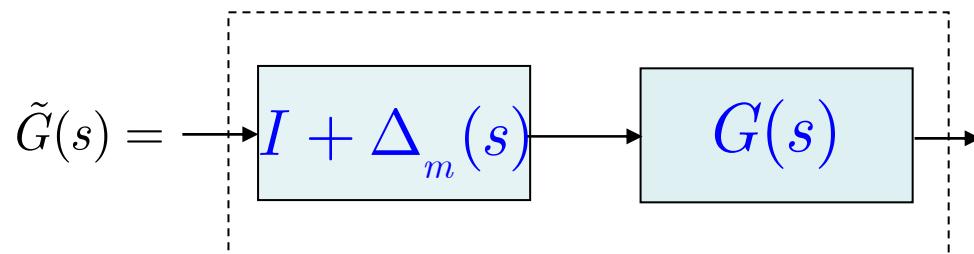
Am piezza limitata per evitare saturazioni

v) Stabilità e Prestazioni in condizioni non nominali

Mantenimento della stabilità e prestazioni in presenza di errori sui parametri ed incertezze moltiplicative non strutturate

$$\tilde{G}(s) = G(s)[I + \Delta_m(s)] = G(s)L(s)$$

$$L(s) = |L(s)| e^{j\angle L(s)}$$

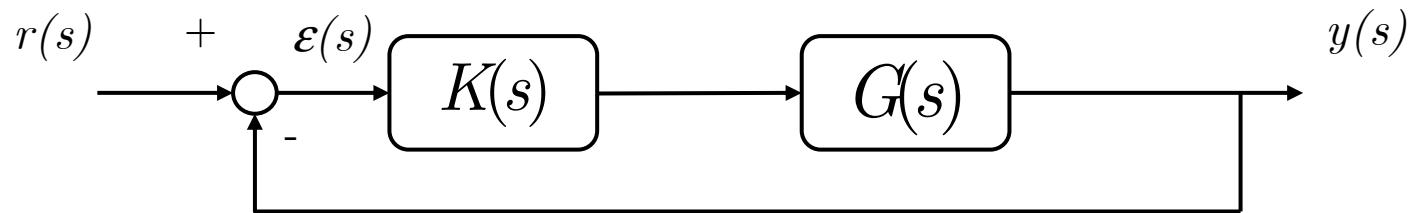


□ In quanto segue, si fa riferimento ( a meno di diversa specifica) a sistemi lineari la cui FdT in Anello Aperto soddisfi Il Criterio di Bode per sistemi a fase minima. Questo permette di usare soltanto il modulo della Risposta in Frequenza in Anello Aperto (Altrimenti si richiede l'applicazione completa del Criterio di Nyquist).



## Inseguimento del Comando

- Principio della sovrapposizione degli effetti



$$\varepsilon(s) = S(s)[r(s) - \textcolor{red}{n}(s)] - S(s)\textcolor{red}{d}_o(s) - G(s)S(s)\textcolor{red}{d}_i(s)$$

$$\frac{\varepsilon(s)}{r(s)} = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = S(s)$$

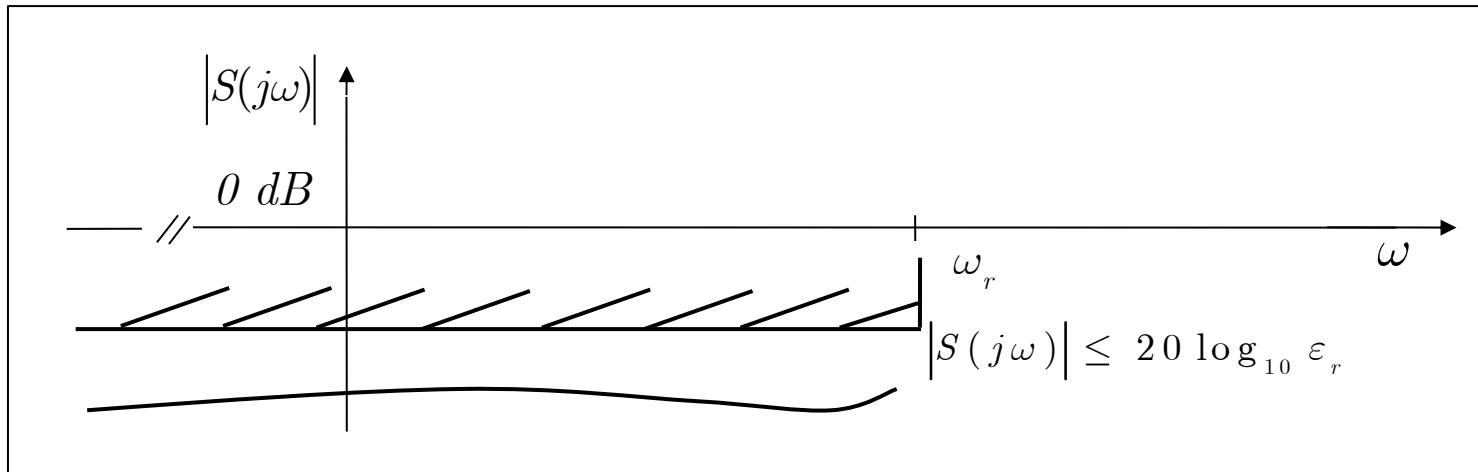
- La riduzione dell'errore richiede:  $|S(j\omega)| \leq \varepsilon_r < 1, \omega \in [0, \omega_r]$

**NOTA:** Il comando/riferimento da seguire in funzione del tempo  $r(t)$ , viene rappresentato mediante sviluppo in serie di Fourier. Per lo studio del problema di precisione, può risultare più appropriata un'analisi in frequenza.



# Inseguimento del Comando

- Vincolo Geometrico Al di sotto della “barriera”, per  $\omega \in [0, \omega_r]$

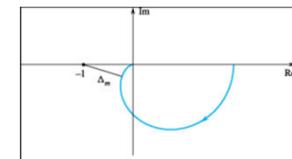


- Il requisito può essere imposto anche in termini di limite sulla funzione di anello

$$|S(j\omega)| \leq \varepsilon_r < 1, \omega \in [0, \omega_r]$$

$$\frac{1}{|1 + G(j\omega)K(j\omega)|} \leq \varepsilon_r \quad |1 + G(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{\varepsilon_r} \gg 1$$

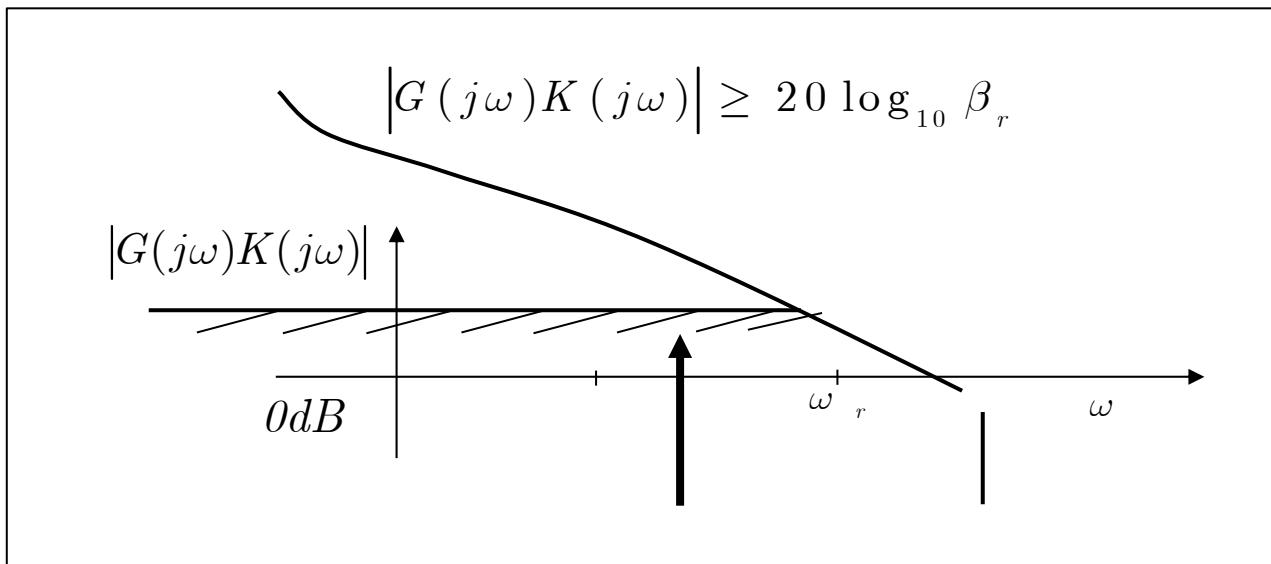
$$|1 + G(j\omega)K(j\omega)| \cong |G(j\omega)K(j\omega)|$$





## Inseguimento del Comando

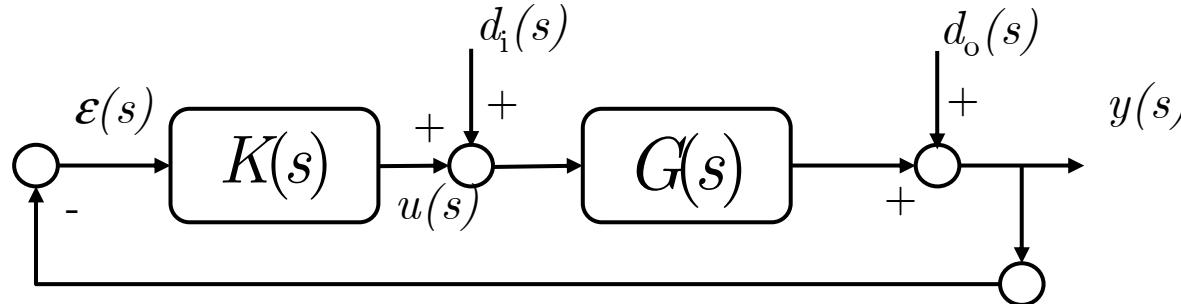
$$\Rightarrow \approx |G(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{\varepsilon_r} = \beta_r \gg 1 \quad \omega \in [0, \omega_r]$$



- Il vincolo della “barriera” inferiore **dove essere soddisfatto** mediante una scelta appropriata di  $K(s)$



# Attenuazione Disturbi



- Il controllore deve ridurre l'impatto dei disturbi sull'uscita. Questo può essere ottenuto in due modi (a volte complementari):
  - Mediante 2 componenti di controllo, una in feedforward ed una in feedback (soprattutto nel caso di disturbi noti)
  - Mediante un unico controllore in feedback**

$$y(s) = T(s)[r(s) - n(s)] + S(s)d_o(s) + G(s)S(s)d_i(s)$$

$$\frac{y(s)}{d_o(s)} = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = S(s)$$

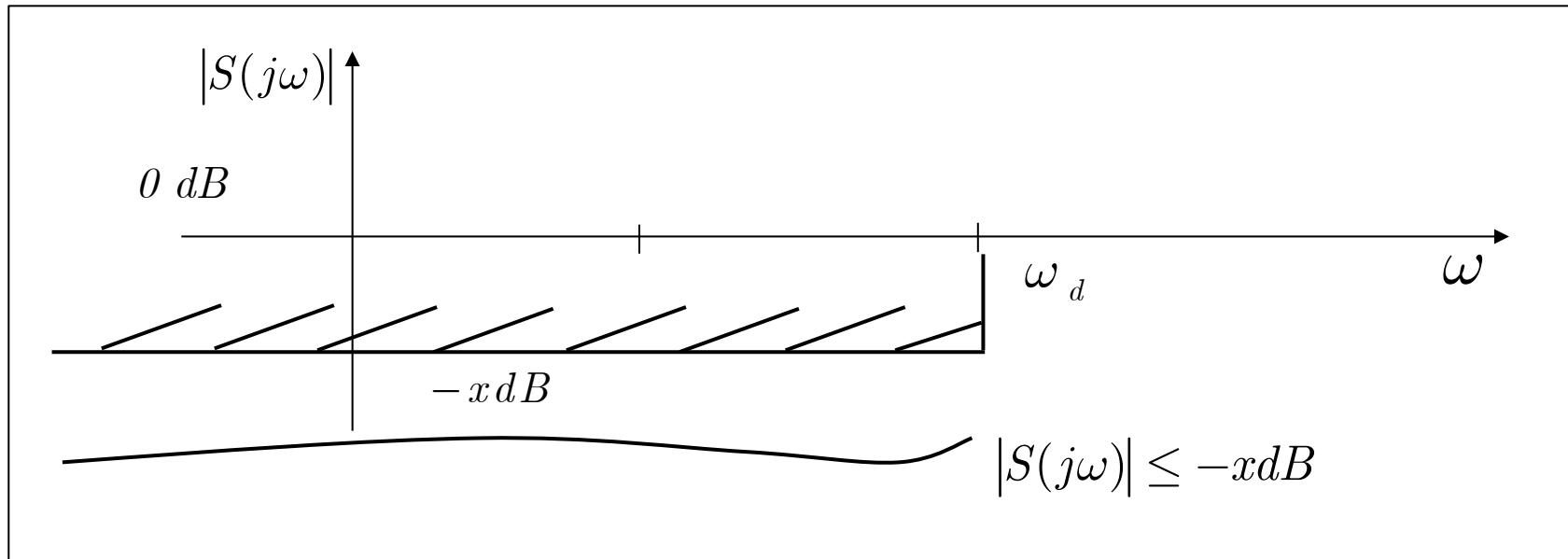
$$\frac{y(s)}{d_i(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} = G(s)S(s)$$

- La funzione di sensitività  $S(s)$  deve essere ridotta nella banda di frequenze dei disturbi
- Nel caso di disturbi in ingresso, la diminuzione deve essere maggiore per controbilanciare possibili amplificazioni dell'impianto a bassa frequenza



## Attenuazione Disturbi

$|S(j\omega)|$  Al di sotto della barriera di  $-x$  dB per  $\omega \in [0, \omega_d]$



$[0, \omega_d]$  ed il limite superiore  $\varepsilon_d = -x$  dipendono dal problema specifico



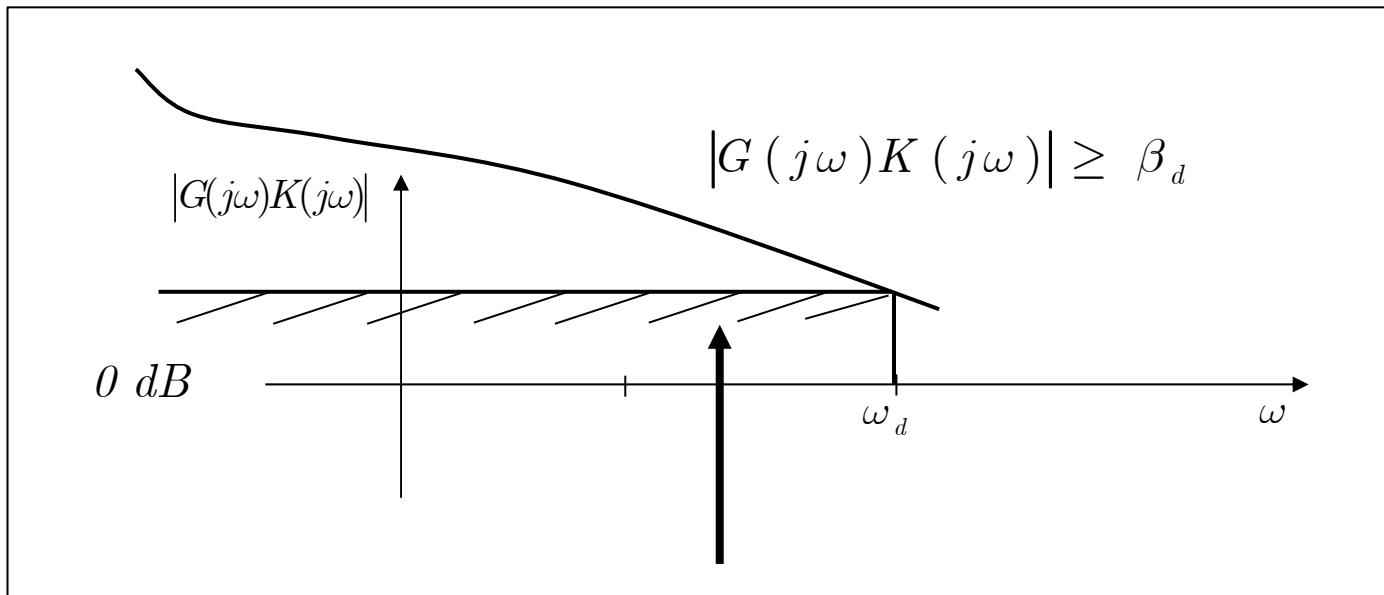
## Attenuazione Disturbi

- Il requisito può essere imposto anche in termini di limite sulla funzione di anello

$$|S(j\omega)| \leq \varepsilon_d < 1, \omega \in [0, \omega_d]$$

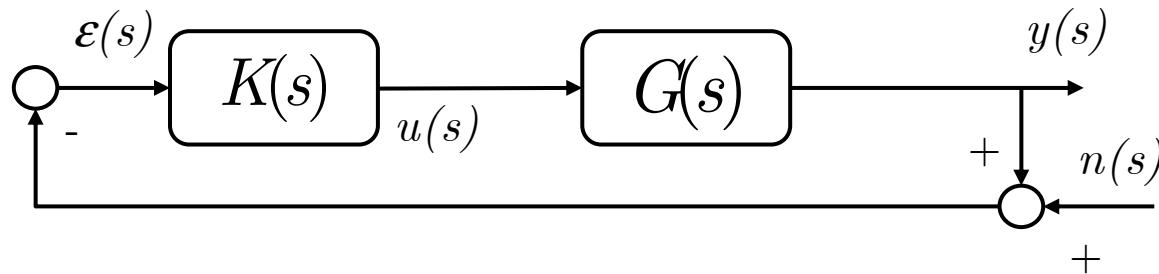
$$\frac{1}{|1 + G(j\omega)K(j\omega)|} \leq \varepsilon_d \quad |1 + G(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{\varepsilon_d} > 1$$

$$|1 + G(j\omega)K(j\omega)| \cong |G(j\omega)K(j\omega)| \quad |G(j\omega)K(j\omega)| \geq \frac{1}{\varepsilon_d} = \beta_d \gg 1 \quad \omega \in [0, \omega_d]$$



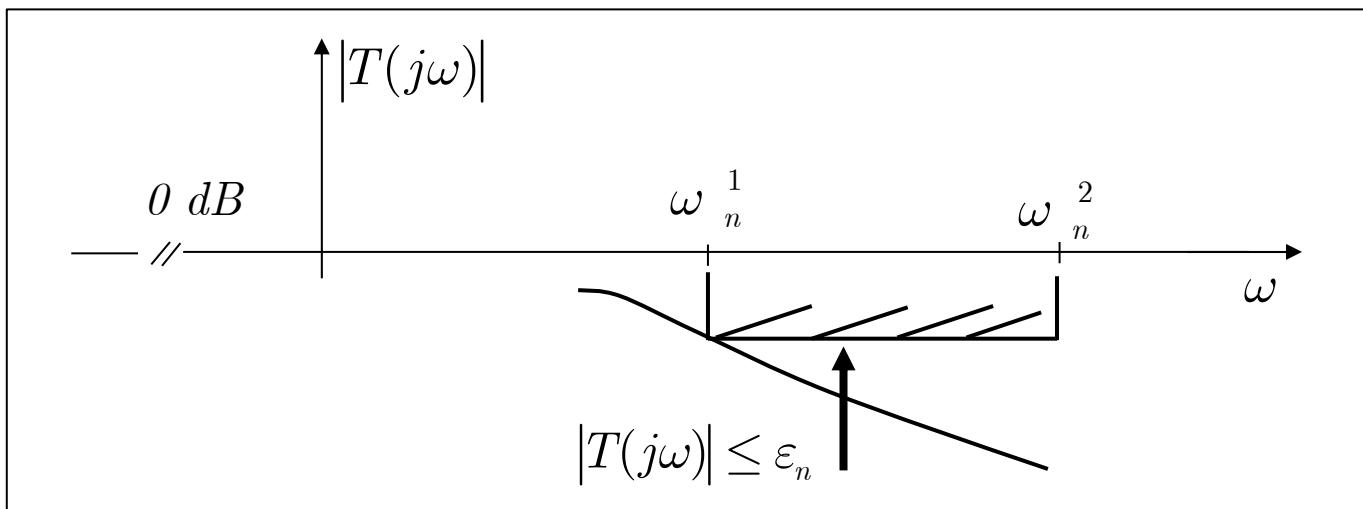


## Attenuazione Rumore ed Instabilità ad alta frequenza



$$y(s) = T(s)[r(s) - n(s)] + S(s)d_o(s) + G(s)S(s)d_i(s)$$

$$\frac{y(s)}{n(s)} = -T(s) = -\frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} \quad |T(j\omega)| \leq \varepsilon_n < 1, \omega \in [\omega_n^1, \omega_n^2]$$



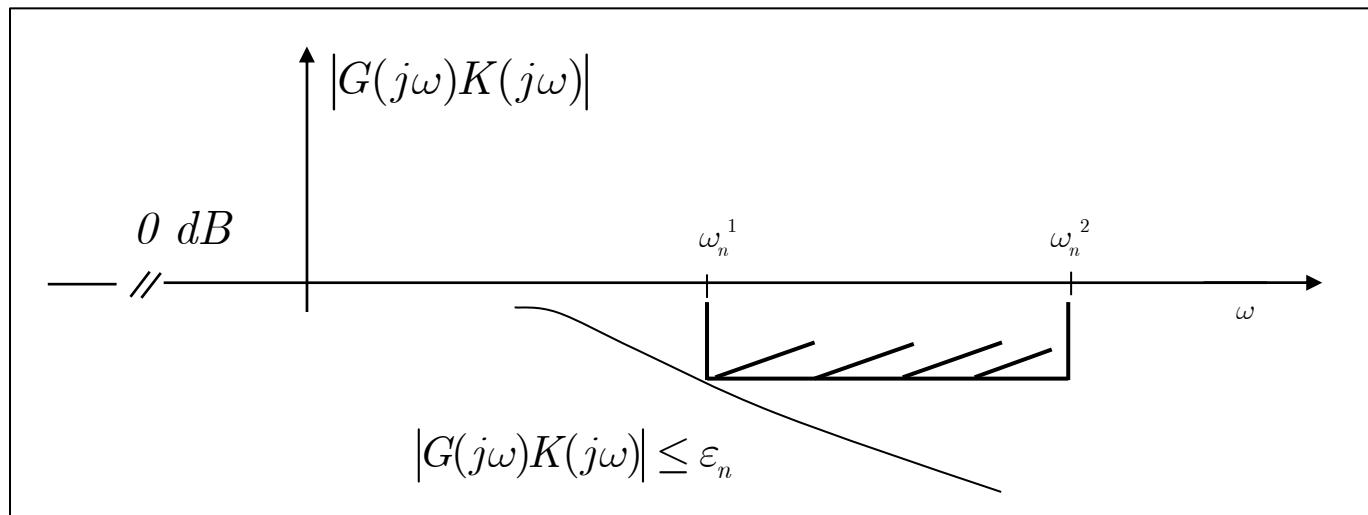


## Attenuazione Rumore ed Instabilità ad alta frequenza

- Il limite superiore “barriera” su  $|T(j\omega)|$  determina la scelta di  $K(s)$

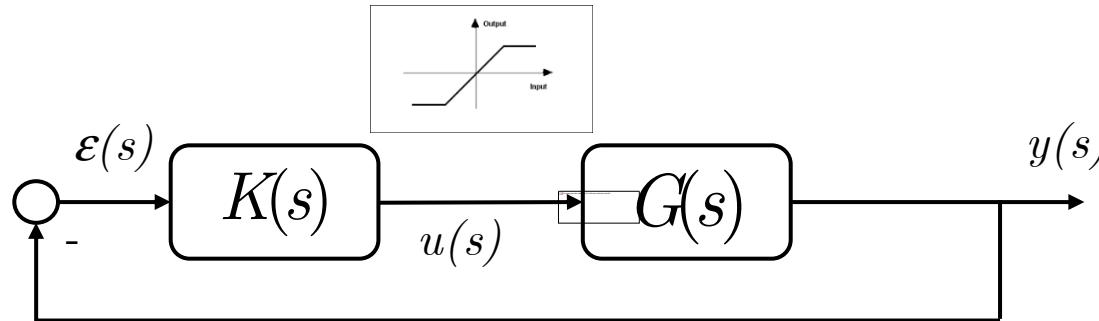
$$|T(j\omega)| \leq \varepsilon_n < 1, \omega \in [\omega_n^1, \omega_n^2] \quad \left| \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| \leq \varepsilon_n$$

$$\frac{|G(j\omega)K(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)K(j\omega)|} \cong |G(j\omega)K(j\omega)| \leq \varepsilon_n \ll 1 \quad \omega \in [\omega_n^1, \omega_n^2]$$





## Vincoli sugli Attuatori



- Il controllore  $K(s)$  può richiedere un'energia maggiore delle disponibilità degli attuatori e questa situazione deve essere considerata come uno dei limiti di progetto. **In mancanza di saturazioni esplicite in anello**, si devono imporre limitazioni al guadagno di anello

$$\frac{u(s)}{r(s)} = K(s) \frac{\varepsilon(s)}{r(s)} = \frac{K(s)}{1 + G(s)K(s)}$$

$$\frac{u(s)}{r(s)} = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} \frac{1}{G(s)} = \frac{T(s)}{G(s)}$$

- Supponiamo che il guadagno del sistema diminuisca ad alta frequenza (Comportamento di una dinamica strettamente propria)

$$|G(j\omega)| \leq \varepsilon_p \ll 1$$
$$\omega > \omega_p$$



## Vincoli sugli Attuatori

- Se la funzione di anello ha un guadagno non trascurabile, ovvero:

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \gg 1 \quad \omega \in [\omega_p, \omega_q]$$

$$\left| \frac{u(j\omega)}{r(j\omega)} \right| = \left| \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} \right| \left| \frac{1}{G(j\omega)} \right| \approx |\sim 1| \cdot \left| \frac{1}{G(j\omega)} \right| = \frac{1}{\varepsilon_p} \gg 1$$

- Il segnale di attuazione può diventare troppo elevato, a meno di non ridurre il guadagno di anello a frequenze

$$\omega > \omega_p$$

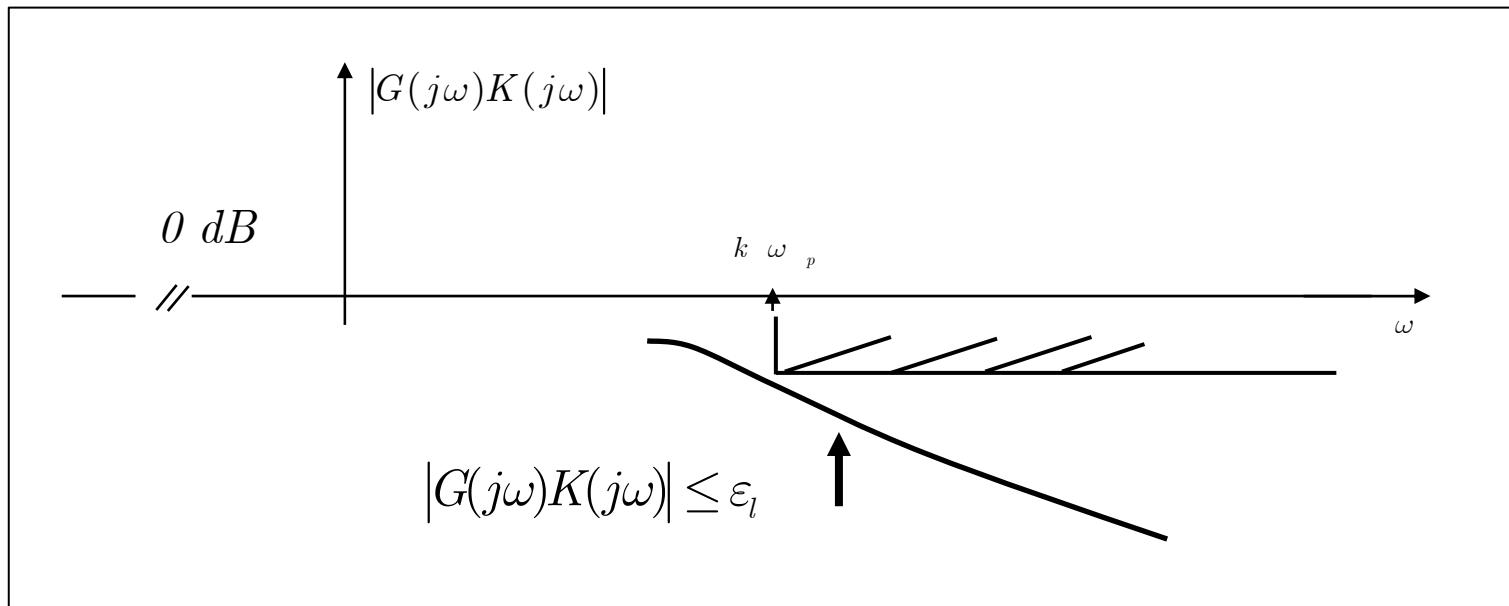
□ **Regola pratica:** Non estendere la banda passante aldilà della regione dove il guadagno del sistema comincia ad avere valori inferiori a 0 dB, ovvero:

- ridurre il guadagno di anello alle frequenze dove il guadagno del sistema risulta troppo basso



## Vincoli sugli Attuatori

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \leq \varepsilon_l < 1 \quad \omega > k\omega_p; k > 1 \quad \text{Con } \varepsilon_l, k \text{ a scelta del progettista}$$

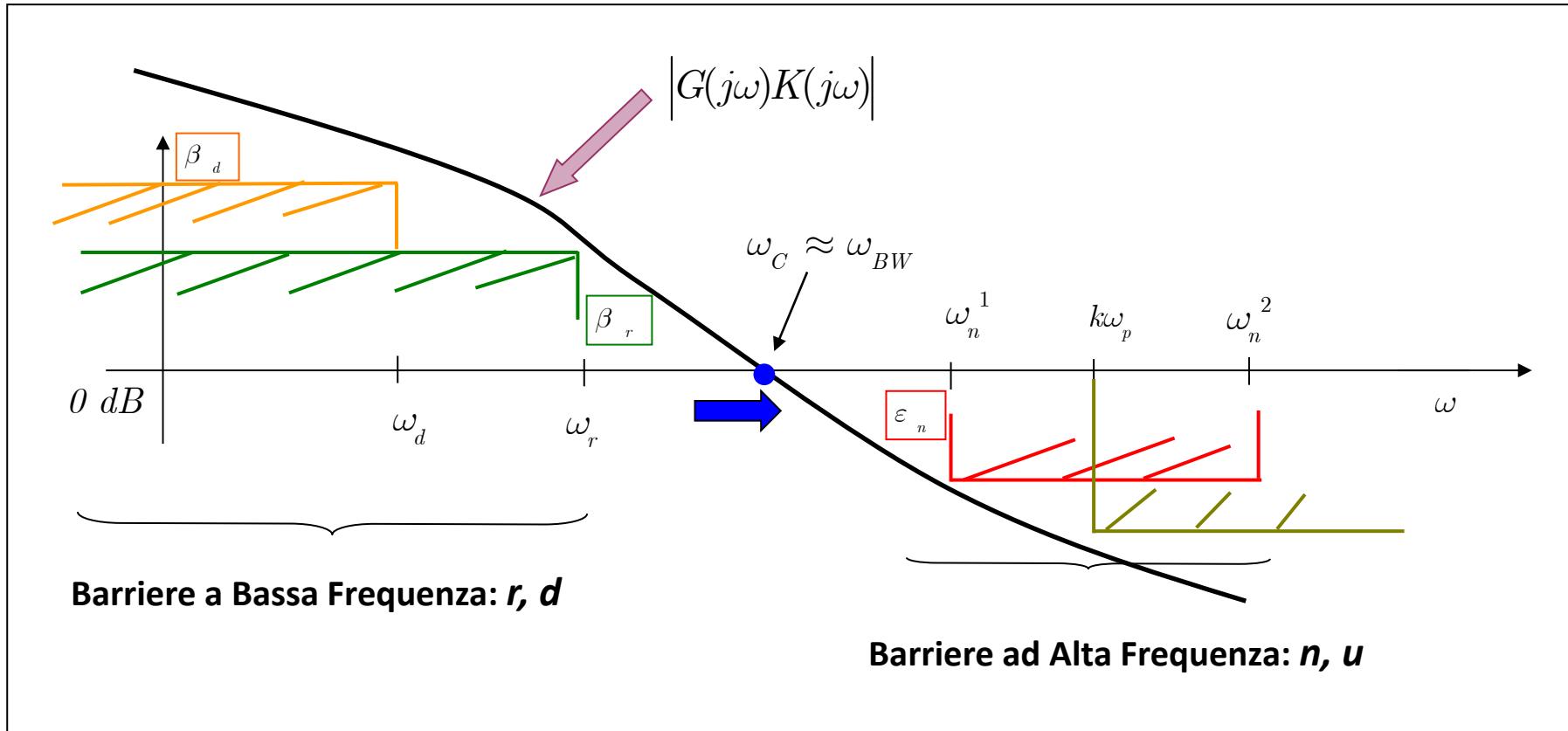


- Il limite della “barriera” è determinato dal vincolo sulla funzione di anello e determina le caratteristiche del controllore  $K(s)$



# Sommario

## □ Vincoli Generali sul Modulo (Guadagno) della Funzione di Anello

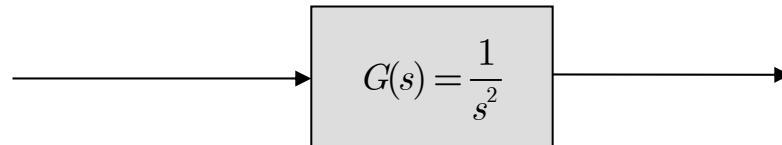


□ **Obiettivo di Progetto:** modellare (shape) con scelta appropriata di  $K(s)$  il guadagno della funzione di anello  $G(s)K(s)$  in modo da rispettare le barriere, mantenendo la stabilità in ciclo chiuso



# Esempi

## □ Esempio 1:

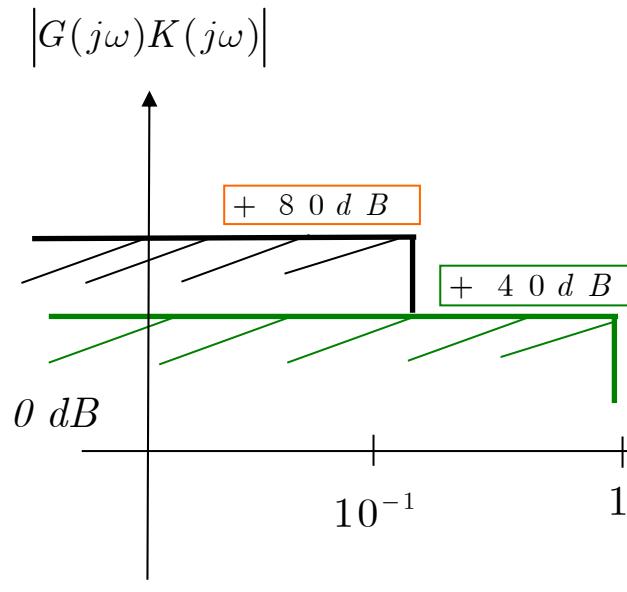


- Requisiti di controllo: Progettare  $K(s)$  in modo da stabilizzare  $G(s)$  e rispettare i seguenti vincoli:
  - i. Ridurre di almeno  $-80 \text{ dB}$  l'influenza del disturbo  $d_o$  all'uscita, nell'intervallo:
$$[0, \omega_d] = [0, 0.1] \text{ rads}^{-1}$$
  - ii. Seguire il riferimento  $r$  con errore minore o uguale a  $-40 \text{ dB}$  nell'intervallo:
$$[0, \omega_r] = [0, 1] \text{ rads}^{-1}$$
  - iii. Attenuazione del rumore  $n$  di almeno  $-20 \text{ dB}$  nell'intervallo:  $[\omega_n^{-1}, \omega_n^{-2}] = [10^2, 10^3] \text{ rads}^{-1}$
  - iv. Errore a regime ad una parabola unitaria  $e_{par}(\infty) \leq 0.02$
  - v. Margine di Fase:  $PM \geq 45^\circ$
  - vi. Margine di Guadagno:  $GM \geq +20 \text{ dB}$



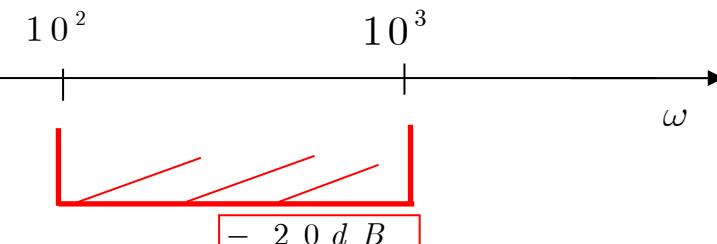
## Esempi

### □ Vincoli Geometrici: Requisiti i), ii), iii)



Barriera a bassa frequenza  
 $r, d$

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \geq +80 dB, \omega \in [0, 10^{-1}] rad/s$$
$$|G(j\omega)K(j\omega)| \geq +40 dB, \omega \in [0, 1] rad/s$$
$$|G(j\omega)K(j\omega)| \leq -20 dB, \omega \in [10^2, 10^3] rad/s$$



Barriera ad alta frequenza  
 $n$



## Esempi

### □ **Vincolo di Regime:** Requisito iv)

$e_{par}(\infty) \leq 0.02$  Ottenibile mediante controllore proporzionale in quanto  $G(s)$  ha due poli all'origine

$$\varepsilon(s) = \frac{r(s)}{1 + G(s)K(s)} \quad \varepsilon(s) = \frac{2}{s^3} \frac{1}{1 + G(s)K(s)}$$

Scelta:  $K(s) = \bar{k}H(s), |H(s)| = 1, \angle H(s) = 0^\circ$

$$e_{par}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon(s) =$$
$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s}{s^3} \frac{1}{1 + \frac{\bar{k}}{s^2}} = \frac{2}{\bar{k}} \leq 0.02 \quad \boxed{\bar{k} \geq 100}$$

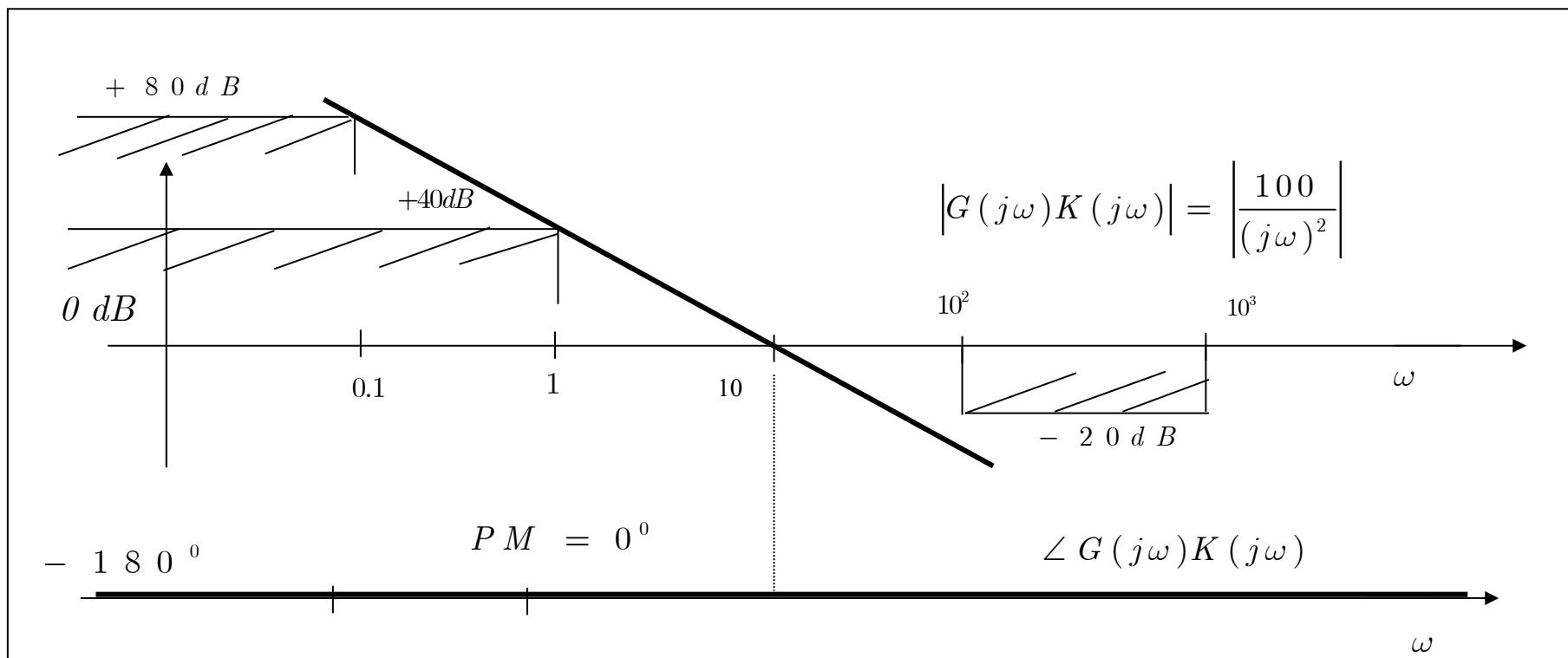
$$G_{ol}(s) = K(s)G(s) = \frac{\bar{k}}{s^2}$$



## Esempi

- Un candidato controllore è:
- Verifica Vincoli in Frequenza

$$K(s) = \bar{k} \tilde{K}(s); \tilde{K}(s) = 1; \bar{k} = 100$$



- I vincoli sono rispettati ma :  $PM = 0^\circ$

$$T(s) = \frac{GK}{1 + GK} = \frac{100}{s^2 + 100}$$



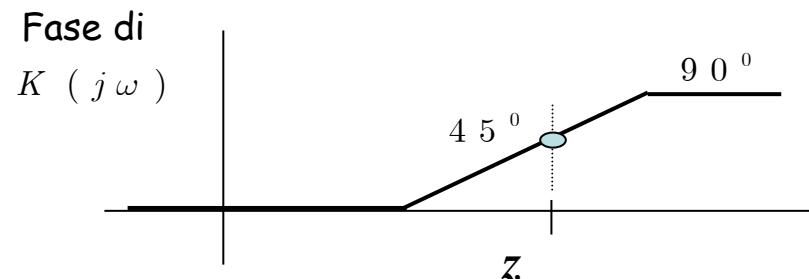
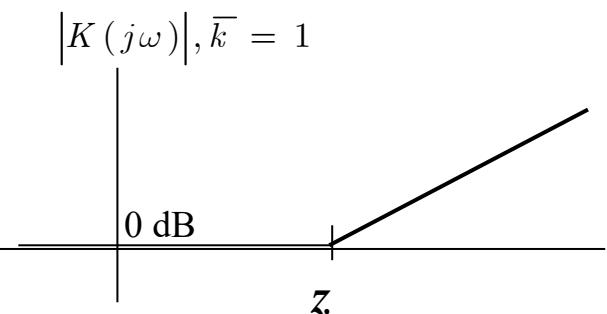
## Esempi

- E' necessario introdurre un anticipo di fase (regola 10 LR, zeri attraggono, poli respingono)

- Margine di fase richiesto  $PM^{des} = 45^0$

- Aumento anticipo per fattore di sicurezza:  $PM^{des} - PM^{real} + \varepsilon$

- Usiamo un anticipo puro  $K(s) = \bar{k} \frac{s+z}{z}; z = 10 \text{ rads}^{-1}$



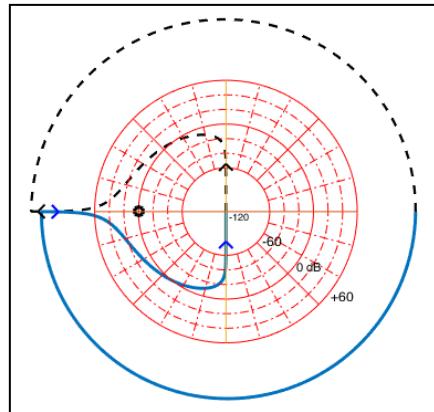
- **NOTA:** se il controllore progettato funziona, ricordarsi di renderlo causale con l'aggiunta di un polo fuori banda



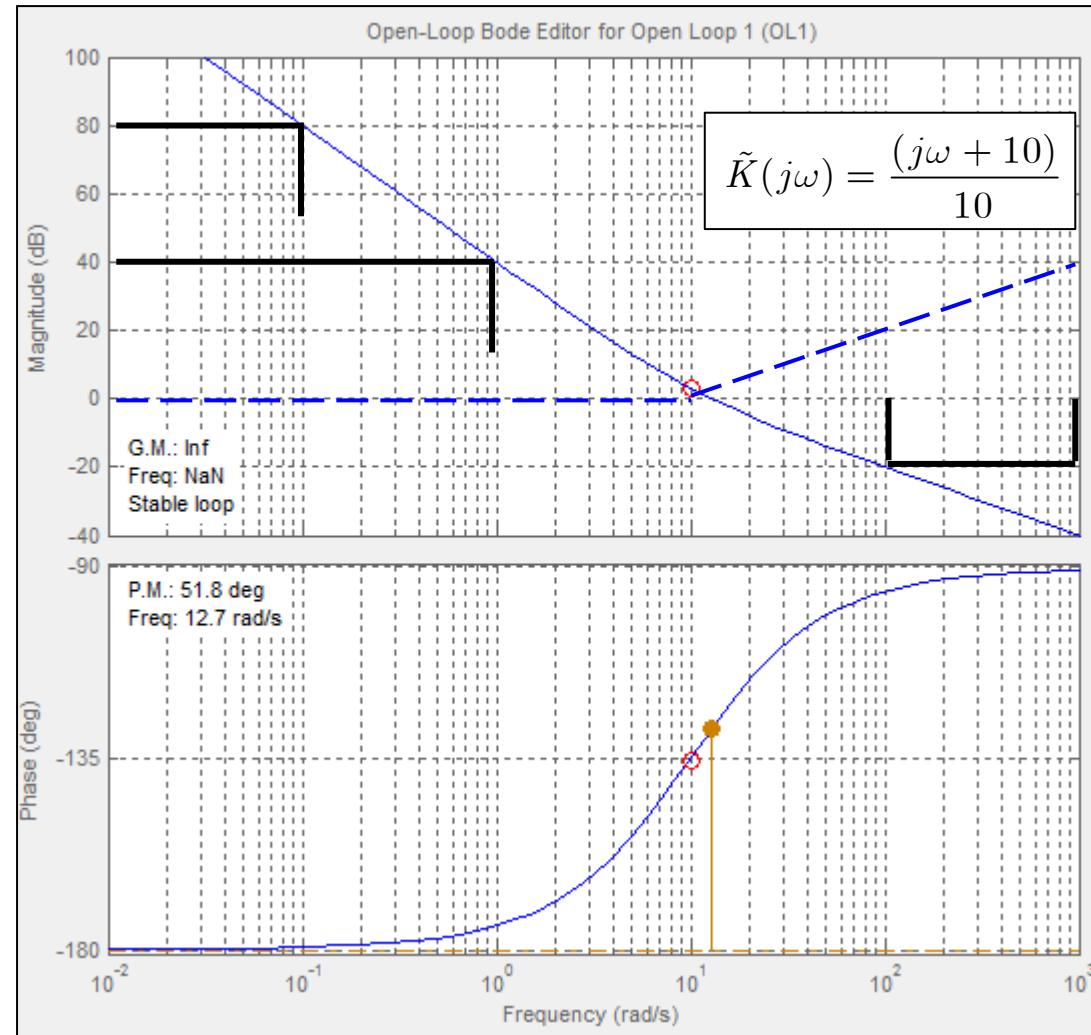
## Esempi

- Verifica dei Vincoli di Anello

$$K(s) = \bar{k}\tilde{K}(s); \tilde{K}(s) = \frac{(s + z)}{z};$$
$$\bar{k} = 100; z = 10 \text{ rads}^{-1}$$



- Poli instabili in Ciclo Aperto  $P=0$
- Numero di giri intorno a  $-1$   $N=0$
- Stabile in Ciclo Chiuso  $Z=0$
- Margine di Guadagno = inf.





## Esempi

- **Esempio 2**

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

- Progettare un controllore  $K(s)$  che garantisca la stabilità di  $G(s)$  e soddisfi i seguenti requisiti:

i. Errore statico di posizione = 0 (Errore nullo al gradino unitario).

ii. Attenuazione di almeno **-40 dB** per disturbi nella banda:  $[0, \omega_d] = [0, 10^{-2}] \text{ rads}^{-1}$

iii. Inseguimento di un comando con errore minore o uguale a **-100 dB** nella banda:

$$[0, \omega_r] = [0, 10^{-3}] \text{ rads}^{-1}$$

iv. Attenuazione di almeno **-40 dB** per rumori nella banda:  $[\omega_n^{-1}, \omega_n^{-2}] = [10^2, 10^3] \text{ rads}^{-1}$

v. Margini di Stabilità:  $PM \geq 45^\circ$ ,  $GM \geq +20dB$



## Esempi

- Vincoli geometrici dalle condizioni ii., iii., iv.

$$|S(j\omega)| \leq -40dB \quad |G(j\omega)K(j\omega)| \geq +40dB \quad \omega \in [0, 10^{-2}] rads^{-1}$$

$$|S(j\omega)| \leq -100dB \quad |G(j\omega)K(j\omega)| \geq +100dB \quad \omega \in [0, 10^{-3}] rads^{-1}$$

$$|T(j\omega)| \leq -40dB \quad |G(j\omega)K(j\omega)| \leq -40dB \quad \omega \in [10^2, 10^3] rads^{-1}$$

- Vincolo sull'errore a regime dalla condizione i.

$$e_{ss}(\infty) = 0 \quad K(s) = \frac{\bar{k}}{s} \tilde{K}(s); \tilde{K}(0) = 1$$

- E' necessario un integratore nella catena diretta

- Possibile scelta del Controllore e FdT di Anello

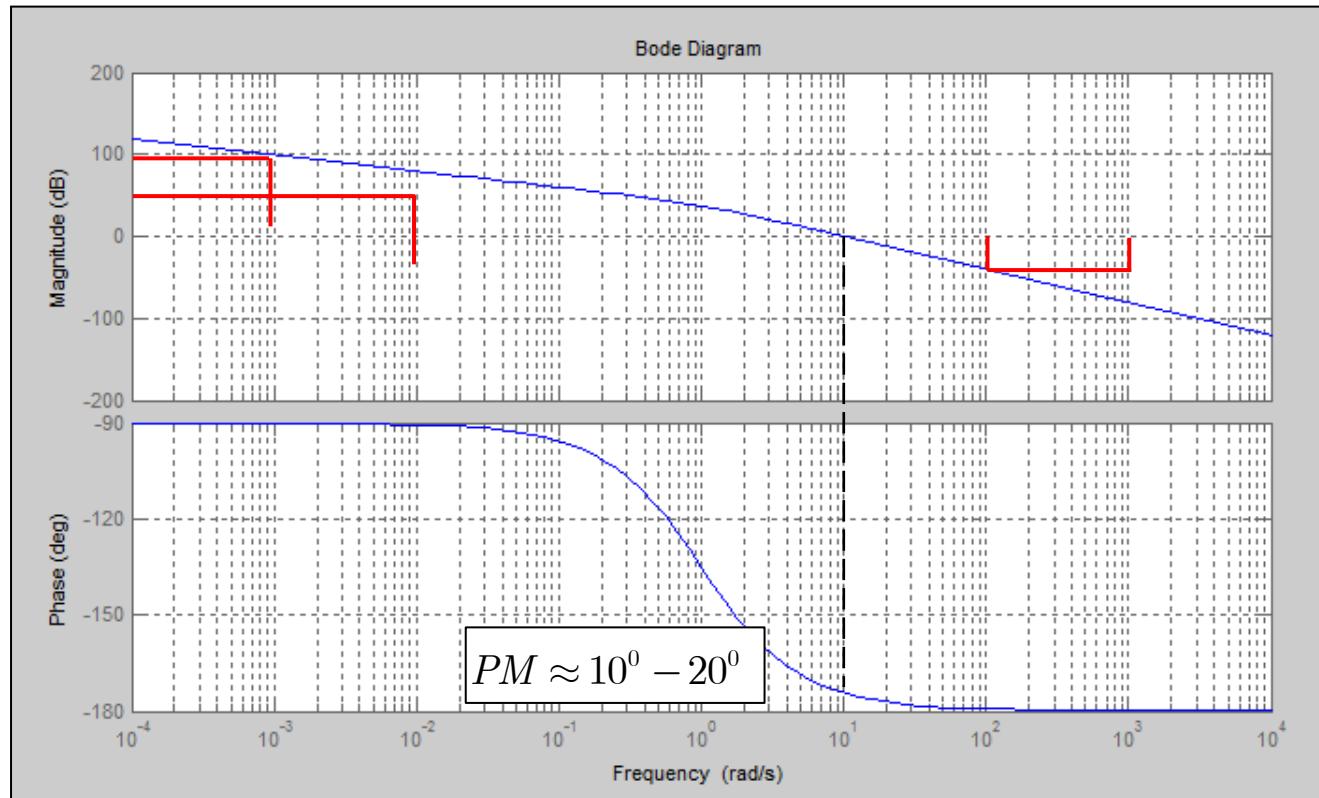
$$K(s) = \frac{\bar{k}}{s}; \bar{k} > 0 \quad G(s)K(s) = \frac{\bar{k}}{s} \frac{1}{s+1}; \bar{k} > 0$$



## Esempi

- Verifica Vincoli sulla FdT di Anello

$$|G(j\omega)K(j\omega)|; \bar{k} = 100$$



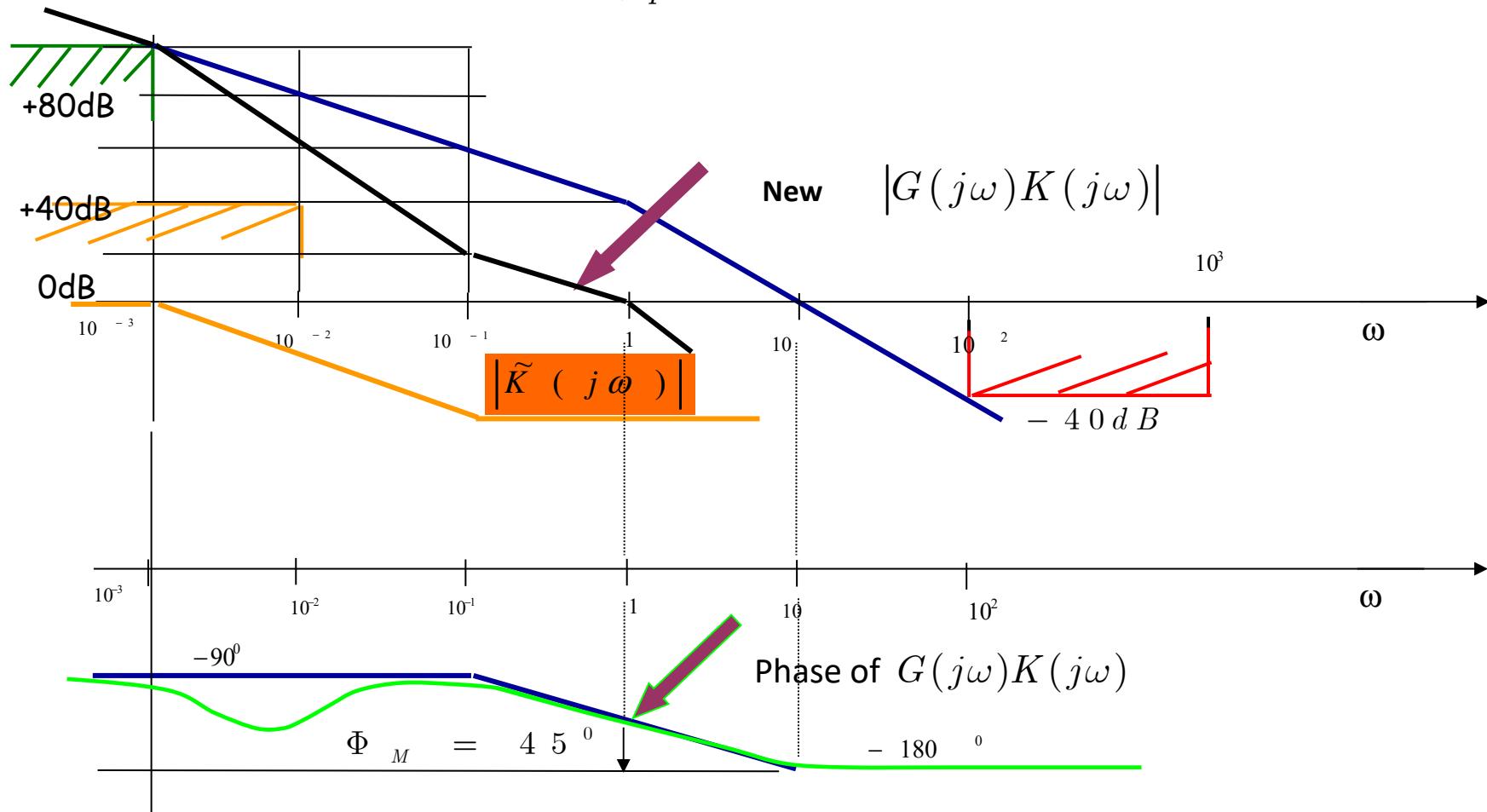
- I vincoli sul modulo sono rispettati, ma il margine di fase è circa 10-20 gradi



## Esempi

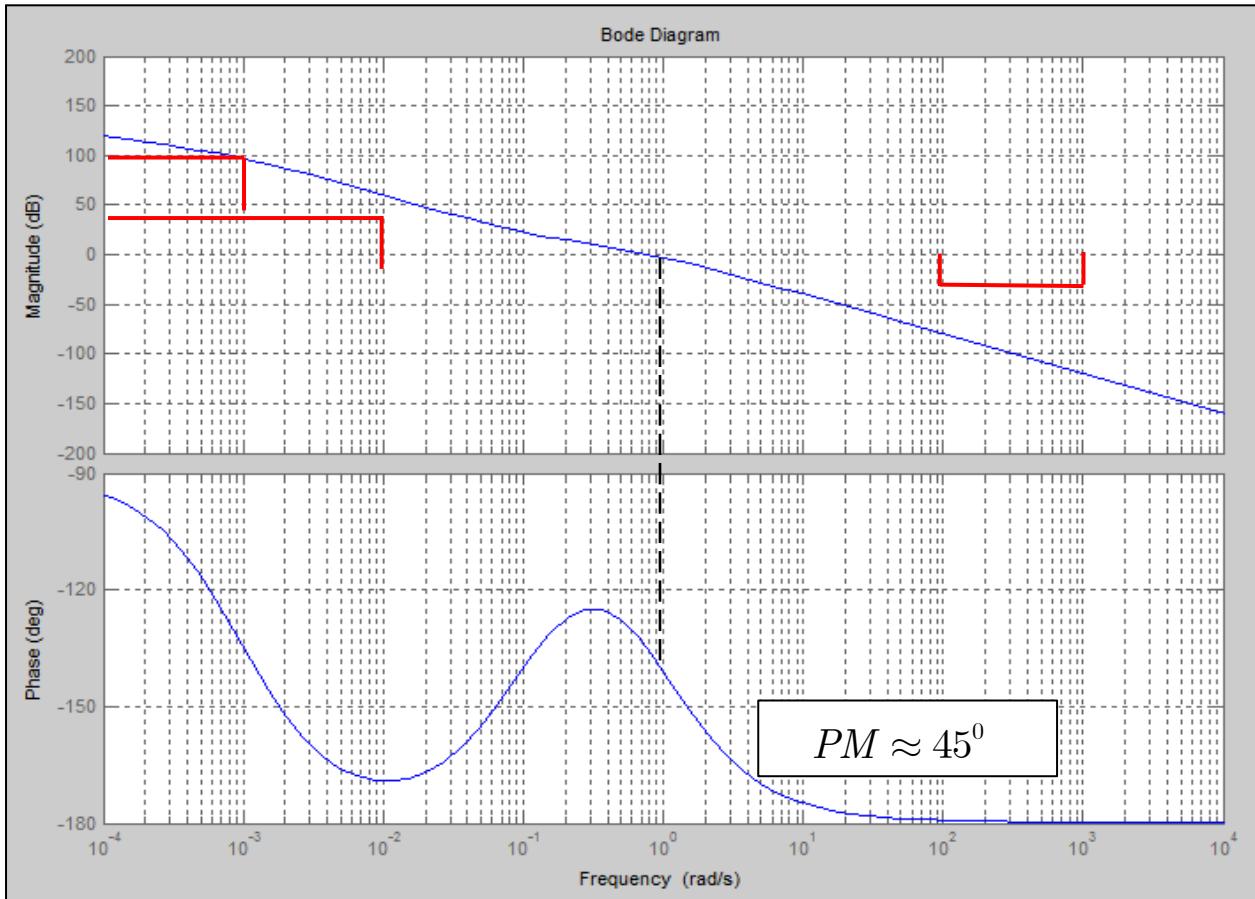
- La barriera ad alta frequenza non permette l'uso di un anticipo puro, Consideriamo perciò:

$$\tilde{K}(s) = \frac{p}{z} \frac{s + z}{s + p}, z > p > 0 \quad p = 10^{-3}; z = 10^{-1}$$

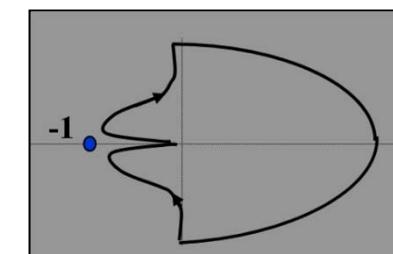
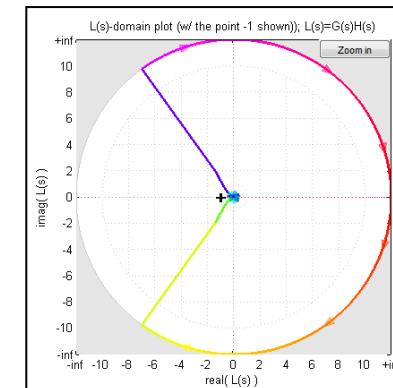




# Esempi



- Poli instabili in Ciclo Aperto  $P=0$
- Numero di giri intorno a  $-1$   $N=0$
- Stabile in Ciclo Chiuso  $Z=0$
- Margine di Guadagno = inf.





## Esempi

■ **Esempio 3**  $G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+10)}$

- Progettare un controllore  $K(s)$  che garantisca la stabilità di  $G(s)$  e soddisfi i seguenti requisiti:

i. Errore statico di velocità < 10% (Errore alla rampa).

ii. Attenuazione di almeno **-60 dB** per disturbi nella banda:  $[0, \omega_d] = [0, 1] \text{ rads}^{-1}$

iii. Inseguimento di un comando con errore minore o uguale a **-40 dB** nella banda:

$$[0, \omega_r] = [0, 2] \text{ rads}^{-1}$$

iv. Attenuazione di almeno **-40 dB** per rumori per frequenze superiori:  $\omega_n \approx 100 \text{ rads}^{-1}$

v. Margini di Stabilità:  $PM \geq 45^\circ$ ,  $GM \geq 15 \text{ dB}$



## Esempi

- Vincoli geometrici dalle condizioni ii., iii., iv.

$$|S(j\omega)| \leq -40 \text{dB} \quad |G(j\omega)K(j\omega)| \geq +40 \text{dB} \quad \omega \in [0, 2] \text{ rads}^{-1}$$

$$|S(j\omega)| \leq -60 \text{dB} \quad |G(j\omega)K(j\omega)| \geq +60 \text{dB} \quad \omega \in [0, 1] \text{ rads}^{-1}$$

$$|T(j\omega)| \leq -40 \text{dB} \quad |G(j\omega)K(j\omega)| \leq -40 \text{dB} \quad \omega > 10^2 \text{ rads}^{-1}$$

- Vincolo sulla velocità di risposta transitoria

$$\omega_{BW} \geq 10 \text{ rads}^{-1} \quad G(s)K(s) = \frac{\bar{k}}{s} \frac{1}{s+1}; \bar{k} > 0$$

- Vincolo sull'errore a regime dalla condizione i.

$$e_{ramp}(\infty) \leq 10\%$$

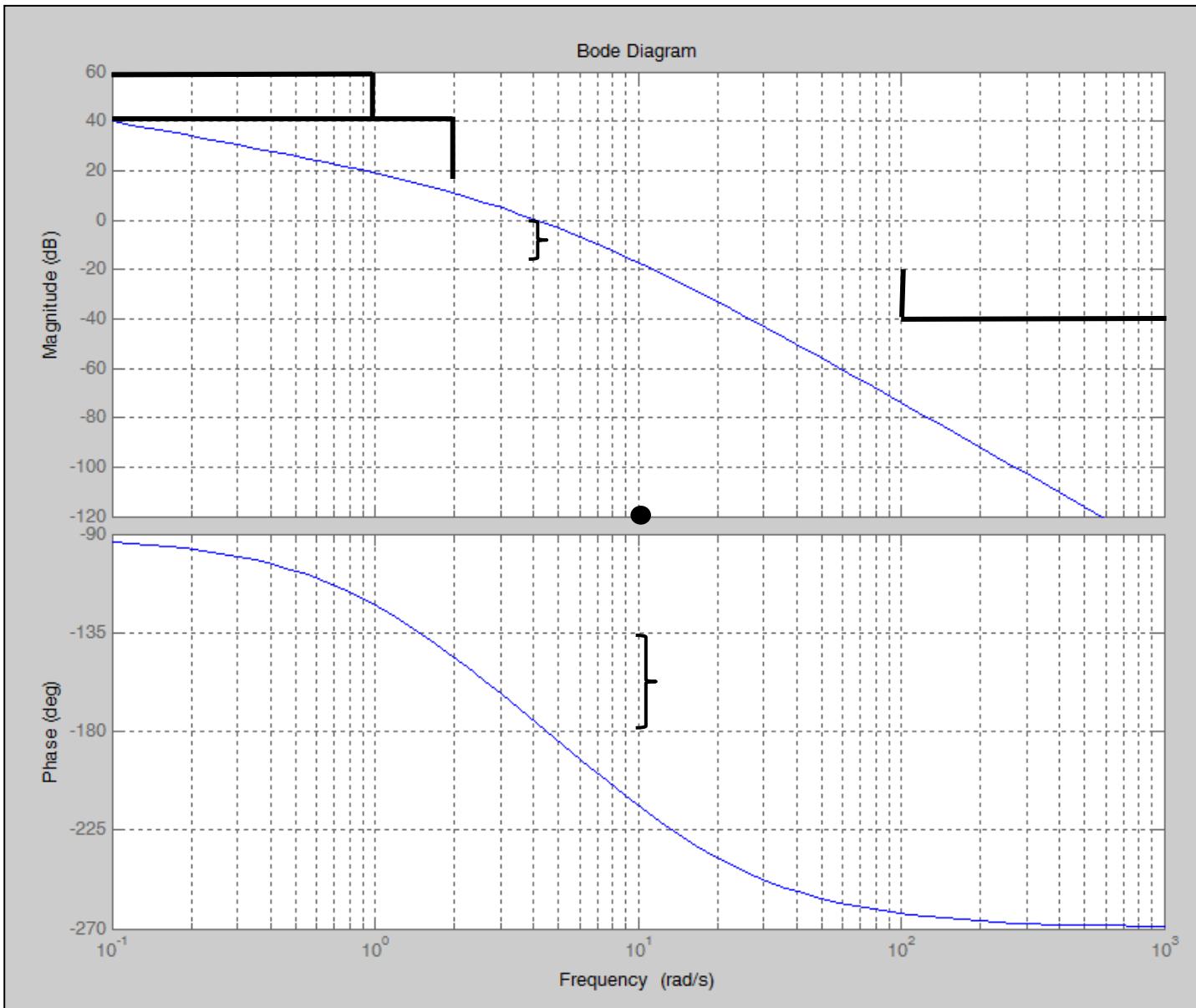
- Possibile scelta iniziale del Controllore in base al requisito di regime  $K(s) = \frac{\bar{k}}{s}; \bar{k} > 0$

$$e_{ramp}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon(s) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{\bar{k}}{s(s+2)(s+10)}} = \frac{20}{\bar{k}} \leq 0.1 \Rightarrow \bar{k} \geq 200$$

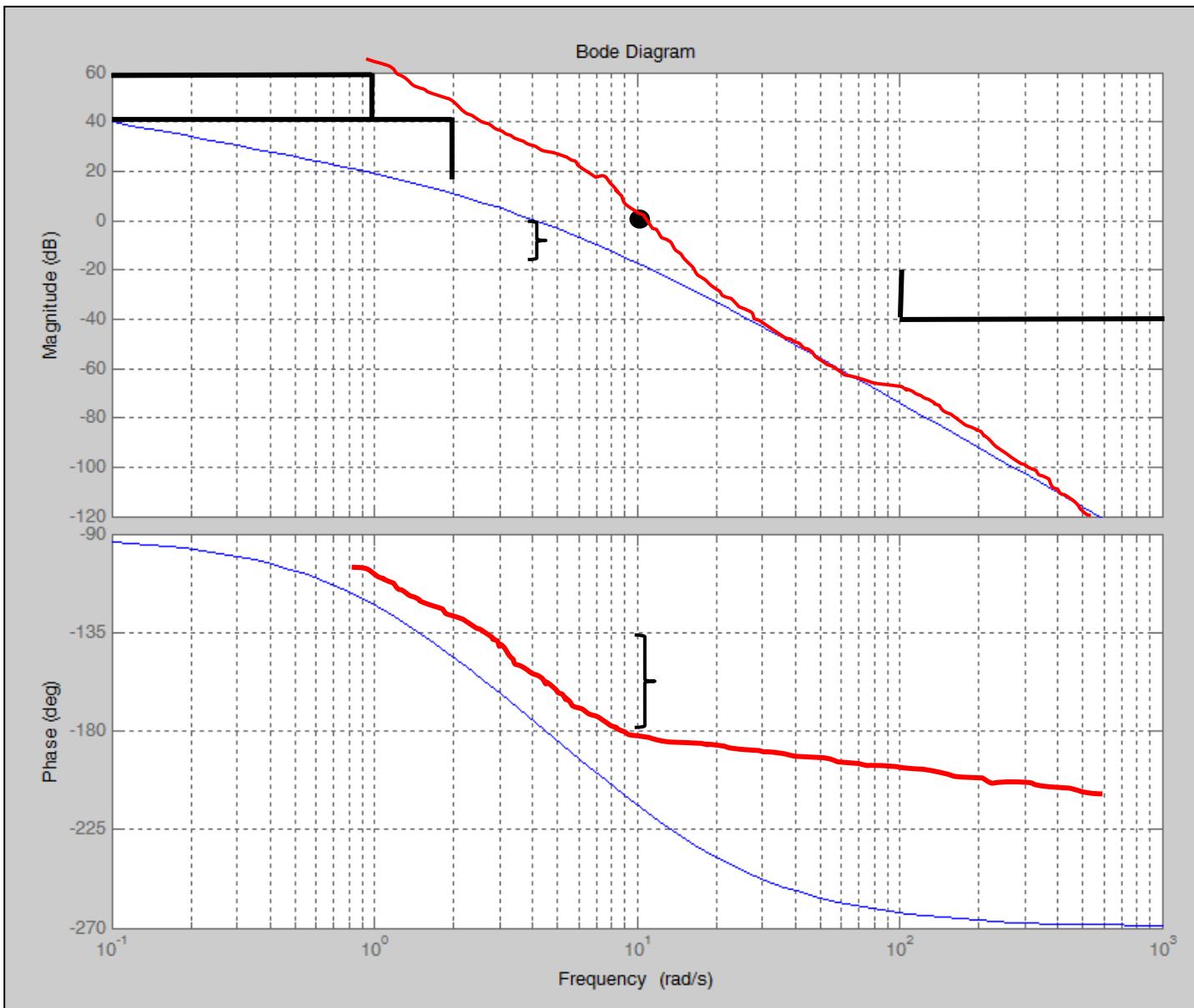


# Esempi





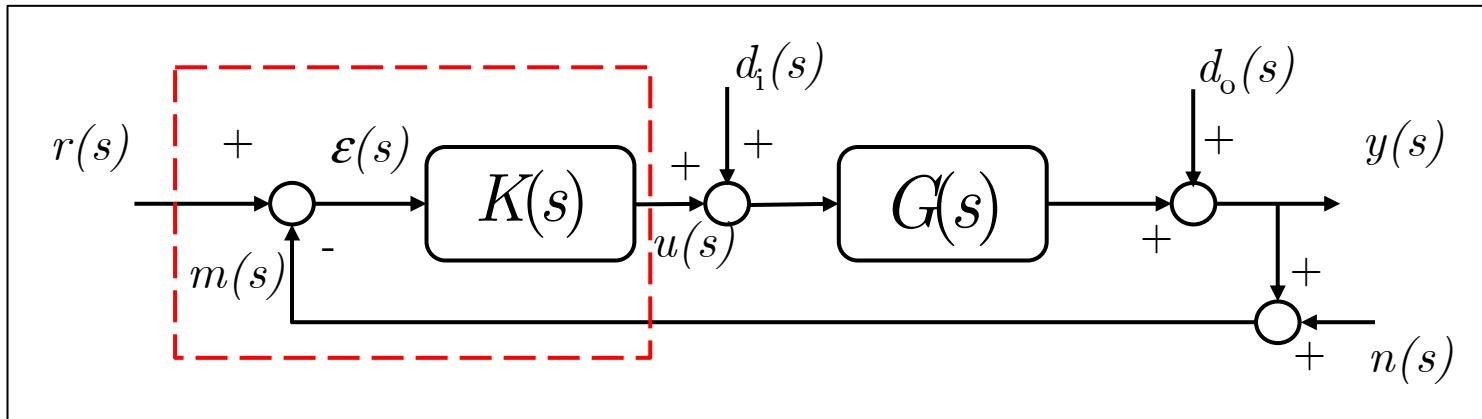
## Esempi





## Limiti sulle Prestazioni

- Il progetto del controllore può avere delle limitazioni intrinseche che non permettono il soddisfacimento dei requisiti



- Limitazione Algebrica:** Consideriamo i seguenti requisiti, come esempio

$$\left| \frac{\varepsilon(j\omega)}{r(j\omega)} \right| = |S(j\omega)| \leq 0.01$$

▪ Limitazione sull'errore a regime

$$\left| \frac{y(j\omega)}{n(j\omega)} \right| = |T(j\omega)| \leq 0.05$$

▪ Limitazione sulla sensitività al rumore



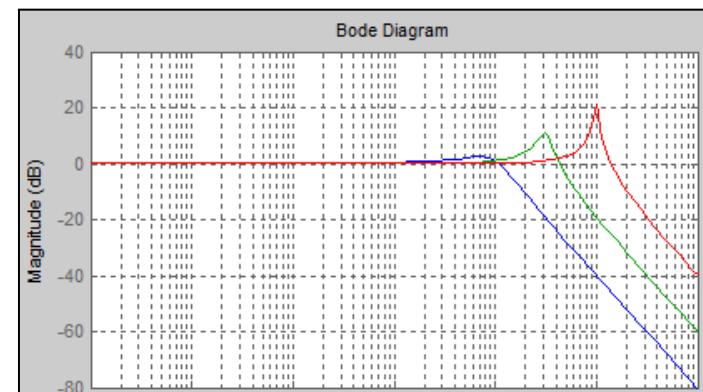
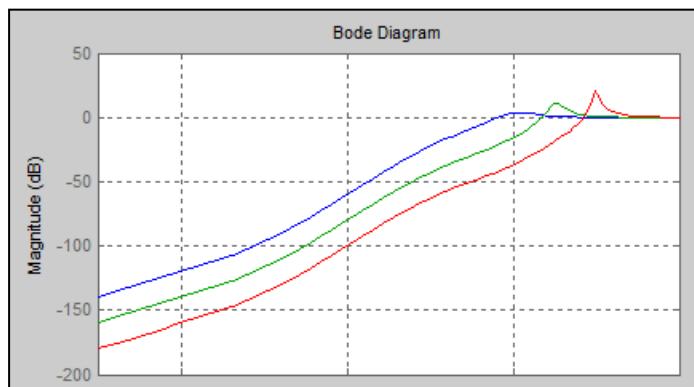
## Limiti sulle Prestazioni

$$S(s) + T(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} + \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = 1$$

$$S(s) = 1 - T(s) \quad \longrightarrow \quad |S(j\omega)| \geq 1 - |T(j\omega)|$$

$$|T(j\omega)| \leq 0.05 \quad \longrightarrow \quad |S(j\omega)| \geq 1 - 0.05 = 0.95 \gg 0.01 \quad !!!! \quad \frown\smile$$

- Le specifiche di progetto non possono essere soddisfatte nella stessa banda di frequenza
- Andamenti tipici della sensitività e sensitività complementare al variare della FdT di anello



$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + G_{OL}(j\omega)}$$

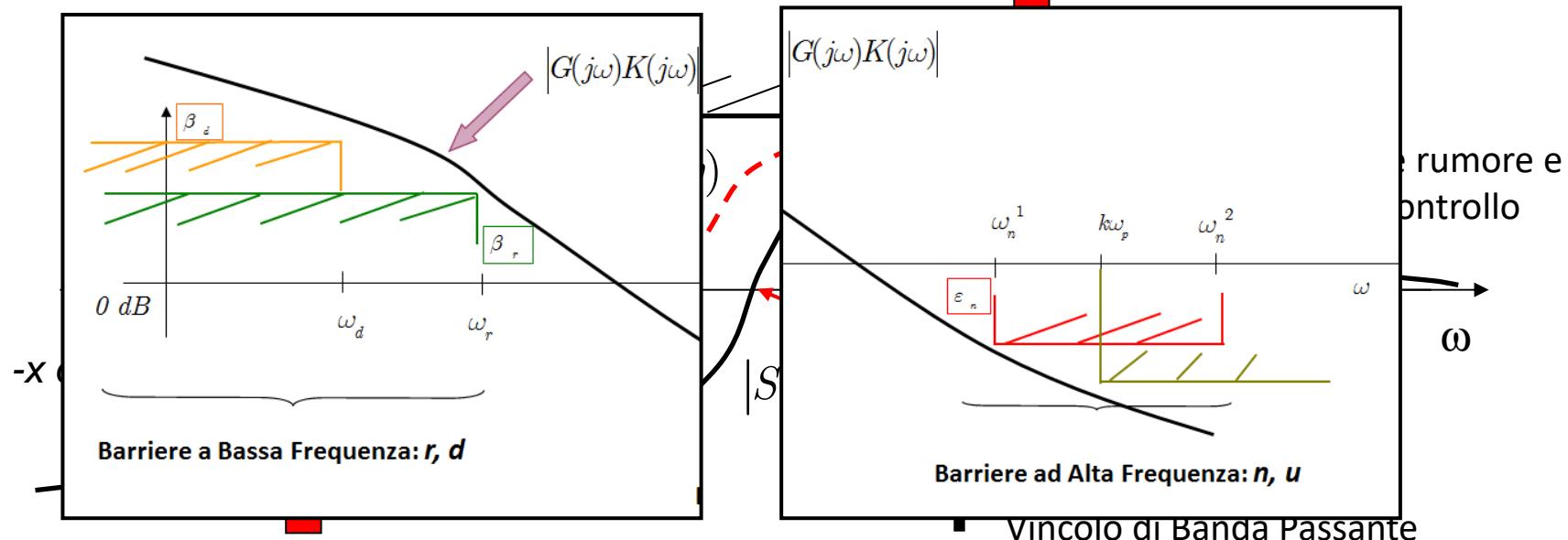
$$T(j\omega) = \frac{G_{OL}(j\omega)}{1 + G_{OL}(j\omega)}$$



# Limiti sulle Prestazioni

- **Limitazione Analitica**

- **Problema:** Consideriamo un vincolo di forma sulla funzione di Sensitività



- Vincoli di accuratezza e reiezione disturbi
- **Approccio:** Approssimare  $S(j\omega)$  con una funzione  $\Lambda(j\omega)$  stabile e con inversa stabile (Matematicamente significa: a fase minima e quindi invertibile)



## Limiti sulle Prestazioni

- Il problema di controllo si traduce quindi nel trovare un **controllore stabilizzante**  $K(s)$  tale che:

$$|S(j\omega)| \leq |\Lambda(j\omega)|$$

- Facciamo riferimento alla figura precedente

$$\begin{aligned} |\Lambda(s)| &= 10 \left( \frac{s+z}{s+10z} \right)^3 \\ |\Lambda(\infty)| &= 10 = +20dB = +ydB \\ |\Lambda(0)| &= 0.01 = -40dB = -xdB \end{aligned}$$

- Definiamo una funzione  $W(s)$  analitica nel semipiano di parte reale positiva (non ha singolarità in tale semipiano), tale che:

$$\Lambda^{-1}(j\omega) = W(j\omega)$$

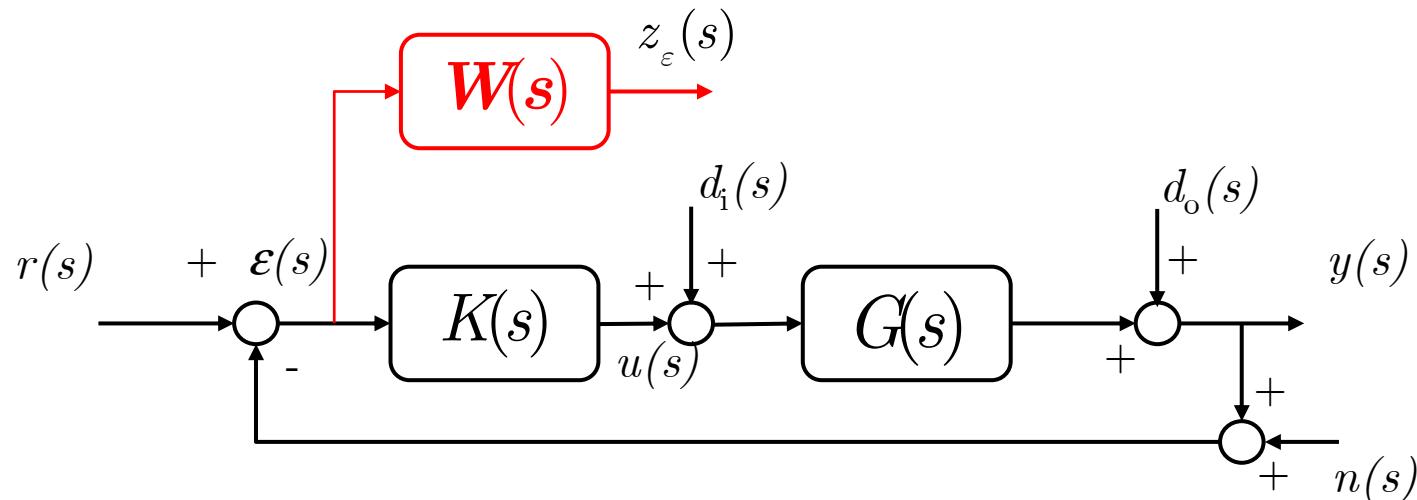
- Se  $K(s)$  stabilizza  $G(s)$ , allora  $S(s)$  è analitica nel semipiano di parte reale positiva

$$|S(j\omega)| \leq |\Lambda(j\omega)| \quad |S(j\omega)\Lambda^{-1}(j\omega)| \leq 1$$



## Limiti sulle Prestazioni

$$\longrightarrow \left| S(s)W(s) \right| \leq 1; s \in C_+$$



$$z_\varepsilon(s) \quad \blacksquare \quad \text{Uscita fittizia} \quad z_\varepsilon(s) = S(s)W(s)\varepsilon(s)$$

I requisiti di progetto in termini di SHAPING sono soddisfatti se:

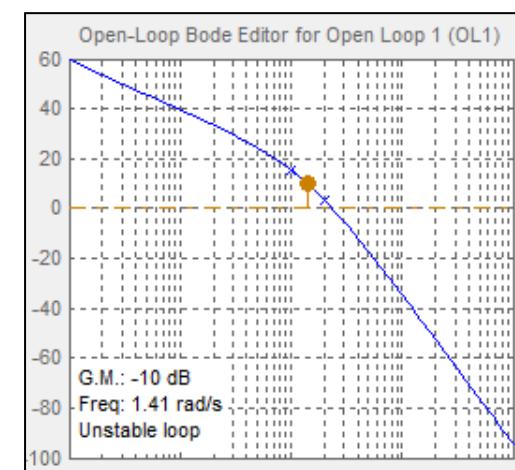
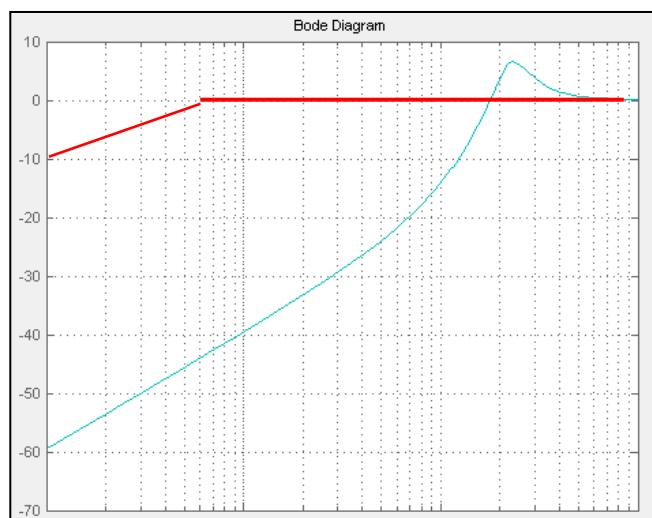
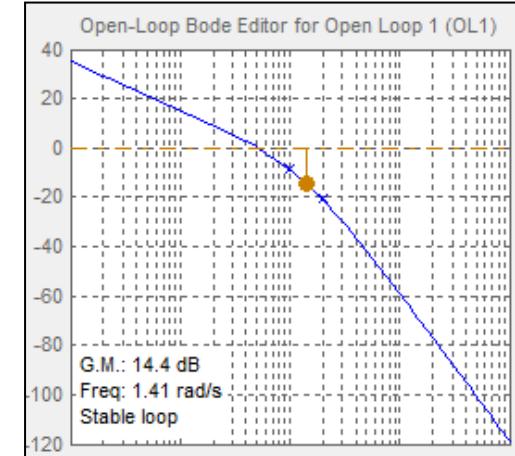
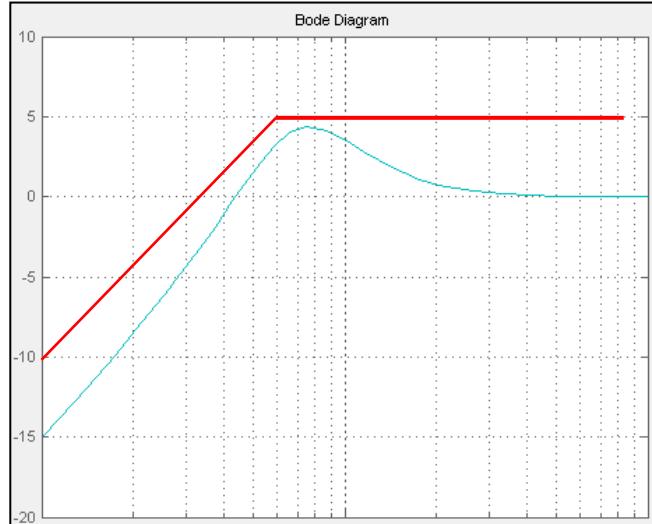
- Il sistema in ciclo chiuso è asintoticamente stabile (vedi margini di stabilità – ovvero stabilità robusta)
- L'uscita fittizia segue l'andamento dettato dal vincolo di shaping (prestazioni robuste)



# Limiti sulle Prestazioni

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = \frac{s(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2) + k}$$

$$G(s)K(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$





## Limiti sulle Prestazioni

$$|S(s)W(s)| \leq 1; s \in C_+$$

- Il soddisfacimento del vincolo di cui sopra può essere reso difficoltoso/impossibile nel caso di FdT di anello instabili e/o a sfasamento non minimo (**effetto waterbed**, ovvero Teorema di Bode)

- Teorema #1:** Dato un sistema la cui FdT di anello  $G_{ol}(s)$  sia stabile e a sfasamento minimo

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = \begin{cases} 0 & (n - m) > 1 \\ -k \frac{\pi}{2} & (n - m) = 1 \end{cases} \quad k = \lim_{s \rightarrow \infty} sG_{ol}(s)$$

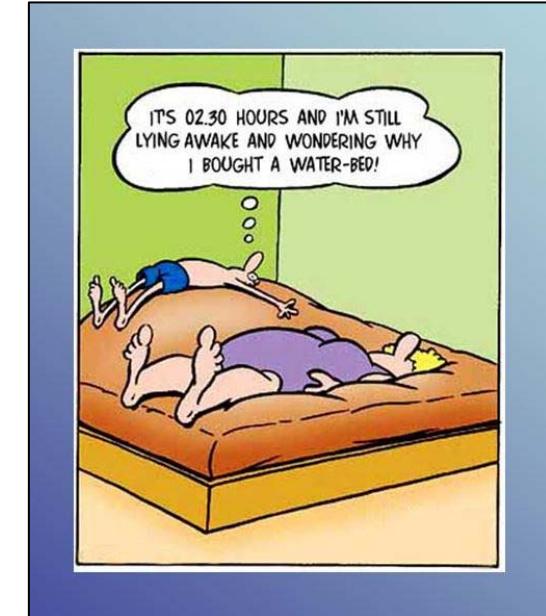
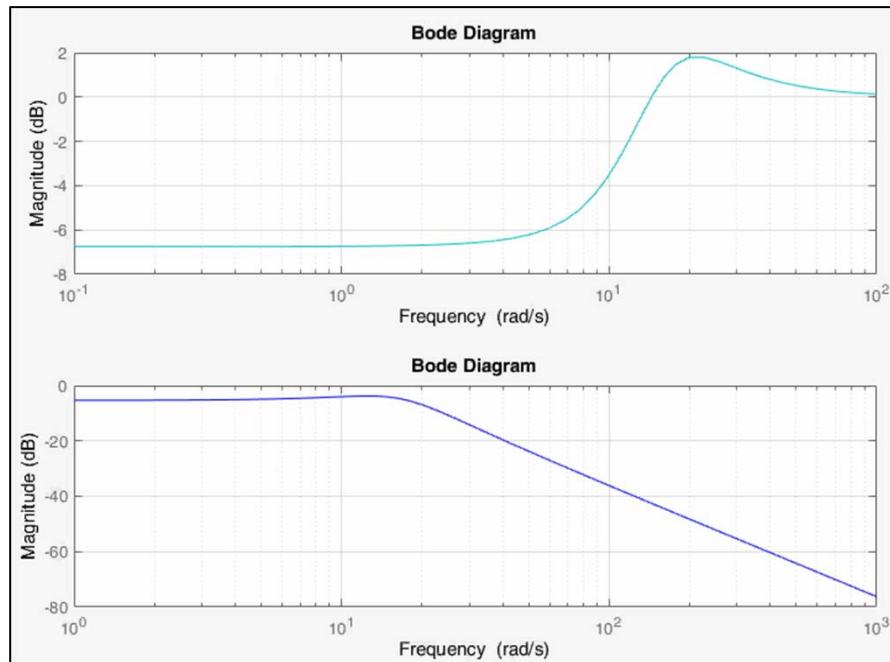
- Teorema #2:** Dato un sistema la cui FdT di anello  $G_{ol}(s)$  sia stabile e a sfasamento **non** minimo

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = \begin{cases} \pi \sum_{i=1}^q z_i & (n - m) > 1 \\ -k \frac{\pi}{2} + \pi \sum_{i=1}^q z_i & (n - m) = 1 \end{cases} \quad k = \lim_{s \rightarrow \infty} sG_{ol}(s) \quad \text{Re}[z_i] > 0$$

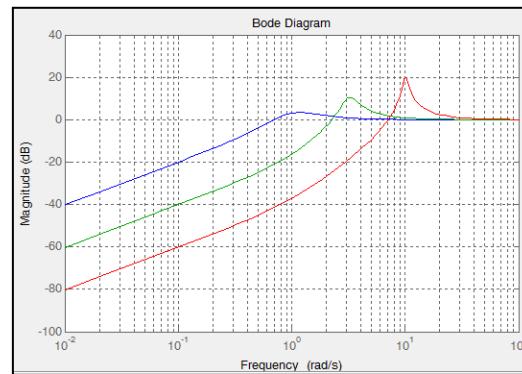




# Limiti sulle Prestazioni



- La presenza di zeri instabili e/o guadagni di anello elevati può vincolare le specifiche di banda passante e l'attenuazione a bassa frequenza.

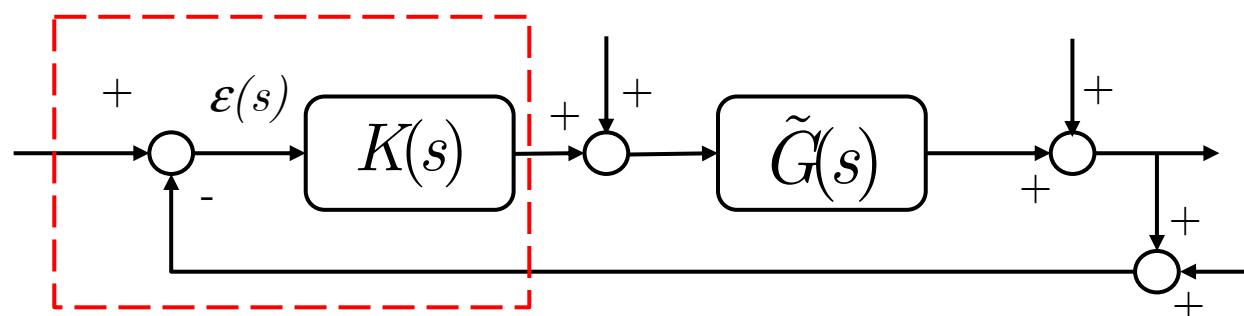




## Controllori Standard

- Esistono in pratica classi di controllori tipici che hanno proprietà e requisiti standard e che possono garantire specifiche prestazioni sia mediante la sintesi in frequenza, che con il luogo delle radici
  - Controllori P.I.D.
  - Reti Correttive
  - Predittore di Smith
  - ...

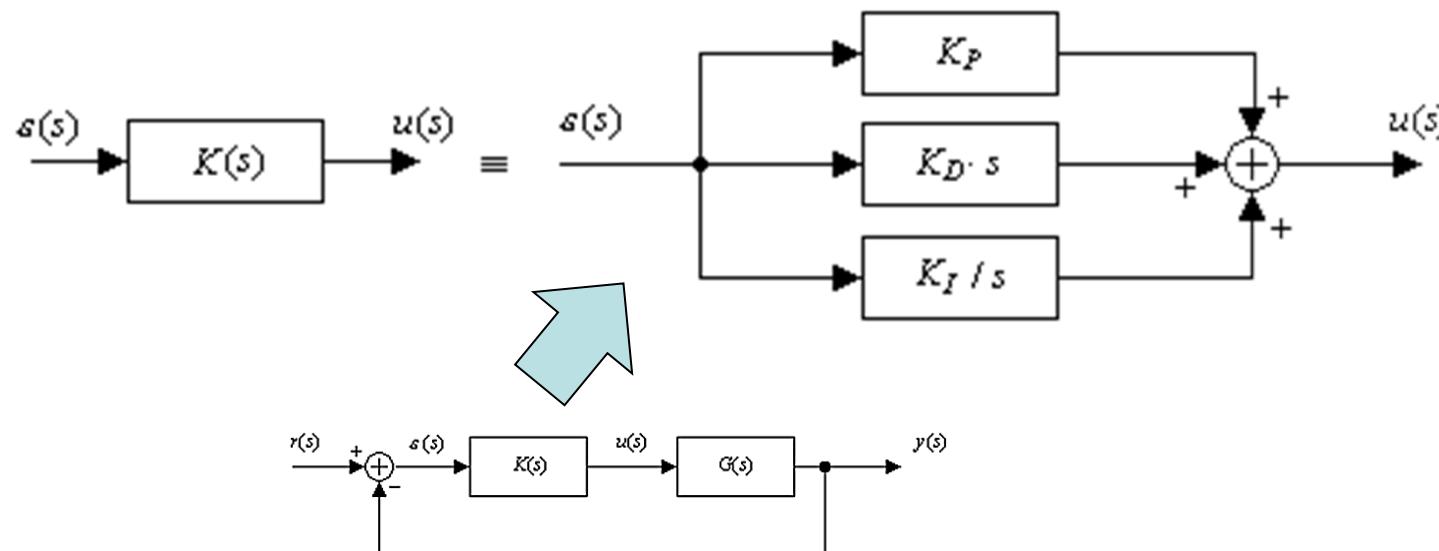
$$K(s) = K_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^r \prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$
$$= K_S \frac{\prod_{i=1}^m (1 + \frac{s}{z_i})}{s^r \prod_{j=1}^n (1 + \frac{s}{p_j})}, \quad K_S = K_0 \frac{z_1 z_2 \dots z_m}{p_1 p_2 \dots p_n}$$





# Controllori P.I.D.

- I controllori PID sono tra i più usati in scala industriale, per controllori di processo a basso-medio livello tecnologico.
  - Utilizzo su processi di varia natura
  - Prestazioni soddisfacenti
  - Facilità di taratura automatica dei guadagni
  - Implementazione tecnologica in varie forme (meccanica, elettronica, digitale, idraulica, ecc.)
  - Semplice da capire per la comunità scientifica non controllista
- Il principio base è la combinazione delle operazioni che è possibile fare su equazioni differenziali lineari.





# Controllori P.I.D.

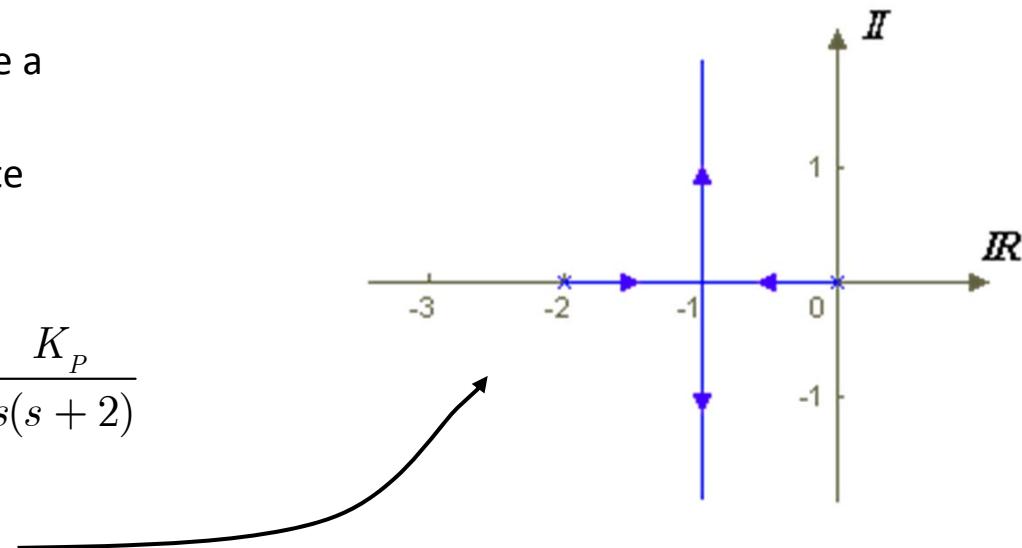
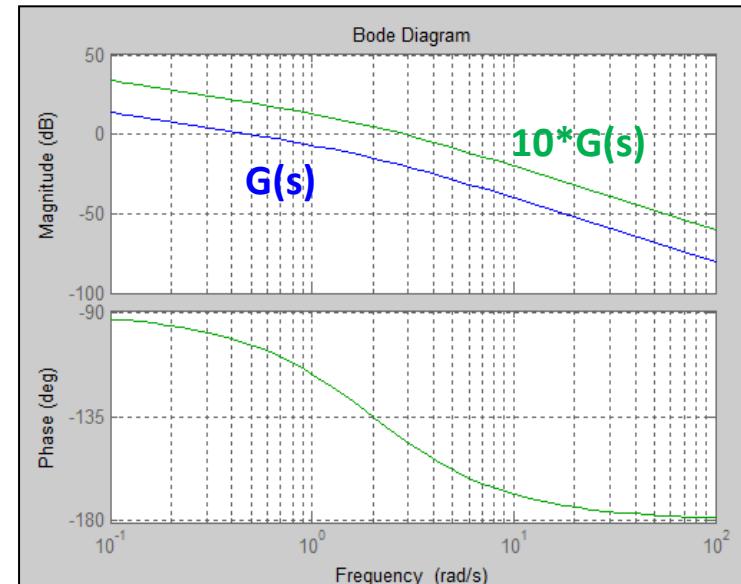
## □ Azione Proporzionale

$$\begin{cases} u(s) = K_P [r(s) - y(s)] = K_P \varepsilon(s) \\ u(t) = K_P \varepsilon(t) \end{cases}$$

- Controllo di sistemi stabili e/o asintoticamente stabili per cui è necessario alzare il guadagno di anello
- Riduzione dell'errore a regime a comandi tipici
- Aumento della Banda Passante

$$\omega_{BW} \approx \frac{0.35}{T_R}$$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)} \quad K(s)G(s) = \frac{K_P}{s(s+2)}$$





# Controllori P.I.D.

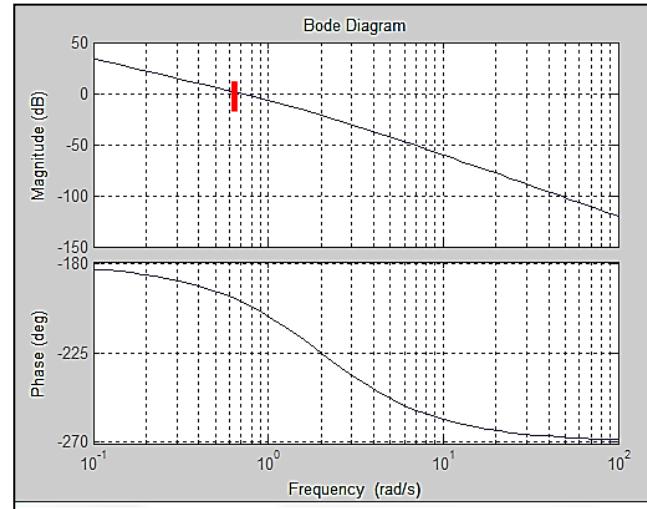
## □ Azione Integrale

$$\begin{cases} u(s) = \frac{K_I}{s} \varepsilon(s) \\ u(t) = K_I \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \end{cases}$$

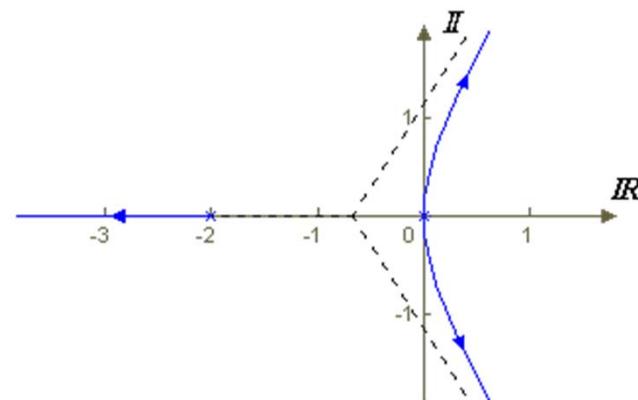
- Requisiti di errore a regime
- Aumento del Margine di Guadagno GM
- Diminuzione della Banda Passante
- **Possibilità di Instabilità a causa della perdita di fase dovuta all'integratore**

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

$$K(s)G(s) = \frac{K_I}{s^2(s+2)}$$



PM < 0, Instabile in anello chiuso





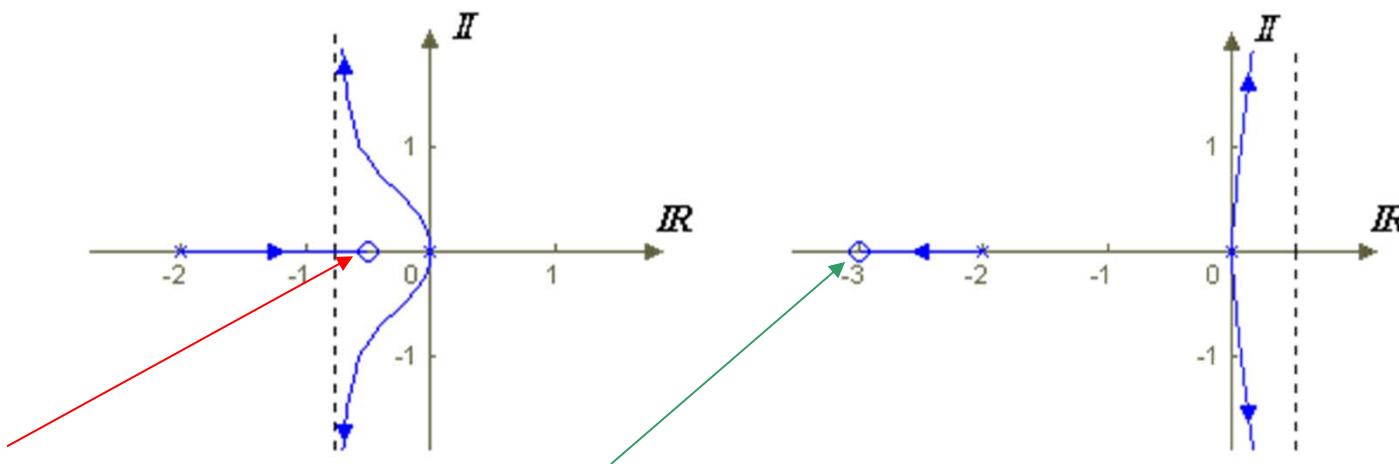
## Controllori P.I.D.

### □ Azione Proporzionale-Integrale, ovvero P.I.

- Controbilanciare l'effetto instabile del polo all'origine
- Aumento della Banda Passante
- Maggiore velocità di risposta

$$\begin{cases} u(s) = K_P \varepsilon(s) + \frac{K_I}{s} \varepsilon(s) = \frac{K_P \cdot s + K_I}{s} \varepsilon(s) \\ u(t) = K_P \varepsilon(t) + K_I \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \end{cases}$$

$$\begin{aligned} K(s)G(s) &= \left( \frac{K_I}{s} + K_P \right) \cdot \frac{1}{s(s+2)} = \\ &= \frac{K_P s + K_I}{s^2(s+2)} = K_P \cdot \frac{s + K_I/K_P}{s^2(s+2)} \end{aligned}$$



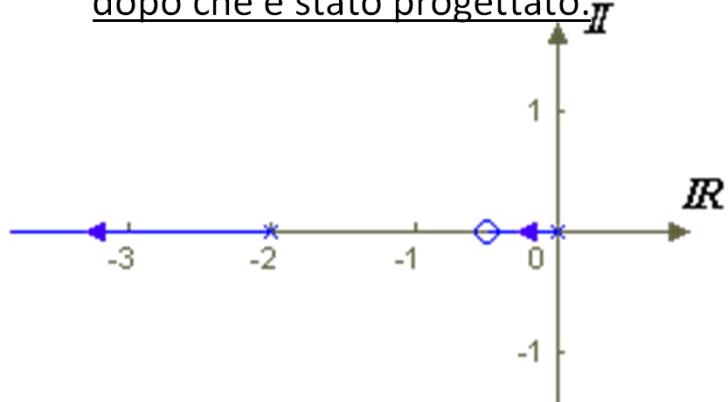
- **Nota:** vedere la rete correttrice a ritardo di fase



## Controllori P.I.D.

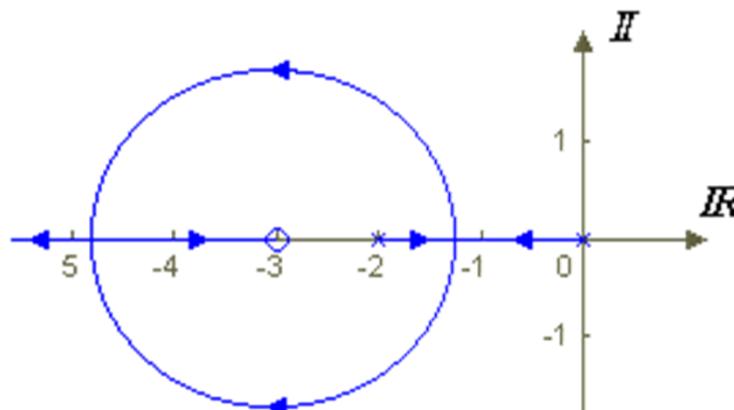
### □ Azione Proporzionale-Derivativa, ovvero P.D.

- Aumento di Banda Passante nel caso di sistemi senza problemi di stabilità
- Muove l'origine degli asintoti verso destra!!
- Aumento Margine di Fase PM
- Aumento velocità di risposta
- Controllore non causale che richiede l'inserimento di un polo fuori banda, dopo che è stato progettato.



$$\begin{cases} u(s) = K_P \varepsilon(s) + K_D s \varepsilon(s) = (K_P + K_D s) \varepsilon(s) \\ u(t) = K_P \varepsilon(t) + K_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} K(s)G(s) &= (K_D s + K_P) \frac{1}{s(s+2)} = \\ &= \frac{K_D s + K_P}{s(s+2)} = K_D \cdot \frac{s + K_P/K_D}{s(s+2)} \end{aligned}$$



- **Nota:** vedere la rete correttrice ad anticipo di fase



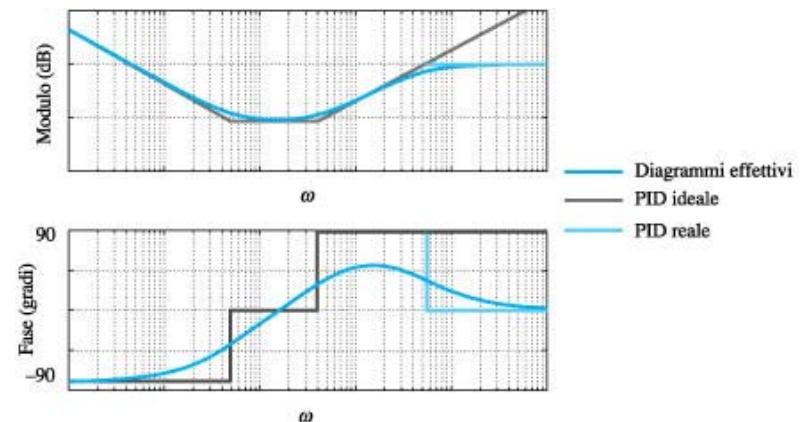
# Controllori P.I.D.

## □ Azione Proporzionale-Integrale-Derivativa

- Nella sua forma completa, il controllore comprende tutte e tre le componenti
- Il controllore P.I.D. ideale ha due zeri ed un polo ed è quindi non causale

$$\begin{cases} u(s) = K_P \varepsilon(s) + \frac{K_I}{s} \varepsilon(s) + K_D s \varepsilon(s) = \frac{K_P s + K_I + K_D s^2}{s} \varepsilon(s) \\ u(t) = K_P \varepsilon(t) + K_I \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + K_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \end{cases}$$

$$K_{PID}^{REAL}(s) = \frac{K_I}{P} \frac{\frac{K_D}{K_I} s^2 + \frac{K_P}{K_I} s + 1}{s \left( \frac{s}{P} + 1 \right)}$$

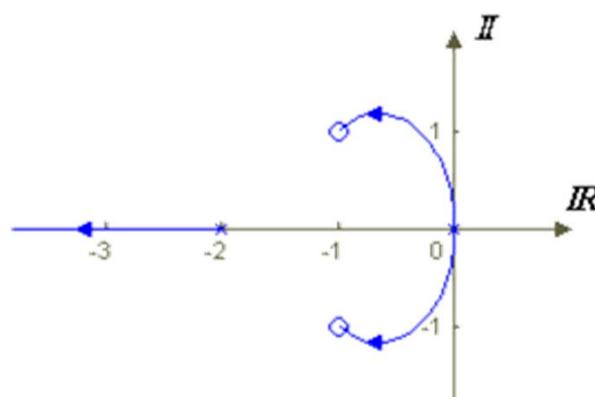
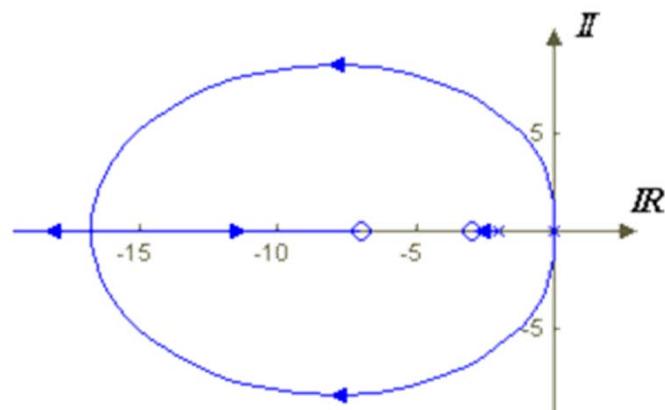
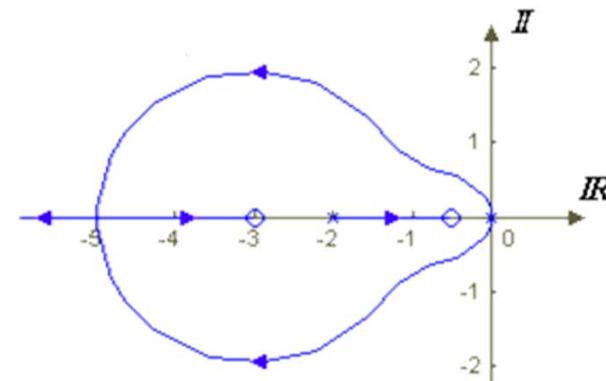
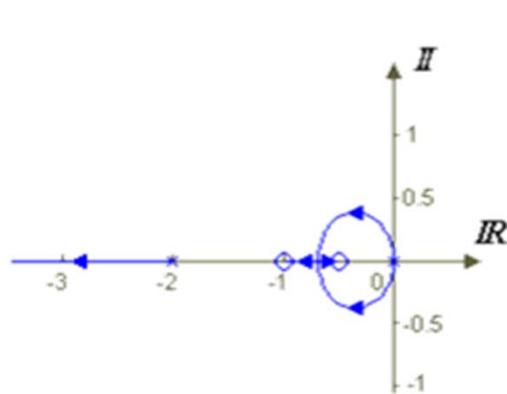




## Controllori P.I.D.

- Influenza della locazione degli zeri di un controllore PID

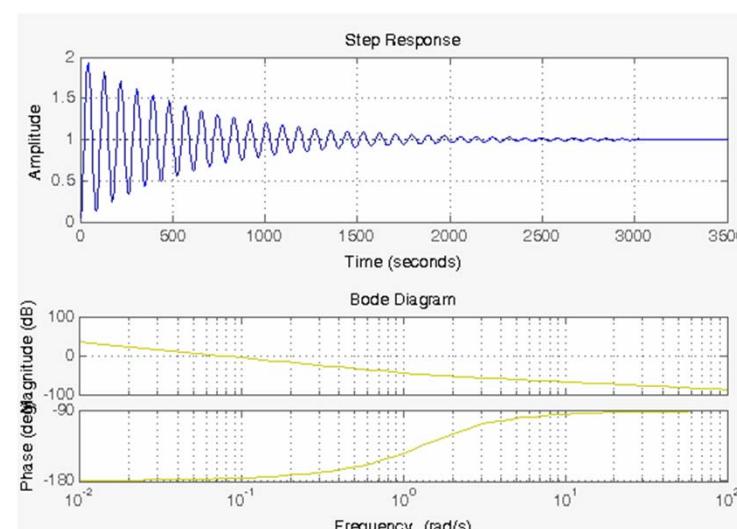
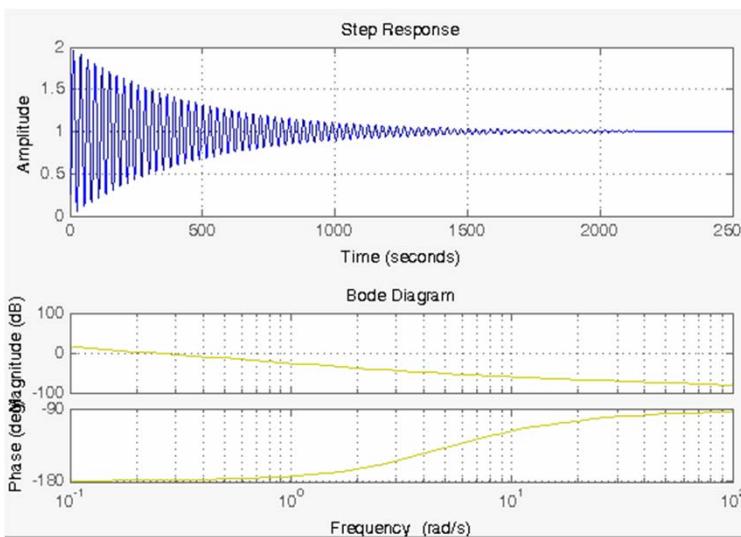
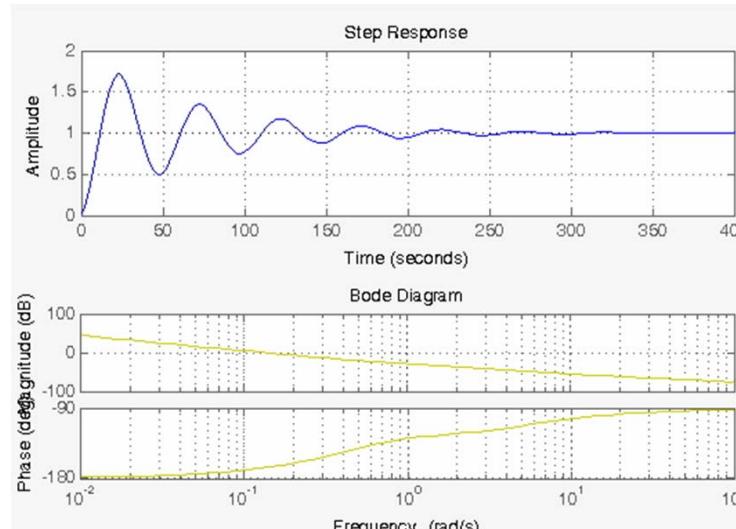
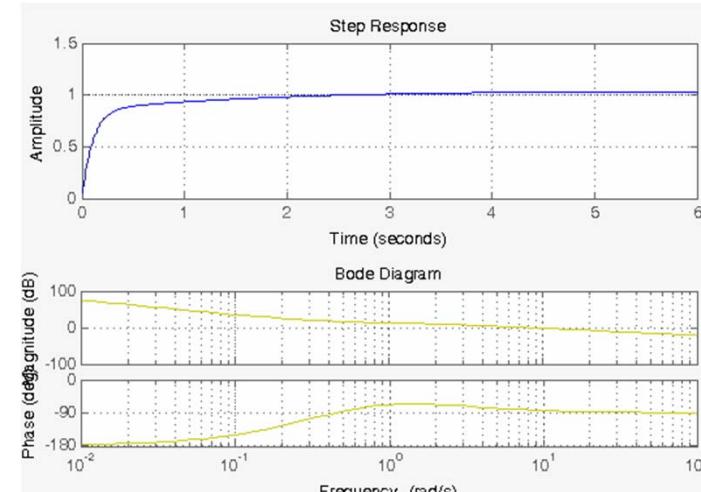
$$K_{PID}^{IDEAL}(s) \cdot G(s) = \left( K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) \cdot \frac{1}{s(s+2)} = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s^2(s+2)} = K_D \cdot \frac{s^2 + K_P / K_D s + K_I / K_D}{s^2(s+2)}$$





# Controllori P.I.D.

- Influenza della locazione degli zeri di un controllore PID (sisotool)



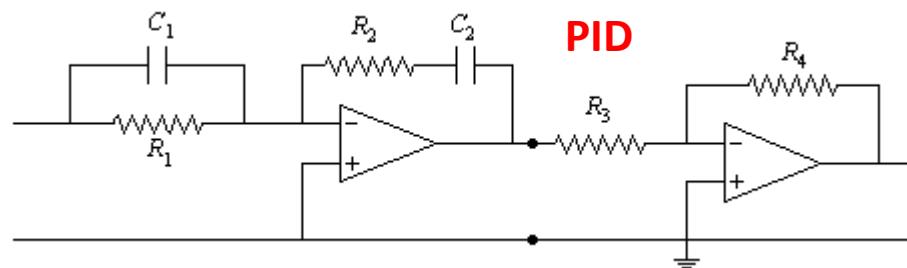


# Controllori P.I.D.

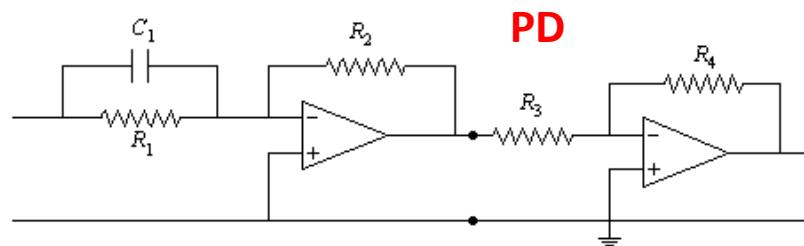
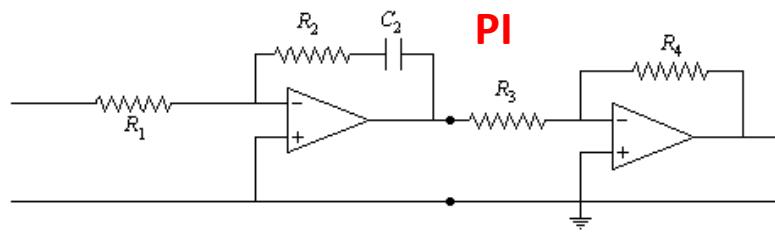
- Contributo alla risposta temporale

| CL RESPONSE          | RISE TIME    | OVERSHOOT | SETTLING TIME | S-S ERROR    |
|----------------------|--------------|-----------|---------------|--------------|
| <b>K<sub>p</sub></b> | Decrease     | Increase  | Small Change  | Decrease     |
| <b>K<sub>i</sub></b> | Decrease     | Increase  | Increase      | Eliminate    |
| <b>K<sub>d</sub></b> | Small Change | Decrease  | Decrease      | Small Change |

- Realizzazione Elettronica Analogica



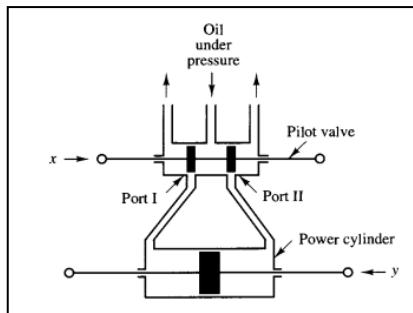
$$K(s) = \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_1 C_2 s} = \frac{R_4}{R_3} \cdot \left( C_1 R_2 s + \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_1 C_2 s} \right)$$





# Controllori P.I.D.

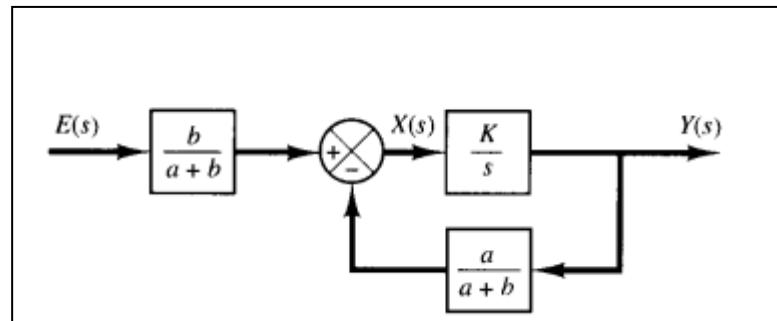
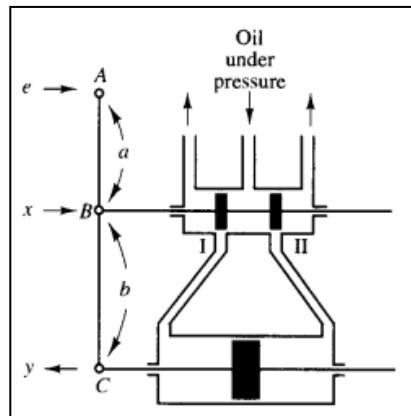
- Realizzazione Idraulica: Controllore Integrale



$$A[m^2]\rho\left[\frac{kg}{m^3}\right]dy[m] = q\left[\frac{kg}{sec}\right]dt[sec] \quad q = K_1x$$

$$A\rho \frac{dy}{dt} = K_1x \quad \Rightarrow \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{K_1}{A\rho s} = \frac{K}{s}$$

- Realizzazione Idraulica: Controllore Proporzionale - Integrale

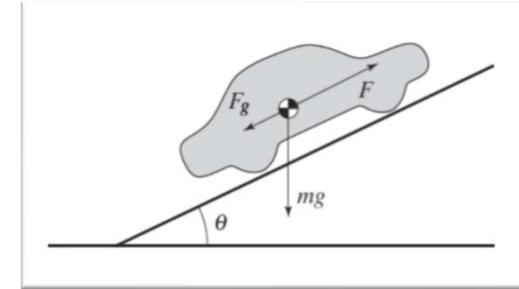
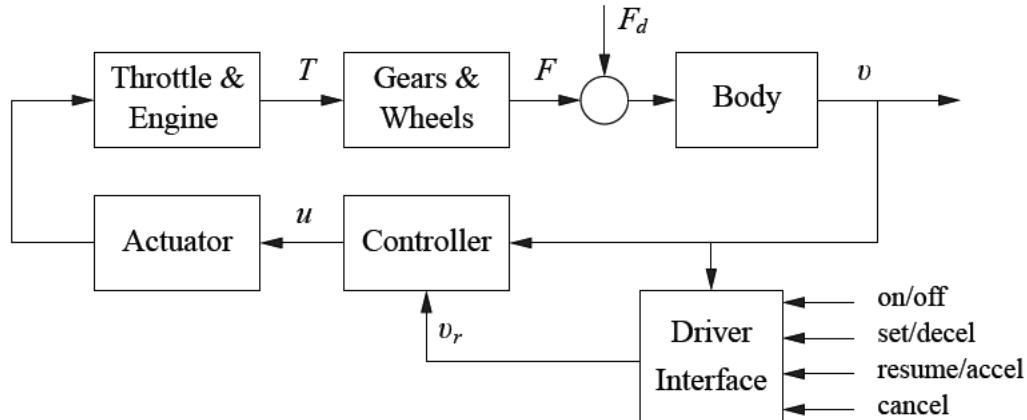


$$\frac{y(s)}{e(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} \frac{K}{s}}{1 + \frac{b}{a+b} \frac{K}{s}} = \frac{bK}{(a+b)s + Ka}$$



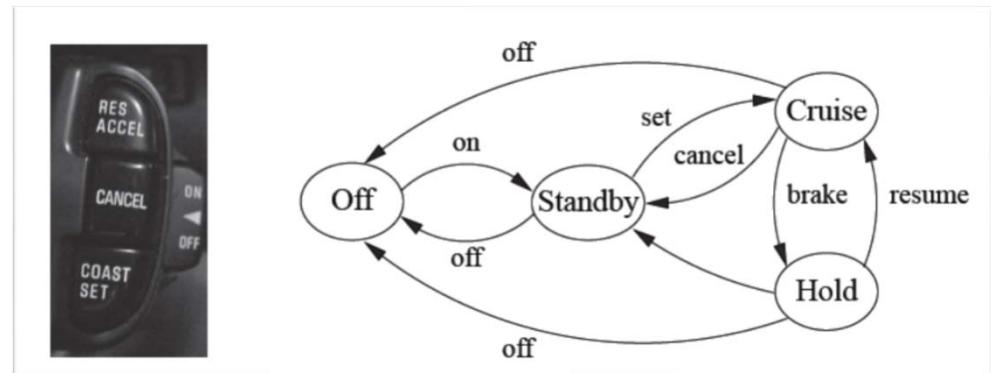
# Controllori P.I.D.

## □ Esempio: Cruise Control, Tracking di velocità



## □ Controllo diviso in 2 parti:

- Macchina a stati finiti per l'implementazione dei vari modi operativi.
- Controllo classico per il raggiungimento dei requisiti richiesti all'interno di ogni modo di operazione.



$$m \frac{dv}{dt} = F_c + F_d = F_c - F_a - F_g - F_r$$



## Controllori P.I.D.



- Il riferimento al controllore è dato dal guidatore:  $v = v_r$
- Modello linearizzato intorno ad una condizione di equilibrio data da velocità costante, pendenza della strada costante, posizione fissata dell'acceleratore per ottenere la velocità costante desiderata.  $(v_e, \theta_e, u_e)$

$$m \frac{d(v - v_e)}{dt} = -a(v - v_e) - b_g(\theta - \theta_e) + b(u - u_e)$$

- Esempio numerico:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -0.0101(v - 20) - 9.8\theta + 1.3203(u - 0.1530) \\ \dot{v} + 0.0101v &= -9.8\theta + 1.3203u + 0.202 - 0.2134 = \\ &= 1.3203u - 9.8\theta - 0.0114\end{aligned}$$

- La dinamica di moto perturbato vale quindi:

$$\dot{v} + 0.0101v = -9.8\theta + 1.3203u$$

- In condizioni di equilibrio la velocità decade con costante di tempo  $\tau$   $v(t) = v_0 e^{-0.0101t}$   $\tau \approx 100 \text{ sec}$

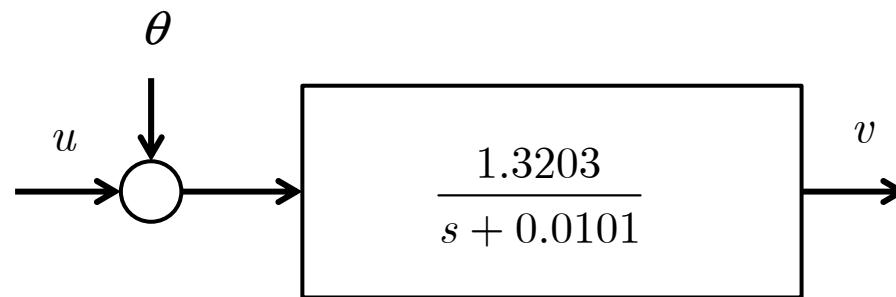


## Controllori P.I.D.

- **Obiettivi del controllore:**

- Aumentare la banda passante per velocizzare la risposta (Comportamento anticipo di fase)
- Risposta possibilmente del secondo ordine
- Riduzione del guadagno di anello per attenuazione dei disturbi

□ Problema del mantenimento di velocità costante in presenza di variazioni di pendenza della strada, variabile da controllare =>  $v$ , con  $\theta = \text{costante}$



□ **Nota:** La presenza di pendenza non nulla ( $\theta \neq 0$ ) può essere introdotta, a livello di modello in diversi modi:

- Presenza di un disturbo costante di  $= -9.8\theta$
- Compensazione mediante un ingresso di equilibrio

$$1.3203u - 9.8\theta = 1.3203(u + u')$$



## Controllori P.I.D.

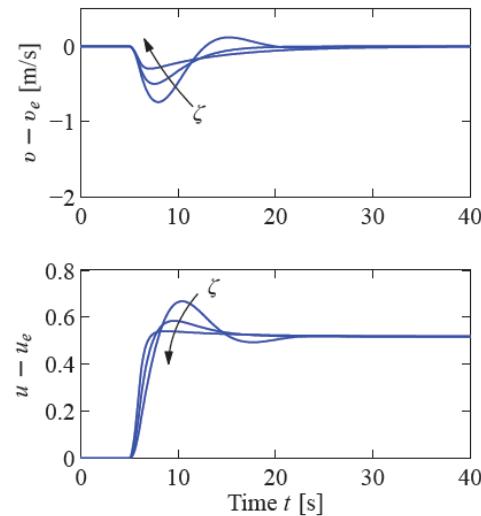
- Anticipo di fase, velocità di risposta ed errore a regime richiedono un controllore di tipo PI

$$G(s) = \frac{1.3203}{s + 0.0101}, K(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

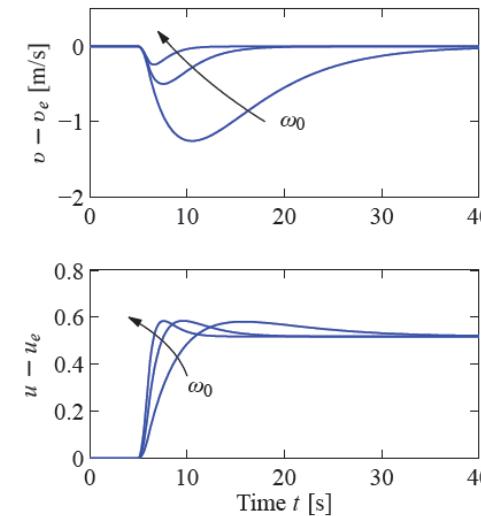
$$T(s) = \frac{1.3203(K_P s + K_I)}{s^2 + (0.0101 + K_P)s + K_I}, G(s)K(s) = \frac{1.3203(K_P s + K_I)}{s(s + 0.0101)}$$

$$D(s) = s^2 + (0.0101 + K_P)s + K_I = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

- Simulazioni relative a: salita con pendenza di 4° a t = 5 sec.



(a)  $\omega_0 = 0.5, \zeta = 0.5, 1, 2$

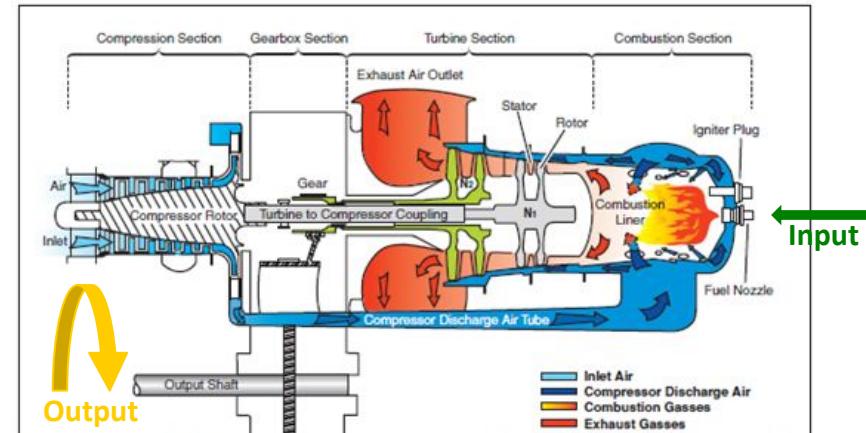
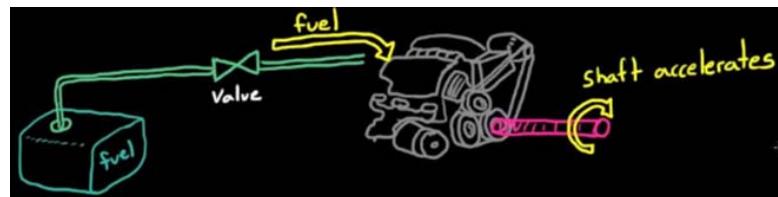


(b)  $\zeta = 1, \omega_0 = 0.2, 0.5, 1$



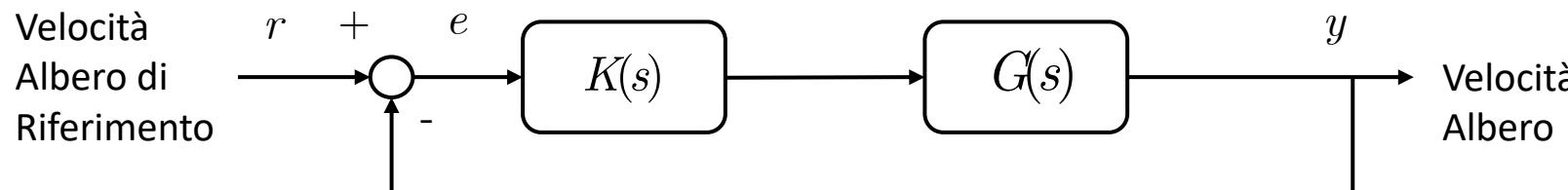
# Controllori P.I.D.

## □ Esempio: Controllo Albero Motore mediante Livello di Carburante

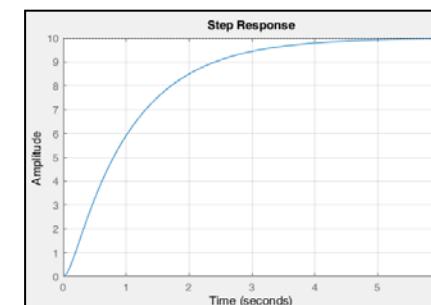


- Apertura della valvola (in radianti) produce un aumento della rotazione dell'albero (in radianti al secondo).

$$G(s) = \frac{y(s)}{v(s)} = \frac{1}{0.01s^2 + 0.11s + 0.1}, K_{PID}(s) = \frac{v(s)}{e(s)} = 5 + 0.3s + \frac{5}{s\tau}$$



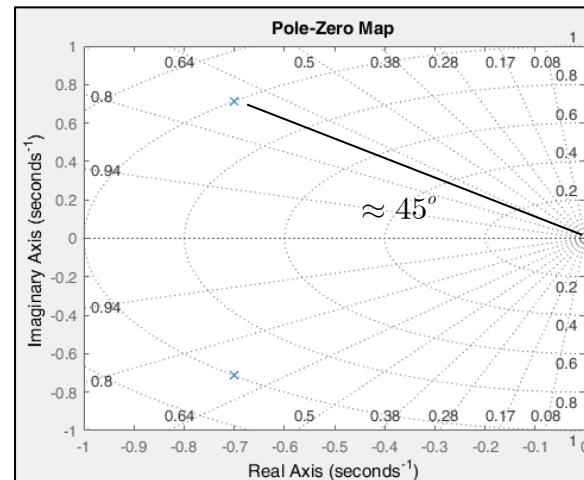
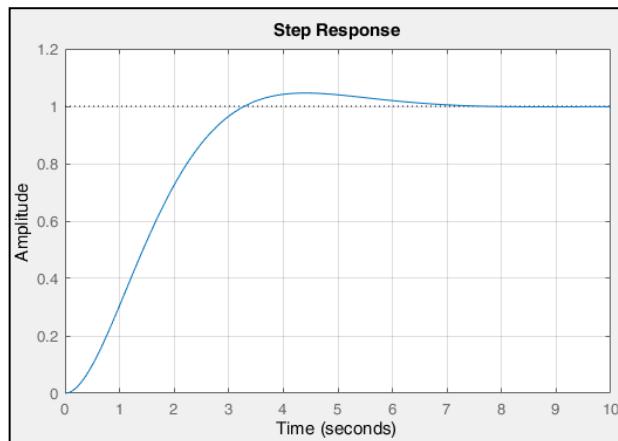
- Verifica Modello:** Apertura valvola produce un aumento del numero di giri fino al punto di equilibrio tra energia immessa (carburante che brucia) e perdite (calore, suono, frizione, ecc.). 1 Rad. Produce 10 Rad/sec





# Controllori P.I.D.

- **Specifiche di Progetto:** Selezionare il parametro  $\tau$  della componente integrale in modo da avere uno smorzamento in anello chiuso superiore a 0.7, (ovvero  $\xi \geq 0.7$ ) ed una stima dei poli in anello chiuso, mediante poli dominanti.



- Approccio con il Luogo delle Radici, isolando il parametro  $\tau$ :

$$K(s)G(s) = (5 + 0.3s + \frac{5}{s\tau}) \frac{1}{0.01s^2 + 0.11s + 0.1}$$

- Moltiplicazione e divisione della FdT in anello chiuso per 5

$$1 + K(s)G(s) = \left[ 1 + (5 + 0.3s + \frac{5}{s\tau}) \frac{1}{0.01s^2 + 0.11s + 0.1} \right] = 0$$

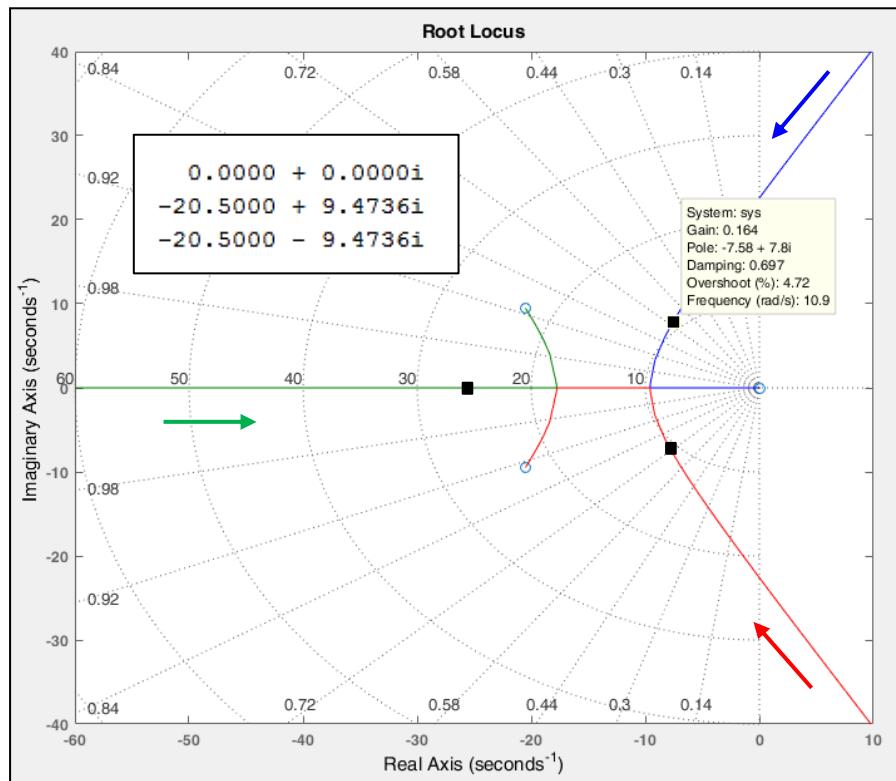
$$\boxed{1 + K(s)G(s) = \left[ 1 + \tau \frac{0.01s^3 + 0.41s^2 + 5.1s}{5} \right] = 0}$$



# Controllori P.I.D.

$$1 + K(s)G(s) = \left[ 1 + \tau \frac{0.01s^3 + 0.41s^2 + 5.1s}{5} \right] = 0$$

- Il Luogo ha 3 zeri e nessun polo. Vi sono quindi 3 rami dei poli in ciclo chiuso che provengono da  $\infty$  e vanno agli zeri per  $0 > \tau > \infty$

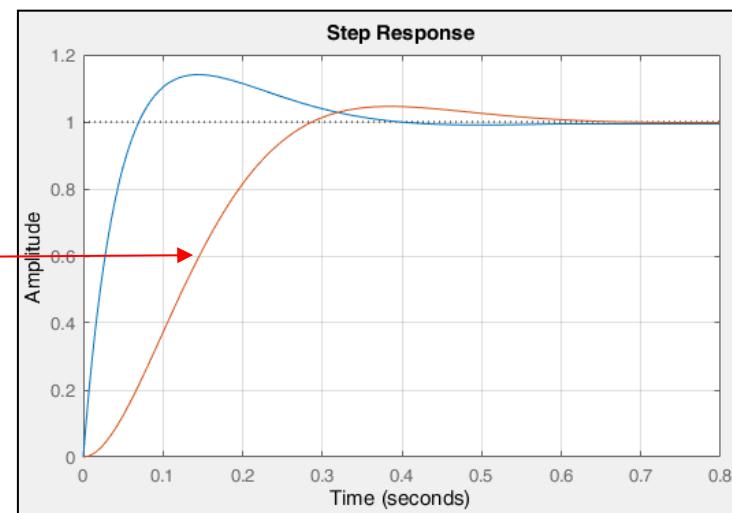
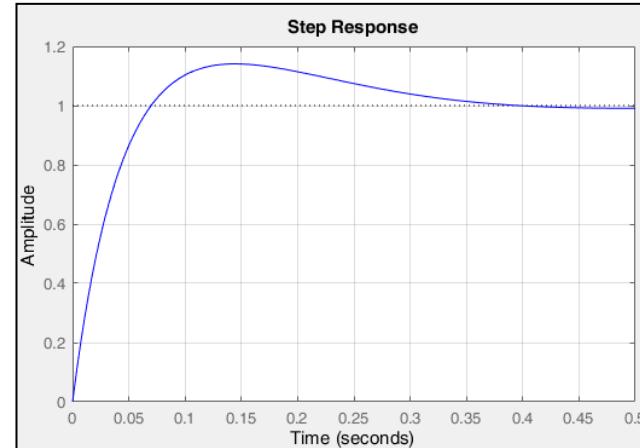
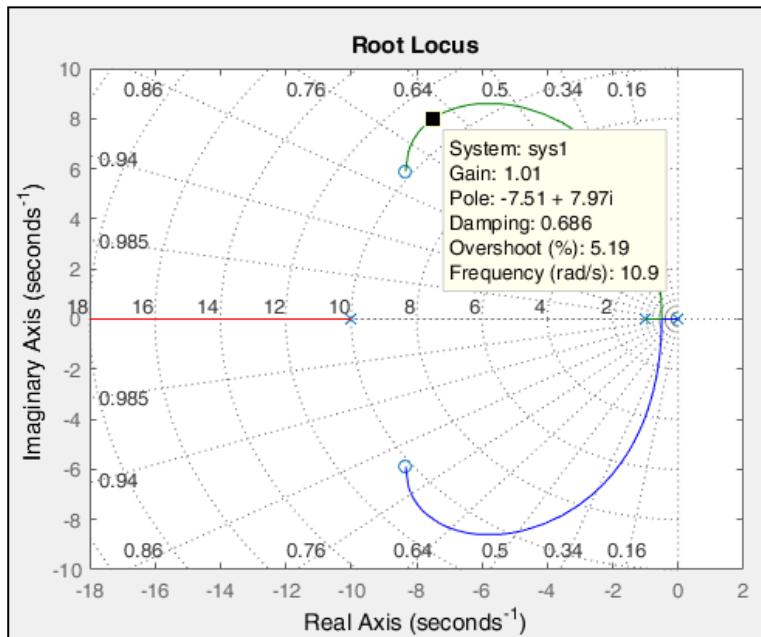


- Baricentro del Luogo  $\approx -13.7$
- Per lo smorzamento minimo desiderato si ha (trigonometria):
$$p_{1,2} \approx -7.6 \pm 7.8j$$
$$\tau \approx 0.16$$
- Il terzo polo può essere calcolato dal valore del baricentro (costante per ogni guadagno):
$$p_3 \approx -13.7 * 3 + 15.2 = -25.9$$



# Controllori P.I.D.

- Valutazione rispetto all'andamento desiderato mediante poli dominanti



$$G_{DES}(s) = \frac{130.6}{s^2 + 16s + 130.6}, \tau \approx 0.16, \xi = 0.7, \omega_n = 11.43$$

- La pulsazione propria non smorzata è stata scelta in modo da avere lo stesso tempo di assestamento

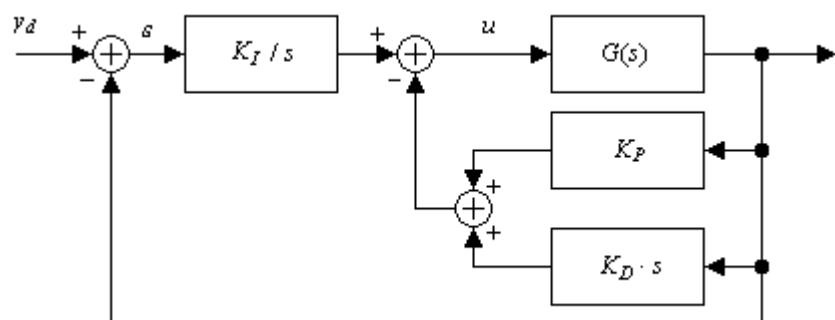
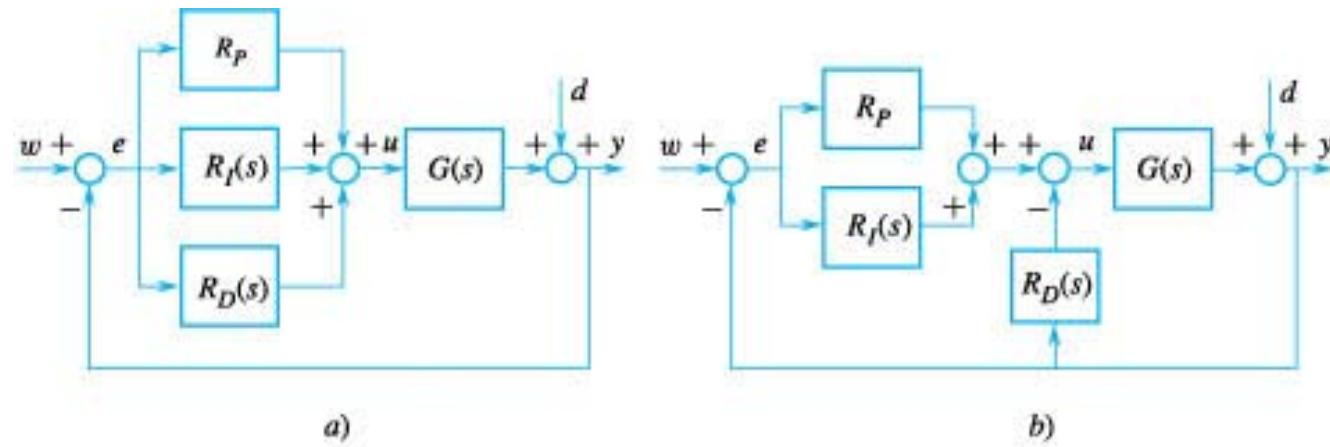


# Controllori P.I.D.

## □ Limitazioni: Azione derivativa

- Limitazione dell'azione derivativa

■ L'azione derivativa in uscita migliora il comportamento del sistema non soggetto a brusche variazioni del segnale di errore quando esso viene derivato direttamente come nel caso standard



- I poli in anello chiuso sono gli stessi nelle tre implementazioni

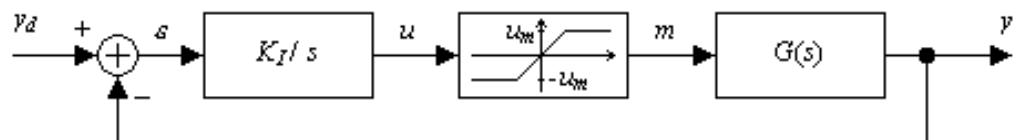


# Controllori P.I.D.

## □ Limitazioni: Fenomeno di Wind-up

- All'inizio dell'operatività, grandi errori transitori dello stesso segno vengono integrati dal controllore PID. Si possono avere situazioni per cui tale segnale cresce fino a saturare l'attuatore, portando anche ad instabilità in ciclo chiuso.
- Consideriamo un azione puramente integrale con limiti di saturazione:

$$m(t) = \begin{cases} -u_m & \text{per } u(t) < -u_m \\ u(t) & \text{per } |u(t)| \leq u_m \\ u_m & \text{per } u(t) > u_m \end{cases}$$



- Se l'errore  $\varepsilon$  mantiene lo stesso segno per un certo periodo di tempo, l'uscita dal blocco integratore cresce sempre di più e continua a crescere anche quando, per effetto della saturazione, l'uscita dell'attuatore è limitata al valore  $um$  (o  $-um$ ); in queste condizioni l'anello di regolazione risulta interrotto, dato che il termine integrale continua a crescere ma tale incremento non produce alcun effetto sulla variabile di comando dell'impianto. *Anche quando l'errore cambia segno il regolatore resta inattivo poiché, prima di avere un segnale utile per la regolazione, il termine integrale si deve "scaricare"; questi effetti dovuti alla saturazione dell'azione integrale sono noti come effetto wind-up*



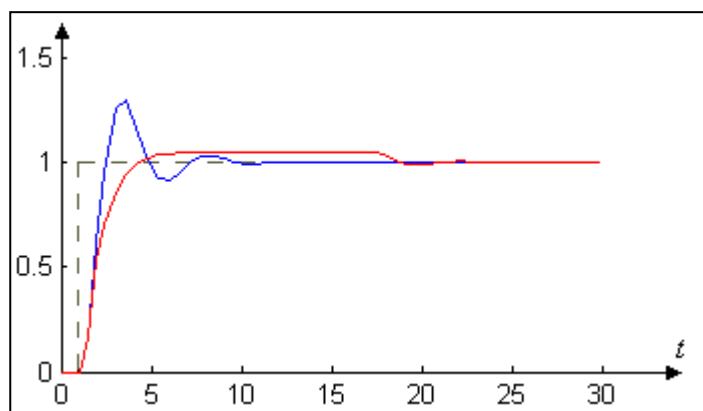
# Controllori P.I.D.



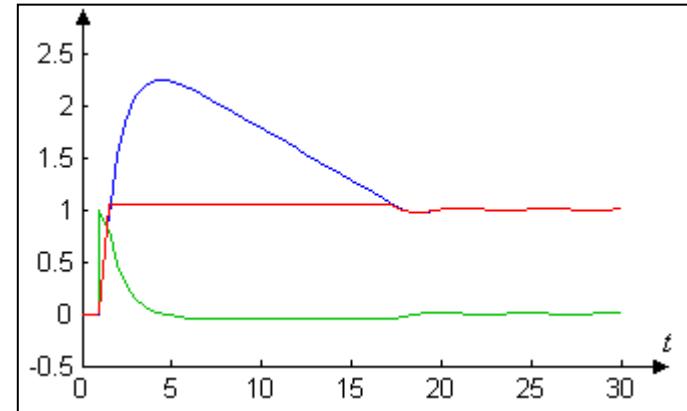
- Consideriamo un sistema con un ingresso a gradino (all'istante  $t = 1$ ) e tale che, per lo schema appena visto, sia

$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \quad K_I = 2$$

Uscita

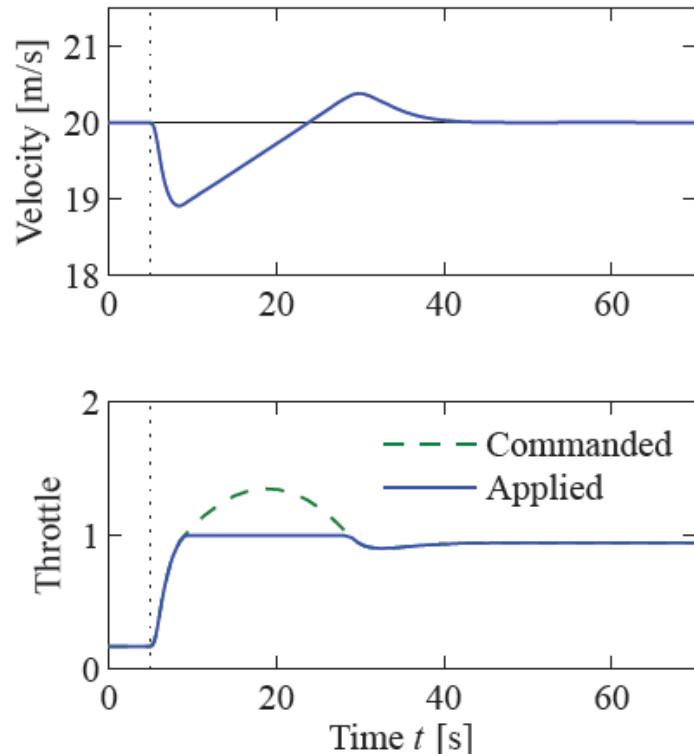


# Errore, Controllo



- Vedi testo di Bolzern, pag. 390 e sgg,

□ **Esempio:** Cruise Control con Anti-wind up (Pendenza 6 gradi)

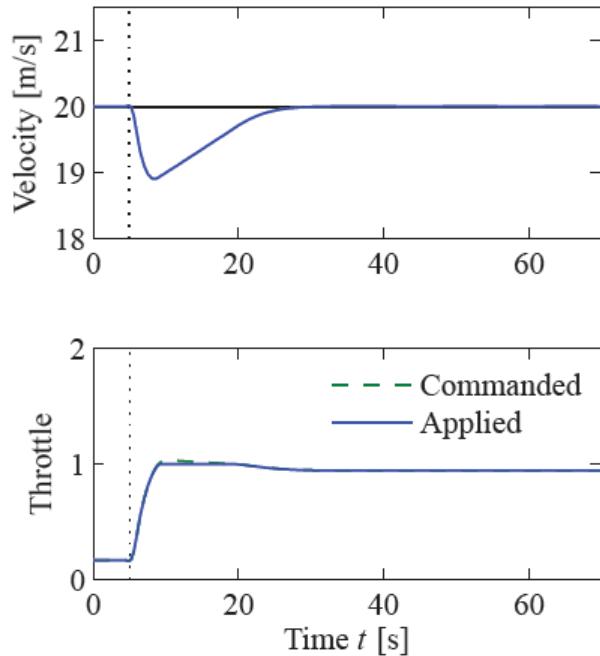


(a) Windup

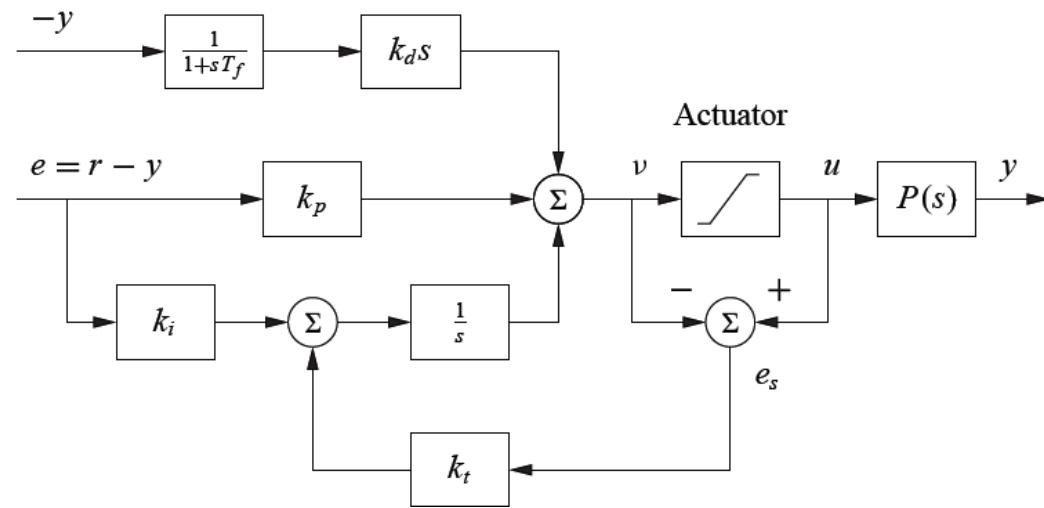
- When encountering the slope at time  $t = 5$ , the velocity decreases and the throttle increases to generate more torque.
  - However, the torque required is so large that the throttle saturates. The error decreases slowly because the torque generated by the engine is just a little larger than the torque required to compensate for gravity.
  - The error is large and the integral continues to build up until the error reaches zero at time 30, but the controller output is still larger than the saturation limit and the actuator remains saturated.
  - The integral term starts to decrease, and at time 45 and the velocity settles quickly to the desired value.
- **Notice that it takes considerable time before the controller output comes into the range where it does not saturate, resulting in a large overshoot.**



## Controllori P.I.D.



(b) Anti-windup



PID controller with a filtered derivative and anti-windup. The input to the integrator ( $1/s$ ) consists of the error term plus a “reset” based on input saturation. If the actuator is not saturated, then  $e_s = u - v$ , otherwise  $e_s$  will decrease the integrator input to prevent windup.



# Controllori P.I.D.



## □ Tuning

### ▪ Taratura Automatica

- Nel caso di sistemi di cui non si conosce precisamente la FdT e/o sistemi nonlineari, è possibile stabilire delle regole empiriche di tuning (“Taratura”) dei parametri di un controllore P.I.D.
- Le regole più note risalgono al 1942 e furono proposte inizialmente da **Ziegler e Nichols**.
- Le tecniche principali sono due e si basano rispettivamente su:
  - Risposta ad un gradino di ingresso del processo (BIBO stabile) a catena aperta.
  - Misura del periodo di oscillazione del sistema a catena chiusa all'aumentare del guadagno  $K_p$ .
- Un generico controllore PID è dato da:

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$



# Controllori P.I.D.

## ■ Metodo del Gradino in anello aperto

- Consideriamo un sistema privo di moto oscillatorio e rappresentabile dalla seguente FdT di anello:

$$G_{OL}(s) = \frac{ke^{-Ls}}{Ts + 1}$$

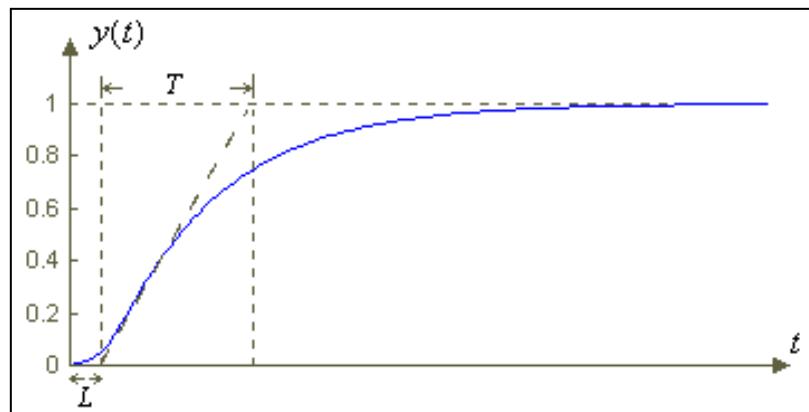


Tabella 1 di Z - N

|       | $K_P$                   | $T_I$           | $T_D$         |
|-------|-------------------------|-----------------|---------------|
| $P$   | $\frac{T}{L}$           | $\infty$        | 0             |
| $PI$  | $\frac{0.9 \cdot T}{L}$ | $\frac{L}{0.3}$ | 0             |
| $PID$ | $\frac{1.2 \cdot T}{L}$ | $2 \cdot L$     | $0.5 \cdot L$ |

Che produce, nel caso PID:

$$\begin{aligned} K(s) &= 1.2 \frac{T}{L} \left( 1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls \right) = \\ &= 0.6 \cdot T \cdot \frac{(s + 1/L)^2}{s} \end{aligned}$$



## Controllori P.I.D.

### ■ Metodo dell'aumento del guadagno in ciclo chiuso

- Questo metodo si applica soltanto a sistemi che siano stabilizzabili. Mediante controllo proporzionale puro  $K_p$ , il sistema viene portato in oscillazione armonica ponendo

$$K_p = K_{CR} \quad P_{CR} = \frac{2\pi}{\omega_{cr}}$$

- Da cui si ricava il periodo dell'oscillazione armonica

Tabella 2 di Z - N

|       | $K_p$               | $T_I$                        | $T_D$                |
|-------|---------------------|------------------------------|----------------------|
| $P$   | $0.5 \cdot K_{CR}$  | $\infty$                     | 0                    |
| $PI$  | $0.45 \cdot K_{CR}$ | $\frac{1}{1.2} \cdot P_{CR}$ | 0                    |
| $PID$ | $0.6 \cdot K_{CR}$  | $0.5 \cdot P_{CR}$           | $0.125 \cdot P_{CR}$ |



# Controllori P.I.D.

- Un controllore PID completo è dato quindi da:

$$K(s) = 0.6 \cdot K_{CR} \left( 1 + \frac{2}{P_{CR}s} + 0.125 \cdot P_{CR}s \right) = 0.075 \cdot K_{CR} P_{CR} \cdot \frac{(s + 4 / P_{CR})^2}{s}$$

- Il controllore PID può essere anche tarato per fornire uno specifico GM oppure PM

|  | $K_p$                 | $T_i$  | $T_d$   |
|--|-----------------------|--|---|
| <b>Assegna.<br/><math>MG = k_m</math></b>    | $\frac{K_{CR}}{k_m}$  | $\frac{P_{CR}}{\pi}$                                       | $\frac{P_{CR}}{4\pi}$                                       |
| <b>Assegna.<br/><math>MF = \Phi_m</math></b> | $K_{CR} \cos(\Phi_m)$ | $\frac{P_{CR}}{\pi} \frac{1 + \sin(\Phi_m)}{\cos(\Phi_m)}$ | $\frac{P_{CR}}{4\pi} \frac{1 + \sin(\Phi_m)}{\cos(\Phi_m)}$ |
|  |                       |  |   |



## Controllori P.I.D.

□ Esempio

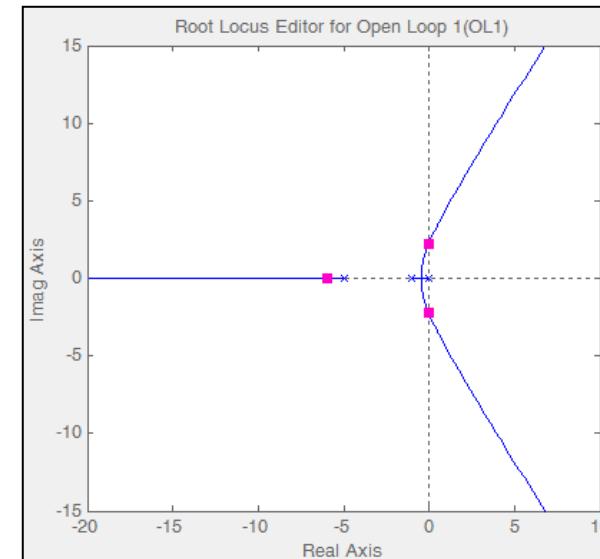
$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

1. Consideriamo un controllore proporzionale  $K(s) = K_P$

$$T(s) = \frac{K_P}{s(s+1)(s+5) + K_P}$$

|       |             |       |
|-------|-------------|-------|
| $s^3$ | 1           | 5     |
| $s^2$ | 6           | $K_P$ |
| $s^1$ | $5 - K_P/6$ |       |
| $s^0$ |             | $K_P$ |

$$K_{CR} = 30$$





## Controllori P.I.D.

### 2. Calcolo del periodo critico $P_{CR}$

$$s^3 + 6s^2 + 5s + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad (s + 6)(s^2 + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1 = -6 \\ s_{2/3} = \pm j\sqrt{5} \end{cases}$$



**$P_{CR}$**

$$P_{CR} = \frac{2\pi}{\omega_{cr}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.81 \text{ sec.}$$



## Controllori P.I.D.

### 3. Taratura dei guadagni del controllore PID mediante ZN

|     |                    |                    |                      |
|-----|--------------------|--------------------|----------------------|
| PID | $0.6 \cdot K_{CR}$ | $0.5 \cdot P_{CR}$ | $0.125 \cdot P_{CR}$ |
|-----|--------------------|--------------------|----------------------|

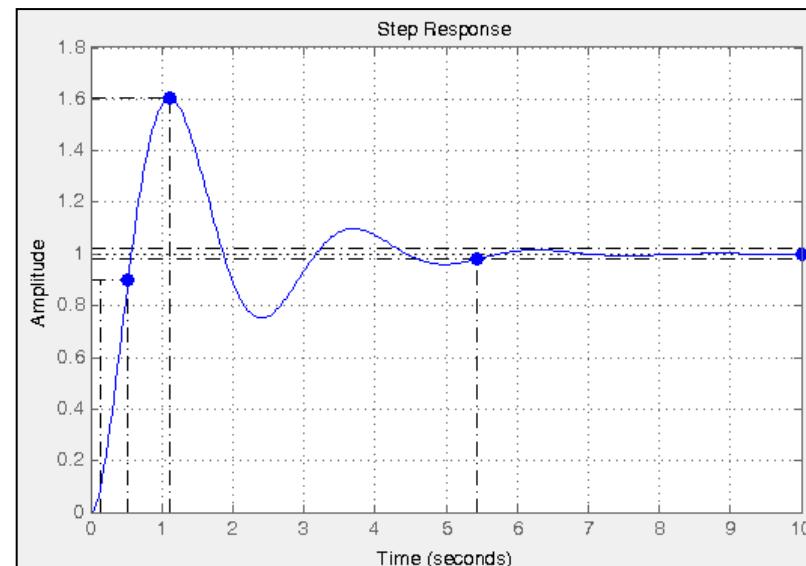
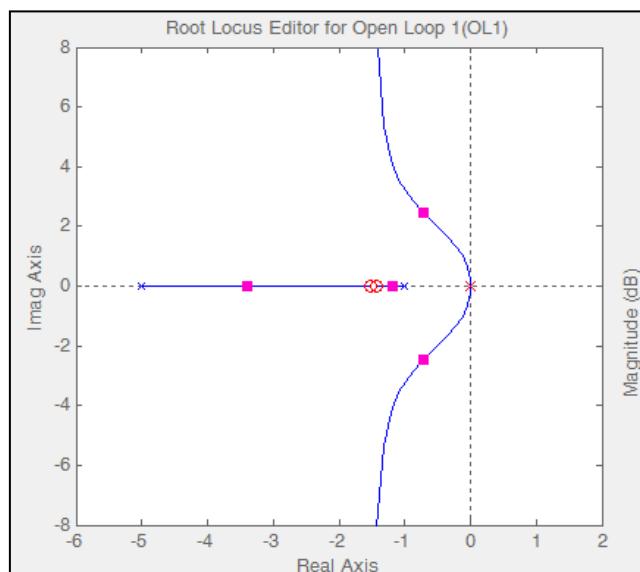
$$K_P = 0.6 \cdot K_{CR} = 18$$

$$T_I = 0.5 \cdot P_{CR} = 1.405 \text{ sec.}$$

$$T_D = 0.125 \cdot P_{CR} = 0.35 \text{ sec.}$$

$$K(s) = 26.03 \cdot \frac{(s + 1.5132)(s + 1.3438)}{s} = 52.93 \cdot \frac{(1 + \frac{s}{1.5132})(1 + \frac{s}{1.3438})}{s}$$

$$K(s)G(s) = 26.03 \cdot \frac{(s + 1.5132)(s + 1.3438)}{s^2(s + 1)(s + 5)}$$



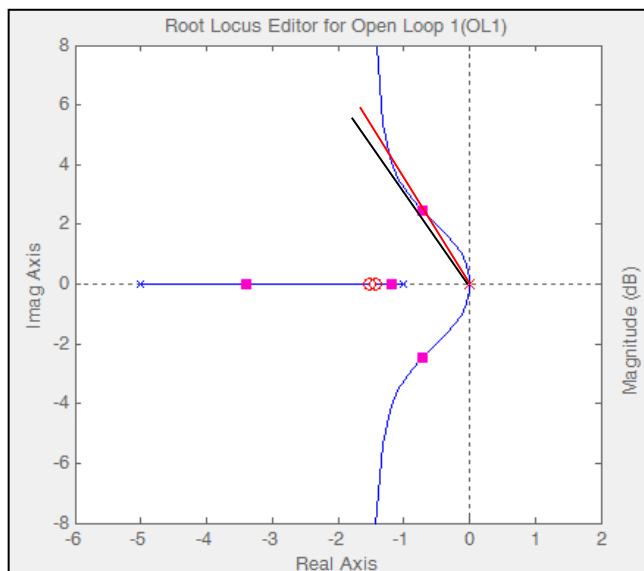


## Controllori P.I.D.

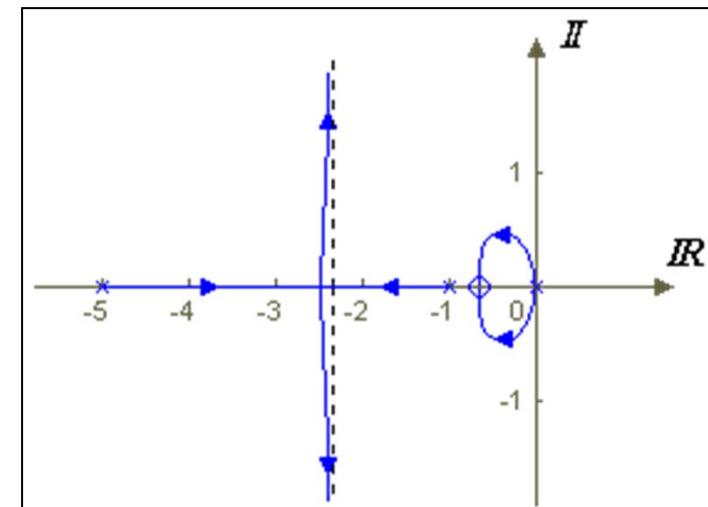
- Ulteriore taratura può essere fatta per migliorare (diminuire) il picco di sovraelongazione.

$$K(s) = 26.03 \cdot \frac{(s + 1.5132)(s + 1.3438)}{s} \quad K(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

- Si deve aumentare lo smorzamento dei poli dominanti



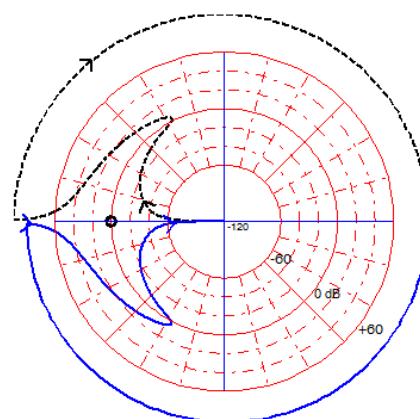
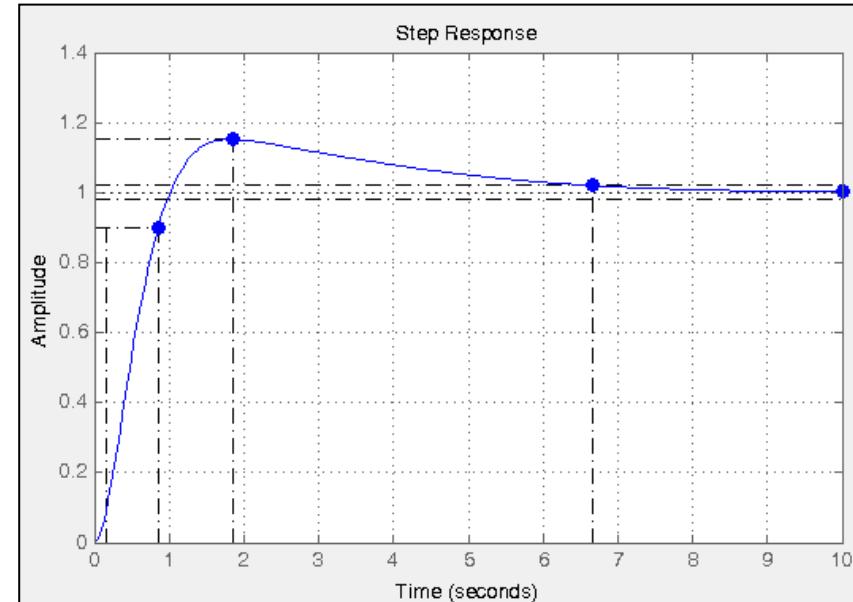
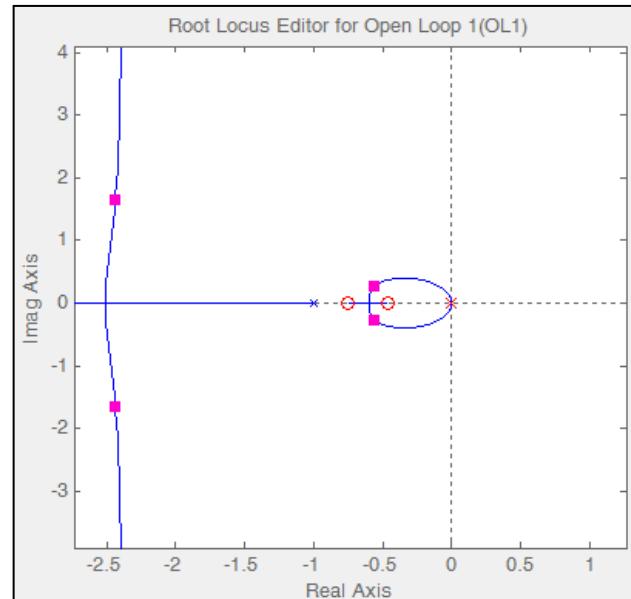
- Aumentando il guadagno ( $K_p$ ) non si cambia molto lo smorzamento, quindi dobbiamo agire su  $T_I$  e  $T_D$ .



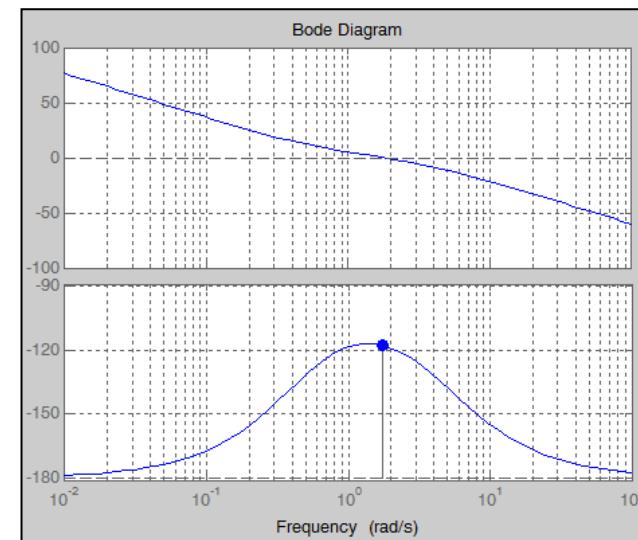


# Controllori P.I.D.

$$K(s) = 9.5375 \cdot \frac{(s + 0.4545)(s + 0.7692)}{s} = 3.3348 \cdot \frac{(1 + 2.2s)(1 + 1.3s)}{s}$$



$$Z = N + P = 0 + 0$$

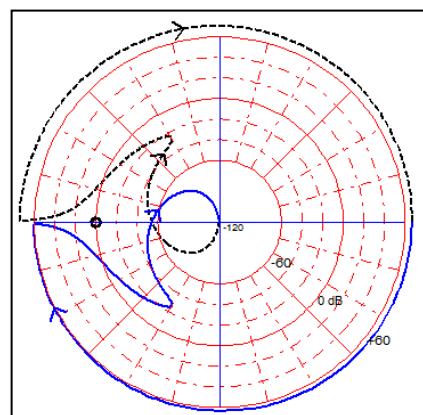
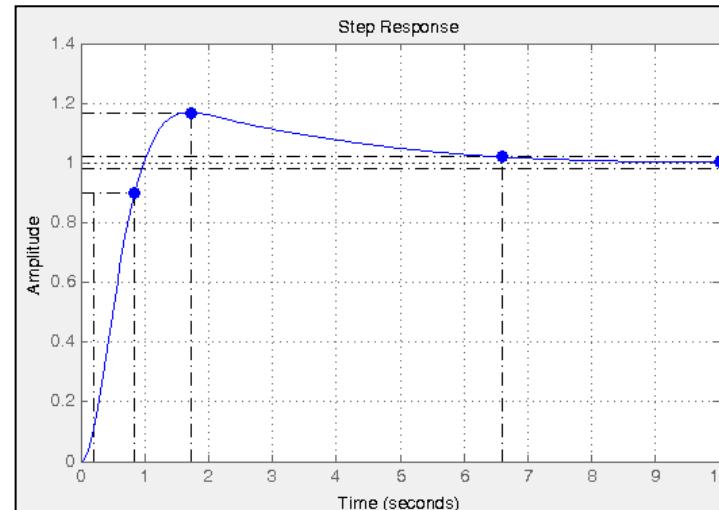
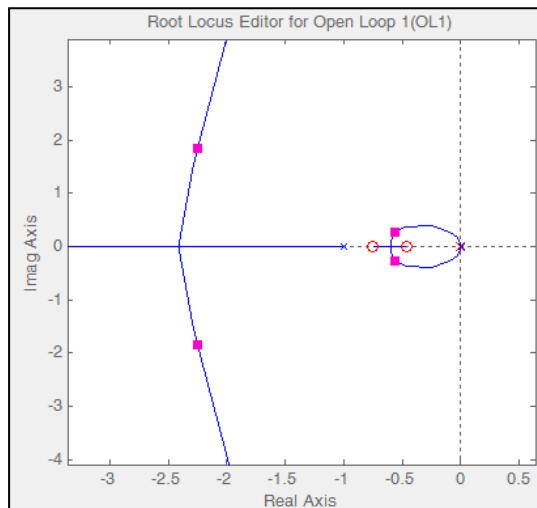




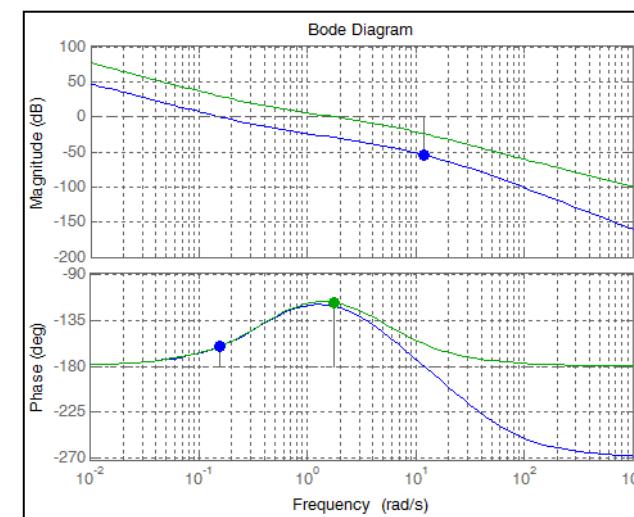
# Controllori P.I.D.

- Per rendere il controllore causale, inseriamo un polo fuori banda

$$|P| \geq |10\omega_{BW}| \approx |10\omega_C| = |10 \cdot 3| \Rightarrow \frac{1}{(s + 30)}$$



$$Z = N + P = 0 + 0$$





## Controllori P.I.D.



- ❑ Casi Particolari
  - ❑ Limitazione azione derivativa (vedi Cap. 15, paragrafo 3.1)
  - ❑ Desaturazione azione integrale (vedi Cap. 15, paragrafo 3.2)



## Reti Correttive

- Le reti correttive sono dei sistemi di correzione del comportamento dinamico del sistema, che forniscono dei precisi andamenti in funzione della combinazione poli-zeri
- Le reti più comuni provengono storicamente da implementazioni circuitali e di elettronica analogica e digitale, anche se il loro comportamento ingresso-uscita si può realizzare mediante sistemi idraulici, meccanici, ecc.
- In molte situazioni garantiscono comportamenti dinamici in anello chiuso simili a componenti di un controllore PID

|                                  |  |
|----------------------------------|--|
| Rete Anticipatrice (Lead)        | Rete Ritardo-Anticipo (Lag-Lead) o a sella |
| Rete Ritardatrice (Lag)          | Filtro a Spillo (Notch)                    |
| Rete Anticipo-Ritardo (Lead-Lag) | Filtro a T                                 |

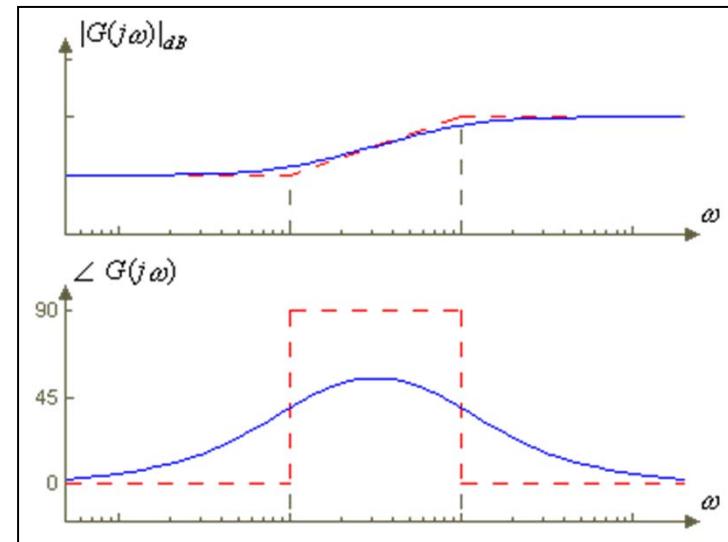


## Reti Correttive - Lead

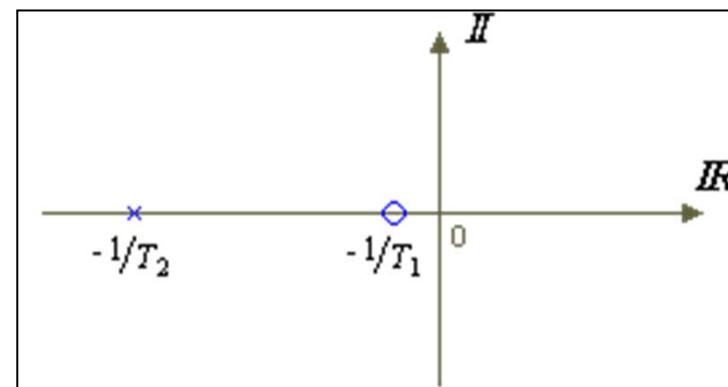
### □ Rete ad Anticipo di Fase (Lead Network)

$$K(s) = k \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} = k_0 \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{T_2}}$$

- La rete è anche nota come Filtro passa alto
- Aumenta la banda passante
- migliora la velocità della risposta
- riduce il valore della sovraelongazione e aumenta la stabilità
- alle le basse frequenze (rispetto a quelle della banda in cui agisce) la rete non sfasa ma attenua di  $\alpha$   
$$\alpha = \frac{T_2}{T_1}, \quad 0 < \alpha < 1$$
- alle alte frequenze non sfasa e non attenua



**Nota:** Controllore PD causale





## Reti Correttive - Lead

- La FdT può essere scritta in diverse forme:

$$\alpha = \frac{T_2}{T_1}, \quad 0 < \alpha < 1$$

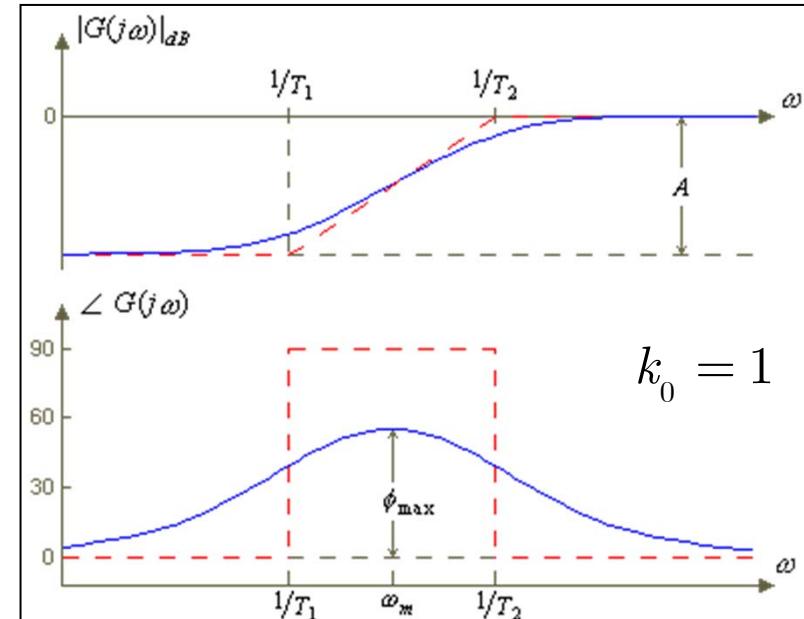
$$K(s) = k_0 \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{\alpha T_1}} = k_0 \alpha \frac{1 + T_1 s}{1 + \alpha T_1 s}$$

- Maggiore è la distanza zero-polo e maggiore è il recupero di fase (in applicazioni pratiche  $\phi_{\max} \approx 60$  gradi)

- Massima Amplificazione ( $k_0 = 1$ )  $A_{dB} = 20 \log \frac{1}{\alpha} = 20 \log \frac{T_1}{T_2} > 0$

- Frequenza di massimo Anticipo di Fase  $\angle K(j\omega) = \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{T_1 \sqrt{\alpha}}$$



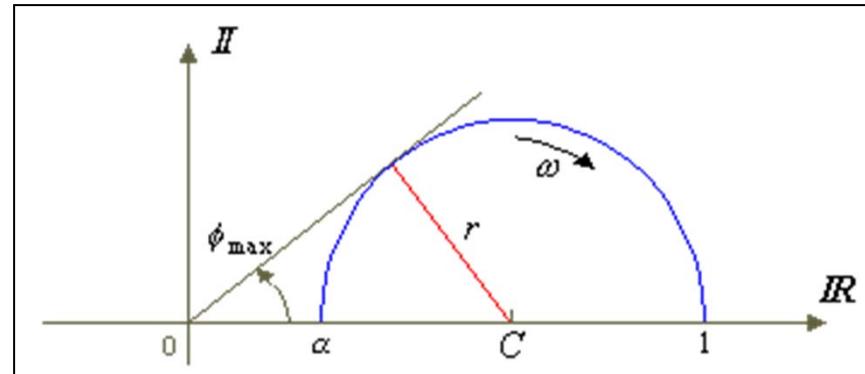


## Reti Corretrici - Lead

- Calcolo del massimo anticipo di fase:

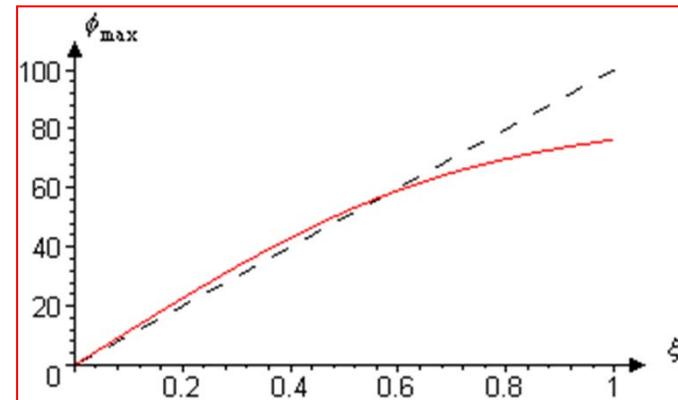
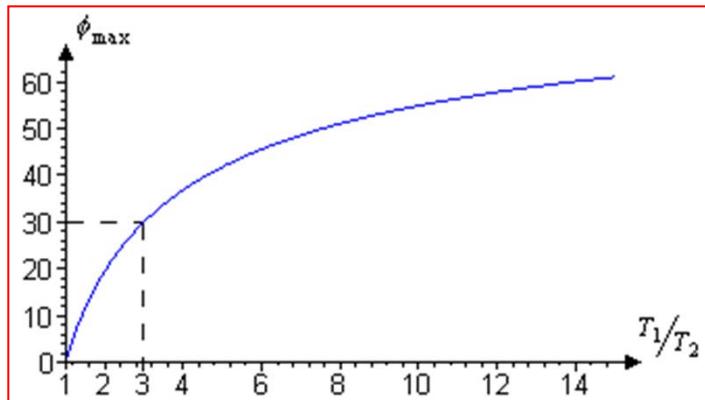
$$\phi_{\max} = \sin^{-1} \frac{(T_1 / T_2) - 1}{(T_1 / T_2) + 1} = \sin^{-1} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{T_1 \sqrt{\alpha}}$$



- Per un modello del secondo ordine:

$$\phi_{\max} = \tan^{-1} \frac{2\xi}{\left(\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2\right)^{1/2}}$$



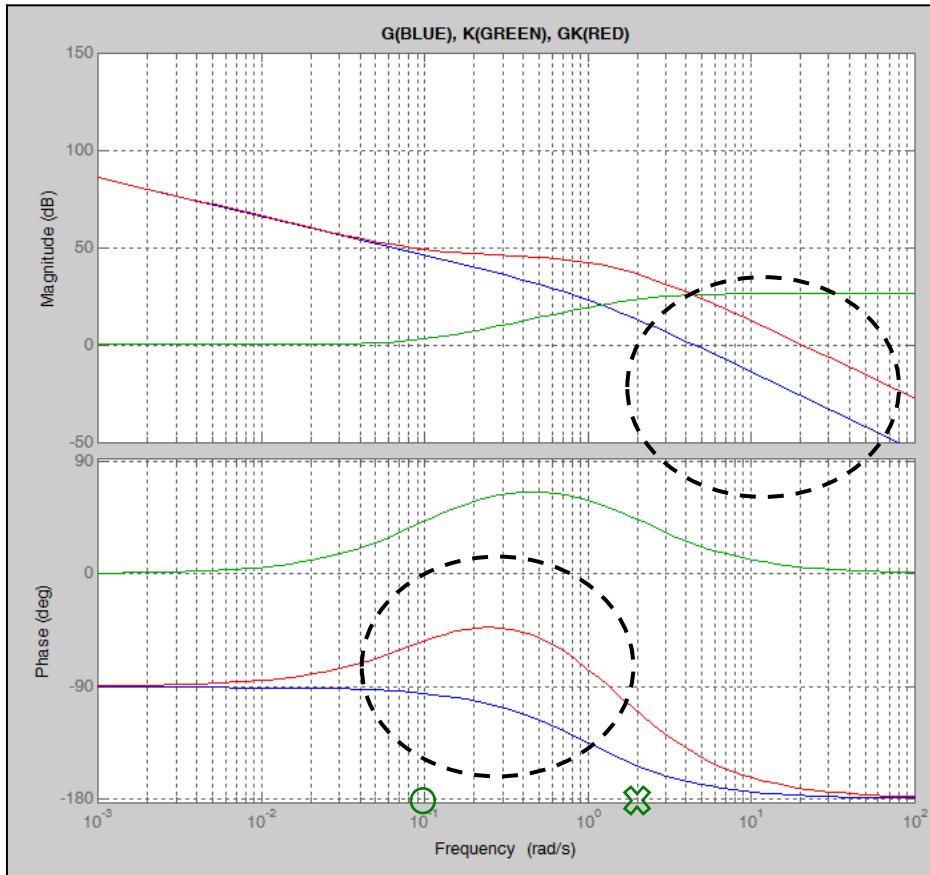
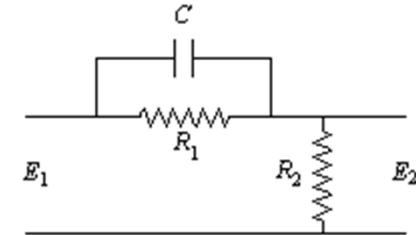


## Reti Correttive - Lead

### □ Esempio

$$G(s) = \frac{20}{s(s+1)}$$

$$K(s) = \frac{1 + 10s}{1 + 0.476s}$$



$$G_c(s) = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1/Cs}{R_1 + 1/Cs}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\frac{R_1Cs + 1}{R_1R_2Cs + 1}}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$G_c(s) = \alpha \cdot \frac{1 + T_1 s}{1 + \alpha T_1 s} \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad T_1 = R_1 C$$

Locazione dello zero:  $z = -\frac{1}{T_1} = -\frac{1}{R_1 C}$

Locazione del polo:  $p = -\frac{1}{\alpha T_1} = -\frac{1}{\frac{R_2 R_1 C}{R_1 + R_2}}$



## Reti Correttive - Lead



- Regole pratiche per la selezione della rete correttrice ad anticipo di fase:  $K(s) = k \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$
- 1. Calcolare guadagno ed integratori del controllore per avere la risposta a regime appropriata ->  $K_1(s)$
- 2. Calcolare il margine di fase **PM** della FdT di anello  $K_1(s) G(s)$
- 3. Calcolare l'incremento  $\Delta$  necessario ad avere il **PM** desiderato di progetto
- 4. Aumentare di un certo valore  $\epsilon$  per tener conto dell'aumento nella frequenza di crossover dovuto all'inserimento della rete anticipatrice ottenendo il  $\Delta_{DES} = \Delta + \epsilon$  di target
- 5. Calcolare il rapporto  $\alpha = T_2 / T_1$  mediante la relazione:

$$\phi_{\max} = \sin^{-1} \frac{(T_1 / T_2) - 1}{(T_1 / T_2) + 1} = \sin^{-1} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

- 6. Calcolare la nuova frequenza di crossover  $\omega_C^n$  tale che  $|K(j\omega_C^n)G(j\omega_C^n)| = A_{dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{T_1}{T_2} \right)$  al di sotto di 0 dB
  - 7. Calcolare  $1/T_1$  e  $1/T_2$  con l'espressione al punto 5 e con la nuova frequenza di crossover
- $$\omega_C^n = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$
- 8. Calcolare la nuova  $K(s) G(s)$  e verificare il risultato. Eventualmente iterare incrementando il valore di  $\Delta_{DES}$



## Reti Correttive - Lead

□ **Esempio:**  $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$

- Errore alla rampa  $\leq 5\%$
  - Margine di fase PM  $\geq 45^0$
- Definire la componente del controllore necessaria per il requisito a regime:

$$K(s)G(s) = \frac{k}{s(s+2)} \quad \text{Tipo 1}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{s(s+2)}} \cdot \frac{1}{s^2} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(s+2)}{s(s+2) + k} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2}{s(s+2) + k} = \frac{2}{k} \end{aligned}$$

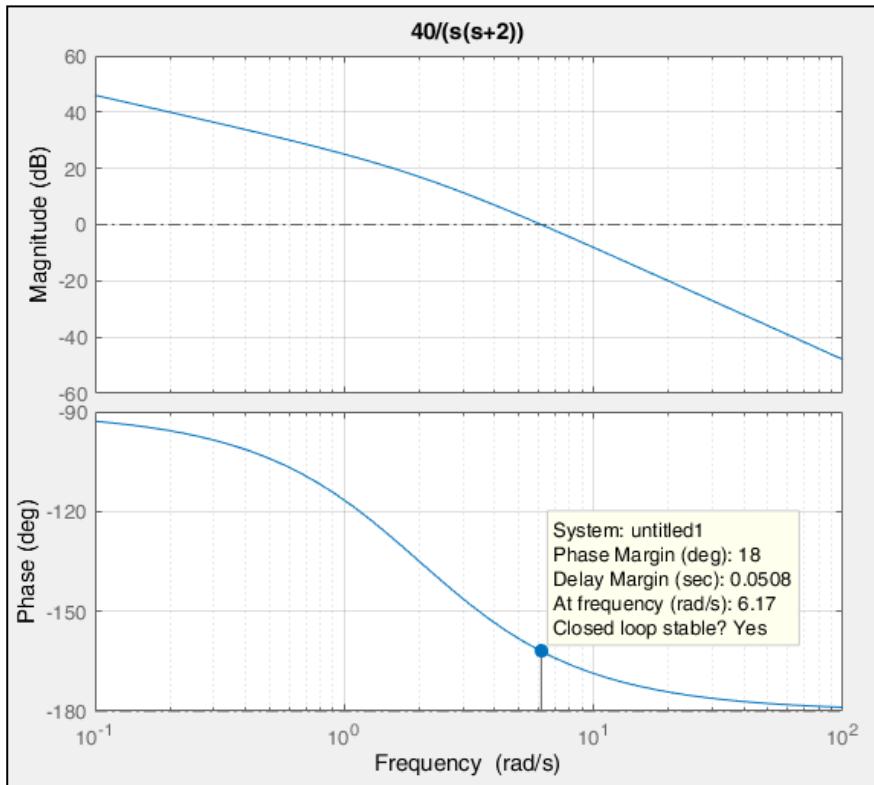
$$\varepsilon_{ss} = \frac{2}{k} \leq 0.05 \quad \Rightarrow \quad k \geq \frac{2}{0.05} = 40 \quad K(s)G(s) = \frac{40}{s(s+2)}$$



## Reti Correttive - Lead

- Sintesi in Frequenza:

$$K(s)G(s) = \frac{40}{s(s+2)}$$



- Il Margine di Fase vale:

$$\omega_c \cong 6.2 \text{ rad / s.} \Rightarrow \mathbf{PM} = 18^\circ$$

- Requisito di Progetto:

$$\Delta = PM_d - PM = 45^\circ - 18^\circ = 27^\circ \Rightarrow \Delta_{DES} \approx 40^\circ$$

$$\phi_{\max} = \sin^{-1} \frac{(T_1 / T_2) - 1}{(T_1 / T_2) + 1} = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = 4.5991$$

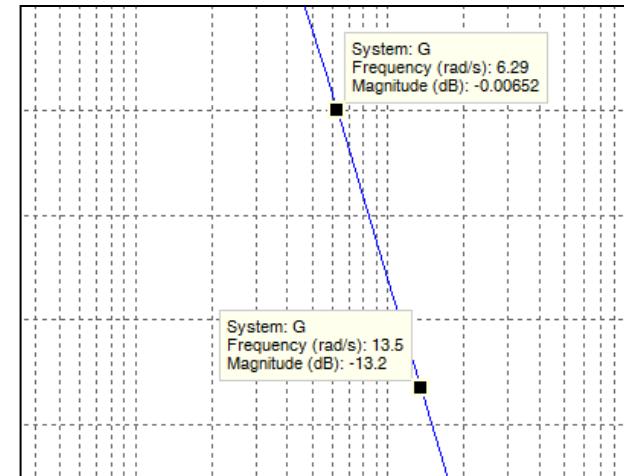
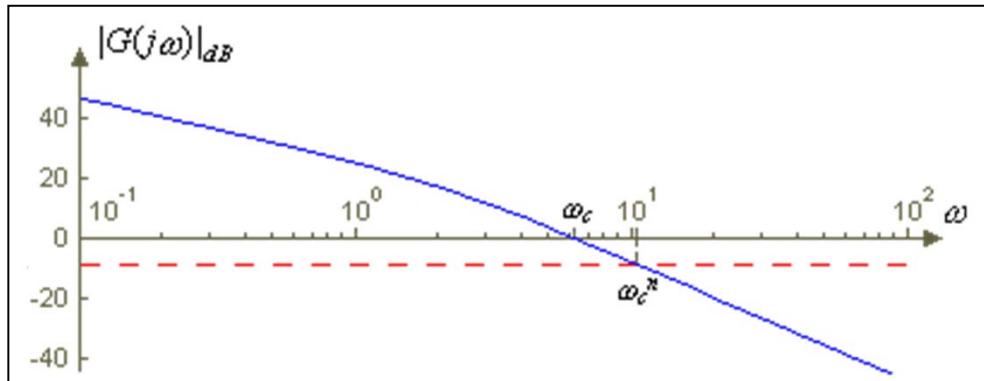
- Trovare la nuova frequenza di taglio tale che

$$\left| K(j\omega_c^n) \cdot G(j\omega_c^n) \right| = -20 \log \left( \frac{T_1}{T_2} \right) = -20 \log 4.5991 \cong -13.2535 dB$$



## Reti Correttive - Lead

$$\omega_c^n \cong 13.7 \text{ rad / s}$$



- Si possono calcolare adesso i valori del polo e dello zero usando la relazione che produce la frequenza di massimo anticipo di fase

$$\omega_c^n = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_c^n = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{T_2 \sqrt{T_1 / T_2}} = \frac{1}{\sqrt{4.5991 \cdot T_2}} \\ \frac{T_1}{T_2} = 4.5991 \end{array} \Rightarrow T_1 = 4.5991 \cdot T_2 \cong 0.1619 \text{ s / rad} \right. \Rightarrow T_2 \cong 0.0352 \text{ s / rad}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{T_1} \cong 6.1761 \text{ rad / s} \\ \frac{1}{T_2} \cong 28.41 \text{ rad / s} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_1} \cong 6.1761 \text{ rad / s} \quad \frac{1}{T_2} \cong 28.41 \text{ rad / s}$$

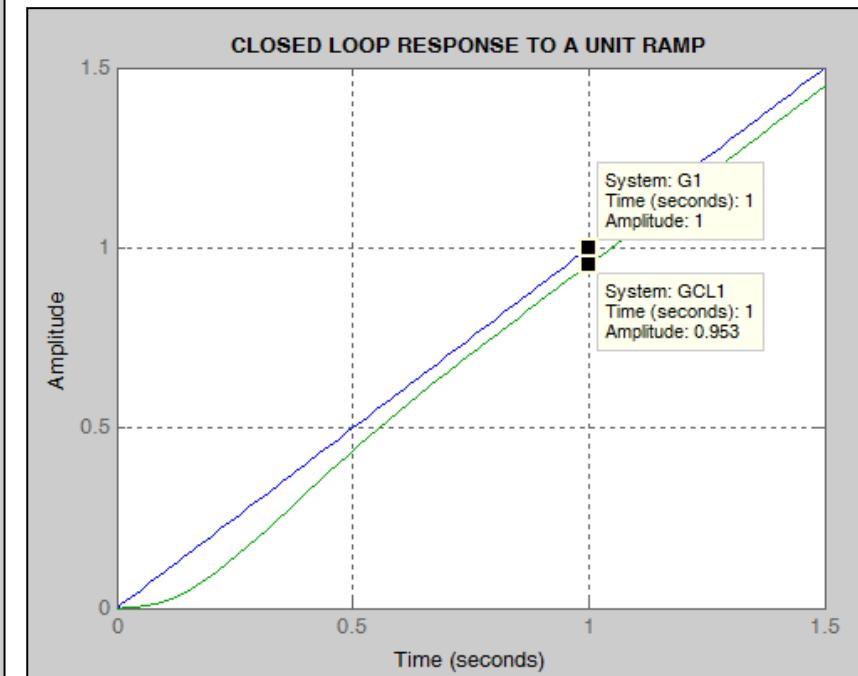
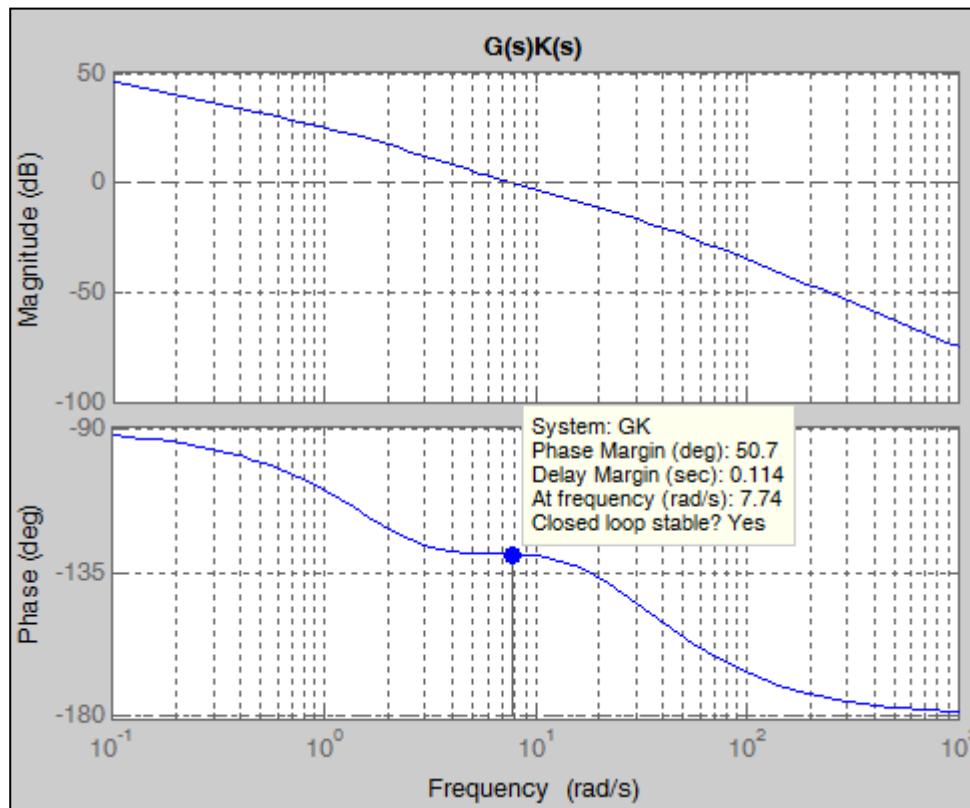


## Reti Correttive - Lead

$$\begin{aligned} K(s)G(s) &= k \cdot \frac{1 + T_1 s}{1 + \alpha T_1 s} \cdot G(s) = 40 \cdot \frac{1 + 0.1619s}{1 + 0.0352s} \cdot \frac{1}{s(s+2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow K(s)G(s) &= 183.98 \frac{s + 6.1767}{s + 28.41} \cdot \frac{1}{s(s+2)} \end{aligned}$$

- si ottiene  $\text{PM} \approx 50^\circ$

$$\varepsilon_{RAMP} = 1 - 0.953 = 4.7\%$$

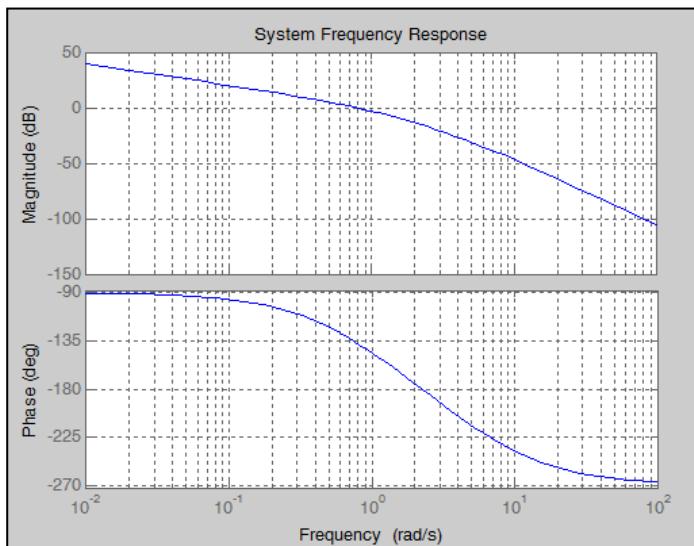




## Reti Correttive - Lead

□ **Esempio:** Controllo di posizione di Azimuth di un modello semplificato di Antenna

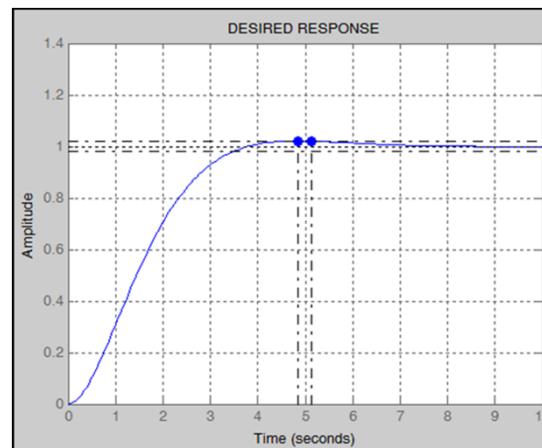
$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{5}{s(s+1)(s+5)}$$



1. Errore nullo ad un gradino unitario
2. Tempo di assestamento non superiore a 5 secondi
3. Massima Sovraelongazione circa 2%

$$T_A = \frac{4}{\xi \omega_n} \leq 5 \quad \xi \geq 0.78$$
$$\omega_n \approx 1.03$$
$$M_P = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \leq 0.02$$

$$G_{DES}(s) = \frac{1.061}{s^2 + 1.6s + 1.061}$$

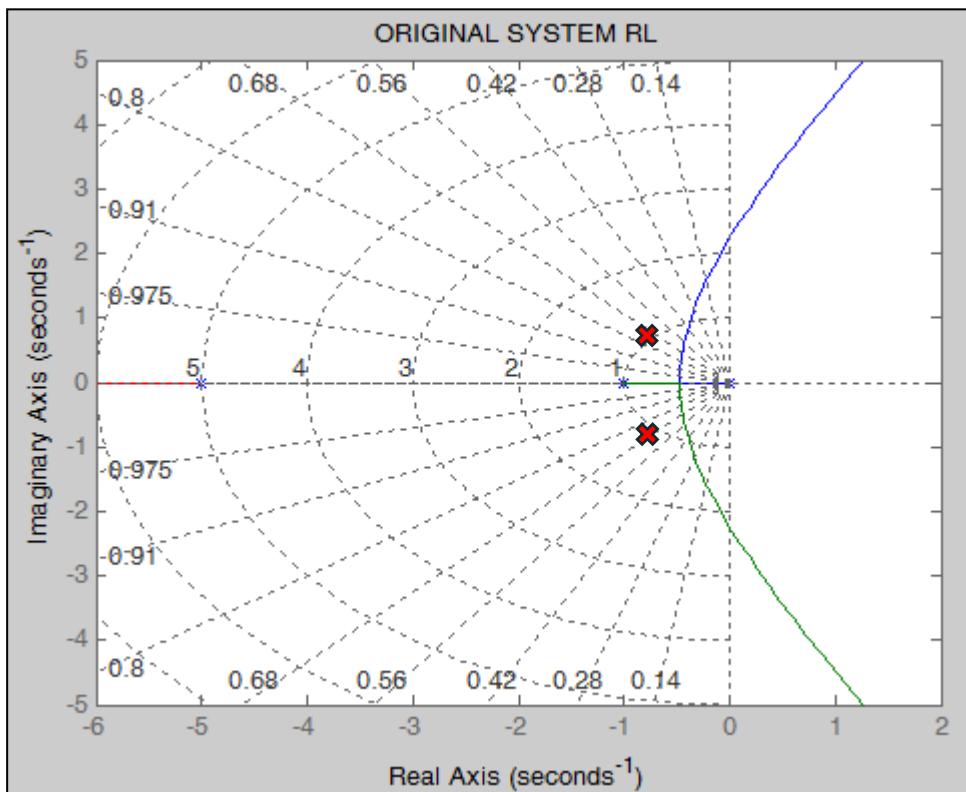




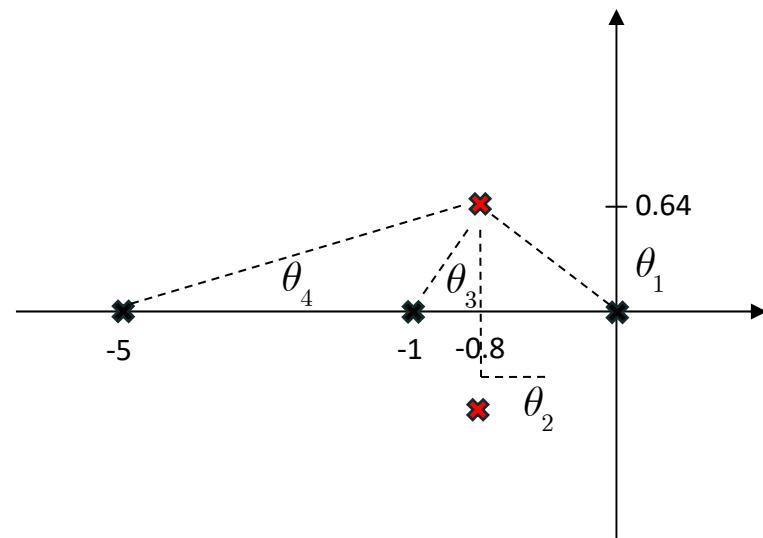
## Reti Correttive - Lead

- Uso del Luogo delle Radici: i rami del luogo devono passare per i poli desiderati in anello chiuso

$$-0.8 \pm j0.64$$



- I rami del Luogo devono muoversi verso sinistra  $\rightarrow$  rete ad anticipo di fase
- Uso della regola degli angoli del LR che dice che la somma algebrica deve valere  $\pi$  oppure un suo multiplo giro.

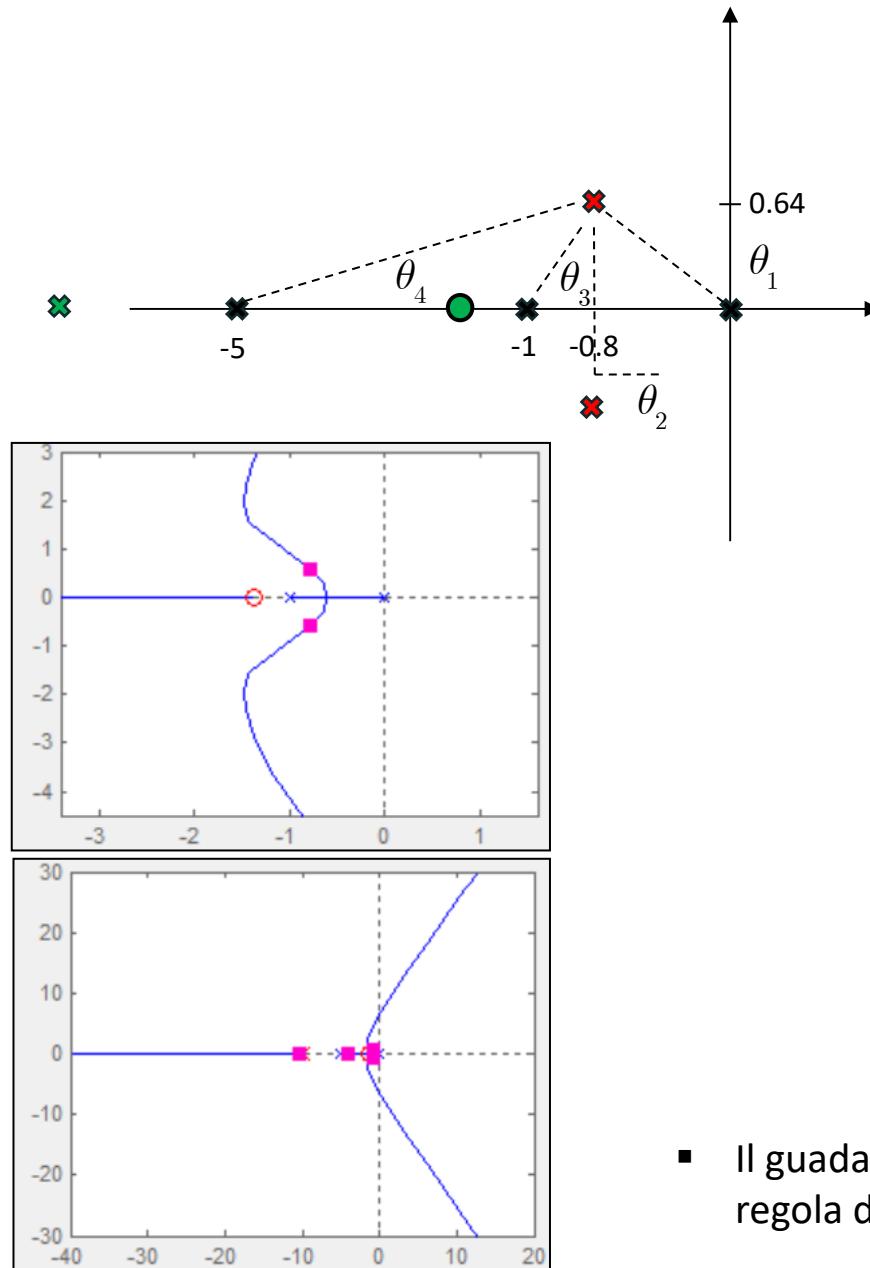


$$\theta_Z - \theta_P - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = 180$$

$$\theta_Z - \theta_P - 141.34 - 90 - 72.65 - 8.66 = 180$$



## Reti Correttive - Lead

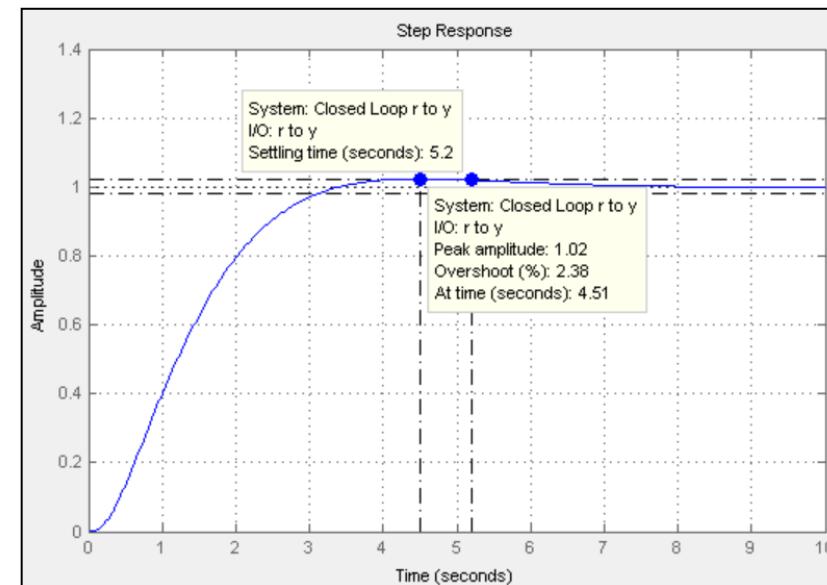


- Selezione del polo:  $p = -10$

$$\theta_p = 3.73$$

- Angolo dello zero:  $\theta_z = 46.6$

- Locazione dello zero:  $z = -1.39$



- Il guadagno si può calcolare con la regola del modulo

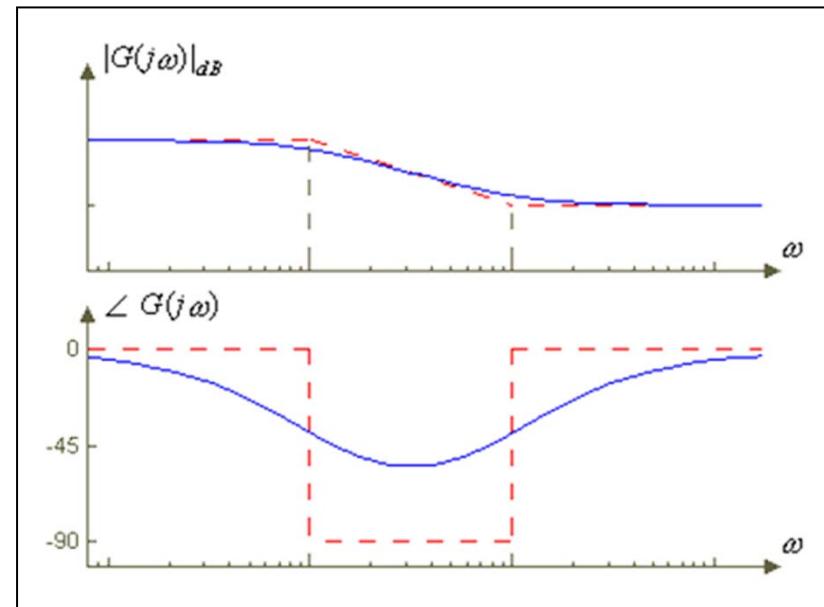
$$\left| \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \right| = \left| -\frac{1}{k} \right|$$



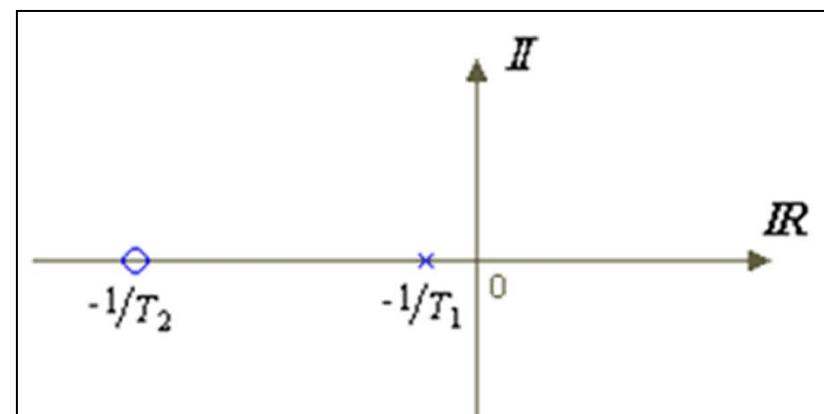
## Reti Correttive - Lag

### □ Rete a Ritardo di Fase (Lag Network)

- La rete è anche nota come Filtro passa basso
- Aumenta il guadagno a bassa frequenza
- Elimina i rumori ad alta frequenza
- Aumenta le precisione a regime
- Rallenta la velocità di risposta
- Diminuisce la Banda passante



$$K(s) = k \frac{T_2 s + 1}{T_1 s + 1} = k_0 \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{T_1}}$$
$$T_1 > T_2, \quad k_0 = k \frac{T_2}{T_1}$$





## Reti Correttive - Lag

- Si ha anche:

$$\alpha = \frac{T_2}{T_1}, \quad 0 < \alpha < 1$$

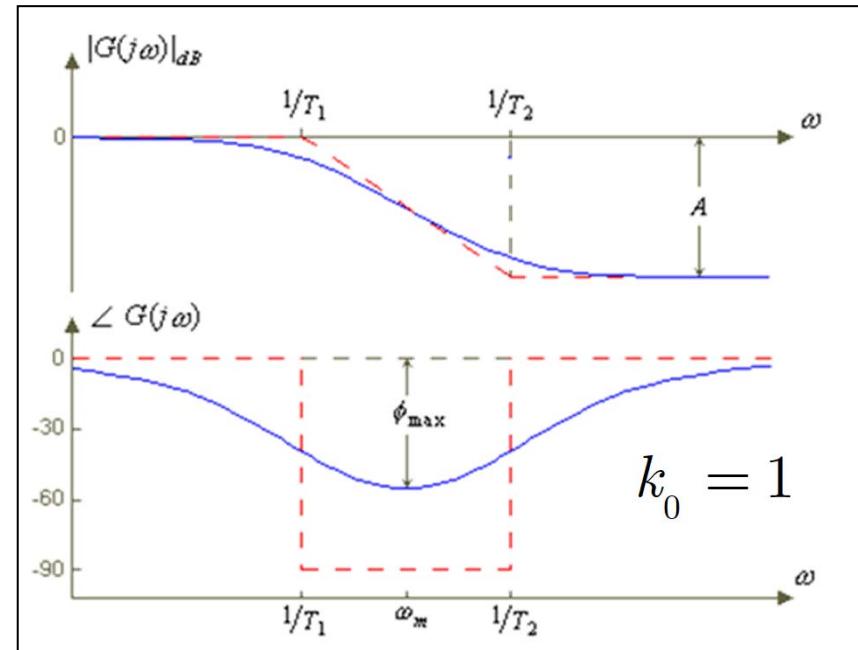
$$K(s) = k_0 \frac{s + \frac{1}{\alpha T_1}}{s + \frac{1}{T_1}} = k_0 \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + \alpha T_1 s}{1 + T_1 s}$$

- Maggiore è la distanza zero-polo e maggiore è la perdita di fase ( $\phi_{\max} \cong -60^\circ$ )

- Massima Attenuazione  $A_{dB} = 20 \log \frac{1}{\alpha} = 20 \log \frac{T_1}{T_2}$

- Frequenza di massimo Ritardo di Fase

$$\angle K(j\omega) = \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_1$$



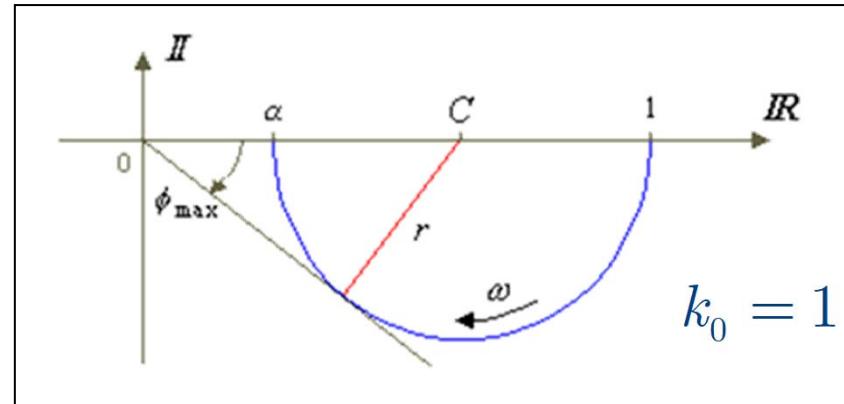
$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{T_2 \sqrt{\alpha}}$$



## Reti Corretrici - Lag

- Il massimo ritardo è dato da:

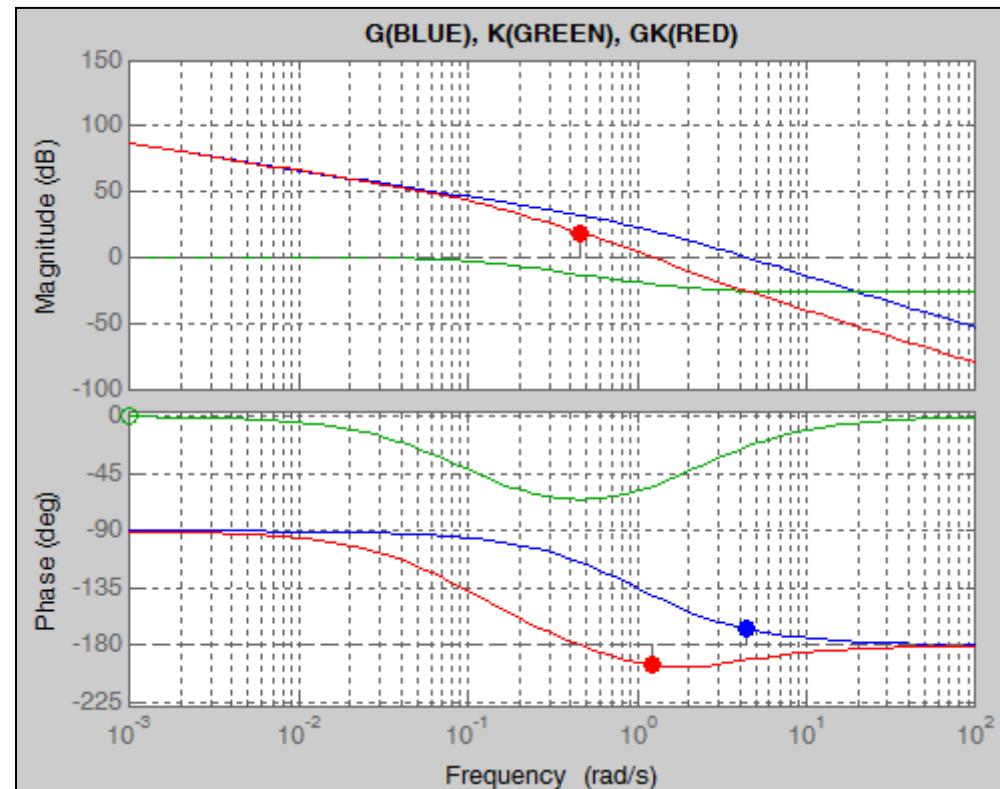
$$\phi_{\max} = -\sin^{-1} \frac{1 - (T_2 / T_1)}{1 + (T_2 / T_1)} = -\sin^{-1} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$



### □ Esempio

$$G(s) = \frac{20}{s(s+1)} \quad K(s) = \frac{1 + 0.476s}{1 + 10s}$$

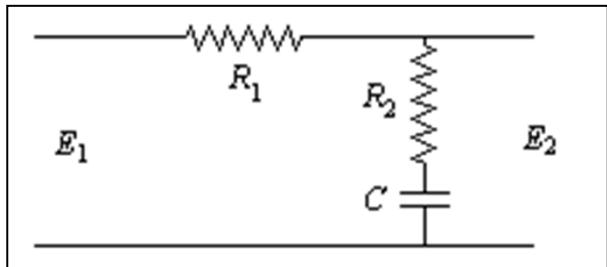
- Nota: in questo esempio, la rete corretrice a ritardo di fase non stabilizza il sistema in anello chiuso





## Reti Corretrici - Lag

- Implementazione Circuitale Analogica



$$G_c(s) = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{R_2 + 1/Cs}{R_1 + R_2 + 1/Cs} = \frac{R_2 Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1}$$

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad \tau = (R_1 + R_2)C$$

$$G_c(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}$$

- Note:

1. Al tendere del polo verso frequenze più basse, la rete corretrice a ritardo di fase tende ad un controllore PI.
2. Il polo e lo zero devono essere vicini se si vuole mantenere le caratteristiche di risposta transitoria dei poli dominanti



## Reti Correttive - Lag



### ▪ Regole pratiche di sintesi in frequenza

1. Calcolare guadagno ed integratori del controllore per avere la risposta a regime appropriata ->  $K_1(s)$
2. Calcolare il margine di fase **PM** della FdT di anello  $K_1(s) G(s)$  dalla risposta in frequenza
3. Calcolare l'incremento  $\Delta_{DES} = \Delta + \epsilon$  necessario ad avere il **PM<sub>DES</sub>** desiderato di progetto
4. Trovare la nuova frequenza di crossover  $\omega_C^n$  tale che:

$$\angle G_{OL}(j\omega_C^n) = -180^\circ + PM_{DES}$$

5. Scegliere  $T_2$  in modo che  $\omega_2 = 1/T_2$  cada una decade prima di  $\omega_C^n$  **Zero**
6. Calcolare  $|K(j\omega_C^n)G(j\omega_C^n)|$  ed il rapporto  $T_1/T_2$
7. Calcolare il valore di  $1/T_1$  **Polo**
8. Calcolare la nuova  $K(s) G(s)$  e verificare il risultato. Eventualmente iterare incrementando il valore di  $\Delta_{DES}$



## Reti Correttive - Lag

□ **Esempio:**  $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$

- Errore alla rampa  $\leq 5\%$
- Margine di fase PM  $\geq 45^0$

- Definire la componente del controllore per i requisiti a regime:
- Non ci sono variazioni di guadagno rispetto al caso della rete ad anticipo di fase

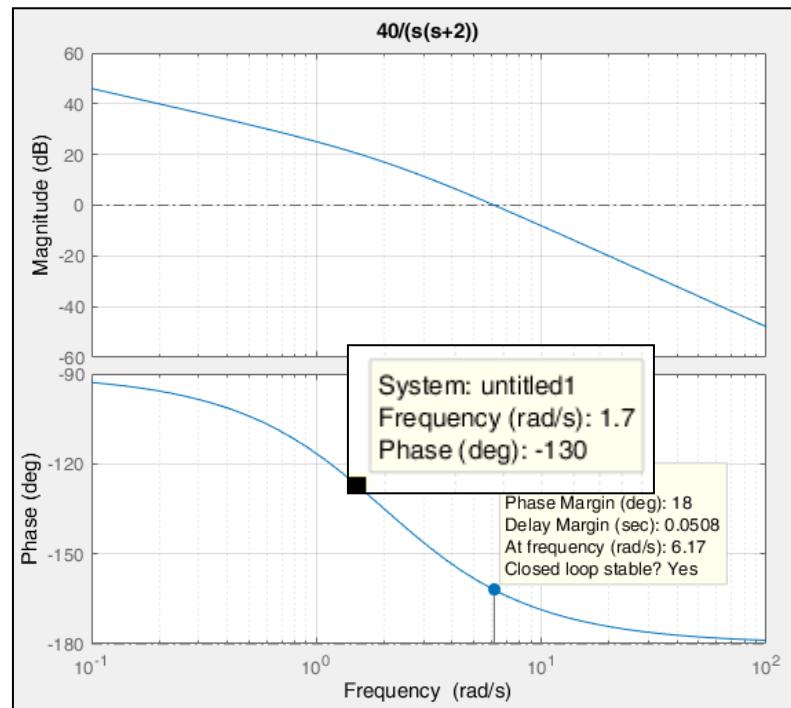
$$\begin{aligned}\varepsilon_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{s(s+2)}} \cdot \frac{1}{s^2} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(s+2)}{s(s+2) + k} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2}{s(s+2) + k} = \frac{2}{k}\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{ss} = \frac{2}{k} \leq 0.05 \quad \Rightarrow \quad k \geq \frac{2}{0.05} = 40$$

$$K(s)G(s) = \frac{40}{s(s+2)}$$



## Reti Correttive - Lag



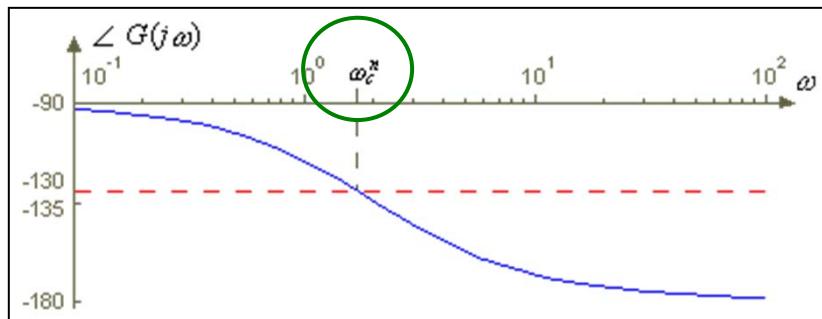
$$K(s)G(s) = \frac{40}{s(s + 2)}$$

$$\omega_c \cong 6.2 \text{ rad/sec} \Rightarrow PM = 18^\circ$$

- La frequenza richiesta per il PM desiderato :

$$\angle K(j\omega_c^n)G(j\omega_c^n) = -180^\circ + PM_{DES} = -130^\circ$$

- La nuova frequenza si determina dal diagramma delle fasi



$$\omega_c^n \cong 1.678 \text{ rad/s}$$

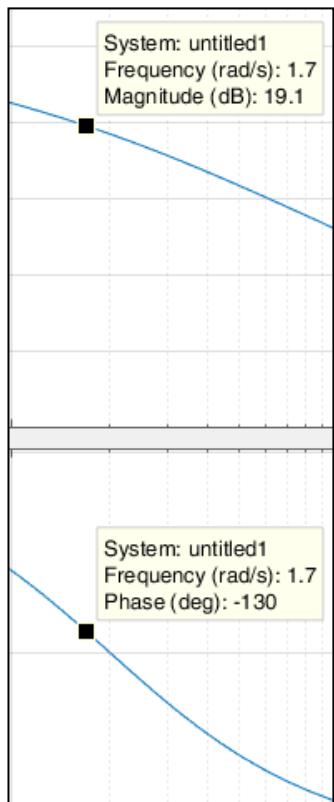


## Reti Correttive - Lag

- Si sceglie **lo zero**  $T_2$  in modo che  $\omega_2 = 1/T_2$  cada una decade prima di  $\omega_c^n$

$$\frac{1}{T_2} = \omega_2 = \frac{\omega_c^n}{10} \Rightarrow T_2 = \frac{10}{\omega_c^n} \cong 5.959$$

- Dalla massima attenuazione disponibile, si può calcolare **il polo** della rete.



$$A_{dB} = \left| K(j\omega_c^n)G(j\omega_c^n) \right|_{dB} = 20 \log \frac{T_1}{T_2} \cong 19.1 dB \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} \cong 9.12$$

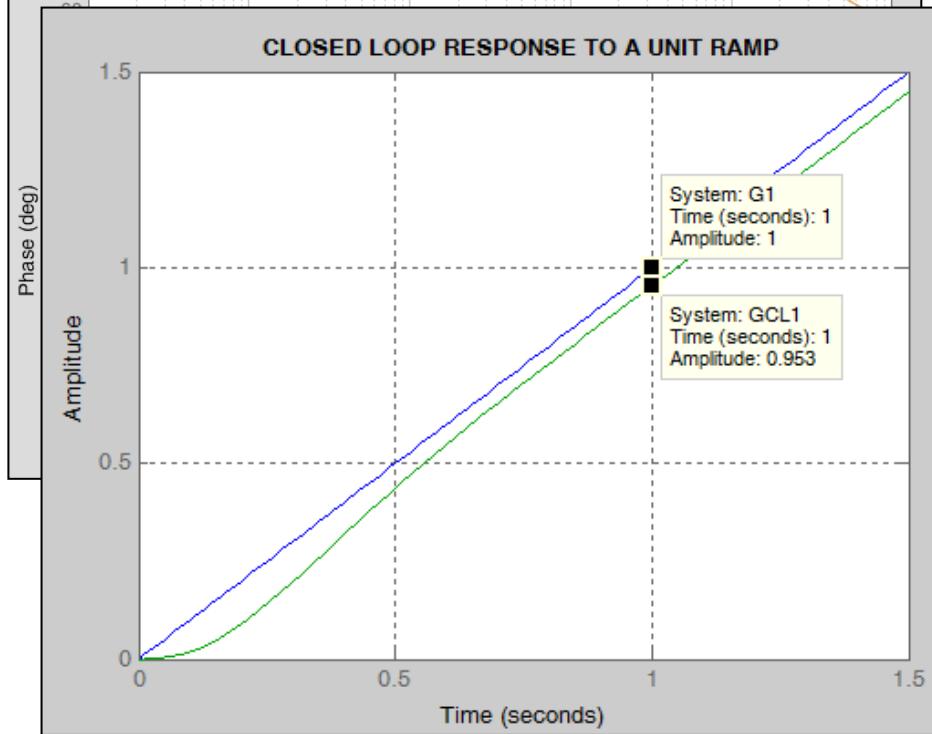
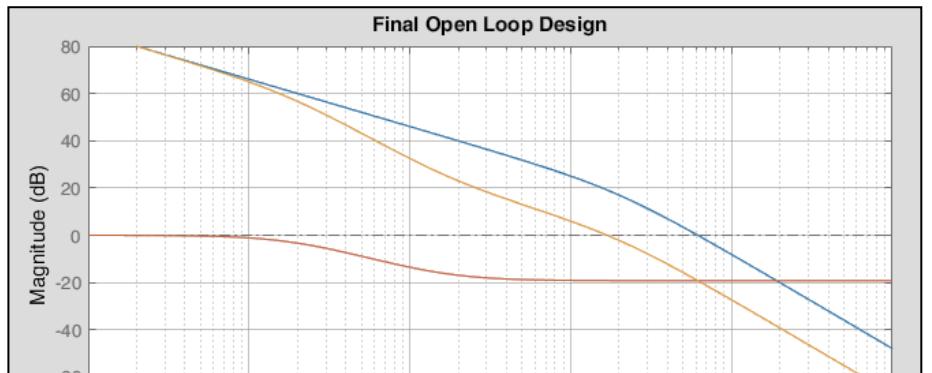
$$T_1 \cong 9.12 \cdot T_2 \cong 54.4$$

$$K(s) = 40 \cdot \frac{5.959s + 1}{54.4s + 1} = 4.381 \cdot \frac{s + 0.168}{s + 0.018}$$



## Reti Corretrici - Lag

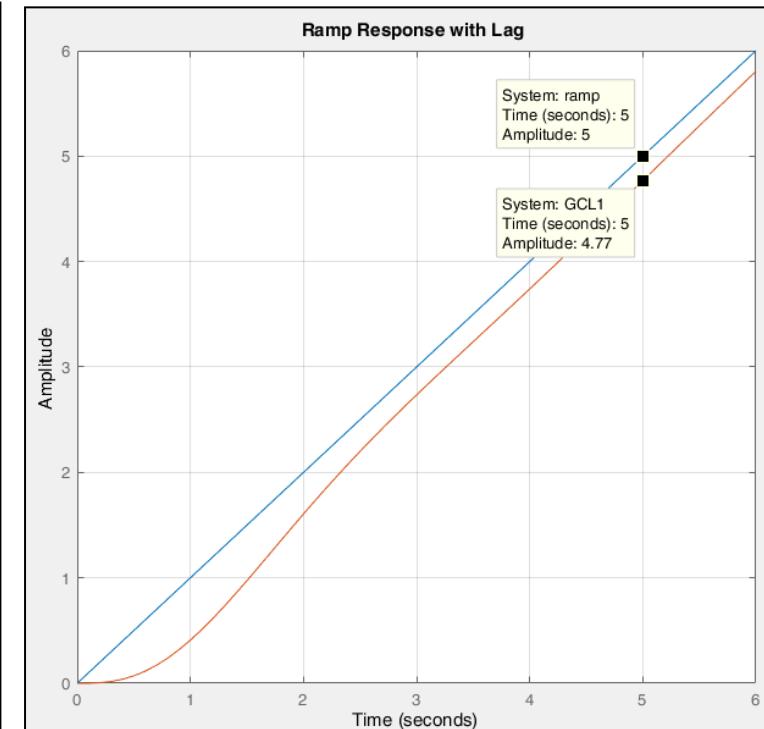
$$K(s)G(s) = 40 \cdot \frac{5.959s + 1}{54.4s + 1} \cdot \frac{1}{s(s + 2)}$$



- Iterazioni successive possono essere necessarie per avere il **PM** desiderato

$$K(s) = 40 \cdot \frac{6.174s + 1}{59.256s + 1} = 4.381 \cdot \frac{s + 0.162}{s + 0.017}$$

**PM**  $\cong 45.81^\circ$ .

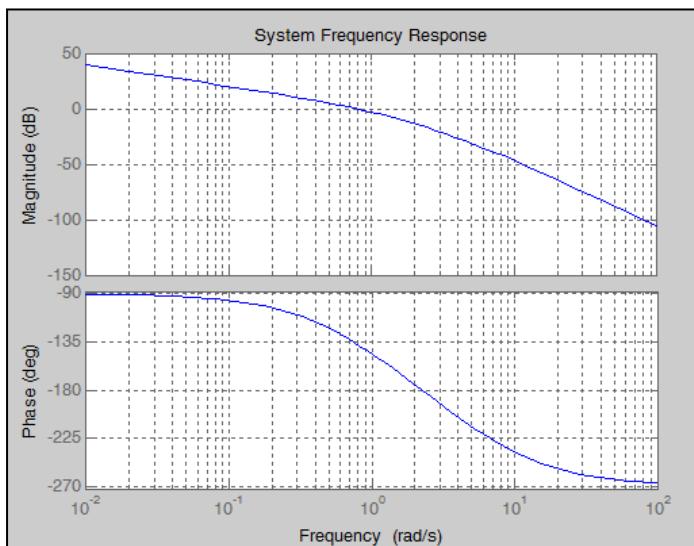




## Reti Correttive - Lag

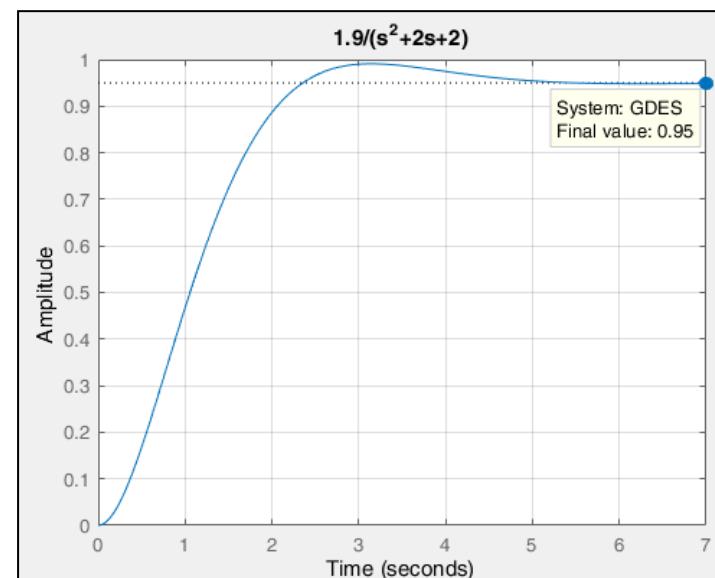
- Progetto di una rete a ritardo di fase mediante il Luogo delle Radici

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+5)}$$



- Errore ad un gradino unitario inferiore a 5%
- Poli dominanti target  $p_{1,2} = -1 \pm j$
- $\omega_n = 1.4 \text{ rad/sec}$ ,  $\zeta = 0.7$

$$G_{DES}(s) = \frac{1.9}{s^2 + 2s + 2}$$

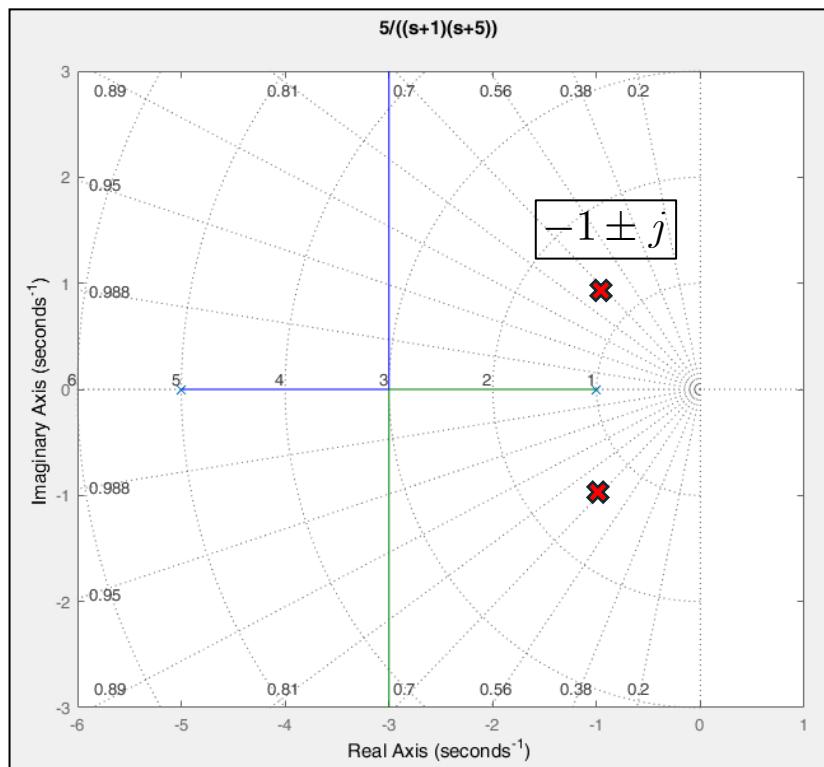


- Il controllore non annulla l'errore, ma cerca di soddisfare le caratteristiche transitorie, riducendo l'errore.



## Reti Correttive - Lag

- Valore desiderato dei poli in anello chiuso



- Rapporto zero - polo

$$\frac{z}{p} = \frac{D(0) - \varepsilon_{ss}^{DES} D(0)}{\varepsilon_{ss}^{DES} N(0)}$$

- Riduzione dell'errore a regime mediante Lag Network

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Ingresso a gradino come esempio

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{N(s)}{D(s)}} \frac{1}{s} = \frac{D(0)}{N(0) + D(0)}$$

- Contributo Lag Network

$$\varepsilon_{ss}^{DES} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{N(s)(s+z)}{D(s)(s+p)}} \frac{1}{s} = \frac{pD(0)}{zN(0) + pD(0)}$$

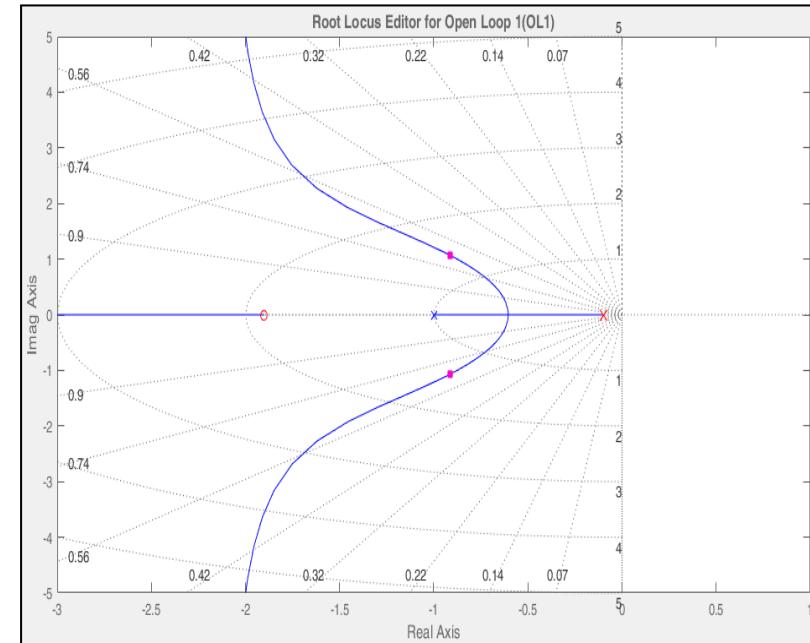
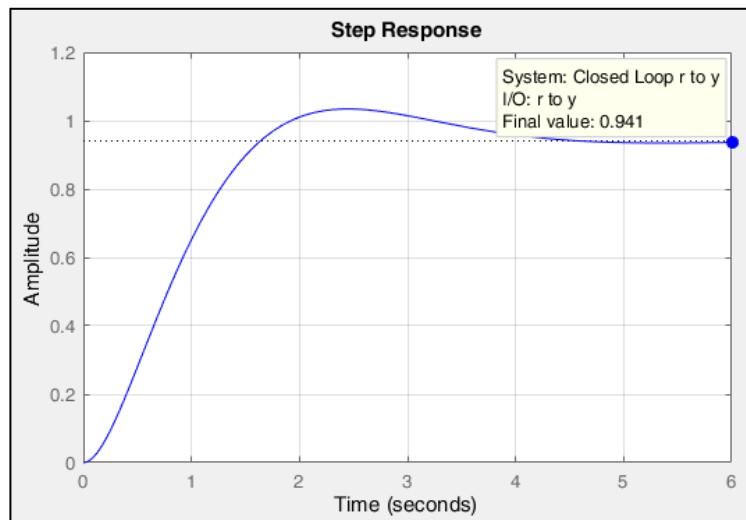
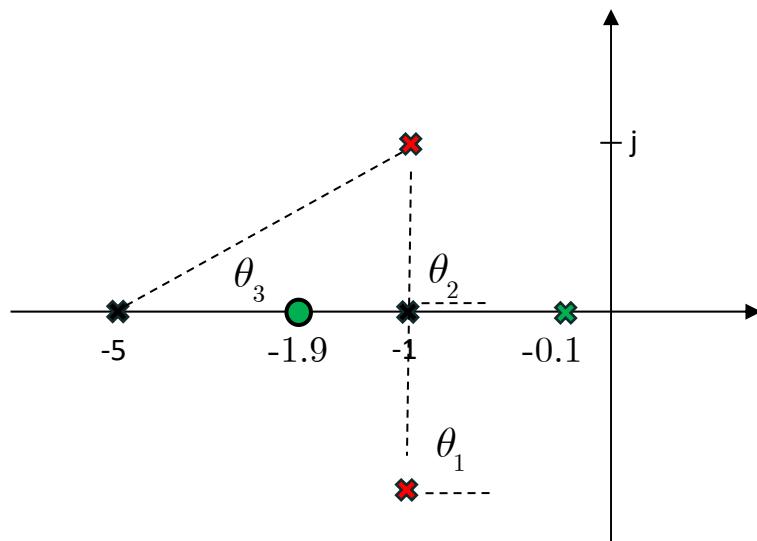
- Requisito di progetto

$$\varepsilon_{ss}^{DES} = \frac{5 - 0.05(5)}{0.05(5)} = 0.05 \Rightarrow \frac{z}{p} = 19$$



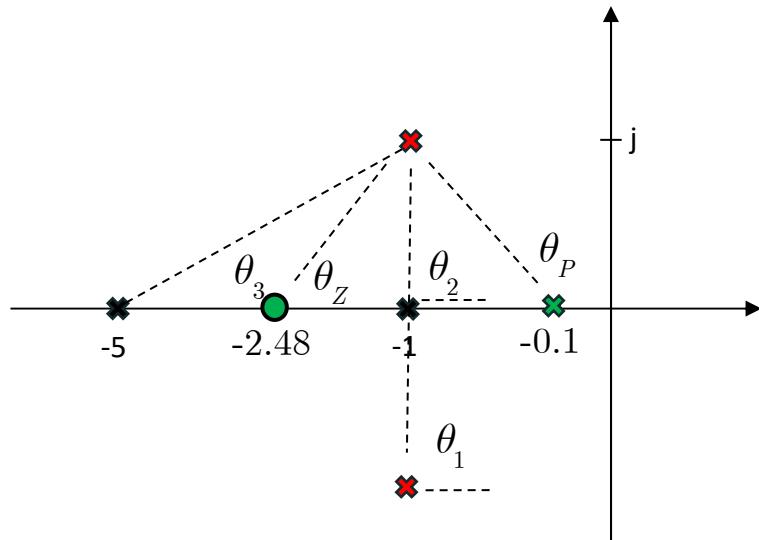
## Reti Correttive - Lag

- Il polo deve essere vicino all'origine in modo da avvicinarsi al comportamento integrale. Lo zero viene di conseguenza, essendo  $z = 19p$



## Reti Correttive - Lag

- Valutazione degli angoli

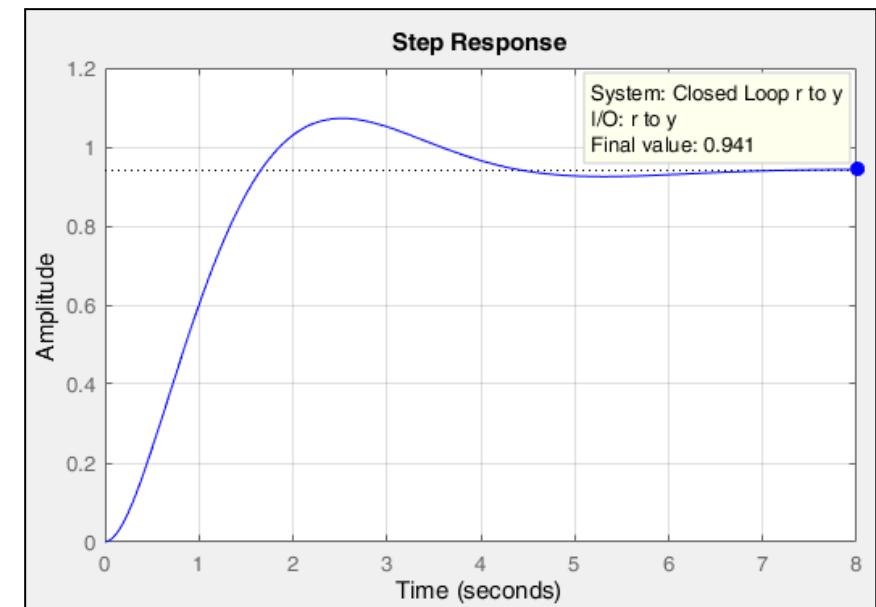
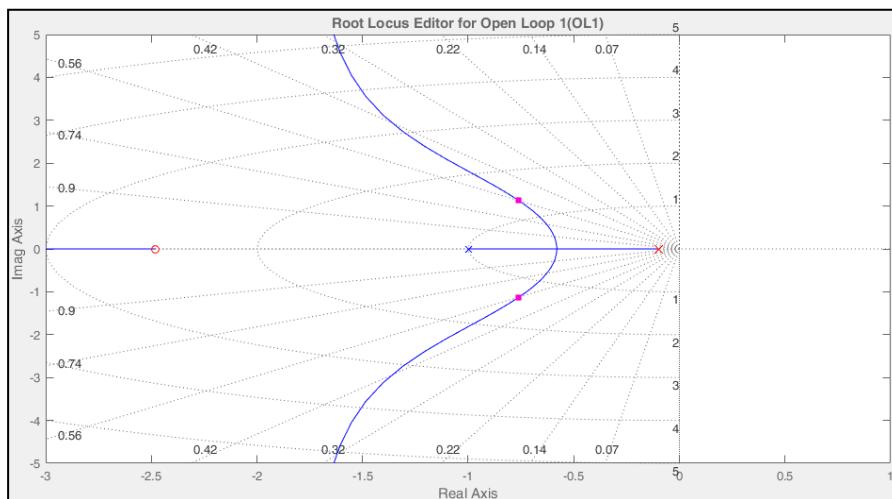


$$\sum_{j=1}^m \theta_{zj} - \sum_{i=1}^n \theta_{pi} = (2v + 1)\pi$$

$$\theta_z - \theta_p - 90 - 90 - 14.04 = 180$$

$$\theta_z - \theta_p = 2\pi + 14.04$$

$$\theta_z = 2\pi + 14.04 + 132 = 506.04 = 2\pi + 146.04$$



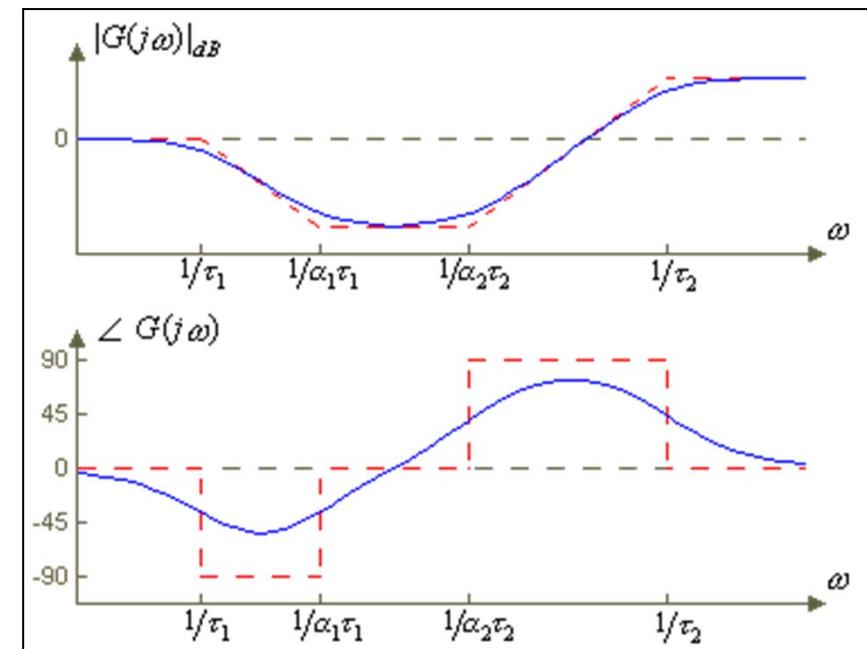
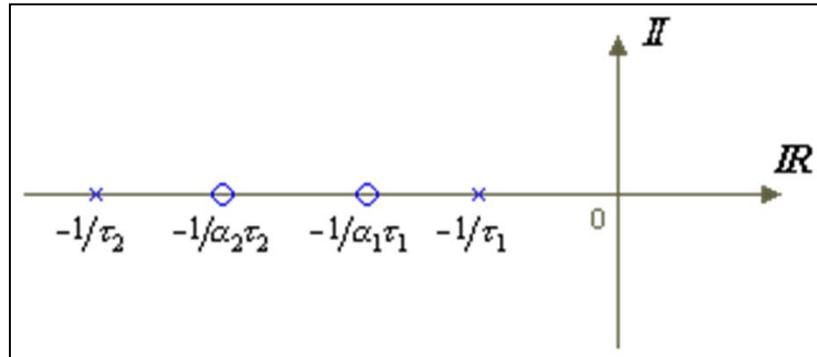


## Reti Correttive - Reti a Sella

- Questa rete non è altro che una combinazione di due reti lag e lead

$$G_c(s) = \frac{(1 + \alpha_1 \tau_1 s)}{(1 + \tau_1 s)} \cdot \frac{(1 + \alpha_2 \tau_2 s)}{(1 + \tau_2 s)}$$

$$\alpha_1 = \frac{T_1}{\tau_1}, \quad 0 < \alpha_1 < 1, \quad \alpha_2 = \frac{T_2}{\tau_2}, \quad \alpha_2 > 1, \quad \tau_1 > \tau_2$$



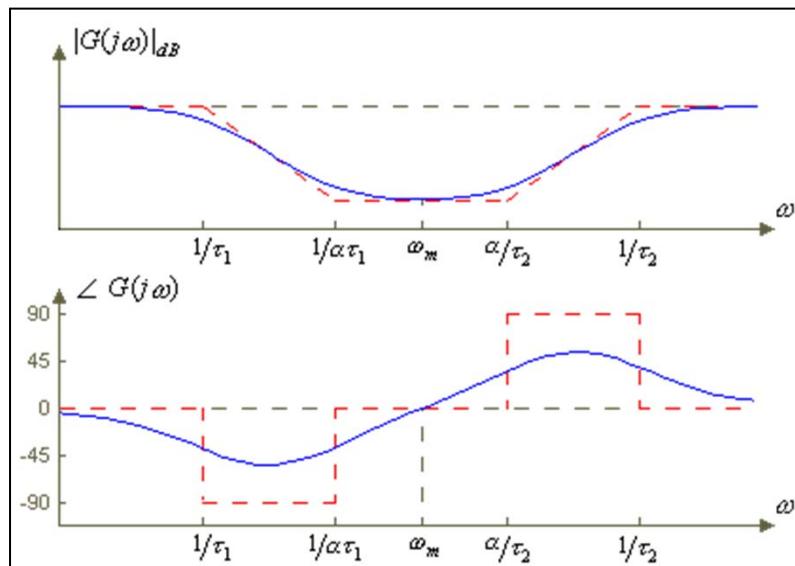


## Reti Correttive - Reti a Sella

- Una struttura comune, che riduce il numero di parametri è quella dove l'attenuazione dovuta al ritardo e l'amplificazione dovuta all'anticipo sono le stesse:

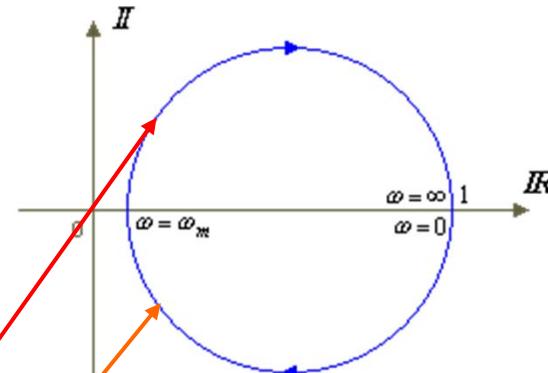
$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_2} = \alpha$$

$$G_c(s) = \frac{(1 + \alpha\tau_1 s)}{(1 + \tau_1 s)} \cdot \frac{(1 + (\tau_2/\alpha)s)}{(1 + \tau_2 s)}$$



la rete fornisce un anticipo di fase

la rete fornisce un ritardo di fase



Nota che per:  $\omega = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$

la rete ha sfasamento nullo e  
attenuazione pari a:

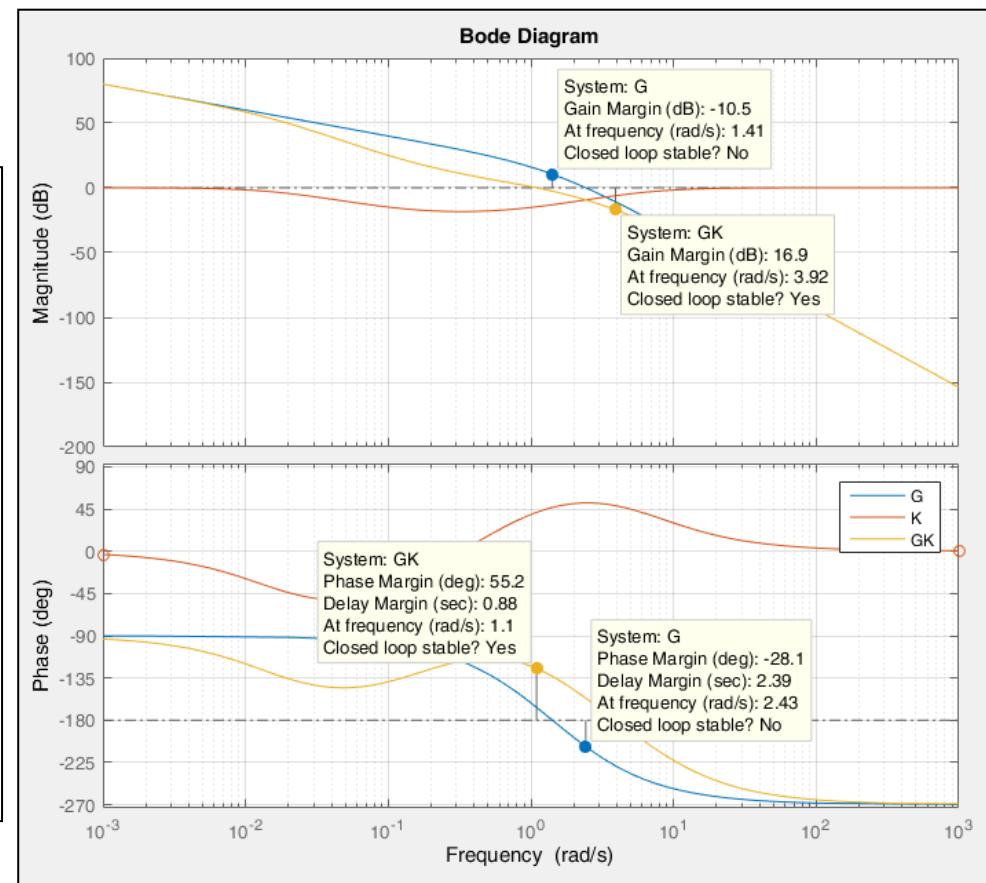
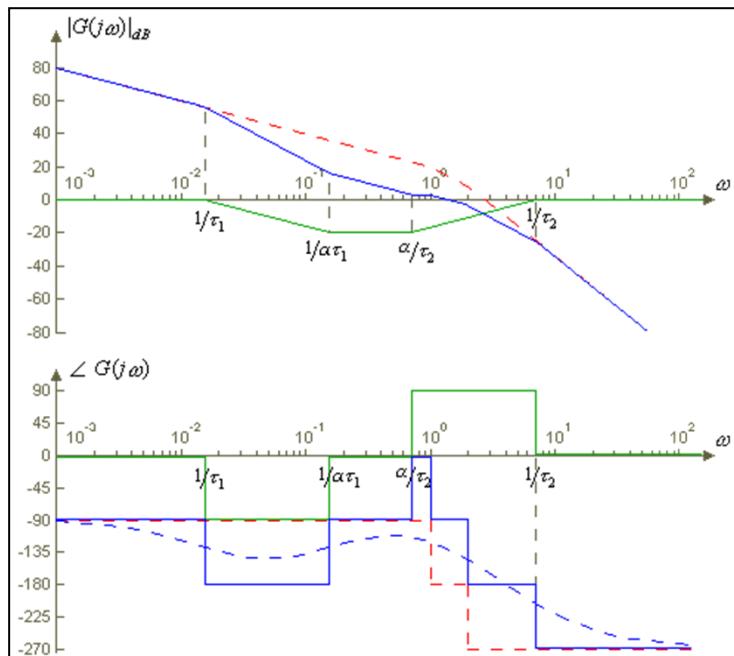
$$|G_c(j\omega_m)| = \frac{\alpha\tau_1 + \tau_2/\alpha}{\tau_1 + \tau_2}$$



## Reti Correttive - Reti a Sella

□ **Esempio:** Dato il sistema  $G(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+2)}$

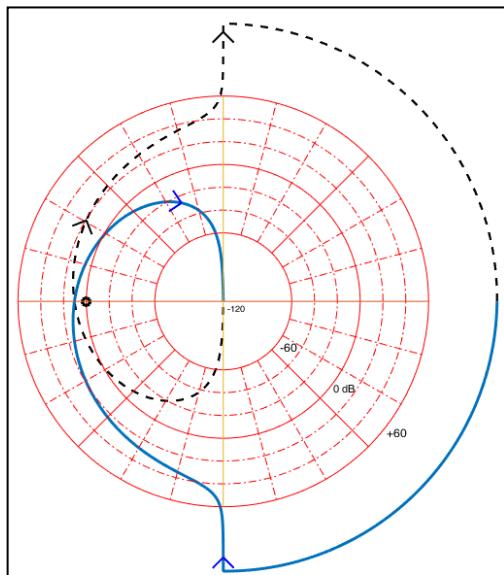
- Introduciamo una rete a sella data da:  $K(s) = \frac{s+0.15}{s+0.015} \cdot \frac{s+0.7}{s+7}$



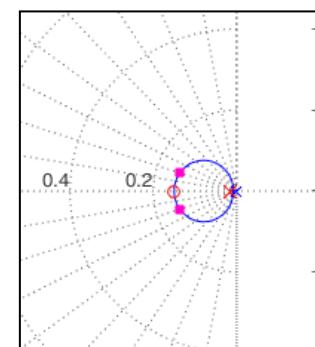
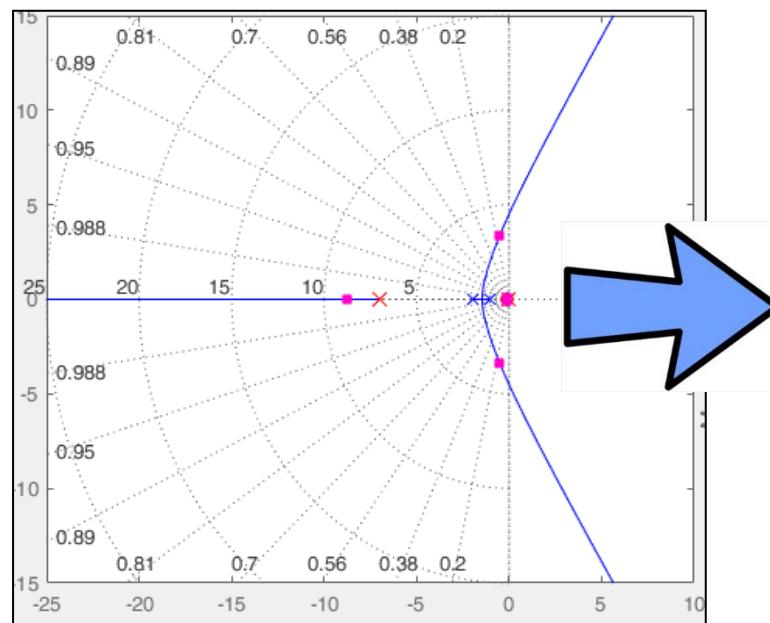
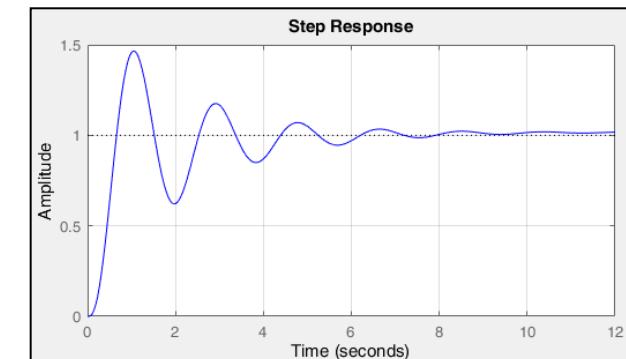
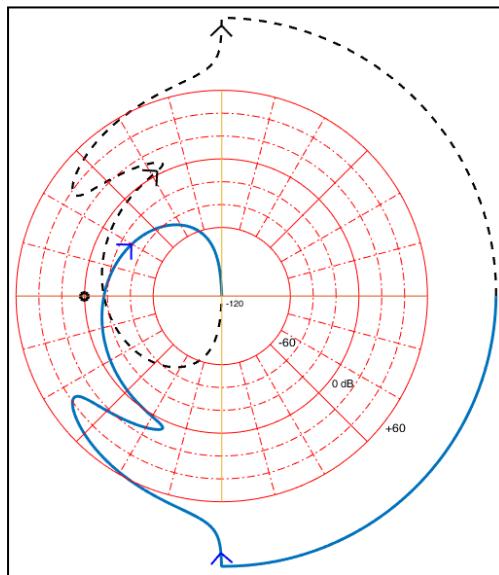


# Reti Correttive - Reti a Sella

Uncompensated



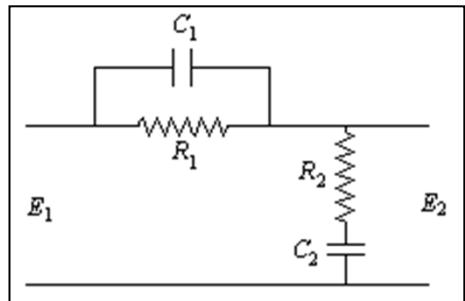
Compensated





## Reti Correttive - Reti a Sella

- Implementazione circuitale analogica:



$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{R_2 + 1/C_2 s}{R_1 // (1/C_1 s) + R_2 + 1/C_2 s} = \\ &= \frac{R_2 C_2 s + 1}{\left( \frac{R_1 / (C_1 s)}{R_1 + 1/C_1 s} + R_2 \right) C_2 s + 1} = \frac{R_2 C_2 s + 1}{\left( \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1} + R_2 \right) C_2 s + 1} = \\ &= \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{\left[ R_1 + R_2(R_1 C_1 s + 1) \right] C_2 s + (R_1 C_1 s + 1)} = \\ &= \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_1 C_2 s + R_2 C_2 s(R_1 C_1 s + 1) + (R_1 C_1 s + 1)} = \\ &= \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1) + R_1 C_2 s} \end{aligned}$$

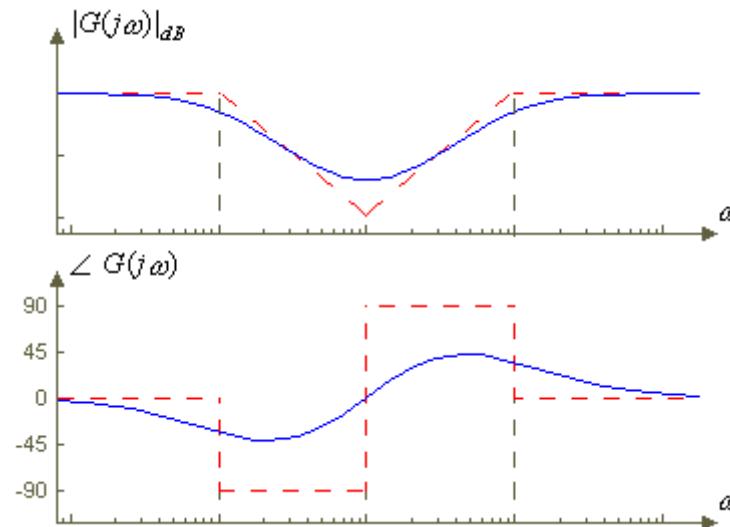
$$G_c(s) = \frac{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_b s)}{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_b s) + \tau_{ab} s}$$

$$G_c(s) = \frac{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_b s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)} = \frac{(1 + \alpha \tau_1 s)}{(1 + \tau_1 s)} \cdot \frac{(1 + (\tau_2/\alpha) s)}{(1 + \tau_2 s)}$$

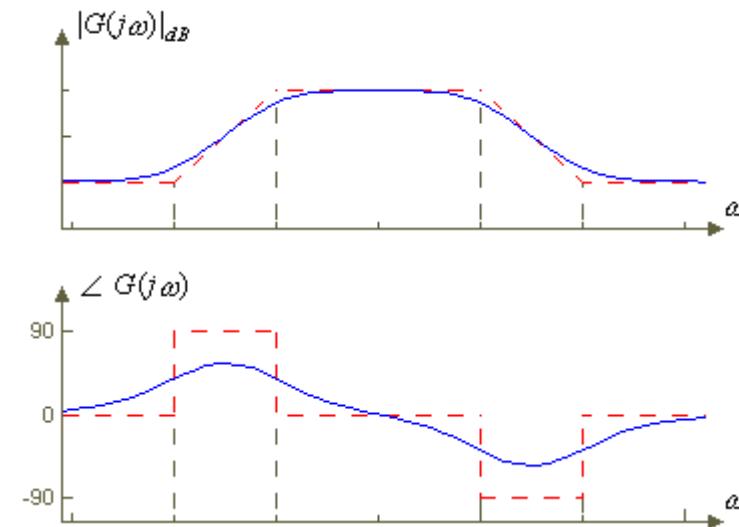


## Altre Reti Correttive

□ Rete a Spillo (Notch):



□ Filtro Passa Banda (Lead-Lag)





## Reti Correttive



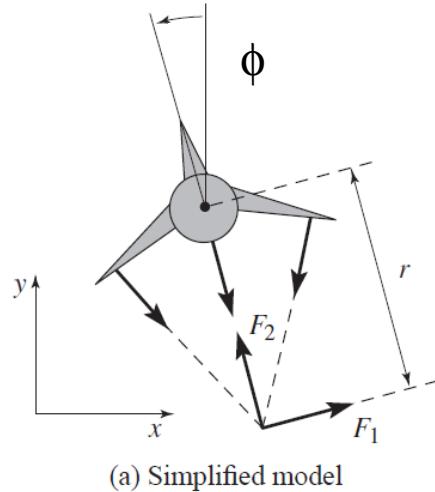
- Lezioni di Brian Douglas su reti correttive

<https://www.youtube.com/watch?v=xLhv1l5sDcU&index=33&list=PLUMWjy5jgHK1NC52DXXrriwhVrYZKqjk>



# Harrier Control (Murray)

## □ Esempio di Sintesi mediante doppio anello di controllo:



(a) Simplified model

| Symbol | Description                    | Value                    |
|--------|--------------------------------|--------------------------|
| $m$    | Vehicle mass                   | 4.0 kg                   |
| $J$    | Vehicle inertia, $\phi_3$ axis | 0.0475 kg m <sup>2</sup> |
| $r$    | Force moment arm               | 25.0 cm                  |
| $c$    | Damping coefficient            | 0.05 kg m/s              |
| $g$    | Gravitational constant         | 9.8 m/s <sup>2</sup>     |

(b) Parameter values

- **Problema:** Mantenimento della posizione di Hover in presenza di disturbo in rollio

$$\begin{cases} J\ddot{\phi} = rF_1 + d \\ m\ddot{x} + c\dot{x} = F_1 \cos \phi - F_2 \sin \phi \\ m\ddot{y} + c\dot{y} = F_2 \cos \phi + F_1 \sin \phi - mg \end{cases}$$

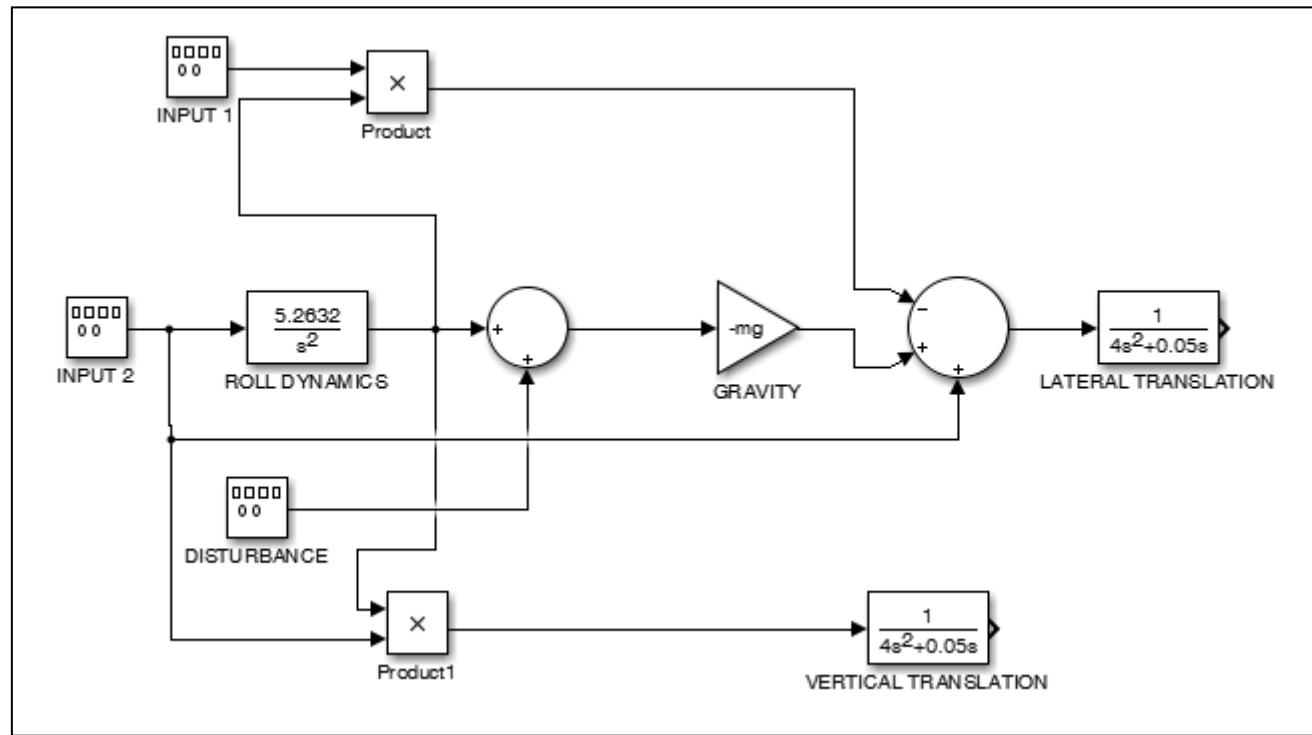
- **Sequenza di Controllo:**
  - Forza  $F_2$  per il controllo della posizione verticale
  - Forza  $F_1$  per il controllo di Rollio e la posizione laterale

- **Linearizzazione intorno alla Verticale (Rollio = 0 all'equilibrio):**

$$\begin{cases} J\ddot{\phi} = rF_1 + d = ru_1 + d \\ m\ddot{x} + c\dot{x} = F_1 - F_2\phi = u_1 - u_2\phi - mg\phi, \\ m\ddot{y} + c\dot{y} = F_2 + F_1\phi - mg = u_2 + u_1\phi \end{cases}, \begin{cases} u_1 = F_1 \\ u_2 = F_2 - mg \end{cases}$$



# Harrier Control (Murray)

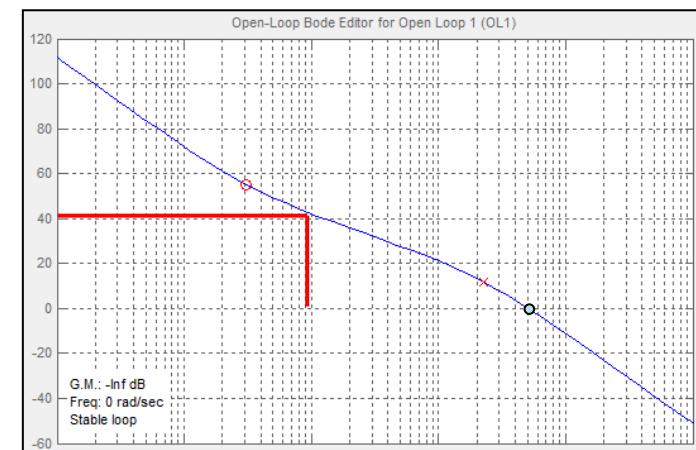
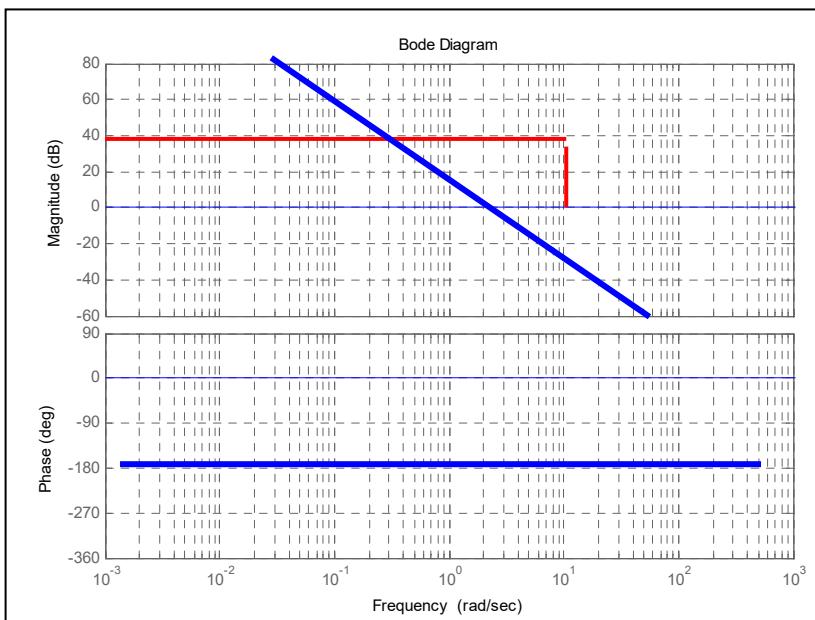
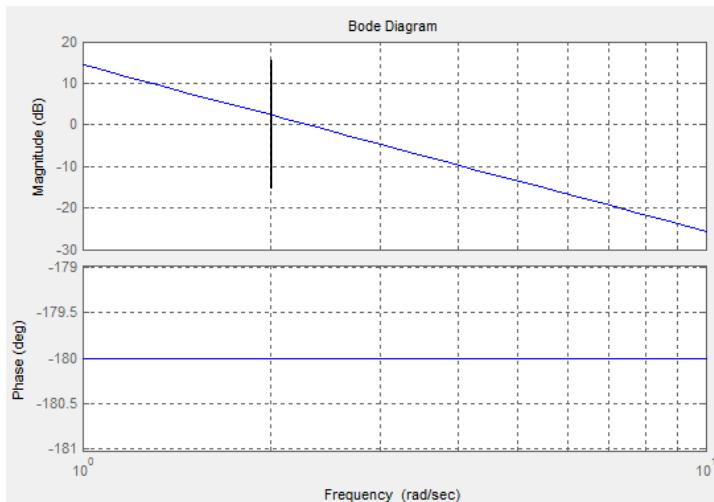


- **Considerazioni fisiche:** La dinamica di rollio è più veloce della dinamica di traslazione laterale, questo permette un controllo sequenziale a due anelli (interno in rollio, esterno in traslazione laterale)
  - **Specifiche di Progetto in Rollio:**
    1. Errore a regime < 1%
    2. Buon Inseguimento del comando fino a 10 rad/sec
    3. Buona reiezione del disturbo fino a 1 rad/sec
    4. Buoni Margini di Stabilità per incertezze sulla dinamica di Attuazione



# Harrier Control (Murray)

$$G_{u_1}^\phi(s) = \frac{\phi(s)}{u_1(s)} = \frac{5.2632}{s^2}$$



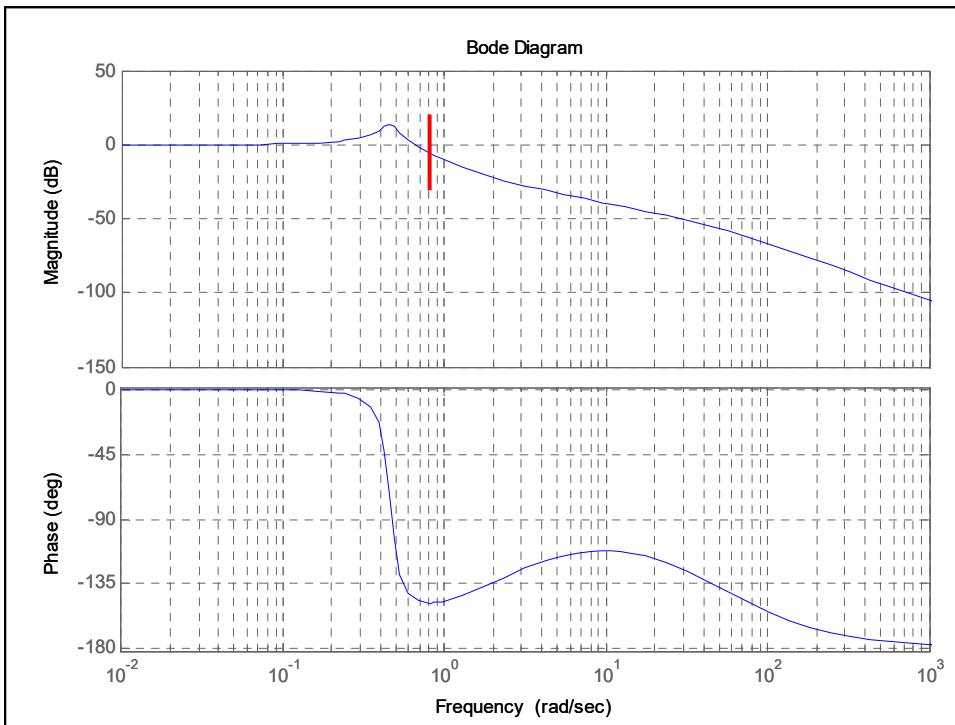
$$K_{ROLL}(s) = 109.97 \cdot \frac{1 + 0.33s}{1 + 0.0044s}, \begin{cases} Z \simeq -3.0 & GM = \infty \\ P \simeq -227.0 & PM = 37^\circ \end{cases}$$

$$\omega_c \approx 500 \text{ rad / sec}$$

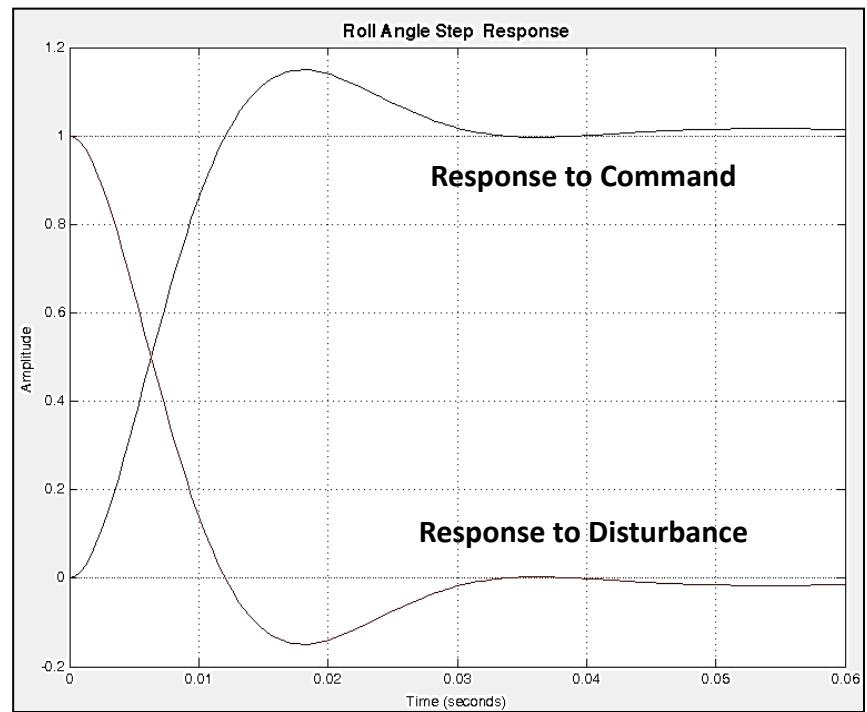


# Harrier Control (Murray)

$$\frac{\phi(s)}{\phi_d(s)} = \frac{191s + 578.8}{0.0044s^3 + s^2 + 191s + 578.8}$$

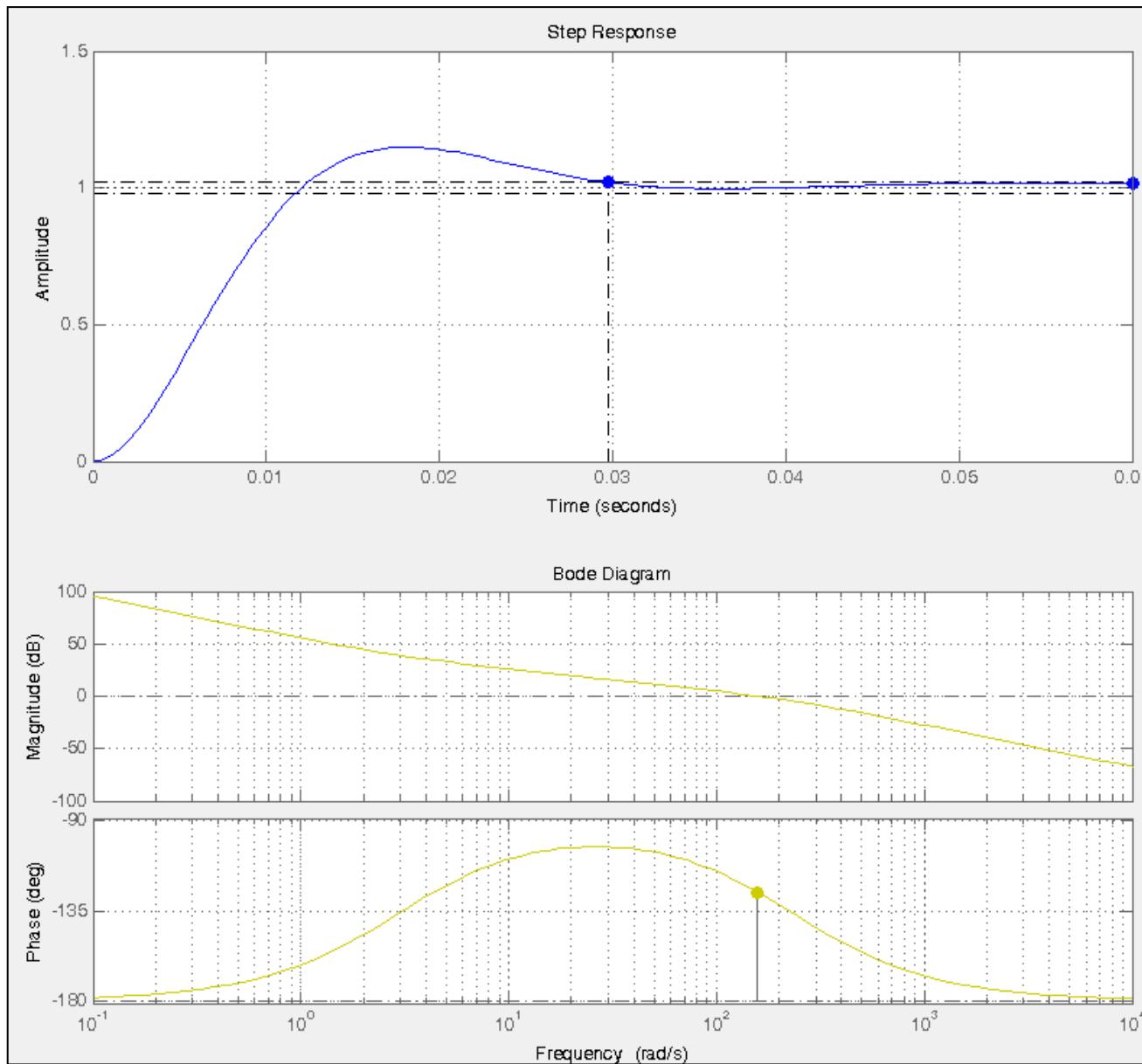


$$T_R \approx \frac{0.35}{\omega_{BW}(\text{Hz})} = 0.05$$





# Harrier Control (Murray)





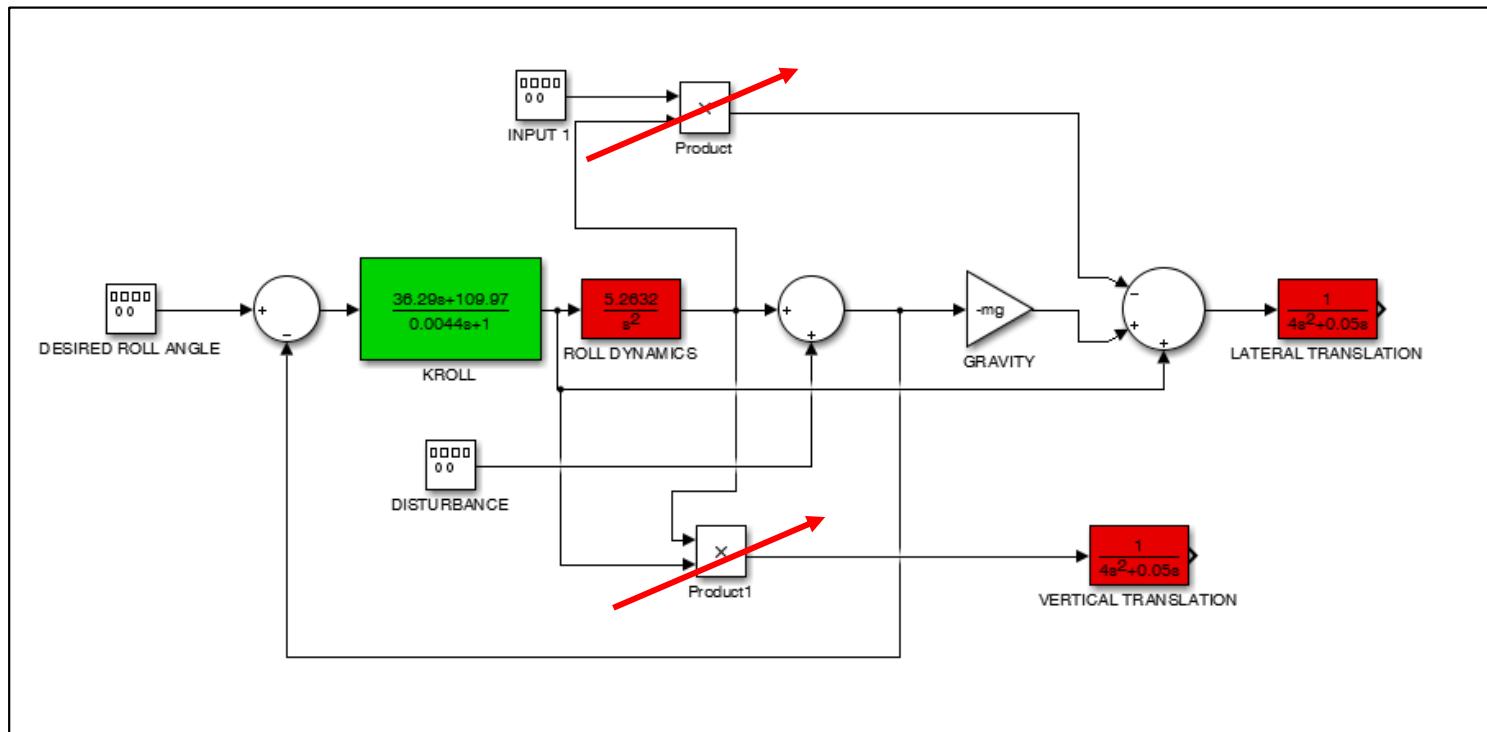
# Harrier Control (Murray)

- Controllo della Posizione laterale per il mantenimento della condizione di hover:

$$J\ddot{\phi} = rF_1 = ru_1$$

$$m\ddot{x} + cx = F_1 - F_2\phi \cong u_1 - mg\phi$$

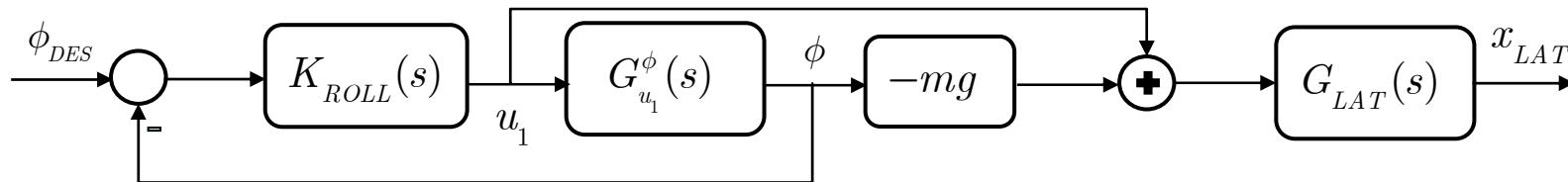
$$G_{LAT}(s) = \frac{1}{ms^2 + cs} = \frac{1}{4s^2 + 0.05s}$$





# Harrier Control (Murray)

- Anello interno controllato:



$$x(s) = G_{LAT}(s) \left[ K_{ROL}(s)S(s) - mgG_{ROL}^{CL}(s) \right] \phi_{DES}(s) = G_{INNER}(s)\phi_{DES}(s)$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + K_{ROL}(s)G_{u_1}^\phi(s)}$$

- Assumendo che l'anello interno sia a regime:

$$K_{ROL}(s)S(s) - mgG_{ROL}^{CL}(s) \simeq K_{ROL}(0)S(s) - mgG_{ROL}^{CL}(0) = -mg$$

$$x(s) \simeq -mgG_{LAT}(s)\phi_{DES}(s) = \frac{-39.2}{4s^2 + 0.05s} \phi_{DES}(s)$$



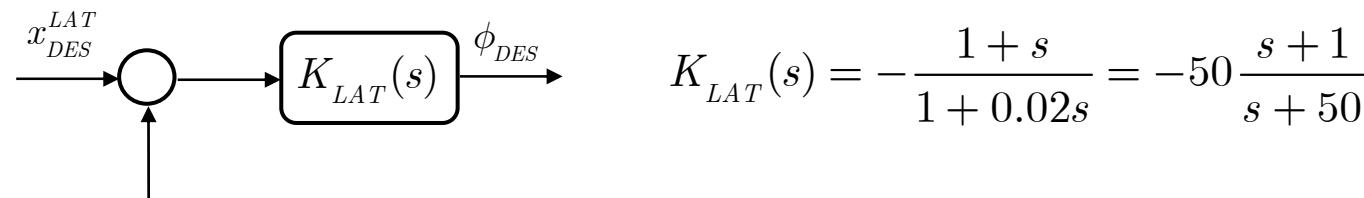
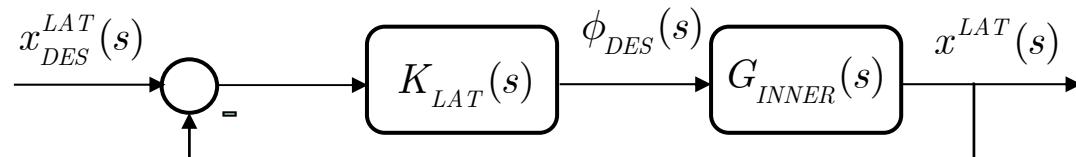
# Harrier Control (Murray)

- Specifiche di progetto:

1. Errore nullo a regime in posizione laterale
2. Banda passante di circa 1 rad/sec
3. FdT di Anello < 0.1 in modulo per frequenze superiori a 10 rad/sec

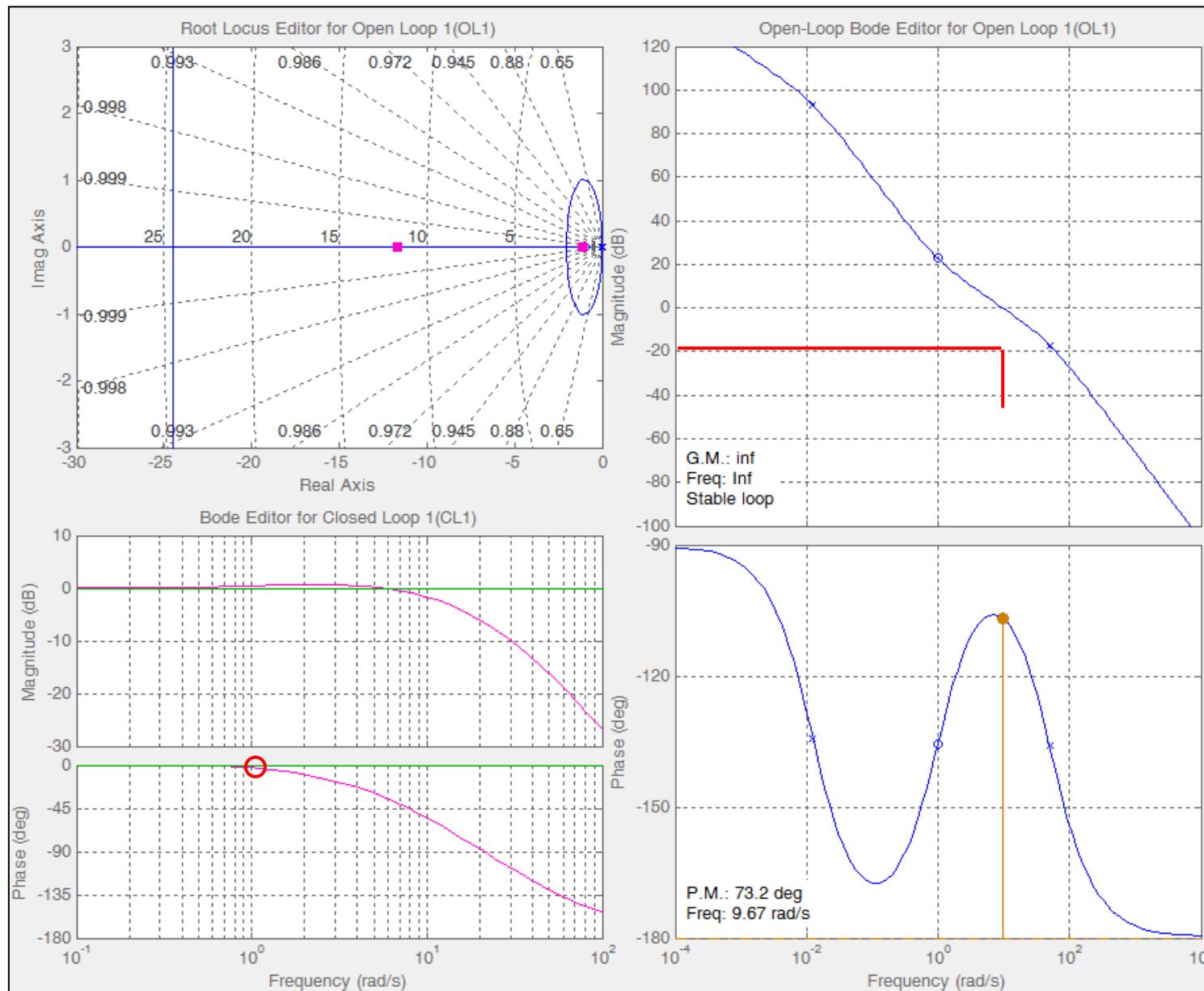
$$|L(j\omega)| = |K_{LAT}(j\omega)G_{INNER}(j\omega)| < 0.1, \omega > 10 \text{ rad/sec}$$

- Anello esterno in posizione laterale:



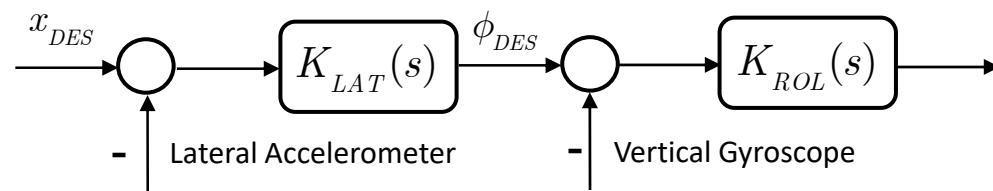
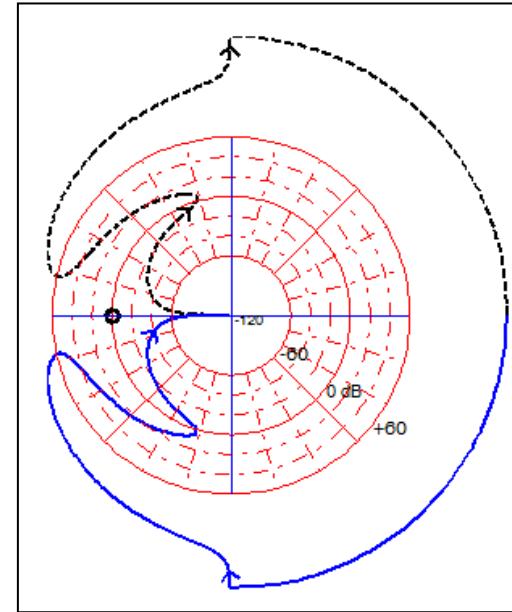
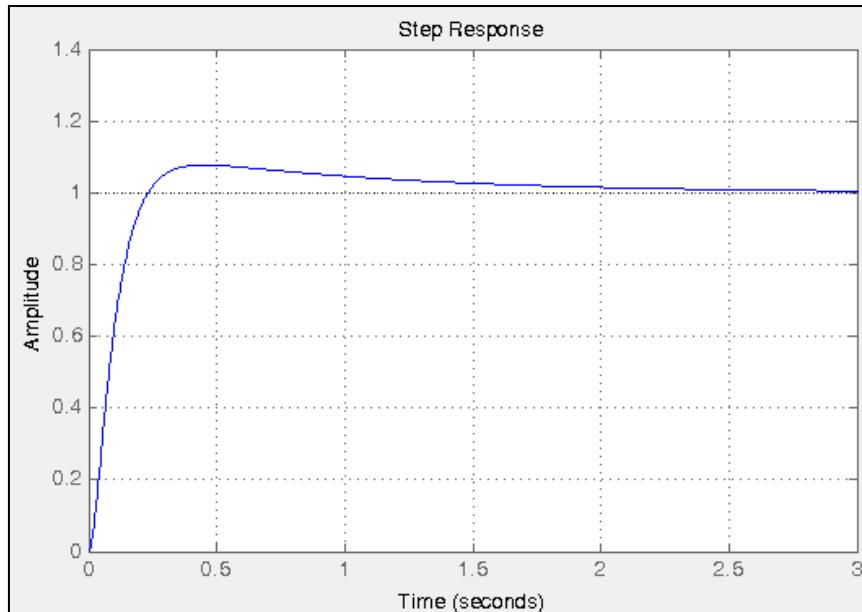


# Harrier Control (Murray)





# Harrier Control (Murray)



$$K_{LAT}(s) = -\frac{1+s}{1+0.02s}$$

$$K_{ROL}(s) = 109.97 \cdot \frac{1+0.33s}{1+0.0044s}$$



# Legame tra le Metodologie

## Dominio del Tempo

- Equazioni differenziali
- Risposta a Regime
  - Errore
- Risposta Transitoria
  - Sovraelongazione
  - Tempo di Salita
  - Tempo di Assestamento
  - Costante di tempo
- Approssimazione a Poli Dominanti
- Ritardo

## Dominio di Laplace

- Criterio di Routh
- Luogo delle Radici
  - Coefficiente di Smorzamento
  - Pulsazione propria
  - Guadagno critico di anello
- Locazione dei Poli Dominanti
- Approssimazione Ritardo con polinomiale

## Dominio della Frequenza

- Sensitività complementare, Banda Passante
- FdT di Anello
- Frequenza di Attraversamento a 0 dB
- Funzione di Sensitività Margini di Stabilità
  - Margine di Guadagno
  - Margine di Fase
  - Grado di Robustezza (picco di sensitività)
- Ritardo di Fase



- Esercizi svolti nel testo di Bolzern

<https://www.mheducation.it/9788838668821-italy-fondamenti-di-controlli-automatici-4ed>

[https://www.youtube.com/watch?v=vVFDm\\_CdQw&list=PLA74601484F6994D8](https://www.youtube.com/watch?v=vVFDm_CdQw&list=PLA74601484F6994D8)

- Corso di Controlli del Prof. Gopal, IIT Dehli

<https://www.google.com/search?q=brian+douglas+lead&oq=brian+douglas+lead&aqs=chrome..69i57j0.8233j0j4&sourceid=chrome&ie=UTF-8>



# ASSEGNAMENTO POLI



- 1. Concetti Generali**
- 2. Equazione Diofantina**
- 3. Tecniche di Assegnamento Poli e Controllo nello Spazio di Stato**
- 4. Esempi**



# Riferimenti

- Capitoli 14 Testo di Bolzern
- Capitolo 10 Lewis (download)
- Capitoli 6, 7 (part) Murray  
(download)

Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.

Con. Avanzati

Con. Standard





# Requisiti di Controllo

## Stabilità in Condizioni nominali

- **Stabilità interna**
- Stabilità esterna
- Realizzazioni

## Stabilità in condizioni perturbate

- Sensitività a variazioni di parametri
- Stabilità relativa ad incertezze moltiplicative non strutturate
- Robustezza

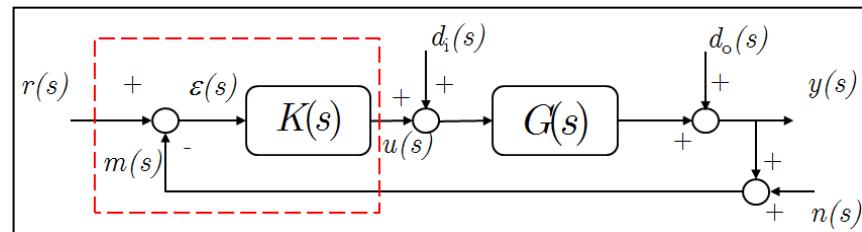
## Prestazioni nominali

- Precisione statica
  - Errore a regime
- Precisione dinamica
  - **Risposta transitoria al comando**
  - **Attenuazione dei disturbi**
  - Limite nella quantità di controllo

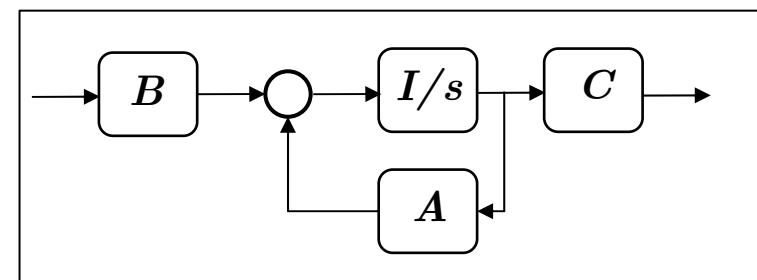
## Prestazioni in condizioni perturbate

- Precisione statica
- Precisione dinamica

- ## Le proprietà di stabilità e risposta transitoria sono gestite, nel dominio della frequenza, dai poli della funzione di trasferimento



- ## Le proprietà di stabilità e risposta transitoria sono gestite, nel dominio del tempo, dagli autovalori della matrice di sistema





# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

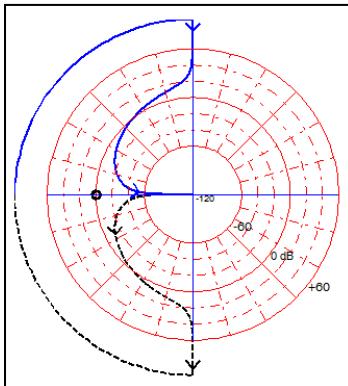
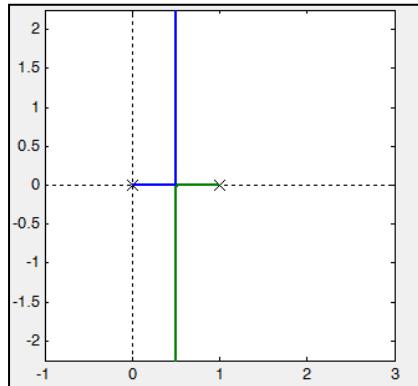
□ Progettare un controllore che garantisca l'errore nullo a regime per il sistema:

$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

- Sistema di Tipo 1
- Il sistema in anello chiuso è sempre instabile per qualsiasi valore del guadagno di anello

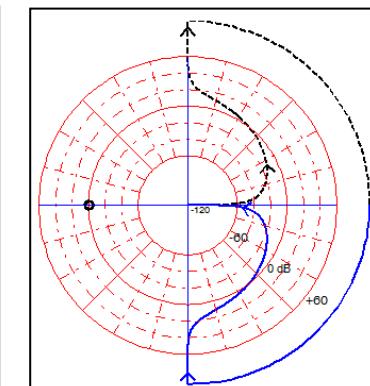
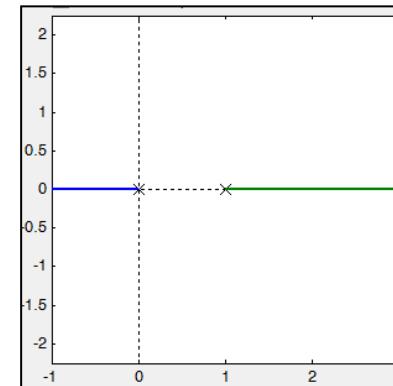
$$T(s) = \frac{k}{s^2 - s + k}$$

$$K > 0$$



$$Z=N+P=1+1=2$$

$$K < 0$$



$$Z=N+P=0+1=1$$



# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

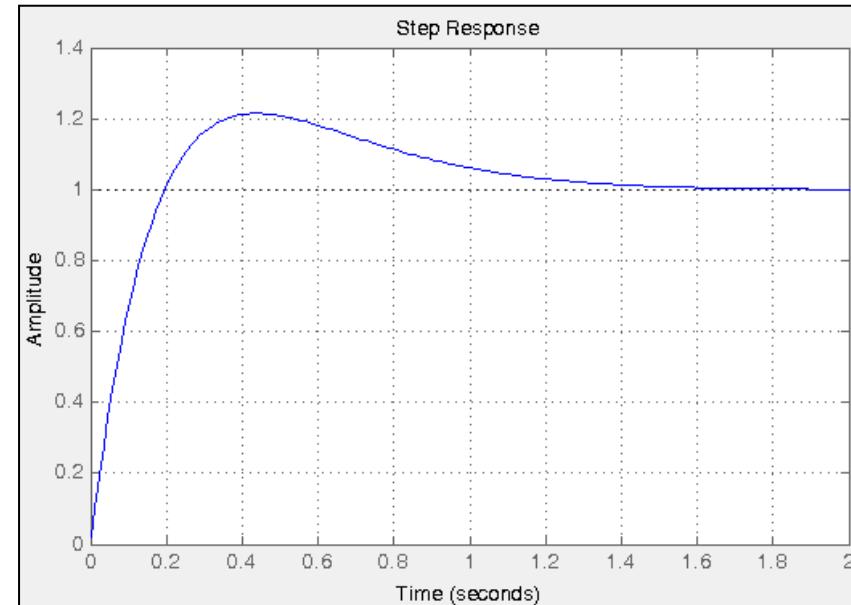
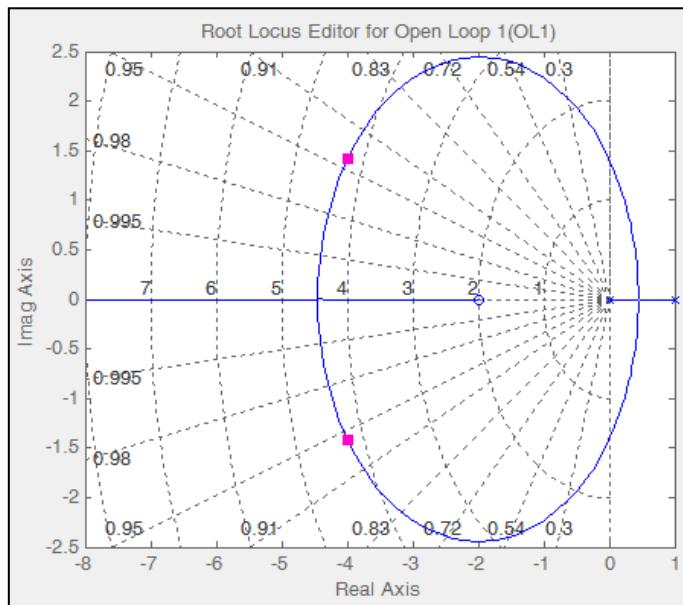
- Il controllore deve contenere uno zero dominante per attrarre i poli instabili nel semipiano di parte reale negativa (PD)

$$K(s) = k_1(s + k_2) \quad G(s)K(s) = \frac{k_1(s + k_2)}{s(s - 1)} \quad T(s) = \frac{k_1(s + k_2)}{s^2 + (k_1 - 1)s + k_1 k_2}$$

- Il guadagno  $k_2$  seleziona la posizione dello zero ( $k_2 > 0$ ) esempio  $k_2 = 2$ .
- Il guadagno  $k_1 > k_{\text{cr}} > 1$  specifica il guadagno di anello necessario per garantire la stabilità in anello chiuso

- Selezione  $k_1 = 9$

$$T(s) = \frac{9(s + 2)}{s^2 + 8s + 18}$$



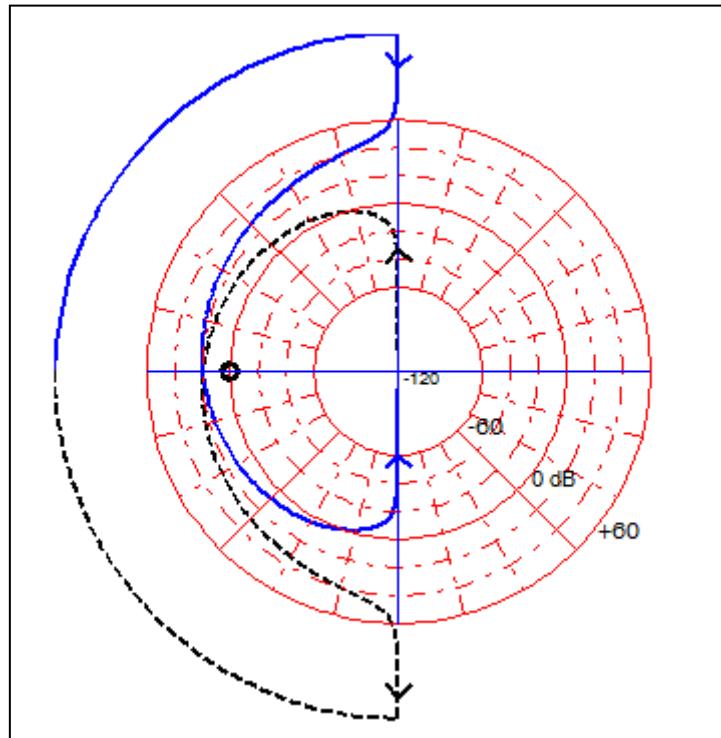


## Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

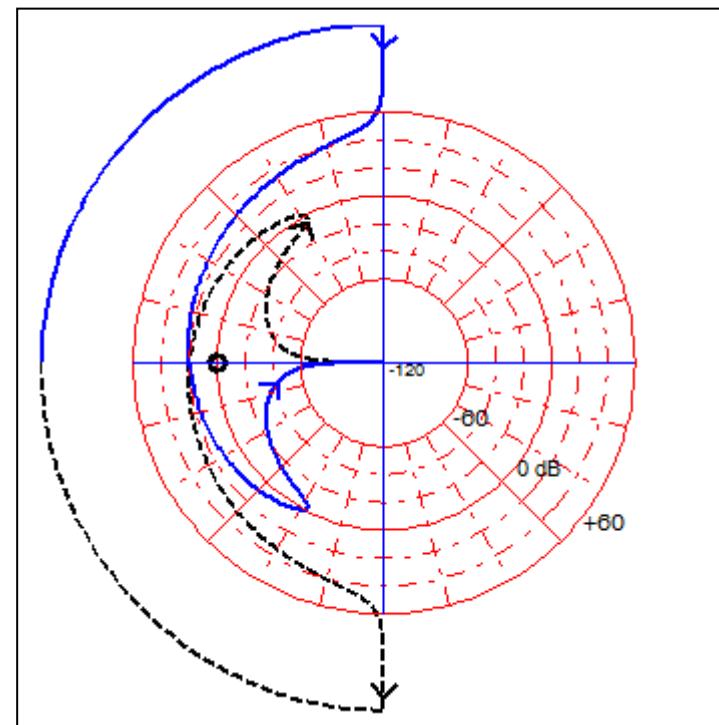
- Il controllore deve essere reso causale mediante la presenza di un polo fuori banda

$$K(s) = k_1(s + k_2) = 9(s + 2)$$

$$K(s) = k \frac{k_1(s + k_2)}{(s + P)} = 10 \frac{9(s + 2)}{\left(1 + \frac{s}{50}\right)}$$



$$Z = N + P = -1 + 1 = 0$$

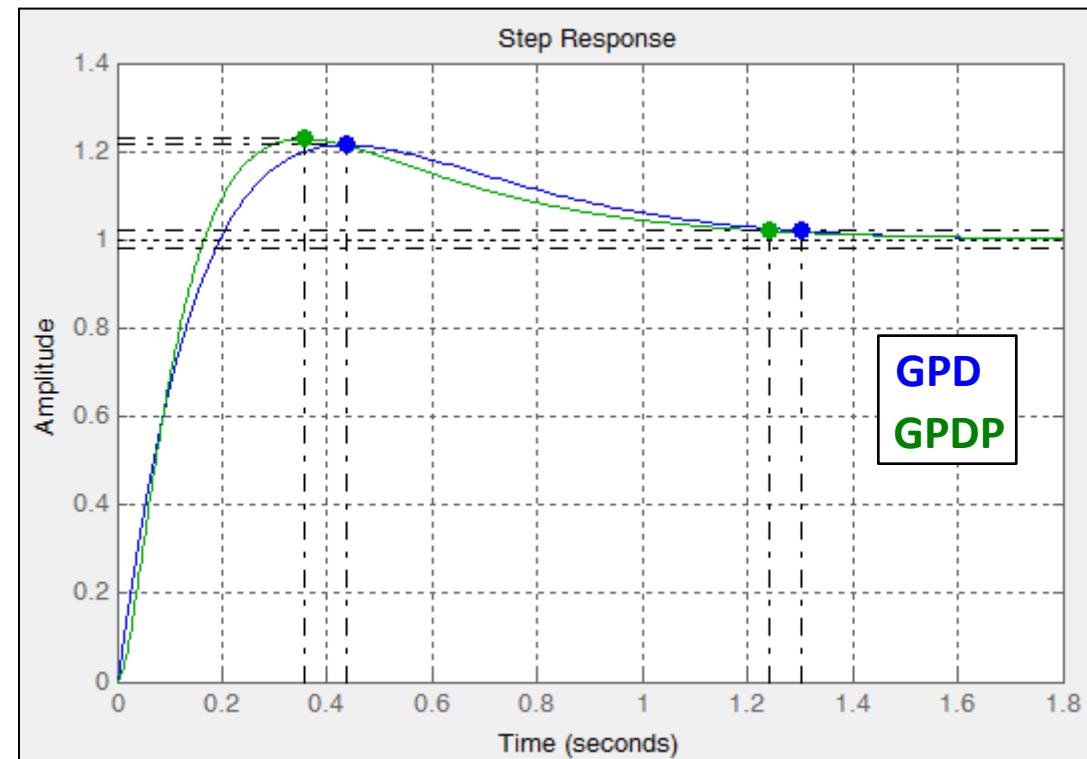
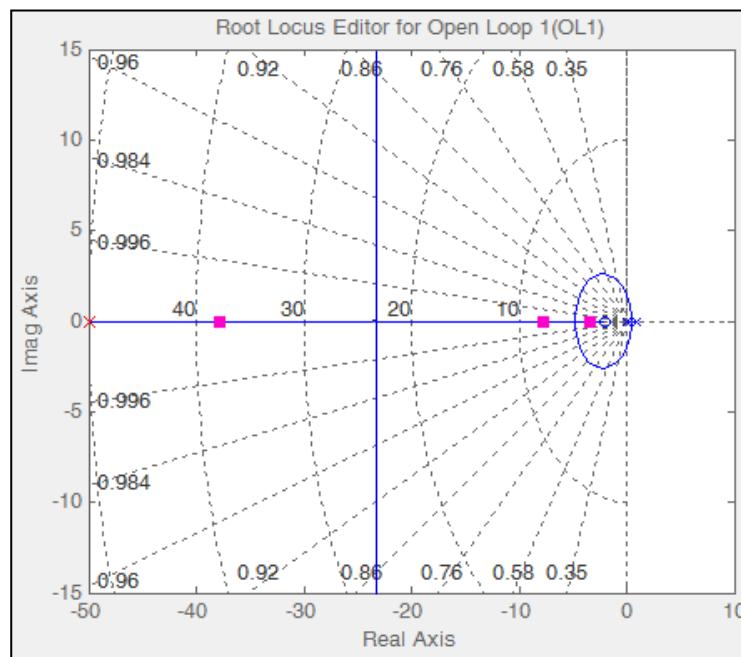


$$Z = N + P = -1 + 1 = 0$$



## Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- La scelta del polo e del guadagno di anello è fatta per mantenere il tempo di salita e la sovraelongazione del controllore PD puro (scelta di progetto)

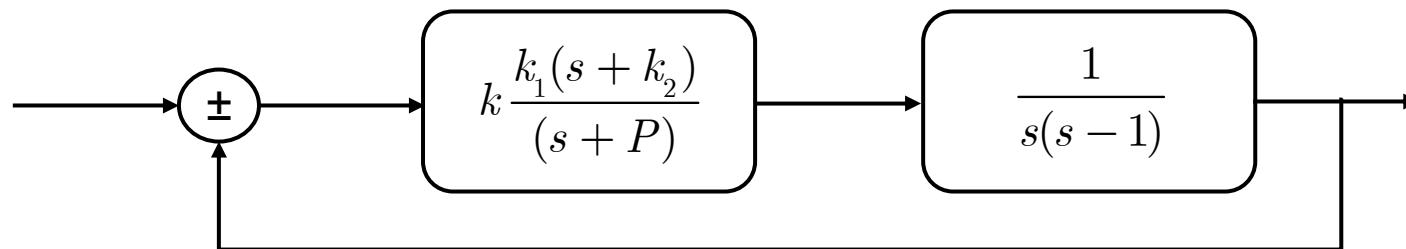


- Nota:** altre scelte di progetto sono possibili ed influenzano la locazione del polo ed il guadagno di anello.



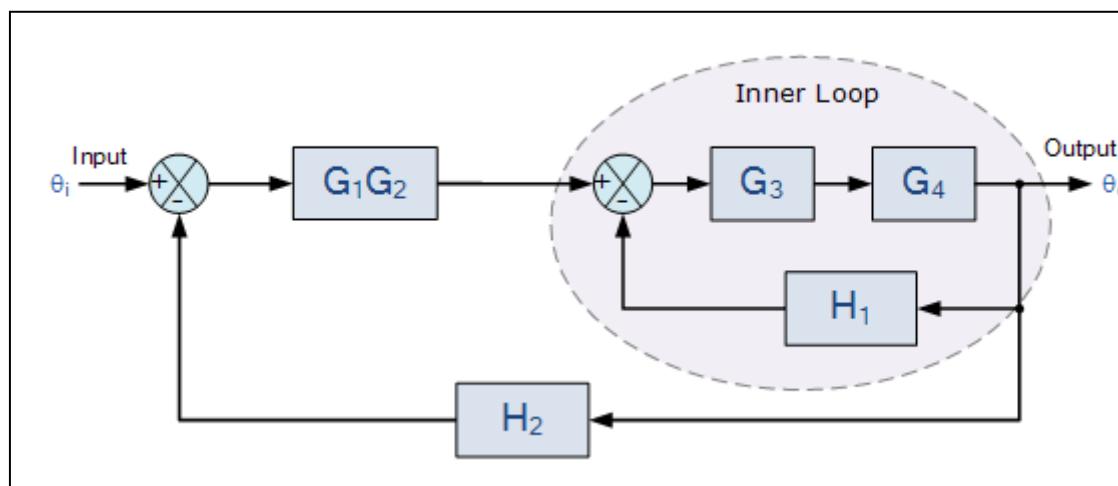
# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Struttura finale del sistema controllato:



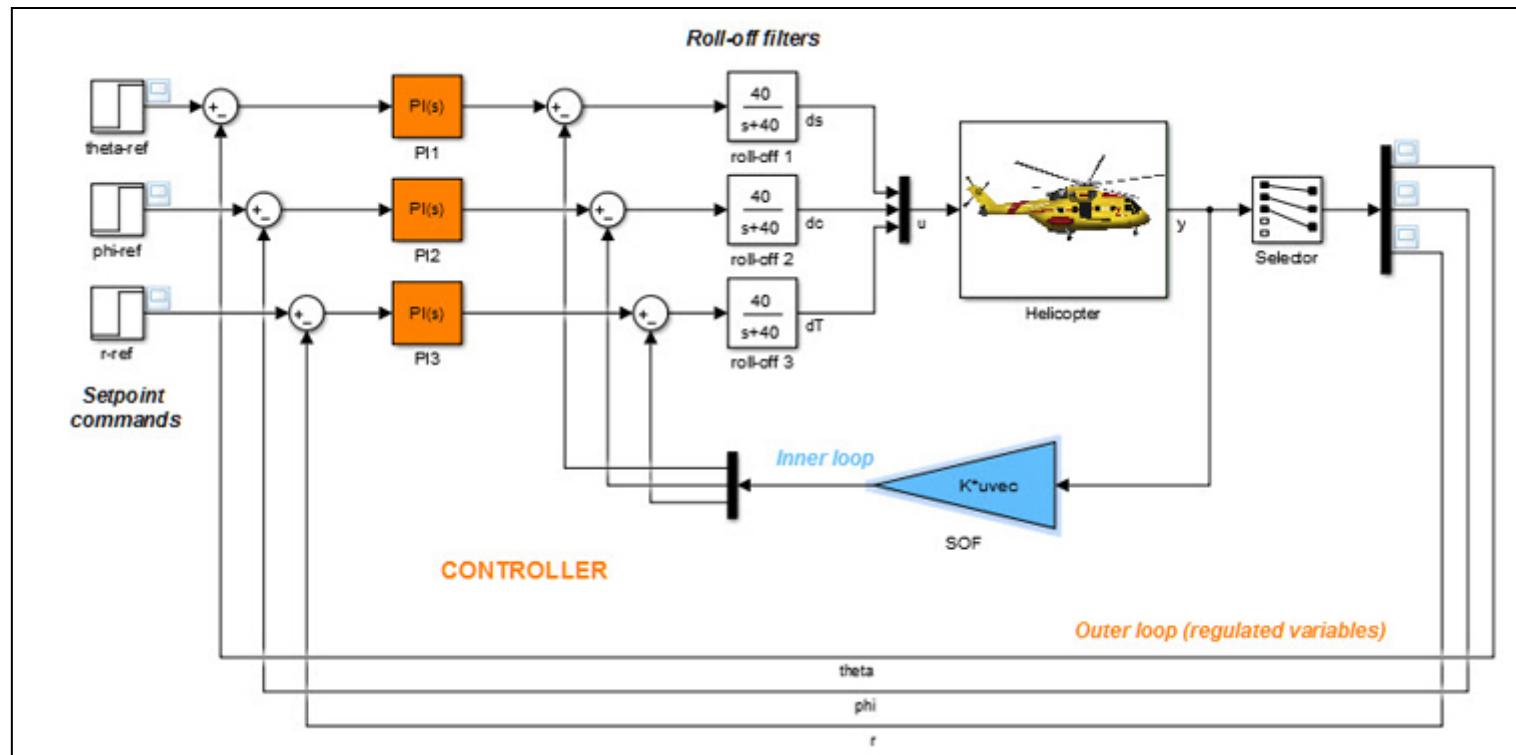
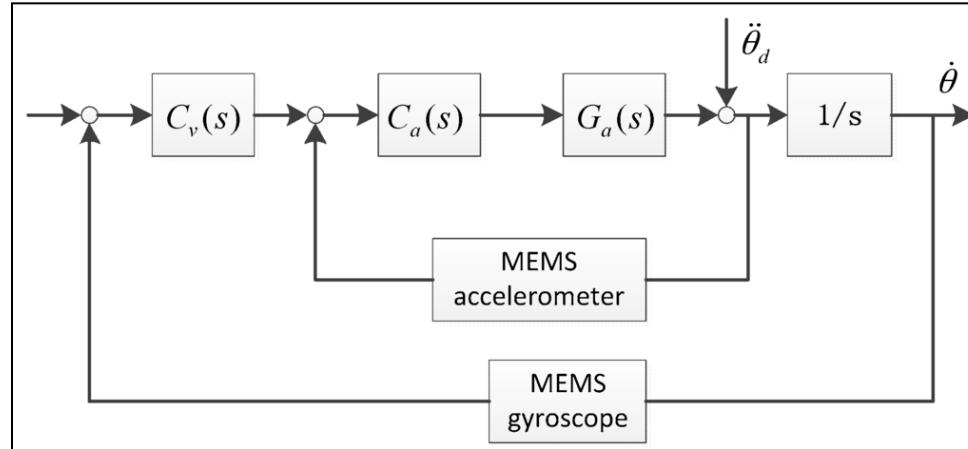
## □ Struttura alternativa di controllo mediante anelli multipli

1. Riduzione della complessità del controllore
2. Risparmio energetico di ciascuna componente
3. Sottosistemi operanti in bande di frequenza diverse
4. Richiesta di misure addizionali





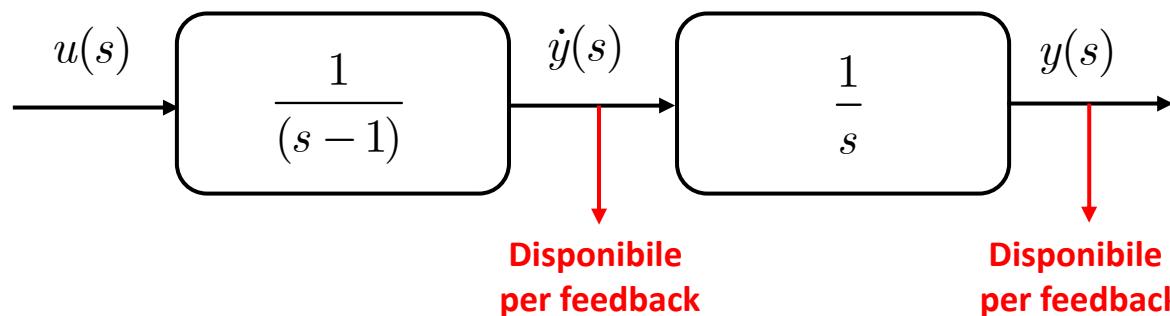
# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo



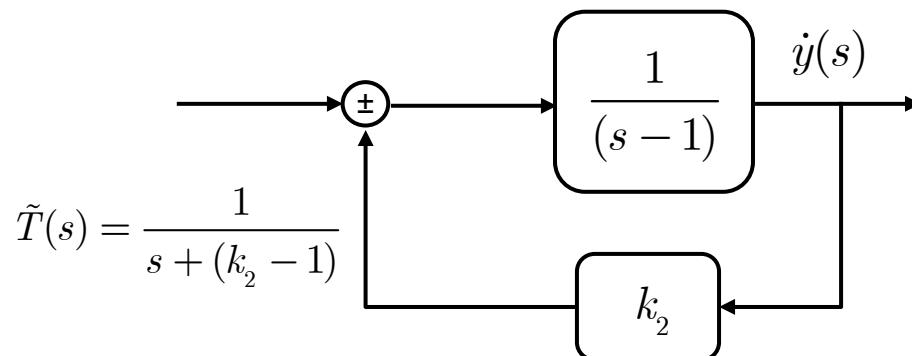


# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

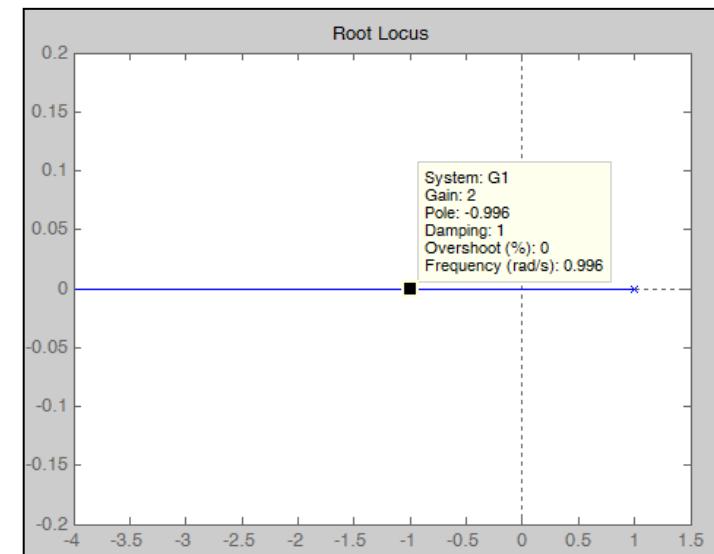
$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)} = G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{(s-1)} \cdot \frac{1}{s}$$



- Progetto di un controllore interno per stabilizzare il primo sottosistema  $G_1(s)$



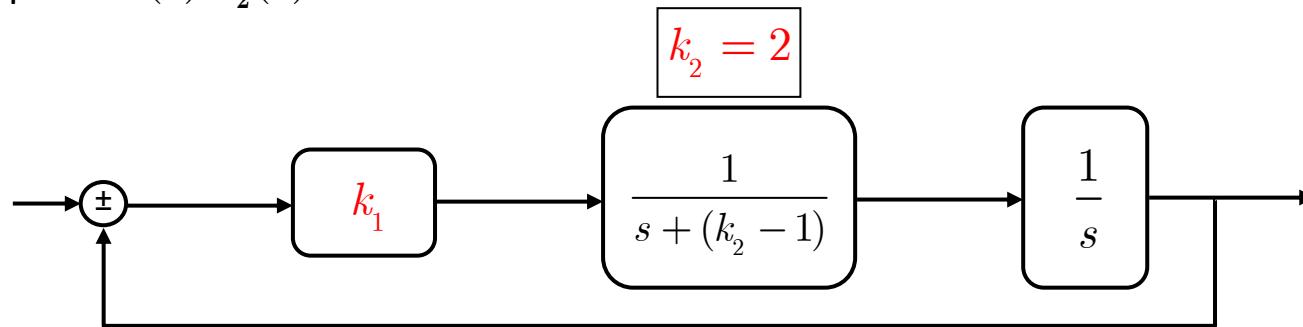
$$k_2 > k_{2CR} = 1; k_2 = 2 \Rightarrow P = -1$$





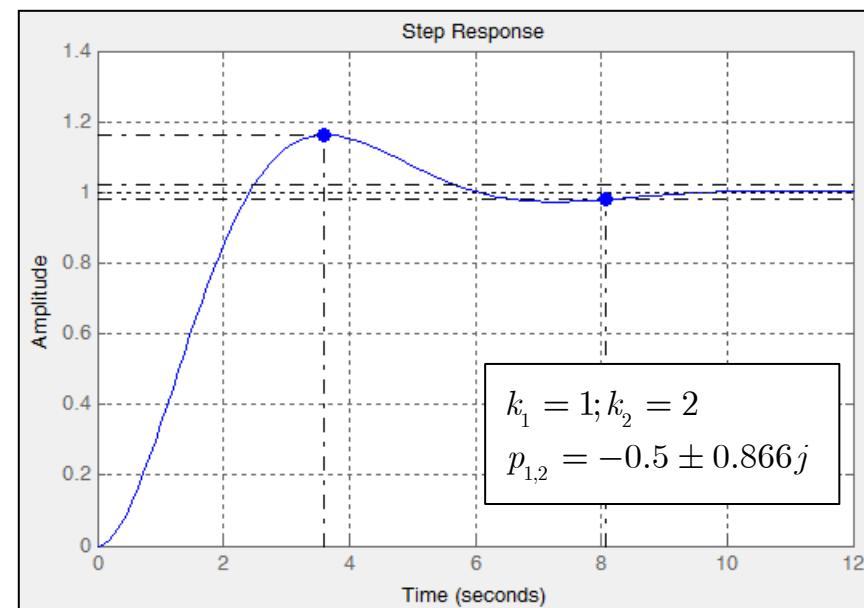
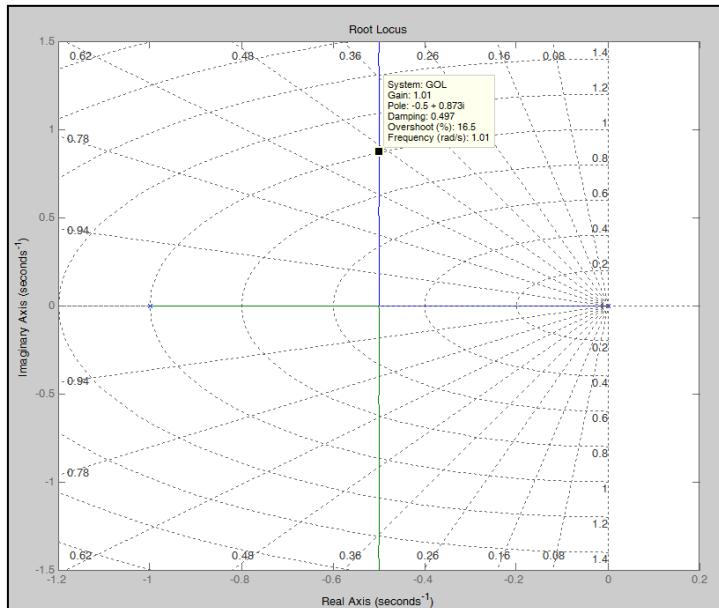
# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Progetto del controllore esterno in retroazione unitaria per stabilizzare il sistema completo  $\tilde{T}(s)G_2(s)$



$$G(s)K(s) = \frac{k_1}{s[s + (k_2 - 1)]}$$

$$\tilde{T}(s) = \frac{k_1}{s^2 + (k_2 - 1)s + k_1}$$

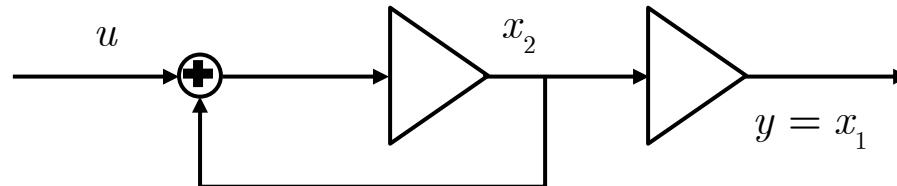




# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

## □ Consideriamo una rappresentazione nello spazio di stato del sistema di partenza

- Il sistema è sia controllabile che osservabile (non vi sono cancellazioni)
- Uso dei diagrammi analogici per il calcolo di una realizzazione minima



$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u = Ax + Bu \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x = Cx\end{aligned}$$

- Nota:
  - Essendo il sistema controllabile ed osservabile, gli autovalori sono uguali ai poli della Funzione di Trasferimento (0, +1)

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{x}_1 \Rightarrow x_2 = \frac{dy}{dt} \end{cases}$$

### ■ Ipotesi di lavoro:

1. Il vettore di stato è disponibile per la retroazione (osservabilità)\*
2. Il controllore ha la forma:
$$u = -Kx + r$$
3. La matrice K è una matrice costante, nell'esempio 1x2,  $K = [k_1, k_2]$



## Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Chiusura dell'anello con il controllore scelto precedentemente

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx + r) = (A - BK)x + Br = A_{CL}x + Br$$

$$A_{CL} = (A - BK)$$

- Nell'esempio considerato:

$$A_{CL} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & 1 - k_2 \end{bmatrix}$$

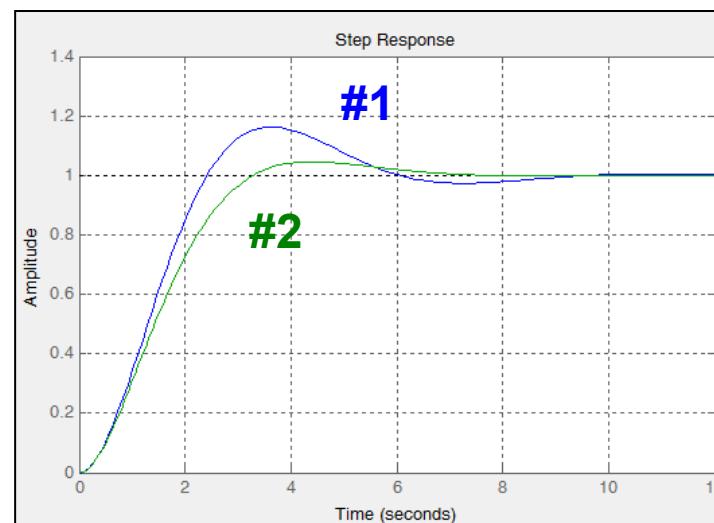
- Calcolo degli autovalori in anello chiuso  $\det(\lambda I - A_{CL}) = \lambda^2 + (k_2 - 1)\lambda + k_1 = 0$   
 $k_2 > 1, k_1 > 0$

- Esempio #1:

$$-0.5 \pm 0.866j \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2$$

- Esempio #2:

$$[\xi = 0.7, \omega_n = 1] \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2.4$$

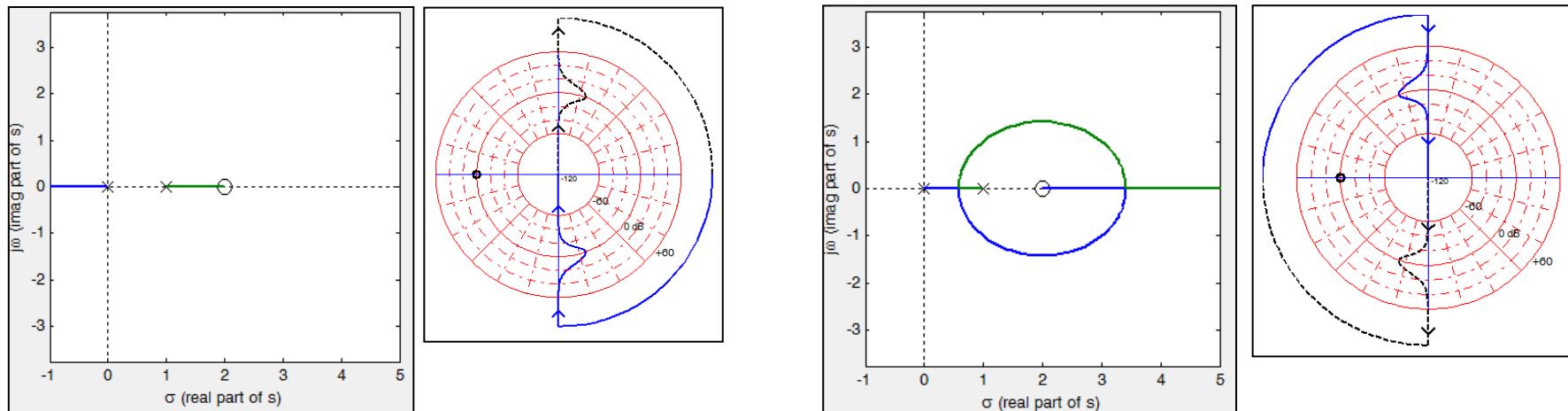




## Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Progettare un controllore che garantisca l'errore nullo a regime per il sistema instabile e a fase non minima:

$$G(s) = \frac{s - 2}{s(s - 1)}$$

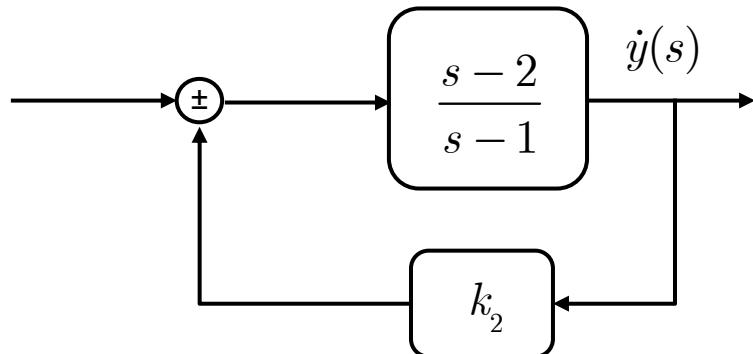


- Un controllore singolo standard non riesce a stabilizzare il sistema



## Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

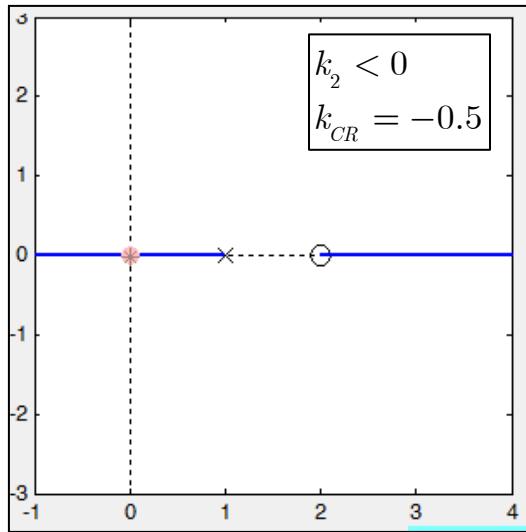
### □ Approccio ad anelli multipli (anello interno stabilizzante)



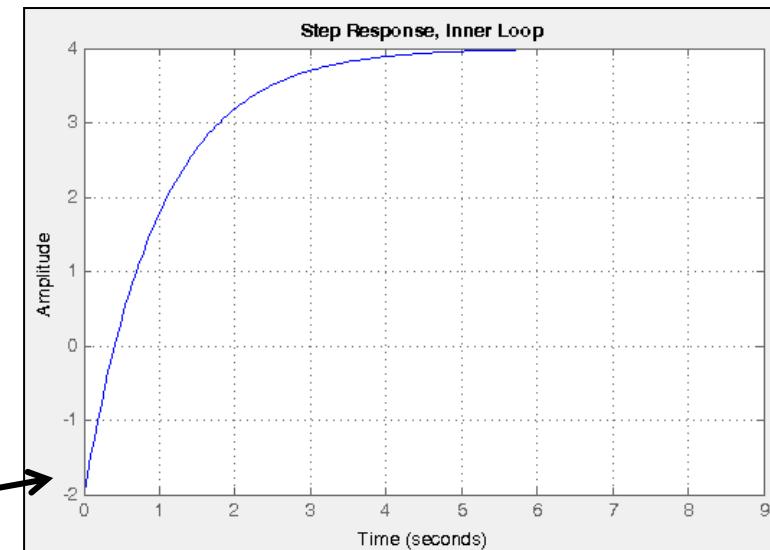
$$\tilde{T}(s) = \frac{s - 2}{(1 + k_2)s - (1 + 2k_2)}$$

- Esempio:  $k_2 = -2/3$

$$\tilde{T}(s) = \frac{3(s - 2)}{s + 1}$$



Nota il contributo di fase non minima!

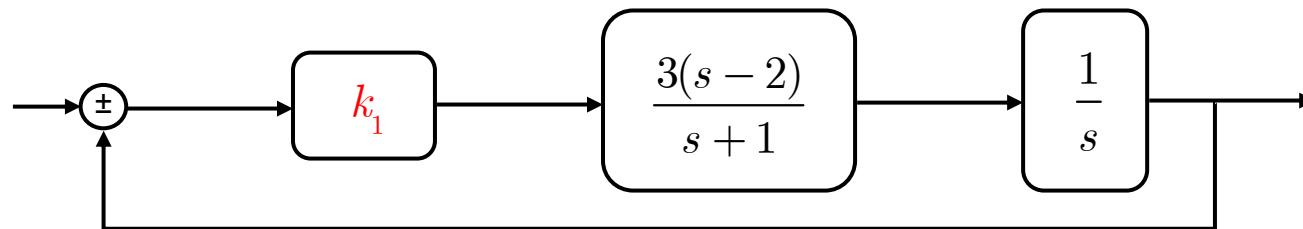




## Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

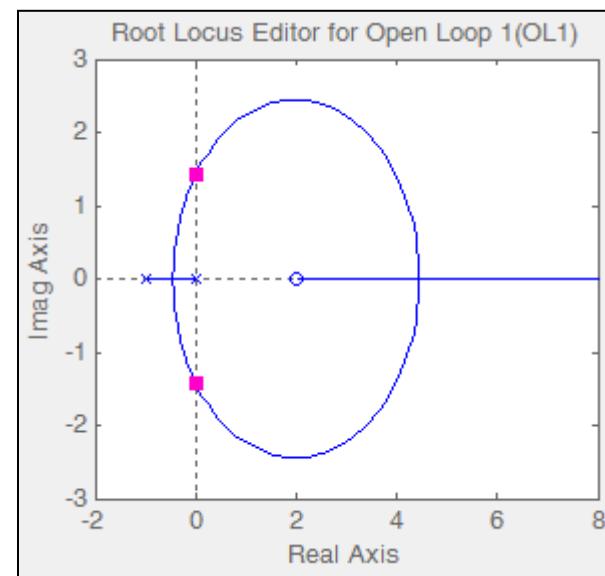
- Approccio ad anelli multipli (anello esterno)

$$k_2 = -\frac{2}{3} \quad \tilde{T}(s) = \frac{s-2}{(1+k_2)s - (1+2k_2)}$$



$$T(s) = \frac{3k_1(s-2)}{s^2 + (1+3k_1)s - 6k_1}$$

$$\begin{aligned} k_1 &< 0 \\ k_{1CR} &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

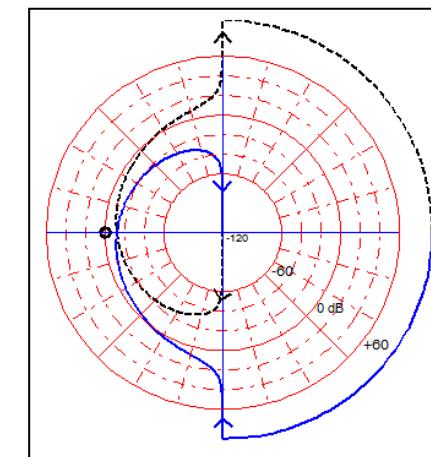
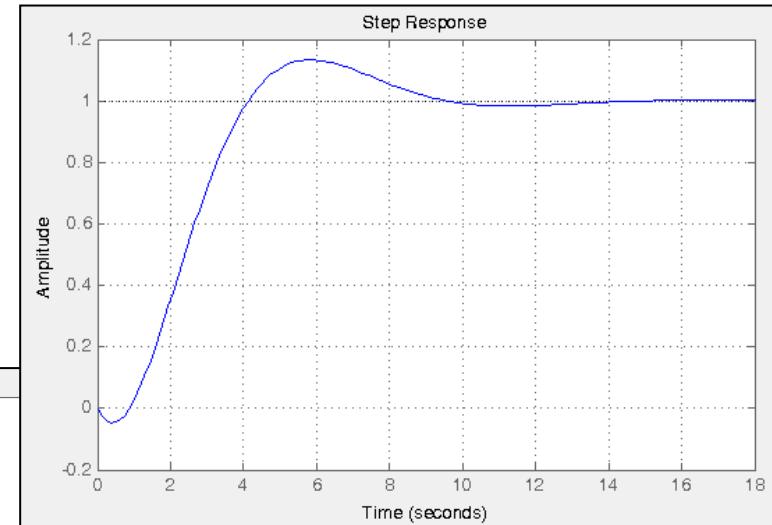
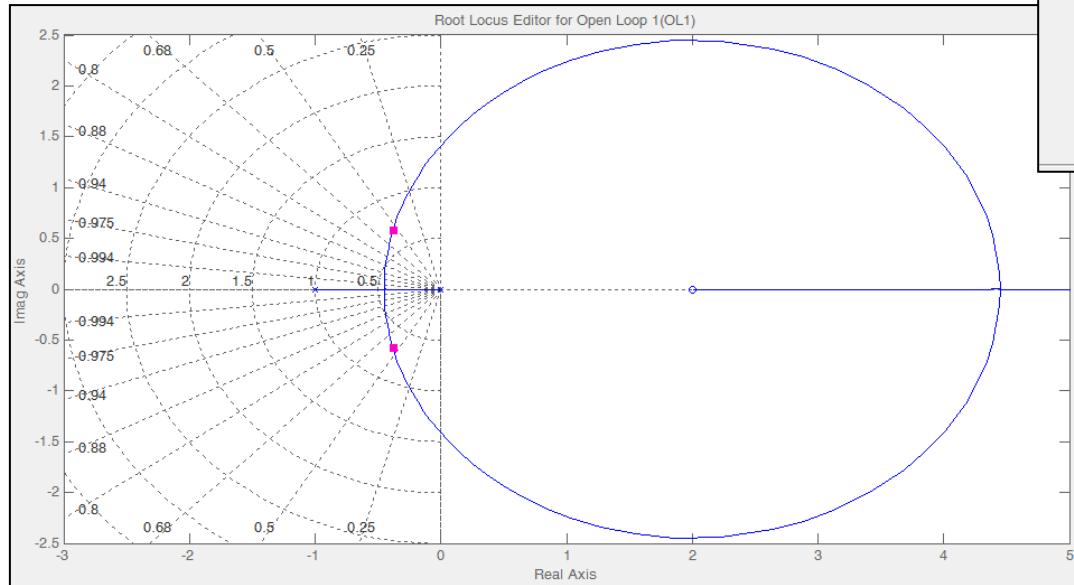




# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Esempio numerico con  $k_1 = -0.08$

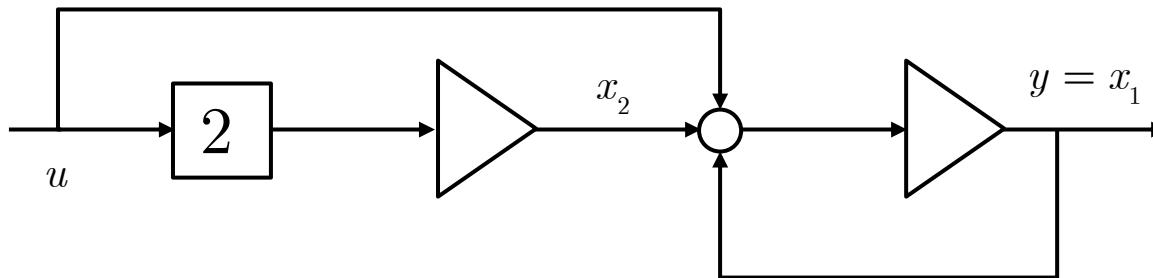
$$T(s) = \frac{-0.24(s - 2)}{s^2 + 0.76s + 0.48}$$





# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Uso della rappresentazione nello spazio di stato



$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}u = Ax + Bu & \dot{x} &= (A - BK)x + Br = A_{CL}x + Br \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x = Cx & A_{CL} &= (A - BK)\end{aligned}$$

- Calcolo degli autovalori in anello chiuso

$$\det(\lambda I - A_{CL}) = \lambda^2 + (2k_2 - 1 + k_1)\lambda - 2(k_1 + k_2) = 0$$

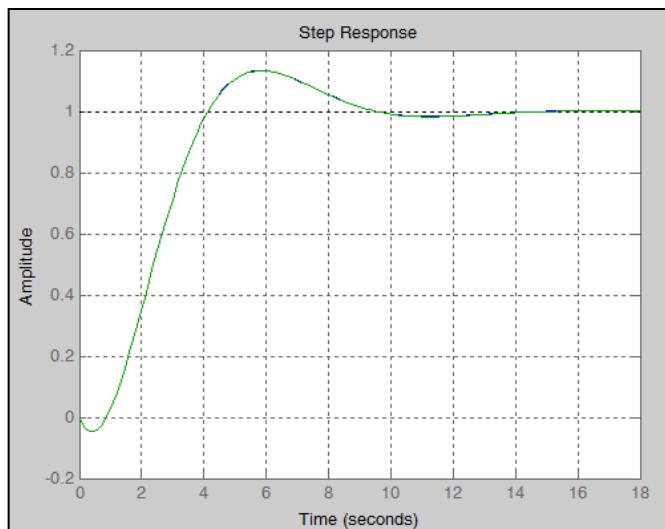
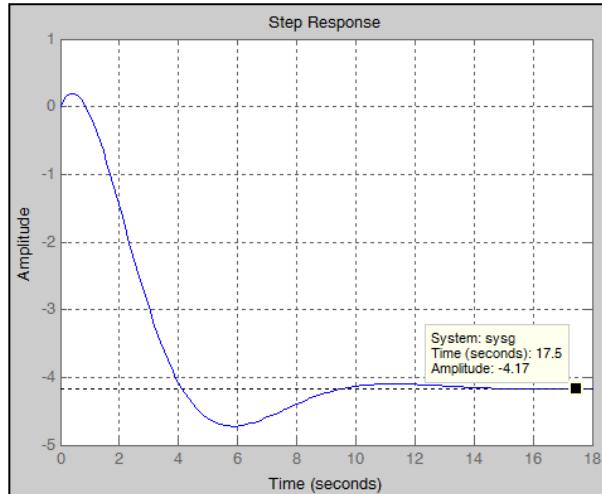
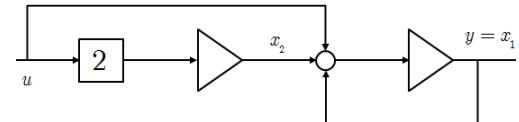
$$s^2 + 0.76s + 0.48 \Rightarrow K = [-2.24, 2]$$

- FdT in anello chiuso

$$G_{CL}(s) = C(sI - A_{CL})^{-1}B = \frac{s - 2}{s^2 + 0.76s + 0.48}$$

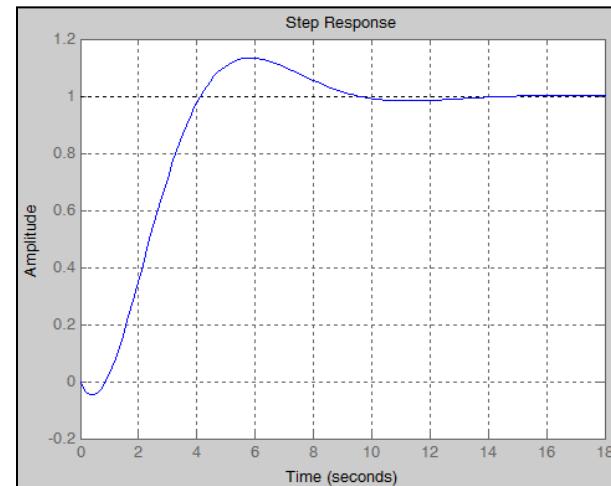


# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo



- Considerazioni:
  - Transitorio corretto
  - Segno (zero a fase non minima)
  - Regime

- Uso di un prefiltro:
  - $G_{\text{PRE}} \approx -1/4.1667$



- Le due risposte al gradino coincidono



# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Dato il sistema:

$$G(s) = \frac{40(s + 5)(s - 2)}{s(s + 1)(s + 4)(s + 10)(s - 10)}$$

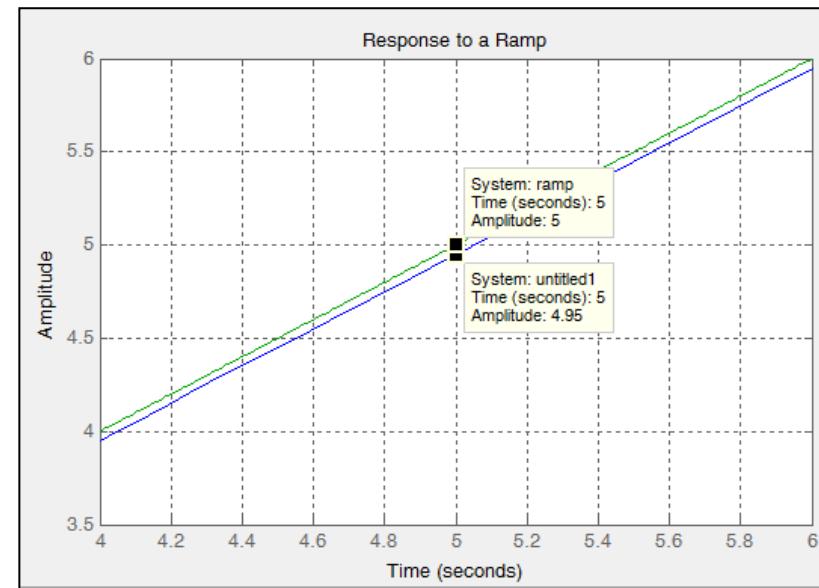
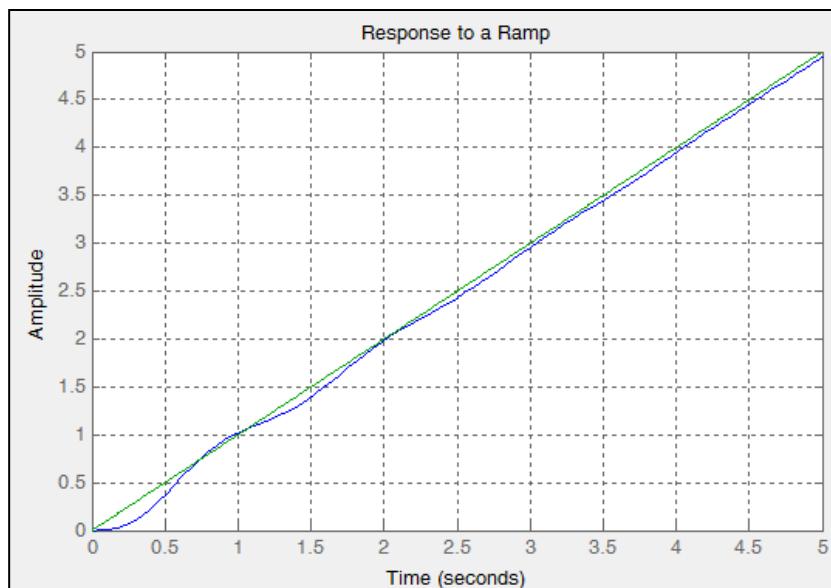
- Errore a regime alla rampa < 5%
- Tempo di assestamento  $\approx 5$  secondi
- Margine di fase  $\approx 50^\circ$

- Dai requisiti di risposta transitoria:  $\xi = 0.5, \omega_n = 1.6$

- Dai requisiti di risposta a regime alla rampa:  $k \geq 12$

$$G_{DES}(s) = \frac{2.56k}{s^2 + 1.6s + 2.56k}$$

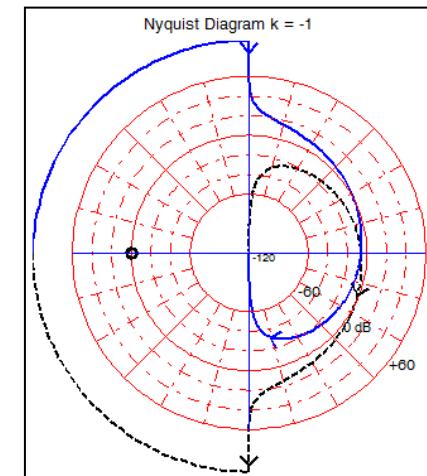
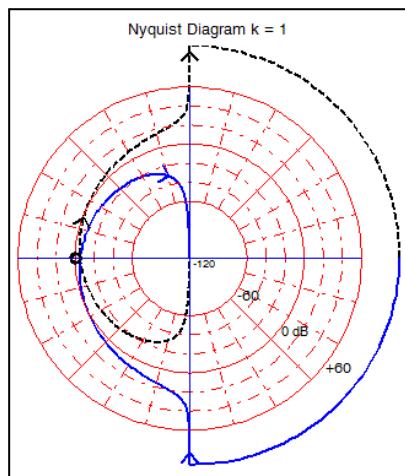
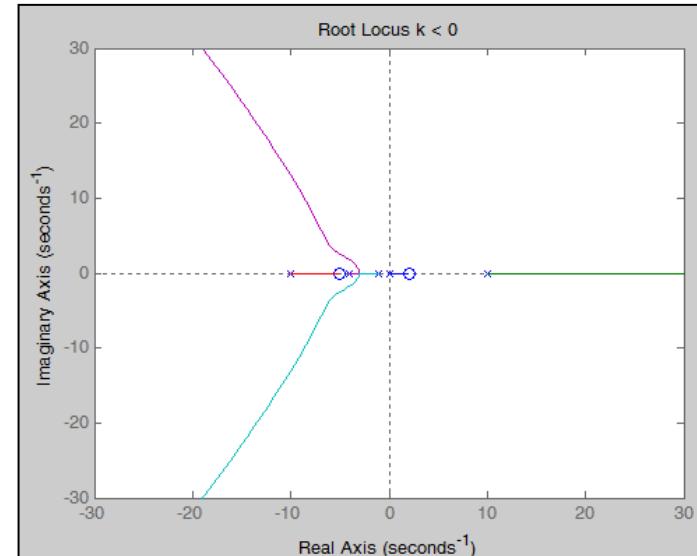
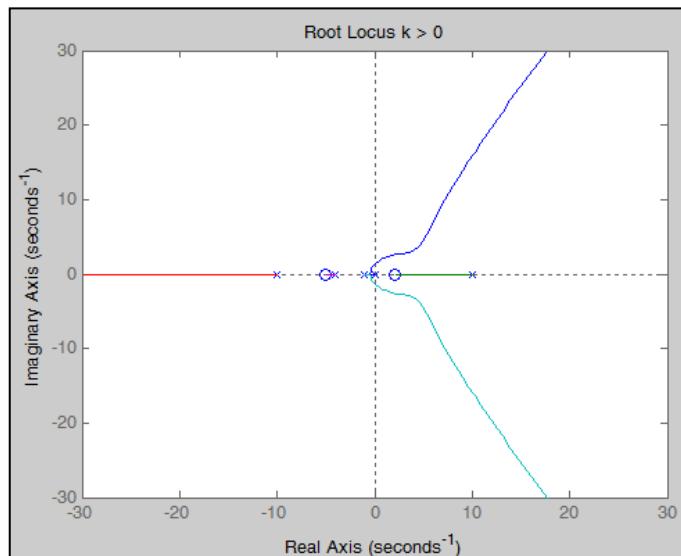
- **Nota:** un controllore proporzionale varia i requisiti di risposta transitoria se rispetta quelli di regime





# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Poli in ciclo chiuso target:  $G_{DES}(s) = \frac{30.72}{s^2 + 1.6s + 30.72} \Rightarrow -0.8 \pm j5.48$





# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Rappresentazione nello spazio di stato del sistema:

```
N=[40 120 -400]  
D=[1 5 -96 -500 -400 0]  
[a,b,c,d]=tf2ss(N,D)
```

```
a =  
  
-5    96    500    400    0  
 1     0     0     0     0  
 0     1     0     0     0  
 0     0     1     0     0  
 0     0     0     1     0  
  
b =  
  
1  
0  
0  
0  
0  
  
c =  
  
0     0     40    120   -400  
  
d =  
  
0
```

- Selezione poli desiderati in anello chiuso:

```
pdes =  
  
-0.8000 + 5.4800i  
-0.8000 - 5.4800i  
-30.0000 + 0.0000i  
-40.0000 + 0.0000i  
-50.0000 + 0.0000i
```

- Scelta del controllore per ottenere i poli desiderati:

```
k=place(a,b,pdes)
```

```
>> k'  
  
ans =  
  
1.0e+06 *  
  
0.0001  
0.0050  
0.0717  
0.2406  
1.8402
```

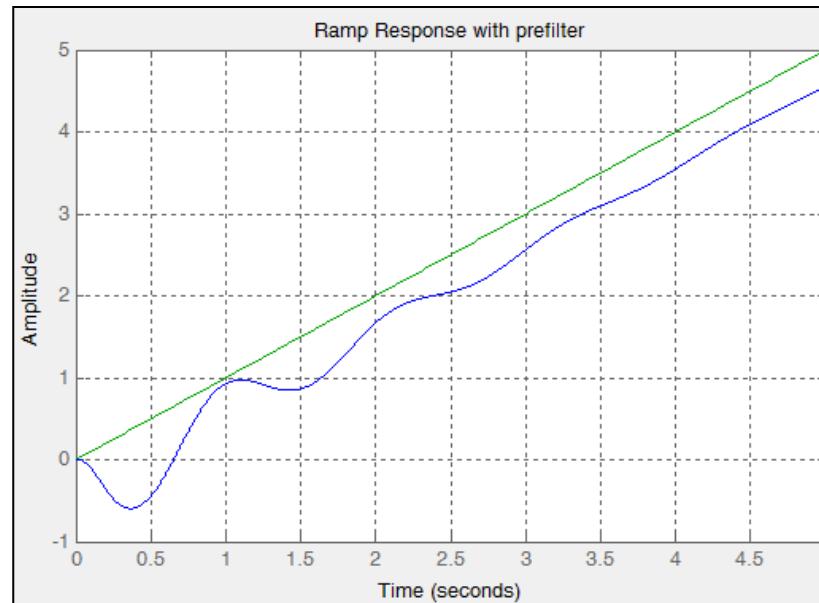
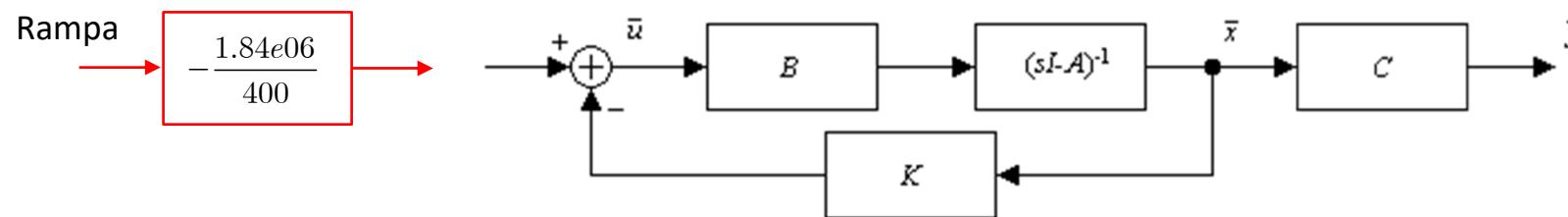
$$u = -Kx + r$$



# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- FdT in anello chiuso:

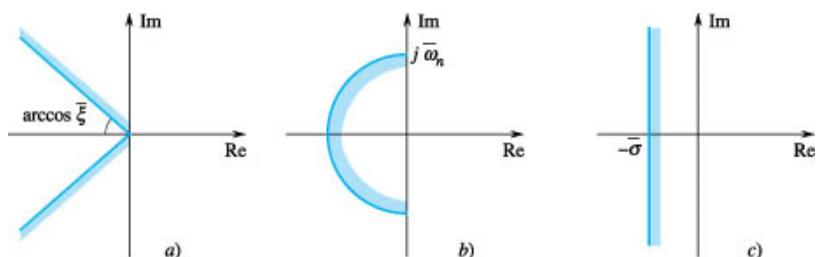
$$\frac{40 s^2 + 120 s - 400}{s^5 + 121.6 s^4 + 4923 s^3 + 7.12e4 s^2 + 2.402e5 s + 1.84e6}$$





## Assegnamento Poli/Autovalori

- La tecnica dell'assegnamento dei poli è un metodo di progetto di controllore utilizzabile quando il sistema considerato risulta **controllabile** (in misura minore stabilizzabile)
- La tecnica permette di poter gestire completamente le caratteristiche transitorie in ciclo chiuso, specificandone la locazione nel piano complesso.
- La scelta dei poli è basata sulla risposta transitoria e/o della risposta in frequenza (velocità di risposta, sovraelongazione, larghezza di banda).

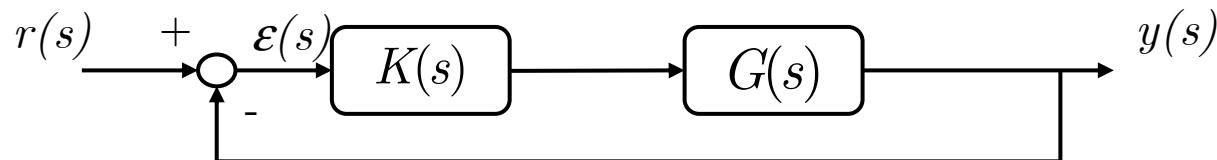


1. Sovraelongazione  $\rightarrow M_P \rightarrow \xi \rightarrow$  Margine Fase
2. Velocità di risposta  $\rightarrow \xi \bar{\omega}_n \rightarrow \omega_{BW}$

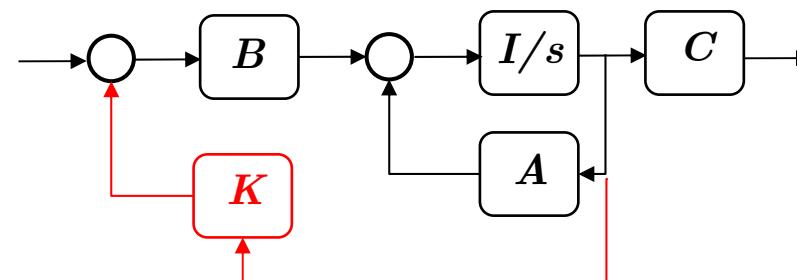


# Assegnamento Poli

- La tecnica di assegnamento dei poli può essere implementata sia nel dominio della frequenza, che nel dominio del tempo
  - L'approccio frequenziale richiede anche la **osservabilità** del sistema e si basa sulla soluzione dell'equazione Diofantina, la sua valenza applicativa è per sistemi SISO



- L'approccio nel dominio del tempo è generale e vale per sistemi SISO e MIMO indifferentemente.





## Assegnamento Poli - Eq. Diofantina

- Supponiamo che sia la  $G(s)$  che la  $K(s)$  siano realizzazioni minime\*, si ha:

$$G_{OL}(s) = G(s) \cdot K(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot \frac{N_k(s)}{D_k(s)} \quad G_{CL}(s) = \frac{N(s)N_k(s)}{N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s)}$$

- Si vuole calcolare il numeratore ed il denominatore del controllore  $K(s)$ , dato noto il polinomio in ciclo chiuso  $D_{CL}(s)$ . Ovvero:

$$D_{CL}(s) = N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s) \Rightarrow [N_k(s), D_k(s)]?$$

\* **Nota:** Si può dimostrare che essa ammette un'unica soluzione per ogni generica  $D_{CL}(s)$  se e solo se  $N(s)$  e  $D(s)$  sono primi fra loro



## Assegnamento Poli - Eq. Diofantina

- Dall'equazione Diofantina si può dedurre che:

$$D_{CL}(s) = N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s) \Rightarrow [N_k(s), D_k(s)]?$$

- se si vuole che  $D_{CL}(s)$  non contenga dei termini di  $D(s)$ , tali termini devono essere presenti anche nella  $N_k(s)$  e si hanno cancellazioni fra i poli del sistema e zeri del regolatore.
- se si vuole che  $D_{CL}(s)$  non contenga dei termini di  $N(s)$ , tali termini devono essere presenti anche nella  $D_k(s)$  e si hanno cancellazioni fra gli zeri del sistema e i poli del regolatore.
- se il sistema presenta zeri a parte reale positiva, tali zeri devono comunque comparire anche nella  $G_{CL}(s)$  perché, altrimenti, sarebbero cancellati da un polo del controllore che però, in tal caso, risulterebbe instabile.
- L'ordine di  $D_{CL}(s)$  è dato dall'ordine del termine  $D(s)D_k(s)$  (per la causalità dei sistemi l'ordine dei denominatori è maggiore uguale a quella dei nominatori).
- La struttura risultante del controllore è quella di un filtro passa banda, oppure a sella



## Assegnamento Poli - Eq. Diofantina

□ **Esempio:**

$$G(s) = \frac{0.1}{s(s-1)}$$

- Realizzare un controllore tale che il sistema a ciclo chiuso abbia un errore di risposta alla rampa pari a zero.
- l'equazione diofantina può essere applicata in quanto numeratore e denominatore del sistema sono primi fra loro.

Il regolatore deve avere un polo nell'origine; poiché poi il sistema da controllare è instabile, per garantire la stabilità del sistema a ciclo chiuso, il controllore deve essere almeno di ordine 2 e, per quanto visto, l'ordine della  $D_{CL}(s)$  deve essere almeno pari a 4

Poniamo come scelta di progetto il requisito di risposta transitoria :

$$D_{CL}(s) = (s+1)^4$$

- Il denominatore del regolatore ha la forma

$$D_k(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$
$$D_k(s) = a_2 s^2 + a_1 s$$



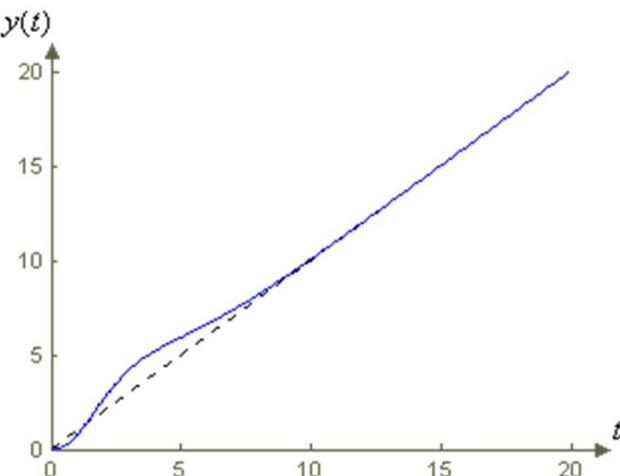
## Assegnamento Poli - Eq. Diofantina

- Scegliamo il numeratore di ordine 2 (Controllore proprio):

$$N_k(s) = b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

$$\begin{aligned} D_{CL}(s) &= N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow (s+1)^4 &= 0.1 \cdot (b_2 s^2 + b_1 s + b_0) + s(s-1) \cdot (a_2 s^2 + a_1 s) \Rightarrow \\ \Rightarrow s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 &= a_2 s^4 + (a_1 - a_2) s^3 + (0.1 b_2 - a_1) s^2 + 0.1 b_1 s + 0.1 b_0 \Rightarrow \\ &\begin{cases} a_2 = 1 \\ a_1 = 4 + a_2 = 5 \\ b_2 = 10(6 + a_1) = 110 \\ b_1 = 10 \cdot 4 = 40 \\ b_0 = 10 \cdot 1 = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

$$K(s) = 10 \frac{11s^2 + 4s + 1}{s(s+5)} \quad -0.18 \pm 0.24j$$



**SISOTOOL-SIMULINK**



## Assegnamento Poli - Eq. Diofantina

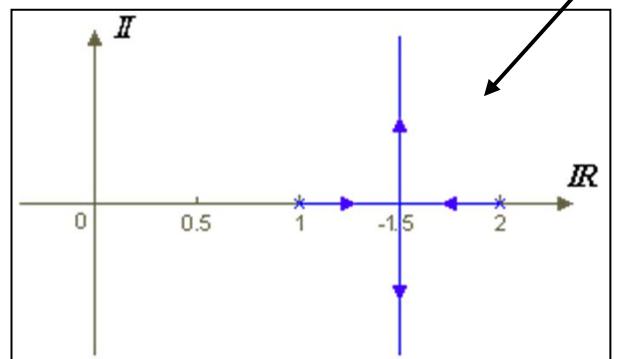
### □ Esempio:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}x \end{cases}$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 15 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_u^x(s) = (sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{5}{s^2 - 3s + 2} & \frac{5s}{s^2 - 3s + 2} \end{bmatrix}^T$$

$$G_u^y(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{5}{s^2 - 3s + 2}$$



- Si vuole realizzare un regolatore tale che i poli dominanti del sistema controllato

$$\xi = 0.5 \\ T_{a2} \leq 2 \text{ s} \quad \omega_n \geq 4$$



## Assegnamento Poli - Eq. Diofantina

- Le specifiche precedenti si possono riscrivere come:

$$\begin{cases} \xi = 0.5, \quad T_{a2} \cong \frac{4}{\xi \omega_n} = 2 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{2}{\xi} = 4 \text{ rad / s.} \\ s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 4s + 16 \end{cases}$$

Poiché il sistema da controllare è di ordine 2 e il controllore deve essere almeno di ordine 1 (**con un regolatore proporzionale non è possibile stabilizzare il sistema**), il sistema a ciclo chiuso è di ordine 3; i due poli dominanti sono quelli desiderati mentre il terzo verrà posto a frequenze fuori banda (es.  $s = -10$ )

$$D_{CL}(s) = (s + 10)(s^2 + 4s + 16)$$

$$D_k(s) = (a_1 s + a_0) \quad N_k(s) = (b_1 s + b_0)$$

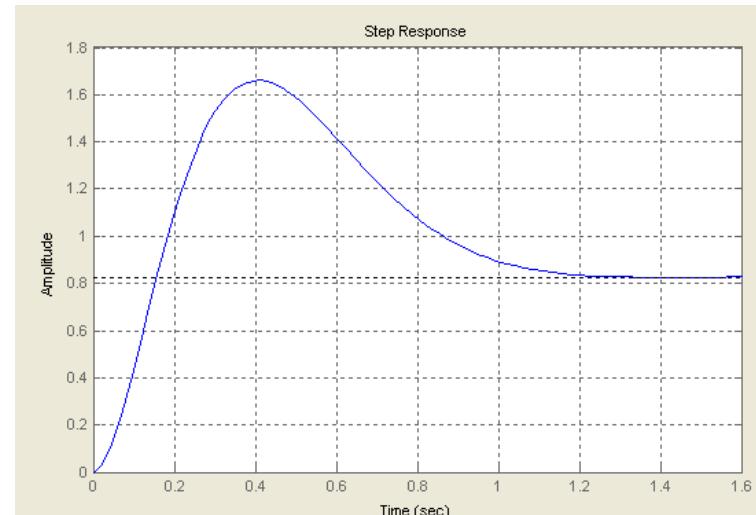
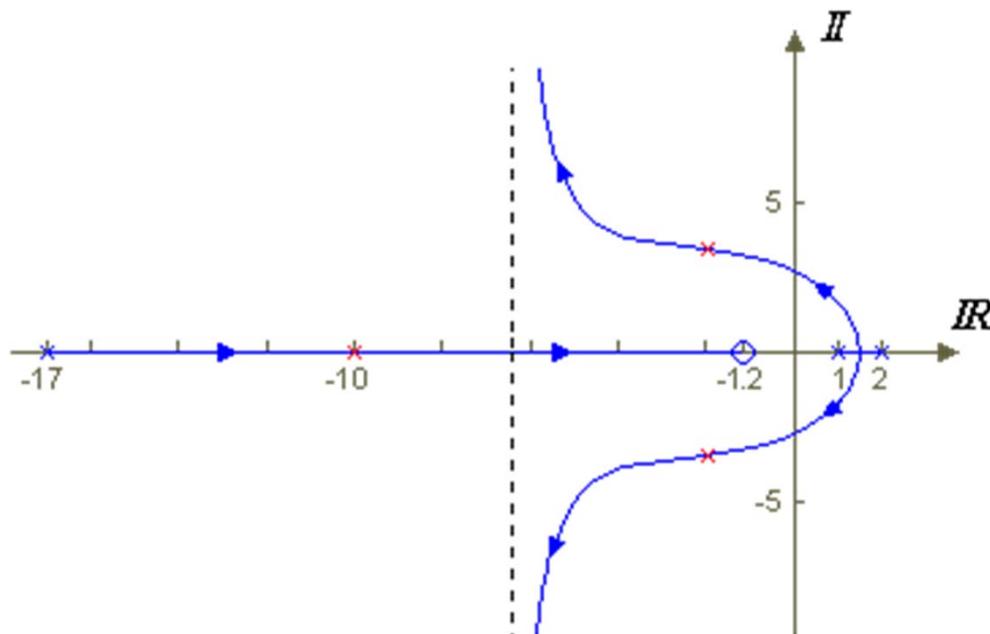
$$\begin{aligned} D_{CL}(s) &= N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_0 = 14 + 3 \cdot 1 = 17 \\ b_1 = (56 + 3 \cdot 17 - 2 \cdot 1)/5 = 21 \\ b_0 = (160 - 2 \cdot 17)/5 = 25.2 \end{cases} \end{aligned}$$



## Assegnamento Poli - Eq. Diofantina

- Il regolatore che soddisfa le specifiche è quindi:

$$K(s) = 21 \frac{s + 1.2}{s + 17}$$



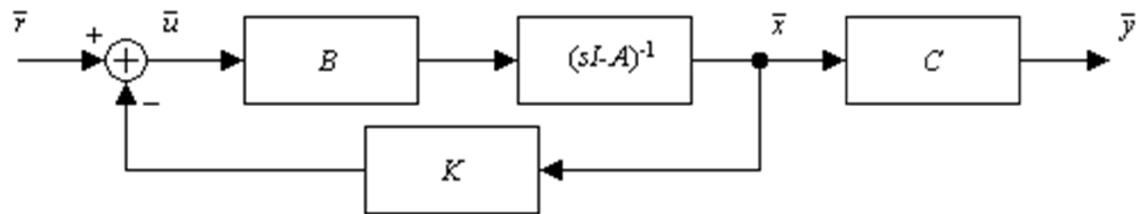
- Necessaria taratura del polo fuori banda per migliorare lo smorzamento



## Assegnamento Poli - State Feedback

- Il secondo approccio sfrutta la rappresentazione nello spazio di stato, per il progetto del controllore

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, x(0) = x_0$$



- IPOTESI:** Supponiamo che il sistema sia controllabile e definiamo la seguente Struttura per il controllore

$$u = -Kx + r$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + Br \\ y = Cx \end{cases}, x(0) = x_0$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{(A-BK)t}x_0 + \int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau)}Br(\tau)d\tau \\ y(t) = Ce^{(A-BK)t}x_0 + C \int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau)}Br(\tau)d\tau \end{cases}$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

- L'esistenza del controllore (in cui la matrice di guadagno  $K$  è costante) e garantita dai seguenti teoremi:

- **Teorema (sistemi con ingresso scalare):**

Dato un qualsiasi polinomio  $p(s)$  di grado  $n$  esiste un'unica matrice  $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  tale che  $p(s)$  sia il polinomio caratteristico della matrice dinamica del sistema ottenuto retroazionando gli stati del sistema mediante la matrice  $K$ .

$$A - BK \quad B \in \mathbb{R}^{nx1}$$

- **Corollario:**

Nel caso in cui il sistema  $(A, B)$  sia multi ingresso, esiste un numero infinito di matrici di guadagno  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- **Teorema:**

Dato un sistema lineare  $(A, B)$  di ordine  $n$ , con  $m$  ingressi, l'assegnazione totale è possibile se e soltanto se il sistema è completamente raggiungibile. Ovvero:

$$\text{Rank } \mathcal{B} = \text{Rank}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n \Leftrightarrow \lambda_i^{i=1,..,n} (A - BK) \equiv \lambda_i^{i=1,..,n} (\text{des.})$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

- Consideriamo un sistema a singolo ingresso controllabile ( $A, B$ ). Esiste una Trasformazione di similitudine che trasforma il sistema in forma controllabile compagna:

$$\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{z} = T^{-1}\mathbf{x}$$

$$(A, B) \Rightarrow (\tilde{A}, \tilde{B}) = (T^{-1}AT, T^{-1}B)$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Applichiamo la legge di controllo a retroazione dello stato al sistema

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x} + \mathbf{r} \quad \tilde{K} = K \cdot T \quad \mathbf{u} = -\tilde{K} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{r} = -[\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2 \quad \cdots \quad \tilde{k}_n] \mathbf{z} + \mathbf{r}$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

- Il sistema trasformato, in ciclo chiuso diviene:

$$\dot{z} = (\tilde{A} - \tilde{B} \cdot \tilde{K})z + \tilde{B}r$$
$$\tilde{A} - \tilde{B} \cdot \tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 - \tilde{k}_1 & -a_1 - \tilde{k}_2 & -a_2 - \tilde{k}_3 & \cdots & -a_{n-1} - \tilde{k}_n \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico in ciclo chiuso fornisce la soluzione unica per il guadagno  $\tilde{K}$

$$s^n + (a_{n-1} + \tilde{k}_n)s^{n-1} + (a_{n-2} + \tilde{k}_{n-1})s^{n-2} + \dots + (a_0 + \tilde{k}_1)$$

Essendo il polinomio in ciclo chiuso desiderato:

$$(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \dots + \alpha_0$$

$$\boxed{\begin{cases} a_{n-1} + \tilde{k}_n = \alpha_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 + \tilde{k}_1 = \alpha_0 \end{cases}}$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

- per il sistema originale:

$$K = \tilde{K} \cdot T^{-1} \quad u = -K \cdot x + r$$

### □ Esempio:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}x \end{cases} \quad \iff \quad G_u^y(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{5}{s^2 - 3s + 2}$$

- si vuole determinare la legge di controllo che porti i poli del sistema retroazionato in  $s = -1$  e  $s = -10$  e quindi tale che il suo polinomio caratteristico risulti:

$$(s + 1)(s + 10) = s^2 + 11s + 10$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

- Il sistema è in forma compagna quindi la tecnica è applicabile direttamente

$$A - B \cdot K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 - 5k_1 & 3 - 5k_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow sI - A + B \cdot K = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 + 5k_1 & s - 3 + 5k_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$|sI - A + B \cdot K| = s(s - 3 + 5k_2) + 2 + 5k_1 = s^2 + (5k_2 - 3)s + 2 + 5k_1$$

- Il polinomio desiderato in ciclo chiuso è dato da:

$$s^2 + (5k_2 - 3)s + 2 + 5k_1 = s^2 + 11s + 10$$

$$\begin{cases} 5k_2 - 3 = 11 \\ 2 + 5k_1 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = 14/5 \\ k_1 = 8/5 \end{cases} \quad u = -\begin{bmatrix} 8/5 & 14/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + r$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

### □ Paragone con l'equazione Diofantina

Poiché il sistema da controllare è di ordine 2 e il controllore deve essere almeno di ordine 1 (con un regolatore proporzionale non è possibile stabilizzare il sistema), il sistema a ciclo chiuso è di ordine 3; i due poli dominanti sono quelli desiderati (-1, -10) mentre il terzo verrà posto a frequenze elevate (es.  $s = -100$ )

$$K(s) = \frac{N_k(s)}{D_k(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0}$$

$$D_{CL}(s) = (s+1)(s+10)(s+100) = N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_0 = 114 \\ b_1 = 154.4 \\ b_0 = 290 \end{cases}$$

$$K(s) = 290 \frac{s + 0.5324}{s + 114}$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

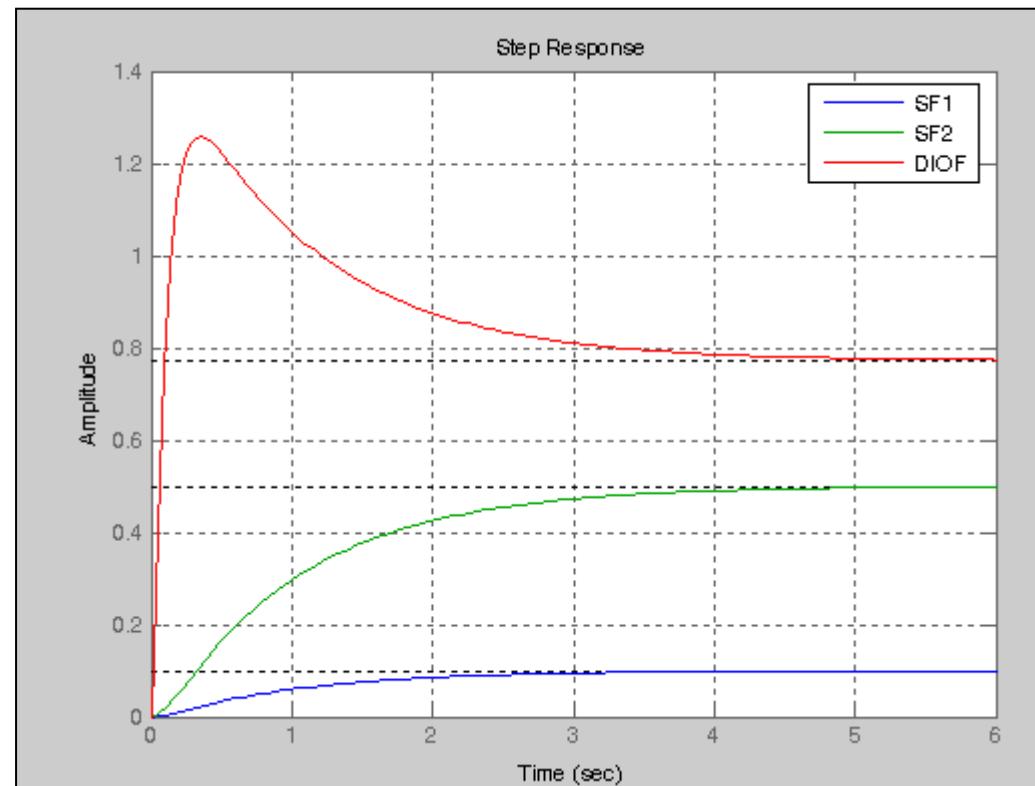
$$G_{CL}^{DIOF}(s) = 1450 \frac{s + 0.5324}{(s + 1)(s + 10)(s + 100)}$$

Retroazione totale in feedback

$$G_{CL}^{SF1}(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 10)}$$

Retroazione totale in anello  
diretto

$$G_{CL}^{SF2}(s) = \frac{5}{(s + 1)(s + 10)}$$





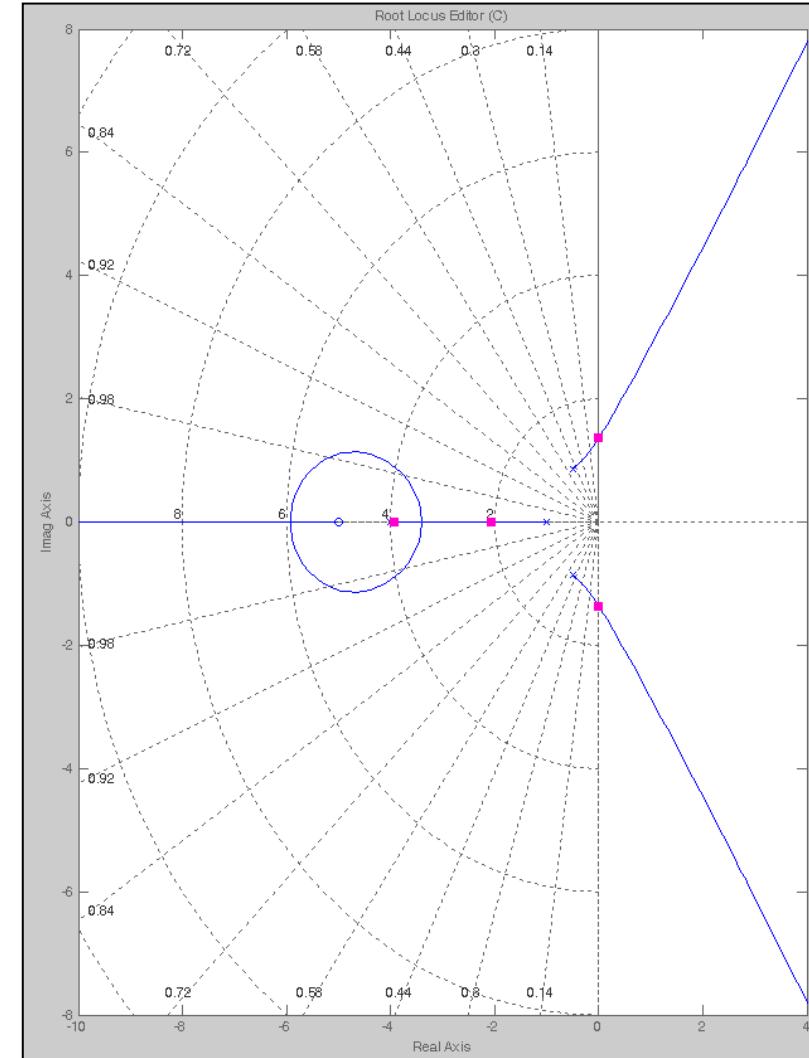
## Assegnamento Poli - State Feedback

### □ Esempio:

$$G(s) = \frac{s + 5}{(s^2 + s + 1)(s + 1)(s + 4)}$$

- Si vuole una legge di controllo che permetta di ottenere un sistema retroazionato i cui poli dominanti siano quelli di un sistema del secondo ordine caratterizzato dai seguenti parametri

$$\boxed{M_p \cong 4.33 \%}$$
$$T_{a2} \leq 2 \text{ s.}$$





## Assegnamento Poli - State Feedback

- Specifica di sovraelongazione:

$$\xi = \frac{\ln(100 / M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(100 / M_p)}} = \frac{\ln(100 / 4.33)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(100 / 4.33)}} \cong 0.707$$

- Specifica di tempo di assestamento:

$$T_{a2} \cong \frac{4}{\xi \omega_n} \quad \Rightarrow \quad \omega_n \cong \frac{4}{\xi T_{a2}} = \frac{4}{0.707 \cdot 2} = 2.8 \text{ rad./s.}$$

- Poli in ciclo chiuso:
- (A, B) Controllabile, (A, C) Osservabile:

$$p_{1/2} = -2 \pm j2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -9 & -10 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [5 \ 1 \ 0 \ 0], \quad D = [0]$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

- La matrice di sistema in ciclo chiuso vale:

$$A - B \cdot K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 - k_1 & -9 - k_2 & -10 - k_3 & -6 - k_4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow sI - A + B \cdot K = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 4 + k_1 & 9 + k_2 & 10 + k_3 & s + 6 + k_4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$|sI - A + B \cdot K| = s^4 + (6 + k_4)s^3 + (10 + k_3)s^2 + (9 + k_2)s + 4 + k_1$$

- Da cui la matrice di guadagno  $K$ :

$$s^4 + (6 + k_4)s^3 + (10 + k_3)s^2 + (9 + k_2)s + 4 + k_1 = s^4 + 34s^3 + 328s^2 + 1040s + 1600$$

$$\begin{cases} k_4 = 34 - 6 = 28 \\ k_3 = 328 - 10 = 314 \\ k_2 = 1040 - 9 = 1031 \\ k_1 = 1600 - 4 = 1596 \end{cases} \quad u = -[1596 \quad 1031 \quad 314 \quad 28] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + r$$

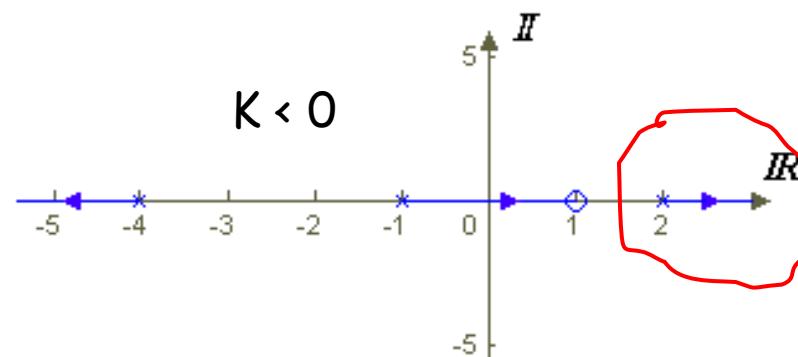
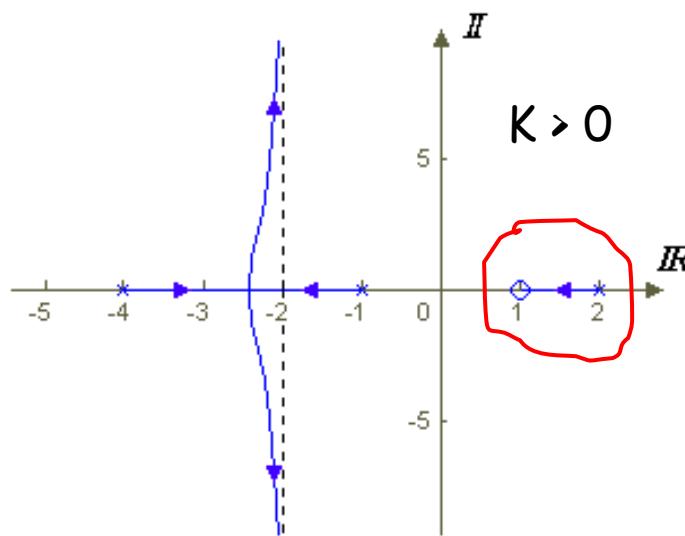


## Assegnamento Poli - State Feedback

□ **Esempio:**

$$G(s) = \frac{s - 1}{(s - 2)(s + 1)(s + 4)}$$

- Consideriamo il problema di stabilità mediante Luogo delle Radici



- Si vuole stabilizzare il sistema, facendo in modo che il sistema retroazionato abbia i poli in:

$$p_1 = -1, \quad p_2 = -10, \quad p_3 = -20$$

$$(s + 1)(s + 10)(s + 20) = s^3 + 31s^2 + 230s + 200$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

- Data la rappresentazione  $(A, B, C)$ , il sistema è sia controllabile, che osservabile:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0.75 & 0.5 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & -0.125 \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$

$$A - B \cdot K = \begin{pmatrix} -3 - 0.5k_1 & 0.75 - 5k_2 & 0.5 - 0.5k_3 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow sI - A + B \cdot K = \begin{pmatrix} s + 3 + 0.5k_1 & -0.75 + 5k_2 & -0.5 + 0.5k_3 \\ -8 & s & 0 \\ 0 & -2 & s \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$|sI - A + B \cdot K| = s^3 + (3 + 0.5k_1)s^2 + (-6 + 4k_2)s - 8 + 8k_3$$

$$s^3 + (3 + 0.5k_1)s^2 + (-6 + 4k_2)s - 8 + 8k_3 = s^3 + 31s^2 + 230s + 200$$
$$\begin{cases} k_1 = 2 \cdot (31 - 3) = 56 \\ k_2 = (230 + 6)/4 = 59 \\ k_3 = (200 + 8)/8 = 26 \end{cases}$$



# Assegnamento Poli - State Feedback

## □ Risposta a Regime

- L'introduzione della matrice di guadagno  $K$  produce una modifica nell'andamento del transitorio del sistema; ovviamente tale influenza si viene a ripercuotere anche nell'andamento della risposta a regime
- Dal Teorema del Valore Finale:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{CL}(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} C(sI - A + B \cdot K)^{-1} B = -C(A - B \cdot K)^{-1} B$$

- L'errore a regime può quindi essere non nullo ed è dipendente dalla tipologia della *FdT* di anello aperto.
- si verifica facilmente che se la matrice  $A$  ha un autovalore nullo, grazie alla retroazione, oltre al transitorio desiderato è possibile anche avere errore nullo in risposta al segnale gradino in ingresso. Ovviamente tale risultato vale se sull'autovalore nullo entra il segnale di errore;
- se, al contrario,  $A$  non ha autovalori nulli, per poter avere un errore nullo in risposta al gradino è necessario inserire un integratore, in modo da operare sul segnale di errore (catena diretta).



## Assegnamento Poli - State Feedback

### □ Introduzione di un comportamento integrale

- Nel caso in cui sia necessario un integratore (o più integratori), esso deve essere aggiunto prima della retroazione.
- Il sistema aumenta di dimensione di una variabile di stato per ogni integratore. Siccome si desidera:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} (r - y) = 0$$

- Il nuovo vettore di stato e sistema diventano:

$$[\mathbf{x}, z]^T = [\mathbf{x}, \int (r - y) \cdot dt]^T \quad \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$$

- Il nuovo sistema risulta controllabile, se lo è la coppia  $(A, B)$

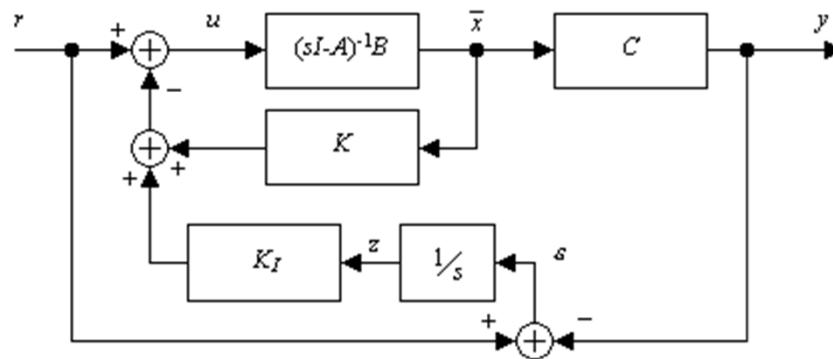
$$\text{Rango}[\mathcal{B}] = \text{Rango} \begin{bmatrix} B & AB & \dots \\ 0 & -CB & \dots \end{bmatrix} = n + 1$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

- Il controllore si può calcolare adesso in modo simile ai casi precedenti

$$u = -K \cdot \mathbf{x} - K_I z + r \quad u = -K \cdot \mathbf{x} + r - K_I \int \varepsilon \cdot dt = -K \cdot \mathbf{x} - K_I \int (r - y) \cdot dt + r$$



- Il sistema “aumentato” in ciclo chiuso è quindi:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu = (A - BK)\mathbf{x} - BK_I z + Br \\ \dot{z} = r - y = r - C\mathbf{x} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\dot{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix} r$$
$$\Rightarrow \dot{y}' = \begin{bmatrix} y \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$



## Assegnamento Poli

□ **Esempio:** Dato il sistema instabile

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$
$$G(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

Progettare un controllore a retroazione totale:  $u = -K \cdot x + r$

Tale che:

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}[\lambda_i] < 0 \\ \varepsilon_{step} = 0 \\ MF \simeq 45^\circ, T_a \simeq 5 \text{ sec} \end{cases}$$

- Il controllore deve fornire azione integrale e due poli dominanti come da Specifiche in transitorio, ovvero:

$$MF \simeq 45^\circ, T_a \simeq 5 \text{ sec} \Rightarrow \xi = 0.78, \omega_n = 1.0187 \text{ rad/sec} \quad p_{1/2} = -0.7946 \pm j0.6375$$



# Assegnamento Poli

- Introduzione di 1 integratore:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ -1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} r$$
$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

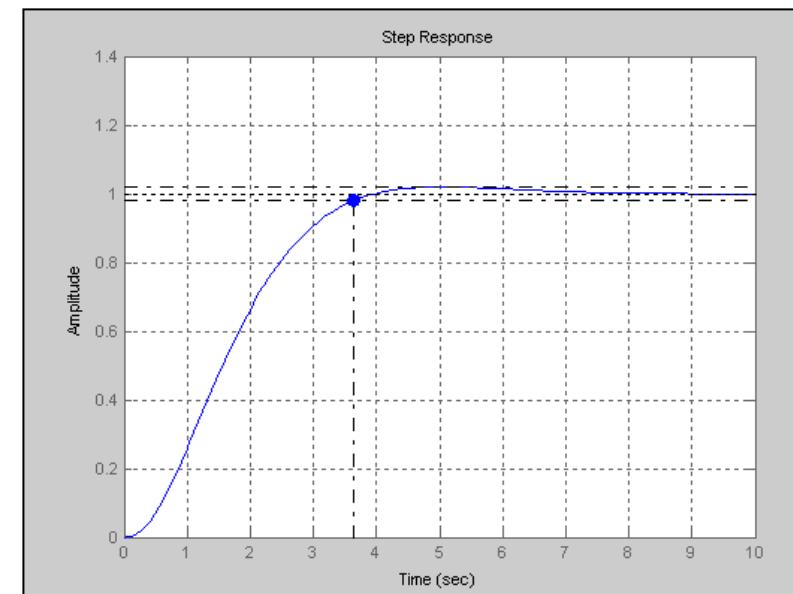
- Poli in Ciclo Chiuso:

$$p_{1/2} = -0.7946 \pm j0.6375$$

$$p_3 = -10$$

```
>> k=place(a,b1,p)
>> k = 29.5190 13.5892 -10.3780
```

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu = (A - BK)x - BK_I z + Br \\ \dot{z} = r - y = r - Cx \end{cases} \Rightarrow$$
$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix} r$$
$$\Rightarrow y' = \begin{bmatrix} y \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ 1 \end{bmatrix} r$$

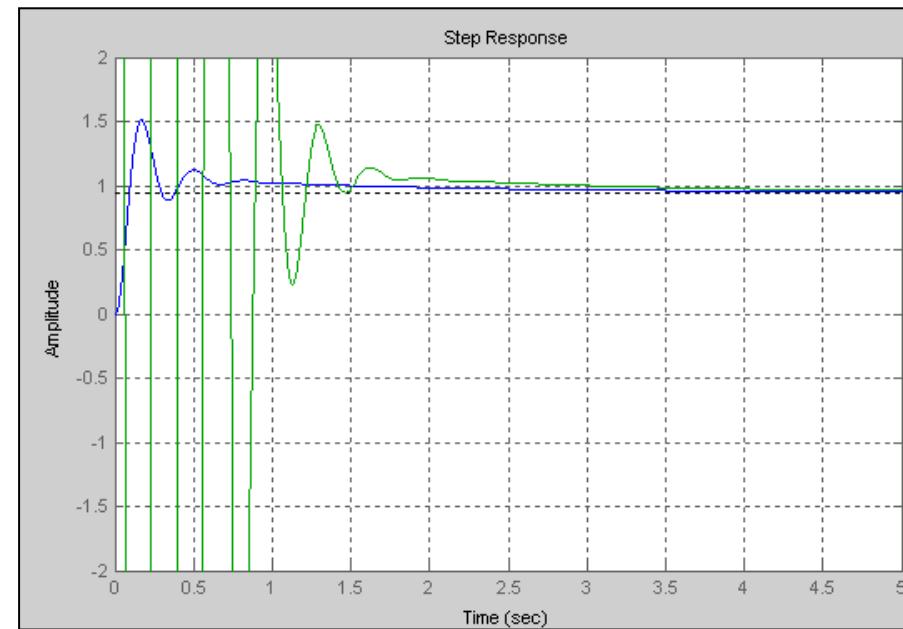
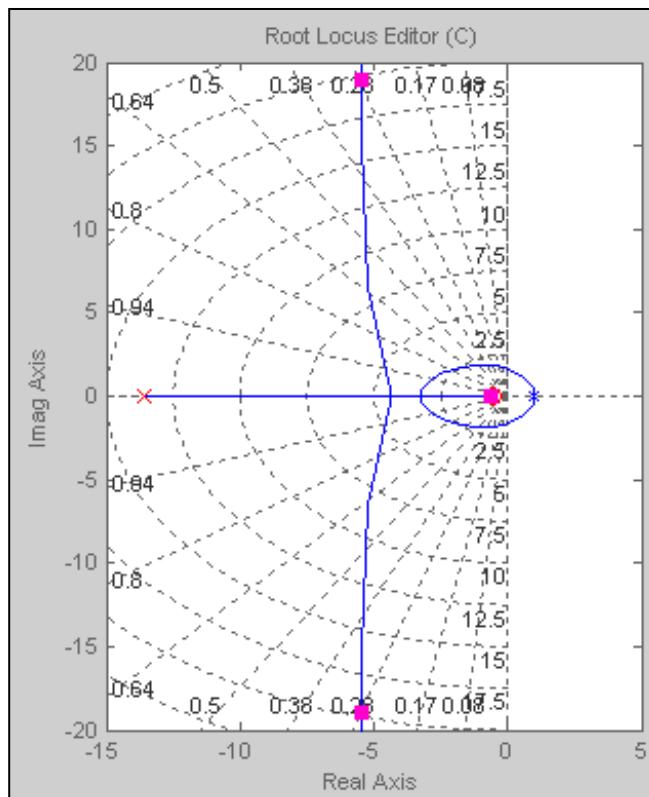




# Assegnamento Poli

- Uso dell'equazione diofantina:

$$G(s) = \frac{1}{(s - 1)^2}, K(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0} \Rightarrow \frac{17.93(s + 0.5788)}{(s + 13.5892)}$$

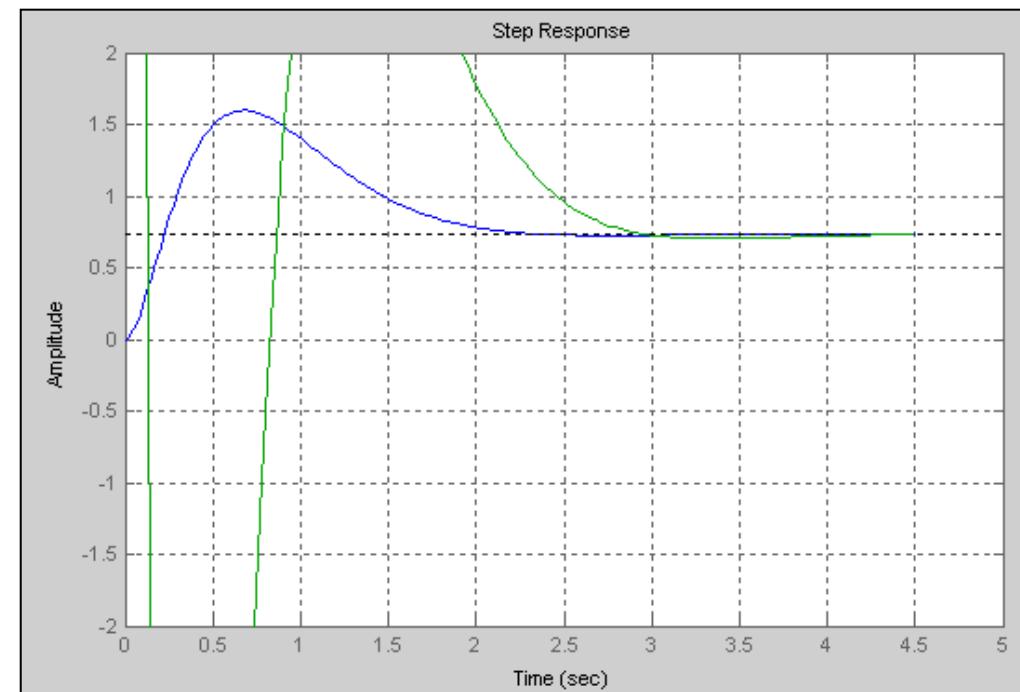
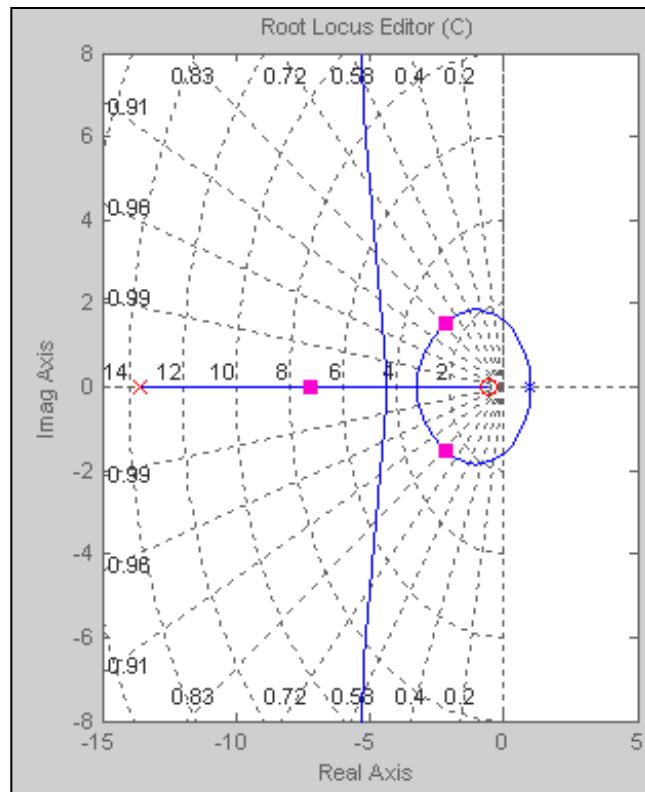




# Assegnamento Poli

- Uso dell'equazione diofantina:

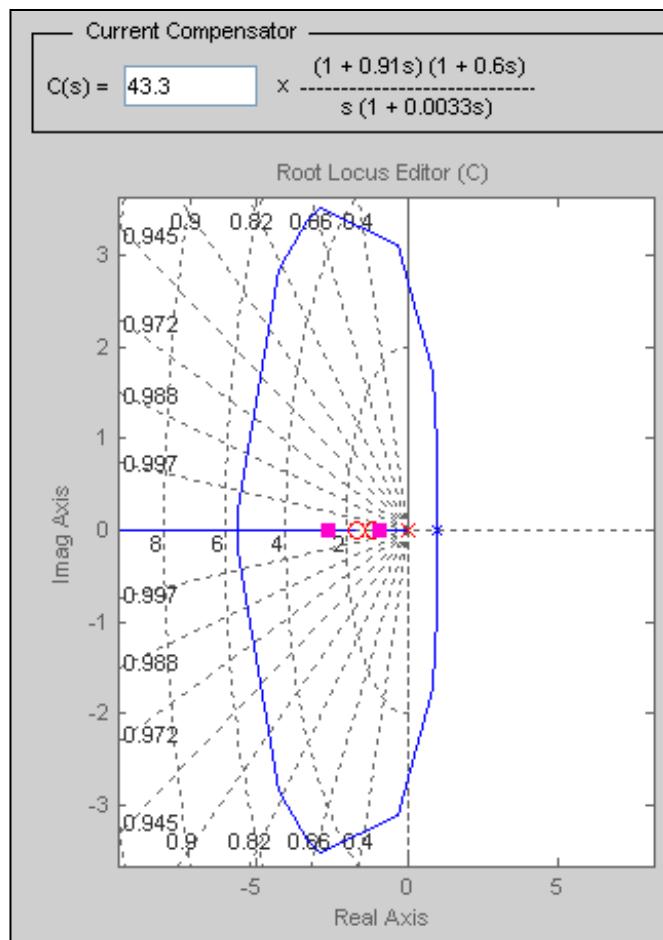
$$G(s) = \frac{1}{(s-1)^2}, K(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0} \Rightarrow \frac{k(s+0.5788)}{(s+13.5892)}$$



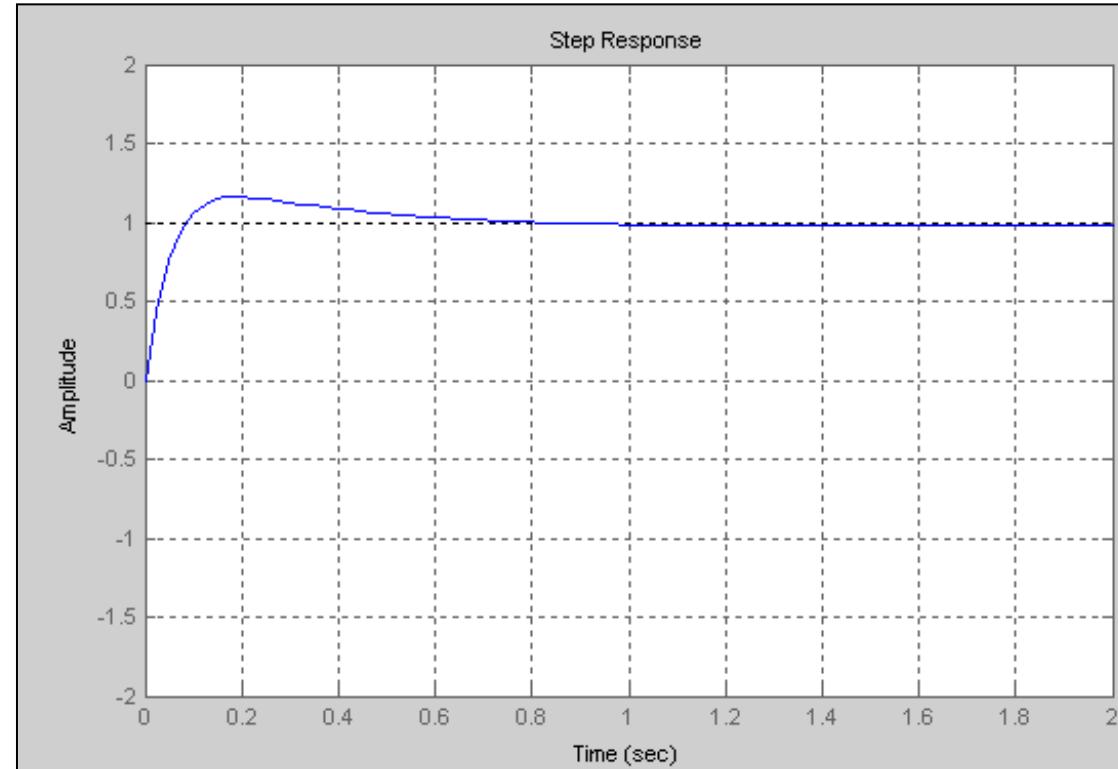


# Assegnamento Poli

- Mediante Luogo delle Radici:



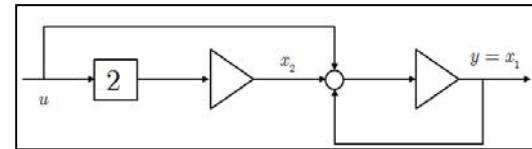
$$G(s) = \frac{1}{(s-1)^2}, K(s) = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)}{s(s+p_1)}$$



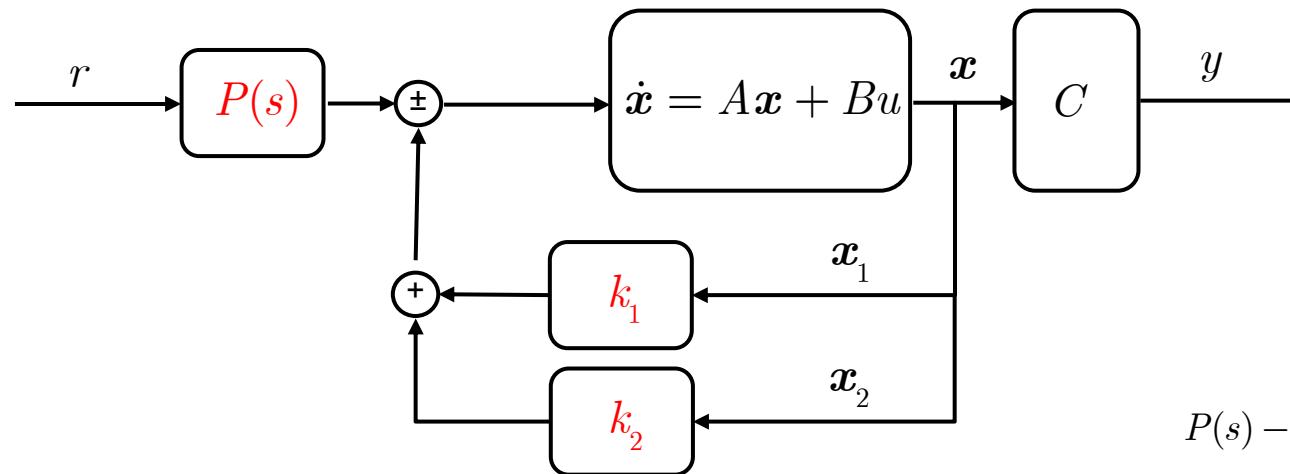


# Assegnamento Poli

- Consideriamo l'esempio introduttivo:



$$G(s) = \frac{s - 2}{s(s - 1)}$$

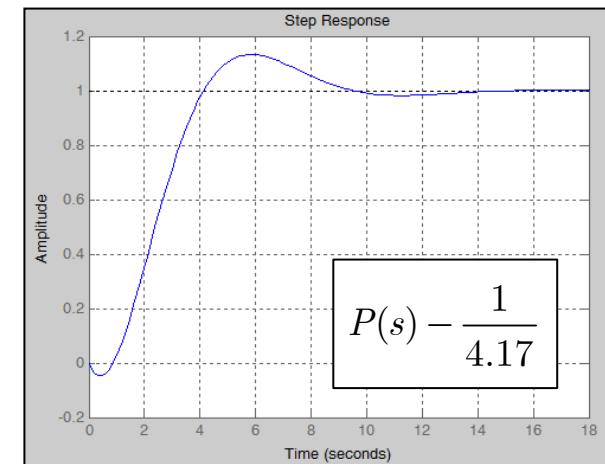


$$P(s) = \frac{1}{C[A_{CL}]^{-1}B}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_{CL}x + Br = \{A - BK\}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}r = \begin{bmatrix} 2.24 & -1 \\ 4.48 & -1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}r \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x = Cx\end{aligned}$$

- Il valore di regime al gradino vale:

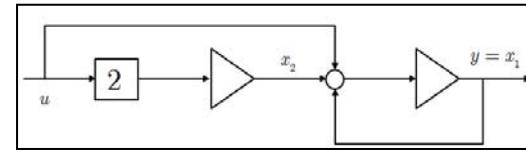
$$y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s(sI - A_{CL})^{-1}B \frac{1}{s} = -C[A_{CL}]^{-1}B$$





# Assegnamento Poli

- Consideriamo la seguente realizzazione del sistema

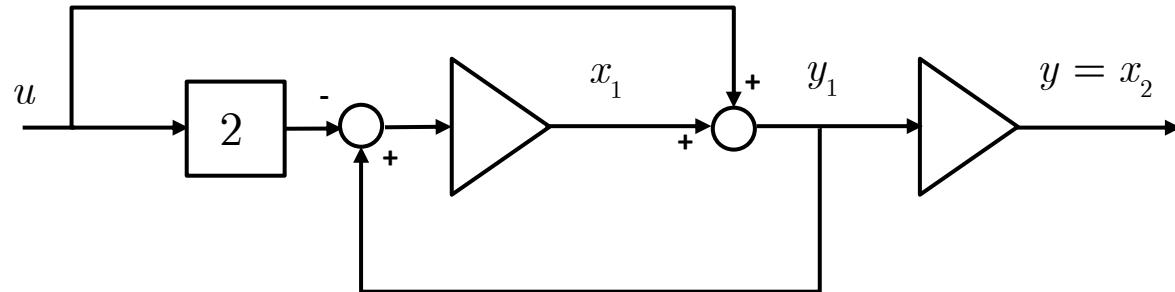


$$\dot{x}_1 = y_1 - 2u$$

$$y_1 = x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = y_1$$

$$y = x_2$$



$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + Bu = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = C\mathbf{x}\end{aligned}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} = \frac{s-2}{s(s-1)}$$

$$A_{CL} = A - BK$$

$$\det(\lambda I - A_{CL}) = \lambda^2 + 0.76\lambda + 0.48 = 0$$

```
>> astat
astat =
 1  0
 1  0
>> bstat
bstat =
 -1
  1
>> poles
poles =
 -0.3800 + 0.5793i
 -0.3800 - 0.5793i
>> kstat=place(astat,bstat,poles)
kstat =
 -2.0000 -0.2400
```

$$K = \begin{bmatrix} -2 & -0.24 \end{bmatrix}$$

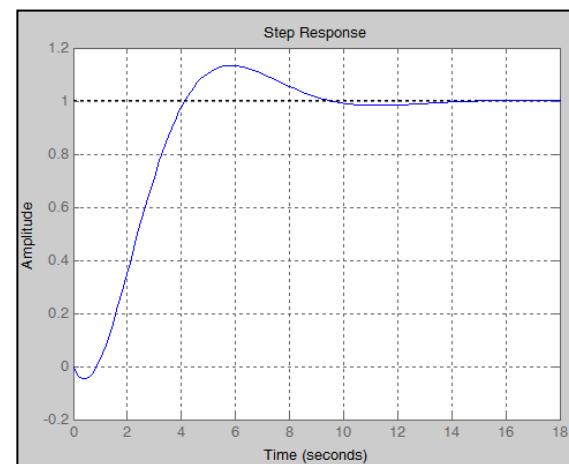
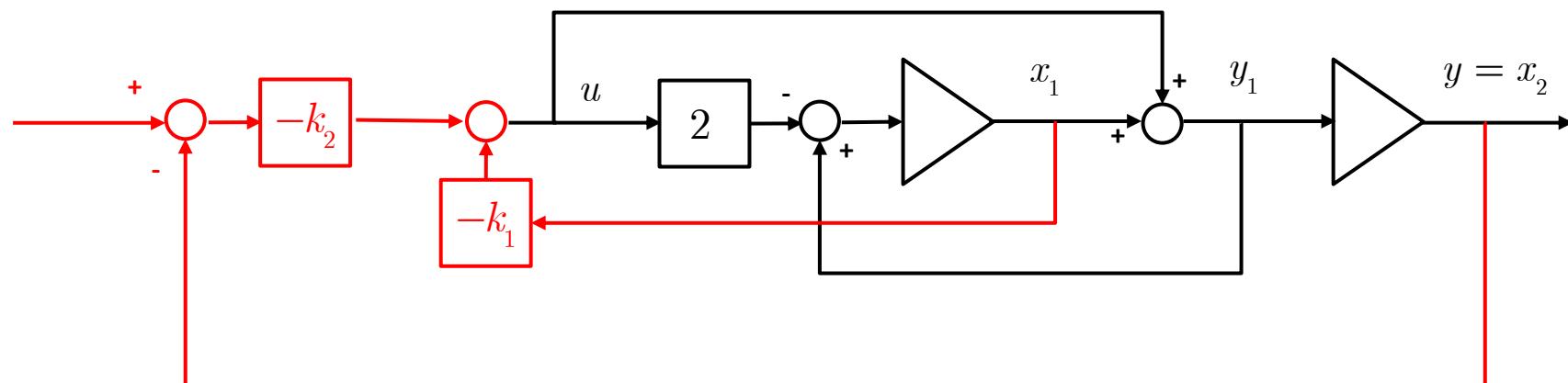


# Assegnamento Poli

- Per evitare il prefiltrro, la retroazione dell'integratore va fatta sulla dinamica dell'errore:

$$\begin{aligned} u &= -k_1 x_1 - k_2(r - y) = -k_1 x_1 + k_2 x_2 - k_2 r \\ &= -2x_1 + 0.24x_2 - 0.24r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & -0.24 \\ +3 & +0.24 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} +0.24 \\ -0.24 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$





## Esempio Harrier

- Equazioni del moto linearizzate intorno all'equilibrio HOVER

$$\begin{cases} J\ddot{\phi} = rF_1 = ru_1 \\ m\ddot{x} + c\dot{x} = F_1 - F_2\phi = u_1 - u_2\phi - mg\phi, \\ m\ddot{y} + c\dot{y} = F_2 + F_1\phi - mg = u_2 + u_1\phi \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = F_1 \\ u_2 = F_2 - mg \end{cases}$$

- Rappresentazione nello spazio di stato:

$$\dot{x} = Ax + Bu = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9.8 & 0 & 0 & -0.0125 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0125 & 0 & 0.25 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right]$$

- **Nota:** Traslazione Laterale e Rotazione in Rollio sono disaccoppiate dalla Traslazione verticale.



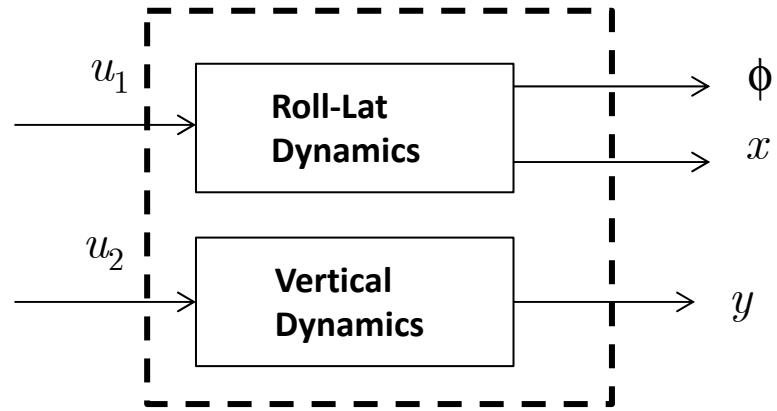
## Esempio Harrier

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}u$$

$$\lambda_\phi = \{0, 0\}$$

$$\lambda_x = \{0, -0.0125\}$$

$$\lambda_y = \{0, -0.0125\}$$



- I due sottosistemi sono controllabili, in quanto:

$$Rango[B_1, A_{11}B_1, A_{11}^2B_1, A_{11}^3B_1] = 4$$

$$Rango[B_2, A_{22}B_2] = 2$$

- Specifiche di Transitorio:

$$K_1 = [35.444, 4.3777, 4.6530, 7.7874]$$

$$\lambda_{\phi DES} = \{-10, -12\}$$

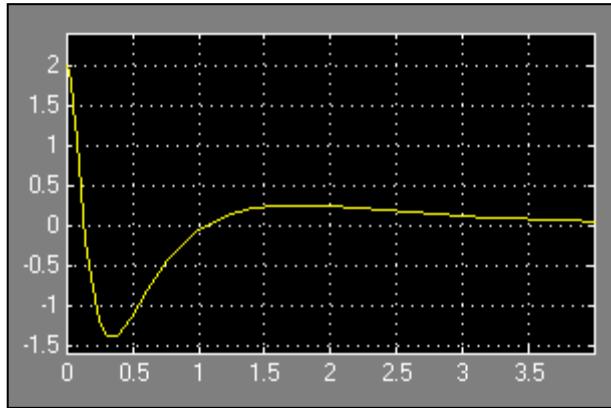
$$K_2 = [8.0, 11.95]$$

$$\lambda_{x DES} = \{-1, -2\}$$

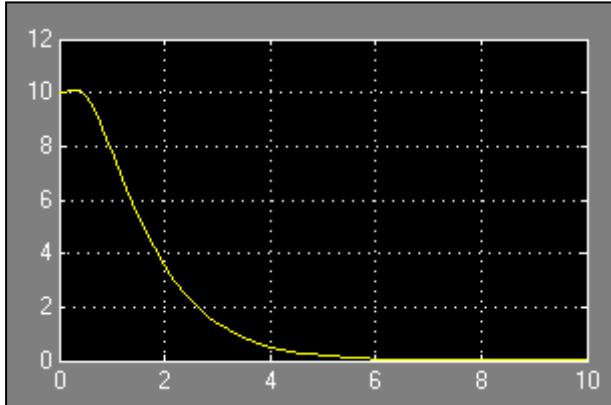
$$\lambda_{y DES} = \{-1, -2\}$$



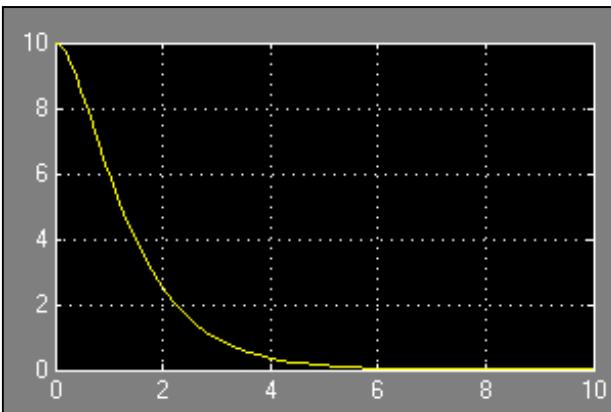
## Esempio Harrier



Rollo



Traslazione Laterale



Traslazione verticale

- Simulazione della risposta del sistema ad un disturbo in condizioni iniziali dalla condizione di equilibrio di hover (0, 0, 0)

$$\phi_0 = 2 \text{ deg.}$$

$$x_0 = 10m.$$

$$y_0 = 10m.$$

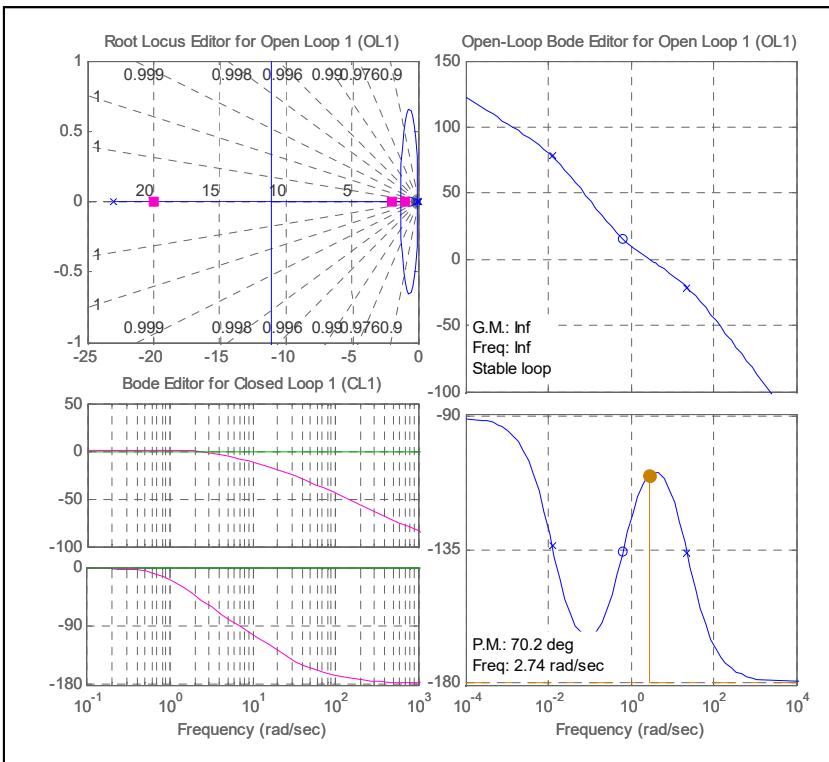


## Esempio Harrier

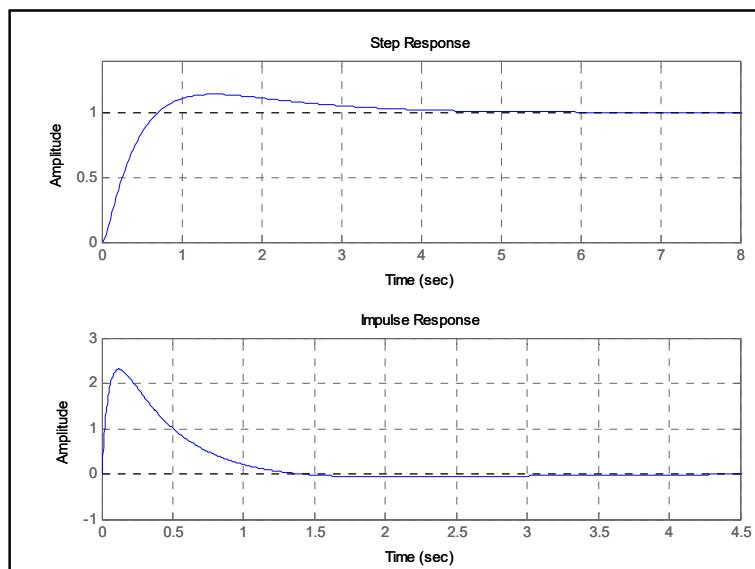
- Sintesi del controllore di traslazione verticale mediante l'equazione Diofantina.
- Selezione poli in ciclo chiuso: -1, -2.
- Il controllore richiede uno zero a bassa frequenza ed un polo fuori banda

$$K(s) = k \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + b_0}$$

$$N_k(s)N(s) + D_k(s)D(s) = k(a_1 s + a_0) \cdot 0.25 + (b_1 s + b_0)(4s^2 + 0.05s)$$



$$K(s) = 246.8506 \frac{s + 0.6482}{s + 22.9875}$$





## Esempio Harrier

- Sintesi del controllore di rollio e traslazione laterale mediante l'equazione Diofantina.
- Selezione poli in ciclo chiuso: -10, -12 (rollio); -1, -2 (traslaz. Laterale)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{x}_{LAT} \\ \ddot{x}_{LAT} \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9.8 & 0 & 0 & -.0125 \end{array} \right] \boldsymbol{x} + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 5.2632 \\ 0 \\ 0.25 \end{array} \right] u_1$$
$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \phi \\ x_{LAT} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \boldsymbol{x}$$

- Usando le partizioni di cui sopra, la dinamica di rollio è:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_\phi = A_{11}\boldsymbol{x}_\phi + B_1 u_1, \phi(s) = \frac{5.2632}{s^2} u_1(s) \\ \phi = C_{11}\boldsymbol{x}_\phi \end{cases}$$

- Il controllo sul rollio è disaccoppiato dalla traslazione laterale (il viceversa non è vero):



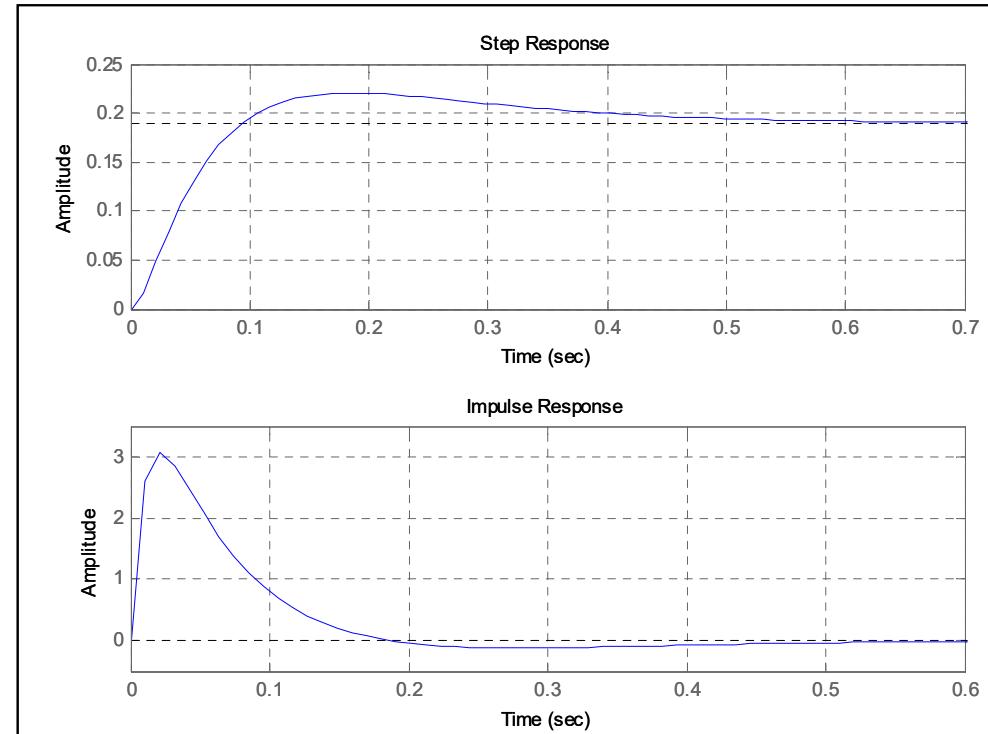
## Esempio Harrier

- Dalle specifiche sull'allocazione dei poli in ciclo chiuso:

$$K_\phi(s) = k \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + b_0}$$

$$N_k(s)N(s) + D_k(s)D(s) = 5.2632k(a_1 s + a_0) + s^2(b_1 s + b_0) = (s + 10)(s + 12)(s + 100)$$

$$K_\phi(s) = 440.8 \frac{s + 5.1724}{s + 122} \Rightarrow$$
$$\frac{\phi(s)}{\phi_D(s)} = \frac{440.8(s + 5.1724)}{s^3 + 122s^2 + 2320s + 12000}$$

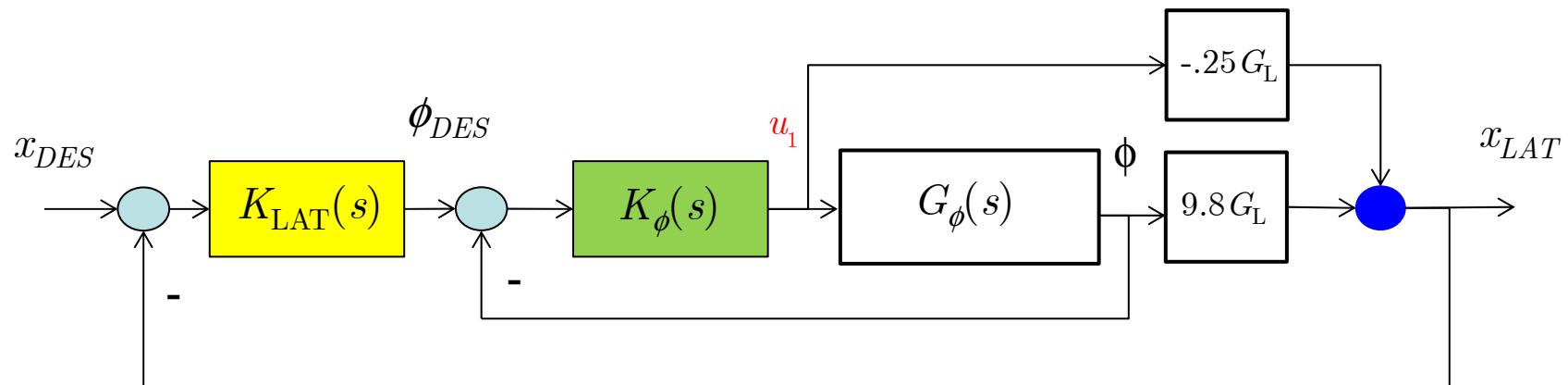




## Esempio Harrier

- Il controllo sulla traslazione laterale non è disaccoppiato dal rollio:

$$\begin{cases} \dot{x}_{LAT} = A_{21}x_\phi + A_{22}x_{LAT} + B_2u_1, \\ x_{LAT} = C_{22}x_{LAT} \end{cases}, x_{LAT}(s) = \frac{1}{s(s + .0125)}[9.8\phi(s) - .25u_1(s)]$$



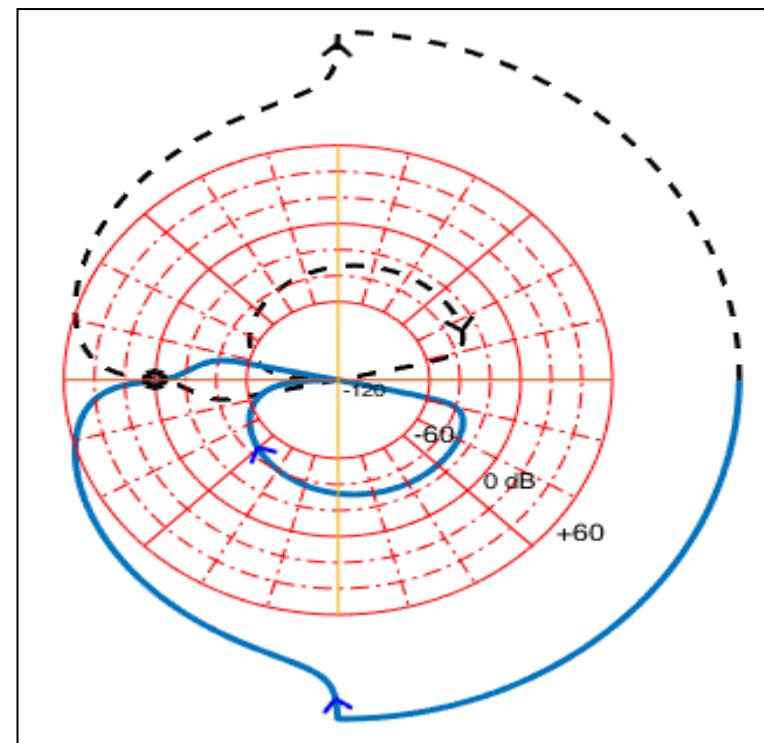
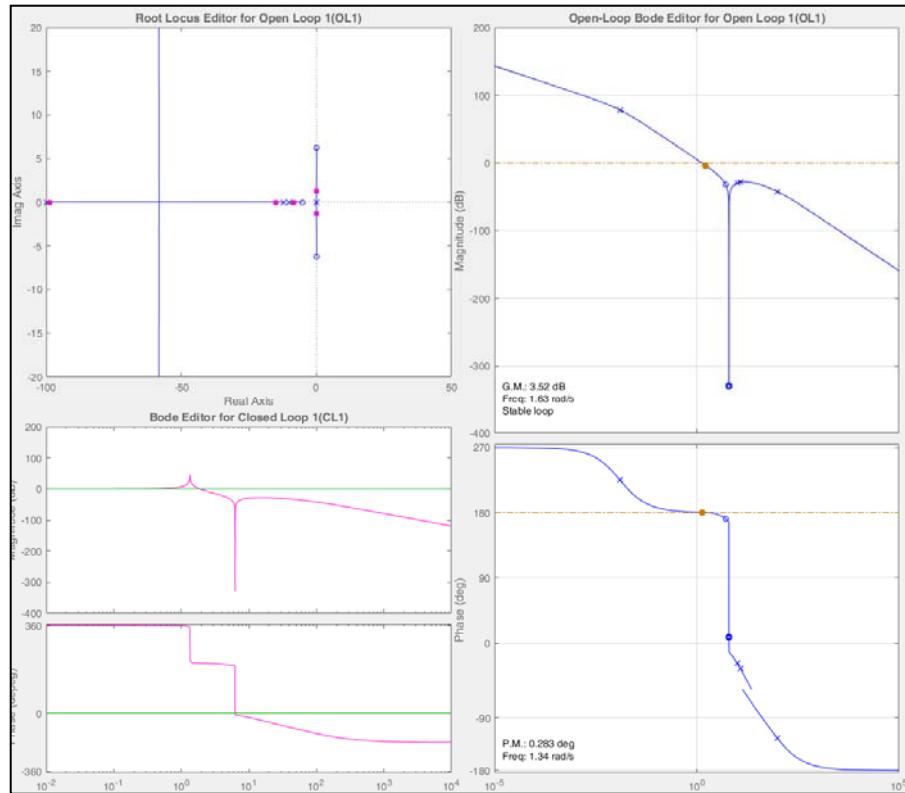
$$G_L(s) = \frac{1}{s(s + .0125)} \quad u_1(s) = \frac{K_\phi(s)}{1 + K_\phi(s)G_\phi(s)} [\phi_D(s) - \phi(s)]$$

$$\frac{\phi(s)}{\phi_D(s)} = \frac{440.8(s + 5.1724)}{s^3 + 122s^2 + 2320s + 12000}$$



## Esempio Harrier

$$x_{LAT}(s) = \frac{110.2(s + 5.1724)(s^2 + 39.2)}{s(s + .0125)(s^3 + 122s^2 + 2320s + 12000)} \phi_D(s)$$





## Esempio Harrier

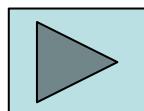
$$K_{LAT}(s) = k \frac{\prod_{i=1}^4 (s + z_i)}{\prod_{j=1}^4 (s + p_j)}$$

$$N_k(s)N(s) + D_k(s)D(s) = (s+1)(s+2)(s+100)^3$$

$$(s^5 + 122s^4 + 2322s^3 + 12029s^2 + 150s)(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4) + \\ k(110.2s^3 + 570s^2 + 4320s + 22340)(s + z_1)(s + z_2)(s + z_3)(s + z_4) = \\ = (s+1)(s+2)(s+100)^3$$

?

**Il sistema in ciclo chiuso deve avere almeno 10 poli.**



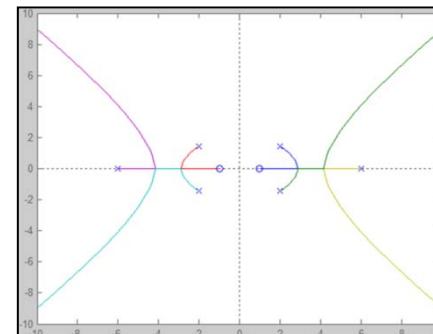
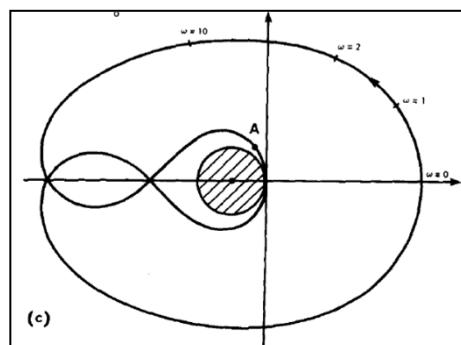


## Note addizionali

- Assegnamento Poli permette di soddisfare i requisiti di progetto in termini di risposta transitoria e di regime (con modifica riguardo a integratori)
  - Con l'ipotesi di controllabilità, possiamo ottenere una matrice di guadagno  $K$ , tale che sia specificato univocamente uno spettro di autovalori asintoticamente stabili

### □ Domande:

1. Esiste un legame tra assegnamento poli e risposta in frequenza? Possiamo definire la matrice di guadagno in modo da soddisfare il requisito di margini di stabilità?
2. Possiamo specificare un parametro nella matrice di guadagno in modo legarne la variazione con un andamento specifico dei poli in anello chiuso ovvero tracciarne un ‘Luogo delle Radici’?

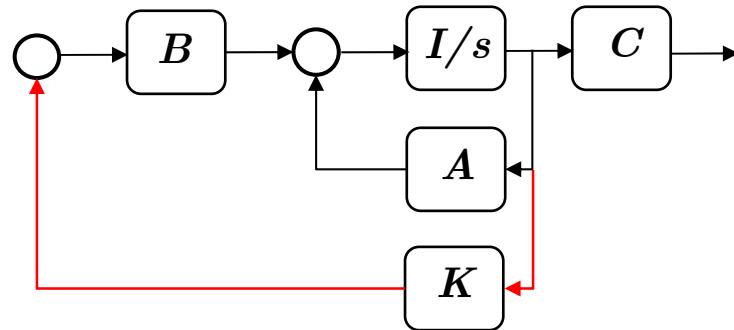




## Note addizionali

### □ Richiamo dalla teoria della stabilità di Lyapunov:

$$\operatorname{Re}[\lambda_i(A - BK)] < 0 \Leftrightarrow \exists P = P^T \geq 0, \forall Q = Q^T \geq 0 \mid (A - BK)^T P + P(A - BK) + Q = 0$$



### □ Ipotesi No. 1: Consideriamo un sistema SISO controllabile e osservabile, strettamente proprio

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ y \in \mathbb{R}^1, u \in \mathbb{R}^1 \end{cases} \quad \begin{cases} u = -Kx \\ \dot{x} = (A - BK)x \\ y = Cx \end{cases} \quad \begin{cases} B \in \mathbb{R}^{n \times 1} \\ C \in \mathbb{R}^{1 \times n} \\ K \in \mathbb{R}^{1 \times n} \end{cases}$$



## Note addizionali

- Riscriviamo l'equazione di Lyapunov per il sistema in anello chiuso (asintoticamente stabile):

$$A^T P + PA + Q - K^T B^T P - PBK = 0$$

□ **Ipotesi No. 2:** Poniamo: 
$$\begin{cases} K = K_c = \frac{1}{r} B^T P \Rightarrow K^T = \frac{1}{r} PB; r > 0 \\ Q = C^T C \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$A^T P + PA + C^T C - \frac{1}{r} PBB^T P - \frac{1}{r} PBB^T P = 0$$

$$A^T P + PA + C^T C - \frac{2}{r} PBB^T P = 0$$

- definiamo:

$$\rho = \frac{r}{2} > 0 \Rightarrow A^T P + PA + C^T C - \frac{1}{\rho} PBB^T P = 0 \quad (2)$$

- (2) Prende il nome di: Equazione algebrica di Riccati (ARE), la quale ammette un'unica soluzione  $P$ , positiva (semi)definita, per ogni  $Q$  positiva (semi)definita



## Note addizionali

- **Nota:** Le Funzioni di Trasferimento di interesse nell'analisi in frequenza sono:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad \text{FdT del Sistema}$$

$$L(s) = K_c(sI - A)^{-1}B \quad \text{FdT di Anello}$$

- **Obiettivo:** Riscrivere (2) come funzione di  $G(s)$  e  $L(s)$

- Dalla definizione di  $K_c$  risulta:

$$\frac{PBB^TP}{\rho} = K^T\rho K$$

- ARE (2) diventa:

$$A^TP + PA + C^TC - K^T\rho K = 0$$

- Aggiungere il termine nullo  $-Ps + Ps$

$$\color{red}{-Ps + Ps} + A^TP + PA + C^TC - K^T\rho K = 0$$

$$-A^TP - PA - C^TC + K^T\rho K - Ps + Ps = 0$$



## Note addizionali

$$P(sI - A) + (-sI - A^T)P + K_c^T \rho K_c = C^T C \quad (3)$$

- Premoltiplicare e postmoltiplicare ambo i membri di (3) rispettivamente per  $\frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1}$  e  $(sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} \left\{ P(sI - A) + (-sI - A^T)P + K_c^T \rho K_c \right\} (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} \left\{ C^T C \right\} (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \end{aligned}$$

- Moltiplicare tutti i termini. Sostituendo i valori:

$$PB = K_c^T \rho$$

$$B^T P = \rho K_c$$



## Note addizionali

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} K_c^T \sqrt{\rho} + \sqrt{\rho} K_c (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} K_c^T \rho K_c (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} C^T C (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \end{aligned} \tag{4}$$

- Consideriamo la relazione:

$$\left[ 1 + \sqrt{\rho} K_c (-sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right]^T \left[ 1 + \sqrt{\rho} K_c (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right] \tag{5}$$

- Eseguire la trasposta e moltiplicare ambo i membri:

$$\begin{aligned} (5) &= 1 + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} K_c^T \sqrt{\rho} + \sqrt{\rho} K_c (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} K_c^T \rho K_c (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \end{aligned}$$



## Note addizionali

- Risulta quindi:

$$(5) = \text{primo membro di (4)} + 1 \rightarrow (5) = \text{secondo membro di (4)} + 1$$

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \sqrt{\rho} K_c (-sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right]^T \left[ 1 + \sqrt{\rho} K_c (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right] = \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} C^T C (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \end{aligned} \quad (6)$$

- Definizione:** Data una matrice di variabile complessa  $A(s=j\omega)$ , essa si dice Hermitiana se

$$A(s) = A^*(s) = A^T(-s)$$

- Dalla definizione: LHS di (6) è Hermitiana, RHS di (6) ha la forma  $1 + H^*(j\omega) Q H(j\omega) \geq 1$

$$L(s) = K_c (sI - A)^{-1} B$$

$$L^T(-s) = L^*(s)$$

$$\left[ 1 + K_c (-sI - A)^{-1} B \right]^T \left[ 1 + K_c (sI - A)^{-1} B \right] \geq 1$$

■ **Diseguaglianza di Kalman**

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

$$G^T(-s) = G^*(s)$$



## Note addizionali

- Riprendiamo la diseguaglianza di Kalman:

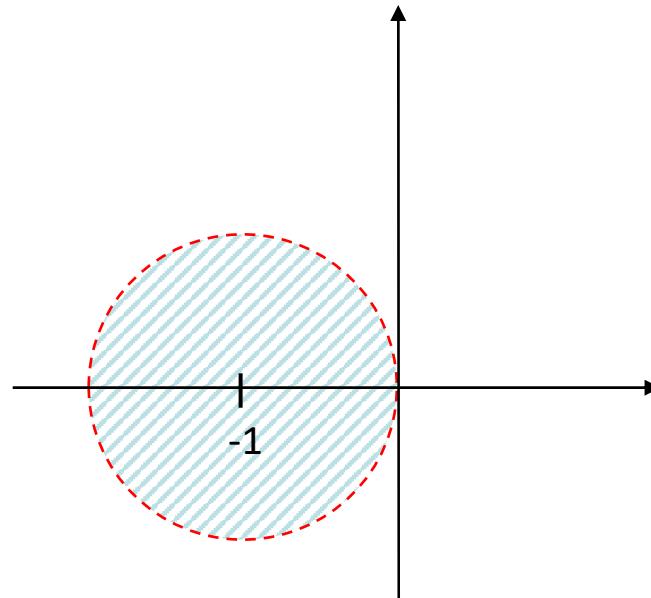
$$\left[1 + K_c(-j\omega I - A)^{-1}B\right]^T \left[1 + K_c(j\omega I - A)^{-1}B\right] \geq 1$$

$$\left[1 + K_c(j\omega I - A)^{-1}B\right]^* \left[1 + K_c(j\omega I - A)^{-1}B\right] \geq 1$$

$$[1 + L(s)]^*[1 + L(s)] \geq 1$$

$$|1 + L(s)|^2 \geq 1$$

$$|1 + L(s)| \geq 1$$



- La FdT di anello  $L(s)$  non può essere all'interno del cerchio di raggio unitario, con origine nel punto critico

$$[1 + L(s)]^*[1 + L(s)] = 1 + G^*(s)G(s) \geq 1$$

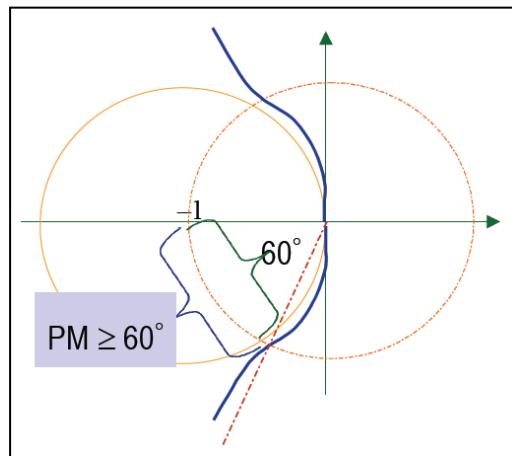


## Note addizionali

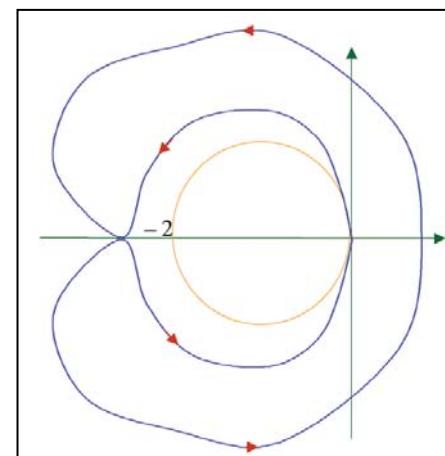
### □ Interpretazione mediante il Criterio di Nyquist:

$$|1 + L(s)| \geq 1$$

- Essendo il sistema in ciclo chiuso asintoticamente stabile per costruzione,  $Z = 0$
- Indipendentemente dal numero di poli instabili in anello aperto, si ha **sempre**  $N = -P$



- Il Margine di Fase non può essere minore di  $\pm 60^\circ$



- Il Margine di Guadagno è compreso tra 0.5 (-6 dB) e  $\infty$



## Note addizionali

- Dato il sistema asintoticamente stabile in anello chiuso

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK_c)x \\ K_c = \frac{1}{r} B^T P \end{cases}$$

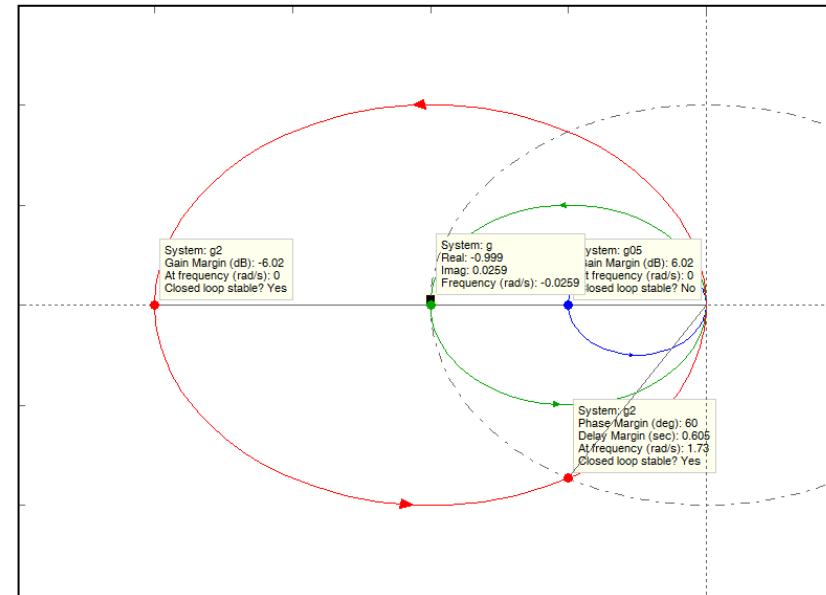
- **Domanda:** Esiste un andamento prefissato dei poli in anello chiuso al variare del parametro  $r$ , con  $0 < r < \infty$ ?

$$G(s) = \frac{1}{s-1} \quad \begin{cases} \dot{x} = x + u \\ y = x \end{cases}$$

- Il sistema è asintoticamente stabile in anello chiuso per ogni guadagno maggiore di 1 (vedi Luogo delle Radici)

$$\begin{cases} \dot{x} = (1-k)x \\ y = x \end{cases}$$

- Il sistema può essere anche stabilizzato mediante state feedback  $u = -kx$





## Note addizionali

- Consideriamo la retroazione dello stato con matrice di guadagno scelta precedentemente

$$\begin{cases} k = \frac{1}{r} B^T P = \frac{p}{r} \\ \dot{x} = (1 - \frac{p}{r})x \end{cases} \quad A^T P + PA + C^T C - \frac{1}{r} PBB^T P = 0$$
$$p + p + 1 - \frac{p^2}{r} = 0 \quad 0 < r < \infty \quad (2)$$

- Risolviamo (2) per  $p > 0$   $p^2 - 2rp - 1 = 0$

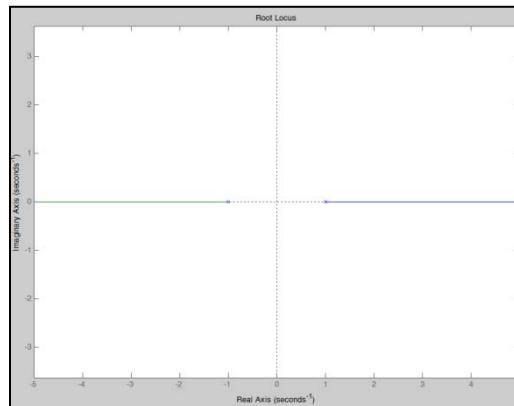
$$p = \frac{-2r \pm \sqrt{4r^2 + 4r}}{2} = r \pm \sqrt{r^2 + r} \Rightarrow r + \sqrt{r^2 + r}$$

- Il sistema in anello chiuso diventa:

$$\dot{x} = (A - BK_c)x = \left[ 1 - \frac{1}{r}(r + \sqrt{r^2 + r}) \right] x \Rightarrow \dot{x} = \left[ -\sqrt{1 + \frac{1}{r}} \right] x$$

$$\begin{cases} r \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow -1 \end{cases}$$





## Note addizionali

- Possiamo generalizzare il risultato precedente introducendo la seguente matrice:

$$H = \begin{bmatrix} A & -\frac{BB^T}{r} \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix}, H \in \Re^{2n \times 2n} \quad (sI - H) = \begin{bmatrix} sI - A & \frac{BB^T}{r} \\ -C^T C & sI + A^T \end{bmatrix}$$

- Teorema:** ARE ha una unica soluzione positiva (semi)definita, se e solo se la matrice  $H$  non ha autovalori sull'asse immaginario.

$$A^T P + PA + C^T C - \frac{PBB^T P}{r} = 0 \Leftrightarrow \lambda_i^{i=1..n}(H) = \sigma_i + j\omega_i, \sigma_i \neq 0$$

- Corollario:** Gli autovalori di  $H$  sono  $2n$  e sono simmetrici rispetto all'asse immaginario: se  $\lambda$  è un autovalore, così lo è  $-\lambda$ .
- Con i risultati precedenti, si può dimostrare che gli autovalori di  $(A - BK_c)$  sono gli autovalori stabili di  $H$ . Usando le proprietà del determinante:

$$\det \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} = \det A \cdot \det(B - CA^{-1}D)$$

$$\det(sI - H) = \det(sI - A) \cdot \det[(sI + A^T) - C^T C(sI - A)^{-1} \frac{1}{r} BB^T]$$



## Note addizionali

- Scomponendo ulteriormente:

$$\det(sI - H) = \det(sI - A) \cdot \det(sI + A^T) \cdot \det[1 - C^T C(sI - A)^{-1} \frac{1}{r} BB^T (sI + A^T)^{-1}]$$

$$\det(sI - H) = \det(sI - A) \cdot (-1)^n \cdot \det(-sI - A) \cdot \det[1 + \frac{1}{r} B^T (-sI - A^T)^{-1} C^T C(sI - A)^{-1} B]$$

- Definiamo:  $\det(sI - H) = \Phi_{CL}(s)\Phi_{CL}(-s)$

$$\det(sI - A) = \Phi_{OL}(s)$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\Psi_{OL}(s)}{\Phi_{OL}(s)}$$

- Nel caso SISO la relazione tra i poli in ciclo aperto ed in ciclo chiuso è quindi:

$$(-1)^n \Phi_{CL}(s)\Phi_{CL}(-s) = \Phi_{OL}(s)\Phi_{OL}(-s) + \frac{1}{r} \Psi_{OL}(s)\Psi_{OL}(-s) = 0$$

- I poli in ciclo chiuso del sistema sono i poli stabili che annullano  $\det(sI - H)$  ovvero:

$$1 + \frac{1}{r} \frac{\Psi_{OL}(s)\Psi_{OL}(-s)}{\Phi_{OL}(s)\Phi_{OL}(-s)} = 0$$

- e variano con il parametro  $r$ .



## Note Addizionali

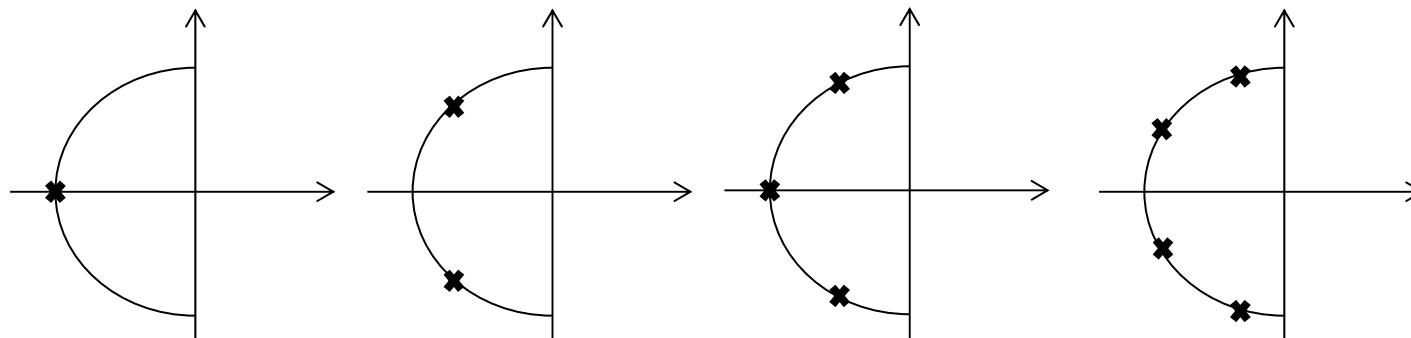
### □ Considerazioni al variare del parametro r

$$\Phi_{CL}(s)\Phi_{CL}(-s) = \Phi_{OL}(s)\Phi_{OL}(-s) + \frac{1}{r}\Psi_{OL}(s)\Psi_{OL}(-s) = 0$$

- Nel caso  $r \rightarrow \infty$ , i poli in ciclo chiuso approssimano i poli stabili in ciclo aperto e l'immagine speculare dei poli instabili in ciclo aperto
- Nel caso  $r \rightarrow 0$ , i poli in ciclo chiuso approssimano gli zeri stabili in ciclo aperto e l'immagine speculare degli zeri instabili in ciclo aperto
- Se il sistema è strettamente proprio, i rimanenti poli tendono a  $-\infty$  le direzioni assintotiche definite (direzioni Butterworth) in funzione di  $n_{\text{poli}} - n_{\text{zeri}}$ .
- Il semicerchio ha raggio:

$$\left[ \frac{\Psi_{OL}(0)\Psi_{OL}(0)}{r} \right]^{\frac{1}{2(n_{\text{poli}} - n_{\text{zeri}})}}$$

Configurazioni Butterworth





## Note Addizionali

### □ Luogo delle Radici Simmetrico

$$1 + \frac{1}{r} G(s)G(-s) = 0 \Rightarrow 1 + kG(s)G(-s)$$

#### ■ Uso delle variabili di stato per determinare $G(-s)$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$G(-s) = C(-sI - A)^{-1}B = C[-(sI + A)]^{-1}B$$

$$G(s) \Rightarrow [C, A, B]$$

$$G(-s) = [C, -A, -B]$$

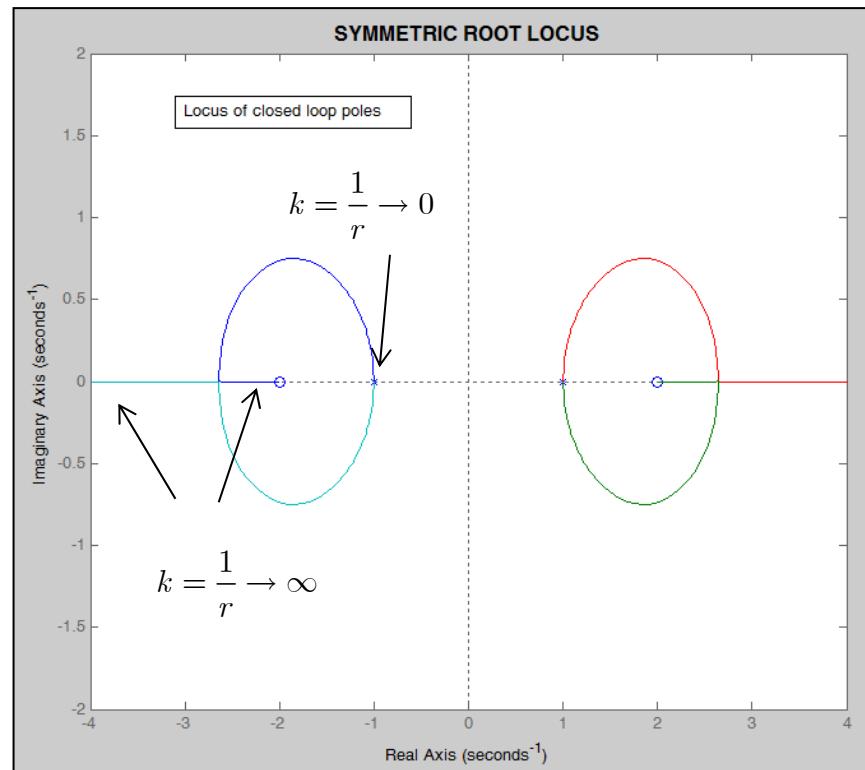
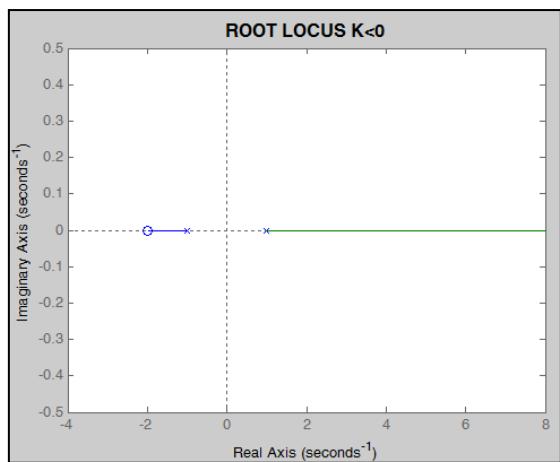
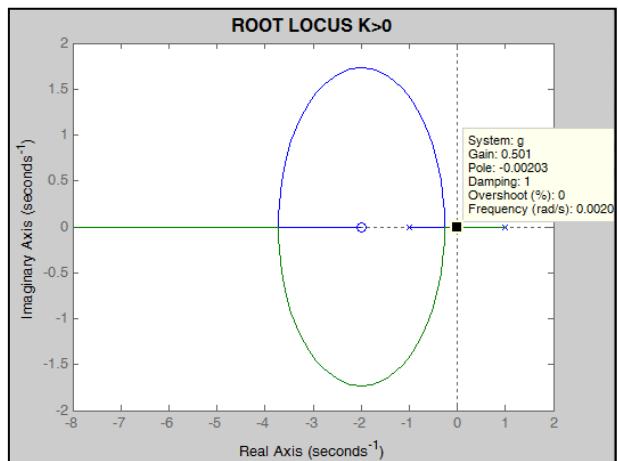
#### ■ Implementazione Matlab

```
Gs=zpk([numroots],[denroots],gain);  
[a,b,c,d]=ssdata(Gs);  
Gms=zpk(ss(-a,-b,c,d));  
rlocus(Gs*Gms);  
axis equal;
```



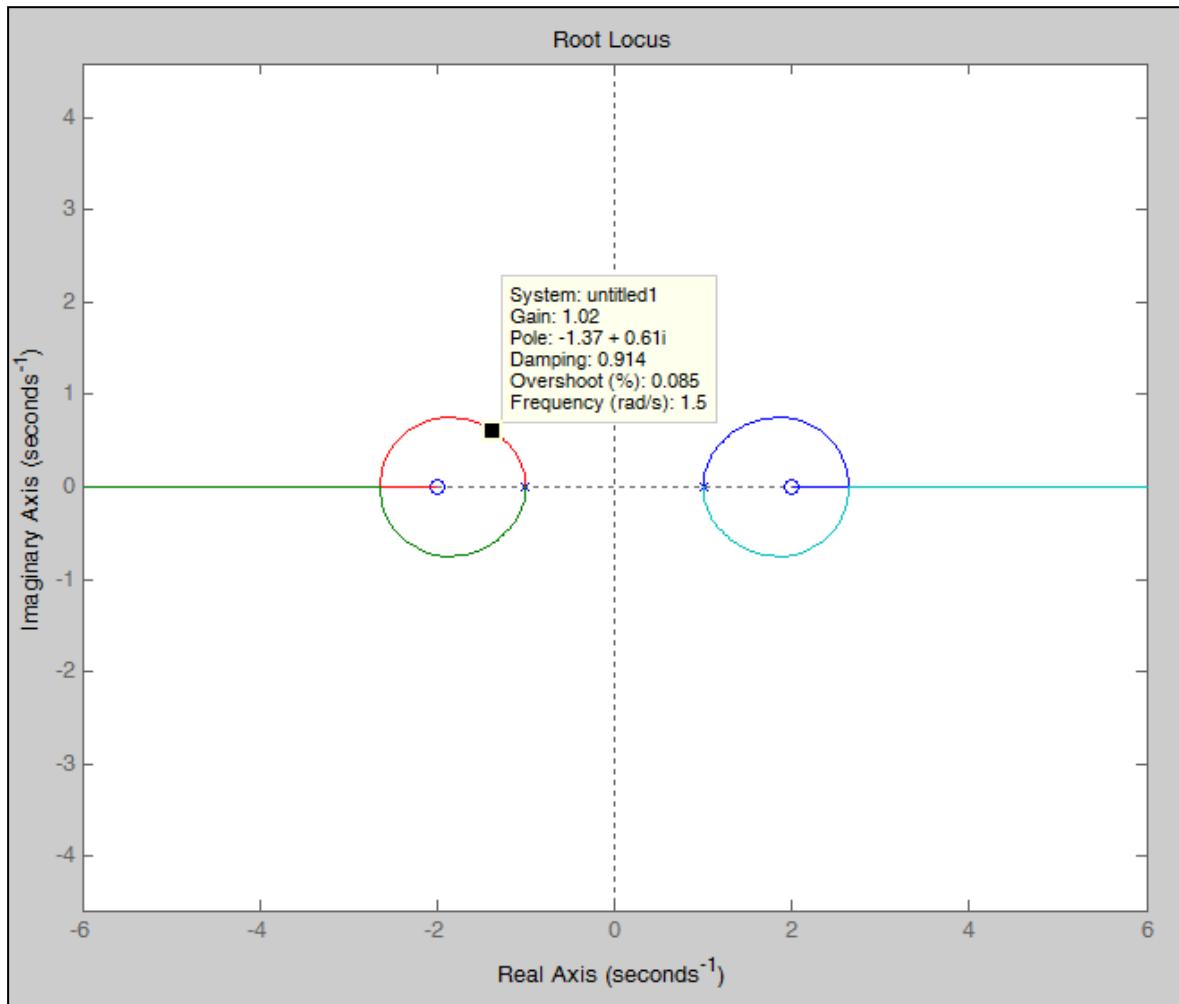
## Note Addizionali

**Esempio**  $G(s) = \frac{s + 2}{s^2 - 1}$





## Note Addizionali



$$G(s) = \frac{s - 2}{s^2 - 1} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}x \end{cases}$$

- Per  $k = 1$

$$A^T P + PA + C^T C - PBB^T P = 0$$

```
>> p=are(a,b*b',c'*c);
>> k=b'*p;
>> acl=a-b*k;
>> p

p =

    2.7335    3.2361
    3.2361    4.1123

>> k

k =

    2.7335    3.2361

>> eig(acl)

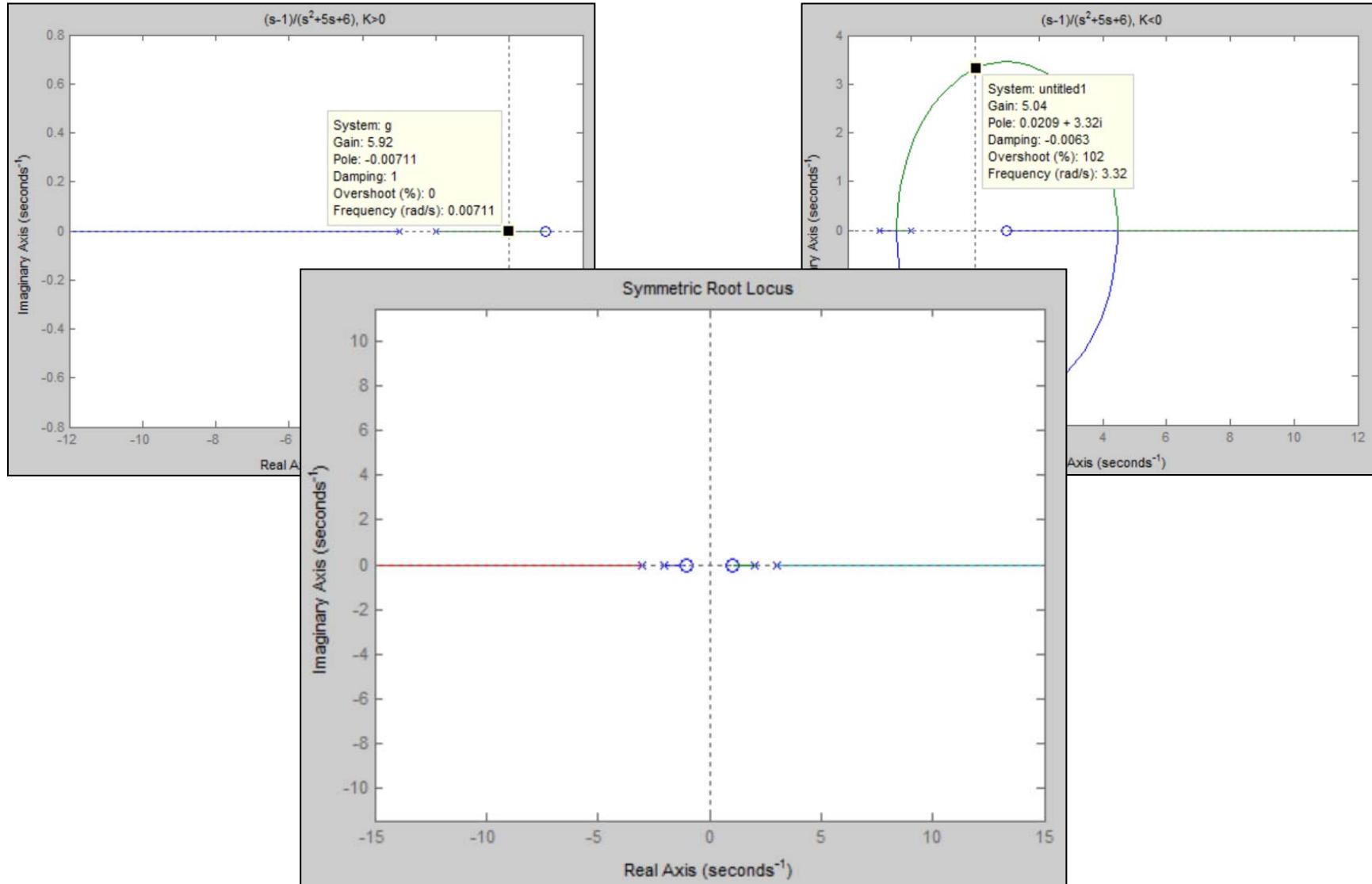
ans =

    -1.3668 + 0.6067i
    -1.3668 - 0.6067i
```



## Note Addizionali

**Esempio**  $G(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 5s + 6}$





## Note Addizionali

$$r = 0.1, P = \begin{bmatrix} 0.1047 & 0.0782 \\ 0.0782 & 2.1012 \end{bmatrix}, K = \frac{1}{r} B^T P = \begin{bmatrix} 1.0969 & 0.7823 \end{bmatrix}, A_{CL} = \begin{bmatrix} -6.0469 & -6.7823 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} -4.5593 \\ -1.4876 \end{bmatrix}$$

$$r = 1, P = \begin{bmatrix} 0.1152 & 0.0828 \\ 0.0828 & 2.1147 \end{bmatrix}, K = \frac{1}{r} B^T P = \begin{bmatrix} 0.1152 & 0.0828 \end{bmatrix}, A_{CL} = \begin{bmatrix} -5.1152 & -6.0828 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} -3.2348 \\ -1.8804 \end{bmatrix}$$

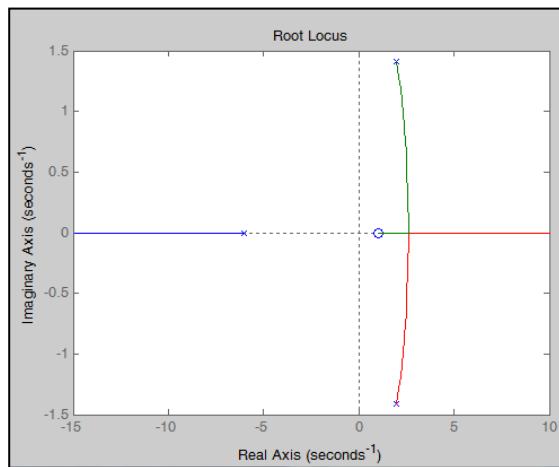
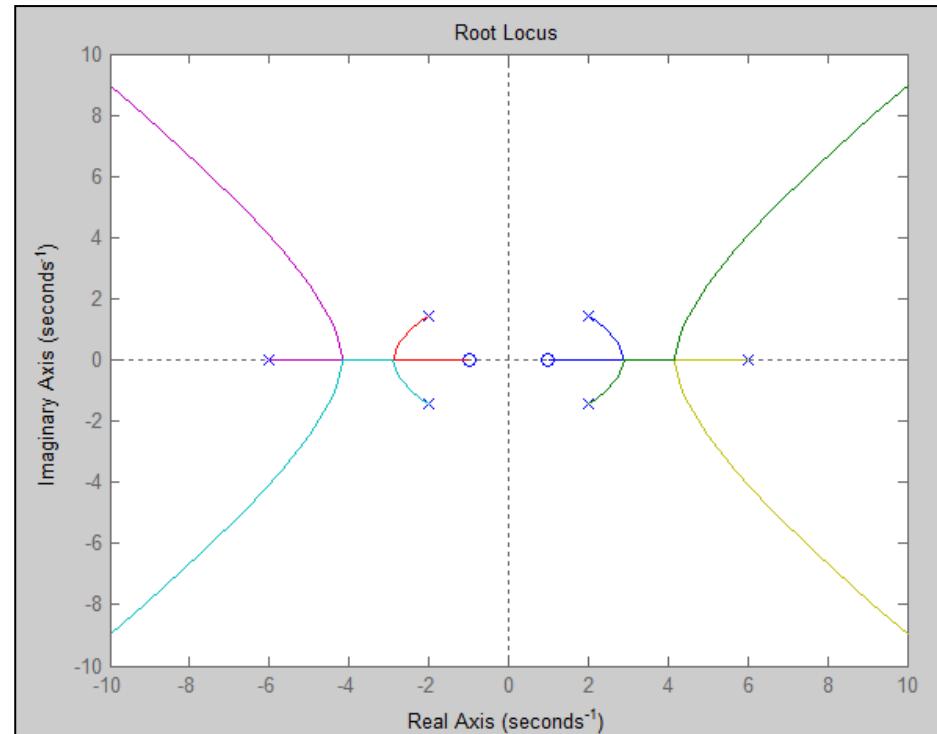
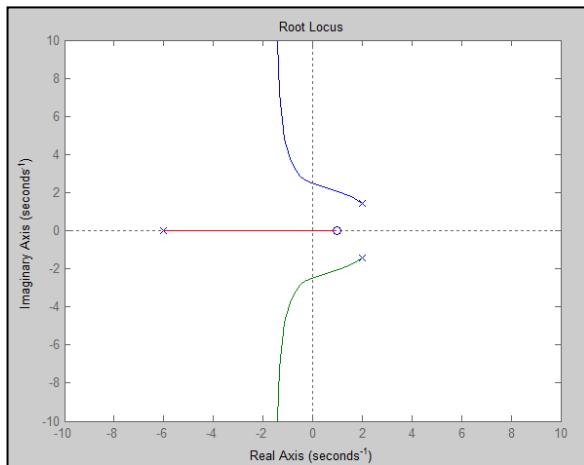
$$r = 10, P = \begin{bmatrix} 0.1165 & 0.0833 \\ 0.0833 & 2.1165 \end{bmatrix}, K = \frac{1}{r} B^T P = \begin{bmatrix} 0.0117 & 0.0083 \end{bmatrix}, A_{CL} = \begin{bmatrix} -5.0117 & -6.0083 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} -3.0262 \\ -1.9854 \end{bmatrix}$$

$$r = 100, P = \begin{bmatrix} 0.1167 & 0.0833 \\ 0.0833 & 2.1166 \end{bmatrix}, K = \frac{1}{r} B^T P = \begin{bmatrix} 0.0012 & 0.0008 \end{bmatrix}, A_{CL} = \begin{bmatrix} -5.0012 & -6.0008 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} -3.0027 \\ -1.9985 \end{bmatrix}$$



## Note Addizionali

**Esempio**  $G(s) = \frac{s - 1}{(s + 6)(s^2 - 4s + 6)}$

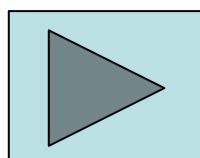




# Note Addizionali

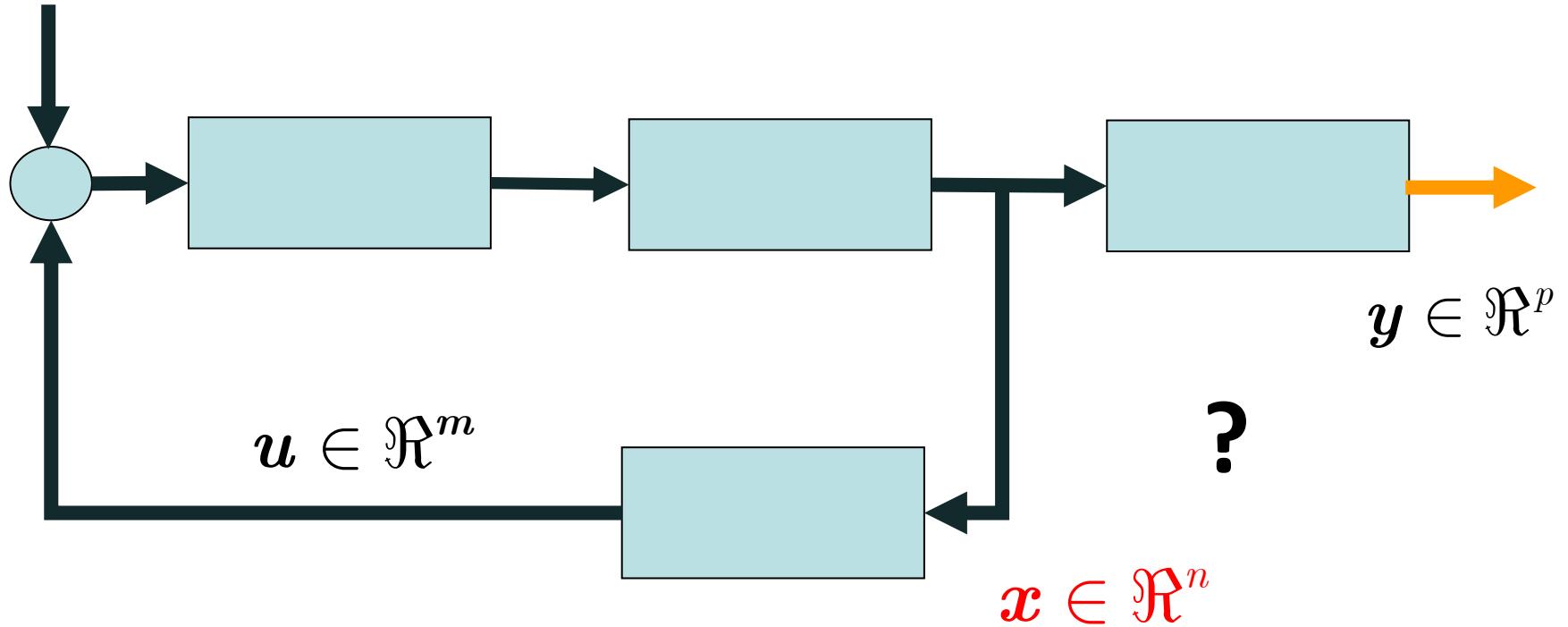
## □ Sommario

1. Dato un sistema controllabile, esso può essere stabilizzato mediante retroazione statica dello stato, in modo da garantire un comportamento desiderato in transitorio.
2. La soluzione fornisce un'unica matrice di guadagno soltanto nel caso di sistemi a singolo ingresso, altrimenti la soluzione non è univoca.
3. Rilassando il vincolo di assegnazione, è possibile calcolare una matrice di guadagno che soddisfi ampi margini di stabilità. La matrice di guadagno deve in tal caso soddisfare una particolare struttura che richiede la soluzione di una equazione algebrica matriciale chiamata equazione di Riccati e produce la diseguaglianza di Kalman.
4. Nel caso di sistemi a singolo ingresso controllabili ed osservabili è anche possibile la matrice di guadagno come funzione di un parametro positivo che varia tra 0 e  $\infty$ . In tal caso, lo spettro dei poli in ciclo chiuso è fornito da un luogo chiamato Luogo delle Radici Simmetrico.





## Problema nella Retroazione Totale





## Assegnamento Poli - Osservatore

- In molte situazioni un sistema non ha disponibile, per assenza di un numero sufficiente di sensori, il vettore di stato per la retroazione.
  - In questo caso, è possibile ricostruire lo stato in modo asintotico ed in assenza di segnali probabilistici, attraverso il progetto di un osservatore dinamico.
  - La possibilità di tale ricostruzione (stima), a partire dalla conoscenza di ingresso ed uscita del sistema, è assicurata dall'osservabilità del vettore di stato che viene sfruttata dagli *stimatori* (o *osservatori*) *dello stato*; lo stimatore è un sistema dinamico capace di fornire una stima del vettore di stato della parte osservabile del sistema
  - Si definisce asintotico lo stimatore tale che, pur avendo stato iniziale diverso dallo stato del sistema soggetto a stima, in assenza di disturbi, tende asintoticamente ad esso in modo che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi - x) = 0$$

- $x$  è il vettore delle variabili di stato
- $\xi$  è il vettore di stato stimato dall'osservatore



# Assegnamento Poli - Osservatore

## Observers for Multivariable Systems

D. G. LUENBERGER, MEMBER, IEEE

*Abstract*—Often in control design it is necessary to construct estimates of state variables which are not available by direct measurement. If a system is linear, its state vector can be approximately reconstructed by building an observer which is itself a linear system driven by the available outputs and inputs of the original system. The state vector of an  $n$ th order system with  $m$  independent outputs can be reconstructed with an observer of order  $n-m$ .

In this paper it is shown that the design of an observer for a system with  $M$  outputs can be reduced to the design of  $m$  separate observers for single-output subsystems. This result is a consequence of a special canonical form developed in the paper for multiple-output systems.

In the special case of reconstruction of a single linear functional of the unknown state vector, it is shown that a great reduction in observer complexity is often possible.

Finally, the application of observers to control design is investigated. It is shown that an observer's estimate of the system state vector can be used in place of the actual state vector in linear or nonlinear feedback designs without loss of stability.



## David Luenberger

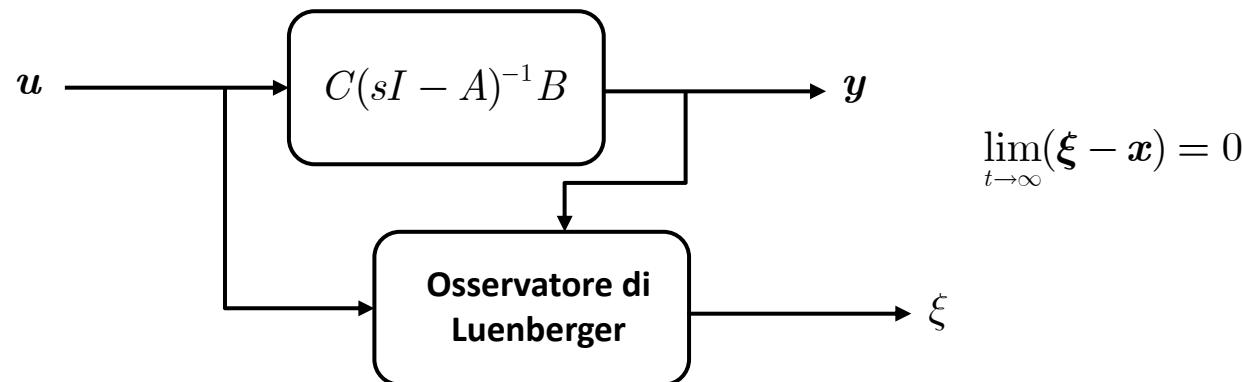
PROFESSOR OF MANAGEMENT SCIENCE AND ENGINEERING, EMERITUS



## Assegnamento Poli - Osservatore

### □ Osservatore di Luenberger

- L'osservatore di Luenberger è uno stimatore di ordine intero che, utilizzando i vettori di ingresso e di uscita, riesce a fornire la stima asintotica dello stato.



- Lo stimatore può essere visto come un sistema i cui ingressi sono dati dall'ingresso e dall'uscita del sistema in esame e l'uscita coincide con il suo vettore di stato; riportando il suo andamento nella forma i-s-u si ha:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = F\xi + (G - H)\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}, & \xi(0) = \xi_0 \\ \hat{y} = \xi \end{cases}$$



## Assegnamento Poli - Osservatore

### □ Struttura dell'osservatore

- L'impianto da controllare e l'errore di stima sono dati da:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}$$

- La dinamica dell'errore vale quindi:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \dot{\boldsymbol{\xi}} - \dot{\mathbf{x}} = F\boldsymbol{\xi} + G\mathbf{u} + H\mathbf{y} - A\mathbf{x} - B\mathbf{u} = \\ &= F(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{x}) + G\mathbf{u} + HC\mathbf{x} - A\mathbf{x} - B\mathbf{u} = \\ &= F\boldsymbol{\varepsilon} + (F - A + HC)\mathbf{x} + (G - B)\mathbf{u} \end{aligned}$$

- Affinché  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) = 0$  si deve avere:

- $G = B$
- $F = A - HC$
- Gli autovalori di  $F$  devono essere a parte reale strettamente negativa



## Assegnamento Poli - Osservatore

- Le condizioni precedenti devono permettere che l'errore tra stato e stato stimato si annulli asintoticamente a partire da qualsiasi condizione iniziale

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$$

- Se gli autovalori della matrice  $F = A - HC$  sono a parte reale strettamente negativa, l'errore tende a zero per qualunque suo valore iniziale:

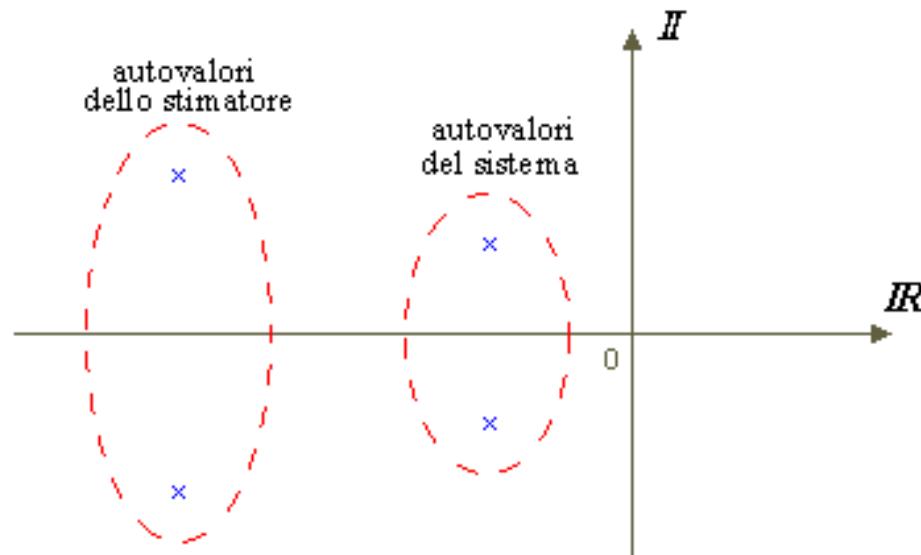
$$\dot{\varepsilon} = (A - HC)\varepsilon \Rightarrow \varepsilon(t) = e^{(A - HC)t}\varepsilon_0$$

- Si deve quindi scegliere la matrice  $H$  (guadagno dell'osservatore) opportunamente in modo da rendere  $F$  una matrice di stabilità.
- NOTA:** gli autovalori di  $(A - HC)$  sono gli stessi di  $(A - HC)^T = (A^T - C^T H^T)$ , se la coppia  $(A, C)$  è osservabile, come da ipotesi, la coppia  $(A^T, C^T)$  è controllabile per cui, l'opportuna scelta della matrice  $H$  permette di soddisfare tutte le specifiche richieste, mediante un assegnamento poli standard



## Assegnamento Poli - Osservatore

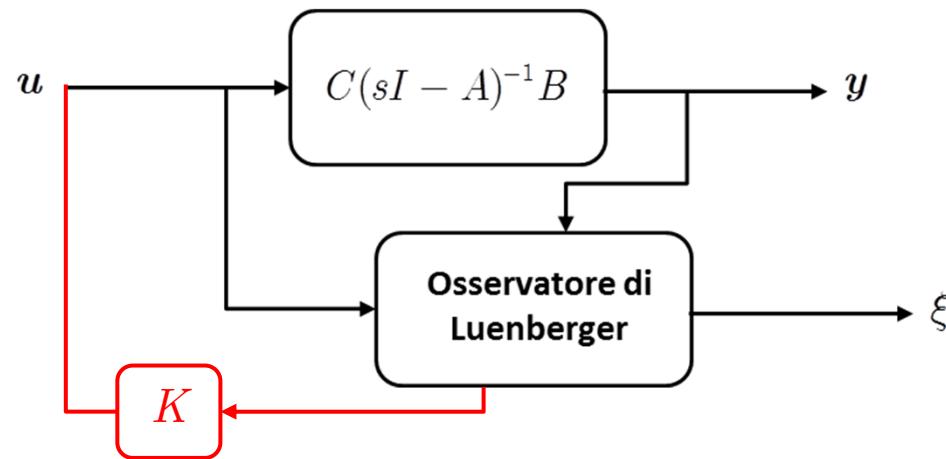
- I poli dell'osservatore devono seguire requisiti generali di progetto:
  - Devono essere a parte reale negativa
  - Devono rendere la banda passante dell'osservatore larga abbastanza in modo che esso sia a regime, quando il controllore inizia ad operare.





## Assegnamento Poli - Osservatore

- Schema completo:



- Impianto da controllare  $\dot{x} = Ax + Bu$
- Osservatore di Luenberger  $\dot{\xi} = (A - HC)\xi + Bu + Hy =$   
 $= A\xi + Bu + H(y - C\xi)$
- Dinamica dell'errore di stima dello stato  $\dot{\varepsilon} = (A - HC)\varepsilon$
- Legge di Controllo  $u = r - K\xi$



## Assegnamento Poli - Osservatore

### □ Principio di Separazione

- Il sistema completo include la dinamica dell'osservatore oltre che la dinamica del processo

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{r} - K\xi) = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{r} - BK(\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{x}) = (A - BK)\boldsymbol{x} - BK\boldsymbol{\varepsilon} + B\boldsymbol{r} \\ \dot{\xi} &= A\xi + Bu + H(\boldsymbol{y} - C\xi)\end{aligned}$$

- Il sistema aumentato diviene:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A - HC \end{bmatrix} \boldsymbol{q} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{q} \end{cases}; \quad \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^{2n}$$

- Si nota che la matrice dinamica del sistema, essendo triangolare superiore a blocchi, ha gli autovalori che coincidono con quelli delle due sottomatrici che si trovano sulla diagonale, cioè di  $(A-BK)$  e  $(A-HC)$ ; questa caratteristica è detta **proprietà di separazione degli autovalori**, dato che gli autovalori del sistema di partenza e quelli dello stimatore sono separati, indicando che i progetti dei due blocchi sono indipendenti fra loro.
- Nota:** La dinamica del sistema completo può essere rappresentata indifferentemente dalle coppie:  $(\boldsymbol{x}, \xi)$ ,  $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$ ,  $(\xi, \boldsymbol{\varepsilon})$



## Assegnamento Poli – Esempi

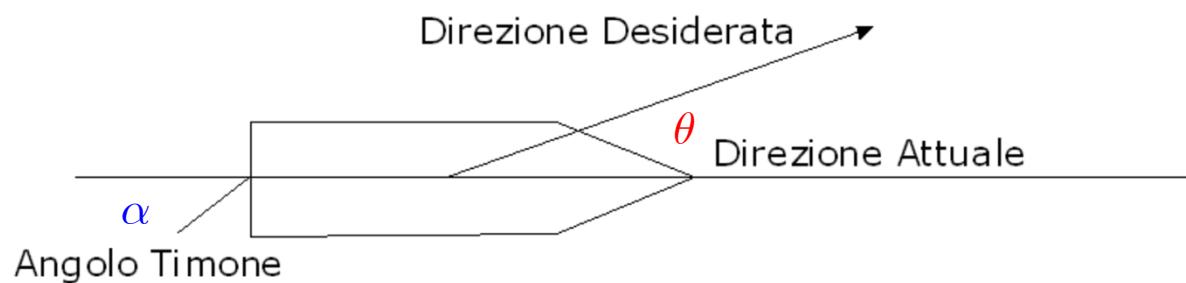
### ■ Esempio 1

- Consideriamo il problema del progetto di un autopilota per mantenere costante la direzione (heading) di una nave rispetto ad un punto prefissato.
- Il modello semplificato del veicolo è:

Veicolo

$$\begin{cases} M\ddot{\theta}(t) = -d\dot{\theta}(t) - c\alpha(t) \\ \dot{\alpha}(t) = -0.1\alpha(t) + 0.1\alpha_c(t) \end{cases}$$

Attuatore timone





# Assegnamento Poli – Esempi

- Introducendo valori numerici per i parametri:

$$M = 10^7 \text{ kg-m}^2$$

$$d = 10^6 \text{ N-m-sec/rad}$$

$$c = 5000 \text{ N-m/rad}$$

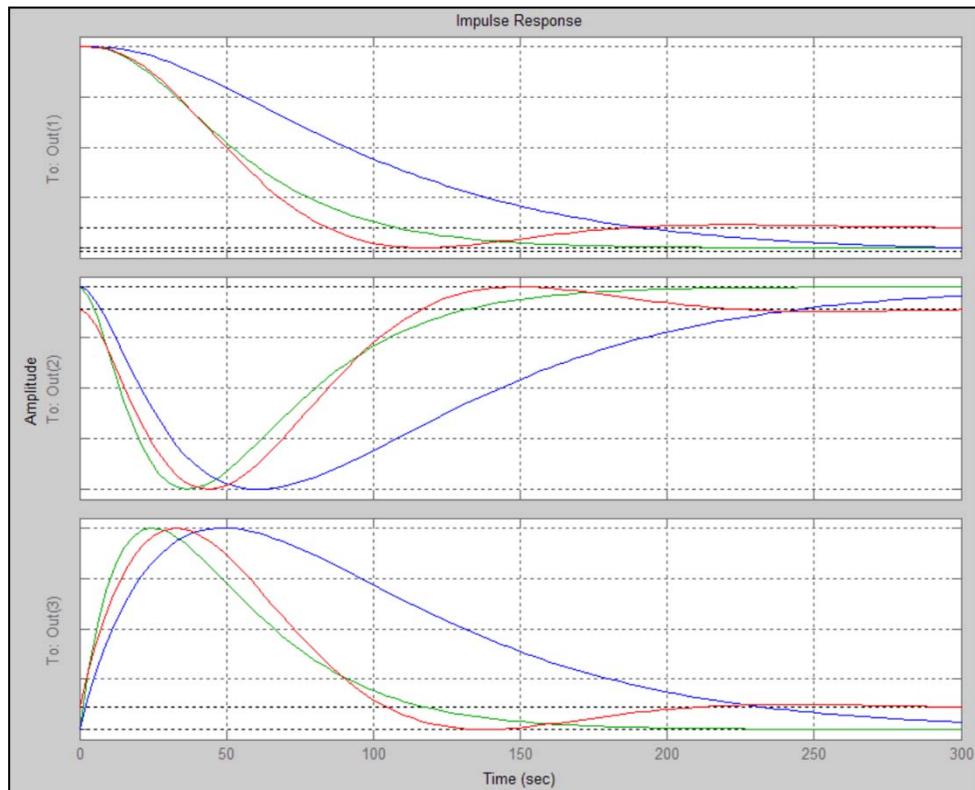
momento d'inerzia

resistenza

rapporto trasmissione

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & -0.0005 \\ 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u$$

$$u(t) = a_c(t)$$



- Il Sistema è controllabile

$$\left\{ \begin{array}{l} -.02, -.02, -.1 , \text{ grafico blu} \\ -.04, -.04, -.1 , \text{ grafico verde} \\ -.02 \pm .03j, -.1 , \text{ grafico rosso} \end{array} \right.$$



# Assegnamento Poli – Esempi

- Supponiamo di misurare l'errore in heading (direzione)  $\theta(t)$  mediante una bussola (Compass), per cui l'equazione di uscita diviene:

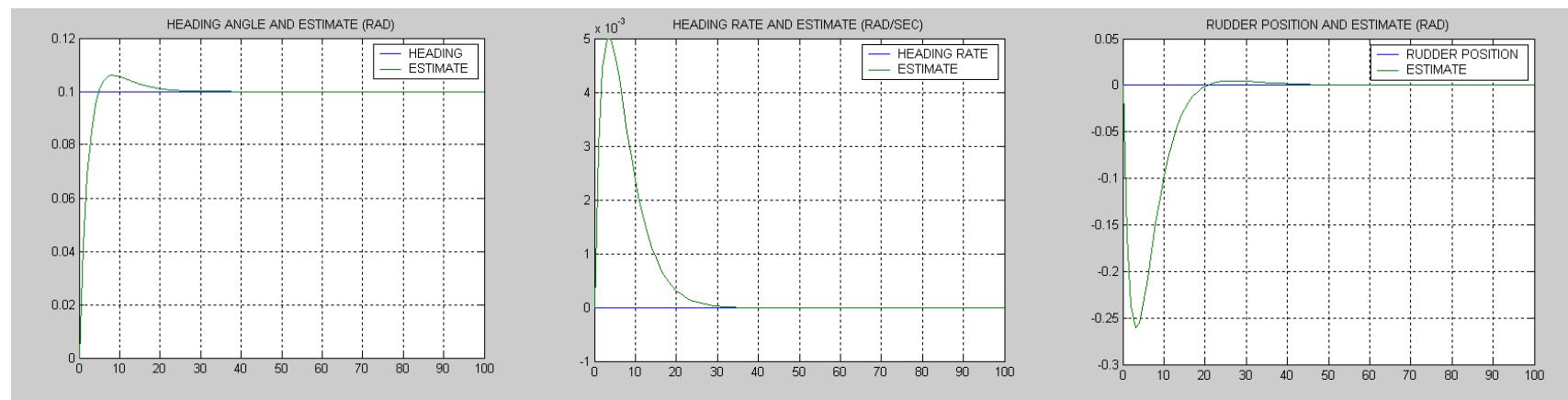
$$y(t) = \theta(t) = [1 \ 0 \ 0]x$$

- Il sistema è osservabile.

$$\text{Rango}[\mathbb{C}] = \text{Rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -0.0005 \end{bmatrix} = 3$$

- Definiamo la locazione dei poli dell'osservatore da progetto (molto lento in questo caso)

$$\lambda_i = [-0.16 \ -0.16 \ -0.4]$$





## Assegnamento Poli - Esempi

### □ Esempio 2

- Dato il sistema

$$G(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)(s+5)}$$

- Requisiti di progetto:

$$\xi \simeq 0.7$$

$$\omega_n \simeq 1.9 \text{ rad / sec}$$

$$\varepsilon^{step} = 0$$

- Il controllore necessita di un polo all'origine. Le scelta dei poli in ciclo chiuso è la seguente:

$$\begin{cases} -1.33 \pm 1.35j \\ -20 \end{cases}$$



# Assegnamento Poli - Esempi

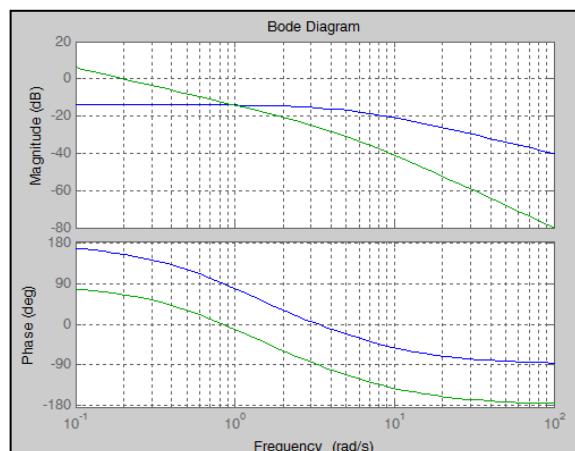
- Aggiunta di un integratore per il requisito di regime

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \textcolor{red}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \int (r - y) \cdot dt \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{aug} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{aug} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} r \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{(s - 1)}{(s + 1)(s + 5)}$$

$$G_{AUG}(s) = \frac{s(s - 1)}{s(s + 1)(s + 5)}$$



```
B =
1   -6   31
0    1   -6
0   -1    7
>> rank(B)
ans =
3
```

Sistema  
Controllabile

```
C =
1   -1   0
-7   -5   0
37   35   0
>> rank(C)
ans =
2
```

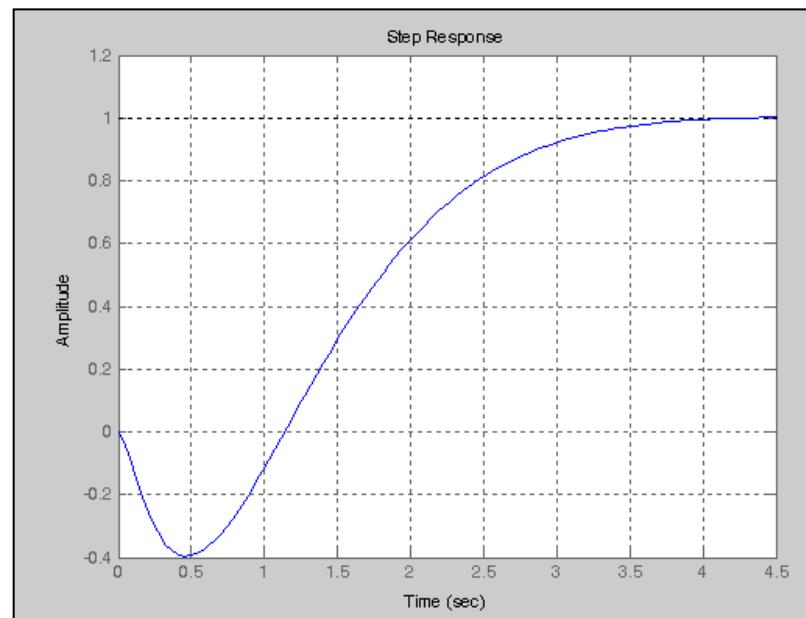
Sistema NON  
Osservabile



# Assegnamento Poli - Esempi

- Sintesi del controllore a retroazione totale

$$\begin{aligned} u &= -Kx = \\ &= \begin{bmatrix} -20.0000 & & \\ -1.3400 + 0.7000i & & \\ -1.3400 - 0.7000i & & \end{bmatrix} x \end{aligned}$$



- Ricostruzione dello stato: L'integratore introdotto per l'errore a regime è uno stato non osservabile. Si deve perciò aggiungere un'uscita misurabile su tale stato



# Assegnamento Poli - Esempi

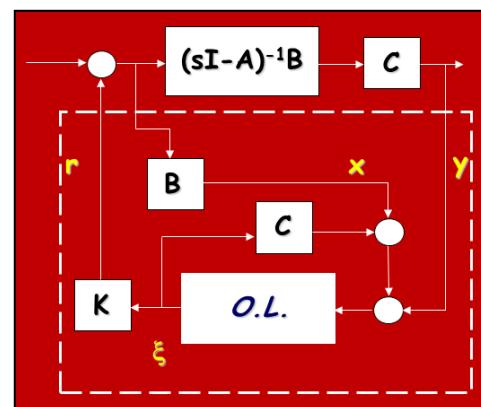
- Sintesi dell'osservatore con poli aggiuntivi:

$$y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_{aug}$$

Sensore aggiuntivo

- Dinamica scelta per l'osservatore: -40, -50, -60
- Matrice di guadagno dell'osservatore:

$$H^T = \begin{pmatrix} -154.2500 & -258.25 & -1.0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$



```
cc =  
  
1 -1 0  
0 0 1  
  
=> obsv(a,cc)  
  
ans =  
  
1 -1 0  
0 0 1  
-7 -5 0  
-1 1 0  
37 35 0  
7 5 0  
  
=> rank(ans)  
  
ans =  
  
3
```

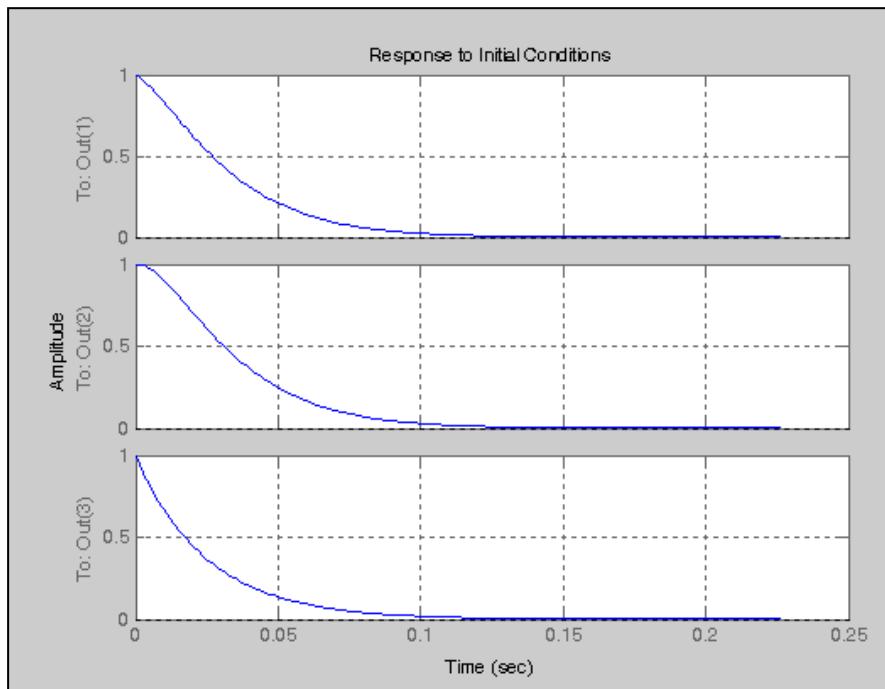


# Assegnamento Poli - Esempi

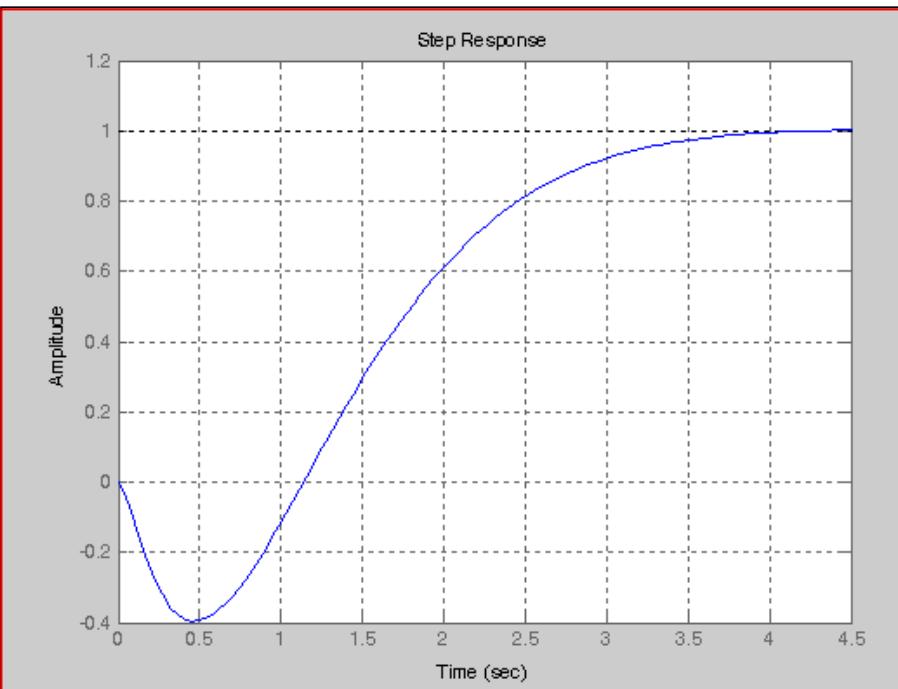
- Sommario

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{aug} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_{aug} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_{aug} \quad u = -K\xi \quad \dot{\xi} = A\xi + Bu + H(\boldsymbol{y} - C\xi)$$

- Errore dell'osservatore



- Risposta del sistema





## Assegnamento Poli – Sommario

- Dato un sistema LTI, controllabile ed osservabile, multivariabile in generale

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ \mathbf{y} = Cx \end{cases}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \Re^n$$

- La retroazione dello stato richiede che tutte le variabili di stato direttamente misurabili, oppure ricavabili per inversione da un vettore di uscita delle stesse dimensioni

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x} + \mathbf{r}$$

$$\mathbf{x} = C^{-1}\mathbf{y} \quad \dim \mathbf{x} = \dim \mathbf{y}$$

- Nel caso in cui il vettore di stato non sia disponibile, esso viene ricostruito mediante un osservatore asintotico (Luenberger) la cui dinamica  $\xi$  è delle stesse dimensioni della dinamica del sistema e data da:

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + H(\mathbf{y} - C\xi), \quad \xi \in \Re^n$$

- Scegliendo la matrice  $F = A - HC$  con autovalori di parte reale strettamente negativa, l'errore tra lo stato ricostruito e lo stato del sistema tende asintoticamente a 0.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(\xi - \mathbf{x}) = 0 \quad \dot{\varepsilon} = F\varepsilon \quad F = A - HC$$



## Assegnamento Poli – Sommario

- Il sistema in anello chiuso, di ordine  $2n$ , diviene

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} = A\boldsymbol{\xi} + Bu + H(\mathbf{y} - C\boldsymbol{\xi}) \end{cases}, \quad u = -K\boldsymbol{\xi} + r$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ HC & A - BK - HC \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad \varepsilon = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A - HC \end{bmatrix} \mathbf{q} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad \boldsymbol{\xi} = \varepsilon + \mathbf{x} \end{cases}; \mathbf{q} \in \Re^{2n}$$

- Il principio di separazione garantisce che il progetto del controllore e quello dell'osservatore sono separati.
- Il transitorio del sistema in anello chiuso è specificato dagli autovalori di  $A - B\mathbf{K}$ , la dinamica dell'errore di ricostruzione dagli autovalori di  $A - \mathbf{H}C$ .
- Il compensatore globale richiede quindi il calcolo di due matrici di guadagno  $K$  e  $H$ .

$$K(s) = K(sI - A - BK + HC)^{-1}H$$



## Esempio Harrier

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9.8 & 0 & 0 & -0.0125 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 \end{array} \right] \mathbf{x} + \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 5.2632 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.25 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{array} \right] \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \phi \\ x_{LAT} \\ y_{VER} \end{bmatrix} = C\mathbf{x} = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \mathbf{x} = \left[ \begin{array}{c|c|c} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{array} \right] \mathbf{x}$$

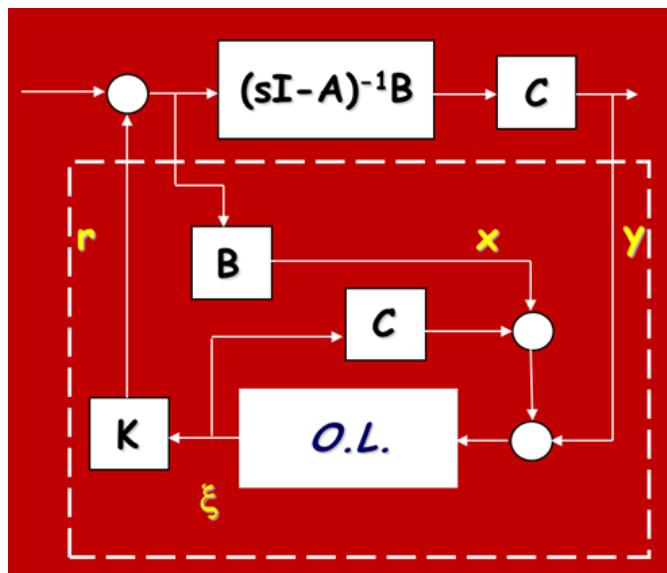
- Sintesi del controllore: (-1, -1.2, -2, -2.2, -10, -12)

```
k =  
  
1.0e+003 *  
  
0.0206    0.0035    0.0024    0.0041   -0.0002   -0.0001  
-1.6738   -0.1005   -0.2925   -0.4444    0.0407    0.0357
```



## Esempio Harrier

- Sintesi dell'osservatore con assegnazione della dinamica dell'errore fuori banda:  
(-50, -51, -52, -53, -54, -55)



$h =$

```
1.0e+003 *  
  
0.1070 -0.0009 -0.0000  
2.8604 -0.0486 -0.0000  
-0.0011 0.1070 0.0000  
-0.0484 2.8612 0.0000  
-0.0000 0.0000 0.1010  
-0.0000 0.0000 2.5487
```

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ HC & A - BK - HC \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \end{cases}$$

- Quale è la FdT del Compensatore?

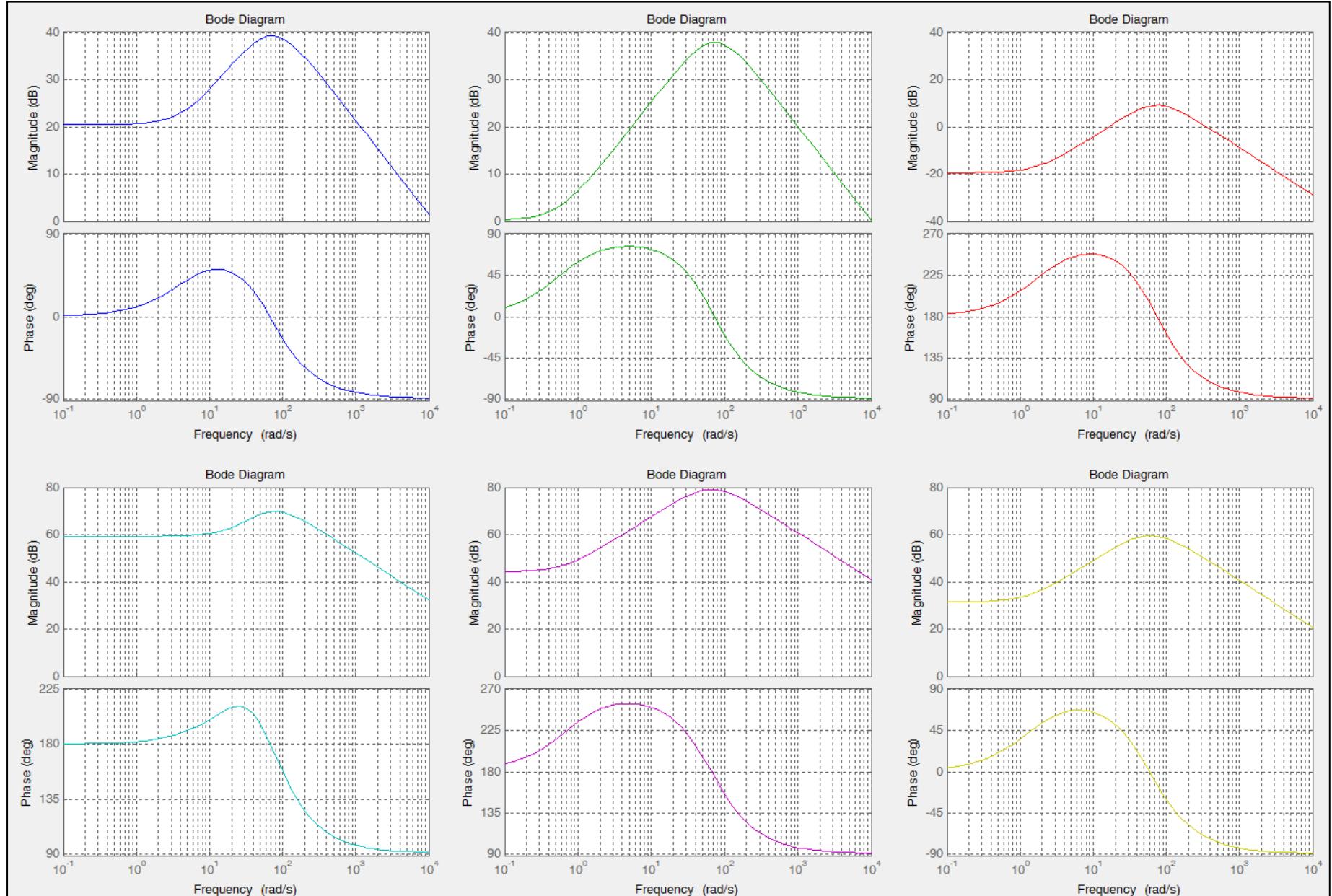
$$\begin{aligned} \xi(s) &= (sI - A + HC)^{-1} Bu(s) + \\ &(sI - A + HC)^{-1} Hy(s) \end{aligned}$$

$$u = -K\xi$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{2 \times 1}(s) &= K(s) \mathbf{y}^{3 \times 1}(s) = \\ &= -K(sI - A - BK + HC)^{-1} H \end{aligned}$$



## Esempio Harrier





## Esempio Harrier

acl =

1.0e+003 \*

Columns 1 through 7

ans =

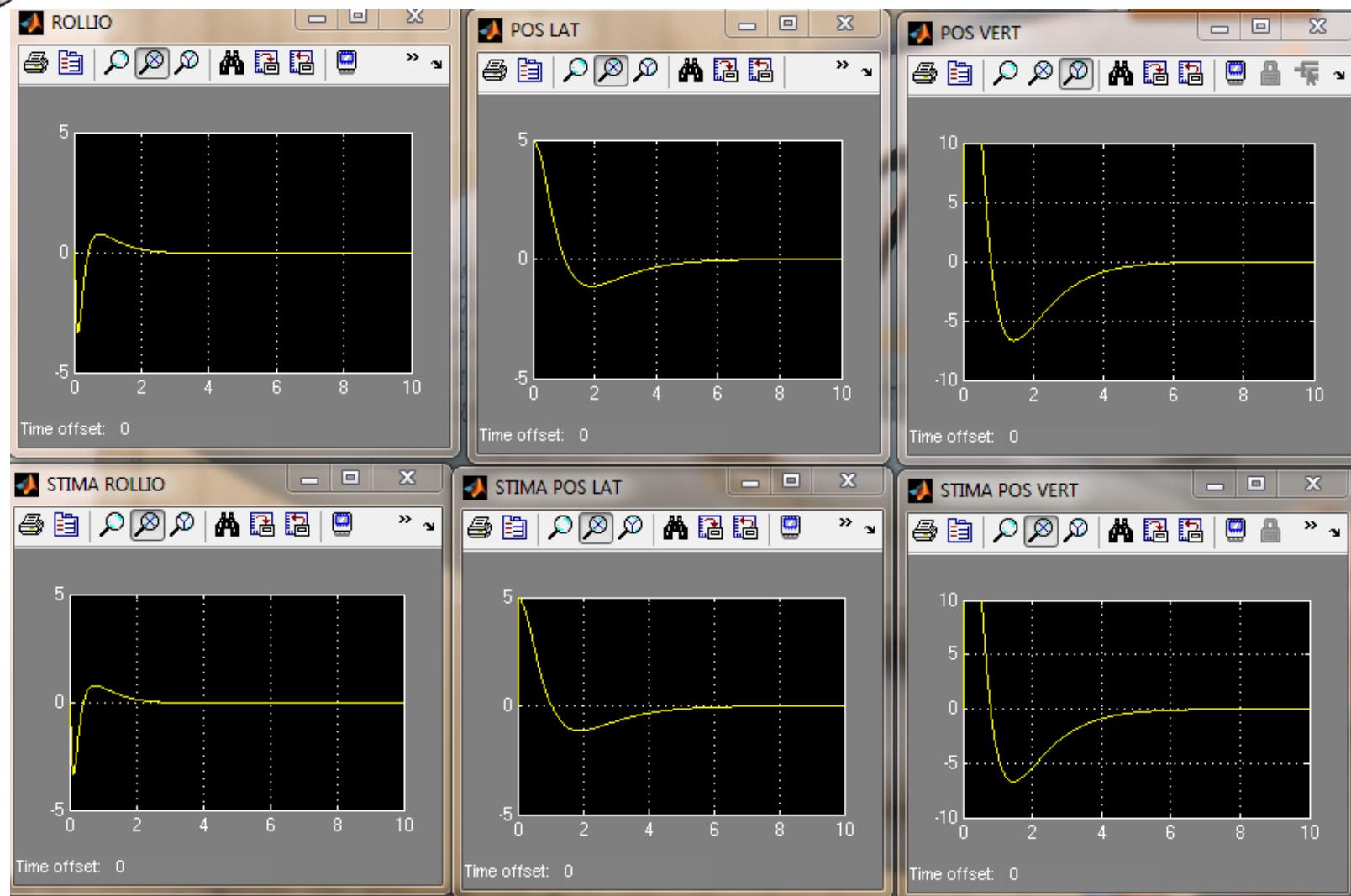
|          |         |        |         |         |         |         |         |
|----------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
|          | 0       | 0.0010 | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
|          | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       | 0       | -0.1084 |
|          | 0       | 0      | 0       | 0.0010  | 0       | 0       | 0       |
| -12.0000 | 0.0098  | 0      | 0       | -0.0000 | 0       | 0       | -0.0051 |
| -10.0000 | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       | 0.0010  | 0       |
| -2.2000  | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       | -0.0000 | 0.4184  |
| -2.0000  | 0.1070  | 0      | -0.0009 | 0       | -0.0000 | 0       | -0.1070 |
| -1.0000  | 2.8604  | 0      | -0.0486 | 0       | -0.0000 | 0       | -2.9688 |
| -1.1000  | -0.0011 | 0      | 0.1070  | 0       | 0.0000  | 0       | 0.0011  |
| -55.0000 | -0.0484 | 0      | 2.8612  | 0       | 0.0000  | 0       | 0.0531  |
| -54.0000 | -0.0000 | 0      | 0.0000  | 0       | 0.1010  | 0       | 0.0000  |
| -53.0000 | -0.0000 | 0      | 0.0000  | 0       | 2.5487  | 0       | 0.4184  |
| -52.0000 |         |        |         |         |         |         |         |
| -50.0000 |         |        |         |         |         |         |         |
| -51.0000 |         |        |         |         |         |         |         |

Columns 8 through 12

|  |         |         |         |         |         |
|--|---------|---------|---------|---------|---------|
|  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
|  | -0.0183 | -0.0125 | -0.0214 | 0.0009  | 0.0006  |
|  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
|  | -0.0009 | -0.0006 | -0.0010 | 0.0000  | 0.0000  |
|  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
|  | 0.0251  | 0.0731  | 0.1111  | -0.0102 | -0.0089 |
|  | 0.0010  | 0.0009  | 0       | 0.0000  | 0       |
|  | -0.0183 | 0.0362  | -0.0214 | 0.0009  | 0.0006  |
|  | 0       | -0.1070 | 0.0010  | -0.0000 | 0       |
|  | -0.0009 | -2.8618 | -0.0010 | 0.0000  | 0.0000  |
|  | 0       | -0.0000 | 0       | -0.1010 | 0.0010  |

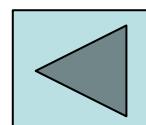
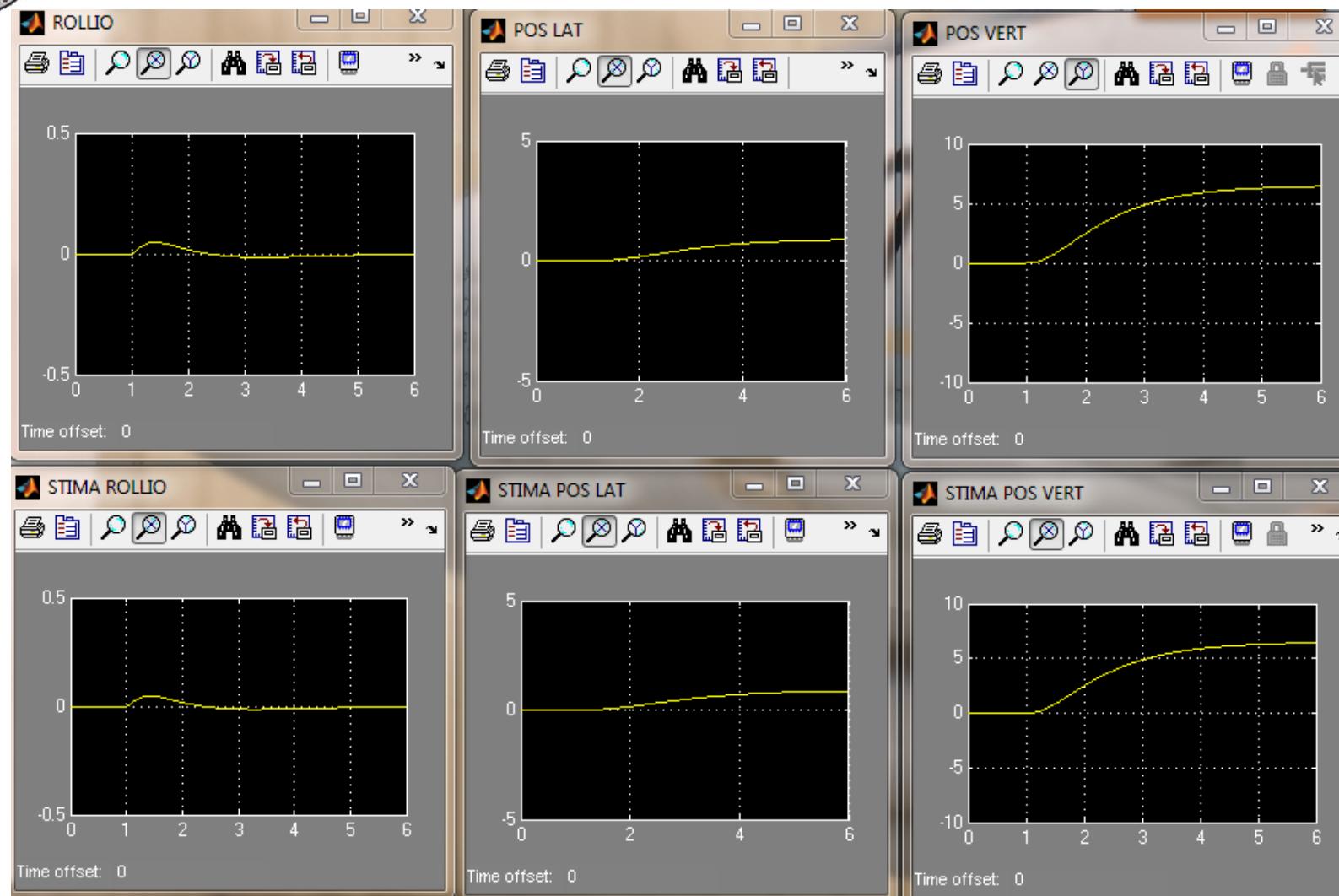


## Esempio Harrier, Risposta C.I.





## Esempio Harrier, Risposta al gradino u1





## Materiale Addizionale

- **Osservatore di Luenberger Ridotto:** Le dimensioni dell'osservatore possono essere ridotte se sfruttiamo la retroazione diretta degli stati misurabili direttamente dall'uscita

- Consideriamo il sistema lineare:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

- Dove:  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $(A, C)$  Osservabile (rivelabile)  
 $\text{rank } C = p$
- Determinare una matrice  $P$  quadrata  $n \times n$  tale che:  
$$CP = [I_p \ 0]$$
- Per esempio, usando riduzioni riga – colonna, determinare una matrice  $R$  non singolare tale che:

$$CR = [C_1 \ 0] \quad C_1 = p \times p, \det(C_1) \neq 0$$



## Materiale Addizionale

- Da cui si può scegliere:

$$P = R \begin{bmatrix} C_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} \quad CP = CR \begin{bmatrix} C_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} = [I_p \ 0]$$

- Mediante la matrice  $P$  eseguire la trasformazione di coordinate:

$$x = Pz$$

$$y = Cx = CPz = [I_p \ 0]z$$

- Il nuovo vettore di stato  $z$  è partizionabile in una parte direttamente misurabile ed nel suo complemento:

$$z = \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \end{bmatrix}, \quad z_a \in \mathbf{R}^p, \quad z_b \in \mathbf{R}^{n-p} \quad y = [I_p \ 0] \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \end{bmatrix} = z_a$$



## Materiale Addizionale

- Il nuovo sistema è:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{C}}\mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \hat{\mathbf{A}}_{12} \\ \hat{\mathbf{A}}_{21} & \hat{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_1 \\ \hat{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \hat{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{y} + \hat{\mathbf{A}}_{12}\mathbf{z}_b + \hat{\mathbf{B}}_1\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{z}}_b &= \hat{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{y} + \hat{\mathbf{A}}_{22}\mathbf{z}_b + \hat{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}\end{aligned}$$

- Risulta quindi necessario stimare soltanto la partizione  $\mathbf{z}_b$ . Una scelta per la struttura dell'osservatore è data da (in modo simile al caso full order):

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_b = \hat{\mathbf{A}}_{22}\hat{\mathbf{z}}_b + \hat{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{y} + \hat{\mathbf{B}}_2\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{K}}(\dot{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{A}}_{12}\hat{\mathbf{z}}_b - \hat{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{y} - \hat{\mathbf{B}}_1\mathbf{u})$$

- Con  $\tilde{\mathbf{K}}$  scelta tale da soddisfare il requisito di stabilità asintotica:

$$\mathbf{R}_e[\lambda(\hat{\mathbf{A}}_{22} - \tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{A}}_{12})] < 0$$

**Lemma:**  $(\hat{\mathbf{A}}_{22}, \hat{\mathbf{A}}_{12})$  is observable if and only if  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  is observable



## Materiale Addizionale

- L'errore di stima è dato dal vettore  $e_b$  :  $e_b = z_b - \hat{z}_b$

$$\begin{aligned}\dot{e}_b &= \dot{z}_b - \dot{\hat{z}}_b \\ &= \hat{A}_{21}y + \hat{A}_{22}z_b + \hat{B}_2u - \hat{A}_{21}y - \hat{A}_{22}\hat{z}_b - \hat{B}_2u \\ &\quad - \tilde{K}[\hat{A}_{11}y + \hat{A}_{12}z_b + \hat{B}_1u - \hat{A}_{11}y - \hat{A}_{12}\hat{z}_b - \hat{B}_1u] \\ &= (\hat{A}_{22} - \tilde{K}\hat{A}_{12})e_b\end{aligned}$$

- **Nota:**

$$R_e[\lambda(\hat{A}_{22} - \tilde{K}\hat{A}_{12})] < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e_b(t) = 0$$

- La forma originale del vettore di stato  $x$  e la sua stima si possono quindi riscrivere in funzione del vettore di uscita e della stima di  $z_b$  :

$$x = Pz = P \begin{bmatrix} y \\ z_b \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = P \begin{bmatrix} y \\ \hat{z}_b \end{bmatrix} \quad x - \hat{x} = P \begin{bmatrix} 0 \\ z_b - \hat{z}_b \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 \\ e_b \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \hat{x}(t)] = 0}$$



## Materiale Addizionale

- Per evitare la derivazione dell'uscita nell'espressione dell'osservatore ridotto, si può introdurre la variabile ausiliaria  $w$ :

$$\dot{\hat{z}}_b = \hat{A}_{22}\hat{z}_b + \hat{A}_{21}y + \hat{B}_2u + \tilde{K}(\dot{y} - \hat{A}_{12}\hat{z}_b - \hat{A}_{11}y - \hat{B}_1u)$$

$$w = \hat{z}_b - \tilde{K}y$$

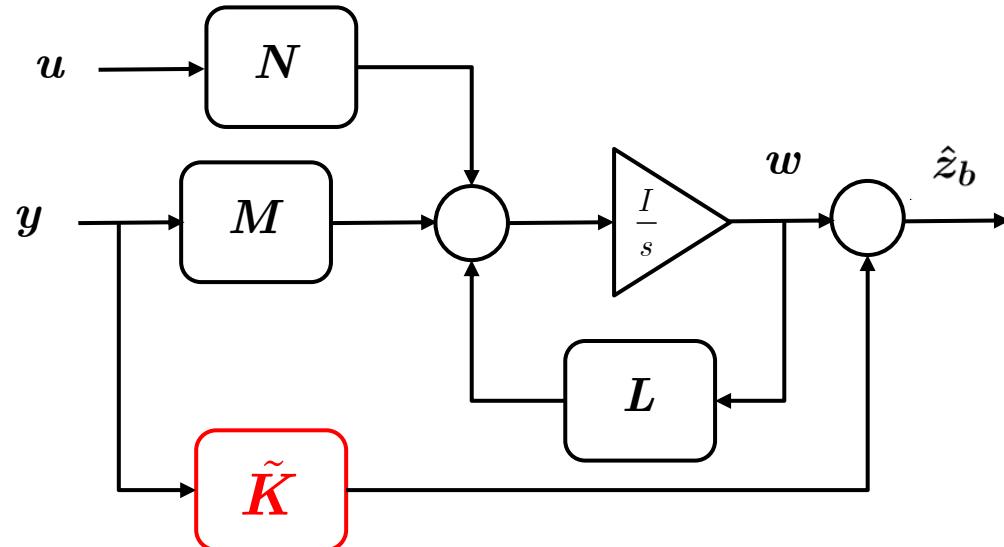
$$\begin{aligned}\dot{w} &= \dot{\hat{z}}_b - \tilde{K}\dot{y} \\ &= \hat{A}_{22}\hat{z}_b + \hat{A}_{21}y + \hat{B}_2u \\ &\quad + \tilde{K}(\dot{y} - \hat{A}_{12}\hat{z}_b - \hat{A}_{11}y - \hat{B}_1u) \\ &\quad - \tilde{K}\dot{y} \\ &= (\hat{A}_{22} - \tilde{K}\hat{A}_{12})(w + \tilde{K}y) \\ &\quad + (\hat{A}_{21} - \tilde{K}\hat{A}_{11})y + (\hat{B}_2 - \tilde{K}\hat{B}_1)u \\ &= (\hat{A}_{22} - \tilde{K}\hat{A}_{12})w + (\hat{B}_2 - \tilde{K}\hat{B}_1)u \\ &\quad + (\hat{A}_{21} - \tilde{K}\hat{A}_{11} + \hat{A}_{22}\tilde{K} - \tilde{K}\hat{A}_{12}\tilde{K})y\end{aligned}$$

The diagram consists of three red arrows pointing from specific terms in the equation to labels L, N, and M. The first arrow points from the term  $\tilde{K}(\dot{y} - \hat{A}_{12}\hat{z}_b - \hat{A}_{11}y - \hat{B}_1u) - \tilde{K}\dot{y}$  to the label L. The second arrow points from the term  $(\hat{A}_{21} - \tilde{K}\hat{A}_{11})y$  to the label N. The third arrow points from the term  $(\hat{A}_{21} - \tilde{K}\hat{A}_{11} + \hat{A}_{22}\tilde{K} - \tilde{K}\hat{A}_{12}\tilde{K})y$  to the label M.

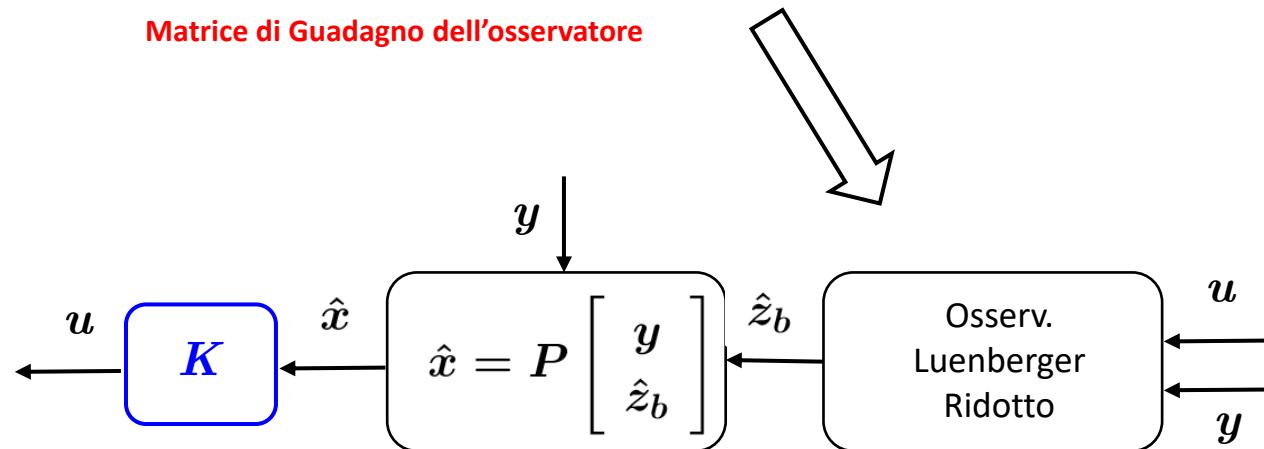


## Materiale Addizionale

- In termini di diagramma a blocchi si ha la seguente struttura:



Matrice di Guadagno dell'osservatore



Matrice di Guadagno del controllore



## Materiale Addizionale

- **Esempio:** consideriamo la stabilizzazione di un doppio integratore

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad y = x_1 \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Selezionare un controllore stabilizzante:

$$u = -Kx = -\begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}x$$

- Sintesi dell'osservatore di Luenberger:

$$\lambda_1 = -10; \lambda_2 = -11$$

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + H(y - C\xi)$$

$$\lambda_i(A - HC) = \{-10 \quad -11\} \Rightarrow H = \begin{bmatrix} 21 \\ 110 \end{bmatrix}$$



## Materiale Addizionale

- Sintesi dell'osservatore di Luenberger ridotto:

$$CP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} P \Rightarrow P = I_{2 \times 2} \quad \hat{\mathbf{A}} = P^{-1}AP = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \hat{\mathbf{B}} = P^{-1}B = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Selezionare la matrice di guadagno dell'osservatore ridotto:

$$\tilde{\mathbf{K}} = 10 \quad \mathbf{L} = \hat{A}_{22} - \tilde{K}\hat{A}_{12} = -10 \quad \mathbf{N} = \hat{B}_2 - \tilde{K}\hat{B}_1 = 1 \quad \mathbf{M} = \hat{A}_{21} - \tilde{K}\hat{A}_{11} + \hat{A}_{22}\tilde{K} - \tilde{K}\hat{A}_{12}\tilde{K} = -100$$

$$\hat{x}_2 = w + \tilde{K}y = w + 10y$$

$$\dot{w} = -10w + u - 100y$$

$$\begin{aligned} u &= -4y - 2(w + 10y) \\ &= -24y - 2w \\ \dot{w} &= -10w + u - 100y \\ &= -12w - 124y \end{aligned}$$



## Materiale Addizionale

- **Esempio:** Dato il sistema:

$$G(s) = \frac{(s - 2)(s - 4)}{s^2(s - 1)(s - 3)(s^2 + 0.8s + 4)}$$

□ Progettare un controllore tale che:

1. Il tempo di assestamento sia non superiore a 10 secondi
2. La sovraelongazione massima inferiore al 5%
3. L'errore al gradino in posizione sia nullo

□ Confrontare i controllori sviluppati mediante:

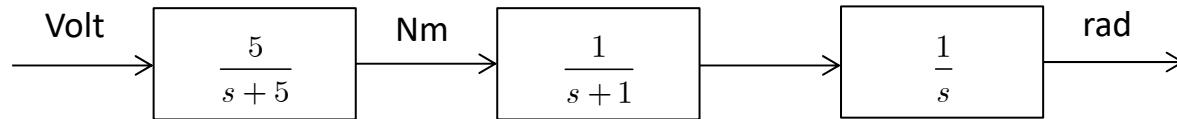
1. Sintesi in frequenza
2. Controllori standard
3. Retroazione dello stato + osservatore

□ Matlab file: ESERCIZIOFINALE.m:



# Materiale Addizionale

- **Esempio:** Posizionamento Antenna



□ Progettare un controllore tale che:

1. Il tempo di assestamento sia non superiore a 4 secondi
2. La sovraelongazione massima inferiore al 5%
3. L'errore al gradino in posizione sia nullo
4. La banda passante sia di circa 5 rad/sec

□ Confrontare i controllori sviluppati mediante:

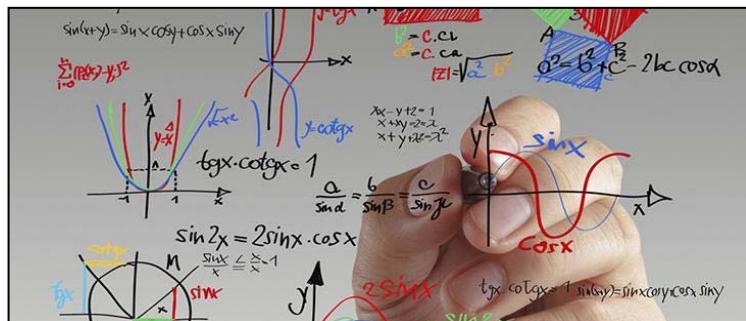
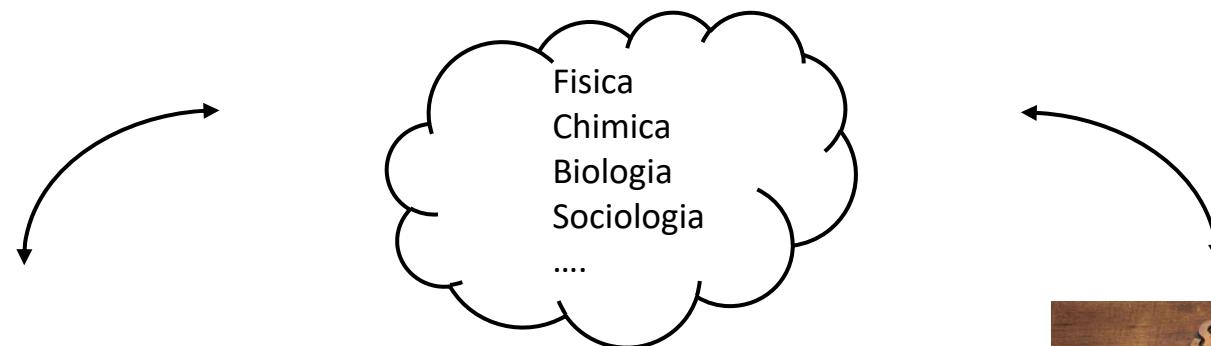
1. Sintesi in frequenza
2. Controllori standard
3. Retroazione dello stato + osservatore



## Fondamenti di Automatica

- Iniziare lo studente ad un approccio sistematico relativo all'analisi ed al controllo di processi evolutivi naturali ed artificiali

1. Fornire una struttura concettuale di analisi di sistema
2. Fornire il background analitico necessario allo scopo

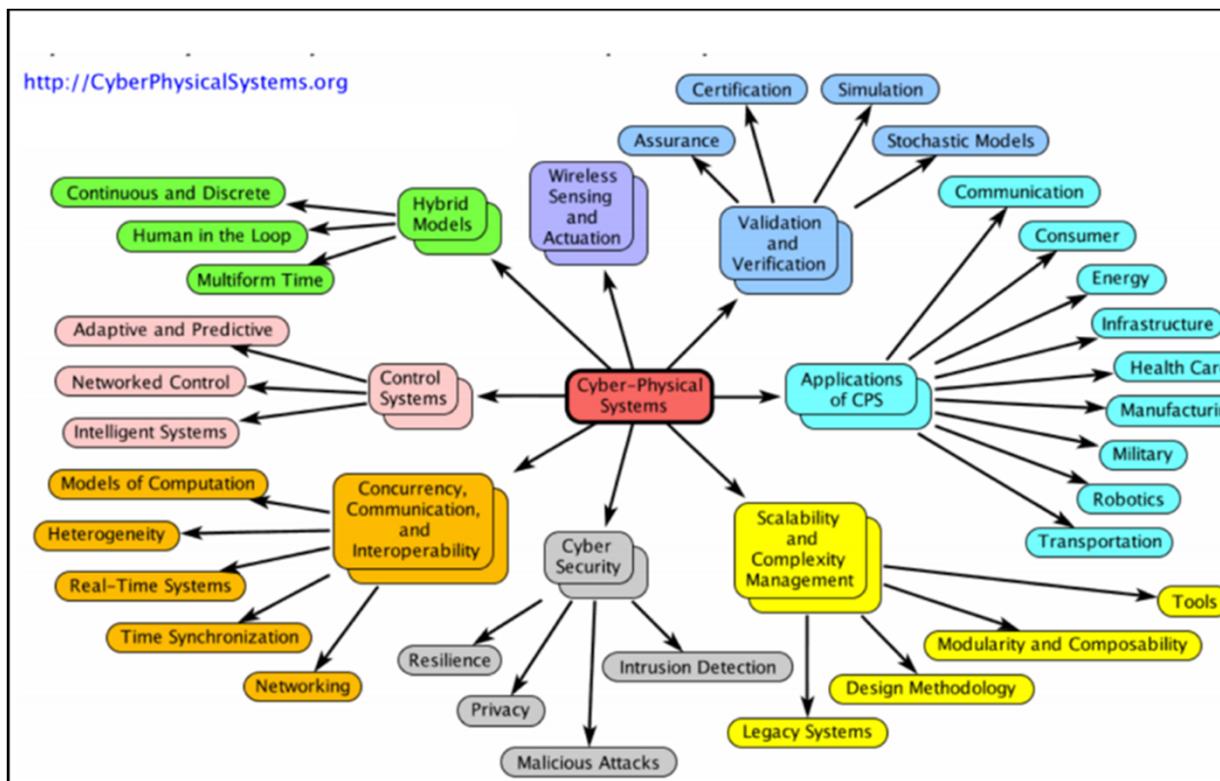




# Fondamenti di Automatica

## ❑ Obiettivi:

1. Evoluzione desiderata del processo
2. Degradazione controllata in presenza di fenomeni esogeni (guasti, azioni esterne)
3. Competizione tecnico/economica con il mercato

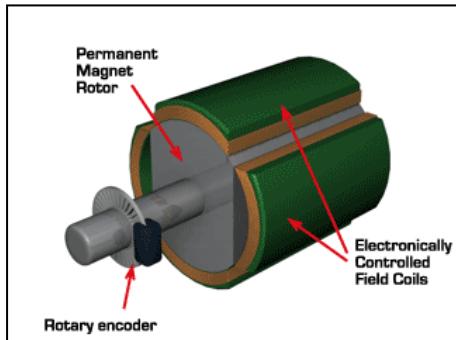




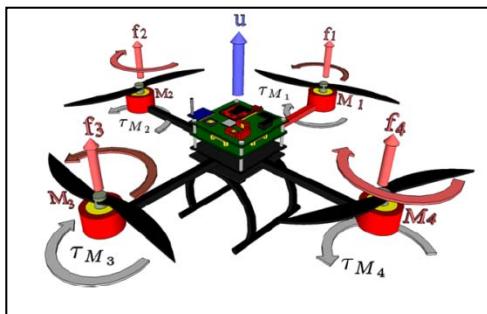
# Fondamenti di Automatica

## □ Approccio:

1. Modellistica
2. Analisi e sintesi Multiloop



- Progetto di un processo base: garantire il rapporto tensione – numero di giri con dimensioni e costi specificati per un determinato periodo operativo



- Progetto di un processo complesso: garantire il movimento desiderato mediante opportuna operazione di più processi base



## Fondamenti di Automatica

- Applicazioni che producono benefici all'utenza:



- Ricerca e Salvataggio



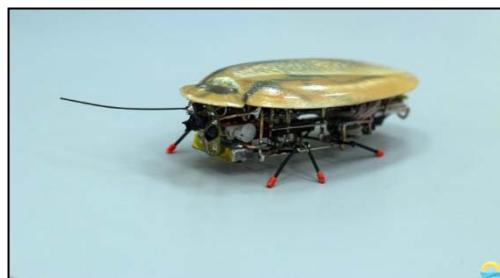
- Manutenzione, Verifica,  
Monitoraggio



# Fondamenti di Automatica



□ Operazioni in aree pericolose



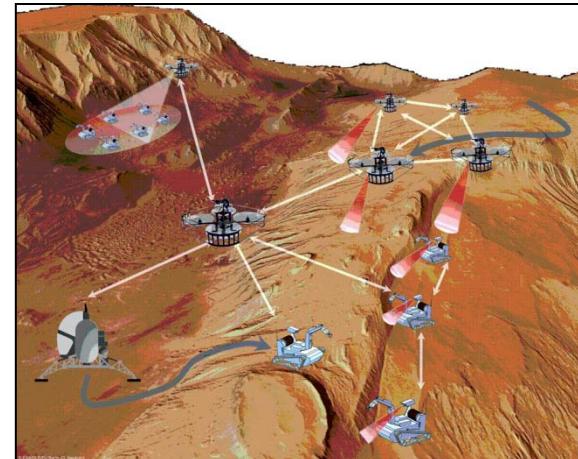
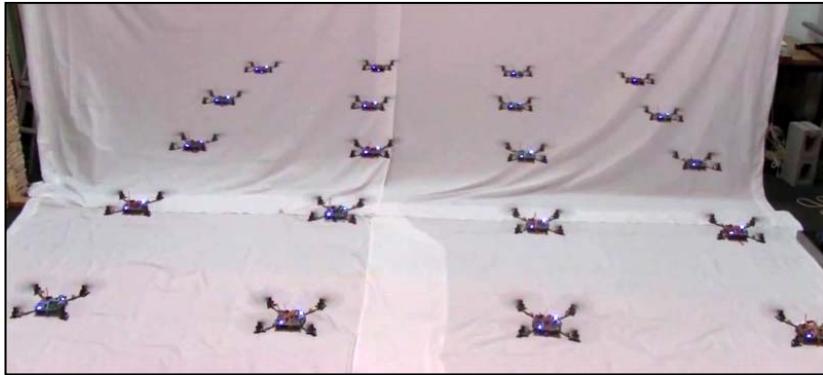
□ Innovazione tecnologica





# Fondamenti di Automatica

## □ Integrazione e Gestione

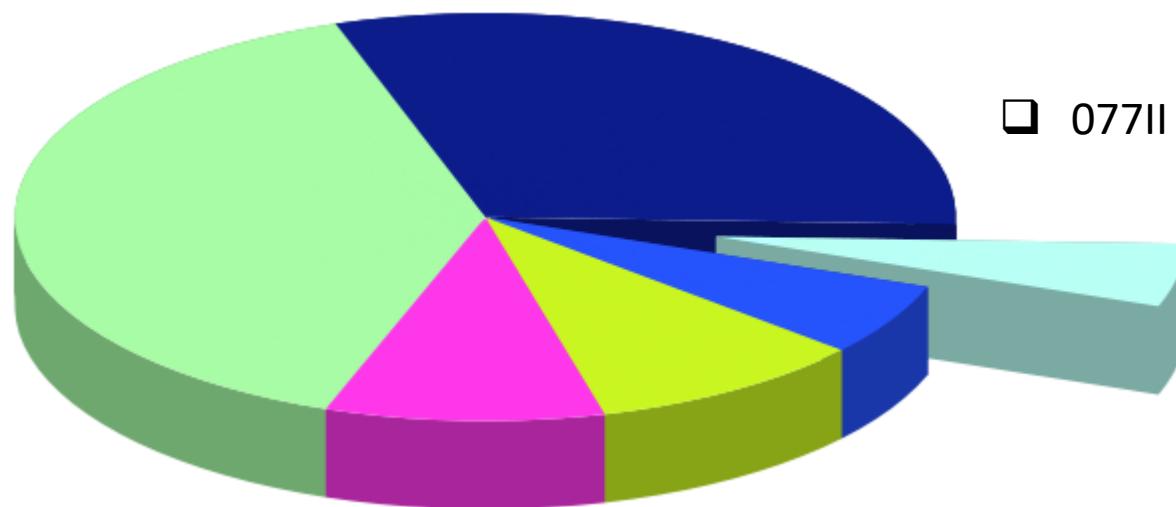


## □ Analisi e Controllo a vari livelli di dettaglio

1. Valutazione e progettazione di controllo tra causa ed effetto  
**(feedback)**
2. Sviluppo di modelli dai più semplici ai più complessi
3. Sviluppo di simulatori omnicomprensivi e sostitutivi di prototipi
4. Uso di matematica appropriata al livello di complessità



## Fondamenti di Automatica



□ 077II

### □ Sistemi Lineari e Linearizzabili

- Equilibrio, Stabilità
- Evoluzione temporale: Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, rappresentazione nello spazio di stato
- Rappresentazione in frequenza: Laplace, numeri complessi, Fourier, segnali
- Proprietà strutturali: realizzazioni, controllabilità, osservabilità, considerazioni geometriche mediante la teoria delle matrici



## Fondamenti di Automatica

### □ Comportamento ottimale/soddisfacente

- Stabilità: Criterio di Routh, Analisi di Lyapunov
- Prestazioni: Errore a regime, Risposta transitoria
- Sintesi di Controllo: Luogo delle Radici, Sintesi in frequenza, controllori standard
- Problematiche relative ad errori nel modello di lavoro: stabilità relativa, Criterio di Nyquist, margini di stabilità, funzione di sensitività
- Controllori nello spazio di stato: retroazione dello stato, retroazione dell'uscita e progetto dell'osservatore, relazione con le metodologie in frequenza
- Analisi finale mediante simulazione



## Ingegneria Robotica e dell'Automazione

### Robotics and Automation Curriculum (Master's Degree – 120 ECTS)

#### First Year

- Probability and Stochastic Processes
- Mechanics of Robots
- Systems and Control Theory
- Process Control
- Free Elective (1)
- Group B Elective (1)
- Group A Electives (2)

#### Group A Electives

- Digital Control
- Advanced Programming and Embedded Systems
- Electronic Systems for Automation
- Fluidynamics and Thermal Systems

#### Second Year

- Identification of Dynamic Systems
- Control of Uncertain Systems
- Distributed Systems Control
- Nonlinear and Robot Control
- Guidance and Navigation Systems
- Group B Elective (1)

#### Group B Electives

- Automotive Dynamics
- Mechatronic Laboratory
- Underwater Systems
- Aerospace Robotics

Tubingen (GE), Delft (NE), Cranfield (UK)  
Syracuse, Auburn, MIT, UCSB, UC Berkeley, UC Santa Barbara, UC Riverside, Fermi Lab (US)



Cancemi Lorenzo, "Missile Guidance Law with added Visibility", July 2013, in cooperation with AFRL, Eglin AFB, USA (currently with **Leonardo Defense Systems, Livorno, Italy**).

Franzini Giovanni, "Nonlinear Control of Relative Motion in Space using Extended Linearization Technique", July 2014, in cooperation with ESA Clean Space Initiative (currently **PhD student, University of Pisa, Italy**).

Mammoliti Matteo, "Guida innovativa in ambiente con ostacoli", February 2015 (currently with **Continental Automotive Italy S.p.A, San Piero a Grado, Pisa, Italy**).

Tartaglia Vincenzo, "Game Theoretic Strategies for Spacecraft Rendezvous and Motion Synchronization", April 2015, in cooperation with ESA Clean Space Initiative (currently with **Leonardo Helicopters, Milan, Italy**).

Salvetti Alessandro, "Controllo Ottimo di Sciami di Agenti mediante Descriptor Function Framework" July 2015, (currently with **Leonardo Helicopters, Milan, Italy**).

Parnenzini Valeria, "An Adaptive Security Mechanism for Cyber-Physical Systems", February 2016, in cooperation with University of California, Riverside, California, USA. (currently with **Mathworks UK, Cambridge UK**).

Al Atassi Omar, "Inductance studies for the Quench Protection system of the Mu2e TS solenoids", December 2015, in cooperation with Fermilab Central Helium Liquefying facility, Fermilab, Batavia, Illinois, USA, (currently with **Fermilab, IL, USA**).

Tardioli Luca, "Sintesi di un Sistema di guida aumentato con funzione di visibilità", April 2016, (currently with **ESAUTOMOTION, Modena, Italy**).

Brandimarti Alessandro, "A Novel Nonlinear Model Predictive Control for coordinating a UAV Swarm", April 2016, in cooperation with Cranfield University, GB.

Menara Tommaso, "A Novel Characterization of Strong Structural Controllability: Sparsity Conditions and Control Paths", April 2016, in cooperation with University of California, Riverside, California, USA. (currently **PhD student, University of California, Riverside**).

Matassini Tommaso, "Neuro-Adaptive Control of UAV's", April 2016, in cooperation with Cranfield University, GB. (currently with **CYNNY srl, Florence, Italy**).

Morvidoni Matteo, "A framework for Decentralised Task Allocation with Informative Path Planning using submodular rewards", July 2016, in cooperation with Cranfield University, GB (currently with **Ely Lilly Florence, Italy**).

Iannino Vincenzo, "Design of an Advanced Control Method for Steam Turbine Power Generation Application", October 2016, in cooperation with General Electric, Florence, Italy (currently with **General Electric and SSSUP, Pisa, Italy**).

Tannous Michael: "Control of Spacecraft Formations around Lagrangian Points", February 2017 (Currently with **United Technology Research Centre, Cork, Ireland**).

Tiberi Lorenzo: "Cluster Synchronization in Networks of Oscillators", May 2017, in cooperation with the University of California, Riverside, USA, (currently **PhD student ETH, Basel, Switzerland**).

Carmignoli Giulia: "Autonomous obstacles map creation for UAVs in unknown environments using Visual-SLAM", May 2017, in cooperation with FLYBY Srl, Livorno, Italy, (currently with **FLYBY Srl, Livorno, Italy**).



# ASSEGNAMENTO POLI



- 1. Concetti Generali**
- 2. Equazione Diofantina**
- 3. Tecniche di Assegnamento Poli e Controllo nello Spazio di Stato**
- 4. Esempi**



# Riferimenti

- Capitoli 14 Testo di Bolzern
- Capitolo 10 Lewis (download)
- Capitoli 6, 7 (part) Murray  
(download)

Introduzione

Richiami

Modellistica

Descrizione

Prop. Strut.

Analisi 1

Analisi 2

Sintesi Prelim.

Con. Avanzati

Con. Standard





# Requisiti di Controllo

## Stabilità in Condizioni nominali

- **Stabilità interna**
- Stabilità esterna
- Realizzazioni

## Stabilità in condizioni perturbate

- Sensitività a variazioni di parametri
- Stabilità relativa ad incertezze moltiplicative non strutturate
- Robustezza

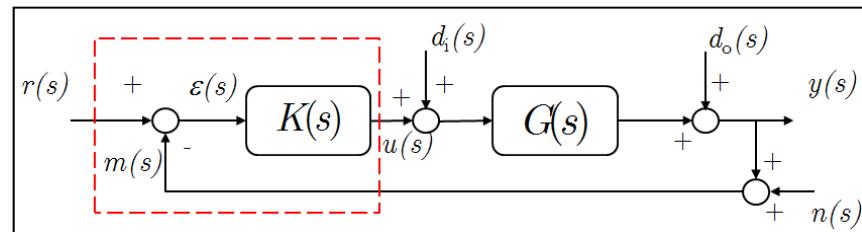
## Prestazioni nominali

- Precisione statica
  - Errore a regime
- Precisione dinamica
  - **Risposta transitoria al comando**
  - **Attenuazione dei disturbi**
  - Limite nella quantità di controllo

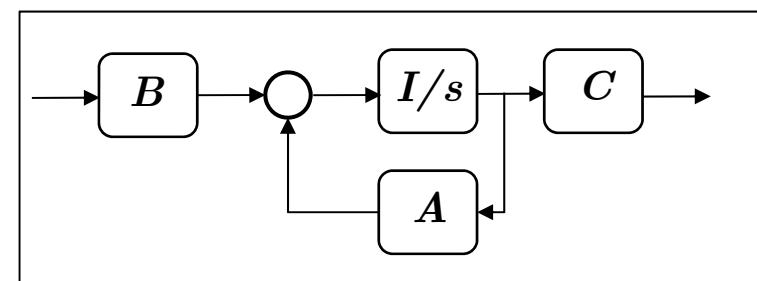
## Prestazioni in condizioni perturbate

- Precisione statica
- Precisione dinamica

## Le proprietà di stabilità e risposta transitoria sono gestite, nel dominio della frequenza, dai poli della funzione di trasferimento



## Le proprietà di stabilità e risposta transitoria sono gestite, nel dominio del tempo, dagli autovalori della matrice di sistema





# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

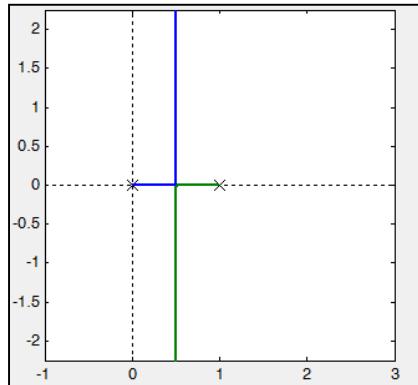
□ Progettare un controllore che garantisca l'errore nullo a regime per il sistema:

$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

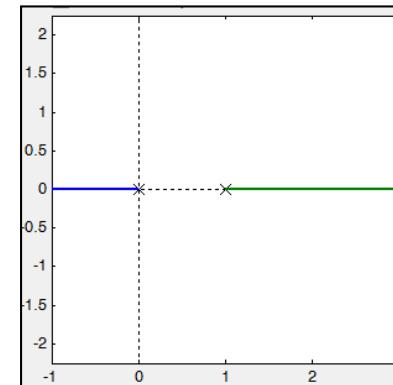
- Sistema di Tipo 1
- Il sistema in anello chiuso è sempre instabile per qualsiasi valore del guadagno di anello

$$T(s) = \frac{k}{s^2 - s + k}$$

$$K > 0$$



$$K < 0$$



$$Z=N+P=1+1=2$$

$$Z=N+P=0+1=1$$



# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

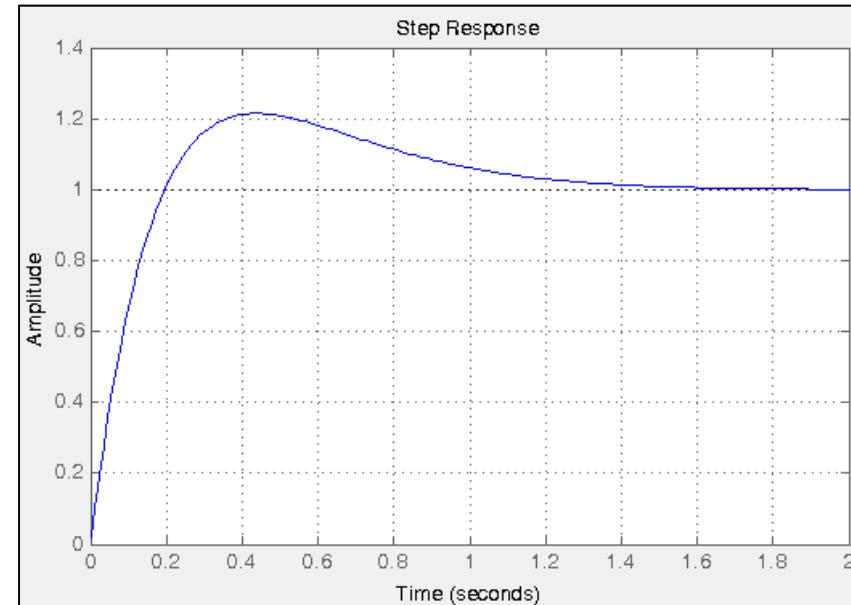
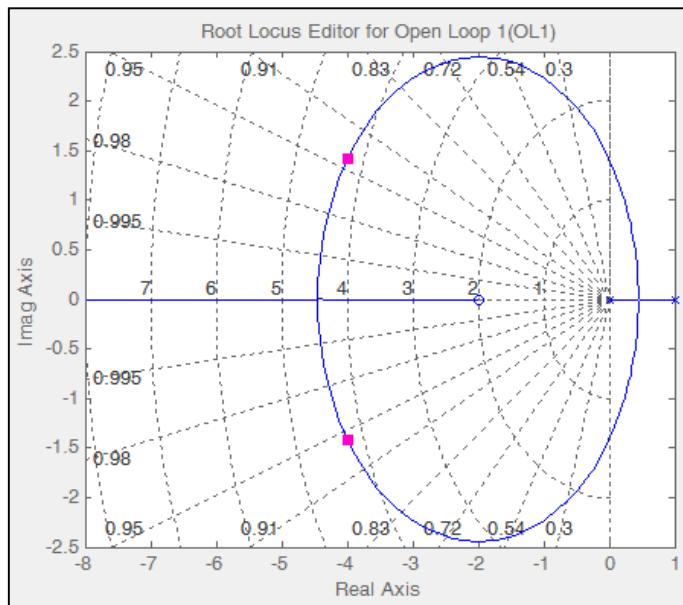
- Il controllore deve contenere uno zero dominante per attrarre i poli instabili nel semipiano di parte reale negativa (PD)

$$K(s) = k_1(s + k_2) \quad G(s)K(s) = \frac{k_1(s + k_2)}{s(s - 1)} \quad T(s) = \frac{k_1(s + k_2)}{s^2 + (k_1 - 1)s + k_1 k_2}$$

- Il guadagno  $k_2$  seleziona la posizione dello zero ( $k_2 > 0$ ) esempio  $k_2 = 2$ .
- Il guadagno  $k_1 > k_{\text{cr}} > 1$  specifica il guadagno di anello necessario per garantire la stabilità in anello chiuso

- Selezione  $k_1 = 9$

$$T(s) = \frac{9(s + 2)}{s^2 + 8s + 18}$$



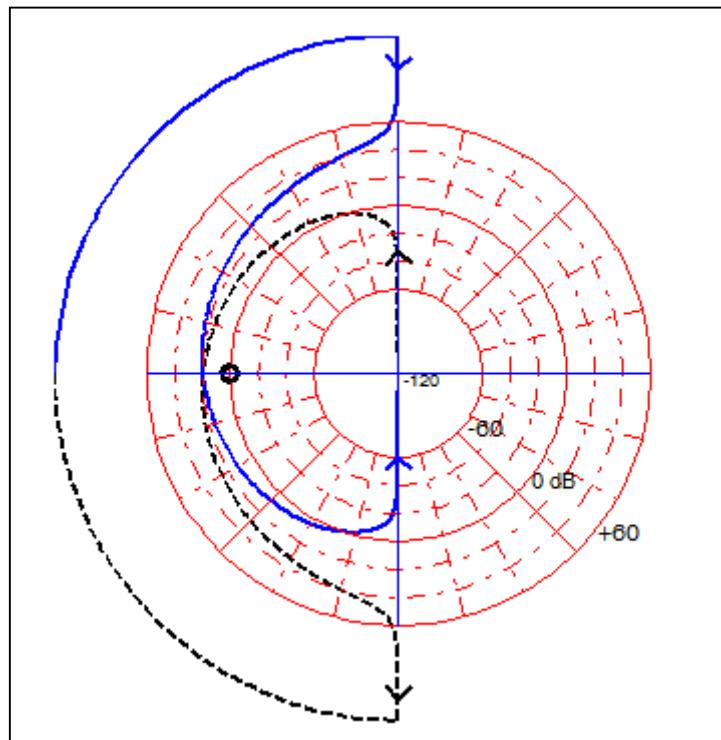


## Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

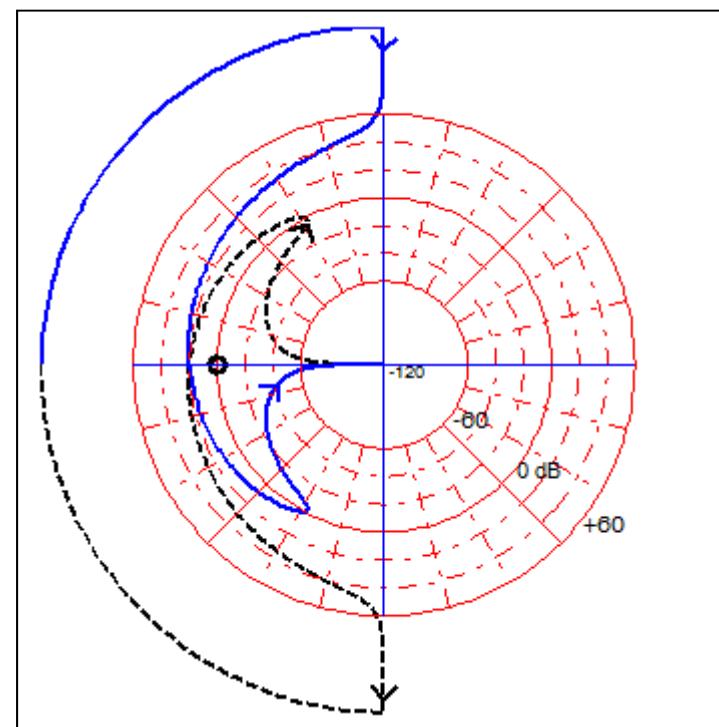
- Il controllore deve essere reso causale mediante la presenza di un polo fuori banda

$$K(s) = k_1(s + k_2) = 9(s + 2)$$

$$K(s) = k \frac{k_1(s + k_2)}{(s + P)} = 10 \frac{9(s + 2)}{\left(1 + \frac{s}{50}\right)}$$



$$Z = N + P = -1 + 1 = 0$$

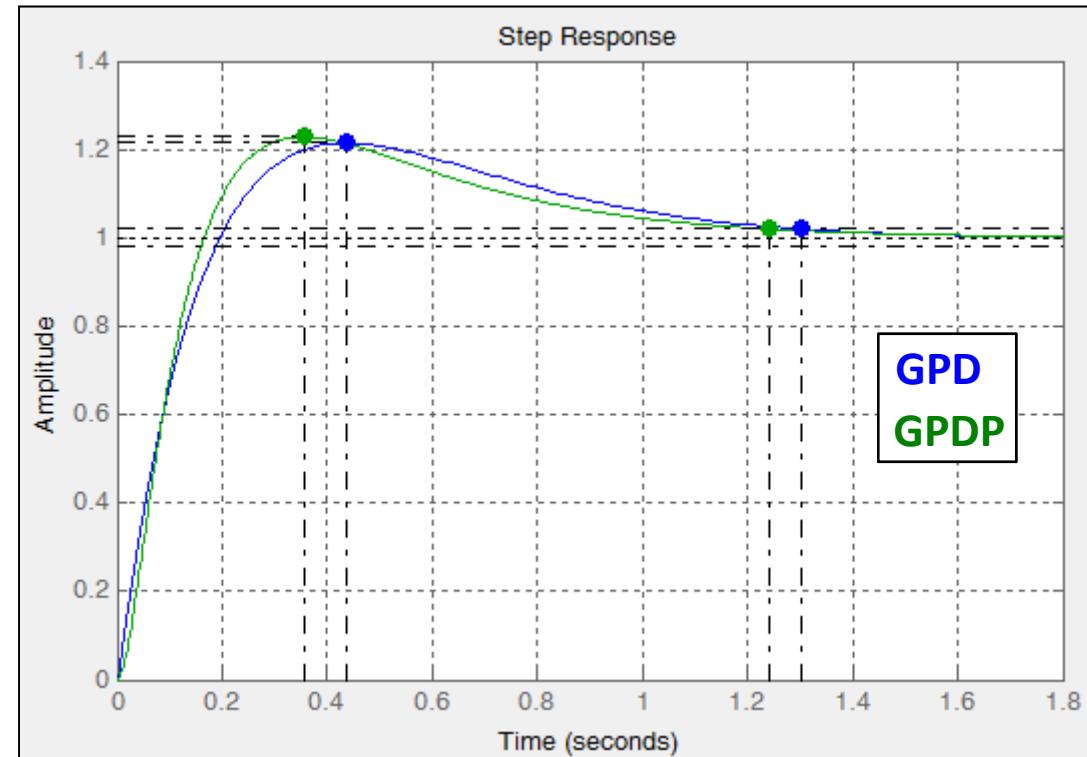
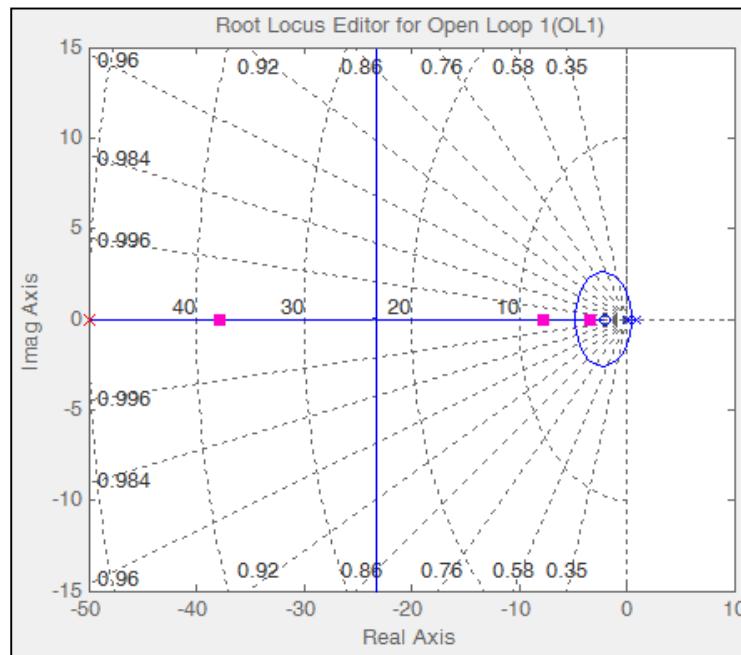


$$Z = N + P = -1 + 1 = 0$$



## Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- La scelta del polo e del guadagno di anello è fatta per mantenere il tempo di salita e la sovraelongazione del controllore PD puro (scelta di progetto)

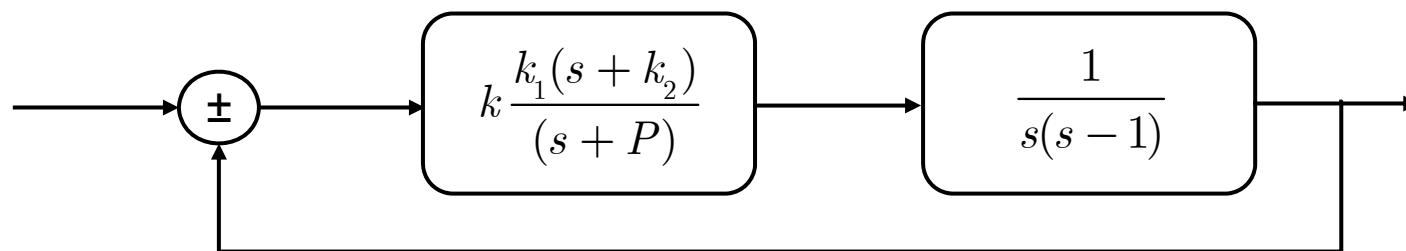


- Nota:** altre scelte di progetto sono possibili ed influenzano la locazione del polo ed il guadagno di anello.



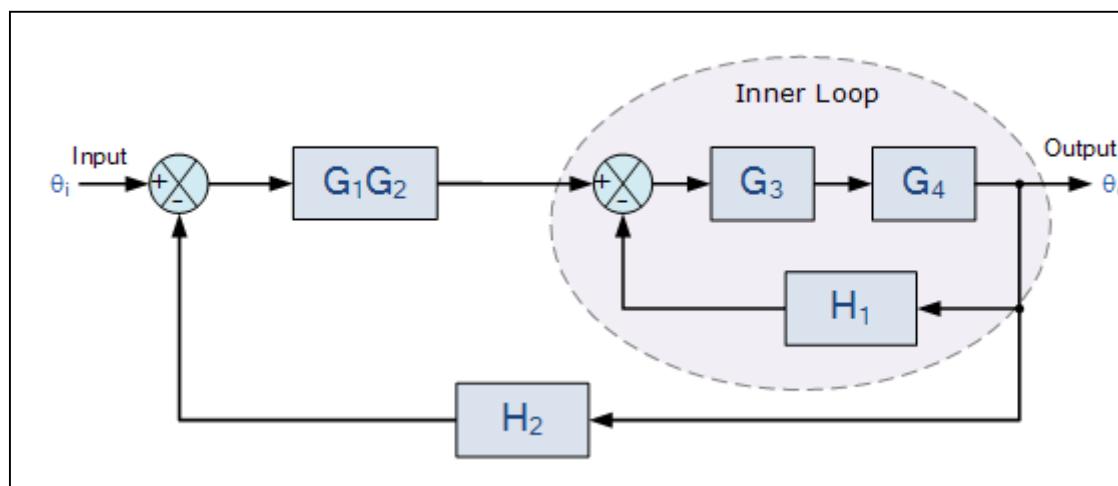
# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Struttura finale del sistema controllato:



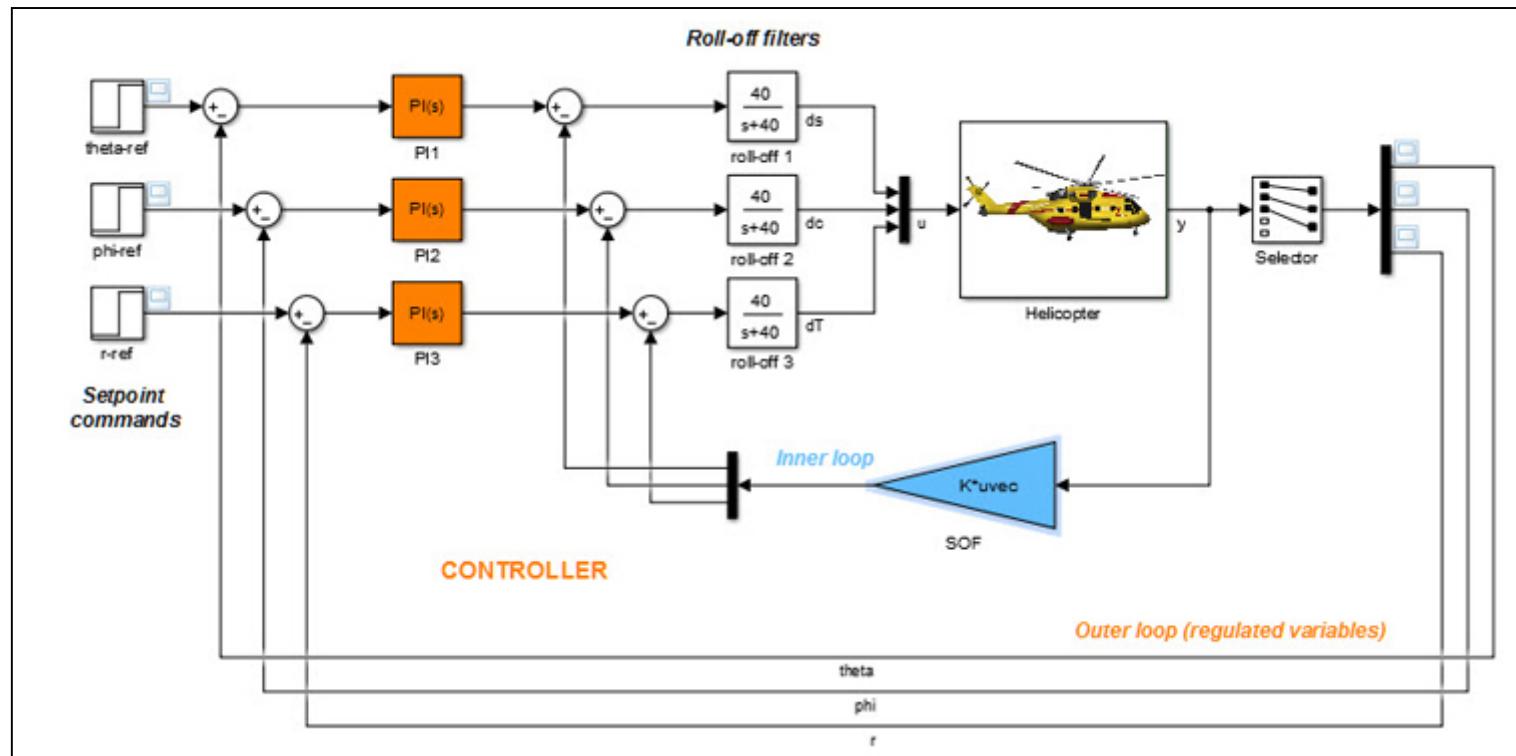
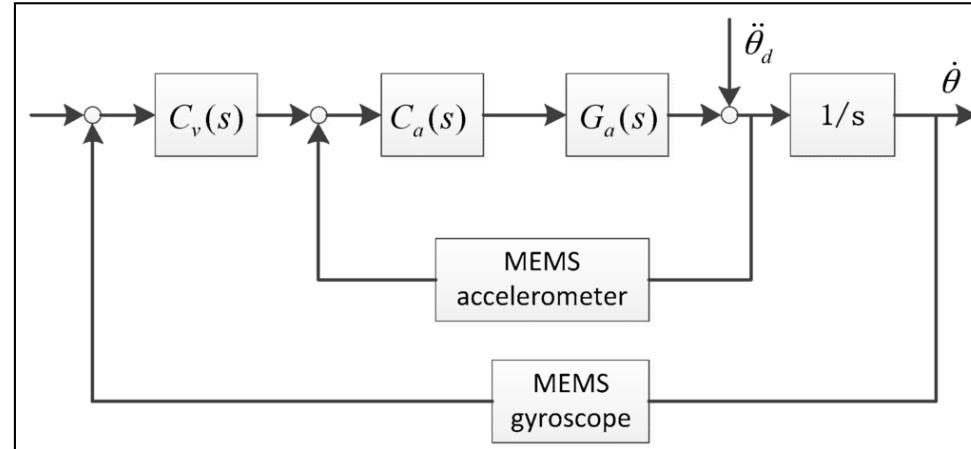
## □ Struttura alternativa di controllo mediante anelli multipli

1. Riduzione della complessità del controllore
2. Risparmio energetico di ciascuna componente
3. Sottosistemi operanti in bande di frequenza diverse
4. Richiesta di misure addizionali





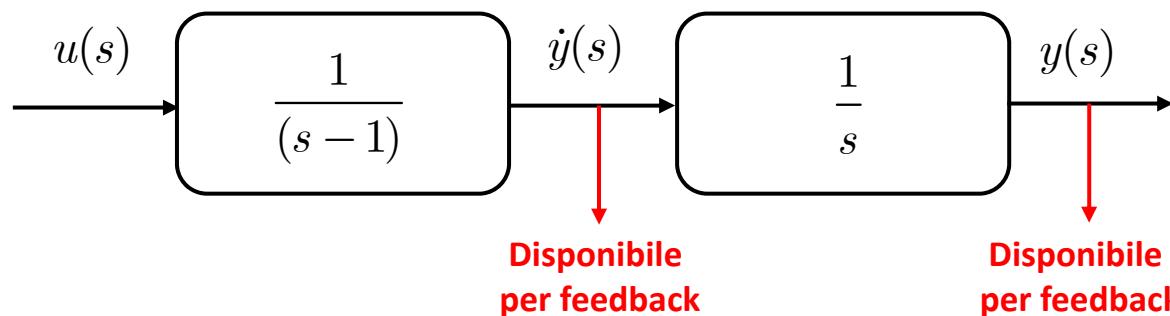
# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo



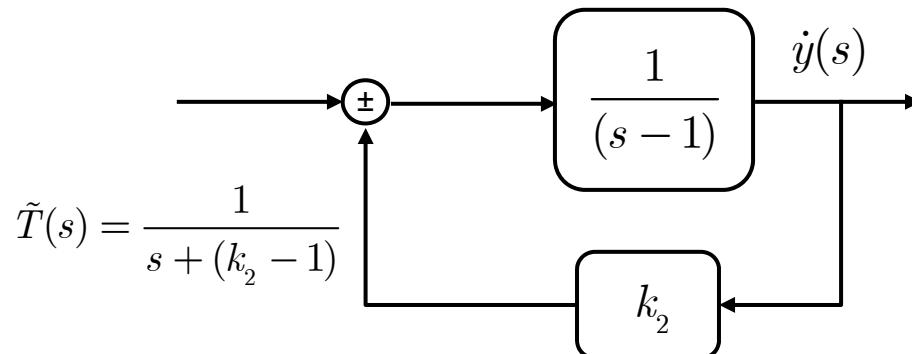


# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)} = G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{(s-1)} \cdot \frac{1}{s}$$

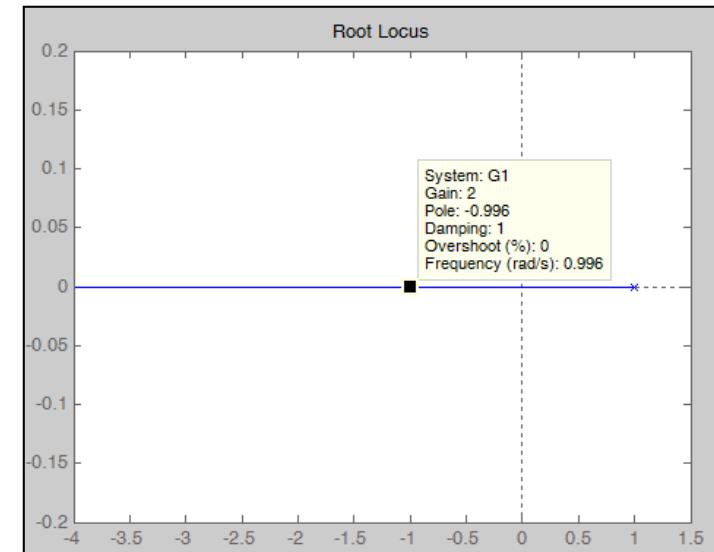


- Progetto di un controllore interno per stabilizzare il primo sottosistema  $G_1(s)$



$$\tilde{T}(s) = \frac{1}{s + (k_2 - 1)}$$

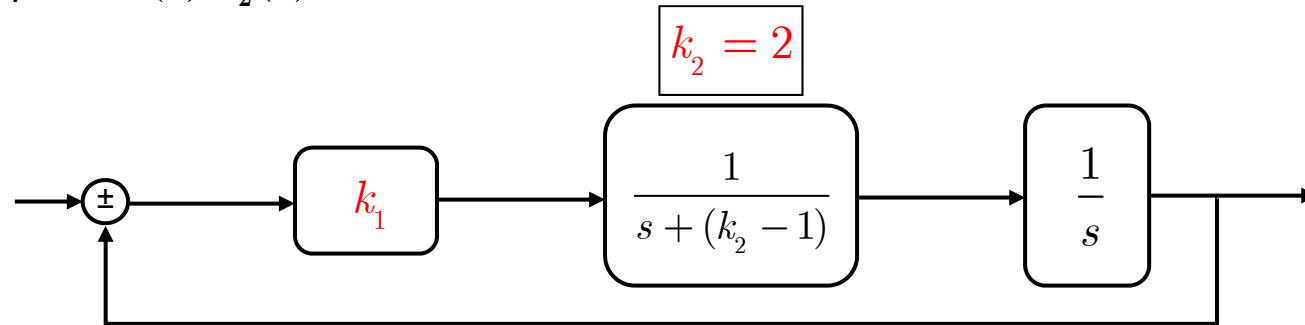
$k_2 > k_{2CR} = 1; k_2 = 2 \Rightarrow P = -1$





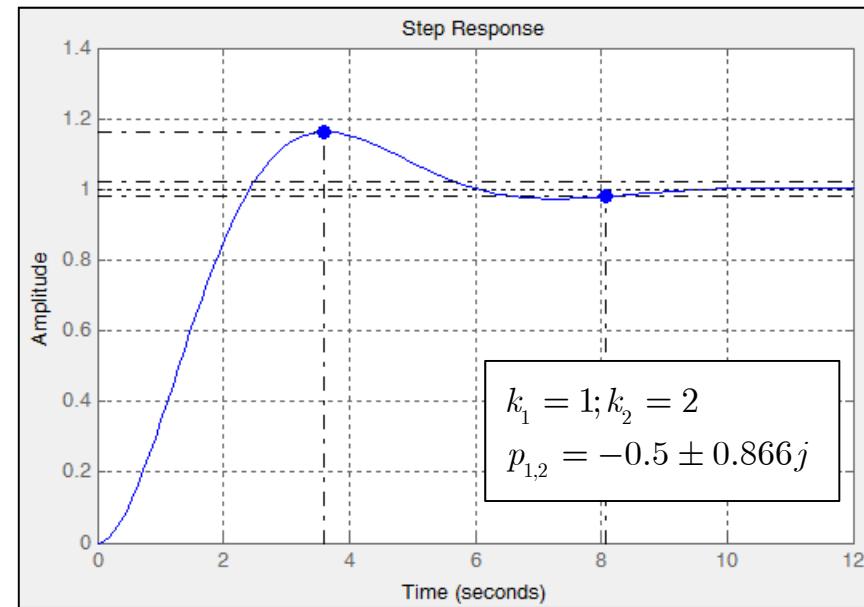
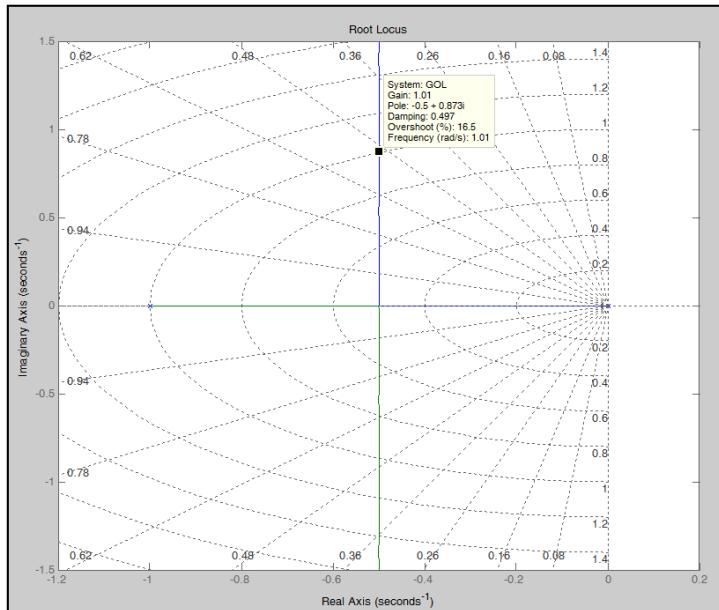
# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Progetto del controllore esterno in retroazione unitaria per stabilizzare il sistema completo  $\tilde{T}(s)G_2(s)$



$$G(s)K(s) = \frac{k_1}{s[s + (k_2 - 1)]}$$

$$\tilde{T}(s) = \frac{k_1}{s^2 + (k_2 - 1)s + k_1}$$

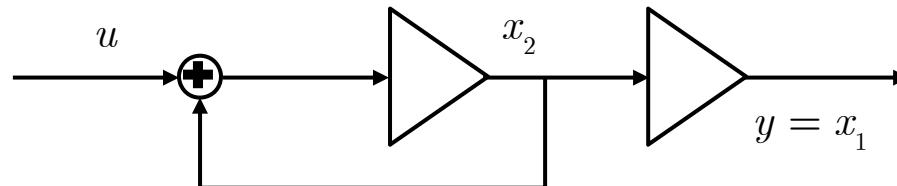




# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

## □ Consideriamo una rappresentazione nello spazio di stato del sistema di partenza

- Il sistema è sia controllabile che osservabile (non vi sono cancellazioni)
- Uso dei diagrammi analogici per il calcolo di una realizzazione minima



$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u = Ax + Bu \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x = Cx\end{aligned}$$

- Nota:
  - Essendo il sistema controllabile ed osservabile, gli autovalori sono uguali ai poli della Funzione di Trasferimento (0, +1)

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{x}_1 \Rightarrow x_2 = \frac{dy}{dt} \end{cases}$$

### ■ Ipotesi di lavoro:

1. Il vettore di stato è disponibile per la retroazione (osservabilità)\*
2. Il controllore ha la forma:
$$u = -Kx + r$$
3. La matrice K è una matrice costante, nell'esempio 1x2,  $K = [k_1, k_2]$



## Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Chiusura dell'anello con il controllore scelto precedentemente

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx + r) = (A - BK)x + Br = A_{CL}x + Br$$

$$A_{CL} = (A - BK)$$

- Nell'esempio considerato:

$$A_{CL} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & 1 - k_2 \end{bmatrix}$$

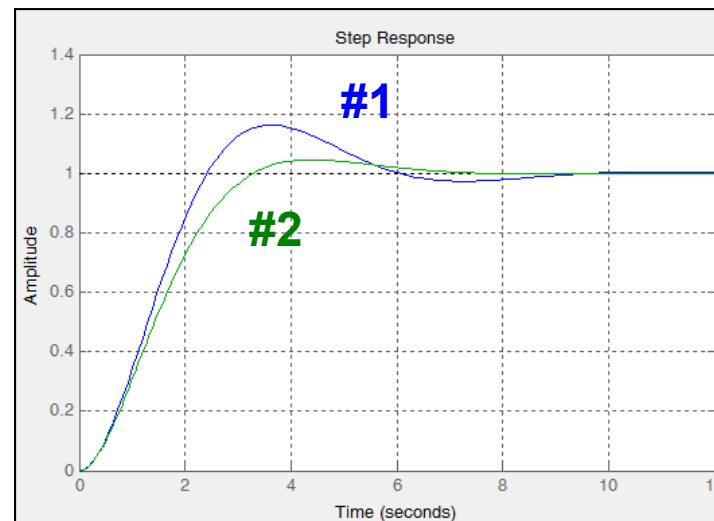
- Calcolo degli autovalori in anello chiuso  $\det(\lambda I - A_{CL}) = \lambda^2 + (k_2 - 1)\lambda + k_1 = 0$   
 $k_2 > 1, k_1 > 0$

- Esempio #1:

$$-0.5 \pm 0.866j \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2$$

- Esempio #2:

$$[\xi = 0.7, \omega_n = 1] \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2.4$$

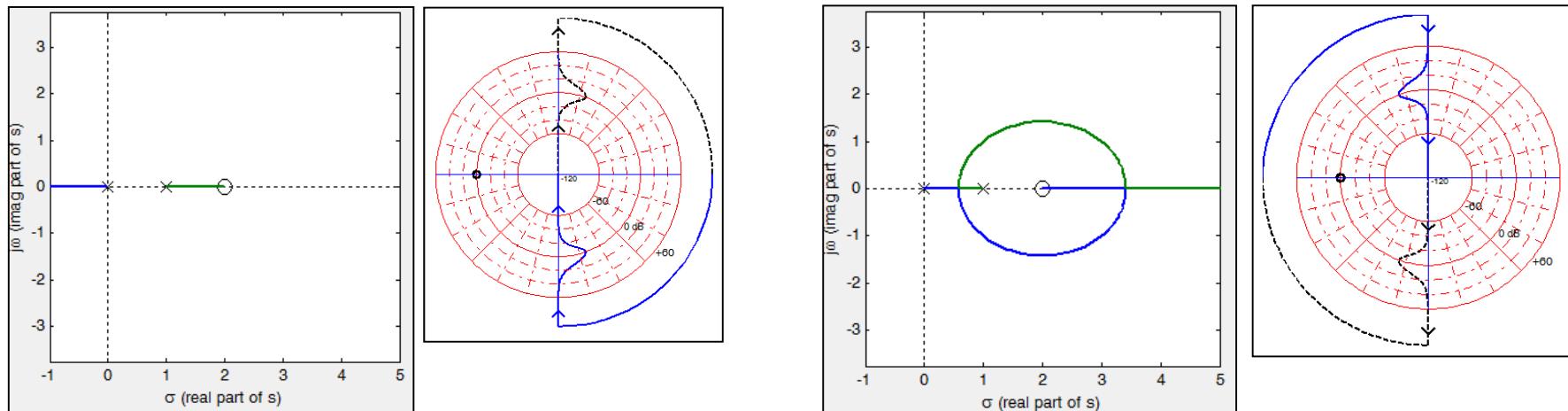




## Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Progettare un controllore che garantisca l'errore nullo a regime per il sistema instabile e a fase non minima:

$$G(s) = \frac{s - 2}{s(s - 1)}$$

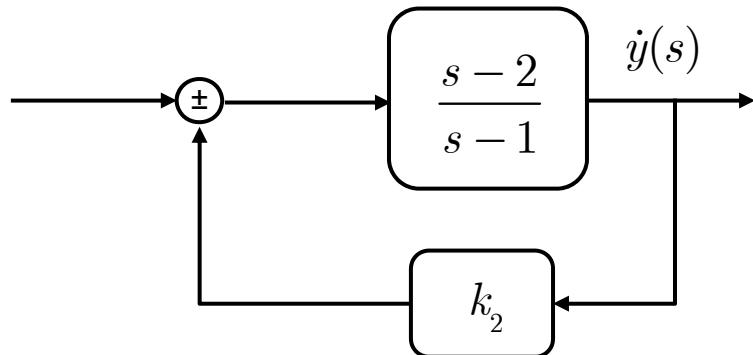


- Un controllore singolo standard non riesce a stabilizzare il sistema



## Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

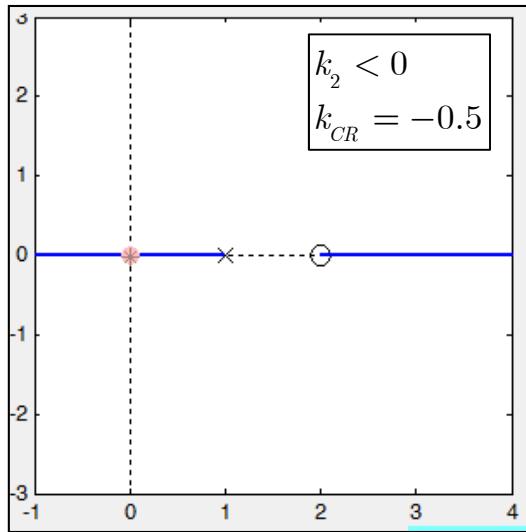
### □ Approccio ad anelli multipli (anello interno stabilizzante)



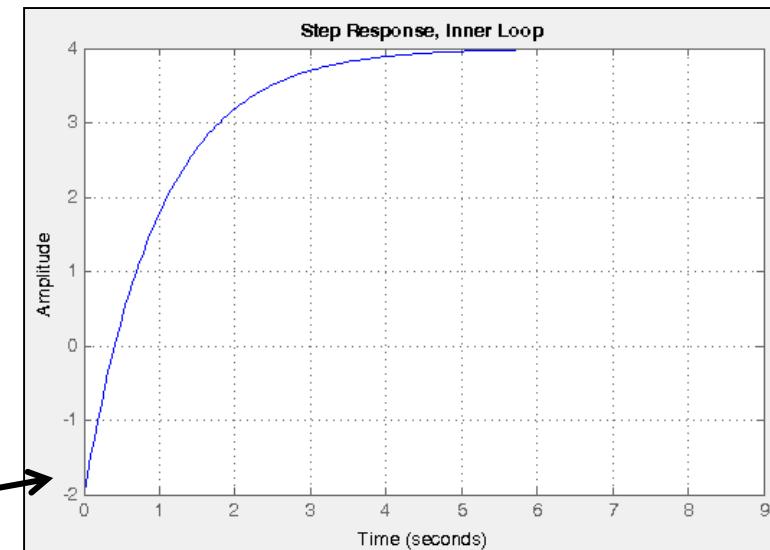
$$\tilde{T}(s) = \frac{s - 2}{(1 + k_2)s - (1 + 2k_2)}$$

- Esempio:  $k_2 = -2/3$

$$\tilde{T}(s) = \frac{3(s - 2)}{s + 1}$$



Nota il contributo di fase non minima!

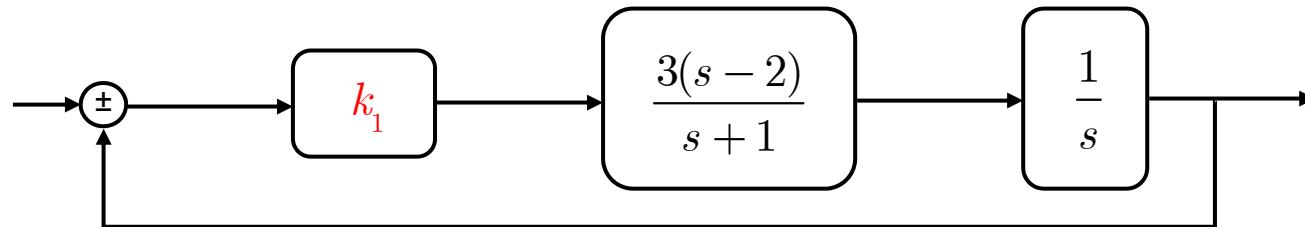




## Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

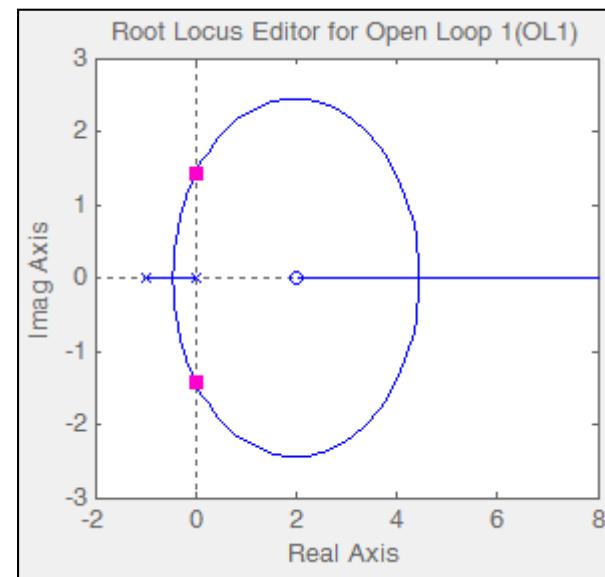
- Approccio ad anelli multipli (anello esterno)

$$k_2 = -\frac{2}{3} \quad \tilde{T}(s) = \frac{s-2}{(1+k_2)s - (1+2k_2)}$$



$$T(s) = \frac{3k_1(s-2)}{s^2 + (1+3k_1)s - 6k_1}$$

$$\begin{aligned} k_1 &< 0 \\ k_{1CR} &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

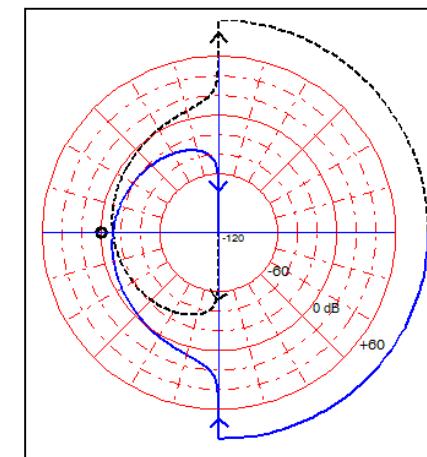
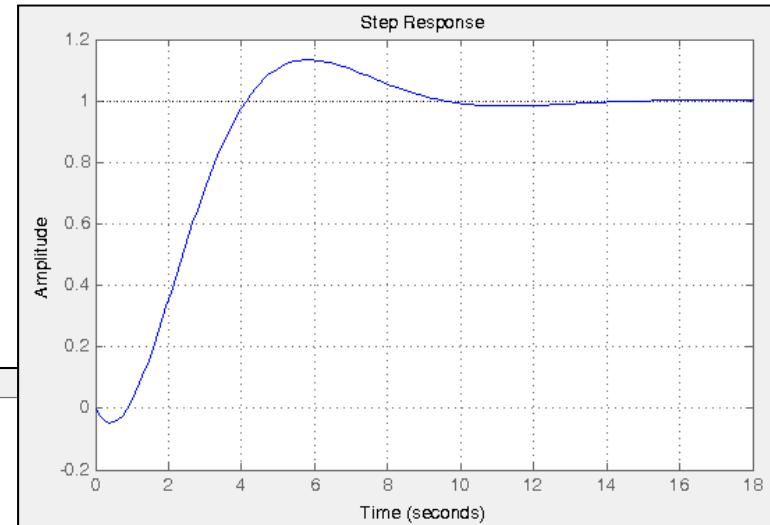
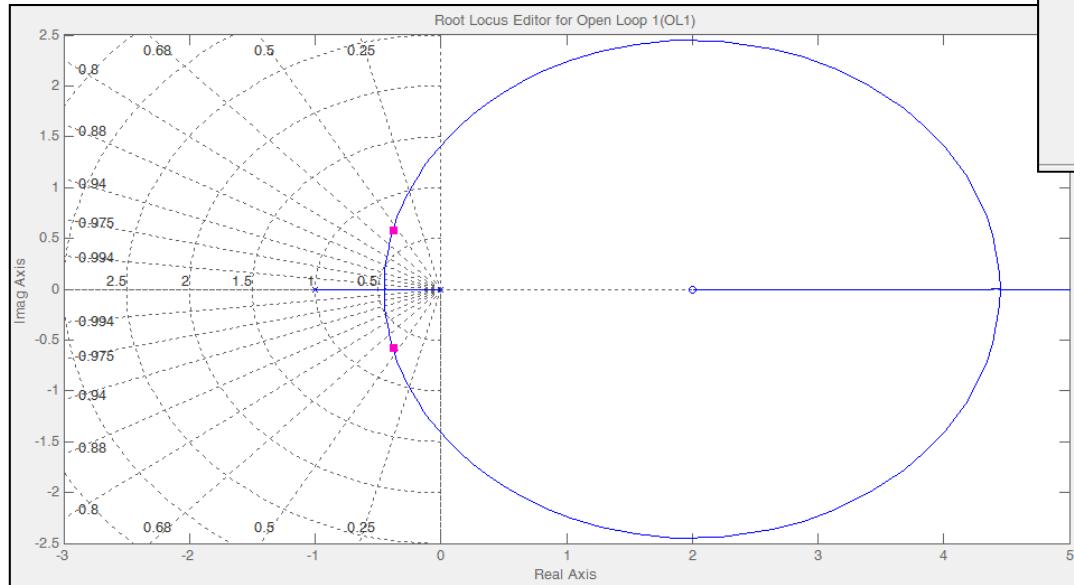




# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Esempio numerico con  $k_1 = -0.08$

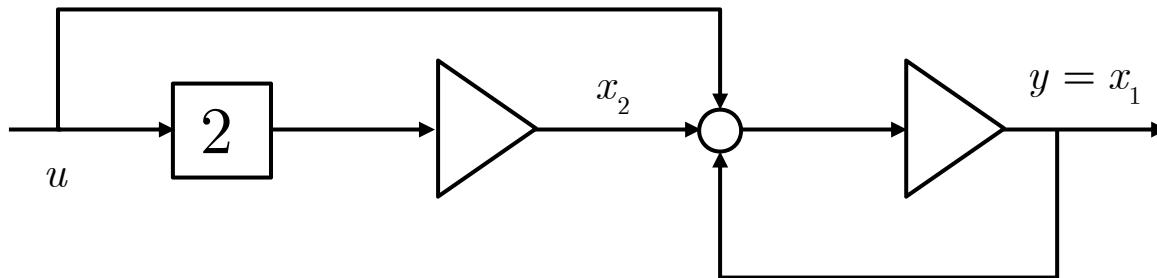
$$T(s) = \frac{-0.24(s - 2)}{s^2 + 0.76s + 0.48}$$





# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Uso della rappresentazione nello spazio di stato



$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}u = Ax + Bu & \dot{x} &= (A - BK)x + Br = A_{CL}x + Br \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x = Cx & A_{CL} &= (A - BK)\end{aligned}$$

- Calcolo degli autovalori in anello chiuso

$$\det(\lambda I - A_{CL}) = \lambda^2 + (2k_2 - 1 + k_1)\lambda - 2(k_1 + k_2) = 0$$

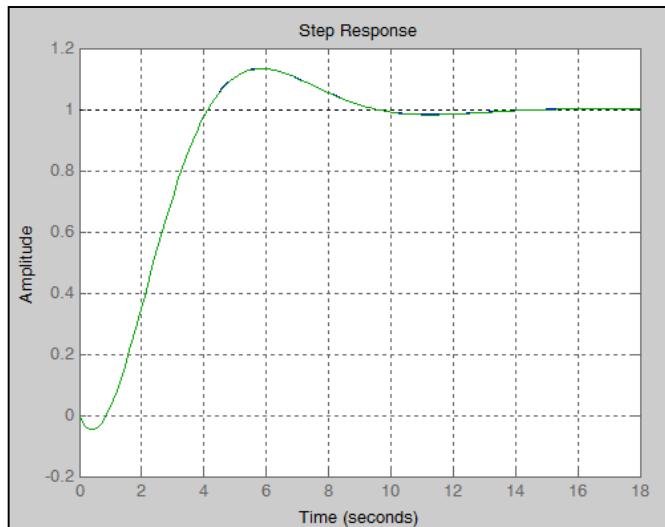
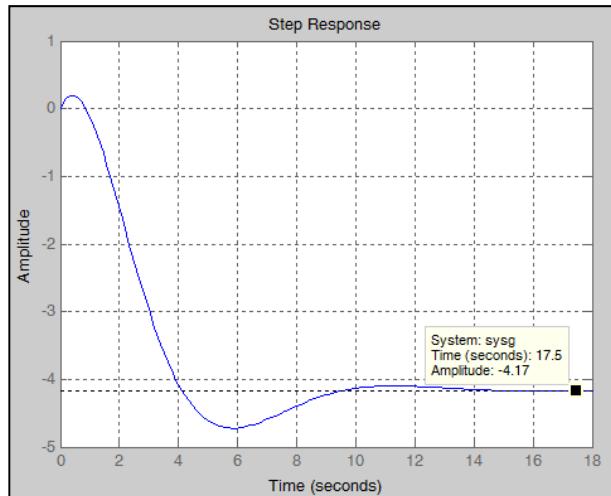
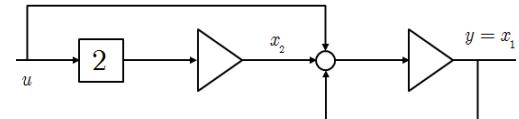
$$s^2 + 0.76s + 0.48 \Rightarrow K = [-2.24, 2]$$

- FdT in anello chiuso

$$G_{CL}(s) = C(sI - A_{CL})^{-1}B = \frac{s - 2}{s^2 + 0.76s + 0.48}$$

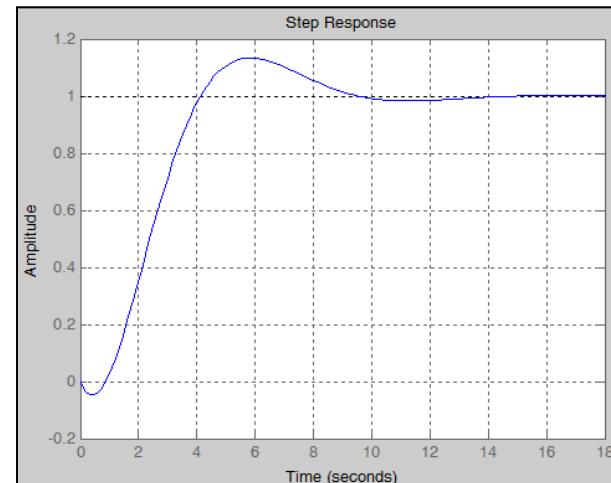


# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo



- Considerazioni:
  - Transitorio corretto
  - Segno (zero a fase non minima)
  - Regime

- Uso di un prefiltro:
  - $G_{\text{PRE}} \approx -1/4.1667$



- Le due risposte al gradino coincidono



# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Dato il sistema:

$$G(s) = \frac{40(s + 5)(s - 2)}{s(s + 1)(s + 4)(s + 10)(s - 10)}$$

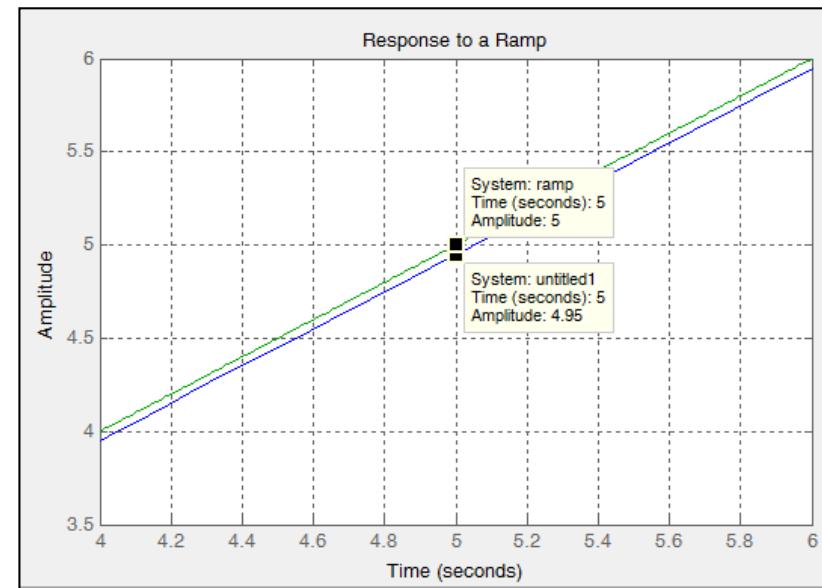
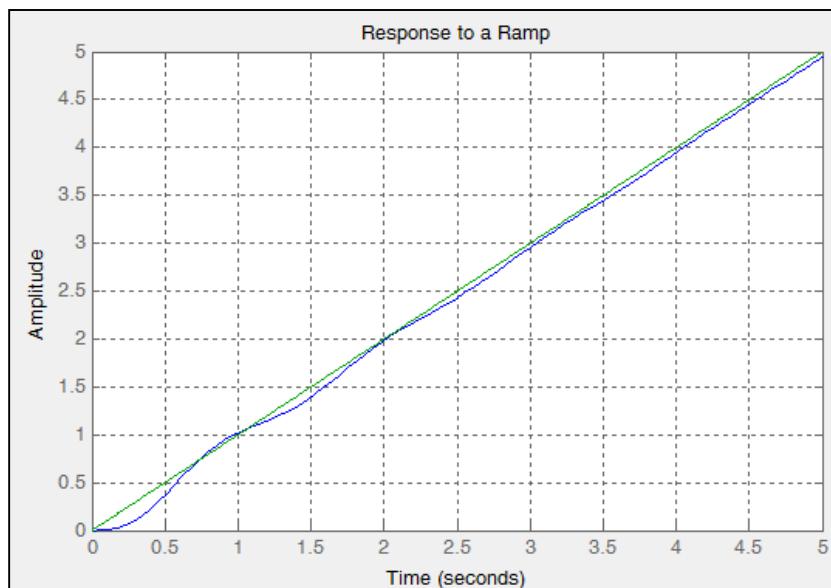
- Errore a regime alla rampa < 5%
- Tempo di assestamento  $\approx 5$  secondi
- Margine di fase  $\approx 50^\circ$

- Dai requisiti di risposta transitoria:  $\xi = 0.5, \omega_n = 1.6$

- Dai requisiti di risposta a regime alla rampa:  $k \geq 12$

$$G_{DES}(s) = \frac{2.56k}{s^2 + 1.6s + 2.56k}$$

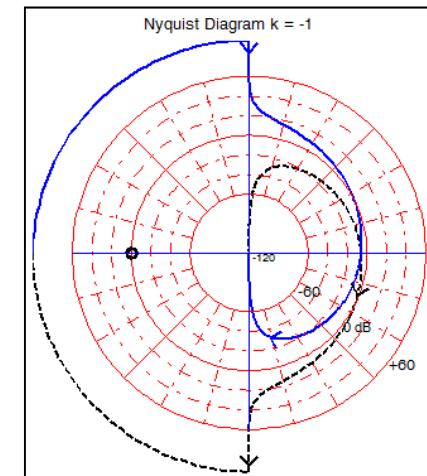
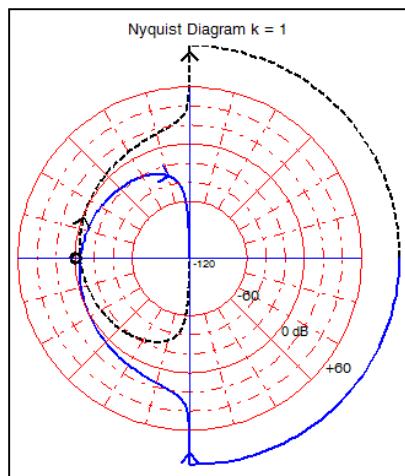
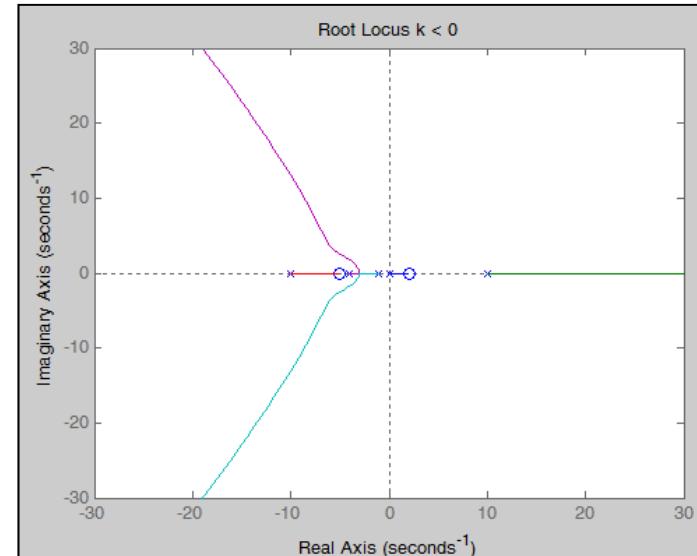
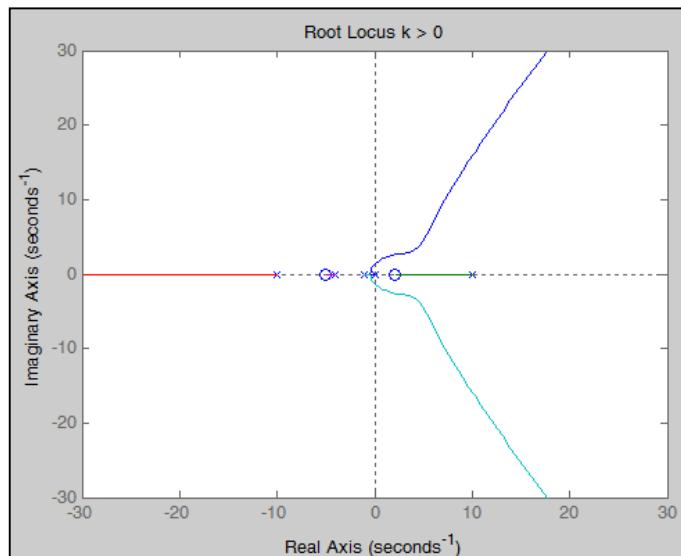
- **Nota:** un controllore proporzionale varia i requisiti di risposta transitoria se rispetta quelli di regime





# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Poli in ciclo chiuso target:  $G_{DES}(s) = \frac{30.72}{s^2 + 1.6s + 30.72} \Rightarrow -0.8 \pm j5.48$





# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- Rappresentazione nello spazio di stato del sistema:

```
N=[40 120 -400]  
D=[1 5 -96 -500 -400 0]  
[a,b,c,d]=tf2ss(N,D)
```

```
a =  
  
-5    96    500    400    0  
 1     0     0     0     0  
 0     1     0     0     0  
 0     0     1     0     0  
 0     0     0     1     0  
  
b =  
  
1  
0  
0  
0  
0  
  
c =  
  
0     0     40    120   -400  
  
d =  
  
0
```

- Selezione poli desiderati in anello chiuso:

```
pdes =  
  
-0.8000 + 5.4800i  
-0.8000 - 5.4800i  
-30.0000 + 0.0000i  
-40.0000 + 0.0000i  
-50.0000 + 0.0000i
```

- Scelta del controllore per ottenere i poli desiderati:

```
k=place(a,b,pdes)
```

```
>> k'  
  
ans =  
  
1.0e+06 *  
  
0.0001  
0.0050  
0.0717  
0.2406  
1.8402
```

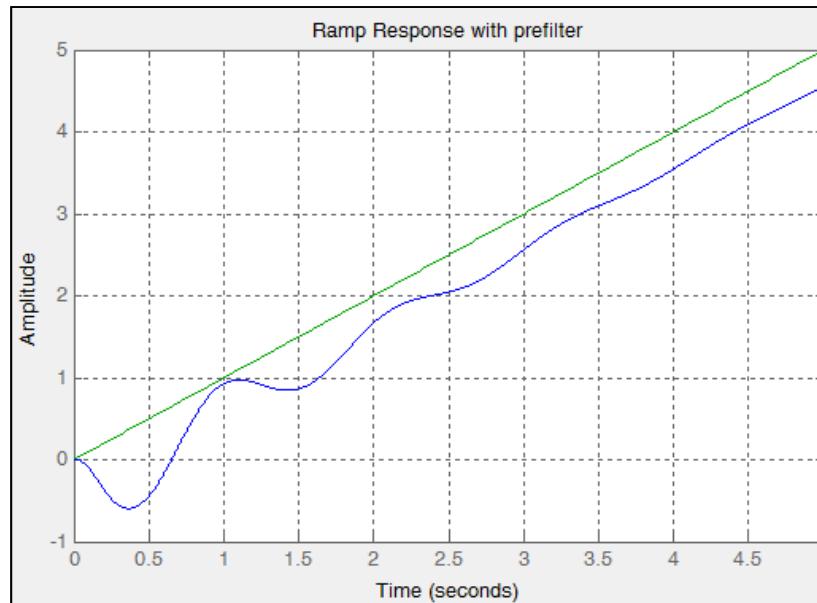
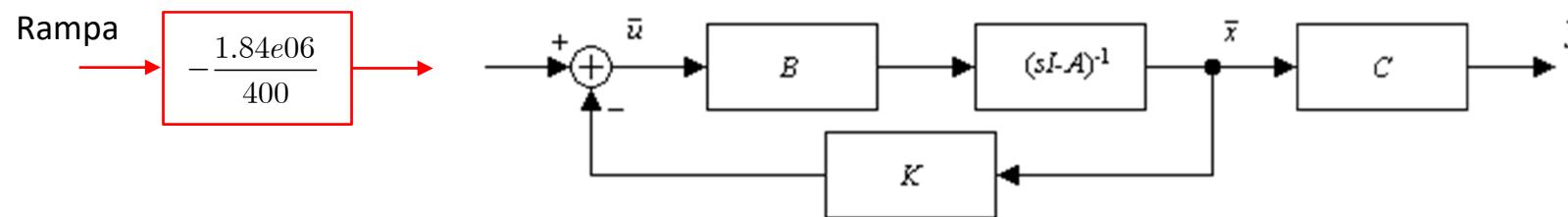
$$u = -Kx + r$$



# Assegnamento Poli/Autovalori: Esempio Introduttivo

- FdT in anello chiuso:

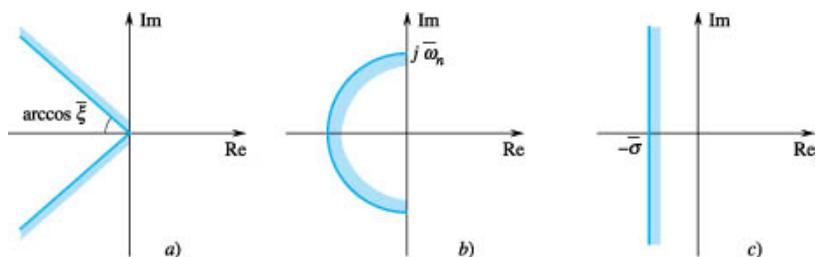
$$\frac{40 s^2 + 120 s - 400}{s^5 + 121.6 s^4 + 4923 s^3 + 7.12e4 s^2 + 2.402e5 s + 1.84e6}$$





## Assegnamento Poli/Autovalori

- La tecnica dell'assegnamento dei poli è un metodo di progetto di controllore utilizzabile quando il sistema considerato risulta **controllabile** (in misura minore stabilizzabile)
- La tecnica permette di poter gestire completamente le caratteristiche transitorie in ciclo chiuso, specificandone la locazione nel piano complesso.
- La scelta dei poli è basata sulla risposta transitoria e/o della risposta in frequenza (velocità di risposta, sovraelongazione, larghezza di banda).

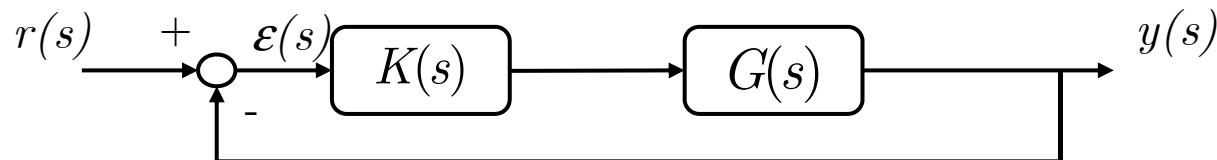


1. Sovraelongazione  $\rightarrow M_P \rightarrow \xi \rightarrow$  Margine Fase
2. Velocità di risposta  $\rightarrow \xi \omega_n \rightarrow \omega_{BW}$

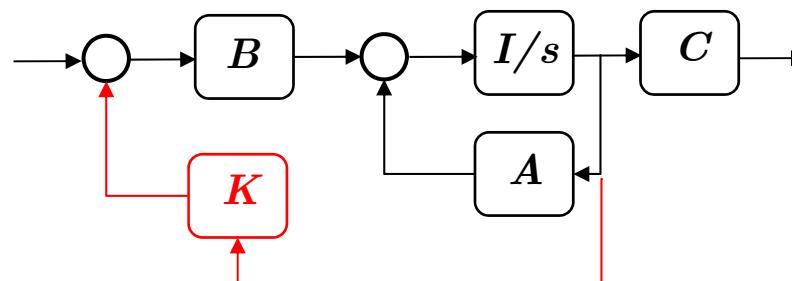


# Assegnamento Poli

- La tecnica di assegnamento dei poli può essere implementata sia nel dominio della frequenza, che nel dominio del tempo
  - L'approccio frequenziale richiede anche la **osservabilità** del sistema e si basa sulla soluzione dell'equazione Diofantina, la sua valenza applicativa è per sistemi SISO



- L'approccio nel dominio del tempo è generale e vale per sistemi SISO e MIMO indifferentemente.





## Assegnamento Poli - Eq. Diofantina

- Supponiamo che sia la  $G(s)$  che la  $K(s)$  siano realizzazioni minime\*, si ha:

$$G_{OL}(s) = G(s) \cdot K(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot \frac{N_k(s)}{D_k(s)} \quad G_{CL}(s) = \frac{N(s)N_k(s)}{N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s)}$$

- Si vuole calcolare il numeratore ed il denominatore del controllore  $K(s)$ , dato noto il polinomio in ciclo chiuso  $D_{CL}(s)$ . Ovvero:

$$D_{CL}(s) = N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s) \Rightarrow [N_k(s), D_k(s)]?$$

\* **Nota:** Si può dimostrare che essa ammette un'unica soluzione per ogni generica  $D_{CL}(s)$  se e solo se  $N(s)$  e  $D(s)$  sono primi fra loro



## Assegnamento Poli - Eq. Diofantina

- Dall'equazione Diofantina si può dedurre che:

$$D_{CL}(s) = N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s) \Rightarrow [N_k(s), D_k(s)]?$$

- se si vuole che  $D_{CL}(s)$  non contenga dei termini di  $D(s)$ , tali termini devono essere presenti anche nella  $N_k(s)$  e si hanno cancellazioni fra i poli del sistema e zeri del regolatore.
- se si vuole che  $D_{CL}(s)$  non contenga dei termini di  $N(s)$ , tali termini devono essere presenti anche nella  $D_k(s)$  e si hanno cancellazioni fra gli zeri del sistema e i poli del regolatore.
- se il sistema presenta zeri a parte reale positiva, tali zeri devono comunque comparire anche nella  $G_{CL}(s)$  perché, altrimenti, sarebbero cancellati da un polo del controllore che però, in tal caso, risulterebbe instabile.
- L'ordine di  $D_{CL}(s)$  è dato dall'ordine del termine  $D(s)D_k(s)$  (per la causalità dei sistemi l'ordine dei denominatori è maggiore uguale a quella dei nominatori).
- La struttura risultante del controllore è quella di un filtro passa banda, oppure a sella



## Assegnamento Poli - Eq. Diofantina

□ **Esempio:**

$$G(s) = \frac{0.1}{s(s-1)}$$

- Realizzare un controllore tale che il sistema a ciclo chiuso abbia un errore di risposta alla rampa pari a zero.
- l'equazione diofantina può essere applicata in quanto numeratore e denominatore del sistema sono primi fra loro.

Il regolatore deve avere un polo nell'origine; poiché poi il sistema da controllare è instabile, per garantire la stabilità del sistema a ciclo chiuso, il controllore deve essere almeno di ordine 2 e, per quanto visto, l'ordine della  $D_{CL}(s)$  deve essere almeno pari a 4

Poniamo come scelta di progetto il requisito di risposta transitoria :

$$D_{CL}(s) = (s+1)^4$$

- Il denominatore del regolatore ha la forma

$$\begin{aligned} D_k(s) &= a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \\ D_k(s) &= a_2 s^2 + a_1 s \end{aligned}$$



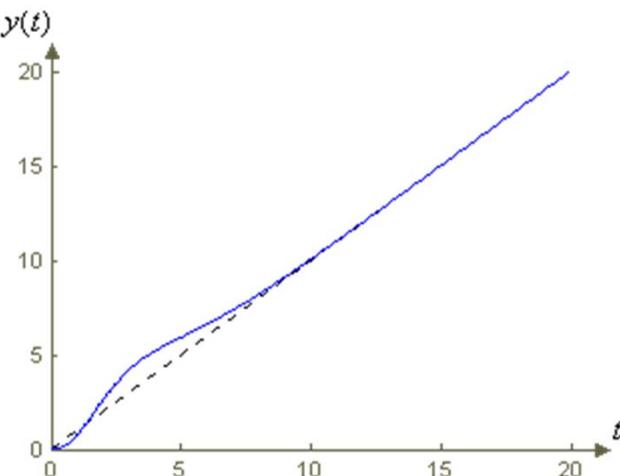
## Assegnamento Poli - Eq. Diofantina

- Scegliamo il numeratore di ordine 2 (Controllore proprio):

$$N_k(s) = b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

$$\begin{aligned} D_{CL}(s) &= N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow (s+1)^4 &= 0.1 \cdot (b_2 s^2 + b_1 s + b_0) + s(s-1) \cdot (a_2 s^2 + a_1 s) \Rightarrow \\ \Rightarrow s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 &= a_2 s^4 + (a_1 - a_2) s^3 + (0.1 b_2 - a_1) s^2 + 0.1 b_1 s + 0.1 b_0 \Rightarrow \\ &\begin{cases} a_2 = 1 \\ a_1 = 4 + a_2 = 5 \\ b_2 = 10(6 + a_1) = 110 \\ b_1 = 10 \cdot 4 = 40 \\ b_0 = 10 \cdot 1 = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

$$K(s) = 10 \frac{11s^2 + 4s + 1}{s(s+5)} \quad -0.18 \pm 0.24j$$



**SISOTOOL-SIMULINK**



## Assegnamento Poli - Eq. Diofantina

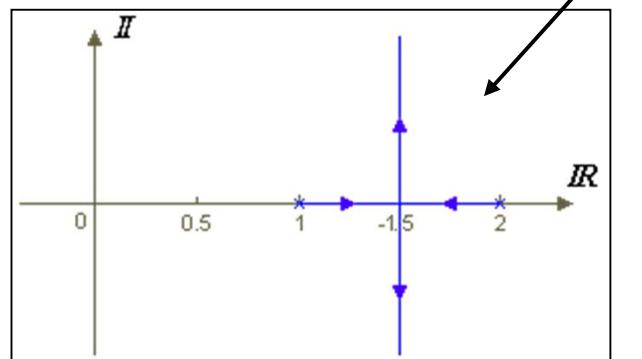
### □ Esempio:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}x \end{cases}$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 15 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_u^x(s) = (sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{5}{s^2 - 3s + 2} & \frac{5s}{s^2 - 3s + 2} \end{bmatrix}^T$$

$$G_u^y(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{5}{s^2 - 3s + 2}$$



- Si vuole realizzare un regolatore tale che i poli dominanti del sistema controllato

$$\xi = 0.5 \\ T_{a2} \leq 2 \text{ s} \quad \omega_n \geq 4$$



## Assegnamento Poli - Eq. Diofantina

- Le specifiche precedenti si possono riscrivere come:

$$\begin{cases} \xi = 0.5, \quad T_{a2} \cong \frac{4}{\xi \omega_n} = 2 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{2}{\xi} = 4 \text{ rad / s.} \\ s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 4s + 16 \end{cases}$$

Poiché il sistema da controllare è di ordine 2 e il controllore deve essere almeno di ordine 1 (**con un regolatore proporzionale non è possibile stabilizzare il sistema**), il sistema a ciclo chiuso è di ordine 3; i due poli dominanti sono quelli desiderati mentre il terzo verrà posto a frequenze fuori banda (es.  $s = -10$ )

$$D_{CL}(s) = (s + 10)(s^2 + 4s + 16)$$

$$D_k(s) = (a_1 s + a_0) \quad N_k(s) = (b_1 s + b_0)$$

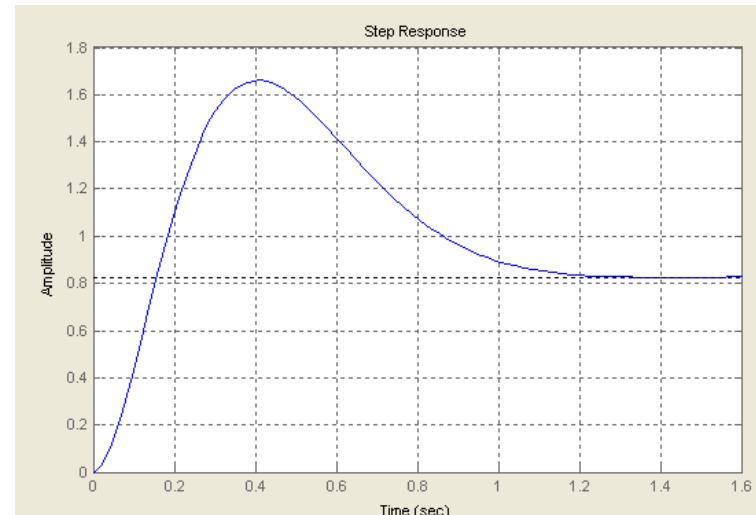
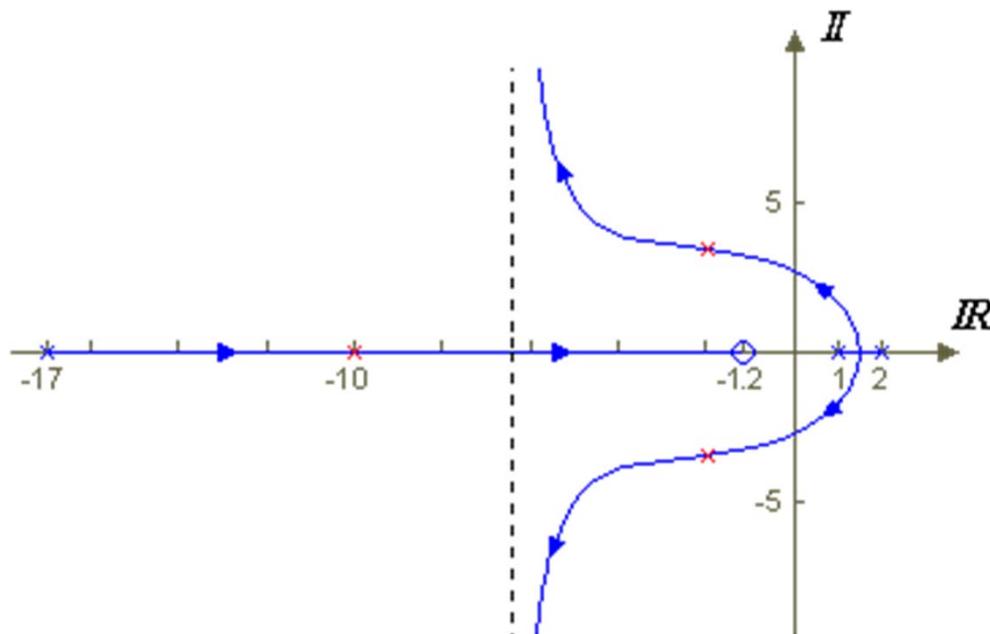
$$\begin{aligned} D_{CL}(s) &= N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_0 = 14 + 3 \cdot 1 = 17 \\ b_1 = (56 + 3 \cdot 17 - 2 \cdot 1)/5 = 21 \\ b_0 = (160 - 2 \cdot 17)/5 = 25.2 \end{cases} \end{aligned}$$



## Assegnamento Poli - Eq. Diofantina

- Il regolatore che soddisfa le specifiche è quindi:

$$K(s) = 21 \frac{s + 1.2}{s + 17}$$



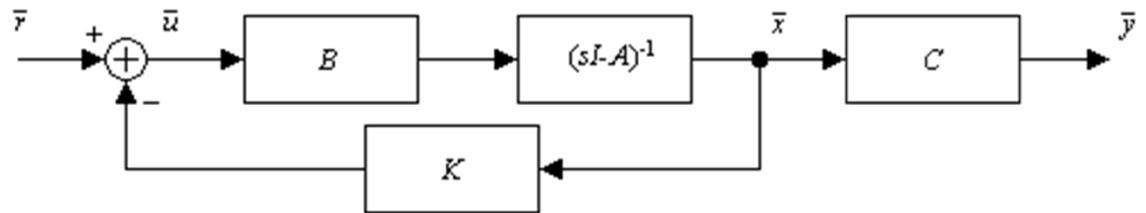
- Necessaria taratura del polo fuori banda per migliorare lo smorzamento



## Assegnamento Poli - State Feedback

- Il secondo approccio sfrutta la rappresentazione nello spazio di stato, per il progetto del controllore

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, x(0) = x_0$$



- IPOTESI:** Supponiamo che il sistema sia controllabile e definiamo la seguente Struttura per il controllore

$$u = -Kx + r$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + Br \\ y = Cx \end{cases}, x(0) = x_0$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{(A-BK)t}x_0 + \int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau)}Br(\tau)d\tau \\ y(t) = Ce^{(A-BK)t}x_0 + C \int_0^t e^{(A-BK)(t-\tau)}Br(\tau)d\tau \end{cases}$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

- L'esistenza del controllore (in cui la matrice di guadagno  $K$  è costante) e garantita dai seguenti teoremi:

- **Teorema (sistemi con ingresso scalare):**

Dato un qualsiasi polinomio  $p(s)$  di grado  $n$  esiste un'unica matrice  $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  tale che  $p(s)$  sia il polinomio caratteristico della matrice dinamica del sistema ottenuto retroazionando gli stati del sistema mediante la matrice  $K$ .

$$A - BK \quad B \in \mathbb{R}^{nx1}$$

- **Corollario:**

Nel caso in cui il sistema  $(A, B)$  sia multi ingresso, esiste un numero infinito di matrici di guadagno  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- **Teorema:**

Dato un sistema lineare  $(A, B)$  di ordine  $n$ , con  $m$  ingressi, l'assegnazione totale è possibile se e soltanto se il sistema è completamente raggiungibile. Ovvero:

$$\text{Rank } \mathcal{B} = \text{Rank}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n \Leftrightarrow \lambda_i^{i=1,..,n} (A - BK) \equiv \lambda_i^{i=1,..,n} (\text{des.})$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

- Consideriamo un sistema a singolo ingresso controllabile ( $A, B$ ). Esiste una Trasformazione di similitudine che trasforma il sistema in forma controllabile compagna:

$$\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{z} = T^{-1}\mathbf{x}$$

$$(A, B) \Rightarrow (\tilde{A}, \tilde{B}) = (T^{-1}AT, T^{-1}B)$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Applichiamo la legge di controllo a retroazione dello stato al sistema

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x} + \mathbf{r} \quad \tilde{K} = K \cdot T \quad \mathbf{u} = -\tilde{K} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{r} = -[\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2 \quad \cdots \quad \tilde{k}_n] \mathbf{z} + \mathbf{r}$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

- Il sistema trasformato, in ciclo chiuso diviene:

$$\dot{z} = (\tilde{A} - \tilde{B} \cdot \tilde{K})z + \tilde{B}r$$
$$\tilde{A} - \tilde{B} \cdot \tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_0 - \tilde{k}_1 & -a_1 - \tilde{k}_2 & -a_2 - \tilde{k}_3 & \cdots & -a_{n-1} - \tilde{k}_n \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico in ciclo chiuso fornisce la soluzione unica per il guadagno  $\tilde{K}$

$$s^n + (a_{n-1} + \tilde{k}_n)s^{n-1} + (a_{n-2} + \tilde{k}_{n-1})s^{n-2} + \dots + (a_0 + \tilde{k}_1)$$

Essendo il polinomio in ciclo chiuso desiderato:

$$(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \dots + \alpha_0$$

$$\boxed{\begin{cases} a_{n-1} + \tilde{k}_n = \alpha_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 + \tilde{k}_1 = \alpha_0 \end{cases}}$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

- per il sistema originale:

$$K = \tilde{K} \cdot T^{-1} \quad u = -K \cdot x + r$$

### □ Esempio:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}x \end{cases} \quad \iff \quad G_u^y(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{5}{s^2 - 3s + 2}$$

- si vuole determinare la legge di controllo che porti i poli del sistema retroazionato in  $s = -1$  e  $s = -10$  e quindi tale che il suo polinomio caratteristico risulti:

$$(s + 1)(s + 10) = s^2 + 11s + 10$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

- Il sistema è in forma compagna quindi la tecnica è applicabile direttamente

$$A - B \cdot K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 - 5k_1 & 3 - 5k_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow sI - A + B \cdot K = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 + 5k_1 & s - 3 + 5k_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$|sI - A + B \cdot K| = s(s - 3 + 5k_2) + 2 + 5k_1 = s^2 + (5k_2 - 3)s + 2 + 5k_1$$

- Il polinomio desiderato in ciclo chiuso è dato da:

$$s^2 + (5k_2 - 3)s + 2 + 5k_1 = s^2 + 11s + 10$$

$$\begin{cases} 5k_2 - 3 = 11 \\ 2 + 5k_1 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = 14/5 \\ k_1 = 8/5 \end{cases} \quad u = -\begin{bmatrix} 8/5 & 14/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + r$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

### □ Paragone con l'equazione Diofantina

Poiché il sistema da controllare è di ordine 2 e il controllore deve essere almeno di ordine 1 (con un regolatore proporzionale non è possibile stabilizzare il sistema), il sistema a ciclo chiuso è di ordine 3; i due poli dominanti sono quelli desiderati (-1, -10) mentre il terzo verrà posto a frequenze elevate (es.  $s = -100$ )

$$K(s) = \frac{N_k(s)}{D_k(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0}$$

$$D_{CL}(s) = (s+1)(s+10)(s+100) = N(s)N_k(s) + D(s)D_k(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_0 = 114 \\ b_1 = 154.4 \\ b_0 = 290 \end{cases}$$

$$K(s) = 290 \frac{s + 0.5324}{s + 114}$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

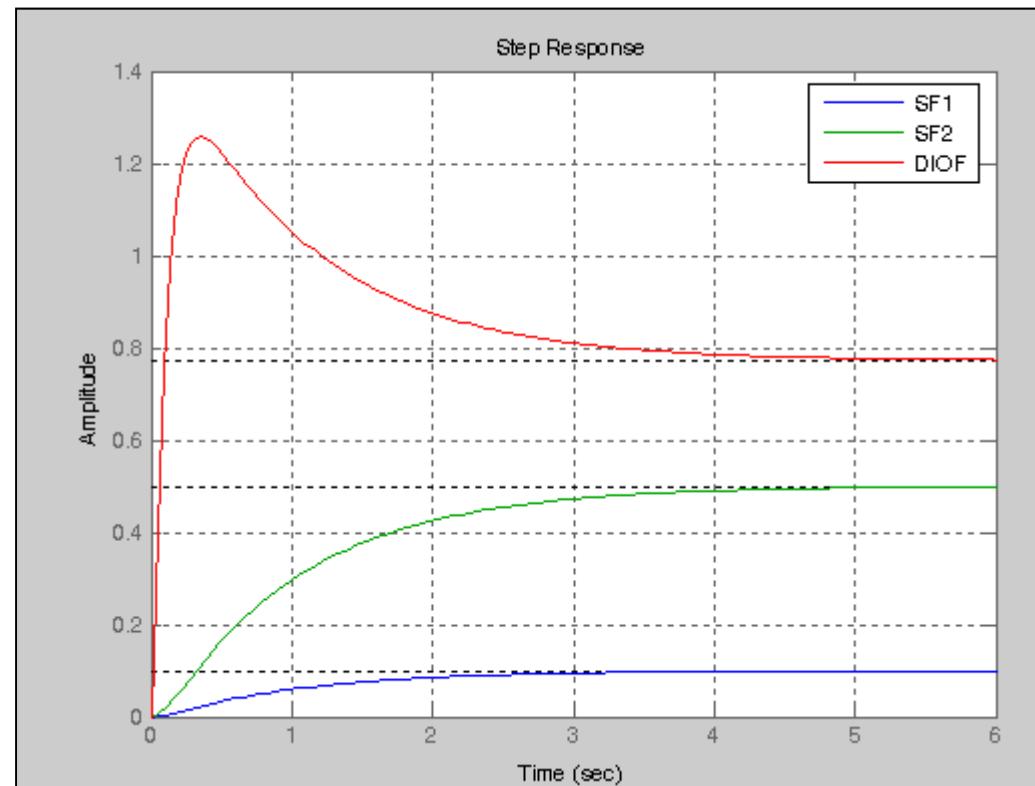
$$G_{CL}^{DIOF}(s) = 1450 \frac{s + 0.5324}{(s + 1)(s + 10)(s + 100)}$$

Retroazione totale in feedback

$$G_{CL}^{SF1}(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 10)}$$

Retroazione totale in anello  
diretto

$$G_{CL}^{SF2}(s) = \frac{5}{(s + 1)(s + 10)}$$





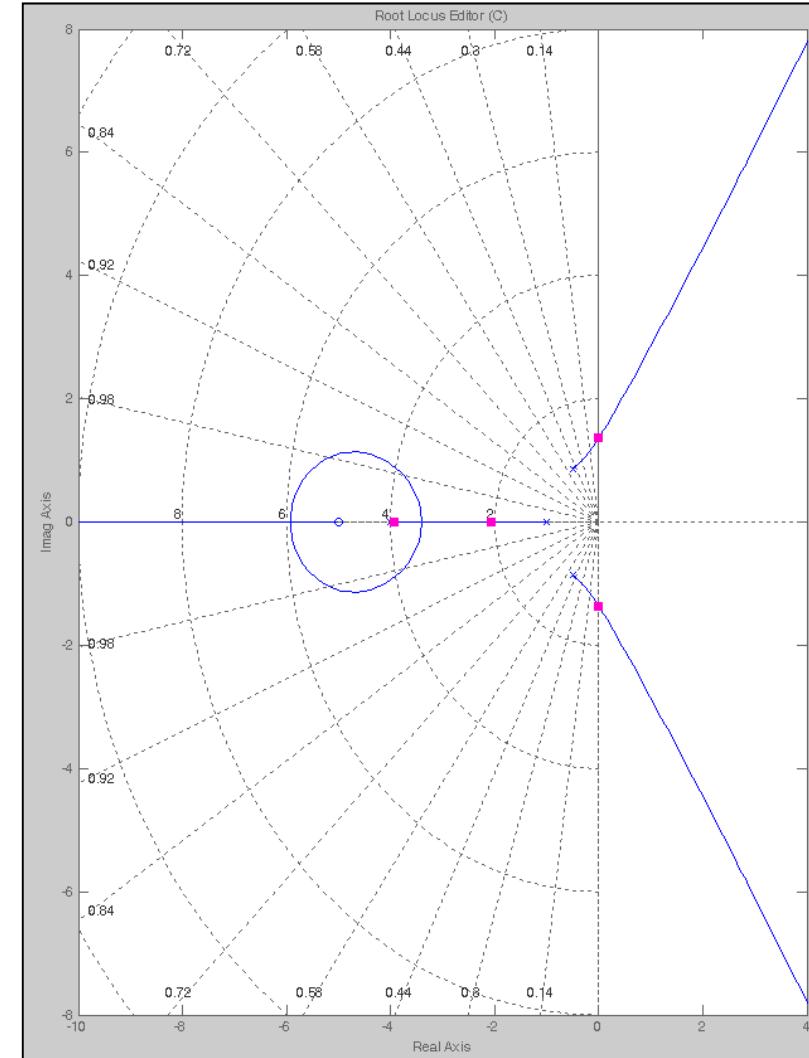
## Assegnamento Poli - State Feedback

### □ Esempio:

$$G(s) = \frac{s + 5}{(s^2 + s + 1)(s + 1)(s + 4)}$$

- Si vuole una legge di controllo che permetta di ottenere un sistema retroazionato i cui poli dominanti siano quelli di un sistema del secondo ordine caratterizzato dai seguenti parametri

$$\boxed{M_p \cong 4.33 \%}$$
$$T_{a2} \leq 2 \text{ s.}$$





## Assegnamento Poli - State Feedback

- Specifica di sovraelongazione:

$$\xi = \frac{\ln(100 / M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(100 / M_p)}} = \frac{\ln(100 / 4.33)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(100 / 4.33)}} \cong 0.707$$

- Specifica di tempo di assestamento:

$$T_{a2} \cong \frac{4}{\xi \omega_n} \quad \Rightarrow \quad \omega_n \cong \frac{4}{\xi T_{a2}} = \frac{4}{0.707 \cdot 2} = 2.8 \text{ rad./s.}$$

- Poli in ciclo chiuso:
- (A, B) Controllabile, (A, C) Osservabile:

$$p_{1/2} = -2 \pm j2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -9 & -10 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [5 \ 1 \ 0 \ 0], \quad D = [0]$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

- La matrice di sistema in ciclo chiuso vale:

$$A - B \cdot K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 - k_1 & -9 - k_2 & -10 - k_3 & -6 - k_4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow sI - A + B \cdot K = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 4 + k_1 & 9 + k_2 & 10 + k_3 & s + 6 + k_4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$|sI - A + B \cdot K| = s^4 + (6 + k_4)s^3 + (10 + k_3)s^2 + (9 + k_2)s + 4 + k_1$$

- Da cui la matrice di guadagno  $K$ :

$$s^4 + (6 + k_4)s^3 + (10 + k_3)s^2 + (9 + k_2)s + 4 + k_1 = s^4 + 34s^3 + 328s^2 + 1040s + 1600$$

$$\begin{cases} k_4 = 34 - 6 = 28 \\ k_3 = 328 - 10 = 314 \\ k_2 = 1040 - 9 = 1031 \\ k_1 = 1600 - 4 = 1596 \end{cases}$$

$$u = -[1596 \quad 1031 \quad 314 \quad 28] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + r$$

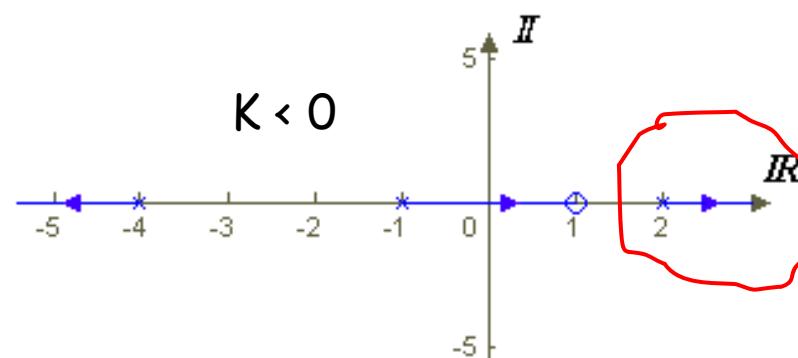
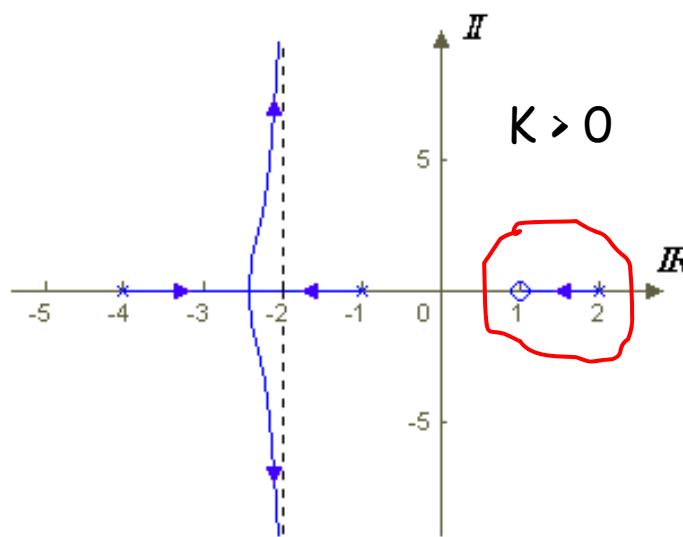


## Assegnamento Poli - State Feedback

□ **Esempio:**

$$G(s) = \frac{s - 1}{(s - 2)(s + 1)(s + 4)}$$

- Consideriamo il problema di stabilità mediante Luogo delle Radici



- Si vuole stabilizzare il sistema, facendo in modo che il sistema retroazionato abbia i poli in:

$$p_1 = -1, \quad p_2 = -10, \quad p_3 = -20$$

$$(s + 1)(s + 10)(s + 20) = s^3 + 31s^2 + 230s + 200$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

- Data la rappresentazione  $(A, B, C)$ , il sistema è sia controllabile, che osservabile:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0.75 & 0.5 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & -0.125 \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$

$$A - B \cdot K = \begin{pmatrix} -3 - 0.5k_1 & 0.75 - 5k_2 & 0.5 - 0.5k_3 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow sI - A + B \cdot K = \begin{pmatrix} s + 3 + 0.5k_1 & -0.75 + 5k_2 & -0.5 + 0.5k_3 \\ -8 & s & 0 \\ 0 & -2 & s \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$|sI - A + B \cdot K| = s^3 + (3 + 0.5k_1)s^2 + (-6 + 4k_2)s - 8 + 8k_3$$

$$s^3 + (3 + 0.5k_1)s^2 + (-6 + 4k_2)s - 8 + 8k_3 = s^3 + 31s^2 + 230s + 200$$
$$\begin{cases} k_1 = 2 \cdot (31 - 3) = 56 \\ k_2 = (230 + 6)/4 = 59 \\ k_3 = (200 + 8)/8 = 26 \end{cases}$$



# Assegnamento Poli - State Feedback

## □ Risposta a Regime

- L'introduzione della matrice di guadagno  $K$  produce una modifica nell'andamento del transitorio del sistema; ovviamente tale influenza si viene a ripercuotere anche nell'andamento della risposta a regime
- Dal Teorema del Valore Finale:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{CL}(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} C(sI - A + B \cdot K)^{-1} B = -C(A - B \cdot K)^{-1} B$$

- L'errore a regime può quindi essere non nullo ed è dipendente dalla tipologia della *FdT* di anello aperto.
- si verifica facilmente che se la matrice  $A$  ha un autovalore nullo, grazie alla retroazione, oltre al transitorio desiderato è possibile anche avere errore nullo in risposta al segnale gradino in ingresso. Ovviamente tale risultato vale se sull'autovalore nullo entra il segnale di errore;
- se, al contrario,  $A$  non ha autovalori nulli, per poter avere un errore nullo in risposta al gradino è necessario inserire un integratore, in modo da operare sul segnale di errore (catena diretta).



## Assegnamento Poli - State Feedback

### □ Introduzione di un comportamento integrale

- Nel caso in cui sia necessario un integratore (o più integratori), esso deve essere aggiunto prima della retroazione.
- Il sistema aumenta di dimensione di una variabile di stato per ogni integratore. Siccome si desidera:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} (r - y) = 0$$

- Il nuovo vettore di stato e sistema diventano:

$$[\mathbf{x}, z]^T = [\mathbf{x}, \int (r - y) \cdot dt]^T \quad \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$$

- Il nuovo sistema risulta controllabile, se lo è la coppia  $(A, B)$

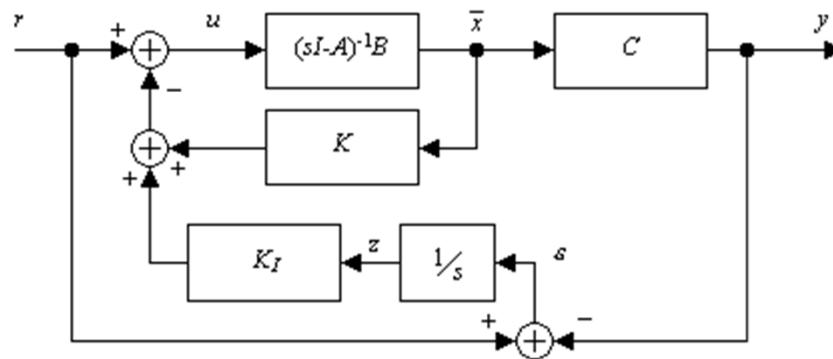
$$\text{Rango}[\mathcal{B}] = \text{Rango} \begin{bmatrix} B & AB & \dots \\ 0 & -CB & \dots \end{bmatrix} = n + 1$$



## Assegnamento Poli - State Feedback

- Il controllore si può calcolare adesso in modo simile ai casi precedenti

$$u = -K \cdot \mathbf{x} - K_I z + r \quad u = -K \cdot \mathbf{x} + r - K_I \int \varepsilon \cdot dt = -K \cdot \mathbf{x} - K_I \int (r - y) \cdot dt + r$$



- Il sistema “aumentato” in ciclo chiuso è quindi:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu = (A - BK)\mathbf{x} - BK_I z + Br \\ \dot{z} = r - y = r - C\mathbf{x} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\dot{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix} r$$
$$\Rightarrow \dot{y}' = \begin{bmatrix} y \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$



## Assegnamento Poli

□ **Esempio:** Dato il sistema instabile

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$
$$G(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

Progettare un controllore a retroazione totale:  $u = -K \cdot x + r$

Tale che:

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}[\lambda_i] < 0 \\ \varepsilon_{step} = 0 \\ MF \simeq 45^\circ, T_a \simeq 5 \text{ sec} \end{cases}$$

- Il controllore deve fornire azione integrale e due poli dominanti come da Specifiche in transitorio, ovvero:

$$MF \simeq 45^\circ, T_a \simeq 5 \text{ sec} \Rightarrow \xi = 0.78, \omega_n = 1.0187 \text{ rad/sec} \quad p_{1/2} = -0.7946 \pm j0.6375$$



# Assegnamento Poli

- Introduzione di 1 integratore:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ -1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} r$$
$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

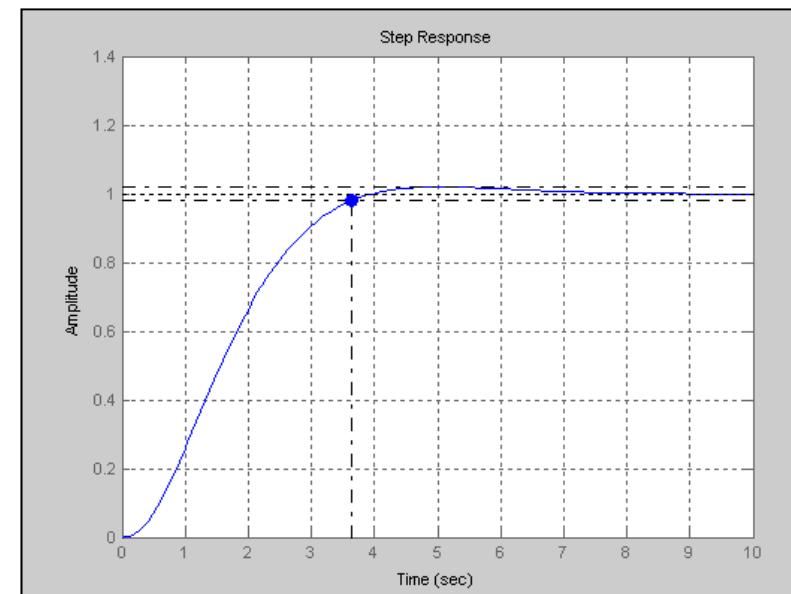
- Poli in Ciclo Chiuso:

$$p_{1/2} = -0.7946 \pm j0.6375$$

$$p_3 = -10$$

```
>> k=place(a,b1,p)
>> k = 29.5190 13.5892 -10.3780
```

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu = (A - BK)x - BK_I z + Br \\ \dot{z} = r - y = r - Cx \end{cases} \Rightarrow$$
$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix} r$$
$$\Rightarrow y' = \begin{bmatrix} y \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ 1 \end{bmatrix} r$$

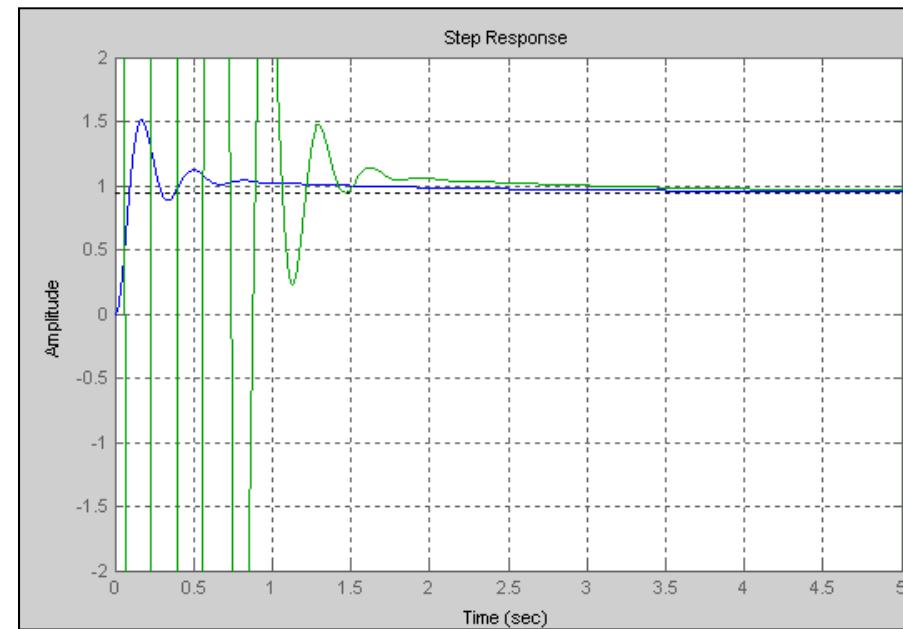
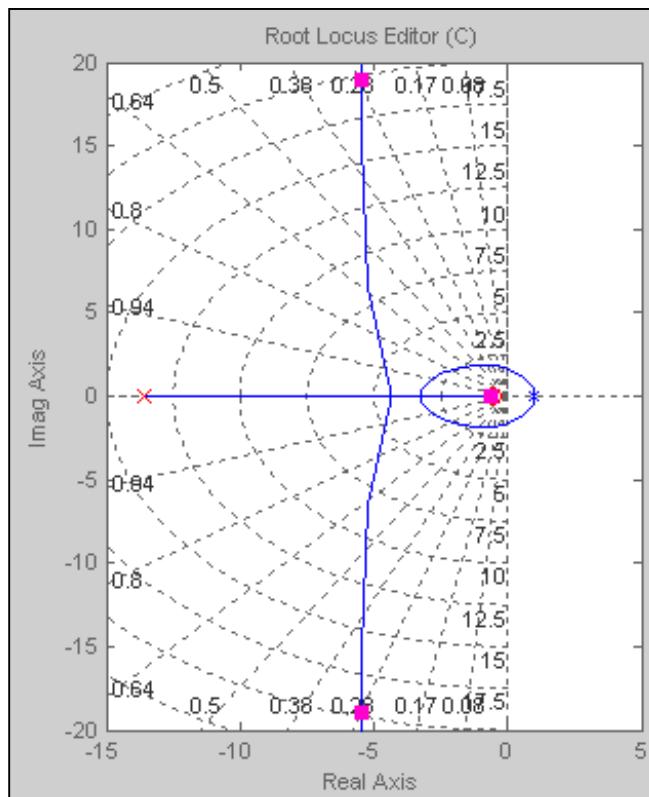




# Assegnamento Poli

- Uso dell'equazione diofantina:

$$G(s) = \frac{1}{(s - 1)^2}, K(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0} \Rightarrow \frac{17.93(s + 0.5788)}{(s + 13.5892)}$$

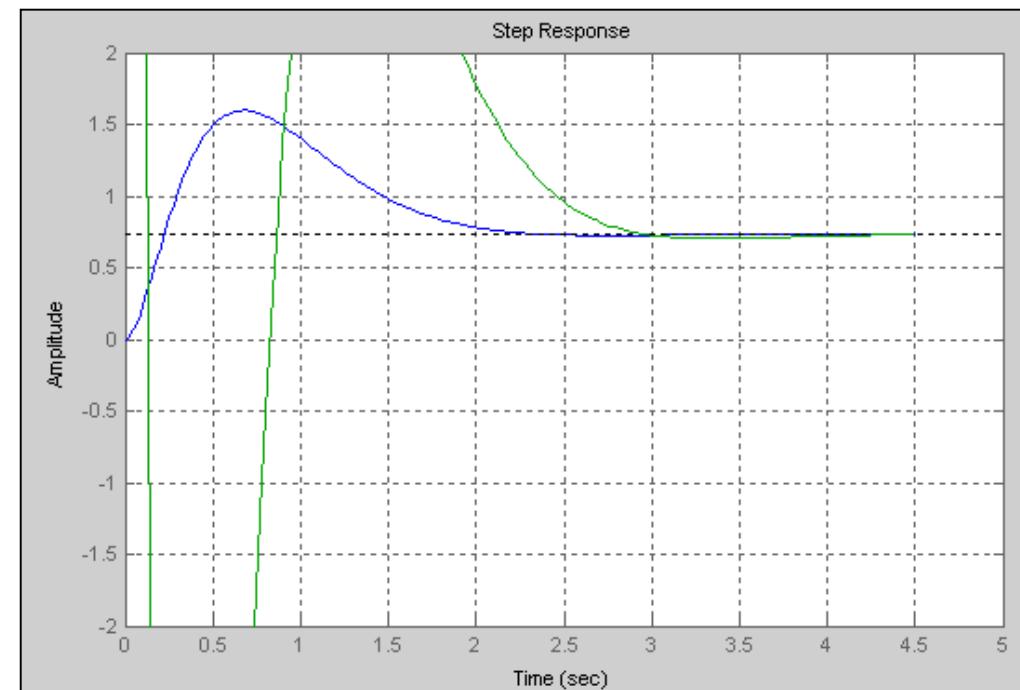
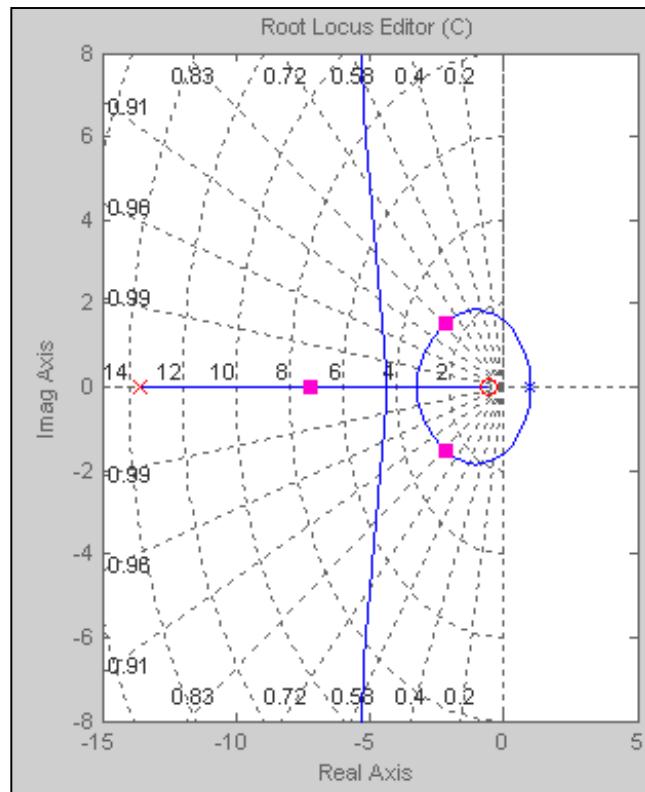




# Assegnamento Poli

- Uso dell'equazione diofantina:

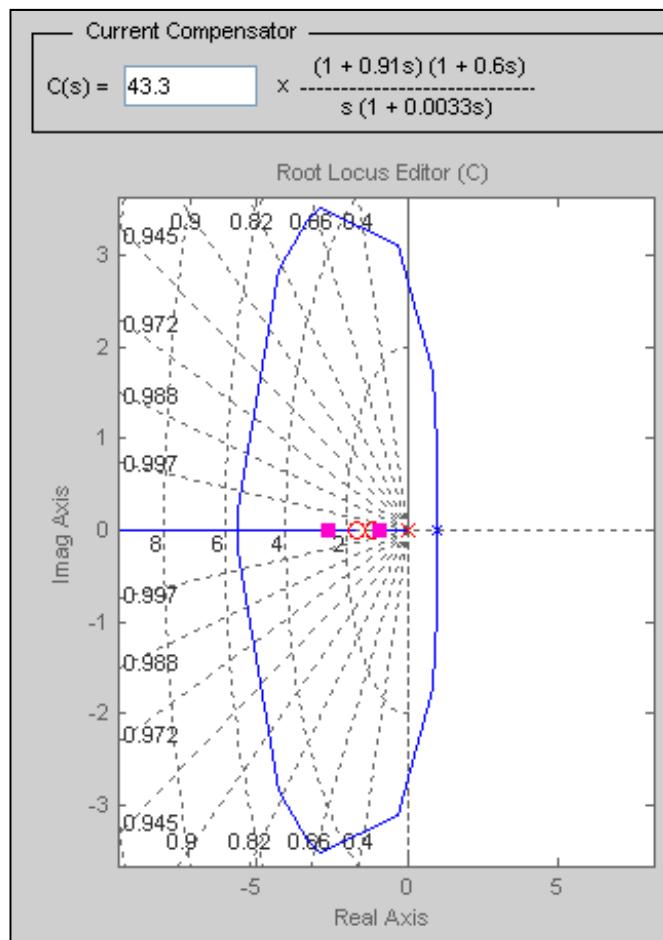
$$G(s) = \frac{1}{(s-1)^2}, K(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0} \Rightarrow \frac{k(s+0.5788)}{(s+13.5892)}$$



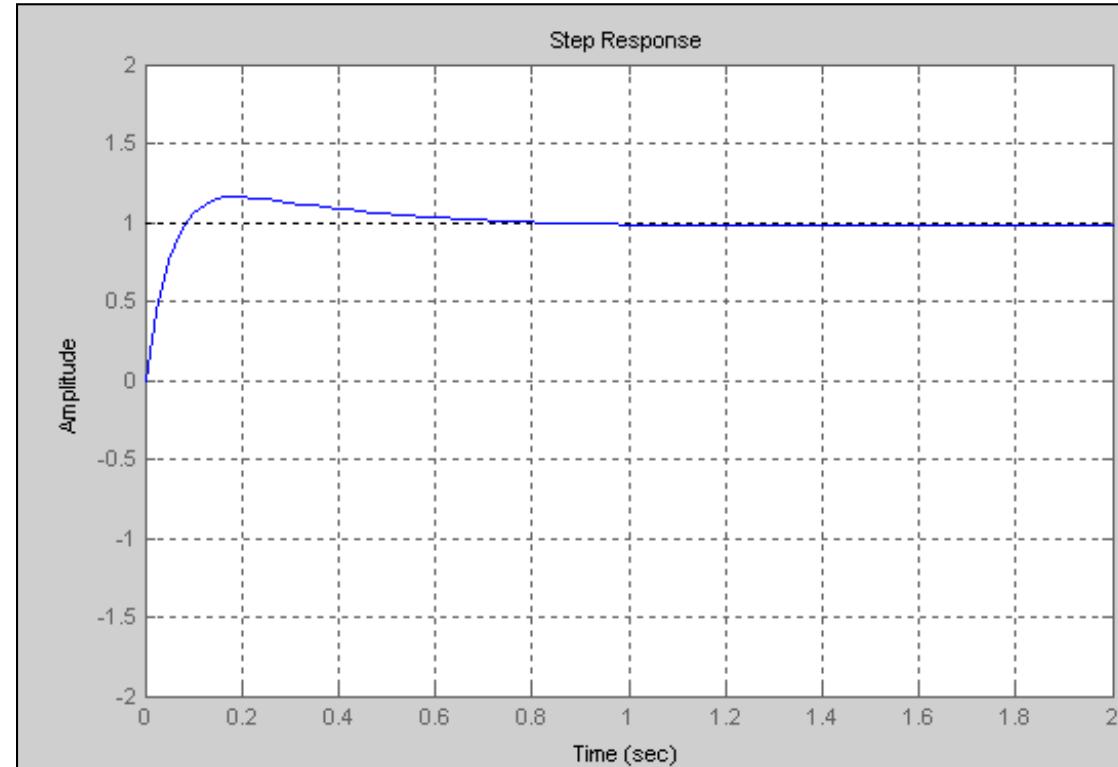


# Assegnamento Poli

- Mediante Luogo delle Radici:



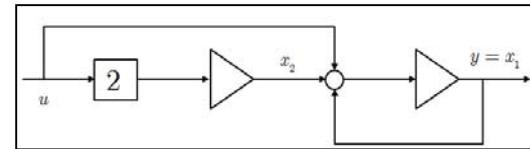
$$G(s) = \frac{1}{(s-1)^2}, K(s) = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)}{s(s+p_1)}$$



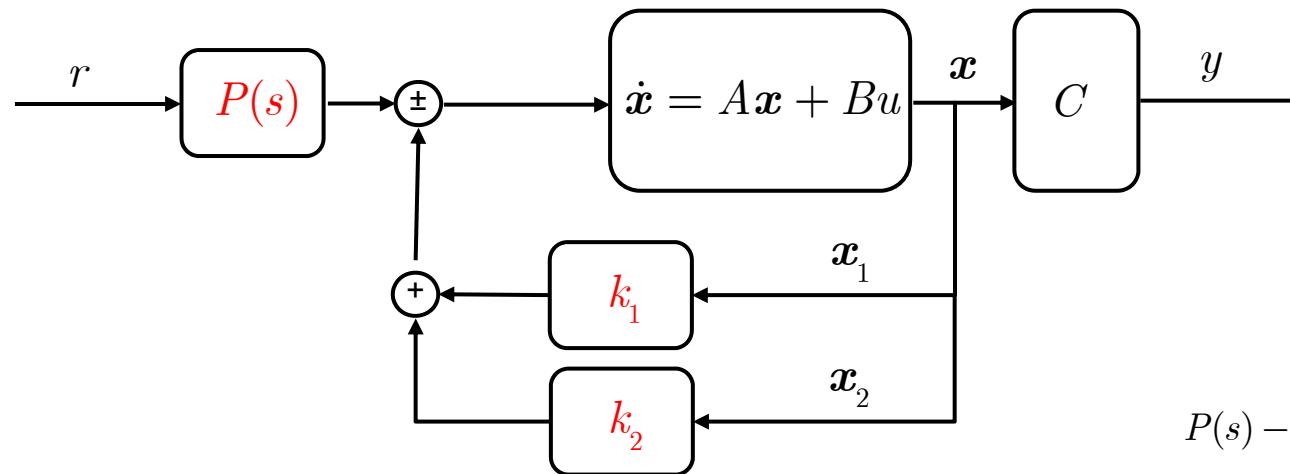


# Assegnamento Poli

- Consideriamo l'esempio introduttivo:



$$G(s) = \frac{s - 2}{s(s - 1)}$$

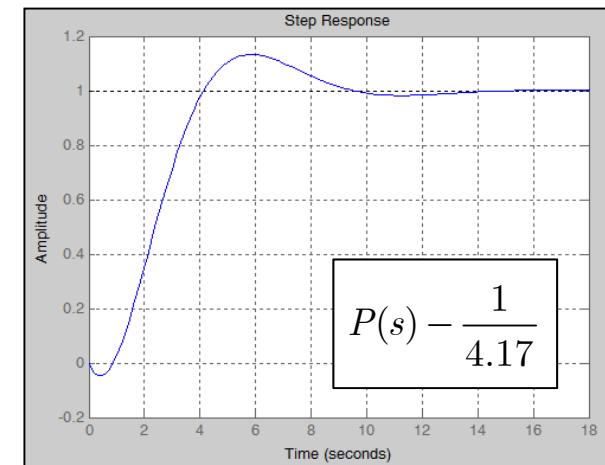


$$P(s) = \frac{1}{C[A_{CL}]^{-1}B}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_{CL}x + Br = \{A - BK\}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}r = \begin{bmatrix} 2.24 & -1 \\ 4.48 & -1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}r \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x = Cx\end{aligned}$$

- Il valore di regime al gradino vale:

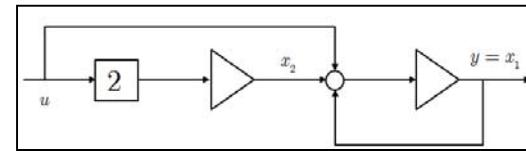
$$y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s(sI - A_{CL})^{-1}B \frac{1}{s} = -C[A_{CL}]^{-1}B$$





# Assegnamento Poli

- Consideriamo la seguente realizzazione del sistema

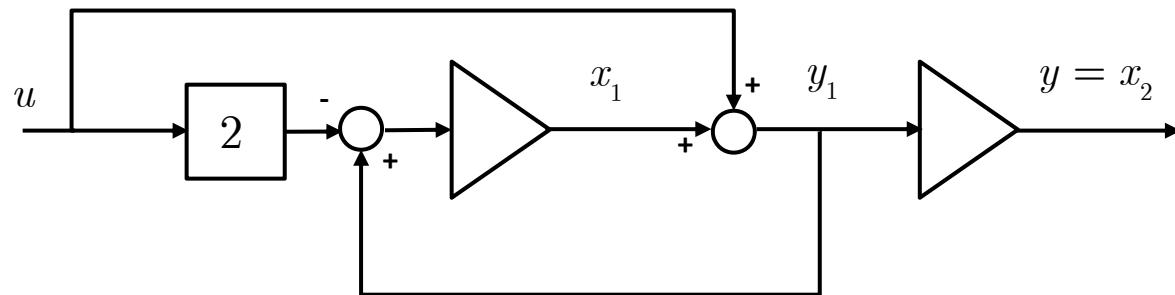


$$\dot{x}_1 = y_1 - 2u$$

$$y_1 = x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = y_1$$

$$y = x_2$$



$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + Bu = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = C\mathbf{x}\end{aligned}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} = \frac{s-2}{s(s-1)}$$

$$A_{CL} = A - BK$$

$$\det(\lambda I - A_{CL}) = \lambda^2 + 0.76\lambda + 0.48 = 0$$

```
>> astat
astat =
 1  0
 1  0
>> bstat
bstat =
 -1
  1
>> poles
poles =
 -0.3800 + 0.5793i
 -0.3800 - 0.5793i
>> kstat=place(astat,bstat,poles)
kstat =
 -2.0000 -0.2400
```

$$K = \begin{bmatrix} -2 & -0.24 \end{bmatrix}$$

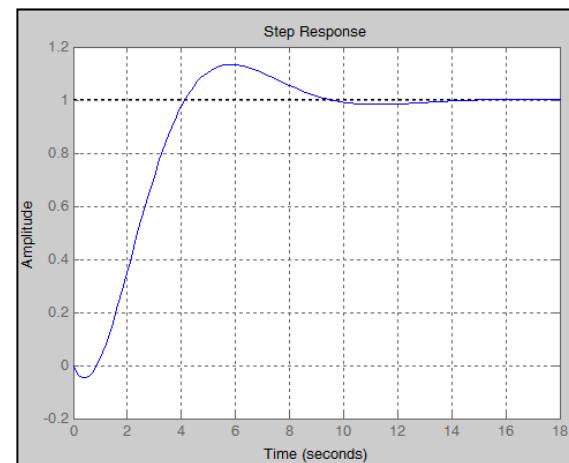
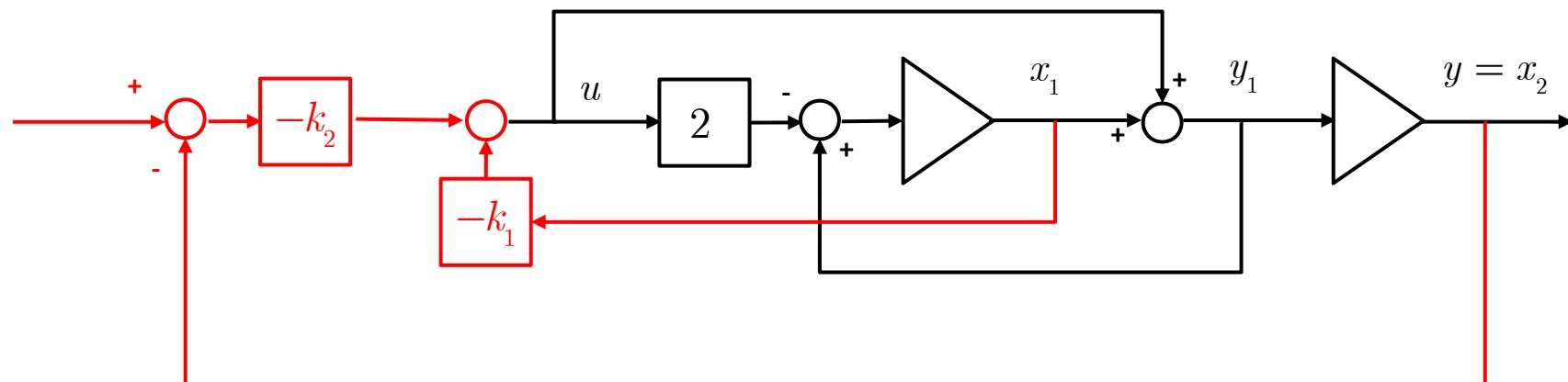


# Assegnamento Poli

- Per evitare il prefiltrro, la retroazione dell'integratore va fatta sulla dinamica dell'errore:

$$\begin{aligned} u &= -k_1 x_1 - k_2(r - y) = -k_1 x_1 + k_2 x_2 - k_2 r \\ &= -2x_1 + 0.24x_2 - 0.24r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & -0.24 \\ +3 & +0.24 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} +0.24 \\ -0.24 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$





## Esempio Harrier

- Equazioni del moto linearizzate intorno all'equilibrio HOVER

$$\begin{cases} J\ddot{\phi} = rF_1 = ru_1 \\ m\ddot{x} + c\dot{x} = F_1 - F_2\phi = u_1 - u_2\phi - mg\phi, \\ m\ddot{y} + c\dot{y} = F_2 + F_1\phi - mg = u_2 + u_1\phi \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = F_1 \\ u_2 = F_2 - mg \end{cases}$$

- Rappresentazione nello spazio di stato:

$$\dot{x} = Ax + Bu = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9.8 & 0 & 0 & -0.0125 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0125 & 0 & 0.25 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right]$$

- **Nota:** Traslazione Laterale e Rotazione in Rollio sono disaccoppiate dalla Traslazione verticale.



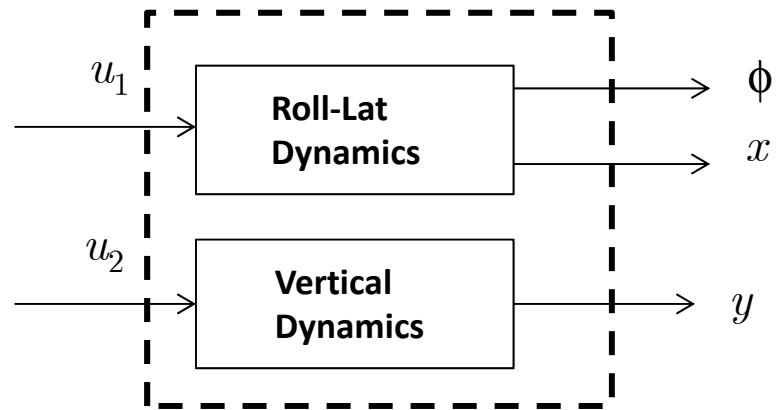
## Esempio Harrier

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}u$$

$$\lambda_\phi = \{0, 0\}$$

$$\lambda_x = \{0, -0.0125\}$$

$$\lambda_y = \{0, -0.0125\}$$



- I due sottosistemi sono controllabili, in quanto:

$$Rango[B_1, A_{11}B_1, A_{11}^2B_1, A_{11}^3B_1] = 4$$

$$Rango[B_2, A_{22}B_2] = 2$$

- Specifiche di Transitorio:

$$K_1 = [35.444, 4.3777, 4.6530, 7.7874]$$

$$\lambda_{\phi DES} = \{-10, -12\}$$

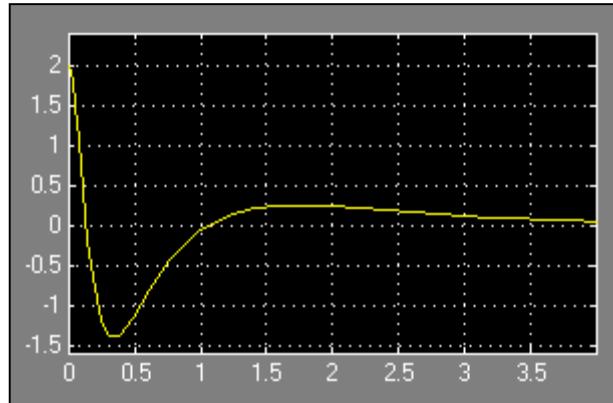
$$K_2 = [8.0, 11.95]$$

$$\lambda_{x DES} = \{-1, -2\}$$

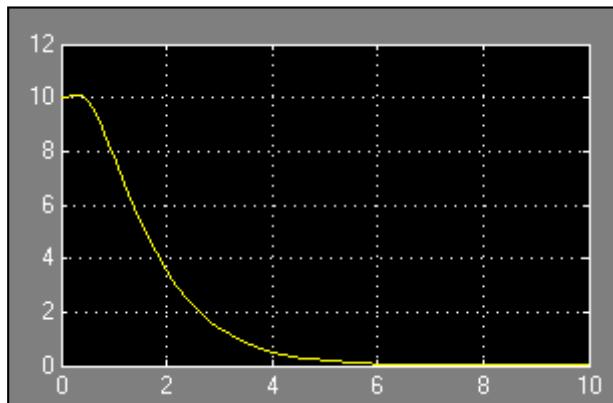
$$\lambda_{y DES} = \{-1, -2\}$$



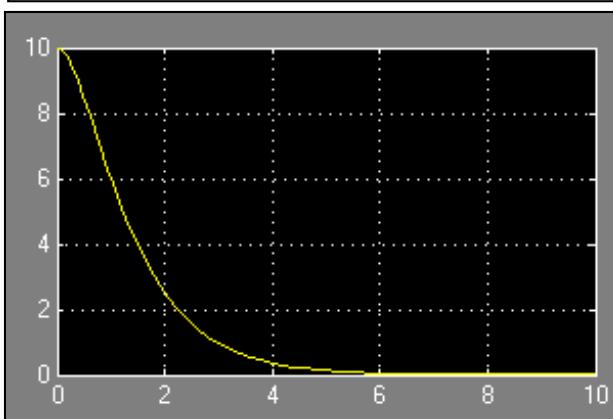
## Esempio Harrier



Rollo



Traslazione Laterale



Traslazione verticale

- Simulazione della risposta del sistema ad un disturbo in condizioni iniziali dalla condizione di equilibrio di hover (0, 0, 0)

$$\phi_0 = 2 \text{ deg.}$$

$$x_0 = 10m.$$

$$y_0 = 10m.$$

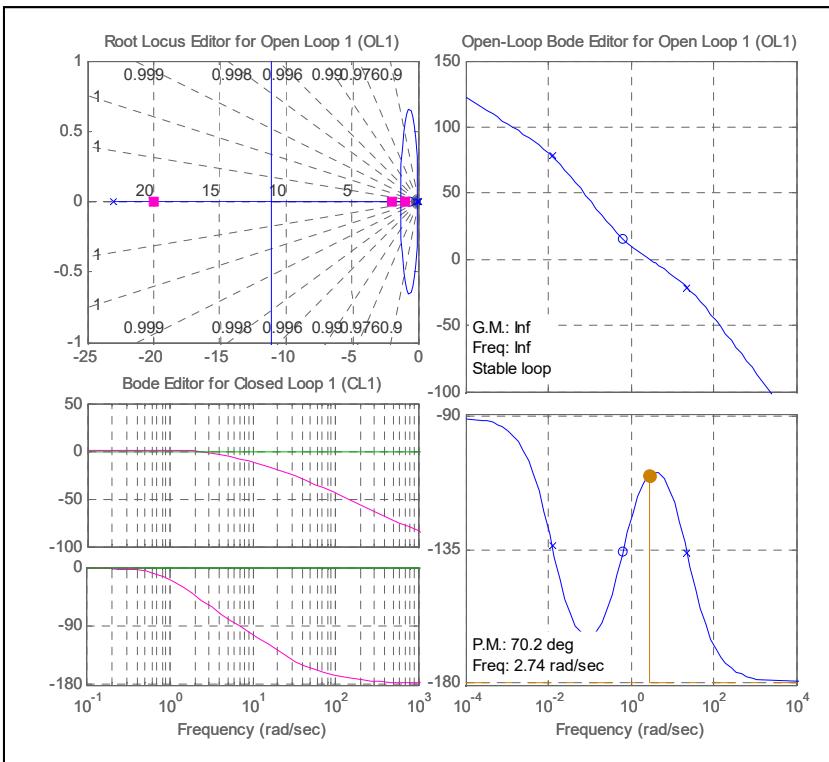


## Esempio Harrier

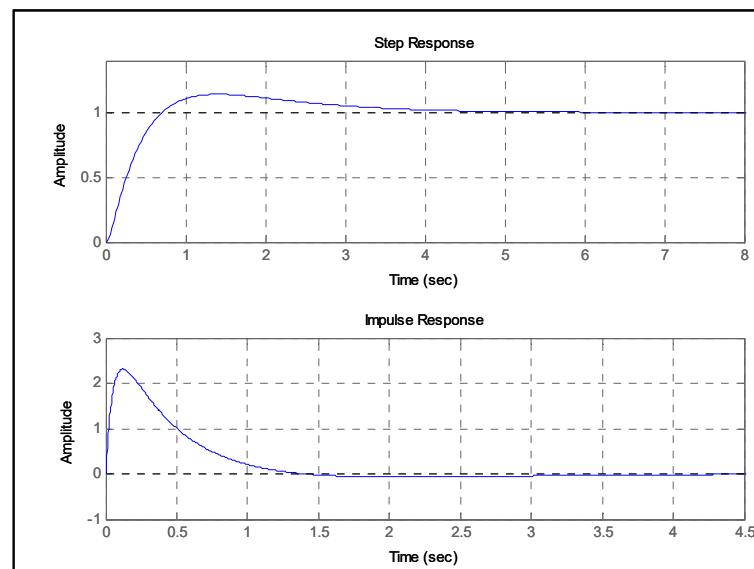
- Sintesi del controllore di traslazione verticale mediante l'equazione Diofantina.
- Selezione poli in ciclo chiuso: -1, -2.
- Il controllore richiede uno zero a bassa frequenza ed un polo fuori banda

$$K(s) = k \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + b_0}$$

$$N_k(s)N(s) + D_k(s)D(s) = k(a_1 s + a_0) \cdot 0.25 + (b_1 s + b_0)(4s^2 + 0.05s)$$



$$K(s) = 246.8506 \frac{s + 0.6482}{s + 22.9875}$$





## Esempio Harrier

- Sintesi del controllore di rollio e traslazione laterale mediante l'equazione Diofantina.
- Selezione poli in ciclo chiuso: -10, -12 (rollio); -1, -2 (traslaz. Laterale)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{x}_{LAT} \\ \ddot{x}_{LAT} \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9.8 & 0 & 0 & -.0125 \end{array} \right] \boldsymbol{x} + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 5.2632 \\ 0 \\ 0.25 \end{array} \right] u_1$$
$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \phi \\ x_{LAT} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \boldsymbol{x}$$

- Usando le partizioni di cui sopra, la dinamica di rollio è:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_\phi = A_{11}\boldsymbol{x}_\phi + B_1 u_1, \phi(s) = \frac{5.2632}{s^2} u_1(s) \\ \phi = C_{11}\boldsymbol{x}_\phi \end{cases}$$

- Il controllo sul rollio è disaccoppiato dalla traslazione laterale (il viceversa non è vero):



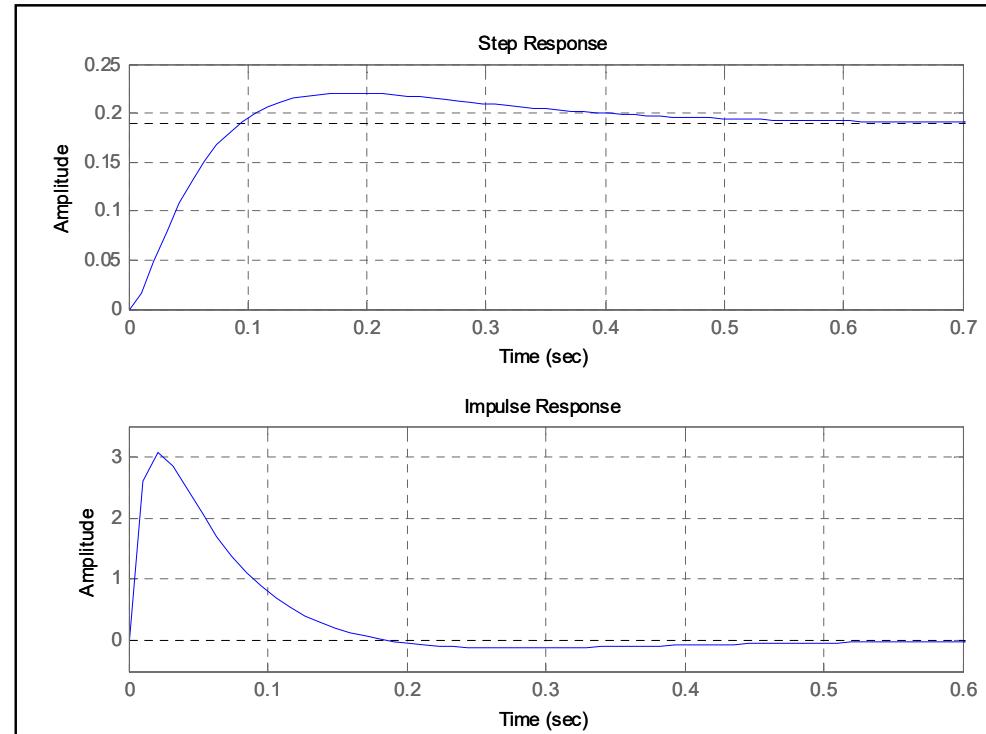
## Esempio Harrier

- Dalle specifiche sull'allocazione dei poli in ciclo chiuso:

$$K_\phi(s) = k \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + b_0}$$

$$N_k(s)N(s) + D_k(s)D(s) = 5.2632k(a_1 s + a_0) + s^2(b_1 s + b_0) = (s + 10)(s + 12)(s + 100)$$

$$K_\phi(s) = 440.8 \frac{s + 5.1724}{s + 122} \Rightarrow$$
$$\frac{\phi(s)}{\phi_D(s)} = \frac{440.8(s + 5.1724)}{s^3 + 122s^2 + 2320s + 12000}$$

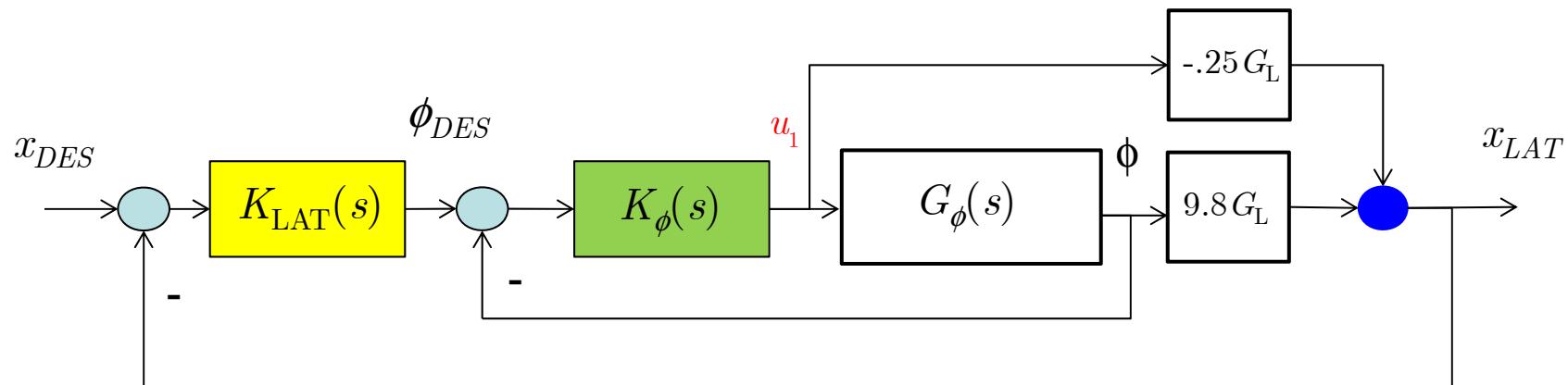




## Esempio Harrier

- Il controllo sulla traslazione laterale non è disaccoppiato dal rollio:

$$\begin{cases} \dot{x}_{LAT} = A_{21}x_\phi + A_{22}x_{LAT} + B_2u_1, \\ x_{LAT} = C_{22}x_{LAT} \end{cases}, x_{LAT}(s) = \frac{1}{s(s + .0125)}[9.8\phi(s) - .25u_1(s)]$$



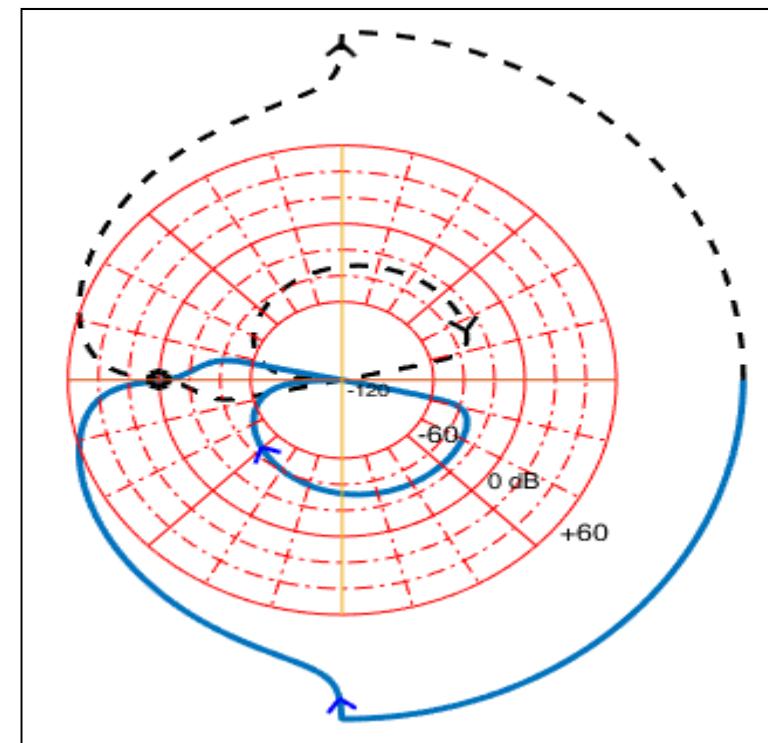
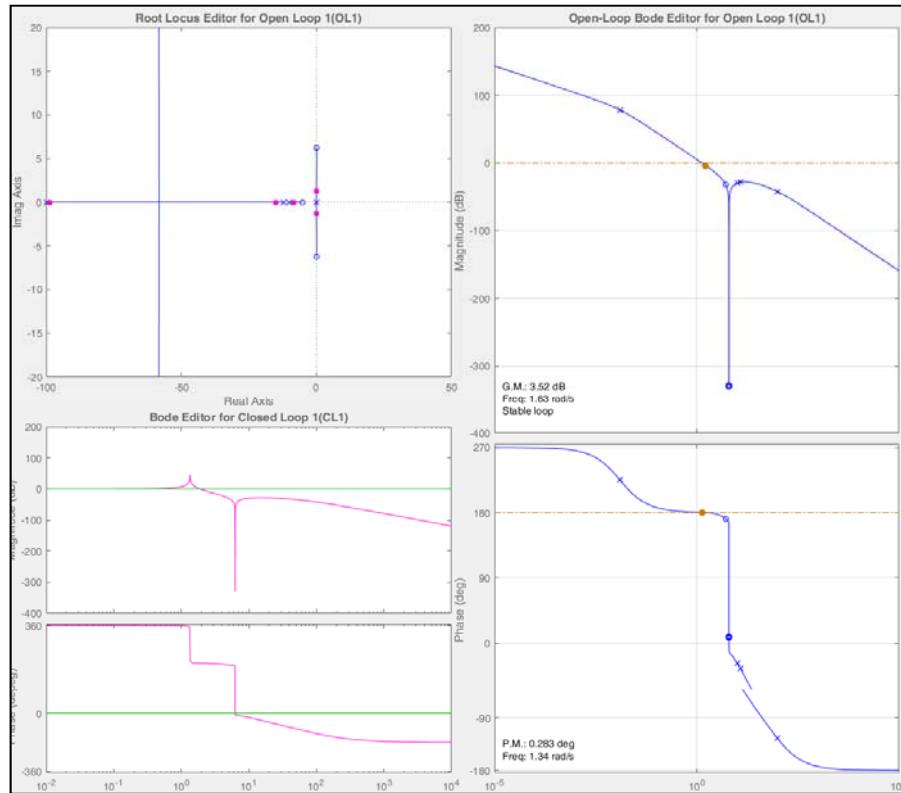
$$G_L(s) = \frac{1}{s(s + .0125)} \quad u_1(s) = \frac{K_\phi(s)}{1 + K_\phi(s)G_\phi(s)} [\phi_D(s) - \phi(s)]$$

$$\frac{\phi(s)}{\phi_D(s)} = \frac{440.8(s + 5.1724)}{s^3 + 122s^2 + 2320s + 12000}$$



## Esempio Harrier

$$x_{LAT}(s) = \frac{110.2(s + 5.1724)(s^2 + 39.2)}{s(s + .0125)(s^3 + 122s^2 + 2320s + 12000)} \phi_D(s)$$





## Esempio Harrier

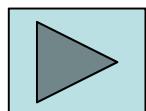
$$K_{LAT}(s) = k \frac{\prod_{i=1}^4 (s + z_i)}{\prod_{j=1}^4 (s + p_j)}$$

$$N_k(s)N(s) + D_k(s)D(s) = (s+1)(s+2)(s+100)^3$$

$$(s^5 + 122s^4 + 2322s^3 + 12029s^2 + 150s)(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4) + \\ k(110.2s^3 + 570s^2 + 4320s + 22340)(s + z_1)(s + z_2)(s + z_3)(s + z_4) = \\ = (s+1)(s+2)(s+100)^3$$

?

**Il sistema in ciclo chiuso deve avere almeno 10 poli.**



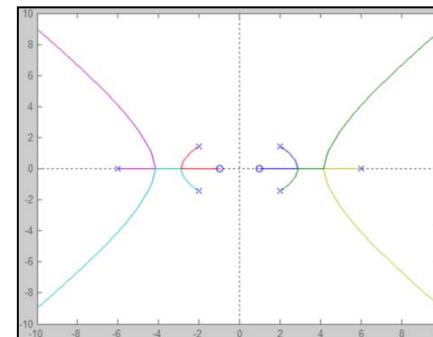
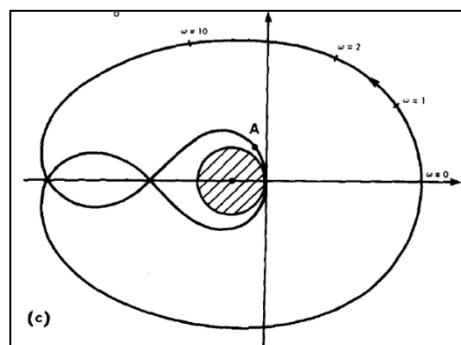


## Note addizionali

- Assegnamento Poli permette di soddisfare i requisiti di progetto in termini di risposta transitoria e di regime (con modifica riguardo a integratori)
  - Con l'ipotesi di controllabilità, possiamo ottenere una matrice di guadagno  $K$ , tale che sia specificato univocamente uno spettro di autovalori asintoticamente stabili

### □ Domande:

1. Esiste un legame tra assegnamento poli e risposta in frequenza? Possiamo definire la matrice di guadagno in modo da soddisfare il requisito di margini di stabilità?
2. Possiamo specificare un parametro nella matrice di guadagno in modo legarne la variazione con un andamento specifico dei poli in anello chiuso ovvero tracciarne un ‘Luogo delle Radici’?

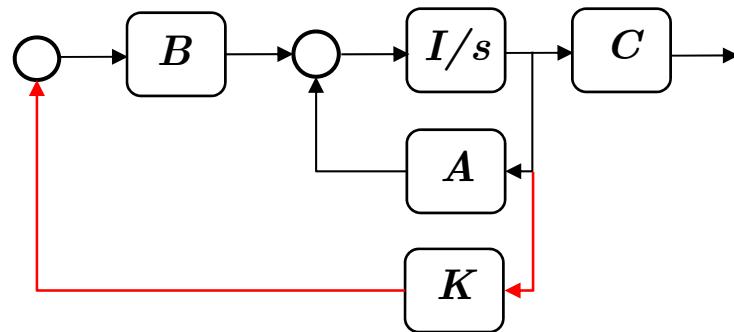




## Note addizionali

### □ Richiamo dalla teoria della stabilità di Lyapunov:

$$\operatorname{Re}[\lambda_i(A - BK)] < 0 \Leftrightarrow \exists P = P^T \geq 0, \forall Q = Q^T \geq 0 \mid (A - BK)^T P + P(A - BK) + Q = 0$$



### □ Ipotesi No. 1: Consideriamo un sistema SISO controllabile e osservabile, strettamente proprio

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ y \in \mathbb{R}^1, u \in \mathbb{R}^1 \end{cases} \quad \begin{cases} u = -Kx \\ \dot{x} = (A - BK)x \\ y = Cx \end{cases} \quad \begin{cases} B \in \mathbb{R}^{n \times 1} \\ C \in \mathbb{R}^{1 \times n} \\ K \in \mathbb{R}^{1 \times n} \end{cases}$$



## Note addizionali

- Riscriviamo l'equazione di Lyapunov per il sistema in anello chiuso (asintoticamente stabile):

$$A^T P + PA + Q - K^T B^T P - PBK = 0$$

□ **Ipotesi No. 2:** Poniamo: 
$$\begin{cases} K = K_c = \frac{1}{r} B^T P \Rightarrow K^T = \frac{1}{r} PB; r > 0 \\ Q = C^T C \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$A^T P + PA + C^T C - \frac{1}{r} PBB^T P - \frac{1}{r} PBB^T P = 0$$

$$A^T P + PA + C^T C - \frac{2}{r} PBB^T P = 0$$

- definiamo:

$$\rho = \frac{r}{2} > 0 \Rightarrow A^T P + PA + C^T C - \frac{1}{\rho} PBB^T P = 0 \quad (2)$$

- (2) Prende il nome di: Equazione algebrica di Riccati (ARE), la quale ammette un'unica soluzione  $P$ , positiva (semi)definita, per ogni  $Q$  positiva (semi)definita



## Note addizionali

- **Nota:** Le Funzioni di Trasferimento di interesse nell'analisi in frequenza sono:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad \text{FdT del Sistema}$$

$$L(s) = K_c(sI - A)^{-1}B \quad \text{FdT di Anello}$$

- **Obiettivo:** Riscrivere (2) come funzione di  $G(s)$  e  $L(s)$

- Dalla definizione di  $K_c$  risulta:

$$\frac{PBB^TP}{\rho} = K^T\rho K$$

- ARE (2) diventa:

$$A^TP + PA + C^TC - K^T\rho K = 0$$

- Aggiungere il termine nullo  $-Ps + Ps$

$$\color{red}{-Ps + Ps} + A^TP + PA + C^TC - K^T\rho K = 0$$

$$-A^TP - PA - C^TC + K^T\rho K - Ps + Ps = 0$$



## Note addizionali

$$P(sI - A) + (-sI - A^T)P + K_c^T \rho K_c = C^T C \quad (3)$$

- Premoltiplicare e postmoltiplicare ambo i membri di (3) rispettivamente per  $\frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1}$  e  $(sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} \left\{ P(sI - A) + (-sI - A^T)P + K_c^T \rho K_c \right\} (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} \left\{ C^T C \right\} (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \end{aligned}$$

- Moltiplicare tutti i termini. Sostituendo i valori:

$$PB = K_c^T \rho$$

$$B^T P = \rho K_c$$



## Note addizionali

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} K_c^T \sqrt{\rho} + \sqrt{\rho} K_c (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} K_c^T \rho K_c (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} C^T C (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \end{aligned} \tag{4}$$

- Consideriamo la relazione:

$$\left[ 1 + \sqrt{\rho} K_c (-sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right]^T \left[ 1 + \sqrt{\rho} K_c (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right] \tag{5}$$

- Eseguire la trasposta e moltiplicare ambo i membri:

$$\begin{aligned} (5) &= 1 + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} K_c^T \sqrt{\rho} + \sqrt{\rho} K_c (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} K_c^T \rho K_c (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \end{aligned}$$



## Note addizionali

- Risulta quindi:

$$(5) = \text{primo membro di (4)} + 1 \rightarrow (5) = \text{secondo membro di (4)} + 1$$

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \sqrt{\rho} K_c (-sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right]^T \left[ 1 + \sqrt{\rho} K_c (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right] = \\ & = 1 + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T (-sI - A^T)^{-1} C^T C (sI - A)^{-1} B \frac{1}{\sqrt{\rho}} \end{aligned} \quad (6)$$

- Definizione:** Data una matrice di variabile complessa  $A(s=j\omega)$ , essa si dice Hermitiana se

$$A(s) = A^*(s) = A^T(-s)$$

- Dalla definizione: LHS di (6) è Hermitiana, RHS di (6) ha la forma  $1 + H^*(j\omega) Q H(j\omega) \geq 1$

$$L(s) = K_c (sI - A)^{-1} B$$

$$L^T(-s) = L^*(s)$$

$$\left[ 1 + K_c (-sI - A)^{-1} B \right]^T \left[ 1 + K_c (sI - A)^{-1} B \right] \geq 1$$

■ **Diseguaglianza di Kalman**

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

$$G^T(-s) = G^*(s)$$



## Note addizionali

- Riprendiamo la diseguaglianza di Kalman:

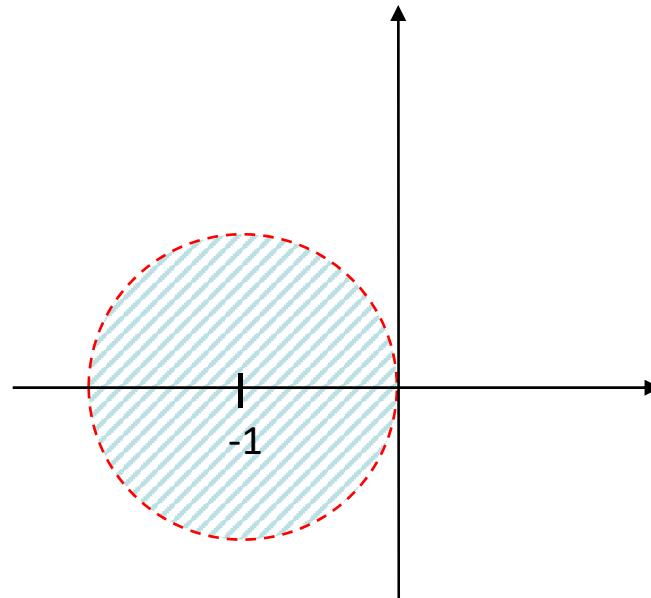
$$\left[1 + K_c(-j\omega I - A)^{-1}B\right]^T \left[1 + K_c(j\omega I - A)^{-1}B\right] \geq 1$$

$$\left[1 + K_c(j\omega I - A)^{-1}B\right]^* \left[1 + K_c(j\omega I - A)^{-1}B\right] \geq 1$$

$$[1 + L(s)]^*[1 + L(s)] \geq 1$$

$$|1 + L(s)|^2 \geq 1$$

$$|1 + L(s)| \geq 1$$



- La FdT di anello  $L(s)$  non può essere all'interno del cerchio di raggio unitario, con origine nel punto critico

$$[1 + L(s)]^*[1 + L(s)] = 1 + G^*(s)G(s) \geq 1$$

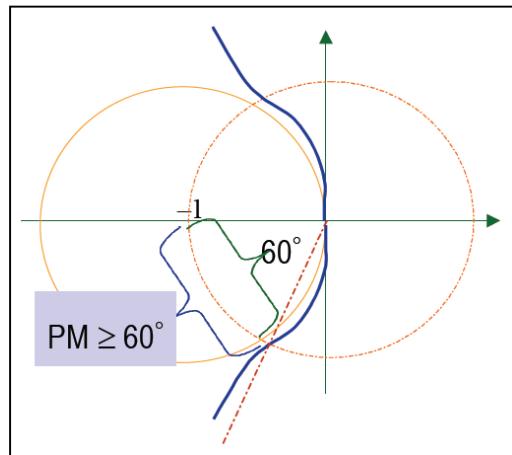


## Note addizionali

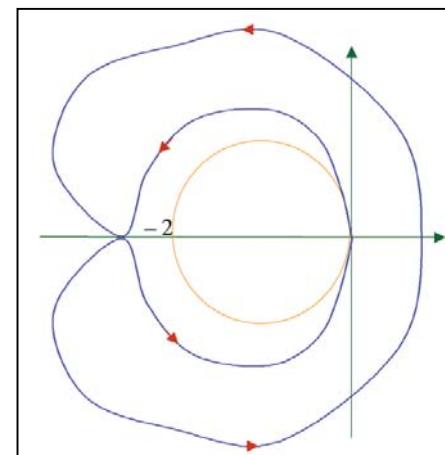
### □ Interpretazione mediante il Criterio di Nyquist:

$$|1 + L(s)| \geq 1$$

- Essendo il sistema in ciclo chiuso asintoticamente stabile per costruzione,  $Z = 0$
- Indipendentemente dal numero di poli instabili in anello aperto, si ha **sempre**  $N = -P$



- Il Margine di Fase non può essere minore di  $\pm 60^\circ$



- Il Margine di Guadagno è compreso tra 0.5 (-6 dB) e  $\infty$



## Note addizionali

- Dato il sistema asintoticamente stabile in anello chiuso

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK_c)x \\ K_c = \frac{1}{r} B^T P \end{cases}$$

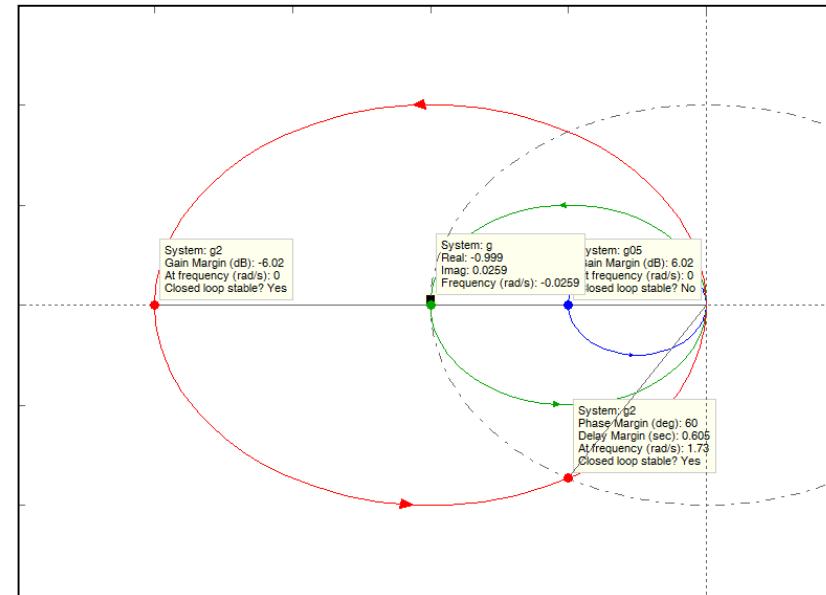
- **Domanda:** Esiste un andamento prefissato dei poli in anello chiuso al variare del parametro  $r$ , con  $0 < r < \infty$ ?

$$G(s) = \frac{1}{s-1} \quad \begin{cases} \dot{x} = x + u \\ y = x \end{cases}$$

- Il sistema è asintoticamente stabile in anello chiuso per ogni guadagno maggiore di 1 (vedi Luogo delle Radici)

$$\begin{cases} \dot{x} = (1-k)x \\ y = x \end{cases}$$

- Il sistema può essere anche stabilizzato mediante state feedback  $u = -kx$





## Note addizionali

- Consideriamo la retroazione dello stato con matrice di guadagno scelta precedentemente

$$\begin{cases} k = \frac{1}{r} B^T P = \frac{p}{r} \\ \dot{x} = (1 - \frac{p}{r})x \end{cases} \quad A^T P + PA + C^T C - \frac{1}{r} PBB^T P = 0$$
$$p + p + 1 - \frac{p^2}{r} = 0 \quad 0 < r < \infty \quad (2)$$

- Risolviamo (2) per  $p > 0$   $p^2 - 2rp - 1 = 0$

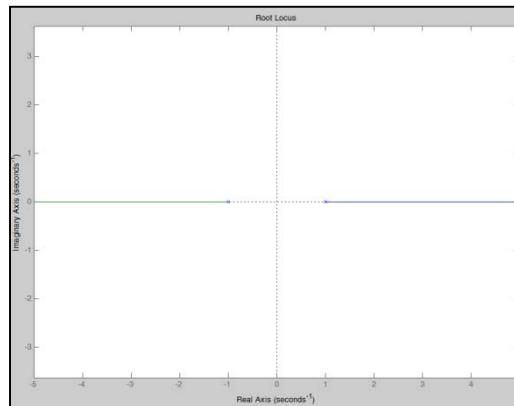
$$p = \frac{-2r \pm \sqrt{4r^2 + 4r}}{2} = r \pm \sqrt{r^2 + r} \Rightarrow r + \sqrt{r^2 + r}$$

- Il sistema in anello chiuso diventa:

$$\dot{x} = (A - BK_c)x = \left[ 1 - \frac{1}{r}(r + \sqrt{r^2 + r}) \right] x \Rightarrow \dot{x} = \left[ -\sqrt{1 + \frac{1}{r}} \right] x$$

$$\begin{cases} r \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow -1 \end{cases}$$





## Note addizionali

- Possiamo generalizzare il risultato precedente introducendo la seguente matrice:

$$H = \begin{bmatrix} A & -\frac{BB^T}{r} \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix}, H \in \Re^{2n \times 2n} \quad (sI - H) = \begin{bmatrix} sI - A & \frac{BB^T}{r} \\ -C^T C & sI + A^T \end{bmatrix}$$

- Teorema:** ARE ha una unica soluzione positiva (semi)definita, se e solo se la matrice  $H$  non ha autovalori sull'asse immaginario.

$$A^T P + PA + C^T C - \frac{PBB^T P}{r} = 0 \Leftrightarrow \lambda_i^{i=1..n}(H) = \sigma_i + j\omega_i, \sigma_i \neq 0$$

- Corollario:** Gli autovalori di  $H$  sono  $2n$  e sono simmetrici rispetto all'asse immaginario: se  $\lambda$  è un autovalore, così lo è  $-\lambda$ .
- Con i risultati precedenti, si può dimostrare che gli autovalori di  $(A - BK_c)$  sono gli autovalori stabili di  $H$ . Usando le proprietà del determinante:

$$\det \begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} = \det A \cdot \det(B - CA^{-1}D)$$

$$\det(sI - H) = \det(sI - A) \cdot \det[(sI + A^T) - C^T C(sI - A)^{-1} \frac{1}{r} BB^T]$$



## Note addizionali

- Scomponendo ulteriormente:

$$\det(sI - H) = \det(sI - A) \cdot \det(sI + A^T) \cdot \det[1 - C^T C(sI - A)^{-1} \frac{1}{r} BB^T (sI + A^T)^{-1}]$$

$$\det(sI - H) = \det(sI - A) \cdot (-1)^n \cdot \det(-sI - A) \cdot \det[1 + \frac{1}{r} B^T (-sI - A^T)^{-1} C^T C(sI - A)^{-1} B]$$

- Definiamo:  $\det(sI - H) = \Phi_{CL}(s)\Phi_{CL}(-s)$

$$\det(sI - A) = \Phi_{OL}(s)$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\Psi_{OL}(s)}{\Phi_{OL}(s)}$$

- Nel caso SISO la relazione tra i poli in ciclo aperto ed in ciclo chiuso è quindi:

$$(-1)^n \Phi_{CL}(s)\Phi_{CL}(-s) = \Phi_{OL}(s)\Phi_{OL}(-s) + \frac{1}{r} \Psi_{OL}(s)\Psi_{OL}(-s) = 0$$

- I poli in ciclo chiuso del sistema sono i poli stabili che annullano  $\det(sI - H)$  ovvero:

$$1 + \frac{1}{r} \frac{\Psi_{OL}(s)\Psi_{OL}(-s)}{\Phi_{OL}(s)\Phi_{OL}(-s)} = 0$$

- e variano con il parametro  $r$ .



## Note Addizionali

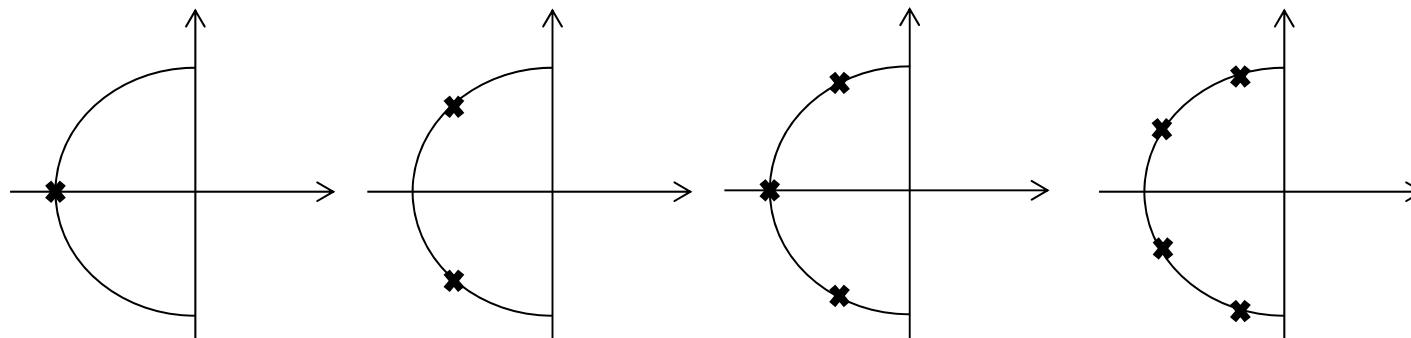
### □ Considerazioni al variare del parametro r

$$\Phi_{CL}(s)\Phi_{CL}(-s) = \Phi_{OL}(s)\Phi_{OL}(-s) + \frac{1}{r}\Psi_{OL}(s)\Psi_{OL}(-s) = 0$$

- Nel caso  $r \rightarrow \infty$ , i poli in ciclo chiuso approssimano i poli stabili in ciclo aperto e l'immagine speculare dei poli instabili in ciclo aperto
- Nel caso  $r \rightarrow 0$ , i poli in ciclo chiuso approssimano gli zeri stabili in ciclo aperto e l'immagine speculare degli zeri instabili in ciclo aperto
- Se il sistema è strettamente proprio, i rimanenti poli tendono a  $-\infty$  le direzioni assintotiche definite (direzioni Butterworth) in funzione di  $n_{\text{poli}} - n_{\text{zeri}}$ .
- Il semicerchio ha raggio:

$$\left[ \frac{\Psi_{OL}(0)\Psi_{OL}(0)}{r} \right]^{\frac{1}{2(n_{\text{poli}} - n_{\text{zeri}})}}$$

Configurazioni Butterworth





## Note Addizionali

### □ Luogo delle Radici Simmetrico

$$1 + \frac{1}{r} G(s)G(-s) = 0 \Rightarrow 1 + kG(s)G(-s)$$

#### ■ Uso delle variabili di stato per determinare $G(-s)$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$G(-s) = C(-sI - A)^{-1}B = C[-(sI + A)]^{-1}B$$

$$G(s) \Rightarrow [C, A, B]$$

$$G(-s) = [C, -A, -B]$$

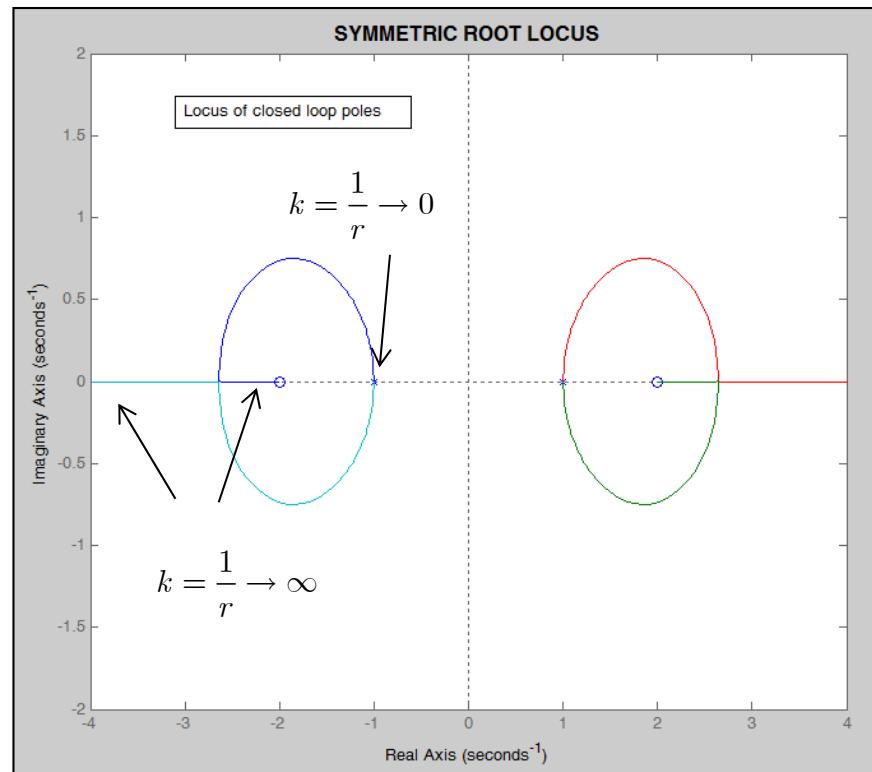
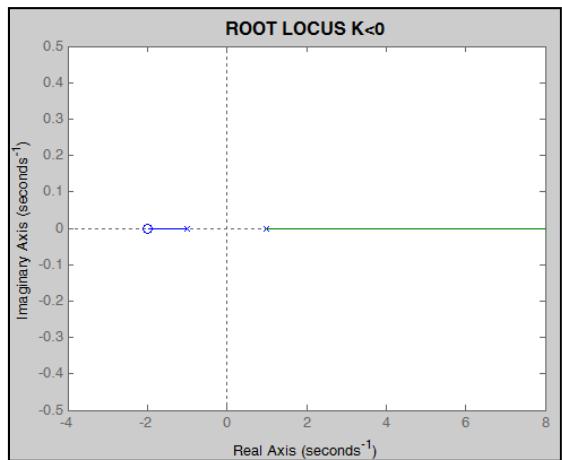
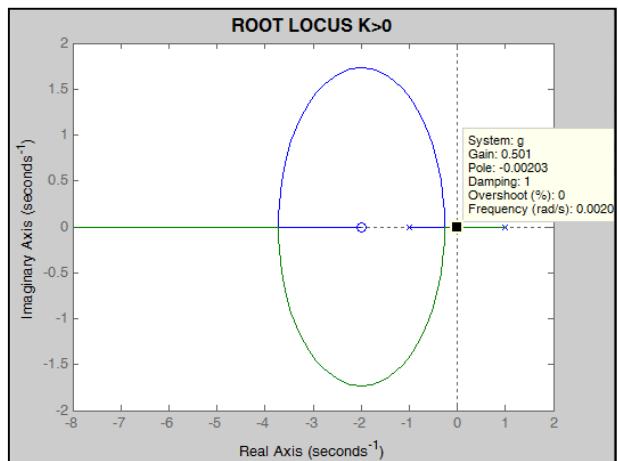
#### ■ Implementazione Matlab

```
Gs=zpk([numroots],[denroots],gain);  
[a,b,c,d]=ssdata(Gs);  
Gms=zpk(ss(-a,-b,c,d));  
rlocus(Gs*Gms);  
axis equal;
```



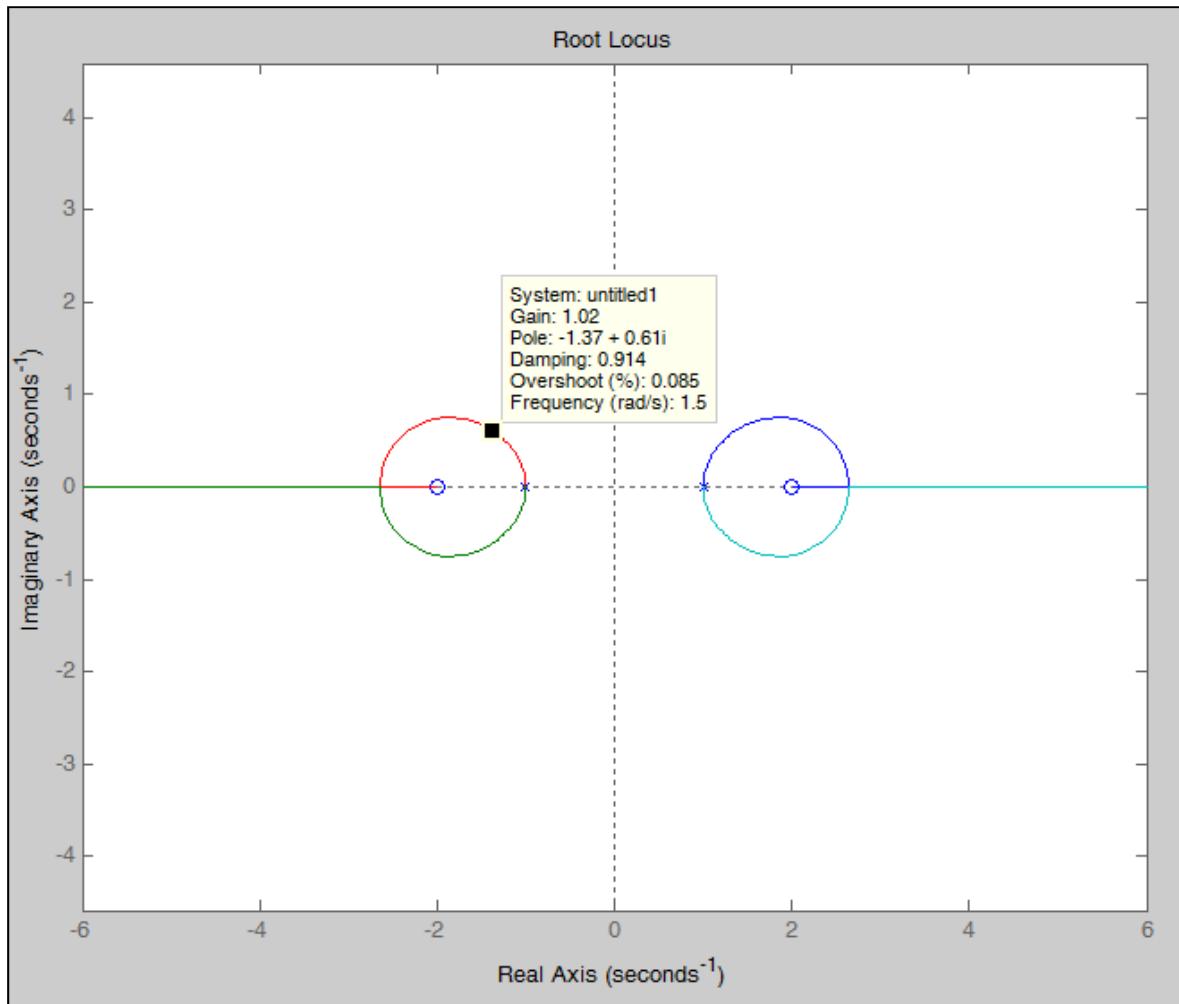
## Note Addizionali

Esempio  $G(s) = \frac{s + 2}{s^2 - 1}$





## Note Addizionali



$$G(s) = \frac{s-2}{s^2-1} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}x \end{cases}$$

- Per  $k = 1$

$$A^T P + PA + C^T C - PBB^T P = 0$$

```
>> p=are(a,b*b',c*c');
>> k=b'*p;
>> acl=a-b*k;
>> p

p =

    2.7335    3.2361
    3.2361    4.1123

>> k

k =

    2.7335    3.2361

>> eig(acl)

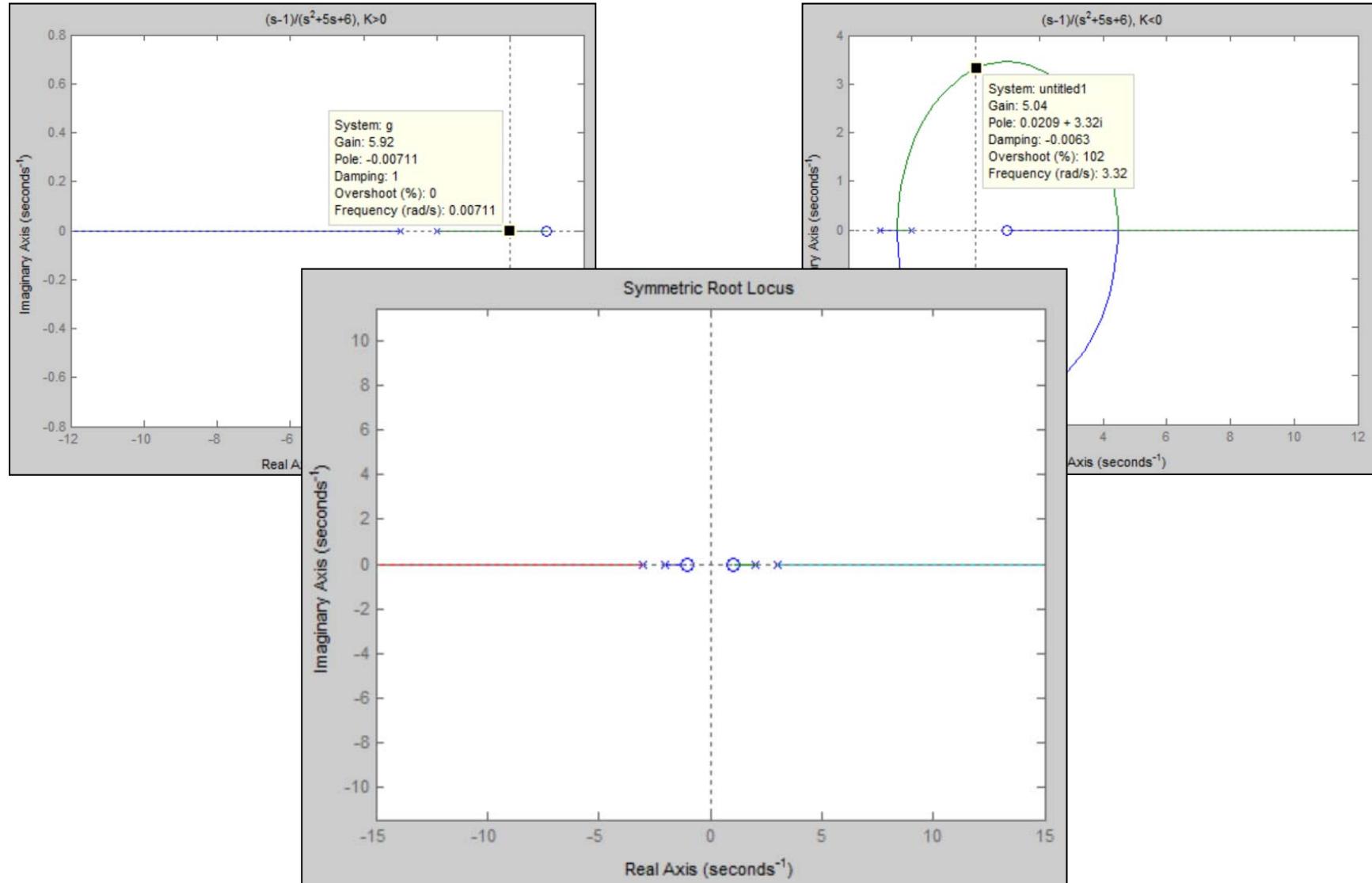
ans =

    -1.3668 + 0.6067i
    -1.3668 - 0.6067i
```



## Note Addizionali

Esempio  $G(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 5s + 6}$





## Note Addizionali

$$r = 0.1, P = \begin{bmatrix} 0.1047 & 0.0782 \\ 0.0782 & 2.1012 \end{bmatrix}, K = \frac{1}{r} B^T P = \begin{bmatrix} 1.0969 & 0.7823 \end{bmatrix}, A_{CL} = \begin{bmatrix} -6.0469 & -6.7823 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} -4.5593 \\ -1.4876 \end{bmatrix}$$

$$r = 1, P = \begin{bmatrix} 0.1152 & 0.0828 \\ 0.0828 & 2.1147 \end{bmatrix}, K = \frac{1}{r} B^T P = \begin{bmatrix} 0.1152 & 0.0828 \end{bmatrix}, A_{CL} = \begin{bmatrix} -5.1152 & -6.0828 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} -3.2348 \\ -1.8804 \end{bmatrix}$$

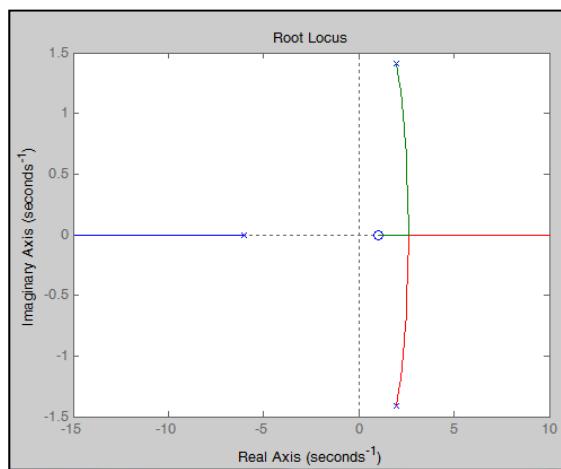
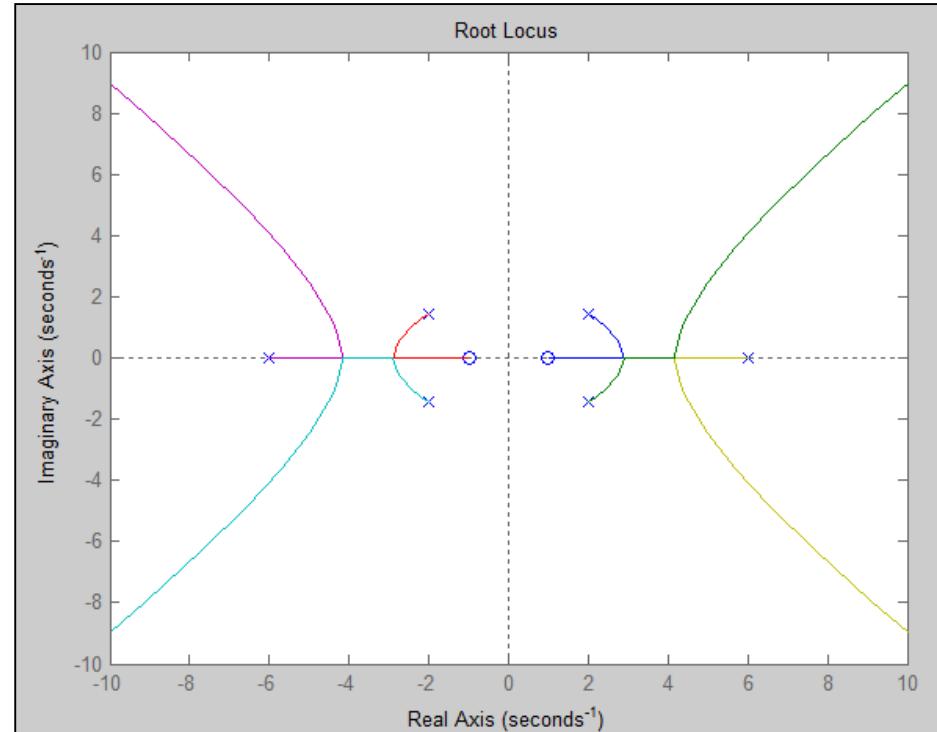
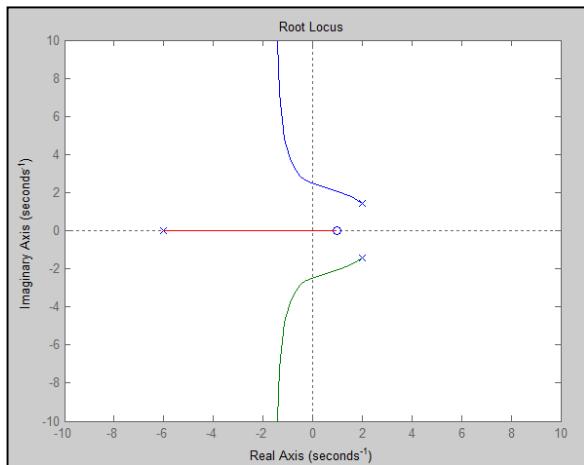
$$r = 10, P = \begin{bmatrix} 0.1165 & 0.0833 \\ 0.0833 & 2.1165 \end{bmatrix}, K = \frac{1}{r} B^T P = \begin{bmatrix} 0.0117 & 0.0083 \end{bmatrix}, A_{CL} = \begin{bmatrix} -5.0117 & -6.0083 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} -3.0262 \\ -1.9854 \end{bmatrix}$$

$$r = 100, P = \begin{bmatrix} 0.1167 & 0.0833 \\ 0.0833 & 2.1166 \end{bmatrix}, K = \frac{1}{r} B^T P = \begin{bmatrix} 0.0012 & 0.0008 \end{bmatrix}, A_{CL} = \begin{bmatrix} -5.0012 & -6.0008 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} -3.0027 \\ -1.9985 \end{bmatrix}$$



## Note Addizionali

**Esempio**  $G(s) = \frac{s - 1}{(s + 6)(s^2 - 4s + 6)}$

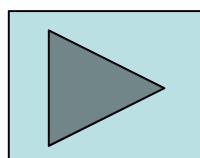




# Note Addizionali

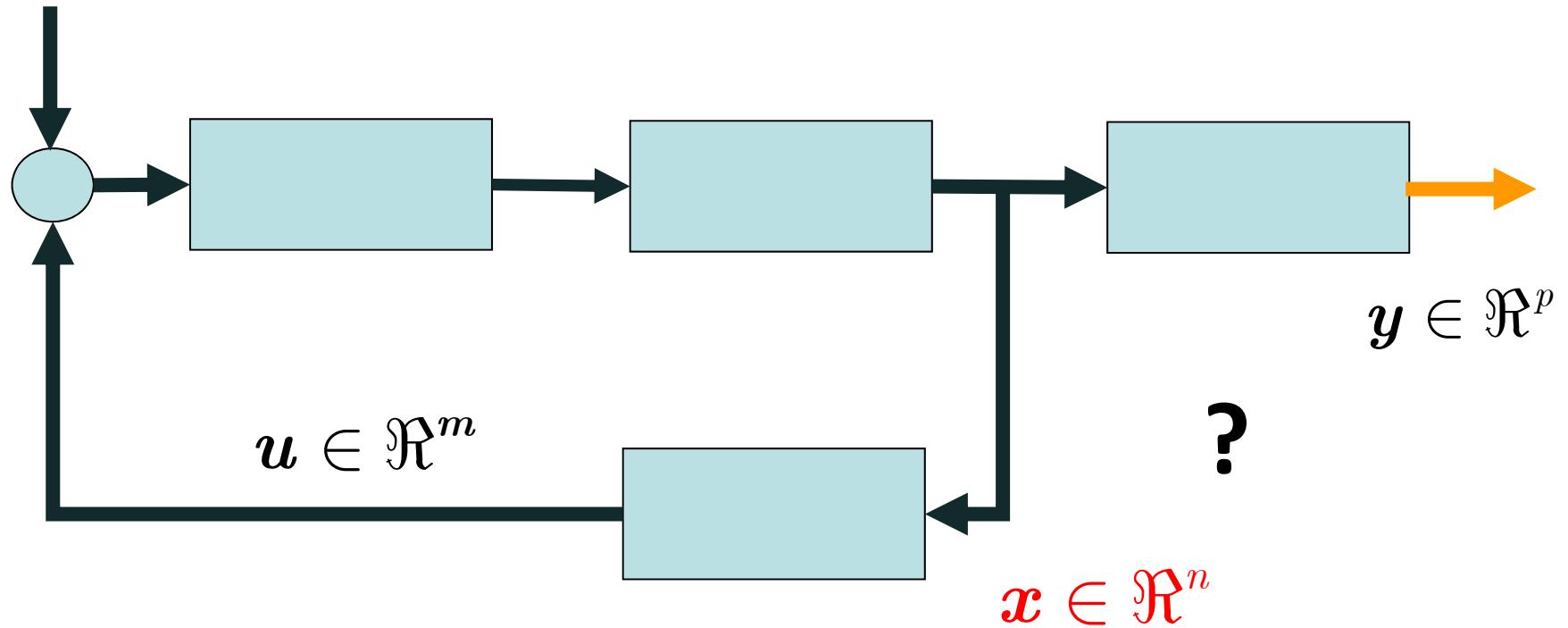
## □ Sommario

1. Dato un sistema controllabile, esso può essere stabilizzato mediante retroazione statica dello stato, in modo da garantire un comportamento desiderato in transitorio.
2. La soluzione fornisce un'unica matrice di guadagno soltanto nel caso di sistemi a singolo ingresso, altrimenti la soluzione non è univoca.
3. Rilassando il vincolo di assegnazione, è possibile calcolare una matrice di guadagno che soddisfi ampi margini di stabilità. La matrice di guadagno deve in tal caso soddisfare una particolare struttura che richiede la soluzione di una equazione algebrica matriciale chiamata equazione di Riccati e produce la diseguaglianza di Kalman.
4. Nel caso di sistemi a singolo ingresso controllabili ed osservabili è anche possibile la matrice di guadagno come funzione di un parametro positivo che varia tra 0 e  $\infty$ . In tal caso, lo spettro dei poli in ciclo chiuso è fornito da un luogo chiamato Luogo delle Radici Simmetrico.





## Problema nella Retroazione Totale





## Assegnamento Poli - Osservatore

- In molte situazioni un sistema non ha disponibile, per assenza di un numero sufficiente di sensori, il vettore di stato per la retroazione.
  - In questo caso, è possibile ricostruire lo stato in modo asintotico ed in assenza di segnali probabilistici, attraverso il progetto di un osservatore dinamico.
  - La possibilità di tale ricostruzione (stima), a partire dalla conoscenza di ingresso ed uscita del sistema, è assicurata dall'osservabilità del vettore di stato che viene sfruttata dagli *stimatori* (o *osservatori*) *dello stato*; lo stimatore è un sistema dinamico capace di fornire una stima del vettore di stato della parte osservabile del sistema
  - Si definisce asintotico lo stimatore tale che, pur avendo stato iniziale diverso dallo stato del sistema soggetto a stima, in assenza di disturbi, tende asintoticamente ad esso in modo che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi - x) = 0$$

- $x$  è il vettore delle variabili di stato
- $\xi$  è il vettore di stato stimato dall'osservatore



# Assegnamento Poli - Osservatore

## Observers for Multivariable Systems

D. G. LUENBERGER, MEMBER, IEEE

*Abstract*—Often in control design it is necessary to construct estimates of state variables which are not available by direct measurement. If a system is linear, its state vector can be approximately reconstructed by building an observer which is itself a linear system driven by the available outputs and inputs of the original system. The state vector of an  $n$ th order system with  $m$  independent outputs can be reconstructed with an observer of order  $n-m$ .

In this paper it is shown that the design of an observer for a system with  $M$  outputs can be reduced to the design of  $m$  separate observers for single-output subsystems. This result is a consequence of a special canonical form developed in the paper for multiple-output systems.

In the special case of reconstruction of a single linear functional of the unknown state vector, it is shown that a great reduction in observer complexity is often possible.

Finally, the application of observers to control design is investigated. It is shown that an observer's estimate of the system state vector can be used in place of the actual state vector in linear or nonlinear feedback designs without loss of stability.



## David Luenberger

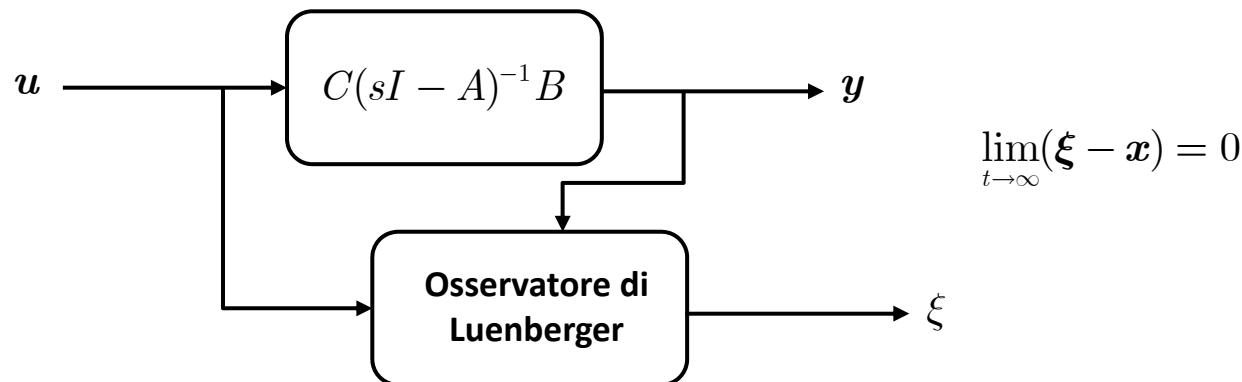
PROFESSOR OF MANAGEMENT SCIENCE AND ENGINEERING, EMERITUS



## Assegnamento Poli - Osservatore

### □ Osservatore di Luenberger

- L'osservatore di Luenberger è uno stimatore di ordine intero che, utilizzando i vettori di ingresso e di uscita, riesce a fornire la stima asintotica dello stato.



- Lo stimatore può essere visto come un sistema i cui ingressi sono dati dall'ingresso e dall'uscita del sistema in esame e l'uscita coincide con il suo vettore di stato; riportando il suo andamento nella forma i-s-u si ha:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = F\xi + (G - H)\begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}, & \xi(0) = \xi_0 \\ \hat{y} = \xi \end{cases}$$



## Assegnamento Poli - Osservatore

### □ Struttura dell'osservatore

- L'impianto da controllare e l'errore di stima sono dati da:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}$$

- La dinamica dell'errore vale quindi:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \dot{\boldsymbol{\xi}} - \dot{\mathbf{x}} = F\boldsymbol{\xi} + G\mathbf{u} + H\mathbf{y} - Ax - Bu = \\ &= F(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{x}) + G\mathbf{u} + HCx - Ax - Bu = \\ &= F\boldsymbol{\varepsilon} + (F - A + HC)\mathbf{x} + (G - B)\mathbf{u} \end{aligned}$$

- Affinché  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) = 0$  si deve avere:

- $G = B$
- $F = A - HC$
- Gli autovalori di  $F$  devono essere a parte reale strettamente negativa



## Assegnamento Poli - Osservatore

- Le condizioni precedenti devono permettere che l'errore tra stato e stato stimato si annulli asintoticamente a partire da qualsiasi condizione iniziale

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$$

- Se gli autovalori della matrice  $F = A - HC$  sono a parte reale strettamente negativa, l'errore tende a zero per qualunque suo valore iniziale:

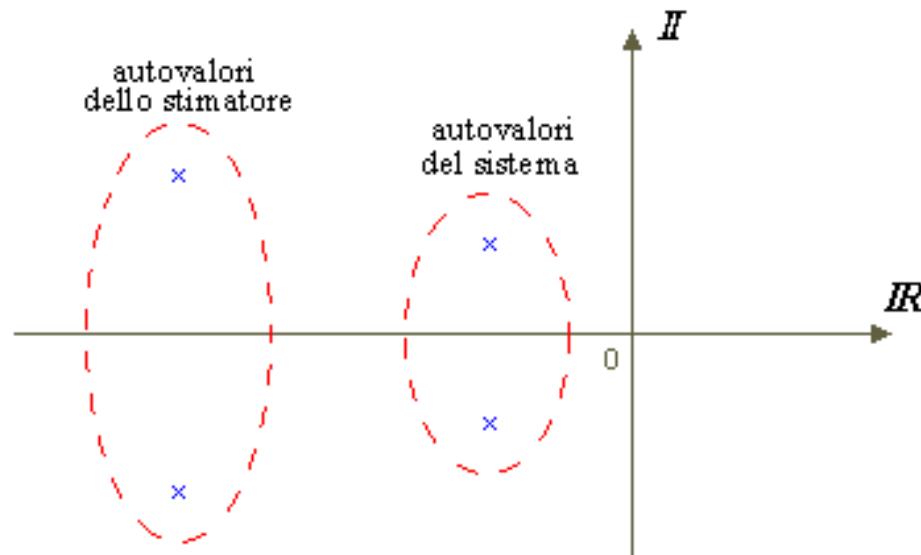
$$\dot{\varepsilon} = (A - HC)\varepsilon \Rightarrow \varepsilon(t) = e^{(A-HC)t}\varepsilon_0$$

- Si deve quindi scegliere la matrice  $H$  (guadagno dell'osservatore) opportunamente in modo da rendere  $F$  una matrice di stabilità.
- NOTA:** gli autovalori di  $(A - HC)$  sono gli stessi di  $(A - HC)^T = (A^T - C^T H^T)$ , se la coppia  $(A, C)$  è osservabile, come da ipotesi, la coppia  $(A^T, C^T)$  è controllabile per cui, l'opportuna scelta della matrice  $H$  permette di soddisfare tutte le specifiche richieste, mediante un assegnamento poli standard



## Assegnamento Poli - Osservatore

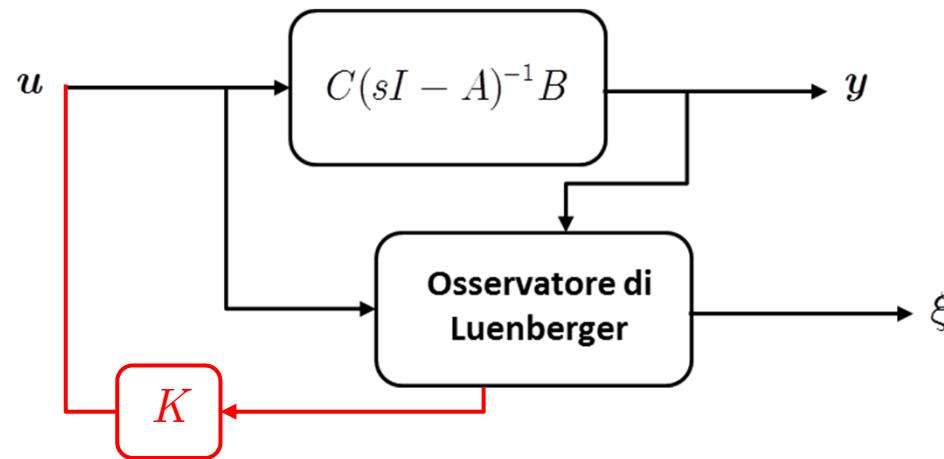
- I poli dell'osservatore devono seguire requisiti generali di progetto:
  - Devono essere a parte reale negativa
  - Devono rendere la banda passante dell'osservatore larga abbastanza in modo che esso sia a regime, quando il controllore inizia ad operare.





## Assegnamento Poli - Osservatore

- Schema completo:



- Impianto da controllare  $\dot{x} = Ax + Bu$
- Osservatore di Luenberger  $\dot{\xi} = (A - HC)\xi + Bu + Hy =$   
 $= A\xi + Bu + H(y - C\xi)$
- Dinamica dell'errore di stima dello stato  $\dot{\varepsilon} = (A - HC)\varepsilon$
- Legge di Controllo  $u = r - K\xi$



# Assegnamento Poli - Osservatore

## □ Principio di Separazione

- Il sistema completo include la dinamica dell'osservatore oltre che la dinamica del processo

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{r} - K\xi) = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{r} - BK(\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{x}) = (A - BK)\boldsymbol{x} - BK\boldsymbol{\varepsilon} + B\boldsymbol{r} \\ \dot{\xi} &= A\xi + Bu + H(\boldsymbol{y} - C\xi)\end{aligned}$$

- Il sistema aumentato diviene:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A - HC \end{bmatrix} \boldsymbol{q} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{q} \end{cases}; \quad \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^{2n}$$

- Si nota che la matrice dinamica del sistema, essendo triangolare superiore a blocchi, ha gli autovalori che coincidono con quelli delle due sottomatrici che si trovano sulla diagonale, cioè di  $(A-BK)$  e  $(A-HC)$ ; questa caratteristica è detta **proprietà di separazione degli autovalori**, dato che gli autovalori del sistema di partenza e quelli dello stimatore sono separati, indicando che i progetti dei due blocchi sono indipendenti fra loro.
- Nota:** La dinamica del sistema completo può essere rappresentata indifferentemente dalle coppie:  $(\boldsymbol{x}, \xi)$ ,  $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$ ,  $(\xi, \boldsymbol{\varepsilon})$



## Assegnamento Poli – Esempi

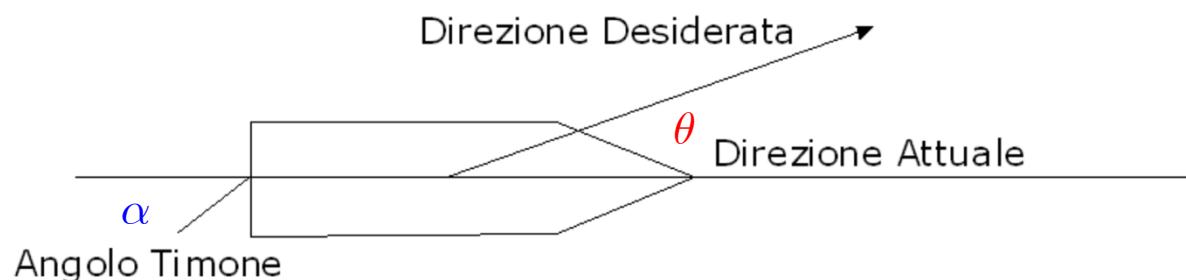
### ■ Esempio 1

- Consideriamo il problema del progetto di un autopilota per mantenere costante la direzione (heading) di una nave rispetto ad un punto prefissato.
- Il modello semplificato del veicolo è:

Veicolo

$$\begin{cases} M\ddot{\theta}(t) = -d\dot{\theta}(t) - c\alpha(t) \\ \dot{\alpha}(t) = -0.1\alpha(t) + 0.1\alpha_c(t) \end{cases}$$

Attuatore timone





# Assegnamento Poli – Esempi

- Introducendo valori numerici per i parametri:

$$M = 10^7 \text{ kg-m}^2$$

$$d = 10^6 \text{ N-m-sec/rad}$$

$$c = 5000 \text{ N-m/rad}$$

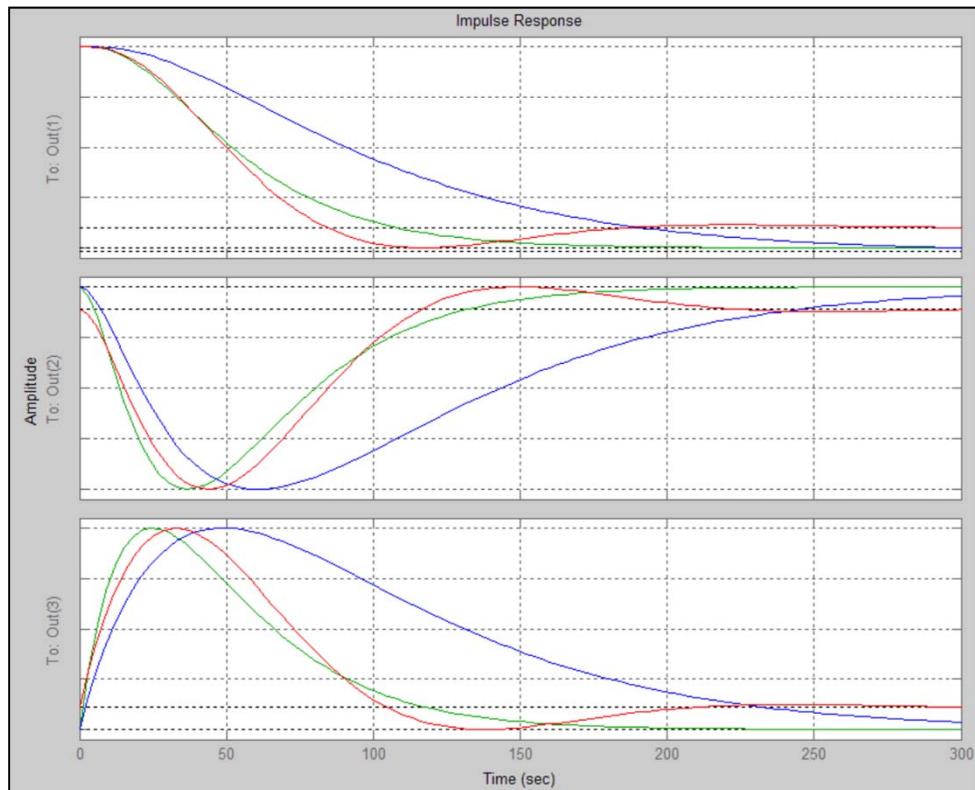
momento d'inerzia

resistenza

rapporto trasmissione

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & -0.0005 \\ 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u$$

$$u(t) = a_c(t)$$



- Il Sistema è controllabile

$$\left\{ \begin{array}{l} -.02, -.02, -.1 , \text{ grafico blu} \\ -.04, -.04, -.1 , \text{ grafico verde} \\ -.02 \pm .03j, -.1 , \text{ grafico rosso} \end{array} \right.$$



# Assegnamento Poli – Esempi

- Supponiamo di misurare l'errore in heading (direzione)  $\theta(t)$  mediante una bussola (Compass), per cui l'equazione di uscita diviene:

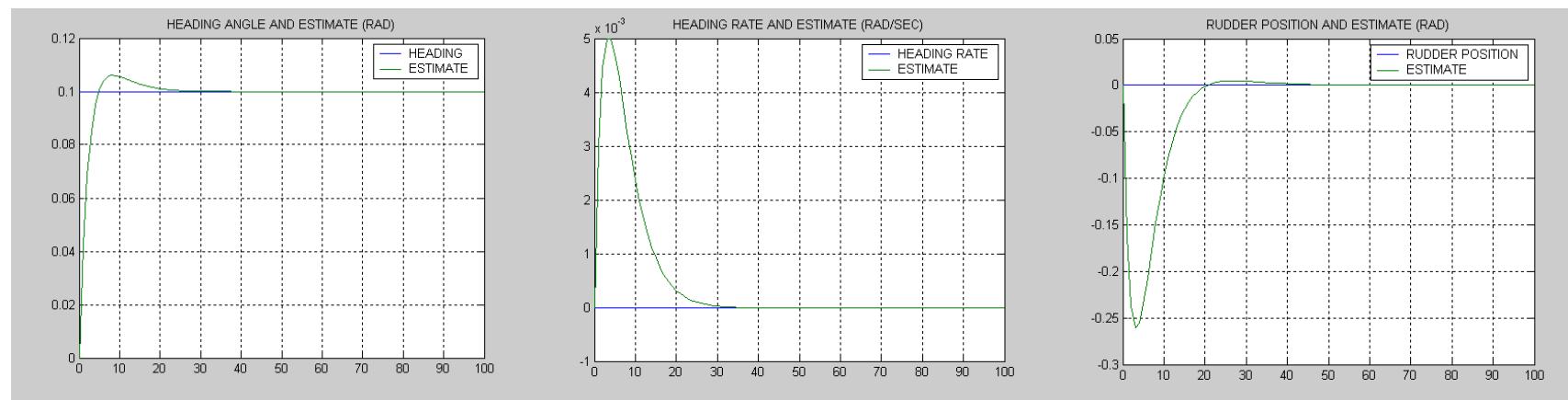
$$y(t) = \theta(t) = [1 \ 0 \ 0]x$$

- Il sistema è osservabile.

$$\text{Rango}[\mathbb{C}] = \text{Rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -0.0005 \end{bmatrix} = 3$$

- Definiamo la locazione dei poli dell'osservatore da progetto (molto lento in questo caso)

$$\lambda_i = [-0.16 \ -0.16 \ -0.4]$$





## Assegnamento Poli - Esempi

### □ Esempio 2

- Dato il sistema

$$G(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)(s+5)}$$

- Requisiti di progetto:

$$\xi \simeq 0.7$$

$$\omega_n \simeq 1.9 \text{ rad / sec}$$

$$\varepsilon^{step} = 0$$

- Il controllore necessita di un polo all'origine. Le scelta dei poli in ciclo chiuso è la seguente:

$$\begin{cases} -1.33 \pm 1.35j \\ -20 \end{cases}$$



# Assegnamento Poli - Esempi

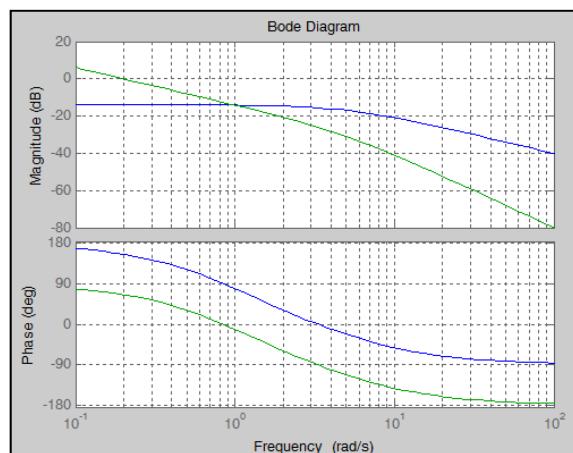
- Aggiunta di un integratore per il requisito di regime

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \textcolor{red}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \int (r - y) \cdot dt \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{aug} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{aug} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} r \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{(s - 1)}{(s + 1)(s + 5)}$$

$$G_{AUG}(s) = \frac{s(s - 1)}{s(s + 1)(s + 5)}$$



```
B =
1   -6   31
0    1   -6
0   -1    7
>> rank(B)
ans =
3
```

Sistema  
Controllabile

```
C =
1   -1   0
-7   -5   0
37   35   0
>> rank(C)
ans =
2
```

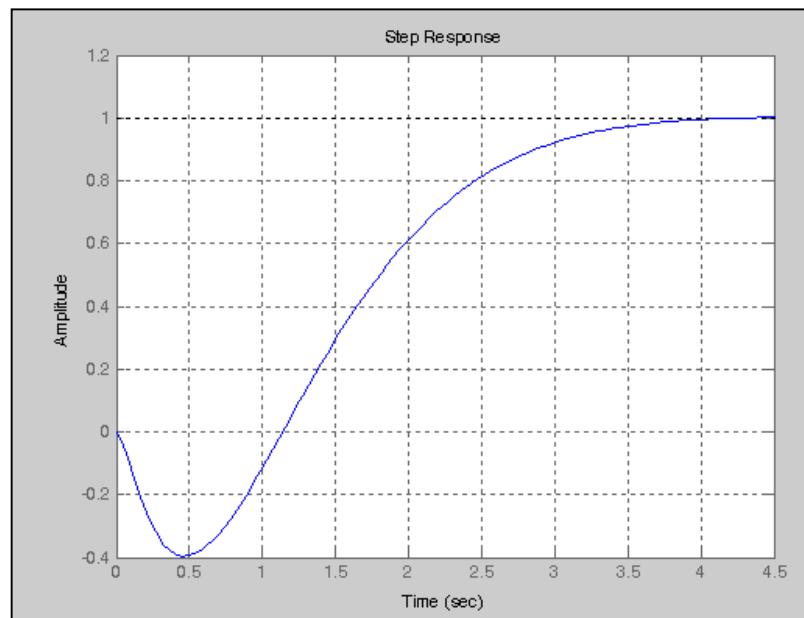
Sistema NON  
Osservabile



# Assegnamento Poli - Esempi

- Sintesi del controllore a retroazione totale

$$\begin{array}{l} u = -Kx = \\ \begin{matrix} -20.0000 \\ -1.3400 + 0.7000i \\ -1.3400 - 0.7000i \end{matrix} = -\begin{bmatrix} 16.6800 & 96.5976 & 45.7120 \end{bmatrix} x \end{array}$$



- Ricostruzione dello stato: L'integratore introdotto per l'errore a regime è uno stato non osservabile. Si deve perciò aggiungere un'uscita misurabile su tale stato



# Assegnamento Poli - Esempi

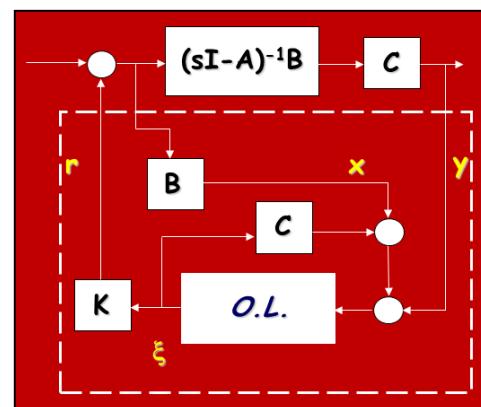
- Sintesi dell'osservatore con poli aggiuntivi:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{aug}$$

Sensore aggiuntivo

- Dinamica scelta per l'osservatore: -40, -50, -60
- Matrice di guadagno dell'osservatore:

$$H^T = \begin{pmatrix} -154.2500 & -258.25 & -1.0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$



```
cc =  
  
1 -1 0  
0 0 1  
  
=> obsv(a,cc)  
  
ans =  
  
1 -1 0  
0 0 1  
-7 -5 0  
-1 1 0  
37 35 0  
7 5 0  
  
=> rank(ans)  
  
ans =  
  
3
```

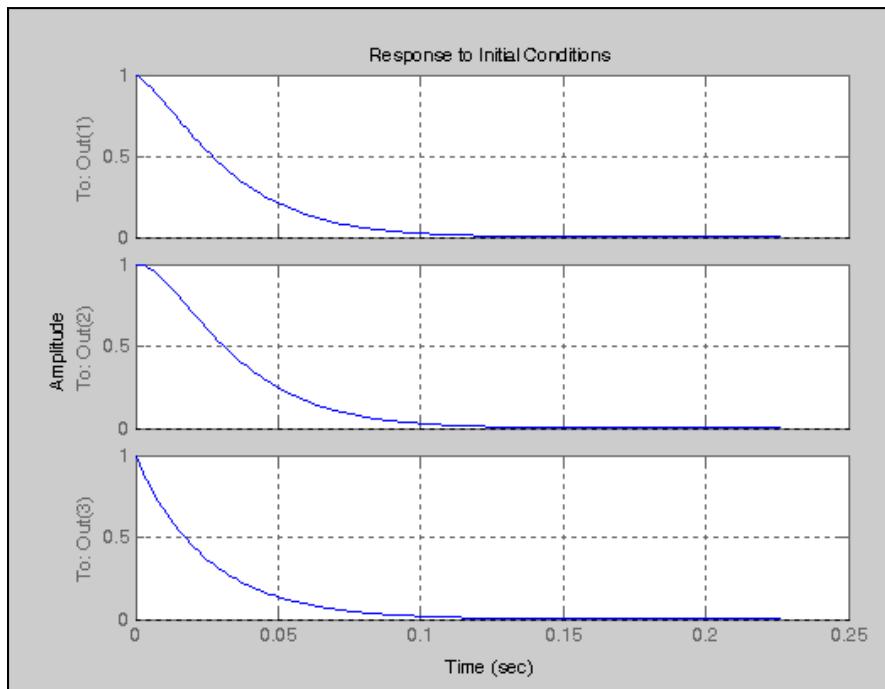


# Assegnamento Poli - Esempi

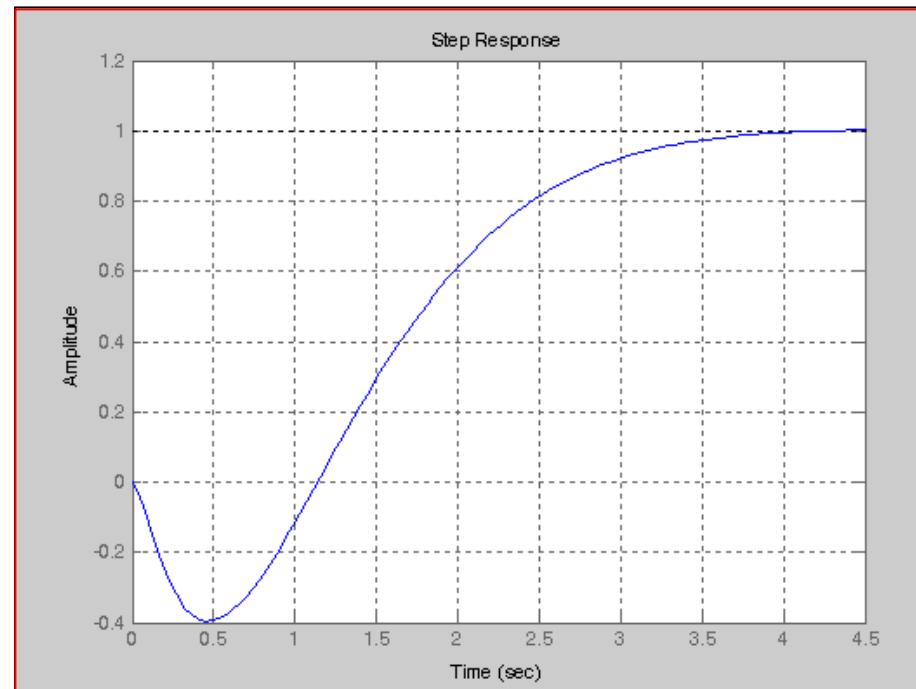
- Sommario

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{aug} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_{aug} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_{aug} \quad u = -K\xi \quad \dot{\xi} = A\xi + Bu + H(\boldsymbol{y} - C\xi)$$

- Errore dell'osservatore



- Risposta del sistema





## Assegnamento Poli – Sommario

- Dato un sistema LTI, controllabile ed osservabile, multivariabile in generale

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ \mathbf{y} = Cx \end{cases}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \Re^n$$

- La retroazione dello stato richiede che tutte le variabili di stato direttamente misurabili, oppure ricavabili per inversione da un vettore di uscita delle stesse dimensioni

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x} + \mathbf{r}$$

$$\mathbf{x} = C^{-1}\mathbf{y} \quad \dim \mathbf{x} = \dim \mathbf{y}$$

- Nel caso in cui il vettore di stato non sia disponibile, esso viene ricostruito mediante un osservatore asintotico (Luenberger) la cui dinamica  $\xi$  è delle stesse dimensioni della dinamica del sistema e data da:

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + H(\mathbf{y} - C\xi), \quad \xi \in \Re^n$$

- Scegliendo la matrice  $F = A - HC$  con autovalori di parte reale strettamente negativa, l'errore tra lo stato ricostruito e lo stato del sistema tende asintoticamente a 0.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(\xi - \mathbf{x}) = 0 \quad \dot{\varepsilon} = F\varepsilon \quad F = A - HC$$



## Assegnamento Poli – Sommario

- Il sistema in anello chiuso, di ordine  $2n$ , diviene

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} = A\boldsymbol{\xi} + Bu + H(\mathbf{y} - C\boldsymbol{\xi}) \end{cases}, \quad u = -K\boldsymbol{\xi} + r$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ HC & A - BK - HC \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad \varepsilon = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A - HC \end{bmatrix} \mathbf{q} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad \boldsymbol{\xi} = \varepsilon + \mathbf{x} \end{cases}; \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2n}$$

- Il principio di separazione garantisce che il progetto del controllore e quello dell'osservatore sono separati.
- Il transitorio del sistema in anello chiuso è specificato dagli autovalori di  $A - B\mathbf{K}$ , la dinamica dell'errore di ricostruzione dagli autovalori di  $A - \mathbf{H}C$ .
- Il compensatore globale richiede quindi il calcolo di due matrici di guadagno  $K$  e  $H$ .

$$K(s) = K(sI - A - BK + HC)^{-1}H$$



## Esempio Harrier

$$\dot{x} = Ax + Bu = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9.8 & 0 & 0 & -0.0125 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0125 \end{array} \right] x + \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 5.2632 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.25 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{array} \right] u$$

$$y = \begin{bmatrix} \phi \\ x_{LAT} \\ y_{VER} \end{bmatrix} = Cx = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] x = \left[ \begin{array}{c|c|c} C_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & C_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_3 \end{array} \right] x$$

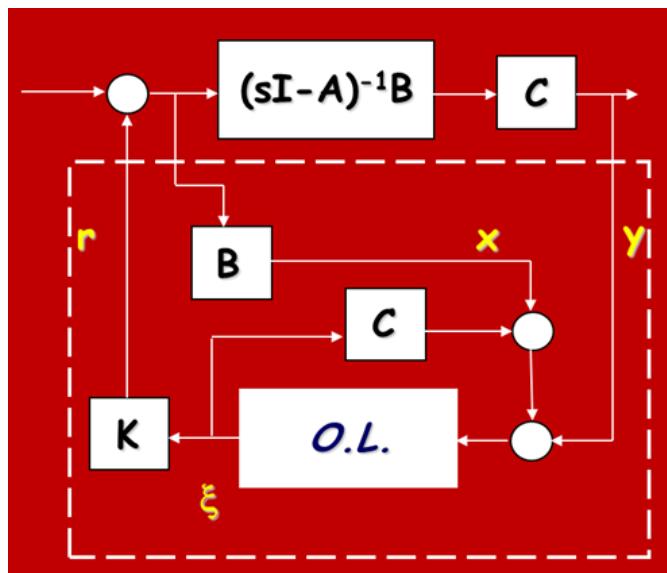
- Sintesi del controllore: (-1, -1.2, -2, -2.2, -10, -12)

```
k =
1.0e+003 *
0.0206    0.0035    0.0024    0.0041   -0.0002   -0.0001
-1.6738   -0.1005   -0.2925   -0.4444    0.0407    0.0357
```



## Esempio Harrier

- Sintesi dell'osservatore con assegnazione della dinamica dell'errore fuori banda:  
(-50, -51, -52, -53, -54, -55)



$h =$

```
1.0e+003 *  
  
0.1070  -0.0009  -0.0000  
2.8604  -0.0486  -0.0000  
-0.0011  0.1070  0.0000  
-0.0484  2.8612  0.0000  
-0.0000  0.0000  0.1010  
-0.0000  0.0000  2.5487
```

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ HC & A - BK - HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \end{cases}$$

- Quale è la FdT del Compensatore?

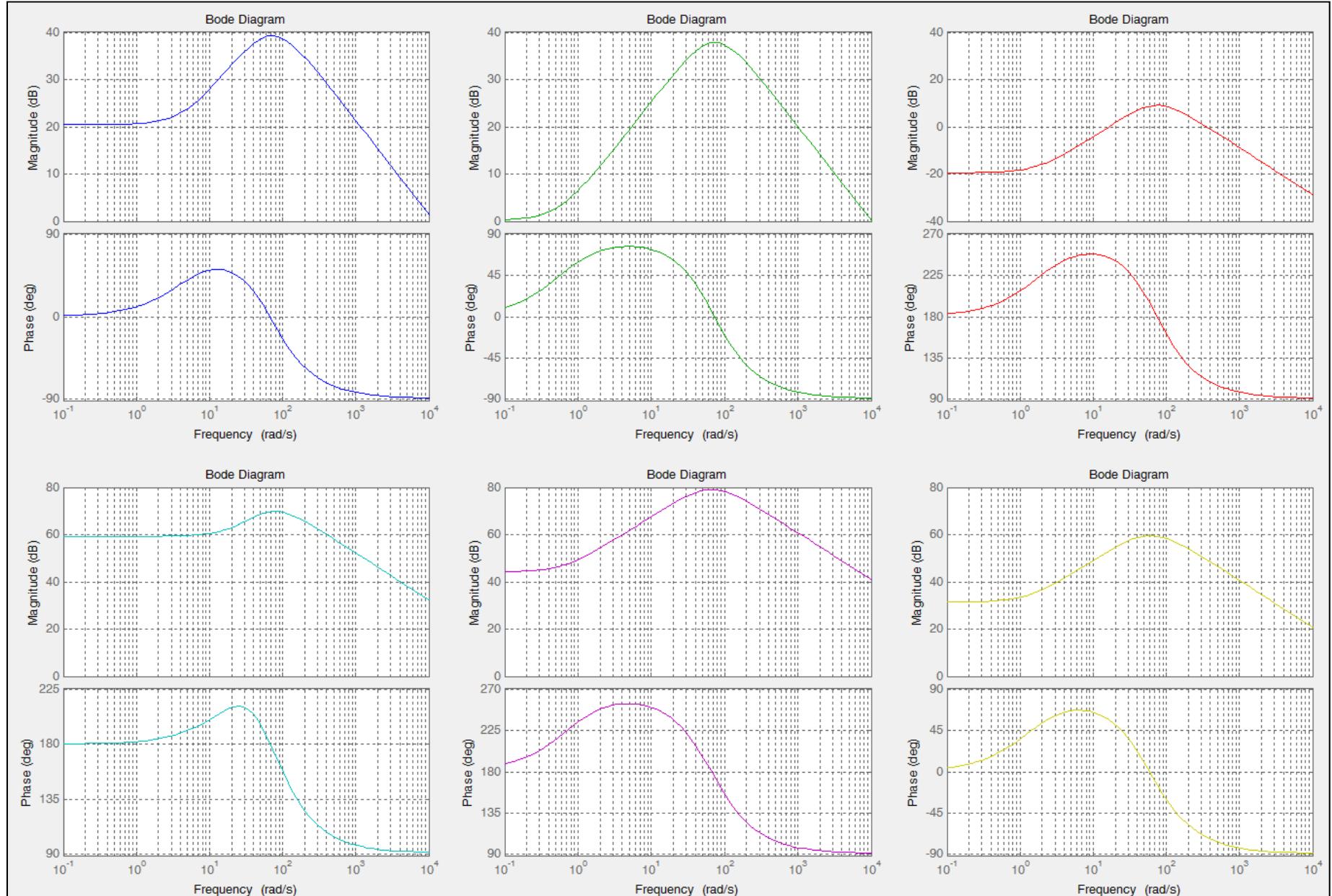
$$\begin{aligned} \xi(s) &= (sI - A + HC)^{-1} Bu(s) + \\ &(sI - A + HC)^{-1} Hy(s) \end{aligned}$$

$$u = -K\xi$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{2 \times 1}(s) &= K(s) \mathbf{y}^{3 \times 1}(s) = \\ &= -K(sI - A - BK + HC)^{-1} H \end{aligned}$$



## Esempio Harrier





## Esempio Harrier

acl =

1.0e+003 \*

Columns 1 through 7

ans =

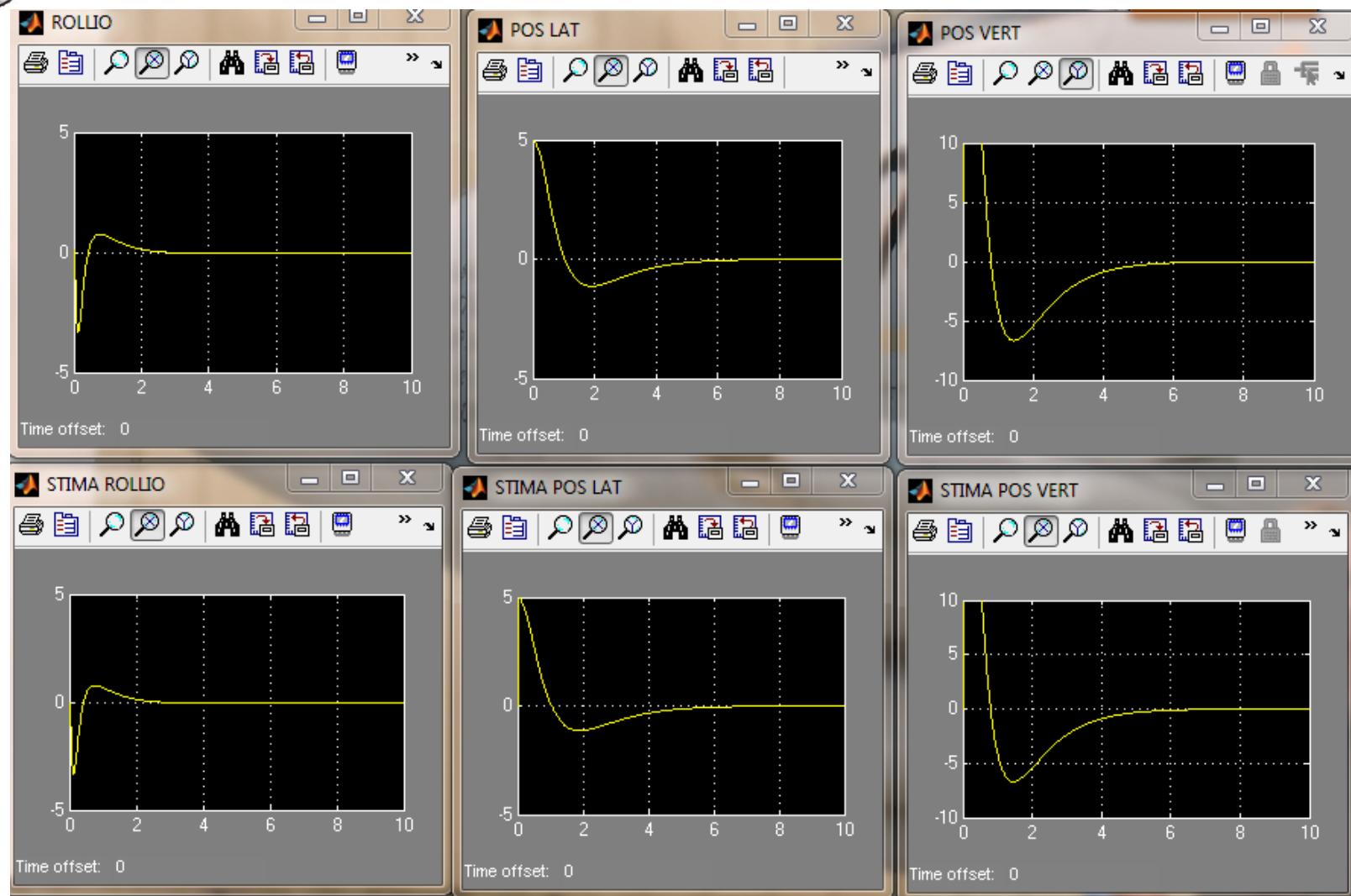
|          |         |        |         |         |         |         |         |
|----------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
|          | 0       | 0.0010 | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
|          | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       | 0       | -0.1084 |
|          | 0       | 0      | 0       | 0.0010  | 0       | 0       | 0       |
| -12.0000 | 0.0098  | 0      | 0       | -0.0000 | 0       | 0       | -0.0051 |
| -10.0000 | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       | 0.0010  | 0       |
| -2.2000  | 0       | 0      | 0       | 0       | 0       | -0.0000 | 0.4184  |
| -2.0000  | 0.1070  | 0      | -0.0009 | 0       | -0.0000 | 0       | -0.1070 |
| -1.0000  | 2.8604  | 0      | -0.0486 | 0       | -0.0000 | 0       | -2.9688 |
| -1.1000  | -0.0011 | 0      | 0.1070  | 0       | 0.0000  | 0       | 0.0011  |
| -55.0000 | -0.0484 | 0      | 2.8612  | 0       | 0.0000  | 0       | 0.0531  |
| -54.0000 | -0.0000 | 0      | 0.0000  | 0       | 0.1010  | 0       | 0.0000  |
| -53.0000 | -0.0000 | 0      | 0.0000  | 0       | 2.5487  | 0       | 0.4184  |
| -52.0000 |         |        |         |         |         |         |         |
| -50.0000 |         |        |         |         |         |         |         |
| -51.0000 |         |        |         |         |         |         |         |

Columns 8 through 12

|  |         |         |         |         |         |
|--|---------|---------|---------|---------|---------|
|  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
|  | -0.0183 | -0.0125 | -0.0214 | 0.0009  | 0.0006  |
|  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
|  | -0.0009 | -0.0006 | -0.0010 | 0.0000  | 0.0000  |
|  | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
|  | 0.0251  | 0.0731  | 0.1111  | -0.0102 | -0.0089 |
|  | 0.0010  | 0.0009  | 0       | 0.0000  | 0       |
|  | -0.0183 | 0.0362  | -0.0214 | 0.0009  | 0.0006  |
|  | 0       | -0.1070 | 0.0010  | -0.0000 | 0       |
|  | -0.0009 | -2.8618 | -0.0010 | 0.0000  | 0.0000  |
|  | 0       | -0.0000 | 0       | -0.1010 | 0.0010  |

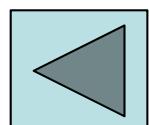
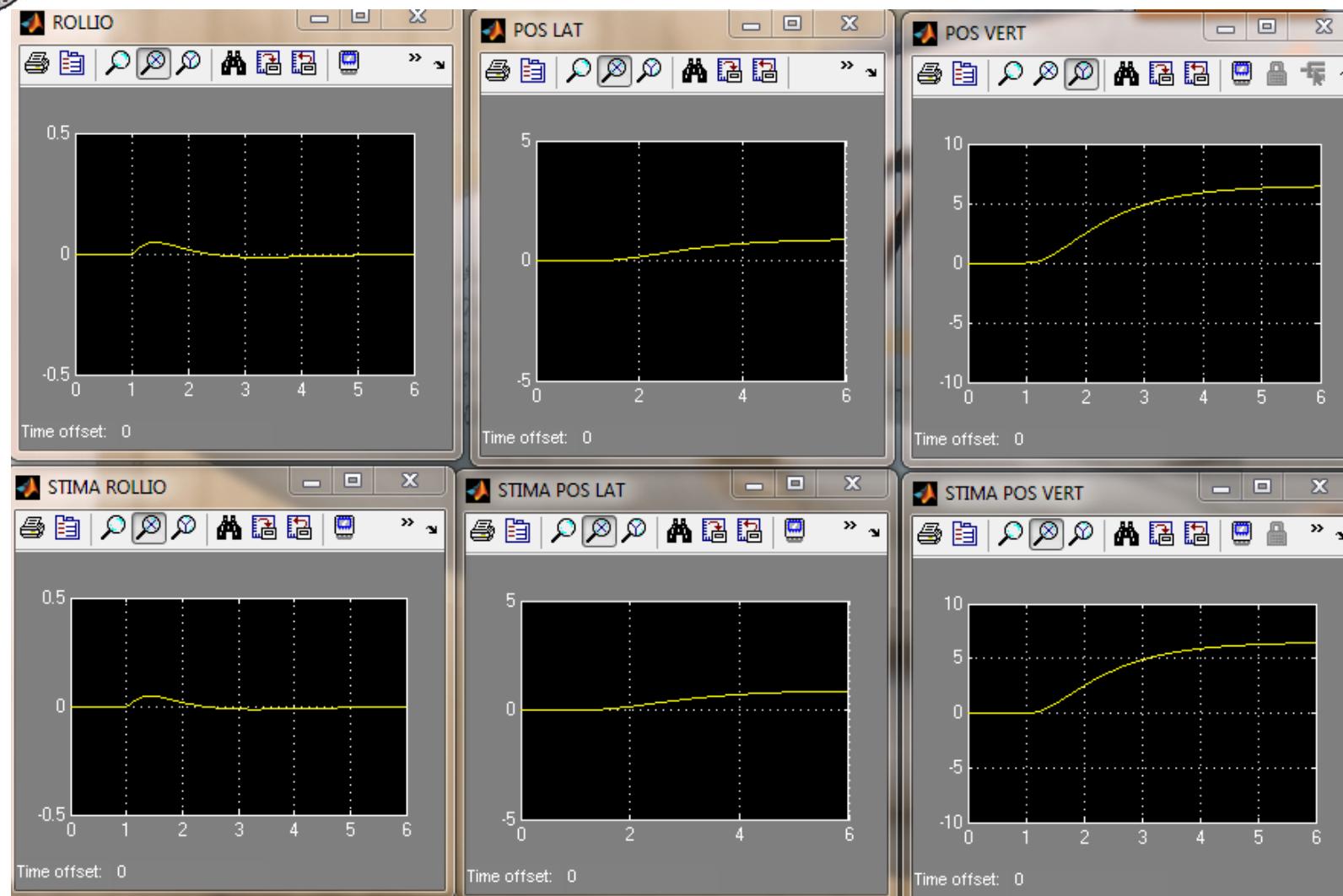


## Esempio Harrier, Risposta C.I.





## Esempio Harrier, Risposta al gradino u1





## Materiale Addizionale

- **Osservatore di Luenberger Ridotto:** Le dimensioni dell'osservatore possono essere ridotte se sfruttiamo la retroazione diretta degli stati misurabili direttamente dall'uscita

- Consideriamo il sistema lineare:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

- Dove:  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $(A, C)$  Osservabile (rivelabile)  
 $\text{rank } C = p$
- Determinare una matrice  $P$  quadrata  $n \times n$  tale che:  
$$CP = [I_p \ 0]$$
- Per esempio, usando riduzioni riga – colonna, determinare una matrice  $R$  non singolare tale che:

$$CR = [C_1 \ 0] \quad C_1 = p \times p, \det(C_1) \neq 0$$



## Materiale Addizionale

- Da cui si può scegliere:

$$P = R \begin{bmatrix} C_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} \quad CP = CR \begin{bmatrix} C_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} = [I_p \ 0]$$

- Mediante la matrice  $P$  eseguire la trasformazione di coordinate:

$$x = Pz$$

$$y = Cx = CPz = [I_p \ 0]z$$

- Il nuovo vettore di stato  $z$  è partizionabile in una parte direttamente misurabile ed nel suo complemento:

$$z = \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \end{bmatrix}, \quad z_a \in \mathbf{R}^p, \quad z_b \in \mathbf{R}^{n-p} \quad y = [I_p \ 0] \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \end{bmatrix} = z_a$$



## Materiale Addizionale

- Il nuovo sistema è:

$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}u = P^{-1}APz + P^{-1}Bu$$

$$y = \hat{C}z = CPz = \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} z$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad P^{-1}B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \dot{y} &= \hat{A}_{11}y + \hat{A}_{12}z_b + \hat{B}_1u \\ \dot{z}_b &= \hat{A}_{21}y + \hat{A}_{22}z_b + \hat{B}_2u \end{aligned}$$

- Risulta quindi necessario stimare soltanto la partizione  $z_b$ . Una scelta per la struttura dell'osservatore è data da (in modo simile al caso full order):

$$\dot{\hat{z}}_b = \hat{A}_{22}\hat{z}_b + \hat{A}_{21}y + \hat{B}_2u + \tilde{K}(\dot{y} - \hat{A}_{12}\hat{z}_b - \hat{A}_{11}y - \hat{B}_1u)$$

- Con  $\tilde{K}$  scelta tale da soddisfare il requisito di stabilità asintotica:

$$R_e[\lambda(\hat{A}_{22} - \tilde{K}\hat{A}_{12})] < 0$$

**Lemma:**  $(\hat{A}_{22}, \hat{A}_{12})$  is observable if and only if  $(A, C)$  is observable



## Materiale Addizionale

- L'errore di stima è dato dal vettore  $e_b$  :  $e_b = z_b - \hat{z}_b$

$$\begin{aligned}\dot{e}_b &= \dot{z}_b - \dot{\hat{z}}_b \\ &= \hat{A}_{21}y + \hat{A}_{22}z_b + \hat{B}_2u - \hat{A}_{21}y - \hat{A}_{22}\hat{z}_b - \hat{B}_2u \\ &\quad - \tilde{K}[\hat{A}_{11}y + \hat{A}_{12}z_b + \hat{B}_1u - \hat{A}_{11}y - \hat{A}_{12}\hat{z}_b - \hat{B}_1u] \\ &= (\hat{A}_{22} - \tilde{K}\hat{A}_{12})e_b\end{aligned}$$

- **Nota:**

$$R_e[\lambda(\hat{A}_{22} - \tilde{K}\hat{A}_{12})] < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e_b(t) = 0$$

- La forma originale del vettore di stato  $x$  e la sua stima si possono quindi riscrivere in funzione del vettore di uscita e della stima di  $z_b$  :

$$x = Pz = P \begin{bmatrix} y \\ z_b \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = P \begin{bmatrix} y \\ \hat{z}_b \end{bmatrix} \quad x - \hat{x} = P \begin{bmatrix} 0 \\ z_b - \hat{z}_b \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 \\ e_b \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \hat{x}(t)] = 0}$$



## Materiale Addizionale

- Per evitare la derivazione dell'uscita nell'espressione dell'osservatore ridotto, si può introdurre la variabile ausiliaria  $w$ :

$$\dot{\hat{z}}_b = \hat{A}_{22}\hat{z}_b + \hat{A}_{21}y + \hat{B}_2u + \tilde{K}(\dot{y} - \hat{A}_{12}\hat{z}_b - \hat{A}_{11}y - \hat{B}_1u)$$

$$w = \hat{z}_b - \tilde{K}y$$

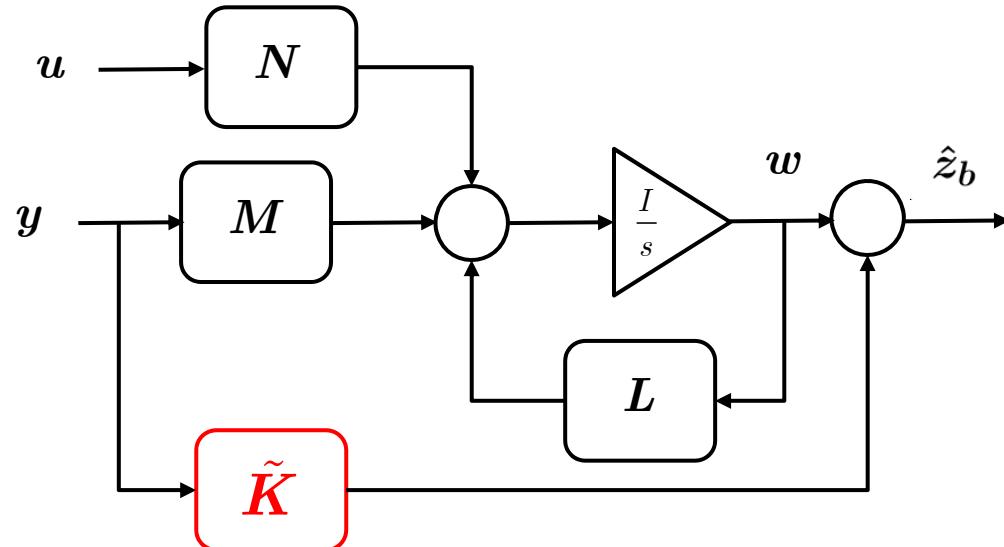
$$\begin{aligned}\dot{w} &= \dot{\hat{z}}_b - \tilde{K}\dot{y} \\ &= \hat{A}_{22}\hat{z}_b + \hat{A}_{21}y + \hat{B}_2u \\ &\quad + \tilde{K}(\dot{y} - \hat{A}_{12}\hat{z}_b - \hat{A}_{11}y - \hat{B}_1u) \\ &\quad - \tilde{K}\dot{y} \\ &= (\hat{A}_{22} - \tilde{K}\hat{A}_{12})(w + \tilde{K}y) \\ &\quad + (\hat{A}_{21} - \tilde{K}\hat{A}_{11})y + (\hat{B}_2 - \tilde{K}\hat{B}_1)u \\ &= (\hat{A}_{22} - \tilde{K}\hat{A}_{12})w + (\hat{B}_2 - \tilde{K}\hat{B}_1)u \\ &\quad + (\hat{A}_{21} - \tilde{K}\hat{A}_{11} + \hat{A}_{22}\tilde{K} - \tilde{K}\hat{A}_{12}\tilde{K})y\end{aligned}$$

The diagram consists of three red arrows pointing from specific terms in the equation to labels L, N, and M. The first arrow points from the term  $\tilde{K}(\dot{y} - \hat{A}_{12}\hat{z}_b - \hat{A}_{11}y - \hat{B}_1u) - \tilde{K}\dot{y}$  to the label L. The second arrow points from the term  $(\hat{A}_{21} - \tilde{K}\hat{A}_{11})y + (\hat{B}_2 - \tilde{K}\hat{B}_1)u$  to the label N. The third arrow points from the term  $(\hat{A}_{21} - \tilde{K}\hat{A}_{11} + \hat{A}_{22}\tilde{K} - \tilde{K}\hat{A}_{12}\tilde{K})y$  to the label M.

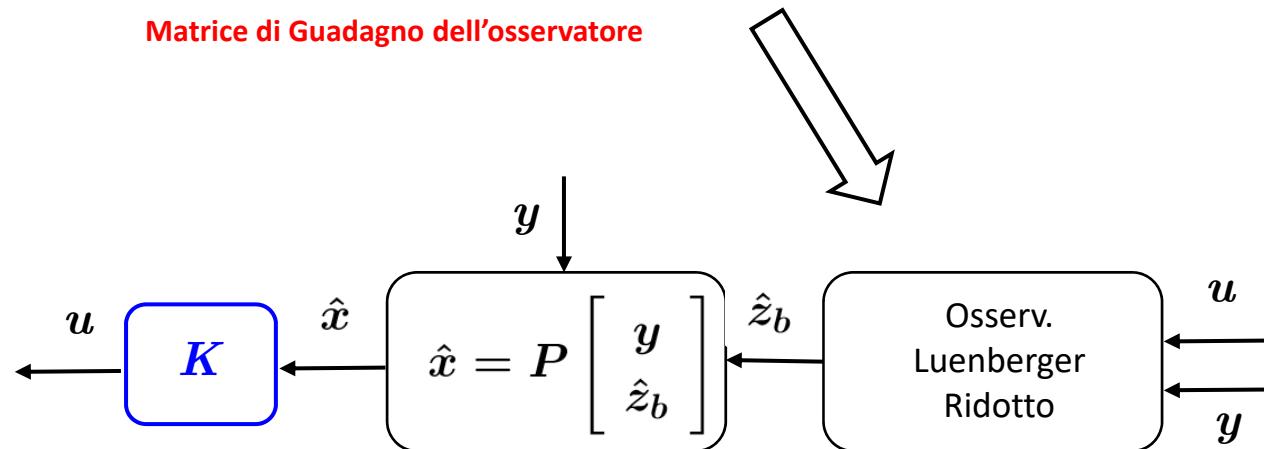


## Materiale Addizionale

- In termini di diagramma a blocchi si ha la seguente struttura:



Matrice di Guadagno dell'osservatore



Matrice di Guadagno del controllore



## Materiale Addizionale

- **Esempio:** consideriamo la stabilizzazione di un doppio integratore

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad y = x_1 \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Selezionare un controllore stabilizzante:

$$u = -Kx = -\begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}x$$

- Sintesi dell'osservatore di Luenberger:

$$\lambda_1 = -10; \lambda_2 = -11$$

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + H(y - C\xi)$$

$$\lambda_i(A - HC) = \{-10 \quad -11\} \Rightarrow H = \begin{bmatrix} 21 \\ 110 \end{bmatrix}$$



## Materiale Addizionale

- Sintesi dell'osservatore di Luenberger ridotto:

$$CP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} P \Rightarrow P = I_{2 \times 2} \quad \hat{\mathbf{A}} = P^{-1}AP = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \hat{\mathbf{B}} = P^{-1}B = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Selezionare la matrice di guadagno dell'osservatore ridotto:

$$\tilde{\mathbf{K}} = 10 \quad \mathbf{L} = \hat{A}_{22} - \tilde{K}\hat{A}_{12} = -10 \quad \mathbf{N} = \hat{B}_2 - \tilde{K}\hat{B}_1 = 1 \quad \mathbf{M} = \hat{A}_{21} - \tilde{K}\hat{A}_{11} + \hat{A}_{22}\tilde{K} - \tilde{K}\hat{A}_{12}\tilde{K} = -100$$

$$\hat{x}_2 = w + \tilde{K}y = w + 10y$$

$$\dot{w} = -10w + u - 100y$$

$$\begin{aligned} u &= -4y - 2(w + 10y) \\ &= -24y - 2w \\ \dot{w} &= -10w + u - 100y \\ &= -12w - 124y \end{aligned}$$



# Materiale Addizionale

- **Esempio:** Dato il sistema:

$$G(s) = \frac{(s - 2)(s - 4)}{s^2(s - 1)(s - 3)(s^2 + 0.8s + 4)}$$

□ Progettare un controllore tale che:

1. Il tempo di assestamento sia non superiore a 10 secondi
2. La sovraelongazione massima inferiore al 5%
3. L'errore al gradino in posizione sia nullo

□ Confrontare i controllori sviluppati mediante:

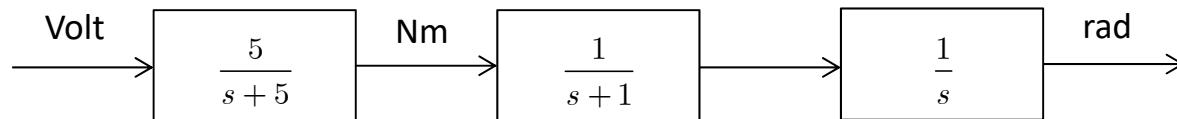
1. Sintesi in frequenza
2. Controllori standard
3. Retroazione dello stato + osservatore

□ Matlab file: ESERCIZIOFINALE.m:



# Materiale Addizionale

- **Esempio:** Posizionamento Antenna



□ Progettare un controllore tale che:

1. Il tempo di assestamento sia non superiore a 4 secondi
2. La sovraelongazione massima inferiore al 5%
3. L'errore al gradino in posizione sia nullo
4. La banda passante sia di circa 5 rad/sec

□ Confrontare i controllori sviluppati mediante:

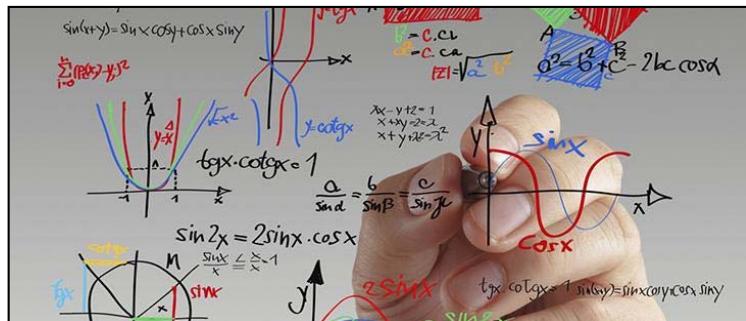
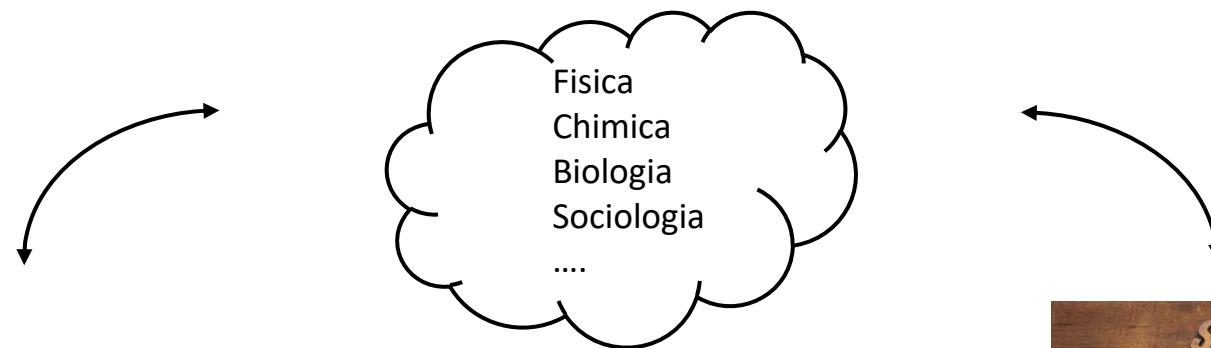
1. Sintesi in frequenza
2. Controllori standard
3. Retroazione dello stato + osservatore



## Fondamenti di Automatica

- Iniziare lo studente ad un approccio sistematico relativo all'analisi ed al controllo di processi evolutivi naturali ed artificiali

1. Fornire una struttura concettuale di analisi di sistema
2. Fornire il background analitico necessario allo scopo



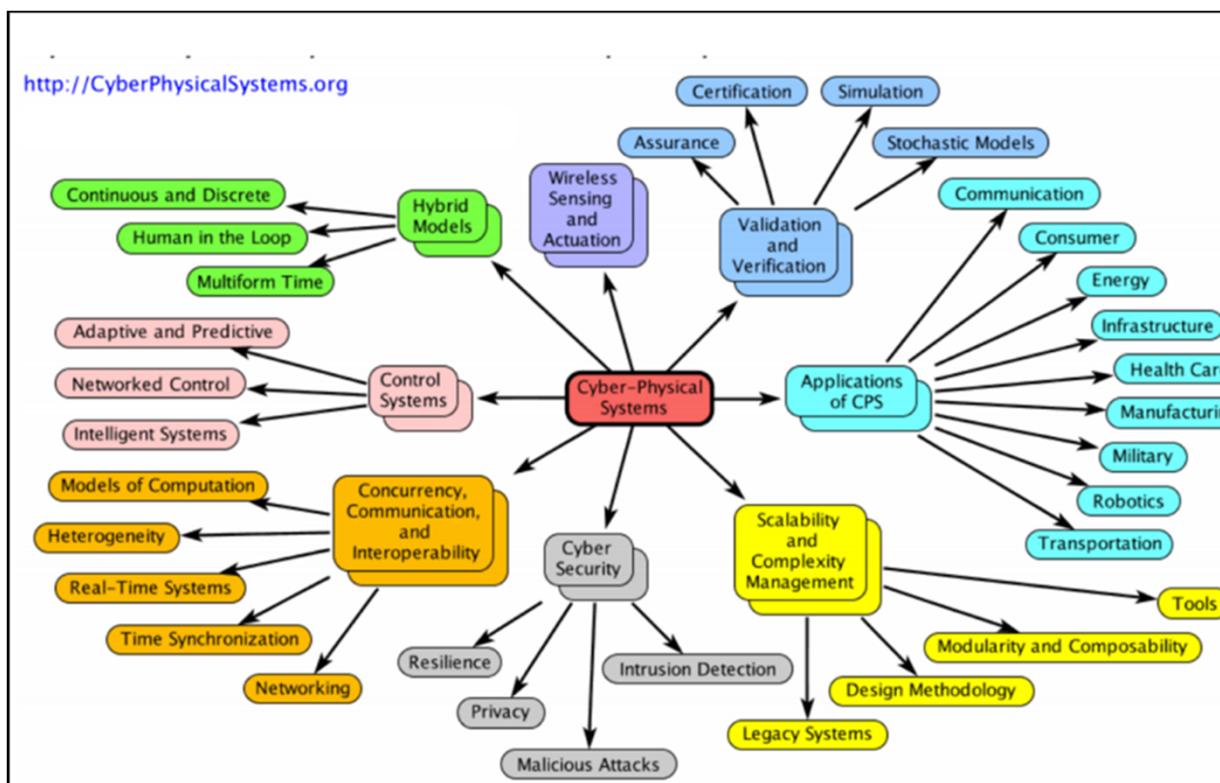


# Fondamenti di Automatica



## Obiettivi:

1. Evoluzione desiderata del processo
  2. Degradazione controllata in presenza di fenomeni esogeni (guasti, azioni esterne)
  3. Competizione tecnico/economica con il mercato

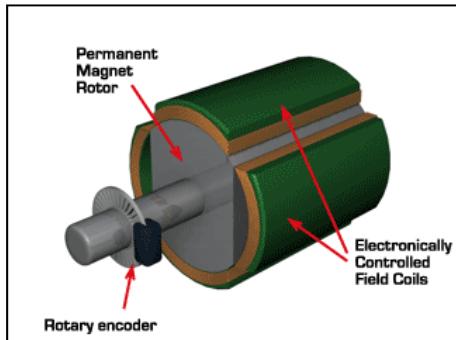




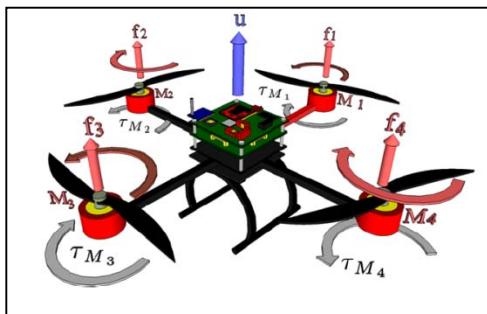
# Fondamenti di Automatica

## □ Approccio:

1. Modellistica
2. Analisi e sintesi Multiloop



- Progetto di un processo base: garantire il rapporto tensione – numero di giri con dimensioni e costi specificati per un determinato periodo operativo



- Progetto di un processo complesso: garantire il movimento desiderato mediante opportuna operazione di più processi base



## Fondamenti di Automatica

- Applicazioni che producono benefici all'utenza:



- Ricerca e Salvataggio



- Manutenzione, Verifica,  
Monitoraggio



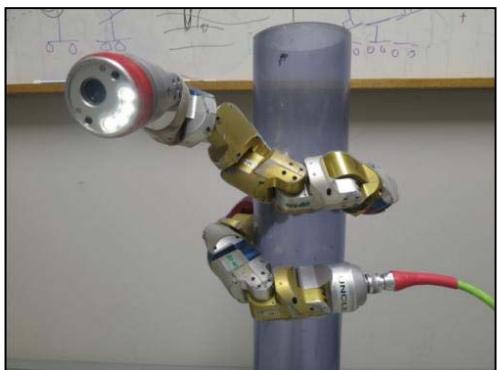
# Fondamenti di Automatica



□ Operazioni in aree pericolose



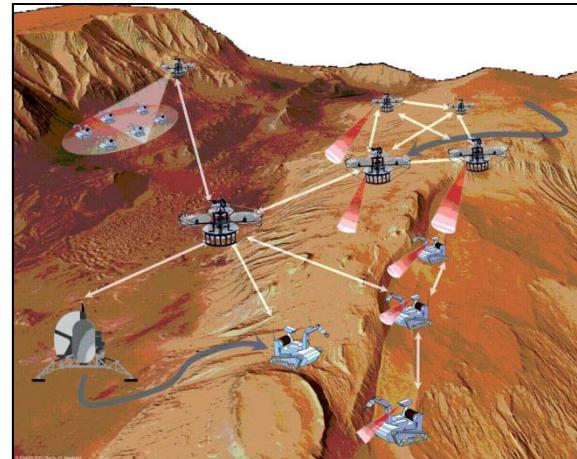
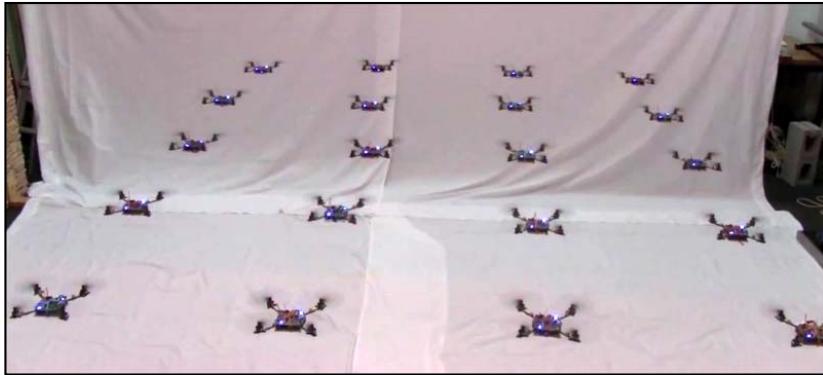
□ Innovazione tecnologica





# Fondamenti di Automatica

## □ Integrazione e Gestione

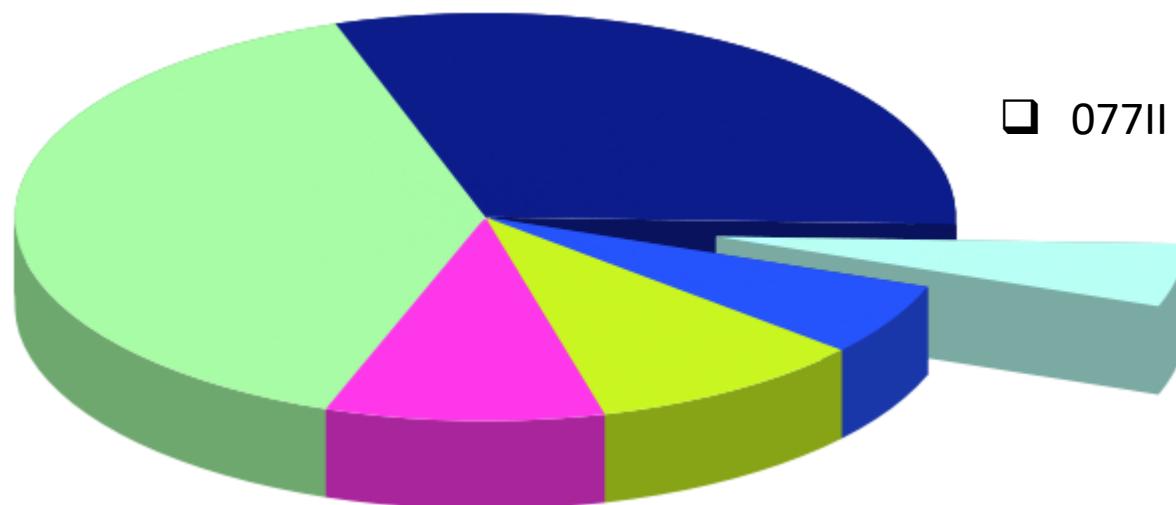


## □ Analisi e Controllo a vari livelli di dettaglio

1. Valutazione e progettazione di controllo tra causa ed effetto  
**(feedback)**
2. Sviluppo di modelli dai più semplici ai più complessi
3. Sviluppo di simulatori omnicomprensivi e sostitutivi di prototipi
4. Uso di matematica appropriata al livello di complessità



## Fondamenti di Automatica



□ 077II

### □ Sistemi Lineari e Linearizzabili

- Equilibrio, Stabilità
- Evoluzione temporale: Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, rappresentazione nello spazio di stato
- Rappresentazione in frequenza: Laplace, numeri complessi, Fourier, segnali
- Proprietà strutturali: realizzazioni, controllabilità, osservabilità, considerazioni geometriche mediante la teoria delle matrici



## Fondamenti di Automatica

### □ Comportamento ottimale/soddisfacente

- Stabilità: Criterio di Routh, Analisi di Lyapunov
- Prestazioni: Errore a regime, Risposta transitoria
- Sintesi di Controllo: Luogo delle Radici, Sintesi in frequenza, controllori standard
- Problematiche relative ad errori nel modello di lavoro: stabilità relativa, Criterio di Nyquist, margini di stabilità, funzione di sensitività
- Controllori nello spazio di stato: retroazione dello stato, retroazione dell'uscita e progetto dell'osservatore, relazione con le metodologie in frequenza
- Analisi finale mediante simulazione



## Ingegneria Robotica e dell'Automazione

### Robotics and Automation Curriculum (Master's Degree – 120 ECTS)

#### First Year

- Probability and Stochastic Processes
- Mechanics of Robots
- Systems and Control Theory
- Process Control
- Free Elective (1)
- Group B Elective (1)
- Group A Electives (2)

#### Group A Electives

- Digital Control
- Advanced Programming and Embedded Systems
- Electronic Systems for Automation
- Fluidynamics and Thermal Systems

#### Second Year

- Identification of Dynamic Systems
- Control of Uncertain Systems
- Distributed Systems Control
- Nonlinear and Robot Control
- Guidance and Navigation Systems
- Group B Elective (1)

#### Group B Electives

- Automotive Dynamics
- Mechatronic Laboratory
- Underwater Systems
- Aerospace Robotics

Tubingen (GE), Delft (NE), Cranfield (UK)  
Syracuse, Auburn, MIT, UCSB, UC Berkeley, UC Santa Barbara, UC Riverside, Fermi Lab (US)



Cancemi Lorenzo, "Missile Guidance Law with added Visibility", July 2013, in cooperation with AFRL, Eglin AFB, USA (currently with **Leonardo Defense Systems, Livorno, Italy**).

Franzini Giovanni, "Nonlinear Control of Relative Motion in Space using Extended Linearization Technique", July 2014, in cooperation with ESA Clean Space Initiative (currently **PhD student, University of Pisa, Italy**).

Mammoliti Matteo, "Guida innovativa in ambiente con ostacoli", February 2015 (currently with **Continental Automotive Italy S.p.A, San Piero a Grado, Pisa, Italy**).

Tartaglia Vincenzo, "Game Theoretic Strategies for Spacecraft Rendezvous and Motion Synchronization", April 2015, in cooperation with ESA Clean Space Initiative (currently with **Leonardo Helicopters, Milan, Italy**).

Salvetti Alessandro, "Controllo Ottimo di Sciami di Agenti mediante Descriptor Function Framework" July 2015, (currently with **Leonardo Helicopters, Milan, Italy**).

Parnenzini Valeria, "An Adaptive Security Mechanism for Cyber-Physical Systems", February 2016, in cooperation with University of California, Riverside, California, USA. (currently with **Mathworks UK, Cambridge UK**).

Al Atassi Omar, "Inductance studies for the Quench Protection system of the Mu2e TS solenoids", December 2015, in cooperation with Fermilab Central Helium Liquefying facility, Fermilab, Batavia, Illinois, USA, (currently with **Fermilab, IL, USA**).

Tardioli Luca, "Sintesi di un Sistema di guida aumentato con funzione di visibilità", April 2016, (currently with **ESAUTOMOTION, Modena, Italy**).

Brandimarti Alessandro, "A Novel Nonlinear Model Predictive Control for coordinating a UAV Swarm", April 2016, in cooperation with Cranfield University, GB.

Menara Tommaso, "A Novel Characterization of Strong Structural Controllability: Sparsity Conditions and Control Paths", April 2016, in cooperation with University of California, Riverside, California, USA. (currently **PhD student, University of California, Riverside**).

Matassini Tommaso, "Neuro-Adaptive Control of UAV's", April 2016, in cooperation with Cranfield University, GB. (currently with **CYNNY srl, Florence, Italy**).

Morvidoni Matteo, "A framework for Decentralised Task Allocation with Informative Path Planning using submodular rewards", July 2016, in cooperation with Cranfield University, GB (currently with **Ely Lilly Florence, Italy**).

Iannino Vincenzo, "Design of an Advanced Control Method for Steam Turbine Power Generation Application", October 2016, in cooperation with General Electric, Florence, Italy (currently with **General Electric and SSSUP, Pisa, Italy**).

Tannous Michael: "Control of Spacecraft Formations around Lagrangian Points", February 2017 (Currently with **United Technology Research Centre, Cork, Ireland**).

Tiberi Lorenzo: "Cluster Synchronization in Networks of Oscillators", May 2017, in cooperation with the University of California, Riverside, USA, (currently **PhD student ETH, Basel, Switzerland**).

Carmignoli Giulia: "Autonomous obstacles map creation for UAVs in unknown environments using Visual-SLAM", May 2017, in cooperation with FLYBY Srl, Livorno, Italy, (currently with **FLYBY Srl, Livorno, Italy**).