Vettori

Orario di inizio delle lezioni:

Lunedì: 9:30
Martedì: 14:30
Giovedì: 8:45
Venerdì:8:45

Quarto d’ora accademico ogni ora

Grandezze fisiche

Scalari:

- Massa
- Temperatura
- Carica Elettrica
- Energia
- Densità
- ….

Lo scalare è specificato da un singolo valore, con segno

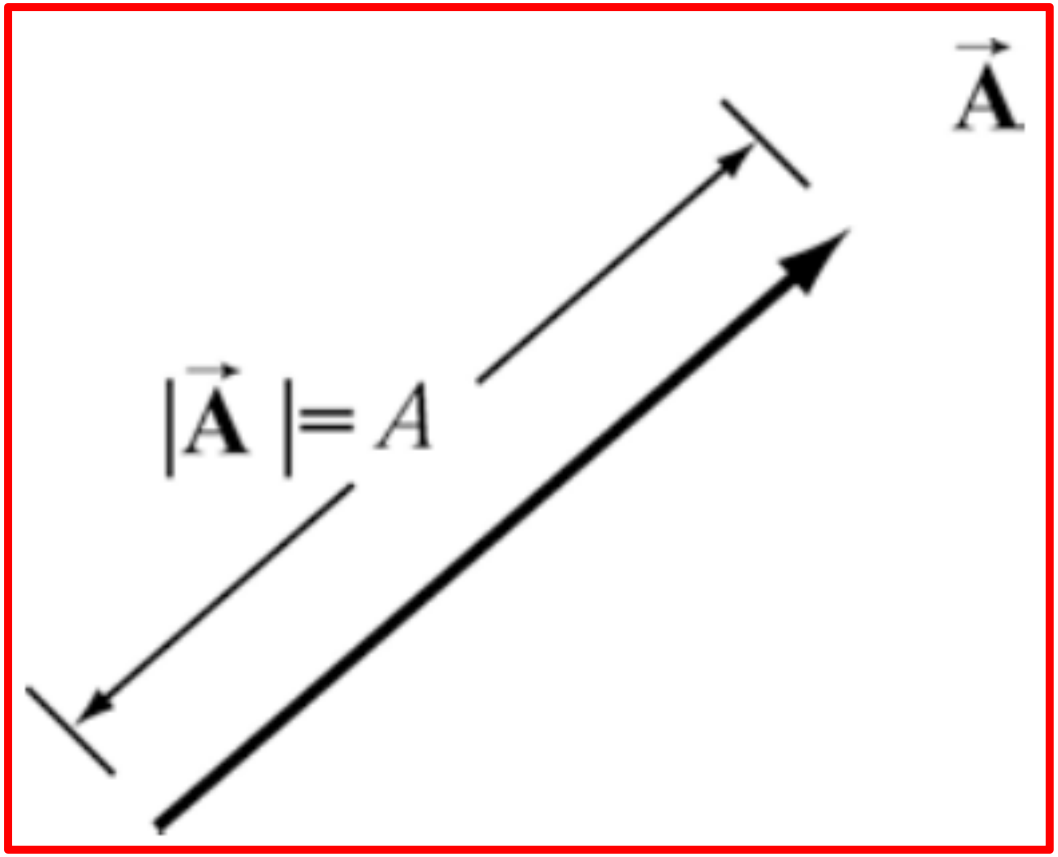
Vettori:

- Velocità
- Accelerazione
- Forza
- Campo Elettrico
- Momento Angolare
- …..

Un vettore ha modulo, direzione e verso

Rappresentazione di un vettore

Un vettore può essere scritto come una lettera con una freccia: $\vec{\mathbf{A}}$



- Graficamente è rappresentato come una freccia.
- La lunghezza della freccia è il modulo.
- La direzione è data dalla retta su cui giace e il verso dalla punta della freccia.

Il modulo è indicato in questo modo:

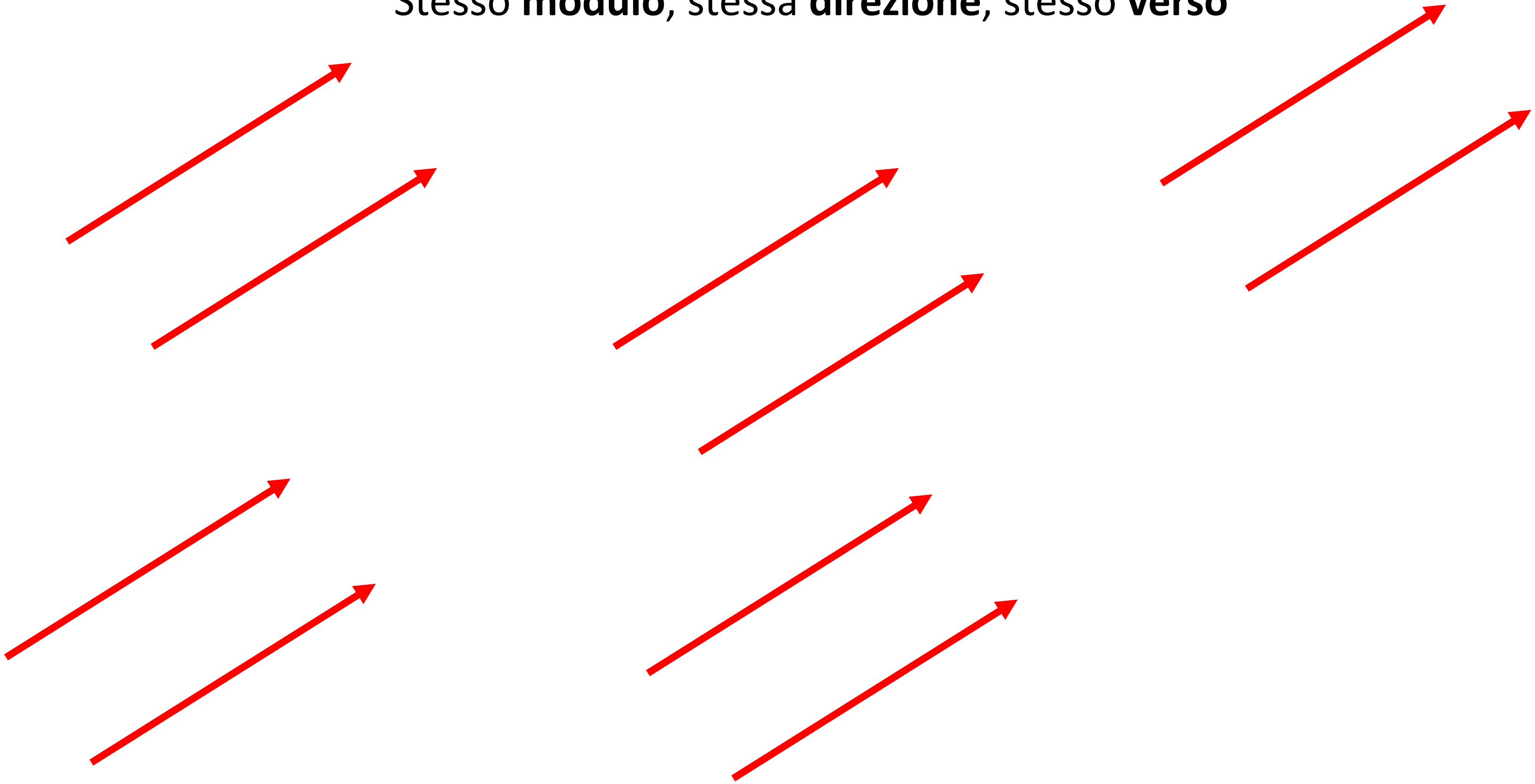
$$|\vec{\mathbf{A}}| \equiv A$$

A volte i vettori vengono rappresentati in grassetto (**A**), senza la freccia sulla parte superiore. Il modulo è spesso scritto in corsivo (*A*).

Vettori uguali

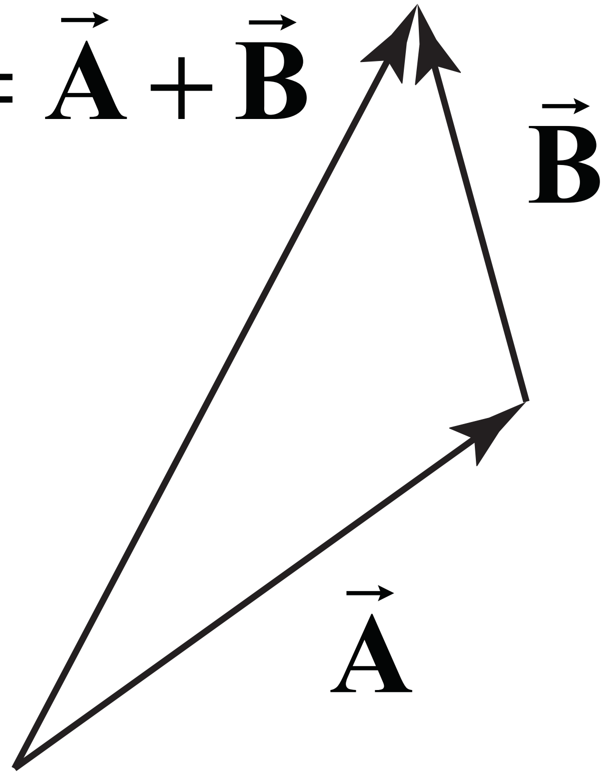
$$\vec{A} = \vec{B}$$

Stesso **modulo**, stessa **direzione**, stesso **verso**



Somma vettoriale, metodo 1

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$$



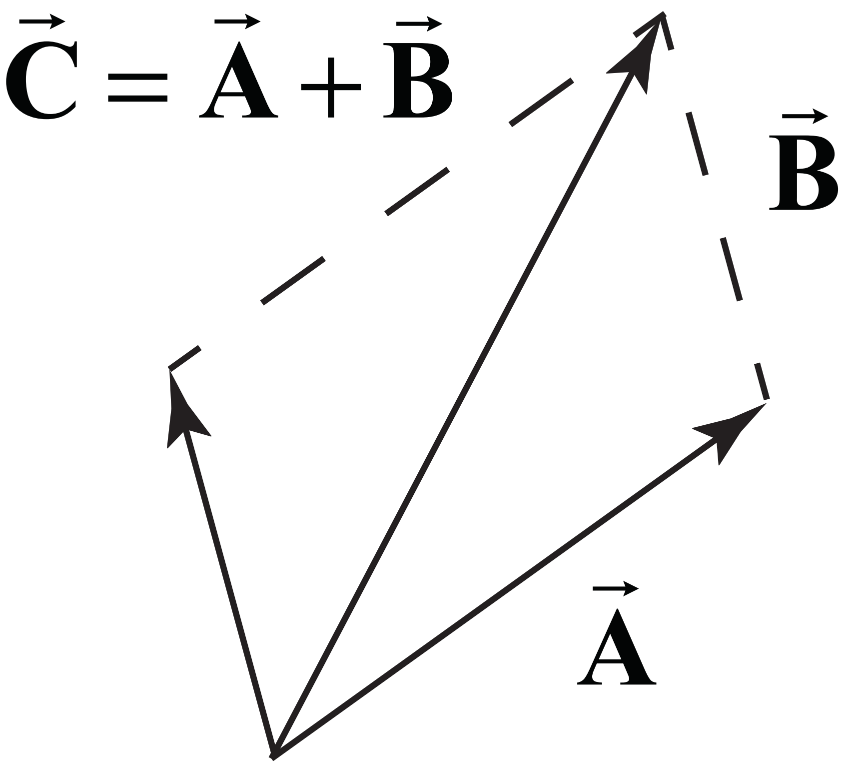
Disporre i vettori sulla stessa scala e con l'angolo appropriato.

Mettere l'origine di $\vec{\mathbf{B}}$ sul vertice di $\vec{\mathbf{A}}$

Tracciare la freccia ($\vec{\mathbf{C}}$) dall'origine di $\vec{\mathbf{A}}$ al vertice di $\vec{\mathbf{B}}$

Questa è la somma (risultante) di $\vec{\mathbf{A}}$ e $\vec{\mathbf{B}}$

Somma vettoriale, metodo 2



Disporre i vettori sulla stessa scala e con l'angolo appropriato.

Mettere l'origine di $\vec{\mathbf{B}}$ sull'origine di $\vec{\mathbf{A}}$

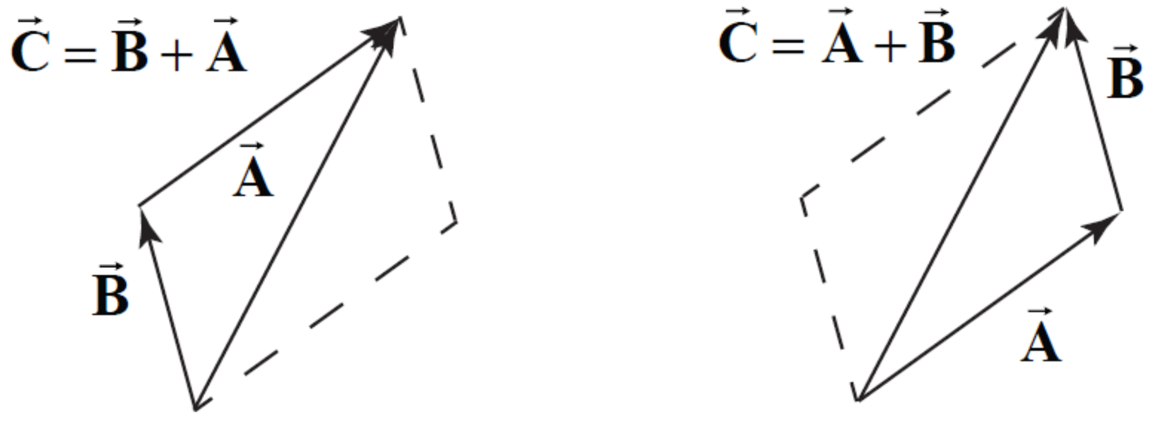
Tracciare la freccia ($\vec{\mathbf{C}}$) che è la diagonale del parallelogramma con lati $\vec{\mathbf{A}}$ e $\vec{\mathbf{B}}$

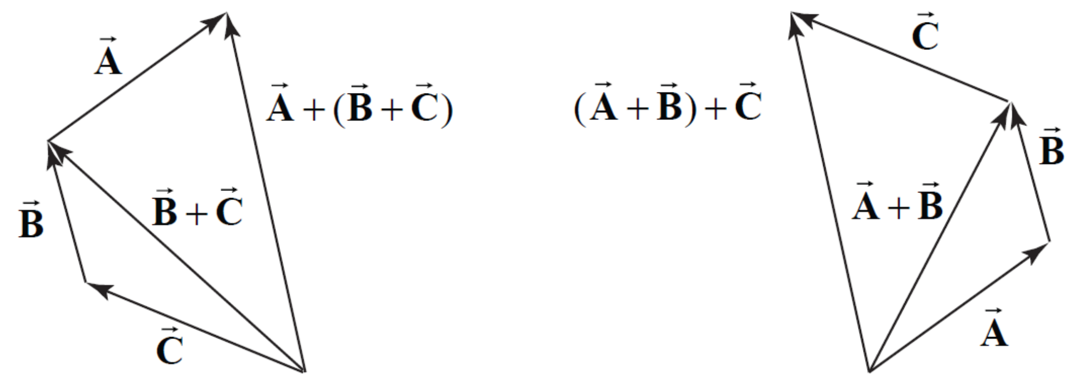
Questa è la somma (risultante) di $\vec{\mathbf{A}}$ e $\vec{\mathbf{B}}$

Proprietà della somma vettoriale

1) Proprietà commutativa

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$



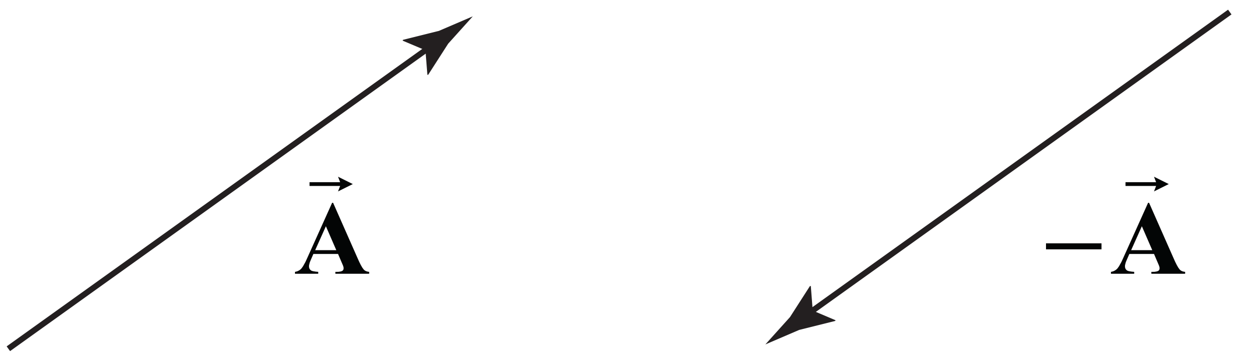


2) Proprietà associativa

$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$

Vettore opposto

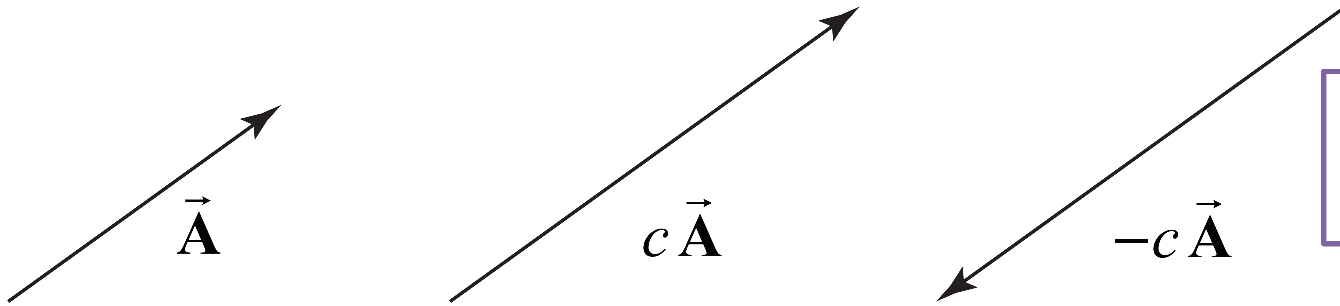
Il vettore $-\vec{\mathbf{A}}$ ha lo stesso modulo di $\vec{\mathbf{A}}$ e verso opposto



Il risultato della somma di un vettore e del suo opposto è il vettore nullo (modulo zero)

$$\vec{\mathbf{A}} + (-\vec{\mathbf{A}}) = \vec{\mathbf{0}}$$

Prodotto per uno scalare



$$\left|c\vec{\mathbf{A}}\right| = c\left|\vec{\mathbf{A}}\right|$$

$\vec{\mathbf{A}}$ vettore

$c\,\vec{\mathbf{A}}$ vettore modulo

$$|c\vec{\mathbf{A}}| = |c||\vec{\mathbf{A}}|$$

c scalare

Otteniamo un vettore:

- Il modulo è il modulo di $\vec{\mathbf{A}}$ moltiplicato per il valore di c
- Il verso è lo stesso di $\vec{\mathbf{A}}$, se c è positivo, oppure opposto se c è negativo.

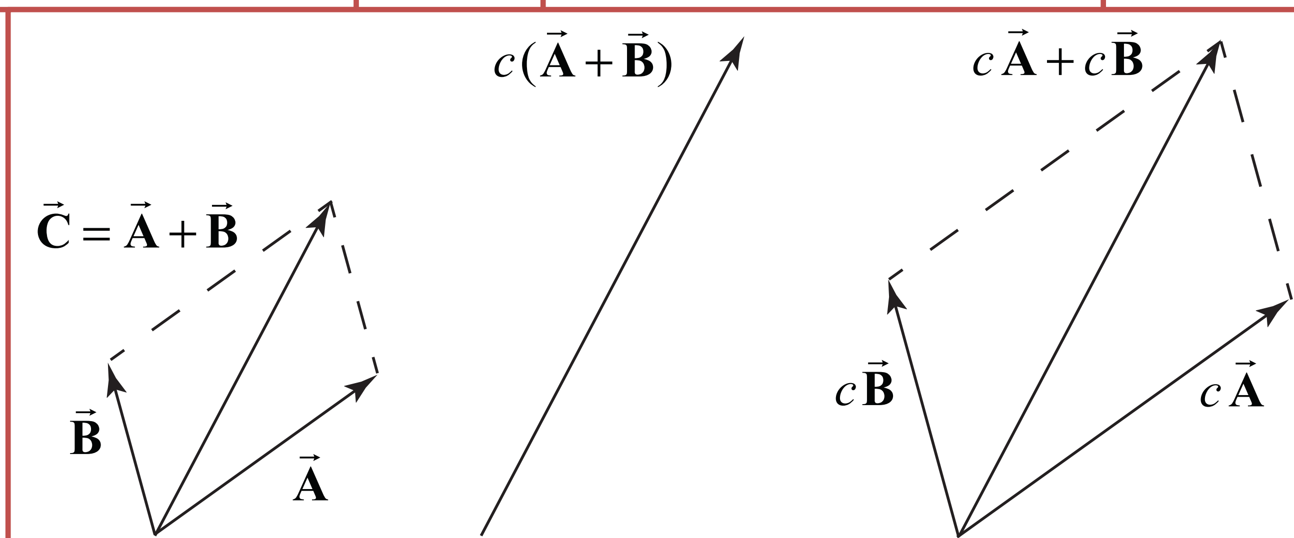
Proprietà I

1) Proprietà associativa: non importa in quale ordine o come si raggruppano gli scalari quando moltiplicati per un vettore.

$$b(c\vec{\mathbf{A}}) = (bc)\vec{\mathbf{A}} = (cb\,\vec{\mathbf{A}}) = c\,(b\vec{\mathbf{A}})$$

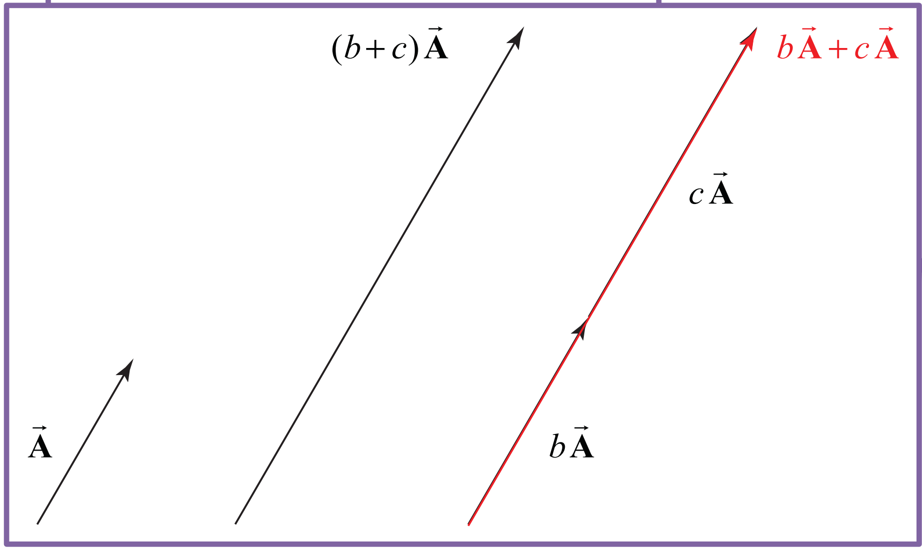
2) Proprietà distributiva rispetto alla somma vettoriale: nel prodotto di una somma di vettori per uno scalare, l'ordine con cui si raggruppano i vettori non influisce sul risultato.

$$c(\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}) = c\,\vec{\mathbf{A}} + c\,\vec{\mathbf{B}}$$



Proprietà II

$$(b+c)\vec{\mathbf{A}} = b\vec{\mathbf{A}} + c\vec{\mathbf{A}}$$



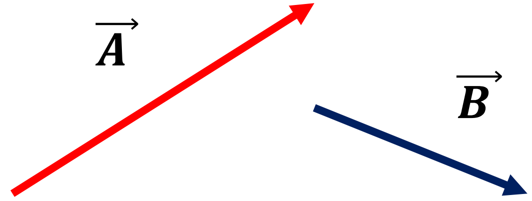
3) Proprietà distributiva rispetto alla somma scalare: non importa come si raggruppa una somma di scalari quando li si moltiplica per un vettore.

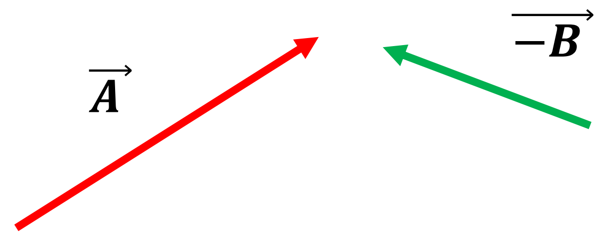
4) Elemento Identità: il numero 1 è l'elemento identità per la moltiplicazione:

$$1\,\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}\,.$$

Sottrazione tra vettori

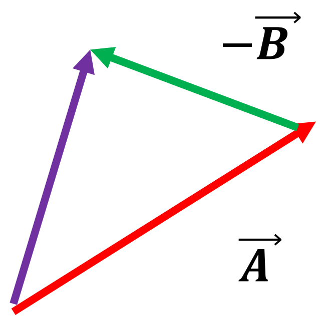
$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} + (\overrightarrow{-B})$$





$\vec{\mathbf{A}}$ meno $\vec{\mathbf{B}}$ è la somma del vettore $\vec{\mathbf{A}}$ con il vettore $-\vec{\mathbf{B}}$ (l'opposto di $\vec{\mathbf{B}}$)

$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$



Vettore unitario (versore)

Se dividiamo un vettore per il suo modulo otteniamo:

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\vec{\mathbf{A}}}{\left|\vec{\mathbf{A}}\right|} \; .$$

Questo vettore (detto anche versore) ha le seguenti caratteristiche:

- Stessa direzione e verso di $\vec{\mathbf{A}}$;
- Il modulo è 1: $\left|\hat{\mathbf{A}}\right| = \left|\vec{\mathbf{A}}\right| / \left|\vec{\mathbf{A}}\right| = 1 \; .$

Sistema di coordinate

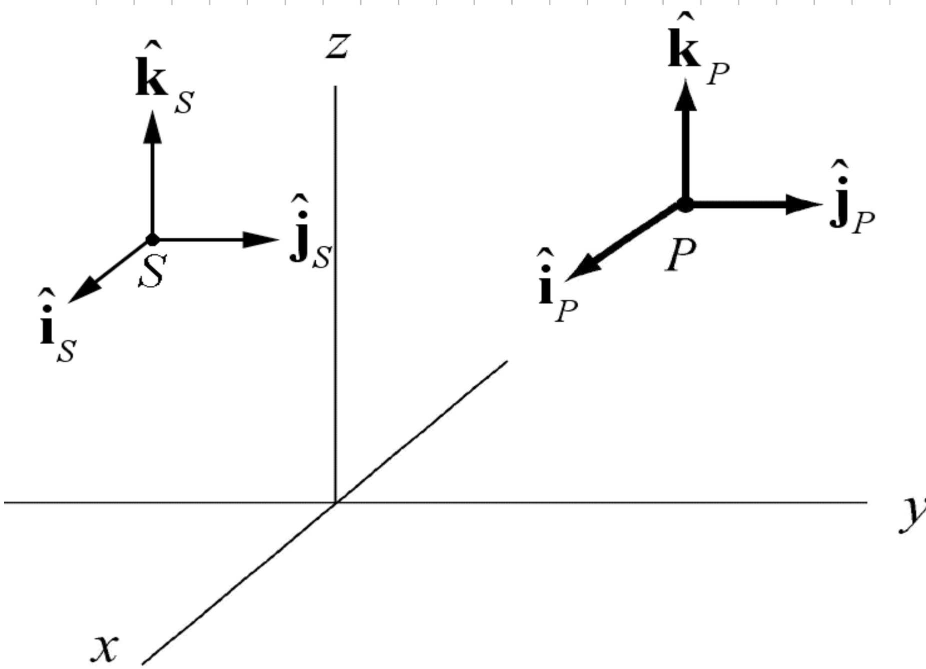
Un sistema di coordinate è definito da:

1) Scelta dell'Origine.
2) Scelta degli Assi.
3) Scelta della Direzione Positiva per ciascun Asse.
4) Scelta dei Vettori Unitari in ogni punto dello Spazio.

Sono comunemente usati tre sistemi di coordinate :

- Cartesiano;
- Cilindrico;
- Sferico.

Sistema di coordinate cartesiane



Consideriamo due diversi punti nello spazio: S e P

Associamo a ognuno di questi punti i versori cartesiani.

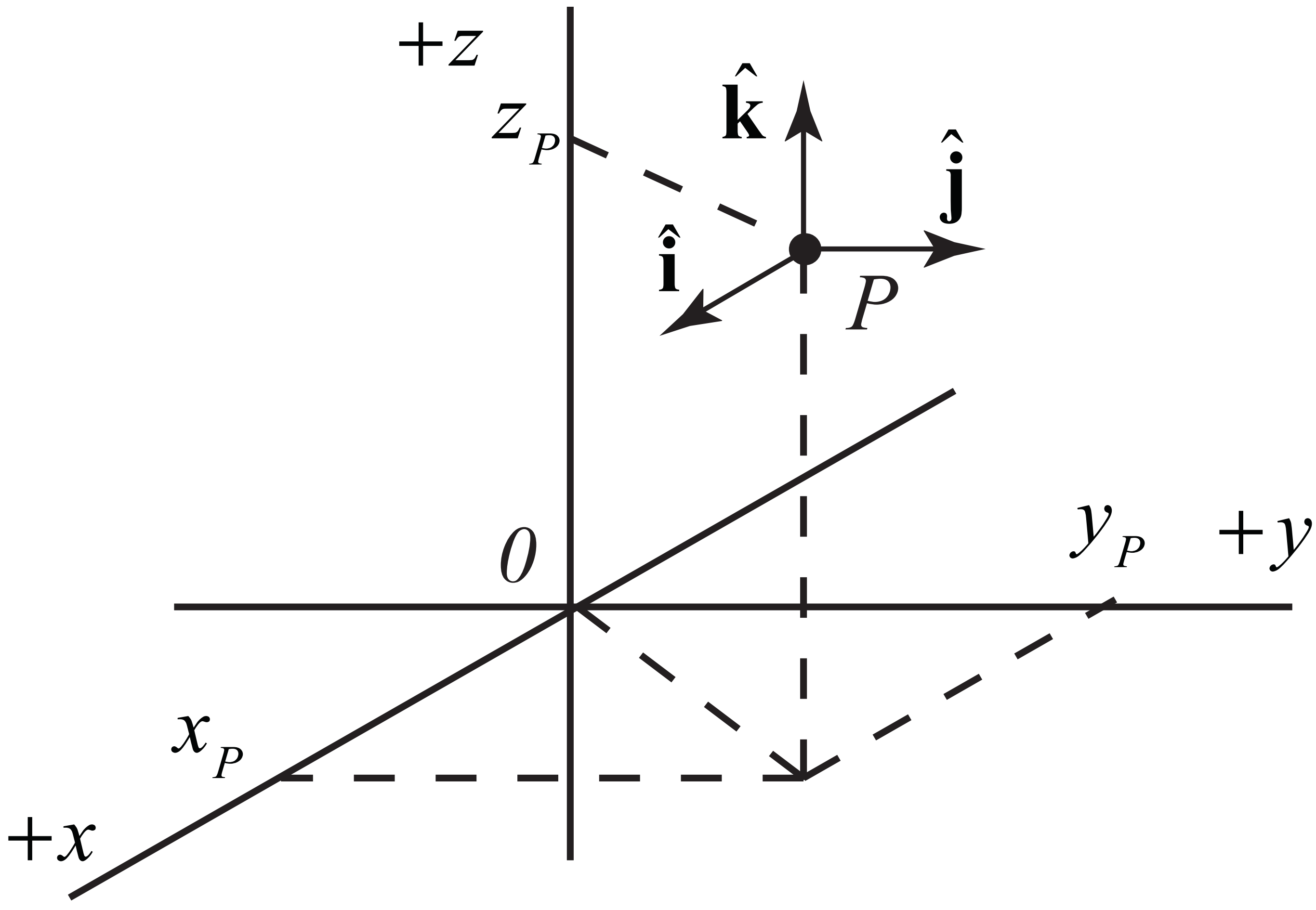
$$\hat{\mathbf{i}}_S = \hat{\mathbf{i}}_P,\ \hat{\mathbf{j}}_S = \hat{\mathbf{j}}_P, \text{and } \hat{\mathbf{k}}_S = \hat{\mathbf{k}}_P$$

Sistema di coordinate cartesiane

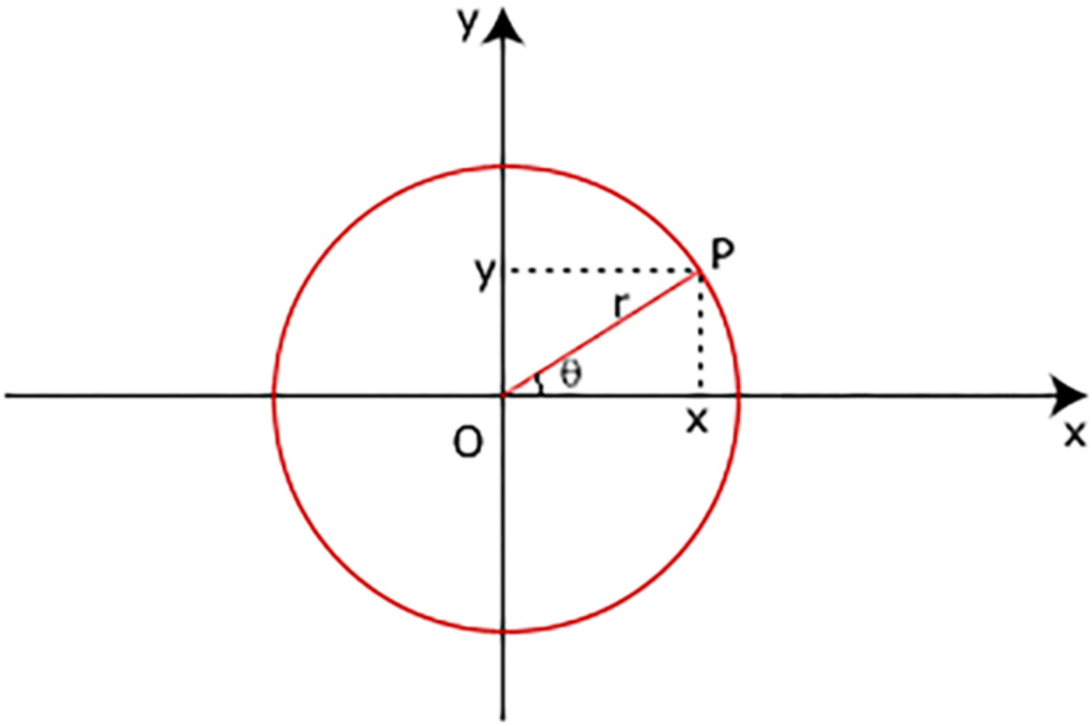
$$\overrightarrow{\boldsymbol{Posizione}}(P) = \vec{\boldsymbol{r}}(P) = x_P\hat{\mathbf{i}} + y_P\hat{\mathbf{j}} + z_P\hat{\mathbf{k}}$$

Coordinate:

$$(x_P, y_P, z_P)$$



Caso 2D: coordinate polari



Coordinate polari:

$$(r, \theta)$$

Da polari a cartesiane:

$$x = r\cos\theta\ ,$$
$$y = r\sin\theta\ .$$

Da cartesiane a polari:

$$r = +(x^2 + y^2)^{1/2}\ ,$$
$$\theta = \tan^{-1}(y / x)\ .$$

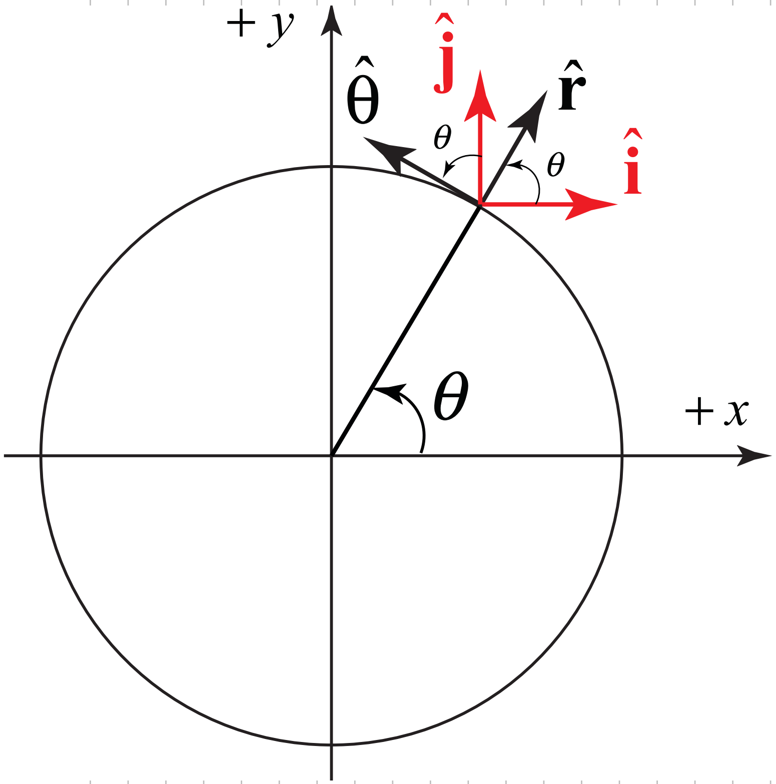
Per esprimere θ nell'intervallo $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{se } x > 0 \quad \text{e } y \geq 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + 2\pi & \text{se } x > 0 \quad \text{e } y < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{se } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \quad \text{e } y > 0 \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x = 0 \quad \text{e } y < 0 \end{cases}$$

Per esprimere θ nell'intervallo $\theta \in (-\pi, \pi]$

$$\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{se } x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{se } x < 0 \quad \text{e } y \geq 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & \text{se } x < 0 \quad \text{e } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \quad \text{e } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \quad \text{e } y < 0 \end{cases}$$

Caso 2D: versori polari



Vettore posizione in coordinate polari:

$$\vec{r} = r\hat{\mathbf{r}}$$

Versori polari espressi in funzione di quelli cartesiani:

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}\,,$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}\,.$$

Versori cartesiani espressi in funzione di quelli polari:

$$\hat{\mathbf{i}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\,,$$

$$\hat{\mathbf{j}} = \sin\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\,.$$

I versori polari dipendono dall’angolo θ

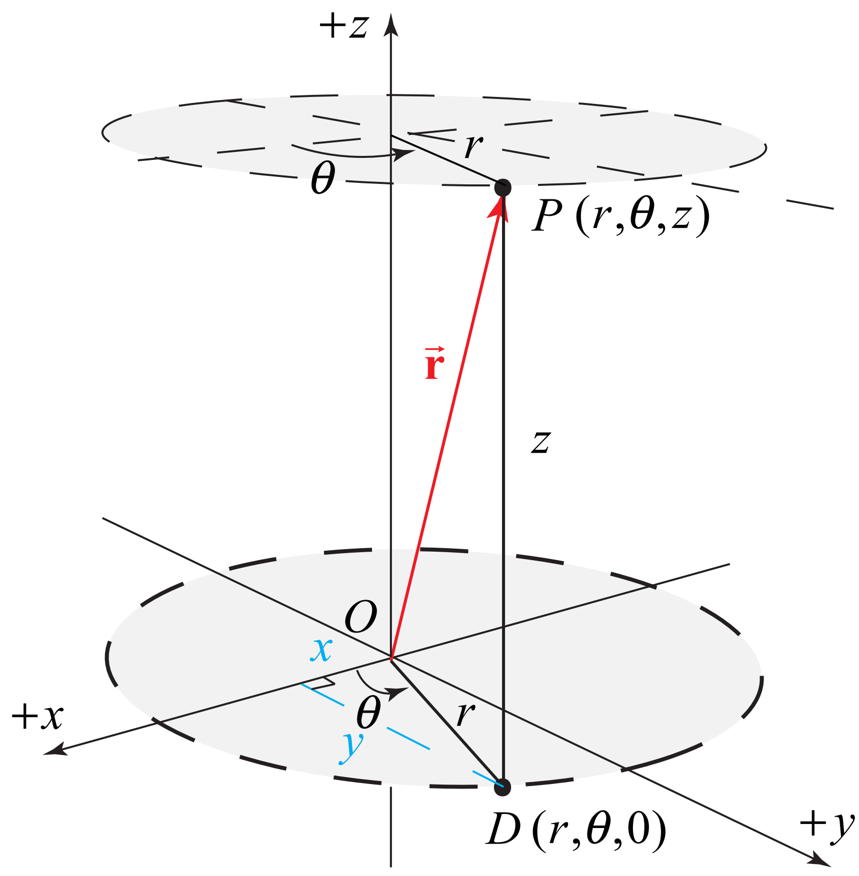
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

$$\vec{r} = r\,\hat{r} \qquad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\frac{\vec{r}}{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} = \frac{r\cos\theta}{r}\,\hat{i} + \frac{r\sin\theta\,\hat{j}}{r}$$

$$\begin{cases} \hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j} \\ \hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} \end{cases}$$

Sistema di coordinate cilindriche



Coordinate cilindriche del punto P:

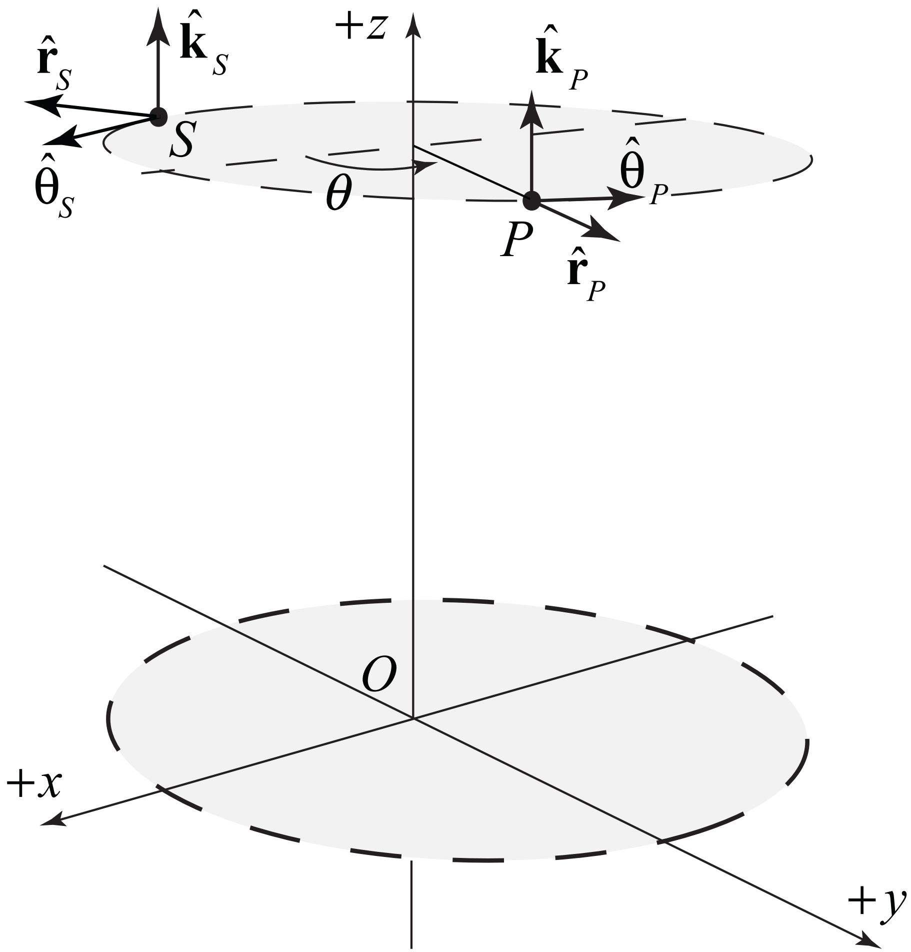
$$(r, \theta, z)$$

Coordinate polari del punto D (piano $z = 0$):

$$(r, \theta)$$

L'angolo è positivo se viene misurato in senso antiorario.

Sistema di coordinate cilindriche

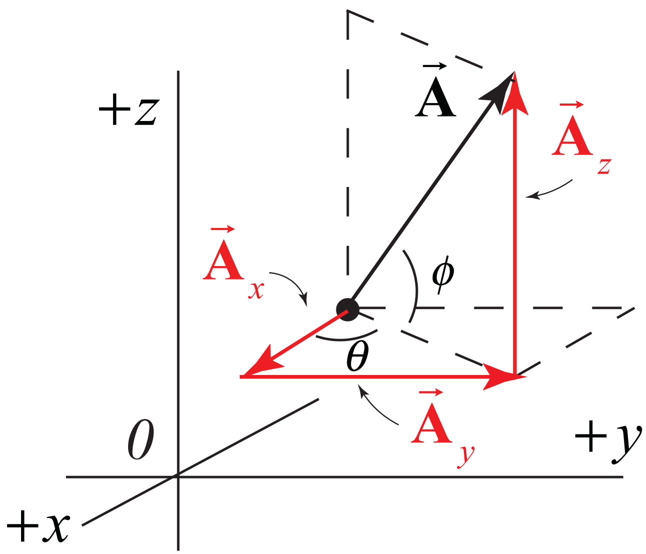


Per le coordinate polari, e dunque anche nel caso del sistema di coordinate cilindriche, i versori dipendo dalla particolare posizione nello spazio. In questo esempio, per i punti S e P abbiamo:

$$\hat{\mathbf{r}}_P \neq \hat{\mathbf{r}}_S$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_P \neq \hat{\boldsymbol{\theta}}_S$$

Decomposizione di un vettore



Stabilito un sistema di coordinate cartesiane, qualunque vettore può essere espresso come somma di tre vettori paralleli agli assi:

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}_x + \vec{\mathbf{A}}_y + \vec{\mathbf{A}}_z$$

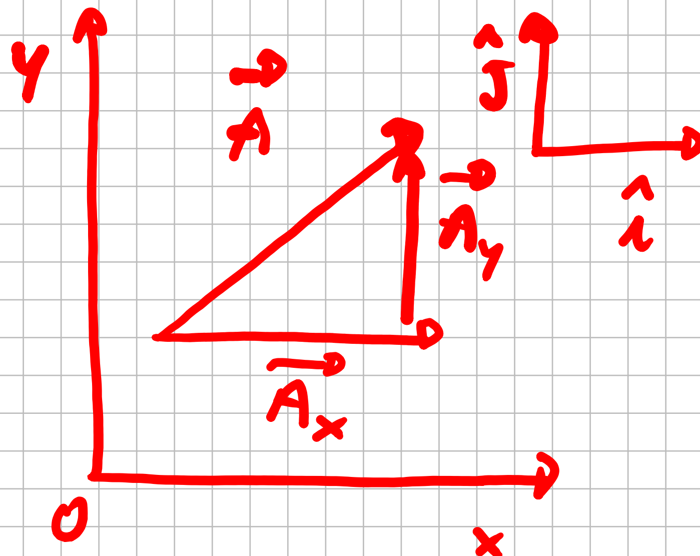
I vettori paralleli agli assi si possono esprimere in termini dei versori. Ad esempio:

$$\vec{\mathbf{A}}_x = A_x\,\hat{\mathbf{i}}$$

A_x Componente *x* di $\vec{\mathbf{A}}$

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}} + A_z\,\hat{\mathbf{k}}$$

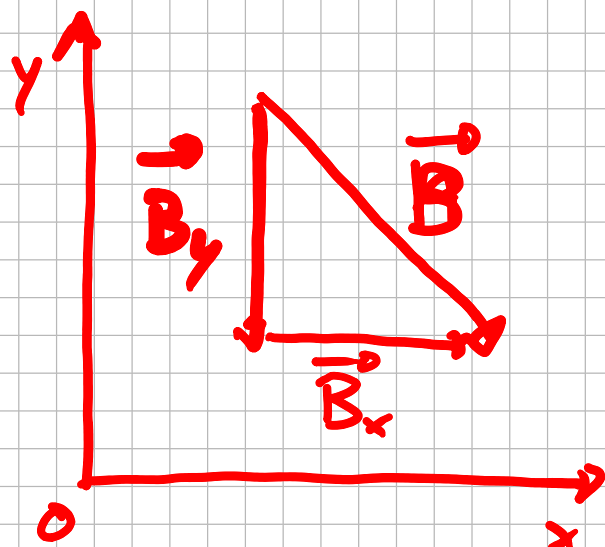
(A_x, A_y, A_z) Componenti di $\vec{\mathbf{A}}$



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

$$A_x = |\vec{A}_x| \qquad A_y = |\vec{A}_y|$$



$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$$

$$B_x = |\vec{B}_x| \qquad B_y = -|\vec{B}_y|$$

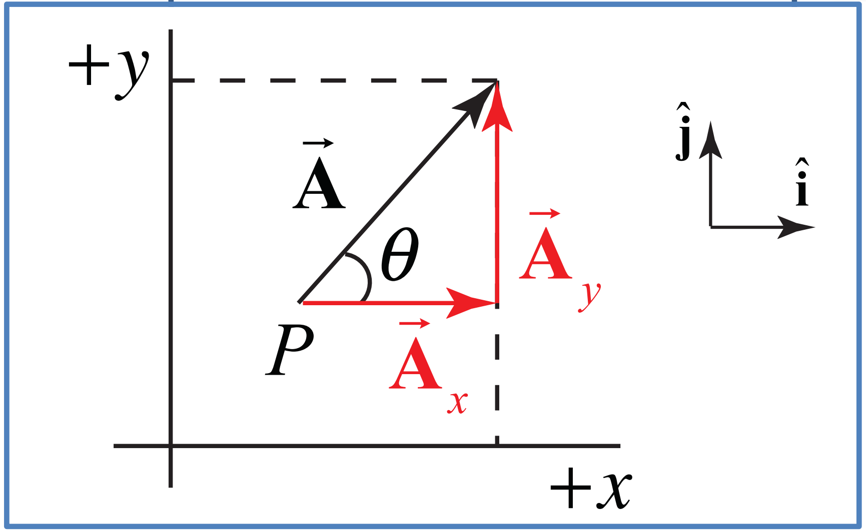
Componenti polari in 2D

Se conosciamo le componenti di un vettore possiamo calcolare la lunghezza (modulo) e l'angolo formato con $+x$:

Calcolo del modulo col teorema di Pitagora:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\vec{\mathbf{A}} = A\cos(\theta)\ \hat{\mathbf{i}} + A\sin(\theta)\ \hat{\mathbf{j}}$$



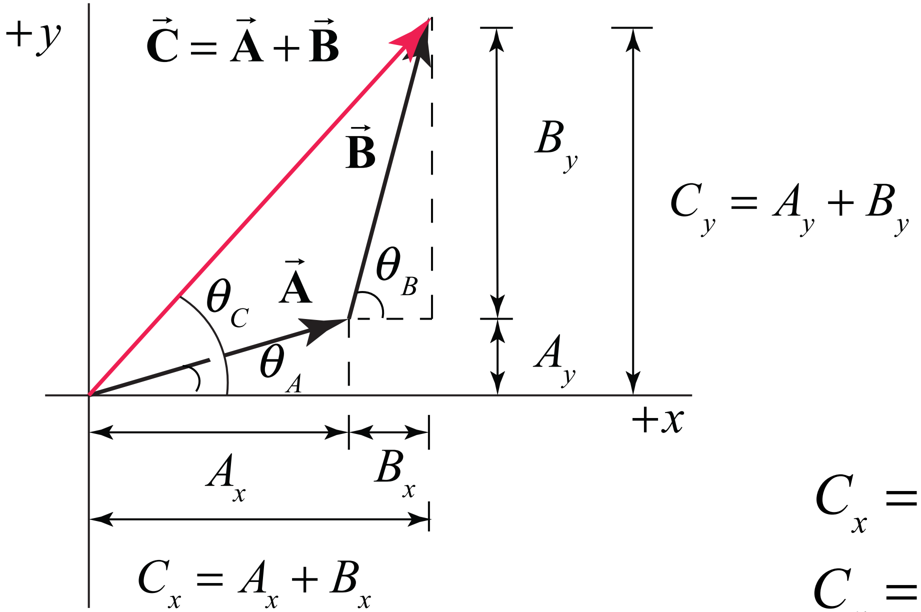
Calcolo dell'angolo (senso antiorario rispetto a $+x$)

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

$$A_x = A\cos(\theta), \quad A_y = A\sin(\theta)$$

$$\frac{A_y}{A_x} = \frac{A\sin(\theta)}{A\cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

Somma vettoriale: componenti



Conoscendo le componenti di $\vec{\mathrm{A}}$ e $\vec{\mathrm{B}}$, le componenti di $\vec{\mathrm{C}}$ sono:

$$\boxed{C_x = A_x + B_x, \qquad C_y = A_y + B_y}$$

$$C_x = C\cos(\theta_C) = A\cos(\theta_A) + B\cos(\theta_B)$$
$$C_y = C\sin(\theta_C) = A\sin(\theta_A) + B\sin(\theta_B).$$

$$\vec{\mathbf{C}} = (A_x + B_x)\,\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\,\hat{\mathbf{j}} = C\cos(\theta_C)\,\hat{\mathbf{i}} + C\sin(\theta_C)\,\hat{\mathbf{j}}$$

esercizio

Siano dati due vettori

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Trovare:

1. il modulo di $\mathbf{A}$;
2. il modulo di $\mathbf{B}$;
3. $\mathbf{A} + \mathbf{B}$;
4. $\mathbf{A} - \mathbf{B}$;
5. un versore $\hat{\mathbf{A}}$ che indica la direzione di $\mathbf{A}$;
6. un versore $\hat{\mathbf{B}}$ che indica la direzione di $\mathbf{B}$.

$\vec{A}: (2, -3, 7)$ $\vec{B}: (5, 1, 2)$

- MODULO DI $\vec{A}$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{4+9+49} = \sqrt{62} = 7.87$$

- MODULO DI $\vec{B}$

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{25+1+4} = \sqrt{30} = 5.48$$

- $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ $C_x = A_x + B_x$ $C_y = A_y + B_y$ $C_z = A_z + B_z$

$C_x = 2 + 5 = 7$ $C_y = -3 + 1 = -2$ $C_z = 7 + 2 = 9$

$$\vec{C} = 7\hat{i} - 2\hat{j} + 9\hat{k}$$

- $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$

$D_x = A_x - B_x = 2 - 5 = -3$

$D_y = A_y - B_y = -3 - 1 = -4$

$D_z = A_z - B_z = 7 - 2 = 5$

$$\vec{D} = -3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$$

- VERSORE $\hat{A}$

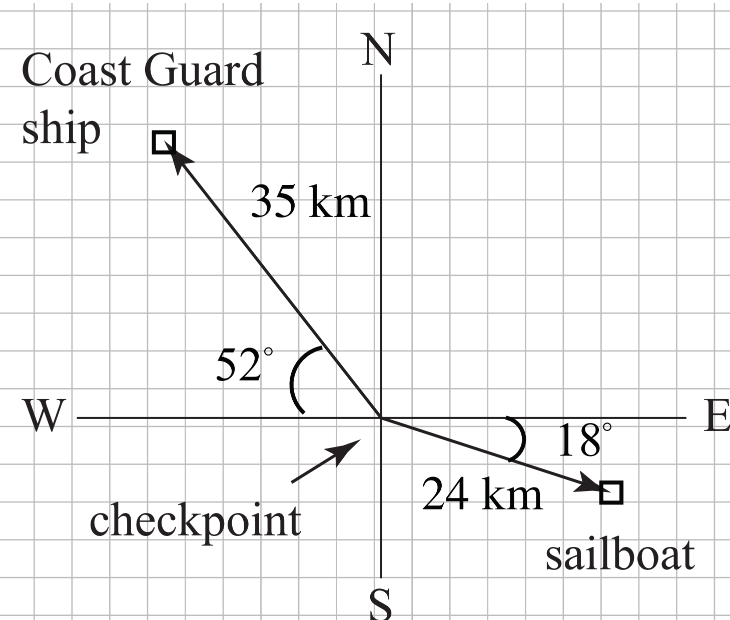
$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{(2\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k})}{\sqrt{62}}$$

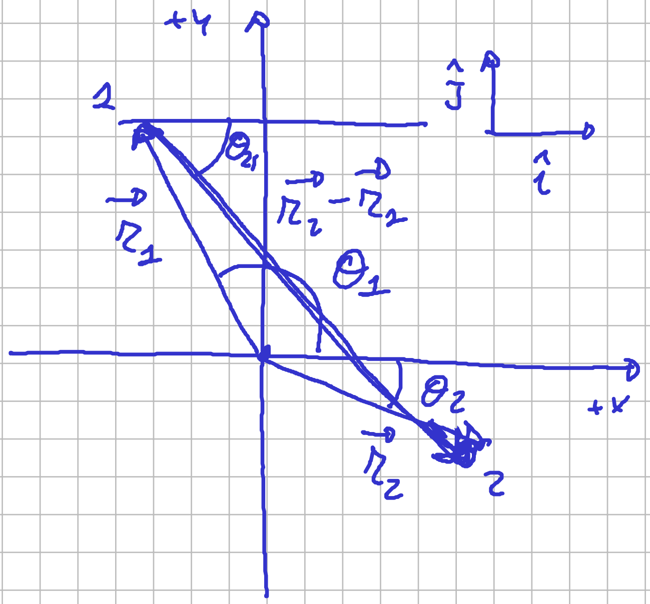
$$\hat{A} = \frac{2}{\sqrt{62}}\hat{i} \quad \frac{-3}{\sqrt{62}}\hat{j} + \frac{7}{\sqrt{62}}\hat{k}$$

esercizio

Una nave della Guardia Costiera si trova a 35 km da un checkpoint in direzione 52° a nord rispetto alla direzione ovest. Una barca a vela in difficoltà, è situata a 24 km dallo stesso checkpoint in direzione 18° a sud rispetto alla direzione est.

Disegnare un diagramma che indichi la posizione di entrambe le imbarcazioni. In quale direzione e a quale distanza deve viaggiare la nave della Guardia Costiera per raggiungere la barca a vela?





$\theta_1 = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$

$|\vec{r}_1| = r_1 = 35\,Km$

$\theta_2 = -18^\circ$

$|\vec{r}_2| = r_2 = 24\,Km$

$\vec{r}_1 = r_{1x}\,\hat{i} + r_{1y}\,\hat{J}$

$r_{1x} = r_1 \cos\theta_1 = -21.5\,Km$

$r_{1y} = r_1 \sin\theta_1 = 27.6\,Km$

$\vec{r}_1 = -21.5\,Km\,\hat{i} + 27.6\,Km\,\hat{J}$

$\vec{r}_2 = 22.8\,Km\,\hat{i} - 7.4\,Km\,\hat{J}$

$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (22.8\,Km + 21.5\,Km)\,\hat{i} + (-7.4\,Km - 27.6\,Km)\,\hat{J} =$

$= \underline{44.3\,Km}\,\hat{i}\ \underline{-35.0}\,Km\,\hat{J}$

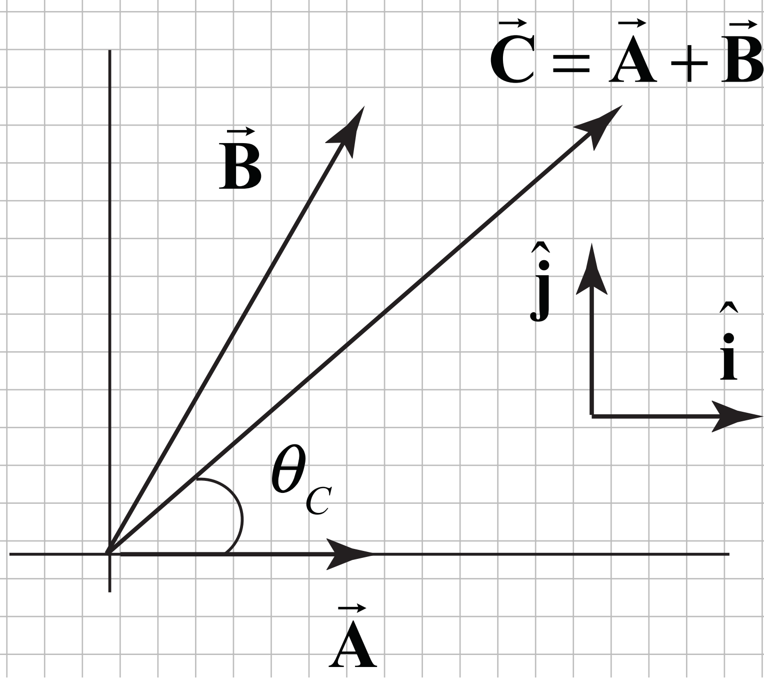
$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(44.3\,Km)^2 + (-35.0\,Km)^2} = \underline{\underline{56.5}}\,Km$

$\theta_{21} = \text{arctg}\left(\dfrac{-35.0\,Km}{44.4\,Km}\right) = \underline{\underline{-38.3^\circ}}$

esercizio

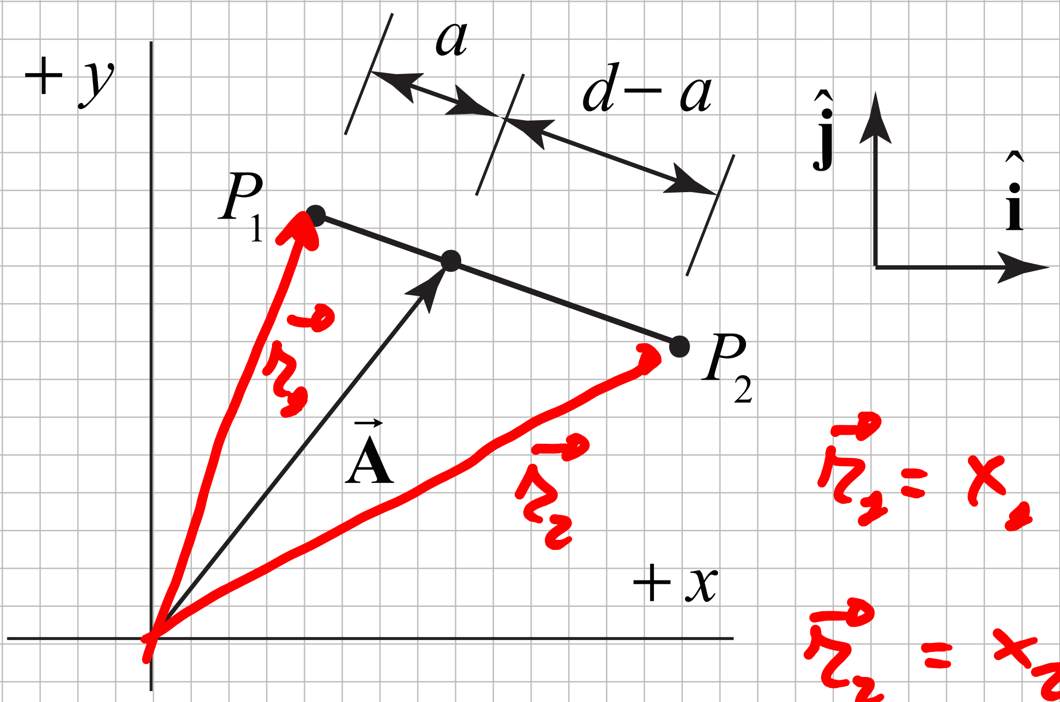
Due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$, tali che $B = 2A$, hanno una risultante $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ di modulo 26.5. Il vettore $\vec{C}$ forma un angolo $\theta = 41°$ rispetto al vettore $\vec{A}$.

Determinare il modulo di ciascun vettore e l'angolo tra i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$.



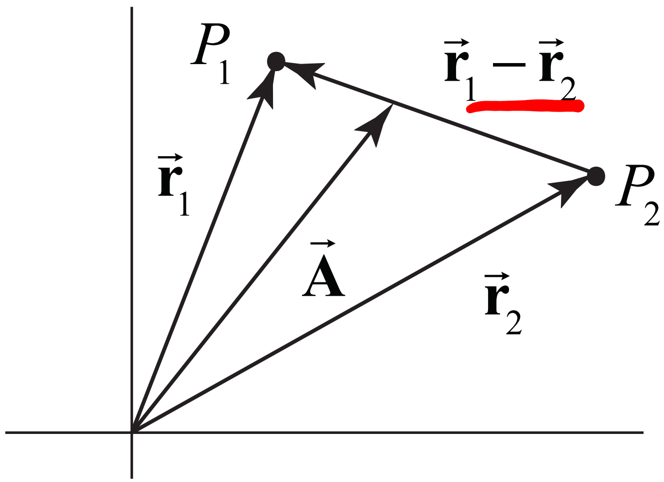
esercizio

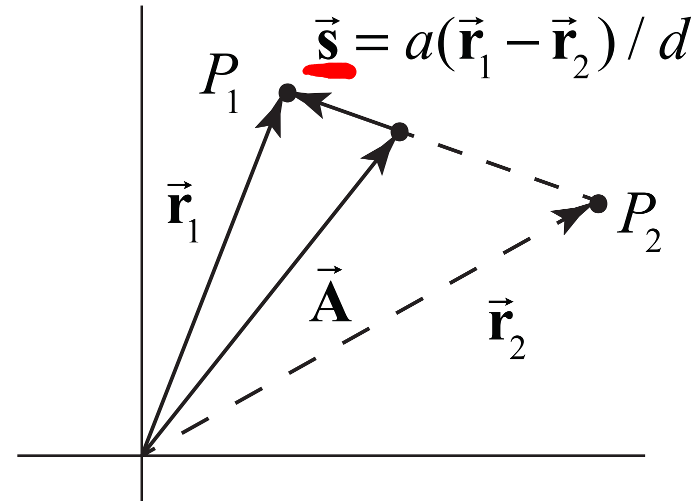
Consideriamo due punti, P_1 con coordinate (x_1, y_1) e P_2 con coordinate (x_2, y_2), che sono separati da una distanza d. Trovare il vettore posizione $\vec{A}$ del punto, sulla retta che congiunge P_1 e P_2, che si trova a una distanza a dal punto P_1.



$\vec{r}_1 = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j}$

$\vec{r}_2 = x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j}$





$$\vec{r}_1 = \vec{A} + \vec{s} \qquad \vec{A} = \vec{r}_1 - \vec{s}$$

$$|\vec{s}| = a \qquad \vec{s} = a\,\hat{r}_{2,1}$$

$$\hat{r}_{21} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{d}$$

$$\vec{s} = \frac{a}{d}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)$$

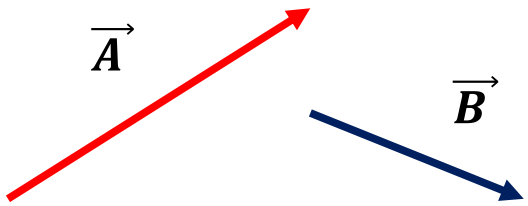
$$\vec{A} = \vec{r}_1 - \vec{s} = \vec{r}_1 - \frac{a}{d}\vec{r}_1 + \frac{a}{d}\vec{r}_2 =$$

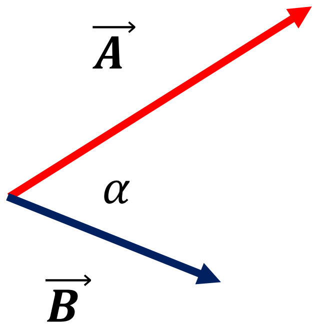
$$= \left(1 - \frac{a}{d}\right)\vec{r}_1 + \frac{a}{d}\vec{r}_2 =$$

$$= \left(1 - \frac{a}{d}\right)x_1\hat{i} + \left(1 - \frac{a}{d}\right)y_1\hat{j} + \frac{a}{d}x_2\hat{i} + \frac{a}{d}y_2\hat{j}$$

$$d = \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Prodotto scalare





Si definisce prodotto scalare $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = A\,B\cos\alpha = |\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}|\cos\alpha$

Proprietà del prodotto scalare

Proprietà commutativa: $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{B}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{A}}$

Vettori ortogonali: $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = A\,B \cos\alpha = A\,B \cos\frac{\pi}{2} = 0$

Vettori paralleli: $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = A\,B \cos\alpha = A\,B \cos 0 = A\,B$

Vettori antiparalleli: $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = A\,B \cos\alpha = A\,B \cos\pi = -A\,B$

Se conosciamo le componenti e:

$\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_z\widehat{\boldsymbol{k}}$ $\qquad$ $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + B_z\widehat{\boldsymbol{k}}$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

esercizio

Consideriamo due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ con componenti, rispetto a un sistema di coordinate cartesiane, $(2; 3; -1)$ e $(-1; 2; 2)$ rispettivamente .
Determinare l'angolo tra i due vettori.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

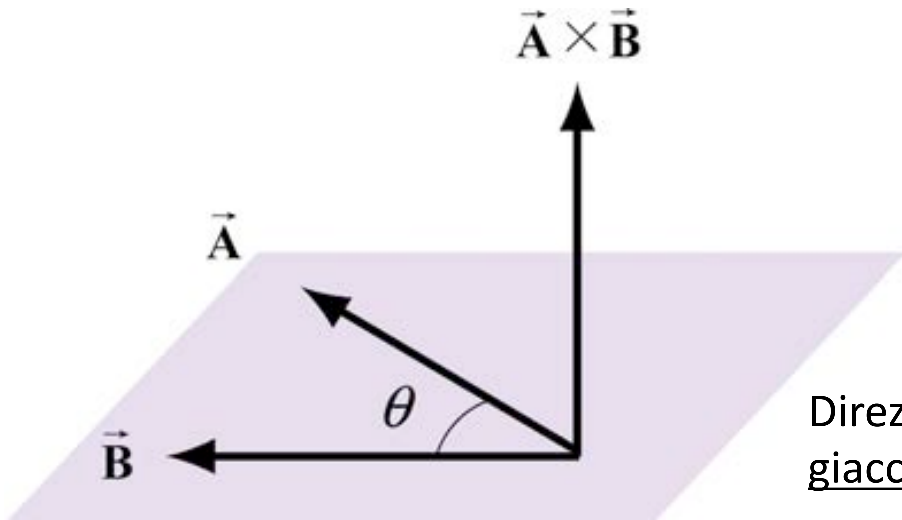
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = -2+6-2=2$$

$$|\vec{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14} \qquad |\vec{B}| = \sqrt{9}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{14}\sqrt{9}} = \frac{2}{\sqrt{126}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{126}}\right)$$

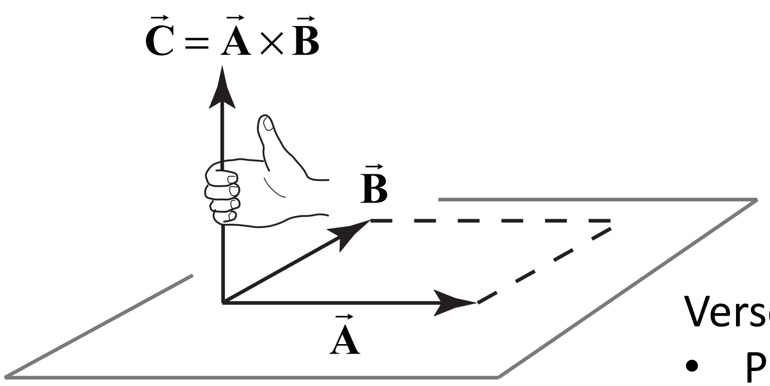
Prodotto vettoriale

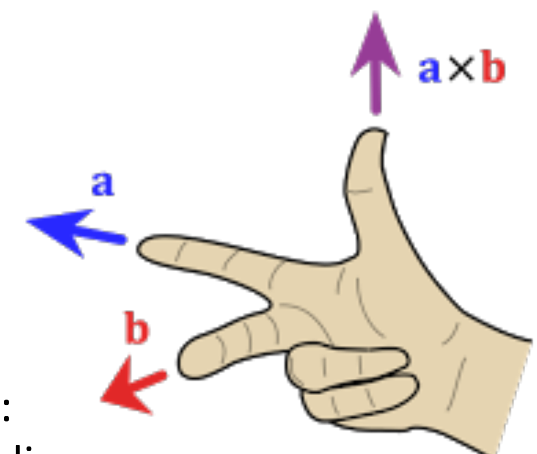


Modulo:

$$\left|\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}\right| = \left|\vec{\mathbf{A}}\right|\left|\vec{\mathbf{B}}\right|\sin(\theta)$$

Direzione: <u>perpendicolare al piano su cui giacciono i fattori</u>

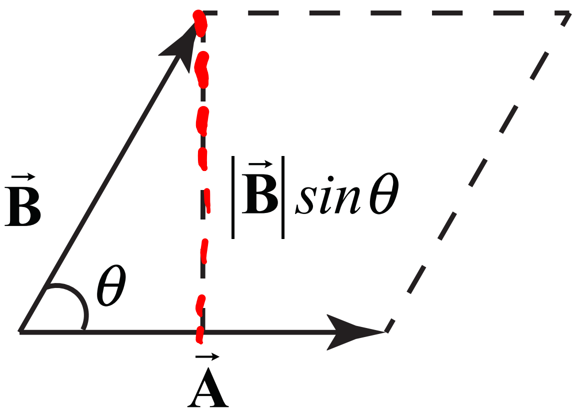


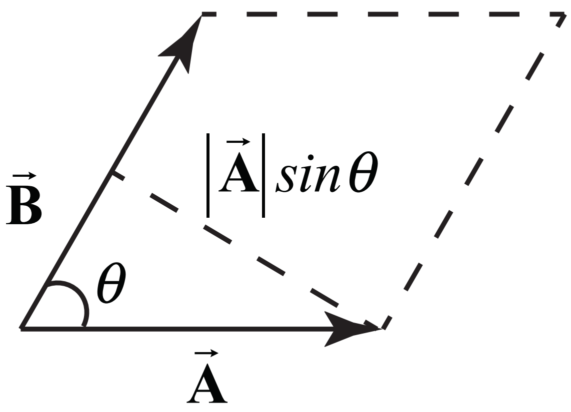


Verso: regola della mano destra:

- Primo fattore associato all'indice
- Secondo fattore associato al medio
- Il verso del risultato è dato dal pollice

Prodotto vettoriale





Proprietà del prodotto vettoriale I

1) Proprietà anti-commutativa

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$$

2) Prodotto per uno scalare

$$c\,\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = c\,(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}})$$

$$\vec{\mathbf{A}} \times c\,\vec{\mathbf{B}} = c\,(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}})$$

3) Prodotto per una somma di vettori

$$(\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}) \times \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}} + \vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{C}}$$

$$\vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}$$

Proprietà del prodotto vettoriale II

Non associatività: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}.$

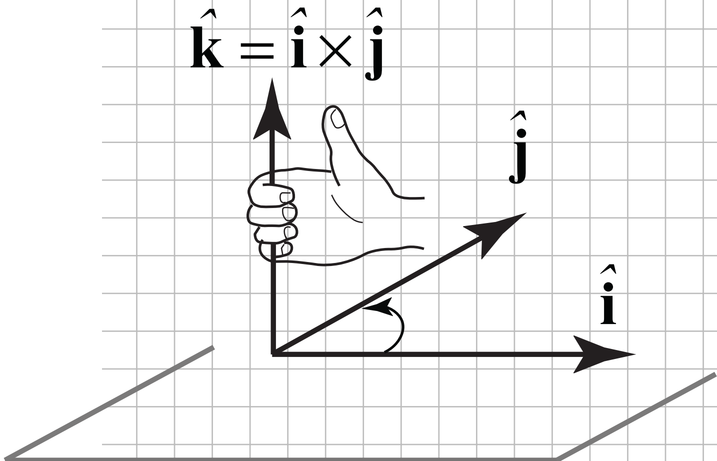
Identità di Jacobi: $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) + \vec{B} \times \left(\vec{C} \times \vec{A}\right) + \vec{C} \times \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = 0.$

Triplo prodotto vettoriale (identità di Lagrange):

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\,\vec{C}.$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\,\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\,\vec{A}.$$

Coordinate cartesiane: versori



$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|$$

$$|\hat{i} \times \hat{j}| = |\hat{i}||\hat{j}| \sin\frac{\pi}{2} = |\hat{i}||\hat{j}| = 1$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \qquad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \qquad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} \qquad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i} \qquad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = 0$$

$$\hat{j} \times \hat{j} = 0$$

$$\hat{k} \times \hat{k} = 0$$

Coordinate cartesiane: vettori

$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ $\quad \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$

Dimostriamo che:

$$\boxed{\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\hat{\mathbf{i}} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\hat{\mathbf{j}} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\hat{\mathbf{k}}\,.}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = A_x B_x \hat{i} \times \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k} +$$

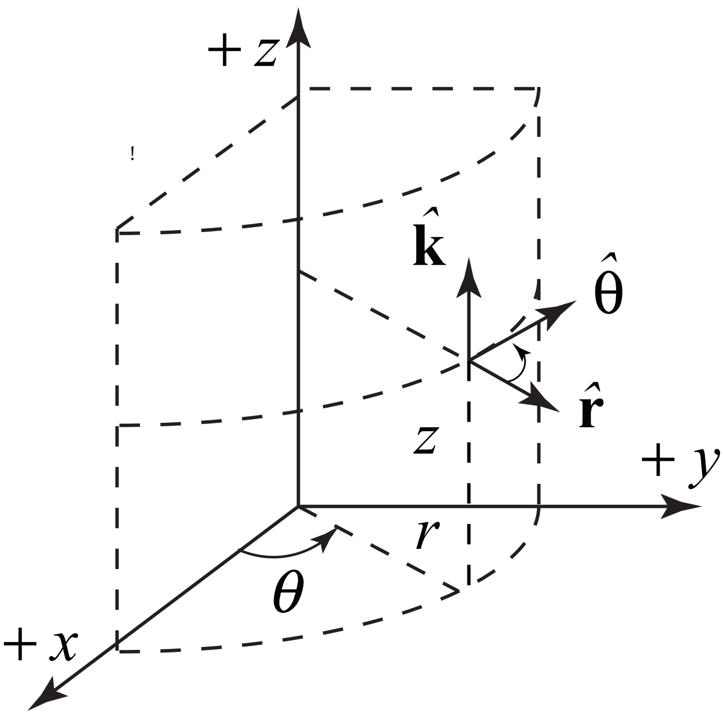
$$+ A_y B_x \hat{j} \times \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \times \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \times \hat{k} +$$

$$+ A_z B_x \hat{k} \times \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \times \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \times \hat{k} =$$

$$= A_x B_y \hat{k} - A_x B_z \hat{j} - A_y B_x \hat{k} + A_y B_z \hat{i} +$$

$$+ A_z B_x \hat{j} - A_z B_y \hat{i}$$

Coordinate cilindriche: versori



Applicando la regola della mano destra:

$$\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\mathbf{k}}$$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}\times\hat{\mathbf{k}}=\hat{\mathbf{r}}$$
$$\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{r}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\,.$$

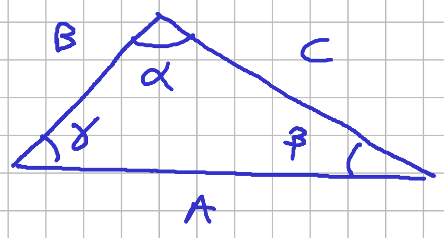
Sfruttando la proprietà anti-commutativa:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}\times\hat{\mathbf{r}}=-\hat{\mathbf{k}}$$
$$\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}}=-\hat{\mathbf{r}}$$
$$\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{k}}=-\hat{\boldsymbol{\theta}}\,.$$

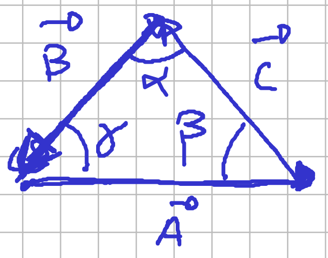
$$\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{r}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}}=\vec{\mathbf{0}}\,.$$

esercizio

Sfruttando le proprietà del prodotto vettoriale, dimostrare la legge dei seni per un triangolo.



$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}$$



$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$$

$$\vec{A}\times\left(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}\right)=0$$

$$\vec{A}\times\vec{A}+\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}=0$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{A}\times\vec{C}$$

$$\vec{A}\times\vec{A}=0$$

NOTIAMO CHE VALGONO LE RELAZIONI:

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = |-\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{B}\times\vec{A}| = |-\vec{B}\times\vec{A}|$$

SIMILMENTE:

$$|\vec{A}\times\vec{C}| = |-\vec{A}\times\vec{C}| = |\vec{C}\times\vec{A}| = |-\vec{C}\times\vec{A}|$$

POSSIAMO SCRIVERE:

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\gamma$$

$$|\vec{A}\times\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{C}|\sin\beta$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A} \times \vec{C}|$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{A}||\vec{B}| \sin \gamma = |\vec{A}||\vec{C}| \sin \beta$$

DA CUI RICAVIAMO

$$\frac{|\vec{B}|}{\sin \beta} = \frac{|\vec{C}|}{\sin \gamma}$$

CON ARGOMENTI SIMILI DIMOSTRIAMO CHE

$$\frac{|\vec{A}|}{\sin \alpha} = \frac{|\vec{B}|}{\sin \beta} \quad e \quad \frac{|\vec{A}|}{\sin \alpha} = \frac{|\vec{C}|}{\sin \gamma}$$

esercizio

Trovare i versori perpendicolari al piano su cui giacciono i vettori:

$$\vec{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}} \qquad \text{e} \qquad \vec{\mathbf{B}} = -2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$$