Università di Pisa
Dipartimento di Ingegneria dell'informazione

Ingegneria Informatica

Analisi matematica II

Lezioni online - Marzo/Aprile 2020

A.A 2019-2020

Lavagne scritte da Longo durante la DAD

Indice - Lezioni Marzo/Aprile 2020

1 2020-03-10 **2**

2 2020-03-11 **6**

3 2020-03-13 **11**

4 2020-03-17 **13**

5 2020-03-18 **17**

6 2020-03-20 **21**

7 2020-03-24 **23**

8 2020-03-25 **30**

9 2020-03-27 **37**

10 2020-03-31 **40**

11 2020-04-01 **45**

12 2020-04-03 **50**

13 2020-04-07 **53**

14 2020-04-08 **59**

15 2020-04-17 **64**

16 2020-04-22 **66**

17 2020-04-24 **71**

18 2020-04-28 **73**

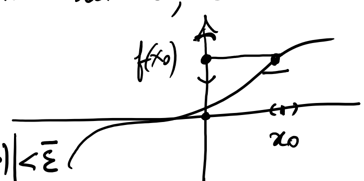
19 2020-04-29 **77**

Esempi di teoremi sulle funzioni continue

$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è continua in $x_0 \in \Omega$ se accade

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \underset{\operatorname{dom} f}{\Omega},\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

PERMANENZA DEL SEGNO $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, continua in x_0, e verifica $f(x_0) > 0$, $\exists \rho > 0 : f(x) > 0 \quad \forall x \in B(x_0, \rho)$



DIM. scelto $\bar{\varepsilon} = f(x_0)$ $\exists \delta > 0 : \forall x \in \underset{\Omega}{\operatorname{dom} f}$ $|x - x_0| < \delta$ $|f(x) - f(x_0)| < \bar{\varepsilon}$

$\rho = \delta$

$$0 = f(x_0) - \bar{\varepsilon} < f(x) < f(x_0) + \bar{\varepsilon}$$

$\boxed{f:\Omega\to\Sigma \qquad g:\Sigma\to H}$ $\qquad \Omega\subseteq\mathbb{R}^m,\ \Sigma\subseteq\mathbb{R}^n,\ H\subseteq\mathbb{R}^p$

$h:\Omega\to H \qquad h(x)=g(f(x))$

$\boxed{g \text{ è continua in } f(x_0)}$

$\boxed{f \text{ sia continua in } \underline{x_0}}$, g sia continua in $\underline{f(x_0)}$

TS $\quad h(x)$ è continua in x_0

DIM $\quad \underline{\forall\varepsilon>0}\ \exists\delta>0 : \forall x\in \underset{=\Omega}{\operatorname{dom} h} \quad |x-x_0|<\delta \qquad |\underset{h(x)}{g(\overset{g(y)}{f(x)})}-\underset{h(x_0)}{g(\overset{y_0}{f(x_0)})}|<\varepsilon$

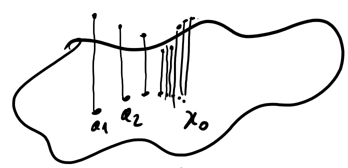
CONTINUITA' DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$\sigma>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in\Omega$
$|x-x_0|<\delta \quad |f(x)-f(x_0)|<$
$y-y_0$

f è continua in x_0

$\varepsilon>0\ \exists\sigma>0 : \forall y\in\underset{\operatorname{dom} g}{\Sigma}\ |y-f(x_0)|<\sigma$
$|g(y)-g(f(x_0))|<\varepsilon$
$y\in\operatorname{dom} g$ vera
$|y-f(x_0)|<\sigma \leftarrow$ vera

$\begin{cases} \boxed{a_n\longrightarrow x_0} \\ f \text{ continua in } x_0 \end{cases}$ $\qquad \underline{a_n\in\Omega\subseteq} \ \mathbb{R}^M$ $\qquad \underline{f:\Omega}\to\mathbb{R}^N$



$\underline{\text{TS}} \quad f(a_n)\to f(x_0) \qquad |f(\underset{x}{a_n})-f(\underset{x_0}{x_0})|<\varepsilon \qquad |f(x)-f(x_0)|_{\mathbb{R}^N}<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$

$|x-x_0|<\delta \to \delta$ di continuità associato ad ε

$a_n\in\operatorname{dom} f$ $\underline{\text{vera!}}$

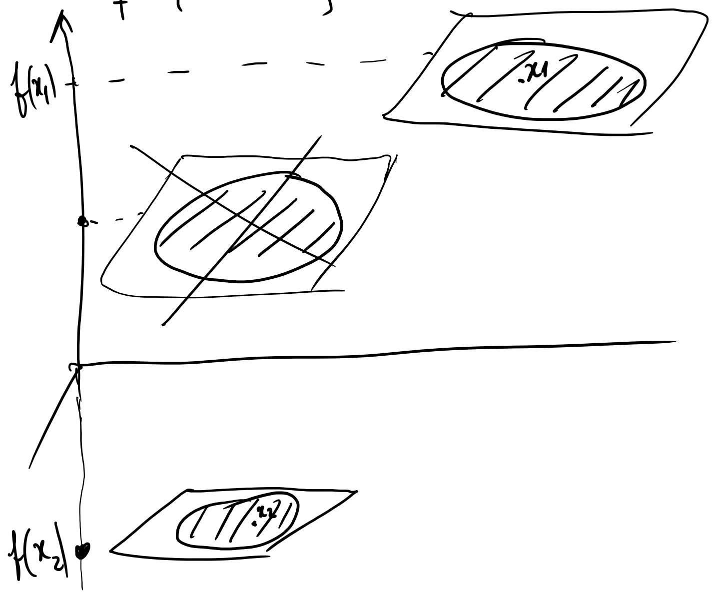
$\underline{|a_n-x_0|<\delta}$ vera purché $n>\nu$ opportuno

$\forall\delta>0\ \exists\nu : \forall n>\nu \quad |a_n-x_0|<\delta$

$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ + continuità in $x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(x_0)$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f(1) > 0 \qquad f(-1) < 0$

$\mathrm{dom} f = \{ x \neq 0 \}$

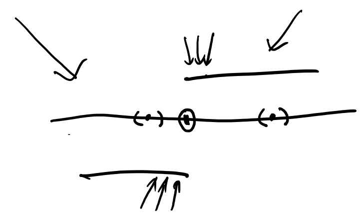


$f : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}$

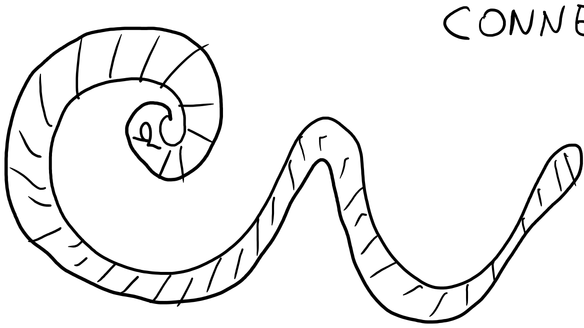
- f continua in Ω
- Ω intervallo
- $\exists x_1, x_2 \ \ f(x_1) f(x_2) < 0$

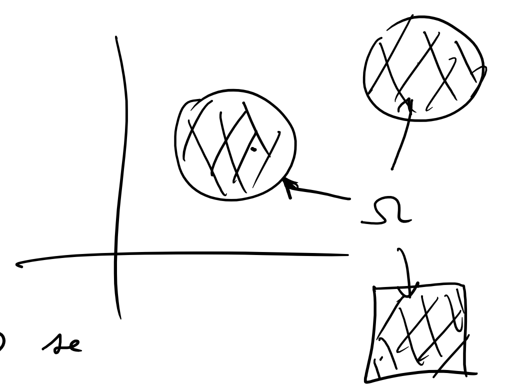
TS $\ \exists\, \bar{x} \in \Omega : f(\bar{x}) = 0$

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



CONNESSIONE

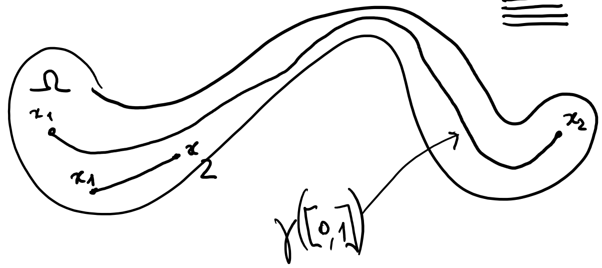




Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ si dirà CONNESSO se

$\forall x_1, x_2 \in \Omega \ \exists \gamma : [0,1] \to \Omega$, continua, tale che $\gamma(0) = x_1$

$\gamma(1) = x_2$



TEOREMA (degli zeri)

$f: \Omega \to \mathbb{R} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$

- $\exists x_1, x_2 \in \Omega : f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$
- f è continua in Ω (in ogni suo punto)
- Ω CONNESSO

Ts. $\exists \bar{x} \in \Omega \quad f(\bar{x}) = 0$

CONNESSIONE. CONVESSITA'.
TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE: (introduzione ed enunciato).

$f:\Omega\to\mathbb{R}$

- Ω connesso
- f continua in Ω
- $\exists\, x_1, x_2 \in \Omega : f(x_1)\,f(x_2) < 0$

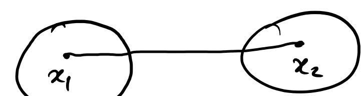
TS $\exists\, \bar{x} \in \Omega : f(\bar{x}) = 0$

Ω connesso

$\forall x_1, x_2 \in \Omega \quad \exists\, \gamma : [0,1] \to \Omega$ continua

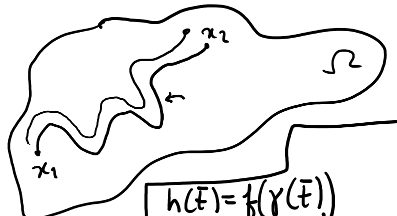
$\gamma(0) = x_1 \quad \gamma(1) = x_2$

sostituisce nel th. 1 variabile Ω intervallo



sconnesso

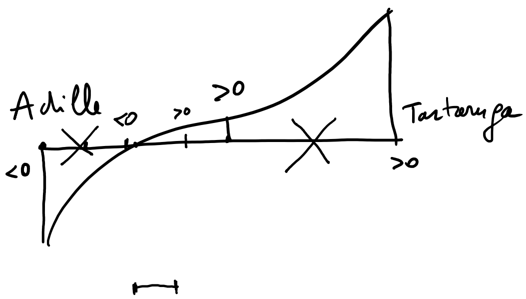
DIM. Scelti x_1, x_2, poiché Ω è connesso, $\exists\, \gamma : [0,1] \to \Omega$, continua e verificante $\gamma(0) = x_1 \quad \gamma(1) = x_2$



$h(t) \qquad h:[0,1]\to\mathbb{R} \qquad h(t) = f(\gamma(t))$

- h è definita in un intervallo ($[0,1]$)
- h è continua, composta di γ ed f continue.
- $h(0) = f(\gamma(0)) = f(x_1) \qquad h(1) = f(\gamma(1)) = f(x_2)$

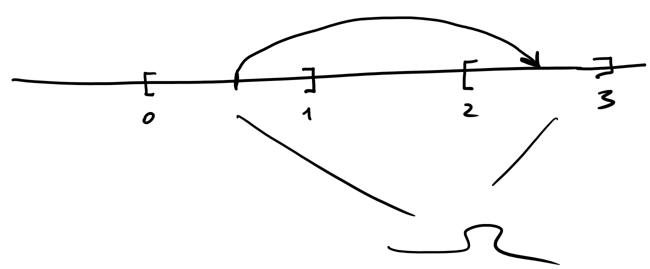
$\exists\, \bar{t} \in [0,1] : h(\bar{t}) = 0 \qquad h(\bar{t}) = f(\underbrace{\gamma(\bar{t})}_{\bar{x}})$



$$\Omega = [0,1] \cup [2,3]$$

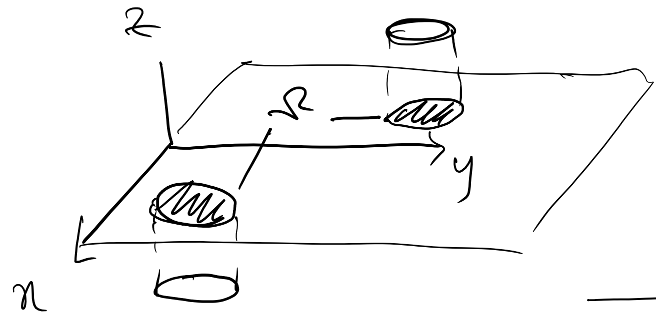
$$\mathcal{F}\Omega = \{0,1,2,3\}$$

$$B(0,4) = [-4,4]$$

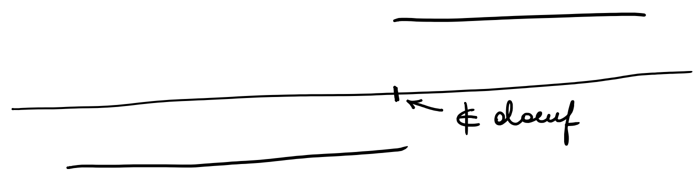


$$\Omega = [0,+\infty[\qquad \mathcal{F}\Omega = \{0\} \subseteq \Omega$$

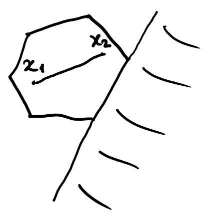
$$\Omega = \{0,1,2,\dots,n,\dots\} \qquad \mathcal{F}\Omega = \Omega$$

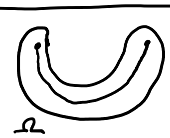


$$f = \frac{x}{|x|}$$



CONVESSITA'

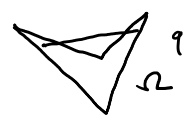




connesso ma non convesso

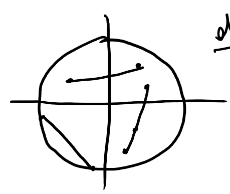
Ω si dice CONVESSO se

$$\forall x_1, x_2 \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad \underbrace{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}_{\text{funzione continua di } \lambda} \in \Omega$$



quadrilatero non convesso

$$\Omega = B(0,1)$$



$\forall x_1, x_2 \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0,1]$

$(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in \Omega$

Hp. $|x_1| < 1 \quad |x_2| < 1$

Ts $|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2| < 1$?

DIM.

$$|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2|^2 = (1-\lambda)^2 |x_1|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\boxed{x_1 x_2} + \lambda^2 |x_2|^2 \leq$$

prop. prodotto scalare

≥ 0

prodotto scalare

dis. Schwarz

$$\leq (1-\lambda)^2 |x_1|^2 + 2\lambda(1-\lambda)|x_1||x_2| + \lambda^2 |x_2|^2 =$$

$$= \Big[\overset{>0}{(1-\lambda)}\underset{<1}{|x_1|} + \overset{>0}{\lambda}\underset{<1}{|x_2|}\Big]^2 <$$

$$< \big[(1-\lambda)1 + \lambda 1\big]^2 = 1$$

$$x_1 x_2 \leq |x_1 x_2| \leq |x_1||x_2|$$

Schwarz

$$x^2+y^2-1=0$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x,y)=0$$

$f:\Omega\to\mathbb{R}$

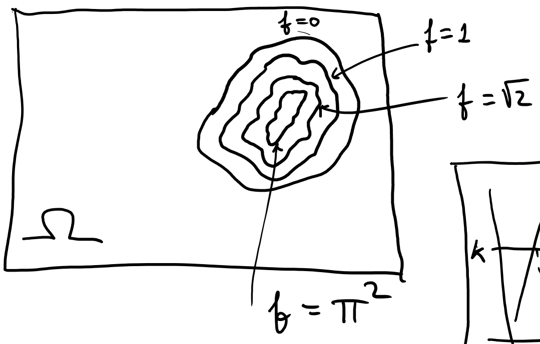
$\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$

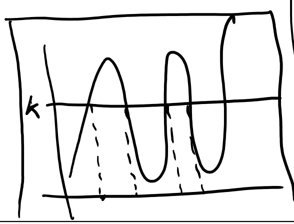
$f(x,y)=x^2+y^2-1$

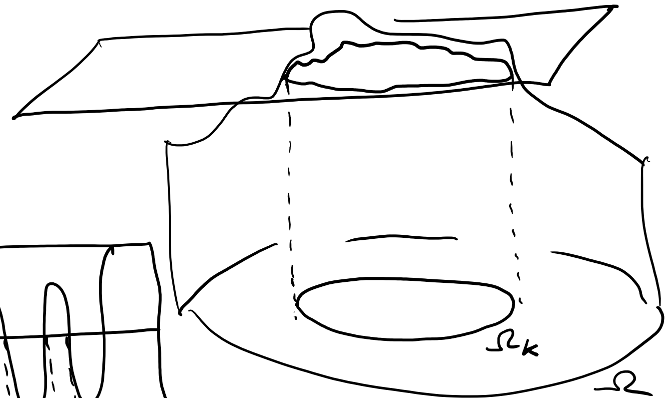
ULISSE DINI $\longrightarrow$

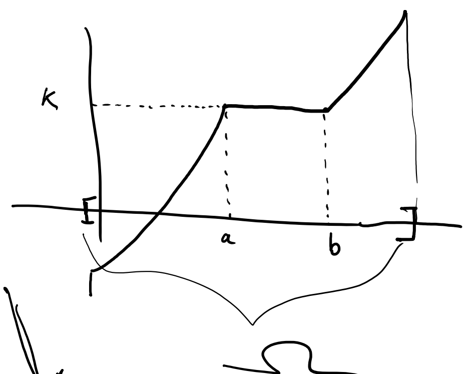
Insieme di livello $k\in\mathbb{R}$ per una funzione $f:\Omega\to\mathbb{R}$ è

$$\Omega^k=\{(x,y)\in\Omega : f(x,y)=k\}$$

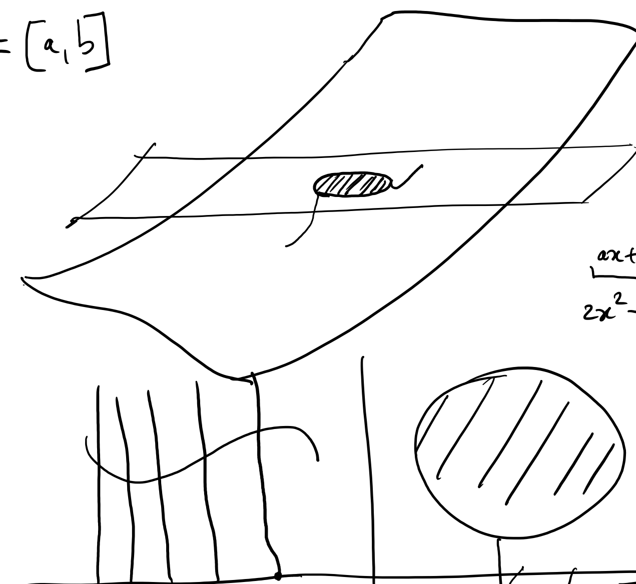








$$\Omega_k=[a,b]$$



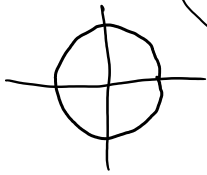
$\underline{ax+by}=c$

$2x^2+y^2=3$

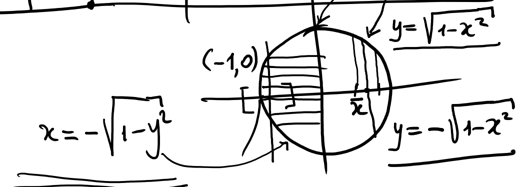
$\boxed{x^2+y^2-1}=0$

$y^2=1-x^2$

$y=\pm\sqrt{1-x^2}$



funzione implicita



$$f(x,y) = f\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) = x^2 + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = x^2+1-x^2=1$$

formule risolutive dell'equazione $y^2=1-x^2$

verifica che $y=\sqrt{1-x^2}$ risolve $x^2+y^2-1=0$

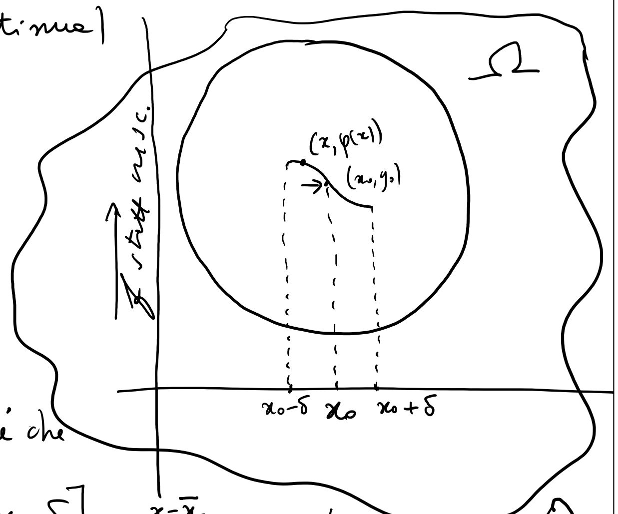
TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE (caso f continua)

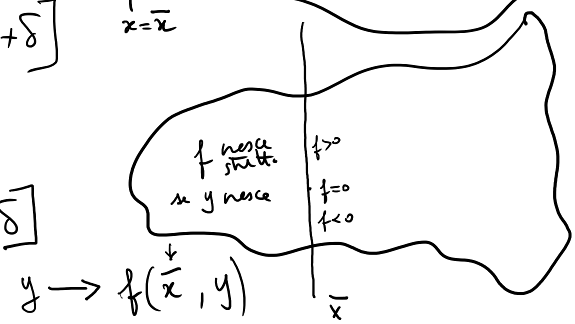
<u>Hp</u>

1) $f:\Omega\to\mathbb{R}$ continua in Ω
2) $f(x_0,y_0)=0$
3) (x_0,y_0) INTERNO ad Ω
4) $y\to f(x,y)$ è strett. crescente $\forall (x,y)\in\Omega$

TS

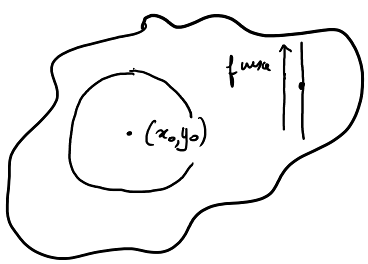
1) $\exists\,\delta>0$ $\varphi:[x_0-\delta,x_0+\delta]\to\mathbb{R}$ tale che
2) $f(x,\varphi(x))=0 \quad \forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$
3) $\varphi(x_0)=y_0$
4) φ è continua in $[x_0-\delta,x_0+\delta]$





Il teorema delle funzioni implicite di Ulisse Dini

$f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$



$f(x,y) = 0$

$\Downarrow$

$y = \varphi(x)$

$f(x, \varphi(x)) \equiv 0$

Hp. 1) f continua in Ω

2) $f(x_0, y_0) = 0$

3) (x_0, y_0) interno ad Ω $\quad ((x_0,y_0) \in \mathring{\Omega})$

4) $y \longrightarrow f(x,y)$ strett. crescente $\quad y' > y \Rightarrow f(x,y') > f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega$

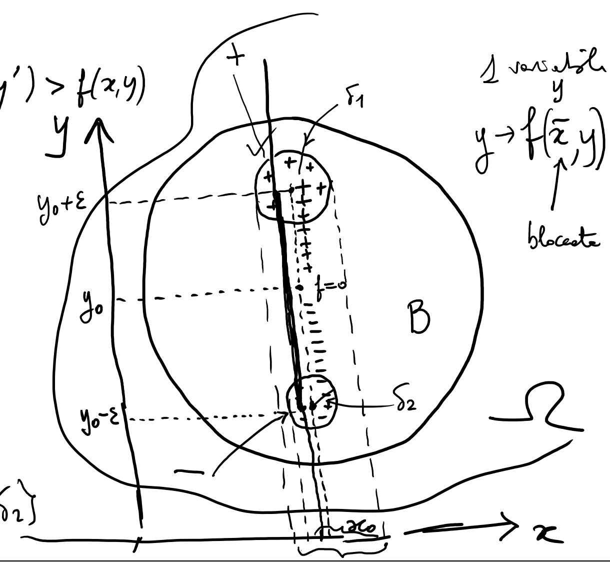
Ts 1) $\exists \delta, \varphi, \ \delta > 0 \quad \varphi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$:

2) $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

3) $y_0 = \varphi(x_0)$

4) φ è continua in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$\bar{x} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \quad \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$



1 variabile y

$y \to f(\bar{x}, y)$

bloccata

DIM.

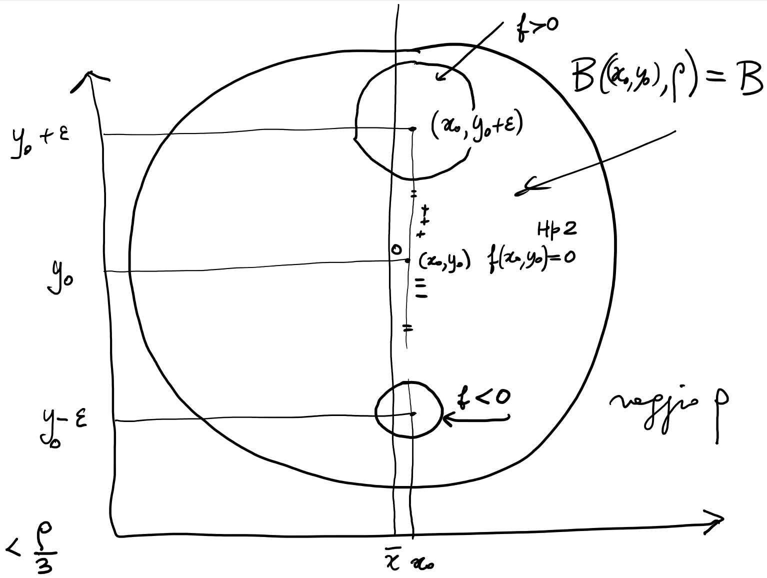
$\exists \rho > 0 \; : B((x_0,y_0),\rho) \subseteq \Omega$

$\varepsilon < \frac{\rho}{2}$ Hp 3

Hp 4

$f(x_0, y_0+\varepsilon) > 0$ perché $y_0+\varepsilon > y_0$

$f(x_0, y_0-\varepsilon) < 0$ " $y_0-\varepsilon < y_0$



Per il th. della perm. del segno $\quad \delta_1, \delta_2 < \frac{\rho}{3}$

$\exists \delta_1 > 0 \; : \; f(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in B((x_0,y_0+\varepsilon), \delta_1)$

$\exists \delta_2 > 0 \; : \; f(x,y) < 0 \quad \forall (x,y) \in B((x_0,y_0-\varepsilon), \delta_2)$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$\bar{x} \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$

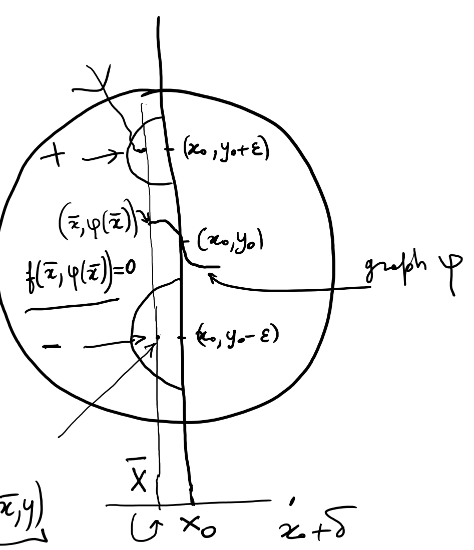
$$* \begin{cases} f(\bar{x}, y_0-\varepsilon) < 0 \\ f(\bar{x}, y_0+\varepsilon) > 0 \end{cases}$$

$|(\bar{x}, y_0-\varepsilon) - (x_0, y_0-\varepsilon)| = \sqrt{(\bar{x}-x_0)^2 + (0)^2} = |\bar{x}-x_0| < \delta \le \delta_2$

$|(\bar{x}, y_0+\varepsilon) - (x_0, y_0+\varepsilon)| < \delta < \delta_1$

$\boxed{y \to f(\bar{x}, y)}$ su $[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$ $**$

$B((x_0,y_0),\rho) \subseteq \Omega$ è convesso $\Rightarrow$ tutto il segmento che congiunge $(\bar{x}, y_0+\varepsilon)$ e $(\bar{x}, y_0-\varepsilon)$ è contenuto in Ω



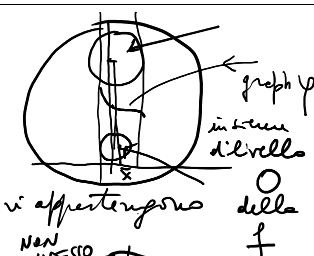
Applicando il th. degli zeri alla funzione continua $y \to f(\bar{x}, y)$ esiste almeno uno zero $\bar{y}$. Poiché è strett. monotona tale zero è unico. Si pone allora $\varphi(\bar{x}) = \bar{y}$.

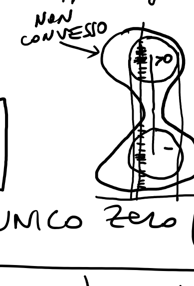
$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in B(x_0, \delta)$$

Teorema delle funzioni implicite (conclusione)
Limiti: definizioni

Th. zeri $y \to f(\bar x, y)$ su $[y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon] = I$

- è continua in I perché $\overline{(\bar x, y_0-\varepsilon)(\bar x, y_0+\varepsilon)} \subseteq \Omega$
- è definita su I perché $B((x_0,y_0),\rho)$ è convessa e gli estremi vi appartengono
- $f(\bar x, y_0+\varepsilon)>0$ e $f(\bar x, y_0-\varepsilon)<0$





$$\exists\, \bar y \in [y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon] :\ f(\bar x, \bar y) = 0 \qquad \boxed{\varphi(\bar x)=\bar y}$$

SU OGNI RETTA VERTICALE C'È AL PIÙ UN UNICO zero $(\bar x, \bar y)$ di f

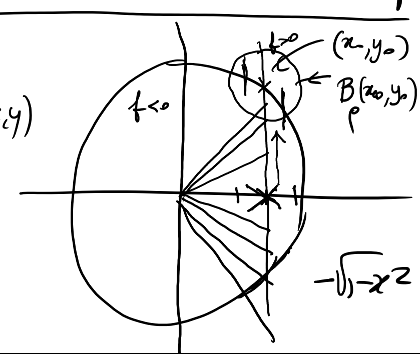
$$\boxed{f(x, \underbrace{\varphi(x)}_{\text{le } y \text{ per cui } f(x,y)=0}) \equiv 0 \ \text{ su } [x_0-\delta,\ x_0+\delta]}$$

$f(x_0, y_0)=0 \qquad \varphi(x_0)=y_0$

$x^2+y^2=1$

$x^2+y^2-1=f(x,y)$

$|(x,y)|^2-1$



φ è continua in x_0

$\varphi(x) \in [y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$

$\longrightarrow |\varphi(x)-\varphi(x_0)| \le \varepsilon$

$\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$

$y_0 = \varphi(x_0)$

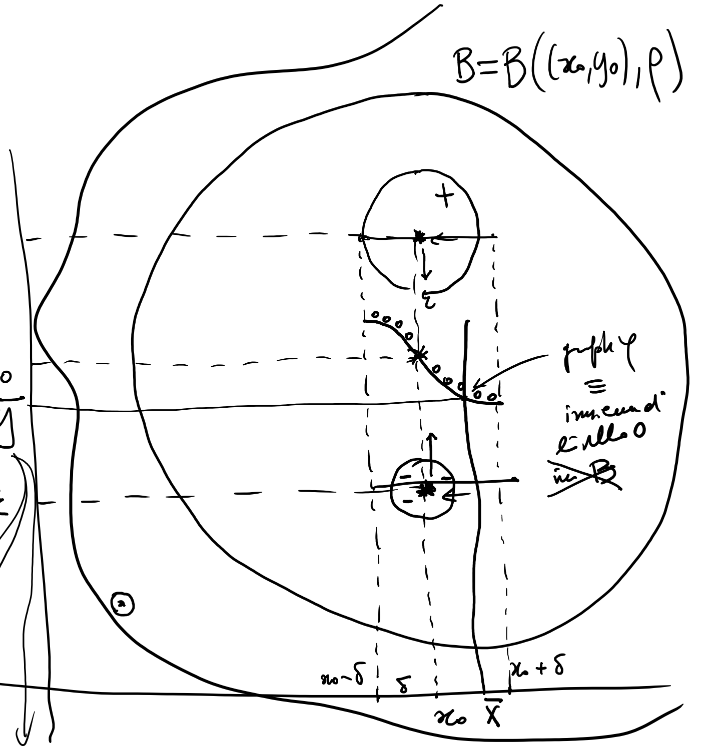
$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$y_0+\varepsilon$

y_0

$\bar y$

$y_0-\varepsilon$



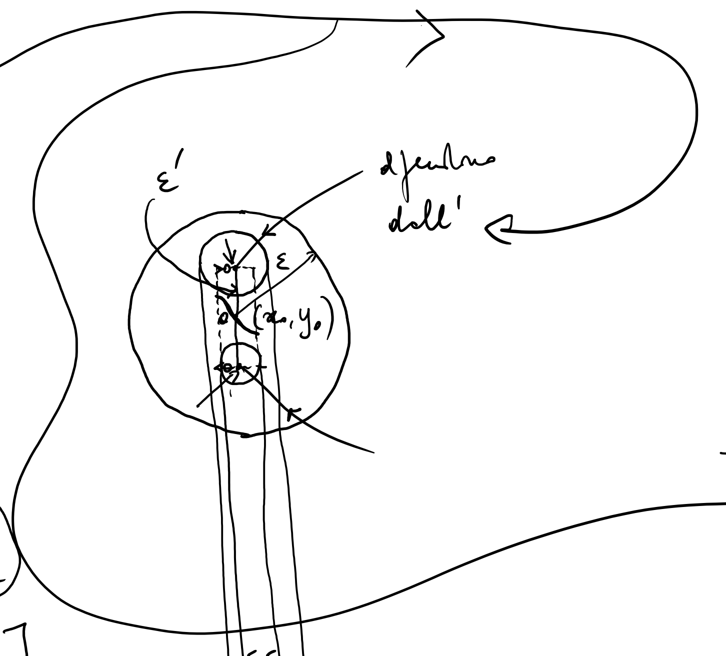
$f(x, \varphi_1(x)) = 0$ su $[x_0-\delta, x_0+\delta]$

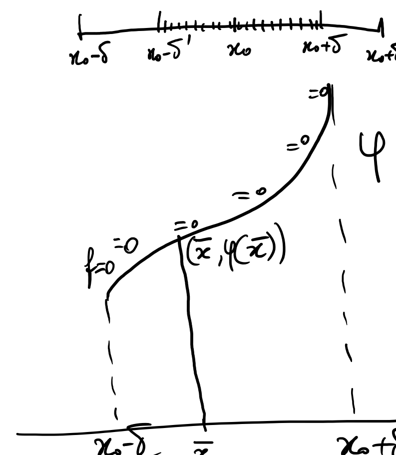
$f(x, \varphi_2(x)) = 0$ su $[x_0-\delta', x_0+\delta']$

$\forall \bar x \in$ Intersezione di

$\varphi_1(\bar x) = \bar y = \varphi_2(\bar x)$

ε





$x = \bar x$ l'unico zero verifica

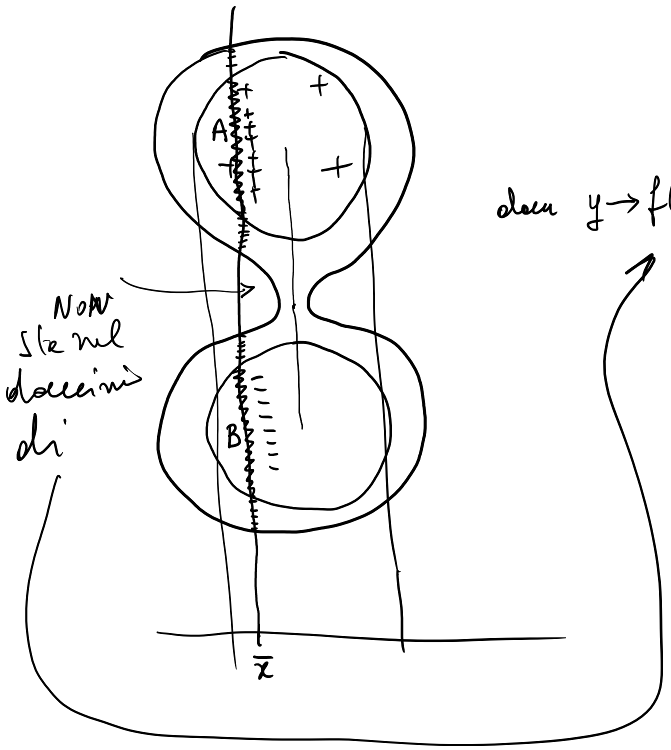
$|\bar y - y_0| < \varepsilon' < \varepsilon$

$|\varphi(\bar x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon' < \varepsilon$

Ripeto l'intera costruzione con centro $(\bar x, \varphi(\bar x))$

$\bar y \in [y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$

$\bar y = \varphi(\bar x) \in \,]y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon[\; \Longleftarrow \big(f(\bar x, y_0-\varepsilon) < 0 \quad f(\bar x, y_0+\varepsilon) > 0 \big)$



dove $y \to f(\bar{x}, y) = A \cup B$

↑ NON SI PUÒ APPLICARE

IL Th. degli zeri

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

LIMITI

$$\boxed{\lim_{A} f(x) = B} \iff \boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{dom} f\quad A' \Rightarrow B'}$$

DOMINIO	A	A'
$\mathbb{R}^n,\ n \geq 1$	$x \to x_0$ ∞	$\lvert x - x_0 \rvert < \delta\quad x \neq x_0$ $\lvert x \rvert > \delta$
$\mathbb{R}$ (solo lui!)	$x \to x_0^+$ $x \to x_0^-$ $x \to +\infty$ $x \to -\infty$	$x_0 < x < x_0 + \delta$ $x_0 - \delta < x < x_0$ $x > \delta$ $x < -\delta$

CODOMINIO	B	B'
$\mathbb{R}^m,\ n \geq 1$	$L \in \mathbb{R}^m_{m \geq 1}$ ∞	$\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$ $\lvert f(x) \rvert > \varepsilon$
$\mathbb{R}$ (solo lui!)	$+\infty$ $-\infty$	$f(x) > \varepsilon$ $f(x) < -\varepsilon$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} f(n) \qquad a_n = f(n)\ \forall n$$

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$A =$ " $x \to 1$ " $= x \to x_0$

$\displaystyle\lim_{x \to 1} \gamma(x) = (1,2,\pi)$

$B =$ " $(1,2,\pi)$ " $= L$

CONVERGENZA

$$\boxed{\underline{\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in dom} \; |x-1| < \delta \;\; x \neq 1 \implies |\gamma(x) - (1,2,\pi)| < \varepsilon}$$

DIVERGENZA

$\displaystyle\lim_{x \to 3^-} \gamma(x) = \infty$ $\qquad$ A $\; x \to 3^-$ $\qquad$ $B = \infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in dom\, \gamma \;\; \underbrace{3 - \delta < x < 3}_{A'} \implies \underbrace{|\gamma(x)| > \varepsilon}_{B'}$$

Teorema fondamentale della Algebra

(Inizio)

$p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ "Ogni polinomio a coeff. in $\mathbb{C}$ non costante ha zeri in $\mathbb{C}$"

Se p un polinomio in $\mathbb{C}$ non costante. Allora $\lim_{\infty} p(z) = \infty$

Dim. $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i =$ $\boxed{n \geq 1 \text{ perché } p \text{ non è costante}}$

$z \neq 0$

$= z^n \cdot \sum_0^n a_i z^{i-n} =$

$= z^n \left[a_n + \sum_0^{n-1} a_i z^{i-n} \right]$

$\lim_{\infty} z^{i-n} \overset{?}{=} 0$ $\boxed{i-n<0 \quad i-n \in \mathbb{Z}}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad |z| > \delta \Rightarrow |z^{i-n}| < \varepsilon$ $\quad k = n-i$

$\boxed{|p(z)| = |z|^n \underbrace{\left| a_n + \sum_0^{n-1} a_i z^{i-n} \right|}}$ $i-n<0$

$\downarrow |a_n| > 0$

$|z^{-k}| = \dfrac{1}{|z|^k} < \varepsilon \iff |z|^k > \dfrac{1}{\varepsilon}$

$|z| > \sqrt[k]{1/\varepsilon} = \boxed{\delta}$

Es.

$x^3 - 3x^2 + x - 1 =$

$= x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$

0

$|a_n| > 0$ $\quad \varepsilon = \frac{|a_n|}{2}$ $\quad \exists \delta > 0$ $\quad \boxed{|a_n| + \varepsilon > \left| a_n + \sum_0^{n-1} a_i z^{i-n} \right| > |a_n| - \varepsilon} = \frac{|a_n|}{2}$

$\lim_{\infty} \left| a_n + \sum \dots \right| = L = |a_n|$ $\qquad \boxed{|z| > \delta}$

$$\boxed{\left| a_n + \sum_0^{n-1} a_i z^{i-n} \right| > \frac{|a_n|}{2}} \quad \text{se } |z| > \delta$$

$$|p(z)| = |z|^n \left| a_n + \sum_0^{n-1} a_i z^{i-n} \right| > \frac{|a_n|}{2} |z|^n \Rightarrow \lim_{\infty} |p(z)| = +\infty$$

$\mathbb{R}$ $\qquad \frac{|a_n|}{2} > 0 \qquad |z|^n \to +\infty$

Teor. confronto

$\boxed{\begin{array}{l} \lim f(x) = \infty \ ? \\ \text{se } \lim |f(x)| = +\infty \ ? \end{array}}$

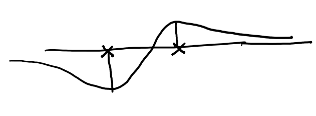
---

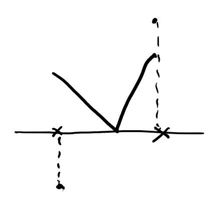
x_0 è di massimo per $f : \Omega \to \mathbb{R}$ se $f(x) \le f(x_0)$ $\forall x \in \Omega$
(globale)

Th. di Weierstrass del massimo e del minimo: "Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω è compatto (cioè chiuso e limitato), f continua in Ω (in ogni punto di Ω), ALLORA $\exists\, x_1, x_2 \in \Omega$: $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ $\forall x \in \Omega$.

x_1 è punto di minimo

x_2 è " " massimo



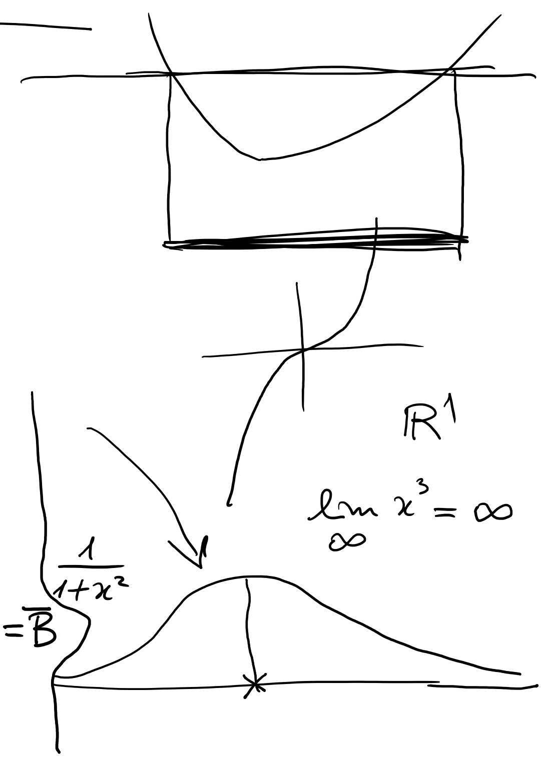


Se $|p(z)|$ ha minimo e il valore minimo è 0, allora $p(z)$ si annulla nel punto di minimo $|p(z_0)| = 0 \Rightarrow p(z_0) = 0$

Gli zeri di p sono punti di minimo di $|p|$

Th. Sia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, continua in $\mathbb{C}$, $\lim\limits_{\infty} f(z) = +\infty$.

TS f ha minimo in $\mathbb{C}$



Dim

Si sceglie ad arbitrio $z_0 \in \mathbb{C}$

Se $f(z_0) > 0$ allora si pone $\boxed{\varepsilon = f(z_0)}$

Se $f(z_0) \le 0$ allora si pone $\varepsilon = 1$

Dalla divergenza $\boxed{\exists \delta > 0 : |z| > \delta \quad f(z) > \varepsilon}$

è il complementare $\overline{B(0,\delta)} = \{z : |z| \le \delta\} = \overline{B}$

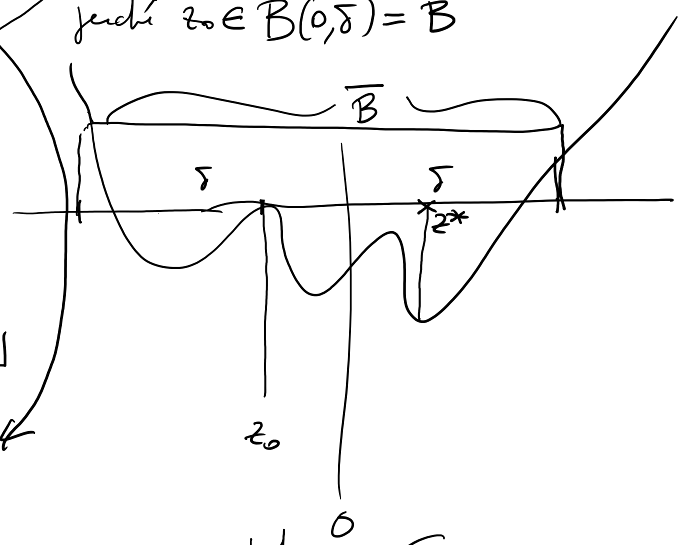
è chiuso e limitato → COMPATTA $\quad z_0 \in \overline{B}$

f in $\overline{B}$ ha massimo e minimo per Weierstrass. Sia z^* il punto di minimo

$f(z) \ge f(z^*) \quad \forall z \in \overline{B(0,\delta)}$ in particolare $f(z_0) \ge f(z^*)$ perché $z_0 \in \overline{B(0,\delta)} = \overline{B}$

$\forall z \notin \overline{B} \Rightarrow |z| > \delta \Rightarrow$

$f(z) > \varepsilon \ge f(z_0) \ge f(z^*)$

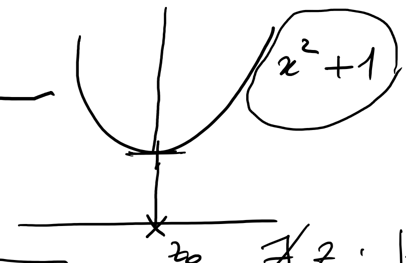


$f(z) \ge f(z^*) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Longrightarrow$ z^* è minimo globale in $\mathbb{C}$.

Lemma $p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, polinomio non costante. Sia $z_0\in\mathbb{C}$: $p(z_0)\neq 0$.

Allora $\exists\, \bar z \in \mathbb{C} : |p(\bar z)| < |p(z_0)|$



DIM DEL TEOR FOND. ALGEBRA

$f(z)=|p(z)|$ 1) è continua

2) Per il lemma 1 $\boxed{\lim_{\infty} f(z) = +\infty}$

$\nexists\, z : |z_0|^2 > |z|^2$

Per il Th preced. $\exists\, z^*$ di minimo per $|p(z)|$.

Se fosse $|p(z^*)|=0$ lo zero richiesto p si annulla in z^*, che è lo zero della tesi.

Se fosse $|p(z^*)|\neq 0$ per il Lemma (da dimostrare ancora) $\exists\, \bar z\in\mathbb{C} : |p(\bar z)| < |p(z^*)|$

assurdo perché z^* è di minimo globale

$p(z_0)\neq 0$ $\qquad q(w)=\dfrac{p(z_0+w)}{p(z_0)} = \sum_0 \alpha_i w^i$ $\qquad n=\deg q=\deg p\geq 1$ perché p non è costante

$\boxed{q(0)=1}$ $\qquad q(0)=\dfrac{p(z_0+0)}{p(z_0)}$ $\qquad \boxed{\alpha_0+\alpha_1 w+\alpha_2 w^2+\dots \alpha_n w^n}$

$\alpha_0=1$

La tesi equivale a provare che $\exists\, w : |q(w)|<1 \iff \dfrac{|p(\overbrace{z_0+w}^{\bar z})|}{|p(z_0)|}<1$

INIZIO PROVA DEL LEMMA $\boxed{p(z) \text{ non costante e } p(z_0)\neq 0 \Rightarrow \exists\, \bar z : |p(\bar z)|<|p(z_0)|}$

LEMMA Se $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomio non costante, e $p(z_0) \neq 0$ allora $\exists \tilde{z} \in \mathbb{C}$ tale che $|p(\tilde{z})| < |p(z_0)|$

DIM. $p(z_0) \neq 0$ $\qquad \underline{q(w)} = \dfrac{p(z_0 + w)}{p(z_0)}$

$p(z) = \sum_0^n a_i z^i \qquad p(\underbrace{z_0 + w}_{z}) = \sum_0^n a_i (z_0 + w)^i =$ polinomio di grado n in w

grado di q = grado di p

- q è non costante
- $q(0) = 1$ $\qquad q(w) = \underbrace{1 + a_k w^k} + w^{k+1} \tilde{q}(w)$

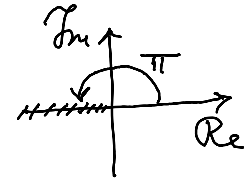
, k è il minimo intero > 0 per cui $\longrightarrow a_k \neq 0$

La tesi equivale a $\exists \bar{w} : |q(\bar{w})| < 1$ $\qquad \dfrac{|p(z_0 + w)|}{|p(z_0)|} < 1$

$z_0 + \bar{w} = \tilde{z}$

$$|q(w)| \overset{\text{dis. triangolare}}{\leq} |1 + \underbrace{a_k w^k}| + \underbrace{|w|^{k+1} |\tilde{q}(w)|}$$

$\boxed{\text{$a_k \bar{w}^k$ sarà scelto \underline{reale} e \underline{negativo}; il termine finale può essere reso piccolo}}$



$a_k w^k$ sia reale e negativo, e piccolo a suff.

$a_k w^k$ sarà reale e negativo se $\arg(a_k w^k) = \pi$

$\arg a_k + k \arg w = \pi$ $\qquad$ incognita $\quad k \neq 0$

$$\boxed{\arg w = \frac{\pi - \arg a_k}{k}}$$

$\boxed{|a_k w^k| < 1}$ $\qquad$ $\boxed{|w| < \frac{1}{|a_k|^{1/k}}}$

$$|\underset{\in\mathbb{R}}{1} + \underset{\in\mathbb{R}}{a_k w^k}| = 1 - |a_k||w|^k$$

$$|q(w)| \le 1 - |a_k||w|^k + |w|^{k+1}|\tilde{q}(w)| =$$

$$= 1 - |w|^k \left[|a_k| - |w||\tilde{q}(w)| \right] \quad > 0 \quad 1$$

$$\xrightarrow{w \to 0} |a_k|$$

<0 $\boxed{\text{se } |w| < \delta}$

[ ] funzione continua che vale $|a_k| > 0$ in 0.

conserva lo stesso segno in un opportuno intorno $|w| < \delta$

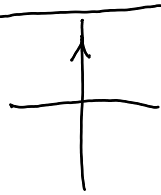
$$\bar{z} = z_0 + \bar{w} \qquad |\bar{w}| < \min\left\{\delta, |a_k|^{-\frac{1}{k}}\right\}$$

Limiti di polinomi all'∞.

Esempio $\quad p(x,y) = x \qquad \lim_{\infty} x \overset{?}{=} \infty \quad \boxed{\text{NO}}$

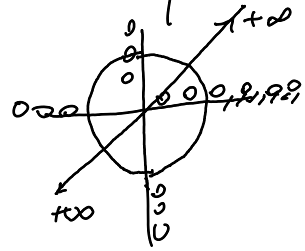
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |(x,y)| > \delta \quad |x| > \varepsilon}$$

NO



sull'asse y $\quad x = 0$ e y può essere preso grande quanto si vuole $\Rightarrow |(x,y)| = |y|$

$p(x,y) = xy$



p si annulla sugli assi

$|xy| > \varepsilon$

limite di forme quadratiche all'∞

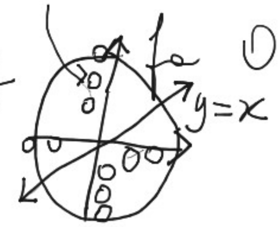
$\boxed{\lim_{\infty} x^2 = \infty}$ $\qquad$ $\boxed{\lim_{\infty} x^2-2xy+2y^2 = ?}$

Se $f(x) = \sum_{1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ (forma generale)

Se f è <u>definita</u> diverge (se è def. >0 diverge a $+\infty$
se è def. <0 " " $-\infty$)

Altrimenti, il limite <u>non esiste</u> (f oscilla).

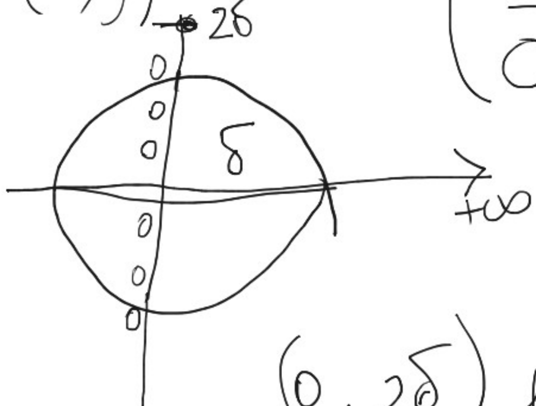
$f(x,y) = xy$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$



fa 0 sugli assi e diverge su $y=x$

$f(x,x) = x^2 \nearrow +\infty$

$f(x,y) = x^2$ $\quad$ $\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 \\ 0 & \underline{0} \end{pmatrix}$ $\quad$ semidef. >0



fuori di $B((0,0),\delta)$

$|f(x,y)| > \varepsilon > 0$

$\underline{(0, 2\delta)}$ fuori di $B((0,0),\delta)$

$f(0,2\delta) \equiv 0 \quad \forall\delta$

x^2+2y^2 $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\rightarrow \underbrace{x^2+y^2}_{= |(x,y)|^2} \le \underbrace{x^2+2y^2}_{f} \leftarrow$ $\quad$ $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

$\boxed{\begin{array}{c} |(x,y)| > \delta \\ \Downarrow \\ |(x,y)^2| > \delta^2 \end{array}}$

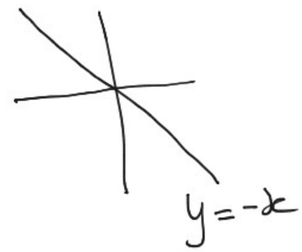
$$-x^2-3y^2 \qquad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$x^2+y^2 \le x^2+3y^2$$

$$\boxed{-x^2-y^2} \ge \underbrace{-x^2-3y^2}_{f(x,y)}$$

$$\downarrow$$

$$-\infty$$



$$\boxed{\lambda \underbrace{|x|}_{\to +\infty}^2 \le \underbrace{\sum_1^n a_{ij} x_i x_j}_{f(x)} \le \Lambda \underbrace{|x|}_{\to +\infty}^2} \quad (*)$$

minimo autovalore $\qquad x\in\mathbb{R}^n \qquad$ massimo autovalore

1) f è def. >0 se $\lambda>0$ — Da $(*)$ segue

2) f è def <0 se $\underline{\Lambda<0}$ — la tesi per confronto

---

$$\sum \alpha_i x_i^2 = f(x)$$

$$\alpha_i \ \forall i$$

$$\sum_1^n (\min \alpha_i)\, x_i^2 \le \sum_1^n \alpha_i x_i^2 \le \sum (\max \alpha_i)\, x_i^2$$

$>0 \qquad >0$

minimo autovalore $\qquad$ autovalori $\qquad$ max autoval.

$$\boxed{x^2+y^2} \le x^2+2y^2 \le 2x^2+2y^2$$

Segno delle forme quadratiche (la più recente)

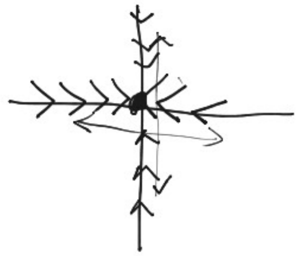
$$\lim_{(0,0)} \frac{1}{x^2+2y^2} \qquad \leftarrow \text{costante}$$

$$x^2+2y^2 \to 0=(0^2+2\cdot 0^2)$$

$\boxed{x^2+2y^2}$ funzione continua perché somma di prodotti delle funzioni continue $g(x,y)=x$ e $h(x,y)=y$

$$\frac{1}{x^2-y^2} \longrightarrow \text{NON Esiste}$$

$x^2-y^2 \searrow 0$



sull'asse x $\quad y\equiv 0 \quad \to \lim\limits_{\substack{(x,y)\to 0\\ \{y=0\}}} \frac{1}{x^2} = +\infty$

asse y $\quad x=0 \quad \lim \frac{1}{-y^2} = -\infty$

si comporta esattamente come $\underline{\underline{\frac{1}{x}}}$ in 1 variabile

---

$$\frac{1}{\sum a_{ij}x_ix_j} \qquad \boxed{x\neq 0}$$

cioè $|x|>0$

$f(x)=\sum a_{ij}x_ix_j \qquad \lim\limits_{0} \frac{1}{\Lambda|x|^2} = +\infty$

$\underline{\lambda|x|^2 \le f(x) \le \Lambda|x|^2}$

$\underline{\lambda>0} \Rightarrow f$ è defin. >0

$$\frac{1}{f(x)} \ge \boxed{\frac{1}{\Lambda|x|^2}}$$

$\Lambda|x|^2 \to 0$

ha segno >0 $(x\neq 0)$

$+\infty$

$x\to 0 \Leftrightarrow |x|\to 0 \Rightarrow |x|^2\to 0$

$\frac{1}{\Lambda|x|^2} > \varepsilon$

$f\to+\infty$

$\Lambda|x|^2 < \frac{1}{\varepsilon}$

$|x| < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\Lambda}} = \delta$

$x\to 0$

f forma quadratica

$\lim_{0} f(x) = 0$ $\qquad \boxed{f(x) = \sum a_{ij} x_i x_j}$ $\qquad |x| \to 0$

$x \to 0$

$x_i \to 0 \ \forall i$

$\lim_{0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ $\quad$ f def. >0

$\qquad\qquad\quad -\infty$ $\quad$ f def. <0

se f è indef. esistono punti di $\mathbb{R}^n$ su cui assume valori di segno discorde

f indefinita $\Rightarrow$ $\lambda < 0 \quad \Lambda > 0$ $\quad \begin{cases} x' \text{ autovettore di } \underline{\lambda} \\ x'' \text{ autovettore di } \underline{\Lambda} \end{cases}$

$f(x') = \lambda |x'|^2 = \lambda$

$f(x'') = \Lambda |x''|^2 = \Lambda$ $\qquad$ versori

$f(tx) = t^2 f(x)$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lambda |x|^2} \quad \text{se } x = tx' \Rightarrow 1/f < 0$$

$$= \frac{1}{\Lambda |x|^2} \quad \text{se } x = tx'' \Rightarrow \frac{1}{f} > 0$$

$\lim_{0} \frac{1}{f}$ $\quad$ f semidefinita (≥ 0)

ha senso solo fuori dall'autosp. di 0 $\Leftarrow$ $\frac{1}{f(x)} > \varepsilon$ $\qquad f(x) < \frac{1}{\varepsilon}$ $\qquad \Lambda |x|^2 < 1/\varepsilon$ $\quad \delta$

$0 \leq f(x) \leq \Lambda |x|^2$ $\qquad |x| < \boxed{(\varepsilon \Lambda)^{-1/2}}$

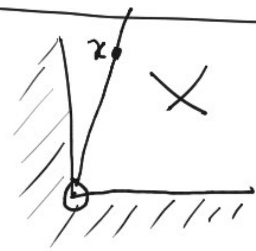
$X \subseteq \mathbb{R}^n$ cono (di vertice 0) se

$$\forall x\in X \quad \forall t>0 \qquad tx\in X$$

$\boxed{X \text{ CONO}}$

$X=\{x>0,\ y>0\}$

I Quadrante



$(x,y)\in X \iff \begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}$

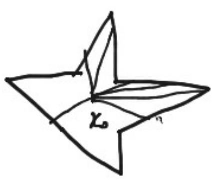
$t(x,y) \equiv (tx,ty) \in X$

$t>0,\ x>0,\ y>0$

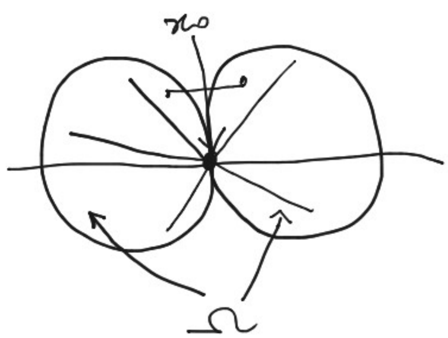
X stella rispetto a $x_0\in X$ se

$$\forall x\in X \quad (1-\lambda)x_0+\lambda x \in X \quad \forall\lambda\in[0,1]$$

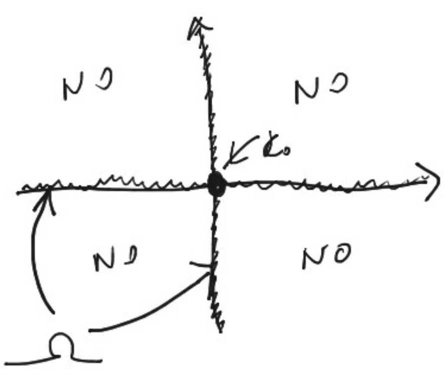
x_0 è il POLO



"un faro in x_0 illumina tutto X"



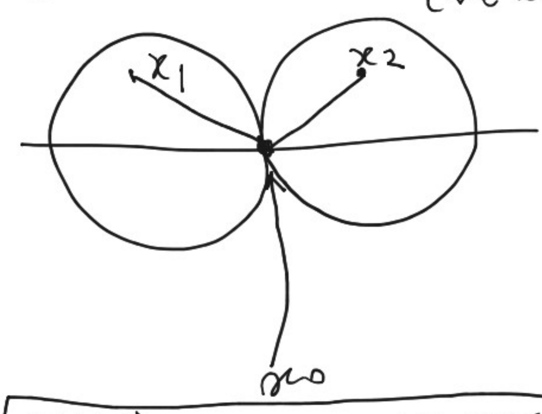
Ω è stella rispetto a x_0 ma non è convesso



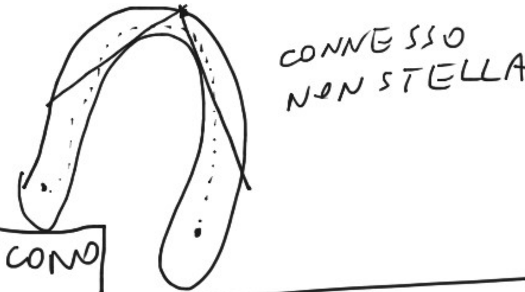
$\Omega = \{xy=0\}$ = unione degli assi cartesiani

è stella rispetto a $(0,0)$ ma non è convesso

Stella $\Rightarrow$ connesso (via x_0)



$\boxed{\text{convesso} \Rightarrow \text{stella} \Rightarrow \text{connesso}}$



FUNZIONI OMOGENEE SU UN CONO

$f: X \to \mathbb{R}$, X cono, si dice α-OMOGENEA (omogenea di grado α) se

$$f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \underline{\forall x \in X} \quad \underline{\forall t > 0}$$

$f(x) = |x| = \sqrt{\sum x_i^2}$ è 1-omogenea

Dobbiamo provare che $f(tx) = t f(x)$ $\forall t > 0$

$$f(tx) = |tx| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{assioma di} \\ \text{omogeneità}}}{=} |t||x| \underset{t>0}{=} t|x|$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad t > 0 \ (\neq 0) \qquad t(x,y) = (tx, ty)$$

$$f(tx, ty) = \frac{t^2(x^2 - y^2)}{t^2(x^2 + y^2)} = f(x,y) = t^0 f(x,y)$$

0-omogenea

$$\frac{x^2+y^2}{x-y}$$

1) dominio (è un cono?)

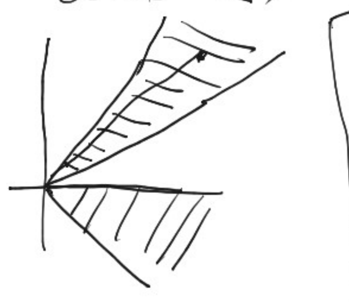
2) grado d' omogeneità?

$$\frac{x^2+y^2}{x^3-y^3}$$

FUNZIONI OMOGENEE

$f(x)$ $\qquad f:\Omega\to\mathbb{R}$ $\qquad \Omega$ cono

cono $\Leftrightarrow$ $x\in$ cono anche $tx\in$ cono $\forall t>0$.



f si dice α-omogenea se

$$f(\underline{tx})=t^\alpha f(x) \quad \forall x\in\Omega\ \forall t>0$$

Ω cono

$x\to tx$

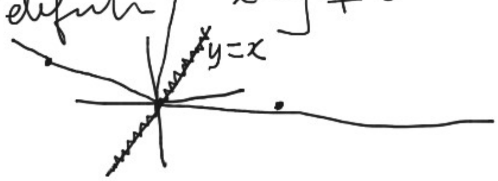
$y\to ty$

$\frac{x^2+y^2}{x-y}$ $\quad$ 1-omogenea

$$\frac{t^2(x^2+y^2)}{t(x-y)} = t\,\frac{x^2+y^2}{x-y}$$

$f(tx,ty) \qquad t^1 f(x,y)$

f è definita $\quad x-y\neq 0$ $\quad \boxed{y\neq x}$



$$\frac{x^2+y^2}{x^3-y^3}=f(x,y) \qquad f(tx,ty)=\frac{t^2(x^2+y^2)}{t^3(x^3-y^3)} =$$

$\underline{t\neq 0}$

$$= t^{-1} f(x,y)$$

(-1)-omogenea

$p(x)$ polinomio omogeneo di grado α allora è α-omogeneo.

$p:\mathbb{R}^n$ (cono) $\quad x\to tx$ in ogni monomio si ottiene un fattore t^α che può essere posto in evidenza

$x^2+xy-\underline{xz}+y^2+3z^2$ è un polinomio omogeneo di grado 2

LEMMA

Se f è α-omogenea su Ω e g è β-omogenea su Ω
$\Rightarrow$ fg è $(\alpha+\beta)$omogenea e f/g è $(\alpha-\beta)$ omogenea

$$(fg)(tx) = \underbrace{f(tx)}_{\alpha\text{-omog.}}\underbrace{g(tx)}_{\beta\text{-omog.}} = t^{\alpha} f(x)\, t^{\beta} g(x) =$$

$$= t^{\alpha+\beta} f(x) g(x)$$

$f(x)$ α-omog. $\quad [f(x)]^{\beta}$ è $(\alpha\beta)$-omogenea

$$[f(tx)]^{\beta} = [t^{\alpha} f(x)]^{\beta} = t^{\alpha\beta}[f(x)]^{\beta}$$

f^{β} è $\alpha\beta$-omog.

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = (\underbrace{x^2+y^2})^{1/2}$$

è 1-omogenea

$\alpha = 2$
$\beta = 1/2$
$1 = 2 \cdot \frac{1}{2}$

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ α-omog. $\quad \alpha > 0$

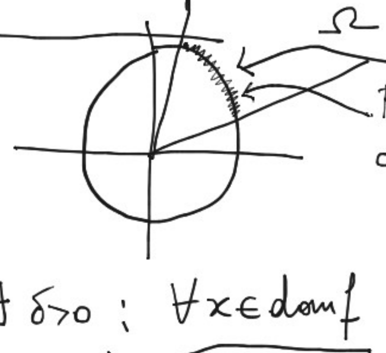
0 è di accum per Ω perché $tx \in \Omega$ se $x \in \Omega$ e $t > 0$

$|tx| = |t||x| < \varepsilon \quad |t| < \varepsilon/|x|$

Allora

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ se e solo se f è limitata su $\Omega \cap \partial B(0,1)$

Ω



Punti di Ω sulla circonferenza unitaria

frontiera

$\partial\Omega$ è la front. di Ω

La tesi è:

$x_0 = 0$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{dom} f\ \ |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

$\boxed{x \neq 0}$ $\quad \boxed{x = |x|\frac{x}{|x|}}$

$$f(x) = f\Big(\underbrace{|x|\frac{x}{|x|}}_{x}\Big) = |x|^{\alpha} f\Big(\frac{x}{|x|}\Big) \Rightarrow |f(x)| = |x|^{\alpha}\Big|f\Big(\frac{x}{|x|}\Big)\Big|$$

$\boxed{t = |x| > 0}$

f è limitata su $\Omega \cap \partial B(0,1)$

$$\boxed{\exists\, k : |f(x)| \le k} \quad \forall x \in \Omega \cap \partial B(0,1)$$

$$x \to \frac{x}{|x|}$$

$$0 \le |f(x)| \le k|x|^{\alpha} \qquad \boxed{\alpha > 0}$$

th. confronto, poiché $|x| \to 0$ $\quad x \;\; |x|^{\alpha} \to 0$

$$k|x|^{\alpha} < \varepsilon \text{ per}$$

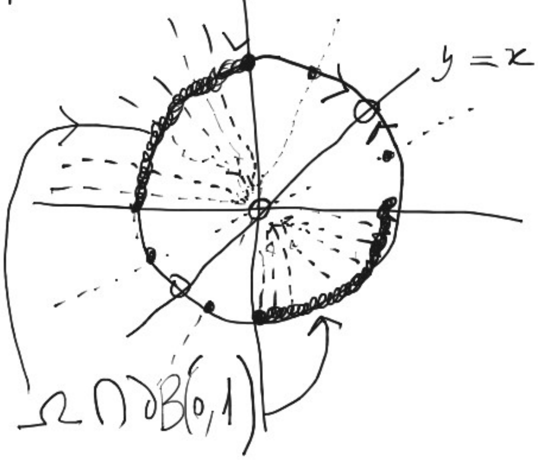
$$|x| < \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{1/\alpha} = \delta$$

Consideriamo l'esempio $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$, definita sul cono $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ne y\}$, ed ivi continua perché rapporto di funzioni continue, col denominatore mai nullo nel dominio Ω.

Consideriamo $\Omega \cap \partial B(0,1)$ e osserviamo che il numeratore di f vale costantemente 1 su $\Omega \cap \partial B(0,1)$, mentre il denominatore tende a 0 quando $(x,y) \to \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ oppure $(x,y) \to \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ne segue che il rapporto ha modulo che tende a $+\infty$, e con segni differenti: positivo sotto la bisettrice $y=x$ e negativo sopra. Dunque il $\lim\limits_{0}$ non esiste, perché in qualunque sfera $B(0,\delta)$ la funzione non è limitata nell'intorno di $\left(\frac{\delta}{2\sqrt{2}}, \frac{\delta}{2\sqrt{2}}\right)$

Se però si sceglie $\Omega = \{xy<0\}$ (II e IV quadrante)



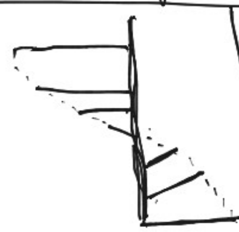
$$\frac{x^2+y^2}{x-y} = f(x,y)$$

Visto che f è 1-omogenea, ne segue

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\Omega}} f(x,y) = 0$$

Sì, perché $H = \boxed{\Omega \cap \partial B(0,1)}$ è chiuso e limitato, e quindi f, che è continua su H, compatto, è limitata su di esso.

$\boxed{f \text{ sia } 0\text{-omogenea}}$, Allora f converge in 0 se e solo se è costante.



f 0 omogenea e non costante allora oscilla

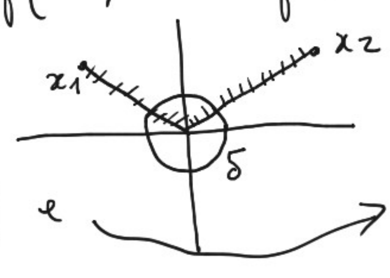
DIM. $\boxed{f(tx) = f(x)}$

$\Rightarrow$ è costante sui raggi uscenti dall'origine

Si ha che $f(x_1) \neq f(x_2)$, perché f è non costante

$\Rightarrow$ $f(tx_1) = f(x_1)$ $\quad f(tx_2) = f(x_2)$

In ogni sfera $B(0,\delta)$ esistono punti sui quali f vale $f(x_1)$ $(tx_1, t>0)$ e



dove f

altri sui quali f vale $f(x_2)$

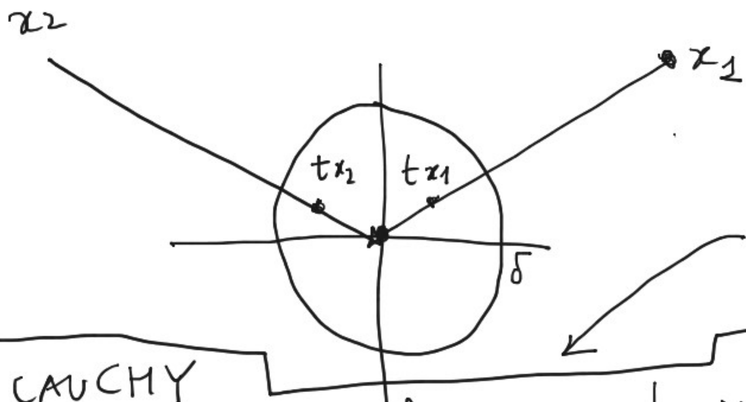
Scelto $\bar{\varepsilon} < |f(x_1) - f(x_2)|$ e fissato ad arbitrio $\delta > 0$ si avrà che $|tx_1| < \delta$ e $|tx_2| < \delta$ se si sceglie

$$|t| < \min\left\{ \frac{\delta}{|x_1|}, \frac{\delta}{|x_2|} \right\}$$

Ma, dalla 0-omogeneità, si ha $|f(tx_1) - f(tx_2)| =$

$= |f(x_1) - f(x_2)| \geq \bar{\varepsilon}$

e dunque la condizione di Cauchy è falsa



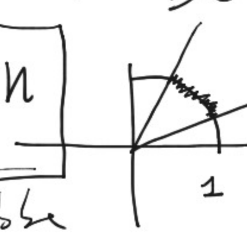
CONDIZ CAUCHY

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in \mathrm{dom} f$, $x \neq x_0$, $y \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$, $|y - x_0| < \delta$ $\quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

CN Se f, funzione α-omog., $\alpha > 0$, non è limitata sulla parte del dominio sulla sfera unitaria, allora oscilla.

DIM. f sia non limitata su $\Omega \cap \partial B(0,1)$

$$\boxed{\exists \ x_n \in \Omega \cap \partial B(0,1) : |f(x_n)| > n}$$



Se f fosse infinitesima in 0, si avrebbe

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega, |x| < \delta \ x \neq 0, \ |f(x)| < \varepsilon.$

Ma si ha $\varepsilon > |f(x)| = \left|f\left(|x| \frac{x}{|x|}\right)\right| = \left||x|^\alpha f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| = |x|^\alpha \left|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|$

scelto $\bar{\varepsilon} = 1$

$\exists \bar{\delta} : \forall x \in \Omega, |x| < \bar{\delta} \ x \neq 0$

$1 > |x|^\alpha \left|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|$

Posto $y_n = \frac{\bar{\delta}}{2} x_n$ $\quad |y_n| = \frac{\bar{\delta}}{2} |x_n| = \bar{\delta}/2$ $\quad y_n \in B(0, \bar{\delta})$

ciò produce un assurdo perché, essendo $y_n \in B(0,\bar{\delta})$ dovrebbe essere $|f(y_n)| < 1$, ma

$$1 > |f(y_n)| = \left(\frac{\bar{\delta}}{2}\right)^\alpha |f(x_n)| > n\left(\frac{\bar{\delta}}{2}\right)^\alpha$$

è falsa non appena si sceglie $n > \left(\frac{2}{\bar{\delta}}\right)^\alpha$.

CAMBIO DI VARIABILE NEI LIMITI

(LIMITE DI FUNZIONI COMPOSTE DI FUNZIONI CONVERGENTI)

$$f : \Omega \to \Sigma \,, \quad g : \Sigma \to H$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \qquad \lim_{y\to L} g(y) = M$$

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) \underset{y=f(x)}{\overset{?}{=}} \lim_{y\to L} g(y)$$

se si sa che $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$

Ts (FALSA)

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = M$$

CONTROESEMPIO

Basta considerare

$$f(x) \equiv 1 \quad e \quad g(y) = \begin{cases} 2 & y \neq 1 \\ 3 & y = 1 \end{cases}$$

e notare che

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \quad e \quad \lim_{y \to 1} g(y) = 2$$

mentre

$$\lim_{x \to 0} g(f(x)) = 3 \neq 2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ L = 1 \\ M = 2 \end{array}}$$

$$\lim_{x\to 0} \boxed{\frac{\sin x^2}{x^2}} \underset{\underline{t=x^2}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Limite di funzioni composte convergenti

$x \longrightarrow t = x^2 = f(x)$

$t \to \frac{\sin t}{t} = g(t)$

$x \to g(f(x)) = \frac{\sin x^2}{x^2}$

$f : \Omega \to \Sigma \quad g : \Sigma \to \mathbb{R}$

$h(x) = g(f(x))$ è definita su Ω

$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \ , \ \lim_{t \to L} g(t) = M$

$\Downarrow$

Ts. $\lim_{X \to X_0} g(f(x)) \overset{?}{=} M$

$\boxed{\text{FALSO!!!}}$

$f(x) \equiv 1 \quad \forall x, \ L = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$

$g(f(x)) \equiv g(1) = 2$

$$g(t) = \begin{cases} 2 & t = 1 \\ 3 & t \neq 1 \end{cases} \quad \lim_{t\to 1} g(t) = 3 \neq 2 = \lim_{x\to 0} g(f(x))$$

$\boxed{\text{Casi in cui il cambio di variabili è lecito!}}$

I) g è continua in $L \Rightarrow \lim_{t\to L} g(t) = g(L)$

$|g(f(x)) - \underbrace{g(L)}_{M =}| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall t \in \Sigma, \underline{|t - L| < \sigma}$

$|g(t) - g(L)| < \varepsilon$

$f(x)$?

Sì se $\boxed{f(x) \in \Sigma}$

$|f(x) - L| < \sigma$

$\forall \sigma \ \exists \delta$; vera per la converg. a L di f in x_0

purché $x \neq x_0 \ |x - x_0| < \delta$

NON si può usare per $\lim_0 \frac{\sin x^2}{x^2}$ perché

$g(t) = \frac{\sin t}{t}$

non è continua in $0 = L$

II) g <u>NON</u> è definita in L

$$\lim_{t \to L} g(t) = M$$

$$|g(f(x)) - M| < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon\ \exists \sigma > 0 :$ $\boxed{\forall t \in \Sigma\ |t-L| < \sigma,\ t \neq L}$

$$|g(t) - M| < \varepsilon$$

al posto di t si può mettere $f(x)$

e ottenere la tesi se

1) $f(x) \in \Sigma$
2) $f(x) \neq L$
3) $|f(x) - L| < \sigma$

se $f(x) = L$ $g(f(x))$ non esiste

scelto σ $\exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega,\ x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta$

Il cambio di variabile è dunque valido se:

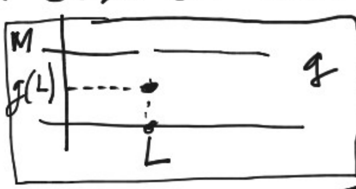
— g è continua in L

<u>oppure</u>

— se g non è definita in L

Resta da considerare il caso in cui g è definita in L, ma è discontinua

$$g(L) \neq M$$

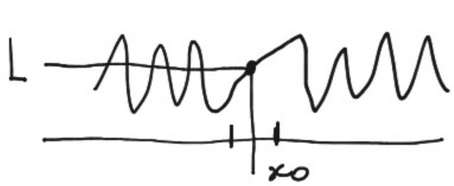


III) Esiste un intorno $B(x_0, \rho)$ di x_0 tale che

$$\boxed{f(x) \neq L} \quad \forall x \in B(x_0, \rho) \setminus \{x_0\}$$

Stessa prova precedente ma $f(x) \neq L$ è gratis se $\delta < \rho$

Il valore "proibito" L è permesso alla f solo in x_0 (almeno in un intorno $B(x_0, \rho)$)



risolvere $f(x) = L$ è (normalmente) una TRAGEDIA

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$$

$f(x) = x^2$ $\quad f \to 0 = L$ in $0 \doteq x_0$

$g(t) = \frac{\sin t}{t}$ $\quad g \to 1$ in $0 = L$

g non è definita in 0

2° caso

$$\lim_{0} \sin(x^2) = 0$$

$f(x) = x^2$

$g(t) = \sin t$

g è continua in 0

dom $= \{(x,y) \neq (0,0)\}$

$\partial B(0,1) \subseteq$ dom f

è chiusa e limitata

$$\lim_{(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+2y^2}} = 0$$

$$\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+2y^2}} = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}}$$

2-omog

1-omog

2° caso

$t = x^2+y^2$

$\to 1$

sint/t NON è def in 0

$t \to 0$

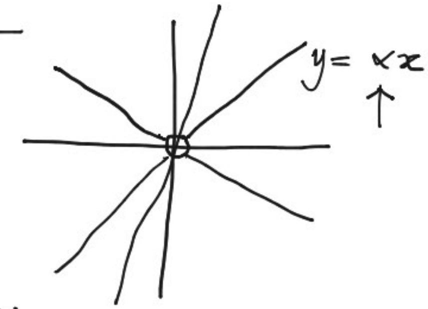
$\to 0$

1-omog

$x^2+2y^2 \neq 0$ se $(x,y) \neq (0,0)$

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^4+y^2} \qquad \underline{y=\alpha x} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Fissato α, calcoliamo



$$\lim_{(0,0)} f(x,y) = 0$$

$y=\alpha x$

$$\left.\frac{x^3+y^3}{x^4+y^2}\right|_{y=\alpha x} =$$

restrizione di f all'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; y=\alpha x\}$

$$= \frac{x^3+\alpha^3x^3}{x^4+\alpha^2x^2} = \underbrace{x}_{\to 0}\ \underbrace{\frac{1+\alpha^3}{x^2+\alpha^2}}_{\to \frac{1+\alpha^3}{\alpha^2}}$$

$x \to 0$ se $(x,y)\to 0$; $\dfrac{1+\alpha^3}{x^2+\alpha^2} \to \dfrac{1+\alpha^3}{\alpha^2}$ se $\alpha \neq 0$

Se, invece, $\alpha = 0 \Rightarrow y=0$ e $x\neq 0$

e $f(x,0) = \dfrac{x^3}{x^4} = \dfrac{1}{x}$

che NON HA LIMITE se $x \to 0$

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \qquad \text{restrizione a } \boxed{y=\alpha x} \qquad \boxed{\alpha\neq 0}$$

$$\frac{x^2(\alpha x)}{x^4+\alpha^2x^2} = \underbrace{\frac{x^3}{x^2}}_{\to 0}\ \underbrace{\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}}_{\to \frac{1}{\alpha}} \to 0$$

$x \to 0$, $\alpha \neq 0$

Se, invece,

$\alpha = 0 \Rightarrow y = 0$

$f(x,0) \equiv 0 \quad \forall x \neq 0$

$$\lim_{0} f(x,0) = 0$$

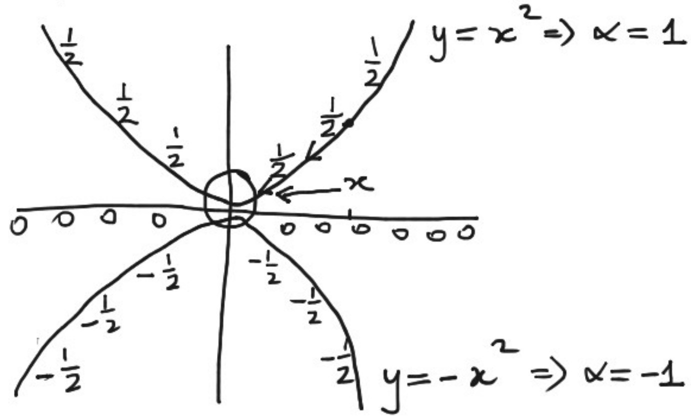
Sull'asse y, non considerato prima $f(0,y)\equiv 0$ per $y\neq 0$ e infine:

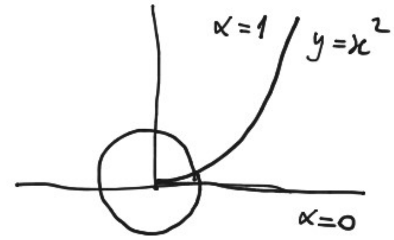
IL LIMITE SU OGNI RETTA PER $(0,0)$ VALE 0.

<u>NON BASTA</u> per poter dire che $f \to 0$

Consideriamo le parabole $y = \alpha x^2$

$$f(x, \underbrace{\alpha x^2}_{y}) = \frac{x^2(\alpha x^2)}{x^4+\alpha^2 x^4} \underset{x\neq 0}{=} \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$





$$\lim_{(x,y)\to 0} x \lg y = 0 \ ? \qquad \text{NO!}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x \lg x = 0 \qquad x\lg x = \frac{\lg x}{\frac{1}{x}}}$$

$y = \alpha x \qquad \alpha x > 0$

$$f(x,y) \equiv f(x, \alpha x) = x(\lg \alpha x) = \begin{cases} \boxed{\alpha > 0 \Rightarrow x > 0} \\ x(\lg x + \lg \alpha) = \\ x \lg x + x \lg \alpha \to 0 \end{cases}$$

$\alpha < 0 \Rightarrow x < 0$

$\alpha x = |\alpha||x|$

$x(\lg|x| + \lg|\alpha|)$

$\to 0$ limitata

$$x \lg|x| = \frac{x}{|x|} \underbrace{|x| \lg|x|}_{\to 0}$$

cambio di variabile $t = |x|$

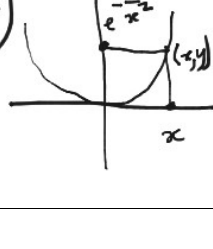
$t \lg t$ NON È DEFIN. IN 0

$$y = e^{-1/x^2} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0} \ (*)$$

$$f(x, \underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}}_{y}) = x \lg e^{-\frac{1}{x^2}} = x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

NON tende a 0 per $x \to 0$ e NON ESISTE

$x \to 0 \Rightarrow y \to 0$ per $(*)$



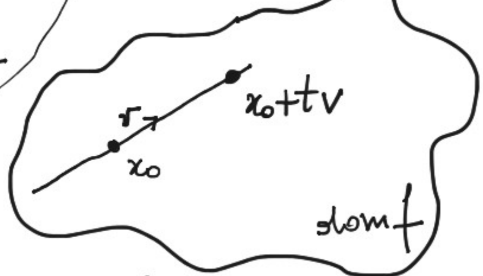
DERIVATE DIREZIONALI E PARZIALI

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega$ aperto $\subseteq \mathbb{R}^n$

sia $x_0 \in \Omega$

$v \in \mathbb{R}^n$

$v \neq 0$



$h(t) = f(x_0 + tv)$ restrizione di f alla retta $x_0 + tv$

la pendenza dipende dalla direzione di movimento!

DUNQUE...

DEF. Si definisce DERIVATA DIREZIONALE di f in x_0 nella direzione di v il limite $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(x_0+tv) - f(x_0)\right] =$ se esiste finito.

$$= \lim_{0} \frac{1}{t}\left[h(t) - h(0)\right] = h'(0)$$

Si denota con

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0), \quad f_v(x_0), \quad \partial_v f(x_0) \qquad \text{sinonime}$$

Le derivate direzionali $f_{e_1}(x_0), f_{e_2}(x_0), \dots, f_{e_n}(x_0)$

$e_1 \dots e_n$ base canonica di $\mathbb{R}^n$ si chiamano DERIVATE PARZIALI.

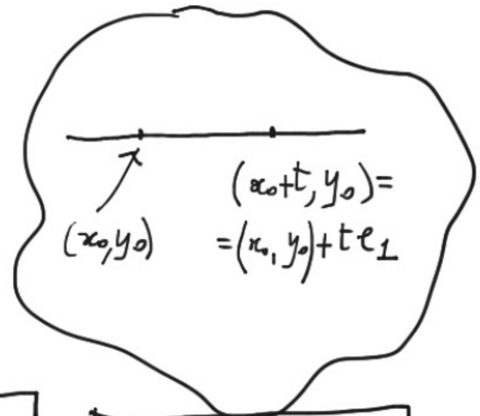
$x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$

$$\partial_{e_1} f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te_1) - f(x_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(x_0^1 + t, x_0^2 + 0\cdot t, x_0^3, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n)\right]$$

che è la derivata in x_0^1 della funzione

$$y \to f(y, x_0^2, \dots, x_0^n) \qquad 1 \text{ variabile } y$$



$$\partial_x \sin(x^2 y) = \cos(x^2 y)\, y\, 2x$$

y si considera <u>costante</u>

$$\partial_y \frac{x}{y} \underset{y \neq 0}{=} x\, \partial_y \frac{1}{y} = -\frac{x}{y^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial e_i} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}} \qquad \boxed{\partial_{e_i} f \to \partial_{x_i} f} \qquad \boxed{f_{e_i} \to f_{x_i}}$$

notazioni per derivate parziali

$$\partial_x (\sin x + \cos y) = \cos x + 0$$ → derivata della $\cos y$, costante in x.

UNA FUNZIONE PUÒ AVERE TUTTE LE DERIVATE DIREZIONALI (NULLE) ED ESSERE DISCONTINUA

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}\right)^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (0,0) \end{cases}$$

definita dappertutto in $\mathbb{R}^2$

f ha tutte le derivate direzionali in $(0,0)$, e valgono 0.

$$v = (\alpha, \beta) \qquad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \Rightarrow v \neq 0$$

$$\frac{f(0 + \alpha t, 0 + \beta t) - f(0,0)}{t} = \frac{1}{t} \left(\frac{(\alpha^2 t^2)(\beta t)}{\alpha^4 t^4 + \beta^2 t^2} \right)^2 = \frac{1}{t} \frac{t^6}{t^4} \left(\frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^4 t^2 + \beta^2} \right)^2 =$$

$$= t\left(\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^4 t^2+\beta^2}\right)^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{poiché}$$

se $\boxed{\beta\neq 0}$ $$\left(\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^4t^2+\beta^2}\right)^2 \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{\alpha^4\beta^2}{\beta^4} \leftarrow$$

Se invece

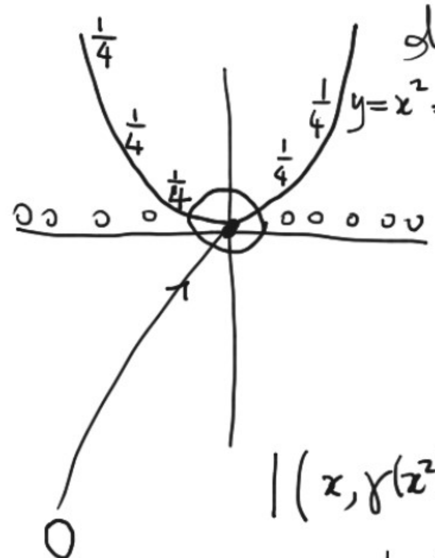
$$\boxed{\beta=0} \Rightarrow \alpha\neq 0 \quad t\neq 0 \ \left(\lim_{t\to 0}\right) \Rightarrow \underline{\alpha^4t^2\neq 0} \Rightarrow \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^4t^2+\beta^2} = \frac{0}{\alpha^4t^2} \equiv 0 \quad \forall t\neq 0$$

quindi tutte le derivate direzionali sono 0

$$f(x,\gamma x^2) = \left(\frac{x^2\gamma x^2}{x^4+\gamma^2x^4}\right)^2 = \left(\frac{\gamma}{1+\gamma^2}\right)^2 \neq 0$$

$\underline{x\neq 0}$ se $\gamma\neq 0$

dove f



$y=x^2 \Rightarrow \gamma=1$

mentre $\underline{f(0,0)=0}$

$$f(x,\gamma x^2)=\frac{1}{4}$$

$$f(0,0)=0 \Rightarrow \left|f(x,\gamma x^2)-f(0,0)\right| = \frac{1}{4}$$

$\forall x\neq 0$

mentre

$$\left|(x,\gamma(x^2))\right| = \sqrt{x^2+\gamma^2x^4} =$$

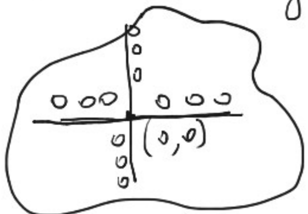
$$= \underline{\underline{|x|}}\,\underline{\underline{\sqrt{1+\gamma^2x^2}}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

e dunque la condizione di Cauchy non si verifica per $\varepsilon < 1/4$

$f(x,y) = |xy|$ $\quad \exists f_x(0,0)\ ,\ f_y(0,0)$?

f è composto di $g(x,y) = xy$ $\quad h(t) = |t|$ $\quad h'(0)$ N.E.

f è ident. 0 dove $xy = 0$ cioè sugli assi $\Rightarrow$ f è costante sugli assi.



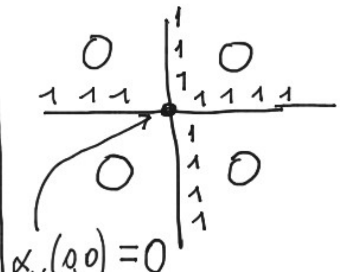
$|x^2| = x^2$ è deriv. in 0

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h^2| - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = 0$$

$y = 0$

$$f\big((0,0) + t\underbrace{(1,0)}_{e_1}\big) = |t\cdot 0| = 0 \ \forall t \Rightarrow h'(0) = 0$$

$h(t) = f(x_0 + tv)$ è costante $= 0$ su l'asse x e y



$\partial_x(0,0) = 0$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{sugli assi } (xy=0) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0,0) = \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{f\big((0,0) + t(1,1)\big)}_{f(t(1,1)) \equiv 0}\Big](0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overset{=0}{f(h,h)} - \overset{=1}{f(0,0)}}{h} =$$

$(h \neq 0)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \qquad x_0 = (0,0),\ v = (1,0),\ t = h$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{h} \quad \text{NON ESISTE}$$

$f(x,y) = |x^2 - y^2|$ $\quad \exists f_x(0,0)\ \ \exists f_y(0,0)$?

$$\frac{f\big((0,0) + h(1,0)\big) - f(0,0)}{h} = \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{|h^2| - 0}{h}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = 0$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[\underbrace{f\big((0,0)+h(1,0)\big)}_{f(h,0)} - \underbrace{f(0,0)}_{=1}\Big] =$$

$h \neq 0$ $\quad f(h,0) = \dfrac{\sin(h^2)}{h^2}$

$$= \lim_0 \frac{\frac{\sin h^2}{h^2} - 1}{h} = \lim_0 \frac{\sin h^2 - h^2}{h^3} = 0$$

$t = h^2$ $\quad \underbrace{\dfrac{\sin h^2 - h^2}{h^6}}_{\to -\frac{1}{6}} \cdot \underbrace{\dfrac{h^6}{h^3}}_{\to 0}$

f è continua in $(0,0)$ perché

$$\lim_{(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

$t = x^2+y^2$

$\dfrac{\sin t}{t}$ non è definita in 0

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$$

$$\sin t - t = -\frac{1}{3!}t^3 + o(t^3)$$

Th. FERMAT

PUNTO DI MINIMO LOCALE

$x_0 \in \Omega$ si dirà di <u>minimo locale</u> per $f : \Omega \to \mathbb{R}$

se $\exists\, \delta > 0 : \underline{f(x) \geq f(x_0)}\ \forall x \in \Omega \cap B(x_0, \delta)$

massimo locale

$f(x) \leq f(x_0)$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ AN I

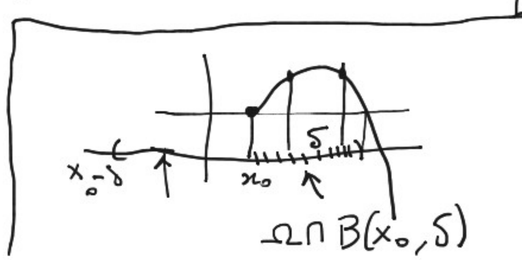
1) x_0 punto di min. locale

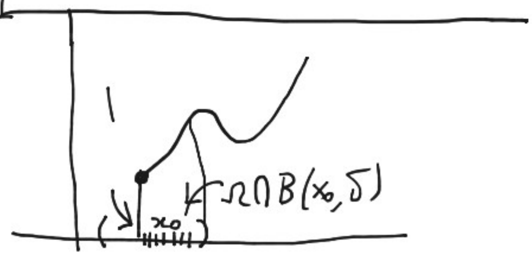
2) $x_0 \in \mathring{\Omega}$ (interno ad Ω)

3) $\exists\, f'(x_0)$

$\Downarrow$

$f'(x_0) = 0$





Sia $f:\Omega\to\mathbb{R}$ $(\Omega\subseteq\mathbb{R}^n)$

$x_0\in\Omega$ e

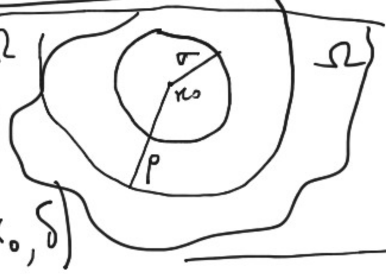
- x_0 è di minimo locale per f
- x_0 è interno ad Ω $(x_0\in\mathring{\Omega})$
- $\exists\, f_v(x_0)$ per qualche $v\neq 0$

$$\Longrightarrow f_v(x_0)=0$$

DIM. Sia $\sigma>0$: $B(x_0,\sigma)\subseteq\Omega$ che esiste per l'ip. 2).

Dall'ipotesi 1) $\exists\,\rho>0$: $f(x)\ge f(x_0)$ $\forall x\in\Omega\cap B(x_0,\rho)$

$\delta=\min\{\rho,\sigma\}$ $\quad B(x_0,\delta)\subseteq B(x_0,\rho)\cap B(x_0,\sigma)$



$f(x)\ge f(x_0)$ $\forall x\in B(x_0,\delta)$

h $\quad f(x_0+tv)$ è definita se $|t|<\delta/|v|$ e dunque

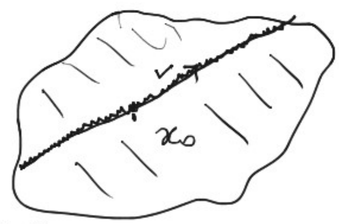
$h(t)=f(x_0+tv)$ $\quad \delta>\text{dist}(x_0+tv,x_0)=|x_0+tv-x_0|=|t||v| \iff |t|<\frac{\delta}{|v|}$ $\quad h: \left]-\frac{\delta}{|v|},\frac{\delta}{|v|}\right[\to\mathbb{R}$

$h(0)=f(x_0)$ $\quad$ quello dell'ipotesi $\quad$ 0 è interno a

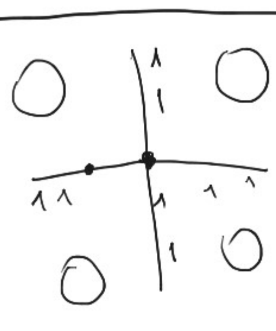
$h'(0)=f_v(x_0)$

$\Longrightarrow$ Th. Fermat in 1 variabile $\quad h'(0)=0$ e cioè $f_v(x_0)=0$

Basta considerare la restrizione di f alla retta $x_0+tv\cap\Omega$



$$f_v(x_0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big[\underbrace{f(x_0+tv)}_{h(t)}-\underbrace{f(x_0)}_{h(0)}\Big]=\lim_{t\to 0}\frac{h(t)-h(0)}{t}=$$
$$=h'(0)$$



$(0,0)$ è di massimo globale, interno al dom. $\mathbb{R}^2$

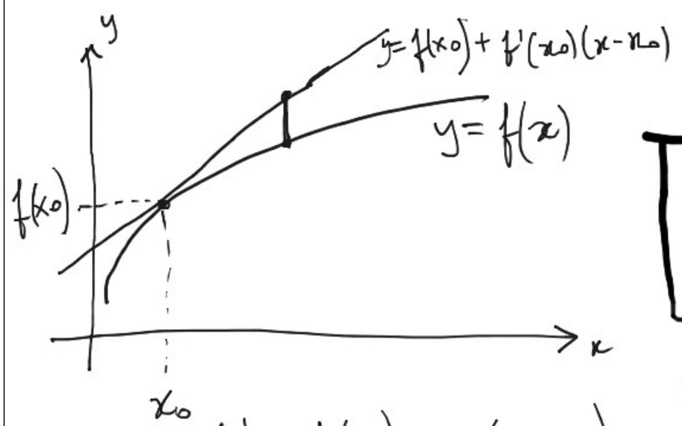
in $(0,0)$ esistono solo due derivate direzionali $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ $\Longrightarrow$ le derivate sono nulle

lo stesso in $(-1,0)$ (esiste solo $f_x(-1,0)=0$)

DIFFERENZIALE

derivabilità $\not\Rightarrow$ continuità

direzionale $\hookrightarrow$ pendenza



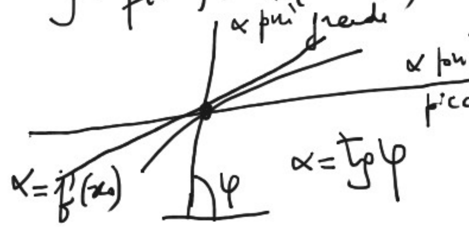
$$\boxed{\exists \text{ retta per } (x_0, f(x_0)) \text{ che approssima meglio il grafico di } f}$$

$$f(x) - \underbrace{\big(f(x_0) + \alpha(x - x_0)\big)}_{\text{funzione che ha}}$$

per grafico una retta (non vert.) per il punto $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + \alpha(x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{x - x_0} = \underbrace{f'(x_0) - \alpha}_{\substack{\neq 0 \text{ se } \alpha \neq f'(x_0) \\ = 0 \quad \alpha = f'(x_0)}} \quad \text{se } \exists f'(x_0)$$

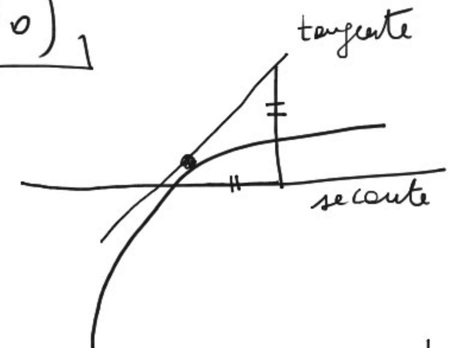


$\alpha = \operatorname{tg} \varphi$

Si definisce retta tangente al graph f in $(x_0, f(x_0))$ la retta

$$y = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{g(x)}$$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0}$$



DEFINIZIONE $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$.

Diremo che f è differenziabile in x_0 se esiste $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ **LINEARE** tale che

$$\lim_{\substack{W \to 0 \\ x \to x_0}} \frac{1}{|W|}\big[f(x_0 + W) - f(x_0) - A(W)\big] = 0$$

$W = x - x_0$

$x = x_0 + W$

$A(w)$ si dirà differenziale di f in x_0 nella direzione di w e si denoterà con il simbolo

$$\boxed{df(x_0, w)} \equiv df$$

A dipende da x_0 e dipende anche dall'incremento w

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad$ f lineare $\Rightarrow f$ è differ.

TS $\quad \boxed{df(x_0, w) = f(w)}$ cioè

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(x_0+w) - f(x_0) - f(w)}{|w|} = 0.$$

Sì, perché

$$f(x_0+w) - f(x_0) - f(w) \equiv 0$$

$df(x_0, w) = aw$

$\boxed{f \text{ lineare} \Rightarrow f(x_0+w) = f(x_0) + f(w)}$ $\quad f(x) = ax$

Il differ. non dip. da x_0, è costante in x_0 $\quad f'(x) = a$

---

f è diff. in $x_0 \Rightarrow$ è continua in x_0

Dim $\quad \lim_{w \to 0} |f(x_0+w) - f(x_0)| = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim_{w \to 0} f(x_0+w) = f(x_0)}$

$$\left| f(x_0+w) - f(x_0) - A(w) + A(w) \right| \overset{\text{dis. triang.}}{\leq}$$

$$\leq |f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)| + |A(w)| =$$

$$= \underbrace{\frac{|f(x_0+w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|}}_{\substack{\downarrow \text{ ipotesi di diff.} \\ 0}} \underbrace{|w|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{|A(w)|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \to 0$$

$\boxed{A(w) = A(\Sigma w_i e_i) = \sum_1^n w_i A(e_i)}$ $\xrightarrow{\text{se } w \to 0}$ $0 \ \forall i$

$\boxed{f \text{ diff in } x_0} \Rightarrow \exists\ f_v(x_0) = df(x_0, v) = \underline{A(v)} \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

DIM. $\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - A(v) = 0}$ equivale alla tesi

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f(x_0+tv)-f(x_0)-A(tv)|}{|t|} =$$

se il rapporto è infinitesimo allora lo è il suo modulo.

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f(x+tv)-f(x_0)-A(tv)|}{|tv|}\,|v| \overset{tv=w}{=}$$

$|v|$ è costante

è composta di $t \xrightarrow{\varphi} tv$ $\quad \psi(w) = \frac{|f(x_0+w)-f(x_0)-A(w)|}{|w|}$

per il criterio del cambio di variabili

(funzione "più esterna" non definita per $w=0$)

il $\lim_{t\to 0} \frac{1}{|t|} |f(x_0+tv)-f(x_0)-A(tv)| =$

$$= \lim_{w\to 0} \frac{|f(x_0+w)-f(x_0)-A(w)|}{|w|} = 0$$

per ip. di diff.

$$\frac{|f(x_0+tv)-f(x_0)-A(tv)|}{|t|} = \psi(\varphi(t)) \qquad \varphi(t) = tv$$

$$\psi(w) = \frac{|f(x_0+w)-f(x_0)-A(w)|}{|w|}$$

A lineare $\qquad A(v) = A\left(\sum v_i e_i\right) =$

$$\underset{\displaystyle df(x_0, v)}{\overset{\parallel}{A(v)}} = \boxed{\sum_{1}^{n} f_{x_i}(x_0)\, v_i} \longleftarrow = \sum v_i \underbrace{\boxed{A(e_i)}}_{\displaystyle \boxed{\frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0)} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)}$$

$$\boxed{\nabla f(x_0)} = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_0) \\ f_{x_2}(x_0) \\ \vdots \\ f_{x_n}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v$$

GRADIENTE

di f in x_0

$\nabla f = f'$

$$\boxed{df(x_0, v) = \nabla f(x_0)\, v}$$

$$= f'(x)\, v$$

$$\underbrace{df(x_0, w)}_{\substack{\| \\ A(u)}} = \underline{\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) w_i} \equiv \nabla f(x) w$$

$$f \text{ differ. in } x_0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = A(v)} = \sum v_i \underbrace{A(e_i)}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)}$$

$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ def. su $\mathbb{R}^2$ ed è 0 se $xy = 0$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = 0 \Rightarrow \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{(h \neq 0)} \ ? \ A(v) = 0 v_1 + 0 v_2 \equiv 0 \ ? \ ? \ ?$$

$f(x,y) = |xy| \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \qquad \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overset{?}{A}(w) = 0 w_1 + 0 w_2 \equiv 0$$

$$\lim_{h,k \to 0} \frac{|hk| - 0 - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

numer. 2-omog.

den. 1-omog.

rapporto 1-omog $\underline{\underline{1 > 0}}$

1-omog.

$\underline{\underline{\text{limitata}}}$ su $(\mathbb{R}^2 - \{0,0\}) \cap \partial B(0,1) = \partial B(0,1)$

per Weierstrass $\quad$ [cont.] perché $\longrightarrow$ chiuso limitato

numeratore e denominatore sono continui e denom. $\neq 0$ su $\partial B(0,1)$

$\neq 0$ su $\partial B(0,1)$

f è diff

A è il differenziale se $W=(h,k)$

$$\lim_{W\to 0}\frac{f(h,k)-f(0,0)-A(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|hk|}-0-0}{\sqrt{h^2+k^2}} \neq 0$$

0-omogenea non costante

$\Rightarrow$ NON HA LIMITE IN $(0,0)$

$\Rightarrow f$ NON E' DIFFER.

$$\frac{\partial f}{\partial(1,2)}(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot(1,2) = 0\cdot 1+0\cdot 2 = 0$$

$|xy|$ ha minimo globale sugli assi

$\Downarrow$

Fermat

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=0$$

Fermat + f è differenz. $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)=0\ \forall i$

$\nabla f(x_0)W=0 \Leftarrow$

$\| \ \frac{\partial f}{\partial W}(x_0)=0$

Il differenziale è unico

$$A(w) = df(x_0, w) \implies \boxed{A(w) = \nabla f(x_0)\, w}$$

$$\lim_{w \to 0} \frac{1}{|w|}\left[f(x_0 + w) - f(x_0) - A(w)\right] = 0$$

$$\lim_{w \to 0} \frac{1}{|w|}\left[f(x_0 + w) - f(x_0) - B(w)\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

A, B lineari $\quad A(tx) = tA(x)$

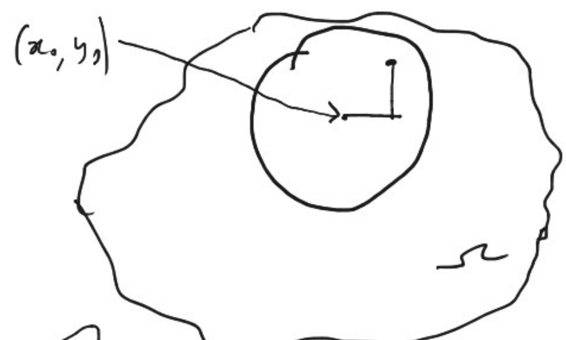
$$\lim_{w \to 0} \frac{1}{|w|}\left[A(w) - B(w)\right] = 0 \quad \longleftarrow \text{ se, per assurdo, } A \neq B$$

0-omogenea non costante $\implies$ lim NON ESISTE

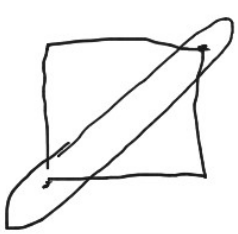
Teorema (del differenziale totale): Sia Ω aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $f_x, f_y : \Omega \to \mathbb{R}$ e siano continue $\left(f \in C^1(\Omega)\right) \implies \exists\, df(x_0, w) \quad \forall x_0 \in \Omega$

f è diff. in ogni punto di Ω.

DIM.



$$\boxed{df\big(\underbrace{(x_0, y_0), (h, k)}_{w}\big) \overset{?}{=} f_x(x_0, y_0)\, h + f_y(x_0, y_0)\, k}$$

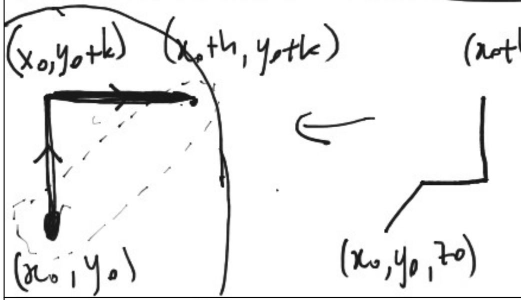


NO

Occorre provare che $\quad ?\ \underset{W}{A}(h,k) = f_x(x_0,y_0)\,h + f_y(x_0,y_0)\,k$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\Big[f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\overbrace{f_x h - f_y k}\Big] \overset{?}{=} 0$$

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0) = f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k) +$$
$$+ f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0) \overset{\text{Lagrange}}{=} f_x(\xi, y_0+k)(x_0+h-x_0) +$$
$$+ f_y(x_0,\eta)(y_0+k-y_0) = \boxed{f_x(\xi,y_0+k)\,h + f_y(x_0,\eta)\,k}$$



$t \to f(t,y_0+k)$ si applica

$\to s \to f(x_0,s)$ Lagrange

$\xi\in[x_0,x_0+h]$ $\quad \eta\in[y_0,y_0+k]$

$$\lim_{h,k\to 0}\frac{\big|[f_x(\xi,y_0+k)-f_x(x_0,y_0)]\,h+[f_y(x_0,\eta)-f_y(x_0,y_0)]\,k\big|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le$$

triang.

$\to 0$ contin. di f_x in (x_0,y_0)

$$\le \lim_{(0,0)} \underbrace{\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{0\le\ \cdot\ \le 1}\big|f_x(\xi,y_0+k)-f_x(x_0,y_0)\big| +$$

$(\xi,y_0+k)\to(x_0,y_0)$

$$+\lim_{(0,0)}\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\underbrace{\big|f_y(x_0,\eta)-f_y(x_0,y_0)\big|}_{\to 0}$$

$(x_0,\eta)\to(x_0,y_0)$

$|h|\le\sqrt{h^2+k^2}$ $\qquad h\to 0$ $\ \xi\in[x_0,x_0+h]$ comporta $\xi\to x_0$

$|k|\le\sqrt{h^2+k^2}$ $\qquad k\to 0$ $\ \eta\in[y_0,y_0+k]$ " $\ \eta\to y_0$

Esempio $f(x,y)=x^3+y^2$ è diff. in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ perché è $C^1(\mathbb{R}^2)$ $\quad f_x=3x^2 \quad f_y=2y$

continue

$f(x,y)=|xy|$ si sa già che è diff.

$xy\neq 0$

$\boxed{f_x(h,k)\to f_x(0,0)}$ $\quad \boxed{f_y(h,k)\to f_y(0,0)}$

limiti in $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{\frac{xy}{|xy|}\, y \to 0}$$

non sempre è più comodo verificare che $f\in C^1$ (n limiti in n variabili) invece che usare la definizione di differenziale (1 limite in n-variabili)

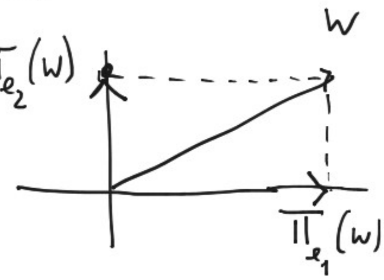
$$\boxed{df=\sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i}$$

negli esempi precedenti

$dx_1=h \quad dx_2=k$

$(dx_1, dx_2)=(h,k)=w$

$$df(x_0,w)=\sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, w_i$$



$$\boxed{\pi_{e_i}(w)=w_i}$$

π_{e_i} è lineare $\forall i$

$$d\pi_{e_i}(x_0,w)=w_i$$

$$d\pi_{e_i}(x_0,w)\equiv dx_i(x_0,w)$$

dx_i è una diversa (più antica) notazione per $d\pi_{e_i}$, mai usata in pratica.

$$\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}} \qquad \underbrace{\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n} \qquad \frac{df}{\underbrace{dx}_{h}} \quad f' \quad \text{LEIBNITZ}$$

∇ nabla

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|}\left[f(x_0+h)-f(x_0)-\underbrace{\overbrace{f'(x_0)h}^{df(x_0,h)}}_{A(h)}\right]=$$

$h\neq 0$

$$=\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{h}{|h|}}_{\le 1}\underbrace{\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{f'(x_0)\cancel{h}}{\cancel{h}}\right]}_{\downarrow\ 0}=0$$

se e solo se f è derivabile in x_0

$$\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ è diff. se e solo se è derivabile}} \qquad df(x_0,h)= =\underbrace{f'(x_0)h}$$

$f'(x_0)$ $\boxed{\text{derivata}}$ $\qquad$ $\nabla f(x)$ $\boxed{\text{derivata}}$

$$\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$$

$$\lim_{w\to 0}\frac{1}{|w|}\left[\gamma(x_0+w)-\gamma(x_0)-\underbrace{\dot\gamma(x_0)\,w}\right]\overset{?}{=}0 \qquad \gamma(x)=\begin{pmatrix}\gamma_1(x)\\ \vdots\\ \gamma_n(x)\end{pmatrix}$$

prodotto scalare per vettore

$$\dot\gamma(x_0)=\begin{pmatrix}\dot\gamma_1(x_0)\\ \vdots\\ \dot\gamma_n(x_0)\end{pmatrix}$$

derivata o velocità

$$df(x_0,w)=\underbrace{\underbrace{f'(x_0)}\,w} \qquad \boxed{\mathcal{A}(x)=Ax}$$

RAPPRESENTAZIONE DEL DIFFERENZIALE PER $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Già visto il caso $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad df(x_0, w) = \underbrace{\nabla f(x_0)}_{f'(x_0)} w$

Proviamo che $\forall n, m$ $\quad \boxed{df(x_0, w) = f'(x_0) w}$

$f'(x_0) \uparrow w$? ?

che tipo di prodotto.

$\boxed{\text{Se } n > 1 \quad m = 1}$ $\quad f'(x_0) = \left(f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0) \right)$

$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad A(x) = a x \in \mathbb{R}^m \qquad A(x) = a\, x$? ?

il prodotto è fra numeri

$\boxed{\text{ALGEBRA LINEARE}}$

$n = 1 \quad m = 1 \qquad a \in \mathbb{R}$ il prodotto è fra numeri

$n = 1 \quad m > 1 \qquad a \in \mathbb{R}^m$ il prodotto è scalare x vettore

$n > 1 \quad m = 1 \qquad a \in \mathbb{R}^n$ il prodotto è scalare

$n > 1 \quad m > 1 \qquad a \in \mathbb{R}^{m \times n}$ il prodotto è Matrice x Vettore

---

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad df(x_0, w) = f'(x_0) w \qquad$ $f'(x_0)$ la derivata in x_0

$= A(w)$

$$\lim_{w \to 0} \frac{1}{|w|} \left[f(x_0 + w) - f(x_0) - A(w) \right] \underset{w \neq 0}{=}$$

$$= \lim_{w \to 0} \underbrace{\frac{w}{|w|}}_{\text{limitata}} \Bigg[\underbrace{\frac{f(x_0 + w) - f(x_0)}{w}}_{\text{rapporto incrementale}} - \underbrace{\frac{f'(x_0) \cancel{w}}{\cancel{w}}}_{\text{derivata}} \Bigg] = 0 \quad \text{se e solo se}$$

f è derivabile in x_0

$\boxed{n = 1 \quad m = 1}$ $\quad \boxed{df(x_0, w) = f'(x_0) w}$ $\quad f'(x_0) \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{R}$ il prodotto è prodotto di numeri.

$\boxed{df = f'(x)\, dx}$

$\boxed{n = 1 \quad m > 1}$ curve $\quad f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^m \qquad \underbrace{df(x_0, w)}_{\in \text{ codominio di } f = \mathbb{R}^m} = \underbrace{f'(x_0)}_{\in \mathbb{R}^m} \underbrace{w}_{\in \mathbb{R}}$

$$f'(x_0) = \left(f_1'(x_0), \dots, f_m'(x_0)\right) \qquad f(x) = \left(f_1(x), \dots, f_m(x)\right)$$

$$\lim_{w \to 0} \frac{1}{|w|}\left[f(x_0+w) - f(x_0) - f'(x_0)\,w\right] = 0 \in \mathbb{R}^m$$

$\mathbb{R}^m$

Se e solo se

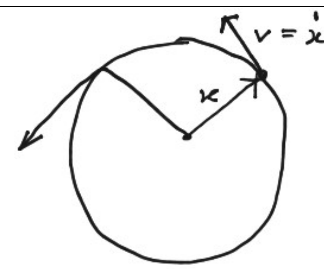
$$\lim_{w \to 0} \left(\underbrace{\frac{f_1(x_0+w) - f_1(x_0) - f_1'(x_0)\,w}{|w|}}_{\to 0}, \dots, \underbrace{\frac{f_m(x_0+w) - f_m(x_0) - f_m'(x_0)\,w}{|w|}}_{0} \right)$$

se e solo se esistono tutte le derivate $f_i'(x_0)$ (cioè se $f_i(x)$ è derivabile in x_0)

$$f'(x_0) = \left(f_1'(x_0), \dots, f_m'(x_0)\right)$$

derivata / velocità "SINONIMI"

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

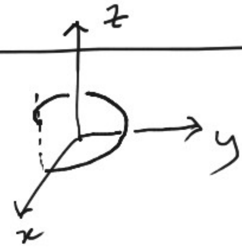


$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} (\cos t)^{\cdot} \\ (\sin t)^{\cdot} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

1) Si osserva che $\dot{x} \cdot x = 0$, cioè la velocità è ortogonale al raggio nel punto.
$\cos t\,(-\sin t) + \sin t \cos t \equiv 0$

2) $|\dot{x}| = 1$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$



$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

velocità

$n>1 \quad m>1$

$$\underbrace{df(x_0,w)}_{\in \mathbb{R}^m \text{ (codominio di } f)} = \underbrace{f'(x_0)}_{\in \mathbb{R}^{m\times n}} \underbrace{w}_{\in \mathbb{R}^n}$$

$i=1..m \quad j=1..n$

$$\longrightarrow \quad f'(x_0)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$$

$\longrightarrow$ Matrice Jacobiana

oppure derivata

oppure matrice derivata

$$\boxed{\lim_{w\to 0} \frac{1}{|w|}\left[f(x_0+w) - f(x_0) - f'(x_0)w\right] \overset{?}{=} 0}$$

$$= \left(\lim_{w\to 0} \frac{f_1(x_0+w) - f_1(x_0) - \nabla f_1(x_0)w}{|w|}, \ldots, \lim_{w\to 0} \frac{f_m(x_0+w) - f_m(x_0) - \overbrace{\nabla f_m(x_0)w}^{df_m(x_0,w)}}{|w|} \right)$$

$\to 0$ se f_1 è differenziabile

$df_1(x_0,w)$

0 se f_m è differenziabile

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \partial_{x_2} f_1 & \cdots & \partial_{x_n} f_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m & \partial_{x_2} f_m & & \partial_{x_n} f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

Differenziabilità di funzioni composte

$$\underbrace{f : \Omega \to \Sigma \qquad g : \Sigma}_{} \to \mathbb{H}$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$

$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$

$\mathbb{H} \subseteq \mathbb{R}^p$

m, n, p arbitrari

$$h : \Omega \to \mathbb{H} \qquad h(x) = g(f(x))$$

(SENZA DIMOSTRAZIONE)

fissato x_0

$w \to df(x_0,w)$

$$\boxed{dh(x_0,w) = dg(f(x_0), df(x_0,w))}$$

differenziali

Il differenziale di una funzione composta è la composizione dei differenziali

$m, n, p > 1$

$$\boxed{\underbrace{h'(x_0)}_{\mathbb{R}^{p\times m}} = \underbrace{g'(f(x_0))}_{\mathbb{R}^{p\times n}} \underbrace{f'(x_0)}_{\mathbb{R}^{n\times m}}} \longrightarrow \text{derivate}$$

$$t \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \cos t \sin t = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\sin 2t}} \qquad g(x,y) = xy$$

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad g'(x,y) = (y, x)$$

$$\boxed{g'(f(t))\, f'(t)} = \underbrace{(\sin t, \cos t)}_{g'(f(t))} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{f'(t)} = -\sin^2 t + \cos^2 t = \underline{\underline{\cos 2t}}$$

$y = \sin t$

$x = \cos t$

$$g(x,y,z) = \sin xy \cos z \qquad g(f(t)) = \sin(t^2 \operatorname{arctg} t) \cos(2+t)$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \operatorname{arctg} t \\ 2+t \end{pmatrix}$$

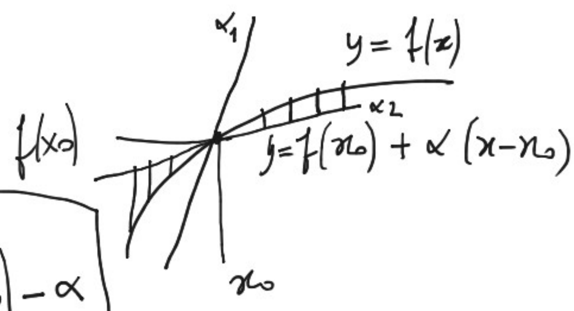
Rette e piani tangenti

$n = 1 \quad m = 1 \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\boxed{f(x) - [f(x_0) + \alpha(x - x_0)]}$$

$h = x - x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{x - x_0} =$$



$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \alpha \longrightarrow \boxed{f'(x_0) - \alpha}$$

se f è derivabile in x_0

0 se $\alpha = f'(x_0)$ $\qquad$ $\neq 0$ altrimenti

$f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)$

– è $O(x - x_0)$ se $\alpha \neq f'(x_0)$

– è $o(x - x_0)$ se $\alpha = f'(x_0)$

equazione del piano tangente al grafico di $f: \Omega \to \mathbb{R}$

nel punto $(x_0, \; f(x_0, y_0))$, differenziabile in (x_0, y_0)

è (per definizione) $\quad z = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)(x - x_0)}_{df(x_0, \underbrace{x - x_0}_{w})}$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$\mathrm{graph} f \subseteq \underset{x_1 \dots x_n}{\mathbb{R}^n} \times \underset{z}{\mathbb{R}}$

$(x_1 \dots x_n, f(x_1, \dots x_n))$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (w \to 0)}} \frac{\boxed{f(x_0 + (x - x_0))} - f(x_0) - df(x_0, x - x_0)}{|x - x_0| \\ (|w|)} = 0$$

$x - x_0 = w$

$\rightarrow \; z = f(x)$

$\rightarrow \; z = g(x) = f(x_0) - \underbrace{\nabla f(x_0)(x - x_0)}_{\text{lineare in } x - x_0}$

$df(x_0, x - x_0)$

$f(x, y)$

$\mathrm{graph} f = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$

Friday, April 17, 2020 10:15 AM

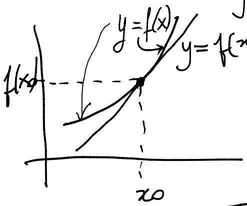
Rette e piani tangenti

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad y=f(x)$ $\quad \{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : y=f(x)\} = \text{graph} f$

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $\quad z=f(x)$ $\quad \{(x,z)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} : z=f(x)\}=\text{graph} f$

1) retta tangente al graph f nel punto $(x_0, \underbrace{f(x_0)}_{y_0})$ è

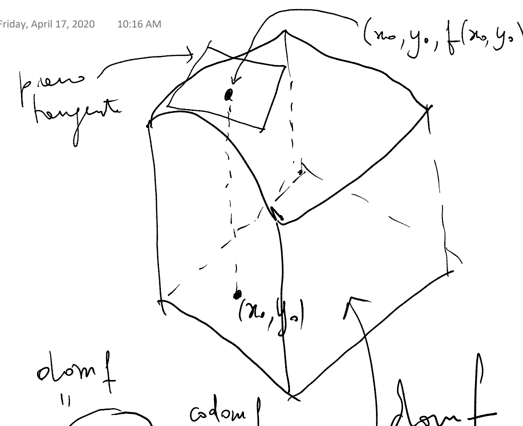
$$y = \underset{y_0}{\underset{\|}{f(x_0)}} + f'(x_0)(x-x_0)$$



$$y=f(x_0)+\underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{df(x_0,\, x-x_0)}$$

2) piano tangente $\boxed{z = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{z_0} + \underbrace{\nabla f(x_0,y_0)\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}}_{df((x_0,y_0);\,(x-x_0,\,y-y_0))}}$

Friday, April 17, 2020 10:16 AM



$$z - \underset{z_0}{f(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$\Big(\underbrace{x,y}_{\in\, \text{dom} f},\ \underbrace{f(x,y)}_{\in\, \text{codom} f}\Big)$$

$$\underset{x}{\overset{\text{dom} f}{\overset{\|}{\mathbb{R}^n}}}\times\underset{z}{\overset{\text{codom} f}{\overset{\|}{\mathbb{R}}}}$$

$$\boxed{\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=\sqrt{1-x^2-y^2}\}}$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=1}$$

$$\Big(\underbrace{x,y}, f(x,y)\Big)$$

$$\left\|\left(\underset{x_0}{\frac{1}{\sqrt{3}}},\ \underset{y_0}{\frac{1}{\sqrt{3}}},\ \underset{z_0}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)\right\|=1$$

Friday, April 17, 2020 10:16 AM

$\gamma(t)$ $\quad \gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n \quad n>1$

Tangente a γ in $\gamma(t_0)$ è
la retta per $\gamma(t_0)$
in direzione $\dot\gamma(t_0)$

$$\boxed{\varphi(t)=\gamma(t_0)+t\,\dot\gamma(t_0)}$$

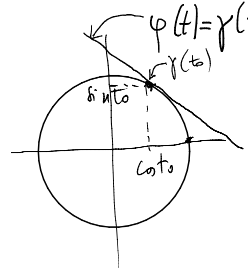
$\boxed{\text{Equazione parametrica}}$ della tangente

$$\varphi(0)=\gamma(t_0)$$

$$\psi(t)=\gamma(t_0)+(t-t_0)\,\dot\gamma(t_0)$$

$$\psi(t_0)=\gamma(t_0)$$

formulazione alternativa: passa per $\gamma(t_0)$ al tempo t_0, invece che per $t=0$



$$\gamma(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

$t\in[0,2\pi]$

$$\gamma([0,2\pi])\subseteq\mathbb{R}^2$$

$$\gamma([0,2\pi])=\{(x,y):\ x^2+y^2=1\}$$

$$\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)-(t-t_0)\dot\gamma(t_0)}{|t|}\xrightarrow[t\to t_0]{}0$$

$$\frac{\gamma(t)-\varphi(t)}{|t|}\to 0$$

φ è la retta parametrica che approssima "meglio" γ in vicinanza di $\gamma(t_0)$

Friday, April 17, 2020 10:16 AM

La retta tangente in $\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)}$ al sostegno della (alla) curva parametrica $\gamma(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ è

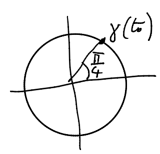
$$\varphi(t)=\gamma(t_0)+t\,\dot\gamma(t_0)$$

$\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$

$t\in[0,2\pi]$

$$\dot\gamma(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

$$\gamma(t_0)=\begin{pmatrix}1/\sqrt2\\ 1/\sqrt2\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}\cos t_0=\frac{1}{\sqrt2}\\ \sin t_0=\frac{1}{\sqrt2}\end{cases} \quad \text{cioè } \boxed{t_0=\frac{\pi}{4}}$$



$$\boxed{\varphi(t)=\begin{pmatrix}1/\sqrt2\\ 1/\sqrt2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1/\sqrt2\\ 1/\sqrt2\end{pmatrix}}$$

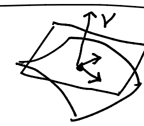
$$\begin{pmatrix}1/\sqrt2\\ 1/\sqrt2\end{pmatrix}=\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) \qquad \begin{pmatrix}-1/\sqrt2\\ 1/\sqrt2\end{pmatrix}=\dot\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

eq. param. tangente al sostegno di γ nel punto $\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right)=\begin{pmatrix}1/\sqrt2\\ 1/\sqrt2\end{pmatrix}$

Tuesday, April 21, 2020 10:40 PM

$$\phi(u,v) = \left(\sin u \cos v,\ \sin u \sin v,\ \cos u\right) \quad u \in [0,\pi] \quad v \in [0,2\pi]$$

$$\psi(\alpha_1,\alpha_2) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$



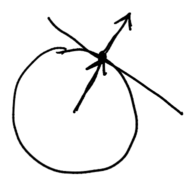
$\phi : \mathbb{R}^2 \to \underline{\underline{\mathbb{R}^3}}$ si può usare il prodotto vettore.

$$\nu = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \left(1, -0, 0\right)$$ direzione normale al piano tangente

Equaz. implicita $1(x-1) + 0(y-0) + 0(z-0) = 0$

Tuesday, April 21, 2020 10:40 PM

$$\phi_u = \begin{pmatrix}\cos u \cos v\\ \cos u \sin v\\ -\sin u\end{pmatrix} \qquad \phi_v = \begin{pmatrix}\sin u(-\sin v)\\ \sin u \cos v\\ 0\end{pmatrix}$$



$$\nu = \underbrace{\phi_u \times \phi_v} = \begin{pmatrix}\sin^2 u \cos v\\ \sin^2 u \sin v\\ \underbrace{\sin u \cos u \cos^2 v + \sin u \cos u \sin^2 v}_{\sin u \cos u}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x(u,v)\\ y(u,v)\\ z(u,v)\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\sin u \cos v\\ \sin u \sin v\\ \cos u\end{pmatrix}$$

$$= \left(\sin^2 u \cos v,\ \sin^2 u \sin v,\ \sin u \cos v\right) = \sin u \begin{pmatrix}\sin u \cos v\\ \sin u \sin v\\ \cos u\end{pmatrix}$$

Wednesday, April 22, 2020 3:26 PM

I problemi del th. DINI

$x<y \Rightarrow \varphi(x)<\varphi(y)$

sono soluzioni

risolvere e verificare che

⋮

4) $y \to f(x,y)$ è strett. crescente $\forall (x,y)\in\Omega$

difficile da verificare

---

1) 2) 3) $f(x_0,y_0)=0$, (x_0,y_0) interno, f continua in Ω

4) $f_y(x_0,y_0)>0$ $\qquad f\in C^1(\Omega)$

$y=\varphi(x)$

TS. $\exists\, \delta,\varphi$:

$y_0=\varphi(x_0)$

$f(x,\varphi(x))=0$

φ è derivabile

$$\boxed{\varphi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}}$$

Tuesday, April 21, 2020 10:40 PM

$f:\Omega\to\mathbb{R} \qquad \Omega\subseteq\mathbb{R}^2$

1) $f\in C^1(\Omega)$ $\qquad$ 3) $(x_0,y_0)\in\mathring{\Omega}$

2) $f(x_0,y_0)=0$ $\qquad$ 4) $f_y(x_0,y_0)>0$

1) $\exists\,\delta>0$ $\varphi:[x_0-\delta,x_0+\delta]$:

2) $\boxed{\varphi(x_0)=y_0}$

3) $f(x,\varphi(x))=0\ \forall x$

4) φ è derivabile e verifica

$$\boxed{\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}}$$

eq. diff. del I ordine nell'incognita φ

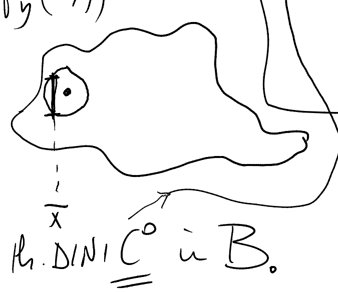
DIM

Th. perm. segno $\exists\,\sigma>0$: $f_y(x,y)>0$

$\forall (x,y)\in B((x_0,y_0),\sigma)=B$

$y\to f(\bar{x},y)$ è strett. crescente

per il th. Lagrange



f verifica tutte le ipotesi del th. DINI C^0 in B.

Tuesday, April 21, 2020 10:40 PM

Da dove viene l'idea della formula per $\varphi'(x)$?

In effetti, se φ fosse derivabile si ha, da un conto che

$x \to f(x, \varphi(x)) \equiv 0$, ma inoltre $x \to \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}$ ha derivata $\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(x) \end{pmatrix}$

da cui

$$0 \equiv \frac{d}{dx}\left[f(x, \varphi(x))\right] = f_x(x, \varphi(x)) \cdot 1 + \overbrace{f_y(x, \varphi(x))}^{\neq 0} \varphi'(x)$$

$\Downarrow$ risolvendo rispetto a $\varphi'(x)$

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$$

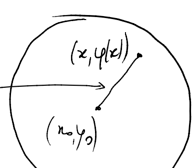
$|||$

0 perché $f(x, \varphi(x))$ è costante

Tuesday, April 21, 2020 10:40 PM

x fissato

B è una sfera, e il segmento è tutto contenuto in essa.



$$h(t) = f\left(x_0 + t(x - x_0), \varphi(x_0) + t(\varphi(x) - \varphi(x_0))\right) = f(g(t))$$ ove

$$g(t) = \begin{pmatrix} x_0 + t(x - x_0) \\ \varphi(x_0) + t[\varphi(x) - \varphi(x_0)] \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$g'(t) = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ \varphi(x) - \varphi(x_0) \end{pmatrix}$$

da cui

$$h'(t) = \left[f(g(t))\right]' = f'(g(t))\, g'(t)$$

$$= \begin{pmatrix} f_x(x, \varphi(x)) \\ f_y(x, \varphi(x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ \varphi(x) - \varphi(x_0) \end{pmatrix}$$

Tuesday, April 21, 2020 10:40 PM

$$0 = \underset{\substack{\| \\ 0 \\ \text{in } [x_0-\delta, x_0+\delta]}}{f(x,\varphi(x))} - \underset{\substack{\| \\ 0}}{f(x_0,\varphi(x_0))} \underset{\text{def. di } h}{=} h(1)-h(0) \underset{\text{Lagrange},\ \xi\in[0,1]}{=} (1-0)h'(\xi) =$$

$$= f_x\big(x_0+\xi(x-x_0),\ \varphi(x_0)+\xi(\varphi(x)-\varphi(x_0))\big)(x-x_0) +$$

$$+ f_y\big(x_0+\xi(x-x_0),\ \varphi(x_0)+\xi(\varphi(x)-\varphi(x_0))\big)(\varphi(x)-\varphi(x_0))$$

Tuesday, April 21, 2020 10:40 PM

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = -\frac{f_x\big(x_0+\xi(x-x_0),\ \varphi(x_0)+\xi(\varphi(x)-\varphi(x_0))\big)}{f_y(\quad \text{idem} \quad)}$$

Per calcolare il limite a secondo membro e provare così la derivabilità di φ osserviamo che

1) Se $x\to x_0$ anche $x_0+\xi(x-x_0)\to x_0$ perché è compreso fra x e x_0
2) Se $x\to x_0$ $\varphi(x)\to\varphi(x_0)$ per il teorema già provato per f continua
3) Se $x\to x_0$ $\varphi(x_0)+\xi(\varphi(x)-\varphi(x_0))\to\varphi(x_0)$ perché è compreso fra $\varphi(x_0)$ e $\varphi(x)$
4) Essendo $f\in C^1(\Omega)$, f_x ed f_y sono continue su $B\subseteq\Omega$ e, dunque, il rapporto a secondo membro tende al suo valore in $x=x_0$, cioè $-\dfrac{f_x(x_0,\varphi(x_0))}{f_y(x_0,\varphi(x_0))}$

Wednesday, April 22, 2020 2:55 PM

Si osserva, sostituendo a x_0 qualunque punto $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$, che la derivabilità di φ è provata, in realtà, in tutti i punti di $[x_0-\delta, x_0+\delta]$. Inoltre, la formula appena dimostrata garantisce che $\varphi'(x)$ è continua, in quanto rapporto di funzioni continue, con denominatore mai nullo. Dunque

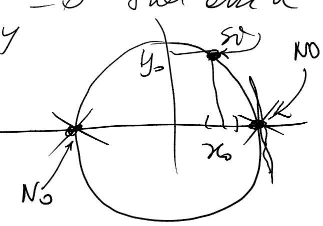
$$f \in C^1(\Omega) \Rightarrow \varphi \in C^1[x_0-\delta, x_0+\delta]$$

Tuesday, April 21, 2020 10:40 PM

IN PRATICA

$$x^2+y^2-1=0$$

$f_y \neq 0$ $\quad f_y(x,y) = 2y \quad f_y = 0$ sull'asse x



$$y = \sqrt{1-x^2} = \varphi(x)$$

$\boxed{y_0 \neq 0}$

$\Updownarrow$

$f_y(x_0,y_0) \neq 0$

SE $\boxed{\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

NON SI PUÒ APPLICARE DINI!!

Note Title 4/24/2020

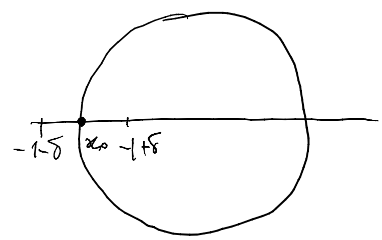
$f(x,y) = x^2+y^2-1 \qquad f_x(x,y) = 2x \quad f_x=0 \Leftrightarrow x=0$

$f_y(x,y) = 2y \quad f_y=0 \Leftrightarrow y=0$

I punti in cui non si può applicare il teorema del Dini ($f_y \neq 0$) sono tutti i punti della circonferenza, tranne $(-1,0)$ e $(1,0)$ nei quali $f_y=0$.

I punti in cui il th. Dini è inapplicabile per esplicitare la x come funzione della y sono tutti i punti della circonferenza, tranne $(0,1)$ e $(0,-1)$, nei quali $f_x=0$.

In effetti, non solo non si può applicare il th. del DINI in tali punti (che è una condizione sufficiente, ma non necessaria) ma è falsa la tesi!



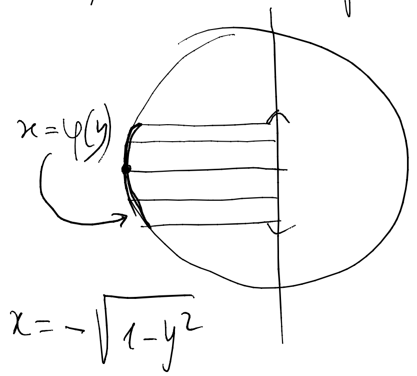
Scegliendo $(x_0,y_0)=(-1,0)$, non è possibile scegliere δ in modo che, su $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ si possa definire φ in modo tale che il suo grafico coincida coll'insieme degli zeri in un intorno abbastanza piccolo:

se $\bar{x} \in [-1-\delta, -1[$ non esistono zeri di $f(\bar{x},y)$

se $\bar{x} \in]-1, -1+\delta]$ zeri ce ne sono <u>due</u>

e nessun grafico di funzione può avere due punti su una retta verticale.

Però, non ci sono problemi cambiando la variabile indipendente (non-privat)



Ciò accade perché in $(-1,0)$ f_x non si annulla e quindi si può esplicitare la x in funzione di y.

I punti davvero "critici" per il teorema del DINI sono quelli in cui entrambe le derivate si annullano e il teorema è inapplicabile!

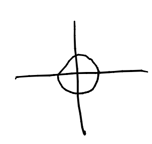
ESEMPIO:

$$f(x,y) = xy \qquad f_x = y \quad f_y = x \quad \nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$$

e dunque, pur avendosi $f(0,0) = 0$ non ci si può attendere che l'insieme di livello 0, in vicinanza di $(0,0)$ sia il grafico di una funzione, qualunque variabile si scelga come indipendente. In effetti

$f(x,y) = 0 \iff xy = 0$ e dunque l'insieme di livello

$f(x,y) = 0$ è formato dai due assi cartesiani.



Non importa quanto piccolo si scelga l'intorno, in nessun caso la porzione dell'insieme di livello che cade nell'intorno è un grafico di funzione

Note Title 4/28/2020

$f : \Omega \to \mathbb{R}^m \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

1) $f \in C^1(\Omega)$

2) $f(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0) = 0$

3) $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$ è interno ad Ω $(\in \mathring{\Omega})$

4) $\det \dfrac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(x_1^0, \dots x_n^0, y_1^0, \dots y_m^0) \neq 0$

$f(x,y) = 0$

$f_y(x_0, y_0) \neq 0$

$\exists B(x_0, \delta) \quad \varphi : B(x_0, \delta) \to \mathbb{R}$

$f(x, \varphi(x)) = 0$

$\varphi'(x) = -\dfrac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, f(x))}$

$\exists \delta > 0 \quad \varphi = (\varphi_1 \dots \varphi_m) \quad \varphi : B_\delta(x_1^0 \dots x_n^0) \to \mathbb{R}^m$

② $\varphi_i(x_1^0 \dots x_n^0) = y_i^0$

①
$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_n, \varphi_1(x_1 \dots x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots x_n)) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots x_n, \underbrace{\varphi_1(x_1 \dots x_n)}_{y_1}, \dots, \underbrace{\varphi_m(x_1, \dots x_n)}_{y_m}) = 0 \end{cases}$$

$(y_i = \varphi_i(x_1 \dots x_n))$

$$\frac{\partial(\varphi_1 \dots \varphi_m)}{\partial(x_1 \dots x_n)} = -\left[\frac{\partial(f_1 \dots f_m)}{\partial(y_1 \dots y_m)}\right]^{-1} \left[\frac{\partial(f_1 \dots f_m)}{\partial(x_1 \dots x_n)}\right]$$

esiste per l' Hp 4)

$y_1 \dots y_m$ "PIVOT"

$x_1 \dots x_n$ "NON PIVOT" (parametri)

$$\left[\frac{\partial(\varphi_1 \dots \varphi_m)}{\partial(x_1, \dots x_n)}\right]_{i,j} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$$

TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE

$$F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$

$$\boxed{\begin{cases} u=f(x,y)\\ v=g(x,y)\end{cases}\qquad F(x,y)=\begin{pmatrix} f(x,y)\\ g(x,y)\end{pmatrix}\qquad F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2}$$

$$y=F(x)\qquad \underline{x,y\in\mathbb{R}^n}$$

Si può risolvere l'equazione rispetto ad x?

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y_1=F_1(x_1\ldots x_n)\\ \vdots\\ y_n=F_n(x_1,\ldots,x_n)\end{cases}\qquad \exists\, F^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\ :\ x=F^{-1}(y)\qquad F(F^{-1}(y))=y$$

$$F(x)-y=0\qquad G(x,y)=F(x)-y\qquad G(x,y)=0$$

Si applica a G il th. delle funzioni implicite $\qquad \underline{\underline{G:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}}$

$x_0,y_0\in\mathbb{R}^n$: $G(x_0,y_0)=0 \iff F(x_0)=y_0$ $\quad (x_0,y_0)$ interno a $\operatorname{dom} F\times\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\det\frac{\partial G}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0}\qquad \left[\frac{\partial G}{\partial x}\right]_{ij}=\left[\frac{\partial(G_1\ldots G_n)}{\partial(x_1\ldots x_n)}\right]_{ij}=\frac{\partial G_i}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial G_i(x_1\ldots x_n,y_1\ldots y_n)}{\partial x_j}=\frac{\partial F_i}{\partial x_j}-\frac{\partial y_i}{\partial x_j}=\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

$\hookrightarrow = 0$ perché y_i non dipende esplicit. da $x_1\ldots x_n$

4) $$\det\frac{\partial(F_1\ldots F_n)}{\partial(x_1\ldots x_n)}(x_1^0\ldots x_n^0,y_1^0\ldots y_n^0)\neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\exists\,\delta>0\ (\varphi_1,\ldots,\varphi_n):B_\delta(y_1^0\ldots y_n^0)\to\mathbb{R}^n$$

a) $\left(x_1^0, \dots, x_n^0 \right) = \left(\varphi_1(y_0), \dots, \varphi_n(y_0) \right)$

b) $G(\varphi_1(y), \dots \varphi_n(y), y_1 \dots y_n) = 0$ $\quad \boxed{F(\varphi_1(y) \dots \varphi_n(y)) - y = 0}$

c) $$\frac{\partial(\varphi_1 \dots \varphi_n)}{\partial(y_1 \dots y_n)} = -\left[\frac{\partial(G_1 \dots G_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} \right]^{-1} \frac{\partial(G_1 \dots G_n)}{\partial(y_1 \dots y_n)}$$

$$\frac{\partial(G_1 \dots G_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} = \left[\frac{\partial(F_1 \dots F_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} \right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_i = \varphi_i(y_1, \dots, y_n) \\ i = 1 \dots n \end{array}}$$

$$\Updownarrow$$

$x, y \in \mathbb{R}^n$ $\quad \boxed{x = \varphi(y)}$

$$\boxed{F(\varphi(y)) = y \iff \varphi = F^{-1}}$$

$f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \quad f$ differ. $\quad \boxed{z = f(x, y)}$

graph f $\quad \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : z = f(x, y) \}$

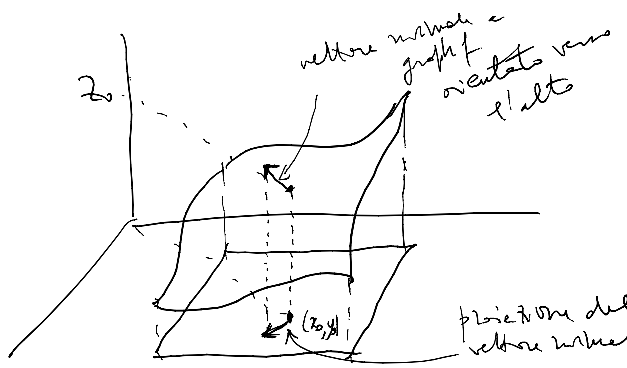
$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

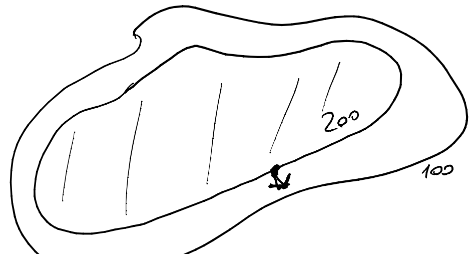
piano tangente in $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$\boxed{-f_x(x_0, y_0)x - f_y(x_0, y_0)y + z = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{z_0} - f_x(x_0, y_0)x_0 - f_y(x_0, y_0)y_0}$$

$$\nu = \begin{pmatrix} -f_x(x_0, y_0) \\ -f_y(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

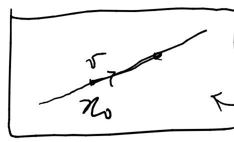
VETTORE NORMALE orientato verso l'alto (III componente > 0)





$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0)\, v}$$ sotto l'ipotesi che f sia differenziabile

$$\| \quad \underline{\underline{df(x_0, v)}}$$



$$|\nabla f(x_0) v| \underset{\uparrow \text{ Schwarz}}{\le} |\nabla f(x_0)||v|$$

e l'uguaglianza vale se $v = \lambda \nabla f(x_0)$

ne segue che la direzione v in cui la pendenza $\partial_v f$ ha modulo massimo se v è un multiplo di $\nabla f(x_0)$.

Si osservi però che

- se $v = \lambda \nabla f(x_0)$ $\boxed{\lambda > 0}$ si ha $\partial_v f(x_0) = \nabla f(x_0)\left(\lambda \nabla f(x_0)\right) = \lambda |\nabla f(x_0)|^2 \ge 0$
- se $v = \lambda \nabla f(x_0)$ $\lambda < 0$ si ha $\partial_v f(x_0) = \lambda |\nabla f(x_0)|^2 \le 0$

Dunque, se $v = \lambda \nabla f(x_0)$ $\lambda > 0$ f CRESCE ($\partial_v f \ge 0$), mentre se

se $v = \lambda \nabla f(x_0)$ $\lambda < 0$ f DECRESCE

La direzione di $\nabla f(x_0)$ e dei suoi multipli positivi (vettori equiversi) è la DIREZIONE DI MASSIMA PENDENZA ASCENDENTE.

L'opposta è detta DIREZIONE DI MASSIMA PENDENZA DISCENDENTE.

ESERCIZI SUL TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE

Note Title 4/29/2020

$$x^3 y - x = 1 \qquad \Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 y - x - 1 = 0\}$$

$x = 0 \Rightarrow$ FALSA $\underline{0 = 1}$

$y = 0 \Rightarrow -x = 1 \qquad (-1,0) \in \Pi$

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 y - 1 & f_x = 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \quad y = \frac{1}{3x^2} \\ f_y = x^3 & f_y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

$x + y = 1$

$x = 0 \Rightarrow y = 1$

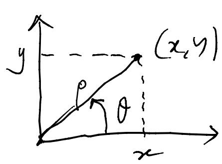
$(0,1)$ è un punto della retta $x+y=1$

$x \neq 0 \Rightarrow f_y \neq 0$ e quindi $\exists$ localmente $\varphi : y = \varphi(x)$ ∇f non si annulla MAI

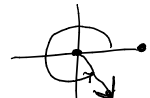
$\boxed{x = 0 \Rightarrow f_x = -1 \neq 0}$ $\exists$ localmente $\psi : x = \psi(y)$

COORDINATE POLARI (PIANE) (in $\mathbb{R}^2$)

$$\boxed{x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta \qquad \rho \in [0, +\infty[\qquad \theta \in [0, 2\pi]}$$



$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}}$



$(0, \theta) \xrightarrow{\forall \theta} (0,0)$

$(\rho, 0) = (\rho, 2\pi) \quad \forall \rho \geq 0$

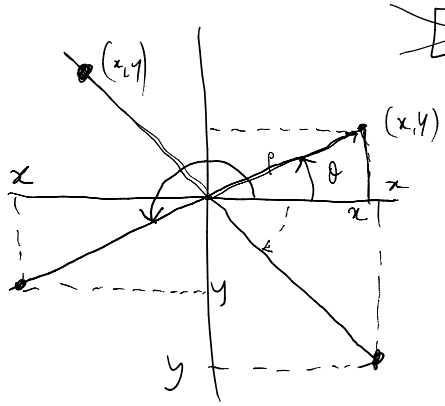
$T(\rho, \theta) \to (\underset{x}{\rho\cos\theta}, \underset{y}{\rho\sin\theta})$

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \rho$$

lo jacobiano è nullo solo se $\boxed{\rho = 0}$

$\exists S : (\rho, \theta) = S(x,y)$



$\cancel{[0,2\pi]}$ $[-\pi,\pi]$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta \overset{?}{\Leftrightarrow} \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

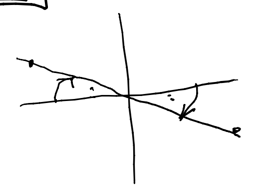
$$\operatorname{Im}\operatorname{arctg} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\boxed{\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$ vero per tutti i $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\boxed{x>0}$

$x=0$ (any y) $\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & y>0 \\ -\frac{\pi}{2} & y<0 \end{cases}$

$x<0$ $\pi + \operatorname{arctg}\boxed{\frac{y}{x}}$ III quadrante, IV quadrante



$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{se } x>0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x=0 \quad y>0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{se } x<0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x=0 \quad y<0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{atan2}}$ (FORTRAN)

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta$$

$\Downarrow$??

$$\boxed{\theta = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

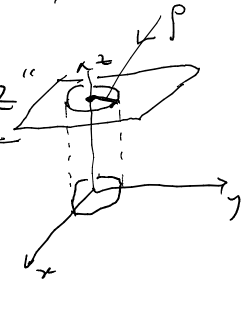
non ha senso solo in $(0,0)$

COORDINATE (POLARI) CILINDRICHE

$\boxed{T}$ $x(\rho,\theta,z) = \rho\cos\theta$ $y(\rho,\theta,z) = \rho\sin\theta$ "$z(\rho,\theta,z) = z$"

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

x, y, z



$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(T') = \rho$$

Le coordinate polari cilindriche sono localmente invertibili se $\rho \neq 0 \Longrightarrow$ fuori dell'asse z

$\rho = 0$?

$(\rho,\theta,\zeta) \to (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \zeta) \qquad z(\rho,\theta,\zeta) = \zeta$

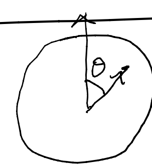
COORDINATE SFERICHE $\qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2+y^2} \geq 0$

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\theta\sin\varphi \qquad z = \rho\cos\theta$$

$\theta \in [0,\pi]$

$\varphi \in [0,2\pi]$

$T(\rho,\theta,\varphi) = (x,y,z)$



$$\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{\rho^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi} + \rho^2\sin^3\theta\sin^2\varphi -$$

$$-\left(-\underline{\rho^2\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi} - \rho^2\sin^3\theta\cos^2\varphi\right) =$$

$$= \rho^2\cos^2\theta\sin\theta + \rho^2\sin^3\theta = \boxed{\rho^2\sin\theta} = 0 \text{ se } \begin{array}{l}\rho = 0 \text{ oppure} \\ \text{se } \theta = 0 \text{ o } \theta = \pi\end{array}$$

NON SI PUO' APPLICARE IL TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE in $\rho = 0$ (e cioè $(0,0,0)$) ovvero in $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ (e cioè in $(0,0,z)$, $z \in \mathbb{R}$).

$\boxed{f(x) = \arccos(\cos x)}$ $\boxed{f(x) = \sqrt{x^2}}$ STUDIARE!

$$T(u,v) = \Big(\underset{x}{\underset{\shortparallel}{uv}}, \underset{y}{\underset{\shortparallel}{\frac{u}{v}}}\Big)$$

I quadrante

E' localmente invertibile?