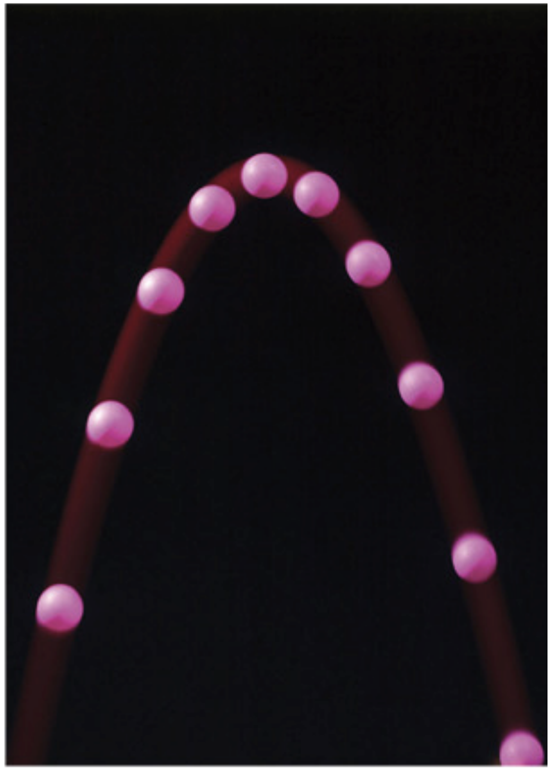
Moto di un corpo rigido

- Per corpo rigido si intende un particolare **sistema di punti materiali in cui le distanze, tra due qualunque dei suoi punti, non variano nel tempo** indipendentemente dalle condizioni in cui il corpo rigido si viene a trovare: un corpo rigido non subisce deformazioni.

- Assimilabile al moto di un punto materiale

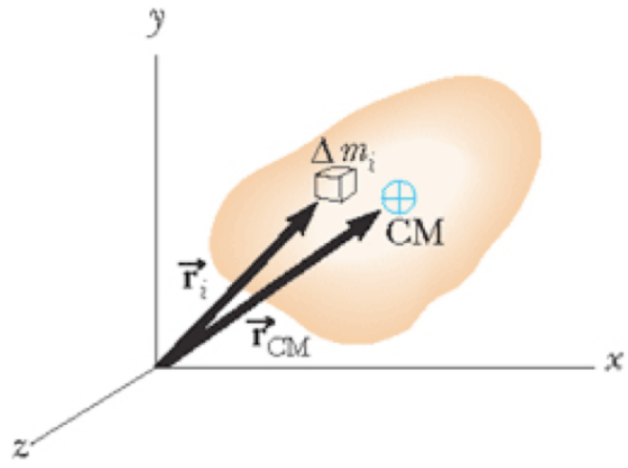


- Moto di un corpo rigido

- I vari punti del corpo hanno moti differenti

CM per un corpo rigido: memo

- Nel caso ad es in cui la materia del corpo rigido esteso di massa M sia distribuita nel suo volume in modo costante ed uniforme
  - la posizione del CM è data da



$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho\,dV = \frac{1}{V}\int \vec{r}\,dV$$

Memo: moto CM di un sistema di PM

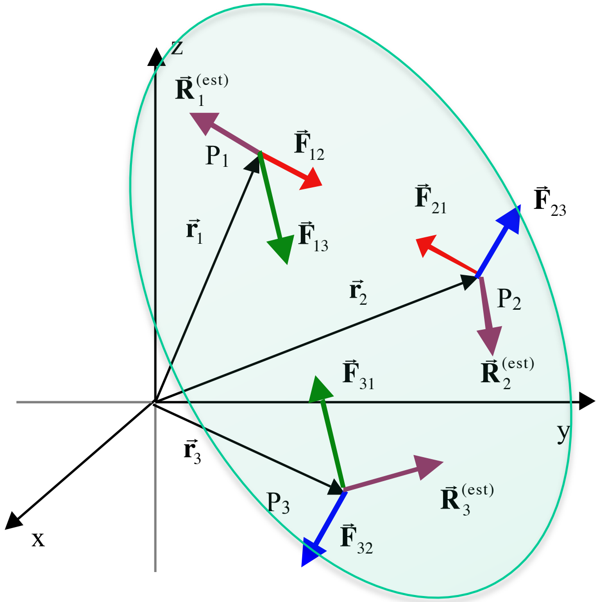
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M}$$

$$z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M}$$



$$\underbrace{\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}}_{\text{per definizione}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}\right) = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\right)}_{\text{perchè } \frac{1}{M} \text{ è costante}} = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M}}_{\substack{\text{perchè la derivata si può} \\ \text{distribuire sulla somma} \\ \text{e perchè } m_i \text{ è costante}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$\vec{P}_{tot} = \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

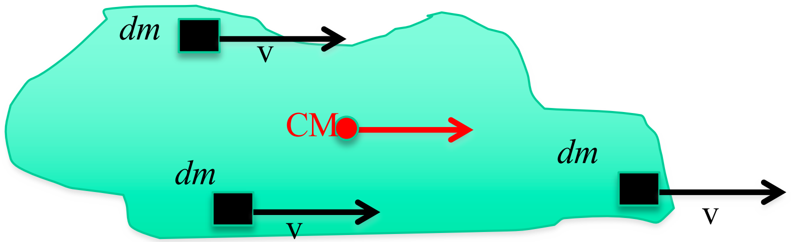
$$\boxed{\vec{P}_{CM} = M\,\vec{v}_{CM} = \vec{P}_{tot}}$$

Moti del corpo rigido: es. pura traslazione

- Moto di **pura traslazione**: *tutte le particelle che costituiscono il corpo rigido subiscono lo stesso spostamento nello stesso intervallo di tempo*
- tutti i punti del corpo rigido si muovono con la stessa velocità, ***v che*** coincide con la velocità del CM

La velocità dei vari punti del corpo rigido relativa al centro di massa è quindi nulla

$$\underbrace{\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{CM}}{dt}}_{\text{per definizione}} \qquad \vec{v}_{CM} = \frac{\int \vec{v}\,dm}{M} = \vec{v}\,\frac{\int dm}{M} = \vec{v} \qquad \boxed{\vec{P}_{CM} = \mathrm{M}\,\vec{v}_{CM} = \mathrm{M}\,\vec{v}}$$



- Nota : se il moto non è di pura traslazione vale:

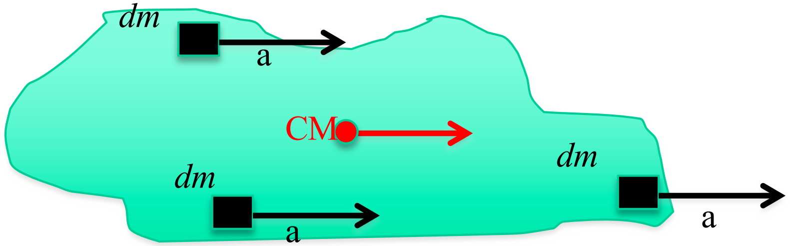
$$\vec{v}_{CM} = \frac{\int \vec{v}(x,y,z)\,dm}{M} \qquad \boxed{\vec{P}_{CM} = \mathrm{M}\,\vec{v}_{CM} = \mathrm{M}\frac{\int \vec{v}(x,y,z)\,dm}{M}}$$

Pura traslazione di un corpo rigido: accelerazione del CM

- Quale sarà la "dinamica" del punto centro di massa? Vediamo cosa accade all' accelerazione in un moto di pura traslazione

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\int \vec{a} dm}{M} = \vec{a} \frac{\int dm}{M} \equiv \vec{a} \qquad \boxed{\Rightarrow \mathrm{M}\, \vec{a}_{CM} = \mathrm{M}\vec{a}}$$

- In un moto di pura traslazione del corpo rigido
  - Tutti i punti del corpo rigido hanno la stessa accelerazione
  - l'accelerazione coincide con l'accelerazione del CM



- Nota : se il moto non è di pura traslazione vale:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\int \vec{a} dm}{M} = \frac{\int \vec{a}(x,y,z) dm}{M} \qquad \boxed{\Rightarrow \mathrm{M}\vec{a}_{CM} = \int \vec{a}(x,y,z) dm}$$

Memo sistema di punti materiali: Iª equazione cardinale

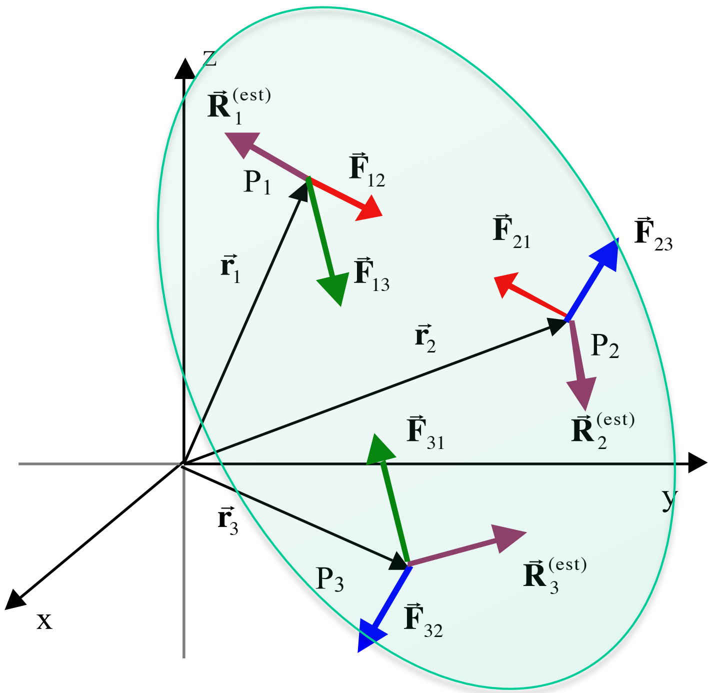
$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i^{(est)}$$

- ***Prima equazione cardinale dei sistemi***: La derivata della quantità di moto totale di un sistema è uguale alla risultante delle sole forze esterne

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$$

$$= M\,\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i^{(est)}$$

$$M\vec{\mathbf{a}}_{CM} = \vec{\mathbf{R}}^{(est)}$$



- ***Secondo teorema del CM***: il C.M. di un sistema di punti materiali si muove come un punto di massa totale M soggetto alla sola risultante delle forze esterne

Corpo rigido: Iª equazione cardinale

$$M\ \vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \vec{\mathrm{R}}^{(est)}$$

- ***Prima equazione cardinale per un corpo rigido***: La derivata della quantità di moto totale di un sistema è uguale alla risultante delle sole forze esterne

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{\mathrm{R}}^{(est)}$$

- ***Secondo teorema del CM per un corpo rigido***: il C.M. di un corpo rigido si muove come un punto di massa totale M soggetto alla sola risultante delle forze esterne

- Questa relazione ci permette di enunciare il principio di **conservazione della quantità di moto**: ***quando la risultante delle forze esterne agenti sul corpo rigido è nulla, la quantità di moto totale (e quindi del CM) del sistema rimane costante in modulo, direzione e verso***

Moto del corpo rigido:Lavoro fatto dalle forze interne

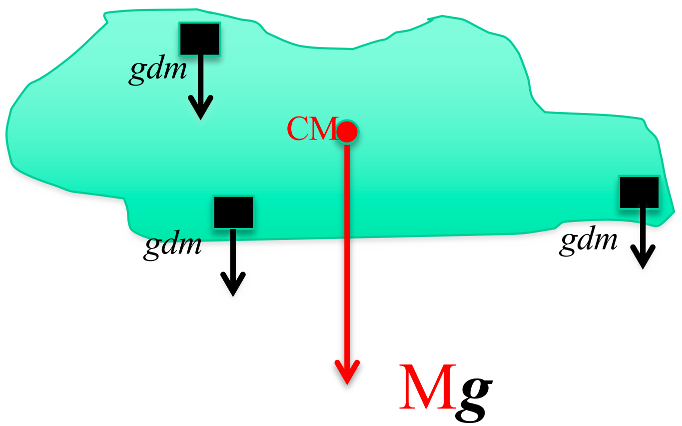
- Lavoro elementare fatto dalle forze interne nel caso di un corpo rigido

$$dL_{ij} = \overrightarrow{F_{ij}} \cdot d\vec{r}_i + \overrightarrow{F_{ji}} \cdot d\vec{r}_j = \overrightarrow{F_{ij}} \cdot d\vec{r}_i - \overrightarrow{F_{ij}} \cdot d\vec{r}_j = \overrightarrow{F_{ij}} \cdot \left(d\vec{r}_i - d\vec{r}_j\right) = 0$$

- Nel caso dei corpi rigidi, a differenza del caso di un sistema di pm le **forze interne non compiono lavoro**
  - Dalla definizione di corpo rigido deriva che le distanze tra due punti qualsiasi del corpo stesso rimangono invariate nel tempo
  - il lavoro delle forze interne è legato alle variazioni di tale distanza
  - per un corpo rigido $d\vec{r}_i = d\vec{r}_j$

Nel caso dei corpi rigidi dunque, solo le forze esterne compiono lavoro

- *Solo le forze esterne determinano la dinamica del moto del centro di massa*



- I equazione cardinale della dinamica
  - vale per qualunque tipo di moto del CM

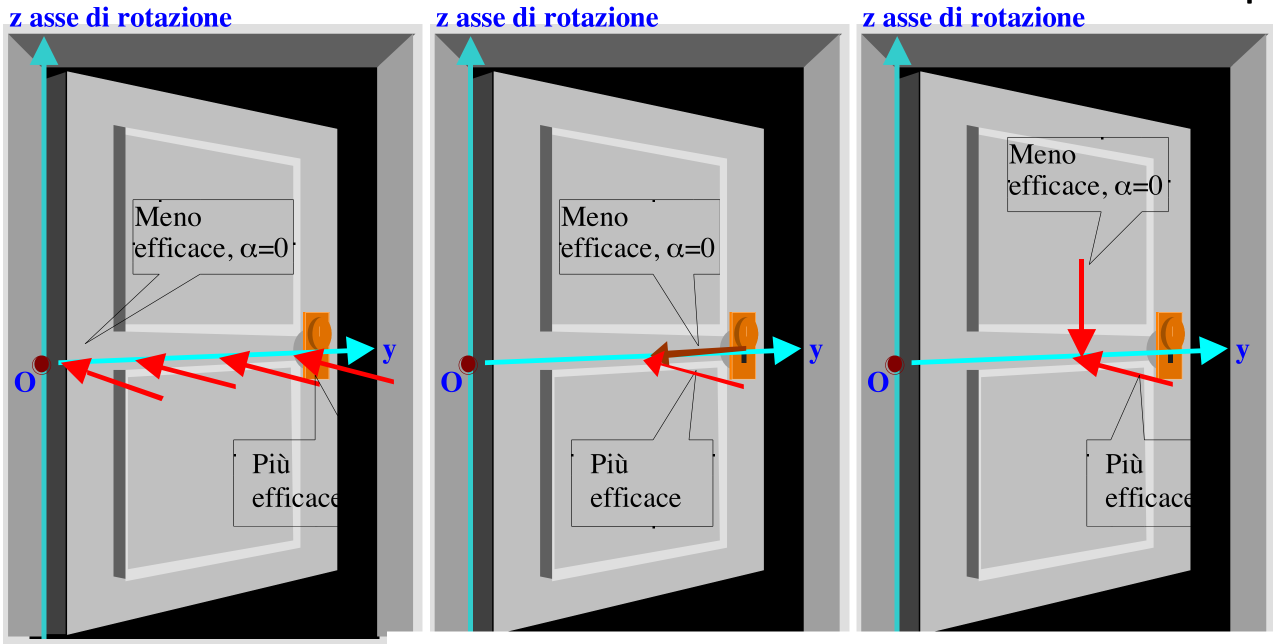
$$M\,\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \vec{R}^{(est)}$$

  - Es. moto di un corpo rigido sotto la sola azione della gravità

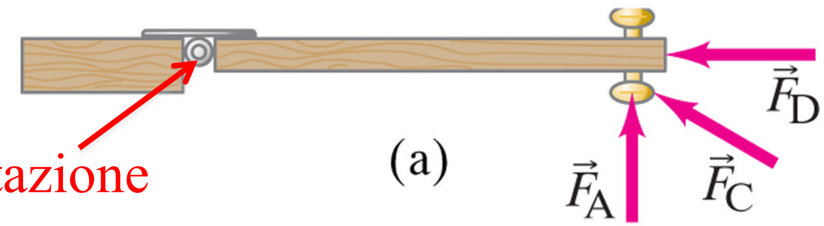
$$M\,\boldsymbol{a}_{CM} = \int \boldsymbol{a}\,dm = \int \boldsymbol{g}\,dm = M\boldsymbol{g}$$

Dinamica rotazionale del corpo rigido

- Le Forze definiscono la dinamica di un punto materiale, la dinamica del moto del centro di massa ed anche la dinamica rotazionale di un corpo rigido



Porta in rotazione vista dall'alto



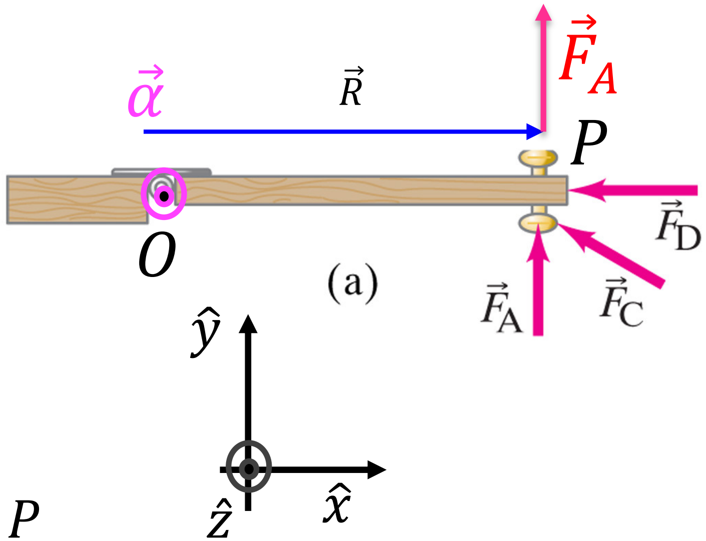
Asse di rotazione

(a)

- È esperienza comune che la rotazione di corpi rigidi estesi è causata dalla applicazione delle forze
    - la messa in rotazione dipende dal punto di applicazione della forza (rispetto all'asse di rotazione) e dalla forza

Dinamica rotazionale del corpo rigido (2)

- Porta incernierata nei suoi cardini (può ruotare attorno a un asse parallelo a $\hat{z}$)
  - l'applicazione di una forza sulla maniglia ortogonale a $\hat{z}$ provoca un' accelerazione angolare α

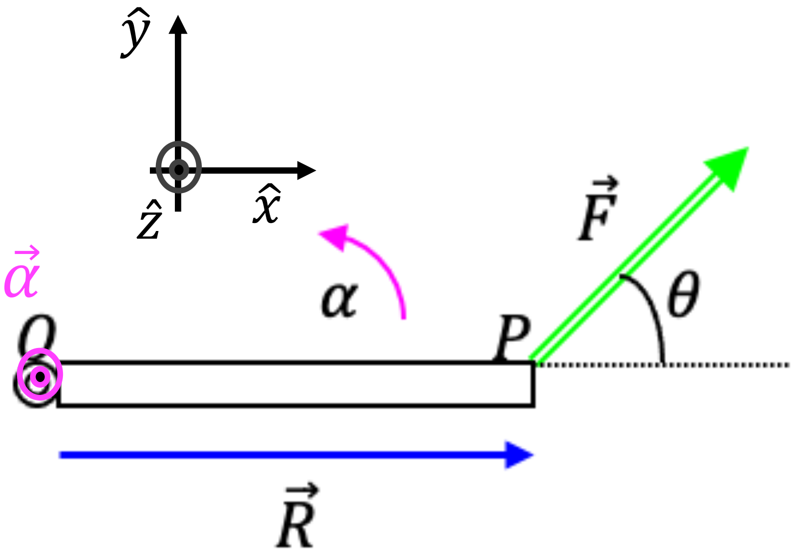


- L'accelerazione angolare è <u>proporzionale</u>:
  - al modulo della <u>forza</u>
  - alla <u>distanza</u> R del punto di applicazione P dall'asse di rotazione O
  - al seno dell'angolo fra forza e vettore $\overrightarrow{OP}$ $(\vec{R})$:

$$\alpha \propto \left|\vec{F}\right| R \sin\theta$$

- $\vec{\alpha}$ è perpendicolare ai vettori $\vec{F}$ ed $\vec{R}$ e diretta lungo l'asse di rotazione

Dinamica rotazionale del corpo rigido (3)



- Consideriamo una sbarretta incernierata in un estremo O
  - l'applicazione di una forza nell'altro estremo P ortogonale a $\hat{z}$ provoca una accelerazione angolare α
- L'accelerazione angolare è proporzionale:
  - al modulo della forza
  - alla distanza R del punto di applicazione P dall'asse di rotazione O
  - al seno dell'angolo fra forza e vettore $\overrightarrow{OP}(\vec{R})$:

$$\alpha \propto \left|\vec{F}\right| R \sin\theta$$

- $\vec{\alpha}$ è perpendicolare ai vettori $\vec{F}$ ed $\vec{R}$ e diretta lungo l'asse di rotazione

Momento di una Forza rispetto a un polo O

Poiché la messa in rotazione avviene sempre con modalità simili ai casi precedenti (con in più la **regola della mano destra per il verso di $\vec{\alpha}$**) si **definisce**:

- **momento di una forza rispetto ad un polo O**

$$\vec{\tau}_o = \vec{R} \wedge \vec{F}$$

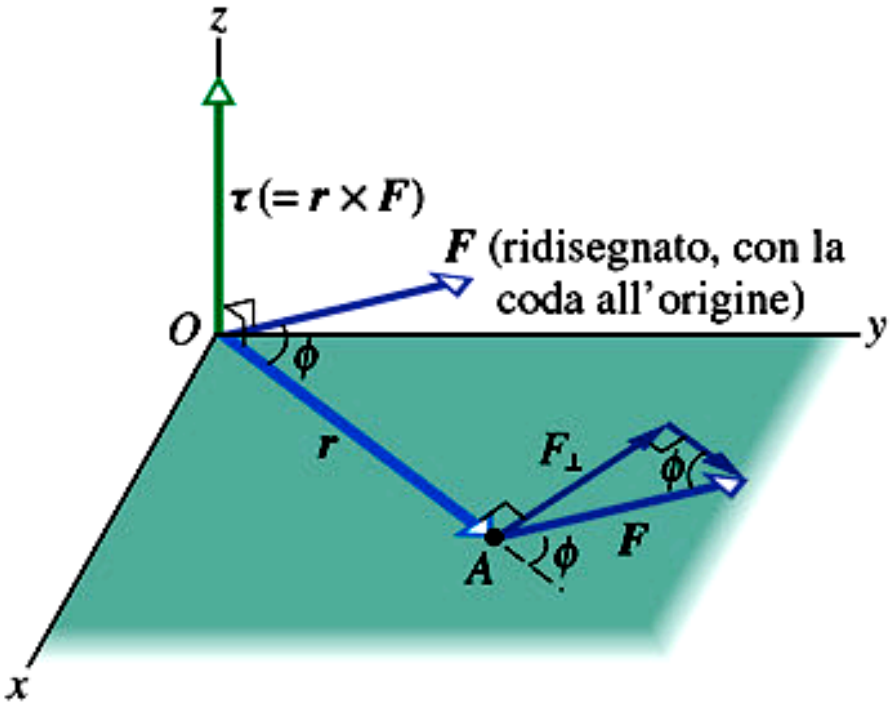
  - è una grandezza fisica **vettoriale**

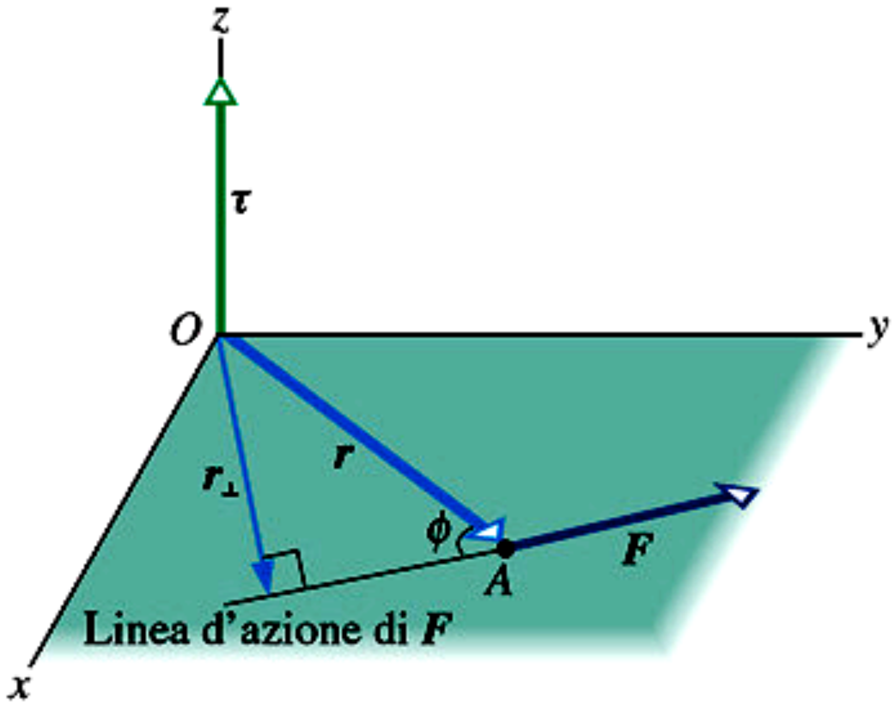
- $[\vec{\tau}] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$
  - non si usa, in questo caso, il Joule, perché non ha niente a che vedere con un'energia o un lavoro
  - è nullo se la forza è parallela al vettore $\vec{R}$

- se vi è rotazione attorno ad un **asse (che indicheremo con $\hat{z}$) come negli esempi visti, quello che conta è il momento assiale**, definito come la proiezione del momento sull'asse $\hat{z}$

$$\tau_z = \left(\vec{R} \wedge \vec{F}\right)_z$$

Momento di una Forza rispetto a un polo O per una forza ortogonale asse di rotazione (2)





$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \tau = r\,F_{\perp} = r_{\perp}\,F$$

Braccio della forza=$r_{\perp} \equiv b$

- Il momento della forza è **positivo** se la rotazione attorno all'asse di rotazione (asse *z*), causata dal momento della forza ***F***, è **antioraria**

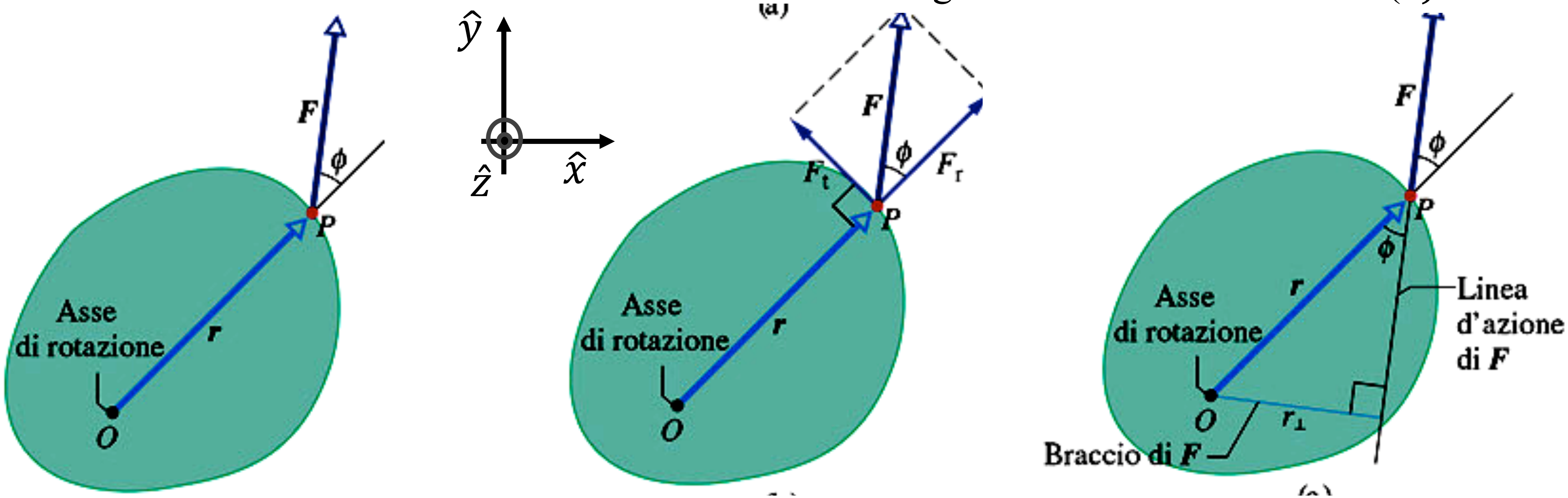
Nell'esempio $\vec{\tau}_o = \vec{R} \wedge \vec{F} = \tau_z \hat{z} = +bF\hat{z}$

Corpo rigido libero di ruotare attorno ad un asse fisso

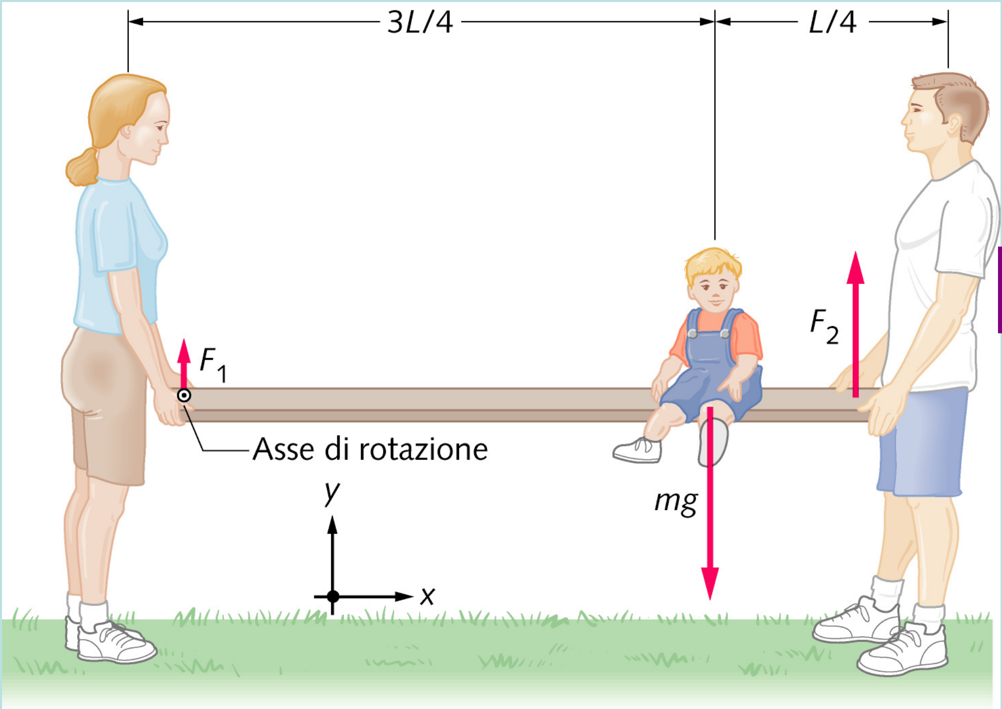
- In questo caso la rotazione è possibile solo attorno all'asse di rotazione
  - la messa in rotazione dipende non direttamente dalla forza applicata, ma ***dalla componente lungo l' asse di rotazione ($\hat{z}$ nell'esempio) del momento della forza calcolato rispetto ad un polo appartenente all'asse di rotazione***

- La componente lungo l'asse di rotazione del momento della forza, si chiama ***momento assiale*** o ***momento torcente***

Corpo rigido visto in una sezione ortogonale all'asse di rotazione ($\hat{z}$)



Es. equilibrio



$$\boxed{F_1 + F_2 = mg}$$

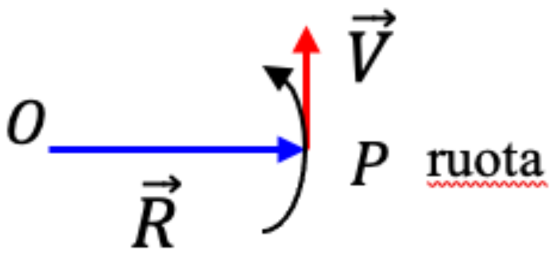
$$\boxed{F_2 L - mg\,(\tfrac{3}{4})L = 0}$$

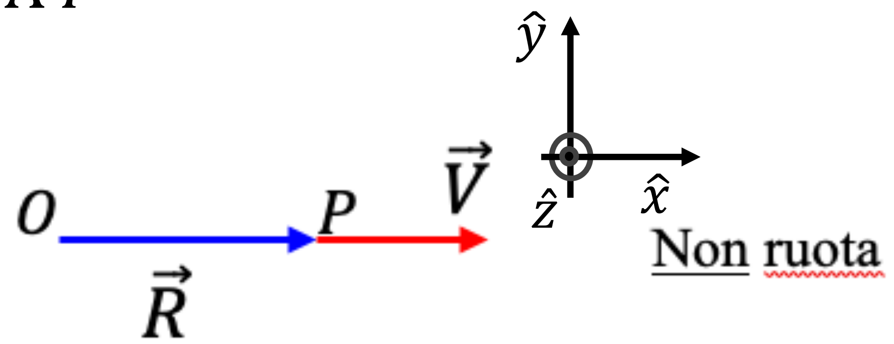
$$\boxed{\begin{aligned} F_2 &= \tfrac{3}{4}\,mg \\ F_1 &= \tfrac{1}{4}\,mg \end{aligned}}$$

Momento angolare rispetto a un polo per un pm

Si definisce **momento angolare di un punto materiale rispetto ad un polo *O*** la grandezza:

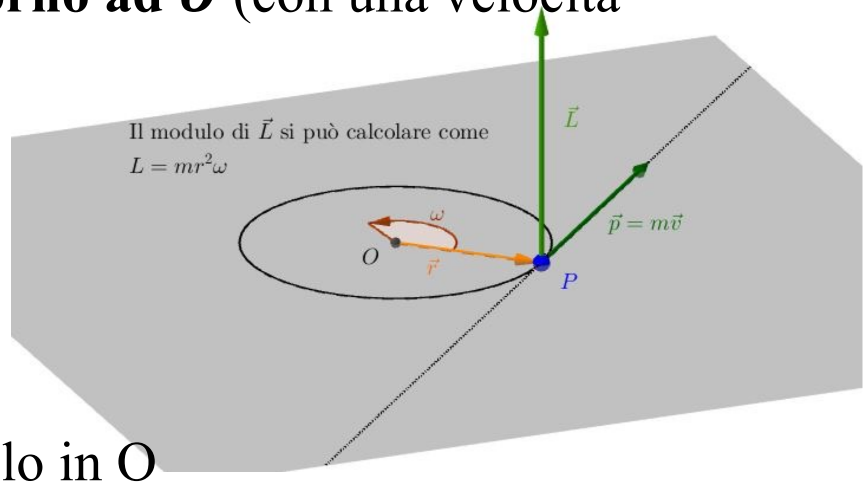
$$\vec{L}_o = \vec{R} \wedge m\vec{V} = \vec{R} \wedge \vec{P}$$





- $\vec{L}_o$ esprime **se il punto sta ruotando attorno ad *O*** (con una velocità angolare $\vec{\omega}$ diretta come $\vec{R} \wedge \vec{V}$)
- è una grandezza fisica vettoriale
- $[\vec{L}] = \mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$
- è anche chiamato "momento della quantità di moto"
- per un moto circolare nel piano xy con polo in O

$$L_z = mV_\theta R = mR^2\omega$$



Relazione tra Momento angolare e Momento delle forze rispetto a un polo per un pm

- **Teorema:** la derivata rispetto al tempo del momento angolare di un punto materiale è pari alla somma vettoriale dei momenti agenti sul punto materiale

$$\vec{\tau}_{totale} = \frac{d\vec{L}_o}{dt} \qquad\qquad \vec{\tau}_{totale} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i$$

N.B. Momento angolare e momento delle forze devono essere definiti rispetto allo stesso polo *O*

- **Dimostrazione**

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{R} \wedge m\vec{V}\right) = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right) \wedge m\vec{V} + \vec{R} \wedge \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right)$$

$$= \vec{V} \wedge m\vec{V} + \vec{R} \wedge \sum \vec{F} \;\; = \vec{R} \wedge \sum \vec{F} = \vec{\tau}_{totale}$$

- **Legge di conservazione del momento angolare**

Conseguenza importante

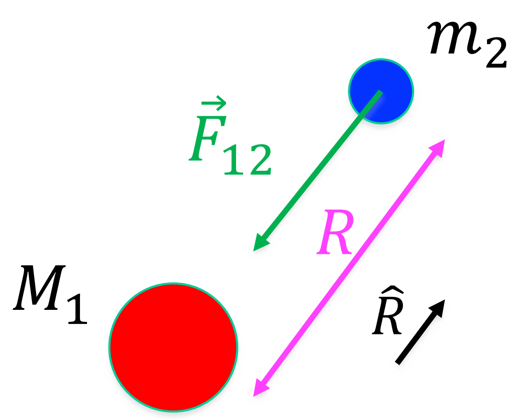
$$\vec{\tau}_{totale} = \frac{d\vec{L}_o}{dt} \qquad \Longrightarrow \vec{\tau}_{totale} = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = \overrightarrow{costante}$$

Forze Centrali e conservazione del momento angolare

Le forze centrali, sono forze che possono essere scritte nella forma generica

$$\vec{F}(R) = \hat{R} f(R)$$

dove $f(R)$ è una funzione scalare della distanza fra il centro di forza ed il punto di applicazione della forza stessa



- Es. di forze centrali
  - forza gravitazionale
  - forza coulombiana
  - la forza elastica bi e tri-dimensionale

$$\vec{F}_{12}(R) = -G\frac{M_1 m_2}{R^2}\hat{R}$$

- Calcolando il momento di una forza centrale rispetto al centro di forza si osserva immediatamente che tale momento è nullo, perché $\vec{R}$ e $\hat{R}$ sono per definizione paralleli

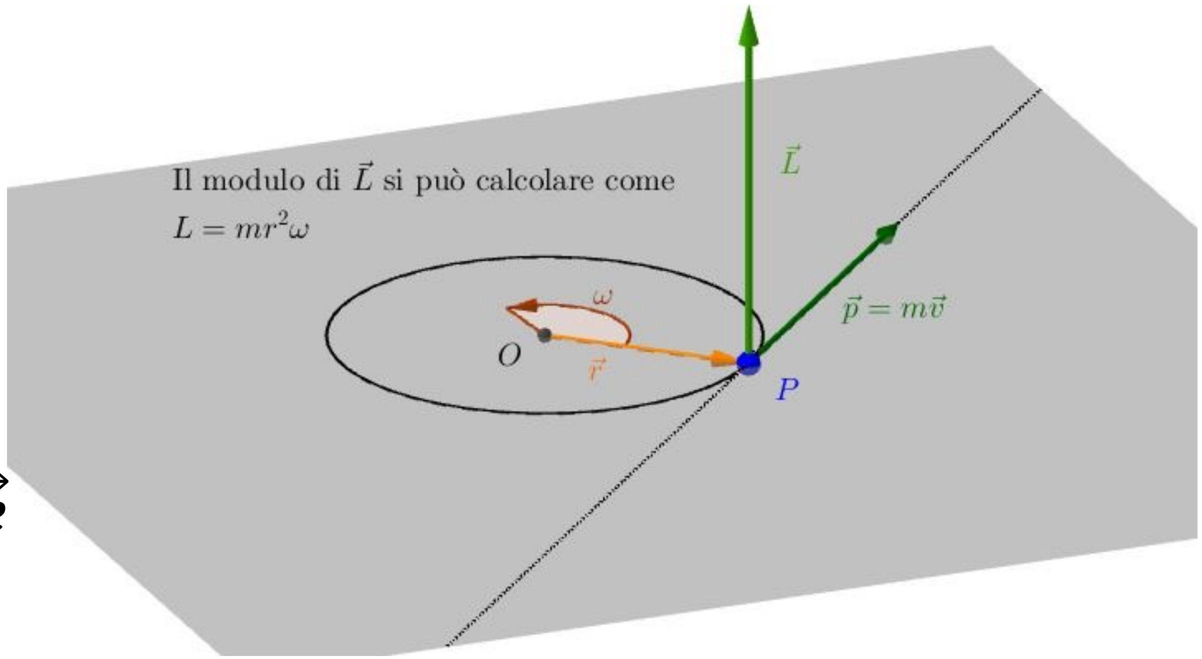
Pertanto in presenza di forze centrali il momento angolare calcolato rispetto al centro di forze si conserva, ovvero è una costante del moto
esempio: moto della terra intorno al sole

Es. moto della terra intorno al sole

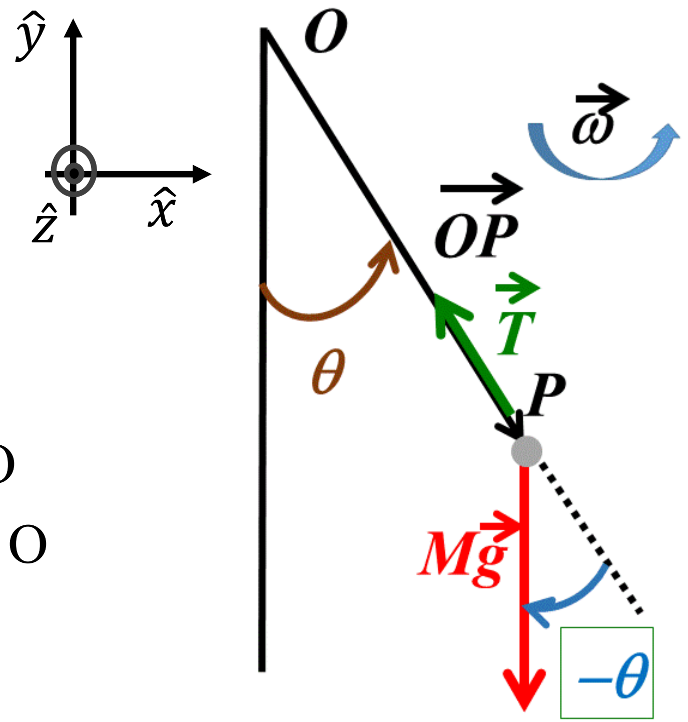
$$\vec{F}_{ST}(r) = -G\frac{M_S M_T}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{\tau}_O = \vec{r}\,\Lambda\vec{F}_{ST} = 0$$

$$\vec{\tau}_O = 0 \Leftrightarrow \vec{L}_O = \overrightarrow{costante}$$



Esempio il pendolo semplice



- è formato da una massa M sospesa ad un filo inestensibile di massa trascurabile di lunghezza l
- Forze agenti su M

  Forza di gravità e la tensione T del filo
- La massa M ruota attorno all'asse z passante per O
- Calcoliamo il momento delle forze rispetto al polo O

$$\vec{\tau}_{tot} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{OP} \wedge M\vec{g} = \tau_z \hat{z}$$

$$\tau_z = 0 - Mgl \sin\theta$$

- Calcoliamo il momento angolare rispetto allo stesso polo

$$\vec{L} = \vec{R} \wedge M\vec{V} = M\vec{R} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) = MR^2\vec{\omega} = Ml^2\vec{\omega} = Ml^2\omega\hat{z} = L_z\hat{z}$$

$$\Longrightarrow L_z = M\omega l^2 = Ml^2\dot{\theta}$$

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = Ml^2\ddot{\theta} = -Mgl\sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

da cui, semplificando i fattori comuni, abbiamo **riottenuto l'equazione del pendolo**

che per **piccole oscillazioni** ($\sin\theta \approx \theta$) da:

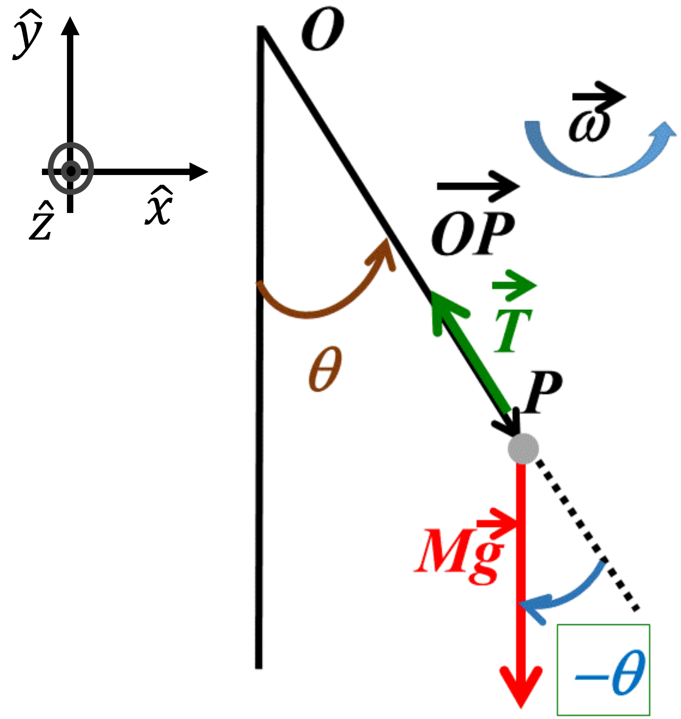
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$ la cui soluzione generale è $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

cioè un'**oscillazione armonica** dell'angolo $\theta(t)$, con pulsazione ω_0, e periodo T:

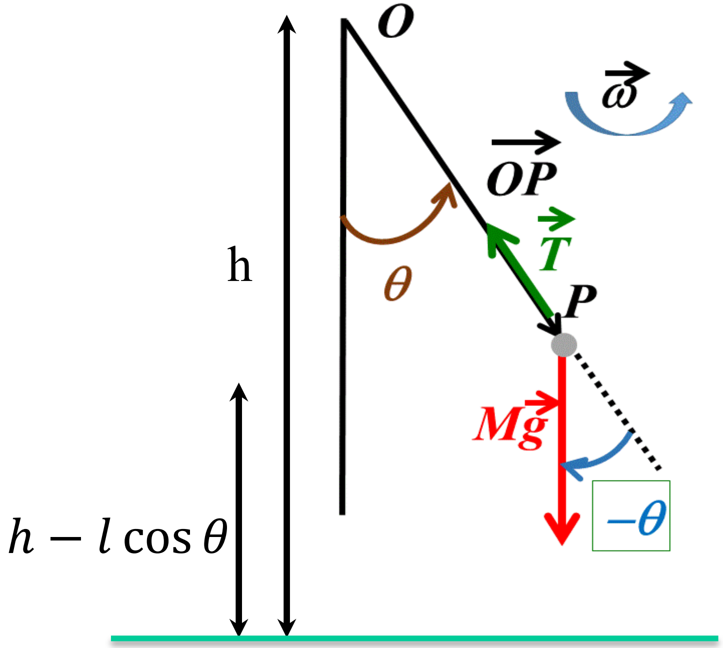
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



Dimostriamo ora che si può ricavare la stessa equazione utilizzando il principio di conservazione dell'energia meccanica

- Le forze agenti sul pendolo sono:
  - la forza di gravità: conservativa
  - la forza di tensione del filo che non compie lavoro perché è sempre ortogonale allo spostamento



- Pertanto l'energia meccanica si conserva
  - la quota della massa M rispetto alla superficie terrestre in funzione dell'angolo θ è

$$h - l\cos\theta$$

con h costante e incognita

$$E = K + U = \frac{Ml^2\dot{\theta}^2}{2} + Mg(h - l\cos\theta) = \text{costante}$$

- La derivata rispetto al tempo di una costante è nulla, per cui:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad = 2\frac{Ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta}}{2} + Mgl\sin\theta\,\dot{\theta} \qquad \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Esercizio

Considerare un satellite geostazionario di massa $m = 100$ kg in orbita circolare.

1) Calcolarne la velocità e la distanza dal centro della Terra.

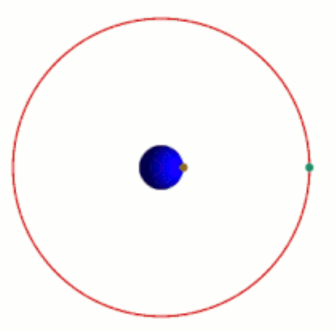
2) Calcolare l'energia cinetica, l'energia potenziale e l'energia totale (K, U, E) e il vettore $\vec{L}$ con polo nel centro della terra.

Soluzione

1) Imponiamo che la forza gravitazionale della Terra produca sul satellite l'accelerazione centripeta necessaria per mantenerlo sulla traiettoria:

$$-\frac{GM_T m}{R^2}\hat{R} = -m\frac{V^2}{R}\hat{R} \quad \Longrightarrow V^2 = \frac{GM_T}{R} = \omega^2 R^2 \quad \Longrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{GM_T}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}$$

Per i valori numerici occorre sostituire



$$GM_T = 6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24} = 4 \times 10^{14}\ \mathrm{m^3 s^{-2}}$$

$$T = T_{terra} = 1\ giorno = 8.64 \times 10^4\ s$$

- ottendendo
  - per la distanza dal centro della terra: $R = 4.2 \times 10^7$ m $= 42000$ Km $\sim 7\ R_T$
  - per la velocità: $V = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} = 11000\ {}^{km}/_{h}$

2) Calcolare l'energia cinetica, l'energia potenziale e l'energia totale (K, U, E) ed il vettore $\vec{L}$ con polo nel centro della terra.

2) Dalla condizione di moto circolare

$$-\frac{GM_T m}{R^2}\hat{R} = -m\frac{V^2}{R}\hat{R} \qquad \Rightarrow 2K = mV^2 = \frac{GM_T m}{R} = -U$$

$$\text{infatti se } U = -\frac{GM_T m}{R} \Longrightarrow -\frac{dU}{dR}\hat{R} = -\left(\frac{GM_T m}{R^2}\right)\hat{R}$$

$$E = K + U = -\frac{U}{2} + U = \frac{U}{2}$$

È quindi sufficiente calcolare K e poi sostituire

$$K = \frac{mV^2}{2} = \frac{mR^2}{2}\frac{4\pi^2}{T^2} = 470 \text{ MJ}$$

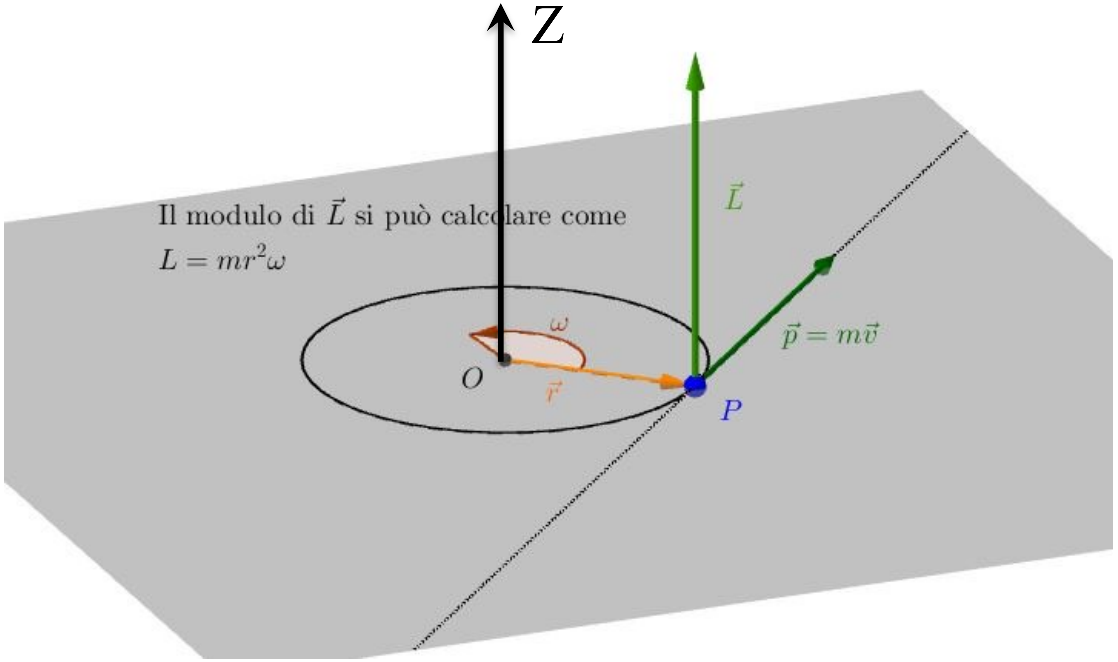
$$U = -2K = -940 \text{ MJ}$$

$$E = \frac{U}{2} = -470\ MJ$$

2) Calcolare K, U, E imponendo $U = 0$ a distanza infinita ed il vettore $\vec{L}$.

$\vec{L} = \vec{R} \wedge m\vec{V} = mR^2\vec{\omega} = mVR\hat{z} \Rightarrow |\vec{L}| = mR^2\omega = mR^2 \frac{2\pi}{T_{terra}} = 1.28 \times 10^{13}\ kgm^2s^{-1}$

$$V = \frac{2\pi}{T_{terra}} R$$



Esercizio

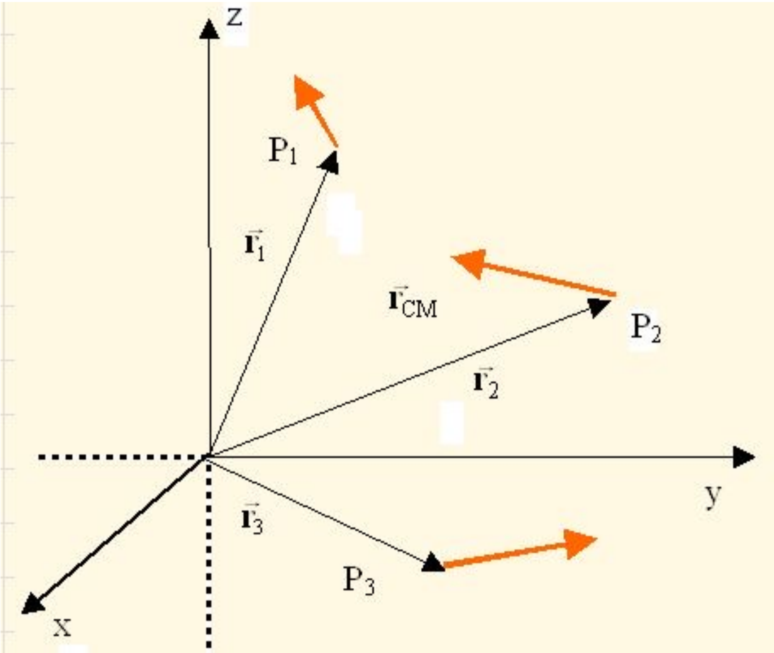
Calcolare la massa del Sole utilizzando come informazioni le misure del periodo di rivoluzione della Terra $\left(\boldsymbol{T_{TS} = 3.16 \times 10^{7}\ \mathrm{s}}\right)$ e della distanza Terra-Sole $\left(\boldsymbol{R_{TS} = 1\ U.A. = 1.495 \times 10^{11}\ \mathrm{m}}\right)$.

Soluzione

In approssimazione di orbita circolare:

$$\frac{G M_S M_T}{R_{TS}^2} = M_T \omega_T^2 R_{TS} \qquad \Longrightarrow M_S = \frac{\omega_T^2 R_{TS}^3}{G} = \frac{4\pi^2}{T_{TS}^2}\frac{R_{TS}^3}{G} = 2\times 10^{30}\ \mathrm{kg}$$

Momento angolare $\vec{L}$ per un sistema di punti materiali



$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum \vec{R}_i \Lambda \vec{P}_i$$

- Per non appesantire la scrittura sottintendiamo che il momento angolare è sempre calcolato rispetto a un polo (nell'es. in figura il polo è nell'origine)
- $\vec{R}_i$ rappresenta il vettore che punta dal polo scelto al pm i-esimo

- Per un sistema di punti materiali sussiste il seguente **Teorema**

$$\vec{\tau}_{est} = \sum \vec{R}_i \Lambda \vec{F}_{exti} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Quest'equazione è nota come la **seconda equazione cardinale della meccanica**

Il equazione cardinale per un Sistema di pm

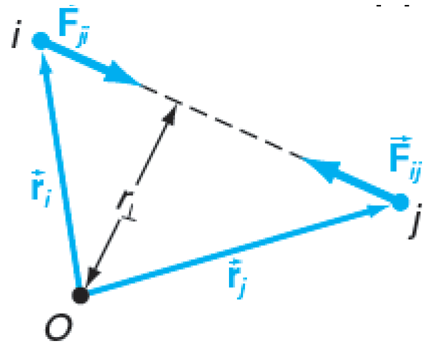
$$\vec{\tau}_{est} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Dimostrazione

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum \vec{R}_i \wedge \vec{P}_i \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i (\underbrace{\vec{\tau}_{inti}}_{=0} + \vec{\tau}_{esti}) = \vec{\tau}_{est}$$

per il terzo principio della dinamica

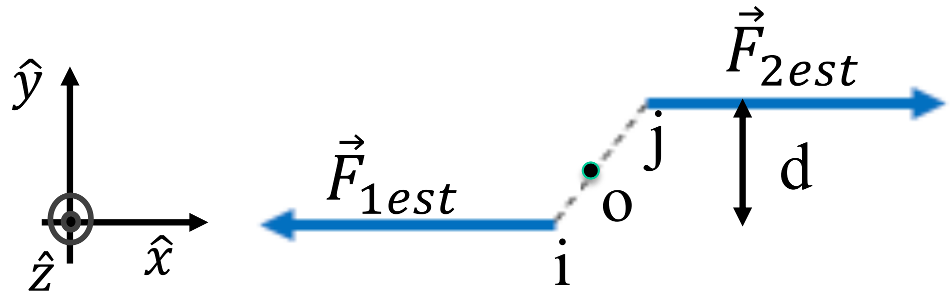
- I momenti delle forze interne sistema di pm si annullano essendo
  - le forze identiche in modulo
  - sulla stessa retta di applicazione
  - con verso dei momenti opposto



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{esti} = \vec{\tau}_{est}$$

Nota: Se due forze qualunque hanno stesso modulo e verso opposto non è detto che la somma dei loro momenti sia nulla

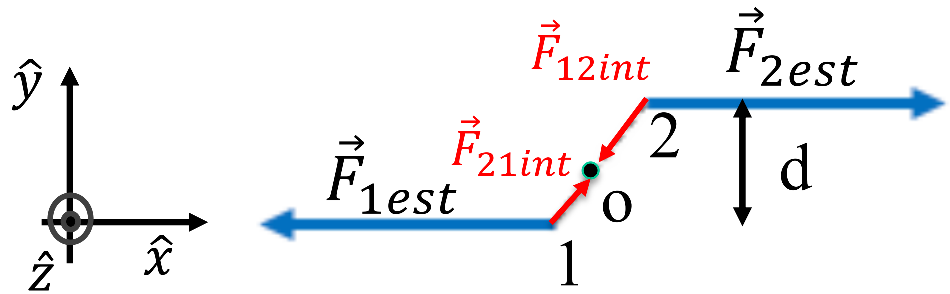
- es. sistema di 2 punti materiali sottoposti a due forze che non giacciono sulla stessa retta di applicazione che hanno lo stesso modulo (coppia di forze)



$$\vec{F}_{1\text{est}} + \vec{F}_{2\text{est}} = 0$$

$$\sum_i \vec{\tau}_{est} = \vec{R}_1 \wedge \vec{F}_{1\text{ext}} + \vec{R}_2 \wedge \vec{F}_{2ext} \quad = -\frac{d}{2}|\vec{F}|\hat{z} - \frac{d}{2}|\vec{F}|\hat{z} \quad = -d|\vec{F}|\hat{z} \quad \neq 0!$$

- Invece $\sum_i \vec{\tau}_{int} = 0$ per il terzo principio, <u>perché la forza e la sua reazione hanno la stessa retta di applicazione</u>

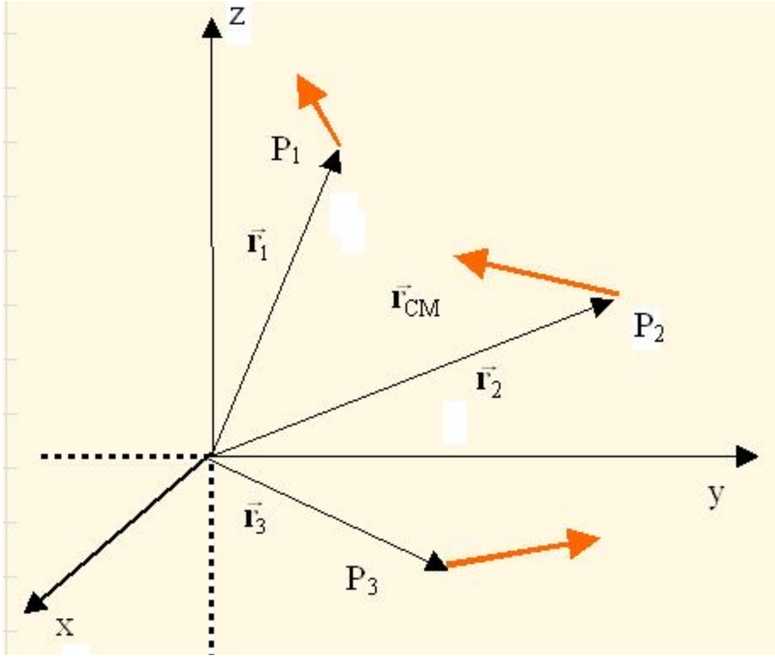


Legge di conservazione del momento angolare per un sistema di pm

$$\vec{\tau}_{est} = \sum_i \vec{\tau}_{esti} = \sum_i \vec{R}_i \wedge \vec{F}_{esti}$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum \vec{R}_i \wedge \vec{P}_i$$

$$\vec{\tau}_{est} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



Conseguenza importante

$$\vec{\tau}_{est} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \vec{\tau}_{est} \boxed{= 0 \Leftrightarrow \vec{L} = \overrightarrow{costante}}$$

Corpi rigidi: dinamica

- Corpi in cui le distanze fra i punti materiali che li costituiscono restano invariate
- Le equazioni fondamentali per la descrizione del loro moto sono
  - la **prima equazione cardinale**

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{\mathrm{R}}^{(est)}$$

  - la **seconda equazione cardinale**

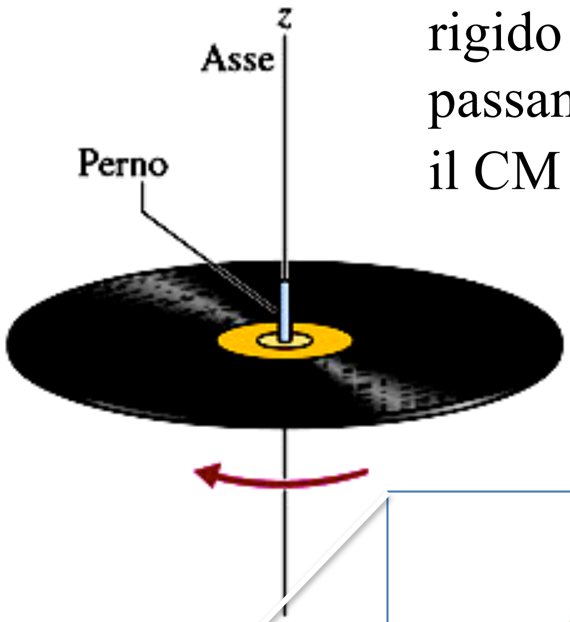
$$\vec{\tau}_{est} = \sum \vec{R}_i \Lambda \vec{F}_{exti} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Osservazione: la richiesta che la distanza fra i punti del sistema sia costante, ovvero l'indeformabilità del corpo rigido, fa sì che gli unici moti possibili per un corpo rigido siano

- la pura **traslazione (dovuta al moto del centro di massa)**
- la pura **rotazione intorno ad un asse**
- o una loro combinazione

Dobbiamo ora definire l'energia potenziale gravitazionale U, l'energia cinetica K e il momento angolare associato al moto di un CR

Esempi



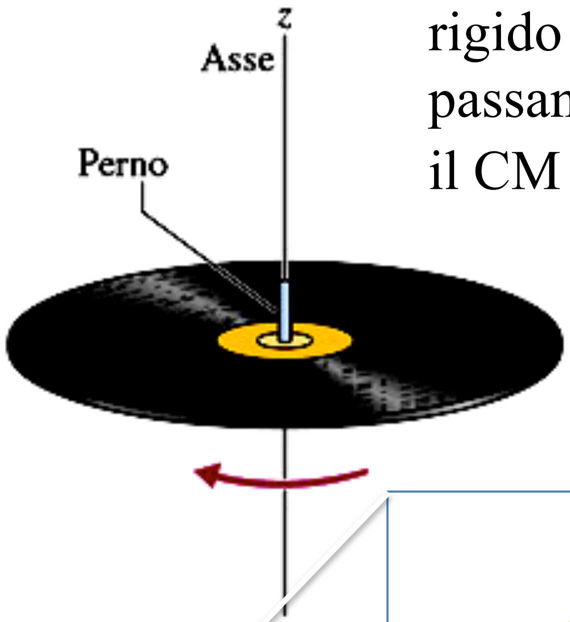
Rotazione di un corpo rigido attorno a un asse passante per il CM
il CM è fermo

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{R}^{(est)}$$

Moto Parabolico del CM e rotazione impartita dal giocoliere

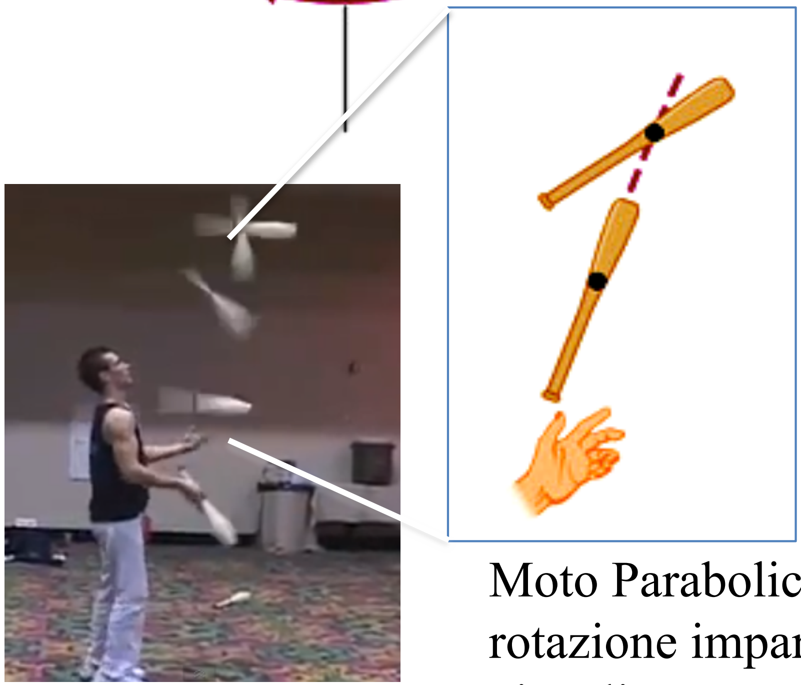
Chiave inglese colpita a uno degli estremi su un piano privo di attrito.
Il punto bianco è il CM.
Esso compie una traiettoria rettilinea perchè la forza peso è bilanciata dalla reazione vincolare.

Esempi



Rotazione di un corpo rigido attorno a un asse passante per il CM
il CM è fermo

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{R}^{(est)}$$



Moto Parabolico del CM e rotazione impartita dal giocoliere

Chiave inglese colpita a uno degli estremi su un piano privo di attrito.
Il punto bianco è il CM.
Esso compie una traiettoria rettilinea perchè la forza peso è bilanciata dalla reazione vincolare.

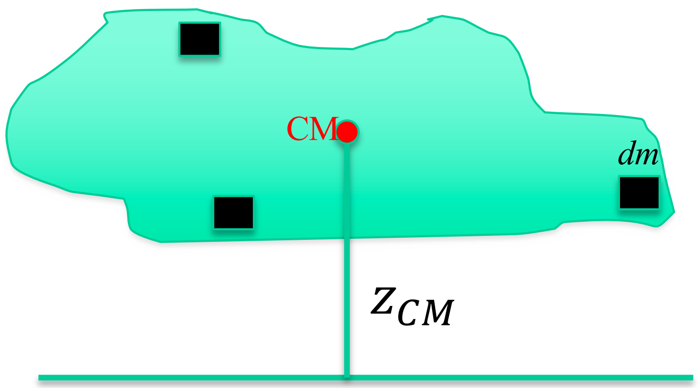
Energia potenziale gravitazionale per corpi rigidi e sistemi di pm

- L'energia potenziale gravitazionale di un sitema di PM è la stessa che si otterrebbe se tutta la massa fosse concentrata nel centro di massa
  - Dimostrazione

$$U_{grav} = \sum_i m_i g z_i = M\frac{g\sum_i m_i z_i}{M} = Mgz_{CM}$$

- Per un corpo rigido si ottiene lo stesso risultato

$$\frac{\sum_i m_i z_i}{M} \Rightarrow \quad \frac{1}{M}\int zdm = z_{CM}$$



Energia cinetica (II teorema di König) per Sistemi di PM

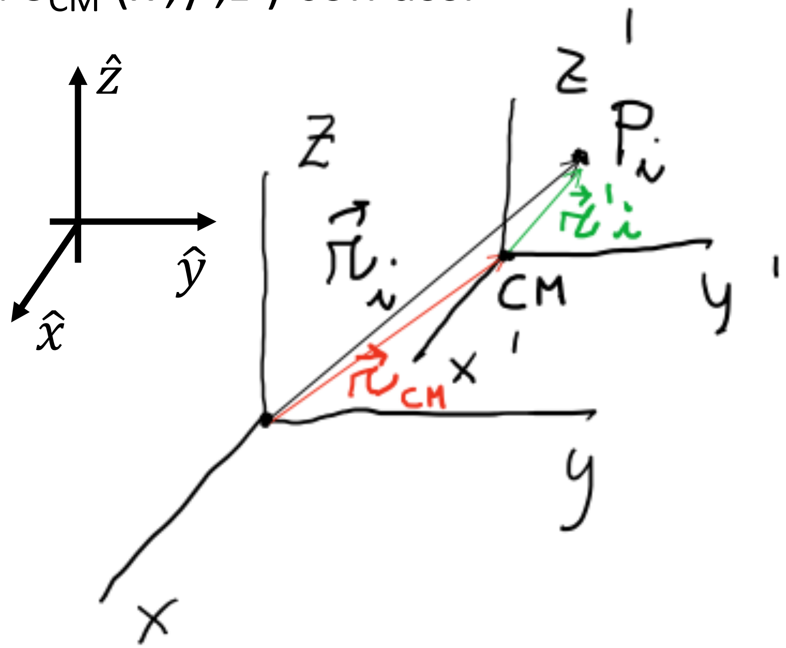
L'energia cinetica totale di un sistema di punti materiali è la somma dell'energia cinetica di traslazione del "centro di massa" (quella che avrebbe un corpo di massa pari a quella totale del sistema, con la velocità propria del centro di massa) e dell'energia cinetica dei pm come misurata in un SDR con origine solidale al CM e assi paralleli a quelli del laboratorio

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

Il Teorema di König: per l'energia cinetica di un sistema di PM

Dimostrazione

- Consideriamo un sistema di punti materiali
  Utilizziamo due sistemi di riferimento inerziali. il primo del laboratorio S_0 (x,y,z), il secondo è il sistema del centro di massa S_{CM} (x',y',z') con assi paralleli a S_0 la cui origine è solidale al CM



- Primo passo determinazione della velocità di un punto materiale i-esimo del sistema rispetto a S_0 usando la relazione tra le coordinate del punto nei due sistemi di riferimento:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_i{}'$$

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i{}'\right)^2$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i V_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \vec{V}_{CM} \cdot \sum m_i \vec{v}_i' = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$\sum m_i \vec{v}_i' = 0$ coincide infatti con la quantità di moto del CM nel sistema del CM

Il Teorema di König: per l'energia cinetica per un sistema di pm

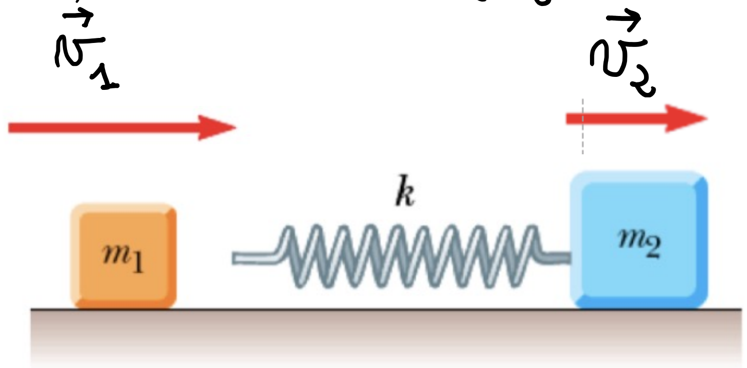
L'energia cinetica totale di un sistema di punti materiali coincide con la somma dell'energia cinetica di traslazione del "centro di massa" (quella che avrebbe un corpo di massa pari a quella totale del sistema, con la velocità propria del centro di massa) e dell'energia cinetica dei pm come misurata in un SDR con origine solidale al CM e assi paralleli a quelli del laboratorio

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

K energia cinetica misurata nel sistema del laboratorio
=Energia cinetica del CM +energia cinetica misurata in SCM

Esercizio: applicazione II teorema di König sist. PM pura traslazione

Due corpi di masse m_1 e m_2 (P.M), sono su un piano orizzontale privo di attrito, sul secondo c'è una molla né dilatata né compressa (massa nulla e lunghezza a riposo l_0) di costante K. I due corpi si muovono con velocità v_1 e v_2 note con $v_1 > v_2$ come in figura:



Determinare la massima compressione della molla

Dati v_1, m_1, v_2, m_2, K

Non ci sono forze non conservative che compiono lavoro

$\Rightarrow$ L'energia si conserva

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^{f\,2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{f\,2} + \frac{1}{2} K \Delta x^2$$

Possiamo usare due vie per risolvere il problema

① Teorema di Köenig

$$E_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 + \frac{1}{2} k \Delta x^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2) V_{cm}^2 + K'_f + \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

con $K'_f = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1f} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2f}$

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2) V_{cm}^2 + K'_f + \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

Non ci sono forze esterne lungo $x \Rightarrow P_{cm}^x = \text{cost}$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{cost}\,(>0) = P_{cm} = \text{cost}$$

$$\vec{P}_{cm} = P_{cm} \hat{x} \qquad \vec{P}_{cm} = (m_1 + m_2) \vec{V}_{cm}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{P_{cm}}{m_1 + m_2} \hat{x}$$

La compressione della molla è max per $K'_f = 0$

$$K'_f = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1f} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2f}$$ quindi le due masse sono ferme in SCM!

$$* \begin{cases} \vec{v}'_{2f} = \vec{v}_{2f} - \vec{v}_{CM} = 0 \\ \vec{v}'_{1f} = \vec{v}_{1f} - \vec{v}_{CM} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{2f} = v_{CM} \\ v_{1f} = v_{CM} \end{cases}$$

$$* \quad \vec{r} = \vec{r}_{cm} + \vec{r}'$$

Quando la molla raggiunge la max compressione i due blocchi hanno la stessa velocità!

$$v_{CM} = v_{1f} = v_{2f} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{cm}^2 + K'_f + \frac{1}{2} K \Delta x^2$$

La compressione della molla è max per $K'_f = 0$

e $v_{cm} = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ $\Rightarrow$ sostituendo v_{cm}

Risolvendo l'equazione otteniamo

$$\Delta X = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1+m_2) v_{cm}^2}{K}}$$

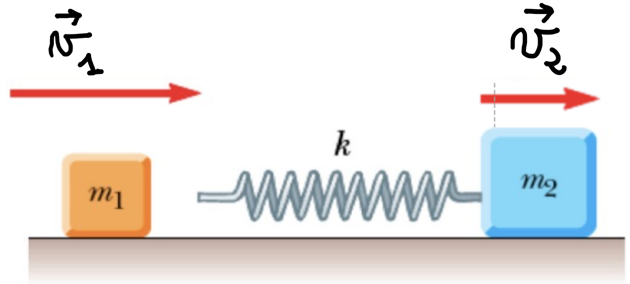
Oppure ② quando la molla raggiunge la compressione max la 1 è ferma nel sistema di riferimento della 2 per cui nel laboratorio

$$v_{1f} = \underbrace{v^{1}_{Rel}}_{0} + v_{2f} \Rightarrow v_{1f} = v_{2f} = v$$

q.m. $\Rightarrow$ $m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = (m_1+m_2) V$

$$= (m_1+m_2) V_{cm}$$

dalla conservazione della q.m



$$(m_1+m_2) V_{cm} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$V_{cm} = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1+m_2)$$

Dalla conservazione dell'Energia

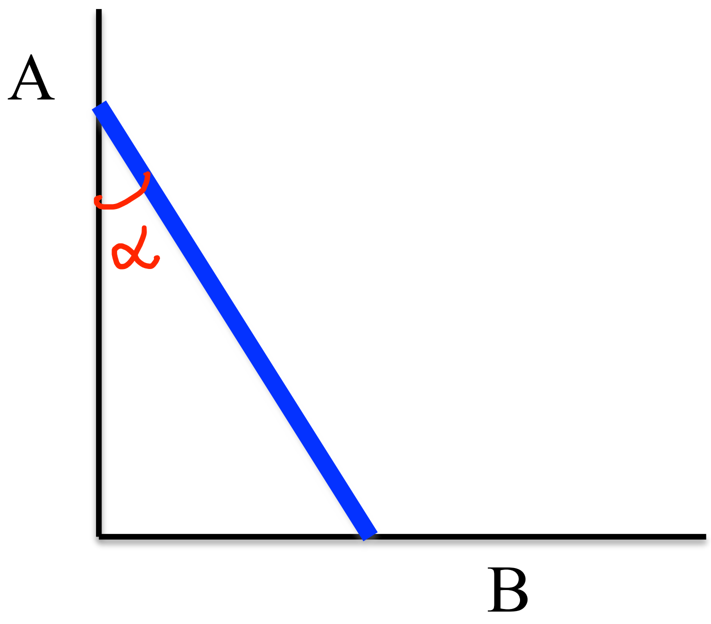
$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{cm}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{cm}^2 + \frac{1}{2} k\Delta x^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{cm}^2 + \frac{1}{2} k\Delta x^2$$

Risolvendo l'equazione otteniamo in entrambi i casi 1 e 2

$$\Delta x = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) v_{cm}^2}{k}}$$

Esercizio

Un' asta di lunghezza l è appoggiata come in figura su due pareti (una verticale e una orizzontale).
Sul piano orizzontale è presente attrito (μ_s=0.2) la massa dell'asta è m, la parete è liscia.

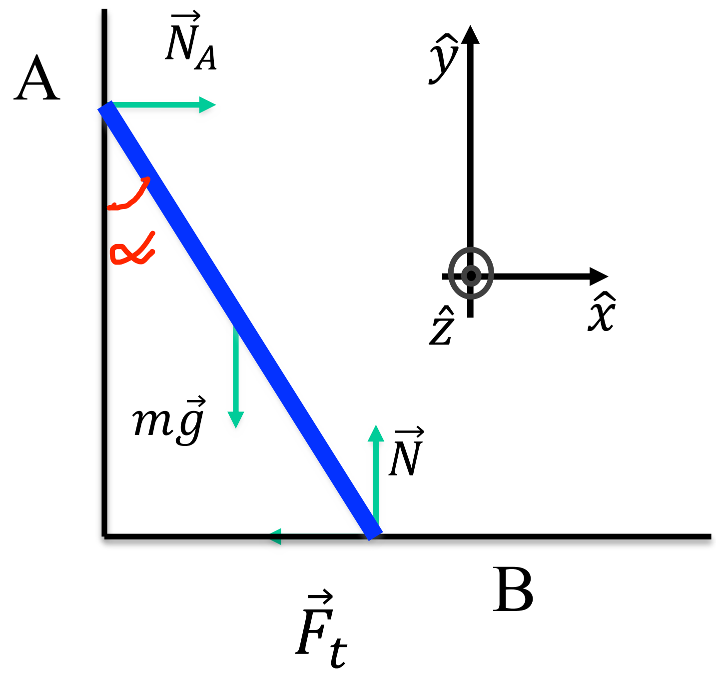


Determinare

1. l'angolo massimo (α_{max}) di equilibrio
2. la reazione vincolare in A (N_A) in funzione di α in condizioni di equilibrio
3. la reazione vincolare in B (N) in funzione di α in condizioni di equilibrio

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{R}^{(est)}$$

$$\vec{\tau}_{est} = \sum \vec{R}_i \wedge \vec{F}_{ext\,i}$$



All'equilibrio vale

$$\begin{cases} \vec{N} + \vec{F}_t + \vec{N}_A + m\vec{g} = 0 \\ \vec{\tau} = 0 \end{cases}$$

Proiettando l'equazione per le forze forze lungo x e y

$$\begin{cases} lungo\ x: \ N_A - F_t = 0 \\ lungo\ y: \ N - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_A = F_t \\ N = mg \end{cases}$$

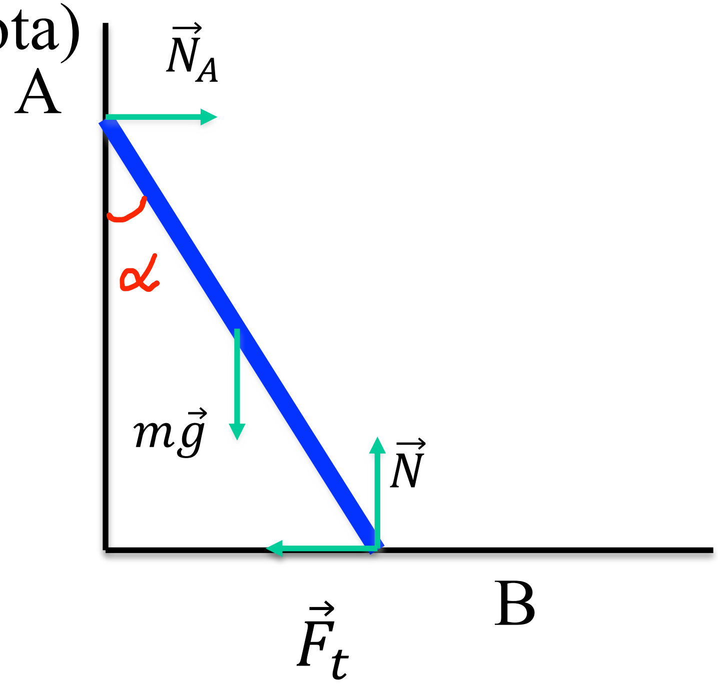
Ci resta da trovare N_A e α_{max}

Scegliamo come polo B (ci libera da due forze)

Tutte le forze sono sul piano xy di conseguenza il momento delle forze può avere solo componente lungo $\hat{z}$

$$\vec{\tau} = \tau_z\ \hat{z}$$

Imponendo la condizione di equilibrio (non ruota) polo in B



$$\tau_z = \mathrm{mg}\frac{l}{2}\sin\alpha - N_A l sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 0$$

$$N_A = \frac{\mathrm{mg}\frac{l}{2}\sin\alpha}{l cos\alpha} = \frac{mg}{2} tg\alpha$$

poichè $N_A = F_t$ $\Rightarrow F_t = \frac{mg}{2} tg\alpha$

Affinchè la scala non scivoli

$$\frac{mg}{2} tg\alpha = F_t \leq \mu_s N = \mu_s mg$$

$$\frac{mg}{2} tg\alpha \leq \mu_s mg \quad \Rightarrow \quad tg\alpha \leq 2\mu_s$$

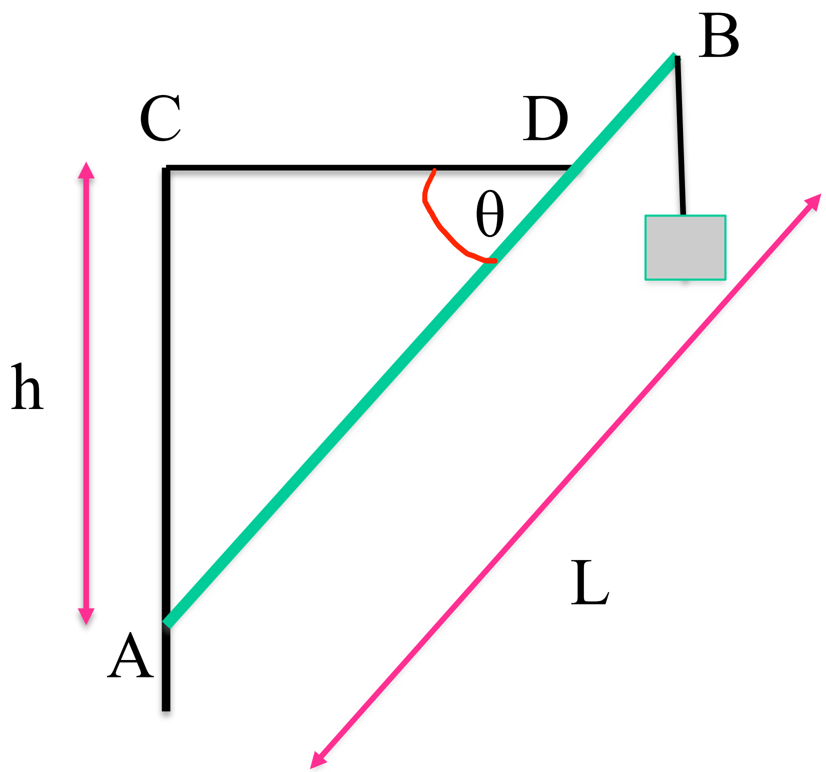
$$\Rightarrow \alpha_{max} = 22^0$$

per $\alpha \leq 22^0$ $\Rightarrow N = F_t = \frac{mg}{2} tg\alpha$

Esercizio

Una massa m=12 kg è sostenuta nel sistema in figura da un'asta rigida di lunghezza L=AB=7.5 m di massa M=8 kg.

Il sistema è mantenuto in equilibrio grazie a un filo ideale collegato alla parete e a un estremo dell'asta. L'asta, è libera di ruotare attorno a un perno in A ed è inclinata di un angolo $\theta = 37^0$. La distanza AC è h=3,8 m. Calcolare la tensione del filo orizzontale CD (T) (supposto privo di massa), la reazione vincolare in A ($\vec{A}$) la tensione del filo (che sostiene la massa m (T_1)

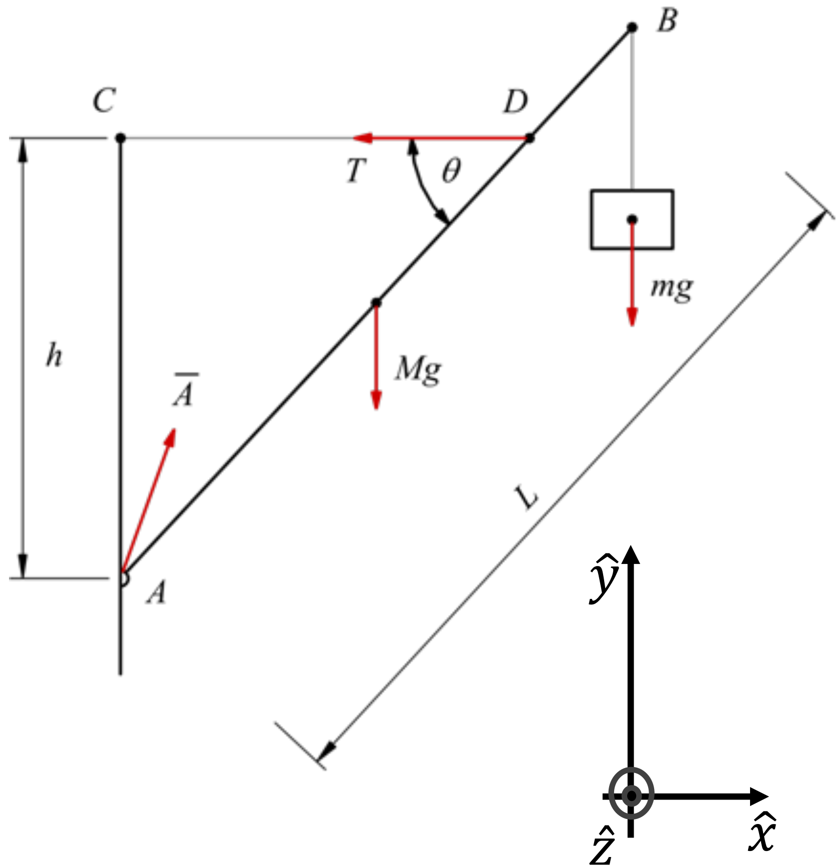


- All'equilibrio ogni singolo corpo deve essere fermo
  - per m vale $\vec{T}_1 + m\vec{g} = 0 \quad \Rightarrow \vec{T}_1 = -m\vec{g} = mg\hat{y}$

$$T_1 = mg = 117.7\ \mathrm{N}$$

  - per M vale

$$\begin{cases} \vec{A} + \vec{T} + M\vec{g} + m\vec{g} = 0 \\ \vec{\tau} = 0 \end{cases}$$



Proiettando l'equazione per le forze forze lungo x e y

$$\begin{cases} lungo\ x: \ A_x - T = 0 \\ lungo\ y: \ A_y - mg - Mg = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_x = T \\ A_y = (m+M)g \end{cases}$$

$$A_x = T$$

$$A_y = (m+M)g = 196\ \mathrm{N}$$

All’equilibrio

$$\vec{\tau} = \vec{0}$$

Scegliamo come polo A. All’equilibrio

$$\vec{\tau} = +\overline{AD}|\vec{T}|\,sin(\pi-\theta)\,\hat{z} - \overline{AE}\mathrm{Mg}sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\hat{z} - \overline{AB}\mathrm{mg}sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\hat{z} = \vec{0}$$

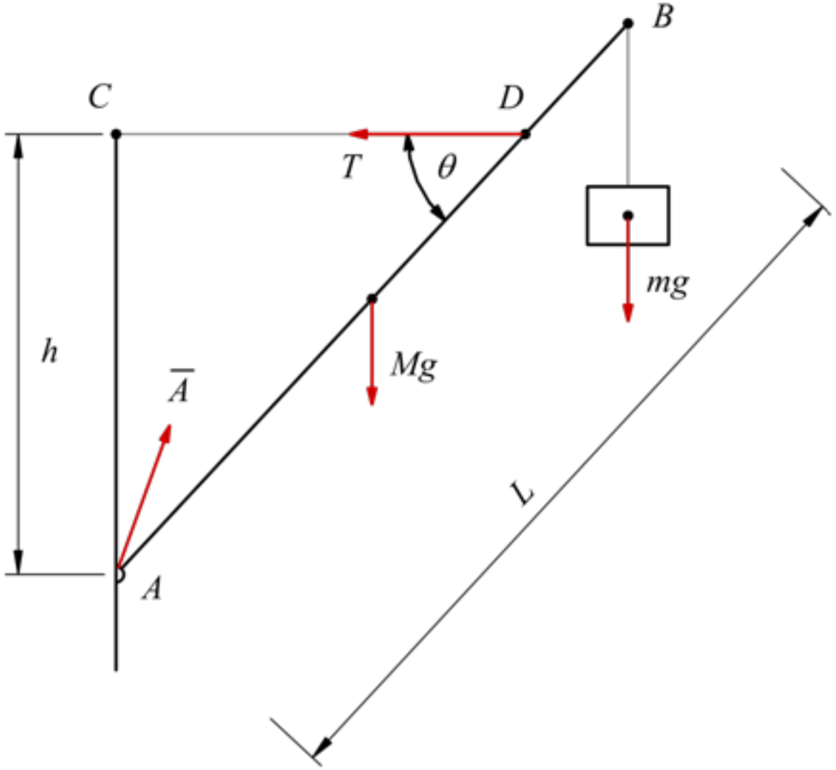
tutte le forze sono sul piano xy di conseguenza il momento delle forze può avere solo componente lungo $\hat{z}$

$$\vec{\tau} = \tau_z\,\hat{z}$$

$$\tau_z = \frac{h}{sin\theta}|\vec{T}|\,sin\theta - \frac{L}{2}\mathrm{Mg}cos\theta - \mathrm{Lmg}cos\theta$$

$$= h|\vec{T}| - \frac{L}{2}\mathrm{Mg}cos\theta - \mathrm{Lmg}cos\theta = 0$$

$$|\vec{T}| = \frac{Lg(M+2m)}{2h}cos\theta = 247.6\ N$$



da $A_x = T$ $\Rightarrow A_x = 247.6\ N$

Energia cinetica (II teorema di König) per CR

L'energia cinetica totale di un corpo rigido è la somma dell'energia cinetica di traslazione del "centro di massa" (quella che avrebbe un corpo di massa pari a quella totale del corpo rigido, con la velocità propria del centro di massa) e dell'energia cinetica dovuta alla rotazione del corpo rigido con velocità angolare ω attorno a un asse passante per il CM

$$K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

energia cinetica di traslazione (dovuta al moto del CM) intuitivo

energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa

(il centro di massa del corpo trasla con velocità $\vec{V}_{CM}$ ed il corpo ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$, ma cosa è I_{CM} ?)

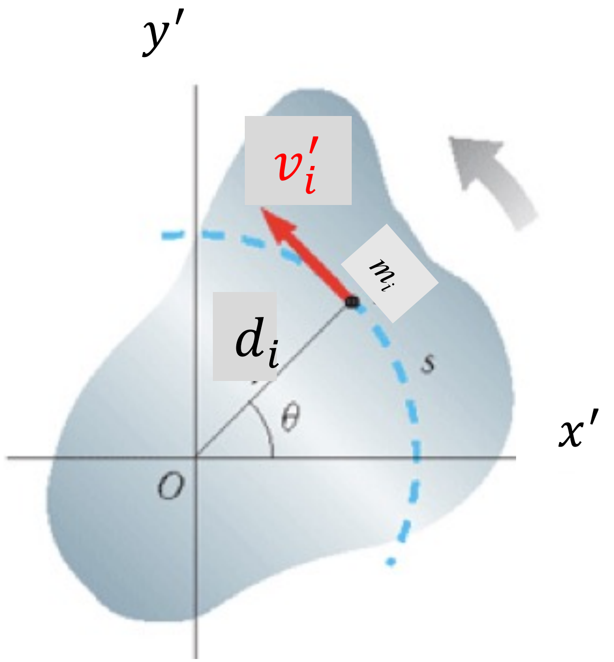
Dimostrazione

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i{}')^2$$

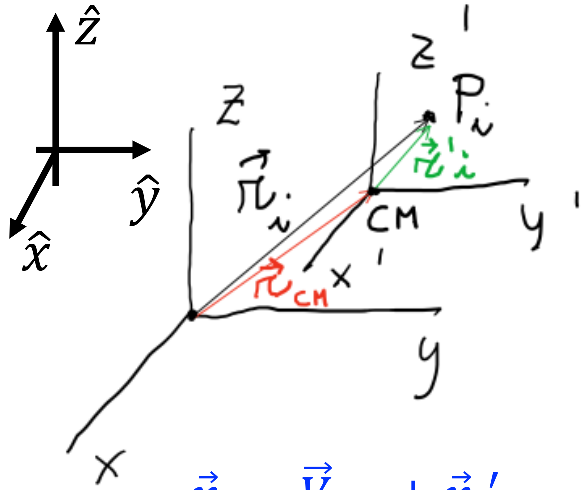
$$= \sum \frac{1}{2} m_i V_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \vec{V}_{CM} \cdot \sum m_i \vec{v}_i'$$

$\sum m_i \vec{v}_i' = 0$ coincide infatti con la quantità di moto del CM nel sistema del CM

$$K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$



- Consideriamo un corpo rigido costituito da masse discrete puntiformi le cui mutue distanze sono fisse
  - ciascuna massa m_i descrive una circonferenza percorsa con velocità angolare ω nel piano ortogonale all'asse di rotazione ad es. z'



$v_i' = \omega\, d_i \qquad \Rightarrow K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i\, d_i^2 \omega^2$

$\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_i{}'$

$\Rightarrow K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \qquad$ dove $I_{CM} = \sum_i m_i d_i^2$

Energia cinetica di un Corpo Rigido: II teorema di König

Per un corpo che trasla e ruota attorno ad un asse passante per il suo centro di massa, possiamo quindi scrivere

$$K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 = K_{CM} + K_{ROT}$$

con il moto del CM (V_{CM}) determinato unicamente dalle forze esterne

Momento di Inerzia rispetto al CM

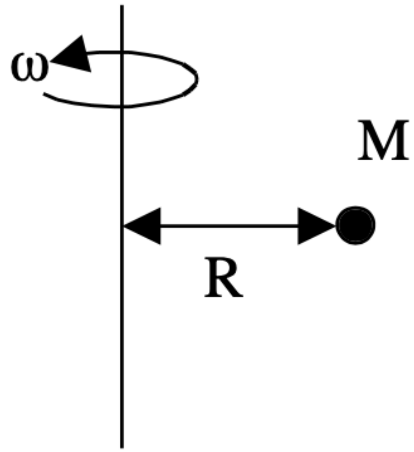
Si può calcolare il momento d'inerzia di un corpo rigido continuo di densità omogenea dividendolo in piccoli elementi di volume, ognuno di massa Δm_i. Nel limite continuo:

$$I_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \Delta m_i \, d_i^2 = \int d^2 dm$$

dove d rappresenta la distanza dall'asse di rotazione passante per il CM

Momento di inerzia rispetto ad un asse qualsiasi di un PM

Consideriamo la situazione in figura:



Applichiamo la definizione: $$I = \sum_{i=1}^{1} m_i R_i^2 = MR^2$$

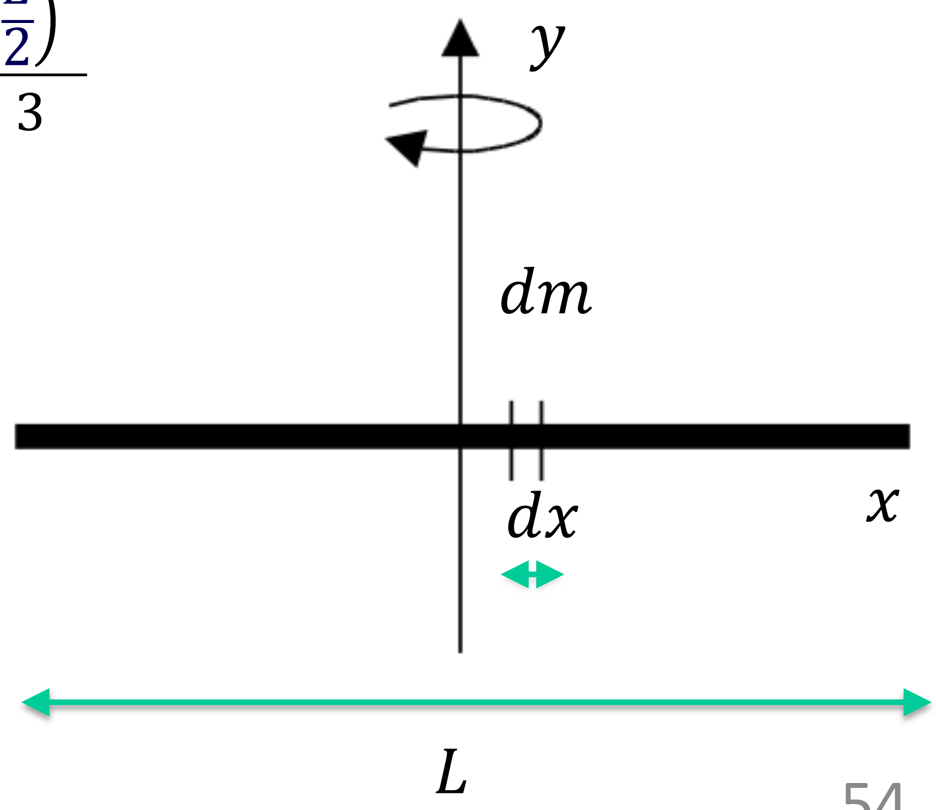
Momento di inerzia di una sbarretta sottile omogenea di massa M e lughezza L rispetto a un asse passante per il CM ortogonale alla sbarra

$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dx} \qquad \Rightarrow dm = \lambda\, dx$$

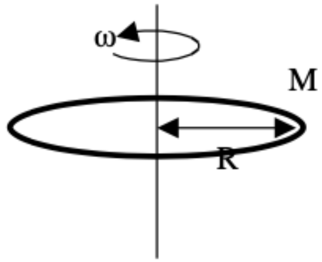
$$I = \int dm\, d^2 \qquad \Longrightarrow I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \lambda\, dx x^2 = \quad \lambda 2 \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3}$$

$$= 2 \frac{M}{L} \frac{L^3}{24}$$

$$\Longrightarrow I = \frac{ML^2}{12}$$



Momento di inerzia di un anello omogeneo di massa M e raggio R rispetto a un asse passante per il CM ortogonale al piano dell'anello

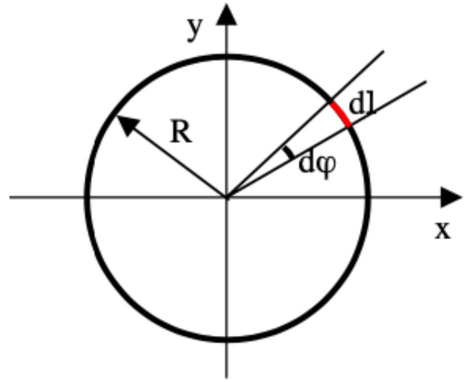


Consideriamo la situazione della figura.

Supponiamo che l'anello ruoti attorno un asse, perpendicolare all'anello passante per il suo centro (asse dell'anello).

Indichiamo con λ la densità lineare dell'anello:

$$\lambda = \frac{M}{2\pi R}$$



Consideriamo un elemento dell'anello: $dl = Rd\varphi$

a cui corrisponde la massa: $dm = \lambda dl = \frac{M}{2\pi R} Rd\varphi = \frac{M}{2\pi} d\varphi$

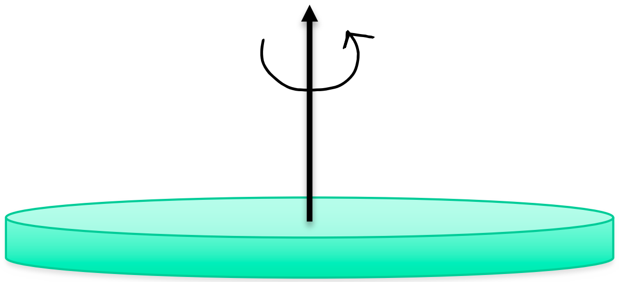
Applichiamo la definizione di momento di inerzia per i corpi continui:

$$I = \int_{anello} R^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \frac{M}{2\pi} d\varphi = \frac{M}{2\pi} R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{M}{2\pi} R^2 [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{M}{2\pi} R^2 (2\pi - 0) = MR^2$$

$$\boxed{I = MR^2}$$

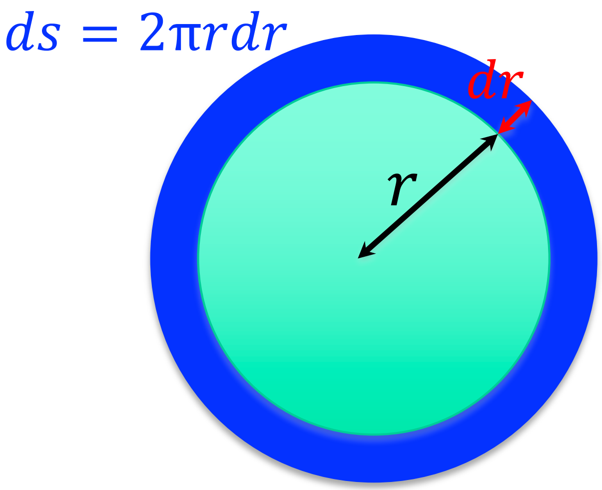
Momento di inerzia di un disco omogeneo di massa M e raggio R rispetto a un asse passante per il CM

Momento di Inerzia di un disco di raggio R e massa M, con densità superficiale di massa uniforme rispetto a un asse ortogonale al piano del disco e passante per il suo CM



$$\rho_s = \frac{dm}{ds} = \frac{M}{\pi R^2} \qquad \Rightarrow dm = \rho_s \, ds$$

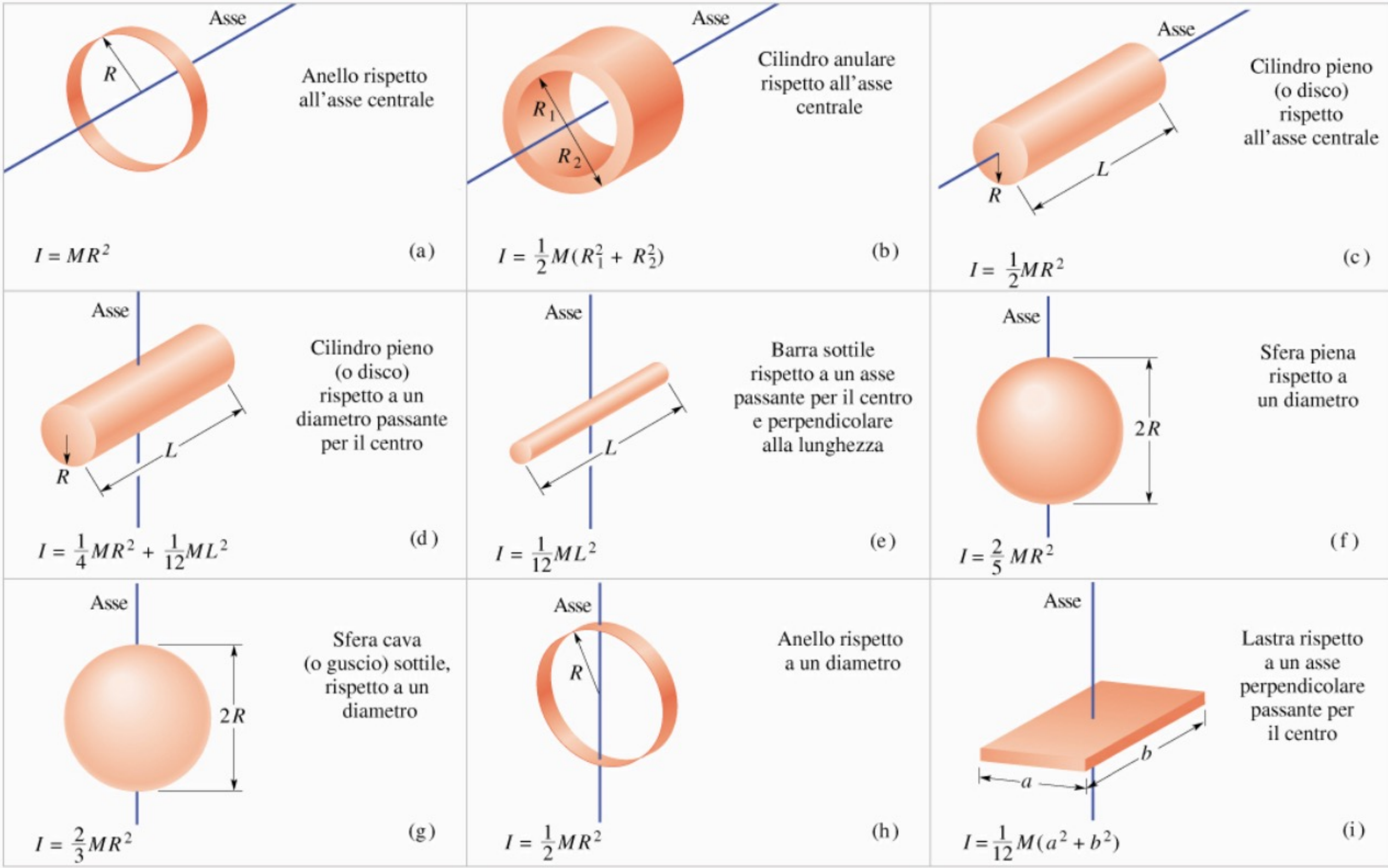
$$ds = 2\pi r dr$$



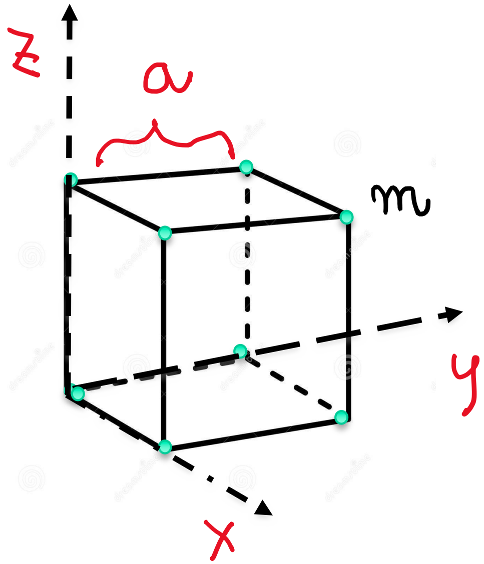
$$I = \int dm \, d^2 \quad \Rightarrow \int \rho_s \, ds \, r^2 = \rho_s \int 2\pi r dr r^2$$

$$= \rho_s 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{M}{\pi R^2} 2 \pi \frac{R^4}{4} = M \frac{R^2}{2}$$

Tabella riassuntiva momenti di inerzia rispetto a assi passanti per il CM per CR omogenei



Determinare il centro di massa di un corpo rigido formato da masse puntiformi di massa m poste ai vertici di un cubo di lato a, collegate tra loro con barre di massa trascurabile.



baricentro in x

4 masse hanno $x = a$

4 masse hanno $x = 0$

$$x_{cm} = \frac{(4 \times a + 4 \times 0)\, m}{8\, m} = \frac{a}{2}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

baricentro in y

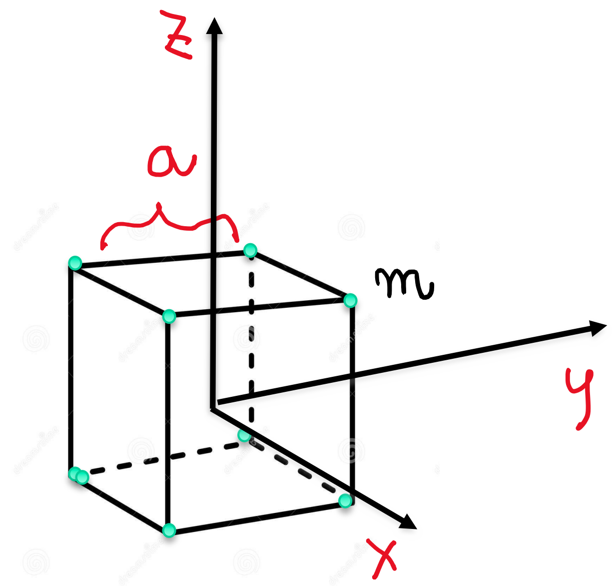
4 masse hanno $y = a$

4 masse hanno $y = 0$

$\Big\}$ $y_{cm} = a/2$

$\Rightarrow$ baricentro in z $\qquad z_{cm} = a/2$

Determinare il momento di inerzia del corpo rigido formato da masse puntiformi di massa *m* poste ai vertici di un cubo di lato *a*, collegate tra loro con barre di massa trascurabile, rispetto ai tre assi indicati in figura passanti per il centro di massa del sistema.



$$I_x^{CM} = \sum_i m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right)$$

$$I_y^{CM} = \sum_i m_i \left(x_i^2 + z_i^2\right)$$

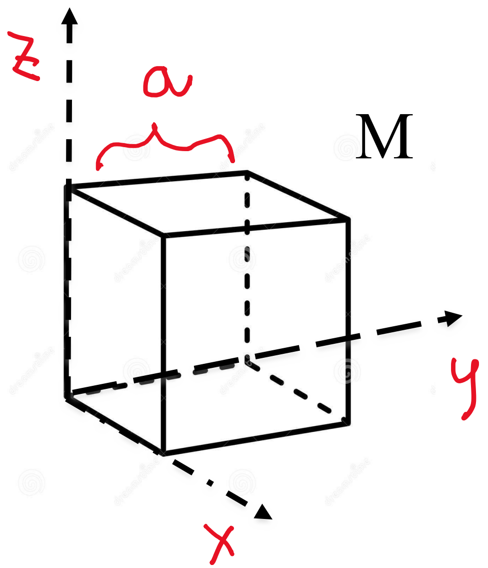
$$I_z^{CM} = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

dalla figura $x = \pm a/2$ $y = \pm a/2$ $z = \pm a/2$

$$I_x^{CM} = 8m\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right) = 4ma^2 = I_y^{CM} = I_z^{CM}$$

Nota: i 3 assi sono assi di simmetria per il sistema

Determinare il centro di massa di un cubo omogeneo di lato *a* e massa *M*.



Baricentro del cubo

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int dm\, \vec{r}$$

$$\Rightarrow \quad x_{cm} = \frac{1}{M}\int dm\, x$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int dm\, y$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\int dm\, z$$

$$dm = \rho_V\, dV \qquad \rho_V = \frac{dm}{dV} \Rightarrow \frac{M}{a^3} \qquad dV = dx\, dy\, dz$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int \rho_V\, dV\, x = \frac{\rho_V}{M}\int dx\, dy\, dz\, x \Rightarrow$$

$$x_{cm} = \frac{\rho_V}{M}\int_0^a x\, dx \int_0^a dy \int_0^a dz = \frac{\rho_V}{M}\, \frac{a^2}{2} \cdot a \cdot a \Rightarrow$$

$$x_{cm} = \frac{\rho_V}{M}\int_0^a x\,dx \int_0^a dy \int_0^a dz = \frac{\rho_V}{M}\, a^2/2 \cdot a \cdot a \Rightarrow$$

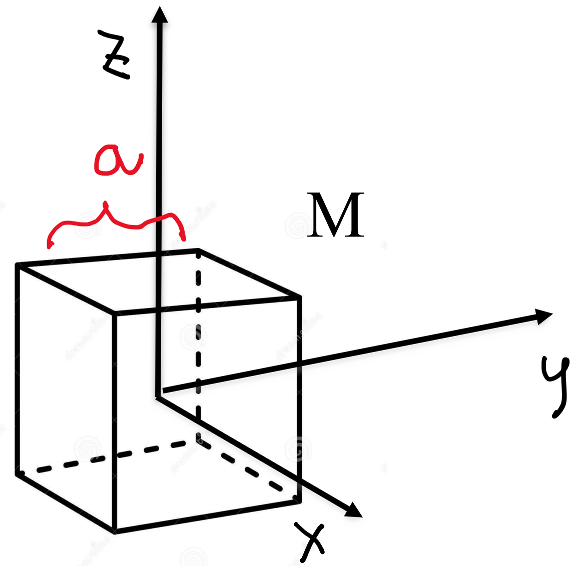
$$x_{cm} = \frac{M}{a^3} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{a^4}{2} = \frac{a}{2}$$

poichè $$y_{cm} = \frac{\rho_V}{M}\int_0^a dx \int_0^a y\,dy \int_0^a dz = a/2$$

In modo analogo $$z_{cm} = a/2$$

Nota: i 3 assi sono assi di simmetria per il sistema

Determinare il momento di inerzia di un cubo omogeneo di lato *a* e massa *M* rispetto ai tre assi indicati in figura passanti per il centro di massa del sistema.



$$I_x^{CM} = \int dm\,(y^2+z^2)$$

$$I_y^{CM} = \int dm\,(x^2+z^2)$$

$$I_z^{CM} = \int dm\,(x^2+y^2)$$

$$dm = \rho_V\, dV \qquad \rho_V = \frac{M}{a^3} \qquad dV = dx\,dy\,dz$$

$$I_z^{CM} = \rho_V \int dx\,dy\,dz\,(x^2+y^2) = \rho_V \int_{-a/2}^{a/2} dz \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} (x^2+y^2)\,dy$$

$$= \rho_V\, a \int_{-a/2}^{a/2} \left(a x^2 + \frac{y^3}{3}\Big|_{-a/2}^{a/2} \right) dx$$

$$I_z^{CM} = \rho_V a \int_{-a/2}^{a/2} \left(a x^2 + \frac{y^3}{3} \Big|_{-a/2}^{a/2} \right) dx$$

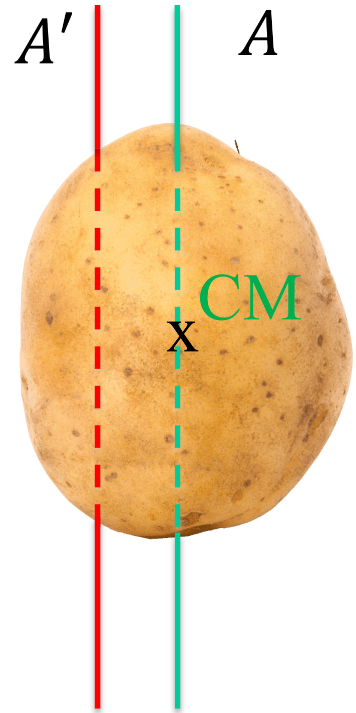
$$= \rho_V a \int_{-a/2}^{a/2} \left(a x^2 + \frac{a^3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2 \right) dx = \rho_V a \left[a \, 2\left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{a^3 \cdot a}{12} \right]$$

$$= \frac{M}{a^3} \cdot a \left[\frac{a^4}{12} + \frac{a^4}{12} \right] = \frac{M}{a^2} \cdot \frac{a^4}{6} = \frac{Ma^2}{6}$$

per simmetria i momenti di Inerzia

I_x^{CM}, I_y^{CM}, I_z^{CM} sono uguali!

Momento di Inerzia: teorema degli assi paralleli o di Steiner



- E se il corpo non ruota attorno ad un asse (A) passante per il CM ma attorno ad un asse (A') parallelo ad esso?

Come possiamo calcolare il momento di Inerzia a partire da quello noto rispetto a un asse passante per il CM?

Con il Teorema degli assi paralleli o Teorema di Steiner

- *Il momento d'inerzia associato ad un asse* A' *è uguale a quello associato ad un asse parallelo* A *passante per il CM più il momento d'inerzia di una singola particella puntiforme di massa pari alla massa totale del corpo che si trova a una distanza D pari a quella tra gli assi*

$$I^{A'}=I^{A}_{CM}+MD^2$$

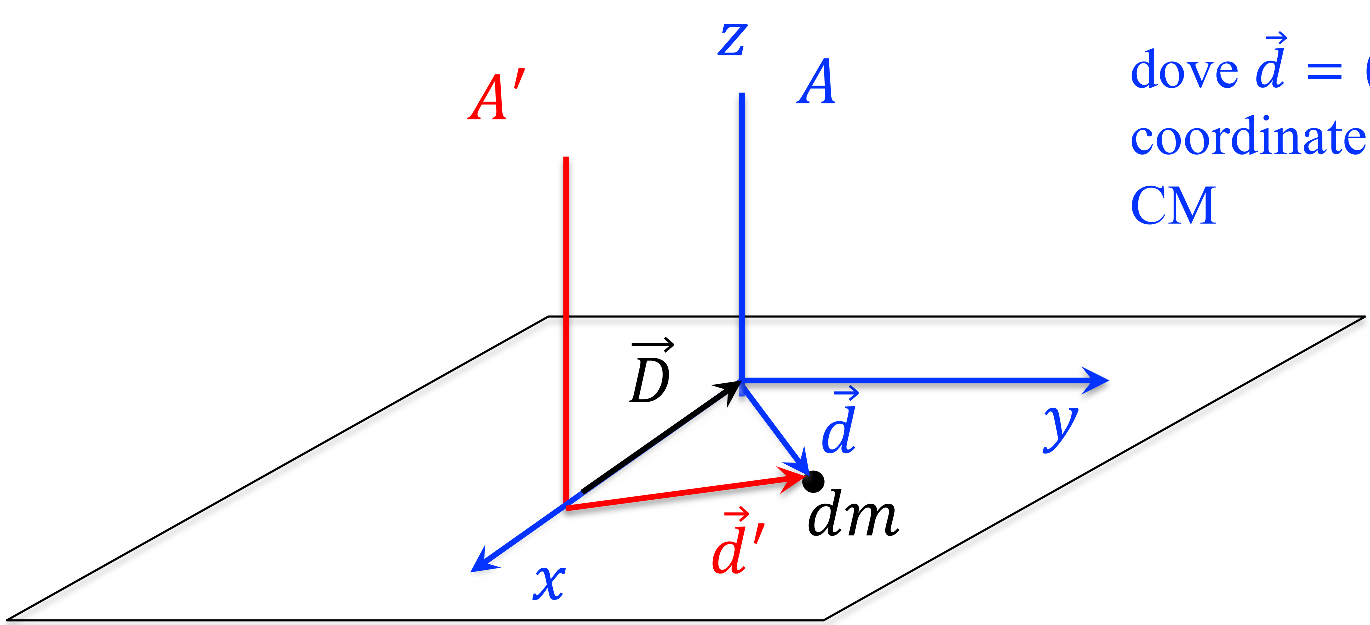
Dimostrazione

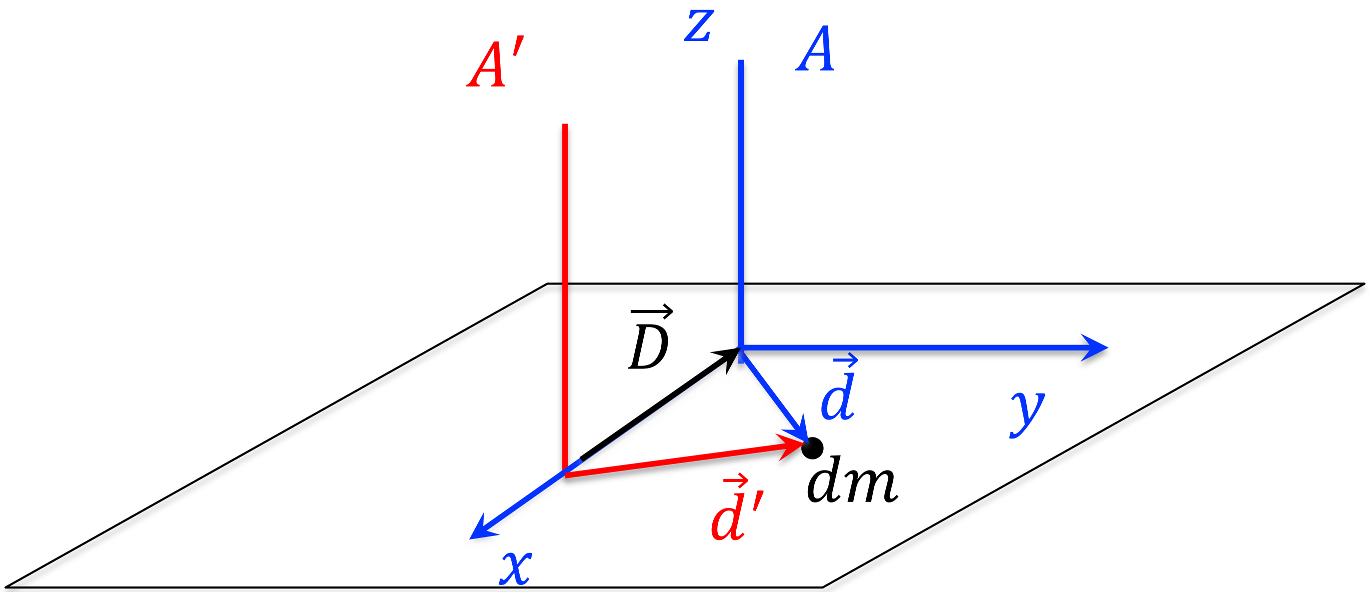
Indichiamo con $\hat{z}$ la direzione degli assi A e A'

- il calcolo dei momenti di inerzia rispetto a tali assi richiede di calcolare per ogni punto materiale del corpo rigido (o elemento di massa dm) la distanza dall'asse del punto materiale
- dobbiamo quindi usare solo le coordinate x e y di ogni elemento di massa
- scegliamo un piano xy ortogonale ad entrambi gli assi e con origine il CM

$$\vec{d}' = \vec{D} + \vec{d}$$

dove $\vec{d} = (x, y)$ sono le coordinate di dm nel sistema del CM





$\vec{d}' = \vec{D} + \vec{d}$ dove $\vec{d} = (x, y)$ sono le coordinate di dm nel sistema del CM

$$I^{A'} = \int dm\, d'^2 = \int dm\,(\vec{D} + \vec{d}) \cdot (\vec{D} + \vec{d}) = \int dm\,(D^2 + 2\vec{D} \cdot \vec{d} + d^2)$$

$$= D^2 \int dm + 2\,\vec{D} \cdot \int dm\vec{d} + \int dm d^2$$

$$2\,\vec{D} \cdot \int dm\vec{d} = 2D_x \int dmx + 2D_y \int dmy = 0$$

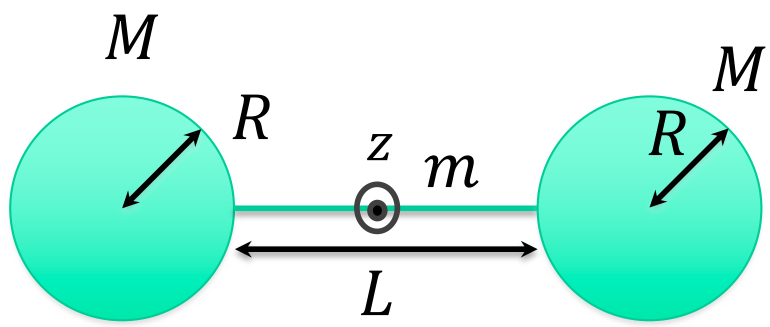
in quanto i due integrali corrispondono rispettivamente alla coordinata x e y del CM nel sistema del CM

$$I^{A'} = D^2 \int dm + \int dm(x^2 + y^2) = MD^2 + I^A_{CM}$$

Un applicazione del Teorema di Steiner

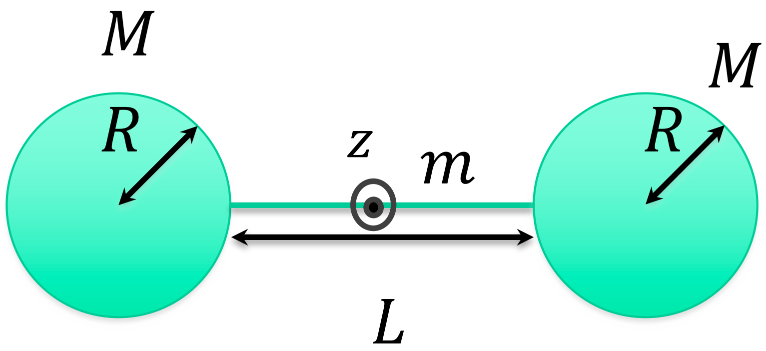
Un CR è costituito da 2 sfere di massa M e raggio R collegate da un'asta lunga L e di massa m disposta lungo la retta che congiunge i centri delle 2 sfere. Asta e sfere hanno distribuzione di massa uniforme.

Calcolare il momento di inerzia rispetto a un'asse che passa per il centro delle sfere e ad esso ortogonale



- Il momento di inerzia è la somma di tre contributi
  - momento di inerzia dell'asta

    poichè il CM dell'asta coincide con il centro dell'asta



$$I_z^{asta} = I_{CM}^{asta} = \frac{mL^2}{12}$$

  - momento di inerzia della sfera 1

    dobbiamo calcolare il momento di inerzia della sfera 1 rispetto al centro dell'asta

$$I_z^{sfera1} = I_{CM}^{sfera1} + \mathrm{M}\left(R + \frac{L}{2}\right)^2 = \frac{2}{5}MR^2 + \mathrm{M}\left(R + \frac{L}{2}\right)^2$$

  - momento di inerzia della sfera 2

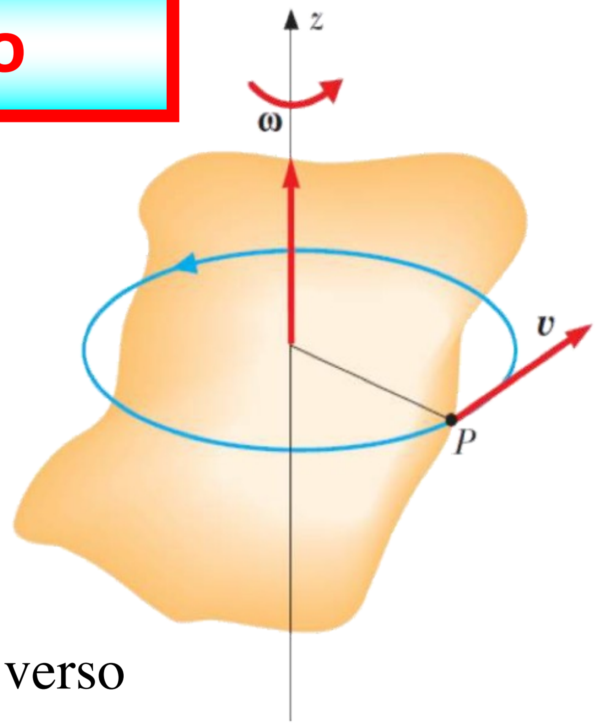
    dobbiamo calcolare il momento di inerzia della sfera 2 rispetto al centro dell'asta

$$I_z^{sfera2} = I_{CM}^{sfera2} + \mathrm{M}\left(R + \frac{L}{2}\right)^2 = \frac{2}{5}MR^2 + \mathrm{M}\left(R + \frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_z^{2sfere+asta} = 2\left(\frac{2}{5}MR^2 + \mathrm{M}\left(R + \frac{L}{2}\right)^2\right) + \frac{mL^2}{12}$$

Dov' è il CM del sistema?

Rotazione di un corpo rigido



- Nel caso delle rotazioni, per una distribuzione di massa discreta (idem nel caso di una distibuzione di massa continua e omogenea) tutti i pm descrivono un moto circolare
  - circonferenze rispetto all'asse di rotazione
- tutti i pm hanno la stessa velocità angolare ω parallela all'asse di rotazione ($v_i = \omega R_i$).
- In generale ω può essere variabile nel tempo (modulo, verso e direzione - asse di rotazione variabile)
- L'equazione dinamica che descrive il moto di rotazione di un CR è:

$$\vec{\tau}_{est} = \sum \vec{R}_i \wedge \vec{F}_{exti} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \Rightarrow \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

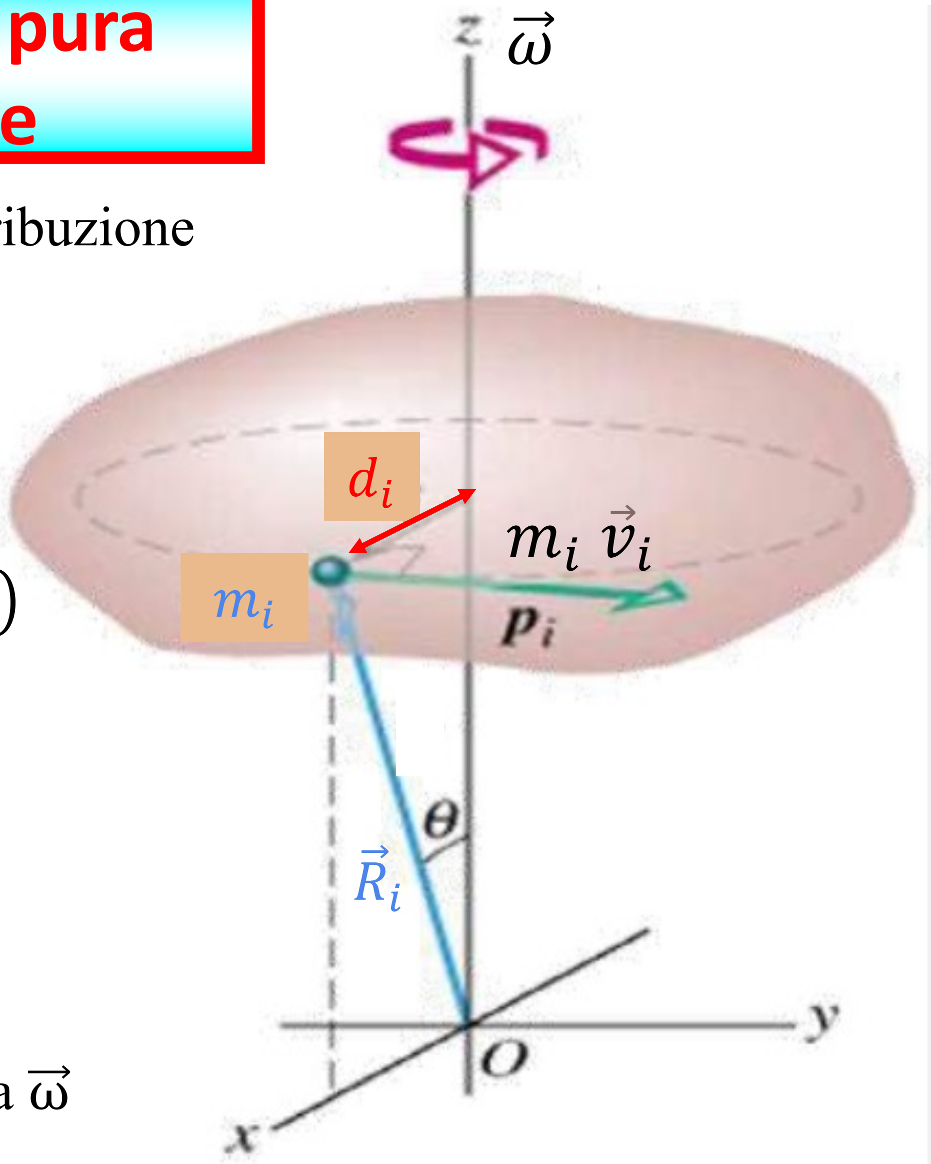
dove da ora in poi diamo per scontato che

- $\vec{\tau}$ è dovuto alle sole forze esterne
- il polo rispetto a cui sono calcolati i momenti è lo stesso

Vogliamo ora determinare l'espressione generale per il momento angolare rispetto a un polo per determinare $\vec{\tau}$ dalla derivata di $\vec{L}$

Momento angolare $\vec{L}$ per una pura rotazione attorno a un asse

- Consideriamo il corpo costituito da una distribuzione discreta di punti materiali di massa m_i
- Dalla definizione di momento angolare determiniamo la sua espressione



$$\vec{L} = \sum m_i \vec{R}_i \wedge \vec{v}_i = \sum m_i \vec{R}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}_i)$$

$$= \sum m_i \left(R_i^2 \vec{\omega} - (\vec{R}_i \cdot \vec{\omega})\vec{R}_i\right)$$

$$= \sum m_i \left[R_i^2 \vec{\omega} - \omega R_i \vec{R}_i \cos\theta_i\right]$$

- scomponiamo $\vec{R}_i$ in due componenti
  - una parallela (//), una ortogonale (⊥) a $\vec{\omega}$

$$\vec{R}_i = R_i \cos\theta_i \hat{\omega} + R_i \sin\theta_i \hat{u}_\perp$$

$$\vec{L} = \sum m_i \left[R_i^2 \vec{\omega} - \omega R_i^2 (\hat{\omega}\cos^2\theta_i + \hat{u}_\perp \sin\theta_i \cos\theta_i)\right]$$

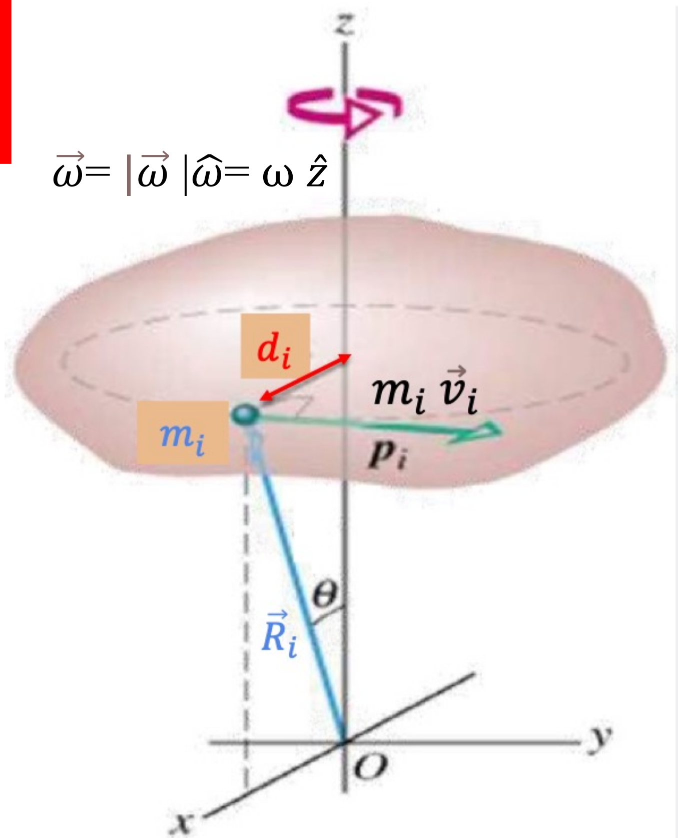
(2)Momento angolare $\vec{L}$ per una pura rotazione attorno a un asse

$$\vec{L} = \sum m_i \left[R_i^2 \vec{\omega} - \omega R_i^2 (\hat{\omega}\cos^2\theta_i + \hat{u}_\perp \sin\theta_i \cos\theta_i)\right]$$

$$= \sum m_i \hat{\omega}\omega \left[R_i^2 (1 - \cos^2\theta_i)\right] + \sum m_i \hat{u}_\perp \omega R_i^2 \sin\theta_i \cos\theta_i$$

$$= \sum m_i \hat{\omega}\omega R_i^2 \sin^2\theta_i + \sum m_i \hat{u}_\perp \omega R_i^2 \sin\theta_i \cos\theta_i$$

$$= \hat{\omega}\omega \sum m_i d_i^2 + \sum m_i \hat{u}_\perp \omega R_i^2 \sin\theta_i \cos\theta_i$$



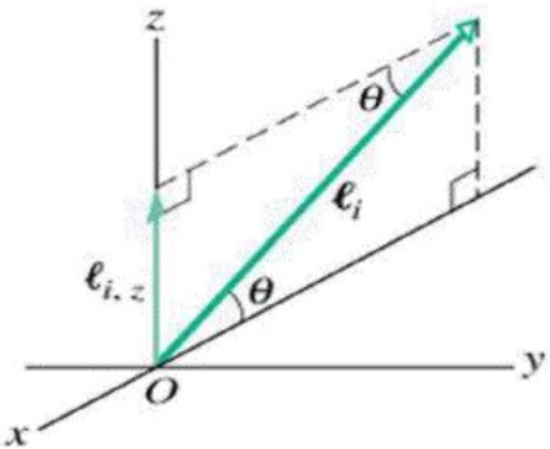
Nota: non dipende dalla scelta del polo basta che esso sia lungo l'asse di rotazione

Il momento angolare per una pura rotazione attorno a un asse che indicheremo per semplicità con $\hat{z}$ ($= \hat{\omega}$) è dato da

$$\vec{L} = L_z\,\hat{z} + L_\perp\,\hat{u}_\perp = I_z \omega \hat{z} + L_\perp\,\hat{u}_\perp$$

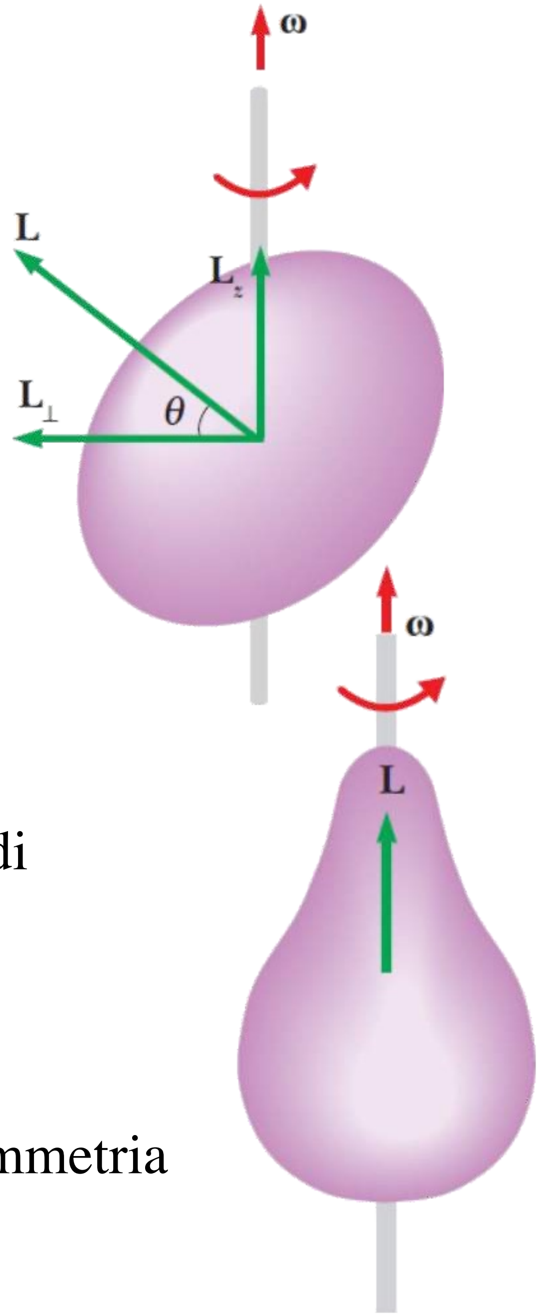
la proiezione del momento angolare lungo l'asse di rotazione ($\hat{z}$) è:

$$L_z = I_z \omega$$



(3)Momento angolare $\vec{L}$ per una pura rotazione attorno a un asse

- Il momento angolare si può scrivere in forma vettoriale come la somma di due componenti
  - una ortogonale all'asse di rotazione (a z) $L_\perp$
  - l'altra parallela all'asse di rotazione L_z
- $L_\perp$ varia in direzione, in modulo e dipende dalla scelta del polo
- L_z prende il nome di componente assiale, non dipende dalla scelta del polo



- Se l'asse di rotazione non coincide con uno degli assi di simmetria della distribuzione di massa del CR si avrà che:

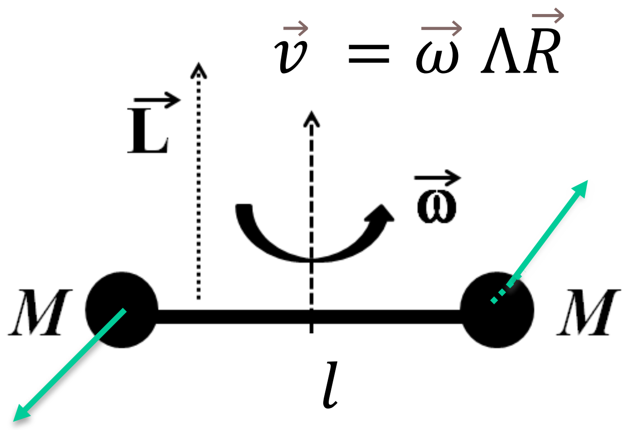
$$\vec{L} = L_z\,\hat{z} + L_\perp\,\hat{u}_\perp$$

- Se l'asse di rotazione coincide con uno degli assi di simmetria della distribuzione di massa del CR si avrà che:

$$\vec{L} = L_z\,\hat{z}$$

Esempio espressione di $\vec{L}$ per distribuzione di massa simmetrica attorno all'asse di rotazione

Manubrio di lunghezza l privo di massa con due masse uguali (M ognuna) libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse passante per il centro e perpendicolare al manubrio. il manubrio è posto in rotazione su un piano privo di attrito con velocità angolare ω



- polo al centro del manubrio

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{R}_i \,\Lambda\, \vec{v}_i = M\frac{l}{2} v\hat{z} + M\frac{l}{2} v\hat{z} \qquad v = \omega\frac{l}{2} \qquad \Rightarrow \vec{L} = \frac{M}{2} l^2 \omega\, \hat{z}$$

$\Longrightarrow$ il momento angolare ha modulo $\frac{M}{2} l^2 \omega$ ed è diretto lungo l'asse di rotazione

Il momento angolare è costante?

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

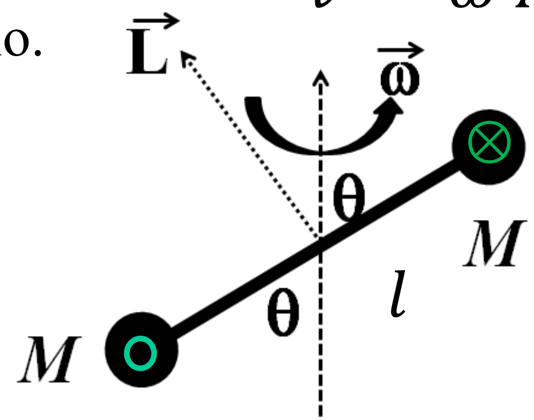
Il momento dovuto a forza peso, reazione vincolare e cerniera è nullo (polo al centro dell'asta)

$$\Rightarrow \vec{L}\ costante \qquad \Rightarrow \omega \text{ costante}$$

$$I_z = I_{zM1} + I_{zM2} \qquad = 2M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{M}{2} l^2 \qquad \vec{L} = \frac{M}{2} l^2 \omega\, \hat{z} = I_z\, \omega\, \hat{z} \qquad \vec{\tau} = I_z \dot{\omega} \hat{z} = 0$$

Esempio espressione di $\vec{L}$ per distribuzione di massa asimmetrica rispetto all'asse di rotazione

Stesso manubrio di prima libero di ruotare attorno a un asse passante per il centro e che forma un angolo θ col manubrio.
Il manubrio è posto in rotazione con velocità ω



- polo al centro del manubrio

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

la direzione di $\vec{L}$ è quella indicata in figura per la posizione delle masse indicata

$\Longrightarrow$ il momento angolare ruota con velocità angolare ω attorno all'asse di rotazione con cui forma un angolo $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$$|\vec{L}_1| = |\vec{L}_2| = M\frac{l}{2}\omega\frac{l}{2}\sin\theta \qquad L_{1z} = L_{2z} = |\vec{L}_1|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = |\vec{L}_1|\sin\theta$$

$$L_z = L_{1z} + L_{2z} = 2\,|\vec{L}_1|\sin\theta = \frac{M}{2}l^2\omega\sin^2\theta \;=\; I_z\,\omega$$

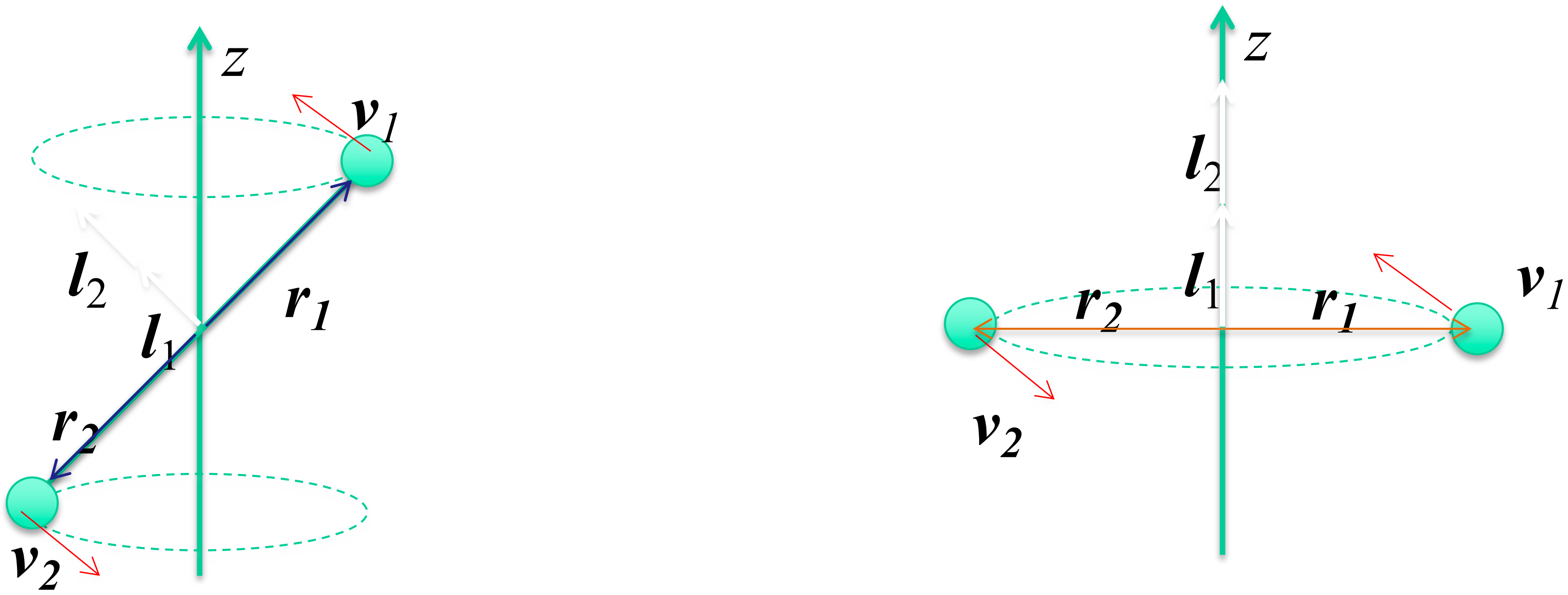
- Il momento angolare componente z è costante?

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = 0$$

Si. Il momento dovuto a forza peso, reazione vincolare e cerniera è nullo (polo al centro dell'asta) :contributo lungo z al momento nullo

$L_\perp$ non è costante varia in direzione

Note



Considereremo **sempre rotazioni attorno ad assi principali** (assi rispetto ai quali la distribuzione di massa di un corpo rigido è simmetrica) o ad essi paralleli

II equazione Cardinale per CR per $\vec{L}$ // all'asse di rotazione $\vec{\omega}$

- Per distribuzioni di massa simmetrica quando $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

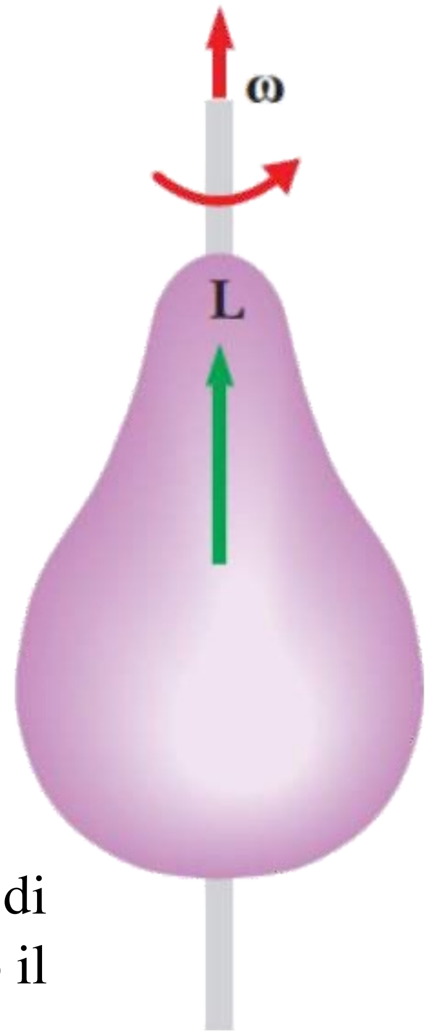
$$\vec{L} = L_z \, \hat{z} = I_z \vec{\omega}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I_z \vec{\omega})}{dt} = I_z \, \vec{\alpha}$$

- Per cui la II equazione Cardinale del CR è data da

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I_z \, \vec{\alpha}$$

- essa rappresenta **l'equazione del moto di rotazione** (tutte le quantità sono calcolate per un punto generico O sull'asse di rotazione z)

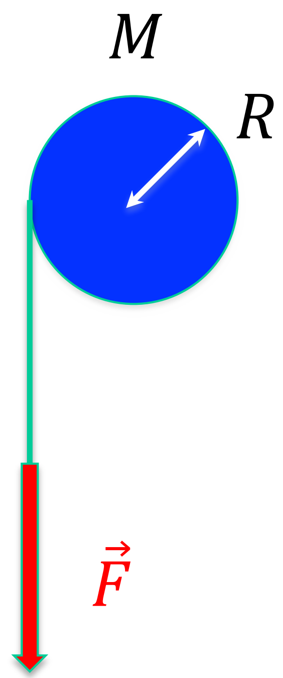


- Il momento delle forze (esterne) agenti rispetto all'asse fisso di rotazione permette di calcolare l'accelerazione angolare noto il momento di inerzia I_z

Si potranno quindi ricavare le relazioni cinematiche tra θ ω e α

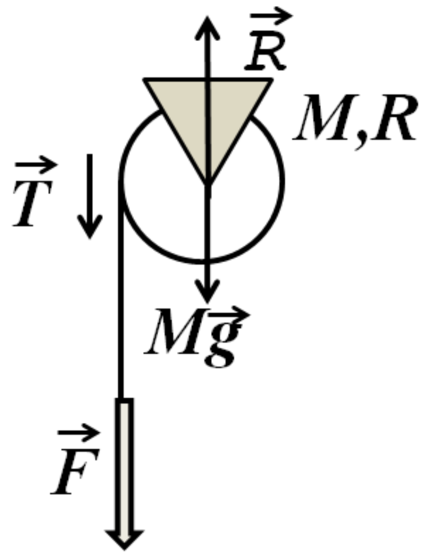
Esempio carrucola e Forza

Su una carrucola assimilabile a un disco omogeneo, di massa M e raggio R, vincolata a ruotare attorno ad un asse orizzontale, scorre una fune di massa trascurabile. La fune è tirata da una forza $\vec{F}$ verticale e rimane aderente alla carrucola.
Calcolare l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$ della carrucola.



Soluzione.

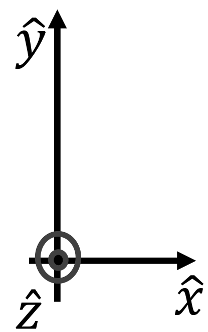
La tensione della corda è determinata dalla forza esterna e poiché i punti della corda hanno massa trascurabile $|\vec{T}| = |\vec{F}|$.



Sulla carrucola agisce un momento:

$$\vec{\tau} = \vec{R} \wedge \vec{T} \quad = RT\hat{z} \quad = I\vec{\alpha}$$

Il polo ovviamente è nel centro della carrucola (no contributo dovuto al momento del peso della carrucola e della reazione vincolare)



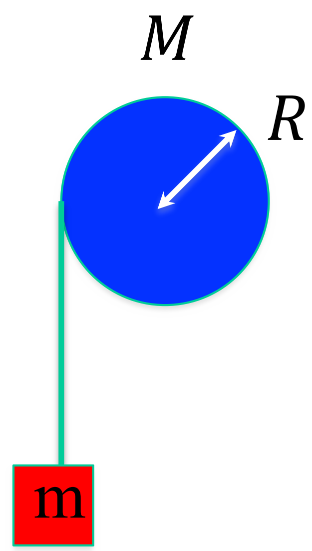
$$\Longrightarrow \vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I} \quad = \frac{RT\hat{z}}{\frac{MR^2}{2}} \quad = \frac{2T}{MR}\hat{z} \quad = \frac{2F}{MR}\hat{z}$$

Esempio carrucola e massa

Su una carrucola di massa M e raggio R, assimilabile a un disco omogeneo, vincolata a ruotare attorno ad un asse orizzontale, scorre una fune di massa trascurabile. Alla fune è sospeso un corpo di massa m soggetto all'azione della gravità e la fune rimane aderente alla carrucola.

Calcolare l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$ della carrucola e confrontarla con quella dell'esercizio precedente se:

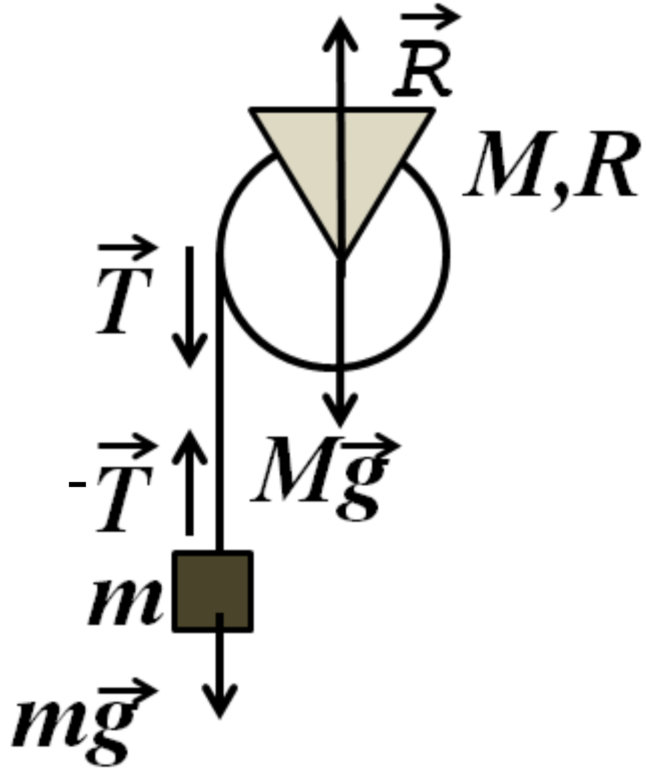
$$mg = F$$



Soluzione

- In questo caso occorre considerare anche l'equazione del moto del corpo di massa m:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \vec{T} \quad \Longrightarrow \vec{T} = -m(\vec{a} - \vec{g})$$



- La condizione che la corda non slitti, vincola l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$ della carrucola e l'accelerazione della massa m tramite la relazione:

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \vec{R}$$

- infatti all'istante t
  - la velocità del punto A della corda e quindi di ogni punto della corda è $\vec{\omega} \wedge \vec{R}$
  - l' accelerazione del punto A della corda e quindi di ogni punto della corda è $\vec{\alpha} \wedge \vec{R}$
  - la velocità e l'accelererazione di m sono uguali a quelle dei punti della corda

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \vec{R}$$

in quanto l'accelerazione $\vec{a}$ coincide con l'accelerazione tangenziale del punto sul bordo della carrucola in cui la corda assume la posizione verticale.

Calcolare l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$ della carrucola e confrontarla con quella dell'esercizio precedente se $mg = F$.

Il momento torcente sulla carrucola è dovuto anche questa volta alla tensione della corda

Il polo ovviamente è nel centro della carrucola , per cui:

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{T}}{I} = \frac{RT\hat{z}}{MR^2/2} = -\frac{2m\vec{R} \wedge (\vec{a} - \vec{g})}{MR^2} = \frac{2m(-R^2\vec{\alpha} + Rg\hat{z})}{MR^2}$$

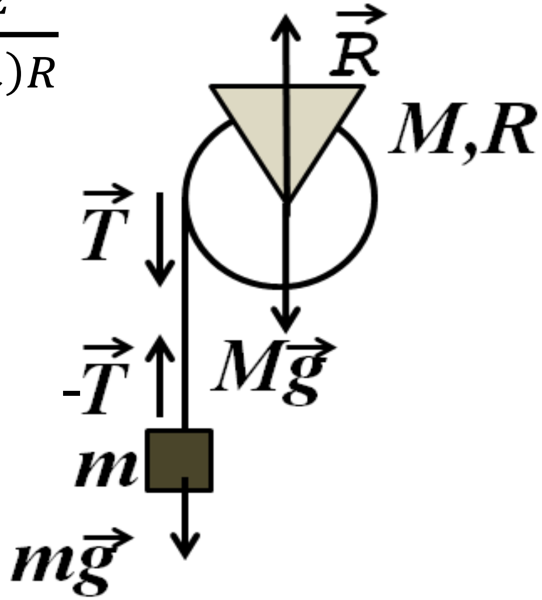
$$\Longrightarrow \vec{\alpha}\left(1 + \frac{2m}{M}\right) = \frac{2mg\hat{z}}{MR} \quad \Longrightarrow \vec{\alpha} = \frac{2mg\hat{z}}{(M+2m)R}$$

dove abbiamo sfruttato :

$$\vec{T} = -m(\vec{a} - \vec{g})$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{R} \wedge (\vec{\alpha} \wedge \vec{R}) = \vec{\alpha}R^2 - \vec{R}(\vec{R} \cdot \vec{\alpha})$$



$$\vec{\alpha} = \frac{2mg\hat{z}}{(M+2m)R}$$

Si può notare che se mg coincide con la forza F dell'esercizio precedente l'accelerazione angolare risulta inferiore, infatti prima valeva:

$$\Longrightarrow \vec{\alpha} = \frac{2F}{MR}\hat{z}$$

mentre nell'esercizio precedente il lavoro della forza $\vec{F}$ si convertiva integralmente in energia cinetica di rotazione della carrucola, in questo secondo caso una parte dell'energia potenziale della massa m viene spesa in energia cinetica della massa m stessa, per cui l'energia cinetica di rotazione della carrucola (e conseguentemente la sua accelerazione angolare) è minore.

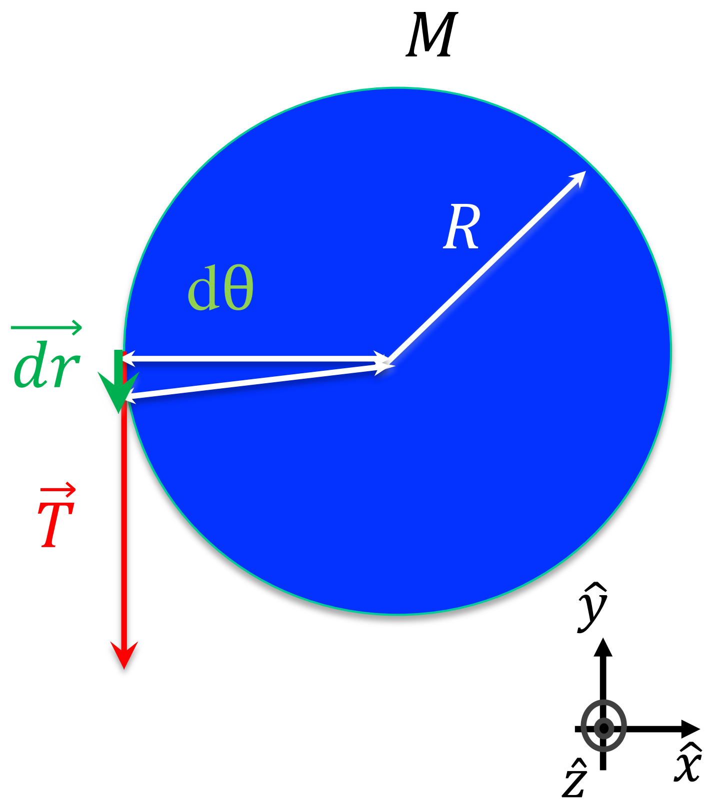
Lavoro nel moto rotazionale

Facendo riferimento all'applicazione precedente calcoliamo il lavoro infinitesimo fatto dalla tensione $\vec{T}$ relativamente ad uno spostamento angolare infinitesimo $d\theta$ della carrucola:

$$d\mathcal{L} = \vec{T}\cdot\overrightarrow{dr} = |\vec{T}||\overrightarrow{dr}|\cos(0) \qquad |\overrightarrow{dr}| = Rd\theta$$

$$\Rightarrow d\mathcal{L} = TRd\theta = \tau_z d\theta$$

In generale il lavoro per una rotazione finita di un corpo rigido che ruota attorno a un asse di rotazione passante per il CM sarà:



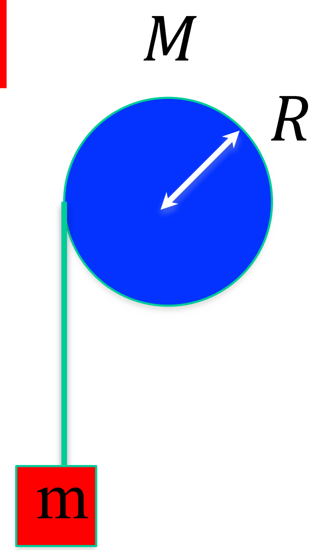
$$\mathcal{L}_{\theta_0\to\theta_f} = \int_{\theta_0}^{\theta_f}\tau_z d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_f} I_z^{CM}\dot{\omega}d\theta$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta_f} I_z^{CM}\dot{\omega}d\theta \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta_f} I_z^{CM}\dot{\omega}\omega dt = \int_{\theta_0}^{\theta_f} I_z^{CM}\frac{d\omega}{dt}\omega dt$$

$$= \int_{\omega_0}^{\omega_f} I_z^{CM}\omega d\omega = \frac{1}{2}I_z^{CM}\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_z^{CM}\omega_0^2$$

Conservazione dell’energia: esempio



- Consideriamo ora l’ultimo problema
  - Supponiamo che al tempo t=0 viene appesa la massa M

    per t=0

    $\vec{\alpha}=0 \qquad \vec{a}=0$

    $\vec{\omega}=0 \qquad \vec{v}=0$

- la variazione di energia meccanica del sistema (m + carrucola) tenuto conto che se m scende di un tratto h vale

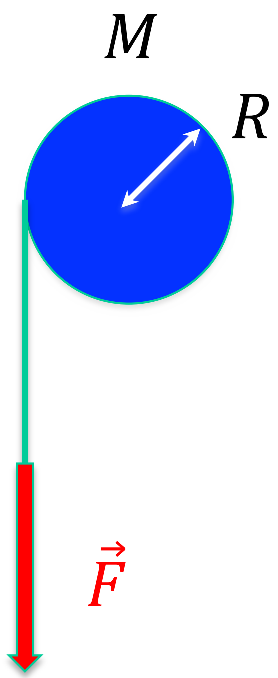
  h=Rθ

$$\Delta E = L_{NC} = \underbrace{L_{\vec{T}} + L_{-\vec{T}}}_{\text{nullo}} + \underbrace{L_{R_v}}_{\text{app. a un punto fermo: CM}} = 0 \Rightarrow$$

Se non ci sono attriti ulteriori l’energia meccanica si conserva

$$E_i = E_f \qquad E_i = mgh_i = E_f = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh_f$$

$$\Rightarrow mg(h_i - h_f) = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$



- Nel caso in cui invece della massa abbiamo la forza (F=mg)

$$K_f - K_i = L_F + L_{NC} = mg(h_i - h_f) = \frac{1}{2}I\omega^2 - 0$$

Motivazione delle diverse accelerazioni angolari

- Nel caso in cui la massa è appesa al filo

$$\Rightarrow K_f - K_i = mg\left(h_i - h_f\right) = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{2mg\hat{z}}{(M+2m)R}$$

- il lavoro fatto dalla forza di gravità sulla massa m si converte parte in energia cinetica di rotazione della carrucola e parte in energia cinetica della massa

- Nel caso in cui invece della massa abbiamo la forza (F=mg)

$$K_f - K_i = mg\left(h_i - h_f\right) = \frac{1}{2}I\omega^2$$

- il lavoro della forza $\vec{F}$ si converte integralmente in energia cinetica di rotazione della carrucola

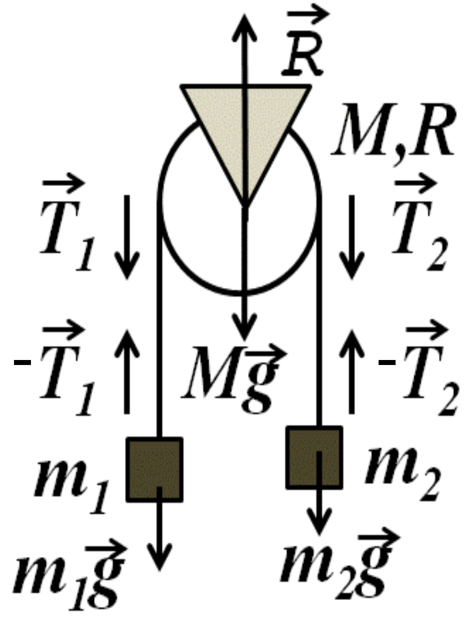
$$\Longrightarrow \vec{\alpha} = \frac{2F}{MR}\hat{z}$$

La “macchina di Atwood” rivisitata

Sia dato un sistema formato da una carrucola di massa M e raggio R, vincolata a ruotare intorno ad un asse orizzontale senza attrito, su cui scorre senza slittare una corda di massa trascurabile.

Alle estremità della corda sono appese due masse, di valori m_1 e m_2.

Calcolare l’accelerazione delle due masse, l’accelerazione angolare della carrucola e le tesioni dei fili lato destro e sinistro.



Soluzione

- Il centro di massa della carrucola è fermo, per cui

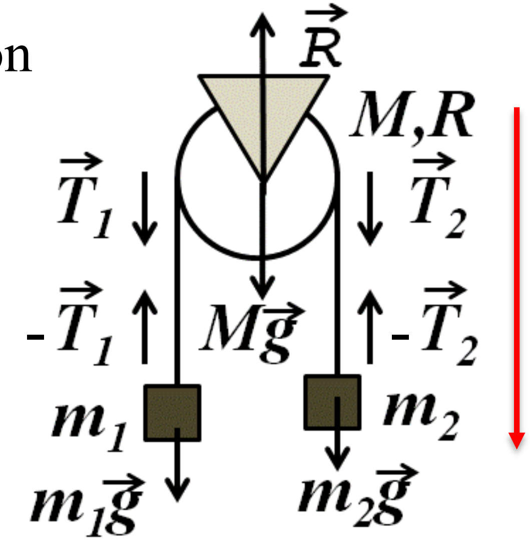
$$M\vec{g} + \vec{\mathcal{R}} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$$

- Le equazioni del moto delle due masse e le condizioni di non slittamento della corda sulla carrucola sono rispettivamente:

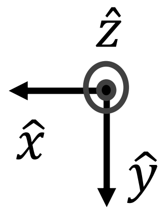
$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = -\vec{T}_1 + m_1\vec{g} \\ m_2\vec{a}_2 = -\vec{T}_2 + m_2\vec{g} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{\alpha}_1 \,\Lambda\, \vec{R}_1 \\ \vec{a}_2 = \vec{\alpha}_2 \,\Lambda\, \vec{R}_2 \end{cases}$$

dove gli indici “1” e “2” sulla carrucola indicano i lati della carrucola corrispondenti alla sospensione delle masse m_1 e m_2

- Le equazioni del moto delle due masse e le condizioni di non slittamento della corda sulla carrucola sono rispettivamente:



$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + m_1\vec{g} \\ m_2\vec{a}_2 = \vec{T}_2 + m_2\vec{g} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{\alpha}_1 \wedge \vec{R}_1 \\ \vec{a}_2 = \vec{\alpha}_2 \wedge \vec{R}_2 \end{cases}$$



- Poiché la lunghezza della corda non varia e la carrucola è rigida si può scrivere:

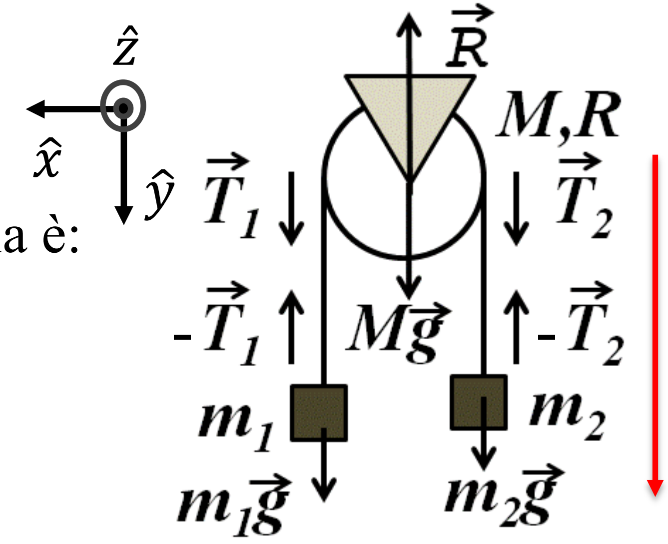
$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |a| \quad |\vec{\alpha}_1| = |\vec{\alpha}_2| = |\vec{\alpha}| \quad |\vec{R}_1| = |\vec{R}_2| = R$$

- Per quanto riguarda le tensioni, è necessario tenerle distinte (sono diverse) perché il trascinamento della carrucola da parte della fune implica che la carrucola stessa acceleri e quindi che il momento risultante su di essa sia non nullo
  - tale momento è dovuto alle due tensioni, per cui queste ultime devono essere diverse
- Supponendo per fissare le idee che sia $m_2 > m_1$
  - ci aspettiamo che la massa m_2 scende e la massa m_1 sale
  - fissiamo l'asse y orientato come in figura

(in caso contrario, se $m_1 > m_2$ l'accelerazione di m_2 risulterà diretta come $-\hat{y}$)

$$a = a_y \qquad \begin{cases} m_1 a = T_1 - m_1 g \\ m_2 a = m_2 g - T_2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{(m_2 - m_1)g + (T_1 - T_2)}{(m_1 + m_2)}$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g + (T_1 - T_2)}{(m_1 + m_2)}$$



- La seconda equazione cardinale applicata alla carrucola è:

$$\vec{\tau} = \vec{R}_1 \wedge \vec{T}_1 + \vec{R}_2 \wedge \vec{T}_2 = R(T_1 - T_2)\hat{z} = \frac{MR^2}{2}\vec{\alpha}$$

$$= \frac{MR^2}{2}(\alpha_z)\hat{z} \qquad \Rightarrow \alpha_z = \frac{-2(T_2 - T_1)}{MR}$$

$$\Rightarrow a = -\alpha_z R = \frac{2(T_2 - T_1)}{M}$$

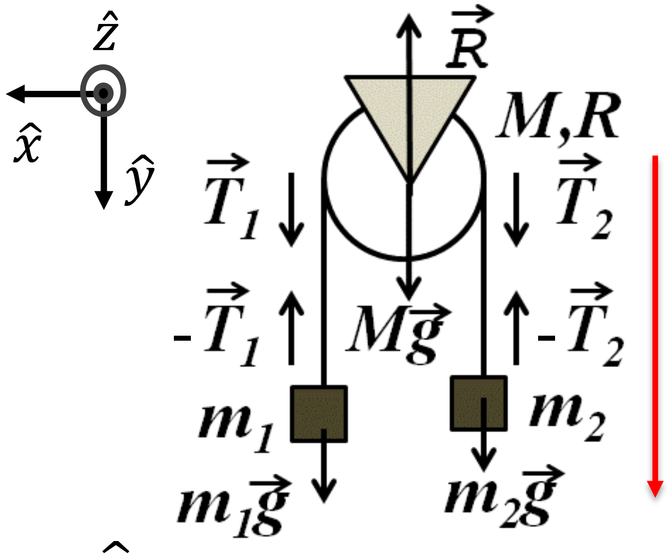
$$a = \frac{(m_2 - m_1)g + (T_1 - T_2)}{(m_1 + m_2)} = \frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)} - \frac{(T_2 - T_1)}{(m_1 + m_2)}$$

$$= \frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)} - \frac{Ma}{2(m_1 + m_2)} \qquad \Rightarrow a = \frac{(m_2 - m_1)g}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)}$$

- L'accelerazione angolare della carrucola vale

$$\alpha_z = -\frac{a}{R} = -\frac{(m_2 - m_1)g}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)R}$$

$$\alpha_z = -\frac{a}{R} = -\frac{(m_2 - m_1)g}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)R}$$



- Le tensioni $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ nei punti di contatto fra la corda e la carrucola sono infine:

$$\begin{cases} \vec{T}_1 = m_1(\vec{g} - \vec{a}_1) = \dfrac{\left(2m_1m_2 + m_1\frac{M}{2}\right)\vec{g}}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)} \\ \vec{T}_2 = m_2(\vec{g} - \vec{a}_2) = \dfrac{\left(2m_1m_2 + m_2\frac{M}{2}\right)\vec{g}}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)} \end{cases}$$

$$\vec{a}_1 = -a\hat{y}$$

$$\vec{a}_2 = a\hat{y}$$

- dove abbiamo usato

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)} \qquad \vec{a}_1 = -\frac{(m_2 - m_1)\vec{g}}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)} \qquad \vec{a}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{g}}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)}$$

$$
\begin{cases}
\vec{T}_1 = m_1(\vec{g} - \vec{a}_1) = m_1\left(\vec{g} + \dfrac{(m_2 - m_1)\vec{g}}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)}\right) = \\
\qquad \dfrac{\vec{g}\left(m_1^2 + m_1 m_2 + m_1\frac{M}{2} + m_1 m_2 - m_1^2\right)}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)} = \dfrac{\left(2m_1 m_2 + m_1\frac{M}{2}\right)\vec{g}}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)} \\
\vec{T}_2 = m_2(\vec{g} - \vec{a}_2) = m_2\left(\vec{g} - \dfrac{(m_2 - m_1)\vec{g}}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)}\right) = \\
\qquad \dfrac{\vec{g}\left(m_2^2 + m_1 m_2 + m_2\frac{M}{2} - m_2^2 + m_1 m_2\right)}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)} = \dfrac{\left(2m_1 m_2 + m_2\frac{M}{2}\right)\vec{g}}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)}
\end{cases}
$$

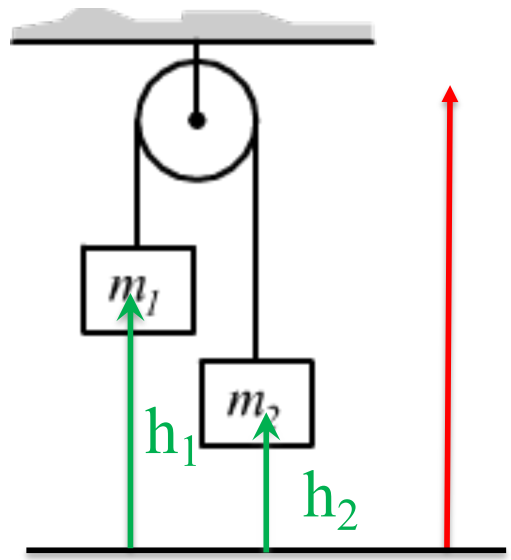
- Le due tensioni sono eguali se la massa della carrucola è nulla $(M = 0)$, cioè se la carrucola ha l'unico effetto di cambiare l'orientazione della corda e collegare i due corpi da parti opposte

Calcolare l'accelerazione del sistema per la macchina di Atwood utilizzando il principio di conservazione dell'energia meccanica.

Esercizio

Soluzione

- La macchina di Atwood contiene delle forze che, in linea di principio, possono essere non conservative (le tensioni delle corde e la reazione vincolare), per le tensioni il loro lavoro globale è nullo e la reazione vincolare non compie lavoro (come visto in un esercizio) per cui l'energia meccanica totale si conserva.



- Dette h_1 e h_2 le quote delle masse m_1 e m_2 rispetto alla terra, l'energia totale E del sistema ha l'espressione:

$$E = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + m_1 g h_1 + m_2 g h_2$$

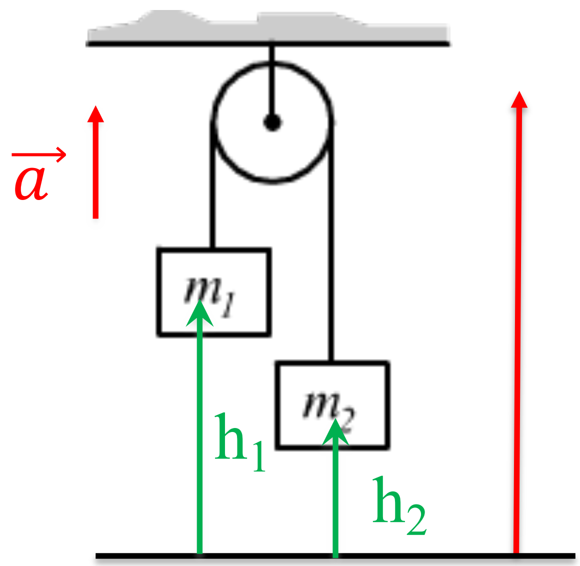
- Supponendo per fissare le idee che sia $m_2 > m_1$
  - il corpo di massa m_2 scende, per cui h_2 diminuisce
  - il corpo di massa m_1 sale, per cui h_1 aumenta
- Essendo la corda inestensibile

$$\dot{h}_1 = -\dot{h}_2 \qquad V_1 = \dot{h}_1 \qquad V_2 = \dot{h}_2 = -\dot{h}_1 \qquad \Rightarrow V_1 = -V_2$$

mentre per la condizione di pura rotazione $|V_1| = |\omega R|$

$$|V_1| = |\omega R| \quad V_1 = -V_2 \qquad V_2 = \dot{h}_2 = -\dot{h}_1 = -V_1$$

$$E = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + m_1 g h_1 + m_2 g h_2$$



- Possiamo quindi riscrivere l'energia totale nella forma:

$$E = \frac{(m_1 + m_2) V_1^2}{2} + \frac{MR^2}{2}\frac{V_1^2}{2R^2} + m_1 g h_1 + m_2 g h_2$$

- Essendo E costante la sua derivata rispetto al tempo è nulla, per cui:

$$\frac{dE}{dt} = 0 = \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right) V_1 \dot{V}_1 + m_1 g \dot{h}_1 + m_2 g \dot{h}_2$$

$$= \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right) V_1 \dot{V}_1 + (m_1 - m_2) g V_1$$

Poiché $\dot{V}_1$ è proprio l'accelerazione a di m_1 e V_1 è chiaramente diversa da zero, è possibile dividere per V_1, portare l'ultimo termine a secondo membro cambiandolo di segno per poi ottenere:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)} g$$

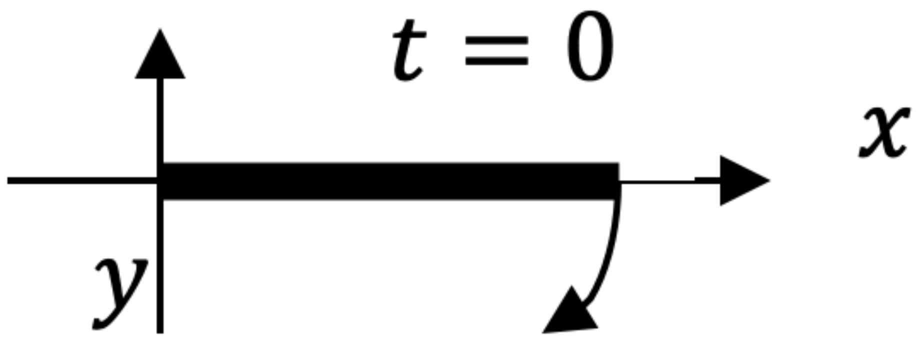
$$a = \frac{(m_2 - m_1)}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)} g$$

- notare che il confronto questa soluzione con la soluzione “tradizionale” basata sulle equazioni cardinali il risultato è lo stesso perche’ l’asse scelto (y) ha verso opposto a quello scelto per la soluzione tradizionale.

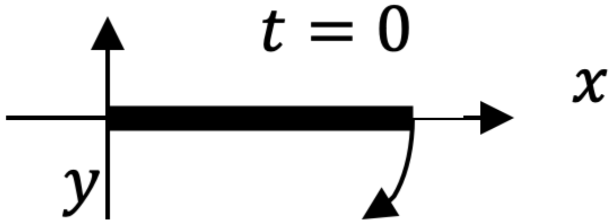
Si noti che con questa tecnica non è possibile determinare le tensioni perchè esse non contribuiscono al bilancio energetico del sistema

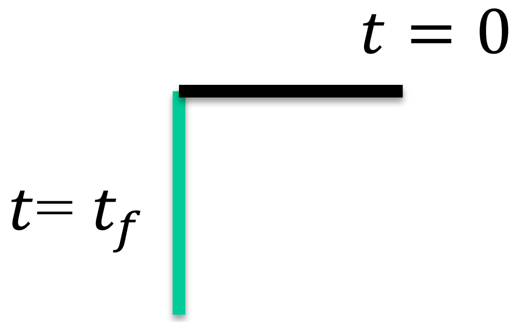
Esercizio

Una sbarra omogenea (massa m e lunghezza L) è libera di ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per un suo estremo. Al tempo $t = 0$ la sbarra è ferma in posizione orizzontale ed è lasciata libera di muoversi: al tempo $t = t_f$ la sbarra ha effettuato una rotazione di 90^0 (è in posizione verticale).



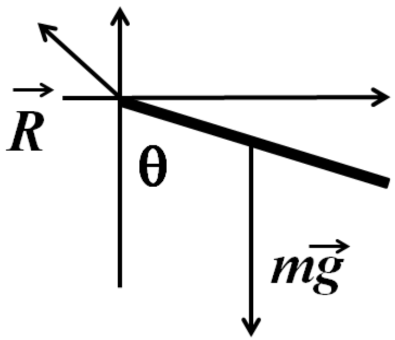
1. Si identifichino tutte le forze che agiscono sulla sbarra.

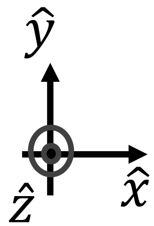




Dati
m massa della sbrarretta
L lunghezza della sbarretta
$t = 0$ velocità nulla
$t = t_f$ posizioneverticale

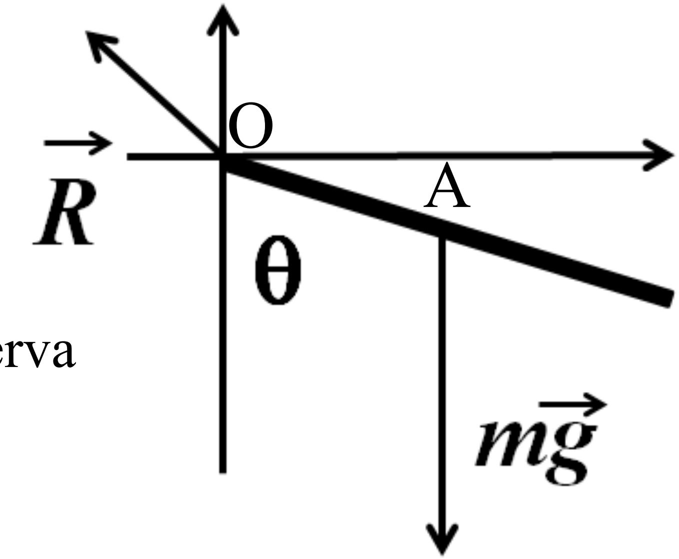
1. Si identifichino tutte le forze che agiscono sulla sbarra.





2. Durante il moto quale delle seguenti grandezze si conserva e perchè (a) la quantità di moto ($\vec{P}$), (b) il momento angolare rispetto all'asse di rotazione ($\vec{L}$) e (c)l'energia meccanica (E) della sbarra?

2. Durante il moto quale o quali delle seguenti grandezze si conserva e perchè (a) la quantità di moto ($\vec{P}$), (b) il momento angolare rispetto all'asse di rotazione ($\vec{L}$) e (c)l'energia meccanica (E) della sbarra?



- dalla I cardinale per l'asta

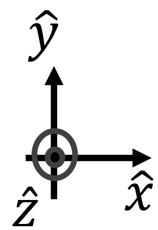
$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = m\vec{a}_{CM} = \vec{R}^{(est)} = m\vec{g} + \vec{R}$$

quindi la quantità di moto $\vec{P}$ non si conserva

- dalla II cardinale per l'asta (polo in O)

$$\vec{\tau} = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{g} \neq 0$$

per cui il momento angolare $\vec{L}$ non si conserva

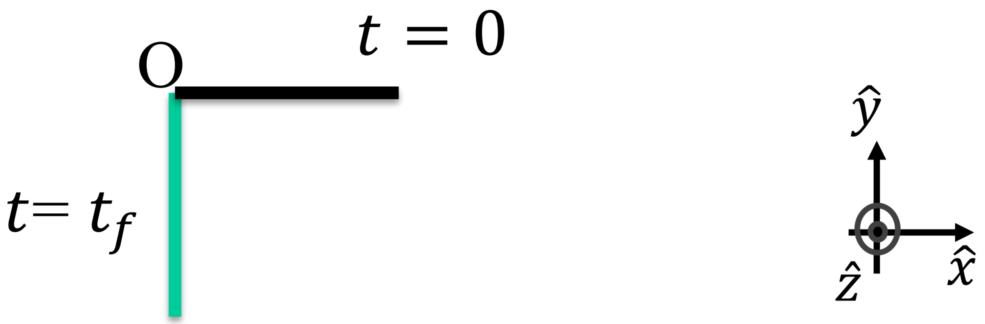


- $\Delta E = L_{NC} = L_{R_v} = 0$

punto di applicazione della forza di reazione vincolare un punto fisso

L'energia si conserva

3. Utilizzando una legge di conservazione appropriata si calcoli la velocità angolare della sbarra al tempo t_f.



- Utilizziamo la conservazione dell'energia

- la quota del centro di massa si abbassa di L/2

$$\Delta U = mg\Delta h = -\frac{mgL}{2} = -\Delta K = K_i - K_f = 0 - K_f = -K_f$$

- l'asse di rotazione dell'asta è diretto come $\hat{z}$ ma non passa per il CM dell'asta, passa per O. Calcoleremo poi il momento di inerzia che per ora indicheremo con I_z^o :

$$\frac{mgL}{2} = K_f = \frac{1}{2} I_z^o \omega_f^2 \Rightarrow \omega_f = \sqrt{\frac{mgL}{I_z^o}}$$

$$I_z^o = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{3} \qquad \Rightarrow \omega_f = \sqrt{\frac{mgL}{m\,L^2/3}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

4. Si calcoli l'accelerazione del centro di massa della sbarra un istante dopo che è lasciata libera di ruotare

- Dalla seconda equazione cardinale (polo in O) e dalla condizione di rotazione, appena lasciata libera l'accelerazione angolare è:

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I_z^o} = \frac{\overrightarrow{OA} \Lambda m\vec{g}}{(m\,L^2/3)} = -\frac{mgL}{2(m\,L^2/3)}\hat{z} = -\frac{3g}{2L}\hat{z}$$

Il segno "meno" davanti a $\hat{z}$ deriva dal fatto che la rotazione è oraria

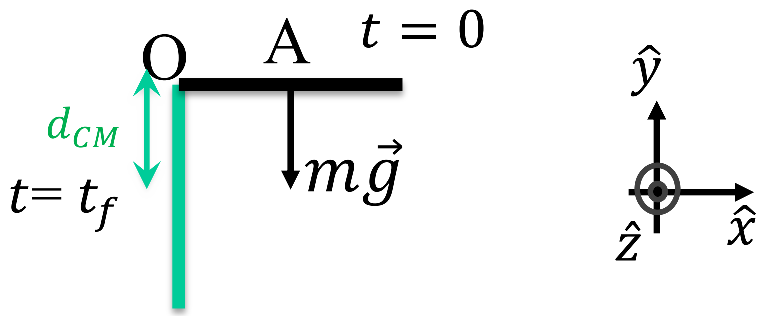
$$\Longrightarrow \vec{a} = \vec{\alpha} \,\Lambda\, \vec{R}_{CM} = -\frac{3g}{2L}\hat{z} \,\Lambda\, \frac{L}{2}\hat{x} = -\frac{3g}{4}\hat{y}$$

5. Si calcoli l'accelerazione del centro di massa della sbarra al tempo $t = t_f$.

- All'istante $t = t_f$ l'accelerazione del CM è solo centripeta, perché la velocità è massima. Pertanto:

$$\vec{a}(t_f) = \frac{V^2(t_f)}{d_{CM}}\hat{y} = \frac{\omega^2(t_f)\left(\frac{L}{2}\right)^2}{L/2}\hat{y}$$

$$= \frac{3g}{L}\frac{L}{2}\hat{y}$$



6. Si calcoli la reazione del perno $\vec{R}$ un istante dopo che la sbarretta è lasciata cadere

- Dalla seconda legge di Newton (prima cardinale dei sistemi) un istante dopo che la sbarretta è lasciata cadere:

$$\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a} \qquad \Longrightarrow \vec{R} = m(\vec{a} - \vec{g}) = m\left(-\frac{3g}{4}\hat{y} - (-g\hat{y})\right) = \frac{mg}{4}\hat{y}$$

$\vec{a}$ determinata nella risposta alla domanda 4

7. Si calcoli la reazione del perno al tempo $t = t_f$.

- Come nel punto precedente:

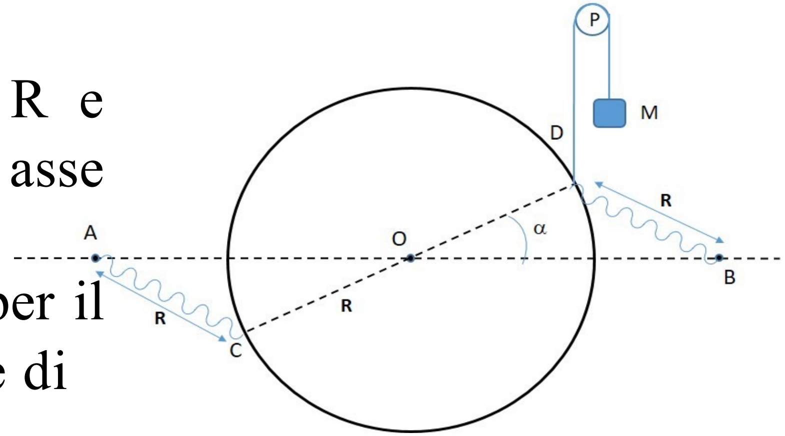
$$\vec{R}(t_f) + m\vec{g} = m\vec{a}(t_f) \quad \Longrightarrow \vec{R}(t_f) = m(\vec{a}(t_f) - \vec{g})$$

- Da risposta domanda 5

$$\vec{a}(t_f) = \frac{3g}{2}\hat{y}$$

$$\vec{R}(t_f) = m\left(\frac{3g}{2}\hat{y} - (-g\hat{y})\right) = \frac{5mg}{2}\hat{y}$$

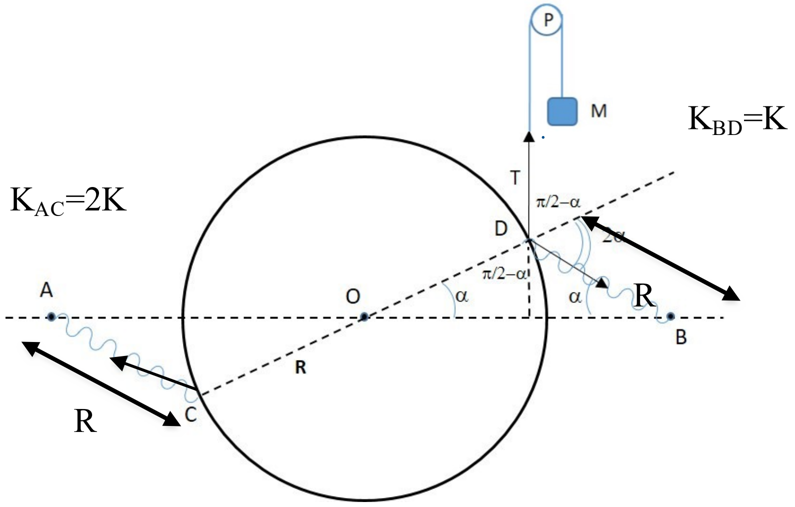
Esame di Fisica Generale del 29/06/2018



Un disco di legno (densità ρ_{legno}, raggio R e spessore d) può ruotare intorno a un asse orizzontale passante per il suo centro O.
Nei punti A e B, posti lungo la retta passante per il diametro orizzontale, sono disposte due molle di lunghezza a riposo nulla e costanti elastiche $k_{BD} = k$ e $k_{AC} = 2k$, i cui altri estremi sono connessi al bordo del disco, nei rispettivi punti C e D.
Un filo ideale esercita una forza verticale nel punto D ed il sistema risulta in equilibrio nella configurazione in figura, per la quale l'angolo $\alpha = \pi/6$ e la lunghezza di ciascuna molla è pari a R.
A tale filo è appesa una massa M attraverso una carrucola fissa (P) avente massa nulla, su cui il filo può scorrere senza strisciare.

1. Calcolare il valore della massa M nella configurazione di equilibrio. M = ...
2. All'istante t=0 il filo viene tagliato. Calcolare l'accelerazione angolare, $\dot{\omega}$, e la reazione vincolare in O, $\vec{R}_o$, subito dopo il taglio del filo. $\dot{\omega}$= ...., $\vec{R}_o$=.........
3. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni T intorno alla posizione di equilibrio del sistema molle- disco, quando il filo è tagliato. T = ...

[assumere l'accelerazione di gravità $g = 10\ m/s^2$, $\rho_{legno} = 0.4\ g/cm^3$, $R = 1\ m$, $d = 1\ cm$, $k = 10\ N/m$]



Situazione iniziale: equilibrio.

$\alpha = \pi/6$

Disco: raggio R, spessore d densità ρ

Molle: $K_{AC} = 2K$, $K_{BD} = K$, $l_0^1 = l_0^2 = \emptyset$

all'equilibrio $l_1 = l_2 = R$, $\alpha = \pi/6$

Carrucola di Massa nulla

Il disco può ruotare attorno ad un asse ortogonale passante per O.

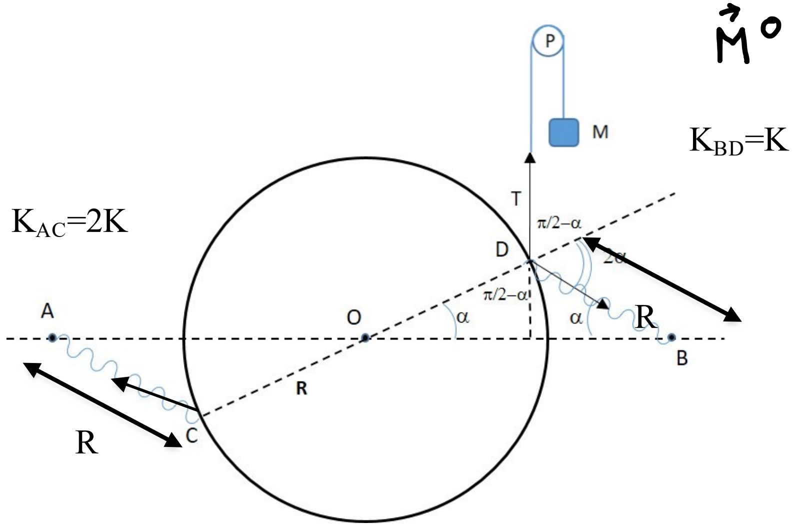
Calcolare il valore della massa M nella configurazione di equilibrio. M = ...

All'equilibrio: I^a eq. cardinale $\begin{cases} \sum_x F_x = 0 \\ \sum_y F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Il CM del disco è fermo. $\begin{cases} \text{2 equazioni in} \\ \text{3 incognite} \\ R_{ox}, R_{oy}, T \end{cases}$

II^a eq cardinale $\vec{M}(E) = 0 = \sum_i \vec{\tau}_i(E) \Rightarrow$ Il disco non ruota

Scegliamo come polo il CM del disco O: Il momento delle forze che può solo essere diretto lungo z e è nullo. NOTA questa scelta rende nullo $\vec{\tau}^{\,o}(\vec{R}_o)$

$$\vec{M}^o = \vec{OD} \wedge \vec{T}_{filo} + \vec{OD} \wedge \vec{F}_{el\,DB} + \vec{OC} \wedge \vec{F}_{el\,AC} = \emptyset$$

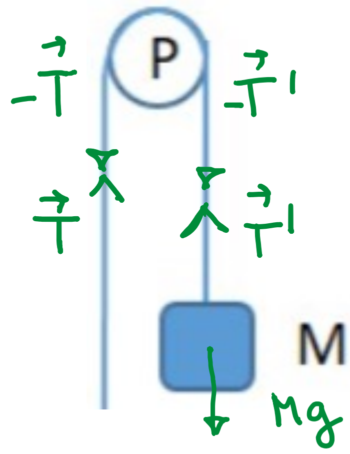


$$\vec{M}^O = \vec{OD}\wedge\vec{T}_{filo} + \vec{OD}\wedge\vec{F}_{el\,DB} + \vec{OC}\wedge\vec{F}_{el\,AC} = \emptyset$$

$$R\,T_{filo}\cdot\sin R\hat{T}_{filo}\,\hat{z} - R\,F_{el\,DB}\cdot\sin R\hat{F}_{el\,DB}\,\hat{z}$$

$$- R\,F_{el\,CA}\sin R\hat{F}_{el\,CA}\,\hat{z} = \emptyset \qquad T_{filo}?$$

La carrucola ha massa nulla:



$$I_c\,\dot{\omega} = -RT' + RT_{filo}$$

$$\Rightarrow I_c = \emptyset \Leftrightarrow |T'| = |T_{filo}|$$

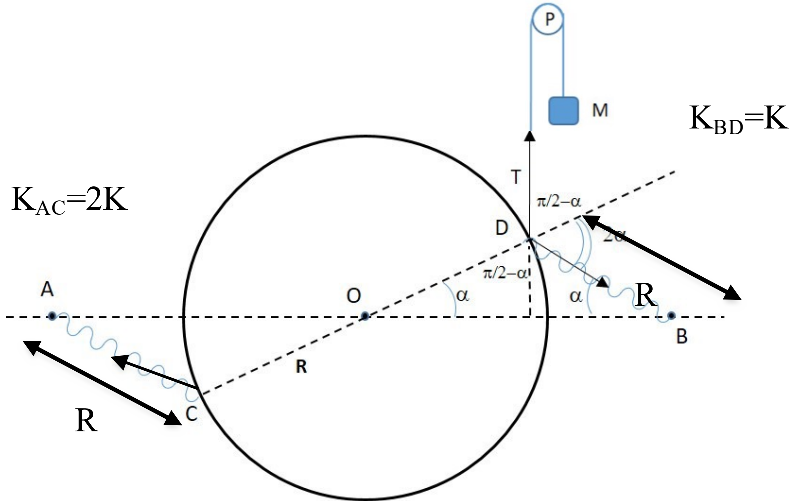
La carrucola è ferma

all'equilibrio $\sum_y F_y = 0 \Rightarrow -Mg + T' = 0 \Leftrightarrow Mg = T' = T$

$$R\,T_{filo}\cdot\sin R\hat{T}_{filo}\,\hat{z} - R\,F_{el\,DB}\cdot\sin R\hat{F}_{el\,DB}\,\hat{z} - R\,F_{el\,CA}\sin R\hat{F}_{el\,CA}\,\hat{z} = \emptyset$$

$$R\,Mg\sin(\pi/2-\alpha) - R\,KR\sin 2\alpha - R\,2KR\sin 2\alpha = \emptyset$$

$$R\,Mg\,\sin(\pi/2-\alpha) - R\,KR\sin 2\alpha - R\,2KR\sin 2\alpha = \emptyset$$



$$\Rightarrow\ Mg\cos\alpha = 3KR\sin 2\alpha$$

$$\text{per } \alpha = \pi/6 = 30^\circ \begin{cases} \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 \\ \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 \end{cases}$$

Calcolare il valore della massa M nella configurazione di equilibrio. M = ...

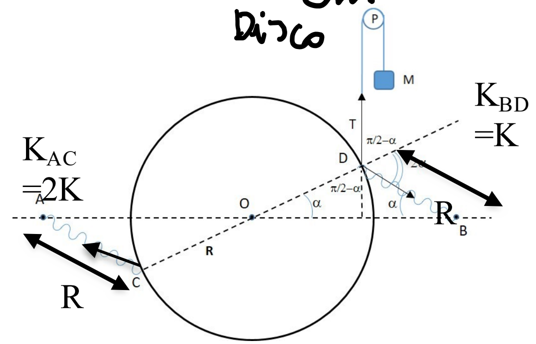
$$M = \frac{3KR}{g} = 3\,\text{kg}$$

2. All'istante t=0 il filo viene tagliato. Calcolare l'accelerazione angolare, $\dot{\omega}$, e la reazione vincolare in O $\vec{R}_o$, subito dopo il taglio del filo. $\dot{\omega}$= ...., $\vec{R}_o$=.........

Quando il filo si spezza possiamo scrivere le 2 equazioni

I^a cardinale
II^a Cardinale

$$\begin{cases} ① \ \vec{R}_o + \vec{F}_{el\,AC} + \vec{F}_{el\,DB} + M_{Disco} \cdot \vec{g} = 0 = \underset{Disco}{M} \vec{a}_{cm} = 0 \\ ② \ \vec{OD} \wedge \vec{F}_{el\,DB} + \vec{OC} \wedge \vec{F}_{el\,AC} = I \vec{\dot{\omega}} \end{cases}$$



Infatti se $\vec{a}_{CM} = 0$ il disco può solo ruotare attorno ad O e non trasla

La massa del disco? $M_{Disco} = \rho \pi R^2 \cdot d = 12.6$ kg

L'equazione ② ha gli stessi valori della domanda 1 a primo membro con $T_{filo} = \varnothing$!

$$R\,Mg \sin(\pi/2 - \alpha) - R\,KR \sin 2\alpha - R\,2KR \sin 2\alpha = \varnothing \Rightarrow$$

$$- R\,KR \sin 2\alpha - R\,2KR \sin 2\alpha = I \dot{\omega}_z$$

$$-R\,KR\sin 2\alpha - R\,2KR\sin 2\alpha = I\dot{\omega}_z \Rightarrow \dot{\omega}_z = -\frac{3KR^2\sin 2\alpha}{I}$$

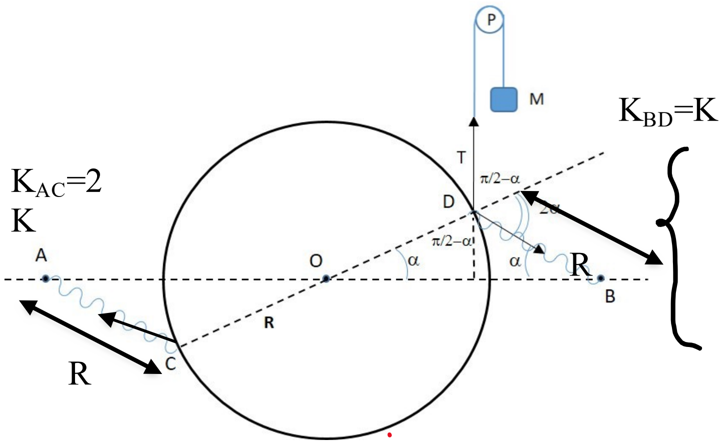
$$I = \frac{M_{Disco}R^2}{2} \Rightarrow \dot{\omega}_z = -4.1\ rad/s^2$$

2. All'istante t=0 il filo viene tagliato. Calcolare l'accelerazione angolare, $\dot{\omega}$, e la reazione vincolare in O, $\vec{R}_o$, subito dopo il taglio del filo. $\dot{\omega}$= ...., $\vec{R}_o$=.........

I^a cardinale

II^a cardinale

$$\begin{cases} ① \ \vec{R}_o + \vec{F}_{el\,AC} + \vec{F}_{el\,DB} + M_{Disco}\cdot\vec{g} = 0 = M\vec{a}_{cm} = 0 \\ ② \ \vec{OD}\wedge\vec{F}_{el\,DB} + \vec{OC}\wedge\vec{F}_{el\,AC} = I\vec{\dot{\omega}} \end{cases}$$



I^a cardinale

$$\begin{cases} R_{oy} + 2KR\sin\alpha - KR\sin\alpha - M_{Disco}\,g = 0 \\ R_{ox} - 2KR\cos\alpha + KR\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

I^a cardinale

$$\begin{cases} R_{oy} + 2KR\sin\alpha - KR\sin\alpha - M_{Disco}\, g = 0 \\ R_{ox} - 2KR\cos\alpha + KR\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = 1/2 \\ \cos 30^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{oy} = M_{Disco}\, g - KR\sin\alpha = -\frac{KR}{2} + M_{Disco} \cdot g = -120.6\,N \\ R_{ox} = KR\cos\alpha = KR\sqrt{\frac{3}{2}} = 8.7\,N \end{cases}$$

$$\vec{R}_o = (8.7, -120.6)\,N$$

3. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni T intorno alla posizione di equilibrio del sistema molle- disco, quando il filo è tagliato. T = ...

Quando il filo è tagliato la posizione di equilibrio è quella in cui il momento delle forze $\vec{M}^O = \emptyset$, e $\vec{R} + M_{disco}\vec{g} + \vec{F}_{el\,AB} + \vec{F}_{el\,DC} = \emptyset$

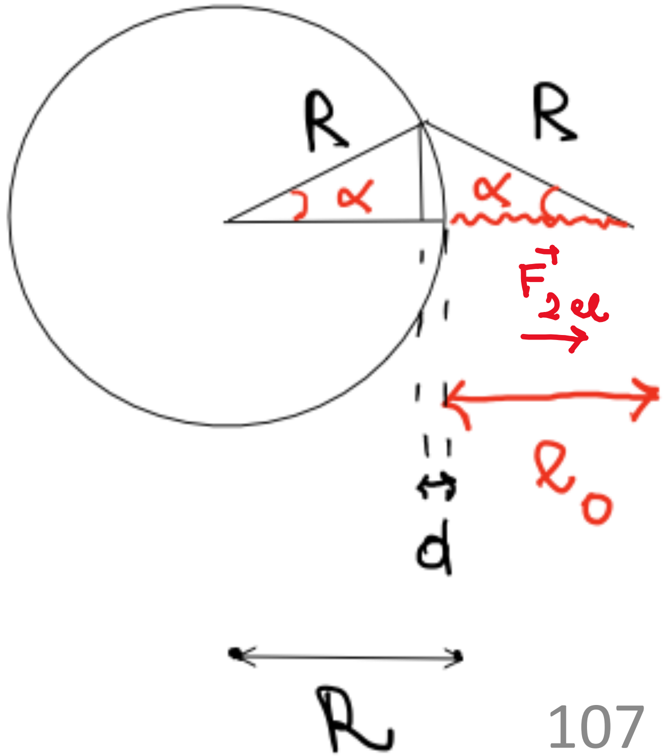
$\Rightarrow$ la posizione di equilibrio è quella in cui le molle sono orizzontali e

$$\begin{cases} R_x - F_{1el} + F_{2el} = 0 \Rightarrow R_{ox} = F_{1el} - F_{2el} \\ R_{oy} = M_{disco}\, g \end{cases}$$

La lunghezza all'equilibrio delle molle corrisponde a

$$l_o = \underbrace{R\cos\alpha}_{l_o + d} - \underbrace{R(1-\cos\alpha)}_{d} = 2R\cos\alpha - R$$

$$l_o = R(2\cos\alpha - 1) = R(\sqrt{3} - 1)$$

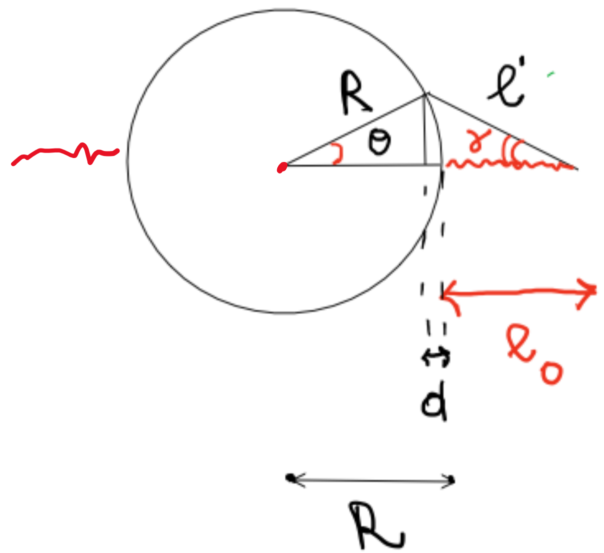


Per trovare il periodo delle piccole oscillazioni ci sono 2 modi

① determinare l'equazione del momento delle forze quando il sistema viene ruotato di un piccolo ($\ll 10°$) angolo θ rispetto alla posizione di equilibrio

② Sfruttare, ove possibile, la conservazione dell'energia

② il sistema viene ruotato di un piccolo ($\ll 10°$) angolo θ rispetto alla posizione di equilibrio



$$\ell'^2 = \left[\ell_0 + (R - R\cos\theta)\right]^2 + (R\sin\theta)^2$$

per $\theta \ll 10°$

$$\ell'^2 = \ell_0^2 + (R\theta)^2 \Rightarrow \ell' = \sqrt{\ell_0^2 + R^2\theta^2} \Rightarrow$$

Non ci sono forze esterne non conservative $\Rightarrow E = \text{cost}$

Nota la lunghezza a riposo della molla è nulla.

$$E = \underbrace{\tfrac{1}{2}K(\ell_0^2 + R^2\theta^2)}_{\text{molla DC}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot 2K(\ell_0^2 + R^2\theta^2)}_{\text{molla AB}} + \tfrac{1}{2}M\underbrace{V_{CM\,\text{disco}}^2}_{=0} + \tfrac{1}{2}I\dot\theta^2 \qquad \text{con } \omega = \dot\theta$$

$$E = \frac{1}{2}K(\ell_0^2 + R^2\theta^2) + \frac{1}{2}\cdot 2K(\ell_0^2 + R^2\theta^2) + \frac{1}{2}MV^2_{\text{Disco CM}} + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \qquad \text{con } \omega = \dot{\theta}$$

molla DC   molla AB $\parallel 0$

$$E = \text{cost} = \frac{3}{2}K(\ell_0^2 + R^2\theta^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \qquad \text{da } \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 = \frac{3}{2}K\,2R^2\theta\dot{\theta} + \frac{1}{2}\cdot 2I\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0 \qquad \Rightarrow -3KR^2\theta = I\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3KR^2}{I}\theta = \emptyset$$

$\Rightarrow$ soluzione eq. dell'oscillatore armonico

$A\cos(\omega t + \phi)$ con $\omega^2 = \dfrac{3KR^2}{I}$

$$\omega = \sqrt{\frac{3KR^2\,2}{M_{\text{Disco}}R^2}} = \sqrt{\frac{6K}{M_{\text{Disco}}}} = 2.2\ \text{rad/s} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2.9\ \text{s}$$