TEOREMA DI PARSEVAL PER SEGNALI PERIODICI

$x(t)$ periodico $\overset{TSF}{\Longleftrightarrow}$ X_n

$y(t)$ " $\overset{TSF}{\Longleftrightarrow}$ Y_n

$$\boxed{\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, y^*(t)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n Y_n^*}$$

Dim

$$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, y^*(t)\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}}_{x(t)} y^*(t)\, dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y^*(t)\, e^{j2\pi n f_0 t}\, dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \Bigg[\underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt}_{Y_n} \Bigg]^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n Y_n^*$$

$$\Rightarrow X_n = Y_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2}$$

POTENZA MEDIA DI UN SEGNALE PERIODICO

$$P_x = \begin{cases} \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2\,dt & \text{nel tempo} \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 & \text{in frequenza} \end{cases}$$

PER SEGNALI PERIODICI

$$E_x = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt & \text{nel tempo} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\,df & \text{in freq.} \end{cases}$$

PER SEGNALI APERIODIC AD EN. FINITA

TEO. DI PARSEVAL PER SEGNALI PERIODICI

(TCF)

$$x(t) \quad \text{periodico} \quad \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n\,\delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

$$y(t) \quad \text{''} \quad \overset{TCF}{\Longleftrightarrow} \quad Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n\,\delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\,y^*(t)\,dt = \frac{1}{T_0^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0\left(\frac{n}{T_0}\right) Y_0^*\left(\frac{n}{T_0}\right)}$$

$$X_0(f) = TCF\left[x_0(t)\right], \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - nT_0)$$

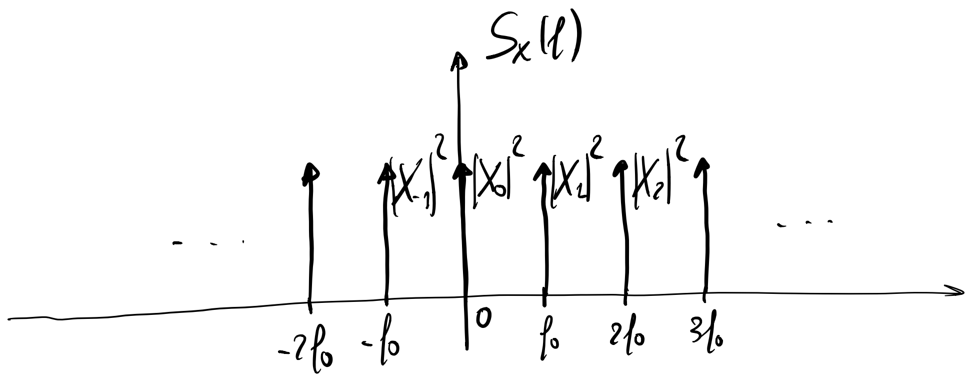
$$Y_0(f) = TCF\left[y_0(t)\right], \quad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_0(t - nT_0)$$

$$X_n = \frac{1}{T_0} X_0\left(\frac{n}{T_0}\right) \quad , \quad Y_n = \frac{1}{T_0} Y_0\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

-) DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA PER SEGNALI PERIODICI

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df$$

$$S_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 \, \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

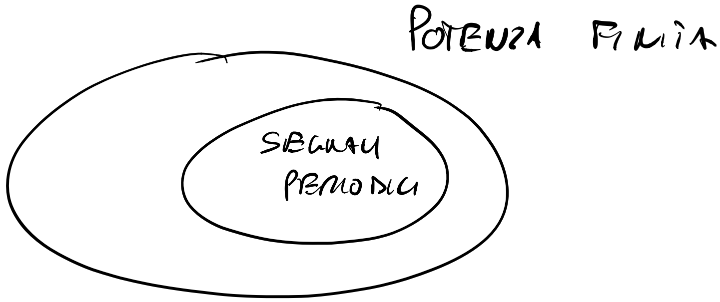


$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) df$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) df}_{1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 = P_x$$

CLASSI DI SEGNALI

- Energia finita
- Potenza finita



$$\boxed{S_x(f) \triangleq \lim_{T \to \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}}$$

$$x_T(t) \overset{TCF}{\longleftrightarrow} X_T(f)$$

SISTEMI

- Sistemi monodimensionali

$$y(t) = T\left[x(t)\right]$$

Nota : in generale l'uscita all'istante "t" non dipende solamente dal valore dell'ingresso all'istante "t".

es.

$$T[\cdot] \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha$$

·) <u>sistemi lineari</u>

se $\quad x(t) = a\, x_1(t) + b\, x_2(t)$

allora $\quad y(t) = T\left[x(t)\right] = a\, T\left[x_1(t)\right] + b\, T\left[x_2(t)\right]$

·) sistemi stazionari (o invarianti alla traslazione temporale o tempo-invarianti)

se $\quad y(t) = T\left[x(t)\right]$

allora $\quad y(t-t_0) = T\left[x(t-t_0)\right]$

·) CARATTERIZZAZIONE DEI SISTEMI LINEARI E STAZIONARI (SLS) (SLI)

·) Risposta impulsiva di un sistema (generico)

impulso : impulso di Dirac (delta di Dirac)

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow h(t)$$

$h(t) = T[\delta(t)]$ risposta impulsiva o risposta all'impulso

Un sistema SLS è completamente caratterizzato dalla sua $h(t)$, in particolare l'uscita ad un determinato ingresso e' calcolabile

$$\boxed{y(t) = x(t) \otimes h(t)}$$

Dim.

$$y(t) = T[x(t)] = T[\underbrace{x(t) \otimes \delta(t)}_{x(t)}]$$

$$= \underset{(t)}{T}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right]$$ linearità

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, T\left[\delta(t-\tau)\right] d\tau$$ stazionarietà

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = x(t) \otimes h(t)$$

·) ALTRE PROPRIETÀ DEI SISTEMI

1) <u>CAUSALITÀ</u>

$$y(t) = T\left[x(\alpha)\,;\ \alpha \leq t\right]$$

L'uscita all'istante "t" può dipendere solo da valori dell'ingresso antecedenti o al più uguali a "t".

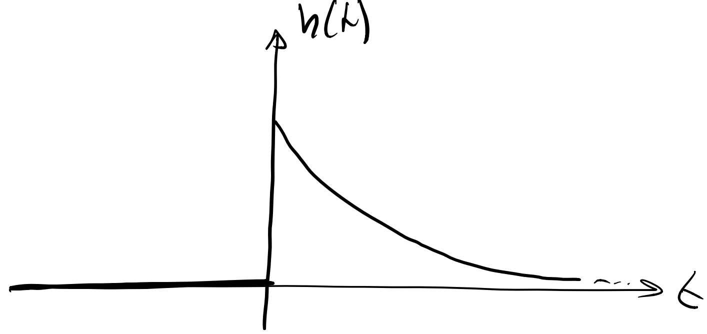
Per un SLS vale che il sistema è causale se e solo se $h(t)$ è causale

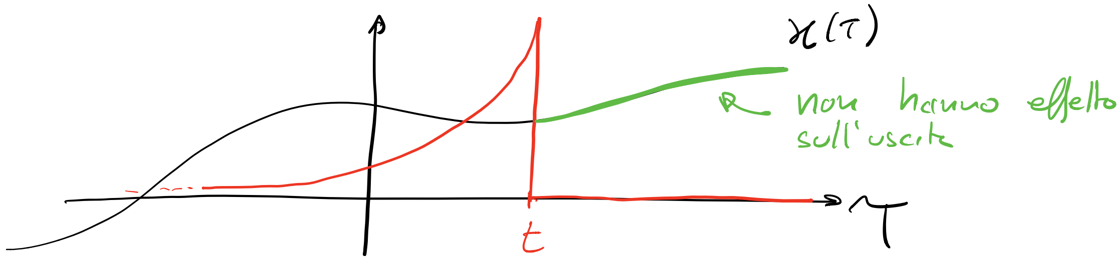
$$\Downarrow$$

$$h(t) = 0 \quad \text{per } t < 0$$

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$h(t) = 0$ per $t < 0$



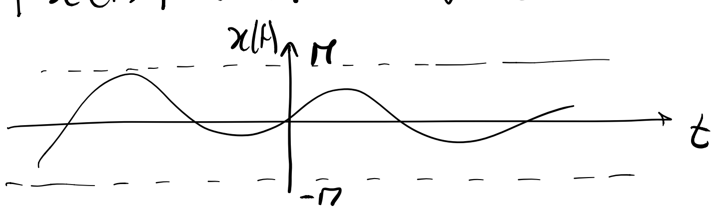


$$\Downarrow$$

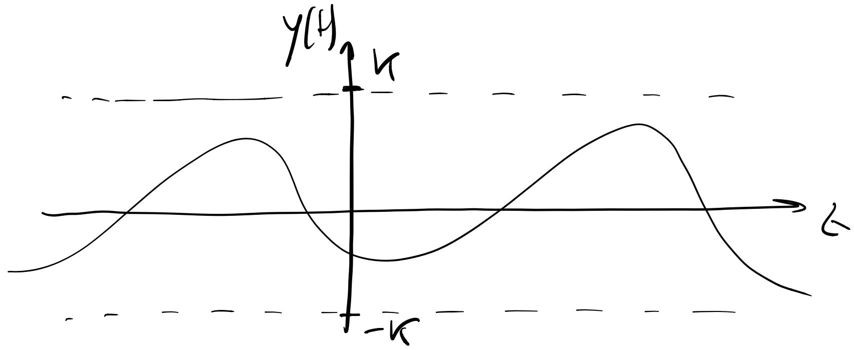
$$y(t) = T\left[x(\tau);\ \tau \leq t \right]$$

2) STABILITÀ BIBO (Bounded Input Bounded Output)

Se $|x(t)| \leq M \quad \forall t$



allora $|y(t)| = |T[x(t)]| \leq K \quad \forall t$



·) Per SLS

se $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = K < \infty$

allora IL SISTEMA È STABILE BIBO

Dim della sufficienza

$$|y(t)| = |x(t) \otimes h(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|\,|h(t-\tau)|\, d\tau \leq \int_{-\infty}^{+\infty} M\,|h(t-\tau)|\, d\tau$$

$$= M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|\, d\tau = M \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau')|\, d\tau'}_{K} = MK = K'$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt \\ &|x(t)| \leq M \quad \forall t \end{aligned}\right\} |y(t)| \leq K'$$

3) MEMORIA

·) Sistema <u>senza memoria</u>

$$y(t) = T\left[x(\alpha);\ \alpha = t \right]$$

L'uscita all'istante "t" dipende solo dall'ingresso all'istante "t".

SISTEMA ISTANTANEO

·) Sistema con memoria è un sistema che non soddisfa questa proprietà

4) INVERTIBILITA'

se $\quad y(t) = T[x(t)]$

allora $\quad x(t) = T^{-1}[y(t)]$

Deve esistere la $T^{-1}[\cdot]$

·) ESERCIZIO

$$y(t) = \int_{T}^{t} x(\alpha)\, d\alpha$$

$$y(t) = T[x(t)]$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow y(t)$$

Verificare le seguenti proprietà

1) linearità ✓
2) stazionarietà ✗
3) stabilità ✗
4) memoria (istantaneità)

Svolgimento

·) Linearità

$$x(t) = a\, x_1(t) + b\, x_2(t)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = a\, T[x_1(t)] + b\, T[x_2(t)]$$

$$y(t) = \int_T^t x(\alpha)\, d\alpha = \int_T^t [a\, x_1(\alpha) + b\, x_2(\alpha)]\, d\alpha$$

$$= a \underbrace{\int_T^t x_1(\alpha)\, d\alpha}_{T[x_1(t)]} + b \underbrace{\int_T^t x_2(\alpha)\, d\alpha}_{T[x_2(t)]}$$

$$= a\, T[x_1(t)] + b\, T[x_2(t)]$$

è verificata la LINEARITÀ

2) STAZIONARIETÀ

$$y(t) = T[x(t)]$$

$$y(t-t_0) \overset{?}{=} \underbrace{T[x(t-t_0)]}$$

$$T[x(t-t_0)] = \int_T^t x(\alpha - t_0)\, d\alpha \qquad \alpha - t_0 = \alpha'$$

$$= \int_{T-t_0}^{t-t_0} x(\alpha')\, d\alpha' = \underbrace{\int_{T-t_0}^{T} x(\alpha')\, d\alpha'}_{x_0} + \underbrace{\int_{T}^{t-t_0} x(\alpha')\, d\alpha'}_{y(t-t_0)}$$

$$= y(t-t_0) + K \quad , K \neq 0$$

NON È STAZIONARIO

3) STABILITÀ BIBO

$$|x(t)| \leq M \quad \forall t$$

$$\Downarrow$$

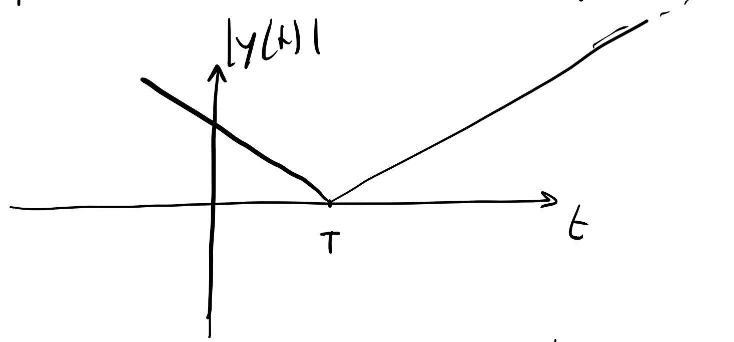
$$|y(t)| \leq K \quad \forall t$$

$$|y(t)| = \left| \int_T^t x(\alpha)\, d\alpha \right|$$

esempio

$$x(\alpha) = M' < M$$

$$|y(t)| = \left| \int_T^t M'\, d\alpha \right| = \left| M'(t-T) \right|$$ diverge



ho trovato un caso per cui la STABILITÀ BIBO non è verificata $\Rightarrow$ questo basta per concludere che il sistema non è STABILE BIBO

4) MEMORIA

·) senza memoria $\Rightarrow$ $y(t) = T[x(\alpha);\ \alpha = t]$

$$y(t) = \int_T^t x(\alpha)\, d\alpha$$

y all'istante "t" dipende da valori dell'ingresso ad istanti anche diversi da "t"

IL SISTEMA HA MEMORIA

ESERCIZIO

$$y(t) = x^2(t) + \frac{d}{dt} x(t)$$

1) LINEARITÀ X
2) STAZIONARIETÀ ✓
3) STABILITÀ BIBO X
4) MEMORIA

Svolgimento

1) LINEARITÀ

$$x(t) = a\, x_1(t) + b\, x_2(t)$$

$$y(t) = \left[a\, x_1(t) + b\, x_2(t)\right]^2 + \frac{d}{dt}\left[a\, x_1(t) + b\, x_2(t)\right]$$

$$= a^2 x_1^2(t) + b^2 x_2^2(t) + 2ab\, x_1(t)\, x_2(t) + a \frac{d}{dt} x_1(t) + b \frac{d}{dt} x_2(t) \neq a\, T[x_1(t)] + b\, T[x_2(t)]$$

NON È LINEARE

2) STAZIONARIETÀ

$$y(t) = T[x(t)]$$

$$y(t-t_0) \overset{?}{=} \underbrace{T[x(t-t_0)]}$$

$$x^2(t-t_0) + \frac{d}{dt}x(t-t_0) = y(t-t_0)$$

$$y(t-t_0) = x^2(t-t_0) + \frac{d}{dt}x(t-t_0)$$

IL SISTEMA È STAZIONARIO

3) STABILITÀ BIBO

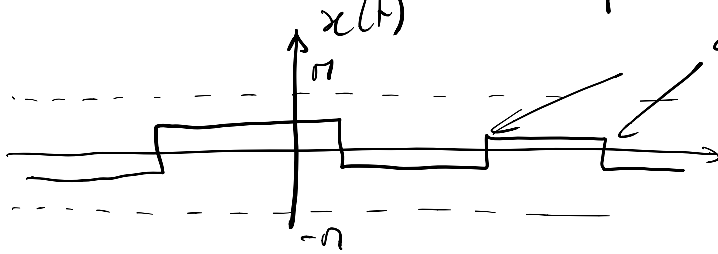
$$|x(t)| \leq M \quad \forall t$$

$$|x^2(t)| \leq M^2 \quad \forall t$$

$$|x(t)| \leq M$$

$$\frac{d}{dt}x(t)$$

esempio



discontinuità di prima specie

$$\frac{d}{dt}x(t) \to \infty$$ in corrisp. delle disc.

⇒ IL SISTEMA NON E' STABILE BIBO

4) MEMORIA

$$y(t) = x^2(t) + \frac{d}{dt}x(t)$$

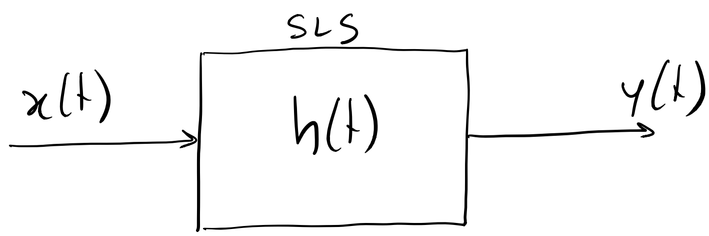
dipende solo dall'istante "t"

dipende solo dall'istante "t"

$$\frac{d}{dt}x(t) \triangleq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

IL SISTEMA NON HA MEMORIA

⇒ RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN SLS



$$x(t) = e^{j2\pi f t} = \cos(2\pi f t) + j\sin(2\pi f t)$$

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f \tau}\, h(t-\tau)\, d\tau \qquad t - \tau = \tau'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f(t-\tau')} h(\tau')\, d\tau'$$

$$= e^{j2\pi f t} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau') e^{-j2\pi f \tau'} d\tau'}_{H(f)} = H(f)\, e^{j2\pi f t} = y(t)$$

$$H(f) \triangleq TCF[h(t)]$$

$$= H(f)\, x(t)$$

1) $H(f) \triangleq TCF[h(t)]$

2) $H(f) \triangleq \left. \dfrac{y(t)}{x(t)} \right|_{x(t) = e^{j2\pi f t}}$

3) $H(f) \triangleq \dfrac{Y(f)}{X(f)}$

TRE DEFINIZIONI DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

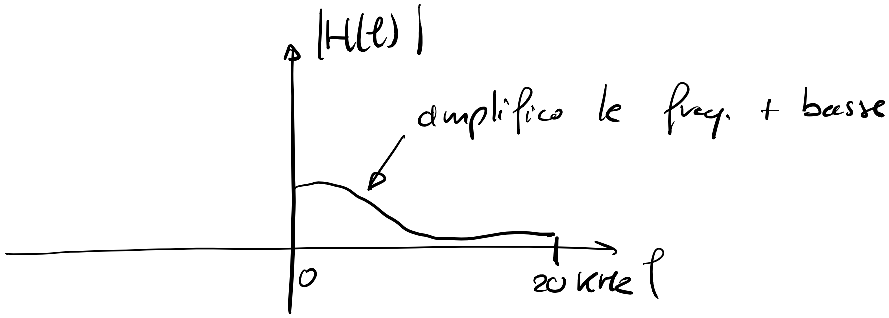
$$Y(f) = X(f)\, H(f)$$

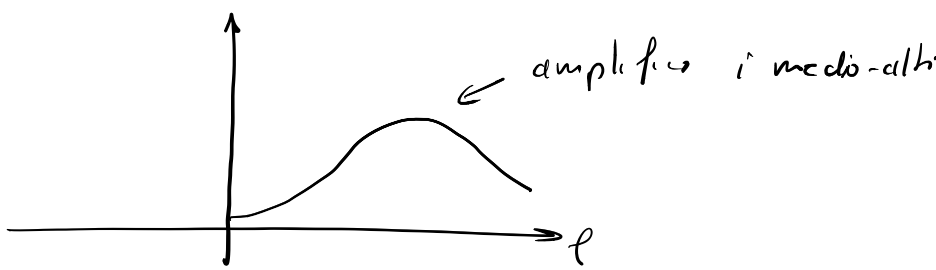
$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

RISPOSTA DI AMPIEZZA E FASE

$$H(f) \rightarrow \begin{cases} A(f) = |H(f)| \\ \varphi(f) = \angle H(f) \end{cases}$$

$$|Y(f)| = |X(f)\, H(f)| = |X(f)|\,|H(f)|$$





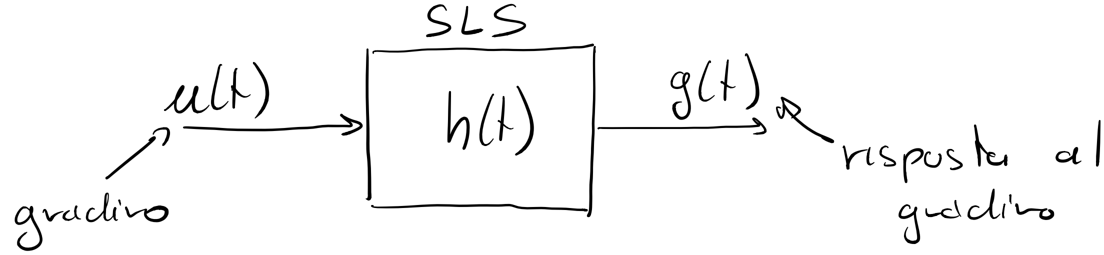
$$\angle Y(f) = \angle X(f)\, H(f) = \angle X(f) + \angle H(f)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccc} y(t) = & x(t) & \otimes & h(t) \\ \uparrow \text{ATCF} & \downarrow \text{TCF} & & \downarrow \text{TCF} \\ Y(f) \leftarrow & X(f) & \cdot & H(f) \end{array}$$

II^a strada per calcolare l'uscita $y(t)$

-) RISPOSTA AL GRADINO



$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\alpha)\, d\alpha$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \qquad t-\tau = \tau'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau')\, h(\tau')\, d\tau'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau')\, u(t-\tau')\, d\tau' = \int_{-\infty}^{t} h(\tau')\, d\tau'$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau')\, d\tau$$ è la primitiva della risposta impulsiva

$$\Rightarrow h(t) = \frac{d}{dt} g(t)$$

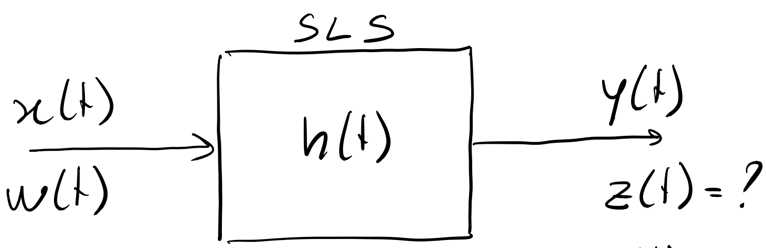
FILTRO LINEARE E STAZIONARIO

||

SLS

PROPRIETÀ DEI FILTRI LIN. E STAZ.

·) INTEGRAZIONE



$$z(t) = w(t) \otimes h(t)$$

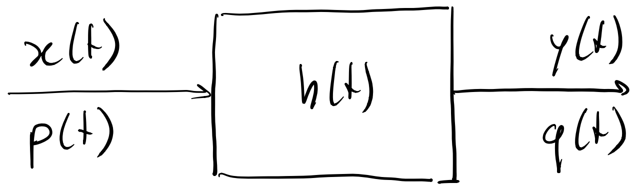
$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha = x(t) \otimes u(t) = u(t) \otimes x(t)$$

$$z(t) = w(t) \otimes h(t) = \left[u(t) \otimes x(t) \right] \otimes h(t)$$

$$= u(t) \otimes \underbrace{\left[x(t) \otimes h(t) \right]}_{y(t)} = u(t) \otimes y(t)$$

$$\boxed{z(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\alpha)\, d\alpha}$$

-) DERIVAZIONE



$$p(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

$$\boxed{q(t) = p(t) \otimes h(t) = \frac{d}{dt} y(t)}$$

Dim.

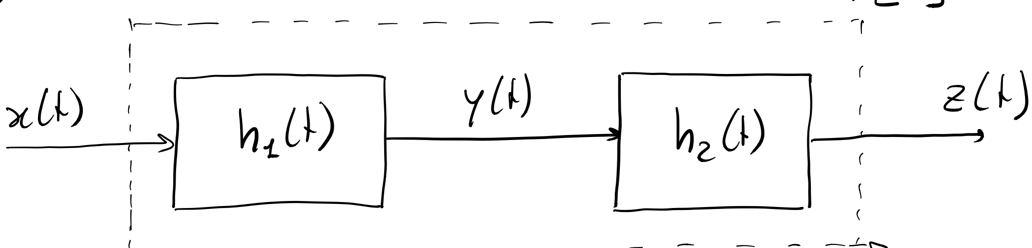
$$p(t) = \frac{d}{dt} x(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\alpha)\, d\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$q(t) = \frac{d}{dt} y(t) \Leftarrow \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} q(\alpha)\, d\alpha$$

-) CASCATA DI SLS

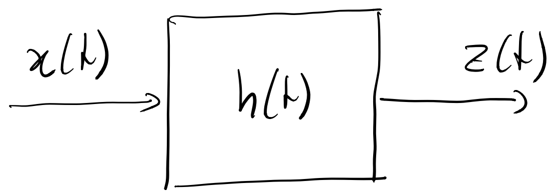
$T[\cdot] = ?$



macro-sistema "cascata di due SLS"

$$z(t) = y(t) \otimes h_2(t) = [x(t) \otimes h_1(t)] \otimes h_2(t)$$

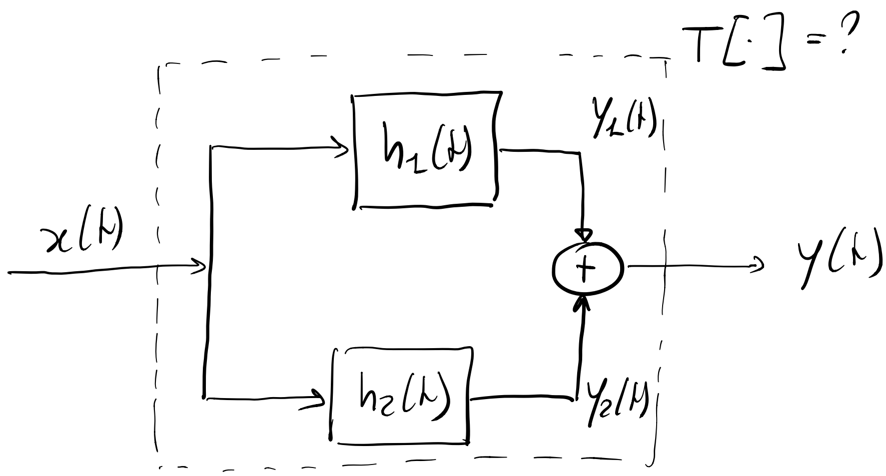
$$= x(t) \otimes \underbrace{\left[h_1(t) \otimes h_2(t) \right]}_{h(t)} = x(t) \otimes h(t) = z(t)$$



$$h(t) \triangleq h_1(t) \otimes h_2(t) \qquad \text{SLS equivalente}$$

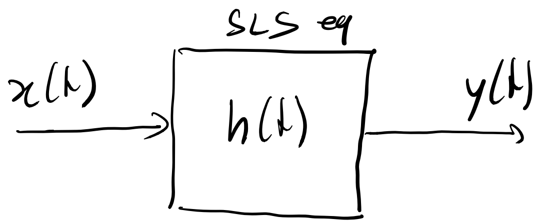
$$H(f) = H_1(f)\, H_2(f)$$

-) PARALLELO DI SLS



$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = x(t) \otimes h_1(t) + x(t) \otimes h_2(t)$$

$$= x(t) \otimes \underbrace{\left[h_1(t) + h_2(t) \right]}_{h(t)} = x(t) \otimes h(t) = y(t)$$



$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

$$H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$