Le relazioni trovate fino ad ora per un sistema di punti materiali o per un corpo rigido possono essere riassunte da

1) $\vec{P}_{cm} = \sum_i m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{cm}$

2) $\vec{F}(E) = \sum_i m_i \vec{a}_i = M \vec{a}_{cm}$

deriva da

$$\begin{cases} \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \vec{r}_{cm} \\ \dfrac{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i}{M} = v_{cm} \\ \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = M \vec{v}_{cm} \quad 1) \end{cases}$$

$$\vec{F}(E) = \sum_i m_i \vec{a}_i = M \vec{a}_{cm} \quad 2)$$

Se $\vec{F}_i(E) = \emptyset = \vec{P}^{\,i}_{cm} = \text{cost}$

$$\vec{F}_i(E) = \frac{dP^i_{cm}}{dt}$$

1.1

Se ad esempio abbiamo un proiettile che sparato esplode

$F_z = -Mg$ $\quad$ $F_x = F_y = 0$ $\quad$ $P_x = cost$

$P_y = cost$

Per un sistema di punti materiali o per un corpo rigido esiste un'importante relazione per l'energia cinetica nel sistema del laboratorio e nel sistema del CM.

Teorema di ~~Koenig~~ Koenigi dell'energia cinetica

$$E_K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + E_{K_{CM}}$$

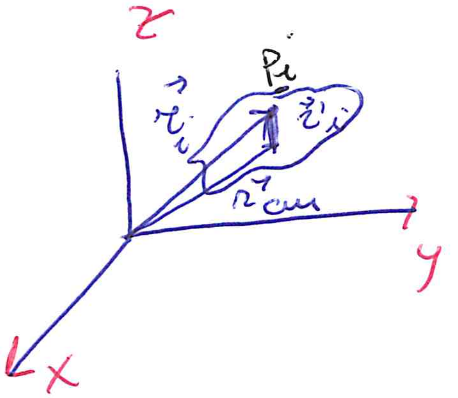
nel sist del lab.

dove E_K è l'energia cinetica nel SRI e $E_{K_{CM}}$ è l'energia cinetica in SCM.

demostrazione

Teorema di Koenig dell'energia cinetica

In S_{LAB}



$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i'$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'$$ → velocità del punto materiale in SCM

Energia cinetica in S_{LAB} → $K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$$

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i') = v_{CM}^2 + 2\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i' + v_i'^2$$

$$K = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i\right) v_{CM}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \vec{v}_{CM} \cdot \underbrace{\sum_i \vec{v}_i' m_i}_{=0} + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2$$

velocità di SCM in SCM!

$$K = \underbrace{\frac{1}{2} M v_{CM}^2}_{\text{velocità del CM}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i v'^2}_{E_K^*}$$

Per il momento angolare di un sistema di punti materiali o un corpo rigido vale

$$\vec{L}_0 = \sum_i \underline{\vec{r}_i} \wedge m_i \underline{\vec{v}_i} = \vec{r}^{\,0}_{cm} \wedge \vec{P}_{cm} + \sum_i \vec{r}_i' \wedge m_i \vec{v}_i'$$

$$= \vec{r}^{\,0}_{cm} \wedge \vec{P}_{cm} + \vec{L}_i^{*}$$

Teorema di Koenig del momento angolare

Dimostrazione: $\underline{\vec{r}_i = \vec{r}^{\,0}_{cm} + \vec{r}_i'}$

$\underline{\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i'}$

~~$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} r^0_{cm} \wedge m_i$~~

$$\vec{L}_0 = \sum_i (\underset{1}{\vec{r}^{\,0}_{cm}} + \underset{2}{\vec{r}_i'}) \wedge m_i (\underset{1}{\vec{v}_{cm}} + \underset{2}{\vec{v}_i'})$$

L^{CM}

$$\boxed{\vec{L}_0 = \left(\sum_i m_i\right) \overbrace{\vec{r}^{\,0}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm}}^{\vec{r}_{0\,cm} \wedge \vec{P}_{cm}} + \sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}_i'}$$

$$+ \left(\sum_i r_i' m_i\right) \wedge \vec{v}_{CM} + \vec{r}^{\,0}_{cm} \wedge \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i'}_{}$$

$\vec{r}\,'_{cm} = 0$ nel cm è il cm è nell'origine!

$\vec{P}$ del CM in SCM $= 0$

In conclusione

$$\vec{L}^{o} = r^{o}_{cm} \wedge \vec{P}_{cm} + \vec{L}'$$

↑ momento angolare nel CM. rispetto al cm.

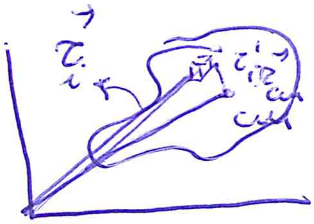
↓ momento angolare del CM rispetto al polo o

• Definizione di corpo rigido

è un corpo indeformabile nel quale le distanza tra tutte le coppie di particelle è inalterata (rimane costante).

r_{cm} — o per un corpo continuo!

→ r_{cm}?



dividiamo il corpo in tanti elementini di massa Δm_i

$$x_c = \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M}$$

(idem in y e z)

$$x_c = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_i x_i \Delta m_i}{M} = \frac{1}{M}\int x \, dm$$

$$\rightarrow \vec{r}_c = \frac{1}{M}\int \vec{r} \, dm$$

esercizi

$dm = \rho \, dV$ se la massa è distribuita su un volume

$\frac{dm}{dS} = \rho_S$ su una sup

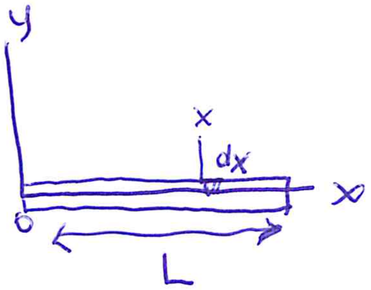
$\frac{dm}{dl} = \rho_l$ su una linea

Centro di massa di una sbarretta omogenea

Serway 9.13 7

per simmetria $y_c = 0$

$z_c = 0$



$$\Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

$$\rho_\ell = \frac{dm}{d\ell} = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dx} \qquad x_{cm} = \frac{1}{M}\cdot\int_0^L x\,\rho_\ell\,dx = \frac{1}{M}\rho_\ell\frac{L^2}{2}$$

$dm = \rho_\ell\,dx$

$$\Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{\cancel{M}}\,\frac{\cancel{M}}{\cancel{L}}\cdot\frac{L^{\cancel{2}}}{2} = \frac{L}{2}$$

Sbarretta non omogenea $\rho(x) = \alpha x$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\alpha x\,dx = \frac{1}{M}\frac{L^3}{3}\cdot\alpha =$$

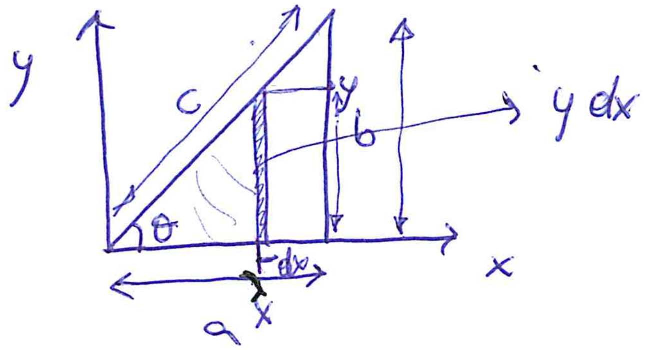
ma $\int_0^L \rho(x)\,dx = M = \alpha\frac{L^2}{2} = M \qquad \alpha = \frac{2M}{L^2}$

$\int_0^L \alpha x\,dx$

per cui $x_{CM} = \frac{1}{\cancel{M}}\cdot\frac{L^{\cancel{3}}}{3}\cdot\frac{2\cancel{M}}{\cancel{L^2}} = \frac{2}{3}L$

Centro di massa di un triangolo rettangolo (8)

$\rho = \rho_S$!



baricentro in x ~~affetto in x~~

$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int \rho_S\, ds \cdot x$$

$$ds = (\cancel{b}\,y)\,dx$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^a \rho_S\, y\, dx\, x$$

$$y = x\,tg\theta$$

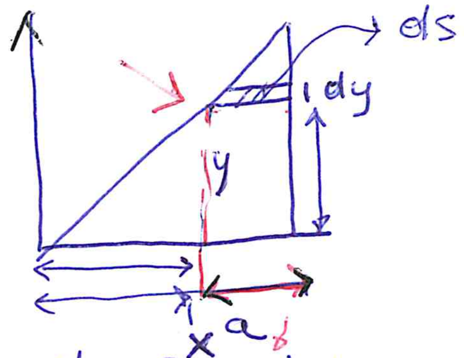
$$x_{cm} = \frac{1}{M}\rho_S \cdot \int_0^a x^2\, tg\theta\, dx$$

$$tg\theta = \frac{b}{a}$$

$$x_{cm} = \frac{1}{\cancel{M}} \cdot \frac{2\cancel{M}}{\cancel{a}\cancel{b}} \cdot \frac{\cancel{b}}{\cancel{a}} \cdot \frac{a^{\cancel{3}}}{3}$$

$$x_{cm} = \frac{2}{3}a$$

$$\boxed{\rho_S = \frac{M}{ab}2 = \frac{M}{S}}$$



$$ds = (a - x)\,dy$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,\rho_S\, ds$$

$$y_{cm} = \frac{\rho_S}{M}\int_0^b y\,(a - x)\,dy$$

~~a-x~~

$$x\,tg\theta = y \Rightarrow x = \frac{y}{tg\theta}$$

$$\boxed{y_{cm} = \frac{\rho_S}{M}\int_0^b y\left(a - \frac{y}{tg\theta}\right)dy}$$

$$\cancel{y_{cm} = \frac{\rho_S}{M}\frac{b^2}{2}\cdot a - \frac{\rho_S}{M}\frac{1}{tg\theta}}$$

$$\cancel{y_{cm} = \frac{2M}{ab}\left[\frac{b^2}{2}a - \frac{a}{b}\cdot\frac{b^3}{3}\right]}$$

$$\rho_S = \frac{2M}{ab}$$

$$y_{cm} = \frac{\rho_S}{M}\int_0^b y\left(a - \frac{y}{tg\theta}\right)dy$$

$$tg\theta = \frac{b}{a}$$

$$y_{cm} = \frac{2M}{ab}\frac{1}{M}\left(\frac{ab^2}{2} - \frac{a}{\cancel{b}}\frac{\cancel{b^3}^{\,2}}{3}\right) = \frac{2}{\cancel{ab}}\left(\frac{1}{6}\cancel{a}b^{\cancel{2}}\right) = \frac{b}{3}$$

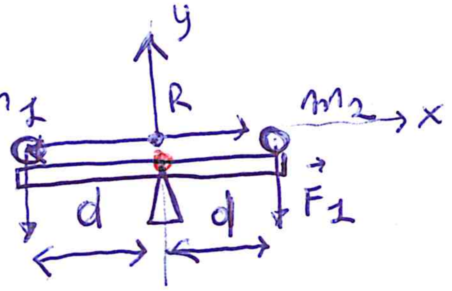
$$\frac{ab^2}{2} - \frac{ab^2}{3}$$

$$\frac{3a^2b^2 - 2ab^2}{6}$$

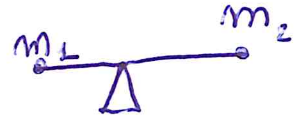
Momento di una Forza rispetto a un polo

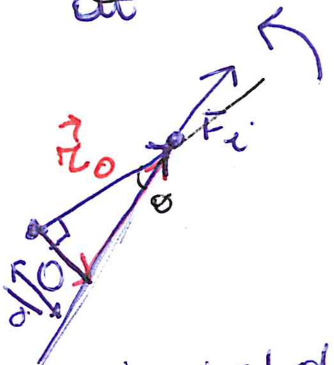
è definito da $\vec{\tau}^{o} = \vec{r}_0 \wedge \vec{F} = \vec{r}_0 \wedge \cancel{\frac{d\vec{p}}{dt}}$

~~per un corpo rigido~~ ↑ Polo

1) a) 

$m_1 = m_2$





$|r_0 \wedge F| = |F| d$

↓

braccio della F

per un ~~sistema~~ ~~affinché esso~~ sistema affinché esso sia in equilibrio non basta che la somma delle forze sia nulla è anche necessario che il momento delle forze risultante sia nullo

$$\sum_i \vec{F}_i^{(E)} = 0 \qquad e \qquad \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = 0 \quad !$$

altrimenti il corpo ruota ~~pe~~ per l'es. a)

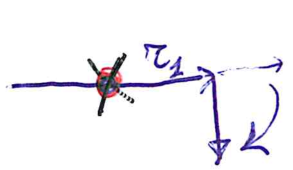
$m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + \vec{R} =$

$R = m_1 g - m_2 g$

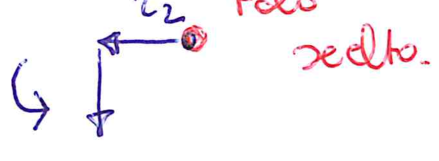
$R = m_1 g + m_2 g$

$R = 2mg$

es. 1) $\vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2$



$-mg r_1 \hat{z} + mg r_2 \hat{z}$



solo se i bracci sono uguali il corpo non ruota attorno a z

Equilibrio

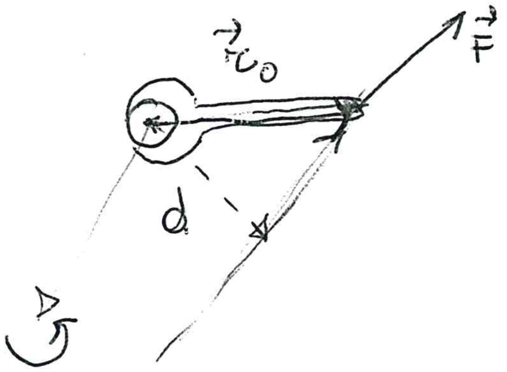
OK

$\sum_i \vec{F}_i^{(E)} = 0$

$\sum_i \vec{r}_i \wedge F_i$

Quando si applica una forza a un corpo rigido che può ruotare attorno ad un asse fisso questi si mette a ruotare

es.



$\vec{\tau} = \vec{r}_0 \wedge \vec{F}$

$\vec{r}_0$ vettore distanza dall'asse di rotazione al punto di applicazione di $\vec{F}$

$\vec{\tau} = |d| \cdot |F| \ \hat{z}$

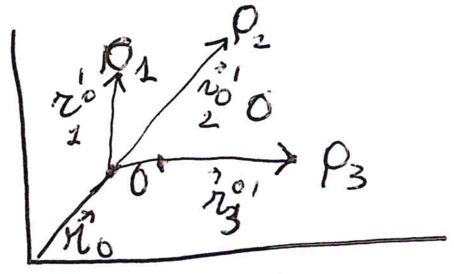
d braccio della forza

d = distanza minima tra O e la retta di applicazione di $\vec{F}$

Torniamo alla definizione di momento

delle forze rispetto a un polo

$\vec{M}^o = \sum_i r^o_i \wedge \vec{F}_i$ dove in generale



Per un corpo rigido

~~$\vec{F}_i$ sul punto P_i~~

M^o

è dovuto alle | contributo delle sole forze esterne e non alle forze interne

~~forze interne~~ infatti

es sistema terra luna sole

~~quando~~ $\vec{F}_i = \vec{F}_i(E_i) + \vec{F}_i(I)$

$\vec{F}_{sole\,Terra} = -\vec{F}_{T\,sole}$

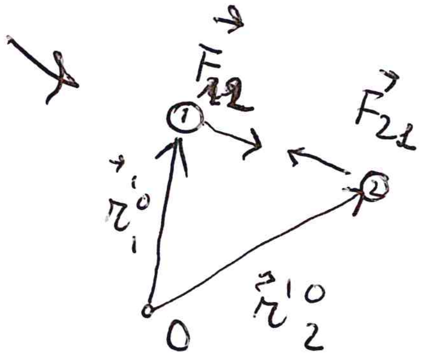
$\vec{F}_{luna\,Terra} = -\vec{F}_{T\,e}$

ecc.

prendiamo una coppia

di punti 1 2 es

il loro contributo a $\vec{M}^o$



$= r^o_1 \wedge \vec{F}_{12} + r^o_2 \wedge \vec{F}_{21}$

$= r^o_1 \wedge \vec{F}_{12} + r^o_2 \wedge (-\vec{F}_{12})$

$= (\vec{r}^{\,o}_1 - \vec{r}^{\,o}_2) \wedge \vec{F}_{12}$

la diff $\vec{r}^{\,O'}_1 - \vec{r}^{\,O'}_2$

è parallela sia a $\vec{F}_{12}$ e a $\vec{F}_{21}$

$//$

$= 0$

Quindi

Dato un sistema di punti materiali

su ciascun punto materiale

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = \sum_n \vec{F}_{in}(E) + \sum_{n'} \vec{F}_{in'}(I)$$
$$= \vec{F}_i(E) + \vec{F}_i(I)$$

ma per il sistema totale (N punti materiali

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i(I) + \vec{F}_i(E) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i(E)$$

$$\vec{M}^0 = \vec{M}^0(\vec{E})$$

Per cui riassumendo le due equazioni cardinali

1) $M \vec{a}_{cm} = \vec{F}(E)$

2) $\vec{M}^0 = \vec{M}^0(\vec{E}) = \sum_i \vec{r}_i^{\,0} \wedge \vec{F}_i(E)$

$$= \sum_i \vec{r}^{\,0}_i \wedge \vec{F}_i$$

Quindi tornando alle equazioni scritte

per il baricentro

$$\vec{F}(E) = \sum_i m_i \vec{a}_i = M \vec{a}_{CM}$$

la risultante delle forze Esterne

determina il moto del CM

es 3 particelle 12 23 13

21 32 31

$$\sum_i \vec{F}^i(I) = 0$$

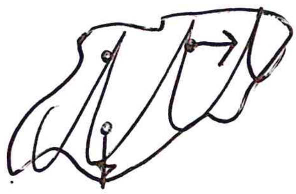
$$\sum_i \vec{F}^i(E) = M\vec{a}_{CM}$$

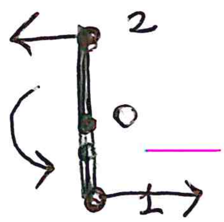
mentre

$$\vec{M}^o(E) = \cancel{\sum_i \ell_i \wedge \vec{F}_i(I) + \ldots} \quad \sum_i \vec{r}^o_i \wedge \vec{F}^i(E)$$

per cui sebbene $\sum_i F^i(E)$ può essere nullo

può non esserlo $M^o(E)$!

es. 



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

$$\vec{a}_{CM} = 0$$

ma

$$\vec{M}^o(E) \neq 0$$

e le due particelle ruotano intorno a O

$$\vec{M}^{o}(E) = \sum_i \vec{r}^{\,o}_i \wedge \underline{F^{i}(E)}$$

quindi I^a eq cardinale $\left\{ M\vec{a}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i(E) \right.$

$M\vec{a}_{CM} = 0$

$\vec{v}_{CM}$ cost o nulla

II^a eq. card $\quad \vec{M}^{o}(E) = \sum_i \vec{r}^{\,o}_i \wedge \vec{F}^{e}(E)$

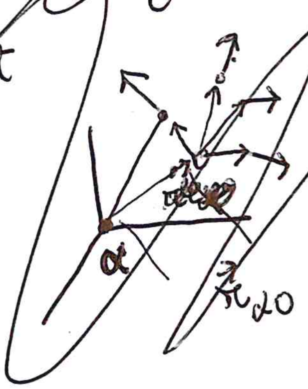
momento angolare di un sistema di particelle

$$\vec{L}^{o} = \sum_i \vec{r}^{\,o}_i \wedge \vec{P}_i$$

$$\frac{d\vec{L}^{o}}{dt} = \sum_i \underbrace{\frac{d\vec{r}^{\,o}_i}{dt} \wedge \vec{P}_i}_{//} + \quad \text{per un moto circ unif.} = 0$$

$$\sum_i \underbrace{\vec{r}^{\,o}_i \wedge \frac{d\vec{P}_i}{dt}}_{//} \quad \text{per un moto circ unif} = 0$$

~~$\frac{d\vec{L}^{o}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{P}_i$~~



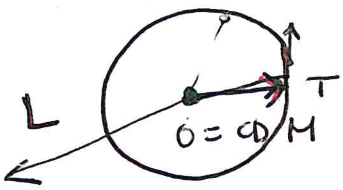
~~Se il polo non è nell'origine del sistema~~

es. Terra che ruota intorno al sole (origine nel S CDM del sist)

$$\vec{L}^{S}_{T} = \vec{r}_{ST} \wedge m_T \vec{v}_T$$

$r_{ST} = $ cost

$\frac{d\vec{P}_i}{dt}$ diretto come r_{OS}



orbita circolare

$\omega = $ costante

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \qquad T = \pi \times 10^{7}\,s$$

la Forza è centrale

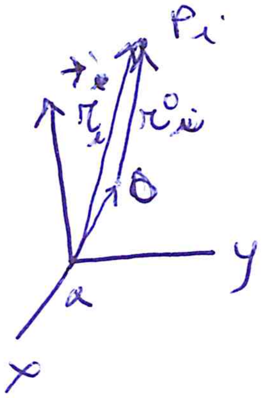
$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{M}^{S}(E) = 0 \\ \uparrow \text{ non ci sono Forze esterne al sistema} \end{array}}$$

$\vec{M}_S(E) \cdot \hat{z} = 0$

$L_z = $ cost! $\quad$ | cost. $m_T v_T R_{TS}$

→ Relazione tra L e il M(E)

Ora se il polo non coincide con l'origine del sistema



$$\vec{\alpha O} + \vec r^{\,o}_i = \vec r_i$$

$$\vec r^{\,o}_i = \vec r_i - \vec{\alpha O} \qquad \frac{d\vec r^{\,o}_i}{dt} = \frac{d\vec r_i}{dt} - \vec v_0$$

$$\vec L^o = \sum_i \vec r^{\,o}_i \wedge \vec P_i \qquad \frac{d\vec L^o}{dt} = \sum_i \frac{d\vec r^{\,o}_i}{dt} \wedge \vec P_i + \sum_i \vec r^{\,o}_i \wedge \frac{d\vec P_i}{dt}$$

$$\frac{d\vec L^o}{dt} = \underbrace{\cancel{\sum_i \frac{d\vec r_i}{dt} \wedge \vec P_i}}_{1} \underbrace{- \vec v_0 \sum_i \wedge \vec P_i}_{2} + \underbrace{\cancel{\sum \vec r^{\,o}_i \wedge \vec F_i(I)}}_{3} + \underbrace{\sum \vec r^{\,o}_i \wedge \vec F_i(E)}_{4}$$

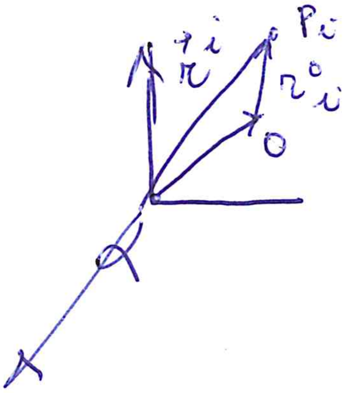
$$\frac{d\vec P_i}{dt} = \vec F_i(I) + \vec F_i(E)$$

4 $= M(E)$

1 $= \varnothing \qquad \vec v_i \wedge m_i \vec v_i$

3 $= \varnothing \qquad$ coppie $i\,j$ per un corpo rigido CR $F(I)$ non contribuiscono

$$\frac{d\vec L^o}{dt} = \vec M(E) - \vec v_0 \wedge \sum_i \vec P_i \Rightarrow$$



$$\vec{\alpha O} + \vec{r}^{\,o}_i = \vec{r}_i$$

$$r^o_i = \vec{r}_i - \vec{\alpha O}$$

$$\frac{dr^o_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} - \vec{v}_o$$

$$\vec{L}^o = \sum_i \vec{r}^{\,o}_i \wedge \vec{P}_i$$

$$\frac{d\vec{L}^o}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{r}^{\,o}_i}{dt} \wedge \vec{P}_i + \sum_i \vec{r}^{\,o}_i \wedge \frac{d\vec{P}_i}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}^o}{dt} = \underset{1}{\sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge \vec{P}_i} \; \underset{2}{- \vec{v}_0 \wedge \sum_i \vec{P}_i} + \underset{3}{\sum_i \vec{r}^{\,o}_i \wedge F^i(E)} + \underset{4}{\sum_i \vec{r}^{\,o}_i \wedge F^i(I)}$$

$$\vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i \quad //$$

1 nullo

$\boxed{\text{nullo Forze az. reaz}}$

$$\frac{d\vec{L}^o}{dt} = \vec{M}^o(E) - \vec{v}_0 \wedge \vec{P}_{cm}$$

$$\vec{M}^o(E) = \frac{d\vec{L}^o}{dt} + \vec{v}_o \wedge \vec{P}_{cm}$$

Questa relazione

$$\vec{M}^o(E) = \frac{d\vec{L}^o}{dt} + \cancel{dL} \; \vec{v}_0 \wedge \vec{P}_{cm}$$

ci dice che ~~se prendiamo un polo fisso~~

1) polo fisso $\vec{v}_0 = 0 \rightarrow \vec{M}(E) = \frac{d\vec{L}^o}{dt}$

se il polo

2) è il CM $\vec{v}_0 = \vec{v}_{CM}$ ma $\vec{v}_{CM} \parallel \vec{P}_{CM}$ $\vec{M}(E) = \frac{d\vec{L}^o}{dt}$

3) se il polo è mobile ~~comunque~~

e si muove nella direzione del CM $\vec{v}_0 \parallel \vec{P}_{cm}$ $\vec{M}^o(E) = \frac{d\vec{L}^o}{dt}$

Negli esercizi sceglieremo sempre o un polo fisso o il CDM nell'ultimo caso se scegliamo il CDM per polo

$$\vec{M}^{CM}(E) = \left.\frac{d\vec{L}^{CM}}{dt}\right)_{SRi}$$

Quindi se faremo le scelte 1 0 2 0 3

$$\vec{F}(E) = M\vec{a}_{cm}$$

$$\vec{M}^o(E) = \frac{d\vec{L}^o}{dt}$$

Se $\vec{M}^o(E) = \emptyset$ $\quad \vec{L}^o = \text{cost}$

Se $\vec{M}^o(E)$ è nullo in una componente (i)

per quella componente

$\vec{M}^o_i(E) = 0 \longrightarrow L^o_i = \text{cost}$!

21

$\boxed{\vec{v}_0 \wedge \vec{P}_{cm} = 0}$

1) polo fisso $v_0 = 0$

2) polo = al cm

$$\vec{M}^0(E) = \frac{d\vec{L}^0}{dt} + \vec{v}_0 \wedge \vec{P}_{cm}$$

3) $\vec{v}_0 \parallel \vec{P}_{cm}$

$$\vec{M}^0(E) = \frac{d\vec{L}^0}{dt}$$

equazioni cardinali del moto

$$\begin{cases} 1)\ \vec{F}(E) = M\vec{a}_{cm} \\ 2)\ \vec{M}^0(E) = \left(\frac{d\vec{L}^0}{dt}\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{M}^{0\,i}(E) = 0$

$\to L^{0\,i}$

è una costante del moto

Per un corpo rigido

→ se sappiamo che sul sist. agiscono solo forze interne

$\vec{M}(E) = 0$!

e $\vec{L}^0$ è costante

cioè conservato

Nota: se sul sistema agissero solo forze interne

$\vec{M}^O(E) = 0 \quad \leftrightarrow \quad$ e $\vec{L}^O$ ~~(E)~~ $=$ costante

conseguenza del principio di azione e reazione! esse agiscono sulla stessa retta di applicazione

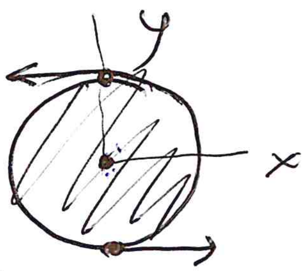
Per i casi 1, 2, 3

Se $\vec{M}^O(E) \neq 0$

la $\Sigma F_E^i =$ ~~Pk~~ $M\vec{a}_{CM}$ e può anche essere nulla

ma se sul sistema agiscono forze esterne che non hanno la stessa retta di applicazione

$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$



es. corpo rigido disco vincolato a ruotare su un'asse ~~che~~ che passa per il cm

$\Sigma_i (\vec{F}_E)^i = 0$

$\rightarrow \vec{a}_{cm} = 0 \quad v_{cm} = 0$

ma $M^{CM=0}_{(E)} = \alpha \neq 0$!

il corpo ruota!

Abbiamo detto che nelle nostre applicazioni sceglieremo per calcolare $\vec{M}^o(E)$

$$\vec{M}^o_t(E) = \frac{d\vec{L}^o}{dt} - \vec{v}_o \wedge \vec{P}_{cm}$$

① $\vec{v}_o = \emptyset$ polo fisso

② $\vec{v}_o \parallel \vec{v}_{CM}$ polo mobile con $\vec{v}_o \parallel \vec{v}_{CM}$

③ $O = CDM$ il polo coincide con il CDM + è un polo mobile (o meno dipende da $\vec{v}_{CM}$)

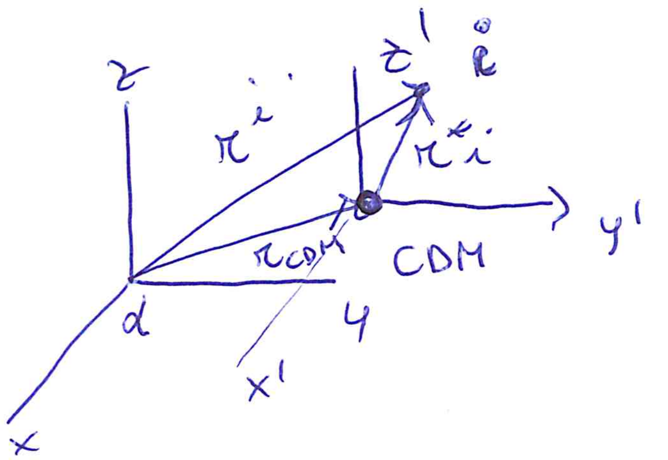
In questi casi
$$\vec{M}^o(E) = \frac{dL^o}{dt}$$

Sistema del CENTRO DI MASSA

~~Il~~ La posizione del CDM è un punto geometrico ben definito nel SRI è spesso utile considerare il moto rispetto al CDM

a) ~~Si sceglie un SDRI~~

1) Si sceglie un sistema di riferimento inerziale



2) si piazza l'origine di un sistema cartesiano nel CDM con gli assi paralleli a quello di partenza

in ogni istante

Indichiamo con $\vec{r}^*_i$ ~~la coordinate~~ ~~il raggio~~ il vettore posizione del punto i-esimo in SCDM e con $\vec{r}_i$ quello in SRI

$\vec{r}_{CDM}$ posizione di CM in SRI

Vale:

$$\vec{r}^*_i + \vec{r}_{CDM} = \vec{r}_i$$

$$\vec{r}^*_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{CDM}$$

$$\vec{v}^*_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{CDM}$$

$$\vec{a}^*_i = \vec{a}_i - \vec{a}_{CDM}$$

Il sistema scelto

a) non ruota

b) esso trasla con la velocità del CM

c) la sua velocità può essere non costante (l'SCDM può essere non inerziale

In esso:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,*} = 0 = \vec{r}^{\,*}_{cm}$$

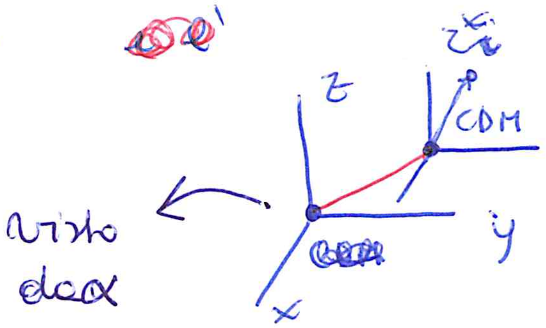
es. $\sum_i m_i \vec{r}^{\,*}_i =$
$\sum_i m_i \vec{r}_i - \sum_i m_i \vec{r}_{cm}$
$= \sum_i m_i \vec{r}_i - M\vec{r}_{cm}$
$= M\vec{r}_{cm} - M\vec{r}_{cm}$

$$\boxed{a)\ \vec{v}^{\,*}_{cm} = 0 = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}^{\,*}_i}{dt}}$$

$$\vec{a}^{\,*}_{cm} = 0 = \sum_i m_i \frac{d^2 r^*_i}{dt^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{P}_{cm} = \emptyset = 0}$$

d'altra parte se il polo è il CDM
il polo è mobile



nel laboratorio

$$\vec{L}^{CDM} = \cancel{\sum_i (\vec{r}_{cm} + \vec{r}_i)} \quad \sum_i \vec{r}_i^* \wedge (m_i \vec{v}_i)$$

infatti in questo caso la posizione del punto P_i rispetto al polo è $\vec{r}_i^*$ ~~distanza~~

$$\vec{L}^{CDM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i^* \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i^* \wedge m_i (\vec{v}_i^* + \vec{v}_{cm})$$

$$v_i^* = \vec{v}_i - \vec{v}_{cm}$$

$$\vec{L}^{CDM} = \sum_i \vec{r}_i^* \wedge m_i \vec{v}_i^* + \sum_i m_i \vec{r}_i^* \wedge \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{L}^{CDM} = \sum_i \vec{r}_i^* \wedge m_i \vec{v}_i^* + \vec{r}^*_{cm} M \wedge \vec{v}_{cm}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} = 0 \\ r^*_{CM} \\ \text{nel CDM} = 0 \end{array}}$$

$$\vec{L}^{CDM} = \vec{L}^{*CMD}$$

ricordiamo che abbiamo detto
che ~~nelle maggi~~ negli esercizi considereremo
un polo fisso oppure il CM.

a seconda di quello che ci interessa

Ma se il polo è il CDM.

1) $L^{CDM} = L^{*\,CM}$

In generale ricordiamo che

$$\rightarrow \frac{dL^{o}}{dt} = M^{o}_{\cdot}(E) - \vec{v}_{0} \wedge \vec{P}_{CM}$$

↳ nel lab

$\vec{v}_0 = v_{CM}$

se il polo è il CDM

$$\frac{dL^{CM}}{dt} = M^{CM}(E) = \boxed{\frac{dL^{CM*}}{dt} \quad \text{dalla 1)}}$$

Avete già visto il teorema di Koenig dell'energia cinetica

$$K^{LAB} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + K^*$$

↳ dovuta al moto delle parti del sistema rispetto/intorno al baricentro

Lavoro per spostare il COM

$$\int_A^B M \vec{a}_{cm} \, d\vec{s} = K_f - K_i$$

cm

Per uno spostamento del corpo qual'è il lavoro compiuto?

↓

questo è lo spostamento elementare della posizione del baricentro

questo non può essere l'unico lavoro

lo è solo se c'è un'unica forza e è applicata al baricentro!

Quindi ~~nel baricentro~~ il lavoro fatto dalle forze esterne non può essere derivato da

$$\vec{F}^{(E)} = m \vec{a}_{cm}$$

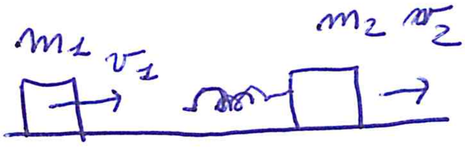
c'è un'altro contributo!

per questo

$$K^{LAB} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + K^* \rightarrow \text{dovuto al}$$

al moto delle parti del sistema rispetto al

CDM (K^*)



Esempio

due corpi di massa m_1 e m_2 appoggiate

su un piano orizzontale privo di attrito

sul secondo corpo c'è una molla, né dilatata

né compressa : K costante della molla

velocità v_1 nota e v_2 nota. e $v_1 > v_2$

Il primo corpo va a urtare la molla.

Calcolare la max compressione della

molla.

Soluzione

+ Nel momento in cui la molla

ha raggiunto la max compressione

la Forza risultante totale è nulla

e i due corpi si muovono con velocità V

: con le stesse velocità

Quindi

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Inoltre non essendoci forze Esterne

$$\vec{F}^{(E)} = \frac{d\vec{P}_{cm}}{dt} = \vec{P}_{cm} = \text{costante}$$

lungo x

$$\vec{P}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{V} = \vec{P}_{cm}!$$

si muove lungo x   ed è costante

da cui abbiamo due incognite e $(V \text{ e } x)$

due equazioni da risolvere ....

complicatucce... e poi saremo sicuri delle nostre assunzioni?

~~Ed eccando con il teorema di Koenig~~

~~della~~ . sul fatto che $(m_1+m_2)V$ cioè che al max della della compressione le due molle hanno la stessa velocità V?

Il sistema è un sistema di PM!

Notare che è conservata l'Energia totale non quella cinetica → c'è una F(I) (molla)

Nel laboratorio SRI abbiamo dichiarato

che $K_{LAB}^{finale} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\cancel{V}^2$

è vero? supponiamo che lo vogliamo

dimostrare usando il teorema di Koenig

→ Problema → trovare la ~~minima~~ massima compressione

della molla usando il teorema di Koenig.

e il modo standard

~~nelle~~ non ci sono forze ~~esterne~~

$\rightarrow \vec{P}_{CM} = $ costante!

~~per~~

32.07

Modo standard

note v_1 v_2 e K $v_1 > v_2$

Non essendoci forze esterne il CM. si muove con velocità costante

$$\vec{F}(E) = 0 \quad m\vec{a}_{cm} = 0$$

$$\boxed{\vec{v}_{cm} = \text{cost.} \rightarrow \vec{P}_{cm} = \text{cost}}$$

1) $m_1 v_1^i + m_2 v_2^i = m_1 v_1^f + m_2 v_2^f = \dot{P}_{cm} = M v_{CM}$

Non ci sono forze dissipative

2) $\frac{1}{2} m_1 v_1^{i2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{i2} = \underline{U_{TOT}} = \boxed{\frac{1}{2} m_1 v_1^{f2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{f2} + \frac{1}{2} K x^2}$

costante

Ricaviamo v_2^f dalla 1) in funzione di v_1

$$v_2^f = \frac{m_1 v_1^i + m_2 v_2^i}{m_2} - \frac{m_1}{m_2} v_1^f$$

$$\boxed{v_2^f = \frac{P_{cm}}{m_2} - \frac{m_1}{m_2} v_1^f}$$

dalla 2) $\frac{1}{2} K x^2 = U_{TOT} - \frac{1}{2} m_1 v_1^{f2} - \frac{1}{2} \cancel{m_2} \frac{P_{cm}^2}{m_2^{\cancel{2}}}$

$- \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} \cdot v_1^f\right)^2 - \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{m_2} \left(-\frac{\cancel{2} P_{cm} m_1}{m_2^{\cancel{2}}}\right) v_1^f$

32.02 La max compressione della molla corrisponde al max di:

a) $\frac{1}{2}Kx^2 = U_{TOT} - \frac{1}{2}m_1 v_1^{f\,2} - \frac{1}{2}\frac{P_{cm}^2}{m_2} - \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2} v_1^{f\,2} + \frac{m_1}{m_2} P_{cm} v_1^f$

derivando rispetto a v_1 con U_{TOT} e P_{cm} costanti

e uguagliandola a 0 ($\frac{1}{2}Kx^2$ non dipende esplicitamente da v_1^f) se è un max derivata nulla

$$-\frac{1}{\cancel{2}} m_1 v_1^f \cdot \cancel{2} - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{m_1^2}{m_2} \cdot \cancel{2} v_1^f + \frac{m_1}{m_2} P_{cm} = 0$$

molp. x m_2

$$\Rightarrow m_1 m_2 v_1^f + m_1^2 v_1^f = m_1 P_{CM}$$

$$= v_{1f}\, \cancel{m_1}(m_1 + m_2) = \cancel{m_1} \cdot P_{cm}$$

b) $v_1^f = \frac{P_{cm}}{m_1+m_2} = \frac{m_1 v_1^i + m_1 v_2^i}{m_1+m_2}$

Sostituendo nella a) otteniamo il valore di x (U_{Tot} noto v_{1f} noto P_{cm} noto!)

inoltre dalla b) $\rightarrow$ $m_1 v_1^f + m_2 v_1^f = P_{cm}$ $v_{1f} = v_{2f}$!

32.03

notiamo che v_1^f corrisponde alla velocità

del CM.

$$v_1^f = \frac{P}{m_1+m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2} = v_{cm}!$$

Ora applichiamo il teorema di Koenig 32.09

$$K^{LAB} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + K^*$$

$$\frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

a) $E_{TOT\,finale} = \text{costante} = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2) v_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^{*f\,2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*f\,2}$

a.1 $\boxed{\frac{1}{2} k x^2} = E_{TOT\,finale} - \frac{1}{2}(m_1+m_2) v_{CM}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^{*f\,2} - \frac{1}{2} m_2 v_2^{*f\,2}$

E_{TOT} costante

v_{CM} costante il ~~minimo~~ massimo senza fare conti lo abbiamo per (dalla A.1) $v_1^{*f} = v_2^{*f} = \emptyset$.

$v_1^{f*} = 0 = v_1^f - V_{CM} \rightarrow v_1^f = V_{CM} =$

$v_2^{f*} = 0 = v_2^f - V_{CM} \rightarrow v_2^f = V_{CM}$

$v_1^f = v_2^f = v_{cm}$

Quindi nel laboratorio

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} \underbrace{m_1 v_1^2}_{\text{note}} + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 \underbrace{v_2^2}_{\text{note}} - \cancel{\tfrac{1}{2}} \underbrace{(m_1 + m_2)}_{\text{note}} \underbrace{V_{cm}^2}_{\text{nota}} = \cancel{\tfrac{1}{2}} K x^2$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \sqrt{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) V_{cm}^2}$$

Nota - l'energia meccanica è conservata perchè non ci sono forze non conservative Ma abbiamo convertito energia cinetica in energia interna.

~~Koenib~~ Koenig

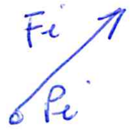
$$E_{in} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = K^*_{in} + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

$$= E_f = \frac{1}{2} K x^2 + \underbrace{K^*_f}_{0} + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

Energia di un sistema di punti materiali 34.1

cinetica e altro...

$$K = \Sigma_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$



Il lavoro compiuto da una forza $\vec{F}_i$ per spostare il punto mat. i-simo di $d\vec{r}_i$

1) $$dW_i = \vec{F}_i(E) \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i(I) \cdot d\vec{r}_i = dW_i(E) + dW_i(I)$$

per uno spostamento finito in assenza di forze dissipative

$$W_i = K_i(B) - K_i(A) = \int_A^B \left(\vec{F}_i(I) + \vec{F}_i(E)\right) \cdot d\vec{r}_i$$

$$K_f - K_i = \Sigma_i W_i = U_i - U_f + L_{NC}$$ S.M.P!

↓

Lavoro fatto da forze conservative sia interne che esterne

$$K_f + U_f = U_i + K_i + L_{NC}$$

Conservazione dell'energia se non ci sono forze non conservative

U_f e U_i ricevono contributi da $\vec{F}(I)$ e $\vec{F}(E)$

Solo se non ci ~~sono~~ ne forze interne ne esterne Ne e NC $\boxed{K_f = K_i}$

E per un corpo rigido?

le $F(I)$ non contribuiscono

infatti riprendendo la 1)

$$dW_i = \vec{F}_i(E) \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i(I) \cdot d\vec{r}_i$$

ma per le forze interne $\forall$ coppia iJ che interagisce con forze interne

$$\vec{F}_{iJ}(I) = -\vec{F}_{Ji}(I)$$

$\cancel{\vec{F}_{iJ} + \vec{F}_{Ji} \cdot d\vec{r}}$

prendiamo una di queste coppie

$$\vec{F}_{iJ} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{Ji} \cdot d\vec{r}_J = \vec{F}_{iJ} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_J)$$

$$= \vec{F}_{iJ} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_J)$$

in un CR è costante

$- d(\vec{r}_i - \vec{r}_J) = 0$!

$$K_f - K_i = U_i - U_f + LNC$$

U_i e U_f ricevono contributi solo da forze esterne

→ Se non ci sono forze esterne né forze non conservative ← $\boxed{K_f = K_i}$ ne attrito

Abbiamo trovato per un corpo rigido

1) $\vec{F}(E) = \frac{d\vec{P}_{cm}}{dt}$

2) $\vec{M}^{o}(E) = \frac{d\vec{L}^{o}}{dt} = \emptyset$

queste equazioni sono 6 equazioni e servono a determinare il moto anche di un corpo rigido

* P.M ' anche FE

la 2) vale anche nel CDM quando i momenti sono calcolati nel CDM

$M^{o}(E) = M^{CM}(E) = \frac{d\vec{L}^{o=CM}}{dt} = \frac{d\vec{L}'}{dt}$ nel CM

nel CM ~~M'~~

infatti

vedi Lezioni Tonelli

$\rightarrow L^{o}_{\text{in generale}} = \vec{r}^{\,o}_{cm} \wedge \vec{P}_{cm} + \vec{L}'^{o}$ nel CDM

$\rightarrow$ quando il polo è il CDM $\vec{r}^{\,cm}_{cm} = 0$

e $\vec{L}' = \sum_i \vec{r}^{\,i*} \wedge \vec{P}_i^{*}$

$\vec{L}^{CM\,LAB} = \vec{L}'^{CM}$

$\vec{M}(E) = \vec{M}^{*}(E) = \frac{dL^{cm\,LAB}}{dt} = \frac{dL^{*CM}}{dt}$!

delle equazioni cardinali

noi conosciamo solo la risultante

delle forze sul baricentro

$\sum_i \vec F_i(E) = \vec F(E) = M\vec a_{CM}$

se conosciamo $\vec a_{CM}$ $\to \vec F(E)$

~~$\vec F(E) \to \vec a_{CM}$~~

e solo la risultante del momento delle forze

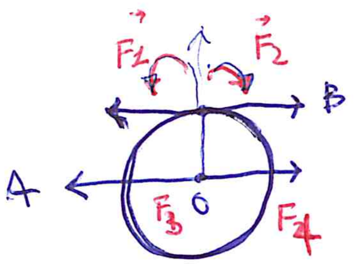
$$\vec M^O(E) = \frac{d\vec L^O}{dt}$$

~~se conosciamo L~~

~~solo~~

se conosciamo $\frac{d\vec L^O}{dt}$

esempio



polo in O

coppia di forze a braccio nullo in O

$\vec F_3 = -\vec F_4$

$\boxed{\vec F_1 = -\vec F_2}$ braccio non nullo

~~ma fa ruotare~~

$M\vec a_{CM} = 0$

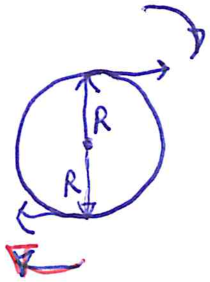
$\vec M^O = 0$

~~a far ruotare~~ equivalente a nessuna forza

FORZE

EQUIVALENTI

es ruote che gira attorno a un punto fisso (il CM) in SLAB (che coincide con SCM)

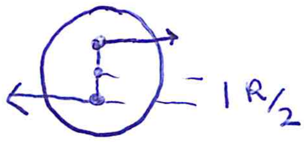


$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \qquad |F_1| = |F_2| = F$

$M \vec{a}_{cm} = 0 = \Sigma_i \vec{F}_i(E)$

$\vec{M}^O = \vec{R}_1 \wedge \vec{F}_1 + R_2 \wedge \vec{F}_2$

$|M^O_t| = RF + RF = 2RF$

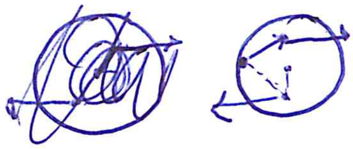


equivalente a $\vec{F}_1{}' = \vec{F}_2{}'$

$|F_1'| = 2F$

omettiamo da ora in poi (E)

$|\vec{M}^O_2| = \frac{R}{2} \cdot 2F + \frac{R}{2} 2F$

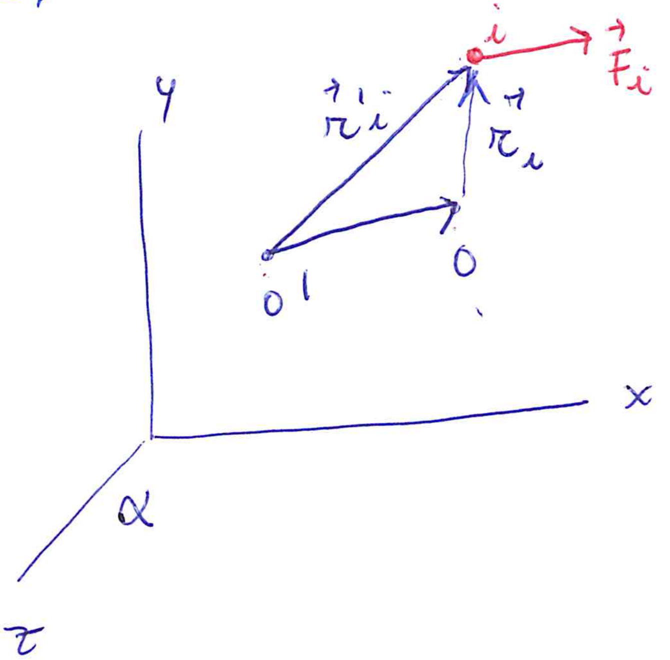


$= 2RF$

→ abbiamo capito che forze a risultante nulla possono avere un momento d. F diverso da ~~0~~ e che esistono forze equivalenti che danno lo stesso momento d.F $\vec{M}^O(E)$

→ dimostriamo che se le forze sono equivalenti danno lo stesso momento rispetto a qualsiasi polo se la loro risultante è nulla

$\vec{M}^{O'}(E) = \vec{M}^{O}(E) + O'O \wedge \vec{F}(E)$



$$\vec{M}^{O'}_i = \vec{r}'_i \wedge \vec{F}_i = (\underline{\vec{O'O} + \vec{r}_i}) \wedge \vec{F}_i =$$

$$= \vec{O'O} \wedge \vec{F}_i + \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$$

Σ

$$\vec{M}^{O'} = \vec{OO'} \wedge \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$$

$$\vec{M}^{O'} = \vec{OO'} \wedge \sum_i \vec{F}_i + \vec{M}^{O}$$

e se $\sum_i \vec{F}_i = 0$ $\quad \vec{M}^{O'} = \vec{M}^{O}$! per qualunque O'

Equilibrio di un corpo rigido

CM rett. unif. o fermo $\begin{cases} M \vec{a}_{cm} = 0 \\ \sum_i F_i(E) = 0 \end{cases}$

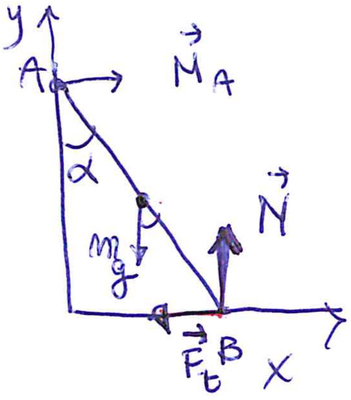
E ↓ AND

$\begin{cases} \vec{M}^{(E)} = \varnothing \end{cases}$ non ruota

↳ rispetto a un polo qualsiasi!

Vediamo cosa garantisce l'equilibrio

Esempio



Se la scala non scivola

$$\vec{N} + \vec{F}_t + \vec{N}_A + m\vec{g} = 0$$

$$\vec{M}^O = 0$$

1) $\sum_i F_i^y = 0$ $\boxed{\text{lungo } y \quad N = mg}$

$\sum_i F_x^i = 0$ lungo x

$$N_A = F_t$$

la prima ci da N

la seconda è una relazione tra due incognite

Tutte le forze sono sul piano x,y

di conseguenza $\vec{M}^O$ sarà diretto lungo $\hat{z}$ ~~ortogonale alla~~

$$\vec{M}^O = \sum_i \vec{r}_i^O \wedge \vec{F}_i$$

su xy ↑ su x,y

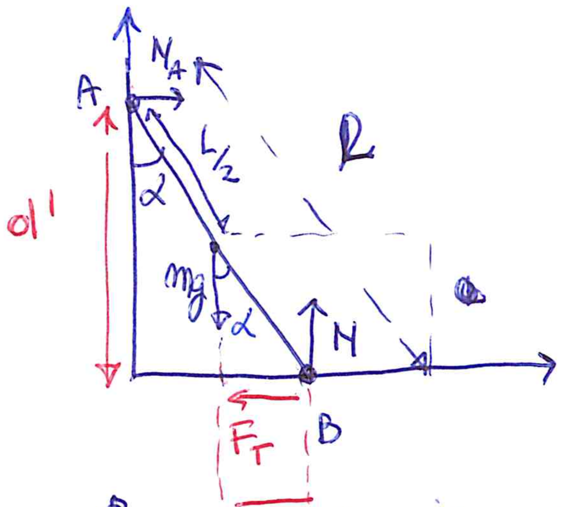
L'equilibrio è garantito da $M_z = 0$

Scegliamoci un polo comune (A o B) (40)

per calcolare M_z → se il corpo non ruota l'equilibrio è garantito da $M_z = 0$

→ Possiamo scegliere un polo qualunque se $\vec{F}(E) = 0$!

scegliamo B (annulla 2 forze!)



ricordiamo

$$N = mg$$

(2) $$N_A = F_T$$

$d = \frac{l}{2}\sin\alpha$

$$M_z^B = mg\,\frac{l}{2}\sin\alpha - N_A L\cos\alpha$$

2

G

Se non ruota: $M_z^B = 0 \Rightarrow N_A = \dfrac{mg\,\frac{\cancel{l}}{2}\sin\alpha}{\cancel{l}\cos\alpha}$

~~Quindi N_A =~~

(2) $$N_A = \frac{mg\,tg\alpha}{2}$$

$$N_A = +F_T = mg/_2\,tg\alpha$$

~~$\frac{mg}{2}\,tg\alpha = |F_T| \leq \mu_s \cdot N = \mu_s\,mg$~~

~~$tg\alpha \leq$~~ $\mu_s \cdot 2$

$$N_A = \boxed{F_T = \frac{mg}{2} \cdot tg\,\alpha}$$

Inoltre $F_T^{max} = \mu_S N = \mu_S mg$

cioè $\qquad \frac{\cancel{mg}}{2} tg\,\alpha = F_T \leq \mu_S \cancel{mg}$

quindi se vogliamo che la scala

non cade

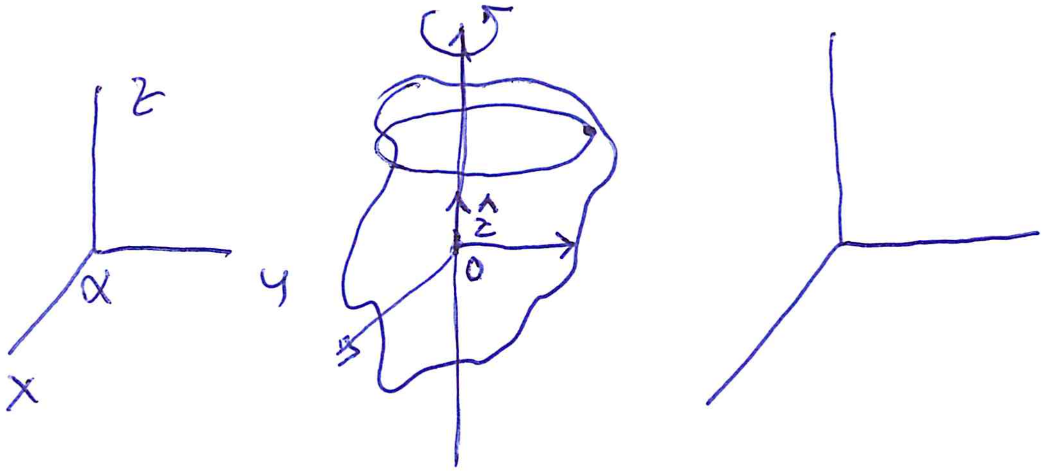
$$tg\,\alpha \leq 2\mu_S \qquad \text{es. } \mu_S = 0.2$$

$$tg\,\alpha_{max} = 0.4$$

$$\text{e per } \alpha \geq atg\,0.4 = 22^\circ$$

la scala cade!

ed esaminiamo il caso più semplice
quello di una rotazione attorno a un asse
fisso che per semplicità assumeremo
essere parallelo all'asse $\hat{z}$ (così sarà in tutte
le nostre applicazioni) o comunque attorno
a $\hat{x}$ o $\hat{y}$ del nostro sistema di riferimento
inerziale. Nell'esempio $\hat{z}$.



$$\vec{M}^o = \frac{d\vec{L}^o}{dt} = M^o_z\hat{z} + M^o_x\hat{x} + M^o_y\hat{y} = \left.\frac{dL^o}{dt}\right)_x \hat{x} + \frac{dL^o}{dt}\hat{y} + \frac{dL^o}{dt}$$

proiettiamo $\vec{M}^o$ lungo l'asse z

$$\rightarrow M^o_z = \vec{M}^o \cdot \hat{z} = M^o_z = \frac{dL^o_z}{dt} \quad !$$

componente "assiale"

Vogliamo dimostrare che scelto un polo lungo l'asse di rotazione ($\vec{z}$ nell'es.

$L^O_z = L^{O'}_z = L_z$ qualunque sia il polo!

e che in generale $L_z^{\cancel{asse}} = I \cdot \omega$

dipende solo dalla distribuzione delle masse intorno all'asse

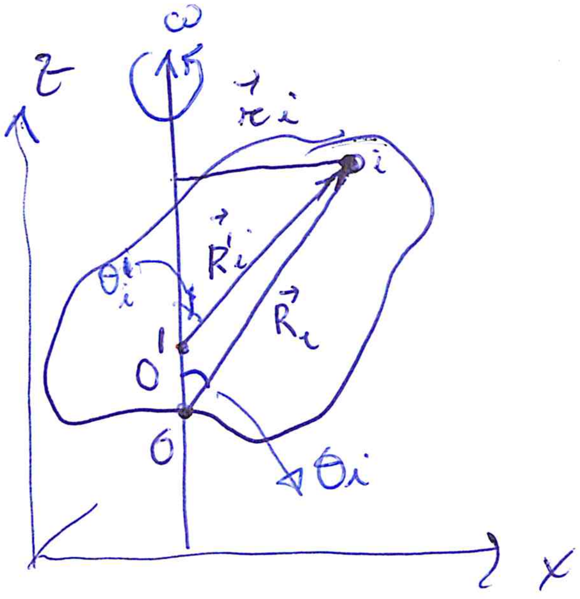
velocità di rotazione attorno all'asse

per cui $M^{e}_z = \frac{dL_z}{dt} = I\dot{\omega}$ Se così fosse

ora abbiamo due equazioni per un corpo che ruota attorno a z:

$\vec{F}(E) = M\vec{a}_{cm}$ $L^{a}_z = I\omega$

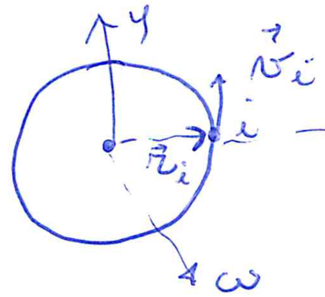
dobbiamo dimostrare che



a) $L_z^{O i} = (\vec R_i \wedge \vec v_i \, m_i)_z$ =

=

$L_z^{O' i} = (\vec R'_i \wedge \vec v_i \, m_i)_z$



$\vec v_i = \vec\omega \wedge \vec r^{\,i}$

$\vec R_i = R_\omega \hat\omega + R_r \hat r_i + R_v \hat v$

$\vec R_i \wedge \vec v_i = R_\omega \hat\omega \wedge \vec\omega \wedge \vec r_i + R_r \hat r_i \wedge \vec\omega \wedge \vec r^{\,i}$

(1) (2)

$+ R_v \hat v_i \wedge \vec v_i$ nullo

(3)

(1) $R_\omega \hat\omega \wedge \vec v_i$ diretto come $\vec r_i$ (x,y) ↓ verso! distanza ⊥ dall'asse

(2) $\hat r_i \wedge \vec\omega \wedge \vec r^{\,i} = \hat r_i \wedge \vec v_i \neq 0 = \omega r_i$

diretto come $\hat z$ ortogonale al piano x,y

(2) resta solo il secondo termine che è diretto lungo z ($\hat\omega$)

$$\vec{R}_i \wedge \vec{v}_i = R_\omega \hat{\omega} \wedge \underbrace{(\omega \wedge \vec{r}_i)}_{\vec{v}_i} + R_r \hat{r}_i \wedge \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i}_{\vec{v}_i} +$$

① ②

$$R_v \hat{v}_i \wedge \underbrace{(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)}_{\vec{v}_i}$$

③

dalle quali

① $R_\omega \hat{\omega} \wedge \hat{v}_i \Rightarrow$ diretto come $\vec{r}_i$ giace su x, y

② $R_r \hat{r}_i \wedge \vec{v}_i = \cancel{\quad}$ diretto come $\hat{\omega} = \hat{z}$

$$R_r v_i \; \hat{r}_i \wedge \hat{v}_i = R_r v_i \; \hat{\omega}$$

③ nullo

quindi $L_z^{o_i} = R_r v_i$

$$L_z^{o'_i} = R'_r v_i$$

$$L_z^{oi} = R_r \, \omega \, r_i \, m_i$$

che è R_r? è $\rightarrow$ la proiezione di R lungo $\hat{r}$!

$$R_r = R_i \sin\theta_i = r_i$$

$$\rightarrow L_z^{oi} = \omega \, r_i^2 \, m_i$$

Se ripetiamo il calcolo per il polo in O'

$$L_z^{O'} = R'_r \, \omega \, r_i \, m_i \qquad R'_r = R_r = r_i!$$

. Per cui il momento angolare assiale è lo stesso per tutti i poli che giacciono sull'asse che passa per O.

~~Asse fissato dal pedale~~

$$\rightarrow L_z^{O} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right) \cdot \omega$$

dipende solo dalla distanza delle masse dall'asse che passa x O

velocità angolare di rotazione attorno all'asse

Se O è il CDM

$$L_z^{CM} = \text{costante} \Rightarrow \omega = \text{cost.} = M_z \text{ nullo!}$$

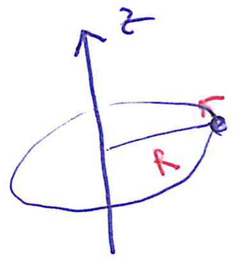
$$M_z^{CM} = \frac{dL^{CM}}{dt}!$$

$L_z = I_z \cdot \omega$ e per un corpo rigido?

$$L_z = \sum m_i r_z^2 \omega \rightarrow \left[\int dm\, r^2 \right] \omega = I_z \omega$$

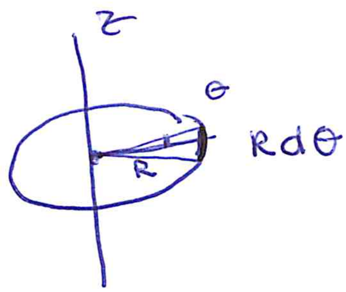
Esercizi sul momento d'inerzia

1) Singolo punto materiale rispetto a un asse



$$I = \int dm\, r^2 = R^2 \int dm = mR^2$$

2) Anello rispetto a un asse passante per il suo centro (CDM)



$$\rho = \rho_l = \boxed{\frac{dm}{dl} = \lambda} \quad \rho_l = \frac{M}{2\pi R}$$

$$I = \int dm\, r^2 \rightarrow \int \lambda\, dl\, R^2 = \cancel{\int_0^{2\pi} \lambda\, d\theta\, R^2\, d}$$

1

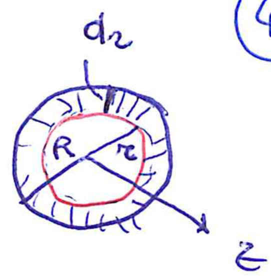
2

$$\rightarrow 3 = \int_0^{2\pi} \lambda R\, d\theta\, R^2$$

$$dl\ ? = R\, d\theta$$

$$I_{anello} = \int_0^{2\pi} 2\pi\lambda R^3 = \cancel{2\pi}\frac{M}{\cancel{2\pi}\cancel{R}} \cdot R^{\cancel{3}\,2} = MR^2$$

3) Disco rispetto ~~al centro~~ ad un asse passante per il suo centro (CDM)



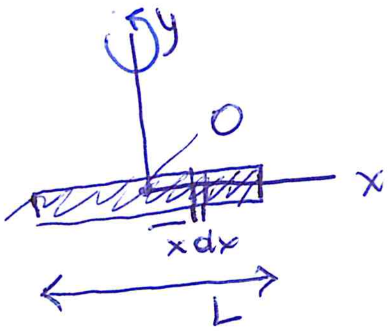
$$\rho_S = \frac{M}{\pi R^2} \qquad \begin{cases} ds = 2\pi r\, dr \\ dm = \rho_S\, ds \end{cases}$$

$$I^{CDM}_{\cancel{Anello}} = \int dm\, r^2 = \int_0^R \rho_S\, \cancel{ds}\, 2\pi r\, dr\, r^2 = 2\pi \rho_S \int_0^R r^3 dr$$

$$2\pi \rho_S \frac{R^4}{4}$$

$$I_{\substack{\cancel{anello} \\ DISCO}} = \cancel{2\pi} \frac{M}{\cancel{\pi} \cancel{R^2}} \cdot \frac{\cancel{R^4}^{\,2}}{\cancel{4}_{\,2}} = \frac{MR^2}{2}$$

4) Asta sottile rispetto al centro (CDM)



1 $\rho_\ell = \dfrac{dm}{d\ell} = \dfrac{M}{L}$ $d\ell = dx$

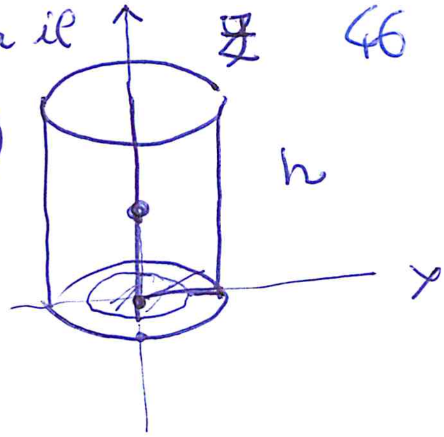
2 $\boxed{dm = \rho_\ell\, d\ell = \rho_\ell\, dx}$

$$I = \int dm\, r^2 \rightarrow I = \int_{-L/2}^{L/2} \rho_\ell\, dx\, x^2 = \rho_\ell \cdot \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^3 \cdot 2}{3}$$

$$\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-L/2}^{L/2}$$

$$I^{\circ}_{ASTA} = \frac{M}{L} \cdot \frac{L^3}{12} = \frac{ML^2}{12}$$

5) Cilindro per un asse passante per il suo centro (CDM) vedi figura
Come per il disco + integrale su h!)
cilindro asse di simmetria!



$$\rho_V = \frac{M}{\pi R^2 \cdot h} \qquad dV = dS \cdot dh \qquad dS = 2\pi r\,dr$$

$$I^{CM} = \int dm\, r^2 = \int \rho_V\, dV\, r^2 = \underbrace{\int \rho_V\, 2\pi r\, dr \cdot r^2}\, dh$$

per il pezzo indicato usiamo ~~quello~~ quanto ottenuto per il disco ma usando ρ_V invece che ρ_S quindi

$$\rightarrow \quad I_{cilindro} = I_{disco} \cdot \frac{\rho_V}{\rho_S} \cdot \int_0^h dh$$

$$= \frac{MR^2}{2} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\pi R^2}}{\cancel{M}}}_{\frac{1}{\rho_S}} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{M}}{\cancel{\pi R^2 \cdot h}}}_{\cdot \rho_V} \cdot h = \frac{MR^2}{2}$$

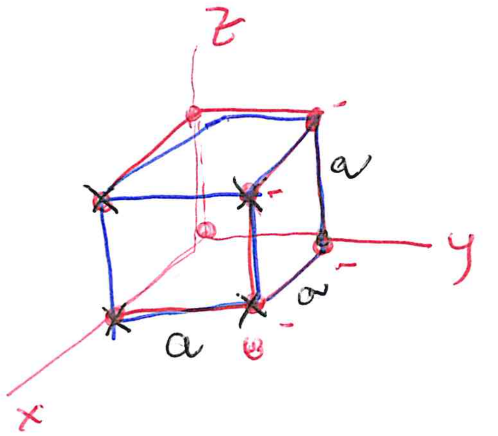
$$I_{cilindro} = I_{Disco} = \frac{MR^2}{2}$$

Cella 6.1

Determinare il momento d'inerzia di un corpo rigido formato da masse puntiformi di massa m poste ai vertici di un cubo di lato a, collegate tra loro con barre di massa trascurabile. Porre l'origine nel CDM del cubo.

Cella 6.1

Determinare il momento d'inerzia di un cubo omogeneo di lato a e massa m porre l'origine nel CDM (Baricentro

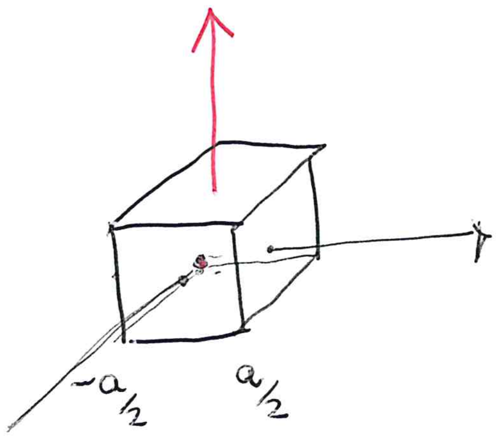


baricentro in x

4 masse hanno $x = a$

4 masse hanno $x = 0$

$$X_{cm} = \frac{(4 \times a + 4 \times 0)\cancel{m}}{8\cancel{m}} = \frac{a}{2}$$



baricentro in y

4 masse hanno $y = a$

4 masse // $y = 0$

$y_{cm} = a/2$

$z_{cm} = a/2$

$x \in \pm a/2 \quad a/2$

$y \in \pm a/2 \quad a/2$

$z \in \pm a/2 \quad a/2$

~~$I^{CM}_z = \ldots$~~

$$I_z^{CM} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$x_i = \pm a/2$

$y_i = \pm a/2$

$$I_z^{CM} = 8m\left[\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right]$$

$4ma^2$!

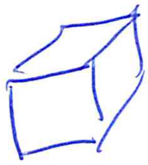
Idem per $I_x^{CM} = 4ma^2$

per $I_y^{CM} = 4ma^2$

CELLA 6.2

Determinare il tensore d'inerzia di un cubo omogeneo di lato a e massa m. ~~Pe~~ Porre l'origine del sistema di coordinate nel CDM

Baricentro del cubo



$$x_{cm} = \frac{\int dm\, x}{M}$$

$$\rho_V = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{a^3}$$

$$y_{cm} = \frac{\int dm\, y}{M}$$

$$dV = dx\, dy \cdot dz$$

$$z_{cm} = \frac{\int dm\, z}{M}$$

$$x_{cm} = \frac{\int \rho_V\, dV \cdot x}{M} = \frac{\rho_V}{M} \cdot \int_0^a dx\, x \int_0^a dy \int_0^a dz$$

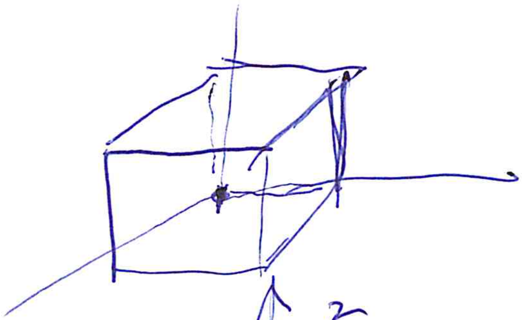
$$= \frac{\rho_V}{M}\, \frac{a^2}{2} \cdot a \cdot a = \frac{M}{a^3} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{a^4}{2} = a/2$$

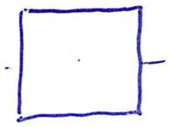
$$y_{cm} = a/2$$

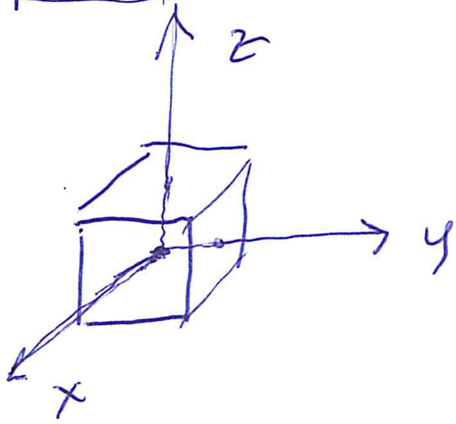
$$z_{cm} = a/2$$

Dunque prima il cubo!

Poniamo l'origine in ~~x~~ CM.







$x_{cm} = \frac{a}{2}$

$y_{cm} = \frac{a}{2}$

$z_{cm} = \frac{a}{2}$

Questi tre assi sono assi di simmetria per il corpo. ~~e la distan~~ $I_x = I_y = I_z$!

Usiamo coordinate cartesiane

$$I_z = \int dm\,(x^2+y^2)$$

↑ distanza dall'asse

$$\rho_v = \frac{M}{a^3} \qquad dm = \rho\, dV = \frac{M}{a^3}\, dx\, dy\, dz$$

$$I_z = \frac{M}{a^3} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} (x^2+y^2)\, dz$$

Su z

$$I^z = \frac{M}{a^3} \cdot \boxed{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy\,(x^2+y^2)$$

Su y

$$\left.\frac{y^3}{3}\right|_{-a/2}^{a/2}$$

$$I_z = \frac{M}{a^3}\, a \int_{-a/2}^{a/2} dx \left(ax^2 + \frac{a^3}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 2\right)$$

$$\left(ax^2 + \frac{a^3}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot 2\right)$$

Su x

$$I_z = \frac{M}{a^3}\cdot a \left[a\left(\frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right)\right)^3 + \frac{a^3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 2\cdot \underline{a}\right]$$

$$a\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot 2\cdot a]$$

I_z

$$\frac{M}{a^3}\, a\left[\underbrace{\frac{a^4}{12} + \frac{a^4}{12}}_{\frac{\cancel{2}a^4}{\cancel{12}\,6}}\right]$$

$$I_z = \frac{Ma}{\cancel{a^3}}\,\frac{a^{\cancel{4}}}{6} = \frac{Ma^2}{6}$$

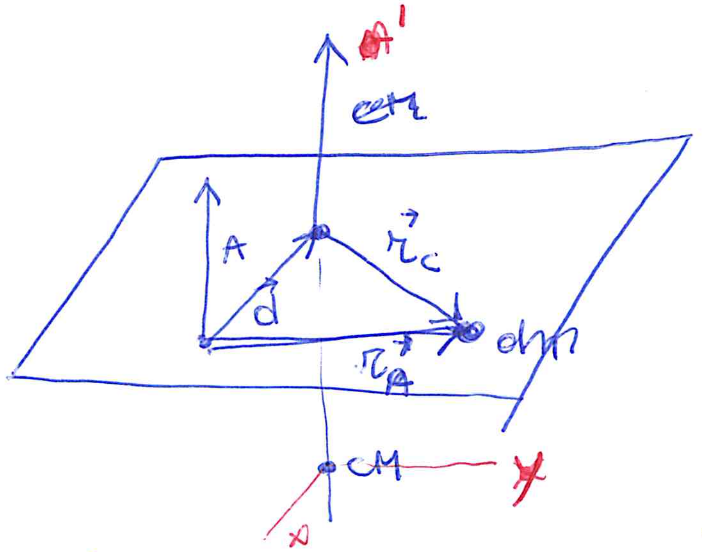
Teorema di Steiner degli assi paralleli (52) es1

Il momento d'inerzia di un C.R. rispetto a un'asse che non passa per il CDM ma è parallelo ad esso è dato da

$$I_A^A = I_{CM}^{A'} + M d^2$$

A = assi paralleli
A'

dove d è la distanza tra gli assi



piano ortogonale agli assi

$\vec d \perp$ //

$$\vec r_A = \vec d + \vec r_c$$

$$dI_A = r_A^2 \cdot dm$$

$$dI_A = \vec r_A \cdot \vec r_A \, dm$$

$$= (\vec d + \vec r_c)\cdot(\vec d + \vec r_c)\, dm$$

$$= d^2 \times dm + 2\vec d \cdot \vec r_c \, dm$$

$$+ \vec r_c \cdot \vec r_c \, dm$$

$$I_A^A = d^2 \times M + 2\vec d \cdot \int dm \, \vec r_c + \int dm \, r^2$$

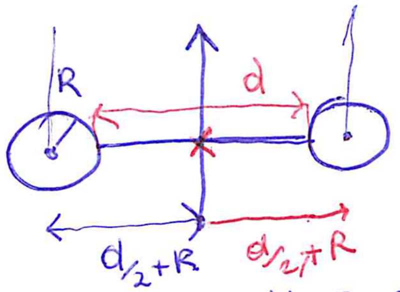
$I_{CM}^{A'}$

$2\vec d \cdot$

$\int dm \, x_c \hat x$
$+ \int dm \, y_c \hat y$ | nel CM = 0!

Un'applicazione del Teorema di Steiner

Un corpo rigido è costituito da 2 sfere di massa M e raggio R collegate da un asta lungo d e di massa m disposta lungo la retta che congiunge i centri. Calcolare il MI rispetto a un asse che passa per il centro dell'asta e a questo ortogonale



MI è la somma di 3 contributi

a) asta : è già nel suo CDM $\left[\frac{m d^2}{12}\right]$

b) 2 sfere rispetto al centro dell'asta (distanza asse $(R+\frac{d}{2})$)

$$2 \times \left[\frac{2}{5} M R^2 + M\left(R+\frac{d}{2}\right)^2\right]$$

$$I = \frac{1}{12} m d^2 + 2\left[\frac{2}{5} M R^2 + M\left(R+\frac{d}{2}\right)^2\right]$$

Ricordiamo che abbiamo definito il momento angolare assiale rispetto a un asse (per es. $\hat{z}$)

$$L_z^A = I_z^A \omega$$

dove A indica un ~~particolare~~ asse z passante per il punto A

In generale sebbene il corpo ruoti attorno all'asse z

$$\vec{L} = L_T \hat{u}_T + L_z \hat{z}$$

cioè L_T può essere diverso da 0 e $L_z^A = I_z^A \omega$

vedremo poi un esempio

$$\vec{M}_z^A = \frac{dL_z^A}{dt} = I_z^A \frac{d\omega}{dt} = I_z^A \alpha$$

dove ω è la velocità angolare di rotazione $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

e α è l'accelerazione angolare

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$$

l'equazione

1) $$M^A_z = \frac{dL^A_z}{dt} = I^A_z \alpha$$

è l'analogo in una dimensione di

$$F_x = m a_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$M^A_z = I^A_z \frac{d^2 \phi}{dt^2}$$

$m \rightarrow I^A_z$

$a \rightarrow \frac{d^2 \phi}{dt^2}$

es se nella 1) α = costante

e si conoscono le condizioni iniziali

$(\phi_0$ e $\underbrace{\dot{\phi}(0)}_{\omega_0})$ la soluzione ~~sola~~ è

la stessa del moto unif. acc.

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$!

Moto rotatorio intorno a un asse fisso con α = cost.

moto rettilineo unif. acc. a = cost

Variabili θ e ω

Variabili x e v

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$v = v_0 + at$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

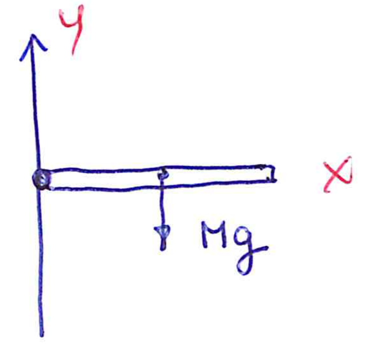
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Esempio da Serway

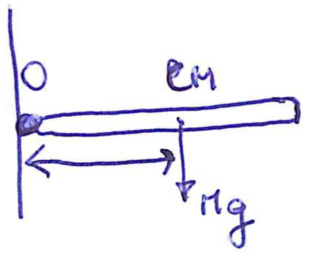
Una sbarretta omogenea di lunghezza L e massa m può ruotare attorno a un perno senza attrito. La sbarretta inizialmente ferma in posizione orizzontale ~~può~~ però ruotare attorno a un perno privo di attrito posto all'estremità della sbarretta come in fig. La sbarretta viene lasciata.

Qual'è l'accelerazione angolare iniziale della sbarretta?



ricordiamolo sempre $\vec{M}^0 = \frac{d\vec{L}^0}{dt} + \vec{v}_0 \wedge \vec{P}_{cm}$

anche se non servono tutte ora $\vec{L}^0 = \vec{r}^0_{cm} \wedge \vec{P}_{cm} + \vec{L}'_{rit.\,cdm}$



Qui le forze esterne sono la reazione vincolare (che sappiamo è applicata in O) e $M\vec{g}$

Il polo che conviene è O → perché annulla la reazione vincolare ed è un polo fisso

$\vec{v}_0 = 0$

$\vec{r}^0_{cm} \perp \vec{P}_{cm}$

$\vec{M}^0 = \frac{d\vec{L}^0}{dt}$

$L^0 \neq L'_{rit.\,COM}$

Quali sono le F(E)?

R e Mg! ma polo in O

$\vec{M}^0 ? = -Mg\frac{L}{2}\hat{z}$

$\vec{M}^0 = M^0_z\hat{z}$

$M^0_z = \frac{dL^0_z}{dt} = I\alpha\hat{z}$

$I\alpha = -Mg\,L/2$

1) $\alpha = \dfrac{-Mg\frac{L}{2}}{I_{Asta}} = \dfrac{-\cancel{M}g\cancel{L}/2}{\frac{\cancel{M}L^{\cancel{2}}}{3}} = -\dfrac{3g}{2L}$ | → costante

I asta rispetto all'estremo A? $= \dfrac{ML^2}{3}$

$I_A = \dfrac{ML^2}{12} + M\underbrace{d^2}_{=\frac{L^2}{4}} = \dfrac{ML^2}{3}$

$\rho = \dfrac{M}{L}$ $\qquad dl = dx$

$* \displaystyle\int_{\emptyset} dm\, x^2 =$

$I^{O(A)}_{ASTA} = \rho \displaystyle\int_0^L dx\, x^2 = \rho \dfrac{L^3}{3} = \dfrac{M}{L}\dfrac{L^3}{3} = \dfrac{ML^2}{3}$

Quant'è l'accelerazione lineare del suo estremo?

$v = \omega r$ $\qquad$ r fisso!

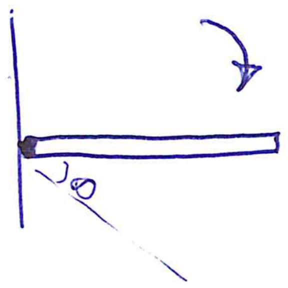
$a = \dot{\omega} r$

$\alpha L = -\dfrac{3}{2}g$

dalla 1) vediamo che $\alpha =$ costante $= -\dfrac{3g}{2L}$

quindi

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$



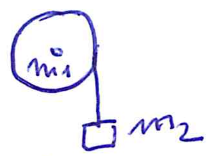
$\omega_0 = 0!$

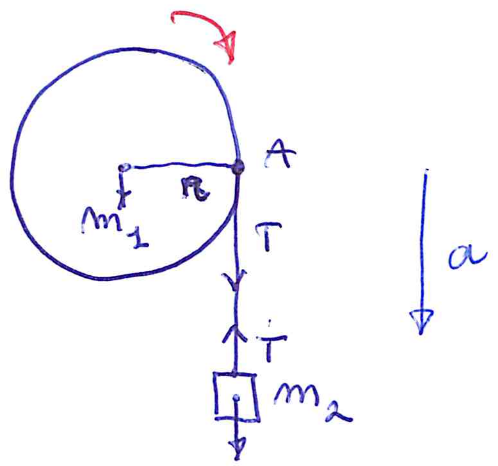
$\theta_0 = 0$

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Es. Mazzoldi Voci 6.19

Un cilindro di massa $m_1 = 12\,kg$ può ruotare senza attrito attorno al proprio asse disposto orizzontalmente. Attorno al cilindro è avvolto un filo che non slitta rispetto al cilindro e sostiene un corpo di massa $m_2 = 2\,kg$. Inizialmente il sistema è in quiete. Calcolare l'accelerazione con cui scende il corpo m_2, il valore della tensione del filo e della reazione dell'asse del cilindro.





Forze esterne

$m_1 g \quad m_2 g \quad R$

Forze interne al sistema

T tensione del filo

a e v di m_2 = ad a e v di A

Per A

$a = \omega^2 r \qquad v = \omega r$

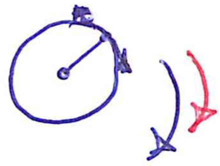
Applichiamo il teorema del momento angolare scegliendo come polo il centro del disco.

$$\vec{L}^0 = \vec{r}^{\,0}_{cm} \wedge \vec{P}_{cm} + \vec{L}'$$

$\vec{r}^{\,0}_{cm} = 0$ cm del disco è = al polo

$\vec{L}^0_1 = \vec{L}' \Rightarrow$ diretto lungo z

$\vec{L}'_1 = -I_{Disco}\,\omega\,\hat{z} = \vec{L}^0_1$



per la massa che scende

$$\vec{L}^0_2 = \vec{r} \wedge m_2\vec{v} = -m_2 v r\,\hat{z}$$

$$(\vec{L}^0_1 + \vec{L}^0_2)_z = -m_2 \underset{\omega r}{v} r - I\omega = -m_2\,\omega r^2 - \frac{m_1 r^2}{2}\omega$$

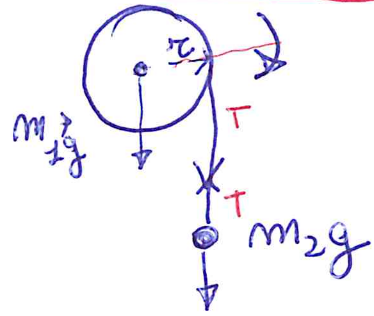
Mom inerzia disco

$$(L^0_1 + L^0_2)_z = -\omega\left(m_2 r^2 + \frac{1}{2}m_1 r^2\right) = L^0_z$$

$$\frac{dL^0_z}{dt} = -\left(\frac{1}{2}\cancel{(}m_1 + m_2\right)\dot{\omega} r^2 = M^0_z(E)$$

$\vec F^{(E)} \Rightarrow \vec R, M_1\vec g, m_2\vec g$

unico momento $\neq 0$ è quello di $m_2 g$ per il polo scelto



T è una forza interna!

$$M_z^O = -m_2 g r$$

$$M_z^O = \frac{dL_z^O}{dt} \Rightarrow -m_2 g \cancel{r} = -\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right) r^{\cancel{2}} \alpha$$

questo è il $|\alpha|$

$$\alpha = \frac{2m_2}{m_1+2m_2}\frac{g}{r}$$

(~~questo è il modulo di~~)

moltiplicando per r $\alpha r = a$ prima domanda

$$\boxed{a = \frac{2m_2}{m_1+2m_2} g = 2{,}45\, m/s^2}$$

$\Rightarrow$ a non dipende da r cilindro!

$a = cost \Rightarrow$ il moto di m_1 e m_2 è unif. acc.