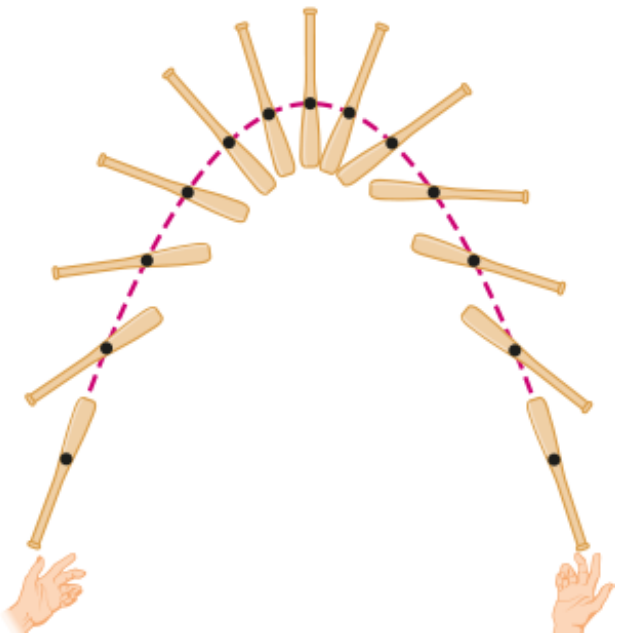
Corpo rigido

Un **corpo rigido** è un corpo in cui le distanze relative tra tutte le sue particelle rimangono costanti nel tempo, indipendentemente dalle forze che agiscono su di esso. In altre parole, un corpo rigido non subisce deformazioni sotto l'azione di forze esterne.

Matematicamente, questo implica che per ogni coppia di particelle P_1 e P_2 di un corpo rigido, la distanza tra di esse $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ non cambia nel tempo. Pertanto, il corpo rigido si muove come una singola unità senza alterazioni nella sua forma.



Il moto di un corpo rigido è una combinazione di traslazione e rotazione.

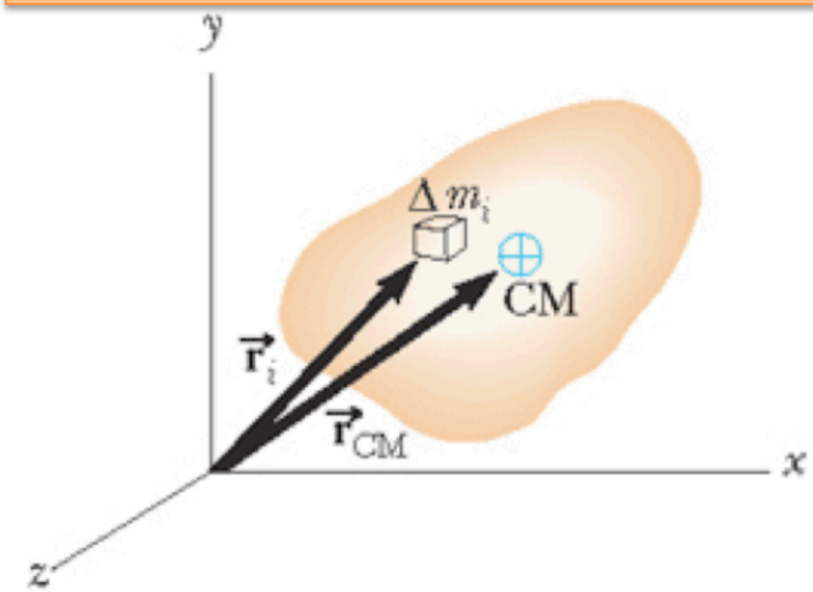
Centro di massa del corpo rigido

Per un corpo omogeneo di massa M e volume V il vettore posizione del centro di massa è:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}dm = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho dV$$

Se il corpo è omogeneo:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{V}\int \vec{r}dV$$

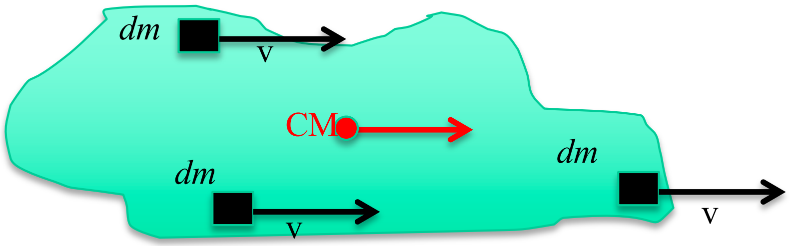


La quantità di moto di un corpo rigido è:

$$\vec{p}_{corpo\ rigido} = \vec{p}_{CM} = M\vec{v}_{CM} = M\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}$$

Moto di pura traslazione: velocità

Traslazione: Ogni punto del corpo rigido si sposta della stessa quantità lungo una traiettoria parallela. In questo caso, il corpo rigido si muove come se tutte le sue particelle fossero vincolate a un singolo punto di riferimento.



- Tutte le particelle che costituiscono il corpo rigido subiscono lo stesso spostamento nello stesso intervallo di tempo.

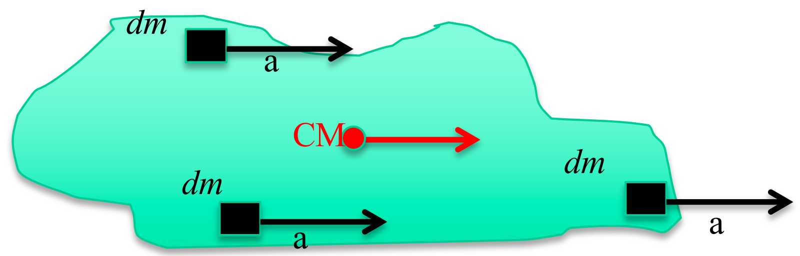
- Tutti i punti del corpo rigido si muovono con la stessa velocità, $\vec{v}$, che coincide con la velocità del centro di massa:

$$\vec{v} = \vec{v}_{CM}$$

Moto di pura traslazione: accelerazione

Nel caso di pura traslazione, tutte le particelle hanno la stessa accelerazione, che è quella del centro di massa:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\int \vec{a}dm}{M} = \vec{a}\frac{\int dm}{M} \equiv \vec{a}$$



$\vec{F}_{RIS,EXT} = 0$

Come nel caso dei sistemi di punti materiali, abbiamo (prima equazione cardinale per il corpo rigido):

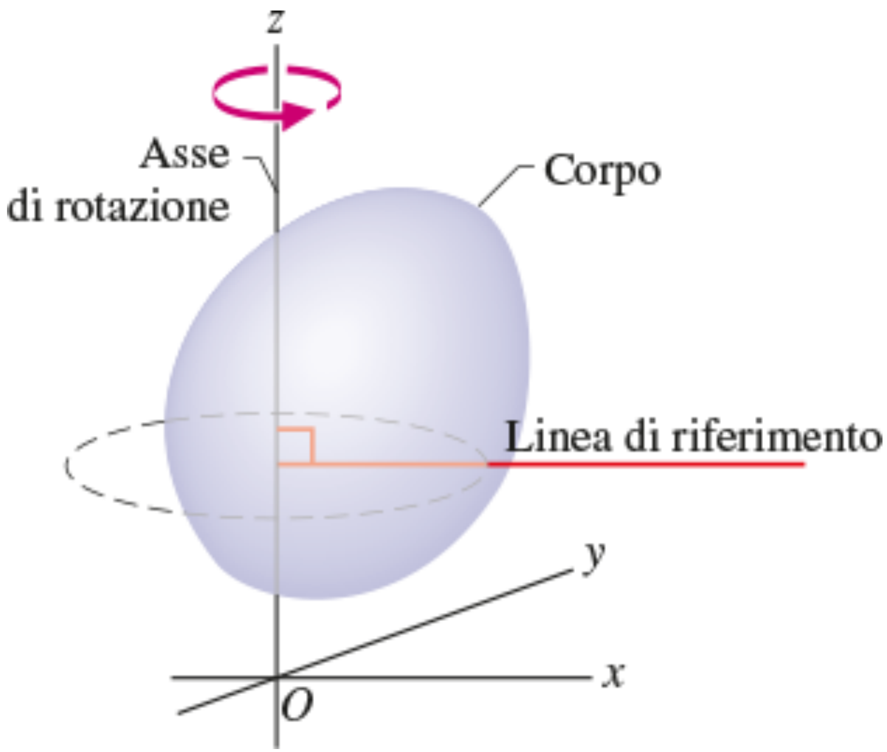
$$M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt} = \vec{F}_{ris,ext}$$

- Il centro di massa di un corpo rigido si muove come un punto materiale di massa totale M soggetto alla sola risultante delle forze esterne.

Se la risultante delle forze esterne agenti sul corpo rigido è nulla, la velocità del centro di massa rimane costante in modulo, direzione e verso.

Moto di pura rotazione

Rotazione: Ogni punto del corpo rigido si muove lungo una traiettoria circolare attorno a un asse fisso. In questo caso, il corpo rigido ruota intorno a un asse di rotazione, e la velocità angolare è la stessa per tutte le particelle del corpo.



- La dinamica della rotazione è determinata dal teorema del momento angolare (seconda equazione cardinale per il corpo rigido):

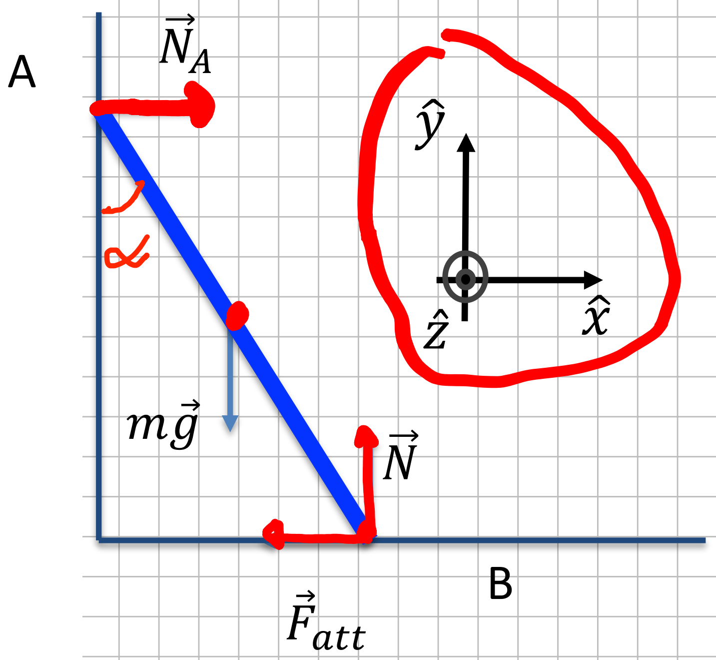
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext,i} = \vec{\tau}_{ext}$$

dove $\vec{r}_i$ sono i punti di applicazione delle forze $\vec{F}_{ext,i}$.

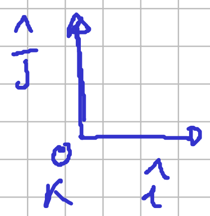
Esercizio

Un' asta di lunghezza l e massa m, è appoggiata su due pareti (una verticale e una orizzontale). Sul piano orizzontale è presente attrito ($\mu_s = 0.2$) mentre la parete verticale è liscia. Determinare:

- l'angolo massimo (α_{max}) di equilibrio.



$$\vec{N}_A + \vec{N} + M\vec{g} + \vec{F}_{Att} = 0$$



$$\begin{cases} N - mg = 0 \\ N_A - F_{Att} = 0 \end{cases}$$

$N = mg$

$F_{Att} = N_A$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{Ext} = 0 \qquad \vec{\tau}_{Ext} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{Ext} = 0$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{\vec{N}_A} + \vec{\tau}_{m\vec{g}} + \vec{\tau}_{\vec{N}} + \vec{\tau}_{\vec{F}_{Att}} = 0$$

$$\vec{N}_A = N_A\,\hat{i} \qquad \vec{r}_A = -l\sin\alpha\,\hat{i} + l\cos\alpha\,\hat{j}$$

$$m\vec{g} = -mg\,\hat{j} \qquad \vec{r}_{m\vec{g}} = -\frac{l}{2}\sin\alpha\,\hat{i} + \frac{l}{2}\cos\alpha\,\hat{j}$$

$$\vec{\tau}_{\vec{N}_A} = \underbrace{-N_A l\sin\alpha\,(\hat{i}\times\hat{i})}_{=0} + N l\cos\alpha\,(\hat{j}\times\hat{i})$$

$$\vec{\tau}_{m\vec{g}} = \frac{mgl}{2}\sin\alpha\,(\hat{i}\times\hat{j}) \underbrace{- \frac{mgl}{2}\cos\alpha\,\hat{j}\times\hat{j}}_{=0}$$

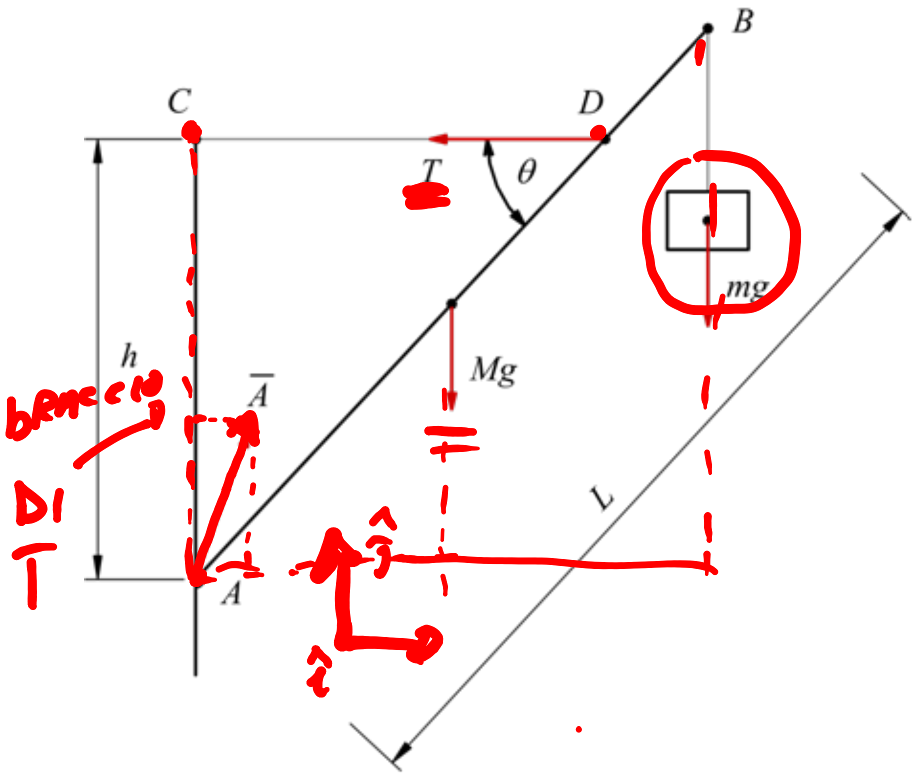
$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k} \qquad \hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}$$

$$\vec{\tau}_{RIS} = -N_A \, l \cos\alpha \, \hat{k} + \frac{mgl}{2} \sin\alpha \, \hat{k}$$

$$N_A \, l \cos\alpha = \frac{mgl}{2} \sin\alpha$$

$$N_A = \frac{mg}{2} \, Tg\,\alpha$$

Esercizio



Una massa m è sostenuta nel sistema in figura da un'asta rigida di lunghezza L e di massa M.

Il sistema è mantenuto in equilibrio grazie a un filo ideale, collegato alla parete nel punto C e all'asta in D in modo che sia orizzontale.

L'asta, è libera di ruotare attorno a un perno in A ed è inclinata di un angolo θ. La distanza AC è h. Determinare:

- La tensione del filo.
- La reazione del perno.

$$m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A = 0$$

$$-T + \underline{F_{Ax}} = 0$$

$$-mg - Mg + \underline{F_{Ay}} = 0$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{FA} + \vec{\tau}_{Mg} + \vec{\tau}_{mg} + \vec{\tau}_{T} = 0$$

$$\vec{\tau}_A = -\frac{MgL}{2}\cos\theta\,\hat{k} - mgL\cos\theta\,\hat{k} + Th\,\hat{k} = 0$$

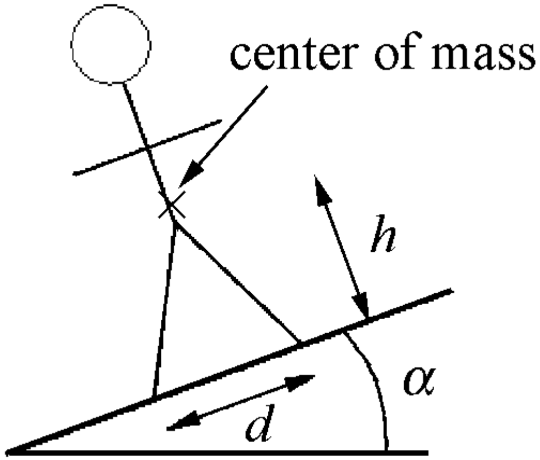
MOMENTO RISULTANTE RISPETTO AL POLO A

$$T = \left(\frac{M}{2} + m\right) g\,\frac{L\cos\theta}{h}$$

$$F_{Ax} = \left(\frac{M}{2} + m\right) g\,\frac{L\cos\theta}{h} \qquad F_{Ay} = (M+m)g$$

$$\underline{F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2}}$$

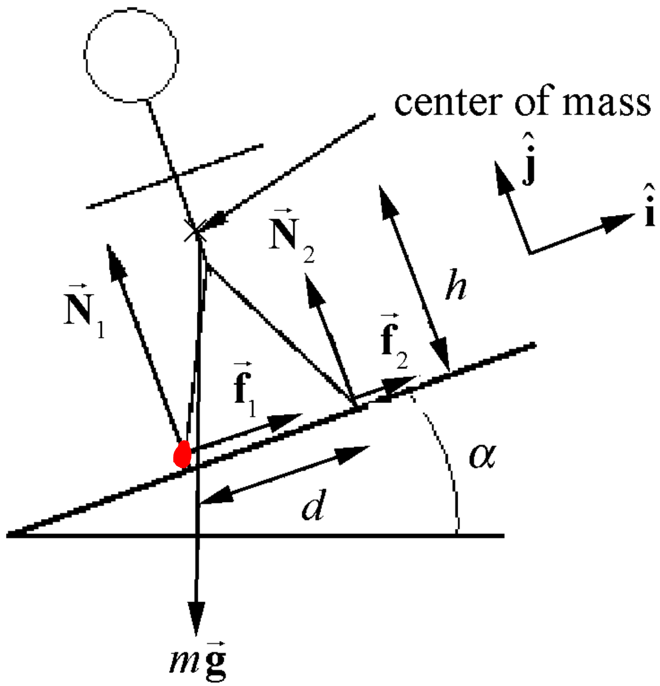
Esercizio



Una persona sta in piedi su una collina inclinata ad un angolo α rispetto all'orizzontale. Le gambe della persona sono separate da una distanza d, con un piede in alto e uno in basso lungo la pendenza. Il centro di massa della persona si trova ad una distanza h dal suolo, perpendicolare alla collina, a metà strada tra i piedi. Si assuma che il coefficiente di attrito statico tra i piedi della persona e la collina sia sufficientemente alto da impedire lo scivolamento.

- Qual è il valore della forza normale su ciascun piede?

- A che distanza devono trovarsi i piedi affinché la forza normale sul piede più alto sia esattamente zero? Questo è il momento in cui la persona inizia a ruotare e a cadere.



EQ. TRASLAZIONALE

$$N_1 + N_2 - mg\cos\alpha = 0$$

$$f_1 + f_2 - mg\sin\alpha = 0$$

$$N_1 + N_2 = mg\cos\alpha$$

$$f_1 + f_2 = mg\sin\alpha$$

$$h f_1 + h f_2 + N_2 \frac{d}{2} - N_1 \frac{d}{2} = 0$$

$$N_1 - N_2 = \frac{2h}{d}(f_1 + f_2) = \frac{2h}{d} mg\sin\alpha$$

$$N_1 + N_2 = mg\cos\alpha$$

$$N_1 - N_2 = \frac{2h}{d} mg\sin\alpha$$

$$N_1 = \frac{\frac{2h}{d}(mg\sin\alpha) + mg\cos\alpha}{2} =$$

$$= mg\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{h}{d}\sin\alpha\right)$$

$$N_2 = mg\left(\frac{\cos\alpha}{2} - \frac{h}{d}\sin\alpha\right)$$

$$\frac{\cos\alpha}{2} = \frac{h}{d}\sin\alpha \qquad d = 2h\,tg\,\alpha$$

Energia potenziale gravitazionale per i corpi rigidi

Considerialmo un sistema di N particelle. Siano y_i le altezze delle particelle rispetto a un riferimento per il quale si ha $U_{grav}(0) = 0$. L'energia potenziale gravitazionale del sistema è:

$$U_{grav} = \sum_{i=1}^{N} m_i g y_i = g \sum_{i=1}^{N} m_i y_i = \frac{Mg}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i y_i = Mg y_{CM}$$

Per un corpo rigido:

$$U_{grav} = Mg y_{CM},$$

con:

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm$$

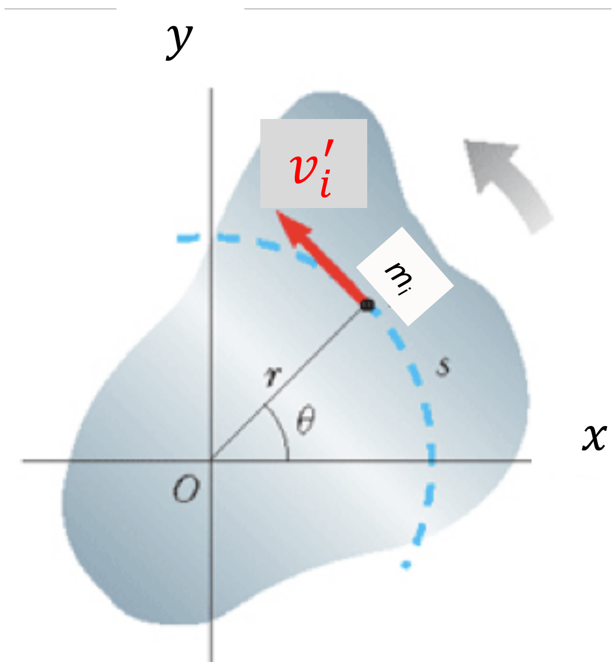
Cioè l'energia potenziale gravitazionale di un corpo rigido è la stessa di un punto materiale di stessa massa posto ad altezza y_{CM}.

Energia cinetica per i corpi rigidi

Applichiamo il teorema di Köenig per l'energia cinetica ad un corpo rigido che trasla e ruota attorno a un asse passante per il centro di massa:

$$K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

In questo caso, ciascuna massa m_i descrive una circonferenza con velocità angolare ω su un piano ortogonale all'asse di rotazione (z nell'immagine). La velocità della singola massa rispetto al centro di massa, dal quale dista r_i, ha modulo $v_i' = \omega\, r_i$.



L'energia cinetica è:

$$K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i\, r_i^2 \omega^2 .$$

Definiamo il momento di inerzia rispetto all'asse passante dal centro di massa:

$$I_{CM} = \sum_i m_i r_i^2 \, ,$$

otteniamo:

$$K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 = K_{tr} + K_{rot} .$$

Calcolo del momento di inerzia

Per un sistema di punti materiali, rispetto a un asse S:

$$I_S = \sum_i m_i r_i^2$$

Rispetto al centro di massa:

$$I_{CM} = \sum_i m_i (r_i')^2$$

Per un corpo rigido continuo, rispetto a un polo S:

$$I_S = \int r^2 dm = \int r^2 \rho(r) dV$$

Rispetto al cento di massa:

$$I_{CM} = \int (r')^2 dm = \int (r')^2 \rho(r') dV'$$

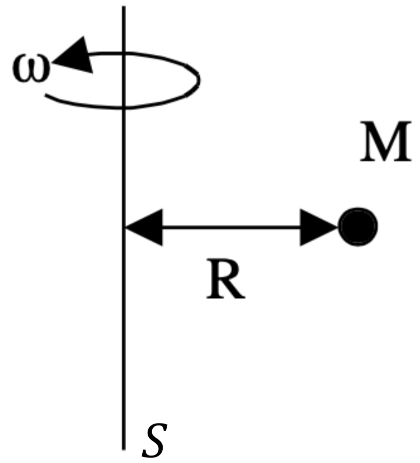
Per un corpo rigido omogeneo, rispetto a un polo S:

$$I_S = \rho \int r^2 dV$$

Rispetto al centro di massa:

$$I_{CM} = \rho \int (r')^2 dV'$$

Esempio: momento di inerzia di un punto materiale

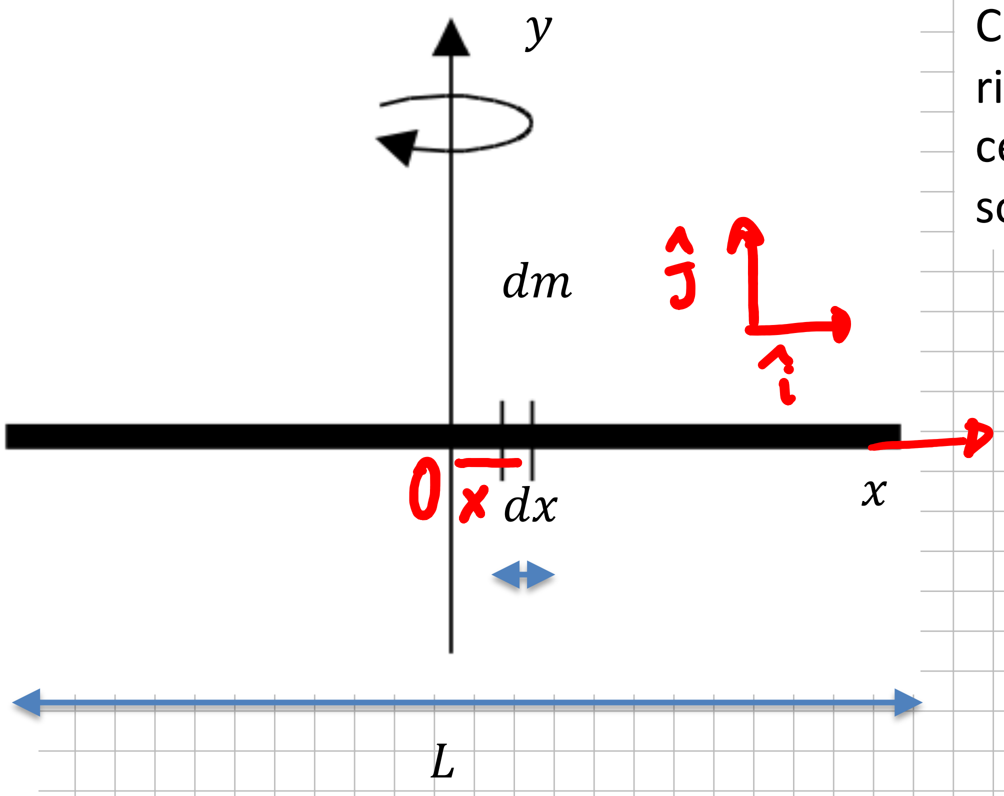


$$I_S = M R^2$$

$$K = \frac{1}{2} M v^2 \qquad v = \omega R \qquad v^2 = \omega^2 R^2$$

$$K = \frac{1}{2} M \omega^2 R^2 = \frac{1}{2} I_S \omega^2$$

Esempio: momento di inerzia di una sbarra



Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse y (passante per il centro di massa) per una sbarra sottile di lunghezza L e massa M.

$$I_{cm} = \int r'^2 \, dm$$

$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dx}$$ MASSA PER UNITÀ DI LUNGHEZZA

$$dm = \lambda \, dx = \frac{M}{L} dx$$

$$r' = x$$

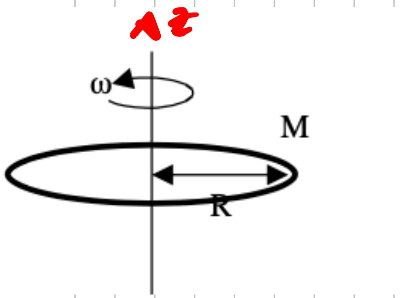
$$I_{cm} = \int r'^2 \, dm =$$

$$= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{M}{L} x^2 \, dx = \frac{1}{3} \frac{M}{L} x^3 \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{M}{L} \left[\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right] = \frac{2}{24} \frac{M L^3}{L} = \frac{M L^2}{12}$$

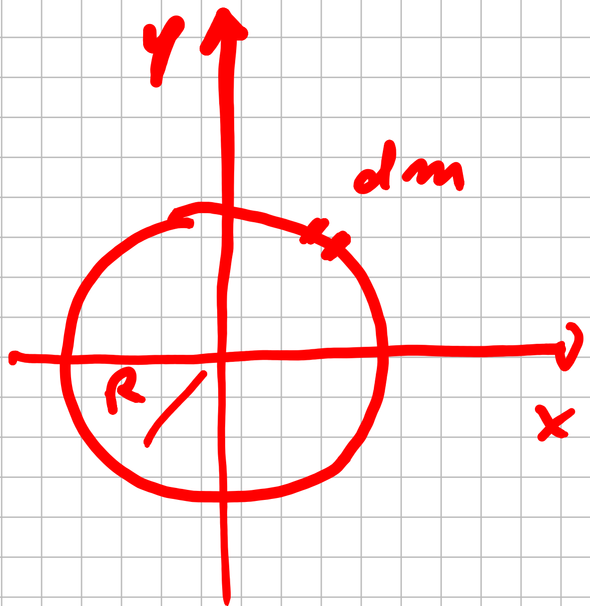
$$K_{rot} = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{24} M L^2 \omega^2$$

Esempio: momento di inerzia di un anello



$M \qquad R$

$$\lambda = \frac{M}{2\pi R}$$



ELEMENTO INFINITESIMO

$$ds = R\, d\theta$$

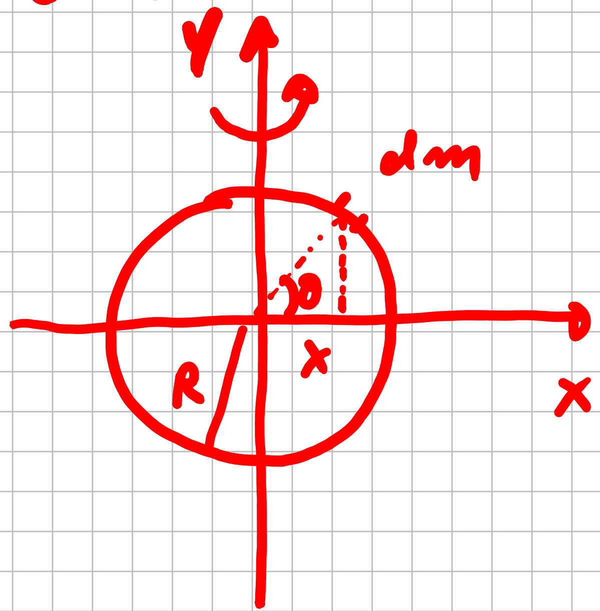
$$dm = \lambda\, ds = \lambda R\, d\theta =$$

$$= \frac{M}{2\pi}\, d\theta$$

$$I_z = \int R^2 \, dm = R^2 \int dm =$$

$$= \frac{R^2 M}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{R^2 M}{2\pi} \cdot 2\pi = MR^2$$

CALCOLIAMO I_y



$$x = R \cos\theta$$

$$I_y = \int x^2 \, dm$$

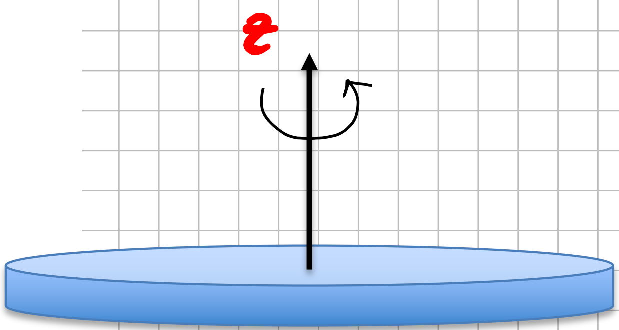
$$dm = \frac{M}{2\pi} d\theta$$

$$I_y = \int_0^{2\pi} (R\cos\theta)^2 \frac{M}{2\pi}\, d\theta = \frac{MR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta$$

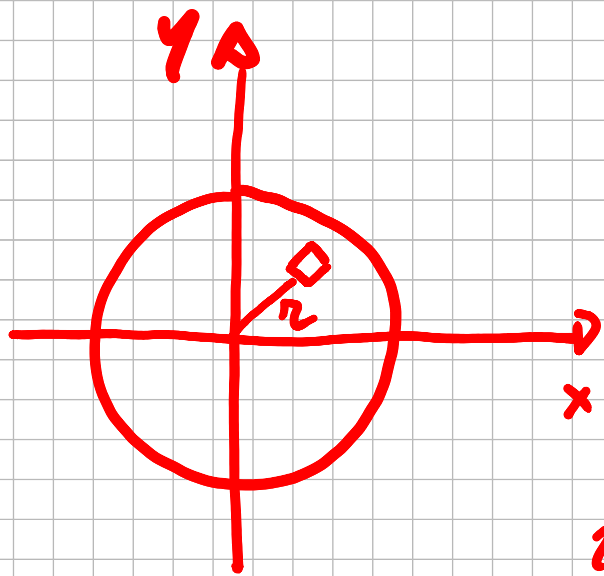
$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \pi$$

$$I_y = \frac{MR^2}{2\pi}\pi = \frac{MR^2}{2}$$

Esempio: momento di inerzia di un disco omogeneo



$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$$



$$dA = r\,dr\,d\theta$$

$$dm = \sigma\,dA = \sigma\,r\,dr\,d\theta$$

$$I_z = \int r^2\,dm = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \sigma\,r^2\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sigma \, d\theta \int_0^{R} r^3 dr = \int_0^{2\pi} \sigma \, d\theta \cdot \frac{1}{4} R^4$$

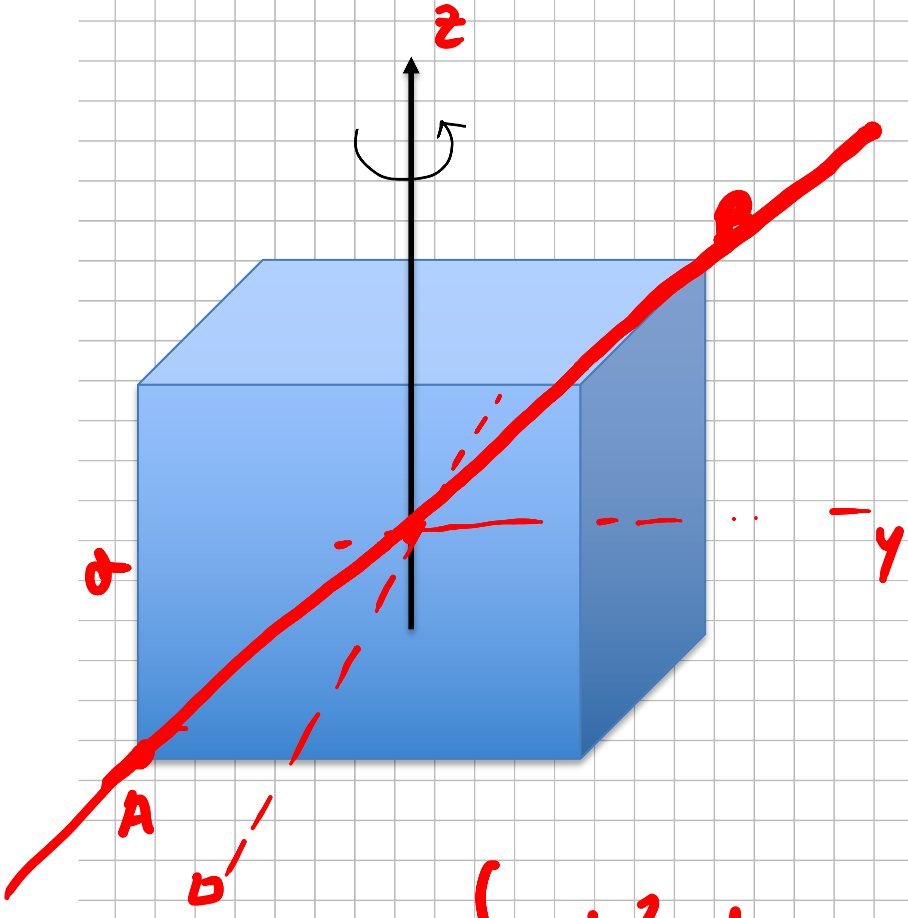
$$= \frac{\sigma}{4} R^4 \, 2\pi = \frac{M}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{1}{2} M R^2$$

CALCOLIAMO I_y:

$$I_y = \int x^2 dm = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} (r\cos\theta)^2 \sigma \, r \, dr =$$

$$= \sigma \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta \int_0^{R} r^3 dr = \sigma \frac{\pi R^4}{4} = \frac{M R^2}{4}$$

Esempio: momento di inerzia di un cubo omogeneo



$M \qquad a$

$$\rho = \frac{M}{a^3}$$

$$dm = \rho\, dV = \rho\, dx\, dy\, dz$$

$$I_z = \int_{\text{CUBO}} r^2\, dm = \int_{\text{CUBO}} (x^2+y^2)\, dm$$

$$= \int (x^2+y^2)\,\rho \, dx\,dy\,dz =$$

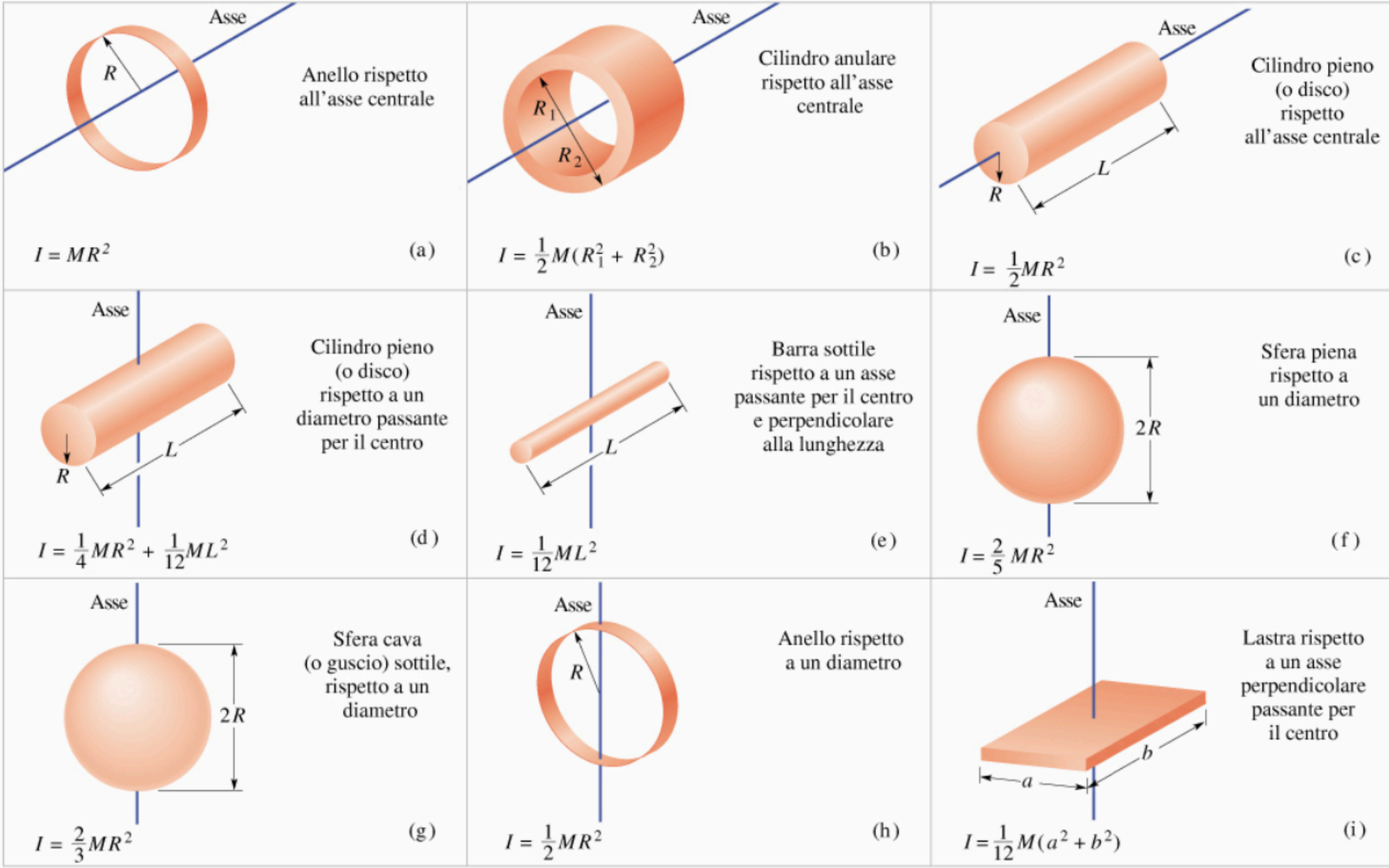
$$\rho = \frac{M}{a^3}$$

$$= \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2+y^2)\,dx =$$

$$= \rho \int dz \int y^2 dy \int dx + \rho \int dz \int dy \int x^2 dx =$$

$$= \rho\, a^2 \frac{1}{3}\, y^3 \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} + \rho\, a^2 \frac{1}{3}\, x^3 \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \rho \frac{a^5}{6} = \frac{Ma^2}{6}$$

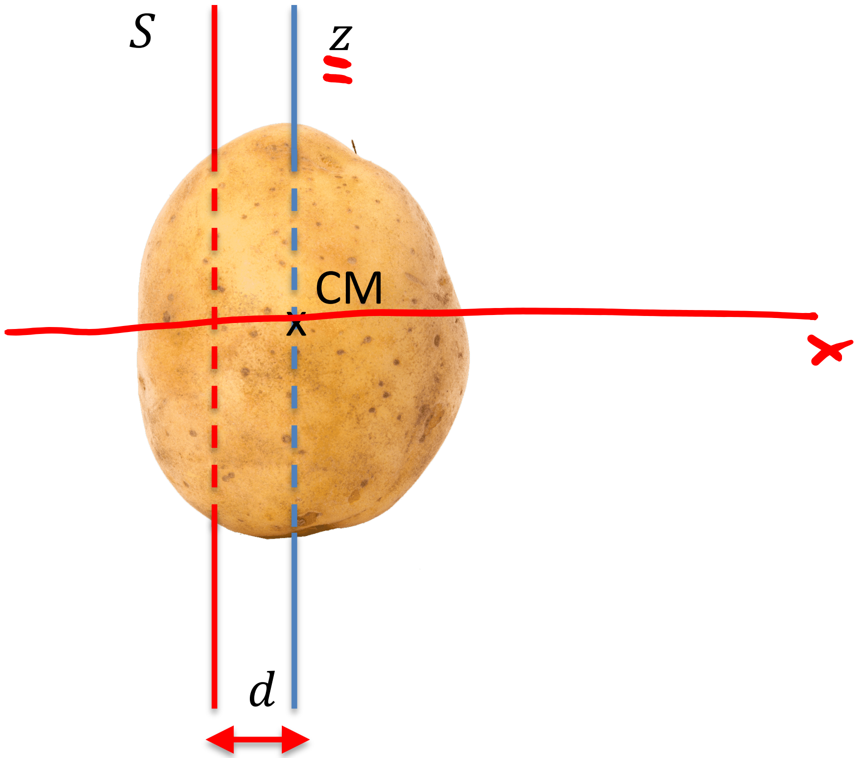
Tabella momenti di inerzia



Teorema di Steiner o degli assi paralleli

Consideriamo un corpo rigido che ha momento di inerzia I_{CM} rispetto ad un asse z passante per il centro di massa.
Il teorema di Steiner afferma che il momento di inerzia I_S rispetto ad un asse S parallelo z e distante d da questo, è dato da:

$$I_S = I_{CM} + Md^2$$



STEINER

$$I_{CM} = \int r'^2 \, dm$$

$$r'^2 = (x^2 + y^2)$$ (RISPETTO ALL'ASSE PASSANTE DAL C.M.

$$I_{CM} = \int (x^2 + y^2) \, dm$$

$$x' = x + d$$

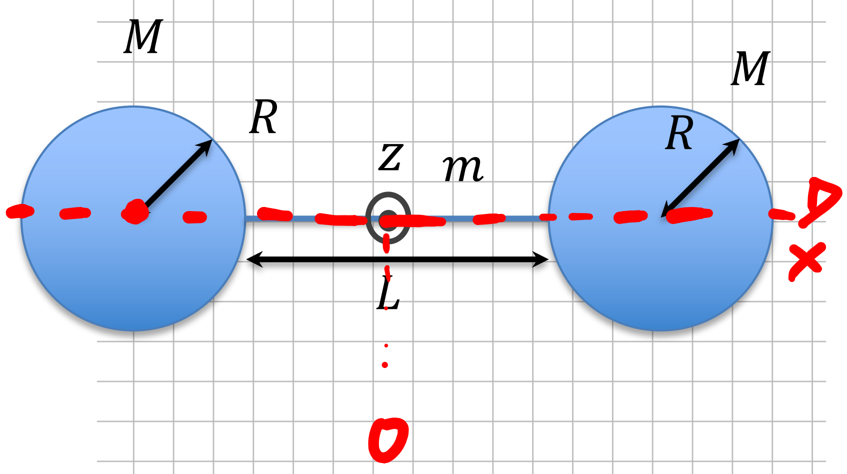
$$I_S = \int \left[(x+d)^2 + y^2 \right] dm =$$

$$= \int \left[x^2 + d^2 + 2xd + y^2 \right] dm =$$

$$= \int (x^2 + y^2) \, dm + d^2 \int dm + 2d \underbrace{\int x \, dm}_{= 0}$$

$$I_S = I_{CM} + d^2 M = I_{CM} + M d^2$$

Esercizio



Un corpo rigido è costituito da 2 sfere di massa M e raggio R collegate da un'asta lunga L e di massa m disposta lungo la retta che congiunge i centri delle 2 sfere. Asta e sfere sono omogenee.

- Calcolare il momento di inerzia rispetto a un asse passante per il centro di massa dell'asta e ortogonale a questa (asse z).

ASTA : DA $x = -\frac{L}{2}$ A $x = \frac{L}{2}$

$x_S = -\left(\frac{L}{2} + R\right)$ CENTRO SFERA SIN

$x_D = +\left(\frac{L}{2} + R\right)$ " " " " " DESTRA

$$I_{ASTA} = \frac{1}{2} m L^2$$

$$I_{SFERA,\,CM} = \frac{2}{5} M R^2$$

$$I_{SFERA,\,z} = I_{SFERA,\,CM} + M d^2 \qquad d = \frac{L}{2} + R$$

$$= \frac{2}{5} M R^2 + M \left(\frac{L}{2} + R \right)^2$$

$$I_z = I_{ASTA} + I_{SFERA,\,z} + I_{SFERA,\,z} = \frac{1}{12} m L^2 + 2 \left[\frac{2}{5} M R^2 + \right.$$

$$\left. + M \left(\frac{L}{2} + R \right)^2 \right]$$

Momento angolare per pura rotazione

Consideriamo un corpo rigido che ruota attorno all'asse z con velocità angolare:

$$\vec{\omega} = \omega_z \hat{k}$$

Per la componente assiale, rispetto all'asse di rotazione, del momento angolare del corpo si ha:

$$L_z = \omega_z I_z$$

Dove I_z è il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse z. Nel caso che il corpo sia simmetrico rispetto all'asse di rotazione, abbiamo:

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega} = I_z \omega_z \hat{k}$$

$$\vec{\omega} = \omega_z \hat{k}$$

dm IN POSIZIONE $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega_z \left[x\, \hat{k}\times\hat{i} + y\, \hat{k}\times\hat{j} + z\, \hat{k}\times\hat{k} \right] =$$

$$= \omega_z \left(x\hat{j} - y\hat{i} \right)$$

$$d\vec{L} = \vec{r} \times (dm\, \vec{v}) = dm\, \vec{r} \times \vec{v} =$$

$$= dm\, \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = dm\, \omega_z \left(\vec{r} \times (\hat{k} \times \vec{r}) \right)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$d\vec{L} = dm\, \omega_z \left[\hat{k}\,(\vec{r}\cdot\vec{r}) - \vec{r}\,(\vec{r}\cdot\hat{k}) \right]$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\vec{r}\cdot\hat{k} = z$$

$$\vec{r}\,(\vec{r}\cdot\hat{k}) = z\,(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) =$$

$$= zx\,\hat{i} + zy\,\hat{j} + z^2\,\hat{k}$$

$$d\vec{L} = dm\,\omega_z\left[\hat{k}x^2 + \hat{k}y^2 \cancel{+\hat{k}z^2} - zx\hat{i} - zy\hat{j} \cancel{-z^2\hat{k}}\right] =$$

$$= \omega_z\,dm\left[(x^2+y^2)\hat{k} - xz\hat{i} - yz\hat{j}\right]$$

$$\vec{L} = \omega_z\left[\hat{k}\int(x^2+y^2)\,dm - \hat{i}\int xz\,dm - \hat{j}\int yz\,dm\right]$$

$$I_{zz} = \int(x^2+y^2)\,dm \qquad I_{xz} = -\int xz\,dm$$

$$I_{yz} = -\int yz\,dm$$

$$\vec{L} = \omega_z\left(I_{xz}\,\hat{i} + I_{yz}\,\hat{j} + I_{zz}\,\hat{k}\right)$$

$dm \qquad (x, y, z) \qquad (-x, y, z)$

$\int xz\,dm \qquad xz\,dm \qquad -xz\,dm$

CASO SIMMETRICO

$$\vec{L} = \omega_z I_{zz} \hat{k} = I_{zz} \vec{\omega}$$

Equazione del moto di rotazione

Supponiamo che (corpo simmetrico rispetto all'asse di rotazione z):

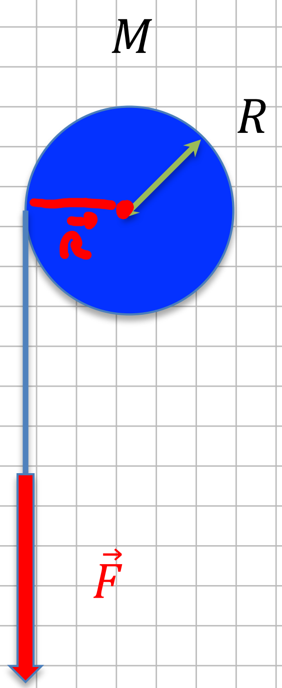
$$\vec{L} = L_z \hat{z} = I_z \vec{\omega}$$

Abbiamo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I_z \vec{\omega})}{dt} = I_z \vec{\alpha} = \vec{\tau}$$

Quindi se conosciamo il momento delle forze (esterne) agenti rispetto all'asse fisso di rotazione e il momento di inerzia rispetto a quell'asse, possiamo calcolare l'accelerazione angolare e da questa possiamo ricavare le relazioni cinematiche tra θ, ω e α .

Esercizio



Su una carrucola assimilabile a un disco omogeneo, di massa M e raggio R, vincolata a ruotare attorno ad un asse orizzontale, scorre una fune di massa trascurabile. La fune è tirata da una forza $\vec{F}$ verticale e rimane aderente alla carrucola.

- Calcolare l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$ della carrucola.

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{T} = RT\hat{k}$$

$$RT\hat{k} = I\vec{\alpha} = I\alpha\hat{k}$$

$$I\alpha = RT \Rightarrow \alpha = \frac{RT}{I} = \frac{2RT}{MR^2} = \frac{2F}{MR}$$