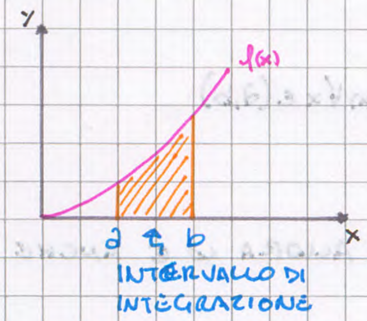
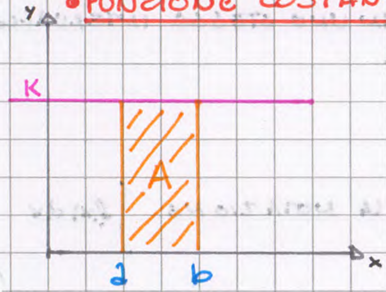
INTEGRALI: INTRODUZIONE



$\int_a^b f(x)\,dx$ = AREA (CON SEGNO) DELLA REGIONE DI PIANO COMPRESA TRA IL GRAFICO DI $f(x)$, L'ASSE X E LE RETTE VERTICALI $x=a$ E $x=b$

$f(x)$: FUNZIONE INTEGRANDA

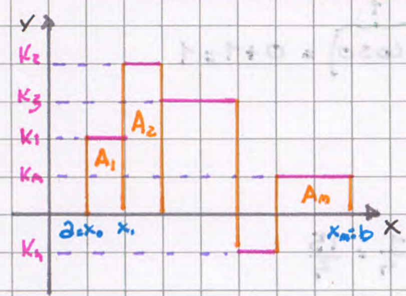
• FUNZIONE COSTANTE



SIA $f(x)=K$ $\forall x \in [a,b]$, CON K COSTANTE REALE.
ALLORA L'INTEGRALE DI f SULL'INTERVALLO $[a,b]$ È

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{(b-a)}_{\text{BASE}} \cdot \underbrace{K}_{\text{ALTEZZA CON SEGNO}} = \text{AREA (CON SEGNO) DEL RETTANGOLO}$$

• FUNZIONE COSTANTE A TRATTI (A SCALA)



SIA $f(x)$ UNA FUNZIONE A SCALA (CHE ASSUME IL VALORE K_i NELL' i-ESIMO INTERVALLO AVENTE x_{i-1} ED x_i COME ESTREMI)
ALLORA L'INTEGRALE DI f SULL'INTERVALLO $[a,b]$ È:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{BASE DELL' i-ESIMO}} \cdot \underbrace{K_i}_{\text{ALTEZZA DELL' i-ESIMO}}$$

= SOMMA ALGEBRICA DELLE AREE (CON SEGNO) DEI RETTANGOLI

• APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONE NON COSTANTE

$$\sup\left\{\int_a^b g(x)\,dx : g(x) \text{ A SCALA E } g(x) \leq f(x)\ \forall x \in [a,b]\right\} \leq A \leq \inf\left\{\int_a^b h(x)\,dx : h(x) \text{ A SCALA E } h(x) \geq f(x)\ \forall x \in [a,b]\right\}$$

SE COINCIDONO, SI DICE CHE f È RIEMANN INTEGRABILE SU $a \to b$ ED IL VALORE IN COMUNE È $\int_a^b f(x)\,dx$

• CALCOLO DELLA PRIMITIVA

PER CALCOLARE $\int_a^b f(x)\,dx$ DEVO:
- TROVARE UNA FUNZIONE CHE, NELL'INTERVALLO $[a,b]$, ABBIA $f(x)$ COME DERIVATA (OVVERO UNA PRIMITIVA DI $f(x)$)
- UNA VOLTA TROVATA, LA CALCOLO NEGLI ESTREMI DELLA ZONA DI INTEGRAZIONE (CALCOLO CIOÈ $F(b)-F(a)$)
- SOTTRAGGO I DUE VALORI $\Rightarrow \int_a^b f_x\,dx = F(b)-F(a)$

$$\int_0^5 3x^2\,dx = \left[x^3\right]_0^5 = (5)^3-(0)^3 = 125$$

PRIMITIVE ELEMENTARI E PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI

$$\int_a^b f(x) = \underset{\text{PRIMITIVA DI } f(x)}{[F(x)]_a^b} = F(b) - F(a)$$

SI DICE CHE $F(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $f(x)$ SE È DERIVABILE E $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$

→ OGNI FUNZIONE $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA AMMETTE PRIMITIVE

→ LA PRIMITIVA NON È MAI UNICA: INFATTI SE $F(x)$ È UNA PRIMITIVA, ALLORA LO È ANCHE $F(x)+c$, CON $c \in \mathbb{R}$ COSTANTE.

↳ SE $F_1(x)$ E $F_2(x)$ SONO DUE PRIMITIVE DI $f(x)$ IN UNO STESSO INTERVALLO, ALLORA $F_1(x) - F_2(x)$ È UNA FUNZIONE COSTANTE

- **INTEGRALE INDEFINITO**

PER INDICARE UNA GENERICA PRIMITIVA DI $f(x)$ SI UTILIZZA LA NOTAZIONE $\int f(x)\,dx$

- **PRIMITIVE ELEMENTARI**

$f(x)$	$F(x)$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}\ \forall n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$

ESEMPIO 1:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underbrace{\left(-\cos\tfrac{\pi}{2}\right)}_{0} - \underbrace{(-\cos 0)}_{-1} = 0+1 = 1$$

ESEMPIO 2:

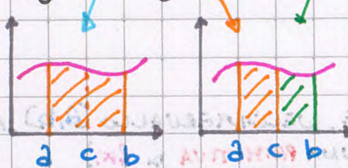
$$\int_1^2 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

- **PROPRIETÀ DELLE DERIVATE**

1) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x) \pm \int g(x)$

2) $\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$



4) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

ESEMPIO 3:

$$\int (3x + \cos x)\,dx \overset{1}{=} \int 3x\,dx + \int \cos x\,dx \overset{2}{=} 3\int x\,dx + \int \cos x\,dx = \frac{3x^2}{2} + s$$

PRIMITIVE ELEMENTARI

PRIMITIVE DI DERIVATE DI FUNZIONI COMPOSTE / PRIMITIVE ELEMENTARI GENERALIZZATE

SIA $F(x)$ UNA PRIMITIVA DI $f(x)$ E SIA $g(x)$ UNA FUNZIONE DERIVABILE E TALE CHE SIA POSSIBILE COSTRUIRE LA FUNZIONE COMPOSTA $F(g(x))$. IN QUESTO CASO

$$[F(g(x))]' = f(g(x)) \cdot g'(x) \Rightarrow \int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + c$$

ESEMPIO 1:

$$\int \underbrace{3x^2}_{g(x)} \underbrace{\sin(x^3)}_{f(g(x))} dx = \underbrace{-\cos(x^3)}_{F(g(x))} + c$$

ESEMPIO 2:

$$\int \underbrace{e^{\sin x}}_{f(g(x))} \underbrace{\cos x}_{g(x)} dx = \underbrace{e^{\sin x}}_{F(g(x))} + c$$

ESEMPIO 3:

$$\int x \underbrace{(x^2-1)^{2014}}_{f(g(x))} dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{2x}_{g(x)} \underbrace{(x^2-1)^{2014}}_{f(g(x))} dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2-1)^{2015}}{2015} = \frac{(x^2-1)^{2015}}{4030} + c$$

ESEMPIO 4:

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c$$

PRIMITIVE ELEMENTARI	PRIMITIVE ELEMENTARI GENERALIZZATE
$\int \cos x\, dx = \sin x + c$	$\int f'(x) \cos[f(x)]\, dx = \sin[f(x)] + c$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$	$\int f'(x) \sin[f(x)]\, dx = -\cos[f(x)] + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int f'(x)\, e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$	$\int f'(x) [f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$

NB1: NON TUTTI GLI INTEGRALI SONO FACILMENTE RICONDUCIBILI A PRIMITIVE ELEMENTARI PER QUELLI SI USANO ALTRE TECNICHE (PER PARTI, SOSTITUZIONE...)

NB2: TUTTI GLI ESEMPI CHE ABBIAMO VISTO PRIMA POSSONO ESSERE RISOLTI USANDO LA TECNICA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE.

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

ESEMPIO 1:

$$\int \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{\cos x}_{g}\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx + c$$

$$= x\sin x + \cos x + c$$

$f = x$ $f' = 1$

$g' = \cos x$ $g = \sin x$

ESEMPIO 2:

$$\int \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{e^x}_{g}\,dx = xe^x - \int e^x dx + c$$

$$= xe^x - e^x + c$$

$f = x$ $f' = 1$

$g' = e^x$ $g = e^x$

ESEMPIO 3:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x 2x\,dx + c$$

$$= x^2 e^x - 2\boxed{\int x e^x}$$ VEDI ESEMPIO 2

$$= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + c$$

$f = x^2$ $f' = 2x$

$g' = e^x$ $g = e^x$

ESEMPIO 4:

$$\int (x^4 + 3x^2 - 6)e^x dx = \int x^4 e^x dx + \int 3x^2 e^x dx + \int (-6) e^x dx$$

$$= \underbrace{\int x^4 e^x dx}_{\text{PARTI}} + \underbrace{3\int x^2 e^x dx}_{\text{PARTI}} - \underbrace{6\int e^x dx}_{\text{IMMEDIATO}}$$

ESEMPIO 5:

$$\int \underset{g'}{x}\,\underset{f}{\ln x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + c$$

$f = \ln$ $f' = \frac{1}{x}$

$g' = x$ $g = \frac{x^2}{2}$

INTEGRAZIONE PER PARTI: MOLTIPLICAZIONE x 1 E INTEGRALI "CICLICI"

ESEMPIO 1:

$$\int \underbrace{\ln x}_{\cancel{f}\,\cancel{g'}}\,dx = \int \underbrace{\ln x}_{f}\cdot\underbrace{1}_{g'}\,dx$$

$f = \ln x \qquad f' = \frac{1}{x}$

$g' = 1 \qquad g = x$

$$= x\ln x - \int \frac{1}{\cancel{x}}\cdot \cancel{x}\,dx$$

$$= x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

ESEMPIO 2:

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = \int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{f}\cdot\underbrace{1}_{g'}\,dx$$

$f = \operatorname{arctg} x \qquad f' = \frac{1}{1+x^2}$

$g' = 1 \qquad g = x$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

DIVIDIAMO E MOLTIPLICHIAMO PER 2 PER SEMPLIFICARE L'INTEGRALE

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$$

ESEMPIO 3:

$$\int x\,dx = \int \underbrace{x}_{f}\cdot\underbrace{1}_{g'}\,dx$$

$f = x \qquad f' = 1$

$g' = 1 \qquad g = x$

$$= x^2 - \int x\,dx$$

$$\rightarrow 2\int x\,dx = x^2 \rightarrow \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

INTEGRALE CICLICO

ESEMPIO 4:

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \underbrace{\cos x}_{f}\cdot\underbrace{\cos x}_{g'}\,dx$$

$f = \cos x \qquad f' = -\sin x$

$g' = \cos x \qquad g = \sin x$

$$= \sin x\cos x - \int (-\sin x)\sin x\,dx$$

$$= \sin x\cos x + \int \sin^2 x\,dx$$

$$= \sin x\cos x + \int (1-\cos^2 x)\,dx$$

$$= \sin x\cos x + x - \int \cos^2 x\,dx$$

INTEGRALE CICLICO

$$\rightarrow \int \cos^2 x\,dx + \int \cos^2 x\,dx = \sin x\cos x + x \rightarrow 2\int \cos^2 x\,dx = \sin x\cos x + x \rightarrow \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(\sin x\cos x + x) + c$$

ESEMPIO 5:

$$\int \underbrace{e^x}_{f}\underbrace{\sin x}_{g'}\,dx = -\cos x\, e^x - \int \underbrace{(-\cos x)}_{g'}\underbrace{e^x}_{f}\,dx$$

$f = e^x \qquad f' = e^x$

$g' = \sin x \qquad g = -\cos x$

$$= -\cos x\, e^x - \left[-\sin x\, e^x - \int (-\sin x\, e^x)\,dx\right]$$

$f = e^x \qquad f' = e^x$

$g' = -\cos x \qquad g = -\sin x$

$$= -\cos x\, e^x + \sin x\, e^x - \int \sin x\, e^x\,dx$$

$$\rightarrow \int e^x\sin x\,dx + \int e^x\sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) \rightarrow \int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy$$

ESEMPIO 1:

$$\int \sin(e^x) e^x dx = \int \sin y \, dy \qquad y = e^x \qquad y = g(x)$$

$$dy = e^x dx \qquad dy = g'(x) dx$$

$$= -\cos y + c$$

$$= -\cos(e^x) + c$$ ← REINSERISCO I DATI INIZIALMENTE SOSTITUITI

ESEMPIO 2:

$$\int \cos x \cdot \sin(\sin x)\, dx = \int \sin y \, dy \qquad y = \sin x$$

$$dy = \cos x \, dx$$

$$= -\cos y + c$$

$$= -\cos(\sin x) + c$$

ESEMPIO 3:

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \int \frac{1}{1+y^2} \qquad y = e^x$$

$$dy = e^x dx$$

$$= \operatorname{arctg} y + c$$

$$= \operatorname{arctg} e^x + c$$

ESEMPIO 4:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2)\, dx = \int_0^{\pi} \cos y \, \frac{dy}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos y \, dy \qquad y = x^2$$

$$dy = 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}(\underbrace{\sin \pi - \sin 0}_{0})$$

$$0 \rightarrow 0^2 \rightarrow 0$$

$$= 0$$

$$\sqrt{\pi} \rightarrow (\sqrt{\pi})^2 = \pi$$

ESEMPIO 5:

$$\int \frac{1}{x(\ln x + 1)} dx = \int \frac{1}{\ln x + 1} \cdot \frac{1}{x} dx \qquad y = \ln x + 1$$

$$dy = \frac{1}{x} dx$$

$$= \int \frac{1}{y} dy = \ln|y| + c$$

$$= \ln|\ln x + 1| + c$$

ESEMPIO 6:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \sqrt{1-\sin y} \cdot \cos y \, dy \qquad x = \sin y$$

$$dx = \cos y$$

$$= \int \cos y \cdot \cos y = \int \cos^2 y \, dy$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE: 2

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

PRIMA POSSIBILITA': $y = e^x$, $dy = e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} = \int \frac{dy}{y^2+1} = \operatorname{arctg}(y) + c = \operatorname{arctg}(e^x) + c$$

ALTERNATIVA EQUIVALENTE: $y = e^x$, $x = \ln y$, $dx = \frac{1}{y}dy$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} = \int \frac{\cancel{y}}{y^2+1}\cdot\frac{1}{\cancel{y}}dy = \int\frac{dy}{y^2+1} = \dots = \operatorname{arctg}(e^x) + c$$

ESEMPIO 1:

$y = \sin x$, $dy = \cos x\,dx$

$$\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx = \int \sin^4 x \overbrace{\cos^2 x}^{1-\sin^2 x} \cdot \cos x\,dx = \int dy\, y^4(1-y^2) = \int (y^4 - y^6)\,dy = \int y^4 dy - \int y^6 dy = \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + c = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c$$

ESEMPIO 2:

$$\int \frac{x-1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{y^2-1}{1+y}\cdot 2y\,dy = \int \frac{(y+1)(y-1)}{(y+1)}\,2y\,dy = \int 2y^2 dy - \int 2y\,dx = \frac{2}{3}y^3 - y^2 + c = \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 - x + c$$

CONVIENE IL METODO 2:

$y = \sqrt{x} \to x = y^2$

$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \to dy = 2y\,dy$

ESEMPIO 3:

$y = \sqrt{x-1}$, $y^2 = x-1$

$dy = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx$, $x = y^2+1$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int 2dy\,(y^2+1) = 2\int y^2 dy + 2\int dy = \frac{2}{3}y^3 + 2y + c = \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 + 2\sqrt{x+1} + c = 2\sqrt{x+1}\left[\frac{(x-1)}{3} + 1\right] + c = 2\sqrt{x-1}\,\frac{x+2}{3} + C$$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI: INTRODUZIONE

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ CON $P(x)$ E $Q(x)$ POLINOMI $(Q(x) \neq \phi)$

→ FUNZIONI RAZIONALI IN CUI IL POLINOMIO AL NUMERATORE È LA DERIVATA DEL DENOMINATORE

BASTA RICORDARE CHE $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

ESEMPIO 1:

$$\int \frac{2x}{x^2+5} dx = \ln|x^2-5| + c$$

ESEMPIO 2:

$$\int \frac{x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \ln|x^4+1| + c$$

→ FUNZIONI RAZIONALI AVENTI PER NUMERATORE UNA COSTANTE E DENOMINATORE DI I° GRADO

STESSA STRATEGIA RISOLUTIVA DEL CASO PRECEDENTE

ESEMPIO 3:

$$\int \frac{3}{2x-1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2}{2x+1} dx = \frac{3}{2} \ln|2x-1| + c$$

GENERALIZZO $\Longrightarrow$ $\int \frac{K}{ax+b} dx = \frac{K}{a} \ln|ax+b| + c$

→ FUNZIONI RAZIONALI AVENTI PER NUMERATORE UNA COSTANTE E PER DENOMINATORE 1 QUADRATO.

BASTA RICORDARE CHE $\frac{1}{[f(x)]^2} = [f(x)]^{-2}$ E CHE $\int f'(x) [f(x)]^m dx = \frac{[f(x)]^{m+1}}{m+1}$

ESEMPIO 4:

$$\int \frac{5}{(2x-1)^2} dx = 5 \int (2x-1)^{-2} dx = \frac{5}{2} \int 2 (2x-1)^{-2} dx = \frac{5}{2} \frac{(2x-1)^{-1}}{-1} + c = \frac{-5}{4x-2} + c$$

→ FUNZIONI RAZIONALI DEL TIPO $\frac{dx+e}{ax^2+bx+c}$ CON $b^2-4ac<0$ (Δ)

BISOGNA RICONDURSI, FACENDO I DOVUTI RIMANEGGIAMENTI, AD INTEGRALI DEL TIPO

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \operatorname{arctg}[f(x)] + c \quad E \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

ESEMPIO 5:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+1} dx = \int \frac{3x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg}(x) + c$$

ESEMPIO 6:

$+6-3$ ← $(9x^2+6x+2)' = 18x+6$

$$\int \frac{18x+3}{9x^2+6x+2} dx = \int \frac{18x+6}{9x^2+6x+2} dx - \int \frac{3}{9x^2+6x+2} dx = \ln|9x^2+6x+2| - \operatorname{arctg}(3x+1) + c$$

$9x^2+6x^2+2 = 9x^2+6x+1+1 = (3x+1)^2+1$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI: METODO 1

$$y = \frac{m(x)}{q(x)}$$

PASSAGGI:

1. DIVISIONE TRA NUMERATORE E DENOMINATORE $\longrightarrow$ SE grad $d(x) >$ grad $m(x)$ SALTO IL PASSAGGIO
2. FATTORIZZAZIONE DEL DENOMINATORE, OVVERO SCOMPORRE IL DENOMINATORE IN UN PRODOTTO DI FATTORI DI PRIMO GRADO E/O DI SECONDO GRADO NON ULTERIORMENTE SCOMPONIBILI.
3. DECOMPORRE LA FRAZIONE IN FRATTI SEMPLICI
4. INTEGRAZIONE DEI VARI PEZZI

ESEMPIO 1:

$$\int \frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2}\,dx$$

(1)

$$\begin{array}{r|l} x^3 -3x -1 & x^2-x-2 \\ \cline{2-2} -x^3+x^2+2x & x+1 \\ \hline // \ +2x^2-x-1 & \\ -x^2+x+2 & \\ \hline // \quad // \quad 1 & \end{array}$$

$$\frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2} = x+1 \ \frac{1}{x^2-x-2}$$

(2) $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$

(3)
$$\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx-2B}{(x-2)(x+1)} = \frac{(A+B)x+A-2B}{(x-2)(x+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-2B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ -B-2B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \end{cases} \longrightarrow \frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)}$$

(4)
$$\int \frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2}\,dx = \int\left[x+1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}\right]dx$$

$$= \int x\,dx + \int dx + \frac{1}{3}\int\frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + c \longrightarrow \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + c$$

ESEMPIO 2:

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

(1) NON SERVE

(2) $x^2-1 = (x-1)(x+1)$

(3)
$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{Ax-A+Bx+B}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x+B-A}{(x-1)(x+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B-A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

(4)
$$\int\frac{1}{x^2-1}\,dx = \int\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right]dx = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$$

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI - METODO 2

ESEMPIO 1:

$$\int \frac{1}{x^3+x}\,dx$$

① NON SERVE

② $x^3+x = x(x^2+1)$

③ $$\frac{1}{x^2+x} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$$

④ $$\int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + c$$

ESEMPIO 2:

$$\int \frac{x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$$

① NON SERVE

② $x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x(x^2+1)^2$

③ $$\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2} = \frac{(A+B)x^2+(C-2A-B)x+A}{x(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-2A-B \\ A=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=2 \end{cases}$$

④ $$\int \frac{x+1}{x(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx + 2\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \ln|x| - \ln|x-1| + 2\,\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{2}{x-1} + c$$

$$\boxed{\frac{1}{x(x-3)^3} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x-3)^2}+\frac{D}{(x-3)^3}}$$

INTEGRALI: ESERCIZI SVOLTI

ESERCIZIO 1:

$$\int\left(2-\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)dx =$$ ESSENDO UN INTEGRALE DI SOMME DIVIDO IN PIÙ INTEGRALI SEPARATI.

$$= \int 2\,dx - \int\frac{x}{2}dx - \int\frac{2}{x}dx =$$ PORTO FUORI LE COSTANTI MOLTIPLICATIVE

$$= 2\int dx - \frac{1}{2}\int x\,dx - 2\int\frac{1}{x}dx :$$ POSSO FACILMENTE CALCOLARLO DATO CHE SONO IMMEDIATI

$$= 2x - \frac{1}{2}x^2 - 2\ln|x| + c$$

ESERCIZIO 2:

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx =$$ PROCEDO PER PARTI

$$= \int\underbrace{\ln x}_{f}\cdot\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g'}dx =$$ VEDIAMO CHE $\ln x$ È f E $\frac{1}{x^2}$ g'

$f = \ln x \quad f' = \frac{1}{x}$

$g' = \frac{1}{x^2} \quad g = -\frac{1}{x}$

$$= -\frac{1}{x}\ln x - \int\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}\right)dx =$$ SEMPLIFICO E PULISCO

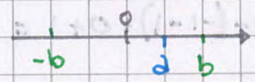
$$= -\frac{1}{x}\ln x + \int\frac{1}{x^2}dx =$$ POSSO POI CALCOLARE FACILMENTE L'INTEGRALE

$$= -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$$

ESERCIZIO 3:

$$\int_{-b}^{b}|x-a|\,dx \quad \text{CON } 0<a<b$$ = CERCHIAMO DI CAPIRE IL VALORE ASSOLUTO E IL FUNZIONAMENTO DEGLI ESTREMI:

$$|x-a| = \begin{cases} x-a & x\geq a \\ a-x & x<a \end{cases}$$



DIVIDO IN DUE INTEGRALI DI ESTREMI INTERNI:

$$= \int_{-b}^{a}(a-x)\,dx + \int_{a}^{b}(x-a)\,dx =$$ TROVO LE PRIMITIVE DI ENTRAMBI

$$= \left[ax-\frac{x^2}{2}\right]_{-b}^{a} + \left[\frac{x^2}{2}-ax\right]_{a}^{b} =$$ CALCOLO LE PRIMITIVE NEI DUE ESTREMI

$$= a^2 - \frac{a^2}{\cancel{2}} + \cancel{ab} + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \cancel{ab} - \frac{a^2}{\cancel{2}} - a^2$$ SEMPLIFICO E PULISCO

$$= a^2 + b^2$$

ESERCIZIO 4: SOSTITUZIONE $\begin{cases} y = e^x \\ dy = e^x dx \end{cases}$

$$\int\frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}dx = \int\frac{dy}{y^2-3y+2} = \int\frac{1}{y-2}dy - \int\frac{1}{y-1}dy$$

$$= \ln|y-2| - \ln|y-1| + c$$

SOSTITUISCO CON I VALORI $y \rightarrow$ $= \ln|e^x-2| - \ln|e^x-1| + c$

RAZIONALIZZO IL DENOMINATORE

$$y^2-3y+2 = (y-2)(y-1)$$

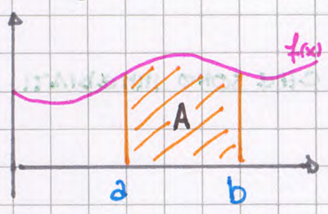
$$\frac{1}{y^2-3y+2} = \frac{A}{(y-2)} + \frac{B}{y-1} = \frac{(A+B)y-A-2B}{(y-2)(y-1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A-2B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

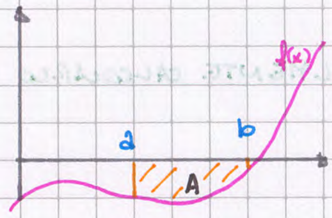
INTEGRALI E AREA

$\int_a^b f(x)\,dx$ È COLLEGATO ALL'AREA COMPRESA TRA IL GRAFICO DI $f(x)$, L'ASSE DELLE ASCISSE E LE RETTE VERTICALI $x=a$ E $x=b$, MA FORNISCE UN' AREA ORIENTATA OVVERO UN'AREA CON SEGNO

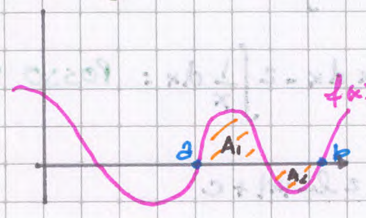
$\int_a^b f(x)\,dx = A$



$\int_a^b f(x)\,dx = -A$

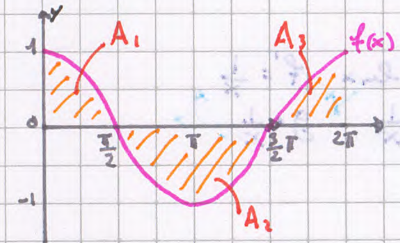


$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$



ESEMPIO 1:

CALCOLARE L'AREA DELIMITATA DALLA FUNZIONE $y=\cos x$ E L'ASSE DELLE ASCISSE $[0, 2\pi]$



$\int_0^{2\pi} \cos x\,dx = A_1 - A_2 + A_3$

A_2 È NEGATIVA MA NOI ABBIAMO BISOGNO DELL'AREA TOTALE OVVERO $A_1 + A_2 + A_3$

PROCEDO CALCOLANDO LE SINGOLE AREE

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x\,dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos x\,dx =$ - CAMBIO DI SEGNO TRA $\frac{\pi}{2}$ E $\frac{3}{2}\pi$ DATO CHE IN QUEL TRATTO L'AREA È NEGATIVA

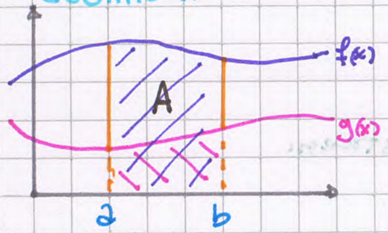
- ORA CALCOLO LE PRIMITIVE

$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} + [\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} =$ - RISOLVO LE PRIMITIVE NEGLI ESTREMI

$= 1 - 0 - (-1 - 1) + 0 + 1 = 4$

- AREA TRA DUE CURVE

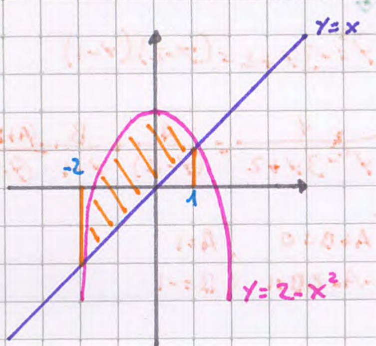
ESEMPIO 1:



$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

ESEMPIO 2:

CALCOLARE L'AREA DELLA REGIONE DI PIANO DELIMITATA DAI GRAFICI DI $y=x$ E $y=2-x^2$

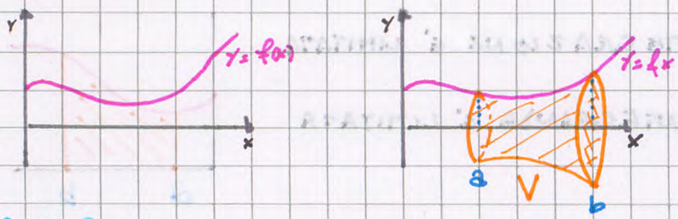


DOBBIAMO RICAVARCI GLI ESTREMI

$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$ $2x - x^2 = x$ $x^2 + x + 2 = 0$ $(x+2)(x-1) = 0$ $x = -2$ $x = 1$

$A = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\,dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$

VOLUME DEI SOLIDI DI ROTAZIONE

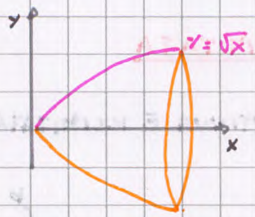


$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

ESEMPIO 1:

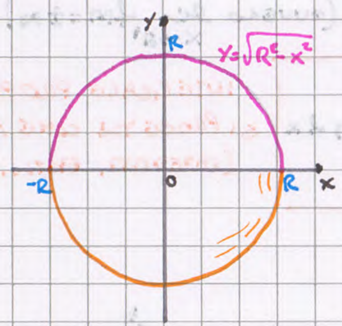
CALCOLARE IL VOLUME DEL SOLIDO DELLA ROTAZIONE DI $y = \sqrt{x}$ NELL'INTERVALLO $[0,4]$

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$$



ESEMPIO 2:

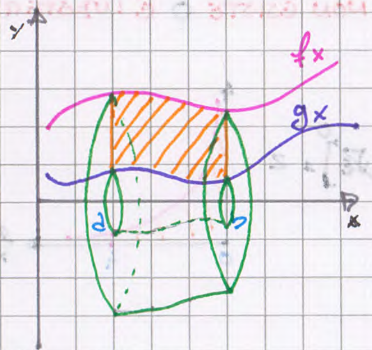
DIMOSTRARE CHE IL VOLUME DI UNA SFERA DI RAGGIO R È $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right] = \frac{4}{3}\pi R^3$$

ESEMPIO 3:

SE VOLESSI FAR RUOTARE LA REGIONE COMPRESA TRA DUE CURVE?



$$V = V - V$$

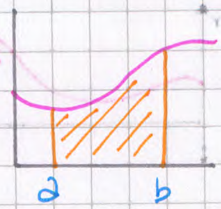
$$= \pi \int_a^b f^2(x)\,dx - \pi \int_a^b g^2(x)\,dx = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx$$

OSSERVAZIONE 1: DEVO CAPIRE CHI STA SOPRA E FARE $\pi \int_a^b \left[(\text{SOPRA})^2 - (\text{SOTTO})^2\right] dx$

OSSERVAZIONE 2: EVITARE L'ASSORBETRICO $\cancel{\pi \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]^2 dx}$

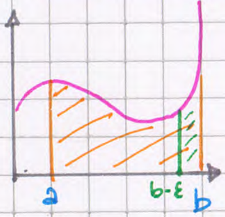
INTEGRALI IMPROPRI: INTRODUZIONE

NEGLI INTEGRALI PROPRI
- LA ZONA DI INTEGRAZIONE È LIMITATA
- LA FUNZIONE INTEGRANDA È LIMITATA



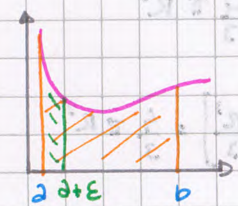
SE LA FUNZIONE INTEGRANDA O LA ZONA DI INTEGRAZIONE NON SONO LIMITATE SI PARLA DI INTEGRALE IMPROPRIO O GENERALIZZATO

- INTEGRAZIONE DI FUNZIONE ILLIMITATA



SIA $f(x): [a,b) \to \mathbb{R}$ CONTINUA E ILLIMITATA A SINISTRA DI b (OVVERO $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$)

IN QUESTO CASO SI DEFINISCE $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \boxed{\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx}$ INTEGRALE PROPRIO SI PROCEDE COME AL SOLITO (IMMEDIATO, PARTI...)



SIA $f(x): (a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA E ILLIMITATA A DESTRA DI a (OVVERO $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$)

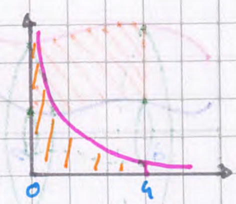
IN QUESTO CASO SI DEFINISCE $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \boxed{\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx}$ INTEGRALE PROPRIO SI PROCEDE COME AL SOLITO (IMMEDIATI, PARTI...)

IN ENTRAMBI I CASI:

- SE IL LIMITE ESISTE ED È FINITO $f(x)$ SI DICE INTEGRABILE IN $[a,b]$ O CHE $\int_a^b f(x)\,dx$ CONVERGE
- SE IL LIMITE RISULTA $+\infty$ OPPURE $-\infty$ SI DICE CHE L'INTEGRALE IMPROPRIO DIVERGE (A $+\infty$ O $-\infty$)
- SE IL LIMITE NON ESISTE SI DICE CHE L'INTEGRALE IMPROPRIO NON ESISTE O È INDETERMINATO

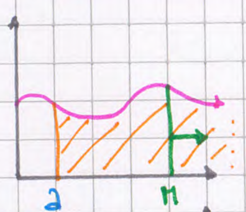
ESEMPIO 1:

CALCOLARE $\int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^{4} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\sqrt{x}\right]_\varepsilon^4 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\sqrt{4} - \cancel{\sqrt{\varepsilon}}^{\,0}\right] = 2$



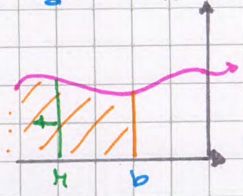
$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} =$

- INTEGRALI CON ZONA D'INTEGRAZIONE ILLIMITATA



SIA $f(x): [a;+\infty) \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA

IN QUESTO CASO SI DEFINISCE $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\,dx$

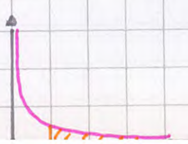


SIA $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA

IN QUESTO CASO SI DEFINISCE $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{M\to -\infty} \int_M^b f(x)\,dx$

ESEMPIO 2:

CALCOLARE $\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_4^M \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_4^M = \lim_{M\to\infty} \left[-\cancel{\frac{1}{M}}^{\,0} + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}$



INTEGRALI IMPROPRI AVANZATI: ESEMPI PIÙ ELABORATI

ESEMPIO 1:

$y = \ln x$, $dy = \frac{1}{x}dx$

CALCOLARE $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_2^{M} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx \underset{\substack{2 \to \ln 2 \\ M \to \ln M}}{=} \int_{\ln 2}^{\ln M} \frac{1}{y^2}\,dy = \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{1}{y}\right]_{\ln 2}^{\ln M} = \lim_{M\to\infty}\left[\cancel{-\frac{1}{\ln M}}^{\,0} + \frac{1}{\ln 2}\right] = \frac{1}{\ln 2}$

ESEMPIO 2:

ARBITRARIO

CALCOLARE $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{3} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{3}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{M\to-\infty} \int_M^3 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{M\to\infty}\int_3^M \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$\displaystyle = \lim_{M\to-\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_M^3 + \lim_{M\to\infty}\left[\operatorname{arctg} x\right]_3^M$

$\displaystyle = \lim_{M\to-\infty}\left[\cancel{\operatorname{arctg}(3)} - \underbrace{\operatorname{arctg}(M)}_{-\frac{\pi}{2}}\right] + \lim_{M\to\infty}\left[\underbrace{\operatorname{arctg}(M)}_{\frac{\pi}{2}} - \cancel{\operatorname{arctg}(3)}\right] = \pi$

CONVERGE

ESEMPIO 3:

ARBITRARIO

CALCOLARE $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_0^5 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$

$\displaystyle = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{0+\varepsilon}^{5} \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{M\to\infty}\int_5^M \frac{1}{x^2}\,dx$

$\displaystyle = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^5 + \lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_5^M = \underbrace{\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-\frac{1}{5} + \overset{+\infty}{\frac{1}{\varepsilon}}\right]}_{+\infty} + \underbrace{\lim_{M\to\infty}\left[\overset{0}{-\frac{1}{M}} + \frac{1}{5}\right]}_{\frac{1}{5}} = +\infty$

- SE L'INTEGRALE IMPROPRIO PRESENTA PIÙ DI UN PROBLEMA PER RISOLVERLO BASTA:

  ① SPEZZARLO NELLA SOMMA DI PIÙ INTEGRALI IMPROPRI AVENTI UN SINGOLO PROBLEMA

  ② RISOLVERLI

  ③ DEDURRE IL COMPORTAMENTO DI QUELLO GLOBALE SOMMANDO I RISULTATI DEI VARI PEZZI

NB: SE ALMENO UN PEZZO DIVERGE A $+\infty$ E ALMENO UN PEZZO DIVERGE A $-\infty$ ALLORA L'INTEGRALE DI PARTENZA SI DICHIARA INDETERMINATO.