Esercizi di Comunicazioni Numeriche

Raccolta di esercizi d'esame svolti

Riccardo Ciucci
31 gennaio 2026

Premessa

Molte delle soluzioni riportate NON sono ufficiali, né tantomeno sono state fornite dai professori, pertanto è possibile che contengano errori.

Gli esercizi sono raggruppati per tipologia (posizione nel testo d'esame) e riportano la data in cui sono usciti. La maggior parte degli esercizi qui riportati viene da testi d'esame del 2025.

Indice

Esercizio 1

2025-06-25

Due macchine realizzano anelli per catene da bicicletta. La prima macchina è nuova e produce lo 0.1% di anelli difettosi, mentre la seconda è vecchia produce il 2% di anelli difettosi. Si scelga a caso una delle macchine e si prenda un anello da essa realizzato.

a) **Calcolare la probabilità che l'anello estratto sia privo di difetti.**

$$P(D) = 0.1\%\, P(N) + 2\% \left(1 - P(N)\right) = \frac{2.1\%}{2} = 1.05\%$$

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 98.95\%$$

b) **Se l'anello estratto è privo di difetti, calcolare la probabilità che provenga dalla macchina nuova.**

$$P(N|\bar{D}) = \frac{P(\bar{D} \cap N)}{P(\bar{D})} = \frac{99.9\%\, P(N)}{P(\bar{D})} = 0.5\frac{99.9\%}{98.95\%} = 50.5\%$$

c) **La catena C_N è composta di 100 anelli prodotti dalla macchina nuova, la catena C_V di 100 anelli prodotti dalla macchina vecchia. Calcolare le probabilità che ciascuna catena sia commerciabile, cioè priva di anelli difettosi.**

$$P(C_N) = (1 - 0.1\%)^{100} \approx 90.5\%$$

$$P(C_V) = (1 - 2\%)^{100} \approx 13.3\%$$

2025-06-05

Sia data un'urna che contiene i 90 numeri della tombola. Definiamo i seguenti eventi:

$$A = \{Estrazione\ di\ un\ numero\ >\ 60\}$$

$$B = \{Estrazione\ di\ un\ numero\ dispari\}$$

$$C = \{Estrazione\ di\ un\ numero\ \leq\ 80\}$$

a) **Verificare se gli eventi A e B sono indipendenti.**

$$P(A) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{15}{90} = \frac{1}{6} = P(A)P(B)$$

Quindi sì, A e B sono indipendenti.

b) **Verificare se gli eventi B e C sono disgiunti.**

$$P(B \cap C) = \frac{40}{90} \neq 0$$

Quindi i due eventi NON sono disgiunti.

c) **Calcolare $P(C|A)$**

$$P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{20/_{90}}{30/_{90}} = \frac{2}{3}$$

2025-04-04

Il 30% di una popolazione effettua la vaccinazione anti-influenzale. Le statistiche mostrano che solo il 20% dei vaccinati contrae l'influenza nel corso dell'inverno, contro il 50% dei non vaccinati.

a) **Qual è la probabilità che un individuo abbia contratto l'influenza?**

$$P(I) = 20\% \cdot P(V) + 50\%\left(1 - P(V)\right) = 0.2 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.5 = 0.41$$

b) **Se un individuo ha contratto l'influenza, qual è la probabilità che si fosse vaccinato?**

$$P(V|I) = \frac{P(V \cap I)}{P(I)} = \frac{20\% \cdot P(V)}{P(I)} = 0.29$$

c) **Se un individuo ha contratto l'influenza, qual è invece la probabilità che non si fosse vaccinato?**

$$P(\bar{V}|I) = \frac{P(\bar{V} \cap I)}{P(I)} = \frac{50\% \, (1 - P(V))}{P(I)} = 0.85$$

2025-02-10

Siano dati due dadi non truccati: il dado A ha 4 facce rosse e 2 facce nere, mentre il dado B ha 2 facce rosse e 4 facce nere. Si scelga in modo casuale un dado da lanciare. Si definiscano gli eventi:

$$R_1 = \{Al\ primo\ lancio\ esce\ una\ faccia\ rossa\}$$

$$R_2 = \{Al\ secondo\ lancio\ esce\ una\ faccia\ rossa\}$$

a) **Calcolare $P(R_1)$ e $P(R_2)$**
Si assume che al secondo lancio si possa riutilizzare il dado scelto al primo (questo rende i due eventi indipendenti).

$$P(R_1) \equiv P(R_2) = P(A)P(R_A) + P(B)P(R_B) = \frac{1}{2}\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

b) **Calcolare $P(R_1 \cap R_2)$**

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2) = \frac{1}{4}$$

c) **Verificare se gli eventi R_1 e R_2 sono indipendenti.**

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2)$$

Quindi i due eventi sono indipendenti.

2025-01-23

Si consideri il circuito elettrico in Figura 1. Gli interruttori sono comandati in modo indipendente e hanno uguali probabilità di essere aperti o chiusi.

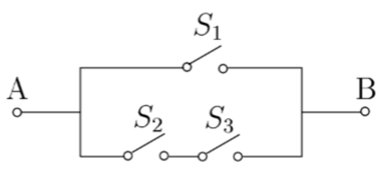


Figura 1: Circuito elettrico.

$$P(S_1) = P(S_2) = P(S_3) = \frac{1}{2}$$

a) **Calcolare la probabilità che esista un percorso chiuso tra A e B.**

$$P(almeno\ un\ percorso) = P(S_1) \cup P(S_{23}) = P(S_1) + P(S_{23}) - \big(P(S_1) \cap P(S_{23})\big)$$

$$P(S_{23}) = P(S_2)P(S_3)$$

$$P(almeno\ un\ percorso) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

b) **Calcolare la probabilità che esista un percorso chiuso tra A e B sapendo che l'interruttore S_1 è bloccato nello stato aperto.**

$$P(percorso\ giu) = P(S_2) \cap P(S_3) = P(S_2)P(S_3) = \frac{1}{4}$$

2025-01-07

Un esperimento aleatorio consiste nel lanciare 5 volte una coppia di dadi non truccati, osservando ad ogni lancio la somma dei punteggi sui due dadi.

a) **Calcolare la probabilità che il 7 si presenti al più una volta**

$$P(7\ al\ più\ una\ volta) = P(7\ non\ si\ presenta\ mai) + P(7\ si\ presenta\ una\ sola\ volta)$$

$$P(7\ non\ si\ presenta\ mai) = P(\bar{7})^5$$

$$P(7\ si\ presenta\ una\ sola\ volta) = \binom{5}{1} P(7)\, P(\bar{7})^4$$

$$P(\bar{7}) = 1 - P(7)$$

$$P(7) = \frac{|\{(1{,}6), (2{,}5), (3{,}4), (4{,}3), (5{,}2), (6{,}1)\}|}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(7\ al\ più\ una\ volta) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{5}{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \frac{5!}{4!\,1!}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \frac{5}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$P(7\ al\ più\ una\ volta) = 2\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.8$$

b) Calcolare la probabilità che il 12 si presenti due volte.

$$P(12\ si\ presenta\ 2\ volte) = \binom{5}{2} P(12)^2\, P(\overline{12})^3$$

$$P(12) = \frac{|\{(6,6)\}|}{36} = \frac{1}{36}$$

$$P(12\ si\ presenta\ 2\ volte) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{36}\right)^2\left(\frac{35}{36}\right)^3 = \frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{1}{36}\right)^2\left(\frac{35}{36}\right)^3 = 10\left(\frac{1}{36}\right)^2\left(\frac{35}{36}\right)^3 = 7.1\cdot 10^{-3}$$

Esercizio 2

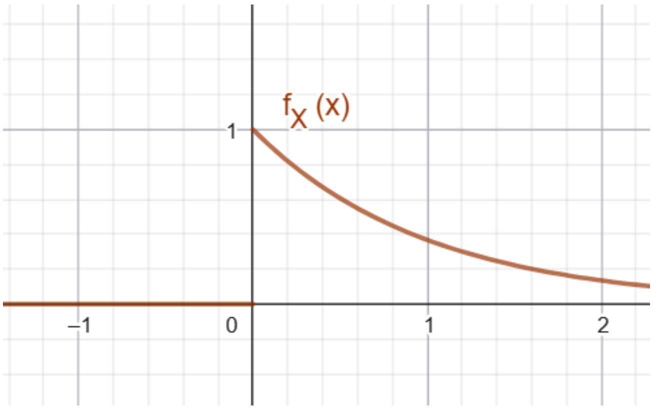
2025-06-25

Sia data la variabile aleatoria (v.a.) X con $f_X(x) = k\, e^{-x}\, u(x)$. La v.a. Y si ottiene applicando la seguente trasformazione $Y = g(X)$.

$$Y = \begin{cases} 1 - X, & X < 1 \\ 0, & X \geq 1 \end{cases}$$

a) Determinare la costante k in modo tale che $f_X(x)$ sia una densità di probabilità e disegnare $f_X(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$
$$k\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = 1$$
$$k\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = 1$$
$$k\frac{0-1}{-1} = 1$$
$$k = 1$$



b) Determinare quali valori può assumere la v.a. Y.

X può assumere ogni valore reale non negativo, di conseguenza Y può assumere valori nell'intervallo $[0, 1]$.

$$X \geq 0 \Rightarrow X \in [0, +\infty)$$
$$X \in [0,1) \cup [1, +\infty)$$
$$Y \in (0,1] \cup \{0\} \equiv [0,1]$$

c) Determinare se Y è una v.a. continua, discreta o mista.

È mista in quanto ha una componente continua e una parte costante ($Y = 0$).

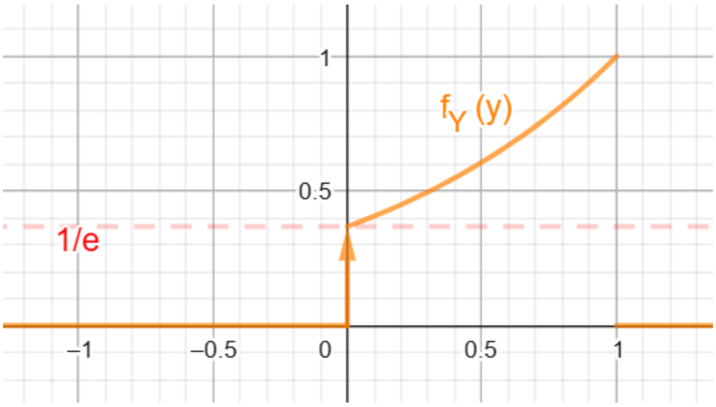
d) Calcolare la funzione distribuzione di probabilità di Y e disegnarla.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \left.\dfrac{e^{-x}}{|-1|}\right|_{x=1-y} & 0 < y \leq 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{y-1} & 0 < y \leq 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

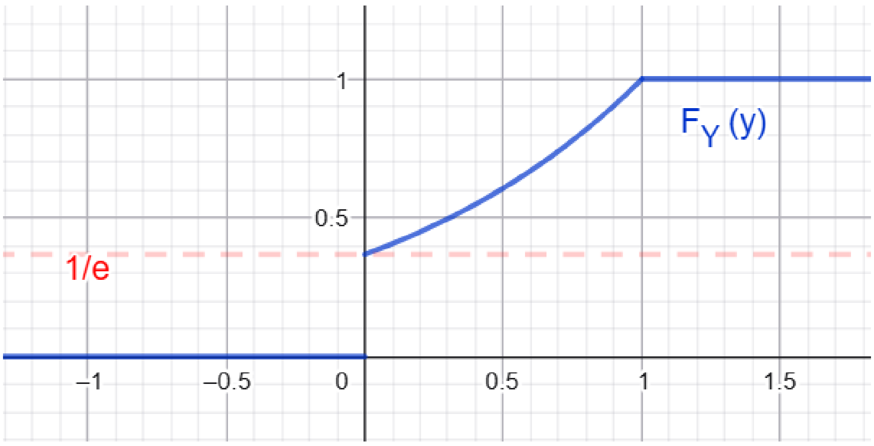
Per disegnarla serve calcolare $P(Y = 0) = P(X > 1)$ che sarà l'ampiezza del delta di dirac in $Y = 0$.

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F_X(1) = 1 - \int_0^1 e^{-x}dx = 1 - \frac{e^{-1} - 1}{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$



$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ P(Y=0) = \frac{1}{e} & y = 0 \\ \frac{1}{e} + e^{y-1} - \frac{1}{e} & 0 < y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ e^{y-1} & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$



2025-06-05

Si consideri la variabile aleatoria X con una densità di probabilità del tipo:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^2+1}, x \geq 0 \\ 0 \quad altrove \end{cases}$$

a) Determinare la costante k in modo tale che $f_X(x)$ sia una densità di probabilità e disegnare $f_X(x)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{k}{x^2+1}dx = 1$$

$$k\,(\tan^{-1}\infty - \tan^{1} 0) = 1$$

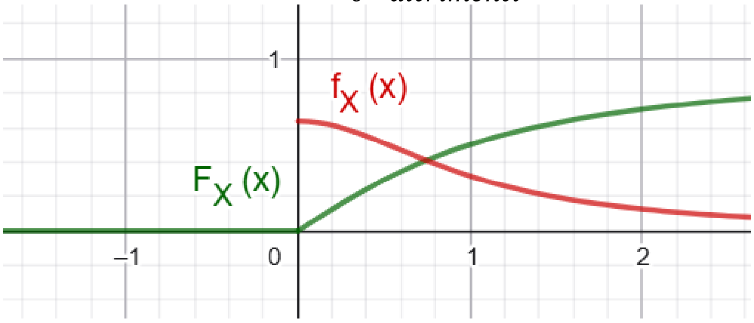
$$k\frac{\pi}{2} = 1$$

$$k = \frac{2}{\pi}$$

b) Calcolare e disegnare la funzione distribuzione di probabilità $F_X(x)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\tan^{-1} x\,, & x \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$



c) **Determinare il punto $\tilde{x}$ tale che $P(X > \tilde{x}) = \frac{1}{2}$**

$$P(X > \tilde{x}) = 1 - P(X \leq \tilde{x}) \equiv P(X \leq \tilde{x}) = \frac{1}{2}$$

$$P(X \leq \tilde{x}) = F_X(\tilde{x})$$

$$\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\tilde{x} = \frac{1}{2}$$

$$\tan^{-1}\tilde{x} = \frac{\pi}{4}$$

$$\tilde{x} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

2025-04-04

Si consideri la variabile aleatoria continua X che può assumere valori nell'intervallo $[-k, k]$, con $k > 0$.

La sua densità di probabilità è del tipo $f_X(x) = \left|\frac{x}{4}\right|$.

a) **Determinare il valore di k in modo tale che $f_X(x)$ sia effettivamente una funzione di densità di probabilità.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

$$\int_{-k}^{k} \left|\frac{x}{4}\right| dx = 1$$

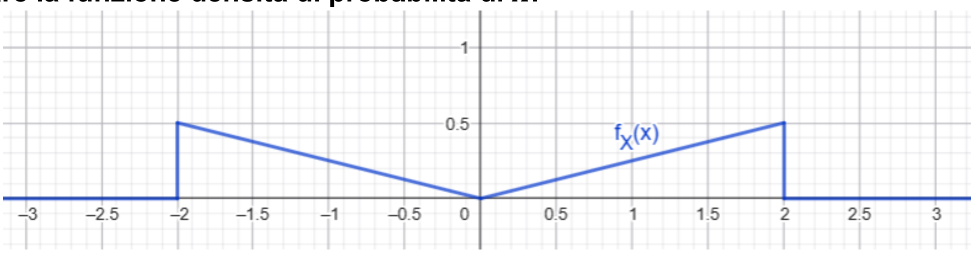
$$\frac{2}{4}\int_{0}^{k} x\, dx = 1$$

$$\frac{1}{4}x^2\big|_0^k = 1$$

$$k^2 = 4$$

$$k = 2$$

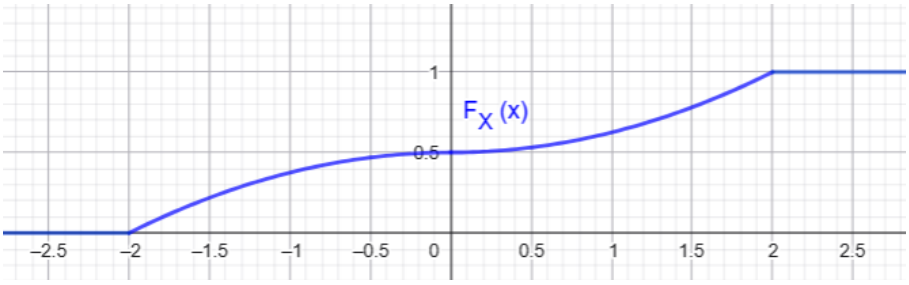
b) **Disegnare la funzione densità di probabilità di X.**



c) **Calcolare e disegnare la funzione distribuzione di probabilità di X.**

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \left|\frac{t}{4}\right| rect\left(\frac{t}{4}\right) dt$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \dfrac{4-x^2}{8} & -2 \le x < 0 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2}{8} & 0 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$



d) Calcolare il valore medio e la varianza di X.

$$\eta_X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x) dx = 0$$

Il valore medio è nullo perché $f_X(x)$ è pari.

$$\sigma_X^2 = E\{X^2\} - \eta_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_X(x) dx$$

$$\sigma_X^2 = 2\int_0^2 x^2\, \frac{x}{4} dx$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 x^3 dx$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\bigg|_0^2 = \frac{16-0}{8} = 2$$

2025-02-10

Sia data la variabile aleatoria X con densità di probabilità $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Si consideri poi la variabile aleatoria Y ottenuta da X con la trasformazione $Y = rect\left(\frac{X}{4}\right)$.

N.B: $\int_0^{\infty} x^n\, e^{-x} dx = n!$

a) Calcolare il valor medio e la varianza di X

$$\eta_X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\, \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = 0$$

$$\sigma_X^2 = E\{X^2\} - \eta_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_X(x) dx$$

$$\sigma_X^2 = E\{X^2\} - \eta_X^2 = 2\frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^2\, e^{-x} dx = 2! = 2$$

b) Calcolare $F_Y(y)$ oppure $p_Y(y)$ oppure $f_Y(y)$ e disegnarla

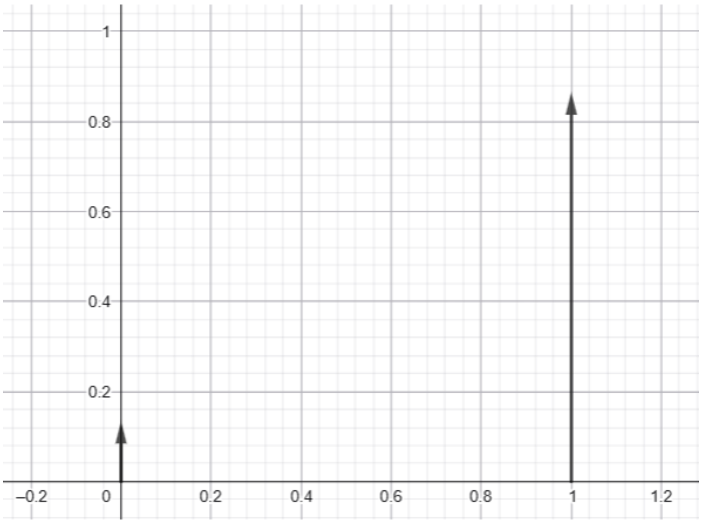
Poiché Y può assumere due soli valori (0 ed 1), sarà discreta.
Calcoliamo le probabilità di questi due valori

$$P(Y=1) \equiv p_Y(1) = P(-2 \le X \le 2) = F_X(2) - F_X(-2) = 2\, F_X(2) \approx 0.865$$
$$P(Y=0) \equiv p_Y(0) = P(X < -2) + P(X > 2) = 1 - P(Y=1) \approx 0.135$$

- $F_Y(y)$
  Y è discreta, quindi

$$F_Y(y) = \sum_{y_i \in \{0,1\}} p_Y(y_i)\, u(y - y_i) = p_Y(0)\, u(y) + p_Y(1)\, u(y-1) = \begin{cases} 1 & y \ge 1 \\ 0.135 & 0 \le y < 1 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

- $p_Y(y) = \begin{cases} 0.865 & y = 1 \\ 0.135 & y = 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$
- $f_Y(y) = 0.865\ \delta(y-1) + 0.135\, \delta(y)$



c) Calcolare il valor medio e la varianza di Y.

$$\eta_Y = \sum_{y_i \in \{0,1} y_i p_Y(y_i) = p_Y(1) \approx 0.865$$

$$\sigma_Y^2 = E\{Y^2\} - \eta_Y^2 = \sum_{y_i \in \{0,1} y_i^2 p_Y(y_i) = p_Y(1) - \eta_Y^2 \approx 0.117$$

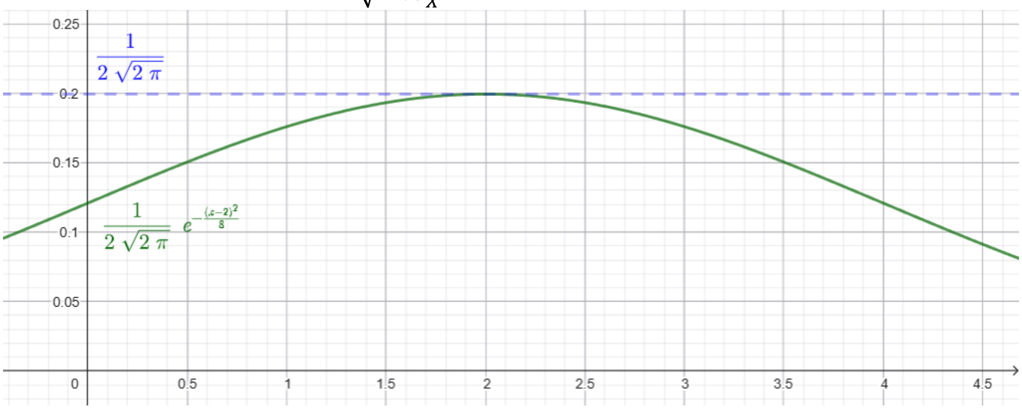
2025-01-23

Sia data la variabile aleatoria X Gaussiana di media $\eta_X = 2$ e varianza $\sigma_X^2 = 4$. Si consideri la trasformazione di v.a. $Y = g(X) = 3\, sgn(X) = \begin{cases} +3\ se\ X \geq 0 \\ -3\ se\ X < 0 \end{cases}$

a) Esprimere in forma analitica la d.d.p. $f_X(x)$ e disegnarla.

La d.d.p. è quella di una v.a. gaussiana

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-\eta_X)^2}{2\sigma_X^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}$$



b) Calcolare la d.d.p. $f_Y(y)$ e disegnarla.

Si vede subito che Y può assumere solo due valori, per come è definita la $g(X)$. Sarà per questo una v.a. **discreta**. In questo caso ci sarà più comodo calcolare $f_Y(3)$ e $f_Y(-3)$ direttamente, senza ricavare la forma analitica di $f_Y(y)$

Per una v.a. gaussiana

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \eta_X}{\sigma}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\frac{x-\eta_X}{\sigma}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\, d\alpha$$

$$P(Y = 3) = P(X \geq 0) = 1 - F_X(0) = 1 - \Phi\left(\frac{0 - 2}{2}\right) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) \approx 0.842$$

$$P(Y = -3) = P(X < 0) = F_X(0) = \Phi(-1) \approx 0.158$$

c) **Indicare se la v.a. Y è continua, discreta o mista, giustificando brevemente la risposta.**
La v.a. è DISCRETA in quanto assume solo due valori distinti.

d) **Calcolare il valor medio di Y.**
Per calcolare η_Y,essendo una v.a. discreta, conviene usare l'operatore aspettazione.

$$\eta_Y = E\{Y\} = \sum_i y_i P(Y = y_i) = 3\,P(Y = 3) - 3\,P(Y = -3)$$

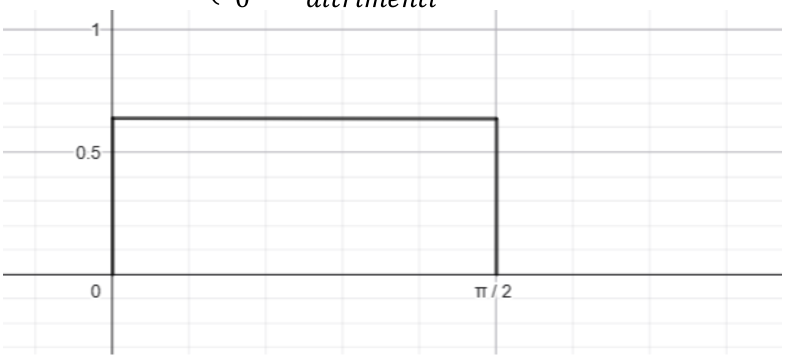
$$\eta_Y = 3\Phi(1) - 3\Phi(-1) \approx 2.052$$

2025-01-07

Sia data la variabile aleatoria X uniformemente distribuita nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Si consideri la trasformazione di v.a. $Y = \tan(X)$.

a) **Descrivere l'andamento e disegnare $f_X(x)$**
Essendo $X \in \mathcal{U}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} & se\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & altrimenti \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} & se\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

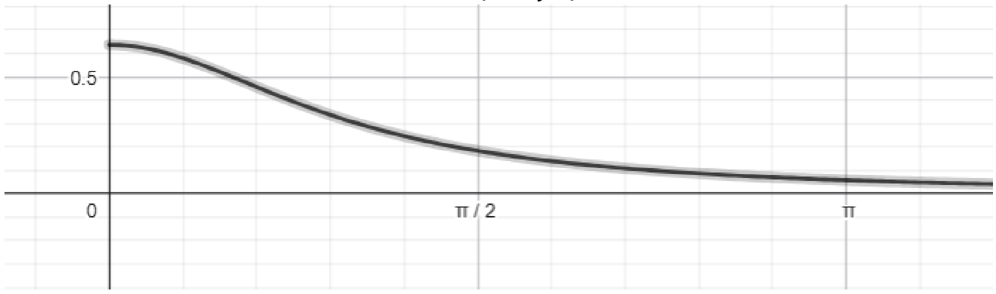


b) **Calcolare e disegnare $f_Y(y)$**

$$f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x)}{|g'(x)|}\right|_{x=g^{-1}(y)} = \left.\frac{\frac{2}{\pi} rect\left(\frac{x - \pi/4}{\pi/4}\right)}{|1 + \tan^2 x|}\right|_{x=\tan^{-1} y} = \frac{2}{\pi|1 + y^2|} rect\left(\frac{\tan^{-1} y - \pi/4}{\pi/4}\right)$$

Si faccia attenzione al fatto che $\tan^{-1} y \leq \frac{\pi}{2}$ sempre

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi|1+y^2|}u(y)$$



Esercizio 3

2026-01-09

Sia $X(t) = W(t) + 3$, dove $W(t)$ è un processo di rumore bianco sulla banda f_W a media nulla e potenza σ^2. Il processo $X(t)$ attraversa il filtro passa-banda con risposta in frequenza

$$H(f) = \begin{cases} 1 & f_W - B \le f \le f_W \\ 1 & -f_W \le f \le -f_W + B \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Ottenendo il processo $Y(t)$.

a) Calcolare il valore medio e l'autocorrelazione di $X(t)$.

$$\eta_X = E\{X(t)\} = E\{W(t) + 3\} = E\{W(t)\} + 3 = 3$$
$$R_X(\tau) = E\{X(t)\, X(t+\tau)\}$$
$$R_X(\tau) = E\{W(t)W(t+\tau) + 3W(t) + 3W(t+\tau) + 9\}$$
$$R_X(\tau) = R_W(\tau) + 6\eta_W + 9 = R_W(\tau) + 9$$
$$S_W(f) = A\, rect\left(\frac{f}{2f_W}\right)$$
$$P_W = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_W(f)df = 2Af_W$$
$$A = \frac{\sigma^2}{2f_W}$$
$$S_W(f) = \frac{\sigma^2}{2f_W}\, rect\left(\frac{f}{2f_W}\right)$$
$$R_W(\tau) \rightleftharpoons S_W(f)$$
$$R_W(\tau) = \sigma^2\, sinc\,(2f_W\tau)$$
$$R_X(\tau) = \sigma^2\, sinc\,(2f_W\tau) + 9$$

b) Calcolare la densità spettrale di $X(t)$.

$$S_X(f) = \frac{\sigma^2}{2f_W}\, rect\left(\frac{f}{2f_W}\right) + 9\delta(f)$$

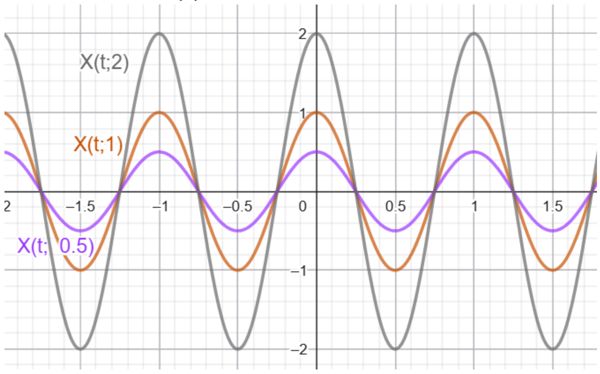
c) Calcolare la potenza di $Y(t)$.

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)|H(f)|^2 df$$
$$P_Y = 2\int_{0}^{\infty} S_X(f)|H(f)|^2 df$$
$$P_Y = 2\frac{\sigma^2}{2f_W}B = \frac{B}{f_W}\sigma^2 = \frac{B}{f_W}P_W$$

2025-06-25

Sia dato il processo aleatorio parametrico $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$, con f_0 costante reale positiva e A variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e 2.

a) Disegnare alcune realizzazioni di $X(t)$



Ecco alcune realizzazioni con $f_0 = 1$

b) Calcolare η_X e P_X

$$\eta_X(t) = E\{X(t)\} = E\{A\, cos(2\pi f_0 t)\} = E\{A\}\cos(2\pi f_0 t) = cos(2\pi f_0 t)$$

$$P_X(t) = E\{X^2(t)\} = E\{A^2\}\cos^2(2\pi f_0 t)$$

$$E\{A^2\} = \frac{1}{2}\int_0^2 a^2 da = \frac{8-0}{6} = \frac{4}{3}$$

$$P_X(t) = \frac{4}{3}\cos^2(2\pi f_0 t)$$

c) Verificare se $X(t)$ è un processo aleatorio almeno in senso lato.

Poiché η_X è una funzione del tempo e non costante, il processo NON è SSL.

$$\eta_X(t) \not\equiv \eta_X \Rightarrow X(t) \notin SSL$$

2025-06-05

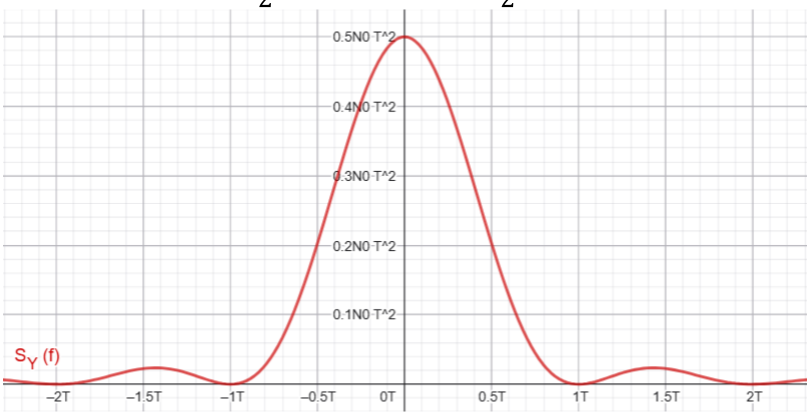
Un processo stazionario Gaussiano bianco $X(t)$ con densità spettrale di potenza $S_X(f) = \frac{N_0}{2}$ passa attraverso un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$. Sia $Y(t)$ il processo in uscita.

N.B: $\int_{-\infty}^{\infty} sinc^2(x)dx = 1$

a) Calcolare e disegnare la densità spettrale di potenza di $Y(t)$

$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2$$

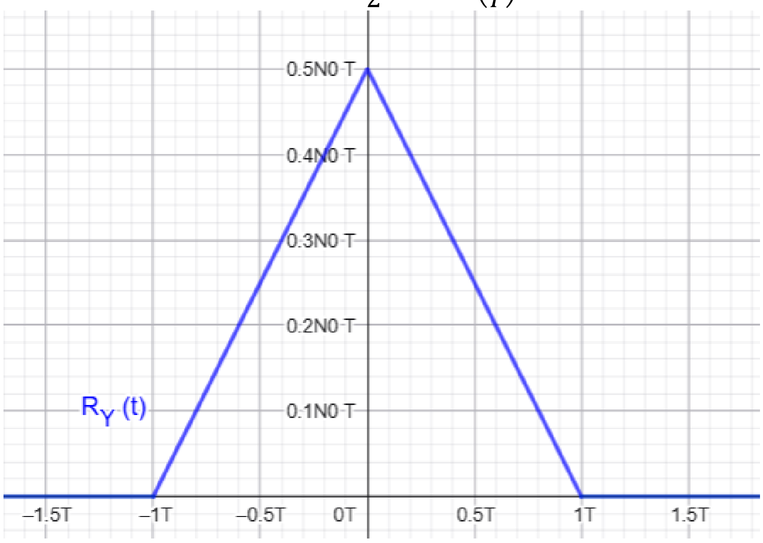
$$S_Y(f) = \frac{N_0}{2}|Tsinc(fT)|^2 = \frac{N_0 T^2}{2} sinc^2(fT)$$



b) Calcolare e disegnare l'autocorrelazione di $Y(t)$

$$R_Y(\tau) \rightleftharpoons S_Y(f) = \frac{N_0 T}{2} \cdot Tsinc^2(fT)$$

$$R_Y(\tau) = \frac{N_0 T}{2} triag\left(\frac{t}{T}\right)$$



c) **Determinare la potenza media di $Y(t)$**

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)df = \frac{N_0 T^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} sinc^2(fT)df$$
$$f' = Tf$$
$$df = \frac{1}{T} df'$$
$$P_Y = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} sinc^2(f')df' = \frac{N_0}{2}$$

d) **$Y(t)$ viene campionato agli istanti $t = nT_c$, $n \in \mathbb{Z}$. Determinare il valore minimo di T_c affinché i campioni $Y(nT_c)$ siano tra loro indipendenti.**

Attenzione: non si può affermare subito che

$$indipendenza \Leftrightarrow correlazione\ nulla$$

Ciò vale solo per i processi gaussiani, bisogna specificare che $Y(t)$ lo è. Ciò si può fare semplicemente scrivendo che $X(t)$ lo è per ipotesi, e il filtro LTI non perde questa proprietà.

Adesso possiamo lavorare sulla correlazione dei vari campioni.

$$R_Y(nT_c) = 0$$
$$T_c > T$$

2025-04-04

Un processo stocastico $X(t)$ stazionario almeno in senso lato, con autocovarianza $C_X(\tau) = 10\, sinc^2(10\, \tau)$ e media nulla, viene posto in ingresso a un sistema lineare tempo invariante avente risposta impulsiva $h(t) = 4\, sinc(2t) \cos(18\pi t)$.Sia $Y(t)$ il processo in uscita.

a) **Calcolare e disegnare la densità spettrale di potenza di X(t).**

$$R_X(\tau) \rightleftharpoons S_X(f)$$
$$C_X(\tau) = R_X(\tau) - \eta_X^2 = R_X(\tau)$$
$$S_X(f) = triag\left(\frac{f}{10}\right)$$

b) **Calcolare il valor medio di $Y(t)$**

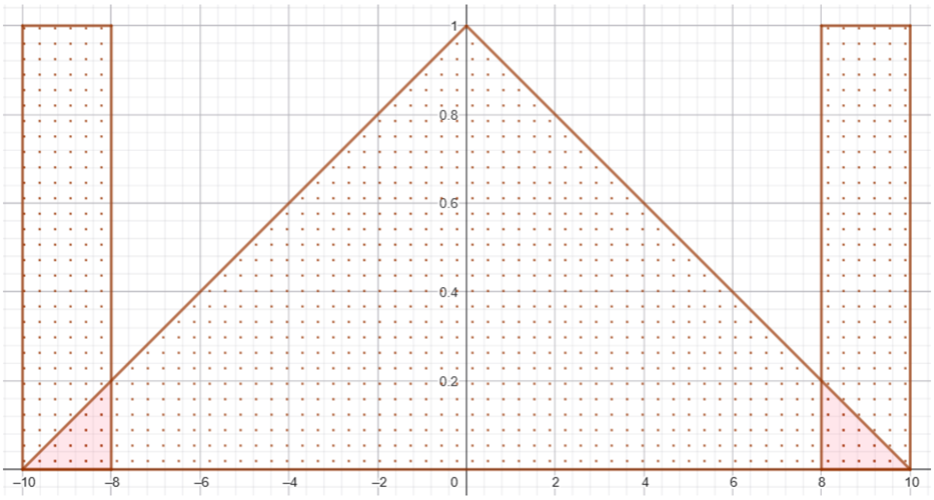
$$\eta_Y(t) = \eta_X(t) * h(t)$$

Poiché $X(t)$ è stazionario almeno in senso lato e il filtro è LTI

$$\eta_Y = \eta_X H(0)$$
$$H(f) = rect\left(\frac{f-9}{2}\right) + rect\left(\frac{f+9}{2}\right)$$
$$H(0) = 0 \Rightarrow \eta_Y = 0$$

c) **Calcolare la potenza di $Y(t)$.**

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)df$$
$$S_Y(f) = S_X(f)\,|H(f)|^2$$
$$S_Y(f) = triag\left(\frac{f}{10}\right) rect\left(\frac{f-9}{2}\right) + triag\left(\frac{f}{10}\right) rect\left(\frac{f+9}{2}\right)$$



L’integrale può essere risolto graficamente

$$P_Y = 2\int_{8}^{10} triag\left(\frac{f}{10}\right) df = \frac{2 \cdot 0.2}{2} = 0.2\,W$$

2025-02-10

Sia dato il processo aleatorio $X(t)$ stazionario almeno in senso lato con valor medio nullo e densità spettrale di potenza riportata in Figura 1. $X(t)$ entra in un filtro con risposta in frequenza $H(f)$ riportata in Figura 2. Sia $Y(t)$ il processo in uscita.

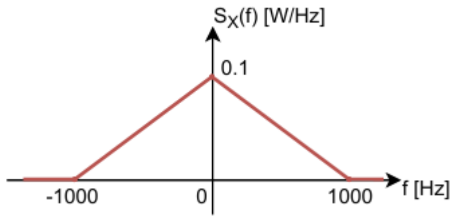


Figura 1: Densità spettrale di potenza di $X(t)$.

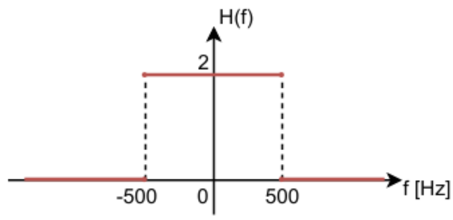


Figura 2: Risposta in frequenza del filtro H(f).

a) Calcolare l’autocorrelazione di $X(t)$.

$$R_X(\tau) \rightleftharpoons S_X(f) = 0.1\frac{W}{Hz}\, triag\left(\frac{f}{1000\,Hz}\right)$$

$$R_X(\tau) = 0.1\frac{W}{Hz} \cdot 1000\,Hz \cdot sinc^2(1000\,Hz \cdot \tau) = 100\, sinc^2(1000\,\tau)$$

b) Determinare l’intervallo di campionamento minimo T_c affinché i campioni ottenuti $X(nT_c), n \in \mathbb{Z}$ siano incorrelati.

$$R_x(nT_c) = 0$$

Una $sinc$ è nulla quando $t = nT$, con $T = \frac{1}{1000\,Hz} = 1\,ms$ in questo caso. $T_c = kT, k \in \mathbb{N}$ verifica questa relazione. T_c può essere quindi un qualunque multiplo naturale di $T = 1\,ms$.

c) Calcolare la potenza di $y(t)$.

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\,|H(f)|^2\,df = 4\int_{-500\,Hz}^{500\,Hz} S_X(f)df$$

$$P_Y = 0.4\int_{-500\,Hz}^{500\,Hz} triag\left(\frac{f}{1000\,Hz}\right)df = 0.8\int_{0}^{500\,Hz} triag\left(\frac{f}{1000\,Hz}\right)df$$

Che risulterà in un trapezio, quindi

$$P_Y = 0.8\frac{W}{Hz}\,\frac{(1+0.5)}{2}\,500\,Hz = 300\,W$$

2025-01-23

Sia dato il processo aleatorio $X(t)$ stazionario in senso lato con funzione di autocorrelazione $R_X(\tau) = \delta(\tau) + 2$.

$X(t)$ viene posto in ingresso ad un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t) = 10\, sinc(10t)$. Sia $Y(t)$ il processo aleatorio in uscita.

N.B.: $f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)\,\delta(t-t_0)$

a) **Calcolare la potenza di $X(t)$.**
La potenza non è altro che l'integrale della densità spettrale di potenza.

$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)df$$

La densità spettrale di potenza si può trovare dall'autocorrelazione, in quanto vale

$$R_X(\tau) \rightleftharpoons S_X(f)$$

In questo caso si può ottenere P_X anche senza esplicitare $S_X(f)$, sebbene sarebbe veloce anche in quel modo.

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, e^{2\pi j\tau f} df$$

Si noti come l'espressione di $R_X(\tau)$ coincida proprio con la potenza nel caso $\tau = 0$

$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, df = R_X(0) = +\infty$$

Se si fosse voluto passare dalla $S_X(f)$

$$S_X(f) = TCF[\delta(t)] + 2\,TCF[1] = 1 + 2\delta(f)$$

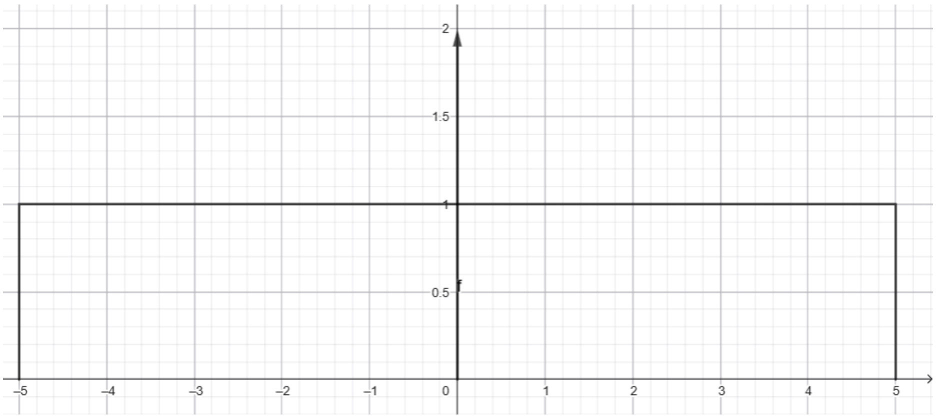
E naturalmente l'integrale di questa funzione è $+\infty$.

b) **Calcolare la densità spettrale di potenza di $Y(t)$ e disegnarla.**

$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2$$

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{10}\right);\ |H(f)|^2 = rect^2\left(\frac{f}{10}\right) \equiv H(f)$$

$$S_Y(f) = rect\left(\frac{f}{10}\right) + 2\delta(f)$$



c) **Calcolare la potenza di $Y(t)$**

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)df = \int_{-5}^{5} \big(1 + 2\delta(f)\big)df = \int_{-5}^{5} df + 2\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f)df = 10 + 2 = 12$$

2025-01-07

Sia dato il processo aleatorio $X(t)$ stazionario almeno in senso lato con valor medio nullo e densità spettrale di potenza come in Fig. 1. $X(t)$ entra in un filtro passa-basso ideale con guadagno unitario e frequenza di taglio $f_0 = 2500\ Hz$. Sia $Y(t)$ il processo in uscita.

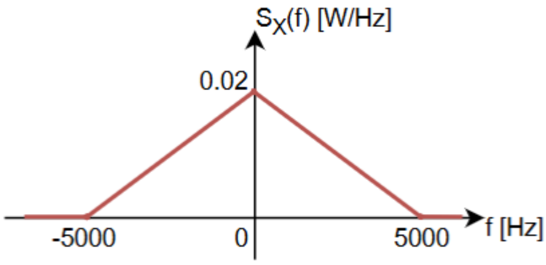


Figura 1: Densità spettrale di potenza di $X(t)$.

a) Calcolare la varianza di $X(t)$

$$\sigma_X^2 = E\{X^2\} - \eta_x^2 = P_X - \eta_x^2$$

Dal grafico di $S_X(f)$ si deduce che $\eta_x = 0$

$$\sigma_X^2 = P_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)df = \frac{10\,000\,Hz \cdot 0.02\ {W}/{Hz}}{2} = 100\,W = 100$$

b) Determinare l'intervallo di campionamento T_c minimo affinché i campioni $x(nT_c), n \in \mathbb{Z}$, ottenuti campionando $X(t)$ ad intervalli T_c, siano incorrelati.

Imponiamo che la correlazione dei campioni sia nulla

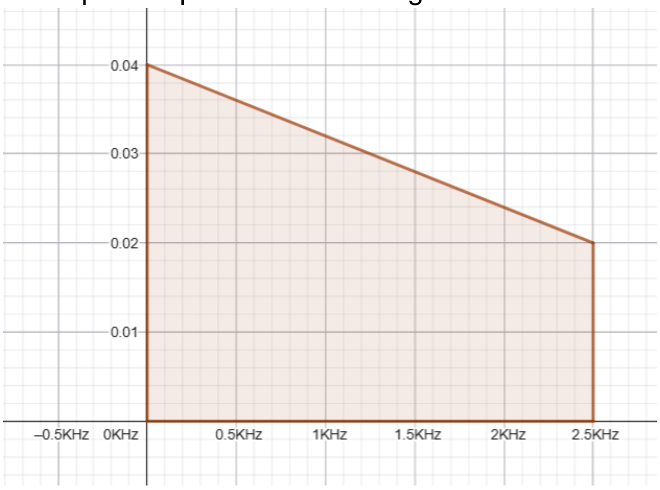
$$R_x(nT_c) = 0$$
$$R_X(\tau) \rightleftharpoons S_X(f)$$
$$R_X(\tau) = 0.02 \cdot 5000\, sinc^2(5000\,\tau) = 100\, sinc^2(5000\,\tau)$$
$$R_X(nT_c) = 0 \Rightarrow sinc(nT_c) = 0$$

Una $sinc$ è nulla quando $t = nT$, con $T = \frac{1}{5000}$ in questo caso. $T_c = kT, k \in \mathbb{N}$ verifica questa relazione. T_c può essere quindi un qualunque multiplo naturale di $T = \frac{1}{5000}$

c) Calcolare la potenza di $Y(t)$.

$$H(f) = rect\left(\frac{f}{f_0}\right) = rect\left(\frac{f}{2500\,Hz}\right) \equiv |H(f)|^2$$
$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2$$
$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)df = \int_{-f_0}^{f_0} S_X(f)df = 0.02\int_{-f_0}^{f_0} triag\left(\frac{f}{5000\,Hz}\right)df = 0.04\int_{0}^{f_0} triag\left(\frac{f}{5000\,Hz}\right)df$$

L'integrale risulterà in un trapezio e può essere risolto graficamente.



$$P_Y = \frac{0.04 + 0.02}{2}2500\,W = 75\,W$$

Esercizi 4 e 5

2026-01-28 (5)

Si consideri il segnale

$$x(t) = Re\left\{\frac{2\pi j\frac{t}{T}}{1+2\pi j\frac{t}{T}}\right\}$$

Con $T = 1\ \mu s$

N.B: $Re\{z(t)\} = \frac{1}{2}z(t) + \frac{1}{2}[z(t)]^*$

a) Calcolare la trasformata di Fourier del segnale e disegnarle lo spettro d'ampiezza.

$$x(t) = Re\left\{\frac{1+2\pi j\frac{t}{T}-1}{1+2\pi j\frac{t}{T}}\right\} = Re\left\{1-\frac{1}{1+2\pi j\frac{t}{T}}\right\}$$

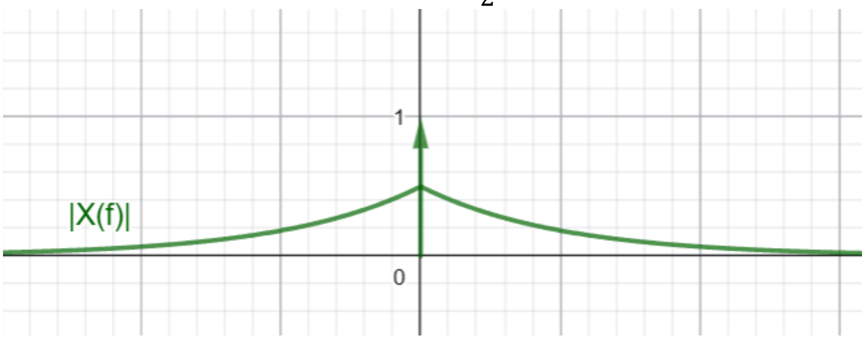
$$x(t) = 1 - Re\left\{\frac{1}{1+2\pi j\frac{t}{T}}\right\} = 1 - Re\{z(t)\}$$

$$x(t) = 1 - \frac{z(t)}{2} - \frac{[z(t)]^*}{2}$$

$$X(f) = \delta(f) - \frac{Z(f)}{2} - \frac{Z^*(-f)}{2}$$

$$Z(f) = Te^{-fT}u(f) \rightleftharpoons T\frac{1}{T+2\pi jt}$$

$$X(f) = \delta(f) - \frac{T}{2}e^{-|f|T}$$



(il disegno sopra riportato non è in scala).

b) Calcolare l'energia del segnale

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2df$$

$$|X(f)|^2 = \delta^2(f) + \frac{T^2}{4}e^{-2|f|T} + T\,\delta(f)\,e^{-2|f|T}$$

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty}\delta^2(f)df + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{T^2}{4}e^{-2|f|T}df + \int_{-\infty}^{\infty}T\,\delta(f)\,e^{-2|f|T}df$$

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty}\delta^2(f)df + \frac{T^2}{2}\int_{0}^{\infty}e^{-2fT}df + T$$

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty}\delta^2(f)df + \frac{T^2}{2}\,\frac{0-1}{-2T} + T$$

$$E_X = \frac{5}{4}T + \int_{-\infty}^{\infty}\delta^2(f)df$$

Il termine $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^2(f)df$ non è però integrabile, il che risulta in un'energia infinita. Ciò si poteva dedurre dal fatto che il segnale è ottenuto dalla *sottrazione* tra un segnale a energia infinita: la costante 1, e un segnale a energia finita: $Re\left\{\frac{1}{1+2\pi j\frac{t}{T}}\right\}$.

$$E_X = \infty$$

2026-01-09 (5)

Si consideri il segnale

$$x(t) = Re\left\{\frac{1}{1 + 2\pi j\frac{t}{T}}\right\}$$

Con $T = 10\ \mu s$

N.B: $Re\{z(t)\} = \frac{1}{2}z(t) + \frac{1}{2}[z(t)]^*$

a) Calcolare l'energia del segnale

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Come trovare $X(f)$?

$$x(t) = Re\left\{\frac{T}{T + 2\pi jt}\right\} = Re\{z(t)\}$$

$$x(t) = \frac{z(t) + z^*(t)}{2}$$

$$X(f) = \frac{Z(f) + Z^*(-f)}{2}$$

$$Z(f) = Te^{-fT}u(f) \rightleftharpoons T\frac{1}{T + 2\pi jt}$$

$$X(f) = \frac{T}{2}e^{-fT}u(f) + \frac{T}{2}e^{fT}u(-f)$$

$$X(f) = \frac{T}{2}e^{-|f|T}$$

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T^2}{4}e^{-2|f|T}df$$

$$E_X = \frac{T^2}{2}\int_0^{\infty} e^{-2fT}df$$

$$E_X = \frac{T^2}{2}\frac{e^{-2fT}}{-2T}\Bigg|_{f=0}^{f=+\infty}$$

$$E_X = -\frac{T}{4}\ (0 - 1) = \frac{T}{4} = 2.5 \times 10^{-6} W$$

Se non avessimo voluto trovare $X(f)$?

$$x(t) = Re\left\{\frac{T}{T + 2\pi jt}\frac{T - 2\pi jt}{T - 2\pi jt}\right\}$$

$$x(t) = T\ Re\left\{\frac{T - 2\pi jt}{T^2 + 4\pi^2 t^2}\right\} = \frac{T^2}{T^2 + 4\pi^2 t^2}$$

$$|x(t)| \equiv x(t)$$

$$|x(t)| = \frac{1}{1 + \left(2\pi\ {}^{t}/_{T}\right)^2}$$

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left[1 + \left(2\pi\ {}^{t}/_{T}\right)^2\right]^2} dt$$

$$E_X = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\left[1+\left(2\pi\, {}^{t}/_{T}\right)^2\right]^2} dt$$

$$\alpha = 2\pi\, {}^{t}/_{T}$$

$$dt = \frac{T}{2\pi} d\alpha$$

$$E_X = \frac{T}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha^2)^2} d\alpha$$

L'integrale definito $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ è noto (è molto consigliato sapere il risultato a memoria invece di doverlo risolvere durante l'esame), ed assume valore $\frac{\pi}{4}$

$$E_X = \frac{T}{\pi}\frac{\pi}{4} = \frac{T}{4}$$

b) Calcolare la frequenza di campionamento per $\boldsymbol{y(t) = x(t) * sinc(2Bt), B = 15\ MHz}$

$$Y(f) = \frac{1}{2B} X(f)\, rect\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Poiché $X(f)$ ha banda infinita, $Y(f)$ avrà banda B.

$$\frac{1}{T_c} \geq 2B_Y = 2B = 30\ MHz$$

$$T_c = 0.033\ \mu s = 33\ ns$$

2025-11-18 (4)

Enunciare e dimostrare il teorema del campionamento.

Enunciato:

Sia $x(t)$ un segnale limitato in banda B.

Campionandolo a frequenza $\frac{1}{T_c} \geq 2B$, impiegando un interpolatore CARDINALE, è possibile ricostruire il segnale senza perdita d'informazione.

Dimostrazione:

Un interpolatore cardinale *ideale* è del tipo

$$P(t) = sinc\left(\frac{t}{T_c}\right) \rightleftharpoons P(f) = T_c\, rect(fT_c)$$

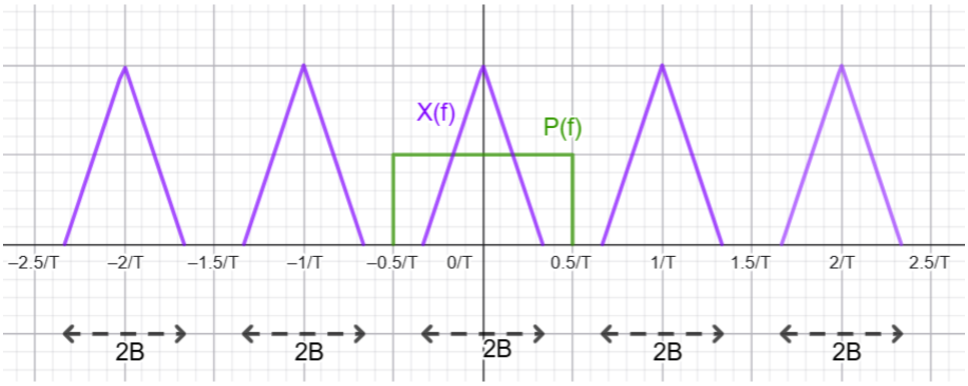
Quindi

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{T_c}\sum_n x(nT)\, sinc\left(\frac{t-nT_c}{T_c}\right) = x(t)$$

Verifichiamo *graficamente* le condizioni di Nyquist per l'aliasing

$$X(f) = \frac{1}{T_c}\sum_k X\left(f - \frac{k}{T_c}\right)$$

Per l'esempio grafico assumiamo $X(f) = triag\left(\frac{f}{B}\right)$



Dal disegno si vede come le condizioni che abbiamo imposto sulla frequenza e sull'interpolatore siano sufficienti a ricostruire $x(t)$ senza perdita d'informazione.

N.B: un interpolatore così (una pura $rect(f)$) non è fisicamente realizzabile.

2025-07-16 (4)

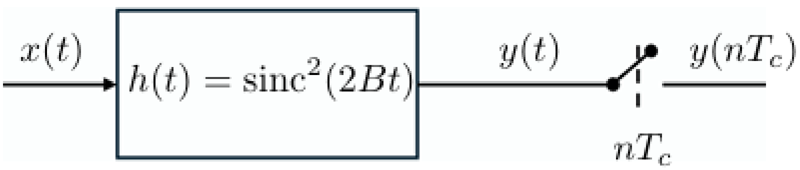
Verificare la validità delle seguenti affermazioni:

a) **La compressione temporale di un segnale comporta un allargamento del suo spettro in frequenza.**
Sia
$$x(t) \rightleftharpoons X(f)$$
Costruiamo il segnale *compresso*
$$x(\alpha t), \alpha > 1$$
$$x(\alpha t) \rightleftharpoons \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$
Lo spettro in frequenza è variato: oltre a essersi ridotto in modulo, si è allargato rispetto a quello originale, in quanto
$$\alpha > 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} < 1$$
Esempio: per $\alpha = 0.5$ si ha un dimezzamento nell'ampiezza dello spettro di fase e un suo raddoppio nella larghezza.

b) **L'introduzione di un ritardo temporale su un segnale non ne modifica lo spettro.**
$$x(t - t_0) \rightleftharpoons X(f)e^{-2\pi j f t_0}$$
Da cui si deduce che è falso in quanto lo spettro non varia in modulo ma varia in fase.
$$|X(f)| = \left|X(f)e^{-2\pi j f t_0}\right| = |X(f)| \left|e^{-2\pi j f t_0}\right| = |X(f)| \cdot 1$$
$$\angle X(f) \neq \angle\left(X(f)e^{-2\pi j f t_0}\right) = \angle X(f) + \angle e^{-2\pi j f t_0}$$
$$\angle X(f) \neq \angle X(f) - 2\pi f t_0$$

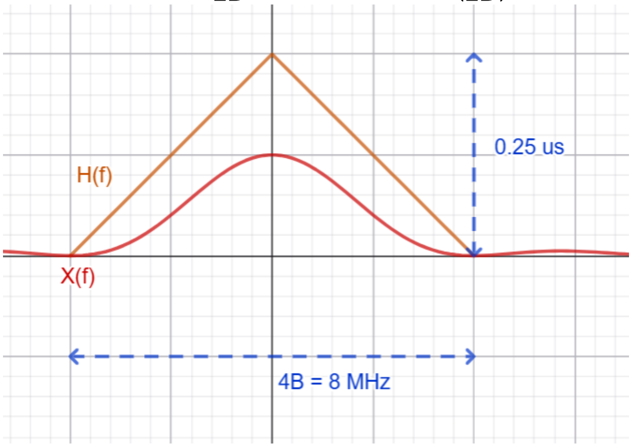
2025-07-16 (5)

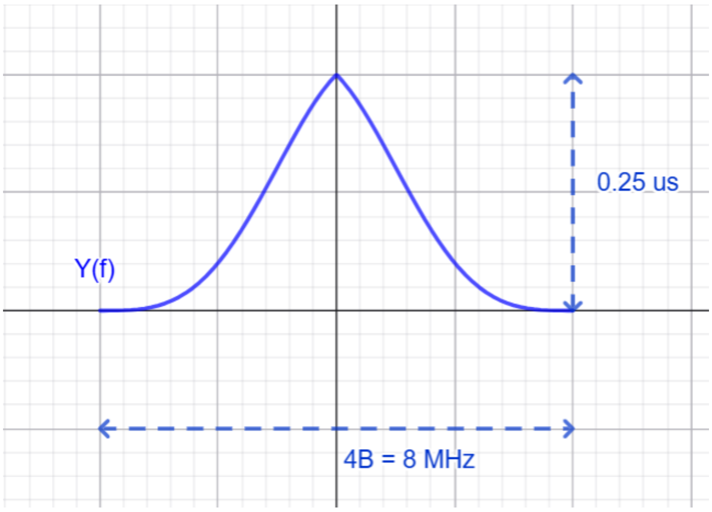
Dato il segnale $x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) * rect\left(\frac{t}{T}\right)$ con $T = 0.25\ \mu s$, nell'ipotesi in cui $B = 2\ MHz$ e $Tc = 0.125\ \mu s$:



a) **Disegnare (motivando la risposta) la trasformata discreta di Fourier dei campioni $y(nT_c)$**
$$Y(f) = X(f)H(f)$$
$$X(f) = T^2 sinc^2(fT)$$

$$H(f) = \frac{1}{2B} tirag\left(\frac{f}{2B}\right)$$
$$Y(f) = \frac{T^2}{2B} sinc^2(fT)\, tirag\left(\frac{f}{2B}\right)$$





Basterà ora ripetere questo disegno ogni $f = \frac{k}{T_c}, k \in \mathbb{Z}$.

b) Calcolare la frequenza minima di campionamento per evitare aliasing.

Per evitare sovrapposizioni, serve

$$\frac{1}{T_c} \geq 2B_Y = 4B = 8\ MHz$$

Il valore fornito di T_c rispetta questa proprietà.

2025-06-25 (4)

Un sistema LTI a tempo continuo, causale, ha come risposta al gradino $g(t) = \left[1 - e^{-\frac{t}{T}}\right] u(t)$.

a) Calcolare la risposta impulsiva del sistema.

$$g(t) = T[u(t)]$$
$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

Poiché il sistema è LTI

$$T[\delta(t)] = T\left[\frac{d}{dt} u(t)\right] = \frac{d}{dt} T[u(t)] = \frac{d}{dt} g(t)$$
$$h(t) = T[\delta(t)] = \delta(t) - \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} u(t) - \delta(t) e^{-\frac{t}{T}}$$
$$h(t) = \delta(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) - \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} u(t)$$

Attenzione: si noti come quando $\delta(t) \neq 0$ il suo fattore moltiplicativo $\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) = 0$

Quindi

$$h(t) = -\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} u(t)$$

b) Calcolare l'energia del Sistema LTI.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

Abbiamo due strade per trovare l'energia: usando il dominio della frequenza o quello del tempo. Scegliamo di usare la risposta in frequenza del sistema.

$$H(f) = -\frac{1}{T} \frac{1}{{}^1/_T + 2\pi f\, j} = -\frac{1}{1 + 2\pi f T\, j}$$

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2 T^2}$$

$$f' = 2\pi T\, f$$

$$df = \frac{1}{2\pi T} df'$$

$$E = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + f'^2} df'$$

$$E = \frac{1}{\pi T} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1 + f'^2} df'$$

$$E = \frac{\tan^{-1}\infty - \tan^{-1} 0}{\pi T} = \frac{{}^{\pi}/_2 - 0}{\pi T} = \frac{1}{2T}$$

Se avessimo scelto di sfruttare la risposta impulsiva invece di quella in frequenza i passaggi sarebbero stati

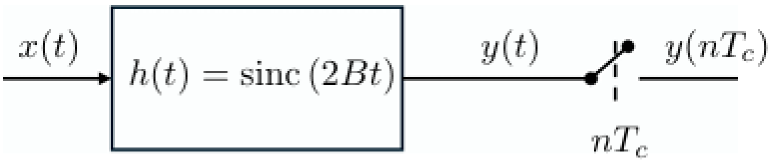
$$|h(t)|^2 = \frac{1}{T^2} e^{-\frac{2t}{T}} u(t)$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T^2} e^{-\frac{2t}{T}} u(t) dt = \frac{1}{T^2} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{2t}{T}} dt$$

$$E = -\frac{T}{2} \frac{e^{-\infty} - e^{0}}{T^2} = -\frac{0 - 1}{2T} = \frac{1}{2T}$$

2025-06-25 (5)

Dato il segnale $x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$ con $T = 10\ \mu s$, nell'ipotesi in cui $B = 0.1\ MHz$ e $T_c = 1 \mu s$



a) Disegnare (motivando la risposta) la trasformata discreta di Fourier dei campioni $y(nT_c)$

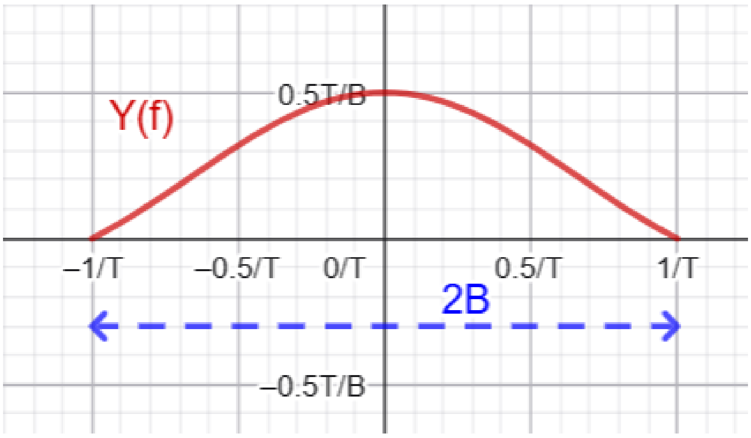
Studiamo il segnale e il filtro nel dominio della frequenza

$$X(f) = T\, sinc(fT)$$

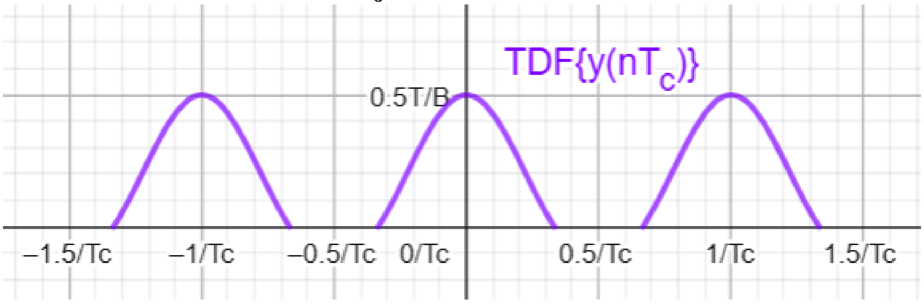
$$H(f) = \frac{1}{2B} rect\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$Y(f) = X(f)H(f) = \frac{T}{2B}\, sinc(fT)\, rect\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Si noti anche che in questo caso $\frac{1}{T} \equiv B$



Ripetendo invece i campioni a distanza $\frac{1}{T_C}$ si ottiene la trasformata discreta di $y(nT_c)$



b) Calcolare la frequenza minima di campionamento per evitare aliasing.

Per soddisfare il criterio di Nyquist ed evitare aliasing basta imporre

$$\frac{1}{T_c} \geq 2B_Y = 2B = 0.2\ MHz$$

$$T_c \leq 5\ \mu s$$

2025-06-05 (4)

Dato il filtro $h(t) = \delta(t) - e^{-t/T}\cos 2\pi f_0 t\ u(t)$ con $T = 10\mu s$ e $f_0 = 3\ GHz$.

a) Calcolare la trasformata di Fourier del segnale.

$$h(t) = \delta(t) - x(t)\cos 2\pi f_0 t$$

$$H(f) = 1 - \frac{X(f - f_0) + X(f + f_0)}{2}$$

$$X(f) = \frac{1}{{}^{1}/_{T} + 2\pi j f} = \frac{T}{1 + 2\pi j T f}$$

b) Calcolare la banda a $-10\ dB$ in Hz del filtro.

Attenzione: il filtro è un filtro RIDUCI-BANDA centrato in $\pm f_0$. Il suo effetto è solo di attenuare, al più dimezzando, le frequenze attorno a $\pm f_0$.

Il suo massimo si avrà quindi per $f \to \infty$

$$H(\infty) = 1$$

$$10\log_{10}\frac{|H(f)|^2}{|H(\infty)|^2} = -10\ dB$$

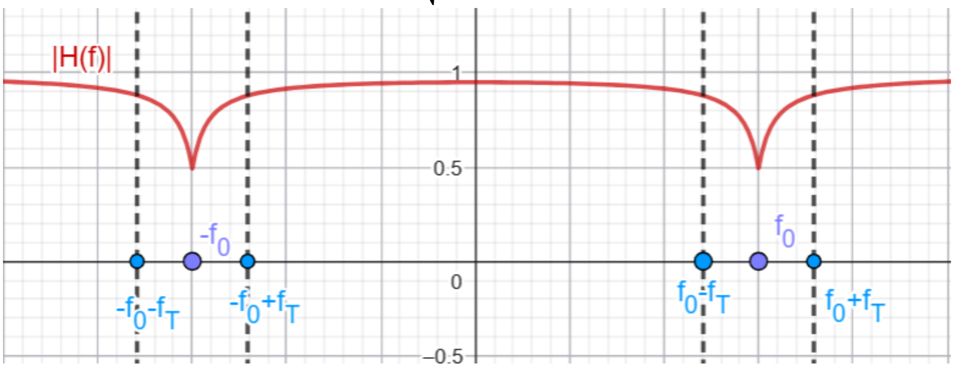
$$\frac{|H(f)|^2}{|H(\infty)|^2} = 0.1$$

$$|H(f)|^2 = 0.1$$

Ma c'è un problema: $min|H(f)|^2 \approx 0.25 > 0.1$, quindi non esiste alcuna frequenza che porti la potenza al 10% del massimo.

Se fosse stata invece richiesta la banda (frequenza di taglio) a $-10\ dB$ della componente $X(f)$, che si può a questo punto studiare attorno a 0, invece che f_0, avremmo dovuto fare:

$$10 \log_{10} \frac{|X(f)|^2}{|X(0)|^2} = \frac{T^2/(1+4\pi^2T^2f^2)}{T^2} = \frac{1}{1+4\pi^2T^2f^2} = \frac{1}{10}$$
$$4\pi^2T^2f^2 = 9$$
$$f_T = \pm\sqrt{\frac{3}{2}\frac{1}{\pi T}} = 218\ Hz$$



2025-06-05 (5)

Un sistema wireless opera a $3\ GHz$ e $5\ GHz$, con potenza trasmessa di $-20\ dB$. La potenza ricevuta minima necessaria è pari a $-100\ dB$, in condizioni di spazio libero.

a) Calcolare la massima distanza (in metri) tra il trasmettitore e il ricevitore per ciascuna frequenza.

$$P_R = P_T\, G_R\, G_T \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2$$

Siccome non specificati, assumiamo i guadagni $G_R \equiv G_T = 1$

$$P_R = P_T\left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2$$
$$\left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 = \frac{P_R}{P_T}$$
$$\frac{\lambda}{d} = 4\pi\sqrt{\frac{P_R}{P_T}}$$
$$d = \frac{\lambda}{4\pi}\sqrt{\frac{P_T}{P_R}}$$

Un segnale wireless si propaga alla velocità della luce.

$$c = \lambda f$$
$$d = \frac{c}{4\pi f}\sqrt{\frac{P_T}{P_R}}$$
$$\frac{P_T}{P_R} = -20\ dB + 100\ dB = 80\ dB = 10^{\frac{80}{10}} = 10^8$$
$$d = \begin{cases} 79.5\ m, & f = 3\ GHz \\ 47.5\ m, & f = 5\ GHz \end{cases}$$

b) Con antenne da $10\ dBi$ di guadagno in trasmissione e ricezione, calcolare la nuova distanza massima.

Adesso $G_T = G_R = 10^{\frac{10}{10}} = 10$

$$d' = \frac{c}{4\pi f}\sqrt{\frac{G_T G_R P_T}{P_R}} = 10\ d$$

Le distanze si allungano di un fattore 10.

2025-04-04 (4)

L'equazione differenziale che lega i segnali di ingresso e uscita di un circuito C-R è

$$\frac{d}{dt}v_i(t) - \frac{1}{RC}\ v_u(t) = \frac{d}{dt}v_u(t)$$

a) **Calcolare la risposta in frequenza del sistema.**

$$2\pi jf\ V_i(f) - \frac{1}{RC}\ V_u(f) = 2\pi jf V_u(f)$$

$$2\pi jf\ V_i(f) = \left(\frac{1}{RC} + 2\pi jf\right)V_u(f)$$

$$V_u(f) = \frac{2\pi jf}{\frac{1}{RC} + 2\pi jf}V_i(f)$$

$$V_u(f) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\pi RC\ jf}}V_i(f)$$

$$H(f) = \frac{V_u(f)}{V_i(f)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\pi RC\ jf}}$$

Per praticità effettuiamo il cambio di variabile $f_T = \frac{1}{2\pi RC}$

$$H(f) = \frac{1}{1 + \frac{f_T}{j\,f}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\ {}^{f}\!/_{f_T}}}$$

$$H(f) = \frac{1}{1 - \frac{f_T}{f}j}$$

b) **Calcolare la larghezza di banda a $-10\ dB$ del filtro.**

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{f_T^2}{f^2}}$$

$$10\log_{10}\frac{|H(f)|^2}{|H(f_0)|^2} = -10\ dB$$

Attenzione: questo è un filtro passa ALTO. Attenua quindi le frequenze $f < f_T$ e lascia passare le altre.

$$|H(f)|^2 = \frac{f^2}{f^2 + f_T^2}$$

$$\frac{|H(f)|^2}{|H(f_0)|^2} = \frac{\frac{f^2}{f^2 + f_T^2}}{\frac{f_0^2}{f_0^2 + f_T^2}} = \frac{f^2}{f_0^2}\frac{f_0^2 + f_T^2}{f^2 + f_T^2}$$

$$\frac{|H(f)|^2}{|H(f_0)|^2} = \frac{\frac{f^2}{f^2 + f_T^2}}{\frac{f_0^2}{f_0^2 + f_T^2}} = \frac{f_0^2 + f_T^2}{f_0^2}\frac{f^2}{f^2 + f_T^2}$$

Studiamo il caso $f_0 \longrightarrow \infty$ (il valore di riferimento va preso *lateralmente* perché è lì dove il filtro non altera le frequenze).

$$\lim_{f_0\to\infty}\frac{|H(f)|^2}{|H(\infty)|^2}=\frac{f^2}{f^2+f_T^2}$$
$$10\log_{10}\frac{|H(f)|^2}{|H(\infty)|^2}=10\log_{10}\frac{f^2}{f^2+f_T^2}=-10\ dB$$
$$\frac{f^2}{f^2+f_T^2}=10^{-\frac{10}{10}}=0.1$$
$$\frac{1}{1+\frac{f_T^2}{f^2}}=0.1$$
$$1+\frac{f_T^2}{f^2}=10$$
$$\frac{f_T^2}{f^2}=9$$
$$f^2=\frac{f_T^2}{9}$$
$$f_{-10dB}=\pm\frac{f_T}{3}=\pm\frac{1}{6\pi RC}$$
Quale sarebbe stata la banda a $-3dB$?
$$\frac{f^2}{f^2+f_T^2}=\frac{1}{2}$$
$$f^2\approx f_T^2$$
$$f_{-3dB}=\pm f_T=\pm\frac{1}{2\pi RC}$$
Quindi
$$f_{-10dB}=\frac{1}{3}f_{-3dB}$$

2025-04-04 (5)

Dato un sistema lineare e stazionario

a) **Derivare una condizione necessaria e sufficiente per la causalità.**
Un sistema è causale se la sua uscita dipende solo dagli ingressi passati
$$y(t)=T[x(\tau)|\tau\le t]$$
Per imporre ciò possiamo sfruttare la funzione impulso come ingresso $\delta(t)$, che deve avere uscita nulla per tutti gli istanti $\tau<t$. Questo è equivalente a dire che il sistema non può reagire all'impulso prima di averlo ricevuto e non può, quindi, dipendere da ingressi futuri.
$$h(\tau)=0\ \forall\ \tau<t$$
Quindi $h(t)$ è una forma del tipo
$$h(t)=g(t)\,u(t)$$
In questo esercizio il sistema è SLS, per cui
$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\,x(t-\tau)d\tau$$
Imporre la causalità equivale a scrivere
$$y(t)=\int_{0}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

b) **Fornire un esempio (motivando la risposta) di sistema *non causale*.**
$$y(t)=x(t+\Delta),\Delta>0$$
Si vede subito che la risposta derivante dall'ingresso $x(t_0)$ inizia quando $t=t_0-\Delta<t_0$
Un esempio di sistema SLS non causale è
$$h(t)=u(t+\Delta),\Delta>0$$
Da cui si vede
$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\,x(t-\tau)d\tau=\int_{-\Delta}^{\infty}x(t-\tau)d\tau$$

2025-02-10 (4)

Dato un sistema descritto dalla seguente equazione di ingresso-uscita

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)d\alpha$$

Nell'ipotesi in cui $x(t) = e^{-2t}\, u(t)$, calcolare la trasformata di Fourier di $y(t)$.

$$Y(f) = \frac{X(f)}{2\pi jf} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$$

$$X(f) = \frac{1}{{}^{1}/_{T} + 2\pi jf}, T = \frac{1}{2}$$

$$Y(f) = \frac{1}{2\pi jf}\frac{1}{2 + 2\pi jf} + \frac{1}{4}\delta(f) = \frac{1}{4}\frac{1}{\pi jf}\frac{1}{1 + \pi jf} + \frac{1}{4}\delta(f)$$

$$Y(f) = \frac{1}{4}\left(\frac{-j^2}{\pi jf}\frac{1}{1 + \pi jf} + \delta(f)\right) = \frac{1}{4}\left(\delta(f) - \frac{j}{\pi f + jf^2\pi^2}\right)$$

Se invece non si volessero sfruttare le proprietà di integrazione della trasformata di Fourier si potrebbe esplicitare prima $y(t)$e poi trovarne la trasformata.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2\alpha}\, u(\alpha)d\alpha = \int_{0}^{t} e^{-2\alpha}d\alpha = \frac{1}{-2}e^{-2\alpha}\Big|_{0}^{t} = \frac{1 - e^{-2t}}{2} = \begin{cases} \frac{1 - e^{-2t}}{2} & se\ t \geq 0 \\ 0 & se\ t < 0 \end{cases} = \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2}\right)u(t)$$

$$Y(f) = \frac{1}{4}\delta(f) + \frac{1}{4\pi jf} - \frac{1}{2}\frac{1}{2 + 2\pi jf} = \frac{1}{4}\delta(f) + \frac{1}{4\pi jf} - \frac{1}{4}\frac{1}{1 + \pi jf}$$

$$Y(f) = \frac{1}{4}\left(\delta(f) + \frac{1}{\pi jf} - \frac{1}{1 + \pi jf}\right) = \frac{1}{4}\left(\delta(f) - \frac{j}{\pi f} - \frac{1}{1 + \pi jf}\right) = \frac{1}{4}\left(\delta(f) - \frac{j(1 + \pi jf) + \pi f}{\pi f + jf^2\pi^2}\right)$$

$$Y(f) = \frac{1}{4}\left(\delta(f) - \frac{j - \pi f + \pi f}{\pi f + jf^2\pi^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\delta(f) - \frac{j}{\pi f + jf^2\pi^2}\right)$$

2025-02-10 (5)

Si consideri il segnale $x(t) = 2B\ sinc^2(2Bt)$ con $B =\ 1\, MHz$.

a) **Calcolare $y(t) = x(t) * h(t)$ e la sua trasformata continua di Fourier, nell'ipotesi in cui**
$$\boldsymbol{h(t) = h_1(t) * h_2(t)}$$
dove $h_1(t) = 4B\ sinc(4Bt)$ e $H_2(f) = e^{-2\pi jft_0}$
Conviene calcolare prima $Y(f)$, e poi imporre $y(t) = ATCF[T(F)]$
$$Y(f) = X(f)\ H(f) = X(f)\ H_1(f)\ H_2(f)$$
$$X(f) = triag\left(\frac{f}{2B}\right)$$
$$H_1(f) = rect\left(\frac{f}{4B}\right)$$
$$Y(f) = triag\left(\frac{f}{2B}\right)\ rect\left(\frac{f}{4B}\right)\ e^{-2\pi jft_0}$$
In questo caso, il triangolo e il rettangolo condividono la stessa base. Si può quindi omettere il rettangolo dall'espressione di $Y(f)$
$$Y(f) = triag\left(\frac{f}{2B}\right)\ e^{-2\pi jft_0} = X(f)\ e^{-2\pi jft_0}$$
$y(t)$ sarà quindi $x(t)$ ma ritardato di t_0
$$y(t) = x(t - t_0) = 2B\ sinc^2\big(2B(t - t_0)\big)$$

b) **Calcolare la frequenza di campionamento di $y(t)$.**
Poiché $y(t) = x(t - t_0)$, $f_y = f_x = 2B_x$

$$X(f) = triag\left(\frac{f}{2B}\right)$$
$$B_x = 2B$$
$$f_y = 4B = 4\ MHz$$

2025-01-23 (4)

Dato un sistema descritto dalla seguente equazione di ingresso-uscita

$$y(t) = T[x(t)] = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)d\alpha$$

a) **Dimostrare che il sistema è lineare e tempo-invariante.**

Per dimostrare la linearità del sistema occorre che

- $T[x_1(t) + x_2(t)] = T[x_1(t)] + T[x_2(t)]$

$$T[x_1(t) + x_2(t)] = \int_{-\infty}^{t} (x_1(\alpha) + x_2(\alpha))\ d\alpha = \int_{-\infty}^{t} x_1(\alpha)d\alpha + \int_{-\infty}^{t} x_2(\alpha)d\alpha$$
$$= T[x_1(t)] + T[x_2(t)]$$

- $T[K\ x(t)] = K\ T[x(t)]\ con\ K \neq 0$

$$T[K\ x(t)] = \int_{-\infty}^{t} K\ x(\alpha)d\alpha = K\int_{-\infty}^{t} x(\alpha)d\alpha = K\ T[x(t)]$$

Il sistema è quindi lineare.

Per la tempo-invarianza serve che $y(t - t_0) = T[x(t - t_0)]$

$$T[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha - t_0)d\alpha$$

Impongo ora $\beta = \alpha - t_0$

$$T[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\beta)d\beta = y(t - t_0)$$

b) **Calcolare la risposta impulsiva del sistema**

$$h(t) = T[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{t} \delta(\alpha)d\alpha = u(t)$$

2025-01-23 (5)

Si consideri il segnale

$$x(t) = rect\left(\frac{t+T}{2T}\right) - rect\left(\frac{t-T}{2T}\right)$$

Con $T = 0.1\ \mu s$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)d\alpha$$

a) **Calcolare la trasformata continua di Fourier $Y(f)$**

$$Y(f) = \frac{X(f)}{2\pi jf} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$$

Poiché $x(t)$ è dispari $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 0$ e quindi $X(0) = 0$

Si noti come la funzione $rect\left(\frac{t+T}{2T}\right)$ sia $rect\left(\frac{t}{2T}\right)$ ma ritardata di $t_0 = -\frac{T}{2}$

$$X(f) = 2T\ sinc(2T\ f)\ e^{\pi jfT} - 2T\ sinc(2T\ f)\ e^{-\pi jfT}$$
$$X(f) = 2T\ sinc(2T\ f)\ \left(e^{\pi jfT} - e^{-\pi jfT}\right)$$

Sfruttando le proprietà dei numeri complessi, $e^{\alpha j} - e^{-\alpha j} = 2\ Im\{e^{\alpha j}\} = 2j\sin\alpha$

$$X(f) = 4jT\ sin(\pi Tf)\ sinc(2T\ f)$$

$$Y(f) = \frac{2T}{\pi f} sin(\pi T f)\ sinc(2T\ f)$$

b) Calcolare la frequenza minima di campionamento per $z(t) = y(t) * sinc(2B\ t)$, con $B = 20\ MHz$

$$f_{min} = 2B_Z$$
$$Z(f) = Y(f)\ rect\left(\frac{f}{2B}\right)$$
$$B_Z = \min(B, B_Y) = \min(B, +\infty) = B$$
$$f_{min} = 2B = 40\ MHz$$

2025-01-07 (4)

Dato il filtro $h(t) = cos(2\pi f_0 t)\ e^{-t/T}\ u(t)$ con $T = 1\mu s$ e $f_0 = 3\ GHz$

a) Calcolare la trasformata di Fourier del segnale.

Sfruttando le proprietà della modulazione per il coseno:

$$H(f) = \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0)$$
$$X(f) = TCF\left[e^{-t/T}\ u(t)\right] = \frac{1}{1/T + 2\pi jf} = \frac{T}{1 + 2\pi Tjf}$$

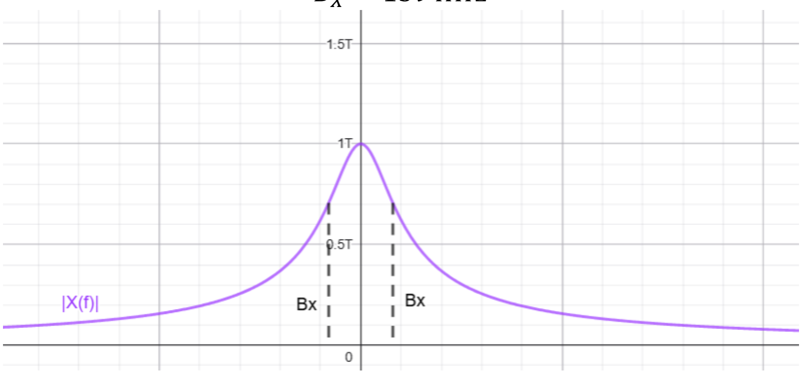
b) Calcolare la banda a $-3dB$ in Hz del filtro.

Come prima cosa calcoliamo B_X come se ci fosse stato chiesto quello.

$$10\log_{10}\frac{|X(f)|^2}{|X(0)|^2} = -3dB$$

Perché $X(0)$ al denominatore? Perché è il massimo assunto da $|X(f)|$

$$|X(f)|^2 = \frac{T^2}{1 + 4\pi^2T^2f^2}$$
$$\frac{|X(f)|^2}{|X(0)|^2} = \frac{\frac{T^2}{1 + 4\pi^2T^2f^2}}{T^2} = \frac{1}{1 + 4\pi^2T^2f^2} = \frac{1}{2}$$
$$4\pi^2T^2f^2 = 1$$
$$f^2 = \frac{1}{4\pi^2T^2}; f = \pm\frac{1}{2\pi T} = \pm 159\ KHz$$
$$B_X = 159\ KHz$$



Come trovare adesso B_H? Il filtro H ha la stessa banda della sua componente X, semplicemente presente due volte e centrata in $\pm f_0$.

2025-01-07 (5)

Un sistema lineare è descritto dalla seguente risposta impulsiva

$$h(t) = e^{\alpha t}u(t), \alpha > 0$$

a) Determinare se il sistema è stabile secondo il criterio BIBO.

Per verificare la stabilità BIBO basta controllare

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt \neq \infty$$

In questo caso si vede subito che il sistema NON è stabile, ma per giustificare questa affermazione servono i passaggi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t} u(t)dt = \int_{0}^{\infty} e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}\Big|_0^{\infty} = \frac{\infty - 1}{\alpha} = +\infty$$

b) Dato il sistema con risposta impulsiva $h(t)g(t)$ con $g(t) = e^{-\beta t}u(t)$, determinare una condizione su β affinché il sistema sia stabile secondo il criterio BIBO.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t} e^{-\beta t} u(t)dt \neq \infty$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{(\alpha-\beta)t} dt = \frac{1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha-\beta)t}\Big|_0^{\infty} = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & se\ \alpha - \beta < 0 \\ +\infty & altrimenti \end{cases}$$

Serve quindi che

$$\alpha < \beta$$

2024-06-10 (4)

Dato un segnale audio di *durata limitata* nel tempo

a) Descrivere le operazioni necessarie per il campionarlo e la riproduzione in *tempo reale* del segnale.

Ricordiamoci che

Tempo		Banda
Limitato	⟺	Illimitata
Illimitato	⟺	Limitata

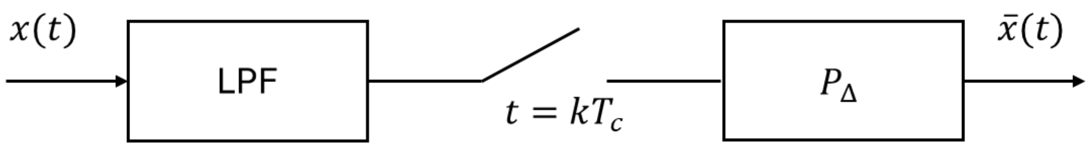
Quindi il nostro segnale avrà, di base, banda illimitata. Lo dovremo filtrare con un LPF.
Isoliamo quindi solo le frequenze audio.

$$B = 20\ KHz$$

Adesso il segnale andrà campionato, facciamo attenzione alla dicitura real-time, che ci dice che dovremo usare un interpolatore CAUSALE: ad ogni istante, non possiamo attendere il "futuro" del segnale per poterlo riprodurre.
Imponiamo le condizioni di Nyquist per evitare aliasing:

$$\frac{1}{T_c} \geq 2B = 40\ KHz$$

$$T_c = 12.5\ \mu s$$



Descriviamo il nostro interpolatore causale come un interpolatore non causale troncato da una rect.

$$P_\Delta(t) = P(t)\, rect\left(\frac{t}{\Delta}\right) \approx sinc\left(\frac{t}{T}\right) rect\left(\frac{t}{\Delta}\right)$$

La trasformata discreta di Fourier del segnale campionato sarà del tipo

$$\bar{x}(t) = \sum_k x[kT_c]\, P_\Delta\left(t - kT_c - \frac{\Delta}{2}\right)$$

Come scegliere Δ? Dobbiamo imporre $\frac{1}{\Delta} \geq 2B$. Quindi un valore accettabile è $\Delta = 0.25\ \mu s$

b) Indicare (sulla base delle scelte fatte) il ritardo temporale nella riproduzione del segnale

Il ritardo è dato dalla componente $\frac{\Delta}{2}$ ed è una conseguenza dell'interpolatore che abbiamo scelto.

$$\frac{\Delta}{2} = 0.125\ \mu s$$

2024-01-08 (7)

Un processo bianco Gaussiano $W(t)$ con densità spettrale di potenza pari a N_0 viene dato in ingresso ad un sistema lineare stazionario con risposta impulsiva $h(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$.

a) Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo in uscita $N(t)$.

$$H(f) = Tsinc(fT)$$
$$S_N(f) = S_W(f)|H(f)|^2 = N_0T^2sinc^2(fT)$$
$$R_N(\tau) \rightleftharpoons S_N(f)$$
$$R_N(\tau) = N_0T\ triag\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

b) Dimostrare che i campioni $N(iT)$ and $N(kT)$ sono indipendenti per $i \neq k$.

Il segnale $N(t)$ è *gaussiano* ($W(t)$ lo è per ipotesi e il filtro non annulla questa proprietà), quindi basta imporre che l'autocorrelazione sia nulla per $\tau = kT, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

$$R_N(kT) = 0 = triag\left(\frac{kT}{T}\right) = tirag(k) = triag(1) = traig(2) = \cdots$$

Esercizio 6

2025-07-16

Si consideri il codice a blocco sistematico con matrice generatrice G:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & & 1 & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la decodifica a sindrome, determinare qual è il peso massimo degli errori che il codice è in grado di *rivelare*.

$$rivelare \neq correggere$$

Calcoliamo la sindrome per ogni possibile errore, in ordine crescente di peso, finché non otteniamo $S = (1 \quad 1 \quad 1)$ o $S = (0 \quad 0 \quad 0)$.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 1 & & 1 & \\ 1 & 0 & 1 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{S = eH^T}$	$\boldsymbol{w(e)}$
$(\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1})$	$(0 \quad 0 \quad 1)$	1
$(\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0})$	$(0 \quad 1 \quad 0)$	1
$(\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0})$	$(1 \quad 0 \quad 0)$	1
$(\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0})$	$(0 \quad 1 \quad 1)$	1
$(\mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0})$	$(1 \quad 1 \quad 0)$	1
$(\mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0})$	$(1 \quad 0 \quad 1)$	1
$(\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{1})$	$(0 \quad 1 \quad 1)$	2
$(\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1})$	$(1 \quad 0 \quad 1)$	2
$(\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1})$	$(0 \quad 0 \quad 1)$	2
	$\dots$	

Non è necessario effettuare il conto per tutti gli errori di peso 2 o 3, basta enunciare la procedura. Dalla struttura di H si potevano dedurre due soluzioni *facili*: $e = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$, $e = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$, rispettivamente con $S = (0 \quad 0 \quad 0)$, $S = (1 \quad 1 \quad 1)$ che ci mostrano che esistono errori non rilevabili di peso 3 (nel primo esempio l'errore è tale perché anche parola di codice), quindi il massimo peso *rivelabile* è **2**.

Si faccia ATTENZIONE: il massimo peso rilevabile è diverso dalla distanza minima del codice, che è in questo caso $d_{min} = 3$, ed è anche diverso dal massimo peso correggibile, che è in questo caso$t = 1$:

$$\max\left(w(e_{rilevabile})\right) = 2 \neq d_{min} = 3$$

$$\max\left(w(e_{rilevabile})\right) = 2 \neq t = \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor = 1$$

2025-06-25

Si consideri il codice a blocco sistematico con matrice generatrice G.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & & 0 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare qual è il peso massimo degli errori che il codice è *sempre* in grado di correggere.

Come prima cosa bisogna individuare la distanza minima del codice.

$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{c = mG}$	$\boldsymbol{w(c)}$
$(\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1})$	$(0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0)$	3
$(\mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0})$	$(0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$	3
$(\mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0})$	$(1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1)$	3
$(\mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{1})$	$(0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1)$	4

$(\mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0})$	$(0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0)$	3
$(\mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1})$	$(1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$	4
$(\mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{1})$	$(1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$	3

Segue che $d_{min} = 3$

$$t = \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor = 1$$

È il numero massimo di bit errati che non compromettono la ricostruzione della parola, quindi il peso massimo di un errore sostenibile e correggibile.

2025-06-05

Si consideri il codice a blocco sistematico con matrice di controllo di parità H.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & & & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determinare la matrice generatrice $\boldsymbol{G}$ e calcolare la distanza minima del codice;

Il codice è un codice di Hamming, quindi $d_{min} = 3$

Sapendo che $H = (P^T\ I_{n-k}) = (P^T\ I_3)$ e $G = (I_k\ P) = (I_4\ P)$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & & & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & & 1 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Data la parola ricevuta $\boldsymbol{y = x + e} = (\mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0})$, utilizzare la decodifica a sindrome per trovare la sequenza di *bit informativi trasmessa*.

$$S = yH^T = (1 \quad 1 \quad 1)$$

Che corrisponde alla seconda colonna di H

$$e = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$\hat{x} = y + e = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$$

$$\hat{x}H^T = (0 \quad 0 \quad 0)$$

La sequenza di bit informativi è la parte della parola che è stata moltiplicata per l'identità all'interno di G, ossia i primi 3 bit.

$$m = (1 \quad 1 \quad 1)$$

2025-04-04

Si consideri il codice a blocco sistematico con bit di parità:

$$\begin{cases} c_4 = m_2 + m_3 \\ c_5 = m_1 + m_3 \\ c_6 = m_1 + m_2 \end{cases}$$

dove $= (m_1\ m_2\ m_3)$ è una sequenza di 3 bit.

Decodificare la parola ricevuta $\boldsymbol{y = x + e} = (\mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0})$ utilizzando la decodifica a sindrome.

La matrice generatrice è

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sapendo che $G = (I_k\ P) \ = (I_3\ P)$ e $H = (P^T\ I_{n-k}) = (P^T\ I_3)$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = yH^T = (0 \quad 1 \quad 1)$$

Che è la prima colonna di H

$$e = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$
$$\hat{x} = y + e = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0)$$

Effettuando la riprova

$$\hat{x}H^T = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Che ci conferma che $\hat{x}$ è una parola di codice.

2025-02-10

Si consideri il codice a blocco sistematico con bit di parità

$$\begin{cases} c_3 = m_1 + m_2 \\ c_4 = m_1 \end{cases}$$

dove $m = (m_1\ m_2)$ è una parola di 2 bit.

Determinare la distanza minima del codice.

Per farlo bisogna scrivere tutte le parole di codice e trovare la minima distanza di Hamming dalla parola 0.

$$C = \{c_i\} = \{(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0), (0 \quad 1 \quad 1 \quad 0), (1 \quad 0 \quad 1 \quad 1), (1 \quad 1 \quad 0 \quad 1)\}$$
$$d_{min} = 2$$

Attenzione: non devo tenere conto della parola di codice nulla mentre calcolo i vari pesi $w(c_i)$.

2025-01-23

Si consideri il codice sistematico con matrice generatrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) **Determinare la matrice di controllo di parità H**
   Sapendo che $G = (I_k\ P)\ = (I_3\ P)$ e $H = (P^T\ I_{n-k}) = (P^T\ I_3)$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

b) **Decodificare la parola ricevuta $\boldsymbol{y = x + e = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0)}$ utilizzando la decodifica a sindrome.**

$$S = yH^T = (0 \quad 0 \quad 0)$$

   Poiché la sindrome è nulla, y è una parola di codice, $e = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

$$\hat{x} = y + e = x$$

2025-01-07

Si consideri il codice sistematico con matrice di controllo di parità H

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

a) **Determinare la matrice generatrice G**
   Sapendo che $H = (P^T\ I_{n-k}) = (P^T\ I_3)$ e $G = (I_k\ P)\ = (I_4\ P)$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & & & 0 & 1 & 1 \\ & & 1 & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si riconosca come questo sia un codice di Hamming (in questo caso non serve, ma ciò implica $d_{min} = 3$). Un codice di Hamming si riconosce facilmente dal fatto che le colonne della matrice H sono tutte le possibili combinazioni di uni e zeri, escluso il caso di soli zeri.

b) Data la parola ricevuta $\boldsymbol{y = x + e = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)}$, impiegare la decodifica a sindrome per trovare la sequenza di bit informativi trasmessa.

$$S = yH^T = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Noto che la S coincide con la settima colonna di H, quindi

$$e = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

$$\hat{x} = y + e = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$$

Per verificare calcolo la sindrome di $\hat{x}$

$$S_{\hat{x}} = \hat{x}H^T = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Che mi dice che $\hat{x}$ è una parola di codice.

2024-01-08

Dimostrare che $\boldsymbol{\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}}\, d_H(y, x)}$ è la migliore scelta per verosimiglianza.

La migliore scelta sarà quella che massimizzerà la probabilità di essere la parola originale trasmessa.

$$\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{argmax}}\, P(y|x) = \underset{x}{\operatorname{argmax}} \prod_{i}^{n} P(y_i|x_i)$$

$$P(y_i|x_i) = \begin{cases} p, & x_i \neq y_i \\ 1 - p, & x_i = y_i \end{cases}$$

Dove p è la probabilità di errore sul singolo bit

$$\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{argmax}}\; (1 - p)^{n - d_H(y,x)} p^{d_H(y,x)}$$

$$\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{argmax}} \left(\frac{p}{1 - p}\right)^{d_H(y,x)} (1 - p)^n = \underset{x}{\operatorname{argmax}} \left(\frac{p}{1 - p}\right)^{d_H(y,x)}$$

Si assuma $p < \frac{1}{2}$, quindi $0 < \frac{p}{1-p} < 1$ sicuramente. Quella potenza (con base compresa tra 0 e 1) viene quindi massimizzata quando il suo esponente $d_H(y, x)$ viene minimizzato.

$$\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}}\, d_H(y, x)$$

Esercizi 7 e 8

2025-07-16 (8)

Si consideri un sistema di comunicazione digitale che impiega codifica di Gray ed un impulso a radice di coseno rialzato con $\alpha = 0.5$. Il sistema è progettato per supportare un rate informativo pari a 10 Mbit/s. Il sistema può funzionare in due modalità:

- Modalità A: 4−QAM con codice a blocco con rate 1/2.
- Modalità B: 16−QAM con codice a blocco con rate 3/4.

a) Confrontare l'efficienza spettrale delle due modalità;

$$\eta_{SP} = \frac{R_b}{B} = \frac{R_b T_s}{1+\alpha} = \frac{r \log_2 M}{1+\alpha} = \begin{cases} 0.67 & caso\ A \\ 2 & caso\ B \end{cases}$$

b) Confrontare l'efficienza energetica delle due modalità.

Come prima cosa dobbiamo esprimere la probabilità di errore delle due modalità in funzione del rapporto $\frac{E_b}{N_0}$.

$$SER = 4\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{3\, r \log_2 M}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Poiché non sono fornite altre informazioni sui due codici (n, d_{min}) considereremo la $BER = \frac{SER}{\log_2 M}$ come nostra probabilità da eguagliare.

$$BER = \begin{cases} Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) & caso\ A \\ \frac{3}{4}\, Q\left(\sqrt{\frac{3}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right) & caso\ B \end{cases}$$

È l'ordine di grandezza dell'errore che ci interessa, possiamo sostituire lo scalare $\frac{3}{4}$ del caso B con 1.

$$Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)\Bigg|_A = \frac{3}{4}\, Q\left(\sqrt{\frac{3}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right)\Bigg|_B \approx Q\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)\Bigg|_B$$

Imponiamo ora $x = \frac{E_b}{N_0}$ e studiamo le varie $Q(x)$

$$Q(x)|_A \approx Q\left(\sqrt{\frac{3}{5}x}\right)\Bigg|_B$$

Segue che

$$x_A \approx \sqrt{\frac{3}{5}} x_B$$

$$\frac{x_A}{x_B} \approx 0.77$$

$$\frac{E_b/N_0|_A}{E_b/N_0|_B} \approx 0.77 = -1.14\ dB$$

Si deduce che il caso A ha un'efficienza energetica migliore.

2025-07-16 (7)

Verificare che il ramo in quadratura di un ricevitore 4-QAM è in grado di ricevere correttamente la componente in quadratura del segnale trasmesso.

Trattare un singolo ramo di una QAM è come trattare una sorta di PAM in banda passante (con un seno al posto del coseno). Una 2-PAM in questo caso.

Dobbiamo dimostrare che la componente in fase non interferisce con quella in quadratura

$$s_T(t) = I(t)\cos 2\pi f_0 t - Q(t)\sin 2\pi f_0 t$$

$$s_R(t) = s_T(t) * c(t) + w(t)$$

Per praticità assumiamo canale non distorcente $c(t) = \delta(t)$

$$s_R(t) \approx s_T(t) + w(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t) + w(t)$$

$$r(t) = -2\sin(2\pi f_0 t)\, s_R(t)$$

$$r(t) = -2I(t)\cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t) + 2Q(t)\sin^2(2\pi f_0 t) - 2w(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$r(t) = -I(t)\sin(4\pi f_0 t) + 2Q(t)\sin^2(2\pi f_0 t) - 2w(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

Raggruppiamo $w'(t) = 2w(t)\sin(2\pi f_0 t)$

$$r(t) = 2Q(t)\sin^2(2\pi f_0 t) - I(t)\sin(4\pi f_0 t) + w'(t)$$

Ricordiamo però che $I(t) = a_k g_T(t); Q(t) = b_k g_T(t)$

E scegliamo $G_T(f) = G_R(f) = \sqrt{G_{RCR}(f)}$

$$r(t) = (b_k \sin^2(2\pi f_0 t) - a_k \sin(4\pi f_0 t))g_T(t) + w'(t)$$

Integrando su un periodo di tempo $\sin^2 2\pi f_0 t$ ha valore medio $\frac{1}{2}$, mentre $\sin 4\pi f_0 t$ ha valore medio 0. Cosa vuol dire questo? La parte in fase ha densità spettrale a $2f_0$ e pertanto sarà filtrata via dal filtro g_R, che manterrà quella in quadratura e il rumore (gaussiano).

Quindi la componente in quadratura può essere correttamente separata da quella in fase.

Il tutto è PIÙ INTUITIVO se affrontato nel dominio della FREQUENZA.

Ricordiamo le modulazioni per seno e coseno nella frequenza

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \rightleftharpoons \frac{X(f-f_0) + X(f+f_0)}{2}$$

$$x(t)\sin(2\pi f_0 t) \rightleftharpoons \frac{X(f-f_0) - X(f+f_0)}{2j}$$

Scriviamo ora il segnale in INGRESSO al ricevitore come

$$S_{IN}(f) = \frac{I(f-f_0) + I(f+f_0)}{2} + \frac{Q(f-f_0) - Q(f+f_0)}{2j} + \frac{N_0}{2}$$

Dove $\frac{N_0}{2}$ è il rumore introdotto dal canale.

$S_{IN}(f)$ sarà ora (ricordare la struttura di una QAM) modulato per una $-2\sin(2\pi f_0 t)$

$$\hat{S}(f) - 2\frac{S_{IN}(f-f_0) - S_{IN}(f+f_0)}{2j} = j\big(S_{IN}(f-f_0) - S_{IN}(f+f_0)\big)$$

$$\hat{S}(f) = \frac{j}{2}I(f-2f_0) + \frac{j}{2}I(f) + \frac{1}{2}Q(f-2f_0) - \frac{1}{2}Q(f) + \frac{N_0}{2}j - \frac{j}{2}I(f) - \frac{j}{2}I(f+2f_0) - \frac{1}{2}Q(f) + \frac{1}{2}Q(f+2f_0) - \frac{N_0}{2}j$$

$$\hat{S}(f) = j\frac{I(f-2f_0) - I(f+2f_0)}{2} - Q(f) + \frac{Q(f-2f_0) + Q(f+2f_0)}{2}$$

Da cui si vede facilmente che si può isolare $Q(f)$ con un filtro passa basso.

Se fosse stato invece richiesto il ramo in FASE

$$\hat{S}(f) = 2\frac{S_{IN}(f-f_0)+S_{IN}(f+f_0)}{2} = S_{IN}(f-f_0)+S_{IN}(f+f_0)$$

$$\hat{S}(f) = \frac{I(f-2f_0)+I(f)}{2} + \frac{Q(f-2f_0)-Q(f)}{2j} + \frac{N_0}{2} + \frac{I(f)+I(f+2f_0)}{2} + \frac{Q(f)-Q(f+2f_0)}{2j} + \frac{N_0}{2}$$

$$\hat{S}(f) = \frac{I(f-2f_0)+I(f+2f_0)}{2} + I(f) + \frac{Q(f-2f_0)-Q(f+2f_0)}{2j} + N_0$$

2025-06-25 (8)

Un sistema di comunicazione 16−QAM impiega codifica di Gray, un impulso a radice di coseno rialzato con $\alpha = 0.5$ ed una banda di $B = 5\ MHz$.

a) **Calcolare l'efficienza spettrale del sistema e quanti Mbit possono essere trasmessi in 30 secondi.**

   Poiché non specificato, assumiamo che NON sia usato codice a blocco: $r = 1$

$$\eta_{SP} = \frac{r\ log_2 M}{1+\alpha} = 2.67$$

$$R_b = \eta_{SP} B = 13.3\frac{Mbit}{s}$$

$$Dim = R_B \cdot 30\ s = 400\ Mbit$$

b) **Calcolare il valore di $\boldsymbol{\frac{E_b}{N_0}}$ in $\boldsymbol{dB}$ (dove $\boldsymbol{E_b}$ rappresenta l'energia ricevuta per bit) affinché la probabilità di errore del bit sia paria $\boldsymbol{\frac{3}{4}\cdot 10^{-4}}$**

$$SER = 4\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}}Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}\frac{E_s}{N_0}}\right) = 3Q\left(\sqrt{\frac{1}{5}\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

$$SER = 3Q\left(\sqrt{\frac{r\ log_2 M}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right) = 3Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$BER = \frac{SER}{\log_2 M} = \frac{SER}{4} = \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{3}{4}\cdot 10^{-4}$$

$$Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right) = 10^{-4}$$

$$\sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}} \approx 3.7$$

$$\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0} \approx 13.7$$

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 17.1$$

$$\left.\frac{E_b}{N_0}\right|_{dB} \approx 10\log_{10}\frac{E_b}{N_0} = 12.3\ dB$$

2025-06-05

Un sistema di comunicazione 4−QAM impiega il codice a blocco dell'esercizio 6 ($n = 7, r = \frac{3}{7}, d_{min} = 3$), codifica di Gray, un impulso a radice di coseno rialzato con $\alpha = 0.25$ ed una banda di $B = 10\ MHz$.

a) **Determinare l'efficienza spettrale del sistema e il tempo per trasmettere un file di 10 $\boldsymbol{Mbit}$.**

$$\eta_{SP} = \frac{r \log_2 M}{1+\alpha} = 0.69$$
$$R_b = \eta_{SP} B = 6.9\ {}^{Mbit}/_{s}$$
$$T_{trasm} = \frac{10\ Mbit}{R_b} = 1.45\ s$$

b) Calcolare la probabilità di errore in uscita al decodificatore del codice a blocco, nell'ipotesi in cui $\frac{E_b}{N_0} = 6\ dB$ (dove E_b rappresenta l'energia ricevuta per bit non codificato).

La probabilità di errore di ricezione della parola (errore dopo aver ricostruito la parola col decodificatore) è

$$P_w(e) = \sum_{i=t+1}^{n} \binom{n}{i} p^i\ (1-p)^{n-i}$$

Dove n è la dimensione della parola di codice, $t = \left\lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \right\rfloor = 1$ è il minimo numero di bit flippati per non poter ricostruire il messaggio e p è la probabilità di errore sul bit di messaggio codificato.

$$P_w(e) = \sum_{i=2}^{7} \binom{7}{i} p^i\ (1-p)^{7-i}$$

Calcoliamo ora p: errore di trasmissione per il singolo bit

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{r \log_2 M \frac{E_b}{N_0}}\right) = Q(1.85) \approx 3.5 \cdot 10^{-2}$$

Essendo p piccolo, $P_W(e)$ può essere approssimato al primo evento che provoca la ricezione errata

$$P_W(e) \approx \binom{7}{2} p^2\ (1-p)^5 \approx 21\, p^2 = 2.5 \cdot 10^{-2}$$

2025-04-04 (8)

Dato un sistema di comunicazione 4-QAM

a) Determinare il valore di $\frac{E_b}{N_0}$ in dB, dove E_b rappresenta l'energia per bit (non codificato), necessario per garantire una probabilità di errore pari a 10^{-5}

In assenza di codice, $r = 1$

$$E_s = \log_2 M\, E_b = 2\, E_b$$
$$P_b(e) = Q\left(\sqrt{{}^{E_S}/_{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\, {}^{E_b}/_{N_0}}\right) = 10^{-5}$$

Dal grafico della funzione Q si trova (stima)

$$\sqrt{2\, {}^{E_b}/_{N_0}} \approx 4.4$$
$$2\, {}^{E_b}/_{N_0} \approx 19.36$$
$${}^{E_b}/_{N_0} \approx 9.68 = 10 \log_{10} 9.68\ dB = 9.86\ dB$$

b) Calcolare nuovamente il valore di $\frac{E_b}{N_0}$ in dB usando il codice descritto nell'esercizio 6 ($r = 0.5; n = 6; d_{min} = 3$).

La probabilità di errore di ricezione della parola è

$$P_w(e) = \sum_{i=t+1}^{n} \binom{n}{i} p^i\ (1-p)^{n-i}$$

Dove n è la dimensione della parola di codice, $t = \left\lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \right\rfloor = 1$ è il minimo numero di bit flippati per non poter ricostruire il messaggio e p è la probabilità di errore sul bit di messaggio codificato.

$$P_w(e) = \sum_{i=2}^{6} \binom{6}{i} p^i\ (1-p)^{6-i}$$

$$P_b(e) = 10^{-5} \approx \frac{d_{min}}{r\,n} P_w(e) = P_w(e)$$

Assumiamo p piccolo, $P_W(e)$ può essere approssimato al primo evento che provoca la ricezione errata

$$P_W(e) \approx \binom{6}{2} p^2\,(1-p)^4 \approx 15\,p^2$$

$$p \approx \sqrt{\frac{10^{-5}}{15}} = 8.16 \cdot 10^{-4} = Q\left(\sqrt{{E_S}/{N_0}}\right)$$

Da cui

$$\sqrt{{E_S}/{N_0}} \approx 3.15$$

$${E_S}/{N_0} = r \log_2 M \, {E_b}/{N_0} \approx 9.92$$

$${E_b}/{N_0} \approx 9.92 = 9.97\ dB$$

2025-04-04 (7)

Dato il segnale $s_{RF}(t) = s(t)\cos 2\pi f_0 t$ dove

$$s(t) = \sum_i a_i g_T(t - iT)$$

E i simboli $\{a_i\}$ appartengono ad una PAM a 4 livelli, con simboli indipendenti ed equiprobabili.

Calcolare la potenza del segnale nell'ipotesi in cui $g_T(t)$ sia a radice di coseno rialzato con $\alpha = 0.22$.

$$P_{RF} = \int_{-\infty}^{\infty} S_S^{RF}(f) df$$

Poiché i simboli sono quelli di una PAM, indipendenti ed equiprobabili, $\sigma_a^2 = \frac{M^2-1}{3} = 5 = R_a(m)$.

Si riconosca come il segnale $S_{RF}(t)$ sia il segnale in uscita da una PAM, modulato attorno a una frequenza f_0. È quindi un segnale in uscita da una PAM in BANDA PASSANTE.

$$S_S^{RF} = \frac{S_S(f-f_0) + S_S(f+f_0)}{4}$$

$$S_S(f) = \frac{1}{T} S_a(f) |G_T(f)|^2$$

$$S_S(f) = \frac{1}{T} R_a(0)\,|G(f)|^2$$

$$S_S(f) = \frac{1}{5\,T} |G_T(f)|^2 = \frac{5}{T} |G_{RCR}(f)|^2$$

$$S_S^{RF} = \frac{5}{4\,T}\left(|G_{RCR}(f-f_0)|^2 + |G_{RCR}(f+f_0)|^2\right)$$

$$P_{RF} = \frac{5}{4\,T} \int_{-\infty}^{\infty} \left(|G_{RCR}(f-f_0)|^2 + |G_{RCR}(f+f_0)|^2\right) df$$

Poiché α è piccolo approssimiamo $G_{RCR}^2(f) \approx T^2\, rect\left(\frac{f}{2B}\right), B = \frac{\alpha+1}{T}$

$$P_{RF} = \frac{5}{4\,T}\left(\int_{-\infty}^{\infty} T^2\, rect\left(\frac{f-f_0}{2B}\right) df + \int_{-\infty}^{\infty} T^2\, rect\left(\frac{f+f_0}{2B}\right) df\right)$$

$$P_{RF} = \frac{5}{4\,T}\left(\int_{f_0-B}^{f_0+B} T^2 df + \int_{-f_0-B}^{-f_0+B} T^2 df\right)$$

$$P_{RF} = \frac{5}{4}T(f_0 + B - f_0 + B - f_0 + B + f_0 + B) = \frac{5}{4}T\,4B = 5TB = 5(\alpha + 1) \approx 6.1\,W$$

2025-02-10 (8)

Dato un sistema di comunicazione 4-QAM

a) **Determinare la probabilità di errore sul bit per $\frac{E_b}{N_0} = 6\,dB$, dove E_b rappresenta l'energia per bit (non codificato).**

In assenza di codice, $r = 1$

$$P_b(e) = BER = \frac{SER}{\log_2 M} = \frac{SER}{2}$$

$$SER = 4\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}}Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}\frac{E_S}{N_0}}\right) = 4\frac{2-1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{N_0}}\right)$$

$$P_b(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{r\,log_2 M\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Portando ${E_b}/{N_0}$ in scala non logaritmica ${E_b}/{N_0} = 10^{\frac{6dB}{10}} = 3.98$

$$P_b(e) = Q(2.82) \approx 1.5 \cdot 10^{-3}$$

b) **Calcolare nuovamente la probabilità di errore sul bit considerando l'uso del codice descritto nell'esercizio 6 ($r = 0.5; n = 4; d_{min} = 2$), mantenendo $\frac{E_b}{N_0} = 6\,dB$.**

In presenza di codice bisogna tenere conto, sia del rate r, sia del codice usato.
La probabilità di errore di ricezione della parola è

$$P_w(e) = \sum_{i=t+1}^{n}\binom{n}{i}p^i\,(1-p)^{n-i}$$

Dove n è la dimensione della parola di codice, $t = \left\lfloor\frac{d_{min}-1}{2}\right\rfloor = 0$ è il minimo numero di bit flippati per non poter ricostruire il messaggio e p è la probabilità di errore sul bit di messaggio codificato.

$$p = BER = 4\frac{\sqrt{M}-1}{log_2 M\,\sqrt{M}}Q\left(\sqrt{\frac{3\,r\,log_2 M}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \approx Q(2) \approx 1.5 \cdot 10^{-2}$$

$$P_w(e) = \sum_{i=1}^{4}\binom{4}{i}p^i\,(1-p)^{4-i}$$

Poiché $t = 0$, basta un solo bit flippato per perdere l'intera parola (non si è mai in grado di correggere gli errori).

$$P_w(e) = 1 - P_W(\bar{e}) = 1 - (1-p)^4 \approx 5.9 \cdot 10^{-2}$$

Questa però è la probabilità di errore sulla parola, quella sul singolo bit (della parola di codice) è

$$P_b(e) = \frac{d_{min}}{n}P_w(e) \approx 2.9 \cdot 10^{-2}$$

N.b: se fosse stato richiesto la probabilità di errore sul bit, prima del codice la risposta sarebbe stata

$$P_b^{(non\,codificato)}(e) = \frac{d_{min}}{r\,n}P_w(e) \approx 1.5 \cdot 10^{-2}$$

2025-02-10 (7)

Dato il segnale $s_{RF}(t) = s(t)\cos 2\pi f_0 t$ dove

$$s(t) = \sum_i a_i g_T(t - iT)$$

E i simboli $\{a_i\}$ appartengono ad una PAM a M livelli, con simboli indipendenti ed equiprobabili.

Calcolare l'espressione della potenza del segnale.

$$P_{RF} = \int_{-\infty}^{\infty} S_S^{RF}(f)df$$

Poiché i simboli sono quelli di una PAM, indipendenti ed equiprobabili, $\sigma_a^2 = \frac{M^2-1}{3} = R_a(m)$.

Si riconosca come il segnale $S_{RF}(t)$ sia il segnale in uscita da una PAM, modulato attorno a una frequenza f_0. È quindi un segnale in uscita da una PAM in BANDA PASSANTE.

$$S_S^{RF} = \frac{S_S(f-f_0) + S_S(f+f_0)}{4}$$

$$S_S(f) = \frac{1}{T} S_a(f)|G_T(f)|^2 = \frac{1}{T} R_a(0)\,|G(f)|^2 = \frac{M^2-1}{3T}|G_T(f)|^2$$

$$S_S^{RF} = \frac{M^2-1}{12\,T}(|G_T(f-f_0)|^2 + |G_T(f+f_0)|^2)$$

$$P_{RF} = \frac{M^2-1}{12\,T}\int_{-\infty}^{\infty}(|G_T(f-f_0)|^2 + |G_T(f+f_0)|^2)df$$

$$P_{RF} = \frac{M^2-1}{12\,T}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|G_T(f-f_0)|^2 df + \int_{-\infty}^{\infty}|G_T(f+f_0)|^2 df\right)$$

Se volessimo ipotizzare $G_T(f) = \sqrt{G_{RCR}(f)}$

$$P_{RF} = \frac{M^2-1}{12\,T}\left(\int_{-\infty}^{\infty}G_{RCR}(f-f_0)df + \int_{-\infty}^{\infty}G_{RCR}(f+f_0)df\right)$$

$$P_{RF} = \frac{M^2-1}{12\,T}\int_{-\infty}^{\infty}2\,G_{RCR}(f-f_0)df$$

$$P_{RF} = \frac{M^2-1}{6\,T}\int_{-\infty}^{\infty}G_{RCR}(f-f_0)df = \frac{M^2-1}{6\,T}\int_{f_0-B}^{f_0+B}G_{RCR}(f)df\,,B = \frac{\alpha+1}{2T}$$

Che è la metà della potenza rispetto alla banda base.

2025-01-23

Un sistema di comunicazione impiega una banda $B = 30\,MHz$, una costellazione 16-QAM, un codice convoluzionale con tasso $r = \frac{5}{6}$ ed un impulso a radice di coseno rialzato con roll-off $\alpha = 0.25$.

a) **Determinare l'efficienza spettrale del sistema.**

$$\eta_{SP} = \frac{r\log_2 M}{1+\alpha} = \frac{{}^5/_6 \cdot 4}{{}^5/_4} = \frac{8}{3} = 2.67\frac{{}^{bit}/_{s}}{Hz}$$

b) **Determinare il tempo necessario a trasmettere 50 immagini di 1920×1080 pixels, nell'ipotesi in cui per trasmettere un pixel siano impiegati 24 bit.**
Calcoliamo il numero totale di bit da inviare

$$Dim = 50 \cdot 1920 \cdot 1080 \cdot 24 = 2.49 \cdot 10^9 bit$$

Devo però tenere conto del codice usato per trasmettere i dati nel calcolare il baud rate

$$R_B = \frac{r\log_2 M}{1+\alpha}B = \eta_{SP}B = 80\frac{Mbit}{s}$$

$$T_{totale} = \frac{Dim}{R_B} = 31.1\,s$$

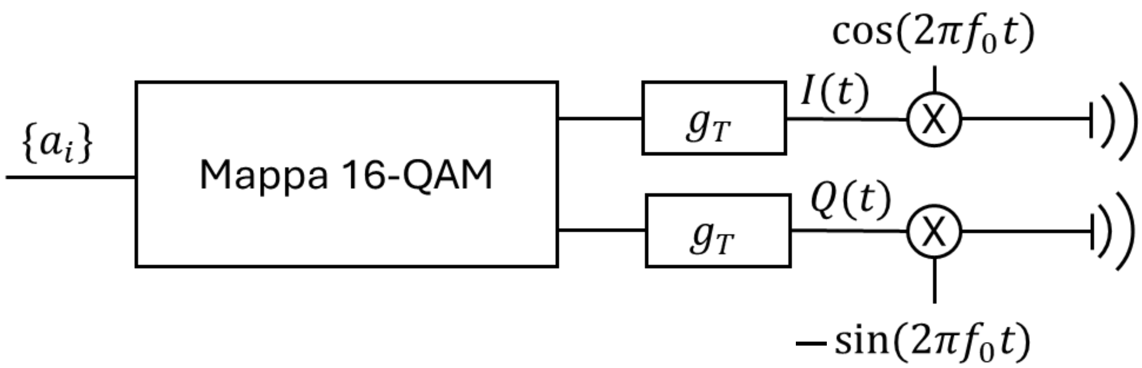
c) **Modificare il sistema al fine di dimezzare il tempo necessario al punto precedente, mantenendo invariata l'efficienza spettrale.**
Il modo migliore per raddoppiare il baud rate R_B, senza alterare η_{SP} è raddoppiare la banda B

$$B' = 2B = 60\,MHz$$

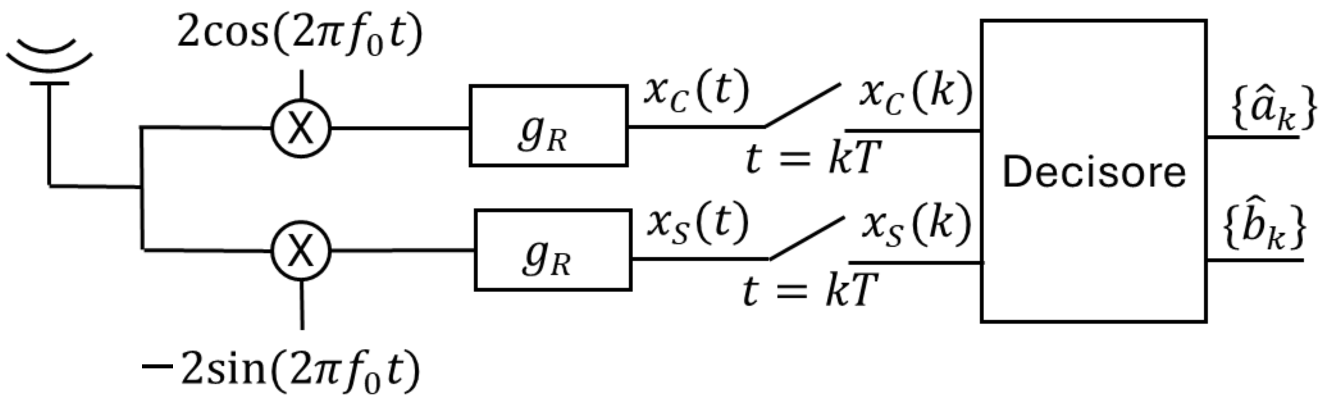
2025-01-07 (7) e 2025-06-25 (7)

Disegnare lo schema a blocchi di un sistema di comunicazione 16−QAM

Trasmettitore

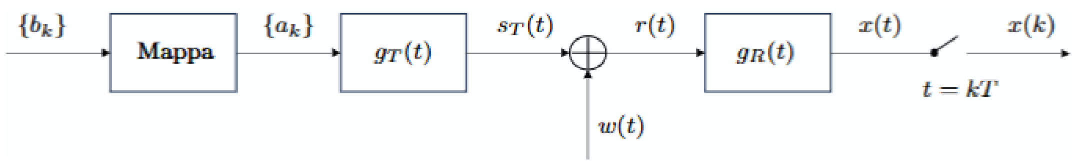


Ricevitore



2025-01-07 (8)

Dato il sistema PAM illustrato in figura dove $g_T(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$ e $w(t)$ è un processo aleatorio di rumore Gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $S_W(f) = \frac{N_0}{2}$.

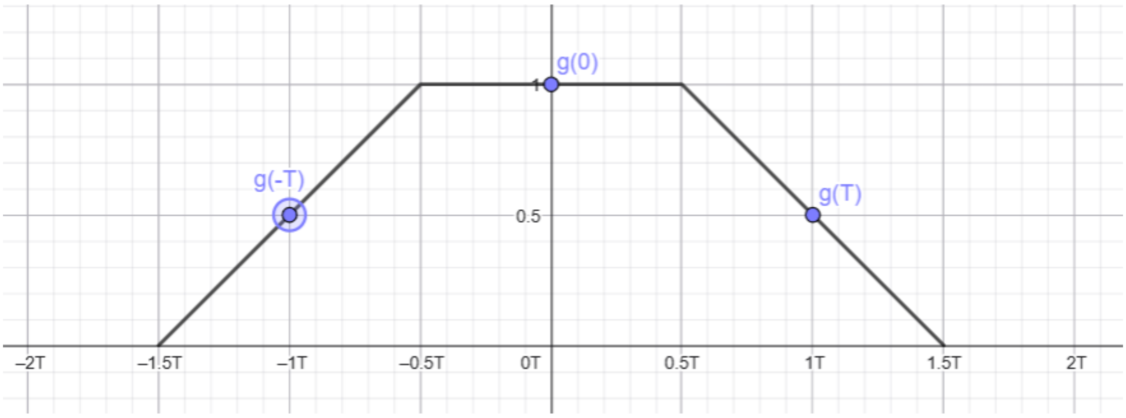


Calcolare il campione $x(k)$ ottenuto all'istante di campionamento $t = kT$ nell'ipotesi in cui $g_R(t) = rect\left(\frac{t}{2T}\right)$.

$$x(k) = a_k g(0) + \sum_{m \neq 0} a_{k-m} g(mT) + n(k) = a_k g(0) + ISI + rumore$$

$$g(t) = g_T(t) * g_R(t)$$

La convoluzione di due $rect$ con diverse ampiezze è una funzione trapezoidale del tipo



Si nota che gli unici valori di m t.c. $g(mT) \neq 0$ sono $m = \pm 1$, pertanto si può semplificare l'espressione dell'ISI:

$$x(k) = a_k g(0) + a_{k-1} g(T) + a_{k+1} g(-T) + n(k)$$

Serve ora caratterizzare il rumore $n(k)$, che sarà gaussiano, $n(k) \in \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2} E_{g_R}\right)$; con E_{g_R} che è l'energia "acquisita" in ricezione.

$$E_{g_R} = \int_{-\infty}^{\infty} |g_R(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G_R(f)|^2 df = 2T$$

Segue quindi che $n(k) \in \mathcal{N}(0, N_0 T)$

2024-01-08 (6)

Un sistema di comunicazione utilizza simboli indipendenti ed equiprobabili che assumono valori in $\{-1 + j, 0, 1 + j\}$.

a) Calcolare il valore medio dei simboli

$$\eta_a = E\{a_i\} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} a_i = \frac{-1 + j + 0 + 1 + j}{3} = \frac{2}{3} j$$

b) Calcolare la funzione di autocorrelazione dei simboli

$$R_a(m) = E\{a_n \, a_{n-m}^*\}$$

Analizziamo il caso $m = 0$

$$R_a(0) = E\{|a_n|^2\} = \frac{2 + 0 + 2}{3} = \frac{4}{3}$$

Per il caso $m \neq 0$ possiamo sfruttare *l'indipendenza* dei simboli

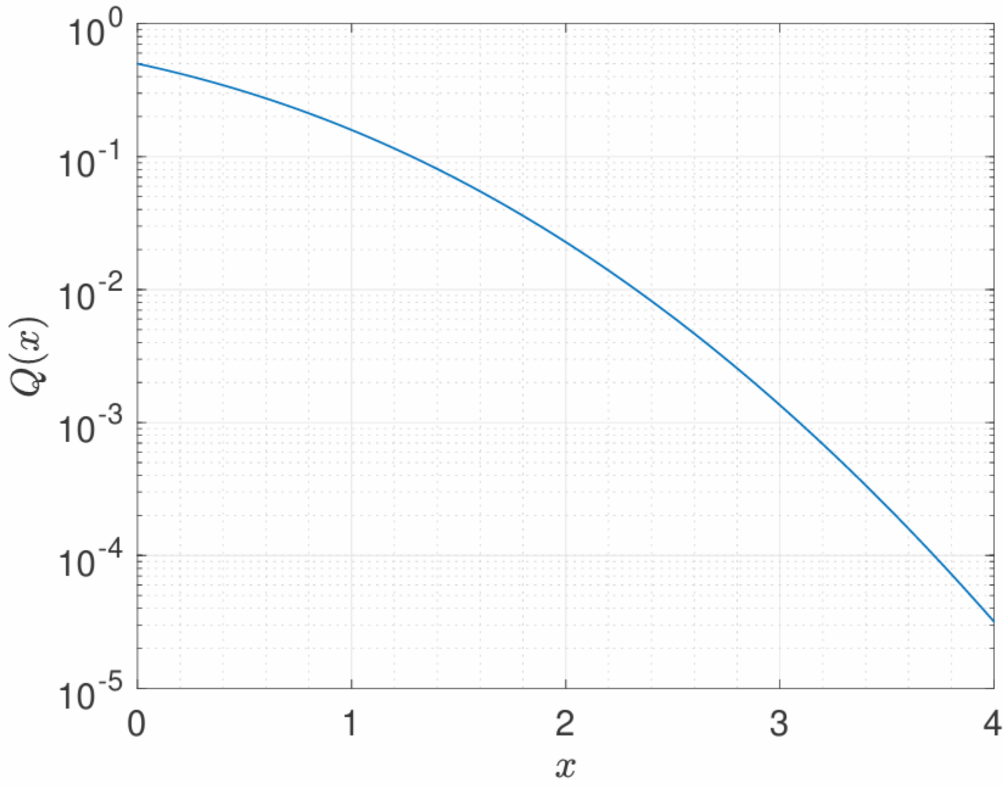
$$E\{a_n \, a_{n-m}^*\} = E\{a_n\} \, E\{a_{n-m}^*\} = E\{a_n\} \, (E\{a_n\})^*$$

$$R_a(m) = \frac{2}{3} j \times -\frac{2}{3} j = \frac{4}{9}$$

$$R_a(m) = \begin{cases} \frac{4}{3} & m = 0 \\ \frac{4}{9} & m \neq 0 \end{cases}$$

Materiale utile

Grafico $Q(x)$



Formule goniometriche e trasformate di Fourier da ricordare

È fortemente consigliato conoscere a memoria TUTTE le seguenti formule.

Trasformate continue di Fourier		**Formule goniometriche**	
$rect(t/T) \rightleftharpoons T\ sinc(fT)$	$e^{-t}u(t) \rightleftharpoons \dfrac{1}{1/T + 2\pi jf}$	$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$	$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$
$sinc(t/T) \rightleftharpoons T\ rect(fT)$	$u(t) \rightleftharpoons \dfrac{1}{2\pi jf}$	$\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx = \dfrac{\pi}{2}$	
$triag\left(\dfrac{t}{T}\right) \rightleftharpoons T\ sinc^2(fT)$	$\delta(t) \rightleftharpoons 1$	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	
$x(t-t_0) \rightleftharpoons X(f)\, e^{-2\pi fjt_0}$	$[x(t)]^* \rightleftharpoons X^*(-f)$	$\dfrac{d}{dx} \tan x = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$	
$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \rightleftharpoons \dfrac{1}{2}X(f-f_0) + \dfrac{1}{2}X(f+f_0)$		$\dfrac{d}{dx}\tan^{-1} x = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\int_0^{\infty} \dfrac{1}{(1+x^2)^2} dx = \dfrac{\pi}{4}$
$x(t)\sin(2\pi f_0 t) \rightleftharpoons \dfrac{1}{2j}X(f-f_0) - \dfrac{1}{2j}X(f+f_0)$		$\int_{-a}^{a} \dfrac{1}{1+x^2} dx = 2\int_0^{a} \dfrac{1}{1+x^2} dx = 2\tan^{-1} a$	
$\int_{-\infty}^{t} x(\alpha)d\alpha \rightleftharpoons \dfrac{X(f)}{2\pi jf} + \dfrac{X(0)}{2}\delta(f)$		$\cos x = \dfrac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$	$\sin x = \dfrac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$
$\dfrac{d}{dt}x(t) \rightleftharpoons 2\pi jf\, X(f)$		$Re\{z\} = \dfrac{z}{2} + \dfrac{z^*}{2}$	$Im\{z\} = \dfrac{z}{2j} - \dfrac{z^*}{2j}$