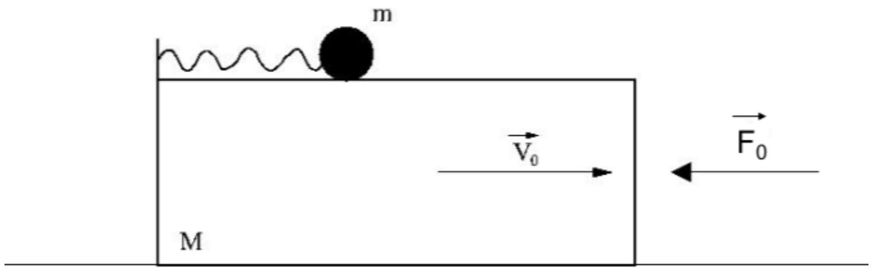
Es. del 7/4/ Ciocci

Esercizi di esame da
https://www.pi.infn.it/~ciocci/

Es 1 Esame del 19/2/2019



Un blocco di massa M è appoggiato su un piano orizzontale, dove può muoversi senza attrito. Una pallina di massa m, assimilabile ad un punto materiale, è collegata ad un estremo del blocco tramite una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0, come in figura. La pallina può muoversi senza attrito sul blocco. All'inizio il sistema trasla con velocità costante v_0. Da un certo istante (t=0) una forza opportuna F_0, non necessariamente costante, fa frenare il blocco fino a farlo fermare, con decelerazione a_0 costante. Sapendo che nell'istante $t = \tau$ in cui il sistema si ferma, la pallina ha velocità relativa nulla rispetto al blocco, che nello stesso istante la molla ha lunghezza $2l_0$, e che da quel momento (per $t > \tau$) il blocco rimane fermo, calcolare:

1. La velocità v_0, il tempo di frenata τ e il modulo dell'accelerazione a_0 del blocco, dovuta alla forza F_0

   $v_0 =$ .... $\tau =$ .... $a_0 =$ ....

2. Il lavoro compiuto dalla forza frenante, $L_{frenante}$

   $L_{frenante} =$ ....

3. La lunghezza minima della molla dopo che il blocco si è fermato per $t > \tau$

$l_{min} =$ ....

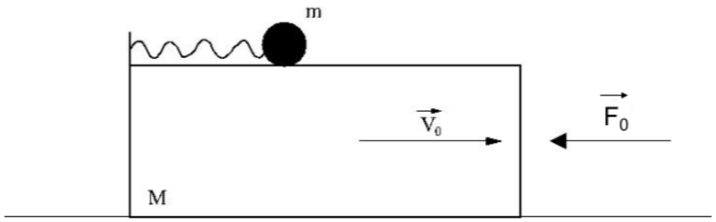
Dati: M = 0.4 Kg, m = 0.1 Kg, k = 2 N/m, l0 = 40 cm

- blocco massa M su un piano orizzontale, senza attrito.
- pallina di massa m (p.m), collegata tramite molla ideale (k e l_0), al blocco come in figura. No attrito tra blocco e pallina.
- All'inizio il sistema trasla con velocità v_0 =costante.
- Da un certo istante (t=0) una forza opportuna F_0, non necessariamente costante, frena il blocco fino a farlo fermare, con decelerazione a_0 costante.
- nell'istante $t = \tau$ in cui il sistema si ferma, la pallina ha velocità relativa nulla rispetto al blocco, nello stesso istante, la molla ha lunghezza $2l_0$, (per $t > \tau$) il blocco rimane fermo.

Calcolare

- La velocità v_0, il tempo di frenata τ e il modulo dell'accelerazione a_0 del blocco, dovuta alla forza F_0

$v_0 =$ .... $\tau =$ .... $a_0 =$ ....



Dati

- M =0.4 kg
- m=0.1 kg
- k=2N/m
- l_0 =40 cm=0.4 m
- per $t = \tau$, quando il blocco si ferma
  - per la pallina la velocità relativa rispetto al blocco $v_{rel}(\tau)=0$
  - lunghezza della molla $2l_0$
  - blocco fermo per $t \geq \tau$
- per $t = 0$, la velocità relativa rispetto al blocco della pallina è nulla ($v_{rel}(0)=0$), e l'allungamento iniziale della molla è nullo

$$\vec{a}(0) = \vec{a}'(0) + \vec{a}_T(0)$$

$$\vec{a}_T(0) = 0 \Longrightarrow \vec{a}(0) = \vec{a}'(0)=0$$

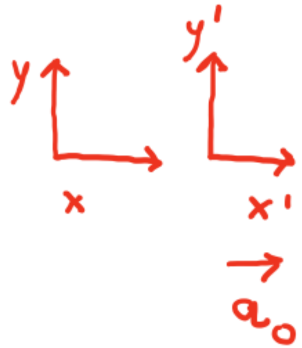
$$\Longrightarrow \vec{v}'(0)=\text{cost}= \vec{v}_{rel}(0)$$

$$\vec{v}_{rel}(0) = \vec{v}(0) - \vec{v}_T(0) = 0$$

- Calcolare La velocità v_0, il tempo di frenata τ e il modulo dell'accelerazione a_0 del blocco, dovuta alla forza F_0 : v_0 = ... τ = ... a_0 = ...

Indichiamo con $x\,y$ SDR mobile e con $x'\,y'$ SDR inerziale

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-K(x-\ell_0)}_{\text{nota } \Delta x = \Delta x'} + m a_0$$



risolviamo l'equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}(x-\ell_0) = a_0$$

$$y = x-\ell_0 \qquad \dot y = \dot x \qquad \ddot y = \ddot x$$

$$\ddot y + \frac{k}{m}\, y = a_0 \Rightarrow y(t) = \text{cost} + A\cos(\omega t+\phi)$$

infatti: $\dot y = -A\omega \sin(\omega t+\phi)$

$$\ddot y = -A\omega^2\cos(\omega t+\phi) = \begin{cases} -A\omega^2\cos(\omega t+\phi) \\ +\frac{K}{m}\left(\text{cost} + A\cos(\omega t+\phi)\right) \\ = a_0 \end{cases}$$

dalla quale $\frac{K}{m} = \omega^2$ e $\frac{K}{m}$ cost $= a_0$

$\Rightarrow$ cost $= \frac{m a_0}{K}$

per cui $y(t) = \frac{m a_0}{K} + A\cos(\omega t + \phi)$

da $y(t) = x(t) - \ell_0 \Rightarrow x(t) = \ell_0 + \frac{m a_0}{K} + A\cos(\omega t + \phi)$

dalla quale $\frac{K}{m} = \omega^2$ e $\frac{K}{m}\,\text{cost} = a_0$

$\Rightarrow \text{cost} = \frac{m a_0}{K}$

per cui $y(t) = \frac{m a_0}{K} + A\cos(\omega t + \phi)$

da $y(t) = x(t) - \ell_0 \Rightarrow x(t) = \ell_0 + \frac{m a_0}{K} + A\cos(\omega t + \phi)$

- per t = 0, la velocità relativa rispetto al blocco della pallina $v_{rel}(0)=0$, e l'allungamento iniziale della molla è nullo $\Rightarrow$ $x(0) = \ell_0$, $v_{rel}(0) = 0$

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= \ell_0 = \ell_0 + \frac{m a_0}{K} + A\cos\phi \\ \dot{x}(0) &= 0 = -A\omega\sin\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0 \\ \ell_0 &= \ell_0 + \frac{m a_0}{K} + A \Rightarrow A = -\frac{m a_0}{K} \end{aligned}\right\} \quad x(t) = \ell_0 + \frac{m a_0}{K}(1-\cos\omega t)$$

$$x(t) = l_0 + \frac{m a_0}{K}(1-\cos\omega t)$$

- Calcolare La velocità v_0, il tempo di frenata τ e il modulo dell'accelerazione a_0 del blocco, dovuta alla forza F_0 :

$v_0 =$ .... $\tau =$ .... $a_0 =$ ....

- per $t = \tau$, quando il blocco si ferma
  - per la pallina la velocità relativa rispetto al blocco $v_{rel}(\tau)=0$
  - lunghezza della molla $2l_0$
  - blocco fermo per $t \geq \tau$

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = 0 \Rightarrow \frac{m a_0}{K}\omega \sin(\omega\tau) = 0 \\ x(\tau) = 2l_0 \Rightarrow 2l_0 = l_0 + \frac{m a_0}{K}(1-\cos\omega\tau) \\ \dot{x}(\tau) = 0 \Rightarrow \sin(\omega\tau) = 0 \Rightarrow \omega\tau = \pi \end{cases}$$

poiché $\omega T = 2\pi$ $\boxed{\tau = T/2}$ $\tau = \pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

$$\left.\begin{aligned} x(\tau) = 2l_0 &\Rightarrow 2l_0 = l_0 + \frac{m a_0}{K}(1-\cos\pi) \\ &\Rightarrow l_0 = \frac{2m a_0}{K} \end{aligned}\right\} \quad a_0 = \frac{K l_0}{2m} \qquad \text{nota : } a_0 = \text{cost!}$$

per cui per il blocco

$$v(t) = v_0 - a_0 t \Rightarrow \text{per } t = \tau \quad v(\tau) = 0 \Rightarrow v_0 = a_0\tau$$

$\tau = 0.7$ s, $a_0 = 4$ m/s², $v_0 = 2.8$ m/s

Calcolare il lavoro compiuto dalla forza frenante, $L_{frenante}$

$L_{frenante}$ = ...

- per $t = \tau$, quando il blocco si ferma
  - per la pallina la velocità relativa rispetto al blocco $v_{rel}(\tau)=0$
  - lunghezza della molla $2l_0$
  - blocco fermo per $t \geq \tau$

dal teorema delle forze vive

$$T_f - T_i = L_C + L_{NC}$$

$$T_f - T_i = U_i - U_f + L_{frenante} \Rightarrow L_{frenante} = T_f - T_i + U_f - U_i$$

$$T_f = 0 \quad , \quad T_i = \frac{1}{2}(m+M)v_0^2$$

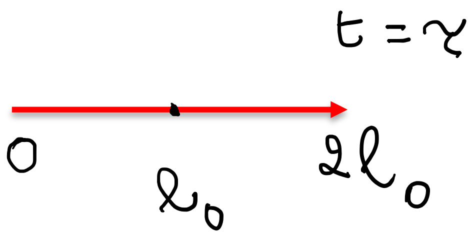
$$U_i = \frac{1}{2}K(l_0 - l_0)^2 \quad , \quad U_f = \frac{1}{2}K(2l_0 - l_0)^2 = \frac{1}{2}Kl_0^2$$

$$L_{frenante} = -\frac{1}{2}(m+M)v_0^2 + \frac{1}{2}Kl_0^2 = -18\,J$$

nota $\quad v_f^{pallina} = v_{Rel}^{pall} + v_{blocco} = 0 \quad$ per $t > \tau$!

3. La lunghezza minima della molla dopo che il blocco si è fermato per t > τ
l_{min} = ...

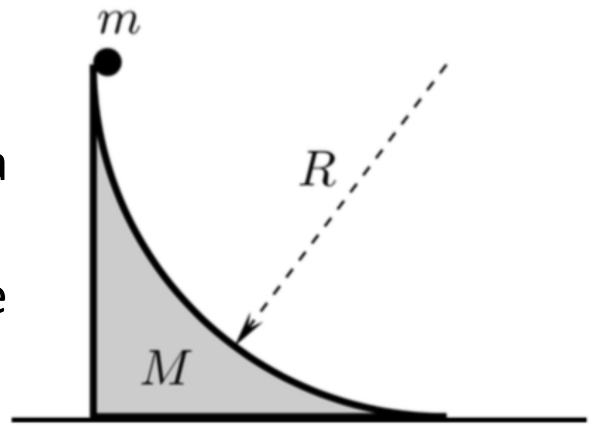
- per $t = \tau$, quando il blocco si ferma
  - per la pallina la velocità relativa rispetto al blocco $v_{rel}(\tau)=0$
  - lunghezza della molla $2l_0$
  - blocco fermo per $t \geq \tau$



Se il blocco da $t = \tau$ è fermo (è tenuto fermo) la molla inizia ad oscillare attorno a l_0 per cui

$$l_{min} = \emptyset$$

Es 1 Esame del 20/7/2018



Un punto materiale di massa m è inizialmente fermo sulla cima di di una guida liscia con profilo circolare di raggio R (vedi figura). La guida, di massa M, anch'essa inizialmente ferma, può scivolare su di un piano orizzontale privo di attrito.

Al tempo t = 0 il punto materiale viene lasciato libero.

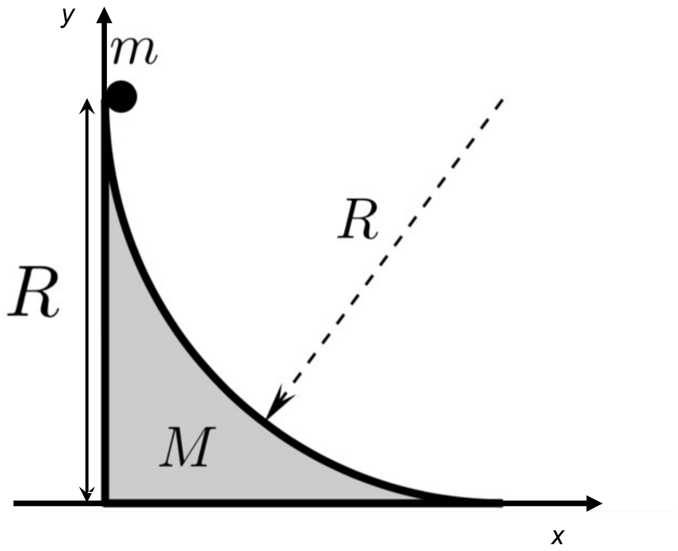
1. Calcolare la velocità finale del punto materiale $\vec{v}$ e della guida $\vec{V}$, quando il punto materiale arriva sul piano.
   $\vec{v} =$ .... $\vec{V} =$ ....

2. Calcolare la velocità finale del centro di massa del sistema punto materiale-guida, $\vec{V}_{cm}$, quando il punto materiale arriva sul piano.
   $\vec{V}_{cm} =$ ....

3. Come cambierebbero i risultati del punto 1 e 2 se invece di una guida con profilo circolare avessimo un piano inclinato di altezza R e angolo θ?

$\vec{v}' =$ .... $\vec{V}' =$ .... $\overrightarrow{V'}_{cm} =$ ....

[$m = 2.00\ kg$, $M = 3.00\ kg$, $R = 0.5\ m$]



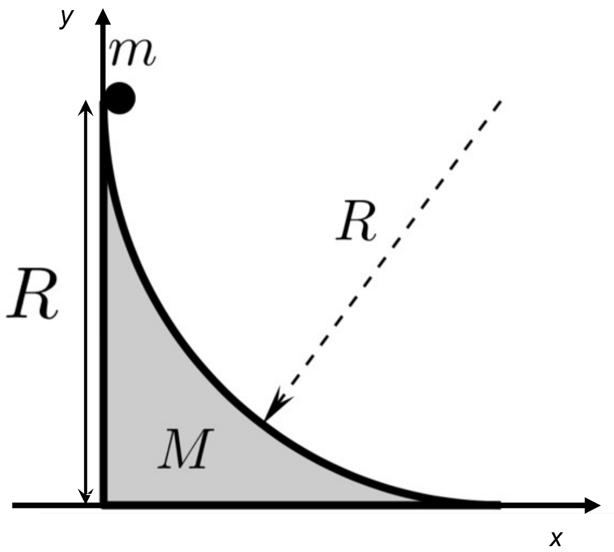
Sistema costituito da:

- P.M.
  - di massa m
  - inizialmente fermo sulla cima di una guida liscia semi-circolare
- Guida
  - liscia e di profilo semicircolare
  - raggio R
  - inizialmente ferma
  - può scorrere sul piano orizzontale su cui poggia, senza attrito

A t=0 il P.M viene lasciato libero

1. Calcolare la velocità finale del punto materiale $\vec{v}$ e della guida $\vec{V}$, quando il punto materiale arriva sul piano.

   $\vec{v} =$ .... $\vec{V} =$ ....



1. Calcolare la velocità finale del punto materiale $\vec{v}$ e della guida $\vec{V}$, quando il punto materiale arriva sul piano.

$\vec{v} =$ .... $\vec{V} =$ ....

Dati

- M =3.00 kg
- m=2.00 kg
- R=0.5 m
- $\vec{V}(0) = 0$
- $\vec{v}(0) = 0$

1) l'energia del sistema si conserva?

Non ci sono forze dissipative pertanto l'energia si conserva

$$E_i = mgR + Mgh_{cm} = E_f = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 + M g h_{cm}$$

2) la quantità di moto del sistema si conserva?

a) Si conserva la quantità di moto lungo X del sistema in quanto l'unica forza esterna è diretta lungo y (gravità)

$$\frac{dp^x_{cm}}{dt} = (m+M)\, a^{cm}_x = 0 \Rightarrow p^x_{cm} = \text{cost} \Rightarrow \underbrace{p^x_{cm_i}}_{\text{q.m di cm lungo x}} = p^x_{cm_f}$$

$$\begin{cases} 0 = m v_x + M V_x = (m+M) V_{cm\,x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{cm\,x} = \emptyset \quad \text{SEMPRE!}$$

quindi 2.1) $v_x = -\dfrac{M}{m} V_x$

2.2) $V_{cm\,x} = \emptyset$

b) Si conserva la quantità di moto lungo z del sistema in quanto l'unica forza esterna è diretta lungo y (gravità)

Inoltre, sulla guida non ci sono forze esterne che agiscono lungo z, per cui possiamo scrivere:

1) $m v_z + M V_z = 0 = P_{z\,cm} = \text{cost}$

2) $\dfrac{dP_{z\,guida}}{dt} = M A_z = 0 \Rightarrow V_z = \text{cost} = V_{zi} = 0$

dalla 1) $V_z = 0 \Rightarrow v_z = 0$

e $V_{z\,cm} = \dfrac{m v_z + M V_z}{m + M} = 0 = \text{cost}!$

3) La coordinata y del cm della guida cambia?

La guida scivola sul piano di conseguenza (ovunque essa sia) la coordinata y del c.M della guida non cambia.

$$y_{CM\,GUIDA} = cost \Rightarrow \frac{dy_{CM\,GUIDA}}{dt} = \emptyset \Rightarrow V_y = \emptyset$$

Concludendo: dai principi di conservazione

durante il moto in generale

$\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$ Punto materiale

$\vec{V} = (V_x, 0, 0)$ Guida

ma quando la pallina è sul piano v_y=0!

$\vec{v} = (v_x, 0, 0)$

$\vec{V} = (V_x, 0, 0)$

$$\vec{v} = (v_x, 0, 0)$$
$$\vec{V} = (V_x, 0, 0)$$

dalla conservazione dell'energia

① $mgR = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} M V_x^2$

dalla conservazione dell'impulso lungo x

② $m v_x + M V_x = 0$

con $v_x > 0$

$$\begin{cases} V_x = -\frac{m}{M} v_x & ② \\ \frac{1}{2}\left(\frac{m+M}{M}\right) v_x^2 = gR & ① \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ① \quad v_x = \sqrt{\frac{2MRg}{m+M}} \\ ② \quad V_x = -m\sqrt{\frac{2Rg}{M(m+M)}} \end{cases}$$

$$\vec{v} = (2.42, 0, 0)\ m/s \qquad \vec{V} = (-1.62, 0, 0)\ m/s$$

Calcolare la velocità finale del centro di massa del sistema punto materiale-guida, $\vec{V}_{cm}$, quando il punto materiale arriva sul piano.

$\vec{V}_{cm}$ = ...

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m\vec{v} + M\vec{V}}{m+M} = (0,0,0)\ !$$

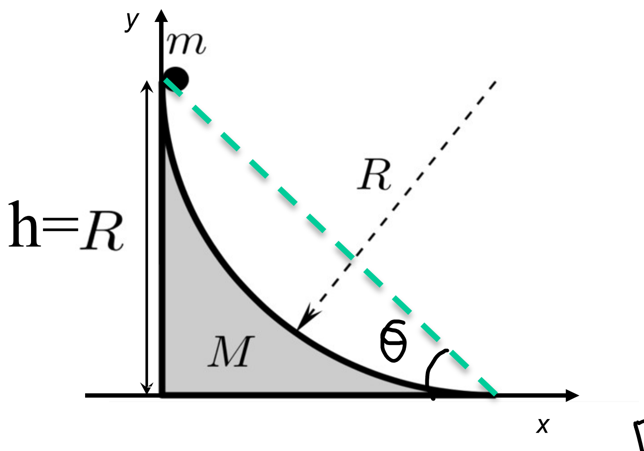
conservazione q. moto lungo x $\Rightarrow V_{x\,cm} = \dfrac{m v_x + M V_x}{m+M} = \emptyset$ VERA SEMPRE!

Sul piano v_y, V_y nulle $\Rightarrow V_{y\,cm} = \dfrac{m v_y + M V_y}{m+M} = 0$ V_y cm guida nulla, y_{cm} guida = cost, v_y nulla sul piano!

Conservazione q. moto lungo z $\Rightarrow V_{z\,cm} = \dfrac{m v_z + M V_z}{m+M} = 0$ vera sempre! inoltre $V_z = v_z = \emptyset$

3. Come cambierebbero i risultati del punto 1 e 2 se invece di una guida con profilo circolare avessimo un piano inclinato di altezza R e angolo θ?

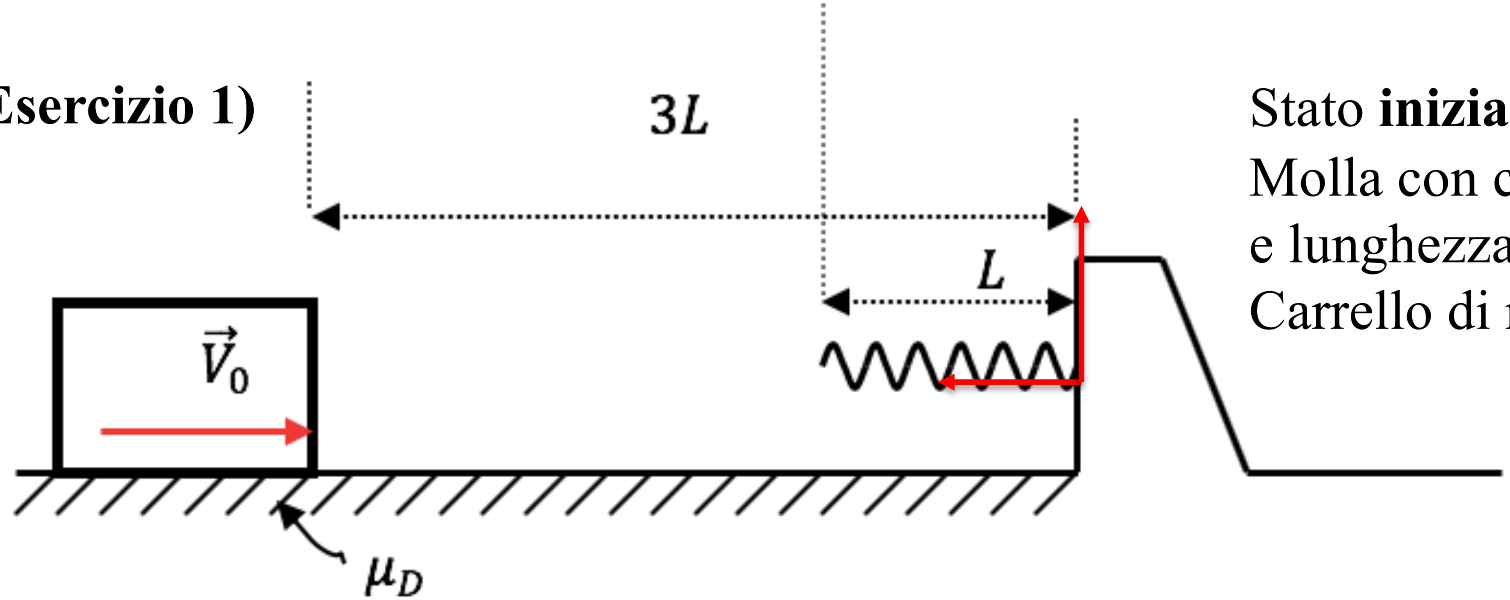
$\vec{v}' =$ .... $\vec{V}' =$ .... $\vec{V'}_{cm} =$ ....



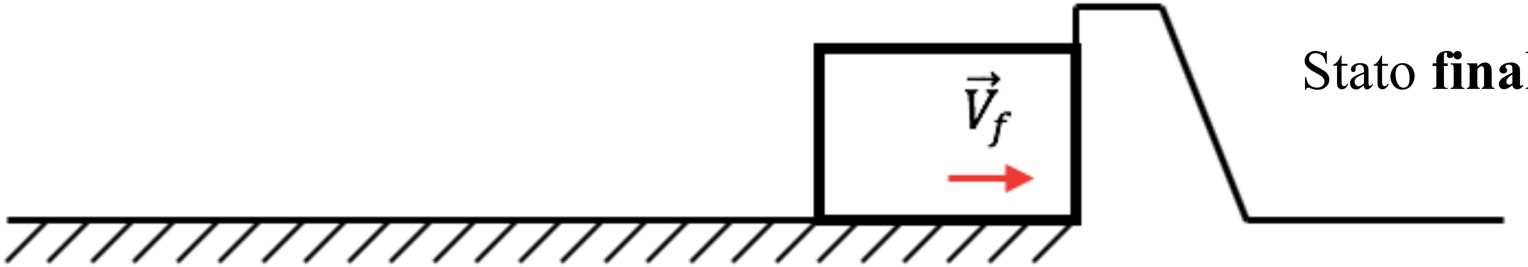
Non cambia nulla perché valgono gli stessi principi di conservazione, e come prima quando la pallina arriva sul piano ha velocità diretta lungo x

$\vec{v} = (2.42, 0, 0)\ m/s$ $\vec{V} = (-1.62, 0, 0)\ m/s$ $\vec{V}_{cm} = (0, 0, 0)\ m/s$

Esercizio 1)



Stato **iniziale** al tempo $t = 0$.
Molla con costante elastica k
e lunghezza a riposo L.
Carrello di massa M.



Stato **finale**.

Esprimere per quali valori della velocità iniziale il carrello comprime completamente la molla (e quindi urta il respingente).

$$K_f - K_i = L_{el} + L_N + L_{Mg} + L_{F_D} = \frac{1}{2}MV_f^2 - \frac{1}{2}MV_i^2 = -\frac{1}{2}kL^2 + 0 + 0 - 3L\mu_D Mg$$

$V_f^2 = V_i^2 - \frac{kL^2}{M} + 0 + 0 - 6L\mu_D g$ che deve essere ≥ 0 affinchè il respingente sia urtato, situazione che avviene quando $V_i \geq \sqrt{\frac{kL^2}{M} + 6L\mu_D g}$.

Si noti che **entrambi i lavori sono dissipativi**.

Esercizio 4). Due masse $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 0.6\,\mathrm{kg}$, inizialmente in quiete, sono disposte su un piano (x, y) privo di attrito. Le coordinate di m_1 siano $(0; 3\ \mathrm{m})$ e quelle di m_2 $(4\ \mathrm{m}; 0)$. Si applichino ad esse le forze $\vec{F}_1 = 4N\hat{x}$, $\vec{F}_2 = 3N\hat{y}$; trovare le equazioni del moto del centro di massa.

Le coordinate iniziali del centro di massa sono

$$\begin{cases} x_{0CM} = \left(\dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}\right) = 1.5\ \mathrm{m} \\ y_{0CM} = \left(\dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}\right) = 1.87\ \mathrm{m} \end{cases}$$

Dalle condizioni iniziali $v_{xcM}(0) = v_{ycM}(0) = 0$

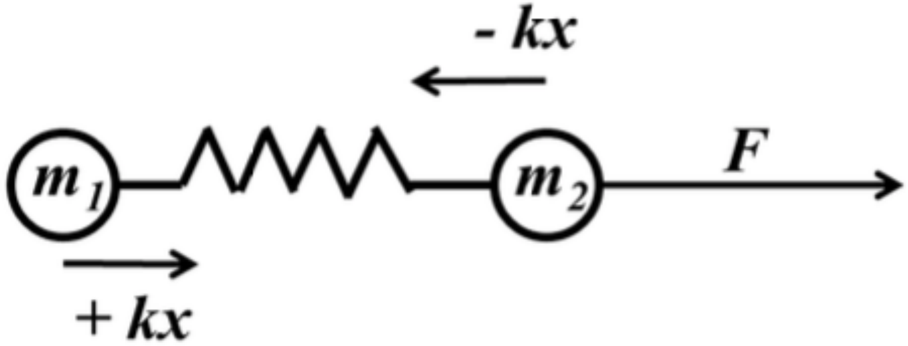
Dalla prima equazione della dinamica dei sistemi:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (m_1 + m_2)\vec{a}_{CM}, \quad \text{con } a_{xcM} = 2.5\ \mathrm{m/s^2} \text{ e } a_{ycM} = 1.87\ \mathrm{m/s^2}$$

Poichè l’accelerazione del CM lungo x e lungo y è costante il moto del centro di massa è uniformemente accelerato lungo x e lungo y:

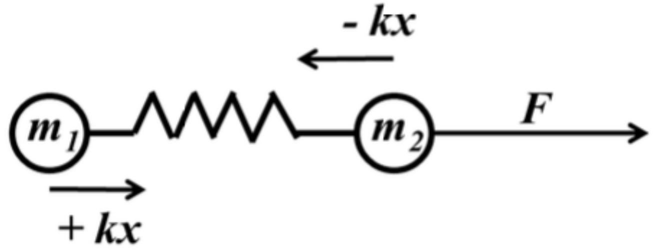
$$\begin{cases} x_{CM}(t) = x_{0CM} + \left(\dfrac{F_1}{m_1 + m_2}\right)\dfrac{t^2}{2} = 1.5\ \mathrm{m} + 1.25\ \mathrm{m/s^2}\, t^2(\mathrm{s}) \\ y_{CM}(t) = y_{0CM} + \left(\dfrac{F_2}{m_1 + m_2}\right)\dfrac{t^2}{2} = 1.87\ \mathrm{m} + 0.93\ \mathrm{m/s^2}\, t^2(\mathrm{s}) \end{cases}$$

Esercizio 5). Due blocchi di massa m_1 ed m_2, collegati mediante una molla di costante elastica k e di massa trascurabile, poggiano su un piano orizzontale privo di attrito. Alla massa m_2 è applicata una forza orizzontale F costante. Determinare l'allungamento della molla supponendo che il sistema non oscilli.



Soluzione.

La <u>forza elastica è una forza interna</u>, per cui non influisce sull'accelerazione del centro di massa, che è data da:



$\vec{a}_C = \frac{\vec{F}}{(m_1+m_2)}$

l'accelerazione è diretta lungo x:

$$a_{xC} = a_C = \frac{F}{(m_1+m_2)}$$

Se non si sono instaurate oscillazioni, questa è anche l'accelerazione di ciascun blocco. Detto quindi x l'allungamento della molla, per il blocco m_2 abbiamo:

$$F - kx = m_2 a_C \quad \Longrightarrow x = \frac{F - m_2 a_C}{k} = \frac{F}{k}\left(1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\right) = \frac{F}{k}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)$$

e per il blocco m_1: $\quad kx = m_1 a_C$

Pertanto: $\quad x = \frac{m_1}{k} a_C = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\frac{F}{k}$

Le due relazioni conducono allo stesso risultato, come prevedibile in quanto la forza elastica è una forza interna.

Esercizio 6). Un proiettile, lanciato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale V_0, esplode in due frammenti di ugual massa. Dopo t_1 secondi dall'esplosione uno dei frammenti raggiunge la quota h_1. Determinare la quota dell'altro frammento allo stesso istante.

Velocità iniziale proettile $\vec{V}_p = (0, V_0)$
2 frammenti da esplosione di egual massa
Dopo t_1 secondi dall'esplosione uno dei frammenti raggiunge la quota h_1.
Determinare la quota dell'altro frammento allo stesso istante.

Soluzione.
Fissiamo come sistema di riferimento un asse verticale rivolto verso l'alto e con origine nel punto di lancio. Le forze interne causate dall'esplosione non influiscono sul moto del centro di massa; poiché la gravità è l'unica forza esterna, il centro di massa si muove di moto uniformemente decelerato rettilineo lungo y e all'istante t_1 raggiunge la quota:

$$y_C(t_1) = V_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$$

Inoltre:

$$y_C = \left(\frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

in quanto le due masse sono eguali. Al tempo t_1 $y_1 = h_1$ si ha:

$$y_2 = h_2 = 2y_C - h_1 = 2V_0 t_1 - g t_1^2 - h_1$$

Si osservi ora che la coordinata x dei frammenti non risulta determinata perché dipende dalle velocità vettoriali acquistate all'istante dell'esplosione. Tuttavia va tenuto presente che

a) il centro di massa non è soggetto a forze in direzione orizzontale

b) la velocità del centro di massa prima dell'esplosione è verticale

per cui la coordinata x_C * deve rimanere zero, come era prima dell'esplosione avendo fissato come riferimento un asse verticale rivolto verso l'alto e con origine nel punto di lancio.

Nel caso in esame deve essere quindi soddisfatta la condizione

$$x_C = \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \qquad \Longrightarrow x_1 = -x_2$$

*$x_C(t) = x_C(0) + V_{xC}(0)\mathrm{t}$ $\qquad V_{xC}(0)=0$. $\quad x_C(0)=0 \quad \Rightarrow x_C(t)=0$

backup

Lavoro della forza elastica (caso unidimensionale)

$$L_{el} \equiv \int_{x_0}^{x_1} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{l} = -\frac{k}{2}(x_1 - l_0)^2 + \frac{k}{2}(x_0 - l_0)^2$$

dove l_0 è la lunghezza a riposo della molla e k la sua costante elastica.
Dimostrazione. Sia x la direzione dello spostamento $\Longrightarrow \vec{F}_{el} = -k(x - l_0)\hat{x}$;

$$L_{el} \equiv \int_{x_0}^{x_1} -k(x - l_0)\hat{x} \cdot d\vec{l} = \int_{x_0}^{x_1} -k(x - l_0)dx = -\frac{k}{2}(x_1 - l_0)^2 + \frac{k}{2}(x_0 - l_0)^2$$

Caso particolare: lunghezza a riposo nulla $(l_0 = 0) \Longrightarrow L_{el} = -\frac{k}{2}(x_1^2 - x_0^2)$

$$\frac{k}{2}(x_0 - l_0)^2 = \mathrm{U_i} = \frac{k}{2}(\Delta x_\mathrm{i})^2$$
$$\frac{k}{2}(x_1 - l_0)^2 = \mathrm{U_f} = \frac{k}{2}(\Delta x_\mathrm{f})^2$$

$$L_{el} = U_i - U_f = \frac{k}{2}(\Delta x_\mathrm{i})^2 - \frac{k}{2}(\Delta x_\mathrm{f})^2$$