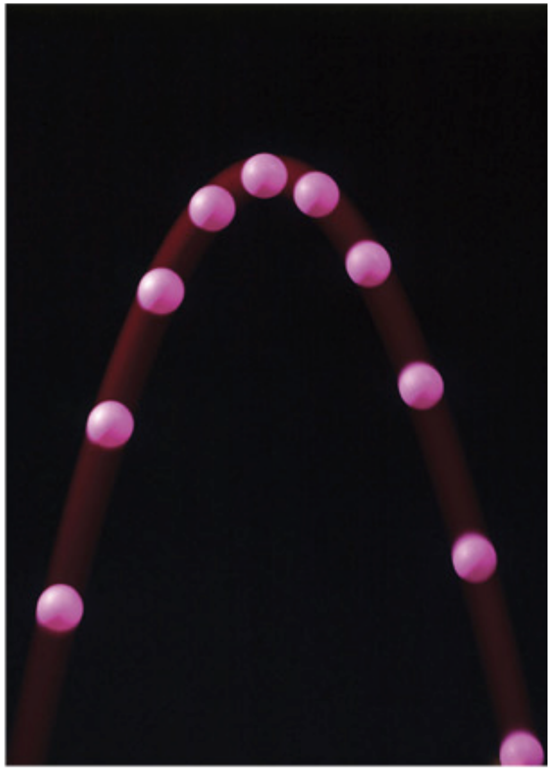
Moto di un corpo rigido

- Per corpo rigido si intende un particolare **sistema di punti materiali in cui le distanze, tra due qualunque dei suoi punti, non variano nel tempo** indipendentemente dalle condizioni in cui il corpo rigido si viene a trovare: un corpo rigido non subisce deformazioni.

- Assimilabile al moto di un punto materiale

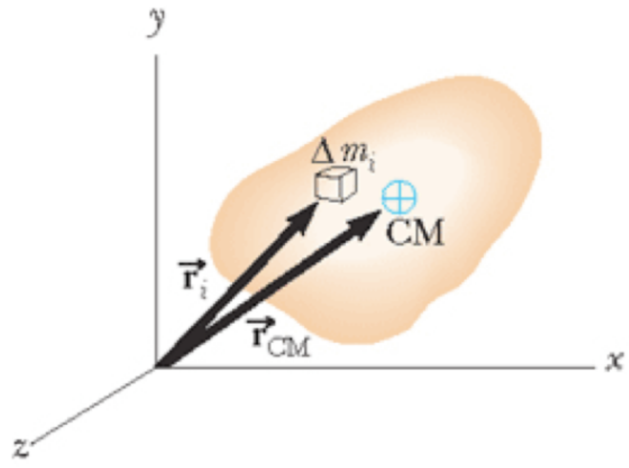


- Moto di un corpo rigido

- I vari punti del corpo hanno moti differenti

CM per un corpo rigido: memo

- Nel caso ad es in cui la materia del corpo rigido esteso di massa M sia distribuita nel suo volume in modo costante ed uniforme
  - la posizione del CM è data da



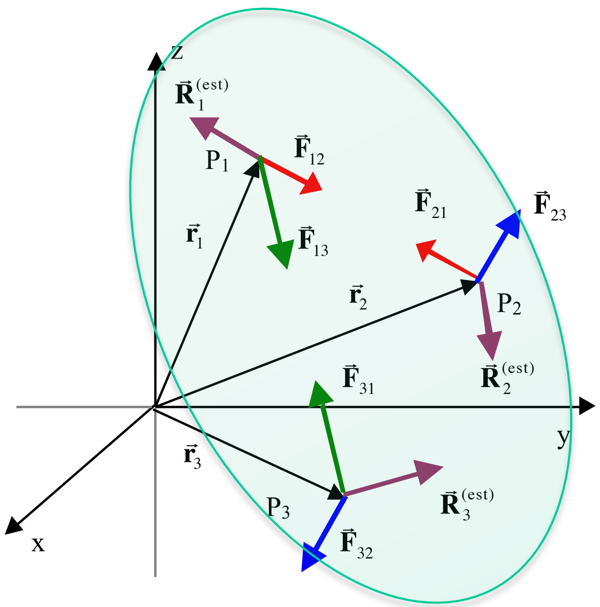
$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}dm = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho dV = \frac{1}{V}\int \vec{r}dV$$

Memo: moto CM di un sistema di PM

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M} \qquad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M} \qquad z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M}$$

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$



$$\underbrace{\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}}_{\text{per definizione}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}\right) = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\right)}_{\text{perchè } \frac{1}{M} \text{ è costante}} \underbrace{= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M}}_{\text{perchè la derivata si può distribuire sulla somma e perchè } m_i \text{ è costante}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$\vec{P}_{tot} = \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots.. = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

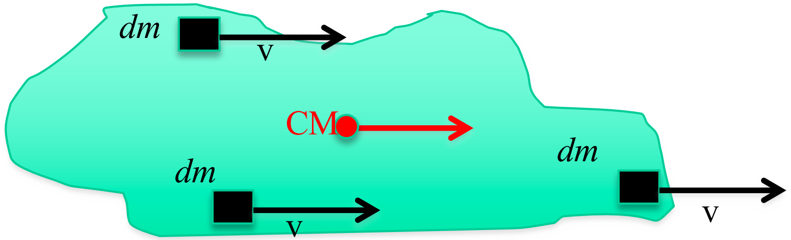
$$\boxed{\vec{P}_{CM} = \mathrm{M}\,\vec{v}_{CM} = \vec{P}_{tot}}$$

Moti del corpo rigido: es. pura traslazione

- Moto di **pura traslazione**: *tutte le particelle che costituiscono il corpo rigido subiscono lo stesso spostamento nello stesso intervallo di tempo*
- tutti i punti del corpo rigido si muovono con la stessa velocità, ***v che*** coincide con la velocità del CM

La velocità dei vari punti del corpo rigido relativa al centro di massa è quindi nulla

$$\underbrace{\mathbf{\vec{v}}_{CM} = \frac{d\mathbf{\vec{r}}_{CM}}{dt}}_{\text{per definizione}} \qquad \vec{v}_{CM} = \frac{\int \vec{v}\,dm}{M} = \vec{v}\,\frac{\int dm}{M} = \vec{v} \qquad \boxed{\vec{P}_{CM} = \mathrm{M}\,\vec{v}_{CM} = \mathrm{M}\,\vec{v}}$$



- Nota : se il moto non è di pura traslazione vale:

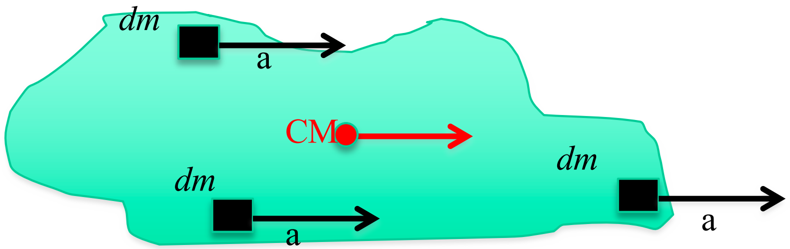
$$\vec{v}_{CM} = \frac{\int \vec{v}(x,y,z)\,dm}{M} \qquad \boxed{\vec{P}_{CM} = \mathrm{M}\,\vec{v}_{CM} = \mathrm{M}\frac{\int \vec{v}(x,y,z)\,dm}{M}}$$

Pura traslazione di un corpo rigido: accelerazione del CM

- Quale sarà la "dinamica" del punto centro di massa? Vediamo cosa accade all' accelerazione in un moto di pura traslazione

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\int \vec{a}dm}{M} = \vec{a}\frac{\int dm}{M} \equiv \vec{a} \qquad \boxed{\Rightarrow \text{M } \vec{a}_{CM}=\text{M}\vec{a}}$$

- In un moto di pura traslazione del corpo rigido
  - Tutti i punti del corpo rigido hanno la stessa accelerazione
  - l'accelerazione coincide con l'accelerazione del CM



- Nota : se il moto non è di pura traslazione vale:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\int \vec{a}dm}{M} = \frac{\int \vec{a}(x,y,z)dm}{M} \qquad \boxed{\Rightarrow \text{M}\vec{a}_{CM}=\int \vec{a}(x,y,z)dm}$$

Memo sistema di punti materiali: Iª equazione cardinale

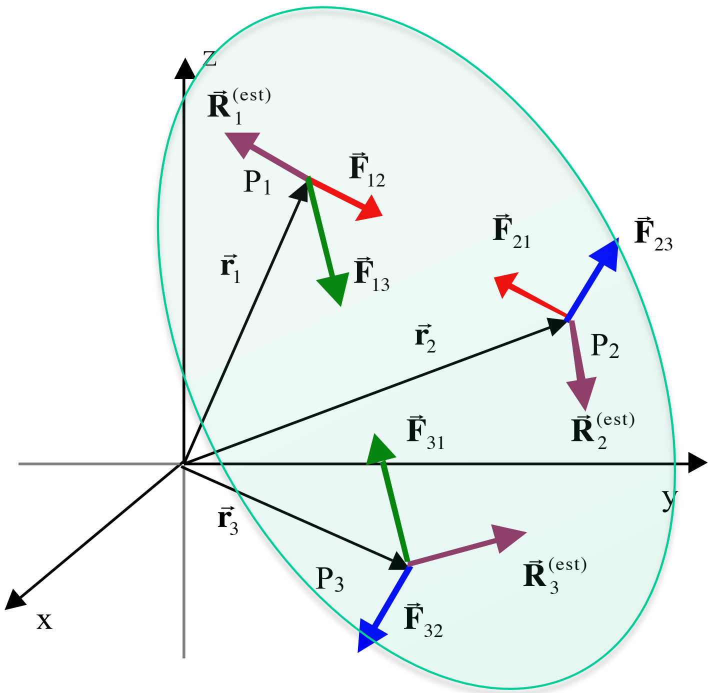
$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i^{(est)}$$

- ***Prima equazione cardinale dei sistemi***: La derivata della quantità di moto totale di un sistema è uguale alla risultante delle sole forze esterne

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$$

$$= M\,\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i^{(est)}$$

$$M\vec{\mathbf{a}}_{CM} = \vec{\mathbf{R}}^{(est)}$$



- ***Secondo teorema del CM***: il C.M. di un sistema di punti materiali si muove come un punto di massa totale M soggetto alla sola risultante delle forze esterne

Corpo rigido: Iª equazione cardinale

$$M\, \vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \vec{R}^{(est)}$$

- ***Prima equazione cardinale per un corpo rigido***: La derivata della quantità di moto totale di un sistema è uguale alla risultante delle sole forze esterne

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{R}^{(est)}$$

- ***Secondo teorema del CM per un corpo rigido***: il C.M. di un corpo rigido si muove come un punto di massa totale M soggetto alla sola risultante delle forze esterne

- Questa relazione ci permette di enunciare il principio di **conservazione della quantità di moto**: ***quando la risultante delle forze esterne agenti sul corpo rigido è nulla, la quantità di moto totale (e quindi del CM) del sistema rimane costante in modulo, direzione e verso***

Moto del corpo rigido:Lavoro fatto dalle forze interne

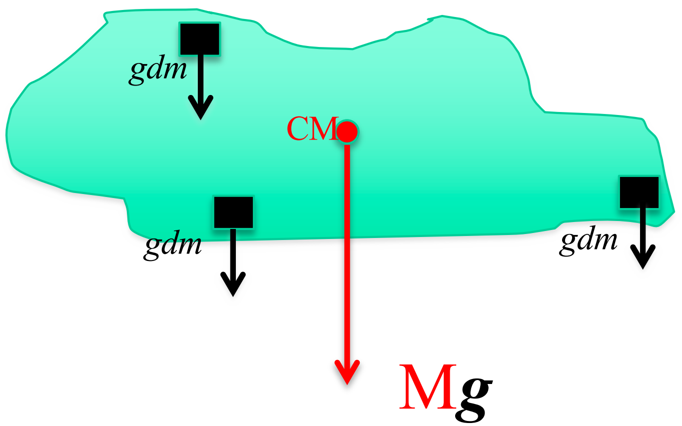
- Lavoro elementare fatto dalle forze interne nel caso di un corpo rigido

$$dL_{ij} = \overrightarrow{F_{ij}} \cdot d\vec{r}_i + \overrightarrow{F_{ji}} \cdot d\vec{r}_j = \overrightarrow{F_{ij}} \cdot d\vec{r}_i - \overrightarrow{F_{ij}} \cdot d\vec{r}_j = \overrightarrow{F_{ij}} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) = 0$$

- Nel caso dei corpi rigidi, a differenza del caso di un sistema di pm le **forze interne non compiono lavoro**
  - Dalla definizione di corpo rigido deriva che le distanze tra due punti qualsiasi del corpo stesso rimangono invariate nel tempo
  - il lavoro delle forze interne è legato alle variazioni di tale distanza
  - per un corpo rigido $d\vec{r}_i = d\vec{r}_j$

Nel caso dei corpi rigidi dunque, solo le forze esterne compiono lavoro

- *Solo le forze esterne determinano la dinamica del moto del centro di massa*



- I equazione cardinale della dinamica
  - vale per qualunque tipo di moto del CM

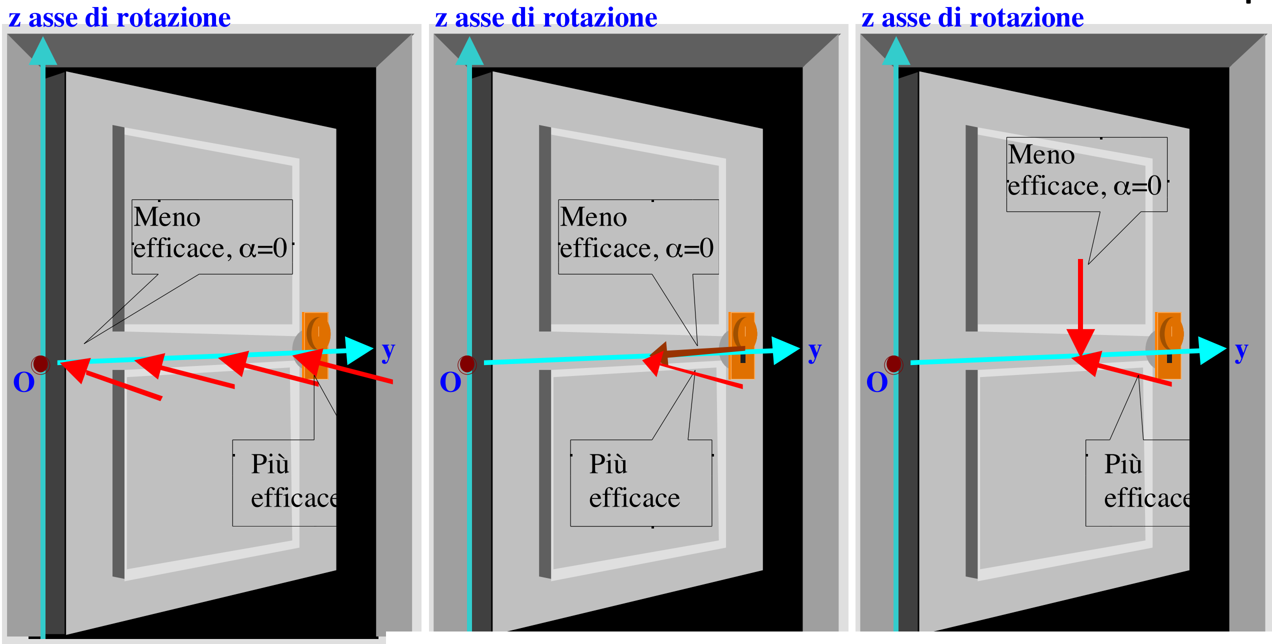
$$M\,\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \vec{R}^{(est)}$$

- Es. moto di un corpo rigido sotto la sola azione della gravità

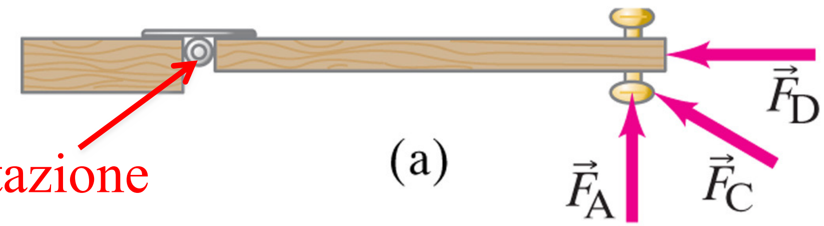
$$M\,\boldsymbol{a}_{CM} = \int \boldsymbol{a}\,dm = \int \boldsymbol{g}\,dm = M\boldsymbol{g}$$

Dinamica rotazionale del corpo rigido

- Le Forze definiscono la dinamica di un punto materiale, la dinamica del moto del centro di massa ed anche la dinamica rotazionale di un corpo rigido



Porta in rotazione
vista dall'alto

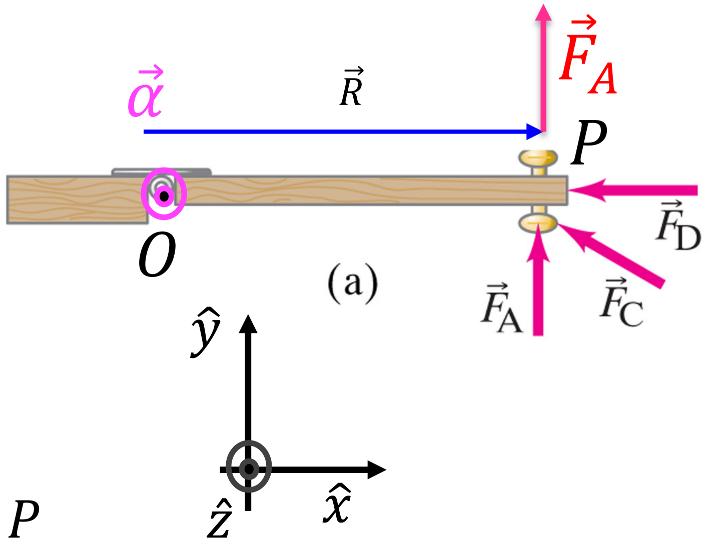


Asse di rotazione

- È esperienza comune che la rotazione di corpi rigidi estesi è causata dalla applicazione delle forze
  - la messa in rotazione dipende dal punto di applicazione della forza (rispetto all'asse di rotazione) e dalla forza

Dinamica rotazionale del corpo rigido (2)

- Porta incernierata nei suoi cardini (può ruotare attorno a un asse parallelo a $\hat{z}$)
  - l'applicazione di una forza sulla maniglia ortogonale a $\hat{z}$ provoca un' accelerazione angolare α

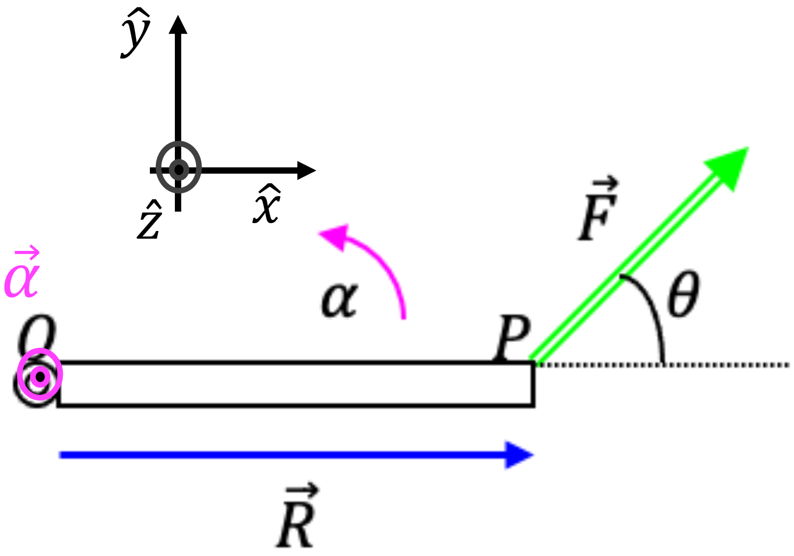


- L'accelerazione angolare è <u>proporzionale</u>:
  - al modulo della <u>forza</u>
  - alla <u>distanza</u> R del punto di applicazione P dall'asse di rotazione O
  - al seno dell'angolo fra forza e vettore $\overrightarrow{OP}$ $(\overrightarrow{R})$:

$$\alpha \propto \left|\vec{F}\right| R \sin\theta$$

- $\vec{\alpha}$ è perpendicolare ai vettori $\vec{F}$ ed $\vec{R}$ e diretta lungo l'asse di rotazione

Dinamica rotazionale del corpo rigido (3)



- Consideriamo una sbarretta incernierata in un estremo O
  - l'applicazione di una forza nell'altro estremo P ortogonale a $\hat{z}$ provoca una accelerazione angolare α
- L'accelerazione angolare è proporzionale:
  - al modulo della forza
  - alla distanza R del punto di applicazione P dall'asse di rotazione O
  - al seno dell'angolo fra forza e vettore $\overrightarrow{OP}(\vec{R})$:

$$\alpha \propto |\vec{F}| R \sin\theta$$

- $\vec{\alpha}$ è perpendicolare ai vettori $\vec{F}$ ed $\vec{R}$ e diretta lungo l'asse di rotazione

Momento di una Forza rispetto a un polo O

Poiché la messa in rotazione avviene sempre con modalità simili ai casi precedenti (con in più la **regola della mano destra per il verso di $\vec{\alpha}$**) si **definisce**:

- **momento di una forza rispetto ad un polo O**

$$\vec{\tau}_o = \vec{R} \wedge \vec{F}$$

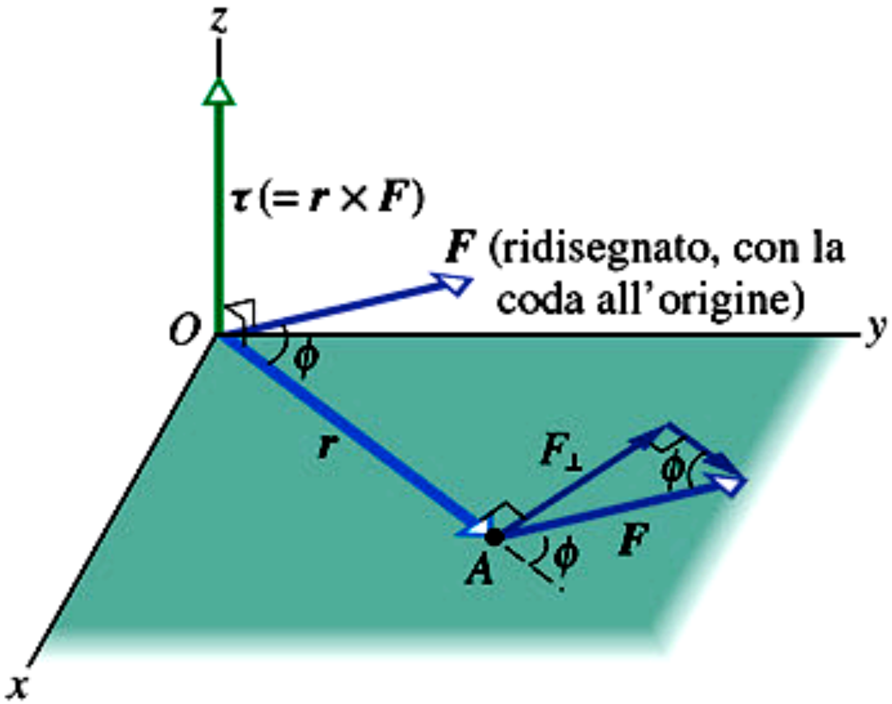
  - è una grandezza fisica **vettoriale**

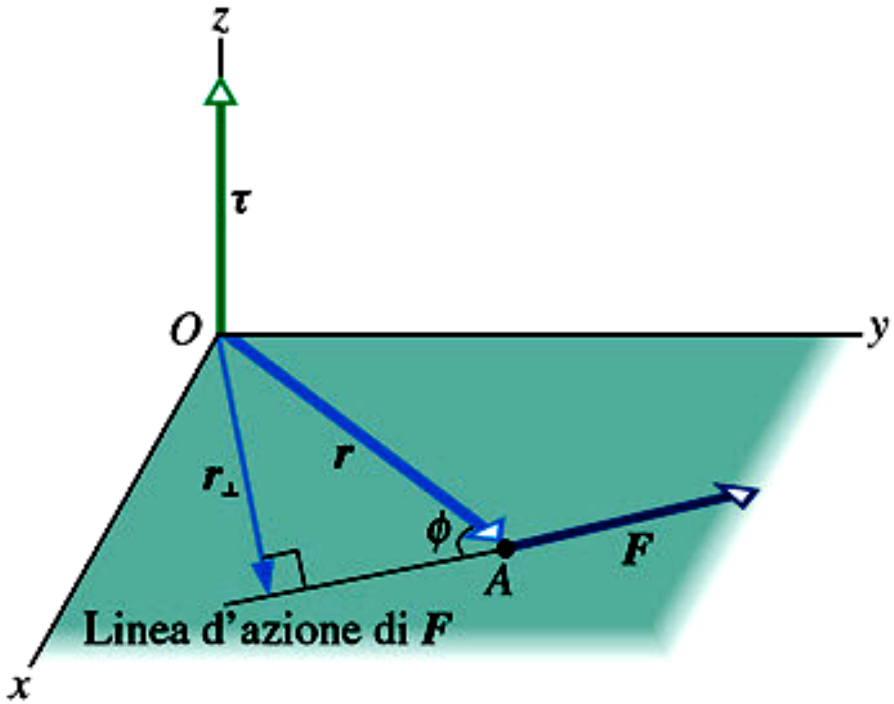
- $[\vec{\tau}] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$
  - non si usa, in questo caso, il Joule, perché non ha niente a che vedere con un'energia o un lavoro
  - è nullo se la forza è parallela al vettore $\vec{R}$

- se vi è rotazione attorno ad un **asse (che indicheremo con $\hat{z}$) come negli esempi visti, quello che conta è il momento assiale**, definito come la proiezione del momento sull'asse $\hat{z}$

$$\tau_z = \left(\vec{R} \wedge \vec{F}\right)_z$$

Momento di una Forza rispetto a un polo O per una forza ortogonale asse di rotazione (2)





$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \tau = r\,F_{\perp} = r_{\perp}\,F$$

Braccio della forza$=r_{\perp} \equiv b$

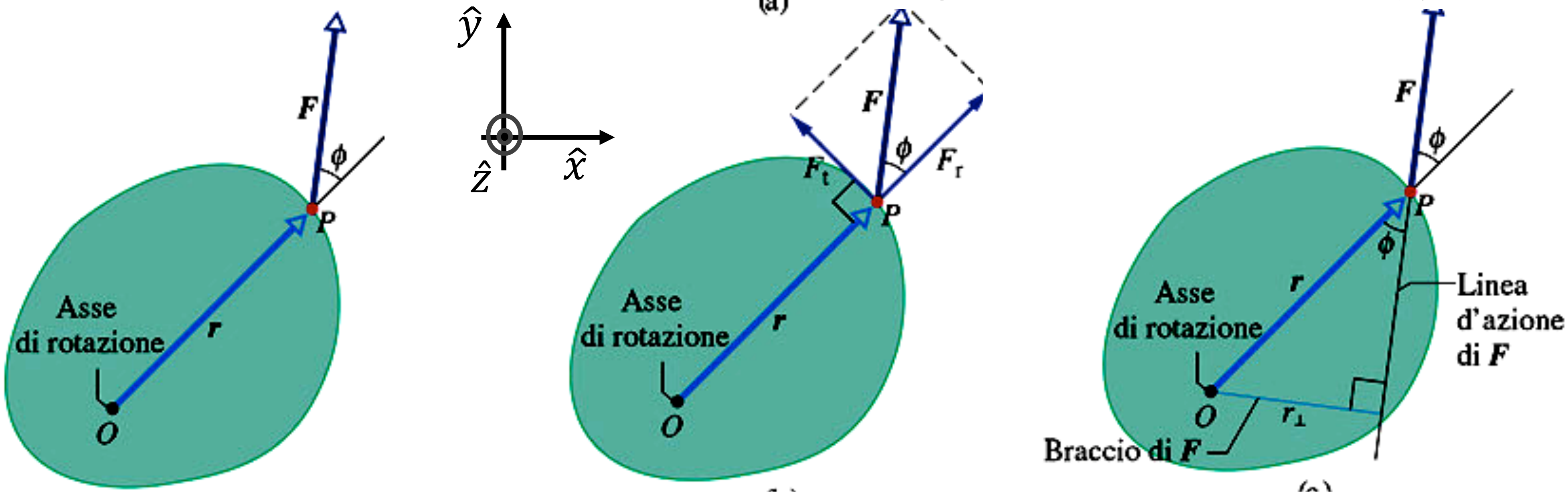
- Il momento della forza è **positivo** se la rotazione attorno all'asse di rotazione (asse *z*), causata dal momento della forza ***F***, è **antioraria**

Nell'esempio $\vec{\tau}_o = \vec{R} \wedge \vec{F} = \tau_z \hat{z} = +bF\hat{z}$

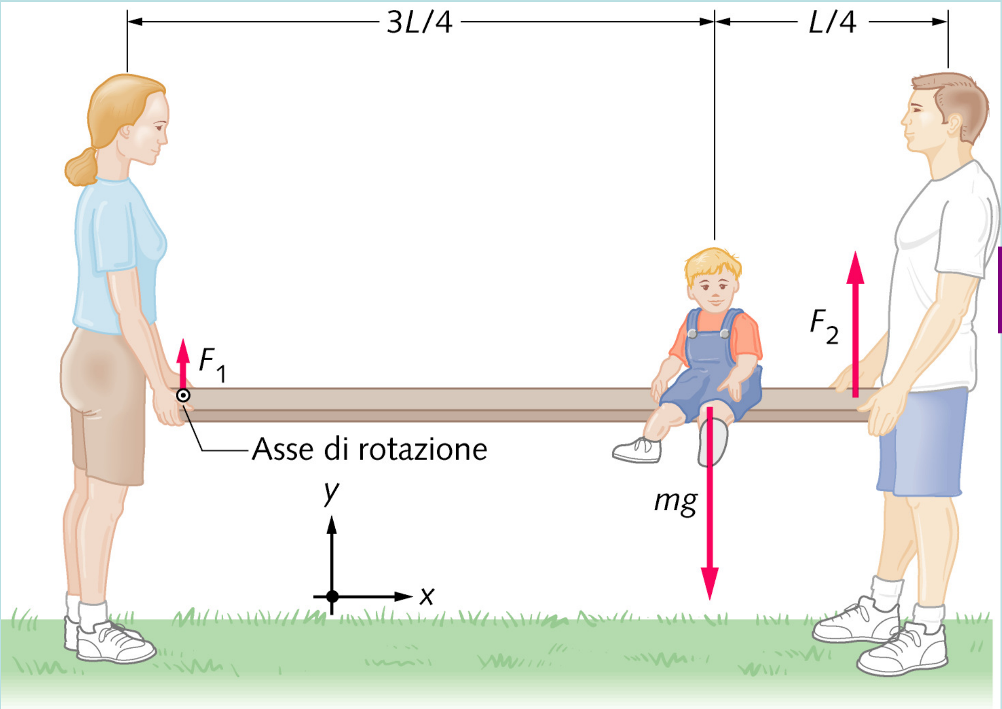
Corpo rigido libero di ruotare attorno ad un asse fisso

- In questo caso la rotazione è possibile solo attorno all'asse di rotazione
  - la messa in rotazione dipende non direttamente dalla forza applicata, ma ***dalla componente lungo l' asse di rotazione ($\hat{z}$ nell'esempio) del momento della forza calcolato rispetto ad un polo appartenente all'asse di rotazione***
- La componente lungo l'asse di rotazione del momento della forza, si chiama ***momento assiale*** o ***momento torcente***

Corpo rigido visto in una sezione ortogonale all'asse di rotazione ($\hat{z}$)



Es. equilibrio



$$\boxed{F_1 + F_2 = mg}$$

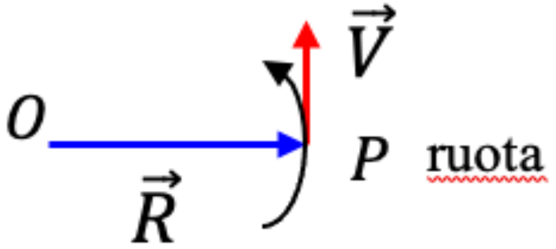
$$\boxed{F_2 L - mg\,(\tfrac{3}{4})L = 0}$$

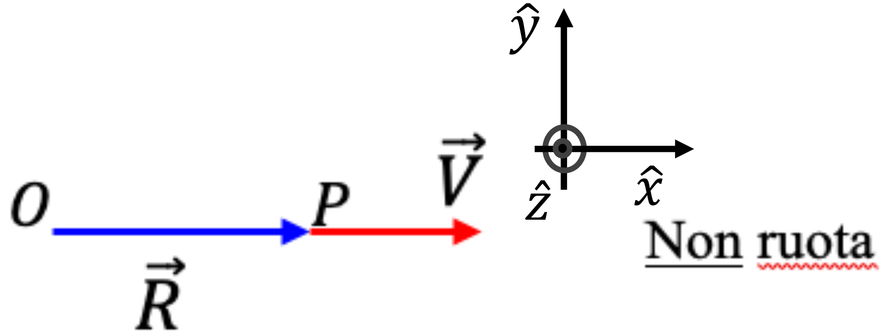
$$\boxed{\begin{array}{l} F_2 = \tfrac{3}{4}\,mg \\ F_1 = \tfrac{1}{4}\,mg \end{array}}$$

Momento angolare rispetto a un polo per un pm

Si definisce **momento angolare di un punto materiale rispetto ad un polo *O*** la grandezza:

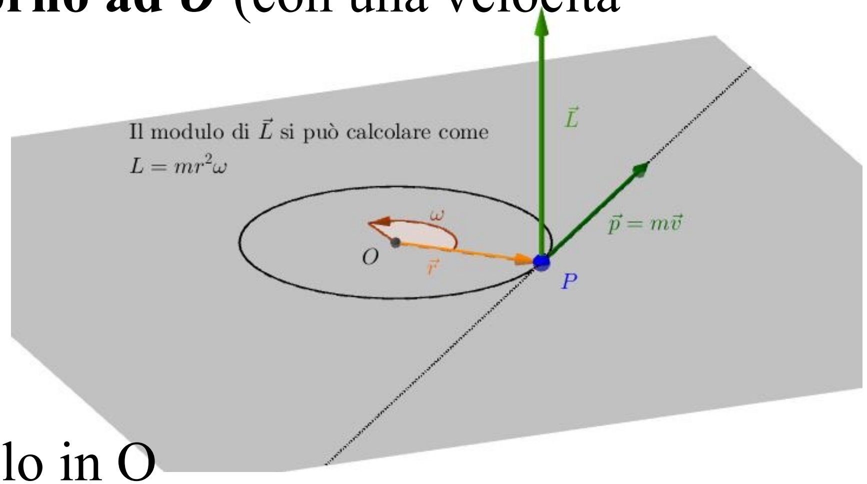
$$\vec{L}_o = \vec{R} \wedge m\vec{V} = \vec{R} \wedge \vec{P}$$





- $\vec{L}_o$ esprime **se il punto sta ruotando attorno ad *O*** (con una velocità angolare $\vec{\omega}$ diretta come $\vec{R} \wedge \vec{V}$)
- è una grandezza fisica vettoriale
- $[\vec{L}] = \mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$
- è anche chiamato "momento della quantità di moto"
- per un moto circolare nel piano xy con polo in O

$$L_z = mV_\theta R = mR^2\omega$$



Relazione tra Momento angolare e Momento delle forze rispetto a un polo per un pm

- **Teorema:** la derivata rispetto al tempo del momento angolare di un punto materiale è pari alla somma vettoriale dei momenti agenti sul punto materiale

$$\vec{\tau}_{totale} = \frac{d\vec{L}_o}{dt} \qquad\qquad \vec{\tau}_{totale} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i$$

N.B. Momento angolare e momento delle forze devono essere definiti rispetto allo stesso polo *O*

- **Dimostrazione**

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{R} \wedge m\vec{V}\right) = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right) \wedge m\vec{V} + \vec{R} \wedge \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right)$$

$$= \vec{V} \wedge m\vec{V} + \vec{R} \wedge \sum \vec{F} = \vec{R} \wedge \sum \vec{F} = \vec{\tau}_{totale}$$

- **Legge di conservazione del momento angolare**

Conseguenza importante

$$\vec{\tau}_{totale} = \frac{d\vec{L}_o}{dt} \qquad \Longrightarrow \vec{\tau}_{totale} = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = \overrightarrow{costante}$$

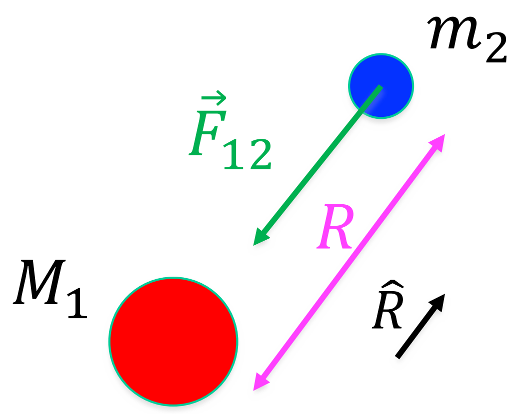
Forze Centrali e conservazione del momento angolare

Le forze centrali, sono forze che possono essere scritte nella forma generica

$$\vec{F}(R) = \hat{R} f(R)$$

dove $f(R)$ è una funzione scalare della distanza fra il centro di forza ed il punto di applicazione della forza stessa

- Es. di forze centrali
  - forza gravitazionale
  - forza coulombiana
  - la forza elastica bi e tri-dimensionale



$$\vec{F}_{12}(R) = -G\frac{M_1 m_2}{R^2}\hat{R}$$

- Calcolando il momento di una forza centrale rispetto al centro di forza si osserva immediatamente che tale momento è nullo, perché $\vec{R}$ e $\hat{R}$ sono per definizione paralleli

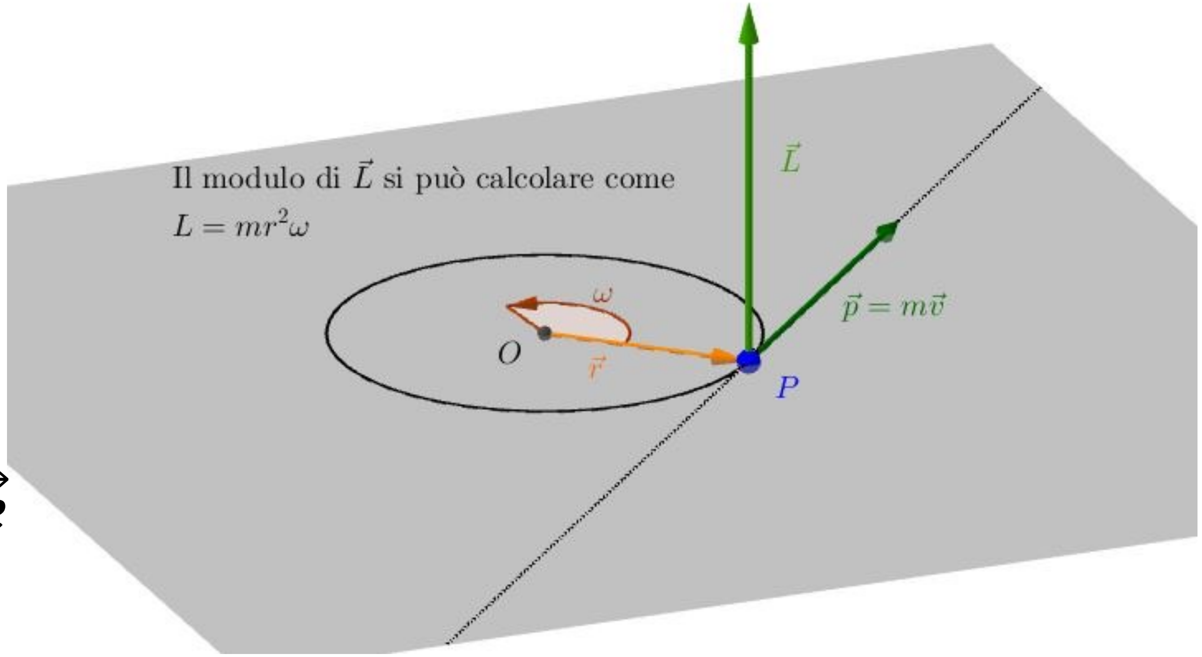
Pertanto in presenza di forze centrali il momento angolare calcolato rispetto al centro di forze si conserva, ovvero è una costante del moto
esempio: moto della terra intorno al sole

Es. moto della terra intorno al sole

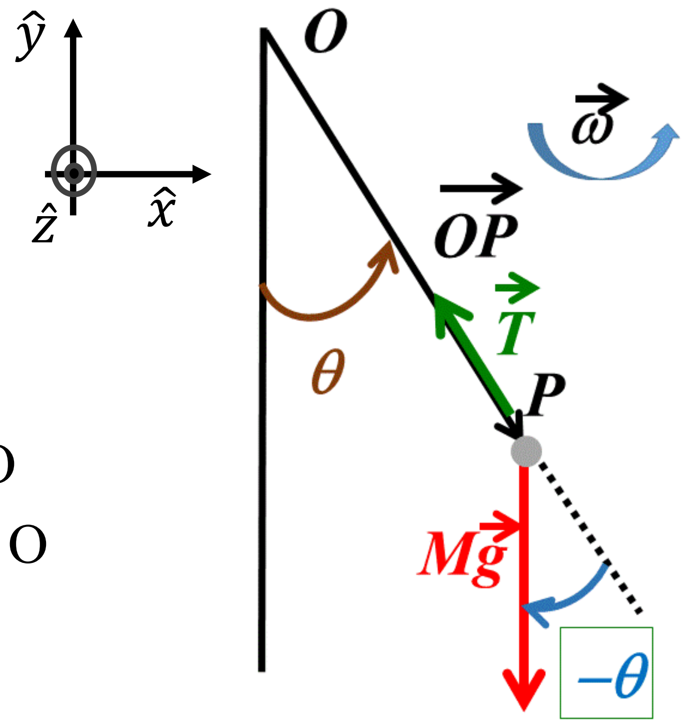
$$\vec{F}_{ST}(r) = -G\frac{M_S M_T}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{\tau}_O = \vec{r}\,\Lambda \vec{F}_{ST} = 0$$

$$\vec{\tau}_O = 0 \Leftrightarrow \vec{L}_O = \overrightarrow{costante}$$



Esempio il pendolo semplice



- è formato da una massa M sospesa ad un filo inestensibile di massa trascurabile di lunghezza l
- Forze agenti su M

  Forza di gravità e la tensione T del filo
- La massa M ruota attorno all'asse z passante per O
- Calcoliamo il momento delle forze rispetto al polo O

$$\vec{\tau}_{tot} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{OP} \wedge M\vec{g} = \tau_z \hat{z}$$

$$\tau_z = 0 - Mgl\sin\theta$$

- Calcoliamo il momento angolare rispetto allo stesso polo

$$\vec{L} = \vec{R} \wedge M\vec{V} = M\vec{R} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) = MR^2\vec{\omega} = Ml^2\vec{\omega} = Ml^2\omega\hat{z} = L_z\hat{z}$$

$$\Longrightarrow L_z = M\omega l^2 = Ml^2\dot{\theta}$$

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = Ml^2\ddot{\theta} = -Mgl\sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

da cui, semplificando i fattori comuni, abbiamo **riottenuto l'equazione del pendolo**

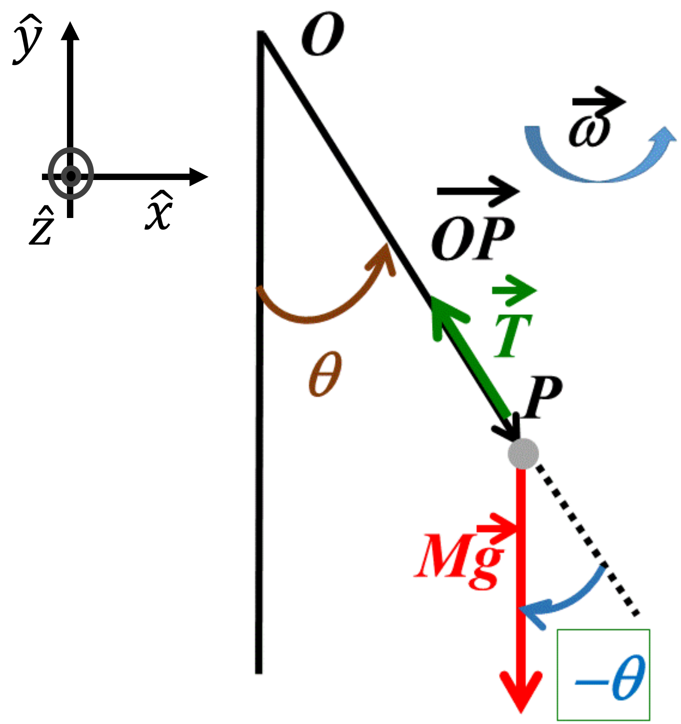
che per **piccole oscillazioni** ($\sin\theta \approx \theta$) da: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$ la cui soluzione generale è $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

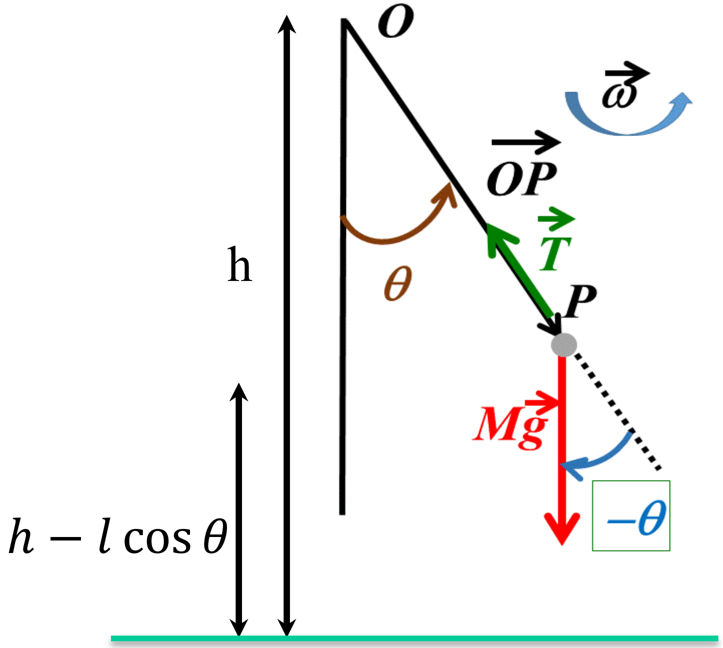
cioè un'**oscillazione armonica** dell'angolo $\theta(t)$, con pulsazione ω_0, e periodo T:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



Dimostriamo ora che si può ricavare la stessa equazione utilizzando il principio di conservazione dell'energia meccanica



- Le forze agenti sul pendolo sono:
  - la forza di gravità: conservativa
  - la forza di tensione del filo che non compie lavoro perché è sempre ortogonale allo spostamento
- Pertanto l'energia meccanica si conserva
  - la quota della massa M rispetto alla superficie terrestre in funzione dell'angolo θ è

$$h - l\cos\theta$$

con h costante e incognita

$$E = K + U = \frac{Ml^2\dot{\theta}^2}{2} + Mg(h - l\cos\theta) = \text{costante}$$

- La derivata rispetto al tempo di una costante è nulla, per cui:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad = 2\frac{Ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta}}{2} + Mgl\sin\theta\,\dot{\theta} \qquad \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Esercizio

Considerare un satellite geostazionario di massa $m = 100$ kg in orbita circolare.

1) Calcolarne la velocità e la distanza dal centro della Terra.

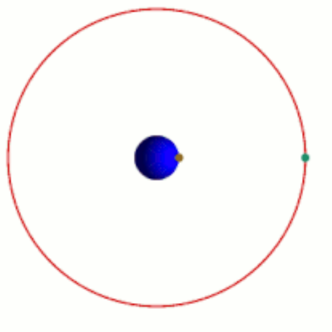
2) Calcolare l'energia cinetica, l'energia potenziale e l'energia totale (K, U, E) e il vettore $\vec{L}$ con polo nel centro della terra.

Soluzione

1) Imponiamo che la forza gravitazionale della Terra produca sul satellite l'accelerazione centripeta necessaria per mantenerlo sulla traiettoria:

$$-\frac{GM_T m}{R^2}\hat{R} = -m\frac{V^2}{R}\hat{R} \quad \Longrightarrow V^2 = \frac{GM_T}{R} = \omega^2 R^2 \quad \Longrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{GM_T}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}$$

Per i valori numerici occorre sostituire



$$GM_T = 6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24} = 4 \times 10^{14}\ \mathrm{m^3 s^{-2}}$$

$$T = T_{terra} = 1\ giorno = 8.64 \times 10^4\ s$$

- ottenendo

  - per la distanza dal centro della terra: $R = 4.2 \times 10^7$ m $= 42000$ Km $\sim 7\ R_T$

  - per la velocità: $V = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} = 11000\ {}^{km}/_{h}$

2) Calcolare l'energia cinetica, l'energia potenziale e l'energia totale (K, U, E) ed il vettore $\vec{L}$ con polo nel centro della terra.

2) Dalla condizione di moto circolare

$$-\frac{GM_T m}{R^2}\hat{R} = -m\frac{V^2}{R}\hat{R} \qquad \Rightarrow 2K = mV^2 = \frac{GM_T m}{R} = -U$$

infatti se $U = -\frac{GM_T m}{R} \Longrightarrow -\frac{dU}{dR}\hat{R} = -\left(\frac{GM_T m}{R^2}\right)\hat{R}$

$$E = K + U = -\frac{U}{2} + U = \frac{U}{2}$$

È quindi sufficiente calcolare K e poi sostituire

$$K = \frac{mV^2}{2} = \frac{mR^2}{2}\frac{4\pi^2}{T^2} = 470\ \mathrm{MJ}$$

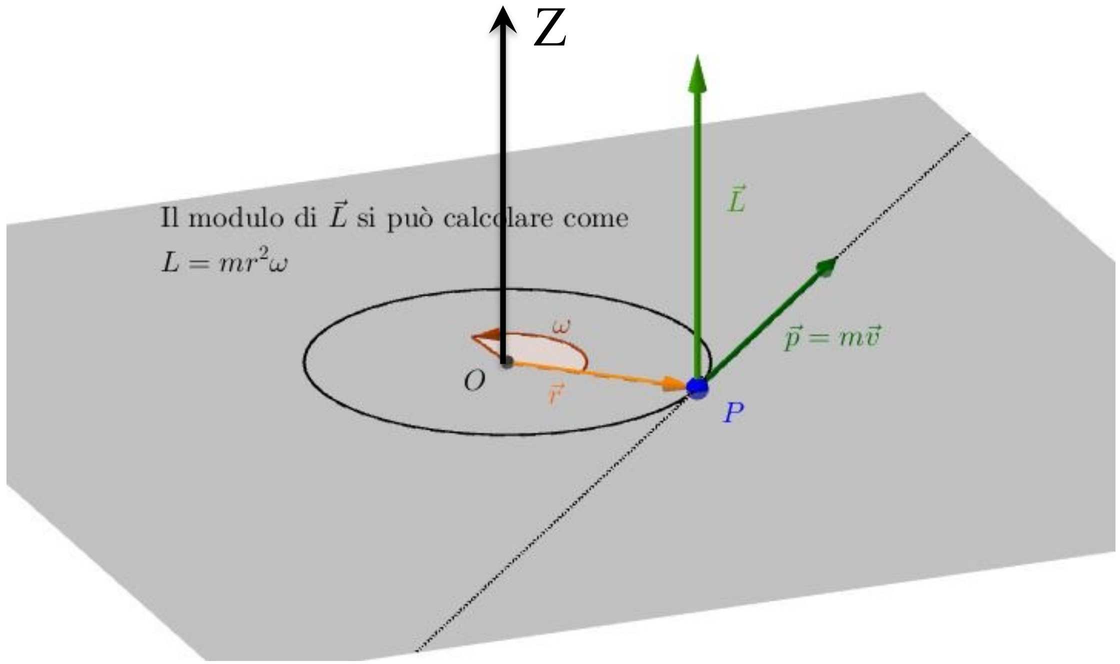
$$U = -2K = -940\ \mathrm{MJ}$$

$$E = \frac{U}{2} = -470\ MJ$$

2) Calcolare K, U, E imponendo $U = 0$ a distanza infinita ed il vettore $\vec{L}$.

$\vec{L} = \vec{R} \wedge m\vec{V} = mR^2\vec{\omega} = mVR\hat{z} \Rightarrow |\vec{L}| = mR^2\omega = mR^2 \frac{2\pi}{T_{terra}} = 1.28 \times 10^{13}\ kgm^2s^{-1}$

$$V = \frac{2\pi}{T_{terra}} R$$



Esercizio

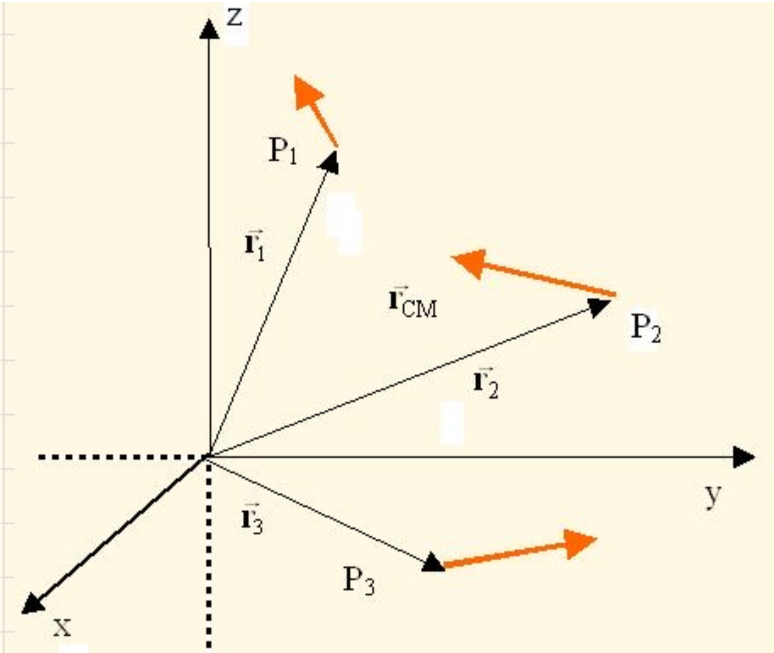
Calcolare la massa del Sole utilizzando come informazioni le misure del periodo di rivoluzione della Terra $\left(\boldsymbol{T_{TS} = 3.16 \times 10^{7}\ \mathrm{s}}\right)$ e della distanza Terra-Sole $\left(\boldsymbol{R_{TS} = 1\ U.A. = 1.495 \times 10^{11}\ \mathrm{m}}\right)$.

Soluzione

In approssimazione di orbita circolare:

$$\frac{GM_SM_T}{R_{TS}^2} = M_T\omega_T^2R_{TS} \quad \Longrightarrow M_S = \frac{\omega_T^2R_{TS}^3}{G} = \frac{4\pi^2}{T_{TS}^2}\frac{R_{TS}^3}{G} = 2\times10^{30}\ \mathrm{kg}$$

Momento angolare $\vec{L}$ per un sistema di punti materiali



$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum \vec{R}_i \Lambda \vec{P}_i$$

- Per non appesantire la scrittura sottintendiamo che il momento angolare è sempre calcolato rispetto a un polo (nell'es. in figura il polo è nell'origine)
- $\vec{R}_i$ rappresenta il vettore che punta dal polo scelto al pm i-esimo

- Per un sistema di punti materiali sussiste il seguente **Teorema**

$$\vec{\tau}_{est} = \sum \vec{R}_i \Lambda \vec{F}_{exti} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Quest'equazione è nota come la **<u>seconda equazione cardinale della meccanica</u>**

Il equazione cardinale per un Sistema di pm

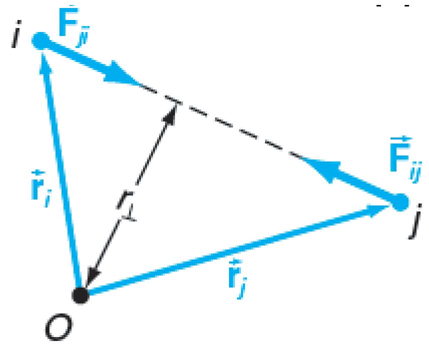
$$\vec{\tau}_{est} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Dimostrazione

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum \vec{R}_i \Lambda \vec{P}_i \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i (\underbrace{\vec{\tau}_{inti}}_{=0} + \vec{\tau}_{esti}) = \vec{\tau}_{est}$$

per il terzo principio della dinamica

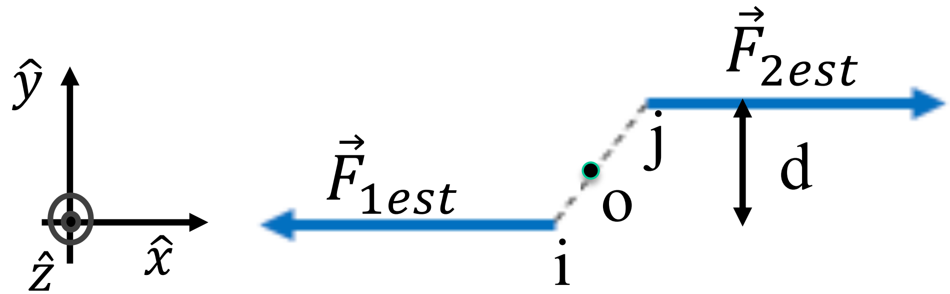
- I momenti delle forze interne sistema di pm si annullano essendo
  - le forze identiche in modulo
  - sulla stessa retta di applicazione
  - con verso dei momenti opposto



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{esti} = \vec{\tau}_{est}$$

Nota: Se due forze qualunque hanno stesso modulo e verso opposto non è detto che la somma dei loro momenti sia nulla

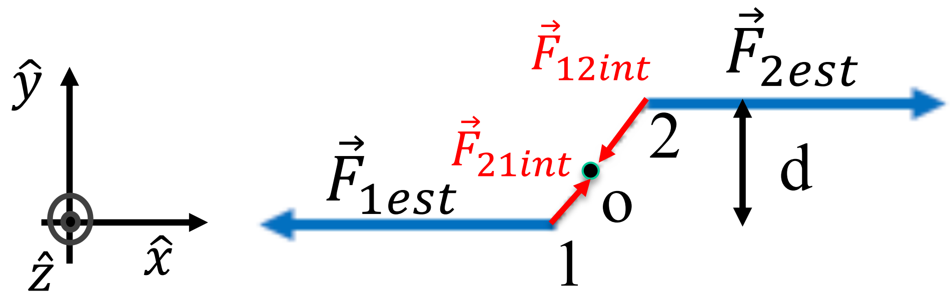
- es. sistema di 2 punti materiali sottoposti a due forze che non giacciono sulla stessa retta di applicazione che hanno lo stesso modulo (coppia di forze)



$$\vec{F}_{1\mathrm{est}} + \vec{F}_{2\mathrm{est}} = 0$$

$$\sum_i \vec{\tau}_{est} = \vec{R}_1 \wedge \vec{F}_{1\mathrm{ext}} + \vec{R}_2 \wedge \vec{F}_{2ext} \quad = -\frac{d}{2}|\vec{F}|\hat{z} - \frac{d}{2}|\vec{F}|\hat{z} \quad = -d|\vec{F}|\hat{z} \quad \neq 0!$$

- Invece $\sum_i \vec{\tau}_{int} = 0$ per il terzo principio, <u>perché la forza e la sua reazione hanno la stessa retta di applicazione</u>

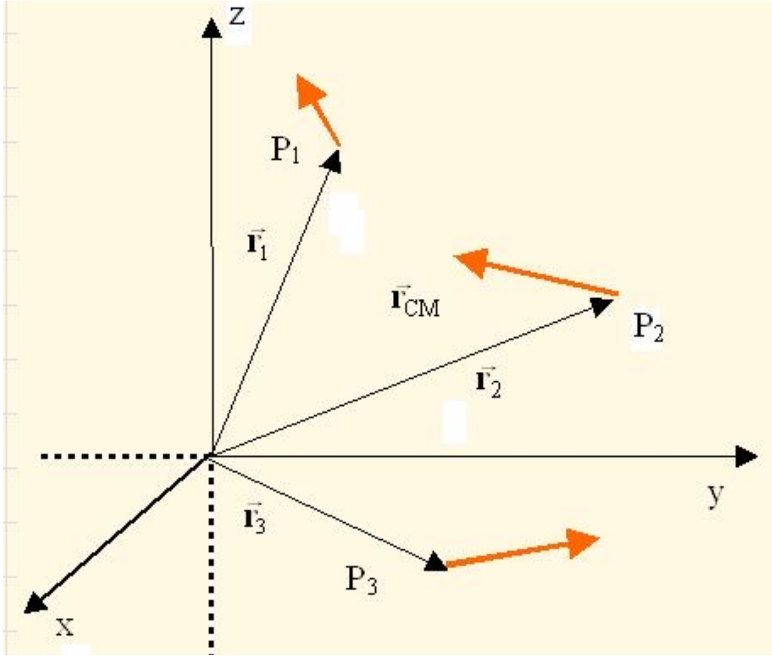


Legge di conservazione del momento angolare per un sistema di pm

$$\vec{\tau}_{est} = \sum_i \vec{\tau}_{esti} = \sum_i \vec{R}_i \wedge \vec{F}_{esti}$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum \vec{R}_i \wedge \vec{P}_i$$

$$\vec{\tau}_{est} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



Conseguenza importante

$$\vec{\tau}_{est} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \vec{\tau}_{est} = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = \overrightarrow{costante}$$

Corpi rigidi: dinamica

- Corpi in cui le distanze fra i punti materiali che li costituiscono restano invariate
- Le equazioni fondamentali per la descrizione del loro moto sono
  - la **prima equazione cardinale**

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{\mathrm{R}}^{(est)}$$

  - la **seconda equazione cardinale**

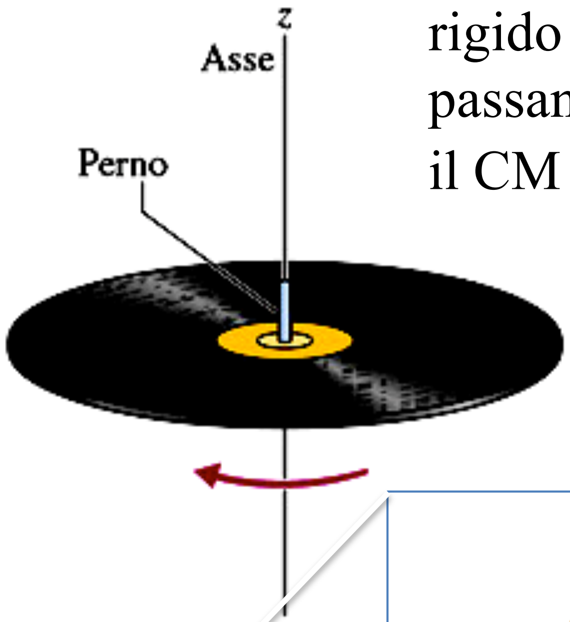
$$\vec{\tau}_{est} = \sum \vec{R}_i \Lambda \vec{F}_{exti} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Osservazione: la richiesta che la distanza fra i punti del sistema sia costante, ovvero l'indeformabilità del corpo rigido, fa sì che gli unici moti possibili per un corpo rigido siano

- la pura **traslazione (dovuta al moto del centro di massa)**
- la pura **rotazione intorno ad un asse**
- o una loro combinazione

Dobbiamo ora definire l'energia potenziale gravitazionale U, l'energia cinetica K e il momento angolare associato al moto di un CR

Esempi



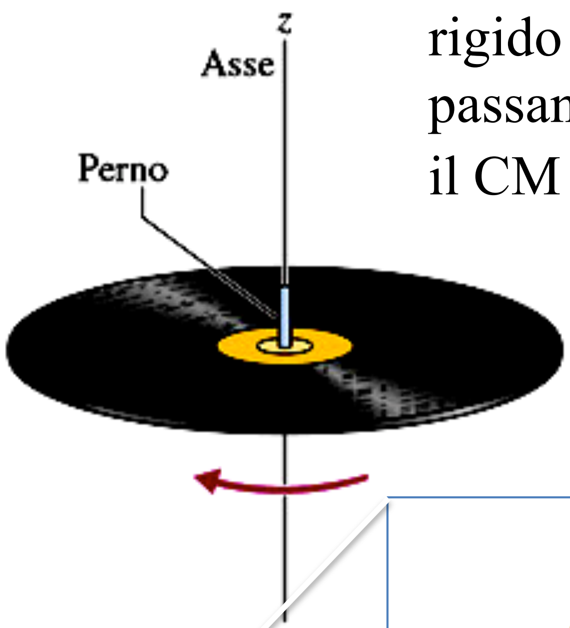
Rotazione di un corpo rigido attorno a un asse passante per il CM
il CM è fermo

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{R}^{(est)}$$

Moto Parabolico del CM e rotazione impartita dal giocoliere

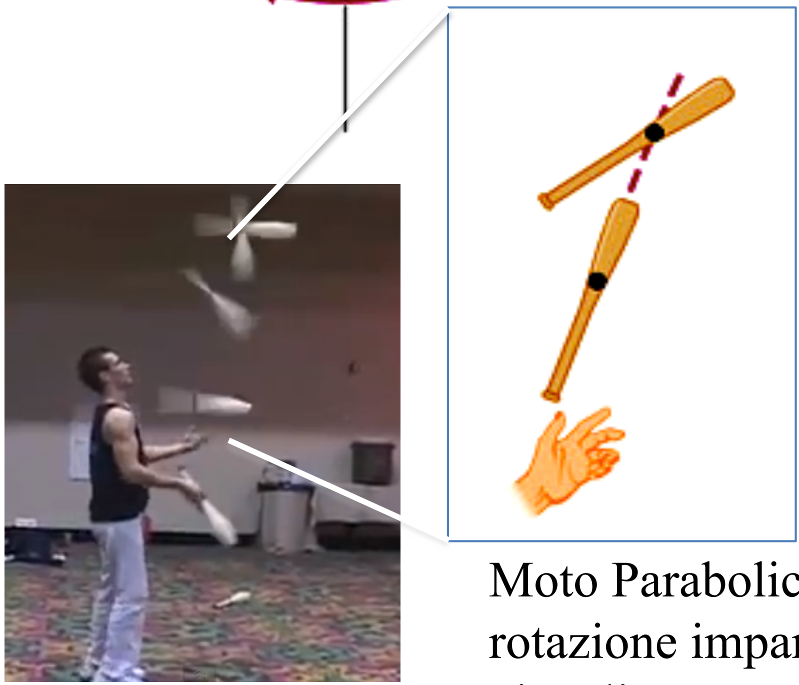
Chiave inglese colpita a uno degli estremi su un piano privo di attrito.
Il punto bianco è il CM.
Esso compie una traiettoria rettilinea perchè la forza peso è bilanciata dalla reazione vincolare.

Esempi



Rotazione di un corpo rigido attorno a un asse passante per il CM
il CM è fermo

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{R}^{(est)}$$



Moto Parabolico del CM e rotazione impartita dal giocoliere

Chiave inglese colpita a uno degli estremi su un piano privo di attrito.
Il punto bianco è il CM.
Esso compie una traiettoria rettilinea perchè la forza peso è bilanciata dalla reazione vincolare.

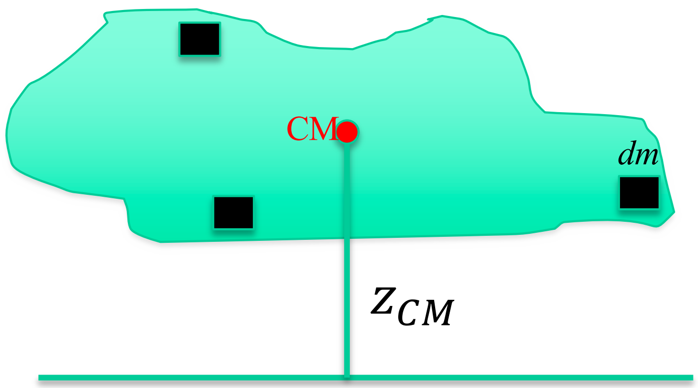
Energia potenziale gravitazionale per corpi rigidi e sistemi di pm

- L'energia potenziale gravitazionale di un sitema di PM è la stessa che si otterrebbe se tutta la massa fosse concentrata nel centro di massa
  - Dimostrazione

$$U_{grav} = \sum_i m_i g z_i = M \frac{g \sum_i m_i z_i}{M} = M g z_{CM}$$

- Per un corpo rigido si ottiene lo stesso risultato

$$\frac{\sum_i m_i z_i}{M} \Rightarrow \quad \frac{1}{M}\int z dm = z_{CM}$$



Energia cinetica (I teorema di König) per Sistemi di PM

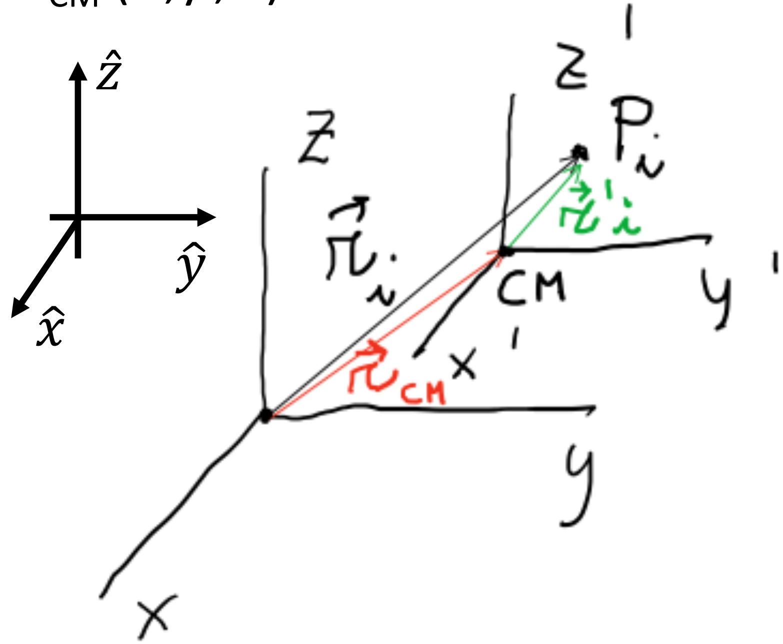
L'energia cinetica totale di un sistema di punti materiali è la somma dell'energia cinetica di traslazione del "centro di massa" (quella che avrebbe un corpo di massa pari a quella totale del sistema, con la velocità propria del centro di massa) e dell'energia cinetica dei pm come misurata in un SDR con origine solidale al CM e assi paralleli a quelli del laboratorio

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

I Teorema di König: per l'energia cinetica di un sistema di PM

Dimostrazione

- Consideriamo un sistema di punti materiali
  Utilizziamo due sistemi di riferimento inerziali. il primo del laboratorio S_0 (x,y,z), il secondo è il sistema del centro di massa S_{CM} (x’,y’,z’) con assi paralleli a S_0 la cui origine è solidale al CM



- Primo passo determinazione della velocità di un punto materiale i-esimo del sistema rispetto a S_0 usando la relazione tra le coordinate del punto nei due sistemi di riferimento:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_i{}'$$

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i{}'\right)^2$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i V_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \vec{V}_{CM} \cdot \sum m_i \vec{v}_i' = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$\sum m_i \vec{v}_i' = 0$ coincide infatti con la quantità di moto del CM nel sistema del CM

I Teorema di König: per l'energia cinetica per un sistema di pm

L'energia cinetica totale di un sistema di punti materiali coincide con la somma dell'energia cinetica di traslazione del "centro di massa" (quella che avrebbe un corpo di massa pari a quella totale del sistema, con la velocità propria del centro di massa) e dell'energia cinetica dei pm come misurata in un SDR con origine solidale al CM e assi paralleli a quelli del laboratorio

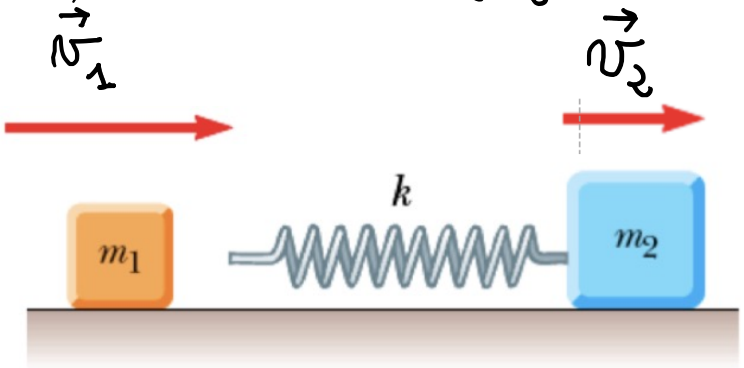
$$\mathrm{K} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

K energia cinetica misurata nel sistema del laboratorio

=Energia cinetica del CM +energia cinetica misurata in SCM

Esercizio: applicazione I teorema di König sist. PM pura traslazione

Due corpi di masse m_1 e m_2 (P.M), sono su un piano orizzontale privo di attrito, sul secondo c'è una molla né dilatata né compressa (massa nulla e lunghezza a riposo l_0) di costante K. I due corpi si muovono con velocità v_1 e v_2 note con $v_1 > v_2$ come in figura:



Determinare la massima compressione della molla

Dati v_1, m_1, v_2, m_2, K

Non ci sono forze non conservative che compiono lavoro

$\Rightarrow$ L'energia si conserva

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^{f\,2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{f\,2} + \frac{1}{2} K \Delta x^2$$

Possiamo usare due vie per risolvere il problema

① Teorema di Köenig

$$E_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 + \frac{1}{2} k \Delta x^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2) V_{cm}^2 + K'_f + \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

con $K'_f = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1f} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2f}$

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2) V_{cm}^2 + K'_f + \frac{1}{2} K \Delta x^2$$

Non ci sono forze esterne lungo $x \Rightarrow P_{cm}^x = \text{cost}$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{cost}\,(>0) = P_{cm} = \text{cost}$$

$$\vec{P}_{cm} = P_{cm}\,\hat{x} \qquad \vec{P}_{cm} = (m_1 + m_2)\vec{V}_{cm}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{P_{cm}}{m_1 + m_2}\,\hat{x}$$

La compressione della molla è max per $K'_f = \emptyset$

$$K'_f = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1f} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2f}$$ quindi le due masse

sono ferme in SCM!

$$* \begin{cases} \vec{v}'_{2f} = \vec{v}_{2f} - \vec{v}_{CM} = 0 \\ \vec{v}'_{1f} = \vec{v}_{1f} - \vec{v}_{CM} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{2f} = v_{CM} \\ v_{1f} = v_{CM} \end{cases}$$

$$* \quad \vec{r} = \vec{r}_{cm} + \vec{r}'$$

Quando la molla raggiunge la max compressione i due blocchi hanno la stessa velocità!

$$v_{CM} = v_{1f} = v_{2f} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_{cm}^2 + K'_f + \frac{1}{2} K \Delta x^2$$

La compressione della molla è max per $K'_f = 0$

e $v_{cm} = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ $\Rightarrow$ sostituendo v_{cm}

Risolvendo l'equazione otteniamo

$$\Delta X = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) v_{cm}^2}{K}}$$

Oppure ② quando la molla raggiunge la compressione max la 1 è ferma nel sistema di riferimento della 2 per cui nel laboratorio

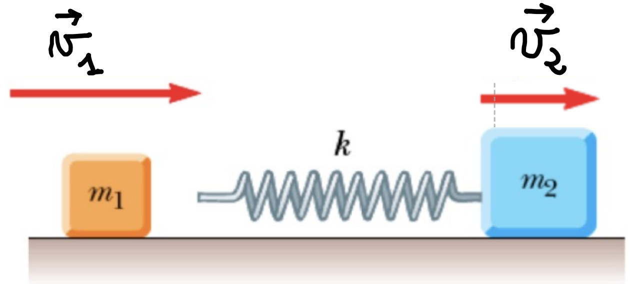
$$v_{1f} = \underbrace{v^{1}_{Rel}}_{0} + v_{2f} \Rightarrow v_{1f} = v_{2f} = v$$

q.m. $\Rightarrow$

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = (m_1 + m_2) V$$

$$= (m_1 + m_2) V_{cm}$$

dalla conservazione della q.m



$$(m_1 + m_2) V_{cm} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$V_{cm} = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2)$$

Dalla conservazione dell'Energia

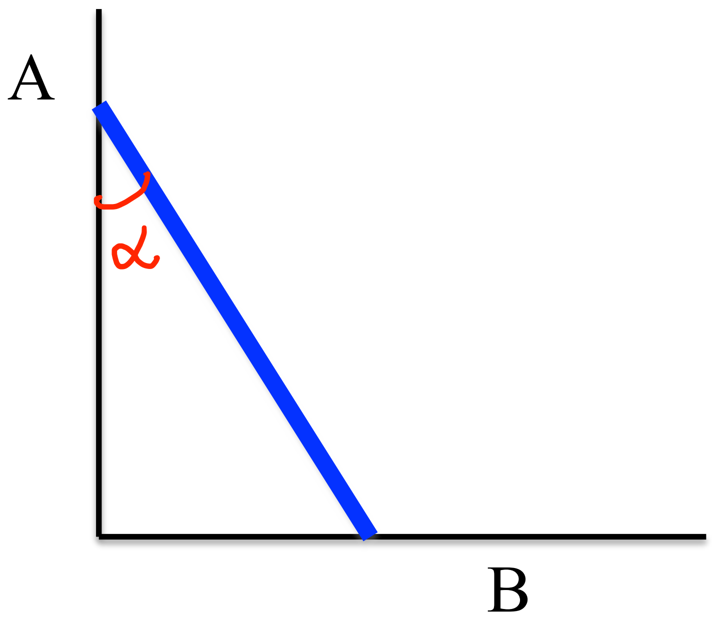
$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{CM}^2 + \frac{1}{2} K \Delta x^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 + \frac{1}{2} K \Delta x^2$$

Risolvendo l'equazione otteniamo in entrambi i casi 1 e 2

$$\Delta x = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) v_{CM}^2}{K}}$$

Esercizio

Un' asta di lunghezza l è appoggiata come in figura su due pareti (una verticale e una orizzontale).
Sul piano orizzontale è presente attrito (μ_s=0.2) la massa dell'asta è m, la parete è liscia.

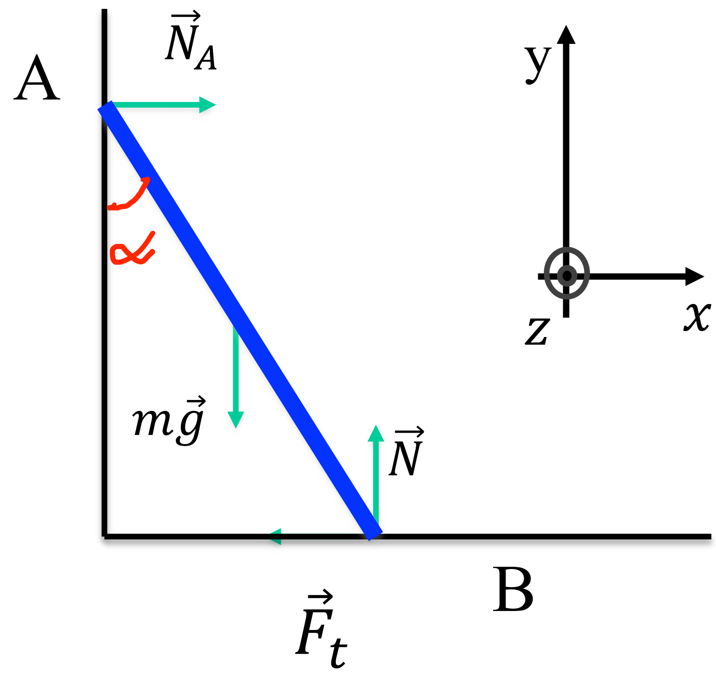


Determinare

1. l'angolo massimo (α_{max}) di equilibrio
2. la reazione vincolare in A (N_A) in funzione di α in condizioni di equilibrio
3. la reazione vincolare in B (N) in funzione di α in condizioni di equilibrio

$$\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{R}^{(est)}$$

$$\vec{\tau}_{est} = \sum \vec{R}_i \wedge \vec{F}_{exti}$$



All'equilibrio vale

$$\begin{cases} \vec{N} + \vec{F}_t + \vec{N}_A + m\vec{g} = 0 \\ \vec{\tau} = 0 \end{cases}$$

Proiettando l'equazione per le forze forze lungo x e y

$$\begin{cases} lungo\ x: \quad N_A - F_t = 0 \\ lungo\ y: \ N - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_A = F_t \\ N = mg \end{cases}$$

Ci resta da trovare N_A e α_{max}

Scegliamo come polo B (ci libera da due forze)

Tutte le forze sono sul piano xy di conseguenza il momento delle forze può avere solo componente lungo $\hat{z}$

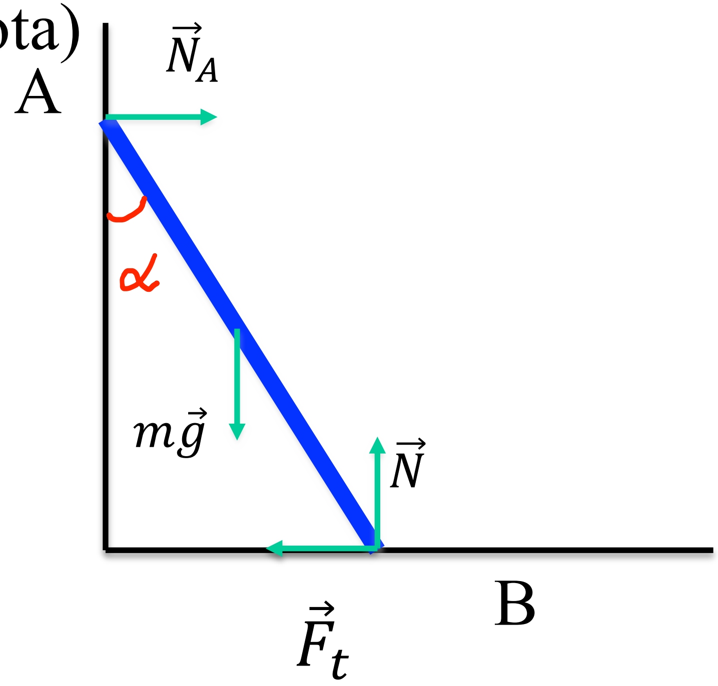
$$\vec{\tau} = \tau_z\, \hat{z}$$

Imponendo la condizione di equilibrio (non ruota) polo in B

$$\tau_z = mg\frac{l}{2}\sin\alpha - N_A l\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = 0$$

$$N_A = \frac{mg\frac{l}{2}\sin\alpha}{l\cos\alpha} = \frac{mg}{2}tg\alpha$$

poichè $N_A = F_t$ $\Rightarrow F_t = \frac{mg}{2}tg\alpha$



Affinchè la scala non scivoli

$$\frac{mg}{2}tg\alpha = F_t \le \mu_s N = \mu_s mg$$

$$\frac{mg}{2}tg\alpha \le \mu_s mg \quad \Rightarrow \quad tg\alpha \le 2\mu_s$$

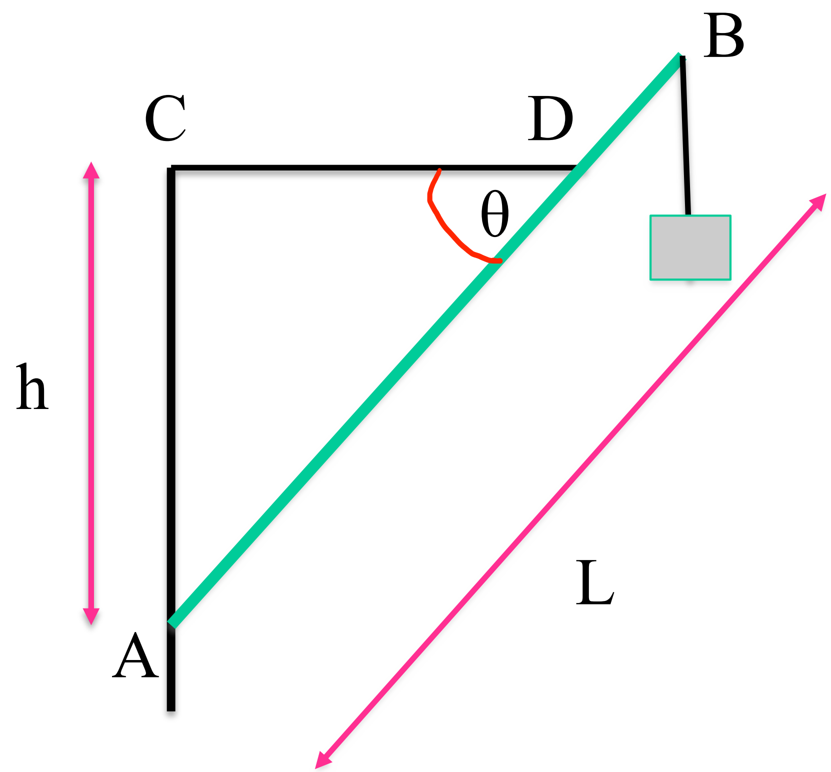
$$\Rightarrow \alpha_{max} = 22^0$$

per $\alpha \le 22^0$ $\Rightarrow N = F_t = \frac{mg}{2}tg\alpha$

Esercizio

Una massa m=12 kg è sostenuta nel sistema in figura da un'asta rigida di lunghezza L=AB=7.5 m di massa M=8 kg.

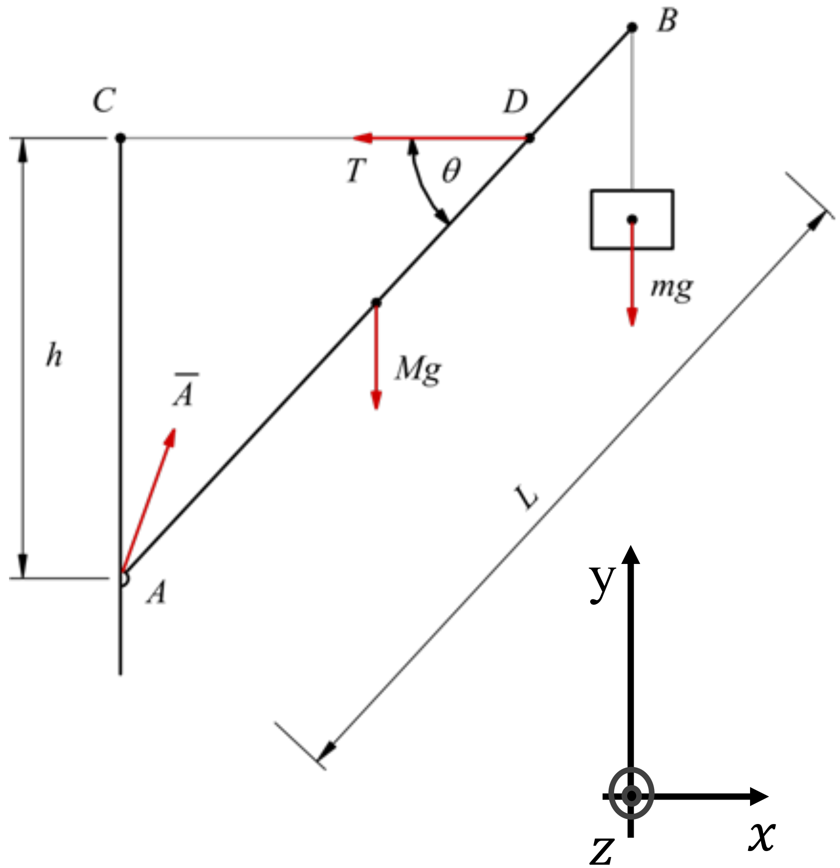
Il sistema è mantenuto in equilibrio grazie a un filo ideale collegato alla parete e a un estremo dell'asta. L'asta, è libera di ruotare attorno a un perno in A ed è inclinata di un angolo $\theta = 37^0$. La distanza AC è h=3,8 m. Calcolare la tensione del filo orizzontale CD (T) (supposto privo di massa), la reazione vincolare in A ($\vec{A}$) la tensione del filo (che sostiene la massa m (T_1)



- All'equilibrio ogni singolo corpo deve essere fermo
  - per m vale $\vec{T}_1 + m\vec{g} = 0 \quad \Rightarrow \vec{T}_1 = -m\vec{g} = mg\hat{y}$

$$T_1 = mg = 117.7\text{ N}$$

  - per M vale



$$\begin{cases} \vec{A} + \vec{T} + \vec{N}_A + M\vec{g} + m\vec{g} = 0 \\ \vec{\tau} = 0 \end{cases}$$

Proiettando l'equazione per le forze forze lungo x e y

$$\begin{cases} lungo\ x\!: \ A_x - T = 0 \\ lungo\ y\!: \ A_y - mg - Mg = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_x = T \\ A_y = (m+M)\mathrm{g} \end{cases}$$

$$A_x = T$$

$$A_y = (m+M)\mathrm{g} = 196\text{ N}$$

All’equilibrio

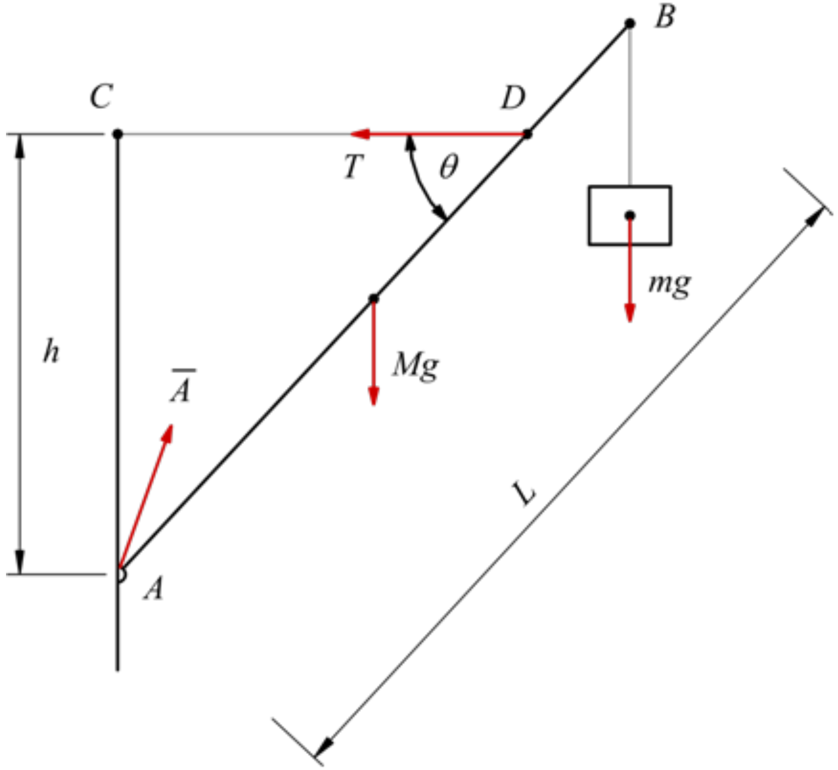
$$\vec{\tau} = \vec{0}$$

Scegliamo come polo A. All’equilibrio

$$\vec{\tau} = +\overline{AD}|\vec{T}|\,sin(\pi-\theta)\,\hat{z} - \overline{AE}\text{Mg}sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\hat{z} - \overline{AB}\text{mg}sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\hat{z} = \vec{0}$$

tutte le forze sono sul piano xy di conseguenza il momento delle forze può avere solo componente lungo $\hat{z}$

$$\vec{\tau} = \tau_z\,\hat{z}$$



$$\tau_z = \frac{h}{sin\theta}|\vec{T}|\,sin\theta - \frac{L}{2}\text{M}g cos\theta - \text{Lm}g cos\theta$$

$$= h|\vec{T}| - \frac{L}{2}\text{M}g cos\theta - \text{Lm}g cos\theta = 0$$

$$|\vec{T}| = \frac{Lg(M+2m)}{2h}\,cos\theta = 247.6\ N$$

da $A_x = T$ $\quad\Rightarrow A_x = 247.6\ N$

Energia cinetica (I teorema di Koenig) per CR

L'energia cinetica totale di un corpo rigido se il corpo rigido ruota attorno a un asse passante per il CM è la somma dell'energia cinetica di traslazione del "centro di massa" (quella che avrebbe un corpo di massa pari a quella totale del corpo rigido, con la velocità propria del centro di massa) e dell'energia cinetica dovuta alla rotazione del corpo rigido con velocità angolare ω attorno a un asse passante per il CM

$$K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

energia cinetica di traslazione (dovuta al moto del CM) intuitivo

energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa

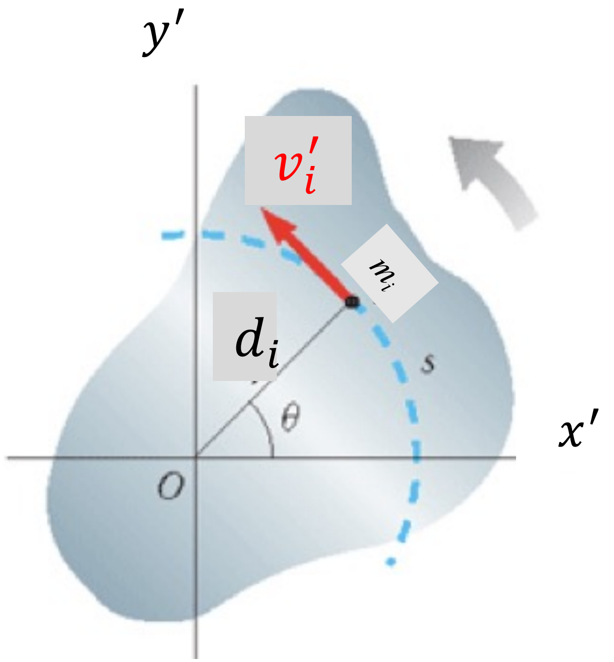
(il centro di massa del corpo trasla con velocità $\vec{V}_{CM}$ ed il corpo ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$, ma cosa è I_{CM} ?)

Dimostrazione

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\vec{V}_{CM} + \vec{v}_i{}'\right)^2$$

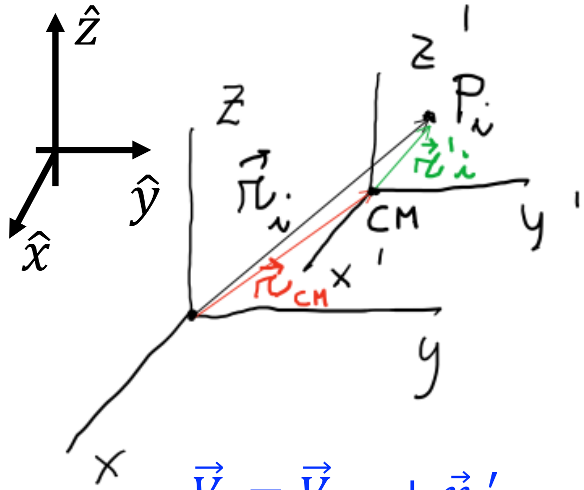
$$= \sum \frac{1}{2} m_i V_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \vec{V}_{CM} \cdot \sum m_i \vec{v}_i'$$

$\sum m_i \vec{v}_i' = 0$ coincide infatti con la quantità di moto del CM nel sistema del CM



$$K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

- Consideriamo un corpo rigido costituito da masse discrete puntiformi le cui mutue distanze sono fisse che ruota attorno ad un asse passante per il CM (nell'es. in figura asse z) con velocità angolare ω
  - ciascuna massa m_i descrive una circonferenza percorsa con velocità angolare ω nel piano ortogonale all'asse di rotazione



$$v_i' = \omega\, d_i \qquad \Longrightarrow K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i\, d_i^2 \omega^2$$

$\vec{V}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{v}_i{}'$

$$\Longrightarrow K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \qquad \text{dove } I_{CM} = \sum_i m_i d_i^2$$

Energia cinetica di un Corpo Rigido: I teorema di König

Per un corpo che trasla e ruota attorno ad un asse passante per il suo centro di massa, possiamo quindi scrivere

$$K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 = K_{CM} + K_{ROT}$$

con il moto del CM (V_{CM}) determinato unicamente dalle forze esterne

Momento di Inerzia rispetto al CM

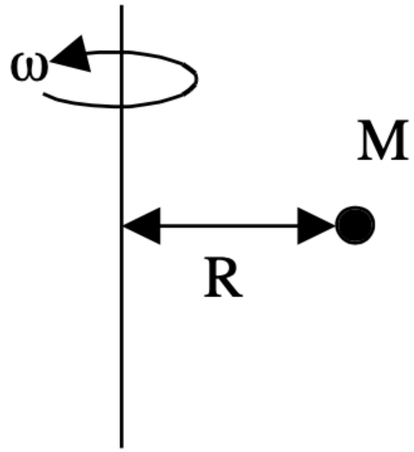
Si può calcolare il momento d'inerzia di un corpo rigido continuo di densità omogenea dividendolo in piccoli elementi di volume, ognuno di massa Δm_i. Nel limite continuo:

$$I_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \Delta m_i \, d_i^2 = \int d^2 dm$$

dove d rappresenta la distanza dall'asse di rotazione passante per il CM

Momento di inerzia rispetto ad un asse qualsiasi di un PM

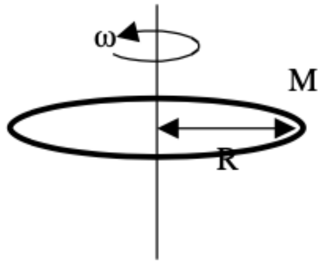
Consideriamo la situazione in figura:



Applichiamo la definizione:

$$I = \sum_{i=1}^{1} m_i R_i^2 = MR^2$$

Momento di inerzia di un anello omogeneo di massa M e raggio R rispetto a un asse passante per il CM

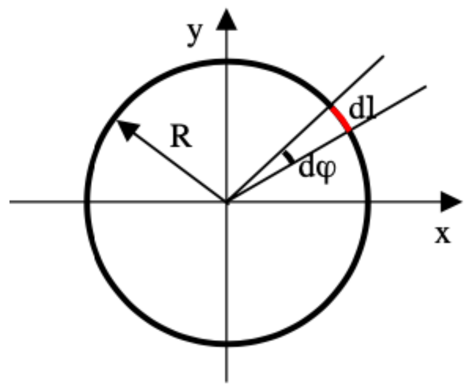


Consideriamo la situazione della figura.

Supponiamo che l'anello ruoti attorno un asse, perpendicolare all'anello passante per il suo centro (asse dell'anello).

Indichiamo con λ la densità lineare dell'anello:

$$\lambda = \frac{M}{2\pi R}$$



Consideriamo un elemento dell'anello: $dl = R d\varphi$

a cui corrisponde la massa: $$dm = \lambda dl = \frac{M}{2\pi R} R d\varphi = \frac{M}{2\pi} d\varphi$$

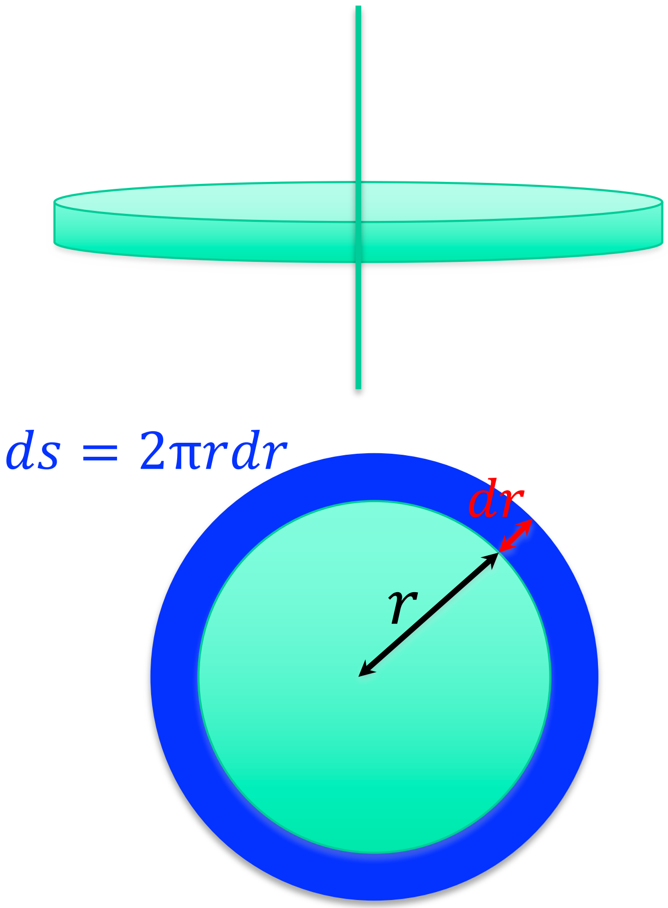
Applichiamo la definizione di momento di inerzia per i corpi continui:

$$I = \int_{anello} R^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \frac{M}{2\pi} d\varphi = \frac{M}{2\pi} R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{M}{2\pi} R^2 [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{M}{2\pi} R^2 (2\pi - 0) = MR^2$$

$$\boxed{I = MR^2}$$

Esempio calcolo momenti di inerzia

Momento di Inerzia di un Disco di raggio R e massa M, con densità superficiale di massa uniforme rispetto a un asse ortogonale al piano del disco e passante per il suo CM



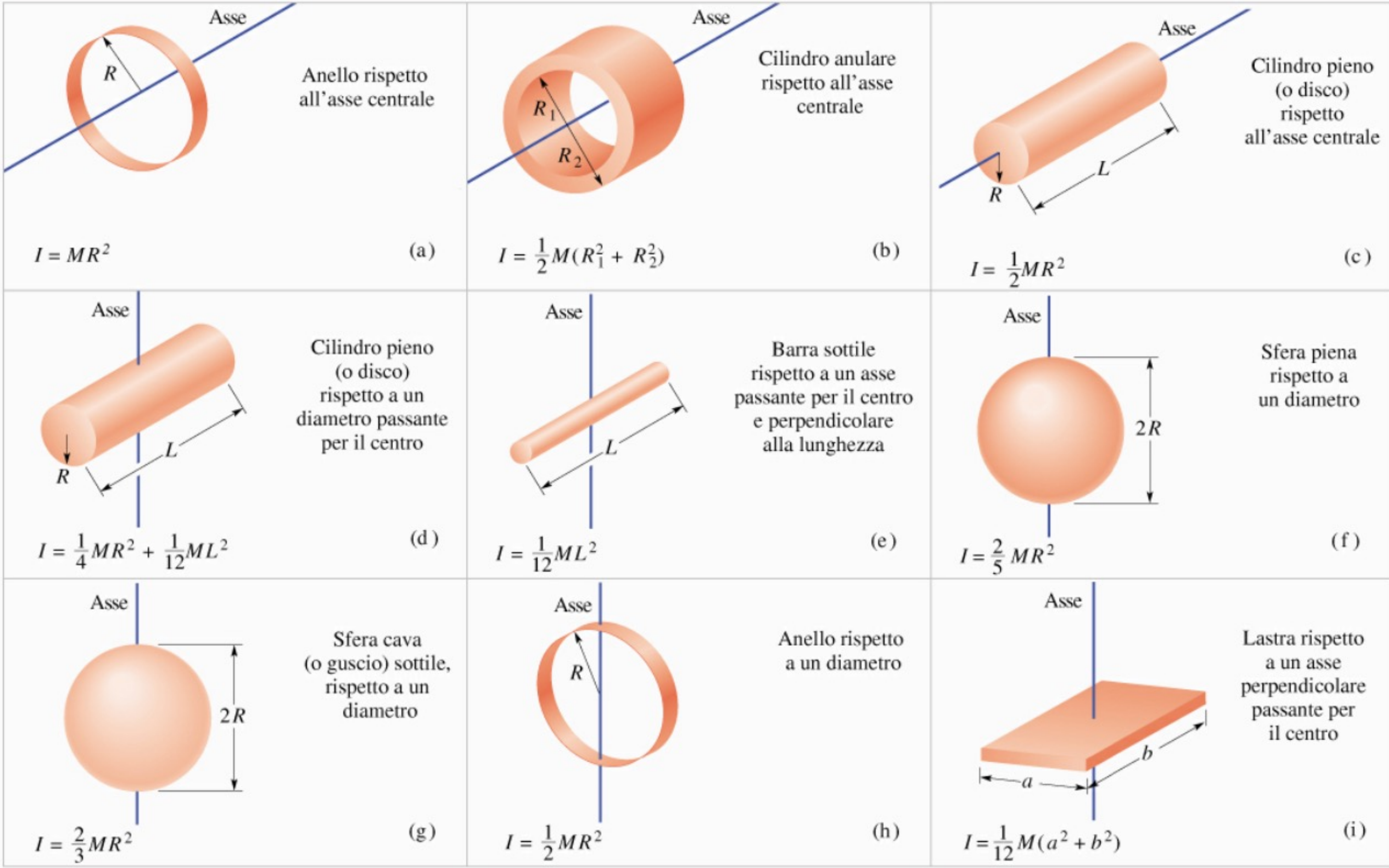
$$\rho_s = \frac{dm}{ds} = \frac{M}{\pi R^2} \qquad \Rightarrow dm = \rho_s \, ds$$

$$ds = 2\pi r dr$$

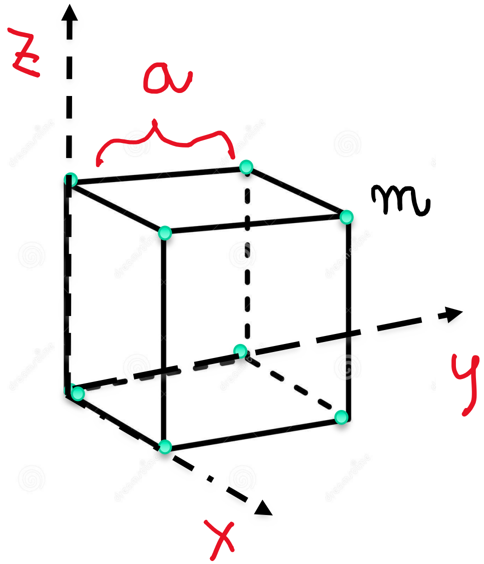
$$I_{cm} = \int dm \, d^2 = \int \rho_s \, ds \, r^2 = \rho_s \int 2\pi r dr r^2$$

$$= \rho_s 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{M}{\pi R^2} 2\,\pi \frac{R^4}{4} = M\frac{R^2}{2}$$

Tabella riassuntiva momenti di inerzia rispetto a assi passanti per il CM per CR omogenei



Determinare il centro di massa di un corpo rigido formato da masse puntiformi di massa *m* poste ai vertici di un cubo di lato *a*, collegate tra loro con barre di massa trascurabile.



baricentro in x

4 masse hanno $x = a$

4 masse hanno $x = 0$

$$x_{cm} = \frac{(4 \times a + 4 \times 0)\, m}{8\, m} = \frac{a}{2}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

baricentro in y

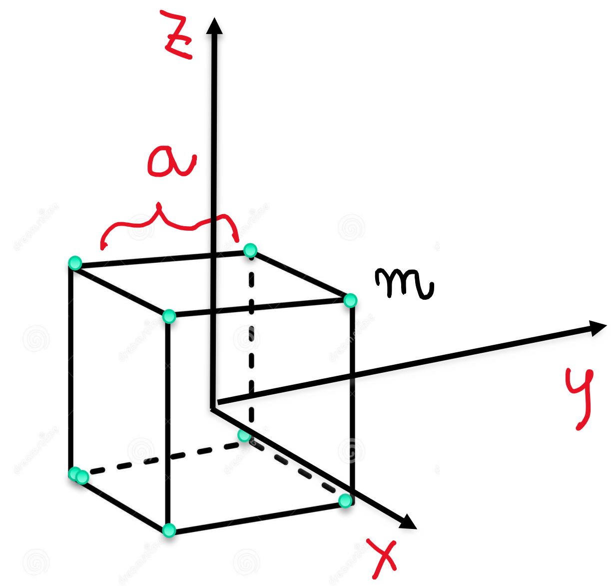
4 masse hanno $y = a$

4 masse hanno $y = 0$

$\Big\}\ y_{cm} = a/2$

$\Rightarrow$ baricentro in z $\qquad z_{cm} = a/2$

Determinare il momento di inerzia del corpo rigido formato da masse puntiformi di massa *m* poste ai vertici di un cubo di lato *a*, collegate tra loro con barre di massa trascurabile, rispetto ai tre assi indicati in figura passanti per il centro di massa del sistema.



$$I_x^{CM} = \sum_i m_i \left(y_i^2 + z_i^2 \right)$$

$$I_y^{CM} = \sum_i m_i \left(x_i^2 + z_i^2 \right)$$

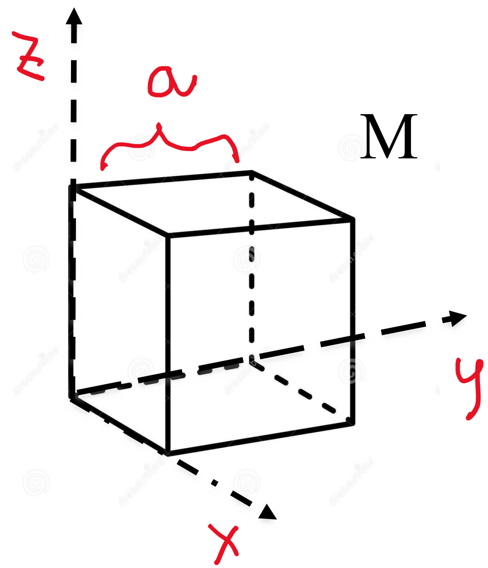
$$I_z^{CM} = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right)$$

dalla figura $x = \pm a/2$ $y = \pm a/2$ $z = \pm a/2$

$$I_x^{CM} = 8m \left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \right) = 4ma^2 = I_y^{CM} = I_z^{CM}$$

Nota: i 3 assi sono assi di simmetria per il sistema

Determinare il centro di massa di un cubo omogeneo di lato *a* e massa *M*.



Baricentro del cubo

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int dm\, \vec{r}$$

$$\Rightarrow \quad x_{cm} = \frac{1}{M}\int dm\, x$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int dm\, y$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\int dm\, z$$

$$dm = \rho_V\, dV \qquad \rho_V = \frac{dm}{dV} \Rightarrow \frac{M}{a^3} \qquad dV = dx\, dy\, dz$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int \rho_V\, dV\, x = \frac{\rho_V}{M}\int dx\, dy\, dz\, x \Rightarrow$$

$$x_{cm} = \frac{\rho_V}{M}\int_0^a x\, dx \int_0^a dy \int_0^a dz = \frac{\rho_V}{M}\; \frac{a^2}{2} \cdot a \cdot a \Rightarrow$$

$$x_{cm} = \frac{\rho_v}{M}\int_0^a x\,dx \int_0^a dy \int_0^a dz = \frac{\rho_v}{M}\, \frac{a^2}{2} \cdot a \cdot a \Rightarrow$$

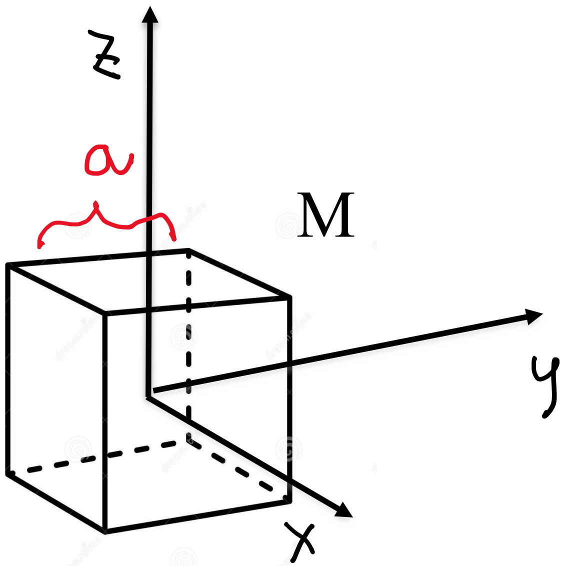
$$x_{cm} = \frac{M}{a^3} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{a^4}{2} = \frac{a}{2}$$

poichè $$y_{cm} = \frac{\rho_v}{M}\int_0^a dx \int_0^a y\,dy \int_0^a dz = a/2$$

In modo analogo $$z_{cm} = a/2$$

Nota: i 3 assi sono assi di simmetria per il sistema

Determinare il momento di inerzia di un cubo omogeneo di lato *a* e massa *M* rispetto ai tre assi indicati in figura passanti per il centro di massa del sistema.



$$I_x^{CM} = \int dm\,(y^2+z^2)$$

$$I_y^{CM} = \int dm\,(x^2+z^2)$$

$$I_z^{CM} = \int dm\,(x^2+y^2)$$

$$dm = \rho_V\,dV \qquad \rho_V = \frac{M}{a^3} \qquad dV = dx\,dy\,dz$$

$$I_z^{CM} = \rho_V \int dx\,dy\,dz\,(x^2+y^2) = \rho_V \int_{-a/2}^{a/2} dz \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} (x^2+y^2)\,dy$$

$$= \rho_V\, a \int_{-a/2}^{a/2} \left(a x^2 + \frac{y^3}{3}\Big|_{-a/2}^{a/2} \right) dx$$

$$I_z^{CM} = \rho_V a \int_{-a/2}^{a/2} \left(a x^2 + \frac{y^3}{3} \Big|_{-a/2}^{a/2} \right) dx$$

$$= \rho_V a \int_{-a/2}^{a/2} \left(a x^2 + \frac{a^3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2 \right) dx = \rho_V a \left[a \, 2 \left(\frac{a}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{a^3 \cdot a}{12} \right]$$

$$= \frac{M}{a^3} \cdot a \left[\frac{a^4}{12} + \frac{a^4}{12} \right] = \frac{M}{a^2} \cdot \frac{a^4}{6} = \frac{Ma^2}{6}$$

per simmetria i momenti di Inerzia

I_x^{CM}, I_y^{CM}, I_z^{CM} sono uguali!