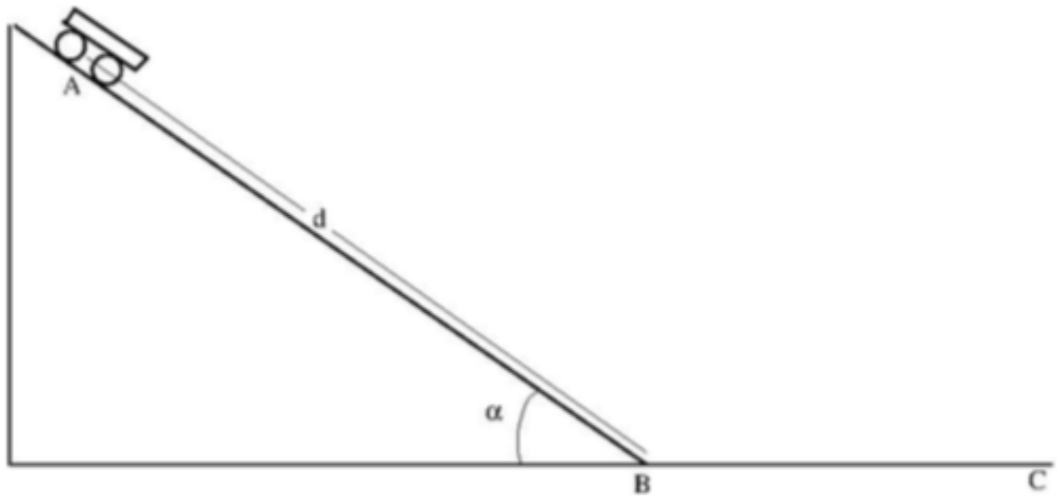
Es. del 22/5/ 2020

Esercizi di esame da
https://www.pi.infn.it/~ciocci/

Es. 1 Esame di Fisica Generale del 11/01/2019

Un carrello può essere schematizzato da 4 ruote, ciascuna di massa m/4 e raggio R, e da un pianale di massa m. Tale carrello, partendo da fermo nel punto A (in figura) scende lungo un piano inclinato scabro lungo d (con angolo α) con moto di puro rotolamento (supporre d molto maggiore della distanza tra le due ruote).

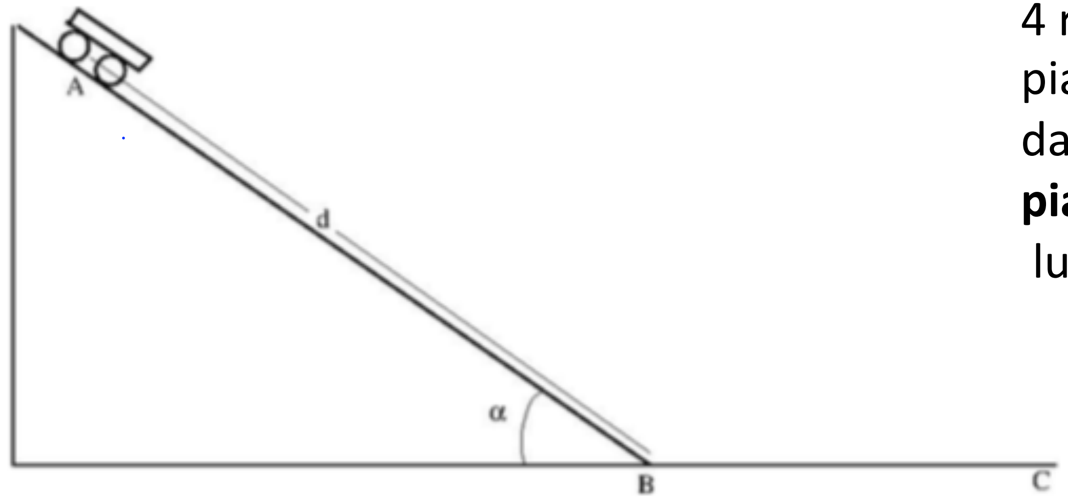


1.Calcolare la velocità, v e l'accelerazione a con cui il carrello arriva alla base del piano inclinato (punto B) e l'accelerazione che avrebbe avuto lo stesso carrello in assenza di attrito, a_{na}. v = ... a = ... a_{na} = ...

2.Giunto nel tratto orizzontale (punto B), il carrello viene fermato in un tempo Δt (nel punto C) per mezzo di un momento frenante di modulo M_f costante. Determinare M_f assumendo che, fino all'arresto, il moto sia sempre di puro rotolamento. M_f = ...

3.Calcolare il lavoro compiuto dalla forza frenante nel tratto BC per fermare il carrello. L_{freno} = ...

Dati: $g=10\ m/s^2$, $m=10\ Kg$, $R=15\ cm$, $\alpha = \pi/6$, $d=10\ m$, $\Delta t=5\ s$.



carrello

4 ruote di massa m/4 e raggio R

pianale di massa m. Il carrello, parte da fermo da A

piano inclinato scabro

lungo d (con angolo α)

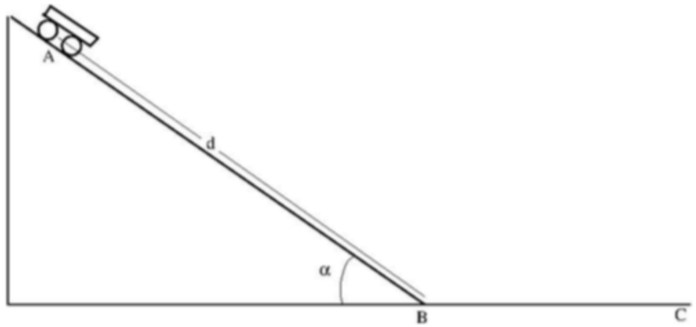
Il carrello scende da A con V(0)=0 con moto di puro rotolamento (supporre d molto maggiore della distanza tra le due ruote).

1.Calcolare la velocità, v e l'accelerazione a con cui il carrello arriva alla base del piano inclinato (punto B) e l'accelerazione che avrebbe avuto lo stesso carrello in assenza di attrito, a_{na}. v = ... a = ... a_{na} = ...

Caso con attrito

@ Nel moto di puro rotolamento il punto di contatto di ciascuna ruota è fermo, quindi il lavoro compiuto dalla forza di attrito è nullo

⇒ di conseguenza l'energia del carrello si conserva.



dalla conservazione dell'energia

$$E_i = m g h + 4 \frac{m}{4} g h$$

$$h = d \sin\alpha$$

$$E_f = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + 4\left(\frac{1}{2}\left(\frac{m}{4}\right) v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}^{ruota} \omega^2\right)$$

König applicato a ciascuna ruota

nota la velocità del CM del pianale è uguale alla velocità del CM di ciascuna ruota v_{CM}

v_{CM} di ciascuna ruota:

$$v_{CM} = |\omega| R$$

$$I_{CM}^{ruota} = \left(\frac{m}{4}\right)\frac{R^2}{2}$$

ma anche $\forall$ruota $E_f = \frac{1}{2} I_c \omega^2 = \frac{1}{2}\left(I_{CM}^{ruota} + \frac{m}{4} R^2\right)\omega^2$

$$E_f = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \left(\frac{m}{4}\right) v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}^{ruota} \omega^2 \right) = E_i =$$

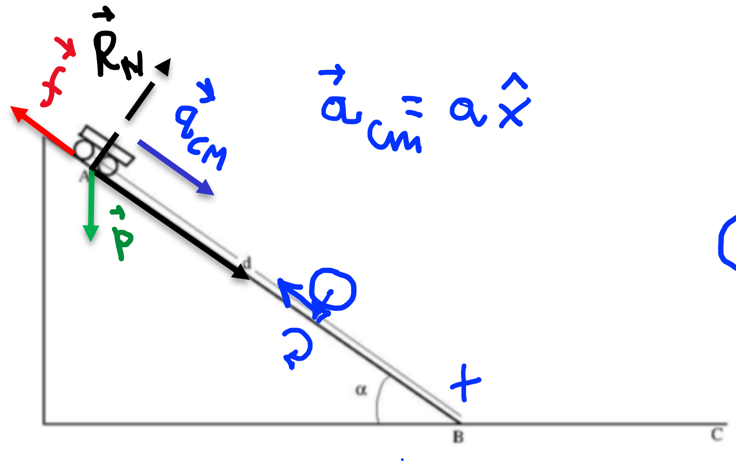
$$E_i = m g d \sin\alpha + 4 \frac{m}{4} g d \sin\alpha = 2 m g d \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad 2 m g d \sin\alpha = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{mR^2}{2} \omega^2 =$$

$$= m v_{CM}^2 + \frac{1}{4} m v_{CM}^2 = \frac{5}{4} m v_{CM}^2$$

$$\Rightarrow \quad v = v_{CM} = \sqrt{\frac{8}{5} g d \sin\alpha} \simeq 8.9 \; m/s$$

Allo stesso risultato si può arrivare usando le 2 eq. cardinali.



$\vec a_{cm} = a\hat x$

Allo stesso risultato si arriva utilizzando le due equazioni cardinali

① $\vec P + 4\vec f + \vec R = M\vec a_{cm}$ con $M = 4\frac{m}{4} + m$

② Polo sul CM di ciascuna ruota

$$\vec M^{CM\,i} = \vec R_{CM.C} \wedge \vec f = I_{CM}^{ruota\,i}\,\dot{\vec\omega} = -Rf\hat z = I_{CM}^{ruota\,i}\,\dot\omega\,\hat z$$

con $\dot\omega = -\frac{a}{R}$ $\left(\omega = -\frac{v_{CM}}{R} \Rightarrow \dot\omega = -\frac{a}{R}\right)$

Dalla ① lungo x $Mg\sin\alpha - 4f = 2ma$

Dalla ② $-Rf\hat z = I_{CM}^{Ruota}\,\dot\omega\,\hat z = +I_{CM}^{Ruota}\left(-\frac{a}{R}\right)\hat z$

$\Rightarrow f = I_{CM}^{Ruota}\left(\frac{a}{R^2}\right)$

Dalla ① lungo x $\quad Mg\sin\alpha - 4f = 2ma$

Dalla ② $\quad -Rf\,\hat{z} = I_{CM}^{Ruote}\,\dot{\omega}\,\hat{z} = +I_{CM}^{Ruote}\left(-\frac{a}{R}\right)\hat{z}$

$\Rightarrow f = I_{CM}^{Ruote}\left(\frac{a}{R^2}\right)$

① $Mg\sin\alpha - 4I_{CM}^{Ruote}\left(\frac{a}{R^2}\right) = 2ma \Rightarrow a\left(2m + \frac{4I_{CM}^{Ruote}}{R^2}\right) = Mg\sin\alpha$

$$a = \frac{2mg\sin\alpha}{\left(2m + \frac{4I_{CM}^{Ruote}}{R^2}\right)} = \frac{2mg\sin\alpha}{2m + 4\frac{m}{4}\frac{R^2}{2R^2}} = \frac{2mg\sin\alpha}{2m + \frac{m}{2}} = \frac{4}{5}g\sin\alpha$$

moto unif. acc $\quad a = \text{cost} = 4\,m/s^2$ lungo x

$\Rightarrow v = \sqrt{2ad} = \sqrt{\frac{8}{5}g\sin\alpha\, d}$ $\quad$ Stessa eq. ottenuta dalla conservazione dell'energia.

1.Calcolare la velocità, v e l'accelerazione a con cui il carrello arriva alla base del piano inclinato (punto B) e l'accelerazione che avrebbe avuto lo stesso carrello in assenza di attrito, a_{na}. v = ... a = ... a_{na} = ...

In assenza di attrito le ruote non ruotano

$$E_f = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{m}{4} v_{CM}^2 \right) = E_i = 2 m g d \sin\alpha$$

$$m v_{CM}^2 = 2 m g d \sin\alpha \Rightarrow v_{CM} = \sqrt{2 g \underbrace{d \sin\alpha}_{h}} = \sqrt{2 a_{na} d}$$

$$a_{na} = g \sin\alpha = 5 \, m/s^2$$

L'accelerazione in presenza di attrito valeva $4 \, m/s^2 < a_{na}$

Questo perché parte dell'energia potenziale viene convertita in energia rotazionale delle ruote.

2. Giunto nel tratto orizzontale (punto B), il carrello viene fermato in un tempo Δt (nel punto C) per mezzo di un momento frenante di modulo M_f costante. Determinare M_f assumendo che, fino all'arresto, il moto sia sempre di puro rotolamento. M_f = ... Δt=5 s

Il moto sul piano è determinato dalla forza di attrito che non è nulla perchè agisce il momento torcente!

(1) lungo x $\quad M a_x = -4f \quad$ essendo la forza di attrito l'unica forza agente. Nota $M = 2m$

Mentre la II cardinale fornisce

$$\vec{M}_f + 4\,\vec{R}_{cm-cont} \wedge \vec{f} = 4 I_{cm}^{ruote}\,\dot{\omega}\,\hat{z} \Rightarrow M_f - 4fR = 4 I_{cm}^{ruote} \cdot \dot{\omega}$$

ricordiamo che $a_x = -\dot{\omega} R = a_{cm} \Rightarrow$ (2) $M_f - 4fR = -4 I_{cm}^{ruote} \dfrac{a_x}{R}$

dalla (1) $-4f = 2m\,a_x \Rightarrow$ (2) $M_f + 2m\,a_x R = -4 \underbrace{I_{cm}^{ruote}}_{4\frac{m}{4}\frac{R^2}{2}} \dfrac{a_x}{R}$

$$M_f + 2m\,a_x R = -m\,a_x R/2 \Rightarrow a_x = -\frac{2M_f}{5mR} = \text{cost!}$$

$a_x = \frac{-2M_f}{5mR} = \text{cost}!$

$\left\{ v(t) - v(0) = at \right.$ In generale

Nel nostro caso $t = \Delta t = 5s$ tempo di arresto $v(t) = \cancel{0}$

$v(0) + a_x t = 0 = v(0) - \frac{2}{5}\frac{M_f}{mR} \cdot t \Rightarrow M_f = \frac{5}{2}\frac{mRv(B)}{\Delta t} = 6.7\,Nm$

dove $v(0) = v(B) = v$ trovata al punto 1)

3. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza frenante nel tratto BC per fermare il carrello. L_{freno} =....

Nel tratto BC: $\mathcal{L}_{BC} = \mathcal{L}_{BC}(\vec{f}) + \mathcal{L}_{BC}(\vec{M}_f) = \mathcal{L}_{BC}(\vec{M}_f)$

perchè il punto di contatto delle ruote è fermo e quindi $\vec{f}$ non compie lavoro.

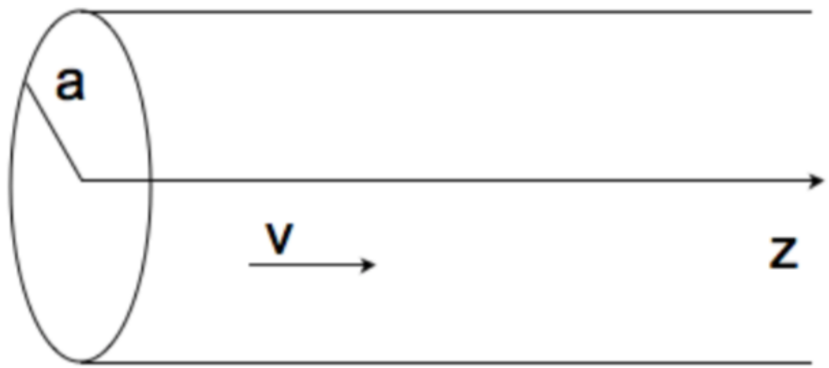
Dal teorema delle forze vive: $T_f - T_i = \cancel{0} - T_B = \mathcal{L}_{BC}(\vec{M}_f)$

per cui $\mathcal{L}_{BC}(\vec{M}_f) = -T_B = -E_f = -E_i = -2mdg\sin\alpha$

in quanto tutta l'energia disponibile iniziale, 2mgdsin(α) nel punto B è stata convertita in energia cinetica (T_B) di rotazione e traslazione

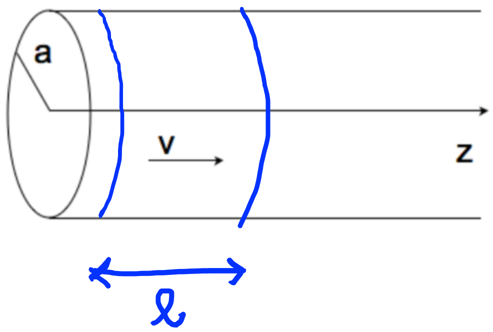
$\mathcal{L}_{BC} = -1000\,J$

Esame di Fisica Generale del 30/06/2017: Esercizio 2



Un fascio di protoni di forma cilindrica con raggio a = 1 mm è costituito da $n = 10^{13}$ protoni/m^3 con carica $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C che viaggiano lungo l'asse z del cilindro (vedi figura), con velocità v = 3000 m/s.

1. Si calcoli la carica elettrica presente per unità di lunghezza, λ:
   λ = ...
2. Si calcoli in un punto a distanza a/2 dall'asse del fascio il modulo del campo elettrico, E(a/2) , e si dia la sua espressione, $\vec{E}$(a/2), in forma vettoriale:
   E (a/2) = ...$\vec{E}$(a/2) = ...
3. Si calcoli il modulo del campo magnetico in un punto a distanza a/2 dall'asse del fascio, B(a/2), e all'esterno del fascio in un punto a distanza 2a dall'asse del fascio, B(2a):
   B(a/2) = ...B(2a) = ...

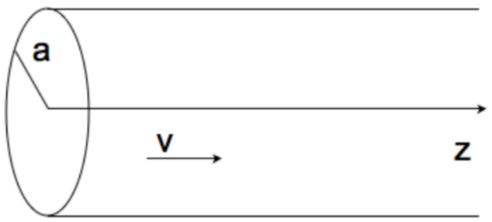


fascio di p di forma cilindrica
raggio fascio, a = 1 mm
n = 10^{13} protoni/m^3 $= \rho = \text{cost}$
q = 1.6×10^{-19} C
v = 3000 $\hat{z}$ m/s.

1.Si calcoli la carica elettrica presente per unità di lunghezza, λ: λ = ...

Indicando con V_ℓ il volume che corrisponde a una lunghezza ℓ del cilindro $V_\ell = \pi a^2 \ell$ la carica in esso contenuta, Q_ℓ, è $Q_\ell = \rho V_\ell q$, dalla definizione di λ:

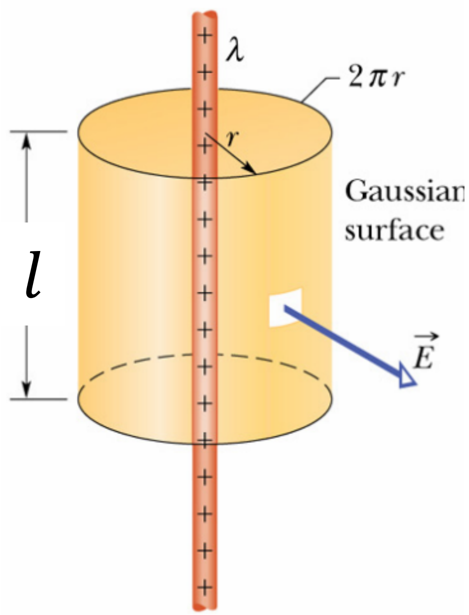
$$\lambda = \frac{Q_\ell}{\ell} = \frac{\rho q V_\ell}{\ell} = \frac{\rho q \pi a^2 \ell}{\ell} = n q \pi a^2 = 5 \times 10^{-12}\ C/m$$



Si calcoli in un punto a distanza a/2 dall'asse del fascio il modulo del campo elettrico, E(a/2) , e si dia la sua espressione, $\vec{E}$(a/2), in forma vettoriale:

E (a/2) = ...$\vec{E}$(a/2) = ...

ad un'istante t generico la distribuzione di carica ha simmetria cilindrica, cioè è invariante per rotazioni e traslazioni rispetto all'asse di conseguenza il C.E è diretto radialmente rispetto all'asse di simmetria ed è uscente essendo la carica positiva. Per le stesse ragioni il modulo del campo è costante su superfici cilindriche concentriche con l'asse z.



Il valore del campo si ottiene applicando il teorema di Gauss

per $r < a$

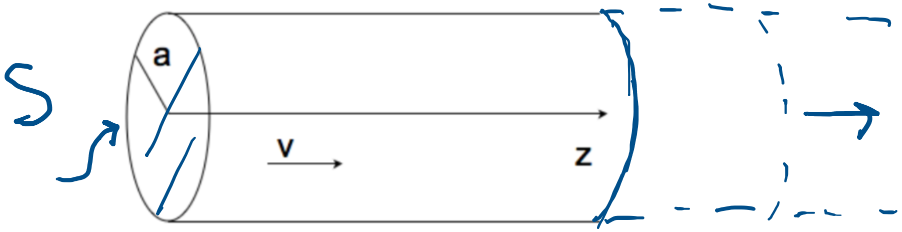
$r = a/2$

$$\phi(\vec{E}) = \int_{S_{Gauss}} \vec{E} \cdot \hat{n}\, ds = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \phi_{S_1}(\vec{E}) + \phi_{S_2}(\vec{E}) + \phi_{S_L}(\vec{E}) \Rightarrow \vec{E} = E_r \hat{r}$$

$$\phi(\vec{E}) = \int_{S_L} E_r \hat{r} \cdot \hat{n}\, ds = E_r \int_{S_L} ds = E_r \cdot 2\pi r \ell = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} =$$

$$= \frac{n q \pi r^2 \ell}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{n q r}{2 \varepsilon_0} \quad \text{per } r = a/2$$

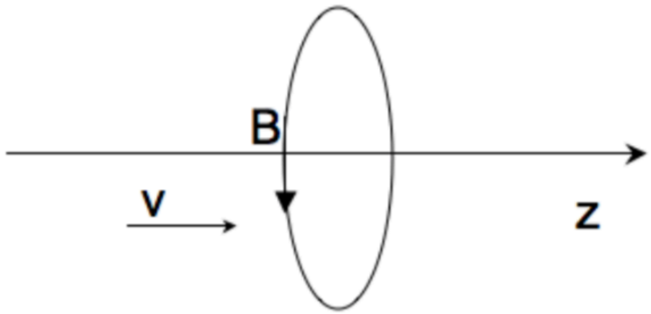
$$E_r(a/2) = \frac{n q a}{4 \varepsilon_0} = 45 \frac{V}{m} \qquad \vec{E}(a/2) = \frac{n q a}{4 \varepsilon_0} \hat{r}$$



3. Si calcoli il modulo del campo magnetico in un punto a distanza a/2 dall'asse del fascio, B(a/2), e all'esterno del fascio in un punto a distanza 2a dall'asse del fascio, B(2a):
B(a/2) = ...B(2a) = ...

$\vec{J} = nq\vec{v}$ $\vec{i}$

$i = J \cdot S = J\pi a^2$



Il fascio di protoni è equivalente a un filo percorso da corrente. Le linee di campo di induzione magnetica sono delle circonferenze con centro sull'asse z.

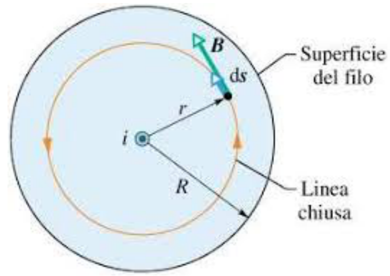
Poiché le cariche sono positive la corrente è nello stesso verso della velocità.

Quindi il verso delle linee di campo è antiorario rispetto all'asse z.

Il valore del campo si ottiene applicando il teorema di Ampere

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \, i_{conc} = \oint B \, \hat{\ell}\cdot d\ell\,\hat{\ell} = B \oint d\ell = B\cdot 2\pi r$$

linea di campo circonf. di raggio r



per $r < a$ la corrente concatenata è $J\pi r^2$

per cui $B(r) = \dfrac{\mu_0 J r}{2} = \mu_0 \dfrac{nqv}{2}\cdot r$

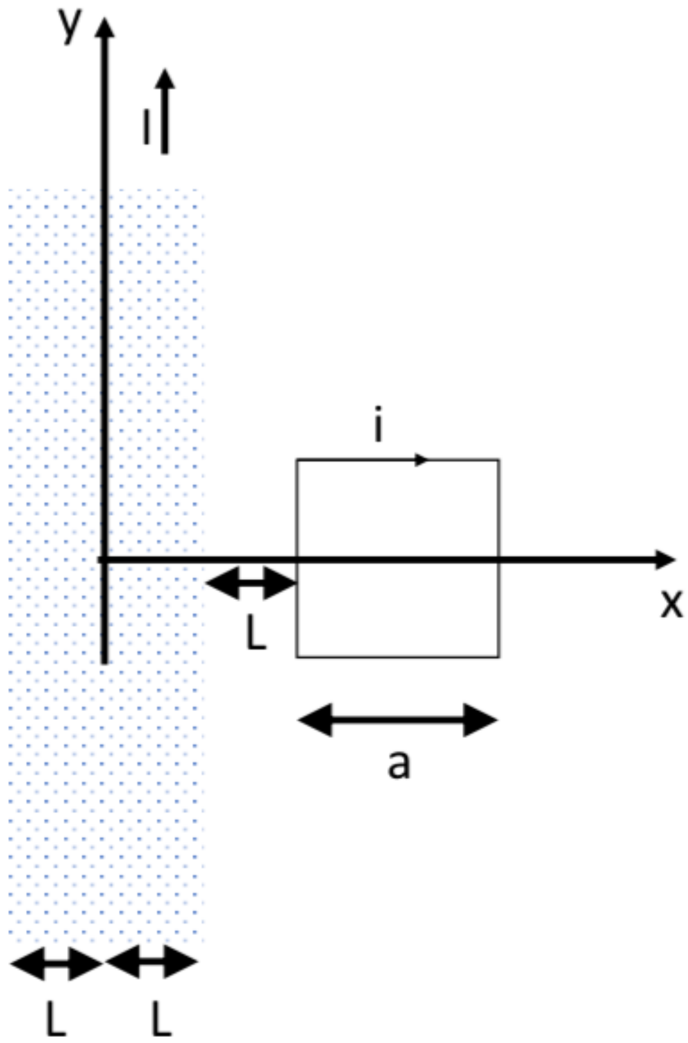
$\Rightarrow$ per $r = a/2$ otteniamo $B(a/2) = \dfrac{\mu_0 nqva}{4} = 1.5\times10^{-12}\,T$

per $r > a$ la corrente concatenata è $i_{conc} = J\pi a^2$

$B\cdot 2\pi r = \mu_0 J \pi a^2 \Rightarrow B(r) = \dfrac{\mu_0\, nqv\pi a^2}{2\pi r}$

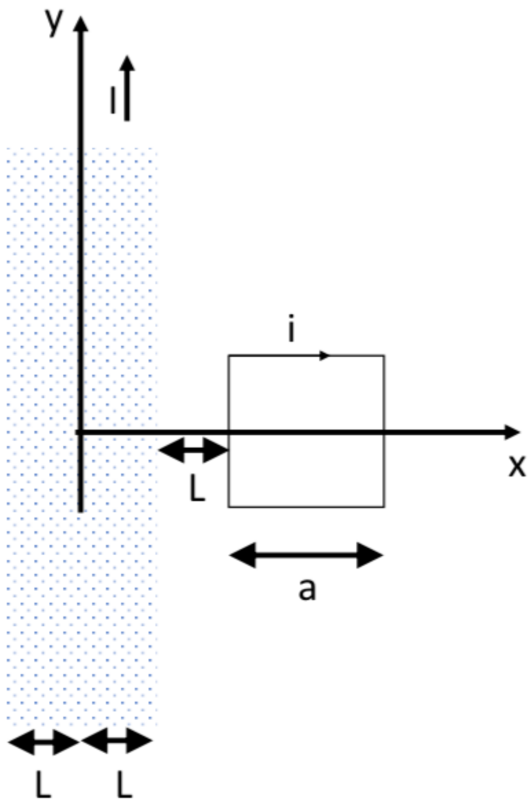
che per $r = 2a$ fornisce $B(2a) = \mu_0 \dfrac{nqva}{4} = 1.5\times10^{-12}\,T$

Esame di Fisica Generale del 13/1/2020



Consideriamo un nastro conduttore rettilineo, virtualmente infinito, di spessore trascurabile e larghezza 2L, percorso da una corrente costante ed uniforme I. Nel piano del nastro è posta una spira conduttrice rigida quadrata di lato a e distanza L dal bordo del nastro. Questa spira è percorsa da una corrente costante i. Tutto il sistema si trova nel vuoto. Vedi la figura per i versi delle correnti.

1. Esprimere il campo magnetico,B generato dal nastro a una distanza $x > L$ dall'asse del nastro sul piano individuato dal nastro e dalla spira.
$\vec{B}(x) = $ ....
2. Esprimere la forza totale $\vec{F}$ esercitata sulla spira dal nastro percorso da corrente in modulo direzione e verso in funzione di a, L, I, i.
$\vec{F} =$..
3. Calcolare il valore della forza nel caso in cui a=L, $\vec{F}_{a=L}$. $\overrightarrow{F_{a=L}}$=..
Dati: I=5A,i=100mA.



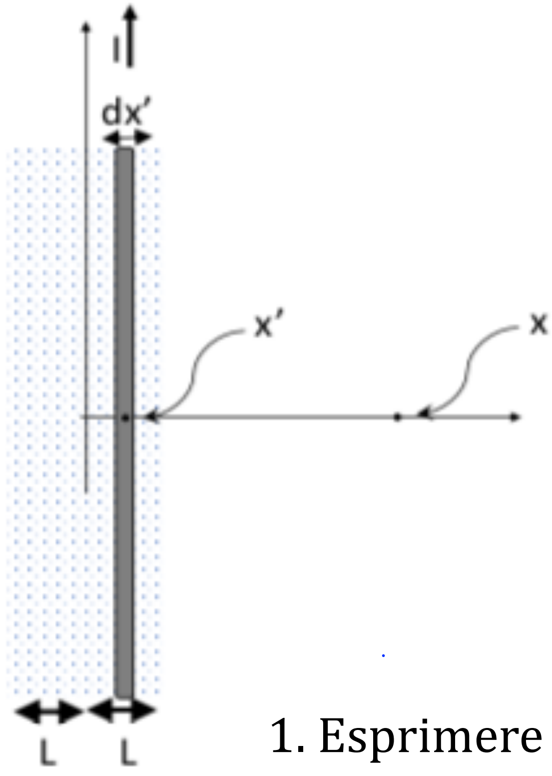


Fig.1

nastro conduttore rettilineo infinito
spessore trascurabile, larghezza 2L, percorso da corrente costante ed uniforme I.
Spira conduttrice rigida
quadrata di lato a e distanza L dal bordo del nastro, percorsa da corrente costante i.

Dati: I=5A,i=100mA.

1. Esprimere il campo magnetico,B generato dal nastro a una distanza x > L dall'asse del nastro sul piano individuato dal nastro e dalla spira.
$\vec{B}(x) =$ ....

Possiamo suddividere il nastro in tante strisce di larghezza dx' con ciascuna striscia attraversata dalla corrente dI dove

$$dI = \frac{I}{2L}\,dx' \quad \rightarrow \text{infatti} \quad \int_{-L}^{L} dI = I = \int_{-L}^{L} \frac{I}{2L}\,dx'$$

Ogni strisciolina di larghezza dx' contribuisce al campo magnetico nel punto x

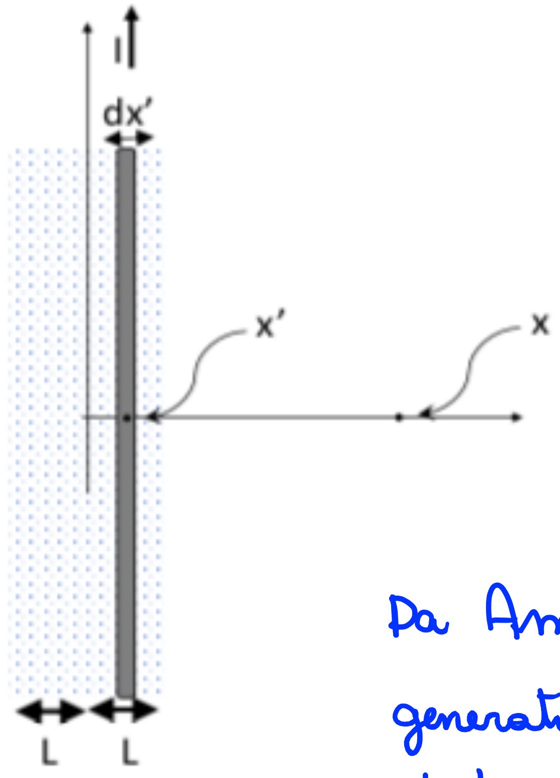


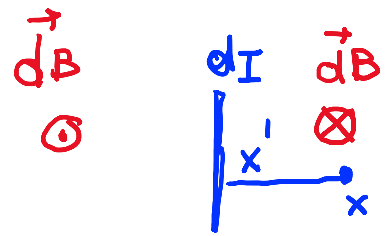
Fig.1

Ciascuna strisciolina può essere considerata come un filo percorso dalla corrente dI

Da Biòt-Savart per x > L il campo generato dal nastro può essere solo entrante nel foglio dato il verso della corrente I.

Da Ampere il modulo del campo $dB(x,x')$ generato dalla strisciolina in x' di larghezza dx' in un punto esterno a distanza x > L è dato da

$$\oint d\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (dI)_{conc} = dB \; 2\pi(x-x')$$



per $x > L$ $\quad dI_{conc} = dI$

$$\Rightarrow dB(dx';x) = \frac{\mu_0\, dI}{2\pi(x-x')}$$

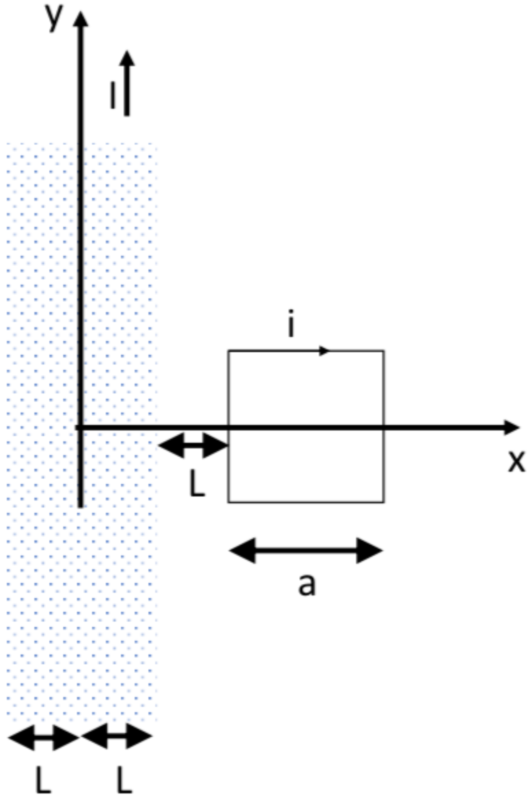
$$\Rightarrow dB(dx'; x) = \frac{\mu_0\, dI}{2\pi(x-x')}$$

$$B(x) = \int_{-L}^{L} dB(dx', x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{2L}\int_{-L}^{L}\frac{dx'}{x-x'}$$

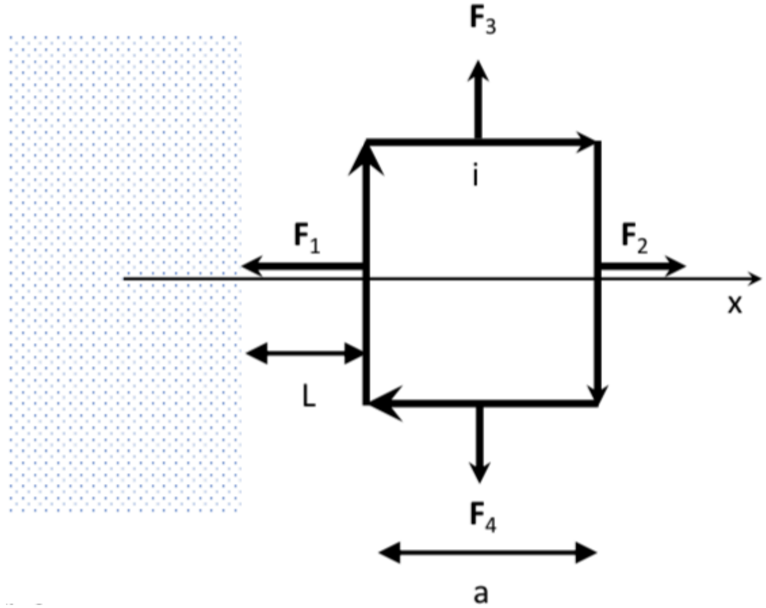
$$\left.\begin{array}{ll} u = x - x' & du = -dx' \\ \text{per } x' = L & u^f = x - L \\ \text{per } x' = -L & u^i = x + L \end{array}\right\}$$

$$B(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{2L}\int_{x+L}^{x-L}\frac{-du}{u} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{2L}\ln\frac{x+L}{x-L}$$

dalle quale otteniamo $\vec{B}(x) = -\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi L}\ln\frac{x+L}{x-L}\right)\cdot\hat{z}$



2. Esprimere la forza totale $\vec{F}$ esercitata sulla spira dal nastro percorso da corrente in modulo direzione e verso in funzione di a, L, I, i. $\vec{F}$=……………………………………………

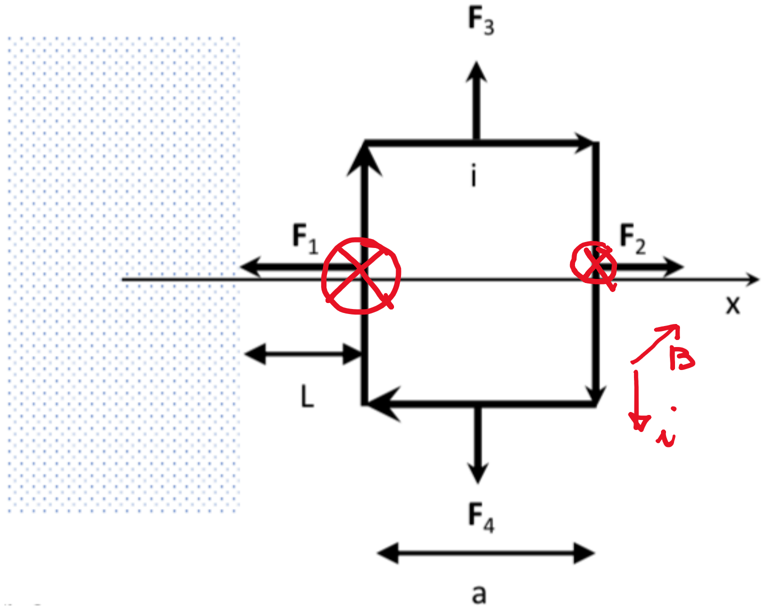


La forza magnetica risultante sulla spira è la somma delle forze magnetiche esercitate su ciascun lato della spira

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \sum_i i\, \vec{l}_i \wedge \vec{B}(x)$$

$\vec{F}_3 = -\vec{F}_4$ essendo $\forall$ valore di x $\vec{B}(x)$ identico mentre la corrente cambia verso

$$\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



$$\vec{F} = -i a B(2L)\hat{x} + i a B(2L+a)\hat{x}$$

modulo !

$$\vec{F} = i a \frac{\mu_0 I}{4\pi L}\left(-\ln\left(\frac{2L+L}{2L-L}\right) + \ln\frac{2L+a+L}{2L+a-L}\right)\hat{x}$$

$$= i a \frac{\mu_0 I}{4\pi L}\left(-\ln\frac{3L}{L} + \ln\frac{3L+a}{L+a}\right)\hat{x}$$

Nota: se $\vec{B}$ è uniforme su un circuito chiuso si ha:

$$\vec{F} = i\oint_{circuito} d\vec{L}\Lambda\vec{B} = i\left(\oint_{circuito} d\vec{L}\right)\Lambda\vec{B} = 0$$

in quanto l'integrale è identicamente nullo per definizione.

Calcolare il valore della forza nel caso in cui a=L, $\vec{F}_{a=L}.\overrightarrow{F}_{a=L}=$..................

$$\vec{F} = \frac{ia\mu_0 I}{4\pi L}\left(-\ln\frac{3L}{L} + \ln\frac{3L+a}{L+a}\right)\hat{x}$$

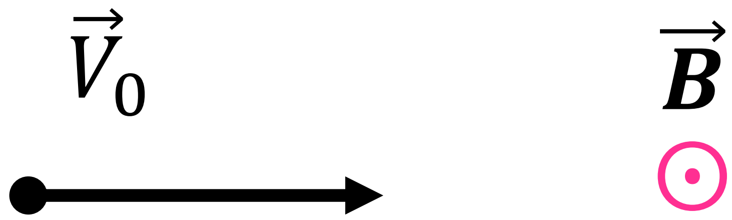
per $a = L$

$$\vec{F}_{a=L} = \frac{i\mu_0 I}{4\pi}\left(-\ln 3 + \ln 2\right)\hat{x}$$

$$\vec{F}_{a=L} = \frac{0.1 \times 4\pi \times 10^{-7}}{4\pi}\left(\ln 2 - \ln 3\right) = -2\times 10^{-8}\,\hat{x}\ \mathrm{N}$$

Moto di una particella carica in un campo di induzione magnetica uniforme e costante.

Un punto materiale di massa M e carica Q si muove nel vuoto in un campo di induzione magnetica uniforme e costante $\vec{B}$. Ad un dato istante di tempo la sua velocità ha modulo V_0 ed è perpendicolare al campo magnetico.

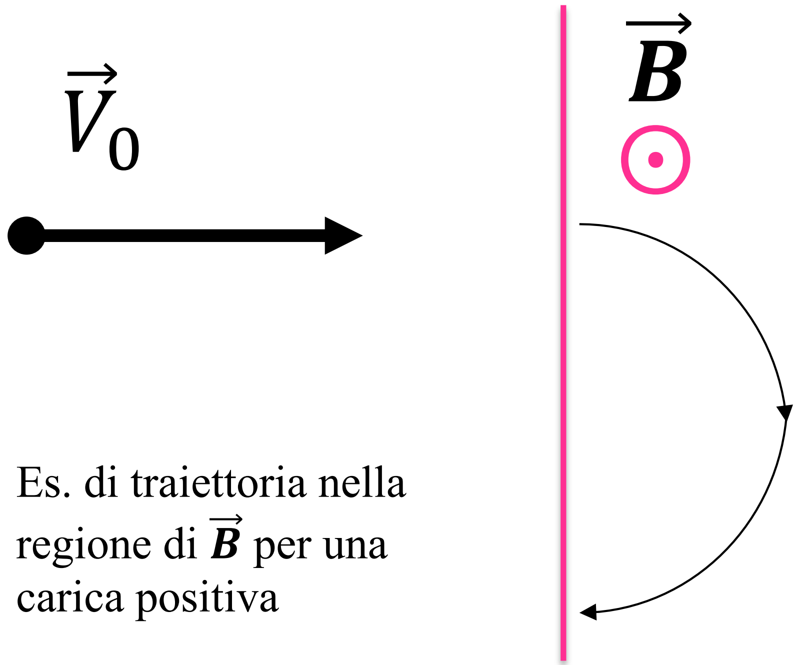


1) Dimostrare, trascurando la gravità, che la traiettoria è una circonferenza e calcolarne il raggio.
2) Effettuare i calcoli numerici se $B = 300$ G ed il punto materiale ha un'energia cinetica $K = 100\text{ eV} = 100 \times 1.6 \times 10^{-19}\text{J} = 1.6 \times 10^{-17}\text{J}$ ed è:
   a. un protone (H^+, $M = M_p = 1.68 \times 10^{-27}$kg);
   b. un atomo di elio ionizzato una volta ($He^+, M = 4M_p$);
   c. un atomo di ossigeno caricato negativamente una volta (O^-, $M = 16\, M_p$);
   d. un elettrone ($e^-, M = 9.1 \times 10^{-31}$ kg $= 5.45 \times 10^{-4}\, M_p$)

Soluzione.

1) Dimostrare, trascurando la gravità, che la traiettoria è una circonferenza e calcolarne il raggio.

L'unica forza a cui è soggetta la particella è la forza di Lorentz $\vec{F}_L$: poiché tale forza è per definizione perpendicolare alla direzione locale della velocità, il suo effetto è di curvare la traiettoria della particella, senza mutare il modulo della sua velocità.



Es. di traiettoria nella regione di $\vec{B}$ per una carica positiva

Poiché ogni singola variazione di traiettoria è perpendicolare alla traiettoria stessa, l'orbita della carica è necessariamente circolare (infatti se non lo fosse ci sarebbe una componente dello spostamento parallelo alla traiettoria e quindi una componente dell'accelerazione parallela alla velocità, in contrasto con la formula della forza di Lorentz).

ma anche $\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

$= \int q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}\, dt = 0 \rightarrow v_f = v_0\,!$

2) Effettuare i calcoli numerici se $B = 300$ G ed il punto materiale ha un'energia cinetica $K = 100\ \text{eV} = 100\times1.6\times10^{-19}\text{J} = 1.6\times10^{-17}\text{J}$ ed è:

a. un protone (H^+, $M = M_p = 1.68\times10^{-27}$kg);

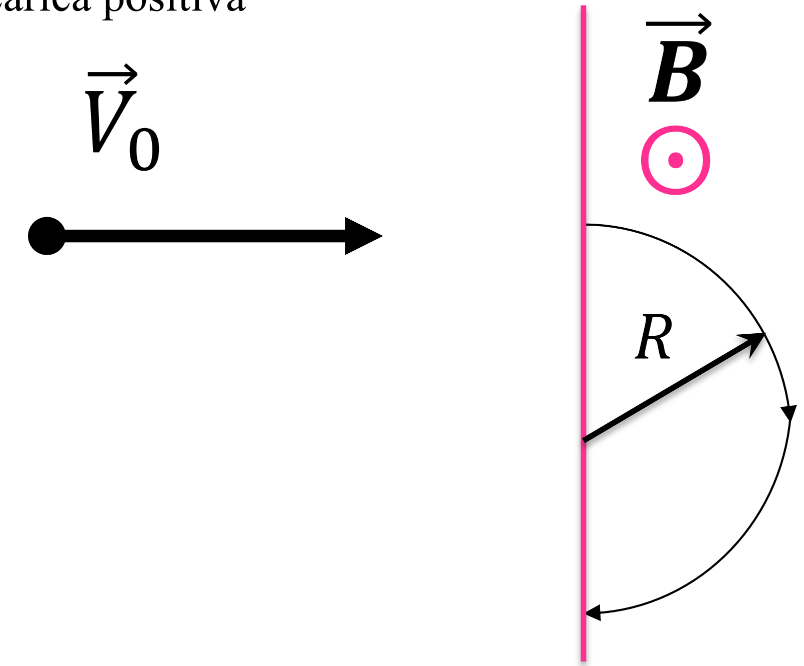
b. un atomo di elio ionizzato una volta (He^+, $M = 4M_p$);

c. un atomo di ossigeno caricato negativamente una volta (O^-, $M = 16\ M_p$);

d. un elettrone (e^-, $M = 9.1\times10^{-31}$ kg $= 5.45\times10^{-4}\ M_p$)

Il raggio dell'orbita R si ricava imponendo che la carica segua un'orbita circolare sotto l'azione del campo di induzione magnetica, ovvero che la forza di Lorentz produca sulla carica l'accelerazione centripeta necessaria affinché essa possa percorrere l'orbita. Indicando con Q il modulo della carica (1.6×10^{-19}C) di ciascun punto materiale

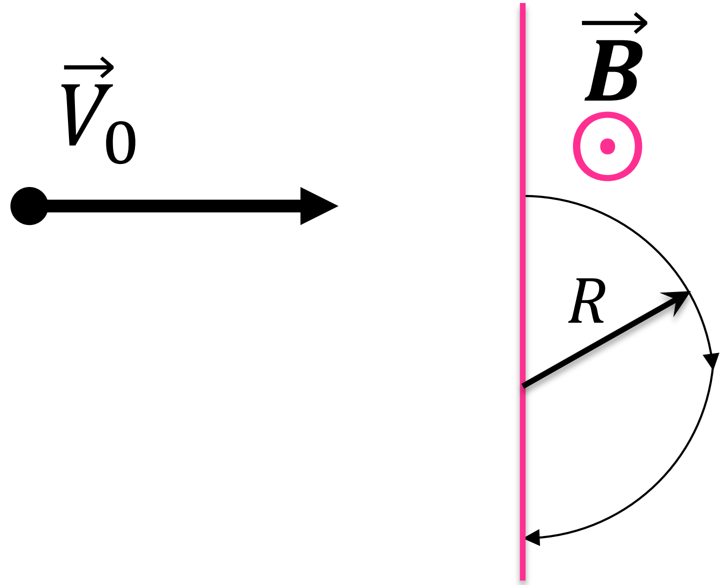
Es. di traiettoria nella regione di $\vec{\boldsymbol{B}}$ per una carica positiva



$$\left|\vec{F}_L\right| = Q\left|\vec{V}\wedge\vec{B}\right| = QV_0B = \frac{MV_0^2}{R}$$

$$\Longrightarrow R = \frac{MV_0}{QB} = \frac{M}{QB}\sqrt{\frac{2K}{M}} = \frac{\sqrt{2KM}}{QB}$$

Poiché tutte le particelle hanno la stessa energia cinetica e la stessa carica in modulo, eguale a quella del protone, chiamiamo $M_\alpha = \alpha M_p$ la massa dell'α-esima particella, cioè misuriamo tutte le masse in termini della massa del protone.



$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{2KM}}{QB}$$

Otteniamo quindi nel Sistema Internazionale SI:

$$R = \frac{\sqrt{2\alpha \times 100 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1.67 \times 10^{-27}}}{1.6 \times 10^{-19} \times 300 \times 10^{-4}} \text{ m}$$

$$= 4.8 \times 10^{-2} \sqrt{\alpha} \text{ m}$$

Si ottiene quindi:

a. $\alpha = 1 \quad \Rightarrow R = 4.8 \times 10^{-2} \text{m} = 4.8 \text{ cm}$

b. $\alpha = 4 \quad \Rightarrow R = 9.7 \times 10^{-2} \text{m} = 9.7 \text{ cm}$

c. $\alpha = 16 \quad \Rightarrow R = 19.3 \times 10^{-2} \text{m} = 19.3 \text{ cm}$

d. $\alpha = 5.45 \times 10^{-4} \quad \Rightarrow R = 1.1 \times 10^{-3} \text{m} = 1.1 \text{ mm}$

a. un protone (H^+, $M = M_p = 1.68 \times 10^{-27}$kg);

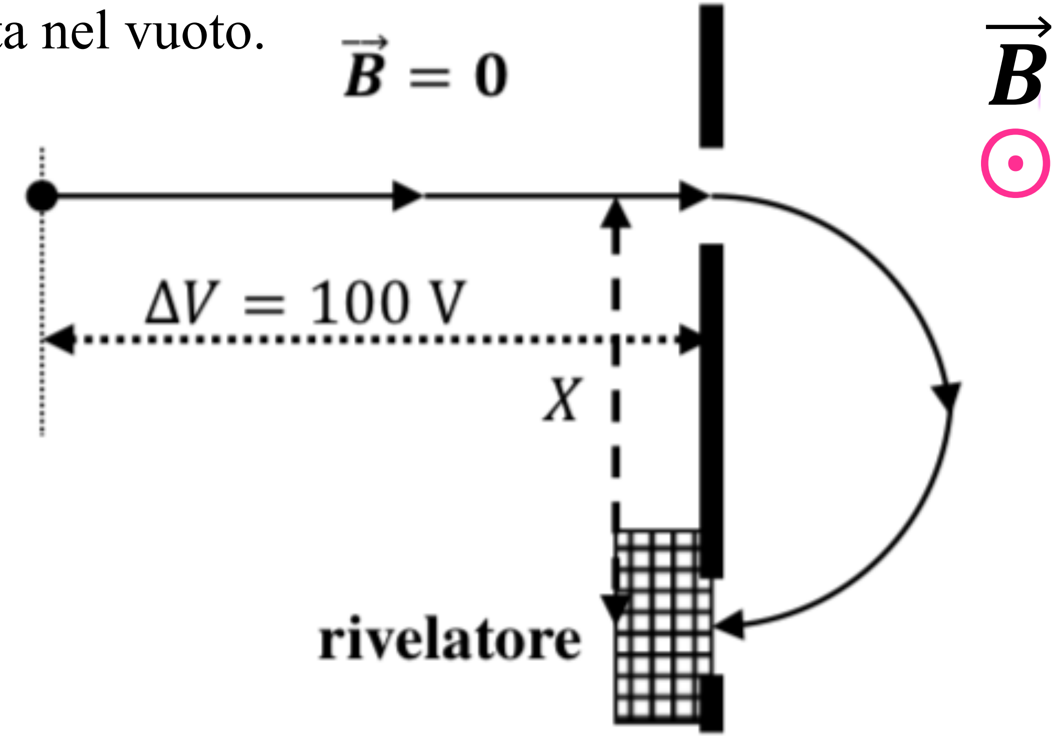
b. un atomo di elio ionizzato una volta (He^+, $M = 4M_p$);

c. un atomo di ossigeno caricato negativamente una volta (O^-, $M = 16\ M_p$);

d. un elettrone (e^-, $M = 9.1 \times 10^{-31}$ kg $= 5.45 \times 10^{-4}\ M_p$)

Applicazione importante: il selettore di ioni.

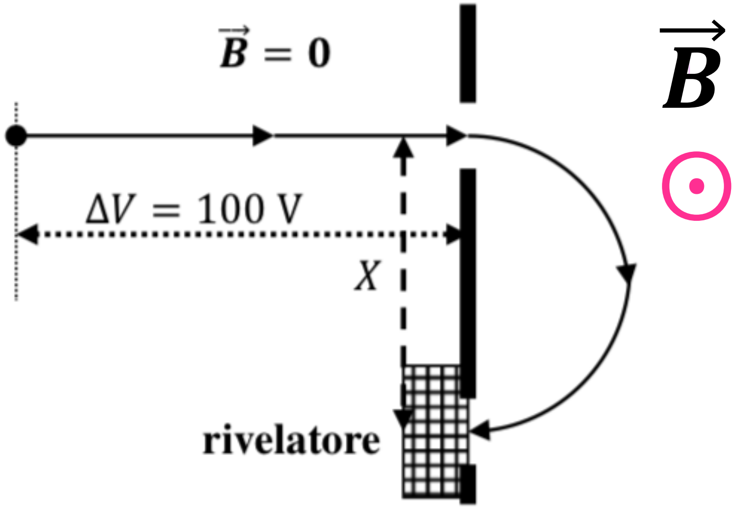
È un'apparecchiatura che utilizza il diverso raggio di curvatura di particelle con la stessa carica Q, ma diversa massa, in un campo uniforme $\vec{B}$. L'idea è di misurare la distanza X in figura, per misurare la massa di uno ione. Si assuma $B = 300$ G e $\Delta V = 100$ V e si indichi con W la larghezza del rivelatore. Tutti gli ioni hanno la stessa energia cinetica, e la misura è effettuata nel vuoto.



1) Si calcoli la massa dello ione in funzione di X e si specifichino le dimensioni massime del rivelatore per poter separare H^+ da D^+ oppure C^+_{12} da C^+_{14} (quest'ultima misura è la base per la tecnica di datazione dei reperti con il Carbonio).

1) Si calcoli la massa dello ione in funzione di X e si specifichino le dimensioni massime del rivelatore per poter separare H^+ da D^+ oppure C^+_{12} da C^+_{14} (quest'ultima misura è la base per la tecnica di datazione dei reperti con il Carbonio).

$$K = Q\Delta V = 100\ eV$$



Come si evince dalla figura, la distanza X è pari al doppio del raggio di curvatura della traiettoria, cioè al diametro di curvatura.

In base alla formula ricavata nell'esercizio precedente otteniamo:

$$X = 2R = 2\frac{\sqrt{2KM}}{QB} = 2\frac{\sqrt{2\alpha K M_p}}{QB} \Longrightarrow M = \frac{(QBX)^2}{8K}$$

Pertanto:

$H^+: \alpha = 1 \quad \Longrightarrow X = 9.6$ cm

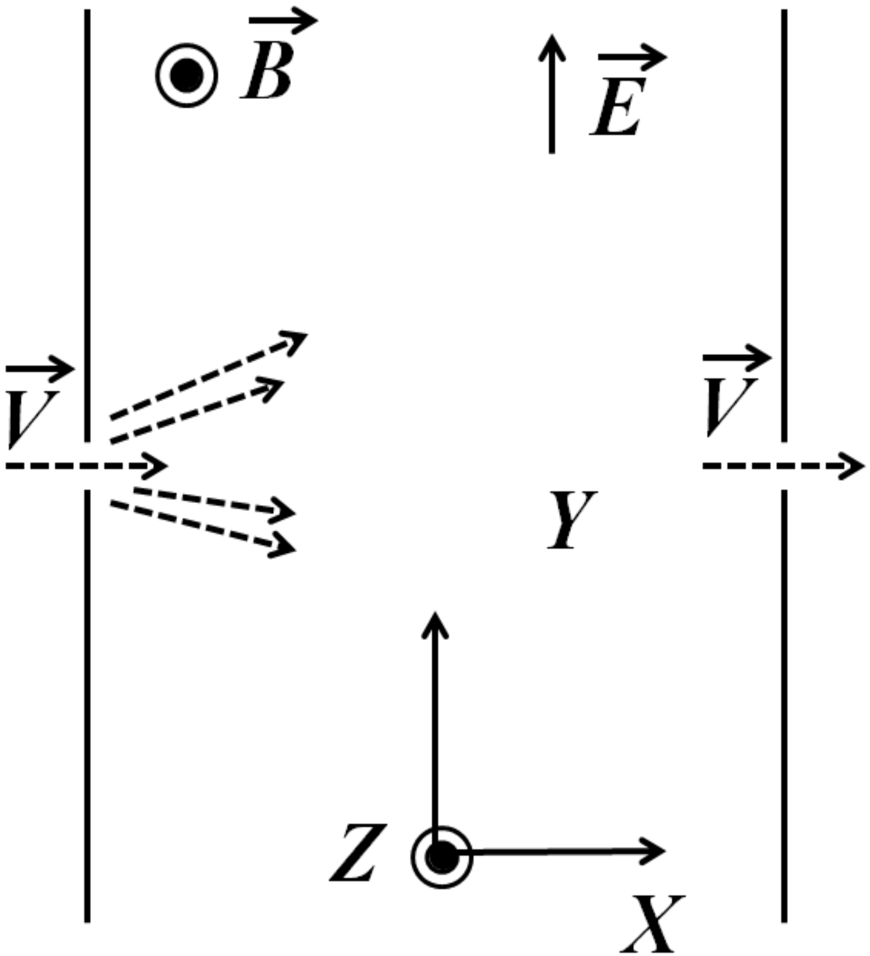
$D^+: \alpha = 2 \quad \Longrightarrow X = 13.6$ cm

$C^+_{12}: \alpha = 12 \quad \Longrightarrow X = 33.5$ cm

$C^+_{14}: \alpha = 14 \quad \Longrightarrow X = 36.1$ cm

Per poter separare le specie C^+_{12} e C^+_{14} è quindi necessaria una dimensione del rivelatore non superiore a $(36.1 - 33.5)$ cm $= 2.6$ cm

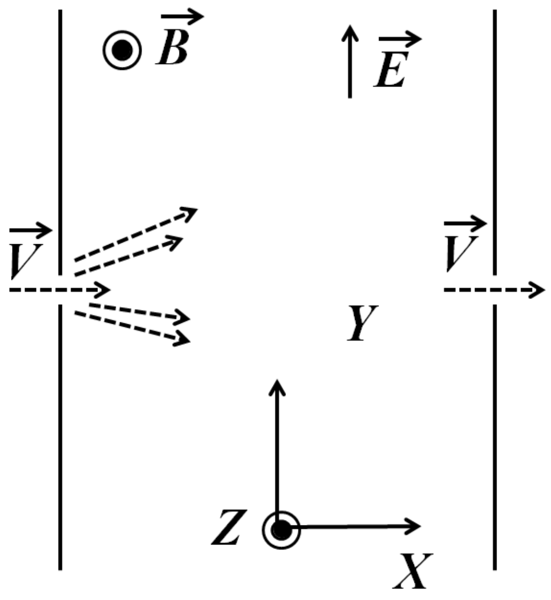
Esercizio 1): il selettore di velocità.



Un'altra applicazione dell'orbita circolare percorsa da una particella carica sotto l'azione di un campo di induzione magnetica uniforme $\vec{B}$ è il <u>selettore di velocità</u>, un'apparecchiatura che consente di isolare particelle cariche con una velocità definita.

L'idea consiste nell'utilizzare un campo $\vec{B}$ ed uno $\vec{E}$, ortogonali fra loro e scelti opportunamente. La particella penetra nella regione dello spazio sede dei campi attraverso la fessura a sinistra in figura e prosegue il suo moto all'interno di tale regione, fino a raggiungere lo schermo assorbente a destra. La particella può proseguire oltre solo se la sua traiettoria le consente di arrivare sulla fessura a destra in direzione perpendicolare allo schermo.

1) Quale è la relazione fra i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ e la velocità $\vec{V}$ che rende possibile l'attraversamento della regione di spazio compresa fra i due schermi ?



1) Quale è la relazione fra i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ e la velocità $\vec{V}$ che rende possibile l'attraversamento della regione di spazio compresa fra i due schermi ?

Soluzione.

Poiché le due fessure sono allineate lungo l'asse X, la particella raggiungerà la fessura a destra se, entrando da quella a sinistra perpendicolarmente allo schermo, manterrà la sua traiettoria imperturbata, cioè se viaggerà in linea retta.

Affinché ciò possa accadere è necessario che l'accelerazione della particella sia sempre nulla e quindi che la forza agente su di essa sia zero.

La forza totale è la somma della forza dovuta al campo elettrico e di quella di Lorentz, per cui:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_L = q\left(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}\right) = 0 \iff \vec{E} = -\left(\vec{V} \wedge \vec{B}\right)$$

Poiché il campo $\vec{E}$ è diretto lungo Y ed il campo $\vec{B}$ lungo Z, la forza nella posizione della fessura di ingresso su una particella con velocità diretta lungo l'asse X e di modulo $V = E/B$ è zero.

Essendo la forza e quindi l'accelerazione nulla la particella si muoverà ancora in direzione X, con la stessa velocità, per cui in un istante arbitrario successivo qualsiasi la forza sarà sempre nulla.

In definitiva la particella si muoverà di moto rettilineo uniforme nel verso positivo dell'asse X e raggiungerà quindi la fessura a destra in direzione perpendicolare allo schermo, come richiesto.

Naturalmente la selezione non è "perfetta" a causa di:
1) dimensioni finite delle fessure;
2) non uniformità dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$;
3) non perfetta ortogonalità fra i campi e fra i campi e la velocità.

backup