Potenza e Energia (Segnali aperiodici)

$x(t) \Rightarrow$ segnale analogico aperiodico

$x_T(t) \Rightarrow$ segnale troncato

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

POTENZA ISTANTANEA

$$p_x(t) = |x(t)|^2 \qquad x(t) \in \mathbb{C}$$

ENERGIA

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt$$

- Se un segnale ha energia infinita è un segnale ideale, altrimenti è un segnale fisico

POTENZA MEDIA

$$E_{x_T} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t)\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} |x(t)|^2\, dt$$

$$P_{x_T} = \frac{E_{x_T}}{T} \Rightarrow P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{E_{x_T}}{T}$$

- Se $E_x = K < \infty \Rightarrow P_x = 0$

• Se $P_x = K < \infty \Rightarrow E_x = \infty$

Potenza e Energia (Segnali periodici)

$$x(t) = x(t - KT_0) \qquad K \in \mathbb{Z},\ T_0 \in \mathbb{R}^+$$

ENERGIA

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \sum_K \int_{-\frac{T_0}{2} - KT_0}^{\frac{T_0}{2} + KT_0} |x(t)|^2\, dt = \sum_K X$$

$$= \lim_{K \to \infty} K X = \infty$$

POTENZA MEDIA

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2\, dt$$

SISTEMI MONODIMENSIONALI

DEFINIZIONE

$$\underset{\text{(ingresso)}}{x(t)} \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow \underset{\text{(uscita)}}{y(t)}$$

$$y(t) = T[x(t)]$$

- L'uscita non dipende solamente dall'ingresso all'istante "t"

- **LINEARITÀ**

Sistema lineare se:

$$x(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \Rightarrow y(t) = T[x(t)] = aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)]$$

- **STAZIONARIETÀ**

$$y(t) = T[x(t)] \Rightarrow T[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$$ (il sistema non cambia nel tempo)

- **SISTEMA LINEARE E STAZIONARIO (SLS)**

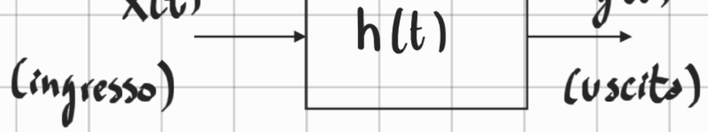
DEFINIZIONE DI RISPOSTA ALL'IMPULSO

$$\underset{\text{(ingresso)}}{x(t) = \delta(t)} \longrightarrow \boxed{T[\cdot]} \longrightarrow \underset{\text{(uscita)}}{y(t) = h(t)}$$

$$h(t) \triangleq T[\delta(t)]$$

- $h(t)$ esiste per tutti i sistemi
- $h(t)$ per gli SLS caratterizza completamente il sistema

$$x(t) \longrightarrow \underset{\text{SLS}}{\boxed{\quad}} \longrightarrow y(t)$$



$$y(t) = T[x(t)] = x(t) \otimes h(t)$$

DIM.

$$y(t) = T[x(t)] = T[x(t) \otimes \delta(t)]$$

$$= T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, \delta(\tau - t)\, d\tau\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, T[\delta(\tau - t)]\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = x(t) \otimes h(t) \quad \square$$

- CAUSALITÀ

L'effetto non può precedere la causa (fisicamente)

$y(t) = T[x(\alpha)\,;\ \alpha \leq t] \Rightarrow$ l'uscita all'istante "t" dipende dall'ingresso a istanti precedenti o al più uguali a t (α)

- SISTEMA SLS e CAUSALE

$h(t) = 0 \quad t < 0$ (per la causalità)

- STABILITÀ BIBO (BOUNDED INPUT BOUNDED OUTPUT)

Se l'ingresso ha ampiezza limitata allora anche l'uscita lo sarà

$$|x(t)| \leq M \leq \infty \Rightarrow |y(t)| \leq N < \infty$$

- SISTEMI SLS e STABILI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = K < \infty \Rightarrow$$ ASSOLUTA INTEGRABILITÀ DELLA $h(t)$

DIM.

$$|y(t)| = |T[x(t)]| = |x(t) \otimes h(t)|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) \, d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)| \, |h(t-\tau)| \, d\tau$$

$$\Rightarrow \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) \, d\tau \right| \leq M \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| \, d\tau}_{\substack{K < \infty \\ \text{per hp}}} = MK = N \quad \blacksquare$$

- MEMORIA

- Un sistema è senza memoria se

$$y(t) = T[x(\alpha) ; \alpha = t]$$

- Un sistema ha memoria se

$$y(t) = T[x(\alpha) ; \alpha \leq t]$$

- INVERTIBILITÀ

se $\exists \; y(t) = T[x(t)] \Rightarrow x(t) = T^{-1}[y(t)]$

RISPOSTA IN FREQUENZA

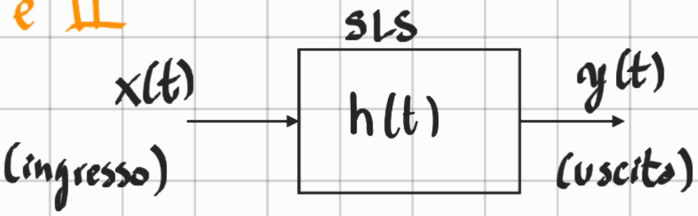
DEFINIZIONE

I. $$H(f) = \left. \frac{y(t)}{x(t)} \right|_{x(t) = e^{j2\pi f t}}$$

II. $$H(f) = TCF[h(t)]$$

III. $$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

DIM. I e II



$$x(t) = e^{j2\pi f} = \cos(2\pi f t) + j \sin(2\pi f t)$$

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f \tau} h(t-\tau)\, d\tau \qquad \{\tau' = t-\tau\}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f(t-\tau')} h(\tau')\, d\tau' = e^{j2\pi f t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f \tau'} h(\tau')\, d\tau'$$

$$= e^{j2\pi f t} H(f) = x(t) H(f) \Rightarrow y(t) = x(t) H(f) \quad \boxtimes$$

DIM. III

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

$\Downarrow$ TCF e TEO CONVOLUZIONE

$$Y(f) = X(f) H(f) \Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad \boxtimes$$

RISPOSTA IN MODULO E FASE

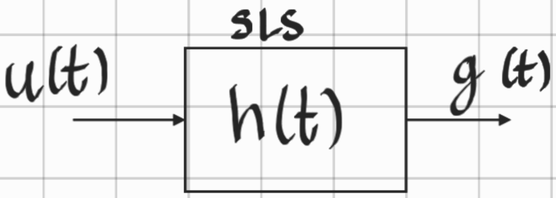
$$H(f) = |H(f)|\, e^{j \angle H(f)}$$

$$Y(f) = X(f) H(f) \rightarrow \begin{cases} |Y(f)| = |X(f)|\,|H(f)| \end{cases}$$

$$\begin{cases} \angle Y(f) = \angle X(f) + \angle H(f) \end{cases}$$

I SISTEMI SLS SONO DETTI ANCHE FILTRI NEL GERGO DELLE COMUNICAZIONI

DEFINIZIONE RISPOSTA AL GRADINO



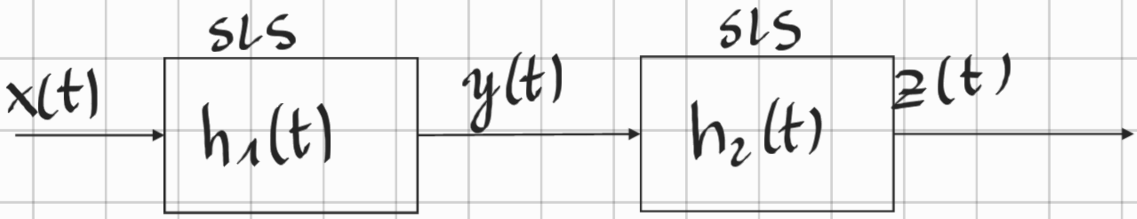
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

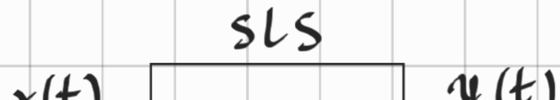
$$g(t) = u(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\alpha)\, d\alpha$$

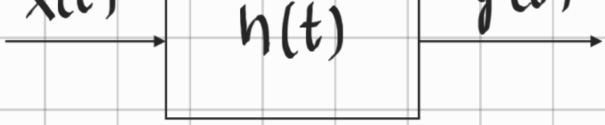
$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} g(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} h(\alpha)\, d\alpha \\ h(t) = \dfrac{d}{dt} g(t) \end{cases}$$

SISTEMI IN CASCATA

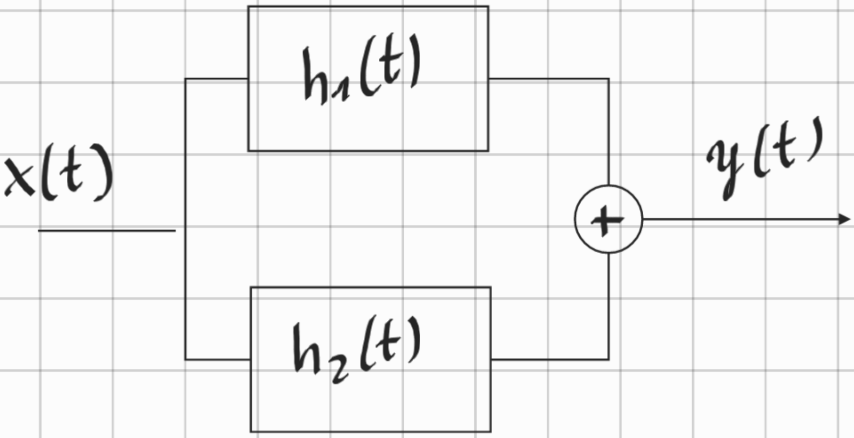


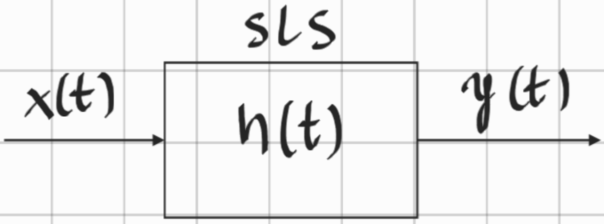




$$h(t) = h_1(t) \otimes h_2(t) \Rightarrow H(f) = H_1(f)\, H_2(f)$$

SISTEMI IN PARALLELO





$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \qquad H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

DEFINIZIONE REPLICA FEDELE

$y(t)$ è una replica fedele di $x(t)$ se

$$y(t) = K\,x(t-t_0) \qquad K \in \mathbb{C},\ t_0 \in \mathbb{R}$$

- Un segnale non ha distorsioni lineari quando la trasformazione produce una replica fedele

IN FREQUENZA $\Downarrow$

$$Y(f) = K\,X(f)\,e^{-j2\pi f t_0}$$

DEFINIZIONE FILTRO FEDELE

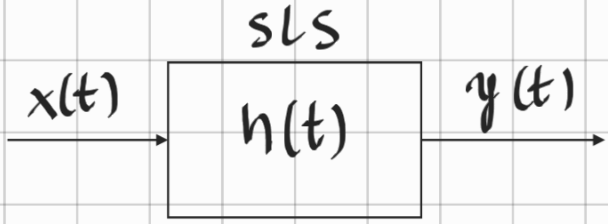
$$x(t) \longrightarrow \overset{\text{SLS}}{\boxed{h(t)}} \longrightarrow y(t)$$

$$h(t) = K\,\delta(t-t_0) \Rightarrow y(t) = x(t) \otimes h(t) = K\,x(t-t_0)$$

IN FREQUENZA $\Downarrow$

$$H(f) = K\,e^{-j2\pi f t_0}$$

NON è detto che se non ho un filtro fedele questo introduca distorsioni al mio segnale di ingresso. Posso avere filtri che risultano essere fedeli per determinati ingressi, questo dipende dalle caratteristiche del filtro.



$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

$$|X(f)|^2 = S_x(f) = TCF[R_x(\tau)]$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, x^*(t-\tau)\, d\tau$$

- $R_y(\tau)$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, y^*(t-\tau)\, d\tau$$

$$R_y(\tau)\Big|_{\tau=0} = R_y(0) = E_y$$

$$S_y(f) = TCF[R_y(\tau)] = |Y(f)|^2 = Y(f)\,Y^*(f)$$

$$= X(f)\,H(f)\,X^*(f)\,H^*(f) = |X(f)|^2\,|H(f)|^2$$

$$= S_x(f)\,|H(f)|^2$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\,|H(f)|^2\, df$$

$$R_y(\tau) = ATCF\left[S_x(f) |H(f)|^2 \right]$$

$$= ATCF\left[S_x(f) \right] \otimes ATCF\left[|H(f)|^2 \right]$$

$$= R_x(\tau) \otimes ATCF\left[H(f)\, H^*(f) \right]$$

$$= R_x(\tau) \otimes h(t) \otimes h(-t)$$

La condizione di Nyquist si applica a segnali a banda rigorosamente limitata

$\Rightarrow X(f) = 0 \quad |f| > B$ (segnale a banda rigorosamente limitata)

$x(t) \xrightarrow{T} x[n]$ $\Rightarrow$ Possono verificarsi 2 casi

1. $T > \frac{1}{2B}$

$$\bar{X}(f) = TFS[x[n]] = \frac{1}{T} \sum_n X\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$X(f) = TCF[x(t)]$$

Campionando in questo modo le repliche dello spettro si sovrappongono, fenomeno dell' ALIASING

$\Rightarrow$ Quindi $T > \frac{1}{2B} \Rightarrow$ ALIASING

2. $T \leq \frac{1}{2B}$

In questo caso riscontriamo assenza di ALIASING

$\Rightarrow$ Per garantire assenza di ALIASING il tempo di campionamento deve rispettare $T \leq 1/2B$

DEFINIZIONE DI INTERPOLATORE

Dispositivo "duale" del campionatore

$$x[n] \longrightarrow \boxed{p(t)} \longrightarrow \tilde{x}(t)$$

$p(t) \triangleq$ funzione interpolatrice

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n]\, p(t-nT)$$

INTERPOLATORE A MANTENIMENTO

$$p(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

INTERPOLATORE DI ORDINE 1

$$p(t) = \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

INTERPOLATORE CARDINALE

$$p(t) = \frac{1}{2B} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$\tilde{x}(t)$ è il segnale interpolato

$$\tilde{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \qquad \tilde{x}[n] = \sum_n x[n]\, p(t-nT)$$

$$\Rightarrow \tilde{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n x[n]\, p(t-nT)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= \sum_n x[n] \int_{-\infty}^{+\infty} p(t-nT)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \qquad \{t' = t-nT\}$$

$$= \sum_n x[n] \int_{-\infty}^{+\infty} p(t') \, e^{-j2\pi f t'} \cdot e^{-j2\pi f n T} \, dt'$$

$$= \sum_n x[n] \, e^{-j2\pi f n T} P(f) = \bar{X}(f) P(f)$$

$$\Rightarrow \tilde{X}(f) = \bar{X}(f) P(f)$$

Le variabili aleatorie rappresentano il risultato di un esperimento casuale sull'asse dei numeri reali

DESCRIZIONE STATISTICA DI UNA V.A.

Sono funzioni che ci permettono di rilevare come statisticamente è vincolata una variabile aleatoria

FUNZIONE DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ

$$F_X(x) \triangleq P(X \leq x)$$

$X \leq x \Rightarrow$ è un evento

PROPRIETÀ

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $F_X(x)$ monotona non decrescente
- $F_X(x)$ può avere discontinuità di prima specie (massa di probabilità)

$F_X(x)$ può avere discontinuità di prima specie (probabilità)

- $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

PROPRIETÀ

- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha$
- $f_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(\alpha)\, d\alpha$

GAUSSIANA

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}}\, e^{-\frac{(x-\eta_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

GAUSSIANA STANDARD

$$\Phi(x) \triangleq \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

FUNZIONE CODA

$$Q(x) = 1 - \Phi(x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

INDICI CARATTERISTICI DI UNA D.D.P.

VALOR MEDIO

$$\eta_x = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx$$

- Il valor medio è lineare

VARIANZA

$$\sigma_x^2 = E[(X-\eta_x)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\eta_x)^2 f_x(x)\, dx$$

- deviazione standard $\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$
- Se $\sigma_x^2 \to 0 \Rightarrow$ Siamo di fronte ad un caso deterministico
- Se $\sigma_x^2 \to \infty \Rightarrow$ Massima casualità

VALOR QUADRATICO MEDIO

$$m_x^2 = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x)\, dx$$

- $\sigma_x^2 = m_x^2 - \eta_x^2$

dim.

$$\sigma_x^2 = E[(X-\eta_x)^2] = E[X^2 + \eta_x^2 - 2X\eta_x]$$

$$= E[X^2] + E[\eta_x^2] - 2[X\eta_x]$$

$$= m_x^2 + \eta_x^2 - 2\eta_x^2 = m_x^2 - \eta_x^2 \quad \square$$

TEOREMA FONDAMENTALE PER LA TRASFORMAZIONE DI V.A.

$$g'(x) = \frac{d}{dx} g(x)$$

$$X \longrightarrow \boxed{T[X]} \longrightarrow Y$$

$$y = g(x)$$

$$f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

x_i sono le soluzioni di $x = g(y)$

SISTEMI DI DUE V.A.

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x \, \partial y} F_{XY}(x,y)$$

- CORRELAZIONE

$$r_{XY} = E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy \, f_{XY}(x,y) \, dx \, dy$$

- COVARIANZA

$$C_{XY} = E[(X-\eta_X)(Y-\eta_Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\eta_x)(y-\eta_y) \, f_{XY}(x,y) \, dx \, dy$$

- RELAZIONE TRA CORRELAZIONE E COVARIANZA

$$C_{xy} = r_{xy} - \eta_x \eta_y$$

- Se $C_{xy} = 0 \Rightarrow X$ e Y sono incorrelate

- Due variabili aleatorie indipendenti sono incorrelate, non è sempre valido il contrario. Se due V.A. sono incorrelate allora queste non sono LINEARMENTE dipendenti

- COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE

$$\rho_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

- $|\rho_{xy}| \leq 1$

I processi aleatori sono funzioni che mappano un risultato di un esperimento casuale in un segnale.

PROCESSI ALEATORI PARAMETRICI

Sono processi definiti attraverso una rappresentazione quasi deterministica del processo dove però compare un parametro definito attraverso una variabile aleatoria.

$$X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

$$\theta \text{ V.A. } \in \mathcal{U}[0, 2\pi]$$

DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ DEL I ORDINE

$$F_X(x; t_1) \triangleq P(X(t_1) \leq x)$$

DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ DEL II ORDINE

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) \triangleq P(X(t_1) \leq x_1; X(t_2) \leq x_2)$$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ DEL I ORDINE

$$f_X(x; t) \triangleq \frac{d}{dx} F_X(x; t)$$

INDICI STATISTICI - PRIMO ORDINE

- VALOR MEDIO

$$\eta_X(t) = E[X(t)] = \int^{+\infty} x f_X(x;t)\, dx$$

$$\eta_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty} x f_X(x,t)\, dx$$

- **POTENZA MEDIA STATISTICA**

$$P_X(t) \triangleq E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x,t)\, dx$$

- **VARIANZA DEL PROCESSO**

$$\sigma_X^2(t) \triangleq E[(X(t) - \eta_X(t))^2]$$

- $\sigma_X^2 = P_X(t) - \eta_X^2(t)$

INDICI STATISTICI - SECONDO ORDINE

- **AUTOCORRELAZIONE**

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

- **AUTOCOVARIANZA**

$$C_X(t_1,t_2) = E[(X(t_1) - \eta_X(t_1))(X(t_2) - \eta_X(t_2))]$$

- $C_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - \eta_X(t_1)\eta_X(t_2)$

STAZIONARIETÀ

- **STAZIONARIETÀ IN SENSO STRETTO (SSS)**

$$f_X(x_1, x_2, \ldots, x_N; t_1, t_2, \ldots, t_N)$$

Un sistema è stazionario in senso stretto se

$$f_X(x_1,..,x_N; t_1,..,t_N) = f_X(x_1,..,x_N; t_1+\Delta t,..,t_N+\Delta t)$$

ovvero c'è invarianza alla traslazione temporale.

- Per sistemi sss tutti gli indici del I ordine (valor medio, potenza media e varianza) sono COSTANTI

- Per sistemi sss gli indici del II ordine (autocorrelazione e autocovarianza) dipendono da una sola variabile

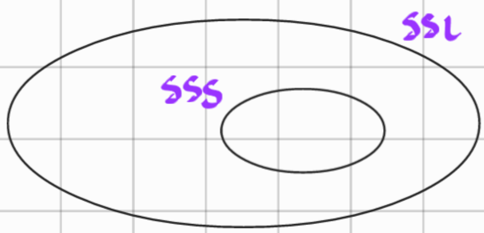
$$R_X(t_1,t_2) = R_X(\tau) \qquad C_X(t_1,t_2) = C_X(\tau)$$

- STAZIONARIETÀ IN SENSO LATO (SSL)

Un processo è stazionario in senso lato se:

1. $\eta_X(t) = \eta_X$

2. $R_X(t_1,t_2) = R_X(t_1-t_2) = R_X(\tau)$



PROPRIETÀ $R_X(\tau)$ PER SISTEMI SSL

- $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$ (PARITÀ)
- $R_X(0) = P_X$ (dimostrato)
- $R_X(0) \geq |R_X(\tau)|$ (dimostrato)

- Se $R_X(\tau)$ non ha componenti periodiche

$$\lim_{\tau \to +\infty} R_X(\tau) = \eta_X^2$$

FILTRAGGIO DI UN PROCESSO ALEATORIO CON SLS

$$X(t) \longrightarrow \overset{SLS}{\boxed{h(t)}} \longrightarrow Y(t)$$

- Non possiamo sfruttare $Y(t) = X(t) \otimes h(t)$ perchè stiamo trattando segnali aleatori (non deterministici), ovvero segnali che non sono in grado di conoscere

- Non sono in grado di calcolare la $f_Y(y;t)$ conoscendo la $f_X(x;t)$ generalmente. Posso però calcolare gli indici statistici in uscita conoscendo quelli in ingresso

- VALOR MEDIO

$$\eta_Y(t) = \eta_X(t) \otimes h(t)$$

dim.

$$\eta_Y(t) = E[Y(t)] = E[X(t) \otimes h(t)] =$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(\tau)]\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_X(t)\, h(t-\tau)\, d\tau = \eta_X(t) \otimes h(t) \qquad \blacksquare$$

$-\infty$

- **AUTOCORRELAZIONE**

$$R_Y(t_1,t_2) = R_Y(t_1,t_2) \otimes h(t_1) \otimes h(t_2)$$

dim.

$$R_Y(t_1,t_2) = E[Y(t_1)Y(t_2)]$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau_1)\, h(t_1-\tau_1)\; X(\tau_2)\, h(t_2-\tau_2)\; d\tau_1\, d\tau_2\right]$$

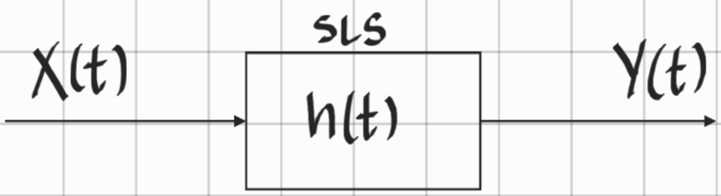
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E[X(\tau_1)X(\tau_2)]\, h(t_1-\tau_1)\, h(t_2-\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{R_X(\tau_1,\tau_2)\, h(t_1-\tau_1)\, d\tau_1}\, d\tau_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [R_X(t_1,\tau_2) \otimes h(t_1)]\, h(t_2-\tau_2)\, d\tau_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau_2,t_1)\, h(t_2-\tau_2)\, d\tau_2 = R_X(t_2,t_1) \otimes h(t_2) \quad \boxtimes$$

FILTRAGGIO DI PROCESSI ALEATORI SSL CON SLS



- Si può dimostrare che se il processo in ingresso è SSL allora anche il processo in uscita sarà SSL

- VALOR MEDIO

$$\eta_Y = \eta_X H(0)$$

- AUTOCORRELAZIONE

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) \otimes h(t) \otimes h(-t)$$

- DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA

$$S_X(f) = TCF[R_X(\tau)]$$ ⇒ TEOREMA DI WIENER-KHINTCHINE

  - $S_X(f)$ reale per processi reali e pari
  - $P_X = R_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\, df$
  - $S_X(f) \geq 0 \quad \forall f$ ⇒ avremmo altrimenti una potenza negativa
  - $S_Y(f) = S_X(f)\, |H(f)|^2$

DEFINIZIONE DI RUMORE BIANCO

Un rumore bianco è un processo SSL con:

- $\eta_X = 0$
- $R_X(\tau) = K\delta(\tau) \quad , \quad K \in \mathbb{R}$

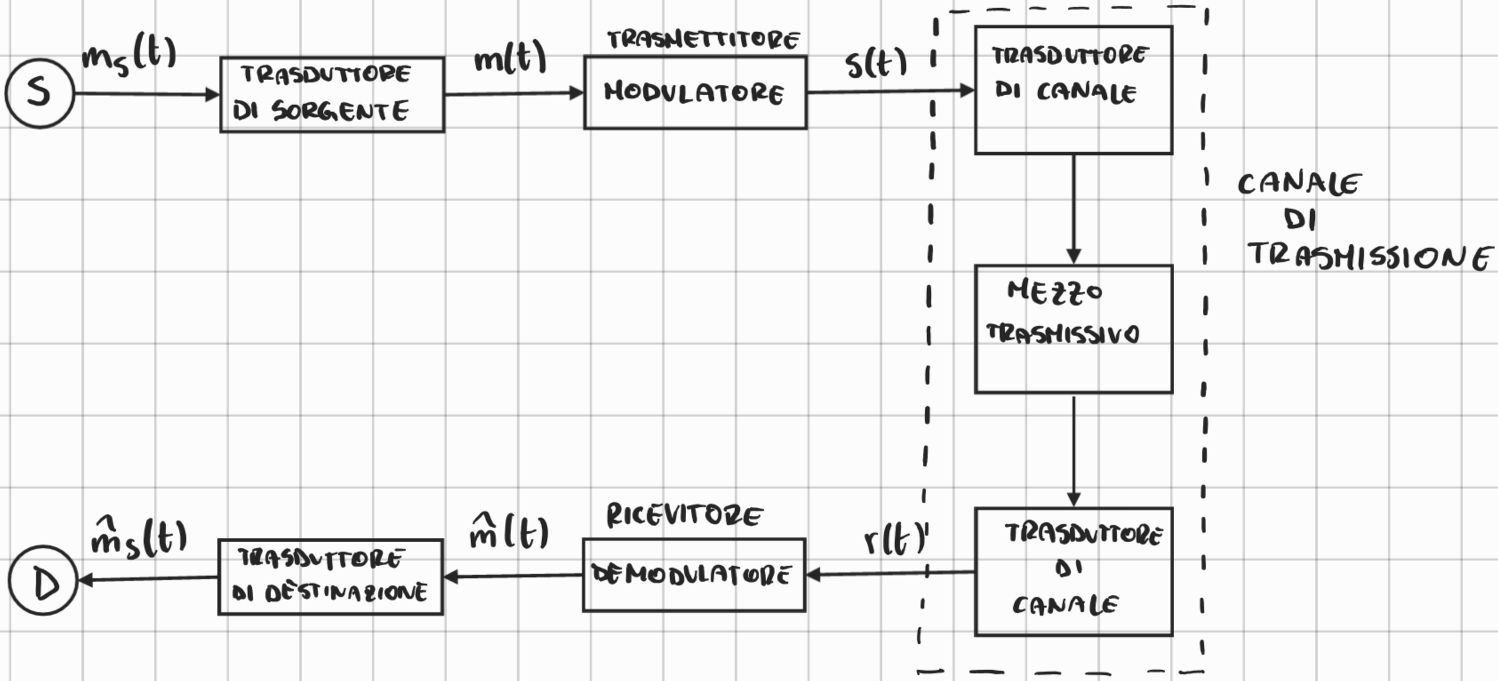
- $S_x(f) = K \quad \forall f$

DEFINIZIONE DI PROCESSO ALEATORIO GAUSSIANO

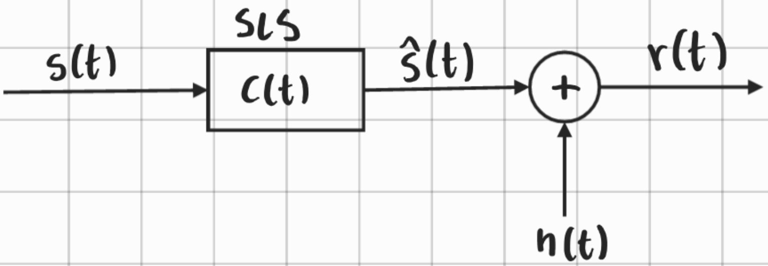
$$X(t) \xrightarrow{t_0} X(t_0)$$

Se $X(t)$ processo Gaussiano allora $X(t_0)$ variabile aleatoria Gaussiana

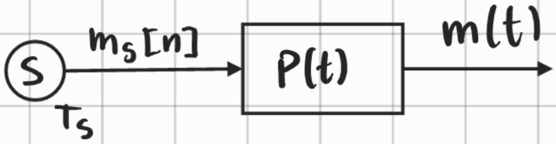
$$X(t_0) \triangleq X_0 \in \mathcal{N}\left(\eta_{x_0}(t), \sigma_{x_0}^2(t)\right)$$



Canale di trasmissione

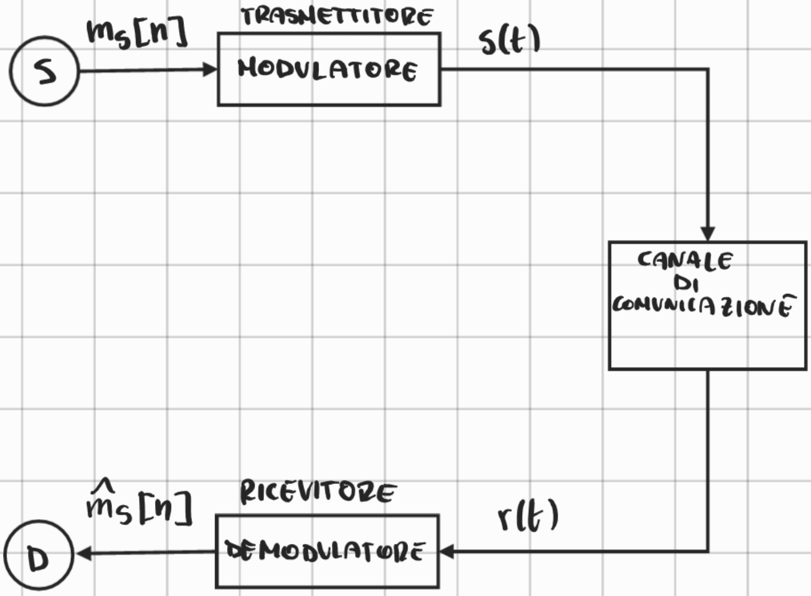


Sistema di comunicazione numerico

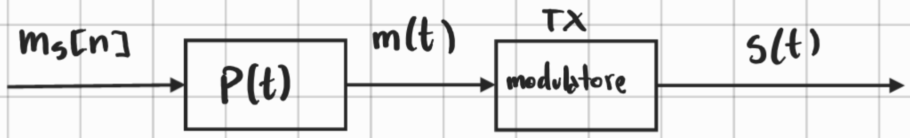


$$m_s[n] \in A_s\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

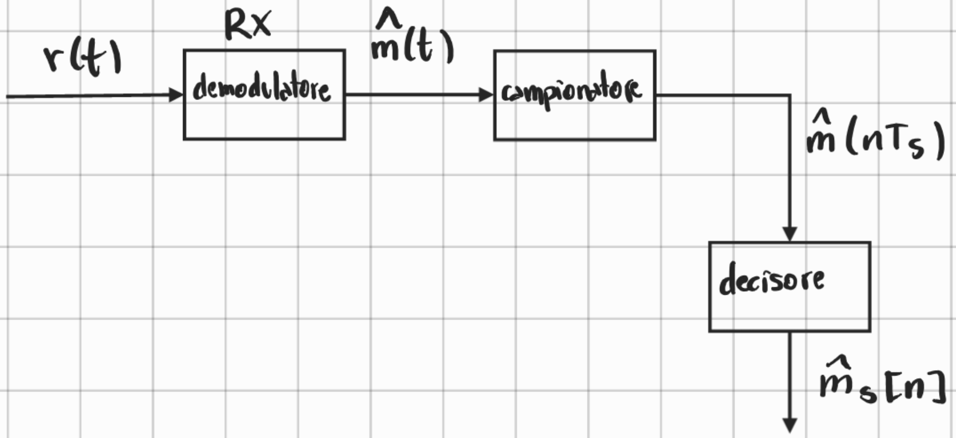
$$m(t) = \sum_n m_s[n]\, p(t - nT_s)$$



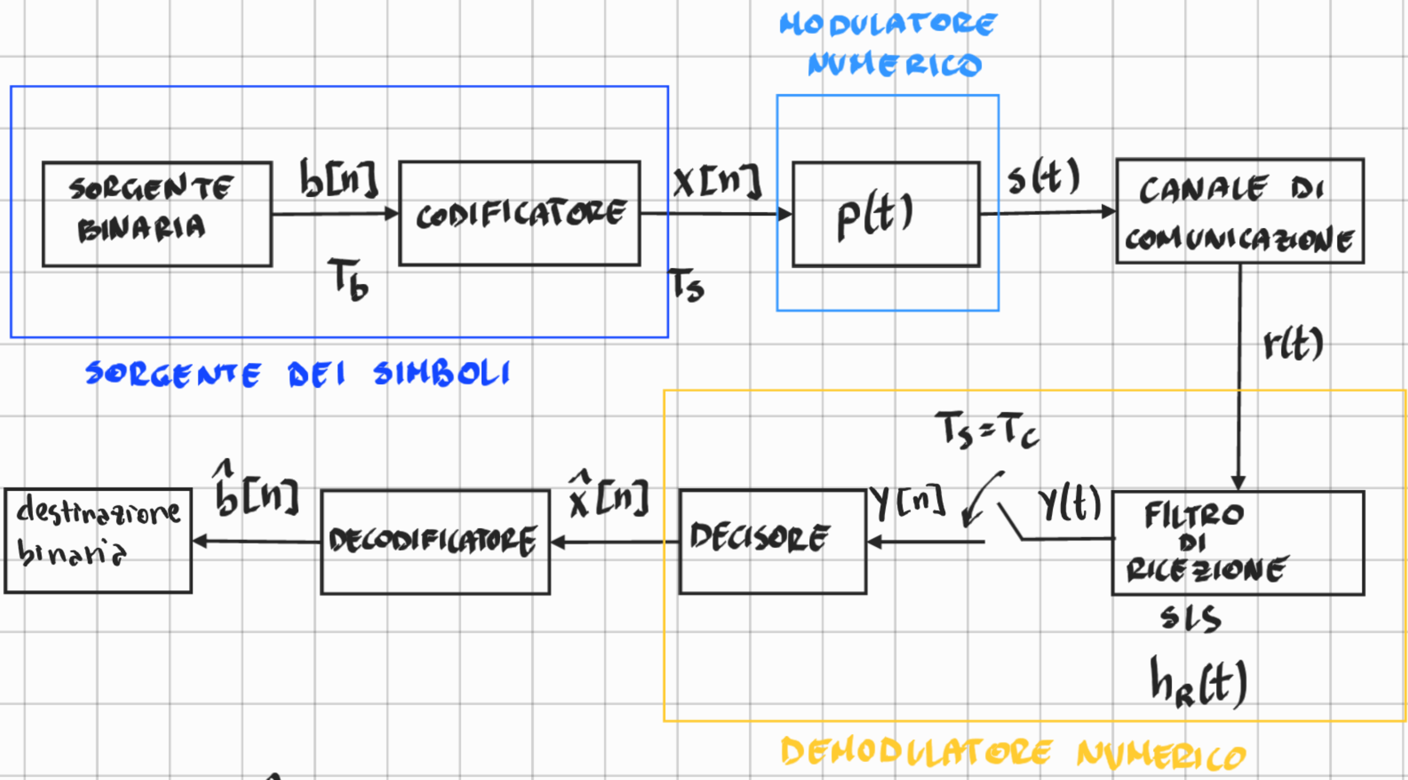
Modulatore Numerico



Demodulatore Numerico



Modulazioni in banda base



- $b[n]$, $\hat{b}[n]$ bits
- $x[n]$, $\hat{x}[n]$ simboli
- $y[n] = y(nT_s)$ (sequenza)

TRASMISSIONE (TX)

- $A_s(M) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$, $M = 2^K \Rightarrow T_s = T_b \log_2(M)$

  $x[n] \Rightarrow P\{x[n] = \alpha_i\} \quad \forall i \in 1..M$

- $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n]\, p(t - nT_s) \Rightarrow$ segnale aleatorio

- Possiamo calcolare l'energia per simbolo trasmesso e la banda del segnale trasmesso $s(t)$. Sono importanti perchè queste informazioni mi qualificano il sistema, questi parametri hanno un impatto economico sul sistema

  1. Energia per simbolo trasmesso (quanta energia mi serve per trasmettere n simboli)
  2. Banda di $s(t)$ (quale spettro occuperà il segnale)

PROBABILITÀ DI ERRORE

- Probabilità di errore sul bit $\Rightarrow P\{\hat{b}[n] \neq b[n]\} \triangleq P_E(b)$

- Probabilità di errore sul simbolo $\Rightarrow P\{\hat{x}[n] \neq x[n]\} \triangleq P_E(M)$

  Bit Error Rate (BER) $\Rightarrow$ numero di bit errati per secondo

  $$BER = P_E(b) \cdot \text{bit-rate} = P_E(b)\, R_b$$

- La probabilità di errore sul simbolo la calcolo conoscendo le probabilità a priori di trasmissione dei simboli e le probabilità di transizione e applicando il TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE

PROBABILITÀ TOTALE

$$P_E(M) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{M} P(\hat{x}[n]=\alpha_j \mid x[n]=\alpha_i)\, P(x[n]=\alpha_i)$$

ENERGIA PER SIMBOLO TRASMESSO

Scelgo un simbolo α_i e poi calcolo l'energia necessaria per aver trasmesso il simbolo E_{s_i}

$$E_s\Big|_{x[n]=\alpha_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_i(t)|^2\, dt$$

se $E_{s_i} = E_s \ \forall i \Rightarrow$ EQUIENERGIA

PULSE AMPLITUDE MODULATION (PAM)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{p(t)} \longrightarrow s(t)$$

PROPRIETÀ COSTITUENTI

- $s(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, p(t-nT_s)$

- M simboli $(M \geq 2)$ $\alpha_i \in A_s$, $A_s = \{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$

  $\alpha_i = 2i - 1 - M \Rightarrow$ i simboli sono equispaziati ed equiprobabili

PROPRIETÀ DI s(t) TRASMESSO DA UNA PAM

- $E[s(t)] = 0$

dim.

$$E[s(t)] = E\left[\sum_n x[n]\, p(t-nT_s)\right]$$

$$= \sum_n p(t-nT_s)\, E[x[n]]$$

$$\Rightarrow E[x[n]] = \sum_{i=1}^{M} P[x[n]=\alpha_i]\,\alpha_i$$

$$= \frac{1}{M} \underbrace{\sum_{i=1}^{M} \alpha_i}_{=0 \text{ per definizione}} = 0 \quad \Rightarrow E[s(t)] = 0$$

$\square$

- $S_s(f) = \frac{\sigma_x^2}{T_s} |P(f)|^2$ $\Rightarrow$ la funzione interpolatrice mi dice lo spettro occupato (la banda) di $s(t)$

dim.

in generale $S_s(f) = \frac{1}{T_s} \bar{S}_x(f)\, |P(f)|^2$

$$\bar{S}_x(f) = TFS[R_x[m]]$$

$$R_x[m] = E[x[m]\, x[n-m]]$$

$$R_x[m] = C_x[m] + \eta_x^2[m]$$

$$P(f) = TCF[p(t)]$$

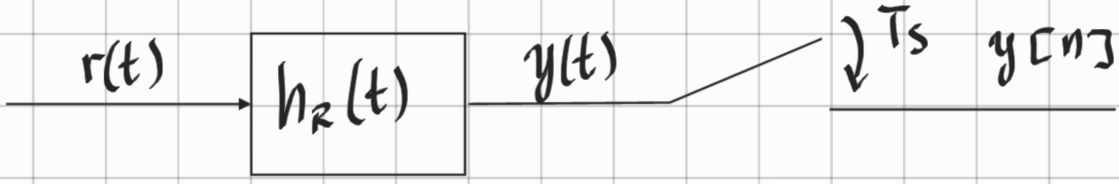
$\Rightarrow \eta_x[m] = E[x[m]] = 0 \Rightarrow C_x[m] = R_x[m]$

$\Rightarrow$ simboli indipendenti e quindi incorrelati

$\Rightarrow C_x[m] = \sigma_x^2 \, \delta[m] \Rightarrow R_x[m] = \sigma_x^2 \, \delta[m]$

$\Rightarrow \bar{S}_x(f) = TFS[R_x[m]] = \sigma_x^2$

INTERFERENZA INTERSIMBOLICA

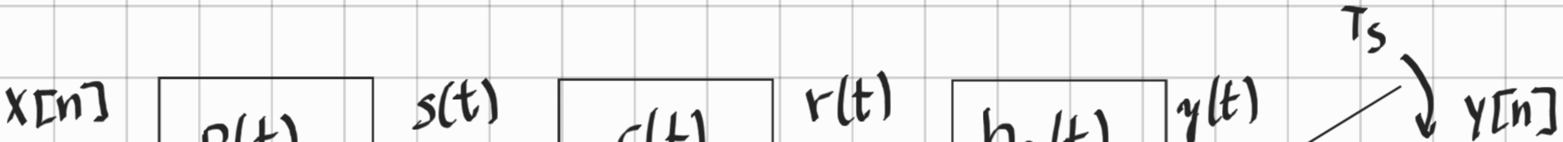


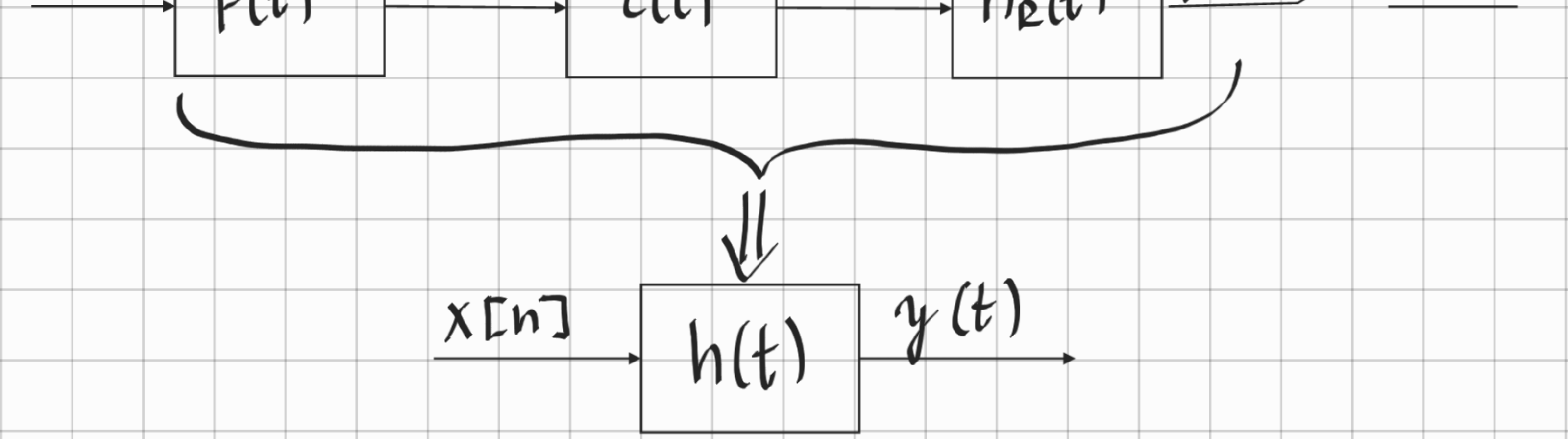
- $y[n] = f(x[n]) \Rightarrow$ NO ISI
  ↳ dipendenza dal solo simbolo n-esimo

$y[n] = f(\ldots, x[n-1], x[n], \ldots) \Rightarrow$ ISI

- Abbiamo 3 fattori che possono contribuire all'ISI

1. $p(t)$
2. $c(t)$
3. $h_R(t)$





$h(t) \Rightarrow$ INTERPOLATORE EQUIVALENTE

$$h(t) = p(t) \otimes c(t) \otimes h_R(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, h(t - nT_s)$$

$$\Rightarrow y[K] = y(nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, h((K-n)T_s)$$

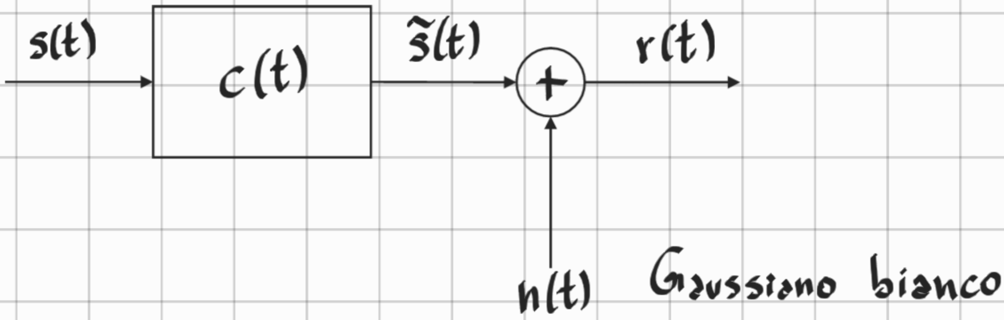
$$= x[n]\, h(0) + \underbrace{\sum_{\substack{n \\ n \neq 0}} x[n]\, h((K-n)T_s)}_{ISI}$$

- Il CRITERIO DI NYQUIST ci garantisce assenza di ISI
- La condizione limite per l'assenza di ISI:

  - $T_s \rightarrow$ periodo di segnalazione dei simboli
  - $B_c \rightarrow$ banda del canale (banda che abbiamo a disposizione, ovvero la massima utilizzabile)

Se $T_s < \frac{1}{2B_c}$ non è possibile eliminare l'ISI

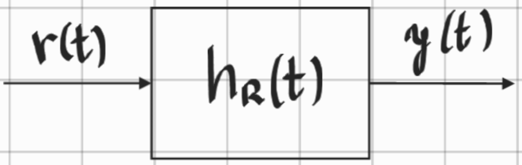
PRESENZA DI RUMORE



$$r(t) = s(t) \otimes c(t) + n(t) = \underbrace{\sum_n x[n]\, \tilde{p}(t - nT_s)}_{\text{componente utile}} + \underbrace{n(t)}_{\text{rumore}}$$

$$\tilde{p}(t) = p(t) \otimes c(t)$$

- Il compito del filtro di ricezione è quello di limitare il più possibile l'effetto del rumore



Il filtro ottimo in termini di riduzione del rumore è il FILTRO ADATTATO, massimizza il rapporto segnale-rumore in uscita ad un determinato istante temporale quando in ingresso:

- Conosco il segnale utile
- C'è presenza di rumore bianco

$$SNR \triangleq \frac{P_s}{P_n}$$

$$\Rightarrow h_{FA}(t) = K\,\tilde{p}(T_s - t)$$

$$H_{FA}(f) = K\,\tilde{P}^*(f)\, e^{-j2\pi f T_s}$$

$$|H_{FA}(f)| = K\,|\tilde{P}(f)|$$ $\Rightarrow$ amplifica le componenti in frequenza dove è più forte il contenuto spettrale del segnale e minimizza quelle del rumore

DECISORE

Se abbiamo un rumore Gaussiano bianco e assenza di ISI possiamo affermare:

$$y[n] = h(0)\,x[n] + n_u[n]$$

- $h(0) = \left[p(t) \otimes c(t) \otimes h_R(t) \right] \Big|_{t=0}$
- $x[n]$ simbolo trasmesso $\in A_s$
- $n_u[n] \in \mathcal{N}(0, \sigma_{n_u}^2)$, $\sigma_{n_u}^2 = P_{n_u} = \frac{N_0}{2} E_{h_R}$

$\Rightarrow$ $f_Y(y \mid x = \alpha_i) \in \mathcal{N}\left(h(0)\alpha_i, \frac{N_0}{2} E_{h_R}\right)$

probabilità di decidere y sapendo di aver trasmesso α_i

SEGNALE PASSA - BANDA

$$s(t) = a(t) \cos\left(2\pi f_0 t + \vartheta(t)\right)$$

$\vartheta(t)$: fase di $s(t)$

$a(t)$: inviluppo reale di $s(t)$

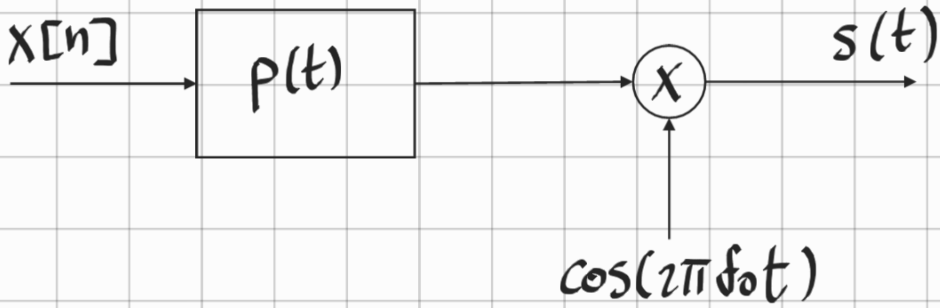
$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{ a(t)\, e^{j(2\pi f_0 t + \vartheta(t))} \right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ \tilde{s}(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$ $\Rightarrow$ $\tilde{s}(t) = a(t)\, e^{j\vartheta(t)}$

inviluppo complesso di $s(t)$

PAM IN BANDA PASSANTE

$$s(t) = \sum_n x[n]\, p(t-nT_s) \cos(2\pi f_0 t)$$



- $x[n] \in A_s = \{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$

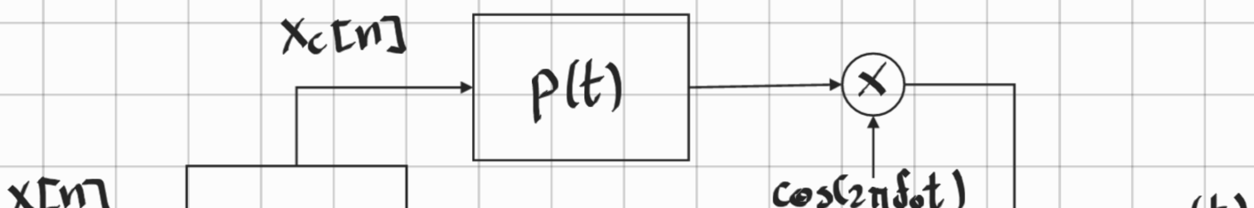
  $\alpha_i = 2i - 1 - M$

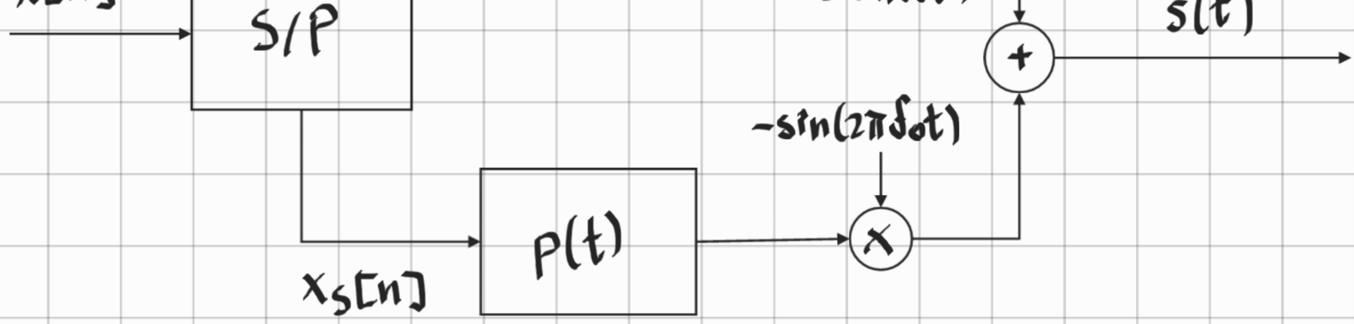
- $s_i(t) = \alpha_i\, p(t-nT_s) \cos(2\pi f_0 t)$

  $\tilde{s}_i(t) = \alpha_i\, p(t-nT_s)$

- $S_s(f) = \frac{1}{T} \frac{\bar{S}_x(f)}{2} \left[P^2(f-f_0) + P^2(f+f_0) \right]$

QAM (QUADRATIC AMPLITUDE MODULATION)





- $$s(t) = \sum_n x_c[n]\, p(t-nT_s) \cos(2\pi f_0 t) - \sum_n x_s[n]\, p(t-nT_s) \sin(2\pi f_0 t)$$

$$\tilde{S}_n(t) = \underbrace{\left(x_c[n] + j\, x_s[n]\right)}_{\text{simbolo}} p(t-nT_s) \Rightarrow \text{inviluppo complesso}$$

- $x_c[n] \in A_s^c$, $x_s[n] \in A_s^s$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i^{(c)} = 2i - 1 - M_c$$

$$\alpha_i^{(s)} = 2i - 1 - M_s$$

- $$S_s(f) = \frac{1}{T} \frac{\bar{S}_x(f)}{2} \left[P^2(f-f_0) + P^2(f+f_0) \right]$$