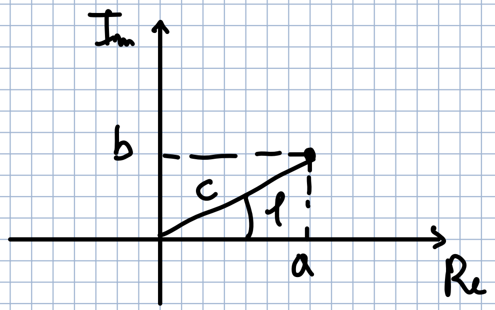
NUMERI COMPLESSI

$z = a + jb \qquad a = \mathrm{Re}\{z\} \qquad b = \mathrm{Im}\{z\}$

$z = c\,e^{j\varphi} \qquad c = \text{modulo} \qquad \varphi = \text{fase}$



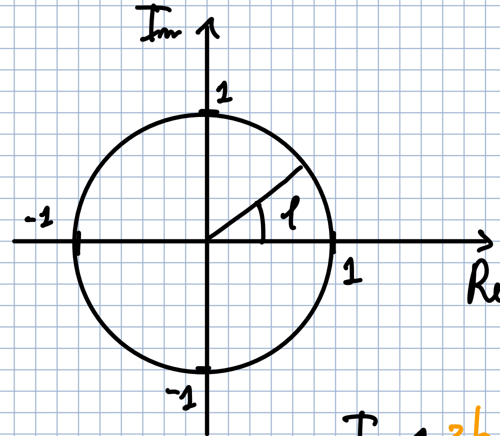
$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = c \cdot \cos\varphi$

$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad b = c \cdot \operatorname{sen}\varphi$

$$z = a + jb = c\cos\varphi + jc\operatorname{sen}\varphi = c\left[\cos\varphi + j\operatorname{sen}\varphi\right] = c\,e^{j\varphi}$$

$$\underbrace{e^{j\varphi}} = \cos\varphi + j\operatorname{sen}\varphi$$

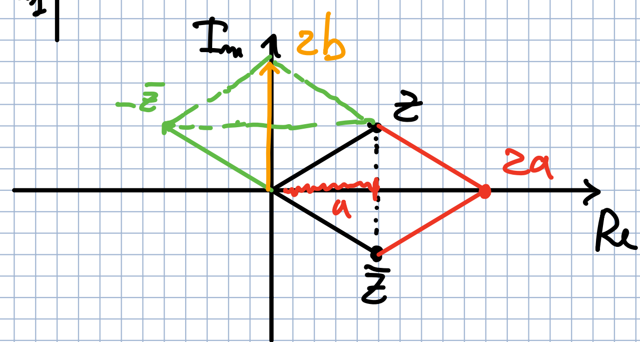
È UN NUMERO COMPLESSO DI MODULO UNITARIO



$a = \frac{1}{2}\left[z + \bar{z}\right]$

$b = \frac{1}{2j}\left[z - \bar{z}\right]$

$\bar{z} = a - jb$



$z + \bar{z} = a + jb + (a - jb) = 2a$

$z - \bar{z} = a + jb - (a - jb) = j2b$

OPERAZIONI ALGEBRICHE

$z_1 = a_1 + jb_1 = c_1 e^{j\varphi_1}$

$z_2 = a_2 + jb_2 = c_2 e^{j\varphi_2}$

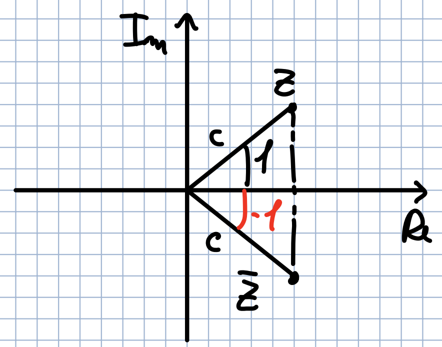
1) $z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) \pm j(b_1 + b_2)$

$z = z_1 + z_2 = c_1 e^{j\varphi_1} + c_2 e^{j\varphi_2}$

2) $z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1)\cdot(a_2 + jb_2) = a_1 a_2 + j a_1 b_2 + j a_2 b_1 - b_1 b_2 =$

$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

$$z = z_1 \cdot z_2 = c_1 e^{j\varphi_1} \cdot c_2 e^{j\varphi_2} = c_1 c_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$



$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = c e^{j\varphi} \cdot c e^{-j\varphi} = c^2 e^{j(\varphi-\varphi)} = c^2$$

$$|z| = c = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$z^2 \neq |z|^2$$

$$z^2 = z \cdot z = c e^{j\varphi} \cdot c e^{j\varphi} = c^2 e^{j2\varphi}$$

$z^2 = |z|^2$ quando $z \in \mathrm{Re}$

3) $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{c_1 e^{j\varphi_1}}{c_2 e^{j\varphi_2}} = \dfrac{c_1}{c_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$

FUNZIONI COMPLESSE DI VARIABILE REALE

$z(t)$, $z \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$

$$z(t) = a(t) + j\, b(t) = c(t)\, e^{j\varphi(t)}$$

INTEGRALE

$$\int_a^b z(t)\,dt = \int_a^b a(t)\,dt + j\int_a^b b(t)\,dt$$

DERIVATA

$$\frac{d}{dt} z(t) = \frac{d}{dt} a(t) + j \frac{d}{dt} b(t)$$

SEGNALI

2 TIPI
- DETERMINISTICO: rappresentabile con funzioni analitiche
- ALEATORIO: rappresentabile tramite STATISTICHE

DIMENSIONALITÀ DI UN SEGNALE

$$v(x) \quad : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

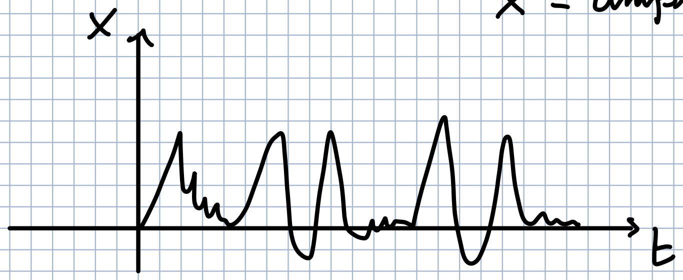
ESEMPI

•) ELETTROCARDIOGRAMMA

$x(t)$

t = tempo

x = ampiezza



•) AUDIO STEREO

$\begin{bmatrix} l(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$

t = tempo
l = ampiezza canale SX
r = ampiezza canale DX

•) IMMAGINE STATICA b/nero

$z(x, y)$

x = coordinate "x"
y = // "y"
z = intensità di grigio

•) IMMAGINE STATICA COLORI

$\underline{z}(x, y)$

$\underline{z} = \begin{cases} R \\ G \\ B \end{cases}$

x = coord. "x"
y = coord. "y"

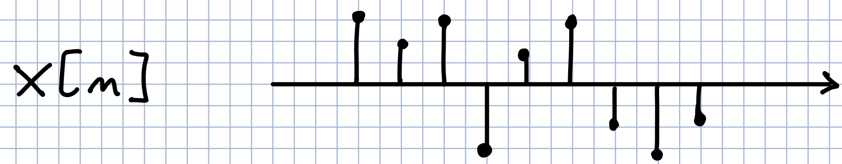
TIPOLOGIE IN BASE ALLA CONTINUITA' DEI DOMINI

•) SEGNALE A TEMPO-CONTINUO

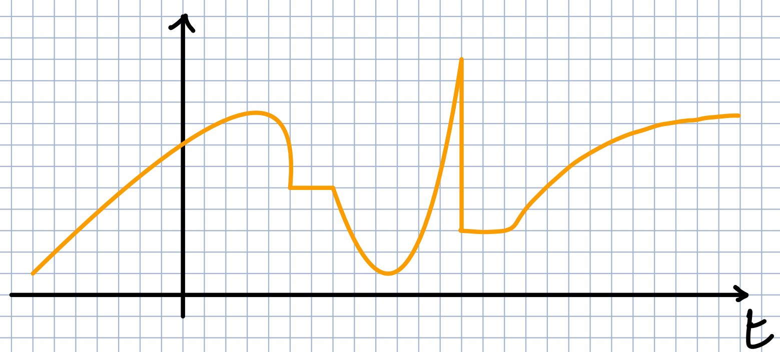
t (DOMINIO) assume con continuità tutti i valori contenuti all'interno di un certo intervallo

$x(t)$

•) SEGNALE A TEMPO-DISCRETO: la var. temporale assume solo valori discreti (DOMINIO)

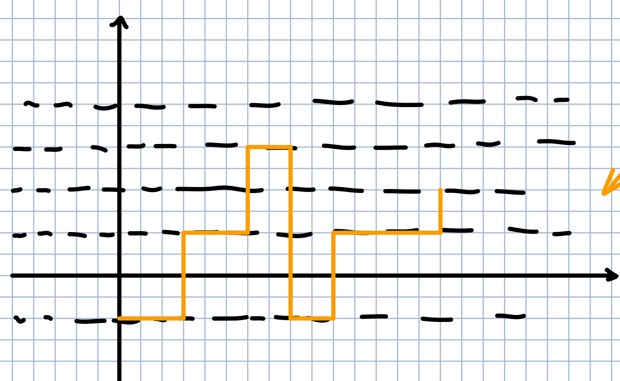


•) SEGNALE AD AMPIEZZA CONTINUA: la grandezza fisica del segnale assume con continuità tutti i valori all'interno di un certo intervallo (CODOMINIO)



LO STIAMO GUARDANDO NEL DOMINIO AMPIEZZA

•) SEGNALE AD AMPIEZZA DISCRETA: la grandezza fisica può assumere solo valori discreti (APPARTENENTI A UN CERTO ALFABETO NUMERABILE)

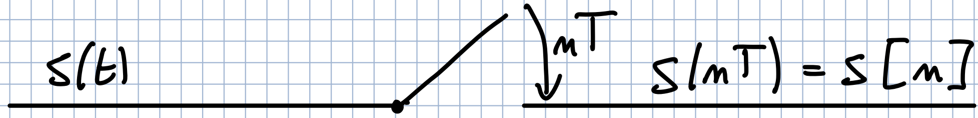


Vuol dire che un segnale può assumere solo determinati livelli, può saltare da un livello a un altro ma non può assumere tutti i valori

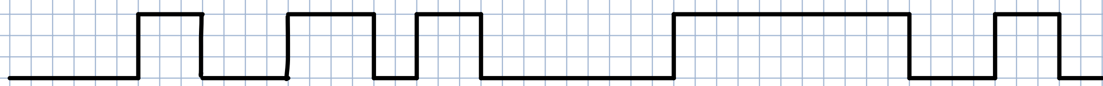
DOMINIO →

	TEMPO-CONTINUO	TEMPO-DISCRETO
AMPIEZZA CONTINUA	ANALOGICO	SEQUENZE
AMPIEZZA DISCRETA	QUANTIZZATI	NUMERICO

↓ CODOMINIO

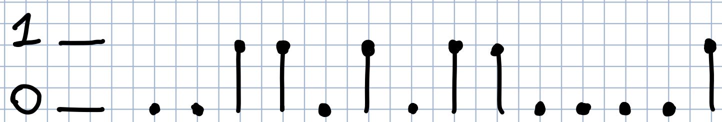


SEGNALE ANALOGICO



Codice "morse"

SEGNALE QUANTIZZATO



SEGNALE NUMERICO

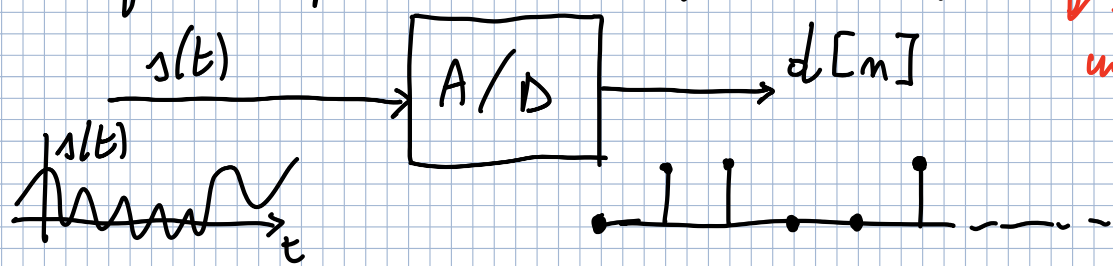
"sequenze di bit"

Sono gli unici che possono essere rappresentati come numeri

COME SI MEMORIZZA UN FILE AUDIO?

Il segnale di partenza è un segnale analogico

↓ lo trasformo in un segnale numerico (DIGITALE)



SEGNALI DETERMINISTICI

Proprietà ⇒ definizione di quantità

- POTENZA ISTANTANEA

$$x(t) \Rightarrow P_x(t) \triangleq |x(t)|^2$$

- ENERGIA DEL SEGNALE

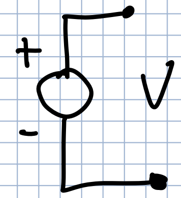
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt$$

SEGNALI FISICI (QUELLI REALIZZABILI FISICAMENTE)

$$\boxed{E_x < \infty}$$

Consideriamo segnali "IDEALI" → NON con $E_x = \infty$

ES. BATTERIA IDEALE

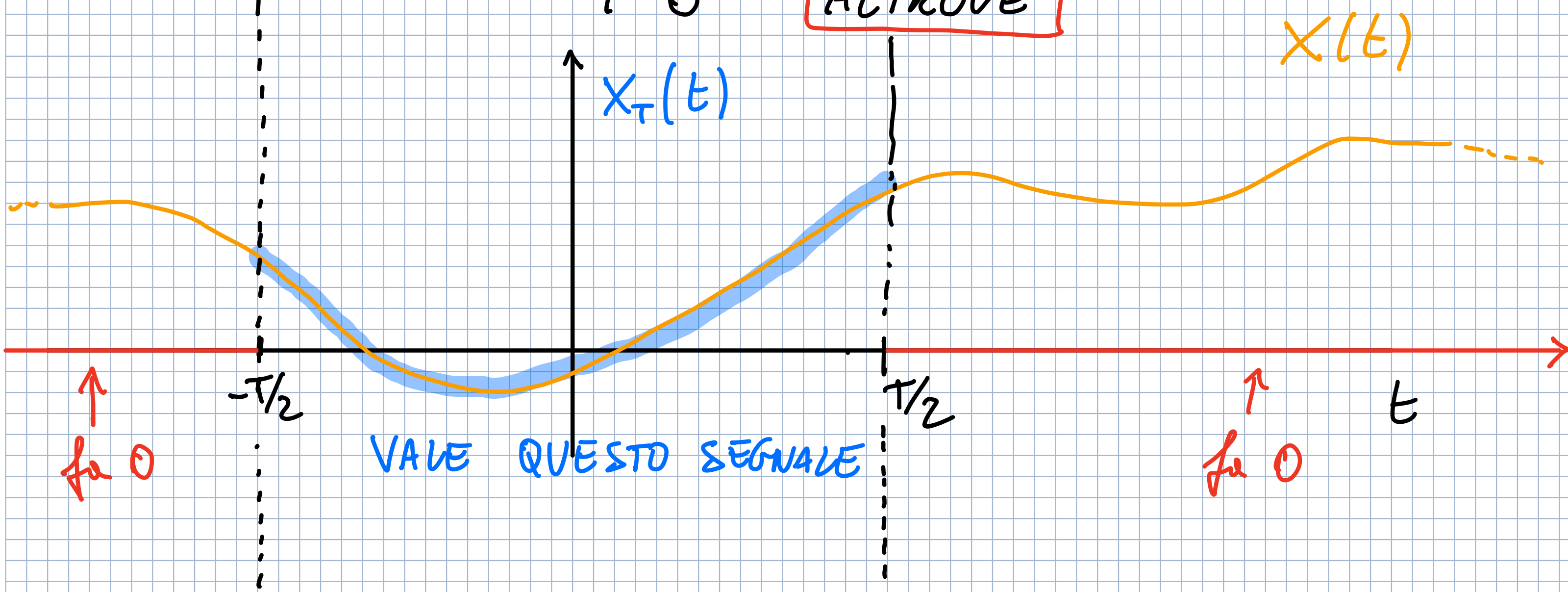


$-\infty < t < +\infty \implies x(t) = V \quad \forall t$

Si calcola: $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} V \, dt = \infty$

SEGNALE TRONCATO NEL TEMPO:

Dato $x(t) \implies x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \boxed{-T/2 \leq t \leq T/2} \\ 0 & \boxed{\text{ALTROVE}} \end{cases}$



·) $E_{x_T} < \infty$

·) $\lim_{T \to \infty} E_{x_T} = \infty = E_x$

COMUNQUE TRONCO IL SEGNALE, ANCHE SE T è MOLTO GRANDE LA SUA ENERGIA RIMANE INFINITA

·) POTENZA MEDIA

$P_{x_T} \triangleq \frac{E_{x_T}}{T}$

POTENZA MEDIA DEL SEGNALE TRONCATO

$$\boxed{P_x = \lim_{T \to \infty} P_{x_T} = \lim_{T \to \infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt}$$

UN SEGNALE A POTENZA MEDIA FINITA HA ENERGIA INFINITA

SEGNALE CON POTENZA FINITA
EN. INFINITA

Si osserva che un segnale $x(t): \boxed{P_x = K < \infty \Rightarrow E_x = \infty}$

$\boxed{K \neq 0}$

Si può dimostrare:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{E_{x_T}}{T} = \overset{\text{FINITO}}{K} < \infty$$

← Se è vero, significa che

↙ porto al limite il NUM. E DEN.

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{T\to\infty} E_{x_T} = \infty = E_x$$

È VERA QUANDO $E_x = \infty$

$$\boxed{P_x \neq 0 \Rightarrow E_x = \infty}$$

$$\boxed{x(t): E_x = K < \infty \Rightarrow P_x = 0}$$

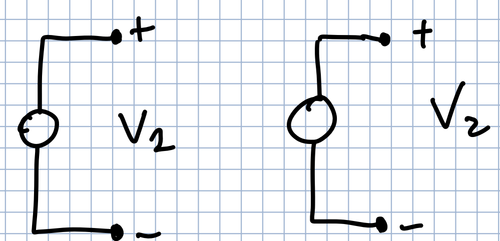
SEGNALE CON EN. FINITA CON POTENZA MEDIA NULLA

$$E_x = \lim_{T\to\infty} E_{x_T} = \lim_{T\to\infty} P_{x_T}\cdot T = K < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{T\to\infty} P_{x_T} = 0 = P_x$$

ES. 2 BATTERIE



Utilizziamo l'ENERGIA per caratterizzare i segnali.

2 BATTERIE con ENERGIA INFINITA

$$\Downarrow$$

USO LA POTENZA P_1 e P_2

•) VALORE EFFICACE

$$\boxed{x_{eff.} \triangleq \sqrt{P_x}}$$

•) VALOR MEDIO (TEMPORALE)

$$\boxed{x_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt}$$

SEGNALI TIPICI

•) COSTANTE → $\boxed{E_x = \infty \rightarrow P = K}$

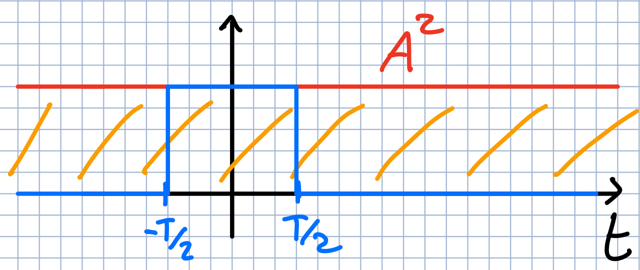
$$x(t) = A \quad \forall t$$

$A \in \mathbb{R}$

$$P_x(t) = |x(t)|^2 = A^2$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \, dt = \infty =$$

AREA SOTTESA ALLA CURVA A^2 ma da $-\infty$ a $+\infty$



$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \, dt = \cancel{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{\cancel{T}} \cdot \cancel{T} A^2 = A^2$$

SEGNALE TRONCATO

$$X_{eff.} = \sqrt{A^2} = |A|$$

$$X_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot TA = A$$

•) SINUSOIDI

$A \in \mathbb{R}$

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

AMPIEZZA FREQUENZA FASE (INIZIALE)

$$P_x(t) = |x(t)|^2 = x^2(t) = A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) \, dt$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{2} \, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi) \, dt$$

VA A ∞ INTEGRALE INDEFINITO

$$= \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{4\pi f_0} \operatorname{sen}(4\pi f_0 t + 2\varphi) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = K$$

$$\text{MIN} \rightarrow -\frac{A^2}{8\pi f_0} \leq K \leq \frac{A^2}{8\pi f_0} \rightarrow \text{MAX}$$

se a K sommo $\infty = \infty$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi)\, dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A^2}{2}\, dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A^2}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\cancel{T}} \frac{A^2}{2} \cancel{T} + \underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-T/2}^{T/2} \frac{A^2}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)\, dt}{T}}_{\text{FA } 0} \rightarrow$$

QUESTA QUANTITÀ È FINITA

$$\Downarrow$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{K}{T} = 0$$

$$= \frac{A^2}{2}$$

VALORE EFFICACE

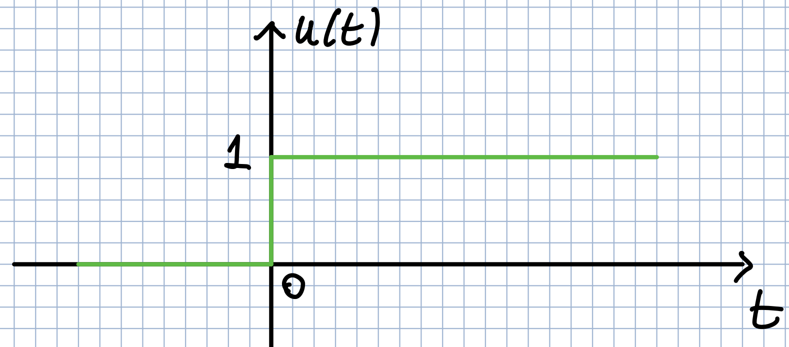
$$X_{eff.} = \sqrt{P_x} = \frac{|A|}{2}$$

$$X_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)\, dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-T/2}^{T/2} A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)\, dt}{T} = 0$$

·) SEGNALE GRADINO

$$u(t) \triangleq \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$$p_x(t) = u^2(t) = u(t)$$

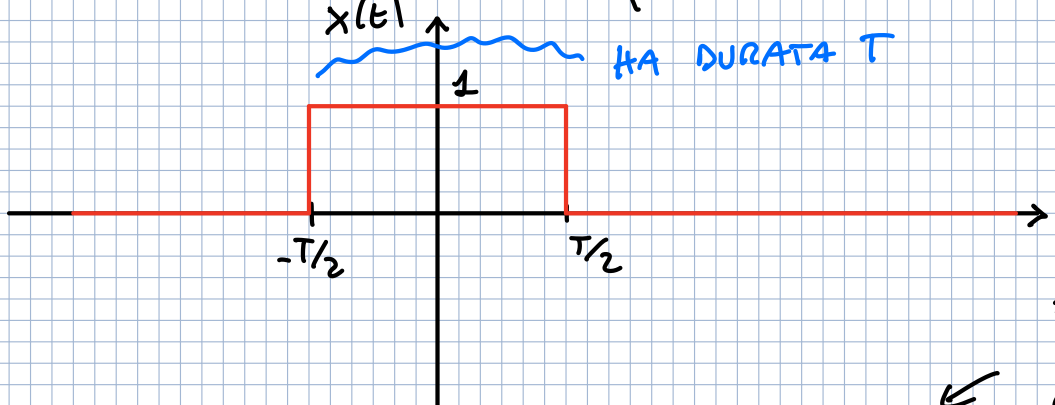
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,dt = \int_0^{+\infty} 1\,dt = \infty$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 1\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\cancel{T}}\cdot\frac{\cancel{T}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$X_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad X_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

- SEGNALE RETTANGOLO

$$x(t) \triangleq rect\left(\frac{t}{T}\right) \triangleq \begin{cases} 1 & -T/2 \le t \le T/2 \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$$

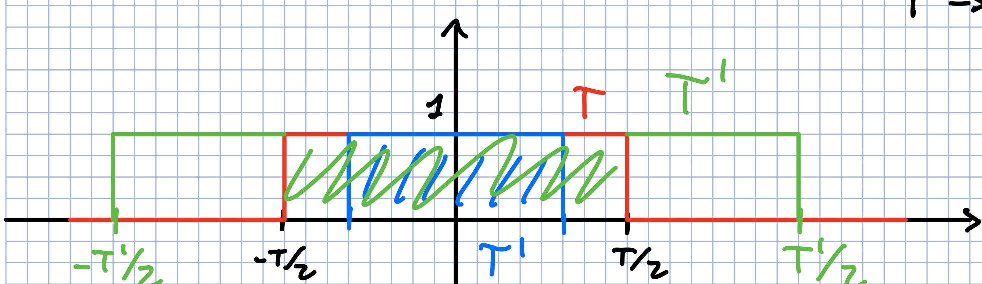


È UNA FUNZIONE DEL TEMPO LA CUI DURATA È PARI a T

$$p_x(t) = |x(t)|^2 = x^2(t) = x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{t}{T}\right) dt = \int_{-T/2}^{T/2} 1\,dt = T$$

P_x ALLORA È NULLA $\quad P_x = \lim_{T'\to\infty} \frac{1}{T'}\int_{-T'/2}^{T'/2} rect\left(\frac{t}{T}\right) dt$



- per $T' > T \to +\infty$

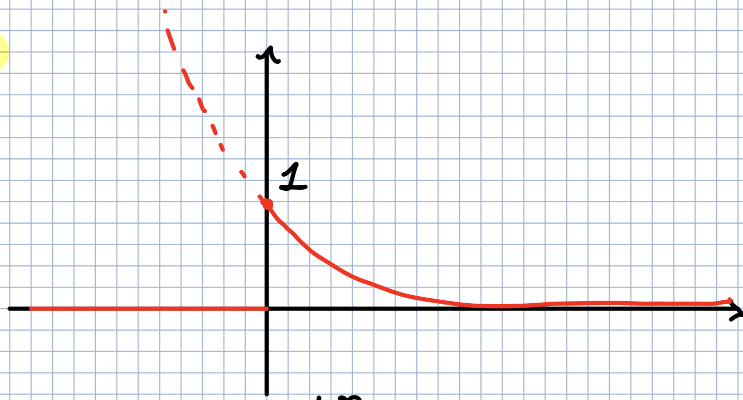
$$P_x = \lim_{T'\to\infty} \frac{1}{T'} T = 0$$

T È COSTANTE

$X_{eff} = 0$

$$X_m = \lim_{T' \to \infty} \frac{1}{T'} \int_{-T'/2}^{T'/2} rect\left(\frac{t}{A}\right) dt = 0$$

•) ESPONENZIALE UNILATERA



$$x(t) \triangleq e^{-t} u(t)$$

$$P_x(t) = |x(t)|^2 = e^{-2t} u(t)$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} u(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-2t} \cdot 1\, dt = -\frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Se } E_x = K \Rightarrow P_x = 0}$$

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2t} u(t)\, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} e^{-2t}\, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{2} e^{-2t}\right)\Big|_0^{T/2}$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-T}\right) = \frac{1}{2} \lim_{T \to \infty} \frac{1 - e^{-T}}{T} = \frac{1}{\infty} = 0$$

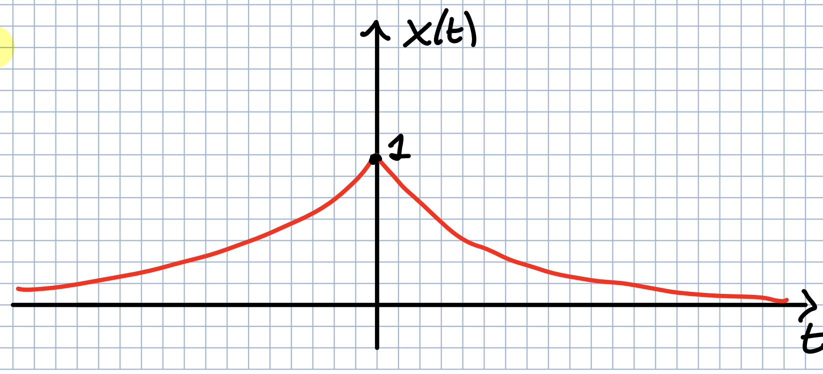
$X_{eff} = 0$

$$X_m = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-t} u(t)\, dt = \lim_{T \to \infty} \int_{0}^{T/2} e^{-t}\, dt =$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left(-e^{-t}\right)_0^{T/2} = \lim_{T \to \infty} \left(1 - e^{-T/2}\right) \cdot \frac{1}{T} = \frac{1 - e^{-T/2}}{T} = 0$$

•) ESPONENZIALE BILATERA

$$x(t) = e^{-|t|}$$



$$P_x(t) = e^{-2|t|}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|}\, dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-2t}\, dt = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

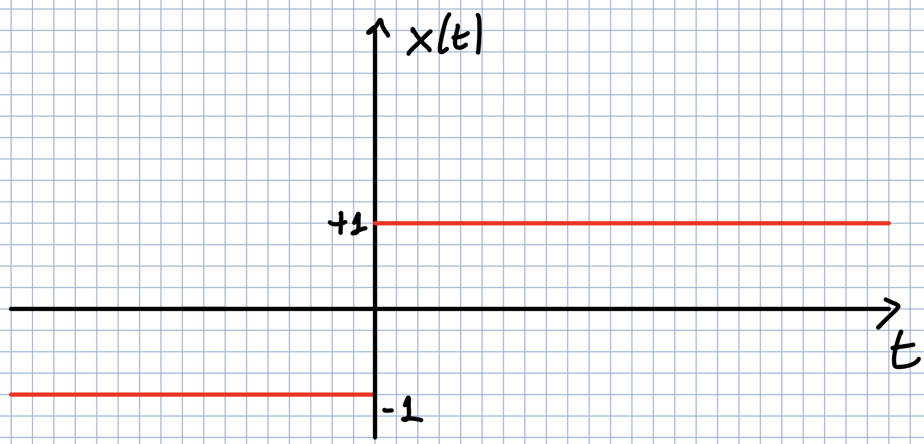
$P_x = 0$ $\rightarrow$ DA FARE

$X_{eff} = 0$ $\quad X_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-|t|}\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2}\, 2\int_0^{T/2} e^{-t}\, dt =$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\left(1 - e^{-T/2}\right) = 0$$

•) SEGNALE SEGNO

$$x(t) = sgn(t) = \begin{cases} +1 & t \geq 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



$P_x(t) = 1 \quad \forall t$

$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} 1\, dt = \infty$

$P_x = 1$

$X_{eff} = 1$

$$X_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} sgn(t)\, dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} -1\, dt + \int_0^{T/2} +1\, dt\right]$$

OSSERVAZIONE

$$P_x = 0 \Rightarrow \begin{cases} X_m = 0 \\ X_{eff} = 0 \end{cases}$$

$$P_x = 0 \Rightarrow X_m = 0$$

DIM.

$x(t) \Rightarrow P_x = 0$ IP.

$x(t) = X_m + x'(t)$

$X_m =$ V. medio di $x(t)$

$x'(t) =$ RESIDUO a VALOR MEDIO NULLO

$$\hookrightarrow \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x'(t)\, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - X_m]\, dt =$$

$$= \underbrace{\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt}_{X_M} - X_m \underbrace{\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt}_{\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \cdot T = 1} = X_M - X_M = 0$$

$\longrightarrow |z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\, dt = \lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |X_m + x'(t)|^2\, dt =$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (X_m + x'(t)) \cdot \overline{(X_m + x'(t))}\, dt =$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(|X_m|^2 + X_m \overline{x'(t)} + x'(t) \cdot \overline{X_m} + |x'(t)|^2 \right) dt =$$

$$\Rightarrow P_x = \underbrace{|X_m|^2}_{\geq 0} + \underbrace{\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x'(t)|^2\, dt}_{\geq 0} = 0 \rightarrow \text{per IP.}$$

fa 0 solo quando entrambi i membri sono 0

$$\Rightarrow |X_m|^2 = 0 \Rightarrow X_m = 0$$

SEGNALI PERIODICI

T_0 PERIODO

f_0 FREQUENZA

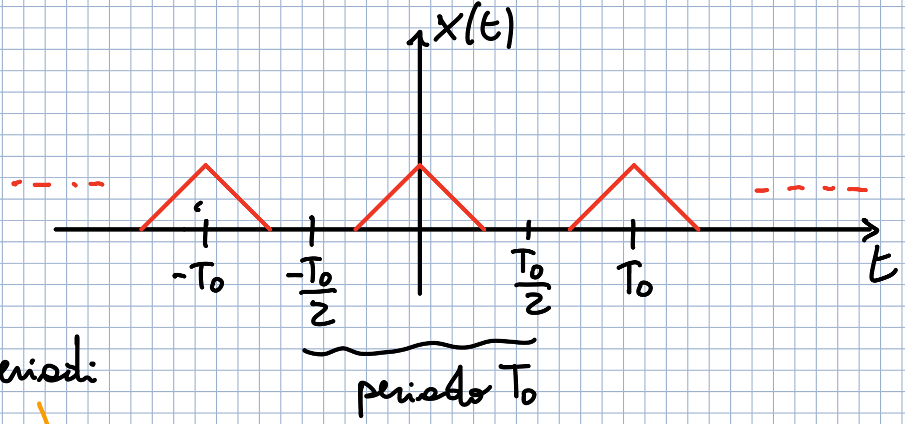
DEF. $x(t)$ è PERIODICO

$$\Updownarrow$$

$$x(t) = x(t - nT_0) \qquad n \in \mathbb{Z} \quad T_0 \in \mathbb{R}^+$$

$$f_0 \triangleq \frac{1}{T_0}$$

1) ENERGIA



$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 \, dt = \infty \qquad n \text{ periodi}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_0 = \lim_{n \to \infty} n E_0 = \infty$$

periodo T_1

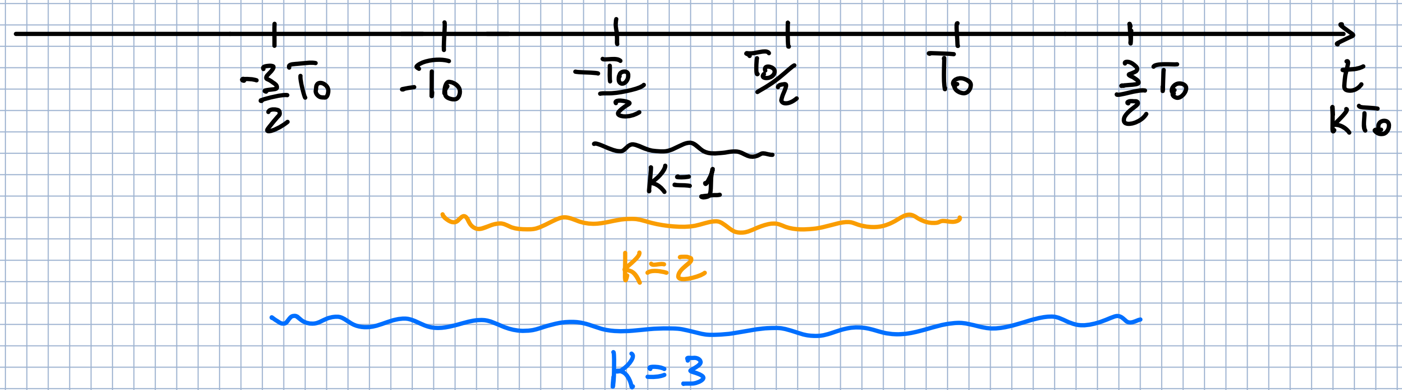
2) POTENZA MEDIA

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt =$$

nei segnali periodici è =

$$= \lim_{T \to \infty} \rightarrow \lim_{KT_0 \to \infty} \rightarrow \lim_{K \to \infty} \frac{1}{KT_0} \int_{-\frac{KT_0}{2}}^{\frac{KT_0}{2}} |x(t)|^2 \, dt = \lim_{K \to \infty} \frac{1}{KT_0}$$

STO DISCRETIZZANDO



quindi il lim diventa

$$\lim_{\cancel{K}\to\infty} \frac{1}{\cancel{K}T_0}\cancel{K}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2\,dt \to \boxed{P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2\,dt}$$

POTENZA MEDIA NEI SEGNALI PERIODICI

3) VALORE MEDIO

$$X_m = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,dt$$

VALE DIM. FATTA PER POTENZA MEDIA TOGLIENDO IL $|\cdot|^2$

4) UN SEGNALE PERIODICO PUO' ESSERE SCOMPOSTO IN UNA SERIE DI COSINUSOIDI:

$x(t)$ PERIODICO

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$

generica componente n-esima

A_n AMPIEZZA

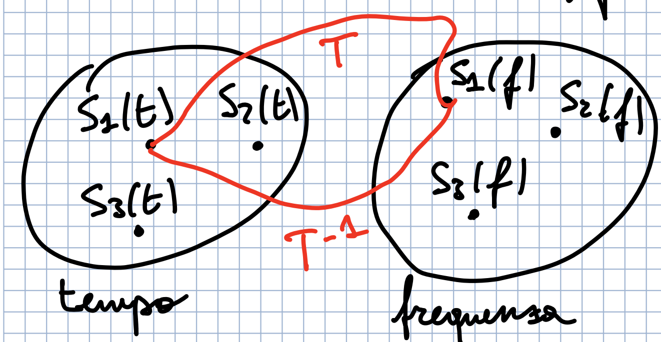
$f_0 = \frac{1}{T_0}$ frequenza base (FONDAM.)

$n f_0 = \frac{n}{T_0}$

φ_n FASE

FREQUENZA

$$s(t) \to S(f)$$



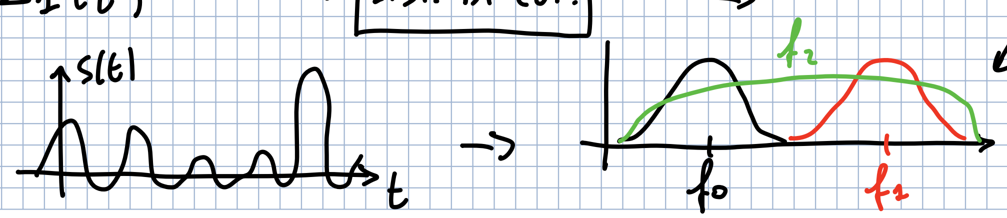
USO LA TRASFORMATA T di FOURIER PER PORTARE UN SEGNALE DAL DOMINIO DEL TEMPO t A QUELLO DELLA FREQUENZA f

è BIUNIVOCA (posso fare anche T^{-1})

TRASFORMATA DI FOURIER (TSF)

$$S(t) \Longleftrightarrow S(f)$$

$S_1(t)$ (S) → SIST. DI COM. → (D)



SPETTRO DI FREQUENZA

$$S(t) \Longrightarrow S(f)$$

ANTITRASFORMATA DI FOURIER

$$S(f) \Longrightarrow S(t)$$

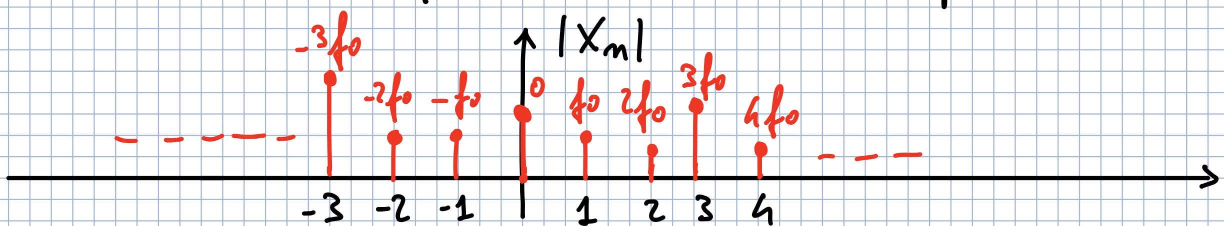
TRASFORMATA SERIE DI FOURIER

- Si applica a segnali periodici
- CRITERIO DI DIRICHELET

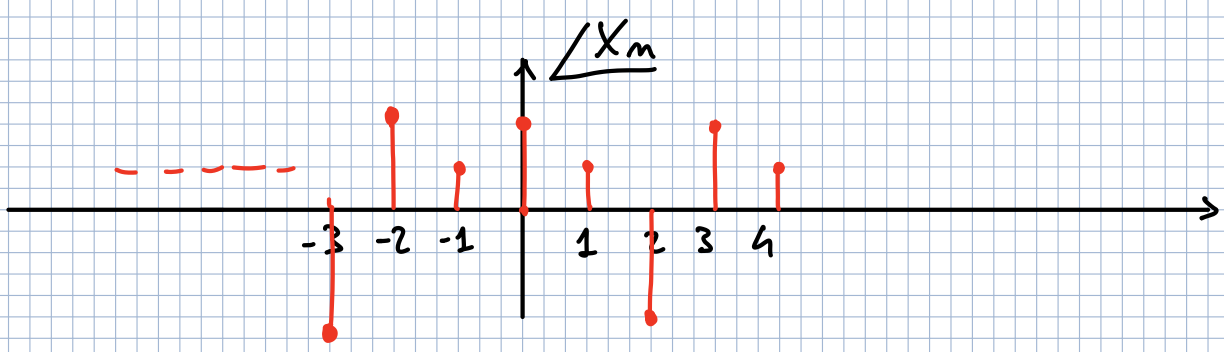
DEF.

$$\boxed{X_n \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt}$$

X_n è una sequenza di valori complessi $n \in \mathbb{Z}$



MODULO



FASE

SPETTRO = RAPPRESENTAZIONE IN FREQUENZA
↳ DI UN SEGNALE
↳ DI UN SEGNALE

↓

Calcolare la T di FOURIER di quel segnale

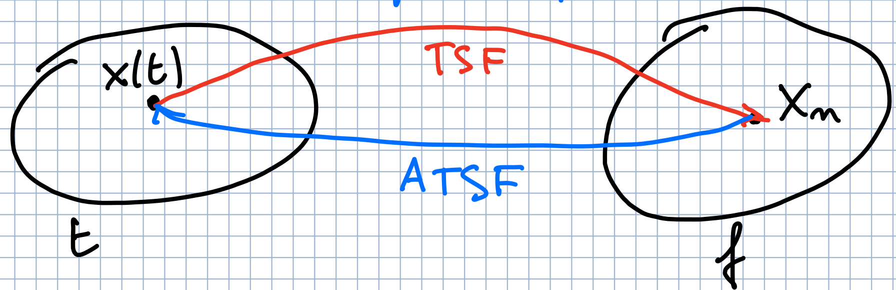
TRASFORMATA DI FOURIER ⇒ EQUAZIONE DI ANALISI

ANTI TRASFORMATA SERIE DI FOURIER

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}} \rightarrow \text{EQUAZIONE DI SINTESI}$$

mi permette di sintetizzare il segnale originario a partire dalla sequenza dello SPETTRO

Se ho tutti i valori di X_n posso ottenere il segnale di partenza



Dimostriamo la biunivocità:

$$x(t) \overset{TSF}{\Longleftrightarrow} X_n$$

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt = X_n \qquad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}\, dt$$

n non la posso indicare con lo stesso simbolo

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}}_{x(t)} \cdot e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt = X_n \quad ?$$

$$= \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi (k-n) f_0 t}\, dt =$$

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(2\pi(k-n)f_0 t)\, dt + j\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \mathrm{sen}(2\pi(k-n)f_0 t)\, dt$$

INTEGRALE DI COSINUS.

$K \neq n \Rightarrow 0$

$K = n \Rightarrow T_0$

INTEGRALE DI SINUSOIDE

$K \neq n \Rightarrow 0$

$K = 0 \Rightarrow 0$

$$\frac{1}{T_0} X_n T_0 = X_n$$ → come volevamo dimostrare

→ L'UNICO TERMINE DELLA $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k$ CHE SOPRAVVIVE E' QUELLO PER $K = n$ cioè T_0

SPETTRO DI UN COSENO = TRASFORMATA SERIE DI FOURIER

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$ → devo trovare il periodo T_0 per fare questo

$$x(t) = x(t - nT_0) \quad ?$$

$$T_0 = \frac{1}{f_0}$$

$$x(t-nT_0) = A\cos(2\pi f_0(t - nT_0)) =$$

$$= A\cos(2\pi f_0 t - 2\pi \cancel{f_0} n \cancel{T_0}) =$$

$$= A\cos(2\pi f_0 t - 2\pi n) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

$$X_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} A\cos(2\pi f_0 t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt =$$

$$= \frac{A}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \cdot e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt =$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} = \frac{\cos\alpha + \cancel{j\,\mathrm{sen}\,\alpha} + \cos\alpha - \cancel{j\,\mathrm{sen}\,\alpha}}{2} = \cos\alpha$$

$$= \frac{A}{2T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(1-n)f_0 t}\, dt + \frac{A}{2T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-j2\pi(1+n)f_0 t}\, dt =$$

$$= \frac{A}{2T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(2\pi(1-n)f_0 t) + j\,\mathrm{sen}(2\pi(1-n)f_0 t)\, dt \; +$$

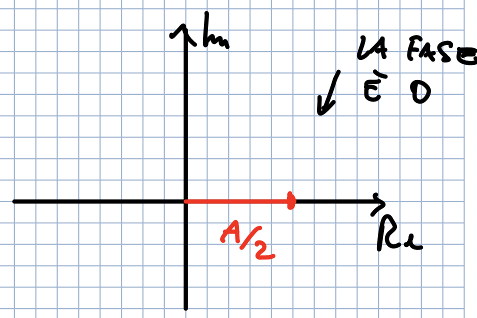
cos per $n = 1 \rightarrow T_0$
per $n \neq 1 \rightarrow 0$

sen per $n = 1 \rightarrow 0$
per $n \neq 1 \rightarrow 0$

$$+\frac{A}{2T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(2\pi(1+n)f_0t) + j\,\text{sen}(2\pi(1+n)f_0t)\,dt =$$

$n=-1 \rightarrow T_0$ $\quad$ $n=-1 \rightarrow 0$

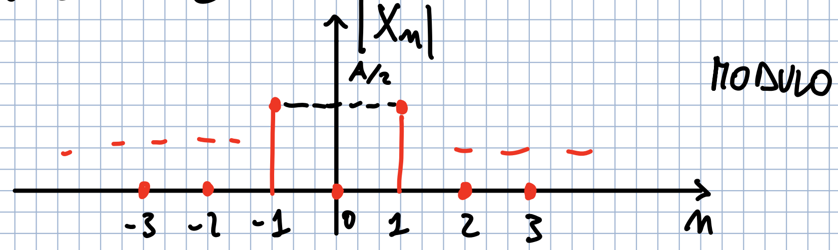
$n\neq-1 \rightarrow 0$ $\quad$ $n\neq-1 \rightarrow 0$



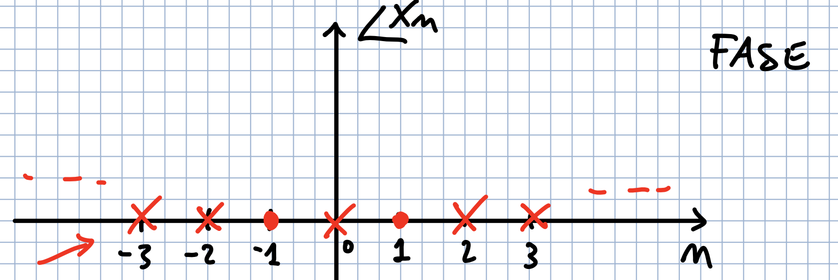
$\frac{A}{2\cancel{T_0}}\cdot\cancel{T_0}$ $\quad n=1$ $\quad$ 1° INTEGRALE

$\frac{A}{2\cancel{T_0}}\cdot\cancel{T_0}$ $\quad n=-1$ $\quad$ 2° INTEGRALE

$\Rightarrow 0$ $\quad n\neq\pm1$



$$X_n = \begin{cases} \frac{A}{2}e^{j\varphi}\big|_{\varphi=0} & n=1 \\ \frac{A}{2}e^{j\varphi}\big|_{\varphi=0} & n=-1 \\ 0 & n\neq\pm1 \end{cases}$$



in $n\neq\pm1$ la fase non c'è

È UNO SPETTRO REALE con fase 0

SPETTRO DI UN SENO

$$x(t) = A\,\text{sen}(2\pi f_0 t)$$

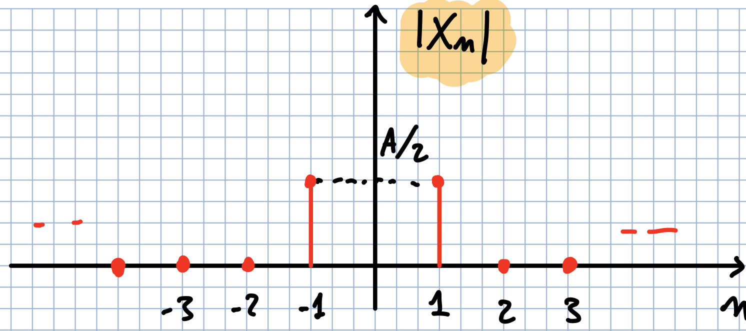
$$\boxed{\text{sen}\,\alpha = \frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j} =}$$

$$X_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} A\,\text{sen}(2\pi f_0 t)\,e^{-j2\pi n f_0 t}\,dt =$$

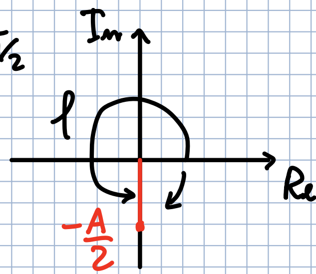
$$= \frac{A}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{e^{j2\pi f_0 t}-e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}\,e^{-j2\pi n f_0 t}\,dt =$$

$$= \frac{A}{j2T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(1-n)f_0 t} - e^{-j2\pi(1+n)f_0 t}\,dt$$

$$X_n = \begin{cases} \dfrac{A}{j2} & n = 1 \\ -\dfrac{A}{j2} & n = -1 \\ 0 & n \neq \pm 1 \end{cases}$$



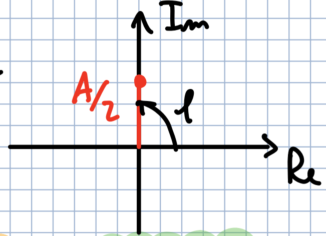
$$\frac{A}{j2} = \underset{\substack{\uparrow \\ Re}}{0} - \underset{\substack{\uparrow \\ Im}}{j\frac{A}{2}} = -j\frac{A}{2} = \frac{A}{2}e^{-j\pi/2}$$



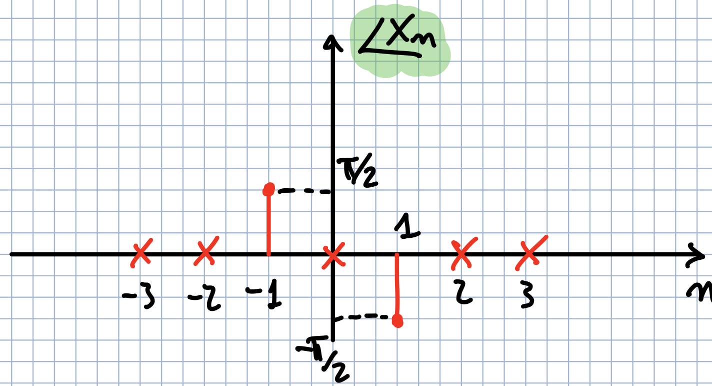
$\varphi = \frac{3}{2}\pi$ o $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

MODULO $= \frac{A}{2}$

$$-\frac{A}{j2} = j\frac{A}{2} = \frac{A}{2}e^{j\pi/2}$$



MODULO $= \frac{A}{2}$ FASE $= \pi/2$



Le uniche componenti frequenziali non nulle si trovano in $\pm f_0 = \frac{1}{T_0}$

PROPRIETA' DELLA TSF

- LINEARITA'

$$\text{Ip.} \begin{cases} z(t) = a\,x(t) + b\,y(t) & a,b \in \mathbb{C} \\ x(t) \\ y(t) \end{cases}$$

SONO PERIODICI DI T_0 E SONO TRASFORMABILI

$\Downarrow$

Th. $\boxed{Z_n = aX_n + bY_n}$

DIM.

$$Z_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} z(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} (a\,x(t) + b\,y(t))\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt =$$

$$= a\cdot\underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,e^{-j2\pi n f_0 t}\,dt}_{X_n} + b\cdot\underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)\,e^{-j2\pi n f_0 t}\,dt}_{Y_n} =$$

$$= a X_n + b Y_n$$

• SIMMETRIA HERMITIANA

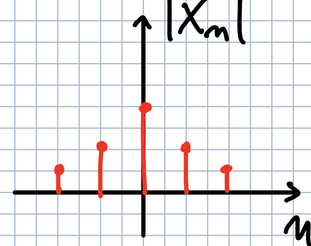
$x(t)$ è PERIODICO e trasformabile TSF

$x(t)$ è REALE $\rightarrow x(t) = \overline{x(t)}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{X_{-n} = \overline{X_n}}$$

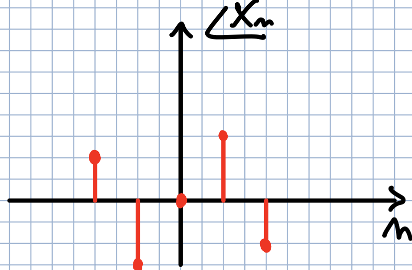
$$|X_{-n}| = |X_n|$$



SPETTRO DI AMPIEZZA

SIMMETRIA PARI → MODULO

$$\angle X_{-n} = -\angle X_n$$



SIMMETRIA DISPARI → FASE

DIM.

$$X_{-n} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,e^{-j2\pi(-n)f_0 t}\,dt =$$

$$\overline{(\overline{z})} = z$$

$$\overline{(a\cdot b)} = \overline{a}\cdot\overline{b}$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,e^{j2\pi n f_0 t}\,dt =$$

$$= \overline{\left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \overline{x(t)}\,e^{-j2\pi n f_0 t}\,dt\right]} =$$

$$x(t) \in \mathbb{R}$$

$$= \overline{\underbrace{\left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt\right]}_{X_n}} = \overline{X_n} = X_{-n}$$

SEGNALI PERIODICI REALI E PARI

$x(t)$ è PERIODICO e TRASFORMABILE

$x(t)$ è REALE $\Rightarrow$ $x(t) = \overline{x(t)}$

$x(t)$ è PARI $\Rightarrow$ $x(t) = x(-t)$

$$\Downarrow$$

$\boxed{X_{-n} = X_n}$ è REALE e PARI

DIM.

$$X_{-n} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi(-n)f_0 t}\, dt =$$

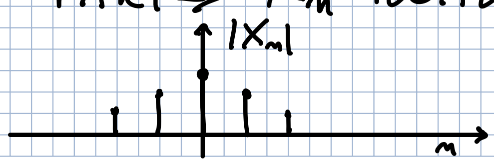
$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{j2\pi n f_0 t}\, dt = \qquad \begin{aligned} t' &= -t \\ t &= -t' \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{-T_0/2} x(-t')\, e^{j2\pi n f_0(-t')}\,(-dt') = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t'}\, dt' =$$

$$= X_n$$

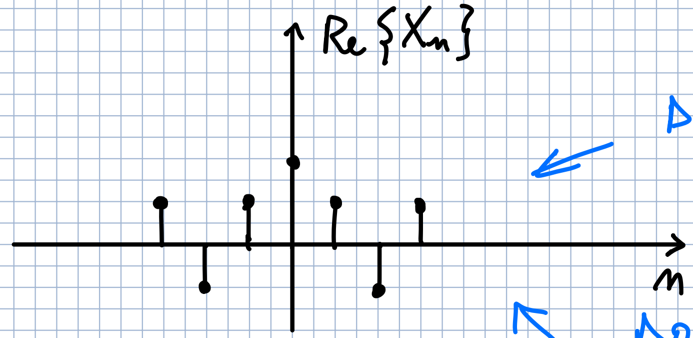
$$\left.\begin{aligned} X_{-n} &= X_n \to \text{PARITÀ} \\ X_{-n} &= \overline{X_n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow X_n = \overline{X_n} \quad \text{REALE E PARI}$$

$x(t)$ REALE E PARI $\Rightarrow$ X_n REALE E PARI



LA FASE di $X_n \Rightarrow \angle X_n$ può assumere solo valori pari a "0" o "π"

Quando X_n è REALE conviene rappresentarla in fase a quadratura ($Re + Im$)



DOVE HO + la FASE = 0
$\varphi = 0$

DOVE HO − la FASE
$\varphi = \pi$

$Im\{X_n\} = 0$

SEGNALI PERIODICI REALI E DISPARI

$$x(t) = -x(-t)$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{X_{-n} = -X_n}$$

$$X_{-n} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{j2\pi n f_0 t}\, dt = \qquad t' = -t$$

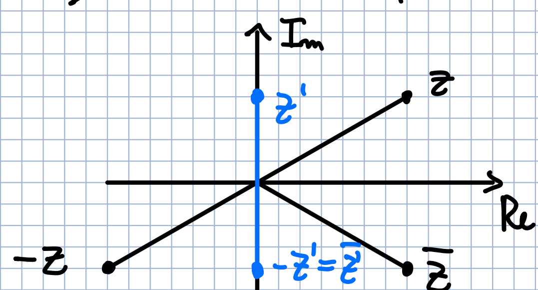
$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{x(-t')}_{-x(t')} e^{-j2\pi n f_0 t'}\, dt' =$$

$$= \frac{-1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t')\, e^{-j2\pi n f_0 t'}\, dt' = -X_n$$

$$X_{-n} = -X_n$$
$$X_{-n} = \overline{X}_n \Rightarrow \overline{X}_n = -X_n \rightarrow \text{SOLO SE } X_n \text{ è IMMAGINARIO}$$

QUANDO $\overline{z} = -z$?

SOLO QUANDO è IMMAGINARIO



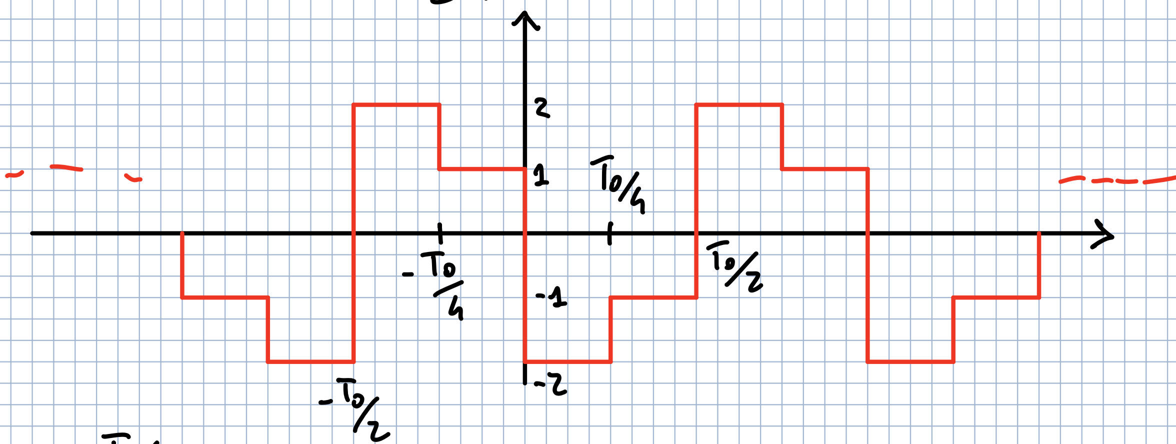
$x(t)$ è REALE E DISPARI

X_n è DISPARI E IMMAGINARIO

SEGNALI PERIODICI ALTERNATIVI

$$x(t) = -x\left(t - \frac{T_0}{2}\right)$$

ES.



$$X_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\underbrace{\int_{-T_0/2}^{0} x(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt}_{t' = t + \frac{T_0}{2}} + \int_{0}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} x\left(t' - \frac{T_0}{2}\right) e^{-j2\pi n f_0\left(t' - \frac{T_0}{2}\right)}\, dt + ---- =$$

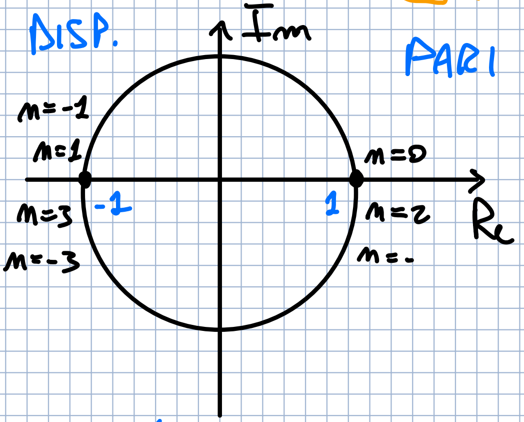
$$= \frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} -x(t')\, e^{-j2\pi n f_0 t'}\, dt \cdot e^{j2\pi n f_0 \frac{T_0}{2}} + ---- =$$

$$= -\frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0/2} x(t')\, e^{-j2\pi n f_0 t'}\, dt'\, e^{j\pi n} + ---- =$$

→ SONO UGUALI

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t') e^{-j2\pi m f_0 t'} dt' \left(1 - \underbrace{e^{j\pi m}}\right) \longrightarrow \text{STUDIAMO QUESTA PARTE}$$

CIRC. UNITARIA $\rightarrow e^{j\theta}$



πm	ne STUDIATO
$m=0$	$e^0 = 1$
$m=1$	$e^{j\pi} = -1$
$m=2$	$e^{j2\pi} = 1$

per m PARI $\Rightarrow X_m = 0$

per m DISPARI $\Rightarrow X_m = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) = e^{-j2\pi m f_0 t} dt$

SEGNALI APERIODICI AD ENERGIA FINITA

$x(t) \neq x(t-kT_0) \quad \forall k$ aperiodico

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt < \infty \Rightarrow \text{TCF}$$ CONTINUA DI FOURIER

Si dice CONTINUA quando sia nel dominio tempo che frequenza ABBIAMO VARIABILI CONTINUE.

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} \, dt} \leftarrow$$ EQ. DI ANALISI

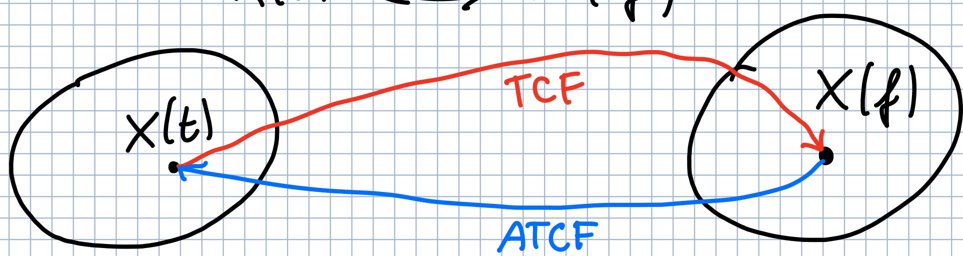
$f \in \mathbb{R}$

nf_0 TSF

f TCF

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} \, dt} \rightarrow$$ EQ DI SINTESI

$$x(t) \overset{\text{TCF}}{\Longleftrightarrow} X(f)$$

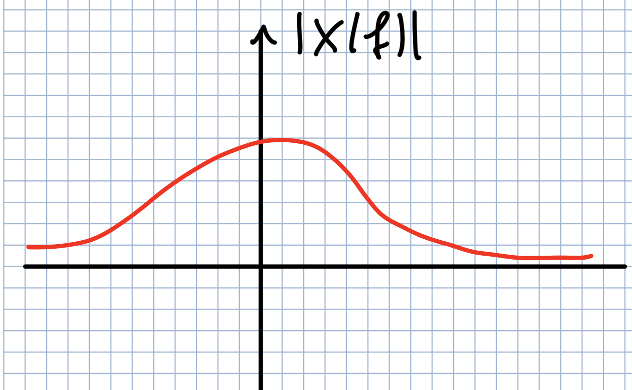


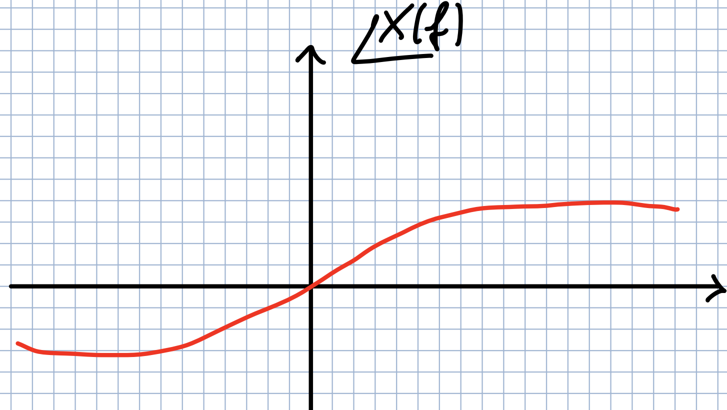
$$\text{ATCF}[\text{TCF}[x(t)]] = x(t)$$

RAPPRESENTAZIONE SPETTRO

AMPIEZZA $|X(f)|$

FASE $\angle X(f)$

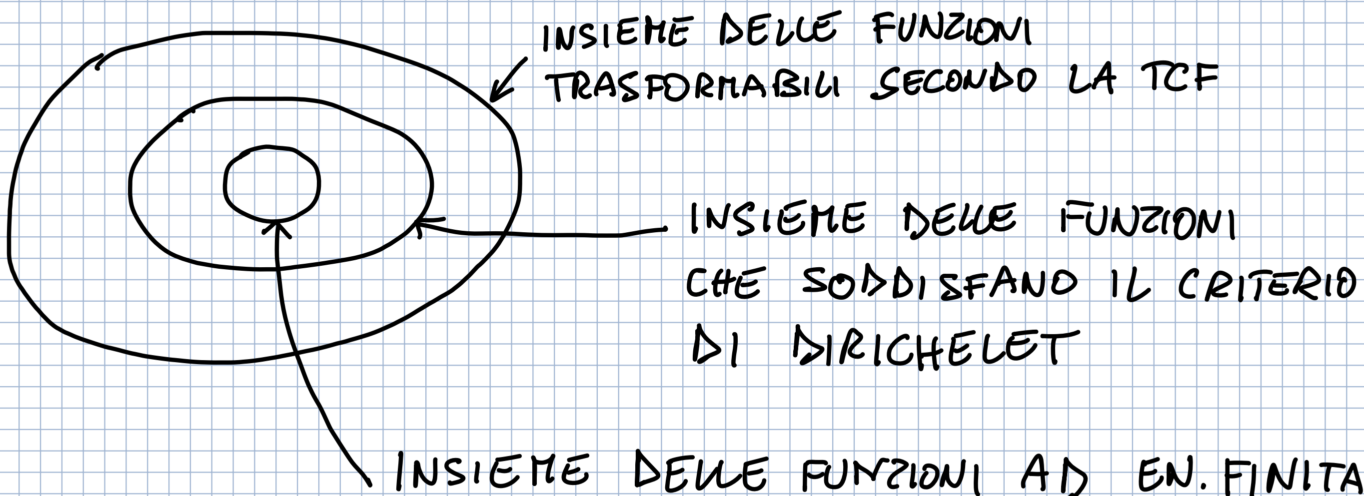




f = FREQUENZA [Hz] $\qquad f \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt < \infty \implies \text{TCF ESISTE}$$

• CRITERIO DI DIRICHELET



SIMMETRIE

• HERMITIANA

$x(t)$ è REALE $\qquad x(t) = x^*(t)$

$$\Downarrow$$

$X(f)$ è HERMITIANA: $\implies X(-f) = \overline{X(f)}$

AMPIEZZA PARI

FASE DISPARI

= fa + → -f dà il segno -

$$X(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi(-f)t} \, dt = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, e^{-j2\pi f t} \, dt\right]^* =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\underset{\uparrow \text{è REALE}}{x(t)}\, e^{-j2\pi f t} \, dt}_{X f}\right]^* = X^*(f)$$

MODULO PARI

FASE DISPARI

PARITÀ

$$|X(-f)| = |X^*(f)| = |X(f)|$$

$$\angle X(-f) = \angle X^*(f) = -\angle X(f)$$

DISPARITÀ

SEGNALI REALI E PARI

$x(t)$ REALE $\Rightarrow$ $x(t) = x^*(t)$

$x(t)$ PARI $\Rightarrow$ $x(t) = x(-t)$

$\Downarrow$

$X(f)$ è REALE E PARI

$$X(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi(-f)t}\, dt =$$

$t' = -t$
$t = -t'$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t')\, e^{-j2\pi f t'}\, dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, e^{-j2\pi f t'}\, dt' = X(f)$$

$$X(-f) = X(f)$$
$$X(-f) = X^*(f)$$

$\Rightarrow$ $X(f) = X^*(f)$ REALE

SEGNALI REALI E DISPARI

$X(t)$ REALE $\Rightarrow$ $x(t) = x^*(t)$

$X(-t) = -X(t)$ DISPARI

$\Downarrow$

$X(f)$ è IMMAGINARIA E DISPARI

$t' = -t$
$t = -t'$

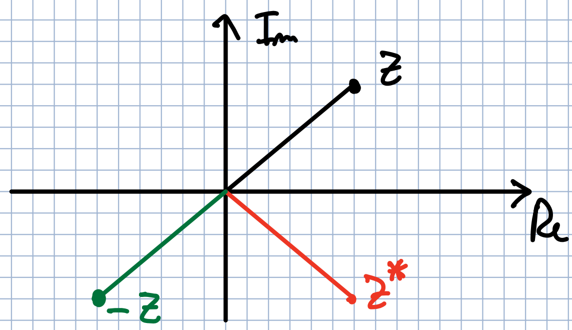
$$X(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t')\, e^{-j2\pi f t'}\, dt' =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -x(t')\, e^{-j2\pi f t'}\, dt' = -X(f)$$

$$X(-f) = -X(f) \qquad \text{DISPARI}$$

$$X(-f) = X^*(f)$$

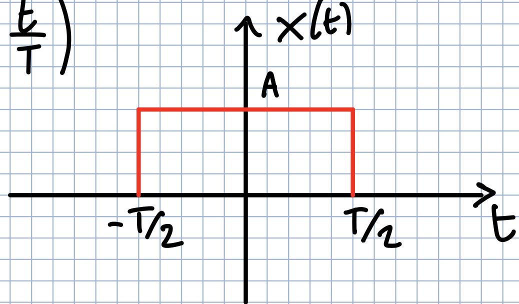
$$X^*(f) = -X(f) \qquad \text{IMM. PURO}$$



$$-z = z^* \iff \mathrm{Re}\{z\} = 0$$

ES.

$$x(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$



$$X(f) = ?$$

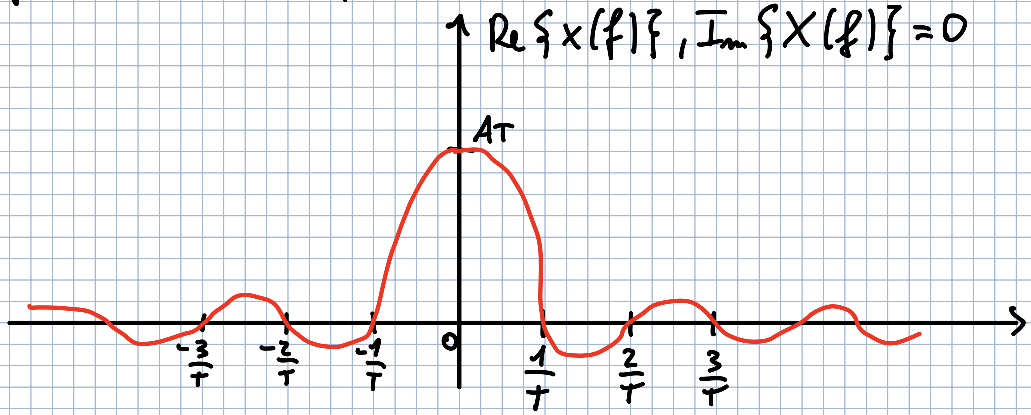
SVOLGIMENTO

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{t}\right) e^{-j2\pi f t}\,dt = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t}\,dt =$$

$$= A\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t}\,dt = A\left(-\frac{1}{j2\pi f}\right) e^{-j2\pi f t}\Big|_{-T/2}^{T/2} =$$

$$A\cancel{j}\left(\frac{1}{\cancel{j}\pi f}\right)\left[\frac{-e^{-j\pi f T} + e^{j\pi f T}}{2j}\right] = \frac{A}{\pi f}\,\mathrm{sen}(\pi f T) = AT\,\mathrm{sinc}(\pi f T)$$

$$X(f) = AT\,\text{sinc}(fT)$$ REALE PARI



sinc si ANNULLA QUANDO L'ARGOMENTO E' INTERO

fT è INTERO

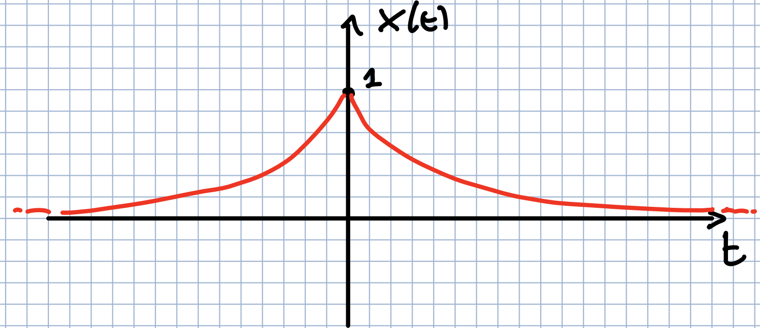
in 0 sinc = 1

$\text{sinc}(0) = 1$

ES. - TCF DI UN ESPONENZIALE BILATERA

$$x(t) = e^{-|t|}$$

$$X(f) = ?$$



$x(t)$ REALE, PARI

$\Downarrow$

$X(f)$ REALE, PARI

SVOLGIMENTO

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-j2\pi f t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t} e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-j2\pi f)t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+j2\pi f)t}\, dt =$$

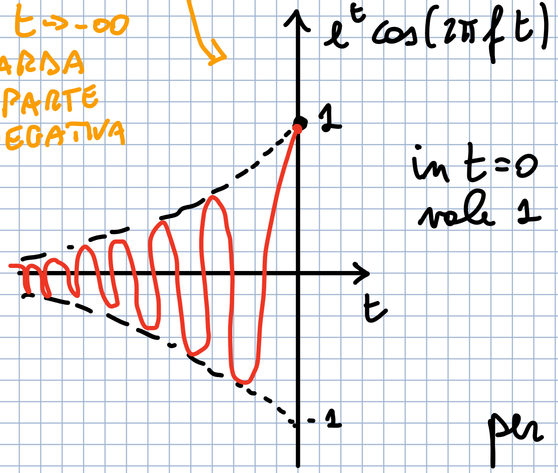
$$= \frac{1}{1-j2\pi f} e^{(1-j2\pi f)t}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-(1+j2\pi f)} e^{-(1+j2\pi f)t}\Big|_{0}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{1-j2\pi f}(1-0) - \frac{1}{1+j2\pi f}(0-1) = \frac{1}{1-j2\pi f} + \frac{1}{1+j2\pi f}$$

$$\lim_{t\to-\infty} e^{(1-j2\pi f)t} = \lim_{t\to-\infty} e^{t}\cdot e^{-j2\pi f t} = e^{t}\cdot\left(\cos(2\pi f t) - j\,\mathrm{sen}(2\pi f t)\right) =$$

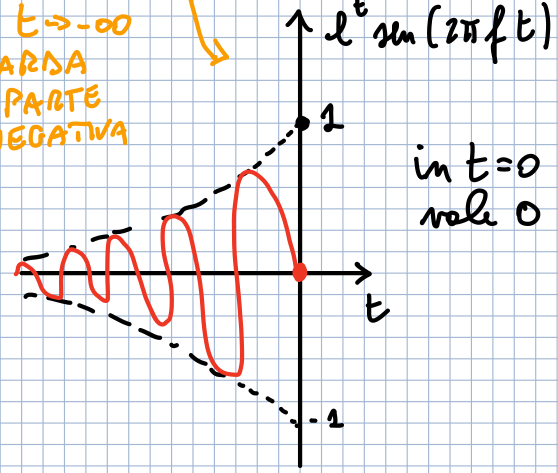
$$= \underbrace{e^{t}\cos(2\pi f t)}_{t\to-\infty} - j\,e^{t}\,\mathrm{sen}(2\pi f t) = 0$$

$t\to-\infty$
RIGUARDA LA PARTE NEGATIVA



in $t=0$ vale 1

$t\to-\infty$
RIGUARDA LA PARTE NEGATIVA



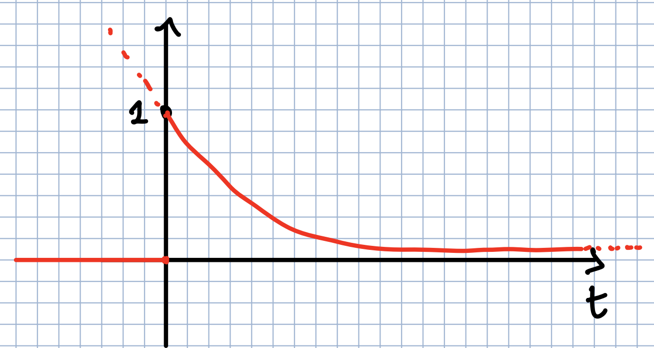
in $t=0$ vale 0

per $t\to-\infty$
ENTRAMBI VANNO A 0

$$X(f) = \underset{z}{\frac{1}{1-j2\pi f}} + \underset{z^*}{\frac{1}{1+j2\pi f}} = \underset{|z|^2}{\frac{1+\cancel{j2\pi f}+1-\cancel{j2\pi f}}{1+4\pi^2 f^2}} = \boxed{\frac{2}{1+4\pi^2 f^2}}$$

ES. - TCF DI UN ESPONENZIALE MONOLATERA

$$x(t) = e^{-t}\,u(t)$$



$X(f) = \,?$

$$X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\,u(t)\,e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t(1+j2\pi f)}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{1+j2\pi f}\,e^{-t(1+j2\pi f)}\Big|_{0}^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{1+j2\pi f}\right) = \boxed{+\frac{1}{1+j2\pi f}}$$

PARI
$\Downarrow$
HERMITIANA

$$X(-f) = X^*(f) \rightarrow X(-f) = \frac{1}{1-j2\pi f} \qquad X^*(f) = \frac{1^*}{(1+j2\pi f)^*} = \frac{1}{1-j2\pi f}$$

TEOREMI SU TCF

•) LINEARITÀ

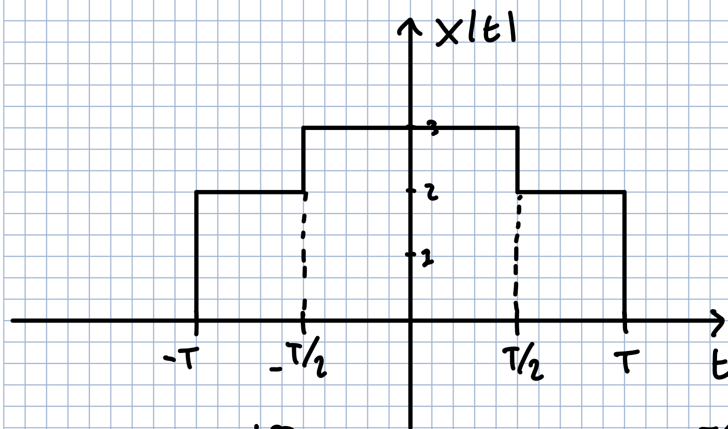
$$x(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$$
$$\Downarrow$$
$$X(f) = a X_1(f) + b X_2(f)$$
$$X_1(f) = TCF[x_1(t)]$$
$$X_2(f) = TCF[x_2(t)]$$

$\Rightarrow$

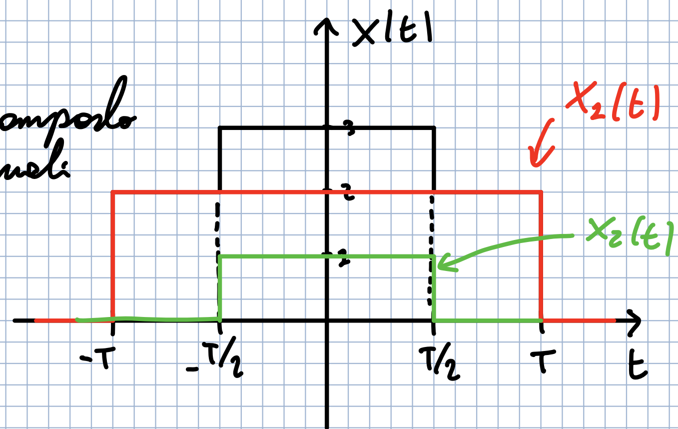
DIM.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [a x_1(t) + b x_2(t)] e^{-j2\pi f t} dt =$$
$$= a \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-j2\pi f t} dt}_{X_1(f)} + b \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) e^{-j2\pi f t} dt}_{X_2(f)}$$
$$= a X_1(f) + b X_2(f)$$

ES. Calcolare la TCF del segnale in figura



$\Rightarrow$ posso scomporlo in 2 segnali



$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-T}^{-T/2} 2 e^{-j2\pi f t} dt + \int_{-T/2}^{T/2} 3 e^{-j2\pi f t} dt + \int_{T/2}^{T} 2 e^{-j2\pi f t} dt$$

SFRUTTO LA LINEARITÀ

$$X(f) = X_1(f) + X_2(f)$$
$$X_1(f) = TCF\left[2\, rect\left(\frac{t}{2T}\right)\right]$$
$$X_2(f) = TCF\left[rect\left(\frac{t}{T}\right)\right]$$

$$\boxed{A\, rect\left(\frac{t}{T'}\right) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} A T' sinc(f T')}$$

$$x_1(t) = 2\, rect\left(\frac{t}{2T}\right) = A\, rect\left(\frac{t}{T'}\right)$$
con $A = 2 \quad T' = 2T$
$$X_1(f) = 2 \cdot 2T\, sinc(f \cdot 2T) = 4T\, sinc(2fT)$$

$$X_1(f) = 2 \cdot 2T\, sinc(f\, 2T) = 4T\, sinc(2fT)$$
$$X_2(f) = T\, sinc(fT)$$
$$X(f) = 4T\, sinc(2fT) + T\, sinc(fT)$$

•) DUALITÀ

Ip. $x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f)$

Th. $X(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} x(-f)$

DIM.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

scambio "t" ed "f"

$f' = -f$

$f = -f'$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(f)\, e^{-j2\pi t f}\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-f')\, e^{-j2\pi t(-f')}\, df' =$$

$$X(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(-f')\, e^{j2\pi f' t}\, df'}_{ATCF[x(-f)]} = ATCF[x(-f)]$$

$$x(-f) = TCF[X(t)]$$

$$\Downarrow$$

$$X(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} x(-f)$$

ESEMPIO

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) = T\, sinc(fT)$$

Calcoliamo la TCF di

$$\boxed{X(t) = T\, sinc(Tt)}$$

$\Downarrow$ DUALITÀ

è pari

$$x(-f) = rect\left(\frac{-f}{T}\right) = \boxed{rect\left(\frac{f}{T}\right)}$$

Calcolare la TCF di

$$x(t) = A\, sinc(Ft)$$

$$X(f) = A\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(Ft)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = A\int_{-\infty} \frac{sin(\pi F t)}{\pi F t}\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$x(t) = A\,\frac{F}{F}\,\text{sinc}(Ft) = \frac{A}{F}\cdot F\,\text{sinc}(Ft) = \boxed{\frac{A}{F}\,\text{rect}\left(\frac{f}{F}\right) = X(f)}$$

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

$$a\,x(t) \Longleftrightarrow a\,X(f)$$

•) TH. DEL RITARDO

Ip. $x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f)$

$y(t) = x(t - t_0)$ → ritardato di t_0

Th. $Y(f) = X(f)\,e^{-j2\pi f t_0}$

DIM.

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)\,e^{-j2\pi f t}\,dt = \qquad \begin{array}{l} t' = t - t_0 \\ t = t' + t_0 \end{array}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\,e^{-j2\pi f (t'+t_0)}\,dt' = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\,e^{-j2\pi f t'}\,dt'}_{X(f)} \cdot e^{-j2\pi f t_0} = X(f)\,e^{-j2\pi f t_0}$$

Disegnare lo spettro $Y(f)$

$$|Y(f)| = |X(f)|$$

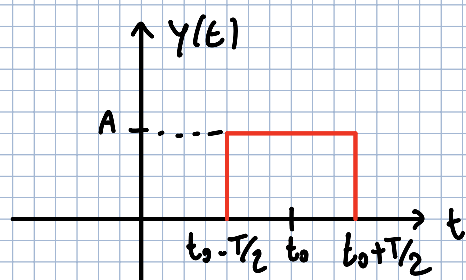
$$\angle Y(f) = \angle X(f) - 2\pi f t_0$$

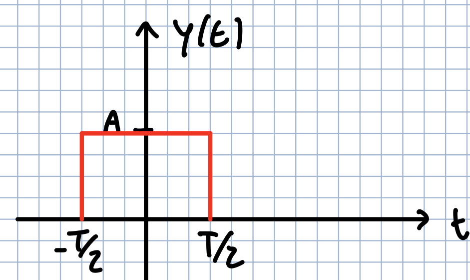
ESEMPIO

$$y(t) = \text{rect}\left(\frac{t - t_0}{T}\right)$$

$$Y(f) = TCF[y(t)] = TCF[x(t)]\,e^{-j2\pi f t_0} = T\,\text{sinc}(ft)\,e^{-j2\pi f t_0}$$

$$\begin{cases} y(t) = x(t - t_0) \\ x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \end{cases}$$





•) Th. del CAMBIAMENTO DI SCALA LINEARE

Ip. $\begin{cases} x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \\ y(t) = x(\alpha t) \qquad \alpha \neq 0 \end{cases}$

Th. $$Y(f) = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

DIM.

2 casi $\nearrow \alpha > 0$; $\searrow \alpha < 0$

$\boxed{\alpha > 0}$ $\qquad t' = \alpha t \qquad t = \frac{t'}{\alpha}$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi f \left(\frac{t'}{\alpha}\right)} \frac{dt'}{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi \frac{f}{\alpha} t'} dt' = \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

$\boxed{\alpha < 0} \Rightarrow \alpha = -|\alpha|$ $\qquad t' = -|\alpha| t \qquad t = \frac{t'}{-|\alpha|}$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi f \frac{t'}{-|\alpha|}} \frac{dt'}{-|\alpha|} =$$

HO CAMBIATO GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} x(t') e^{-j2\pi f \frac{t'}{|\alpha|}} \frac{dt'}{-|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi \frac{f}{\alpha} t'} dt' = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

RICAMBIO GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE

$$Y(f) = \begin{cases} \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right) & \alpha > 0 \\ \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right) & \alpha < 0 \end{cases} \qquad Y(f) = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

ESEMPIO

$y(t) = rect\left(\frac{t}{2t}\right)$

$$X(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) = T\,\text{sinc}(fT)$$

$$Y(t) = X(\alpha t) \qquad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$y(t) = \text{rect}\left(\frac{\alpha t}{T}\right) \qquad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$Y(f) = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right) = \frac{1}{|\alpha|} T\,\text{sinc}\left(\frac{f}{\alpha}T\right) = \frac{1}{|1/2|} T\,\text{sinc}\left(\frac{f}{1/2}T\right) =$$

$$= 2T\,\text{sinc}(2Tf)$$

Th. DELLA MODULAZIONE (NEI SISTEMI WIRELESS)

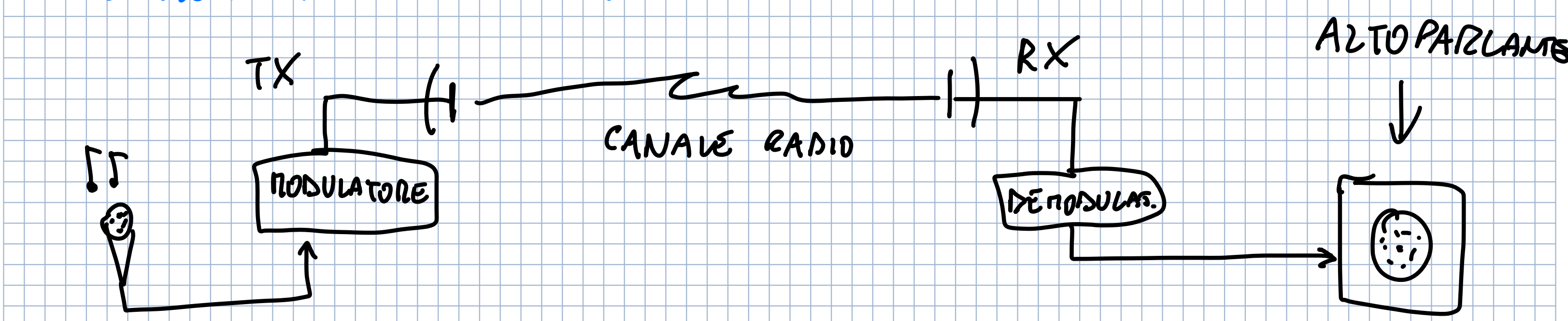
Cosa è una modulazione?

SEGNALE MODULANTE $x(t)$ → $\otimes$ ← MOLTIPLICATORE → $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$

↑ $\cos(2\pi f_0 t)$ — OSCILLAZIONE ALLA FREQUENZA f_0

$y(t)$: È UN SEGNALE MODULATO (con un coseno)

Serve a portare un segnale da frequenze basse (segnali AUDIO), a frequenze più elevate in modo che esso possa essere trasmesso senza cavo (Wireless)

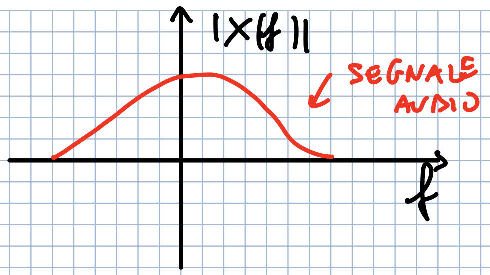


$$\text{Ip.} \begin{cases} y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) \\ x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \end{cases}$$

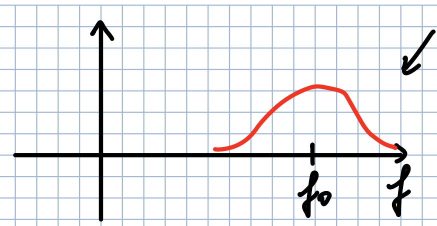
$$\Downarrow$$

$$\text{Th.} \quad \boxed{Y(f) = \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0)}$$

UN SEGNALE VIENE PORTATO DA UN PUNTO DI VISTA SPETTRALE NELL'INTORNO DELLA FREQUENZA f_0



MODUL. CON cos a f_0 $\Longrightarrow$



IL SEGNALE VIENE TRASLATO

DIM.

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f_0 t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

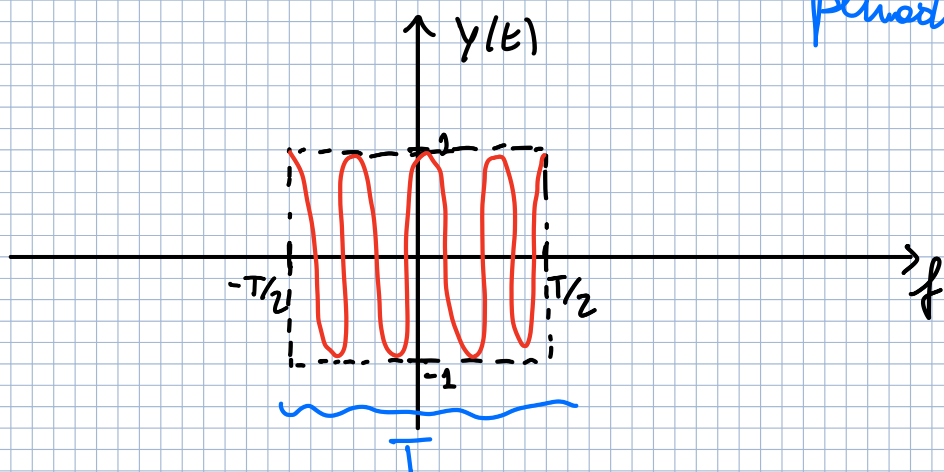
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi (f-f_0)t}\, dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi (f+f_0)t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} X(f-f_0) + \frac{1}{2} X(f+f_0)$$

ESEMPIO

$$y(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$$

periodo T

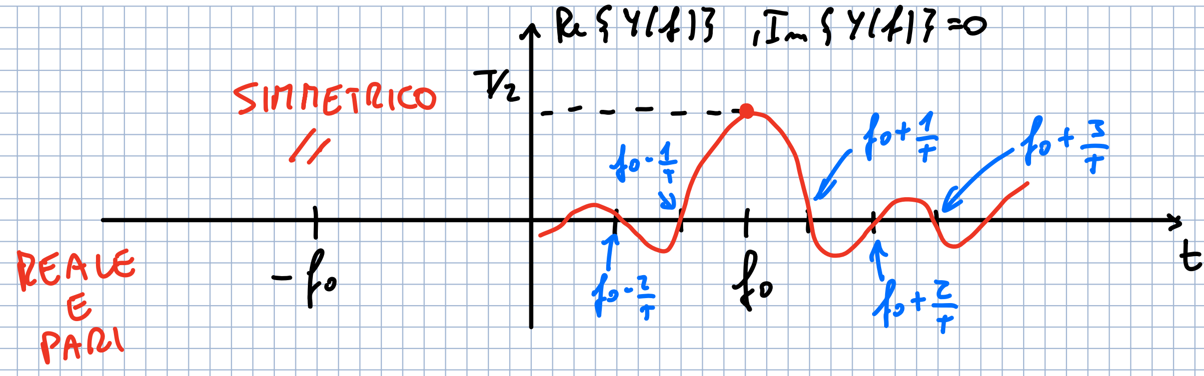


$$Y(f) = \frac{1}{2} X(f-f_0) + \frac{1}{2} X(f+f_0)$$

$$X(f) = \text{TCF}[x(t)], \quad x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$X(f) = T\,\text{sinc}(fT) \qquad Y(f) = \frac{T}{2}\,\text{sinc}[(f-f_0)T] + \frac{T}{2}\,\text{sinc}[(f+f_0)T]$$



•) MODULAZIONE CON SENO

Ip. $\begin{cases} x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \\ y(t) = x(t)\sin(2\pi f_0 t) \end{cases}$

Th. $Y(f) = \frac{1}{2j}X(f-f_0) - \frac{1}{2j}X(f+f_0)$

DIM.

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f_0 t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2j}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi(f-f_0)t}\, dt}_{X(f-f_0)} - \frac{1}{2j}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi(f+f_0)t}\, dt}_{X(f+f_0)} = \frac{1}{2j}X(f-f_0) - \frac{1}{2j}X(f+f_0)$$

•) MODULAZIONE SENO CON FASE GENERICA

Ip. $\begin{cases} x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \\ y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi) \end{cases}$

Th. $Y(f) = \frac{e^{j\varphi}}{2}X(f-f_0) + \frac{e^{-j\varphi}}{2}X(f+f_0)$

DIM.

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \frac{e^{j\varphi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi(f-f_0)t}\, dt + \frac{e^{-j\varphi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi(f+f_0)t}\, dt =$$

$$= \frac{e^{j\varphi}}{2} X(f-f_0) + \frac{e^{-j\varphi}}{2} X(f+f_0)$$

•) MODULAZIONE CON ESPONENZIALE COMPLESSO

Ip. $\begin{cases} x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \\ y(t) = x(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \end{cases}$

Th. $Y(f) = X(f-f_0)$

DIM.

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t}\, dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi(f-f_0)t}\, dt}_{X(f-f_0)} = X(f-f_0)$$

DUALITA'

$$x(t-t_0) \Longleftrightarrow X(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$$

$$x(t)\, e^{+j2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow X(f-f_0)$$

•) TH. DELLA DERIVAZIONE

Ip. $\begin{cases} x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \\ y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \end{cases} \Longrightarrow Y(f) = j2\pi f\, X(f)$

DIM.

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \frac{d}{dt}\left[e^{j2\pi f t}\right] df =$$

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, j2\pi f\, e^{j2\pi f t}\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{j2\pi f\, X(f)}_{\substack{\text{UNO SPETTRO} \\ G(f)}} e^{j2\pi f t}\, df = Y(t)$$

$$\Rightarrow ATCF[G(f)] = y(t)$$

$$TCF[ATCF[G(f)]] = TCF[y(t)] \quad \rightarrow \quad G(f) = Y(f)$$

•) TH. DELL' INTEGRAZIONE

$$\text{Ip.} \begin{cases} x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \\ y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

DIM.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha \Rightarrow x(t) = \frac{d}{dt} y(t) \Rightarrow X(f) = j2\pi f\, Y(f)$$

$$\Downarrow$$

potrebbe divergere e quindi non avere soluzione in $f = 0$ →

$$Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

MA ABBIAMO POSTO COME CONDIZIONE:

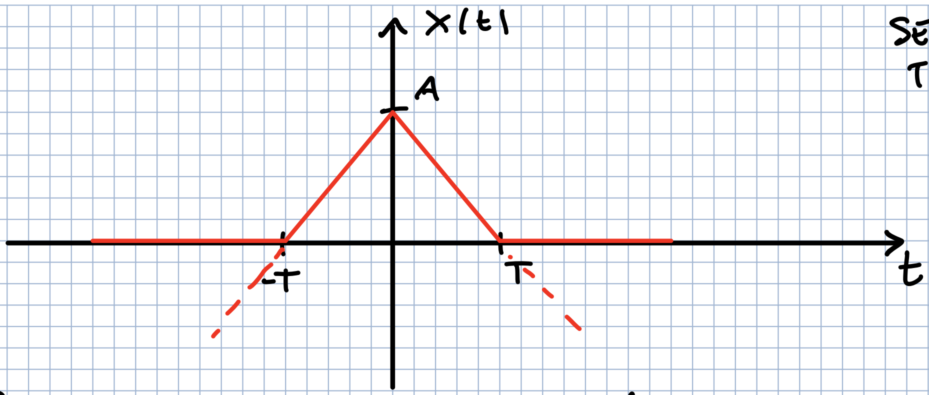
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = 0 \Rightarrow X(f)\Big|_{f=0} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt\Big|_{f=0} = X(f)\Big|_{f=0} = X(0) = 0$$

ESEMPIO DI APPLICAZIONE TH. INTEGR.

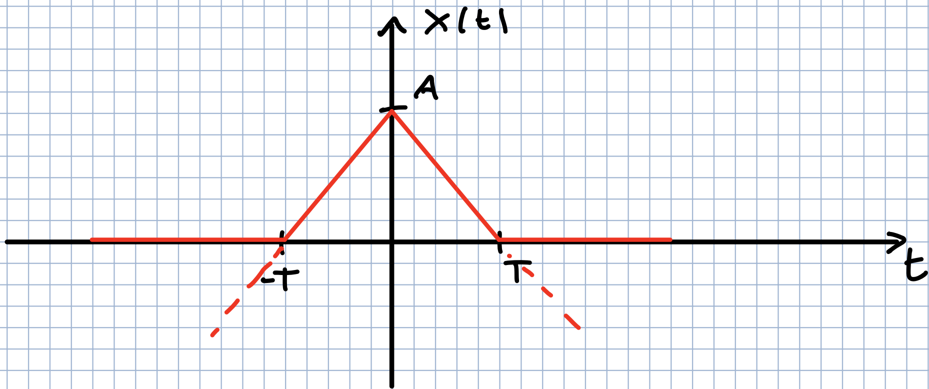
$$x(t) = A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right) rect\left(\frac{t}{2T}\right) \qquad X(f) = ?$$

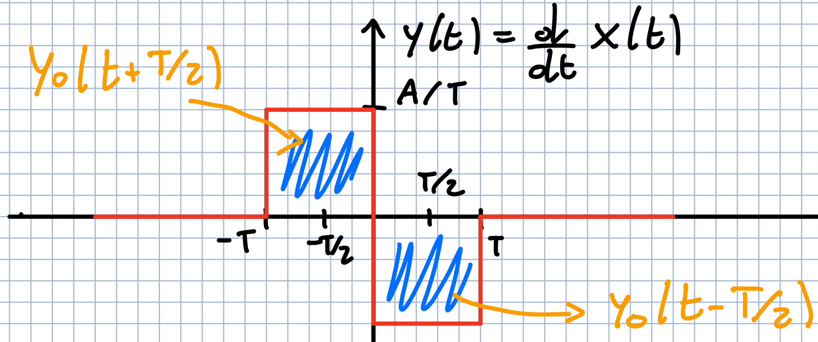
SEGNALE TRIANGOLARE



$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} A\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)e^{-j2\pi f t}\,dt \rightarrow \text{MEGLIO DI NO!}$$

ALTRA STRADA per calcolare $X(f)$:





$$x(t)=\int_{-\infty}^{t} y(\alpha)\,d\alpha \Rightarrow X(f)=\frac{Y(f)}{j2\pi f}$$

$X(f)$ la posso calcolare se $Y(f)$ ESISTE E:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt=0$$

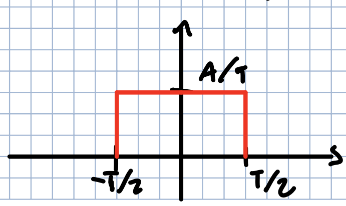
✓ perché se faccio la somma delle AREE SOTTESE ALLA CURVA = 0

posso applicare il teorema

$$X(f)=\frac{Y(f)}{j2\pi f} \qquad \text{ma } Y(f)=?$$

$$y(t)=y_0(t-(-T/2))-y_0(t-T/2)$$

$y_0(t)$



$$y_0(t) = \frac{A}{T}\, \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$Y(f) = Y_0(f)\, e^{-j2\pi f(-T/2)} - Y_0(f)\, e^{-j2\pi f T/2} =$$

$$= Y_0(f)\left[e^{j2\pi f T/2} - e^{-j2\pi f T/2}\right]$$

TCF rect

$$Y_0(f) = \frac{A}{\cancel{T}} \cdot \boxed{\cancel{T}\, \mathrm{sinc}(Tf)} = A\, \mathrm{sinc}(Tf)$$

$$Y(f) = A\, \mathrm{sinc}(Tf)\left[e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}\right]$$

$$X(f) = \frac{Y(f)}{j2\pi f} = \frac{A}{\pi f}\, \mathrm{sinc}(Tf)\, \frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j} = \frac{A}{\pi f}\, \mathrm{sinc}(Tf)\, \mathrm{sen}(\pi f T) =$$

$$= A T\, \mathrm{sinc}(Tf)\, \frac{\mathrm{sen}(\pi f T)}{\pi f T} = AT\, \mathrm{sinc}(Tf)\, \mathrm{sinc}(Tf) = \boxed{AT\, \mathrm{sinc}^2(Tf)}$$

moltiplico per $\frac{T}{T}$

$$\boxed{A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} AT\, \mathrm{sinc}^2(Tf)}$$

TEOREMA DELLA DERIVAZIONE IN FREQUENZA

$$\text{Ip.}\begin{cases} Y(f) = \dfrac{d}{df} X(f) \\ x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \end{cases} \Rightarrow \quad y(t) = -j2\pi t\, x(t)$$

DIM.

$$Y(f) = \frac{d}{df} X(f) = \frac{d}{df}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{d}{df}\left[e^{-j2\pi f t}\right] dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-j2\pi t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{-j2\pi t\, x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}_{TCF[\underbrace{-j2\pi t\, x(t)}_{y(t)}] = Y(f)} = Y(f)$$

TEOREMA DELL' INTEGRAZIONE IN FREQUENZA

$$\text{Ip.}\begin{cases} Y(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{f} X(\alpha)\, d\alpha \\ x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)\, d\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y(t) = -\frac{x(t)}{j2\pi t}$$

DIM.

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{f} X(\alpha)\, d\alpha \Rightarrow X(f) = \frac{d}{df}[Y(f)] \Rightarrow x(t) = -j2\pi t\, y(t)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = -\frac{x(t)}{j2\pi t}$$

$$\lim_{t\to 0} y(t) = K < +\infty \Rightarrow x(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)\, d\alpha = x(0) = 0$$

CONVOLUZIONE

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

TH. DELLA CONVOLUZIONE

Ip.

$$\left\{ x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f),\ y(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} Y(f),\ z(t) = x(t) \otimes y(t) \right.$$

TESI

$$Z(f) = X(f)\, Y(f)$$

DIM.

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \underset{(t)}{\int_{-\infty}^{+\infty}} \underset{(\tau)}{\int_{-\infty}^{+\infty}} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

* RAPPRESENTA IL RITARDO

$$= \underset{(\tau)}{\int_{-\infty}^{+\infty}} x(\tau) \underset{(t)}{\int_{-\infty}^{+\infty}} y(t\underbrace{-\tau}_{*})\, e^{-j2\pi f t}\, dt\, d\tau = \underset{(\tau)}{\int_{-\infty}^{+\infty}} x(\tau)\, Y(f)\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau =$$

$$= Y(f) \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(\tau)\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau}_{X(f)} = Y(f)\, X(f)$$

PROPRIETA' DELLA CONVOLUZIONE

COMMUTATIVA

$$x(t) \otimes y(t) = y(t) \otimes x(t)$$

DIM.

$$t - \tau = \tau'$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau')\, y(\tau')\, d\tau' = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau')\, x(t-\tau')\, d\tau' = y(t) \otimes x(t)$$

DISTRIBUTIVA

$$x(t) \otimes [y(t) + z(t)] = x(t) \otimes y(t) + x(t) \otimes z(t)$$

DIM.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,[y(t-\tau) + z(t-\tau)]\, d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, z(t-\tau)\, d\tau = x(t) \otimes y(t) + x(t) \otimes z(t)$$

ASSOCIATIVA

$$x(t) \otimes [y(t) \otimes z(t)] = [x(t) \otimes y(t)] \otimes z(t) = x(t) \otimes y(t) \otimes z(t)$$

DIM

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} y(\alpha)\, z[(t-\tau) - \alpha]\, d\alpha\, d\tau$$

$$x(t) \otimes y(t) \otimes z(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \cdot [Y(f) \cdot Z(f)]$$

$$\parallel$$

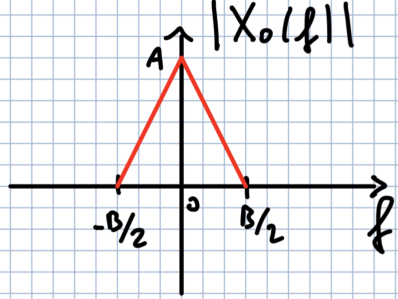
$$[x(t) \otimes y(t)] \otimes z(t) \Longleftrightarrow [X(f) \cdot Y(f)] \cdot Z(f)$$

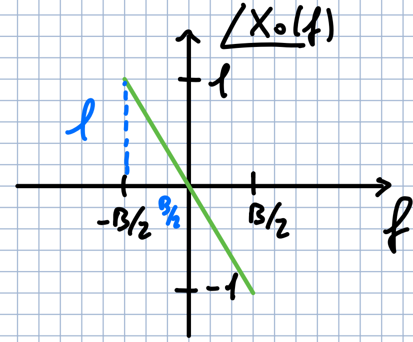
TH. DEL PRODOTTO

$$\text{Ip.} \begin{cases} z(t) = x(t) \cdot y(t) \\ x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f)\,, \quad y(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} Y(f) \end{cases} \Longrightarrow Z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

$x(t) = ATCF[X(f)]$

$X_0(f) = |X_0(f)| e^{j \angle X_0(f)}$





$m = -\frac{1}{B/2}$

$$|X_0(f)| = A\left(1 - \frac{|f|}{B/2}\right) \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

$$\angle X_0(f) = -\frac{1}{B/2} f = -2\pi f t_0 \;, \quad t_0 = \frac{1}{2\pi B/2} = \frac{1}{\pi B}$$

$$X(f) = X_0(f - f_0) + X_0(f + f_0)$$

$$x(t) = x_0(t) e^{j2\pi f_0 t} + x_0(t) e^{-j2\pi f_0 t} = 2x_0(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$x_0(t) = ATCF[X_0(f)] = ATCF[A(f) e^{-j\pi f t_0}] = a(t - t_0)$$

$$a(t) = ATCF[A(f)] = ATCF\left[A\left(1 - \frac{|f|}{B/2}\right)\text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)\right] = \frac{AB}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{B}{2}t\right)$$

$$x_0(t) = \frac{AB}{2}\text{sinc}^2\left[\frac{B}{2}(t - t_0)\right]$$

$$x(t) = 2x_0(t)\cos(2\pi f_0 t) = \underbrace{AB\,\text{sinc}^2\left[\frac{B}{2}(t-t_0)\right]}_{\text{SEGNALE MODULANTE}} \underbrace{\cos(2\pi f_0 t)}_{\text{OSCILLAZIONE}}$$

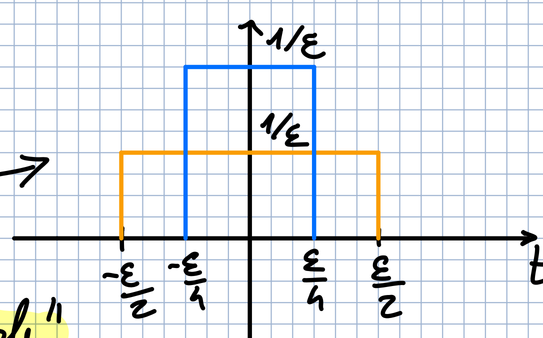
DELTA DI DIRAC

Serve per allargare la classe dei segnali a ENERGIA INFINITA

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\text{rect}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

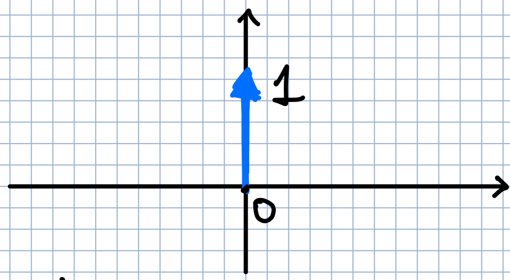
$\frac{1}{\varepsilon}$ = AMPIEZZA

AREA = 1 non dipende da ε



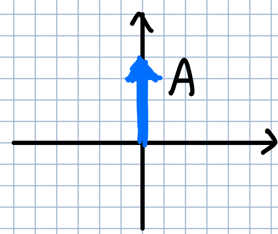
se diminuisce la durata cresce l'ampiezza "direttamente proporzionale"

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)$$



L'AMPIEZZA E' INFINITA, MA L'AREA SI PUO' SEMPRE MISURARE

$A\delta(t)$



$$A\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} A\,\delta_\varepsilon(t) = A \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A\,\delta(t)\,dt = A \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt}_{\text{fa } 1} = A$$

PROPRIETA' FONDAMENTALI

1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

DIM.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) dt =$$

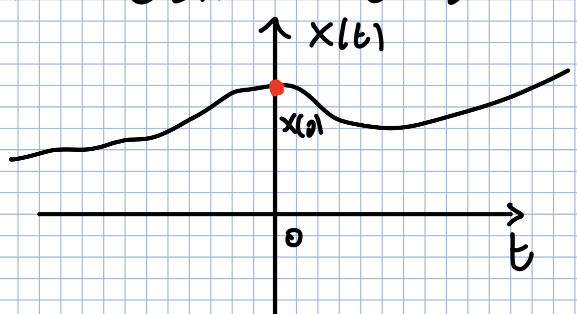
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} 1\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1$$

2) **PROPRIETA' CAMPIONATRICE**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t)\,dt = x(t)\Big|_{t=0} = x(0)$$

Ip. $x(t)$ CONTINUA in $t=0$

SE PRENDO UN SEGNALE $x(t)$ QUALUNQUE, LA 2ª PROPRIETA' MI RESTITUISCE IL VALORE DEL SEGNALE in $t=0$



TH. MEDIA

PIU' STRINGO L'INTERVALLO PIU' MI AVVICINO A $x(0)$

⇒ PROPRIETÀ INTEGRALI DELLA DELTA DI DIRAC

1) $\delta(t) = \delta(-t)$ PARITÀ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-t)\, x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, x(t)\, dt$$

SIGNIFICATO DI PARITÀ IN SENSO DI INTEGRALE

DIM.

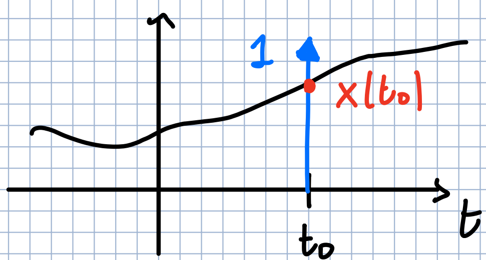
$t' = -t \quad t = -t'$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-t)\, x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t')\, x(-t')\, dt' = x(-t')\Big|_{t'=0} = x(0)$$

2) TRASLAZIONE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \delta(t-t_0)\, dt = x(t_0)$$

$t - t_0 = t'$
$t = t' + t_0$



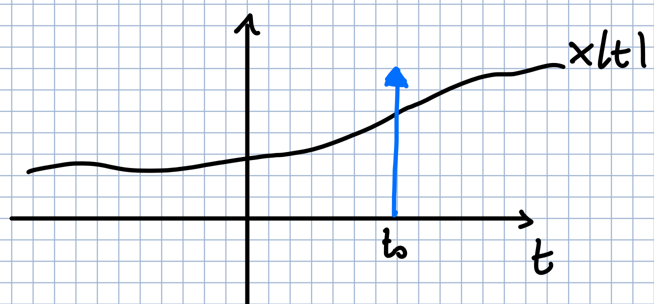
DIM.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \delta(t-t_0)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t'+t_0)\, \delta(t')\, dt' =$$

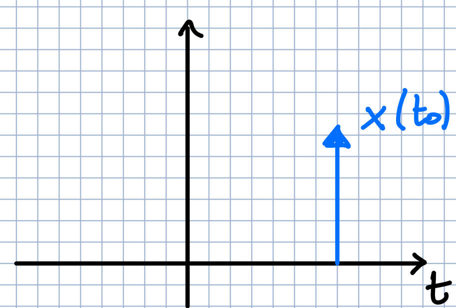
$$x(t'+t_0)\Big|_{t'=0} = x(t_0)$$

DA QUESTA PROPRIETÀ DERIVA QUESTA

3) $x(t)\, \delta(t-t_0) = x(t_0)\, \delta(t-t_0)$



⇒



IL PRODOTTO DI UNA DELTA CON UNA FUNZIONE CONTINUA È UN'ALTRA DELTA, DOVE PERÒ VARIA L'AREA.

IL RISULTATO È UNA DELTA CON AREA X CALCOLATA in t_0

L'AREA VIENE MOLTIPLICATA PER IL VALORE DEL PUNTO DOVE È APPLICATA LA DELTA → t_0

4) CONVOLUZIONE

$$x(t) \otimes \delta(t) = x(t)$$

DIM.

per la parità

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(\tau-t)\,d\tau = x(t)$$

per la campionatrice

$\Rightarrow$ la Delta di Dirac è l'elemento neutro per l'operazione convoluzione (OPERA SU FUNZIONI)

$$\Rightarrow \boxed{x(t) \otimes \delta(t-t_0) = x(t-t_0)}$$

FARE LA CONVOLUZIONE CON LA DELTA TRASLATA VUOL DIRE TRASLARE IL SEGNALE

5) CAMPIONAMENTO CON CAMBIO DI SCALA

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(\alpha t)\,dt = \frac{x(0)}{|\alpha|} \qquad (\alpha \neq 0)$$

DIM. $\boxed{\alpha > 0}$ $\qquad \alpha t = t' \qquad t = \frac{t'}{\alpha}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(\alpha t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{t'}{\alpha}\right)\delta(t')\,\frac{dt'}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\,x(0)$$

$\boxed{\alpha < 0}$ $\qquad -|\alpha| t = t' \qquad t = -\frac{t'}{|\alpha|}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(\alpha t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{t'}{\alpha}\right)\delta(t')\,-\frac{dt'}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|}\int_{+\infty}^{-\infty} x\left(\frac{t'}{\alpha}\right)\delta(t')\,dt' =$$

$$= \frac{1}{|\alpha|}\,x(0)$$

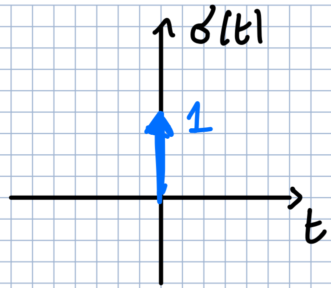
TCF DELLA DELTA DI DIRAC

$$\boxed{\delta(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} 1} \qquad \forall f$$

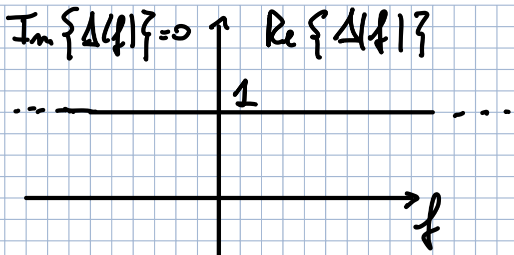
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-j2\pi f t}}_{x(t)}\,\delta(t)\,dt = 1$$

PER LA PROP. CAMPIONATRICE

$x(t) \longrightarrow$ CALCOLATA in $t=0$

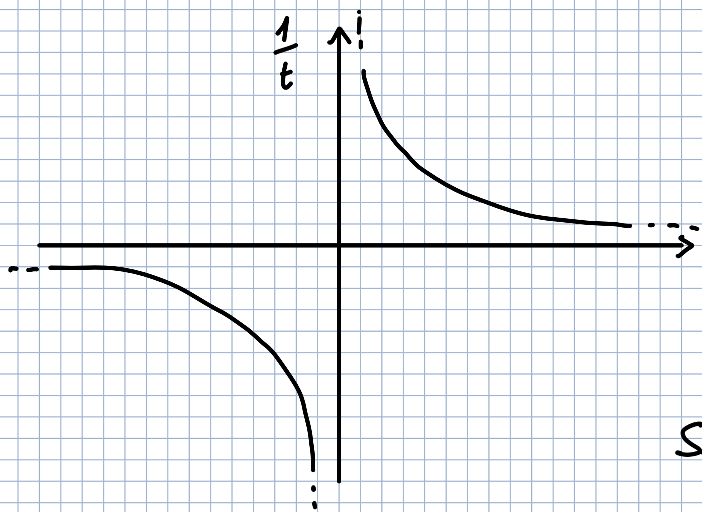


$\overset{TCF}{\Longleftrightarrow}$

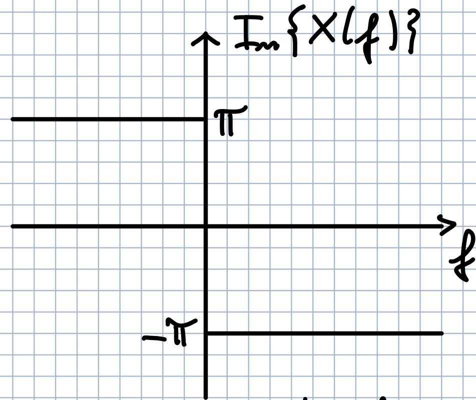


•) TRASFORMATA DEL SEGNALE $\frac{1}{t}$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{t}} \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) = -j\pi\, \mathrm{sgn}(f)$$



$\overset{TCF}{\Longleftrightarrow}$



$\mathrm{sgn}(f) =$ VALE 1 quando $f > 0$
VALE -1 quando $f < 0$

MA E' INVERTITO perchè ho un meno davanti

$\Downarrow$

$f < 0 \rightarrow \pi$

$f > 0 \rightarrow -\pi$

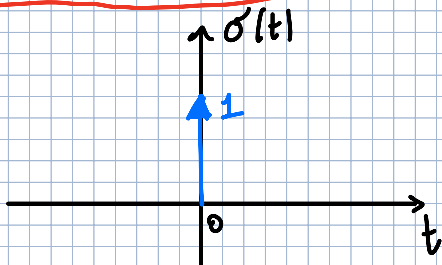
RELAZIONE TRA GRADINO E DIRAC

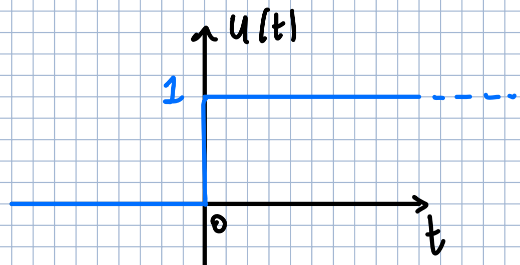
$u(t)$ $\qquad$ $\delta(t)$

$$\boxed{u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\alpha)\, d\alpha}$$

$\lim_{t \to 0^+} u(t) = 1$

$\lim_{t \to 0^-} u(t) = 0$

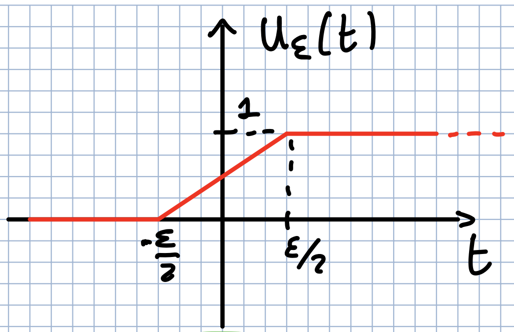




$$\boxed{\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)}$$

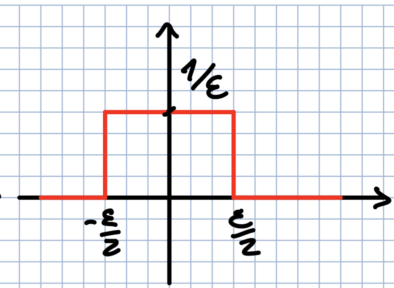
$\Downarrow$

PASSA DA 0 a 1 CON DISCONTINUITA'



$$u(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t)$$

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{d}{dt} u_\varepsilon(t) \Rightarrow$$



$$\boxed{\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d}{dt} u_\varepsilon(t) = \frac{d}{dt} \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

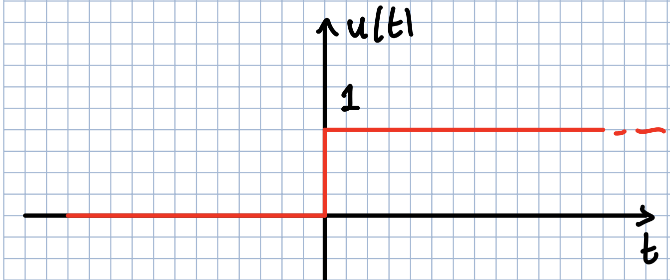
DEF.

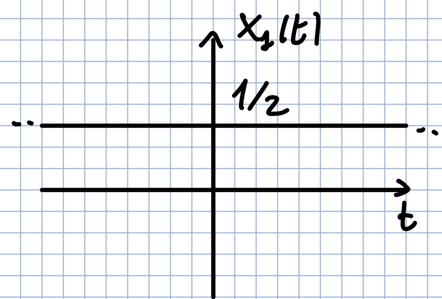
·) TCF DEL GRADINO

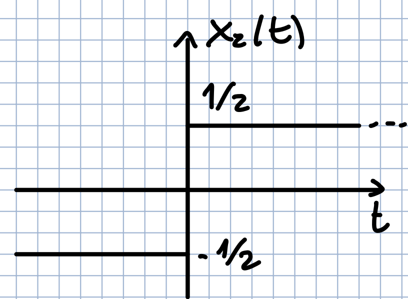
$$U(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-j2\pi f t} dt = -\frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_0^{+\infty} = \text{INS.}$$

ALTRA STRADA:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$







$$u(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$U(f) = X_1(f) + X_2(f)$$

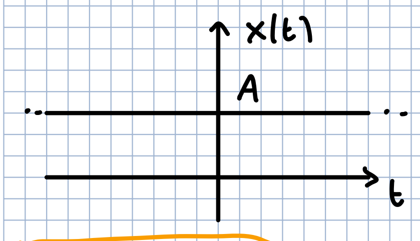
$$X_1(f) = ?$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{X_1(f) = \frac{1}{2}\delta(f)} \quad \text{perché}$$

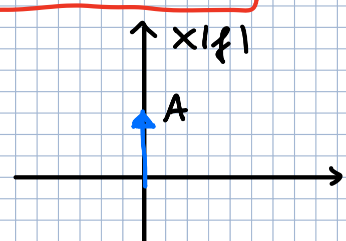
$$\delta(t) \Leftrightarrow 1$$

$$1 \ \forall t \Leftrightarrow \delta(-f) = \delta(f)$$

$$A \Leftrightarrow A\,\delta(f)$$



$\xLeftrightarrow{\text{TCF}}$



$$\frac{1}{t} \Leftrightarrow -j\pi \operatorname{sgn}(f)$$

$$-j\pi \operatorname{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{1}{-f}$$

$$\operatorname{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f}}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

$$X_2(f) = ? \rightarrow \boxed{X_2(f) = \frac{1}{j2\pi f}}$$

$$\boxed{U(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}}$$

TEOREMA DELL' INTEGRAZIONE COMPLETO

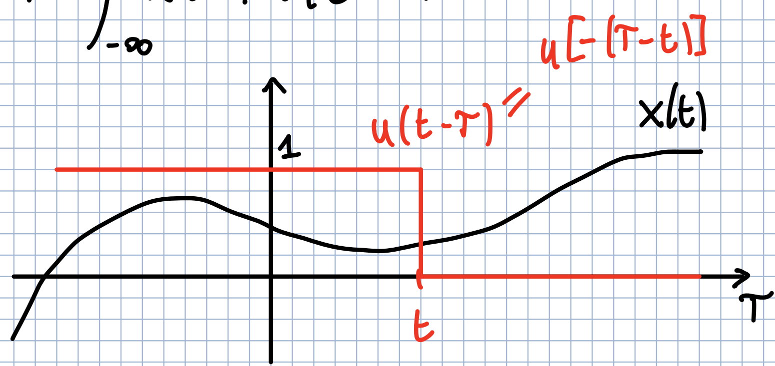
$$\text{Ip.} \begin{cases} x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) \\ y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{Y(f) = \underbrace{\frac{X(0)}{2}\delta(f)}_{\text{COMPARE QUANDO:}} + \frac{X(f)}{j2\pi f}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt \neq 0 \;(\to \in TCF) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = X(0) = X(f)\Big|_{f=0} = \left.\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt\right|_{f=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt$$

DIM.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

$$x(t) \otimes u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$



$$= \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau = y(t) = x(t) \otimes u(t)$$

PER TH. CONV. $Y(f) = X(f) \cdot U(f) =$ $\qquad U(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$

$$= \frac{1}{2} X(f)\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} X(0)\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f}} = Y(f)$$

$$\Rightarrow \quad \delta(t) \Longleftrightarrow 1 \quad \forall f$$

$$\Rightarrow \quad \delta(t-t_0) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} e^{-j2\pi f t_0}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = e^{-j2\pi f t_0}$$

PER LA DUALITÀ, se prendo:

$$e^{-j2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow \delta(-f-f_0)$$

$$e^{j2\pi(-f_0)t} \Longleftrightarrow \delta(f+f_0)$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow \delta(f-f_0)$$

$$\boxed{\begin{aligned} e^{j2\pi f_0 t} &\Longleftrightarrow \delta(f-f_0) \\ e^{j2\pi(-f_0)t} &\Longleftrightarrow \delta(f+f_0) \end{aligned}}$$

ESEMPIO: CALCOLO della TCF di SINUSOIDI

TCF di un COSENO

HA EN. INF. PERIODICA

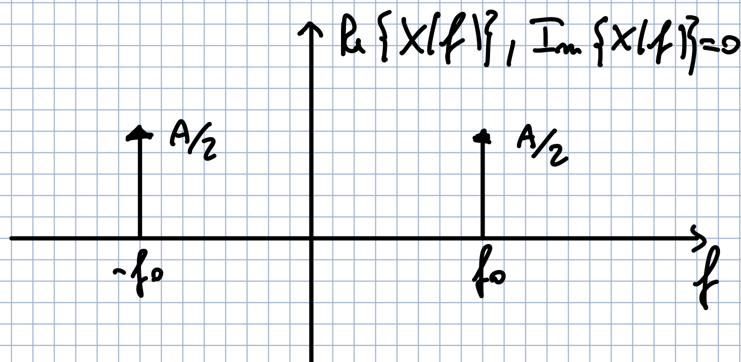
$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\cos(2\pi f_0 t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A\, \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t}\, e^{-j2\pi f t}\, dt + \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 t}\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$\frac{A}{2}\, TCF\left[e^{j2\pi f_0 t}\right] + \frac{A}{2}\, TCF\left[e^{-j2\pi f_0 t}\right] = \frac{A}{2}\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}\delta(f+f_0)$$



REALE E PARI

TCF di un SENO

$$x(t) = A \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)$$

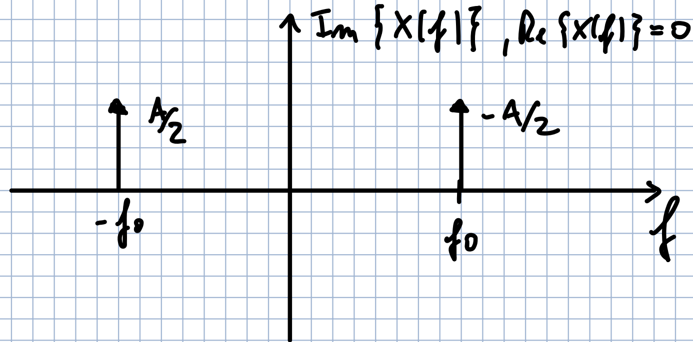
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A \left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} \right) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt - \frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$\frac{A}{2j} \mathrm{TCF}\left[e^{j2\pi f_0 t} \right] - \frac{A}{2j} \mathrm{TCF}\left[e^{-j2\pi f_0 t} \right] = \frac{A}{2j} \delta(f - f_0) - \frac{A}{2j} \delta(f + f_0)$$

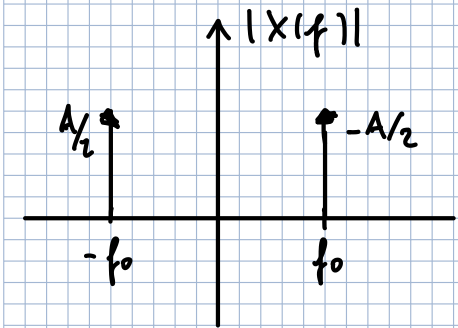
$$\frac{A}{2j} \cdot \frac{j}{j} = -j\frac{A}{2}$$

$$-\frac{A}{2j} = +j\frac{A}{2}$$

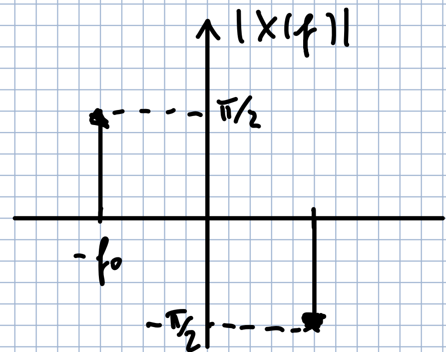


IMM. E DISPARI

MODULO



FASE



TCF DI UNA SINUSOIDE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + f_0)$$

DIM. BIUNIVOCITA'

$$x(t) \overset{\mathrm{TCF}}{\Longleftrightarrow} X(f)$$

$$X(f) \overset{\mathrm{ATCF}}{\Longleftrightarrow} x(t)$$

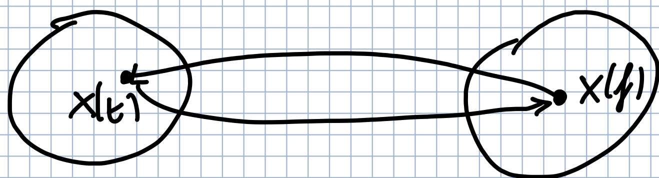
DIM.

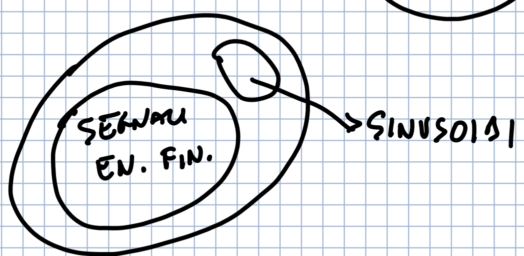
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty \atop (t)}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty \atop (\alpha)}^{+\infty} X(\alpha)\, e^{j2\pi \alpha t}\, d\alpha}_{x(t)}\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty \atop (\alpha)}^{+\infty} X(\alpha) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{j2\pi \overbrace{(\alpha - f)}^{f'} t}\, dt}_{TCF[1]\big|_{f'=\alpha-f} = \delta(f') = \delta(\alpha - f) = \delta(f-\alpha)}\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)\, \delta(f-\alpha)\, d\alpha = X(f) \otimes \delta(f) = X(f)$$





SI ALLARGA LA CLASSE DI SEGNALI SU CUI CALCOLA LA TCF.

ANALISI ENERGETICA DEI SEGNALI APERIODICI

- CORRELAZIONE TRA SEGNALI

x, y SONO SEGNALI

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\, dt$$

← diff. tra correl. e convoluzione.

- AUTOCORRELAZIONE

$$C_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

PROPRIETÀ:

1) $C_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = E_x$ → ENERGIA DI X

2) $C_x^*(\tau) = C_x(-\tau)$ HERMITIANA

DIM.

$$C_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-(-\tau))\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t+\tau)\, dt = \qquad \begin{matrix} t+\tau = t' \\ t = t'-\tau \end{matrix}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t'-\tau)\, x^*(t')\, dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t')\, x(t'-\tau)\, dt' =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, x^*(t'-\tau)\, dt' \right]^* = C_x^*(\tau)$$

se $x(t)$ è REALE $\Rightarrow C_x(-\tau) = C_x(\tau)$ REALE E PARI

TCF AUTOCORRELAZIONE

$$C_x(\tau) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} |X(f)|^2 = S_x(f) \Rightarrow$$ DENSITÀ SPETTRALE DI ENERGIA

DIM.

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau = \underset{(\tau)}{\int_{-\infty}^{+\infty}} \underbrace{\underset{(t)}{\int_{-\infty}^{+\infty}} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt}_{C_x(\tau)}\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau =$$

$$= \underset{(t)}{\int_{-\infty}^{+\infty}} x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t-\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau\, dt = \qquad \begin{matrix} t-\tau = \tau' \\ \tau = t-\tau' \end{matrix}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau')\, e^{-j2\pi f(t-\tau')}\, d\tau'\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau')\, e^{-j2\pi f\tau'}\, d\tau' =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}_{X(f)} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau')\, e^{-j2\pi f\tau'}\, d\tau' \right]^*}_{X^*(f)} = X(f) \cdot X^*(f) = |X(f)|^2$$

$$E_x \text{ è } \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df \quad ?$$

DIM.

ATCF della DENSITÀ SPETTRALE

$$C_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) e^{j2\pi f \tau} \, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f \tau} \, df$$

$$C_x(\tau)\Big|_{\tau=0} = C_x(0) = E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f \tau} \, df \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

L'ENERGIA DI UN SEGNALE PUÒ ESSERE CALCOLATA SIA COME INTEGRALE IN FREQUENZA SIA IN TEMPO

TH. DI PARSEVAL

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) Y^*(f) \, df$$

$\Downarrow$

DA QUESTA DERIVA

$x(t) = y(t)$

$\Downarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

DIM.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) \, dt = \int_{-\infty \, (t)}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty \, (f)}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} \, df}_{x(t)} \, y^*(t) \, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t) e^{j2\pi f t} \, dt}_{} \, df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot Y^*(f) \, df$$

$Y^*(f)$

•) CORRELAZIONE E CONVOLUZIONE

$$C_{xy}(\tau) = x(\tau) \otimes y^*(-\tau)$$

DIM

$$x(\tau) \otimes y^*(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \cdot y^*[-(\tau-\alpha)]\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) y^*(\alpha-\tau)\, d\alpha = C_{xy}(\tau)$$

•) PERIODICIZZAZIONE DI SEGNALI APERIODICI

$x(t)$ APERIODICO

$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT_0)$ è PERIODICO di PERIODO T_0

DIM.

$$y(t-KT_0) \overset{\text{SE PERIODICO di } T_0}{=} y(t)$$

$$y(t-KT_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-KT_0-nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-(K+n)T_0) = \qquad K+n = n'$$

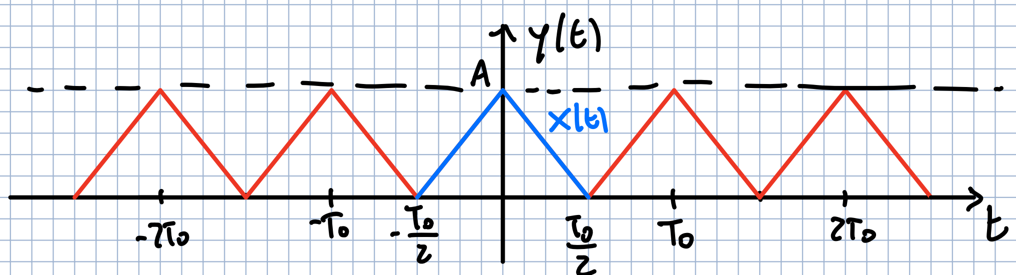
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-n'T_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT_0)$$

RELAZIONE TRA TSF e TCF

$y(t)$ è periodico ottenuto per periodicizzazione di un $x(t)$ APERIODICO

$$\text{Ip.}\begin{cases} y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT_0) \\ x(t) \Longleftrightarrow X(f) \end{cases} \qquad T_0 \in \mathbb{R}^+ \qquad \Rightarrow \quad Y_n = TSF[y(t)] = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

$\Rightarrow$ la TSF si ottiene "CAMPIONANDO" la TCF



$y(t)$ periodico $\Rightarrow$ posso sempre trovare almeno un $x(t)$:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0)$$

Calcolo della TSF di $y(t) \Rightarrow Y(f)$

$\Downarrow$

1) Trovo $x(t)$: $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0)$

2) Calcolo $X(f) = TCF[x(t)]$

3) Calcolo $Y_n = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{T_0}\right)$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0), \quad x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f)$$

$$\Rightarrow Y_n = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

$t - KT_0 = t'$

$t = t' + KT_0$

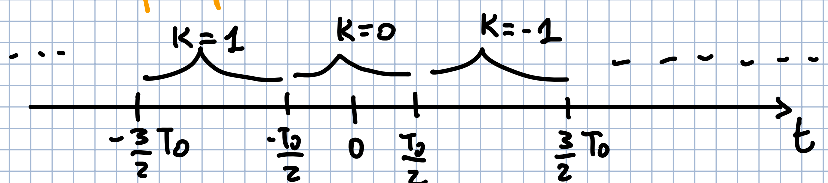
DIM.

$$Y_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(t - KT_0)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\sum_{K=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_0}{2} - KT_0}^{\frac{T_0}{2} - KT_0} x(t')\, e^{-j2\pi n f_0 (t' + KT_0)}\, dt'$$

$$= \frac{1}{T_0}\sum_{K=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{T_0}{2} - KT_0}^{\frac{T_0}{2} - KT_0} x(t')\, e^{-j2\pi n f_0 t'}\, dt' \underbrace{e^{-j2\pi n K}}_{n,K \in \mathbb{Z}} = 1 \quad , \; n \cdot K \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{1}{T_0}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, e^{-j2\pi n f_0 t'}\, dt'}_{X(f)|_{f = n f_0}} = \frac{1}{T_0} X(f)\Big|_{f = n f_0} = \frac{1}{T_0} X(n f_0) = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{T_0}\right) = Y_n$$



FORMULE DI POISSON

$$\boxed{1)\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT_0) = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{n}{T_0}\right) e^{j2\pi \frac{n t}{T_0}}}$$

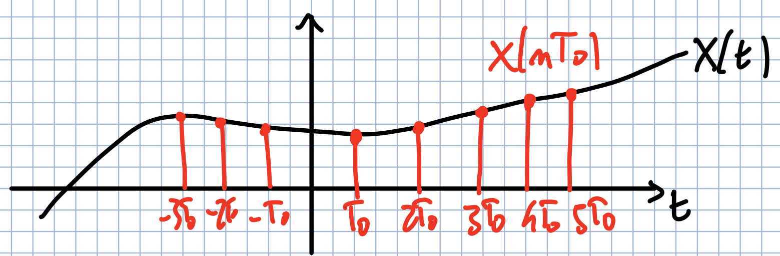
DIM.

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT_0) \qquad\qquad Y_n = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n e^{j2\pi n f_0 t} \qquad\qquad \text{ATSF}[y(t)]$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{T_0}\right) e^{j2\pi \frac{n t}{T_0}}$$

$$\boxed{2)\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_0) e^{-j2\pi f n T_0} = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f-\frac{n}{T_0}\right)}$$



$x(nT_0) \rightarrow$ CAMPIONAMENTO DEL SEGNALE $x(t)$

APPLICAZIONE DELLE FORMULE DI POISSON ALLA $\delta(t)$

$$1)\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT_0) = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{n}{T_0}\right) e^{j2\pi \frac{n t}{T_0}}$$

$x(t) = \delta(t)$

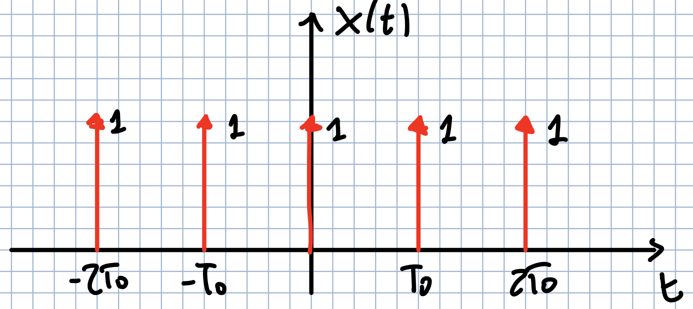
$X(f) = 1 \quad \forall f \Rightarrow \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_0) = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \frac{n t}{T_0}}}$

$$2)\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_0) e^{-j2\pi f n T_0} = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f-\frac{n}{T_0}\right)$$

$X(f) = \delta(f)$

$x(t) = 1 \quad \forall t \Rightarrow \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f n T_0} = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)}$

TRENO DI DELTA DI DIRAC



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$$

$$X(f) = TCF[x(t)] = TCF\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f n T_0} = TCF\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)\right] = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

TCF DI SEGNALI PERIODICIZZATI

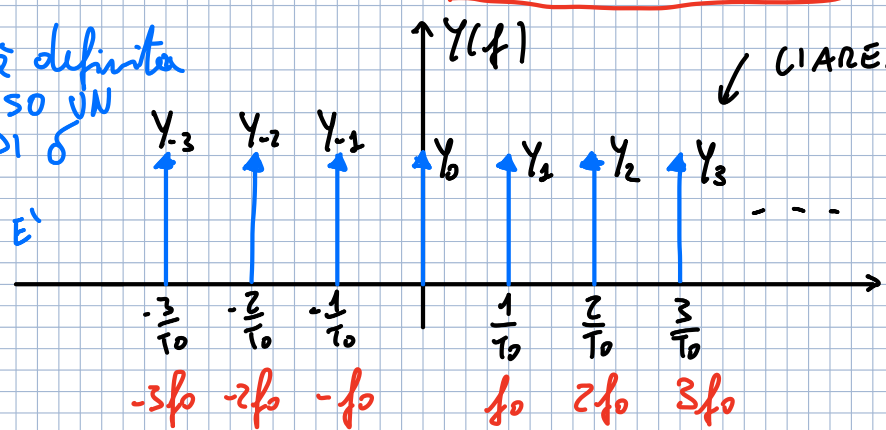
Ip. $\begin{cases} y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0) & T_0 \in \mathbb{R}^+ \\ x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f) & \text{APERIODICO} \end{cases}$

Si può calcolare la $Y(f) = TCF[y(t)] =$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{n}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n\, \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)} \quad \text{dove } Y_n = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

SPETTRO DI UN SEGNALE PERIODICO

LA TCF è definita ATTRAVERSO UN TRENO DI δ E L'AREA SOTTESA E' LA TSF



L'AREA E' DATA DALLA TSF $\rightarrow Y_n$

LA STRUTTURA DELLO SPETTRO E' SEMPRE DI QUESTA FORMA, CAMBIANO SOLO GLI Y_n

ESISTONO SOLO LE FREQUENZE ARMONICHE

DIM.

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_0)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-nT_0)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \qquad\qquad t - nT_0 = t' \quad t = t' + nT_0$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, e^{-j2\pi f (t'+nT_0)}\, dt' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, e^{-j2\pi f t'}\, dt'}_{X(f)} e^{-j2\pi f n T_0} =$$

$$= X(f) \sum e^{-j2\pi f n T_0} = \underline{X(f)} \cdot \underbrace{\frac{1}{T_0} \sum \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)}_{\text{PER POISSON } \delta} =$$

$$= \frac{1}{T_0} \sum \underbrace{X(f)\, \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)}_{X\left(\frac{n}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)} = \frac{1}{T_0} \sum X\left(\frac{n}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = \sum_n Y_n\, \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

PUNTO DI APPLICAZIONE δ

TH. PARSEVAL PER SEGNALI PERIODICI (TCF)

$x(t)$ periodico $\overset{TCF}{\Longleftrightarrow}$ $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n\, \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$

$y(t)$ periodico $\overset{TCF}{\Longleftrightarrow}$ $Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n\, \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, y^*(t)\, dt = \frac{1}{T_0^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0\left(\frac{n}{T_0}\right) Y_0^*\left(\frac{n}{T_0}\right)}$$

$X_0(f) = TCF[x_0(t)]$, $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - nT_0)$

$Y_0(f) = TCF[y_0(t)]$, $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_0(t - nT_0)$

$X_n = \frac{1}{T_0} X_0\left(\frac{n}{T_0}\right)$, $Y_n = \frac{1}{T_0} Y_0\left(\frac{n}{T_0}\right)$

TH. PARSEVAL PER SEGNALI PERIODICI (TSF)

$x(t)$ periodico $\overset{TSF}{\Longleftrightarrow}$ X_n

$y(t)$ periodico $\overset{TSF}{\Longleftrightarrow}$ Y_n

$$\boxed{\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} x(t)\, y^*(t)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n Y_n^*}$$

DIM.
$$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} x(t)\, y^*(t)\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{-j2\pi n f_0 t}}_{x(t)} y^*(t)\, dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} y^*(t)\, e^{j2\pi n f_0 t}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \left[\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} y(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt\right]^* =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n Y_n^*$$

se $X_n = Y_n \Rightarrow$
$$\boxed{\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} |x(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2}$$

POTENZA MEDIA DI UN SEGNALE PERIODICO

$P_x = $
- $\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} |x(t)|^2\, dt$ nel tempo
- $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2$ in frequenza

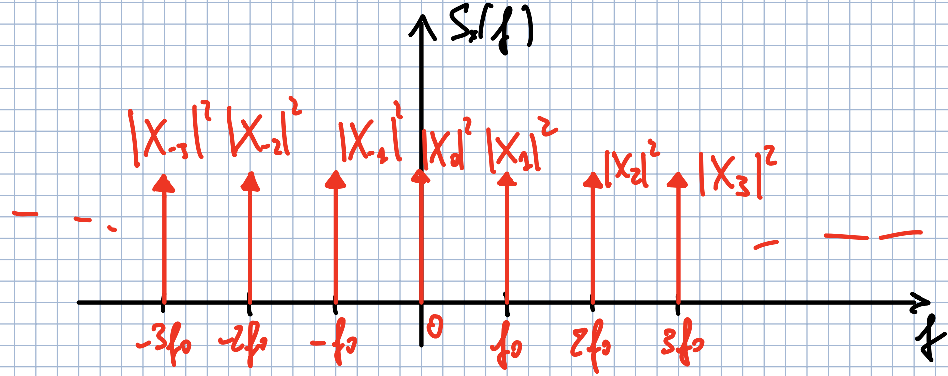
PER SEGNALI PERIODICI

$E_x = $
- $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt$ nel tempo
- $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df$ in frequenza

PER SEGNALI APERIODICI AD EN. FINITA

DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA PER SEGNALI PERIODICI

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df \qquad S_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

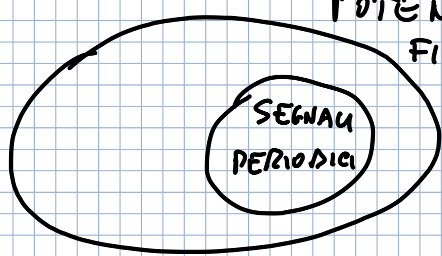


$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) df = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) df}_{1} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 = P_x$$

CLASSI DI SEGNALI

- EN. FINITA
- POTENZA FINITA



$$\boxed{S_x(f) \triangleq \lim_{T \to \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}}$$

$$x_T(t) \overset{TcF}{\Longleftrightarrow} X_T(f)$$

SISTEMI

•) Sistemi monodimensionali

$$x(t) \xrightarrow{\text{INGRESSO}} \underbrace{\boxed{T[\cdot]}}_{\text{TRASFORMAZIONE}} \xrightarrow{\text{USCITA}} y(t)$$

$$y(t) = T[x(t)]$$

L'USCITA ALL' ISTANTE "t" non DIPENDE SOLAMENTE DAL VALORE DELL' INGRESSO ALL' ISTANTE "t".

ES.

$$T[\cdot] \quad \Rightarrow \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha$$

•) SISTEMI LINEARI

se $\quad x(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t)$

$$\Rightarrow y(t) = T[x(t)] = a\,T[x_1(t)] + b\,T[x_2(t)]$$

•) SISTEMI STAZIONARI o TEMPO-INVARIANTE

se $\quad y(t) = T[x(t)] \quad \Rightarrow \quad y(t-t_0) = T[x(t-t_0)]$

CARATTERIZZAZIONE DEI SISTEMI LINEARI E STAZIONARI (SLS)

·) RISPOSTA IMPULSIVA DI UN SISTEMA GENERICO

IMPULSO: IMPULSO DI DIRAC (δ)

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow h(t) \qquad \underbrace{h(t) = T[\delta(t)]}_{\text{RISPOSTA IMPULSIVA}}$$

Un sistema SLS è completamente caratterizzato dalla sua $h(t)$, in particolare l'uscita ad un determinato ingresso è calcolabile.

$$\boxed{y(t) = x(t) \otimes h(t)}$$

DIM.

$$y(t) = T[x(t)] = T[\underbrace{x(t) \otimes \delta(t)}_{x(t)}] = \underset{(t)}{T}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right] \overset{\text{PER LINEARITÀ}}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,T[\delta(t-\tau)]\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = x(t) \otimes h(t)$$

↳ PER STAZIONARIETÀ

• CAUSALITÀ

$$y(t) = T[x(\alpha) ; \alpha \leq t]$$

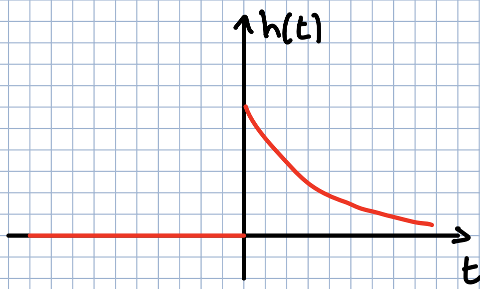
L'USCITA ALL'ISTANTE "t" PUÒ DIPENDERE SOLO DAI VALORI DELL'INGRESSO ANTECEDENTI O AL PIÙ $= t$

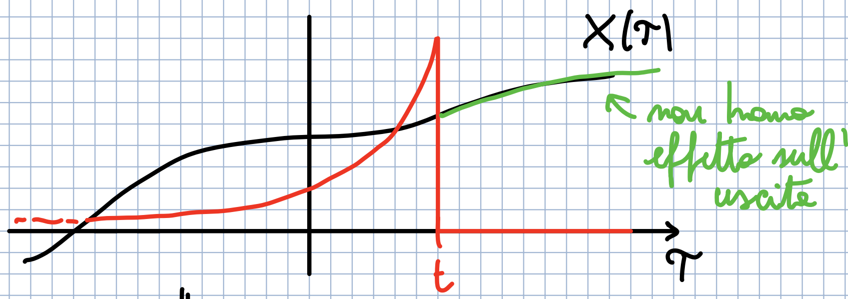
PER UN SLS VALE CHE IL SISTEMA È CAUSALE $\Leftrightarrow$ $h(t)$ è CAUSALE

$$\Downarrow$$

$$h(t) = 0 \quad \text{per } t < 0$$

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$



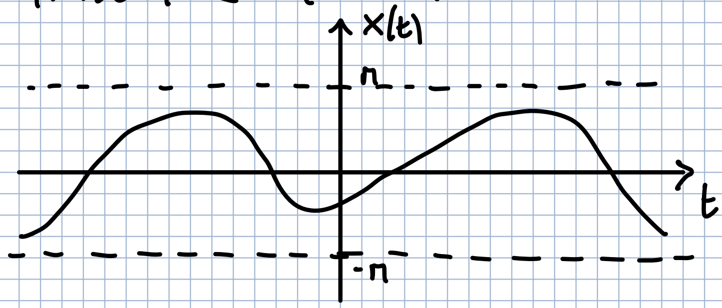


$$\Downarrow$$

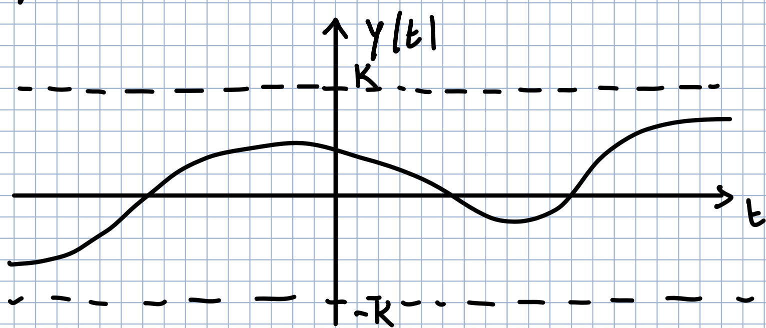
$$y(t) = T[x(\tau) ; \tau \leq t]$$

• STABILITÀ BIBO (BOUNCHED INPUT BOUNCHED OUTPUT)

Se $|x(t)| \leq M \quad \forall t$



$$\Rightarrow |y(t)| = |T[x(t)]| \leq K \quad \forall t$$



•) PER SLS

se $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = K < \infty \implies$ $\boxed{\text{IL SISTEMA È BIBO STABILE}}$

DIM.

$$|y(t)| = |x(t) \otimes h(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \right| \overset{\text{SHWARTZ}}{\le} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|\,|h(t-\tau)|\, d\tau \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} M\, |h(t-\tau)|\, d\tau = M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|\, d\tau = M \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau')|\, d\tau'}_{= K} = M \cdot K = K'$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = K \\ |x(t)| \le M \quad \forall t \end{array}\right\} \; |y(t)| \le K'$$

•) MEMORIA

•) SISTEMA <u>SENZA MEMORIA</u>

$$y(t) = T\left[x(\alpha)\,;\; \alpha = t\right]$$

L'USCITA ALL'ISTANTE "t" DIPENDE SOLO DAI VALORI DELL'INGRESSO ALL'ISTANTE "t"

SISTEMA ISTANTANEO

UN SISTEMA CON MEMORIA NON RISPETTA QUESTE PROPRIETÀ.

•) INVERTIBILITÀ

se $y(t) = T[x(t)] \implies x(t) = T^{-1}[y(t)]$

DEVE ESISTERE LA $T^{-1}[\cdot]$

ESERCIZIO

$$y(t) = \int_{T}^{t} x(\alpha)\, d\alpha \qquad y(t) = T[x(t)]$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow y(t)$$

Si chiede di verificare le seguenti proprietà:

1) LINEARITÀ ✓

2) STAZIONARIETÀ ✗

3) STABILITÀ ✗

4) MEMORIA (ISTANTANEITÀ) ✓

SVOLGIMENTO

1) LINEARITÀ

$$x(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \Rightarrow y(t) = a T[x_1(t)] + b T[x_2(t)]$$

$$y(t) = \int_T^t x(\alpha)\, d\alpha = \int_T^t a x_1(\alpha) + b x_2(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= a \int_T^t x_1(\alpha)\, d\alpha + b \int_T^t x_2(\alpha)\, d\alpha = a T[x_1(t)] + b T[x_2(t)] \checkmark$$

2) STAZIONARIETÀ

$$y(t) = T[x(t)] \qquad y(t-t_0) \overset{?}{=} T[x(t-t_0)]$$

$$T[x(t-t_0)] = \int_T^t x(\alpha - t_0)\, d\alpha = \qquad \begin{array}{l} \alpha - t_0 = \alpha' \\ \alpha = \alpha' + t_0 \end{array}$$

$$= \int_{T-t_0}^{t-t_0} x(\alpha')\, d\alpha' = \underbrace{\int_{T-t_0}^{T} x(\alpha')\, d\alpha'}_{K \neq 0} + \underbrace{\int_T^{t-t_0} x(\alpha')\, d\alpha'}_{y(t-t_0)} = K + y(t-t_0)$$

$K \neq 0 \Rightarrow$ NON È STAZIONARIO

3) STABILITÀ

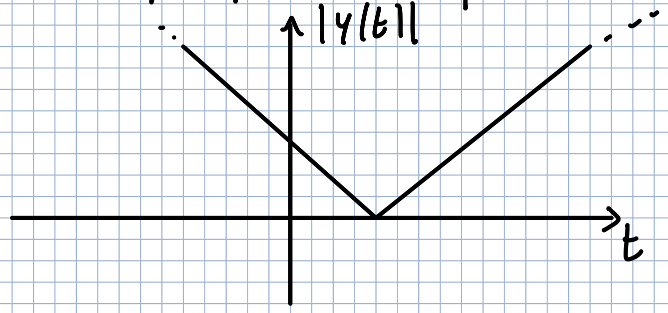
$$|x(t)| \leq M \quad \forall t \Rightarrow |y(t)| \leq K \quad \forall t$$

$$|y(t)| = \left| \int_T^t x(\alpha)\, d\alpha \right|$$

ESEMPIO

$$x(\alpha) = M' < M$$

$$|y(t)| = \left| \int_T^t M' \, d\alpha \right| = \left| M'(t-T) \right|$$



DIVERGE

HO TROVATO UN CASO PER CUI LA STABILITÀ BIBO NON È VERIFICATA

·) MEMORIA

·) SENZA MEMORIA $\Rightarrow$ $y(t) = T[x(\alpha) \, ; \, \alpha = t]$

$$y(t) = \int_T^t x(\alpha) \, d\alpha$$

y ALL' ISTANTE "t" DIPENDE DA VALORI DELL' INGRESSO AD ISTANTI ANCHE DIVERSI DA "t". $\Rightarrow$ HA MEMORIA

ESERCIZIO

$$y(t) = x^2(t) + \frac{d}{dt} x(t)$$

1) LINEARITÀ

$$x(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \Rightarrow y(t) = aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)]$$

$$y(t) = [a x_1(t) + b x_2(t)]^2 + \frac{d}{dt}[a x_1(t) + b x_2(t)] =$$

$$= a^2 x_1^2(t) + b^2 x_2^2(t) + 2ab \, x_1(t) x_2(t) + a \frac{d}{dt} x_1(t) + b \frac{d}{dt} x_2(t)$$

NON È LINEARE

$$\neq$$

$$\boxed{aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)]}$$

2) STAZIONARIETÀ

$$y(t) = T[x(t)] \qquad y(t-t_0) \overset{?}{=} T[x(t-t_0)]$$

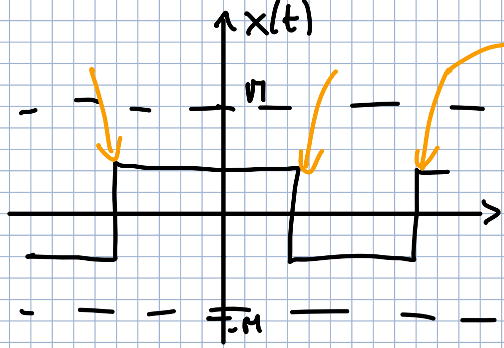
$$x^2(t-t_0) + \frac{d}{dt} x(t-t_0) = y(t-t_0)$$ $\Rightarrow$ È STAZIONARIO

3) STABILITÀ BIBO

$|x(t)| \leq t \quad \forall t \quad , \quad |x^2(t)| \leq M^2 \quad \forall t \quad \checkmark$

$\frac{d}{dt} x(t)$

ESEMPIO



HA DEI PUNTI DI DISCONTINUITA' PER CUI

$\frac{d}{dt} x(t) \to \infty$

NEI PUNTI DI DISC.

NON E' BIBO STABILE

4) MEMORIA

$y(t) = x^2(t) + \frac{d}{dt} x(t)$

DIPENDE SOLO DALL'ISTANTE "t"

DIPENDE SOLO DALL'ISTANTE "t"

$\Rightarrow$ NON HA MEMORIA

RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN SLS

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

SLS

$$x(t) = e^{j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) + j \operatorname{sen}(2\pi ft)$$

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t} h(t-\tau)\, d\tau = \qquad t - \tau = \tau' \qquad \tau = t - \tau'$$

$$= e^{j2\pi ft} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau')\, e^{-j2\pi f t}\, d\tau'}_{H(f)} = H(f)\, e^{j2\pi ft} = y(t) = H(f)\, x(t)$$

1) $H(f) = TCF[h(t)]$

2) $H(f) = \left.\frac{y(t)}{x(t)}\right|_{x(t) = e^{j2\pi ft}}$

3) $H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$

$\Longrightarrow$ TRE DEFINIZIONI DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

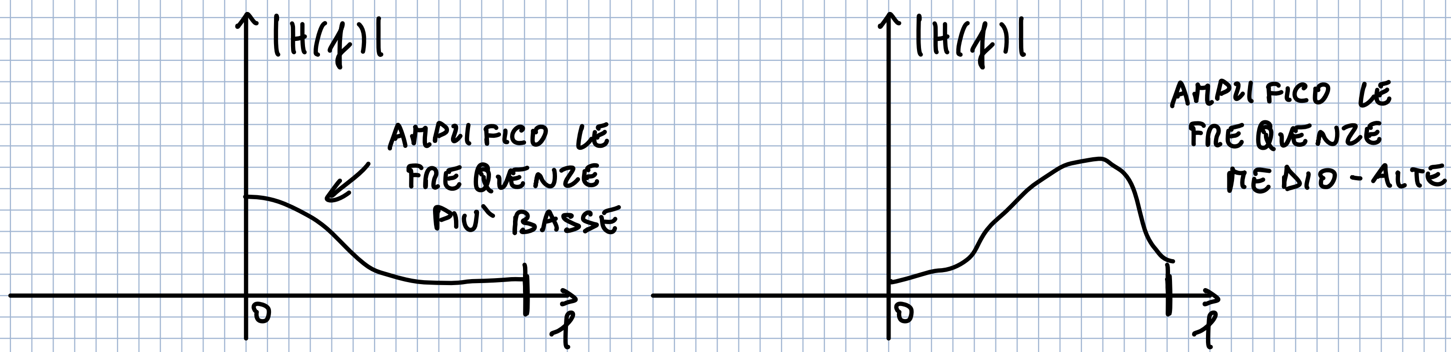
$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) \quad \Rightarrow \quad H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

RISPOSTA DI AMPIEZZA E FASE

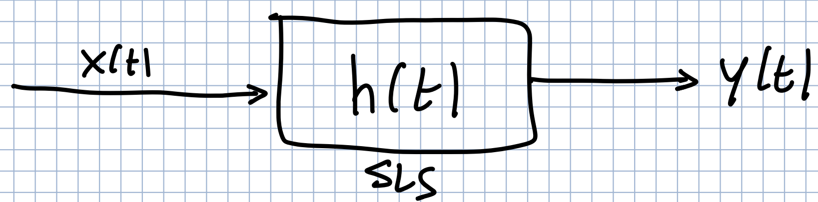
$$H(f) = \begin{cases} \nearrow A(f) = |H(f)| \\ \searrow \varphi(f) = \angle H(f) \end{cases}$$

$$|Y(f)| = |X(f) \cdot H(f)| = |X(f)| \cdot |H(f)|$$



$$\angle Y(f) = \angle X(f) \cdot H(f) = \angle X(f) + \angle H(f)$$

$\Rightarrow$



$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

$$\text{ATCF} \uparrow \qquad \downarrow \text{TCF} \qquad \downarrow \text{TCF}$$

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

II° STRADA PER CALCOLARE $y(t)$ USCITA

RISPOSTA AL GRADINO

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\alpha)\, d\alpha$$

$$q(t) = u(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \qquad t-\tau = \tau' \quad \tau = t-\tau'$$

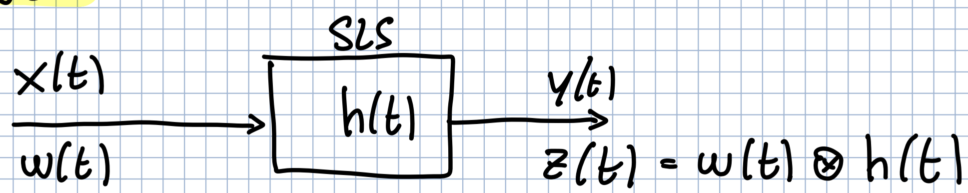
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau')\, h(\tau')\, d\tau' = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau')\, u(t-\tau')\, d\tau' =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} h(\tau')\, d\tau' \Rightarrow \quad g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau')\, d\tau' \Rightarrow h(t) = \frac{d}{dt} g(t)$$

FILTRO LINEARE E STAZIONARIO (SLS)

PROPRIETÀ:

- **INTEGRAZIONE**



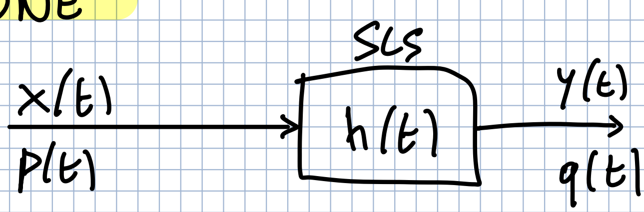
$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha = x(t) \otimes u(t) = u(t) \otimes x(t)$$

$$z(t) = w(t) \otimes h(t) = [u(t) \otimes x(t)] \otimes h(t) =$$

$$= u(t) \otimes [\underbrace{x(t) \otimes h(t)}_{y(t)}] = u(t) \otimes y(t)$$

$$\boxed{z(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\alpha)\, d\alpha}$$

- **DERIVAZIONE**



$$p(t) = \frac{d}{dt} x(t) \qquad \boxed{q(t) = p(t) \otimes h(t) = \frac{d}{dt} y(t)}$$

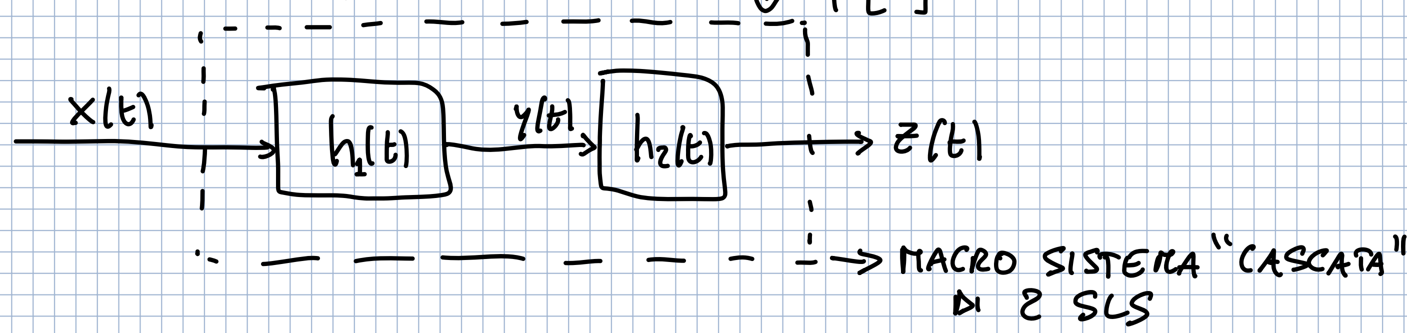
DIM.

$$p(t) = \frac{d}{dt} x(t) \Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\alpha)\, d\alpha \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} q(\alpha)\, d\alpha$$

$$\Downarrow$$

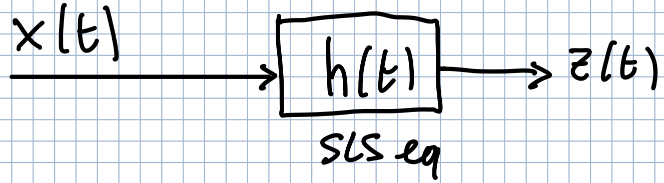
$$q(t) = \frac{d}{dt} y(t)$$

- CASCATA DI SLS



$$z(t) = y(t) \otimes h_2(t) = [x(t) \otimes h_1(t)] \otimes h_2(t) =$$

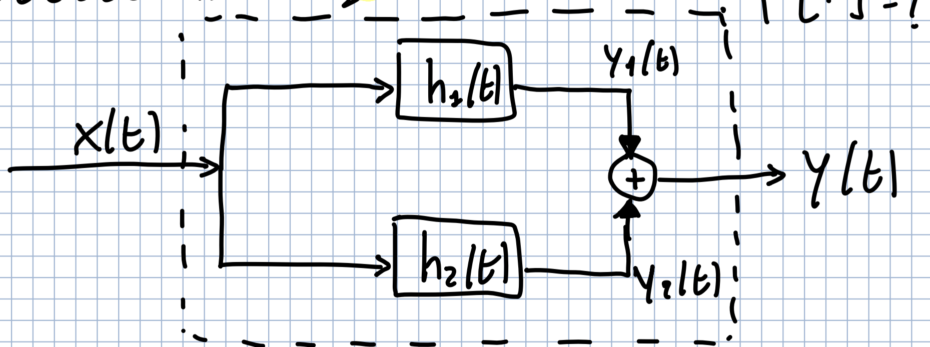
$$= x(t) \otimes \underbrace{[h_1(t) \otimes h_2(t)]}_{h(t)} = x(t) \otimes h(t) = z(t)$$



$$h(t) = h_1(t) \otimes h_2(t)$$

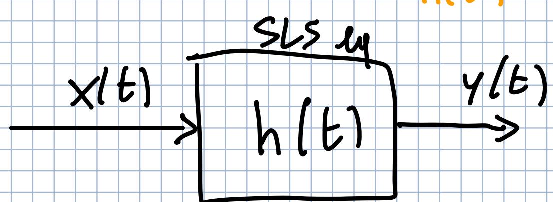
$$H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$$

- PARALLELO DI SLS



$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = x(t) \otimes h_1(t) + x(t) \otimes h_2(t) =$$

$$= x(t) \otimes \underbrace{[h_1(t) + h_2(t)]}_{h(t)} = x(t) \otimes h(t) = y(t)$$



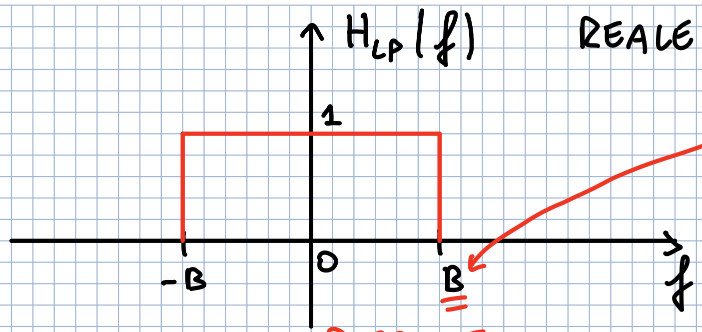
$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

$$H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

FILTRI IDEALI

- PASSO BASSO DI BANDA B

LP = LOW PASS



BANDA: l'intervallo delle frequenze positive dove la risposta in frequenza è NON-NULLA.

$$H_{LP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

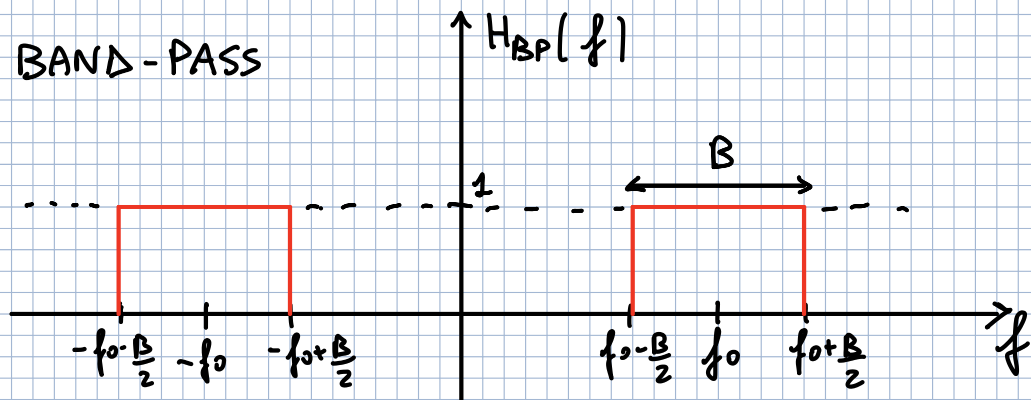
RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN FILTRO LP DI BANDA B

$$h_{LP}(t) = \text{ATCF}[H_{LP}(f)] =$$
$$= 2B\,\text{sinc}(2Bt)$$

RISPOSTA IMPULSIVA

- **PASSA-BANDA DI BANDA B**

BP = BAND-PASS



$$H_{BP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + \text{rect}\left(\frac{f+f_0}{B}\right) \longrightarrow$$

RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN FILTRO BP DI BANDA B IDEALE

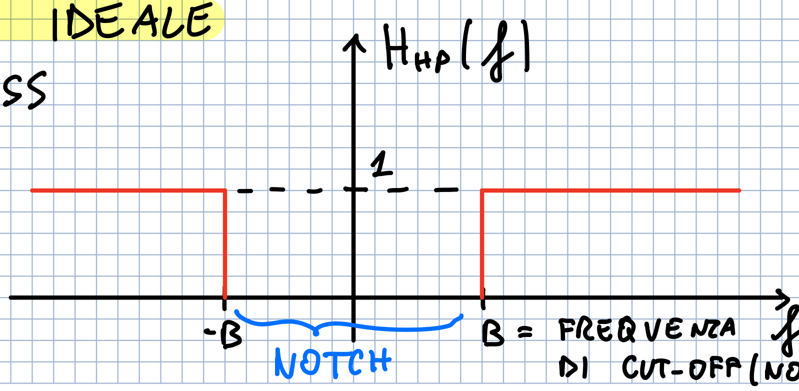
$$h_{BP}(t) = B\,\text{sinc}(Bt)\,e^{j2\pi f_0 t} + B\,\text{sinc}(Bt)\,e^{-j2\pi f_0 t} =$$
$$= B\,\text{sinc}(Bt)\cos(2\pi f_0 t) + \cancel{jB\,\text{sinc}(Bt)\,\text{sen}(2\pi f_0 t)} +$$
$$+ B\,\text{sinc}(Bt)\cos(2\pi f_0 t) - \cancel{jB\,\text{sinc}(Bt)\,\text{sen}(2\pi f_0 t)} = \boxed{2B\,\text{sinc}(Bt)\cos(2\pi f_0 t)}$$

RISPOSTA IMPULSIVA

FATTORE Q QUALITA' $\quad Q = \frac{f_0}{B}$

- **PASSA-ALTO IDEALE**

HP = HIGH-PASS



B = FREQUENZA DI CUT-OFF (NON È UNA BANDA)

B = BANDA DEL NOTCH

$H_{HP}(f) = 1 - rect\left(\frac{f}{2B}\right)$

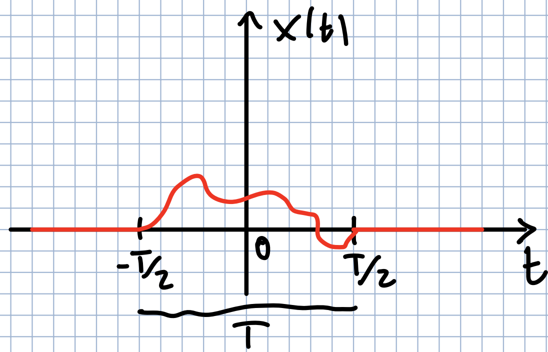
RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN FILTRO HP DI BANDA B IDEALE

$h_{HP}(t) = \delta(t) - 2B\, sinc(2Bt)$

RISPOSTA IMPULSIVA

DURATA E BANDA DI UN SEGNALE

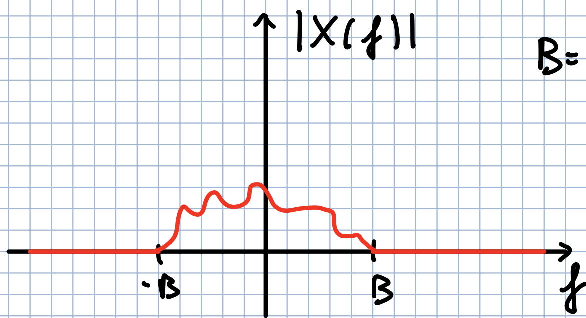
- SEGNALE A DURATA "RIGOROSAMENTE" LIMITATA



$x(t) = 0 \quad \text{per } |t| > \frac{T}{2}$

T = DURATA

- SEGNALE A BANDA "RIGOROSAMENTE" LIMITATA



B = BANDA

$|X(f)| = 0$

$|f| > B$

PROPRIETA'

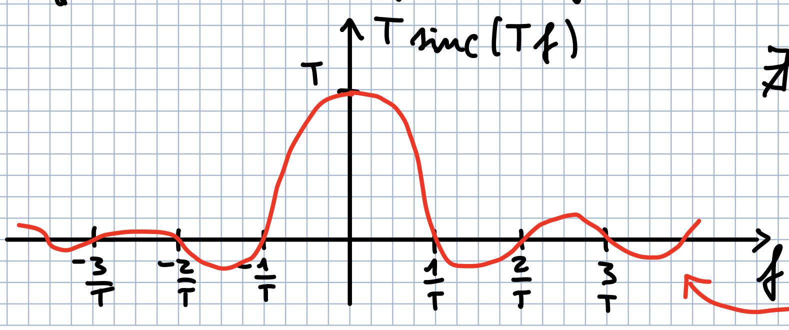
$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) \text{ ha DURATA RIGOROSAMENTE LIMITATA} \\ \Downarrow \\ X(f) \text{ ha BANDA INFINITA} \end{array}}$$

DIM.

SE IL SEGNALE HA DURATA "T"

$$X(f) = TCF[x(t)] = TCF\left[x(t)\, rect\left(\frac{t}{T}\right)\right] =$$

$$= X(f) \otimes T\, sinc(Tf) = X(f)$$



$\nexists$ un B: $T\, sinc(Tf) = 0$

$|f| > B$

HA BANDA ILLIMITATA

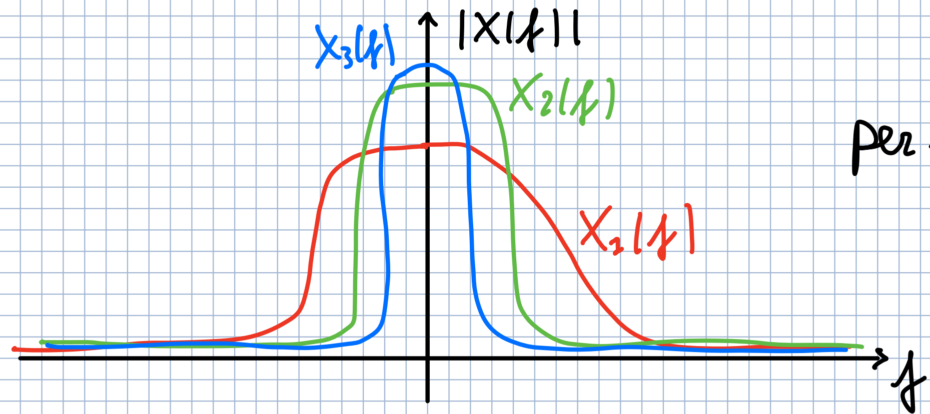
SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE

$$|X(f)| = 0 \qquad |f| > B$$

$$X(f) \otimes T\,\mathrm{sinc}(Tf) \Rightarrow \text{SPETTRO A BANDA ILLIMITATA}$$

$$X(f) \otimes T\,\mathrm{sinc}(Tf) = X(f)$$ ASSURDO perché ho detto che è limitata quando non lo è

$\Rightarrow X(f)$ ha BANDA ILLIMITATA



per $f \to \infty$ tutti VANNO A ZERO

CI SERVE UNA DEFINIZIONE CHE POSSA TENER CONTO DELLA DISTRIBUZIONE FREQUENZIALE DI UN SEGNALE FISICO.

- PROPRIETÀ SEGNALI A BANDA RIGOROSAMENTE LIMITATA

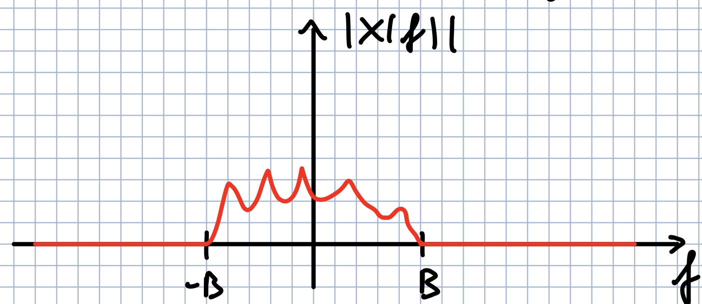
$X(f)$ HA BANDA RIGOROSAMENTE LIMITATA

$\Downarrow$

$x(t)$ HA DURATA INFINITA

DIM.

$$x(t) = \mathrm{ATCF}[X(f)] = \mathrm{ATCF}\left[X(f)\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)\right] =$$



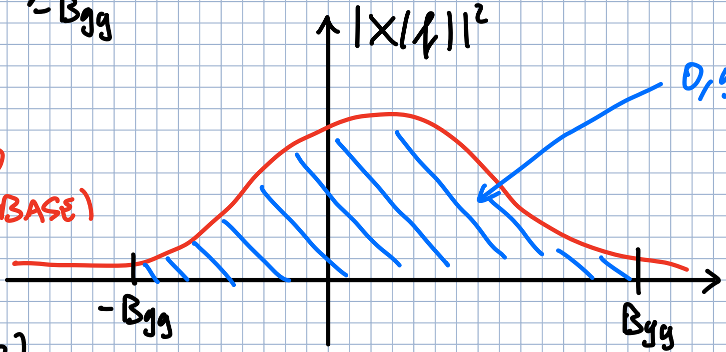
$$= x(t) \otimes \underbrace{2B\,\mathrm{sinc}(2Bt)}_{\text{DURATA INFINITA}} = x(t)$$ → DEVE AVERE DURATA INFINITA

DEFINIZIONI PRATICHE DI BANDA

- BANDA AL 99% DI ENERGIA

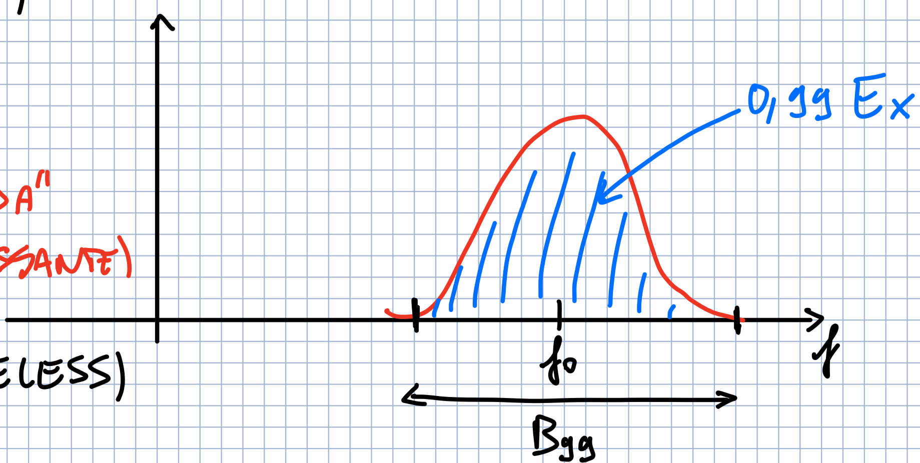
$$B_{99} : \int_{-B_{99}}^{B_{99}} |X(f)|^2 \, df = 0{,}99 \, E_x$$

SEGNALE PASSA-BASSO (IN BANDA BASE)
CENTRATO NELL' ORIGINE
(AUDIO)



$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

SEGNALE "PASSA-BANDA" (IN BANDA PASSANTE)
CENTRATO IN f_0 (WIRELESS)



- BANDA A -3dB

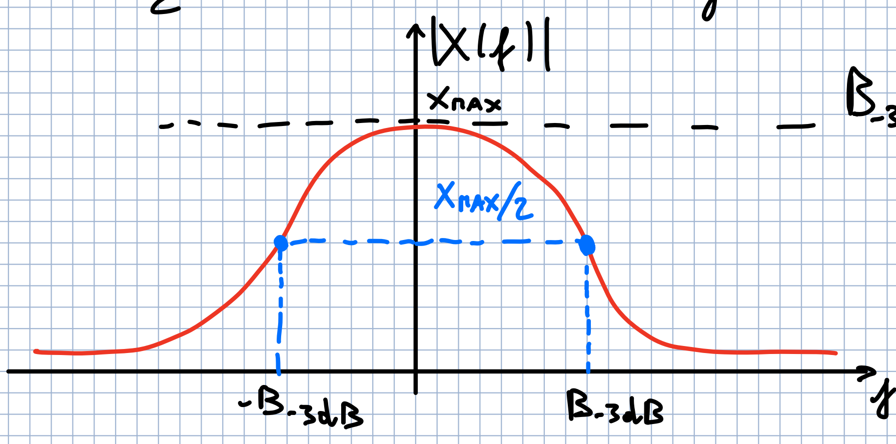
$$dB = 10 \log_{10} (\cdot)$$

ENERGIA (J) TENSIONE (V)
POTENZA (W) DISTANZA (m)

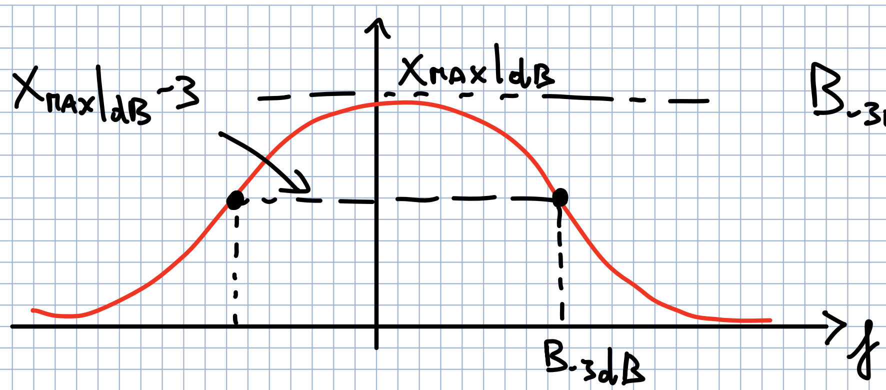
$\downarrow$

COMPRIMERE LA DINAMICA DI UNA CERTA GRANDEZZA

$-3\,dB \Rightarrow \frac{1}{2}$ in lineare $\rightarrow 10 \log_{10} \frac{1}{2} \simeq -3$



$$B_{-3dB} : |X(B_{-3dB})| = \frac{X_{max}}{2}$$



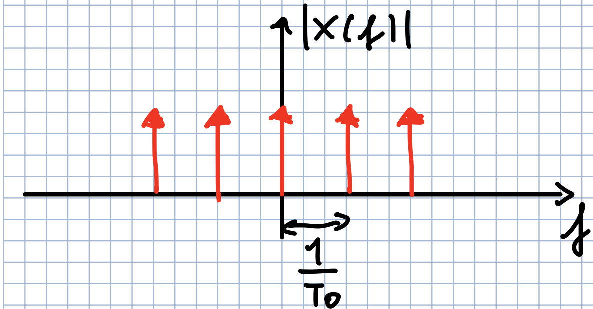
$$B_{-3dB} : |X(B_{-3dB})| = X_{max}|_{dB} - 3$$

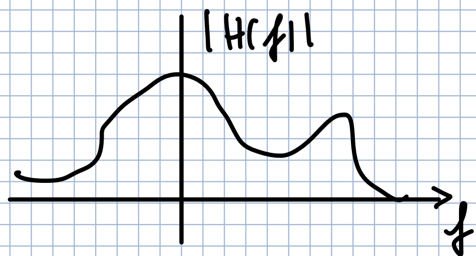
•) IN GENERALE SUL FILTRAGGIO DI UN SEGNALE PERIODICO

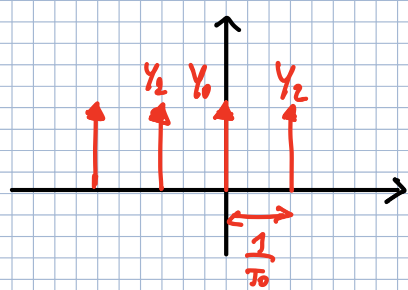
$x(t)$ è periodico con T_0 = periodo

$\Downarrow$

$y(t)$ è periodico con T_0 = periodo







$$Y_n = X_n H\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

PER CAMPIONATURA

$$Y(f) = X(f)\,H(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n\,\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)H(f) = \sum X_n\,\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)H\left(\frac{n}{T_0}\right) =$$

$$= \sum X_n H\left(\frac{n}{T_0}\right)\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right) = \sum Y_n\,\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)$$

$y(t) = ATCF[Y(f)] \Rightarrow y(t)$ periodico di T_0

$$\boxed{Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n\,\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right) \quad \text{con} \quad Y_n = X_n H\left(\frac{n}{T_0}\right)}$$

DISTORSIONI LINEARI

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

·) REPLICA "FEDELE" DI UN SEGNALE

$y(t)$ è una replica fedele di $x(t)$ se

$$y(t) = K\,x(t-t_0) \qquad\qquad K, t_0 \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow \text{TCF}$$

$$Y(f) = K\,X(f)\,e^{-j2\pi f t_0}$$

·) FILTRO FEDELE

$$H(f) = K\,e^{-j2\pi f t_0}$$

se K è COMPLESSO $\Rightarrow$ $H(f) = |K|\,e^{-j2\pi f t_0}\,e^{j\angle K} =$

$$= |K|\,e^{-j(2\pi f t_0 - \angle K)}$$

$$\Rightarrow h(t) = K\,\delta(t-t_0) \qquad\qquad K \in \mathbb{C}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_{FEDELE}(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = K\,x(t-t_0) \rightarrow \text{replica fedele}$$

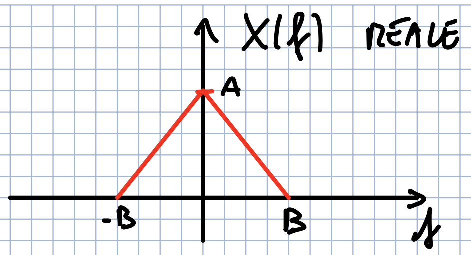
$\Rightarrow$ UN FILTRO "FEDELE" PRODUCE SEMPRE UN'USCITA CHE E' REPLICA FEDELE DELL'INGRESSO

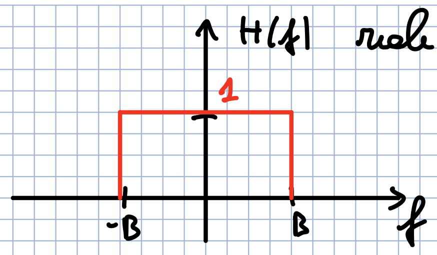
N.B. NON VALE IL CONTRARIO!

SE NON HO UN FILTRO FEDELE $\Rightarrow$ $\boxed{h(t) \neq K\,\delta(t-t_0)}$

ESEMPIO

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$





IL FILTRO LIN. E STAZ. rappresentato dalla $H(f)$, quindi con

$$h(t) = 2B\,\mathrm{sinc}(2Bt), \quad \text{NON È UN FILTRO FEDELE}$$

$$\neq K\delta(t-t_0)$$

$$Y(f) = X(f)\,H(f) = X(f)$$

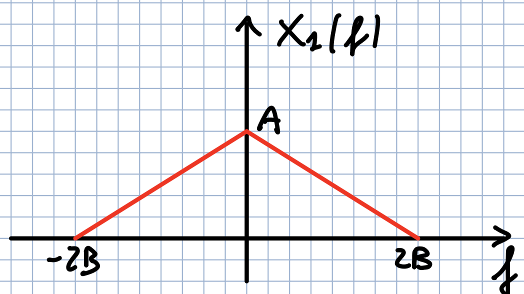
$$y(t) = x(t)$$

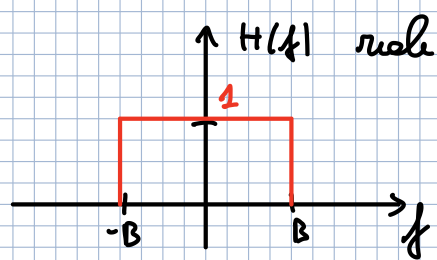
$$y(t) = K\,x(t-t_0)$$

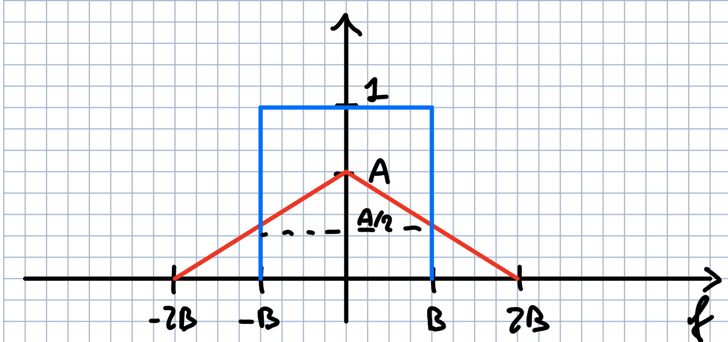
SE SCELGO $K=1$
$t_0=0$

$y(t)$ è una replica fedele del segnale di ingresso $x(t)$

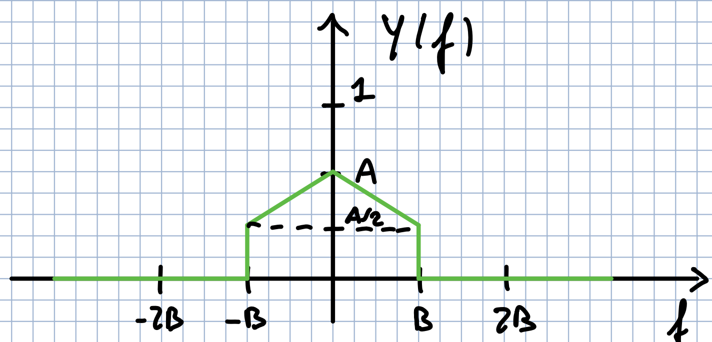
CONTRO ESEMPIO







$\Rightarrow$

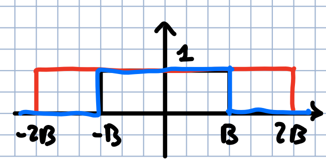


$$Y(f) = X_1(f)\,H(f) = A\left(1-\frac{|f|}{2B}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{4B}\right)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) =$$

$$= A\left(1-\frac{|f|}{2B}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

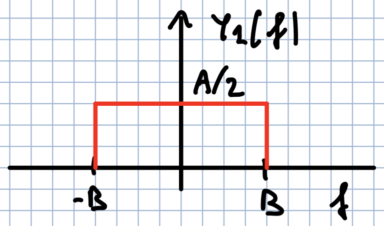
NON È UN TRIANGOLO (DOVEVA ESSERE RECT$\left(\frac{f}{4B}\right)$)

QUANDO FACCIO IL PRODOTTO DI 2 RECT PRENDO QUELLO DI AMPIEZZA PIU' PICCOLA $\Rightarrow$

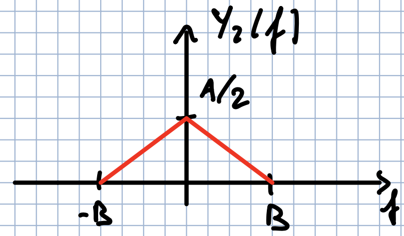


$$\mathrm{rect}\left(\frac{f}{4B}\right)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$Y(f) = Y_1(f) + Y_2(f) =$



$+$



$= Y(f)$

$$= \frac{A}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) + \frac{A}{2}\left(1 - \frac{|f|}{B}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$y(t) = \frac{A}{2}\cdot 2B\,\mathrm{sinc}(2Bt) + \frac{A}{2}\cdot B\,\mathrm{sinc}^2(Bt) = AB\,\mathrm{sinc}(2Bt) + \frac{AB}{2}\,\mathrm{sinc}^2(Bt)$$

$$x_1(t) = A\cdot 2B\,\mathrm{sinc}^2(2Bt)$$

$y(t) \neq K\,x(t-t_0)$ $\Rightarrow$ NON E' UNA REPLICA FEDELE

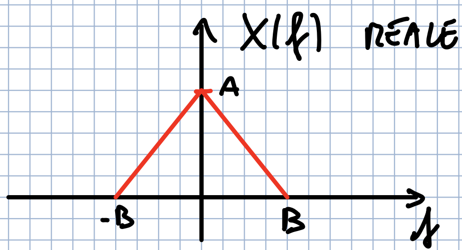
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{UN SLS INTRODUCE DISTORSIONI LINEARI SU UN SEGNALE IN INGRESSO SE L'USCITA NON E' SCRIVIBILE COME UNA REPLICA FEDELE DELL'INGRESSO}}$

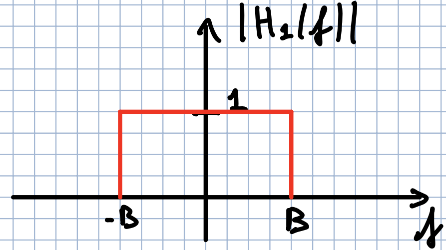
DISTORSIONI LINEARI DI AMPIEZZA E FASE

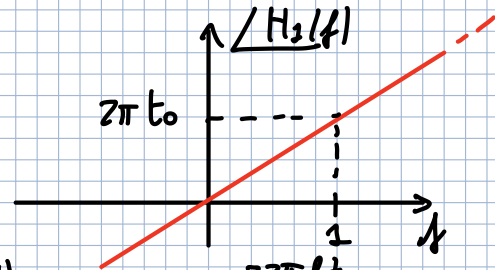
- AMPIEZZA: QUANDO E' IL MODULO DEL SEGNALE IN USCITA A SUBIRE UNA VARIAZIONE (DISTORSIONE)

- FASE: QUANDO E' LA FASE A SUBIRE UNA VARIAZIONE DIVERSA DALLA SOMMA CON UN TERMINE LINEARE

ESEMPI (AMPIEZZA)







$$Y(f) = H(f)\,X(f) = |H(f)|\cdot|X(f)|\,e^{j(\angle X(f) + \angle H(f))} = |X(f)|\,e^{j2\pi f t_0} =$$

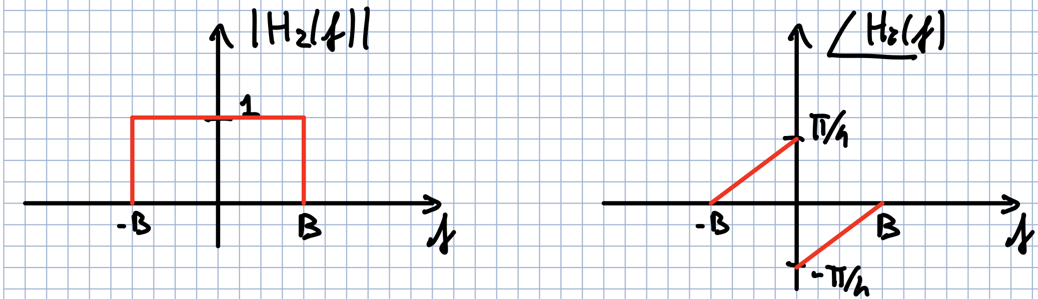
$$= X(f)\,e^{j2\pi f t_0} \Rightarrow y(t) = x(t+t_0)$$

E' UNA REPLICA FEDELE

$H_1(f)$ NON INTRODUCE DISTORSIONI LINEARI

· UN SISTEMA LINEARE PUO' INTRODURRE SOLO DISTORSIONI LINEARI

ESEMPIO (FASE)



$\Rightarrow$ LA FASE NON E' LINEARE (E' LINEARE A TRATTI)

↳ INTRODUCE UNA DISTORSIONE DI FASE

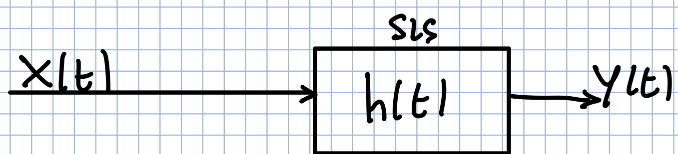
$$Y(f) \neq K X(f) e^{-j2\pi f t_0} =$$ → POTREBBE ANDARE SOLO PER UNA RETTA

$$= K X(f) e^{-j2\pi f t_1} \text{rect}\left(\frac{f-\frac{B}{2}}{B}\right) +$$

$$+ K X(f) e^{-j2\pi f t_2} \text{rect}\left(\frac{f+B/2}{B}\right)$$

⇐ SONO LE 2 RETTE SPEZZATE

ANALISI ENERGETICA IN PRESENZA DI SLS



SEGNALI APERIODICI AD EN. FINITA

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

AUTOCORRELAZIONE DEL SEGNALE IN INGRESSO

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, y^*(t-\tau)\, dt$$

AUTOCORRELAZIONE DEL SEGNALE IN USCITA

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) = R_x(\tau) \otimes R_h(\tau)$$

$$* \quad h(\tau) \otimes h(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, h(t-\tau)\, dt = R_h(\tau)$$

$$S_x(f) = TCF[R_x(\tau)] = |X(f)|^2$$

$$S_y(f) = TCF[R_y(\tau)] = |Y(f)|^2 =$$

$$= TCF[R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)] = S_x(f)\, H(f)\, H^*(f) = S_x(f)\,|H(f)|^2$$

DENSITA' SPETTRALE DI ENERGIA
DEL SEGNALE DI USCITA

$$\boxed{S_y(f) = S_x(f)\,|H(f)|^2}$$

DIM.

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

(Densità spettrale di energia)

$$R_x(\tau) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} S_x(f) = |X(f)|^2$$

$$R_y(\tau) \Leftrightarrow S_y(f) = |Y(f)|^2$$

$$R_y(\tau) = ATCF[S_y(f)] = ATCF[|Y(f)|^2] = ATCF[Y(f) \cdot Y^*(f)] =$$

$$= ATCF[X(f)\, H(f)\, X^*(f)\, H^*(f)] =$$

$$= ATCF[|X(f)|^2 H(f)\, H^*(f)] = ATCF[S_x(f)\, H(f)\, H^*(f)] =$$

$$= R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

$\Rightarrow$ PER SEGNALI PERIODICI

$$x(t) = x(t - kT_0) \qquad , k \in \mathbb{Z} \ , T_0 \in \mathbb{R}^+$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

AUTOCORRELAZIONE DEL SEGNALE IN INGRESSO (PERIODICO)

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{T_0/2} y(t)\, y^*(t-\tau)\, dt$$

AUTOCORRELAZIONE DEL SEGNALE IN USCITA (PERIODICO

$$\Rightarrow R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

DIM.

$$S_y(f) = \sum_k |Y_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

$$Y(f) = \frac{1}{T_0} \sum_k Y_k\, \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

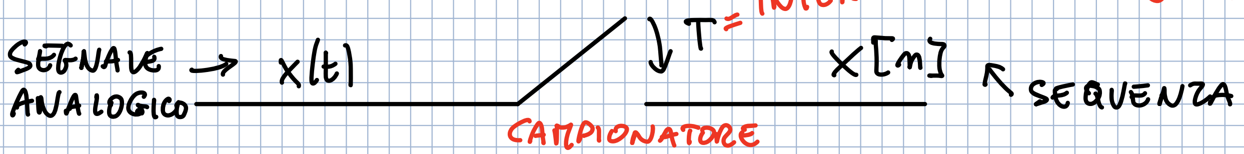
$$Y_K = X_K\, H\left(\frac{K}{T_0}\right) \Rightarrow |Y_K|^2 = |X_K|^2 \left|H\left(\frac{K}{T_0}\right)\right|^2$$

$$\Rightarrow S_y(f) = \sum_K |X_K|^2 \left|H\left(\frac{K}{T_0}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{K}{T_0}\right) =$$

$$= \left(\sum_K |X_K|^2 \delta\left(f - \frac{K}{T_0}\right)\right) |H(f)|^2 = S_x(f)\, H(f)\, H^*(f)$$

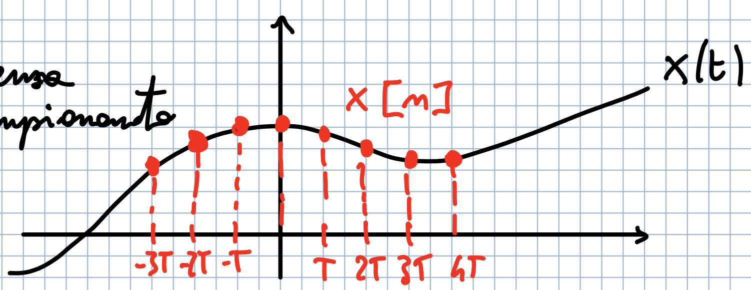
$$\Rightarrow R_y(\tau) = \text{ATCF}[S_y(f)] = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

SEGNALI CAMPIONATI



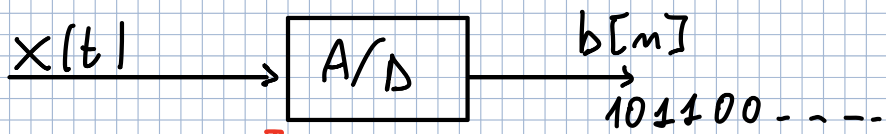
$x[n] = x(nT)$ $\quad n \in \mathbb{Z}$, $T \in \mathbb{R}^+$

$f_c = \frac{1}{T}$ frequenza di campionamento



I CAMPIONI SONO I VALORI DELLA SEQUENZA

DIGITALIZZAZIONE DI UN SEGNALE ANALOGICO



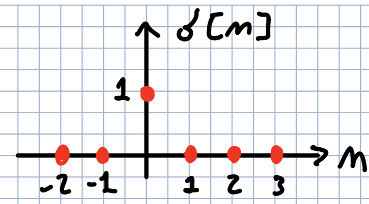
IL CAMPIONATORE E' UN ELEMENTO DEL CONVERTITORE A/D

- SEQUENZE
  - VAR. INDIPENDENTE (TEMPO) ⇒ DISCRETA
  - VAR. DIPENDENTE (AMPIEZZA) ⇒ CONTINUA

CONTINUA → $x[n]$ ← DISCRETA

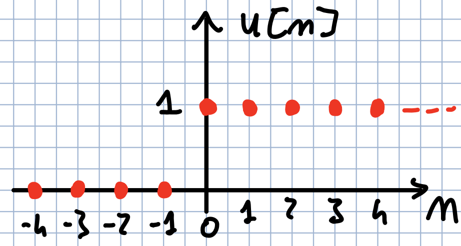
SEQUENZE NOTEVOLI

•) $\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$



DELTA DI KRONECKER

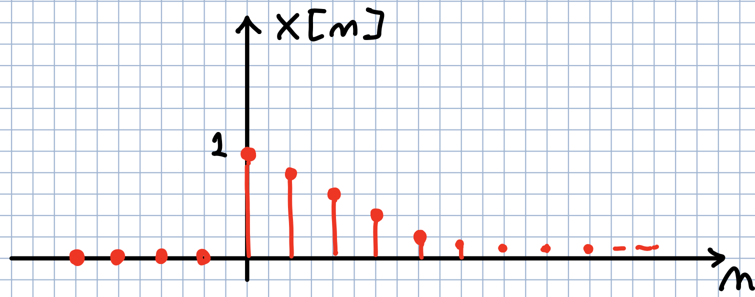
•) $u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$



GRADINO

•) $x[n] = a^n u[n] \qquad 0 < a < 1$

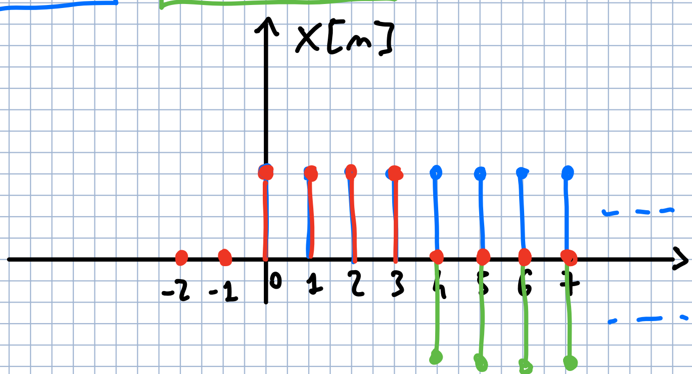
ESPONENZIALE MONOLATERA DISCRETA



•) $\underbrace{x[n]} = \underbrace{u[n]} - \underbrace{u[n-N]}$

RETTANGOLO DISCRETO

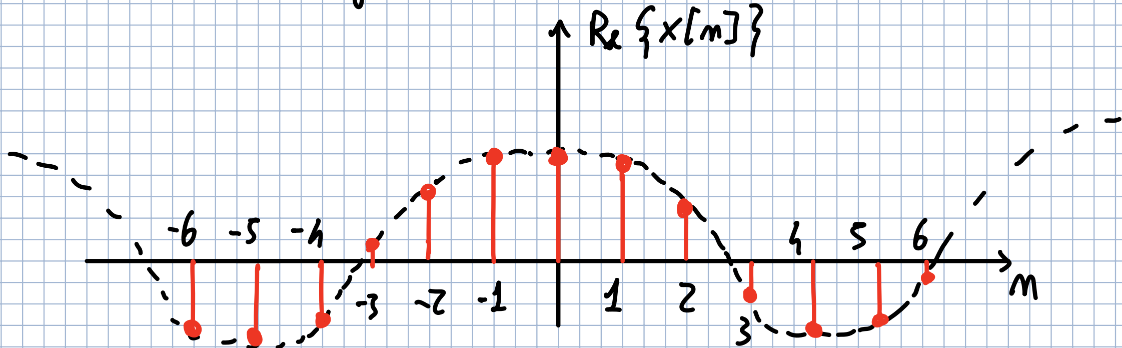
$N = 4$



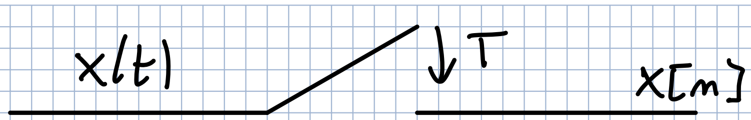
•) $x[n] = e^{j2\pi F_0 n} = \qquad F_0 \in \mathbb{R}^+$

OSCILLAZIONE DISCRETA

$= \cos(2\pi F_0 n) + j \,\text{sen}(2\pi F_0 n)$



X[n] è PERIODICO? IN GENERALE NO



$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \rightarrow \text{E' PERIODICO} \qquad F_0 = f_0 T$$

$$x[n] = x(nT) = e^{j2\pi f_0 n T} = e^{j2\pi F_0 n}$$

IN GENERALE NON E' PERIODICO

$\Rightarrow$ X[n] E' PERIODIO $\Longrightarrow$ $F_0 \in \mathbb{Q}$ $\rightarrow$ $F_0 = \frac{p}{q}$ $\quad p, q \in \mathbb{Z}^+$

SE p e q SONO PRIMI TRA LORO

$\Downarrow$

q è il periodo delle sequenza

SE p e q NON SONO PRIMI TRA LORO

$\Downarrow$

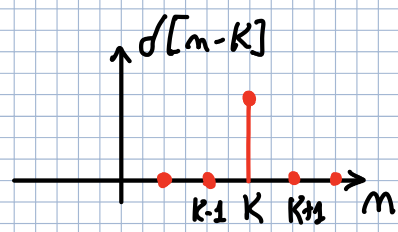
$\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q}$ con p' e q' primi tra loro

$\Rightarrow$ q è IL PERIODO

•) PROPRIETA' di $\delta[n]$ e $u[n]$

1) $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$

2) $\delta[n-K] = \begin{cases} 1 & n = K \\ 0 & n \neq K \end{cases}$



3) $u[n] = \sum_{K=0}^{\infty} \delta[n-K]$

TRASFORMATA DI FOURIER DI UNA SEQUENZA

$$x[n] \overset{TFS}{\Longleftrightarrow} \overline{X}(f)$$

$$\boxed{\overline{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi f n T}}$$

TRASFORMATA DI FOURIER DI UNA SEQUENZA

PROPRIETA'

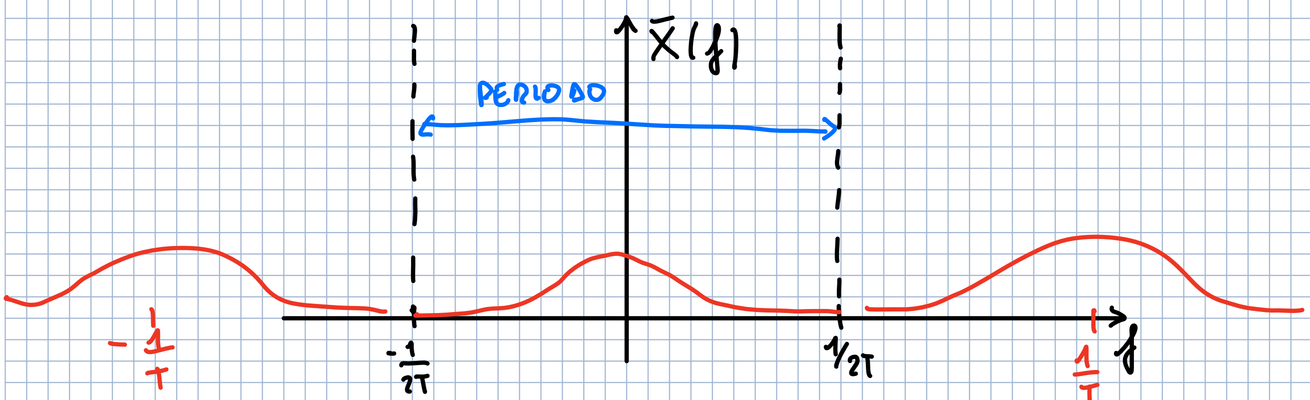
·) $\bar{X}(f)$ è PERIODICA DI PERIODO $\frac{1}{T}$

$$\bar{X}(f) = \bar{X}\left(f - \frac{n}{T}\right) \qquad n \in \mathbb{Z},\ T \in \mathbb{R}^+$$

DIM.

$$X\left(f - \frac{n}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, e^{-j2\pi\left(f - \frac{n}{T}\right)kT} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, e^{-j2\pi f kT} \underbrace{e^{j2\pi kn}}_{=1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, e^{-j2\pi f kT} = \bar{X}(f)$$



$$x[n] = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f)\, e^{j2\pi f nT}\, df$$ $\Rightarrow$ ATFS DI UNA SEQUENZA

DIM.

$$T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi f nT}}_{\bar{X}(f)} e^{j2\pi f kT}\, df \overset{?}{=} x[n]$$

$$= T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} e^{j2\pi f (k-n)T}\, df = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ (\cdot) & k = n \end{cases}$$

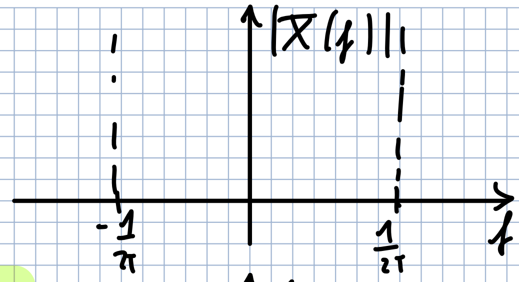
$\cos(2\pi f (k-n)T) + j \sin(2\pi f (k-n)T)$ $\Rightarrow$ HA PERIODO $\frac{1}{T}$

$$(\cdot) = T \cdot x[k] \cdot \frac{1}{T} = x[k]$$

RAPPRESENTAZIONE DELLA TFS

·) MODULO

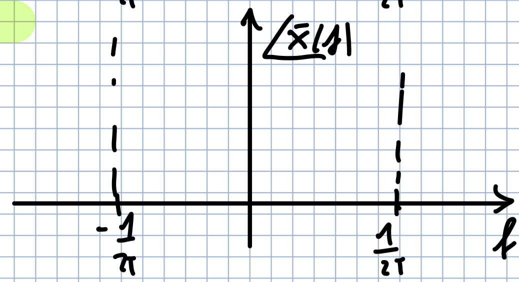
- FASE
- ALL'INTERNO DI $\frac{1}{T}$



PERCHÈ LA TFS È PERIODICA?

$$x_1[n] = e^{j2\pi F_1 n} \qquad F_1 = f_1 T$$

$$x_2[n] = e^{j2\pi F_2 n} \qquad F_2 = f_2 T$$



$$f_2 = f_1 + \frac{K}{T}$$

$$x_2[n] = e^{j2\pi F_2 n} = e^{j2\pi f_2 T n} = e^{j2\pi \left(f_1 + \frac{K}{T}\right) T n} =$$

$$= e^{j2\pi f_1 T n} \underbrace{e^{j2\pi \frac{K}{\cancel{T}} \cancel{T} n}}_{\text{FA } 1} = e^{j2\pi f_1 T n} = x_1[n]$$

ANCHE SE HANNO DUE FREQUENZE DIVERSE UNA VOLTA CAMPIONATE HANNO LA STESSA SEQUENZA

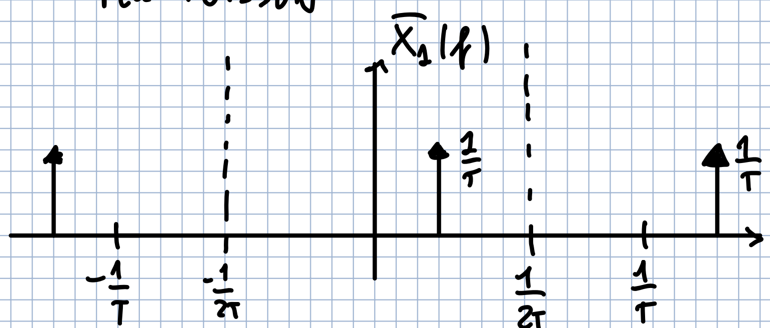
VERIFICHIAMO A LIVELLO DI SPETTRO

$$x_1[n] = x_2[n]$$

$$\bar{X}_1(f) = \bar{X}_2(f)$$

$$\bar{X}_1(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] e^{-j2\pi f n T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi F_1 n} e^{-j2\pi f n T} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi (f - f_1) n T} \underset{\text{PER POISSON}}{=} \frac{1}{T} \sum_{m} \delta\left(f - f_1 - \frac{m}{T}\right)$$



TRASLARE DI UNA QUANTITÀ PARI A UN MULTIPLO DI $\frac{1}{T}$ NON CAMBIA NULLA

$$\bar{X}_2(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] e^{-j2\pi f n T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi F_2 n} e^{-j2\pi f n T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \left(f_1 + \frac{K}{T}\right) n T} e^{-j2\pi f n T}$$

$$m' = K + m$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \left(f - f_1 - \frac{K}{T}\right) n T} = \frac{1}{T} \sum_{m}^{+\infty} \delta\left(f - f_1 - \frac{K}{T} - \frac{m}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{m'}^{+\infty} \delta\left(f - f_1 - \frac{m'}{K}\right) =$$

$$= \bar{X}_1(f)$$

TRASFORMABILITÀ DI UNA SEQUENZA

- C.S. $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \Rightarrow \exists \text{ TFS}$$

<u>DIM</u>

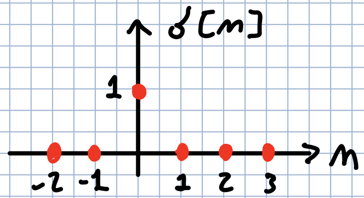
$$|\bar{X}(f)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi f n T}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| \underbrace{\left|e^{-j2\pi f n T}\right|}_{\text{FA } 1} \le \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|$$

SE CONVERGE CONVERGE PURE TFS

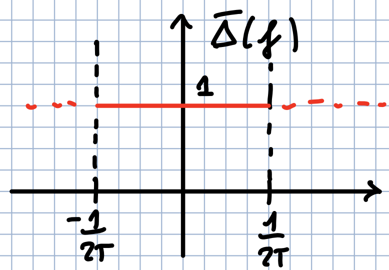
TRASFORMATE NOTEVOLI

- TFS $\delta[n]$

$$\bar{\Delta}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]\, e^{-j2\pi f n T} = 1 \quad \forall f$$



TFS $\Longleftrightarrow$



RELAZIONE TRA LA TFS ($\bar{X}(f)$) E LA TCF ($X(f)$)

$$\frac{x(t)}{X(f)} \xrightarrow{\downarrow T} \frac{x[n]}{\bar{X}(f)}$$

$x(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} X(f)$ $\qquad$ $x[n] \overset{TFS}{\Longleftrightarrow} \bar{X}(f)$

$$\boxed{\bar{X}(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right)} \Rightarrow$$

PERIODICIZZAZIONE DELLA TCF CON PERIODO $\frac{1}{T}$

<u>DIM.</u>

$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi f n T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\, e^{-j2\pi f n T}$$

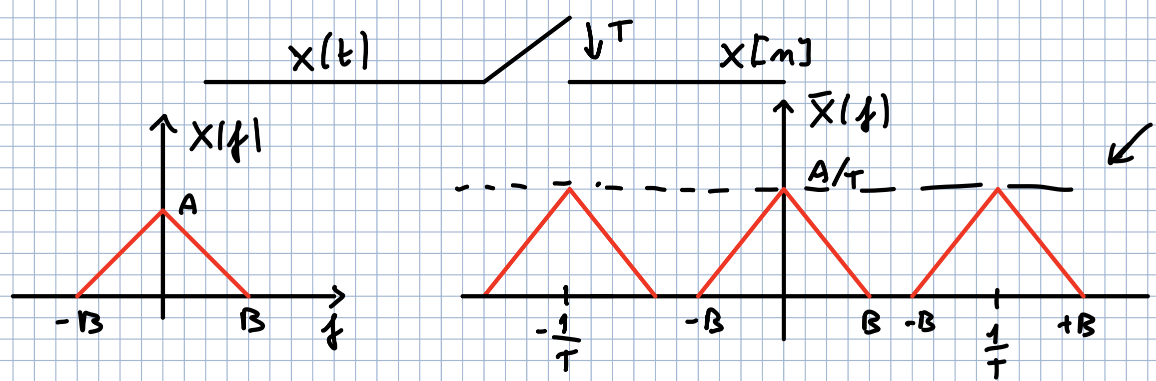
$x(nT) \to$ SEGNALE ANALOGICO CAMPIONATO

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df \Rightarrow \text{ATCF}$$

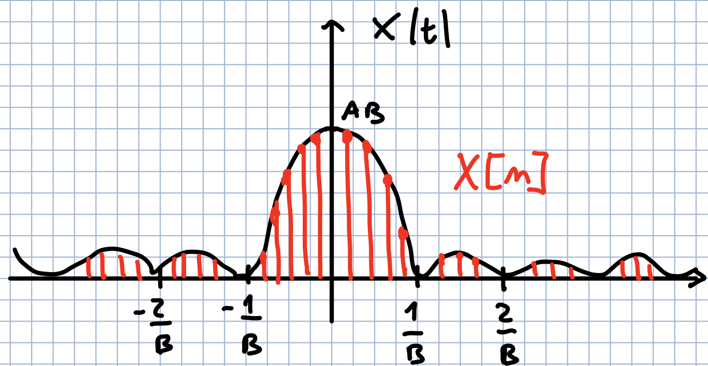
$$x(nT) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f n T}\, df$$

$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)\, e^{j2\pi\alpha nT}\, d\alpha}_{x(nT)}\; e^{-j2\pi f nT} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-\alpha)nT}}_{\text{POISSON} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f-\alpha-\frac{n}{T}\right)} d\alpha =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)\, \delta\left(\alpha - \left(f - \frac{n}{T}\right)\right) d\alpha = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right)$$



IN AMPIEZZA HO $A \cdot \left(\frac{1}{T}\right) \rightarrow$ periodo



$$x(t) = \underbrace{AB}\, \operatorname{sinc}^2(Bt)$$

GLI ZERI SI TROVANO A MULTIPLI DI $\frac{1}{B}$

ANALISI ENERGETICA DI SEQUENZE

- CORRELAZIONE TRA SEQUENZE

$$R_{xy}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, y^*[n-k]$$

- AUTOCORRELAZIONE

$$R_x[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, x^*[n-k]$$

- DENSITÀ SPETTRALE DI ENERGIA

$$\bar{S}_x(f) = \text{TFS}\left[R_x[k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_x[k]\, e^{-j2\pi f kT} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, x^*[n-k]\, e^{-j2\pi f kT} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[n-k] e^{-j2\pi f k T} =$$

$n-k=k'$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} x^*[k'] e^{-j2\pi f (n-k')T} =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi f n T}}_{\bar{X}(f)} \cdot \underbrace{\left[\sum_{k'=-\infty}^{+\infty} x^*[k'] e^{-j2\pi f k' T} \right]^*}_{\bar{X}^*(f)} = |\bar{X}(f)|^2$$

$$\boxed{E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} |\bar{X}(f)|^2 \, df}$$

$$E_x = R_x[0] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] x^*[n-k] \Big|_{k=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

TH. PARSEVAL PER SEQUENZE

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] y^*[n] = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) \bar{Y}^*(f) \, df$$

<u>DIM.</u>

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] y^*[n] = \underbrace{T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) e^{j2\pi f n T} \, df}_{x[n]} \, y^*[n] =$$

$$= T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y^*[n] e^{j2\pi f n T}}_{\bar{Y}^*(f)} \, df = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \bar{X}(f) \bar{Y}^*(f) \, df$$

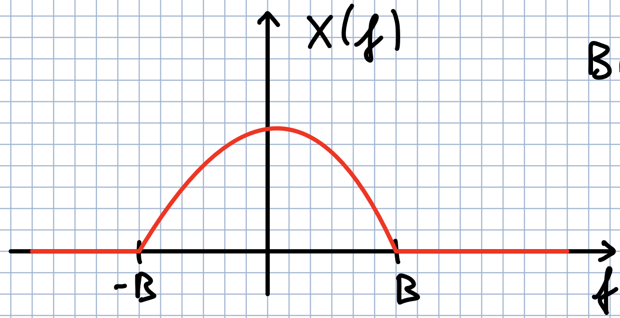
se $x[n] = y[n]$

$$\boxed{E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} |\bar{X}(f)|^2 \, df}$$

CONDIZIONE DI NYQUIST

Si applica a segnali con banda rigorosamente limitata

SEGNALE IL CUI SPETTRO DIVENTA NULLO A PARTIRE DA UNA CERTA FREQUENZA



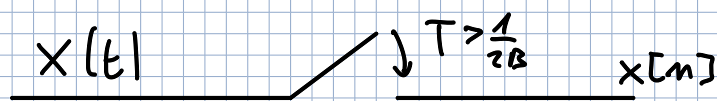
BANDA RIG. LIM. B

·) CAMPIONO CON UN INTERVALLO DI CAMPIONAMENTO

$$T$$

$$T > \frac{1}{2B} \qquad T \leq \frac{1}{2B}$$

1) $T > \frac{1}{2B}$ => ALIASING

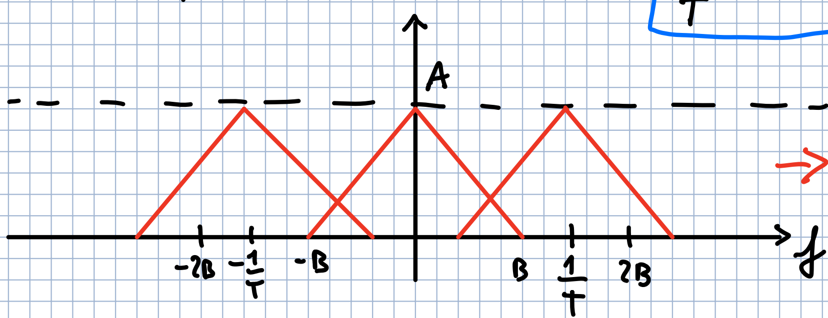


$$\overline{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{T} < 2B}$$

=> $T > \frac{1}{2B}$, $2B > \frac{1}{T}$

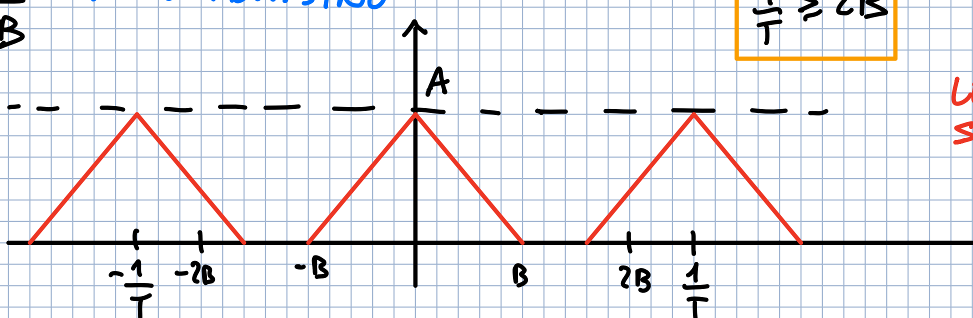
$\frac{1}{T} < 2B$



-> LE REPLICHE SI SOVRAPPONGO E SI PARLA DI ALIASING

2) $T \leq \frac{1}{2B}$ => NO ALIASING

$$\boxed{\frac{1}{T} \geq 2B}$$



LE REPLICHE NON SI SOVRAPPONGO

CONDIZIONE DI NYQUIST: è una condizione che si applica sull'intervallo di campionamento affinché non si produca ALIASING

$\boxed{f_c \geq 2B}$

FREQ. DI CAMPIONAMENTO

⇓

BISOGNA CAMPIONARE CON UNA FREQ. DI CAMP. ALMENO IL DOPPIO DELLA BANDA DEL SEGNALE

$\boxed{T \leq \frac{1}{2B}}$, B = Banda (RIG. LIM.) del segnale da campionare

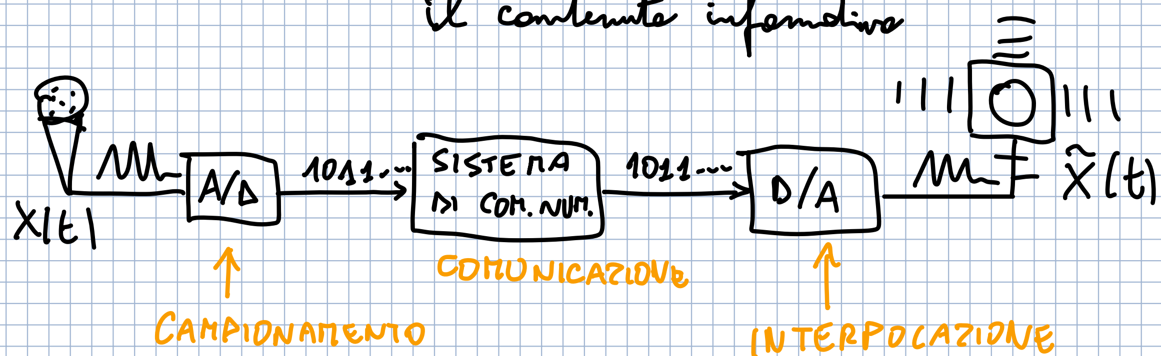
RICOSTRUZIONE DI UN SEGNALE ANALOGICO

$x(t) \longrightarrow$ CAMP. $\longrightarrow x[n] \longrightarrow$ $\boxed{\text{INTERPOLATORE}}$ $\longrightarrow \tilde{x}(t)$

SEGNALE INTERPOLATO

INTERPOLATORE: permette di ottenere un segnale analogico a partire da un segnale tempo-discreto (SEQUENZA)

$\tilde{x}(t) \longrightarrow x(t)$ per mantenere il più possibile inalterato il contenuto informativo



INTERPOLATORE

$x[n] \longrightarrow \boxed{p(t)} \longrightarrow \tilde{x}(t)$

p(t) = funzione interpolatrice

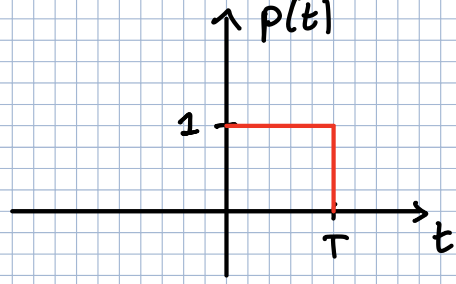
$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t-nT)$$

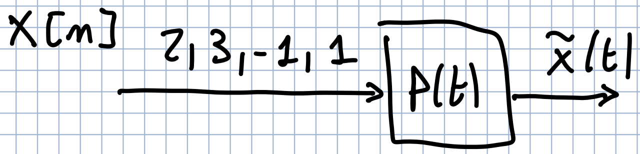
USCITA

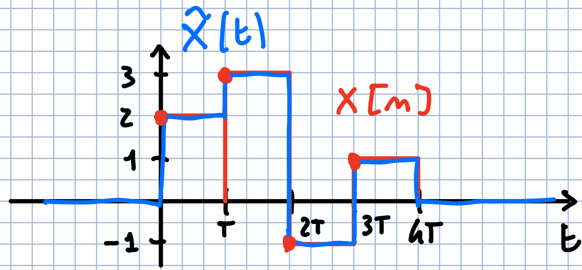
INGRESSO

ESEMPIO: INTERPOLATORE A MANTENIMENTO

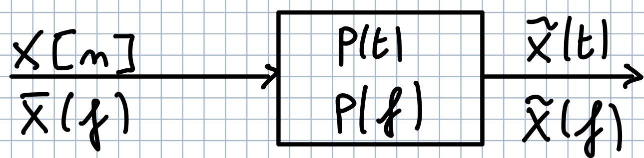
$$p(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - t/2}{T}\right)$$







·) INTERPRETAZIONE INTERPOLATORE NEL DOMINIO DI FREQUENZA



$$x[n] \overset{TFS}{\Longleftrightarrow} \bar{X}(f), \quad p(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} P(f), \quad \tilde{x}(t) \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} \tilde{X}(f)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{X}(f) = \bar{X}(f)\, P(f)}$$

DIM.

$$\tilde{X}(f) = TCF\left[\tilde{x}(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t - nT)}_{\tilde{x}(t)}\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$\boxed{t - nT = t'}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \int_{-\infty}^{+\infty} p(t - nT)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \sum_{n} x[n] \int_{-\infty}^{+\infty} p(t')\, e^{-j2\pi f (t' + nT)}\, dt' =$$

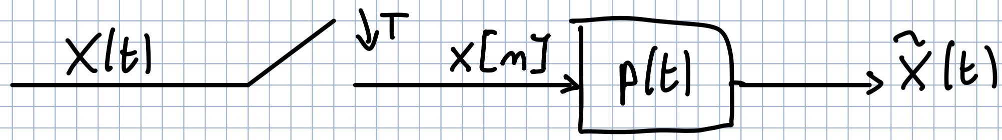
$$= \underbrace{\sum_{n} x[n]\, e^{-j2\pi f n T}}_{\bar{X}(f)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} p(t')\, e^{-j2\pi f t'}\, dt'}_{P(f)} = \bar{X}(f)\, P(f)$$

TH. DEL CAMPIONAMENTO

$$
Ip: \begin{cases} x(t) \text{ segnale a banda rig. lim. } B \\ T \leq \frac{1}{2B} \quad T \text{ intervallo di campionamento} \\ p(t) = 2B \operatorname{sinc}(2Bt) \end{cases}
$$

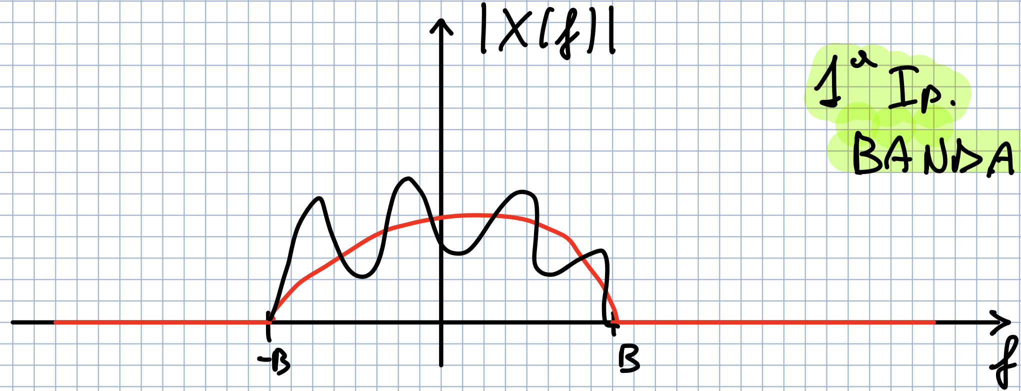
$$\Downarrow$$

TH: POSSO RICOSTRUIRE IL SEGNALE $x(t)$ PERFETTAMENTE A PARTIRE DAI SUOI CAMPIONI



REPLICA FEDELE DI $x(t)$

DIM. (GRAFICA)

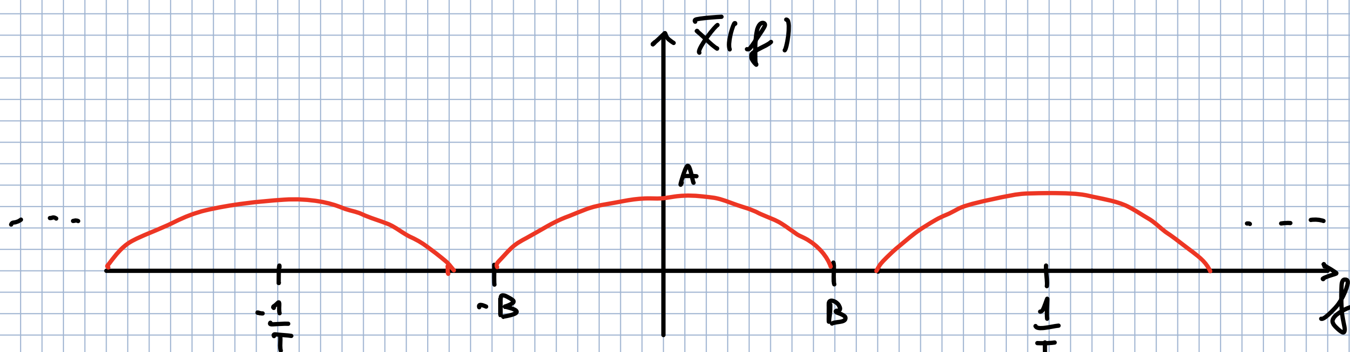


1^a Ip.
BANDA RIG. LIM. B

$\Downarrow$ DOPO CAMPIONAMENTO

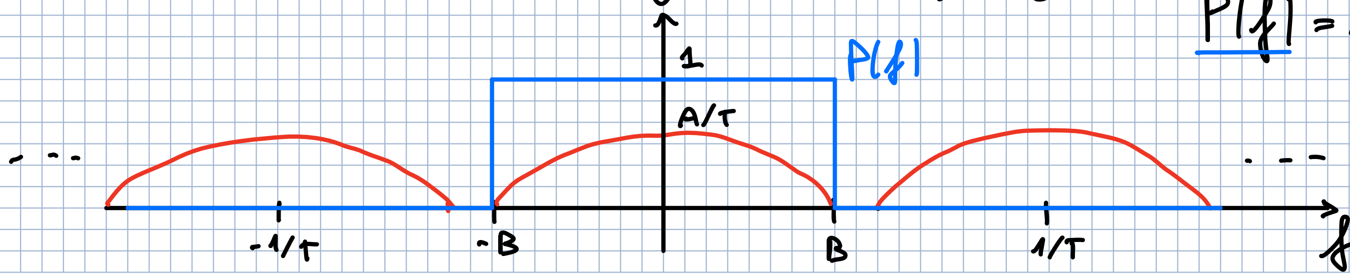
$$\overline{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

2^a Ip. $T \leq \frac{1}{2B}$

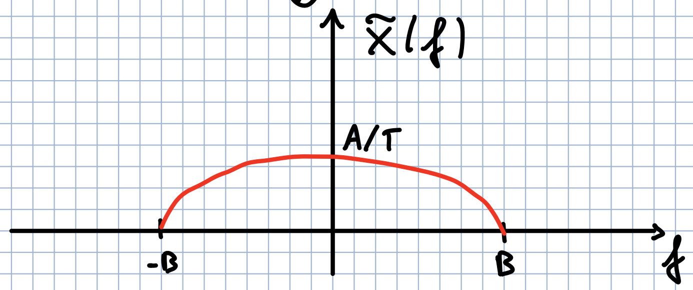


$\Downarrow$ INTERPOLAZIONE

$$P(f) = \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$



⇓ DOPO INTERPOLAZIONE



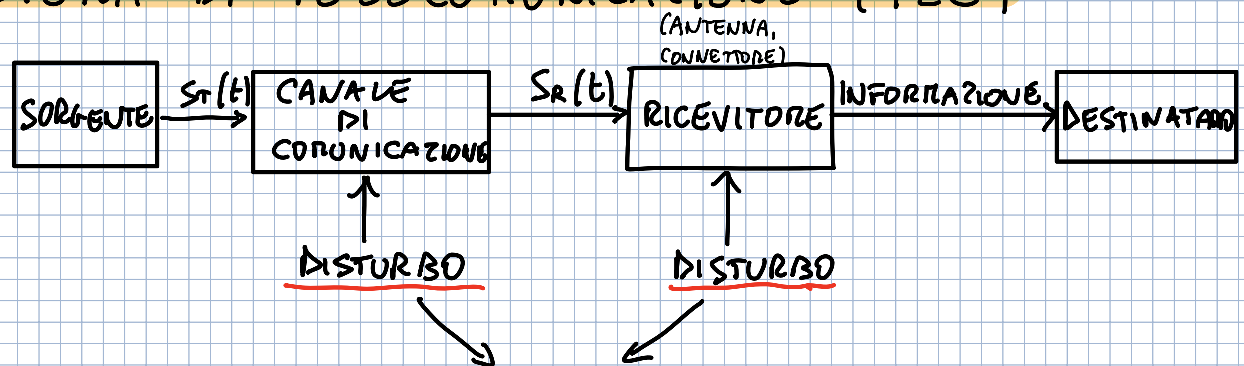
$$\tilde{X}(f) = \frac{1}{T} X(f) \Rightarrow \tilde{x}(t) = \frac{1}{T} x(t)$$

⇓

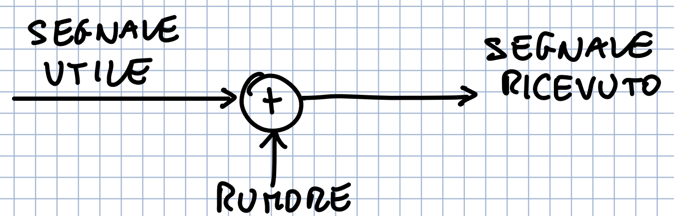
$$p(t) = T \cdot 2B \operatorname{sinc}(2Bt)$$

$$P(f) = T \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \Rightarrow \tilde{X}(f) = X(f)$$

SISTEMA DI TELECOMUNICAZIONE (TLC)



RUMORE ⇒ SEGNALE ALEATORIO ADDITIVO
(PROCESSO ALEATORIO)



CI SERVE
⇒ CARATTERIZZARE IL RUMORE TRAMITE STATISTICHE

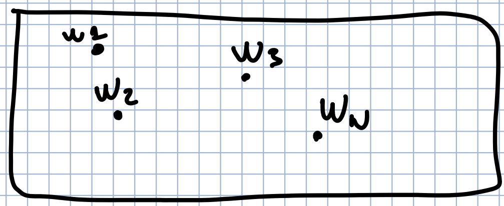
TEORIA DELLA PROBABILITÀ

·) CONCETTO: ESPERIMENTO ALEATORIO
⇓
se il risultato non è predicibile deterministicamente

LANCIO DEL DADO ⇒ NON SO A PRIORI COSA ESCE
⇒ OSSERVO DELLE REGOLARITÀ STATISTICHE
lancio N VOLTE (N GRANDE), so che la faccia "1" esce $\simeq \frac{N}{6}$ VOLTE

·) DESCRIZIONE FORMALE DI UN ESP. CASUALE

SPAZIO CAMPIONE



$\Omega = \{w_1, w_2 \ldots w_N\}$

TUTTI I POSSIBILI RISULTATI DI UN ESPERIMENTO CASUALE

ES. "LANCIO DI UN DADO A SEI FACCE"

$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_i \ldots w_6\}$ $\quad w_i =$ ESCE LA FACCIA "6"

⇒ **EVENTO**: è un sottoinsieme dello spazio campione che soddisfa le seguenti condizioni:

·) SE A è un evento, allora anche il suo complemento $\bar{A}$, rispetto a Ω è un EVENTO

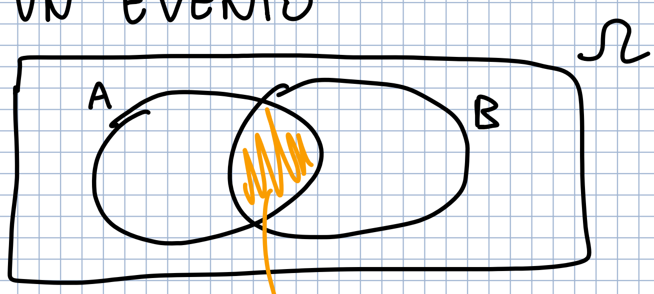
A è un EVENTO $\Rightarrow \bar{A}$ è un EVENTO

$A \cup \bar{A} = \Omega$

·) SE A e B sono EVENTI, anche la loro unione $A \cup B$ è un EVENTO

⇒ **PROPRIETÀ EVENTI**

1) $A \cap B$ è UN EVENTO



$A \cap B$ è un EVENTO

DIM.

$\bar{A}$ è un EVENTO

$\bar{B}$ è un EVENTO $\quad \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B}$ è un EVENTO

$\bar{A} \cup \bar{B}$ è un EVENTO

$$\Downarrow$$

$$\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = A \cap B$$

2) $A \cup \bar{A} = \Omega$ è un EVENTO CERTO

3) $A \cap \bar{A} = 0$ è un EVENTO IMPOSSIBILE

$A \rightarrow$ NUM. PARI
$\bar{A} \rightarrow$ NUM. DISPARI
$\Rightarrow$ IMPOSSIBILE

CARATTERIZZAZIONE ESPERIMENTO CASUALE

$\Rightarrow$ ELEMENTI NECESSARI ALLA COMPLETA DESCRIZIONE DI UN EVENTO CASUALE

1) DESCRIZIONE DI UNO SPAZIO CAMPIONE Ω

2) DEFINIZIONE E PROPRIETÀ DEGLI EVENTI

3) LEGGE DI PROBABILITÀ: associa a ogni elemento definito una misura della probabilità che esso si presenti

DEFINIZIONE ASSIOMATICA DI PROBABILITÀ (KOLMOGOROV)

1) la probabilità di un evento A è non-negativa

$$P\{A\} \geq 0$$

2) la probabilità dell'evento CERTO è unitaria

$$P\{\Omega\} = 1$$

3) Dati 2 EVENTI, A e B, MUTUAMENTE ESCLUSIVI (NON SI POSSONO VERIFICARE CONTEMPORANEAMENTE $\rightarrow A \cap B = 0$), la probabilità dell'evento unione è PARI alla somma delle probabilità dei singoli eventi.

$$A \cap B = 0 \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

PROPRIETÀ

1) $P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A})$

$$P(\Omega) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A \cup \bar{A}) = 1$$

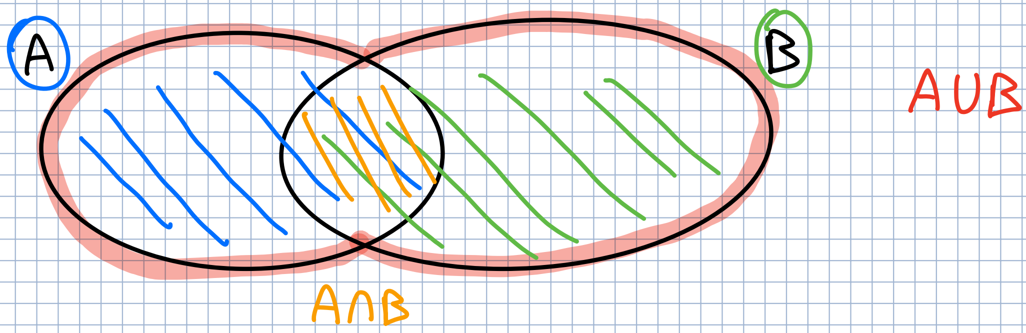
$$A \cap \bar{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A})$$

2) $P\{\emptyset\} = 0$ $\quad \emptyset$ EVENTO IMPOSSIBILE

3) $0 \le P(A) \le 1$

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



•) NOTAZIONE SEMPLIFICATA

$A \cup B \Rightarrow A + B$

$A \cap B \Rightarrow A \cdot B$

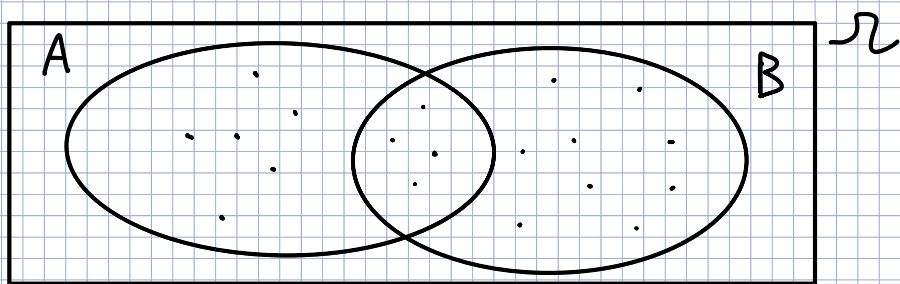
$P(AB) = P(A \cap B)$ => PROBABILITÀ CONGIUNTA

$P(A)$ e $P(B)$ => PROBABILITÀ MARGINALI (DEI SINGOLI EVENTI)

•) PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}}$$

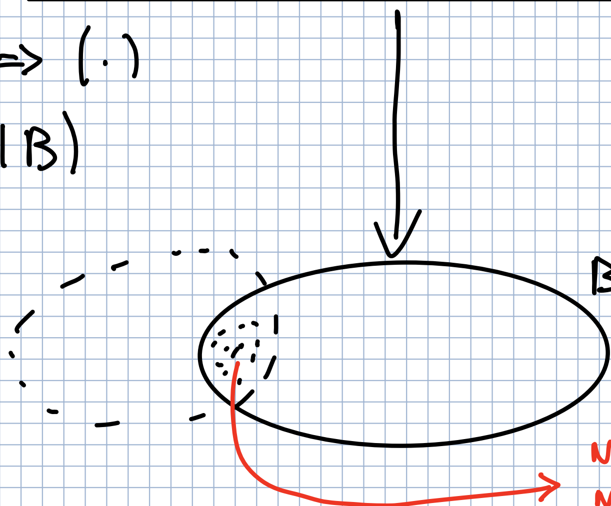
CALCOLA LA P(A) DOPO CHE SI È VERIFICATO L'EVENTO B
+ INFO HO + SONO PRECISO



$P(A) \Rightarrow (\cdot)$

$P(A \mid B)$

nel momento che osservo "B", lo spazio campione si riduce a B e non più Ω



$B = \Omega'$ -> NUOVO SPAZIO CAMPIONE

NUOVO EVENTO CHE DEVO CONSIDERARE NEL MIO NUOVO SPAZIO CAMPIONE

$P(A)$ PROBABILITÀ "A PRIORI" (PRIMA CHE SI OSSERVI QUALCOSA)

$P(A|B)$ PROBABILITÀ "A POSTERIORI" (DOPO OSSERVAZIONE)

- PROBABILITÀ "CLASSICA" (PASCAL)

$$\boxed{P(A) = \frac{N_F(A)}{N_P}}$$

$N_F(A)$ = NUM. CASI FAVOREVOLI AD A (RISULTATI $\in A$)

N_P = NUM. CASI POSSIBILI

ES. DADO A 6 FACCE

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$

$P(A) = ? = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad N_F = 3 \quad N_P = 6$

CONTRO ESEMPIO

$\Rightarrow$ DADO TRUCCATO $\quad P(A) = \frac{N_F(A)}{N_P} \Rightarrow$ NON È UTILIZZABILE PERCHÈ NON TIENE CONTO DEL FATTO CHE UN NUMERO POSSA USCIRE PIÙ DEGLI ALTRI

$$\boxed{P(w_i) = P \quad \forall i}$$

PROB. A PRIORI

TUTTI I RISULTATI DEVONO ESSERE EQUIPROBABILI

$\Rightarrow$ SODDISFA GLI ASSIOMI ?

1) $P(A) \geq 0 \Rightarrow P(A) = \frac{N_F(A)}{N_P} \geq 0 \quad N_F(A) \geq 0 \quad N_P > 0$ ✓

2) $P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(\Omega) = \frac{N_P}{N_P} = 1 \quad N_F(A) = N_P$ ✓

$N_F(\Omega) = N_P$

3) $P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{N_F(A \cup B)}{N_P} = \frac{N_F(A) + N_F(B)}{N_P}$ ✓

$A \cap B = \emptyset$

$$= \frac{N_F(A)}{N_P} + \frac{N_F(B)}{N_P} = P(A) + P(B)$$

• PROBABILITÀ "FREQUENTISTA" (VON MISES)

Viene fuori dagli esperimenti

$$\boxed{P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}}$$

N_A = N° DI VOLTE CHE ESCE UN RISULTATO FAVOREVOLE AD A

N = N° ESPERIMENTI FATTI

⇒ SODDISFA GLI ASSIOMI ?

1) $P(A) \geq 0$ $\quad N_A \geq 0 \,,\; N > 0 \;\Rightarrow\; P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N} \geq 0$ ✓

2) $P(\Omega) = 1$ $\quad N_A = N \;\Rightarrow\; P(\Omega) = \lim_{N \to \infty} \frac{N}{N} = 1$ ✓

3) $P(A \cup B)$ $\quad A \cap B = 0$ MUT. ESCL.

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_{A \cup B}}{N} = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A + N_B}{N} =$$ ✓

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N} + \lim_{N \to \infty} \frac{N_B}{N} = P(A) + P(B)$$

INDIPENDENZA TRA EVENTI

A e B SONO INDIPENDENTI SE:

$$\boxed{P(A \mid B) = P(A)}$$

⇒ Se A e B sono INDIPENDENTI

$$P(A) = P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)}$$

TH. BAYES

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)}}$$

$P(A), P(B) \neq 0$

DIM.

$$P(A \cdot B) = P(B \cdot A) \Leftarrow A \cap B = B \cap A$$

$$P(A \cdot B) = P(A|B) \cdot P(B) \Leftarrow P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(B \cdot A) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$\Downarrow \; P(B) \neq 0$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

•) PARTIZIONE DI UNO SPAZIO CAMPIONE

è tale che scegliendo N eventi B_i, $i = 1 \dots N$ con le propriete:

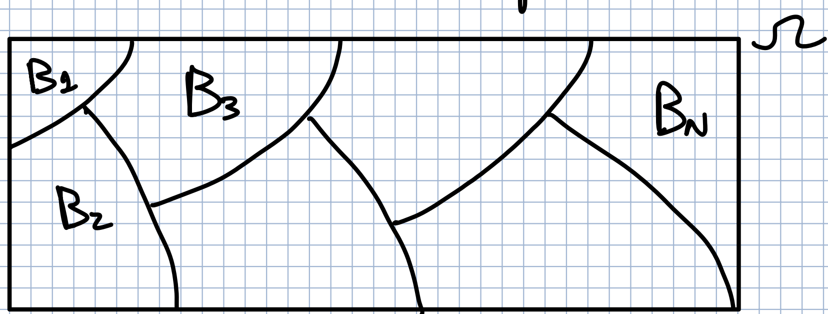
1) $B_i \cap B_K = 0 \quad \forall i, K \quad i \neq K$

TUTTI MUT. ESCLUSIVI

2) $\bigcup_{i=1}^{N} B_i = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots B_N = \Omega$

$\Rightarrow$ L'INSIEME dei B_i è una partizione di Ω

ESEMPIO:



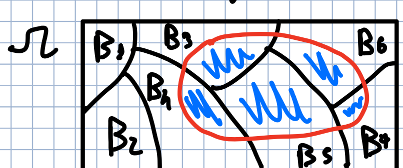
TH. DELLA PROBABILITA' TOTALE

Se B_i è una partizione di Ω allora: se A è un EVENTO

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(A|B_i)\,P(B_i)}$$

DIM.

$$P(A) = P(A \cdot \Omega) = P\left(A \sum_{i=1}^{N} B_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{N} A B_i\right) = *$$



$$\bigcup_{i=1}^{N} B_i = B_1 \cup B_2 \cup \dots B_N = B_1 + B_2 + \dots B_N = \sum_{i=1}^{N} B_i$$

$$A \cdot B_i \cap AB_k \quad i \neq k \quad \forall i,k$$

$$* = \sum_{i=1}^{N} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{N} P(A|B_i)P(B_i) \quad \text{c.v.d.}$$

$$P(AB_i) = P(A|B_i) \cdot P(B_i) \Leftarrow P(A|B_i) = \frac{P(AB_i)}{P(B_i)}$$

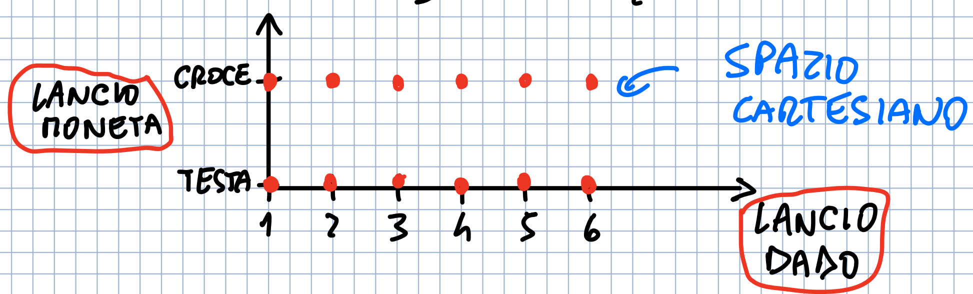
ESPERIMENTO ALEATORIO COMPOSTO

⇒ quando si considerano contemporaneamente 2 o più esperimenti CASUALI

ES.: LANCIO DI UN DADO E DI UNA MONETA

⇒ lo SPAZIO CAMPIONE DI UN ESPERIMENTO AL. COMPOSTO è il PRODOTTO CARTESIANO TRA GLI SPAZI CAMPIONE DEI SINGOLI ESPERIMENTI

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \ldots \times \Omega_N$$



RISULTATO = COPPIA "ORDINATA" DEI SINGOLI ESPERIMENTI

ES. "FACCIA DEL DADO "1" e "TESTA" "

EVENTO: è costituito dal PR. CARTES. dei singoli eventi

$$A = A_1 \times A_2 \ldots \times A_N$$

⇒ Se i singoli esperimenti ALEATORI sono indipendenti dagli altri:

$$\Rightarrow P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_N)$$

$P(A_i) \quad i = 1 \ldots N$ sono le probabilità dei singoli eventi

N.B. NON POSSO RISALIRE ALLA LEGGE DI PR. DELL'EVENTO "A" A PARTIRE DALLA LEGGE DEI SINGOLI EVENTI

⇓

VALE SOLO SE GLI EVENTI SONO INDIPENDENTI

PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE BINARIE INDIPENDENTI

- N ESPERIMENTI IDENTICI E INDIPENDENTI
- SPAZIO CAMPIONE Ω fatto da solo 2 possibili risultati

$$\Omega = \{w_1, w_2\}$$

ESEMPI: lanci ripetuti di una moneta

$$\text{moneta} \begin{cases} \rightarrow \text{TESTA} \\ \rightarrow \text{CROCE} \end{cases}$$

$w_1 =$ TESTA $\Rightarrow P\{w_1\}$

$w_2 =$ CROCE $\Rightarrow P\{w_2\} = 1 - P\{w_1\}$

$A = \{w_1 \text{ si presenta } K \text{ volte su } n \text{ lanci}\}$

$$\boxed{P\{A\} = \binom{n}{K} p^K q^{n-K}}$$

FORMULA DI BERNOULLI

$p = P\{w_1\}$

$q = 1 - p = P\{w_2\}$

$$\binom{n}{K} = \frac{n!}{K!\,(n-K)!}$$

ESEMPIO

Esistono due monete $\begin{cases} \rightarrow \text{PERFETTA} \\ \rightarrow \text{TRUCCATA} \end{cases}$

moneta perfetta $\Rightarrow P\{\text{"TESTA"}\} = P\{\text{"CROCE"}\} = 0{,}5$

moneta truccata $\Rightarrow P\{\text{"TESTA"}\} = 0{,}8$, $P\{\text{"CROCE"}\} = 0{,}2$

$\Rightarrow$ ESPERIMENTO

1) Si sceglie una moneta a caso tra le due
2) Si lancia la moneta scelta per 10 volte osservando che per 5 volte esce "testa" e per 5 volte "croce".

Qual è la probabilità di aver scelto la moneta perfetta? P. COND.

SVOLG.

Devo calcolare una probabilità a posteriori (condizionata)

$\Rightarrow$ Se non avessi osservato niente avrei dedotto che la probabilità di pescare la moneta perfetta è 0,5 (pesco a caso)

A = {"pesco la moneta perfetta"} $\quad P\{A\} = 0{,}5$

B = {"osservo 5 volte "testa" e per 5 volte "croce" dopo 10 lanci"}

$\Rightarrow P\{A \mid B\} = ? \qquad P\{A \mid B\} \neq P\{A\}$ in generale

Quando sono UGUALI?

Quando A e B sono eventi INDIPENDENTI

A e B non sono INDIPENDENTI

$\Rightarrow$ L'aver osservato 10 lanci mi condiziona la prob. di aver scelto la moneta perfetta

$\Rightarrow$ TH. BAYES.

$$P\{A \mid B\} = \frac{P\{B \mid A\} \cdot P\{A\}}{P\{B\}}$$

BINARIO $\to$ TESTA, CROCE

LANCI INDIPENDENTI

$P\{B \mid A\} \to$ è la probabilità che su 10 lanci esce 5 volte testa e 5 volte croce

$$P\{B \mid A\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} =$$

$\left.\begin{array}{l} p = 0{,}5 \\ q = 0{,}5 \end{array}\right\}$ MONETA PERFETTA

$n = 10$ LANCI

$K = 5$ LANCI FAVOREVOLI

$$= \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot 0{,}5^5 \cdot 0{,}5^5 \simeq 0{,}246$$

$P\{A\} \to$ è la prob. di scegliere la moneta perfetta senza osservare nulla

$P\{A\} = 0{,}5$

$P\{B\}$ **PROBABILITÀ TOTALE**

TH. PR. TOTALE

$$P\{B\} = \sum_{i=1}^{n} P\{B \mid C_i\} \cdot P\{C_i\}$$

n = n° di eventi di una partizione di Ω

$C_1 = \{$scelgo la moneta perfetta$\} = A$

$C_2 = \{$scelgo la moneta truccata$\}$

C_1 e C_2 sono gli eventi di una partizione di Ω

$$P\{B\} = \underbrace{P\{B \mid \underset{C_1}{A}\}}_{\simeq 0{,}246} \cdot \underbrace{P\{A\}}_{0{,}5} + \underbrace{P\{B \mid C_2\}}_{?} \underbrace{P\{C_2\}}_{0{,}5}$$

$$P\{B \mid C_2\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} =$$

$n = 10$, $k = 5$ $\qquad$ $p = 0{,}8$ "TESTA" $\qquad$ $K = 0{,}2$ "CROCE"

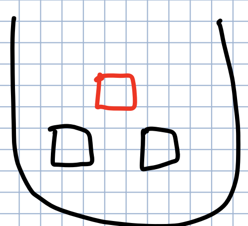
$$= \frac{10!}{5!\,5!} \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^5 \simeq 0{,}0264$$

$$P\{B\} = 0{,}246 \cdot 0{,}5 + 0{,}0264 \cdot 0{,}5 = 0{,}136$$

$$P\{A \mid B\} = \frac{P\{B \mid A\} \cdot P\{A\}}{P\{B\}} = \frac{0{,}246 \cdot 0{,}5}{0{,}136} \simeq 0{,}903$$

superiore al 90%

ESERCIZIO - TESTO ESAME 04/06/19



2 REGOLARI

1 TRUCCATO

regolare $\Rightarrow P\{1\} = P\{2\} = \dots P\{6\} = \frac{1}{6}$

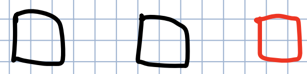
truccato $\Rightarrow P\{1\} = P\{2\} = \frac{1}{4} \qquad P\{3\} = P\{4\} = P\{5\} = P\{6\} = \frac{1}{8}$

ESPERIMENTO

1) Estraggo "a caso" due dadi dal sacchetto
2) Calcolare la probabilità che esca "1" e "2"

3) Calcolare la probabilità di aver estratto il dado truccato avendo osservato un "1" e "3"

SVOLGIMENTO



1 2 3

1, 2 $\Rightarrow$ 2 dadi regolari

1, 3
2, 3 $\Big\}$ $\Rightarrow$ 1 regolare e 1 truccato

la calcolo tramite la def. classica

$A = \{$"estraggo due dadi regolari"$\} \Rightarrow P\{A\} = \frac{1}{3}$ $\qquad P\{A\} = \frac{N_F}{N}$

$B = \{$"estraggo un dado regolare e uno truccato"$\} = \frac{2}{3}$

$C = \{$"escono un "1" e un "2""$\}$

TH. PR. TOTALE

A e B sono partizioni di Ω

$$P\{C\} = P\{C \mid A\} \cdot P(A) + P\{C \mid B\} P\{B\}$$

$P\{C \mid A\} \rightarrow$ è la prob. che esce "1" e "2" avendo pescato 2 dadi regolari

$P\{1\} = \frac{1}{6}$ $\qquad P\{2\} = \frac{1}{6}$ $\qquad P\{1,2\} = P\{1\} \cdot P\{2\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$P\{2,1\} = P\{2\} \cdot P\{1\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

PER INDIPENDENZA DEI LANCI

$$P\{C \mid A\} = P\{1,2\} + P\{2,1\} = \frac{1}{18}$$

$P\{C \mid B\} =$ è la prob. che esce "1" e "2" avendo pescato 1 regolare e 1 truccato

2 CASI

DADO TRUCCATO	DADO REGOLARE		
1	2	$\Rightarrow P\{1\} = \frac{1}{4}$	$P_= \{2\} = \frac{1}{6}$
2	1	$\Rightarrow P\{2\} = \frac{1}{4}$	$P_= \{1\} = \frac{1}{6}$

$P\{1,2\} = P\{1\} \cdot P\{2\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$

$P\{2,1\} = P\{2\} \cdot P\{1\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$

$$P\{C \mid B\} = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

$P\{C\} = P\{C \mid A\}\cdot P(A) + P\{C \mid B\}\, P\{B\} = \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{54} + \frac{1}{18} = \boxed{\frac{2}{27}}$ (1)

b) $D = \{$"escono un 1 e un 3"$\}$

$P\{B \mid D\} = ?$

$B = \{$"estraggo un dado regolare e uno truccato"$\} = \frac{2}{3}$

TH. BAYES

$$P\{B \mid D\} = \frac{P\{D \mid B\}\cdot P\{B\}}{P\{D\}}$$

$P\{D \mid B\} \to$ è la probabilità che escano un 1 e un 3 avendo estratto 1 dado truccato e 1 regolare

TRUCCATO	REGOLARE	
1	3	$\Rightarrow P\{1,3\} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{24}$
3	1	$\Rightarrow P\{3,1\} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{48}$

$P\{D \mid B\} = \frac{1}{24} + \frac{1}{48} = \frac{1}{16}$

$P\{D\} = P\{D \mid A\}\cdot P\{A\} + P\{D \mid B\}\cdot P\{B\}$

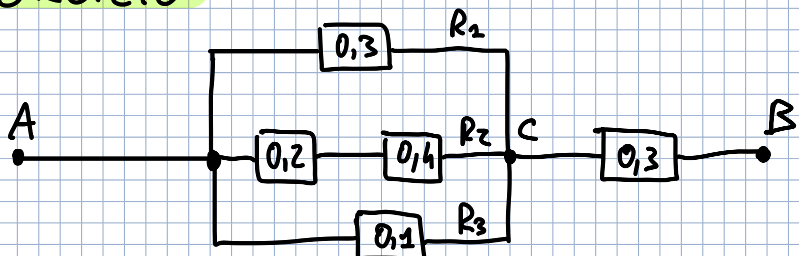
$\Rightarrow P\{D \mid A\} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$

REGOLARE	REGOLARE	
1	3	$P\{1,3\} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
3	1	$P\{3,1\} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$P\{D\} = \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{16}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{54} + \frac{1}{48} = \frac{13}{216}$

$$P\{B \mid D\} = \frac{P\{D \mid B\}\cdot P\{B\}}{P\{D\}} = \frac{\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{13}{216}} = \frac{9}{13} = \boxed{0{,}69}$$ (2)

ESERCIZIO



PROBABILITÀ DI GUASTO (INDIPENDENTI)

1) Calcolare la probabilità che A sia connesso a B

SVOLGIMENTO

P_{AB} = prob. che A sia connesso a B

P_{AC} = // A // C

P_{CB} = // C // B

$P_{AB} = P_{AC} \cdot P_{CB} = 0{,}9844 \cdot 0{,}7 \simeq 0{,}69$ → per indipendenza dei guasti dei relè

$P_{CB} = 1 - P_{\overline{CB}} = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ prob. che tra C e B il relè non si guasti

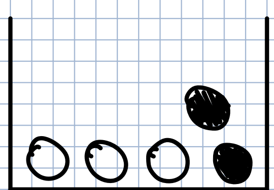
$P_{AC} = 1 - P_{\overline{AC}} = 0{,}9844$

$P_{\overline{AC}} = P_{\overline{R1}} \cdot P_{\overline{R2}} \cdot P_{\overline{R3}} = 0{,}3 \cdot 0{,}52 \cdot 0{,}1 = 0{,}0156$

I 3 RAMI SONO TUTTI DISCONNESSI

$P_{\overline{R1}} = 0{,}3$ $\quad P_{\overline{R3}} = 0{,}1$ $\quad P_{\overline{R2}} = 1 - \underbrace{(1-0{,}2)}_{\text{PROB. CHE IL 1° RELÈ FUNZIONI}} \cdot \underbrace{(1-0{,}4)}_{\text{2° RELÈ FUNZIONI}} = 1 - (0{,}8 \cdot 0{,}6) = 0{,}52$

ESERCIZIO - 31/01/20



I° ESPERIMENTO: si pescano 2 palline a caso

a) Calcolare la prob. che se ne peschi 1 bianca e 1 nera

SVOLG.

Estrazione di 2 palline

→ Estrazione I° PALLINA

→ Estrazione 2° PALLINA

	I° PALLINA	2° PALLINA
I° CASO	○	●
II° CASO	●	○

A = { "Estraggo una pallina bianca e una nera" }

$A = \underbrace{\{○ ●\}}_{1°} + \underbrace{\{● ○\}}_{2°} = P\{○ ●\} + P\{● ○\}$ → poiché mutuamente esclusivi

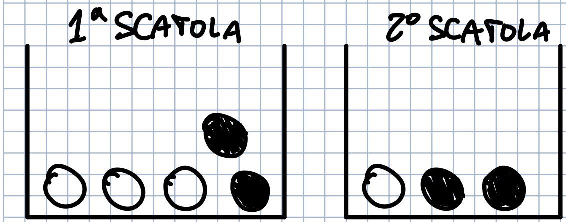
$P\{○●\} = P\{○\} \cdot P\{●|○\} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

PROB. DI ESTRARRE LA PRIMA PALLINA BIANCA

PROB. DI ESTRARRE LA SECONDA PALLINA NERA DOPO AVER ESTRATTO LA BIANCA

$P\{●○\} = P\{●\} \cdot P\{○|●\} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

$\boxed{P\{A\} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}}$ → RIS. 1° ESPERIMENTO



II° ESPERIMENTO: si pesca a caso 1 pallina dalla 1° scatola e la si mette nella 2ª SCATOLA

b) Calcolare la prob. che pescando 1 pallina dalla 2ª scatola questa sia nera

c) Calcolare la prob. di aver estratto 1 pallina bianca dalla prima scatola avendo pescato una pallina nera dalla seconda

SVOLG.

b) $B = \{$"pesco 1 pallina nera dalla 2ª scatola"$\}$

$C = \{$"pesco 1 pallina bianca dalla 1ª scatola"$\}$

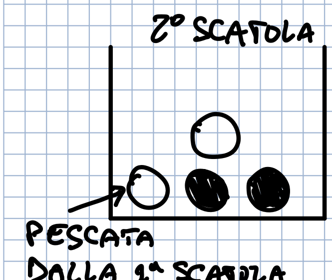
$D = \{$"pesco 1 pallina nera dalla 1ª scatola"$\}$

MUTUAMENTE ESCLUSIVI

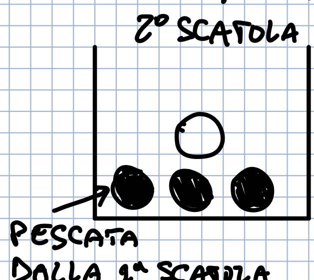
PARTIZIONE SPAZIO CAMPIONE Ω

$P\{B\} = P\{B|C\} \cdot P\{C\} + P\{B|D\} \cdot P\{D\} =$

$P\{B|C\} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

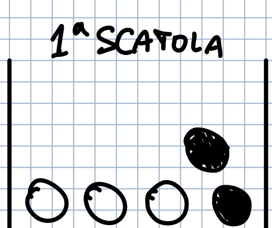


$P\{B|D\} = \frac{3}{4}$



$P\{C\} = \frac{3}{5}$

$P\{D\} = \frac{2}{5}$



$\boxed{P\{B\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}}$

b

c) $P\{C \mid B\} \rightarrow$ BAYES $= \dfrac{P\{B \mid C\} \cdot P\{C\}}{P\{B\}} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

PESCO 1 BIANCA DALLA 1ª SCATOLA

PESCO 1 NERA DALLA 2ª SCATOLA

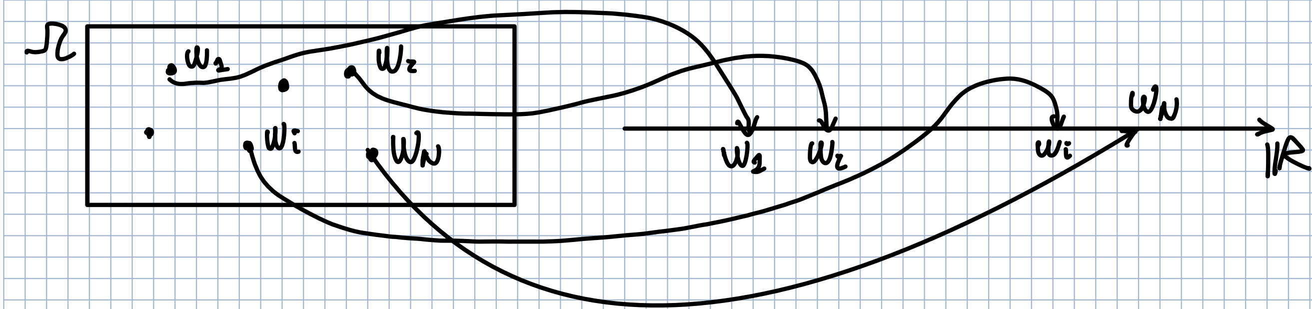
$P\{C \mid B\} = \frac{1}{2}$

$P\{C\} = \frac{3}{5}$

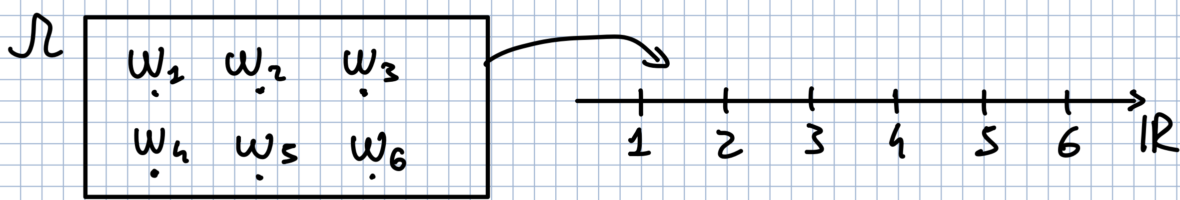
LA PROBABILITÀ È DIMINUITA DOPO AVER OSSERVATO L'ESTRAZIONE DELLA PALLINA NERA DALLA 2° SCATOLA

VARIABILI ALEATORIE

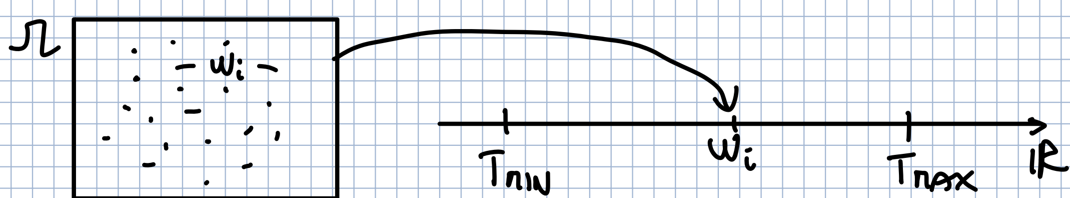
ESPERIMENTO CASUALE



·) LANCIO DI UN DADO



·) MISURA DI UNA TEMPERATURA (IN UNA STANZA)



$X(w_i)$ CORRISPONDENZA CHE MAPPA UN RISULTATO DELL'ESPERIMENTO CASUALE SULL'ASSE DEI NUMERI

$X(w)$ è una variabile aleatoria se l'insieme dei risultati per cui si verifica che $X(w) \leq a \quad \forall a$ È UN EVENTO

$X(w) \Rightarrow X$ → NOME DELLA VAR. AL. CHE DESCRIVE L'ESPERIMENTO

$X \leq a$ è rappresentativo di un evento

⇒ Associamo ad un evento la sua probabilità

$\Downarrow$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ

$$F_X(x) = P\{X \leq x\}$$

PROPRIETÀ

.) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

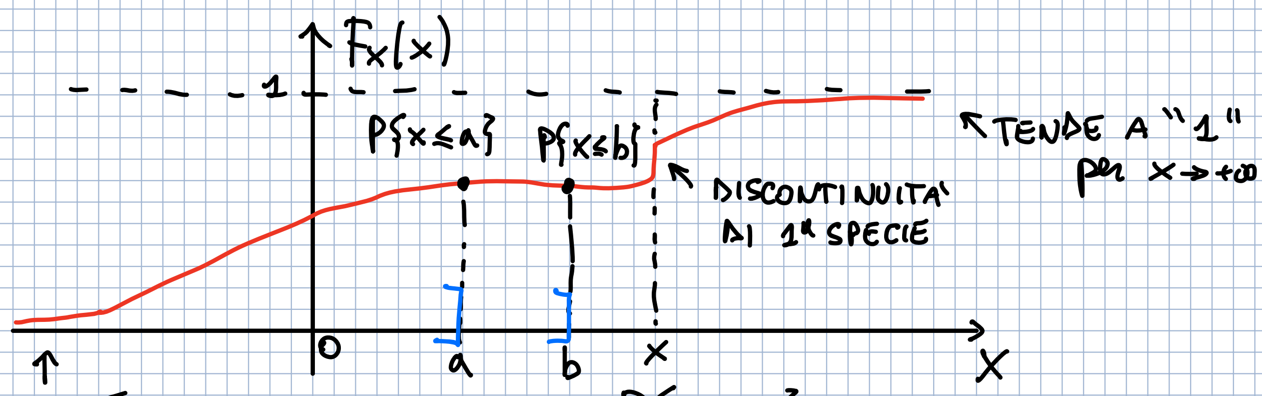
.) se $x_2 > x_1 \implies F_X(x_2) \geqslant F_X(x_1)$ (MONOTONA NON DECRESCENTE)

.) se $\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X$ (CONTINUA DA DESTRA)

.) se si presenta DISCONTINUITÀ (DI 1ª SPECIE) in $x = \bar{x}$, allora:

$$F_X(\bar{x}^+) - F_X(\bar{x}^-) = P\{X = \bar{x}\} \rightarrow \text{MASSA DI PROBABILITÀ}$$

.) $P\{a < X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a) \qquad a < b$



$P\{x = \bar{x}\} = K \qquad 0 < K < 1$

$P\{x \leq b\} - P\{x \leq a\}$

$\Downarrow$

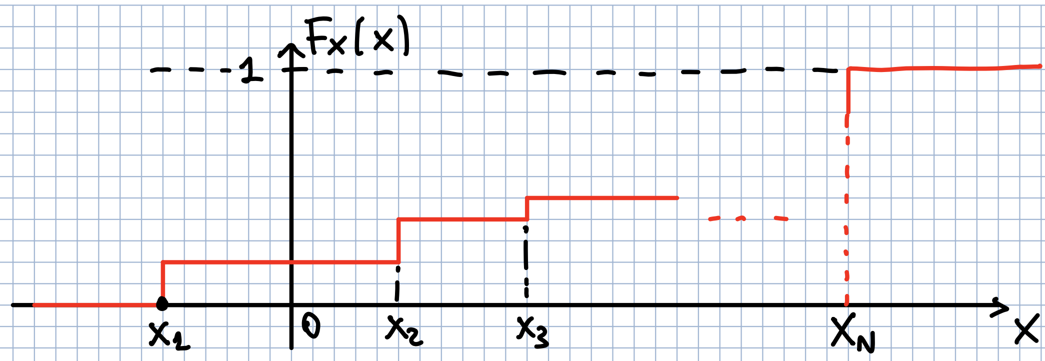
$F_X(b) - F_X(a)$

TIPOLOGIE DI V.A.: DISCRETE, CONTINUE, MISTE

X DISCRETA

$$F_X(x) = \sum_n P\{X = x_n\} u(x - x_n)$$

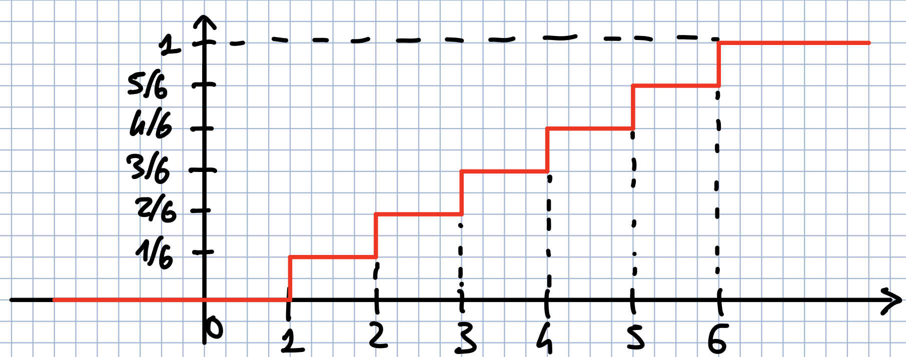
$P\{X = x_n\}$ masse di probabilità



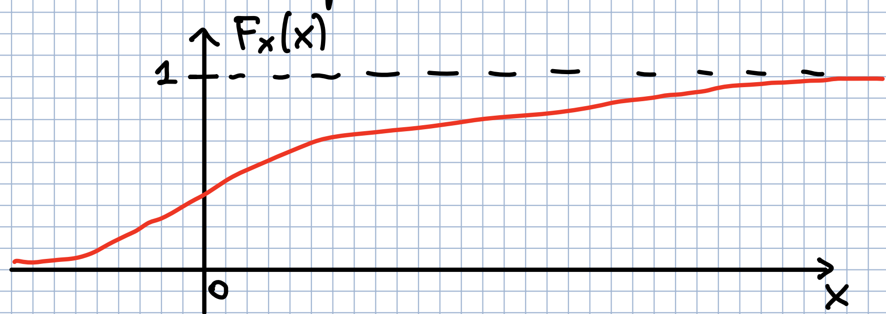
ES. LANCIO DI UN DADO

se il dado non è truccato

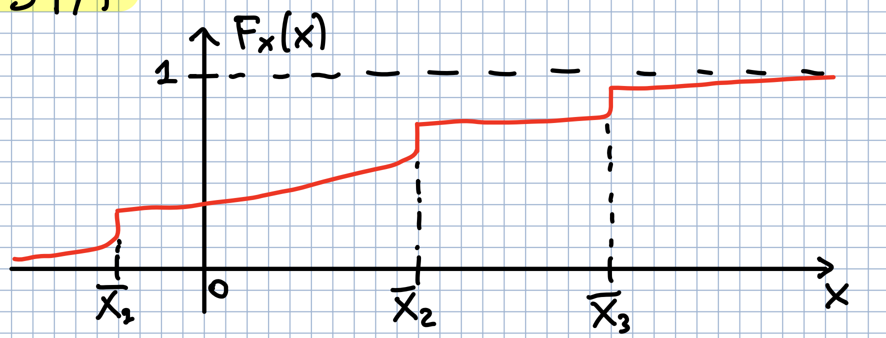
$P\{X=1\} = P\{X=2\} = \dots P\{X=6\}$



X CONTINUA → produce una $F_X(x)$ continua senza discontinuità



X MISTA



DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI UNA V.A.

$$\boxed{f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)}$$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ (ddp)

$$\Downarrow$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha$$

PROPRIETÀ DELLA DDP

- $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x$ POICHÉ la $F_X(x)$ è MONOTONA NON DECRESCENTE

- $P\{a < X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a) =$

$$= \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx = \int_a^b f_X(x)\,dx = P\{a < X \leq b\}$$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$ (EVENTO CERTO)

CONCETTO DI DDP

$$P\{\bar{x} < X \leq \bar{x} + \Delta x\} = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\Delta x} f_X(x)\,dx \simeq f_X(x)\cdot \Delta x$$

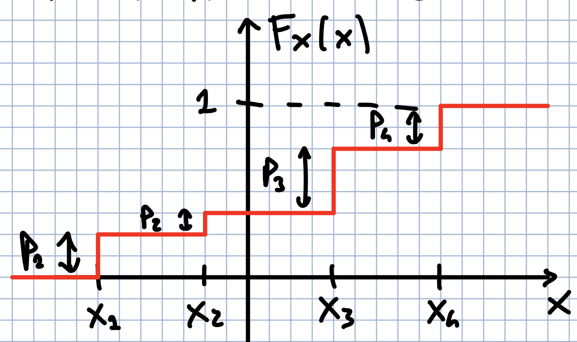
Δx piccolo

$$\Downarrow$$

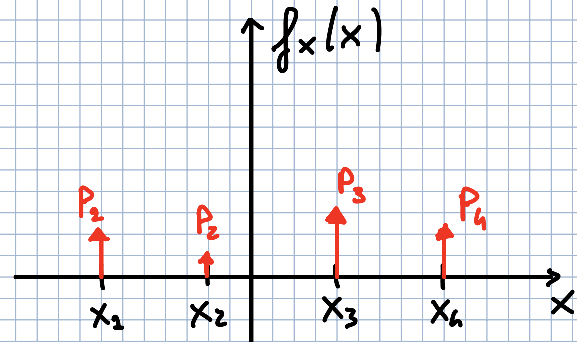
$$f_X(\bar{x}) \simeq \frac{P\{\bar{x} < X \leq \bar{x} + \Delta x\}}{\Delta x} \cong \frac{F_X(\bar{x}+\Delta x) - F_X(\bar{x})}{\Delta X}$$

$$f_X(\bar{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(\bar{x}+\Delta x) - F_X(\bar{x})}{\Delta x} = \frac{d}{dx} F_X(\bar{x})$$

- PER V.A. DISCRETE



$\frac{d}{dx} \Rightarrow$



$$F_X(x) = \sum_m p_m\, u(x - x_m)$$

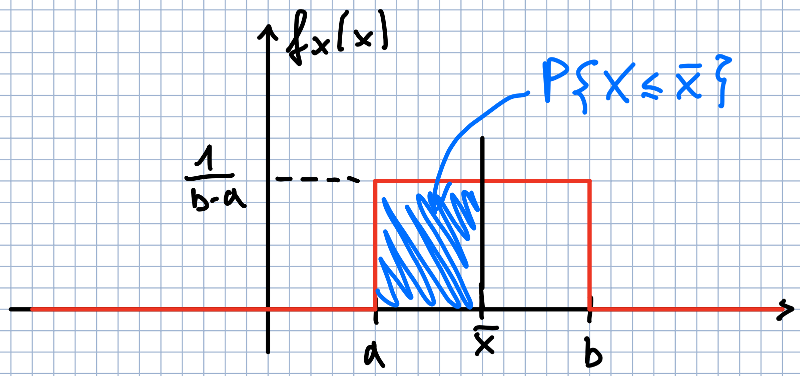
$$\frac{d}{dx} F_X(x) = \sum_m p_m\, \delta(x - x_m)$$

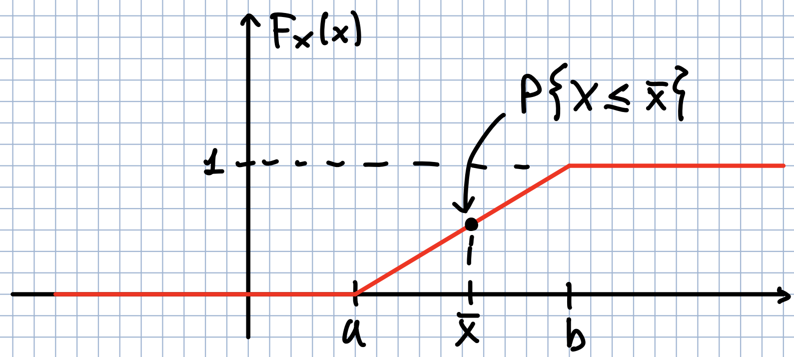
V.A. NOTEVOLI

- V.A. UNIFORME

X è una v.a. uniforme su (a,b) se:

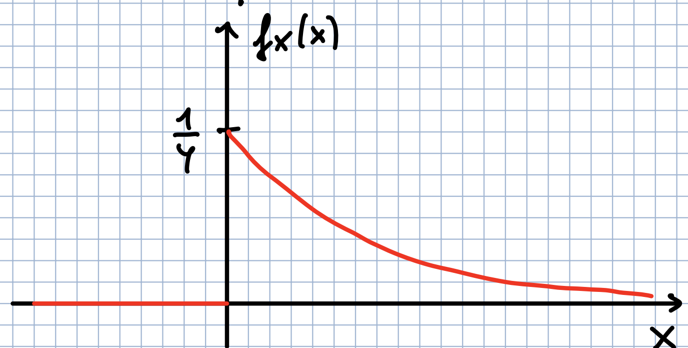
$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathrm{rect}\left(\frac{x-\frac{b+a}{2}}{b-a}\right)$$





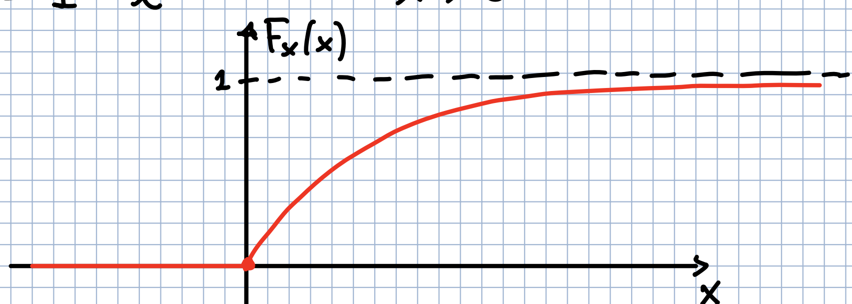
V.A ESPONENZIALE (UNILATERA)

$$f_X(x) = \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{x}{\gamma}} u(x)$$



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{\alpha}{\gamma}} u(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{\gamma}\int_{0}^{x} e^{-\frac{\alpha}{\gamma}}\,d\alpha = \frac{1}{\gamma}(-\gamma)\, e^{-\frac{\alpha}{\gamma}}\Big|_0^x =$$

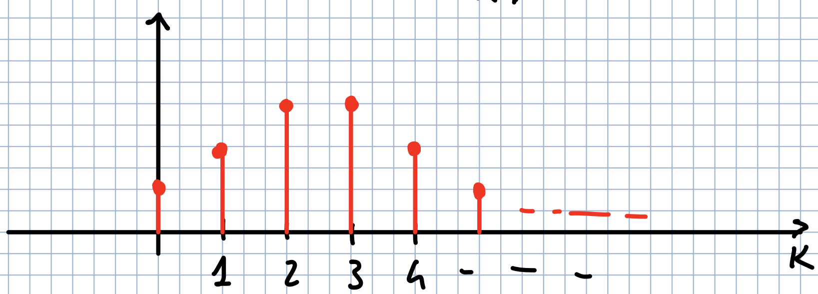
$$= 1 - e^{-\frac{x}{\gamma}} \qquad x \geq 0$$



V.A. DISCRETA

V.A. DI POISSON

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\Lambda} \frac{\Lambda^k}{k!} \delta[x-k]$$



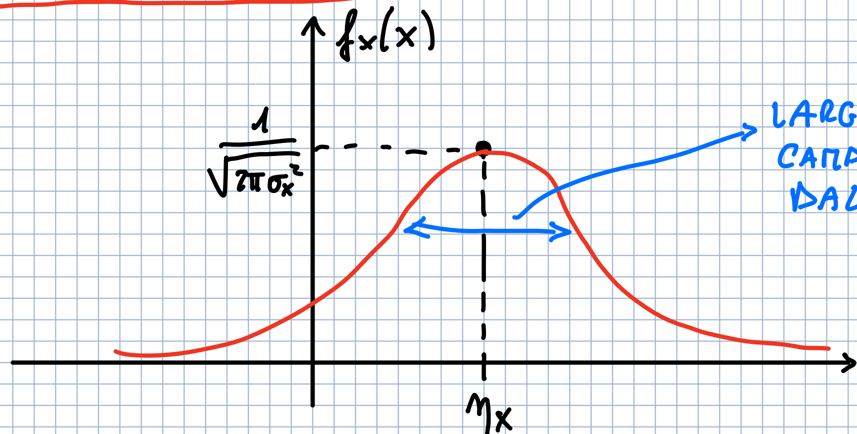
V.A. GAUSSIANA (O NORMALE)

$$X \in \mathcal{N}(\eta_x, \sigma_x^2)$$

SIMBOLOGIA

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}}}$$

DDP



LARGHEZZA DELLA CAMPANA È DETERMINATA DAL VALORE di σ_x^2

\+ è grande e

\+ è AMPIA

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(\alpha-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}} d\alpha$$

NON ESISTE UNA FORMA CHIUSA

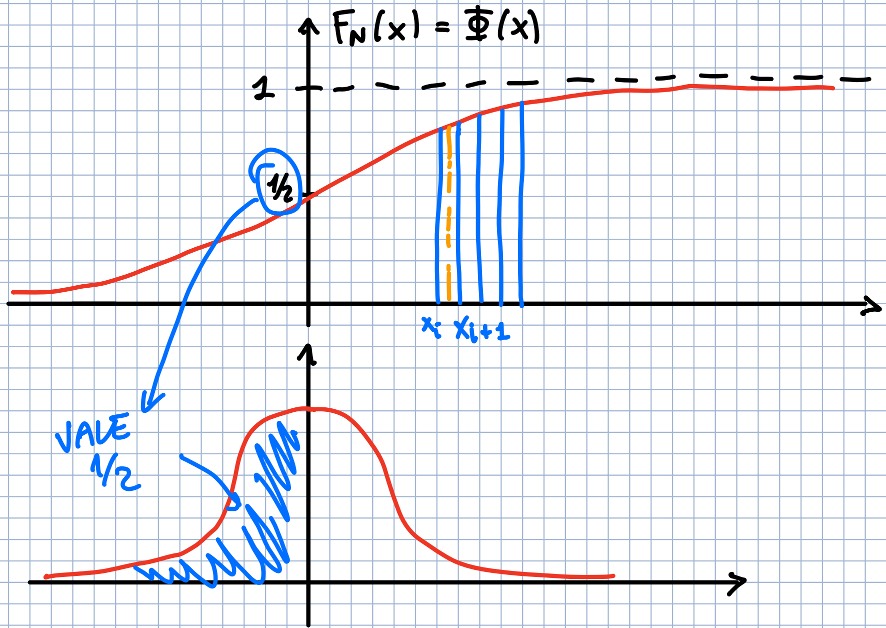
V.A. GAUSSIANA STANDARD

$$X \in \mathcal{N}(0, 1) \qquad \eta_x = 0 \quad \sigma_x^2 = 1$$

$$\boxed{f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

$\uparrow$ STANDARD

$$F_N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \Phi(x)$$



SE CI SERVIVA IL VALORE IN MEZZO ANDAVO A INTERPOLARE QUESTO CON UNA RETTA

TRASFORMAZIONE DI V. A.

$$x \longrightarrow y = g(x)$$

$\downarrow$ se V.A.

$$X \longrightarrow Y = g(X)$$

$f_X(x)$ ddp della V.A. X e $f_Y(y) = ?$

TH. FOND. DELLA TRASFORMAZIONE DI V.A.

$$f_Y(y) = \sum_{i=1} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

$x_i \quad i = 1 \ldots N$

$\hookrightarrow$ sono le soluzioni della trasformazione inversa

$$x_i = g^{-1}(y)$$

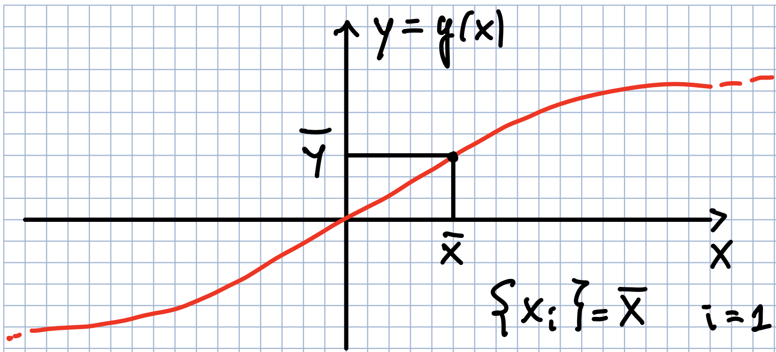
APPLICAZIONE del T.F.

1) A seconda del valore di y

·) $\{x_i\}$ è un insieme vuoto $\Rightarrow f_Y(y) = 0$

·) $\{x_i\}$ contiene un numero finito oppure infinito ma numerabile di soluzioni

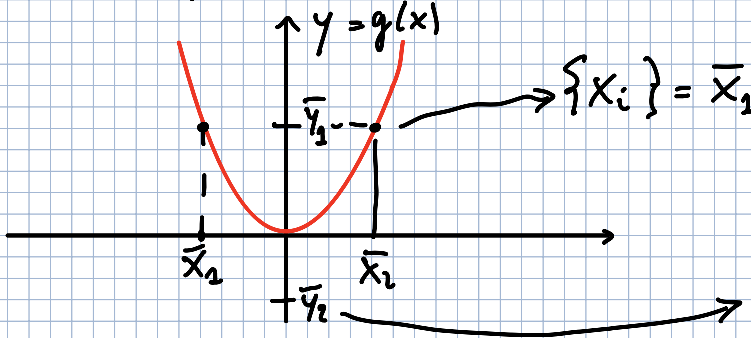
ESEMPIO #1



FUNZIONE MONOTONA CRESCENTE

$\{x_i\} = \bar{x}$ $\quad i = 1$

ESEMPIO #2



$\{x_i\} = \bar{x}_1, \bar{x}_2$

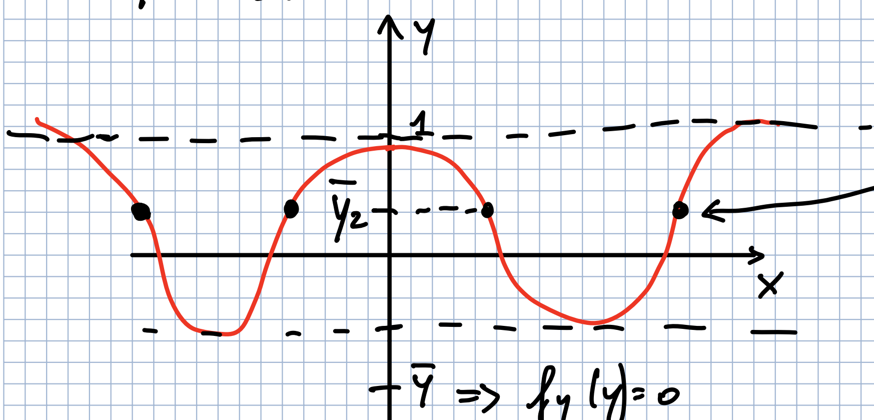
$\{x_i\} = \phi$

$f_Y(y) = 0$

$Y = x^2$

$f_Y(y) = 0 \qquad y < 0$

$Y = \cos(x)$



per $\bar{y}_2$ $\{x_i\} = \text{infinito}$

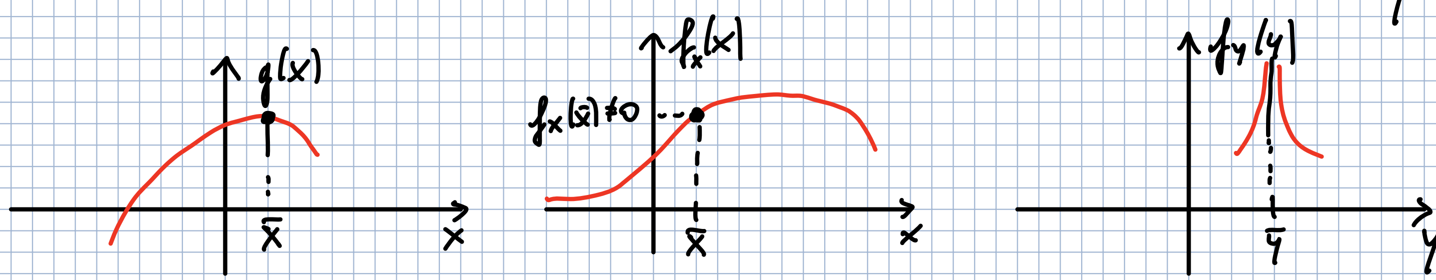
$\bar{Y} \Rightarrow f_Y(y) = 0$

2) Se in un punto $x = \bar{x}$ la derivata della trasformazione $g'(x) = 0$

- la trasformazione $g(x)$ ha un min o max in $x = \bar{x}$

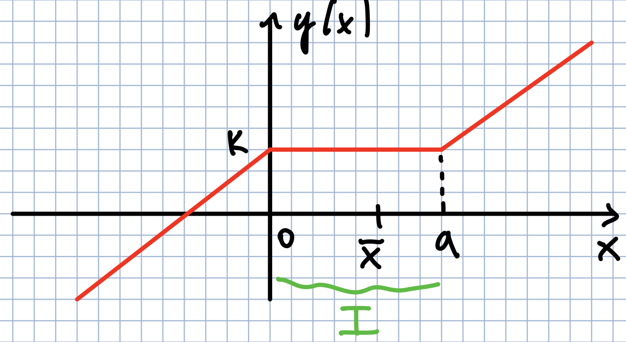
$$\text{se } f_X(\bar{x}) \neq 0 \Rightarrow f_Y(y) \to +\infty$$

$\bar{Y} = g(\bar{x})$



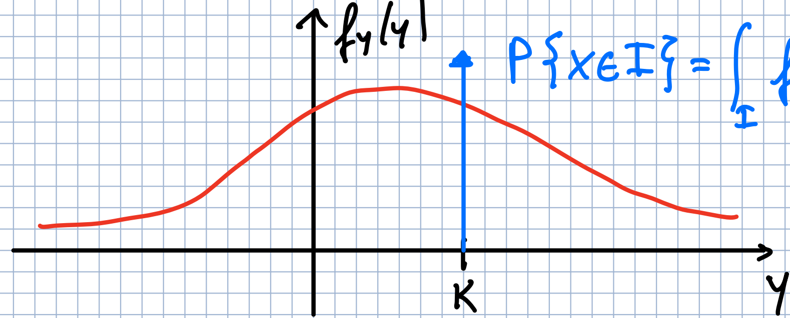
HO UN ASINTOTO VERTICALE

•) $\bar{x} \in$ ad un intervallo I nel quale $g(x) = $ costante e $\frac{d}{dx}g(x) = 0$



$$y = K$$
$$\Downarrow$$
$$P\{Y = K\} = P\{X \in I\}$$
massa di probabilità

$f_y(y)$ diventa la ddp di una V.A. MISTA

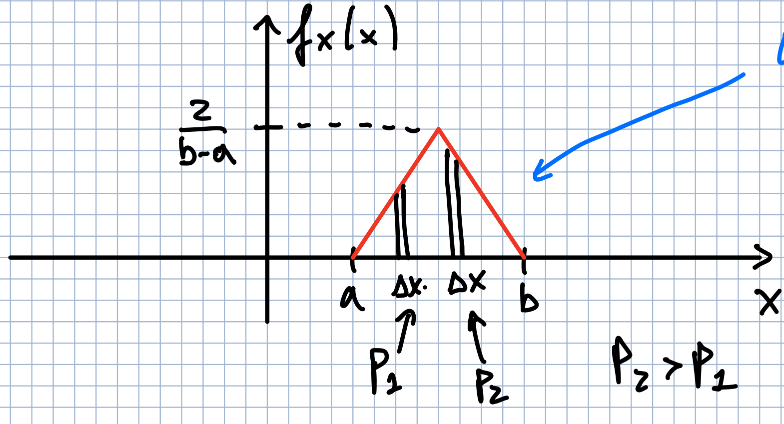


$$P\{x \in I\} = \int_I f_x(x)\,dx$$

INDICI CARATTERISTICI DI UNA V.A

•) VALOR MEDIO (SPERANZA)

$$\eta_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx$$



LA DDP INDICA QUALI INTERVALLI HANNO UNA PROBABILITÀ MAGGIORE DI VERIFICARSI

$\Downarrow$

LA DDP FA DA "PESO" PER la MEDIA PESATA CHE MI FORNISCE IL VALOR MEDIO

PER V.A. DISCRETE

$$\eta_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \sum_{k=1}^{N} p_k\, \delta(x - x_k)\, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} p_k \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \delta(x - x_k)\, dx = \sum_{k=1}^{N} p_k x_k$$

$\Rightarrow$ OPERATORE VALOR MEDIO

$$\eta_x = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_x(x) \, dx$$

⇒ **TH. VALOR MEDIO**

$$Y = g(x)$$

$$\eta_Y = E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \, f_Y(y) \, dy \rightarrow$$ comporta l'applicazione del T.F. per le trasformazioni di V.A.

$$\boxed{\eta_Y = E[Y] = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, f_x(x) \, dx}$$

si evita il calcolo di $f_Y(y)$

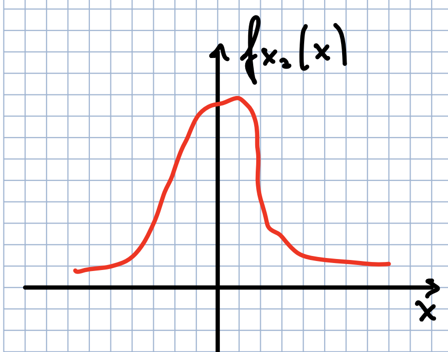
⇒ **si applica la linearità** $\quad y = \alpha g(x) + \beta h(x)$

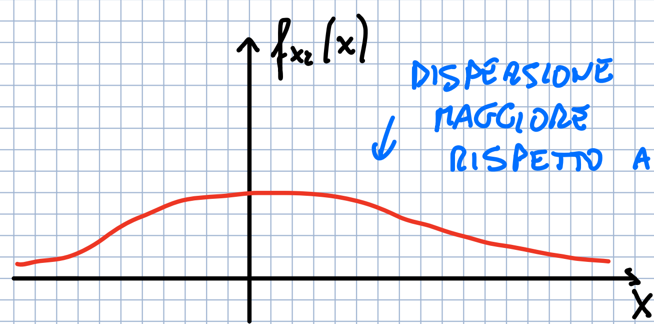
$$\eta_Y = \alpha E[g(x)] + \beta E[h(x)]$$

VARIANZA DI UNA V.A.

$$\sigma_X^2 = E[(X - \eta_X)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_x)^2 f_x(x) \, dx$$

SE LA VARIANZA È ALTA DEVO ASPETTARMI DIVERSI DAL VAL. MEDIO ALTRIMENTI NO



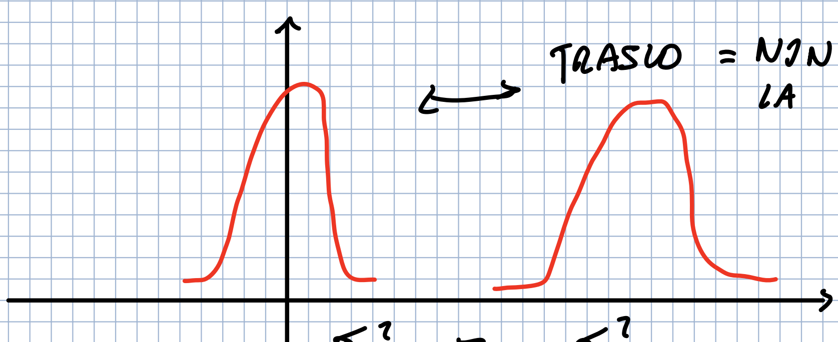


DISPERSIONE MAGGIORE RISPETTO A VAL. MEDIO

$X_1 \qquad\qquad X_2$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

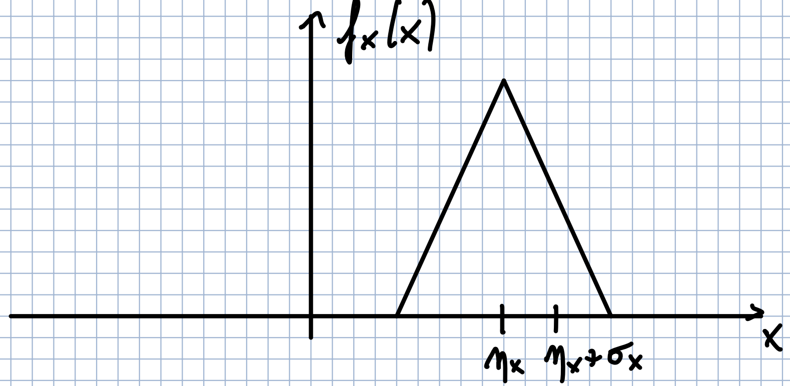
$$\sigma_{X_1}^2 < \sigma_{X_2}^2$$



TRASLO = NON CAMBIA LA VARIANZA

$$\sigma_{X_1}^2 = \sigma_{X_2}^2$$

DEVIAZIONE STANDARD $= \sqrt{\sigma_x^2} = \sigma_x$



$\eta_x + \sigma_x^2$ NO!!
perchè non hanno la stessa dimensione

VALOR QUADRATICO MEDIO

$$m_x^2 = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x)\,dx$$

$$\sigma_x^2 = m_x^2 - \eta_x^2 = E[(X-\eta_x)^2] = E[X^2+\eta^2-2\eta_x X] =$$

$$E[x^2] + E[\eta_x^2] - 2E[\eta_x X] = m_x^2 + \eta_x^2 - 2\eta_x E[x] =$$

$$= m_x^2 + \eta_x^2 - 2\eta_x^2 = \boxed{m_x^2 - \eta_x^2}$$

INDICI CARETTERISTICI DI V. A. GAUSSIANE

·) V. MEDIO

$$X \in \mathcal{N}(\eta_x, \sigma_x^2) \qquad f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\, e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\, e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}}\, dx =$$

$$x - \eta_x = y \qquad x = \eta_x + y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\eta_x + y)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \underset{\text{DISPARI}}{y} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}}}_{\text{PARI}}\, dy + \eta_x \underbrace{\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}}\, dy}^{\in \mathcal{N}(\eta_x, \sigma_x^2)}}_{=1} =$$

INTERVALLO PARI

$$\Downarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} y \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}}\, dy = 0 + \eta_x \cdot 1 = \eta_x$$

$$\boxed{E[X] = \eta_x}$$

VALOR MEDIO DI UNA GAUSSIANA

VARIANZA

$$E\left[(X-\eta_x)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\eta_x)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx = \qquad x-\eta_x = y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}} dy = -\sigma_x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \underbrace{\left[\left(\frac{-y}{\sigma_x^2}\right) e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}}\right]}_{= \frac{d}{dy}\left[e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}}\right]} dy =$$

$$= -\sigma_x^2 \left[y \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}} dy}_{1} \right] =$$

$$\lim_{y\to\infty} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}} = 0 \quad \rightarrow \quad -\sigma_x^2 \cdot 0 - \sigma_x^2 \cdot -1 = \sigma_x^2$$

$$\boxed{E\left[(X-\eta_x)^2\right] = \sigma_x^2} \qquad \text{VARIANZA}$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

η_x = VALOR MEDIO

σ_x^2 = VARIANZA

ES.

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{6}} \Rightarrow \text{Calcolare } \eta_x \text{ e } \sigma_x^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot 3}}$$

$\eta_x = 2$ = V. MEDIO

$\sigma_x^2 = 3$ = VARIANZA

RELAZIONE TRA V. A. GAUSSIANE STD e NON STD.

STD) $N \in \mathcal{N}(0,1)$

NON STD) $X \in \mathcal{N}(\eta_x, \sigma_x^2)$ $\qquad \eta_x \neq 0$ e/o $\sigma_x^2 \neq 1$

DA STD A NON STD :

$$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2}{2}} \rightarrow \qquad \sigma_x > 0$$

$$X = g(N) = \sigma_x N + \eta_x \quad \text{TRASF. LINEARE}$$

$$N = \frac{X - \eta_x}{\sigma_x} \quad \text{UNICA SOL. INVERSA} \quad \{x_i\} = n$$

$$f_X(x) = \frac{f_N(n)}{|g'(n)|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{x-\eta_x}{\sigma_x}\right)^2}{2}}}{\sigma_x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_x} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$\Phi(x) = F_X(x) = \qquad X \in \mathcal{N}(0, 1)$$

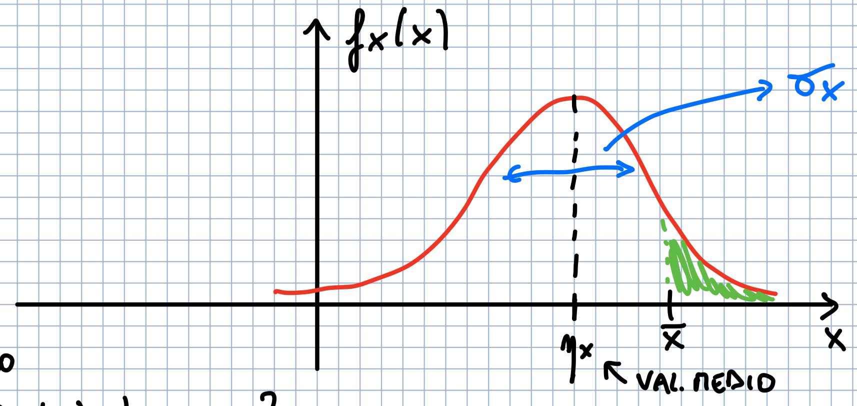
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}}\, dx$$

$$Q(x) = 1 - \Phi(x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2}}\, dx$$

PROB. DI ERRORE IN SISTEMI DI COM. NUMERICI

$$Q(x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\, d\alpha$$

$$X \in \mathcal{N}(\eta_x, \sigma_x^2)$$



σ_x è legata alla larghezza della campana

$$\int_{\bar{x}}^{+\infty} f_x(x)\, dx = ?$$

$$Q(\bar{n}) = 1 - \Phi(\bar{n})$$

$$n = \frac{x - \eta_x}{\sigma_x} \;\Downarrow\; \bar{n} = \frac{\bar{x} - \eta_x}{\sigma_x}$$

$$\int_{\bar{x}}^{+\infty} f_x(x)\, dx = Q\left(\frac{\bar{x} - \eta_x}{\sigma_x}\right) = \int_{\bar{n}}^{+\infty} f_N(n)\, dn = Q(\bar{n})$$

CORRELAZIONE E COVARIANZA DI 2 V.A.

$X \qquad\qquad Y$

$R_{xy} = E[X \cdot Y] =$ **CORRELAZIONE**

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \, f_{xy}(x,y)\, dx\, dy$$

$f_{xy}(x,y)$ ddp congiunta

$C_{xy} = E[(x-\eta_x)(y-\eta_y)] =$ **COVARIANZA**

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\eta_x)(y-\eta_y)\, f_{xy}(x,y)\, dx\, dy$$

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE

$$\rho_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

INDIPENDENZA ED INCORRELAZIONE

$\Rightarrow$ **INCORRELAZIONE**: due V.A. X e Y sono incorrelate se

$$C_{xy} = 0$$

$\Rightarrow$ **INDIPENDENZA**: nasce a priori e non è legata ad alcun parametro statistico

Se 2 Variabili sono indipendenti

$$\Downarrow$$

$$f_{xy}(x,y) = f_x(x)\, f_y(y)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} X \text{ e } Y \text{ sono INDIPENDENTI} \\ \Downarrow \\ X \text{ e } Y \text{ sono INCORRELATE} \end{array}}$$

NON VALE IL CONTRARIO!

DIM.

$$R_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,y\, f_{xy}(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot y\, f_x(x)\, f_y(y)\,dx\,dy =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x)\,dx}_{E[x]=\eta_x} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_y(y)\,dy}_{E[y]=\eta_y} = \eta_x\cdot\eta_y$$

$\rightarrow$ Sappiamo che $C_{xy} = R_{xy} - \eta_x\eta_y =$

$= \eta_x\eta_y - \eta_x\cdot\eta_y = 0$

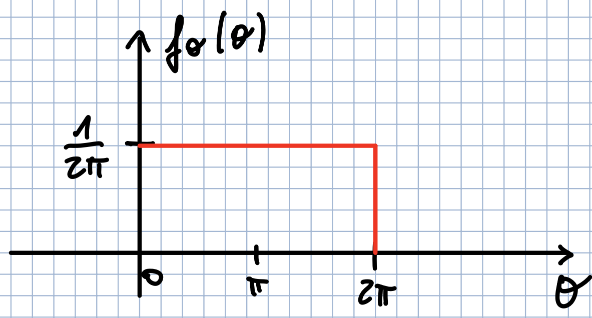
INCORRELATE

PER DIM. CHE IL CONTRARIO NON VALE:

$\theta \in \mathcal{U}\,[0, 2\pi)$

$$f_x(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathrm{rect}\left(\frac{x - \frac{b+a}{2}}{b-a}\right)$$

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\theta-\pi}{2\pi}\right)$$



Definiamo

$X = \cos\theta = g(\theta)$, $Y\ \mathrm{sen}\,\theta = h(\theta)$

$2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = \mathrm{sen}(2\theta)$

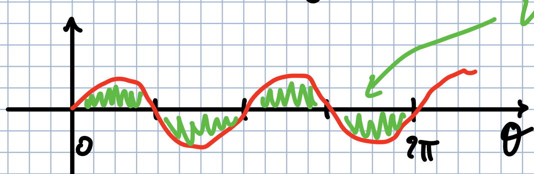
$\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(2\theta)$

Calcoliamo la C_{xy}

$R_{xy} \Rightarrow C_{xy} = R_{xy} - \eta_x\eta_y$

$$R_{xy} = E[xy] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\,h(\theta)\,f_\theta(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\theta)\,d\theta = 0$$ perché



LE AREE DA 0 A 2π SI ANNULLANO

$$\eta_x = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\theta \, f_\theta(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = 0$$

$$\eta_y = E[Y] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = 0$$

$C_{xy} = R_{xy} - \eta_x \eta_y = 0 - 0 \cdot 0 = 0$ $\quad$ X e Y sono INCORRELATE

SONO INDIPENDENTI ?

$$X^2 + Y^2 = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

$$X^2 + Y^2 = 1$$

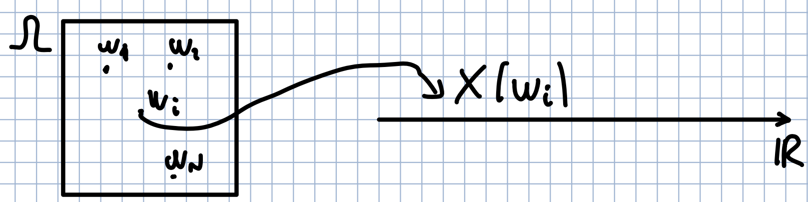
$$\overline{X} + Y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad Y^2 = 1 - \overline{X}^2 \qquad Y = \pm\sqrt{1 - \overline{X}^2}$$

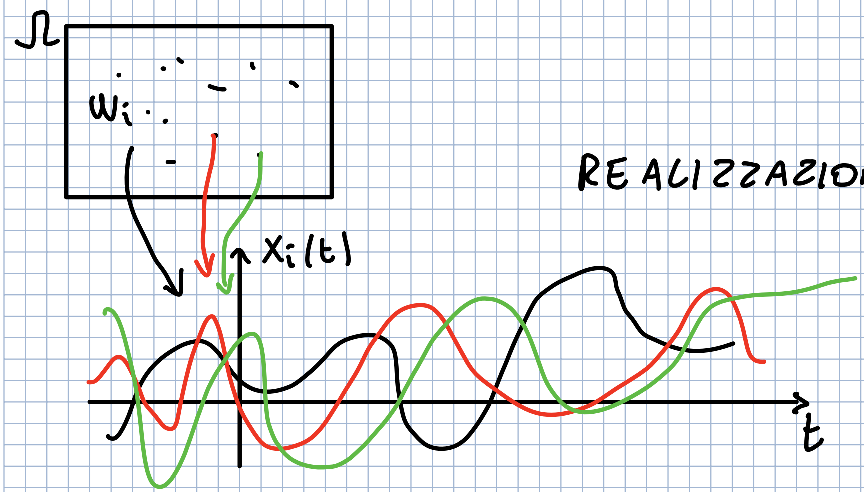
Y DIPENDE da X

X e Y non sono indipendenti

SEGNALI ALEATORI

·) Per le V. A.

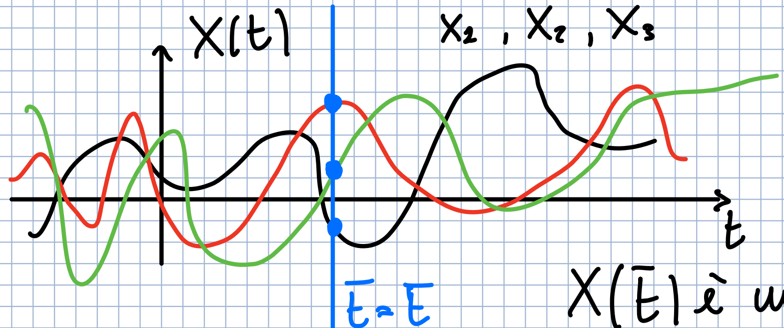




REALIZZAZIONI DEL PROCESSO ALEATORIO $X_i(t)$

PROCESSO ALEATORIO (SEGNALE ALEATORIO)

$$X(w_i, t) \Rightarrow X(t)$$



$X(\bar{t})$ è una V.A.

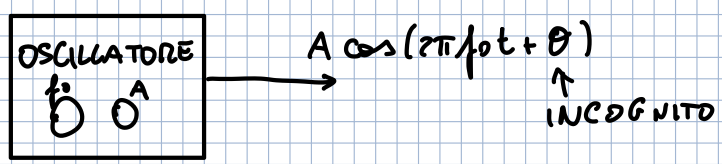
$X(t)$ $\downarrow T$ $X(T) \leftarrow$ V.A.

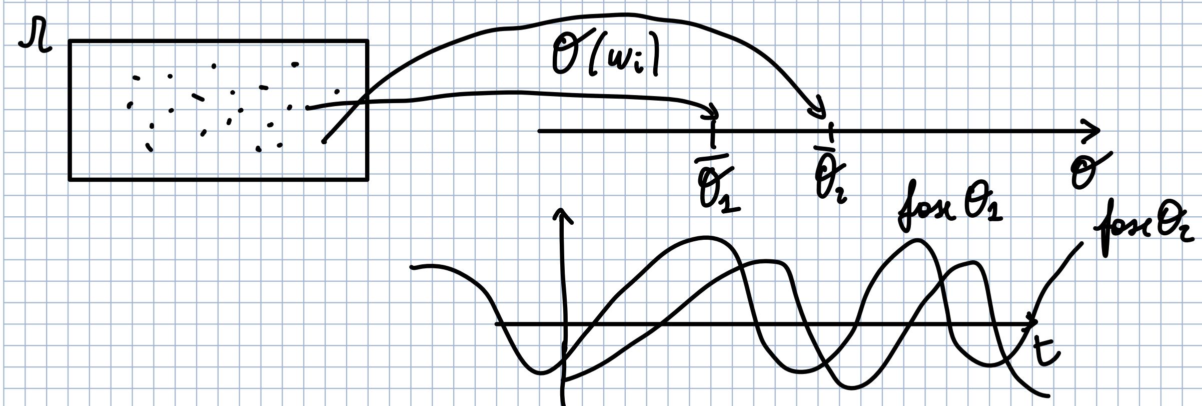
PROCESSI PARAMETRICI

Un processo parametrico è definito da un segnale la cui aleatorietà dipende da uno o più parametri aleatori (V.A.)

ES.

$$X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta) \qquad \theta \text{ è una V.A. } \in \mathcal{U}[0, 2\pi)$$





ES. $X(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{V.A. GAUSS.} \in \mathcal{N}(0, \sigma_A^2)}}{A}\cos(2\pi f_0 t + \theta) \leftarrow$ V.A. $\in \mathcal{U}[0, 2\pi)$

2 PAR. ALEATORI $\Rightarrow A, \theta$

CARATTERIZZAZIONE STATISTICA DI PROCESSI (SEGNALI) ALEATORI TEMPO-CONTINUO

$X(t)$ tempo continuo

- **FUNZIONE DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ DEL I ORDINE**

$$F_X(x; t_1) = P\{X(t_1) \le x\}$$ → NON BASTA

$P\{X(t_2) > X(t_1)\}$ non si può calcolare conoscendo solo le distr. di prob. di I ORDINE

$\Downarrow$

Dovrei conoscere la distribuzione di prob. congiunta di $X(t_1)$ e $X(t_2)$

- FUNZIONE DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ DEL II ORDINE

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$$

- FUNZIONE DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ DI ORDINE N

$$F_X(x_1 \dots x_N; t_1 \dots t_N) = P\{X(t_1) \leq x_1 \dots X(t_N) \leq x_N\}$$

⇒ la caratterizzazione completa di un processo aleatorio necessita della conoscenza della funzione di distribuzione di probabilità di ordine N, con N arbitrario.

⇒ DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI ORDINE N

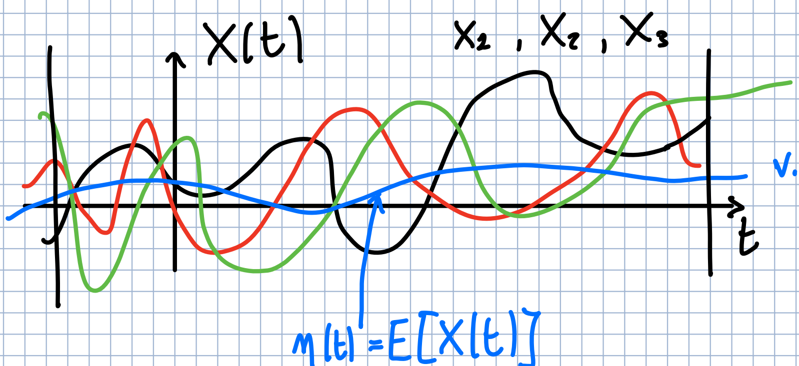
$$f(x_1 \dots x_N; t_1 \dots t_N) = \frac{\partial^N}{\partial x_1 \dots x_N} F_X(x_1 \dots x_N; t_1 \dots t_N)$$

⇒ INDICI STATISTICI (DEL I e II ORDINE) DI UN PR. ALEATORIO

⇒ V. MEDIO

$$\eta_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \underbrace{f_X(x;t)}_{\text{DDP del I ordine}} \, dx$$

I ORDINE



V. MEDIO DI V.A.

$$\underbrace{\eta_X(\bar{t})}_{} = E[\underbrace{x(\bar{t})}_{V.A.}]$$

$$t_{MIN} < \bar{t} < t_{MAX}$$

⇒ POTENZA MEDIA STATISTICA ISTANTANEA

$$P_X(t) = E[|X^2(t)|] = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x;t) \, dx$$

I ORDINE

⇒ VARIANZA DI UN PROCESSO

$$\sigma_X^2(t) = E[(X(t) - \eta_X(t))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_X)^2 f_X(x;t) \, dx$$

$$\sigma_X^2(t) = P_X(t) - \eta_X^2(t)$$

I ORDINE

DIM. $\sigma_x^2(t) = E[(X(t) - \eta_x(t))] = E[x^2(t) + \eta_x^2(t) - 2\eta_x(t)X(t)] =$

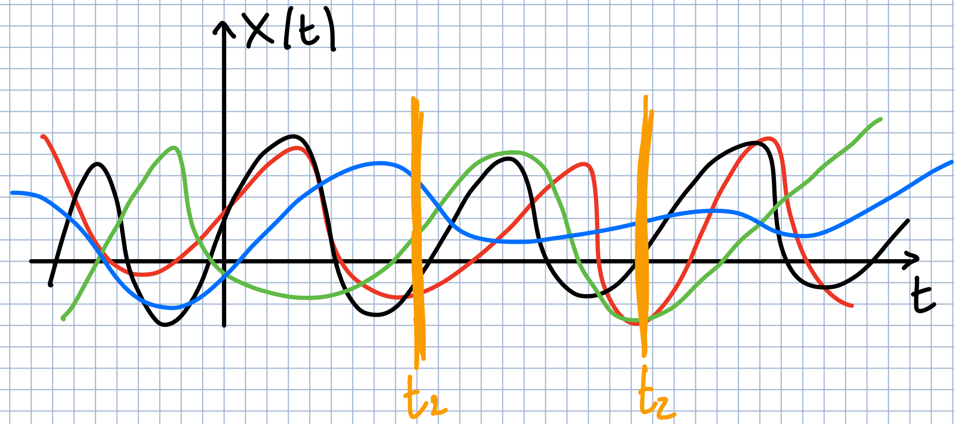
$$= E[x^2(t)] + E[\eta_x^2(t)] - 2E[\eta_x(t)X(t)] =$$

$$= P_x(t) - \eta_x^2(t) - 2\eta_x \cdot E[x(t)] = P_x(t) - \eta_x^2(t) - 2\eta_x \cdot \eta_x = \boxed{P_x(t) - \eta_x^2(t)}$$

II ORDINE

AUTOCORRELAZIONE E AUTOCOVARIANZA

AUTOCORRELAZIONE



$X(t_1)$ $X(t_2)$ 2 V.A.

$$\boxed{R_x(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X(t_2)]}$$ AUTOCORRELAZIONE

AUTOCOVARIANZA

$$X(t) \Rightarrow X(t_1), X(t_2)$$

AUTOCOVOLUZIONE

$$\boxed{C_x(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \eta_x(t_1)) \cdot (X(t_2) - \eta_x(t_2))]}$$

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_x(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2$$

II ORDINE

$$C_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \eta_x(t_1))(x_2 - \eta_x(t_2)) f_x(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2$$

II ORDINE

$$\boxed{C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - \eta_x(t_1)\eta_x(t_2)}$$

PROCESSI STAZIONARI

STAZIONARIETÀ → IN SENSO STRETTO

→ IN SENSO LATO

⇒ STAZIONARIETÀ IN SENSO STRETTO (SSS)

$$f_x(x_1 \dots x_N; t_1 \dots t_N) = f_x(x_1 \dots x_N; t_1+\Delta t \dots, t_2+\Delta t) \ \forall N$$

⇒ IMPATTO SULLE STATISTICHE DEL I ORDINE

$$f_x(x_1; t_1) = f_x(x_1; t_1+\Delta t)$$

$$f_x(x_1; t_1) = f_x(x_1; t_2) = \dots = f_x(x_1)$$

LE STATISTICHE DEL I ORDINE NON DIPENDONO DAL t

⇒ V. MEDIO

$$\eta_x(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_x(x; t)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_x(x)\, dx = \eta_x$$ → NON DIPENDE DAL TEMPO

⇒ POTENZA

$$P_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x; \cancel{t})\, dx = P_x$$

⇒ VARIANZA

$$\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2$$

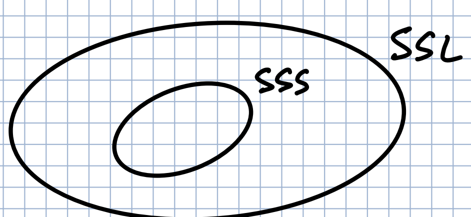
STAZIONARIETÀ IN SENSO LATO (SSL)

Un processo aleatorio è SSL se:

1) il suo V. MEDIO è costante $\eta_x(t) = \eta_x$

2) la sua autocorrelazione dipende dalla differenza $t_1 - t_2$ e non separatamente da t_1 e t_2

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2) = R_x(\tau) \qquad \tau = t_1 - t_2$$



SSS ⇒ SSL

SSL $\not\Rightarrow$ SSS

·) AUTOCOVARIANZA DI UN PROCESSO SSL

$$C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - \eta_x^2(t) = R_x(t_1 - t_2) - \eta_x^2 = C_x(\tau)$$

$\tau = t_1 - t_2$

·) PROPRIETÀ DELLA AUTOCORRELAZIONE DI UN SSL

1) $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ PARI

DIM.

$t = t_1$
$\tau = t_1 - t_2$

$$R_x(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)] =$$
$$E[X(t'+\tau)X(t')] =$$
$$= E[X(t')X(t'-\tau)] = R_x(-\tau)$$

$t - \tau = t'$
$t = t' + \tau$

2) $R_x(0) = E[X(t)X(t)] = E[X^2(t)] = P_x \geq 0$

3) $R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$

DIM.

$$E[\{X(t) \pm X(t-\tau)\}^2] \geq 0$$

$$\underbrace{E[X^2(t)]}_{=P_x} + \underbrace{E[X^2(t-\tau)]}_{=P_x} \pm E[X(t)X(t-\tau)] \geq 0$$

$$\cancel{2}P_x \pm \cancel{2}R_x(\tau) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} P_x \geq -R_x(\tau) \\ P_x \geq R_x(\tau) \end{cases} \Rightarrow P_x \geq |R_x(\tau)|$$

$$\Downarrow$$

$$R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$$

4) Se $R_x(\tau)$ non contiene componenti periodiche:

$$\Rightarrow \lim_{\tau \to \infty} R_x(\tau) = \eta_x^2$$

SIGNIFICATO DI AUTOCORRELAZIONE

$N(t)$ processo di un rumore

$\downarrow \quad \searrow$

$N(t_1)$ $N(t_2)$ 2 campioni del rumore

$\Downarrow$

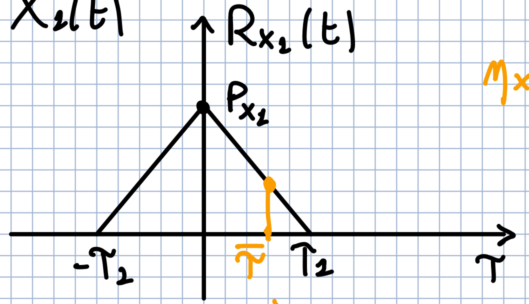
2 V.A. estratte dal processo di rumore

2 V.A. sono CORRELATE se la loro COVARIANZA è non NULLA

$$R_x(\tau) = C_x(\tau) + \eta_x^2$$

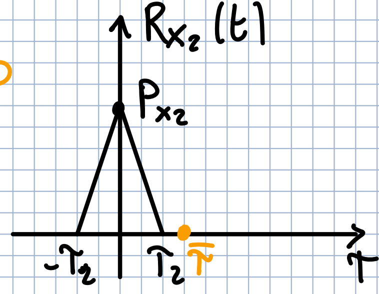
⇒ spesso η_X nei processi di rumore presenti nei sistemi di COMUNICAZIONE è NULLO ⇒ $\eta_X = 0$ $\quad \eta_X^2 = 0$ ⇒ $R_X(\tau) = C_X(\tau)$

$X_1(t)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $X_2(t)$



$\eta_{X_1} = \eta_{X_2} = 0$

$\boxed{T_1 > T_2}$



$\bar{\tau} = t_1 - t_2$

$X(t_1)$, $X(t_2)$

$t_1 - t_2 = \bar{\tau}$

⇓

V.A. CORRELATE

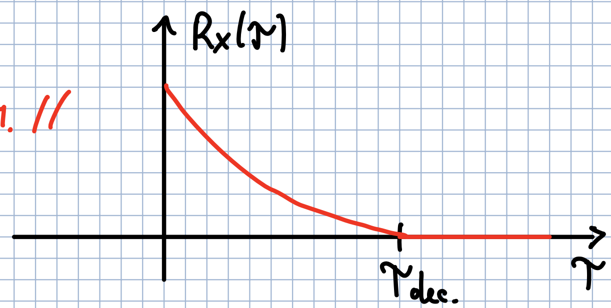
⇓

V.A. INCORRELATE

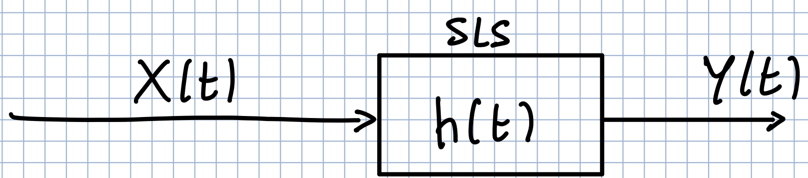
TEMPO DI DECORRELAZIONE

T_{dec} : $R_X(\tau) = 0$ $\qquad \tau \geq T_{dec}$

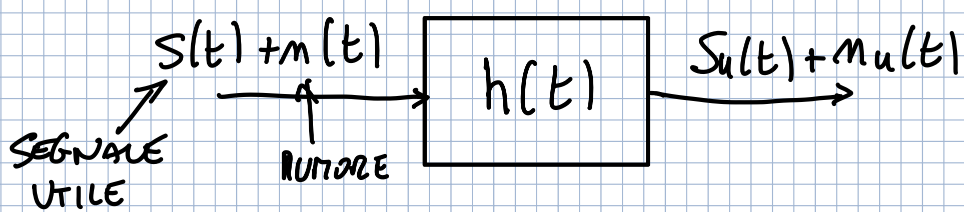
SIMM. //



FILTRAGGIO DI SEGNALI ALEATORI



·) nei sistemi di comunicazione sono presenti SLS, così come è presente del rumore



$s_u(t) = s(t) \otimes h(t)$

$n_u(t) = n(t) \otimes h(t)$

per la LINEARITÀ

REALIZZAZ. DI RUMORE

$$n(w_i;t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow n_u(w_i;t)$$

$$n_u(w_i;t) = n(w_i;t) \otimes h(t)$$
$$\Downarrow$$
$$N_u(t) = N(t) \otimes h(t)$$

$X(t) \Rightarrow$ conosco le ddp di ordine N arbitrario

$h(t) \Rightarrow$ conosco

Posso ricavare le ddp di ordine N del processo in uscita $Y(t)$?

$$X(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y(t)$$

$\Rightarrow$ NON ESISTE UN MODO

$\Rightarrow$ CALCOLO INDICI STATISTICI DI $Y(t)$

V. MEDIO

$$\eta_y(t) = E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_y(y;t)\, dy$$

$f_y(y;t)$ NON È CALCOLABILE

$$\eta_y(t) = E[Y(t)] = E[X(t) \otimes h(t)] =$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(\tau)]\, h(t-\tau)\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \eta_x(t) \otimes h(t) \Rightarrow \boxed{\eta_y(t) = \eta_x(t) \otimes h(t)}$$

INTERPRETAZIONE

- $\eta_x(t) = 0 \Rightarrow \eta_y(t) = 0$
- $$X(t) = \underbrace{X_0(t)}_{\text{V.M. NULLO}} + \eta_x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y(t) = \underbrace{Y_0(t)}_{\text{V.M. NULLO}} + \eta_y(t)$$

$$\eta_x(t) = E[X(t)]$$

$$Y_0(t) = X_0(t) \otimes h(t)$$

$$\boxed{\eta_y(t) = \eta_x(t) \otimes h(t)}$$ V. MEDIO PROCESSO USCITA

$X_0(t) \Rightarrow$ V. M. NULLO

$$X_0(t) = X(t) - \eta_x(t)$$

$$E[X_0(t)] = E[X(t) - \eta_x(t)] = E[X(t)] - \eta_x(t) = \eta_x(t) - \eta_x(t) = 0$$

$$\eta_y(t) = \eta_x(t) \otimes h(t)$$

$$\Downarrow \text{TCF}$$

$$\eta_y(f) = \eta_x(f)\, H(f)$$

AUTOCORRELAZIONE DEL PROCESSO IN USCITA

$$R_y(t_1, t_2) = E[Y(t_1)\, Y(t_2)] =$$

$$= E[(X(t_1) \otimes h(t_1))(X(t_2) \otimes h(t_2))] =$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau_1)\, h(t_1 - \tau_1)\, d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau_2)\, h(t_2 - \tau_2)\, d\tau_2\right] =$$

$$= \int_{\substack{-\infty \\ \tau_1}}^{+\infty} \int_{\substack{-\infty \\ \tau_2}}^{+\infty} \underbrace{E[X(\tau_1)\, X(\tau_2)]}_{R_x(\tau_1, \tau_2)}\, h(t_1 - \tau_1)\, h(t_2 - \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 =$$

$$= \int_{\substack{-\infty \\ \tau_2}}^{+\infty} \int_{\substack{-\infty \\ \tau_1}}^{+\infty} R_x(\tau_1, \tau_2)\, h(t_1 - \tau_1)\, d\tau_1\, h(t_2 - \tau_2)\, d\tau_2 =$$

$$= \int_{\substack{-\infty \\ \tau_2}}^{+\infty} R_x(t_1, \tau_2) \otimes h(t_1)\, h(t_2 - \tau_2)\, d\tau_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1) \otimes R_x(t_1, \tau_2)\, h(t_2 - \tau_2)\, d\tau_2 =$$

$$= h(t_1) \otimes \left[\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t_1, \tau_2)\, h(t_2 - \tau_2)\, d\tau_2\right] =$$

$$= h(t_1) \otimes R_x(t_1, t_2) \otimes h(t_2) = \boxed{R_x(t_1, t_2) \otimes h(t_1) \otimes h(t_2) = R_y(t_1, t_2)}$$

FILTRAGGIO DI PROCESSI ALEATORI SSL

- VALOR MEDIO

$$\eta_y(t) = \eta_x(t) \otimes h(t) =$$

ANCHE $\eta_y(t)$ non DIPENDE DAL TEMPO $\eta_y(t) = \eta_y$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \eta_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\, d\tau = \eta_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(t')\, dt' = \boxed{\eta_x\, H(0)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \Big|_{f=0} = H(f)\Big|_{f=0} = H(0)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$X(t)$ SSL

- $\eta_x(t) = \eta_x$
- $R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) \qquad \tau = t_1 - t_2$

AUTOCORRELAZIONE

$$R_y(t_1, t_2) \Rightarrow R_y(t, t-\tau) \qquad t = t_1, \quad t-\tau = t_2$$

$$R_y(t, t-\tau) = E\left[Y(t)\,Y(t-\tau)\right] =$$

$$= E\Big[\left[X(t) \otimes h(t)\right]\left[X(t-\tau) \otimes h(t-\tau)\right]\Big] =$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty}_{\alpha} X(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty}_{\beta} X(\beta)\, h((t-\tau)-\beta)\, d\beta\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty}_{\beta} E\left[X(\alpha)X(\beta)\right] h(t-\alpha)\, h(t-\tau-\beta)\, d\alpha\, d\beta =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty}_{\beta} R_x(\alpha-\beta)\, h(t-\alpha)\, h(t-\tau-\beta)\, d\alpha\, d\beta = \qquad \alpha - \beta = \gamma, \quad \alpha = \beta + \gamma$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty}_{\gamma} R_x(\gamma)\, h(t-(\beta+\gamma))\, d\gamma\, h(t-\tau-\beta)\, d\beta =$$

$$* \quad \underset{\alpha-\beta}{x(t)} \otimes \underset{\alpha-\beta}{y(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(\underset{(\alpha-\beta)}{t}-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty}_{\gamma} R_x(\gamma)\, h((t-\beta)-\gamma)\, d\gamma\, h(t-\tau-\beta)\, d\beta =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}_{\beta} \left[R_x(t-\beta) \otimes h(t-\beta)\right] h(t-\beta-\tau)\, d\beta = \qquad t - \beta = \eta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{[R_x(\eta) \otimes h(\eta)]}_{g(\eta)} h(\eta - \tau)\, d\eta =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta)\, h[-(\tau - \eta)]\, d\eta = g(\tau) \otimes h(-\tau)$$

$$g(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau)$$

$$R_y(t, t-\tau) = \boxed{R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)}$$

R_y DIPENDE SOLO DA $\tau = t_1 - t_2$

Se $X(t)$ è SSL

$Y(t) = X(t) \otimes h(t)$

$\Downarrow$

$Y(t)$ è SSL

SSL → V. MEDIO COSTANTE

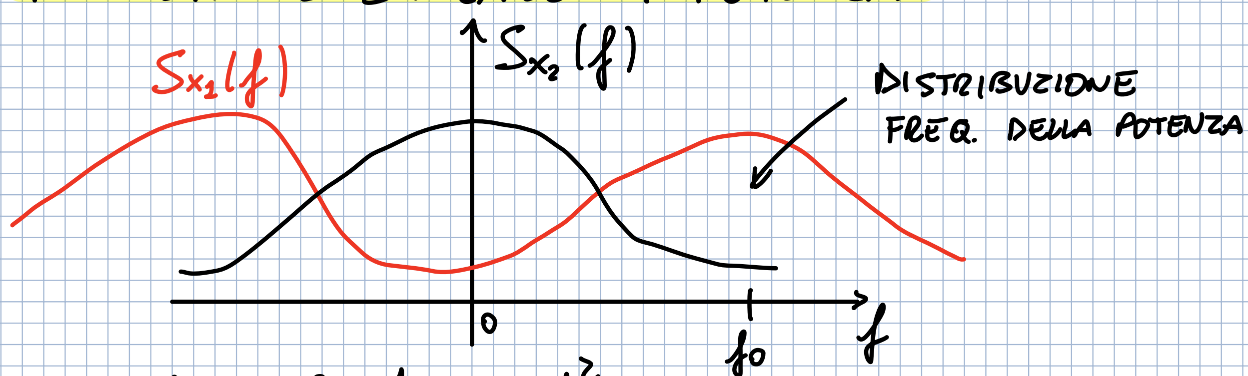
SSL → AUTOCORRELAZIONE DIP. SOLO DA $\tau = t_1 - t_2$

DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA DI UN PROCESSO SSL

I processi di rumore sono di classe energetica

- potenza finita
- Energia infinita

=> DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA



$$S_x(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$$

PER SEGNALI DET. NON PERIODICI A POTENZA FINITA

$\Rightarrow$ per i processi

$$x(t) \Rightarrow X(t)$$

$$x_T(t) \Rightarrow X_T(t)$$

$$S_x(w_i; f) = \lim_{T \to \infty} \frac{|X_T(w_i; f)|^2}{T}$$

$\Rightarrow$ TH. DI WIENER

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \qquad \boxed{S_x(f) = TCF[R_x(\tau)]}$$

PROPRIETÀ DELLA $S_x(f)$ (DSP)

1) $S_x(f)$ è REALE E PARI poiché R_x è REALE E PARI

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = P_x$

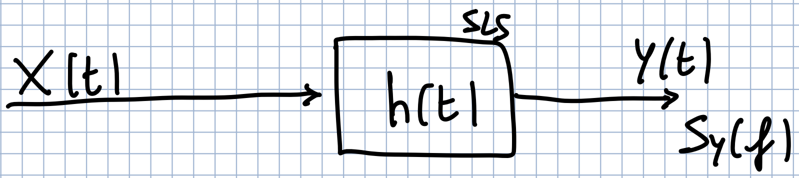
DIM.

$$P_x = E[x^2(t)] = R_x(\tau)\Big|_{\tau=0} = R_x(0)$$

$$\underset{P_x}{\overset{\shortparallel}{R_x(0)}} = R_x(\tau)\Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) \underbrace{e^{j2\pi f \tau}}_{1} df \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

3) $S_x(f) \geq 0 \quad \forall f$ NON-NEGATIVA

FILTRAGGIO DI UN PROCESSO SSL E CALCOLO DELLA DSP DEL PROCESSO IN USCITA



X(t) è SSL

$$S_Y(f) = TCF[R_Y(\tau)] =$$

→ POSSO GIÀ DIRE CHE Y(t) è SSL

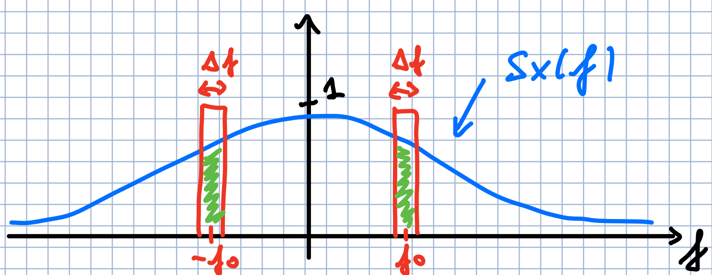
$$= TCF[\underbrace{R_X(\tau) \otimes h(t) \otimes h(-\tau)}_{R_Y(\tau)}] = S_X(f)\,H(f)\,H^*(f) = S_X(f)\,|H(f)|^2$$

$$\boxed{S_Y(f) = S_X(f)\,|H(f)|^2}$$

POTENZA MEDIA DEL PROC. AL. IN USCITA

$$P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\,|H(f)|^2\,df$$

$\Rightarrow P_Y \geq 0$



LA SOMMA DELLE 2 AREE MI DA $P_Y \geq 0$

$\Delta f \to 0 \quad \Rightarrow \quad \underset{\geq 0}{P_Y} = S_X(f_0) \Rightarrow \underbrace{2\,S_X(f_0)}_{\geq 0}\,\underset{> 0}{\Delta f}$

il 2 perché è REALE E PARI $\forall f_0$

$\Rightarrow S_X(f_0) \geq 0 \quad \forall f_0$

$S_X(f) \geq 0 \quad \forall f$ $\quad$ <u>DIM.</u> 3ª proprietà

PROCESSO DI RUMORE BIANCO

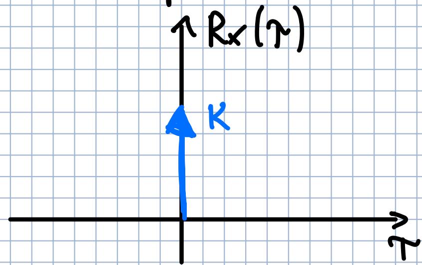
$x(t)$ si dice BIANCO se:

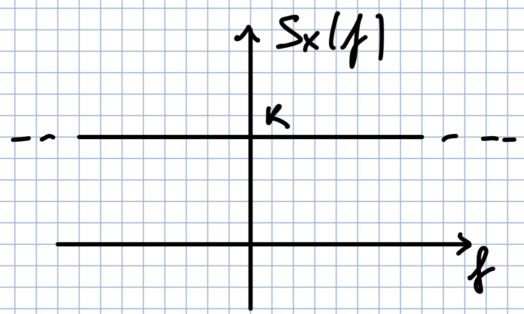
1) $\eta_x = 0$

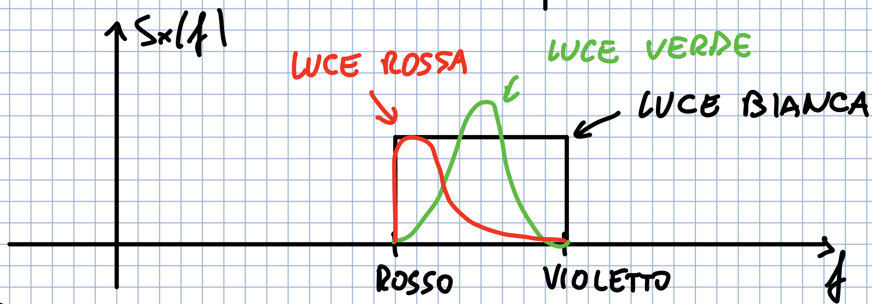
2) $R_x(\tau) = K\delta(\tau) = C_x(\tau)$

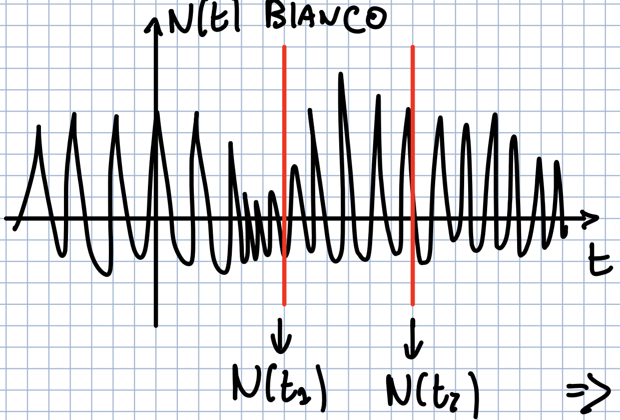
RUMORE BIANCO È SSL

$S_x(f) = K \quad \forall f$







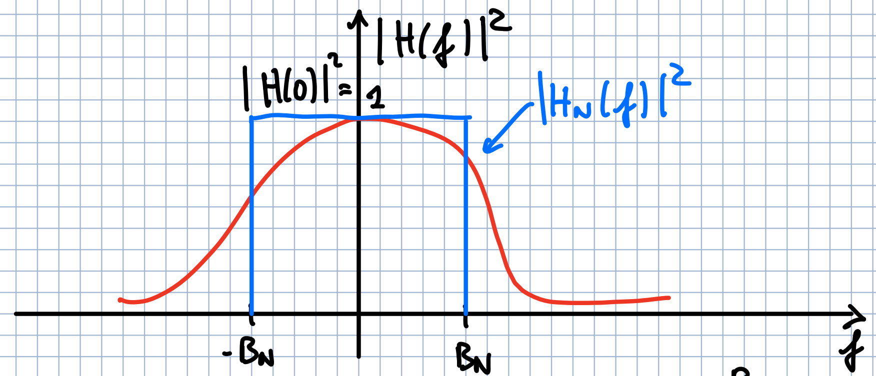


OGNI COPPIA t_1, t_2 che prendo sono INCORRELATE TRA LORO, IL RUMORE HA LA CAPACITÀ DI CAMBIARE IL SUO VALORE VELOCEMENTE

$\Rightarrow$ $R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) = 0 \qquad \tau \neq 0$

$C_x(t_1, t_2) = C_x(\tau) = 0$

BANDA EQUIVALENTE DI RUMORE DI UN FILTRO



$$B_N : P_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)|H(f)|^2 df \Big|_{S_X(f)=K} = \int_{-B_N}^{B_N} S_X(f)|H(0)|^2 df \Big|_{S_X(f)=K} =$$

$$\Rightarrow P_Y = K\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = K|H(0)|^2 \cdot 2B_N$$

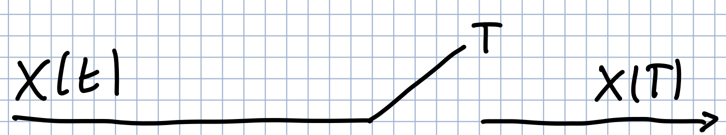
$$\boxed{B_N = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df}{2|H(0)|^2}}$$

BANDA EQUIVALENTE

⇒ PROCESSI ALEATORI GAUSSIANI

Un processo aleatorio si dice GAUSSIANO se estraendo N V.A., con N arbitrario, ad istanti $t_1, t_2 \dots t_N$ arbitrari, si ottiene un vettore di dimensione N di V.A. congiuntamente GAUSSIANE

⇒ PRATICAMENTE:



X(t) GAUSSIANO — X(T) è una V.A. GAUSSIANA

PROPRIETÀ DEI PROCESSI ALEATORI GAUSSIANI

La conoscenza completa di un processo aleatorio gaussiano la si ottiene conoscendo solamente:

- $\eta_X(t)$ e $R_X(t_1, t_2)$

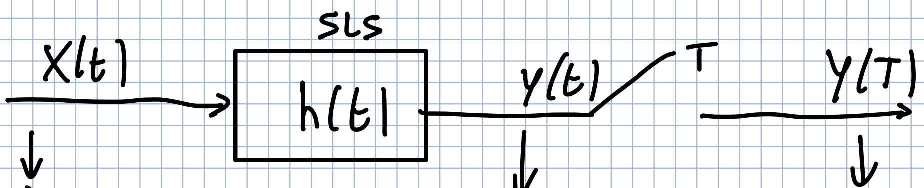
POSSO DESCRIVERE LA DDP DI ORDINE N

- Un processo aleatorio Gaussiano SSL è anche SSS

$$SSL \Longleftrightarrow SSS$$

- FILTRAGGIO DI P. A. GAUSSIANI

X(t) GAUSSIANO $\qquad$ Y(t) è GAUSSIANO



V.A. GAUSSIANA

$\eta_x(t) \rightarrow \eta_y(t)$

$R_x(t_1,t_2) \rightarrow R_y(t_1,t_2)$

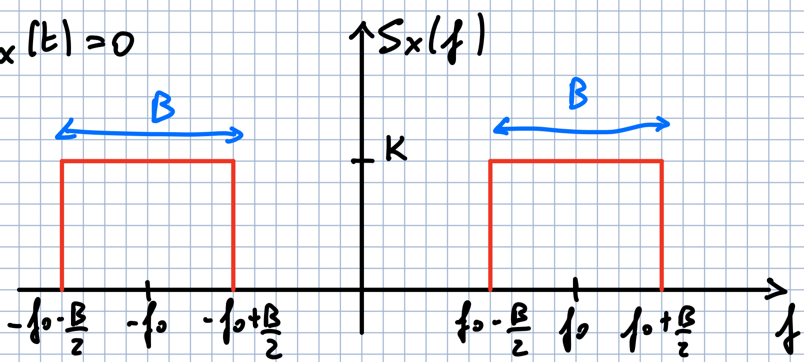
GAUSSIANO $\rightarrow$ GAUSSIANO

RUMORE BIANCO

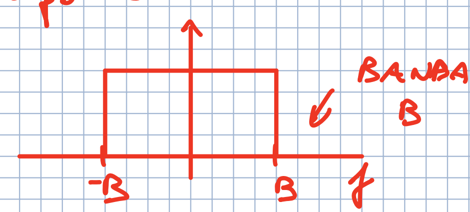
$$\eta_x(t) = 0 \qquad R_x(\tau) = K\,\delta(\tau) \qquad S_x(f) = K \quad \forall f$$

RUMORE BIANCO IN BANDA

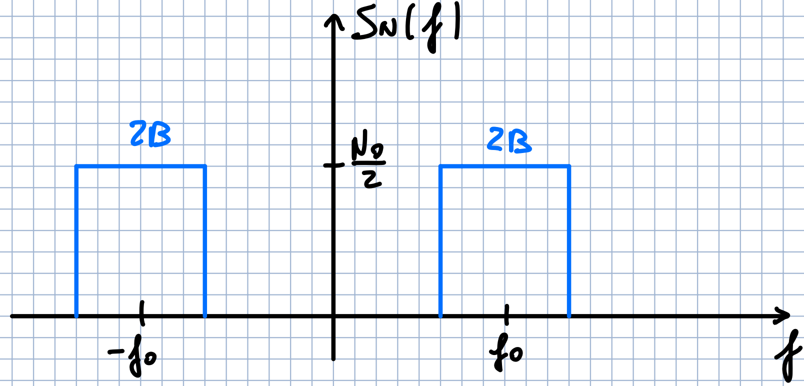
$\eta_x(t) = 0$

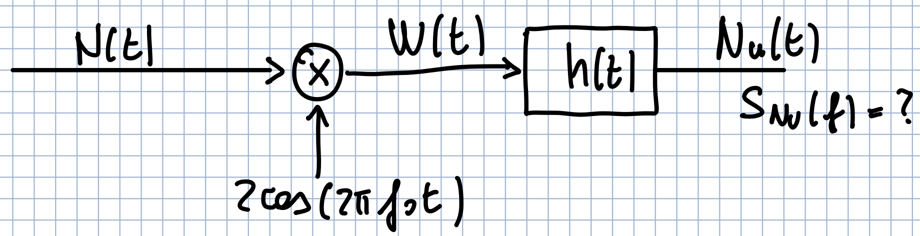


per $f_0 = 0$

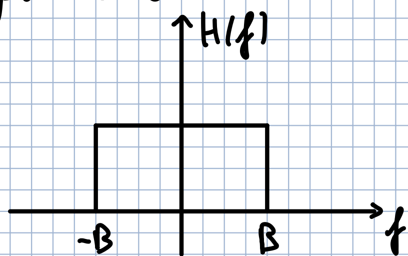


DEMODULAZIONE DI UN RUMORE BIANCO IN BANDA PASSANTE





h(t) è un passa-basso ideale di banda B



$$S_N(f) = \frac{N_0}{2}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_0}{2B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+f_0}{2B}\right)\right]$$

$$R_N(\tau) = 2N_0 B\, \mathrm{sinc}(2B\tau)\left[\frac{e^{j2\pi f_0\tau} + e^{-j2\pi f_0 \tau}}{2}\right] = 2N_0B\,\mathrm{sinc}(2B\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$$

$W(t) = 2N(t)\cos(2\pi f_0 t)$ è ANCORA GAUSSIANO

$$\eta_W(t) = 0 = E[W(t)] = E[2N(t)\cos(2\pi f_0 t)] = 2\cos(2\pi f_0 t)\cdot \underbrace{E[N(t)]}_{=0} = 0$$

$$R_W(t_1,t_2) = E[W(t_1)W(t_2)] =$$

$$= E[2N(t_1)\cos(2\pi f_0 t_1)2N(t_2)\cos(2\pi f_0 t_2)] =$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$= 4E[N(t_1)N(t_2)]\underline{\cos(2\pi f_0 t_1)\cos(2\pi f_0 t_2)} =$$

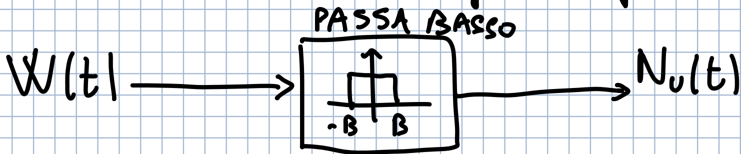
$$= 2R_N(t_1-t_2)[\cos(2\pi f_0(t_1+t_2))\cos(2\pi f_0(t_1-t_2))]$$

$$R_N(\tau) = 2N_0B\,\mathrm{sinc}(2B\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$$

$$= 4N_0B\,\mathrm{sinc}(2B\tau)\underline{\cos(2\pi f_0(t_1-t_2))\cdot[\cos(2\pi f_0(t_1+t_2))\cos(2\pi f_0(t_1-t_2))]}$$

$$= 2N_0B\,\mathrm{sinc}(2B\tau)[\cos(4\pi f_0 t_1) + \cos(4\pi f_0 t_2) + 1 + \cos(4\pi f_0(t_1-t_2))] =$$

$= 2N_0 B \,\text{sinc}(2B\tau) + \text{termini a } f \rightarrow 2f_0$



$R_{N_U}(t_1, t_2) = \underbrace{R_W(t_1, t_2) \otimes h(t_1)}_{\substack{\text{elimina le componenti} \\ \cos(4\pi f_0 t_1) \text{ e } \cos(4\pi f_0(t_1 - t_2))}} \otimes h(t_2)$

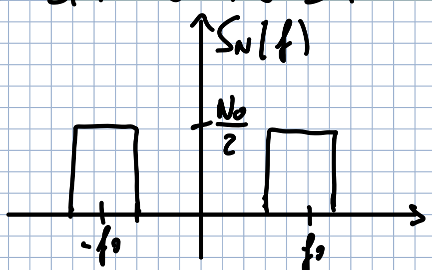
→ elimina le componenti $\cos(4\pi f_0 t_2)$ e $\cos(4\pi f_0 (t_1 - t_2))$

$f_0 >> B$

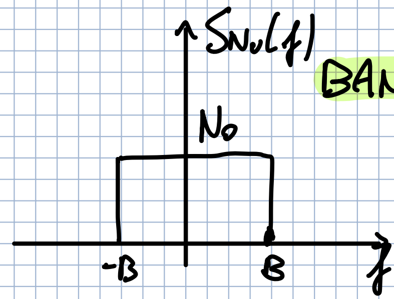
$R_{N_U}(t_1, t_2) = 2N_0 B \,\text{sinc}(2B(t_1 - t_2)) = 2N_0 B \,\text{sinc}(2B\tau)$

$S_{N_U}(f) = N_0 \,\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$

PARTO DA UN RUMORE BIANCO IN BANDA PASSANTE



DEMODUL. $\Longrightarrow$



BANDA BASE

$N(t) \longrightarrow$ DEMOD. $\longrightarrow N_U(t)$

$S_N(f) = \frac{N_0}{2}$ in banda $\qquad S_{N_U}(f) = N_0$ in banda

RUMORE

$a(t)$ (b.b.) $\longrightarrow$ MOD. $\xrightarrow{x(t)}$ (b.p.) $> > >$ $\xrightarrow{N(t)}$ (b.p.) DEMOD. $\xrightarrow{N_U(t)}$ b.b.

$x(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t) \qquad x(t) \Rightarrow y(t) = x(t) \, 2\cos(2\pi f_0 t) \otimes h(t)$

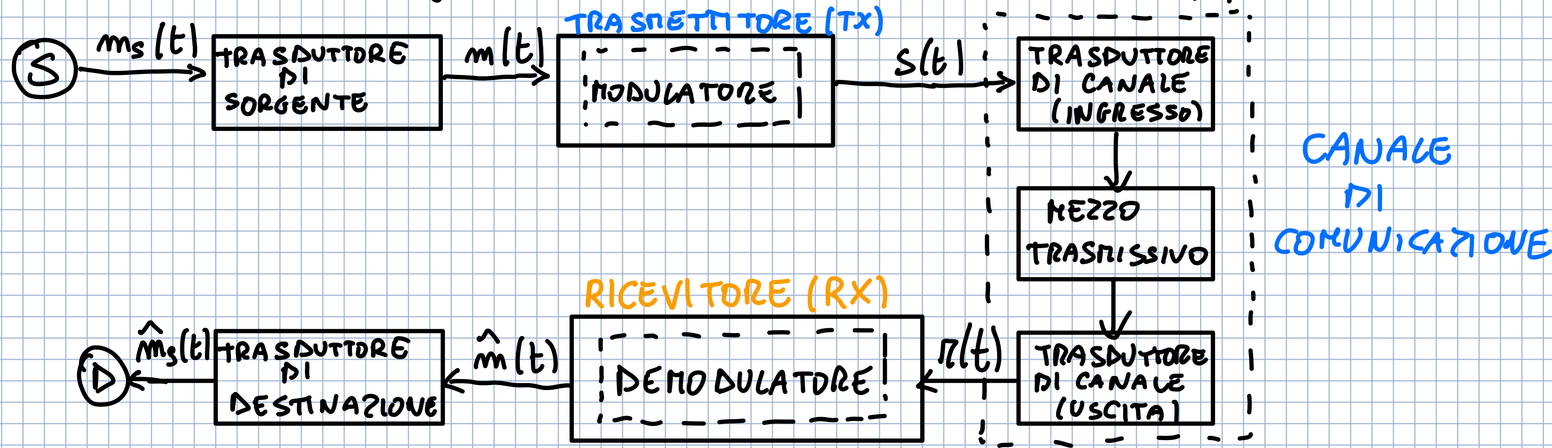
PASSA BASSO

SISTEMI DI COMUNICAZIONE

Un sistema di comunicazione è un sistema capace di trasferire informazioni da una o più sorgenti a una o più destinazioni

- Sist. di com. punto - punto

- SCHEMA DI PRINCIPIO di un SISTEMA DI COM. P.P.



$m_S(t)$ = segnale fisico (la voce)

TRASD. DI SORGENTE (il microfono)

$m(t)$ = segnale trasdotto, elettrico

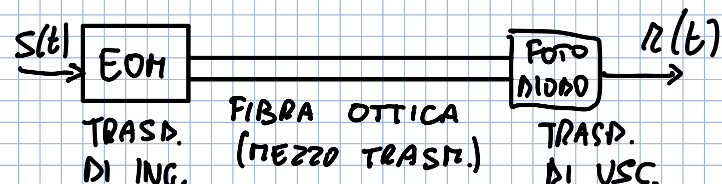
$r(t)$ = segnale ricevuto

$\hat{m}(t)$: segnale demodulato

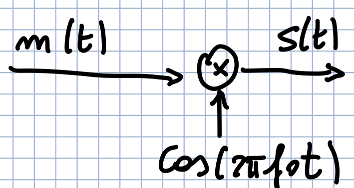
TRASMETTITORE: converte il segnale elettrico $m(t)$ in un segnale idoneo al canale di comunicazione a disposizione

TRASDUTTORE DI CANALE

Electro Optic Modulation

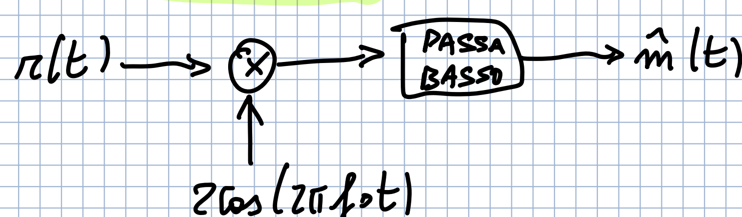


MODULATORE



$s(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t)$

DEMODULATORE

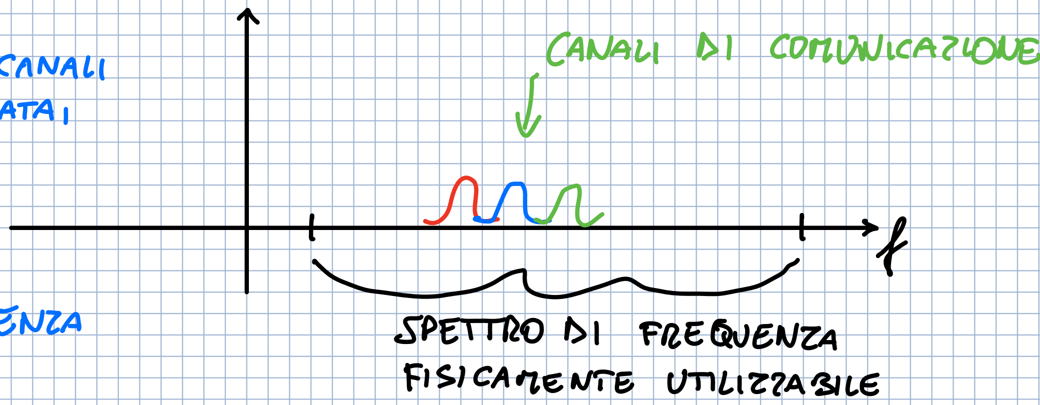


CANALE DI COMUNICAZIONE

- Banda del canale di comunicazione
  - limite fisico
  - limite di condivisibilità

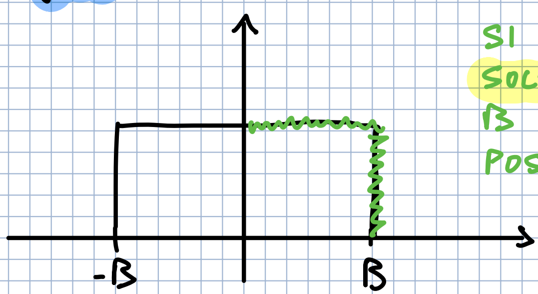
POSSO ALLOCARE PIU' CANALI DI COM., A BANDA LIMITATA, SULLO STESSO MEZZO TRASMISSIVO

CONDIVISIONE A DIVISIONE DI FREQUENZA



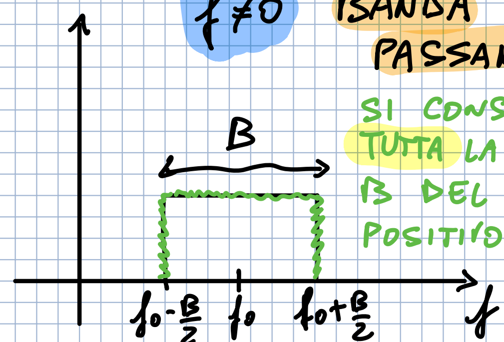
- In generale noi considereremo il canale di comunicazione come una porzione di spettro intorno alla FREQUENZA f_0 di banda B

$f_0 = 0$ **BANDA BASE**



SI CONSIDERA SOLO LA BANDA B DEL SEMIASSE POSITIVO

$f \neq 0$ **BANDA PASSANTE**



SI CONSIDERA TUTTA LA BANDA B DEL SEMIASSE POSITIVO

B = larghezza di banda o (BANDA)

f_0 = frequenza centrale

CANALE DI COM.

- A BANDA LARGA $\Rightarrow f_0 \leq 2B$ $\quad \boxed{\frac{f_0}{2B} \leq 1}$
- A BANDA STRETTA $\Rightarrow f_0 > 2B$ $\quad \boxed{\frac{f_0}{2B} > 1}$ $\quad (f_0 \gg 2B)$

ESEMPI:

- TELEFONO: CANALE TELEFONICO SU DOPPINO

BANDA PASSANTE: $300\ Hz \rightarrow 4\ KHz$

$$B = 4000 - 300 = 3700\ Hz$$

$$f_0 = \frac{4000 + 300}{2} = 2150\ Hz$$

$$\frac{f_0}{2B} = \frac{2150}{2 \cdot 3700} = 0{,}29 < 1 \Rightarrow f_0 < 2B$$

BANDA LARGA

·) CANALE DVB-T (Digital Video Broadcast) T- terrestre
S- satellitare

$$f_0 = 500\ MHz$$

$$B = 8\ MHz$$

$$\frac{f_0}{2B} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad f_0 \gg 2B$$ BANDA STRETTA

CANALE RADIO

·) È sempre un canale passa-banda
·) È tipicamente un canale a banda stretta
·) I Trasduttori sono antenne

$P_T < P$

+ BASSA È LA FREQUENZA E + L'ANTENNA DEVE ESSERE GRANDE $\frac{1}{10}$ della LUNGH. ONDA

D = Dimensione ANTENNA $\quad D \geq \frac{\lambda}{10}$

λ = lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{c}{f_0}$$ f_0 = freq. centrale

SPETTRO

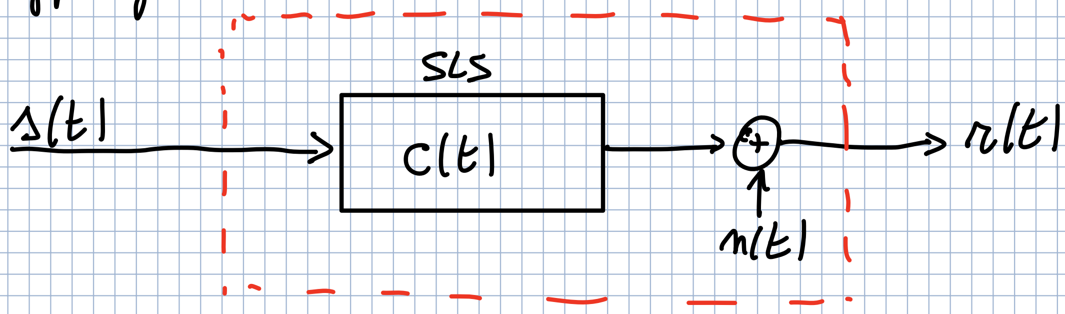
LF (Low-frequency)	30- 300 KHz	1-10 Km	↓ DECADE
MF (Medium)	300 - 3000 KHz	100 - 1000 m	↓ DECADE
HF (High)	3 - 30 MHz	10 - 100 m	↓ DECADE
VHF (Very High)	30-300 MHz	1 - 10 m	
UHF (Ultra High)	300 - 3000 MHz	10-100 cm	
SHF (Super High)	3-30 GHz	1 - 10 cm	$\boxed{\mu \text{ onde}}$

·) MODELLIZAZIONE DEL CANALE

$$s(t) \longrightarrow \boxed{\text{CANALE DI COMUNICAZ.}} \longrightarrow r(t)$$

CANALE DI COMUNICAZIONE

- Distorsioni lineari di $s(t)$
- Aggiungo rumore



$c(t)$ = risposta impulsiva del canale

$n(t)$ = rumore additivo (PR. AL. ADDITIVO)

$$r(t) = \underbrace{s(t) \otimes c(t)}_{\text{COMPON. UTILE}} + \underbrace{n(t)}_{\text{COMP. RUMORE}}$$

CANALE IDEALE

$$\left.\begin{array}{l} \cdot)\ c(t) = \delta(t) \\ \cdot)\ n(t) = 0 \end{array}\right\} \quad r(t) = s(t)$$

SISTEMI DI COMUNICAZIONE

- ANALOGICI
- NUMERICI

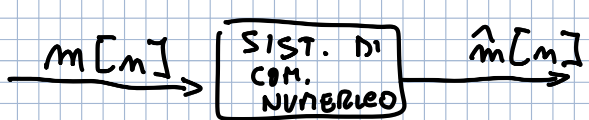
=> ANALOGICI

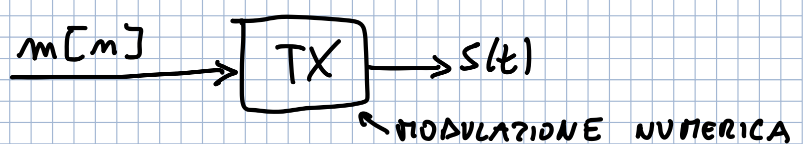
se $m(t)$, e quindi anche $\hat{m}(t)$ sono ANALOGICI

$s(t)$, $r(t)$ sono SEMPRE ANALOGICI → VANNO SUL SUPPORTO FISICO / NON POSSO MANDARE NUMERI

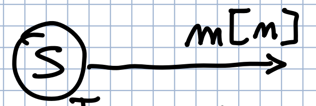
=> NUMERICI

$m[n]$, $\hat{m}[n]$





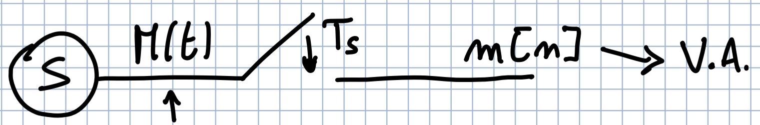
SISTEMI DI COM. NUMERICI



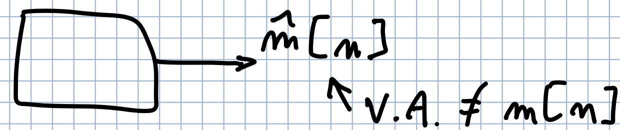
$T_s \to$ PERIODO DI SEGNALAZIONE DELLA SORGENTE

$m[n] \Rightarrow$ SIMBOLI

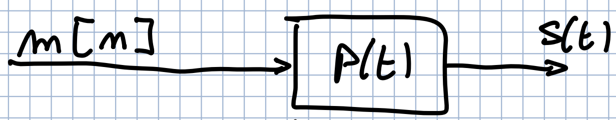
$m[n] \in A_s = \{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_M\}$ $\boxed{M \geq 2}$



PROCESSO ALEATORIO $\in A_s$



•) TRASFORMAZIONE DA SEQUENZA DI V.A. A SEGNALE AL. ANALOGICO



R_s = tasso erogazione sorgente

$$\boxed{R_s = \frac{1}{T_s}}$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m[n]\, p(t - nT_s)$$

NEL CASO DI CODIFICA BINARIA

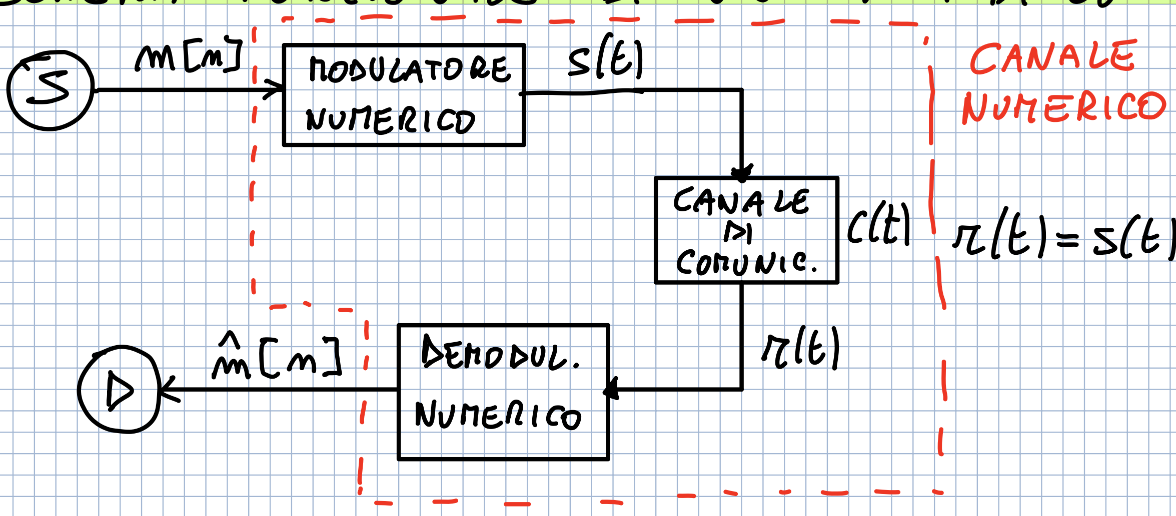
$A_s = \{\alpha_0, \alpha_1\}$ $\quad R_s$ = bit rate

$\boxed{T_s = T_b}$

$A_s = \{\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{M-1}\}$ $\quad \boxed{M = 2^K}$

$$\boxed{R_b = \frac{\log_2 M}{T_s}}$$

SCHEMA FUNZIONALE DI UN SIST. DI COM. NUM.



$r(t) = s(t) \otimes c(t) + n(t)$

$\hat{m}[n] = m[n] \;\; \forall n \to$ CANALE NUM. IDEALE

⇒ In pratica un canale numerico non è mai IDEALE

⇒ PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE

$$P\{i \mid j\} = P\{\hat{m}[n] = \alpha_i \mid m[n] = \alpha_j\}$$

RICEVA

CONDIZIONATO DALL'AVER TRASMESSO DALLA SORGENTE

Un canale numerico è statisticamente caratterizzato quando sono note tutte le $P\{i \mid j\}$ $\forall i, j$

se HO 2 simboli → HO 4 POSSIBILI TRANSIZIONI

TRASMETTO 0, RICEVO 0

TRASMETTO 0, RICEVO 1

TRASMETTO 1, RICEVO 0

TRASMETTO 1, RICEVO 1

·) CASO BINARIO $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

D \ S	0	1
0	$P(0\mid0)$	$P(0\mid1)$
1	$P(1\mid0)$	$P(1\mid1)$

$P\{i \mid j\}$ in generale possono dipendere da "n"

Se $P\{i \mid j\}$ non dipendono da "n" ⇒ CAN. NUM. STAZIONARIO

le prob. non cambiano nel tempo

·) CANALE IDEALE

$$P\{i \mid j\} = 0 \quad \forall i \neq j$$

$$P\{i \mid i\} = 1 \quad \forall i$$

⇒ le $P\{i \mid j\}$ non dipendono solo dal canale di comunicazione, ma anche dalla coppia mod/demodulatore

È IMPORTANTE PROGETTARE IN MODO EFFICACE MOD. E DEMOD.

MISURA DELLE PRESTAZIONI DI UN SISTEMA DI COM. NUM.

·) Probabilità di errore sul simbolo

$$P_E(M) = P\{\hat{m}[n] \neq m[n]\}$$

CARD. ALFABETO

se $P_E(M)$ non dipende da n ⇒ SISTEMA STAZIONARIO STATISTICAMENTE

•) Qualità del servizio (QOS)

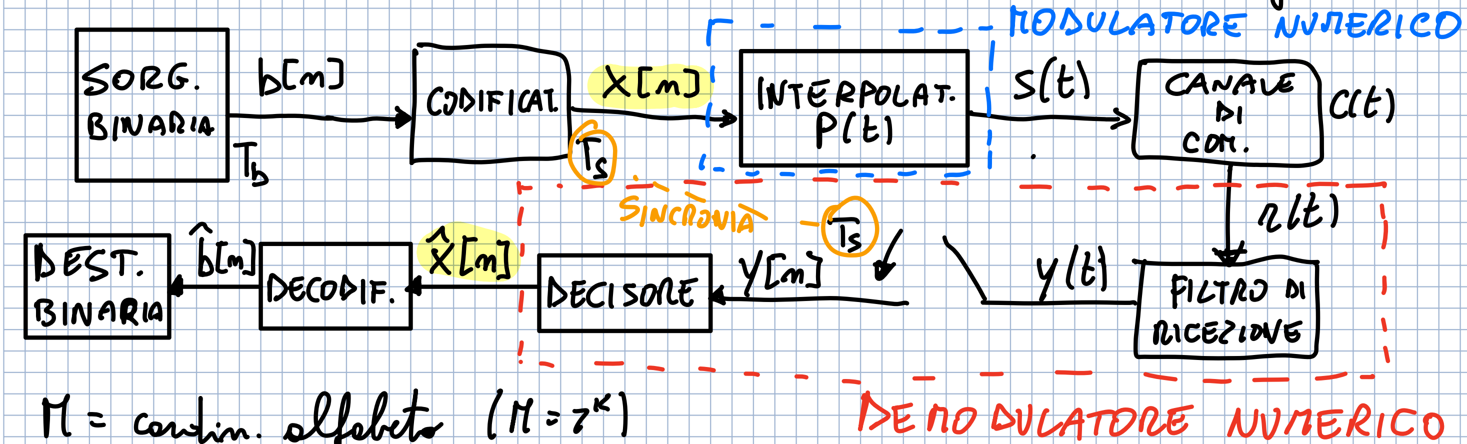
$$P_E(M) \le P_{MAX}$$

ES.

•) VOCE $\Rightarrow$ $P_{MAX} \simeq 10^{-3}$

•) DATI $\Rightarrow$ $P_{MAX} \simeq 10^{-6}/10^{-7}$

SISTEMI DI COM. NUMERICI (BANDA BASE) $f_0 = 0$



M = cardin. alfabeto $(M = 2^K)$

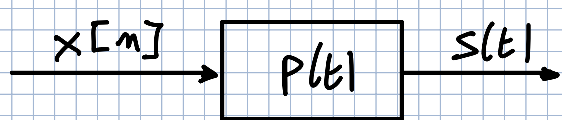
$T_S = \log_2 M \cdot T_b$ $\qquad R_S = \dfrac{1}{\log_2 M \cdot T_b}$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n]\, p(t - nT_S)$$

•) FILTRO DI RICEZIONE: serve a eliminare/attenuare l'effetto dannoso del rumore e per bilanciare eventuali effetti distorsivi del canale

$\Rightarrow$ INTERPOLATORE (IN BANDA BASE)

TRASFORMA UN SEGNALE NUMERICO IN ANALOGICO



p(t) = funzione interpolatrice $\Rightarrow$ impulso sagomatore

p(t) $\rightarrow$ BANDA $\Rightarrow$ $P(f)$

p(t) $\rightarrow$ ENERGIA $\Rightarrow$ $E_p = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2\,df$

X[n] $\Rightarrow$ V.A. $\Rightarrow$ s(t) è un processo ALEATORIO STAZIONARIO

$\Downarrow$

$R_s(\tau)$, $S_s(f)$

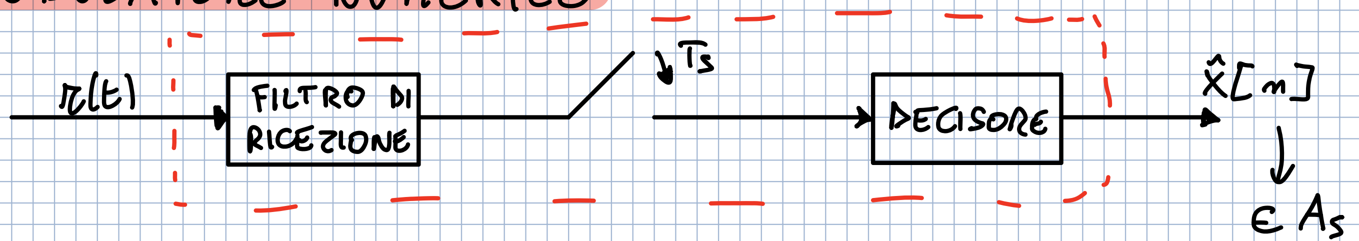
POTENZA MEDIA

$$P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} S_s(f)\, df = R_s(0)$$

ENERGIA PER BIT $= E_b$

$$E_b = \frac{T_s P_s}{\log_2 M} = \frac{E_s}{\log_2 M}$$

DEMODULATORE NUMERICO



⇒ TRASFORMA IL SEGNALE RICEVUTO IN SIMBOLI ∈ A_s CERCANDO DI MINIMIZZARE LA PROB. DI ERRORE

PROB. ERRORE

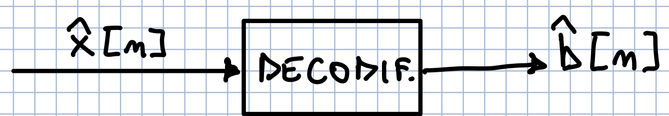
SIMBOLO DECISO — SIMBOLO TRASMESSO

-) sul simbolo : $P_{E_s} = P\{\hat{x}[n] \neq x[n]\}$

-) sul bit : $P_{E_b} = P\{\hat{b}[n] \neq b[n]\}$

(BEP)

BIT DECISO — BIT TRASMESSO



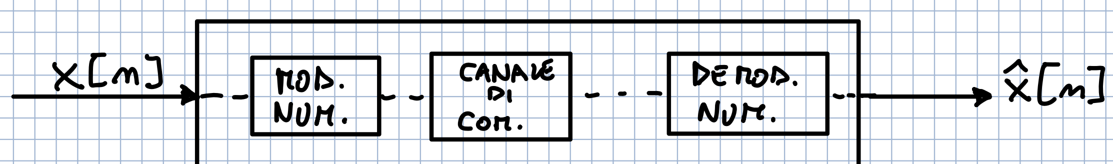
BER: Bit Error rate : n° bit errati per secondo

BEP: Bit Error Probability : probabilità di sbagliare un bit

BIT RATE $= K$ (BIT/s)

$$BER = K \cdot BEP$$

CANALE NUMERICO E PRESTAZIONI



$P_{E_s} = P_E(M) = \,?$ $\quad$ M: n° simboli dell'alfabeto $\Rightarrow A_s = \{\alpha_0 \dots \alpha_{M-1}\}$

$\Rightarrow P\{i \mid j\}$ prob. di transizione $= P\{\hat{x}[n] = d_i, x[n] = d_j\}$

$$P_E\{M\} = P\{\hat{x}[n] \neq x[n]\} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} P\{\hat{x} = d_i, x = d_j\} =$$

PROB. TOTALE

$$= \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{M} P\{\hat{x} = d_i \mid x = d_j\} P\{x = d_j\}$$

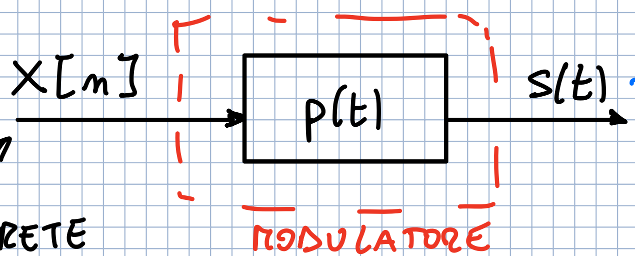
$P\{x = d_j\} \quad \forall j \Rightarrow$ PR. A PRIORI

SIMBOLI SONO EQUIPROBABILI

$$P\{x = d_j\} = \frac{1}{M} \quad \forall j$$

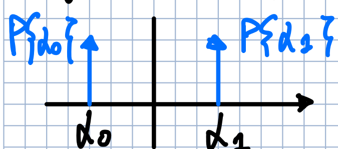
Quando i simboli non sono equiprobabili, sono date le prob. a priori

MODULAZIONI NUMERICHE (IN BANDA BASE)



SEGNALE ALEATORIO PARAMETRICO CON PARAMETRI LE V.A. RAPPRESENTATE DAI SIMBOLI EMESSI DALLA SORGENTE

V.A. DISCRETE



$s(t) \rightarrow$
$s_0(t) = d_0\, p(t)$
$s_1(t) = d_1\, p(t)$
$\vdots$
$s_{M-1} = d_{M-1}\, p(t)$

REALIZZAZIONI DEL PROCESSO $s(t)$

$$E_{s_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t)\, dt$$

$s_i(t)$ è il segnale trasmesso relativo all'i-esimo simbolo

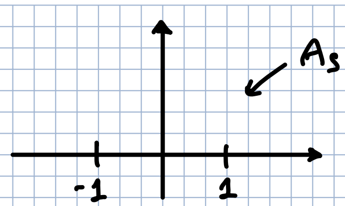
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t - nT)$$

MOD. NUM. IN BANDA BASE

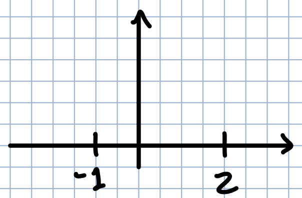
$E_{s_i} = E_s \quad \forall i \Rightarrow$ MODULAZIONE EQUIENERGETICA

$$E_{s_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} d_i^2 p^2(t)\, dt = d_i^2 E_p$$

$$E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t)\, dt$$



$\alpha_i^2 = 1 \quad \forall i$ EQUIENERGETICO



$\alpha_0^2 = 1$
$\alpha_1^2 = 4$

NON È EQUIENERGETICO

EFFICIENZA ENERGETICA

- Fissata una P_{Eb}, essa è definita:

$$\eta_P = \frac{1}{SNR} \quad , \quad SNR = \frac{P_s}{P_N}$$

GARANTISCE L'OTTENIMENTO DELLA P_{Eb} PREFISSATA

SIGNAL TO NOISE RATIO

P_s → POT. SEGNALE

P_N → POTENZA RUMORE

Tanto più elevata è η_P tanto più performante è il sistema

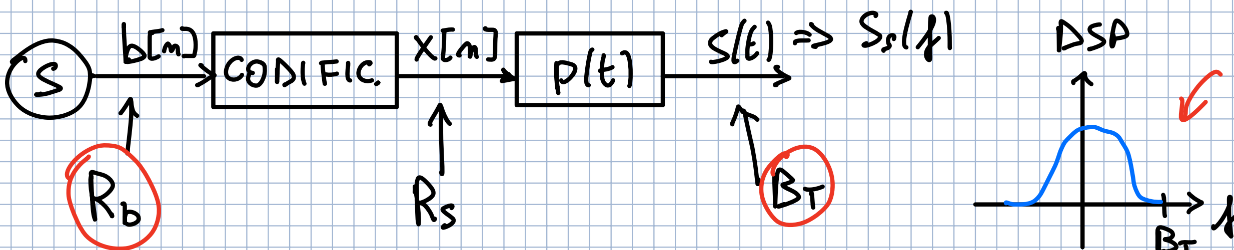
EFFICIENZA SPETTRALE

- Fissata la P_{Eb}, essa è definita:

$$\eta_B = \frac{R_b}{B_T} \quad \frac{[\text{bit}/s]}{[\text{Hz}]}$$

R_b: TASSO DI EROGAZ. BIN. SORGENTE

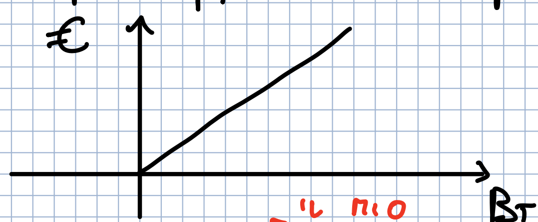
B_T: BANDA DI TRASMISSIONE

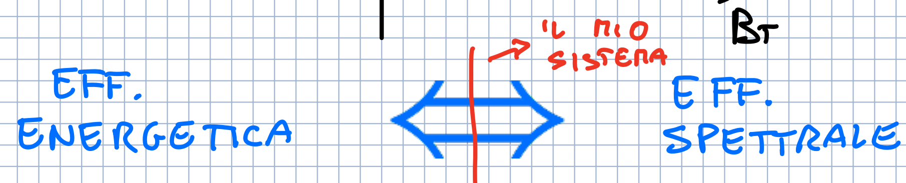


TANTO + È STRETTA LA BANDA DEL SEGNALE TRASMESSO TANTO PIÙ È EFFICIENTE IL SISTEMA DA UN PTO DI VISTA SPETTRALE

che garantisce l'ottenimento della P_{Eb} fissata

⇒ A parità di P_{Eb} e di R_b un sistema che utilizza una B_T minore di un altro è più efficiente dal punto di vista spettrale





È MOLTO DIFFICILE OTTIMIZZARE IN ENTRAMBE LE DIR.

PULSE AMPLITUDE MODULATION (PAM)

M-PAM => PAM con M simboli $\quad A_s = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{M-1}\}$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{p(t)} \longrightarrow s(t)$$

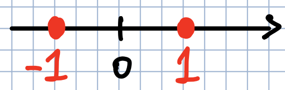
DEFINIZIONE DI UNA PAM

1) $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t - nT_s)$ $\quad T_s$: intervallo di erogazione simboli

2) SIMBOLI : $\alpha_i = 2i - 1 - M$ $\quad M$: n° simboli

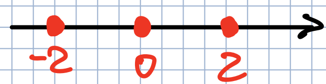
ESEMPIO

$M = 2$ $\quad \alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$



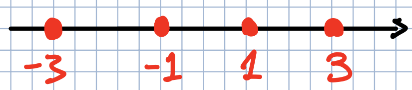
2-PAM

$M = 3$ $\quad \alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 2$



3-PAM

$M = 4$ $\quad \alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 3$



4-PAM

$$E_{si} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i^2 p^2(t - nT_s)\, dt = (2i-1-M)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t-nT_s)\, dt =$$

DIPENDE DA i e quindi NON E' EQUIENERGIA $\rightarrow$ $= (2i-1-M)^2 E_p$

EN. MEDIA PER IMPULSO TRASMESSO

$$E_s = E[E_{si}] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} s_i^2(t)\, dt\right] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i^2 p(t - nT_s)\, dt\right] =$$

$$= E[\alpha_i^2] \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t - nT_s)\, dt = E[\alpha_i^2]\, E_p$$

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2 M}$$

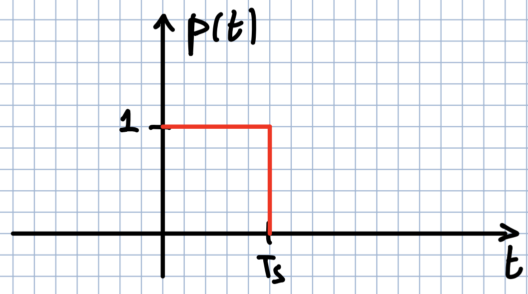
ESEMPIO 4-PAM

$A_s = \{-3, -1, 1, 3\}$ $\qquad p(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_s}{2}}{T_s}\right)$

REALIZZAZIONE SIMBOLI

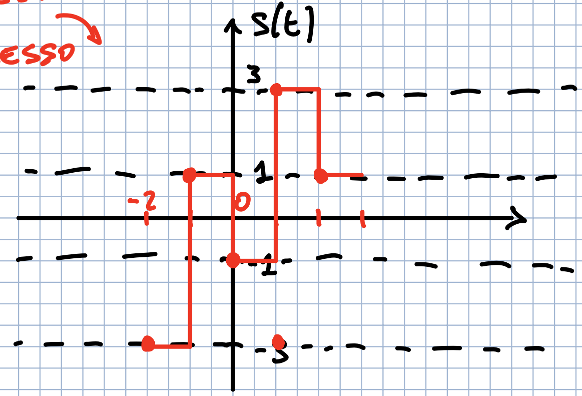
$x[n] \Rightarrow \dots, x[-2] = -3, x[-1] = +1, x[0] = -1, x[1] = +3, x[2] = +1$

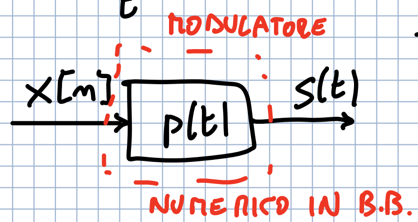
$s(t) = ?$



$\Rightarrow$

REALIZZ. SEGNO TRASMESSO





PROPRIETA' DERIVATE DELLA PAM

1) $E[s(t)] = E\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t - nT_s)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E[x[n]]\, p(t - nT_s) =$

$E[x[n]] = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i P\{\alpha_i\} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \alpha_i =$

SIMBOLI EQUIPROB.
$P\{\alpha_i\} = \frac{1}{M} \quad \forall i$

$= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} (2i - 1 - M) = \frac{2}{M} \sum_{i=1}^{M} i - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} 1 - \frac{M}{M} \sum_{i=1}^{M} 1 =$

$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{M}} \cdot \frac{\cancel{M}(M+1)}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{M}}{\cancel{M}} - M = (M+1) - 1 - M = 0$ $\qquad \boxed{E[s(t)] = 0} \; \forall t$

2) $\boxed{S_s(f) = \frac{1}{T_s} \bar{S}_x(f) |P(f)|^2}$ FORMULA GENERALE $\rightarrow$ DSP per simboli PAM

$\bar{S}_x(f) = \mathrm{TFS}[R_x[m]]$

$R_x[m] = E[x[n]\, x[n-m]]$

$P(f) = \mathrm{TCF}[p(t)]$

PER SIMBOLI EQUIPROBABILI

$\bar{S}_x(f) = \sigma_x^2 = E[x^2] \qquad E[x] = 0$

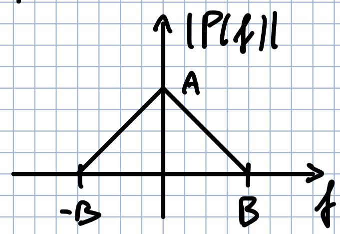
$\sigma_x^2 = E[x^2] - \underbrace{\eta_x^2}_{=0} = E[x^2]$

$$\boxed{S_s(f) = \frac{\sigma_x^2}{T_s}\,|P(f)|^2}$$

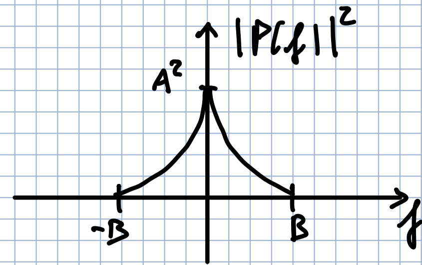
PER SIMBOLI EQUIPROBABILI

$p(t)$ è importante per le occupazioni di banda del segnale trasmesso

$\Rightarrow$ se $p(t) \overset{TCF}{\Rightarrow} P(f)$

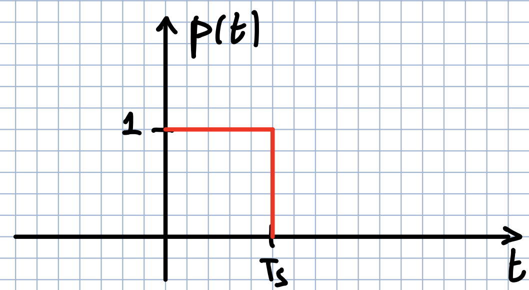


$\Rightarrow$

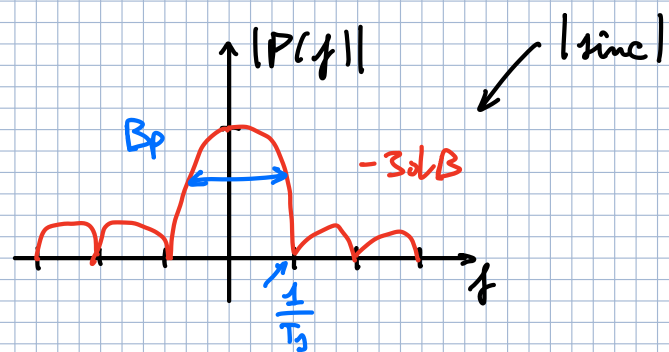


ESEMPIO

$$p(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$$

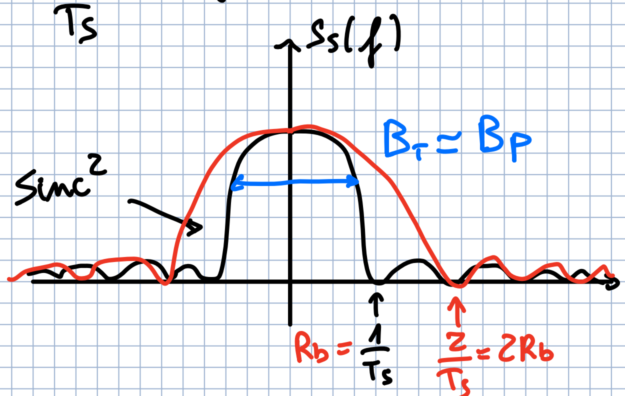


$$|P(f)| = T_s\,\mathrm{sinc}(T_s f)$$



Simboli equiprob.

$$S_s(f) = \frac{\sigma_x^2}{T_s}|P(f)|^2$$



2-PAM $\Rightarrow T_s = T_b \Rightarrow R_s = R_b$

$R_b = \frac{1}{T_s}$

•) Voglio raddoppiare il bit-rate

$R_b \to 2R_b \Rightarrow T_s \to \frac{T_s}{2}$

$\eta_B = \eta_B \Rightarrow$ l'efficienza spettrale se raddoppio non cambia

$\eta_B = \frac{R_b}{B_T}$ $\qquad$ $\eta_B = \frac{2R_b}{2B_T}$

σ_x^2 per una PAM $\Rightarrow \boxed{\sigma_x^2 = \frac{M^2-1}{3}}$

3) $P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} S_s(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_x^2}{T_s}|P(f)|^2\,df = \frac{\sigma_x^2}{T_s}E_p = \boxed{\frac{M^2-1}{3T_s}E_p}$ per simboli equiprobabili

EFFICIENZA SPETTRALE M-PAM con simboli equiprobabili

$$\eta_B = \frac{R_b}{B_T} = \frac{\log_2 M}{T_s\,B_T} \simeq \frac{\log_2 M}{T_s\,B_p}$$

$\Rightarrow$ **PAM BINARIA 2-PAM** (BPSK)

1) $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,p(t-nT_s)$

$x[n] \in A_s = \{+1, -1\}$

$T_s = T_b \qquad (\log_2 2 = 1)$

$E_{s1} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^2 p^2(t-nT_s)\,dt$

$E_{s2} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (+1)^2 p^2(t-nT_s)\,dt$

$\Rightarrow \boxed{E_{s1} = E_{s2}}$

EQUIENERGIA

2) $E[s(t)] = 0$

3) $S_s(f) = \frac{1}{T_s}|P(f)|^2 = \frac{1}{T_b}|P(f)|^2$ per simboli equiprob.

$\sigma_x^2 = \frac{M^2-1}{3} = \frac{2^2-1}{3} = 1$

4) $P_s = \frac{E_p}{T_b}$ 5) $\eta_B = \frac{1}{T_b B_p}$

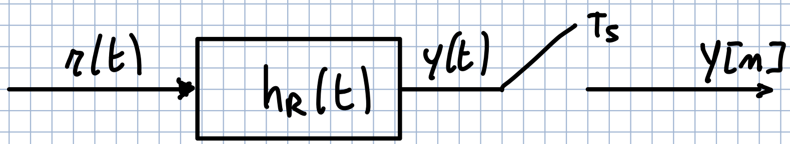
PRESTAZIONI DEI SIST. DI COM. NUM. (IN BANDA BASE)

- Due fenomeni peggiorativi

① INTERFERENZA INTER-SIMBOLICA (ISI)

② RUMORE

⇒ ISI (SENZA RUMORE)



ASSENZA DI ISI

$$y[n] = f(x[n])$$

CAMPIONE PRELEVATO ALL'ISTANTE "n"

SIMBOLO TRASMESSO ALL'ISTANTE "n"

PRESENZA DI ISI

$$y[n] = f[\ldots, \underbrace{x[n-1], x[n], x[n+1] \ldots}]$$

VARI SIMBOLI TRASMESSI AD ISTANTI DIVERSI DA "n"

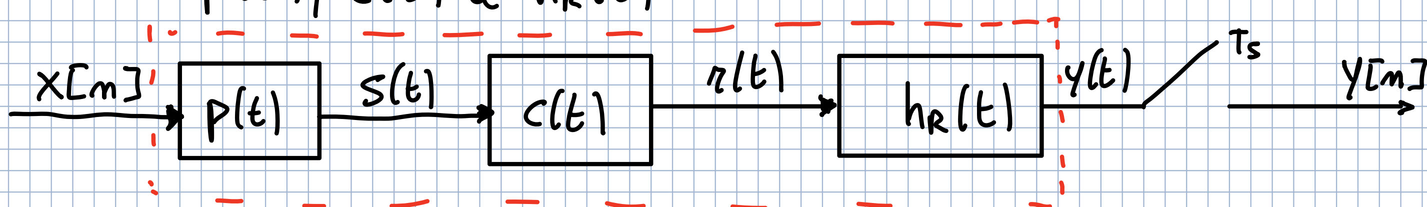
$$r(t) = s(t) \otimes c(t) + \cancel{n(t)} =$$

SIAMO IN CONDIZIONI DI ASSENZA DI RUMORE

$$= \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, p(t-kT_s)\right] \otimes c(t)$$

$$y(t) = r(t) \otimes h_R(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, p(t-kT_s)\right] \otimes c(t) \otimes h_R(t)$$

⇒ Per poter valutare la presenza o meno di ISI devo considerare $p(t)$, $c(t)$ e $h_R(t)$



POSSO VEDERLO COME UN UNICO OGGETTO?

$$y(t) = r(t) \otimes h_R(t) = \underbrace{\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, p(t-kT_s)\right] \otimes c(t)} \otimes h_R(t)$$

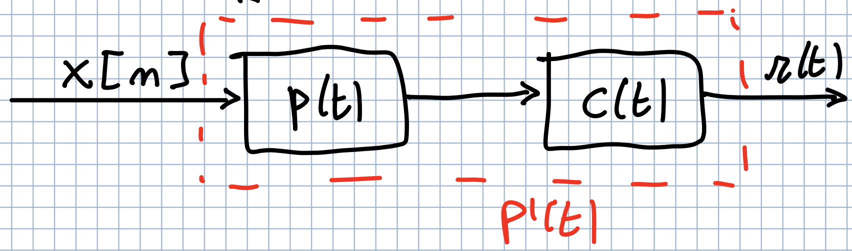
$$s(t) \otimes c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, p(\tau-kT_s)\, c(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_k x[k] \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau-kT_s)\, c(t-\tau)\, d\tau \qquad \tau - kT_s = \tau'$$

$$= \sum_k x[k] \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau')\, c(t-\tau'+kT_s)\, d\tau' =$$

$$= \sum_k x[k] \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau')\, c[(t-kT_s)-\tau']\, d\tau'}_{p'(t)\big|_{t=t-kT_s} = p(t)\otimes c(t)\big|_{t=t-kT_s}} =$$

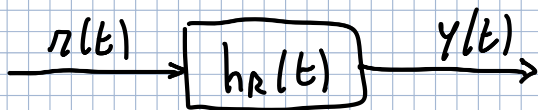
$$s(t)\otimes c(t) = \sum_k x[k]\, p'(t-kT_s) \qquad \text{con } p'(t) = p(t)\otimes c(t)$$



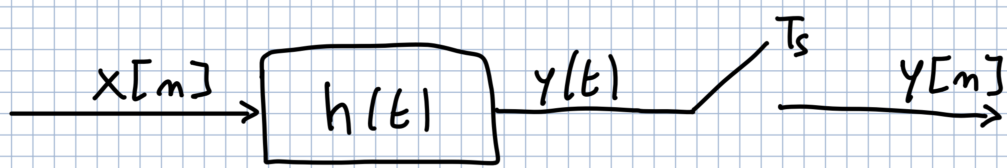
$$r(t) = \sum_k x[k]\, p'(t-kT_s)$$

$$y(t) = r(t)\otimes h_R(t) = \left[\sum_k x[k]\, p'(t-kT_s)\right]\otimes h_R(t) =$$

$$= \sum_k x[k]\, h(t-kT_s) \qquad h(t) = p'(t)\otimes h_R(t)$$



$$\boxed{h(t) = p'(t)\otimes h_R(t) = p(t)\otimes c(t)\otimes h_R(t)}$$



INTERPOLATORE EQUIVALENTE

$$y(t) = \sum_k x[k]\, h(t-kT_s)$$

$$y(t)\Big|_{t=mT_s} = y[m] = \sum_k x[k]\, h(mT_s-kT_s) = \sum_k x[k]\, h((m-k)T_s) =$$

COMPONENTE DI Y[m] CHE DIPENDE SOLO DA X[m]

$$= \underbrace{x[k]\, h(0)}_{k=m} + \underbrace{\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq m}}^{+\infty} x[k]\, h((m-k)T_s)}$$

COMPONENTE DI Y[m] CHE DIPENDE DA TUTTI GLI ALTRI SIMBOLI

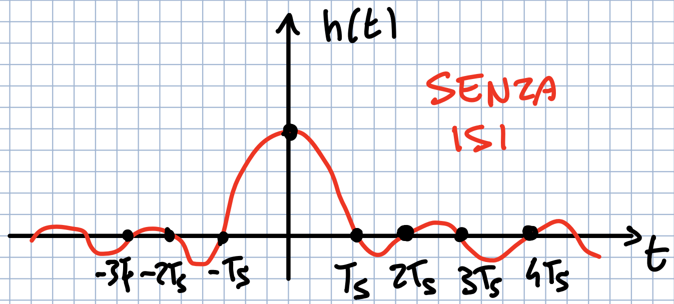
I° CRITERIO DI NYQUIST PER ASSENZA DI ISI

$$h[(n-K)T_s] = 0 \qquad n \neq K$$

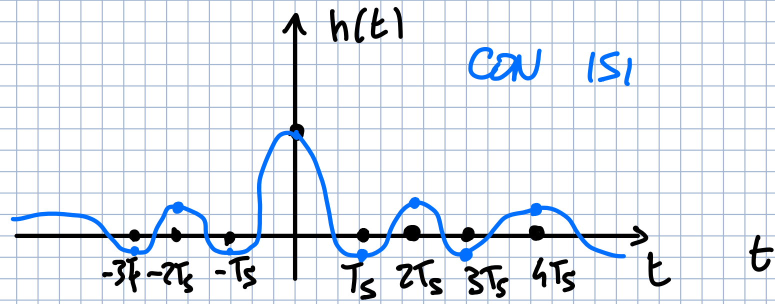
$$h[n' T_s] = 0 \qquad n' = n - K \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$h(nT_s) = 0 \qquad n \neq 0$$



in t=0 non vale nTs



DIM.

$$h(t)\Big|_{t=nT_s} = 0 \qquad n \neq 0$$

$$y[n] = h(0)\,x[n] + \sum_{\substack{K \\ K\neq n}} x[K]\, \underbrace{h((n-K)T_s)}_{=0}$$

$$h(n' T_s) = 0 \qquad n' \neq 0$$

$$h((n-K)T_s) = 0 \qquad n - K \neq 0$$

CRITERIO DI NYQUIST PER L'ASSENZA DI ISI

$$\left[\, h[n] = h(nT) = \delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \,\right] \qquad \text{TEMPO}$$

$$\Downarrow$$

si può estendere anche al caso più generico

$$h[n] = K\,\delta[n] \quad , \; K \in \mathbb{R}$$

$$y[k] = x[k]\,h(0) + \underbrace{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq K}}^{+\infty} x[n]\, h((n-k)T_s)}_{\text{ISI}}$$

$$y[K] = K\,x[K] + \underbrace{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq K}}^{+\infty} x[n]\cdot 0}_{=0} = K\,x[K] = h(0)\,x[K]$$

CRITERIO DI NYQUIST PER L'ASSENZA DI ISI (IN FREQUENZA)

$$h[n] = K\delta[n]$$

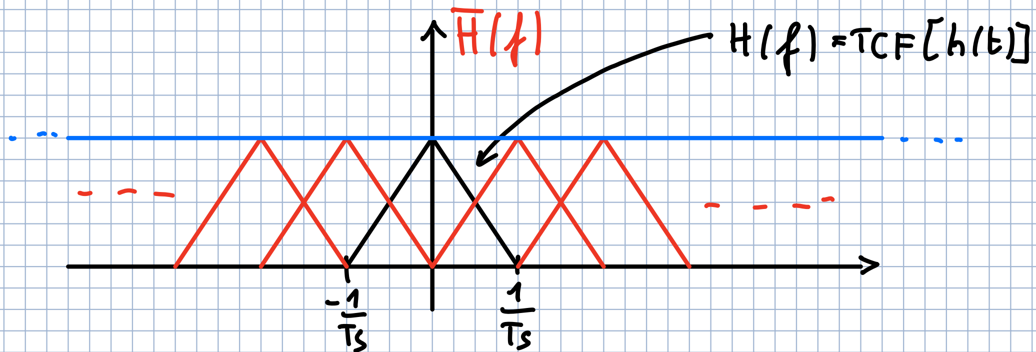
$$\Downarrow \text{TFS}$$

$$\overline{H}(f) = K = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = K T_s = h(0) T_s = \text{costante}}$$

FREQUENZA



In assenza di ISI questa somma ($\overline{H}(f)$) è costante

·) Per verificare l'assenza di ISI

NEL TEMPO

$$h(nT_s) = K\delta[n]$$

IN FREQUENZA

$$\overline{H}(f) = \text{COST.}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = \text{cost.}$$

PASSI

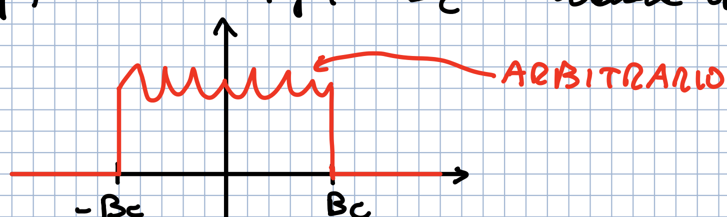
$\Rightarrow h(t) = p(t) \otimes c(t) \otimes h_R(t) \Rightarrow$ COND. NYQUIST nel tempo

$\Rightarrow H(f) = P(f)\,C(f)\,H_R(f) \Rightarrow$ COND. NYQUIST in frequenza

CONDIZIONE NECESSARIA PER L'ASSENZA DI ISI

·) Canale a banda rigorosamente limitata

$$C(f) = 0 \qquad |f| > B_c = \text{banda del canale}$$



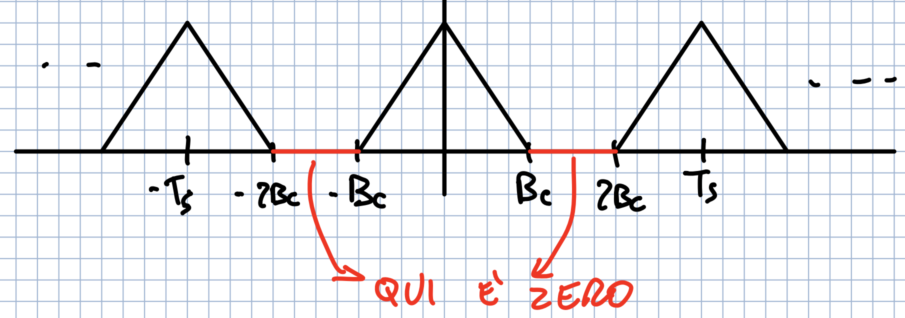
• $B_T = B_C = B_{HR}$

$\Rightarrow$ CONDIZIONE PER CUI NON SI PUÒ ELIMINARE L'ISI

$$\boxed{T_S < \frac{1}{2B_C}}$$

DIM.

$$\bar{H}(f) = \frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{n}{T_S}\right)$$



$\Downarrow$

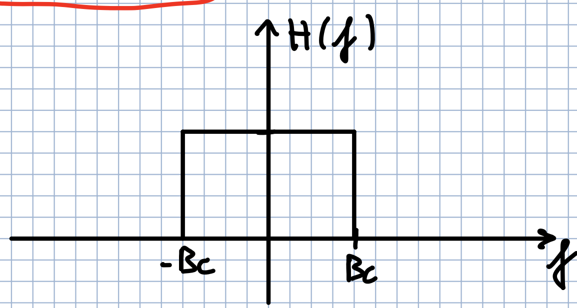
NON È POSSIBILE RAGGIUNGERE LA CONDIZIONE

$\bar{H}(f) = \text{COST.}$ $\rightarrow$ NO NYQUIST

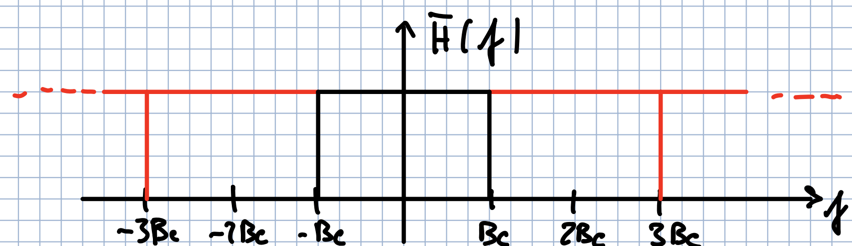
CONDIZIONE DI T_S MINIMO

$$\boxed{T_S^{(MIN)} = \frac{1}{2B_C}}$$

$\Rightarrow$ HO UN'UNICA SOLUZIONE per $H(f)$



PER OTTENERE $\bar{H}(f) = \text{COST.}$

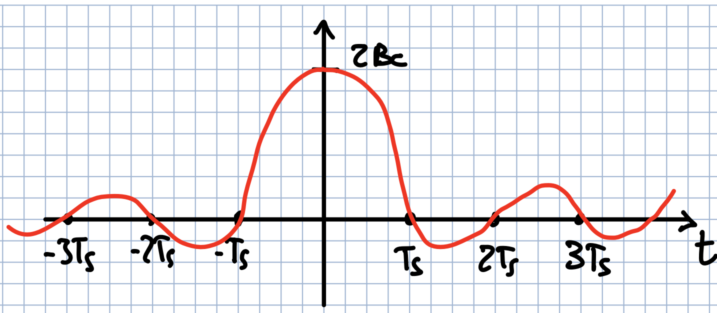


$\Rightarrow H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B_C}\right) \Rightarrow h(t) = 2B_C \,\text{sinc}\,(2B_C t)$

$h[n] = h(nT_S) = 2B_C \,\text{sinc}\,(2B_C n T_S) =$

$= 2B_C \,\text{sinc}\left(2B_C \frac{n}{2B_C}\right) = 2B_C \,\text{sinc}\,(n) = 2B_C\, \delta[n]$

SI ANNULLA PER TUTTI GLI INTERI ECCETTO $n = 0$



$$\frac{1}{T_s} = 2B_c = R_s$$

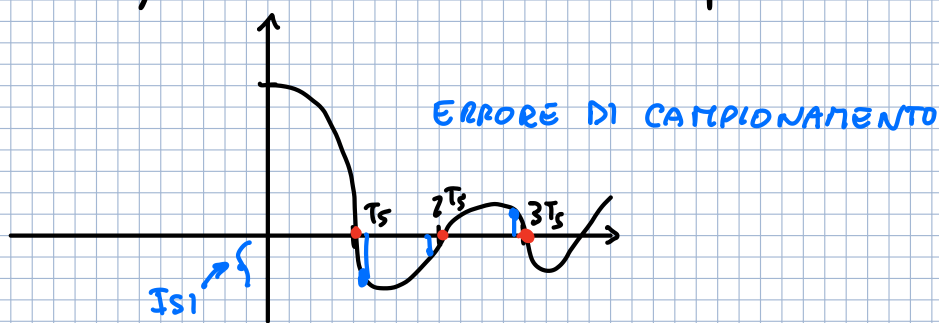
MAX OTTENIBILE

Questa soluzione ha 2 PROBLEMI:

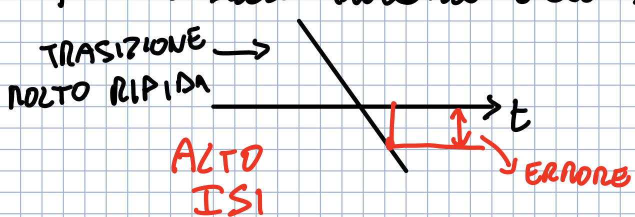
1) REALIZZABILITA' di una $H(f) = rect\left(\frac{f}{2B_c}\right)$

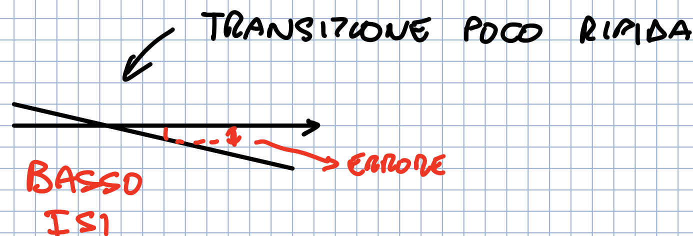
il criterio di Weiner dice che non può esistere una $h(t)$ che realizza questa $H(f)$

2) Piccoli errori di campionamento provocano un grosso ISI



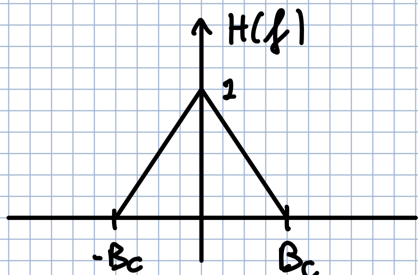
·) transizioni intorno allo zero



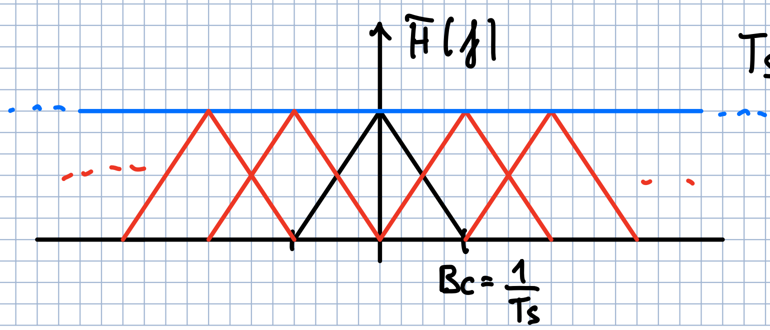


CONDIZIONE PRATICABILE E A BASSO IMPATTO SULL'ISI

$$T_s > \frac{1}{2B_c}$$



INFINITE SOLUZIONI TALI CHE: $\bar{H}(f) = COST.$

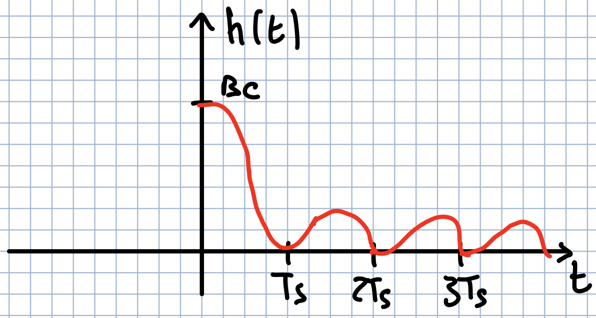


$$T_s = \frac{1}{B_c}$$

ESEMPIO CON TRIANGOLO

$$H(f) = \left(1 - \frac{|f|}{B_c}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B_c}\right)$$

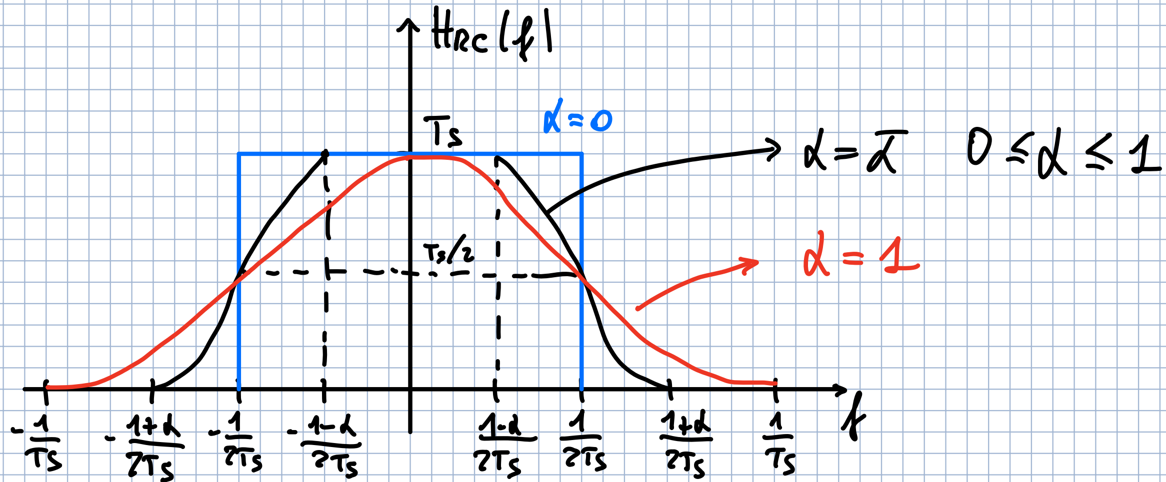
$$h(t) = B_c \,\mathrm{sinc}^2(B_c t)$$



SI RILASSA LA CONDIZIONE SUL T_S, QUINDI $T_S > \frac{1}{2B_c}$, PER POTER GIOCARE SULLA DEFINIZIONE DI UNA $H(f)$ REALIZZABILE E ROBUSTA ALL'ISI (con transizioni dolci intorno allo zero).

COSENO RIALZATO

$$H_{RC}(f) = \begin{cases} T_s & 0 \le |f| \le \frac{1-\alpha}{2T_s} \\ \frac{T}{2}\left[1 - \mathrm{sen}\left(\frac{\pi T_s}{\alpha}\left(|f| - \frac{1}{2T_s}\right)\right)\right] & \frac{1-\alpha}{2T_s} \le |f| \le \frac{1+\alpha}{2T_s} \\ 0 & |f| \ge \frac{1+\alpha}{2T_s} \end{cases}$$



α = roll off $\Rightarrow$ viene gestito per trovare un compromesso tra velocità di trasmissione e ISI

$$h_{RC}(t) = \mathrm{ATCF}\left[H_{RC}(f)\right] = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \frac{\cos\left(\frac{\alpha \pi t}{T_s}\right)}{\left[1 - \frac{2\alpha t}{T_s}\right]^2}$$

$h_{RC}[n] = h_{RC}(nT_s) = \delta[n] \Rightarrow$ SODDISFA NYQUIST

$\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \Rightarrow$ decresce verso 0 per $t \to \infty$ come $\frac{1}{t}$

$h_{RC}(t) \Rightarrow$ decresce come $\frac{1}{t^3}$ $\Rightarrow$ MINORE ISI

$\Rightarrow$ EFFICIENZA SPETTRALE

$$\boxed{T_s = \frac{1}{2B_c}} \Rightarrow h(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

$$\eta_B = \frac{R_b}{B_c} = \frac{\log_2 M}{T_s B_c} = \frac{\log_2 M}{\frac{1}{2B_c}\cdot B_c} = 2\log_2 M$$

$$R_b = \log_2 M \, R_s = \frac{\log_2 M}{T_s}$$

$\Rightarrow$ Caso del coseno rialzato

$$B_{RC} = \frac{1+\alpha}{2T_s} > \frac{1}{2T_s} \qquad \alpha > 1$$

$$\boxed{\eta_B^{(RC)} < \eta_B^{(rett)}}$$

$$\eta_B^{(RC)} = \frac{\log_2 M}{T_s}\cdot\frac{1}{B_{RC}} = \frac{\log_2 M}{T_s}\cdot\frac{2T_s}{1+\alpha} = \frac{2\log_2 M}{1+\alpha} < \eta_B^{(rett)}$$

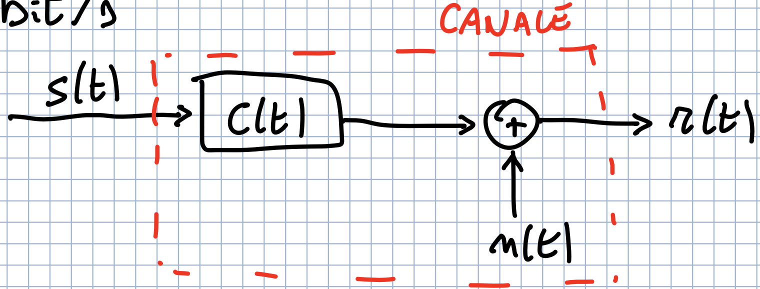
CAPACITÀ DI CANALE

C = max. valore del bit-rate (R_b) al variare di tutte le possibili coppie modulatore/demodulatore sotto il vincolo che la P_E sia nulla

$$\boxed{C = \max\{R_b\},\ P_E(b) = 0}$$

$P_E(b)$ = prob. di errore sul bit

$[C] = \text{bit/s}$



·) nel caso di rumore GAUSSIANO BIANCO

$$C = B_T \log_2\left(1 + \frac{P_s}{N_0 B_T}\right)$$

B_T: BANDA di $s(t)$

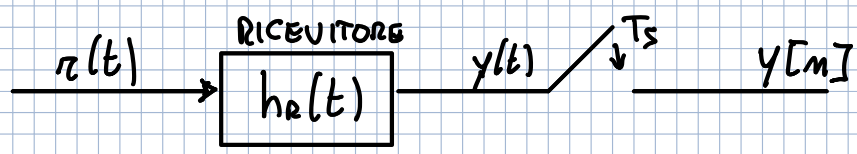
P_s: POTENZA di $s(t)$

$\frac{N_0}{2}$ è la DSP del RUMORE BIANCO $S_w(f)$

SISTEMA DI COM. NUM. IDEALE

- $R_b = C$
- $P_E(b) = 0$

RICEVITORE OTTIMO IN PRESENZA DI RUMORE BIANCO



OTTIMO ⇒ CRITERIO DI OTTIMALITA' ⇒ MAX RAPPORTO SEGNALE/RUMORE

$r(t) = s(t) \otimes c(t) + n(t)$

$\Rightarrow c(t) = \delta(t)$ → se $c(t) \neq \delta(t)$

$s(t)$ si chiama ancora segnale utile, ma è diverso dal segnale trasmesso

$s(t)$ segnale trasmesso

$r(t) = \underbrace{s(t)}_{\text{S. UTILE}} + \underbrace{n(t)}_{\text{RUMORE}}$

$y(t) = s_u(t) + n_u(t)$

$S_u(t) = S(t) \otimes h_R(t)$

$n_u(t) = n(t) \otimes h_R(t)$

$y(T_S) = S_u(T_S) + n_u(T_S)$

$$SNR = \frac{S_u^2(T_S)}{E[n_u^2(T_S)]}$$ questo termine è noto

$h_R(t)$ OTTIMO ⇒ MAX SN

$h_R(t)$ OTTIMO nel caso di rumore bianco

⇓

FILTRO ADATTATO

$h_R^{OTT}(t) = h_{FA}(t) = s(T_S - t)$ con T_S noto

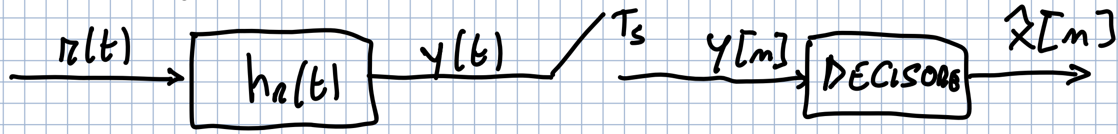
$H_{FA} = \overline{S}(f)\, e^{-j2\pi f T_S}$

$|H_{FA}| = |S(f)|$

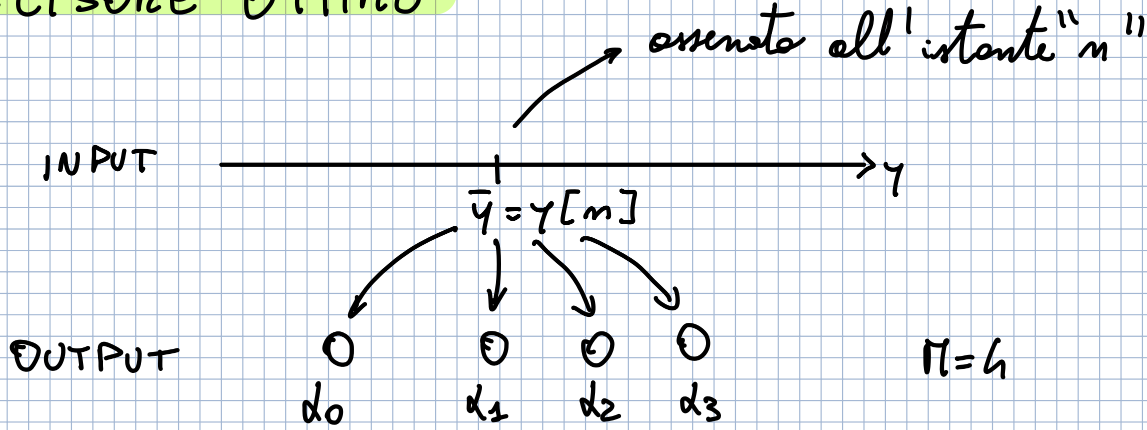
$y[n] = S_u(nT_S) + n_u(nT_S)$

$$\text{MAX SNR} = \frac{S_u^2(nT_s)}{E[n_u(nT_s)]}$$

il filtro adattato fa sì che si ottenga la migliore soluzione in termini di potenza del segnale utile rispetto al livello di rumore

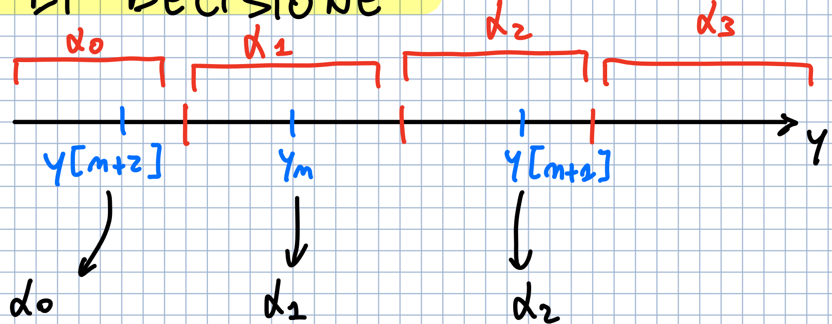


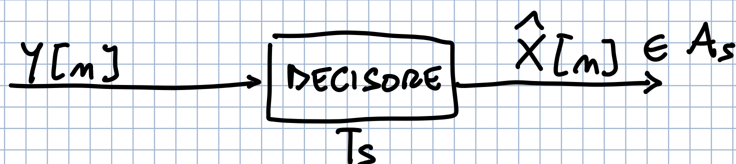
DECISORE OTTIMO



$M = 4$

ZONE DI DECISIONE





⇒ Il decisore, in generale, potrebbe decidere dopo aver osservato tutti i campioni

⇒ Il decisore ad un solo colpo decide sulla base di un singolo campione

·) se i simboli SONO INDIPENDENTI

$\Downarrow$

NON HO CORRELAZIONE TRA I SIMBOLI

$\Downarrow$

conoscere il valore dei simboli passati o futuri non aiuta a decidere per il simbolo ATTUALE

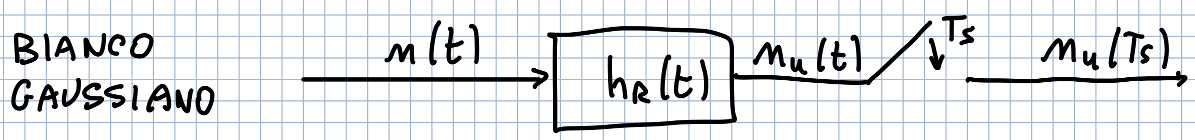
·) CAMPIONI DI RUMORE SIANO INCORRELATI

$\Downarrow$

Condizione che andrebbe verificata ogni volta

$\Downarrow$

È sempre verificata quando il filtro in ricezione ha determinate caratteristiche



$$R_{nu}(\tau) = R_n(\tau) \otimes h_R(\tau) \otimes h_R(-\tau)$$

$$S_{nu}(f) = S_n(f)\,|H_R(f)|^2$$

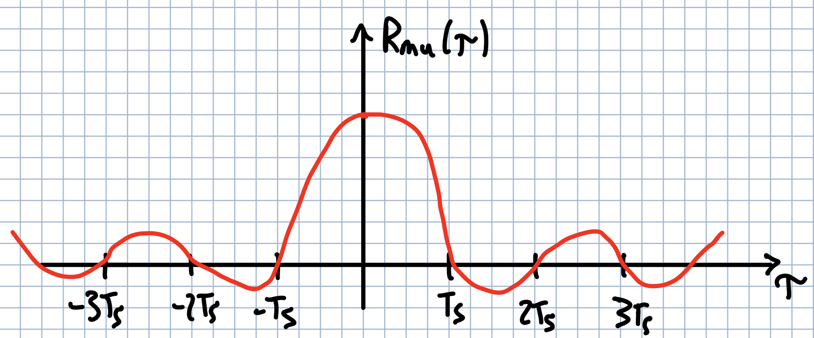
$$E\left[n_u[n]\,n_u[n-m]\right] = R_{nu}[m] = \sigma_{nu}^2\,\delta[m]$$

POTENZA

$$E\left[n_u[n]\right] = 0$$

$\downarrow$

$$R_{nu}(\tau)\Big|_{\tau = mT_s} = \sigma_{nu}^2\,\delta[m]$$



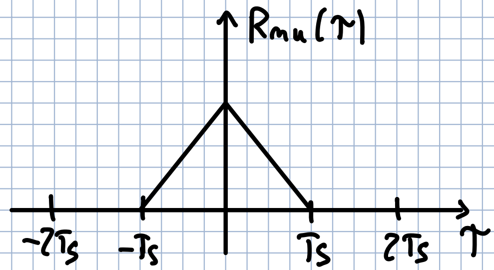
$$S_{nu}(f) = \frac{N_0}{2}\,|H_R(f)|^2$$, quando $S_n(f)$ è BIANCO

$$H_R(f) = TCF\left[h_R(t)\right]$$

$$h_R(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_s}\right) \Rightarrow H_R(f) = T_s \,\text{sinc}(T_s f)$$

$$|H_R(f)|^2 = T_s^2 \,\text{sinc}^2(T_s f)$$

$$R_{nu}(\tau) = \frac{N_0}{2}\left(1 - \frac{|\tau|}{T_s}\right)\text{rect}\left(\frac{\tau}{2T_s}\right) \Leftarrow S_{nu}(f) = \frac{N_0}{2}|H_R(f)|^2 = \frac{N_0}{2} T_s^2 \,\text{sinc}^2(T_s f)$$



ALTRO CASO

- $H_R(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$ p.b. ideale

$$|H_R(f)|^2 = H_R(f) \Rightarrow R_{nu}(\tau) = \frac{N_0}{2} B \,\text{sinc}(Bt)$$

$$T_s = \frac{1}{B} \qquad R_{nu}(mT_s) = \frac{N_0}{2} B \,\text{sinc}(BmT_s) =$$

$$= \frac{N_0}{2} B \,\text{sinc}\left(\cancel{B}\frac{m}{\cancel{B}}\right) = \frac{N_0}{2} B \,\text{sinc}(m) = \frac{N_0}{2} B\, \delta[m]$$

- Calcolo $R_{nu}(\tau)$
- Campiono in $T = mT_s$
- Si verifica che $R_{nu}[m] = \sigma_{nu}^2 \delta[m]$

$$E[n_u[n]] = 0$$

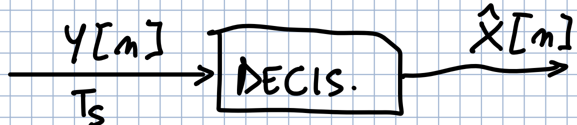
$$E[n(t)] = 0 \Rightarrow E[n_u(t)] = 0 \Rightarrow E[n_u[n]] = 0$$

$$\downarrow$$

$$\eta_{nu}(t) = \eta_n(t) \otimes h_R(t)$$

$$E[n_u^2[n]] = P_{nu} = C_{nu}[0] + \eta_{nu}^2 = \sigma_{nu}^2$$

DECISORE AD UN SOL COLPO



Ad ogni T_s entra un campione $y[n]$ e solo su quello si decide il simbolo

DECISORE SINGLE SHOT OTTIMO

- Criterio di ottimalità
  - minima probabilità di errore

$$\min P_E$$

$$P_E(M) = P\{\hat{x}[n] \neq x[n]\}$$

CRITERIO A MASSIMA PROBABILITÀ A POSTERIORI (MAP)

- Viene introdotto per trovare una soluzione al crit. di min. prob. di errore
- Si dimostra che massimizzando la prob. a posteriori ⇒ si massimizza la prob. di errore

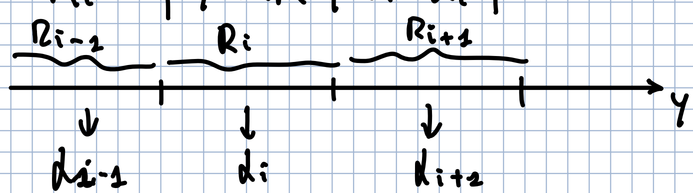
CRITERIO MAP $\Rightarrow$ CRITERIO MINIMA $P_E(M)$

DIM.

- Definizione zone di decisione

$$R_i = \{ y \in \mathbb{R} \mid \hat{x} = \alpha_i \}$$

su M simboli



- $P\{X = \alpha_i \mid y\}$ PROB. A POSTERIORI (dopo aver osservato qualcosa)

X: SIMBOLO TRASMESSO

- $\hat{x} = \max\limits_{i=1 \ldots M} P\{x = \alpha_i \mid y\}$ CRITERIO MAP

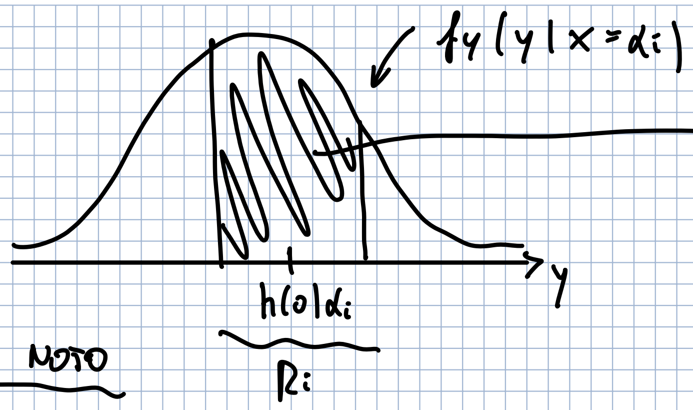
- $P\{x = \alpha_i \mid y\} = \dfrac{f_Y(y \mid x = \alpha_i)\, P\{x = \alpha_i\}}{f_Y(y)}$ BAYES

$$P_E(M) = P\{\hat{x} \neq x\} = 1 - P\{\hat{x} = x\} = 1 - \sum_{i=1}^{M} P\{\hat{x} = \alpha_i, x = \alpha_i\} =$$

$$= 1 - \sum^{M} P\{\hat{x} = \alpha_i \mid x = \alpha_i\}\, P\{x = \alpha_i\} =$$

$$= 1 - \sum^{M} P\{x = \alpha_i\}\, P\{y \in R_i \mid x = \alpha_i\} =$$

$$= 1 - \sum^{M} P\{x = \alpha_i\} \int_{y \in R_i} f_Y(y \mid x = \alpha_i)\, dy$$



$\longrightarrow P\{\hat{x}=d_i|x=d_i\}$ $\underbrace{\phantom{P\{\hat{x}=d_i|x=d_i\}}}_{\text{PR. DI TRANSIZ.}}$

$$y = \underbrace{h(0)}_{\text{NOTO}} d_i + n_u$$

IN ASSENZA DI ISI

n_u = V.A. estratta dal processo di rumore

$$\hat{x} = \max_{d_1 \dots d_M} P\{x=d_i|y) = \max_{d \dots M} \frac{P\{x=d_i\} f_Y(y|x=d_i)}{f_Y(y)} =$$

$$= \frac{1}{M}\frac{1}{f_Y(y)} \max[f_Y(y|x=d_i)] =$$

$f_Y(y|x=d_i)$ è la d.d.p. della V.A.

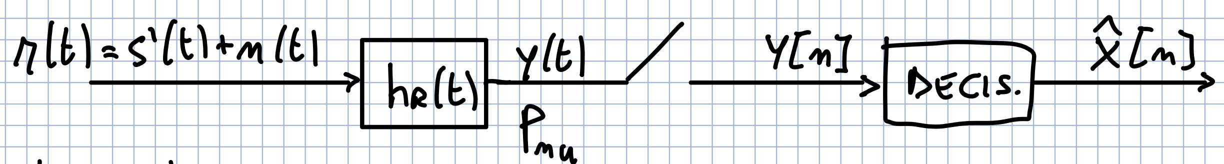
↑ funzione di VEROSIMIGLIANZA

$$= \max_{d_1 \dots d_M}[f_Y(y|x=d_i)]$$

CRITERIO A MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

$P_E(M)$ minima $\Rightarrow$ MAP $\xRightarrow{\text{SIMB. EQ.}}$ MAX. VEROSIMIGLIANZA

$\Rightarrow$ CASO GAUSSIANO BIANCO



$s'(t) = s(t) \otimes c(t)$

IN ASSENZA DI ISI

$$Y[n] = h(0)X[n] + n_u$$

è una V.A. GAUSSIANA con V. MEDIO NULLO e VARIANZA $\sigma_{n_u}^2 = P_{n_u}$

$$n_u \in \mathcal{N}(0, \sigma_{n_u}^2) \Rightarrow f_{n_u}(n_u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{n_u}^2}} e^{-\frac{n_u^2}{2\sigma_{n_u}^2}}$$

$$h(0) = h(t)\Big|_{t=0} = [p(t) \otimes c(t) \otimes h_R(t)]\Big|_{t=0}$$

$f_Y(y|x=d_i)$

$y|x=d_i = h(0)d_i + \underset{\uparrow a}{1}\, n_u$ $\Rightarrow$ TRASFORM. LIN. DI UNA V.A. GAUSS.

$g(n_u) = a n_u + b \longrightarrow a = 1 \qquad b = h(0)d_i$

$y = n_u + h(0)d_i \qquad n_u = y - h(0)d_i \qquad$ 1 SOL per $g^{-1}(y)$

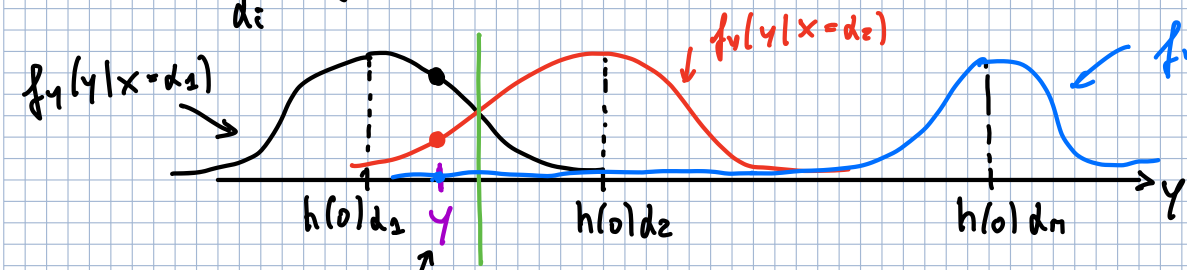
$$f_Y(y|x=d_i) = \frac{f_{n_u}(y-h(0)d_i)}{|g'(n_u)|} = \frac{f_{n_u}(y-h(0)d_i)}{1} = f_{n_u}(y-h(0)d_i)$$

$$f_Y(y|x=d_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{n_u}^2}}\, e^{-\frac{(y-h(0)d_i)^2}{2\sigma_{n_u}^2}} \in \mathcal{N}\left(h(0)d_i, \sigma_{n_u}^2\right) \quad \forall i$$

$\Rightarrow$ SIMBOLI EQUIPROBABILI

min $P_E(M)$ $\Rightarrow$ MAX VEROSIMIGLIANZA

$\hat{x} = \max\limits_{d_i} f_Y(y|x=d_i)$ CRITERIO DI DECISIONE



IL MAX è nel NERO

Decido guardando quale valore della funzione di verosimiglianza è massimo $\rightarrow$ in questo esempio è $\hat{x} = d_1$

$$\max_{d_i}\left[f_Y(y|x=d_i)\right] = \max_{d_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{n_u}^2}}\, e^{-\frac{(y-h(0)d_i)^2}{2\sigma_{n_u}^2}} =$$

$\rightarrow$ NON DIPENDE DA d_i

$$= \max_{d_i} e^{-\frac{(y-h(0)d_i)^2}{2\sigma_{n_u}^2}} = \min_{d_i} \frac{(y-h(0)d_i)^2}{2\sigma_{n_u}^2} = \rightarrow$$

NON DIPENDE DA d_i

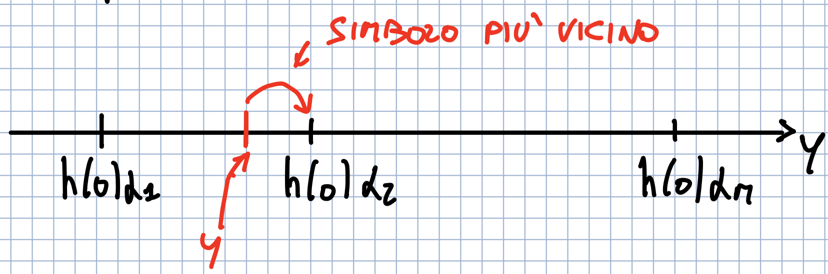
L'ESPONENZIALE NEG. È MASSIMA QUANDO L'ESPONENTE È MINIMO

$$= \min_{d_i} (y-h(0)d_i)^2 = \min_{d_i} |y-h(0)d_i|$$

DISTANZA EUCLIDEA

$\Rightarrow$ CRITERIO A MINIMA DISTANZA

1: decide per il simbolo più vicino

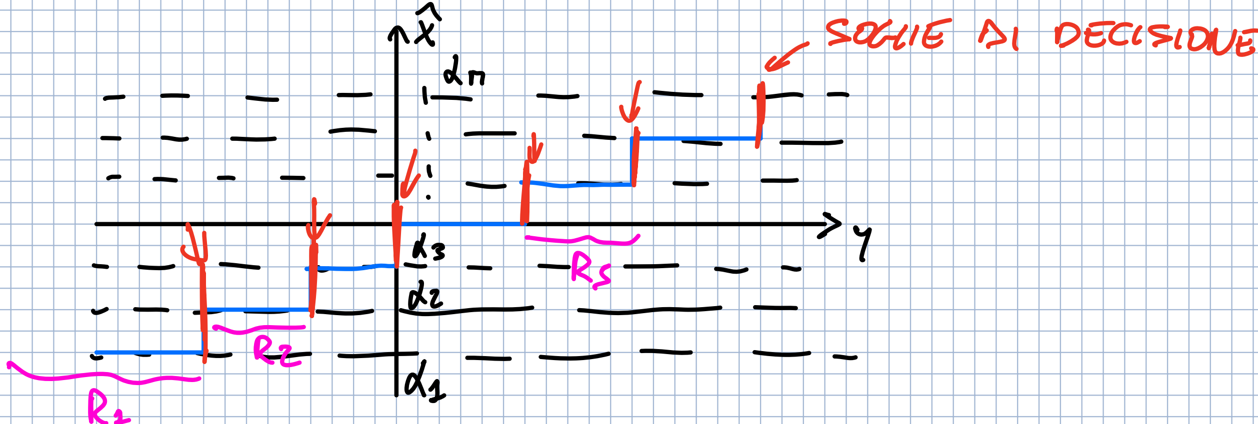


minima distanza => MAX. VEROSIMIGLIANZA => MAP => min P_E

Ip.

•) simboli eq.

•) rumore Gaussiano bianco => minima distanza



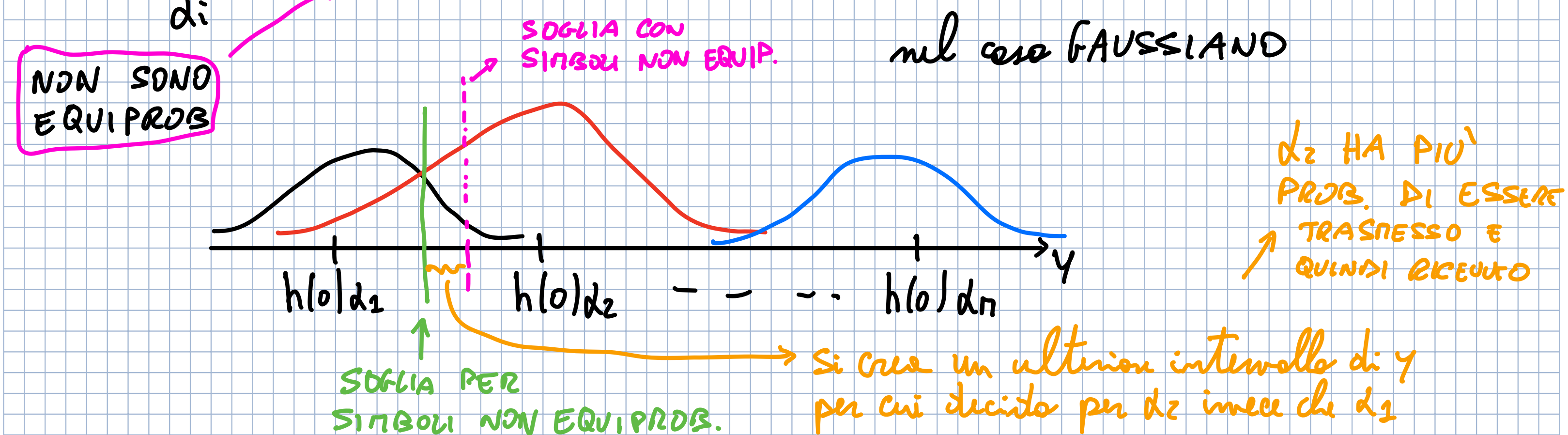
Il decisore viene implementato da un quantizzatore

=> Nel caso Gaussiano Bianco anche con simboli non equiprobabili si arriva ad un decisore a soglie, ma non vale più la regola della minima distanza euclidea

$$\max_{d_i} P\{x=d_i \mid y\} = \min_{d_i} \frac{P\{x=d_i\}\, f_y(y \mid x=d_i)}{f_y(y)} =$$

$$= \max_{d_i} P\{x=d_i\}\, f_y(y \mid x=d_i)$$

nel caso GAUSSIANO



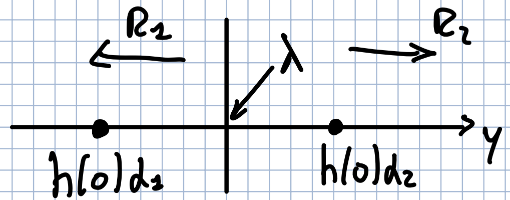
ANALISI DELLE PERFORMANCE DI SISTEMI DI COMUNICAZIONE IN BANDA BASE CON MODULAZIONE PAM (ANCHE NON STD)

$\to d_i \neq 2i-1-M$

$\Downarrow$

CALCOLARE la P_E

- soglia di decisione "λ" nota



$\Rightarrow P_E(2) = P_E(b) = ?$ 2 SIMBOLI

- Verificare l'assenza di ISI

$\Downarrow$

$$y[n] = h(0)x[n] + n_u[n]$$

$$(y \mid x = d_i) = h(0)d_i + n_u$$

$\Rightarrow$ IN PRESENZA DI ISI

DIFFICILE DA MODELLARE

$$y[n] = h(0)x[n] + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{+\infty} h[n-k]x[k] + n_u[n]$$

la P_E AUMENTA

Come verifico l'assenza di ISI?

- $h(t)\big|_{t=nT_s} = h(0)\delta[n]$ Nyquist nel tempo
- $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} H\left(f - \frac{m}{T_s}\right) = K$ COSTANTE (in frequenza)

- Calcolo $h(0)$
  - $h(t)\big|_{t=0}$
  - $H(f) \Rightarrow h(t) = \text{ATCF}[H(f)]\big|_{t=0}$

$\Downarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(f)\,df = h(0)$$

·) modello di $y|\alpha_i$

$$y|\alpha_i = h(0)\alpha_i + n_u$$

DUE EVENTI ERRORI DISGIUNTI

$$P_E(b) = P\{\hat{b} \neq b\} = P\{\hat{b} = \alpha_1, b = \alpha_2\} + \{\hat{b} = \alpha_2, b = \alpha_1\} =$$

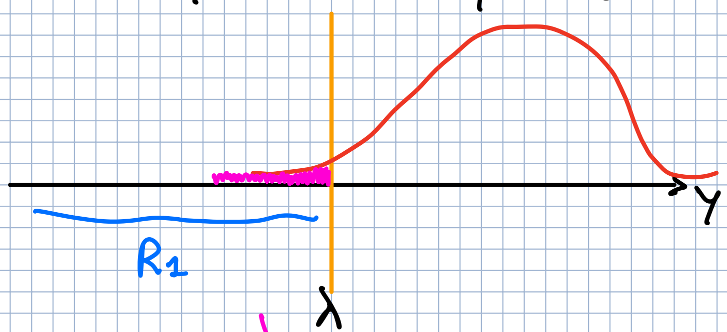
$$= P\{\hat{b} = \alpha_1 | b = \alpha_2\} P\{b = \alpha_2\} + P\{\hat{b} = \alpha_2 | b = \alpha_1\} P\{b = \alpha_1\}$$

$P\{b = \alpha_1\}$ e $P\{b = \alpha_2\}$ $\longrightarrow$ PR. A PRIORI

$P\{\alpha_1\}$ e $P\{\alpha_2\}$ sono noti

·) Devo calcolare

$P\{\hat{b} = \alpha_1 | b = \alpha_2\} = ?$ $\qquad$ $P\{\hat{b} = \alpha_2 | b = \alpha_1\} = ?$



QUANDO DECIDO PER α_1? QUANDO y CADE A SX DELLA SOGLIA λ

$P\{\hat{b} = \alpha_1 | b = \alpha_2\}$

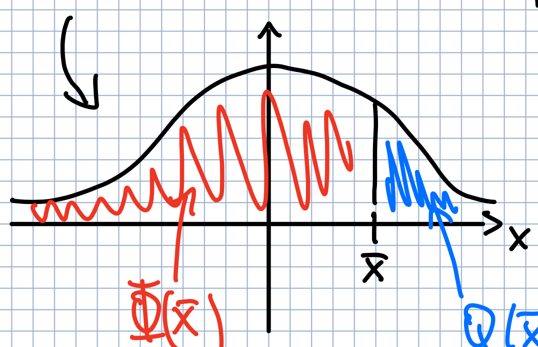
$$P\{\hat{b} = \alpha_1 | b = \alpha_2\} = \int_{-\infty\ (R_1)}^{\lambda} f_Y(y|b=\alpha_2)\,dy =$$

$$= F_Y(\lambda | b = \alpha_2) = \Phi(n_u) = \Phi = \left(\frac{\lambda - h(0)\alpha_2}{\sigma_{n_u}}\right)$$

$$\lambda = y|b=\alpha_2 = h(0)\alpha_2 + n_u \longrightarrow \in \mathcal{N}(0, \sigma_{n_u}^2)$$

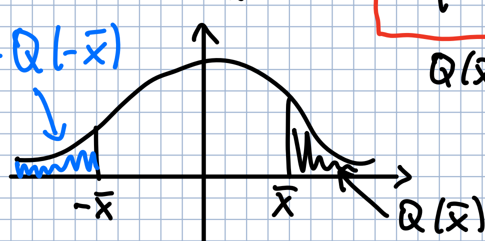
$$f_Y(y|b=\alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{n_u}^2}} e^{-\frac{(y-h(0)\alpha_2)^2}{2\sigma_{n_u}^2}} \qquad n_u = \frac{y|b=\alpha_2 - h(0)\alpha_2}{\sigma_{n_u}} = \frac{\lambda - h(0)\alpha_2}{\sigma_{n_u}}$$

$$Q(x) = 1 - \Phi(x)$$



$$F_Y(\lambda | b = \alpha_2) = \Phi(n_u) = \Phi = \left(\frac{\lambda - h(0)\alpha_2}{\sigma_{n_u}}\right) =$$

$$= 1 - Q\left(\frac{\lambda - h(0)\alpha_2}{\sigma_{n_u}}\right) = \boxed{Q\left(-\frac{\lambda - h(0)\alpha_2}{\sigma_{n_u}}\right)}$$



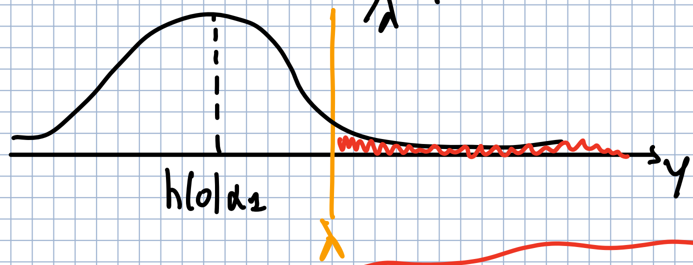
$$Q(\bar{x}) = 1 - Q(-\bar{x})$$

$$\Rightarrow P\{\hat b = \alpha_1 \mid b = \alpha_2\} = Q\left(\frac{h(0)\alpha_2 - \lambda}{\sigma_{n_u}}\right)$$

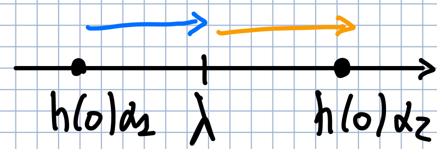
$$\Rightarrow P\{\hat b = \alpha_2 \mid b = \alpha_1\} = \int_{\lambda}^{+\infty} f_y(y \mid x = \alpha_1)\,dy = Q\left(\frac{\lambda - h(0)\alpha_1}{\sigma_{n_u}}\right)$$

$$\Uparrow$$

$$y|\alpha_1 = h(0)\alpha_1 + n_u$$



$$\boxed{\begin{aligned} P\{\hat b = \alpha_1 \mid b = \alpha_2\} &= Q\left(\frac{h(0)\alpha_2 - \lambda}{\sigma_{n_u}}\right) \\ P\{\hat b = \alpha_2 \mid b = \alpha_1\} &= Q\left(\frac{\lambda - h(0)\alpha_1}{\sigma_{n_u}}\right) \end{aligned}}$$



$$P_E(b) = P\{\alpha_1\}\,Q\left(\frac{\lambda - h(0)\alpha_1}{\sigma_{n_u}}\right) + P\{\alpha_2\}\,Q\left(\frac{h(0)\alpha_2 - \lambda}{\sigma_{n_u}}\right)$$

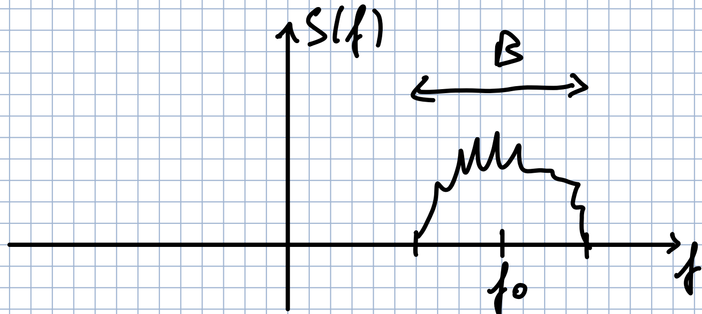
$\sigma_{n_u}^2 = \boxed{P_{n_u}}$ $\Rightarrow$ lo devo calcolare all'uscita di $h_R(t)$

$$n(t) \longrightarrow \boxed{h_R(t)} \xrightarrow{\;n_u(t)\;}$$

$$\boxed{P_{n_u} = \frac{N_0}{2} E_{h_R}} \quad \rightarrow \quad \sigma_{n_u} = \sqrt{P_{n_u}} = \sqrt{\frac{N_0}{2} E_{h_R}}$$

MODULAZIONI NUMERICHE IN BANDA PASSANTE

SEGNALE PASSA BANDA



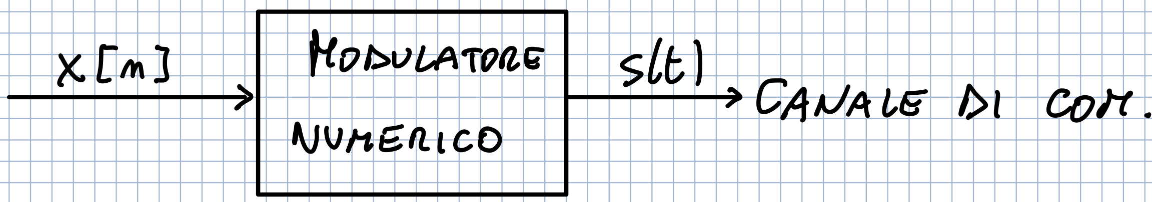
$$s(t) = \underbrace{a(t)}_{\text{INVILUPPO REALE di } s(t)} \cos[2\pi \underset{\uparrow}{f_0} t + \underbrace{\theta(t)}_{\text{FASE DI } s(t)}]$$

FREQUENZA CENTRALE

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{ a(t)\, e^{j[2\pi f_0 t + \theta(t)]} \right\}$$

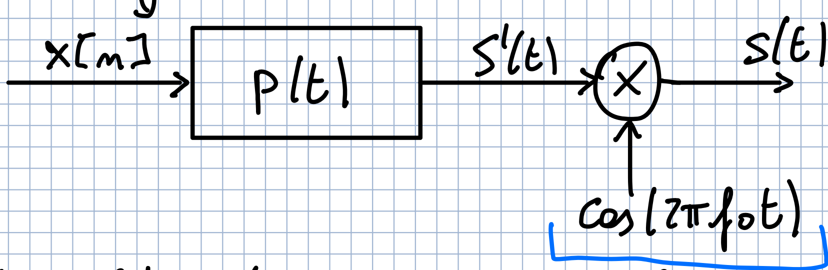
$$\tilde{s}(t) = a(t)\, e^{j\theta(t)} \quad \Rightarrow \text{INVILUPPO COMPLESSO di } s(t)$$

$$s(t) = \mathrm{Re}\{\tilde{s}(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\}$$



MODULATORE NUMERICO

SISTEMI IN BANDA PASSANTE

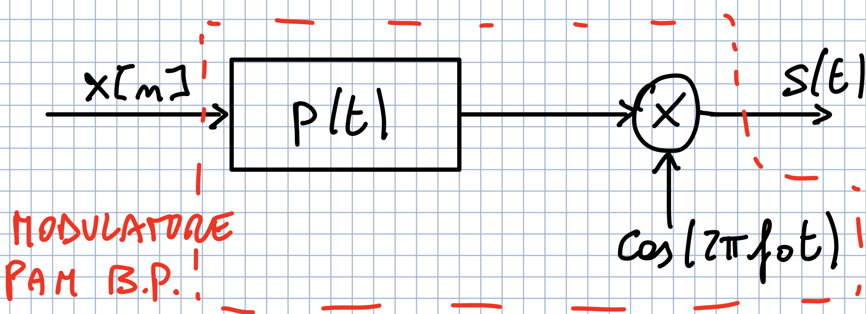


- interpolatore (da numerico a analogico)
- traslatore in frequenza (trasforma da banda base a banda passante)

⇒ PAM IN BANDA PASSANTE

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t - nT_s) \cos(2\pi f_0 t) \qquad \text{BANDA PASSANTE}$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t - nT_s) \qquad \text{BANDA BASE}$$



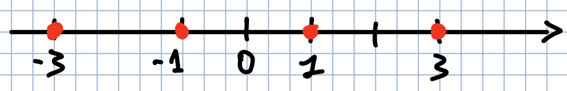
$x[n] \in A_s = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\}$ $\quad \alpha_i = 2i - 1 - M$ Per PAM STD.

$s_i(t) = \alpha_i\, p(t) \cos(2\pi f_0 t)$ è il segnale trasmesso relativo a α_i

$$s_i(t) = \mathrm{Re}\{\tilde{s}_i(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\}$$

$\tilde{s}_i(t) = \alpha_i\, p(t)$ è REALE

$p(t)$ è REALE $\Rightarrow$ α_i sono REALI



SPAZIO DEI SIMBOLI

EN. MEDIA PER SIMBOLO TRASMESSO

$$E_s = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x[m]\,p(t-mT_s)\cos(2\pi f_0 t)\right]^2 dt\right] =$$

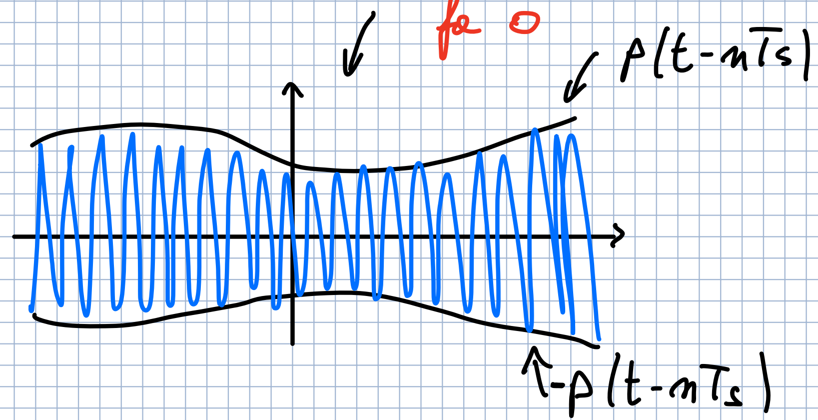
$$= E\left[x^2[m]\right]\int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t-mT_s)\cos^2(2\pi f_0 t)\, dt =$$

$\cos\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\alpha) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\alpha)$

$$= E\left[x^2[m]\right]\int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t-mT_s)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t)\right] dt =$$

$$= \frac{1}{2}E\left[x^2\right]\int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t-mT_s)\, dt + \frac{1}{2}E\left[x^2\right]\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t-mT_s)\cos(4\pi f_0 t)\, dt}_{\text{fa } 0}$$

$$\boxed{E_s = \frac{1}{2}E\left[x^2\right]E_p}$$



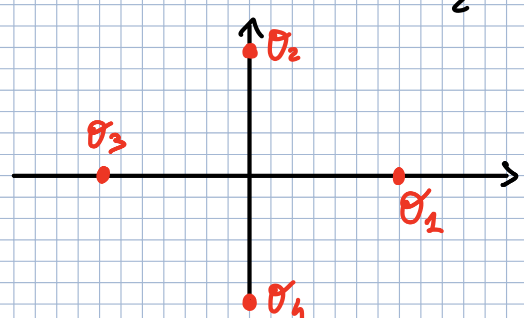
MODULAZIONE DI FASE (Phase Shift Keying) PSK

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p(t-mT_s)\cos(2\pi f_0 t + \theta_m)$$

$$\theta[m] \in A_s = \{\theta_1, \theta_2 \dots \theta_M\}$$

$$\theta_i = \frac{2\pi}{M}(i-1)$$

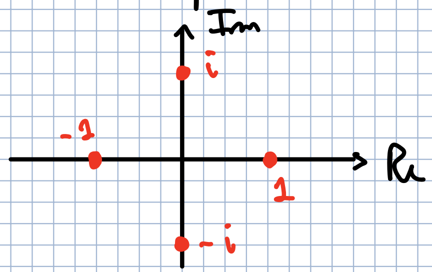
ES. $M=4 \Rightarrow \theta_1 = 0,\ \theta_2 = \frac{\pi}{2},\ \theta_3 = \pi,\ \theta_4 = \frac{3}{2}\pi$



$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{ \tilde{s}_i(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$

$$\tilde{s}_i(t) = p(t)\, e^{j\theta_i} = p(t)\,\tilde{x} \qquad \tilde{x} = e^{j\theta_i} \Rightarrow \text{SPAZIO DEI SIMBOLI}$$

$\boxed{\begin{matrix} M=4 \\ \text{4-PSK} \end{matrix}}$

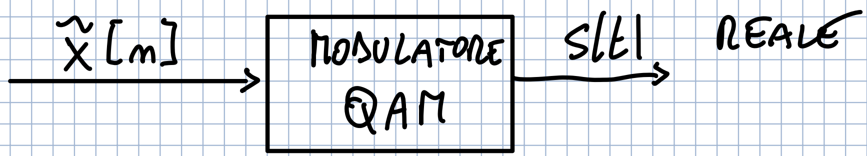


MODULAZIONE QAM

$$\boxed{s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c[n]\, p(t-nT_s)\cos(2\pi f_0 t) - x_s[n]\, p(t-nT_s)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)}$$

SEGNALE MODULATO QAM

$$\tilde{x}[n] = x_c[n] + j\, x_s[n]$$



$s(t) = \mathrm{Re}\left\{ \tilde{s}(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \right\}$ è REALE, quindi la parte COMPLESSA NON LA CONSIDERO

$$\tilde{s}(t) = \left[x_c[n] + j\, x_s[n]\right] p(t)$$

$$\tilde{s}_i = \left[\alpha_i^c + j\,\alpha_i^s\right] p(t)$$

$$\alpha_i^c \in A_s = \{\alpha_1^c, \alpha_2^c \dots \alpha_{n_c}^c\}$$

$$\alpha_i^s \in A_s = \{\alpha_1^s, \alpha_2^s \dots \alpha_{n_s}^s\}$$

$$M = M_c \cdot M_s$$

$$\mathrm{Re}\left\{\tilde{s}(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\left(x_c[n] + j\, x_s[n]\right) p(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ x_c[n]\, p(t)\cos(2\pi f_0 t) + j\, x_c[n]\, p(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) + \right.$$

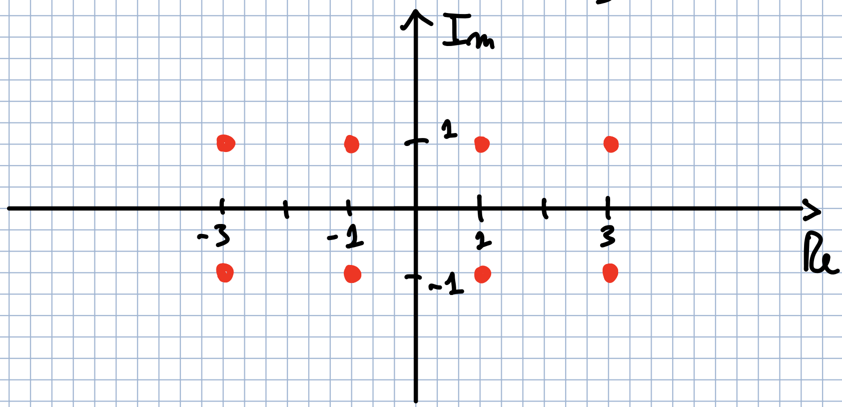
$$\left. + j\, x_s[n]\, p(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_s[n]\, p(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) \right\} =$$

$$= x_c[n]\, p(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_s[n]\, p(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$$

$\alpha_i^c \in A_S^c = \{\alpha_1^c, \alpha_2^c \dots \alpha_{M_c}^c\}$ con $\alpha_i^c = 2i - 1 - M_c$

$\alpha_i^s \in A_S^s = \{\alpha_1^s, \alpha_2^s \dots \alpha_{M_s}^s\}$ con $\alpha_i^s = 2i - 1 - M_s$

ES. 8-QAM $\quad M_c = 4 \quad M_s = 2$



COSTELLAZIONE DEI SIMBOLI

$$\tilde{x} = x_c + j x_s$$

$$\boxed{E_s = \frac{1}{2} E[x_c^2] E_p + \frac{1}{2} E[x_s^2] E_p}$$

Parte reale (x_c) => parte in fase

Parte immaginaria (x_s) => parte in quadratura

DIM.

$$E_s = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[x_c[n] p(t - nT_s) \cos(2\pi f_0 t) - x_s[n] p(t - nT_s) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)\right]^2 dt\right] =$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_c^2[n] p^2(t - nT_s) \cos^2(2\pi f_0 t) + x_s^2[n] p^2(t - nT_s) \operatorname{sen}^2(2\pi f_0 t) - \right.$$

$$\left. - 2 x_c[n] x_s[n] p^2(t - nT_s) \cos(2\pi f_0 t) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)\, dt\right]$$

=> 3 COMPONENTI

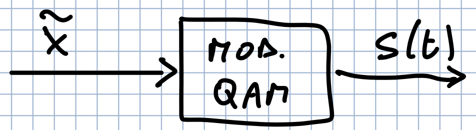
1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t - nT_s) \cos^2(2\pi f_0 t)\, dt = \frac{1}{2} E_p$

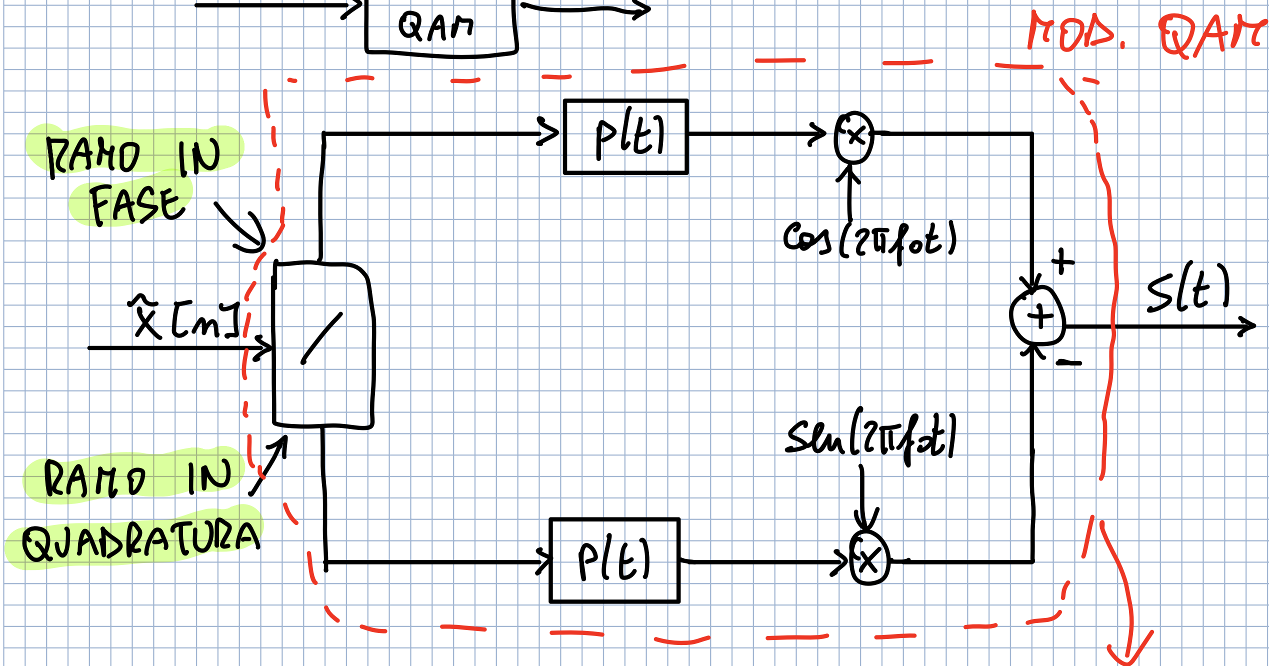
2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t - nT_s) \operatorname{sen}^2(2\pi f_0 t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t - nT_s) \cdot \overbrace{\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t)\right]}^{\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\alpha)} dt = \frac{1}{2} E_p$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t - nT_s) \underbrace{\operatorname{sen}(4\pi f_0 t)}_{2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha)} dt = 0$

$$E_s = E_c[x_c^2]\,\frac{1}{2}E_p + E[x_s^2]\,\frac{1}{2}E_p + 0 =$$

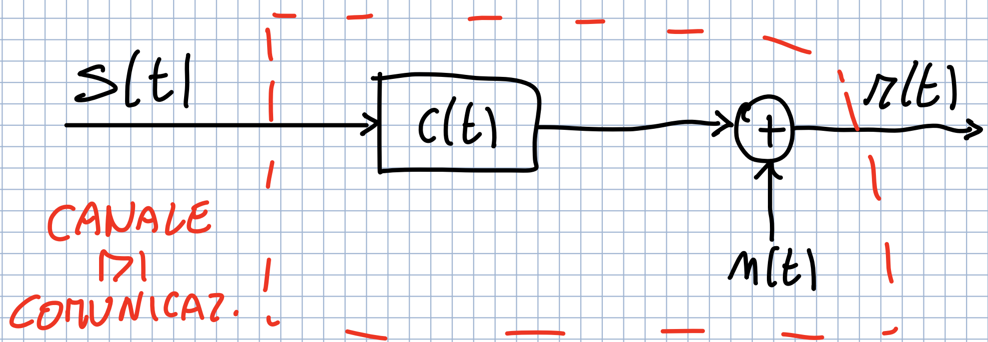
$$= \boxed{\frac{1}{2}\left[E[x_c^2] + E[x_s^2]\right]E_p}$$





$$\boxed{s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c[n]\,p(t-nT_s)\cos(2\pi f_0 t) - x_s[n]\,p(t-nT_s)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)}$$

CANALE DI COMUNICAZIONE PASSA-BANDA



$c(t)$ è la risposta impulsiva di un canale passa-banda

$$C(f) = TCF[c(t)] = \begin{cases} C(f) \neq 0 & f_0 - \frac{B}{2} \leq f \leq f_0 + \frac{B}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

CANALE IDEALE

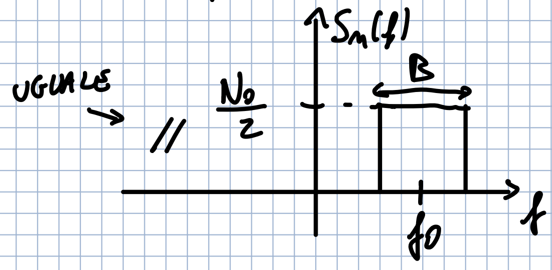
$$\begin{cases} C(f) = 1 & f_0 - \frac{B}{2} \leq f \leq f_0 + \frac{B}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Ip: $B = B_T$

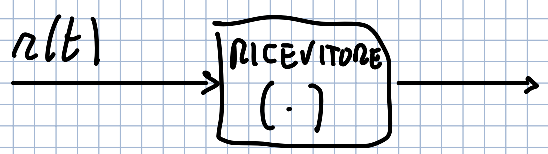
B_T = banda del segnale trasmesso

⇒ CARATTERISTICHE DEL RUMORE PASSA-BANDA

- Rumore Gaussiano
- Bianco in banda → v. medio $= 0$ $\quad \eta_n = 0$ → DSP PIATTA IN BANDA

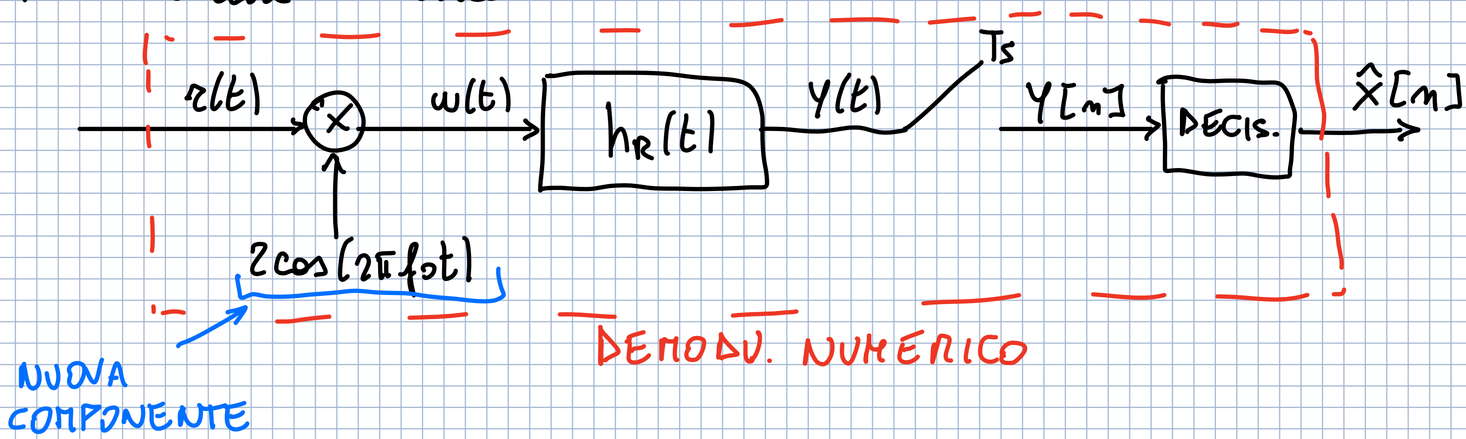


⇒



PAM IN BANDA PASSANTE

Demodulatore numerico



⇒ CASO DI SOLO SEGNALE UTILE

$$r(t) = s(t) \otimes c(t) \qquad \text{(NO RUMORE)}$$

$$c(t) = 2\tilde{c}(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$\tilde{c}(t)$ è PASSA-BASSO

⇒ AL RICEVITORE

$$w(t) = r(t)\cdot 2\cos[2\pi f_0 t] = 2[s(t)\otimes c(t)]\cos(2\pi f_0 t) =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\, c(t-\tau)\, d\tau = 2\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\, 2\tilde{c}(t-\tau)\cos(2\pi f_0(t-\tau))\, d\tau \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

$$\Rightarrow 2 s(\tau)\, \tilde{c}(t-\tau) \cos[2\pi f_0 (t-\tau)] =$$

$$= 2\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, p(\tau - mT_s) \cos(2\pi f_0 \tau)\, \tilde{c}(t-\tau) \cdot \cos[2\pi f_0 (t-\tau)]\, d\tau$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, p(\tau - mT_s)\, \tilde{c}(t-\tau) [\cos(2\pi f_0 t) + \cos(4\pi f_0 \tau - 2\pi f_0 t)]\, d\tau$$

$$w(t) = 2\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, p(\tau - mT_s)\, \tilde{c}(t-\tau)\, d\tau \cos(2\pi f_0 t) + \right.$$

$$\left. \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, p(\tau - mT_s)\, \tilde{c}(t-\tau) \cos(4\pi f_0 \tau - 2\pi f_0 t)\, d\tau \right] \cdot \cos(2\pi f_0 t) =$$

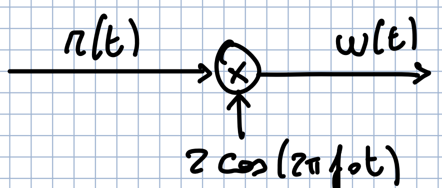
$$= \cancel{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau - mT_s)\, \tilde{c}(t-\tau)\, d\tau\, \underbrace{\left(1 + \cos(4\pi f_0 t)\right)}_{2\cos\alpha\cos\alpha} +$$

$$+ 2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau - mT_s)\, \tilde{c}(t-\tau) \cos(4\pi f_0 \tau + K)\, d\tau}_{FA \quad \Theta} \cdot \cos(2\pi f_0 t) =$$

$$= \underbrace{\boxed{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, p'(t - mT_s) [1 + \cos(4\pi f_0 t)]}}_{w(t)}$$

$p'(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t)$

$c(t) = 2\tilde{c}(t) \cos(2\pi f_0 t)$



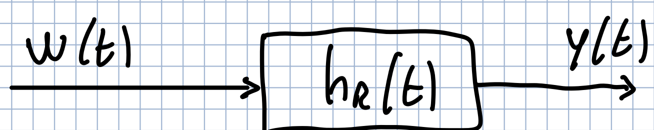
l'effetto del canale distorce le $p(t)$, trasformandole in una $p'(t)$

$$r(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, p'(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$w(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, p'(t - mT_s) [1 + \cos(4\pi f_0 t)]$$

b.b $r(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, p'(t - mT_s)$ con $p'(t) = p(t) \otimes c(t)$

b.p. $r(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, p'(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t)$ con $p'(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t)$

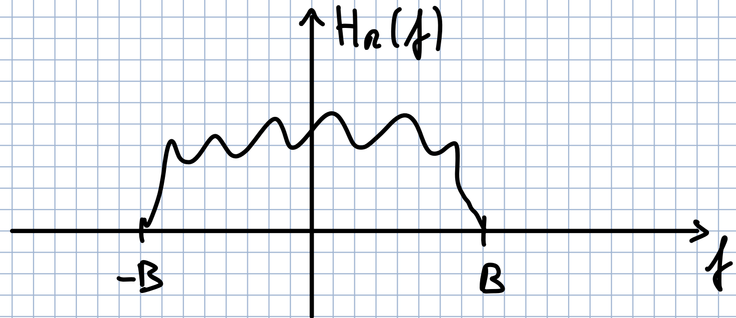


$$y(t) = w(t) \otimes h_R(t)$$

$$w(t) \begin{cases} \nearrow \text{b.b.} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p'(t-nT_s) \\ \searrow 2f_0 \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p'(t-nT_s) \cos(4\pi f_0 t) \end{cases}$$

$h_R(t)$ è un filtro passa-basso di banda B

B è la stessa banda di $p(t)$



tutte le componenti frequenziali superiori a B vengono tagliate

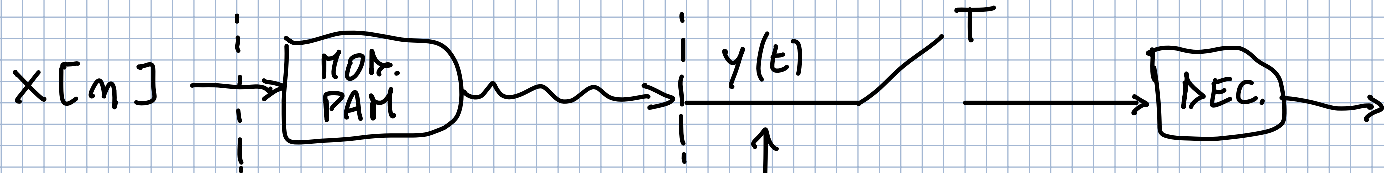
$$y(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p'(t-nT_s)\right] \otimes h_R(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p'(\tau-nT_s)\, h_R(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \int_{-\infty}^{+\infty} p'(\tau-nT_s)\, h_R(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, h(t-nT_s) \qquad h(t) = p'(t) \otimes h_R(t)$$

$$\boxed{y(t) = \sum_n x[n]\, h(t-nT_s)} \qquad h(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t) \otimes h_R(t)$$



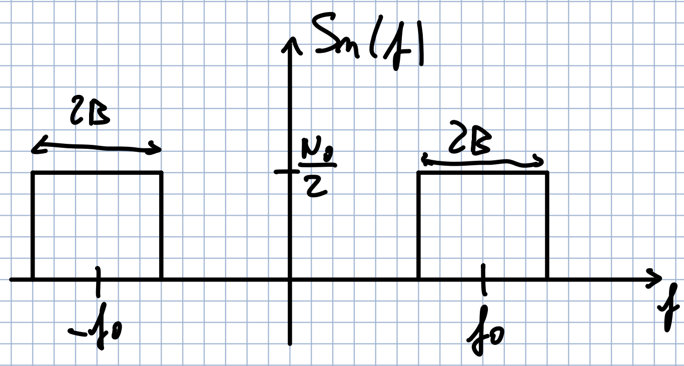
già qui il segnale è indistinguibile da quello di una PAM in b.b.

⇒ RUMORE

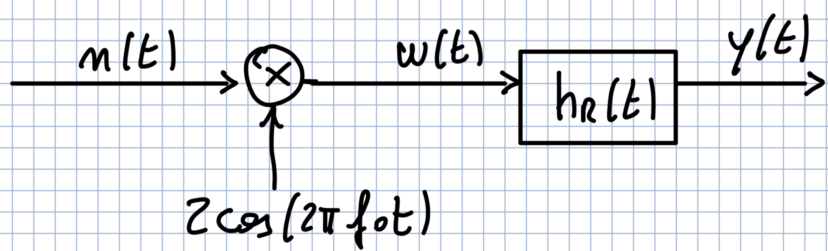
$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p'(t - nT_s) + n(t)$$

$n(t)$ GAUSSIANO BIANCO IN BANDA

- $S_n(f) = \frac{N_0}{2}\left[\text{rect}\left(\frac{f-f_0}{2B}\right) + \text{rect}\left(\frac{f+f_0}{2B}\right)\right]$
- $E[n(t)] = 0$



Al ricevitore



$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} 2B\, \text{sinc}(2B\tau)\left[e^{-j2\pi f_0 \tau} + e^{j2\pi f_0 \tau}\right] =$$

$$= N_0 2B\, \text{sinc}(2B\tau) \cos(2\pi f_0 \tau)$$

$w(t) = n(t)\, 2\cos(2\pi f_0 t)$ è ancora GAUSSIANO

$$E[w(t)] = E[n(t)\, 2\cos(2\pi f_0 t)] = \underbrace{E[n(t)]}_{=0}\, 2\cos(2\pi f_0 t) = 0$$

$$R_w(t_1, t_2) = E[w(t_1)\, w(t_2)] =$$

$$= E[2n(t_1)\cos(2\pi f_0 t_1)\, 2n(t_2)\cos(2\pi f_0 t_2)] =$$

$$= 4E[n(t_1)n(t_2)]\cos(2\pi f_0 t_1)\cos(2\pi f_0 t_2) =$$

$$= 4R_n(t_1 - t_2)\cos(2\pi f_0 t_1)\cos(2\pi f_0 t_2) =$$

$$= 4\,\cancel{8}\, \underbrace{N_0 B\, \text{sinc}(2B(t_1-t_2))\cos(2\pi f_0(t_1-t_2))}_{R_n} \cdot \underbrace{[\cos[2\pi f_0(t_1+t_2)] + \cos[2\pi f_0(t_1-t_2)]]}_{2\cos\alpha\cos\beta}$$

$$= 2N_0 B\, \text{sinc}[2B(t_1-t_2)]\left[\cos(4\pi f_0 t_1)+\cos(4\pi f_0 t_2)+\cos(4\pi f_0(t_1-t_2))+1\right]$$

$w(t)$ → 1 COMPONENTE STAZ. in b.b. $2N_0 B\, \text{sinc}[2B(t_1-t_2)]$

$w(t)$ → 3 COMPONENTI a freq. $2f_0$

$$w(t) \longrightarrow \boxed{h_R(t)} \longrightarrow n_u(t)$$

$$n_u(t) = w(t) \otimes h_R(t)$$

$$R_{n_u}(t_1,t_2) = \underbrace{R_w(t_1,t_2) \otimes h_R(t_1)}_{R_w'(t_1,t_2)} \otimes h_R(t_2)$$

$$R_w(t_1,t_2) \otimes h_R(t_1)$$

$$= 2N_0 B\, \text{sinc}[2B(t_1-t_2)]\,[1+\cos(4\pi f_0 t_2)] \otimes h_R(t_1) =$$

$$= 2N_0 B\,(1+\cos(4\pi f_0 t_2))\, \text{sinc}[2B(t_1-t_2)] \otimes h_R(t_1)$$

$$R_{\tilde{n}}(t_1,t_2) = 2N_0 B\, \text{sinc}[2B(t_1-t_2)]$$

$$= R_{\tilde{n}}(t_1-t_2)(1+\cos(4\pi f_0 t_2)) \otimes h_R(t_1) =$$

$$= (1+\cos(4\pi f_0 t_2)) \cdot R_{\tilde{n}}(t_1-t_2) \otimes h_R(t_1)$$

$$\boxed{R_{n_u}(t_1,t_2)} = R_w'(t_1,t_2) \otimes h_R(t_2) =$$

$$= (1+\cos(4\pi f_0 t_2))\, R_{\tilde{n}}(t_1-t_2) \otimes h_R(t_1) \otimes h_R(t_2) =$$

$$= \underbrace{(1+\cos(4\pi f_0 t_2))\, R_{\tilde{n}}(t_1-t_2) \otimes h_R(t_2)} \otimes h_R(t_1) =$$

nel filtraggio su t_2 si annulla il $\cos(4\pi f_0 t_2)$

$$= R_{\tilde{n}}(t_1-t_2) \otimes h_R(t_1) \otimes h_R(t_2)$$

$$\Rightarrow R_{\tilde{n}}(\tau) \otimes h_R(\tau) \otimes h_R(-\tau)$$

Si comporta come un processo SSL

$w(t) \rightarrow$ 1 COMPON. SSL in b.b.

$\rightarrow$ 3 ~~COMP.~~ SSL di $2f_0$

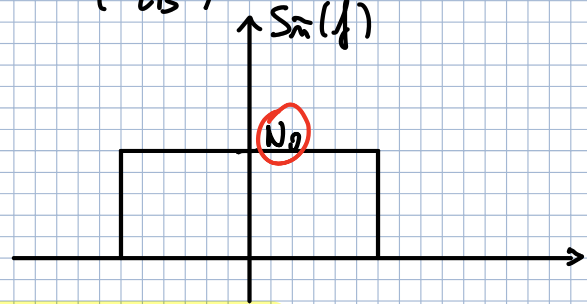
cancellate dal filtro

$$R_{m_u}(\tau) = R_{\tilde{m}}(\tau) \otimes h_R(\tau) \otimes h_R(-\tau)$$

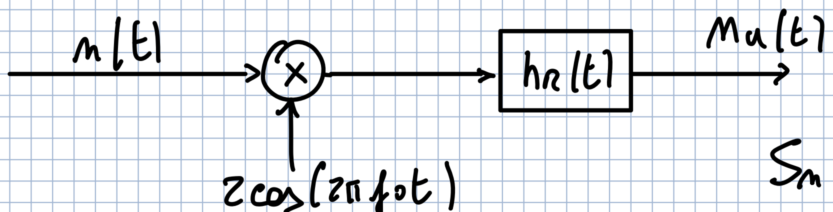
$$S_{m_u}(f) = S_{\tilde{m}}(f)|H_R(f)|^2$$

$$R_{\tilde{m}}(\tau) = 2N_0B \,\text{sinc}(2B\tau)$$

$$S_{\tilde{m}}(f) = N_0 \,\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$



SCHEMA EQUIVALENTE



$n(t)$ BIANCO IN BANDA PASSANTE

$S_n(f) = \frac{N_0}{2}$

$\Downarrow$

$\tilde{m}(t)$ BIANCO IN B.B.

$S_{\tilde{m}}(f) = N_0$

$m_u(t) \Rightarrow$ GAUSSIANO, con $S_{m_u}(f) = N_0|H_R(f)|^2$

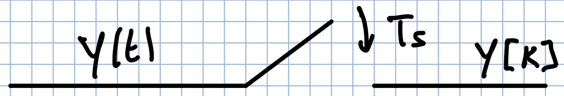
e $E[m_u(t)] = 0$

$E[w(t)] = 0$

$E[m_u(t)] = \underbrace{\eta_w(t)}_{0} \otimes h_R(t) = 0$

$$y(t) = \sum_m x[m]\, h(t - mT_s) + m_u(t)$$ ← è noto

$h(t) = p(t) \otimes \bar{c}(t) \otimes h_R(t)$



$$\boxed{y[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, h[(k-n)T_s] + n_u[k]}$$

$\Rightarrow$ componente utile

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, h[(k-n)T_s) = x[k]h(0) + \underbrace{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq k}}^{+\infty} x[n]\, h[(k-n)T_s]}_{ISI}$$

$\Rightarrow$ Procedura

·) Verifichiamo assenza ISI

·) Calcolo $h(0)$

·) Calcolo $P_{nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{nu}(f)\, df = N_0 E_{hR}$ $\qquad S_{nu}(f) = N_0 |H_R(f)|^2$

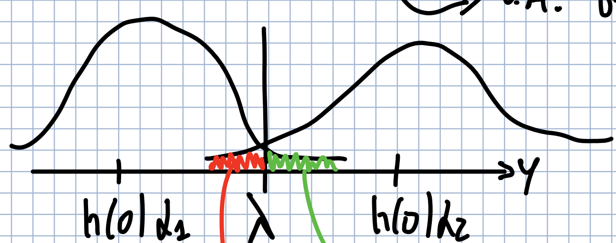
·) Calcolo P_E

in ASSENZA DI ISI

$$y[k] = h(0)\, x[k] + n_u[k]$$

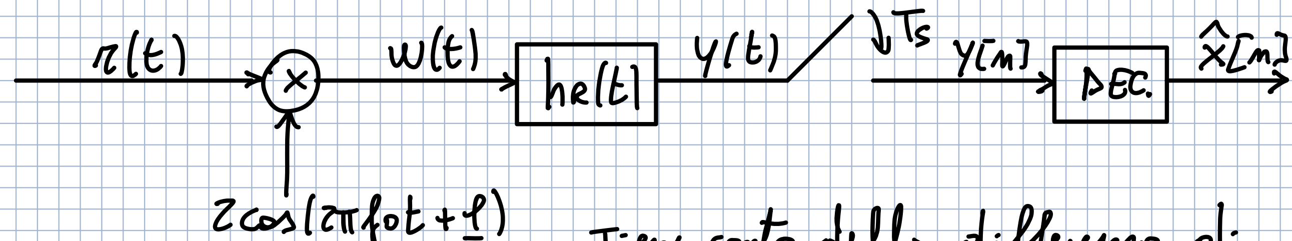
$n_u[k] \rightarrow$ V.A. GAUSSIANA $\in \mathcal{N}(0, P_{nu})$

$M=1$



$$P_E(b) = P\{\hat{x}=\alpha_1 \mid x=\alpha_2\}\, P\{\alpha_2\} + P\{\hat{x}=\alpha_2 \mid x=\alpha_1\}\, P\{\alpha_1\}$$

PRESENZA DI FASE NEL MODULATORE



→ Tiene conto della differenza di fase tra gli oscillatori in tx e in rx

$$r(t) = \sum_n x[n]p'(t-nT_s)\cos(2\pi f_0 t) + n(t)$$

$\Rightarrow$ parte utile di $r(t)$

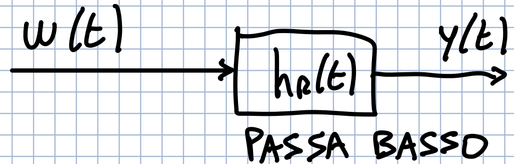
$$\sum_n x[n]p'(t-nT_s)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$w(t) = 2\sum_n x[n]\, p'(t-nT_s)\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi) =$$

$$= \sum_n x[n]p'(t-nT_s)\left[\underbrace{\cos(4\pi f_0 t + \varphi)}\ + \underbrace{\cos\varphi}\right]$$

NON CI INTERESSA perché è a $2f_0$

SOPRAVVIVE SOLO QUELLA CONTINUA



$$y(t) = \sum_n x[n]p'(t-nT_s)\cos\varphi$$

$$y[n] = h(0)\,x[n]\cos\varphi$$

$$= h'(0)\,x[n]$$

IN ASSENZA DI ISI e RUMORE

$$h'(0) = h(0)\cos\varphi$$

$$|\cos\varphi| \le 1$$

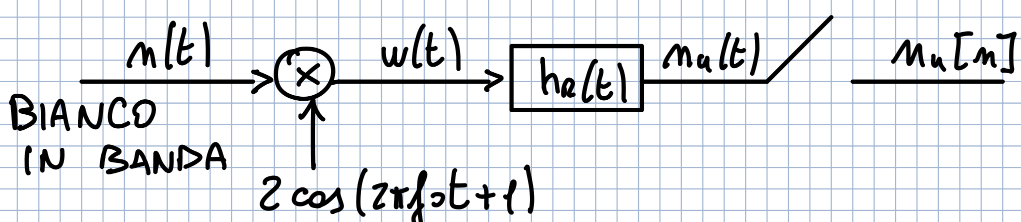
$\Rightarrow$ AGGIUNGO RUMORE

$$y[n] = \underbrace{h'(0)\,x[n]} + n_u[n]$$

PARTE UTILE

DI UN FATTORE $\cos\varphi$

COSA SUCCEDE AL RUMORE ?



$$S_n(f) = \frac{N_0}{2}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_0}{2B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+f_0}{2B}\right)\right]$$

$$R_n(\tau) = 2\, N_0 B\, \mathrm{sinc}(2B\tau)\left[\frac{e^{-j2\pi f_0\tau} + e^{j2\pi f_0 \tau}}{2}\right] =$$

$$= 2N_0 B\, \mathrm{sinc}(2B\tau)\cos(2\pi f_0 \tau)$$

$$w(t) = 2\,n(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$E[w(t)] = \eta_w(t) = E[2n(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)] = 2\underbrace{E[n(t)]}_{=0}\cos = 0$$

$$R_w(t_1,t_2) = E[w(t_1)w(t_2)] =$$

$$= 4\underbrace{E[n(t_1)n(t_2)]}_{R_n(\tau)}\underbrace{\cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi)\cos(2\pi f_0 t_2 + \varphi)} =$$

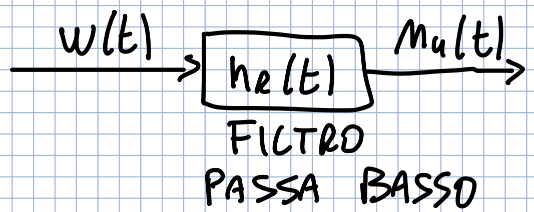
$$= 2\cdot 2N_0 B\,\mathrm{sinc}[2B(t_1-t_2)]\cos[2\pi f_0(t_1-t_2)]\cdot$$

$$\cdot\left[\cos[2\pi f_0(t_1+t_2)+2\varphi] + \cos[2\pi f_0(t_1-t_2)]\right] =$$

$$= 2N_0B\,\mathrm{sinc}[2B(t_1-t_2)]\left[\cos(4\pi f_0 t_1 + 2\varphi) + \cos(4\pi f_0 t_2 + 2\varphi) + \right.$$

$$\left. + 1 + \cos(4\pi f_0(t_1-t_2))\right] =$$

$$= \begin{cases} 2N_0B\,\mathrm{sinc}[2B(t_1-t_2)] & \text{comp. in b.b.} \\ 3 \text{ componenti a } 2f_0 & \end{cases}$$



$R_n(\tau)$ è la stessa che abbiamo calcolato quando $\varphi = 0$ poiché la componente in b.b. di $w(t)$ $\Rightarrow$ $R_w(\tau)$ non dipende da φ ed è identica al caso $\varphi = 0$

$S_{n_u}(f) = N_0\,|H_R(f)|^2$ INDIPENDENTE DA φ

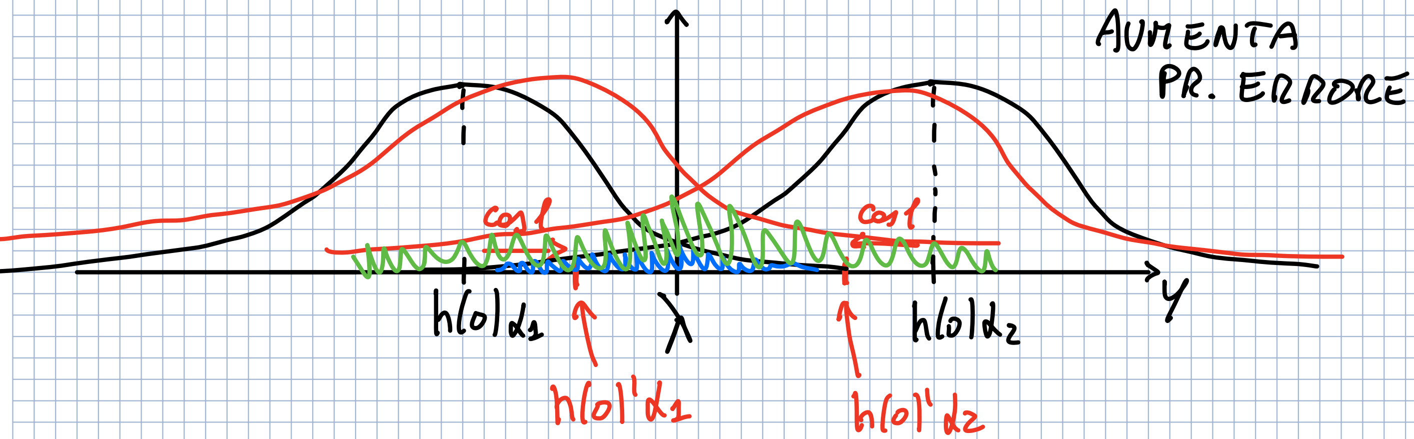
$n_u[n] \in \mathcal{N}(0, P_{nu})$

$P_{nu} = N_0 E_{hR}$ IND. DA φ

$y[n] = h'(0)\,x[n] + n_u[n]$ → è rimasto uguale

$h'(0)$ ↓ si è ridotta per effetto di φ

⇒ **RIDUZIONE DI SNR**



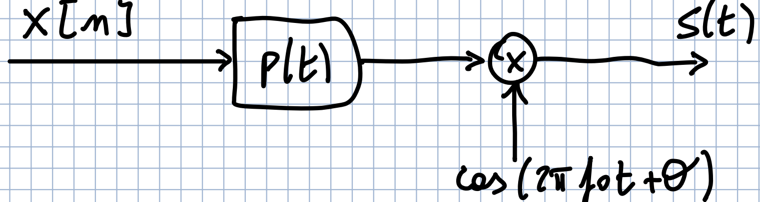
L'AREA DOPO LA RIDUZIONE PER EFFETTO DI φ È AUMENTATA. SE FACCIO AVVICINARE VERSO LA SOGLIA LE 2 CAMPANE ROSSE VADO AD AUMENTARE LA PROB. CONDIZIONATA.

Cosa cambia quando $\varphi \neq 0$

$h'(0)$

$h(0) \Rightarrow h'(0) \Longrightarrow Q(\quad)$

• **IN TX:**



$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,p(t - mT_s)\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

$$r(t) = s(t) \otimes c(t) + n(t)$$

$$c(t) = 2\,\tilde{c}(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

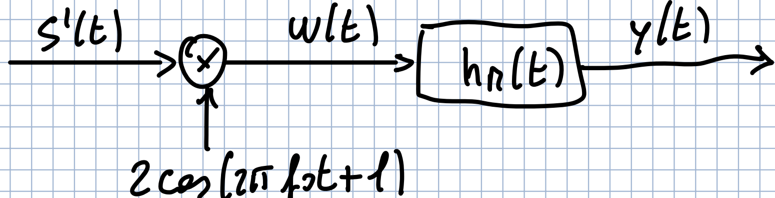
$$s'(t) = s(t) \otimes c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\, c(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= 2 \sum_m x[m] \int_{-\infty}^{+\infty} p(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t + \theta) \cdot \tilde{c}(t-\tau) \cos(2\pi f_0 (t-\tau))\, d\tau =$$

$$= \sum_m x[m] \int_{-\infty}^{+\infty} p(t - mT_s)\, \tilde{c}(t-\tau) \Big[\cos(2\pi f_0 t + \theta) + \underbrace{\cos(4\pi f_0 \tau + 2\pi f_0 t + \theta)}_{\text{FA } 0}\Big] d\tau$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, p'(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

$$s'(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, p'(t - mT_s) \cos(2\pi f_0 t + \theta) \qquad p'(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t)$$



$$w(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, p'(t - mT_s) \left[\cos(\theta - \varphi) + \cos(4\pi f_0 t + \theta + \varphi)\right]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, p'(t - mT_s) \cos(\theta - \varphi) + \text{comp. a } 2 f_0$$

$$y(t) = \sum_m x[m]\, h(t - mT_s) \cdot \cos(\theta - \varphi)$$

CROSS TALK

$$\Rightarrow \min P_E(b) \Rightarrow \theta = \varphi$$

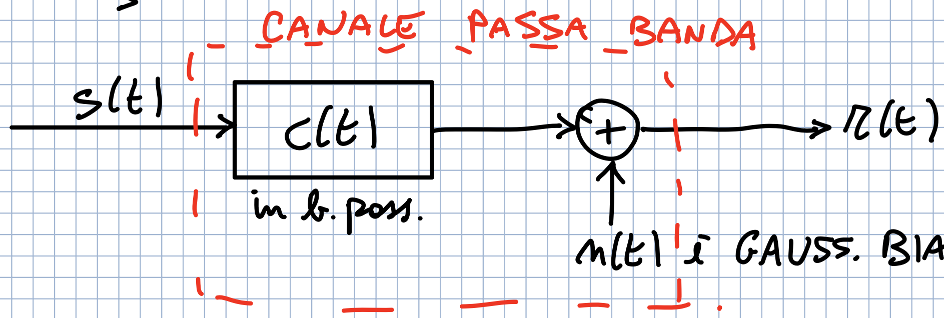
QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

⇒ **MODULAZIONE IN BANDA PASSANTE**

$$s(t) = \sum_n \Big[\underbrace{x_c[n]\, p(t-nT_s) \cos(2\pi f_0 t)}_{\text{FASE}} - \underbrace{x_s[n]\, p(t-nT_s) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)}_{\text{QUADRATURA}} \Big]$$

x_c e x_s sono INDIPENDENTI TRA DI LORO

$$\hat{x}[n] = x_c[n] + j x_s[n]$$



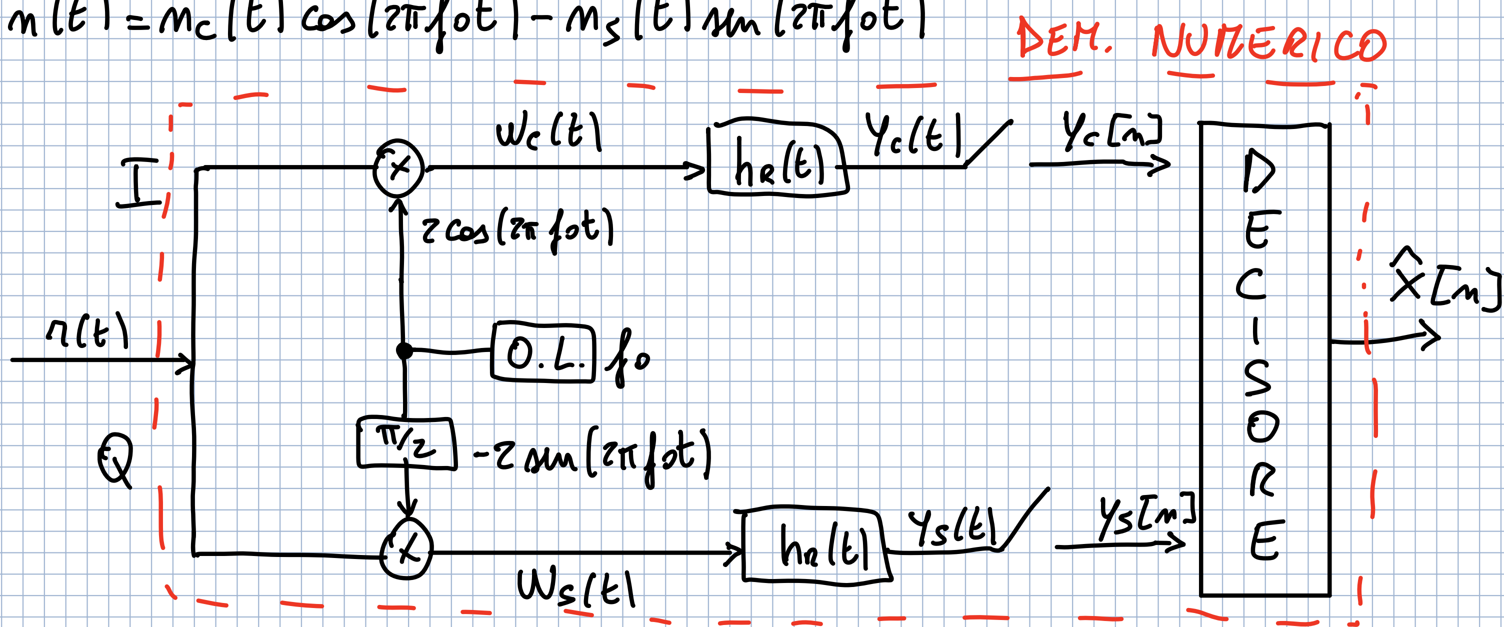
$n(t)$ è GAUSS. BIANCO in banda

$$r(t) = s(t) + n(t) =$$

$$= \sum_n x_c(t)\, p(t-nT_s) \cos(2\pi f_0 t) + \underbrace{n_c(t) \cos(2\pi f_0 t)}$$ I fase

$$- \sum_n x_s(t)\, p(t-nT_s) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t) + \underbrace{n_s(t) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)}$$ Q Quadratura

$$n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - n_s(t) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)$$



$$\hat{x}[n] = \hat{x}_c[n] + j \hat{x}_s[n]$$

⇒ **RAMO FASE (I)**

1) ASSENZA DI RUMORE

$$w_c(t) = 2\sum_m x_c[m]\,p(t-mT_s)\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t) -$$

$$- 2\sum_m x_s[m]\,p(t-mT_s)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) =$$

$$= \sum_m x_c[m]\,p(t-mT_s)\left[1+\cos(4\pi f_0 t)\right] +$$

$$- \sum_m x_s[m]\,p(t-mT_s)\,\mathrm{sen}(4\pi f_0 t) =$$

$$= \sum_m x_c[m]\,p(t-mT_s) + \text{comp. a } 2f_0$$

$$\xrightarrow{w_c(t)} \boxed{h_R(t)} \xrightarrow{y_c(t)}$$

$$y_c(t) = w_c(t) \otimes h_R(t) = \sum_m x_c[m]\,h(t-mT_s)$$

$\Rightarrow$ $y_c(t)$ contiene solo i simboli in fase, è come se la componente in quadratura del segnale trasmesso non esistesse

$\Rightarrow$ RAMO IN QUADRATURA (Q)

$$w_s(t) = -2\sum_m x_c[m]\,p(t-mT_s)\cos(2\pi f_0 t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) +$$

$$-(-2)\sum_m x_s[m]\,p(t-mT_s)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) =$$

$$\cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\mathrm{sen}(\alpha-\beta)$$

$$\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

$$= -\sum_m x_c[m]\,p(t-mT_s)\,\mathrm{sen}(4\pi f_0 t) + \sum_m x_s[m]\,p(t-mT_s)\left[1-\cos(4\pi f_0 t)\right]$$

$$= \sum_m x_s[m]\,p(t-mT_s) + \text{comp. a } 2f_0$$

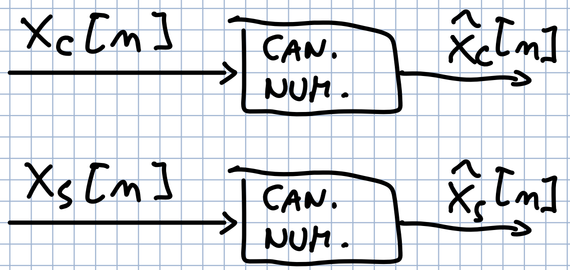
$$y_s(t) = w_s(t) \otimes h_R(t) = \sum_m x_s[m]\,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{SOLO SIMBOLI IN Q}}}{h(t-mT_s)}$$

$\Rightarrow$ [le componenti in I e Q che erano state sommate al TX sono di nuovo separate al RX.

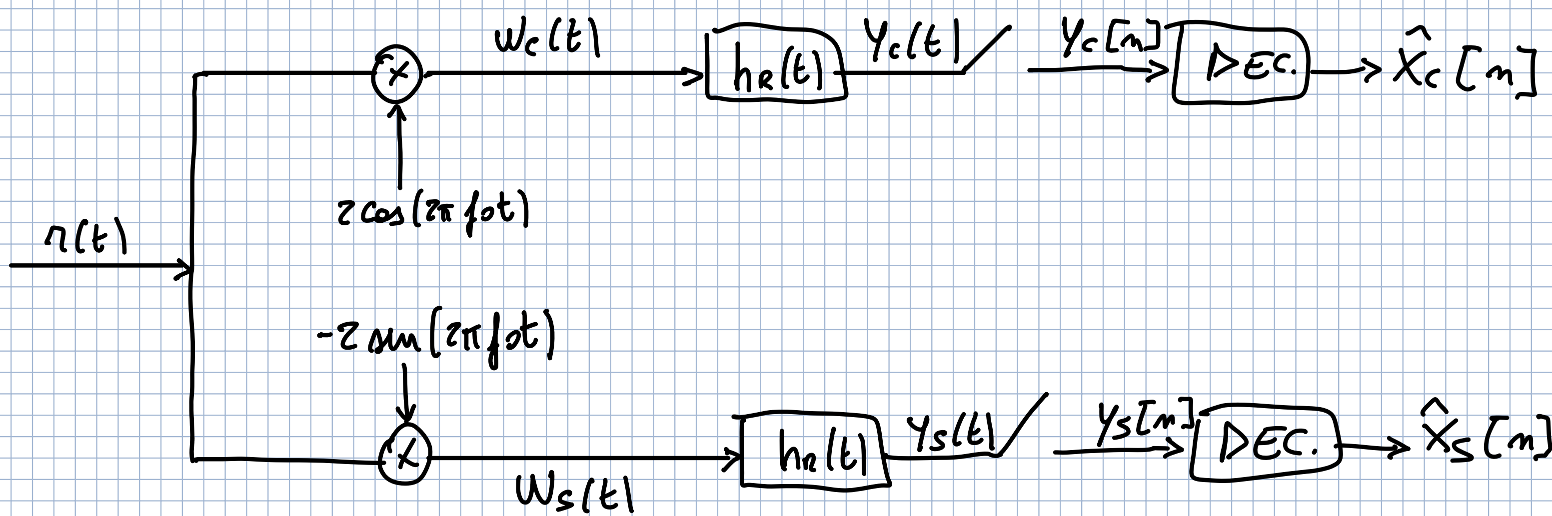
QAM = 2 PAM → in fase
→ in quadratura

→ raddoppia il bit-rate rispetto alla PAM a parità di banda occupata => raddoppia η_B ← EFFICIENZA SPETTRALE

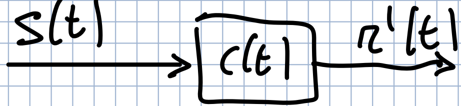
INTERPRETAZIONE DELLA QAM



le decisioni sui simboli $x_c[n]$ è INDIPENDENTE da quella sui simboli $x_s[n]$



$$r(t) = \underbrace{s(t) \otimes c(t)}_{\text{parte utile}} + n(t)$$



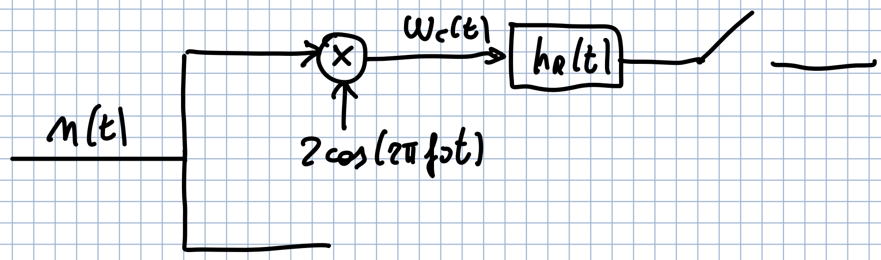
$$c(t) = 2\,\tilde{c}(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$\boxed{r'(t) = \sum_n x_c[n]\, p'(t-nT_s)\cos(2\pi f_0 t) - \sum_n x_s[n]\, p'(t-nT_s)\sin(2\pi f_0 t) \quad \text{con } p'(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t)}$$

$$h(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t) \otimes h_R(t)$$

$$y_c(t) = \sum_n x_c[n]\, h(t-nT_s) + n_u^c(t)$$

$$y_s(t) = \sum_n x_s[n]\, h(t-nT_s) + n_u^s(t)$$



$$n(t) = n_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - n_s(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$$

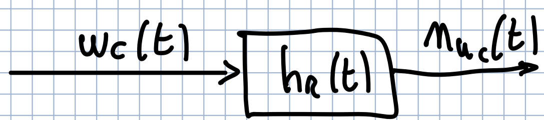
$$w_c(t) = \underbrace{2n_c(t)\cos^2(2\pi f_0 t)}_{\text{FASE}} - \underbrace{2n_s(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t)}_{\text{QUADRATURA}}$$

$$R^I_{w_c}(t_1,t_2) = \underbrace{\underset{\text{in b.b.}}{R_{w_{c0}}(t_1,t_2)} + \underset{2f_0}{R_{w_{ch}}(t_1,t_2)}}_{\text{relativa alla parte in fase} \rightarrow \text{RIS. NOTO di PAM b.p.}}$$

$$R^Q_{w_c}(t_1,t_2) = E\left[2n_s(t_1)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t_1)\cos(2\pi f_0 t_1)\cdot 2n_s(t_2)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t_2)\cos(2\pi f_0 t_2)\right]$$

$\Rightarrow$ non esistono componenti in b.b.

$$R_{w_c}(t) = R_{w_{c0}}(t_1-t_2) + \text{comp. a } 2f_0$$



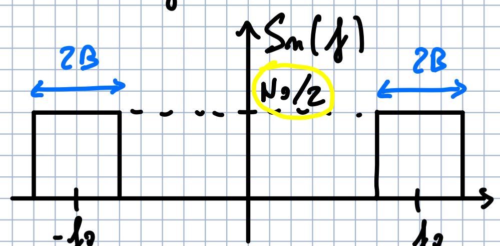
$$R_{n_{u_c}}(\tau) = R_{w_{c0}}(\tau) \otimes h_R(\tau) \otimes h_R(-\tau)$$

poiché le componenti a $2f_0$ vengono filtrate

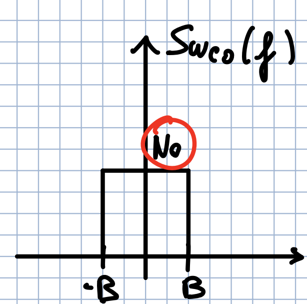
$$S_{n_u}(f) = S_{w_{c0}}(f)\,|H_R(f)|^2$$

in caso di rumore bianco in banda

$$S_{w_{c0}}(f) = N_0 \qquad 2 \text{ volte } \frac{N_0}{2}$$



$\Rightarrow$



$$P_{n_{uc}} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{n_{uc}}(f)\,df = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2\,df = N_0 E_{h_R}$$

$$E[n_{uc}(t)] = 0$$

$$E[n(t)] = 0 \rightarrow E[n_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - n_s(t)\sin(2\pi f_0 t)] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$E[n_c(t)] = E[n_s(t)] = 0$$

$$E[w_c(t)] = E[\underset{\overset{\parallel}{0}}{n_c(t)}\cos^2(2\pi f_0 t) - \underset{\overset{\parallel}{0}}{n_s(t)}\sin(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t)] = 0$$

$$\xrightarrow[\eta_{w_c}=0]{w_c(t)} \boxed{h_R(t)} \xrightarrow[\eta_{uc}=0]{n_{uc}(t)}$$

$n_{uc}(t)$ è GAUSSIANO con $\eta_{n_{uc}} = 0$ e $P_{n_{uc}} = N_0 E_{h_R} = \sigma^2_{n_u}$

$$n_{uc}(t) \overset{T}{\diagup}\ n_{uc}[n] \longrightarrow \text{V.A.} \in \mathcal{N}(0, P_{n_u})$$

$$\Downarrow$$

identico a PAM

=> la stessa cosa si può dimostrare per rumore in quadratura

$n_{us}(t)$ è GAUSSIANO con $\eta_{n_{us}} = 0$ e $P_{n_{us}} = N_0 E_{h_R} = \sigma^2_{n_{us}}$

$n_{us}[n]$ è una V.A. $\in \mathcal{N}(0, P_{n_{us}})$

$$\boxed{P_{n_{us}} = P_{n_{uc}} = N_0 E_{h_R}}$$

$$y_c(t) = \sum_n x_c[n]\,h(t - nT_s) + n_{uc}(t)$$

$$y_s(t) = \sum_n x_s[n]\,h(t - nT_s) + n_{us}(t)$$

=> DOPO IL CAMPIONAMENTO

$$y_c[k] = \sum_n x_c[n]\,h((k-n)T_s) + n_{uc}[k]$$

GIA' NOTA

$$= h(0)\,x_c[k] + \underbrace{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq k}}^{+\infty} x_c[n]\,h((k-n)T_s)} + n_{uc}[k]$$

ISI

=> ASSENZA DI ISI (1)

(3) $P_{n_{us}} = P_{n_{uc}}$

$y_c[n] = h(0)\, x_c[n] + n_{uc}[n]$

$y_s[n] = h(0)\, x_s[n] + n_{us}[n]$

→ V.A. con stesse caratteristiche

(2) $h(0) = h(t)\big|_{t=0}$ con

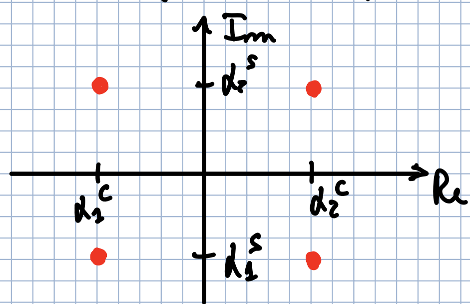
$h(t) = p(t) \otimes \tilde{c}(t) \otimes h_R(t)$

$P_E(M) = ?$

=> CASO 4-QAM $M=4$ (minimo)

$x_c[n] \in A_s^c = \{\alpha_1^c, \alpha_2^c\}$

$x_s[n] \in A_s^s = \{\alpha_1^s, \alpha_2^s\}$



(4) $P_E(M) = P_E^c(b) \cdot (1 - P_E^s(b)) + P_E^s(b)(1 - P_E^c(b)) + P_E^c(b)\, P_E^s(b)$

$X = X_c + jX_s$
- → X_c è sbagliato ma X_s GIUSTO
- → X_c è giusto ma X_s è SBAGLIATO
- → sia X_c e X_s sono sbagliati

Indipendenza degli errori:

$y_c[n]$, $y_s[n]$ INDIPENDENTI
- → $X_c[n]$ ind. da $X_s[n]$
- → $n_c(t)$ ind. da $n_s(t)$

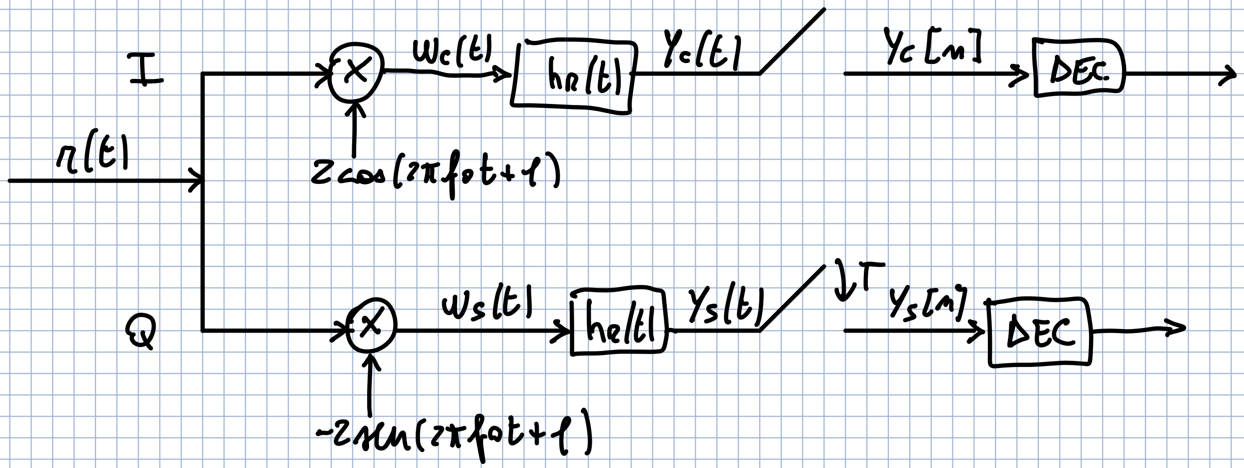
⇓

errori indipendenti

⇓

prodotto delle probabilità

PROBLEMA DELLA SINCRONIZZAZIONE DI FASE [QAM]



$$r(t) = \sum_n x_c[n]\,p'(t-nT_s)\cos(2\pi f_0 t+\theta) - \sum_n x_s[n]\,p'(t-nT_s)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t+\theta)$$

con $\varphi \neq \theta$

$\Rightarrow$ RAMO IN FASE

$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

$2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta = \mathrm{sen}(\alpha+\beta)+\mathrm{sen}(\alpha-\beta)$

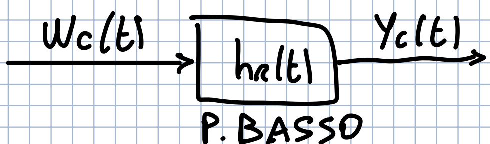
$$w_c(t) = 2\,r(t)\cos(\pi f_0 t+\varphi) =$$

$$= 2\sum_n x_c[n]\,p'(t-nT_s)\cos(2\pi f_0 t+\theta)\cos(\pi f_0 t+\varphi) +$$

$$-2\sum_n x_s[n]\,p'(t-nT_s)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t+\theta)\cos(\pi f_0 t+\varphi) =$$

$$= \sum_n x_c[n]\,p'(t-nT_s)\left[\cos(4\pi f_0 t+\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi)\right] +$$

$$-\sum_n x_s[n]\,p'(t-nT_s)\left[\mathrm{sen}(4\pi f_0 t+\theta+\varphi)+\mathrm{sen}(\theta-\varphi)\right] =$$



$$Y_c(t) = \cos(\theta-\varphi)\sum_n x_c[n]\,h(t-nT_s) - \mathrm{sen}(\theta-\varphi)\sum_n x_s[n]\,h(t-nT_s)$$

$\Downarrow$

Sono presenti anche i simboli in quadratura

$\Downarrow$

CROSS-TALK   Fenomeno negativo che va evitato

$$Y_c(t) = \cos(\theta-\varphi)\sum_n x_c[n]\,h(t-nT_s)$$

+ RUMORE + INTERFERENZA CROSS-TALK

(dovuta ai simboli in quadratura)

2 perdite rispetto alla sola PAM in B.P.

attenuazione del coseno

⇒ la stessa cosa la si può dimostrare per il ramo in quadratura, solo che ora modulo col seno

$2\cos\alpha \,\mathrm{sen}\,\beta = \mathrm{sen}(\alpha+\beta) - \mathrm{sen}(\alpha-\beta)$

$2\,\mathrm{sen}\,\alpha \,\mathrm{sen}\,\beta = -\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

$\Downarrow$

ottengo una attenuazione di $\cos(\theta-\varphi)$

$+$

INTERFERENZA CROSS-TALK (dei simboli in fase)

⇒ Per la QAM, a differenza della PAM in b.p. quando è presente cross-talk non siamo in grado di calcolare la $P_E(b)$