28-02-2023

Ripasso Numeri Complessi

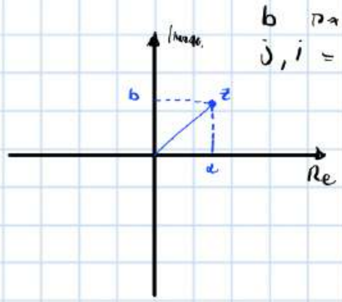
$z \in \mathbb{C}$

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA

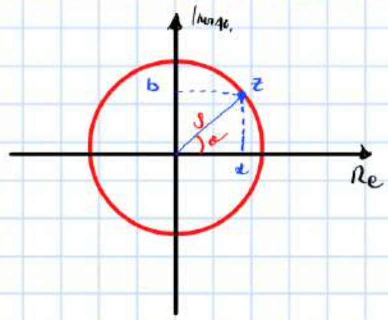
$z = a + jb$ con a parte reale $\Rightarrow a = Re\{z\}$

b parte immaginaria $\Rightarrow b = Img\{z\}$

$j, i = \sqrt{-1}$



RAPPRESENTAZIONE POLARE



$z = \rho e^{j\theta}$

ρ : modulo di z $\rho = |z|$

θ = argomento(z)

Relazioni:

- $|z|^2 = z \cdot z^* = (a+jb)(a-jb) = a^2 \cancel{-jab} \cancel{+jab} - j^2 b^2 = a^2 + b^2$

  ↳ z complesso coniugato

  $z^* = a - jb = \rho e^{-j\theta}$

- $z = \rho e^{j\theta} = a + jb \Rightarrow a = \rho \cos\theta$, $b = \rho\,\text{sen}\,\theta$

  $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$

  $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\rho \sin\theta}{\rho \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

Operazioni:

1) Somma / Differenza

$z_1 = a_1 + jb_1$ $z_2 = a_2 + jb_2$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$

$z_1 + z_2 = \rho_1 e^{j\theta_1} + \rho_2 e^{j\theta_2} \neq (\rho_1 + \rho_2) e^{j(\theta_1+\theta_2)}$ NO

2) Prodotto

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1 a_2 + j a_1 b_2 + j b_1 a_2 - b_1 b_2$

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot e^{j\theta_1} \cdot \rho_2 e^{j\theta_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{j(\theta_1+\theta_2)}$

3) Divisione

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{a_2^2 + b_2^2}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{FORMULE DI EULERO} \\ e^{\pm j\theta} = \cos(\theta) \pm j\,\text{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}\end{array}}$$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta = \sin\alpha \sin\beta$

$\sin(\alpha \pm \beta) = ?$

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

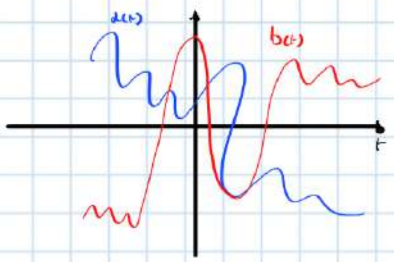
$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$

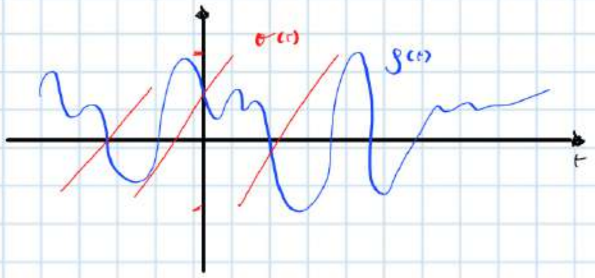
Segnali

in ogni momento so come è fatto il segnale

Noi nel corso avremo segnali deterministici complessi descritti da funzioni analitiche complesse: $z(t) = \{\mathbb{C} = a(t) + jb(t)\}$

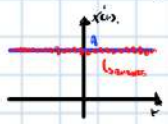
Tali saranno rappresentabili in cartesiano come somma delle parti o in forma polare.



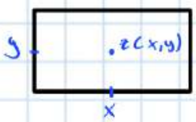


Esempio di un segnale deterministico

La corrente? No, perché i dispositivi fanno rumore, hanno dei disturbi; parliamo con un generatore di tensione costante ha dei cambiamenti del segnale dovuti al rumore.



Quindi tutti i segnali in natura sono aleatori e non deterministici. Tuttavia la buona approssimazione del segnale è deterministico. Ovviamente se non ho un disturbo aleatorio è un problema.



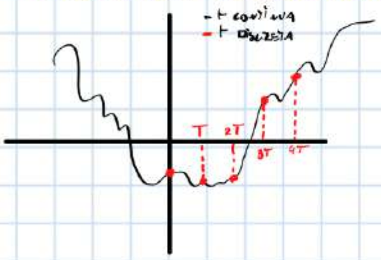
Un segnale può essere anche spaziale, ad esempio il proiettore ha due variabili nello spazio: $z(x,y)$, se la lavagna è in bianco e nero avrò che ogni punto può essere acceso o spento. Preso un istante, il segnale è deterministico. Se scrivo $z(x,y,t)$, ovvero un video ovvero una sequenza di immagini con frequenza ≥ 24 frame al minuto

Quindi possiamo dedurre che:

"DEF" Un segnale è tutto ciò che porta informazione

I segnali si possono categorizzare in 4 categorie, prima di esplicitarle vediamo da dove deriviamo: vi sono essenzialmente due variazioni possibili di avere un segnale $x(t)$ e:

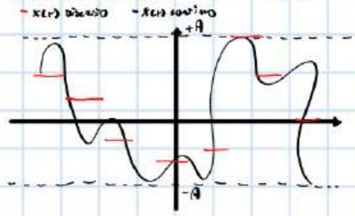
Concentriamoci sulla variabile t



Essa può essere:

- $t \in \mathbb{R}$ variabile continua
- $t \in \mathbb{Z}$ variabile discreta, anche indicata con $t = nT$ con $T \in \mathbb{R}$ = tempo campionamento segnale

Concentriamoci su $x(t)$



Anche $x(t)$ a sua volta può essere:

- $x(t)$ continuo
- $x(t)$ discreto

Possiamo quindi avere combinazioni dei due casi, un esempio è il semaforo ... Si classificano quindi i segnali sulla base di queste casistiche:

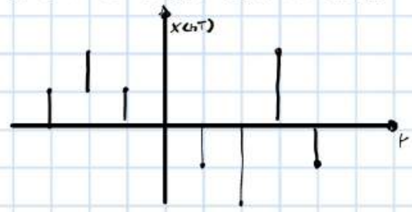
$x(t)$ \ t	Continua	Discreta
Continua	Analogico	Discreto (sequenza)
Discreta	Quantizzato	Binario

Analogico

Ad esempio la voce, come analogico acustico

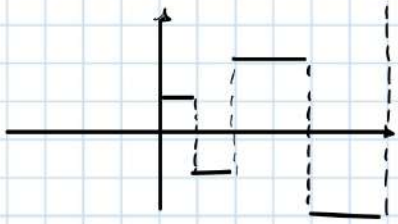
Discreto

Ottenuto dal campionamento dell'analogico, è il comportamento del convertitore analogico/digitale



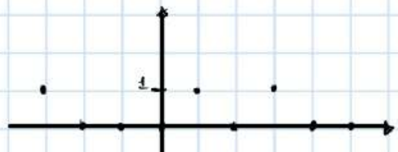
Quantizzato

Ad esempio il semaforo

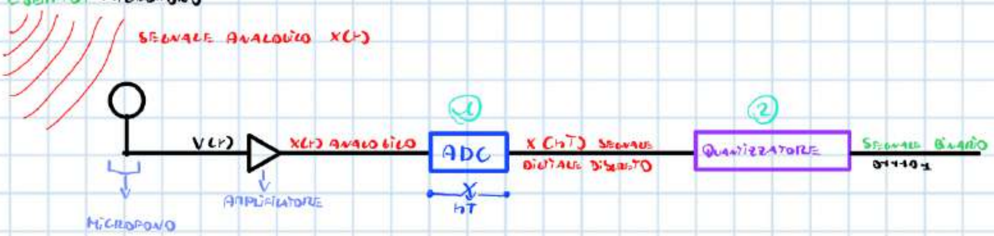


Binario

È letteralmente una stringa di bit

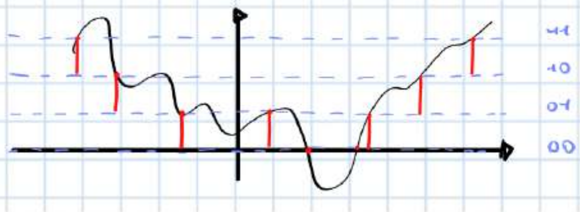


Esempio: Microfono



Il microfono è un trasduttore, traduce un segnale acustico in uno elettrico, tale passaggio avviene in varie fasi:

1. Il segnale analogico passa da un convertitore analogico-digitale (Analogic Digital Converter), essenzialmente è un interruttore che si apre e si chiude generando una sequenza (N.B. ovvero un segnale discreto)
2. Il quantizzatore rappresenta su un numero finito di livelli il segnale, ovviamente avrò bisogno di più livelli per avere una traduzione precisa, per passare al binario basta assegnare ad ogni livello un id in bit (11, 10, 00, 01 ...)



Nota L'unico che causa distorsione al segnale è il quantizzatore (pensa al fatto che se è 1,5 diventa 2); l'ADC invece, se ben dimensionato, non distorce il segnale, è stato dimostrato che l'input dell'ADC e l'output sono teoricamente identici (e praticamente simili) se $\frac{1}{T} \geq 2B$. Ma ci torneremo.
↳ Banda

02-03-2022

Segnali Analogici

Noi ci concentreremo sui segnali analogici, fatti

$\frac{1}{T} \geq 2B$ Condizione di Nyquist

Introduciamo delle quantità

Avendo il seguente circuito avremo una potenza istantanea data da:

$$\frac{P(t)}{R} = i^2(t)$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} P(t)\,dt$$

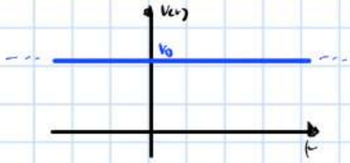
$$P_x(t) = x^2(t) \quad \text{con } x(t) \in \mathbb{R}$$

$$P_x(t) = |x^2(t)| \quad \text{con } x(t) \in \mathbb{C}$$

$$E_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(t)\,dt \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt$$

Per analogia posso scrivere la potenza istantanea di un segnale. Allo stesso modo scrivo l'energia, entrambe sono definizioni

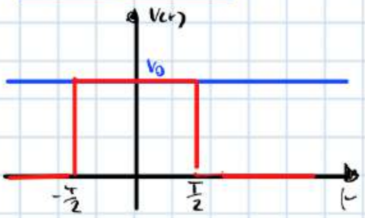
Nella realtà l'energia è finita, ma in realtà con alcuni tipi di segnali ciò non avviene, vediamo un esempio, prendiamo un generatore costante di tensione. Calcolandone l'energia viene infinito.



$$E_V = \int_{-\infty}^{\infty} |V(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} V_0^2\,dt = \infty$$

Tuttavia un generatore reale non starà mai attivo in eterno, quindi non avrà energia infinita. => prima o poi smetterà di funzionare. L'approssimazione è buona per tempi molto piccoli. Per evitare comunque tutto questo viene inserito il concetto di Potenza media.

Potenza Media



Definisco il mio intervallo di osservazione, attraverso un segnale troncato V_T in qualsiasi intervallo

$$V_T(t) = \begin{cases} V(t) & -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Quindi calcolo la potenza media del segnale troncato, da questo ottengo la potenza media del segnale non troncato utilizzando il limite

$$P_{V_T} = \frac{E_{V_T}}{T} \qquad P_V = \lim_{T\to\infty} \frac{E_{V_T}}{T}$$

T → tempo di osservazione

Calcoliamo quindi la potenza media del generatore che abbiamo visto prima:

$$P_V = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-T/2}^{T/2} V_0^2}{T} = \frac{1}{\cancel{T}} \cdot V_0^2 \cancel{T} = V_0^2$$

Quindi un segnale a energia infinita ha potenza media finita!

I nostri segnali si dividono quindi in due categorie

- $x(t) \in \mathbb{C}$ $\quad E_x < \infty$ $\quad P_x = 0$ (i segnali reali appartengono a questa categoria, dato che devono avere E finita)
- $x(t) \in \mathbb{C}$ $\quad E_x = \infty$ $\quad P_x < \infty$

Definiamo adesso altre due grandezze:

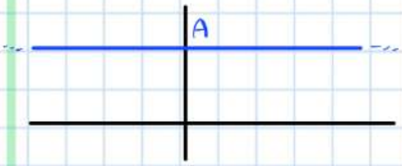
Valore Efficace: $x_{eff} \triangleq \sqrt{P_x}$

Valore Medio: $x_m \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt$

Nota come se hai un segnale sinusoidale la potenza media è equivalente a un generatore costante.

Esempio!

Applichiamo quanto visto a un segnale



$E_x = \infty$

$X_{eff} = |A|$

$X_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} A\, dt = \frac{1}{\cancel{T}} A \cancel{T} = A$

Ampiezza ← pulsazione ↑ → frequenza (Hz)

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

fase (rad) ←

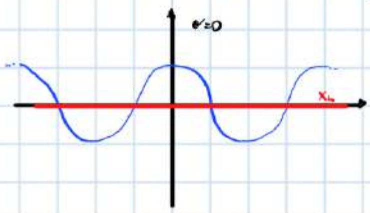
- $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(2\pi f_0 t + \theta)\, dt = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\theta)}{2} = \infty$ (tende a ∞; oscilla tende a 0)

- $P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\frac{A^2 T}{2} + \frac{A^2}{2}\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \cos(4\pi f_0 t + 2\theta)\, dt}_{\frac{1}{4\pi f_0}\sin(4\pi f_0 t + 2\theta)\Big|_{-T/2}^{T/2}}\right) = \frac{A^2}{2} + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\frac{A^2}{2} \cdot K = \frac{A^2}{2}$

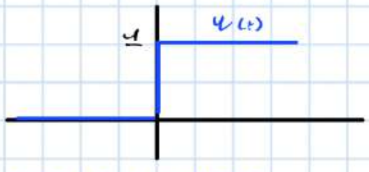
$\Rightarrow$ oscilla tra $\pm \frac{1}{4\pi f_0}$ $\Rightarrow -\frac{1}{4\pi f_0} \le K \le \frac{1}{4\pi f_0}$

- $X_{eff} = \sqrt{P_x} = \frac{A}{\sqrt{2}}$

- $X_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos(2\pi f_0 t + \theta)\, dt = \emptyset$



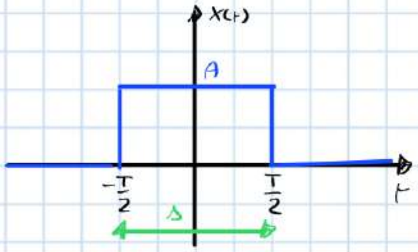
Segnali Particolari:



Gradino unitario

N.B. il Delta di Dirac è la sua derivata

$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$



Funzione rettangolare

$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

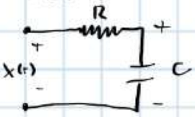
[la useremo spesso]

Trasformata di Fourier: Preludio

Al momento noi dividiamo i segnali in:

- Periodici es: sin x o cos x → si usa Trasformata Serie di Fourier
- Aperiodico (funzione rettangolo) → Trasformata Continua di Fourier

Considerando l'utilità delle trasformate, possiamo di avere



Solitamente ad elettrotecnica risolvevo il circuito con i fasori:

$x(t) = f(\dot{X}) = \Re\{\dot{X} e^{j2\pi f_0 t}\}$

Quindi la tensione di uscita sarà uguale a

$\dot{Y} = \frac{Z_c}{R + Z_c}\dot{X}$ con Z_c impedenza del condensatore.

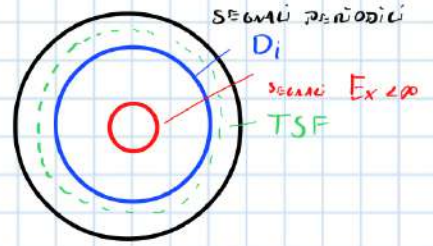
Questo circuito è stazionario e lineare, e data la seconda posso usare il P. di Sovrapp. degli effetti: quindi posso dare in ingresso al circuito un segnale formato da la somma di altri segnali sinusoidali con frequenza multiplo intero di una frequenza fondamentale f_0

$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_N(t)$

Sarebbe bello fare la stessa cosa con tutti i segnali periodici! Ci viene in aiuto la Trasformata Serie di Fourier.

Trasformata Serie di Fourier

Condizione segnale periodico
$x(t) = x(t+T_0)$



[Condizioni di utilizzo trasformata — non è interessato molto — per vedere che non si applica su tutto]

La trasformata ci dice che per un segnale periodico:

$$(1)\quad \boxed{x(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi f_0 k t}}$$

con periodo T e $f_0 = \frac{1}{T}$

Mi sono ridotto a trasformare un segnale in una somma di sen e cos pesati (potenzialmente infinita) dai coefficienti della serie di Fourier ($X_k \in \mathbb{C}$). La (1) è un'equazione di sintesi (trasformata di serie), infatti dati i valori posso fare la trasformata.
Mentre vi è la (2) che è detta equazione di analisi (antitrasformata di serie) per calcolare gli X_k.
Per ogni $x(t)$ esiste una ed una sola trasformata di Fourier.

Ricaviamoci la (2), partiamo dal seguente integrale per un generico valore h piccolo:

$$\frac{1}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi h f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_k X_k e^{j2\pi(k-h) f_0 t}\, dt = \sum_k \frac{X_k}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(k-h)f_0 t}\, dt$$

In tutto il corso potremo scambiare sommatoria e serie sempre, dato che la sommatoria converge sempre per le HP di Fourier al segnale.

$f_0 \cdot T_0 = 1$

Integro l'esponenziale

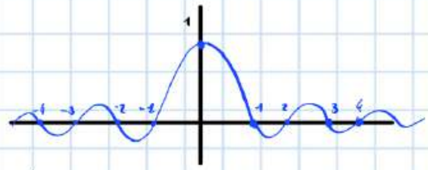
$$\overset{1}{=} \sum_k \frac{X_k}{T_0} \frac{1}{j2\pi(k-h)f_0} e^{j2\pi(k-h)f_0 t}\Big|_{-T_0/2}^{T_0/2} = \sum_k \frac{X_k}{T_0}\cdot\frac{1}{j2\pi(k-h)f_0}\left(e^{j\pi(k-h)} - e^{-j\pi(k-h)}\right) \overset{\text{usando Eulero}}{=}$$

$$= \sum_k \frac{X_k}{\cancel{T_0}} \frac{\operatorname{sen}(\pi(k-h))}{\pi(k-h)\cancel{f_0}} = \sum_k X_k \operatorname{sinc}(k-h) = \begin{cases} 0 & \text{per ogni valore } \forall k \neq h \\ X_h & \text{per } k = h \end{cases}$$

Essendo k e h interi sfrutto il fatto che si annulla in certi punti, quindi se k va da $-\infty$ a $+\infty$

Definiamo la funzione

$$\operatorname{sinc}(x) \triangleq \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}$$



Vale 1 in zero e si annulla per ogni $x = k$

Quindi l'equazione di analisi sarà quella scritta inizialmente (con $h = k$)

$$(2)\quad \boxed{X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt}$$

03-03-2023

In sintesi possiamo descrivere un segnale $x(t)$ come

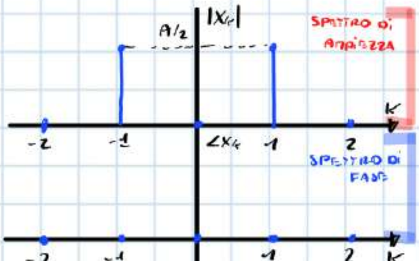
$$x(t) = x(t+T_0) = \underbrace{\boxed{\sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t}}}_{\text{(2) sintesi}} \quad \text{con } f_0 = \frac{1}{T_0} \quad e \quad \underbrace{\boxed{X_h = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi h f_0 t}\, dt}}_{\text{(1) analisi}}$$

Nota Ricorda che $X_k \in \mathbb{C}$ quindi $X_k = |X_k|\, e^{j\angle X_k}$ (simbolo che indica la fase), ove $|X_k|$ è l'ampiezza e $\angle X_k$ è la fase. Nella forma polare $|X_k| = \rho$ e $\angle X_k = \theta$.

Si osserva che attraverso la relazione $x(t) \rightleftarrows X_k$ (corrispondenza biunivoca), si nota che è necessario avere sia la fase che il modulo per identificare univocamente un segnale. Convinciamoci di questo con i prossimi esempi.

Esempio: Calcoliamo i coefficienti del segnale $x(t)$
$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \rightleftarrows X_k$

Per svolgere l'esercizio dovrei usare l'equazione di analisi (1), tuttavia avendo di per sé un segnale periodico posso sfruttare il fatto di trasformare semplicemente il segnale nella stessa forma (1) attraverso le formule di Eulero.



$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \overset{\text{Eulero}}{=} \frac{A}{2}\left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right) = \frac{A}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j2\pi f_0 t}$$

$\Rightarrow$ Si nota subito che è già nella forma $\sum_k X_k e^{j2\pi f_0 k t}$ a patto di definire gli X_k come:

$$X_k = \begin{cases} A/2 & k = 1 \\ A/2 & k = -1 \\ \emptyset & \forall k \neq \pm 1 \end{cases}$$

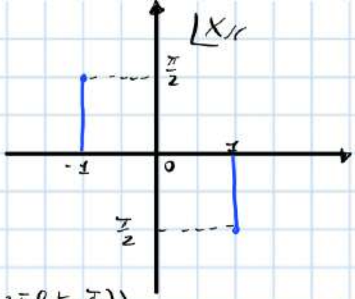
$\Rightarrow$ in questo modo tolgo tutti gli altri termini

A questo punto mi è possibile disegnare lo Spettro di Ampiezza e di Fase, avendo in ordinata il rispettivo valore e in ascissa i valori di K.
Lo spettro (inteso come coppia Ampiezza-Fase) definisce univocamente il segnale, ad ogni componente [multiplo della frequenza fondamentale (essenzialmente $\forall k$)] della serie di Fourier corrisponde una stanghetta nello spettro. Infatti nota come la fase del cos sia 0 sia nel $x(t)$ sia nello spettro di fase $\forall k$, mentre nello spettro di ampiezza abbiamo gli X_k definiti con $A/2$ per $K = \pm 1$.

N.B. Lo spettro di Fase ha simmetria dispari, mentre lo spettro di ampiezza ha simmetria pari. Per ricordarlo pensa al seno. Data questa simmetria, nella pratica si riporta soltanto la parte per $k \geq 0$

Vediamo la differenza con il segnale del sen

$$x(t) = A\,sen(2\pi f_0 t) = A\,\frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} = \frac{A}{2j}\left(e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}\right)$$

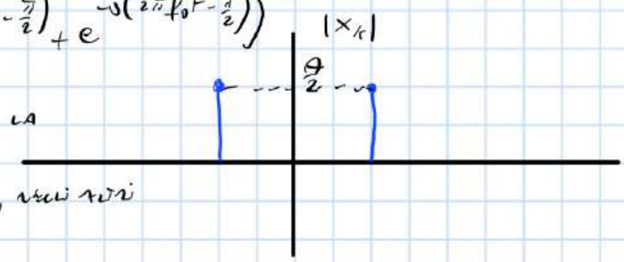


$$\Rightarrow x_1 = \frac{A}{2j} \qquad x_2 = -\frac{A}{2j}$$

Foto telefono x pass. ultimi

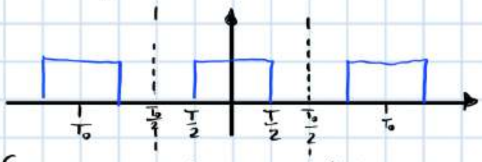
Alternativa:

$$x(t) = A\,sen(2\pi f_0 t) = A\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{A}{2}\left(e^{j\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)}\right)$$



Si nota come gli spettri di ampiezza siano uguali, ma la fase sia diversa. => Necessitiamo di entrambi gli spettri.
Per i segnali sinusoidali possiamo usare questo trucco, negli altri casi no!

Facciamo adesso un treno di segnali:



$x_R(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$ durata, periodo

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_R(t - nT_0)$

ove T = durata e T_0 = periodo con $T \leq T_0$ altrimenti non funzionerebbe nulla. Il caso limite è $T = T_0$ dove il segnale è costante, e quindi avremmo solamente $f = 0$ => non più Fourier

Si periodizza la funzione ritardando creando un segnale periodico che si ripete ogni T_0. Allo stesso modo da un segnale periodico mandando a infinito il periodo ne ottengo il segnale aperiodico (tolgo il periodo).

Calcoliamone quindi la serie di Fourier, usando la (2)

(2)
$$\boxed{X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt} \Rightarrow$$

$$\frac{A}{T_0}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{A}{T_0}\left.\frac{e^{-j2\pi k f_0 t}}{-2j\pi k f_0}\right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{A}{T_0}\,\frac{e^{-j\pi k f_0 T} - e^{+j\pi k f_0 T}}{-2j\pi k f_0} = \frac{-\cancel{j2}\,sen(\pi k f_0 T)}{-\cancel{j2}\,\pi k f_0 T}\cdot T \cdot \frac{A}{T_0} = \frac{AT}{T_0}\,sinc\left(k\frac{T}{T_0}\right)$$

Definisco un coefficiente δ tale $0 < \delta = \frac{T}{T_0} < 1$ e scrivo infine $X_k = A\delta\, sinc(k\delta)$

Complementi:

$$x(t) = (2) = \dots + x_{-2}\, e^{j2\pi(-2)f_0 t} + X_{-1}\, e^{j2\pi(-1)f_0 t} + X_0 + X_1\, e^{j2\pi(+1)f_0 t} + X_2\, e^{j2\pi(+2)f_0 t} + \dots$$

e.s. $x_1 = \frac{A}{2j} = \frac{Aj}{2j^2} = -\frac{A}{2}j = -\frac{A}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}$

Apre Matlab!

Allargando To si ha che lo spettro si dilata, in quanto varia più velocemente => Un segnale che varia rapidamente nel tempo, ha uno spettro più esteso frequenzialmente, se invece varia poco sarà più ristretto frequenzialmente.
Se un segnale ha uno spettro esteso lo devo campionare più rapidamente. ($\frac{1}{T} \geq 2B$ => lo vedremo meglio poi)
In 0 troviamo il valore medio X_m.

T_0 piccolo => varia poco → $T_0 = T$ è costante, non varia

T_0 grande => varia molto → lontano da una retta.

=> servono più coefficienti di serie per sintetizzare un segnale che varia molto velocemente

7-03-2023

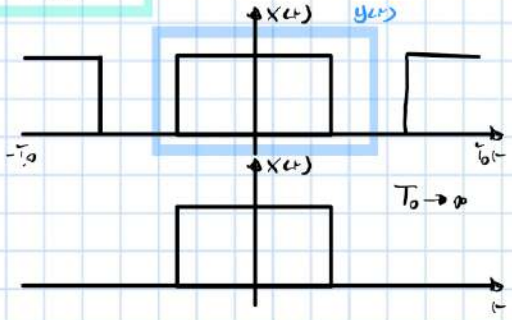
Segnali Aperiodici

I segnali aperiodici sono quelli esistenti in natura, sono quelli che non si ripetono nel tempo.

$x(t) = x(t+t_0)$ → segnale periodico

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{j2\pi k f_0 t}$ sintesi $\qquad x_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$ analisi

x_k e kf_0 sono le armoniche nella trasformata di Fourier

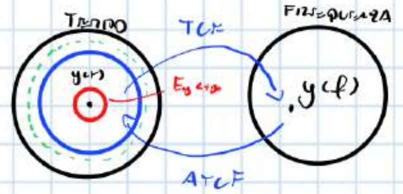


Noi possiamo trasformare un segnale periodico in uno aperiodico grazie al limite.

$$y(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \sum_{h} y(t - t_0)$$

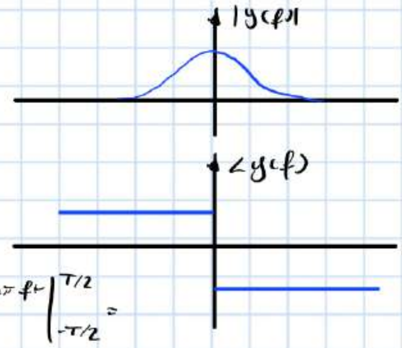
Facendo questa operazione al limite passo alla trasformata di Fourier continua

$$\boxed{\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \qquad \text{Analisi} \\ y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(f)\, e^{j2\pi f t}\, df \qquad \text{Sintesi} \end{aligned}}$$



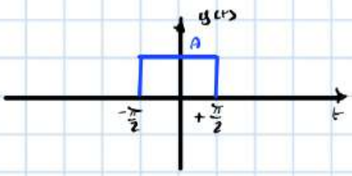
Al posto la relazione al posto è $y(t) \rightleftharpoons Y(f) \in \mathbb{C}$. Come prima $Y(f) \in \mathbb{C}$, quindi avrà modulo e fase: $Y(f) = |Y(f)| e^{j\angle Y(f)}$. Sempre con modulo a simmetria pari e fase a simmetria dispari.

$$Y(-f) = Y^*(f)$$ simmetria pari nel modulo // dispari nella fase



La trasformata continua di Fourier ha una serie di condizioni per esistere esatta, tali sono simili a quella periodica, ma tanto a noi interessano soltanto i segnali con energia finita

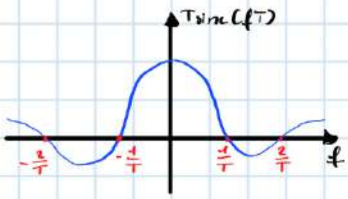
Esempio: segnale rect, calcoliamo la trasformata.



$$y(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons Y(f)$$

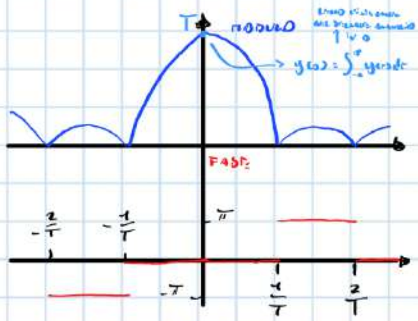
$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t}\, dt = \frac{1}{-j2\pi f}\, e^{-j2\pi f t}\Big|_{-T/2}^{T/2} =$$

$$= \frac{\cancel{-2j}\, \mathrm{sen}(\pi f T)}{\cancel{-j2}\pi f} \overset{\text{moltiplico e divido per } T}{=} \frac{\mathrm{sen}(\pi f T)}{\pi f T} \cdot T = T\, \mathrm{sinc}(fT)$$



$$\Rightarrow \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

Nota è un segnale continuo nella variabile f, a differenza degli x_k che erano discreti. Comunque questa trasformata la devi sapere bene.



Vediamo adesso il suo spettrogramma. Osserviamo che essendo un segnale continuo si annulla nei multipli di k.

Un segnale che ha durata maggiore ha uno spettro più contratto, se ho T piccolo lo spettro si allarga. Lo abbiamo visto la scorsa volta con Matlab. Un'altra osservazione è la relazione tra la durata finita di un segnale e il suo spettro: se io ho un segnale di durata finita $(T < \infty)$, ma il suo spettro è infinito. Viceversa se un segnale ha spettro finito, il segnale ha durata infinita. Quindi in sintesi:

Osservazione 1:

Un segnale nel tempo ha durata inversamente proporzionale all'ampiezza dello spettro

Osservazione 2:

Durata segnale $< \infty$ ⟺ Durata spettro $= \infty$

Durata segnale $= \infty$ ⟺ Durata spettro $< \infty$

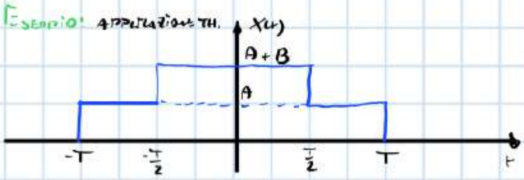
Teorema sulla TCF (trasfor. continua Fourier)

La TCF è lineare:

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \rightleftharpoons X(f) = a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f)$$

dim $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t))\, e^{-j2\pi f t}\, dt \overset{\text{linearità integrale}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} a_1 x_1(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} a_2 x_2(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f)$

Esempio: applicazione th.



$$x(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) + B\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$X(f) = A2T\,\mathrm{sinc}(2fT) + BT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

Teorema della Dualità

Prendiamo un segnale x(t) tale che

$x(t) \rightleftharpoons X(f)$ allora $X(t) \rightleftharpoons x(-f)$ — es: se ho la rect nel tempo, nella frequenza ho la sinc, se ho una sinc nel tempo avrò una rect nella frequenza.

dim: Noi sappiamo che:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Allora posso fare un cambio di variabile, sostituisco $\gamma = t$

$$\Rightarrow X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\gamma)\, e^{-j2\pi\gamma t}\, d\gamma$$

Ho bisogno di togliere il − per avere l'antitrasformata, quindi basta ricambiare variabile con $\gamma = -f$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(-f)\, e^{j2\pi f t}\, dt$$

Esempio: app. th su rect

$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow T\,\mathrm{sinc}(ft)$ $\quad T\,\mathrm{sinc}(tT) \Rightarrow \mathrm{rect}\left(-\frac{f}{T}\right) \overset{!}{\Longrightarrow} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$

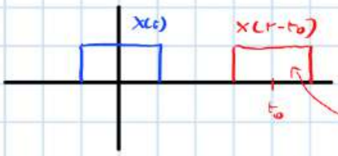
La funzione è pari quindi...

x rifare esempio di relazione inversa della trasformata, fallo all'incontrario!

NB. Nel corso troveremo spesso la sinc in un'altra forma: $B\,\mathrm{sinc}(Bt) \rightleftharpoons \mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$ in quanto quando cambi variabile devi invertire anche l'altra dimensione, dato che altrimenti dal punto di vista fisico non ha senso. Se inverto T ottengo B, che è una frequenza! Ovvero la banda.

Teorema del Ritardo

Avendo $x(t) \rightleftharpoons X(f)$ allora $x(t-t_0) \rightleftharpoons X(f)e^{-j2\pi f t_0}$



$-t_0$ è un ritardo

$+t_0$ è un anticipo e slitta a sx

$$X(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)\, e^{-j2\pi f t_0}$$

dim $\int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$ pongo $t - t_0 = t'$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\, e^{-j2\pi f(t'+t_0)}\, dt' = e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\, e^{-j2\pi f t'}\, dt'$$

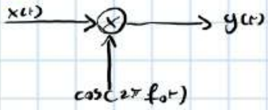
Il modulo quindi è invariato, avremo solo una fase sommata a quella esistente.

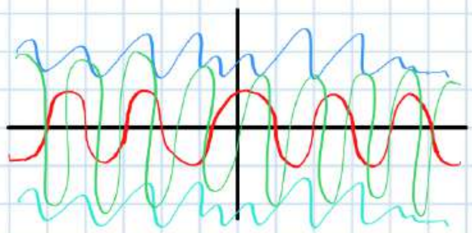
Teorema Modulazione Ampiezza

Avendo

$x(t) \rightleftharpoons X(f)$, e lo moltiplico (modulo il segnale) per un cos: $x(t)\cos(2\pi f_0 t)$ allora $x(t)\cos(2\pi f_0 t) \rightleftharpoons \dfrac{X(f-f_0) + X(f+f_0)}{2}$

Grafico per capire





Segnale x(t)

Segnale ribaltato

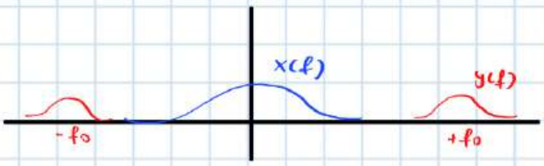
Coseno

Moltiplicazione dei segnali: y(t)

dim

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \underbrace{\left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right)}_{\text{cos con eulero}} e^{-j2\pi f t}\, dt = \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{2} e^{-j2\pi(f-f_0)t}\, dt}^{\frac{1}{2}X(f-f_0)} + \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{2} e^{-j2\pi(f+f_0)t}\, dt}^{\frac{1}{2}X(f+f_0)}$$

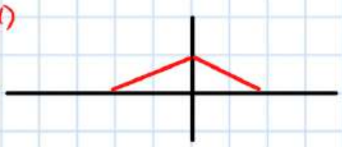
Applicazioni del teorema



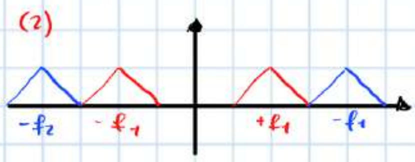
Questo è un risultato necessario per la trasmissione dei segnali su radio frequenza.

Se volessi trasmettere due segnali x_1 e x_2, se questi sono uguali io ricevitore riuscirei a vedere solo la somma dei due segnali (1) ⇒ indistinguibili. Invece io posso prendere il mio segnale e modularlo a frequenze diverse! (2)

(1)



(2)



Basta quindi differenziare il fattore moltiplicativo per distinguere i segnali. Nel dominio nel tempo avrei visto il grafico post teorema, dove una relazione del genere non è intuitiva.

⇒ È il fondamento della radio!

Il vantaggio di questo sistema è anche che posso cambiare facilmente la frequenza di un segnale cambiando il dominio. In crittografia potrei trasmettere a frequenze pseudo random, e chi riceve con la chiave dove deve cercare.

16-03-2023

Teorema della Derivazione

Dato un segnale analogico $x(t)$, supponiamo ammetta la trasformata di Fourier $X(f)$ allora:

HP $\quad x(t) \rightleftharpoons X(f)$ $\qquad$ TH $\quad \dfrac{dx(t)}{dt} \rightleftharpoons j2\pi f X(f)$

Ricorda:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

dim Vediamo cosa accade alla frequenza, dalle HP so che posso usare le eq di sintesi e analisi di Fourier:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \underset{\text{derivo a dx e a sx}}{\Longrightarrow} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \underset{\text{scambio}}{\Longrightarrow} \frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{j2\pi f\, X(f)}_{Y(f)} e^{j2\pi f t} df} \quad T(\omega)$$

Tale teorema implica che so calcolare la derivata nel dominio nel tempo come una semplice operazione algebrica detta unità nel dominio di Fourier. Quindi nella pratica faccio

$$x(t) \xrightarrow[\text{trasformata di Fourier}]{} X(f)\, j2\pi f \xrightarrow[\text{antitrasformata}]{} y(t)$$

Otteniamo quindi un discreto vantaggio nel passare di dominio!

Teorema dell'Integrazione

Dato un segnale analogico $x(t)$, supponiamo ammetta la trasformata di Fourier $X(f)$ allora:

HP $\quad x(t) \rightleftharpoons X(f)$ $\qquad$ TH $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(t) \rightleftharpoons \frac{1}{j2\pi f} X(f) \quad$ se $f \neq 0$

dim analogamente a prima

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha \underset{\text{derivo a sx e dx}}{\Longrightarrow} \frac{d}{dt} y(t) = \overbrace{\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha}^{x(t)} \underset{\text{applico il th della derivazione}}{\Longrightarrow} \underbrace{j2\pi f\, y(f) = x(f)}_{\text{passo in trasformata da ambo i lati}} \Rightarrow \boxed{y(f) = \frac{1}{j2\pi f} x(f)} \quad \text{CVD}$$

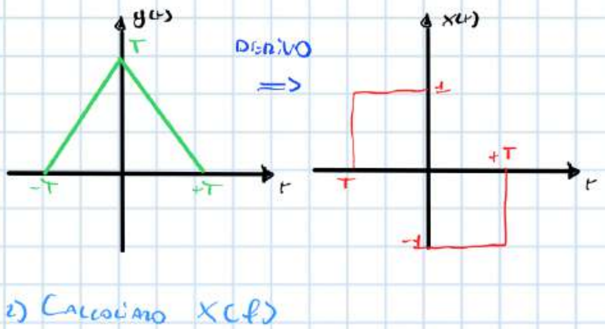
Condizioni necessarie per il TH:

Si osserva che la relazione finale è valida soltanto se:

- $f \neq 0$: in questo caso va tutto bene
- $f = 0$: abbiamo soltanto 3 modi per rendere vera la relazione
  - $x(0) = 0$
  - $y(t) = \int_{\infty}^{t} x(\alpha)d\alpha = 0$
  - $y(\infty) = 0$

  } alla fine indicano tutti la stessa condizione

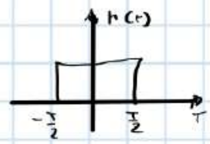
Esempio: deriviamo il segnale $y(t)$



1) Passiamo a Fourier (premessa)

$$y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-2j\pi f t} dt$$

Ma si nota dal grafico che la derivata è pari a due funzioni rettangolari, che sappiamo esprimere:



$$R(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

quindi deriviamo $y(t)$ e troviamo la trasformata di $x(t)$ e poi la riportiamo con il TH dell'integrazione

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) \rightleftharpoons X(f) \Rightarrow y(f) = \frac{1}{j2\pi f} X(f)$$

2) Calcoliamo $X(f)$

Determino la trasformata di $x(t)$ con il teorema del ritardo, sfruttando la conoscenza sulla funzione rettangolo. (Sappiamo che appare il rettangolo dall'osservazione grafica)

$$X(f) = R(f)e^{j\pi fT} - R(f)e^{-j\pi fT} = R(f)\,2j\,\mathrm{sen}(\pi fT) = 2jT\,\mathrm{sinc}(fT)\sin(\pi fT)$$

Nota

$$r\left(t+\frac{T_0}{2}\right) - r\left(t-\frac{T_0}{2}\right) \rightleftharpoons R(f)e^{-j2\pi f\left(\frac{T_0}{2}\right)}$$

Allora per trovare $y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} = \cancel{2j}T^2\sin(fT)\,\frac{\mathrm{sen}(\pi fT)}{j2\pi fT} = T^2\,\mathrm{sinc}^2(fT)$

Nota Come verifica dei calcoli qui vediamo se ti viene il fattore moltiplicativo alla funzione vista uguale alla funzione integrata in 0.

Ricezione di un segnale modulato: Demodulazione del segnale

Come faccio ad ascoltare i segnali modulati, come in radio. Un modo potrebbe essere avere un filtro che cancella tutti gli altri segnali => costoso per frequenze alte. Dobbiamo demodulare il segnale:

$x(t) = g(t)\cos(2\pi f_0 t)$

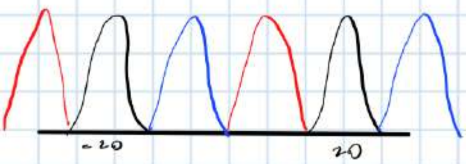
$y(t) = 2x(t)\cos(2\pi f_0 t) = g(t)\cos^2(2\pi f_0 t) = 2g(t)\left(\frac{1+\cos(2\pi f_0 t)}{\cancel{2}}\right) = \frac{g(t)}{\cancel{2}} + \frac{g(t)}{\cancel{2}}\cos(2\pi(2f_0)t)$

In frequenza:

$y(f) = \frac{G(f)}{\cancel{2}} = \frac{G(f-2f_0) + G(f+2f_0)}{\cancel{2}}$

N.B. Se demodulo con 2 volte il coseno tolgo il fratto 2

In questo modo ottengo il segnale alla frequenza zero => così posso costruire il filtro alla frequenza base che costa molto meno! Il vantaggio è il non dover creare un filtro per frequenze alte. Quando ho più di 2 segnali e demodulo, ottengo il segnale voluto in 0, ho le repliche del segnale stesso; mentre gli altri segnali non di interesse è come se venissero rimodulati (moltiplica per la frequenza da demodulare f_0)



- modulazione di 10
- modulazione vel. di 10

$y(t) = \underbrace{g(t)\cos(2\pi f t)}_{x_2(t)}\cos(2\pi f t)$

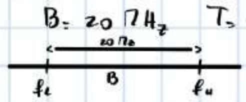
in frequenza:

$(f) = \frac{X_2(f-f_1) + X_2(f+f_1)}{2} \qquad X_2(f) = \frac{G(f-f_2) + G(f+f_2)}{2}$

Nella radio ci sono due demodulazioni, una intermedia e una finale!

Domanda: Ho 10 segnali distanziati in 20 MHz di 5 minuti, ammettiamo canale con ampiezza 2 Hz, quanti canali posso mettere in fila?

$B = 20\ MHz \quad T = 5\ min = 300\ s \Rightarrow$ Frequenza: $\frac{1}{T} = \frac{1}{300}\ Hz \qquad$ Quindi $\frac{B}{\frac{1}{T}} = 20\cdot 10^6\cdot 3\cdot 10^2 = 6\cdot 10^9$!



Applicazione del TH della modulazione nei Radar:

Come funziona un radar? Il radar emette onde elettromagnetiche che irradiano suoi ostacoli per ritornare indietro in modo da localizzarli. L'intervallo di tempo che intercorre tra l'andata e il ritorno

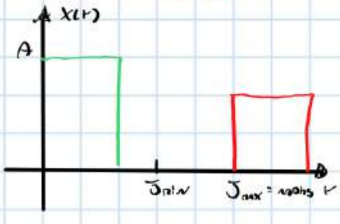
$$\tau = \frac{2d}{c}$$

d → distanza

c → velocità della luce

Il segnale di ritorno è più piccolo in quanto è molto attenuato a causa della dispersione nell'aria nel rimbalzo. Quindi calcola la distanza:

$$d = \frac{\tau c}{2}$$



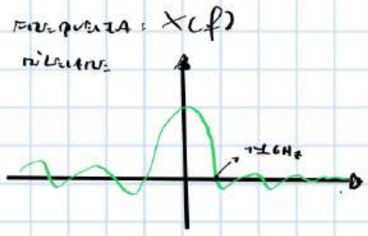
Cosa c'entra con il TH della modulazione? Il segnale $x(t)$ in frequenza: $X(f)$

Supponiamo di voler dimensionare il radar in modo da voler rilevare un ostacolo entro 15 m. Quindi al massimo τ_{max} (tempo massimo di ritorno) sarà:

$d_{max} = 15\ m$

$c = 3\cdot 10^8\ m/s$

$$\tau_{max} = \frac{2d_{max}}{c} = \frac{2\cdot 15}{3\cdot 10^8} = \frac{30}{3\cdot 10^8} = 10^{-7}\ s$$



Supponiamo anche un 5 minimo (causa di traffico per il parcheggio, posso non avere accuratezza del cm):

$$d_{min} = 15m \Rightarrow \mathcal{T}_{min} = 10 ns$$

Perché funzioni è necessario che $T << \mathcal{T}$, mettiamo che $T \sim 1 ns$. Quindi il mio segnale praticamente occupa 1 GHz e poi avrò le code. Perché il segnale non passi attraverso un ostacolo è necessario che sia nell'ordine delle 100 GHz, altrimenti non posso fare detection. (Per il wi-fi) Quindi devo usare il TH della modulazione per portarlo ad una frequenza di 100, 200, 300 Hz... In tal modo posso fare detection.

Perché aumentando la frequenza riesco ad ostacolarlo? La lunghezza d'onda $\lambda = \frac{c}{f_0}$, all'aumentare della frequenza λ diminuisce.

$$\lambda = \frac{c}{f_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^9} = 0,1 m$$

$f_0 = 3 GHz \quad \lambda = 0,1 m$

$f_0 = 30 GHz \quad \lambda = 0,01 m$

$f_0 = 300 GHz \quad \lambda = 0,001 m$

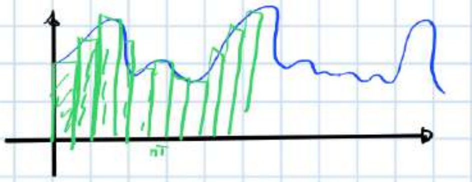
$f_0 = 3 THz \quad \lambda = 0,0001 m$

Se ho una λ piccola che si imbatte in un oggetto grande, il segnale non passa. Quindi devo paragonare i due ordini di grandezza. λ e la dimensione del materiale/ostacolo. Ad esempio anche le gocce di acqua ostacolano la trasmissione già da 300 GHz.

Calcolare la Trasformata di Fourier

Vediamo come farlo su Matlab:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{x(t)\, e^{-j2\pi f t}}^{x(t)}\, dt$$



Matlab non ha $x(t)$ (segnale analogico) ma può al massimo fare una sequenza di campionamenti quindi basta fare l'integrale di ogni campionamento, ovvero l'area sottesa.

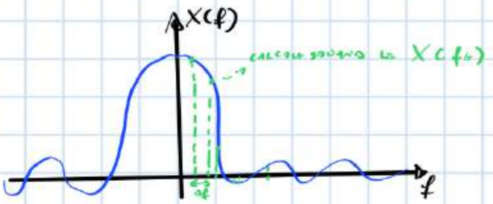
N.B. Nel corso $T = T_S = 10^{-2} s \quad \Delta f = 10^{-1} Hz$

↳ suddivisione intervallo di frequenze discreto

$$\approx \sum_n x'(nT)\, T = \sum_n x(nT)\, e^{-2j\pi f n T}$$

A questo punto trovo una buona approssimazione di $X(f)$ ma $X(f)$ è continua, quindi devo iterare il processo un gran numero di volte, ogni volta usando una $X(f_k)$

$$X(f_k) = X(k\Delta f) = \sum_n x(nT)\, e^{-2j\pi k \Delta f n T}$$



17-03-2023

Continuiamo la sfilza di teoremi

Teorema del Prodotto

Avendo due segnali $x(t)$ e $y(t)$ e supponiamo:

HP $x(t) \rightleftharpoons X(f)$ Allora TH. $z(t) = x(t)y(t) \rightleftharpoons Z(f)$

$y(t) \rightleftharpoons Y(f)$ $x(t)y(t) \rightleftharpoons Y(f) \otimes X(f)$

Dim Calcoliamo quindi $Z(f)$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)\, e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)\, e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y(\nu) e^{j2\pi \nu t} d\nu}_{\text{antitrasformata}} \Big) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(\nu) \Big[\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi (f-\nu) t} dt}^{X(f-\nu)} \Big] d\nu$$

non posso usare f come variabile

$$= \underbrace{\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} y(\nu)\, X(f-\nu)\, d\nu}}_{\text{integrale di convoluzione}} \overset{\text{in modo compatto}}{=} Y(f) \otimes X(f)$$

Proprietà Integrale di Convoluzione (o Integrale Prodotto)

1) Commutativa
2) Associativa
3) Distributiva

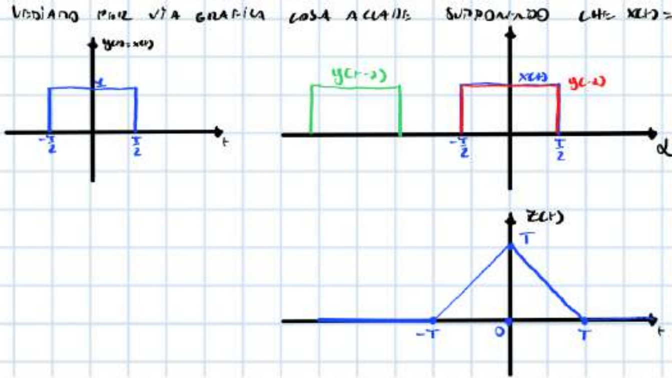
1) Il prodotto di due segnali mi dà un segnale di durata avente la somma delle durate di $x(t)$ e $y(t)$
2) Nel punto di massimo il segnale deve valere l'integrale del prodotto dei due segnali, quindi valgono il prodotto dell'area sottesa. (es: $\int 1 \cdot 1 = T$ nelle rect in 0 ad es. rect)

Come si calcola?

Calcoliamo l'integrale di convoluzione

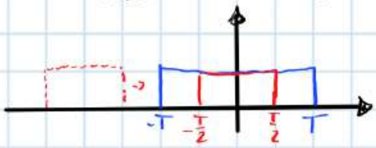
$$x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, y(t-\alpha)\, d\alpha$$

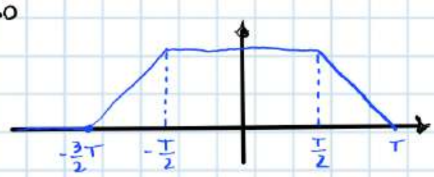
Vediamo per via grafica cosa accade supponendo che $x(t) = y(t) = rect(t)$



- $y(-\alpha)$ è ribaltato (si ha sempre simmetrica la rect, comunque ribalta)
- $y(t-\alpha)$ è traslato indietro rispetto a $y(-\alpha)$ di un valore $t<0$
- Adesso faccio l'integrale: finché t varia $y(t-\alpha)$ si sposta e fino a $-t$ non si sovrappone con $x(\alpha)$. Fino a $-t$ $z(t) = 0$. Quando si sovrappongono devo fare il prodotto delle due funzioni, ma il valore aumenterà fino al momento in cui saranno perfettamente sovrapposte.

ESERCIZIO: DUE SEGNALI V DI TEMPO DIVERSO





TEOREMA DELLA CONVOLUZIONE

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \rightleftharpoons X(f)\,Y(f) = Z(f)$$

dim CONSIDERIAMO:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, y(t-\alpha)\, e^{-j2\pi f t}\, d\alpha\; e^{-j2\pi f t}\, dt$$

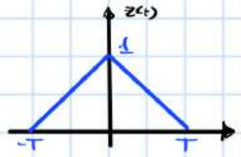
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\alpha)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}_{\text{TRASFORMATA DI } y(t) \text{ CON UN RITARDO } \alpha}\, d\alpha =$$

POSSO PORTARLO FUORI TANTO NON DIPENDE DA f.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, Y(f)\, e^{-j2\pi f \alpha}\, d\alpha = Y(f)\, X(f)$$

RICORDA: $x(t-t_0) \rightleftharpoons X(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$
TH DEL RITARDO

ESERCIZIO: CALCOLARE LA TRASF. DI FOURIER DI UNA FUNZIONE TRIANGOLARE.



SAPPIAMO CHE IL TRIANGOLO È IL PRODOTTO DI CONVOLUZIONE POSSO DIRE QUINDI:

$$Z(f) = X(f)\,Y(f) = T\,\mathrm{sinc}(ft) \cdot T\,\mathrm{sinc}(ft) = \underline{T^2\,\mathrm{sinc}^2(ft)}$$

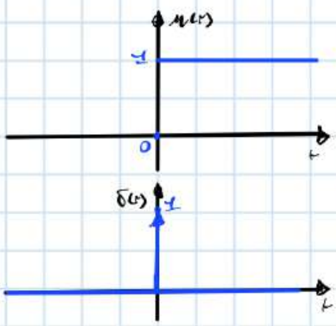
CON $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ $\quad X(f) = T\,\mathrm{sinc}(ft)$

$\quad\;\; y(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ $\quad Y(f) = T\,\mathrm{sinc}(ft)$

DURATA T

DELTA DI DIRAC $\delta(t)$

ADESSO CI MANCA DA ESTENDERE T.F. SU I SEGNALI AD ENERGIA INFINITA. PRENDIAMO AD ESEMPIO IL GRADINO UNITARIO:



POIMO CHE CI INTERESSI LA DERIVATA DI u(t), NOI SAPPIAMO CHE È 0 PER $t>0$ E $t<0$, IL PROBLEMA È IN 0. SI DEFINISCE LA DERIVATA DEL GRADINO COME DELTA DI DIRAC:

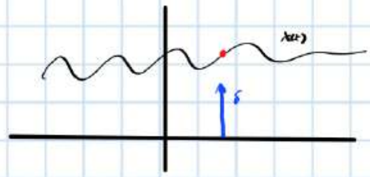
$$\frac{d\,u(t)}{dt} = \delta(t) \quad \text{IN REALTÀ DEFINITA COME} \quad \boxed{u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\alpha)\, d\alpha}$$

DI SOLITO $\delta(t)$ IN QUANTO IN 0 NON POSSO DEFINIRE PER CONVENZIONE UN NUMERO, DATO CHE INTEGRANDO NON AVREI DI NUOVO u(t) DA 0. LA FUNZIONE HA VALORE 1 QUANDO LA INTEGRI, PER IL RESTO VALE 0. DALLA FUNZIONE RETTANGOLARE CI SI ARRIVA PENSANDO DI RESTRINGERE LA BASE A 0 FACENDO ANDARE L'ALTEZZA A ∞, L'AREA LA MANTENIAMO.

PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE:

1) FUNZIONE PARI
2) FUNZIONE CAMPIONATRICE DEL δ
   COSA ACCADE SE PRENDO UN SEGNALE E LO MOLTIPLICO PER δ CENTRATO IN t_0?
   OTTENGO ESATTAMENTE IL VALORE DELLA FUNZIONE x(t) IN t_0

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \delta(t-t_0)\, dt$$



3) FUNZIONE INVARIANTE AL PRODOTTO DI CONVOLUZIONE
   $x(t) \otimes \delta(t) = x(t)$

CALCOLO LA T.F. DI δ

$$\delta(t) \rightleftharpoons 1$$

dim SI SFRUTTA LA PROPRIETÀ CAMPIONATRICE DELLA δ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = 1$$

QUINDI QUANTO VARRÀ $\delta(t-t_0)$?

$$\delta(t-t_0) \rightleftharpoons 1 \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

QUANTO VALE $e^{-j2\pi f_0 t}$?

$$e^{-j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons \delta(f+f_0)$$

SI APPLICA IL TH DELLA DUALITÀ:

$x(t) \rightleftharpoons X(f) \Rightarrow x(t) \rightleftharpoons X(-f)$

ADESSO CHE CONOSCO LA T.F. DELL'ESPONENZIALE CONOSCO LA T.F. DI TUTTI I SEGNALI PERIODICI

23-03-2023

Ripartiamo da dove ci siamo fermati. Prendiamo quindi i segnali periodici:

Segnali Periodici

Partiamo con il segnale periodico per eccellenza. Abbiamo visto come trasformare il cos nella sua trasformata sarà:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \sum_k x_k e^{j2\pi k f_0 t} \qquad \text{con } f_0 = \frac{1}{T}$$

La sua trasformata sarà

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}$$

dim

applico alle due componenti $e^{-j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons \delta(f+f_0)$

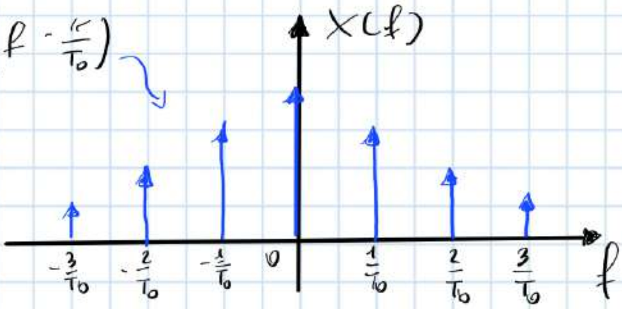
$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \rightleftharpoons \frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}$$

In modo analogo facciamo il $\text{sen}(2\pi f_0 t)$

$$\text{sen}(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} \rightleftharpoons \frac{\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)}{2j}$$

Allora sapendo che un segnale $x(t)$ è periodico: $x(t) = x(t_0 + T_0)$ posso scrivere:

$$x(t) = x(t_0+T_0) = \sum_k x_k e^{j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons X(f) = \sum_k X_k \, \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$



Con questo concludiamo il calcolo delle trasformate!

N.B. Da questo risultato si può ricavare il TH della modulazione:

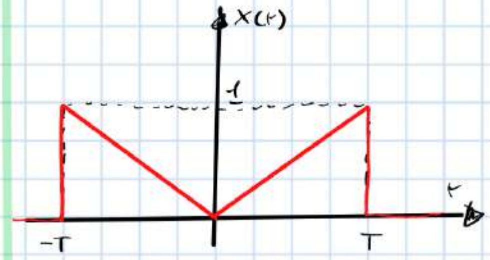
DATO:

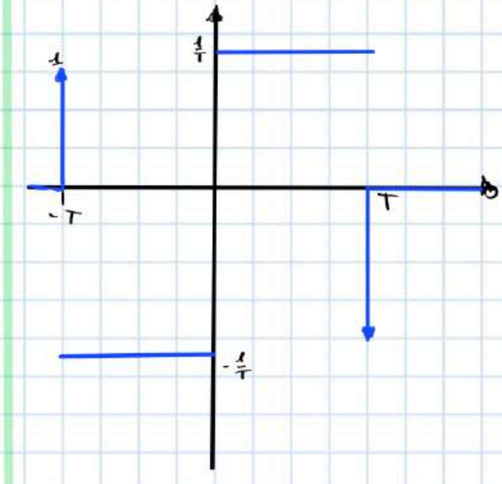
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \rightleftharpoons \frac{X(f-f_0) + X(f+f_0)}{2}$$

ALLORA

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \rightleftharpoons X(f) \otimes \left(\frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}\right) \overset{\text{proprietà convoluzione di } \delta}{=} \frac{X(f-f_0) + X(f+f_0)}{2}$$

Esercizio: calcolare la trasformata del seguente segnale:





1) Proviamo a fare la derivata e vedere cosa esce, in $-T$ la derivata è δ in quanto si comporta come un gradino unitario.

2) Posso applicare il TH di integrazione? Si dato che la derivata $\to\infty$ va a zero

3) Scrivo quindi la trasformata della derivata come somma delle singole trasformate.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ricorda:} \\ \bullet\ \delta(t-T) \rightleftharpoons e^{-j2\pi fT} \qquad \bullet\ \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{\Delta}\right) = \text{sinc}(f\Delta)\, e^{-j2\pi f t} \end{array}}$$

$$e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT} - \frac{1}{\cancel{T}}\cancel{T}\,\text{sinc}(fT)\, e^{j\pi fT} + \frac{1}{\cancel{T}}\cancel{T}\,\text{sinc}(fT)\, e^{-j\pi fT}$$

⇓ è un sen

$$-2j\,\text{sen}(2\pi fT) - \text{sinc}(fT) \cdot 2j\,\text{sen}(\pi fT)$$

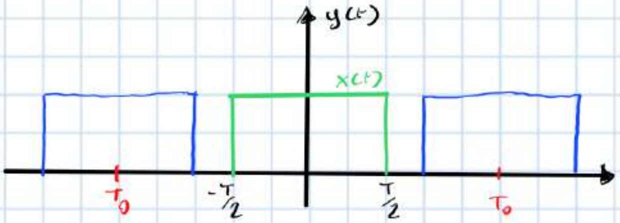
4) Quindi dato che:

$$\boxed{X(f) = \frac{S(f)}{j2\pi f} \qquad x(+\infty) = \varnothing}$$

Soddisfa la condizione quindi saremo arrivati ed ho chiuso.

N.B. 15 o 30 domande con esercizi di questo tipo all'esame → applichi i TH.

Adesso proviamo il treno di impulsi y:



$$y(t) = y(t+T_0) = \sum_n x(t-nT_0)$$

ATTENTO! Non confondere * con: $y(f) = \sum_k y_k\, \delta(f - \frac{k}{T})$

Sappiamo che:

- $y(t) = \sum_k y_k\, e^{j2\pi k f_0 t}$ (Trasformata serie di y)
- * $x(t) \rightleftharpoons X(f)$ (Trasformata di F.)

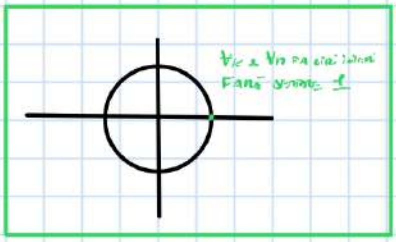
Qual è la relazione tra gli y_k e gli $X(f)$? Ci deve essere una relazione dato che passano entrambi dal dominio del tempo.

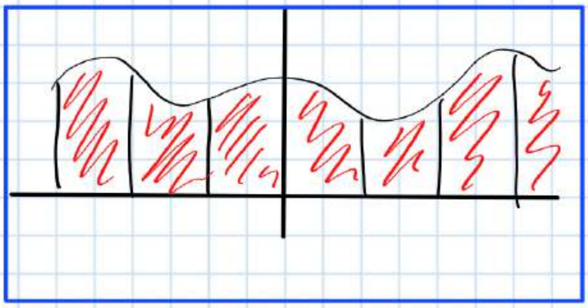
Allora arrivo a $X(f)$ partendo da y_k:

$$y_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_n x(t-nT_0)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\sum_n \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t-nT_0)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

Cambio variabile $t' = t - nT_0 \Rightarrow t = t' + nT_0$

$$= \frac{1}{T_0}\sum_n \int_{-T_0/2-nT_0}^{T_0/2-nT_0} x(t')\, \underbrace{e^{-j2\pi k f_0 (t'+nT_0)}}_{e^{-j2\pi k f_0 t'}\cdot \underbrace{e^{-j2\pi k n}}_{=1}}\, dt' = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\frac{T_0}{2}-nT_0}^{\frac{T_0}{2}-nT_0} x(t')\, e^{-j2\pi k f_0 t'}\, dt'} = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t'}\, dt' = \frac{1}{T_0} X(kf_0)$$



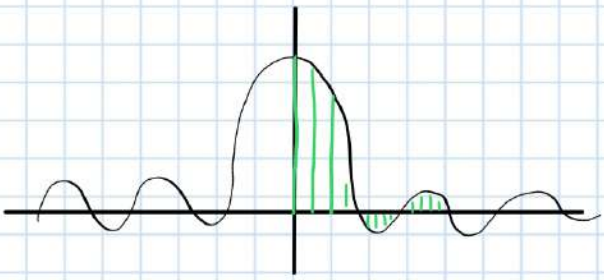


La trasformata di Fourier degli y_k si ottiene campionando la trasformata k volte.

$$\Rightarrow y_k = \frac{1}{T_0} X(kf_0)$$

Quindi per via grafica otteniamo

$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) = T\, sinc(fT)$



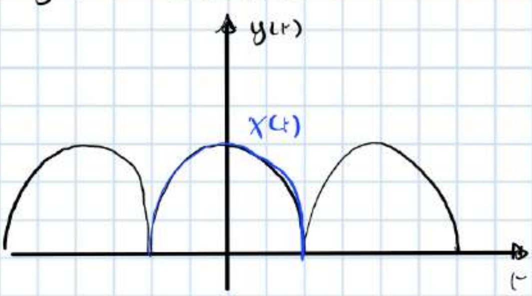
Prima formula di Poisson

$$y(t) = \sum_n \frac{1}{T_0} X(kf_0)\, e^{j2\pi k f_0 t}$$

Questo è un risultato interessante: se campiono in frequenza periodicizzo nel tempo. A noi interesserà molto di più il contrario: campionare nel tempo = periodicizzare in frequenza.

Esercizio: calcola i coefficienti della serie di Fourier

$y(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|$



Per farlo normalmente bisognerebbe calcolare

$$y_k = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4} y(t)\, e^{-j2\pi f_0 t}\, dt$$

Invece si fa molto prima a sfruttare il risultato ottenuto, considerando il segnale y(t) come uno periodicizzato dal segnale x(t)

$$y(t) = \sum_n x\left(t - n\frac{T_0}{2}\right)$$

$x(t) = rect\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right)\cos(2\pi f_0 t)$ adesso mi ricavo in un baleno dato che so trasformarla facilmente, e poi mi basta campionare:

$$X(f) = \frac{T_0}{2}\, sinc\left(f\frac{T_0}{2}\right) \otimes \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}$$ $\Rightarrow$ la devo campionare in $k\frac{T_0}{2}$

Teorema di integrazione incompleto

Abbiamo visto il TH di integrazione:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,d\alpha \rightleftharpoons Y(f)=\frac{X(f)}{j2\pi f} \quad \text{solo se } f\neq 0$$

Se ci fermiamo un passo prima:

$$j2\pi f\, Y(f) = X(f) \quad \text{è tale è vera solo se } 0 = X(0)$$

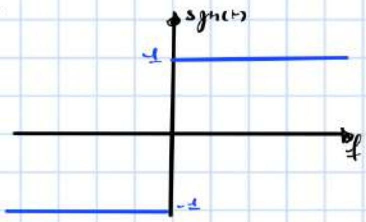
La condizione era equivalente ad altre due condizioni:

- $X(0)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$ lo ottengo con $f=0$ di $X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j2\pi f t}\,dt$
  $||$
- $y(+\infty)$ dato che ho il $+\infty$

Quindi, tutto questo in realtà è un TH incompleto in quanto serve che siano soddisfatte le condizioni sul valore. Si può estendere? Si, tramite δ!

Ma prima ho bisogno di un'altra trasformata che diamo per buona:

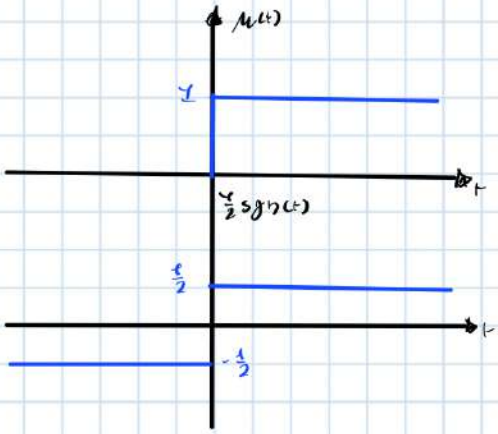
$$\boxed{\frac{1}{t} \rightleftharpoons -j\pi\, \mathrm{sgn}(f)}$$ ove sgn:



Adesso partiamo con

Trasformata del gradino:

Dato che $\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$ e $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\alpha)\,d\alpha$ io voglio $u(t)\rightleftharpoons U(f)$. Per farlo vorrei usare il TH d'integrazione, ma le condizioni non sono soddisfatte! Quindi come facciamo? Così:



$$u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t)$$

A questo punto calcolo $U(f)$

$$U(f)=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{2}SGN(f) \quad \text{ove } \mathrm{sgn} \rightleftharpoons SGN(f)$$

$$U(f)=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$$

ove posso calcolare SGN dalla relazione di prima con il TH della dualità

$$\frac{1}{t} \rightleftharpoons -j\pi\,\mathrm{sgn}(f)$$

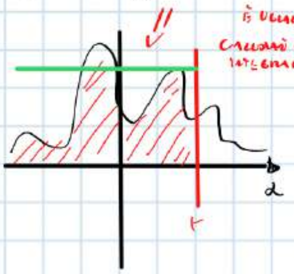
$$\Rightarrow \mathrm{sgn}(t) \rightleftharpoons \frac{1}{j\pi f} = SGN(f)$$

Utilizziamo questo risultato per avere:

Teorema di integrazione completo

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\,u(t-\alpha)\,d\alpha = x(t)\otimes u(t) \Rightarrow \boxed{Y(f)=X(f)\,U(f)=\frac{1}{2}X(f)\,\delta(f)+\frac{X(f)}{j2\pi f}}$$

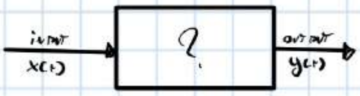
è uguale a dire
calcolare questo integrale



N.B. Se $f=0$ ritroviamo il TH incompleto.

21-03-2023

Sistemi Monodimensionali



Voglio trovare l'uscita e l'ingresso in funzione della risposta impulsiva del sistema. Prendiamola alla larga!

Noi parleremo di sistemi lineari e stazionari: il primo sappiamo cosa significa, il secondo significa che è tempo-invariante.

Es. un circuito con una resistenza (se questa è stazionaria). In generale noi scriviamo la relazione del sistema così:

$$y(t) = T(x(t)\,;\,t) \quad \text{con } T = \text{trasformazione, applicata ad un certo istante } t.$$

A seconda della trasformazione ordinata T godrò di certe proprietà:

Proprietà

① Linearità: $y(t) = T(x_1(t) + x_2(t)\,;\,t) = T(x_1(t);t) + T(x_2(t);t) = y_1(t) + y_2(t)$

② Causalità: l'uscita al tempo t dipende (soltanto da) istanti di ingresso $< t$ $\Rightarrow y(t) = T(x(\tau)\,;\,\tau \le t)$

- "Virtual" time: I sistemi reali sono causali: "supponiamo di prendere un video e darlo in ingresso al sistema, posso utilizzare tutto quello che sta davanti e dietro."
- Real Time: I sistemi in tempo reale sono necessariamente causali.

③ Stazionarità: $y(t)$ non dipende dall'istante t di applicazione: $y(t) = T(x(t))$, posso prescindere di considerare t

④ Stabilità: La stabilità in senso BIBO (Bounded Input Bounded Output) la definizione è:

$$|x(t)| \le M \Rightarrow |y(t)| \le K$$

Se un sistema è limitato nel suo ingresso lo sarà anche la sua uscita

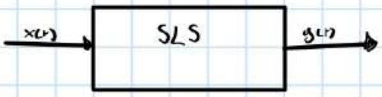
⑤ Invertibilità: $y(t) = T(x(t);t) \Rightarrow x(t) = T^{-1}(y(t);t)$

Es. $y(t) = A\,x(t) \Rightarrow$ ha praticamente tutte le proprietà

⑥ Memoria: un sistema non ha memoria se dipende soltanto da t. Ad esempio:

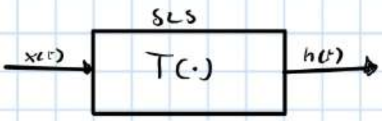
$$\left.\begin{array}{l} y(t) = A\,x(t) \\ y(t) = A\,x^2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{sono senza memoria} \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = x(t) \otimes u(t) \Rightarrow \text{è un sistema con memoria}$$

Di questi sistemi noi consideriamo solo i Lineari-Stazionari (SLS), prendiamone uno:



Partiamo dalla def. generale:

$$y(t) = T(x(t);t) \overset{\text{proprietà invarianza } \delta}{=} T(x(t) \otimes \delta(t);t) = T\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\,;\,t\right] \underset{\text{linearità}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{T[x(\tau)\,\delta(t-\tau);t]}^{h(t-\tau)}\,d\tau \overset{\text{stazionarità}}{=}$$



A questo definisco $h(t) \triangleq T[\delta(t)]$, quindi:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\underbrace{h(t-\tau)}_{\text{essenzialmente è la risposta impulsiva del sistema}}\,d\tau$$

Ma questo è esattamente la def. del prodotto di convoluzione:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = \boxed{x(t) \otimes h(t)}$$

Passiamo al dominio della frequenza e troviamo la relazione di ingresso e uscita; ma per le th di convoluzione ho:

$$\boxed{\Rightarrow Y(f) = X(f)\,H(f) \quad \text{ove} \quad H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,e^{-j2\pi f t}\,dt \quad \text{che è la risposta in frequenza del sistema.}}$$

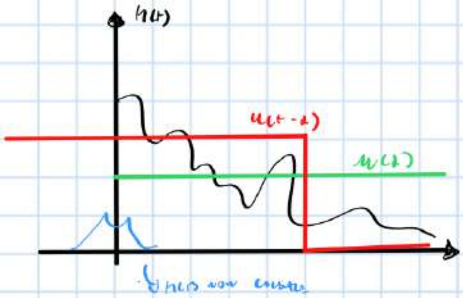
Nel dominio della frequenza il calcolo diventa un banale prodotto. La def. fornisce anche un modo per calcolare la $h(t)$, basta mandare in ingresso una $X(f)$ nota, calcolo $H(f) = \dfrac{Y(f)}{X(f)}$ e poi faccio l'antitrasformata. L'altra opzione è mandare in ingresso una $\delta(t)$ nel dominio del tempo ma non è comodo generare una δ nel tempo.

Sollecitiamo dunque un sistema LS con un esponenziale complesso $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ che oscilla ad una frequenza f_0

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_0 (t-\tau)}\,h(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_0 t}\,h(\tau)\,e^{-j2\pi f_0 \tau}\,d\tau = \underbrace{e^{j2\pi f_0 t}}_{x(t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,e^{-j2\pi f_0 \tau}\,d\tau}_{H(f_0)} = x(t)\,H(f_0)$$

Quindi ottengo già la relazione del sistema sia una possibilità per calcolare $h(t)$ a una determinata f, quindi ho lo svantaggio di dover mandare un segnale $\forall f$ di mio interesse

Un sistema è causale quando la risposta impulsiva è causale. Cosa significa risposta causale? Vediamo:



Se ho

$h(t) = h(t)u(t)$ allora è causale

quindi

↳ l'integrale va da $-\infty$ a t.

$$y(t) = x(t) \circledast h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, h(t-\alpha)\, u(t-\alpha)\, d\alpha \Rightarrow$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha$$ quindi il sistema è causale in quanto dipende da tutti gli istanti fino a t.

Quindi un sistema è causale quando $h(t)$ è > 0?

Vediamo invece la stabilità BIBO su h:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |x(\alpha)|\,|h(t-\alpha)|\, d\alpha \overset{\text{essendo BIBO}}{\le} \boxed{M \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\alpha)|\, d\alpha} \le K$$

Quindi l'output è limitato se è assolutamente integrabile, tale è una condizione sufficiente.

Esercizio: calcolo risposta in f di un circuito RC

$$V_u(t) = V_i(t) - R\, i(t) = V_i(t) - RC\, \dot{V}_u(t) \Rightarrow V_u(f) = V_i(f) - j2\pi f RC\, V_u(f)$$

↳ $C \dfrac{dV_u(t)}{dt}$

Adesso calcolo l'$H(f)$:

e definisco $f_T = \dfrac{1}{2\pi RC}$ come la frequenza di taglio

$$H(f) = \frac{V_u(f)}{V_i(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi f RC} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_T}} = \frac{\alpha e^{j\theta}}{\beta e^{j\varphi}} = \frac{\alpha}{\beta} e^{j(\theta - \varphi)} \Rightarrow |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_T)^2}}$$

30-03-2023

Calcoliamo adesso la risposta in frequenza (f) di un filtro CR

$$V_u(t) = V_i(t) - \frac{1}{C}\, i(t) = V_i(t) - \frac{1}{C}$$ (non ci riesce, riguardo quando ci capisci qualcosa)

Vedere la risposta filtro RC

I Filtri

Premessa

[Apre MATLAB per far vedere i filtri RC e CR]

Vuole plottare il modulo utilizzando il dB definito per le potenze come:

$$H(f)\Big|_{dB} = 10 \log_{10} \frac{|H(f)|^2}{|H(f_0)|^2}$$

tale scala si fa a partire da una frequenza di riferimento f_0:

$$f_0 = \varnothing \Rightarrow H(f)\Big|_{f_0} = 1$$

quindi il denominatore è uguale ad 1!

Si apprezzano i valori piccoli di dB, a causa della scala logaritmica.

↗ frequenza di taglio

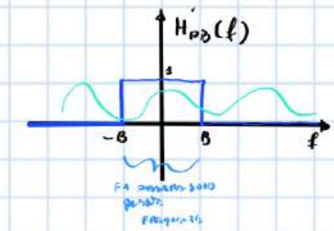
$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_T}\right)^2} = \frac{1}{2} \quad \text{con } f = f_T$$

segue che $10 \log_{10} 2 = 3\,dB$

$-10 \log_{10} 2 = -3\,dB$

Osservando il filtro RC notiamo che la sua funzione è monotona decrescente, quindi è un filtro passa-basso

Passa Basso



Il filtro passa basso fa passare solo i valori a bassa frequenza. Il filtro ideale per eccellenza è una funzione rettangolare. Nota come il filtro RC filtra bene le frequenze (rimane alto in valore) fino a prima della frequenza di taglio, poi inizia a decrescere troppo ⇒ rischia di tagliare dei valori d'interesse. Quindi il passa-basso (PB) ideale sarà:

$$H^{ID}_{PB}(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \longrightarrow h(t) = 2B\,\text{sinc}(2Bt)$$

Il filtro è causale o no? Ricorda che un sistema causale è un sistema avente data una risposta impulsiva deve avere valori solo per $t \geq 0$. Quindi la sinc non è causale ⇒ si estende anche per $t < 0$. Tuttavia posso renderla causale:

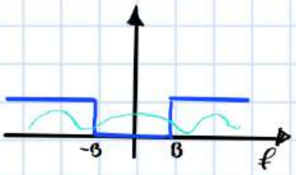
- Eseguo un troncamento sulla sinc, essenzialmente la moltiplico per una rect.
- La traslo in modo da mettere la parte di sinc nella zona con $t > 0$.

N.B. Se troncassi a $+\infty$ e $-\infty$ avrei il filtro ideale

In questo modo ottengo un filtro PB non buono ma funzionale.

Passa Alto

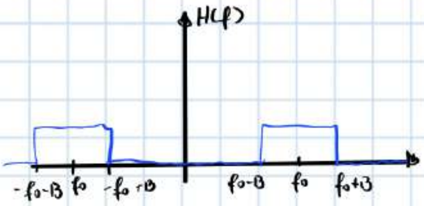
Per il filtro CR pongo $f_0 = \infty \Rightarrow |H(f)|\big|_{f_0} = 1$. Si nota per motivi analoghi (calcoli crescente e poi costante per valori alti di f) che tale è un filtro passa-alto. La sua versione ideale del filtro sarà:



$$H_{PA}(f) = 1 - H_{PB}(f) \longrightarrow h(t) = \delta(t) - 2B\,\text{sinc}(2Bt)$$

Dovendo nella pratica implementare la δ, la rect (per $H_{PB}(f)$) e la sinc. Conviene applicare il metodo visto prima con la sinc (tronco la sinc...) e fare la differenza con 1

Passa Banda

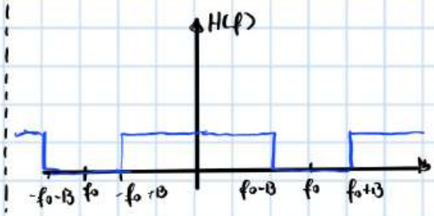


Per implementare il passa-banda ideale si fa

$$h^{ID}_{PB} = h^{ID}_{PB}(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

Le considerazioni di prima sulla sinc valgono anche per questo

Elimina Banda



$$h^{ID}_{EB}(f) = 1 - h^{ID}_{PB}(f)$$
$$h^{ID}_{EB}(t) = \delta(t) - h^{ID}_{PB}(t)$$

Dopo aver visto tutti i filtri notiamo la relazione:

Una volta generato un filtro passa-basso sono in grado di generare ogni tipo di filtro.

Nella radio filtriamo con un passa-banda, in realtà solitamente si demodula e si usa sempre lo stesso filtro.

Facciamo qualche esercizio con dB: sapendo che $x|_{dB} = 10\log_{10}(x)$ (x è in genere il modulo quadro dell'ampiezza)

x	dB
2	3 dB
4	6 dB
8	9 dB
10	10
1	0
100	20

dB	x
23 dB	200
17 dB	50

Avendo $23\,dB = 20\,dB + 3\,dB \Rightarrow x = 100 \cdot 2 = 200$

$17\,dB = 20\,dB - 3\,dB \Rightarrow x = \frac{100}{2} = 50$

Perché facciamo tutto questo? Perché solitamente i telecomunicazionisti usano i dB.

[Esercitazione Matlab su argomenti vecchi]

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \overset{\text{Perdita informazione}}{\approx} T_s \sum_n x(nT_s)e^{-j2\pi fnT_s} \xrightarrow{\text{Uguaglianza}} X(k\Delta f) = T_s \sum_n x(nT_s)e^{-j2\pi k\Delta f nT_s}$$

Dove:
- Δf : salto tra una frequenza campionata e la sua successiva (non posso far calcolare tutto a Matlab)
- T_s : frequenza campionamento

NOTA: Le forti variazioni sono dovute dalle alte frequenze! È per questo che non riesco a ricavare un gradino perfetto antitrasformando una sinc troncata. Invece riesco a ricostruire un gradino in quanto varia solo nel momento della rect.

— Uscita ideale
— Antitrasformata di sinc troncata

31-03-2023 [ARRIVATO 10' DOPO ⇒ È SU MATLAB: IMPLEMENTAZIONE FILTRI (ESERCIZIO: IDEAL FILTER)]

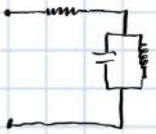
SE FACCIAMO IL TRONCAMENTO NEL TEMPO CI PORTA AD AVERE COMUNQUE I RIPPLE NEL PASSAGGIO IN FREQUENZA, DAL PRODOTTO NEL TEMPO [DIFFERENZA TRA TRONCARE NEL TEMPO E IN FREQUENZA!]

LA BANDA DI UN FILTRO È PER CONVENZIONE SOLO LE FREQUENZE POSITIVE. QUINDI SE È CENTRATO IN 0 E COPRE L'INTERVALLO [-10;+10] HA BANDA = 10.
SE È MODULATO TUTTAVIA SI PRESENTANO I DUE ASPETTI SIMMETRICI SI CONSIDERA SOLO LA PARTE $f>0$

SE USIAMO UN FILTRO IN 0 CON AMPIEZZA 1Hz PASSA SOLTANTO IL VALORE MEDIO SPORCATO ⇒ PER AVERLO PRECISO DOVREI AVERE LA δ COME FILTRO
I FILTRI SI IMPLEMENTANO CON DIVERSI SISTEMI (QUADRATI DIGITALI), NON CON I FILTRI IDEALI (SINC E RECT) USATI SOLO A SCOPO DIDATTICO.

SE IL RUMORE È UGUALE AL SEGNALE DI INFORMAZIONE È IMPOSSIBILE RECUPERARLO.

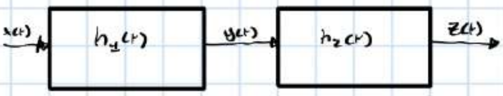
ESEMPIO FILTRI ANALOGICI (SI UTILIZZA LA RISONANZA)



SISTEMI IN CASCATA E IN PARALLELO

CONSIDERIAMO SISTEMI LINEARI, STAZIONARI

IN CASCATA



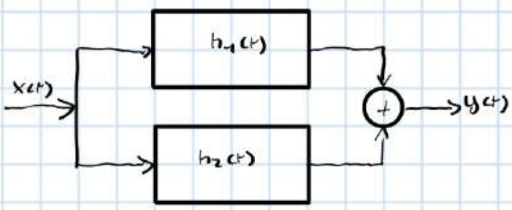
NEL TEMPO:

$z(t) = y(t) \otimes h_2(t) = x(t) \otimes h_1(t) \otimes h_2(t) = x(t) \otimes h(t)$

$\Rightarrow h(t) = h_1 \otimes h_2(t)$

IN FREQUENZA: $H(f) = H_1(f) H_2(f)$

IN PARALLELO



NEL TEMPO:

È PER QUESTO CHE ABBIAMO BISOGNO DI LINEARE E STAZIONARIO

$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = x(t) \otimes h_1(t) + x(t) \otimes h_2(t) = x(t) \otimes \left(h_1(t) + h_2(t) \right)$

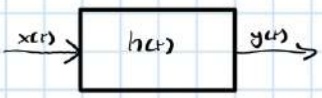
$\Rightarrow h(t) = h_1(t) + h_2(t)$

IN FREQUENZA:

$H(f) = H_1(f) + H_2(f)$

FILTRO NON DISTORCENTE

DEFINIAMO MATEMATICAMENTE UN FILTRO NON DISTORCENTE, OVVERO CHE NON PRODUCE UN SEGNALE DISTORTO. INIZIAMO CON IL DEFINIRE COSA È UN SEGNALE NON DISTORTO.



SEGNALE NON DISTORTO

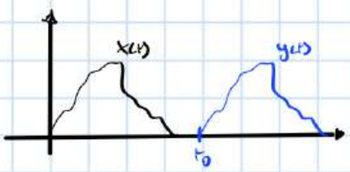
DEF. $y(t) \triangleq k\, x(t-t_0) \quad k \in \mathbb{R}^+$

IL SEGNALE NON È DISTORTO FINO A CHE y(t) È UNA VERSIONE TRASLATA O AMPLIFICATA DI x(t).

ADESSO VEDIAMO IL FILTRO. NOI SAPPIAMO CHE

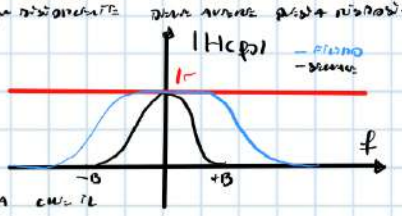
$y(t) = x(t) \otimes h(t)$ AFFINCHÉ TUTTO CIÒ SIA $\triangleq k\, x(t-t_0)$ CI DOVREBBE ESSERE LA δ QUINDI

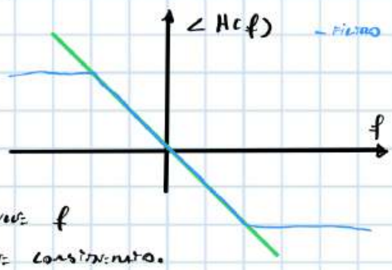
$\Rightarrow h(t) = k\, \delta(t-t_0)$ RICORDA t_0 È UN NUMERO, NON È UN PERIODO: $t_0 \neq T_0$



QUINDI IN FREQUENZA UN FILTRO NON DISTORCENTE DEVE AVERE QUESTA RISPOSTA:

$$H(f) = k e^{-j2\pi f t_0}$$





MI SEMBRA UNA RESTRIZIONE TROPPO STRINGENTE, NON MI INTERESSA CHE IL FILTRO OSSERVI TALI CARATTERISTICHE SU TUTTO IL SEGNALE, MA SOLO SULLE f DI INTERESSE. QUINDI UN FILTRO NON DISTORCENTE IN RELAZIONE AL SEGNALE CONSIDERATO.

MI BASTA CHE STIA NELLA BANDA DI UN SEGNALE! QUAL È LA FASE DI UN FILTRO SENZA RITARDO? È L'ASSE X, VALE 0. È IL CASO DI UNA δ.

Teorema di Parseval

Data l'energia di un segnale E_x, essa è data

$$E_x = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}_{\text{def. classica}} \overset{TH}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

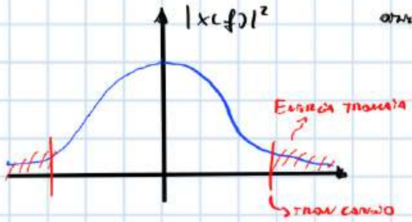
dim Proviamo

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \overset{|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \overset{\text{formula di sintesi su } x^*(t)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)\, e^{-j2\pi ft} df\, dt \overset{\text{scambio gli integrali}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt}^{X(f)} df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)\, X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Definiamo $|X(f)|^2$ è la densità spettrale di potenza, dice come la potenza si distribuisce nello spettro. Integrandola otteniamo l'energia. Mentre $|X(t)|^2$ è la potenza istantanea del segnale.

Usiamo questa al posto del segnale perché in quanto attraverso $|X(f)|^2$ posso osservare quanta energia trascuro nell'operazione di troncamento.



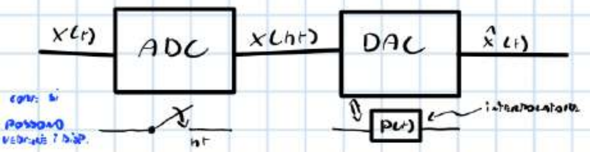
Funzione di Autocorrelazione

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

Proprietà: ① $R_x(0) = E_x$ ② $R_x(\tau) \rightleftharpoons S_x(f)$

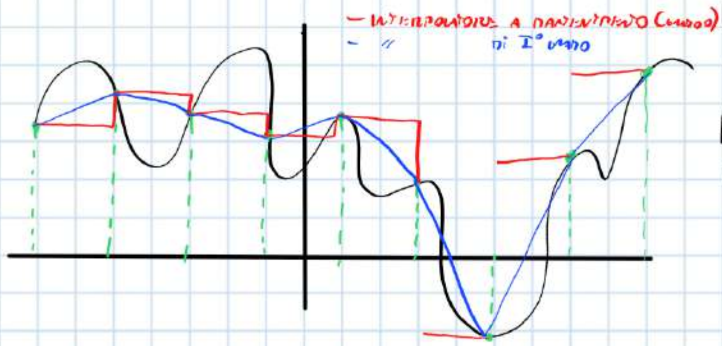
È il prodotto tra due segnali coniugati, notiamo subito che $R_x(0)$ è l'energia del segnale. Misura (in funzione la funzione) la correlazione del segnale con se stesso, ed è importante in quanto per il TH di Wiener $\boxed{R_x(\tau) \rightleftharpoons S_x(f)}$, quindi la sua trasformata di Fourier è pari alla densità spettrale di potenza!

13-04-2023



Ora poniamo di avere un segnale analogico x(t) che entra in un convertitore analogico digitale, per poi ricomporre il segnale risultante con un digitale-analogico.

Poniamo di avere un segnale



Il nostro obbiettivo è tarare l'interpolatore in modo da ottenere $\hat{x}(t) \simeq x(t)$. In questo esempio è di I grado.

Per fare questo devo introdurre la Trasformata Discreta di Fourier

Trasf. Discreta di Fourier

Simbologia

$x(t) \rightleftharpoons X(f)$ TCT

$x[nT] \rightleftharpoons \bar{X}(f)$ TDT

La T. Discreta è:

$$\bar{X}(f) = \sum_n x[nT]\, e^{-j2\pi f nT} \overset{\text{indica che è periodica con periodo } \frac{1}{T}}{=} \bar{X}\left(f + \frac{1}{T}\right)$$

Quindi per ottemperare al nostro obbiettivo studiamo le differenze tra TCF e TDF.

Partiamo dalla definizione:

$$\bar{x}(f) = \sum_n x[nT]\, e^{-j2\pi f nT} = \sum_n \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(v)\, e^{j2\pi v nT}\, dv}^{x[nT]} \cdot e^{-j2\pi f nT} = \int_{-\infty}^{\infty} x(v) \sum_n e^{-j2\pi (f-v) nT}\, dv$$

→ eq. analisi; campiono il segnale

→ inverto $\int$ e $\sum$

Utilizziamo la trasformata notevole a dx per trovare:

$$\bar{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(v)\, \frac{1}{T} \sum_k \delta(f-v)\, dv$$

A questo punto sapendo che δ è pari riscrivo tutto in funzione di v

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(v) \sum_k \delta\left(v - \left(f - \frac{k}{T}\right)\right) dv$$

Trasformata Notevole

Osserviamo:

$$\sum_n \delta(t-nT) = \frac{1}{T} \sum_k \underbrace{\overset{=1}{\Delta\left(\frac{k}{T}\right)}\, e^{-j2\pi \frac{k}{T} t}}_{TST} \Rightarrow \sum_n \delta(t-nT) = \frac{1}{T} \sum_k e^{-j2\pi \frac{k}{T} t}$$

$$\Downarrow \text{TCF}$$

Quindi ciò ci dice che la somma di esponenziali è pari alla somma di δ

$$\sum_n e^{-j2\pi f nT} = \frac{1}{T} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Porto fuori la sommatoria

$$= \frac{1}{T} \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} x(v)\, \delta\left(v - \left(f - \frac{k}{T}\right)\right) dv$$

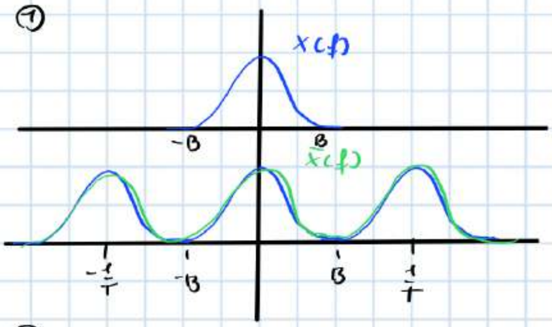
ma per la proprietà campionatrice di δ

$$= \frac{1}{T} \sum_k x\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

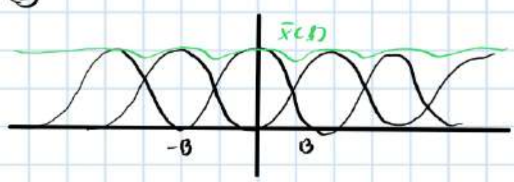
Da questo sappiamo quindi che $\boxed{\bar{x}(f) = \frac{1}{T} \sum_k x\left(f - \frac{k}{T}\right)}$. Quindi la TDF si ottiene periodicizzando il segnale analogico con periodo $\frac{1}{T}$

Commenti del risultato

①



②



Quindi campionando TCF (segnale analogico), periodicizzo il segnale e trovo la TDF. Tuttavia ho da aggiustare un parametro: la frequenza di campionamento (1/T).

Se guardiamo il ② esempio ho preso una frequenza di campionamento pari a $\frac{1}{T} = B$; in questo caso non otteniamo una buona trasformata. La sovrapposizione delle repliche crea aliasing, ovvero copie aliasate della trasformata di Fourier. Questo ci dice che campionando in modo corretto (rimuovendo quindi l'aliasing) attraverso un filtro passa-basso posso riottenere la frequenza originale! Quindi è necessaria la condizione di Nyquist ovvero la frequenza di campionamento:

$$\boxed{\frac{1}{T} \geq 2B}$$ ove $2B$ è la frequenza di Nyquist

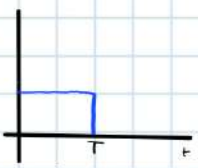
Perché tutto ciò sia vero B deve essere limitato nell'analogico ⇒ quindi deve avere durata infinita! ⇒ ma ciò implica che il risultato sia teorico dato che non ci sono segnali infiniti nella realtà. Ora da ricerche noi sappiamo che la banda che riusciamo a sentire è limitata! Quindi possiamo tale intervallo (20Hz - 20kHz) pari a B e a 2B per approssimazione non abbiamo aliasing.

Passiamo ad analizzare il DAC (convertitore digitale analogico). Quindi

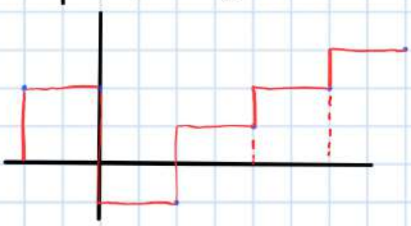
$$\hat{x}(t) = \sum_n x(nT)\, p(t-nT)$$ ove p è l'interpolatore

Analizziamo il nostro p (l'interpolatore)

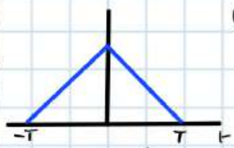
Interpolatore a mantenimento



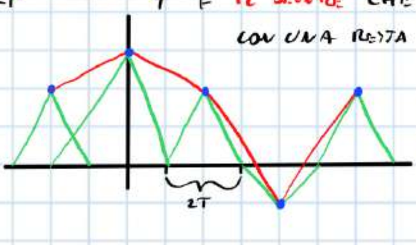
Un interpolatore a mantenimento può essere rappresentato da una rect. Basta prendere la rect ritardarla per valore i punti e poi sommarle tra loro per ottenere il segnale



Interpolatore lineare



Un interpolatore lineare è il segnale a triangolo. In quanto dovendo sommare i vari intervalli si sommano i due lati dei triangoli sovrapposti, e da questo si crea il segnale che unisce i vari campionamenti (i punti) con una retta



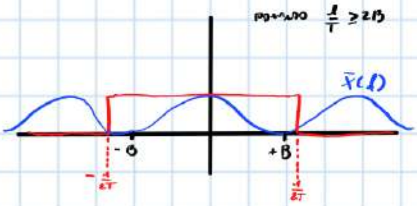
Cerchiamo di capire come sia fatto l'interpolatore, ovviamente operiamo in frequenza:

$$\hat{x}(f) = \sum_n x[nT] \underbrace{P(f) e^{-j2\pi f nT}}_{\text{T.F. del ritardo su } p(t)} = P(f) \underbrace{\sum_n x[nT] e^{-j2\pi f nT}}_{\text{ma questa è } \tilde{x}(f) \text{ dato che lo abbiamo definito così}} = P(f)\,\tilde{x}(f) \quad \Rightarrow \quad \hat{x}(f) = P(f)\,\tilde{x}(f) \overset{!}{=} x(f)$$

devo farlo valere io

Per renderlo vero devo tarare $P(f)$, vediamo come, riscriviamo $\tilde{x}(f)$:

ponendo $\frac{1}{T} \geq 2B$

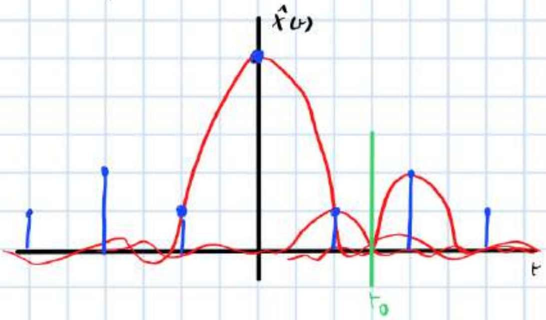


$$P(f)\,\frac{1}{T}\sum_k X\left(f-\frac{k}{T}\right) \overset{!}{=} X(f)$$

Per far valere l'uguaglianza la $P(f)$ deve essere un filtro passa basso di ampiezza $\frac{1}{T}$, posso prendere anche B ma è solitamente si prende alla stessa frequenza di campionamento. Tanto l'importante è che $\frac{1}{T} \geq 2B$, è ovvio solitamente prendere un po' di margine per l'aliasing... In realtà per non avere aliasing ci conviene aumentare la frequenza, tanto più $\frac{1}{T}$ è alto tanto più le copie sono separate $\Rightarrow$ meno aliasing, ma prenderei un sacco di campioni anche non necessari. Quindi solitamente ci si prende un margine conveniente. Ad esempio prendiamo $\frac{1}{2T}$ per la rect. In conclusione P sarà

$$P(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{\frac{1}{T}}\right) = \mathrm{rect}(fT) \qquad p(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Se $\frac{1}{T} = 2B$ allora $p(t) = \mathrm{sinc}(2Bt)$



$$\hat{x}(t) = \sum_n x[nT]\, \overbrace{\mathrm{sinc}\left(2B(t-nT)\right)}^{p(t_0-nT)}$$

$p(t)$ è un filtro non causale, quindi per ricostruire in modo esatto il segnale necessito tutti i campioni. Quindi in real time dovremo considerare il futuro. Questo con 8 campioni. Nella realtà il problema è che se si hanno migliaia di campioni devo sommare <u>tutti</u> i contributi di tutti i campioni. Per risolvere la causalità trasliamo la sinc invece per la complessità di calcolo si sommano solo i campioni vicini nel cui loro la sinc troncata!

Comunque al di là della frequenza di campionamento avendo un troncamento in tempo ho un segnale a durata infinita in frequenza $\Rightarrow$ ci saranno le repliche!

Quindi recap teorema: [molto importante]

Teorema:

Se ho un segnale a banda limitata e campiono con $\frac{1}{T} \geq 2B$ posso, a partire dai campioni, ricostruire il segnale originale.

Criticità:

1) Il segnale non è a banda limitata. Per risolvere posso campionare una banda particolare con un filtro passa-basso.
2) L'interpolatore non è causale. Risolvibile con shift + troncamento
3) Avrei bisogno di usare tutti i campioni

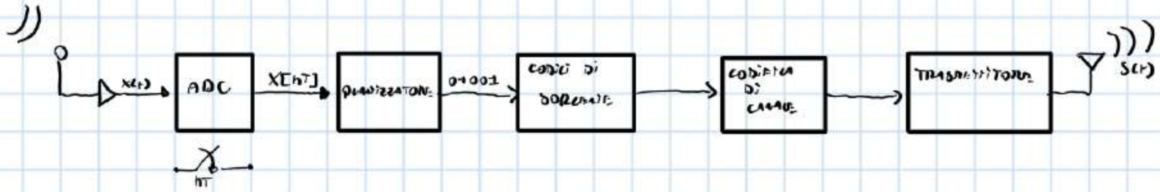
Questo è il risultato più importante della 1° parte del corso: segna il passaggio tra l'era analogica alla digitale $\Rightarrow$ prima si campionava ad occhio e sbagliavi! Per arrivarci sono state necessarie 20 ore di lezione... Assolutamente va saputo altrimenti si boccia.

[Esercitazione MATLAB]

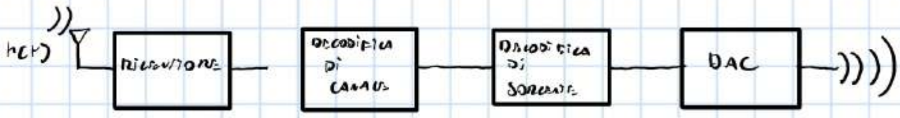
14-04-2023

Teoria della Probabilità

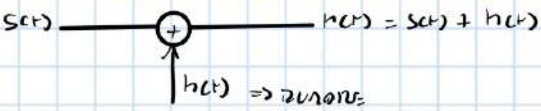
Vediamo perché abbiamo bisogno di tale teoria. Riprendiamo l'esempio del microfono:



Noi fino ad ora ci siamo occupati di dimensionare x(t), e siamo arrivati al TH $\frac{1}{T} \geq 2B$. Per non avere perdita di informazione nel quantizzatore non abbiamo nulla di simile. Quindi abbiamo perdita di informazione. Per evitare tale perdita noi utilizziamo i codici di canale (visti con Morenti: i codici a blocchi), per correggere gli errori e proteggere i bit nel trasferimento del canale.
Prima di questo tuttavia si adotta la codifica di sorgente adibita alla compressione dell'informazione (compressione dei file); ricorda dall'esempio di Morenti con il testo avente le lettere scambiate: vi è ridondanza nel parlato! La codifica di sorgente che toglie ridondanza, mentre la codifica di canale la aggiunge come protezione.
Infine vi è il trasmettitore composto da vari blocchi che vedremo alla fine del corso. Il segnale s(t) sarà poi inviato e ricevuto:



In ogni caso i segnali sono aleatori, non sono deterministici! Non li posso trattare come tali, altrimenti farei un sistema che funzioni solo e soltanto per un tipo di segnale. Quindi abbiamo bisogno della probabilità per questo. Oltre alla sorgente che è aleatoria abbiamo anche il rumore, che nel migliore dei casi è solo termico, altrimenti vi è anche altro.



Studieremo la teoria della probabilità in 2 step, prima vedremo la teoria dei set algebrici, e poi ci affiancheremo la probabilità.

Set Theory

Esempio di set: La moneta ha come set: Testa, Croce.

Probability Theory

Introduction

Two classes of mathematical models:

1. Deterministic
2. Probabilistic

A model is said to be deterministic if there is no uncertainty about its time-dependent behavior at any instant of time

- linear time-invariant systems are examples of a deterministic model.

In real-world problems, the use of a deterministic model is inappropriate:

- the underlying physical phenomenon involves too many unknown factors;
- a probabilistic model accounts for uncertainty in mathematical terms.

Introduction

Probabilistic models are needed for the design of systems that are

- reliable in performance in the face of uncertainty,
- efficient in computational terms, and
- cost effective in building them.

Consider a digital communication system over a wireless channel: subject to uncertainties, the sources of which include

1. noise, internally generated in electronic devices at the front-end of the TX/RX;
2. fading of the channel, due to the multipath phenomenon-an inherent characteristic of wireless channels;
3. interference from other transmitters.

To account for these uncertainties, we need a probabilistic model for channel.

Introduction

The objective of probability theory is twofold:

1. the mathematical description of probabilistic models and
2. the development of probabilistic reasoning procedures for handling uncertainty.

We begin the study of probability theory with a review of set theory:

- This is because probabilistic models assign probabilities to the collections (sets) of possible outcomes of random experiments.

Set Theory

The objects constituting a set are called the elements of the set. Let A be a set and x be an element of the set A. To describe this statement:

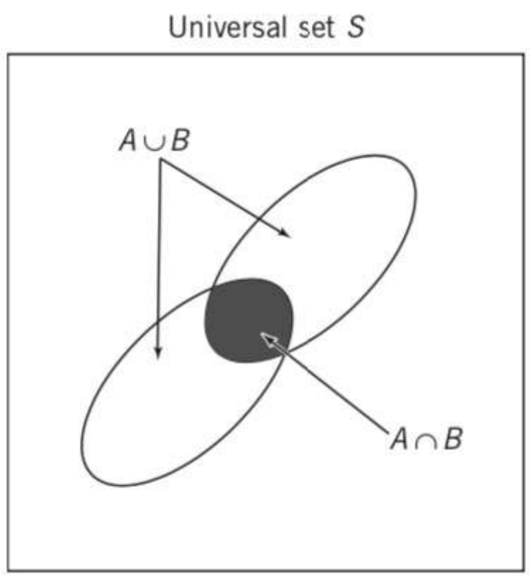
- We write $x \in A$; otherwise, we write $x \notin A$
- If the set A is empty, we denote it by $\emptyset$
- If $x_1, x_2, \ldots, x_N$ are all elements of the set A, then

$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$$

Boolean operation on sets

Unions and Intersections

- The union A ∪ B of two sets A and B is defined by the set of elements that belong to A or B, or to both.
- The intersection A ∩ B of two sets A and B is defined by the particular set of elements that belong to both A and B.

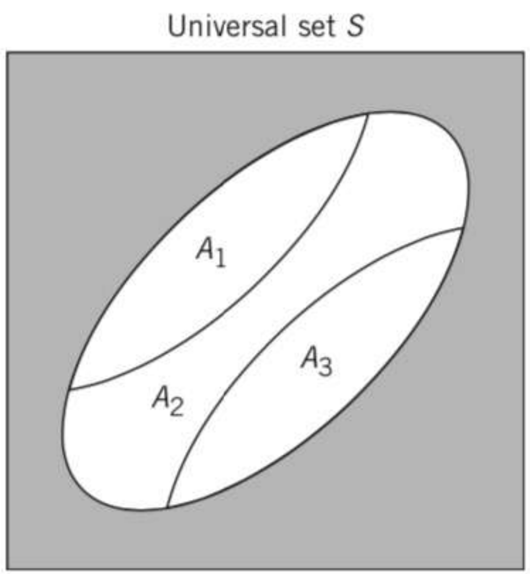


Boolean operation on sets

Disjoint and Partition Sets

- Two sets A and B are said to be disjoint if their intersection is empty; that is, they have no common elements.
- The partition of a set $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ refers to a collection of disjoint sets.

Set Universale: sono tutti i possibili risultati di un esperimento.

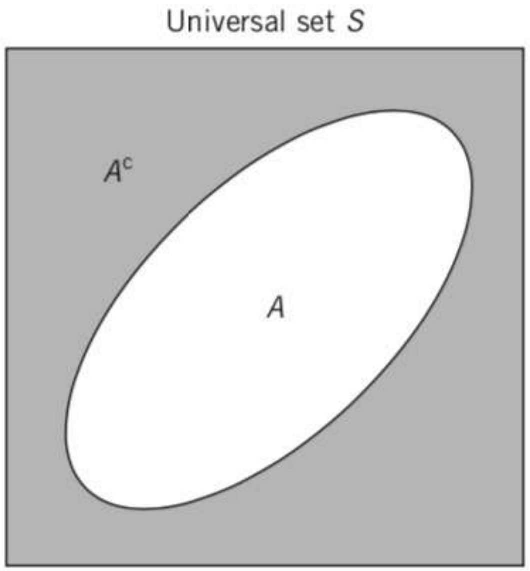


Boolean operation on sets

Complements

- The set A^c is said to be the complement of the set A, with respect to the universal set S, if it is made up of all the elements of S that do not belong to A

Quindi $A^c \cap A = \emptyset$, l'intersezione è nulla



Algebra of Sets

1. *Idempotence property*

   $(A^c)^c = A$

2. *Commutative property*

   $A \cup B = B \cup A$

   $A \cap B = B \cap A$

3. *Associative property*

   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4. *Distributive property*

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   Note that the commutative and associative properties apply to both the union and intersection, whereas the distributive property applies only to the intersection.

Probabilistic Models

The mathematical description of an experiment with uncertain outcomes is called a probabilistic model, the formulation of which rests on three fundamental ingredients:

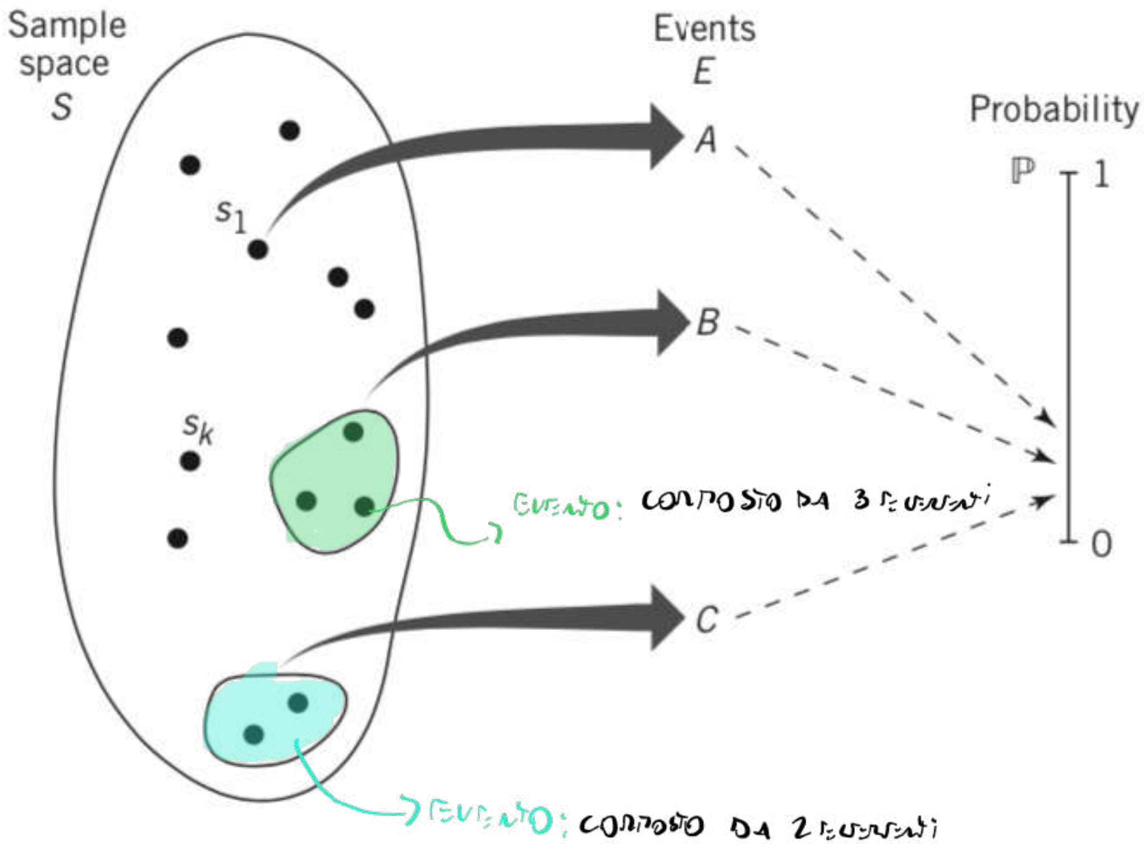
1. Sample space or universal set S, which is the set of all conceivable outcomes of a random experiment under study.
2. A class of events that are subsets of S.
3. Probability law, according to which a nonnegative measure P[A] is assigned to A.

→ CI INTERESSA TROVARE LA MISURA DELL'OCCORRENZA DELL'EVENTO

The measure P[A] is called the probability of event A.

- Encodes our belief in the likelihood of event A occurring when the experiment is conducted.

Probabilistic Models



- An event may involve a single outcome or a subset of possible outcomes in S.

Axioms of Probability

LA TEORIA DELLA PROBABILITÀ SI BASA SU QUESTI 3 ASSIOMI.

1. **Axiom 1 – Non negativity** The probability of event A is a nonnegative number bounded by unity. [NE SEGUE CHE SE LA P È 10 O -5, C'È QUALCOSA CHE HO SBAGLIATO!]

$$0 \le \mathbb{P}[A] \le 1 \qquad \text{for any event } A$$

INTERSEZIONE NULLA

2. **Axiom 2 – Additivity** The second axiom states that if A and B are two disjoint events, then the probability of their union satisfies the equality

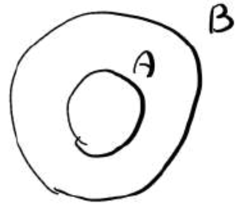
$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$$

3. **Axiom 3 Normalization** The third and final axiom states that the probability of the entire sample space S is equal to unity. LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO UNIVERSALE È 1.

ESEMPIO: NELLA TOMBOLA IL SET (UNIVERSALE) V È I 90 NUMERI DELLA TOMBOLA, QUINDI LA PROBABILITÀ UNIVERSALE DELL'EVENTO È CHE ESCA UN NUMERO QUALSIASI, INDIPENDENTEMENTE DAL SUO VALORE: È 1.

Axioms of Probability

These three axioms can be to develop some other basic properties of probability



- ① The probability of an impossible event is zero.
- ② $P[A^c] = 1 - P[A]$

  Se l'evento A è compreso nell'evento B allora $P[A] \le P[B]$
- ③ If event A lies within the subspace of another event B, then $P[A] \le P[B]$
- ④ If two events A and B are not disjoint, then $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

  ↳ altrimenti $A \cap B$ lo prendo 2 volte
- . . .

① dim

$$P(S) \cup P(\emptyset) = P(S)$$

$$P(S) \cup P(\emptyset) = 1$$

$$P(S) \cup P(\emptyset) = P(S) + P(\emptyset)$$

$$1 = 1 + P(\emptyset)$$

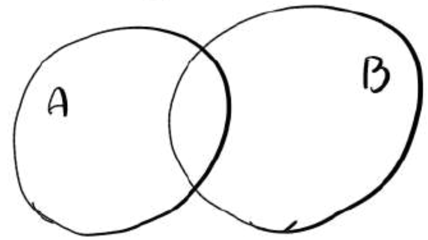
$$\Rightarrow P(\emptyset) = \emptyset \,!$$

③ dim

$$B = \underbrace{A \cup (A^c \cap B)}_{\text{disgiunti}}$$

$$P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$$

Quindi $P(B) \ge P(A)$ dato che $P(A^c \cap B) \ge$ per il 1° ass. ≥ 0



Axioms of Probability

- $P[A^c] = 1 - P[A]$

- If event A lies within the subspace of another event B, then $P[A] \leq P[B]$

- If two events A and B are not disjoint, then $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

Conditional probability

Suppose we perform an experiment that involves a pair of events A and B.

- Let P[A|B] denote the probability of event A given that event B has occurred.
- The probability P[A|B] is called the conditional probability of A given B.

Assuming that B has nonzero probability, this is given by

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

ESEMPIO: SE ESTRAGGO 1 DALLA TOMBOLA, LA SUCCESSIVA ESTRAZIONE È CONDIZIONATA DALLA PRECEDENTE

$\Rightarrow$ TOLGO NUMERI DAL SET

Bayes' rule

Suppose

- the conditional probability P[A|B] and the individual probabilities P[A] and P[B] are all easily determined directly, but …
- the conditional probability P[B|A] is desired.

LA PROBABILITÀ DI B DATO A

$$\mathbb{P}[B|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A]}$$

DERIVA DAI

$$P[A|B] = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A|B)\,P(B) = P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

HO INVERTITO GLI EVENTI DI [illegible]

$$\Rightarrow P(B|A)\,P(A) = P(B \cap A)$$

Independence

Suppose

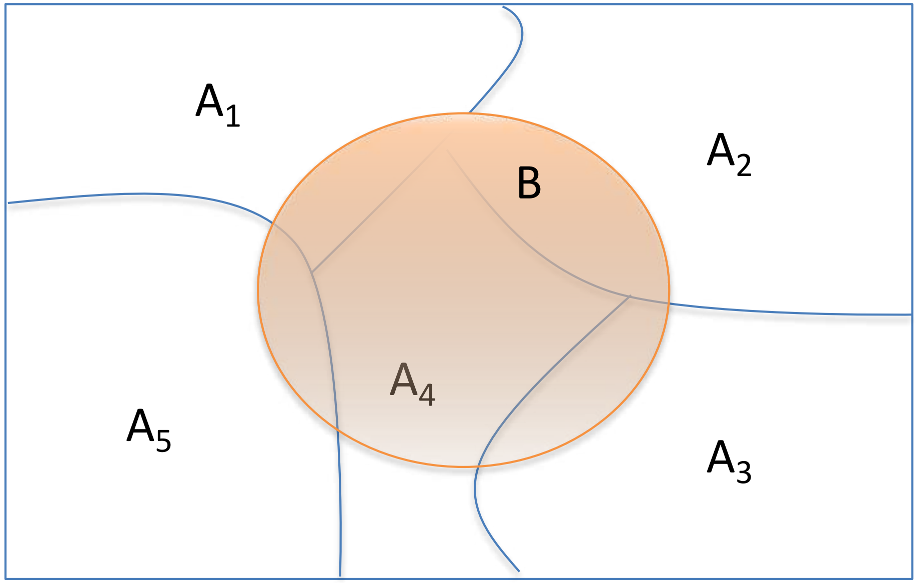
- the occurrence of event A provides no information whatsoever about event B; that is P[B|A] = P[B]
- From the Bayes's rule, we have that P[A|B] = P[A]
- The two events are independent and such that

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$$

If an event A is independent of another event B, then B is independent of A, and A and B are therefore independent events.

Law of total probability

Suppose $\{A_n; n=1,\ldots,N\}$ is a set of disjoint events



$$P[B] = \sum_{n=1}^{N} P[B \cap A_n]$$

20-04-2023

Radar Detection Problem

In the radar detection problem, there are three probabilities of particular interest:

- $\mathbb{P}[A]$ — probability that a target is present in the area; this probability is called the *prior probability*. ⇒ PROBABILITÀ CHE SIA PRESENTE IL TARGET
- $\mathbb{P}[B|A]$ — probability that the radar receiver detects a target, given that a target is actually present in the area; this second probability is called the *probability of detection*. ⇒ PER FAR SÌ CHE FUNZIONI IL RADAR, VORREI CHE FOSSE 1
- $\mathbb{P}[B|A^c]$ — probability that the radar receiver detects a target in the area, given that there is no target in the surveillance area; this third probability is called the *probability of false alarm*.

Suppose these three probabilities have the following values:

$$\mathbb{P}[A] = 0.02$$

$$\mathbb{P}[B|A] = 0.99$$

$$\mathbb{P}[B|A^c] = 0.01$$

The problem is to calculate the conditional probability $\mathbb{P}[A|B]$ which defines the probability that a target is present in the surveillance area given that the radar receiver has made a target detection.

Soluzione Es:

Sapendo la legge di Bias:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

Devo calcolarlo

Ce l'ho

Usiamo il TH della probabilità totale

$$P(B) = \sum_h P(B \cap A_h) = \sum_h P(B|A_h)\,P(A_h)$$

Due insiemi disgiunti sono A e A^c, vediamo quindi di scrivere

$\mapsto P(A^c) = 1 - P(A)$

$$P(B) = P(B|A)\,P(A) + P(B|A^c)\,P(A^c) = 0{,}99 \cdot 0{,}02 + 0{,}01 \cdot 0{,}98 = 0{,}0296 \approx 0{,}03$$

Quindi sostituisco con i numeri

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)} = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}02}{0{,}03}$$

↳ calcolato sopra

Communication Problem (Homework)

In a communication system,:

- 1 is transmitted with probability $p = 0.3$ and 0 with $1 - p = 0.7$.
- The error probability is $P_e = 0.01$ (un bit su 100 lo sbaglio)

> Assume that 0 has been received:
>
> what is the probability that 0 has been effectively transmitted?

- Define A = { 0 has been transmitted}, A^c = { 1 has been transmitted},
- Define B = { 0 has been received}, B^c = {1 has been received}
- Compute P[A|B] = 0.996.

Soluzione

↱ con A e B sono i set definiti

$P_1 = 0,3 \quad P_0 = 0,7 \quad P_e = 0,01 \qquad P(0|0) = P(A|B) = ?$

Converto le P in set:

$P_1 = P(A^c)$
$P_0 = P(A)$
$P_e = P(B^c, A) = P(B|A^c)$

$P_c = P(B|A) = P(B^c|A^c) = 1 - P_e$ => probabilità di corretta ricezione

Applichiamo Bayes:

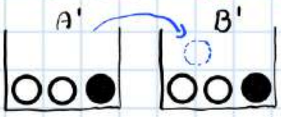
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

Mi manca $P(B)$, per trovarlo facciamo come prima: th della probabilità totale.

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) \Rightarrow \text{Fine!}$$

Nota Di fatto l'esercizio all'esame non ci definisce i set!

Esercizio dal libro:



1. Pesco una pallina a caso da A' e la metto in B'
2. Pesco una pallina a caso da B', qual è la probabilità di pescare una pallina bianca?

Definiamo i set che ci interessano:

A = { Pesco una pallina bianca dall'urna B' } $\quad P(A) = ?$
B = { ho pescato una pallina bianca da A' }
C = { ho pescato una pallina nera da A' }

Per il th della probabilità totale

$$P(A) = \underset{3/4}{P(A|B)}\,\underset{2/3}{P(B)} + \underset{1/2}{P(A|C)}\,\underset{1/3}{P(C)} = \frac{2}{3}$$

E nel caso vi siano 2 spostamenti di A a B? Allora cambio i set:

$P(A|B)$ = P di aver pescato una bianca in B' dopo aver pescato 2 palline bianche: $\frac{4}{5}$
$P(B)$ = P di aver pescato 2 palline bianche da A': $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
$P(A|C)$ = P di aver pescato una bianca in B' dopo aver pescato 2 palline nere: 0 => non è sorprendente
e così via...

Volendo posso ridecomporre $P(B) = P(B|D)P(D)$

Esercizio di Telecomunicazioni

Il sistema trasmette 0 e 1 con $P_1 = 0,3$ e $P_0 = 0,7$. Il sistema usa un codice a ripetizione di ordine 3:

Per trasmettere $0 \rightarrow$ Trasmetto 000
$1 \rightarrow 111$

Calcolare la probabilità di errore $P(E)$ nell'ipotesi che la probabilità di sbagliare un bit sia $P_e = 0,01$.

1. Identificare una strategia di decisione: ciò che ho ricevuto cosa è? Se ho 101 assumo che il numero sia 1. La regola di detection a massima verosimiglianza:

$0 \rightarrow 000 \rightarrow$
000 | 100
001 | 101 E_2
010 | 110 E_3
E_1 011 | 111 E_4

Corretto un errore di trasmissione

$$P(E) = P(E|0)P(0) + P(E|1)P(1)$$

Quindi

$P(E|0) = \sum P(E_i|0) \Rightarrow P(E_1|0) = P_e \cdot P_e \cdot (1 - P_e)$ essendo eventi indipendenti ciò è $= P(E_2|0) = P(E_3|0)$
$P(E_4|0) = P_e^3$

Sommo quasi tutto ed ho:

$$P(E|0) = \sum_i P(E_i|0) = 3p_e^2(1-p_e) + p_e^3 = 3p_e^2 - 3p_e^3 + p_e^3 = 3p_e^2 - 2p_e^3 \approx 3p_e^2$$

Invece che dividere in casi potevo dire direttamente che sbaglio con 2 errori su 3 o con 3 su 3; usando il binomiale: $\binom{3}{2}$. In generale

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$ Coefficiente binomiale.

Nell'esempio di prima: $\binom{3}{2} = \frac{3!}{1!\,2!}$

Ma tornando a calcolare $P(E)$

$$P(E) = P(E|0)P(0) + P(E|1)P(1) = P(E|0)$$

$$P(E|0) = 3p_e^2 \qquad P(E|1) = p_e^3 + 3p_e^2(1-p_e) \approx 3p_e^2$$

Es: Facciamolo per un codice 5:

$0 \longrightarrow 00000$

In questo caso la formula compatta sarebbe:

$$P(E|0) = \sum_i^5 \binom{5}{i} p_e^i (1-p_e)^{5-i} = \underbrace{\binom{5}{5} p_e^5}_{\text{ho sbagliato tutto}} + \underbrace{\binom{5}{4}(1-p_e)p_e^4}_{\substack{\text{1 giusto} \\ \text{4 sbagliati}}} + \underbrace{\binom{5}{3}(1-p_e)^2 p_e^3}_{\substack{\text{2 giusti} \\ \text{3 sbagliati}}} +$$

Questo risultato si applica quando si fanno le prove ripetute

Es:

Abbiamo 2 monete:

Moneta → Regolare $p(T) = p(C) = \frac{1}{2}$

Moneta → Truccata $p(T) = 0{,}8 \quad p(C) = 0{,}2$

T = Testa

C = Croce

Nota Non possiamo risolvere un problema di probabilità dobbiamo aver osservato la realizzazione di una serie di esperimenti nelle stesse condizioni, non fortemente correlate. ⇒ Per sapere il meteo in Italia non posso eseguire tutte le misurazioni in inverno in montagna!

1. Si sceglie a caso una delle due monetine.
2. Si lancia la moneta 10 volte ⇒ esce T per 5 volte e C per 5 volte. Calcola la probabilità di avere la monetina regolare

$P(A) = \{$ ho pescato la monetina regolare $\}$ $\qquad P(B) = \{10: 5$"T", 5"C"$\}$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \qquad P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|C)P(C)$$

$$P(B|A) = \binom{10}{5} P(T)^5 P(C)^{10-5} + \binom{10}{5} P(T)^5 P(C)^{10-5} = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

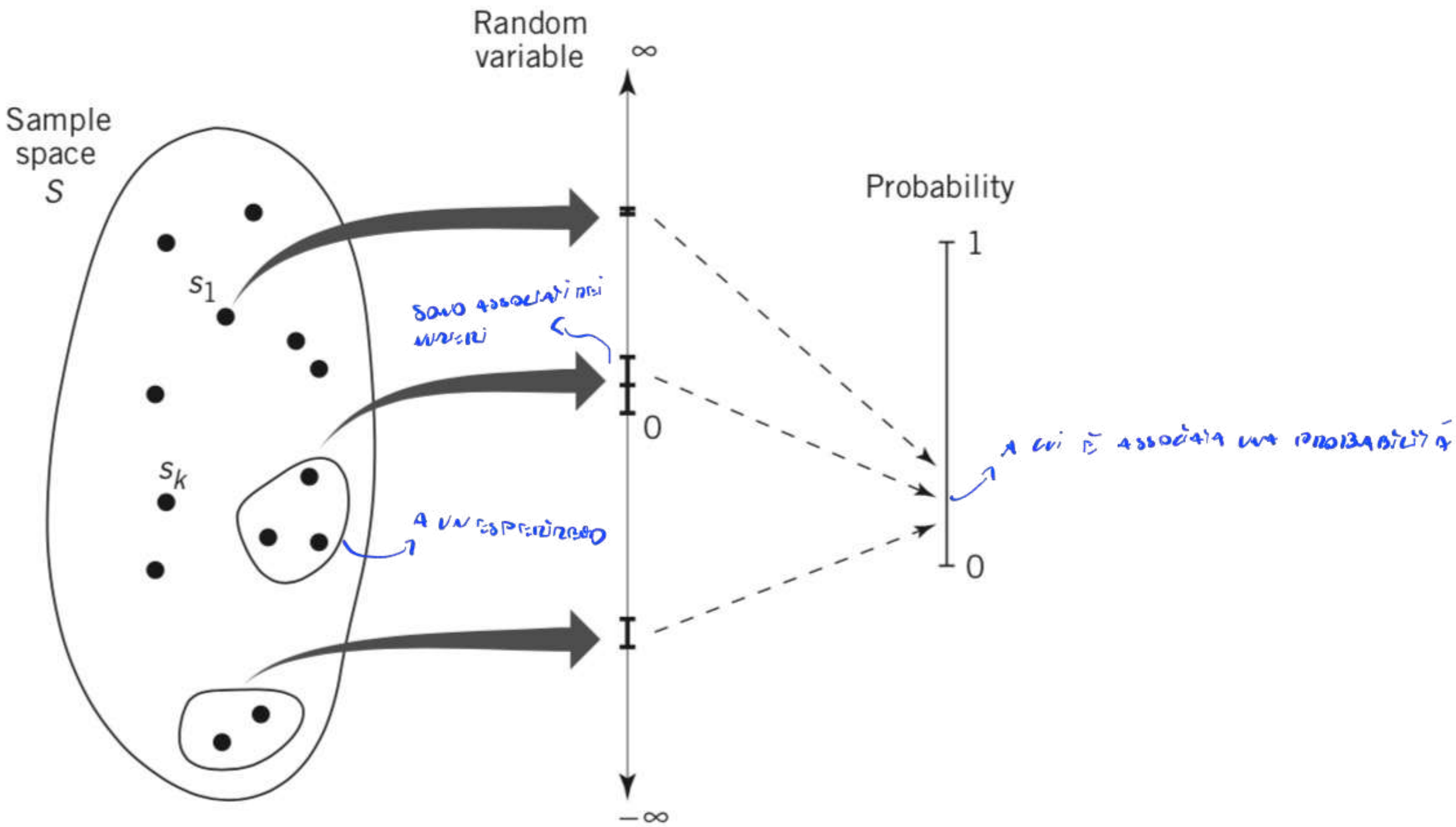
C = ho scelto la moneta truccata

$$P(B|C) = \binom{10}{5}\left(\frac{8}{10}\right)^5\left(\frac{2}{10}\right)^5$$

21-04-2023

Random Variables

Random variable: function whose domain is a sample space and whose range is some set of real numbers.



Distribution Functions

Formalizziamo il concetto di prima.

Per convenzione in maiuscolo si scrivono le variabili aleatorie, si indicano in minuscolo un possibile valore fissato che può avere.

Consider the random variable X and the probability of the event $X \leq x$. Denote this

variabile aleatoria

probability by $P[X \leq x]$. To simplify notation:

$$\text{DEF} \quad F_X(x) \triangleq \mathbb{P}[X \leq x] \qquad \text{for all } x$$

Nota: è in funzione di x, non di X.

The function $F_X(x)$ is called the distribution function of the random variable X.

- Note that $F_X(x)$ is a function of x, not of the random variable X.

Properties:

È limitata: per l'assioma delle probabilità

- Boundedness: It lies between zero and one;
- Monotonicity: The distribution function is a monotone nondecreasing function of x

Monotona crescente: al crescere di x la funzione cresce. Pensa a temperatura, avendo una stanza tra [10; 30] vediamo con il ≤ diremo: che se chiedo $P(T \leq 5)$ vale è 0, se vado da 5 a 10, 20... la probabilità arriva fino ad 1.

Probability density function (pdf)

The random variable X is said to be continuous if the distribution function $F_X(x)$ is differentiable:

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) \qquad \text{for all } x$$

LE VARIABILI ALEATORIE POSSONO ESSERE
- DISCRETE: DADI, MONETA...
- CONTINUA: TEMPERATURA...

↳ NOTA CHE LA PROBABILITÀ DI AVERE UN NUMERO SPECIFICO È 0, DATO CHE I NUMERI REALI SONO INFINITI

The function $f_X(x)$ is called the probability density function (pdf):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[x_1 < X \le x_2] &= \mathbb{P}[X \le x_2] - \mathbb{P}[X \le x_1] \\ &= F_X(x_2) - F_X(x_1) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

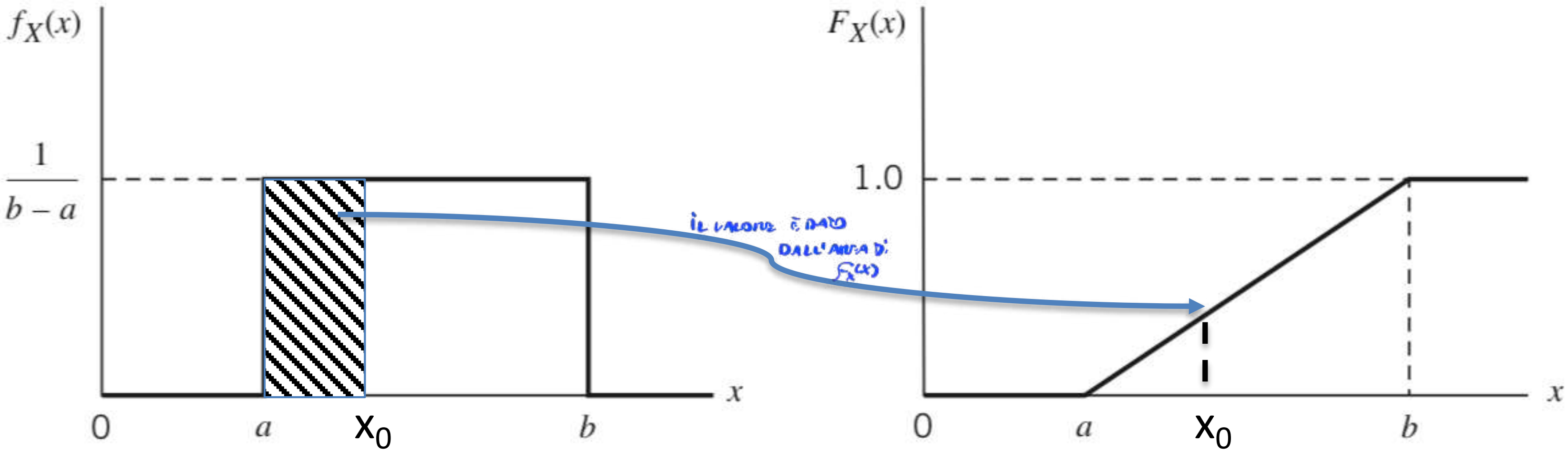
N.B. SE NON CI FOSSE x_1, CI SAREBBE $-\infty$ NELL'INTEGRALE. ANALOGAMENTE SENZA x_2 CI SAREBBE $+\infty$;

Properties:

- Nonnegativity;
- Normalization: The total area of the pdf is equal to unity.

↳ LA PROBABILITÀ STA TRA 0 E 1

Example – Uniform Distribution



$a, b \rightarrow$ sono arbitrari ; l'importante è che l'integrale faccia 1, per questo l'altezza è $\frac{1}{b-a}$

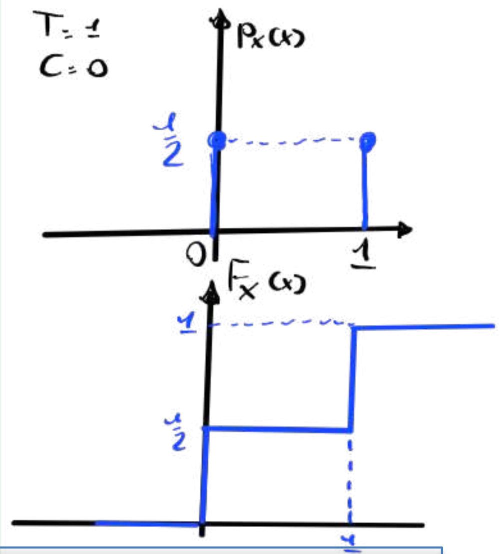
Probability Mass Function

Consider next the case of a discrete random variable, X, that can take a finite or countably infinite number of values.

- The distribution function $F_X(x)$ also applies to discrete random variables.
- …however, it is not differentiable;
- To get around, define the probability mass function $p_X(x)$ as

$$p_X(x) = \mathbb{P}[X = x]$$

Nella moneta $p_X(x)$ è:



Defined as the probability of the event $X = x$, which consists of all possible outcomes of an experiment that lead to a value of X equal to x.

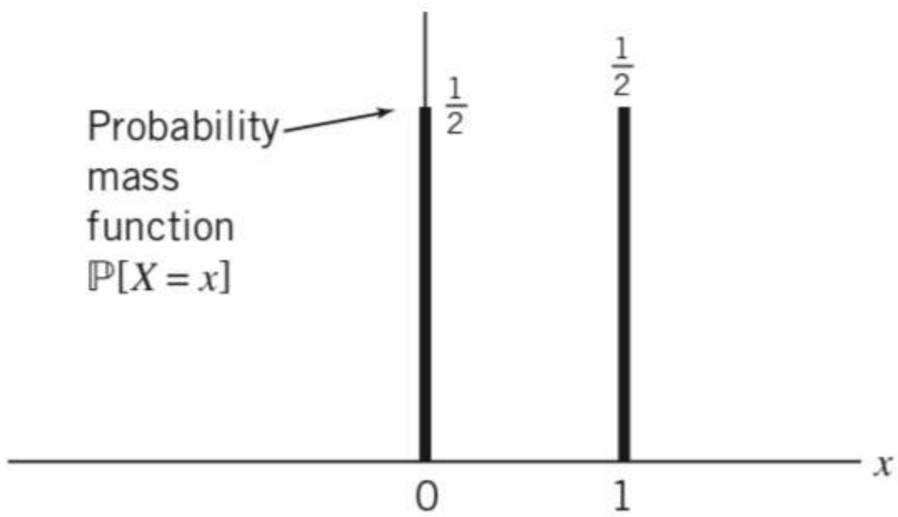
Es: Nel caso del dado è $\frac{1}{6}$.

Example – Bernoulli Random Variable

Consider a probabilistic experiment that takes one of two possible values:

- the value 1 with probability p;
- the value 0 with probability 1 – p.

Such a random variable is called the *Bernoulli random variable:*



Multiple Random Variables (continue)

Consider two random variables X and Y

$$F_{X,\,Y}(x, y) = \mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y]$$

The joint distribution function $F_{X,Y}(x,y)$ is the probability that X is less than or equal to a specified value x, and that Y is less than or equal to another specified value y.

$$f_{X,\,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,\,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

The joint probability density function $f_{X,Y}(x,y)$ contains all is needed for the probability analysis of joint random variables.

Conditional Probability Density Function

COME ABBIAMO DEFINITO LA PROBABILITÀ CONDIZIONATA, SI PUÒ DEFINIRE PURE LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONDIZIONATA!

Suppose that X and Y are two continuous random variables with $f_{X,Y}(x,y)$.

- The conditional probability density function of Y, such that X = x, is defined by

$$f_Y(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

Suppose that knowledge of X can, in no way, affect the distribution of Y

1. Then, $f_Y(y|x)$ reduces to the marginal density $f_Y(y)$ and… (ES. LA PROBABILITÀ DI AVERE 1 TIRANDO UN DADO QUANDO A PISA È NEVICATO => È SEMPRE LA PROBABILITÀ DEL DADO)
2. The joint pdf becomes $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$

> If the joint probability density function of the random variables X and Y equals the product of their marginal densities, then X and Y are statistically independent.

Sum of Independent Random Variables

Let X and Y be two statistically independent continuous random variables with probability density functions are denoted by $f_X(x)$ and $f_Y(y)$. Define

$$Z = X + Y$$

The pdf $f_Z(z)$ is:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx$$

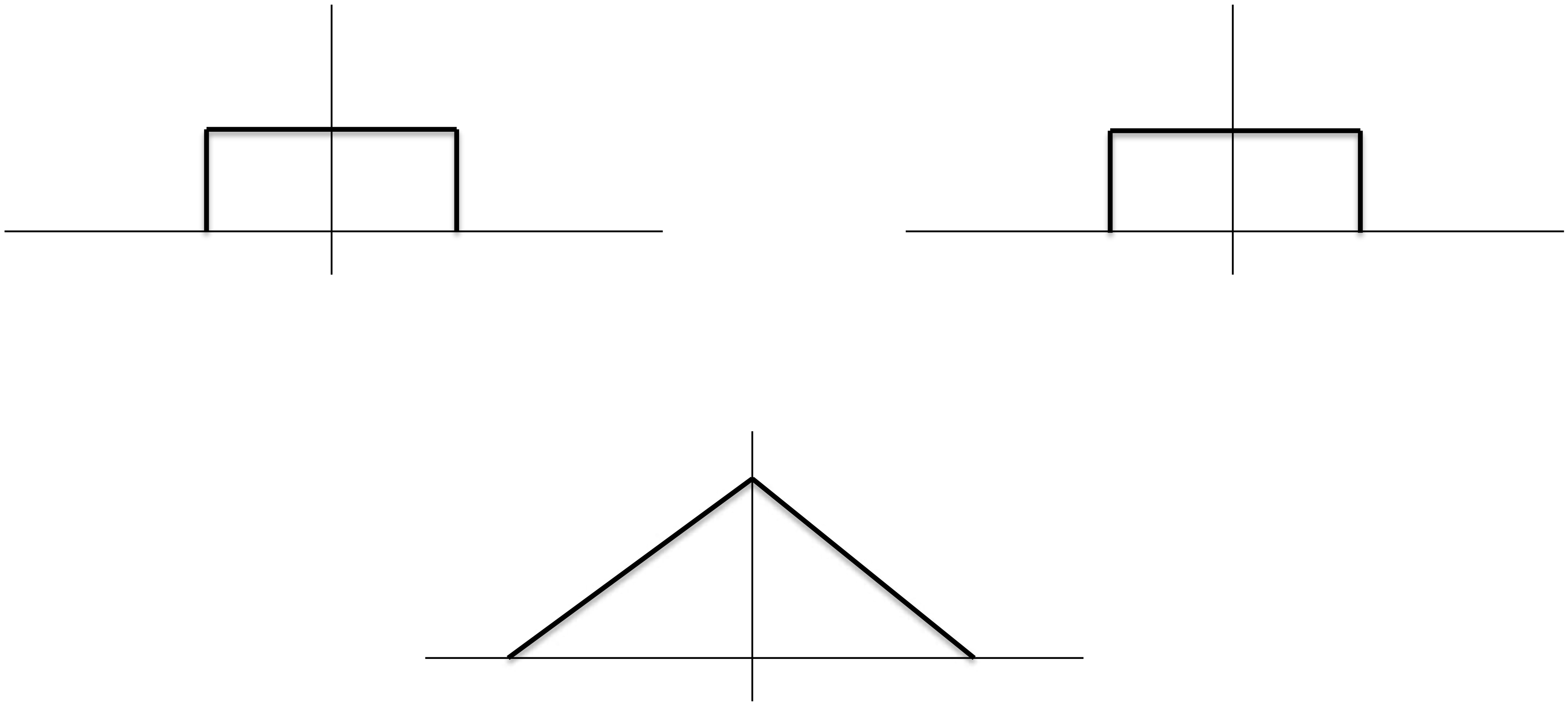
> The summation of two independent continuous random variables leads to the convolution of their respective probability density functions.

Nota "Quelli meno preparati lo sbagliano all'esame!".
Non lo dimostra, ma la dimostrazione è sul libro.

[Apre MATLAB: uniform_random_variable, sum_random_variable]

Sum of Independent Random Variables

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx$$



$\rightsquigarrow$ MA NON È UNA GAUSSIANA

27-04-2023 [ANCHE SE L'AVEVA PASSATO ANCHE LA SCORSA LEZIONE]

The Mean Value of Random Variables

The expected value or mean of a continuous random variable X is formally defined by

VARIABILE ALEATORIA CONTINUA:

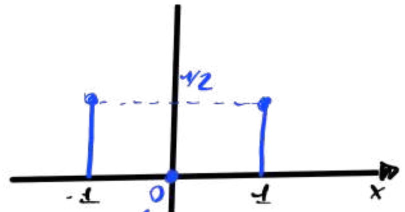
VALORE MEDIO VARIABILE ALEATORIA

$$\mu_X = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

↳ E = EXPECTATION => INDICA IL VALOR MEDIO DI X

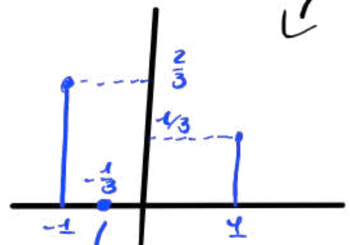
VARIABILE ALEATORIA DISCRETA:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x p_X(x)$$



↳ IL VALOR MEDIO È 0, SIA BENE COSÌ ANCHE SE 0 NON APPARTIENE AI VALORI DI X. È DIVERSA CON LA MEDIA PESATA!

The mean locates the center of gravity of the area under the probability density curve of the random variable X.



↳ IL VALOR MEDIO SI SPOSTA VERSO L'EVENTO PIÙ PROBABILE

Properties

1. Linearity: E[Z] = E[X + Y] = E[X] + E[Y]
2. Statistical independence: E[Z] = E[XY] = E[X] E[Y] if X and Y are independent.

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = E[X]\,E[Y]$$

↳ COVARIANZA, SE FOSSERO INDIPENDENTI SAREBBERO $f_X f_Y$

Variance

The variance σ^2_X of a random variable X is defined as

$$\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}(X-\mu_X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^2 f_X(x)\,dx$$

$$\boxed{2}\ \sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mu_X \mathbb{E}[X] + \mu_X^2 = \boxed{\mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2}$$

μ_X è il valore medio $= \mathbb{E}[X]$

→ Questo è un numero, quindi non posso applicarci $\mathbb{E}$ ⇒ si applica soltanto alle variabili aleatorie

Spesso si calcola così la varianza: dato il valore medio dato che se $E(x) = \int x f_x(x)\,dx$ allora $E(x^2) = \int x^2 f_x(x)\,dx$

In a sense, the variance of X is a measure of the variable's "randomness"

Se $\sigma^2 \to 0$ mi approssima il valor medio, "si restringe il campo" intorno al valor medio. Più è grande più la variabile cambia.

$$\boxed{\mathbb{P}[|X-\mu_X| \geq \varepsilon] \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}}$$

27-07-2023

Dalla definizione

$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$:

Ponendo come HP l'indipendenza statistica, sappiamo:

$$f_{XY}(x,y) \stackrel{!}{=} f_X(x)\, f_Y(y)$$

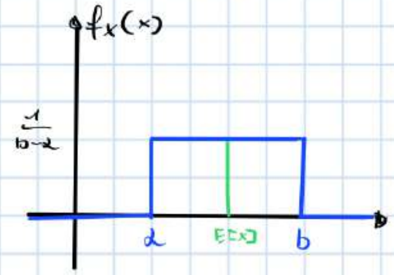
Allora

$$E[XY] = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx}_{E[X]} \;\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy}_{E[Y]}$$

Altra proprietà:

$$E[g(x)] = E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx}^{\text{val. medio di } g(x)} \qquad y \stackrel{!}{=} g(x)$$

Prendiamo una variabile uniformemente distribuita tra a e b e calcoliamoci il valor medio:



$$E[X] = \underbrace{\int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx}_{\text{applico la def.}} = \frac{1}{b-a}\cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b+a)}{2}$$

Adesso calcoliamoci l'aspettazione di x^2:

$E[X^2] = E[Y] \qquad g = x^2 = g(x)$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b-a}\cdot x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \boxed{\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Varianza

Noi abbiamo definito anche la varianza:

$$\sigma_x^2 = VAR[X] = E[(\overbrace{x-\mu_x}^{g(x)})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2 f_X(x)\,dx$$

Se io ho l'aspettazione di una variabile non aleatoria a allora $E[a] = a$. Sfruttando questa proprietà e la linearità si dimostra $\boxed{2}$ sulle slide. Calcoliamo adesso per la variabile x la varianza con tale relazione:

$$\sigma_x = VAR[X] = E[X^2] - \mu_x^2 = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4}$$

Quando il valor medio è 0 la varianza coincide con il valore quadratico medio

con $b=1$ e $a=1$ otteniamo $\sigma_x = \frac{1}{3}$ e $\mu_x = 0$

Guardiamo anche una distribuzione esponenziale.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Si verifica che è una distribuzione dal fatto che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \underline{1} \qquad \text{(Assioma)}$$

Covariance

Let X and Y be two random variables. The covariance is defined as

$$\mathrm{cov}[XY] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

$$= \mathbb{E}[XY] - \mu_X \mu_Y$$

The *correlation coefficient* of X and Y is (measure of similarity between X and Y)

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}[XY]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Two random variables X and Y are said to be

→ NESSUNA CORRELAZIONE TRA X e Y

1. Uncorrelated *if cov[XY] = 0;* NOTA È DIVERSO DALL'INDIPENDENZA: SE SONO INCORRELATE NON È DETTO CHE SIANO INDIPENDENTI, MA SE SONO INDIPENDENTI ALLORA SONO ANCHE INCORRELATE.
2. Orthogonal *if E[XY] = 0.*

The Gaussian Distribution

N.B. DIRE VARIABILE GAUSSIANA O NORMALE È LA STESSA COSA.

Among the many distributions, the Gaussian distribution stands out, by far, as the most commonly used distribution in the statistical analysis of communications systems

- The variable X is said to be Gaussian distributed if its pdf has the general form

EXP È e

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

È IN FUNZIONE DI μ, σ; LA COSA BELLA È CHE SAPENDO SOLTANTO QUESTI 2 VALORI E SAPENDO CHE L'ESPERIMENTO È GAUSSIANO, HO CONOSCIUTA PIENA DELL'ESPERIMENTO.

NOTO μ E σ $\Rightarrow$ HO $f_X(x)$

SE X È GAUSSIANA ALLORA $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ $\Rightarrow$ È DEFINITA $f_X(x)$ DA μ_X E σ_X

$\hookrightarrow$ NORMALE

Properties

1. Uniquely defined by its mean and variance
2. Gaussianity is preserved by a linear transformation.
3. The sum Z = X + Y of independent Gaussian random variables is also a Gaussian random variable, with E[Z] = E[X] + E[Y] and var[Z] = var[X] + var[Y]

Avendo $y = \alpha x + \beta$ ponendo che x sia gaussiana allora anche y è gaussiana: $y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y)$

$$E[y] = \alpha E[x] + \beta = \alpha \mu_x + \beta \qquad \text{quindi} \qquad \sigma_y^2 = E[(y-\mu_y)^2] = E[(\alpha x + b - \alpha\mu_x - \beta)^2] = E[\alpha^2 (x-\mu_x)^2] = \alpha^2 \sigma_x^2$$

Supponiamo che $y = x + \beta$, per capire meglio l'esempio precedente.

ATTENZIONE! $y = g(x) = x^2 \Rightarrow$ non è gaussiana

$$E[y] = \mu_x + \beta \qquad \sigma_y^2 = E[(y-\mu_y)^2] = E[(x + b - \mu_x - \beta)^2] = E[(x-\mu_x)^2] = \sigma_x^2$$

È normale che σ^2 non dipenda da β che non fa altro che posizionarla da qualche parte, ma a me interessa quanto larga (λ) non dove è (β)!

Slide successiva:

L'utilità di avere una variabile gaussiana standard è che avendo $x \sim \mathcal{N}(0,1)$ si può derivare una variabile non standard $y \sim \mathcal{N}(\mu_y; \sigma_y^2)$. Per farlo mi basta:

$$y = \sigma_y x + \mu_y \qquad E[y] = \mu_y$$
$$\sigma_y^2 = \sigma_y^2 \sigma_x^2 = \sigma_y^2$$

The Standard Gaussian Distribution

When E[X] = 0 and var[X] = 1, then (standard form)

Se $X \sim N(0,1)$ è definita Gaussiana standard!

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

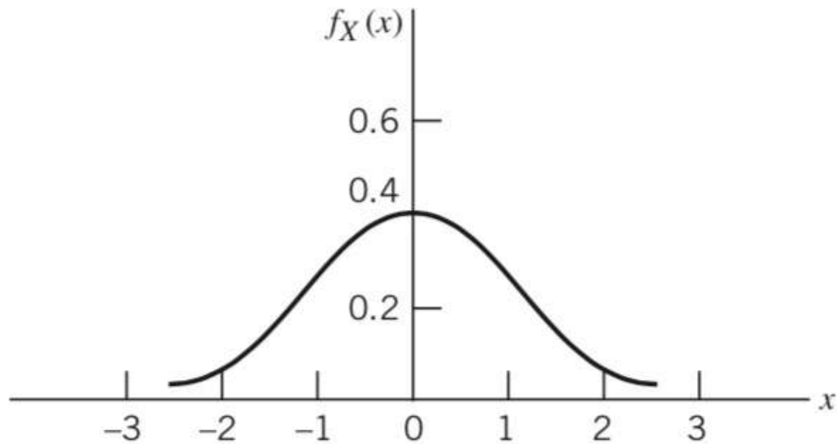
non è stata in forma chiusa,

non ha senso calcolare l'integrale, per questo si usa Φ

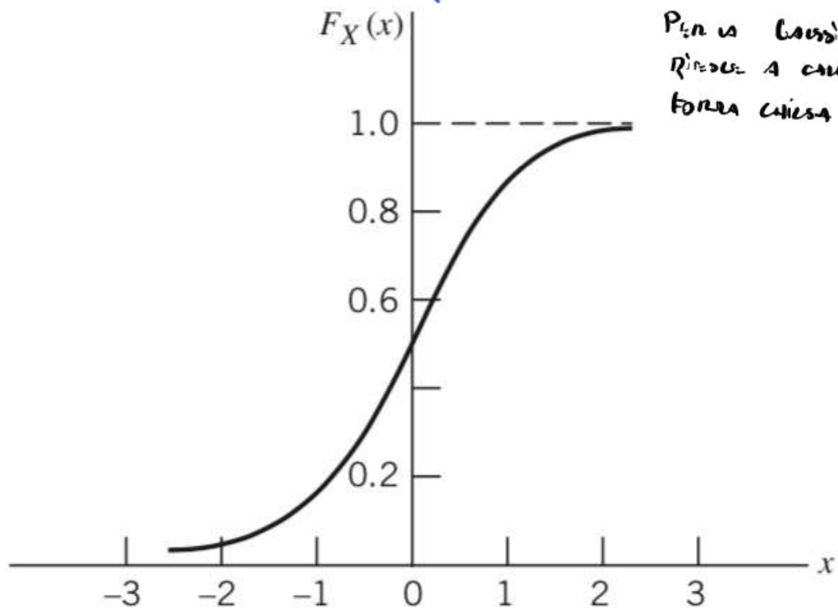
Funzione di Distribuzione (Probabilità $P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$)

Per la Gaussiana non si riesce a calcolarlo in forma chiusa!

GAUSSIANA STANDARD



Centrata in 0 in quanto è il suo valor medio



The Standard Gaussian Distribution

The function commonly used in communication systems is the Q-function:

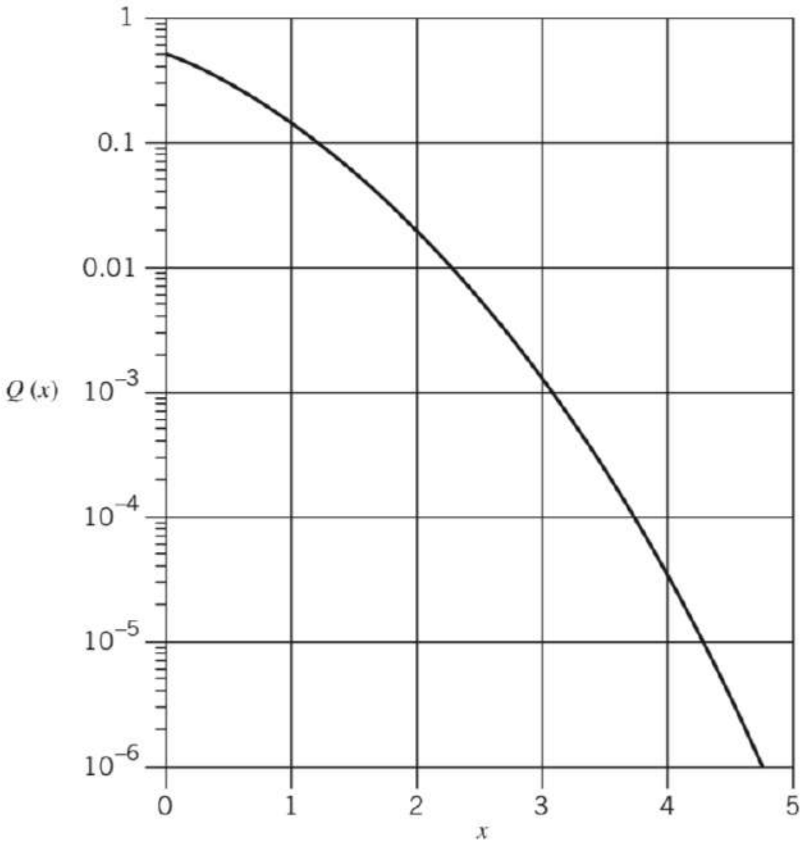
$$Q(x) = 1 - F_X(x)$$

SFRUTTANDO LA PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Esempio:

$Q(3) = 10^{-3} = P[x>3]$



N.B. Posso portarla allo scritto, con grafico incluso!!!

[CAPIRE MATLAB]

The Central Limit Theorem

AD ESEMPIO UNA DISTRIBUZIONE UNIFORME COME UNA RECT.

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ denote a sequence of independently and identically distributed (iid) random variables with mean $\boldsymbol{\mu}$ and variance $\boldsymbol{\sigma}^2$. Define:

$$Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right)$$

As the number of random variables n approaches infinity, Yn converges to the standard Gaussian random variable:

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} \exp^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

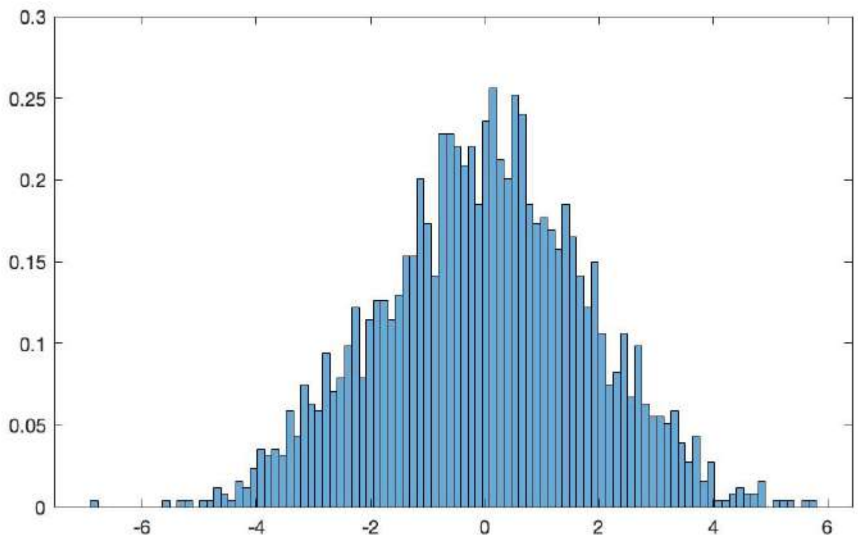
Mathematical justification for using the Gaussian distribution as a model for an observed random variable result of a large number of random events

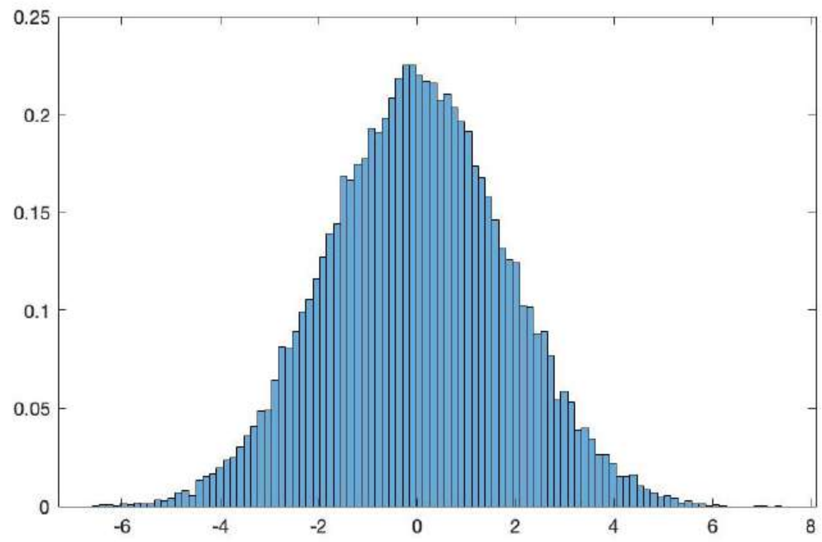
Sum of Uniformly Distributed Random Variables

Consider the random variable

$$Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

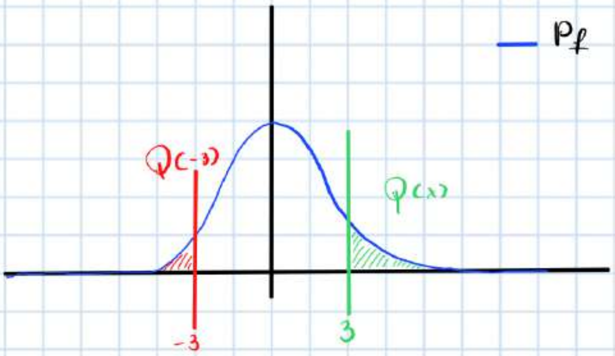
where X_i are independent and uniformly distributed random variables on the interval from -1 to $+1$. Let's compute the pdf by using Matlab.





DISEGNAMO LA $Q(x)$: ESSA È L'AREA SOTTESA DA X IN POI

$Q(x) = P[X \geq x]$ CON X GAUSSIANA



$Q(3) = P(X \geq 3)$

$Q(-\infty) = 1 \qquad Q(+\infty) = 0$

$Q(0) = \frac{1}{2}$

ADESSO LA RELAZIONE $Q(x) = 1 - Q(-x)$, È VERA? VEDIAMOLO PER VIA GRAFICA: È SIMMETRICA DALL'ALTRA PARTE A $Q(x)$.

IN UN SISTEMA DI COMUNICAZIONE BINARIO POTREMO CHE

$y = \sqrt{p}\, s + n$ OVE $s \in \pm 1$

$n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ → RUMORE È GAUSSIANO

p ⇒ POTENZA, È UN VALORE CHE DETERMINA IL RUMORE TERMICO.

CALCOLIAMO LA PROBABILITÀ DI ERRORE P_e ($\hat{}$ → SIGNIFICA STIMATO!) ~ PROBABILITÀ, CIOÈ ... ... MENTRE CI ANDAVA

$$P_e = P_r(\hat{S} = 1 \mid s = -1)\, P_r(s = 1) + P_r(\hat{S} = -1 \mid s = 1)\, P_r(s = 1)$$

NOI POSSIAMO CALCOLARE QUESTE DUE PROBABILITÀ

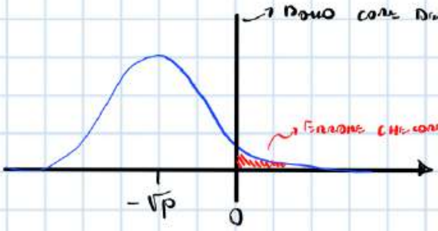
INIZIAMO DALLA PRIMA:

$$y\big|_{s=1} = -\sqrt{p} + n$$

CONDIZIONATAMENTE AD $s = 1$ HO UNA COSTANTE (p) + UNA VARIABILE GAUSSIANA ⇒ y È GAUSSIANA!

$$y \sim \mathcal{N}(-\sqrt{p}, \sigma_n^2)$$

→ DOVE CONSIDERO DI CAMBIARE AL SISTEMA (STRATEGIA DI MASSIMA SOMIGLIANZA), È LA SOGLIA PER DISTINGUERE 1 E 0 RICEVUTI



→ ERRORE CHE COMMETTO QUANDO RICEVO: $P_r(y \geq 0 \mid s = -1)$

↳ È LA PROBABILITÀ DI ERRORE DI TRASMISSIONE

28-04-2023

[ARRIVATO TARDI] → STA GENERALIZZANDO IL CONCETTO DI IERI.

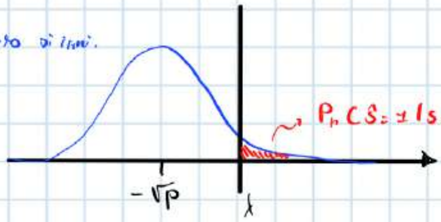
$y = \sqrt{p}\, s + n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$

$s \in \{\pm 1\}$ ⇒ VARIABILE BINARIA (NO GAUSSIANA)

PONIAMO $s = -1$ ⇒ y DIVENTA GAUSSIANA.

$y = -\sqrt{p} + n \sim \mathcal{N}(-\sqrt{p}, \sigma_p^2)$

QUINDI OTTENIAMO



STRATEGIA DI DECISIONE

$$\hat{S} = \begin{cases} -1 & y \leq \lambda \\ 1 & y > \lambda \end{cases}$$

$$P_e = P_r(\hat{S} = 1 \mid s = -1)\, P_r(s = 1) + P_r(\hat{S} = -1 \mid s = 1) \cdot P_r(s = 1)$$

→ PROBABILITÀ CHE n GAUSSIANA SIA MAGGIORE DI $\lambda + \sqrt{p}$

$$P_r(\hat{S} = +1 \mid s = -1) = P_r(y > \lambda \mid s = -1) = P_r(-\sqrt{p} + n > \lambda) = P_r(n > \lambda + \sqrt{p})$$

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1 - F_X(x) = 1 - Q(-x)$$

CALCOLIAMOCI QUINDI QUESTA PROBABILITÀ, DICENDO CHE n È GAUSSIANA E LA POSSIAMO CALCOLARE USANDO LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ

$$P(n > \lambda + \sqrt{p}) = \int_{\lambda+\sqrt{p}}^{+\infty} f_N(n)\, dn = \int_{\lambda+\sqrt{p}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{n - 0^2}{2\sigma_n}}\, dn$$

↳ ADESSO INDICHIAMO, DATO CHE È GAUSSIANA, LA SUA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ:

$$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{(n - \mu_n)^2}{2\sigma_n^2}}$$

VOGLIO ESPRIMERE TALE INTEGRALE IN FUNZIONE DI $Q(x)$ E PER FARLO ESEGUO UN CAMBIO DI VARIABILE.

$t = \frac{n}{\sigma_n} \qquad dt = \frac{dn}{\sigma_n}$

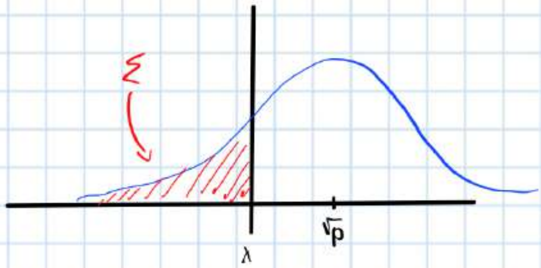
$$= \int_{\frac{\lambda+\sqrt{p}}{\sigma_n}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = Q\left(\frac{\lambda + \sqrt{p}}{\sigma_n}\right)$$

→ IO NON SO CALCOLARE L'INTEGRALE IN FORMA CHIUSA, MA SO CHE VARRÀ...

INTERPRETANDO IL RISULTATO SCOPRIAMO CHE IN GENERALE VALE CHE L'INTEGRALE DELLA ZONA DEL GRAFICO È $\boxed{Q\left(\frac{\lambda + \mu_y}{\sigma_y}\right)}$

Adesso vediamo che dato questo risultato possiamo calcolare l'altra probabilità di errore, quindi quando $s=1$

$$y\big|_{s=1} = \sqrt{P} + n \sim \mathcal{N}(\sqrt{P}, \sigma_n^2)$$



Stavolta abbiamo l'area a sx, quindi ci interessa

$$P_r(\hat{s}=-1 \mid s=1) = 1 - Q\left(\frac{\lambda - \mu_y}{\sigma_y}\right) = 1 - Q\left(\frac{\lambda - \sqrt{P}}{\sigma_n}\right)$$

Nota La P_e del sistema non è né quest'ultima P né quella calcolata prima, né $Q\left(\frac{\lambda+\mu_y}{\sigma_y}\right)$. Ma è la somma delle due P soppesate da quelle a priori $\Rightarrow$ l'exp. condizionata.

Calcoliamo la P_e del sistema, indicando per semplicità:

$q = P_r(s=1)$
$1-q = P_r(s=-1)$

$$P_e = (1-q)\,Q\left(\frac{\lambda+\sqrt{P}}{\sigma_n}\right) + q\left(1 - Q\left(\frac{\lambda-\sqrt{P}}{\sigma_n}\right)\right) = g(\lambda)$$

Dato che fissato P, dato che è la potenza di trasmissione del simbolo, e fissato q su cui comunque ho il controllo, qual è la soglia ottima del sistema? Per trovarla devo derivare $g(\lambda)$ per trovarne il minimo $\Rightarrow \frac{d\,g(\lambda)}{d\lambda} = \emptyset$

Poniamo adesso di avere $q = \frac{1}{2}$ e $\lambda = 0$

$$P_e = \frac{1}{2}Q\left(\frac{\sqrt{P}}{\sigma_n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - Q\left(-\frac{\sqrt{P}}{\sigma_n}\right)\right) = Q\left(\frac{\sqrt{P}}{\sigma_n}\right)$$

In quanto $Q(x) = 1 - Q(-x)$, tutto questo è vero soltanto sotto le varie ipotesi: simboli equiprobabili e soglia ottima

Il tutto lo posso riscrivere come $= Q(\sqrt{SNR})$ ove $SNR = \frac{P}{\sigma_n^2}$ ovvero il rapporto tra il segnale (la potenza) e il rumore. Quindi la P_e dipende solo da questo.

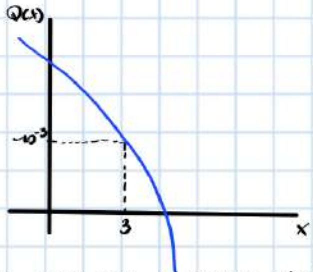
Supponiamo ora di volere una $P_e = 10^{-3}$, qual è la SNR? Ovviamente rimanendo sotto le ipotesi della forma compatta.

$$Q(\sqrt{SNR}) = 10^{-3}$$

Prendiamo quindi il grafico e vediamo subito che $\sqrt{SNR} = 3$

Segue che

$$SNR = 9 = SNR_{dB} = 9.3\ dB$$



Esercizio In generale avendo

$y = \sqrt{P}s + n = d\,s + n \qquad z = \frac{y}{d} = s + \frac{n}{d} \sim \mathcal{N}\left(\pm 1, \frac{\sigma_n^2}{d^2}\right)$ Dividiamo per d sia il segnale che il rumore, quindi scalo il rumore di d^2.

La probabilità di errore sarà quindi:

$$P_e = Q\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{1}{\sigma_n}}\right) \Rightarrow \text{sparisce, rispetto a prima, } P!$$

Adesso complichiamo un po' l'esercizio, fino ad ora noi abbiamo considerato la variabile aleatoria come reale, in realtà il rumore è complesso:

$$y = \sqrt{P}s + n \sim \mathcal{N}_C(0, \sigma_n^2) \qquad n = n_R + j n_I,\ n_R, n_I \sim \mathcal{N}_C\left(0, \frac{\sigma_n^2}{2}\right)$$

Allora $VAR[n] = E[|n^2|] - \mu_n^2 = VAR[n_R] + VAR[n_I]$, dato che n_R e n_I sono indipendenti.

Scegliamo una strategia di decisione, prima di tutto vediamo che y è complesso $y = y_R + j y_I$. Noi abbiamo come simboli $S + (\pm 1)$ sappiamo quindi che

$y_R = \mathrm{Re}\{y\} = s + n_R$
$y_I = \mathrm{Im}\{y\} = n_I$

Tuttavia si vede che nella parte immaginaria c'è soltanto il rumore, non valuto alcuna informazione, la parte Im è solo rumore bianco. Ne segue che pongo la soglia rispetto alla sola parte Re, in questo caso pongo la soglia a zero

$$\hat{s}\begin{cases} 1 & \mathrm{Re}\{y\} \geq 0 \\ -1 & \mathrm{Re}\{y\} < 0 \end{cases}$$

Calcoliamoci la soglia di errore:

$$P_e = Q\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$$

Per farlo calcoliamoci

$$z_R = \frac{y_R}{\sqrt{P}} = s + \frac{n_R}{\sqrt{P}}\ \mathcal{N}(0, \sigma^2) \qquad \sigma^2 = \frac{\sigma_n^2}{2P}$$

Segue che:

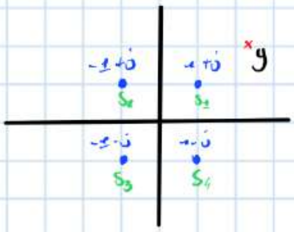
$$P_e = Q\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{1}{\sigma^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2P}{\sigma_n^2}}\right) = Q\left(\sqrt{2SNR}\right)$$

In questo caso ottengo un sistema che funziona meglio, dato che butto via la parte immaginaria.

Quindi avendo una $P_e = 10^{-3}$, in un sistema di comunicazione binario, è:

$$SNR_{dB} = 6{,}8\,dB \quad \text{invece per} \quad P_e = 10^{-5} \quad SNR_{dB} = 9{,}8$$

Complichiamo ancora le cose: adesso non trasmettiamo più dei simboli binari, ma trasmettiamo dei simboli complessi:



Il modello è il solito

$$y = \sqrt{P}\,s + n \sim \mathcal{N}_C(0, \sigma_n^2)$$

Ma non posso più buttare la parte immaginaria in quanto veicolata da dell'informazione

$$y_R = \sqrt{P}\, s_R + n_R$$
$$y_I = \sqrt{P}\, s_I + n_I$$

La seconda complicanza è data dalla strategia di decisione: se non ho errore y cade nel punto. Come strategia posso dire che se y cade in un quadrante gli assegno il valore del punto in quel quadrante $\Rightarrow$ Ho essenzialmente 2 soglie, una imm. e una reale: pongo in tal caso gli assi. Calcoliamo P_e:

$$P_e = \sum_{k=1}^{4} \underbrace{P_r(\hat{s}_k \neq s_k \mid s_k)}_{\substack{\text{Sono tutte uguali in quanto} \\ \text{tutte le } P_r \text{ dei singoli simboli} \\ \text{sono uguali} \Rightarrow \text{mi basta calcolarne 1.}}} P_r(s_k) = P_r(\hat{s}_1 \neq s_1 \mid s_1) \underbrace{\sum_{k=1}^{4} P_r(s_k)}_{\substack{\text{La somma di tutte le} \\ P_r \text{ a priori è } = 1}} = P_r(\hat{s}_1 \neq s_1 \mid s_1)$$

Allora trasformiamo la P_e trovata in funzione di

$y = \sqrt{P}\, s_1 + n$
- $y_R = \sqrt{P} + n_R$
- $y_I = \sqrt{P} + n_I$

Tuttavia io posso riscrivere

$$P_e = P_r(\hat{s}_1 \neq s_1 \mid s_1) = 1 - \underbrace{P_r(\hat{s}_1 = s_1 \mid s_1)}_{\text{Probabilità di corretta ricezione}} = 1 - \underbrace{P_r(y_R, y_I \in I^\circ)}_{\text{Probabilità che } y_R \text{ e } y_I \text{ cadano nel } I^\circ \text{ quadrante}} = P_r(y_R \geq 0)\, P_r(y_I > 0)$$

↳ Traduco in disequazione, lo posso scrivere in questo modo dato che sono indipendenti! In quanto variabili gaussiane incorrelate distribuite e indipendenti (HP iniziale)

Quindi risolviamo l'esercizio calcolando le singole probabilità, per poi moltiplicarle fra loro

- y_R ha $P_e = Q(\sqrt{2SNR})$
- y_I ha $P_e = Q(\sqrt{2SNR})$

Essendo necessario considerare la P di corretta ricezione sarà

$$P_r(y_R \geq 0)\, P_r(y_I > 0) = \left(1 - Q(\sqrt{2SNR})\right)^2$$

Quindi $P_e = 1 - \left(1 - 2Q(\sqrt{2SNR}) + Q^2(\sqrt{2SNR})\right) = 2Q(\sqrt{2SNR}) - Q^2(\sqrt{2SNR}) \approx 2Q(\sqrt{2SNR})$

Posso trascurare Q^2 perché già con 10^{-3} diventa trascurabile più piccolo.

Notare come SNR è sempre lo stesso di prima: $SNR = \frac{P}{\sigma_n^2}$. Potevo calcolare direttamente la P_e e dava venire lo stesso risultato! In tal caso sarebbe

P_e della parte immaginaria: $Q(\sqrt{2SNR})$
P_e della parte reale: $Q(\sqrt{2SNR})$

$$\Rightarrow 2Q(\sqrt{2SNR}) - Q^2(\sqrt{2SNR})$$

Devo togliere Q^2 in quanto conto 2 volte lo stesso evento per l'assioma dell'unione:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

[09-05-2023]

Stochastic Processes

Introduction

In simple terms:

A stochastic process is a set of random variables indexed in time.

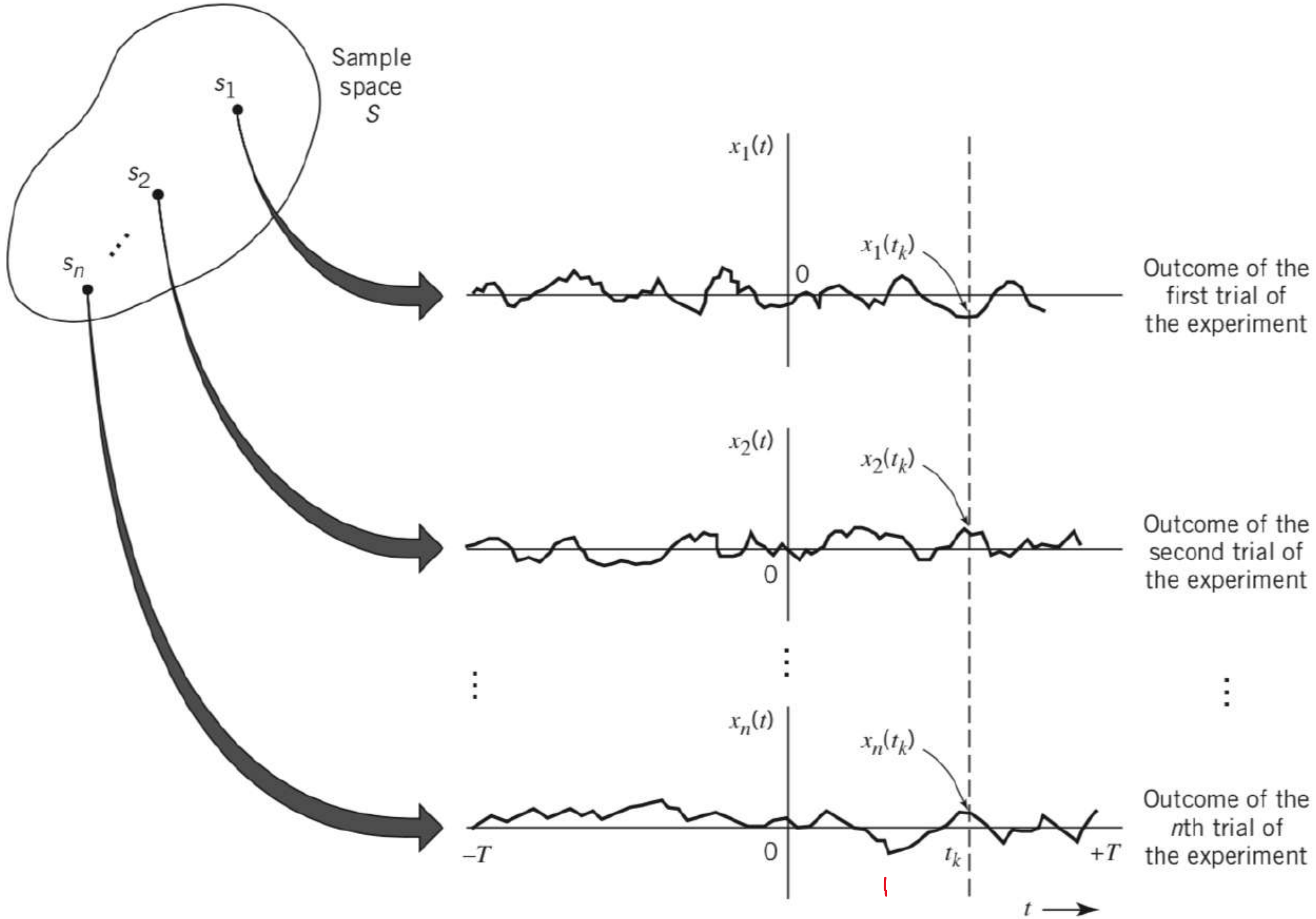
Properties:

- they are functions of time;
- they are random in the sense that, before conducting an experiment, it is not possible to define the waveforms that will be observed in the future exactly

- Although not being possible to predict a signal drawn from a stochastic process, it is possible to characterize the process in terms of statistical parameters such as average power, correlation functions, and power spectra.

Introduction

SUPPONIAMO DI AVERE UN PROCESSO STOCASTICO E DI CAMPIONARLO IN UN ISTANTE t_k, CAMPIONANDO I VARI SEGNALI $(x_1, x_2, x_3 \dots)$ GENERATI DAL PROCESSO STOCASTICO OTTENIAMO UNA VARIABILE ALEATORIA. (PROCESSI STOCASTICI NON SONO NOTI A PRIORI, DEVO CONDURRE UN ESPERIMENTO PER CONOSCERLI.



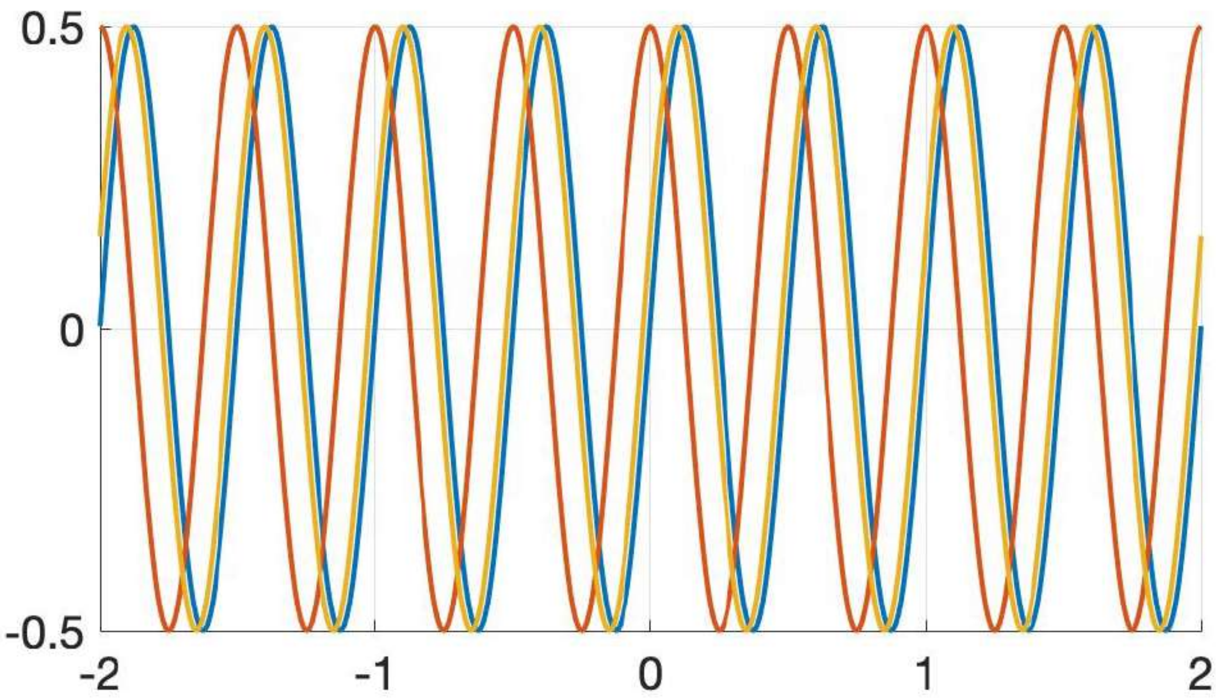
Example

Consider a sinusoidal signal with random phase

$$X(t) = A\cos(2\pi f_c t + \Theta) \qquad f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & -\pi \le \theta \le \pi \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

N.B. NOI ABBIAMO CONSIDERATO SEMPRE A, f e θ DETERMINISTICHE, NELLA VITA DI AVERLE ALEATORIE.

where A and f_c are constants and θ is a random variable that is uniformly distributed



Mean and Correlation

Consider a real-valued stochastic process X(t).

Il valore medio

- The mean of X(t) is the expectation of the random variable obtained by sampling the process at some time t

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x)\,\mathrm{d}x$$

N.B. È in funzione del tempo.

- The autocorrelation function of X(t) is the expectation of the product of two random variables, $X(t_1)$ and $X(t_2)$

$$M_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

Weakly Stationary Processes

A stochastic process X(t) is said to be weakly stationary if its second-order moments satisfy the following two conditions:

1. The mean of the process X(t) is constant for all time t.

2. The autocorrelation function of the process X(t) depends solely on the difference between any two times at which the process is sampled.

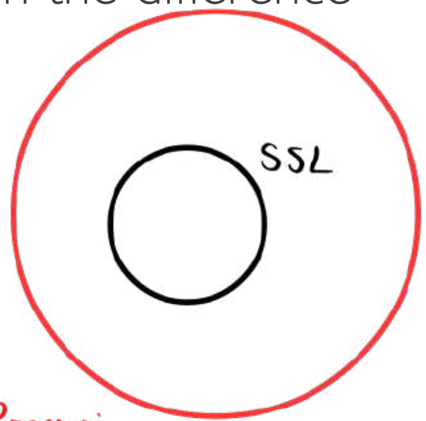
↳ sistema stazionario in senso lato

Noi abbiamo definito $\mu_X(t) = E[X(t)] \xrightarrow{SSL} \mu_X$

notazione che userai spesso

$$M_{XX}(t_1, t_2) = E[X_1(t), X_2(t)] \xrightarrow{SSL} M_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau) = \overbrace{R_X(\tau)}$$

$R_X(\tau)$ l'abbiamo già trovata indietro (trova a...)



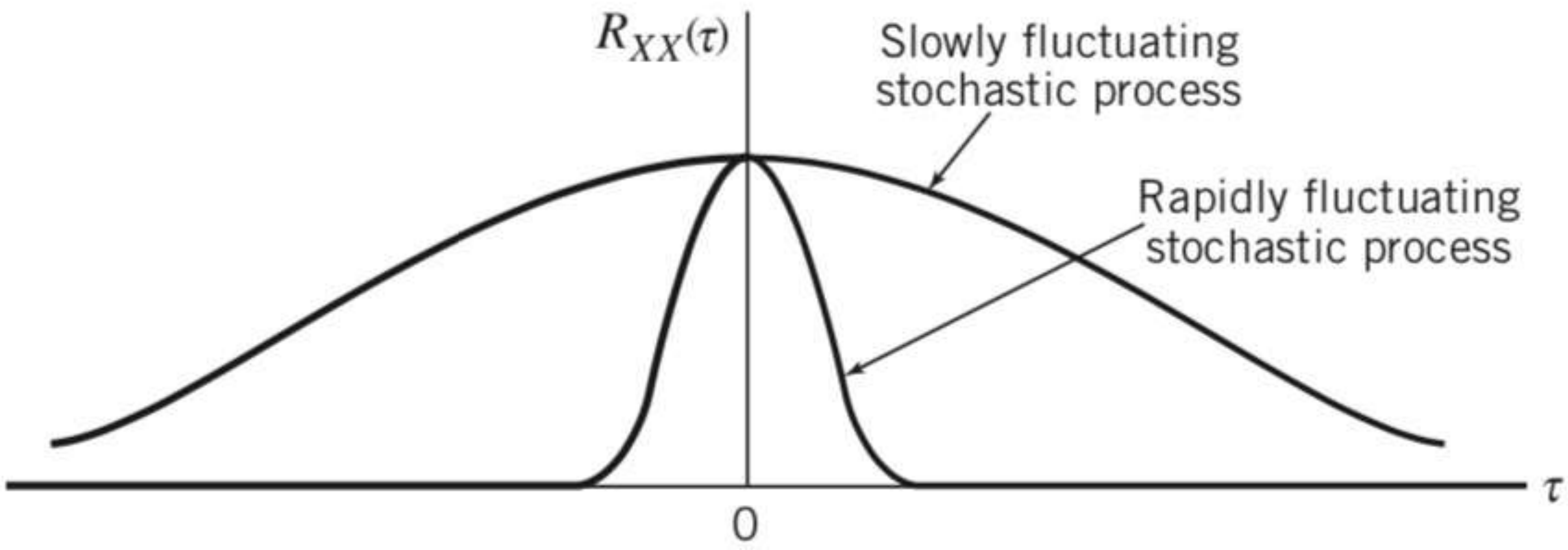
Processi Stazionari

↳ in tal caso intervengono anche delle funzioni di densità di probabilità (condividono proprietà)

Physical Significance of Autocorrelation Function

- The autocorrelation function is significant because it provides a means of describing the interdependence of two random variables obtained by sampling the stochastic process X(t) at seconds apart.
- The more rapidly the stochastic process X(t) changes with time, the more rapidly will the autocorrelation function decrease from its maximum $R_{XX}(0)$

NOTA Più è "stretta" più varia nel tempo!



Proprietà Funzione di Correlazione

1) È Pari: $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

2) In 0 assume il suo valore massimo, in quanto le variabili aleatorie sono correlate con se stesse: $R_X(0) \geq |R_X(\tau)|$

$R_X(\tau) = E\{X(\overset{t_1}{t})\, X(\overset{t_2}{t-\tau})\}$ tale per cui $t_1 - t_2 = \tau$. Quindi $R_X(0)$ sarà $= E\{X^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X(t)}(x)\,dx = P_X$ => coincide con la potenza!

[Rimando a prossima slide]

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\;SLS\;} \longrightarrow y(t) \qquad y(t) = h(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha$$

Data la h(t) so calcolare il sistema ponendo che x sia un segnale deterministico, se ho invece ho un segnale in ingresso stocastico

Nota: SLS: Sistema Lineare Stazionario

Calcoliamo adesso valor medio e funzione di autocorrelazione.

$$E[y(t)] = E[x(t) \otimes h(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha\right] \overset{\text{linearità aspettazione}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} E[x(\alpha)]\, h(t-\alpha)\, d\alpha = \int m_X(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha$$

Quindi il valor medio del processo non è altro che $E[y(t)] = m_X(t) \otimes h(t)$

Calcoliamo la funzione di autocorrelazione

$$E[y(t_1)\, y(t_2)] = E\left[\int x(\alpha_1)\, h(t_1-\alpha_1)\, d\alpha_1 \int x(\alpha_2)\, h(t_2-\alpha_2)\, d\alpha_2\right] = \iint E[x(\alpha_1)\, x(\alpha_2)]\, h(t_1-\alpha_1)\, h(t_2-\alpha_2)\, d\alpha_1\, d\alpha_2$$

Ci risparmiamo i calcoli successivi, alla fine viene

$$= R_X(t_1,t_2) \otimes h(t_1) \otimes h(t_2)$$

Supponiamo che il processo X sia stazionario in senso lato, cosa posso dire su y? Posso dire che:

$$E[y(t)] = m_X\, H(0) = m_y$$

Il suo valor medio (di X) è indipendente dal tempo! Verifichiamolo

$$E[y(t)] = m_X\, H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} m_X(\alpha)\, h(t-\alpha)\, d\alpha = m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\alpha)\, d\alpha \overset{\text{cambio di variabile}}{=} m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)\, d\beta$$

$t-\alpha = \beta \quad d\alpha = -d\beta$

non c'è il meno perché ha invertito gli estremi di integrazione

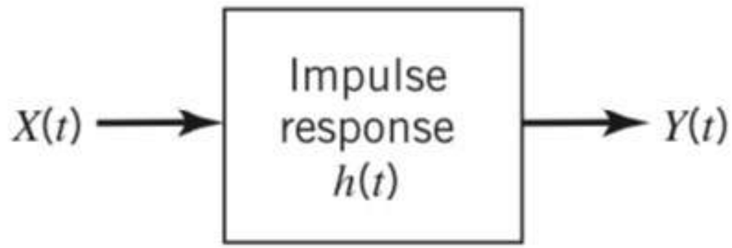
e questo è proprio $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}\, e^{-j2\pi f t}dt$

A questo punto abbiamo fatto il primo passo, facciamo il secondo; prendiamo un sistema generico e osserviamo come cambia la cosa in caso di SSL:

$$R_y(t_1,t_2) = R_y(t_1,t_2) \otimes h(t_1) \otimes h(t_2) \overset{SSL}{=} R_X(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(\tau)$$

Transmission of a Weakly Stationary Process through a Linear Time-invariant Filter

- Suppose that a stochastic process X(t) is applied as input to a linear time-invariant filter of impulse response h(t), producing a new stochastic process Y(t)



- The transmission of a process through a linear time-invariant filter is governed by the convolution integral:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) X(t - \tau_1) \, d\tau_1$$

Mean and Correlation

- The mean of the stochastic process Y(t)

$$\mu_Y = \mu_X H(0)$$

- The autocorrelation function of the output stochastic process is

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_{XX}(\tau + \tau_1 - \tau_2)\, \mathrm{d}\tau_1\, \mathrm{d}\tau_2$$

Power Spectral Density

- Suppose you want to characterize the output Y(t) by using frequency-domain ideas

$$\mathbb{E}[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_{XX}(f)\, \mathrm{d}f$$

where $S_{XX}(f)$ is the power spectral density

$$S_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)\, \exp(-j2\pi f\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

$$\int h(-\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) e^{j2\pi f\alpha} d\alpha = H(-f) =$$

$$= H(f)^*$$

↳ La trasformata di Fourier gode della simmetria Hermitiana

Why is it called power spectral density ?

$$P_x = \mathbb{E}[x^2(t)] = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\, df$$

$$R_x(\tau) \stackrel{!}{=} \int S_x(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df$$

Cosa dovrò fare nel caso

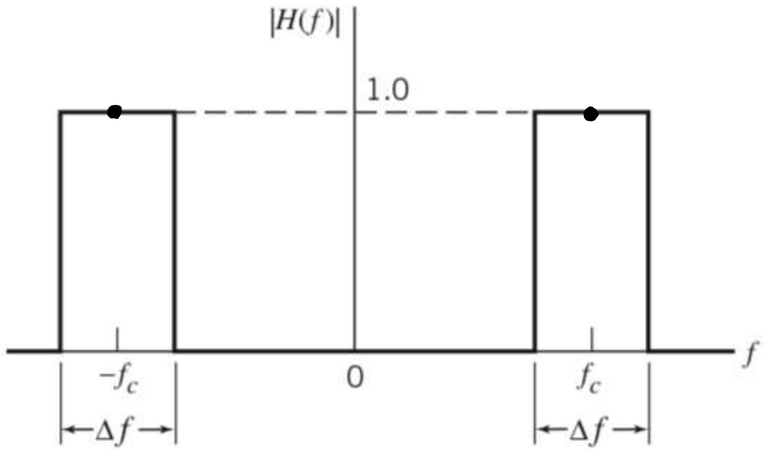
$$\underset{S_x(f)}{\xrightarrow{x(t)}} \boxed{h(t)} \underset{S_y(f)}{\xrightarrow{y(t)}}$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

$$S_y(f) = S_x(f)\, H(f)\, H^*(f) = S_x(f)|H(f)|^2$$

Physical Significance of Power Spectral Density

- To investigate the physical significance of the power spectral density, suppose that the weakly stationary process X(t) is passed through an ideal narrowband filter



$$\mathbb{E}[Y^2(t)] \approx (2\Delta f) S_{XX}(f) \qquad \text{for all } f$$

$S_{XX}(f)$ represents the density of the average power of X(t), evaluated at frequency f.

The power spectral density is therefore measured in watts per hertz (W/Hz).

Relationship between the Power Spectral Densities of Input and Output

- Let $S_{YY}(f)$ denote the power spectral density of the output process Y(t)

$$S_{YY}(f) = |H(f)|^2 S_{XX}(f)$$

The power spectral density of Y(t) equals the power spectral density of the input process X(t), multiplied by the squared magnitude response of the filter.

The Gaussian process

- A process Y(t) is said to be a Gaussian process if the random variable Y is a Gaussian-distributed random variable.

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- The stochastic processes produced by physical phenomena are often such that a Gaussian model is appropriate.
- The use of a Gaussian model to describe physical phenomena is often confirmed by experiments.
- Last, but by no means least, the central limit theorem provides mathematical justification for the Gaussian distribution.

White Noise

↳ il nome viene dalla luce che genera.

- This source of noise is idealized, in that its power spectral density is assumed to be constant and, therefore, independent of the operating frequency.

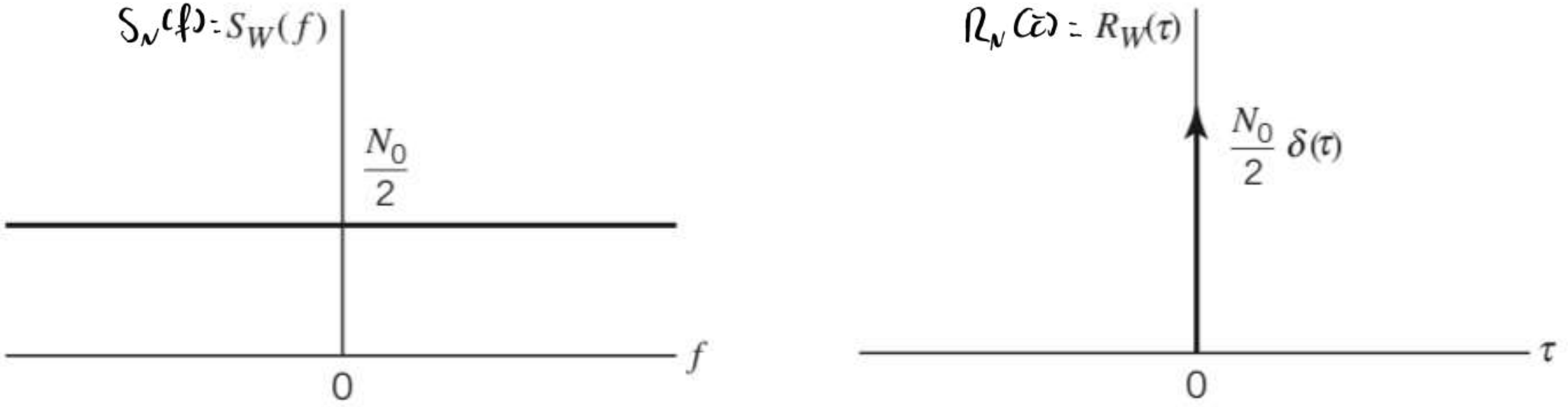
- The adjective "white" is used in the sense that white light contains equal amounts of all frequencies within the visible band of electromagnetic radiation.

- We may thus make the statement:

White noise, denoted by W(t), is a stationary process whose power spectral density $S_W(f)$ has a constant value across the entire frequency interval

$$S_{WW}(f) = \frac{N_0}{2} \qquad \text{for all } f$$

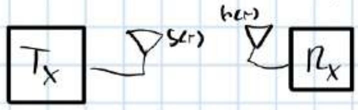
White Noise



- Since $R_W(\tau) = 0$ zero for $\tau \neq 0$, it follows that any two different samples of white noise are uncorrelated no matter how closely together in time.
- If the white noise is Gaussian, then the two samples are statistically independent
- As long as the bandwidth of a noise process at the input of a system is appreciably larger than the bandwidth of the system itself, then we may model the noise process as white noise.

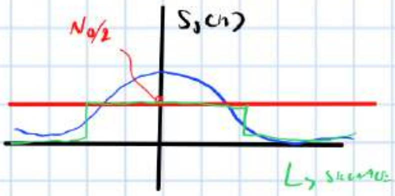
Esempio: prossime 2 slide

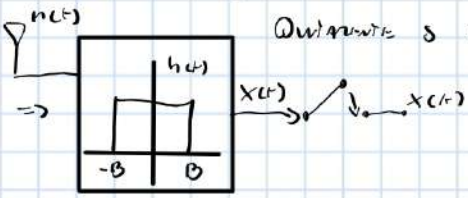
Ricordati l'esercizio con: $y = s + n \sim N(0, \sigma^2)$; ma come ci si arriva a questo modello? Supponiamo di avere:



Il disturbo introdotto dal mezzo di trasmissione (canale ...) è ben modellato dal rumore bianco: $r(t) = s(t) + n(t)$

↳ rumore termico





Ovviamente s avrà una banda, è un segnale!

↳ segnale filtrato, gaussiano ma non bianco.

Quindi dopo il filtro avrò (da $r(t)$): $x(t) = s(t) + \overbrace{n(t) \otimes h(t)}^{w(t)}$, $S_N(f) = S_n(f)\,|H(f)|^2$

Dopo dovrò campionare il segnale con una frequenza $\geq$ di $2B$. In uscita quindi avrò

$$x[k] = x(t = kT) = s(k) + w(k)$$

$$S_w(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \Rightarrow R_x(\tau) = 2B\,\mathrm{sinc}(2Bt)$$

↳ guardata è quella sulle slide.

$$R_N(\tau) = E[w(t)\,w(t-\tau)]$$

$R_N(kT)\Big|_{T=\frac{1}{2B}} = E[w(iT)\,w(iT-kT)] = 0$ → quando la campiono ha un valore, e successivamente $T = \frac{1}{2B}$ ho che vale 0

11.05-2023

Riprendiamo un attimo il discorso dell'ultima volta:

$x(t) = s(t) + w(t)$ $\qquad$ $n(t)$ rumore gaussiano bianco

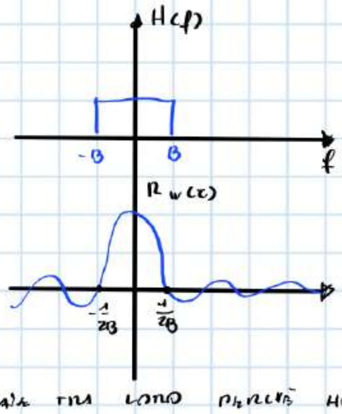
$w(t) = n(t) \otimes h(t)$ $\qquad$ $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$ $\qquad$ $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$

Al ricevitore il segnale è campionato e diventa $x(t=kT) = x(k) = s(k) + w(k)$, dove $w(k)$ diventano le variabili aleatorie Gaussiane, io sono interessato a sapere la correlazione tra

$E\{w(k)\,w(i)\} = \emptyset \quad k \neq i$ abbiamo visto come questa fosse non correlata.

$$S_w(f) = S_n(f)\,|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$R_w(\tau) = \frac{N_0}{2}\,2B\,\mathrm{sinc}(2B\tau) = E\{w(t)\,w(t-\tau)\}$$



fine recap

$\frac{1}{T} \geq 2B \Rightarrow T \leq \frac{1}{2B} \Rightarrow$ scelgo di campionare a $\frac{1}{2B}$: la funzione di autocorrelazione

E non è altro che $w[k] = w(t = kT)$. Quindi se campiono con $\frac{1}{2B}$ le variabili aleatorie sono incorrelate. Invece se prendessi $T = \frac{1}{4B}$ avrei le variabili aleatorie correlate tra loro perché ho sovracampionato il segnale.

mi sono perso

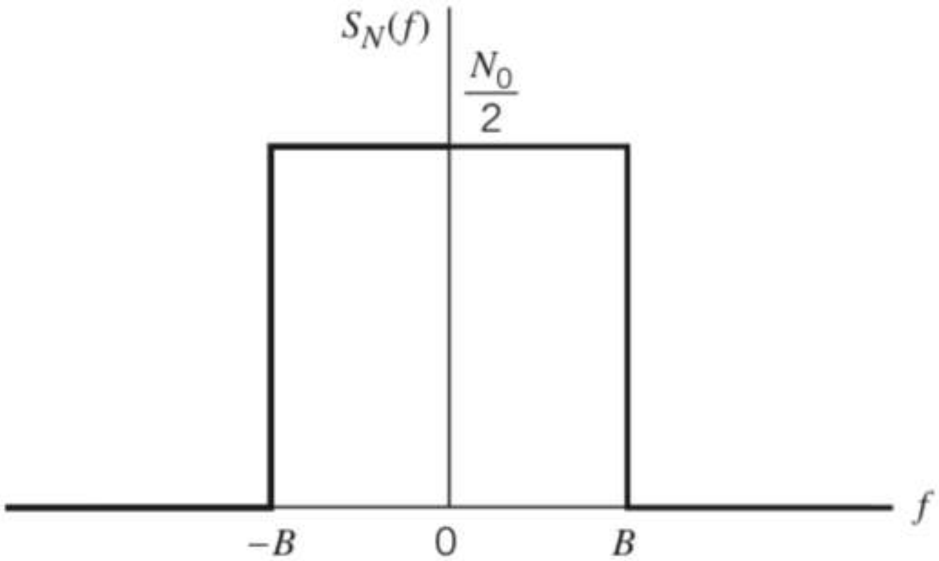
A questo punto calcoliamo il valor medio e varianza di $w(k)$: $\sim \mathcal{N}(0, N_0B)$

$$\sigma_w^2 = \underbrace{E\{w^2(n)\}}_{R_w(0) = N_0B} - \overbrace{\mu_N^2}^{\emptyset} = N_0B$$

→ Maggiore è la banda del filtro maggiore è il rumore che faccio entrare. Quindi riepilogando quando abbiamo fatto insieme l'esercizio: $y = s + n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ abbiamo che σ^2 ~

Ideal Low-pass Filtered White Noise

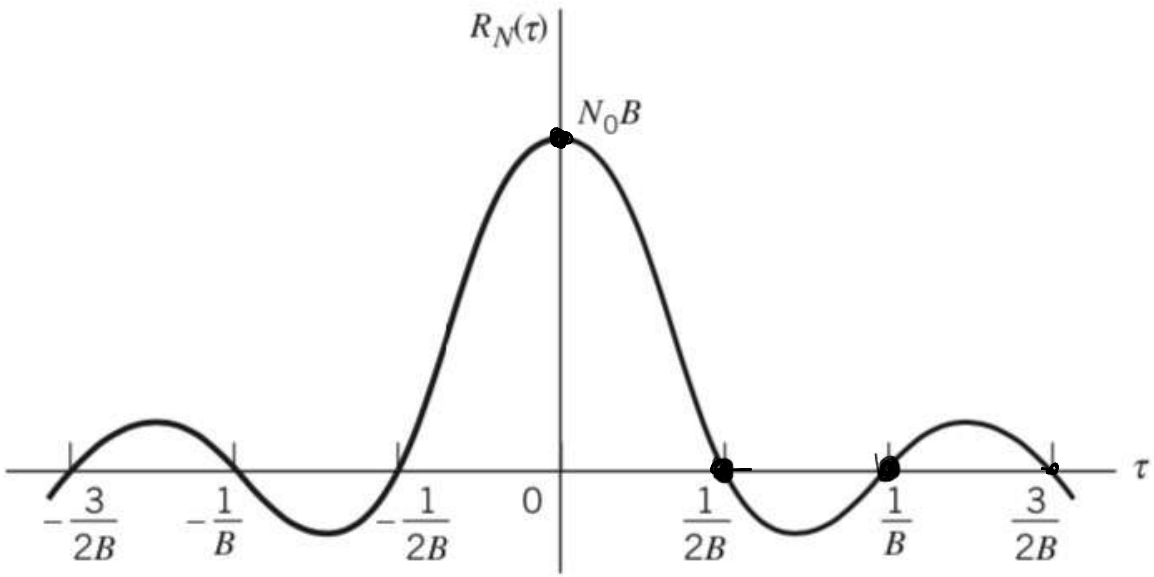
- Suppose that a white Gaussian noise of zero mean and power spectral density N0/2 is applied to an ideal low-pass filter of bandwidth B.
- The power spectral density of the ouput noise N(t) is:



Since the input noise W(t) is Gaussian (by hypothesis), it follows that the band-limited noise N(t) at the filter output is also Gaussian.

Ideal Low-pass Filtered White Noise

- Suppose, then, that N(t) is sampled at the rate of 2B times per second.
- The resulting noise samples are uncorrelated and, being Gaussian, they are statistically independent.



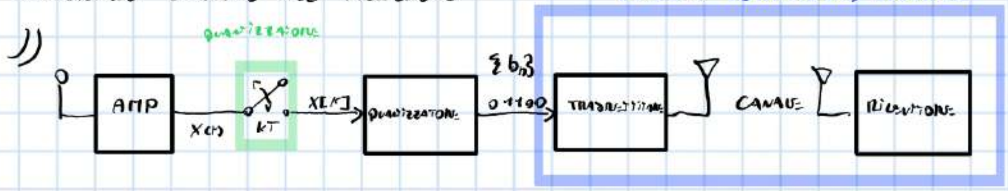
- Note that each such noise sample has a mean of zero and variance of N_0B.

Sistemi di Comunicazione Numerici

Introduzione

Riprendiamo l'esempio del microfono

Sistema di comunicazione numerico



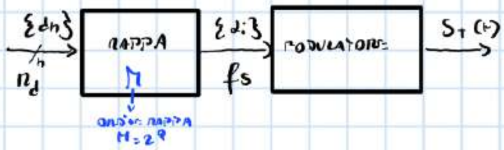
Quindi ho quindi $\{b_n\}$, che non necessariamente dalla quantizzazione del segnale analogico può essere anche direttamente numerico es. i sistemi numerici sono usati per trasmettere anche segnali direttamente numerici, non solo An→numerico.

Diciamo abbiamo i nostri $\{b_n\}$, la prima cosa che dobbiamo fare è **la codifica di canale** (fatta con modelli), quindi i nostri bit viaggiano a velocità R_b e escono con ridondanza a una velocità R_d, la velocità di emissione e ricezione deve essere uguale:

$$kT_b = nT_d \Rightarrow \boxed{\frac{R_b}{R_d} = \frac{k}{n} = \text{RATE}} \quad \text{con } 0 \le \text{RATE} \le 1$$

Il rate è compreso tra 0 e 1 in quanto introduciamo ridondanza.

Dopo di questo abbiamo il **mappatore** che mappa i bit in simboli di un alfabeto (anche binario) che viene trasmesso al modulatore che lo trasforma in un segnale analogico e lo invia al canale.



Poniamo di avere la mappa a sx qual è la relazione tra T e T_d? Avremo nel caso specifico $T = 2T_d$. Invece nel caso generale, sappiamo che la mappa è $M = 2^Q$ con Q bit:

$$T = \frac{1}{f_s} = QT_d$$

Esempio mappa quaternaria:

d_t	d_i
00	-3
01	-1
10	+1
11	+3

Facciamo un esempio ponendo un rate $r = \frac{1}{2}$:

$$\{b_n\} \qquad \{d_t\}$$

$$010101 \xrightarrow{r=\frac{1}{2}} 10|11|01|00|01|10 \xrightarrow[\text{a sx}]{\text{mappa}} +1\ +3\ -1\ -3\ -1\ +1$$

I simboli viaggiano in un tempo T al modulatore in:

- Banda Base
- Banda Passante

Indipendentemente da come arriverà il segnale con quale banda $S(t)$ arriverà con $B_T \simeq \frac{1}{T}$, quindi la banda del segnale risulta dipendente dal tempo T in arrivo:

$$B_T \simeq \frac{1}{T} = \frac{1}{QT_d} = \frac{1}{\log_2 M\, T_d} = \frac{R_d}{\text{rate} \log_2 M}$$

N.B. A cosa serve il mappatore con una mappa di ordine 2 o maggiore? Perché in questo modo posso ridurre la banda aumentando M! E perché non posso andare oltre $M = 256$? Perché all'aumentare di M aumenta anche la probabilità di errore. All'aumentare del rate invece aumenta la banda, diminuendo però l'errore. Per esempio parmi il codice a ripetizione (0→000) devo aumentare il rate a $\frac{1}{3}$!

Vediamo adesso l'operazione inversa fatta dal ricevitore.

PAM

Un sistema di comunicazione PAM è chiamato così perché ciascun impulso modula un segnale. Prendiamo un segnale quadrato.

d_1	d_i
0	-1
1	1

d_n	d_i
000	-7
001	-5
010	-3
100	-1
101	1
110	3
011	5
111	7

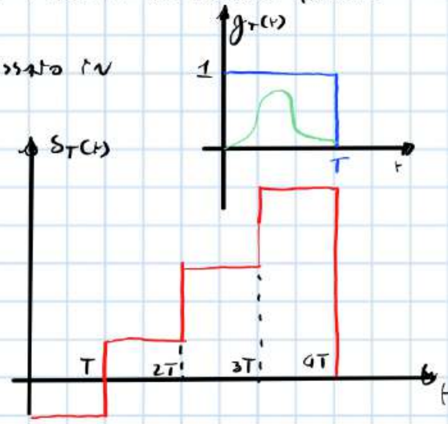
$Q=3 \quad M=8$

Poniamo di avere il segnale $\{d_i\} = (-1, 1, 3, 5)$

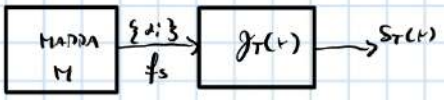
Lo trasmetterò il segnale, in particolare questo sarà passato in banda base. Quindi

$$S_T(t) = \sum_i d_i\, g_T(t - iT)$$

Ho scelto una rect ma potevo inviare un qualsiasi segnale, a patto che questo sia limitato nel tempo => altrimenti gli eco si sovrapporrebbero



In conclusione in tal caso avremo come PAM un filtro modulato in ampiezza dai simboli.



Se facessi la trasformata di Fourier al ricevitore, tratterei il segnale come deterministico, tuttavia tale è un processo aleatorio nei simboli d_i:

$$S_T(f) \overset{TFC}{\rightleftarrows} S_T(t) \qquad S_T(t) = \sum_i d_i\, g_T(t - iT) \rightleftarrows \sum d_i\, G_T(f)\, e^{-j2\pi f T} =$$

$$= G_T(f) \sum_i d_i\, e^{-2\pi f T}$$

La parte finale quindi potrebbe essere anche 0 se si sommano i segnali, potrebbe essere qualsiasi cosa a seconda di quello che invio. Quindi come posso fare? Devo calcolare la densità spettrale di potenza del processo. Quindi definiamo

$$\eta_d = E\{d_i\} \qquad R_d(m) = E\{d_i\, d_{i+m}\}$$

E vediamo la densità spettrale di potenza del processo (non la calcoliamo)

$$\boxed{\begin{aligned} S_s(f) &= \frac{1}{T} S_d(f)\, \underbrace{|G_T(f)|^2} \\ S_d &= \sum_m R_d(m)\, e^{-j2\pi f m T} \end{aligned}}$$

Trasformata di Fourier del modulatore?

Densità spettrale dei simboli: S_d

Ricorda: Trasformata discreta di Fourier

$$\bar{X}(f) = \sum_n x(n)\, e^{-j2\pi f n T}$$

Cosa ci ricorda? [Mi ha cancellato la lavagna...]

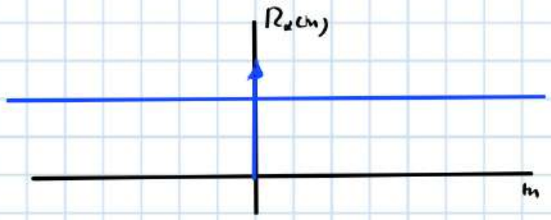
Adesso supponiamo che i simboli sono indipendenti e calcoliamo la densità spettrale di potenza.

$$R_d(m) = \begin{cases} E\{d_i^2\} & m=0 \quad \text{valor quadratico medio dei simboli} \\ E\{d_i\} E\{d_{i+m}\} = \eta_d^2 & m \neq 0 \end{cases}$$

$d_i \in (\pm 1) \qquad E\{d_i^2\} = \sum_i p_i\, d_i^2 = 1$

Bene, riscriviamo il tutto come

$$R_d(m) = \eta_d^2 + \overbrace{(E\{d_i^2\} - \eta_d^2)}^{\text{varianza in zero}}\, \delta(m) = \eta_d^2 + \sigma_d^2\, \delta(m)$$



In questa formula non abbiamo niente. Calcoliamone la trasformata discreta

$$S_d(f) = \sigma_d^2 + \eta_d^2 \underbrace{\sum_m e^{-j2\pi f m T}}_{\text{treno di delta di Dirac } *} = \sigma_d^2 + \eta_d^2 \frac{1}{T} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$S_s(f) = \frac{1}{T} S_d(f)\, |G_T(f)|^2 =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{T} \sigma_d^2\, |G_T(f)|^2}_{\text{banda del segnale} \simeq \frac{1}{T}} + \underbrace{\eta_d^2 \frac{1}{T^2} \sum_k \left|G_T\left(\frac{k}{T}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)}$$

Questo significa che un treno di δ che si genera all'infinito. Quando è che sparisce? Quando i simboli hanno media nulla => $\eta_d = 0$ => scompare tutto

se la G_T è limitata in banda, solo ci rimane un'unica.

HO CHE NON SEMPRE FATTA

*

Noto il risultato alla base del TH di Nyquist:

$$\bar{X}(f) \triangleq \sum_n x(n)\, e^{-j2\pi f n T} = \frac{1}{T} \sum_k X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Abbiamo che gli $x(n)$ sono tutti 1, quindi la trasformata è una δ allora:

$$\frac{1}{T} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Quindi

$$S_S(f) = \frac{1}{T}\sigma_d^2 |G_T(f)|^2 = \frac{E\{d_i^2\}}{T} |G_T(f)| = \frac{R_d(0)}{T} |G_T(f)|^2$$

Allora supponiamo sia un processo e abbiamo calcolato la banda che è $\simeq \frac{1}{T}$.
Un'ultima cosa:

$$P_S = \int_{-\infty}^{\infty} S_S(f)\,df = \frac{E\{d_i^2\}}{T} \int |G_T(f)|^2 df = \frac{E\{d_i^2\}}{T} E_{gT}$$

Nel caso di una PAM con HP: $\eta_d = 0$ (avremo (come lo dimostriamo):

$$E\{d_i^2\} = \frac{M^2-1}{3}$$

Quindi sostituendo con l'espressione sopra abbiamo la potenza del segnale in funzione della modulazione.

→ energia media del simbolo

$$E_S = P_S T = \frac{E\{d_i\}}{T} T E_{gT}$$

→ energia media del bit

$E_d = P_S T_d$ ove T_d intervallo trasmissione bit.

12 - 05 - 2023

Riprendiamo quello che abbiamo fatto ieri, abbiamo visto

$f_s = \frac{1}{T}$

Il segnale trasmesso con PAM è pari a:

$$S_T(t) = \sum_i d_i\, g_T(t - iT) \quad \text{con densità spettrale di potenza} \quad S_S(f) = \frac{1}{T} S_d(f) |G_T(f)|^2$$

$$S_d(f) = \sum_m R_d(m)\, e^{-j2\pi f T}$$

Tutto ciò con l'HP: $\eta_d = E\{d_i\}$ $R_d(m) = E\{d_i d_{i+m}\}$. Abbiamo fatto il calcolo nel caso in cui sia a media nulla e incorrelati ed abbiamo

$$S_S(f) = \frac{R_d(0)}{T} |G_T(f)|^2$$

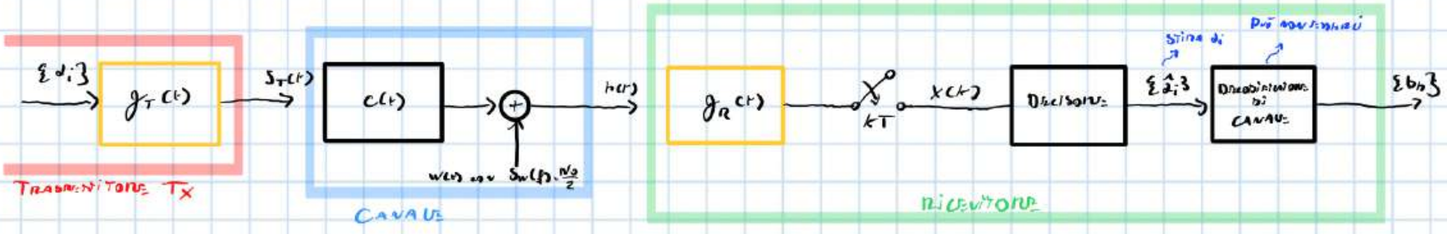
Avendo questa possiamo calcolare la potenza del segnale

$$P_S = \int_{-\infty}^{\infty} S_S(f)\,df$$ che nel caso sostituiamo l'espressione precedente è $= \frac{R_c(0)}{T} E_{gT}$

E abbiamo visto $E_S \triangleq P_S T$ e $E_d \triangleq P_S T_d$, inoltre abbiamo visto la relazione

$$B \simeq \frac{1}{T} = \frac{R_b}{\log_2 M} \leftarrow \text{rate}$$

Andiamo quindi avanti e mettiamoci dal lato del ricevitore.



Noi sappiamo tutto del trasmettitore, analizziamo il canale e il ricevitore.

Canale

Ipotizziamo che lavori come un sistema lineare stazionario: è rappresentato da un filtro $c(t)$ e il rumore termico $w(t)$ modellato come rumore gaussiano bianco. Quest'ultimo non può essere tolto. Il $c(t)$ invece varia a seconda dell'ambiente di applicazione, il più semplice $c(t)$ sarà una δ. In generale il segnale ricevuto:

$$r(t) = \overbrace{S_T(t) \otimes c(t)}^{\text{segnale}} + \overbrace{w(t)}^{\text{rumore}} = S_R(t) + w(t)$$

Abbiamo visto in precedenza un caso particolare $r(t) = S_T(t) + w(t)$, dove $c(t) = \delta(t)$. Che per le sue proprietà è come se non ci fosse.

Ricevitore

Andiamo avanti e vediamo come tale segnale è ricevuto:

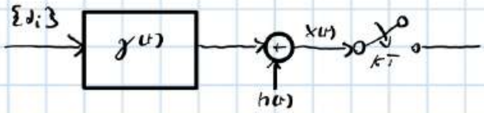
$$x(t) = r(t) \otimes g_R(t) = \underbrace{s_T(t) \otimes c(t)}_{s_R(t)} \otimes g_R(t) + \underbrace{w(t) \otimes g_R(t)}_{n(t)}$$

$$s_R(t) = \sum_i d_i\, g_T(t - iT) \otimes c(t) \overset{\text{scritto in forma compatta}}{=} \sum_i d_i\, g_{T_C}(t - iT)$$ definendo $g_{T_C}(t) = g_T(t) \otimes c(t)$ = impulso di trasmissione dopo il canale di comunicazione

Quindi abbiamo

$$x(t) = \sum_i d_i\, g(t - iT) + n(t) \qquad g(t) = g_T(t) \otimes c(t) \otimes g_R(t)$$

E qual è lo schema a blocchi equivalente di questo sistema di comunicazione fino al campionamento



Adesso però il segnale deve essere campionato e mandato in ingresso al decisore:

$$x(k) = x(t = kT) = \sum_i d_i\, g(kT - iT) + n[k] \overset{\text{pongo } k-i=m}{=} \sum_m d_{k-m}\, g(mT) + n(k)$$

Lo vogliamo in questa forma per scriverlo infine come

$$x(k) = \underset{\text{simbolo}}{d_k}\, \overset{\text{fattore di scala}}{g(0)} + \boxed{\sum_{m \neq 0} d_{k-m}\, g(mT)} + \overset{\text{rumore termico}}{n(k)}$$

Ho isolato il primo termine in quanto ho trasmesso un segnale tra 0 e infinito, campionando all'istante kT mi interessa il simbolo all'istante k-esimo

Tutto il resto sono gli altri simboli che non mi interessano: tali si chiamano interferenza intersimbolica, e in più abbiamo il rumore termico. Quest'ultimo caratterizzato come

$$S_n(f) = S_w(f)\,|G_R(f)|^2 = \frac{N_0}{2}\,|G_R(f)|^2$$

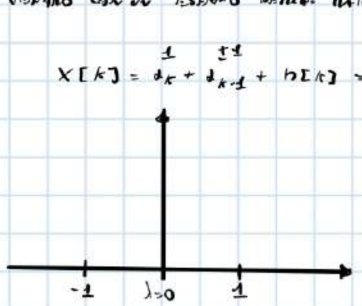
Così abbiamo caratterizzato tutto il sistema. Quali sono i nostri gradi di libertà? Su quali blocchi posso agire? Sicuramente non posso agire sul canale ($c(t)$ me lo fornisce la natura)! Possiamo agire sul campionamento, ma lo abbiamo già settato accortamente. Gli unici blocchi su cui possiamo agire sono $g_T(t)$ e $g_R(t)$ (tralasciamo il decisore); possiamo scegliere di minimizzare o annullare l'interferenza intersimbolica! Che tra il rumore termico e quest'ultima, è proprio questa a rappresentare un problema per i sistemi di comunicazione.

Vediamo con un esempio perché rappresenta un problema:

$$x[k] = \overset{1}{d_k} + \overset{\pm 1}{d_{k-1}} + n[k] \Rightarrow \begin{cases} 2 + n[k] \\ 0 + n[k] \end{cases}$$

Supponiamo di aver trasmesso 1 ($d_k = 1$), l'interferenza darà ± 1 ($d_{k-1} = \pm 1$) ne segue che

Nel caso in cui arrivi 2 non mi causa troppi problemi, con 0 sono troppo vicino alla soglia e non riesco a distinguere il segnale.

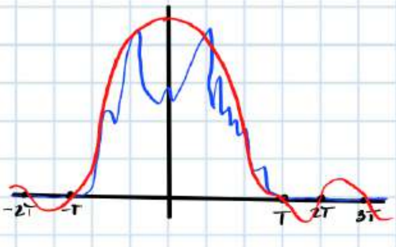


Allora vediamo come eliminare, l'ultimo Interferenza InterSimbolica: ISI. E poniamo

$$ISI = \emptyset \quad g(mT) = \begin{cases} g(0) & m = 0 \\ \emptyset & m \neq 0 \end{cases} \qquad g(t) = g_T(t) \otimes c(t) \otimes g_R(t)$$

$x(k) = d_k\, g(0) + n(k)$

Proviamo a disegnare un $g(t)$ che soddisfa questa condizione (di Nyquist)

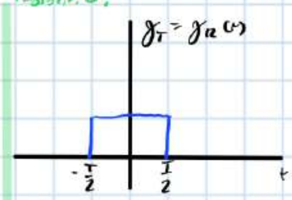


Nonostante sia uno scarabocchio, se:

- è limitato temporalmente tra $-T$ e T
- In 0 è diverso da zero

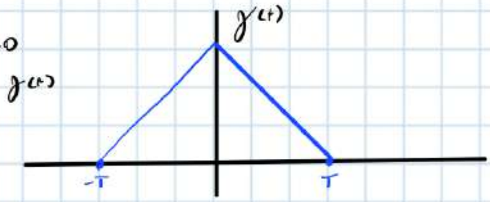
Allora il segnale soddisfa la condizione! Tuttavia questa non è una condizione necessaria, non è detto che il segnale debba essere limitato: qualunque altro segnale che si annulli in kT con $k = \pm 1 \ldots$ come ad esempio la sinc. Tutto ciò per dire che in questo caso per calcolare $g(t)$ non è necessario fare i prodotti di convoluzione e poi campionare, ma posso calcolare direttamente i campioni!

Esempio:



$c(t) = \delta(t)$ $h(t) = 0$

Abbiamo quindi $g(t)$



E si vede subito che soddisfa la condizione di Nyquist.

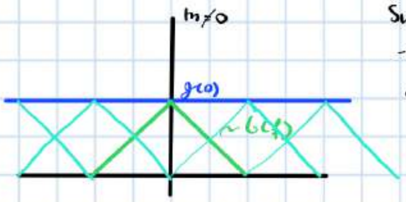
Se ora metto un qualsiasi $c(t) =$ (?) uno casuale! Quindi quando è la durata minima per la quale si viola la condizione di interferenza intersimbolica? Sicuramente infinita (la violerebbe sempre), anche se avessi una frazione di T, se si avesse nell'istante di campionamento soddisfa la condizione; ma qualsiasi ho una durata maggiore di T POTREI, non è detto, avere ISI.

Ora esiste l'equivalente in frequenza della condizione di Nyquist:

trasformata discreta di Fourier

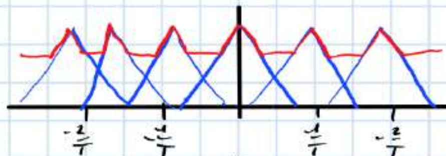
$$\bar{G}(f) = \sum_m g(mT) e^{-j2\pi f m T} = \frac{1}{T}\sum_k G\left(f - \frac{k}{T}\right)$$ Nel caso la condizione di ISI tutto ciò è $= g(0)$

Ma questo risultato cosa significa? Vediamo che:



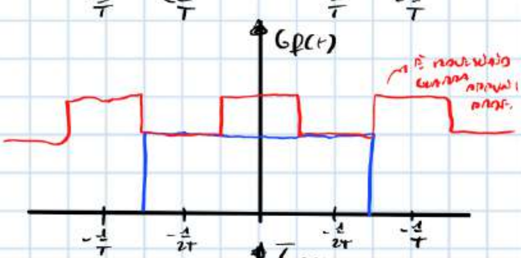
Supponiamo di avere $G(f)$ e periodizziamo e sommiamo la $G(f)$, che ormai avrà durata $-\frac{1}{T}$ e $\frac{1}{T}$, intorno all'intorno le repliche. Così facendo sommando tutte le repliche otteniamo la costante $g(0)$. Tuttavia non solo i triangoli soddisfano la condizione di Nyquist, vediamo perché se i triangoli sono più piccoli non ottengo la costante! Quindi la condizione necessaria per soddisfare la condizione di Nyquist è che la banda di $G(f)$ deve:

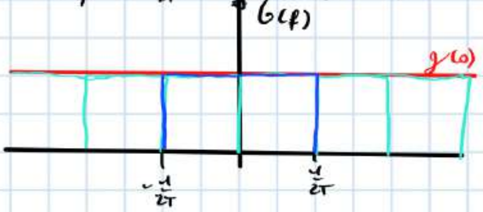
$$\boxed{B_G \geq \frac{1}{2T}} \Rightarrow T \geq \frac{1}{2B_G}$$



Se così non è viene una cosa brutta! Quindi è necessaria e non sufficiente: infatti se ho banda più ampia ho un eccesso di sovrapposizioni. Qual è la banda minima di G che soddisfa la condizione: $\frac{1}{2T}$! La G in questo caso sarà una rect:

$$G(f) = g(0)\,\mathrm{rect}(fT) \qquad g(t) = g(0)\frac{1}{T}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$





18-05-2023

Recap:

$$x[k] = \sum_m d_{k-m}\, g[mT] + n[k] + n[k] = d_k\, g(0) - \underbrace{\sum_{m \neq 0} d_{k-m}\, g(mT)}_{ISI} + n(k)$$

$$g(t) = g_T(t) \otimes c(t) \otimes g_R(t)$$

$$n[k] = n(t = kT) \qquad S_n(f) = \frac{N_0}{2}|G_R(f)|$$

Condizione nel tempo

$$g(mT) = \begin{cases} g(0) & m = 0 \\ \emptyset & m \neq 0 \end{cases}$$

Condizione in frequenza

$$\bar{G}(f) = g(0) = \sum_k \frac{1}{T} G\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Da questo la banda minima di G (come condizione minima teorica)

$$B \geq \frac{1}{2T}$$

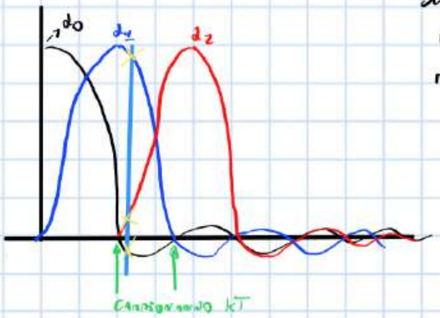
La $G(f)$ che soddisfa la condizione $B \geq \frac{1}{2T}$ e la condizione in frequenza è la rect!
$\Rightarrow G(f) = \mathrm{rect}(fT) \Leftrightarrow g(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$

Fine recap

Adesso vediamo perché non posso fare una rect nel dominio in frequenza e non posso fare la sinc. Il problema principale è dato dal fatto che la rect non è continua: (ricorda la trattazione sul filtro ideale); inoltre nel tempo la sinc ha durata infinita.

Inoltre c'è un altro problema:

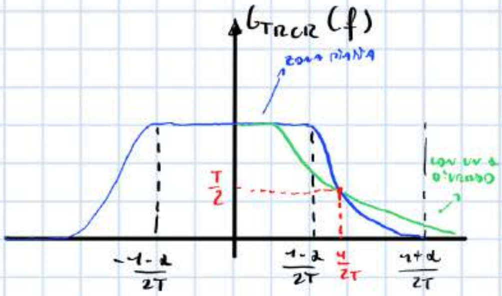
$$x(t) = \sum_k a_k\, g(t - iT) + n(t)$$ campionato all'istante $kT \Rightarrow x(n) = x(t = kT)$



Supponiamo sia una modulazione PAM con $a_i + (\pm 1)$ e supponiamo soddisfi la condizione di Nyquist. Qui vedo che campiono, ottengo esattamente $a_0, a_1, a_2 \ldots$ Tuttavia sto facendo una forte ipotesi: cioè è vero che Trasmettitore e Ricevitore sono sincronizzati! Nella realtà non campionerò mai in kT, ma in $kT + \tau \neq 0$. Quindi sbagliando a campionare ottengo l'interferenza intersimbolica e la sinc non è buona in quanto decade molto lentamente, quindi un errore piccolo, una sinc' andrebbe molto debole.

Impulso Rialzato

Che tipo di impulsi si usano nei sistemi di comunicazione? Uno dei più usati è l'impulso rialzato, guardiamolo:



La funzione approssima la rect. α si chiama **roll-off**, e determina l'andamento ai laterali:

- $\alpha = 0 \rightarrow$ RECT $B = \frac{1}{2T}$
- $\alpha = 1 \rightarrow$ TRIANGOLO $B = \frac{1}{T}$

Le funzioni sono:

$$g_{RCR}(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \boxed{\frac{\cos\left(\alpha\pi\frac{t}{T}\right)}{1 - \left(2\alpha\frac{t}{T}\right)^2}}$$

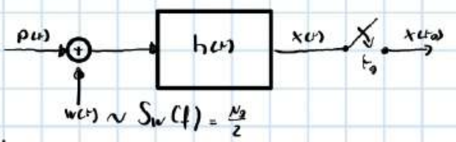
$\Rightarrow$ non si usa praticamente mai, non serve ai fini esame

$\rightarrow$ termine che schiaccia la coda $\Rightarrow$ aumenta la banda.

Detto questo io vorrei avere $\alpha = 1$; perché non lo faccio? Perché la banda cresce, per tale valore avrei la banda massima. Solitamente si prende 0,3 o 0,4. Comunque ricorda $\alpha = 1$ è irrealizzabile! Non conviene a livello di costi.

> Esercizio
>
> $g(t) = g_R(t) \otimes c(t) \otimes g_T(t)$ Il dimensionamento di $g(t)$ richiede, per avere ad esempio l'impulso rialzato, di dimensionare g_R, g_T che non sono un problema in quanto li posso dimensionare facendo trasmettitore e ricevitore. La cosa su cui non ho il controllo è il canale. È per questo che per dimensionare $g(t)$ dovremo fare un'ipotesi sul canale e dimensionare di conseguenza. Ricorda non hai controllo sul canale.

Filtro Adattato



Introduciamo il filtro adattato partendo dal seguente sistema. Vediamo com'è fatto $x(t)$:

$$x(t) = \underbrace{p(t) \otimes h(t)}_{\text{segnale}} + \underbrace{w(t) \otimes h(t)}_{\text{rumore termico}} = s(t) + n(t)$$

Lavoriamo sul campione t_0: $x(t_0) \triangleq s(t_0) + n(t_0)$. Calcolo quindi

$$s(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, p(t_0 - \tau)\, d\tau \qquad n(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, w(t_0 - \tau)\, d\tau$$

> Ricorda:
>
> $S_n(f) = S_w(f)\,|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}\,|H(f)|^2$
>
> se antitrasformo S_n, in 0 ci trovo $E\{n^2(t_0)\}$

Calcoliamo il rapporto segnale-rumore:

$$SNR = \frac{S_n}{N_n} = \frac{s^2(t)}{E\{n^2(t_0)\}} \qquad \overset{\text{stazionario}}{E\{n^2(t_0)\}} = R_n(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}\,|H(f)|^2\, df$$

Esercizio (finire a casa):

$E\{n^2(t_0)\}$ lo possiamo calcolare anche così: *da finire*

$$E\{n^2(t_0)\} = E\left\{ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, w(t_0 - \tau)\, d\tau}_{n(t_0)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, w(t_0 - t)\, dt}_{n(t_0)} \right\} = \iint E\{w(t_0 - \tau)\, w(t_0 - t)\}\, h(t)\, h(\tau)\, dt\, d\tau = (?)$$

Torniamo al nostro SNR:

$$SNR = \frac{S_h}{N_h} = \frac{S^2(t_0)}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\,dt} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,p(t_0-\tau)\,d\tau\right]^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\,dt}$$

Devo quindi scegliere la $h(t)$ per massimizzare l'SNR, per farlo applico la disuguaglianza di Schwarz

$$= \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,p(t_0-\tau)\,d\tau\right]^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\,dt} \le \frac{\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\tau)\,d\tau}\int_{-\infty}^{\infty} p^2(t_0-\tau)\,d\tau}{\frac{N_0}{2}\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\,dt}} = \boxed{\frac{2}{N_0}E_p}$$

Energia di p → impulso ricevuto.

⇒ rapporto segnale rumore massimo!

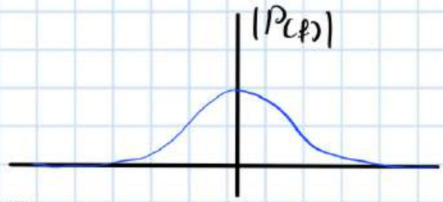
L'uguaglianza vale quando $\boxed{h(t) = K\,p(t_0-t) \text{ con } K \text{ costante di proporzionalità qualunque.}}$ Tale è il **Filtro Adattato!**

L'$h(t)$ ottimo è quindi il filtro adattato. Vediamolo meglio scegliendo $K=1$

- $h(t) = p(t_0 - t)$ Eq. nel tempo
- $H(f) = P(f)\,e^{-j2\pi f t_0}$ Eq. in frequenza

Osserviamo anche il modulo di $H(f)$

$$|H(f)| = |P(f)|$$



Si chiama filtro adattato in quanto il filtro si adatta al segnale passato, quindi

complesso coniugato

mettendo i segnali "matchano"!

$s(t) = p(t) \otimes h(t)$ ⇒ vale in generale, in frequenza diventa $S(f) = H(f)\,P^*(f) = |P(f)|^2 e^{-j2\pi f t_0}$

Matched significa che enfatizza la parte buona del segnale e abbassa la parte cattiva del segnale.

Adesso caliamo questo risultato nel nostro sistema di comunicazione numerico:

$g(t) = g_T(t) \otimes c(t) \otimes g_R(t)$ E dovrei dimensionare tenendo ISI e il max SNR

Per il discorso detto prima ipotizziamo che $c(t) = \delta(t)$, avrei ottenuto $g(t) = g_T(t) \otimes g_R(t)$. Segue che per ricordare:

- ISI richiede di avere $g(t) = \overbrace{g_{rcr}(t)}^{\text{radice cos rialzato}} \rightleftarrows G_{rcr}(f) = G_T(f)\,G_R(f)$
  quindi ho come altra condizione sul sistema che il prodotto tra le due mi faccia un cos rialzato.
- max SNR $G_R(f) = G_T^*(f) = (G_T(f)\,C(f))^*$

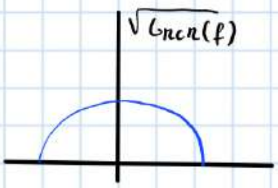
N.B. È un problema di ottimizzazione con due condizioni.

Quindi ho due eq. in due incognite da soddisfare

$$\begin{cases} G_{rcr}(f) = G_T(f)\,G_R(f) \\ G_R(f) = G_T^*(f) \end{cases}$$

→ Sostituisco e ottengo $G_{rcr}(f) = |G_T(f)|^2$ → Ma G_T è una funzione reale, quindi tolgo il modulo: $G_T(f) = \sqrt{G_{rcr}(f)} = G_R(f)$

E tale sarà:



Tuttavia il canale non è nella realtà $\delta(t)$, ma noi lo stiamo sbagliando e usiamo questo filtro di ricezione in quanto se considerassi il canale dovrei cambiarlo ogni secondo. Il ricevitore si adatterà in digitale al cambiamento del canale!

19-05-2023

Vediamo che ci è quella proprietà non vista ieri

$* \; g_{rcr}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{rcr}(f) = 2 \qquad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\,e^{j2\pi f t}\,df \qquad g(f)$

Ieri siamo arrivati al decisore che ci deve dare una stima di $\hat{a}_k$.

$x(t) \xrightarrow[kT]{} \boxed{\text{Decisore}} \xrightarrow{\hat{a}_k}$ Noi sappiamo che nella PAM abbiamo una serie di simboli che sono racchiusi in un alfabeto

$$\mathcal{A} = \{a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(M)}\}$$

A noi interessa la probabilità di aver trasmesso $x[k]$ io decida $a^{(i)}$, tale deve essere > della probabilità di associare $a^{(l)}$ a $x[k]$:

$$\boxed{P_r(a_k = a^{(i)} \mid x[k]) > P_r(a_k = a^{(l)} \mid x[k]) \quad \forall i \neq l}$$

Questa è la MAP (Maximum Aposteriori Probability).

Noi possiamo configurare il decisore in modo da soddisfare la MAP. Allora:

$$P(a_k = a^{(i)} \mid x[k]) = \frac{\overbrace{f_x(x[k] \mid a_k = a^{(i)})\, P_r(a_k = a^{(i)})}^{\gamma(a^{(i)},\, x[k])}}{f_x(x[k])}$$

Questo ci dovrebbe ricordare Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

Ma vi è una differenza: non abbiamo solo probabilità ma anche densità di probabilità, tuttavia va bene lo stesso (non ci dice il perché ma è così va bene così). Tutto questo è comunque indipendente dal simbolo trasmesso dato che possiamo una densità è sempre uguale. Allora lo posso trascurare, in quanto io devo massimizzare per il simbolo trasmesso. Quindi, definisco il numeratore pari a γ. E quindi posso riscrivere la disuguaglianza iniziale come:

$$\gamma(a^{(i)}, x[k]) > \gamma(a^{(\ell)}, x[k]) \quad \text{con } \hat{a}_k = a^{(i)}$$

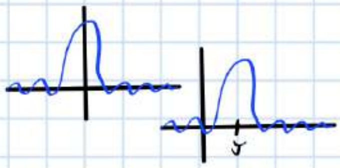
Ipotizziamo di aver dimensionato il sistema correttamente (no interferenza intersimbolica...) e ipotizziamo $c(t) = \delta(t)$, quindi abbiamo che in generale, in banda base (valori reali) ↱ ma se $g(0)$ è un po' "brutto" si tiene via via

$$x[k] = a_k\, g(0) + n[k] = a_k + n[k] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2) \qquad g(t) = g_T(t) \otimes g_R(t)$$

Esempio

$c(t) = \delta(t)$ o $c(t) = A\,\delta(t-\tau)$

È uguale, non distorcono il canale, ma il secondo introduce un ritardo. Devo quindi campionare con un ritardo di τ: $kT+\tau$. Quindi se io rilevo io rilevo attenuato (lo vediamo) e ritardato.



Ricorda

$x[k] \mid a_k = a^{(i)} \sim \mathcal{N}(a^{(i)}, \sigma_n^2)$

Allora qual è la funzione di densità di probabilità?

$$f_x(x[k] \mid a_k = a^{(i)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{(x[k] - a^{(i)})^2}{2\sigma_n^2}}$$

Ricorda: esercizi

σ_n^2 è la potenza del rumore che vale:

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)\,df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |G_R(f)|^2\,df = \frac{N_0}{2}$$

Quindi dato che voglio massimizzare

↱ le P_r a priori non le conosco, è per questo che si fa l'ipotesi.

$$\gamma(a^{(i)}, x[k]) = f_x(x[k] \mid a_k = a^{(i)})\, P_r(a_k = a^{(i)})$$

Facciamo come ipotesi che i simboli siano equiprobabili $P_r(a^{(i)}) = \frac{1}{M}$

Allora avremo che $P_r(a_k = a^{(i)})$ diventa una costante.

↱ γ rapporto

$$\Gamma(a^{(i)}, x[k]) = f_x(x[k] \mid a_k = a^{(i)}) > \Gamma(a^{(\ell)}, x[k]) \quad i \neq \ell \Rightarrow \text{Criterio Massima Verosimiglianza}$$

Quindi mi rimane solo da massimizzare f_x, ma siccome è una funzione monotona decrescente posso usare il $\ln$ da ambo le parti:

$$\ln \Gamma(a^{(i)}, x[k]) > \ln \Gamma(a^{(\ell)}, x[k])$$

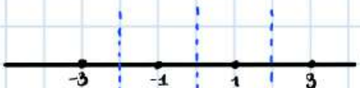
$$-\frac{(x[k] - a^{(i)})^2}{\cancel{2\sigma_n^2}} - \cancel{\ln\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} > -\frac{(x[k] - a^{(\ell)})^2}{\cancel{2\sigma_n^2}} - \cancel{\ln\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}$$

$$\boxed{(x[k] - a^{(i)})^2 < (x[k] - a^{(\ell)})^2}$$

Abbiamo quindi il nostro criterio! Che ragiona con la distanza euclidea tra il mio simbolo e tutti gli altri simboli! Quindi con l'ipotesi di tutti i simboli equiprobabili si riduce al criterio di minima distanza euclidea.

Esercizio: Supponendo che $P_r(a_k = a^{(i)})$ sia uguale a p_i, calcola il nuovo criterio.

Adesso rimanendo nell'ipotesi dei simboli equiprobabili, calcoliamo la probabilità di errore.



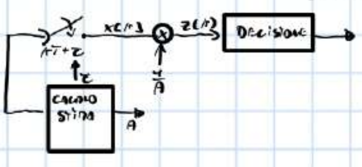
Zone di decisione

Abbiamo con la nostra HP le zone di decisione a lato, nel caso di PAM a 4 livelli. Mettiamoci nel caso generale di un M-PAM (sempre sotto le HP)

$$x[k] = A\,a_k + n[k] \qquad \text{La statistica di decisione sarà } z[k] = \frac{x[k]}{A} = a_k + \frac{n[k]}{A} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_n^2}{A}\right)$$

Nota τ e A vengono stimati qui ma! Altrimenti il sistema non funzionerebbe

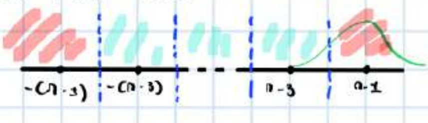
$c(t) = \delta(t-\tau)$



Quindi per calcolare P_e:

$$P_{(e)} = \sum_{i=1}^{M} P(e \mid a_k = a^{(i)})\, P_r(a_k = a^{(i)}) =$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} P(e \mid a_k = a^{(i)})$$



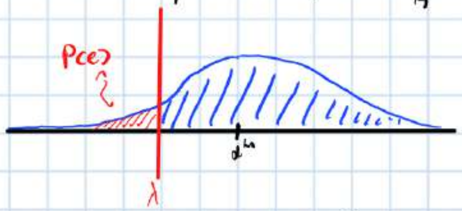
Io dovrei sommare tutte le probabilità di errore, ma se la PAM ha l'MP io ho tutte le probabilità d'errore uguali, con gli estremi diversi. Quindi ci possiamo ricondurre a 2 probabilità di errore per la simmetria del problema.

$$= \frac{2}{M} P(e|\alpha_k = \alpha^{(M)}) + \frac{M-2}{M} P(e|\underbrace{\alpha_k = 1}_{\text{preso io tanto è uguale}})$$

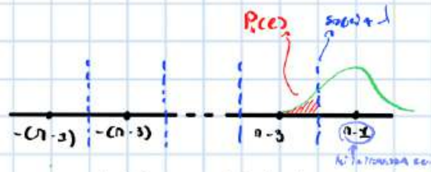
Quindi calcoliamola:

$z[k] = \alpha_k + \eta[k]$ $\quad \eta[k] = \frac{w[k]}{A} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_w^2}{A}\right)$ $\quad$ Questo esercizio l'abbiamo già fatto, l'area sottesa vale infatti:

$$Q\left(\frac{\lambda - \alpha^{(M)}}{\sigma}\right)$$



Nota Il risultato che troveremo è indipendente da λ e α!



Quindi calcoliamo la $P(e|\alpha_k = M-1) = 1 - Q\left(\frac{1}{\sigma_\eta}\right) \overset{1-Q(x)=Q(x)}{=} Q\left(\frac{1}{\sigma_\eta}\right)$ ove $\sigma_\eta = \frac{\sigma_w}{\sqrt{A}}$

Abbiamo calcolato il primo termine, determiniamo il secondo: tale sarà uguale a due volte quella di prima => sbaglio sia a dx che a sx in ugual modo!

$$P(e|\alpha_k = 1) = 2Q\left(\frac{1}{\sigma_\eta}\right)$$

Quindi il tutto diventa

$$\sigma_\eta^2 = \frac{\sigma_w^2}{A^2} = \frac{N_0}{2A^2}$$

$$P(e) = \sum_{i=1}^{M} P(e|\alpha_k = \alpha^{(i)}) P_r(\alpha_k = \alpha^{(i)}) = \frac{2}{M} Q\left(\frac{1}{\sigma_\eta}\right) + \frac{M-2}{M} 2Q\left(\frac{1}{\sigma_\eta}\right) = 2\frac{M-1}{M} Q\left(\frac{1}{\sigma_\eta}\right) = 2\frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2A^2}{N_0}}\right)$$

Adesso scriviamo tutto in funzione del segnale ricevuto!

segnale ricevuto nel tempo (non filtrato)

$r(t) = s_R(t) + w(t) = \sum_i A \alpha_i g_T(t - iT) + w(t)$ $\qquad S_R(f) = \frac{A^2}{T} S_\alpha(f) |G_T(f)|^2$

Se i simboli sono indipendenti e equiprobabili allora $S_\alpha(f) = \sum_m R_\alpha(m) e^{-j2\pi f m T} = R_\alpha(0) = E\{|\alpha_n|^2\} = \frac{M^2-1}{3}$

Segue che

$$S_R(f) = \frac{A^2}{T} S_\alpha(f) |G_T(f)|^2 = \frac{A^2}{T} \frac{M^2-1}{3} |G_T(f)|^2$$

Quindi l'energia dei simboli è:

$$E_s = T\int_{-\infty}^{\infty} S_R(f)\, df = A^2 \frac{M^2-1}{3}$$

Quindi posso esprimere la $P(e)$ in funzione dell'energia del simbolo ricevuto

$$A^2 = \frac{3E_s}{M^2-1} \implies \boxed{P(e) = 2\frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1} \cdot \frac{E_s}{N_0}}\right)}$$

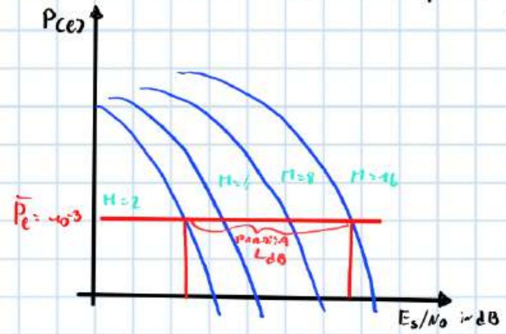
E cosa ci dice questa formula?

Osservazioni

1) Se la PAM è binaria ($M=2$) diventa:

$$P(e) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

2) E_s/N_0 va visto come un numero, ad esempio $E_s/N_0 = 10\,dB$



La banda di questo sistema (con coseno rialzato) varrà:

$$B_T = \frac{1+\alpha}{2\underbrace{T_b}_{\text{tempo per bit}}} \cdot \frac{1}{\log_2 M} = \frac{1+\alpha}{2T}$$

Se aumento M => aumento la P_e lo vedo dalla formula appena trovata (guarda il grafico a sx)

Qual è la perdita energetica tra due modulazioni?

$$P_{(e)_{M=2}} = Q\left(\sqrt{2\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_2}\right) = \bar{P}_e = 2\frac{M-1}{M}\, Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}\left(\frac{E_s}{N_0}\right)}\right)$$

Imponiamo che sia soddisfatta anche per la M-ario

Si approssima omettendo i coefficienti che moltiplicano la Q, inoltre essendo la Q identica possiamo eguagliare:

$$2\left(\frac{E}{N_0}\right)_{M=2} = \frac{6}{M^2-1}\left(\frac{E_s}{N_0}\right) \Rightarrow \left(\frac{E_s}{N_0}\right) = \frac{M^2-1}{3}\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_2$$

Questo è il prezzo da pagare per garantire la stessa qualità del servizio, ossia aumentare l'energia.

Quindi $\boxed{L_{dB} = 10\log\frac{M^2-1}{3}}$ [L = loss]

25-05-2023

Esame

Pass. Scritto Voto ≥ 18

$18 \le$ Voto < 23 => necessito orale

$23 \le$ Voto ≤ 27

Voto > 27 necessito orale

Scritto/Orale stesso appello

Domande scritto: domande aperte, chiuse(?), dimostrazioni...

Scritto di durata di 1 ora e 30' / 2 ore.

Portare la calcolatrice

Bit Error Rate

Riprendiamo la PAM prima di continuare i sistemi a banda passante, vogliamo vedere prima cosa è il Symbol Error Rate

Supponiamo di prendere -3 e ottenere -1 => otteniamo come bit error rate 2, sbagliando un solo simbolo (symbol error rate 1). Se prendiamo -1 e 1 otteniamo SER=1 e BER=1. Quindi in generale possiamo dire che

$$\frac{SER}{\log_2 M} \le BER < SER$$ ed è valida in generale per una M-PAM

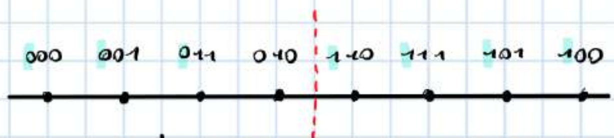
d_k	b_k
-3	01
-1	10
+1	11
+3	00

Come faccio ad avere il limite più basso? Basta ordinare i bit in modo diverso => cambiamo la mappa in modo che simboli adiacenti cambino solo di un bit. In tal caso dimezzo l'errore; tuttavia questo è vero se il rapporto segnale/rumore è alto! Quindi quello che ricevo è dentro un intorno di quello che invio, se ci fosse più rumore allora cambierebbe più di un bit. Questa codifica si chiama Codifica di Gray, e si dice che (per una PAM):

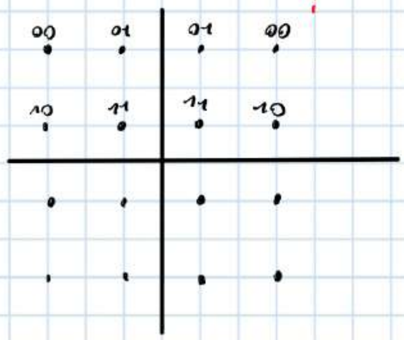
$x(t) = a_k + n(t) \sim N(0, \sigma^2)$

$$BER \approx \frac{SER}{\log_2 M}$$ quando l'SNR >> 1

Proviamo a fare una 8-PAM: ci basta prendere due 4-PAM e fare differire soltanto per il bit più significativo.

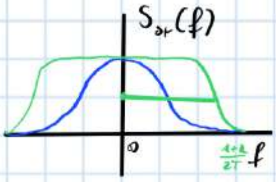


Lo stesso giochino si può fare con la QAM, quindi ad esempio prendiamo una 16-QAM, in tal caso però i punti in diagonale non distano fra di loro 1, ma 2! Ma ci arriveremo poi.



Sistemi Lineari in Banda Passante

Poniamo di avere un segnale in banda base e vediamo, come abbiamo visto che:



$$S_{sT}(f) = \frac{1}{T} S_d(f) |G_T(f)|^2 = \frac{R_d(0)}{T} |G_T(f)|^2 \quad \text{quindi con } B_T = \frac{1+\alpha}{2T}$$

si ricava da $R_d(0) = \frac{M^2-1}{3}$

Nel caso di una banda passante avremo partendo da una banda base:

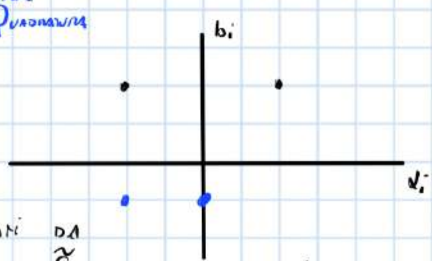
$$S_T(t) = \sum_k d_k g_T(t-kT) \quad M\text{-PAM} \xrightarrow[\text{PASSANTE}]{\text{IN BANDA}} S_T(t) = \mathrm{Re}\{\tilde{S}_T(t) e^{j\omega_0 t}\} \quad \text{con } \omega_0 = 2\pi f_0$$

inviluppo complesso; frequenza a cui voglio portare il segnale.

Sapendo che $\tilde{S}(t) = I(t) + jQ(t)$ proviamo a sostituire e a prendere la parte reale (Ricordando che $e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$):

$$S_T(t) = \mathrm{Re}\{\tilde{S}_T(t) e^{j\omega_0 t}\} = \underbrace{I(t)\cos(\omega_0 t)}_{\text{componente in fase}} - \underbrace{Q(t)\sin(\omega_0 t)}_{\text{componente in quadratura}}$$

Caratterizziamo così come abbiamo fatto per i sistemi PAM. Vediamo che



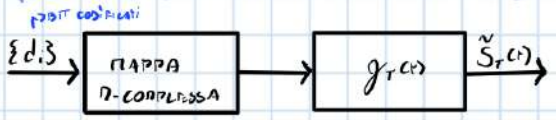
$$I(t) = \sum_i a_i g_T(t-iT) \qquad Q(t) = \sum_i b_i g_T(t-iT)$$

Si nota rappresentandolo a destra che I e Q sono 2 PAM caratterizzati da due costellazioni diverse. Infatti se copio i due segnali I e Q e li metto nel segnale $\tilde{S}_T(t)$ ottengo lo sviluppo complesso del segnale:

$$\tilde{S}_T(t) = \sum_i c_i g_T(t-iT) \quad \text{con } c_i = a_i + jb_i$$

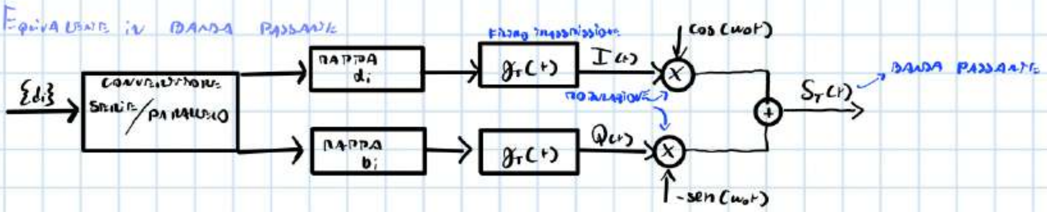
Vediamo quindi come è fatto lo schema a blocchi di questo trasmettitore.

Equivalente in banda base dell'inviluppo complesso



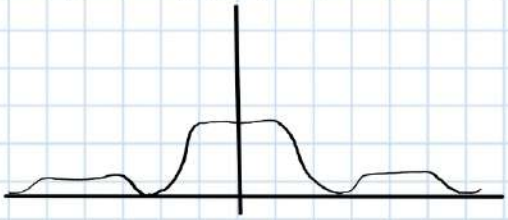
Supponiamo di avere una mappa M-complessa con M potenza di due. Abbiamo un convertitore che manda in parallelo, dove codifico gli a_i e i b_i.

Equivalente in banda passante



La densità spettrale di potenza di S_T è:

$$S_T(t) = \mathrm{Re}\{\tilde{S}_T(t)e^{j\omega_0 t}\} = \frac{\tilde{S}_T(t)e^{j\omega_0 t} + \tilde{S}_T^*(t)e^{-j\omega_0 t}}{2} \qquad S_S(f) = \frac{\tilde{S}_S(f-f_0) + \tilde{S}_S(-f-f_0)}{4}$$



$$\tilde{S}(t) = \sum_i c_i g_T(t-iT)$$

$$\tilde{S}(f) = \frac{1}{T} S_c(f) |G_T(f)|^2 \qquad S_c(f) = \sum_m R_c(m) e^{-j2\pi f m T}$$

Quindi devo calcolare $R_c(m)$

$$\tilde{S}(f) = \frac{R_c(0)}{T} |G_T(f)|^2 \qquad R_c(0) = E\{|c|^2\} = E\{(a_i + jb_i)(a_i + jb_i)^*\} =$$

$$= \underbrace{E\{a_i a_i^*\} + E\{b_i b_i^*\}}_{\text{sono due PAM di ordine } \sqrt{M}\text{, se ci fosse un'altra PAM di ordine diverso ci metterei quello}} \underbrace{- jE\{a_i b_i\} + jE\{b_i a_i^*\}}_{\text{essendo indipendenti sono entrambi } =0}$$

gli a_i e b_i sono indipendenti fra loro

Quindi con una mappa M-complessa:

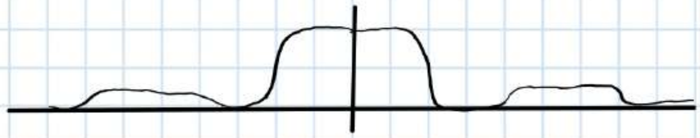
- a_i con $\sqrt{M}$, $R_a(0) = \frac{M-1}{3}$
- b_i con $\sqrt{M}$, $R_b(0) = \frac{M-1}{3}$

$$\Rightarrow R_c(0) = R_b(0) + R_a(0) = 2\left(\frac{M-1}{3}\right)$$

Per quanto detto in generale:

$$R_c(0) = \frac{M_b^2 - 1}{3} + \frac{M_a^2 - 1}{3}$$

Quindi:



- $B_{\tilde{s}} = \frac{1+\alpha}{2T} = \frac{\ell}{2T}$ [Banda gruppo compreso]

- $B_T = \frac{1+\alpha}{T}$ Per definizione la banda del segnale a banda passante è 2 volte la banda in segnale in banda base. In quanto abbiamo entrambe le parti, sia la positiva che la negativa.

Quindi è necessario ricordare

$$\boxed{B_T = \frac{1+\alpha}{T} = 2B_{\tilde{s}} = \frac{\ell}{T}}$$

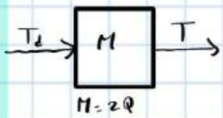
Efficienza Spettrale

$\eta_{sp} \triangleq \frac{R_d}{B_T}$ ⇒ R_d: Rate bit uscita dal codificatore. B_T ⇒ Banda segnale trasmesso

Calcoliamo quindi la modulazione in banda passante

$$\eta_{sp} = \frac{R_d}{B_T} \overset{!}{=} \frac{R_d}{\frac{1+\alpha}{T}} = \frac{T R_d}{1+\alpha} = \frac{\log_2 M}{1+\alpha}$$

La modulazione tra T e R_d vale $T = \log_2 M \, T_d = Q T_d$



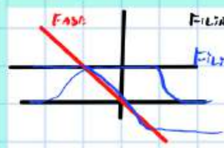
Nel caso della banda base dobbiamo usare il $B_{\tilde{s}}$, ovvero la banda base!

Ricevitore

Adesso guardiamo il ricevitore in banda passante. Ipotizziamo di avere un canale non distorcente ($c(t) = \delta(t)$, che è uguale a $c(t) = A\delta(t-\tau)$)

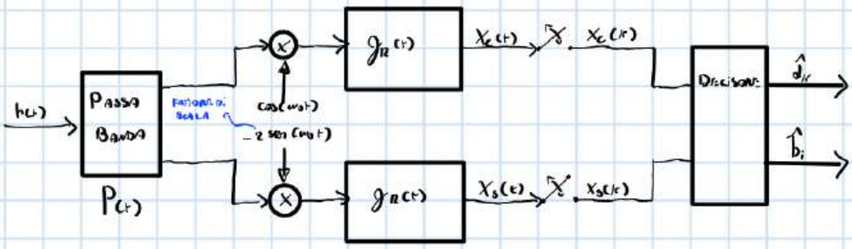
$r(t) = s_T(t) + n(t) \sim S_n(f) = \frac{N_0}{2}$

Escursus



Filtro non distorcente ideale

Filtro non distorcente reale, ma con caratteristiche ideali



Che forma avranno $x_c(k)$ e $x_s(k)$?

$x_c(k) = d_k + n_c(k)$ $\quad n_c[k] = n_c(t_0 + kT)$

$x_s(k) = b_k + n_s(k)$ $\quad n_c(t) = \big((n(t) \otimes p(t))\, 2\cos(w_0 t)\big) \otimes g_R(t)$

Sarà gaussiano o no? Sì, perché $n(t)$ è gaussiano (in senso lato) e il filtro è stazionario e lineare; quindi l'uscita conserva la gaussianità.

Quindi ho bisogno della $S_{n_c}(f) = ?$ [la guardiamo la prossima lezione]