PL

Soluzione Ammissibile

Una soluzione che rispetta tutti i vincoli

Soluzione Ottima

Una soluzione ammissibile che è punto di massimo assoluto per la funzione obbiettivo

Modello generale problema di produzione

$$\begin{cases} \max\ c^T \cdot x \\ A x \leq b \end{cases} \quad \text{con: } c^T = \mathbb{C}^{1\times n}, \quad A \in \mathbb{C}^{m\times n}, \quad x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$$

Problema di programmazione lineare in formato primale standard

È un problema di massimizzazione di una funzione obbiettivo lineare soggetta a vincoli lineari di minore uguale

Poliedro

Intersezione di un numero finito di semispazi chiusi

Oppure

$\{x \in \mathbb{R}^n : A x \leq b\}$ con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$

Problema di PL

È un problema di minimo o di massimo di una funzione lineare con vincoli lineari di $\leq, \geq, =$

Modello generale problema di assegnamento

① **Assegnamento non cooperativo**

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{cases}$$

② **Assegnamento cooperativo**

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ x_{ij} \in [0,1] \end{cases}$$

Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \min / \max \ cx \\ Ax \leq b \\ Bx \geq d \\ Dx = e \end{cases}$$

Casi particolari

Primale Standard

$$\begin{cases} \max \ cx \\ Ax \leq b \end{cases}$$

Duale Standard

$$\begin{cases} \min \ cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Linprog

$$\begin{cases} \min \ cx \\ Ax \leq b \\ Aeq \ x = beq \\ LB \leq x \leq UB \end{cases}$$

Con:
$c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$,
$A \in M^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$,
$Aeq \in M^{p \times n}$, $beq \in \mathbb{R}^p$
$LB \in \mathbb{R}^n$, $UB \in \mathbb{R}^n$

Combinazione convessa

Dati $x^1, x^2, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$, il punto $y \in \mathbb{R}^n$ si dice combinazione convessa di $x^1, x^2, \dots, x^k$ se

$\exists$ k numeri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in [0,1]$, con $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$: $y = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_k x^k$

$\text{conv}\{x^1, x^2, \dots, x^k\}$ e' l'insieme delle combinazioni convesse di $x^1, x^2, \dots, x^k$

Combinazione conica

Dati $x^1, x^2, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$, un punto $y \in \mathbb{R}^n$ si dice combinazione conica di $x^1, x^2, \dots, x^k$ se

$\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tali che $y = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_k x^k$

$\text{cono}\{x^1, x^2, \dots, x^k\}$ è l'insieme delle combinazioni coniche di $x^1, x^2, \dots, x^k$

Teorema sulla rappresentazione dei poliedri (di Weil)

Dato un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$
$\hookrightarrow (Ax \leq b)$

$\underbrace{\exists\, V = \{v^1, v^2, \dots, v^k\} \subseteq P}_{\text{insieme di punti } v^i}$, $\underbrace{\exists\, E = \{e^1, e^2, \dots, e^p\}}_{\text{insieme di vettori } e^i}$ con $e^i \in \mathbb{R}^n$ tali che $P = \underbrace{\text{conv}(V) + \text{cono}(E)}_{\{a+b \,|\, a \in \text{conv}(V),\, b \in \text{cono}(E)\}}$ e viceversa

Vertici

Un punto $\bar{x} \in P$ si definisce vertice di P se non si può esprimere come combinazione convessa di due punti di P diversi da $\bar{x}$

- **Risultato 1**

I vertici sono gli unici "insostituibili" nella rappresentazione di Weil

- **Risultato 2**

Se P ha vertici $\Rightarrow P = \text{conv}\{\text{vert}(V)\} + \text{cono}\{E\}$

Teorema fondamentale della PL

Hp: Sia dato il problema $\begin{cases} \max cx \\ Ax \leq b \end{cases}$, e sia (V, E) la rappresentazione di $Ax \leq b$

Supposto $P \neq \emptyset$

Ts: Vi sono due casi

① $\max_{Ax \leq b} cx = +\infty$ (estremo superiore)

② $\exists\, r$ tale che $V_r \in V$ è soluzione ottima di $\max_{Ax \leq b} cx$

Perciò, se:

$$\left.\begin{array}{l} ①\ P \neq \emptyset \\ ②\ \underbrace{(P)}_{\text{problema}} < +\infty \\ ③\ P \text{ ha vertici} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \text{ almeno un vertice che è soluzione ottima.}$$

Appunti sulle 3 condizioni:

- Sia x_i libera. $x_i = x_i^+ - x_i^-$, con $x_i^+, x_i^- \geq \emptyset$. I poliedri con $x \geq 0$ hanno sempre vertici se $\neq \emptyset$
- (P) è limitato se e solo se $c \cdot e^j \leq \emptyset \ \forall_j$
- Se (P) è limitato, P ha vertici

Base

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, si dice base di A, e la si indica con B, un sottoinsieme di $\{1, 2, \dots, m\}$ tale che $|B| = n$ e A_B sia invertibile (Dove con A_B si indicano le righe di A relative a B)

Soluzione di base

La soluzione $\bar{x}$ del sistema $A_B x = b_B$

S.b. ammissibile

se $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{indici} \\ \text{non di base}}}{A_N} \bar{x} \leq b_N \Longrightarrow \bar{x}$ è ammissibile

S.b. degenere

$\bar{x}$ si dirà degenere se $\exists j \in \overset{\text{indici non di base}}{N}$ tale che $A_j \bar{x} = b_j$

Teorema di caratterizzazione dei vertici ⚠

un punto $\bar{x}$ è vertice di P se e solo se è una soluzione di base ammissibile

Modello generale problema del trasporto

$$\begin{cases} \min cx \\ Ax \leq b \\ A_{eq}x = r \\ x \geq \emptyset \end{cases}$$

disponibilità

richieste

(Esattamente linprog)

Problemi associati

Dati A, b, c

$$\begin{cases} \max cx \\ Ax \leq b \end{cases} \xrightarrow{\text{associamo}} \begin{cases} \min yb \\ yA = c \\ y \geq \emptyset \end{cases}$$

$\in \mathbb{R}^m$

Teorema degli scarti complementari

Dato $\bar{x} \in P$ e $\bar{y} \in D^0 = \{y \in \mathbb{R}^m : yA = c, y \geq 0\}$, e dati A, b, c e la coppia $(P), (D)$

duale

punto qualsiasi del poliedro primale

$\bar{x}$ ed $\bar{y}$ sono soluzioni ottime se e solo se $\boxed{\bar{y} \cdot (b - A\bar{x}) = \emptyset}$

Condizione degli scarti complementari

Soluzione di base duale

$$\begin{cases} yA = c \\ y \geq \emptyset \end{cases}$$

Data $B \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$, $|B| = n$, A_B invertibile

$y \in \mathbb{R}^m \longrightarrow (y_B, y_N)$

La soluzione del sistema $y_B A_B = c$ ($\exists!$ poiché A_B è invertibile) si dice soluzione di base duale.

S.b.d. non ammissibile

Sia $\bar{y}$ s.b.d., essa è sicuramente non ammissibile se ha componenti negative.

Se $\bar{y} \geq \emptyset$ allora $\bar{y}$ è ammissibile

S.b.d. degenere

Sia $\bar{y}$ s.b.d., essa si dirà degenere se $\exists\, j \in B : \bar{y}_j = \emptyset$

Teorema di caratterizzazione dei vertici nel duale

un punto $\bar{y}$ è vertice di D se e solo se è una soluzione di base ammissibile

Test di ottimalità

① **Primale**

Dato un vertice $\bar{x} \in P$, generato dalla base B, e costruito $\bar{y}$ con la stessa base,

se $\bar{y} \geq \emptyset$, cioè se $c A_B^{-1} \geq \emptyset$, allora $\bar{x}$ è ottima.

② **Duale**

Sia $\bar{y} \in D$ soluzione di base ammissibile, e costruita $\bar{x}$ soluzione di base di P, utilizzando la stessa base, se $\bar{x}$ è ammissibile siamo all'ottimo.

Modello generale "Knapsack problem"

PLI

$$\begin{cases} \max\, cx \\ v x \leq V \\ x_i \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

PL

$$\begin{cases} \max\, cx \\ v x \leq V \\ x \geq \emptyset \end{cases}$$

Con:

$x \in \mathbb{R}^n$

$c \in \mathbb{R}^n$

$v \in \mathbb{R}^n$, $V \in \mathbb{R}$

Si ha sempre $O_{pli} \leq O_{pl}$

ottimi

Regola del Caricamento ottimale frazionario (PL)

① Si costruiscono i rendimenti dei beni $\dfrac{g_i}{v_i} = r_i$ (valori, volumi)

② Si carica tutto lo zaino con il bene di massimo rendimento

Algoritmo del Simplesso (standard)

Noto il problema $\begin{cases} \max cx \\ Ax \le b \end{cases}$

⓪ Supponiamo di avere un vertice $\bar{x} \in P$, e la sua base generatrice B $(\bar{x} = A_B^{-1} b_B)$

① costruiamo $\bar{y} = (\underbrace{cA_B^{-1}}_{\bar{y}_B}, \underbrace{\emptyset}_{\bar{y}_N})$ soluzione di base duale.

Se $\bar{y} \ge \emptyset$, siamo all'ottimo. Altrimenti dovrò operare un cambio di base.

Definiamo $W \triangleq -A_B^{-1}$. Indicheremo le colonne di W con W^i, in cui i è l'indice della colonna di base

e.g. se $B = \{1, 5\}$, W avrà colonne W^1, W^5

Per effettuare il cambio di base occorre determinare un indice uscente, h, ed uno entrante, k.

Criterio indice uscente:

Sceglierò h in modo che $c \cdot x$ aumenti nel nuovo vertice.

$$c(\bar{x} + \lambda W^i) = \underbrace{c\bar{x}}_{\text{valore f.o. corrente}} + \underbrace{\lambda}_{\ge \emptyset} \cdot \boxed{cW^i}$$ $\in \mathbb{R}$, e se $> \emptyset$ f.o. cresce.

$$c \cdot (-A_B^{-1})^i = -(\underbrace{cA_B}_{\bar{y}_B})^i = -\bar{y}_i$$ Se $\bar{y}_i \ge \emptyset \Rightarrow cW^i \le \emptyset$, dunque la f.o. decresce "in ogni direzione"

Basta quindi scegliere h tra gli indici di base per cui $y_h < \emptyset$. In particolare avremo:

$$h = \min\{i \in B : y_i < \emptyset\}$$ (prima regola anticiclo di Bland)

il primo tra gli indici

Criterio indice entrante

Devo controllare l'ammissibilità

$$A(\bar{x} + \lambda W^h) \le b \Rightarrow A_i(\bar{x} + \lambda W^h) \le b_i \Rightarrow A_i\bar{x} + \lambda A_i W^h \le b_i$$

① $i \in B. \Rightarrow A_i W^h = A_i(-A_B^{-1})^h$ sempre $\le \emptyset$. Perciò la disuguaglianza è vera $\forall i \in B$

② $i \in N$. Se $A_i W^h \le \emptyset \ \forall i \in N \Rightarrow (P) = +\infty$

Se $\exists$ almeno un prodotto scalare : $A_i W^h > \emptyset$ allora:

$$A_i\bar{x} + \lambda \underbrace{A_i W^h}_{>0} \le b_i \Rightarrow \lambda \le \frac{b_i - A_i\bar{x}}{A_i W^h} \triangleq r_i$$ → al più m-n

K sarà l'indice relativo a $\min \left\{ \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i w^h}, \begin{cases} i \in N \\ A_i w^h > 0 \end{cases} \right\}$

il primo che trovo (2ª Bland)

min perché devo soddisfare tutti i vincoli.

$A_i \bar{x} + \left(\frac{b_K - A_K \bar{x}}{A_K w^h} \right) A_i w^h$ per $i = K$ è esattamente b_K, perciò ho un vertice.

$\bar{\lambda}$

Regola anticiclo di Bland

Sia $\bar{x} \in P$ vertice

$\bar{x} + \bar{\lambda} w^h \longrightarrow$ Semiretta su cui effettuo lo spostamento

vertice passo direzione

Per diminuire la complessità scegliamo la direzione di crescita verso un altro vertice. Così facendo cambiamo un solo indice e l'inversione matriciale risulta molto meno complessa.

minimo dei rapporti uguaglianza nei casi degeneri

$\bar{\lambda} = \frac{b_K - A_K \bar{x}}{A_K w^h} \longrightarrow \geq \emptyset$

In caso di $\bar{\lambda} = \emptyset$, avrei uno spostamento nullo. (Tutti $> \emptyset$ e un nullo che è quindi sempre il minimo)

Si può dimostrare che, seguendo la regola di Bland, mi sposterò comunque.

minimo indice

Se non si è all'ottimo, l'indice di N degenere verrà prima o poi escluso poiché $A_K W^h$ diviene negativo.

Algoritmo del simplesso duale

Sia $\bar{y} \in D$ s.b.d. ammissibile, vertice di D.

1. calcolo $\bar{x}$ complementare.

   Se $\bar{x}$ è ammissibile, ovvero se $b_i - A_i \bar{x} \geq \emptyset \ \forall i \in N$, allora sono all'ottimo.

   Altrimenti: sia K il primo indice tale che $b_K - A_K \bar{x} < \emptyset$

   $\cap$ N Bland

2. Prendiamo i prodotti scalari $A_K W^i$ minori di $\emptyset$. Se tutti $\geq \emptyset \Rightarrow (D) = -\infty$

$h = \min \left\{ \frac{-\bar{y}_i}{A_K W^i}, \ i \in B, A_K W^i < \emptyset \right\}$. h è il primo degli indici "i" per il quale si raggiunge il minimo

Duale ausiliario

Dato il duale standard

$$\begin{cases} yA = c \\ y \geq \emptyset \end{cases}$$ costruiamo il duale ausiliario.

ci possiamo sempre riportare in questa condizione

Posto $c \geq \emptyset$, introduciamo una variabile ausiliaria $\varepsilon_i \geq \emptyset$ per ogni vincolo di uguaglianza.

Otteniamo così il duale ausiliario DA.

Costruiamo poi il problema (DA) come

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \\ (y, \varepsilon) \in DA \end{cases}$$ La cui soluzione ottima sia $(\bar{y}, \bar{\varepsilon})$ con valore ottimo V_{DA}

Teorema del duale Ausiliario

① Se $V_{DA} > \emptyset$, Allora $D = \emptyset$

punto di partenza per il duale

② Se $V_{DA} = \emptyset$, Allora $D \neq \emptyset$ e, a meno di casi degeneri, $\bar{y}$ è vertice di D.

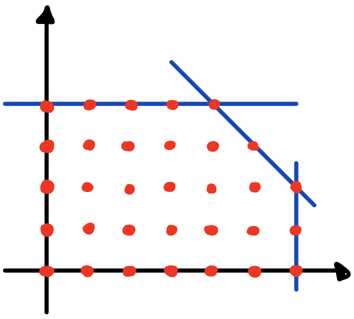
Modello generale duale ausiliario

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \\ yA + \varepsilon \overset{n \times n}{I} = c \\ y_i\ \varepsilon \geq \emptyset \end{cases}$$ $|N| = m\ (m + n - n)$

PLI

Modello generale PLI

$$\begin{cases} \max cx \\ \boxed{\begin{matrix} Ax \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{matrix}} \rightarrow P \end{cases}$$ $x \in \{0,1\}^n \rightarrow$ regione ammissibile limitata $\rightarrow$ formata da un numero finito di punti



Per risolvere, attuo stime dall'alto e dal basso

$V_I \le V_{PLI} \le V_S$

Metodi di valutazione

PLI → PL

$$\begin{cases} \max cx \\ Ax \le b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \max cx \\ Ax \le b \end{cases}$$

Chiamato anche Rilassamento continuo.

$$V_{PLI} \le V_{PL}$$

può essere $\lfloor V_{PL} \rfloor = V_S$

Modello generale problema di copertura

$$\begin{cases} \min \underset{\in \mathbb{R}^n}{c}\, \underset{\in \mathbb{R}^n}{x} \\ \underset{m \times n}{A}\, x \ge \underset{\mathbb{R}^m}{1} \\ x \in \{0,1\}^n \text{ ennuple} \end{cases}$$

Per la V_S, calcoliamo l'ottimo del RC

$$\begin{cases} \min cx \\ Ax \ge 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Per la V_I, calcoliamo una s.a. con un metodo Greedy

Teorema dell'interezza

I vertici del poliedro dell'assegnamento hanno tutte le componenti intere.

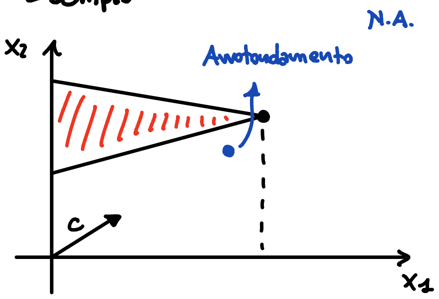
L'assegnamento non cooperativo è quindi un problema di PL, poiché le matrici di base sono tutte unimodulari ($\det = 1 \vee \det = -1$)

quindi i vertici sono tutti a componenti intere.

Osservazione

L'arrotondamento per difetto non è sempre ammissibile

Esempio



Quando lo è, risulta però essere un ottimo punto di partenza per il gap contenente V_{PLI}

Condizioni che garantiscono l'ammissibilità dell'arrotondamento per difetto

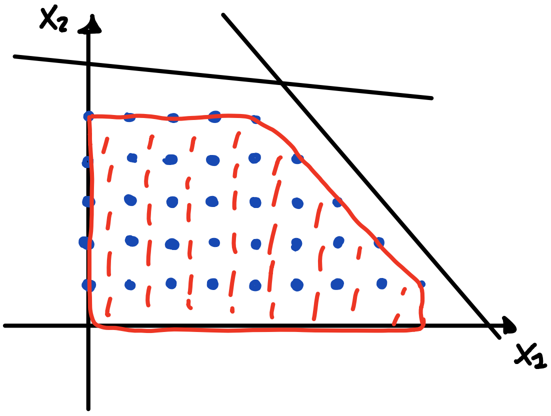
Sia $Ax \leq b$. se $a_{ij} \geq \emptyset \ \forall i,j$ e $b_i \geq \emptyset \ \forall i \Rightarrow$ l'arrotondamento è ammissibile (problemi di max)

Se $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ è S.O. di (RC) $\Rightarrow (\lfloor \bar{x}_1 \rfloor, \lfloor \bar{x}_2 \rfloor) \leq (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

$$\left\{\begin{array}{l} \max cx \\ \left.\begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{array}\right\} S \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \max cx \\ x \in conv(S) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \max cx \\ Ax \leq b \ \} P \end{array}\right.$$

= se si rispetta Th. interezza

$V_{PLI} \leq V_{conv S} \leq V_{PL}$



Teorema di equivalenza tra PL e PLI

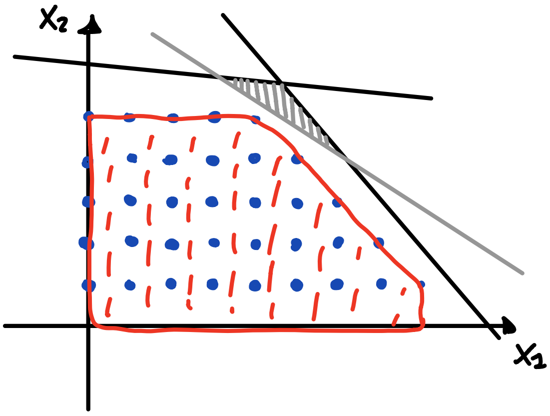
Siano A, b a componenti non irrazionali

Allora $V_S = V_{conv S}$ sempre

PLI PL

Trovare conv(S) a partire da A,b,c è praticamente impossibile. Questo è perciò un teorema puramente teorico

Metodi Risolutivi della PLI



$$\begin{cases} \max cx \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^n \\ \gamma \cdot x \leq \gamma_0 \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} Ax \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{matrix}\right\} S$$

$\underbrace{\gamma}_{\in \mathbb{R}^n} \cdot x = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_n x_n \leq \gamma_0 \in \mathbb{R}$

Disuguaglianza Valida

$\gamma x \leq \gamma_0$ si dirà disuguaglianza valida se:

$\gamma \bar{x} \leq \gamma_0 \; \forall \, \bar{x} \in S$

Inoltre, una disuguaglianza valida si dirà **piano di taglio** se $\gamma x_{RC} > \gamma_0$

ottimo del Rilassato Continuo

Piani di taglio di Gomory

Dato (PLI)

$$\begin{cases} \min cx \\ Ax = b \\ x \geq \emptyset \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$ duale standard

Sia A_B la matrice di base ottima relativa a x_{RC}.

soluzione del RC

Sia A_N la parte non di base.

$a \in \mathbb{R}$, $\{a\} \triangleq a - \lfloor a \rfloor$, sia $r \in B$ tale che $(x_{RC})_r$ sia non intero.

Costruiamo, per ogni r, un piano di taglio come segue

Teorema di Gomory

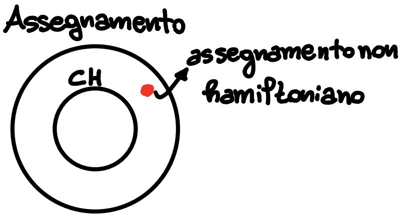
$\boxed{\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{rj}\} x_j \geq \{(x_{RC})_r\}}$, dove $\tilde{A} = A_B^{-1} \cdot A_N$, è un piano di taglio

$\gamma x \leq \gamma_0$

Ciclo Hamiltoniano

Si dice ciclo hamiltoniano un ciclo su un grafo che parte da un nodo, tocca tutti i nodi una ed una sola volta e torna al punto di partenza.

Dati n nodi, i cicli hamiltoniani possibili sono $(n-1)!$



Modello generale Travelling salesman problem (TSP)

$$
\begin{cases}
\min cx \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \;\; \forall j \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \;\; \forall i \\
\sum_{\substack{i \in S \\ j \notin S}} x_{ij} \geq 1 \;\; \forall S \subsetneq N, \; |S| \geq 1, S \neq \emptyset \\
x_{ij} \in \{0,1\}
\end{cases}
$$

Vincoli di assegnamento (primi due)

Vincoli di connessione (terzo); N: nodi

Se $c_{ij} \neq c_{ji}$ si dice TSP asimmetrico, simmetrico altrimenti

I vincoli di connessione impediscono il formarsi di cicli disgiunti

$$\sum_{\substack{i \in S \\ j \notin S}} x_{ij} \geq 1 \;\; \forall S \subsetneq N, \; |S| > 1$$

Posso richiedere $|S|>1$ poiché è garantito dai vincoli di assegnamento. Così elimino $2n$ vincoli

I possibili sottoinsiemi sono 2^n. I vincoli di connessione sono dunque $2^n - 2n - 2$. (vuoto ed N)

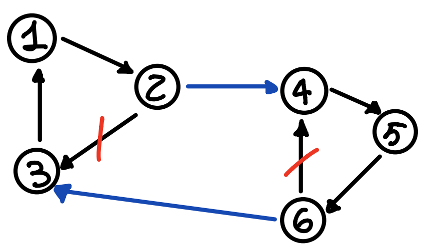
Il numero di vincoli risulta perciò intrattabile

TSP Asimmetrico

Per la V_I risolvo dopo l'eliminazione dei vincoli di connessione.

Per la V_S esiste l'algoritmo delle toppe

Partendo dalla V_I, si elimina un arco in ogni ciclo disgiunto e si sostituiscono con due archi incrociati.



Tolgo gli archi che costano molto

$$\boxed{\begin{matrix}(i,j) & (k,l) \\ & \Downarrow & \\ (i,l) & (k,j)\end{matrix}}$$

TSP Simmetrico

ho $\frac{n^2}{2}$ variabili

Modello generale

$$\begin{cases} \min cx \\ \displaystyle\sum_{(h,i)\in A} x_{hi} + \sum_{(i,k)\in A} x_{ik} = 2 \quad \forall \text{ nodo } i \\ \displaystyle\sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i\in S,\, j\notin S}} x_{ij} + \sum_{\substack{(i,j)\in A \\ i\notin S,\, j\in S}} x_{ij} \geq 1 \\ x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \text{con } S \subsetneq N,\ 1 < |S| < \left\lceil \frac{|N|}{2} \right\rceil \end{cases}$$

n vincoli, detti vincoli di grado

(somma degli archi a contatto con i)

↳ archi

$\in S$: 1 2 3 — $\notin S$: 4 5 6

Vincolo:
$x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{34}+x_{35}+x_{36} \geq 1$

Per la V_S si usa l'algoritmo del **nodo più vicino**.

Esempio:

$$C=\begin{pmatrix} 26 & 25 & 27 & 31 \\ & 25 & 24 & 22 \\ & & 28 & 29 \\ & & & 30 \end{pmatrix}$$

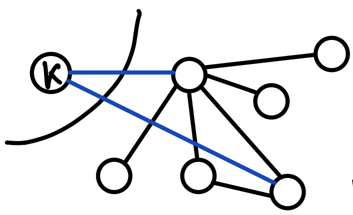
$3 \xrightarrow{25} 1 \xrightarrow{26} 2 \xrightarrow{22} 5 \xrightarrow{30} 4 \xrightarrow{28} 3 \qquad V_S = 131$

Per la V_I elimino tutti i vincoli di grado tranne 1, ottenendo la struttura connessa in cui un nodo ha per forza grado 2.

Lo facciamo costruendo **i k-alberi**:

Algoritmo di Kruskal

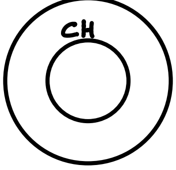
Dato il nodo k, lo si isola e si costruisce sui rimanenti un albero di copertura di costo minimo



Aggiungo poi due rami di costo minimo a partire da k.

V_I è data dal k-albero di costo minimo e valore massimo

K-alberi



Problema di copertura

$$\begin{cases} \min cx \\ \sum_{i=0}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 \quad \forall_{j=1,\dots} \\ x_j \in \{0,1\} \end{cases}$$

Come V_I utilizziamo la PL

Come V_S utilizziamo l'algoritmo di Chvatal oppure arrotondiamo per eccesso la soluzione dell'RC

Regole di riduzione delle matrici di copertura

1. Una riga di soli "$\emptyset$" produce un problema vuoto
2. Una riga di soli "1" si può eliminare
3. Una riga con un solo "1" ci obbliga ad un sito
4. Regola della dominanza

   Se una riga ne implica un'altra, l'implicata è eliminabile
5. Regola dei costi

   Se una colonna "i" implica una colonna "j", elimino "j" se $c_j > c_i$

Algoritmo di Chvátal

1. $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, n\}$, $x := \emptyset$
2. $\forall j \in J$ calcoliamo i costi unitari di copertura $u_j = \dfrac{c_j}{\sum_{i \in I} a_{ij}}$
3. $k \in J : u_k = \min_{j \in J} u_j$

   Si pone $x_k := 1$, si elimina k da J, si elimina da I $\{i : a_{ik} = 1\}$
4. Se $I = \emptyset$ x è una copertura
5. Se $J = \emptyset$ non esistono coperture

   Altrimenti si torna al passo 2

Problema di massima copertura

$$\begin{cases} \max \; hz \\ \sum a_{ij} x_j \geq z_i \\ \sum x_j = p \\ x_j \in \{0,1\},\; z_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

clienti "quartiere"

$z_i = 1$ se il quartiere è servito, $\emptyset$ altrimenti

n° siti di cui posso disporre

La V_S è la PL

Il numero di soluzioni ammissibili è $\binom{n}{p}$

Per la V_I applichiamo un algoritmo greedy:

1. $I = \{1, \cdots, m\}$, $J = \{1, \cdots, n\}$, $x := \emptyset$.
2. $\forall j \in J$ calcoliamo la domanda u_j coperta da j: $u_j = \sum_{i \in I : d_{ij} \leq D} h_i$ distanze
3. Sia $k \in J : u_k = \max_{j \in J} u_j$, allora $x_k = 1$, da J si elimina k, da I si elimina $\{i : d_{ik} \leq D\}$
4. Se $\sum_{j=1}^{n} x_j = p$ allora stop, altrimenti torna al passo 2

Problema del Bin Packing

x_{ij} $\begin{matrix} i = \text{contenitori} \\ j = \text{oggetti} \end{matrix} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

$y_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ contenitori $i = 1, \cdots, m$

Sia C = spazio singolo contenitore

Lo si può ridurre sfruttando la V_S

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \text{fissato } j \\ \sum_{j=1}^{m} p_j x_{ij} \leq C y_i \quad \text{fissato } i \\ x_{ij} \in \{0,1\},\; y_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

vincolo di semiassegnamento

Somma pesi oggetti nel contenitore i

P = somma dei pesi degli oggetti:

$\lceil P/C \rceil = V_I$

Algoritmi per la V_S

NFD

Esamina gli oggetti in ordine di peso decrescente

Il primo contenitore è il contenitore corrente.

Se possibile, assegna un oggetto al contenitore corrente; altrimenti ad un nuovo contenitore, che diventa il corrente

FFD

Esamina gli oggetti in ordine di peso decrescente.

Assegna ogni oggetto al primo contenitore usato che può contenerlo

Se nessuno di essi può contenerlo, assegna l'oggetto ad un nuovo contenitore

BFD

Esamina gli oggetti in ordine di peso decrescente

Tra tutti i contenitori usati che possono contenere un oggetto, scegli quello con la minima capacità residua

Se nessuno di essi può contenerlo, assegna l'oggetto ad un nuovo contenitore.

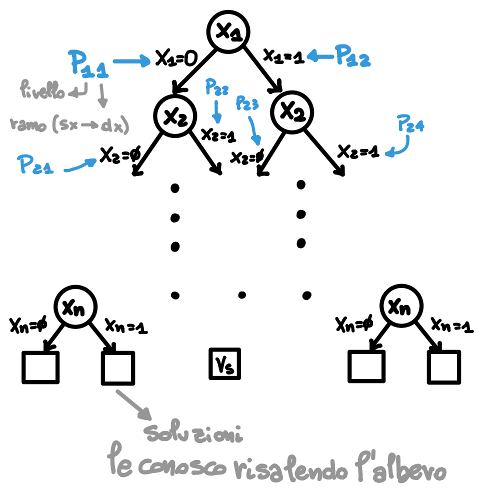
Algoritmo di Branch and Bound

È applicabile ad ogni problema di PLI. Di seguito illustrato su problemi di ottimizzazione combinatorica.

Problemi di minimo

$$\begin{cases} \min cx \\ Ax \leq b \\ x \in \{0,1\}^n \end{cases}$$ note una V_I ed una V_S

Si sceglie una variabile di partenza x_i; e.g. x_1



Regole di taglio

① $P_{ij} = \emptyset \Rightarrow$ taglio

② $V_I(P_{ij}) \geq V_S(P) \Rightarrow$ taglio

verifica dei vincoli di grado

③ Se $V_I(P_{ij}) < V_S(P)$ e la soluzione che fornisce $V_I(P_{ij})$ è ammissibile, si aggiorna $V_S(P)$ con $V_I(P_{ij})$ e si taglia

Problemi di massimo

1. $P_{ij} = \emptyset \Rightarrow$ taglio
2. $V_S(P_{ij}) \leq V_I(P) \Rightarrow$ taglio
3. Se $V_S(P_{ij}) > V_I(P)$ e la soluzione che fornisce $V_S(P_{ij})$ è ammissibile, si aggiorna $V_I(P)$ con $V_S(P_{ij})$ e si taglia

verifica dei vincoli di grado

P. L. su reti

Modello del problema di flusso su reti

$$\begin{cases} \min cx \\ Ex = b \\ x \geq \emptyset \end{cases}$$

con E matrice di incidenza della rete

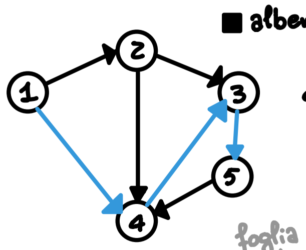
Teorema 1 sulle reti

Il rango della matrice E è $n-1$

nodi

Dimostrazione

- albero di copertura (tocca tutti i nodi senza cicli)



Scriviamo la matrice relativa all'albero di copertura (E_T)

Usiamo la tecnica di visita per foglie (posticipata)

foglia qualunque

$$\begin{array}{c|cccc} & 23 & 54 & 24 & 12 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

Triangolare inf. con $\det = \pm 1 \Rightarrow$ invertibile

Perciò ogni albero di copertura è invertibile $\Rightarrow |E| = n-1$

Perciò: se è una base $\Leftrightarrow$ è un albero   dimostr. slide 46 Reti

Conseguenze

Il problema di flusso a costo minimo è sempre di PL

Flusso di costo minimo su reti non capacitate

$$\begin{cases} \min cx \\ Ex = b \\ x \geq \emptyset \end{cases}$$

Test di ottimalità

Associamo al problema il seguente "duale"

$$\begin{cases} \max \pi b \\ \pi E \leq c \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} \pi \in \mathbb{R}^n \text{ nodi} \\ b \in \mathbb{R}^n \\ c \in \mathbb{R}^m \text{ archi} \\ E \in \mathbb{R}^{n \times m} \end{array}$$

problema dei potenziali della rete

Sia T l'insieme degli indici di base ed L dei non di base, definiamo condizioni di Bellman le condizioni:

$-\pi_i + \pi_j \leq c_{ij} \ \forall (i,j) \in L$ (La differenza di potenziale sugli archi di L dev'essere inferiore ai costi)

Teorema di Bellman

Data una base T che genera un flusso di base ammissibile:

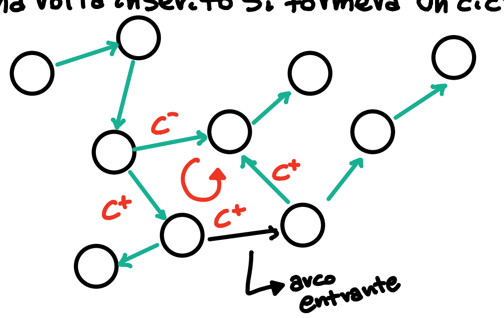
Se si verificano le condizioni di Bellman, siamo all'ottimo.
Un potenziale è degenere se verifica una delle equazioni non in base con l'uguale.

Simplesso su reti / per flussi:

Sia T una base che genera un flusso (x_T, x_L) ammissibile.
Se le condizioni di Bellman sono verificate allora il flusso è ottimo, altrimenti:
sia $(i,j) \in L$ tale che $-\pi_i + \pi_j > c_{ij}$, e sia primo in ordine lessico-grafico; questo è l'arco entrante.

Una volta inserito si formerà un ciclo $C = C^+ \cup C^-$

concordi all'entrante



Dato $\theta \geq \emptyset$, costruiamo un nuovo flusso di base $\bar{x}$:

$$x(\theta) = \begin{cases} \bar{x}_{ij} + \theta \ \forall (i,j) \in C^+ \\ \bar{x}_{ij} - \theta \ \forall (i,j) \in C^- \\ \bar{x}_{ij} \ \forall (i,j) \notin C \end{cases}$$

Teorema sulla correttezza del simplesso per flussi

Sia (i,j) l'arco che viola Bellman

$$c \cdot x(\theta) = c\bar{x} + \theta c^{\pi}_{ij} \quad \text{con} \quad c^{\pi}_{ij} \triangleq c_{ij} + \pi_i - \pi_j$$

costo ridotto di (i,j)

Osservazione

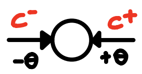
$-\pi_i + \pi_j > c_{ij} \Rightarrow c_{ij} + \pi_i - \pi_j < \emptyset$, perciò maggiore è θ, più minimizzo la f.o.

Ci chiediamo se $x(\theta)$ sia una base ammissibile

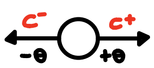
① Rispetta i bilanci?

ⓘ i nodi $\notin C$ li rispettano $\forall \theta$

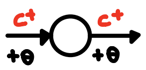
ⓘⓘ Per i nodi $\in C$ abbiamo quattro casi:

ii_1 

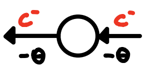
ok $\forall \theta$

ii_2 

ok $\forall \theta$

ii_3 

ok $\forall \theta$

ii_4 

ok $\forall \theta$

② $x(\theta) \geq \emptyset$?

C^+ sì $\forall \theta$, $\bar{x}_{ij} - \theta$, $(i,j) \in C^-$

$$\Rightarrow \theta \overset{\text{scelta}}{\underset{=}{\leq}} \min_{C^-} \{\bar{x}_{ij}\}, \quad (i,j) \text{ arco uscente}$$

Problema dei cammini minimi

$$\begin{cases} \min cx \\ Ex = b \\ x \geq \emptyset \end{cases} \quad \text{con } b_i = \begin{cases} -n+1 & i = r \\ 1 & i \neq r \end{cases}$$

Se $c \geq \emptyset$, non ho mai $(P) = -\infty$

Non esistono, in questo caso, soluzioni di base degeneri; si possono ignorare le regole anticiclo di Bland.

Si sceglie quindi sempre l'arco con costo ridotto minore.

Reti capacitate

$$\begin{cases} \min cx & u \in \mathbb{R}^m \\ Ex = b \\ \emptyset \le x \le u & x_{ij} \le u_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min cx & w \in \mathbb{R}^m \\ Ex = b \\ x + w = u \\ x, w \ge \emptyset \end{cases}$$

Ponendo $u = +\infty$ otteniamo il caso non capacitato

Poliedro dei flussi

$$\begin{cases} \underbrace{(x^T, w^T)}_{2m} \cdot \overbrace{\left(\begin{array}{c|c} E^T & I \\ \hline \emptyset & I \end{array}\right)}^{m+n-1} = \underbrace{(b, u)}_{\substack{m+n-1 \\ \text{equazioni}}} \\ x, w \ge \emptyset \end{cases}$$

$b \in \mathbb{R}^{n-1}$, $u \in \mathbb{R}^m$ → termini noti

Consideriamo la tecnica della tripartizione degli archi T, L, U tale che in T ci sia un albero di copertura ($|T| = n-1$) con eventualmente $L = \emptyset$ e/o $U = \emptyset$. Tale tripartizione conduce ad una tripartizione delle variabili $W \to T', L', U' \Rightarrow (x, w) = (x_T, x_L, x_U, W_{T'}, W_{L'}, W_{U'})$

Teorema di caratterizzazione delle basi

Una base del problema del flusso di costo minimo su reti capacitate è una tripartizione, ed ogni tripartizione è una base scegliendo gli indici T, U, T', L'

$$2m \begin{cases} \text{archi} \\ \text{variabili} \\ \text{scarto} \end{cases} \begin{array}{c} T \\ L \\ U \\ T' \\ L' \\ U' \end{array} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} E^T & I \\ \hline \emptyset & I \end{array}\right) \\ \;\; n-1 \quad m \end{array} \begin{array}{c} m \\ m \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} T & U \; T' \; L' \\ n-1 & m \end{array}$$

la matrice è invertibile

Costruzione del flusso di base su reti capacitate

$(x_T, x_L, x_U, W_{T'}, W_{L'}, W_{U'}) = (x, w)$ $\quad T \cup T' L'$ base

$(?, \emptyset, U_U, U_T - x_T, U_L, \emptyset)$

- Se $x_L = \emptyset \Rightarrow W_L = U_L$ poiché $x_L + W_L = U_L$
- Se $W_{U'} = \emptyset \Rightarrow x_U = U_U$ poiché $x_U + W_U = U_U$
- Poiché $x_T + W_T = U_T$
- Flusso sull'albero di copertura (visita posticipata per foglie)

Flusso di base ammissibile

$(x_T, x_U, W_{T'}, W_{L'}) \ge \emptyset$

- x_T ↓ $x_T \ge \emptyset$
- x_U ↓ sempre
- $W_{T'}$ ↓ $U_T \ge x_T$
- $W_{L'}$ ↓ sempre

$0 \le x_T \le U_T$

Degenere

Se una tra x_T, $\overset{\text{mai}}{x_U, W_{T'}}$, $W_{L'}$ è zero $\Leftrightarrow$ uno degli archi di T è $\emptyset$ o è saturo

x_T ↓ $x_T + W_T = U_T$ ↓ saturo

Potenziale Associato

$$\begin{cases} \min cx \\ Ex = b \\ x + w = u \\ x, w \geq \emptyset \end{cases} \xrightarrow{\text{associamo}} \begin{cases} \max \pi b + \mu u \\ \begin{pmatrix} E^T & I \\ \emptyset & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \mu \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ \emptyset \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E^T\pi + \mu = c \\ \mu \leq \emptyset \end{cases}$$

$$(\underbrace{\pi}_{\mathbb{R}^{n-1}}, \underbrace{\mu}_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}^{m+n-1}$$

Poliedro dei potenziali

$$2m \begin{cases} \text{archi} \\ \text{archi} \end{cases} \underbrace{\overbrace{\left(\begin{array}{c|c} E^T & I \\ \hline \emptyset & I \end{array}\right)}^{\text{nodi + archi}}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ \mu \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ \emptyset \end{pmatrix}$$

Nota $T \, L \, U$ che generi x ammissibile

ha le righe divise in 6 gruppi

Calcolo del potenziale di base

$$\begin{cases} E_T^T\pi + \mu_T \leq c_T \\ E_L^T\pi + \mu_L \leq c_L \\ E_U^T\pi + \mu_U \leq c_U \\ \mu_{T'} \leq \emptyset \\ \mu_{L'} \leq \emptyset \\ \mu_{U'} \leq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_T^T\pi + \mu_{T'} = c_T \longrightarrow E_T^T\pi = c_T \\ E_U^T\pi + \mu_{U'} = c_U \longrightarrow \mu_{U'} = c_U - E_U^T\pi \\ \mu_{T'} = \emptyset \\ \mu_{L'} = \emptyset \end{cases}$$

■ base
■ non base

Quindi:

$$(\pi, \mu) = (\underbrace{c_T E_T^{T-1}}_{\pi}, \underbrace{0, 0, c_U - E_U^T\pi}_{\mu})$$ Sol. base complementare

π si calcola come nelle reti non capacitate.

Per l'ammissibilità: $\begin{matrix} L \\ U' \end{matrix} \begin{cases} E_L^T\pi + \overset{\emptyset}{\overset{\parallel}{\mu_L}} \leq c_L \\ \mu_L \leq \emptyset \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\pi_i + \pi_j \leq c_{ij} \ \forall (i,j) \in L \\ -\pi_i + \pi_j \geq c_{ij} \ \forall (i,j) \in U \end{cases}$ Condizioni di Bellman

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} c_{ij}^{\pi} \geq \emptyset \ \forall (i,j) \in L \\ c_{ij}^{\pi} \leq \emptyset \ \forall (i,j) \in U \end{cases}$$

Teorema di Bellman

Sia T, L, U una tripartizione che genera un flusso di base ammissibile
Sia π il potenziale associato

Se valgono le condizioni di Bellman allora siamo all'ottimo

Un potenziale è degenere se uno degli archi di U o di L ha costo ridotto nullo.

Simplesso su reti capacitate

Data T, L, U che genera un flusso di base ammissibile

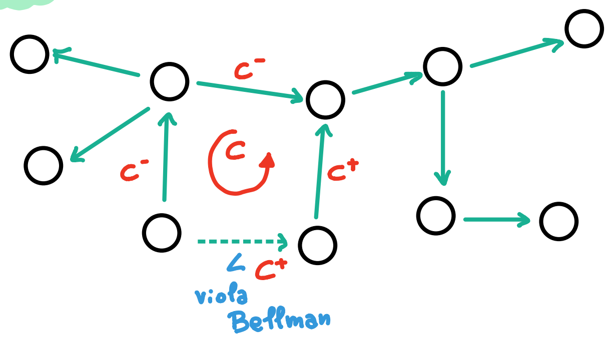
Calcoliamo π e calcoliamo $C_{ij}^{\pi} \triangleq C_{ij} + \pi_i - \pi_j$

Se $C_{ij}^{\pi} \geq \emptyset \ \forall (i,j) \in L$ e $C_{ij}^{\pi} \leq \emptyset \ \forall (i,j) \in U$ siamo alla T, L, U ottima, x ottimo, π ottimo. Bellman

Altrimenti sia (i,j) il 1° arco in ordine lessico-grafico che viola Bellman; tale arco sarà l'arco entrante.

Arco uscente

1° caso) (i,j) che viola Bellman $\in L$, cioè $C_{ij}^{\pi} < \emptyset$



$C = C^+ \cup C^-$; sia $\theta \in \mathbb{Z}^+$

$$x(\theta) = \begin{cases} \bar{x}_{ij} + \theta & (i,j) \in C^+ \\ \bar{x}_{ij} - \theta & (i,j) \in C^- \\ \bar{x}_{ij} & (i,j) \notin C \end{cases}$$

Si giustifica con il teorema di corr. su reti

Teorema di correttezza del simplesso su reti capacitate

$$C x(\theta) = C\bar{x} + \theta C_{ij}^{\pi}$$

$\geq \emptyset$ $< \emptyset$

$x(\theta)$ è ammissibile per $\emptyset \leq x(\theta) \leq u$; è necessario controllare i bilanci, poiché $x(\theta)$ potrebbe non essere di base. Come nelle reti non capacitate, abbiamo:

Bilanci rispettati: $\forall \theta \geq \emptyset$; $\theta \leq \min_{C^-} \{\bar{x}_{ij}\} = \theta^-$ $(0 \leq x\theta)$

quanto manca a saturare archi in C^+

Per $x(\theta) \leq u$ abbiamo problemi su C^+: vogliamo $\bar{x}_{ij} + \theta \leq u_{ij} \ \forall (i,j) \in C^+ \Rightarrow \theta \leq u_{ij} - \bar{x}_{ij} \ \forall (i,j) \in C^+$

$\Rightarrow \theta \leq \min_{C^+} \{u_{ij} - \bar{x}_{ij}\} = \theta^+$

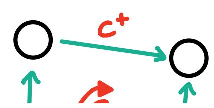
$\theta = \min \{\theta^-, \theta^+\}$

Arco uscente:

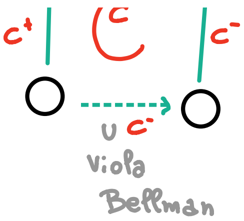
1a) $\theta = \theta^- \Rightarrow$ uno degli archi di C^- ha flusso $\emptyset$ e sarà l'arco uscente che va in L; sarà sicuramente diverso dall'arco entrante (C^+)

1b) $\theta = \theta^+ \Rightarrow$ un arco di C^+ è saturo e sarà uscente in U. Potrebbe essere l'arco entrante; non siamo in loop, poiché in tal caso l'arco andrebbe da L in U, cambiando la tripartizione.

2° caso) (i,j) che viola Bellman $\in U$; $C_{ij}^{\pi} > \emptyset$



L'arco violante era saturo, sommarci θ non avrebbe senso. Il ciclo ha verso discorde!



Teorema

$$cx(\theta) = c\bar{x} - \theta c_{ij}^{\pi}$$

$\underset{>\emptyset}{\theta}$, $c_{ij}^{\pi} \to > \emptyset$

L'ammissibilità è come sopra: $\theta^+, \theta^- \Rightarrow \theta = \min\{\theta^+, \theta^-\}$

Problema del flusso massimo

Modello

$$\begin{cases} \max v \\ Ex = b \\ \emptyset \le x \le u \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -v & i = o \ \text{(origine)} \\ \emptyset & i \neq o, d \\ v & i = d \ \text{(destinazione)} \end{cases}$$

$m+1$ variabili: (x, v)

È un problema di PL

Possiamo vederlo come problema di circolazione: l'ultima colonna, come tutte le altre, ha tutti $\emptyset$, 1 e -1. Allora posso aggiungere un arco da d a o con costo -1 e portata $+\infty$, e cambiare i bilanci di o e d in $\emptyset$.

Così facendo, lo trasformiamo in un problema di costo minimo! È dunque PL su reti

Taglio di una rete

$N_o \cup N_d = N$, con $o \in N_o$ e $d \in N_d$

Portata del taglio

$$u(N_o, N_d) \triangleq \sum_{\substack{i \in N_o \\ j \in N_d}} u_{ij}$$

Teorema "max flow – min cut"

Se esistono un flusso ammissibile x ed un taglio ammissibile (N_o, N_d) tali che:

$$x(N_o, N_d) = u(N_o, N_d),$$

allora x è un flusso di valore massimo e (N_o, N_d) è un taglio di capacità minima

Algoritmo di Dijkstra

Con ipotesi $c_{ij} \ge \emptyset$.

Si mantengono due vettori: p (predecessori) e π (etichette), con π_i = costo cammino da r (radice) ad i, e $Q = \underbrace{\{1, 2, \cdots, n\}}_{\text{nodi}}$

Inizialmente poniamo $p_i = \begin{cases} -1 & i \neq r \\ \emptyset & i = r \end{cases}$ e $\pi_i = \begin{cases} +\infty & i \neq r \\ \emptyset & i = r \end{cases}$

Stella uscente dal nodo i: insieme dei nodi raggiungibili da i con archi diretti.

Selezioniamo in Q il nodo di etichetta minima, sia esso "i". Per ogni $j \in FS(i)$ controlliamo $\pi_j > \pi_i + c_{ij}$

controllo di Dijkstra $c_{ij}^{\pi} < \emptyset$

Se vero, aggiorno:

$\pi_j = \pi_i + c_{ij}$; $\rightarrow c_{ij}^{\pi} = \emptyset$

$p_j = i$.

Altrimenti lascio invariato e ripeto

Algoritmo di Ford-Fulkerson

Si basa sul teorema max flow - min cut.

Dato un flusso ammissibile x, il grafo residuo $G(x) = (N, A(x))$ è un grafo con gli stessi nodi del grafo G, mentre gli archi e le loro capacità residue r_{ij} sono così definiti:

$(i,j) \in A,\ x_{ij} < u_{ij} \Rightarrow (i,j) \in A(x),\ r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$;

$(i,j) \in A,\ x_{ij} > \emptyset \Rightarrow (j,i) \in A(x),\ r_{ij} = x_{ij}$

Cammino aumentante

Dato un flusso ammissibile x, un cammino aumentante (rispetto ad x) è un cammino orientato da s a t nel grafo residuo $G(x)$ fatto tutto da archi con capacità residua positiva.

Tale cammino può essere non orientato nel grafo di partenza.

Ad ogni passo: se esiste un cammino aumentante, il flusso viene aggiornato spendendo il massimo possibile sul cammino trovato, uguale alla minima capacità residua degli archi che lo formano.

Se non esistono cammini aumentati, il flusso corrente è massimo e l'algoritmo trova anche un taglio di capacità minima.

1. inizializza il flusso $x_{ij} = \emptyset \quad \forall (i,j) \in A$
2. costruisci $G(x)$
3. Se esiste C_{aum} calcola $\delta = \min\{r_{ij} : (i,j) \in C_{aum}\}$;

$\forall (i,j) \in A$ poni $x_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \delta & \text{se } (i,j) \in C_{aum} \\ x_{ij} - \delta & \text{se } (j,i) \in C_{aum} \\ x_{ij} & \text{altrimenti} \end{cases}$

torna a 2

ultima croce
quelli su cui posso mandare flusso $\rightarrow N_s$
gli irraggiungibili $\rightarrow N_t$

Altrimenti x è un flusso massimo, un taglio di capacità minima è (N_s, N_t) con:

$$N_s = \{i \in N : \exists \text{ un cammino orientato da } s \text{ ad } i \text{ in } G(x)\}$$
$$N_t = N \setminus N_s$$

La complessità è $O(mU)$ con $U = n \cdot \max_{(i,j) \in A} \{u_{ij}\}$

PNL

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in D \subseteq \mathbb{R}^n \end{cases} , \quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} , \quad f(x_1, \dots, x_n)$$

Regione ammissibile (Dominio)

① $D = \mathbb{R}^n$
ottimizzazione non vincolata (libera) } non esiste nella PL

② $D \subset \mathbb{R}^n$
ottimizzazione vincolata } Caso che si ritrova nella pratica.

Ipotesi

$f \in C^2$ (C^∞): Caso regolare.

Dettagli sulla regione ammissibile

Ipotesi: $D = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) \leq \phi, \dots, g_m(x) \leq \phi, h_1(x) = \phi, \dots, h_p(x) = \phi\}$

con $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, m$; $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ \forall j = 1, \dots, p$; $g_i, h_j \in C^2 \ \forall i,j$

Per ciò i poliedri sono del tipo:

$D = \{Ax \leq b\}$ $\qquad g_1 : 3x_1 + 5x_2 \leq 6 \Rightarrow g_1 = 3x_1 + 5x_2 - 6$

Considerazioni sull'esistenza di $\min\limits_{x \in D} f(x)$

D è sempre chiuso ($g \leq \phi$, $h = \phi$)

Se D è limitato $\Rightarrow \exists$ min/max per Weierstrass

Se D non è limitato può o meno esistere caso con "pochi vincoli"

Se $D = \phi$ "ho troppi vincoli"

Strumenti di analisi

① **Gradiente**

Dal teorema di Fermat, se $\bar{x}$ è interno a D, allora $\bar{x}$ minimo locale $\Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \phi$

② **Hessiana**

Sia $\bar{x}$ un punto tale che $\nabla f(\bar{x}) = \phi$, $\bar{x}$ interno a D, Allora:

① Se $Hf(\bar{x}) > \phi \Rightarrow \bar{x}$ minimo locale

② Se $\bar{x}$ minimo locale $\Rightarrow Hf(\bar{x}) \geq \phi$

③ Se $Hf(\bar{x}) < \phi \Rightarrow \bar{x}$ massimo locale

④ Se $\bar{x}$ massimo locale $\Rightarrow Hf(\bar{x}) \leq \emptyset$

Osserviamo come:

Possono esserci minimi e massimi locali (no nella PL)

Può esistere l'estremo inferiore e non essere un minimo
Può esistere l'estremo superiore e non essere un massimo
$\Big\}$ non si verificano se D è chiuso e limitato

$\nabla f(\bar{x}) = \emptyset$ è un sistema non lineare di n equazioni in n incognite; può avere un numero qualsiasi di soluzioni.

In generale, saperlo risolvere non mi da sicuramente il minimo globale, poiché:

① Potrebbe non esistere

② Se esiste, potrebbe essere sul bordo di D e non interno.

Funzione convessa

f è convessa se $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0,1]$ $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

graficamente significa che il suo grafico sta sotto le corde

oppure
$f \in C^2$ è convessa se e solo se la sua Hessiana è semidefinita positiva in ogni punto

Se f è convessa, $D = \mathbb{R}^n$, $\nabla f(\bar{x}) = \emptyset \Rightarrow \bar{x}$ minimo globale

, $D \subset \mathbb{R}^n$ limitato, $\nabla f(\bar{x}) = \emptyset \Rightarrow$ non esistono minimi locali

Funzione coerciva

f si dirà coerciva se:

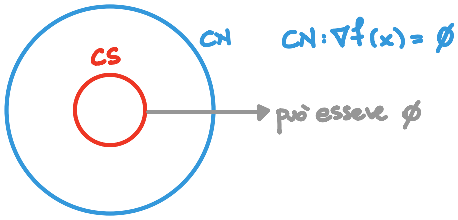
$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

norma

Teorema sulle funzioni coercive

Una funzione f coerciva ha minimo globale su $\mathbb{R}^n$
Una funzione f tale che $-f$ è coerciva ha massimo globale su $\mathbb{R}^n$

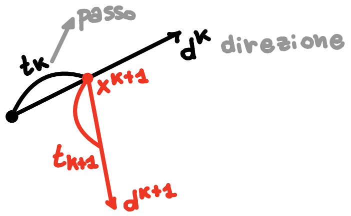
Analisi del caso $D=\mathbb{R}^n$



La CN può darmi: minimi locali, minimi globali, massimi locali, massimi globali, selle.

Dato un algoritmo ricorsivo del tipo:

$\underset{\mathbb{R}^n}{x^{k+1}} = \underset{\mathbb{R}^n}{x^k} + \underset{\mathbb{R}}{t_k}\, \underset{\mathbb{R}^n}{d^k}$; visualizziamolo graficamente:



Analisi caratteristiche fondamentali degli algoritmi

Sia d^k una direzione di "discesa" locale

Scegliendo opportunamente t_k, si ottiene $f(x^{k+1}) < f(x^k)$

Trovo "tendenzialmente" minimi locali. Non si ha un modo esatto per trovare minimi globali

L'algoritmo può non terminare in un numero fisso di passi.

Se ho funzioni convesse, prive perciò di minimi locali, l'algoritmo risulta "perfetto"

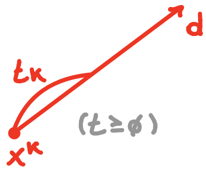
Criteri di stop

Supposto che esista, quale che sia l'algoritmo, un teorema del tipo:

La successione $\{x^k\}$, costruita con il metodo di discesa, converge ad x^* stazionario.

Allora possiamo porre come criterio di stop $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon$

Direzioni di discesa



Semiretta uscente da x^k in direzione d^k

$\varphi(t) \triangleq f(\underbrace{x^k + t d^k})$; $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

restrizione della f alla semiretta

Poiché $f \in C^1 \Rightarrow \varphi \in C^1$. La derivata prima di φ è infatti la derivata direzionale di f in direzione d^k

$\varphi'(t) = \nabla f(x^k + t d^k) \cdot d^k \Rightarrow \varphi'(0) = \nabla f(x^k) \cdot d^k$

Quindi, se $\nabla f(x^k) d^k < \emptyset \Rightarrow d^k$ è una direzione di discesa.

Poniamo allora $d^k = -\nabla f(x^k)$ e otteniamo che $\nabla f(x^k) \cdot d^k = -\|\nabla f(x^k)\|^2 < \emptyset$ a meno che $\nabla f(x^k) = \emptyset$

Metodo del gradiente

$x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k)$

Per la scelta di t_k usiamo la ricerca esatta:

$t_k \in \underset{t \geq \emptyset}{\text{argmin}}\ f(\underbrace{x^k - t \nabla f(x^k)}_{\varphi(t)})$ con argmin = insieme dei punti di minimo

Perciò, nei casi di minimo e massimo abbiamo

1. $x^{k+1} = x^k + t_k \nabla f(x^k)$ successione di ricorrenza per il massimo

   $\Rightarrow t_k \in \underset{t \geq \emptyset}{\text{argmax}}\ f(x^k + t \nabla f(x^k)) = \underset{t \geq \emptyset}{\text{argmax}}\ \varphi(t)$

2. $x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k)$ successione di ricorrenza per il minimo

   $\Rightarrow t_k \in \underset{t \geq \emptyset}{\text{argmin}}\ f(x^k - t \nabla f(x^k)) = \underset{t \geq \emptyset}{\text{argmin}}\ \psi(t)$

Teorema di convergenza per minimi

Sia f coerciva

mai massimi per la scelta di d^k

Allora tutti i punti di accumulazione di $\{x^k\}$ sono stazionari (minimi o selle)

Notare che, in caso di selle, analizzando i punti d'intorno troveremo una nuova d^k

Analisi PNL vincolata

Dominio regolare

D è regolare se verifica una delle seguenti condizioni:

1. g, h lineari $\Rightarrow$ D è un poliedro
2. g convessa, h lineare, $\exists\, \hat{x} : g(\hat{x}) < \emptyset$ (condizione di Slater)
3. Se i gradienti dei $\underbrace{\text{vincoli attivi}}_{g_i(x)}$ in un punto di D sono linearmente indipendenti (Mangasarian-Fromovitz)

   $g_i(x)$ è attivo in x^* se $g_i(x^*) = \emptyset$

Teorema di Lagrange - Karush - Kuhn - Tucker

CN di ottimalità nel caso vincolato

Sia D un dominio regolare

① Se $\bar{x}$ è minimo locale, allora:

$\exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m, \bar{\lambda} \geq \phi; \exists \bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$ tali che

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \nabla h_j(\bar{x}) = \phi \\ \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = \phi \quad \forall i=1,\dots,m \\ h_j(\bar{x}) = \phi \quad \forall j=1,\dots,p \end{array}\right.$$

sistema di $m+p+n$ equazioni non lineari in $m+p+n$ incognite $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$

Tali soluzioni sono dette punti stazionari

② Se $\bar{x}$ è massimo locale, allora

$\exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m, \bar{\lambda} \leq \phi; \exists \bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$ tali che

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \bar{\mu}_j \nabla h_j(\bar{x}) = \phi \\ \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = \phi \quad \forall i=1,\dots,m \\ h_j(\bar{x}) = \phi \quad \forall j=1,\dots,p \end{array}\right.$$

Se D è irregolare

$$\underbrace{\{\text{stazionari}\}}_{\text{soluzioni LKKT}} \cup \{\text{irregolari}\} = \{\text{candidati a soluzione del problema}\}$$

Teorema: CS di ottimalità per problemi convessi

Sia D regolare e convesso, e sia f convessa

① Sia $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ soluzione del sistema LKKT con $\bar{\lambda} \geq \phi$; allora $\bar{x}$ è minimo globale

Sia D regolare e convesso, e sia f concava

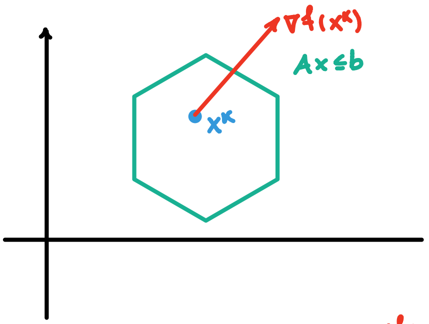
② Sia $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ soluzione del sistema LKKT con $\bar{\lambda} \leq \phi$; allora $\bar{x}$ è massimo globale

Attraverso l'analisi locale tramite restrizioni è possibile discernere tra minimi/massimi locali e selle.

E' noto che se un punto $\bar{x}$ e max/min locale, lo è "lungo" qualunque restrizione

Metodo di Frank-Wolfe

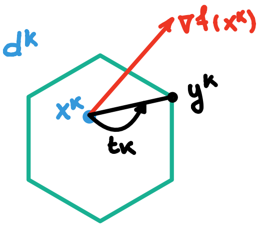
$$\begin{cases} \max f(x) \\ Ax \leq b \end{cases}$$ con $Ax \leq b$ limitato, $f \in C^1$



$x^K \in$ poliedro possiamo trovarlo con il duale ausiliario

■ è una direzione di salita $\nabla f(x^K) \cdot d^K \geq \emptyset$

$x^{K+1} = x^K + t_K d^K$



$$PL(x^K) = \begin{cases} \max \nabla f(x^K) x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

problema linearizzato in x^K, con soluzione ottima y^K

$$t_K \in \underbrace{\operatorname{argmax}_{t \in [0,1]}}_{\text{per non "uscire" dal poliedro}} f(x^K + t \underbrace{(y^K - x^K)}_{\text{segmento } x^K - y^K})$$

Teorema di convergenza per Frank-Wolfe

la soluzione $\{x^K\}$ converge ad una soluzione del sistema LKKT; oppure ogni punto di accumulazione è soluzione del sistema LKKT

Criteri di stop

1. numero di passi
2. $\|\nabla f(x^K)\| < \varepsilon$
3. $|f(x^{K+1}) - f(x^K)| < \varepsilon$

} Criteri di stop generali

Per Frank-Wolfe possiamo adottare come criterio di stop anche $y^K = x^K$

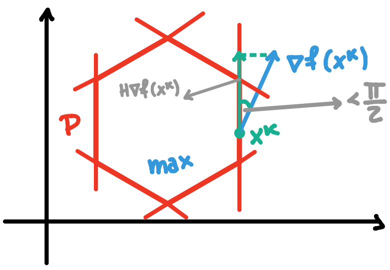
Casi particolari

Se f è concava, allora $\{x^K\}$ converge al massimo globale.

Metodo per minimi

$$PL(x^K) = \begin{cases} \min \nabla f(x^K) x \\ Ax \leq b \end{cases}$$; $t_K \in \operatorname{argmin}_{t \in [0,1]} f(x^K + t_K(y^K - x^K))$; f convessa $\Rightarrow \{x^K\} \rightarrow$ minimo globale

Metodo del gradiente proiettato



Ipotesi: D è un poliedro limitato

$< \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ salita $\longrightarrow$ minore è l'angolo, maggiore è la crescita, poiché

$\varphi'(0) = \|\nabla f(x^k)\| \cdot \|d^k\| \cdot \boxed{\cos\theta_k}$

$x^{k+1} = x^k + t_k d^k \nearrow \mathrm{Proj}_P(\nabla f(x^k))$

$\hookrightarrow$ passo ideale è $t_k = \underset{t\in[0,\bar t]}{\mathrm{argmax}}\ f(x^k + t d^k)$

Proiezione su varietà lineari

$\{x : Vx = \emptyset\} = S$ con $V \in M^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$

$\hookrightarrow$ "Lato del poliedro"

Teorema della matrice di proiezione

Dato $y \in \mathbb{R}^n$, la proiezione ortogonale di y sulla varietà S è data da $H \cdot y$, dove:

$\boxed{H = I - V^T(VV^T)^{-1}V}$ matrice di proiezione.

$\in M^{n\times n}$

Ricorda: Data A, $(A \cdot A^T)$ è sempre invertibile

Algoritmo

sottomatrice dei vincoli attivi

1. Sia $\mathcal{A} = \{i : A_i x_k = b_i\}$ e V la sottomatrice di A avente per righe i vettori A_i con $i \in \mathcal{A}$
2. Calcoliamo H e $d^k = H(-\nabla f(x^k))$ ($H\nabla f(x^k)$) max

   se $\mathcal{A} = \emptyset \Rightarrow H = I \Rightarrow d^k = -\nabla f(x^k)$ ($\nabla f(x^k)$)

3. Se $d^k \neq \emptyset$, calcoliamo $\hat t_k$, soluzione di:

$$\begin{cases} \max t \\ A(x^k + t d^k) \le b \end{cases}$$

è un problema di PL in una variabile con n-1 equazioni se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

e calcoliamo:

$$t_k \in \underset{t\in[0,\hat t_k]}{\mathrm{argmin}}\ f(x^k + t d^k) \quad (\mathrm{argmax})$$

Se $d^k = \emptyset$, calcoliamo $\lambda = -(VV^T)^{-1} V \nabla f(x^k)$

Se $\lambda \ge \emptyset$ stop, sono ad una soluzione LKKT candidata minima
($\lambda \le \emptyset$ stop, sono ad una soluzione LKKT candidata massima)

altrimenti calcolo $\lambda_j = \min_{i \in A} \lambda_i$ elimino da V la riga j e torno a 2

segno misto di λ

$\lambda_j = \max_{i \in A} \lambda_i$

$\lambda \in \mathbb{R}^p$ con $p =$ n° vincoli attivi, $V \in M^{p \times n}$