ANALISI II

• PALLA (BALL) :

Sia X uno spazio metrico ;
Si definisce PALLA , di raggio $r \geq 0$ e di centro p :

$$B_r(p) = \{ u \in X : d(p,u) \leq r \}$$

Se la DISEGUAGLIANZA è STRETTA allora si definisce PALLA APERTA.
Nel caso in cui la DISEGUAGLIANZA NON È STRETTA allora si definisce PALLA CHIUSA.

Esempi : sia X uno spazio avente $\dim X = 1$ (RETTA). La palla di raggio r e di centro 0 coincide con l'intervallo
$]0-r, 0+r[$ (PALLA APERTA) oppure
$[0-r, 0+r]$ (PALLA CHIUSA).

• SPAZIO METRICO :

Si definisce uno spazio metrico l'insieme degli elementi, detti punti, nel quale è definita una DISTANZA (detta anche metrica).
Un particolare e comune spazio metrico è lo SPAZIO EUCLIDEO $\mathbb{R}^n$.
Tale distanza deve rispettare 4 proprietà :
Sia X uno spazio metrico e siano $x, y \in X$:

I) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

II) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y$

III) $d(x,y) = d(y,x)$

IV) $d(x,y) \leq d(z,x) + d(z,y)$

- **CURVE DI LIVELLO:**

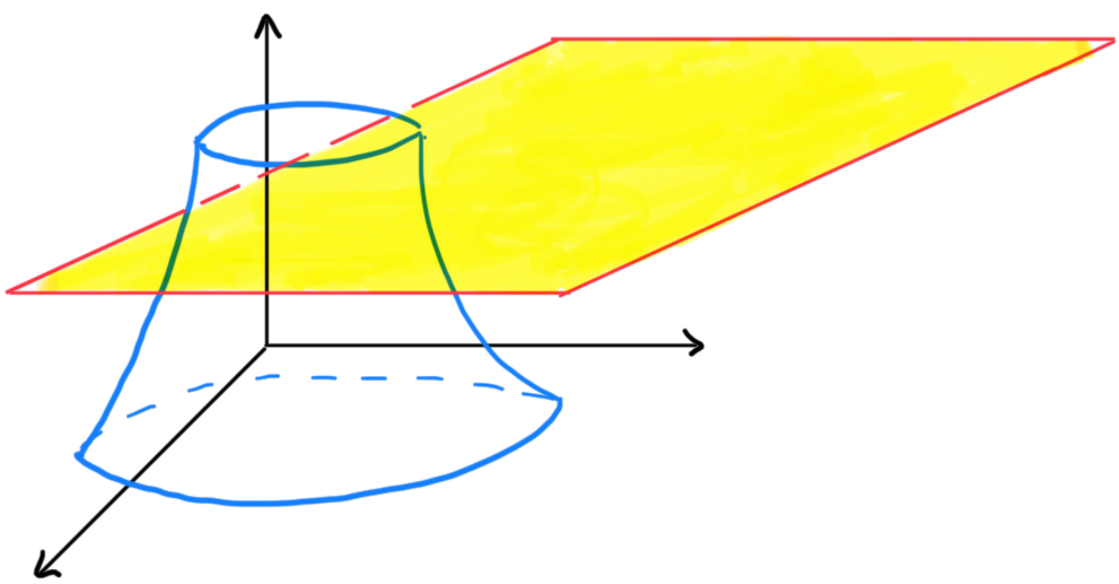
Si consideri una funzione a due variabili $f: \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $K \in \mathbb{R}$.

Si definisca CURVA DI LIVELLO il luogo geometrico dei punti tali che sia soddisfatta $f(x,y) = K$.

$$L(f,K) = \{(x,y) \in \mathrm{Dom}(f) : f(x,y) = K\}$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO:

Una curva di livello è quel luogo geometrico (RETTA, PIANO, CERCHIO, PARABOLA, ELLISSE...) che interseca il grafico di $f(x,y)$ ad un certa quota k.



- **LIMITI IN DUE VARIABILI**

DEFINIZIONE di LIMITE FINITO TENDENTE AL FINITO:

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Sia $f(x,y): X \rightarrow \mathbb{R}$

Si definisce :

esprimersi.

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) = \ell \qquad \ell \in \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \left| f(x,y) - \ell \right| < \varepsilon$$

$$\forall (x,y) \in B_\delta = \{(x,y) \in X : d((x,y), P) < \delta\} \setminus \{x_0, y_0\}$$

- Si ricorda che (x,y) rappresenta un vettore contenuto in $\mathbb{R}^2$.

TEOREMA: CN affinché il limite ESISTA $\Rightarrow$ PRESO QUALUNQUE "CAMMINO" esso tende ad ℓ.

ENUNCIATO RIGOROSO:

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $f(x,y) : X \to \mathbb{R}$. *

Se $\exists \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) = \ell$ ALLORA

$$\forall X' \subseteq X : (x_0, y_0) \in X' \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f\Big|_{X'} (x,y) = \ell$$

* Si ricorda che (x_0, y_0) è un punto di accumulazione per X.

NOTA BENE: Talvolta è difficile provare e calcolare l'esistenza del limite sfruttando questo teorema. Bensì è assai vantaggioso provare la non esistenza del limite trovando due "cammini" differenti tali che tendono a due valori differenti.

• DERIVATA DIREZIONALE :

Per le funzioni definite su uno spazio metrico di dim = 1 (sì, sono proprio le funzioni di ANALISI I) si definisce derivata in un punto:

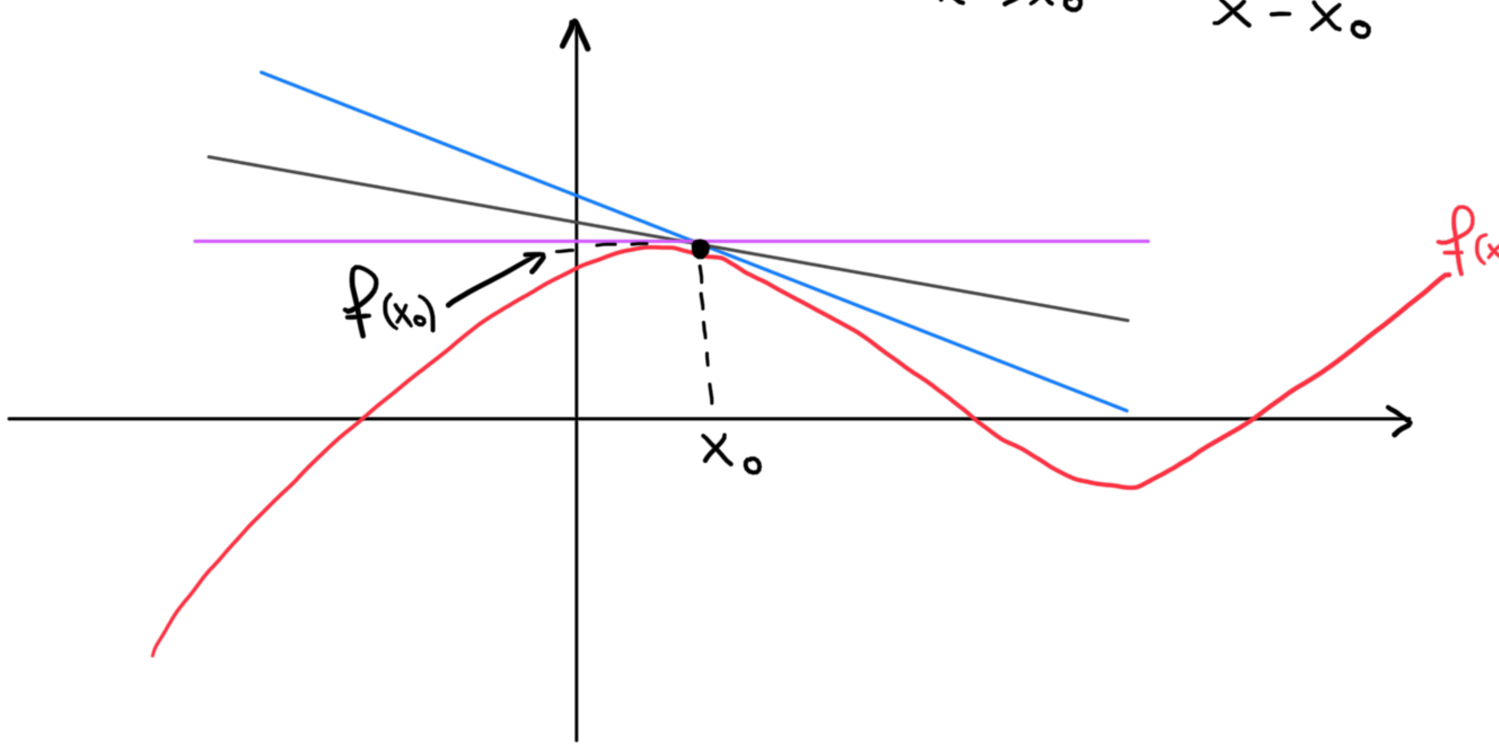
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

o equivalentemente:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Inoltre sia $\Omega \subseteq Dom(f)$. Si definisce la funzione DERIVATA $f'(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\forall x_0 \in \Omega \ \exists \ f'(x_0)$

$$f'(x) : \Omega \to \mathbb{R} \ \Big| \ f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



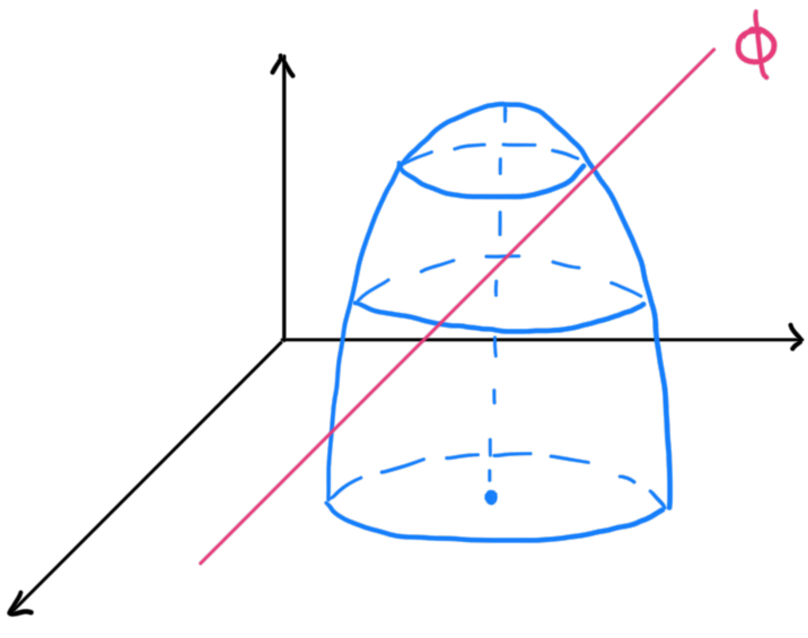
Al tendere di $x \to x_0$ il RAPPORTO INCREMENTALE assume il valore del COEFFICIENTE ANGOLARE della retta tangente in x_0. Tale "MOVIMENTO" può esistere unicamente sull' asse delle ASCISSE (idealmente la variabile x si muove verso destra o sinistra lungo l' asse trasversale).

Nelle funzioni a più variabili gli "ASSI DI MOVIMENTO" sono in egual numero a quello delle variabili!
Di conseguenza esistono più DIREZIONI possibili a cui far "tendere" la f.

DEFINIZIONE RIGOROSA:
Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e sia $v \in X : \|v\| = 1$.
Si definisca la DERIVATA di $f(x,y)$ nel punto (x_0, y_0):

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x,y)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv,\ y_0 + hv) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Da un punto di vista grafico la derivata DIREZIONALE corrisponde a muoverci lungo la RETTA PARAMETRICA $\phi = (x_0, y_0) + hv$



• DERIVATA PARZIALE •

... PARZIALE

DEFINIZIONE: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$: $\Omega \neq \{\emptyset\}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Si dice di f È DERIVABILE PARZIALMENTE rispetto x in (x_0, y_0) se ESISTE FINITO :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Analogalmente si dice di f È DERIVABILE PARZIALMENTE rispetto y in (x_0, y_0) se ESISTE FINITO :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Da un punto di vista grafico le DERIVATE PARZIALI sono in tutto e per tutto simili alle derivate CANONICHE delle funzioni definite in spazi metrici UNIDIMENSIONALI con la differenza che la variabile tende da un diverso asse ("ASCISSE o ORDINATE" caso $\mathbb{R}^2$)

Notiamo un importante analogia tra le derivate DIREZIONALI e le PARZIALI :

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Inoltre sia $u \in \Omega$: $u = (1,0)$.

Si voglia calcolare $\frac{\partial f}{\partial u}(2,3)$.

$$\frac{\partial f}{\partial u}(2,3) = \lim_{t \to 0} \frac{f(2+tu_1, 3+tu_2) - f(2,3)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(2+t(1), 3+t(0)) - f(2,3)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(2+t, 3) - f(2,3)}{t}$$

Se invece avessi calcolato $\frac{\partial f}{\partial x}(2,3)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = \lim_{t \to 0} \frac{f(2+t, 3) - f(2,3)}{t}$$

SONO ESATTAMENTE UGUALI !

Infatti la derivata parziale è una particolare DERIVATA DIREZIONALE avente come versore il vettore della base canonica associato alla variabile rispetto cui si DERIVA.

DERIVATA PARZIALE IN n VARIABILI

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x_1, ..., x_n) + te_i) - f(x_1, ..., x_n)}{t}$$

DEFINIZIONE DI FUNZIONE CONTINUA

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si dirà di f CONTINUA in $x_0 \in \Omega$ se e solo se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

* x e x_0 vanno intesi come vettori!

IMPORTANTE : se il LIMITE ESISTE allora il th. CARABINIERI continua a valere!

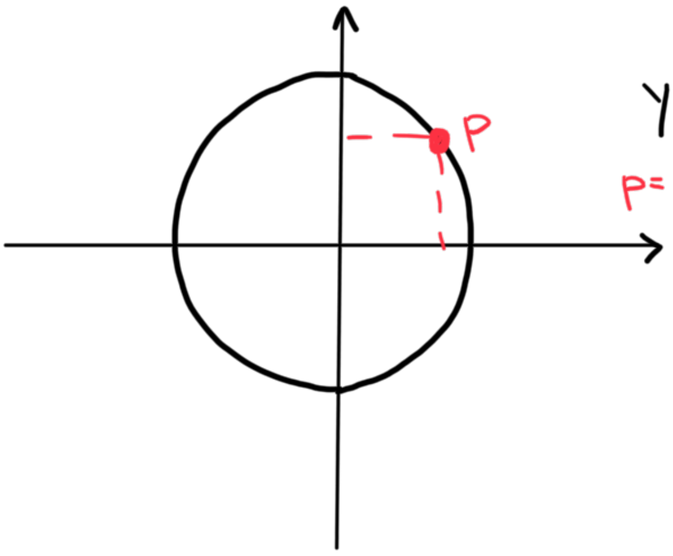
03|03|2020

PREREQUISITI : $\begin{cases} \text{ALG. LINEARE : (PRODOTTO SCALARE e NORMA)} \\ \text{ANALISI I} \end{cases}$

DEFINIZIONE : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Casi INTERESSANTI di f a più VARIABILI :

- curve PARAMETRICHE
- superficie PARAMETRICA

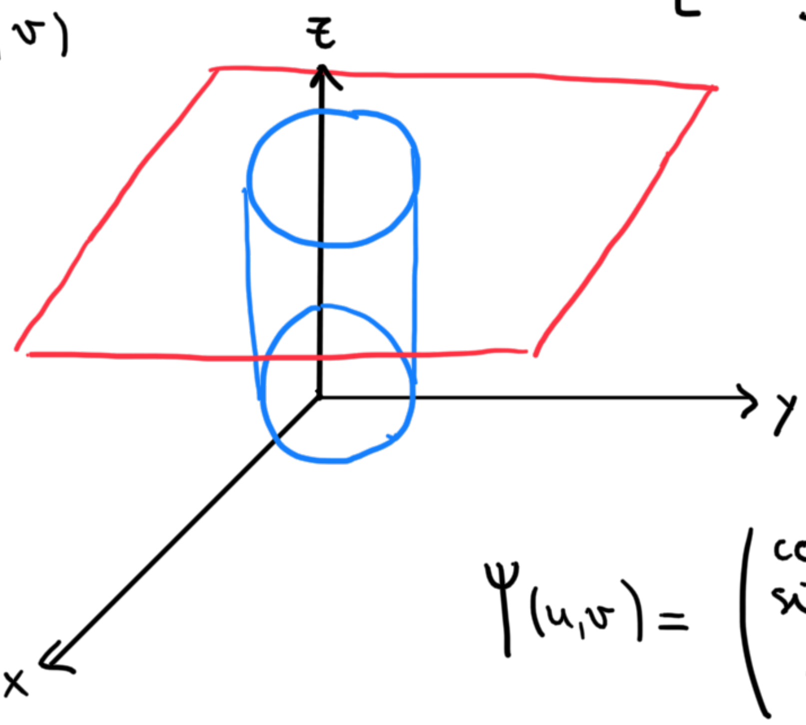


$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad t \in \mathbb{R}$

$P = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

Esempio SUPERFICIE PARAMETRICA

$$\Psi(u,v) = \begin{cases} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{cases} \qquad u,v \in [a,b] \times [c,d]$$



$$\Psi(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{pmatrix}$$

DEFINIZIONE : SUCCESSIONI DI VETTORI

una successione è una particolare funzione definita :

$$\boxed{a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n}$$

SUCCESSIONE CONVERGENTE :

$$\lim a_n = L \in \mathbb{R}$$

ANALISI I $:= \forall \varepsilon > 0 \; \exists M \in \mathbb{R} : |a_n - L| < \varepsilon \;\; \forall n > M$

Valore ASSOLUTO

ANALISI II $:= \forall \varepsilon > 0 \; \exists M \in \mathbb{R} : \|a_n - L\| < \varepsilon \;\; \forall n > M$

NORMA

SUCCESSIONE DIVERGENTE :

$$\lim a_n = \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \omega \in \mathbb{N} : \forall n > \omega \;\; \|a_n\| > \varepsilon$$

SUCCESSIONE OSCILLANTE :

NE CONVERGENTE NE DIVERGENTE

LEMMA : a_n CONVERGE $\longrightarrow L$ SE E SOLO SE

$(a_n)_i \longrightarrow L \quad \forall i = 1, \dots, N$

(N : numero variabili)

DIMOSTRAZIONE : CN

$$|a_n - L|^2 = \sum_{n=1}^{N} (a_n^i - L^i)^2$$

- OSSERVAZIONE 1

$$w_i \leq |w| \leq N(\max_{i=1,\dots,N} w_i^2) \qquad N \in \mathbb{K}$$

$$w_i^2 \leq w_1^2 + \dots + w_N^2 \leq N(\max_{i=1,\dots,N} w_i^2)$$

Supponiamo :

$$b_m \to 0 \iff |b_m|^2 \to 0$$

Dalle proprietà della NORMA :

$$|u| = 0 \iff u = 0$$

Quindi ogni componente $b_i = 0$

$$\underset{\downarrow\, 0}{b_i^2} \leq \underset{\downarrow\, 0}{|b_m|^2} \leq \underset{\downarrow\, 0}{N(\max b_i^2)}$$

th. CARABINIERI

Quindi se $a_m \to L \Rightarrow |a_m - L| \to 0$

$$|a_m - L| \leq |a_m - L|^2$$

$|a_m - L|^2$ può essere RISCRITTA come:

$$\sum_{i=1}^{N} a_m^i - L^i \longrightarrow 0$$

DA CUI SEGUE :

$$0 \leq \underset{\downarrow\, 0}{(a_m^i - L^i)^2} \leq \underset{\downarrow\, 0}{|a_m^i - L^i|^2} \leq \underset{\downarrow\, 0}{N(\max a_m^i - L^i)}$$

th. CARABINIERI

$$\Longrightarrow \quad a_m^i \to L^i$$

DIMOSTRAZIONE: CS

Sappiamo che OGNI $a_m^i \to L^i$ e quindi

$$a_m^i - L^i \to 0$$

POSTO $w = a_m - L_m$ sappiamo che:

$$|w|^2 = |a_m^i - L_m^i|^2 \leq C \cdot \max |a_m^i - L_m^i|^2 \longrightarrow 0$$

Dall' OSSERVAZIONE 1 possiamo affermare che:

$$0 \leq |w_i|^2 \leq |w|^2 \leq C \cdot \max |a_m^i - L_m^i|^2$$

th. carabinieri: $|w_i|^2 \to 0$, $|w|^2 \to 0$, $C \cdot \max |a_m^i - L_m^i|^2 \to 0$

$$w = a_m - L \to \quad \Rightarrow \quad a_m \to L \qquad \blacksquare$$

DIVERGENZA

$$\lim a_m = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim |a_m| = +\infty$$

$$|a_m|^2 = (a_m)_1^2 + \dots + (a_m)_N^2$$

Esempio: $\left\| \left(m, \frac{1}{m}\right) \right\| = \sqrt{m^2 + \frac{1}{m^2}} = m$

SUCCESSIONE DIVERGENTE

$(1, 0), (0, 2), (3, 0) \dots (n, 0)(0, n+1)$

$(1,0),(0,2),(3,0),\dots,(m,0),(0,m+1),\dots$

$|a_m| = m$

$|a_{m+1}| = m+1$ $\Rightarrow$ $\lim |a_m| = +\infty$ a_m DIVERGENTE

$\Downarrow$

$\lim a_m = \infty$

SUCCESSIONE LIMITATA

ANALISI I := a_m È LIMITATA se $\exists h, k \in \mathbb{R} : h \leq a_m \leq k$

ANALISI II := a_m È LIMITATA se $\exists h \in \mathbb{R} : \|a_m\| \leq h$ $\forall m \in \mathbb{N}$

SUCCESSIONE ILLIMITATA

a_m È ILLIMITATA se $\forall h \in \mathbb{R}$ $\exists w \in \mathbb{N} : \|a_w\| \geq h$

Supponiamo $a_m \to L$

DIS. TRIANGOLARE

$$|a_m| = |a_m - L + L| \leq |a_m - L| + |L|$$

Dalla ipotesi sulla CONVERGENZA

$\exists w \in \mathbb{N} : |a_w - L| \leq \varepsilon$

quindi $\forall m > w \Rightarrow |a_m - L| \leq \varepsilon$

$$|a_m - L + L| \leq |a_m - L| + |L| \leq \varepsilon + L \qquad \forall m \geq w$$

Ma questo DISUGUAGLIANZA è vera solo se $m \geq w$. Ma w numero FINITO quindi:

$|a_m| \leq \max \{ |a_1| \dots \} \dots$

$$|a_n| \le \max \left\{ \begin{matrix} |a_i| \\ i=1,\dots,N \end{matrix} , |L|+\varepsilon \right\} = h \in \mathbb{R}$$

h È LA COSTANTE che MAGGIORA $|a_n|$.

$\Longrightarrow |a_n| \le h \Longrightarrow a_n$ CONVERGE $\Longrightarrow a_n$ LIMITATA

IL LIMITE DELLA SOMMA È UGUALE ALLA SOMMA DEI LIMITI!

$$\lim a_n + b_n = \lim a_n + \lim b_n$$

$\forall w \in \mathbb{R}^N$ (CHIARIMENTO)

① $|w_i| \leq |w| \qquad \forall\, i = 1, \dots, N$

$$w_i^2 \leq \sum_{i=1}^{N} w_i^2$$

② $$|w| \leq \sqrt{N} \max |w_i|$$

$$|w|^2 \leq N \max w_i^2$$

$$\underset{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} w_i^2}{\shortparallel}$$

sicuramente minore di N volte la somma del più grande dei w_i

Posto $w = a_n - L$ questo tende a zero
$w_i = (a_n - L)_i$

$$0 \leq (a_n - L)_i^2 \leq |a_n - L|^2 \leq N \max (a_n - L)_i^2$$

DEFINIZIONE : INSIEME LIMITATO

Un insieme X è detto LIMITATO se

$$\exists\, h : |u| \leq h \quad \forall u \in X$$

DEFINIZIONE : INSIEME NON LIMITATO

Un insieme X è detto NON LIMITATO se

$$\forall h \quad \exists\, \bar{u} \in X \; : \; |\bar{u}| \geq h$$

DISTANZA (anche chiamata METRICA)

$$d(x,y) = |x-y|$$

La distanza è una funzione tale che

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$

2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

3) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$

4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) \quad \forall x,y,z$

X È DEFINITO SPAZIO METRICO SE $\exists$ una funzione d che rispetta le proprietà della DISTANZA.

- **PALLA (BALL)** :

Sia X uno spazio metrico;
Si definisce PALLA, di raggio $r \geq 0$ e di centro x_0 :

$$B(x_0,r) = \{ u \in X : |u - x_0| \leq r \}$$

Se la DISEGUAGLIANZA è STRETTA allora si definisce PALLA APERTA.
Nel caso in cui la DISEGUAGLIANZA NON È STRETTA allora si definisce PALLA CHIUSA.

Esempi : sia X uno spazio avente $\dim X = 1$ (RETTA). La palla di raggio r e di centro 0 coincide con l'intervallo $]0-r, 0+r[$ (PALLA APERTA) oppure

$[o-r, o+r]$ (PALLA CHIUSA).

PUNTO INTERNO ad X

x_0 SI DIRÀ PUNTO INTERNO se $\exists\ p > 0$:

$$B(x_0, p) \subseteq X$$

INSIEME APERTO

Un insieme X si dirà aperto se

$$\forall\ x' \in X\ \ \exists\ p > 0 : B(x', p) \subseteq X$$

PUNTO ESTERNO ad X

x_0 si dirà esterno ad X se è INTERNO al COMPLEMENTARE di X.

PUNTO DI FRONTIERA

x_0 si dirà di FRONTIERA se ogni SFERA ha punti appartenenti ad X e al suo complementare.

$$\forall p > 0\ \ \exists\ x' \in X,\ x'' \notin X : x', x'' \in B(x_0, p)$$

INSIEME CHIUSO

Un insieme X si dirà chiuso se contiene la propria FRONTIERA.

PUNTO ISOLATO

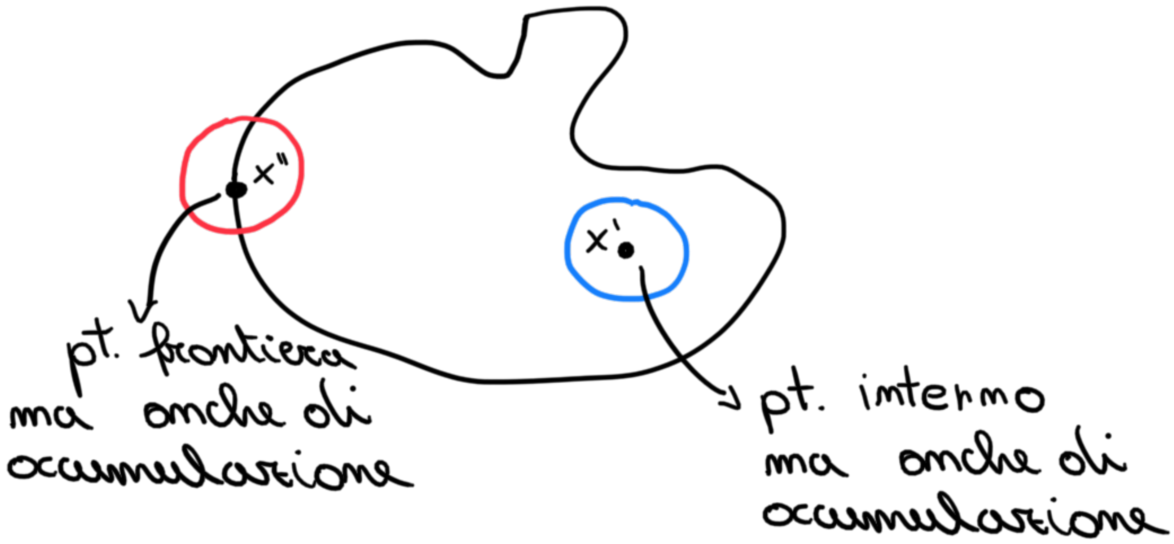
x_0 si dirà ISOLATO se $(x_0 \in X)$

$$\exists\ p : B(x_0, p) \cap X = \{x_0\}$$

PUNTO DI ACCUMULAZIONE

x_0 si dirà di ACCUMULAZIONE se

$$\forall \rho \ \exists x' \in X : x' \neq x_0 : x' \in B(x_0, \rho)$$



I PUNTI ISOLATI SONO TUTTI DI FRONTIERA!
I PUNTI INTERNI SONO TUTTI DI ACCUMULAZIONE!
I PUNTI DI FRONTIERA, ESCLUSI I PUNTI ISOLATI, SONO PUNTI DI ACCUMULAZIONE!

Ip: Sia x_0 di accumulazione

Tesi: Allora $\exists\ x_n \in X : x_n \to x_0$

Si definisca $x_n = \frac{1}{n}$

Sia $\rho = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists\ x_n \in X,\ x_n \neq x_0,\ |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$

$\varepsilon > 0$ e vorrei che $\frac{1}{\gamma} < \varepsilon \Rightarrow \gamma < \frac{1}{\varepsilon}$

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n > \gamma$$

INSIEME COMPATTO

X si dirà COMPATTO se è CHIUSO e LIMITATO.

FUNZIONE CONTINUA

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

NORMA IN $\mathbb{R}^m$

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n\ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon$$

NORMA IN $\mathbb{R}^n$

1° VIDEOLEZIONE

TEOREMA PERMANENZA DEL SEGNO

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, continua in x_0 , e verifica $f(x_0) > 0$

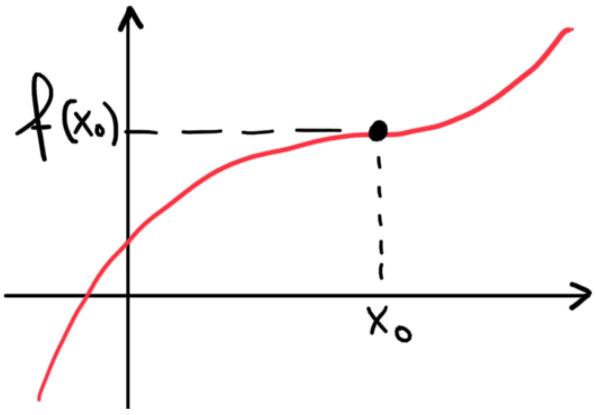
TESI : $\exists\ \rho > 0 \ : \ f(x) > 0 \quad \forall x \in B(x_0, \rho)$

DIMOSTRAZIONE :

Scelto $\bar{\varepsilon} = f(x_0)$

$\exists\ \delta > 0 \ : \ \forall x \in \text{dom}(f)$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \bar{\varepsilon}$ → PER LA CONTINUITÀ



$$f(x_0) - \bar{\varepsilon} < f(x) < f(x_0) + \bar{\varepsilon}$$ => QUESTO SOLO PERCHÈ È UNA FUNZIONE SCALARE

Dato che $\bar{\varepsilon} = f(x_0)$ ne segue che $f(x_0) - \bar{\varepsilon} = 0$ si ha la tesi :

$$\underbrace{f(x_0) - \bar{\varepsilon}}_{=0} < f(x) < \underbrace{f(x_0) + \bar{\varepsilon}}_{>0}$$

La situazione di sopra accade nella sfera di raggio $= \delta$ perchè la disuguaglianza è assicurata per quelle x.

TEOREMA COMPOSIZIONE DI FUNZIONI CONTINUE

Siano $f: \Omega \to \Sigma$ e $g: \Sigma \to \Theta$

Si ha $h: \Omega \to \Theta$ dove $h(x) = g(f(x))$

f sia continua in x_0 e g sia continua in $f(x_0)$.

TESI: $h(x)$ è CONTINUA in x_0

DIMOSTRAZIONE:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall x \in \underset{\Omega}{\underset{\shortparallel}{Dom(h)}} : |x - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow |\underset{g(f(x))}{\underset{\shortparallel}{h(x)}} - \underset{g(f(x_0))}{\underset{\shortparallel}{h(x_0)}}| < \varepsilon$$

Dalla CONTINUITÀ della g (DA IPOTESI)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall y \in \underset{\Sigma}{\underset{\shortparallel}{Dom(g)}} : \underbrace{|y - f(x_0)|}_{} < \delta$$

$$\Rightarrow \underline{|g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon}$$ questo è della TESI

PRENDO ε' e lo sostituisco a δ

Ma sappiamo anche che f

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall y \in \underset{\Omega}{\underset{\shortparallel}{Dom(f)}} : |x - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{} < \varepsilon'$$

TEOREMA: L’IMMAGINE, TRAMITE UNA FUNZIONE CONTINUA IN Xo, DI UNA SUCCESSIONE CONVERGENTE IN Xo È ANCH’ESSA CONVERGENTE

$a_n \to x_0$ $\qquad$ $a_n \in \Omega$

f CONTINUA IN x_0 $\qquad$ $f: \Omega \to \mathbb{R}$

TESI: $f(a_n) \to f(x_0)$

$$|f(\underset{\overset{\shortparallel}{x}}{a_n}) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in Dom(f) : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Tutto ciò si verifica grazie alla continuità di f. Ma noi sappiamo che $a_n \to x_0$

Quindi

$$\forall \delta > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \Rightarrow |a_n - x_0| < \delta$$

E quindi se si prende ε della continuità relativo a δ della convergenza si ha la tesi.

Quest’ultimo teorema non dice nient’altro che se esiste una successione che converge a Xo ed esiste una funzione continua in Xo allora le immagini della successione tramite la funzione convergono a Xo. La dimostrazione è semplice e immediata: sappiamo (grazie alla continuità di f(x) in Xo) che esisterà un certo delta per cui la distanza tra le X e Xo sia minore di esso. Ricordando che Xo appartiene al codominio di An sappiamo, grazie alla proprietà di convergenza in Xo di An, che esiste, da un certo n’ in poi, un delta’ tale che la distanza tra An e Xo sia minore di esso. Prendiamo questo delta’ e sostituiamolo al delta originale della continuità ed abbiamo la tesi.

TEOREMA DEGLI ZERI

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}$

CASO ANALISI I

- f CONTINUA in Ω
- Ω INTERVALLO
- $\exists\, x', x'' : f(x')f(x'') < 0$

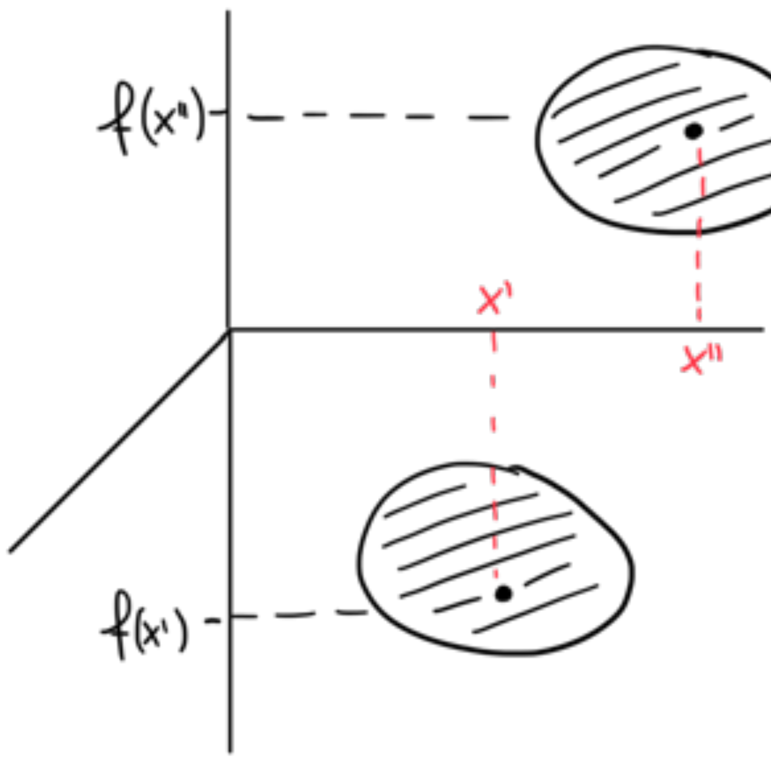
TESI: $\exists\, \bar{x} \in \Omega : f(\bar{x}) = 0$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

ANALISI II

- f CONTINUA in Ω (IN OGNI PUNTO)
- Ω INSIEME CONNESSO
- $\exists\, x', x'' : f(x')f(x'') < 0$

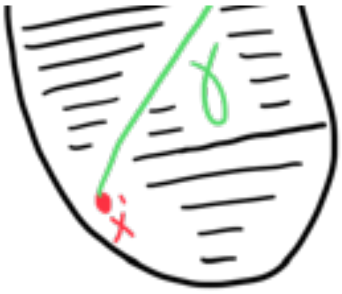
TESI: $\exists\, \bar{x} \in \Omega : f(\bar{x}) = 0$



funzione non CONTINUA
=> NON HA ZERI
in questo caso

CONNESSIONE

Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dirà CONNESSO se comunque io prenda due punti appartenenti



all' insieme esiste un segmento che gli congiunge e che stia dentro Ω

Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dirà CONNESSO se $\forall x', x'' \in \Omega \ \exists \gamma : [0,1] \to \Omega$, continua, tale che

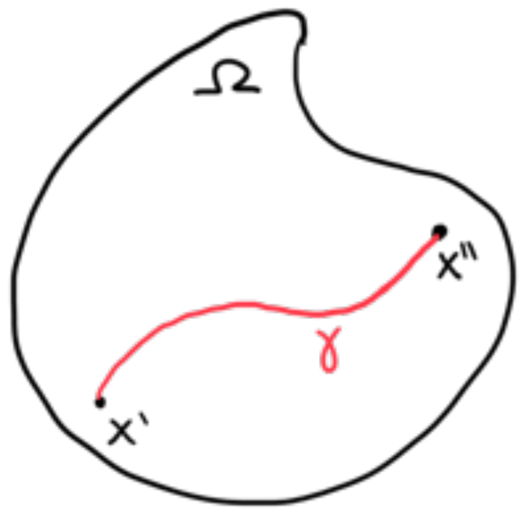
$$\gamma(0) = x'$$
$$\gamma(1) = x''$$

DIMOSTRAZIONE th. ZERI

Scelti x', x'' (stessi delle ipotesi) e poiché Ω È CONNESSO $\exists \gamma : [0,1] \to \Omega$, CONTINUA, verificante $\gamma(0) = x'$ e $\gamma(1) = x''$

Definiamo $h(t) : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$h(t) = f(\gamma(t))$$



$h(t)$ è una funzione in una Variabile verificante:

- CONTINUA perché composizione di funzioni continue
- h è definita in un intervallo $\Rightarrow [0,1]$
- $h(0) = f(\gamma(0)) = x'$ ed $h(1) = f(\gamma(1)) = x''$ quindi $h(0)h(1) < 0$

$\Rightarrow h(t)$ ha uno zero dal th. zeri in una Variabile.

$$\exists \bar{t} \in [0,1] : h(\bar{t}) = 0$$

Notiamo che $h(\bar{t}) = f(\gamma(\bar{t})) = 0$

Quindi si prende $\gamma(\bar{t}) = \bar{x}$ ...

... si prende $\gamma(t) = x$ e ne segue la tesi del teorema.

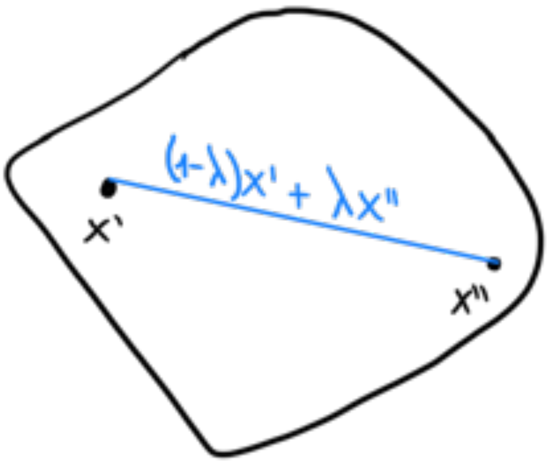
$$\Rightarrow \exists \, \bar{x} : f(\bar{x}) = 0$$

∎

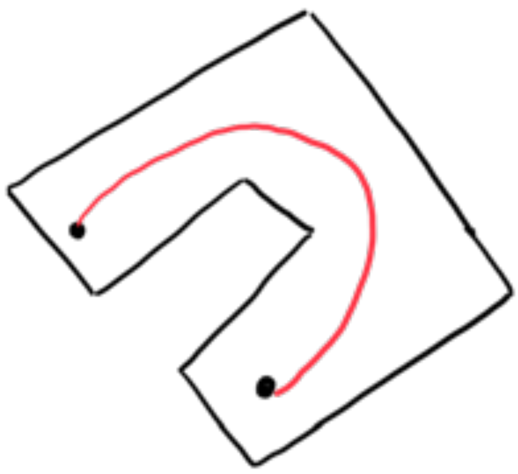
CONVESSITÀ

Un insieme si dice CONVESSO se comunque presi due punti essi possono essere congiunti da un SEGMENTO.

$$\Omega \text{ CONVESSO} \Rightarrow \forall x', x'' \in \Omega \, , \, \forall \lambda \in [0,1]$$
$$(1-\lambda)x' + \lambda x'' \in \Omega$$



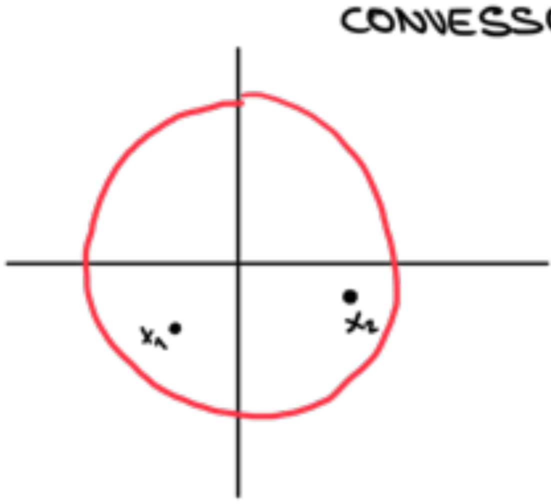
→ CONVESSO



INSIEME CONNESSO NON CONVESSO

$$\Omega = B(0,1)$$

PROVIAMO CHE Ω È CONVESSO



$\forall \, x_1, x_2 \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0,1]$ ...

$x_1, x_2 \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0,1]$ devo provare che
$(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in \Omega$

Noi sappiamo che $|x_1| < 1$ e $|x_2| < 1$ $\Leftarrow$ HP.

È VERO CHE $|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2| < 1$?

Dim.

$$|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2|^2 = (1-\lambda)^2|x_1|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\underbrace{x_1x_2}_{\text{PROD. SCALARE}} + \lambda^2|x_2| \quad ①$$

Sappiamo, dis. SCHWARZ, che: $x_1x_2 \leq |x_1x_2| \leq |x_1||x_2|$

$$① \leq (1-\lambda)^2|x_1|^2 + 2\lambda(1-\lambda)|x_1||x_2| + \lambda^2|x_2|$$

MA QUESTO È IL QUADRATO DI UN BINOMIO

$$\left[(1-\lambda)|x_1| + \lambda|x_2|\right]^2$$

Dalle ipotesi $|x_1| < 1$ e $|x_2| < 1$ ed inoltre $\lambda \in [0,1]$ allora $0 < (1-\lambda) < 1$ ed $0 < \lambda < 1$

$$\left[(1-\lambda)|x_1| + \lambda|x_2|\right]^2 \leq \left[(1-\lambda) + \lambda\right]^2 = 1$$

PROBLEMA del DINI

Si considera $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$f : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

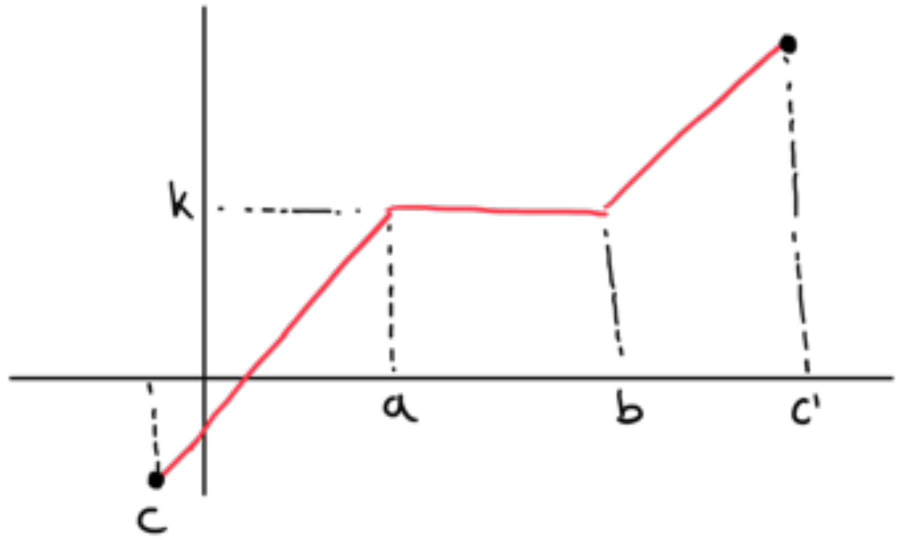
$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ si studia $f(x,y) = 0$

$f(x,y) = 0 \Rightarrow$ INSIEME DI LIVELLO 0

INSIEME DI LIVELLO

Si dirà Insieme di livello $K \in \mathbb{R}$ per una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\{(x',y') \in \Omega : f(x',y') = k\}$

Notiamo una cosa in $\mathbb{R}^1$



$f : [c, c'] \to \mathbb{R}$

$\Omega^k = [a, b]$

$f(x,y) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 = x^2 + 1 - x^2 = 1$

$1 = 1$

formula risolutiva dell' equazione $x^2 + y^2 = 1$

TEOREMA DINI (o delle funzioni IMPLICITE) caso f CONTINUA

Hp: ① $f : \Omega \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN Ω

② $\exists\, \bar{x}, \bar{y} : f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

③ $(\bar{x}, \bar{y})$ pt. INTERNO ad Ω

④ $t \to f(x,t)$ È STRETTAMENTE MONOTONA in t $\forall x$ fissato $\in \Omega$

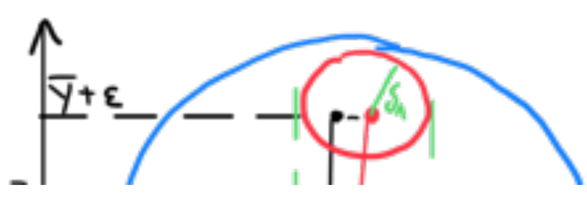
Ts: ① $\exists\, \delta > 0, \exists\, \varphi : [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta] \to \mathbb{R}$ tale che

② $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$

③ $\varphi(\bar{x}) = \bar{y}$

④ φ È CONTINUA IN $[\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$

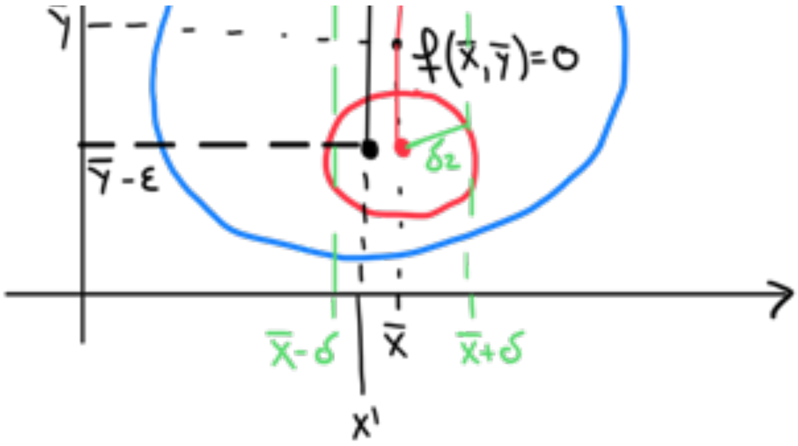
DIMOSTRAZIONE :



- Dato che $(\bar{x}, \bar{y})$ È INTERNO e $Dom(f) = \Omega$

$\exists\, p > 0 : B_p(\bar{x}, \bar{y}) \subseteq \Omega$

Si prenda $\varepsilon = \frac{p}{2}$



- Dall' ipotesi ④ sappiamo che $t \to f(x,t)$ è STRETTAMENTE MONOTONA (supponiamo, senza perdere in generalità, CRESCENTE) e quindi:

$t(\bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

$t(\bar{y}+\varepsilon) > 0 \Rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}+\varepsilon) > 0$

$t(\bar{y}-\varepsilon) < 0 \Rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}-\varepsilon) < 0$

- Dato che la funzione f è CONTINUA in tutto il DOMINIO allora lo sarà in $(\bar{x}, \bar{y}+\varepsilon)$, $(\bar{x}, \bar{y}-\varepsilon)$.
  Per il th. PERMANENZA DEL SEGNO:

$\exists\, \delta_1 : f(x', y') > 0 \quad \forall x', y' \in B_{\delta_1}(\bar{x}, \bar{y}+\varepsilon)$

$\exists\, \delta_2 : f(x', y') < 0 \quad \forall x', y' \in B_{\delta_2}(\bar{x}, \bar{y}-\varepsilon)$

- Si supponga di prendere $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
  Prendiamo $x' \in [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$. Sappiamo dal th. permanenza del segno che la funzione $f(x,y)$ assume valori discordi in un intorno di $\bar{x}$.
  In particolare notiamo che

  $f(x', \bar{y}+\varepsilon) > 0$ se $x' \in [\bar{x}+\delta, \bar{x}-\delta]$

  Vediamo perchè:

  $f(x,y) > 0$ se $(x,y) \in B_{\delta_1}(\bar{x}, \bar{y}+\varepsilon)$ quindi se fissiamo $y = \bar{y}+\varepsilon \Rightarrow f(x', y) > 0$ se $|\bar{x}-x'| < \delta_1$.
  Ma per la scelta fatta:

  $x' \in [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta] \Rightarrow |\bar{x}-x'| < \delta \leq \delta_1$ dato che

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Per le stesse ragioni si ha:

$$f(x', \bar{y}-\varepsilon) < 0 \quad \text{se} \quad x' \in [\bar{x}+\delta, \bar{x}-\delta]$$

- Notiamo che la funzione (ad una variabile) $t \to f(x,y)$ rispetta i 3 requisiti minimi per soddisfare il th. zeri di Weierstrass:

  1) $t \to f(x', \bar{y}+\varepsilon) > 0$ $\quad$ ESTREMI DISCORDI
  $t \to f(x', \bar{y}-\varepsilon) < 0$

  2) t definita in $[\bar{y}-\varepsilon, \bar{y}+\varepsilon]$ perchè $B_p(\bar{x},\bar{y})$ è un insieme convesso per cui tutti i segmenti che congiungono i punti di B_p sono contenuti al suo interno (compreso t da $\bar{y}-\varepsilon$ a $\bar{y}+\varepsilon$).

  3) t è continua dato che la sua immagine $f(x,y)$ è continua in x fissato e $y \in \Omega$ (di conseguenza anche per $\bar{y}-\varepsilon$ e $\bar{y}+\varepsilon$).

$$\Rightarrow \exists\, y' : t(y') = 0 \qquad \Rightarrow f(x', y') = 0$$

- Data la stretta monotonia di t per ogni x' fissato $\exists!\, y' \in [\bar{y}-\varepsilon, \bar{y}+\varepsilon] : t(y') = f(x', y') = 0$.

  Quindi possiamo definire $\varphi : [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta] \to]\bar{y}-\varepsilon, \bar{y}+\varepsilon[$

  $$\varphi(x') = y'$$

  È importante notare come il codominio sia aperto perchè $t(\bar{y}-\varepsilon) \neq t(\bar{y}+\varepsilon) \neq 0$ quindi φ non assumerà mai quei valori.

Dimostriamo i ③ punti della tesi:

1) Per costruzione di φ, $\forall x \in \operatorname{Dom}\varphi = [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$, la funzione assume y (UNICO!) tale che $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$

2) Si ricorda che per $x = \bar{x}$ l'unico zero della funzione t è $\bar{y}$ (dalla MONOTONIA) da cui segue $f(\bar{x}) = \bar{y}$.

3) CONTINUITÀ:

Si prova la continuità di f in $\bar{x}$:
Se $|x - \bar{x}| < \delta$, che si traduce in $]\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta[$, si ha $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$, quindi $(f(\bar{x}) = \bar{y})$ in conclusione

$$f(x) \in \;]\bar{y}-\varepsilon, \bar{y}+\varepsilon[\quad \Rightarrow \quad f \in C^1(\bar{x})$$

Il tutto grazie alla costruzione di f.
Purtroppo questo non basta a provare la continuità perchè occorre che $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$ sia rispettata per ε arbitrari.
Comunque questo avviene per l'unicità di f.
Si prenda $\varepsilon' < \varepsilon$. Quindi occorre considerare intorni diversi dai precedenti a cui si è applicato il th. permanenza del segno e quindi considerare δ diverso dal precedente. Tutto questo porterebbe ad una funzione diversa da quella presa in considerazione fino ad ora.
Ciò non accade perchè per costruzione di f (e di un'ipotetica $f_{\varepsilon'}$) essa assume sempre y tale che $t(y) = 0 \quad \forall x \in [\bar{x}-\delta', \bar{x}+\delta']$.
Le due funzioni sono coincidenti per ogni x che si prende.
Ripetendo lo stesso ragionamento $\forall x \in [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$ SI DIMOSTRA LA CONTINUITÀ.

$\blacksquare$

Supponiamo di avere un polinomio $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

1^a PROPRIETÀ:

Sia p un polinomio su $\mathbb{C}$ non costante.
Allora $\lim\limits_{\infty} p(z) = \infty$

DIMOSTRAZIONE:

$$p(z) = \sum_{i=0}^{m} a_i z^i \qquad \rightarrow \quad m \geq 1 \text{ perchè } p \text{ non è COSTANTE}$$

Supposto $z \neq 0$

$$p(z) = z^m \cdot \sum_{i=0}^{m} a_i \frac{z^i}{z^m} = z^m \left[a_m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i z^{i-m} \right]$$

Si deve provare: $\lim\limits_{\infty} z^{i-m} = 0$

Si studia z^{-k} $(k>0)$

Definizione $\lim\limits_{\infty} z^{i-m} = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |z^{i-m}| < \varepsilon$
$\forall z > \delta$

$$|z^{i-m}| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|z|^{i-m}} < \varepsilon \Rightarrow |z|^{i-m} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$|z| > \sqrt[i-m]{1/\varepsilon} \equiv \delta$$

$$|P(z)| = |z^m| \left| a_m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i z^{i-m} \right|$$

$\downarrow$

TUTTO QUESTO CONVERGE a $|a_m| > 0$

Il tutto si riduce a studiare $|P(z)| = |a_m||z^m|$

Sappiamo che $|a_m| > 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{|a_m|}{2}$

Se $\lim\limits_{\infty} \left| a_m + \sum_{0}^{m-1} a_i z^{i-m} \right| = L$ allora

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \left| a_m + \sum_{0}^{m-1} a_i z^{i-m} - L \right| < \varepsilon \quad \forall |z| > \delta$$

$$|a_m|$$

$$|a_m| - \varepsilon < \left| a_m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i z^{i-m} \right| < |a_m| + \varepsilon = \frac{|a_m|}{2}$$

Allora scopriamo che, per th. CONFRONTO

$$\frac{|a_m|}{2} < \left| a_m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i z^{i-m} \right|$$

E MOLTIPLICANDO $|z^m|$

$$\underbrace{\frac{|a_m|}{2}|z^m|}_{\downarrow +\infty} < \underbrace{\left| a_m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i z^{i-m} \right||z^m|}_{\downarrow +\infty}$$

DA CUI SEGUE LA TESI. ■

X_0 è pt. massimo per $f: \Omega \to \mathbb{R}$ se $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in \Omega$

TEOREMA DI WEIERSTRASS (MASSIMO e MINIMO)

Ip: $f: \Omega \to \mathbb{R}$, Ω È COMPATTO, $f \in C(\Omega)$

Tesi: $\exists\, x_1, x_2 \in \Omega : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x \in \Omega$

X_1 È PUNTO DI MINIMO

X_2 È PUNTO DI MASSIMO

NON DIMOSTRATO

OSSERVAZIONE: Se $|p(z)|$ ha minimo e il valore minimo è 0, allora $p(z)$ si annulla nel punto di minimo.

$$|P(X_0)| = 0 \Rightarrow P(X_0) = 0$$

TEOREMA: Sia $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, CONTINUA in $\mathbb{C}$, $\lim_{\infty} f(z) = +\infty$

TESI: f ha minimo in $\mathbb{C}$

$$\left(\exists x_0 \in \mathbb{C} : f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathrm{Dom}\, f = \mathbb{C}\right)$$

DIMOSTRAZIONE:

Si sceglie z_0 ad arbitrio in $\mathbb{C}$.

Se $f(z_0) > 0$ allora si pone $\varepsilon = f(z_0)$

Se $f(z_0) \leq 0$ allora si pone $\varepsilon = 1$

Dalla DIVERGENZA:

$\exists \delta > 0$ per cui $|z| > \delta$ è tale che $f(z) > \varepsilon$

QUESTO INSIEME APPENA DEFINITO

$\downarrow$

È IL COMPLEMENTARE di $B(0,\delta) = \{z : |z| \leq \delta\}$

Sicuramente $z_0 \in \overline{B}$ (SFERA CHIUSA)

f su $\overline{B}$ ha MASSIMO e MINIMO per WEIERSTRASS.

Sia z' il punto di MINIMO da cui segue

$f(z) \geq f(z') \quad \forall z \in \overline{B}(0,\delta)$ in particolare

$f(z_0) \geq f(z')$ perchè $z_0 \in \overline{B}(0,\delta)$

$$\forall z \notin \overline{B} \Rightarrow |z| > \delta \Rightarrow f(z) > \varepsilon \geq f(z_0) \geq f(z')$$

SEGUE $f(z) \geq f(z') \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ z' È PUNTO DI MINIMO GLOBALE IN di f in $\mathbb{C}$.

$\blacksquare$

LEMMA $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, polinomio non costante.

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$: $p(z_0) \neq 0$.

$$\Rightarrow \exists \bar{z} \in \mathbb{C} : |p(\bar{z})| < |p(z_0)|$$

DIMOSTRAZIONE :

Sappiamo dalla ipotesi che $p(z_0) \neq 0$.

$$|p(\bar{z})| < |p(z_0)| \Rightarrow \frac{|p(\bar{z})|}{|p(z_0)|} < 1$$

Introduciamo un nuovo polinomio $q(w) = \dfrac{|p(z_0 + w)|}{|p(z_0)|}$.

La TESI È DIMOSTRATA se $\exists\, \bar{w} : |q(w)| < 1$.

Se $\bar{w}$ esiste si prenderà $\bar{z} = z_0 + \bar{w}$.

Sviluppiamo il polinomio :

$$q(w) = \sum_{i=0}^{m} a_i w^i$$

Inoltre si osserva che $q(0) = 1$ e che $q(w)$ è NON COSTANTE.

Il polinomio, oltre ad essere NON COSTANTE, è di pari grado a p perchè, sviluppando i termini :

$$q(w) = 1 + \text{EVENTUALI TERMINI COSTANTI} + \frac{|z_0 + w|}{|p(z_0)|} + \frac{|z_0 + w|^2}{|p(z_0)|} + \dots + \frac{|z_0 + w|^m}{|p(z_0)|}$$

Sia $J \in \mathbb{Z} : J > 0$ il minimo numero intero che rappresenta il primo termine del polinomio avente coefficiente non nullo.

$$q(w) = 1 + a_J w^J + w^{J+1} \tilde{q}(w)$$

$\tilde{q}(w)$ rappresenta il polinomio "RESTO" ottenuto raccogliendo w^{J+1} da tutti i termini di grado $> J$.

Si applica la DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE :

$$|q(w)| \leq |1 + a_J w^J| + |w^{J+1} \tilde{q}(w)|$$

La dimostrazione segue con il trovare un opportuno argomento di $\bar{w}$ tale che $a_J w^J$ sia negativa ed in modulo di 1.

$$\arg(a_J \bar{w}^J) = \pi$$

$$\arg a_J + \arg \bar{w}^J = \pi \quad \Rightarrow \quad \arg \bar{w} = \frac{\pi - \arg a_J}{J}$$

Si trova il modulo:

$$|a_J \bar{w}^J| < 1 \quad \Rightarrow \quad |\bar{w}|^J < \frac{1}{|a_J|} \quad \Rightarrow \quad |\bar{w}| < \sqrt[J]{\frac{1}{|a_J|}}$$

La disequaglianza ora diventa:

$$|q(\bar{w})| \leq |1 + a_J \bar{w}^J| + |\bar{w}|^{J+1} |\tilde{q}(\bar{w})|$$

$$\Downarrow$$

$$|q(\bar{w})| \leq 1 - |a_J||\bar{w}|^J + |\bar{w}|^{J+1} |\tilde{q}(\bar{w})|$$

Raccogliendo i termini, esclusi l'1, si ha:

$$|q(\bar{w})| \leq 1 - |\bar{w}|^J \left(|a_J| + |\bar{w}| |\tilde{q}(\bar{w})| \right)$$

Se si fa tendere $\bar{w} \to 0$ si ha la tesi voluta:

$$|q(\bar{w})| \leq 1 - \underbrace{|\bar{w}|^J}_{\to 0} \underbrace{\left(|a_J| + \underbrace{|\bar{w}| |\tilde{q}(\bar{w})|}_{\to 0} \right)}_{\to |a_J| > 0}$$

$|a_J| > 0$ perchè abbiamo scelto J tale che sia reale e non nullo.

Quindi grazie al teorema della permanenza del segno
$\exists \delta > 0 : \forall w \in B_\delta(\bar{w}) \Rightarrow |\bar{w}| > 0$

Si prenderà $w^* = \bar{w} + \frac{\delta}{2}$ da cui segue:

$$|q(w^*)| < 1 - \underbrace{|w^*|}_{> 0} \left(|a_J| + \underbrace{|w^*| |\tilde{q}(w^*)|}_{\to |a_J|} \right)$$

$$\exists\, w^* : |q(w^*)| < 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, \bar{z} = w^* + z_0 \ : \ |p(\bar{z})| < |p(z_0)|$$

■

DIMOSTRAZIONE TEOREMA FONDAMENTALE DELL' ALGEBRA

Sia $f(z) = |p(z)|$

1) è CONTINUA
2) Per il lemma 1 $\lim_{\infty} f(z) = +\infty$
3) Per il teorema precedente $\exists\, z'$ di minimo per $|p(z)|$.

Se z' è tale che $|p(z')| = 0$ si ha la tesi.
Se invece z' è tale che $|p(z')| \neq 0$ per il lemma di sopra $\Rightarrow \exists\, \bar{z} \in \mathbb{C} : |p(\bar{z})| < |p(z')|$.

ASSURDO! $\Rightarrow f(z')$ è MINIMO!

Ciò ci assicura z' è tale che $|p(z')| = 0$.

LIMITE DI FORME QUADRATICHE ALL' INFINITO

Se $f(x) = \sum_{1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

- Se f DEFINITA $\Rightarrow$ DIVERGE $\begin{cases} +\infty & \text{se POSITIVA} \\ -\infty & \text{se NEGATIVA} \end{cases}$

Altrimenti il limite NON ESISTE.

LEMMA : FORME QUADRATICHE DIVERGONO SE SONO DEFINITE

DIMOSTRAZIONE :

$$\lambda |x|^2 \leq \sum_{1}^{n} a_{ij} x_i x_j \leq \nu |x|^2$$

minimo autovalore

massimo autovalore

f È DEFINITA POSITIVA se $\lambda > 0$

f È DEFINITA NEGATIVA se $\nu < 0$

$\mu < 0$

Dal th. CONFRONTO:

se $\lambda > 0 \Rightarrow \underset{\downarrow \atop +\infty}{\lambda |x|^2} \leq \sum_1^n a_{ij} x_i x_j$

quindi anche la FORMA QUADRATICA $\rightarrow +\infty$

se $\mu < 0 \Rightarrow \underset{\downarrow \atop -\infty}{\mu |x|^2} \geq \sum_1^n a_{ij} x_i x_j$

quindi anche la FORMA QUADRATICA $\rightarrow -\infty$

∎

OSSERVAZIONE:

$$\lim_{(0,0)} \frac{1}{x^2+2y^2} \rightarrow \text{COSTANTE}$$

($x^2+2y^2 \searrow 0$)

x^2+2y^2 funzione continua perché somma e prodotto di due funzioni CONTINUE

$$\lim_{(0,0)} \frac{1}{x^2-y^2} = \text{N.E.} \Rightarrow$$

Sull' asse x su ($y=0$ fissato)

$$\lim_{(0,0)} f(x,y)\big|_{y=0} = \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Sull' asse y su ($x=0$ fissato)

$$\lim_{(0,0)} f(x,y)\big|_{x=0} = \frac{1}{-y^2} = -\infty$$

CASO GENERALE

$$\lim_{(0,0)} \frac{1}{\sum_1^n a_{ij} x_i x_j}$$

$$f(x) = \sum_1^n a_{ij} x_i x_j$$

$$\lambda |x^2| \leq f(x) \leq \mu |x^2|$$

$$\lambda > 0 \Rightarrow f \text{ è DEFINITA POSITIVA}$$

$$\mu < 0 \Rightarrow f \text{ è DEFINITA NEGATIVA}$$

$$f(x) \leq \mu |x^2| \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{\mu |x^2|}$$

Notiamo che $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e quindi se $|x| \to 0$ anche $|x^2| \to 0$

Dalla definizione di limite se $f \to +\infty$ (continuare)

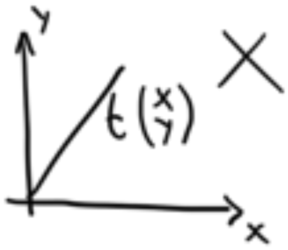
CONO

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dirà CONO (di ORIGINE in 0) se:

$$\forall x \in X, \ \forall t > 0 \Rightarrow tx \in X$$

Vediamo cosa vuol dire cono in $\mathbb{R}^2$

$X = \{x > 0, y > 0\} \Rightarrow$ I QUADRANTE



$$(x,y) \in X \Longleftrightarrow \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \end{array}$$

$$t(x,y) \equiv (tx, ty) \in X \quad \forall t > 0$$

STELLA

X STELLA rispetto a $x_0 \in X$ (x_0 si dirà POLO) se

$$\forall x \in X \quad (1-\lambda)x_0 + \lambda x \in X \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

FUNZIONE OMOGENEA

$f: X \to \mathbb{R}$, X CONO, si dice γ-OMOGENEA se

$$f(tx) = t^{\gamma} f(x) \quad \forall t>0, \forall x \in X$$

Esempi:

$f(x) = |x| = \sqrt{\sum x_i^2}$ è 1-OMOGENEA

Come si prova 1-OMOGENEITÀ?

Si prova $f(tx) = t^1 f(x) \quad \forall t>0$

$f(tx) = |tx| = |t||x| = t|x|$

$f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \to t(x,y) \equiv (tx, ty)$

$f(tx,ty) = \dfrac{t^2(x^2-y^2)}{t^2(x^2+y^2)} = f(x,y) = t^0 f(x,y) \Rightarrow$ 0-OMOGENEA

ESERCIZIO:

$\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$

1) Dominio (è un cono)
2) GRADO di OMOGENEITÀ

$\dfrac{x^2+y^2}{x^3-y^3}$

1) Dominio (è un cono)
2) GRADO di OMOGENEITÀ

$\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ questa è una funzione 1-OMOGENEA

$x = tx \quad , \quad y = ty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{t^2x^2+t^2y^2}{tx-ty} = \dfrac{t^2}{t}\dfrac{x^2+y^2}{x-y} = t\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$

$\dfrac{x^2+y^2}{}$ questa è una funzione (-1)-OMOGENEA

$x^3 - y^3$

$x = tx \quad , \; y = ty \Rightarrow f(tx, ty) = \dfrac{t^2(x^2+y^2)}{t^3(x^3-y^3)} = t^{-1} f(x,y)$

LEMMA: $p(x)$ polinomio OMOGENEO di grado β.
$\Rightarrow p(x)$ è β-OMOGENEO

$p: \mathbb{R}^n$ (CONO) $\Rightarrow x \to tx$ in ogni monomio si ottiene un fattore t^{β} che può essere posto in evidenza.

Se f è α-OMOGENEA e g è β-OMOGENEA (tutte e due definite su Ω):

① $f \cdot g$ è $(\alpha+\beta)$-OMOGENEA

② f/g è $(\alpha-\beta)$-OMOGENEA

Dim:

$(fg)(tx) = f(tx)g(tx) = t^{\alpha} f(x) t^{\beta} g(x) = t^{\alpha+\beta} fg(x)$

③ $[f(x)]^{\beta} = [t^{\alpha} f(x)]^{\beta} = t^{\alpha\beta} f^{b}(x) \Rightarrow \alpha\beta$-OMOGENEA

LEMMA:

Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$, (Ω È UN CONO), α-OMOGENEA, $\alpha > 0$

Allora $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ SE E SOLO SE f è LIMITATA su $\Omega \cap \partial B(0,1)$

$\hookrightarrow$ FRONTIERA

Dim:

Si nota che se $x \in \partial B(0,1)$ allora $|x| \leq 1$.

La TESI dice: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in Dom(f)$ tale $|x| < \delta$
$\Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ (DEFINIZIONE CONVERGENZA A ZERO)

Osserviamo che se $x \neq 0 \Rightarrow x = |x| \cdot \dfrac{x}{|x|}$

$f(x) = f\left(|x| \frac{x}{|x|}\right) = |x|^{\alpha} f\left(\frac{x}{|x|}\right)$

Che vuol dire f è limitata su $\Omega \cap \partial B(0,1)$?

$\exists K : |f(x)| \leq K \quad \forall x \in \Omega \cap \partial B(0,1)$

Osserviamo che $\frac{x}{|x|} \in \Omega \cap \partial B(0,1)$

$$0 \leq |x|^a f\left(\tfrac{x}{|x|}\right) \leq |x|^a |f(x)| \leq |x|^a K$$

e quindi per th. confronto, poichè $|x|^a \to 0$ se $|x| \to 0$ si ha la CONVERGENZA per $x \to 0$.

Il δ cercato per dimostrare la tesi segue dalla seguente espressione.

$$K|x|^a < \varepsilon$$

$$|x|^a < \frac{\varepsilon}{K}$$

$$|x| < \sqrt[a]{\varepsilon/K} = \delta$$

∎

LEMMA:

Sia f 0-OMOGENEA. Inoltre sia f NON COSTANTE.

$\Rightarrow f$ NON CONVERGE in 0.

<u>DIM</u>:

Se f è 0-OMOGENEA allora risulta $f(tx) = f(x)$.

Essendo NON COSTANTE $\exists\, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Supposto che il limite a 0 ESISTE si ha $\Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x| < \delta,\ x \neq 0 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

$$tx_1 \in B(0,\delta) \Rightarrow \quad |tx_1| < \delta \Rightarrow |t| < \frac{\delta}{|x_1|}$$

$$tx_2 \in B(0,\delta) \Rightarrow \quad |tx_2| < \delta \Rightarrow |t| < \frac{\delta}{|x_2|}$$

Si osservi che, essendo f 0-OMOGENEA:

$$f(tx) = f(x) \Rightarrow \begin{array}{l} f\left(\frac{\delta}{|x_1|} x_1\right) = f(x_1) \\ f\left(\frac{\delta}{|x_2|} x_2\right) = f(x_2) \end{array}$$

Risulta quindi che $\forall \delta > 0$ scelto ARBITRARIAMENTE si

hanno sempre dei punti in cui f vale $f(x_1)$ o $f(x_2)$.
Scelti $x_1 \neq x_2$ allora $\exists\ \bar{\varepsilon} < |f(x_1) - f(x_2)|$
la CONDIZIONE DI CAUCHY NON È RISPETTATA e tale LIMITE NON ESISTE.

CONDIZIONE DI CAUCHY:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in B(0,\delta) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

$\blacksquare$

CN LEMMA CONVERGENZA funzioni a-OMOGENEE $(a>0)$

DIM:

Sia f NON LIMITATA su $\mathrm{Dom} f \cap \partial B(0,1)$

$$\exists\ X_m \in \mathrm{Dom} f \cap \partial B(0,1) : |f(X_m)| > m$$

Se f fosse infinitesima in 0

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{Dom} f,\ |x| < \delta\ x \neq 0,\ |f(x)| < \varepsilon$$

$$\varepsilon > |f(x)| = \left|f\left(|x| \frac{x}{|x|}\right)\right| = \left||x|^a f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| = \underline{|x|^a \left|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|}$$

$\bar{\varepsilon} = 1\ \exists \bar{\delta} : \forall x \in \mathrm{Dom} f,\ |x| < \bar{\delta}\ x \neq 0$

$$\bar{\varepsilon} > |x|^a \left|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| = |f(x)|$$

Si prenda $Y_m = \frac{\bar{\delta}}{2} X_m \rightarrow |Y_m| = \frac{\bar{\delta}}{2}|X_m| = \frac{\bar{\delta}}{2}$

Per $X_m \in \partial B(0,1)$

$$\underbrace{\bar{\varepsilon} > \left|\frac{\bar{\delta}}{2} X_m\right|^a |f(X_m)| > \left(\frac{\bar{\delta}}{2}\right)^a m}_{\forall m \in \mathbb{N}}$$

basta prendere $m > \frac{2}{\delta}$
per ottenere un ASSURDO

$$1 = \bar{\varepsilon} > \left(\frac{\bar{\delta}}{2}\right)^a m > 1$$

TEOREMA CAMBIO DI VARIABILI NEI LIMITI

- Sia $f: \Omega \to \Sigma$, $g: \Sigma \to \mathbb{R}$
- $h(x) = g(f(x))$ è definita in Ω
- Inoltre sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, $\lim_{t \to L} g(t) = M$

CON QUESTE IPOTESI LA TESI È FALSA! GUARDA L'ESEMPIO

TESI: $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = M$

ESEMPIO CHE SMENTISCE LA TESI:

$$g(t) = \begin{cases} 2 & t = 1 \\ 3 & t \neq 1 \end{cases} \qquad f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t \to 0} g(t) = 3 \qquad\qquad \lim_{x \to 1} g(f(x)) = 1$$

I DUE LIMITI SONO DIVERSI!

QUANDO VALE IL TEOREMA?

1) Quando $g(t)$ È CONTINUA in $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$

$\Rightarrow \lim_{t \to L} g(t) = g(L) = M$

<u>Dim.</u> Dalla continuità si trova:

$$|g(t) - g(L)| < \bar{\varepsilon}$$

Si prende ε appena trovato e lo si sostituisca alla definizione di limite.

$$\forall \bar{\varepsilon} > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall t \in \Sigma : |t - L| < \delta \Rightarrow |g(t) - g(L)| < \bar{\varepsilon}$$

Il teorema è dimostrato grazie alla continuità di $g(t)$. Basta ricordarsi che per ipotesi:

- $f: \Omega \to \Sigma \Rightarrow f(x) \in \Sigma$
- $\lim f(x) = L$

■

---

2) Il cambio di variabile è LECITO se $g(t)$ NON è definita in L.

<u>Dim</u>. Supposto che esista $\lim_{t \to L} g(t) = M$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall t \in \Sigma \ |t - L| < \delta, t \neq L \Rightarrow |g(t) - M| < \varepsilon$$

Cosa deve verificare $f(x)$ affinchè possa essere sostituita?

1) $f(x) \in \Sigma$

2) $f(x) \neq L \Rightarrow$ che corrisponde a $t \neq L$

3) $|f(x) - L| < \delta \Rightarrow$ che corrisponde a $|t - L| < \delta$

1 → è verificata dalla definizione di f nelle ipotesi.

2 → è verificata perchè per qualsiasi valore assunto da $f(x)$, $g(L)$ NON ESISTE.

3 → è verificata dalla convergenza di $f(x)$ in L.

$$\forall \beta > 0 \ \exists \rho > 0 : \forall x \in \Sigma : |x - x_0| < \rho, x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \beta$$

Si prenderà $\delta = \beta$.

■

Esempio calcolo di limite con cambio di variabile

$$\lim_{(0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}$$

$$\lim_{(0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} = \boxed{\frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} =$$

$t = x^2 + y^2$

$\frac{\sin(t)}{\ } = 1$

$\downarrow$ 1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ t

$$= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}} \begin{matrix} \to \text{2-OMOGENEA} \\ \to \text{1-OMOGENEA} \end{matrix} \Bigg\}$$ SI PUÒ USARE IL TEOREMA SULLE α-OMOGENEE INFINITESIME? SI

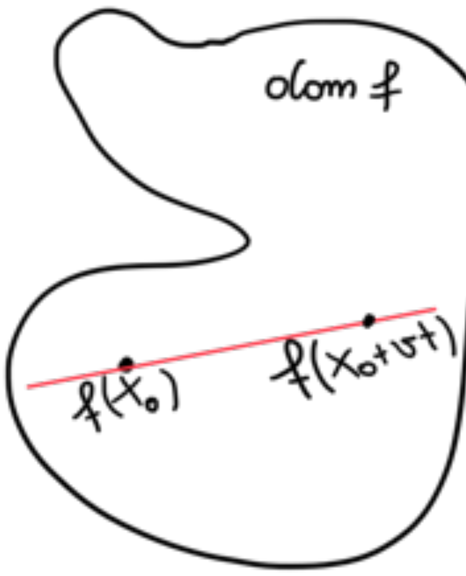
$$\frac{\text{2-OMOGENEA}}{\text{1-OMOGENEA}} = \text{1-OMOGENEA} \to 0$$

In conclusione: $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+2y^2}} = 0$

DERIVATE DIREZIONALI

Siamo: $(\Omega$ APERTO $\subseteq \mathbb{R}^n)$

- $f : \Omega \to \mathbb{R}$
- $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$
- $h(t) = f(x_0 + tv)$ $\Rightarrow$ restrizione di f alla retta $x_0 + tv$



DEFINIZIONE: Si definisce derivata direzionale di f in x_0 nella direzione di v il LIMITE:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + vt) - f(x_0)}{t}$$

Se ESISTE ed È FINITO.

SIMBOLI $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial v}$ $\qquad f_v(x_0)$ $\qquad \partial_v f(x_0)$

DERIVATE PARZIALI

Le derivate direzionali $f_{e_1}(x_0), f_{e_2}(x_0), \dots, f_{e_m}(x_0)$ con $e_1, \dots, e_m$ BASE CANONICA

SI CHIAMANO DERIVATE PARZIALI

SIMBOLI $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $\qquad f_{x_i}$ $\qquad \partial_{x_i} f$ $\qquad x_i$ = i-esima variabile corrispondente

ON ... ad e_i

PROBLEMA: Una funzione può avere tutte le derivate direzionali (NULLE) ed essere DISCONTINUA.

Si prenda $f(x,y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (0,0) \end{cases}$$

f ha tutte le derivate direzionali?

$v(a,\beta)$, $v \neq 0$

$$\Big[f(0+at,\ 0+\beta t) - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f(0,0)}\Big]\frac{1}{t} =$$

$$\frac{1}{t}\left[\frac{a^2t^2\beta t}{a^4t^4+\beta^2t^2}\right]^2 = \frac{t^6}{t^5}\left(\frac{a^2\beta}{a^4t^2+\beta^2}\right)^2 = t\,\frac{a^4\beta^2}{a^8t^4+\beta^4}$$

$t\,\frac{a^4\beta^2}{a^8t^4+\beta^4}$ per $t \to 0$ ma $\beta \neq 0 \Rightarrow \underset{\downarrow\, 0}{t}\,\frac{a^4\beta^2}{a^8t^4+\beta^4}$ $\searrow \frac{a^4}{\beta^2}$

Se $\beta = 0$ allora $a \neq 0$ per $t \to 0$

$t\,\frac{a^4\beta^2 \to 0}{a^8t^4+\beta^4} \Rightarrow 0$

$\neq 0$ perché per il limite $t \neq 0$, ci tende solamente

ESERCIZI

$f(x,y) = |xy|$ $\exists\ f_x(0,0),\ f_y(0,0)$?

La DIFFICOLTÀ è che qui f è una funzione composta $h(g(x,y))$ è in $(0,0)$ $h'(t)$ non esiste!

$h(t) = |t|$; $g(x,y) = xy$

$h'(0) \Rightarrow$ N.E.

f così definita È IDENTICAMENTE $\emptyset$ sugli assi.

$f(x,y) =$ COSTANTE se $x = 0$ oppure $y = 0$

Le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial e_1}$, $\frac{\partial f}{\partial e_2}$ esistono

Infatti si nota che $\forall x = y = 0$ si ha:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + e_2 t) - f(x_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t)}{t} = \frac{|0 \cdot t|}{t}$$

Esempio ②:

$f(x,y) = |x^2| + y^2$ $\qquad \exists \frac{\partial f}{\partial e_1}, \frac{\partial f}{\partial e_2}$?

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(1,0)) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{t \to 0} \frac{|t^2| - 0}{t} \to t = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial e_1}$ esiste e vale $\emptyset$.

Esempio ③:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sicuramente f CONTINUA in $(0,0)$

f continua in (0,0)

$$\lim_{(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1 \quad \text{ponendo } t = x^2+y^2$$

Si calcola $f_x(0,0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[f\big((0,0)+h(1,0)\big) - f(0,0)\Big] =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(h^2)}{h^2} - 1\right] = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h^2 - h^2}{h^3} =$$

formula di Taylor $\sin h^2 = h^2 - \frac{h^6}{3!}$ e sostituendo si ottiene

$$\frac{h^2 - h^6/3! - h^2}{h^3} \to \frac{1}{3!}\frac{h^6}{h^3} = 0$$

Th. FERMAT

Prerequisiti :

PUNTO DI MINIMO LOCALE

X_0 si dirà di MINIMO LOCALE per $f: \Omega \to \mathbb{R}$ se

$$\exists\, \delta > 0 : \forall x \in \Omega \cap B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$$

PUNTO DI MASSIMO LOCALE

X_0 si dirà di MASSIMO LOCALE per $f: \Omega \to \mathbb{R}$ se

$$\exists\, \delta > 0 : \forall x \in \Omega \cap B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$$

Ipotesi di ANALISI I

1- $f: \Omega \to \mathbb{R}$

2- X_0 pt. min o max

3- X_0 interno ad Ω

4- $\exists\, f'(X_0)$

TESI $\to$ $f'(X_0) = 0$

TEOREMA DI FERMAT

Enunciato : Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n)$.

Sia $x_0 \in \Omega$ ed inoltre:

1- x_0 è di minimo locale.

2- x_0 è interno ad Ω

3- $\exists\ f_v(x_0)$ per qualche $v \neq 0$

TESI: $\frac{\partial f(x_0)}{\partial v} = 0$

Dim:

Sia $\sigma > 0 : B(x_0, \sigma) \subseteq \Omega$ per l'ipotesi ②.

Dall'ipotesi ① $\exists\ \rho > 0 : \forall x \in \Omega \cap B(x_0, \rho) \Rightarrow$
$f(x_0) \leq f(x)$.

Si prenda $\varepsilon = \min\{\rho, \sigma\}$.

Dato che x_0 pt. min per $x \in \Omega \cap B(x_0, \rho)$ allora lo sarà anche per $x \in \Omega \cap B(x_0, \varepsilon)$. Ciò è dato dal fatto che:

$$\varepsilon \leq \rho \Rightarrow B(x_0, \varepsilon) \subseteq B(x_0, \rho) \subseteq \Omega \equiv \text{Dom} f$$

Da cui si ricava $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in B(x_0, \varepsilon)$

Si prenda v (retta della derivata direzionale) e si consideri il segmento $x_0 + tv$.

$x_0 + tv$ appartiene a $B_\varepsilon(x_0)$ se e solo se

$$\text{dist}(x_0, x_0 + tv) < \varepsilon$$

$$|x_0 + tv - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |t| < \frac{\varepsilon}{|v|}$$

Per cui $t \in \left]-\frac{\varepsilon}{|v|}, \frac{\varepsilon}{|v|}\right[$

Si pone $h(t) = f(x_0 + tv) \Rightarrow h : \left]-\frac{\varepsilon}{|v|}, \frac{\varepsilon}{|v|}\right[\to \mathbb{R}$

Si noti che $h(0) = f(x_0)$.

Per costruzione $h(0) \leq h(t)$

$$\Downarrow$$

$$h(0) = f(x_0) \leq f(x_0 + tv) = h(t) \quad \forall t \in \left]-\frac{\varepsilon}{|v|}, \frac{\varepsilon}{|v|}\right[$$

Per cui $h(0)$ è minimo per $h(t)$ ed $t=0$ è pt. min.
In conclusione, nella situazione appena creata, è possibile applicare il Th. Fermat in una variabile e trovare:

$$h'(0)=0 \quad ; \quad h'(0)=f_v(x_0) \quad \Rightarrow \quad f_v(x_0)=0$$

$\blacksquare$

DIFFERENZIALE

Definizione: $f : \Omega \to \mathbb{R}^p \qquad (\Omega \subseteq \mathbb{R}^n)$

$x_0 \in \Omega$

Si dirà di f DIFFERENZIABILE in x_0 se ESISTE $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ LINEARE tale che

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(x_0+w)-f(x_0)-\mathcal{A}(w)}{|w|}=0$$

$\mathcal{A}(w)$ si dirà DIFFERENZIALE di f in x_0 nella direzione di w. Si denoterà con il simbolo

$$df(x_0, w) = df = \mathcal{A}(w)$$

$\mathcal{A}$ dipende da x_0 e dall' incremento w.

Inoltre f si dirà DIFFERENZIABILE in Ω se $\forall x \in \Omega$ essa è ivi differenziabile

---

LEMMA: Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$, f LINEARE $\qquad (\Omega \subseteq \mathbb{R}^n)$

TESI: f È DIFFERENZIABILE in Ω. Inoltre

$$d(x_0, w) = f(w)$$

<u>Dim</u>: La tesi chiede di dimostrare che $f(w)=\mathcal{A}(w)$.

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(x_0+w)-f(x_0)-\mathcal{A}(w)}{|w|}=0$$

$$\Vert$$

sostituendo $\mathcal{A}(w)=f(w)$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(x_0 + w) - f(x_0) - f(w)}{|w|} = 0$$

Dalla linearità di f si ha: $f(x_0 + w) = f(x_0) + f(w)$.
Tale uguaglianza dimostra la tesi. $\blacksquare$

TEOREMA: f È DIFFERENZIABILE in x_0.

TESI: f È CONTINUA in x_0

<u>Dim</u>:

$$\lim_{w \to 0} f(x_0 + w) = f(x_0) \iff \lim_{w \to 0} |f(x_0 + w) - f(x_0)| = 0$$

Si noti (con un semplice trucchetto):

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$|f(x_0 + w) - f(x_0) - \lambda(w) + \lambda(w)| \leq$$

$$\leq |f(x_0 + w) - f(x_0) - \lambda(w)| + |\lambda(w)|$$

Moltiplicando per $|w|$ e passando al limite:

$$\lim_{w \to 0} \frac{|f(x_0 + w) - f(x_0) - \lambda(w)|}{|w|} |w| + |\lambda(w)|$$

Vediamo quanto fa il limite:

- $\dfrac{|f(x_0 + w) - f(x_0) - \lambda(w)|}{|w|} \longrightarrow 0$ per ipotesi perchè f differenziabile in x_0.
- se $w \to 0$ anche $|w| \to 0$
- $|\lambda(w)| \to 0$ anche $\lambda(w) \to 0$ e dalla linearità si ha:

$$\lambda(w) = \lambda\left(\sum_i^n w_i e_i\right) = \sum_i^n w_i \lambda(e_i)$$

$w \to 0$ quindi ognuna delle sue componenti:

tende a zero da cui si ricava:

$$\sum_{i}^{n} w_i A(e_i) \to 0 \Rightarrow A(w) \to 0 \Rightarrow |A(w)| \to 0 \qquad \blacksquare$$

TEOREMA: f È DIFF. in x_0

TESI: $\exists \; \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0, v) = A(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Dim: la tesi da provare equivale a dimostrare:

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f(x_0 + tv) - f(x_0)|}{|t|} - |A(v)| \overset{?}{=} 0$$

Dall' omogeneità della norma e per linearità di A segue:

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f(x_0 + tv) - f(x_0) - A(tv)|}{|t|}$$

Si moltiplica e divide per $|v|$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f(x_0 + tv) - f(x_0) - A(tv)|}{|tv|} \cdot |v|$$

Facciamo una considerazione:

$\varphi(t) = tv$

$$\psi(u) = \frac{|f(x_0 + u) - f(x_0) - A(u)|}{|u|}$$

Il nostro limite corrisponde a provare:

$$\lim_{t \to 0} \psi(\varphi(t)) = 0$$

La tesi è dimostrata appliccando il teorema per il cambio di variabile nei limiti nel caso in cui $\psi(u)$ sia non definita nel punto limite.

$f(t) = tv \to w$ se $t \to 0$ anche $w \to 0$

Da cui segue, per l'ipotesi di DIFFERENZIABILITÀ:

$$\lim_{w \to 0} \Psi(w) = \lim_{w \to 0} \frac{|f(x_0 + w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|} \cdot |v| = 0$$

$\blacksquare$

FORMULA DI RAPPRESENTAZIONE df

Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$. Se f È DIFFERENZIABILE allora:

$$df(x_0, v) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0)\, v_i$$

Si dirà GRADIENTE (di f in x_0) il vettore tale che:

$$\nabla f(x_0) = \left(f_{e_1}(x_0), f_{e_2}(x_0), \dots, f_{e_m}(x_0)\right)$$

Introdotto il gradiente, il DIFFERENZIALE può essere scritto in forma vettoriale:

$$df(x_0, v) = \nabla f(x_0)\, v = \sum_{i=1}^{m} \nabla f(x_0)_i\, v_i$$

Il DIFFERENZIALE, se esiste, è unico

TEOREMA DIFFERENZIALE TOTALE

Ip: Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$, Ω APERTO in $\mathbb{R}^m$, $f \in C^1(\Omega)$.

Tesi: f è DIFFERENZIABILE in (ogni punto di) Ω.

N.D.R.: $f \in C^1(\Omega)$ significa che f è CONTINUA così pure ogni sua DERIVATA PARZIALE.

DIM:

Essendo Ω aperto $\Rightarrow \forall x_0 \in \Omega \; \exists \rho > 0 : B(x_0, \rho) \subseteq \Omega$.
Si prende ρ relativo ad x_0 e si ambienta il teorema in $B_\rho(x_0)$ (x_0 è stato scelto ad arbitrio).

Il nostro obiettivo è ricondurci alla definizione di DIFFERENZIABILITÀ e quindi provare:

$$\lim_{(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \left[f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - A(h,k) \right] = 0$$

Dalla formula del differenziale si ricava:

$$A(h,k) = df((x_0,y_0),(h,k)) = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$$

Quindi la tesi da DIMOSTRARE equivale a:

$$\lim_{(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \left[f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k \right] = 0$$

Si nota che:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = f(x_0+h, y_0+h) + f(x_0+h, y_0) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)$$

Ora si considerino le seguenti funzioni:

$t \to f(x_0+h, t)$

$s \to f(s, y_0)$

Dato che sono restrizioni di f in $[y_0, y_0+k]$, $[x_0, x_0+h]$ ed inoltre in questo intervallo f è CONTINUA e DERIVABILE, segue:

(per LAGRANGE):

- $\exists\ \mu \in [y_0, y_0+k] : \dfrac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)}{(y_0+k) - y_0} = f_y(\mu)$

- $\exists\ \beta \in [x_0, x_0+h] : \dfrac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{(x_0+h) - x_0} = f_x(\beta)$

Rimaneggiando le due uguaglianze:

$$f_x(\beta)h = f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)$$

$$f_y(\mu)k = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)$$

Segue:

$$f(x_0+h, y_0+h) + f(x_0+h, y_0) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)$$

$$\parallel$$

$$f_y(x_0+h,\mu)k + f_x(\beta, y_0+k)h$$

Possiamo sostituire alla definizione di DIFFERENZIALE

$$f_x(x_0) + f_y(y_0) \longrightarrow f_y(x_0+h,\mu)k + f_x(\beta, y_0)k$$

$$\lim_{(0,0)} \frac{\left|\left[f_x(\beta,y_0) - f_x(x_0,y_0)\right]h + \left[f_y(x_0+h,\mu) - f_y(x_0,y_0)\right]k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq$$

$\uparrow$
DIS. TRIANGOLARE

$$\lim_{(0,0)} \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}\left|f_x(\beta,y_0) - f_x(x_0,y_0)\right| +$$

$$\lim_{(0,0)} \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\left|f_y(x_0+h,\mu) - f_y(x_0,y_0)\right|$$

Si nota subito che sia $\frac{|h|}{\|(h,k)\|}$ sia $\frac{|k|}{\|(h,k)\|}$ sono minori di 1 perchè limitati entrambi in $B_\rho(x_0,y_0)$ e denominatore > numeratore.

Se $h \to 0 \Rightarrow \beta \to x_0$ dato che $s \to f(s,y_0)\Big|_{x_0,x_0+h}$

Se $k \to 0 \Rightarrow \mu \to y_0$ dato che $t \to f(x_0+h,t)\Big|_{y_0,y_0+k}$

RAPPRESENTAZIONE DEL DIFFERENZIALE PER FUNZIONI VETTORIALI A VALORI VETTORIALI

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$df(x_0, w) = \underbrace{\nabla f(x_0)}_{f'(x_0)} w$$

Si prova che $\forall n, m \geq 1 \Rightarrow df(x_0, w) = f'(x_0)w$

- Se $n > 1$, $m = 1$ $\Rightarrow f'(x_0) = \left(f_{e_1}(x_0), \dots, f_{e_n}(x_0)\right)$

  $\Rightarrow df(x_0, w) = f'(x_0)w$

  ↳ PRODOTTO SCALARE

- Se $n = 1$, $m > 1$ $\Rightarrow f'(x_0) \in \mathbb{R}^1$

  $\Rightarrow df(x_0, w) = f'(x_0)w$

  ↳ MULTIPLO SCALARE

- Se $n > 1$, $m > 1$ $\Rightarrow f'(x_0) \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$

  $\Rightarrow df(x_0, w) = f'(x_0)w$

  ↳ PRODOTTO TRA MATRICI

Supponiamo di avere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow df(x_0, w) = \underbrace{f'(x_0)w}_{\text{"}\Lambda(w)}$ $\quad f'(x_0)$ è la derivata in x_0

$$\lim_{w \to 0} \frac{1}{|w|}\left[f(x_0 + w) - f(x_0) - \Lambda(w)\right] =$$

$$= \lim_{w \to 0} \frac{w}{|w|}\left[\frac{f(x_0 + w) - f(x_0)}{w} - \frac{f'(x_0)\cancel{w}}{\cancel{w}}\right] =$$

$= \emptyset$ se e solo se f DERIVABILE in x_0.

- Si deduce quindi che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è DIFFERENZIABILE se e solo se È DERIVABILE.

Supponiamo di avere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $m > 1$

$\Rightarrow df(x_0, w)\ f'(x_0)w$

$w \in \mathbb{R}$

$f'(x_0) \in \mathbb{R}^m$

$$f'(x_0) = \left(f_1'(x_0), \dots, f_m'(x_0) \right)$$

$$\lim_{w \to 0} \frac{1}{|w|} \left[f(x_0+w) - f(x_0) - f'(x_0)w \right] =$$

$$= \lim_{w \to 0} \left(\frac{(f_1(x_0+w) - f_1(x_0) - f_1'(x_0)w)}{|w|}, \dots \right.$$

$$\left. \dots, \frac{(f_m(x_0+w) - f_m(x_0) - f_m'(x_0)w)}{|w|} \right) \stackrel{?}{=} 0$$

Tale limite esiste se per ogni componente del vettore esiste $f_i'(x_0)w$ $(i = 1, \dots, m)$

$\Downarrow$

quindi se $f_i(x)$ è derivabile in x_0

$f(x)$ DERIVABILE $\Rightarrow$ $f(x)$ DIFFERENZIABILE

Supponiamo di avere $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n > 1$, $m > 1$

$$\Rightarrow df(x_0, w)\ \underbrace{f'(x_0)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} \underbrace{w}_{\in \mathbb{R}^n}$$

$f'_{ij}(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ $\Rightarrow$ MATRICE JACOBIANA

$i = 1, \dots m$ $\quad j = 1, \dots, n$

$$\lim_{w \to 0} \frac{1}{|w|} \left[f(x_0+w) - f(x_0) - f'(x_0)w \right] =$$

$$= \left(\lim_{w \to 0} \frac{f_1(x_0+w) - f_1(x_0) - \nabla f_1(x_0)w}{|w|}, \dots \right.$$

$$\left. \dots, \lim_{w \to 0} \frac{f_m(x_0+w) - f_m(x_0) - \nabla f_m(x_0)w}{|w|} \right) = \emptyset$$

Tale limite è nullo se per ogni componente si ha $\emptyset$ se f_i È DIFFERENZIABILE.

$\forall i = 1, \dots, m \quad f_i$ DIFFERENZIABILE $\Rightarrow f$ DIFFERENZIABILE

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

TEOREMA: DIFFERENZIABILITÀ FUNZIONI COMPOSTE

$$f: \Omega \to \Gamma, \quad g: \Gamma \to \tau \qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$h: \Omega \to \tau \qquad h(x) = g(f(x)) \qquad \Gamma \subseteq \mathbb{R}^m, \quad \tau \subseteq \mathbb{R}^\ell$$

SENZA DIMOSTRAZIONE

$$dh = dg(f(x_0), df(x_0, w))$$

Il differenziale di una funzione composta è la composizione dei differenziali.

$$\underbrace{h'(x_0)}_{\mathbb{R}^{\ell \times n}} = \underbrace{g'(f(x_0))}_{\mathbb{R}^{\ell \times m}} \underbrace{f'(x_0)}_{\mathbb{R}^{m \times n}}$$

RETTE E PIANI TANGENTI

Nelle funzioni funzioni scalari a variabili scalari si è visto come la derivata rappresenti il coefficiente angolare della retta tangente nel punto. Tale retta è anche quella che meglio approssima il grafico della funzione in un intorno del punto. Nel corso di queste lezioni si è definito il concetto di derivata direzionale ma più in particolare abbiamo visto il ruolo di notevole importanza ricoperto dal differenziale. Ecco che ci si aspetta un comportamento simili anche per le funzioni a variabili vettoriali a valori scalari o per le funzioni a variabili scalari a valori vettoriali.

L'idea di base è questa:

Sia $f: \Omega \to \Delta$ $\quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^i \quad i, j \in \mathbb{N}$

$x_0 \in \Omega \quad A = df(x_0, \omega) = \nabla f(x_0)\omega \quad \Delta \subseteq \mathbb{R}^j$

$$\psi(x) = f(x_0) - A(x - x_0)$$

Tale $\psi(x)$ rappresenterà, a seconda delle dimensioni di DOMINIO e CODOMINIO:

- RETTA TANGENTE
- PIANO TANGENTE
- SPAZIO TANGENTE

Si prenda $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in [a,b]$

Quel che si vuole provare è che la definizione di RETTA TANGENTE è STRETTAMENTE legata alla DIFFERENZIABILITÀ.

DEFINIZIONE RETTA TANGENTE:

Siano $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in [a,b]$

Allora si dirà RETTA TANGENTE, il grafico di γ in $\gamma(x_0)$

$$\sigma(x) = \gamma(x_0) + \gamma'(x_0)(x - x_0)$$

Se f DIFFERENZIABILE allora si nota subito che, posto $x - x_0 = \omega$:

$$\lim_{|\omega| \to 0} \frac{|\gamma(\omega) - \sigma(\omega)|}{|\omega|} = \frac{|\gamma(\omega) - \gamma(x_0 + \omega) - d\gamma(x_0)\omega|}{|\omega|} = \emptyset$$

$\Rightarrow \gamma(\omega) - \sigma(\omega) = 0 \Rightarrow \sigma(\omega)$ meglio approssima $\gamma(\omega)$

DEFINIZIONE PIANO TANGENTE

Si prenda in considerazione $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e per semplicità si consideri $n = 2$.

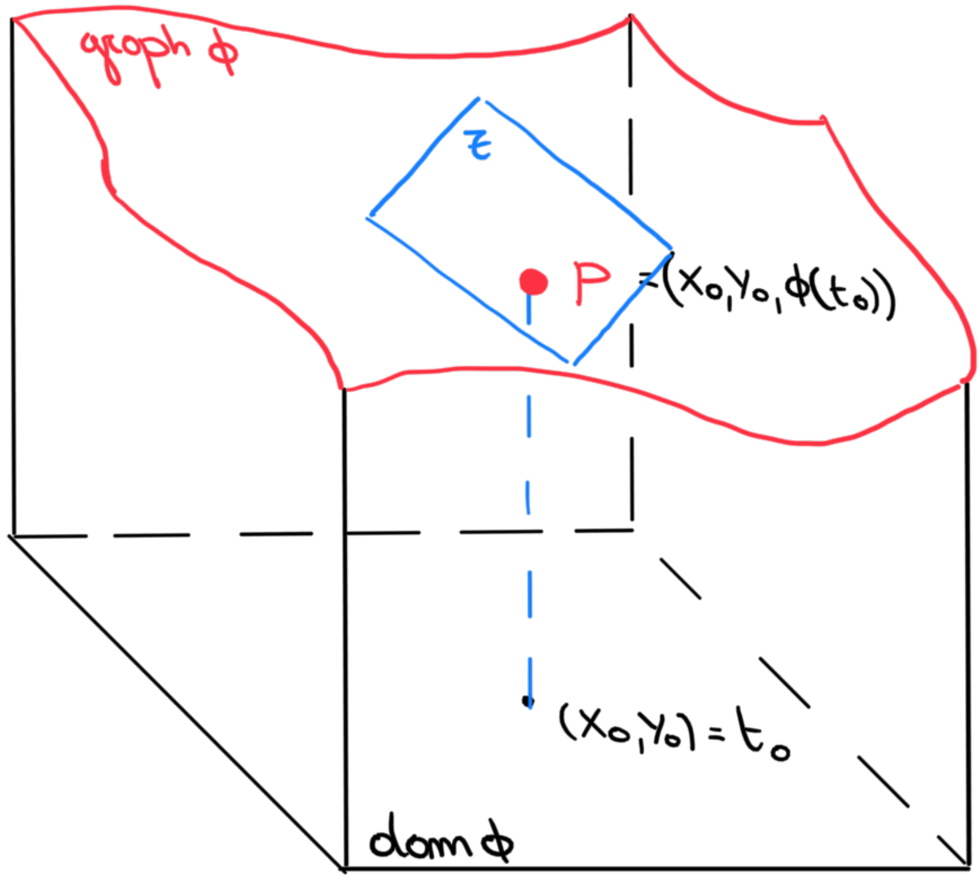
Si prenda $h = (x, y)$ ... $\mathbb{R}^2$ ...

si prenda $t_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il piano tangente in $(t_0, \phi(t_0))$ è definita:

$$z = \phi(t_0) + \phi_x(t_0)(x - x_0) + \phi_y(t_0)(y - y_0)$$
$$z = \phi(t_0) + \nabla\phi(t_0)(t - t_0)$$

N.B. il grafico di $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è il luogo dei punti tali:

$$\text{graph } \phi = \left\{ z \in \mathbb{R}^3 : \exists (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow z = \big(x_0, y_0, \phi(x_0, y_0)\big) \right\}$$



Si supponga di avere:

$\gamma(t)$ $\quad \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \quad n > 1$

Fissato un punto $(t_0, \gamma(t_0))$, qual è la retta tangente per questo punto e avente direzione $\dot{\gamma}(t_0)$?

EQUAZIONE PARAMETRICA della RETTA

$$r(t) = \gamma(t_0) + t\,\dot{\gamma}(t_0)$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad n > 1, \; m > 1$

$$\lim \frac{1}{\quad} \left[f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \right]$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (\omega \to 0)}} \frac{1}{|x-x_0|} \left[f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) \right]$$

$$\downarrow$$

$$\text{jacobiana} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \cdots & \partial_{x_n} f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m & \cdots & \partial_{x_n} f_m \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} uv \\ u^2 + v^3 \\ u+v \end{pmatrix} \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \to (x,y,z)$$

Si consideri:

$$f_u(u,v) = \begin{pmatrix} v \\ 2u \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad f_v \begin{pmatrix} u \\ 3v^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$u \to f(u,\bar{v})$ con $\bar{v}$ fissato è una curva parametrica che ha vettore velocità $f_u(u,\bar{v})$.

$v \to f(\bar{u},v)$ con $\bar{u}$ fissato è una curva parametrica che ha vettore velocità $f_v(\bar{u},v)$.

piano tangente in $f(\bar{u},\bar{v})$:
PARAMETRICO

$$\Psi(\alpha,\beta) = f(\bar{u},\bar{v}) + \alpha f_u(\bar{u},\bar{v}) + \beta(\bar{u},\bar{v})$$

In generale per $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$

$$f'(u_0) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} f_1(u_0) & \cdots & \partial_{u_n} f_1(u_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{u_1} f_m(u_0) & \cdots & \partial_{u_n} f_m(u_0) \end{pmatrix}$$

SPAZIO TANGENTE, $\alpha \in \mathbb{R}^n$:

$$\Psi(\alpha) = \underbrace{f(u_0) + f'(u_0)\alpha}$$

$$+ f'(u_0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(u_0^1, \dots, u_0^n) \\ \vdots \\ f_m(u_0^1, \dots, u_0^n) \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \begin{pmatrix} \partial_i f_1(u_0) \\ \\ \partial_i f_m(u_0) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} f_1(u_0^1, \dots, u_0^n) \\ \end{pmatrix} \quad \sum^{n} \sum^{m}$$

$$= \begin{pmatrix} \vdots \\ f_m(u_0^1, \dots, u_0^m) \end{pmatrix} + \sum_{i=1} \sum_{j=1} \alpha_i \partial_i f_j(u_0)$$

$f(u_0) + \langle f'(u_0)\alpha \rangle$

$\phi(u,v) = (\sin(u)\cos(v),\ \sin(u)\sin(v),\ \cos(u))$

PIANO TANGENTE in $(\pi/2, 0)$

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\phi : \mathbb{R}^2 \to \underline{\underline{\mathbb{R}^3}}$ si può usare il prodotto vettore

$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 0) \Rightarrow$ direzione normale al piano tangente.

Equazione IMPLICITA:

Punto di tangenza

$$\underbrace{1}_{}(x-1) + \underbrace{0}_{}(y-0) + \underbrace{0}_{}(z-0) = 0$$

vettore normal v

$$\phi_u = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} \qquad \phi_v = \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v = \phi_u \wedge \phi_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sin^2 u \cos v \\ -(-\sin^2 u \sin v) \\ \cos^2 v \cos u \sin u + \sin^2 v \cos u \sin u \end{pmatrix} =$$

$$= \sin u \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\left(\quad \cos u \right)$$

a meno di un certo fattore si vede che la direzione normale è quella passante per il punto.

Th. ULISSE DINI per funzioni $\in C^1$

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

Ipotesi:

1. $\exists (x_0, y_0) : f(x_0, y_0) = 0$
2. (x_0, y_0) PUNTO INTERNO di Ω
3. $f \in C^1(\mathbb{R})$
4. $f_y(x_0, y_0) > 0$ → sostituisce la stretta MONOTONIA

Tesi: $\exists \; \delta > 0$, $\varphi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

1. $y_0 = \varphi(x_0)$
2. $f(x, \varphi(x_0)) = 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
3. φ è DERIVABILE
4. $\varphi'(x_0) = - \dfrac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

eq. diff. nell' incognita φ

<u>DIM</u>:

- Dalla ② ipotesi si ha che (x_0, y_0) punto interno di Ω implica che: $\exists \; \mu > 0 : B_\mu(x_0, y_0) \subseteq \Omega$.
- Dalla ④ ipotesi si ha che $f_y(x_0, y_0) >$ implica che $\exists \; \nu > 0 : f_y(x, y) > 0 \;\; \forall (x, y) \in B_\nu(x_0, y_0)$.
- Si prenda ora $\phi = \min\{\mu, \nu\}$ e si faccia la seguente considerazione:

  Si prenda la restrizione di $f(x, y)\big|_{[y_0 - \phi, \, y_0 + \phi]}$;

  Si prenda x fissato $= x_0$;

  Allora si ha $f(x_0, y) > 0 \quad \forall y \in [y_0 - \phi, y_0 + \phi]$

Quindi si può costruire una funzione tale che

$t : [y_0-\phi, y_0+\phi] \to \mathbb{R}$, $t = f(x_0,t)$

1) Tale funzione è CONTINUA (perchè $f \in C^1$);

2) $t \to f(x_0,t)$ è definita su un intervallo $\subseteq \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$.

Segue, per th. Lagrange, $\exists\, c \in I = [y_0-\phi, y_0+\phi]$ tale

$$f'(x_0,c) = \frac{f(y_0+\phi)-f(y_0-\phi)}{(y_0+\phi)-(y_0-\phi)}$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\vee \\ 0}}{f_y(x_0,c)} = f(y_0+\phi)-f(y_0-\phi)\cdot \underset{\substack{\vee \\ 0}}{\frac{1}{2\phi}}$$

Essendo $f_y(x_0,y) > 0 \quad \forall\, y \in I$ segue che,

$$0 < f_y(x_0,c)\,2\phi = f(y_0+\phi)-f(y_0-\phi)$$

$$\Downarrow$$

$$f(y_0+\phi) > f(y_0-\phi)$$

Questo, da $f_y(x_0,y)>0$, deve valere $\forall\, y \in I$ da cui si dimostra la MONOTONIA della funzione.

Sotto queste ipotesi si applica il th. DINI per $f \in C^0$ da cui seguono 1 e 2.

La dimostrazione dei punti 3, 4 si basa sul risultato del seguente LEMMA:

Sia $f \in C^1$. Sia $\beta > 0$: $B_\beta(x_0,y_0)$, una sfera di raggio β e centro (x_0,y_0). Infine $(x,y) \in B$.

Allora $\exists\, \alpha$ tale che:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0) = f_x\big(x_0+\alpha(x-x_0),\, y_0+\alpha(y-y_0)\big)(x-x_0) + f_y\big(x_0+\alpha(x-x_0),\, y_0+\alpha(y-y_0)\big)(y-y_0)$$

Dim.:

Dim.

Si prenda la funzione:

$$h(t) = f(x_0 + t(x - x_0),\, y_0 + t(y - y_0))$$

Essendo B CONVESSA e $(x_0, y_0), (x, y) \in B_\beta$ segue che anche il segmento che congiunge i due punti è interamente contenuto in B_β.

La funzione $h(t) : [0,1] \to \mathbb{R}$ è definita e ivi DIFFERENZIABILE in $[0,1]$ perchè composizione di funzioni appartenenti a C^1.

$$h'(t) = \begin{pmatrix} f_x(h(t)) \\ f_y(h(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x - x_0) \\ (y - y_0) \end{pmatrix} = \text{PRODOTTO SCALARE} =$$

$$= f_x(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))(x - x_0) + f_y(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))(y - y_0)$$

Notiamo che $h(0) = f(x_0, y_0)$, $h(1) = f(x, y)$

Inoltre $h : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $[0,1]$ intervallo chiuso, $h \in C^1 \Rightarrow$ per Lagrange:

$$\exists\, \alpha \in [0,1] : \quad h'(\alpha) = h(1) - h(0)$$

Da cui segue:

$$f_x(x_0 + \alpha(x - x_0), y_0 + \alpha(y - y_0))(x - x_0) + f_y(x_0 + \alpha(x - x_0), y_0 + \alpha(y - y_0))(y - y_0) =$$

$$= f(x, y) - f(x_0, y_0) \quad \blacksquare$$

Abbiamo dalla 1, 2 un certo $\delta > 0$ tale che $\exists\, B_\delta(x_0, f(x_0))$ ed inoltre $(x, f(x)) \in B_\delta$ allora si

Da cui segue:

$$f_x(x_0 + \alpha(x - x_0), y_0 + \alpha(y - y_0))(x - x_0) + f_y(x_0 + \alpha(x - x_0), y_0 + \alpha(y - y_0))(y - y_0) =$$

$$= f(x, y) - f(x_0, y_0) \quad \blacksquare$$

Abbiamo dalla 1, 2 un certo $\delta > 0$ tale che $\exists\, B_\delta(x_0, f(x_0))$ ed inoltre $(x, f(x)) \in B_\delta$ allora si

Inoltre dall' ipotesi 4 sappiamo che $f_y > 0$

- $$f_y\big(x_0-\beta(x-x_0),\, f(x_0)-\beta(f(x)-f(x_0))\big)(f(x)-f(x_0)) =$$
$$= - f_x\big(x_0-\beta(x-x_0),\, f(x_0)-\beta(f(x)-f(x_0))\big)(x-x_0)$$

- $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = - \frac{f_x\big(x_0-\beta(x-x_0),\, f(x_0)-\beta(f(x)-f(x_0))\big)}{f_y\big(x_0-\beta(x-x_0),\, f(x_0)-\beta(f(x)-f(x_0))\big)}$$

se $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to f(x_0)$ quindi in conclusione si dimostra 4

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$$

3 è immediata dalla continuità di $f_x(x,y)$ ed $f_y(x,y)$.

■

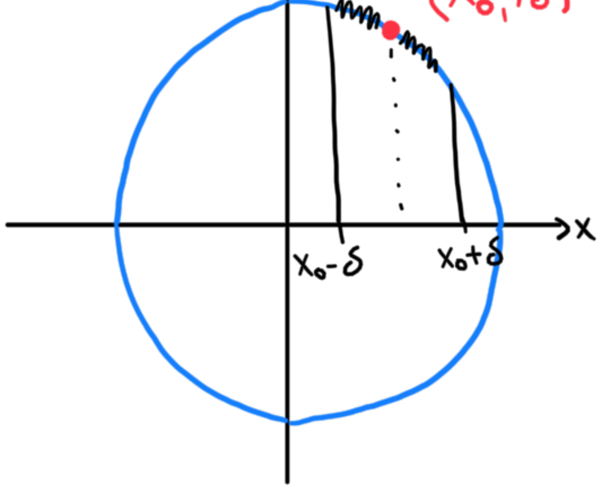
APPLICAZIONE th. DINI

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

Si calcolano:

$f_x = 2x$ I PUNTI CRITICI SONO : $f_x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f_y = 2y$ $f_y = 0 \Rightarrow y = 0$

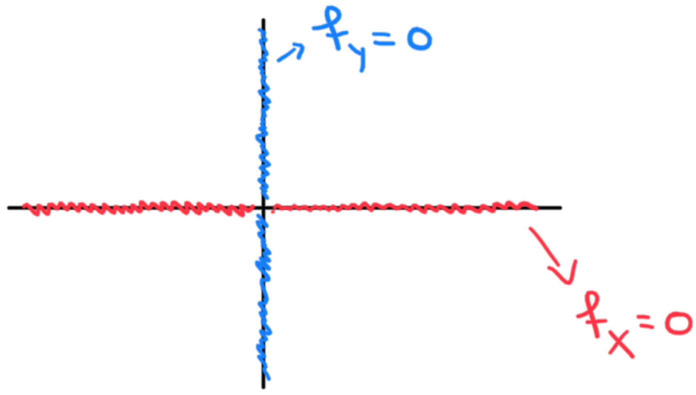


-> graph $f(x)$

2° ESEMPIO

$f(x,y) = xy$

$$f_x(x,y) = y \qquad f_y(x,y) = x \Rightarrow \begin{array}{l} f_x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f_y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array} \qquad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



ATTENZIONE $\quad f(x,y) = 0 \Rightarrow x = 0$ oppure $y = 0$

SONO ESATTAMENTE GLI ASSI!

Non si può applicare il th. DINI perchè $f_y = 0$ nella curva di livello $f(x,y) = 0$.
Stessa situazione se si volesse usare f_x.

TEOREMA ULISSE DINI per $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

IPOTESI:
1. $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$
2. $f(x_0, y_0) = 0$
3. $$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \neq 0$$

TESI: $\exists\, \delta > 0$, $\varphi : B_\delta(x_0) \to \mathbb{R}^m$

→ $f(x_0, \varphi(x_0)) = 0$ su $B_\delta(x_0)$

→ $\varphi(x_0) = y_0$

→ φ DIFFERENZIABILE

→ $$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = -\left[\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}\right]^{-1} \left[\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right]$$

TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE

Supponiamo di avere $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

f DIFFERENZIABILE $\Rightarrow$ $f \in C^1(\Omega)$

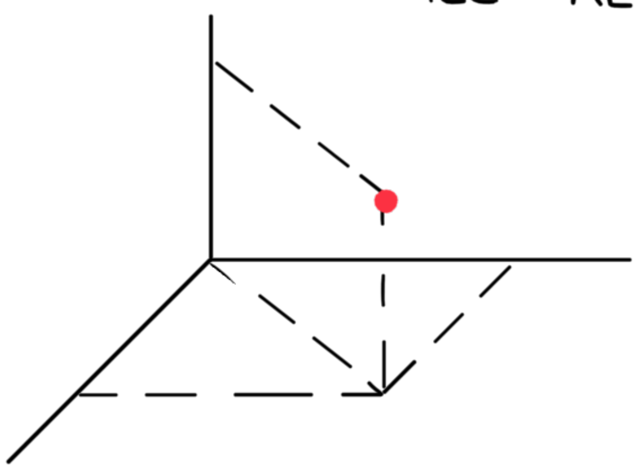
$$\text{graph } f = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \ : \ z = f(x,y) \right\}$$

piano tangente in $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ $\quad p(z_0) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

$$z - f_x(x_0,y_0)x - f_y(x_0,y_0)y = f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)x_0 - f_y(x_0,y_0)y_0$$

EQUAZIONE IMPLICITA PIANO

VETTORE NORMALE AL PIANO $\quad v = \begin{pmatrix} -f_x(x_0,y_0) \\ -f_y(x_0,y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$



$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) v$ sotto l' ipotesi di f DIFF.

SCHWARZ

$$|\nabla f(x_0) v| \leq |\nabla f(x_0)| |v|$$

Quando c'è l' uguaglianza $\Rightarrow$ v multiplo di $\nabla f(x_0)$

Segue $v = \lambda \nabla f(x_0)$ allora $\frac{\partial f}{\partial v}$ È MASSIMO

La direzione di MASSIMA PENDENZA è quella di $\nabla f(x_0)$.

Esercizi sul teorema delle funzioni implicite

Insieme di livello $x^3y - x = 1$ e quindi l'insieme di livello $0 \Rightarrow x^3y - x - 1 = 0$.

$f_y = x^3 \Rightarrow$ si annulla solo per $x = 0$

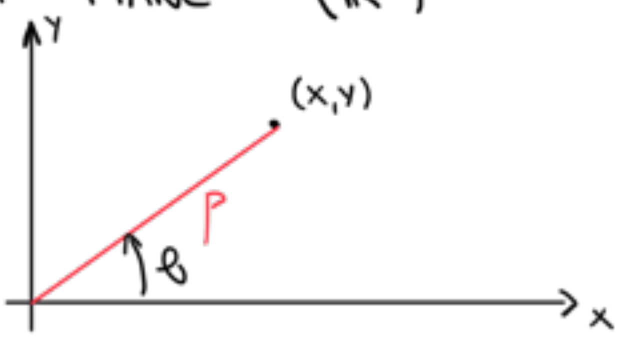
$f_x = 3x^2y - 1 \Rightarrow 3x^2y = 1$

$y = \frac{1}{3x^2} \Rightarrow$ ha soluzione per $x \neq 0$

Si può usare DINI per $x \neq 0$, esplicitando $y = f(x)$.

Quando $x = 0 \Rightarrow f_x = -1 \ \forall y \Rightarrow$ si può esplicitare $x = f(y)$

COORDINATE POLARI PIANE ($\mathbb{R}^2$)



$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho \in [0, +\infty[$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta$

Si può definire un'applicazione:

$$T(\rho, \theta) \to (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

Cosa ci vuole affinché T sia INVERTIBILE LOCALMENTE?

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \cdot \rho \\ \sin\theta & \cos\theta\,\rho \end{pmatrix} \neq 0$$

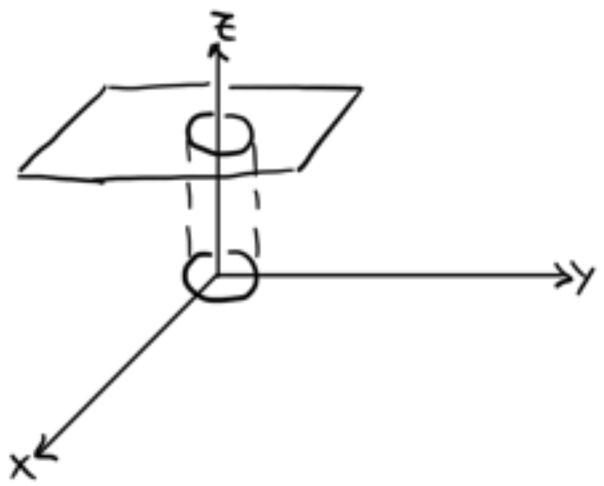
$$\det \Rightarrow \rho(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \neq 0 \Rightarrow \rho \neq 0$$

T è localmente invertibile in ogni intorno del Dom(T) tranne in $\rho \neq 0$.

COORDINATE POLARI CILINDRICHE

$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta \qquad z = z$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$



Si può definire una funzione:

$$T(\rho, \theta, z) \to (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$$

È LOCALMENTE INVERTIBILE?

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$= \rho \Rightarrow$ LOCALMENTE INVERTIBILE se $\rho \neq 0$

COORDINATE POLARI SFERICHE

$x = \rho\sin\theta\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\theta\sin\varphi \qquad z = \rho\cos\theta$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \theta \in [0, \pi]$

$\qquad \varphi \in [0, 2\pi]$

$T(\rho, \theta, \varphi) \to (x, y, z)$

$$\det(T') = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \ldots & & \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \rho^2 \sin\theta$$

T localmente invertibile se $\rho \neq 0$ oppure $\theta \neq 0$, $\theta \neq k\pi$

Studiare $T(u,v) = \left(uv, \frac{u}{v}\right)$

Dom T = $v \neq \emptyset$

$T_u = \left(v, \frac{1}{v}\right)$

$T_v = \left(u, -\frac{u}{v^2}\right)$

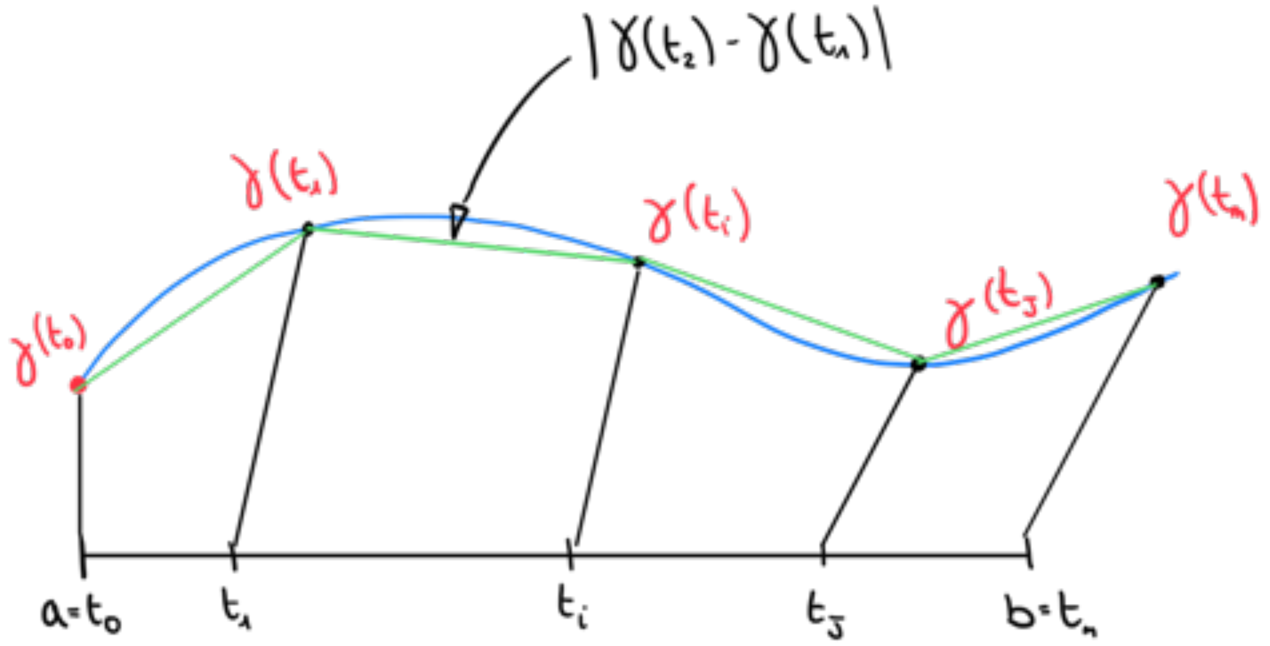
$$T' = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_u}{\partial u} & \frac{\partial T_u}{\partial v} \\ \frac{\partial T_v}{\partial u} & \frac{\partial T_v}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{pmatrix}$$

$$\det(T') = -\frac{u}{v} - \frac{u}{v} = -2\frac{u}{v}$$

$T' = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow$ in un intorno di $\emptyset$ non è possibile applicare il teorema di INVERTIBILITÀ LOCALE.

CURVE RETTIFICABILI

- DEFINIZIONE PARTIZIONE: si dirà partizione di $[a,b]$, $[a,b]$ intervallo, una sequenza $\Pi(t_0, \dots, t_m)$ tale che $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$.



Data una certa Π = partizione su $[a,b]$ si definisca

$\Lambda(\pi)$ = lunghezza della poligonale INSCRITTA.
Tale lunghezza è definita come:

$$\Lambda(\pi) = \sum_{i=0}^{m-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$$

Si definisca $\Lambda(\gamma)$, lunghezza della CURVA, come:

$$\Lambda(\gamma) = \sup_{\pi} \Lambda(\pi) \quad \text{al variare di tutte le possibili } \pi$$

γ è RETTIFICABILE se $\Lambda(\gamma) < \infty$.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$: Le curve parametriche di classe C^1 sono RETTIFICABILI. 1

$$\gamma \in C^1 \Rightarrow \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} \quad \forall_{j=1,\dots,m} \ \gamma_j \in C^1$$

Inoltre $\Lambda(\gamma) \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$. ← Fondamentale per il calcolo della lunghezza.

DIMOSTRAZIONE: SI DIMOSTRA SOLAMENTE 1

Si consideri una partizione $\pi(t)$, definita su $[a,b]$.
Si consideri inoltre una curva $\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ tale che sia di classe C^1.
Notiamo che, da Lagrange:

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \dot{\gamma}(c)(t_{i+1} - t_i)$$

che equivale a dire, per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\gamma}(t) dt \right|$$

Dal lemma $\left| \int f(t) dt \right| \leq \int |f(t)| dt$, dove si deve intendere le "pipe" come norme, segue:

$t_i \qquad t_{i+1}$

$$\left|\gamma(t_{i+1})-\gamma(t_i)\right| = \left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\gamma}(t)\,dt\right| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\gamma}(t)|\,dt$$

Dall' additività dell' integrale :

$$\Lambda(\pi) = \sum_{i=0}^{m-1} \left|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\right| = \sum_{i=0}^{m-1} \left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\gamma}(t)\,dt\right|$$

$$\wedge|$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\gamma}(t)|\,dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\,dt$$

Si trova così un maggiorante indipendente da $\pi(t)$.

Dalla definizione di $\Lambda(\gamma)$, segue

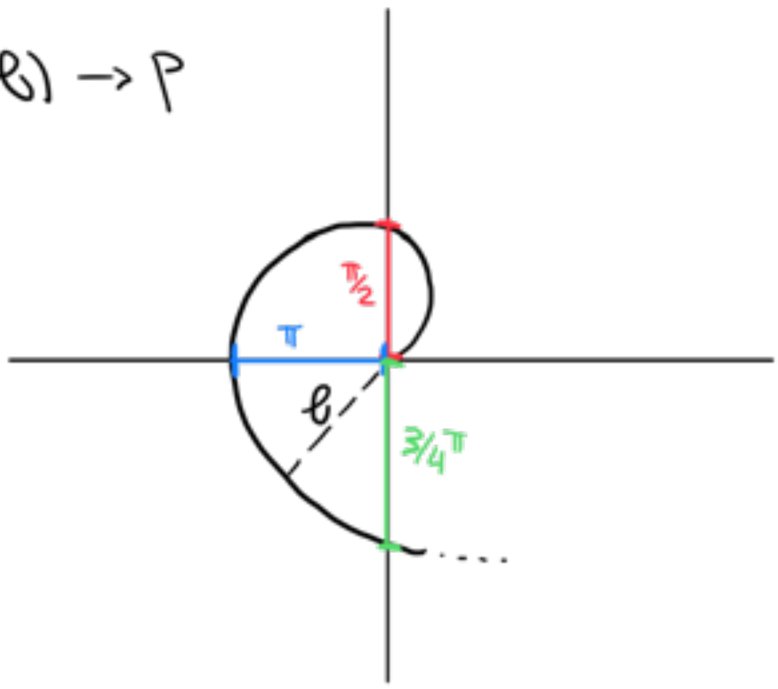
$$\Lambda(\gamma) \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\,dt$$

sicché $\pi(\gamma)$ è il minimo dei maggioranti di $\Lambda(\pi)$.

$\blacksquare$

Si consideri :

$T(\theta) \to \rho$



Come si calcola la lunghezza di questa curva ?

- Noi sappiamo che $\Lambda(f) = \int_a^b |\dot{f}(t)|\,dt$ vale in coordinate CARTESIANE.

COORDINATE POLARI PIANE $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

Dato che $\rho = \theta$ segue:

$$\begin{matrix} x = \theta\cos\theta \\ y = \theta\sin\theta \end{matrix} \Rightarrow \varphi(\theta) = \begin{pmatrix} \theta\cos\theta \\ \theta\sin\theta \end{pmatrix} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\dot\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta - \theta\sin\theta \\ \sin\theta + \theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|\dot\varphi(\theta)| = \sqrt{(\cos\theta - \theta\sin\theta)^2 + (\sin\theta + \theta\cos\theta)^2} =$$

$$= \sqrt{\cos^2\theta + \theta^2\sin^2\theta - 2\theta\cos\theta\sin\theta + 2\theta\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta + \theta^2\cos^2\theta} =$$

$$= \sqrt{1 + \theta^2}$$

$$\Lambda(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta$$

FORMULA GENERALE

$$\rho = f(\theta) \qquad \begin{matrix} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{matrix}$$

$$\varphi(\theta) = \begin{pmatrix} f(\theta)\cos\theta \\ f(\theta)\sin\theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \dot\varphi(\theta) = \begin{pmatrix} \dot f(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta \\ \dot f(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|\dot\varphi(\theta)| = \sqrt{\dot f(\theta)^2 + f(\theta)^2}$$

FORMULA GENERALE per $\gamma(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ con $\begin{cases} \rho = f(t) \\ \theta = g(t) \end{cases}$

$x(t) = \rho\cos\theta$

$y(t) = \rho\sin\theta$

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} \dot\rho\cos\theta - \rho\dot\theta\sin\theta \\ \dot\rho\sin + \rho\dot\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|\dot\gamma(t)| = \sqrt{(\dot\rho\cos\theta - \rho\dot\theta\sin\theta)^2 + (\dot\rho\sin + \rho\dot\theta\cos\theta)^2} =$$

$$= \sqrt{\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2}$$

$$= \sqrt{\dot\rho^2 + \rho^2 \dot\theta}$$

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot f(t)^2 + f(t)^2 \dot g(t)^2}\, dt$$

Λ curve coordinate cilindriche

$\rho = 1$
$\theta = t \qquad t \in [0, 2\pi]$
$z = t$

Devo trovare le coordinate cartesiane:

$x = 1 \cdot \cos t$
$y = 1 \cdot \sin t \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$
$z = t$

$$\dot\varphi(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda(\gamma) = \Lambda(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1^2 + \sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = 2\sqrt{2}\,\pi$$

Coordinate cilindriche polari

Spostamento verticale sarà $\dot z\, dt$
" radiale sarà $\dot\rho\, dt$
" orizzontale sarà $\rho \dot\theta\, dt$

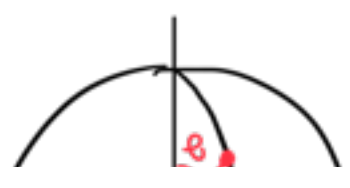
Spostamento totale (da Pitagora):

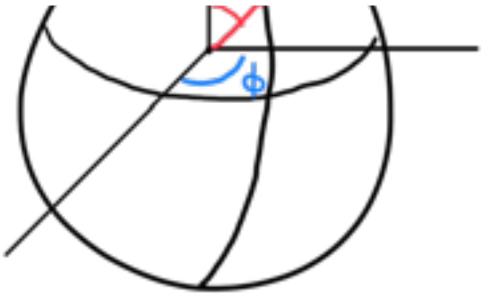
$$ds = \sqrt{\dot z^2 + \dot\rho^2 + \rho\dot\theta^2}\, dt$$

$$\Lambda(\gamma) = \int \sqrt{\dot z^2 + \dot\rho^2 + \rho\dot\theta^2}\, dt$$

Coordinate sferiche

ρ distanza dall'origine $\Rightarrow$ $\dot\rho\, dt$ spostamento radiale





facendo variare θ
(ρ, ϕ, fissati)

$\rho\dot{\theta}dt$ è uno spostamento in direzione del meridiano (geografico) per il punto (spostamento NORD-SUD).

$\rho\sin\theta\dot{\phi}dt$ è lo spostamento (EST-OVEST)

$$ds = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \rho^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2} \cdot dt$$

$$\Lambda(\gamma) = \int\sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \rho^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2} \cdot dt$$

CURVA SEMPLICE:
Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $[a,b]$ APERTO tale che γ è INIETTIVA in $]a,b[$

CURVA CHIUSA: si dirà chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$

CURVA REGOLARE: si dirà regolare se $|\dot{\gamma}(t)| \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$

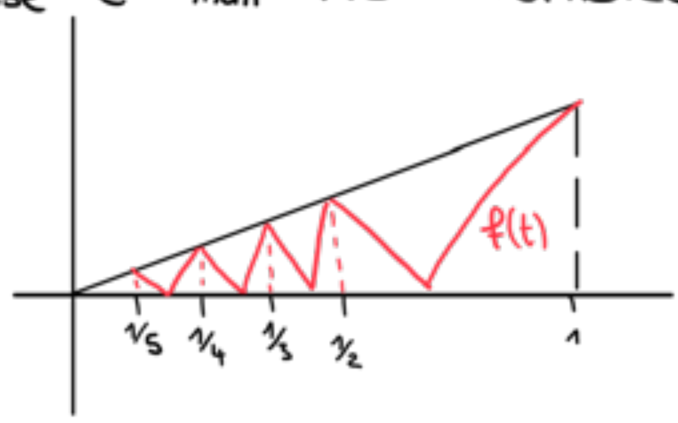
CURVA GENERALMENTE REGOLARE (A TRATTI) se è REGOLARE su $[t_{i+1}, t_i]$ $\forall i$ di $\pi = \{t_0 < t_1 < \dots < t_m\}$

Esempio di curva di classe C^0 non RETTIFICABILE

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$

$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



Prendiamo una partizione tale che contenga i punti in cui la curva tocca la bisettrice xy e l'asse x.

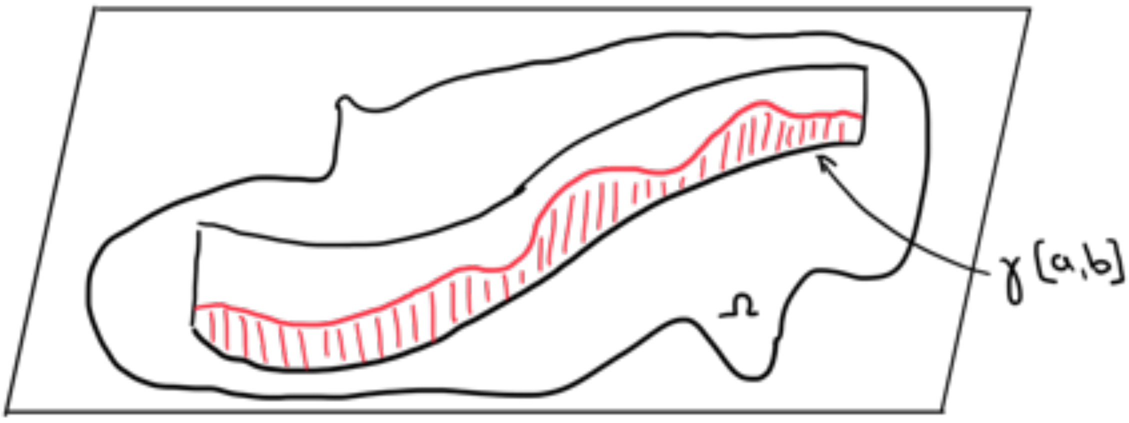
Si stima: $\Lambda(\pi) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots + \frac{1}{m}$

$\updownarrow$

Serie armonica DIVERGENTE

Segue $\Lambda(\pi)$ non ha ESTREMO SUPERIORE.

INTEGRALE CURVILINEO



Si prenda $f: \Omega \to \mathbb{R}$, inoltre consideriamo $\gamma: [a,b] \to \Omega$ $\quad (\Omega \subseteq \mathbb{R}^n)$

$$\int_\gamma f \, d\gamma \qquad \text{oppure} \qquad \int_\gamma f \, d\ell$$

DEFINIZIONE: $\displaystyle\int_\gamma f \, d\gamma \equiv \int_a^b f(\gamma(t)) |\dot\gamma(t)| \, dt$

Esempio:

$f(x,y) = x$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\displaystyle\int_\gamma f \, d\gamma = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1 + 4t^2} \, dt =$ $\qquad \gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$= \frac{1}{8} \int_0^1 8t\sqrt{1+4t^2} \, dt = \frac{2}{3}\left(1+4t^2\right)^{\frac{2}{3}}\Bigg|_0^1$$

CURVE EQUIVALENTI: $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è detta EQUIVALENTE a $\sigma: [c,d] \to \mathbb{R}^n$

[Ipotesi nascosta:]

$\left[\dot{p} \neq 0 \ \forall t \in [c,d]\right]$ se esiste $p : [c,d] \to [a,b]$, tale che sia C^1, INVERTIBILE e $\sigma(t) = \gamma(p(t))$

Esempio molto concreto:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\sigma(s) = \begin{pmatrix} \cos 2s \\ \sin 2s \end{pmatrix} \quad t \in [0, \pi]$$

$$p : [0,\pi] \to [0, 2\pi]$$

$$p(x) = 2x$$

$$\sigma(s) = \gamma(p(s))$$

Che relazione intercorre tra la lunghezze di due curve equivalenti?

$$\Lambda(\sigma) = \int_c^d |\dot{\sigma}(s)|\,ds = \int_c^d |\dot{p}(s)\,\dot{\gamma}(p(s))|\,ds =$$

Definizione di CURVE EQUIVALENTI

$$= \text{se } \dot{p} > 0 = \int_c^d |\dot{\gamma}(p(s))|\,\dot{p}(s)\,ds = \text{CAMBIO VARIABILE}$$

$p(s) = t$

$dt = \dot{p}(s)\,ds$

$$= \int_{p(c)}^{p(d)} |\dot{\gamma}(t)|\,dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\,dt = \Lambda(\gamma)$$

$$= \text{se } \dot{p} < 0 = \int_c^d |\dot{\gamma}(p(s))|\,|\dot{p}(s)|\,ds = -\dot{p}(s)\int_c^d |\dot{\gamma}(p(s))|\,ds =$$

$p(s) = t$

$dt = \dot{p}(s)\,ds$

= CAMBIO VARIABILE (visto che $\dot{p} < 0$ si ha $p(c) = b$, $p(d) = a$) =

$$= -\int_{p(c)}^{p(d)} |\dot{\gamma}(t)|\,dt = -\int_b^a |\dot{\gamma}(t)|\,dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\,dt$$

TAYLOR

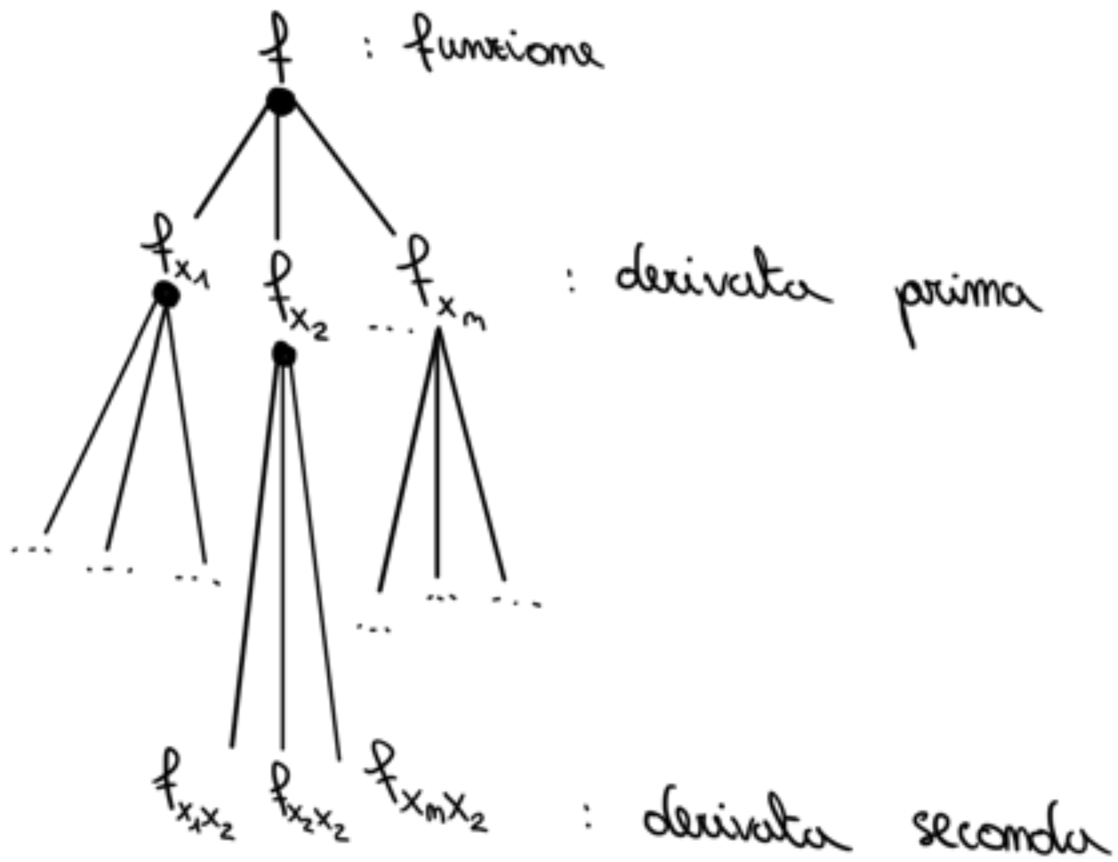
DERIVATE SUCCESSIVE (di ordine superiore)

$f: \Omega \to \mathbb{R}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$

NOTAZIONE: $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \qquad i, j = 1, \dots, m$

Analogamente: $\partial_{x_i}(\partial_{x_j} f) = \partial_{x_i x_j} f \quad \Rightarrow$ 2ª NOTAZIONE

SCHEMINO



Teorema CLAIRAUT - SCHWARZ

Ip: $f \in C^2$

Tesi: $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$

Esempio: $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

Vediamo un'applicazione utile per Taylor:

$f \in C^4 \quad \Rightarrow f_{xz\boxed{yx}} = f_{xz\boxed{xy}}$

ma dunque è anche vero $f_{x\boxed{zx}y} = f_{x\boxed{xz}y}$

Formula di Taylor

Si prenda Ω APERTO, $x_0 \in \Omega$, x_0 INTERNO ad Ω.

Si vuole scrivere:

dim Ω

$$f(x_0+\omega)=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\dots,i_k}^{m} f_{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}}(x_0)\,\omega_{i_1}\omega_{i_2}\cdots\omega_{i_k}+R^N(\omega)$$

resto di Peano

Vediamo in pratica che succede:

$k=0 \Rightarrow \frac{1}{0!}f(x_0)=f(x_0)$

$k=1 \Rightarrow \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{m} f_x(x_0)\,\omega_i \Rightarrow$ DIFFERENZIALE

$k=2 \Rightarrow \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{m} f_{x_ix_j}(x_0)\,\omega_i\omega_j$

$$f(x_0+\omega)=f(x_0)+\frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{m} f_x(x_0)\,\omega_i+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{m} f_{x_ix_j}(x_0)\,\omega_i\omega_j}_{\text{NOTIAMO COSA ACCADE:}}$$

$$\dots+f_{x_ix_j}(x_0)\,\omega_i\omega_j+\dots+f_{x_jx_i}(x_0)\,\omega_j\omega_i$$

per CLAIRAUT

$$\| $$

$$2\cdot f_{x_ix_j}(x_0)\,\omega_i\omega_j$$

La formula di Taylor, per $m=2$, $k=2$:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)h+f_y(x_0,y_0)k+$$

$$\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(x_0,y_0)h^2+f_{yy}(x_0,y_0)k^2+2f_{xy}(x_0,y_0)hk\right]$$

Notiamo una cosa:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\to \mathbb{R}$

polinomio di Taylor $f(x_0+w) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} f^{(k)} w^k + R^N(w)$

$f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$

1. $K = (K_1, \dots, K_m)$, $K_i \geq 0$ INTERO

$\downarrow$ multiindice

K_i numero di derivazioni rispetto a x_i

Si definisce $K! = K_1! \cdot K_2! \cdot \dots \cdot K_m!$

Esempio: $K = (K_1, K_2, \dots, K_6) = (7,0,0,0,0,0)$

$K! = 7!\,0!\,0!\,0!\,0!\,0! = 7!$

2. Inoltre $|K| = K_1 + K_2 + \dots + K_m$

3. $\partial^K f = \dfrac{\partial^{|K|} f}{\partial^{K_1}_{x_1} \partial^{K_2}_{x_2} \cdots \partial^{K_m}_{x_m}}$

4. $w^K = w_1^{K_1} w_2^{K_2} \cdots w_m^{K_m}$

TAYLOR in più variabili:

$$f(x_0+w) = \sum_{|K| \leq N} \frac{1}{K!} \partial^K f(x_0) w^K + R^N(w) =$$

$$= \sum_{\substack{K_1 + \cdots K_m \leq N \\ K_i \text{ interi} \geq 0}} \frac{1}{K_1! K_2! \cdots K_m!} \frac{\partial^{|K|} f(x_0)}{\partial^{K_1}_{x_1} \partial^{K_2}_{x_2} \cdots \partial^{K_m}_{x_m}} w_1^{K_1} w_2^{K_2} \cdots w_m^{K_m} + R^N(w)$$

come si trovano questi indici?

MASSIMI e MINIMI

$f \in C^2(\Omega)$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ x_0 INTERNO al Ω

$\nabla f(x_0) = \emptyset$

$$f(x_0+w) = f(x_0) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} f_{x_i}(x_0) w_i}_{\nabla f(x_0) = 0} + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1} f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j + R_2(w)$$

$$f(x_0+w) - f(x_0) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j + R_2(w)$$

$$f(x_0+w) - f(x_0) = \underset{0}{\underset{\vee\!\!/}{|w|^2}} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j}{|w|^2} + \frac{R_2(w)}{|w|^2} \right]$$

Si noti che $\frac{R_2(w)}{|w|^2} \to 0$ se $|w| \to 0$

Per il teorema di Clairaut si ha

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i} \Rightarrow f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j \text{ SIMMETRICA REALE}$$

$\downarrow$

forma quadratica

Ecco che interviene lo studio della forme quadratiche:

$$\lambda |w|^2 \leq f_{x_i x_j}(x_0) w_i w_j \leq \Lambda |w|^2$$

ove λ, Λ sono il minimo e il massimo autovalore della matrice $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Rightarrow$ MATRICE HESSIANA

Fare i casi $\lambda > 0$, $\Lambda < 0$

$\Uparrow$

Th. : Se $\nabla f(x_0) = 0$, $f \in C^2(\Omega)$, Ω è APERTO.

Inoltre $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ è

- DEFINITA POSITIVA $\Rightarrow x_0$ MIN locale

• DEFINITA NEGATIVA $\Rightarrow$ X_0 MAX locale

FORMA INDEFINITA $\Rightarrow$ $\lambda < 0$, $\Lambda > 0$

NON DEGENERE

• INDEFINITA $\Rightarrow$ X_0 SELLA

PUNTI CRITICI: CLASSIFICAZIONE

Si prenda la MATRICE HESSIANA

$$Hf(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)$$

Si prendano come esempi:

$x^2 + y^4$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y^3 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

DIAGONALE CON AUTOVALORI $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$

DEGENERE

QUI TROVIAMO UN MINIMO

$x^2 - y^4$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ -4y^3 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

DIAGONALE CON AUTOVALORI $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$

DEGENERE

QUI TROVIAMO UNA SELLA

$\Rightarrow$ SEMIDEFINITA $\Rightarrow$ NO INFO

Strategia per la ricerca degli estremi GLOBALI

Esempio: $f(x,y) = xy$

Si cercano $\max\limits_{\min} f(x,y)$ su $\underset{\rho=1}{B}(0,0)$

$f_x = y$

$f_y = x \Rightarrow \nabla f \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

$$Hf = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

perciò H INDEFINITA

Unico 0 della derivata è una SELLA.

Si studiamo gli estremi della frontiera:

1° CASO, "Caso cartesiano":

$$\left\{ (x, \sqrt{1-x^2}),\ x \in [-1,1] \right\} \cup \left\{ (x, -\sqrt{1-x^2})\ x \in [-1,1] \right\}$$

Consideriamo:

$h_1(x) = f(x, \sqrt{1-x^2})$ su $[-1,1]$

$h_2(x) = f(x, -\sqrt{1-x^2})$ su $[-1,1]$

si riduce ad un problema di 1 variabile su un intervallo.

La nostra funzione diventa:

$$h(x) = x\sqrt{1-x^2} \quad \text{su} \quad [-1,1]$$

$$h'(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{1\ x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ MIN

$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ MAX

$f'(x) > 0$ se $x \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

Allo stesso modo si procede per la seconda funzione $h_2(x) = x(-\sqrt{1-x^2})$

2° CASO, "Caso Parametrico"

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$h(t) = f(\gamma(t)) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

max
min di ... max

$\underset{su\ x^2+y^2=1}{\min}$ di f $=$ $\underset{su\ [0,2\pi]}{\min}$ $h(t) = \cos t \sin t$

$h(t)$ ha max se $t = \frac{\pi}{4}$
$h(t)$ ha min se $t = -\frac{\pi}{4}$

3° Caso, MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

CAMPI VETTORIALI e FORME DIFFERENZIALI LINEARI

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n)$, consideriamo $\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
$A : \Omega \to \mathbb{R}^n$, (sempre $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$) sarà detto CAMPO (anche detto CAMPO VETTORIALE).

$$df : \underset{x_0}{\underset{\Downarrow}{\Omega}} \times \underset{w}{\underset{\Downarrow}{\mathbb{R}^n}} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\Omega \subseteq \mathbb{R}^n) \qquad w \to df(x_0, w) \text{ LINEARE}$$

questo è il differenziale

$\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$: $w \to \alpha(x_0, w)$ LINEARE
si dirà FORMA (DIFFERENZIALE LINEARE).

PROBLEMA della PRIMITIVA

1) Se A è un campo su Ω, esiste $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f \equiv A$ su Ω ?

2) Se α è una forma su Ω, esiste $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $df \equiv \alpha$ su $\Omega \times \mathbb{R}^n$?

Se $\exists\ f : \Omega \to \mathbb{R} : \nabla f \equiv A$ su Ω, A si dirà INTEGRABILE ed f si dirà primitiva di A.

Se $\exists\ f : \Omega \to \mathbb{R} : df \equiv \alpha$ su $\Omega \times \mathbb{R}^n$ α si dirà INTEGRABILE ed f si dirà primitiva di α.

CAMPI ...

CAMPI E FORME ASSOCIATI

Si prenda $\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, fissato x_0, tale che

$\underset{\mathbb{R}^m}{w} \to \alpha(x_0, w)$ è LINEARE, quindi tale che $\exists\, u \in \mathbb{R}^m$:

$\alpha(x_0, w) = u \cdot w$ prodotto scalare

Il campo associato ad α è $A(x_0) = u$.

sono detti associati se:

$$\boxed{\alpha(x_0, w) = A(x_0) w}$$

Esempio di CAMPO $\begin{pmatrix} \sin xy \\ 1 + \arctan x^2 y \end{pmatrix}$ campo su $\mathbb{R}^2$

Esempio di FORMA associata al CAMPO:

$$\begin{pmatrix} \sin xy \\ 1 + \arctan x^2 y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} =$$

$$= \sin xy \cdot dx + (1 + \arctan x^2 y)\, dy$$

COME SI FA L'INTEGRALE di un CAMPO?

Integrale del CAMPO A sulla curva (PARAMETRICA e generalmente REGOLARE) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$

$$\int A = \int_a^b A(\gamma(t)) \underbrace{\cdot}_{\text{prodotto scalare}} \dot\gamma(t)\, dt$$

$\Rightarrow$ INTEGRALE del CAMPO sulla CURVA

Integrale della forma α sulla CURVA è l'integrale del campo associato.

$$\alpha(x, w) = A(x) w \quad \Rightarrow \quad \int \alpha = \int A$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} -y/x^2+y^2 \\ x/x^2+y^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} -y/x^2+y^2 \\ x/x^2+y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \ldots \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\int_\gamma A = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi$$

se questa è la curva allora $\int_\gamma A = \int_{\gamma_1} A + \int_{\gamma_2} A + \dots$

Sia $\sigma(t) = \gamma(p(t))$; $\dot{p} > 0$; σ, γ regolari

$p : [c,d] \to [a,b]$

$$\int_\sigma A = \int_c^d A(\sigma(t))\dot{\sigma}(t)\, dt =$$

$$= \int_c^d A(\gamma(p(t)))\,\dot{\gamma}(p(t))\,\dot{p}(t)\, dt \Rightarrow \text{CAMBIO DI VARIABILE} =$$

$\Rightarrow$ $s = p(t)$, $ds = \dot{p}(t)dt$ $\Rightarrow$

$$\int_{p(c)=a}^{p(d)=b} A(\gamma(s))\,\dot{\gamma}(s)\, ds = \int_\gamma A$$

$\Rightarrow$ L' INTEGRALE NON CAMBIA in funzione della CURVA

$A : \Omega \to \mathbb{R}^n$, si dice $A \in C^k(\Omega)$ se $A^i \in C^k(\Omega)$

TEOREMA del POTENZIALE $\Downarrow$

TEOREMA : CN (e SUFFICIENTE) affinché $A \in C^0(\Omega)$ sia INTEGRABILE è che $\int A$ dipende SOLO dagli estremi di γ e non dal CAMMINO

$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in [0,1] : \gamma_1(0) = \gamma_2(0) \ , \gamma_1(1) = \gamma_2(1) \implies \int_{\gamma_1} A = \int_{\gamma_2} A$

C.N. : Se A INTEGRABILE e $A \in C^0$

$\implies \int A$ NON DIPENDE da altro che gli estremi di γ.

DIMOSTRAZIONE :

A è integrabile $\implies \exists f : \nabla f \equiv A$ su Ω

Poichè $A \in C^0(\Omega) \implies \nabla f \in C^0(\Omega) \implies f \in C^1(\Omega)$

Si prenda $\gamma \in C^1[a,b] \to \Omega$ ad arbitrio

$$\int_\gamma A = \int_a^b A(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,dt = \int_a^b \underbrace{\nabla f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)}_{\frac{d}{dt} f(\gamma(t))}\,dt =$$

VERO se f DIFFERENZIABILE

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Th. Torricelli scalare in R perchè

INTEGRABILITÀ DI CAMPI E FORME

TEOREMA : C.N. (in realtà SUFFICIENTE) sia INTEGRABILE è che $\forall \gamma$ chiusa tale che $\gamma : [0,1] \to \text{dom} A$ si ha

$$\boxed{\int_\gamma A = 0}$$

TEOREMA DI TORRICELLI

C.S. affinchè $A \in C^0$ sia INTEGRABILE è che

$\int A$ non dipende dal sostegno (cammino) di

$\int_\gamma \ldots$ non dipende dal sostegno (cammino) di γ ma solo dagli estremi.

DIM:

$$F(x) = \int_{\gamma_{x_0 x}} A = \underbrace{\int_a^b A(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt}_{\text{esiste perchè l'integrale è continua}}$$

x_0: punto iniziale; x: punto finale

Dico che $F(x)$ è un potenziale (PRIMITIVA) di A, cioè $\nabla F \equiv A$ su dom A.
Ciò vuol dire che $\forall i$ $\frac{\partial F}{\partial x_i} \equiv A_{x_i}$ su dom A.

$F_{x_1} \equiv A_1$ su dom A

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+he_1) - F(x)}{h} \overset{?}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_{\gamma_{x_0x}} A + \int_{he_1} A - \int_{\gamma_{x_0x}} A\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \int_{he_1} A \cdot \frac{1}{h}$$

Si calcola per esteso l'integrale

$$\int_0^h A(x+te_1)e_1\,dt = \int_0^h A_1(x+te_1)\,dt$$

curva che rappresenta il segmento $x+h$
$\gamma: [0,h] \to [x, x+h]$
$\gamma = x + te_1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_0^h A_1(x+te_1)\,dt\right] = \lim_{h\to 0} A_1(x+\xi e_1) \quad \xi \in [0,h]$$

MEDIA INTEGRALE
DI FUNZIONE CONTINUE

Dato che se $h \to 0$, $\xi < h$, $\xi \to 0$ e quindi $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[F(x+he_1) - F(x)\right] = A_1(x)$

$\blacksquare$

CAMPI IRROTAZIONALI (E FORME CHIUSE)

TEOREMA: CN perchè $A \in C^1$ sia integrabile è che $\Rightarrow$

$$(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i} \quad \forall i,j = 1,\dots,m$$

Nome: CONDIZIONE del ROTORE

<u>DIM</u>:

$A \in C^1$. Sia A INTEGRABILE $\left(\exists f : \mathrm{dom}\,A \to \mathbb{R} : \nabla f \equiv A\right)$

$f_{x_i} \equiv A_i$

Si noti che $\left(f_{x_i}\right)_{x_j} = \left(A_i\right)_{x_j}$

$\parallel$ per CLAIRAUT - SCHWARZ

$$\Downarrow$$

$$\left(f_{x_j}\right)_{x_i} = \left(A_j\right)_{x_i}$$

Segue $\Rightarrow$ $\left(A_i\right)_{x_j} = \left(A_j\right)_{x_i}$ $\blacksquare$

Esempio: $A(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$

Come si verifica l'integrabilità con il nuovo teorema?

$$\left(A_1\right)_{x_2} = \left(A_2\right)_{x_1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial A_2}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(y)}{\partial y} = 1$$

CAMPO IRROTAZIONALE: sia $A \in C^1$ che verifica la condizione $(A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i} \quad \forall\, i,j = 1,\dots,m$ si dirà IRROTAZIONALE e la sua forma associata si dirà chiusa.

Esempio: esistono CAMPI IRROTAZIONALI NON INTEGRABILI.

$$A(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2} \,,\, -\frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

Si provi che sulla curva $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \in [0,2\pi]$ l'integrale del campo è NON NULLO ma le sue derivate in croce COINCIDONO.
Comunque non è INTEGRABILE

CONDIZIONE del ROTORE $(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \\ -\left(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \operatorname{rot} A$$

Si noti che le componenti del ROTORE corrispondono alle derivate della CN dell'integrabilità. In $\mathbb{R}^3$ quindi $A \in C^1$ INTEGRABILE se $\operatorname{rot} A$ è nullo.

La CONDIZIONE del ROTORE quando diventa anche sufficiente?

DEFORMAZIONE di CURVE (OMOTOPIA)

Siano $\gamma : [0,1] \to \Omega$, $\sigma : [0,1] \to \Omega$

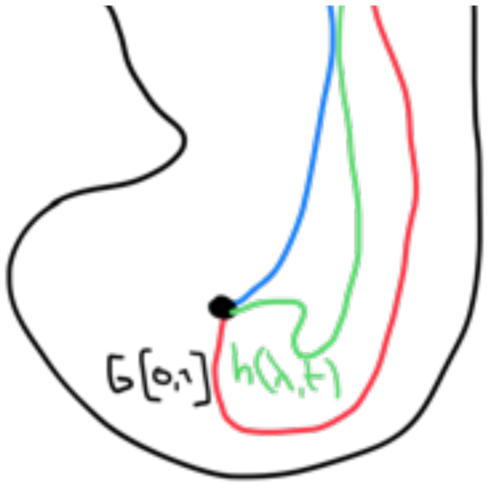
Ovvero siano:

$\gamma(0) = \sigma(0)$

$\gamma(1) = \sigma(1)$

Inoltre γ, σ siano CONTINUE

... CONTINUE



$h : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \Omega$

h CONTINUA.

h inoltre rispetta:

$h(0,t) = \gamma(t) \quad \forall\, t \in [0,1]$

$h(1,t) = G(t) \quad \forall\, t \in [0,1]$

h si dirà <u>OMOTOPIA in Ω</u>

TEOREMA DI INVARIANZA OMOTOPICA:

Se A è IRROTAZIONALE, $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e se $\gamma : [0,1] \to \Omega$, $G : [0,1] \to \Omega$ (entrambe continue e tali che $\gamma(0) = G(0)$, $\gamma(1) = G(1)$) OMOTOPE in Ω, <u>allora</u>

$$\int_\gamma A = \int_G A$$

solo ENUNCIATO

TEOREMA DI INVARIANZA OMOTOPICA vale anche per le curve chiuse.

Se avessi $\gamma : [0,1] \to \Omega$, $G : [0,1] \to \Omega$ tali che $\gamma(0) = \gamma(1)$ e $G(0) = G(1)$ + stesse ipotesi precedenti.

Inoltre γ, G OMOTOPE in Ω quindi:

$$\exists\, h : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \Omega \implies \begin{matrix} h(0,t) = \gamma(t) \\ h(1,t) = G(t) \end{matrix} \quad \forall\, t \in [0,1]$$

$$\implies \int_\gamma A = \int_G A \quad \text{se } A \text{ IRROTAZIONALE}$$

Si ricordi che un campo è INTEGRABILE se per ogni curva chiusa l'integrale è nullo. Allora, se si prende una porzione di dominio in cui esistono due curve OMOTOPE, si ha che ogni curva che sta all'interno della regione delimitata dalle curve può essere deformata nelle curve omotope e quindi verificare la CONDIZIONE d'INTEGRABILITÀ ($\int_\gamma A = \int_G A$) per ogni curva di quella porzione di dominio.

Def: Ω si dirà semplicemente CONNESSO se ogni curva chiusa a valori in Ω è OMOTOPA, ad una curva costante $G(t) = x_0 \in \Omega$.
in Ω

x_0 si dirà POLO

Ω si dirà STELLA se $\exists\, x_0$ tale che il segmento $\overline{xx_0}$ sia contenuto in Ω $\forall x \in \Omega$

ATTENZIONE: Se Ω è CONVESSO $\Rightarrow$ Ω è STELLA

Th: Ω STELLA $\Rightarrow$ Ω semplicemente connesso

<u>DIM</u>: Supponiamo $x_0 = \emptyset$ e sia γ una qualunque curva chiusa a valori in Ω.

$$h(\lambda, t) = (1-\lambda)\gamma(t) \quad \forall \lambda \in [0,1], \ \forall t \in [0,1]$$

Inoltre deve essere $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$

Si

si prova che:

① h è continua perchè prodotto di funzioni continue ((1-λ) polinomio continuo e $\gamma(t)$ CONTINUA per definizione).

② $h(0,t) = \gamma(t) \Rightarrow$ curva 1

$h(1,t) = 0 \Rightarrow$ curva costante

③ $h(\lambda,t)$ è un punto del segmento di estremi $\emptyset$ e $\gamma(t)$ perchè $(1-\lambda) \in [0,1]$.
Poichè Ω è stella $(1-\lambda)\gamma(t) \in \Omega$ se $\gamma(t) \in \Omega$. Quest' ultima è ipotesi.

Se $x_0 = 0$ non fosse polo di Ω allora
$h(\lambda,t) = x_0 + (1-\lambda)[\gamma(t)-x_0]$. $\blacksquare$
La dimostrazione segue da quanto detto sopra.

OSSERVAZIONE: se $G(t) \equiv x_0$ $\forall t$ allora $\forall A \in C^0$ si ha

$$\int_G A = 0$$

Prova: $G: [0,1] \to \text{dom} A$ per cui diventa

$$\int_0^1 A(G(t))\,\dot{G}(t)\,dt = 0$$

perchè $G(t) \equiv$ COSTANTE quindi $\dot{G}(t) \equiv \emptyset$

Ne segue:

Sia $A \in C^1(\Omega)$, sia Ω semplicemente connesso, allora A INTEGRABILE se e solo se A IRROTAZIONALE

ENUNCIATO MIGLIORE:

$\boxed{\text{CNS } A \in C^1(\Omega),\ \Omega \text{ semplicemente connesso, sia INTEGRABILE è che } (A_i)_{x_j} = (A_j)_{x_i} \ \forall\, i,j = 1,\dots,m}$

Come si calcola il potenziale:

A integrabile allora $f(x) = \int_{\gamma_{x x_0}} A$

Visto che A integrabile, su qualsiasi curva avente origine e fine uguali, $\int_\gamma A$ uguale $\forall \gamma$.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ CONVESSO

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} (1-t)x_0 + tx \\ (1-t)y_0 + ty \end{pmatrix} \quad t \in [0,1]$$

punto partenza $x_0 = 0 \Rightarrow \gamma(t) = \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix}$

punto arrivo $x = 1$

$$\int_\gamma A = \int_0^1 \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (tx^2 + ty^2) dt =$$

$$= \int_0^1 (x^2+y^2) t \, dt = (x^2+y^2) \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 = \frac{x^2+y^2}{2} \checkmark$$

DETERMINARE TUTTE LE PRIMITIVE

Supponiamo di avere $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ tali che $\nabla f \equiv \nabla g \equiv A$

f, g primitive di A.

Si noti che $\nabla(f - g) \equiv 0$

Quindi $h = f - g$ è una funzione con $\nabla h \equiv 0$

$f(x) \equiv$ costante $\Rightarrow f'(x) = 0$ ma

è sempre vero $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) =$ COSTANTE ?

Questo è vero se ...

... se è solo se si può applicare
il teorema di Lagrange (INTERVALLO)

$$f(x)-f(y) = (x-y)\,f'(\xi)$$

ma se $f \equiv$ COSTANTE $\forall x,y \in \mathrm{Dom} f$ segue

$$0 = \underset{\neq 0}{(x-y)}\ \underset{= 0}{f'(\xi)}$$

Th. : sia Ω aperto e connesso, $f : \Omega \to \mathbb{R}$,
$\nabla f \equiv 0$ su Ω.
Allora f è COSTANTE.

<u>Dim</u> : dato che Ω connesso $\Rightarrow \forall x,y \in \Omega$
$\exists\ \gamma : [0,1] \to \Omega$, CONTINUA e tale che
$\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$

Se Ω aperto allora si può scegliere
γ regolare a tratti.

$h(t) = f(\gamma(t))$ Sappiamo che $\nabla f \equiv 0$ su Ω quindi $f \in C^1(\Omega)$ e si può applicare th. derivazione $f \circ \gamma$

$h'(t) = \dot{f}(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t) \equiv 0$ perché per ipotesi $\nabla f \equiv 0$ su Ω

Notiamo che $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ ed inoltre
continua perché composizione di f CONTINUE.
$[0,1]$ intervallo $=$ LAGRANGE $\Rightarrow h(0)-h(1) = (0-1)\,h'(\xi)$
ma $\forall t \in [0,1] \Rightarrow h'(t) \equiv 0$ e
dunque $h(0)-h(1) = 0 \Rightarrow f(\gamma(0)) = f(\gamma(1))$
Segue f COSTANTE. ∎

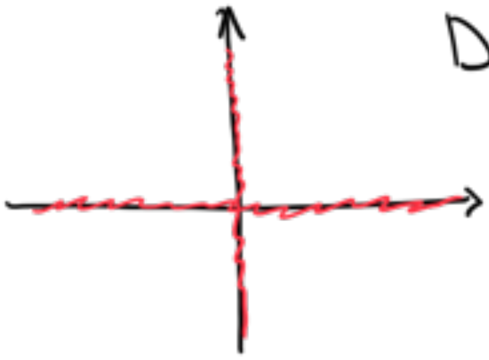
CAMPI E FORME IN PRATICA

• Come si trovano tutte le primitive di un campo:

$$\left(\frac{1}{x^2y}, \frac{1}{xy^2}\right) = A(x,y) \qquad A: \mathbb{R}^2 \setminus \{xy = 0\} \to \mathbb{R}^2$$

1. si studia il dominio massimale:

$\Omega = \text{dom } A$



Dom A NON CONNESSO

Si noti che il Dom A è unione di Insiemi convessi $\Rightarrow$ STELLA $\Rightarrow$ SEMPLICEMENTE CONNESSO

2. Si verifica se il campo è IRROTAZIONALE

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{-2xy}{(x^2y)^2} & \frac{-x^2}{(x^2y)^2} \\ \frac{-y^2}{(xy^2)^2} & -\frac{2yx}{(xy^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$(A_1)_{x_2} \overset{?}{=} (A_2)_{x_1}$$

$$-\frac{1}{x^2y^2} = -\frac{1}{x^2y^2}$$

$\Rightarrow A$ IRROTAZIONALE

3. Il potenziale può essere calcolato a pezzi:

$\exists \; \nabla f_i = A \qquad i = 1,2,3,4$ quadrante

$$F = \begin{cases} F_1 & 1° \text{ QUADRANTE} \\ F_2 & 2° \quad '' \\ F_3 & 3° \quad '' \\ F_4 & 4° \quad '' \end{cases}$$

2° METODO:

$$\exists\ F: \quad \begin{cases} f_x = x^2 y \\ f_y = \dfrac{1}{x^2 y} \end{cases}$$

Si integra membro a membro

$$f(x,y) = -\frac{1}{xy} + c(y) \qquad \text{(integro rispetto a } dx\text{)}$$

si deriva rispetto a dy

$$f_y(x,y) = \frac{1}{xy^2} + c'(y)$$

↳ questa deve essere per forza nulla perché la derivata che ci è stata data è solo $\dfrac{1}{xy^2}$

Primitiva $\Rightarrow$ $f(x,y) = -\dfrac{1}{xy} + c$

Ne segue:

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-1}{xy} + c_1 & x>0,\ y>0 \\ \dfrac{-1}{xy} + c_2 & x<0,\ y>0 \\ \dfrac{-1}{xy} + c_3 & x<0,\ y<0 \\ \dfrac{-1}{xy} + c_4 & x>0,\ y<0 \end{cases}$$

Vediamo una forma differenziale

$$(\cos y)\,dx - (x \sin y + 1)\,dy$$

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Campo associato $A = \begin{pmatrix} \cos y \\ -(x \sin y + 1) \end{pmatrix}$

Stesso ragionamento di prima:

Condizione del ROTORE

$$\nabla A = \begin{pmatrix} 0 & -\sin y \\ -\sin y & -x\cos y \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Campo IRROTAZIONALE}$$

Campo IRROTAZIONALE, Dom A SEMPLICEMENTE CONNESSO

$$\Downarrow$$

$$\exists F : \quad F_x = \cos y, \quad F_y = -x\sin y - 1$$

$$\int F_x \, dx = x\cos y + c(y)$$

$$\frac{d}{dy}\left(\int F_x dx\right) = -x\sin y + c'(y)$$

$$c'(y) = -1 \Rightarrow c(y) = -y$$

$$F(x,y) = x\cos y - y$$

POTENZIALE NEWTONIANO

$$F = -\frac{1}{x^2+y^2+z^2} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$F = \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Verifica la CONDIZIONE del ROTORE ?

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

INTEGRALI DOPPI E TRIPLI

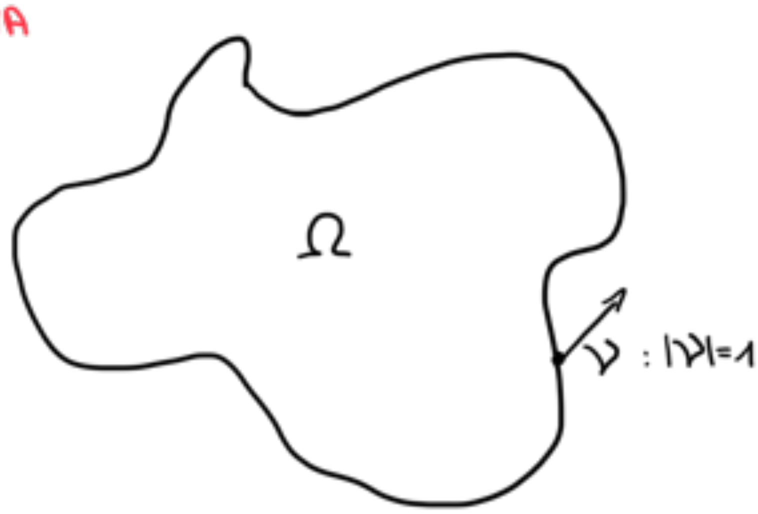
"INTEGRAZIONE PER PARTI" anche detta formula di GAUSS-GREEN-OSTROGRADSKIJ

$$\underbrace{\int_{\Omega} f_x \, dx\,dy}_{\text{INTEGRALE DOPPIO}} = \underbrace{\int_{\partial\Omega^+} f \, dy}_{\text{INTEGRALE DI UNA FORMA SU UNA CURVA}}$$

$\partial\Omega^+$ (sostegno di) una curva parametrica PERCORSA IN SENSO ANTIORARIO

$$\int_{\partial\Omega} f \, \nu_1 \, dl$$

$dl \to |\dot{\gamma}(t)|\,dt$



N.B. : ν è il versore normale esterno $\partial\Omega$

Se $\nu \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ allora $\nu = (\nu_1, \nu_2)$

Vediamo un esempio tangente

$$\int_{\partial\Omega} f(\gamma(t)) \cdot \frac{\nu_1}{|\nu|} \cdot |\gamma(t)|$$

Sia $\gamma(t)$ una curva su Ω.

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\int_{\partial\Omega} f(\gamma(t)) \frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\cancel{\sqrt{\dot{\gamma}_2(t)^2 + \dot{\gamma}_1(t)^2}}} \cdot \cancel{|\dot{\gamma}(t)|}\,dt$$

Sia n il vettore normale a $\partial\Omega$

$$n = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_2(t) \\ -\dot{\gamma}_1(t) \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\int f(\gamma(t))\, \dot{\gamma}_2(t)\, dt$$

Sia ν il versore di n : $\nu = \frac{n}{|n|}$

$$\int_{\Omega} f_y \, dx\,dy = - \int_{\partial\Omega^+} f \, dx = \int_{\partial\Omega} f \, \nu_2 \, dl$$

$\partial\Omega^+ \qquad \Big| \partial\Omega$

il segno
- è ⊆ nel
versore normale

DIVERGENZA DEL CAMPO

$$\operatorname{div} A = (A_1)_{x_1} + (A_2)_{x_2} + \cdots + (A_m)_{x_m}$$

oppure

$$\operatorname{div} A = \nabla \cdot A$$

prodotto scalare

Si noti che: $$\int_\Omega \operatorname{div} A \, dx_1 dx_2 \cdots dx_m = \int_{\partial\Omega} A \cdot \nu \, d\sigma$$

$\Uparrow$

Th. GAUSS
Th. della DIVERGENZA

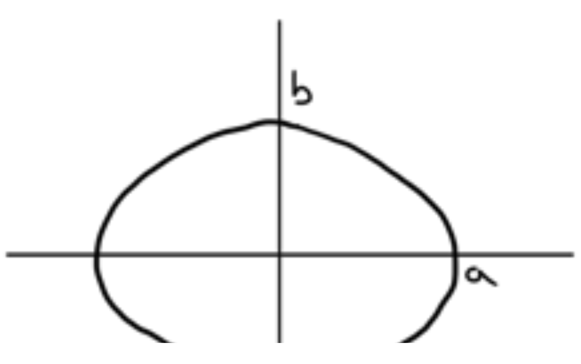
APPLICAZIONE del Teorema di Gauss
⇒ Area racchiusa da una curva piana

$$\text{Area di } \Omega = \int_\Omega 1 \, dx dy = \int_{\partial\Omega^+} x \, dy =$$

$$= -\int_{\partial\Omega^+} y \, dx$$

oppure in forma differenziale

$$\int_\Omega \frac{1}{2}(x dy - y dx)$$



$$\gamma(t) = \begin{cases} a\cos t \\ b\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$