Soluzioni prova scritta

Ingegneria Informatica 09/09/2025

Esercizio 1

Il primo quesito consiste in 2 **domande a risposta aperta** da 1 punto ciascuna. Per i quesiti 2, 3 e 4 ci si deve esprimere sulla **correttezza o falsità di 6 affermazioni**. Si ottengono 0, 1 e 2 punti in base al numero di risposte corrette, errori o risposte in bianco, secondo lo schema:

6 corrette → 2 punti
5 corrette + 1 errore → 1 punto
5 corrette + 1 bianca → 1 punto
4 corrette + 2 bianche → 1 punto
Tutti gli altri casi → 0 punti

1. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Si consideri l'approssimazione di

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$

mediante la **formula generalizzata dei trapezi**, con intervalli di uguale ampiezza.
Il valore ottenuto con 2 intervalli è $\boxed{\frac{17}{24}}$

Il valore ottenuto con 3 intervalli è $\boxed{\frac{7}{10}}$

2. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $u \in \mathbb{C}^n$ e $v \in \mathbb{C}^n$. Si indichino con $\boxed{\text{V}}$ le quantità il cui calcolo (con il metodo più efficiente possibile e seguendo le parentesi se presenti) abbia un costo asintotico di $\mathcal{O}(n^2)$ e si indichino con $\boxed{\text{F}}$ le quantità che richiedono un costo minore o maggiore.

V F $A \cdot v$

V **F** $A \cdot (u \cdot v^T)$

V F $(A \cdot u) \cdot v^T$

V F $||A||_1$.

V F $||A||_\infty$.

– N.B. le soluzioni qui riportate sono in forma schematica e concisa. Quando si compila la prova d'esame è necessario fornire **chiare giustificazioni di tutti i passaggi risolutivi degli esercizi 2, 3 e 4**.

V F traccia(A).

3. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua ed $\alpha \in \mathbb{R}$ una radice semplice di f.

V F $f(\alpha) = \alpha$.

V F $\lim_{x\to\alpha} \frac{|f(x)|}{|x-\alpha|} = 0$.

V F $\lim_{x\to\alpha} \frac{|f(x)|}{|x-\alpha|^2} = \infty$.

V F $f(\alpha) \neq 0$.

V F Se $f \in C^1(\mathbb{R})$ allora $f'(\alpha) \neq 0$.

V F Se $f \in C^2(\mathbb{R})$ allora $f'(\alpha) = 0$ e $f''(\alpha) \neq 0$.

4. $\boxed{\text{2 Punti}}$ Siano $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $c \in \mathbb{C}^n$ e $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ e si consideri il metodo iterativo

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + c,$$

con vettore di partenza $x^{(0)}$.

V F Il metodo è convergente se e solo se $||H||_2 < 1$.

V F Il metodo è convergente se e solo se il raggio spettrale di H è minore di 1.

V F Affinchè il metodo sia detto convergente la successione $x^{(k)}$ deve convergere per ogni possibile scelta del punto iniziale $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$.

V F Se il metodo converge e $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \in \mathbb{C}^n$, allora $Hx^* + c = 0$.

V F Se il metodo converge e $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \in \mathbb{C}^n$, allora $Hx^* + c = x^*$.

V F Se $|\text{traccia}(H)| > 1$ allora il metodo è sicuramente non convergente.

Esercizio 2

Il metodo delle potenze è un metodo iterativo per il calcolo approssimato dell'autovalore di modulo massimo λ_1 di una matrice A, basato sulla seguente iterazione

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= A \cdot z^{(k-1)} \\ \lambda^{(k)} &= [z^{(k-1)}]^H y^{(k)} \\ z^{(k)} &= y^{(k)}/||y^{(k)}||_2, \end{aligned}$$

in cui la successione $\lambda^{(k)}$ converge a λ_1 e $z^{(k)}$ ad un autovettore associato a λ_1.

$\boxed{\text{5 Punti}}$

Si implementi, una funzione Matlab `[lam, zvec] = potenze(A, z0, tol, maxit)` che prende in ingresso

- una matrice quadrata $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,
- un vettore di partenza $z_0 \in \mathbb{C}^n$ con norma unitaria,
- una tolleranza `tol` $\in \mathbb{R}^+$
- un numero massimo di iterazioni `maxit` $\in \mathbb{N}$

ed esegue il metodo delle potenze fino a che non si verifica il criterio di arresto

$$||Az^{(k)} - \lambda^{(k)} z^{(k)}||_2 \leq \texttt{tol},$$

o se il numero di iterazioni supera `maxit`. La funzione restituisce:

- l'approssimazione `lam` di λ_1,
- una matrice `zvec` che ha come colonna k-esima il vettore $z^{(k)}$.

$\boxed{\text{3 Punti}}$

Si implementi una funzione Matlab `[lam, zvec] = potenze_inverse(A, z0, maxit)` che esegua `maxit` iterazioni (si ignori il criterio di arresto) del metodo delle potenze inverse per calcolare un'approssimazione dell'autovalore più piccolo in modulo della matrice A e un suo corrispondente autovettore. Gli output della funzione (`lam` e `zvec`) sono definiti analogamente al punto precedente come l'approssimazione dell'autovalore piú piccolo di A e la matrice che ha per colonne la successione delle approssimazioni del corrispondente autovettore.

```
function [lam, zvec] = potenze(A, z0, tol, maxit)
    n = length(z0);
    zvec = zeros(n, maxit);
    for j = 1:maxit
        y = A * z0;
        lam = z0' * y;
        z = y / norm(y);
        zvec(:, j) = z;
        if norm(A*z - lam*z) < tol
             break
        end
        z0 = z;
    end
    zvec = zvec(:, 1:j);
end

function [lam, zvec] = potenze_inverse(A, z0, maxit)
    n = length(z0);
    zvec = zeros(n, maxit);
    [L, U] = lu(A);
    for j = 1:maxit
        y = U \ (L \ z0);
        lam = z0' * y;
        z = y / norm(y);
        zvec(:, j) = z;
        z0 = z;
    end
    lam = 1 / lam;
end
```

Esercizio 3

Si consideri il calcolo in aritmetica floating point della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^2}.$$

(i) $\boxed{\text{3 Punti}}$ Si fornisca un algoritmo per il calcolo di $f(x, y)$ che impieghi **esattamente** 4 **operazioni aritmetiche**.

(ii) $\boxed{\text{5 Punti}}$ Si fornisca l'espressione dell'errore relativo algoritmico ε_a per l'algoritmo del punto (ii).

(i)

$$\begin{aligned} r_1 &\leftarrow x/y \\ r_2 &\leftarrow r_1 * x \\ r_3 &\leftarrow r_1/y \\ r_4 &\leftarrow r_2 + r_3 \end{aligned}$$

(ii) $\varepsilon_a = \varepsilon_4 + \frac{xy}{xy+1}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{xy+1}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_4 + \frac{xy}{xy+1}\varepsilon_2 + \frac{1}{xy+1}\varepsilon_3$, dove ε_i indica l'errore di troncamento relativo, nel calcolo di r_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

Esercizio 4

(i) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Data la tabella di valori

x	0	2	1	-1
$f(x)$	-1	13	3α	α

si discuta al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il grado del polinomio di interpolazione passante per questi punti.

(ii) $\boxed{\text{4 Punti}}$ Data la tabella di valori

x	0	-1	1	2
$f(x)$	-1	\	\	\
$f'(x)$	\	4.5	3.5	12

si calcoli il polinomio $p_3(x)$, di grado al più 3, che verifica $p(x_i) = f(x_i)$ e $p'(x_i) = f'(x_i)$ in corrispondenza dei nodi x_i per cui i valori $f(x_i)$ o $f'(x_i)$ sono noti.

$\boxed{(i)}$ Dal quadro delle differenze divise si ricava che per $\alpha = 1$ si ha un polinomio di interpolazione di grado 2. Per tutti gli altri valori reali di α si hanno polinomi di grado 3.

$\boxed{(ii)}$ Risolvendo il sistema lineare ottenuto imponendo le varie condizioni si ottiene

$$p_3(x) = x^3 - \frac{x^2}{4} + x - 1.$$