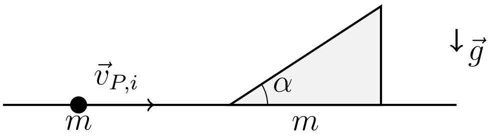
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica	
Esame di Fisica Generale, Sessione del: 5/6/2025	
Cognome:	**Matricola:**
Nome:	**Anno di Corso:**

Problema 1

Un punto materiale P di massa m si muove inizialmente su un piano orizzontale liscio con velocità di modulo $v_{P,i}$. Successivamente interagisce con un cuneo C di uguale massa m, inizialmente fermo, libero di muoversi sullo stesso piano orizzontale. Il cuneo ha un profilo piano liscio, inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale.



Si richiede di calcolare:

1. la massima altezza $h_{\max}$, rispetto al piano orizzontale, raggiunta dal punto materiale durante l'interazione punto-cuneo;
2. le velocità finali $\vec{v}_{P,f}$ del punto materiale e $\vec{v}_{C,f}$ del cuneo quando, dopo l'interazione, i due corpi si muovono indipendentemente;
3. il modulo della reazione vincolare N del piano inclinato sul punto materiale durante l'interazione punto-cuneo;
4. per quanto tempo il punto materiale e il cuneo rimangono in contatto.

Suggerimento: il moto avviene in assenza di attriti e, quando il punto e il cuneo sono in contatto, $\vec{N}$ è costante.

Problema 2

Una carica puntiforme $q > 0$ è concentrica ad un guscio sferico di materiale isolante i cui raggi interno ed esterno sono pari a $R_{d,1}$ e $R_{d,2}$, rispettivamente. Il guscio è uniformemente carico e la sua carica complessiva q_d è pari a q. Vi è poi un secondo guscio sferico, di materiale conduttore, anch'esso concentrico alla carica puntiforme, caricato elettricamente con una carica pari a $q_c = 2q$ e di raggio interno ed esterno pari a $R_{c,1} = 2R_{d,2}$ e $R_{c,2} = 3R_{d,2}$, rispettivamente.

Si determinino:

1. la densità superficiale di carica $\sigma_{c,i}$ presente sulla superficie interna del conduttore;
2. la densità superficiale di carica $\sigma_{c,e}$ presente sulla superficie esterna del conduttore;
3. l'espressione funzionale del campo elettrico in tutto lo spazio;
4. la minima velocità $v_{\min}$ che deve possedere una particella che si trovi sulla superficie esterna del conduttore affinché questa possa raggiungere una distanza infinita dal sistema, sapendo che la particella ha carica $q_p < 0$ e massa m_p.

Soluzione del problema 1

Premessa: scelte del sistema di riferimento e delle coordinate

Scegliamo come sistema di riferimento il piano cartesiano del laboratorio:

- l'asse x è orizzontale e positivo verso destra;
- l'asse y è verticale e positivo verso l'alto.

Nel laboratorio abbiamo due corpi:

- il *punto materiale* P di massa m, con coordinate $\big(x(t),\, y(t)\big)$;
- il *cuneo* C di massa m, libero di muoversi sul piano orizzontale, con coordinata $X(t)$ (lungo l'asse x).

Il cuneo ha un piano inclinato di angolo α rispetto all'orizzontale. Quando i due corpi sono in contatto, il punto P scorre senza attrito sul piano inclinato e vale il vincolo geometrico

$$y(t) \;=\; \big[x(t) - X(t)\big]\ \tan\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad x(t) - X(t) \;=\; y(t)\ \cot\alpha. \tag{V}$$

All'istante iniziale $t = 0$:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_{P,i}, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad X(0) = 0, \quad \dot{X}(0) = 0.$$

Dato che il punto P incide sul cuneo con velocità orizzontale iniziale $\dot{x}(0) = v_{P,i}$. Tutte le superfici (punto–cuneo e cuneo–pavimento) sono perfettamente lisce: non ci sono forze di attrito e non ci sono forze esterne orizzontali.

—

1. Altezza massima $h_{\max}$

1.1 Conservazione della quantità di moto orizzontale Poiché non agiscono forze esterne orizzontali, la componente orizzontale della quantità di moto del sistema "$P + C$" si conserva:

$$m\,\dot{x}(t) \;+\; m\,\dot{X}(t) \;=\; \text{costante} \;=\; m\,v_{P,i}.$$

In particolare,

$$\dot{X}(t) \;=\; v_{P,i} \;-\; \dot{x}(t). \tag{1}$$

1.2 Conservazione dell'energia meccanica L'energia meccanica totale del sistema è costante (assenza di attriti):

$$E \;=\; K_P + K_C + U_P = \frac{1}{2}\,m\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\big) + \frac{1}{2}\,m\,\dot{X}^2 + m\,g\,y = \text{costante} = \frac{1}{2}\,m\,v_{P,i}^2. \tag{2}$$

All'istante iniziale $\big(x = 0, y = 0, \dot{x} = v_{P,i}, \dot{y} = 0, \dot{X} = 0\big)$, l'energia vale $\frac{1}{2}\,m\,v_{P,i}^2$.

1.3 Vincolo cinematico e relazione fra $\dot{x}$ e $\dot{y}$ Dal vincolo (V), derivando rispetto a t,

$$\dot{y}(t) = \big[\dot{x}(t) - \dot{X}(t)\big]\ \tan\alpha. \tag{3}$$

Sostituendo $\dot{X}$ da (1):

$$\dot{y} = \big[\dot{x} - \big(v_{P,i} - \dot{x}\big)\big] \tan\alpha = \big(2\,\dot{x} - v_{P,i}\big)\ \tan\alpha. \tag{4}$$

In particolare, alla massima altezza $y = h_{\max}$ la componente verticale $\dot{y}$ si annulla:

$$\dot{y} = 0 \implies 2\,\dot{x} - v_{P,i} = 0 \implies \dot{x} = \frac{v_{P,i}}{2}.$$

Poiché al tempo dell'apice $\dot{x} = \dot{X}$ (hanno la stessa velocità orizzontale), ne segue

$$\dot{x}\Big|_{y=h_{\max}} = \dot{X}\Big|_{y=h_{\max}} = \frac{v_{P,i}}{2}. \tag{5}$$

Osservazione Possiamo risolvere questo punto senza ricorrere al vincolo cinematico. Notiamo infatti che, alla massima altezza $y = h_{\max}$ la componente verticale $\dot{y}$ si annulla. Questo significa che non c'è moto relativo tra i due corpi e $\dot{x} = \dot{X} = v_{CM}$ dove v_{CM} è la velocità del centro di massa del sistema. Per la conservazione della quantità di moto (quando $\dot{y} = 0$), $v_{CM} = \frac{v_{P,i}}{2}$.

1.4 Energia meccanica per $y = h_{\max}$ Alla massima altezza $y = h_{\max}$, si ha $\dot{y} = 0$ e $\dot{x} = \dot{X} = v_{P,i}/2$. Quindi:

$$\begin{aligned}
K_P\Big|_{\substack{\dot{y}=0\\ \dot{x}=v_{P,i}/2}} &= \frac{1}{2}\,m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}\,m\left(\tfrac{v_{P,i}^2}{4} + 0\right) = \frac{m\,v_{P,i}^2}{8},\\
K_C\Big|_{\dot{X}=v_{P,i}/2} &= \frac{1}{2}\,m\left(\tfrac{v_{P,i}^2}{4}\right) = \frac{m\,v_{P,i}^2}{8},\\
U_P\Big|_{y=h_{\max}} &= m\,g\,h_{\max}.
\end{aligned}$$

Sommandoli e uguagliando all'energia iniziale $\frac{1}{2}\,m\,v_{P,i}^2$:

$$\frac{m\,v_{P,i}^2}{8} + \frac{m\,v_{P,i}^2}{8} + m\,g\,h_{\max} = \frac{m\,v_{P,i}^2}{4} + m\,g\,h_{\max} = \frac{1}{2}\,m\,v_{P,i}^2.$$

Da cui

$$m\,g\,h_{\max} = \frac{1}{2}\,m\,v_{P,i}^2\ - \frac{m\,v_{P,i}^2}{4} = \frac{m\,v_{P,i}^2}{4} \implies h_{\max} = \frac{v_{P,i}^2}{4\,g}.$$

$$\boxed{h_{\max} = \frac{v_{P,i}^2}{4\,g}.}$$

—

2. Velocità finali (quando P torna su $y = 0$)

Quando P ritorna sul piano orizzontale ($y = 0$), $\dot y = 0$ e i corpi si muovono entrambi in orizzontale. Valgono:

- *Conservazione della quantità di moto* tra istante iniziale $\big(\dot x = v_{P,i}, \dot X = 0\big)$ e istante finale $\big(\dot x = \dot x_f,\ \dot X = \dot X_f\big)$:

$$m\, v_{P,i} = m\, \dot x_f + m\, \dot X_f \implies \dot X_f = v_{P,i} - \dot x_f. \tag{6}$$

- *Conservazione dell'energia meccanica* (ora entrambi si trovano a $y = 0$, quindi solo cinetica):

$$\frac{1}{2}\, m\, v_{P,i}^2 = \frac{1}{2}\, m\, \dot x_f^2 + \frac{1}{2}\, m\, \dot X_f^2. \tag{7}$$

Da (6) e (7) otteniamo

$$\begin{cases} v_{P,i} = \dot x_f + \dot X_f, \\ v_{P,i}^2 = \dot x_f^2 + \dot X_f^2. \end{cases} \implies \quad \dot x_f = 0, \quad \dot X_f = v_{P,i}.$$

$$\boxed{\vec v_{P,f} = \big(0,\, 0\big), \qquad \vec v_{C,f} = \vec v_{P,i}.}$$

Osservazione Per risolvere questo punto non è necessario esplicitare il vincolo cinematico, dato che siamo interessati ai due stati (iniziale e finale) nei quali i corpi si muovono indipendentemente. Tra i due stati si conservano l'energia cinetica e la quantità di moto del sistema, pertanto il caso può essere trattato come un urto elastico unidimensionale tra due masse uguali con bersaglio inizialmente fermo.

—

3. Modulo della reazione normale N

3.1 Equazioni del moto di P Le forze agenti sul punto materiale P sono:

$$\vec P = -\, m\, g\, \hat\jmath, \qquad \vec N = N\, \big(-\sin\alpha\, \hat\imath + \cos\alpha\, \hat\jmath\big).$$

Le equazioni di Newton per le componenti di P, in direzione x e y, sono:

$$\begin{cases} m\, \ddot x = -\, N\, \sin\alpha, \\ m\, \ddot y = N\, \cos\alpha \ -\ m\, g. \end{cases} \tag{8}$$

3.2 Vincoli cinematici per $\ddot x$ e $\ddot y$ Usando le relazioni (1) e (3) e derivando rispetto al tempo, abbiamo

$$\dot X = v_{P,i} - \dot x, \qquad \ddot X = -\, \ddot x,$$

$$\dot y = (2\, \dot x - v_{P,i})\, \tan\alpha, \qquad \ddot y = 2\, \ddot x\, \tan\alpha.$$

Poiché l'energia meccanica è costante, $dE/dt = 0$. Derivando rispetto al tempo l'equazione (2), sostituendo le espressioni di $\ddot y$ e $\ddot X$ e semplificando, si ricava

$$\ddot x = -\, g\, \frac{\sin\alpha\, \cos\alpha}{1 + \sin^2\alpha}. \tag{9}$$

3.3 Componente orizzontale di Newton e N Dalla prima equazione di (8):

$$m\,\ddot{x} = -\,N\,\sin\alpha \implies N\,\sin\alpha = -\,m\,\ddot{x}.$$

Sostituendo $\ddot{x}$ da (9):

$$N\,\sin\alpha = -\,m\Big(-\,g\,\frac{\sin\alpha\,\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}\Big) = m\,g\,\frac{\sin\alpha\,\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}.$$

Da cui

$$N = m\,g\,\frac{\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}.$$

$$\boxed{N = m\,g\,\frac{\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}.}$$

—

4. Durata dell'interazione t_{int}

Durante il contatto, $\ddot{x}$ è costante e vale (da (9))

$$\ddot{x} = -\,g\,\frac{\sin\alpha\,\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}.$$

All'istante iniziale $t=0$: $\dot{x}(0) = v_{P,i}$. All'istante finale $t = t_{\text{int}}$: $\dot{x}(t_{\text{int}}) = 0$. Integrando $\ddot{x} = \text{const}$:

$$\dot{x}(t) = v_{P,i} \;+\; \ddot{x}\,t = v_{P,i} \;-\; g\,\frac{\sin\alpha\,\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}\,t.$$

Ponendo $\dot{x}(t_{\text{int}}) = 0$:

$$0 = v_{P,i} \;-\; g\,\frac{\sin\alpha\,\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}\,t_{\text{int}} \implies t_{\text{int}} = v_{P,i}\,\frac{1+\sin^2\alpha}{g\,\sin\alpha\,\cos\alpha}.$$

$$\boxed{t_{\text{int}} = \frac{v_{P,i}\,\big(1+\sin^2\alpha\big)}{g\,\sin\alpha\,\cos\alpha}.}$$

—

Soluzione del problema 2

Premessa: sistema di riferimento e coordinate

Consideriamo il sistema di riferimento in cui il centro delle sfere coincide con l'origine. Denotiamo:

- q = carica puntiforme, posizionata in $r = 0$, con $q > 0$.
- Guscio sferico *dielettrico* (isolante), con raggio interno $R_{d,1}$ e raggio esterno $R_{d,2}$, uniformemente carico, carica totale $q_d = q$.
- Guscio sferico *conduttore*, con raggio interno $R_{c,1} = 2\,R_{d,2}$ e raggio esterno $R_{c,2} = 3\,R_{d,2}$, caricato con carica totale $q_c = 2\,q$.

Tutti i gusci sono concentrici (stesso centro $r = 0$).

1. Densità superficiale di carica $\sigma_{c,i}$ sulla superficie interna del conduttore

1.1 Necessità del campo nullo all'interno del conduttore Nel materiale conduttore il campo elettrico interno deve essere zero. Quindi, entro una superficie Gaussiana sferica di raggio $R_{c,1} < r < R_{c,2}$ (superficie interna al conduttore), concentrica alla carica puntiforme, la carica racchiusa deve essere nulla. Le cariche racchiuse per $R_{c,1} < r < R_{c,2}$ sono:

- la carica puntiforme q in $r = 0$,
- la carica distribuita sul guscio dielettrico (che, essendo uniformemente carico con carica totale q, contribuisce integralmente se $r > R_{d,2}$; in particolare, per $r = R_{c,1} = 2R_{d,2}$ siamo già al di fuori di tutto il guscio dielettrico), quindi $q_d = q$,
- la carica distribuita sulla superficie interna al conduttore.

Totale carica interna a $R_{c,1} < r < R_{c,2}$:

$$Q_{\text{int}} = q + q_d + Q_{c,i} = q + q + Q_{c,i} = 0.$$

Di conseguenza:

$$Q_{c,i} = -\,2\,q.$$

La densità superficiale di carica su quella superficie è

$$\sigma_{c,i} = \frac{Q_{c,i}}{4\pi\,R_{c,1}^2} = \frac{-\,2\,q}{4\pi\,(2\,R_{d,2})^2} = \frac{-\,2\,q}{16\pi\,R_{d,2}^2} = -\,\frac{q}{8\pi\,R_{d,2}^2}.$$

$$\boxed{\sigma_{c,i} = -\,\frac{q}{8\pi\,R_{d,2}^2}.}$$

2. Densità superficiale di carica $\sigma_{c,e}$ sulla superficie esterna del conduttore

La carica totale del conduttore è $q_c = 2\,q$. Sulla superficie interna abbiamo già $Q_{c,i} = -\,2\,q$. Pertanto, la carica rimasta sulla superficie esterna (raggio $R_{c,2}$) è

$$Q_{c,e} = q_c - Q_{c,i} = 2\,q - (-\,2\,q) = 4\,q.$$

La densità superficiale sulla superficie esterna $r = R_{c,2} = 3\,R_{d,2}$ è

$$\sigma_{c,e} = \frac{Q_{c,e}}{4\pi\,R_{c,2}^2} = \frac{4\,q}{4\pi\,(3\,R_{d,2})^2} = \frac{4\,q}{36\pi\,R_{d,2}^2} = \frac{q}{9\pi\,R_{d,2}^2}.$$

$$\boxed{\sigma_{c,e} = \frac{q}{9\pi\,R_{d,2}^2}.}$$

3. Espressione funzionale del campo elettrico $\mathbf{E}(r)$ in tutto lo spazio

Usiamo il Teorema di Gauss, considerando diverse superfici sferiche concentriche in funzione della distanza radiale r. Sia ε_0 la costante dielettrica del vuoto. Per simmetria, il campo elettrico è radiale e, dato che le cariche sono positive, uscente rispetto all'origine del riferimento.

(a) $0 < r < R_{d,1}$ (interno al primo guscio)
La sola carica racchiusa è q al centro; quindi

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}.$$

(b) $R_{d,1} < r < R_{d,2}$ (all'interno del guscio dielettrico uniformemente carico)
La carica racchiusa è

$$q \;+\; Q_{\text{diel}}(r),$$

dove $Q_{\text{diel}}(r)$ è la porzione di carica del guscio dielettrico contenuta nella sfera di raggio r. Poiché il guscio dielettrico ha densità volumica uniforme

$$\rho_d = \frac{q_d}{\frac{4}{3}\,\pi\left(R_{d,2}^3 - R_{d,1}^3\right)} = \frac{q}{\frac{4}{3}\,\pi\left(R_{d,2}^3 - R_{d,1}^3\right)},$$

la carica entro la sfera di raggio r (con $R_{d,1} < r < R_{d,2}$) è

$$Q_{\text{diel}}(r) = \rho_d\,\mathrm{Vol}\big(R_{d,1} < r < R\big) = \frac{q}{\frac{4}{3}\,\pi\left(R_{d,2}^3 - R_{d,1}^3\right)} \;\times\; \frac{4}{3}\,\pi\left(r^3 - R_{d,1}^3\right) = q\,\frac{r^3 - R_{d,1}^3}{R_{d,2}^3 - R_{d,1}^3}.$$

Quindi la carica totale racchiusa nella sfera di raggio r è

$$q_{\text{enc}}(r) = q \;+\; q\,\frac{r^3 - R_{d,1}^3}{R_{d,2}^3 - R_{d,1}^3} = q\left[1 + \frac{r^3 - R_{d,1}^3}{R_{d,2}^3 - R_{d,1}^3}\right].$$

Ne segue

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_{\rm enc}(r)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\,q\,\left[1 + \frac{r^3 - R_{d,1}^3}{R_{d,2}^3 - R_{d,1}^3}\right].$$

(c) $R_{d,2} < r < R_{c,1}$ (esterna al guscio dielettrico, interna alla superficie interna del conduttore)
La carica racchiusa è quella del punto più quella di tutto il guscio dielettrico:

$$q + q = 2\,q,$$

quindi

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2\,q}{r^2}.$$

(d) $R_{c,1} < r < R_{c,2}$ (all'interno dello spessore del conduttore)
All'interno di un conduttore in equilibrio elettrostatico, il campo è zero:

$$E(r) = 0.$$

(e) $r > R_{c,2}$ (esterna a tutto il sistema)
La carica totale racchiusa è

$$q \;+\; q \;+\; q_c = q + q + 2\,q = 4\,q,$$

quindi

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{4\,q}{r^2}.$$

Riassumendo:

$$E(r) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{q}{r^2}, & 0 < r < R_{d,1}, \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{q}{r^2}\left[1 + \dfrac{r^3 - R_{d,1}^3}{R_{d,2}^3 - R_{d,1}^3}\right], & R_{d,1} < r < R_{d,2}, \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{2\,q}{r^2}, & R_{d,2} < r < R_{c,1}, \\ 0, & R_{c,1} < r < R_{c,2}, \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{4\,q}{r^2}, & r > R_{c,2}. \end{cases}$$

4. Minima velocità $v_{\min}$ per una particella con $q_p < 0$ e massa m_p sulla superficie esterna del conduttore

4.1 Potenziale elettrostatico di riferimento Poniamo $V(\infty) = 0$. L'energia potenziale di una carica $q_p < 0$ in $r = R_{c,2}$ è

$$U(R_{c,2}) = q_p\,V(R_{c,2}).$$

Il potenziale scalare $V(r)$ (per $r \geq R_{c,2}$) corrisponde a un campo $E(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{4\,q}{r^2}$, dunque

$$V(R_{c,2}) = \int_{r=R_{c,2}}^{\infty} E(r)\,dr = \int_{R_{c,2}}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{4\,q}{r^2}\,dr = \frac{4\,q}{4\pi\varepsilon_0}\,\left[\frac{1}{R_{c,2}}\right] = \frac{q}{\pi\varepsilon_0\,R_{c,2}}.$$

Quindi

$$U(R_{c,2}) = q_p\,\frac{q}{\pi\varepsilon_0\,R_{c,2}} = \frac{q\,q_p}{\pi\varepsilon_0\,R_{c,2}}.$$

4.2 Conservazione dell'energia meccanica per la particella Per la particella P_p (carica $q_p < 0$, massa m_p) sulla superficie esterna $r = R_{c,2}$, la condizione minima di fuga ($r \to \infty$) è che l'energia totale iniziale sia non negativa. All'istante iniziale:

$$E_{\text{tot}}(0) = T(0) + U(R_{c,2}) = \frac{1}{2}\,m_p\,v_{\text{min}}^2 \;+\; \frac{q\,q_p}{\pi\varepsilon_0\,R_{c,2}}.$$

Alla distanza infinita $r \to \infty$, l'energia potenziale si annulla $V(\infty) = 0$ e desideriamo che l'energia cinetica residua sia non negativa (per la fuga). Per il caso limite "energia residua zero", imponiamo

$$\frac{1}{2}\,m_p\,v_{\text{min}}^2 + \frac{q\,q_p}{\pi\varepsilon_0\,R_{c,2}} = 0.$$

Da cui

$$\frac{1}{2}\,m_p\,v_{\text{min}}^2 = -\,\frac{q\,q_p}{\pi\varepsilon_0\,R_{c,2}}.$$

Poiché $q_p < 0$ e $q > 0$, il membro destro è positivo. Quindi

$$v_{\text{min}} = \sqrt{\frac{-\,2\,q\,q_p}{\pi\varepsilon_0\,m_p\,R_{c,2}}}.$$

Ricordando $R_{c,2} = 3\,R_{d,2}$, si può anche scrivere

$$v_{\text{min}} = \sqrt{\frac{-\,2\,q\,q_p}{\pi\varepsilon_0\,m_p\,(3\,R_{d,2})}} = \sqrt{\frac{-\,2\,q\,q_p}{3\,\pi\varepsilon_0\,m_p\,R_{d,2}}}.$$

$$\boxed{v_{\text{min}} = \sqrt{\frac{-\,2\,q\,q_p}{3\,\pi\varepsilon_0\,m_p\,R_{d,2}}}.}$$

—