Es. del 17/4/ Ciocci

Esercizi di esame da
https://www.pi.infn.it/~ciocci/

Esame scritto es. 1 del 22/07/2016

Una guida a forma di semicirconferenza ha raggio R = 1m e massa M = 3kg e può muoversi su un piano orizzontale liberamente (tra il piano e la guida non c'è attrito).

Un punto materiale di massa m = 1.6 kg è vincolato a muoversi al suo interno. La massa m viene lasciata cadere da un'altezza h = 1.3 m all'interno della guida (Fig.1). Tutto il sistema è soggetto all'accelerazione di gravità g.

Si calcoli:

a) lo spostamento orizzontale d della guida quando la massa m esce dall'altro lato rispetto a quello da cui è entrata nella guida

d = ...

b) il modulo della velocità della guida quando m passa nel punto più basso della guida stessa

v_M = ...

c) la quantità di moto del sistema quando la massa m si trova a un angolo α = $\pi/4$

p = ...

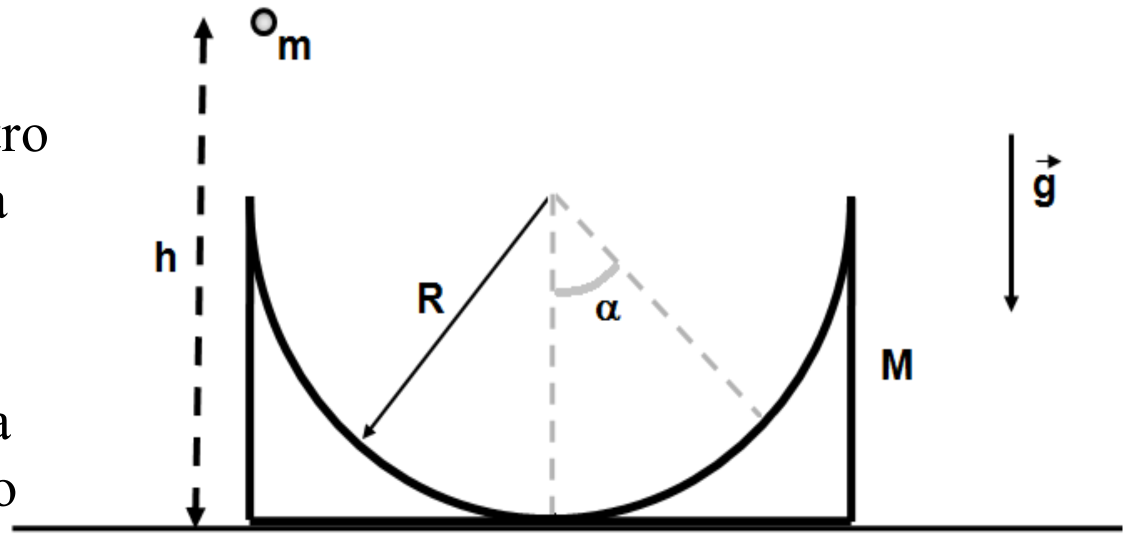


Fig.1

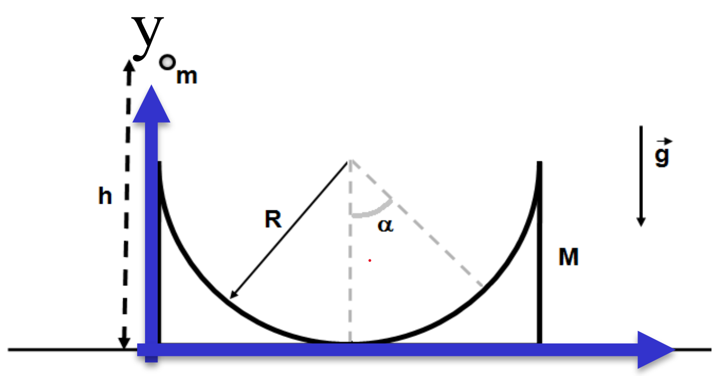


Fig.1

Sistema costituito da:

- Guida a forma di semicirconferenza
  - R= 1 m
  - M=3 kg
  - Si può muovere orizzontalmente sul piano privo di attrito
- Punto Materiale
  - m=1.6 kg
  - h= 3 m quota da cui cade
  - È vincolato a muoversi all'interno della guida

Si calcoli:
a)lo spostamento orizzontale d della guida quando la massa m esce dall'altro lato rispetto a quello da cui è entrata nella guida

$d =$ ....

Considerazioni;

1) Unica forza esterna al sistema $\vec{g}$ che agisce lungo y
2) Non ci sono forze dissipative

1) Il sistema conserva la q.m del C.M lungo x e lungo Z
2) Si conserva l'energia meccanica del sistema

1) Il sistema conserva la q. m del C. M lungo x e lungo z

1.a $m v^i_{xm} + M v^i_{xM} = m v^f_{xm} + M v^f_{xM} = 0$

$$P^i_{xCM} = P^f_{xCM} = 0 \Rightarrow v_{x\,cm} = 0 \Rightarrow X_{CM} = \text{cost}$$

$$\Rightarrow X^i_{CM} = X^f_{CM} = \text{Cost} = \frac{m \cdot \emptyset + MR}{m+M}$$

nota: dalla simmetria della Guida $X^{CM}_G = R$

1.b non ci sono forze lungo z sul sistema, Inoltre non ci sono forze lungo z sulla guida:

$$\underbrace{m v^i_{zm} + M v^i_{zM}}_{p^i_{zCM}} = 0 = \underbrace{m v^f_{zm} + M v^f_{zM}}_{p^f_{zCM}} = \emptyset \Rightarrow v_{zCM} = 0 \Rightarrow Z_{CM} = \text{cost}$$

$$(m+M) V^i_{zcm} = (m+M) V^f_{zCM} = 0$$

Inoltre se non ci sono forze lungo z sulle guide $M v_{zM} = \text{cost} = M v^i_{zM} = \emptyset$

$\Rightarrow Z_{CM\text{-}GUIDA} = \text{cost}$ e dalla conservazione della Q.M lungo z $m v^f_{zm} = m v^i_{zm} + M v^i_{zM} = \emptyset = \text{cost}$

Da notare inoltre che poichè la guida scivola su xz $y_{cm\,GUIDA} = \text{cost}$

Se $Z_{CM\,Guida}$ e $y_{CM\,Guida}$ sono costanti $\Rightarrow$ il CM della guida si muove lungo x!

Da notare inoltre che poiché la guida scivola su xz $y_{cm\,GUIDA} = \text{cost}$

Se $z_{CM\,Guida}$ e $y_{CM\,Guida}$ sono costanti $\Rightarrow$ il CM della guida si muove lungo x!

a) Si calcoli lo spostamento orizzontale d della guida quando la massa m esce dall'altro lato rispetto a quello da cui è entrata nella guida

$d =$ ....

Se il moto avviene lungo x per la guida, per uno spostamento d della guida, la pallina si è spostata di $2R + d$ quando esce dalla guida per cui:

dalla 1.a $X_{CM_i} = \dfrac{RM}{m+M} = X_{CM_f} = \dfrac{M(R+d) + m(2R+d)}{m+M} \Rightarrow (m+M)\,d + 2mR = 0 \Rightarrow d = -\dfrac{2mR}{m+M}$

per cui la guida si è spostata verso sinistra. $d = -0.7\ m$

Abbiamo inoltre trovato che durante il moto:

$$\begin{cases} \vec{v}_m = (v_{x\,m}, v_{y\,m}, 0) \\ \vec{v}_M = (v_{x\,M}, 0, 0) \\ \vec{V}_{CM} = \left(0, \dfrac{m\,v_{ym}}{m+M}, 0\right) \end{cases}$$

C.Q.M C.QM

$(m+M)V^y_{CM} = m\,v_{ym} + M\,v_{yM} = m\,v_{ym}$ poiché $y_{CM\,guida} = \text{cost}$

b) Calcolare il modulo della velocità della guida quando m passa nel punto più basso della guida stessa

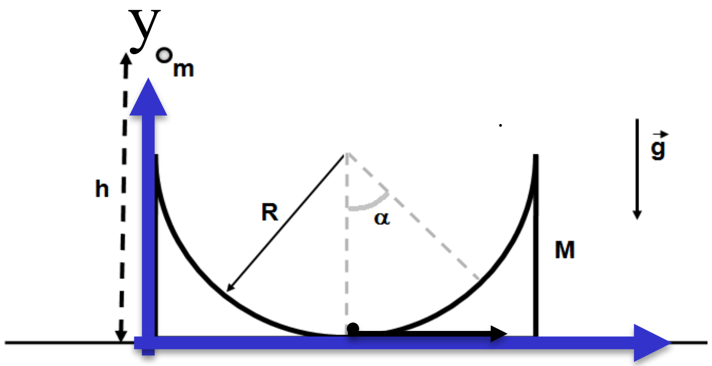


Fig.1

X

$v_M = $ ....

In questo caso $\vec{v}_m = (v_{xm}, 0, 0)$, mentre come prima $\vec{v}_M = (v_{xM}, 0, 0)$

Per determinare $\vec{v}_M$ possiamo usare la

① conservazione della Q.M. lungo x

② conservazione dell' energia

① $M v^i_{xM} + m v^i_{xm} = \emptyset = M v_M + m v_m$ a) $v_m = -\frac{M}{m} v_M$

② $mgh = \frac{1}{2} M v_M^2 + \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} M v_M^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{M v_M}{m}\right)^2 = \frac{1}{2} M v_M^2 \left(\frac{m+M}{m}\right)$

$2 m^2 gh = M v_M^2 (m+M) \Rightarrow v_M = \sqrt{\frac{2 m^2 gh}{M(m+M)}} = 2.17 \ m/s$

c) Si calcoli la quantità di moto del sistema quando la massa m si trova a un angolo $\alpha = \pi/4$

$p =$ ....

La quantità di moto totale del sistema è $\vec{P}_{CM} = (m+M)\vec{V}_{CM}$

$$P_{CM} = \sqrt{P^2_{xCM} + P^2_{yCM} + P^2_{zCM}}$$

Ricordiamo che $\vec{P}_{CM} = (m+M)\vec{V}_{CM} = m\vec{v}_m + M\vec{v}_M = (0, m v_{ym}, 0)$

c.q.m. $v_{yM} = 0$ c.q.m.

per cui $P_{cm} = m v_{ym}$ e quindi dobbiamo calcolare v_{ym} per $\alpha = \pi/4$

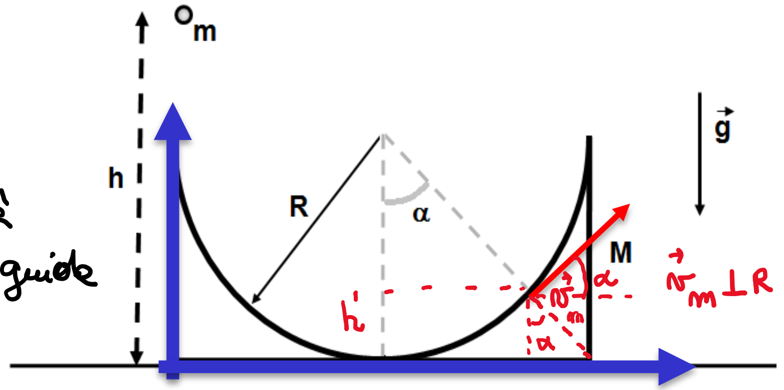
La velocità della pallina rispetto alla guida ha componenti

$\vec{v}_{Rel} = (\omega R\cos\alpha, \omega R\sin\alpha)$

per cui nel sistema del laboratorio

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_p &= \dot{x} + \omega R\cos\alpha \\ \dot{y}_p &= \dot{y} + \omega R\sin\alpha \end{aligned}\right\}$$

con $\dot{x}$ velocità del C.M della guida e $\dot{y} = 0$!



al solito si conserva ① l'energia totale del sistema e ② la quantità di moto del sistema lungo x

① $mgh = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + \omega R\cos\alpha)^2 + (\omega R\sin\alpha)^2] + mgR(1-\cos\alpha)$

② Dalla conservazione della Q. M lungo x a) $\emptyset = M\dot{x} + m(\dot{x} + \omega R\cos\alpha)$

Quindi abbiamo 2 eq. in 2 incognite (① e ② ω e $\dot{x}$)

Ricordiamo che dobbiamo determinare $P_{cm} = m v_y = m \omega R \sin\alpha$

dalla ② a $\dot{x} = -\dfrac{m\omega R\cos\alpha}{M+m}$

dalla ① $mg\,(h - R(1-\cos\alpha)) = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(2\omega R\cos\alpha)\dot{x}$

$+ \frac{1}{2} m\omega^2 R^2$

Sostituendo $\dot{x}$ dalla ② a $\Rightarrow \frac{1}{2}(m+M)\left(\dfrac{mR\omega\cos\alpha}{m+M}\right)^2 +$

$+ \frac{1}{2} m\,(2\omega R\cos\alpha)\left(-\dfrac{mR\omega\cos\alpha}{m+M}\right) + \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 = mg\,(h - R(1-\cos\alpha))$

$= \omega^2\left[\frac{1}{2}\dfrac{(mR\cos\alpha)^2}{m+M} + \frac{1}{2} mR^2 - \frac{1}{2}\dfrac{m^2\, 2R^2\cos^2\alpha}{m+M}\right] = mg\,(h - R(1-\cos\alpha))$

$$\omega^2\left[\frac{1}{2}\frac{(mR\cos\alpha)^2}{m+M}+\frac{1}{2}mR^2-\frac{1}{2}\frac{m^2\,2R^2\cos^2\alpha}{m+M}\right]=mg\left(h-R(1-\cos\alpha)\right)$$

moltiplicando $\times\ \dfrac{2(M+m)}{m} \Rightarrow \begin{cases}\omega^2\left(mR^2\cos^2\alpha+(m+M)R^2-2mR^2\cos^2\alpha\right)\\ =2g(m+M)[h-R(1-\cos\alpha)]\end{cases}$

$$\omega=\sqrt{\frac{2g[h-R(1-\cos\alpha)](m+M)}{R^2(m-m\cos^2\alpha+M)}}$$

$$P_{y\,cm}=P_{cm}=m|v_{y\,m}|=m\omega R\sin\alpha=5.53\ \mathrm{Kg\,m/s}$$