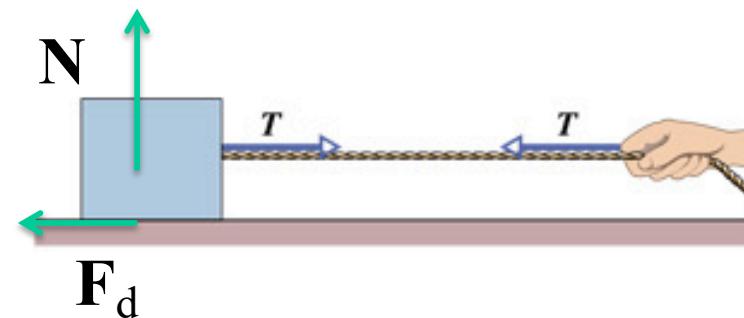
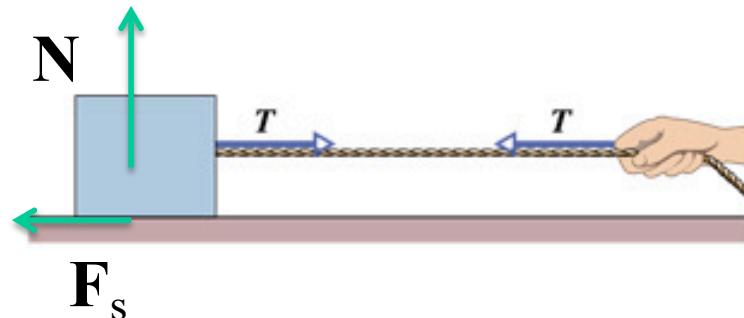


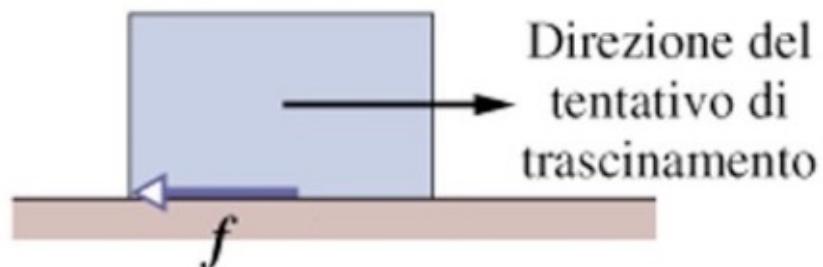
Forze di Contatto: Forza di attrito

- La forza di attrito si esplica parallelamente alle superfici di contatto tra i corpi, si tratta di una interazione, media di interazioni elettromagnetiche tra i punti microscopici, di contatto dei corpi:
 - ❖ La forza ***di attrito si oppone*** al moto dei corpi e resiste fino ad un valore massimo, attrito statico
 - Esempi
auto parcheggiata in salita (attrito gomme asfalto), valigia su nastro trasportatore (la valigia è ferma sul nastro)
 - ❖ Se il corpo si muove su superfici scabre si osserva un moto di ***scivolamento a cui si oppone la forza di attrito*** dinamica diretta nel verso opposto alla velocità relativa fra le superfici.

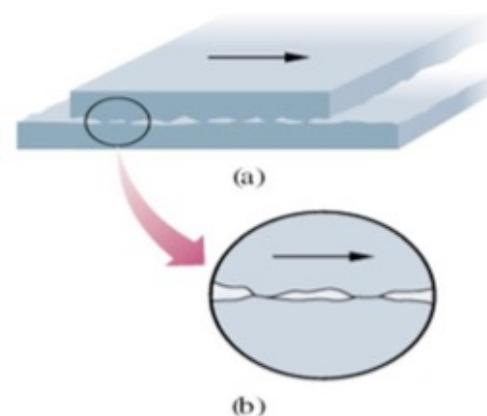
Riassumendo sperimentalmente si osserva che:



Se siamo in equilibrio: $F_s \leq N \mu_s$ Se siamo in moto: $F_d = N \mu_d$



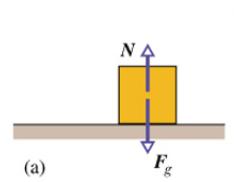
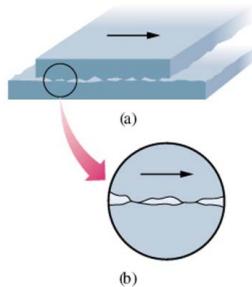
Da un punto di vista microscopico l'attrito è dovuto alle microfusioni che si formano in corrispondenza delle asperità delle due superfici a contatto



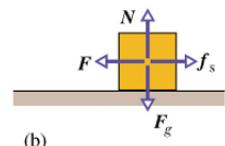
Forza di Attrito Statico

forza necessaria per **mettere in moto**
un corpo di massa M su una superficie k

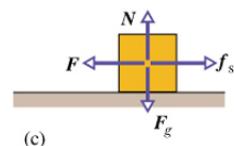
proviene dalla **scabrosità** delle superfici
[coinvolge anche forze elettrostatiche]



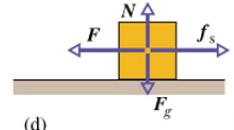
corpo in quiete
non applico nessuna forza.



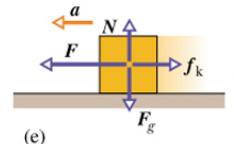
applico forza $F < f_s$
il corpo rimane fermo



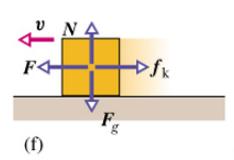
aumento F ma sempre $F < f_s$
il corpo rimane fermo



$F = f_s$
il corpo rimane fermo

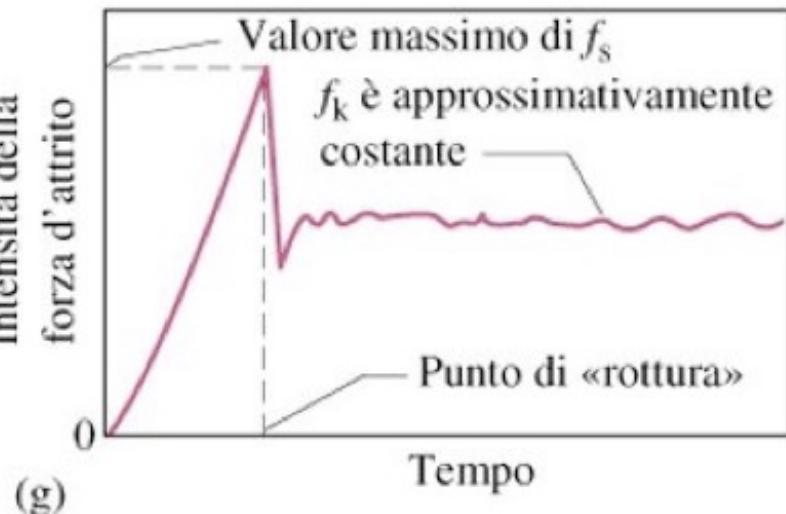


se $F > f_s$
il corpo acquista accelerazione a



velocità
costante

Intensità della
forza d'attrito



per mantenere v costante riduco F :
 $F < F_{\max}$

proprietà attrito

$$f_s \leq \mu_s N$$

$$f_d = \mu_d N$$

μ_s **coefficiente attrito statico**

μ_d **coefficiente attrito dinamico**

- μ_s, μ_d sono numeri (adimensionali)

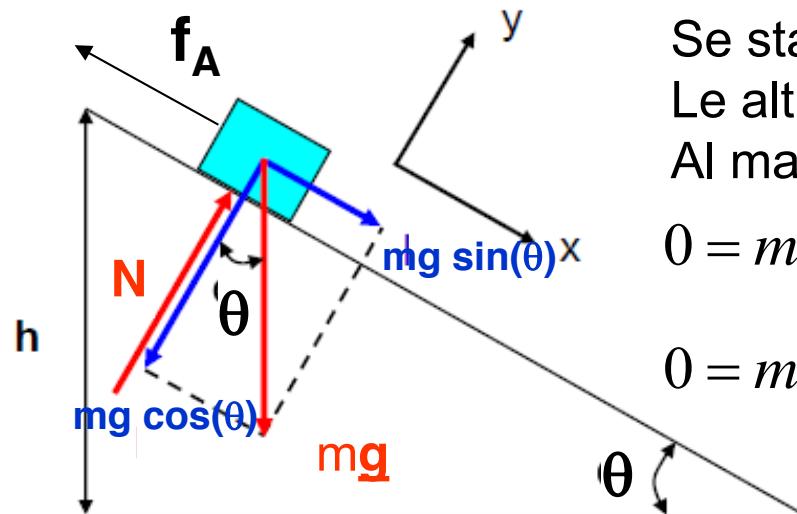
- ✗ μ_s, μ_d dipendono dai **materiali** a contatto $[0.05 < \mu < 1.5]$
- ✗ $\mu_d < \mu_s$
- ✗ μ_s, μ_d **non** dipendono dall'**area** di contatto
- ✗ \vec{f}_s, \vec{f}_d **parallele** alla superficie e **opposte** al moto

coefficienti di attrito

Materiale	Statico	Dinamico o Radente
Acciaio su acciaio	0.74	0.57
Acciaio su acciaio lubrificato	0.11	0.05
Alluminio su acciaio	0.61	0.47
Rame su acciaio	0.53	0.36
Ottone su acciaio	0.51	0.44
Vetro su vetro	0.94	0.40
Rame su vetro	0.68	0.53
Teflon su teflon	0.04	0.04
Teflon su acciaio	0.04	0.04
Acciaio su aria	0.001	0.001
Acciaio su ghiaccio	0.027	0.014
Legno su pietra	0.7	0.3
Gomma su cemento asciutto	0.65	0.5
Gomma su cemento bagnato	0.4	0.35
Gomma su ghiaccio asciutto	0.2	0.15
Gomma su ghiaccio bagnato	0.1	0.08
Grafite su grafite	0.1	
Gomma su asfalto		0.97

Attrito su piano inclinato in discesa

- L'attrito è una forza, quindi va semplicemente inclusa nella somma $\sum \vec{F}$ che appare nella Legge di Newton
- Le regole per l'attrito permettono di determinare la direzione e la grandezza delle forze di attrito



Se statico: corpo non si muove e f_A controbilancia
Le altre forze in modo che la risultante lungo x sia nulla.

Al massimo: $F_{s_max} = \mu_s N$

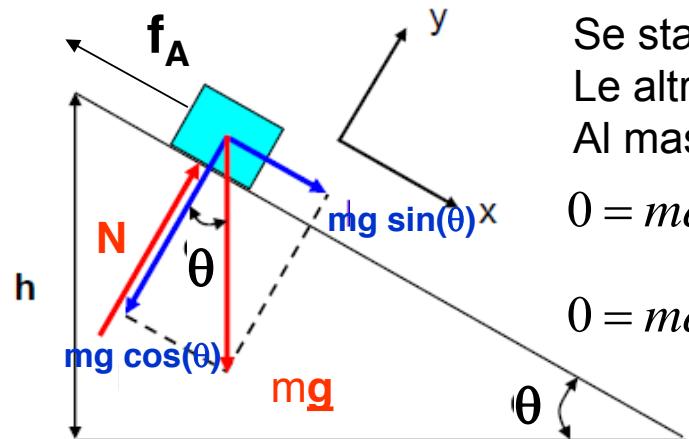
$$0 = ma_y = \left(\sum_i \vec{F}_i \right)_y = N - mg \cos \theta \Rightarrow N = mg \cos \theta$$

$$0 = ma_x = \left(\sum_i \vec{F}_i \right)_x = -F_s + mg \sin \theta \Rightarrow F_s = mg \sin \theta$$

- La pendenza critica corrisponde alla forza massima esplicabile dell'attrito statico al di sopra del quale il corpo si mette in movimento

$$F_{s_max} = \mu_s N = mg \sin \theta_c \Rightarrow \mu_s = \tan \theta_c$$

Piano inclinato corpo in discesa: attrito dinamico



Se statico: corpo non si muove e f_A controbilancia
Le altre forze in modo che la risultante lungo x sia nulla.

Al massimo: $F_{s_max} = \mu_s N$

$$0 = ma_y = \left(\sum_i \vec{F}_i \right)_y = N - mg \cos \theta \Rightarrow N = mg \cos \theta$$

$$0 = ma_x = \left(\sum_i \vec{F}_i \right)_x = -F_s + mg \sin \theta \Rightarrow F_s = mg \sin \theta$$

$$\text{se } mgsin\theta \geq F_{s_max} \quad \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta$$

il corpo scende e l'attrito diviene dinamico

Con attrito dinamico, $f_A = \mu_d N$ e diretta in senso contrario al moto, per una discesa :

$$0 = ma_y = \left(\sum_i \vec{F}_i \right)_y = N - mg \cos \theta \Rightarrow N = mg \cos \theta$$

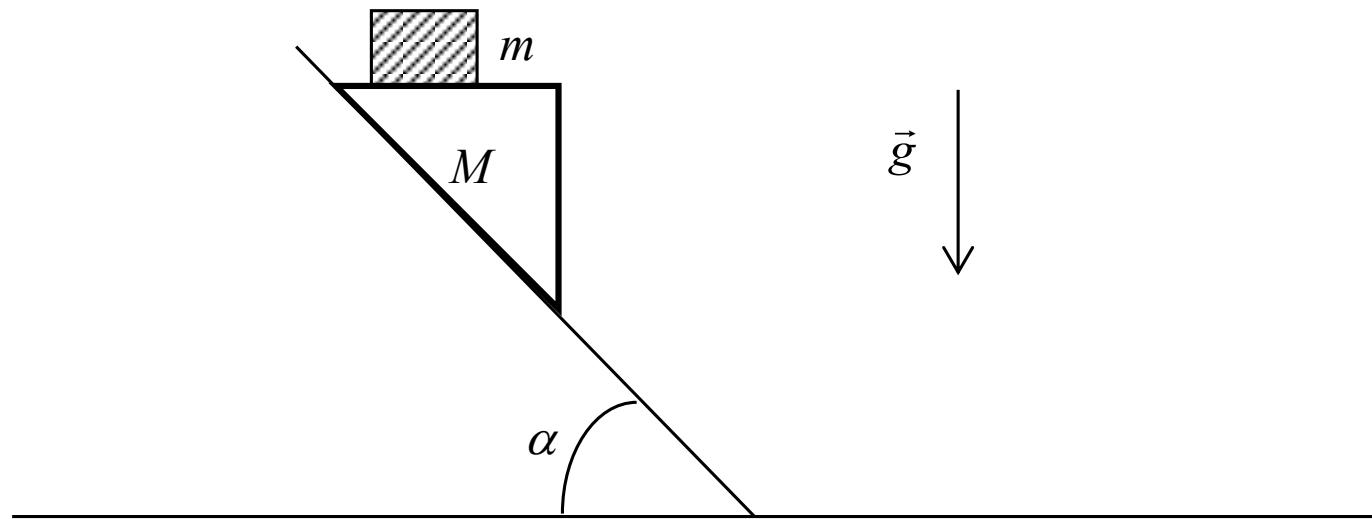
$$\left(\sum_i \vec{F}_i \right)_x = -\mu_d N + mg \sin \theta = -\mu_d mg \cos \theta + mg \sin \theta = ma_x$$

$$a_x = g(\sin \theta - \mu_d \cos \theta)$$

Risultato da paragonare al caso privo di attrito : $a_x = g \sin \theta$

Si consideri il sistema di figura . Il blocco di massa M scivola su un piano inclinato privo di attrito (e fisso) . Il corpo di massa m , a causa dell'attrito , è in equilibrio sul blocco. Sono noti : $\alpha = \pi/4$, $M = 5 \text{ kg}$, $m = 2 \text{ kg}$.

- 1) Calcolare la reazione di M su m .
- 2) Calcolare la reazione del piano inclinato su M

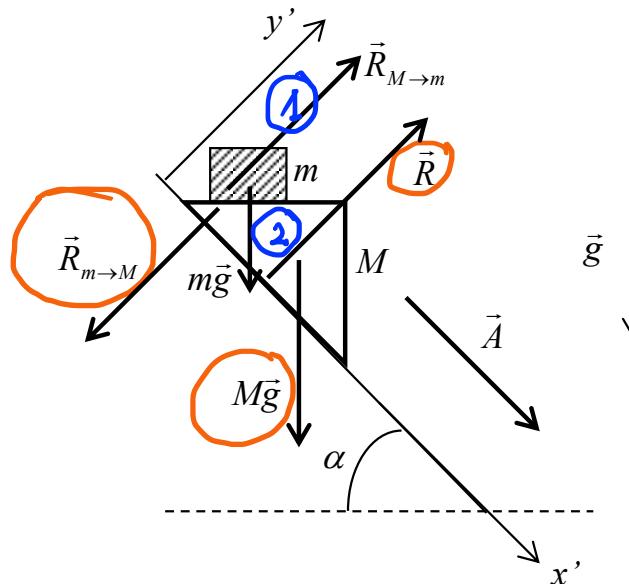


Soluzione

I due corpi possiedono la stessa accelerazione \vec{A} , diretta secondo l'asse x' di figura.

Scriviamo le equazioni di Newton per i due corpi

$$m) \begin{cases} \vec{R}_{M \rightarrow m} + m\vec{g} = m\vec{A} \\ \vec{R}_{m \rightarrow M} + M\vec{g} + \vec{R} = M\vec{A} \end{cases}$$



Passando alle componenti secondo gli assi x' e y' otteniamo

$$\begin{aligned} x') & \begin{cases} R_{M \rightarrow m}^{x'} + mgsina = mA_x & a) \\ R_{m \rightarrow M}^{y'} - mgcosa = 0 & b) \end{cases} \\ y') & \begin{cases} R_{M \rightarrow m}^{y'} + R - Mgcosa = 0 & c) \\ R_{m \rightarrow M}^{x'} + Mgsina = MA_x & d) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x') & \begin{cases} R_{m \rightarrow M}^{x'} + Mgsina = MA_x & c) \\ R_{m \rightarrow M}^{y'} + R - Mgcosa = 0 & d) \end{cases} \end{aligned}$$

Sommando le equazioni a) e c) si ha $A_x = gsina$ e quindi $R_{M \rightarrow m}^{x'} = R_{m \rightarrow M}^{x'} = 0$
(i vettori $\vec{R}_{M \rightarrow m}$ e $\vec{R}_{m \rightarrow M}$ sono quindi perpendicolari al piano inclinato)

Sommando le equazioni b) e d) otteniamo $R = (M + m)gcosa$.

Si ha quindi:

Solo componente \perp al piano \rightarrow

$$\begin{aligned} a) + c) \quad (m+M)g \sin \alpha &= (m+M)A_x \quad \left\{ \begin{array}{l} A_x = g \sin \alpha \\ R = (m+M)g \cos \alpha \end{array} \right. \\ b) + d) \quad R - (m+M)g \cos \alpha &= 0 \end{aligned}$$

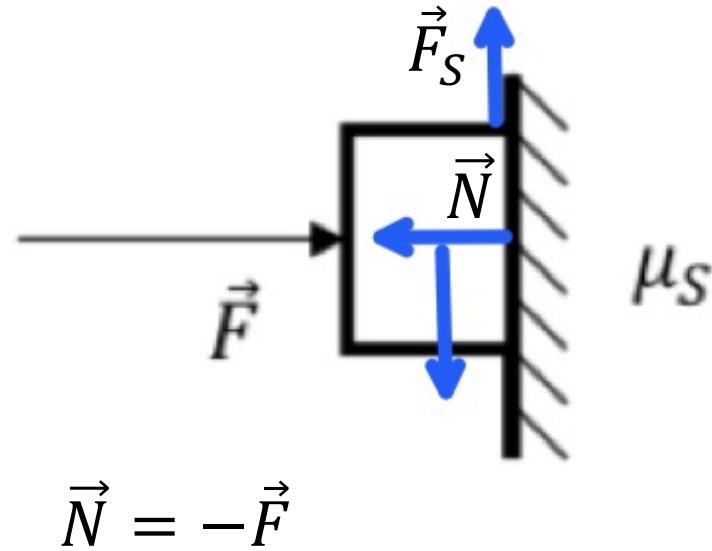
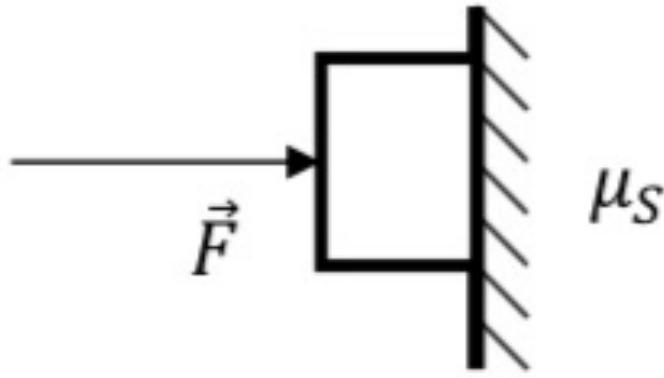
delle a) $R_{M \rightarrow m}^{x'} \perp \alpha = R_{m \rightarrow M}^{x'} = R_{m \rightarrow M}$

delle b) $R_{M \rightarrow m}^{y'} = mg \cos \alpha$

1) $\vec{R}_{M \rightarrow m} = mg \cos \alpha \vec{j}' \approx 14N \vec{j}'$

2) $\vec{R} = (M + m)g \cos \alpha \vec{j}' \approx 49N \vec{j}'$

Esercizio 4). Un blocco (massa $M = 10 \text{ kg}$) è premuto contro una parete verticale con una forza orizzontale \vec{F} . Per quali valori del modulo di \vec{F} il corpo si mantiene in equilibrio se il coefficiente di attrito statico fra parete e corpo è $\mu_s = 0.4$?



$$F_S \leq \mu_s N$$

Soluzione

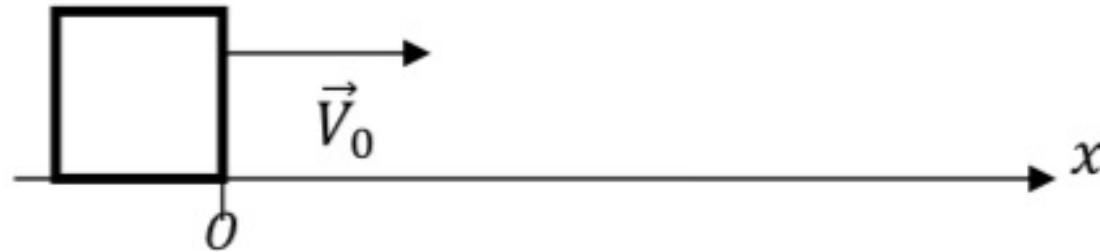
La forza di attrito statico deve equilibrare la gravità

$$\Rightarrow Mg = F_S \leq \mu_s N = \mu_s F$$

$$\text{da cui: } F = |\vec{F}| \geq \frac{Mg}{\mu_s}$$

Esercizio . Al tempo $t = 0$ un corpo viene lanciato su un piano orizzontale con velocità di modulo V_0 .

Calcolare l'istante t^* e la posizione $x(t^*)$ in cui si ferma, se il coefficiente di attrito dinamico fra corpo e piano è μ_D .



Dati e domande

$$V(t=0)=V_0$$

$$\mu_D$$

t^* arresto?

$x(t^*)$?

L'unica forza agente lungo l'asse x è la forza di attrito dinamico, per cui:

$$F_x = ma_x = -\mu_D |N| = -\mu_D mg \Rightarrow a_x = -\mu_D g$$

Integrando l'accelerazione si ottiene la velocità del corpo in funzione del tempo t :

$$V_x = V_0 + \int_0^t a_x(t') dt' = V_0 - \mu_D gt$$

Integrando la velocità si ottiene lo spostamento del corpo in funzione del tempo t :

$$x = x_0 + \int_0^t V_x(t') dt' = 0 + V_0 t - \frac{\mu_D g t^2}{2} = V_0 t - \frac{\mu_D g t^2}{2}$$

il blocco si ferma quando V_x diventa nullo, cioè al tempo: $t^* = \frac{V_0}{\mu_D g}$

La posizione in cui si arresta è quindi:

$$x(t^*) = V_0 t^* - \frac{\mu_D g t^{*2}}{2} = \frac{V_0^2}{\mu_D g} - \frac{\mu_D g}{2} \left(\frac{V_0}{\mu_D g} \right)^2 = \frac{V_0^2}{2\mu_D g}$$

Esercizio. Un corpo assimilabile a un punto materiale di massa M giace su un piano inclinato scabro. Calcolare il valore minimo di μ_s se il corpo inizia a muoversi quando $\theta > 30^\circ$.

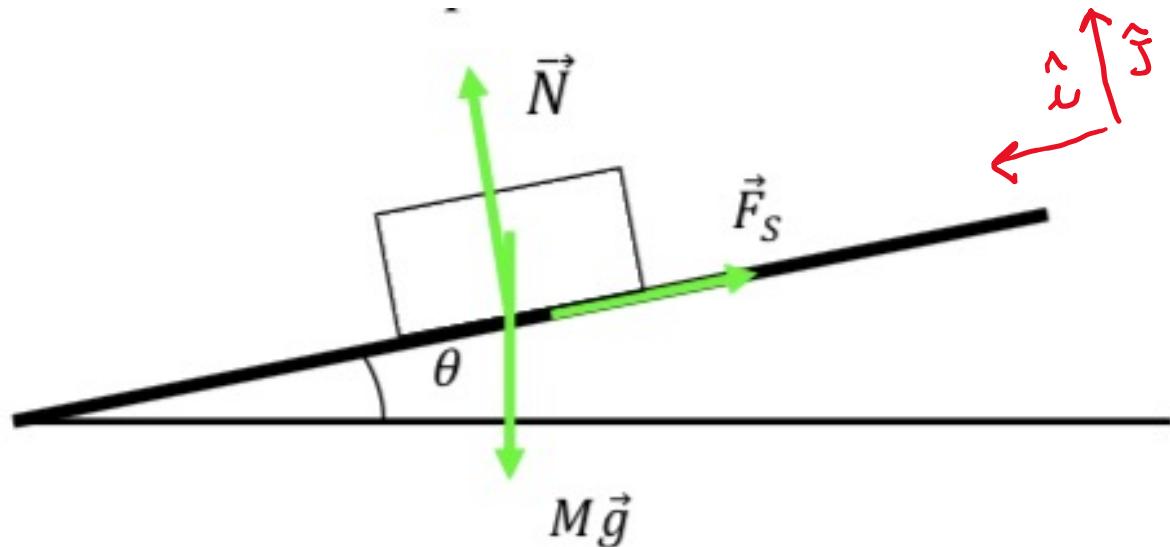
Soluzione.

Per l'equilibrio delle forze:

$$\vec{N} + \vec{F}_S + M\vec{g} = 0$$

proiettando in direzione parallela e perpendicolare al piano inclinato, poichè il corpo è fermo:

$$\Rightarrow \begin{cases} N - Mg \cos \theta = 0 \\ -F_S + Mg \sin \theta = 0 \end{cases}$$



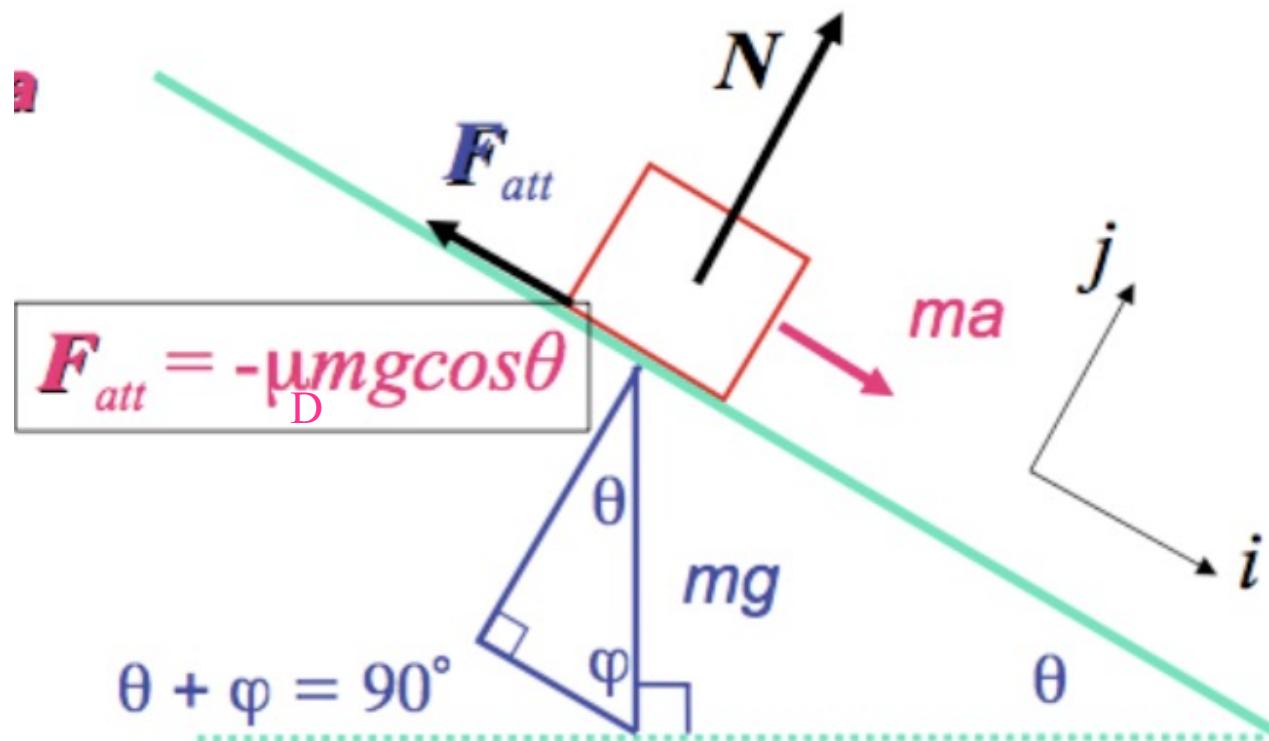
essendo:

$$Mg \sin \theta = F_S \leq \mu_s N = \mu_s Mg \cos \theta . \quad Mg \sin \theta \leq \mu_s Mg \cos \theta$$

si ottiene:

$$\mu_s^{\min} = \tan \theta = 0.577$$

Esercizio. Un blocco di legno (massa $m = 10 \text{ kg}$) assimilabile a un punto materiale, inizialmente fermo su un piano inclinato di un angolo $\theta = 30^\circ$ rispetto ad un piano orizzontale, viene lasciato libero di muoversi al tempo $t = 0$. Fra il blocco ed il piano è presente attrito dinamico, caratterizzato da un coefficiente $\mu_D = 0.2$. Si esprima la velocità del blocco in funzione del tempo $\vec{V}(t)$. Si determini l'accelerazione \vec{a}



Dati e domande

$$m=10 \text{ kg}$$

$$\theta=30^\circ$$

$$\vec{V}(0)=0$$

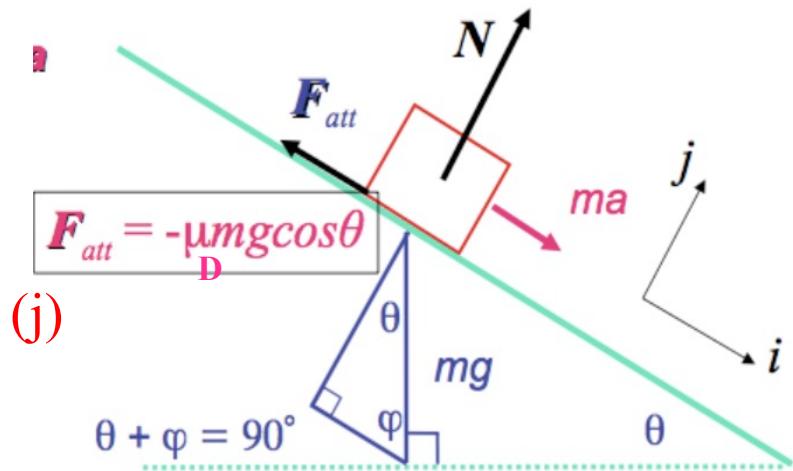
$$\vec{V}(t) ?$$

$$\vec{a}?$$

Soluzione.

Le uniche forze esterne presenti sono la forza di attrito e la forza peso (entrambe lungo x). Parte con V_x e V_y V_z nulle, di conseguenza moto lungo x

$$\vec{V}(t) ? \quad \vec{a}?$$



Per cui il corpo è in moto lungo x (i) e fermo lungo y (j)

Proiezione delle forze

$$\begin{cases} \text{lungo y: } N - mg \cos \theta = 0 = ma_y \\ \text{lungo x: } mg \sin \theta - F_{att} = mg \sin \theta - \mu_D N = mg \sin \theta - \mu_D mg \cos \theta = ma_x \end{cases}$$

Quindi l'accelerazione risultante lungo la direzione del piano è : $a_x = \text{costante} \Rightarrow \text{moto uniformemente accelerato}$

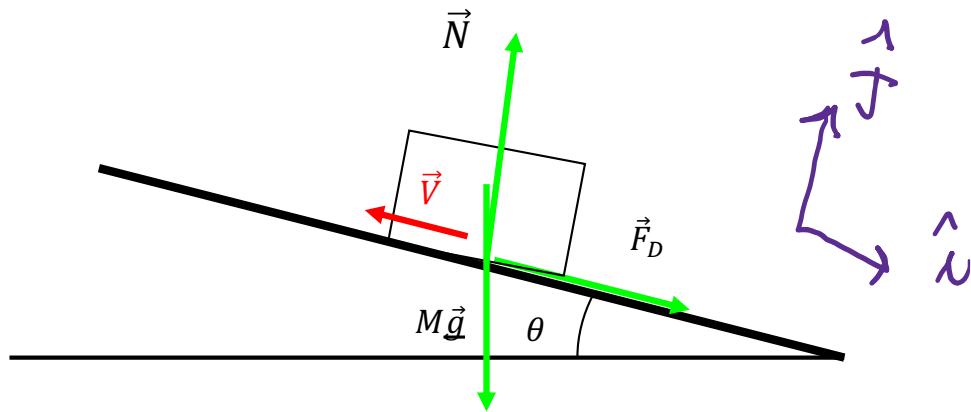
Poiché il blocco parte da fermo ed il moto è uniformemente accelerato si ha:

$$1) V_x = V_x(0) + \int_0^t a_x(t') dt' = 0 + a_x t = g(\sin \theta - \mu_D \cos \theta) t, V_y = 0, V_z = 0$$

per l'accelerazione, sostituendo i valori numerici delle funzioni trigonometriche si ricava:

$$2) a_x = 9.8 \times (0.5 - 0.2 \times 0.866) = 3.2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad a_y = 0, \quad a_z = 0$$

Variazione: come cambia il risultato se il blocco è **lanciato in salita** al tempo $t = 0$ con una velocità 10 m/s ? Con quale velocità ripassa nel punto di partenza ?



Dati e domande

$$m=10 \text{ kg}$$

$$\theta=30^0$$

$$\text{In A } \vec{V}(0) = (-10, 0, 0) \text{ m/s}$$

$\vec{V}(t^*)$ quando ripassa in A?

Soluzione.

Nel moto di salita sia la forza di attrito dinamico che la forza di gravità si oppongono alla salita

Proiezione delle forze

$$\text{lungo y: } N - mg \cos \theta = 0 = ma_y$$

$$\text{lungo x: } mg \sin \theta + F_{\text{att}} = mg \sin \theta + \mu_D N = mg \sin \theta + \mu_D mg \cos \theta = ma_x$$

Quindi l'accelerazione risultante
durante la salita è

$$a_x = a_s = g(\sin \theta + \mu_D \cos \theta)$$

mentre nel moto di discesa la situazione è analoga al caso precedente, per cui

$$a_x = a_d = g(\sin \theta - \mu_D \cos \theta)$$

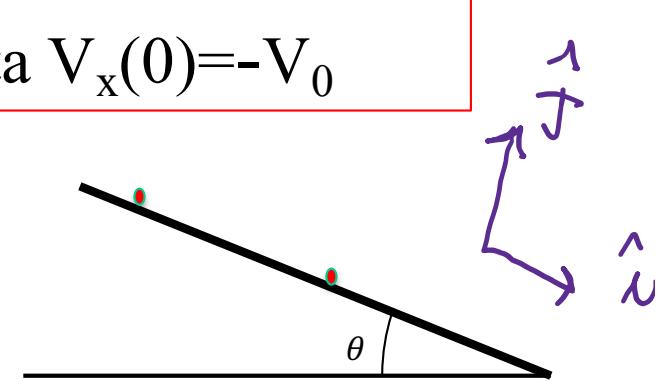
Integrando l'accelerazione otteniamo V_x nel moto di salita

$$1) V_x = V_x(0) + \int_0^t a_x(t') dt' = -V_0 + a_x t$$

Nota $V_x(0) = -V_0$

quando arriva alla quota max

$$\Rightarrow V_x^s = 0 = -V_0 + g(\sin \theta + \mu_D \cos \theta) t_s$$



$$t_s = \frac{V_0}{g(\sin \theta + \mu_D \cos \theta)}$$

la coordinata x al tempo di salita, quando il punto materiale inverte il moto è data da:

$$\begin{aligned}x(t_s) &= x_A - V_0 t_s + \frac{1}{2} g (\sin \theta + \mu_D \cos \theta) t_s^2 = \\&= x_A - V_0 \frac{V_0}{g(\sin \theta + \mu_D \cos \theta)} + \frac{1}{2} g (\sin \theta + \mu_D \cos \theta) \left(\frac{V_0}{g(\sin \theta + \mu_D \cos \theta)} \right)^2\end{aligned}$$

la lunghezza percorsa in salita è $S_s = x(t_s) - x_A = \frac{-V_0^2}{2g(\sin \theta + \mu_D \cos \theta)}$

questa lunghezza corrisponde allo spazio percorso in discesa

$$S_d = x_A - x(t_s) = -S_s = \frac{V_0^2}{2g(\sin \theta + \mu_D \cos \theta)}$$

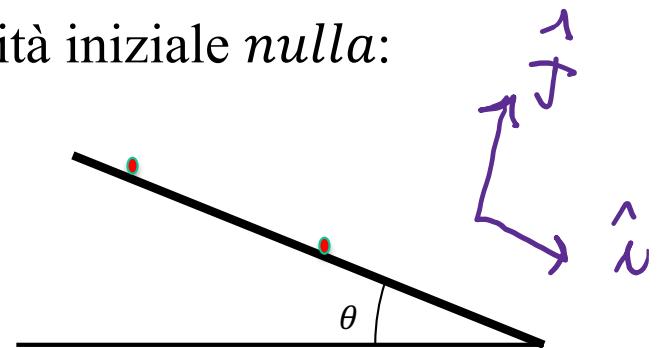
Il moto di discesa è uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla:

$$a_d = g(\sin \theta - \mu_D \cos \theta) \quad V_d = a_d t_d$$

per cui: $S_d = \frac{1}{2} a_d t_d^2 \Rightarrow t_d = \sqrt{\frac{2 S_d}{a_d}}$

La velocità con cui ripassa nel punto di partenza è

$$V_d = a_d t_d = a_d \sqrt{\frac{2 S_d}{a_d}} = \sqrt{2(-S_s)a_d} = V_0 \sqrt{\frac{\sin \theta - \mu_D \cos \theta}{\sin \theta + \mu_D \cos \theta}}$$



Moto in un fluido

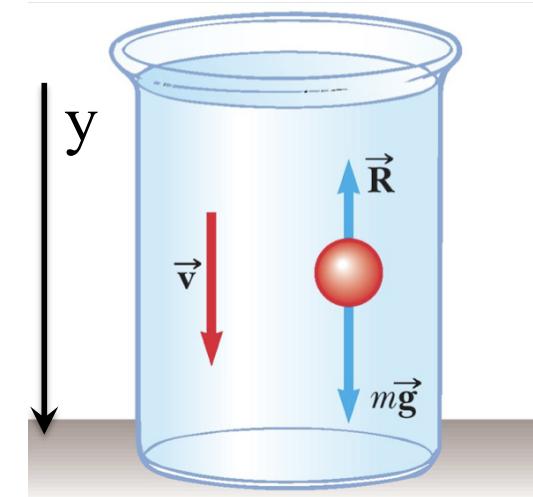
Un fluido (liquido o gas) esercita una forza di resistenza, \vec{R} , su di un oggetto che si muove in esso.

- La direzione di \vec{R} è opposta alla direzione \vec{v} del moto dell'oggetto relativo al fluido.
- Il modulo di \vec{R} dipende dal fluido e dalla forma dell'oggetto
- Il modulo di \vec{R} dipende dalla velocità dell'oggetto in modo complicato:
 - in generale, aumenta per v crescente.
- Caso semplice: R proporzionale a v , ovvero :
$$\vec{R} = b \vec{v}$$
- Basata su di un modello in cui la resistenza è proporzionale al numero di collisioni con gli atomi del fluido, che a sua volta `e proporzionale a v .
 - È una buona approssimazione per moto lento o per oggetti molto piccoli.

Moto in un fluido, esempio $\vec{R} = b\vec{v}$

Caduta di un grave in un fluido, con resistenza proporzionale alla velocità:

$$m \frac{dv}{dt} = -bv + mg \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v + g$$



Si tratta di un'equazione differenziale.

La velocità tende ad un valore finito v_l (velocità limite), alla quale la forza di resistenza uguaglia la forza peso:

l'omogenea associata è: $\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}v$
la cui soluzione è $v(t) = Ae^{-\frac{b}{m}t}$

La soluzione generale si ottiene imponendo la condizione di regime (velocità costante):

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v_l = \frac{mg}{b} \Rightarrow \text{soluzione globale: } v(t) = Ae^{-\frac{b}{m}t} + \frac{mg}{b}$$

Moto in un fluido, esempio $\vec{R} = b\vec{v}$

$$v(t) = Ae^{-\frac{b}{m}t} + \frac{mg}{b}$$

Se ad es. $v(t = 0) = 0$

la soluzione dell'equazione differenziale

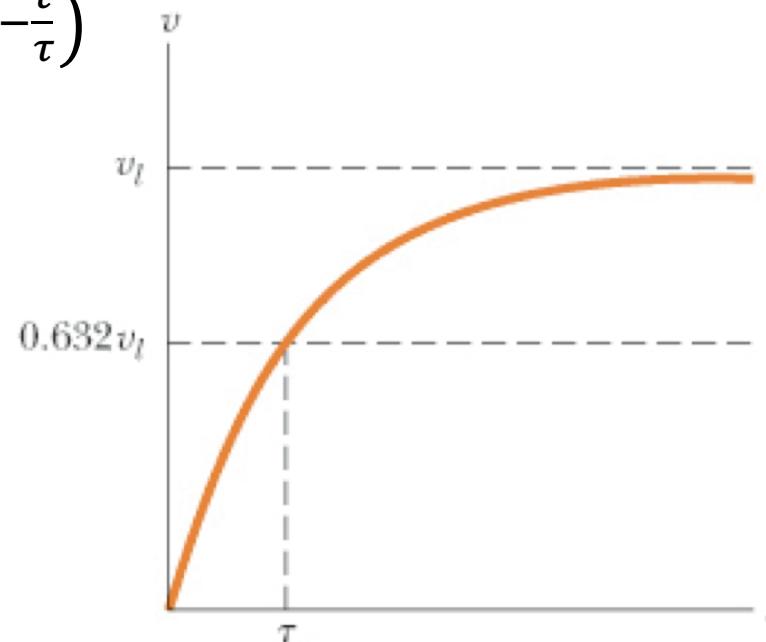
$$\frac{dv}{dt} = a = -\frac{b}{m}v + g$$

ha la forma seguente: $v(t) = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right)$

che si può riscrivere

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ &= v_l \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \end{aligned}$$

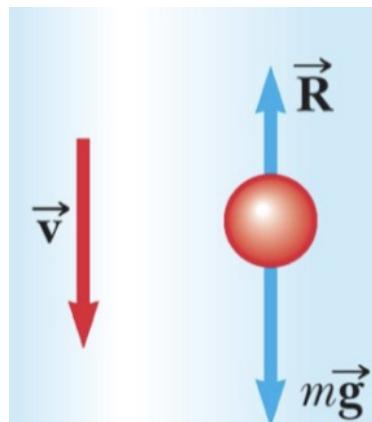
dove $\tau = m/b$ (costante di tempo) ci dà l'ordine di grandezza del tempo necessario per arrivare alla velocità limite.



Caduta di un grave in un fluido, $\vec{R} = b\vec{v}$

Esercizio Al tempo $t = 0$ un corpo sferico di massa $M = 100$ g e raggio $R = 10$ cm viene lasciato libero da fermo in aria. La forza fra corpo ed aria è di tipo viscoso con una costante $\beta = 0.1$ kg/s.

- 1) Esprimere la velocità del corpo in funzione del tempo
- 2) Calcolare il valore della velocità limite raggiunta. In questa domanda si trascuri la spinta di Archimede.



- 1) Esprimere la velocità del corpo in funzione del tempo
Soluzione. 2) Calcolare il valore della velocità limite raggiunta.

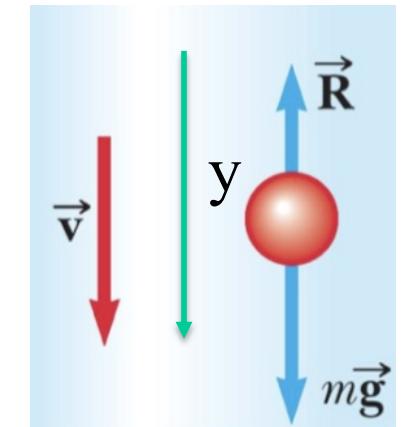
Con un asse y rivolto verso il basso l'equazione del moto è:

$$M \frac{dV}{dt} = -\beta V + Mg \implies \frac{dV}{dt} = -\frac{\beta}{M} V + g$$

l'equazione omogenea associata è

$$\frac{dV}{V} = -\frac{\beta}{M} dt$$

la cui soluzione è: $V(t) = Ae^{-\frac{\beta}{M}t}$



La soluzione della non omogenea si ottiene imponendo la condizione di regime (velocità costante): La velocità tende ad un valore finito V_{lim} (velocità limite), alla quale la forza di resistenza uguaglia la forza peso:

$$\frac{dV}{dt} = 0 = -\beta V_{lim} + Mg \implies R1.2 V_{lim} = \frac{Mg}{\beta} \implies$$

soluzione globale:

$$V(t) = Ae^{-\frac{\beta}{M}t} + \frac{Mg}{\beta}$$

Caduta di un grave in un fluido, con resistenza proporzionale alla velocità

soluzione globale:

$$V(t) = Ae^{-\frac{\beta}{M}t} + \frac{Mg}{\beta}$$

Con la condizione iniziale, di partenza da fermo si ha:

$$V(0) = A + \frac{Mg}{\beta} = 0 \Rightarrow A = -\frac{Mg}{\beta} \Rightarrow R1.1: V(t) = \frac{Mg}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{M}t}\right)$$

Esempio Un'automobile di massa $M = 1000 \text{ kg}$ si muove con una velocità $V_0 = 20 \text{ m/s}$ su una strada orizzontale. Al tempo $t = 0$ il motore dell'auto si spegne e su di essa si esercita solo la forza di attrito viscoso dell'aria $-\beta V_x$. Si calcoli il coefficiente β se la velocità è $V_1 = 10 \text{ m/s}$ al tempo $t_1 = 10 \text{s}$.

$$V_0 = 20 \text{ m/s}$$

$V_1 = 10 \text{ m/s}$ al tempo $t_1 = 10 \text{ s}$.

Si calcoli il coefficiente β

Soluzione.

Il moto dell'auto a motore spento è quello del problema precedente senza la gravità e la spinta archimedea,

per cui lungo l'asse x: $M \frac{dV}{dt} = -\beta V$

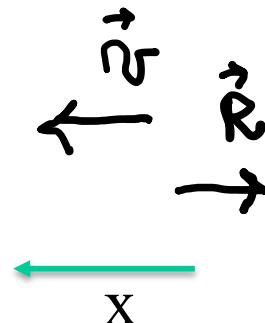
$$\frac{dV}{V} = -\frac{\beta}{M} dt$$

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{\beta}{M} t}$$

$$\text{da cui si ha: } V(t_1) = V_1 = V_0 e^{-\frac{\beta}{M} t_1} \Rightarrow \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = -\ln\left(\frac{V_0}{V_1}\right) = -\frac{\beta}{M} t_1$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{M}{t_1} \ln\left(\frac{V_0}{V_1}\right)$$

Inserendo i valori numerici si ricava: $\beta = 69.3 \text{ kg/s}$



Esercizio Un'automobile di massa $M = 1000 \text{ kg}$ si muove con una velocità $V_0 = 20 \text{ m/s}$ su una strada in discesa con una pendenza del 5%. Al tempo $t = 0$ il motore dell'auto si spegne e su di essa si esercitano la forza di attrito viscoso dell'aria $F_x = -\beta V_x$, con $\beta = 70 \text{ kg/s}$, e la componente della forza di gravità parallela alla strada.

- i) Calcolare la velocità limite che viene raggiunta.
- ii) Esprimere la velocità dell'automobile ad un tempo arbitrario t
- iii) Cosa cambia se la velocità iniziale dell'automobile ha sempre modulo $V_0 = 20 \text{ m/s}$, ma è diretta in salita?





Soluzione.

Equazione del moto lungo x nella discesa:

$$M \frac{dV}{dt} = -\beta V + Mg \sin \theta \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{\beta}{M} V + g \sin \theta$$

dall'equazione omogenea:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{\beta}{M} dt$$

$$V(t) = A e^{-\frac{\beta}{M} t}$$

La soluzione

dell'equazione particolare $\frac{dV}{dt} = 0 = -\beta V_{lim} + Mg \sin \theta \Rightarrow R.i \quad V_{lim} = \frac{Mg \sin \theta}{\beta}$

fornisce:

$$\text{con } \theta = 5\% = 0.05, \text{ essendo } \theta \ll 1 \quad \theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta = 0.05$$

La soluzione di questa equazione, tenendo conto sia dell'omogenea associata che della condizione di regime imposta per la non omogenea, è:

$$V(t) = A e^{-\frac{\beta}{M} t} + \frac{Mg \sin \theta}{\beta}$$

$$V(t) = Ae^{-\frac{\beta}{M}t} + \frac{Mg \sin \theta}{\beta}$$

Con la condizione iniziale $V(0)=V_0$ nota

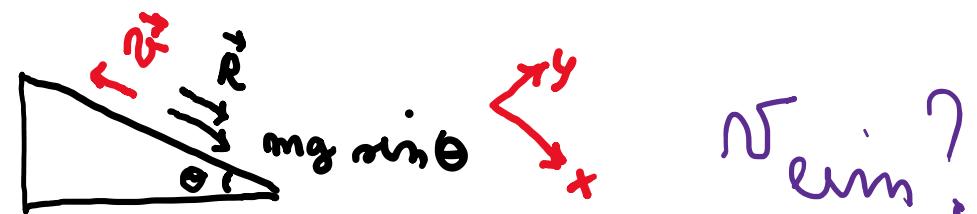
$$V(0) = A + \frac{Mg \sin \theta}{\beta} = V_0 \Rightarrow A = V_0 - \frac{Mg \sin \theta}{\beta}$$

si ricava infine:

$$\text{R.ii } V(t) = \frac{Mg \sin \theta}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{M}t}\right) + V_0 e^{-\frac{\beta}{M}t}$$



Quando il moto viene invertito
Equazione del moto lungo x:



$$M \frac{dV_x}{dt} = -\beta V_x + Mg \sin \theta \Rightarrow \frac{dV_x}{dt} = -\frac{\beta}{M} V_x + g \sin \theta$$

$$\text{R.iii } V_{lim} = \frac{Mg \sin \theta}{\beta}. \quad \text{La velocità limite non cambia!}$$

La soluzione di questa equazione, tenendo conto sia dell'omogenea associata che della condizione di regime imposta per la non omogenea, è:

$$V_x(t) = A e^{-\frac{\beta}{M}t} + \frac{Mg \sin \theta}{\beta}$$

Con la condizione iniziale

$$V_x(0) = A + \frac{Mg \sin \theta}{\beta} = -V_0 \Rightarrow A = -V_0 - \frac{Mg \sin \theta}{\beta}$$



si ricava infine:

$$\text{R.iv } V_x(t) = \frac{Mg \sin \theta}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{M}t} \right) - V_0 e^{-\frac{\beta}{M}t}$$

Esercizio 6)

Una sferetta di massa $m = 1 \text{ kg}$ è lasciata cadere da ferma nel vuoto da un'altezza $h = 2 \text{ m}$ sulla superficie libera di una vasca piena d'acqua. All'interno della vasca la sferetta subisce una forza di attrito viscoso caratterizzabile con un coefficiente $\beta = 10 \text{ kg/s}$ e la profondità dell'acqua è tale che la sferetta raggiunge la velocità limite prima di toccare il fondo.

- 1) Calcolare la velocità V_0 con cui la sferetta giunge a contatto con l'acqua.
- 2) Calcolare la velocità limite V_L della sferetta nell'acqua.
- 3) Scrivere l'equazione del moto della sferetta nell'acqua e determinare l'andamento nel tempo della sua velocità. Rappresentarlo graficamente a partire dall'istante in cui la sferetta viene lasciata cadere.

sferetta $m = 1 \text{ kg}$ $h = 2 \text{ m}$ $\beta = 10 \text{ kg/s}$

V_0 sferetta giunge a contatto con l'acqua?

V_L della sferetta nell'acqua?

Soluzione.

1) Il moto iniziale della sferetta avviene nel vuoto partendo da ferma, per cui è un moto di caduta libera sotto l'azione della forza di gravità .

Applicando le formule del moto uniformemente accelerato o la conservazione dell'energia

$$g \downarrow \quad h = \frac{1}{2} g t^2 \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$
$$v = gt = \sqrt{2gh}$$

si ottiene la nota relazione: $V_0 = \sqrt{2gh} = 6.26 \text{ m/s}$

2) La velocità limite corrisponde alla condizione in cui la forza di gravità è bilanciata dalla forza di attrito viscoso. Pertanto:

$$ma = 0 = mg - \beta V_L \Rightarrow V_L = \frac{mg}{\beta} = 0.98 \text{ m/s}$$

Si noti che la velocità limite è minore di V_0 , cioè della velocità iniziale della sferetta quando inizia il suo moto in acqua.

Equazione del moto della sferetta nell'acqua e andamento nel tempo della sua velocità?

Grafico di $V(t)$ a partire dall'istante in cui la sferetta viene lasciata cadere.

3) L'equazione del moto della sferetta è quella usuale del moto in presenza di attrito viscoso, per cui **la soluzione è per $t > t_0$** :

$$V(t) = \frac{mg}{\beta} + A \exp\left(-\frac{\beta(t-t_0)}{m}\right)$$

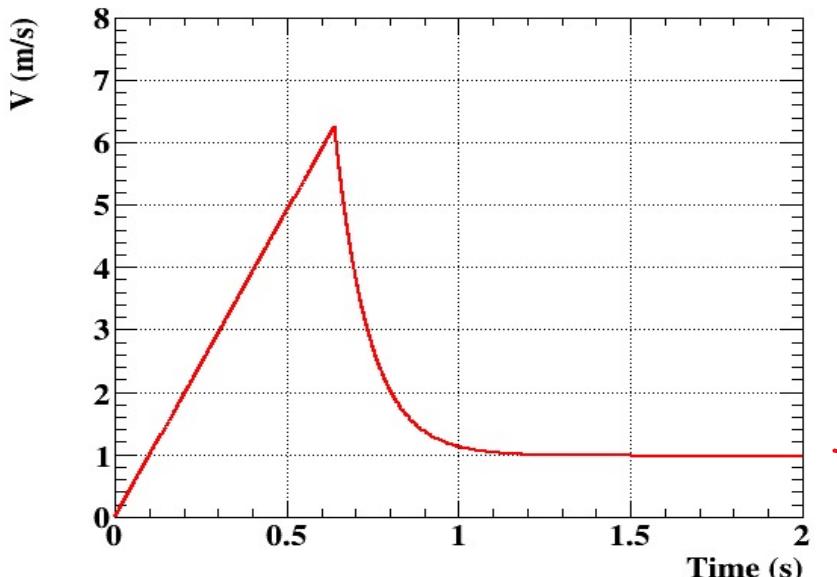
$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

dove A è una costante e t_0 , calcolato nella domanda 1), è l'istante in cui la sferetta entra in contatto con la superficie dell'acqua. Il valore di A si ricava imponendo la condizione iniziale ($V_0 = \sqrt{2gh}$):

$$V(t_0) = \frac{mg}{\beta} + A = V_0 \implies A = V_0 - \frac{mg}{\beta}$$

da cui infine:

$$V(t) = \begin{cases} gt & t < t_0 \\ \frac{mg}{\beta} + \left(V_0 - \frac{mg}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{\beta(t-t_0)}{m}\right) & t > t_0 \end{cases}$$

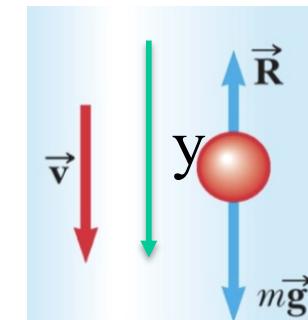


$$t_0 = \sqrt{2h/g}, \quad V_0 = \sqrt{2gh}$$

Moto in un fluido (2)

Per oggetti non piccoli che si muovono a velocità elevate (per esempio: oggetto che cade in aria) la forza resistente R è circa proporzionale a v^2 invece che a v . Si può scrivere

$$R = \frac{1}{2}C\rho Av^2,$$



dove C è un *coefficiente di resistenza aerodinamica*, ρ la densità del fluido, A l'area efficace (della sezione trasversale alla direzione di moto).

$$ma = mg - \frac{1}{2}C\rho Av^2$$

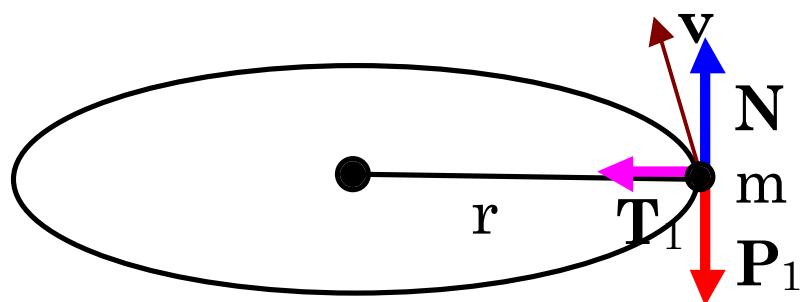
La velocità limite per un corpo che cade liberamente in aria è data dalla relazione

$$mg - \frac{1}{2}C\rho Av_l^2 = 0 \quad \rightarrow \quad v_l = \sqrt{\frac{2mg}{CA\rho}}.$$

L'equazione del moto si può risolvere per *separazione delle variabili*.

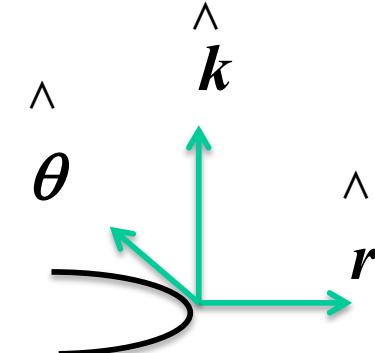
Dinamica del moto circolare: piano orizzontale

- Un punto materiale di massa m si trova su un piano orizzontale liscio ed esegue una traiettoria circolare di raggio r con velocità v costante ed è collegato con un filo (lungo r) al centro della cerchio



$$\vec{T}_1 + \vec{N} + \vec{P}_1 = \vec{ma}$$

Proiettiamo secondo un sistema conveniente misto (r, θ, z) cilindriche



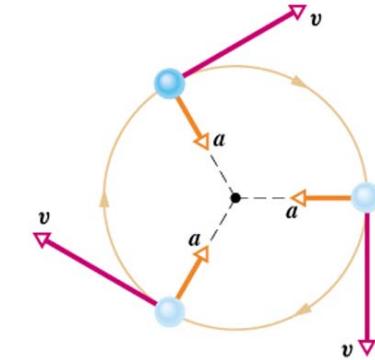
$$\text{Lungo l'asse } r : -T_1 = m a_r = -m v^2/r$$

$$\text{Lungo l'asse } z : N - P_1 = N - mg = ma_z = 0$$

Moto Circolare Uniforme

corpo con:

- ✗ velocità **v** costante in modulo
- ✗ lungo **traiettoria circolare**

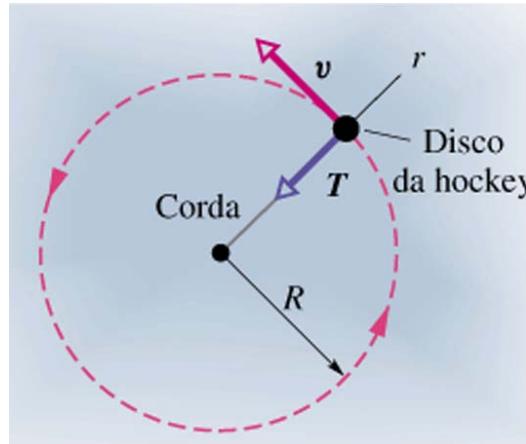


subisce accelerazione **centripeta**:

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

- ✗ diretta verso il **centro** circonferenza
- ✗ sempre **perpendicolare** a **v**

esempio: disco su traiettoria **circolare**

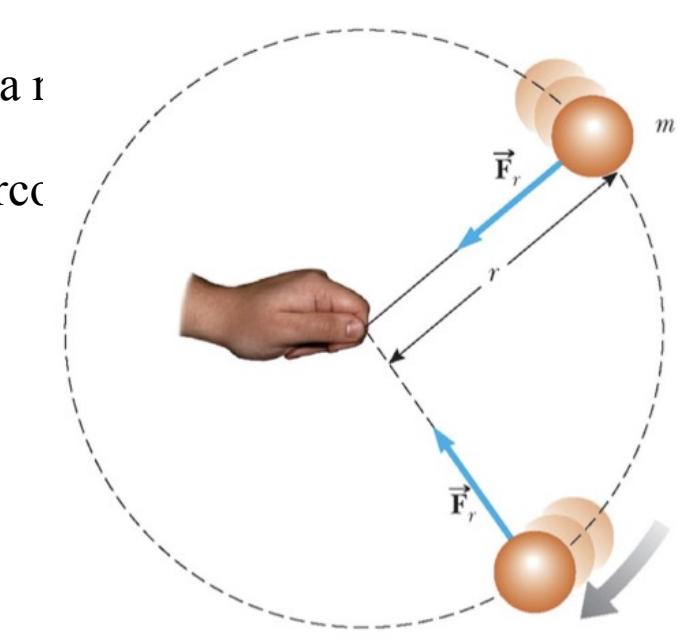


inerzia del disco: moto su linea r
tensione del filo: mantiene traiettoria circolare

$$T = F_r = ma_r = m \frac{v^2}{r}$$

se **rompo** il filo il disco si muove lungo **linea retta** tangente alla circonferenza

[**v** è infatti **costante**]

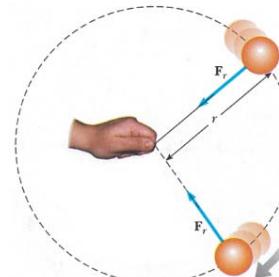


- ▶ la **forza centripeta** **NON** è un **nuovo tipo** di forza
- ▶ è una **qualsiasi forza** che causa una **accelerazione centripeta**

esempi:

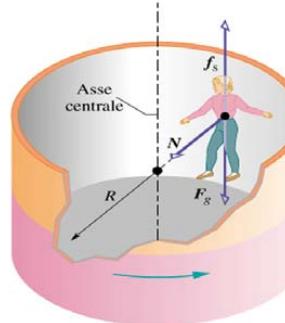
palla trattenuta da un filo

$$\rightarrow \vec{F}_r = \vec{T}$$



rotore del parco dei divertimenti

$$\rightarrow \vec{F}_r = \vec{N}$$

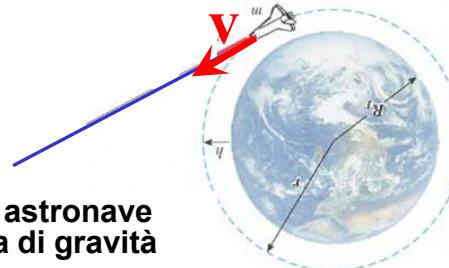


satellite attorno alla terra

$$\rightarrow \vec{F}_r = m\vec{g}$$

$$= m \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} \hat{r}$$

**traiettoria astronave
in assenza di gravità**



Un treno affrontando una curva rallenta da **90.0 km/h** a **50.0 km/h** nei **15.0 secondi** che impiega ad affrontare la curva.

Il raggio della curva è **$r = 150 \text{ m}$** .

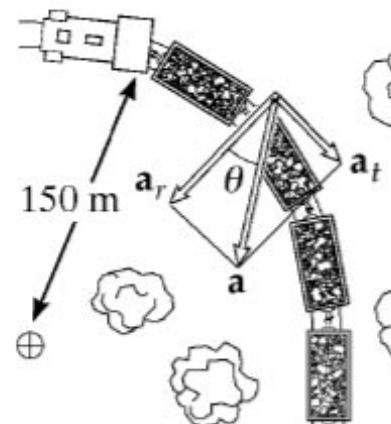
Calcolare l'accelerazione nel momento in cui la velocità del treno è **50.0 km/h**, assumendo che in questo momento il treno continui a decelerare

Convertendo le unità di misura:

$$v_f = 50.0 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 50.0 \frac{10^3 \text{m}}{60 \times 60 \text{s}} = 13.9 \text{m/s}$$

$$v_i = 90.0 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 90.0 \frac{10^3 \text{m}}{60 \times 60 \text{s}} = 25.0 \text{m/s}$$

$$a_c = \frac{v_f^2}{r} = \frac{(13.9 \text{m/s})^2}{150 \text{m}} = 1.29 \text{m/s}^2$$



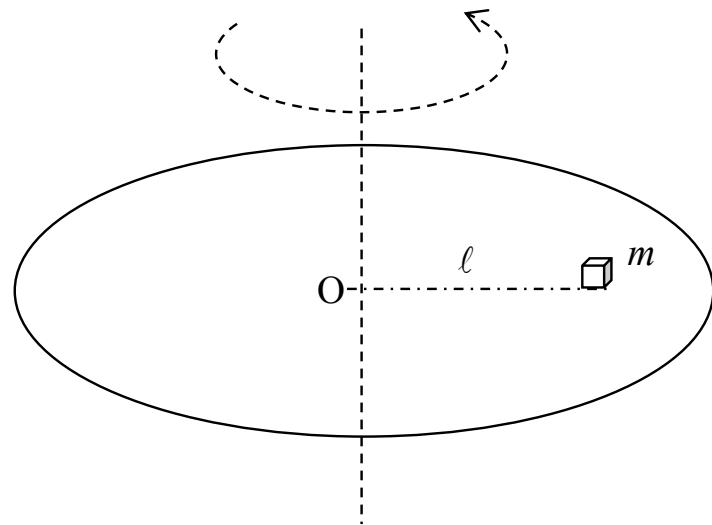
$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(v_f - v_i)}{\Delta t} = \frac{(13.9 - 25.0) \text{m/s}}{15.0 \text{s}} = \frac{-11.1 \text{m/s}}{15.0 \text{s}} = -0.74 \text{m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{(1.29 \text{ m/s}^2)^2 + (-0.741 \text{ m/s}^2)^2} = 1.48 \text{ m/s}^2$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{a_t}{a_r} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{0.74}{1.29} \right) = 29.9^\circ$$

Un corpo di massa m è appoggiato su un disco orizzontale ad una distanza ℓ dal centro. C'è attrito tra il corpo e il disco e sia μ_s il coefficiente di attrito statico. Si mette in rotazione il disco con velocità angolare $\omega = kt$ con k costante intorno al suo centro O.

Dopo quanto tempo il corpo comincia a strisciare sul disco?



Il corpo di massa m , finché rimane in quiete rispetto al disco, si muove di moto circolare: le componenti tangenziale e normale dell'accelerazione sono date dalle relazioni:

$$a_T = \frac{d v_s}{dt} = \frac{d(kt\ell)}{dt} = k\ell \quad , \quad a_N = \omega^2 \ell = (kt)^2 \ell$$

Dall'equazione di moto del corpo:

$\vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{R}^N = m\vec{a}$ seguono le relazioni:

$$\begin{cases} R^N - mg = 0 \\ F_{AT} \equiv \vec{F}_A \cdot \vec{T} = ma_T = mkl \\ F_{AN} \equiv \vec{F}_A \cdot \vec{N} = ma_N = m(kt)^2 \ell \end{cases}$$

Affinché il corpo rimanga in quiete rispetto al disco deve essere soddisfatta la disequazione

$$|\vec{F}_A| \leq \mu_s R^N \text{ e cioè}$$

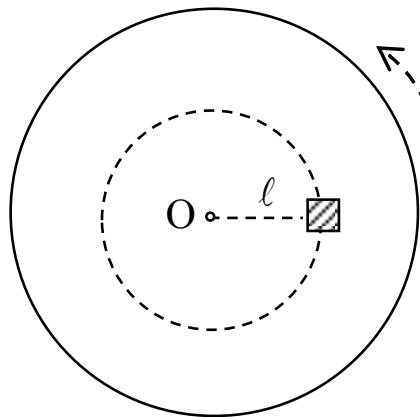
$$\sqrt{(mkl)^2 + (m(kt)^2 \ell)^2} \leq \mu_s R_N = \mu_s mg$$

Il corpo quindi non striscia sul disco finché si ha:

$$k\ell \sqrt{1+k^2 t^4} \leq \mu_s g$$

Il corpo quindi non striscia sul disco finché si ha:

$$k\ell \sqrt{1+k^2 t^4} \leq \mu_s g$$



$$\omega = kt$$

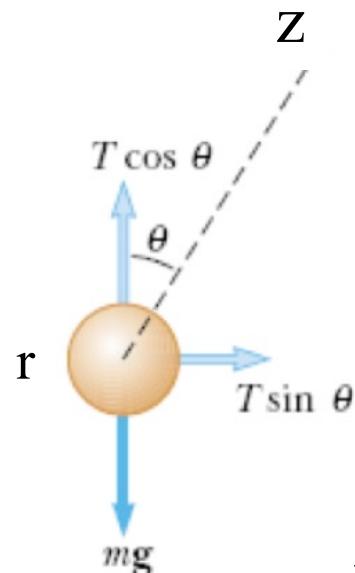
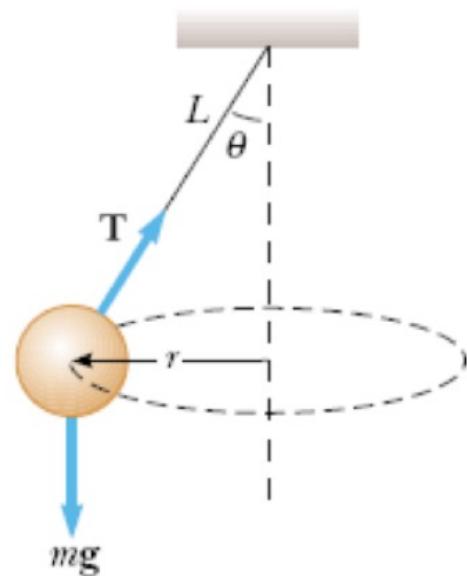
$$N = kt \ell$$

$$\alpha_H = \omega^2 \ell$$

Dopo quanto tempo inizia a strisciare?

Pendolo conico

- Uno dei vostri passatempi preferiti....
- La giostra si muove con velocità angolare costante



$$\begin{cases} ma_z = 0 = T \cos \theta - mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos \theta} \\ ma_r = -m\omega^2 r = -T \sin \theta \end{cases}$$

$$r = L \sin \theta$$

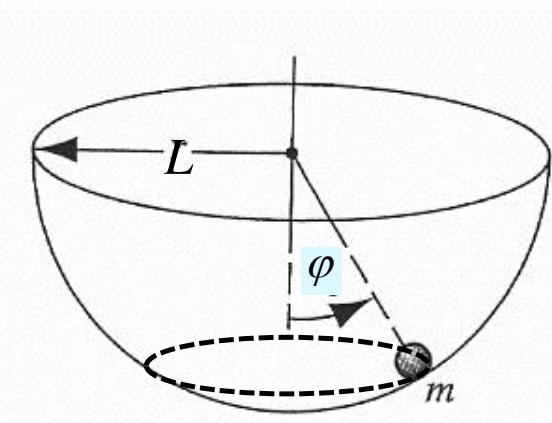
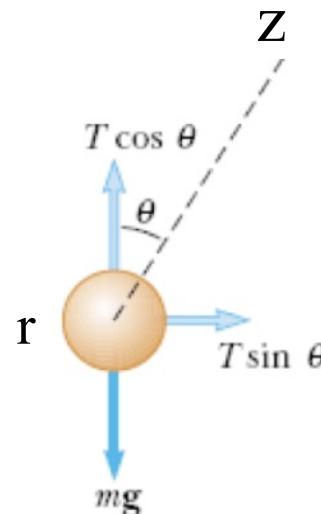
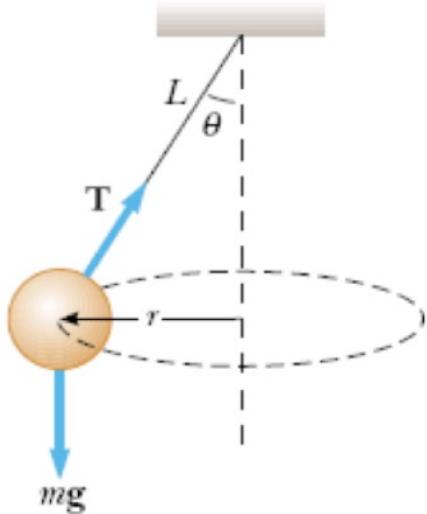
$$m\omega^2 L \sin \theta = T \sin \theta \quad \Rightarrow T = m\omega^2 L$$

$$\Rightarrow m\omega^2 L = \frac{mg}{\cos \theta}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L \cos \theta}}$$

Conca sferica

- Un punto materiale di massa m esegue una traiettoria circolare di raggio R all'interno di una conca sferica di raggio L



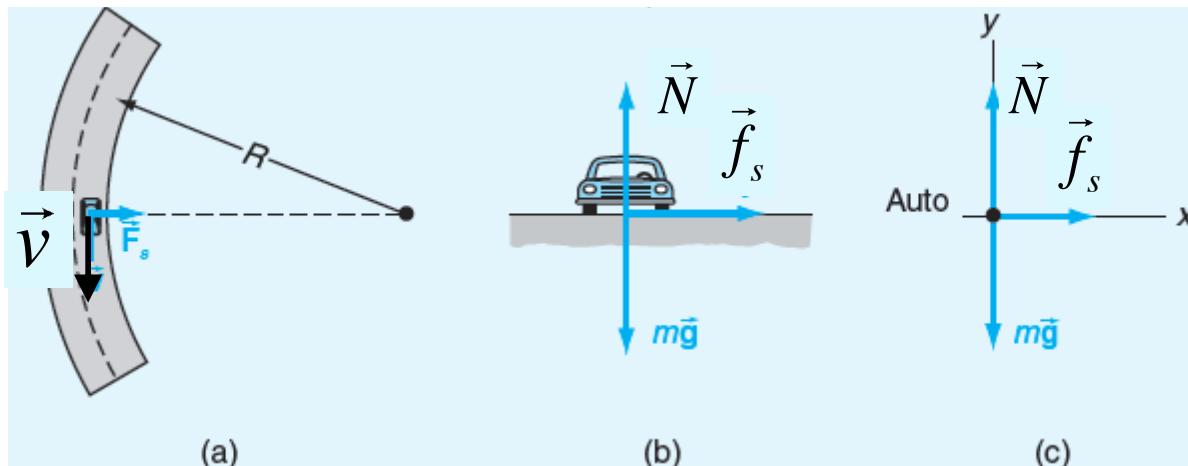
$$\begin{cases} ma_z = 0 = N \cos \varphi - mg \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos \varphi} \\ ma_R = -m \frac{v^2}{R} = -N \sin \varphi \Rightarrow m \frac{v^2}{R} = m \omega^2 R = m \omega^2 L \sin \varphi = N \sin \varphi \end{cases}$$

$$N = m \omega^2 L = \frac{mg}{\cos \varphi}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L \cos \varphi}}$$

Attrito e traiettorie circolari: auto su curva orizzontale (piatta)

Auto o slitta in una curva piana (approssimabile con un arco di cerchio) percorsa a velocità con modulo costante. L'accelerazione è diretta verso il centro. L'auto è mantenuta nella sua traiettoria dalla forza di attrito statico (in direzione \perp al moto) dovuto ai pneumatici o ai pattini (nel caso della slitta). La forza di attrito statico è diretta verso il centro (infatti in sua assenza si «sbanda», si va verso l'esterno)



$$\begin{aligned}-f_s &= ma_R = -m \frac{v^2}{R} \\ \Rightarrow f_s &= m \frac{v^2}{R}\end{aligned}$$

$$f_s \leq f_{s\max} = \mu_s N$$

Se l'auto (slitta) percorre la curva senza sbandare deve essere soddisfatta la condizione

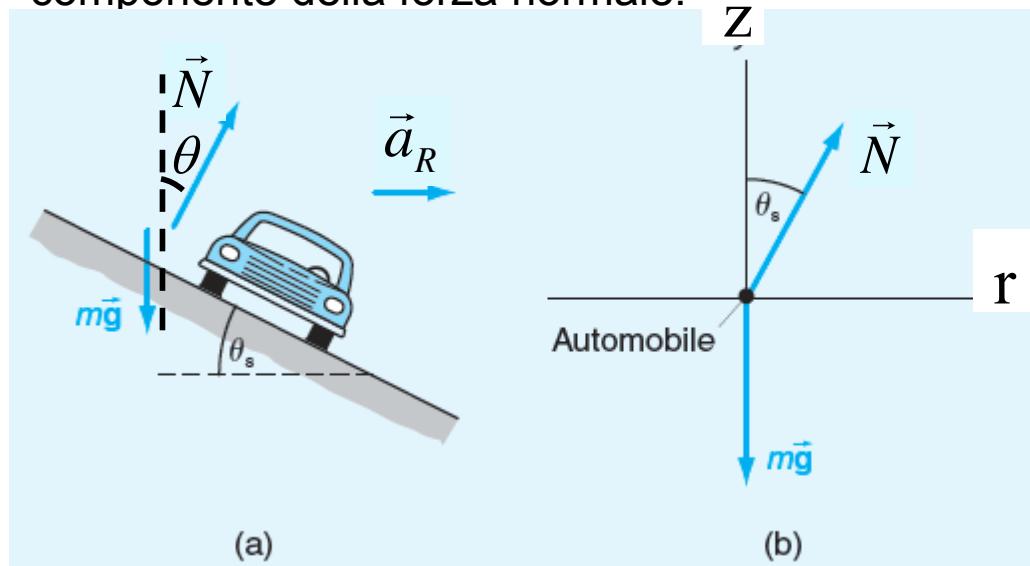
$$m \frac{v^2}{R} \leq \mu_s mg \quad \longrightarrow \quad v \leq v_{\max} = \sqrt{\mu_s g R}$$

Se il raggio di curvatura è piccolo la v_{\max} deve essere ridotta

Curva soprelevata senza attrito

Auto o slitta (bob) in una curva sopraelevata senza attrito. Entra nella curva con una velocità v e percorre la curva a velocità con modulo costante.

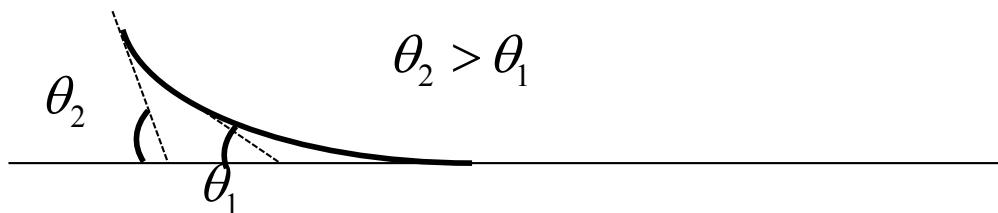
L'accelerazione è diretta verso il centro. L'auto è mantenuta nella sua traiettoria dalla componente della forza normale.



$$\begin{cases} ma_z = 0 = N \cos \theta - mg \\ ma_R = -m \frac{v^2}{R} = -N \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \frac{N \sin \theta}{N \cos \theta} = \frac{mv^2}{Rmg} = \frac{v^2}{Rg}$$

$$\tan \theta = \frac{v^2}{Rg}; \quad \theta = \operatorname{atg} \left(\frac{v^2}{Rg} \right)$$

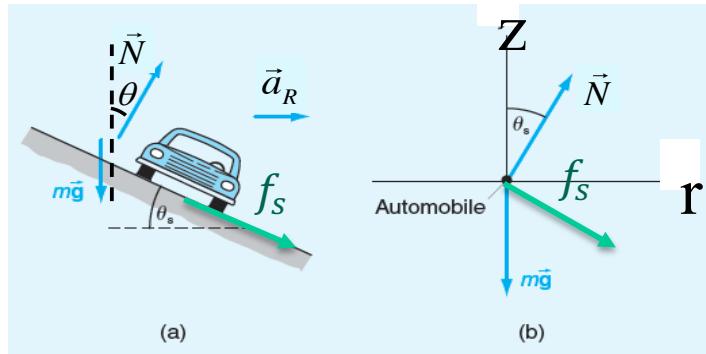
L'angolo giusto per non scendere dipende dalla velocità, per questo motivo nelle piste da Bob o slittino la pendenza varia a seconda della velocità. Posizionandosi più in alto o più in basso si trova la condizione giusta per percorrenza.



Curva soprelevata con attrito

Auto o slitta (bob) in una curva sopraelevata con attrito. Oltre alla componente della forza normale c'è anche l'attrito statico.

$$\begin{cases} \sum_i F_{zi} = ma_z = 0 = N \cos \theta - mg - f_s \sin \theta \\ \sum_i F_{Ri} = ma_R = -m \frac{v^2}{R} = -f_s \cos \theta - N \sin \theta \end{cases} \quad f_s \leq f_{s\max} = \mu_s N$$



In condizioni limite $f_s = \mu_s N$: si possono trovare le condizioni che permettono di percorrere la curva alla velocità massima.

$$\begin{cases} mg = N(\cos \theta - \mu_s \sin \theta) \\ m \frac{v_{\max}^2}{R} = N(\sin \theta + \mu_s \cos \theta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} m \frac{v_{\max}^2}{R} &= mg \frac{\sin \theta + \mu_s \cos \theta}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta} \\ \Rightarrow v_{\max}^2 &= gR \frac{\tan \theta + \mu_s}{1 - \mu_s \tan \theta} \end{aligned}$$

Nel rotore del Luna Park una persona viene fatta ruotare molto velocemente dentro un cilindro. La persona rimane bloccata contro la parete quando il pavimento del cilindro viene aperto.

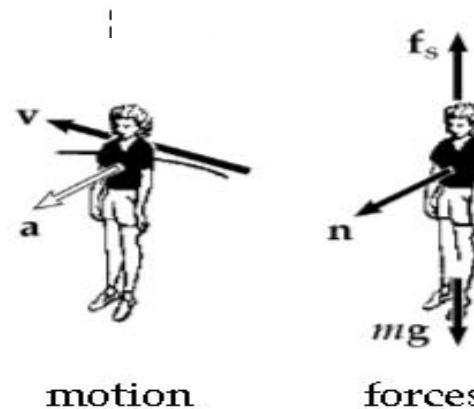
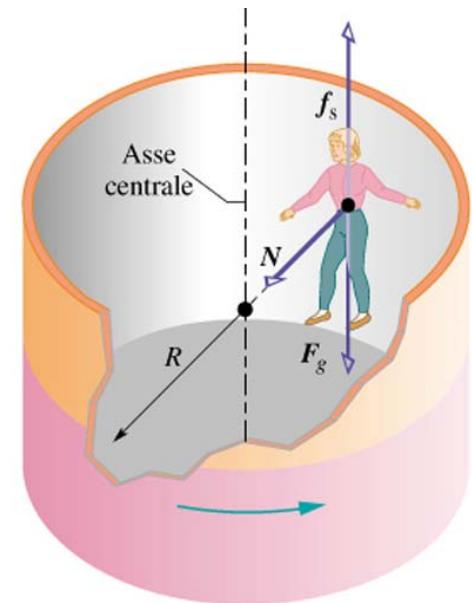
Il coefficiente di attrito statico tra la persona e la parete è μ_s ed il raggio del cilindro è R .

a) determinare il massimo periodo di rotazione necessario perché la persona non cada.

b) dare un valore numerico per

$$T \text{ se } R=4.00\text{m e } \mu_s = 0.400.$$

Quanti giri al minuto deve compiere il cilindro?



$$(a) n = \frac{mv^2}{R} \quad f - mg = 0$$

$$n = \sqrt{\frac{nR}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s} R}$$

$$T = \frac{2\pi R}{n} \Rightarrow \sqrt{\frac{4\pi^2 R}{g} \mu_s}$$

$$\Rightarrow f_{\max} - mg = 0 \quad \max$$

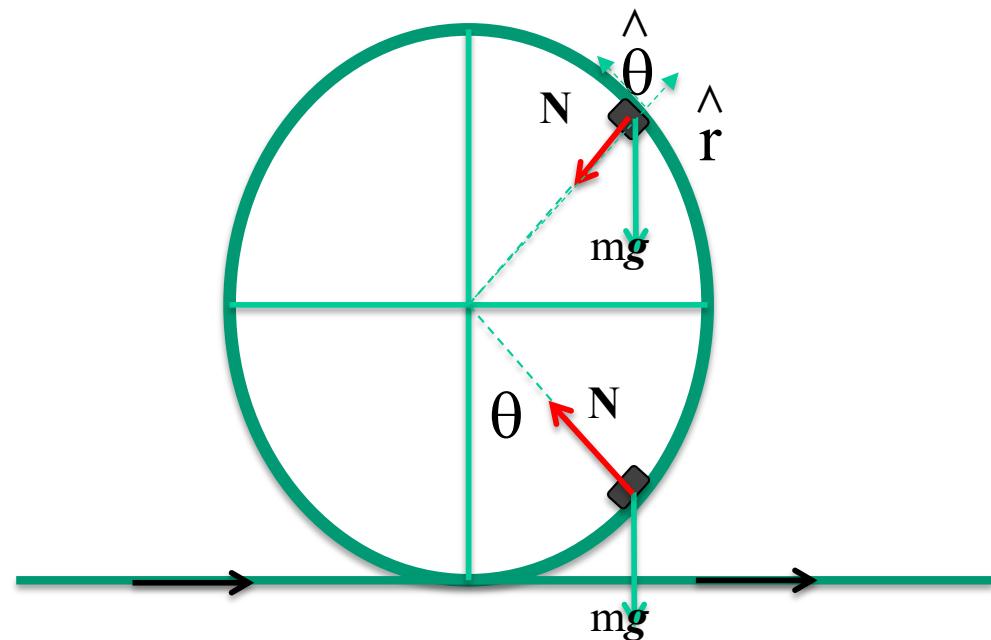
$$\Rightarrow n\mu_s - mg = 0 \Rightarrow n = \frac{mg}{\mu_s}$$

$$(b) T = 2.54 \text{ s}$$

$$n = \frac{1 \text{ rev}}{2.54 \text{ s}} \left(\frac{60 \text{ s}}{\text{min}} \right) = 23.6 \text{ rev/min}$$

Giro della morte

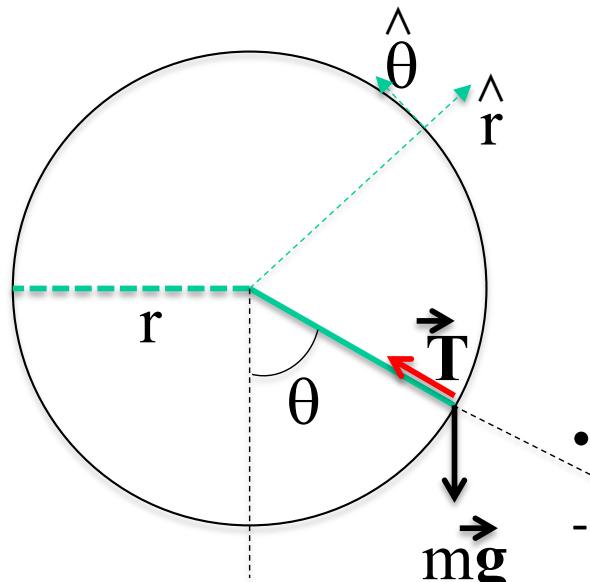
- Uno dei vostri passatempi preferiti....



Dinamica del moto circolare: piano verticale

- Questo moto è più complicato: un punto materiale di massa m legato ad un filo lungo r esegue una traiettoria circolare (verso anti orario sul piano verticale), ci troviamo nei pressi della superficie terrestre

$$\vec{T} + \vec{mg} = \vec{ma}$$



Proiettiamo secondo un sistema conveniente (r, θ) polari
il moto avviene nel piano verticale

$$\text{Lungo l'asse } r : -T + mg \cos \theta = m a_r = -m v^2/r$$

$$\text{Lungo l'asse } \theta : -mg \sin \theta = m a_\theta = m dv/dt$$

- è un moto circolare vario
- ci aspettiamo una accelerazione tangenziale e che la velocità nell'arco di risalita (θ che va da 0 a π) diminuisce.

Quando è possibile un moto circolare completo (filo esteso in tutti gli istanti) ?

Dinamica del moto circolare: piano verticale

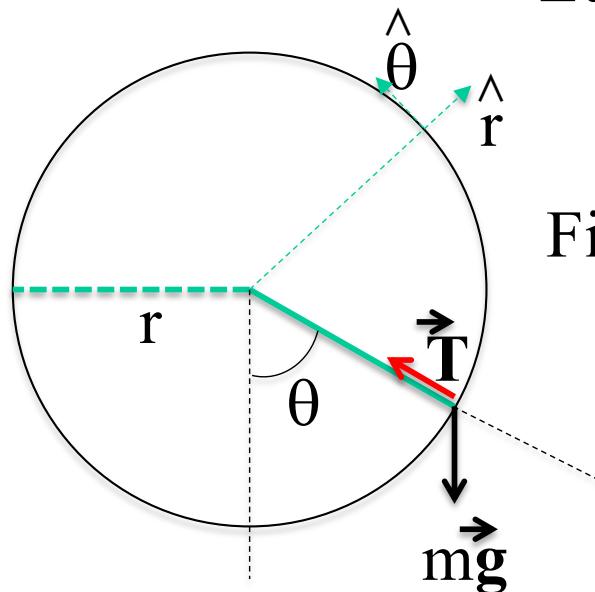
$$\vec{T} + \vec{mg} = \vec{ma}$$

Lungo l'asse r : $-T + mg \cos \theta = m a_r = -m v^2/r$

$$T = mg \cos \theta + m v^2/r$$

Filo sempre esteso implica $T = mg \cos \theta + m v^2/r \geq 0$

Condizione sulla velocità scalare nella traiettoria

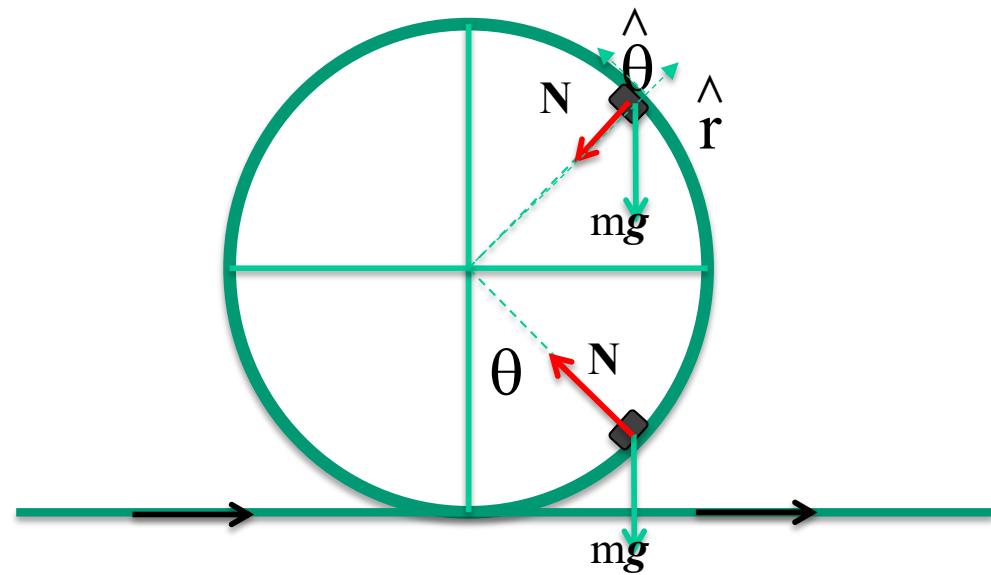


$$mg \cos \theta + m v^2/r \geq 0 \Rightarrow v^2/r \geq -g \cos \theta$$

$$a \theta = \pi \quad v_{min} = \sqrt[2]{gr}$$

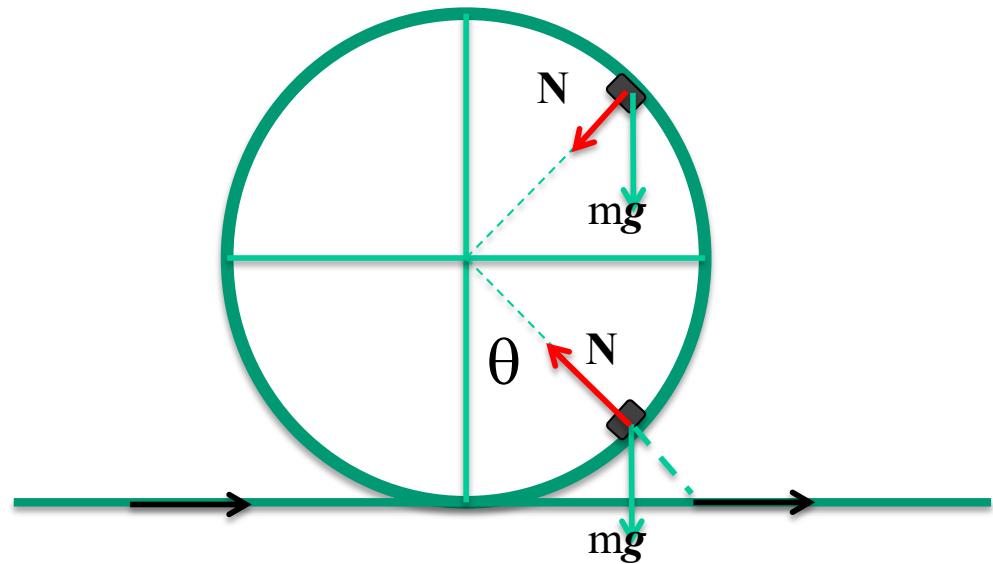
Giro della morte

- Uno dei vostri passatempi preferiti....



Giro della morte

- Uno dei vostri passatempi preferiti....



$$ma_R = -N + mg \cos \theta = -m \frac{v^2}{R}$$

Sulla sommità avremo: $-N - mg = -m \frac{v_{\text{sommità}}^2}{R} \Rightarrow N = m \frac{v_{\text{sommità}}^2}{R} - mg$

Se voglio che il corpo sia in contatto $N \geq 0 \Rightarrow m \frac{v_{\text{sommità}}^2}{R} - mg > 0 \Rightarrow v_{\min} = \sqrt{gR}$

Ordini di grandezza

velocità

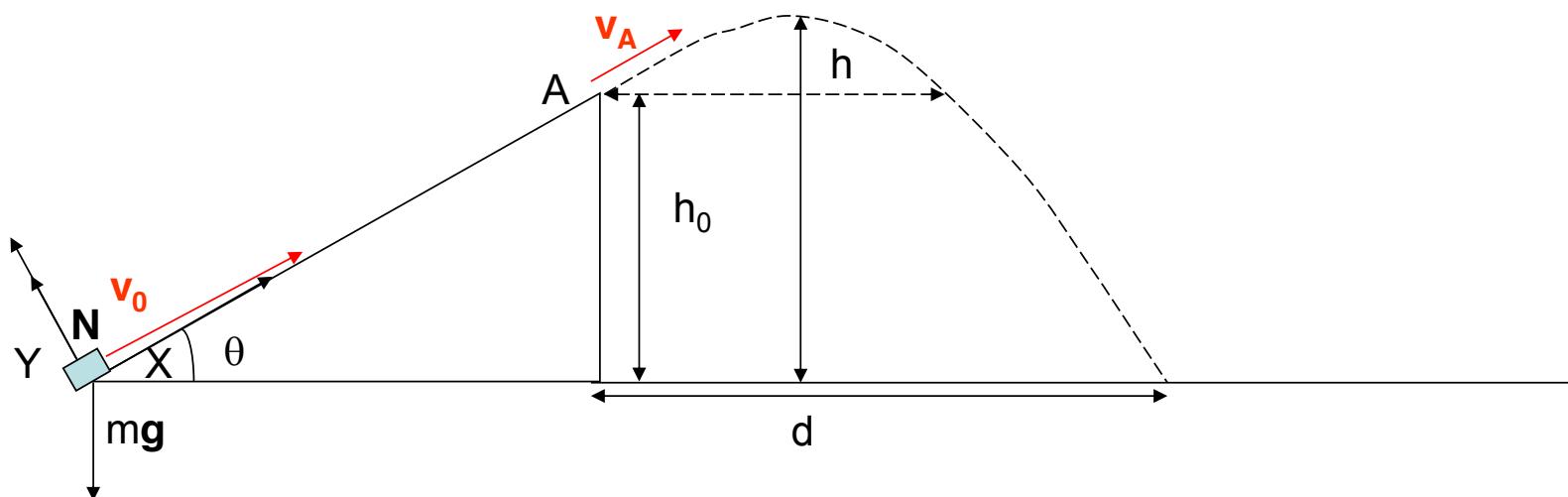
luce nel vuoto	$300\ 000 \text{ km/s} = 3\ 10^8 \text{ m/s}$
suono (in aria)	330 m/s
(in acqua)	1493 m/s
aereo (record NASA)	$7 v_{\text{suono}} \approx 2310 \text{ m/s}$
aereo di linea	800 km/h = 222 m/s
auto in città	30 km/h = 8.3 m/s
a piedi	2 m/s
paracadutista (caduta libera)	50 km/h = 65 m/s
cavallo al galoppo	250 m/min = 4.2 m/s
palla da baseball.....	40 m/s

accelerazione

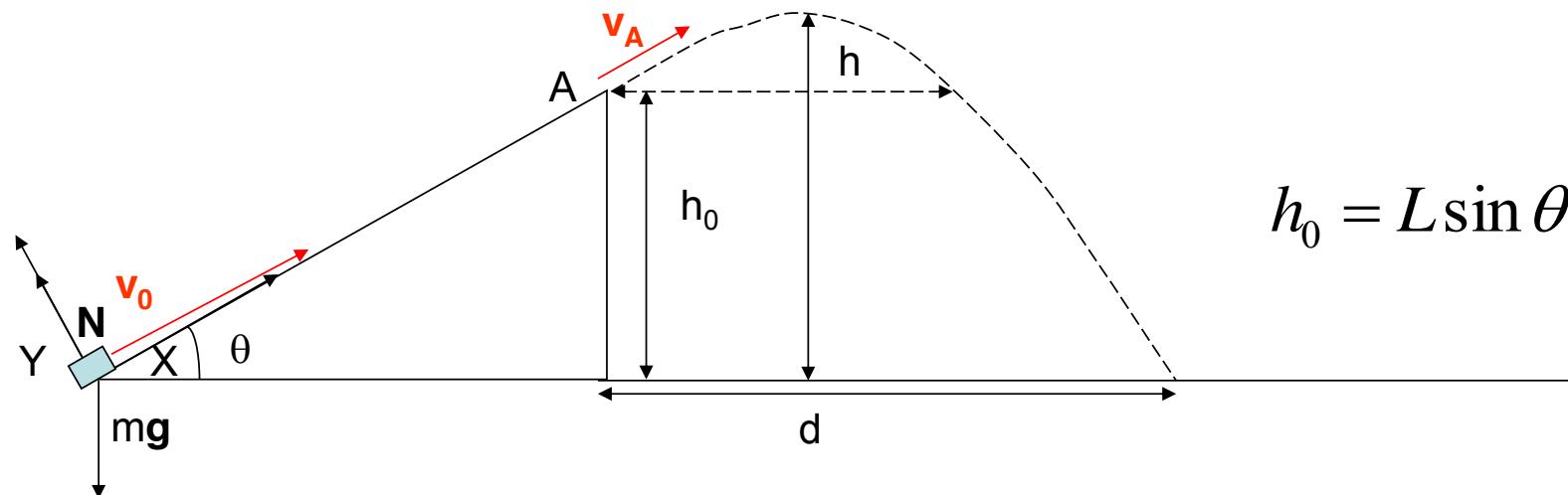
gravità g_{Terra}	9.8 m/s^2
gravità g_{Luna}	1.7 m/s^2
a_c centripeta Terra (attorno asse)	$3.37\ 10^{-2} \text{ m/s}^2$
a_c centripeta Terra (attorno Sole)	$4.4\ 10^{-3} \text{ m/s}^2$
treno.....	1.2 m/s ²
auto.....	4 m/s ²
(da 0 a 100 km/h in 7 sec)	
palla da baseball 100 g.....	$\approx 10^4 \text{ m/s}^2$

Trampolino

- Uno sciatore risale un trampolino prima di eseguire il salto.
- Il moto si risolve immaginandolo come composto di due fasi:
 1. moto sul piano inclinato, in cui agiscono peso e vincolo
 - Sino al punto A
 2. moto parabolico, in presenza della sola forza peso
 - Dal punto A in poi



Trampolino



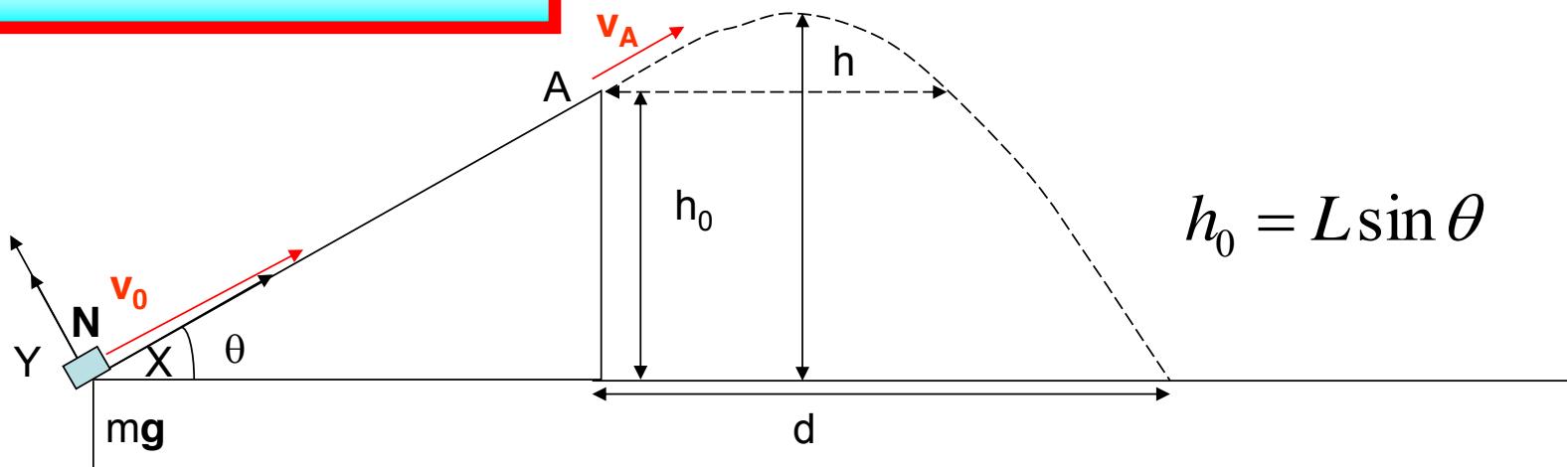
$$1) \left(\sum_i \vec{F}_i \right)_x = -mg \sin \theta = ma_x \Rightarrow a_x = -g \sin \theta$$

$$2) 0 = ma_y = \left(\sum_i \vec{F}_i \right)_y = N - mg \cos \theta;$$

$$\boxed{v_A^2 - v_0^2 = +2(-g \sin(\theta))L} \Rightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 - 2g \sin(\theta)L} = \sqrt{v_0^2 - 2gh_0}$$

$$da \quad a_y(y(t) - y_0) = v_y(t)^2 - v_{0y}^2$$

Trampolino



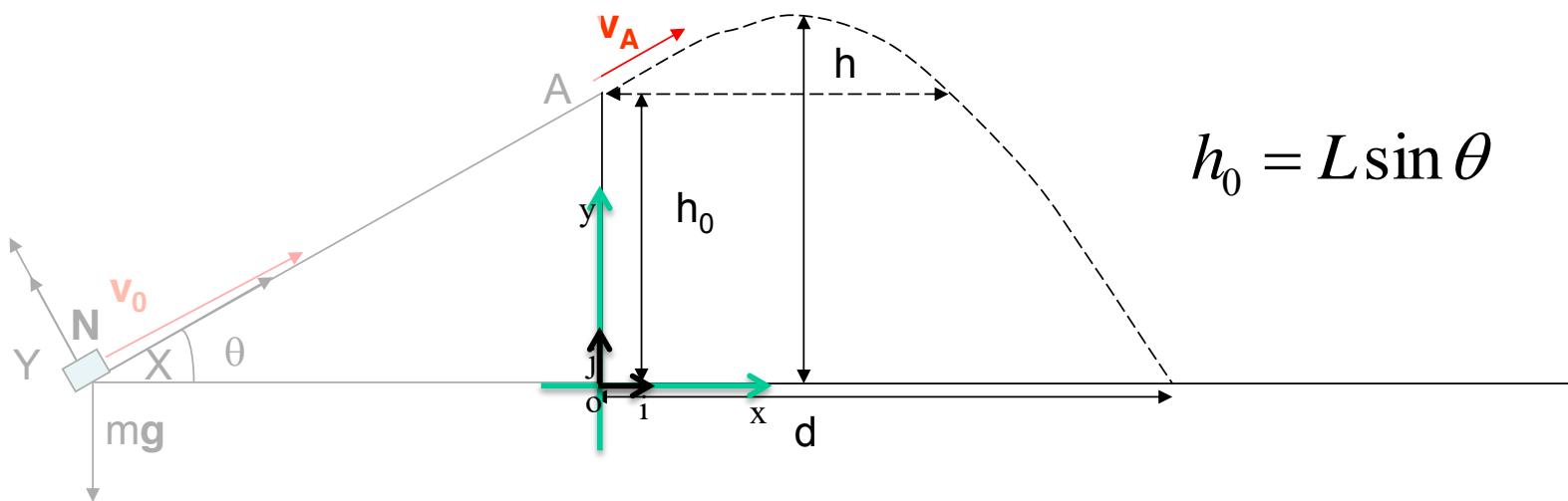
$$\frac{1}{2} \left(\sum_i \vec{F}_i \right)_x = -mg \sin \theta = ma_x \Rightarrow a_x = -g \sin \theta$$

$$0 = ma_y = \left(\sum_i \vec{F}_i \right)_y = N - mg \cos \theta;$$

$$v_A^2 - v_0^2 = +2(-g \sin(\theta))L \Rightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 - 2g \sin(\theta)L} = \sqrt{v_0^2 - 2gh_0}$$

- Ci aspettiamo che la velocità iniziale diminuisca, si passa da v_0 a v_A visto che l'accelerazione in questo caso è diretta in verso opposto alla velocità iniziale

Trampolino

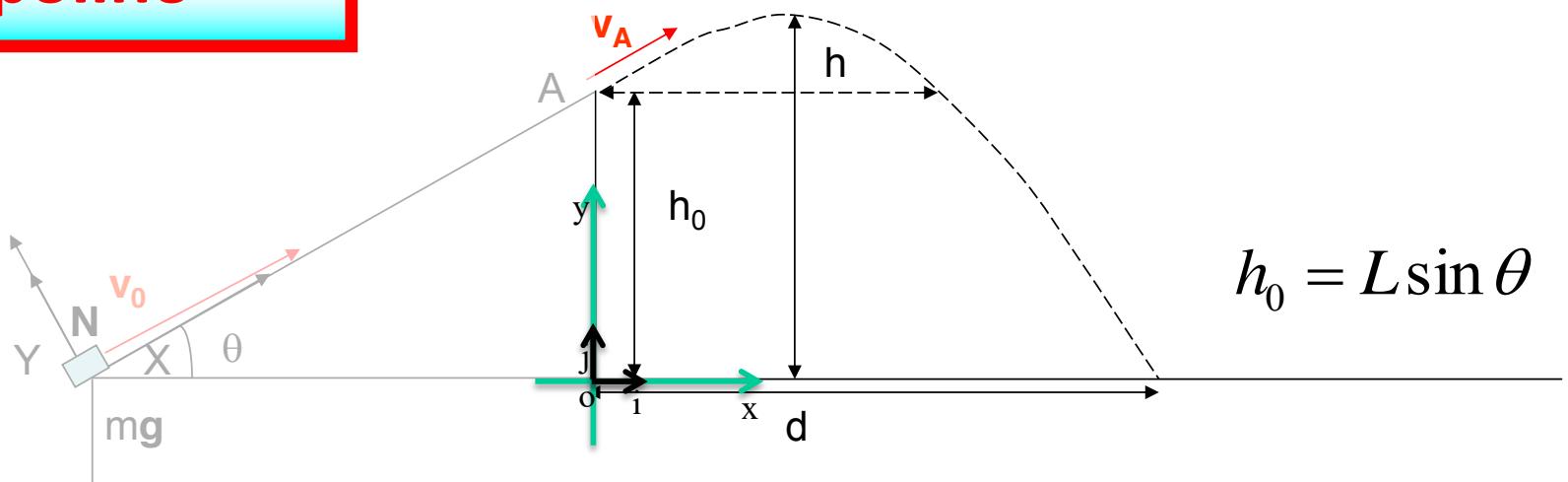


$$h_0 = L \sin \theta$$

$$2 \begin{cases} v_y = (v_A \sin \theta) - gt \\ v_x = (v_A \cos \theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = h_0 + (v_A \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x = (v_A \cos \theta)t \end{cases},$$

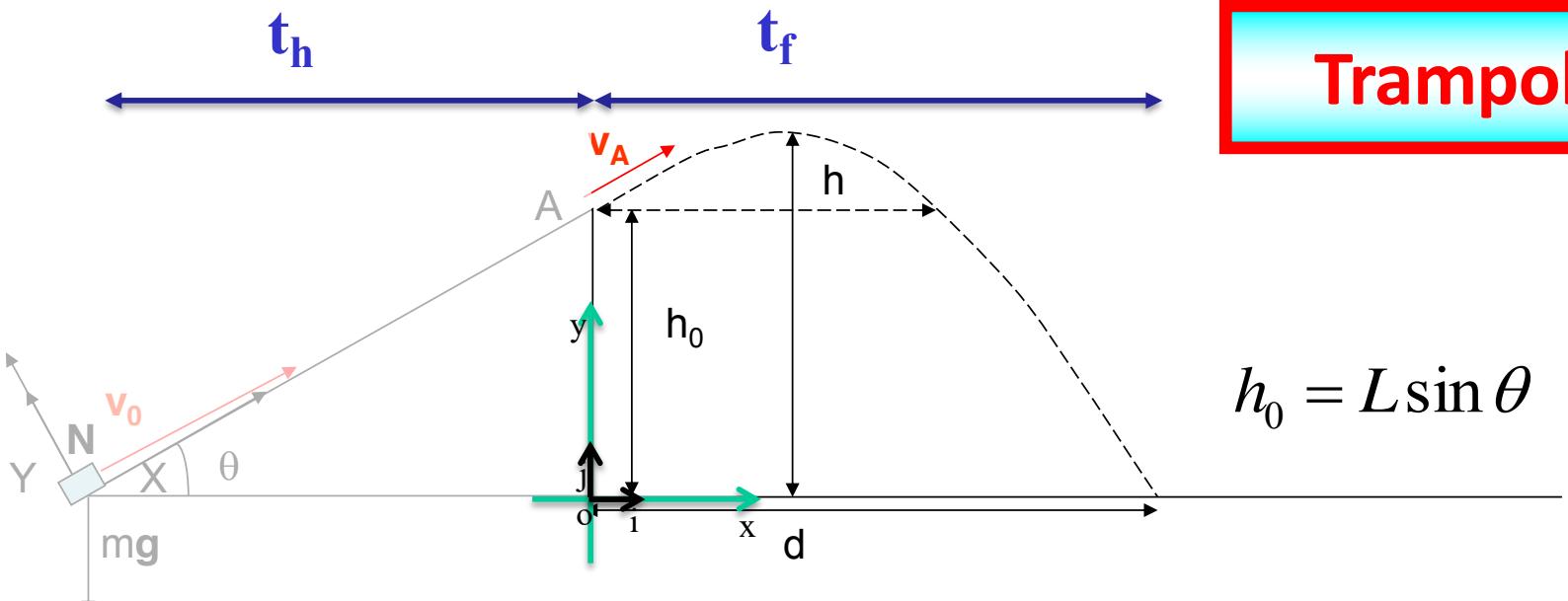
Trampolino



$$2 \quad \begin{cases} v_y = (v_A \sin \theta) - gt \\ v_x = (v_A \cos \theta) \end{cases} \quad \begin{cases} y = h_0 + (v_A \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x = (v_A \cos \theta)t \end{cases},$$

- Quando lo sciatore arriva al punto più alto:

$$0 = v_y(t_h) = v_A \sin \theta - gt_h \quad t_h = \frac{v_A \sin \theta}{g} \quad y(t_h) = h_0 + \frac{(v_A \sin \theta)^2}{2g}$$



Trampolino

$$h_0 = L \sin \theta$$

$$2 \quad \begin{cases} v_y = (v_A \sin \theta) - gt \\ v_x = (v_A \cos \theta) \end{cases} \quad \begin{cases} y = h_0 + (v_A \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x = (v_A \cos \theta)t \end{cases} \quad \bullet \text{ Lo sciatore arriva al punto più alto}$$

$$0 = v_y(t_h) = v_A \sin \theta - gt_h \quad t_h = \frac{v_A \sin \theta}{g} \quad y(t_h) = h_0 + \frac{(v_A \sin \theta)^2}{2g}$$

- $x=d$ $y=0$ quando lo sciatore arriva a terra

$$y(t_f) = h_0 + (v_A \sin \theta)t_f - \frac{1}{2}gt_f^2 \Rightarrow t_f = \frac{v_A \sin \theta + \sqrt{(v_A \sin \theta)^2 + 2gh_0}}{g}$$

$$d = (v_A \cos \theta)t_f$$