Analisi matematica I - Esami

Ingegneria Informatica UNIPI, Prof. Luigi Carlo Berselli

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in [0, 2\pi] : \ \sin(x) < \frac{1}{2}\}$$
valgono

   A: N.A. B: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ C: $\{\pi/6, N.E., 5\pi/6, N.E.\}$ D: $\{0, 0, 2\pi, 2\pi\}$ E: $\{0, 0, \pi/6, N.E.\}$

2. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|(x^2 + 1)$ è

   A: monotona crescente B: iniettiva C: surgettiva D: derivabile ovunque E: N.A.

3. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ è

   A: $\frac{1}{\cos(x)}$ B: N.A. C: $e^x - \sin(x)$ D: $\log(\tan(x/2))$ E: N.E.

4. La funzione $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi\, e^x}{2}\right) & \text{per } x < 0 \\ x & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: è continua e derivabile. B: è derivabile, ma non continua. C: non è né continua né derivabile. D: N.A. E: è continua, ma non derivabile.

5. Modulo e argomento del numero complesso $z = (\sqrt{2}i)^{13}$ sono

   A: $(64\sqrt{2}, -\pi/2)$ B: N.A. C: $(2^{13/2}, -\pi/2)$ D: $(64\sqrt{2}, \pi/2)$ E: $(2^{13}, \pi/2)$

6. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(3x)$ nel punto $x_0 = \pi/12$ vale

   A: $1 + x + x^2$ B: N.A. C: $\frac{3\left(x - \frac{\pi}{12}\right)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ D: $1 + 2x - \frac{\pi}{12}$ E: $1 + \sin(3x)(x - \pi/12)$

7. Data $f(x) = x^{e^x}$. Allora $f'(1)$ è uguale a

   A: $\log(3e)$ B: N.A. C: e^3 D: N.E. E: e

8. L'integrale
$$\int_{-1}^{1} |x|\, e^x \, dx$$
vale

   A: $\sqrt{e} + 1$ B: $2/e$ C: $\frac{2(e-1)}{e}$ D: N.A. E: 0

9. Il limite
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(e^{x^2})}{\sin^2(x)}$$
vale

   A: N.A. B: 0 C: 1 D: $+\infty$ E: N.E.

10. La serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2^\alpha n}$$
converge per

    A: $3 < \alpha < \pi$ B: $\alpha \geq 1$ C: $\alpha > 1$ D: N.A. E: $\alpha > 0$

CODICE=514511

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 514511

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	●	○
4	○	○	●	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	●	○	○
7	○	○	○	○	●
8	○	○	●	○	○
9	○	○	●	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=514511

PARTE A

1. Data $f(x) = 3(\log(3x))$. Allora $f'(\mathrm{e})$ è uguale a

   A: N.A. B: $\log(3\mathrm{e})$ C: $\frac{3}{\mathrm{e}}$ D: π E: e^3

2. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^3+\cos(x))}{3\log(x)}$$
   vale

   A: N.E. B: $+\infty$ C: 1 D: 0 E: N.A.

3. Modulo e argomento del numero complesso $z = i^{43}$ sono

   A: $(2, 43\pi)$ B: N.A. C: $(1, 3\pi/2)$ D: $(1, 4\pi/3)$ E: $(2, 2\pi/3)$

4. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(2x)$ nel punto $x_0 = \pi/4$ vale

   A: $1 + 2x - \frac{\pi}{2}$ B: $1 + x + x^2$ C: N.A. D: 1 E: $1 + \sin(2x)(x - \pi/4)$

5. La funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < 0 \\ \cos(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: è derivabile, ma non continua. B: è continua e derivabile. C: non è né continua né derivabile. D: N.A. E: è continua, ma non derivabile.

6. La serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=41}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$
   converge per

   A: $3 < \alpha < \pi$ B: N.A. C: $\alpha > 1$ D: $\alpha > 0$ E: $\alpha \geq 1$

7. Le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = \sin(t)$ sono

   A: $t + c_1\mathrm{e}^t + c_2\sin(t)$ B: N.E. C: $-\cos(t) + c$ D: $\sin(t) + \mathrm{e}^t + c$ E: N.A.

8. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) < 0\}$$
   valgono

   A: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$ D: $\{0, 0, \pi, \pi\}$ E: $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$

9. L'integrale
$$\int_{-1}^{2} |x|\, dx$$
   vale

   A: N.A. B: $\sqrt{2}$ C: $3/2$ D: 0 E: $5/2$

10. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x + 1|$ è

    A: surgettiva B: derivabile ovunque C: iniettiva D: N.A. E: monotona crescente

CODICE=689194

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

12 gennaio 2009

(Cognome) ____________________ (Nome) ____________________ (Numero di matricola) ____________

CODICE = 689194

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	●	○	○
3	○	○	●	○	○
4	○	○	○	●	○
5	○	●	○	○	○
6	○	○	●	○	○
7	○	○	●	○	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	●	○

CODICE=689194

PARTE A

1. La serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^{\alpha}}$$
converge per

   A: $\alpha \geq 1$ B: $\alpha > 0$ C: N.A. D: $\alpha > 1$ E: $3 < \alpha < \pi$

2. L'integrale
$$\left| \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{|x|}\, dx \right|$$
vale

   A: $2(1-\mathrm{e})$ B: $\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}$ C: N.A. D: $2(\mathrm{e}-1)$ E: $|\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}|$

3. Una primitiva di $f(x) = \log(2x)$ è

   A: $x - x\log(2x)$ B: $\log(3) + x\log(x) + (\log(2)-1)x$ C: $x + x^2\log(2x)$ D: N.A. E: N.E.

4. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 < 0\}$$
valgono

   A: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{1,1,2,2\}$ D: $\{1, N.E., 2, N.E.\}$ E: $\{0,0,1,1\}$

5. Data $f(x) = 5^{\frac{x}{5}}$. Allora $f'(5)$ è uguale a

   A: N.A. B: $\log(5)$ C: 1 D: 0 E: N.E.

6. La parte reale del numero complesso $z = \frac{2-i}{3+i}$ è

   A: $-\pi/4$ B: $1/4$ C: 0 D: $-1/2$ E: N.A.

7. La funzione $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log_2(x)$ è

   A: sempre positiva B: sempre negativa C: limitata inferiormente D: N.A. E: iniettiva

8. Il polinomio di Taylor di grado 1 relativo al punto $x_0 = \sqrt{\pi}$ della funzione $y(x) = \sin(x^2)$ vale

   A: $2\pi - 2\sqrt{\pi}x$ B: $1 - 2\pi x$ C: $1 - 2\sqrt{\pi}x - x^2$ D: $(x-\pi/2)^2$ E: N.A.

9. La funzione $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{per } x \geq 0 \\ \cos(x+\pi/2) & \text{per } x < 0 \end{cases}$

   A: N.A. B: è continua e derivabile. C: non è né continua né derivabile. D: è continua, ma non derivabile. E: è derivabile, ma non continua.

10. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan(x) - \pi/2\right)$$
vale

    A: N.A. B: -1 C: $+\infty$ D: 0 E: N.E.

CODICE=441380

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 giugno 2009

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 441380

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	○	●	○
3	○	●	○	○	○
4	○	○	○	●	○
5	○	●	○	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	○	●
8	●	○	○	○	○
9	○	○	○	●	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=441380

PARTE A

1. Data $f(x) = \sin(\pi x)$. Allora $f'(2/3)$ è uguale a

   A: $\frac{\pi}{2}$ B: $-\frac{\pi}{2}$ C: -1 D: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E: N.A.

2. La serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(n+3)}{(n+4)^{\alpha}}$$
   converge per

   A: $\alpha > 0$ B: N.A. C: $1 < \alpha \leq 2$ D: $\alpha \geq 1$ E: $\alpha > 1$

3. L'integrale
$$\int_{-1}^{2} |-x^3|\, dx$$
   vale

   A: 0 B: N.A. C: $\frac{\pi^4 - 1}{4}$ D: $\frac{17}{4}$ E: $\frac{15}{4}$

4. Il polinomio di Taylor di grado 1 relativo al punto $x_0 = \mathrm{e}$ della funzione $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ vale

   A: $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^2} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{e}^2 x}(x - \mathrm{e})$ B: $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^2} - \mathrm{e}^{1+\mathrm{e}^2}(x + \mathrm{e})$ C: N.A. D: $1 + x$ E: $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^2} + 2\mathrm{e}^{1+\mathrm{e}^2}(x - \mathrm{e})$

5. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |\sin(x)|$ è

   A: monotona crescente B: iniettiva C: sempre non negativa D: N.A. E: surgettiva

6. Modulo e argomento del numero complesso $\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$ sono

   A: N.A. B: $(1, \pi/6)$ C: $(1, 4\pi/3)$ D: $(2, 5\pi/3)$ E: $(1, -\pi/3)$

7. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x) \geq \mathrm{e}\}$$
   valgono

   A: $\{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}, \mathrm{e}^{\mathrm{e}}, +\infty, N.E.\}$ B: $\{0, N.E., \mathrm{e}^{\mathrm{e}}, \mathrm{e}^{\mathrm{e}}\}$ C: N.A. D: $\{\mathrm{e}, N.E., +\infty, N.E.\}$ E: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$

8. Una primitiva della funzione $x(t) = t\mathrm{e}^{2t}$ è

   A: $\sin(t) + i\cos(t)$ B: $\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t}(2t - 1) - \sqrt{\pi}$ C: $\mathrm{e}^t(t - 1)$ D: N.A. E: $\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{t^2}$

9. Il limite
$$\lim_{z \to 0} \frac{\log(1 + z^2)}{1 - \cos(z)}$$
   vale

   A: $+\infty$ B: 0 C: N.A. D: N.E. E: 1

10. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{per } x < 0 \\ -\sin(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

    A: è derivabile, ma non continua. B: è continua, ma non derivabile. C: non è né continua né derivabile. D: N.A. E: è continua e derivabile.

CODICE=948313

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 948313

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	●	○	○
6	○	○	○	○	●
7	●	○	○	○	○
8	○	●	○	○	○
9	○	○	●	○	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=948313

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{e^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}\}$$
valgono
A: N.A. B: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$ C: $\{0, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{0, N.E., +\infty, N.E.\}$ E: $\{1, 1, e, e\}$

2. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2} e^{\log(x)}}{e^{x^3}}$$
vale
A: 0 B: N.E. C: N.A. D: e E: $+\infty$

3. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = e^x - e^{-x}$ è
A: N.A. B: $e^x - x$ C: $x - 1$ D: N.E. E: $e^x + e^{-x} + 2^4$

4. L'argomento di $z = \sqrt[3]{\pi^3 i}$ è
A: $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ B: N.A. C: $\pi/2$ e $-\pi/2$ D: $\frac{3\pi}{2} + 6k\pi$ E: $\frac{\pi}{3}$

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, allora la serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \alpha^2 n}{n^2}$$
converge per
A: $\alpha = 0$ B: $\alpha > 1$ C: $-1 < \alpha \leq 1$ D: $\alpha \neq 1$ E: N.A.

6. Data $f(x) = \log(\pi x) - \log(x)$. Allora $f'(\pi)$ è uguale a
A: e^π B: N.A. C: $\log(\pi)$ D: N.E. E: 0

7. Sia $f(x) = \frac{x}{|x|}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, allora l'integrale
$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$$
vale
A: $N.E.$ B: N.A. C: -1 D: 1 E: 0

8. La funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ è
A: iniettiva B: surgettiva C: pari D: N.A. E: monotona crescente

9. La retta tangente al grafico di $y(x) = \cos(3x)$ nel punto $x_0 = \pi/6$ vale
A: $3\cos(3x)(x - \pi/6)$ B: N.A. C: $-3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ D: $1 - 3 - \frac{\pi}{12}$ E: $1 + 2(x - \pi/6)$

10. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - 1 & \text{per } 0 < x < 1 \\ \log(x) & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$ definita su $(0, +\infty)$
A: è continua, ma non derivabile. B: è derivabile, ma non continua. C: è continua e derivabile. D: non è né continua né derivabile. E: N.A.

CODICE=371550

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 371550

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	●	○	○	○	○
3	○	○	○	○	●
4	●	○	○	○	○
5	●	○	○	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	●	○
8	○	○	●	○	○
9	○	○	●	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=371550

PARTE A

1. Data $f(x) = \sin(\pi x)$. Allora $f'(1/3)$ è uguale a

   A: -1 B: N.A. C: $\frac{\pi}{3}$ D: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E: $\frac{\pi}{6}$

2. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x) \geq 1\}$$

   valgono

   A: N.A. B: $\{\mathrm{e}, \mathrm{e}, +\infty, N.E.\}$ C: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ D: $\{1, 1., +\infty, N.E.\}$ E: $\{\mathrm{e}, N.E., 1, 1\}$

3. La serie a termini non-negativi

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)^{\alpha}}$$

   converge per

   A: $\alpha \geq 1$ B: $\alpha > 0$ C: $3 < \alpha < \pi$ D: $\alpha > 1$ E: N.A.

4. L'integrale

$$\int_{-1}^{3} |x^3| \, dx$$

   vale

   A: 20 B: $\frac{41}{2}$ C: $\frac{\sqrt{\pi}-1}{2}$ D: N.A. E: 0

5. Il limite

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x \, \mathrm{e}^{2(x+1)}}{\mathrm{e}^{3x}}$$

   vale

   A: 0 B: $-\infty$ C: 1 D: N.A. E: N.E.

6. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{per } x < 0 \\ \sin(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: non è né continua né derivabile. B: è derivabile, ma non continua. C: è continua, ma non derivabile. D: N.A. E: è continua e derivabile.

7. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(|x|)$ è

   A: sempre non negativa B: monotona crescente C: iniettiva D: N.A. E: surgettiva

8. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ vale

   A: $1 + \mathrm{e}\, x + \frac{\mathrm{e}^2}{2} x^2$ B: N.A. C: $1 + x + x^2$ D: $1 + x$ E: $1 + x^2$

9. Una primitiva della funzione $x(t) = t \sin(t)$ è

   A: $\sin(t) - t\cos(t) + \sqrt{\pi}$ B: $\sin(t) + \log(\cos(t)) - 1$ C: $-\frac{t^2}{2}\cos(t)$ D: N.A. E: $\sin(t) + t\cos(t)$

10. Modulo e argomento del numero complesso $z = \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono

    A: N.A. B: $(2, 5\pi/3)$ C: $(1, 5\pi/6)$ D: $(1, 4\pi/3)$ E: $(1, -\pi/6)$

CODICE=802272

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

29 gennaio 2009

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 802272

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	●	○	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	●	○	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	●	○
8	○	○	○	○	●
9	●	○	○	○	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=802272

PARTE A

1. Per quali b, c la funzione $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{per } x \le 1 \\ x^2 + bx + c & \text{per } x > 1 \end{cases}$ è derivabile in $\mathbb{R}$.

   A: $(b, c) = (-1, 0)$ B: $(b, c) = (0, 1)$ C: N.A. D: N.E. E: $(b, c) = (-1, 1)$

2. Dato il problema di Cauchy $y'(x) = \frac{y(x)}{x}$ con $y'(1) = 1$. Allora $y'(2)$ vale

   A: 1/2 B: -1 C: N.A. D: 0 E: 1

3. Data $f(x) = \cos(x^2)$. Allora $f^{(IV)}(0)$ è uguale a

   A: -12 B: -1 C: 0 D: N.A. E: 1

4. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha+1} < +\infty\}$$

   valgono

   A: N.A. B: $\{-\infty, N.E., -2, N.E.\}$ C: $\{-1, -1, +\infty, N.E.\}$ D: $\{-1, N.E., 1, 1\}$ E: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$

5. Il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(3x)}{e^{4x} - 1}$$

   vale

   A: N.E. B: $-\frac{3}{4}$ C: 0 D: N.A. E: $\frac{3}{4}$

6. La funzione $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{|x|^\pi}$ è

   A: iniettiva B: monotona decrescente C: monotona crescente D: limitata E: N.A.

7. Per $k \in \mathbb{R}^+$, la retta tangente al grafico di $y(x) = \sqrt{k + x^2}$ in $x_0 = 0$ vale

   A: $-\frac{(\pi k)^2}{4}$ B: N.A. C: $y(x) = \sqrt{k}$ D: $1 + kx$ E: $-\frac{1}{2}(1 + \tan^2(k))x^2$

8. L'integrale

$$\int_1^0 \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$$

   vale

   A: 0 B: $\frac{\log(2)}{2}$ C: $-\frac{\log(2)}{2}$ D: N.A. E: $\log(2) - \log(1)$

9. Dato $x \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^n$$

   converge per

   A: $x > -\frac{1}{2}$ B: $x > -2$ C: N.A. D: $x < -2$ E: $x \ge -\frac{1}{2}$

10. Gli argomenti di $z = \sqrt[3]{i^2}$ valgono

    A: $\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\}$ B: $\{-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}\}$ C: $\{3\pi, 5\pi, 7\pi\}$ D: $\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}\}$ E: N.A.

CODICE=478143

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 478143

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	○	○	●
3	●	○	○	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	○	○	●	○	○
8	○	○	●	○	○
9	●	○	○	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=478143

PARTE A

1. Data $f(x) = [\log(x)]^{\log(x)}$. Allora $f'(\mathrm{e})$ è uguale a

   A: 1/e B: $\log(e)$ C: π^{e} D: e E: N.A.

2. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(\frac{2}{i}\right)^8$ sono

   A: $(512, 0)$ B: $(256, \pi)$ C: $(256, \pi/2)$ D: $(1024, 2\pi)$ E: N.A.

3. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A = \{x \in \mathbb{R} : \ \sin(x^2) < 1/3\}$$

   valgono

   A: $\{\pi/6, N.E., 5\pi/6, N.E.\}$ B: $\{0, 0, 2\pi, 2\pi\}$ C: N.A. D: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ E: $\{0, 0, \pi/6, N.E.\}$

4. La funzione $f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{per } x \geq 1 \\ ax + 3 - a & \text{per } x < 1 \end{cases}$ è derivabile in $[0, 2]$ per

   A: $a = 3\log(3)$ B: $a > \log(27)$ C: $a = k\pi$ D: $a \in \mathbb{R}$ E: N.A.

5. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \log(\cos(\pi x/2))$ vale

   A: N.A. B: $-\frac{(\pi x)^2}{4}$ C: $1 - (1 + \sin^2(\pi x/2))x^2$ D: $-\frac{(\pi x)^2}{8}$ E: $-\frac{1}{2}(1 + \tan^2(\pi x/2))x^2$

6. Il limite

   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1}{\sin(x^3)}$$

   vale

   A: 1 B: 0 C: N.E. D: $+\infty$ E: N.A.

7. La funzione $f : \ \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log|x|$ è

   A: surgettiva B: N.A. C: monotona crescente D: iniettiva E: limitata

8. L'integrale

   $$\int_1^{\mathrm{e}} \log(x^2) \frac{1}{x}\, dx$$

   vale

   A: 1 B: 2/e C: $\frac{1}{2}$ D: $\mathrm{e}^2 - 1$ E: N.A.

9. Dato $x \in \mathbb{R}$, la serie a termini non-negativi

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{nx}}{n^2}$$

   converge per

   A: $x \leq 1$ B: $0 < x$ C: Solo per $x = 0$ D: $x \leq 0$ E: N.A.

10. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ è

    A: $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ B: $\log(\cosh(x))$ C: N.A. D: N.E. E: $\frac{1}{\cos(x)}$

CODICE=802331

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 802331

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	●	○
4	●	○	○	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	○	●	○
7	●	○	○	○	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	○	●	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=802331

PARTE A

1. Dato $x \geq 0$, la serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n}$$
converge per
A: $x \leq 1$ B: $1 < x$ C: N.A. D: $x > 0$ E: $x = 0$

2. La funzione $f(x) = \begin{cases} \sin(ax) & \text{per } x < 0 \\ x^2 + x & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$ è derivabile per
A: $a = k\pi$ B: $a = 1$ C: N.A. D: mai E: $a \in \mathbb{R}$

3. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ è
A: surgettiva B: monotona crescente C: iniettiva D: non derivabile in $x = 0$ E: N.A.

4. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = \sinh(x)$ è
A: $\cosh(x) + 1$ B: N.A. C: $\frac{1}{\cos(x)}$ D: N.E. E: $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$

5. L'integrale
$$\int_1^{\mathrm{e}} \log(x)\frac{1}{x}\,dx$$
vale
A: $2/\mathrm{e}$ B: $\frac{1}{2}$ C: N.A. D: 0 E: $\sqrt{\mathrm{e}} + 1$

6. Data $f(x) = (\mathrm{e}^x)^x$. Allora $f'(1)$ è uguale a
A: $\log(2\mathrm{e})$ B: $2\mathrm{e}$ C: N.A. D: e^2 E: $3\mathrm{e}^3$

7. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) < \pi^2/3\}$$
valgono
A: $\{0, 0, \pi/6, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{0, 0, 2\pi, 2\pi\}$ D: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ E: $\{\pi/6, N.E., 5\pi/6, N.E.\}$

8. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin^2(3x)$ nel punto $x_0 = \pi/12$ vale
A: $3x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ B: $1 + \sin(3x)(x - \pi/12)$ C: N.A. D: $1 + x + x^2$ E: $-\frac{-12x+\pi-4}{4\sqrt{2}}$

9. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^8$ sono
A: $(3^4, \pi/2)$ B: N.A. C: $(3^5, 0)$ D: $(9^2, 0)$ E: $(27, 2\pi)$

10. Il limite
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sin(x^2)}$$
vale
A: 0 B: N.E. C: $+\infty$ D: N.A. E: 1

CODICE=304588

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

13 gennaio 2010

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 304588

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	○	●
4	●	○	○	○	○
5	○	●	○	○	○
6	○	●	○	○	○
7	○	○	○	●	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	○	●	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=304588

PARTE A

1. Una primitiva della funzione $x(t) = t\,\mathrm{e}^{2t}$ è

   A: $\mathrm{e}^t\,(t+1) - 4$ B: N.A. C: $\frac{t^2}{2} + \mathrm{e}^{2t}$ D: $\frac{1}{4}e^{2t}(2t-1) - \log(\pi)$ E: $t\,\log(t)$

2. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 1$ della funzione $f(x) = \log(x^2)$ vale

   A: N.A. B: $-3 + 2x - 2x^2$ C: $\log(x^2)\frac{(x-1)^2}{2}$ D: $2(x-1) - (x-1)^2$ E: $1 + \log(x^2)^2$

3. La funzione $f(x) = \begin{cases} \log(1+x) & \text{per } x > 1 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} & \text{per } x \leq 1 \end{cases}$

   A: è derivabile, ma non continua. B: non è né continua né derivabile. C: è continua, ma non derivabile. D: N.A. E: è continua e derivabile.

4. Dato $\alpha \geq 0$, la serie a termini non-negativi

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha}{\sqrt[3]{n^\alpha + 1}}$$

   converge per

   A: $\alpha \geq 1/3 \cup \{\alpha = 0\}$ B: N.A. C: $\alpha > 3 \cup \{\alpha = 0\}$ D: $\alpha > 2 \cup \{\alpha = 1\}$ E: $3 < \alpha < \pi$

5. Modulo e argomento del numero complesso $z = -i - \sqrt{3}$ sono

   A: $(2, 5\pi/4)$ B: $(1, -5\pi/6)$ C: N.A. D: $(\sqrt{3}, 4\pi/3)$ E: $(2, -5\pi/6)$

6. La funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \mathrm{e}^{|x|}$ è

   A: surgettiva B: limitata inferiormente C: monotona crescente D: N.A. E: iniettiva

7. Il limite

   $$\lim_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

   vale

   A: N.E. B: $-\infty$ C: 1 D: N.A. E: $\pi/2$

8. L'integrale

   $$\int_0^{\pi/2} \sin(3x)\,dx$$

   vale

   A: N.A. B: $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ C: $1/3$ D: -1 E: $-\pi/2$

9. Data $f(x) = \tan(\pi x/2)$. Allora $f'(1/2)$ è uguale a

   A: $\frac{\pi}{6}$ B: N.A. C: $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D: π E: -1

10. Inf, min, sup e max dell'insieme

    $$A = \{\log(\log(x)) \text{ per } x \geq \mathrm{e}\}$$

    valgono

    A: $\{0, 0, \mathrm{e}, N.E.\}$ B: $\{\mathrm{e}, \mathrm{e}, +\infty, N.E.\}$ C: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ D: $\{0, 1, +\infty, N.E.\}$ E: N.A.

CODICE=476290

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 febbraio 2010

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 476290

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	○	●	○
3	○	●	○	○	○
4	○	○	●	○	○
5	○	○	○	○	●
6	○	●	○	○	○
7	○	○	○	●	○
8	○	○	●	○	○
9	○	○	○	●	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=476290

PARTE A

1. Se $z \in \mathbb{C}$ è tale che $z^4 = -16$ allora l'argomento di z è uguale a

   A: $\{\pi/4, \pi/4+\pi, \pi/4+2\pi, \pi/4+3\pi\}$ B: N.A. C: $\{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$ D: $\{\pi/4, 2\pi/4, 3\pi/4, \pi\}$ E: $\{\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4, 9\pi/4\}$

2. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + x^2$ è

   A: N.A. B: sempre non negativa C: limitata D: monotona decrescente E: iniettiva

3. La serie geometrica
$$\sum_{n=0}^{\infty} (1/2 + q^3)^n$$
   converge per

   A: $|q| < 1$ B: N.A. C: $q \in]\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}, \frac{1}{2^{1/3}}[$ D: $q \in]-1/2, 1/2[$ E: $-1 < q < 2^{1/3}$

4. Sia y soluzione di $y'(x) = 4^\pi y(x)$, $y(0) = 0$. Allora $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ è uguale a

   A: N.A. B: 0 C: N.E. D: $+\infty$ E: π^4

5. L'integrale
$$\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\, dx$$
   vale

   A: N.A. B: $1/2$ C: -1 D: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E: 1

6. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cos(1/x^2)$$
   vale

   A: N.E. B: 1 C: 0 D: N.A. E: $+\infty$

7. Il polinomio di Taylor di grado 5 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \sin(x^2)$ vale

   A: $1 + \sin(x)\frac{x^4}{4!}$ B: $1 + x$ C: x^2 D: N.A. E: $1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

8. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{n \in \mathbb{N} : \text{la funzione } x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ è convessa}\}$$
   valgono

   A: N.A. B: $\{2, 2, +\infty, N.E.\}$ C: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$ D: $\{1, 2, 64, 64\}$ E: $\{1, N.E., 4, 4\}$

9. La funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{per } x < 0 \\ \sin(bx) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$
   risulta continua e derivabile in $x_0 = 0$ scegliendo (a, b) uguali a

   A: $(-1, \pi)$ B: $(1, \pi/2)$ C: N.E. D: $(0, 1)$ E: N.A.

10. Data $f(x) = \big(\log(x)\big)^{\tan(x)}$. Allora $f'(1)$ è uguale a

    A: -1 B: $\tan(\pi) + \sin(1)$ C: $\log(\mathrm{e})^{\tan(1)}$ D: 0 E: N.A.

CODICE=649733

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 649733

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	●	○	○	○	○
3	○	○	●	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	●	○	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	●	○	○
8	○	○	●	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	○	●

CODICE=649733

PARTE A

1. Modulo e argomento del numero complesso $z = \big(1+i\big)^4$ sono

   A: $(4,\pi)$ B: $(27,2\pi)$ C: $(3^4,\pi/2)$ D: $(3^5,0)$ E: N.A.

2. La funzione $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{per } x<1 \\ ax+b & \text{per } x\geq 1 \end{cases}$ è derivabile per

   A: $b=0$ e $a\geq 0$ B: $(a,b)=(\mathrm{e},0)$ C: $(a,b)=(0,\mathrm{e})$ D: $(a,b)=(1+\mathrm{e},\mathrm{e})$ E: N.A.

3. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A = \{y=\mathrm{e}^{-x^2},\ x\in]1,2]\}$$

   valgono

   A: N.A. B: $\{0, N.E., 1, 1\}$ C: $\{0,0,\mathrm{e}^{-4}, N.E.\}$ D: $\{1/\mathrm{e}^4, 1/\mathrm{e}^4, 1/\mathrm{e}, N.E.\}$ E: $\{1/\mathrm{e}^4, N.E., 1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}\}$

4. Data $f(x) = (\log(x))^x$. Allora $f'(\mathrm{e})$ è uguale a

   A: N.A. B: 1 C: $3\mathrm{e}^3$ D: e^2 E: $\log(2\mathrm{e})$

5. Dato $x\geq 0$, la serie a termini non-negativi

   $$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$$

   converge per

   A: $x<1/2$ B: $x>0$ C: $1<x$ D: $x<1$ E: N.A.

6. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = x^2\mathrm{e}^{x^3}$ è

   A: $\frac{1}{\cos(x)}$ B: N.A. C: $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$ D: N.E. E: $\frac{\mathrm{e}^{x^3}+\log(\log(e^{3^3}))}{3}$

7. Il limite

   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\sin(x^2))}{x^2}$$

   vale

   A: $-1/2$ B: N.A. C: $+\infty$ D: N.E. E: $-\infty$

8. La retta tangente al grafico di $y(x)=\sin(\log(x))$ nel punto $x_0=1$ vale

   A: N.A. B: $\frac{\sin(\log(x))}{x}$ C: $x-1$ D: $1+x$ E: $1+\frac{x-1}{4\sqrt{2}}$

9. L'integrale

   $$\int_{\pi/3}^{\pi/2} t\,\cos(t)\,dt$$

   vale

   A: $\frac{1}{6}\left(-6+3\sqrt{3}-\pi\right)$ B: N.A. C: $\sqrt{3}/4$ D: N.E. E: $\sqrt{\mathrm{e}}+1$

10. La funzione $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=|x^2-b^2|$ è derivabile in ogni punto per

    A: $b<0$ B: $b>0$ C: $b=0$ D: $b=\pm 1$ E: N.A.

CODICE=742718

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

29 gennaio 2010

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 742718

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	●	○	○	○
5	●	○	○	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	○	●
8	○	○	●	○	○
9	○	●	○	○	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=742718

PARTE A

1. L'integrale
$$\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{\log(x)x}\,dx$$
vale

A: $\log(1/2)$ B: $\log(\log(2))$ C: N.A. D: $-\log(\log(2))$ E: N.E.

2. La funzione $f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-(t-1)^2}\,dt$ è convessa per

A: N.A. B: $x \in \mathbb{R}$ C: $x \leq 1$ D: $x > 0$ E: $-\mathrm{e} < x < \mathrm{e}$

3. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{k \in \mathbb{R} : \ \mathrm{e}^{kx} \text{ è integrabile in senso generalizzato su } [0, +\infty]\}$$
valgono

A: $\{-\infty, N.E., 0, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{-1, N.E., 1, 1\}$ E: $\{-\infty, N.E., 0, 0\}$

4. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 2$ della funzione $f(x) = \cos(\log(x/2))$ vale

A: N.A. B: $1 - \frac{1}{8}(x-2)^2$ C: $-\frac{1}{2}(\log(x/2))x^2$ D: $-\frac{(\pi x)^2}{4}$ E: $1 - \frac{1}{8}x^2$

5. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \mathrm{e}^{2\log|x|}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è

A: monotona crescente B: iniettiva C: concava D: N.A. E: limitata

6. Il limite
$$\lim_{m \to +\infty} \sqrt{m} \int_0^{\pi} \cos(mx)\,dx$$
vale

A: $+\infty$ B: N.E. C: 0 D: N.A. E: 1

7. Data $f(x) = [\log_3(x)]^{\log(x)}$. Allora $f'(\mathrm{e})$ è uguale a

A: N.A. B: $1/\mathrm{e}$ C: 2^{e} D: N.E. E: $\log(e)$

8. Dato $x \in \mathbb{R}$, la serie a termini non-negativi
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{kx}}{k}$$
converge per

A: N.A. B: $0 < x$ C: $x \leq 0$ D: $x < 0$ E: Solo per $x = 0$

9. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = 2\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ è

A: $2\log(\cosh(x))$ B: $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ C: N.E. D: N.A. E: $\frac{1}{\cos(x)}$

10. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(\frac{2}{i}\right)^{-7}$ sono

A: $(1/128, \pi/2)$ B: N.A. C: $(2, \pi)$ D: $(1/128, -\pi/2)$ E: $(128, \pi/2)$

CODICE=786610

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 786610

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	●	○
2	○	○	●	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	●	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	○	●	○
9	●	○	○	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=786610

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x^2) < 0\}$$
valgono
A: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$ B: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ C: $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$ D: N.A. E: $\{0, 0, \pi, \pi\}$

2. La serie a termini non-negativi, definita per $\alpha \neq 0$,
$$\sum_{n=41}^{\infty} \Big| \log \big| \log \big(\frac{1}{n^\alpha}\big) \big| \Big|$$
converge per
A: $\alpha > 1$ B: $3 < \alpha < \pi$ C: $\alpha \geq 1$ D: $\alpha > 0$ E: N.A.

3. Per $t > 0$ le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = (t \log(t))^{-1}$ sono
A: $\log(\log(t)) + c$ B: N.E. C: $t \log(t) + c$ D: N.A. E: $\frac{t^2}{\log(t^2)} + c$

4. L'integrale
$$\int_{-2}^{1} |x + 1| \, dx$$
vale
A: $\sqrt{2}$ B: 0 C: N.A. D: 3/2 E: 5/2

5. Il limite
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log\big(x^3 + x \arctan(x)\big)}{\log(x)}$$
vale
A: N.E. B: 1/3 C: $+\infty$ D: N.A. E: 0

6. Modulo e argomento del numero complesso $z = i^{2011}$ sono
A: $(1, \pi/3)$ B: $(2, -\pi/2)$ C: N.A. D: $(1, -\pi/2)$ E: $(1, \pi)$

7. Data $f(x) = \log(\log(3x))$. Allora $f'(\mathrm{e})$ è uguale a
A: $\frac{1}{\mathrm{e} \log(3\mathrm{e})}$ B: $\log(3\mathrm{e})$ C: e^3 D: N.A. E: π

8. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x - 1|$ è
A: derivabile ovunque B: iniettiva C: N.A. D: surgettiva E: convessa

9. La funzione $f(x) = \begin{cases} \pi/3 & \text{per } x < 0 \\ \cos(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$
A: è continua e derivabile. B: è continua, ma non derivabile. C: è derivabile, ma non continua. D: non è né continua né derivabile. E: N.A.

10. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(2x)$ nel punto $x_0 = \pi/12$ vale
A: N.A. B: $1+\sin(2x)(x-\pi/4)$ C: $2x+\frac{\pi}{12}$ D: $\sqrt{3}x-\frac{\pi}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{2}$ E: $+\frac{1}{2}+2\sin(2x)\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$

CODICE=802721

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica & Telecomunicazioni
Prova di Analisi Matematica 1

10 febbraio 2011

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 802721

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	●	○	○	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	●	○
6	○	○	○	●	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	●	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=802721

PARTE A

1. Data $f(x) = x^{(\log(x))}$. Allora $f'(\mathrm{e})$ è uguale a

   A: N.A. B: e^2 C: 1 D: $\log(2\mathrm{e})$ E: $3\mathrm{e}^3$

2. Modulo e argomento del numero complesso $z = \big(1+i\big)^{-4}$ sono

   A: $(4, 0)$ B: N.A. C: $(1/4, \pi/2)$ D: $(4, \pi/2)$ E: $(1/4, \pi)$

3. Dire quanto vale il seguente limite

   $$\lim_{x\to+\infty} x(\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}} - \mathrm{e})$$

   A: N.E. B: $-\mathrm{e}$ C: $\frac{\mathrm{e}}{2}$ D: 0 E: e

4. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = x^3\mathrm{e}^{x^4}$ è

   A: N.E. B: N.A. C: $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ D: $\frac{1}{\cos(x)}$ E: $\frac{\mathrm{e}^{x^4}+\log_3(\log_3(e^{3^3}))}{4}$

5. Si consideri la seguente serie

   $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(\frac{1}{n})$$

   Dire quale delle seguenti affermazione è vera

   A: La serie è convergente B: La serie è non convergente C: La serie è a termini positivi D: N.A. E: La serie è assolutamente convergente

6. Sia data la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < 1/2 \\ a & \text{per } x \geq 1/2. \end{cases}$

   Allora i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui $f(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ è continua sono

   A: N.A. B: $a \leq 1$ C: $0 < a < 1$ D: $a \in \mathbb{R}$ E: $a = 1$

7. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(\log(x))$ nel punto $x_0 = 1$ vale

   A: $x - 1$ B: $1 + \frac{x-1}{4\sqrt{2}}$ C: $\frac{\sin(\log(x))}{x}$ D: N.A. E: $1 + x$

8. Dire quali sono *inf, min, sup* e *max* del seguente insieme

   $$A = \{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 - 2 \leq 0\}$$

   A: N.A. B: $\{-\sqrt{2}, N.E., \sqrt{2}, N.E.\}$ C: $\{-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ D: $\{N.E., -\sqrt{2}, N.E., \sqrt{2}\}$ E: $\{-2, N.E., N.E., 2\}$

9. Dire quanto vale il seguente integrale

   $$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

   A: $\log(\frac{\sqrt{3}}{2})$ B: 1 C: $\frac{\log(2)}{2}$ D: $\log(\pi)$ E: N.A.

10. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente equazione ha due soluzioni distinte

    $$e^{-x^4} = \alpha$$

    A: $\alpha \in [0, 1]$ B: Nessun valore di α C: $\alpha \in \mathbb{R}$ D: $\alpha \in (0, +\infty)$ E: N.A.

CODICE=040701

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica & Telecomunicazioni
Prova di Analisi Matematica 1

21 luglio 2011

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 040701

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	○	●
5	●	○	○	○	○
6	○	○	○	●	○
7	●	○	○	○	○
8	○	●	○	○	○
9	○	○	●	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=040701

PARTE A

1. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}} & \text{per } x < 0 \\ ax + 1/\mathrm{e} & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$ risulta derivabile in $x = 0$ per a uguale a

   A: N.A. B: N.E. C: $-\mathrm{e}$ D: $1/\mathrm{e}$ E: $-\mathrm{e}^{-1}$

2. La serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \log(n^3)}{n^3 + \log(n^\alpha)}$$
   converge per $\alpha \geq 0$ tale che

   A: $1 < \alpha < 2$ B: $0 \leq \alpha \leq 3$ C: $\alpha > 1$ D: N.A. E: $\alpha \geq 3$

3. L'integrale
$$\int_0^1 \log(x)\, dx$$
   vale

   A: N.A. B: 0 C: $N.E.$ D: -1 E: $\frac{-1+2\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$

4. L'integrale
$$\int_0^3 \frac{x}{x+1}\, dx$$
   vale

   A: $1 - \log(2/3)$ B: $\log(3\mathrm{e})$ C: $1 + \log(9/16)$ D: $\frac{1}{2}\log(5/2)$ E: N.A.

5. La funzione $f: \mathbb{R}^+ \backslash \{1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 5^{\log_5(x)}$ è

   A: iniettiva B: limitata superiormente C: non derivabile D: N.A. E: monotona decrescente

6. Data $f(x) = (\log(x))^{(2^x)}$, allora $f'(\mathrm{e})$ vale

   A: 2 B: N.E. C: $\frac{2^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}$ D: $\mathrm{e}^{\mathrm{e}-1}$ E: N.A.

7. La funzione $f(x) = x^4 - x^2$ è convessa per

   A: N.E. B: $x \in \mathbb{R}^+$ C: $x \in [-1/\sqrt{2}, 0] \cup [1/\sqrt{2}, +\infty[$ D: $|x| \geq 6^{-1/2}$ E: $x < 1$

8. Modulo e argomento del numero complesso $z = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})^{34}$ sono

   A: $(-1, \pi)$ B: $(2\sqrt{2}, -\pi/2)$ C: N.A. D: $(1, \pi/3)$ E: $(1, \frac{\pi}{2})$

9. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{k \in \mathbb{R} : \text{La soluzione di } y'(x) = k\, y(x),\ y(0) = 1 \text{ è limitata per } x \in [0, +\infty[\}$$
   valgono

   A: N.A. B: $\{0, N.E., \pi, N.E.\}$ C: $\{-1, -1, 1, 1\}$ D: $\{-\infty, N.E., 0, 0\}$ E: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$

10. Il limite
$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x/k}\, dx}{k}$$
    vale

    A: 1 B: 0 C: N.A. D: $+\infty$ E: N.E.

CODICE=611290

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 611290

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	○	●	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	○	○	●
5	●	○	○	○	○
6	○	○	●	○	○
7	○	○	○	●	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	●	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=611290

PARTE A

1. La serie a termini non-negativi, definita per $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{e^n}{e^{\alpha\, n^2}}$$

converge per

A: $\alpha \geq 0$ B: $-1 < \alpha < \pi$ C: $\alpha > 0$ D: $\alpha \geq -1$ E: N.A.

2. La retta tangente al grafico di $y(x) = \tan(2x)$ nel punto $x_0 = \pi/12$ vale

A: $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ B: $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\cos^2(2x)}\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ C: $8\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}$ D: N.A. E: $x + \frac{\pi}{12}$

3. Il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sin(n) + n^2}{(3n^2 - n\cos(n))e^{2n}}(x-1)^n$$

vale

A: e^{-2} B: N.A. C: e^2 D: 0 E: 1

4. Modulo e argomento del numero complesso $z = i^{-2012}$ sono

A: $(1, 0)$ B: N.A. C: $(2, -\pi/2)$ D: $(1, \pi)$ E: $(1, -\pi/2)$

5. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{R} : z = e^{-x^2} \;\; x \in]-1, 2]\}$$

valgono

A: $\{e^{-4}, e^{-4}, 1, 1.\}$ B: N.A. C: $\{e^{-4}, N.E., 1, N.E.\}$ D: $\{e^{-1}, N.E., 2, 2\}$ E: $\{e^{-1}, e^{-1}, e^{-4}, N.E.\}$

6. Per $t > 0$ le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = (1-t^2)^{-1/2}$ sono

A: $\arccos(t) - c$ B: N.E. C: $\arcsin(t) + c$ D: N.A. E: $(1-t^2)^{1/2} + c$

7. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := |x^2 - 1|$ è

A: convessa B: iniettiva C: N.A. D: surgettiva E: derivabile ovunque

8. Il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(x^3 + \pi e^x\right)}{x\log(x)}$$

vale

A: 1/3 B: $+\infty$ C: N.A. D: N.E. E: 0

9. Data $f(x) = \log(e^{x^3})$. Allora $f'(-1)$ è uguale a

A: e^{-1} B: N.A. C: N.E. D: 3 E: -3

10. L'integrale

$$\int_{-1}^{2} |x-1|\, dx$$

vale

A: 0 B: $-\frac{3}{2}$ C: $\sqrt{2}$ D: $\frac{5}{2}$ E: N.A.

CODICE=505517

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica & Telecomunicazioni
Prova di Analisi Matematica 1

5 giugno 2012

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 505517

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	●	○	○	○	○
3	○	○	●	○	○
4	●	○	○	○	○
5	●	○	○	○	○
6	○	○	●	○	○
7	○	○	●	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	●	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=505517

PARTE A

1. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)+\log(\log(x))}{\cos(x)+\log(\log(x^2))}$$
vale
A: N.A. B: 1 C: $\log(\log(2))$ D: $1/\log(2)$ E: N.E.

2. Il limite
$$\lim_{n\to+\infty} (1+n^2)^{\frac{1}{n}}$$
vale
A: $+\infty$ B: N.A. C: 1 D: N.E. E: $1/\mathrm{e}$

3. L'integrale
$$\int_0^2 |x^2-1|\,dx$$
vale
A: N.A. B: $2/3$ C: 2 D: 0 E: $1/2$

4. Gli argomenti delle due soluzioni dell'equazione complessa $z^2+z+1=0$ valgono
A: $(\pi/3,\pi/3)$ B: N.A. C: $(\pi/3,-\pi/3)$ D: $(0,\pi)$ E: $(\pi/2,3\pi/2)$

5. Data $f(x)=(3x)^{\log(x)}$, allora $f'(1)$ vale
A: $-\log(1/3)$ B: $6-\log(3)$ C: N.E. D: 0 E: N.A.

6. Il polinomio di Taylor di grado 1 in $x_0=1$ della funzione $\cos(x^2)$ vale
A: $\cos(x)+\sin(x)(x-1)$ B: $1-x^4/2!$ C: $\cos(1)-2\sin(1)(x-1)$ D: N.A. E: $1+x$

7. Il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n\log(n)}{\mathrm{e}^n}(x-1/\mathrm{e})^n$$
vale
A: N.A. B: $1/\mathrm{e}$ C: 1 D: $\mathrm{e}-1/\mathrm{e}$ E: $+\infty$

8. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A=\{x\in\mathbb{R}:\ x^4-2x^2>-\frac{\pi}{2}\}$$
valgono
A: N.A. B: $(-\infty,N.E,+\infty,N.E.)$ C: $\{-\infty,N.E.,1,N.E.\}$ D: $\{-1,N.E,1.,N.E\}$ E: $\{-1,-1,+\infty.,N.E\}$

9. Calcolare l'immagine di $f(x)=\mathrm{e}^{x/\mathrm{e}}$, per $x\in[0,1]$
A: $[1,\mathrm{e}^{\mathrm{e}}]$ B: $]0,\mathrm{e}[$ C: $[1,\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}[$ D: $]0,1]$ E: N.A.

10. Sia y la soluzione di $y'(x)=\sin(\log(x))$ con $y(1)=1$, allora $y'(1)$ vale
A: N.E. B: $\sin(\log(y(x)))$ C: N.A. D: 0 E: 1

CODICE=238252

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 238252

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	○	●	○	○
3	○	○	●	○	○
4	○	●	○	○	○
5	●	○	○	○	○
6	○	○	●	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	●	○	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	●	○

CODICE=238252

PARTE A

1. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x - x^{\mathrm{e}}}{x^{\mathrm{e}} + x\mathrm{e}^x}$$
vale

   A: $1/2$ B: N.E. C: $+\infty$ D: N.A. E: 0

2. Data $f(x) = \sin(\tan(x))$, allora $f'(\pi/4)$ vale

   A: N.A. B: $-\sin(1)$ C: 0 D: $2\cos(1)$ E: $\cos(1)$

3. La parte reale di $\log(\|i\|)(i+1)^4$ vale

   A: 0 B: -1 C: 2 D: N.A. E: 1

4. Il minimo della funzione $f(x) = x\log(x)$ per $x > 0$ vale

   A: 1 B: 0 C: N.A. D: $-1/\mathrm{e}$ E: $\sqrt{2}$

5. Sia y la soluzione di $y'(x) + y(x) = 0$ con $y(0) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Allora $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ vale

   A: $1+\pi$ B: k^2 per ogni $k \in \mathbb{R}$ C: N.E. D: N.A. E: 0

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n)}{4^{(n^2)}} (x - \mathrm{e})^n$$

   A: N.A. B: 4 C: π D: 0 E: e

7. Il limite
$$\lim_{x\to 0^+} |\log(x)|^{\frac{1}{x}}$$
vale

   A: 0 B: N.E. C: 1 D: e E: N.A.

8. L'integrale
$$\int_1^{\mathrm{e}} x\log(x)\,dx$$
vale

   A: 1 B: $\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ C: N.A. D: N.E. E: 0

9. Il polinomio di Taylor di grado 2 in $x_0 = 1$ della funzione $\log(1+x)$ vale

   A: $x - \frac{x^2}{2}$ B: $x - \pi/2$ C: $\log(2) + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8}$ D: $\log(2) + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2$ E: N.A.

10. L'integrale
$$\int_{-1}^{1} \sin^3(x)\,dx$$
vale

    A: $\frac{\sin^4(1)}{2}$ B: 0 C: $\frac{8}{3}(2+\cos(1))\sin^4\left(\frac{1}{2}\right)$ D: 1 E: N.A.

CODICE=975534

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 975534

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	○	●	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	○	●	○
5	○	○	○	○	●
6	●	○	○	○	○
7	○	○	○	○	●
8	○	○	●	○	○
9	○	○	●	○	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=975534

PARTE A

1. Dato $x \geq 0$, la serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$$
converge per
A: $1 < x$ B: $x < 1/3$ C: N.A. D: $x < 1/2$ E: $x > 0$

2. Modulo e argomento del numero complesso $z = \big(1+i\big)^{-4}$ sono
A: $(27, 2\pi)$ B: $(3^4, \pi/2)$ C: N.A. D: $(4, \pi)$ E: $(1/4, \pi)$

3. Data $f(x) = (\log(x))^x$. Allora $f'(\mathrm{e})$ è uguale a
A: $\log(2\mathrm{e})$ B: e^2 C: N.A. D: $3\mathrm{e}^3$ E: 1

4. Il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\sin(x^3))}{x^3}$$
vale
A: $-\infty$ B: N.E. C: $-1/2$ D: $+\infty$ E: N.A.

5. La funzione $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{per } x < 1 \\ ax+b & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$ è derivabile per
A: $(a,b) = (\mathrm{e}, 0)$ B: $b = 0$ e $a \geq 0$ C: $(a,b) = (1+\mathrm{e}, \mathrm{e})$ D: $(a,b) = (0, \mathrm{e})$ E: N.A.

6. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = x^2 \mathrm{e}^{x^3}$ è
A: N.A. B: $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ C: $\frac{1}{\cos(x)}$ D: $\frac{\mathrm{e}^{x^3} + \log(\log(e^{3^3}))}{3}$ E: N.E.

7. La funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x^2 - b^2|$ è derivabile in ogni punto per
A: $b < 0$ B: $b > 0$ C: $b = \pm 1$ D: N.A. E: $b = 0$

8. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{y = \mathrm{e}^{-2x^2},\ x \in]1,2]\}$$
valgono
A: $\{0, 0, \mathrm{e}^{-4}, N.E.\}$ B: $\{1/\mathrm{e}^4, 1/\mathrm{e}^4, 1/\mathrm{e}, N.E.\}$ C: N.A. D: $\{0, N.E., 1, 1\}$ E: $\{1/\mathrm{e}^8, 1/\mathrm{e}^8, 1/\mathrm{e}^2, N.E.\}$

9. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(\log(x))$ nel punto $x_0 = 1$ vale
A: $1 + \frac{x-1}{4\sqrt{2}}$ B: $1 + x$ C: $\frac{\sin(\log(x))}{x}$ D: N.A. E: $x - 1$

10. L'integrale
$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} t\,\cos(t)\,dt$$
vale
A: $\frac{1}{6}\left(-6 + 3\sqrt{3} - \pi\right)$ B: $\sqrt{\mathrm{e}} + 1$ C: N.A. D: $\sqrt{3}/4$ E: N.E.

CODICE=960285

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica & Telecomunicazioni
Prova di Analisi Matematica 1

16 luglio 2012

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 960285

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	○	●
4	●	○	○	○	○
5	●	○	○	○	○
6	○	○	○	●	○
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	○	●
10	○	○	●	○	○

CODICE=960285

PARTE A

1. L'integrale
$$\int_0^3 \frac{x}{x+1}\,dx$$
vale
A: $\frac{1}{2}\log(5/2)$ B: $\log(3\mathrm{e})$ C: $1-\log(2/3)$ D: $1+\log(9/16)$ E: N.A.

2. Modulo e argomento del numero complesso $z = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})^{34}$ sono
A: $(2\sqrt{2}, -\pi/2)$ B: $(-1, \pi)$ C: $(1, \pi/3)$ D: $(1, \frac{\pi}{2})$ E: N.A.

3. Data $f(x) = (\log(x))^{(2^x)}$, allora $f'(\mathrm{e})$ vale
A: $\mathrm{e}^{\mathrm{e}-1}$ B: 2 C: N.A. D: $\frac{2^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}$ E: N.E.

4. La funzione $f(x) = x^4 - x^2$ è concava per
A: N.A. B: $x \in [-1/\sqrt{2}, 0] \cup [1/\sqrt{2}, +\infty[$ C: $x \in \mathbb{R}^+$ D: $x < 1$ E: $|x| \geq 6^{-1/2}$

5. Inf, min, sup e max dell'insieme
$A = \{k \in \mathbb{R}$: La soluzione di $y'(x) = k\,y(x),\ y(0) = 1$ è integrabile in senso generalizzato su $[0, +\infty[\}$
valgono
A: $\{-\infty, N.E., 0, 0\}$ B: $\{0, N.E., \pi, N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., 0, N.E.\}$ D: $\{-1, -1, 1, 1\}$
E: N.A.

6. Il limite
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\int_0^{k^2} \mathrm{e}^{-x/k}\,dx}{k}$$
vale
A: $+\infty$ B: 1 C: N.A. D: 0 E: N.E.

7. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}} & \text{per } x < 0 \\ ax + 1/\mathrm{e} & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$ risulta derivabile in $x = 0$ per a uguale a
A: N.E. B: N.A. C: $1/\mathrm{e}$ D: $-\mathrm{e}$ E: $-\mathrm{e}^{-1}$

8. La funzione $f : \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 3^{\log_3(x)}$ è
A: convessa B: non derivabile C: monotona decrescente D: N.A. E: limitata superiormente

9. L'integrale
$$\int_0^{\mathrm{e}} \log(x)\,dx$$
vale
A: 0 B: $\frac{-1+2\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$ C: N.A. D: -1 E: $N.E.$

10. La serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \log(n^3)}{n^\alpha + \log(n^\alpha)}$$
converge per $\alpha \geq 0$ tale che
A: $\alpha \geq 3$ B: N.A. C: $\alpha > 3$ D: $1 < \alpha < 2$ E: $0 \leq \alpha \leq 3$

CODICE=213806

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica & Telecomunicazioni

Prova di Analisi Matematica 1

25 giugno 2012

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 213806

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	○	●	○
3	○	○	○	●	○
4	●	○	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	○	●	○	○	○
7	○	○	○	○	●
8	●	○	○	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=213806

PARTE A

1. L'integrale
$$\int_{1/\mathrm{e}}^{\mathrm{e}} |\log(x)|\,dx$$
vale

A: N.A. B: 0 C: $2 - 2/\mathrm{e}$ D: $2/\mathrm{e}$ E: $2 + 2/\mathrm{e}$

2. Calcolare il raggio di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n^{\mathrm{e}} + \mathrm{e}^n)(x - \pi)^n$$

A: N.A. B: π C: 0 D: $1/\mathrm{e}$ E: e

3. Il massimo della funzione $f(x) = |\sqrt[3]{|x-1|}|$ per $x \in \mathbb{R}$ vale

A: N.E B: N.A. C: $\sqrt{2}$ D: 1 E: 0

4. Il polinomio di Taylor di grado 2 in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ della funzione $\sin(x)$ vale

A: $x - \pi/2$ B: $1 - \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2}$ C: $x - x^3/3!$ D: N.A. E: x

5. Il limite
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[x]{x} + x}{|x| + 1}$$
vale

A: N.A. B: 0 C: $1/2$ D: $+\infty$ E: N.E.

6. Il limite
$$\lim_{x \to 0^+} \log_{x^2} x$$
vale

A: N.E. B: e C: N.A. D: $1/2$ E: $+\infty$

7. L'integrale
$$\int_0^2 \frac{x^3 - 1}{x - 1}\,dx$$
vale

A: 1 B: $20/3$ C: 0 D: N.A. E: N.E.

8. Sia y la soluzione di $y''(x) = \mathrm{e}^{-x^3}$ con $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Allora $y''(0)$ vale

A: $1 + \pi$ B: $-\pi$ C: -1 D: N.A. E: $\sin(0)$

9. Sia $z = -i$ allora la parte reale di $(z^2\overline{z})^4$ vale

A: -1 B: 0 C: N.A. D: 1 E: 2

10. Data $f(x) = \log(\sqrt{x+1})$, allora $f'(3/2)$ vale

A: $1/2$ B: 0 C: -1 D: $1/5$ E: N.A.

CODICE=841186

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica & Telecomunicazioni
Prova di Analisi Matematica 1

30 gennaio 2012

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 841186

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	○	●	○
3	●	○	○	○	○
4	○	●	○	○	○
5	●	○	○	○	○
6	○	○	○	●	○
7	○	●	○	○	○
8	○	○	○	●	○
9	○	○	○	●	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=841186

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{y : \; y = \mathrm{e}^{-x}\sin(x), \; x \in \mathbb{R}\}$$
valgono

   A: N.A. B: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$ E: $\{\mathrm{e}, N.E., 1, 1\}$

2. In quanti punti si intersecano gli insiemi A e B definiti da
$$A := \{z \in \mathbb{C} : \; \|z - e^{i\pi}\| = 1\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : \; \|z - 1\| = 2\}.$$
   A: 4 B: N.A. C: nessuno D: 1 E: infiniti

3. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{per } x < 0 \\ \sin(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: è derivabile, ma non continua. B: N.A. C: non è né continua né derivabile. D: è continua, ma non derivabile. E: è continua e derivabile.

4. Data $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$. Allora $f'''(0)$ è uguale a

   A: N.A. B: 0 C: -1 D: π E: 2

5. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$ è

   A: iniettiva B: monotona decrescente C: monotona crescente D: sempre non negativa E: N.A.

6. Modulo e argomento del numero complesso $z = \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono

   A: $(1, -\pi/6)$ B: N.A. C: $(1, 5\pi/6)$ D: $(2, 5\pi/3)$ E: $(1, 4\pi/3)$

7. L'integrale
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(x)|\, dx$$
vale

   A: 2 B: 20 C: 0 D: N.A. E: 2π

8. Sia $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ se $x \neq 0$, con $f(0) = 0$, allora

   A: $f'(0) = 2$ B: N.A. C: f non è derivabile in 0 D: $f'(0) = 0$ E: $f'(0) = 1$

9. Dire se la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \sin\left(\frac{1}{n!}\right)$$
   A: è indeterminata B: è a segni alterni C: converge D: N.A. E: diverge

10. Il limite
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\arctan(x))}{x}$$
vale

    A: 0 B: N.E. C: N.A. D: π E: $-\infty$

CODICE=764758

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2013

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 764758

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	●	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	●	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	○	●	○	○

CODICE=764758

PARTE A

1. Il limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos^2 x}{x^2},$$
vale
A: 2 B: 1 C: N.A. D: N.E. E: 0

2. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ \mathrm{e}^x \cos(x) = 0\}$$
valgono
A: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ B: $\{\mathrm{e}, N.E., 1, 1\}$ C: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$ D: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ E: N.A.

3. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^3 + x & \text{per } x < 0 \\ \log(x+1) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$
A: N.A. B: è continua, ma non derivabile. C: è derivabile, ma non continua. D: non è né continua né derivabile. E: è continua e derivabile.

4. Sia
$$A := \{x : \ \sin(x)\cos(x) = 2/3\}$$
Dire se
A: $\inf A = -\infty$ B: N.A. C: $A = \emptyset$ D: $\sup A = +\infty$ E: $\sup A = \pi$

5. Data $f(x) = \sin(\mathrm{e}^x)$. Allora $f'''(0)$ è uguale a
A: 2 B: N.A. C: -1 D: π E: $-3\sin(1)$

6. Sia $f : \ R \to \mathbb{R}$ definita $f(x) = e^{x\arctan(x)}$, dire se è
A: $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1$ B: crescente C: decrescente D: limitata E: N.A.

7. Il numero complesso $z^2\|z\|$, se $z = \mathrm{e}^{2+i}$ è uguale a
A: $\mathrm{e}^6(\cos(3) + i\sin(3))$ B: N.A. C: $\mathrm{e}^6(\cos(2) + i\sin(2))$ D: $\mathrm{e}^6(\cos(2) - i\sin(2))$ E: $\mathrm{e}^6\cos(2) + i\mathrm{e}^{-6}\sin(2))$

8. Calcolare $f^{(5)}(0)$ dove $f(x) = \frac{1}{1-x}$ per $|x| < 1$.
A: 12 B: 7 C: 60 D: N.A. E: 5

9. Sia data la funzione $y(t) = e^{10t}$. Dire quale equazione differenziale lineare è soddisfatta da y:
A: $y'' + 2y' - 25y = 0$ B: N.A. C: $y'' + y = 0$ D: $y' + y = 0$ E: $y^{(iv)} - 2y' + 27y = 0$

10. La serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \sin(n)}{1 + n^2}$$
è
A: indeterminata B: N.A. C: divergente D: convergente E: a segni alterni

CODICE=154177

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 154177

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	○	●	○
3	○	○	○	○	●
4	○	○	●	○	○
5	○	○	○	○	●
6	●	○	○	○	○
7	○	○	●	○	○
8	○	○	○	●	○
9	○	●	○	○	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=154177

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x^2) < 0\}$$
valgono
A: $\{0, 0, \pi, \pi\}$ B: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ C: $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$ D: N.A. E: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$

2. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\big(x^3 + x\arctan(x)\big)}{\log(x)}$$
vale
A: N.E. B: N.A. C: 0 D: $+\infty$ E: $1/3$

3. Per $t > 0$ le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = (t\log(t))^{-1}$ sono
A: $\log(\log(t)) + c$ B: N.E. C: N.A. D: $\frac{t^2}{\log(t^2)} + c$ E: $t\log(t) + c$

4. La funzione $f(x) = \begin{cases} \pi/3 & \text{per } x < 0 \\ \cos(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$
A: N.A. B: è continua e derivabile. C: è continua, ma non derivabile. D: è derivabile, ma non continua. E: non è né continua né derivabile.

5. L'integrale
$$\int_{-2}^{1} |x+1|\,dx$$
vale
A: 0 B: $3/2$ C: $5/2$ D: $\sqrt{2}$ E: N.A.

6. Modulo e argomento del numero complesso $z = i^{2011}$ sono
A: $(1, \pi/3)$ B: $(2, -\pi/2)$ C: N.A. D: $(1, -\pi/2)$ E: $(1, \pi)$

7. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(2x)$ nel punto $x_0 = \pi/12$ vale
A: $1+\sin(2x)(x-\pi/4)$ B: $2x+\frac{\pi}{12}$ C: $+\frac{1}{2}+2\sin(2x)\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ D: N.A. E: $\sqrt{3}x-\frac{\pi}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{2}$

8. La serie a termini non-negativi, definita per $\alpha \neq 0$,
$$\sum_{n=41}^{\infty} \Big|\log\big|\log\big(\frac{1}{n^\alpha}\big)\big|\Big|$$
converge per
A: $\alpha > 1$ B: N.A. C: $\alpha > 0$ D: $3 < \alpha < \pi$ E: $\alpha \geq 1$

9. La funzione $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x-1|$ è
A: iniettiva B: surgettiva C: derivabile ovunque D: N.A. E: convessa

10. Data $f(x) = \log(\log(3x))$. Allora $f'(\mathrm{e})$ è uguale a
A: π B: $\frac{1}{\mathrm{e}\log(3\mathrm{e})}$ C: e^3 D: $\log(3\mathrm{e})$ E: N.A.

CODICE=495706

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Prova di Analisi Matematica 1

18 febbraio 2013

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 495706

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	●	○	○
6	○	○	○	●	○
7	○	○	○	○	●
8	○	●	○	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	●	○	○	○

CODICE=495706

PARTE A

1. Il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2(\mathrm{e}^{x^2}-1)}{x\log(x)}$$
vale

   A: N.E. B: $+\infty$ C: 0 D: $-1/2$ E: N.A.

2. Dato $x \geq 0$, la serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$$
converge per

   A: $0 \leq x \leq 1/2$ B: $1 < x$ C: $0 \leq x < 1/2$ D: $x > 0$ E: N.A.

3. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} :\ \mathrm{e}^{x^2} < 2\}$$
valgono

   A: $\{-\sqrt{\log(2)}, N.E., \sqrt{\log(2)}, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{-\infty, N.E., \sqrt{\log(2)}, N.E.\}$ D: $\{0, 0, \sqrt{\log(2)}, 1\}$
   E: $\{-\sqrt{\log(2)}, -\sqrt{\log(2)}, \sqrt{\log(2)}, \sqrt{\log(2)}\}$

4. Data $f(x) = (\tan(x))^x$. Allora $f'(\pi/4)$ è uguale a

   A: N.A. B: 0 C: $-\pi/2$ D: $\pi/2$ E: π

5. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = x^3\mathrm{e}^{x^4}$ è

   A: e^{x^3} B: $2(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ C: N.A. D: e^{x^2} E: $\frac{1}{\cos(x)}$

6. Modulo e argomento del numero complesso $z = \big(1+i\big)^{-3}$ sono

   A: $(1/2\sqrt{2}, 3\pi/4)$ B: N.A. C: $(\sqrt{2}/4, -3\pi/4)$ D: $(2\sqrt{2}, 3\pi/4)$ E: $(1/2, -3\pi/4)$

7. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(\pi\log(\mathrm{e}x))$ nel punto $x_0 = 1$ vale

   A: N.A. B: $1 + \pi(x-1)$ C: $\cos(\pi\log(\mathrm{e})(x-1)$ D: $-\pi x$ E: $-\pi(x-1)$

8. Dato $b < 0$, la funzione $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x^2 - b^3|$ è derivabile per

   A: $x \in \mathbb{R}$ B: $x > 0$ C: $x \neq 0$ D: $x \neq \pm 1$ E: N.A.

9. La funzione $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{per } x < 1 \\ ax + b & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$ è derivabile per

   A: $b = 0$ e $a \geq 0$ B: $(a,b) = (0, 1/\mathrm{e})$ C: $(a,b) = (1/\mathrm{e}, 0)$ D: $(a,b) = (1/(1+\mathrm{e}), \mathrm{e})$ E: N.A.

10. L'integrale
$$\int_0^{\pi/4} t\, \cos(2t)\, dt$$
vale

    A: 0 B: $\pi/4 - 1/2$ C: 1 D: $-1/2$ E: N.A.

CODICE=620160

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 gennaio 2014

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 620160

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	●	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	○	●	○
5	○	○	●	○	○
6	○	○	●	○	○
7	○	○	○	○	●
8	●	○	○	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	○	●

CODICE=620160

PARTE A

1. La funzione $f(x) = \begin{cases} [x] & \text{per } x < 1/2 \\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} + a & \text{per } x \geq 1/2 \end{cases}$ è derivabile in $x_0 = 1/2$ per

   A: $a = k\pi$ B: $a \in \mathbb{R}$ C: mai D: N.A. E: $a = 1/8$

2. Dato $\alpha > 0$ la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}} - e^{-\frac{1}{n^2}}}{n^\alpha}$$
   converge per

   A: N.A. B: $\alpha > 0$ C: $1 < \alpha$ D: $\alpha = 2$ E: $\alpha \leq 1$

3. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{1 + \frac{2n}{n^2+1}\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}$$
   valgono

   A: N.A. B: $\{1, N.E., 2, N.E.\}$ C: $\{2, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{1, 1, 2, 2\}$ E: $\{1, N.E., 2, 2\}$

4. Sia y la soluzione del problema di Cauchy $y'(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{y(x)}$, $y(\pi/4) = 1$. Allora $y'(\pi/4)$ vale

   A: $\frac{\sqrt{3-2\cos^2(x)}}{\sqrt{2}}$ B: 0 C: N.A. D: 1/2 E: N.E.

5. L'integrale
$$\int_1^e \log(x^2)\, dx$$
   vale

   A: $\sqrt{e} - 1$ B: 2/e C: 2 D: 0 E: N.A.

6. Per $w = 1 + i\pi$, modulo e argomento del numero complesso $z = e^w$ valgono

   A: (e, π) B: $(e^2, \pi/2)$ C: $(e, \pi/2)$ D: $(1, \pi)$ E: N.A.

7. Il limite $\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} \frac{x}{x+1}\, dx$ vale

   A: N.E. B: 1 C: 1/2 D: 0 E: N.A.

8. La retta tangente al grafico di $y(x) = x\log(x)$ nel punto $x_0 = 1/e$ vale

   A: $-\frac{1}{e} + \frac{1}{2}e\left(x - \frac{1}{e}\right)^2$ B: $1 + x + x^2$ C: $\frac{1}{e} + \frac{1}{2}e\left(x - \frac{1}{e}\right)^2$ D: $-\frac{1}{e} + \frac{1}{2}e\left(x - \frac{1}{e}\right)$ E: N.A.

9. Il limite
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1 - \sin(x^3)}{\sin(x)}$$
   vale

   A: 0 B: N.E. C: $+\infty$ D: N.A. E: 1

10. Data $f(x) = \log|\sin^3(x)|$. Allora $f'(\pi/4)$ è uguale a

    A: N.A. B: 3e C: $\log(3\sin^2(\pi/4))$ D: $3\tan(1)$ E: 3

CODICE=661479

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 giugno 2014

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 661479

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	●	○
5	○	○	●	○	○
6	●	○	○	○	○
7	○	●	○	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	○	●

CODICE=661479

PARTE A

1. Dato $\alpha \geq 0$, la serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n}{n^{\mathrm{e}}}$$
converge per

A: $\alpha > \pi$ B: $0 < \alpha < 1$ C: $\alpha \geq \mathrm{e}$ D: $\alpha > 0$ E: N.A.

2. Data $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{\cos(x)}}$. Allora $f'(\frac{\pi}{2})$ è uguale a

A: $\sqrt{e}$ B: $\frac{1}{2}$ C: $-\frac{1}{2}$ D: 1 E: N.A.

3. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2+2\right)\left(\log\left(x^2+1\right) - \log x^2\right)$$
vale

A: N.E. B: 0 C: $+\infty$ D: 1 E: N.A.

4. L'integrale
$$\int_{-1}^{1} |1-x|\, dx$$
vale

A: N.A. B: 3/2 C: 5/2 D: 0 E: $\sqrt{2}$

5. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{|x|}$ è

A: convessa B: derivabile ovunque C: N.A. D: iniettiva E: surgettiva

6. La funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,\pi}{3.14} & \text{per } x < 0 \\ \sin(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

A: è derivabile, ma non continua. B: non è né continua né derivabile. C: N.A. D: è continua, ma non derivabile. E: è continua e derivabile.

7. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^x - 1 < 0\}$$
valgono

A: $\{-\infty, N.E., 0, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{-\infty, N.E., 0, 0\}$ D: $\{-\infty, N.E., 1, 1\}$ E: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$

8. Per $t > 0$ le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = te^t$ sono

A: $t^2 e^{t^2} + c$ B: $e^t\,(t-1) + c$ C: N.E. D: $t\log(t) + c$ E: N.A.

9. Il numero complesso $z = \overline{1+i}\mathrm{e}^{-i\,\frac{\pi}{2}}$ vale

A: N.A. B: 1 C: i D: $1+i$ E: $-1-i$

10. La retta tangente al grafico di $y(x) = \cos(3x)$ nel punto $x_0 = \frac{\pi}{18}$ vale

A: $3x + \frac{\pi}{18}$ B: N.A. C: $+\frac{1}{3} + 3\cos(3x)\left(x - \frac{\pi}{18}\right)$ D: $\frac{1}{2}\left(-3x + \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$ E: $1 + \cos(3x)(x - \frac{\pi}{6})$

CODICE=468328

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

15 settembre 2014

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	●	○	○
3	○	○	○	●	○
4	●	○	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	○	○	○	●	○
7	●	○	○	○	○
8	○	●	○	○	○
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	●	○

CODICE=468328

PARTE A

1. L'integrale
$$\int_{-1}^{3} |x|\, dx$$
vale
A: 0 B: 5 C: $\sqrt{2}$ D: 5/2 E: N.A.

2. La funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < 0 \\ \cos(2x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$
A: non è né continua né derivabile. B: è continua, ma non derivabile. C: è derivabile, ma non continua. D: N.A. E: è continua e derivabile.

3. Modulo e argomento del numero complesso $z = i^{43}$ sono
A: $(1, -\pi/2)$ B: $(1, -3\pi/2)$ C: $(2, 43\pi)$ D: $(1, 4\pi/3)$ E: N.A.

4. Data $f(x) = 3(\log(3x))$. Allora $f'(\mathrm{e})$ è uguale a
A: $\frac{3}{\mathrm{e}}$ B: N.A. C: e^3 D: π E: $\log(3\mathrm{e})$

5. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(2x)$ nel punto $x_0 = \pi/4$ vale
A: $1 + x + x^2$ B: N.A. C: 1 D: $1 + 2x - \frac{\pi}{2}$ E: $1 + \sin(2x)(x - \pi/4)$

6. La serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=11}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$
converge per
A: $\alpha > 0$ B: $\alpha \geq 1$ C: $3 < \alpha < \pi$ D: N.A. E: $\alpha > 1$

7. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) \geq 0\}$$
valgono
A: N.A. B: $\{0, 0, \pi, \pi\}$ C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$ E: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$

8. Il limite
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x^3 + \cos(x))}{3 \log(x)}$$
vale
A: N.E. B: 0 C: $+\infty$ D: 1 E: N.A.

9. Le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t) = \sin(t)$ sono
A: $t + c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \sin(t)$ B: N.A. C: $\sin(t) + \mathrm{e}^t + c$ D: $-\cos(t) + c$ E: N.E.

10. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x^2 - 1|$ è
A: N.A. B: iniettiva C: surgettiva D: derivabile ovunque E: monotona crescente

CODICE=171277

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica I

21 luglio 2014

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	●	○	○	○	○
4	●	○	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	○	○	○	○	●
7	○	○	●	○	○
8	○	○	○	●	○
9	○	○	○	●	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=171277

PARTE A

1. La funzione $f(x) = \begin{cases} \sin(ax) & \text{per } x < 0 \\ x^2 + x & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$ è derivabile per

   A: $a = 1$ B: mai C: N.A. D: $a = k\pi$ E: $a > \pi/3$

2. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

   valgono

   A: $\{\pi/3, N.E., \pi/3, N.E.\}$ B: $\{0, 0, \pi/6, N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{0, 0, 2\pi, 2\pi\}$
   E: N.A.

3. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x) = \sinh(x)$ è

   A: $e^x - e^{-x}$ B: N.E. C: $\frac{1}{\cos(x)}$ D: $\cosh(x) + 1$ E: N.A.

4. Data $f(x) = (e^x)^x$. Allora $f'(1)$ è uguale a

   A: $3e^3$ B: N.A. C: $2e$ D: $\log(2e)$ E: e^2

5. L'integrale

   $$\int_1^e \log(x)\frac{1}{x}\, dx$$

   vale

   A: N.A. B: $\sqrt{e} + 1$ C: 0 D: $2/e$ E: $\frac{1}{2}$

6. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(3x)$ nel punto $x_0 = \pi/12$ vale

   A: N.A. B: $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \pi/12)$ C: $-\frac{-12x+\pi-4}{4\sqrt{2}}$ D: $1 + x + x^2$ E: $3x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

7. Il limite

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sin(x^2)}$$

   vale

   A: $\frac{1}{2}$ B: $+\infty$ C: N.E. D: N.A. E: 0

8. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{x^2}$ è

   A: N.A. B: monotona crescente C: surgettiva D: iniettiva E: non derivabile in $x = 0$

9. Modulo e argomento del numero complesso $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{i}\right)^4$ sono

   A: $(27, 2\pi)$ B: $(3^4, \pi/2)$ C: $(3^5, 0)$ D: N.A. E: $(9^2, 0)$

10. Dato $x \geq 0$, la serie a termini non-negativi

    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + nx)}{n}$$

    converge per

    A: $x > 0$ B: $1 < x$ C: $x = 0$ D: $x \leq 1$ E: N.A.

CODICE=487106

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

25 febbraio 2014

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CODICE = 487106

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	●	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	●	○	○
5	○	○	○	○	●
6	○	○	●	○	○
7	●	○	○	○	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	○	●	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=487106

PARTE A

1. Data $f(x) = x^{|\log(x)|}$. Allora $f'(\mathrm{e})$ è uguale a

   A: $\log(2\mathrm{e})$ B: 2 C: $3\mathrm{e}^3$ D: 1 E: N.A.

2. L'integrale
$$\int_0^2 |x^2 - 1|\, dx$$
   vale

   A: N.A. B: 2 C: 2/3 D: 1/2 E: 0

3. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \; x^4 - x^2 > -\frac{\pi}{2}\}$$
   valgono

   A: $\{-1, -1, +\infty., N.E\}$ B: $\{-\infty, N.E., 1, N.E.\}$ C: $(-\infty, N.E, +\infty, N.E.)$ D: $\{-1, N.E, 1., N.E\}$
   E: N.A.

4. Sia data la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \begin{cases} b & \text{per } x < 2 \\ 1 & \text{per } x \geq 2. \end{cases}$

   Allora i valori di $b \in \mathbb{R}$ per cui $f(x) = \pi + \int_0^x g(t)\, dt$ è continua sono

   A: $|b| \leq 1$ B: $b = 1$ C: $b \in \mathbb{R}$ D: $b \leq 1$ E: N.A.

5. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(\log(x))$ nel punto $x_0 = 1$ vale

   A: $1 + x$ B: $x - 1$ C: $\frac{\sin(\log(x))}{x}$ D: x E: N.A.

6. Sia y la soluzione di $y'(x) = \sin(\log(y(x)))$ con $y(1) = 1$, allora $y'(1)$ vale

   A: 0 B: $\sin(\log(y(x))$ C: N.A. D: 1 E: N.E.

7. Dire quanto vale il seguente limite
$$\lim_{x \to +\infty} x(\mathrm{e}^{\frac{x}{x-3}} - \mathrm{e})$$
   A: N.E. B: 2e C: N.A. D: 3e E: 0

8. Modulo e argomento del numero complesso $z = \big(1 + i\big)^{-3}$ sono

   A: $(1/4, \pi)$ B: $(1/(2\sqrt{2}), \pi/4)$ C: $(1/(2\sqrt{2}), \pi)$ D: $(4, 0)$ E: N.A.

9. Dire per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ la seguente equazione ha due soluzioni distinte
$$e^{-x^4} = \beta$$
   A: $\beta \in (0, +\infty)$ B: $\beta \in \mathbb{R}$ C: Nessun valore di β D: $\beta \in]0, 1[$ E: N.A.

10. Il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n \log(n^2)}{\mathrm{e}^n} (x - 1/\mathrm{e})^n$$
    vale

    A: 1/e B: e C: $+\infty$ D: N.A. E: 1

CODICE=315691

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica I

30 giugno 2014

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	●	○	○
4	○	○	●	○	○
5	○	●	○	○	○
6	●	○	○	○	○
7	○	○	○	●	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	●	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=315691

PARTE A

1. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-4x}\log(x)}$$
vale

   A: $+\infty$ B: $1/3$ C: 0 D: N.E. E: N.A.

2. Per $t>1$ le soluzioni dell'equazione differenziale $x'(t)=(t\log(t))^{-1}$ sono

   A: $\log(\log(t))+c$ B: N.A. C: N.E. D: $t\log(t)+c$ E: $\frac{t^2}{\log(t^2)}+c$

3. Modulo e argomento del numero complesso $z=1+i^{2015}$ sono

   A: N.A. B: $(2,-\pi/4)$ C: $(2,\pi/4)$ D: $(1,\pi/4)$ E: $(\sqrt{2},\pi/4)$

4. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A=\{x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}:\log(x^2)-1<0\}$$
valgono

   A: $\{-\sqrt{\mathrm{e}},-\sqrt{\mathrm{e}},\sqrt{\mathrm{e}},\sqrt{\mathrm{e}}\}$ B: $\{-\sqrt{\mathrm{e}},N.E.,\sqrt{\mathrm{e}},N.E.\}$ C: N.A. D: $\{-\sqrt{\mathrm{e}},N.E.,0,N.E.\}$
   E: $\{-\sqrt{\mathrm{e}},N.E.,0,0\}$

5. La funzione $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi+\mathrm{e}}{\sqrt{2}}x^2+1 & \text{per } x<0\\ \cos(x) & \text{per } x\geq 0\end{cases}$

   A: è derivabile, ma non continua. B: non è né continua né derivabile. C: è continua e derivabile. D: N.A. E: è continua, ma non derivabile.

6. La funzione $f:\ \mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\log(|x|)$ è

   A: surgettiva B: iniettiva C: monotona crescente D: N.A. E: convessa

7. Dato $\alpha\geq 0$, la serie
$$\sum_{n=27}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$
converge per

   A: $\alpha>0$ B: $\alpha\geq 0$ C: N.A. D: $0<\alpha<1$ E: $\alpha>1$

8. La retta tangente al grafico di $y(x)=\cos(3x)$ nel punto $x_0=\pi/2$ vale

   A: $2x+\frac{\pi}{3}$ B: $3x$ C: $3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ D: N.A. E: $\frac{3}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

9. Data $f(x)=(\log(x))^{\sin(x)}$. Allora $f'(\pi/2)$ è uguale a

   A: $\log(3\mathrm{e})$ B: $\pi/2$ C: $\log(\pi/2)$ D: $2/\pi$ E: N.A.

10. L'integrale
$$\int_{-2}^{2}\sqrt{(x+1)^2}\,dx$$
vale

    A: 4 B: 0 C: N.A. D: 5/2 E: -5

CODICE=320343

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 gennaio 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	●	○	○	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	●	○	○	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	●	○	○
9	○	○	○	●	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=320343

PARTE A

1. La funzione $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$ è

   A: N.A. B: iniettiva C: surgettiva D: non derivabile in $x=0$ E: monotona crescente

2. L'integrale
$$3\int_1^{\mathrm{e}} \log^2(x)\frac{1}{x}\,dx$$
   vale

   A: 1 B: $\sqrt{\mathrm{e}}+1$ C: N.A. D: $\frac{1}{3}$ E: $\frac{1}{2}$

3. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ è

   A: N.A. B: $\frac{1}{\cos(x)}$ C: $2\mathrm{e}^{2x}$ D: $\frac{1}{\sin(x)}$ E: $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$

4. Il limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sin(x^2)}$$
   vale

   A: N.E. B: 1 C: $+\infty$ D: N.A. E: $\frac{1}{3}$

5. La funzione $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } x\le 0 \\ x^a\sin\dfrac{1}{x} & \text{per } x>0\end{cases}$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ per

   A: $a>0$ B: $a>1$ C: mai D: N.A. E: $a\ge 1$

6. Data $f(x)=(\mathrm{e}^x)^x$. Allora $f'(1)$ è uguale a

   A: e^2 B: $2\mathrm{e}$ C: N.A. D: $3\mathrm{e}^3$ E: $\log(2\mathrm{e})$

7. Modulo e argomento del numero complesso $z=\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^8$ sono

   A: $(3^5,0)$ B: N.A. C: $(3^{-4},\pi/2)$ D: $(27,2\pi)$ E: $(9^{-2},0)$

8. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A=\{x\in\mathbb{R}:\ \mathrm{e}^{-x^4}>\frac{1}{2}\}$$
   valgono

   A: $\{-\infty, N.E., \sqrt[4]{\log 2}, N.E.\}$ B: $\{-\frac{1}{2}, N.E., \frac{1}{2}, N.E.\}$ C: $\{-\infty, N.E., \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ D: N.A.
   E: $\{-\sqrt[4]{\log 2}, N.E., \sqrt[4]{\log 2}, N.E.\}$

9. Dato $x\ge 0$, la serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(1+n^2x)}{n}$$
   converge per

   A: $x\le 1$ B: $x=0$ C: $x>0$ D: N.A. E: $1<x$

10. La retta tangente al grafico di $y(x)=\sin^2(4x)$ nel punto $x_0=\pi/16$ vale

    A: N.A. B: $3x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ C: $-\frac{-12x+\pi-4}{4\sqrt{2}}$ D: $1+\sin(3x)(x-\pi/12)$ E: $4x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

CODICE=427174

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 giugno 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	●	○	○	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	●	○	○	○
6	○	●	○	○	○
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	○	●
9	○	●	○	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=427174

PARTE A

1. La derivata della funzione $x(t) = \int_0^{t^2+1} \sin(z)\, dz$ vale

   A: $2t\sin(t^2+1)$ B: N.A. C: $2t\sin(t^2)$ D: $\sin(t^2)$ E: N.E.

2. L'integrale
$$\int_{-1}^{2} |x|\, dx$$
   vale

   A: $\sqrt{2}$ B: $7/2$ C: N.A. D: 0 E: $3/2$

3. Dati $\alpha > 0$ e $f_\alpha(x) = 3(\log(\alpha x))$. Allora $f'_\alpha(\mathrm{e})$ è uguale a

   A: $\frac{\mathrm{e}^3}{\alpha}$ B: $\frac{3}{\mathrm{e}}$ C: $\alpha \log(3\mathrm{e})$ D: $\frac{3\alpha}{\mathrm{e}}$ E: N.A.

4. La funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \log(1+x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: N.A. B: non è né continua né derivabile. C: è continua e derivabile. D: è continua, ma non derivabile. E: è derivabile, ma non continua.

5. La retta tangente al grafico di $y(x) = \sin(\sin(x))$ nel punto $x_0 = 0$ vale

   A: N.A. B: $1 + x + x^2$ C: $1 + 2x - \frac{\pi}{2}$ D: $1 + x$ E: $1 + \sin(x)\, x$

6. Modulo e argomento del numero complesso $z = i^{44}$ sono

   A: $(1, 44\pi)$ B: $(1, 3\pi/2)$ C: $(2, 44\pi)$ D: $(2, 2\pi/3)$ E: N.A.

7. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^3 + \cos(x))}{3\log(x)}$$
   vale

   A: 0 B: N.A. C: $+\infty$ D: 1 E: N.E.

8. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x)\cos(x) < 0\}$$
   valgono

   A: $\{-\pi, -\pi, +\infty, N.E.\}$ B: $\{0, 0, \pi, \pi\}$ C: $\{-\infty, N.E., 2\pi, 2\pi\}$ D: N.A. E: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$

9. La serie a termini non-negativi
$$\sum_{n>[\pi]}^{\infty} \frac{1+n^2}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$
   converge per

   A: N.A. B: $\alpha > 1$ C: $\alpha > 2$ D: $3 < \alpha < \pi$ E: $\alpha \geq 1$

10. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^{20}$ è

    A: surgettiva B: monotona crescente C: iniettiva D: N.A. E: derivabile ovunque

CODICE=146179

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 settembre 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	●	○	○
3	○	●	○	○	○
4	○	○	○	●	○
5	●	○	○	○	○
6	●	○	○	○	○
7	○	○	○	●	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	●	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=146179

PARTE A

1. Dato il problema di Cauchy $y'(x) = \frac{x^2}{(y(x))^2}$ con $y(1) = 1$. Allora $y'(1)$ vale

   A: $1/2$ B: 1 C: 0 D: -1 E: N.A.

2. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^{\alpha+1}} < +\infty\}$$

   valgono

   A: $\{-\infty, N.E., -2, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{0, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{2, N.E., 2, 2\}$ E: $\{1, N.E., +\infty, N.E.\}$

3. Il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(4x)}{e^{3x} - 1}$$

   vale

   A: N.A. B: 0 C: $\frac{3}{4}$ D: $-\frac{3}{4}$ E: N.E.

4. Il numero complesso $(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))^{2015}$ vale

   A: 1 B: $1 - i$ C: N.A. D: $-i$ E: i

5. Dato $x \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^n$$

   converge per

   A: $x > -\frac{1}{2}$ B: $x \geq -\frac{1}{2}$ C: $x < -2$ D: N.A. E: $x > \frac{1}{2}$

6. Data $f(x) = e^{x^2}$. Allora $f'''(0)$ è uguale a

   A: $1/2$ B: N.A. C: 0 D: 1 E: 12

7. Per quali b, c la funzione $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{per } x \leq 1 \\ x^2 - bx + c & \text{per } x > 1 \end{cases}$ è derivabile in $\mathbb{R}$.

   A: N.E. B: N.A. C: $(b, c) = (0, 1)$ D: $(b, c) = (1, 1)$ E: $(b, c) = (-1, 0)$

8. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^{\pi + e}$ è

   A: iniettiva B: limitata C: monotona decrescente D: monotona crescente E: N.A.

9. Per $k \in \mathbb{R}^+$, la retta tangente al grafico di $y(x) = \sqrt{k + x^2}$ in $x_0 = 0$ vale

   A: N.A. B: $y(x) = \sqrt{k}$ C: $\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{k}} + \tan^2(k))x^2$ D: $-\frac{(\pi k)^2}{4}$ E: $1 + kx$

10. L'integrale

$$\int_2^0 \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$$

   vale

   A: $-\frac{\log(5)}{2}$ B: 0 C: $\log(2) - \log(1)$ D: $\frac{\log(5)}{2}$ E: N.A.

CODICE=903697

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 febbraio 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	●	○	○	○	○
4	○	○	○	●	○
5	○	○	○	○	●
6	○	○	●	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	●	○	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=903697

PARTE A

1. L'integrale
$$\int_0^3 |x^2-1|\,dx$$
vale
A: $2/3$ B: N.A. C: $22/3$ D: 0 E: 6

2. Dire quanto vale il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} x(2^{\frac{x}{x-3}}-2)$$
A: 3e B: N.E. C: $6\log(2)$ D: $-\log(64)$ E: 0

3. Sia data la funzione $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $g(x)=\begin{cases} b & \text{per } x<2 \\ 1 & \text{per } x\geq 2. \end{cases}$
Allora i valori di $b\in\mathbb{R}$ per cui $f(x)=\pi+\int_0^x \mathrm{e}^{\,g(t)}\,dt$ è continua sono
A: $|b|\leq 1$ B: $b\leq 1$ C: N.A. D: $b=1$ E: $b\in\mathbb{R}$

4. La retta tangente al grafico di $y(x)=\sin(\log(x))$ nel punto $x_0=1$ vale
A: N.A. B: x C: $1+x$ D: $\frac{\sin(\log(x))}{x}$ E: $x-1$

5. Modulo e argomento del numero complesso $z=\big(2+2i\big)^{-3}$ sono
A: $(1/4,\pi)$ B: $(1/(2\sqrt{2}),\pi)$ C: $(1/(2\sqrt{2}),\pi/4)$ D: N.A. E: $(4,0)$

6. Dire per quali valori di $\beta\in\mathbb{R}$ la seguente equazione ha due soluzioni distinte
$$e^{-x^3}=\beta$$
A: Nessun valore di β B: N.A. C: $\beta\in(0,+\infty)$ D: $\beta\in\mathbb{R}$ E: $\beta\in]0,1[$

7. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A=\{x\in\mathbb{R}:\ x^4-x^2>-\frac{\pi}{2}\}$$
valgono
A: $(-\infty,N.E,+\infty,N.E.)$ B: $\{-1,-1,+\infty.,N.E\}$ C: $\{-\infty,N.E.,1,N.E.\}$ D: $\{-1,N.E,1.,N.E\}$
E: N.A.

8. Il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n\,3\log(n^3)}{\mathrm{e}^n}(x-1/\mathrm{e})^n$$
vale
A: $1/\mathrm{e}$ B: e C: 1 D: N.A. E: $+\infty$

9. Sia y la soluzione di $y'(x)=\cos(\log(y(x)))$ con $y(1)=1$, allora $y'(1)$ vale
A: 1 B: N.E. C: N.A. D: 0 E: $\sin(\log(y(x)))$

10. Data $f(x)=|x|^{|\log(x)|}$. Allora $f'(\mathrm{e})$ è uguale a
A: 1 B: 2 C: N.A. D: $3\mathrm{e}^3$ E: $\log(2\mathrm{e})$

CODICE=883578

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

21 luglio 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	●	○	○
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	●	○
6	●	○	○	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	●	○	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=883578

PARTE A

1. Il limite
$$\lim_{x\to 1}\frac{\log(\cos(1-x))}{\sin^2(1-x)}$$
vale

A: $-1/2$ B: $1/2$ C: N.A. D: N.E. E: -1

2. L'integrale
$$\int_1^2 \frac{x-1}{(x+2)^2}\,dx$$
vale

A: N.A. B: $1-\log(4/3)$ C: 0 D: $\arctan(4/3)$ E: $-1/4+\log(4/3)$

3. Quante soluzioni ha l'equazione $\tan(x) = 1/x$ per $x \in]0, 2\pi[$?

A: N.A. B: 1 C: 0 D: 3 E: 2

4. Il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=6}^{+\infty}\frac{n^2+2^n}{n}(x-\pi)^n$$
vale

A: 2 B: 0 C: 1/2 D: π E: N.A.

5. Calcolare
$$\sum_{n=-2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

A: N.A. B: $\frac{25}{2}$ C: $\frac{9}{2}$ D: $\frac{3}{2}$ E: $+\infty$

6. Calcolare l'immagine di $f(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^{-2x}$, per $x \in [0, +\infty[$

A: $[0, 1]$ B: $[0, 1[$ C: N.A. D: $]-\infty, 1]$ E: $[1, +\infty[$

7. La soluzione particolare di $y^{(iv)} - y^{(iii)} = x\,\mathrm{e}^{-x}$ è della forma

A: $ax\mathrm{e}^{-x}$ B: $x\,(a+bx)\mathrm{e}^{-x}$ C: N.A. D: $ax(\sin(x)+\cos(x))$ E: $(a+bx)\mathrm{e}^{-x}$

8. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} :\ \log(\mathrm{e}^x+1) < 1\}$$
valgono

A: $\{-\infty, 0, N.E., 0\}$ B: N.A. C: $\{-\infty, \mathrm{e}-1, N.E., 0\}$ D: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ E: $\{-\infty, N.E., \log(\mathrm{e}-1), N.E.\}$

9. Il polinomio di Taylor di grado 1 in $x_0 = 0$ della funzione $\log(1+\sin(x))$ vale

A: $2x$ B: $-x$ C: $1+x-x^2$ D: $1+x$ E: N.A.

10. Data $f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x^3)}$, allora $f'(\sqrt[3]{\pi/2})$ vale

A: $\sqrt{2\pi}$ B: $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}$ C: -3 D: N.A. E: $-3\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}$

CODICE=077844

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 gennaio 2015

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	○	●
4	○	○	●	○	○
5	●	○	○	○	○
6	○	○	●	○	○
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	○	●
10	○	○	○	○	●

CODICE=077844

PARTE A

1. La serie a termini non-negativi
$$\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{(n+\sqrt{3})(n+\sqrt{5})^{\alpha}}$$
converge per

   A: $\alpha > 0$ B: N.A. C: $\alpha \geq 1$ D: $\alpha > 1$ E: $3 < \alpha < \pi$

2. La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \cos(|x|)$ è

   A: monotona crescente B: sempre non negativa C: N.A. D: iniettiva E: surgettiva

3. La funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1 & \text{per } x < 0 \\ \sin(x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

   A: è derivabile, ma non continua. B: è continua, ma non derivabile. C: è continua e derivabile. D: non è né continua né derivabile. E: N.A.

4. Data $f(x) = \sin(2\pi x)$. Allora $f'(1/3)$ è uguale a

   A: N.A. B: $-\frac{\pi}{2}$ C: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D: $-\pi$ E: π

5. L'integrale
$$\int_{-1}^{2} |x^3| \, dx$$
vale

   A: $\frac{\sqrt{\pi}^4}{2}$ B: $\frac{\pi^4 - 1}{4}$ C: N.A. D: 0 E: $\frac{17}{4}$

6. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x) \geq \frac{1}{\mathrm{e}^2}\}$$
valgono

   A: $\{\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}^2}, N.E., +\infty, N.E.\}$ B: $\{\log(2), \log(2), +\infty, N.E.\}$ C: $\{2, 2, +\infty, N.E.\}$ D: N.A. E: $\{\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}^2}, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}^2}, +\infty, N.E.\}$

7. Il polinomio di Taylor di grado 2 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \mathrm{e}^{x^4}$ vale

   A: $1 + x + x^2$ B: $1 + \mathrm{e}\,x + \frac{\mathrm{e}^2}{2}x^2$ C: $1 + x$ D: N.A. E: $1 + x^2$

8. Modulo e argomento del numero complesso $z = \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono

   A: N.A. B: $(1, -\pi/6)$ C: $(1, 5\pi/6)$ D: $(1, 4\pi/3)$ E: $(2, 5\pi/3)$

9. Il limite
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^{(11!)}\,\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{3x}}$$
vale

   A: $+\infty$ B: 1 C: 0 D: N.E. E: N.A.

10. Una primitiva della funzione $x(t) = t\log(t)$ è

    A: N.A. B: $\log(\log(t) - t)$ C: $t^2(\log(t) - 1)$ D: $\sin(t) - t\cos(t) + \sqrt{\pi}$ E: $\frac{1}{2}t^2\log(t) - \frac{t^2}{4}$

CODICE=621383

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

30 giugno 2015

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	●	○	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	○	●	○
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	○	○	○	●	○
8	○	○	●	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=621383

PARTE A

1. Quale tra questi punti appartiene all'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n} x^n$$

   A: $x = 1.99$ B: $x = -\sqrt{2}$ C: N.A. D: $x = \pi$ E: $x = -1.99$

2. Lo sviluppo di Taylor di grado 3 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $y(x) = \sin(x^2)$ vale

   A: $1 + 2\cos(x^2)x + o(x^3)$ B: $x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ C: $1 + x^2 + o(x^5)$ D: N.A. E: $x^2 + o(x^3)$

3. inf min sup e max della funzione $x\sin(x)$ per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ valgono

   A: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$ B: $\{0, 0, \pi/2, N.E.\}$ C: $\{0, 0, \pi/2, \pi/2\}$ D: $\{0, N.E., 1, N.E.\}$
   E: N.A.

4. Date le funzioni $f(x) = \log(x+1)$ e $g(x) = x^2$ la funzione composta $g(f(x))$ risulta definita in

   A: $\mathbb{R}$ B: $(-1, +\infty)$ C: $(-\infty, 0)$ D: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ E: N.A.

5. Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{x^2} - 1}{\sin(x)\sin(2x)}$$

   vale

   A: 2 B: $\log(1/3)$ C: N.A. D: $1/2$ E: $1/3$

6. Data $f(x) = \mathrm{e}^{|x|}\,|1-x|$. Allora $f'(2)$ è uguale a

   A: N.A. B: N.E. C: $-2\mathrm{e}^2$ D: $2\mathrm{e}^2$ E: 0

7. L'integrale

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{3x} - 1}{\mathrm{e}^{3x} - 3x}\, dx$$

   vale

   A: $\log\left((\mathrm{e}^3 - 3)^{1/3}\right)$ B: $1 - \frac{\log(3)}{3}$ C: N.E. D: 0 E: N.A.

8. L'argomento principale del numero complesso $i\frac{\mathrm{e}^{i27\pi}}{\mathrm{e}^{-i54\pi}}$ è uguale a

   A: $\pi/4$ B: $\pi/2$ C: N.A. D: 0 E: $-\pi/2$

9. Sia $y'' - y = 0$, $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$, allora $y'(1)$ vale

   A: N.A. B: $\frac{\mathrm{e}^2+1}{2\mathrm{e}}$ C: $\frac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}}$ D: $-\sin(1)$ E: $\sin(1)$

10. Quante sono, al variare di $q \in \mathbb{R}$ le soluzioni reali dell'equazione $\mathrm{e}^x = -x + q$

    A: 1 se $q > 0$, nessuna se $q \leq 0$ B: 1 C: N.A. D: nessuna E: 2

CODICE=406308

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

1 luglio 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	●	○	○	○
4	○	●	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	○	○	○	●	○
7	●	○	○	○	○
8	○	○	○	○	●
9	○	○	●	○	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=406308

PARTE A

1. Data $f(x) = |\sin(x)|25^{x^2}$. Allora $f'(0)$ è uguale a

   A: N.E. B: 0 C: $\pi/2$ D: N.A. E: 1

2. L'integrale

   $$\int_0^\pi (x-\pi)\sin(x)\,dx$$

   vale

   A: N.A. B: $\pi/2$ C: $\sqrt{2}$ D: 0 E: $-\pi$

3. Il limite

   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(|\log(x)|)}{\log(x)}$$

   vale

   A: $+\infty$ B: N.A. C: 1 D: N.E. E: 0

4. La funzione $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=\sin(x^2)$ è iniettiva per

   A: $a=\pi/2$ B: $a=4$ C: $a=\sqrt{\pi}$ D: $a=\sqrt{\pi/2}$ E: N.A.

5. Una soluzione dell'equazione $y'(t) = t\sin(t^2)$ è

   A: $\sin(t^2)+1$ B: $(t^2+\pi)/2+\cos(t)$ C: $t^3/2-\cos(t)$ D: N.A. E: N.E.

6. L'insieme dove converge la serie di potenze

   $$\sum_{n=[\pi]}^{+\infty} \frac{n+2+\mathrm{e}^{\sin(n)}}{n} x^n$$

   è

   A: $|x|<8$ B: N.A. C: $0<x<1$ D: $|x|<1$ E: $0<x\le 1$

7. La retta tangente al grafico di $y(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$ nel punto $x_0 = 3\pi/2$ vale $\phi(x) =$

   A: $1-x$ B: N.A. C: $\mathrm{e}+(x-3\pi/2)$ D: $\frac{1}{\mathrm{e}}$ E: $1+x$

8. Se esiste, il minimo di $f(x) = |\sin(x)-1|$ sull'insieme $A=\{x\in]-2\pi,0]\}$ vale

   A: N.A. B: N.E. C: 0 D: -1 E: 1

9. Inf, min, sup e max dell'insieme

   $$A=\{y=\frac{\mathrm{e}^x}{|-\mathrm{e}^x|},\ x\neq k\frac{\pi}{2}\ \text{ con } k\in\mathbb{Z}\}$$

   valgono

   A: $\{1,1,1,1\}$ B: $\{-1,-1,1,1\}$ C: $\{1,N.E.,+\infty,N.E.\}$ D: $\{0,0,1,N.E.\}$ E: N.A.

10. L'insieme definito da $\{x\in\mathbb{R}\ ,\ x<|4i-3|\}$ è

    A: N.A. B: Impossibile: non si confrontano numeri reali e complessi C: l'insieme vuoto
    D: $-\infty<x<5$ E: $|x|<4$

CODICE=703413

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

5 febbraio 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	●	○	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	○	●
4	○	○	○	●	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	○	●	○
7	○	○	○	●	○
8	○	○	●	○	○
9	●	○	○	○	○
10	○	○	○	●	○

CODICE=703413

PARTE A

1. La serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
A: è a segni alterni B: diverge C: N.A. D: è indeterminata E: converge

2. Lo sviluppo di Taylor di grado 5 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $y(x) = \sin(x^2)$ vale
A: $1 + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$ B: $x^2 + o(x^5)$ C: $x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5)$ D: N.A. E: $1 + 2\sin(x^2)x + o(x^3)$

3. inf min sup e max dell' insieme
$$A = \{\log(x^2),\ x \leq -1\}$$
valgono
A: $\{0, 0, +\infty, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$ D: $\{0, N.E., 1, N.E.\}$ E: $\{-\infty, N.E., -1, -1\}$

4. Data $f(x) = (\sin(x^3))^{x^2}$ allora $f'(\sqrt[3]{\pi/2})$ è uguale a
A: -2 B: π C: 0 D: $\sin(\sqrt[3]{\pi/2})^{2(\frac{\pi}{2})^3}$ E: N.A.

5. La soluzione del problema di Cauchy $y''(t) = t^2$, $y(0) = y'(0) = 0$ è
A: $y(t) = \frac{t^3}{3}$ B: $y(t) = 0$ C: $y(t) = 1 + t + t^2$ D: N.A. E: $y(t) = \frac{t^4}{12}$

6. Modulo e argomento del numero complesso $z = \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono
A: N.A. B: $(1, \frac{\pi}{6})$ C: $(\sqrt{3}, \frac{2\pi}{5})$ D: $(\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6})$ E: $(1, \frac{5\pi}{6})$

7. Il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\arctan(x))}{x}$$
vale
A: N.A. B: 1/2 C: 1 D: $-\infty$ E: 0

8. In quanti punti si intersecano gli insiemi A e B definiti da
$$A := \left\{\|z - \sqrt{2}e^{i\pi/4}\| = 1\right\| \qquad B := \left\{\|z - \sqrt{2}e^{i3\pi/4}\| = 2\right\}$$
A: 2 B: 4 C: 1 D: N.A. E: 0

9. L'integrale
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(x)|\, dx$$
vale
A: 0 B: 2π C: N.A. D: 2 E: $\frac{\pi}{2}$

10. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 e^x$ è
A: N.A. B: monotona decrescente C: iniettiva D: monotona crescente E: non negativa

CODICE=201335

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 settembre 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	●	○	○	○
3	●	○	○	○	○
4	○	○	●	○	○
5	○	○	○	○	●
6	○	○	○	○	●
7	●	○	○	○	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	○	●	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=201335

PARTE A

1. Se esiste il massimo di $f(x) = x - x^2$ sull'insieme $A = \{x \in]0, 2\pi[: \cos(x) \leq 0\}$ vale

   A: N.A. B: $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}$ C: $\frac{1}{4}$ D: $\frac{1}{2}$ E: N.E.

2. Le soluzioni di $z^2 = \frac{1}{i}$ hanno come argomento

   A: N.A. B: $(-\pi/4, -\pi/2)$ C: $(\pi, \pi/2)$ D: $(-\pi/4, 3\pi/4)$ E: $(\pi/4, -3\pi/4)$

3. L'insieme dove converge la serie

$$\sum_{n=8}^{+\infty} n^8 x^n$$

   è

   A: $0 < x < 1$ B: $|x| < 8$ C: $|x| < 1$ D: N.A. E: $|x| \leq 1$

4. Inf, min, sup e max dell'insieme

$$A = \{y = \frac{1}{|\cos(x)|},\ x \neq k\frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$$

   valgono

   A: $\{0, 0, 1, N.E.\}$ B: $\{1, 1, +\infty, N.E.\}$ C: $\{-1, -1, 1, 1\}$ D: N.A. E: $\{1, N.E., +\infty, N.E.\}$

5. La retta tangente al grafico di $y(x) = \cos(\sin(x))$ nel punto $x_0 = 0$ vale

   A: $1 - \cos(x)\sin(\sin(x))\,x$ B: N.A. C: $1 + x$ D: $1 - x^2/2$ E: $1 - x$

6. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^{20}\sin(x)$ è

   A: monotona decrescente B: surgettiva C: N.A. D: iniettiva E: monotona crescente

7. L'integrale

$$\int_{-1}^{5} |x|\, dx$$

   vale

   A: N.A. B: $\sqrt{2}$ C: $3/2$ D: 0 E: $7/2$

8. Il limite

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{|\sin(x)|}{x^2}}$$

   vale

   A: 1 B: $+\infty$ C: N.A. D: 0 E: N.E.

9. Data $f(x) = x^2 3^{|\sin(x)|}$. Allora $f'(0)$ è uguale a

   A: 1 B: N.E. C: $\pi/2$ D: 0 E: N.A.

10. Una soluzione dell'equazione $y'(t) = t + \sin(t)$ è

    A: $(t^2 + 9)/2 - \cos(t)$ B: $t^3/2 - \cos(t)$ C: N.E. D: N.A. E: $(t^2 + \pi)/2 + \cos(t)$

CODICE=236897

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 gennaio 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	○	○	●	○
3	○	○	●	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	●	○	○	○
6	○	●	○	○	○
7	●	○	○	○	○
8	○	●	○	○	○
9	○	○	○	●	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=236897

PARTE A

1. Dire per quale codominio la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x\mathrm{e}^x}$ definita su $D = [0, +\infty[$ è bigettiva

   A: N.A. B: $]0, +\infty[$ C: N.E. D: $]0, 1[$ E: $]0, 1]$

2. Sia $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$, allora $y'(1)$ vale

   A: N.A. B: $\frac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}}$ C: $\frac{\mathrm{e}^2+1}{2\mathrm{e}}$ D: $-\sin(1)$ E: $\sin(1)$

3. Trovare le soluzioni complesse di $16z^2 - z^6 = 0$ con parte immaginaria di z negativa

   A: $z = 2i, -2i$ B: $z = -i$ C: $z = -2i$ D: N.E. E: N.A.

4. Quale tra questi punti appartiene all'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2\, 3^n}{\mathrm{e}^n(1+n)} x^n$$

   A: $x = \mathrm{e}$ B: $x = -1.87$ C: $x = \sqrt{\pi}$ D: $x = -\pi$ E: N.A.

5. Data $f(x) = (\sin(x^2))^{x^3}$ allora $f'(\sqrt{\pi/2})$ è uguale a

   A: $\sin(\sqrt{\pi/2})^{3(\frac{\pi}{2})^2}$ B: N.A. C: 1 D: -2 E: 0

6. Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = \log(x+1)$ la funzione composta $g(f(x))$ risulta definita in

   A: $(-\infty, 0)$ B: N.A. C: $\mathbb{R}$ D: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ E: $(-1, +\infty)$

7. inf min sup e max dell' insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x^2) < \mathrm{e}\}$$

   valgono

   A: $\{0, N.E., \sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ D: $\{0, 0, \sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}, N.E.\}$ E: $\{-\mathrm{e}^{\mathrm{e}/2}, N.E., \mathrm{e}^{\mathrm{e}/2}, N.E.\}$

8. Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{x^3} - 1}{\sin(x)\tan(2x)}$$

   vale

   A: N.A. B: 0 C: $\log(1/3)$ D: $1/2$ E: $1/3$

9. Lo sviluppo di Taylor di grado 4 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione $y(x) = \cos(x^2)$ vale

   A: $1 + 2\cos(x^2)x + o(x^3)$ B: $1 + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$ C: N.A. D: $1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ E: $x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

10. L'integrale

$$\int_0^1 x\, \mathrm{e}^{-x^2+2}\, dx$$

   vale

   A: $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}$ B: $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$ C: N.A. D: e^2 E: $\frac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}{2}$

CODICE=514305

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

22 luglio 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	○	○	●
2	○	○	●	○	○
3	○	○	●	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	○	○	●	○	○
7	○	○	○	○	●
8	○	●	○	○	○
9	○	○	○	●	○
10	○	○	○	○	●

CODICE=514305

PARTE A

1. Il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2+\sin(x))}{\log(x-\cos(x))}$$
vale
A: 0 B: N.E. C: N.A. D: 1 E: 1/2

2. Il massimo e minimo della funzione $f(x) = x^3 - x$ su $[-2, 0]$ sono
A: max $= \frac{2}{3\sqrt{3}}$, min $= -\frac{2}{9}\sqrt{3}$ B: max $= \frac{2}{9}\sqrt{3}$, min $= -6$ C: entrambi non esistono D: max $= \frac{2}{9}\sqrt{3}$, non esiste min E: N.A.

3. La retta tangente al grafico di $y(x) = \log(x - x^3)$ nel punto $x_0 = 1/3$ vale $\phi(x) =$
A: $-\log\left(\frac{8}{3}\right) + \frac{9}{4}x$ B: $\log\left(\frac{8}{27}\right) + 2\left(x - \frac{1}{3}\right)$ C: N.A. D: $\log\left(\frac{8}{27}\right) + \frac{9}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right)$ E: $1 - x$

4. L'integrale
$$\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$$
vale
A: 1 B: 0 C: -1 D: N.E. E: N.A.

5. La funzione $f : [0, \mathrm{e}] \to [0, 10]$ definita da $f(x) = \lambda\, x\, \mathrm{e}^{-x}$ è suriettiva per $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che
A: $\lambda = \log(10)$ B: per nessun λ C: $\lambda = 10\mathrm{e}$ D: $\lambda = 1$ E: N.A.

6. Quale tra questi punti appartiene all'insieme di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + \log(n)}{n^3 + 2^n} x^n$$
A: $x = 1/3$ B: $x = \pi$ C: $x = 0.99$ D: $x = -1$ E: N.A.

7. La disequazione $|x| \le |z|$, con $z \in \mathbb{C}$ e $x \in \mathbb{R}$ è vera se
A: mai B: $z = 2i^3$ e $x = 3$ C: $z = \frac{3}{i} - 2i$ e $x = \pi$ D: $z = 1 + i$ e $x = -3$ E: N.A.

8. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{Q} \cap [-10, 10] : \sin(\pi x) = 0\}$$
valgono
A: N.A. B: $\{-10, N.E., 10, N.E.\}$ C: $\{-1, -1, 1, 1\}$ D: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ E: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$

9. Data $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$. Allora $f'(0)$ è uguale a
A: N.A. B: -1 C: 1 D: 0 E: $\log(2)$

10. L'integrale
$$\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$$
vale
A: $\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}$ B: N.A. C: $-\frac{2}{5}x^{-5/2}$ D: $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ E: N.E.

CODICE=510289

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

24 febbraio 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	●	○	○	○
3	○	○	○	●	○
4	●	○	○	○	○
5	○	○	●	○	○
6	●	○	○	○	○
7	○	○	●	○	○
8	●	○	○	○	○
9	●	○	○	○	○
10	●	○	○	○	○

CODICE=510289

PARTE A

1. Quante sono le soluzioni di $\overline{z}z = |z|$, con parte immaginaria non nulla

   A: 1 B: 2 C: N.A. D: 3 E: Nessuna

2. Il numero complesso $e^{(\pi e^{i\pi/2})}$ vale

   A: N.A. B: $e^{\pi}(\sin(1) + i\cos(1))$ C: N.E. D: i E: -1

3. La funzione $f(x) =:]0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x\log(x^2)$ è

   A: continua B: surgettiva C: N.A. D: positiva E: iniettiva

4. Il limite
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\log(x^2)}{\log|x|}$$
   vale

   A: N.E. B: $N.A.$ C: 1 D: -2 E: 2

5. La retta tangente al grafico di $y(x) = e^{(e^x)} - e$ nel punto $x_0 = 0$ vale $\phi(x) =$

   A: x B: $1-x$ C: N.A. D: $e^{x+e^x}x$ E: $e\,x$

6. Il massimo e minimo della funzione $f(x) = x^4 - 2x^2$ su $[0,2]$ sono

   A: max = 8, min = -1 B: max = 0, min = -1 C: N.A. D: entrambi non esistono
   E: non esiste max, min = 0

7. Il raggio di convergenza della serie di potenze
$$\sum_{n=100}^{+\infty} \frac{(4n)^{n/2}}{(3n)^n}(x-1)^n$$

   A: $R = 3/2$ B: N.A. C: $R = 3/4$ D: $R = 0$ E: $R = +\infty$

8. L'integrale
$$\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\log(x)}\,dx$$
   vale

   A: 1 B: $-\infty$ C: $\log(1/2)$ D: $\log(2)$ E: N.A.

9. L'integrale
$$\int_0^{\pi/2} \cos(3x)\,dx$$
   vale

   A: π B: $-1/3$ C: N.A. D: 0 E: 1/2

10. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{y = \frac{\sin(x)}{|\sin(x)|} : \qquad x \in \mathbb{R},\ x \neq k\pi \text{ per } k \in \mathbb{Z}\}$$
    valgono

    A: $\{0, N.E., 1, 1.\}$ B: $\{-\infty, N.E., +\infty, N.E.\}$ C: $\{-1,-1,1,1\}$ D: $\{-1, N.E., 1, N.E.\}$
    E: N.A.

CODICE=375150

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica 1

10 gennaio 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	○	●	○	○
2	○	○	○	○	●
3	●	○	○	○	○
4	○	○	○	○	●
5	○	○	○	○	●
6	●	○	○	○	○
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	●	○
9	○	●	○	○	○
10	○	○	●	○	○

CODICE=375150

PARTE A

1. Inf, min, sup e max dell'insieme
$$A = \{y = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}\ x \in]0,1]\}$$
valgono
A: $\{-\mathrm{e}, -\mathrm{e}, \mathrm{e}, N.E.\}$ B: N.A. C: $\{1, N.E., \mathrm{e}, \mathrm{e}\}$ D: $\{0, N.E., \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}, \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}\}$ E: $\{0, N.E., +\infty, N.E.\}$

2. Sia $a > 0$. La serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-\log(1+a)}$$
risulta convergente per
A: N.A. B: N.E. C: $e < a < 2e$ D: $a > \mathrm{e} - 1$ E: $a > 1$

3. Il massimo e minimo della funzione $f(x) = x - x^3$ su $(-1, 1)$ sono
A: non esiste max, min $= 0$ B: max $= 0$, min $= -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ C: N.A. D: max $= \frac{2}{3\sqrt{3}}$, min $= -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ E: entrambi non esistono

4. Il polinomio di Taylor di ordine 2, relativo al punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$ della funzione $y(x) = \sin(x)$ vale $P_2(x) =$
A: 1 B: N.A. C: $1 - x + \frac{x^2}{2}$ D: $-\frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{8} + 1$ E: $1 - \frac{x^2}{2}$

5. La soluzione dell'equazione differenziale $\begin{cases} y'' - 2y' = -2 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$ è data da $y(x) =$
A: $\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}$ B: $e^{\sqrt{2}x} + e^{-\sqrt{2}x} + \frac{x}{2}$ C: x D: N.A. E: $\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} + x$

6. L'integrale
$$\int_{-\infty}^{\sqrt{\mathrm{e}}} 4x\mathrm{e}^{-x^2}\, dx$$
vale
A: $\log(\mathrm{e}^2)$ B: $-2\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$ C: N.A. D: $-\infty$ E: e^{e}

7. Il limite
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\mathrm{e}^{-\sin(x)} - 1}{\tan(x)}$$
vale
A: $N.A.$ B: N.E. C: 1 D: $-\infty$ E: -1

8. L'integrale
$$\int_2^4 \frac{1}{1 - x^2}\, dx$$
vale
A: 1 B: $\arctan(4) - \arctan(2)$ C: 0 D: N.A. E: $\log(\sqrt{5}) - \log(3)$

9. La funzione $f(x) :]2, 10] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x\mathrm{e}^{-x/\mathrm{e}}$ è
A: negativa o nulla B: iniettiva C: N.A. D: derivabile 15 volte E: surgettiva

10. Siano dati gli insiemi (complessi) $A := \{z \in \mathbb{C} : z = \mathrm{e}^{1+i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi)\}$ e $B := \{z \in \mathbb{C} : |z - i + 1| = 2\}$. Il numero degli elementi di $A \cap B$ è
A: 0 B: 2 C: infiniti D: 1 E: N.A.

CODICE=212714

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica 1

30 gennaio 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	○	○	●	○
3	○	○	○	●	○
4	○	○	○	●	○
5	○	○	●	○	○
6	○	●	○	○	○
7	○	○	○	○	●
8	○	○	○	○	●
9	○	○	○	●	○
10	○	●	○	○	○

CODICE=212714

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

2 luglio 2009

PARTE B

1. Studiare il numero di soluzioni, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ della equazione

$$\lambda = x^3 - 2x^2 + x - 1, \qquad x \geq 0.$$

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) = t + \cos(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

3. Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_{-\infty}^{0} x^2 \, \mathrm{e}^{x^3} \, dx.$$

4. Mostrare che per ogni $p \geq 1$ esiste una costante $c(p)$ tale che

$$(1 + x)^p \leq c(p)(1 + x^p) \qquad \forall \, x \geq 0$$

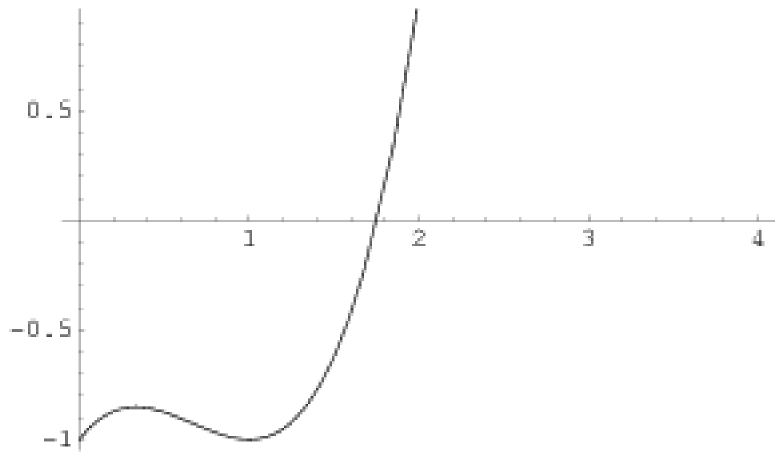
e calcolare quanto vale.

Traccia di soluzione

1) Studiando la funzione

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1, \qquad x \geq 0$$

si ricava subito che la derivata prima $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ è strettamente maggiore di zero per $0 \leq < 1/3$ e per $x > 1$ e strettamente minore di zero per $1/3 < x < 1$. Pertanto in $x_0 = 1/3$ (con $f(x_0) = -23/27$) si ha un massimo locale, mentre in $x_1 = 1$ ($f(x_1) = -1$) si ha un minimo locale (questo è il grafico approssimativo



visto che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$). Dallo studio si ricava che non ci sono soluzioni se $\lambda < -1$; Poi 2 soluzioni se $\lambda = -1$ e $\lambda = -23/27$, 3 soluzioni se $-1 < \lambda < -23/27$ e una soluzione se $\lambda > -23/27$

2) L'equazione caratteristica ha come soluzioni $\lambda = 0, 1$ e quindi l'equazione omogenea ha come soluzione

$$y_0(t) = c_1 + c_2 \mathrm{e}^t.$$

Le soluzioni del problema non omogeneo vanno cercate della forma $y_{f_1} = t(at + b)$ e $y_{f_2} = c\cos(t) + d\sin(t)$ Svolgendo i calcoli e imponendo le condizioni iniziali si trova che la soluzione è

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(-t^2 - 2t + 3e^t - \cos(t) - \sin(t) - 2\right).$$

3) La funzione i questione è integrabile in senso generalizzato, perchè

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 \mathrm{e}^{x^3}}{x^\alpha} = 0 \qquad \forall\, \alpha > 0$$

Svolgendo i conti si trova facilmente (integrazione per sostiruzione)

$$\int_{-\infty}^0 x^2\, \mathrm{e}^{x^3}\, dx = \frac{1}{3}.$$

4) La diseguaglianza è soddisfatta se si trova un numero $c(p)$ tale che

$$\frac{(1+x)^p}{(1+x^p)} \le c(p) \qquad \forall\, x \ge 0.$$

osserviamo che per ogni $p \ge 1$ fissato , se $F(x) = \frac{(1+x)^p}{(1+x^p)}$ si ha

$$F(0) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

e inoltre visto che

$$F'(x) = \frac{p(x+1)^{p-1}(1 - x^{p-1})}{(1+x^p)^2}$$

la funzione $F(x)$ assume massimo assoluto in $x = 1$ e questo ancora per ogni fissato $p \ge 1$ (da considerarsi come un parametro). Pertanto

$$F(x) = \frac{(1+x)^p}{(1+x^p)} \le F(1) = 2^{p-1},$$

che è il valore cercato per $c(p)$.

PARTE B

1. Studiare il numero di soluzioni, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}^+$ della equazione

$$\log(\lambda\, x) = |x+1|, \qquad x > 0.$$

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) - y(t) = \sin(t) + t\cos(t) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

   Quanto vale $y'(0)$?

3. Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+x^2+x+1}\, dx.$$

4. Sia $f : [2, 7/2] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann tale che

$$\int_2^{7/2} f(x)\, dx = 3.$$

   Dimostrare che esiste almeno un punto $x_0 \in [2, 7/2]$ tale che $f(x_0) \geq \frac{7}{4}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 giugno 2009

PARTE B

1. Studiare il numero di soluzioni, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ della equazione
$$\lambda = \frac{1+|x|}{2+x}, \qquad x > 0.$$

2. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin(\pi t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$
Quanto vale $y''(0)$?

3. Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare l'integrale generalizzato
$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{(x-1)(x^2+9)}\, dx.$$

4. Dimostrare che nessun polinomio di grado dispari, strettamente maggiore di 1, è una funzione convessa.

Traccia di soluzione

1) Studiando la funzione
$$f(x) = \frac{1+|x|}{2+x} = \frac{1+x}{2+x}, \qquad \text{se } x > 0.$$
si ricava subito che la derivata prima $f'(x) = (2+x)^{-2}$ è strettamente maggiore di zero. La funzione f è quindi strettamente monotona e la sua immagine è $]\inf_{x>0} f, \sup_{x>0} f[=]1/2, 2[$. Pertanto per $1/2 < \lambda < 1$ c'è una soluzione, mentre per $\lambda \leq 1/2$ e $\lambda \geq 1$ non ci sono soluzioni.

2) L'equazione caratteristica ha come soluzioni $\lambda = \pm i$ e quindi l'equazione omogenea ha come soluzione

$$y_0(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t).$$

Dato che non c'è risonanza una soluzione dellla non omogenea va cercata della forma

$$y_f(t) = c_1 \sin(\pi t) + c_2 \cos(\pi t).$$

Svolgendo i conti e imponendo le condizioni iniziali si trova

$$y(t) = \cos(t) + \frac{\pi \sin(t) - \sin(\pi t)}{-1 + \pi^2}$$

ed anche $y''(0) = -1$.

3) In questo caso osservando che

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+9)} = \mathcal{O}(x^{-2})$$

l'integrale converge. Trattandosi di una funzione razionale, tramite la usuale fattorizzazione si trova che una primitiva è

$$\frac{1}{20}\left(6\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + 2\log(x-1) - \log\left(x^2+9\right)\right)$$

e quindi

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{(x-1)(x^2+9)}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{20}\left(6\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + 2\log(x-1) - \log\left(x^2+9\right)\right)\Big]_2^b$$

$$= \frac{1}{20}\left(3\pi - 6\arctan\left(\frac{2}{3}\right) + \log(13)\right)$$

4) Se $P(x)$ è un polinomio di grado dispari di grado strettamente maggiore di 1, allora la sua derivata seconda $P''(x)$ è un polinomio di grado dispari di grado maggiore o uguale a 1. Pertanto

$$\lim_{x\to\pm\infty} P''(x) = \pm\infty \text{ oppure } \lim_{x\to\pm\infty} P''(x) = \mp\infty.$$

In entrambi i casi il teorema della permanenza del segnoci assicura l'esistenza di intervalli in cui la derivata seconda è negativa e quindi P non può essere convessa.

PARTE B

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x<0, \\ \cos(x) & 0 \le x < \dfrac{3\pi}{2}, \\ 3\pi - 2x & x \ge \dfrac{3\pi}{2}, \end{cases}$$

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) = \mathrm{e}^t \\ y(0)=0, \\ y'(0)=0, \\ y''(0)=0. \end{cases}$$

3. Calcolare l'integrale

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2(x+3)}.$$

4. Dimostrare che per ogni coppia di numeri reali a e b vale la diseguaglianza

$$|\sin(a) - \sin(b)| \le |a-b|.$$

CODICE=666971

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

19 febbraio 2009

PARTE B

1. Determinare l'immagine della funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \qquad x \geq 0.$$

Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$.

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(IV)}(t) + y^{(III)}(t) = 1 + \mathrm{e}^t \\ y(0) = 0. \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 0. \end{cases}$$

3. Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}\, dx$$

ed eventualmente calcolarne il valore.

4. Dimostrare che la somma di due funzioni crescenti (non necessariamente derivabili) è una funzione crescente. Cosa si può dire della differenza di due funzioni crescenti? tale differenza è una funzione monotona?

PARTE B

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{x}{\log(x)}, \qquad x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$
trovando eventuali massimi e minimi locali e assoluti e punti di flesso. Calcolare poi il numero di intersezioni con la funzione $g(x) = x$.

2. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin(t) + \cos(2t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

3. Calcolare l'integrale
$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\log(x)}{x(\log(x)+1)}\, dx.$$
Sugg. usare integrazione per sostituzione

4. Sia $h(x)$ una funzione continua assieme alle sue derivate prime e seconde e tale che $h(0) = h(1) = \mathrm{e}$ e $h'(1) = \pi$. Calcolare
$$\int_0^1 x h''(x)\, dx.$$

CODICE=529220

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

29 gennaio 2009

PARTE B

1. Determinare l'immagine della funzione

$$f(x) = (1+x)\, 2^{-1/x}, \qquad x \in [-1/8, +\infty[\setminus\{0\}.$$

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = \sin(2t) \\ y(0) = 0. \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Quanto vale $y'''(0)$?

3. Determinare per quali valori del parametro $x \geq 0$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+x} \right)^n$$

converge. Definita poi, per tali x la funzione $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+x} \right)^n$, calcolare $g'(1)$.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile per tutti gli $x \in \mathbb{R}$. La funzione

$$|f(x)|$$

è sempre non derivabile almeno un qualche punto? Discutere sotto quali ipotesi per la f (non a segno costante) la funzione $|f(x)|$ è derivabile in ogni punto $x \in \mathbb{R}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

3 luglio 2010

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3} = \lambda, \qquad \text{per } x \geq 0.$$

Soluzione: Derivata di $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^3}$ si annulla per $x = 3 \pm \sqrt{3}$ Il minimo locale è $y_m = \frac{-5+3\sqrt{3}}{(-3+\sqrt{3})^3}$, mentre il massimo locale è $y_M = \frac{5+3\sqrt{3}}{(3+\sqrt{3})^3}$. Inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

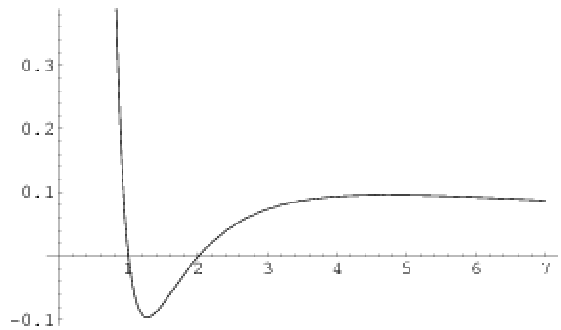


Figura 1: $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^3}$

Si ha 1 soluzione per $\lambda > y_M$, 2 soluz. per $\lambda = y_M$, 3 soluz. per $\lambda \in]0, y_M[$, 2 soluz. per $\lambda \in]y_m, 0]$, 1 soluz. per $\lambda = y_m$ e nessuna soluz. per $\lambda < y_m$.

2. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(t) + y(t) = \mathrm{e}^t \sin(t)$$

Soluzione:

$$y(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + \frac{1}{5}e^t \sin(t) - \frac{2}{5}\mathrm{e}^t \cos(t)$$

3. Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato e eventualmente calcolarlo

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2(x+1)}\, dx$$

Soluzione: non converge perchè $\frac{x^2-x+1}{x^2(x+1)} = \mathcal{O}(1/x)$ per $x \to +\infty$

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Definita

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t\,x)\,dt$$

Calcolare $\Phi'(x)$. (Sugg. Introdurre il cambio di variabile $tx = y$)

Soluzione:$\Phi'(x) = 2f(x^2) - \frac{1}{x^2}\int_0^{x^2} f(y)\,dy$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

10 giugno 2010

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ l'immagine della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - \lambda x + 1}{x^3}, \qquad \text{per } x \geq 0.$$

2. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(t) - y(t) = t^2 \sin(2t).$$

Facoltativo, trovare le soluzioni dispari.

3. Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})(\sqrt{\pi} + \sin(x))}{x(1 + x^{3/2})}\, dx.$$

4. Data una successione $\{a_n\}_n$ a termini positivi. L'uguaglianza

$$\sup_n a_n = \inf_n \frac{1}{a_n}$$

è vera? Facoltativo: cosa si puó dire dell'uguaglianza $\sup_n a_n = -\inf_n(-a_n)$

CODICE=998096

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

13 gennaio 2010

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\lambda \geq 0$ l'immagine di della equazione
$$f(x) = (x + \lambda)e^{-x}, \qquad \text{per } x \geq 0.$$
Soluzione:
$Im(f) =]0, \lambda]$ se $\lambda > 1$, $Im(f) =]0, \mathrm{e}^{\lambda-1}]$ se $0 < \lambda \leq 1$ e $Im(f) = [0, \mathrm{e}^{\lambda-1}]$ se $\lambda = 0$.

2. Trovare tutte le soluzioni dispari dell'equazione differenziale
$$y''(t) + y(t) = t + t^3$$
Soluzione:
$$y(t) = t^3 - 5t + c\sin(t) \quad c \in \mathbb{R}$$

3. Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare l'integrale generalizzato
$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+4x^2}\, dx.$$
Soluzione Integrale converge perchè , converge, $\frac{x^2+1}{x^4+4x^2} = O(x^{-2})$ per $x \to +\infty$
$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+4x^2}\, dx = \frac{1}{16}\left(4 + 3\pi - 6\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

4. Siano date f, g, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ tali che
   (a) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
   (b) $f(x_0) = h(x_0)$
   (c) $f'_+(x_0) = h'_+(x_0)$

   Dimostrare che anche g ha derivata destra in x_0 e calcolare quanto vale $g'_+(x_0)$.

Soluzione Visto che $f(x_0) = g(x_0) = h(x_0)$ si ha che
$$f(x) - f(x_0) \leq g(x) - g(x_0) \leq h(x) - h(x_0).$$
Dividendo per la quantità $x - x_0$ che è positiva per $x > x_0$ si ottiene
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}.$$
Passando al limite per $x \to x_0^+$ e usando il teorema del confronto si ha la tesi.

CODICE=005134

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 febbraio 2010

PARTE B

1. Si consideri la seguente funzione definita per $x > 0$:

$$f(x) = \frac{x^\lambda}{x^2 + 1}.$$

Per i valori significativi del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ si tracci un grafico qualitativo.

Soluzione. Si ha intanto che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ se $\lambda > 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ se $\lambda = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ se $\lambda < 0$. Inoltre $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ se $\lambda > 2$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$ se $\lambda = 2$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ se $\lambda < 2$. Se $\lambda \leq 0$ la funzione è monotona decrescente (non limitata vicino a zero se $\lambda < 0$).

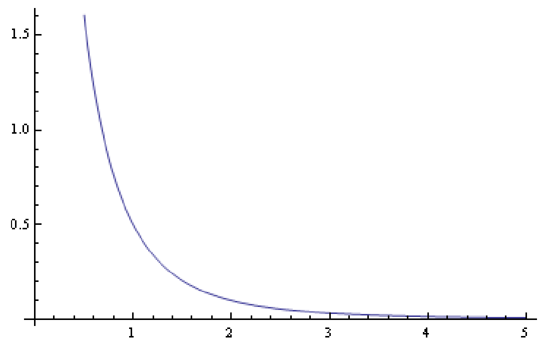


Figura 1: $\lambda < 0$

Per $0 < \lambda < 1$ la funzione cresce fino a $x = \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$ e poi decresce.

Per $\lambda = 2$ la funzione è strettamente crescente, ma limitata. Per $\lambda > 2$ è crescente, ma non limitata all'infinito.

CODICE=048920

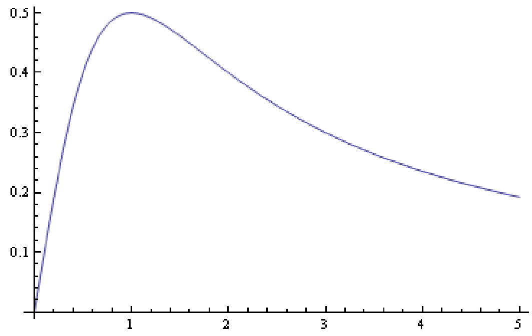


Figura 2: $0 < \lambda < 2$

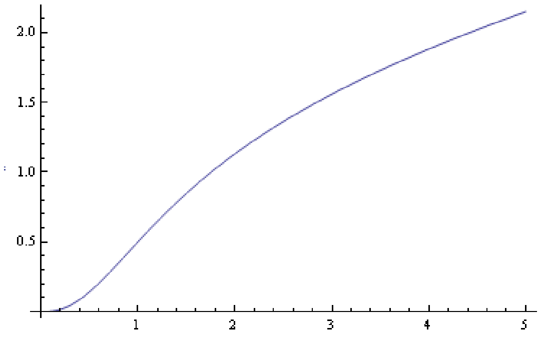


Figura 3: $2 < \lambda$

2. Calcolare (se converge) il seguente integrale generalizzato

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^2 - x}\, dx.$$

Soluzione. Con il cambio di variabile $t = \ln(x)$ l'integrale diventa

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 1}$$

e con semplici calcoli si ottiene

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^2 - x}\, dx = \frac{\ln(3)}{2}.$$

3. Trovare la soluzione del seguente problema con "dati al contorno"

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) - 5y(t) = e^{3t} \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 5$. Non c'è risonanza e la soluzione particolare del problema non omogeneo risulta essere $\frac{1}{8}e^{-3t}$. Imponendo poi le condizioni a $t = 0$ e $t = 1$ si ottiene

$$y(t) = \frac{e^{-t}\left(-e^4 + 9e^6 + e^{4t} - 9e^{6t} - e^{4t+6} + e^{6t+4}\right)}{8\,(e^6 - 1)}$$

CODICE=048920

4. Determinare l'intervallo di convergenza della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n2^n}.$$

Chiamato $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n2^n}$ quanto vale $f'(x)$ nel punto $x = \frac{1}{2}$?

Soluzione. La serie converge assolutamente per $|x| < 2$. Si ha convergenza (semplice) per $x = -2$ e la serie diverge per $x = 2$ (si riduce alla serie armonica). Dato che $1/2$ è interno all'intervallo di convergenza assoluta si può derivare termine a termine e si ottiene

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}.$$

che è una progressione geometrica e quindi

$$f'(1/2) = \frac{2}{3}.$$

CODICE=048920

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

22 luglio 2010

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\lambda > 0$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{x} = x^{\lambda}\mathrm{e}^{-x} \qquad x \geq 1$$

Soluzione: L'equazione in questione è equivalente a risolvere $e^{-x}x^{\lambda+1} = 1$. Chiamata $F(x) = e^{-x}x^{\lambda+1}$ si ha $F(1) = 1/\mathrm{e} < 1$. Inoltre $F'(x) = \mathrm{e}^{-x}x^{\lambda}(-x+\lambda+1)$ si annulla per $x = \lambda+1$. Inoltre la funzione F risulta crescente per $x < \lambda+1$ e decrescente per $x > \lambda+1 > 1$. Il massimo relativo vale $\mathrm{e}^{-1-\lambda}(1+\lambda)^{1+\lambda}$. Tale massimo risulta essere uguale a uno se

$$\mathrm{e}^{1+\lambda} = (1+\lambda)^{1+\lambda}$$

quindi se $(1+\lambda) = (1+\lambda)\log(1+\lambda)$, da cui $\lambda = \mathrm{e}-1$. Si vede facilmente the il massimo cresce con λ e quindi non c'è nessuna soluzione per $\lambda < \mathrm{e}-1$, una soluzione per $\lambda = \mathrm{e}-1$ e due soluzioni per $\lambda > \mathrm{e}-1$.

2. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''(t) - y(t) = \mathrm{e}^{t}\cos(t)$$

Soluzione: Le radici dell'equazione caratteristica sono $\lambda = \pm 1$ e quindi non c'è risonanza. Cercando la soluzione particolare della forma $y_f(t) = a\mathrm{e}^{t}\cos(t) + b\mathrm{e}^{t}\sin(t)$ si ottiene facilmente che le soluzioni sono

$$y(t) = e^{t}c_1 + e^{-t}c_2 + \frac{1}{5}e^{t}(2\sin(t) - \cos(t))$$

3. Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato e eventualmente calcolarlo

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2(x^2+1)}\,dx$$

Soluzione: il denominatore della funzione integranda non si annulla mai e inoltre $\frac{x^2+x+1}{x^2(x^2+1)} = O(x^{-2}$ per $x \to +\infty$, quindi l'integrale converge. Scomponendo in

$$\frac{x^2+x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)}$$

si ottiene che una primitiva è $\log(x) - \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) - \frac{1}{x}$ da cui

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}(2+\log(2))$$

CODICE=402167

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione regolare convessa. La funzione $[f(x)]^2$ è ancora convessa? In caso di risposta (motivata) negativa, dare delle condizioni sufficienti affinchè anche $[f(x)]^2$ sia convessa

Soluzione: in generale $[f(x)]^2$ non è convessa, per esempio basta prendere $f(x) = x^2 - 1$ e si vede che $[f(x)]^2 = x^4 - 2x^2 + 1$ non è convessa perchè $\frac{d^2}{dx^2}(x^4 - 2x + 1) = 12x^2 - 4$ risulta negativa per $|x| < 3^{-1/2}$.

In generale dato che per ipotesi $f'' \geq 0$

$$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]^2 = 2[f'(x)]^2 + 2f(x)f''(x),$$

la derivata seconda risulta nonnegativa per esempio se $f(x) \geq 0$.

CODICE=402167

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

29 gennaio 2010

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ il grafico della funzione
$$f(x) = x^\lambda \log(x), \qquad \text{per } x > 0.$$
Soluzione: $Im(f) = [-1/(e\lambda), +\infty[$ se $\lambda > 0$, $Im(f) = \mathbb{R}$ se $\lambda = 0$ e $Im(f) =]-\infty, -1/(e\lambda)]$ se $\lambda < 0$

2. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale
$$y'''(t) + y'(t) = t + te^t$$
Soluzione:
$$\frac{1}{2}\left(t^2 + e^t(t-2)\right) + c_1 + c_2\sin(t) + c_3\cos(t) \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

3. Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare l'integrale generalizzato
$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$$
Cosa si può dire di
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sqrt{|1-x^4|}}\,dx.$$
Soluzione L'integrale converge perchè nell'intorno destro del punto $x = 1$ dove la funzione integranda non è limitata si ha $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} \simeq (1-x)^{-1/2}$ per $x \to 1^-$. Con la sostituzione $t = x^4$ si ottiene subito
$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}.$$
Il secondo integrale non converge perchè $\frac{x^3}{\sqrt{|1-x^4|}} \simeq x^{-1}$ per $x \to +\infty$.

4. Sia f definita da
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$$
si calcoli $f'(0)$

Soluzione La serie converge assolutamente per $|x| < 1$. In tale intervallo si può derivare termine a termine la serie di potenze e il raggio di convergenza della serie derivata è lo stesso della serie di partenza. Si ha pertanto
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^{n-1}$$
e sostituendo $x = 0$ si ha $f'(0) = 2$.

CODICE=646556

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica & Telecomunicazioni
Prova di Analisi Matematica 1

7 luglio 2011

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\lambda > 0$, il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda x}} & x > 0 \\ -x^2 & x \le 0 \end{cases}$$

Soluzione: La funzione f risulta definita per ogni x ed è continua in zero, visto che

$$\lim_{x\to 0^+} x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda x}} = \lim_{x\to 0^-} -x^2 = 0.$$

In particolare il limite da destra risulta indipendente da λ. Agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Per studiare crescenza e decrescenza osserviamo che

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x\lambda}}(x\lambda + 1)}{x\lambda} & x > 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

e per verificare la continuità in zero osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x\lambda}}(x\lambda + 1)}{x\lambda} = 0,$$

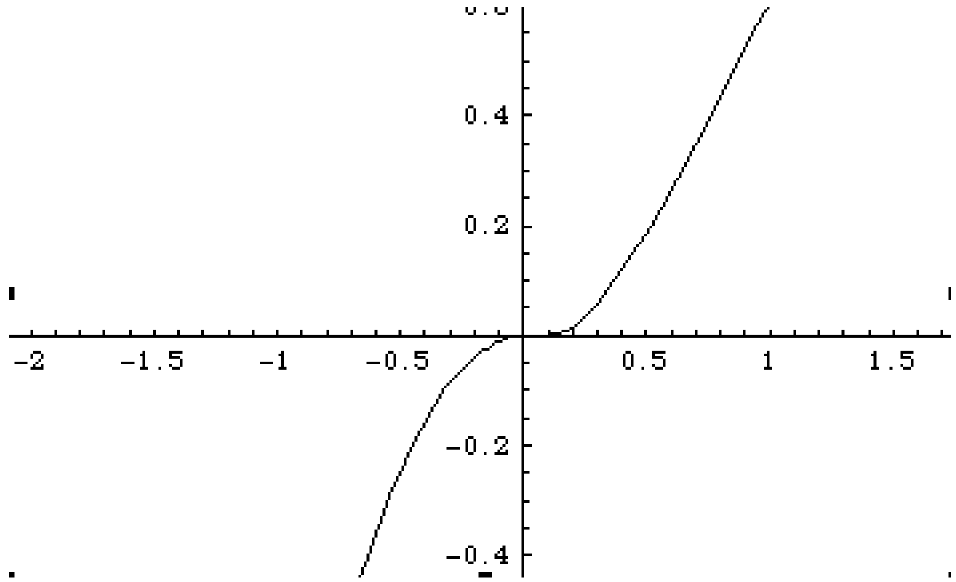
come deriva dallo studio dei limiti notevoli.

Inoltre $f' > 0$ in tutti gli altri punti, quindi la funzione è strettamente crescente. La derivata seconda risulta

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x\lambda}}}{x^3\lambda^2} & x > 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$$

e pertanto la funzione non è derivabile per $x = 0$, dato che $\lim_{x\to 0^+} f''(x) = 0$. Inoltre $f'' < 0$ per $x < 0$ e $f'' > 0$ per $x > 0$.

CODICE=594763



2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + t\,y(t) = \cos(t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione Si tratta di una equazione lineare. Usando il fattore integrante $\mathrm{e}^{t^2/2}$ si ottiene

$$(y'(t) + t\,y(t))\mathrm{e}^{t^2/2} = \frac{d}{dt} y(t)\mathrm{e}^{t^2/2} = \cos(t)$$

e quindi integrando la soluzione

$$y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}(\sin(t) + 1).$$

3. Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare

$$\int_0^{+\infty} (1 - 2x - 2x^2)\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$$

Soluzione L'integrale converge assolusamente perchè l'esponenziale si annulla all'infinito più rapidamente di ogni potenza di x. Tramite integrazioni per parti una primitiva risulta essere $e^{-x}\left(2x^2 + 6x + 5\right)$ e calcolando esplicitamente l'integrale si ha $\int_0^{+\infty}(1 - 2x - 2x^2)\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = -5$.

4. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $-2 \le f'' \le -1$. Dimostrare che

   - i) $0 \le f(1) \le 1/2$
   - ii) $1/6 \le \int_0^1 f(x)\,dx \le 1/3$

Soluzione Usando la formula di Taylor col resto di Lagrange si ottiene

$$x - x^2 \le f(x) \le x - \frac{1}{2}x^2.$$

Sostituendo $x = 1$ si ottiene la *i)*, mentre integrando si ottiene la *ii)*.

CODICE=594763

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il grafico della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2+a}{ax}\right) \qquad \text{per } x > 0.$$

Soluzione: Il dominio D si trova risolvendo $(x^2+a)(ax) > 0$ che ha come soluzione, per $x > 0$

$$S = \begin{cases} x > 0 & \text{per } a > 0 \\ \{x < -\sqrt{-a}\} \cup \{0 < x < \sqrt{-a}\} & \text{per } a < 0, \end{cases}$$

e dovendo studiare solo il caso $x > 0$ si ha

$$D = \begin{cases} x > 0 & \text{per } a > 0 \\ \{0 < x < \sqrt{-a}\} & \text{per } a < 0, \end{cases}$$

Nel caso $a > 0$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Per studiare la crescenza e decrescenza calcoliamo la derivata prima

$$f'(x) = -\frac{a-x^2}{x^3+ax}$$

Che per $x > 0$ si annulla solo per $x = \sqrt{a}$. La funzione risulta decrescente per $x < \sqrt{a}$ e raggiunge il minimo assoluto per $x = \sqrt{a}$ e il minimo vale $m = f(\sqrt{a}) = \log\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right)$. Per studiare la convessità calcoliamo la derivata seconda $f''(x) = \frac{-x^4+4ax^2+a^2}{x^2(x^2+a)^2}$ e la derivata seconda ha lo stesso segno del numeratore che è una biquadratica che si annulla, per $x > 0$, solo per

$$x = \sqrt{\sqrt{5}a + 2a}$$

Nel caso $a < 0$ studiamo i limiti agli estremi del dominio

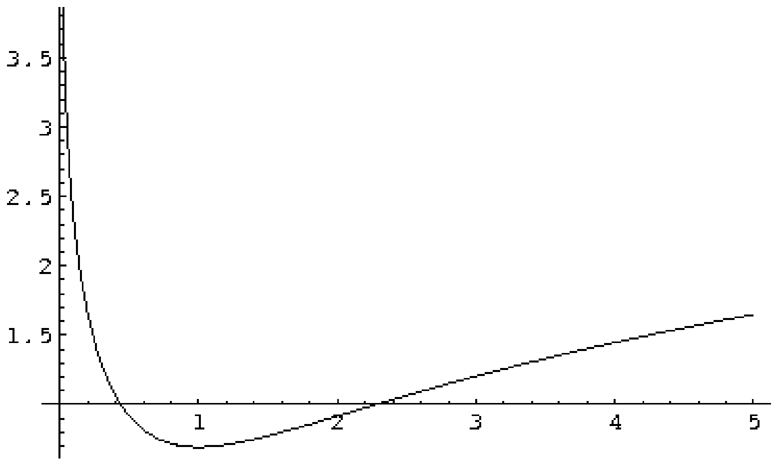


Figura 1: $a = 1$

CODICE=835426

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\sqrt{-a}^-} f(x) = -\infty.$$

Inoltre studiando la derivata prima ci si accorge che $f'(x) < 0$ per $0 < x < \sqrt{-a}$, quindi la funzione è sempre decrescente. Inoltre dallo studio del segno della derivata seconda la funzione risulta convessa per $x < \sqrt{2a - \sqrt{5}a}$ e concava per $x > \sqrt{2a - \sqrt{5}a}$.

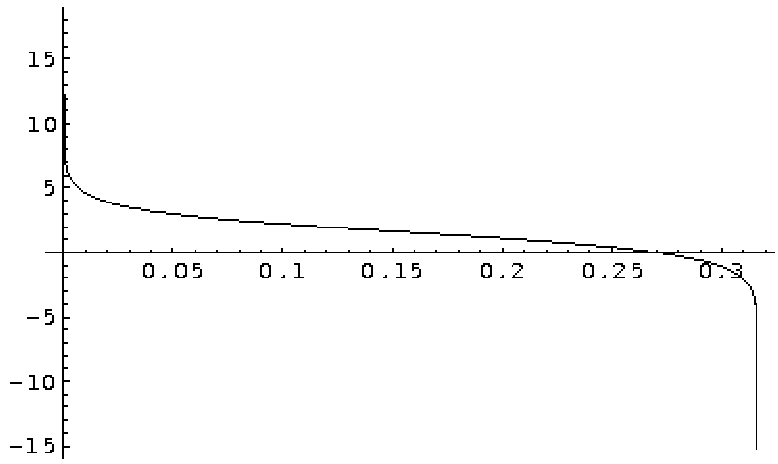


Figura 2: $a = -.1$

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t + \cos(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni della equazione omogenea sono $y = c_1 e^t + c_2 t e^t$. La soluzione particolare va cercata per $f_1 = t$ della forma $y_{f_1} = at + b$, mentre per il termine $f_2 = \cos(t)$ della forma $y_{f_2} = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$. Svolgendo i calcoli si trova l'integrale generale

$$c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{1}{2}(2t - \sin(t) + 4)$$

e imponendo le condizioni iniziali si trova finalmente

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(3e^t t + 2t - 4e^t - \sin(t) + 4\right).$$

3. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \sin\left(\frac{(-1)^n}{\log(n)}\right)$$

Soluzione: Dato che la funzione seno è dispari osserviamo che

$$\sin\left(\frac{(-1)^n}{\log(n)}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\log(n)}\right)$$

CODICE=835426

quindi abbiamo una serie a segni alterni. Inoltre $1/\log(n) < \pi/2$, se $n \geq 2$ e la funzione seno è crescente nell intervallo $[0, \pi/2]$, e dato che $1/\log(n)$ è decrescente come funzione di n si ha che $\sin\left(\frac{1}{\log(n)}\right)$ risulta decrescente. Dato che $\sin\left(\frac{1}{\log(n)}\right)$ è anche infinitesima, per il criterio sulle serie alterne, la serie converge.

4. Siano z e w numeri complessi di modulo uguale ad uno. Dimostrare che

$$\left[(z-1)(\overline{w}-1)\right]^2 \overline{z} w \in \mathbb{R}.$$

Sotto quali ipotesi $\left[(z-1)(\overline{w}-1)\right]^2 \overline{z} w$ è un numero strettamente positivo?

(Suggerimento: Cominciare a studiare la quantità $(\alpha-1)^2\overline{\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ e $|\alpha| = 1$.)

Soluzione: Se $|\alpha| = 1$ allora $\alpha = \mathrm{e}^{i\theta}$ e sostituend otteniamo

$$(\alpha-1)^2\overline{\alpha} = (\mathrm{e}^{i\theta}-1)^2 e^{-i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) - 2 \in \mathbb{R}$$

Il prodotto $\left[(z-1)(\overline{w}-1)\right]^2 \overline{z} w$ risulta pertanto non-negativo essendo un quadrato. Si può annullare solo se almeno uno dei due termini si annulla, cioè se $z = 1$ o se $w = 1$, che corrisponde a $\theta = 0$.

CODICE=835426

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica & Telecomunicazioni
Prova di Analisi Matematica 1

21 luglio 2011

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-\lambda)^2}, \qquad x \neq \lambda.$$

Soluzione: La funzione f risulta continua per ogni $x \neq \lambda$. Inoltre, qualsiasi sia $\lambda \in \mathbb{R}$ sia ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to\lambda} f(x) = +\infty \quad \text{se } \lambda > 0$$

$$\lim_{x\to\lambda} f(x) = -\infty \quad \text{se } \lambda < 0$$

Osserviamo che nel caso $\lambda = 0$ la funzione è semplicemente $f(x) = x$, definita per $x \neq 0$. Passando alla derivata prima si ha

$$f'(x) = \frac{x^2\,(x - 3\,\lambda)}{(x-\lambda)^3}$$

e quindi la funzione è derivabile per $x \neq \lambda$.

Per $\lambda > 0$ la funzione risulta crescente per $\{x < \lambda\} \cup \{x > 3\lambda\}$ e pertanto si ha un minimo relativo per $x = 3\lambda$.

Viceversa per $\lambda < 0$ la funzione risulta crescente per $\{x < 3\lambda\} \cup \{x > \lambda\}$ e pertanto si ha un massimo relativo per $x = 3\lambda$.

La derivata seconda

$$f''(x) = \frac{6\,x\,\lambda^2}{(x-\lambda)^4}$$

risulta maggiore o uguale di zero per $x \geq 0$ e minore o uguale di zero per $x \leq 0$. Il grafico risulta quindi (eccetto il caso banale di $\lambda = 0$) il seguente

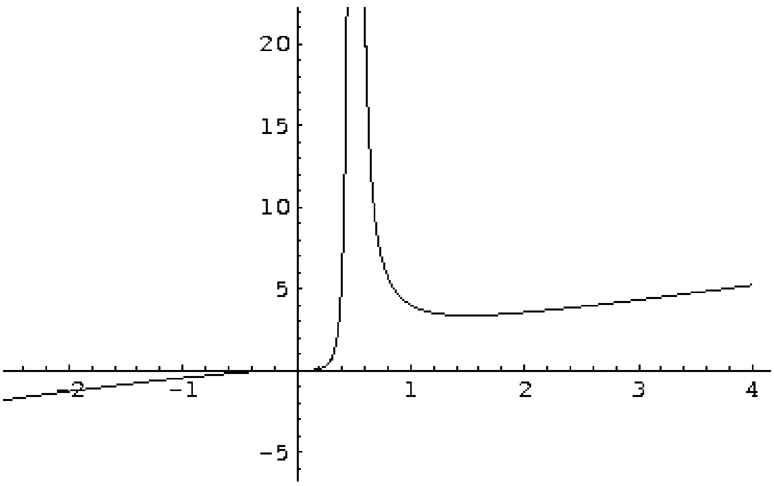


Figura 1: $\lambda > 0$

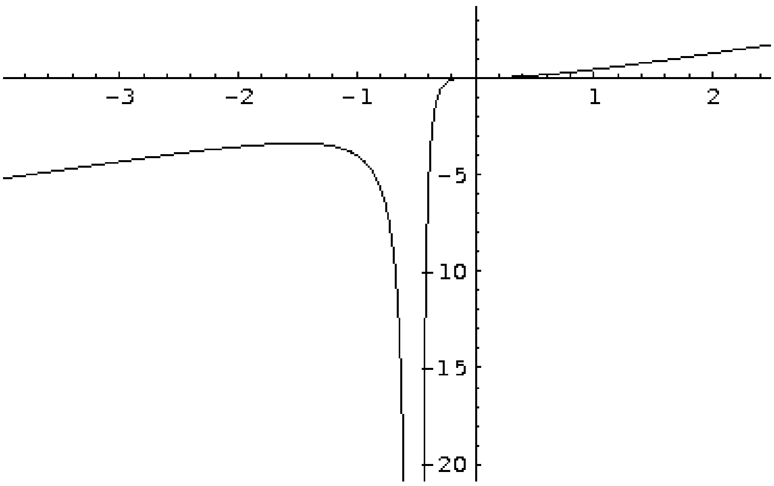


Figura 2: $\lambda > 0$

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin(t)\,\mathrm{e}^t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Il problema omogeneo ha come soluzione $Y(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$, non c'è risonanza e la soluzione del non-omogeneo va cercata della forma

$$y_f(t) = [\alpha\cos(t) + \beta(\sin(t)]\mathrm{e}^t.$$

Con semplici calcoli si arriva alla soluzione

$$y(t) = \frac{(7 - 2\,\mathrm{e}^t)\,\cos(t) + (1 + \mathrm{e}^t)\,\sin(t)}{5}$$

3. Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(x)^{2n}.$$
Chiamata $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(x)^{2n}$ per gli x dove converge, se possibile, calcolare $f'(\pi/4)$.

Soluzione. Dato che $\sin^{2n}(x) = [\sin^2(x)]^n$ si tratta di una serie a termini non negativi. Per ogni x fissato si tratta di una serie geometrica di argomento $\sin^2(x)$, che converge se $0 \leq \sin^2(x) < 1$, quindi per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Inoltre per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ la serie diverge perchè $\sin^2(x) = 1$ per tali x. Per ogni x dove la serie converge si ha
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(x)^{2n} = \frac{1}{1 - \sin^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)},$$
e la convergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso contenuto in $\mathbb{R}\backslash(2k+1)\frac{\pi}{2}$. Pertanto $f'(x) = 2\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$ e quindi $f'(\pi/4) = 4$.

4. Sia y la soluzione del problema di Cauchy
$$y'(t) = (y(t) + \mathrm{e}) \log(y(t) + \mathrm{e})$$
$$y(0) = a \geq 0.$$
Dimostrare che $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$ e che $y(t)$ cresce più rapidamente di t^{2011}. (*Sugg.* Risolvere esplicitamente l'equazione)

Soluzione. Si tratta di una equazione a variabili separabili e scrivendola della forma
$$\frac{y'(t)}{(y(t) + \mathrm{e}) \log(y(t) + \mathrm{e})} = 1,$$
con una integrazione si ha che l'integrale generale è dato da
$$\log(\log(\mathrm{e} + y)) = t + c$$
e quindi imponendo le condizioni iniziali la soluzione risulta essere
$$y(t) = -\mathrm{e} + (a + \mathrm{e})^{\mathrm{e}^t},$$
che cresce come un doppio esponenziale e quindi più in fretta di ogni potenza di t.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica & Telecomunicazioni
Prova di Analisi Matematica 1

23 giugno 2011

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\lambda \geq 0$, il grafico della funzione

$$f(x) = \log(\lambda + x)\,\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{per } x > 0.$$

Soluzione: La funzione f risulta definita per ogni $x, \lambda > 0$ e agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \log(\lambda) \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Per studiare crescenza e decrescenza osserviamo che $f'(x) = \frac{e^{-x}}{x+\lambda} - e^{-x}\log(x+\lambda)$ e pertanto la derivata si annulla se

$$\frac{1}{x+\lambda} = \log(x+\lambda).$$

L'equazione $1/z = \log(z)$ ha una sola soluzione, dato che $1/z$ è monotona strettamente decrescente, mentre $\log(z)$ è monotona strettamente crescente e $1/z - \log(z)$ tende a $+\infty$ per z che tende a zero e a $-\infty$ per z che tende a $+\infty$. Si vede facilmente che l'unica soluzione z_0 di $1/z = \log(z)$ soddisfa $z_0 \in [1, \mathrm{e}]$ ($z_0 = 1.76322\dots$) e pertanto la funzione f è crescente per $0 < x < z_0 - \lambda$ e in $x = z_0 - \lambda$ si ha un massimo relativo. Se $z_0 - \lambda < 0$ quindi la funzione è descrescente e non ci sono massimi relativi. Qualitativamente i diversi casi sono riporati nei 3 grafici della pagina seguente

Volendo studiare la convessità la derivata seconda risulta $f''(x) = e^{-x}\log(x+\lambda) - \frac{2e^{-x}}{x+\lambda} - \frac{e^{-x}}{(x+\lambda)^2}$ che ha un unico cambio di segno in un punto compreso tra 2 e 3.

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t + \cos(2t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione L'equazione caratteristica ha 2 radici reali e coincidenti uguali a 1. Non c'é pertanto risonanza e l'integrale generale risulta essere

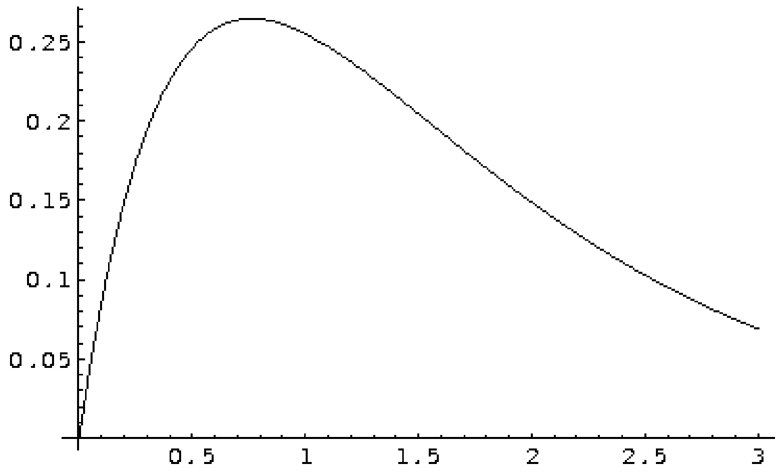


Figura 1: $\lambda < z_0$

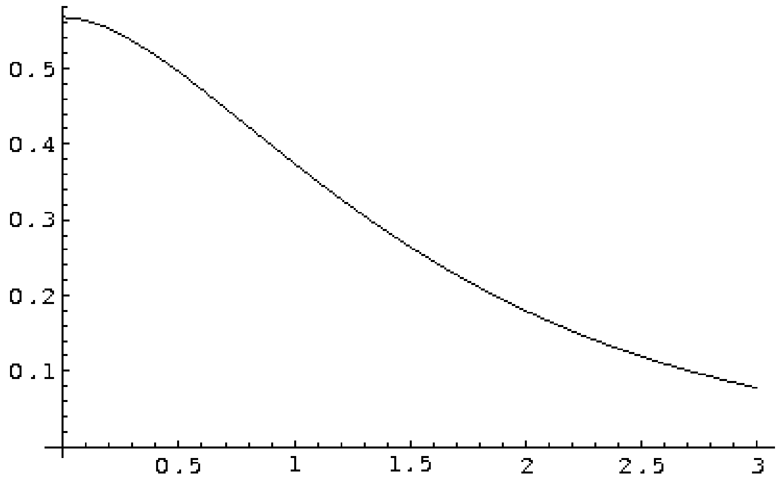


Figura 2: $\lambda = z_0$

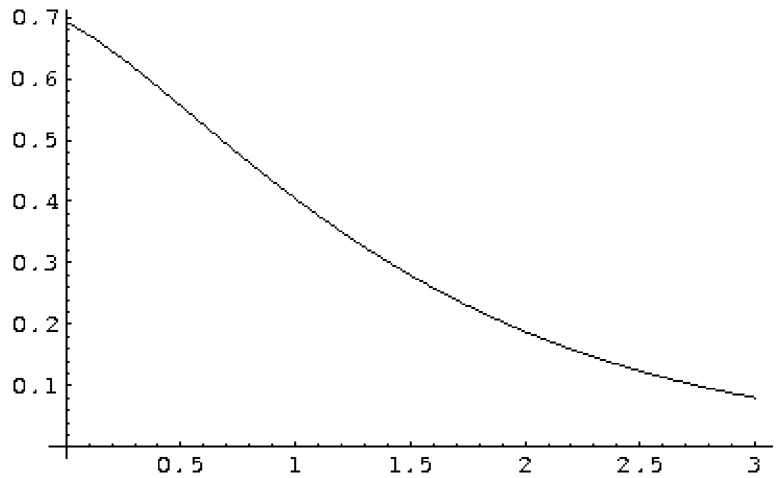


Figura 3: $\lambda > z_0$

$$y(t) = C_1e^t \ + C_2e^t\, t + \frac{50 + 25\, t - 3\, \cos(2\, t) - 4\, \sin(2\, t)}{25}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha la soluzione

$$y(t) = \frac{1}{25}\left(30e^t t + 25t - 47e^t - 3\cos(2t) - 4\sin(2t) + 50\right)$$

3. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{3k}$$

è definita e se possibile calcolare $f'(1/\pi)$

Soluzione La serie in questione è una serie geometrica in x^3 pertanto la somma vale

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{3k} = \frac{1}{1 - x^3}$$

per $|x^3| < 1$, cioè per $-1 < x < 1$. Dove la somma converge si può derivare termine a termine e $f'(x) = \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}$ e quindi

$$f'(1/\pi) = \frac{3\pi^4}{(-1 + \pi^3)^2}.$$

4. Sia f una funzione continua, non-negativa e tale che $f(0) = 0$. Sia inoltre

$$\int_0^1 \frac{f(s)}{s}\, ds = 1.$$

Studiare il limite

$$\lim_{t \to 0^+} t \int_t^1 \frac{f(s)}{s^2}\, ds$$

Soluzione Se l'integrale improprio $0 \leq \int_0^1 \frac{f(s)}{s^2}\, ds < +\infty$ allora si ha il prodotto di una quantità infinitesima per una limitata e il limite esiste ed è uguale a zero. Se invece $\int_0^1 \frac{f(s)}{s^2}\, ds = +\infty$ (ed essendo f non negativa non ci sono altre possibilità) si ha un limite della forma $0 \cdot \infty$ che si può trasformare in $\frac{\infty}{\infty}$ studiando

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\int_t^1 \frac{f(s)}{s^2}\, ds}{\frac{1}{t}}.$$

Applicando L'Hopital e derivando si arriva a studiare il limite

$$\lim_{t \to 0^+} -\frac{\frac{f(t)}{t^2}}{-\frac{1}{t^2}} = -\lim_{t \to 0^+} f(t) = 0,$$

e anche in questo caso il limite esiste ed è uguale a zero.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica, Elettronica & Telecomunicazioni
Prova di Analisi Matematica 1

10 gennaio 2012

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il grafico della funzione

$$f(x) = \log\left(x^3 - (\lambda+1)x\right)$$

Soluzione: Per prima cosa osserviamo che il dominio è dato da

$$D = \{x > 0\} \text{ se } \lambda \leq -1 \qquad D = \{-\sqrt{1+\lambda} < x < 0\} \cup \{x > \sqrt{1+\lambda}\} \text{ se } \lambda > -1.$$

Pertanto se $\lambda \leq -1$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$f'(x) = \frac{3x^2 - \lambda - 1}{x^3 - x(\lambda+1)} > 0 \qquad \text{se } \lambda \leq -1$$

quindi la funzione risulta monotona crescente Nel caso $\lambda > -1$ si ha invece

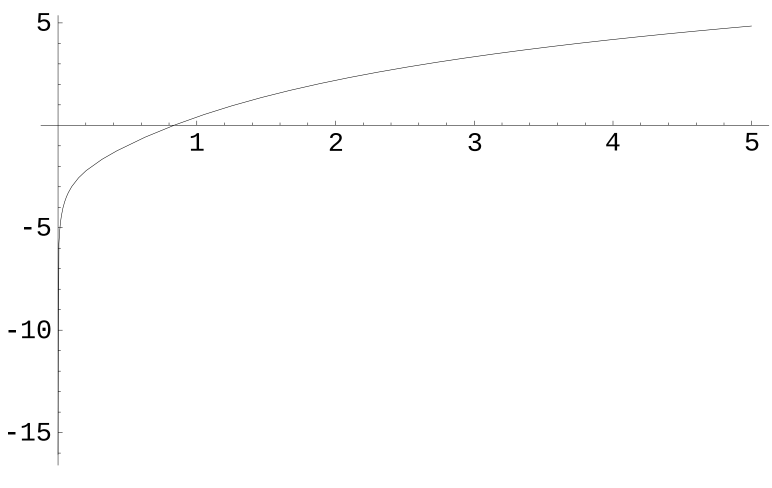


Figura 1: $\lambda \leq -1$

$$\lim_{x\to-\sqrt{1+\lambda}^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{1+\lambda}^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

La derivata prima si annulla per

$$x = \pm\frac{\sqrt{\lambda+1}}{\sqrt{3}},$$

ma la soluzione positiva non cade nel dominio. Si ha pertanto un solo punto di massimo relativo per $x = -\frac{\sqrt{\lambda+1}}{\sqrt{3}}$ e la derivata seconda risulta sempre negativa.

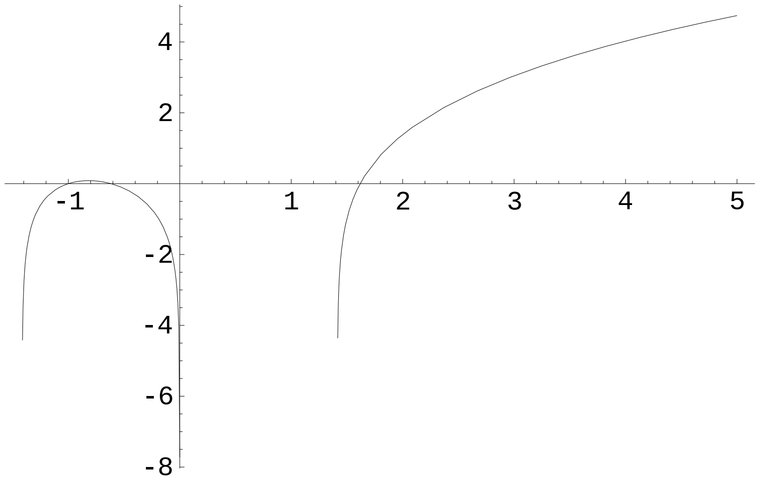


Figura 2: $\lambda = 1$

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 1 - \cos(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione: In questo caso non c'è risonanza e l'integrale generale risulta

$$e^t c_1 + e^t t c_2 + \frac{1}{2}(\sin(t) + 2)$$

e imponendo le condizioni iniziali si ha la soluzione

$$y(t) = e^t c_1 + e^t t c_2 + \frac{1}{2}(\sin(t) + 2)$$

3. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \sqrt{n^4 - n^2 + n}\big[2 + \cos(n!)\big] \sin\frac{1}{n^\alpha}$$

al variare di $\alpha \geq 0$

Soluzione: Essendo $|\cos(x)| \leq 1$ ed essendo $\sin(x) = \mathcal{O}(x)$ per x che tende a zero la serie in questione si comporta come

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \sqrt{n^4}\frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-2}},$$

che converge se e solo se $\alpha > 3$.

4. Studiare le seguenti proposizioni e dire se qualcuna è vera, motivando la risposta.

   Siano (a_n) e (b_n) due successioni di numeri reali tali che $|a_n| \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, necessariamente

   - A) se (b_n) converge allora anche (a_n) converge
   - B) se (b_n) diverge allora anche (a_n) diverge
   - C) se (b_n) converge allora (a_n) è limitata
   - D) se (a_n) non converge allora (b_n) non converge

   Soluzione: La A è falsa basta prendere $b_n = 1$ che converge e $a_n = (-1)^n$ che non converge.

   La B è falsa basta prendere $a_n = 0$ e $b_n = (-1)^n n$

   La C è vera infatti se $b_n \to L$ allora b_n è limitata, cioè $\exists\, M > 0$ tale che $|b_n| \leq M$ e pertanto $|a_n| \leq b_n \leq |b_n| \leq M$, mostrando che a_n è limitata.

   La D è falsa basta prendere di nuovo $b_n = 1$ e $a_n = (-1)^n$.

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica, Informatica & Telecomunicazioni
Prova di Analisi Matematica 1

13 febbraio 2012

PARTE B

1. Determinare l'immagine della funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\frac{x^2+1}{x-1}$$

studiando anche eventuali massimi e minimi (locali e assoluti).

Soluzione: Osserviamo che agli estremi del dominio si hanno i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty.$$

Studiando la derivata prima si ha

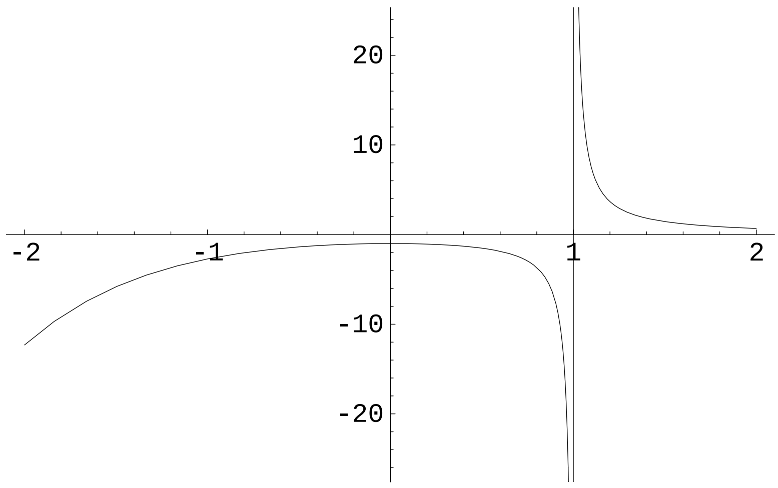
$$f'(x) = -\frac{x\left(3-2\,x+x^2\right)}{e^x\left(-1+x\right)^2},$$

e risulta $f' \geq 0$ per $x \leq 0$. In $x_0 = 0$ si ha quindi un punto di massimo locale. Massimo e minimo assoluto non esistono.

2. Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 9y(t) = 0, \\ y(0) = \alpha, \\ y'(0) = \beta, \end{cases}$$

CODICE=257930



e determinare per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ le soluzioni sono delle funzioni dispari.

Soluzione: L'integrale generale è $y(x) = A\sin(3x) + B\cos(3x)$. Il problema di Cauchy ha come soluzione $y(x) = \frac{3\,\alpha\,\cos(3\,t)+\beta\,\sin(3\,t)}{3}$ e per essere dispari serve che α sia uguale a zero, mentre β può essere qualsiasi numero.

3. Studiare, al variare di $\beta > 0$, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} t\sin(t^2)\,dt}{x^\beta}.$$

Soluzione: L'integrale in questione si può calcolare esattamente e risulta $\int_0^{x^2} t\sin(t^2)\,dt = \sin^2(\frac{x^4}{2})$. Pertanto si tratta di calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(\frac{x^4}{2})}{x^\beta}.$$

Usando i limiti notevoli tale limite è equivalente a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\frac{x^4}{2})^2}{x^\beta} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^8}{4x^\beta}.$$

Il limite pertanto vale $1/4$ se $\beta = 8$, 0 se $0 < \beta < 8$ e $+\infty$ se $\beta > 8$. Allo stesso risultato si poteva arrivare anche usando ripetutamente il teorema de L'Hopital, senza calcolare esplicitamente l'integrale.

4. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali strettamente positivi e strettamente crescente. Studiare le seguenti proposizioni e dire se qualcuna è vera, motivando la risposta.

   - A) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$ converge;
   - B) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$;
   - C) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} = +\infty$;
   - D) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^2} < +\infty$.

Soluzione: Osserviamo che $\lim_n a_n$ esiste sempre o finito e positivo, o infinito.

CODICE=257930

La A) è falsa, infatti se $\lim_n a_n = L < +\infty$, allora per la serie viene violata la condizione necessaria in quanto il limite per $n \to +\infty$ di $\frac{(-1)^n}{a_n}$ non è zero.

La B) è falsa, basta infatti prendere $a_n = n^2$ e la serie converge.

La C) è vera, infatti $\frac{a_n}{n} > \frac{a_0}{n}$ e quindi la serie è maggiore di un multiplo della serie armonica.

La D) è falsa, infatti basta prendere $a_n = \sqrt{n}$ in maniera tale che la serie diventa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

CODICE=257930

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

8 gennaio 2013

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni di

$$x \log^2(x) - \lambda = 0$$

Soluzione: Studiamo la funzione $f(x) = x \log^2(x)$ con dominio $(0, \infty)$. Abbiamo che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Inoltre si ha

$$f'(x) = \log^2(x) + 2 \log x$$

Quindi gli zeri di f' sono x_0, x_1 tali che $\log x_0 = 0$ e $\log x_1 = -2$, quindi $x_0 = 1$ e $x_1 = e^{-2}$. Inoltre dallo studio del segno di f' si deduce che f è crescente su $(0, e^{-2})$, decrescente su $(e^{-2}, 1]$ e crescente tra $(1, \infty)$. In particolare 1 è un punto di minimo locale (con valore di minimo uguale a 0) ed e^{-2} è punto di massimo locale per f. Dal grafico della funzione f si

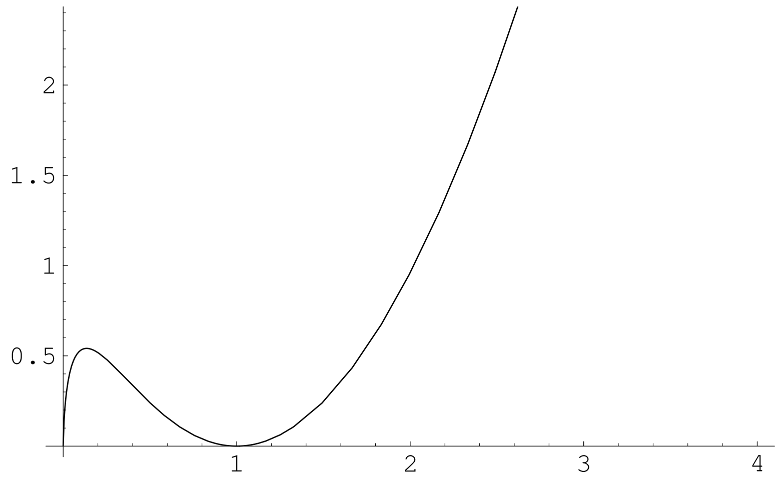


Figura 1: Grafico di $f(x) = x \log^2(x)$

deduce che le soluzione dell' equazione

$$x \log^2(x) - \lambda = 0,$$

sono:

CODICE=134299

(a) nessuna se $\lambda < 0$,
(b) 1 se $\lambda \in (4\mathrm{e}^{-2}, \infty) \cup \{0\}$,
(c) 2 se $\lambda = 4\mathrm{e}^{-2}$,
(d) 3 se $\lambda \in (0, 4\mathrm{e}^{-2})$.

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(t) - y'(t) = t + 1, \\ y(0) = a, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione: La soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$c_1 + c_2\mathrm{e}^t + c_3\mathrm{e}^{-t}$$

Essendo 0 una soluzione dell'equazione caratteristica $\lambda^3 - \lambda = 0$ associata all'equazione, cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$y_f(t) = t(bt + c).$$

Osserviamo che $y_f(t)$ risolve l'equazione se e solo se

$$-2bt - c = 1 + t,$$

ossia $c = -1, b = -1/2$ e quindi $y(t) = -1/2t^2 - t$ è la soluzione particolare. Otteniamo quindi che la soluzione generale dell'equazione è data da

$$y(t) = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t} - 1/2t^2 - t.$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali ed otteniamo

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = a \\ c_2 - c_3 - 1 = 0 \\ c_2 + c_3 - 1 = 0. \end{cases}$$

Quindi deduciamo dalle ultime due equazioni $c_3 + 1 = 1 - c_3$ ossia $c_3 = 0$. Dalla seconda equazione ricaviamo che $c_2 = 1$ e quindi dalla prima $c_1 = a - 1$. Quindo la soluzione è

$$(a - 1) + e^t - 1/2t^2 - t.$$

3. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x^2 \log(x)}{x^2 + 1} \right)^n$$

converge.

Soluzione: Dalla teoria delle serie geometriche segue che la serie converge se e solo se

$$\left| \frac{x^2 \log x}{x^2 + 1} \right| < 1.$$

CODICE=134299

Ciò equivale alle condizioni

$$x^2(\log x) < 1 + x^2, \qquad \text{se } x \geq 1,$$

$$-x^2 \log x < 1 + x^2, \qquad \text{se } 0 < x < 1.$$

Introduciamo quindi le funzioni

$$f_1(x) = x^2 \log x - 1 - x^2, \qquad \text{se } x \geq 1$$

$$f_2(x) = -x^2 \log x - 1 - x^2, \qquad \text{se } 0 < x < 1,$$

allora gli $x \in \mathbb{R}^+$ per cui la serie converge sono dati da $\{x : \ f_1 < 0\} \cup \{x : \ f_2 < 0\}$. Per descrivere $\{x : \ f_1 < 0\}$ studiamo la funzione f_1 su $[1, \infty)$. Si ha che

$$f_1(1) = -2 \qquad \lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$$

ed inoltre

$$f_1'(x) = 2x \log x + x - 2x = 2x \log x - x.$$

Quindi f_1' si annulla nel punto $x_1 > 1$ dato dalla condizione $\log x_1 = \frac{1}{2}$ cioè $x_1 = e^{1/2}$. Da ciò si deduce che f_1 è decrescente su $(1, x_1)$ e crescente su (x_1, ∞).

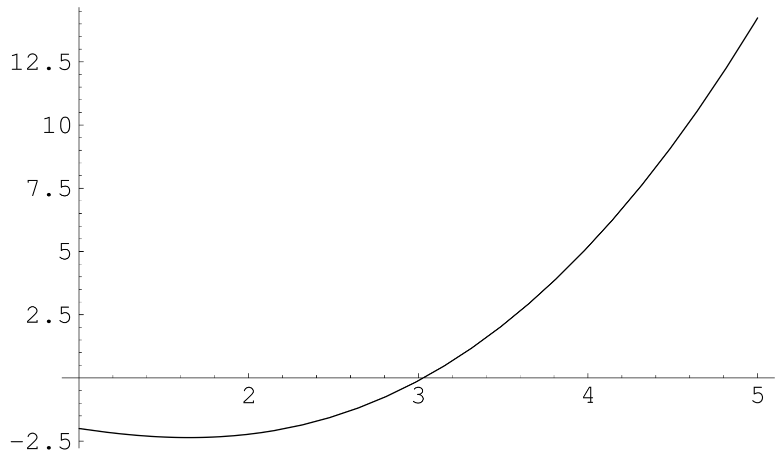


Figura 2: Grafico di $f_1(x) = x^2 \log x - 1 - x^2$ per $x > 1$

Tracciando il grafico di $f_1(x)$ si deduce che $\{x : f_1(x) < 0\} = (1, y_1)$ dove $f_1(y_1) = 0$. (Si può stimare che e $< y_1 < e^2$).

Per descrivere l' insieme $\{x : \ f_2 < 0\}$ studiamo f_2 su $(0, 1)$. Si ha che

$$\lim_{x \to 1^-} f_2(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 0^+} f_2(x) = -1$$

ed inoltre

$$f_2'(x) = -2x \log x - x - 2x = -2x \log x - 3x$$

Osserviamo che f_2' si annulla in x_1 dato da $\log x_1 = -\frac{3}{2}$ ossia $x_2 = e^{-\frac{3}{2}}$. Inoltre f_2 è crescente su $(0, x_2)$ e decresce su $(x_2, 1)$ quindi x_2 è il punto di massimo relativo di f_2 su $(0, 1)$ ed inoltre

$$f_2(e^{-\frac{3}{2}}) = -e^{-3} \log(e^{-\frac{3}{2}}) - 1 - e^{-3} = \frac{e^{-3}}{2} - 1 < 0.$$

Da ciò deduciamo che $\{x : \ f_2 < 0\} = (0, 1)$.

Complessivamente, la serie converge per $x \in [0, y_1)$, dove y_1 è definito dalla relazione $f_1(y_1) = 0$.

CODICE=134299

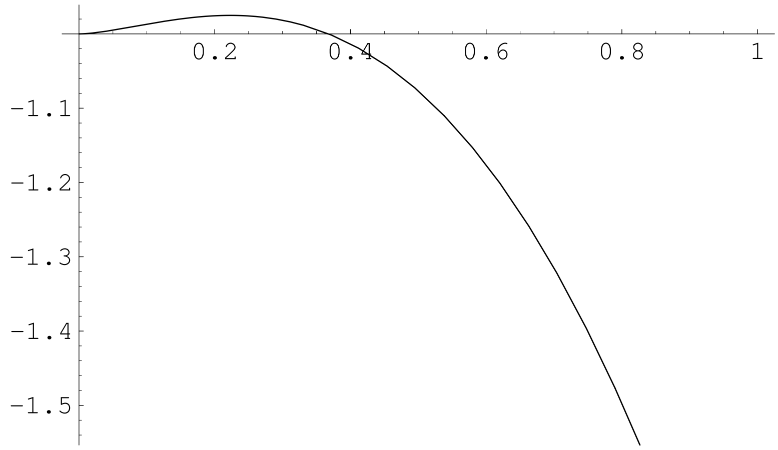


Figura 3: Grafico di $f_2(x) = -x^2 \log x - 1 - x^2$ per $0 < x < 1$

4. Sia $f \in C^4(\mathbb{R})$, calcolare il limite
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}.$$
Se la funzione è solo di classe $C^1(\mathbb{R})$ che succede?

Soluzione: Dalla formula di Taylor si ha che
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + o(h^2),$$
e anche
$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + o(h^2).$$
Sommando le due relazioni e dividendo per h^2 otteniamo
$$\frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} = f''(x_0) + \frac{o(h^2)}{h^2}.$$
Quindi il limite assegnato esiste e vale a $f''(x_0)$ (nei calcoli in realtà abbiamo usato solo che f è derivabile due volte in x_0 e ovviamente una volta in un suo intorno).

Se f è solo C^1 il limite potrebbe non esistere. Ad esempio possiamo scegliere la funzione $f(x) = x^{3/2} \sin\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right)$ per $x > 0$, $f(x) = 0$ per $x \le 0$ (che è di classe C^1) ed $x_0 = 0$. Notiamo che
$$f(h) + f(-h) = \sin\left(\frac{1}{|h|^{\frac{1}{4}}}\right)|h|^{3/2}$$
Quindi, tenuto conto che $f(0) = 0$, deduciamo che
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2} = \lim_{h\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{h^{\frac{1}{4}}}\right)\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}$$
e il limite non esiste.

Il limite comunque può esistere ed essere finito anche se la derivata seconda in x_0 non esiste, come si vede analizzando il caso $f(x) = x|x|$.

CODICE=134299

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
Prova di Analisi Matematica 1

28 gennaio 2013

PARTE B

1. Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \log\big(\frac{1+x^2}{1-x^2}\big)$$

2. Calcolare $\int_0^1 x \arctan(x)\, dx$.

3. Dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_n n^{\log x - e^x}$$

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che

$$|f(x)| \le M \qquad |f''(x)| \le K \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

   a) Dare un esempio esplicito di una funzione che verifica la condizione data per qualche valore di M e K.

   b) Dimostrare che $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, con $x \neq y$

$$|f'(x)| \le \frac{2M}{|x-y|} + \frac{K}{2}|x-y|$$

   e usarlo poi per dimostrare che $|f'(x)| \le 2\sqrt{M\,K}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(Suggerimento: usare la formula di Taylor in un intorno del punto x)

CODICE=940527

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 gennaio 2014

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni reali dell'equazione

$$x^4 - \alpha\, x^3 + 1 = 0$$

Soluzione: Il problema si riduce a studiare la funzione

$$f(x) = x^4 - \alpha\, x^3 + 1$$

nel suo dominio $D = \mathbb{R}$. Osserviamo che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

La derivata prima $f'(x) = 4x^3 - 3\alpha\, x^2$, si annulla in $x_0 = \frac{3}{4}\alpha$ e dallo studio del segno di f' si deduce che f è decrescente su $(-\infty, \frac{3}{4}\alpha\,)$ e crescente su $(\frac{3}{4}\alpha\,, +\infty)$.

Il punto $x_0 = \frac{3}{4}\alpha$ risulta essere un punto di minimo locale con valore uguale a $y_0 = 1 - \frac{27}{256}\alpha^{\,4}$. Dall'andamento del grafico di f si deduce che se $y_0 > 0$, cioè se

$$1 - \frac{27}{256}\alpha^{\,4} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{4}{3^{3/4}} < \alpha < \frac{4}{3^{3/4}}$$

allora f non si annulla mai, se $y_0 = 0$ allora f si annulla in un solo punto, se $y_0 < 0$ allora f si annulla in due punti distinti. Pertanto si ha:

- nessuna soluzione per $\alpha \in (-\frac{4}{3^{3/4}}\,, \frac{4}{3^{3/4}})$
- una soluzione per $\alpha = \frac{4}{3^{3/4}}$
- due soluzioni per $\alpha \in (-\infty, -\frac{4}{3^{3/4}} \cup (\frac{4}{3^{3/4}}\,, +\infty)$.

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(t) - y'(t) = t - 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = a \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione: L'equazione caratteristica associata all'equazione, $\lambda^3 - \lambda = 0$, ha radici $0, 1, -1$ tutte con molteplicità uguale a 1. La soluzione generale dell'equazione omogenea è dunque

$$y_0(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t}$$

Poiché 0 è una soluzione dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare va cercata dell forma

$$y_f(t) = t(bt + c)$$

Sostituendo le derivate opportune di $yf1(t)$ all'equazione data otteniamo che $y_f(t)$ é soluzione se e solo se $b = -1/2$ e $c = 1$. Dunque la soluzione particolare è $y_f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t$. La soluzione generale è dunque

$$y(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 + t$$

Imponendo le condizioni iniziali abbiamo il sistema $\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 - c_3 + 1 = a \\ c_2 + c_3 - 1 = 0 \end{cases}$ che ha some soluzioni $c_1 = -1$, $c_2 = a/2$, $c_3 = 1 - a/2$.

Sostituendo tali valori nell'integrale generale otteniamo:

$$y(t) = -1 + \frac{a}{2}e^t + (1 - \frac{a}{2})e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 + t$$

.

3. Calcolare

$$\int_{-1/2}^{0} \frac{x}{1 - x^4}\, dx.$$

Soluzione: Dopo aver fattorizzato il denominatore della funzione integranda possiamo porre

$$\frac{x}{1 - x^4} = \frac{A}{1 - x} + \frac{B}{1 + x} + \frac{Cx + D}{1 + x^2}$$

con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Per determinare il valore delle costanti si puó procedere nel seguente modo.
Moltiplicare ambo i membri dell'equazione per il primo denominatore di primo grado che si trova nel membro di destra e far tendere il limite dell'equazione a 1, annullando in questo modo i restanti due addendi.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{(1 + x)(1 + x^2)} = \lim_{x \to 1} \left(A + \frac{B(1 - x)}{1 + x} + \frac{(Cx + D)(1 - x)}{1 + x^2} \right)$$

Dal calcolo del limite si ottiene $A = 1/4$. Seguiamo lo stesso procedimento per il secondo denominatore di primo grado, si moltiplicano ambo i membri per tale denominatore e si fa tendere il limite dell'equazione a -1, annullando in questo modo i restanti due addendi.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x}{(1 - x)(1 + x^2)} = \lim_{x \to -1} \left(\frac{A(1 + x)}{1 - x} + B + \frac{(Cx + D)(1 + x)}{1 + x^2} \right)$$

Dal calcolo del limite si ottiene $B = -1/4$. Infine per calcolare C e D basta moltiplicare per l'ultimo denominatore e fare tendere il limite a $\pm\imath$ in modo da annullare i primi due addendi. Si ottiene dunque $C = 1/2$ e $D = 0$.
Si ha pertanto che una primitiva della funzione $f(x) = \frac{x}{1-x^4}$ è

$$G(x) = -\frac{1}{4}\log|x^2 - 1| + \frac{1}{4}\log|x^2 + 1|$$

L'integrale di partenza viene dunque a essere

$$\int_{-1/2}^{0} \frac{x}{1-x^4}\, dx = G(x)\Big|_{-1/2}^{0} = -\frac{1}{4}\log\frac{5}{3}$$

4. Sia $\{a_n\}$ una successione a termini non-negativi. Dimostrare che se $\sum_n a_n < +\infty$ allora

$$\sum_n a_n^2 < +\infty$$

Il risultato è ancora vero se non si richiede che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$?
Soluzione: Poiché $\sum_n a_n < +\infty$ allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Ne segue che $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > n_0$ risulta $a_n < 1$; dunque si ha

$$a_n^2 < a_n \quad \text{definitivamente.}$$

Da questa disuguaglianza, per il criterio del confronto, poiché $\sum_n a_n$ converge segue che $\sum_n a_n^2$ converge.
Se la successione non è a termini non negativi il risultato non è piú vero. Basta considerare la successione $\{a_n\}$ con $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$. La successione $\frac{1}{\sqrt{n}}$ è a termini non negativi, decrescente e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Per il criterio di Leibniz la serie $\sum_n a_n$ è convergente.

Ma allora $\sum_n a_n^2 = \sum_n \frac{1}{n} = +\infty$.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 giugno 2014

PARTE B

1. Studiare, l'immagine della funzione

$$f(x) = \frac{\left|e^{x^2+1} - 3\right|}{e^{x^2}}$$

Soluzione: Per prima cosa osserviamo che la funzione $f(x)$ è pari, $f(x) \geq 0$ e $f(x) = 0$ solo per $x = \pm\sqrt{\log(\frac{3}{e})}$. Inoltre

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+1} - 3}{e^{x^2}} & \text{per } |x| \geq \sqrt{\log(\dfrac{3}{e})} \\ -\dfrac{e^{x^2+1} - 3}{e^{x^2}} & \text{per } |x| < \sqrt{\log(\dfrac{3}{e})} \end{cases}$$

pertanto

$$f'(x) = \begin{cases} 2ex - 2e^{-x^2}\left(-3 + e^{x^2+1}\right)x & \text{per } |x| > \sqrt{\log(\dfrac{3}{e})} \\ -2ex + 2e^{-x^2}\left(-3 + e^{x^2+1}\right)x & \text{per } |x| < \sqrt{\log(\dfrac{3}{e})} \end{cases}$$

$f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. Inoltre la funzione non risulta derivabile in $x = \pm\sqrt{\log(\frac{3}{e})}$. Inoltre la funzione risulta essere decrescente per $0 < x < \sqrt{\log(\frac{3}{e})}$ e crescente per $x > \sqrt{\log(\frac{3}{e})}$. Si ha pertanto un punto massimo locale per $x = 0$, dove $f(0) = 3 - e$, mentre si hanno due punti di minimo assoluto per $x = \pm\sqrt{\log(\frac{3}{e})}$, dove la funzione si annulla ma non è derivabile. L'estremo superiore della funzione (ma non massimo assoluto) si ha agli estremi del dominio, e

$$e = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left|e^{x^2+1} - 3\right|}{e^{x^2}}$$

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\sin^2(x)\cos(x)}{y(x)} \\ y(\pi/4) = 1 \end{cases}$$

CODICE=976478

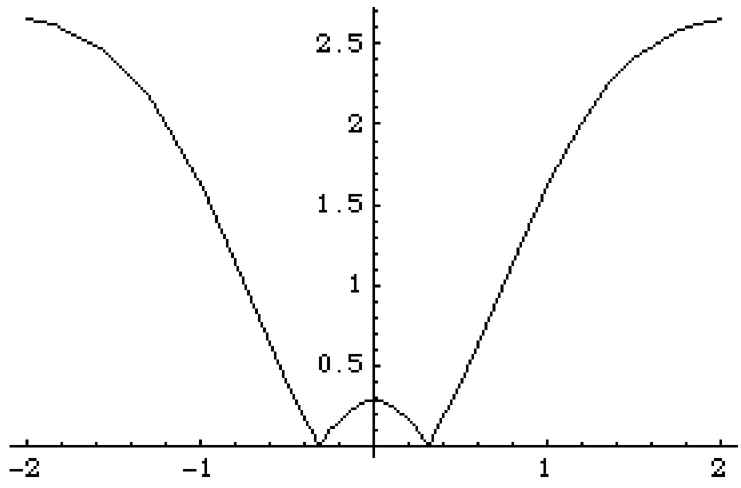


Figura 1: Grafico di $f(x) = \frac{\left|e^{x^2+1}-3\right|}{e^{x^2}}$

Soluzione: Con separazione delle variabili si ottiene direttamente $\int y dy = \int \sin^2(x)\cos(x)\,dx$, da cui

$$y^2 = \frac{2}{3}\sin^3(x) + c.$$

Dato che $y(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, solo la soluzione positiva della radice ha significato e imponendo la condizione iniziale si trova subito

$$y(x) = \frac{\sqrt{4\sin^3(x) - \sqrt{2} + 6}}{\sqrt{6}}$$

3. Studiare il limite

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{1}{z}\int_z^{z^2} \frac{x+1}{x^2+1}$$

Soluzione: Con calcoli espliciti (dato che l'integrando è una funzione razionale)

$$\frac{1}{z}\int_z^{z^2} \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{\log\left(z^4+1\right) - \log\left(z^2+1\right) + 2\arctan\left(z^2\right) - 2\arctan(z)}{2z},$$

e pertanto, con i limiti notevoli, dato che il logaritmo cresce meno di ogni potenza di z, per $z \to +\infty$

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{\log\left(z^4+1\right) - \log\left(z^2+1\right) + 2\arctan\left(z^2\right) - 2\arctan(z)}{2z} = 0.$$

4. Dimostrare che se $f''(x) < 0$ per ogni $x \in [a,b]$ e se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, allora esiste uno e uno solo $x_0 \in]a,b[$, tale che $f(x_0) = 0$.

Soluzione: Se per assurdo esistessero $a < x_1 < x_2 < b$ tali che $f(x_1) = f(x_2) = 0$, allora per il teorema di Rolle esisterebbe $x_1 < \xi < x_2$ tale the $f'(\xi) = 0$. Essendo la funzione concava il punto ξ sarebbe di massimo assoluto e inoltre $f'(x) < 0$ in tutto l'intervallo $]\xi, b[$. Quindi la funzione sarebbe strettamente descrescente a destra di ξ ed essendo $f(x_2) = 0$ si avrebbe l'assurdo che

$$0 = f(x_2) > f(b) > 0.$$

CODICE=976478

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

15 settembre 2014

PARTE B

1. Studiare, il grafico della funzione
$$f(x) = \sqrt{\left|\frac{x^3 - x^2}{x-2}\right|}$$

2. Risolvere l'equazione complessa
$$z^2 = -4\overline{z}$$

3. Studiare il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^3(\log(x))}{2\log(x)}$$

4. Sia $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua in tale che $f(x) < 0$. Si studino le seguenti affermazioni:
$$\mathcal{F}(x) = \int_0^{x^2} f(\tau)\,d\tau \qquad \text{è crescente}$$
$$\mathcal{F}(x) = \int_0^{x} \frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau \qquad \text{è limitata per } x > \frac{1}{2}$$

CODICE=236670

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

25 febbraio 2014

PARTE B

1. Studiare il numero di soluzioni, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ della equazione

$$\lambda = \frac{2-|x|}{1+x}, \qquad x \neq -1.$$

Soluzione: Per risolvere l'esercizio basta tracciare il grafico di $f(x) = \frac{2-|x|}{1+x}$ e vedere quante volte interseca le rette orizzontali $y = \lambda$. Si ha immediatamente che i limiti agli estremi del dominio sono i seguenti:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-|x|}{1+x} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2-|x|}{1+x} = -1$$

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{2-|x|}{1+x} = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} \frac{2-|x|}{1+x} = +\infty.$$

Inoltre

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{(x+1)^2} & x > 0 \\ \\ -\dfrac{1}{(x+1)^2} & x < 0,\ x \neq -1 \end{cases}$$

e la derivata non esiste per $x = 0$, anche se la funzione è continua in $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. La funzione risulta decrescente in senso stretto in $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$. Il grafico qualitativo è il seguente

da cui si ricava che esiste una sola soluzione se $\lambda \leq -1$ e $\lambda \geq 1$, e 2 soluzioni per $-1 < \lambda < 1$.

2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin(\pi t) \\ \\ y(0) = 1 \\ \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione Le soluzioni del problema omogeneo sono

$$Y(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t),$$

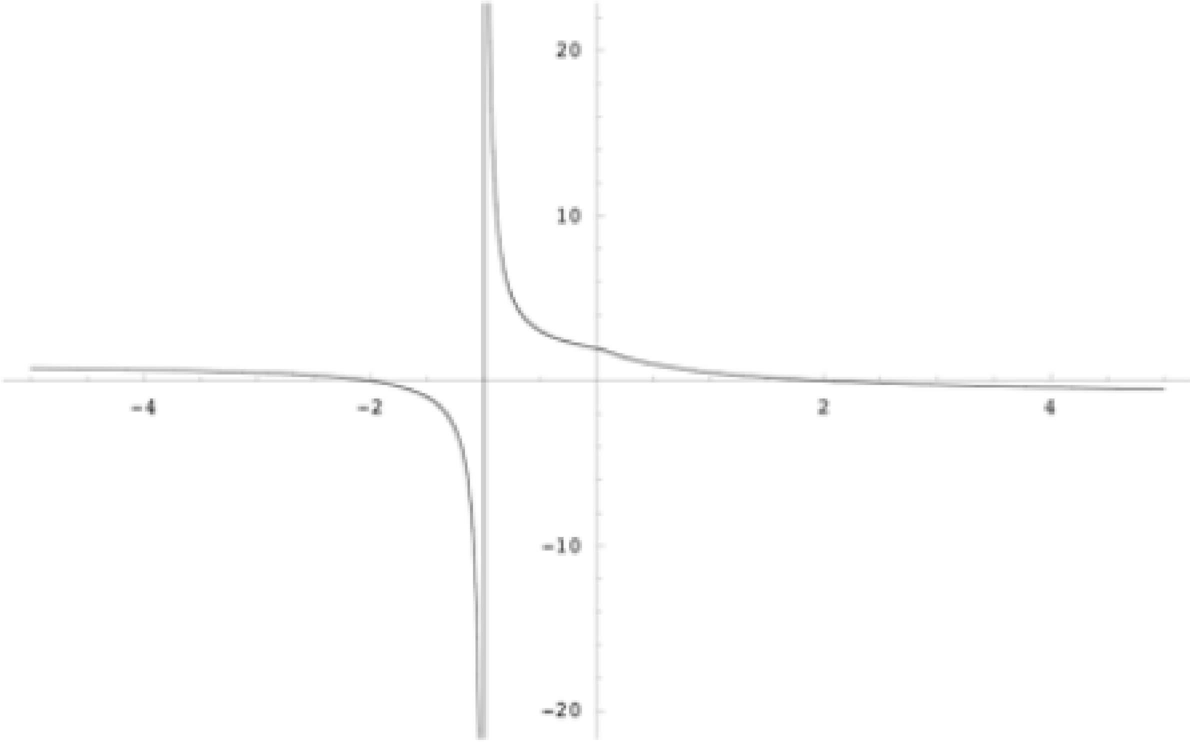


Figura 1: Grafico di $f(x) = \frac{2-|x|}{1+x}$

e quindi non c'è risonanza e la soluzione particolare va cercata della forma $y_f(t) = a\sin(\pi t) + b\cos(\pi t)$. Sostituendo si trova che

$$y_f(t) = \frac{1}{1-\pi^2}\sin(\pi t)$$

e imponendo poi le condizioni iniziali

$$y(t) = \frac{\left(-1+\pi^2\right)\cos(t) + \pi\sin(t) - \sin(\pi t)}{-1+\pi^2}$$

3. Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_3^{+\infty} \frac{x}{(x-1)(x^2+9)}\,dx.$$

Soluzione L'integrale in questione converge dato che la funzione integranda è non-negativa e inoltre

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+9)} = \mathcal{O}(1/x^2).$$

Effettuando la scomposizione in fratti semplici del tipo

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+9)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+c}{x^2+9}$$

si trova che una primitiva è

$$G(x) = \frac{3}{10}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{10}\log(x-1) - \frac{1}{20}\log\left(x^2+9\right)$$

e quindi

$$\int_3^{+\infty} \frac{x}{(x-1)(x^2+9)}\, dx = \lim_{b\to+\infty} G(x)\Big|_3^b = \frac{1}{40}\left(3\pi + \log\left(\frac{81}{4}\right)\right).$$

4. Calcolare l'integrale

$$\int_1^{3/2} \{x\} \log(x)\, dx$$

dove $\{x\}$ è la parte frazionaria di $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione Per calcolare l'integrale basta osservare che $\{x\} = x - [x]$, dove $[x]$ è la parte intera di x. Nell'intervallo $]1,2[$ si ha quindi $\{x\} = x - 1$ e pertanto

$$\int_1^{3/2} \{x\} \log(x)\, dx = \int_1^{3/2} (x-1) \log(x)\, dx$$

con una integrazione per parti si ha che

$$\frac{1}{2}\log(x)x^2 - \frac{x^2}{4} - \log(x)x + x$$

è una primitiva di $(x-1)\log(x)$ e dunque

$$\int_1^{3/2} \{x\} \log(x)\, dx = \frac{1}{2}\log(x)x^2 - \frac{x^2}{4} - \log(x)x + x\Big|_1^{3/2} = \frac{3}{16} - \frac{3}{8}\log\left(\frac{3}{2}\right).$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

28 gennaio 2014

PARTE B

1. Studiare la funzione
$$f(x) = \int_0^x (t-1)\mathrm{e}^{t^2}\,dt$$

   Soluzione: Per il teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione $f(x)$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si ha
$$f'(x) = (x-1)\mathrm{e}^{x^2}$$
   Dallo studio del segno di f' si ricava che f è strettamente decrescente per $x < 1$ e strettamente crescente per $x > 1$. Dunque $x = 1$ è l'unico punto di minimo assoluto e il minimo vale $\int_0^1 (t-1)\mathrm{e}^{t^2}\,dt$.
   Calcolando il limiti agli estremi del dominio otteniamo, rispettivamente, poiché f è illimitata (vedi Fig. 1).
$$\lim_{x\to\pm\infty} \int_0^x (t-1)\mathrm{e}^{t^2}\,dt = +\infty$$

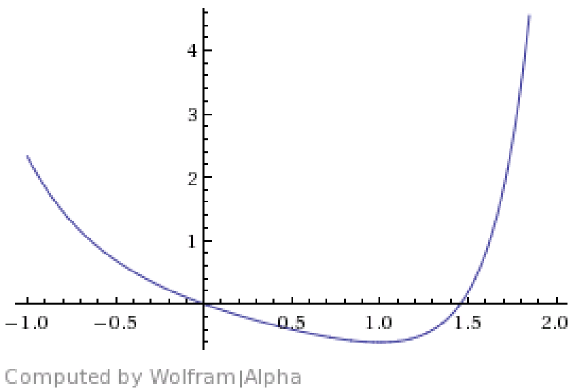


Figura 1: Andamento del grafico di f

   Dallo studio del segno di $f''(x) = \mathrm{e}^{x^2}(1 + 2x^2 - 2x)$ si ricava che $f'' > 0$ e $\forall x \in \mathbb{R}$, dunque f è convessa su tutto $\mathbb{R}$.

CODICE=640703

2. Trovare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + \alpha^2 y(t) = \mathrm{e}^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione: L'equazione caratteristica associata all'equazione, $\lambda^2 + \alpha^2 = 0$, ha radici $\pm i\,\alpha$. Se $\alpha \neq 0$ la soluzione generale dell'equazione omogenea è dunque

$$y_0(t) = a\cos(\alpha t) + b\sin(\alpha t)$$

Poiché 0 à secondo membro c'è un esponenziale, la soluzione particolare è del tipo

$$y_1(t) = ce^t$$

Sostituendo le derivate opportune di $y_1(t)$ all'equazione data otteniamo che $y_1(t)$ é soluzione se e solo se $c = \frac{1}{1+\alpha^2}$. Dunque la soluzione particolare è del tipo $y_1(t) = \frac{e^t}{1+\alpha^2}$. La soluzione generale è dunque

$$y(t) = a\cos(\alpha t) + b\sin(\alpha t) + \frac{e^t}{1+\alpha^2}$$

Imponendo le condizioni iniziali abbiamo il sistema $\begin{cases} \dfrac{e^t}{1+\alpha^2} + \dfrac{\alpha^2}{1+\alpha^2}e^t = e^t \\ a + \dfrac{1}{1+\alpha^2} = 0 \\ b\alpha + \dfrac{1}{1+\alpha^2} = 1 \end{cases}$

con soluzioni $a = -\frac{1}{1+\alpha^2}$, $b = \frac{1}{1+\alpha^2}$.
Sostituendo tali valori nella soluzione generale otteniamo:

$$y(t) = -\frac{1}{1+\alpha^2}\cos(\alpha t) + \frac{1}{1+\alpha^2}\sin(\alpha t) + \frac{e^t}{1+\alpha^2}$$

.

Nel caso $\alpha = 0$, il problema omogeneo ha come soluzione $y_0(t) = c_0 + c_1 t$ e con lo stesso ragionamento si ottiene come soluzione

$$y(t) = 1 + \mathrm{e}^t - t.$$

3. Studiare la convergenza ed eventualmente calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_1^2 \frac{x^4}{\sqrt{|1-x^5|}}\,dx.$$

Cosa si può dire di

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{\sqrt{|1-x^5|}}\,dx.$$

Soluzione: Dato che gli estremi di integrazione sono 1 e 2 e $|1-x^5| = x^5 - 1$ per $x > 1$, il primo integrale diventa

$$\int_1^2 \frac{x^4}{x^5-1}\,dx = \left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5-1}\right]_1^0 = \frac{2}{5}\sqrt{31}$$

CODICE=640703

Per quanto riguarda il secondo integrale, bisogna innanzitutto spezzare spezzare l'integrale nella somma dell'integragle fra 0 e 1 (dove $|1-x^5| = 1-x^5$) e l'integrale fra 1 e $+\infty$ (dove $|1-x^5| = x^5-1$). Otteniamo dunque

$$\int_1^2 \frac{x^4}{x^5-1}\,dx = \left[\frac{2}{5}\sqrt{1-x^5}\right]_0^1 + \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{x^4}{\sqrt{x^5-1}}\,dx = -\frac{2}{5} + \lim_{b\to+\infty}\sqrt{b^5-1}$$

Valendo il limite $+\infty$, l'integrale diverge.

4. a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. È vero che se $(f(x))^2$ è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$, allora f è continua su tutto $\mathbb{R}$?
b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $|f'(x)| \le C_1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora $(f(x))^2$ è derivabile, ma è vero che esiste $C_2 > 0$ tale che $\left|\frac{d}{dx}\frac{(f(x))^2}{2}\right| \le C_2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?
Soluzione: a) L'affermazione è falsa. Infatti, presa la funzione discontinua in 0 definita da $f(x) = -1$, se $x \le 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$, allora $(f(x))^2 \equiv 1$ continua
b) L'affermazione è falsa. Basta considerare $f(x) = x$, derivabile in $\mathbb{R}$ tale che $|f'(x)| \le 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Allora$(f(x))^2$ è uguale a x^2 e dunque $\left|\frac{d}{dx}\frac{x^2}{2}\right| = |2x|$ che è una funzione illimitata. Dunque non esiste $C_2 \ge 0$ tale che $|2x| \le C_2$.

CODICE=640703

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica I

30 giugno 2014

PARTE B

1. Studiare, il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x+1}.$$

Soluzione: Per prima cosa osserviamo che la funzione non è definita per $x = -1$ e

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{x+1} & x < 0,\ x \neq \{-1\} \end{cases}$$

Inoltre

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} & x < 0,\ x \neq \{-1\}. \end{cases}$$

Per $x < 0$ la derivata si annulla solo per $x_0 = -1 - \sqrt{2}$ (l'altra soluzione è positiva) e la funzione non risulta derivabile per $x = 0$, infatti $f'_+(0) = 1$, mentre $f'_-(0) = -1$. Inoltre $f' > 0$ per $x < -1-\sqrt{2}$, mentre $f' < 0$ per $-1-\sqrt{2} < x < 0$, $x \neq -1$. Quindi in $x_0 = -1-\sqrt{2}$ si ha un punto di massimo locale, mentre la funzione è decrescente in $\{-1 - \sqrt{2}\} < x < -1 \cup \{-1 < x < 0\}$. Quindi 0 è punto di minimo locale, anche se $f'(0)$ non esiste.

Per concludere

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

e in $x = -1$ si ha un asintoto verticale

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$$

2. Risolvere l'equazione complessa

$$\mathrm{e}^z = \frac{\mathrm{e}}{2}(-1 + i\sqrt{3})$$

Soluzione: Osserviamo che $\mathrm{e}^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$, quindi dobbiamo trovare a e b reali in modo che

$$\mathrm{e}^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)) = \mathrm{e}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

CODICE=892670

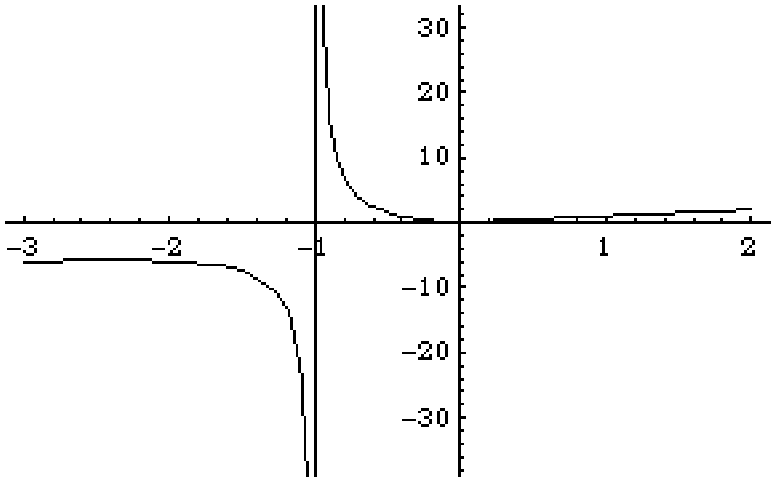


Figura 1: Grafico di $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x+1}$

da cui necessariamente $a = 1$, mentre $b = 2\pi/3$ a cui possiamo aggiungere multipli interi dell'angolo giro, da cui la soluzione

$$z = 1 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

3. Studiare il limite

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{y^y - 1}{y}$$

Soluzione: Il limite è del tipo $\frac{0}{0}$, applicando l'Hopital, si deve studiare il limite

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{y^y(\log(y)+1)}{1} = -\infty.$$

Il limite richiesto pertanto esiste ed assume lo stesso valore

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{y^y - 1}{y} = -\infty.$$

4. Sia $f(x)$ una funzione continua in $]0,1[$, non necessariamente non negativa tale che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\sqrt{\sin(x)} = 2.$$

Dire, motivando la risposta se è vero che l'integrale

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx$$

esiste ed è finito. Cosa si può dire se inoltre $f > 0$?

Soluzione: Se la funzione f non ha segno assegnato, può avvicinandosi a $x = 1$ assumere in valore assoluti numeri arbitrariamente grandi. Quindi f^2 può avere in $x = 1$ singolarità non integrabili, indipendentemente dal comportmento a 0. Inoltre anche supponendo che f sia positiva e limitata in un intorno di $x = 1$, dall'ipotesi si ha che $f(x) = O(1/\sqrt{x})$ per $x \to 0^+$. Quindi

$$f^2(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

in un intorno destro di zero, e pertanto risulta non integrabile.

CODICE=892670

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 gennaio 2015

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni reali dell'equazione

$$x^6 + \alpha\, x^4 + 1 = 0$$

Soluzione: La funzione f è pari e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Per $\alpha \geq 0$ la funzione $f(x) = x^6 + \alpha\, x^4 + 1$ è maggiore o uguale a 1, quindi non si annulla mai e non ci sono radici.

Studiamo ora il caso $\alpha < 0$. Si ha $f'(x) = 2x^3(3x^2 + 2\alpha)$, che si annulla per $x = 0$ per $x = \pm\sqrt{-2\alpha/3}$. Dallo studio del segno della derivata risulta che in $x = 0$ si ha un punto di massimo locale, mentre in $x = \pm\sqrt{\alpha/3}$ si ha un minimo locale. Dato che $f(0) = 1$ bisogna stabilire il segno del minimo. Calcolando $f(\pm\sqrt{\alpha/3}) = 1 + 4\alpha^3/27$ e pertanto, se $\alpha > -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, non ci sono soluzioni. Se $\alpha = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, ci sono 2 soluzioni e per $\alpha < -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ ce ne sono 4.

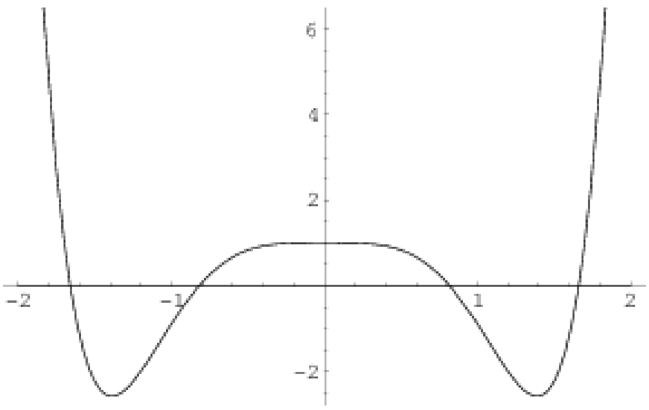


Figura 1: Andamento del grafico di f per $\alpha < -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) = x^2 - 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

CODICE=212670

Soluzione. Per prima cosa risolviamo l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - \lambda = 0$ ha come radici $\lambda = 0, 1$, quindi le soluzioni dell'omogenea sono

$$y(x) = c_1 + c_2 \mathrm{e}^x.$$

Dato che 0 risolve l'equazione caratteristica abbiamo risonanza e quindi la soluzione particolare va cercata della forma $y_f(x) = x(\alpha + \beta x + \gamma x^2)$ derivando e sostituendo otteniamo il sistema

$$-\alpha + 2\beta = -1 \qquad -2\beta + 6\gamma = 0 \qquad -3\gamma = 1,$$

che ha come soluzione

$$\alpha = -1 \qquad \beta = -1 \qquad \gamma = -1/3.$$

quindi l'integrale generale è

$$y(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 - x + c_1 + c_2 \mathrm{e}^x$$

e imponendo le condizioni iniziali si trova la soluzione

$$y(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 - x - 2 + 2e^x.$$

3. Calcolare

$$\int_3^{+\infty} \frac{x}{1 - x^4}\, dx.$$

Soluzione. L'integrale converge dato che la funzione integranda, sempre negativa nella semiretta considerata, si annulla come $-1/x^3$ per x che tende a più infinito. Scomponendola nella forma

$$\frac{x}{1-x^4} = \frac{1}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx + D}{1 + x^2}$$

si ottiene con facili calcoli che una primitiva è la funzione

$$G(x) = \frac{1}{4} \log \left| \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right|$$

da cui si ricava che

$$\int_3^{+\infty} \frac{x}{1-x^4}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_3^b \frac{x}{1-x^4}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{4} \log \left| \frac{b^2+1}{b^2-1} \right| - \frac{1}{4} \log \left| \frac{3^2+1}{3^2-1} \right| = -\frac{1}{4} \log(5/4).$$

4. Sia per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\{a_n(x)\}_n$ la successione definita da

$$a_n(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re} \left(\sum_{k=1}^{n} (\mathrm{e}^{ix})^k \right).$$

Verificare che $a_n(x) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}$ e usarlo per calcolare

$$\lim_{x \to 0} a_n(x)$$

Soluzione. Osserviamo che usando la formula per la somma di una progressione geometrica

$$\sum_{k=1}^{n} (\mathrm{e}^{ix})^k = \mathrm{e}^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{e}^{ix})^k = \mathrm{e}^{ix} \frac{\mathrm{e}^{inx} - 1}{\mathrm{e}^{ix} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{ix/2} \mathrm{e}^{ix/2} (\mathrm{e}^{inx} - 1)}{\mathrm{e}^{ix/2} (\mathrm{e}^{ix/2} - \mathrm{e}^{-ix/2})},$$

CODICE=212670

pertanto

$$\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{e}^{ix})^k = \frac{\mathrm{e}^{i(n+1/2)x} - \mathrm{e}^{ix/2}}{\mathrm{e}^{ix/2} - \mathrm{e}^{-ix/2}} = \frac{\cos(n+1/2)x + i\sin(n+1/2)x - \cos(x/2) - i\sin(x/2)}{2i\sin(x/2)},$$

e quindi

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{e}^{ix})^k\right) = \frac{\sin(n+1/2)x - \sin(x/2)}{2\sin(x/2)}.$$

Sommando 1/2 si ottiene la formula cercata, da cui

$$\lim_{x\to 0} a_n(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2n+1)x/2 - \sin(x/2)}{2\sin(x/2)} = n + \frac{1}{2}.$$

CODICE=212670

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 giugno 2015

PARTE B

1. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \log(x - \log(x))$$

Soluzione: La funzione risulta definita se $x > 0$ (per definire il logaritmo "più interno") se inoltre $x - \log(x) > 0$. Osservando che il logaritmo è concavo e che il grafico è tangente a quello della retta $y = x$ per $x = 1$, si ha quindi che la seconda diseguaglianza è sempre verificata $x - \log(x) > 0$. Il dominio pertanto è $D = (0, \infty)$. La funzione f risulta continua in tutto il dominio e usando i limiti notevoli si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Calcolando la derivata prima si ha

$$f'(x) = \frac{x-1}{x(x - \log(x))}$$

e dato che il denominatore risulta positivo per tutte le $x \in D$ si ha

$$f'(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < x < 1$$

con un cambio di segno da negativo a positivo in $x = 1$, quindi tale punto è di minimo relativo.

La derivata seconda risulta

$$f''(x) = \frac{x - \log(x) - (x-1)^2}{x^2(x - \log(x))^2}.$$

Il denominatore è sempre positivo, ma il segno del numeratore risulta complesso da studiare. Osserviamo però che

$$\lim_{x\to 0^+} x - \log(x) - (x-1)^2 = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to +\infty} x - \log(x) - (x-1)^2 = -\infty,$$

quindi c'è almeno un cambio di concavità (in effetti ne ha uno solo).

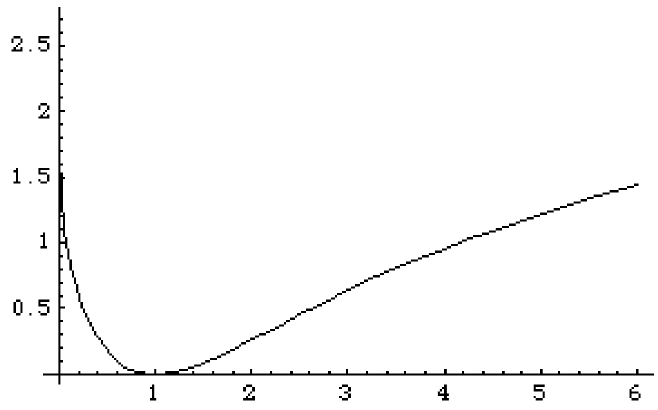


Figura 1: Andamento del grafico di f

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \sin(t)\,\mathrm{e}^{3t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione. La soluzione dell'equazione caratteristica è $\lambda = -1$ con molteplicità 2, quindi l'equazione omogenea associata $Y''(t) + 2Y'(t) + Y(t) = 0$ ha come soluzione

$$Y(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2 t\,\mathrm{e}^{-t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dato che non c'è risonanza la soluzione particolare va cercata della forma

$$y_f(t) = A\sin(t)\mathrm{e}^{3t} + B\cos(t)\mathrm{e}^{3t}.$$

Sostituendo si trova pertanto la forma dell'integrale generale

$$y(t) = Y(t) + y_f(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2 t\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{289}e^{3t}(8\cos(t) - 15\sin(t)).$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha alla fine la soluzione

$$y(t) = -\frac{1}{289}e^{-t}\left(-306t + 8e^{4t}\cos(t) - 15e^{4t}\sin(t) - 297\right).$$

3. Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^{3/2} dx$$

Soluzione. La funzione integranda è per $x > 0$ continua e nonnegativa dato che $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = x$, se $x > 0$. Inoltre la funzione integranda è limitata nell'intorno destro di 0, quindi risulta integrabile secondo Riemann su ogni intervallo della forma $(0, b)$, con $b > 0$.

Per studiare l'integrabilità in senso generalizzato su (b, ∞) possiamo quindi applicare il teorema del confronto asintotico. Moltiplicando e dividendo osserviamo che che

$$\sqrt{1+x^2} - x = \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x}.$$

Pertanto

$$\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^{3/2} = \mathcal{O}(x^{-3/2}) \qquad \text{per } x \to +\infty,$$

e quindi risulta integrabile in senso generalizzato.

4. Sia k un numero reale maggiore di $\frac{1}{\mathrm{e}}$. Dimostrare che

$$x^k \log(x) \geq -1 \qquad \forall\, x > 0$$

Soluzione. Per verificare la diseguaglianza studiamo la funzione $f_k(x) = x^k \log(x)$ al variare del parametro k. Dato che $k > 0$ si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f_k(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} f_k(x) = +\infty.$$

Inoltre

$$f_k'(x) = x^{k-1}(k \log(x) + 1).$$

Dallo studio del segno della derivata si ha che f_k decresce per $0 < x < \mathrm{e}^{-1/k}$, mentre è crescente per $x > \mathrm{e}^{-1/k}$. Il minimo assoluto vale pertanto

$$f_k(\mathrm{e}^{-1/k}) = -\frac{1}{\mathrm{e}\,k},$$

e $-\frac{1}{\mathrm{e}\,k} \geq -1$ se $k > \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

14 settembre 2015

PARTE B

1. Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il grafico della funzione

$$f(x) = \log(x)\, \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{x}} \qquad x > 0.$$

Soluzione. Se $\lambda = 0$ la funzione si riduce al logaritmo naturale, pertanto cominciamo a discutere il caso $\lambda > 0$ per poi passare a $\lambda < 0$, osservando che $f(1) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e che la derivata risulta

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{x}}(x - \lambda \log(x))}{x^2}.$$

Se $\lambda > 0$ allora

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Il segno della derivata dipende solo dal termine $g(x) = x - \lambda \log(x)$, dato che gli altri sono positivi. Osserviamo che per $\lambda > 0$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

La funzione g ha come derivata

$$g'(x) = 1 - \frac{\lambda}{x}$$

che si annulla con un cambio di segno per $x = \lambda$. Pertanto la funzione g ha un minimo per $x = \lambda$. Se il minimo è positivo non ci sono cambi di segno della derivata di f. Il valore minimo di g risulta $g(\lambda) = \lambda(1 - \log(\lambda))$ che è positivo se $\lambda < \mathrm{e}$, nullo se $\lambda = \mathrm{e}$ e negativo se $\lambda > \mathrm{e}$. Pertanto se $0 < \lambda < \mathrm{e}$ la funzione f' è sempre strettamente positiva e quindi f è monotona crescente. Se $\lambda = \mathrm{e}$ la derivata f' è sempre positiva eccetto che in $x = \mathrm{e}$, ma ancora la funzione f è strettamente crescente. Invece se $\lambda > \mathrm{e}$ la funzione f' si annulla in 2 punti $x_1 < \lambda < x_2$ e quindi f risulta crescente in $]0, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ e decrescente all'interno. Il punto x_1 è un punto di massimo relativo mentre x_2 è un punto di minimo relativo.

Nel caso $\lambda < 0$ abbiamo invece

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e di nuovo il segno della derivata dipende solo da g che ora soddisfa

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

CODICE=233769

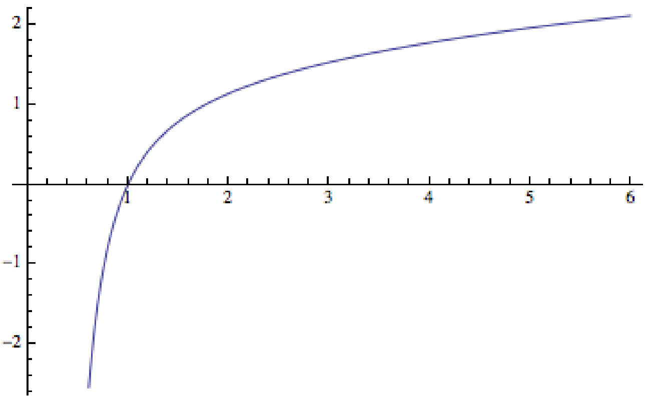


Figura 1: Andamento del grafico di f per $0 < \lambda < e$

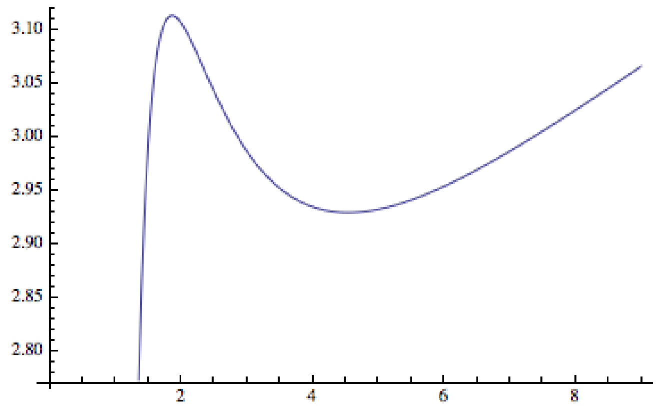


Figura 2: Andamento del grafico di f per $e < \lambda$

Inoltre $g'(x)$ non si annulla mai perchè $x = \lambda$ non ha soluzioni se $x > 0$ e $\lambda < 0$ quindi la derivata è negativa per $x < x_3$ e positiva per $x > x_3$. Il punto x_3 è quello dove si annulla $g(x)$ e osserviamo che $x_3 < 1$, dato che $g(1) = 1$ per ogni λ.

2. Studiare al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[\alpha]{\log\left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right)}$$

Soluzione. La serie in questione è a termini non negativi e usando lo sviluppo di Taylor si ottiene che

$$\sqrt[\alpha]{\log\left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right)} = \log\left(1 + \frac{1}{n^\beta}\right)^{1/\alpha} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\beta/\alpha}}\right) \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Pertanto la serie converge se e solo se

$$\frac{\beta}{\alpha} > 1.$$

3. Studiare la convergenza e eventualmente calcolare

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x(x+2)(x+3)}\, dx$$

CODICE=233769

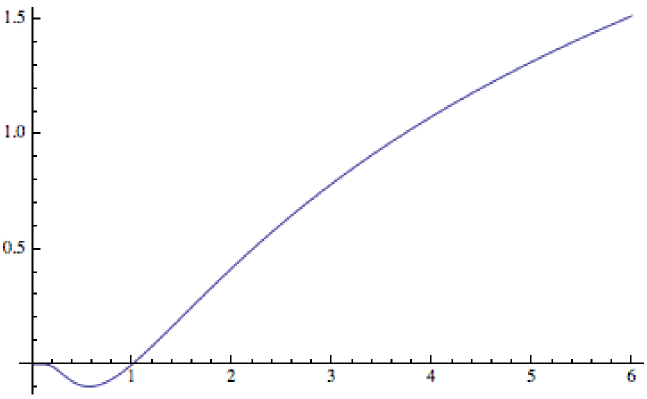


Figura 3: Andamento del grafico di f per $\lambda < 0$

Soluzione. L'integrale in questione converge perchè la funzione integranda è non-negativa e

$$\frac{x+1}{x(x+2)(x+3)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Utilizzando la scomposizione in fattori razionali

$$\frac{x+1}{x(x+2)(x+3)} = \frac{1}{6x} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+3)}$$

si ottiene che una primitiva di f è la funzione $\frac{\log(x)}{6} + \frac{1}{2}\log(x+2) - \frac{2}{3}\log(x+3)$. Pertanto

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{x+1}{x(x+2)(x+3)}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{\log(x)}{6} + \frac{1}{2}\log(x+2) - \frac{2}{3}\log(x+3)\bigg|_1^b = \frac{1}{6}\log\left(\frac{256}{27}\right)$$

4. Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\sin(t)}{y(t)} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. Osserviamo che $y(0) = 0$ rende senza senso il lato destro, o perlomeno questo va inteso in un senso particolare di limite come per esempio risolvendo

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\sin(t)}{y(t)} & \text{per } t \neq 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} y(t) = 0. \end{cases}$$

Manipolando comunque in maniera formale l equazione, separiamo le variabili ottenendo $ydy = \sin(t)dt$ e integriamo ottenendo

$$y^2 = 2(C - \cos(t)).$$

Se vogliamo $y(0) = 0$, allora $C = 1$. Quindi le soluzioni risultano

$$y(t) = \sqrt{2(1-\cos(t))} \qquad y(t) = -\sqrt{2(1-\cos(t))}$$

In questo caso entrambe le soluzioni sono accettabili, dato che sono funzioni derivabili per $t \neq 0$ e che si annullano per $t = 0$. Si ha un fenomeno di non unicità.

CODICE=233769

Osserviamo che in realtà non ci sono solo queste due soluzioni, dato che lo stesso fenomeno si ha anche per $t = 2k\pi$. Quindi ogni volta che viene raggiunto uno di questi punti, si può avere una soluzione che mantiene il segno o lo cambia e si può costruire una soluzione scegliendo arbitrariamente il segno davanti alla radice in ognuno degli intervalli $t \in]2k\pi, 2(k+1)\pi[$.

CODICE=233769

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

16 febbraio 2015

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, il grafico della funzione

$$f(x) = \left|\frac{x^2 - x}{x - \lambda}\right|, \qquad x \neq \lambda.$$

Soluzione. Osserviamo subito che se $\lambda = 0$ allora $f(x) = \left|\frac{x^2-x}{x}\right| = |x-1|$, per $x \neq 0$; mentre se $\lambda = 1$ allora $f(x) = \left|\frac{x^2-x}{x-1}\right| = |x|$, per $x \neq 1$. Escludendo questi due casi in cui il grafico si traccia in maniera elementare osserviamo che per gli altri λ si ha

$$\lim_{x\to\lambda} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Per avere altre informazioni serve preliminarmente studiare il segno di $\frac{x^2-x}{x-\lambda}$. Studiando le disequazioni si ha

$$\frac{x^2 - x}{x - \lambda} \geq 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} \lambda < 0 & \rightarrow \quad x \in A_1 :=]\lambda, 0] \cup [1, +\infty[\\ 0 < \lambda < 1 & \rightarrow \quad x \in A_2 := [0, \lambda[\cup[1, +\infty[\\ \lambda > 1 & \rightarrow \quad x \in A_3 := [0, 1]\cup]\lambda, +\infty[. \end{cases}$$

Per $\lambda < 0$ si ha quindi, per $x \neq \lambda$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x - \lambda}, & x \in A_1, \\ -\dfrac{x^2 - x}{x - \lambda}, & x \in \mathbb{R}\backslash A_1. \end{cases}$$

e quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda + x^2 - 2\lambda x}{(x - \lambda)^2}, & x \in A_1, \\ -\dfrac{\lambda + x^2 - 2\lambda x}{(x - \lambda)^2}, & x \in \mathbb{R}\backslash A_1. \end{cases}$$

Con calcoli espliciti si verifica che nei punti $x = 0$ e $x = 1$ la funzione non è derivabile e inoltre che la derivata si annulla per $x_{1/2} = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \lambda}$ e dallo studio del segno si ha un punto di

CODICE=627874

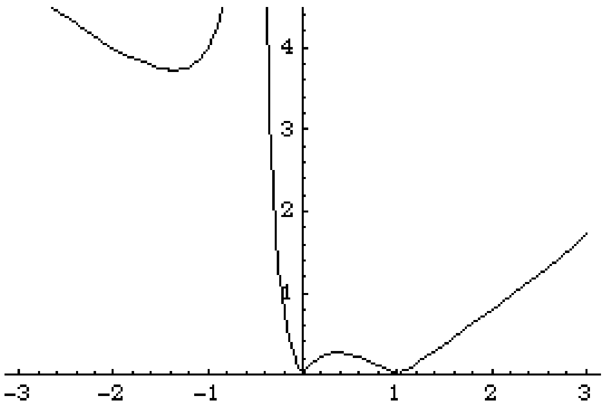


Figura 1: Andamento del grafico di f per $\lambda < 0$.

minimo relativo in $x_1 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - \lambda}$, e un punto di massimo relativo in $x_2 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - \lambda}$. (Se $0 < \lambda < 1$ allora $x_1 < 0$ e $0 < x_2 < 1$). Il grafico approssimativo risulta quindi il seguente, vedi Fig. 1.

Per $0 < \lambda < 1$ si ha quindi, per $x \neq \lambda$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x - \lambda}, & x \in A_2, \\ \\ -\dfrac{x^2 - x}{x - \lambda}, & x \in \mathbb{R} \backslash A_2. \end{cases}$$

Il calcolo della derivata risulta lo stesso, ma in questo caso la derivata non si annulla mai perche' $\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \lambda}$ non è reale. Il grafico approssimativo risulta il seguente, vedi Fig. 2.

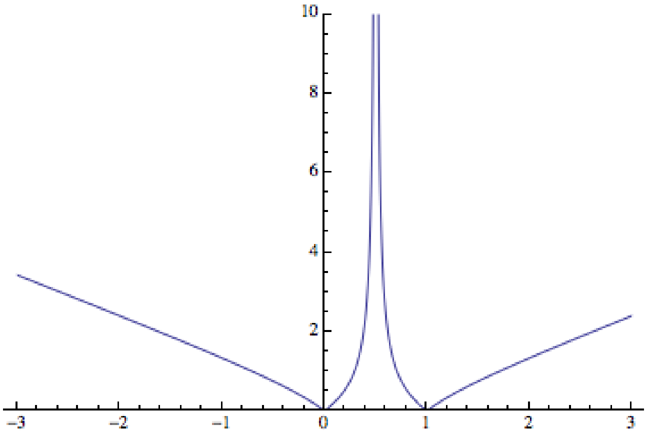


Figura 2: Andamento del grafico di f per $0 < \lambda < 1$.

Per $\lambda > 1$ si ha invece, sempre per $x \neq \lambda$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x - \lambda}, & x \in A_3, \\ \\ -\dfrac{x^2 - x}{x - \lambda}, & x \in \mathbb{R} \backslash A_3. \end{cases}$$

CODICE=627874

I calcoli sono simili, con due zeri della derivata prima $0 < x_1 < 1$ e $1 < \lambda < x_2$. il grafico approssimativo risulta il seguente, vedi Fig. 3.

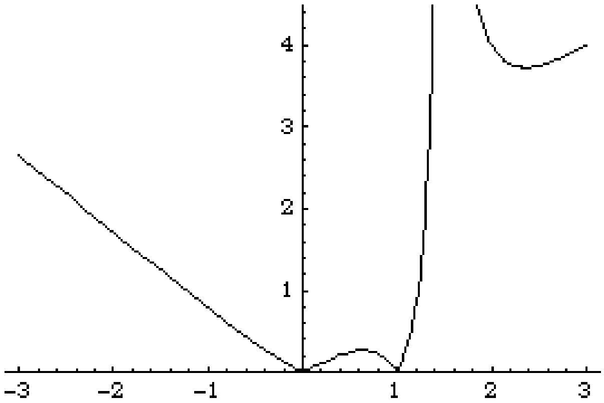


Figura 3: Andamento del grafico di f per $\lambda > 1$.

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + 3ty(t) = \sin(t)\,\mathrm{e}^{-3t^2/2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione. Si tratta di un'equazione lineare a coefficienti non costanti. Moltiplichiamo per il fattore integrante $\mathrm{e}^{\int 3t\,dt} = \mathrm{e}^{3t^2/2}$ e otteniamo

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)\mathrm{e}^{3t^2/2}\right) = \sin(t).$$

Integrando entrambi i membri tra 0 e t si ottiene

$$y(t)\mathrm{e}^{3t^2/2} - y(0) = \int_0^t \sin(\tau)\,d\tau = 1 - \cos(t),$$

da cui la soluzione

$$y(t) = (2 - \cos(t))\,\mathrm{e}^{-3t^2/2}$$

3. Studiare, al variare di $\alpha > 0$ la convergenza e eventualmente calcolare il valore dell'integrale

$$\int_4^{+\infty} \frac{x + \alpha}{x(x^2 - 1)}\,dx$$

Soluzione. Si tratta di una funzione integranda non negativa e inoltre

$$\frac{x + \alpha}{x(x^2 - 1)} = \mathcal{O}(1/x^2) \quad \text{per } x \to +\infty,$$

quindi per il criterio del confronto asintotico l'integrale risulta convergente per ogni $\alpha > 0$. Decomponendolo in fratti semplici si ottiene facilmente

$$\frac{x + \alpha}{x(x^2 - 1)} = -\frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha + 1}{2(x - 1)} + \frac{\alpha - 1}{2(x + 1)}.$$

CODICE=627874

Pertanto, per ogni $b \geq 4$

$$\int_4^b \frac{x+\alpha}{x(x^2-1)}\,dx = \frac{1}{2}(\alpha+1)\log|x-1| - \alpha\log|x| + \frac{1}{2}(\alpha-1)\log|x+1|\Big|_4^b$$

$$= -\frac{1}{2}(\alpha-1)\log(5) + \alpha\log(4) - \frac{1}{2}(\alpha+1)\log(3)$$

$$+ \frac{1}{2}(\alpha-1)\log(b+1) + \frac{1}{2}(\alpha+1)\log(b-1) - \alpha\log(b).$$

Osserviamo ora che per $b \to +\infty$

$$\frac{1}{2}(\alpha-1)\log(b+1) + \frac{1}{2}(\alpha+1)\log(b-1) - \alpha\log(b) = \log\frac{(b+1)^{\frac{\alpha-1}{2}}(b-1)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{b^\alpha} \to \log(1) = 0,$$

e quindi

$$\int_4^{+\infty} \frac{x+\alpha}{x(x^2-1)}\,dx = \frac{1}{2}\left(\alpha\log\left(\frac{16}{15}\right) + \log\left(\frac{5}{3}\right)\right)$$

4. Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}^+$

$$(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Soluzione. Per studiare la diseguaglianza, osserviamo che se a 0 b sono nulli, allora è banalmente vera. Supponiamo pertanto che siano entrambi diversi da zero e dividiamo entrambi i termini per b^n ottenendo la diseguaglianza

$$(1+t)^n \leq 2^{n-1}(1+t^n) \quad \text{per la variabile } t = \frac{b}{a} > 0.$$

Il problema diventa pertanto quello di stabilire se vale la seguente diseguaglianza

$$\phi(t) = (1+t)^n - 2^{n-1}(1+t^n) \leq 0 \quad \forall\, t > 0$$

Osserviamo che $\phi(0) = 1 - 2^{n-1} \leq 0$ e che $\lim_{t\to+\infty}\phi(t) = -\infty$. Inoltre

$$\phi'(t) = n\left((t+1)^{n-1} - 2^{n-1}t^{n-1}\right)$$

che si annulla quando

$$(t+1)^{n-1} = 2^{n-1}t^{n-1} \quad \leftrightarrow \quad t+1 = 2t \quad \leftrightarrow \quad t = 1.$$

Dallo studio del segno di ϕ' si ha che $t = 1$ è un punto di massimo relativo e $\phi(1) = 0$, quindi la tesi dato che ϕ risulta sempre non positiva.

CODICE=627874

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

21 luglio 2015

PARTE B

1. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin(x) \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Soluzione. La funzione in questione è continua e quindi assumerà massimo e minimo assoluto nell'intervallo chiuso $[0, 2\pi]$. Risulta inoltre

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos(x) - \sin(x))$$

pertanto la funzione risulta crescente in $]0, \pi/4[\cup]5\pi/4, 2\pi[$. Il punto $x_M = \pi/4$ è di massimo (assoluto), mentre $x_m = 5\pi/4$ è di minimo (assoluto). La derivata seconda

$$f''(x) = -2\mathrm{e}^{-x}\cos(x)$$

risulta positiva per $x \in]\pi, 2\pi[$, dove la funzione è convessa.

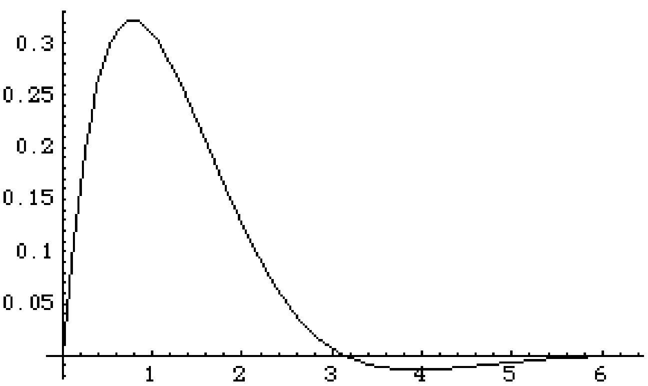


Figura 1: Andamento del grafico di $f(x)$.

2. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! n^3}{n^{\alpha n}}$$

CODICE=675508

Soluzione La serie è a termini non negativi e usiamo la formula di Stirling per approssimare il fattoriale. In tal modo

$$\frac{n!n^3}{n^{\alpha n}} \sim \sqrt{2\pi}\frac{n^{n+1/2+3-\alpha n}}{\mathrm{e}^n}$$

e usando il criterio della radice si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt{2\pi}\frac{n^{n+1/2+3-\alpha n}}{\mathrm{e}^n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt{2\pi}}\ \frac{n^{1+1/(2n)+3/n-\alpha}}{\mathrm{e}} = \begin{cases} 0, \text{ se } \alpha > 1 \\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}, \text{ se } \alpha = 1 \\ +\infty, \text{ se } \alpha < 1 \end{cases}$$

e quindi si ha convergenza per $\alpha \geq 1$.

3. Studiare, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{1/x} - 1)^{2\alpha}}{1 + x^\alpha + x^{2\alpha}}$$

Soluzione La funzione integranda è non negativa e continua. Osserviamo che con lo sviluppo di Taylor in zero e cambiando variabile $y = 1/x$ si ha che $\mathrm{e}^{1/x} - 1 = \mathcal{O}(1/x)$ per $x \to +\infty$. Pertanto per $x \to +\infty$

$$\frac{(\mathrm{e}^{1/x} - 1)^{2\alpha}}{1 + x^\alpha + x^{2\alpha}} \sim \frac{x^{-2\alpha}}{1 + x^\alpha + x^{2\alpha}} \sim \frac{1}{x^{4\alpha}}$$

e usando il criterio del confronto asintotico, l'integrale converge per $\alpha > \frac{1}{4}$.

4. Trovare, se esistono dei valori $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tali che il problema

$$y''(t) + \lambda y(t) = 0$$

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

abbia soluzioni non nulle. **Soluzione** L'equazione caratteristica è $\xi^2 + \lambda = 0$ che ha come soluzioni $\xi = \pm i\sqrt{\lambda}$ quindi l'integrale generale risulta

$$y(t) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}t) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}t).$$

Imponendo $y(0) = 0$ si ottiene $c_1 = 0$. Pertanto la condizione

$$y(\pi) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$$

è soddisfatta con $c_2 \neq 0$ se

$$\sqrt{\lambda}\pi = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

cioè se $\lambda = k^2$, $k \in \mathbb{N}$.

CODICE=675508

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

27 gennaio 2015

PARTE B

1. Studiare, al variare del parametro $\lambda > 0$, il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 2|}}{x - \lambda}, \qquad 0 < x \neq \lambda.$$

Soluzione. La funzione risulta

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2}}{x - \lambda} & x \geq \sqrt{2}, \\[2ex] \dfrac{\sqrt{2 - x^2}}{x - \lambda} & 0 < x < \sqrt{2}, \end{cases}$$

e si tratta di una funzione continua in tutto il suo dominio $\{x > 0 : \ x \neq \lambda\}$. Inoltre agli estremi del dominio abbiamo

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{\lambda} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x \to \lambda^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to \lambda^-} f(x) = -\infty,$$

e pertanto el punto $x = \lambda$ c'è un asintoto verticale.

Studiando la derivata prima si ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 - x\lambda}{\sqrt{x^2 - 2}(x - \lambda)^2} & x > \sqrt{2}, \\[2ex] -\dfrac{2 - x\lambda}{\sqrt{x^2 - 2}(x - \lambda)^2} & 0 < x < \sqrt{2}, \end{cases}$$

e si ha quindi che

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^\pm} f'(x) = \pm\infty, \qquad \text{se } \lambda < \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^\pm} f'(x) = \mp\infty, \qquad \text{se } \lambda > \sqrt{2}$$

CODICE=813093

e pertanto la funzione risulta non derivabile per $x = \sqrt{2}$ in quanto si ha una cuspide (a meno che $\lambda = \sqrt{2}$, dato che in tal caso il punto non fa parte del dominio).
Nel caso $0 < \lambda < \sqrt{2}$ studiando il segno della derivata otteniamo

$$\text{se } x > \sqrt{2} \text{ allora } f'(x) > 0 \;\leftrightarrow\; 2 - \lambda x > 0 \leftrightarrow\; x < \frac{2}{\lambda},$$

$$\text{se } x < \sqrt{2} \text{ allora } f'(x) > 0 \;\leftrightarrow\; \lambda x - 2 > 0 \leftrightarrow\; x > \frac{2}{\lambda}.$$

Dato che $\lambda < \sqrt{2}$ implica $\frac{2}{\lambda} > \sqrt{2}$ la funzione risulta decrescente negli intervalli $(0, \lambda)$, $(\lambda, \sqrt{2})$ e $(\frac{2}{\lambda}, +\infty)$ e crescente in $(\sqrt{2}, \frac{2}{\lambda})$. Si ha pertanto un massimo relativo per $x_0 = \frac{2}{\lambda}$ e il grafico approssimativo è il seguente

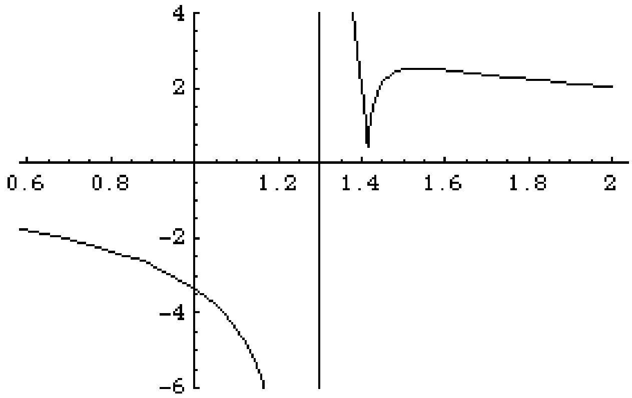


Figura 1: Andamento del grafico di f per $0 < \lambda < \sqrt{2}$.xs

Per $\lambda > \sqrt{2}$ si ha invece con calcoli simili che la funzione è crescente in $(\frac{2}{\lambda}, \sqrt{2})$ e decrescente in $(0, \frac{2}{\lambda})$, $(\sqrt{2}, \lambda)$ e $(\lambda, +\infty)$; il grafico approssimativo è il seguente

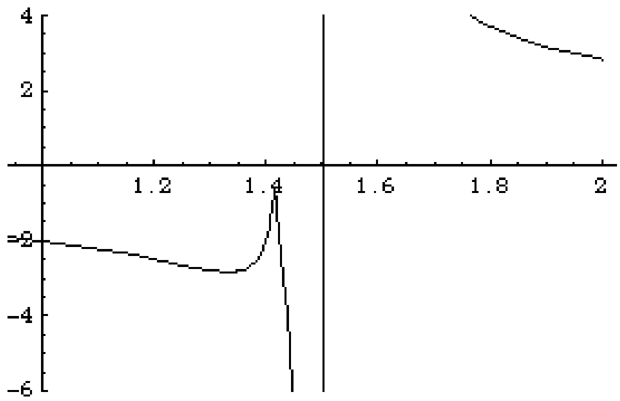


Figura 2: Andamento del grafico di f per $\lambda > \sqrt{2}$.

Nel caso $\lambda = \sqrt{2}$ la situazione è più semplice dato che la funzione risulta uguale a

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}} & x \geq \sqrt{2}, \\[2ex] -\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-x}} & 0 < x < \sqrt{2}, \end{cases}$$

CODICE=813093

e quindi con calcoli espliciti della derivata prima risulta decrescente sia in $(0, \sqrt{2})$ che in $(\sqrt{2}, +\infty)$.

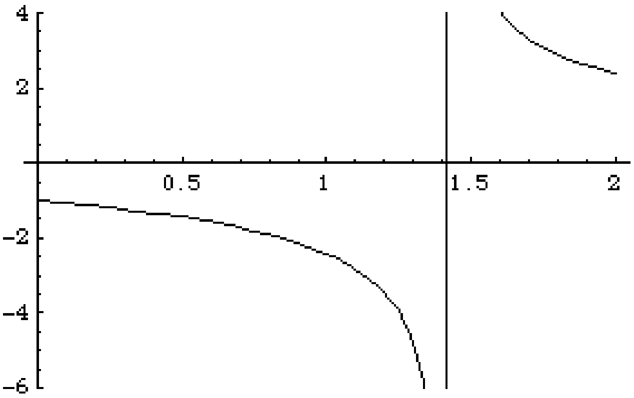


Figura 3: Andamento del grafico di f per $\lambda = \sqrt{2}$.

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) + y(t) = \sin(t)\, \mathrm{e}^{-t/2} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione. La soluzione del problema omogeneo associato $Y''(t) + Y'(t) + Y(t) = 0$ risulta essere

$$Y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + c_2 \mathrm{e}^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right),$$

visto che le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ sono $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}2$.

Non c'è pertanto risonanza e quindi la soluzione del problema non omogeneo va cercata della forma $y_f(t) = A \sin(t)\, \mathrm{e}^{-t/2} + B \cos(t)\, \mathrm{e}^{-t/2}$. Sostituendo otteniamo $A = -4$ e $B = 0$, quindi l'integrale generale risulta

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + c_2 \mathrm{e}^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - 4 \sin(t)\, \mathrm{e}^{-t/2}.$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo alla fine come soluzione

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + 3\sqrt{3}\mathrm{e}^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - 4\mathrm{e}^{-t/2} \sin(t).$$

3. Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{\log(x)(x^3 + x^2 + x + 1)}\, dx.$$

Soluzione. L'integrando in questione è strettamente positivo per $x \geq \mathrm{e}$, quindi possiamo usare i teoremi del confronto e confronto asintotico.

CODICE=813093

Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+2x+3}{\log(x)(x^3+x^2+x+1)}}{\frac{x^2}{\log(x)x^3}}=1$$

e quindi

$$\frac{x^2+2x+3}{\log(x)(x^3+x^2+x+1)}\sim\frac{x^2}{\log(x)x^3}=\frac{1}{x\log(x)}.$$

L'integrale della funzione $\frac{1}{x\log(x)}$ diverge perchè da un calcolo diretto

$$\int_{\mathrm{e}}^{b}\frac{1}{x\log(x)}=\log(\log(x))\Big|_{\mathrm{e}}^{b}\to+\infty\quad\text{per } b\to+\infty.$$

Pertanto anche l'integrale di partenza risulta divergente.

4. Esistono funzioni $f:[0,1]\to\mathbb{R}^+$, integrabili secondo Riemann, tali che

$$\int_0^x f(t)\,dt=0\qquad\forall\,x\in[0,1]$$

e non identicamente nulle?
Soluzione. Basta considerare la funzione

$$f(t)=\begin{cases}0 & t\neq\dfrac{1}{2}\\[2ex] 1 & t=\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

e con verifica diretta (tramite la definizione di integrale) si vede che il suo integrale tra 0 e x, con x qualsiasi è sempre identicamente nullo. In realtà possiamo prendere una funzione zero, eccetto che in un numero finito di punti. (Sarebbe molto più complesso da verificare, ma esistono funzioni non negative, non nulle su tutti i razionali e il cui integrale soddisfa la stessa proprietà).

CODICE=813093

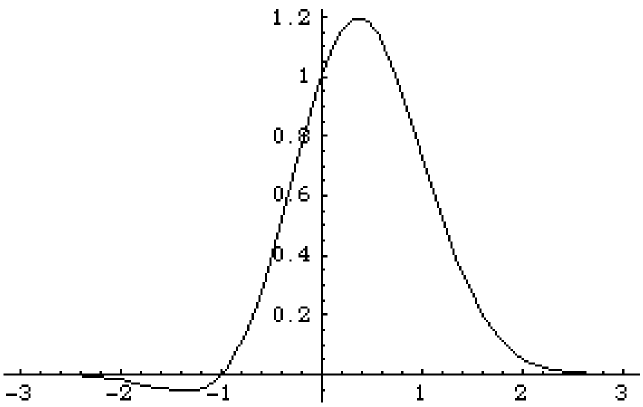


Figura 1: Andamento del grafico di $f(x)$.

e quindi l'integrale generale è dato da

$$y(t) = a\,\mathrm{e}^{3t} + b\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{10}\sin t - \frac{1}{5}\cos t.$$

Per avere una soluzione limitata per $t > 0$ bisogna imporre che $a = 0$. Imponendo poi la condizione $y(0) = 0$ si trova $a + b - \frac{1}{5} = 0$ e quindi $b = \frac{1}{5}$. La soluzione risulta pertanto essere

$$y(t) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{10}\sin t - \frac{1}{5}\cos t$$

e quindi

$$y'(t)_{|t=0} = (-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{5}\sin t)_{|t=0} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{10} = -\frac{3}{10}.$$

3. Studiare, al variare del parametro reale $\alpha > -2$, la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)^{\alpha^2-2}}\,dx$$

Soluzione: La funzione integranda è non-negativa per $x \geq 1$ e continua su tutta la semiretta $[1, +\infty[$. Risulta pertanto integrabile su ogni intervallo della forma $[1, b]$, con $b \geq 1$. Essendo non-negativa possiamo usare i criteri per il confronto asintotico. Si ha

$$\frac{1}{x^\alpha(1+x)^{\alpha^2-2}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^\alpha x^{\alpha^2-2}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{\alpha^2+\alpha-2}}\right),$$

e quindi la funzione risulta integrabile in senso generalizzato se e solo se

$$\alpha^2 + \alpha - 2 > 1.$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado otteniamo

$$\alpha^2 + \alpha - 2 > 1 \iff \alpha \in]-\infty, \frac{1}{2}(-1-\sqrt{13})[\cup]\frac{1}{2}(-1+\sqrt{13}), +\infty[.$$

Dato che ci interessano solo i valori di $\alpha > -2$, osserviamo ora che $3 = \sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16} = 4$, quindi

$$-\frac{5}{2} = \frac{1}{2}(-1-4) < \frac{1}{2}(-1-\sqrt{13}) < \frac{1}{2}(-1-3) = -2,$$

e pertanto una delle radici dell'equazione di secondo grado non appartiene al dominio richiesto. Si conclude quindi che l'integrale converge se

$$\alpha^2 + \alpha - 2 > 1 \quad \text{e} \quad \alpha > -2 \iff \alpha \in]\frac{1}{2}(-1+\sqrt{13}), +\infty[.$$

CODICE=008460

4. Calcolare
$$\int_0^2 f(x)\,dx$$
dove la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ è definita da
$$f(x) = \big\{\text{numero di volte in cui la funzione } \phi(t) = \mathrm{e}^t - \mathrm{e} \text{ cambia segno per } t \text{ minori di } x\big\}$$

Soluzione: La funzione $\phi(t)$ si annulla per $t = 1$, ed è strettamente crescente dato che $\phi'(t) = \mathrm{e}^t > 0$. Pertanto si ha un cambio di segno solo per $t = 1$. Quindi $f(x) = 0$ se $x < 1$, dato che non ci sono cambi di segno di $\phi(t)$ per $t < x \leq 1$. Dato che c'è un unico cambio di segno $f(x) = 1$ per $1 < x \leq 2$. Otteniamo quindi
$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 1\,dx = 1.$$

CODICE=008460

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

1 luglio 2016

PARTE B

1. Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \log|x+\lambda| - \lambda$$

Calcolare per $\lambda = 1$ e $x > 0$, l'area della porzione di piano finita compresa tra l'asse delle x e il grafico della f.

Soluzione. Il dominio della funzione è $D = \{x \neq -\lambda\}$ e in D la funzione risulta continua e derivabile (essendo composizione di funzioni derivabili per ogni $x \neq -\lambda$, dove la funzione non è definita). Inoltre

$$f(x) = \begin{cases} \log(x+\lambda) - \lambda & \text{se } x > -\lambda \\ \\ \log(-x-\lambda) - \lambda & \text{se } x < -\lambda \end{cases}$$

e

$$\lim_{x \to -\lambda} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calcolando la derivata prima si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x+\lambda}$$

che è positiva per $x > -\lambda$ e inoltre

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+\lambda)^2} < 0,$$

quindi la funzione è concava nelle due semirette $\{x < -\lambda\}$ e in $\{x > -\lambda\}$, ma si osservi che non è globalmente concava. Il grafico approssimativo è quindi il seguente

La regione di piano in questione è delimitata dai punti $x_1 = 0$ dal punto di intersezione con l'asse delle x che è $x_2 = \mathrm{e} - 1$ (in tale intervallo la funzione f è negativa e quindi

$$A = \int_0^{\mathrm{e}-1} |\log|x+1| - 1|\, dx = -\int_0^{\mathrm{e}-1} (\log((x)+1) - 1)\, dx = \mathrm{e} - 2$$

CODICE=795200

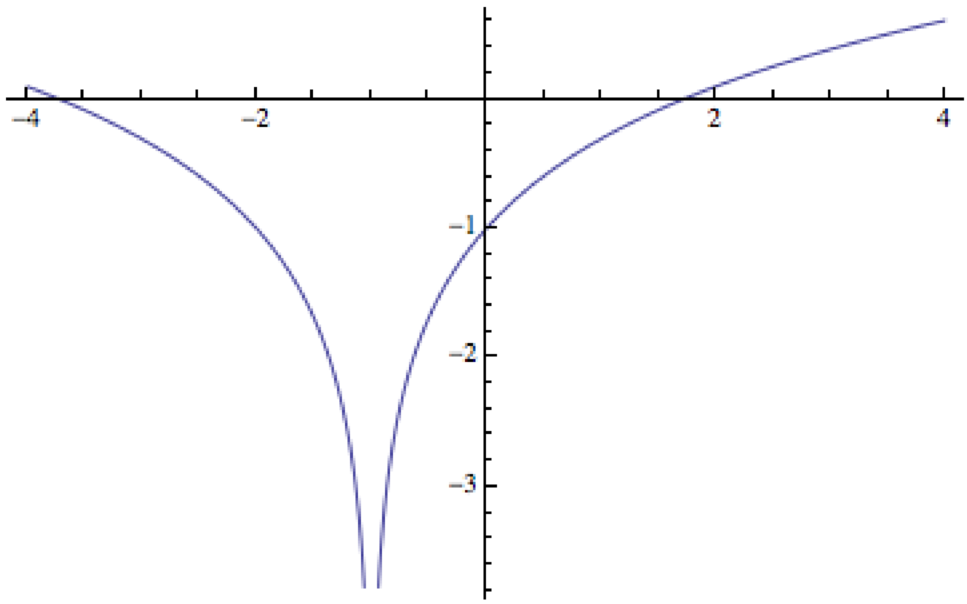


Figura 1: $f(x)$ per $\lambda = 1$

2. Trovare le soluzioni di
$$y''(x) - y(x) = -x.$$

   Esistono soluzioni limitate su tutto $\mathbb{R}$?

   Esistono soluzioni con un asintoto obliquo $\phi(x) = x$ per $x \to +\infty$?

   Esistono soluzioni limitate inferiormente su tutto $\mathbb{R}$?

   Soluzione. Troviamo intanto le soluzioni di $y'' - y = 0$. L'equazione associata ha la forma $\lambda^2 - 1 = 0$, quindi $\lambda = \pm 1$. Lo spazio delle soluzioni dell'omogenea si scrive come
$$y_0(x) = Ae^x + Be^{-x}, \text{ con } A, B \in \mathbb{R}.$$

   Si vede immediatamente che una soluzione particolare è $y_f(x) = x$, quindi la soluzione generale dell'equazione data è
$$y(x) = Ae^x + Be^{-x} + x, \text{ con } A, B \in \mathbb{R}.$$

   Vediamo che
$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } A \geq 0 \\ -\infty & \text{se } A < 0 \end{cases}$$
   quindi non esistono soluzioni limitate su tutto $\mathbb{R}$.

   Perchè la soluzione abbia un asintoto obliquo a destra, basta scegliere $A = 0$, infatti $\lim_{x\to\infty} Be^{-x} = 0$ per ogni $B \in \mathbb{R}$.

   Per trovare se esistano soluzioni limitate inferiormente vediamo che
$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } B > 0 \\ -\infty & \text{se } B \leq 0. \end{cases}$$
   Allora se $A \geq 0$ e $B > 0$ abbiamo $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = +\infty$. Questo, unito allla continuità di $y(x)$ ci dice che scegliendo $A \geq 0$ e $B > 0$ otteniamo soluzioni limitate.

CODICE=795200

3. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)|\log(x)-1|^n$$

Soluzione.

Vediamo immediatamente che per $x = 1$ la serie diventa identicamente nulla, quindi converge (a zero).

Per $x \neq 1$ usiamo il criterio della radice, ottenendo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n(x-1)|\log(x)-1|^n} = |\log(x)-1|$$

Quindi se $|\log(x)-1| < 1$ ovvero se

$$1 < x < e^2$$

la serie converge, mentre se

$$x > e^2 \text{ oppure } x < 1$$

la serie diverge.

Sappiamo già che per $x = 1$ la serie converge, mentre per $x = e^2$ la serie diventa

$$\sum_n n(e^2 - 1) = +\infty.$$

Concludendo, la serie converge se e solo se $1 \le x < e^2$.

4. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^x \sin^2(t)\,dt}{x^2} & x > 0 \\ a \quad x = 0 \\ x^2 + bx & x < 0 \end{cases}$$

Si determini per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione è continua e per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione è derivabile.

Calcolare, se esiste, la retta tangente al grafico nel punto $x_0 = \pi$, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$,

Soluzione. La funzione è sicuramente continua e derivabile se $x \neq 0$ ed è rilevante studiare il comportamento solo in 0. Abbiamo che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

quindi intanto per avere la continuità da sinistra condizione necessaria è $a = 0$. La funzione è continua se

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

e tale limite è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Usando l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{2x} = 0,$$

quindi f è continua se $a = 0$. Per la derivabilità (che ha senso studiare solo se $a = 0$) la derivata sinistra in zero vale

$$f'_-(0) = b.$$

CODICE=795200

La derivata destra è uguale a $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \sin^2(t)\,dt}{x^3}$ che di nuovo è una forma indeterminata risolvibile con l'Hopital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{3x^2} = \frac{1}{3},$$

quindi la funzione è derivabile se $b = \frac{1}{3}$.
La retta tangente nel punto $x_0 = \pi$ vale

$$\phi(x) = f(\pi) + \phi'(\pi)(x-\pi)$$

calcoliamo $f(\pi)$

$$f(\pi) = \frac{\int_0^\pi \sin^2(t)\,dt}{\pi^2} = \frac{1}{2\pi},$$

mentre

$$f'(\pi) = \frac{\pi^2\sin^2(\pi) - 2\pi\int_0^\pi \sin^2(t)\,dt}{\pi^4} = -\frac{1}{\pi^2}.$$

dove abbiamo usato che $\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(x - \cos(x)\sin(x))$.

CODICE=795200

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

5 febbraio 2016

PARTE B

1. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1 - \log(x^2)}{(\log(x))^2}.$$

Soluzione: L'insieme più grande dove può essere definita la funzione è $\{x > 0\} \backslash \{1\}$ e in tale insieme si ha

$$f(x) = \frac{1 - 2\log(x)}{(\log(x))^2} \qquad x \in D =]0, +\infty[\backslash\{1\}.$$

Agli estremi del dominio si hanno i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

La funzione risulta derivabile in D e si ha

$$f'(x) = \frac{2(\log(x) - 1)}{x\log^3(x)}$$

Pertanto

$$f' > 0 \ \text{ se e solo se } \ x \in]0, 1[\cup]\mathrm{e}, +\infty[$$

e la funzione risulta crescente in $]0, 1[$ e in $]\mathrm{e}, +\infty[$ e decrescente in $]1, \mathrm{e}[$ e nel punto $x = \mathrm{e}$ si ha un punto di minimo relativo con $f(\mathrm{e}) = -1$. Il valore -1 risulta anche essere il minimo assoluto della funzione. La derivata seconda vale

$$f''(x) = -\frac{2\left(\log^2(x) + \log(x) - 3\right)}{x^2\log^4(x)}$$

e per trovare gli intervalli di convessità risolviamo, ponendo $y = \log(x)$, l'equazione biquadratica

$$y^2 + y - 3 > 0$$

da cui si ha

$$f''(x) > 0 \leftrightarrow \log(x) < \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \vee \log(x) > \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \leftrightarrow x < \mathrm{e}^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}} \vee x > \mathrm{e}^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}}$$

da cui si ha che f è convessa in $[\mathrm{e}^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}}, 1[\cup]\mathrm{e}^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}}, +\infty[$. Osserviamo infatti che dato che $-1 - \sqrt{13} < 0$ il primo cambio di convessità si ha nell'intervallo $]0, 1[$, mentre dato che $-1 + \sqrt{13} > 2 > 0$ il secondo si ha per $x > \mathrm{e} > 1$.

CODICE=507670

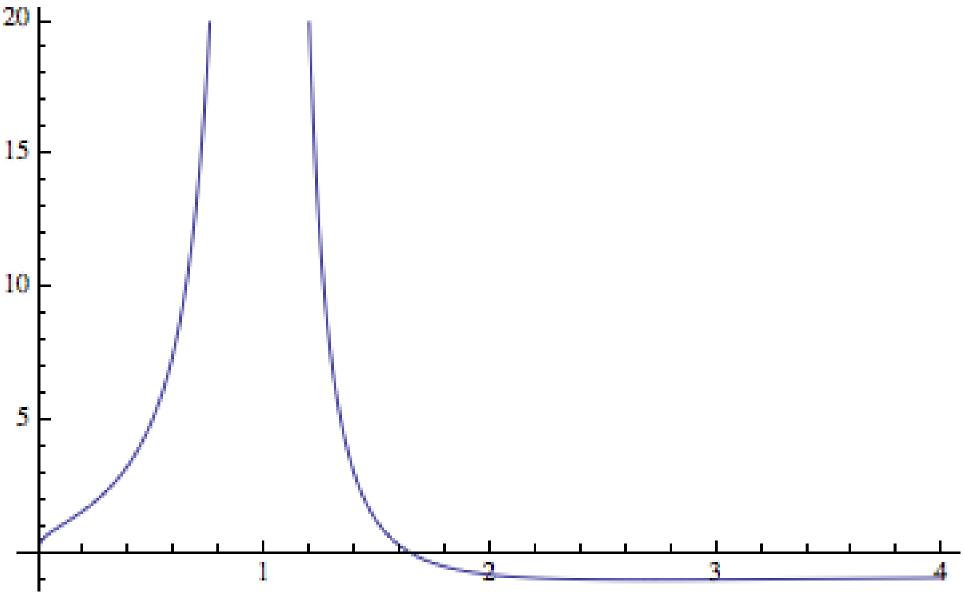


Figura 1: Grafico di $f(x)$

2. Studiare per $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^3} x^n.$$

Soluzione: Utilizziamo il criterio della radice per le serie di potenze:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1+n^2}{n^3}\right|} = 1$$

Quindi serie converge assolutamente per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$.
In $x = 1$ abbiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^3}$$

che non converge perché si comporta asintoticamente come la serie armonica.
In $x = -1$ abbiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n^2}{n^3}.$$

Questa serie converge perché a segno alterno e con termini decrescenti.

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + 4y(x) = \sin(\alpha x)$$

con $\alpha \geq 0$ reale.

(a) Calcolare l'integrale generale.

(b) Esistono α per cui la soluzione non è limitata inferiormente?

(c) Nei casi $\alpha = 2$ e $\alpha = 4$ risolvere l'equazione con le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 1$

Soluzione:

CODICE=507670

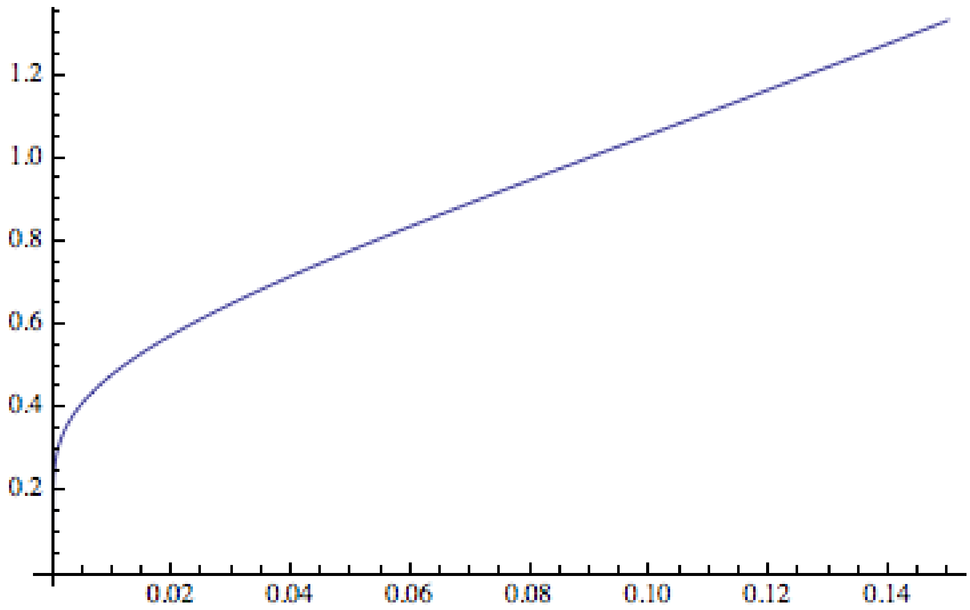


Figura 2: Grafico di $f(x)$ vicino al primo punto di flesso $x = e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}} \sim 0.0999809$

(a) L'equazione associata all'omogenea è $\lambda^2 + 4 = 0$, con soluzione $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. La soluzione dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Per $\alpha = 0$, l'equazione si riduce ad un'omogenea, quindi la soluzione generale è

$$y = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Per $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 2$, siamo nel caso in cui non c'è risonanza. La soluzione particolare $y_1(x)$ sarà della forma

$$y_1(x) = a\cos(\alpha x) + b\sin(\alpha x)$$

quindi

$$y_1''(x) = -a\alpha^2\cos(\alpha x) - \alpha^2 b\sin(\alpha x)$$

Vogliamo che

$$y_1''(x) + 4y_1(x) = \sin(\alpha x)$$

quindi $a(4-\alpha^2) = 0$, $b(4-\alpha^2) = 1$ quindi una soluzione particolare ha la forma

$$y_1(x) = \frac{1}{4-\alpha^2}\sin(\alpha x)$$

La soluzione generale è

$$y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{1}{4-\alpha^2}\sin(\alpha x)$$

Nel caso $\alpha = 2$ dobbiamo cercare una soluzione particolare della forma

$$y_1(x) = ax\sin(2x) + bx\cos(2x)$$

abbiamo che

$$y_1''(x) = 4a\cos(2x) + 4ax\sin(2x) - 4b\sin(2x) - 4bx\cos(2x)$$

CODICE=507670

Vogliamo che

$$y_1''(x) + 4y_1(x) = \sin(2x)$$

da cui ricaviamo che $a = 0$ e $b = -1/4$. Quindi la soluzione generale dell'equazione ha la forma

$$y_f(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) - \frac{1}{4}x\cos(2x).$$

(b) Tra queste soluzioni l'unica che non è limitata inferiormente è quella che si ottiene nel caso $\alpha = 2$, che ha il termine $x\cos(2x)$ che non è limitato né inferiormente né superiormente.

(c) Per $\alpha = 2$ la soluzione generale è stata determinata nel punto (a). Dalle condizioni iniziali otteniamo $A = 1$, imponendo che $y(0) = 1$, e $B = 5/8$ imponendo che $y'(0) = 1$. La soluzione del problema di Cauchy è data da

$$y_f(x) = \cos(2x) + \frac{5}{8}\sin(2x) - \frac{1}{4}x\cos(2x).$$

Per $\alpha = 4$ la soluzione generale è

$$y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) - \frac{1}{12}\sin(4x)$$

e per avere la soluzione cercata dobbiamo determinare A, B. Abbiamo che $A = 1$ imponendo che $y(0) = 1$ e $B = \frac{2}{3}$ imponendo che $y'(0) = 1$. La soluzione è quindi

$$y(x) = \cos(2x) + \frac{2}{3}\sin(2x) - \frac{1}{12}\sin(4x).$$

4. Dimostrare che data $f \in C([a,b])$

(a) la funzione $F(x) = \max\{f(x), 0\}$ è continua in $[a,b]$;

(b) data $g \in C([a,b])$ la funzione $G(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ è continua in $[a,b]$;

(c) può accadere che g non sia continua in tutto $[a,b]$ ma $G(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ sia ancora continua in $[a,b]$?

Soluzione. a) Osserviamo che dato $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\frac{x + |x|}{2} = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

quindi $\frac{x+|x|}{2} = \max\{x, 0\}$. Pertanto

$$\max\{f(x), 0\} = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}$$

che essendo composizione e somma di funzioni continue è continua.

b) Con lo stesso ragionamento si ha che

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) - g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} + g(x)$$

e quindi essendo composizione di funzioni continue risulta continua.

c) Si, può accadere. Sia per esempio $f(x) = 0$ e sia g una funzione tale che $g(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Anche se g non è continua in qualche punto si ha che $\max\{f(x), g(x)\} = 0$ che è continua.

CODICE=507670

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

9 settembre 2016

PARTE B

1. Studiare al variare di $\lambda \geq 0$ la funzione

$$f(x) = \cos(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Soluzione: La funzione f risulta definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e inoltre, se $\lambda > 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \cos(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = N.E. \qquad \lim_{x\to+\infty} \cos(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0.$$

(Nel caso $\lambda = 0$ la funzione da studiare è il coseno, il cui andamento è ben noto.) Osserviamo che per $x \to -\infty$ il limite non esite perchè la funzione compie oscillazioni sembre più grandi, infatti

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} \cos(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = \inf_{x<0} \cos(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = -\infty \quad \text{e} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} \cos(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = \sup_{x<0} \cos(x)\,\mathrm{e}^{-\lambda x} = +\infty.$$

La funzione f si annulla dove si annulla il coseno $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ e ha lo stesso segno del coseno, dato che $\mathrm{e}^{-\lambda x} > 0$, per ogni $\lambda \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Lo studio della derivata porta a

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda\cos(x) + \sin(x)$$

che si annulla quando $\tan(x) = -\lambda$, quindi si ha uno zero in ogni intervallo della forma $[\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi]$

2. Data l'equazione

$$y'(x) = y(x)(x^2 - 2x).$$

   (a) Si trovi la soluzione con dato iniziale $y(0) = 1$

   (b) Data la soluzione con $y(0) = \pi$ si calcoli il limite $\lim_{x\to\infty} y(x)$

   (c) Si trovi la soluzione con $y(2) = 0$.

Soluzione: (a) Procediamo per separazione di variabili. Si ha

$$\int \frac{dy}{y} = \int (x^2 - 2x)dx$$

quindi $\log|y(x)| = \frac{x^3}{3} - x^2 + C$, dove C va scelta a seconda del dato iniziale. Detto x_0 l'istante iniziale, si noti che, visto che $y(x) \equiv 0$ è una soluzione, se il dato iniziale $y(x_0)$ è positivo,

CODICE=772643

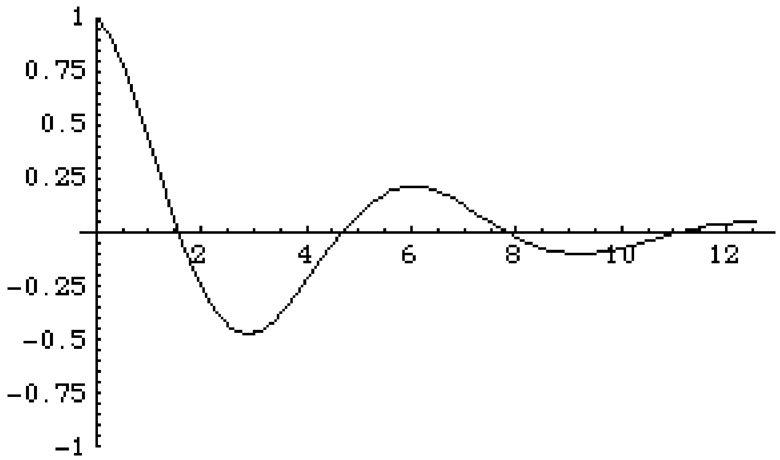


Figura 1: Grafico di f per $\lambda = 1/4$, tra 0 e 4π.

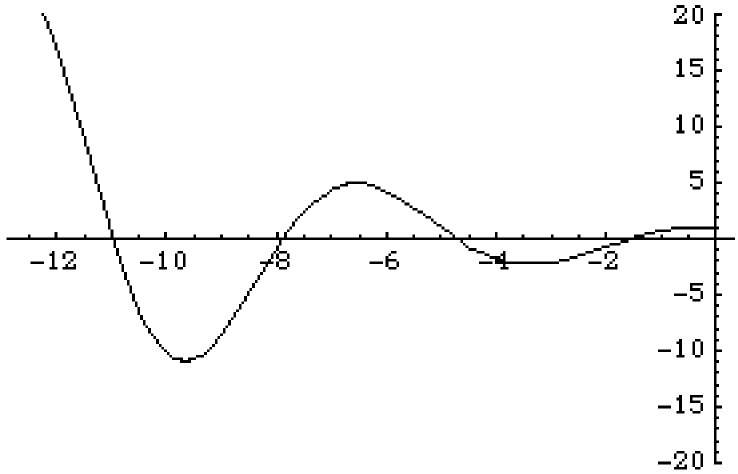


Figura 2: Grafico di f per $\lambda = 1/4$, tra -4π e 0.

CODICE=772643

allora $y(x)$ è positivo per ogni x (analogamente se $y(x_0) < 0$ allora $y(x) < 0$). Quindi, a seconda del dato iniziale, conosciamo il segno di $y(x)$, e possiamo gestire il valore assoluto. In questo caso il dato iniziale è $y(0) = 1 > 0$, quindi abbiamo $\log(y(x)) = \frac{x^3}{3} - x^2 + C$ ovvero

$$y(x) = e^{\frac{x^3}{3} - x^2 + C}$$

Per avere che $y(0) = 1$ basta scegliere $C = 0$.

(b) Si ripete la procedura di sopra; anche in questo caso $y(0) = \pi > 0$ quindi avremo $\log(y(x)) = \frac{x^3}{3} - x^2 + C$ ovvero

$$y(x) = e^{\frac{x^3}{3} - x^2 + C}$$

Con C scelta per avere $y(0) = \pi$. Qualsiasi sia il valore di C avremmo

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = +\infty.$$

(c) Si vede facilmente che in questo caso la soluzione richiesta è la soluzione costante $y(x) \equiv 0$.

3. Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{(\log|\lambda|)^n}(x-1)^n$$

Soluzione: Osserviamo intanto che la serie può essere scritta solo per $\lambda \neq -1, 0, 1$ Utilizziamo in criterio della radice per le serie di potenze:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{(\log|\lambda|)^n}(x-1)^n \right|} = \left| \frac{x-1}{\log|\lambda|} \right|$$

Quindi serie converge assolutamente per $\left| \frac{x-1}{\log|\lambda|} \right| < 1$ ovvero per $1 - |\log|\lambda|| < x < 1 + |\log|\lambda||$ e non converge per $\left| \frac{x-1}{\log|\lambda|} \right| > 1$.

Osserviamo anche che la serie poteva essere riscritta come una progressione geometrica

$$(\lambda^2 + \lambda + 1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{\log|\lambda|} \right)^n$$

da cui si dimostra la non convergenza agli estremi, cioè quando $\left| \frac{x-1}{\log|\lambda|} \right| = 1$.

4. Sia $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ continua. Fornire un esempio di f tale che

   (a) f ha sia il massimo che il minimo;

   (b) f ha massimo, ma non minimo;

   (c) f ha minimo ma non massimo

   Esiste una f soddisfacente a tali ipotesi che non ha né minimo né massimo?

Soluzione: (a) Basta scegliere una funzione che ha sia il massimo che il minimo nell'intervallo $]0,1]$. Esempi possono essere $f(x) = \sin(2\pi x)$ o $f(x) = (x - 1/2)^2$ o semplicemente $f(x)$ costante.

(b) Qui possiamo scegliere una funzione il cui minimo cadrebbe in $x = 0$ o che sia illimitata inferiormente, ad esempio $f(x) = 2x$ o $f(x) = \log(x)$.

(c) Si possono prendere gli esempi di sopra e cambiarne il segno, o trovarne di nuovi, come $f(x) = 1/x$.

Esistono anche funzioni che non hanno né minimo né massimo, ad esempio

$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x},$$

che non è limitata né inferiormente né superiormente in ogni intorno dell'origine.

CODICE=772643

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

10 giugno 2016

PARTE B

1. Si studi la funzione $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x+1|$ e se ne disegni un andamento approssimato. Calcolare inoltre l'area della regione piana delimitata dal grafico della funzione f, dall'asse delle x e dalla retta di equazione $2x - 3 = 0$.

   Soluzione. La funzione non è definita per $x = -1$. Si può esplicitare il valore assoluto della funzione ottenendo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + \ln(x+1) & \text{per } x > -1 \\ \frac{x^2}{2} + \ln(-x-1) & \text{per } x < -1 \end{cases}$$

   Abbiamo che $f(0) = 0$. Poichè $\ln(-x-1)$ è positivo per $x < -2$ e tende a $-\infty$ per $x \to -1^-$, si può concludere che la funzione $f(x)$ ha almeno un altro zero per $x \in (-2, -1)$. La funzione inoltre è sicuramente positiva per $x > 0$ e $x < -2$.

   Ovviamente valgono

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty;$$
$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty.$$

   La derivata della funzione è

$$f'(x) = x + \frac{1}{x+1}$$

   Se vogliamo studiare il segno basta vedere che $f'(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ e considerare che il numeratore è sempre positivo.

   La derivata è sempre positiva per $x > -1$ e negativa per $x < -1$. Possiamo concludere quindi che la funzione ha solo i due zeri trovati precedentemente.

   La derivata seconda vale

$$f''(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

   quindi la derivata seconda è positiva per $x < -2$ e per $x > 0$ negativa per $-2 < x < -1$ e $-1 < x < 0$ e la funzione presenta due flessi (obliqui) in $x = -2$ e $x = 0$.

   Per il calcolo dell'integrale, basta calcolare l'area sottesa dal grafico di $f(x)$ tra $x = 0$ e $x = 3/2$, ovvero

$$I = \int_0^{3/2} \frac{x^2}{2} + \ln(x+1)dx.$$

CODICE=550032

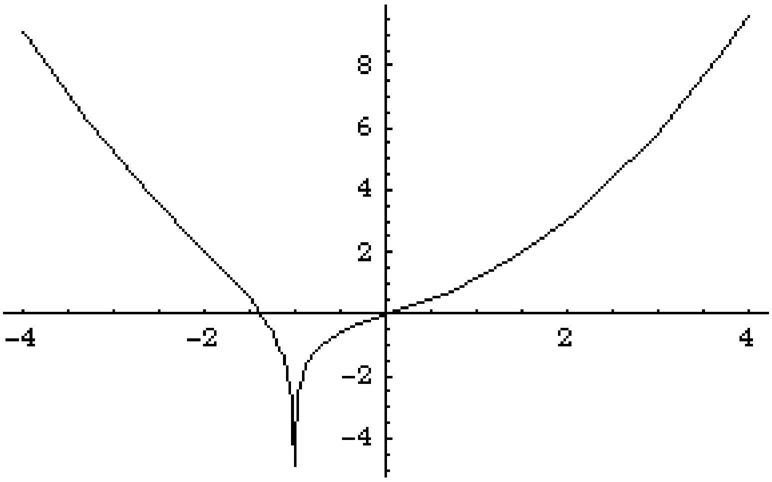


Figura 1: Grafico di $f(x)$

Immediatamente

$$\int_0^{3/2} \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{3/2} = \frac{9}{16}.$$

Per il secondo termine usiamo l'integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int_0^{3/2} 1 \cdot \ln(x+1) dx &= [x\ln(x+1)]_0^{3/2} - \int_0^{3/2} \frac{x}{x+1} dx \\ &= [x\ln(x+1)]_0^{3/2} - \int_0^{3/2} 1 - \frac{1}{x+1} dx \\ &= [(x+1)\ln(x+1) - x]_0^{3/2} = \frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}\end{aligned}$$

quindi $I = \frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{15}{16}$.

2. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{y(t)\log(y(t))}{t^2}, \\ y(-1) = \mathrm{e}, \end{cases}$$

e disegnarne il grafico.

Quanto vale $y(1)$?

Soluzione. Seprando le variabili si ottiene

$$\int \frac{dy}{y\log(y)} = \int \frac{dt}{t^2}$$

da cui

$$\log(\log(y(t)) = -\frac{1}{t} + c.$$

Tramite l'esponenziale si ottiene $y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{c-\frac{1}{t}}}$ e imponendo la condizione iniziale si ha pertanto

$$y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}-1}}.$$

CODICE=550032

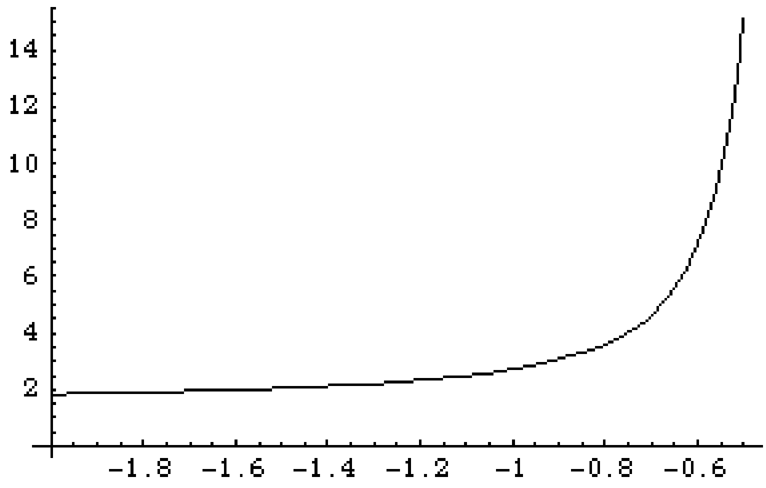


Figura 2: Grafico di $y(t)$

La soluzione deve essere una funzione di classe C^1 in un intervallo aperto contenente $t_0 = -1$ e risulta pertanto definita solo per $t < 0$, quindi $y(1)$ non esiste.

3. Studiare la convergenza e eventualmente calcolare

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x(x^2+1)}\,dx$$

Soluzione. Converge perchè $\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \mathcal{O}(x^{-2})$. Inoltre, tramite la scomposizione in fratti semplici $\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+1}$ si ottiene

$$\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}\,dx = -\frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) + \log(x) + \arctan(x)$$

da cui

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{4}(\pi + \log(4))$$

4. Sia $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$ una funzione strettamente convessa, con un minimo in $x = 0$ di valore $f(0) = -1$.

   i) Si può affermare che $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$?
   ii) La conclusione precedente vale se valgono le stesse ipotesi, ma $f(x)$ è solo convessa (e non strettamente convessa)?
   iii) E se $f(x)$ è strettamente convessa ma non ha punti di minimo?

Soluzione. Se la funzione ha un minimo in $x = 0$ allora $f'(x) = 0$ per il teorema di Fermat, e, poichè f è strettamente convessa, allora $f'(x) > 0$ per $x > 0$. Quindi $f(x)$ è crescente e quindi esiste $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, per $L \in \mathbb{R}$ avremmo un assurdo, perchè la funzione dovrebbe avere un asintoto orizzontale, e quindi non potrebbe essere strettamente convessa.

Per una dimostrazione più formale, basta considerare un punto $x_0 > 0$. Sicuramente $f'(x_0) > 0$. La retta tangente al grafico di $f(x)$ in x_0 ha l'equazione $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ e, per convessità, il grafico della funzione $f(x)$ è tutto sopra questa retta, quindi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \geq \lim_{x\to\infty} f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = +\infty.$$

CODICE=550032

Se rimuoviamo l'ipotesi della stretta convessità possiamo solo concludere che il limite esiste, ma non che vale $+\infty$. Si prenda ad esempio la funzione $f(x) \equiv -1$.

Anche se rimuoviamo l'ipotesi dell'esistenza del minimo il risultato precedente non vale, si prenda ad esempio $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

CODICE=550032

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

18 gennaio 2016

PARTE B

1. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = |\log(x)|^{\log(x)}.$$

Soluzione: Per poter definire il logaritmo serve che sia $x > 0$. Inoltre dato che il valore assoluto del logaritmo entra come base di un esponenziale, serve anche che $x \neq 1$ e si può scrivere

$$|\log(x)|^{\log(x)} = \mathrm{e}^{\log(x)\log|\log(x)|} \qquad x \in (0,1) \cup (1,+\infty).$$

I limiti agli estremi del dominio sono pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} |\log(x)|^{\log(x)} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\log(x)\log|\log(x)|} = 0,$$

dato che non è una forma indeterminata, visto che l'argomento dell'esponenziale tende a $-\infty$. Allo stesso modo si vede che

$$\lim_{x\to +\infty} |\log(x)|^{\log(x)} = \lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{\log(x)\log|\log(x)|} = +\infty.$$

Il limite $\lim_{x\to 1^-} |\log(x)|^{\log(x)} = \lim_{x\to 1^-} \mathrm{e}^{\log(x)\log|\log(x)|}$ risulta invece una forma indeterminata. Effettuando il cambio di variabile $y = -\log(x)$ il limite diventa

$$\lim_{x\to 1^-} \mathrm{e}^{\log(x)\log|\log(x)|} = \lim_{y\to 0^+} \mathrm{e}^{-y\log(y)} = 1,$$

e con calcoli simili si ha anche

$$\lim_{x\to 1^+} \mathrm{e}^{\log(x)\log|\log(x)|} = 1.$$

Possiamo anche scrivere che

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\log(x)\log(-\log(x))} & 0 < x < 1 \\ \mathrm{e}^{\log(x)\log(\log(x))} & x > 1 \end{cases}$$

e pertanto

$$f'(x) = \begin{cases} (-\log(x))^{\log(x)}\dfrac{1}{x}\Big(1 + \log(-\log(x))\Big) & 0 < x < 1, \\ (\log(x))^{\log(x)}\dfrac{1}{x}\Big(1 + \log(\log(x))\Big) & x > 1. \end{cases}$$

CODICE=897229

Nell'intervallo $(0,1)$ si ha

$$f'(x) > 0 \iff 1 + \log(-\log(x)) > 0 \iff 0 < x < \mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}.$$

Quindi f è crescente in $(0, \mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}})$, decrescente in $(\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}, 1)$ e ha un punto di massimo relativo per $x = \mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}$.

Con calcoli simili nella semiretta $(1, +\infty)$ si ha che f è decrescente in $(1, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}})$, crescente in $(\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}, +\infty)$ e ha un punto di minimo relativo per $x = \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$.

Osserviamo inoltre che nonostante la funzione non sia definita per $x = 1$ potrebbe essere prolungata con continuità ponendo $f(1) = 1$ in tale punto la funzione prolungata non risulterebbe derivabile dato che

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty.$$

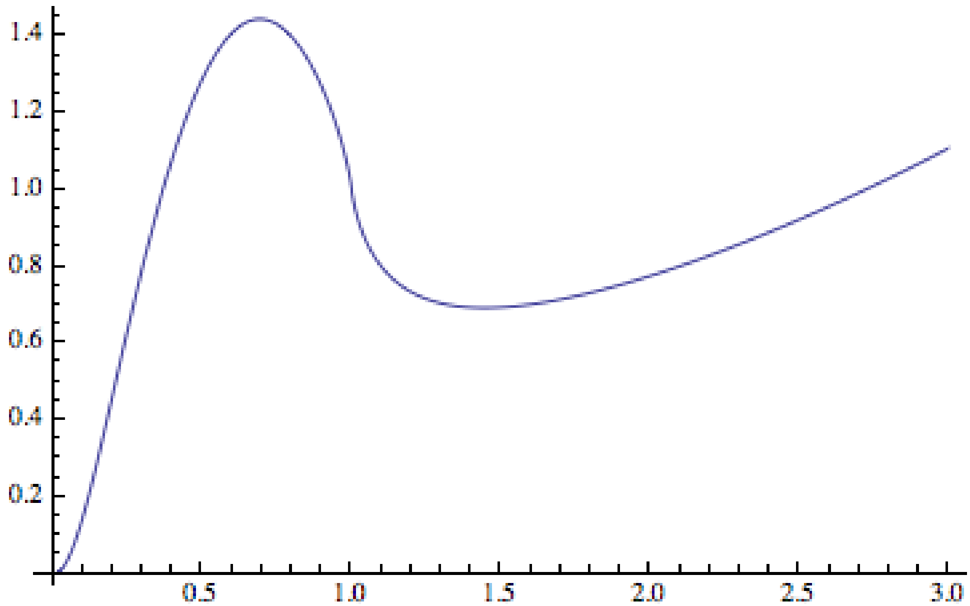


Figura 1: grafico approssimativo di $|\log(x)|^{\log(x)}$

2. Risolvere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = x^2 y \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

Determinare poi per quali α la soluzione è limitata superiormente.

Determinare poi per quali α la soluzione è limitata sia superiormente che inferiormente.

Soluzione: Per $\alpha = 0$ la soluzione è $y \equiv 0$ costante. In generale la soluzione si ottiene integrando per separazione di variabili:

$$\int_\alpha^Y \frac{dy}{y} = \int_0^x s^2 ds \Rightarrow \log \frac{y}{\alpha} = \frac{x^3}{3} \text{ ovvero } y(x) = \alpha e^{\frac{x^3}{3}}.$$

Dunque la soluzione è limitata superiormente (da 0) quando $\alpha \leq 0$ ed è limitata sia superiormente che inferiormente quando $\alpha = 0$.

CODICE=897229

3. Sia $f(x) = \frac{1+x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$ per $x > 0$. Dire se esiste

$$\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Dire se esiste

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Sia $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$ e $F(1) = 0$ Dire se esistono

$$\int_0^1 F(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} F(x)\,dx.$$

Soluzione: $f(x) = \frac{1+x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}} + 1$. Quindi $f(x) > 1$ che non è integrabile su $[1, +\infty)$ e $f(x) > \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}}$ che non è integrabile su $(0, 1]$ perché $3/2 > 1$. Quindi $f(x)$ non è integrabile né su $(0, 1]$ né su $[1, +\infty)$.

La primitiva è

$$F(x) = \int_1^x f(s)ds = \int_1^x (s^{-3/2} + 1)ds = \Big[-2s^{-1/2} + s\Big]_1^x = -\frac{2}{\sqrt{x}} + x + 1.$$

Abbiamo che $F(x) \to +\infty$ per $x \to \infty$ quindi $F(x)$ non è integrabile su $[1, +\infty)$.

Invece $F(x)$ è integrabile su $(0, 1]$ perché somma di tre funzioni integrabili (si ricordi che $1/\sqrt{x}$ è integrabile su $(0, 1]$).

4. Dimostrare che l'equazione

$$x^2 + x = 1 + \lambda \mathrm{e}^x$$

con $\lambda \leq 0$ non può avere più di 2 soluzioni.

Soluzione: Se portiamo tutto al primo membro otteniamo

$$f(x) = x^2 + x - 1 - \lambda e^x.$$

Abbiamo quindi $f''(x) = 2 - \lambda e^x > 0$ perché $\lambda \leq 0$. Questo implica che f' sia monotona crescente, quindi f' si può annullare al più una volta. Per assurdo, supponiamo che esistano $x_1 < x_2 < x_3$ tali che $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$. Applicando il teorema di Lagrange una volta all'intervallo (x_1, x_2) e una volta all'intervallo (x_2, x_3) troviamo due punti distinti in cui f' si annulla, che contraddice quanto dimostrato precedentemente. Allora $f(x)$ si può annullare al più in 2 punti.

CODICE=897229

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

22 luglio 2016

PARTE B

1. Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) = |\log(\lambda + x)| - \lambda$$
Calcolare per $\lambda = 1$, l'area della porzione di piano finita compresa tra l'asse delle x e il grafico della f.
Soluzione. Il dominio della funzione è $D = \{x \in \mathbb{R} : \ x > -\lambda\}$, in tale insieme si ha
$$f(x) = \begin{cases} -\log(x+\lambda) - \lambda, & \text{se } -\lambda < x < 1-\lambda, \\ \\ \log(x+\lambda) - \lambda, & \text{se } x \geq 1-\lambda. \end{cases}$$
La funzione f risulta continua in D, in particolare $\lim_{x\to 1-\lambda} f(x) = -\lambda$ e si ha
$$\lim_{x\to -\lambda^+} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$
La funzione f è derivabile in $D\backslash\{1-\lambda\}$ e si ha
$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+\lambda}, & \text{se } -\lambda < x < 1-\lambda, \\ \\ \dfrac{1}{x+\lambda}, & \text{se } x > 1-\lambda. \end{cases}$$
Quindi f risulta decrescente per $-\lambda < x < 1-\lambda$ e crescente per $x > 1-\lambda$, si ha un punto di mimino assoluto in $x = 1-\lambda$, anche se in tale punto f non è derivabile. Il minimo vale $f(1-\lambda) = -\lambda$. La funzione poi risulta convessa per $-\lambda < x < 1-\lambda$ e concava per $x > 1-\lambda$.
La regione di piano in questione è delimitata dai punti di intersezione con l'asse delle x che hanno ascissa $x_1 = \mathrm{e}^{-1} - 1$ e $x_2 = \mathrm{e} - 1$ e in tale intervallo f risulta negativa. Pertanto
$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathrm{e}^{-1}-1}^{\mathrm{e}-1} \Big| |\log(x) + 1| - 1 \Big| \, dx \\ &= -\int_{\mathrm{e}^{-1}-1}^{\mathrm{e}-1} |\log(x) + 1| - 1 \, dx = \int_{\mathrm{e}^{-1}-1}^{0} -\log(x+1) - 1 \, dx - \int_{0}^{\mathrm{e}-1} \log(x+1) - 1 \, dx \\ &= (-\log(1+x) - x\log(1+x))\Big|_{\mathrm{e}^{-1}}^{0} + (-2x + \log(1+x) + x\log(1+x))\Big|_{0}^{\mathrm{e}-1} \\ &= \frac{\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} + 1}{\mathrm{e}^2}. \end{aligned}$$

CODICE=221019

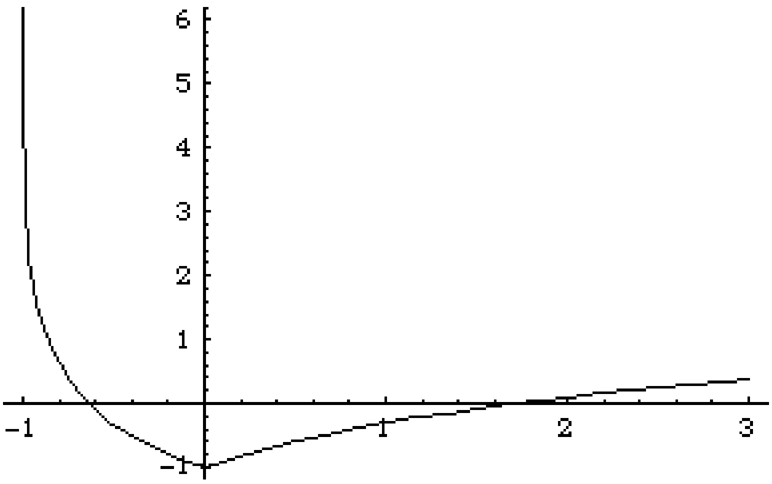


Figura 1: Grafico di $f(x) = |\log(\lambda + x)| - \lambda$, per $\lambda = 1$

Il grafico approssimativo è quindi il seguente, che non cambia in maniera qualitativa al variare di λ.

2. Data l'equazione
$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^x.$$
   (a) Si trovi lo spazio delle soluzioni dell'omogenea
   (b) Si trovi una soluzione dell'equazione differenziale con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
   (c) Si dica se esiste qualche soluzione dell'equazione differenziale tale che $\lim_{x\to\infty} y(x)$ esiste ed è minore o uguale a zero?

Soluzione: (a) L'equazione associata all'omogenea è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, con soluzioni $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono
$$y_0(x) = A\,\mathrm{e}^{2x} + B\,\mathrm{e}^x \qquad A,\, B \in \mathbb{R}.$$
(b) Il termine non omogeneo e^x è risonante. Cerchiamo allora una soluzione particolare della forma $y_p = cx\,\mathrm{e}^x$

Si trova facilmente che $c = -1$, quindi l'integrale generale dell'equazione completa è
$$y_f(x) = A\,\mathrm{e}^{2x} + B\,\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x.$$
Imponendo le condizioni iniziali si ha $A + B = 1$, $2A + B - 1 = 0$ ovvero $A = 0$ e $B = 1$; la soluzione cercata è $y(x) = (1 - x)\,\mathrm{e}^x$.

(c) Si ha che per $A < 0$ e B qualsiasi o per $A = 0$ e $B \leq 0$ vale $\lim_{x\to\infty} y(x) = -\infty$.

3. Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ si studi la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\log(\lambda)}(x - 1)^n$$

Soluzione: Si tratta di una semplice serie di potenze osservando che
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\log(\lambda)}(x - 1)^n = \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{(\log(\lambda)} \sum_{n=1}^{\infty}(x - 1)^n \quad \text{per } \lambda > 0,\ \lambda \neq 1.$$

CODICE=221019

La restruzione $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$ serve per dare senso alla frazione, evitando che si annulli il denominatore.

Pertanto la serie converge se $|x-1| < 1$ e inoltre, usando la formula per la somma (se convergente) di una progressione geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2+\lambda+1}{\log(\lambda)}(x-1)^n = \frac{\lambda^2+\lambda+1}{\log(\lambda)}\left[\frac{1}{1-(x-1)} - 1\right], \qquad \text{per } 0 < x < 2,\ \lambda > 0,\ \lambda \neq 1.$$

La serie non converge se $|x-1| \geq 1$. Per affermare questo osserviamo che tale risultato è vero per la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n$ e dato che il fattore moltiplicativo $\frac{\lambda^2+\lambda+1}{\log(\lambda)}$ non si annulla mai, lo stesso vale anche per la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2+\lambda+1}{\log(\lambda)}(x-1)^n$.

4. Data la funzione
$$F(x) = \int_1^x \frac{\arcsin(t/2)}{t+1}\, dt$$
si dimostri che è continua e derivabile su $(-1, 2)$ e si scriva l'equazione della retta tangente a F nel punto $x = 1$.

Studiare gli intervalli di monotonia.

Soluzione: La funzione $\arcsin(t/2)$ è definita per $-1 < t/2 < 1$, ovvero per $-2 < t < 2$. La funzione $t+1$ è definita per $t \neq -1$, quindi scelto un $x \in (-1, 2)$ sicuramente la funzione $\frac{\arcsin(t/2)}{t+1}$ è definita e continua nell'intervallo $[1, x]$ ($[x, 1]$ se $x < 1$). Dunque la funzione $F(x)$ è ben definita per ogni $x \in (-1, 2)$. Inoltre, dato che $\frac{\arcsin(t/2)}{t+1}$ è continua, per il teorema fondamentale del calcolo abbiamo anche che $F(x)$ è derivabile su $(-1, 2)$ con derivata $F'(x) = \frac{\arcsin(x/2)}{x+1}$. Pertanto la funzione derivata risulta positiva per $0 < x \leq 2$ e negativa per $-1 < x < 0$, e la funzione F ha un punto di minimo per $x = 0$.

Per $x = 1$ abbiamo $F'(1) = \frac{\arcsin(1/2)}{2} = \frac{\pi}{12}$ e $F(1) = 0$ quindi la retta tangente al grafico $y = F(x)$, che ha equazione $y = F(1) + F'(1)(x-1)$, diventa

$$y = \frac{\pi}{12}(x-1).$$

CODICE=221019

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova di Analisi Matematica 1

24 febbraio 2016

PARTE B

1. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \int_2^x \frac{\cos(\pi t)}{2t+1}\, dt$$

in $[-1/2, 5/2]$, determinando in particolare punti di massimo e di minimo, intervalli di convessità e il polinomio di Taylor di grado 2 in $x_0 = 2$..

Soluzione. Osserviamo intanto che la funzione $\frac{\cos(\pi t)}{2t+1}$ è continua in $]-1/2, 5/2]$, quindi la funzione f risulta derivabile in tale intervallo e si ha

$$f'(x) = \frac{\cos(\pi x)}{2x+1} \qquad x \in]-1/2, 5/2].$$

Il punto $x = -1/2$ richiede particolare attenzione perchè in tale punto la funzione integranda non è definita. Si ha però che il limite

$$\lim_{t \to (-1/2)^+} \frac{\cos(\pi t)}{2t+1},$$

è una forma indeterminata del tipo $0/0$ che possiamo risolvere facilmente con lo sviluppo di Taylor o derivando e si ottiene

$$\lim_{t \to (-1/2)^+} \frac{\cos(\pi t)}{2t+1} = \frac{\pi}{2},$$

quindi la funzione integranda è limitata e l'integrale è convergente. La funzione $f'(x)$ si annulla nei punti $x_1 = 1/2$ e $x_2 = 3/2$. In tali punti si ha un cambio si segno e si vede facilmente che x_1 è un punto di massimo relativo, mentre x_2 è un punto di minimo locale.

Vicino al punto $x_0 = 2$ si ha lo sviluppo di Taylor

$$f(x) = \frac{x-2}{5} - \frac{1}{25}(x-2)^2 + O\left((x-2)^3\right).$$

La derivata seconda è

$$f''(x) = -\frac{\pi(2t+1)\sin(\pi t) + 2\cos(\pi t)}{(2t+1)^2},$$

e quindi, dato che il denominatore è positivo la derivata seconda si annulla quando è risolta l'equazione

$$\tan(\pi t) = -\frac{2}{\pi(2t+1)}.$$

Dallo studio grafico si ha che ci sono due soluzioni in $]-1/2, 5/5]$ di cui una nell'intervallo $]1/2, 3/2[$ e l'altra nell'intervallo $]3/2, 5/2[$.

CODICE=237927

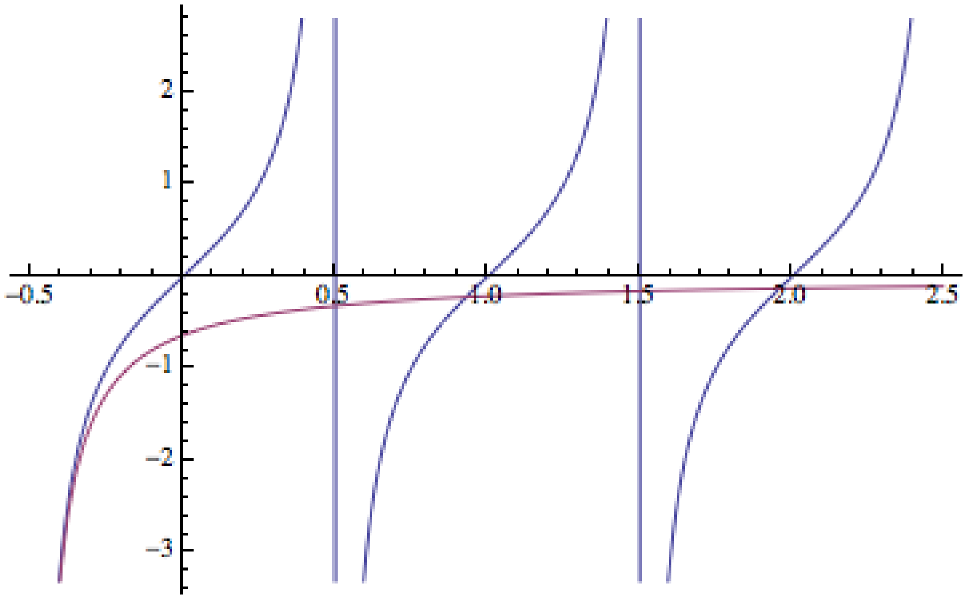


Figura 1: Equazione per studio punti a derivata seconda nulla

Il grafico approssimativo della funzione f risulta pertanto il seguente

2. Studiare al variare di $a \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{4n^2 + a^{2n+1}}.$$

Soluzione: Utilizziamo il criterio della radice. Se $|a| \leq 1$ abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + 2^n}{4n^2 + a^{2n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{4n^2}} = +\infty,$$

quindi se $|a| \leq 1$ non abbiamo convergenza. Se $|a| > 1$ invece

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + 2^n}{4n^2 + a^{2n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{a^{2n}} \frac{1 + (2/3)^n}{4n^2/a^{2n} + a}} = \frac{3}{a^2}.$$

Abbiamo quindi convergenza per $a^2 > 3$ ovvero $|a| > \sqrt{3}$, e divergenza per $1 < |a| < \sqrt{3}$ ovvero $|a| < \sqrt{3}$. Per $a = \pm\sqrt{3}$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{4n^2 + 3^n\sqrt{3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (2/3)^n}{4n^2/3^n + \sqrt{3}}$$

e il termine n-esimo ha come limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + (2/3)^n}{4n^2/3^n + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0,$$

quindi la serie non converge non soddisfacendo la condizione necessaria che il termine generico deve essere infinitesimo.

Riassumendo la serie converge se e solo se $|a| > \sqrt{3}$.

CODICE=237927

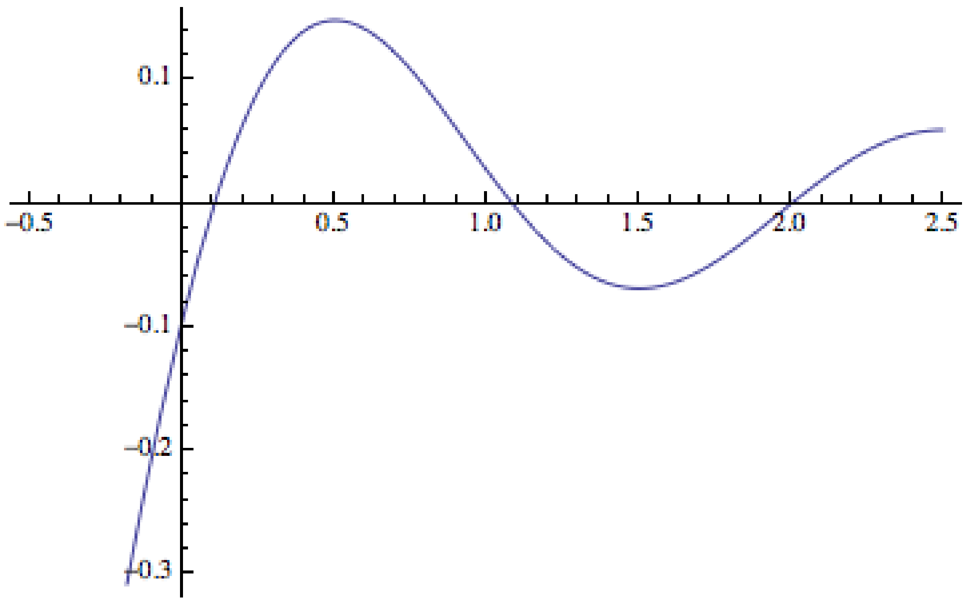


Figura 2: Grafico di $f(x)$

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + 4y'(x) - 8y(x) = 4$$

si trovino tra le soluzioni quelle che sono limitate su tutto $\mathbb{R}$. Fissato $y(0) = 0$ si determini $y'(0)$ in modo che la soluzione sia tale che $\lim_{x\to+\infty} y(x) < +\infty$.

Soluzione: Cerchiamo intanto la soluzione dell'omogenea. L'equazione associata è

$$\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$$

che ha come soluzioni $\lambda_1 = -2 + 2\sqrt{3}$ e $\lambda_2 = -2 - 2\sqrt{3}$. Si noti che $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$.

L'equazione omogenea ha come soluzione generale

$$y_0(x) = A\mathrm{e}^{(-2+2\sqrt{3})x} + B\mathrm{e}^{(-2-2\sqrt{3})x}.$$

Si vede immediatamente che una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è: $y_1(x) = -1/2$.

L'integrale generale dell'equazione differenziale quindi ha la forma

$$y(x) = A\mathrm{e}^{(-2+2\sqrt{3})x} + B\mathrm{e}^{(-2-2\sqrt{3})x} - \frac{1}{2}.$$

Tra queste soluzioni l'unica limitata è $y(x) = -\frac{1}{2}$ (che si ha quando $A = B = 0$).

La condizione $y(0) = 0$ diventa

$$A + B - \frac{1}{2} = 0.$$

Perché valga $\lim_{x\to+\infty} y(x) < +\infty$ dobbiamo scegliere $A = 0$ dal momento che $-2-2\sqrt{3} < 0$. Concludendo abbiamo

$$A = 0,\ B = \frac{1}{2},$$

e la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{(-2-2\sqrt{3})x} - \frac{1}{2},$$

CODICE=237927

che ha come dato iniziale per la derivata prima

$$y'(0) = -1 - \sqrt{3}.$$

4. Data la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt$ per $x \in [0, +\infty[$ dimostrare che ammette massimo. (Sugg. studiare preliminarmente il limite all'infinito)

   Soluzione: Osserviamo che $f(0) = 0$ e che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ dato che è prodotto di funzioni positive. Studiamo il limite all'infinito e scriviamo $f(x)$ nel modo seguente

$$f(x) = \frac{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt}{\mathrm{e}^{x^2}} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

   in modo da avere una forma indeterminata del tipo ∞/∞. Studiando pertanto il rapporto delle derivate con la regola di De L'Hopital si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2} 2x} = 0.$$

   Queste due informazioni sono sufficienti a dimostrare che esiste il massimo. Sia infatti $x_0 > 0$ qualsiasi e scegliamo $\epsilon = f(x_0)/2 > 0$. Dalla definizione di limite zero all'infinito abbiamo che esiste $K > 0$ tale che

$$f(x) < \epsilon \qquad \forall\, x > K.$$

   Considerando quindi l'intervallo limitato $[0, K]$ su tale intervallo la funzione continua $f(x)$ assume massimo assoluto $M \geq f(x_0)$ e essendo la funzione minore di $M/2$ fuori dall'intervallo $[0, K]$, il numero M risulta massimo assoluto della funzione su tutta la semiretta $x \geq 0$.

CODICE=237927

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica 1

10 gennaio 2017

PARTE B

1. a) Dimostrare che
$$f(x) = x\log(x) + \frac{1}{x} > 0, \tag{1}$$
per ogni $x > 0$.

b) Usando anche la (1), se necessario, calcolare
$$G(\alpha) = \int_{\alpha}^{1/\alpha} f(x)\,dx \qquad \alpha > 0,$$
e discutere il comportamento di $G(\alpha)$ per $\alpha \to 0^+$ e $\alpha \to +\infty$.

Soluzione

Visto che $x > 0$, dimostrare che $x\log(x) + \frac{1}{x} > 0$ equivale a dimostrare che $x^2\log(x) + 1 > 0$, ovvero $x^2\log(x) > -1$. Dallo studio della derivata si vede che $x^2\log(x)$ ha un solo punto di minimo in $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$, e quindi il minimo di $x^2\log(x)$ vale $-\frac{1}{2e} > -1$. Quindi $f(x) > 0$. Si vede anche facilmente che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Calcoliamo per parti $\int_{\alpha}^{1/\alpha} x\log(x)dx$. Si ha
$$\int_{\alpha}^{1/\alpha} x\log(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\log(x)\right]_{\alpha}^{1/\alpha} - \int_{\alpha}^{1/\alpha} \frac{x}{2}dx = \left[\frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4}\right]_{\alpha}^{1/\alpha}$$
Quindi
$$\begin{aligned}
G(\alpha) &= \int_{\alpha}^{1/\alpha} x\log(x) + \frac{1}{x}dx = \left[\frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4} + \log(x)\right]_{\alpha}^{1/\alpha} \\
&= \frac{1}{2\alpha^2}\log\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{4\alpha^2} + \log\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{\alpha^2}{2}\log(\alpha) + \frac{\alpha^2}{4} - \log(\alpha) \\
&= \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{2}\right)\log\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{4}\left(\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right) + \log\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).
\end{aligned}$$
Poiché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ abbiamo che
$$\int_0^1 f(x)dx = \int_1^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)dx = +\infty.$$

CODICE=878202

Allora si vede facilmente che

$$\lim_{\alpha\to 0^+} G(\alpha) = \int_0^\infty f(x)dx = +\infty$$

e

$$\lim_{\alpha\to\infty} G(\alpha) = \int_\infty^0 f(x)dx = -\int_0^\infty f(x)dx = -\infty.$$

2. Risolvere il problema di Cauchy con il parametro $\beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y''(t) - 2y(t) = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = \beta, \end{cases}$$

e determinare se esistono $\beta \in \mathbb{R}$ tali per cui la soluzione soddisfi $\int_0^{+\infty} |y(t)|\, dt < +\infty$.

Soluzione

Il polinomio associato all'equazione differenziale è $\lambda^2 - 2 = 0$, quindi la soluzione dell'equazione è

$$y(x) = Ae^{\sqrt{2}x} + Be^{-\sqrt{2}x}$$

con A, B da scegliere con il dato iniziale, ovvero

$$\begin{cases} y(0) = A + B = 1 \\ y'(0) = \sqrt{2}A - \sqrt{2}B = \beta \end{cases}$$

quindi la soluzione è

$$y(x) = \left(\frac{1}{2} + \beta\frac{\sqrt{2}}{4}\right)e^{\sqrt{2}x} + \left(\frac{1}{2} - \beta\frac{\sqrt{2}}{4}\right)e^{-\sqrt{2}x}$$

Perché la funzione sia integrabile su $[0, +\infty)$ è necessario che il coefficiente di $e^{\sqrt{2}x}$ sia zero, quindi $\beta = -\sqrt{2}$. In tal caso

$$\int_0^\infty |y(x)|dx = \int_0^\infty e^{-\sqrt{2}x}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. a) Studiare, al variare del parametro reale $\lambda > -1$, il comportamento del seguente integrale (eventualmente calcolandolo esplicitamente)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \lambda}\, dx$$

   b) Studiare il caso $\lambda \le -1$.

Soluzione

Se $\lambda > 0$ allora con la sostituzione $s = x/\sqrt{\lambda}$ l'integrale è convergente e si ha

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\lambda}dx = \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]_1^\infty = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right).$$

Per $\lambda = 0$ si ottiene

$$\int_1^\infty x^{-2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 1.$$

CODICE=878202

Se $\lambda < 0$ poniamo $\lambda = -\alpha^2$ per comodità.

Abbiamo
$$\frac{1}{x^2-\alpha^2} = \frac{1}{(x-\alpha)(x+\alpha)} = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{(x-\alpha)} - \frac{1}{(x+\alpha)}\right).$$

Se $-1 < \lambda < 0$ allora $\alpha = \sqrt{-\lambda} < 1$ e abbiamo

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^2-\alpha^2}dx &= \frac{1}{2\alpha}\int_1^\infty \left(\frac{1}{(x-\alpha)} - \frac{1}{(x+\alpha)}\right)dx = \frac{1}{2\alpha}\left[\log\left|\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right|\right]_1^\infty \\ &= -\frac{1}{2\alpha}\log\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) = \frac{1}{2\alpha}\log\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right),\end{aligned}$$

quindi
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\lambda}dx = \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}}\log\left(\frac{1+\sqrt{-\lambda}}{1-\sqrt{-\lambda}}\right).$$

Nel caso in cui $\lambda \leq -1$, abbiamo $\alpha \geq 1$ allora la funzione $\frac{1}{(x-\alpha)}$ diverge per $x = \alpha$, e, visto che l'andamento vicino α è di primo grado, allora l'integrale diverge. Quindi per $\lambda \leq -1$ la funzione $\frac{1}{x^2+\lambda}$ non integrabile su $[1, +\infty)$.

4. a) La funzione $f(x) = \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x)$ è periodica?

   b) Esiste un $T > 0$ tale che la funzione di classe $g(x) \in C^1(\mathbb{R})$ definita da $g(x) = \cos(x^2)$ è periodica di periodo T.

Soluzione

Dato che $f(0) = 2$, se la funzione fosse periodica ci dovrebbe essere $T > 0$ tale che $f(T) = 2$, ma dato che il coseno è sempre minore o uguale a 1, ciò accade solo se $\cos(T) = \cos(\sqrt{2}T) = 1$. Ricordando che il coseno vale 1 se e solo se l'argomento vale $2k\pi$, con $k \in \mathbb{N}$ si ottiene che

$$T = 2m\pi \qquad \sqrt{2}T = 2n\pi \quad \text{per qualche } m, n \in \mathbb{N}.$$

Da questo si ricava che

$$T = 2m\pi \qquad T = \sqrt{2}n\pi \quad \text{per qualche } m, n \in \mathbb{N},$$

e dunque uguagliando si ha $2m\pi = \sqrt{2}n\pi$ per qualche $m, n \in \mathbb{N}$, che implicherebbe

$$\frac{n}{m} = \sqrt{2} \text{ per qualche } m, n \in \mathbb{N},$$

che non è possibile.

Per il caso b), è sufficiente derivare $g(x)$. Si ottiene $g'(x) = -2x\sin(x^2)$, che non è periodica (ad esempio perché i massimi locali hanno valori crescenti per $x > 0$). Ma se $g(x)$ fosse T-periodica, lo dovrebbe essere anche la sua derivata. Quindi, non esiste T tale che $g(x)$ sia T-periodica.

CODICE=878202

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Prova scritta di Analisi Matematica 1

30 gennaio 2017

PARTE B

1. a) Si studi la funzione $\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}$ per $x > 0$.
   b) Dimostrare che vale la seguente diseguaglianza per ogni $n \in \mathbb{N}$
$$x^{2n} + n^{n/2} > \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} \qquad \forall\, x > 0$$
   Sugg: Cosa succede per $n = 1$?

Soluzione: La funzione è positiva e si ha
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} = 0$$
dove in particolare il primo limite si calcola risolvendo la forma indeterminata $\infty \cdot 0$ tramite la sostituzione $x \to 1/x$.

Si ha poi
$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} = -\frac{e^{-\frac{1}{2x^2}}\left(x^2-1\right)}{x^4}$$
e quindi si ha un punto di massimo assoluto in $x_1 = 1$, dato che la derivata è strettamente positiva in $]0, 1[$ e strettamente negativa per $]1, +\infty[$. Quindi
$$\max_{\{x>0\}} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}\bigg|_{x=1} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$
Nel caso di $\frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}$ si ha di nuovo
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} = 0$$
e inoltre
$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} = \frac{1}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}\left(\frac{1}{x^2} - n\right).$$
Le stesse considerazioni di prima portano dimostrare che si ha un punto di massimo assoluto in $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e quindi
$$\max_{\{x>0\}} \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} = \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}\bigg|_{x=1/\sqrt{n}} = n^{n/2}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}} \leq n^{n/2}.$$
La diseguaglianza è verificata dato che
$$\frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}} < n^{n/2} < x^{2n} + n^{n/2}.$$

CODICE=367722

2. Si consideri l'equazione differenziale $y' = x\,y\log(y)$.

   a) Si determinino eventuali soluzioni costanti

   b) Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\,y\log(y) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

   c) sapendo che $y(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\,y\log(y) \\ y(0) = 1/2 \end{cases}.$$

   Detta $y(x)$ la sua soluzione, si calcoli $\lim_{x\to\infty} y'(x)$.

Soluzione: a) La funzione $y = 1$ è soluzione (attenzione: $y = 0$ non è soluzione costante perché il logaritmo non è definito in zero.)

b) La soluzione risulta $y = 3^{e^{x^2/2}}$, infatti, per separazione di variabili si ha

$$\int_3^Y \frac{dy}{y\log(y)} = \int_0^X x dx$$

quindi $\log|\log|y|| - \log\log 3 = \frac{x^2}{2}$ e, considerando che $y(x) > 1$ perché $y(0) > 1$ e la soluzione non può mai essere uguale ad 1 perché $y \equiv 1$ è una soluzione costante, possiamo togliere i moduli ottenendo

$$\log\log y - \log\log 3 = \frac{x^2}{2} \to \log\left(\frac{\log y}{\log 3}\right) = \frac{x^2}{2} \to \frac{\log y}{\log 3} = e^{x^2/2},$$

quindi $\log y = e^{x^2/2}\log 3 = \log 3^{(e^{x^2/2})}$ e concludendo $y = 3^{(e^{x^2/2})}$.

c) Procediamo come prima, considerando che in questo caso $0 < y < 1$ quando togliamo i moduli, ottenendo $y = 2^{e^{-x^2/2}}$. Usando l'equazione differenziale si ha

$$y' = x2^{e^{-x^2/2}}\log 2^{e^{-x^2/2}} = x2^{e^{-x^2/2}}e^{-x^2/2}\log(2)$$

da cui ricaviamo facilmente che $\lim_{x\to\infty} y'(x) = 0$.

3. Considerato $\lambda \geq 0$, si determini il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\lambda + 1}{\lambda^n + 1} x^n.$$

Si dica qual è l'insieme di convergenza della serie per ogni $\lambda \geq 0$.

Soluzione. Iniziamo con $\lambda = 0$, in tal caso la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+1}{1} x^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

che converge se e solo se $|x| < 1$.

Studiamo ora li raggio di convergenza calcolando

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^\lambda + 1}{\lambda^n + 1}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^\lambda + 1}{\lambda^n + 1}} \sim \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\lambda} = 1 \text{ se } \lambda \leq 1 \\ \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \text{ se } \lambda > 1 \end{cases}$$

CODICE=367722

Pertanto si ha

$$R = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda \leq 1 \\ \\ \lambda & \text{se } \lambda > 1 \end{cases}$$

Studiamo l'insieme di convergenza. Nel caso $\lambda \leq 1$ abbiamo che per $x = 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\lambda + 1}{\lambda^n + 1} = +\infty,$$

mentre per $x = -1$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\lambda + 1}{\lambda^n + 1} (-1)^n = N.E$$

e in entrambi i casi la condizione necessaria per la convergenza delle serie numeriche non è soddisfatta. Per $0 < \lambda \leq 1$, l'insieme di convergenza è $] -1, 1[$.

Per $\lambda > 1$ si ha per $x = \lambda$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\lambda + 1}{\lambda^n + 1} \lambda^n = +\infty,$$

e per $x = -\lambda$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\lambda + 1}{\lambda^n + 1} (-1)^n \lambda^n = N.E.,$$

come nel caso precedente si ha convergenza solo per $x \in] -\lambda, \lambda[$.

4. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞, tale che $f(x) > 0$ se $0 < x \leq 1$, $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$.

   Si dica se l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\, dx$ è convergente.

   Soluzione. L'integrale improprio, se esistente è definito da

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\, dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{f(x)}\, dx$$

ed è importante studiare il comportamento di f per x in intorno destro di 0. Usando lo sviluppo di Taylor si ha

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) = x + o(x)$$

Pertanto si ha che $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x + o(x)}$ e dunque

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{x}} = 1$$

e per il teorema del confronto asintotico l'integrale è divergente perchè comparabile con quello di

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx.$$

CODICE=367722